

**Lehrstuhl für Statik
der Technischen Universität München**

Ein orts- und zeitadaptives Finite–Element–Verfahren zur Traglastanalyse wassergesättigter Böden

Rudolf Eberhard Findeiß

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor–Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.–Prof. Dr.–Ing. H. Grundmann

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.–Prof. Dr.–Ing. W. Wunderlich, em.
2. Univ.–Prof. Dr.–Ing. H. Cramer, Universität Rostock

Die Dissertation wurde am 20. November 2000 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 5. Februar 2001 angenommen.

Ein orts- und zeitadaptives Finite-Element-Verfahren zur Traglastanalyse wassergesättigter Böden

Übersicht

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Formulierung eines numerischen Verfahrens zur Ermittlung von Grenzzuständen und Traglasten wassergesättigter Böden. Geomaterialien werden im Rahmen der Theorie Poröser Medien abgebildet und mit Hilfe eines raten-unabhängigen elastoplastischen Stoffmodells sowie einer nicht-assozierten Fließregel beschrieben. Auf der Grundlage des Time-Discontinuous-Galerkin-Verfahrens wird ein neues Raum-Zeit-Element vorgestellt, bei dem im zeitlichen Verlauf Diskontinuitäten zugelassen werden. Für die Integration im Zeitbereich werden unter Verwendung einer Galerkinschen Wichtung die erforderlichen variationellen Formulierungen der zugrunde liegenden Differenzialgleichungen entwickelt. Die Lösung der lokalen und globalen Gleichungssysteme erfolgt mit vollständigen Newton-Verfahren. Mit Hilfe einer konsistenten Linearisierung der Nullstellenaufgabe wird ein Tangentenoperator hergeleitet, der eine quadratische Konvergenzrate ermöglicht.

Zur Steuerung der hierarchischen Netzverfeinerung sowie der Zeitschrittweite werden geeignete Fehlerindikatoren formuliert, die in der Lage sind, die Ausbildung von lokalisierten Versagensmechanismen zeitlich und räumlich hinreichend fein aufzulösen. Um eine quantitative Aussage über Scherbandbreiten zu erhalten, wird neben der Viskosität des Porenfluids auch eine Regularisierung durch die Cosserat-Theorie berücksichtigt. Mit der entstehenden Drei-Feld-Approximation wird das Lokalisierungsverhalten wassergesättigter Böden studiert und die Überlegenheit im Vergleich zur üblichen Kontinuumsformulierung demonstriert. Schließlich wird anhand relevanter Systeme der Bodenmechanik die Leistungsfähigkeit des Verfahrens verdeutlicht.

A space- and time-adaptive finite element method for the determination of limit-load-states in saturated soils

Abstract

The intention of this thesis consists in the formulation of a numerical procedure for the determination of limit-load-states in the analysis of saturated soils. The modelling of geomaterials is based on the framework of the Theory of Porous Media using a rate-independent elastic-plastic constitutive relation and a non-associated flow rule. A new space-time finite element including the Time-Discontinuous-Galerkin-method is proposed where discontinuities are permitted at the discrete time-levels. Integration over the time-intervals is performed employing appropriate variational formulations of the governing equations and Galerkin-type weighting functions. In order to solve the local as well as the global systems of equations Newton-methods are developed. With the help of a consistent linearization a tangential operator is derived which ensures a quadratic rate of asymptotic convergence.

In the context of adaptive mesh refinement and an automatic time-step-control appropriate error-indicators are developed that lead to an adequate resolution of the localized failure in time as well as in space. In order to compute a quantitative information about the width of the shearbands, a regularization is achieved by the viscosity of the pore-fluid and, additionally, by the use of the Cosserat-theory. The resulting three-field-approximation is used to study localization phenomena of saturated soils and to demonstrate the superior behaviour in comparison to the standard continuum formulation. Finally, the efficiency of the proposed method is demonstrated by numerical examples of relevant problems in geomechanics.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München von 1997 bis 2001 im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsprojekts: "Numerische Ermittlung statischer Grenzzustände und Traglasten bei geomechanischen Problemstellungen".

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Wunderlich für die Anregung zu dieser Arbeit, für die Förderung und Motivation während der gesamten Zeit meiner Forschungstätigkeit sowie für die Übernahme des Hauptreferats. Ihm verdanke ich auch mein Interesse für die Strukturmechanik und die numerische Mathematik.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Cramer danke ich für die Übernahme des Koreferats, die sorgfältige Durchsicht der Arbeit und die kompetente wissenschaftliche Unterstützung. Seine stets vorhandene Bereitschaft zur Diskussion hat mir immer wieder bei der Klärung von wichtigen Detailfragen geholfen. Ebenso danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Grundmann für die bereitwillige Übernahme der Leitung der Prüfungskommission.

Mein Dank gilt darüber hinaus Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger und allen Kolleginnen und Kollegen des Lehrstuhls für Statik für die gute Zusammenarbeit, die wertvollen fachlichen Gespräche und die stets freundschaftliche Atmosphäre. Ich werde die Zeit am Lehrstuhl für Statik immer in guter Erinnerung behalten.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern für die großzügige Förderung meiner Ausbildung sowie ganz besonders bei meiner Frau Birgitt, die mit ihrer unermüdlichen Unterstützung zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat.

München im März 2001

Rudolf Findeiß

© 2001 **Rudolf Findeiß**
Simmernstraße 10
80804 München

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Es ist gestattet, dieses elektronische Dokument für eigene Zwecke zu vervielfältigen.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Einführung | 1 |
| 1.2 | Stand der Forschung | 2 |
| 1.3 | Zielsetzung der Arbeit | 4 |
| 1.4 | Gliederung | 5 |
| 2 | Grundlagen der Mischungstheorie | 7 |
| 2.1 | Mehrkomponentenmodelle | 7 |
| 2.2 | Das Konzept der Wichtungskoeffizienten | 8 |
| 2.3 | Kinematische Beziehungen | 8 |
| 2.4 | Cosserat-Theorie | 10 |
| 2.5 | Bilanzgleichungen | 12 |
| 2.5.1 | Erhaltung der Masse | 12 |
| 2.5.2 | Erhaltung des Impulses | 13 |
| 2.5.3 | Erhaltung des Drehimpulses | 14 |
| 3 | Theorie Poröser Medien | 15 |
| 3.1 | Boden als poröses Medium | 15 |
| 3.2 | Reduktion auf ein zweikomponentiges Medium | 16 |
| 3.3 | Bewegungsbeschreibung | 17 |
| 3.4 | Konstitutive Beziehungen des Zweiphasen-Systems | 19 |
| 3.5 | Grundlegende Differenzialgleichungen | 21 |
| 4 | Materialmodelle | 23 |
| 4.1 | Überblick | 23 |
| 4.2 | Kategorien von Stoffmodellen | 23 |
| 4.2.1 | Elastizität | 24 |
| 4.2.2 | Elastoplastizität | 25 |
| 4.2.3 | Viskoplastizität | 28 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.3 | Elastoplastische Stoffmodelle für Böden | 28 |
| 4.3.1 | Konusmodelle für granulare Böden | 29 |
| 4.3.2 | Kappenmodelle für bindige Böden | 32 |
| 4.3.3 | Einflächen-Modelle | 33 |
| 4.4 | Nicht-assozierte Fließregel | 37 |
| 4.5 | Erweiterung auf mikropolare Materialien | 39 |
| 5 | Numerische Umsetzung | 43 |
| 5.1 | Definition des vollständigen Anfangs-Randwert-Problems | 43 |
| 5.2 | Stabilität von Zeitintegrationsverfahren | 45 |
| 5.2.1 | Klassifizierung | 45 |
| 5.2.2 | Steife Differenzialgleichungen | 46 |
| 5.2.3 | Stabilitätseigenschaften | 47 |
| 5.3 | Lösungsstrategie | 48 |
| 5.4 | Finite-Element-Formulierung | 49 |
| 5.4.1 | Übergang zur integralen Formulierung | 49 |
| 5.4.2 | Wahl der Wichtungsfunktionen | 52 |
| 5.4.3 | Diskretisierung des Raum-Zeit-Kontinuums | 53 |
| 5.5 | Zeitschrittalgorithmus mit kontinuierlicher Approximation | 54 |
| 5.6 | Zeitlich diskontinuierliche Raum-Zeit-Diskretisierung | 57 |
| 5.6.1 | Approximation der primären Variablen | 59 |
| 5.6.2 | Approximation der sekundären Variablen | 61 |
| 5.6.3 | Kinematik | 63 |
| 5.6.4 | Globales Gleichungssystem | 64 |
| 5.6.5 | Integration der wegabhängigen Variablen | 67 |
| 5.6.6 | Konsistente Tangente | 73 |
| 6 | Orts- und zeitadaptive Berechnungsverfahren | 77 |
| 6.1 | Allgemeines | 77 |
| 6.2 | Normen | 78 |
| 6.3 | Fehlerschätzung | 79 |
| 6.3.1 | Residualer Fehlerschätzer nach Babuška und Miller | 79 |
| 6.3.2 | Post-processing Fehlerschätzer nach Zienkiewicz und Zhu | 81 |
| 6.3.3 | Fehlerschätzer für Elastoplastizität nach Johnson und Hansbo | 84 |
| 6.3.4 | Weitere Ansätze für elastoplastische Stoffmodelle | 85 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.4 | Fehlerindikatoren für die Analyse wassergesättigter Böden | 87 |
| 6.4.1 | Fehler in den Gleichgewichtsbedingungen | 87 |
| 6.4.2 | Fehler in der Kontinuität der Fluid-Flüsse | 89 |
| 6.4.3 | Zeitlicher Diskretisierungsfehler | 90 |
| 6.4.4 | Fehler durch die Integration der konstitutiven Beziehungen | 92 |
| 6.5 | Auswahl der Elemente | 94 |
| 6.5.1 | Prozentualsteuerung | 95 |
| 6.5.2 | Maximalfehlersteuerung | 95 |
| 6.5.3 | Kombination der Indikatoren im Ortsbereich | 95 |
| 6.6 | Netzverfeinerung | 97 |
| 6.6.1 | Neuvernetzung | 97 |
| 6.6.2 | Hierarchische Netzverfeinerung | 98 |
| 6.7 | Datentransfer | 102 |
| 6.8 | Zeitschrittsteuerung | 105 |
| 6.9 | Vergleich der Ansatzordnungen im Zeitbereich | 109 |
| 6.10 | Verifikation der adaptiven elastoplastischen Berechnung | 114 |
| 7 | Lokalisierungsphänomene | 121 |
| 7.1 | Allgemeines | 121 |
| 7.2 | Numerische Erfassung von Lokalisierungsphänomenen | 123 |
| 7.3 | Simulation eines Biaxialversuchs | 126 |
| 7.3.1 | Beschreibung | 126 |
| 7.3.2 | Netzabhängigkeit | 129 |
| 7.3.3 | Theorie Poröser Medien | 130 |
| 7.3.4 | Cosserat-Theorie | 132 |
| 7.3.5 | Adaptive Berechnung | 135 |
| 7.4 | Fazit | 137 |
| 8 | Numerische Untersuchungen | 139 |
| 8.1 | Simulation eines Böschungsbruchs | 139 |
| 8.2 | Grundbruchberechnung | 149 |
| 8.3 | Vergleich mit analytischen Ansätzen | 154 |
| 9 | Zusammenfassung und Ausblick | 159 |
| 9.1 | Zusammenfassung | 159 |
| 9.2 | Ergebnisse der Forschungsarbeit | 160 |
| 9.3 | Ansätze für weitere Forschung | 162 |

| | |
|--|------------|
| Notation | 165 |
| A Thermodynamische Bilanzgleichungen | 169 |
| A.1 Energiebilanz | 169 |
| A.2 Entropiegleichung | 170 |
| B Integration des viskoplastischen Stoffgesetzes | 171 |
| C Eigenschaften der Time-Discontinuous-Galerkin-Verfahren | 173 |
| C.1 Anwendung auf die Testgleichung | 173 |
| C.2 Linear-diskontinuierliche Ansatzfunktionen | 174 |
| C.3 Quadratisch-diskontinuierliche Ansatzfunktionen | 175 |
| Literaturverzeichnis | 179 |

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Seit dem Beginn des 20. Jahrhunderts haben Ingenieure Berechnungsmethoden entwickelt, um das mechanische Verhalten von Böden zu beschreiben und Gründungsbauwerke zu dimensionieren. Damit auftretende Lasten sicher in den Baugrund abgeleitet werden können, ist die Frage nach der zulässigen Bodenpressung des Fundaments von ausschlaggebender Bedeutung. Wird der Grenzwert überschritten, so resultieren entweder schädliche Setzungen bzw. Setzungsdifferenzen oder die Stabilität des Bodenmaterials geht verloren. Instabilitäten führen zu Versagensformen, die sich in einem Ausweichen bzw. Abgleiten des Bodens äußern. Dabei wird die Scherfestigkeit entlang einer Gleitfläche überschritten. Als praxisrelevante Spezialfälle seien hier der Böschungsbruch und der Grundbruch genannt. Im Fall von wassergesättigten Böden erhalten die Baugrundspannungen zusätzlich eine zeitliche Komponente. Wesentliche Einflussfaktoren stellen die Durchlässigkeit des Bodens und die Geschwindigkeit der Lastaufbringung dar. Beispielsweise bauen sich bei geringer Bodendurchlässigkeit im Regelfall hohe Porenwasserüberdrücke auf, die zu einer erheblichen zeitlichen Verzögerung der Deformation führen können. Dieses Zusammenwirken von Korngerüstdeformation und Porenwasserströmung bezeichnet man als Prozess der *Konsolidierung*.

Um Grenzlaster rechnerisch zu erfassen, wurden Näherungsverfahren entwickelt, die auf bestimmte Anwendungsgebiete zugeschnitten sind und zum Teil auch in der deutschen Normung Berücksichtigung fanden. In diesem Zusammenhang regelt z.B. die DIN 4017 [1] die Berechnung des Grundbruchwiderstands von Flachgründungen und die DIN 4084 [2] die Böschungs- und Geländebruchberechnung. Gemeinsames Kennzeichen aller Näherungsverfahren ist die explizite Vorgabe eines Versagensmechanismus in Form eines Gleitkreises oder einer geraden Scherfläche. Der maßgebende Bemessungsfall wird in der Regel aus einer Variation weniger Parameter wie z.B. des Gleitkreisradius oder des Gleitkreismittelpunkts ermittelt. Aufgrund der umfangreichen Annahmen stellen die Ergebnisse allerdings mehr eine Abschätzung der realen Traglast und weniger eine exakte Berechnung dar. Komplexe dreidimensionale Bodeninstabilitäten, bei denen nicht selten die hydrogeologischen Bedingungen eine besondere Rolle spielen, wie z.B. die in Abbildung 1.1 dargestellte Hangrutschung in La Conchita (USA, Kalifornien), können mit solchen Verfahren nicht ausreichend erfasst werden.

Parallel zu den klassischen Lösungsmöglichkeiten hat sich durch die schnelle Entwicklung im Bereich der Computertechnologie die numerische Simulation derartiger Aufgabenstellungen als leistungsfähige Alternative etabliert. Im neu entstandenen Fachgebiet der *Computerorientierten Mechanik* (Computational Mechanics) wurden Berechnungsverfahren und Materialmodelle entwickelt, die es erlauben, das mechanische Verhalten komplexer Strukturen zu analysieren. Die *Finite-Element-Methode* (FEM) nimmt dabei aufgrund ihrer Flexibilität im Anwendungsbereich der Boden- und Felsmechanik eine zentrale Rolle ein. Numerische Verfahren dieser Art basieren auf einer Abbildung der Realität im Rahmen eines Ingenieurmodells und beinhalten die näherungsweise Lösung der zugehörigen Rand- und Anfangswertaufgaben. Der Vorteil gegenüber



Abbildung 1.1: Hanginstabilität in La Conchita (USA, Kalifornien) am 4. März 1995

den klassischen Traglastberechnungen liegt vor allem darin, dass das Deformationsverhalten der gesamten Boden–Struktur aber auch der Verlauf von Spannungen und Porenwasserdrücken über die Zeit erfasst werden können. Darüber hinaus sind Aussagen über das genaue Interaktionsverhalten von Bodenschichten, Ankern, Grundwasserströmungen, Fundamentplatten usw. möglich. Auch der Bruchmechanismus wird nicht mehr vorgegeben, sondern ergibt sich direkt als Deformationsmuster im Moment des Stabilitätsversagens der Struktur. Voraussetzung für den Erfolg numerischer Verfahren ist jedoch zum einen die Formulierung eines Materialmodells, welches in der Lage ist, das reale Verhalten von Böden möglichst exakt zu beschreiben und zum anderen der Einsatz eines robusten und verlässlichen Lösungsalgorithmus, der auch im Traglastniveau ein konvergentes Verhalten aufweist. Um eine Aussage über die Genauigkeit der erhaltenen Lösung zu treffen, sind zudem zutreffende Fehlerabschätzungen notwendig. In dieser Arbeit werden dazu leistungsfähige Methoden entwickelt und im Rahmen der adaptiven FEM ein Konzept zur Traglastanalyse trockener und wassergesättigter Böden formuliert.

1.2 Stand der Forschung

Bereits 1925 kombinierte TERZAGHI [166] die elastische Setzungsberechnung von Böden mit den Diffusionsgleichungen der Porenwasserströmung zur *ein-dimensionalen Konsolidierungstheorie*. BIOT erweiterte diese Grundüberlegungen zu wassergesättigten Böden später auf den dreidimensionalen Fall [18, 19]. Auf dieser Basis entwickelten zu Beginn der 70er Jahre GHABOUSSI und WILSON erstmals ein gekoppeltes FE–Verfahren zur numerischen Lösung der Feldgleichungen [74]. Setzungskurven und Porenwasserdruckverteilungen konnten damit für elastisches Materialverhalten und beliebige Systemgeometrien ermittelt werden. Eine Erweiterung auf nicht-lineare Stoffgesetze erfolgte von CARTER, BOOKER und SMALL in [36] unter Anwendung des Fließkriteriums von MOHR–COULOMB. Hauptsächliche Forschungsschwerpunkte ergaben sich in der Folgezeit vor allem in der Weiterentwicklung der elastoplastischen Materialmodelle. Aus-

gehend vom konischen DRUCKER–PRAGER–Kriterium bis hin zu isotrop–kinematisch verfestigenden Kappen–Modellen [90] entstanden für unterschiedlichste Böden spezielle Stoffgesetze. Parallel dazu wurde – aufbauend auf den Arbeiten zur *Mischungstheorie* von TRUESDELL und TOUPIN [172] und BOWEN [33, 34] – mit der *Theorie Poröser Medien* die Grundlage zur numerischen Behandlung von Mehrkomponentenkontinua geschaffen. In diesem Zusammenhang formulierten DE BOER und EHLERS konsequent die grundlegenden Erhaltungssätze und erarbeiteten die konstitutiven Beziehungen wassergesättigter Böden aus thermodynamischen Restriktionen der Energie- und Entropiesätze [22, 57]. Dass Mehrkomponenten–Modelle leistungsfähige Ansätze zur Abbildung komplexer gekoppelter Probleme darstellen, zeigen z.B. die Arbeiten von WUNDERLICH und CRAMER zur Simulation von Bodenverflüssigung unter dynamischer Einwirkung [42, 45, 181], von GATMIRI und DELAGE zur gekoppelten Verschiebungs–Porenwasserdruck–Temperatur–Analyse [73] oder von SUKIRMAN und LEWIS bei der Berücksichtigung eines Drei–Phasen–Fluidgemisches aus Wasser, Öl und Luft [163].

Im Rahmen der Berechnung von Grenzzuständen mit Hilfe der Finite–Element–Methode wurde von STEINMANN und WILLAM [161], aber auch von MÜHLHAUS [113] und anderen erkannt, dass die klassische Kontinuumsformulierung nach Einsetzen eines lokalisierten Deformationsmusters zum Verlust der Elliptizität der Grundgleichungen und somit zu Netzabhängigkeiten und unrealistischen Ergebnissen führt. Diese Beobachtung ließ sich dadurch begründen, dass Lokalisierungseffekte zwar makroskopische Phänomene darstellen, ihr Ursprung und ihre Ausdehnung jedoch auf den Strukturaufbau des Materials auf Mikroebene zurückzuführen sind. PERIĆ, YU und OWEN bemerken dazu in [123]:

The classical continuum may be generally regarded as describing the material response only prior to the onset of material instability. Defects experienced in the numerical analysis of strain localization problems are fundamentally related to the physical fact that in the post–localization regime, a proper description of deformation whose wavelength approaches the scale of the characteristic size of the material becomes increasingly important.

Verschiedene Autoren stellten daraufhin Verfahren vor, die durch die Definition eines internen Längenmaßes eine Information über die charakteristische Länge des Materials bereitstellen und somit eine *Regularisierung* bewirken. Dies führte unter anderem zur Anwendung der *Mikropolaren Theorie* [29, 61, 159], der *Höheren Gradientenverfahren* [30, 120] und des *Nicht–lokalen Kontinuums* [16, 17]. Mit dem Einsatz dieser erweiterten Formulierungen wird eine sachgemäße Problemstellung erreicht und man erhält auch nach einsetzender Lokalisierung eindeutige konvergente Lösungen.

Neben einer möglichst genauen Beschreibung des Materialverhaltens ist jedoch auch die Approximationsgüte in hochbeanspruchten Bereichen des Berechnungsgebiets von ausschlaggebender Bedeutung. So weist STEINL in [159] auf die Notwendigkeit einer sehr feinen Netzauflösung im Bereich von Scherbändern hin. Im Hinblick auf einen akzeptablen Rechenaufwand ist daher der Einsatz von orts- und zeitadaptiven Berechnungsmethoden unabdingbar. Die Grundlage für eine Anpassung der Netzdichte bilden *a posteriori Fehlerschätzer* bzw. *Fehlerindikatoren*. Obwohl mit den Arbeiten von BABUŠKA und MILLER [5], JOHNSON und HANSBO [77, 87] sowie ZIENKIEWICZ und ZHU [193, 194] Ansätze für elastische und spezielle elastoplastische Stoffgesetze existieren, wurde für die meisten Plastizitätsmodelle noch kein mathematisch abgesichertes Konzept vorgestellt. Mehrere Autoren wie z.B. STEIN, BARTHOLD, OHNIMUS und SCHMIDT [156], ORTIZ und QUIGLEY [119] oder PERIĆ, YU und OWEN [123] verwenden deshalb Indikatoren auf heuristischer Basis. Ein optimales Netz im Sinne der Gleichverteilung des FE–Fehlers und eine gesicherte obere bzw. untere Schranke können damit nicht definitiv erreicht werden. Es hat sich jedoch gezeigt, dass Bereiche mit großen Diskretisierungsfehlern wie z.B. Lokalisierungszone erkannt und hinreichend verfeinert werden können, so dass sich hieraus verlässliche Aussagen ergeben.

Ebenso wichtig ist die Wahl geeigneter (variabler) Zeitschrittweiten im gesamten Berechnungszeitraum. Auch hier lässt sich die gewünschte Effizienz nur mit einer adaptiven Anpassung erreichen. Auf dem Gebiet der Strukturmechanik existieren bereits mehrere Ansätze zur optimalen Anpassung der Schrittweite, wobei die Abschätzung des zeitlichen Diskretisierungsfehlers auf einer a posteriori Auswertung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen basiert. RAPOLDER gibt in [134] einen Überblick über verfügbare Techniken. Auf das quasi-statische Konsolidierungsproblem sind die Ansätze der Dynamik jedoch nicht geeignet übertragbar. Indikatoren für den zeitlichen Diskretisierungsfehler sind auch hier mathematisch noch nicht abgesichert. Ansätze finden sich bei ELLSIEPEN, EHLERS und VOLK [63] auf der Basis eines diagonalimpliziten RUNGE-KUTTA-Verfahrens und eingebetteter Fehlerschätzern sowie bei SLOAN und ABBO [153] unter Verwendung eines THOMAS-GLADWELL-Schemas zur Zeitintegration. Eine besonders effiziente Möglichkeit bietet jedoch auch die Time-Discontinuous-GALERKIN-Methode, die von HULBERT und HUGHES [86] für hyperbolische Probleme zweiter Ordnung entwickelt wurde und bei HULBERT [85] sowie WIBERG und LI [178, 179] Anwendung in der Dynamik fand.

Diese Arbeit baut auf langjährigen Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der numerischen Bodenmechanik auf und ist Teil einer Reihe von Forschungsprojekten unter der Leitung von Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. WUNDERLICH an der Ruhr-Universität Bochum sowie später an der Technischen Universität München, die zum Teil von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert wurden. Bereits in den 70er Jahren wurden mit speziellen Stoffgesetzen Finite-Element-Berechnungen von Boden und Fels durchgeführt. Von WUNDERLICH, KUTTER, CRAMER und RAHN wurden hierfür Ansätze der Mehrflächenplastizität entwickelt [38, 184] und im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 151 Algorithmen zur dynamischen Analyse von Bodenverflüssigung unter Erdbebeneinwirkungen bereitgestellt [42, 45, 181]. Die Erfahrungen dieser Forschung gingen später in die Entwicklung von Materialmodellen für granulare bzw. wassergesättigte Böden ein, die im Rahmen dieser Arbeit vor allem im Hinblick auf die Stabilitätseigenschaften weiter optimiert wurden, um Lokalisierungsphänomene zuverlässig abbilden zu können.

Methoden der adaptiven Netzverfeinerung wurden zunächst von WUNDERLICH und REDANZ in [186] entwickelt und später im Rahmen einer Kooperation mit Univ.-Prof. Dr. C. ZENGER von der Fakultät für Informatik der Technischen Universität München von HÜTTL in das Forschungsprogramm ISARES (Integrated Structure Analysis Research System) des Lehrstuhls für Statik (TUM) integriert. Dieses speziell für Forschungszwecke ab 1987 entwickelte Programm erlaubt die flexible Behandlung von Finite-Element-Berechnungen und wurde auch für andere Forschungsprojekte eingesetzt. In den Arbeiten von RUDOLPH [141] und STEINL [159] wurden a posteriori Fehlerindikatoren für trockene, granulare Böden entwickelt. Damit gelang es Lokalisierungsphänomene hinreichend fein aufzulösen. Mit Hilfe von Regularisierungstechniken wie z.B. der COSSERAT-Theorie erhält man zudem quantitative Aussagen über die Ausdehnung von Lokalisierungszonen [183]. In dieser Arbeit werden die Strategien der Netzverfeinerung weiterentwickelt und im Hinblick auf die numerische Simulation wassergesättigter Böden mit einer automatischen Schrittweitensteuerung kombiniert.

1.3 Zielsetzung der Arbeit

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit besteht darin, ein orts- und zeitadaptives Finite-Element-Verfahren zur Analyse von Grenzzuständen zu entwickeln und die damit verbundenen Traglasten bei Aufgabenstellungen aus der Geomechanik zu ermitteln. Der Hauptanwendungsbereich liegt in der Behandlung wassergesättigter Böden, jedoch sind trockene Böden mit dem Spezialfall einer großen Durchlässigkeit in die Formulierung einbezogen. Das ausgeprägt nicht-lineare Materialverhalten von Böden erfordert den Einsatz von elastoplastischen Stoffgesetzen

und nicht-assoziierten Fließregeln, um neben den inelastischen Deformationen auch die Volumenänderungscharakteristik realistisch zu beschreiben. Als Fließkriterium dient deshalb ein Einflächen-Modell, das algorithmische Vorteile besitzt und sowohl dilatante als auch kontraktante Böden zutreffend beschreibt.

Einen wesentlichen Schwerpunkt der Arbeit stellt die Entwicklung eines Raum-Zeit-Elements auf der Grundlage des Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahrens dar. Damit können zum einen bewährte Methoden zur Fehleranalyse im räumlichen Bereich genutzt werden und zum anderen wird mit Hilfe der zusätzlich eingeführten Sprungterme an den diskreten Zeitstufen die Basis für einen Fehlerindikator im Zeitbereich geschaffen. Im Hinblick auf die numerische Stabilität des Verfahrens wird das entstehende Drei-Feld-Problem mit Verschiebungen, Rotationen und Porenwasserdrücken als primären Feldunbekannten simultan mit Hilfe von vollständigen NEWTON-Verfahren gelöst. Da zeitlich kontinuierliche Verläufe eine Voraussetzung für den Einsatz des impliziten EULER-Verfahrens zur Integration der wegabhängigen Variablen darstellen, liegt eine weitere Aufgabe darin, ein zum Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahren konsistentes Integrationsschema zu formulieren.

Neben der regularisierenden Wirkung des viskosen Porenfluids wird durch die zusätzliche Berücksichtigung der Mikropolaren Theorie eine zweite, unabhängige Möglichkeit der Regularisierung einbezogen. Dadurch ergeben sich auch bei Böden mit hohen Durchlässigkeiten zuverlässige Ergebnisse. Beide Erweiterungen sind physikalisch motiviert und stellen somit für granulare bzw. wassergesättigte Böden adäquate Formulierungen dar, um eine quantitative Aussage über die Ausdehnung von Lokalisierungen zu erhalten [62, 176]. Zur Steuerung der orts- und zeitaadaptiven Berechnung werden weiterhin geeignete Fehlerindikatoren entwickelt, mit dem Ziel, Scherbänder hinreichend zu verfeinern und die Zeitschrittweite automatisch an sich verändernde Bedingungen anzupassen. Schließlich wird anhand relevanter Systeme der Bodenmechanik die Leistungsfähigkeit des vorgeschlagenen Verfahrens verdeutlicht.

1.4 Gliederung

Die ersten beiden Kapitel der Arbeit beinhalten eine Zusammenstellung der kontinuumsmechanischen Grundlagen. Im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie werden die Erhaltungssätze der Masse, des Impulses und des Drehimpulses auf der Basis der Mischungstheorie hergeleitet. Diese werden zunächst für mehrphasige Materialien allgemein formuliert und anschließend im Kontext der Theorie Poröser Medien auf den Boden als Zweikomponenten-Material angewandt. Im Folgenden werden deshalb nur die Konstituierenden *poröses Korngerüst* und *viskoses Porenfluid* weiter berücksichtigt. Die wesentlichen Eigenschaften wassergesättigter Böden sind damit jedoch ausreichend beschrieben. Als erweiterte Kontinuumsformulierung wird die Mikropolare Theorie in die Betrachtungen einbezogen. Schließlich werden mit geeigneten Konstitutivannahmen für das Boden-Wasser-Gemisch die Differenzialgleichungen des Gleichgewichts (auch unter Berücksichtigung der Mikropolaren Theorie) und der Massenerhaltung formuliert.

Kapitel 4 gibt einen Überblick über die Materialmodelle, die derzeit für granulare und bindige Böden im Rahmen der Computerorientierten Mechanik eingesetzt werden. Nach einer kurzen Motivation elastoplastischer Stoffgesetze werden die wichtigsten Konus- und Kappenmodelle beschrieben. Schließlich wird ein sowohl für granulare als auch für bindige Böden einsetzbares Einflächen-Modell vorgestellt und dessen mögliche Erweiterung auf mikropolare Materialien unter Berücksichtigung einer nicht-assoziierten Fließregel für die plastischen Dehnungen und die plastischen Krümmungen formuliert.

In *Kapitel 5* erfolgt nach einer Definition des Gesamtproblems der Übergang zur numerischen Formulierung im Rahmen der Finite-Element-Methode. Auf der Grundlage integraler Aussagen

der nicht-linearen partiellen Differenzialgleichungen wird eine neue kombinierte Raum-Zeit-Diskretisierung des Problems vorgeschlagen und ausführlich entwickelt. Im Gegensatz zur überwiegend angewandten zeitlich kontinuierlich fortschreitenden Berechnung mit Hilfe einer verallgemeinerten Trapezregel zur zeitlichen Integration, findet eine zeitlich diskontinuierliche Approximation der unbekanntenen Feldgrößen statt. Die Kontinuität wird mittels geeignet gewählter variationeller Aussagen im integralen Sinn erfüllt. Zur Berechnung der wegbabhängigen Variablen wird ein Integrationsverfahren vorgestellt, bei dem die Gleichungen der ratenunabhängigen Plastizität an diskreten zeitlichen Integrationspunkten im Intervall erfüllt werden. Sowohl für die lokale als auch für die globale Iteration werden vollständige NEWTON-Verfahren eingesetzt. Dazu wird auf Integrationspunkzebene ein konsistenter Tangentenoperator hergeleitet, der eine quadratische asymptotische Konvergenzrate sicherstellt.

Um die Genauigkeit und Verlässlichkeit der Ergebnisse sicherzustellen, werden im Allgemeinen adaptive Netzanpassungsstrategien verwendet. In *Kapitel 6* werden die wichtigsten derzeit verfügbaren Methoden der Orts- und Zeitadaption beschrieben. Eine besondere Gewichtung liegt dabei auf Fehlerindikatoren für elastoplastische Stoffmodelle. Speziell für die Analyse wassergesättigter Böden werden schließlich problemangepasste a posteriori Fehlerindikatoren entwickelt, die die räumliche Netzverfeinerung steuern und in der Lage sind, auch Lokalisierungsphänomene in geeigneter Weise aufzulösen. Sowohl das Residuum der Gleichgewichtsgleichungen als auch ein Maß für den Fehler in der Kontinuität der Fluid-Flüsse finden Berücksichtigung. Als Verfeinerungsstrategie wird die reguläre hierarchische Netzverfeinerung mit reinen Viereckelementen gewählt. Die Implementierung des Transferoperators zur Übertragung der Zwischenspeicherdaten auf das neu generierte Netz, der bei zeitlich fortschreitenden Berechnungen eine wichtige Rolle einnimmt, wird ebenfalls kommentiert. Zur adaptiven Anpassung der Zeitschrittweite wird eine Zeitschrittsteuerung vorgeschlagen, die den zeitlichen Diskretisierungsfehler sowie den Fehler in der Integration der konstitutiven Beziehungen berücksichtigt.

Kapitel 7 widmet sich dem Problem der Erfassung von Lokalisierungsphänomenen mit der FEM. Es wird verdeutlicht, dass die klassische Kontinuumsformulierung nach einsetzender Scherbandformation keine zutreffenden Aussagen über das Deformationsverhalten liefert. Nach einer kurzen Übersicht über verfügbare Regularisierungsmöglichkeiten werden anhand von Parameterstudien am Biaxialversuch die Regularisierungseigenschaften der Theorie Poröser Medien und der COSSERAT-Theorie untersucht und deren Anwendungsmöglichkeiten vor allem auch im Hinblick auf adaptive Strategien bewertet.

Die numerischen Beispiele in *Kapitel 8* demonstrieren die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Lösungsstrategie. Unter Anwendung der räumlichen Netzverfeinerung sowie der Schrittweitensteuerung werden relevante Systeme der Bodenmechanik untersucht und Grenzzustände sowie zugehörige Traglasten bestimmt. Dabei wird deutlich, dass die eingesetzten Fehlerindikatoren sowohl im Ortsbereich als auch im Zeitbereich zu sinnvollen Diskretisierungen führen. Schließlich werden die ermittelten Traglasten durch einen Vergleich mit analytischen Näherungsverfahren verifiziert.

In *Kapitel 9* werden die grundlegenden Erkenntnisse der Arbeit zusammengefasst und Möglichkeiten zur weiteren Forschungsarbeit aufgezeigt.

Kapitel 2

Grundlagen der Mischungstheorie

2.1 Mehrkomponentenmodelle

Die Beschreibung wassergesättigter Böden im Rahmen eines Ingenieurmodells führt zu einer Betrachtung des Bodematerials als *Mehrkomponenten-Kontinuum*, bestehend aus Korngerüst und Porenfluid [23]. Bedingt durch den heterogenen Aufbau aus gegeneinander abgegrenzten Materialien, entziehen sich Mehrkomponenten-Kontinua einer rechnerischen Behandlung im Sinne klassischer homogener Medien. Für die theoretische Beschreibung von heterogen aufgebauten Stoffen wie Silikate und Schäume aber auch Gesteine, Betone und Böden können im Wesentlichen zwei grundlegende Vorgehensweisen unterschieden werden. Zum einen besteht die Möglichkeit, die unterschiedlichen Bestandteile des Materials getrennt voneinander zu behandeln. Dieser mikro-mechanische Ansatz versteht die Konstituierenden als eigenständige Teilkörper und führt das Materialverhalten auf deren Interaktionswirkungen untereinander zurück. Die wesentliche Schwierigkeit liegt dabei in einer akkuraten Beschreibung der zeitlich veränderlichen internen Grenzflächen und Interaktionsmechanismen. Zum andern kann das Mehrkomponenten-Material im Rahmen der *Mischungstheorie*, also der Theorie heterogen zusammengesetzter Kontinua mit inneren Wechselwirkungen, in ein homogenisiertes Ersatzmedium überführt werden. Die Beschreibung erfolgt in diesem Fall aus makroskopischer Sichtweise und basiert auf der Einführung sogenannter *Wichtungskoeffizienten*. Die Interaktionskräfte des Mikrogefüges werden durch eine geeignete Mittelwertbildung über gewisse Referenzvolumina auf das Makrogefüge übertragen. Über den exakten inneren Aufbau des Materials wird dabei keine Aussage getroffen. Im Allgemeinen führen jedoch beide vorgeschlagenen Strategien zu vergleichbaren Ergebnissen und auch eine Kombination beider Vorgehensweisen ist denkbar. Im Hinblick auf eine rechnerische Erfassung bodenmechanischer Problemstellungen eröffnet jedoch die zweite Alternative den geeigneteren Zugang. Gerade für das Material Boden liegen kaum Informationen über den exakten inneren Strukturzusammenhang vor. Eine mikro-mechanische Modellierung relevanter Systeme scheidet daher aus. Die Mischungstheorie ihrerseits bietet aber eine gute Ausgangssituation für die Entwicklung konstitutiver Gleichungen und vereinfacht die numerische Behandlung im Rahmen der Finite-Element-Methode.

Im Folgenden werden die Grundgleichungen der Mischungstheorie dargestellt. Dies geschieht jedoch nur in dem Umfang wie es für die weiteren Problemstellungen nötig ist. Insbesondere wird auf die Herleitung der Entropiegleichung sowie des Energieerhaltungssatzes verzichtet, da die Entropiegleichung einen relativ großzügigen Spielraum zur Definition konstitutiver Beziehungen zulässt und im Hinblick auf die Stabilitätsanalyse von Böden die Temperatur eine deutlich untergeordnete Rolle spielt. Temperatureffekte werden deshalb im Rahmen des gewählten Modells vollständig vernachlässigt. Als Erweiterung der klassischen Kontinuumstheorie wird jedoch eine COSSERAT-Formulierung in den Kontext der Mischungstheorie aufgenommen. Dies geschieht im Hinblick auf eine regularisierende Wirkung bei der Analyse von Lokalisierungsphänomenen durch die Integration einer internen Länge zur Beschreibung der Mikroebene. Die Grundüberlegungen der Mikropolaren Theorie werden dargestellt und in den Erhaltungssatz

des Drehimpulses übernommen. Die wesentlichen Grundlagen hierfür stammen aus der relevanten Literatur zur Mikropolaren Mischungstheorie von DE BOER [21], EHLERS und VOLK [58, 61] und DIEBELS [50].

2.2 Das Konzept der Wichtungskoeffizienten

Der Begriff *Mischung* wird im Folgenden für ein Stoffgefüge aus einer Anzahl k verschiedener Materialien verstanden, dessen einzelne Komponenten φ^α ($\alpha = 1, 2, \dots, k$) als vollständig vermengt angesehen werden. Dies bedeutet, dass zu jedem Zeitpunkt t jeder räumliche Punkt \mathbf{x} des Mischungskörpers \mathcal{B} von allen Konstituierenden φ^α gleichzeitig eingenommen wird. Man bezeichnet diese Vorgehensweise bzw. Modellvorstellung als *Methode der superponierten Kontinua*. Die Konstituierenden werden dabei als statistisch über ein Referenzvolumen verteilt angenommen. Demzufolge müssen auch Feldgrößen wie Spannungen oder Verschiebungen, die im Bezug zum gesamten Mischungskörper definiert sind, als statistisch gemittelte Werte betrachtet werden. Im Gegensatz zu Formulierungen des Nicht-lokalen Kontinuums werden die Feldgrößen jedoch lokal ausgewertet. Mit dem Konzept der Wichtungskoeffizienten wird versucht, die lokalen Volumenanteile der einzelnen Konstituierenden zu erfassen. Die Wichtungskoeffizienten n^α sind lokal als Verhältniswert des Partialvolumens dv^α der Konstituierenden φ^α zum Gesamtvolumen der Mischung dv definiert:

$$n^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dv} . \quad (2.1)$$

Sie sind zeitlich und räumlich veränderlich

$$n^\alpha = n^\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

und genügen der Beziehung

$$\sum_{\alpha} n^\alpha = 1 . \quad (2.3)$$

Zugeordnet zu jeder Konstituierenden φ^α ist eine konstante effektive Materialdichte $\varrho^{\alpha R}$ und eine partielle Dichte ϱ^α , die wiederum lokal als Verhältnis von Masse dm^α und Referenzvolumen dv definiert ist:

$$\varrho^\alpha = \frac{dm^\alpha}{dv} = n^\alpha \varrho^{\alpha R} . \quad (2.4)$$

Die lokale mittlere Dichte der gesamten Mischung berechnet sich damit zu

$$\varrho = \sum_{\alpha} n^\alpha \varrho^{\alpha R} . \quad (2.5)$$

2.3 Kinematische Beziehungen

Das Deformationsverhalten des gesamten Mischungskörpers \mathcal{B} ist durch die Bewegung seiner einzelnen materiellen Punkte \mathbf{x} im zeitlichen Verlauf gekennzeichnet. Für die Beschreibung der Deformation in Raum und Zeit stehen zwei grundsätzliche Betrachtungsweisen zur Verfügung. Die LAGRANGESche oder körperbezogene Sichtweise verfolgt die Bahn der einzelnen materiellen Punkte im Zeitverlauf ausgehend von ihrer Referenzposition \mathbf{X}_α zum Startzeitpunkt $t = t_0$. Dabei wird von der grundlegenden Annahme Gebrauch gemacht, dass jeder Konstituierenden φ^α eine eigene unabhängige Bewegung zugewiesen werden kann:

$$\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t) . \quad (2.6)$$

Die Bewegung ist somit als chronologisch aufeinanderfolgende Platzierungen χ_α definiert und bildet eine stetige und eindeutige Abbildung der Körperpunkte auf den Bereich des dreidimensionalen euklidischen Raums \mathbb{R}^3 (siehe Abbildung 2.1). Somit können jeder Konstituierenden auch ein eigenes Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}_α und Beschleunigungsfeld \mathbf{a}_α zugeordnet werden:

$$\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{x}}_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t). \quad (2.8)$$

Dabei bedeutet die Notation $(\dot{\cdot})$ die *materielle Zeitableitung*, die mit der Bewegung der Konstituierenden φ^α verbunden ist.

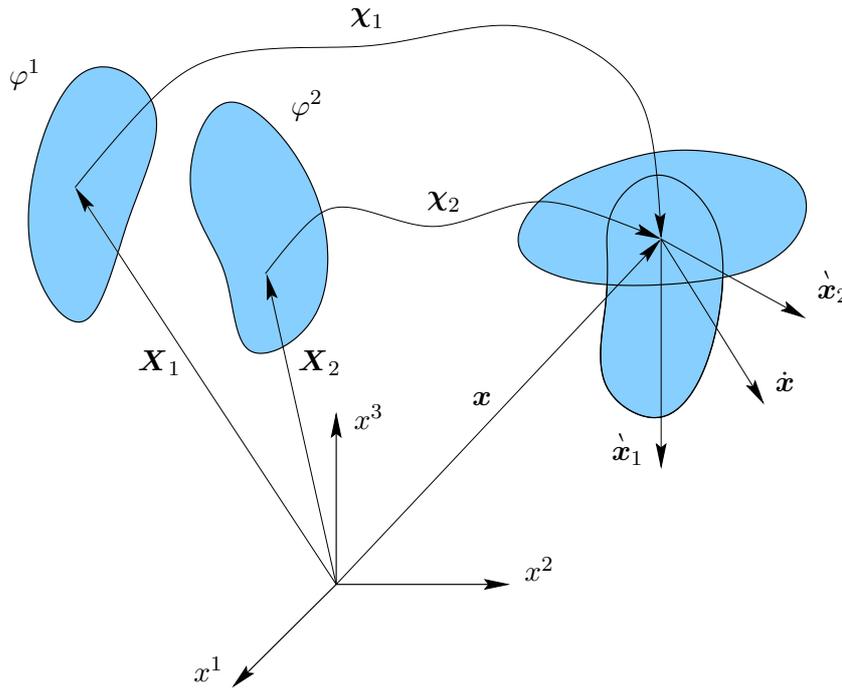


Abbildung 2.1: Bewegung in LAGRANGESchen Koordinaten

Im Gegensatz dazu wird eine Deformation in der EULERSchen oder raumbezogenen Sichtweise als Durchströmen des Raums mit Materiepartikeln von einem ortsfesten Bezugssystem aus verstanden. Die Beschreibung erfolgt mit Hilfe der Inversen χ_α^{-1} :

$$\mathbf{X}_\alpha = \chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.9)$$

Als hinreichend für die Existenz von χ_α^{-1} dient die Bedingung, dass die JAKOBISCHE Determinante

$$J_\alpha = \det \frac{\partial \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \quad (2.10)$$

für alle Punkte \mathbf{X}_α von Null verschieden ist. Bei der materiellen Zeitableitung einer skalaren Feldgröße Γ im Bezug zur Konstituierenden φ^α muss im Gegensatz zur LAGRANGESchen Sichtweise aufgrund der Relativbewegung der materiellen Punkte zum Bezugssystem ein konvektiver Anteil berücksichtigt werden:

$$\dot{\Gamma}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}}_\alpha(\mathbf{x}, t) \cdot \text{grad } \Gamma(\mathbf{x}, t). \quad (2.11)$$

Der Operator “grad” steht dabei für die partielle Ableitung nach dem Ortsvektor \mathbf{x} der Momentankonfiguration. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} des Mischungskörpers \mathcal{B} wird im Folgenden als *Mischungsgeschwindigkeit* bezeichnet und berechnet sich als durchschnittliche Geschwindigkeit der Konstituierenden gewichtet mit den Partialdichten ϱ^α :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\varrho} \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} \dot{\mathbf{x}}_{\alpha}(\mathbf{x}, t). \quad (2.12)$$

Schließlich wird die *Diffusionsgeschwindigkeit* als Relativgeschwindigkeit der einzelnen Konstituierenden zur Mischungsgeschwindigkeit festgelegt:

$$\mathbf{v}_{\alpha}^R(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}_{\alpha} - \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.13)$$

Im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie, die auch der gesamten Arbeit zugrunde liegt, können aus dem Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_{\alpha} = \mathbf{x} - \mathbf{X}_{\alpha}$, der als Differenzvektor der Momentan- und der Referenzkonfiguration definiert wird, der LAGRANGESche Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}$ sowie das Rotationsfeld $\boldsymbol{\omega}_{\alpha}$ des Kontinuums berechnet werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(\text{Grad}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} + [\text{Grad}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}]^T \right), \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\alpha} \times \mathbf{I} = \frac{1}{2} \left(\text{Grad}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} - [\text{Grad}_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}]^T \right). \quad (2.15)$$

Hier kennzeichnet der Operator “Grad $_{\alpha}$ ” die partielle Ableitung nach dem Ortsvektor \mathbf{X}_{α} der Referenzkonfiguration der Konstituierenden φ^{α} . Mit dem RICCI-Permutationstensor dritter Stufe $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ gilt außerdem

$$\boldsymbol{\omega}_{\alpha} \times \mathbf{I} = -\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\alpha}. \quad (2.16)$$

2.4 Cosserat-Theorie

Die COSSERAT-Theorie oder Mikropolare Theorie wurde von den Brüdern COSSERAT als Erweiterung des klassischen Kontinuums formuliert [37]. Sie baut auf der Anschauung auf, dass zwischen zwei infinitesimalen Körperelementen neben den klassischen Normal- und Schubspannungen $\boldsymbol{\sigma}$ auch sogenannte *Momentenspannungen* $\boldsymbol{\mu}$ übertragen werden können. Die Definition kann Abbildung 2.2 entnommen werden. Diese Momentenspannungen sind durch zusätzliche

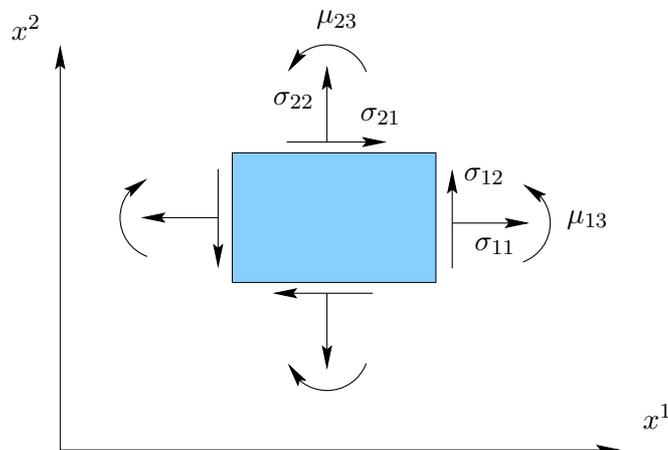


Abbildung 2.2: Definition der COSSERAT-Momentenspannungen

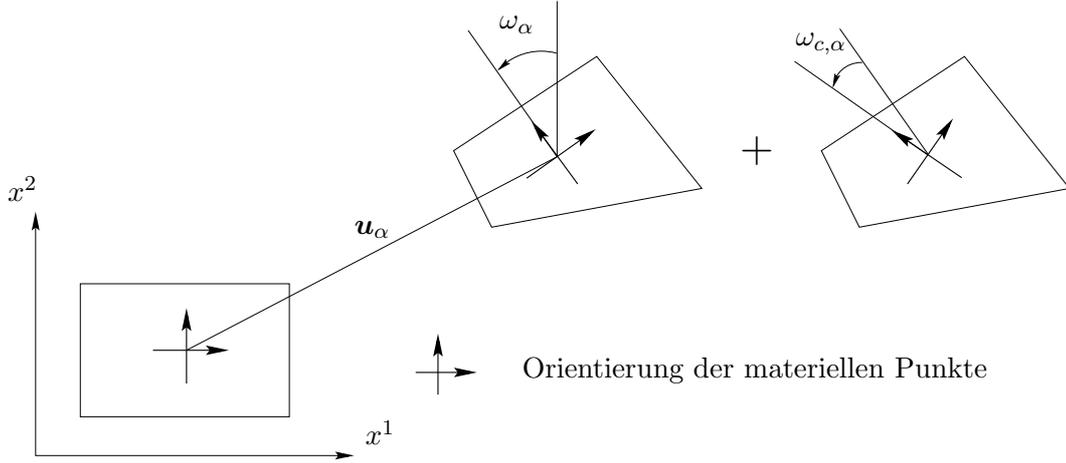


Abbildung 2.3: Klassisches Rotationsfeld ω_α und unabhängige COSSERAT-Mikrorotation $\omega_{c,\alpha}$

konstitutive Beziehungen mit *Momentenkrümmungen* κ verbunden, die sich mit den klassischen Verzerrungen bzw. Gleitungen zur Gesamtdeformation überlagern. Im Gegensatz zur klassischen Kontinuumstheorie, bei der die Bewegung eines materiellen Punktes durch die Differenz der entsprechenden Ortsvektoren hinreichend beschrieben wird, ist bei der COSSERAT-Theorie jedem Punkt ein zusätzlicher unabhängiger Freiheitsgrad der Verdrehung zugeordnet [68, 104]. Abbildung 2.3 verdeutlicht diese Überlegung. Die Körperpunkte erhalten somit eine Orientierung. Das resultierende Gesamtrotationsfeld $\bar{\omega}_\alpha$ einer Konstituierenden wird dann nicht mehr allein aus dem Deformationsgradienten nach Gleichung (2.15) berechnet, sondern ergibt sich aus der Überlagerung der Kontinuumsrotation mit dem unabhängigen COSSERAT-Rotationsfeld $\omega_{c,\alpha}$:

$$\bar{\omega}_\alpha = \omega_\alpha + \omega_{c,\alpha} . \quad (2.17)$$

Dadurch entsteht der im Allgemeinen nicht mehr symmetrische lineare COSSERAT-Verzerrungstensor $\epsilon_{c,\alpha}$ und der lineare Krümmungstensor κ_α :

$$\epsilon_{c,\alpha} = \text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \mathcal{E} \cdot \bar{\omega}_\alpha , \quad (2.18)$$

$$\kappa_\alpha = \text{Grad}_\alpha \bar{\omega}_\alpha . \quad (2.19)$$

Die symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteile des COSSERAT-Verzerrungstensors ergeben sich zu

$$\epsilon_{c,\alpha}^{sym} = \frac{1}{2} \left(\text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + [\text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha]^T \right) , \quad (2.20)$$

$$\epsilon_{c,\alpha}^{ant} = \frac{1}{2} \left(\text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha - [\text{Grad}_\alpha \mathbf{u}_\alpha]^T \right) + \mathcal{E} \cdot \bar{\omega}_\alpha , \quad (2.21)$$

wobei ein Vergleich mit (2.14) zeigt, dass der klassische LAGRANGESche Verzerrungstensor ϵ_α dem symmetrischen Anteil des COSSERAT-Verzerrungstensors $\epsilon_{c,\alpha}^{sym}$ entspricht, wohingegen der antisymmetrische Anteil mit dem zusätzlich eingeführten unabhängigen Rotationsfeld $\omega_{c,\alpha}$ verknüpft ist:

$$\epsilon_{c,\alpha}^{ant} = \mathcal{E} \cdot \omega_{c,\alpha} . \quad (2.22)$$

Diese Zusammenhänge zeigen, dass die Formulierung des klassischen Kontinuums als Spezialfall $\omega_{c,\alpha} = 0$ aus der COSSERAT-Theorie erhalten wird. Alle Größen gehen dann in ihre klassische Definition über. Insbesondere gilt für das Gesamtrotationsfeld wieder die Zwangsbedingung (2.15).

Hier sei bemerkt, dass die Beziehungen (2.18) und (2.19) nur im Rahmen der geometrisch linearen Theorie Gültigkeit besitzen. Auf der Basis der geometrisch nicht-linearen Theorie ist eine einfache Aufspaltung der Verzerrungsanteile in Gleichung (2.18) nicht erlaubt. Eine Herleitung der linearisierten Formen aus der allgemeineren nicht-linearen Kinematik mikropolarer Materialien findet sich beispielsweise bei VOLK [176].

2.5 Bilanzgleichungen

Die Mischungstheorie und dabei speziell die Entwicklung von Ansätzen für die Interaktion der Konstituierenden wurde maßgeblich von den *Metaphysischen Prinzipien* TRUESDELLS [170] beeinflusst. Diese können in drei Hauptsätzen zusammengefasst werden:

- *All properties of the mixture must be mathematical consequences of properties of the constituents.*
- *So as to describe the motion of a constituent, we may in imagination isolate it from the rest of the mixture, provided we allow properly for the actions of the other constituents upon it.*
- *The motion of the mixture is governed by the same equations as is a single body.*

Eine konsequente Anwendung dieser Prinzipien liefert die Erhaltungssätze der Mischungstheorie. Als Grundlage für die weitere Arbeit sind an dieser Stelle ausschließlich die Sätze der *Massenerhaltung*, der *Impulserhaltung* und der *Drehimpulserhaltung* von grundlegender Bedeutung. Diese werden im Folgenden aufgeführt, wobei für eine Analyse im Rahmen der klassischen Kontinuumstheorie lediglich die Erhaltung der Masse und des Impulses benötigt wird. Bei der Erweiterung der Formulierung auf Rotationsfreiheitsgrade im Sinne der COSSERAT-Theorie ergeben sich die zusätzlich notwendigen Bestimmungsgleichungen aus der Drehimpulserhaltung. Die Nutzung aller drei Erhaltungssätze für eine gekoppelte FE-Formulierung wurde erstmals von EHLERS und VOLK vorgeschlagen [60, 61]. Da hiermit gute Ergebnisse bei der Analyse von Lokalisierungszone gemacht wurden, wird im Folgenden auf diese Grundlage zurückgegriffen. Der Einfluss von Temperatureffekten wird aus den bereits genannten Gründen vernachlässigt. Demzufolge wird der Erhaltungssatz für die Energie nicht näher dargestellt. Eine kurze Erläuterung zusammen mit einer Formulierung der Entropiegleichung findet sich in Anhang A. Der interessierte Leser sei hier vor allem auf die ausführlichen Arbeiten von DE BOER und EHLERS [22], TRUESDELL und TOUPIN [172], TRUESDELL und NOLL [171] bzw. BOWEN [34] verwiesen.

2.5.1 Erhaltung der Masse

Im Rahmen der Mischungstheorie kann das grundlegende physikalische Axiom der Massenerhaltung in zweifacher Weise angewendet werden. Zum einen auf den Mischungskörper \mathcal{B} als Ganzen, zum anderen aber auch auf jede einzelne Konstituierende φ^α . Betrachtet man zunächst die Mischung mit der mittleren Dichte ϱ , so kann ihre Masse M mit

$$M = \int_{\mathcal{B}} \varrho \, dv \quad (2.23)$$

angegeben werden. Aufgrund der fundamentalen Annahme, dass innerhalb des Körpers \mathcal{B} keine Masse erzeugt bzw. vernichtet wird, gilt die Massenbilanz

$$\frac{\partial}{\partial t} M = 0 . \quad (2.24)$$

Eine lokale Aussage für ein infinitesimales Volumenelement dv kann mit Hilfe des Transporttheorems

$$\frac{\partial}{\partial t} dv = \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} dv \quad (2.25)$$

in folgender Form angegeben werden:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.26)$$

Dies entspricht der Form der klassischen Kontinuumsmechanik. Werden die einzelnen Konstituierenden separat betrachtet, so ergibt sich ein ähnlicher Zusammenhang. Im allgemeinen Fall müssen jedoch Produktionsterme $\hat{\rho}^\alpha$ eingeführt werden, die eine Materialumwandlung der Einzelkomponenten berücksichtigen. Dies kann z.B. durch chemische Reaktionen geschehen. Die Erhaltung der Masse einer Konstituierenden φ^α kann demzufolge mit

$$\dot{\rho}^\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \hat{\rho}^\alpha = 0 \quad (2.27)$$

angegeben werden. Im Vergleich mit Gl. (2.26) kann durch eine Summation über alle Komponenten die Bedingung

$$\sum_{\alpha} \hat{\rho}^\alpha = 0 \quad (2.28)$$

abgeleitet werden.

2.5.2 Erhaltung des Impulses

Auch das Axiom der Impulserhaltung kann sowohl auf den Mischungskörper \mathcal{B} insgesamt als auch auf jede einzelne Konstituierende φ^α angewendet werden. Aus der klassischen Kontinuumsmechanik kann das Postulat in lokaler Form

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.29)$$

übernommen werden. Dabei bezeichnet $\rho \mathbf{b}$ eine von außen eingeprägte Volumenkraft und $\boldsymbol{\sigma}$ den CAUCHYSchen Spannungstensor. Im Folgenden wird nur der Spezialfall der quasi-statischen Analyse weiter betrachtet, wobei die dynamischen Anteile vernachlässigt werden ($\rho \ddot{\mathbf{x}} = 0$). Für die einzelnen Konstituierenden muss diese Darstellung um einen Anteil ergänzt werden, der ihre Interaktion untereinander beinhaltet:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{s}}^\alpha = 0. \quad (2.30)$$

Die Größe

$$\hat{\mathbf{s}}^\alpha = \hat{\mathbf{s}}^\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (2.31)$$

stellt dabei den lokalen Impulszuwachs dar, der der Konstituierenden φ^α durch den Einfluss der anderen Konstituierenden übertragen wird. Die Bedingung, dass sich das Gemisch exakt in der Weise verhält wie die Summe seiner Komponenten, führt zu der Annahme

$$\sum_{\alpha} \hat{\mathbf{s}}^\alpha = 0, \quad (2.32)$$

die auch durch den Vergleich der Gleichungen (2.29) und (2.30) bestätigt wird. Konstitutive Annahmen im Bezug zu den Interaktionskräften und Produktionstermen werden im folgenden Kapitel näher erläutert. Sie ergeben sich im Wesentlichen aus Energie- und Entropiebetrachtungen.

2.5.3 Erhaltung des Drehimpulses

Als dritte grundlegende Bilanzrelation ist der Erhaltungssatz des Drehimpulses anzuführen, der im Kontext der Mikropolaren Theorie von Mehrkomponenten–Materialien in eine erweiterte Formulierung überführt werden muss, um den Einfluss des Momentenspannungstensors zu erfassen [51, 67]. Aufbauend auf der Annahme kugelförmiger Mikropartikel lautet das Axiom für den Körper \mathcal{B} mit einheitlichem Mischungsmaterial

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma} + \varrho \mathbf{c} - \varrho \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 0. \quad (2.33)$$

Dabei steht $\boldsymbol{\sigma}$ für den in diesem Zusammenhang nicht symmetrischen Spannungstensor, $\boldsymbol{\mu}$ für den Momentenspannungstensor und $\varrho \mathbf{c}$ für eine eingeprägte Momentenspannungsbelastung. Die dynamische Komponente, in der die Mikroträgheit $\boldsymbol{\Theta}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ auftreten, wird auch hier nicht weiter verfolgt. Eine konsistente Darstellung für den dynamischen Fall auf der Ebene der einzelnen Konstituierenden findet sich in der Literatur bei ERINGEN und KAFADAR [68] bzw. DIEBELS und EHLERS [51]. Als zusätzliche Bilanzrelation spielt dann die Erhaltung der Mikroträgheit eine Rolle. Die Formulierung für jede einzelne Konstituierende φ^α kann dann durch Einführen eines lokalen Drallproduktionsvektors $\hat{\mathbf{m}}^\alpha$ gewonnen werden. Es ergibt sich

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\mu}^\alpha - \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \varrho^\alpha \mathbf{c}^\alpha + \hat{\mathbf{m}}^\alpha = 0. \quad (2.34)$$

Aus dem direkten Vergleich der Gleichungen (2.33) und (2.34) folgt die Bedingung

$$\sum_{\alpha} \hat{\mathbf{m}}^\alpha = 0, \quad (2.35)$$

wodurch gewährleistet ist, dass Drehimpulsanteile nicht erzeugt, sondern lediglich zwischen den Konstituierenden ausgetauscht werden können.

Hier sei angemerkt, dass der Erhaltungssatz des Drehimpulses im Rahmen der klassischen Einphasen–Kontinuumsformulierung zur Symmetrie des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ führt. Diese Eigenschaft geht jedoch durch die Einführung des Momentenspannungstensors verloren und führt zu obigen Gleichungen.

Kapitel 3

Theorie Poröser Medien

3.1 Boden als poröses Medium

Im Gegensatz zu vielen anderen Materialien des Ingenieurwesens wie Stahl oder Beton, die für den speziellen Einsatz hergestellt werden und daher annähernd konstante, reproduzierbare Eigenschaften aufweisen, stellt Boden ein natürlich gewachsenes Material dar, dessen Struktur durch einen inhomogenen und stark veränderlichen Aufbau geprägt ist. Boden besteht aus Partikeln unterschiedlicher Größe und Form und bildet ein mehr oder weniger dichtes Gefüge mit Einschlüssen und Porenzwischenräumen. Der Porenraum kann dabei entweder mit Flüssigkeiten wie z.B. Wasser zusammen mit einer Anzahl darin gelöster Stoffe oder mit gasförmigen Stoffen wie z.B. Luft, Sauerstoff etc. oder mit Anteilen beider Phasen ausgefüllt sein. Die Feststoffpartikel des Korngerüsts sind entweder organischer oder anorganischer Herkunft und besitzen eine zum Teil komplizierte geologische bzw. mineralogische Entstehungsgeschichte. Ihre Größe reicht von mikroskopisch kleinen kolloidalen Partikeln bis hin zu Korngrößen im Zentimeterbereich. Fundamentale theoretische Betrachtungen zum Aufbau von Böden finden sich beispielsweise bei KLAUSNER [89]. Bedingt durch diese weite Bandbreite und die komplexe Struktur stellen Böden *Mehrkomponenten-* bzw. *Mehrphasen-Materialien* dar, die mit den Mitteln der klassischen Berechnungsmodelle oft nur unzureichend abbildbar sind. Aus Gründen der Praktikabilität erscheint es daher sinnvoll, auf der Basis vereinfachender Annahmen Boden als poröses Material zu betrachten und auf ein Zwei- oder Dreiphasenmodell zu reduzieren. Die Studien der Vergangenheit haben gezeigt, dass Modelle mit zwei Komponenten, d.h. Korngerüst und Porenflüssigkeit bzw. Porengas für gesättigte bzw. trockene Böden oder Modelle mit drei Komponenten für teilweise gesättigte Böden durchaus in der Lage sind, wesentliche Phänomene der Realität zu erfassen [39, 52, 101, 102].

Im Folgenden soll die Analyse wassergesättigter Böden im Vordergrund stehen. Für die Abbildung im Rahmen eines Berechnungsmodells wird Boden als zweikomponentiges poröses Medium betrachtet. Die Berücksichtigung von Transportphänomenen ist dabei ein wichtiger Bestandteil des Modells, da die Vernachlässigung der durch Porenwasserdruckgradienten hervorgerufenen instationären, d.h. zeitlich veränderlichen Strömungsvorgänge eine zu weitgehende Vereinfachung darstellen würde. Durch den Konsolidierungsvorgang an sich als auch durch die Geschwindigkeit der Lastaufbringung wird die Abhängigkeit der Analyse von der Zeit beeinflusst und muss deshalb unbedingt beachtet werden. Dass sich diese Faktoren wesentlich auf das Systemverhalten auswirken, zeigen z.B. WUNDERLICH und PRABUCKI im Fall dynamischer Bodenanstörungen [185]. Als mögliche Erweiterung wird auch die mikropolare Kontinuumstheorie auf das zweikomponentige poröse Medium angewendet. Freiheitsgrade der Mikrorotation werden jedoch nur für den granularen Bestandteil des Korngerüsts angesetzt. Das Porenfluid wird im Gegensatz dazu nicht-polar modelliert. Momentenspannungen werden hier als unrealistisch angesehen, da ein Fluid keinen granularen Aufbau besitzt. Somit sind Mikrorotationen nicht sinnvoll zu definieren [60]. Die Beschreibung des so entstehenden Modells erfolgt auf der Basis der mikropolaren Mischungstheorie, deren Grundgleichungen im letzten Kapitel für eine beliebige Anzahl von Konstituierenden dargestellt wurden.

3.2 Reduktion auf ein zweikomponentiges Medium

Wie bereits oben erwähnt, gründet die Beschreibung wassergesättigter Böden im Rahmen dieser Arbeit auf einem Zwei-Komponenten Modell. Das Material Boden sei also durch die beiden Konstituierenden *poröses mikropolares Korngerüst* φ^S und *viskoses Porenfluid* φ^F ausreichend repräsentiert. Die Stufen der Modellbildung sind in Abbildung 3.1 verdeutlicht. Mit dem Konzept der Wichtungskoeffizienten führt dies mit den jeweiligen Volumenanteilen

$$dv = dv^S + dv^F \quad (3.1)$$

zur Sättigungsbedingung

$$\sum_{\alpha} n^{\alpha} = n^S + n^F = 1. \quad (3.2)$$

In Analogie zu Gleichung (2.5) kann die mittlere Dichte ρ der Mischung mit

$$\rho = n^S \rho^{SR} + n^F \rho^{FR} \quad (3.3)$$

angegeben werden.

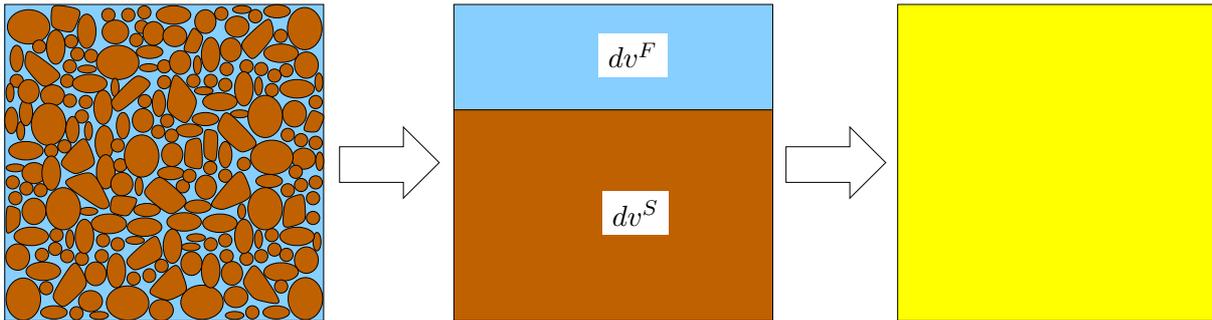


Abbildung 3.1: Stufen der Modellbildung: Realität – binäres Modell – homogenes Ersatzmedium

Um die Voraussetzungen für eine effiziente rechnerische Behandlung im Rahmen der Finite-Element-Methode zu schaffen, müssen weitere grundlegende Annahmen für die Modellbildung getroffen werden. Einen bereits angesprochenen Aspekt stellt die Vernachlässigung von Temperatureffekten und Temperaturgradienten dar. Allen Konstituierenden ist daher eine einheitliche Temperatur zugeordnet, die keiner zeitlichen Veränderlichkeit unterworfen ist:

$$\theta^{\alpha} = \theta(\mathbf{x}, t) = const. \quad (3.4)$$

Hier sei nur bemerkt, dass bei der Berücksichtigung nicht-isothermischer Prozesse die Temperaturänderung aus der Bedingung der Energieerhaltung für das Gesamtsystem bestimmt werden kann. Als zusätzliche Unbekannte ist dann das skalare Temperaturfeld in die Formulierung zu integrieren. Ansätze für eine gekoppelte Verformungs-Porenwasserdruck-Temperatur-Analyse finden sich beispielsweise bei ABOUSLEIMAN und BAI [11] oder GATMIRI und DELAGE [73].

Desweiteren werden aus offensichtlichen Gründen chemische Umsetzungsprozesse, die zu einem Massenaustausch der einzelnen Konstituierenden führen, vernachlässigt. Die Anteile der Massenquellen für Korngerüst und Porenfluid entfallen demzufolge:

$$\hat{q}^{\alpha} = 0. \quad (3.5)$$

Die eingeprägte Volumenkräftdichte \mathbf{b} als Bestandteil des Impulserhaltungssatzes wird im Folgenden für alle Konstituierenden gleichgesetzt und entspricht der Erdbeschleunigung:

$$\mathbf{b}^\alpha = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g} = \text{const.} \quad (3.6)$$

Eine äußere Belastung in Form von volumenbezogenen Momentenspannungen \mathbf{c}^α wird nicht in Betracht gezogen:

$$\mathbf{c}^\alpha(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.7)$$

Als weitere wesentliche Modellannahme wird schließlich die Inkompressibilität beider Konstituierender gefordert. Dies ist gewährleistet, wenn sich die effektiven Materialdichten im Zeitverlauf nicht ändern:

$$\rho^{\alpha R} = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\rho}^{\alpha R} = 0. \quad (3.8)$$

Diese Bedingung ist insofern gerechtfertigt, als in den meisten Fällen die Kompressibilität der Festkörperanteile als auch die des Porenwassers gegenüber der Kompressibilität des gesamten Bodenkörpers vernachlässigbar gering ausfällt. Unter Beachtung des Konzepts der Wichtungskoeffizienten reduziert sich die Massenbilanz (2.27) unter Berücksichtigung von (3.5) und (3.8) zur Volumenerhaltung der einzelnen Konstituierenden:

$$\dot{n}^\alpha + n^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha = 0. \quad (3.9)$$

Eine Inkompressibilitätsbedingung des Mischungskörpers als Ganzen kann daraus jedoch nicht abgeleitet werden. Auf makroskopischer Ebene kann sich im Rahmen veränderlicher Volumenanteile n^α eine zeitlich veränderliche Mischungsdichte ergeben:

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t). \quad (3.10)$$

Da das Porenfluid φ^F als nicht-polar aufgefasst wird, also keine Mikrorotationen $\boldsymbol{\omega}_F$ und Fluid-Momentenspannungen $\boldsymbol{\mu}^F$ in die Formulierung einfließen, verschwinden auch die zugehörigen Drallproduktionsterme $\hat{\mathbf{m}}^F$. Der Partialspannungstensor $\boldsymbol{\sigma}^F$ des Fluids verliert demzufolge nicht die Eigenschaft der Symmetrie. Zusammen mit Bedingung (2.35) folgt somit

$$\hat{\mathbf{m}}^F = \hat{\mathbf{m}}^S = 0, \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^F = [\boldsymbol{\sigma}^F]^T. \quad (3.12)$$

3.3 Bewegungsbeschreibung

Die Bewegung der beiden Konstituierenden kann nach Abschnitt 2.3 grundsätzlich sowohl in einem LAGRANGESchen als auch in einem EULERSchen Bezugssystem erfolgen. Welche Beschreibung im Einzelfall von Vorteil ist, muss anhand verschiedener Gesichtspunkte geprüft werden. Die LAGRANGESche Betrachtungsweise hat sich in der Strukturanalyse im Rahmen der Finite-Element-Methode als überlegen erwiesen, da hier die Deformationsgeschichte der materiellen Punkte von Interesse ist. Der direkte Bezug von Materialpunkten zu Knoten bzw. Integrationspunkten des FE-Netzes ermöglicht eine vorteilhafte Anwendung von elastoplastischen Materialgesetzen. Bei Verwendung der EULERSchen Beschreibung fehlt dieser direkte Bezug. Sie wird deshalb hauptsächlich bei Materialien angewandt, die durch ein lineares Stoffgesetz beschreibbar sind. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise besteht jedoch darin, dass aufgrund des raumfesten Netzes auch Bewegungen zugelassen werden können, die im Rahmen einer LAGRANGESchen Formulierung zu unzulässigen Netzdeformationen führen würden. Eine typische Anwendung findet

die EULERSche Sichtweise demzufolge bei der Simulation von turbulenten Strömungsvorgängen in der Hydraulik [100]. Dabei bildet nicht der Verschiebungsvektor eines Partikels sondern das Geschwindigkeitsfeld die primäre kinematische Größe.

Für die Finite-Element-Analyse wassergesättigter Böden erweist sich eine Kopplung als äußerst sinnvoll, mit der die Vorteile beider Betrachtungsweisen ausgenutzt werden können. Die Deformation des Korngerüsts wird im Folgenden durch eine LAGRANGESche Formulierung festgelegt, um eine Anwendung von nichtlinearen Stoffgesetzen zu vereinfachen, die für die Beschreibung des Materialverhaltens von Böden von wesentlicher Bedeutung sind. Der Verformungsvektor der Korngerüstpartikel \mathbf{u}_S wird als Differenzvektor der Momentan- und der Referenzkonfiguration definiert:

$$\mathbf{u}_S(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}_S. \quad (3.13)$$

Im Gegensatz dazu geschieht die Abbildung des Fluid-Flusses durch die Porenzwischenräume unter Verwendung einer modifizierten EULERSchen Formulierung. Die charakteristische kinematische Variable bildet hierbei die Sickergeschwindigkeit \mathbf{v}_F , die als Differenzgeschwindigkeit zwischen Fluid und Korngerüst aufgefasst wird:

$$\mathbf{v}_F(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{x}}_F - \dot{\mathbf{x}}_S. \quad (3.14)$$

Somit bildet das deformierte LAGRANGE-Koordinatensystem die Referenzkonfiguration. Bedingt durch die Annahme inkompressibler Konstituierender ist die Sickergeschwindigkeit unmittelbar mit der Volumenänderung des Kontrollvolumens verknüpft. Aus den jeweiligen Massenbilanzgleichungen (2.27) sowie der Sättigungsbedingung (3.2) und der Dichterektion (3.3) kann die Beziehung

$$\operatorname{div} (n^F \mathbf{v}_F + \dot{\mathbf{u}}_S) = 0 \quad (3.15)$$

abgeleitet werden, mit der die Kopplung zwischen Korngerüstdeformation und Strömungsfeld des Porenfluids beschrieben wird (siehe Abbildung 3.2).

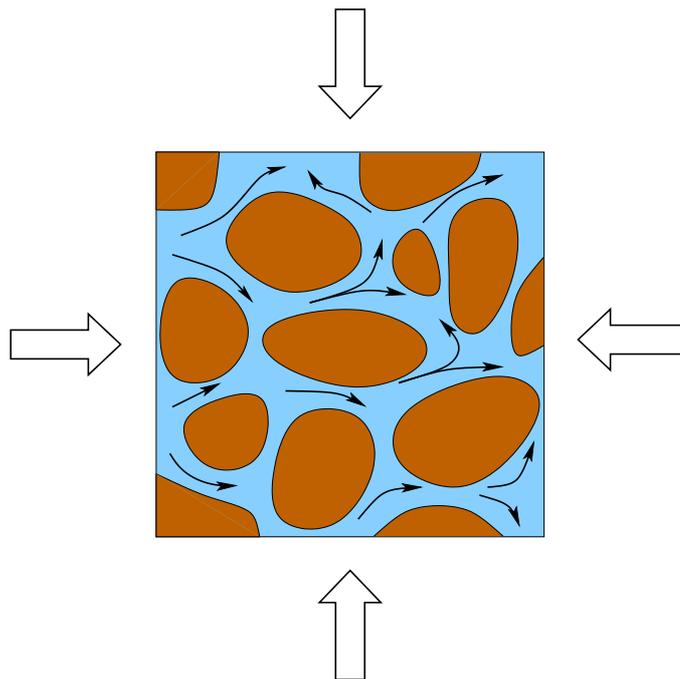


Abbildung 3.2: Durch die Korngerüstdeformation hervorgerufene Porenwasserströmung

3.4 Konstitutive Beziehungen des Zweiphasen-Systems

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Formulierung konstitutiver Beziehungen für das Zweiphasen-System. Hier sei zunächst nur auf die Beziehung elastisches Korngerüst – viskoses Porenfluid eingegangen. Eine detaillierte Erläuterung elastoplastischer Stoffgesetze, die für die realitätsnahe Beschreibung der Korngerüsteigenschaften von Böden eine wichtige Basis bilden, findet sich in Kapitel 4. Da die bisher dargelegten Grundgleichungen, die sich aus den Erhaltungssätzen der Mischungstheorie und dem Konzept der Wichtungskoeffizienten ergeben, nicht ausreichen, um alle auftretenden Größen und dabei insbesondere die Produktionsterme zu bestimmen, sind weitere konstitutive Annahmen festzulegen. Dies kann nur unter Beachtung thermodynamischer Restriktionen auf der Grundlage des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik also der Entropieungleichung geschehen. Ein erstes vollständiges Konzept für Mehrkomponenten-Kontinua konnte von MÜLLER [115] vorgelegt werden, dessen Formulierung der Entropieungleichung mit der späteren von BOWEN [33] und TRUESDELL [169] im Wesentlichen übereinstimmt und in dem der allgemeine Parameteransatz als Basis für spezielle konstitutive Gleichungen ausführlich diskutiert wird. Aufgrund der Komplexität der Entropieungleichung für Mehrkomponenten-Kontinua ist eine Bestimmung von Stoffbeziehungen unter strenger Einhaltung der thermodynamischen Restriktionen sehr aufwändig. Dieser Aspekt wird hier nicht näher erläutert. Detailliertere Ausführungen finden sich bei EHLERS [57]. Im Bezug zum hier behandelten Zweiphasen-System ohne Temperatureinfluss konnte dort gezeigt werden, dass mit der Bedingung *materieller InkompRESSibilität* eine Abhängigkeit zwischen Energieerhaltungssatz und Entropieungleichung eintritt. Mit dem LAGRANGESchen Multiplikator p , der als effektiver Porenwasserdruck identifiziert werden kann, resultieren aus diesen Überlegungen folgende Ausdrücke für die partialen Spannungstensoren σ^α bzw. die Interaktionsterme \hat{s}^α :

$$\sigma^\alpha = \sigma_E^\alpha + n^\alpha p \mathbf{I} , \quad (3.16)$$

$$\hat{s}^F = \hat{s}_E^F - p \operatorname{grad} n^F . \quad (3.17)$$

Darin stellen die Terme $(\cdot)_E$ Zusatzgrößen dar, die allein durch die Deformation des Korngerüsts bzw. die Viskosität des Porenfluids bestimmt sind. In vollkommener Analogie zum Prinzip von TERZAGHI kann σ_E^α als *effektiver Spannungstensor* identifiziert werden, für den konstitutive Ansätze in Form einer Anzahl unterschiedlicher Stoffgesetze zur Verfügung stehen. Zusammen mit der Annahme einer reibungsfreien Strömung und Vernachlässigung von σ_E^F

$$\sigma_E^F = 0 \quad (3.18)$$

ergibt sich direkt aus der Summation über beide Konstituierende:

$$\sigma = \sigma_E^S + p \mathbf{I} . \quad (3.19)$$

Gleichung (3.19) entspricht der von TERZAGHI vorgeschlagenen Aufspaltung der totalen Spannungen in effektive Spannungen des Korngerüsts und hydrostatische Porenwasserdrücke [166, 168]. Diese Vorstellung steht somit in Übereinstimmung mit einer konsistenten Herleitung aus thermodynamischer Sicht unter der Annahme einer InkompRESSibilitätsbedingung für die Konstituierenden. Da bereits bei der Herleitung der Impulsbilanz (2.30) keine Turbulenzerscheinungen berücksichtigt wurden, beschränkt sich das Modell für die Transportvorgänge des Porenfluids auf laminare Strömungen, d.h. kleine REYNOLDS-Zahlen. Dies schränkt die Anwendbarkeit jedoch nicht wesentlich ein, da gerade bei bindigen Böden keine hohen Sickergeschwindigkeiten auftreten. Die durch die Viskosität des Fluids verursachten Interaktionskräfte zwischen Fluid und Korngerüst werden durch folgenden Ansatz berücksichtigt:

$$\hat{s}_E^F = - \frac{(n^F)^2 \mu^{FR}}{k^S} \cdot \mathbf{v}_F . \quad (3.20)$$

Die Zähigkeitskraft \hat{s}_E^F , die zwischen Korngerüst und Fluid übertragen wird, ist damit proportional zur Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v}_F und zur dynamischen Viskosität μ^{FR} des Fluids. Sie weist bei allen Fluiden eine starke Abhängigkeit von der Temperatur auf. Für Wasser können die Werte bei verschiedenen Temperaturen der Tabelle 3.1 entnommen werden.

| Temperatur | 0° | 5° | 10° | 20° | 30° |
|--|--------|--------|--------|-------|--------|
| μ^{FR} in $10^{-3} \cdot [Pa \cdot s]$ | 1.7921 | 1.5188 | 1.3077 | 1.005 | 0.8007 |

Tabelle 3.1: Dynamische Viskosität von Grundwasser

Eine indirekte Proportionalität besteht zwischen der Zähigkeitskraft und der Durchlässigkeit des Korngerüsts, die mit Hilfe des zweistufigen *Permeabilitätstensors* \mathbf{k}^S beschrieben wird. Dieser lautet in Hauptachsenform:

$$\mathbf{k}^S = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

k_x , k_y und k_z stehen dabei für die Permeabilität in x -, y - und z -Richtung, d.h. \mathbf{k}^S kann durch ein anisotropes Verhalten gekennzeichnet sein, welches z.B. durch eine horizontale Schichtung des Baugrundes hervorgerufen wird. Zur DARCYschen Durchlässigkeit \mathbf{K}_{Darcy} , die neben der Permeabilität des Korngerüsts auch Informationen über die Dichte und Viskosität des Porenfluids enthält, besteht die Beziehung

$$\mathbf{K}_{Darcy} = \frac{\rho^{FR} g}{\mu^{FR}} \mathbf{k}^S. \quad (3.22)$$

\mathbf{K}_{Darcy} kennzeichnet damit den statistischen Mittelwert der Durchlässigkeit für ein bestimmtes Fluid im Referenzvolumen. Für die weiteren Betrachtungen stellt die Permeabilität \mathbf{k}^S jedoch den geeigneteren Kennwert dar [35]. Sie charakterisiert eine reine Bodeneigenschaft und kann im Allgemeinen als Funktion der effektiven Porosität aufgefasst werden. Diese beinhaltet eine Aussage über den Porenraum, der für einen Fluidtransport zur Verfügung steht. Isolierte und einseitig abgeschlossene Porenräume finden dabei keine Berücksichtigung. In Abhängigkeit der Bodenart und des damit verbundenen Porenaufbaus kann eine Größenordnung der Permeabilitätswerte k_i aus Tabelle 3.2 abgelesen werden. Für eine exakte Bestimmung müssen jedoch Versuche an entnommenen Bodenproben durchgeführt werden.

| Bodenart | Porosität | effektive Porosität | Permeabilität k in $[m^2]$ |
|------------------|---------------|---------------------|---|
| sandiger Kies | 0.25 ... 0.35 | 0.20 ... 0.25 | $3 \cdot 10^{-10} \dots 5 \cdot 10^{-11}$ |
| kiesiger Sand | 0.28 ... 0.35 | 0.15 ... 0.20 | $1 \cdot 10^{-10} \dots 2 \cdot 10^{-11}$ |
| mittlerer Sand | 0.30 ... 0.38 | 0.10 ... 0.15 | $4 \cdot 10^{-11} \dots 1 \cdot 10^{-11}$ |
| schluffiger Sand | 0.33 ... 0.40 | 0.08 ... 0.12 | $2 \cdot 10^{-11} \dots 1 \cdot 10^{-12}$ |
| sandiger Schluff | 0.35 ... 0.45 | 0.05 ... 0.10 | $5 \cdot 10^{-12} \dots 1 \cdot 10^{-13}$ |
| toniger Schluff | 0.40 ... 0.55 | 0.03 ... 0.08 | $5 \cdot 10^{-13} \dots 1 \cdot 10^{-15}$ |
| schluffiger Ton | 0.45 ... 0.65 | 0.02 ... 0.05 | $< 1 \cdot 10^{-15}$ |

Tabelle 3.2: Werte der Permeabilität

Mit zunehmender Volumenstauchung verkleinert sich der für den Wassertransport zur Verfügung stehenden Porenzwischenraum, und es verringert sich damit die Durchlässigkeit. Bei isothermen Bedingungen und der Annahme kleiner Deformationen können jedoch beide Variablen in guter Näherung als zeitlich konstante Größen aufgefasst werden:

$$\mu^{FR} = \text{const.} \qquad \mathbf{k}^S = \text{const.} \qquad (3.23)$$

Daraus resultiert eine lineare Beziehung zwischen Fluid–Fluss

$$\mathbf{Q}^F = n^F \mathbf{v}_F \qquad (3.24)$$

und hydraulischem Gradienten. Aus (3.20) lässt sich zusammen mit den Beziehungen (2.4), (3.16) und (2.30) die Gleichung

$$n^F \mathbf{v}_F = \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot (\text{grad } p + \varrho^{FR} \mathbf{b}) \qquad (3.25)$$

ableiten, die das DARCYsche Gesetz der Filterströmung in allgemeiner dreidimensionaler Form darstellt.

3.5 Grundlegende Differenzialgleichungen

Aus diesen grundlegenden Annahmen und Beziehungen können letztendlich drei Differenzialgleichungen abgeleitet werden, die das Zusammenwirken des zweikomponentigen Boden–Fluid–Systems beschreiben. Zum einen entsteht durch Einsetzen der additiven Aufspaltung der totalen Spannungen (3.19) in den Impulserhaltungssatz (2.29) im Rahmen einer quasi–statischen Analyse

$$\text{div} (\boldsymbol{\sigma}_E^S + p\mathbf{I}) + \varrho \mathbf{b} = 0 \qquad (3.26)$$

als lokale Gleichgewichtsbedingung des Mischungskörpers. Diese Aussage wird im Kontext der Mikropolaren Theorie um die folgende lokale Momentengleichgewichtsbedingung ergänzt, die direkt aus dem Erhaltungssatz des Drehimpulses (2.33) resultiert:

$$\text{div } \boldsymbol{\mu}^S - \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma}^S = 0. \qquad (3.27)$$

Um eine Relation zu den primären Feldunbekannten \mathbf{u}_S bzw. $\boldsymbol{\omega}_S$ herzustellen, sind diese Gleichungen zusätzlich um die Beziehungen der jeweiligen Stoffgesetze und der kinematischen Abhängigkeiten zu erweitern. Diese werden in den folgenden Kapiteln ausführlich dargestellt. Zum anderen kann durch Einsetzen der Strömungsbeziehung (3.25) in (3.15) die Bilanzgleichung

$$\text{div} \left(\dot{\mathbf{u}}_S + \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot (\text{grad } p + \varrho^{FR} \mathbf{b}) \right) = 0 \qquad (3.28)$$

erhalten werden. Dies stellt eine unter obigen Annahmen lineare Beziehung dar, die direkt für eine numerische Umsetzung im Rahmen der Finite–Element–Methode genützt werden kann. Durch die in dieser Gleichung auftretende Zeitableitung der Korngerüstverschiebung resultiert die explizite Abhängigkeit von der Zeit als unabhängige Variable. Dadurch ergibt sich in der Gesamtheit die Charakteristik eines gekoppelten Anfangs–Randwert–Problems.

Kapitel 4

Materialmodelle

4.1 Überblick

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Formulierung realitätsnaher konstitutiver Gleichungen für das Korngerüst auf der Grundlage elastoplastischer bzw. viskoplastischer Stoffmodelle. Es bildet insoweit eine Einheit mit dem vorherigen Abschnitt, in dem die konstitutiven Beziehungen zwischen elastischem Korngerüst und viskosem Porenfluid abgeleitet wurden, soweit sie sich aus der Restriktion der Inkompressibilitätsbedingungen ergeben. In diesem Zusammenhang ist jedoch eine detailliertere Darstellung des Stoffgesetzes, also der Beziehung zwischen Spannungstensor und Verzerrungstensor nötig, da sich auf dem Gebiet der Geomechanik mittlerweile eine Vielzahl unterschiedlicher Stoffmodelle etabliert haben, die sich in Ausrichtung, Anwendungsgebiet und Komplexität teilweise stark unterscheiden. Jedes Stoffgesetz stellt letztendlich nur eine Abbildung der Wirklichkeit in Form eines ingenieurmäßigen Rechenmodells dar [76] und ist deshalb ausschließlich in der Lage einen mehr oder weniger großen Bereich von Bodenmaterialien für bestimmte Belastungsvorgänge zu beschreiben. Ein einziges allumfassendes Modell wurde bisher nicht formuliert. Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Charakteristik und Einsatzmöglichkeiten verschiedener Stoffmodelle und stellt die für Böden relevanten Beziehungen dar. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird ausschließlich ein Einflächen-Modell verwendet, dessen Formulierungen auf die Fließfunktion von STEINL [159] für granulare Böden aufbaut und mit der Definition einer Kappe im Druckbereich auch für bindige Böden einsetzbar ist. Im Bezug zum mikropolaren Kontinuum muss der Satz der konstitutiven Gleichungen um eine Beziehung zwischen Momentenspannungstensor und Krümmungstensor ergänzt werden. Desweiteren ist festzulegen in welcher Weise ein zugehöriges koordinaten-invariantes Maß des Momentenspannungstensors in eine generalisierte Fließbedingung zu integrieren ist. Eine mögliche Alternative eines elastoplastischen Modells wird in Abschnitt 4.5 diskutiert.

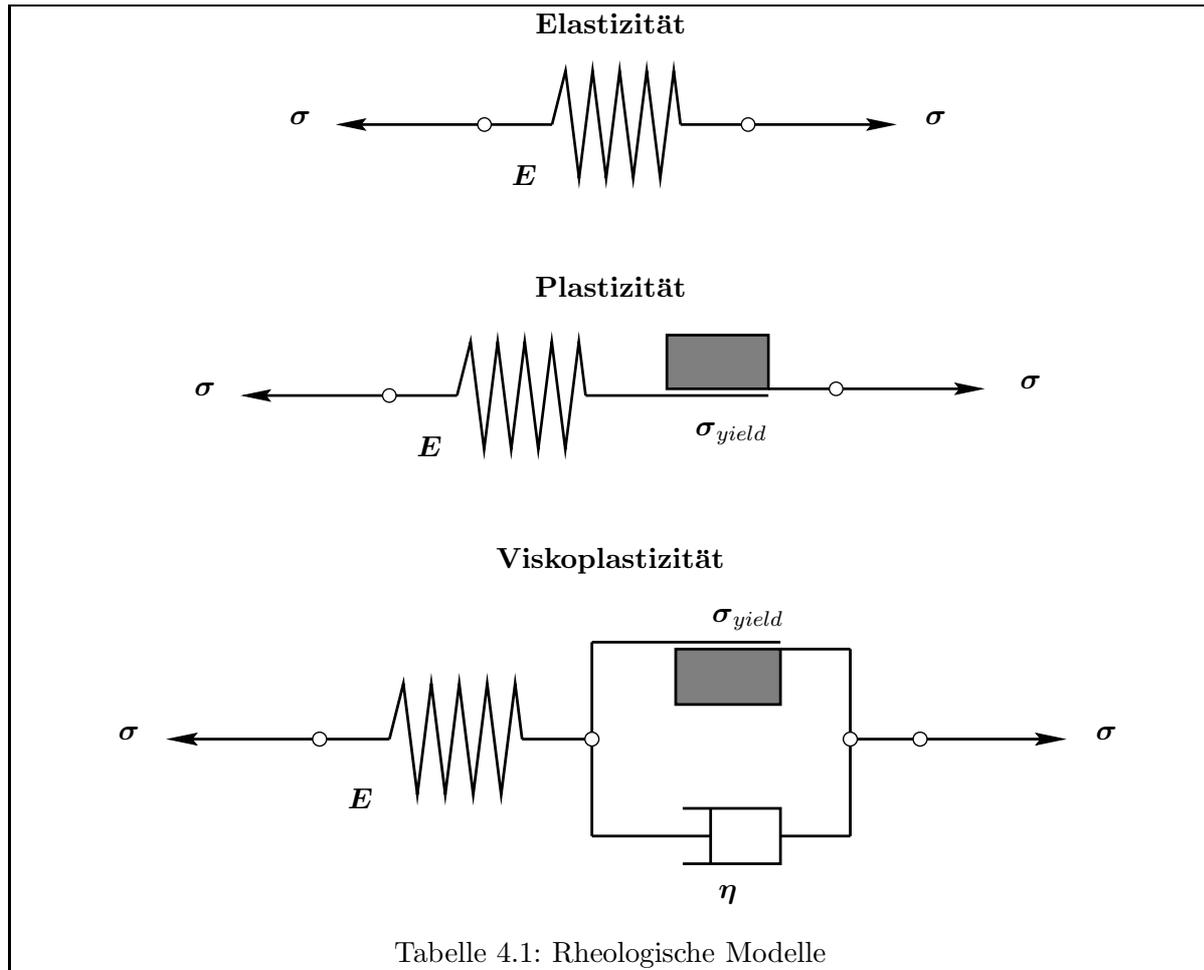
4.2 Kategorien von Stoffmodellen

Unter einem Stoffmodell versteht man das Formelwerk zur Beschreibung des Spannungs-Verformungs-Verhalten eines Materials. Es stellt somit eine Beziehung zwischen Spannungstensor σ und Verzerrungstensor ε her. Dies geschieht üblicherweise mit Hilfe des vierstufigen Stofftensors C :

$$\sigma = C : \varepsilon . \quad (4.1)$$

Je nach Beschaffenheit des Stofftensors lassen sich die resultierenden Stoffmodelle in drei Hauptkategorien einteilen:

- Elastizität
- Plastizität
- Viskosität



4.2.1 Elastizität

Das rheologische Modell der Elastizität wird durch die Feder mit Federsteifigkeit E dargestellt. Ein durch elastisches Materialverhalten geprägter Körper nimmt bei vollkommener Entlastung wieder seine ursprüngliche Gestalt und Größe an. Abhängig von den bei Belastung durchlaufenen Formänderungen unterscheidet man nach linear und nichtlinear elastischem Verhalten. Die einfachste Form des linear elastischen Materialverhaltens stellt das auf drei Raumdimensionen verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz dar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (4.2)$$

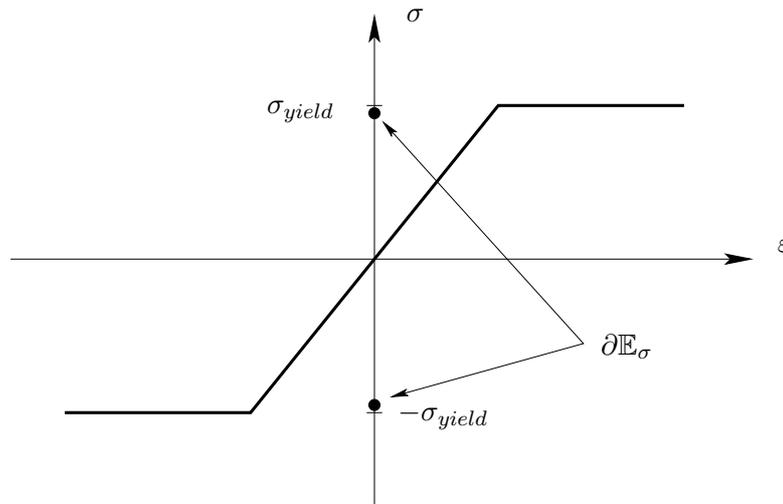
Der konstante elastische Stofftensor \mathbf{E} kann dabei durch die LAMÉschen Konstanten λ und μ beschrieben werden

$$\mathbf{E} = 2\mu \mathbf{I} + \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) , \quad (4.3)$$

wobei \mathbf{I} den Fundamentaltensor vierter Stufe und \mathbf{I} den zweiter Stufe darstellt. Nichtlinear elastische Beziehungen können in Form von hyperelastischen Stoffgesetzen formuliert werden, bei denen die Spannungen als Gradienten einer Potenzialfunktion berechnet werden, die wiederum von den Verzerrungen abhängig ist:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} . \quad (4.4)$$

Ansätze auf der Grundlage der Elastizitätstheorie können jedoch das Materialverhalten von Böden nicht erschöpfend wiedergeben. Sie stellen allenfalls eine einfache Möglichkeit dar, den

Abbildung 4.1: Einaxiale ideal-plastische σ - ε -Beziehung

Grundzusammenhang zwischen Belastung, Randbedingungen und Systemverhalten im Rahmen einer FE-Berechnung abzuschätzen. Sie sind jedoch nicht in der Lage, das ausgeprägt irreversible Deformationsverhalten von Böden und speziell deren Volumenänderungscharakteristik zu erfassen. Für die Simulation von Lokalisierungseffekten sind elastische Stoffgesetze deshalb ungeeignet.

4.2.2 Elastoplastizität

Auf der Basis der *Plastizitätstheorie* ist es möglich, Ansätze für Stoffmodelle zu entwickeln, die einen irreversiblen Verformungsanteil berücksichtigen. In diesem Zusammenhang kann zwischen zwei grundlegenden Modellen unterschieden werden. Die *Deformationstheorie* geht auf HENCKY [79] zurück und beinhaltet eine nichtlineare Stoffbeziehung in finiter Form. Plastische Dehnungen und Spannungen werden unter Verwendung eines veränderlichen plastischen Moduls verknüpft. Dagegen basieren Ansätze der *Fließtheorie*, die von PRANDTL und REUSS [136] begründet wurde, auf einem inkrementellen Stoffgesetz. Der Vorteil dieses Modells besteht darin, dass Wegabhängigkeiten und demzufolge Spannungsumlagerungen beschrieben werden können. Das HENCKYSche Modell setzt im Gegensatz dazu ein konstantes Verhältnis der Hauptspannungen auch im plastischen Zustand voraus. Für die Analyse von komplexen Spannungspfaden mit lokalen Entlastungen und Scherbandformationen, die in dieser Arbeit im Vordergrund stehen, ist die Deformationstheorie deshalb ungeeignet. Die Betrachtungen konzentrieren sich somit ausschließlich auf inkrementell formulierte Stoffgesetze der PRANDTL-REUSS-Kategorie. Im Rahmen der klassischen *ratenunabhängigen* Formulierung werden die Spannungs- und Dehnungsraten in Bezug gesetzt:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} . \quad (4.5)$$

Gleichung (4.5) bildet dabei den Ausgangspunkt für die Formulierung inkrementeller hypoelastischer Stoffgesetze, mit denen auch Entlastungspfade erfasst werden können. Werden kleine Verzerrungen vorausgesetzt, kann hierbei eine Aufspaltung der Gesamtverzerrungsraten in reversible (elastische) und dissipative (plastische) Anteile erfolgen

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} , \quad (4.6)$$

wobei für die Bestimmung der zugehörigen Spannungsraten nur der elastische Anteil Berücksichtigung findet:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} = \mathbf{C} : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \right) . \quad (4.7)$$

Die zulässigen Spannungszustände sind dabei nicht mehr unbegrenzt wie bei elastischen Stoffmodellen, sondern werden im Hyperraum \mathbb{S} der Spannungen auf einen gewissen Bereich \mathbb{E}_σ eingegrenzt. Für die Definition der Größe und Form dieses sogenannten elastischen Bereichs wird die Existenz einer *Fließfunktion* $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ vorausgesetzt:

$$\mathbb{E}_\sigma = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0\} . \quad (4.8)$$

Plastische Deformationen treten dann auf, wenn der Spannungszustand auf der elastischen Grenze $\partial\mathbb{E}_\sigma$ liegt

$$\partial\mathbb{E}_\sigma = \{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0\} \quad (4.9)$$

und eine weitere Belastung stattfindet. Die Erweiterung auf drei Raumdimensionen erfolgt somit in Analogie zum eindimensionalen Fließen, wobei der Spannungszustand σ die Fließgrenze σ_{yield} nicht überschreiten kann. Plastische Stoffmodelle lassen sich vor allem durch die Form, Größe und zeitliche Entwicklung der verwendeten *Fließfläche* $\partial\mathbb{E}_\sigma$ charakterisieren. Dies führte in der Vergangenheit zu zahlreichen Modellen, die generell in

- ideal plastische und
- verfestigende bzw. entfestigende

Modelle aufgeteilt werden können. Ideale Plastizität ist durch eine zeitlich konstante Fließfunktion geprägt, wohingegen bei ver- und entfestigenden Stoffgesetzen sowohl die Position als auch die Größe und Form des elastischen Bereichs \mathbb{E}_σ veränderlich sein können. Die Steuerung geschieht auf der Grundlage einer Anzahl m von inneren Variablen \mathbf{q} . Man unterscheidet nach der Veränderlichkeit in

- isotrop,
- kinematisch und
- kombiniert isotrop–kinematische

Verfestigungsmodelle. Beim kinematischen Konzept bleibt die Größe und Form von \mathbb{E}_σ konstant, es wird jedoch eine mögliche Verschiebung in alle Richtungen von \mathbb{S} in Betracht gezogen:

$$f = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) . \quad (4.10)$$

Die Entfernung von der Ausgangskonfiguration wird mit Hilfe des Verschiebungstensors $\boldsymbol{\alpha}$ (*back-stress-Tensor*) beschrieben, der im Allgemeinen eine Anisotropie des Materialverhaltens bewirkt und mit Hilfe der Evolutionsgleichungen von PRAGER oder ZIEGLER bestimmt wird:

$$\text{PRAGERSche Regel:} \quad \text{ZIEGLERSche Regel:} \quad (4.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{eff} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (4.12)$$

Verwendung findet die kinematische Verfestigung hauptsächlich bei der Analyse von zyklischen Belastungspfaden. Beim Werkstoff Stahl ist das daraus resultierende anisotrope Verhalten unter dem Begriff des BAUSCHINGER-Effekts bekannt. Auch bei Böden spielt dieser Effekt eine wichtige Rolle [90]. Bei der Berechnung von Grenzlaster in der Bodenmechanik, die in dieser Arbeit im Vordergrund stehen soll, werden allerdings ausschließlich monotone Lastpfade zugrunde gelegt. Die Belastung wird dabei stetig bis zum Versagenszustand gesteigert. Um den

verfestigenden bzw. entfestigenden Materialcharakter, also eine Erhöhung bzw. Verminderung des Materialwiderstands bei zunehmender Belastung zu berücksichtigen, kann dabei von einer isotropen Aufweitung bzw. Verkleinerung der Fließfläche Gebrauch gemacht werden. Dies lässt sich mittels eines isotropen Verfestigungsmodells beschreiben. Die Position des elastischen Bereichs im Spannungsraum bleibt dabei konstant und führt zu einer Isotropie des Materialverhaltens. Zur Beschreibung der Veränderlichkeit wird die Fließfunktion um den Einfluss eines Parameters $k(\mathbf{q})$ erweitert:

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}) - k(\mathbf{q}) . \quad (4.13)$$

Eine Kombination beider Verfestigungskonzepte führt zum kombiniert isotrop–kinematischen Modell, das beide vorgestellten Grundkonzepte verbindet und zu Fließfunktionen der Art

$$f = f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) - k(\mathbf{q}) \quad (4.14)$$

führt. Aus den genannten Gründen wird im Folgenden jedoch ausschließlich das Konzept der isotropen Verfestigung weiterverfolgt. Um den verfestigenden Effekt zu quantifizieren, werden die inneren Parameter \mathbf{q} entweder aus der aktuellen effektiven plastischen Dehnung ε^{eff} oder aus der verrichteten plastischen Arbeit W^{pl} abgeleitet. Dementsprechend unterscheidet man

- Dehnungsverfestigung $\varepsilon^{eff} = c \sqrt{\dot{\varepsilon}^{pl} : \dot{\varepsilon}^{pl}} ,$
- Arbeitsverfestigung $\dot{W}^{pl} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon}^{pl} ,$

wobei c vom verwendeten Fließkriterium abhängt. Zusätzlich zur Fließfunktion muss für die vollständige Formulierung plastischer Stoffmodelle eine *plastische Potenzialfunktion*

$$g = g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (4.15)$$

definiert werden. Durch sie bzw. deren Ableitungen wird zum einen mittels der *Fließregel*

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4.16)$$

die Richtung der plastischen Dehnungsraten festgelegt. Die absolute Größe wird mit einem LAGRANGE–Multiplikator, dem sogenannten *Konsistenzparameter* $\dot{\gamma}$ berechnet, der aus der Konsistenzbedingung $\dot{\gamma} \dot{f} = 0$ resultiert. Wird als Spezialfall für das plastische Potenzial die Fließfunktion selbst verwendet ($g = f$), so spricht man von *assoziierter Plastizität*. Zum anderen wird eine Evolutionsbeziehung für die inneren Variablen

$$\dot{\mathbf{q}} = -\dot{\gamma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.17)$$

definiert. Dabei berücksichtigt die Matrix \mathbf{D} die Transformation zwischen Dehnungs- und Spannungsraum und beinhaltet die plastischen Moduli. Um realitätsnahe Ergebnisse zu erhalten, ist bei der Analyse von Böden unbedingt die Anwendung von Stoffmodellen der Plastizität erforderlich, da sich bereits bei geringen Belastungsintensitäten irreversible Deformationen einstellen. Obwohl schon durch ideal–plastische Stoffgesetze ein großer Bereich der Probleme in der Bodenmechanik realistisch zu erfassen ist, kann durch die Einbeziehung eines verfestigenden Materialverhaltens die Genauigkeit und Verlässlichkeit der Berechnungen z.B. bei der Simulation von Lokalisierungseffekten erhöht werden.

4.2.3 Viskoplastizität

Ansätze unter Einbeziehen eines viskosen bzw. viskoplastischen Verhaltens führen zu zeitabhängigen Spannungs–Verformungsbeziehungen. Im rheologischen Modell kann dies durch die Integration eines Dämpfers mit dem Parameter der Relaxationszeit η veranschaulicht werden. Als Arbeiten, die die grundlegende Theorie der Viskoplastizität behandeln, seien hier die Aufsätze von PERZYNA [125], LUBLINER [107] sowie DUVAUT und LIONS [55] genannt. Im Bezug zur Geomechanik verwenden verschiedene Autoren viskoplastische Stoffgesetze zur Beschreibung der Korngerüsteigenschaften [62]. Bei der Simulation des Deformationsverhaltens von Böden ist eine Abhängigkeit der Analyse von der Zeit oft stark ausgeprägt, jedoch hauptsächlich auf Transportvorgänge wie die der Porenwasserströmung zurückzuführen. Dieser Effekt wurde bereits durch die Interaktion der Konstituierenden des Zweiphasen–Systems in die Formulierung integriert. Die Berücksichtigung einer Zeitabhängigkeit auf der Ebene des Stoffgesetzes für das Korngerüst wird deshalb oft nicht weiter verfolgt. Es wurde jedoch erkannt, dass mit Hilfe einer viskoplastischen Materialbeschreibung eine Regularisierung der klassischen ratenunabhängigen Plastizität erzielt werden kann [122]. Für die Analyse von Lokalisierungsphänomenen und Scherbandbreiten ergeben sich damit Vorteile.

Hier soll in aller Kürze auf das Modell von PERZYNA als viskoplastisches Stoffgesetz eingegangen werden [124]. Anstelle der strengen Einhaltung der Konsistenzbedingung kommt bei Verletzung der Fließbedingung das sogenannte *Überspannungsprinzip* zum Einsatz. Überspannungen bedeuten hier, dass bis zur vollständigen Relaxation Spannungen zugelassen werden, die die Fließbedingung verletzen. Für die Bestimmung des Konsistenzparameters muss dann allerdings eine zusätzliche Evolutionsbeziehung angegeben werden:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \left\langle r(f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})) \right\rangle \quad \eta \in [0, \infty[. \quad (4.18)$$

Dabei hat η die Bedeutung einer Relaxationszeit und stellt somit einen weiteren Materialparameter dar. $\langle \cdot \rangle$ bezeichnet die FÖPPEL–Klammer mit $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|)$ und die Funktion $r(x)$ verläuft monoton mit $r(x) = 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Durch diese Definition werden für die Beziehungen der plastischen Verzerrungsrate (4.16) und der Evolutionsgleichung der inneren Parameter (4.17) Zeitabhängigkeiten eingeführt, wobei für infinitesimale Relaxationszeiten ($\eta \rightarrow 0$) wieder die Formulierung der ratenunabhängigen Plastizität erhalten werden. Mit Hilfe der Gleichung (4.18) kann also jedes elastoplastische Stoffgesetz auf Viskoplastizität erweitert werden. Eine weitergehende Anpassung der Fließfunktionen ist nicht nötig. Der folgende Abschnitt stellt die für Böden relevanten Stoffmodelle übersichtsmäßig zusammen und geht im Speziellen auf die im Weiteren für granulare und bindige Böden verwendeten Einflächen–Modelle ein. Eine detaillierte Beschreibung des damit eng verknüpften Problems der Spannungsintegration im Rahmen der computerorientierten Plastizität findet sich in Kapitel 5.6.5 für elastoplastische Stoffgesetze bzw. im Anhang A für viskoplastische Stoffgesetze.

4.3 Elastoplastische Stoffmodelle für Böden

Wie schon oben erwähnt sind für die Beschreibung des elastoplastischen Verhaltens von Böden eine Reihe von Stoffgesetzen entstanden, die jeweils für bestimmte Bodenarten zutreffende Voraussagen des Spannungs–Verzerrungs–Verhaltens erlauben. Das hauptsächliche Unterscheidungsmerkmal stellt die Form der Fließfläche dar, die als Hyperfläche $\partial\mathbb{E}_\sigma$ im Spannungsraum \mathbb{S} definiert ist und anschaulich im dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen $\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III}$ dargestellt werden kann. Im Folgenden werden ausschließlich die erste Invariante I_1 des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und die zweite und dritte Invariante J_2 und J_3 des Deviator tensors \mathbf{s} für die

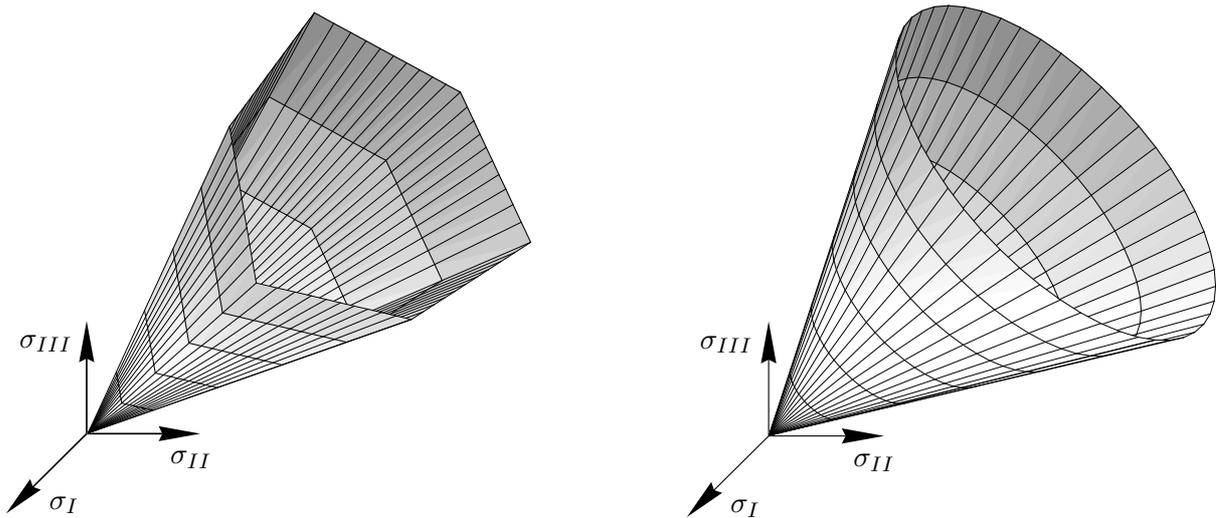


Abbildung 4.2: Fließflächen nach MOHR-COULOMB und DRUCKER-PARAGER

Formulierung verwendet, wodurch eine koordinateninvariante Darstellung erreicht wird. Dies ist von Bedeutung, da das Bruchverhalten nicht vom verwendeten Bezugssystem abhängig sein kann:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{Spur}(\boldsymbol{\sigma}) , \quad (4.19)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 , \quad (4.20)$$

$$J_3 = \det(\boldsymbol{s}) , \quad (4.21)$$

mit dem Spannungsdeviatorortensor

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} I_1 \boldsymbol{I} . \quad (4.22)$$

Die für Böden relevanten Modelle können dabei in Konusmodelle, Kappenmodelle und kombinierte Konus-Kappenmodelle eingeteilt werden.

4.3.1 Konusmodelle für granulare Böden

Für *granulare* Böden ist es von grundlegender Wichtigkeit, dass ein Maß für die mittlere Hauptspannung in den Bruchbedingungen Berücksichtigung findet. Da der hydrostatische Druckzustand einen Einfluss auf die Scherfestigkeit ausübt, wird I_1 bei allen hier behandelten Modellen in die Formulierung der Fließfläche einbezogen. Dieser Aspekt kann beim Werkstoff Stahl in guter Näherung vernachlässigt werden. Versuche haben hier gezeigt, dass eine Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand nicht besteht. Ausgehend vom Reibungsgesetz

$$\tau = c - \sigma \tan \varphi \quad (4.23)$$

wurde die MOHR-COULOMBSche Bruchbedingung formuliert, die den Grenzzustand als maximal aufnehmbare Schubspannung definiert, die vom aktuellen Spannungszustand abhängig ist. Mit den bekannten Materialkennwerten der Kohäsion c und dem Winkel der inneren Reibung φ sowie der Bedingung $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ kann folgendes Kriterium abgeleitet werden:

$$\frac{1}{2} (\sigma_I - \sigma_{III}) = c \cos \varphi - \frac{1}{2} (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin \varphi . \quad (4.24)$$

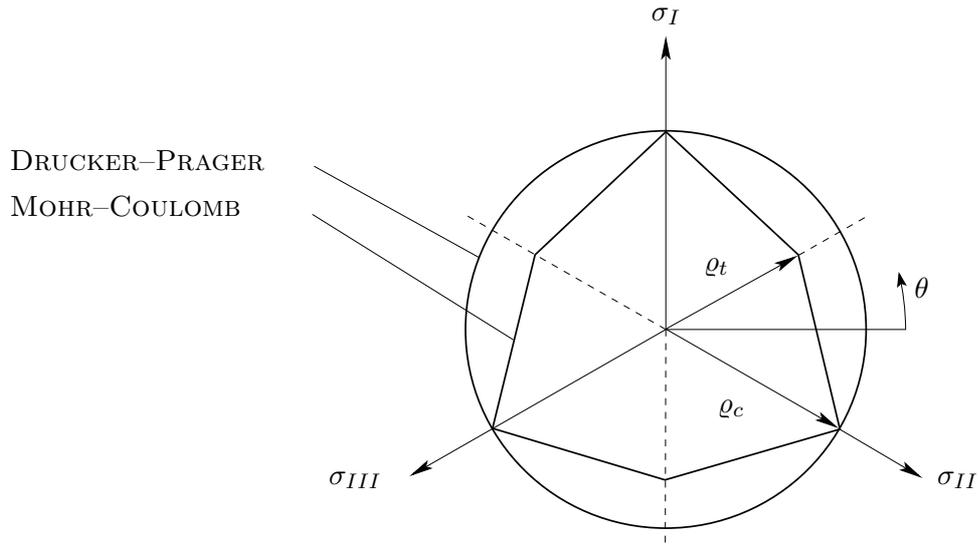


Abbildung 4.3: MOHR-COULOMB und DRUCKER-PRAGER Kriterium in der Deviatorebene

Die Erweiterung auf dreidimensionale Spannungszustände liefert mit der Definition des LODE-Winkels

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{\sqrt{27}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad (4.25)$$

die Beziehung des verallgemeinerten MOHR-COULOMB Bruchkriteriums

$$f_{MC} = \frac{1}{3} I_1 \sin \varphi + \sqrt{J_2} \cos \theta - \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \varphi - c \cos \varphi = 0. \quad (4.26)$$

Die Ansicht in der Deviatorebene zeigt, dass genau zwei charakteristische Werte ϱ_t und ϱ_c zu bestimmen sind, um die Form des Hexagons festzulegen. Diese können experimentell mit Hilfe des triaxialen Extensionsversuchs und des triaxialen Kompressionsversuchs ermittelt werden. In Abhängigkeit der Kohäsion und des Reibungswinkels ergibt sich

$$\varrho_t = \frac{2\sqrt{6} c \cos \varphi}{3 + \sin \varphi}, \quad \varrho_c = \frac{2\sqrt{6} c \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}, \quad (4.27)$$

mit $\varrho = \sqrt{2 J_2}$. Eine weitere einfache Fließbedingung stellt das DRUCKER-PRAGER Kriterium dar. Es bildet eine glatte Approximation des MOHR-COULOMB Hexagons und stellt im Hauptspannungsraum einen Kegel mit der hydrostatischen Achse als Rotationsachse dar:

$$f_{DP} = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0. \quad (4.28)$$

Im Hinblick auf die numerische Behandlung stellt diese Fließfunktion insoweit eine Vereinfachung dar, dass sie keine Kanten aufweist. Ein wesentlicher Nachteil liegt jedoch darin begründet, dass sie eine Veränderlichkeit in der Deviatorebene nicht berücksichtigt und nur durch eine Kalibrierung am MOHR-COULOMB Hexagon definiert werden kann (vgl. Abbildung 4.3). Man verwendet eine Anpassung des Kegels entweder an die äußeren Punkte (ϱ_c) oder an die inneren Punkte (ϱ_t). Die entsprechenden Parameter α und k sind dann folgendermaßen definiert:

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3} (3 \pm \sin \varphi)}, \quad k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3} (3 \pm \sin \varphi)}. \quad (4.29)$$

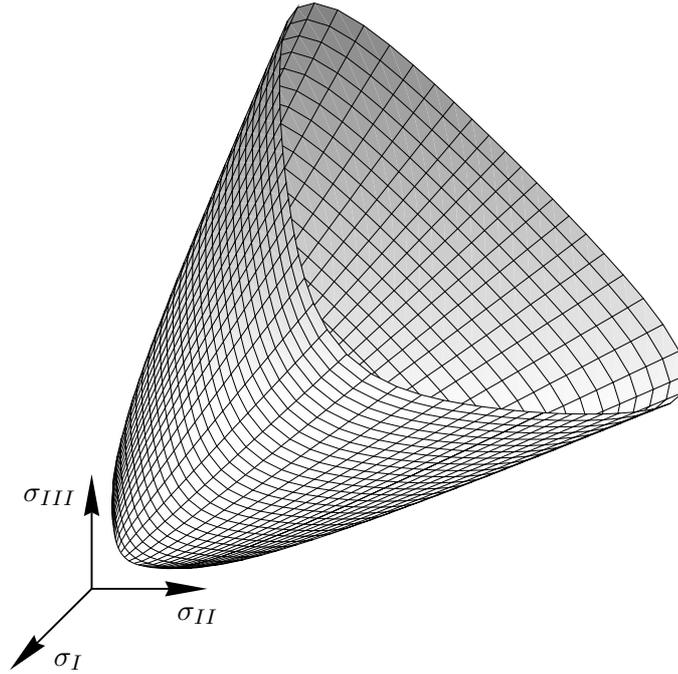


Abbildung 4.4: Fließfunktion für granulare Stoffe nach STEINL [159]

Numerisch problematisch erweist sich auch hier die Kegelspitze, die als Unstetigkeitsstelle erhalten bleibt. Bereits ZIENKIEWICZ [190] verweist in diesem Zusammenhang auf Konvergenzprobleme. Um die angesprochenen Unzulänglichkeiten zu beheben, haben sich die weiterentwickelten Fließbedingungen von STUTZ [162], LADE und DUNCAN [94] und MATSUOKA und NAKAI [109] herausgebildet, die sich auch auf experimentelle Versuchsauswertungen stützen. Hier wurde vor allem Wert auf eine genauere Erfassung der Deviatorebene gelegt, so dass in allen drei Formulierungen eine ausgerundete dreiecksförmige Gestalt der Fließfläche erhalten wird. Um auch im Bereich der Kegelspitze die Richtung des plastischen Fließens eindeutig festlegen zu können, verwendet STEINL in [159] eine hyperbolische Ausrundung. Dies wird durch die folgende Formulierung erreicht:

$$f = \left[(m(\gamma, \theta)^2 J_2)^n + \sigma_{ms}^{2n} \right]^{\frac{1}{2n}} + \alpha I_1 - k = 0, \quad (4.30)$$

wobei

$$m(\gamma, \theta) = \left(\frac{1 + \gamma^4 + (1 - \gamma^4) \sin(3\theta)}{2\gamma^4} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.31)$$

eine Funktion darstellt, mit der die Form der Fließfläche in der Deviatorebene angepasst werden kann. Der Parameter γ repräsentiert das Verhältnis zwischen Extensionsradius und Kompressionsradius, wobei mit Werten zwischen $\gamma = 0.6109$ und $\gamma = 1.0$ eine Konvexität der Fließfunktion gewährleistet wird. Die Spannungsminderung σ_{ms} und der Exponent n definieren die hyperbolische Ausrundung der Kegelspitze in der hydrostatischen Ebene. Eine anschauliche graphische Darstellung im Hauptspannungsraum zeigt Abbildung 4.4. Mit dieser Fließfunktion wurden bereits sehr gute Ergebnisse bei der Simulation von Geomaterialien gemacht [39, 41, 183]. Sie wird deshalb im Rahmen dieser Arbeit für granulare Materialien verwendet und zur Beschreibung von bindigen, kontraktanten Böden um einen zusätzlichen Parameter erweitert.

4.3.2 Kappenmodelle für bindige Böden

Bei Kappenmodellen oder kombinierten Konus–Kappenmodellen ist die Fließfläche nicht durch eine offene, sondern auch im Druckbereich geschlossene Form charakterisiert. Bereits früh wurde erkannt, dass für eine wirklichkeitsgetreue Abbildung *kohäsiver* Böden diese Abkappung von Bedeutung ist, da nur so ein kontraktant plastisches Verhalten simuliert werden kann. RUDOLPH verwendet in diesem Zusammenhang ein DRUCKER–PRAGER–Kriterium, das mit einem *cut-off* in der Deviatorebene gekoppelt wird [182]. Im Gegensatz dazu wurden aber auch ausgerundete Kappen vorgeschlagen, die jedoch auch durch neu zu definierende Materialparameter charakterisiert werden müssen [90, 143]. Auf der Grundlage der Arbeiten von ROSCOE und BURLAND [138] sowie von SCHOFIELD und WROTH [145] wurde das *Modified–Cam–Clay–Modell* entwickelt, das durch eine Fließfläche in Form eines Ellipsoids geprägt ist und sowohl Entfestigung als auch Verfestigung beschreiben kann:

$$f_{MCC} = p^2 - p_c p + \frac{q^2}{M^2}, \quad (4.32)$$

mit

$$p = -\frac{I_1}{3}, \quad q = \sqrt{3J_2}. \quad (4.33)$$

Die sogenannte *critical-state-line* mit der Steigung M unterteilt die Fließfläche in einen überkritischen und einen unterkritischen Bereich. Abbildung 4.5 verdeutlicht, dass sich bei Anwendung einer assoziierten Fließregel im überkritischen Bereich ein dilatant plastisches Verhalten, im unterkritischen Bereich ein kontraktant plastisches Verhalten einstellt. Ein Nachteil dieses Modells besteht jedoch darin, dass der Kompressionsmodul des Bodens veränderlich ist. Eine Formulierung von impliziten Integrationsalgorithmen und eines konsistenten Tangentenoperators wird dadurch sehr aufwändig [121].

Bei kombinierten Konus–Kappenmodellen wird die endgültige Fließfläche aus zwei oder mehreren Einzelflächen zusammengesetzt. In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeiten von LADE [93], ARSLAN [3], SCHAD [143] und CRAMER [38] verwiesen. Für spezielle Anwendungsgebiete ergeben sich hier Vorteile, da die Form der Fließfläche variabel angepasst werden kann. Jedoch

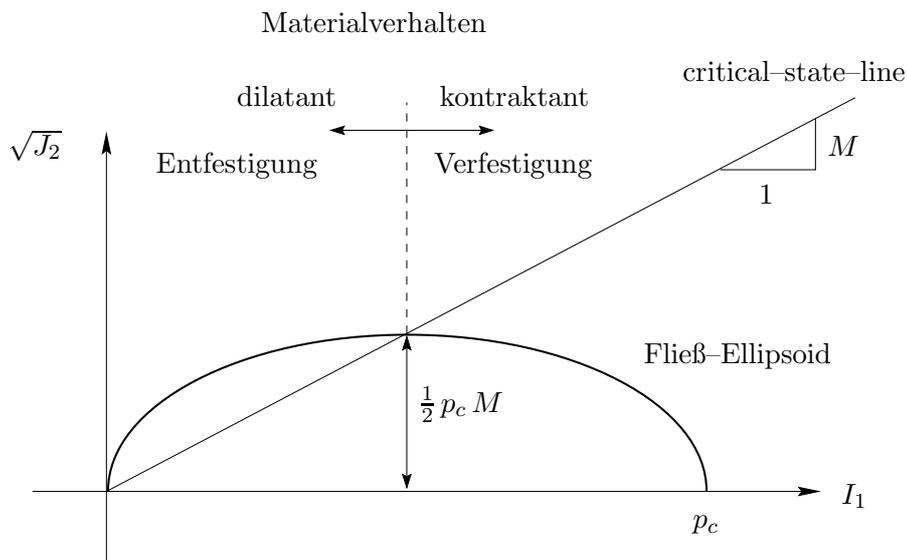


Abbildung 4.5: Fließ-Ellipsoid des Modified–Cam–Clay Modells

erhöht sich durch die Formulierung mehrerer Fließfunktionen f_i insbesondere bei Ansatz eines verfestigenden Materialverhaltens die Anzahl der notwendigen Materialparameter, die dann nicht immer aus bekannten Bodenkennwerten abgeleitet werden können. Ein weiterer wesentlicher Nachteil besteht in dem im Allgemeinen nicht glatten Übergang zwischen den einzelnen Abschnitten der Fließfläche. Hier ergeben sich nicht selten Konvergenzprobleme bei der numerischen Bestimmung des Spannungszustands im Rahmen der Mehrflächen-Plastizität. Die Tatsache, dass es nicht immer in eindeutiger Weise möglich ist, die in jedem Berechnungsschritt aktiven Fließflächen zu bestimmen, stellt eine zusätzliche Problematik dar.

4.3.3 Einflächen-Modelle

Um für die numerische Spannungsintegration optimale Bedingungen zu erhalten wurden *Einflächen-Modelle* entwickelt, deren Form im Hauptspannungsraum mit Hilfe einer einzigen Funktion beschrieben wird. Die gemeinsame Eigenschaft aller solcher Fließfunktionen besteht im Allgemeinen darin, dass die elastische Grenze im Hauptspannungsraum eine hinreichend glatte Oberfläche aufweist. Eine Bestimmung der Normalenrichtung wird dann eindeutig und wirft keine numerischen Probleme auf, die beispielsweise bei der Mehrflächenplastizität durch Fallunterscheidungen entstehen können. Die Fließfunktion (4.30) erfüllt bereits diese Anforderungen.

Durch die Wahl eines geeigneten Parameteransatzes ist es darüberhinaus für bindige Böden möglich, sowohl eine abgeschlossene Form im hydrostatischen Zug- und Druckbereich zu erhalten, als auch die Deviatorenebene an eine experimentell verifizierte Form anzupassen. Die wesentlichen Vorteile liegen somit in der Tatsache, durch eine einzige mathematische Funktion alle Anforderungen an elastoplastische Stoffmodelle wie Fließen, Verfestigung und Versagen zu beschreiben und durch eine kompakte Formulierung die Anzahl der benötigten Materialparameter zu minimieren. Sowohl das von DESAI [48] als auch das von LADE und KIM [95, 96] entwickelte Einflächen-Modell beschränkt sich auf fünf unabhängige Materialparameter. Ihr

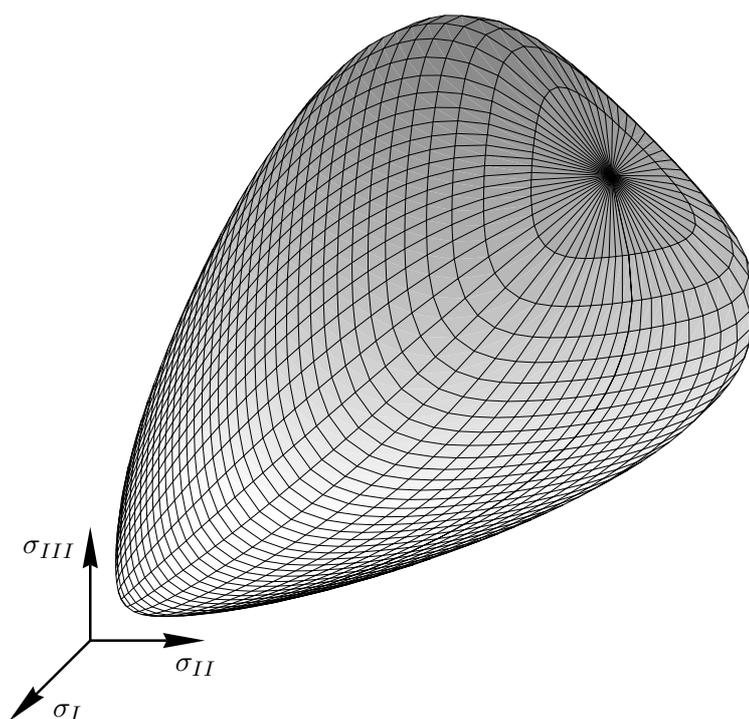


Abbildung 4.6: Einflächen-Fließfunktion im Hauptspannungsraum

Nachteil besteht jedoch zum einen darin, dass der Einfluss der Kohäsion in beiden Modellen keine Berücksichtigung findet und das Modell von DESAI auf assoziierte Plastizität beschränkt bleibt. Desweiteren fehlt der Bezug zu einfacheren Modellen, d.h. durch eine sukzessive Reduktion der Parameter ist es nicht möglich z.B. den DRUCKER–PRAGER Bruchkegel zu beschreiben. Einige dieser Schwächen wurden im Modell von EHLERS [59] behoben, das auf einem Ansatz aus sieben Materialparametern aufbaut.

In dieser Arbeit wird ein Einflächen–Modell vorgestellt, das aus einer Erweiterung der von STEINL vorgeschlagenen Fließfunktion (4.30) für granulare Böden um eine Kappe im Druckbereich entsteht und somit in der Lage ist, auch kontraktante Böden zu beschreiben. Die Formulierung der Fließfunktion muss somit um einen geeigneten Parameter ergänzt werden:

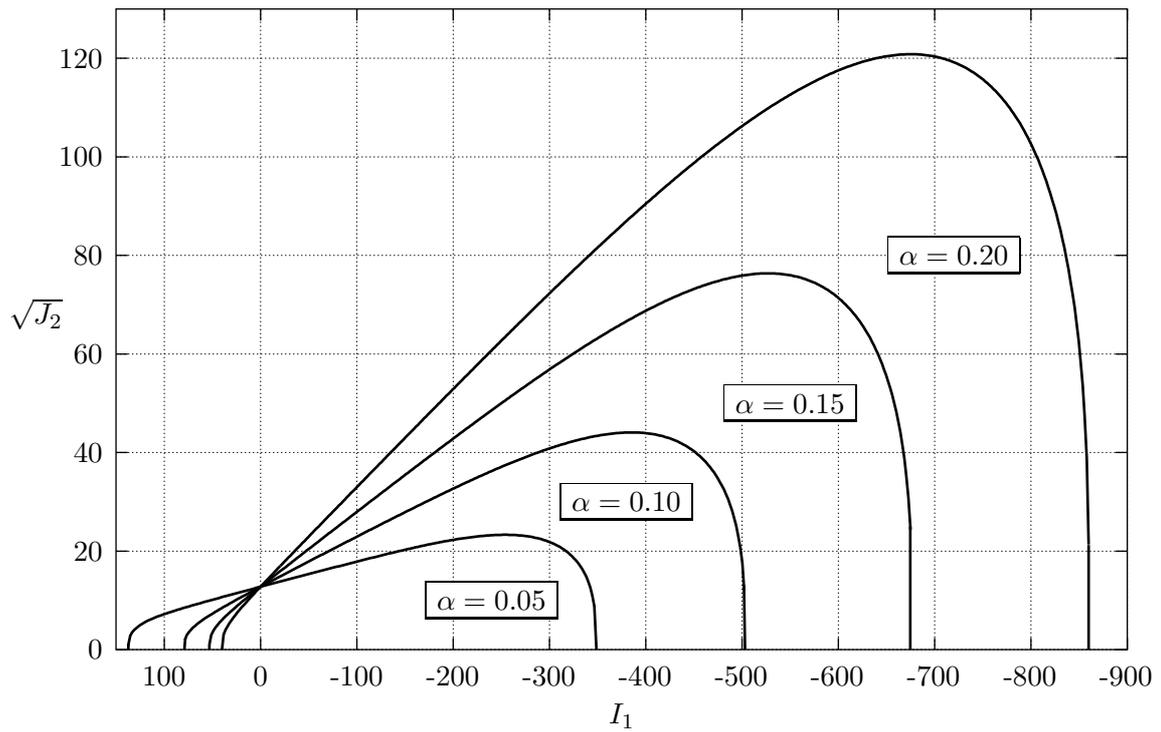
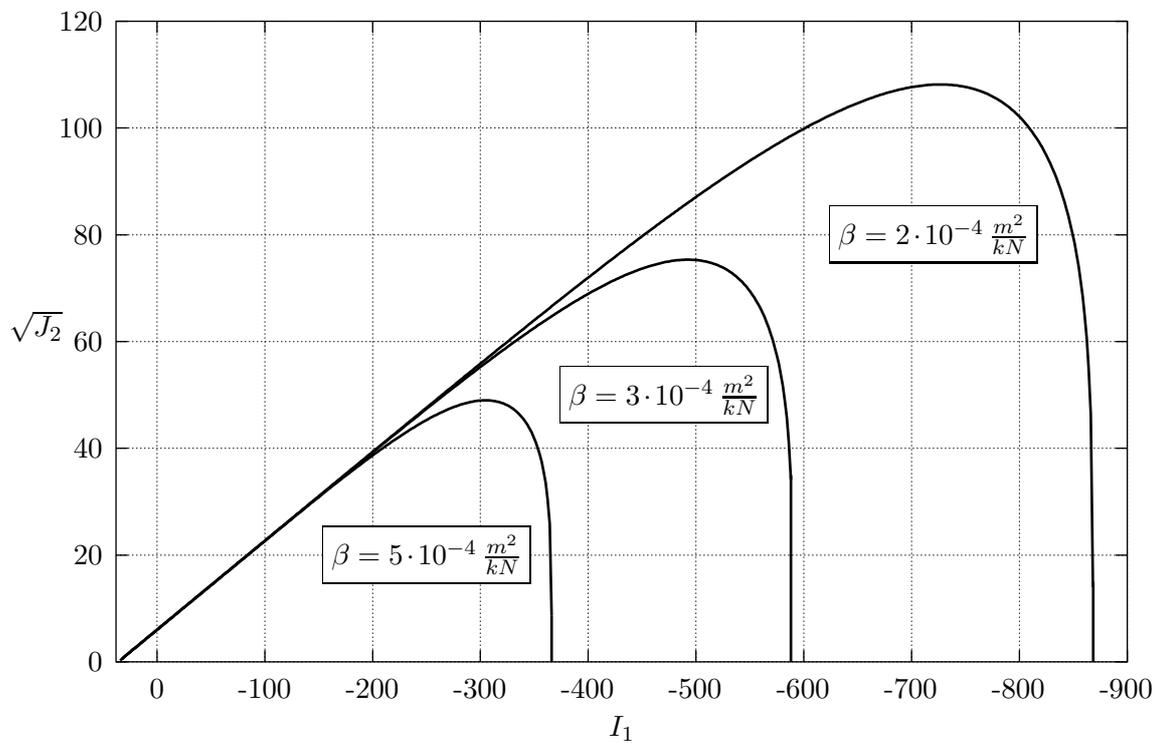
$$f = \left[(m(\gamma, \theta)^2 J_2)^n + (\beta^2 I_1^A)^n + \sigma_{ms}^{2n} \right]^{\frac{1}{2n}} + \alpha I_1 - k = 0. \quad (4.34)$$

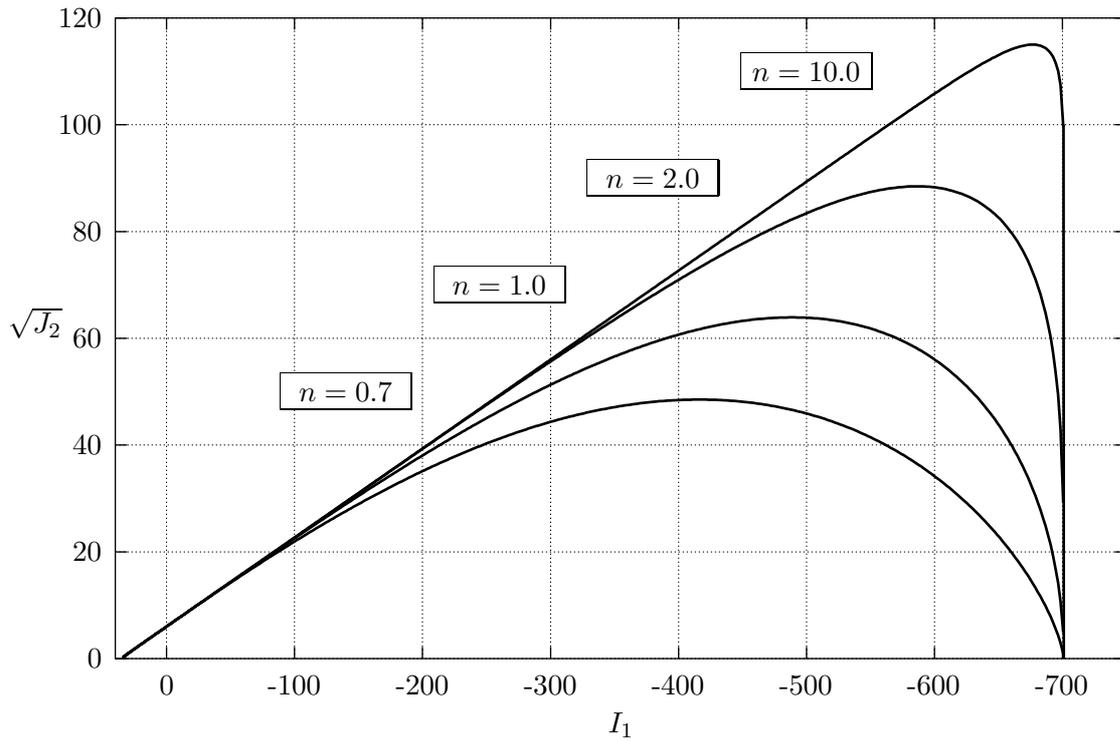
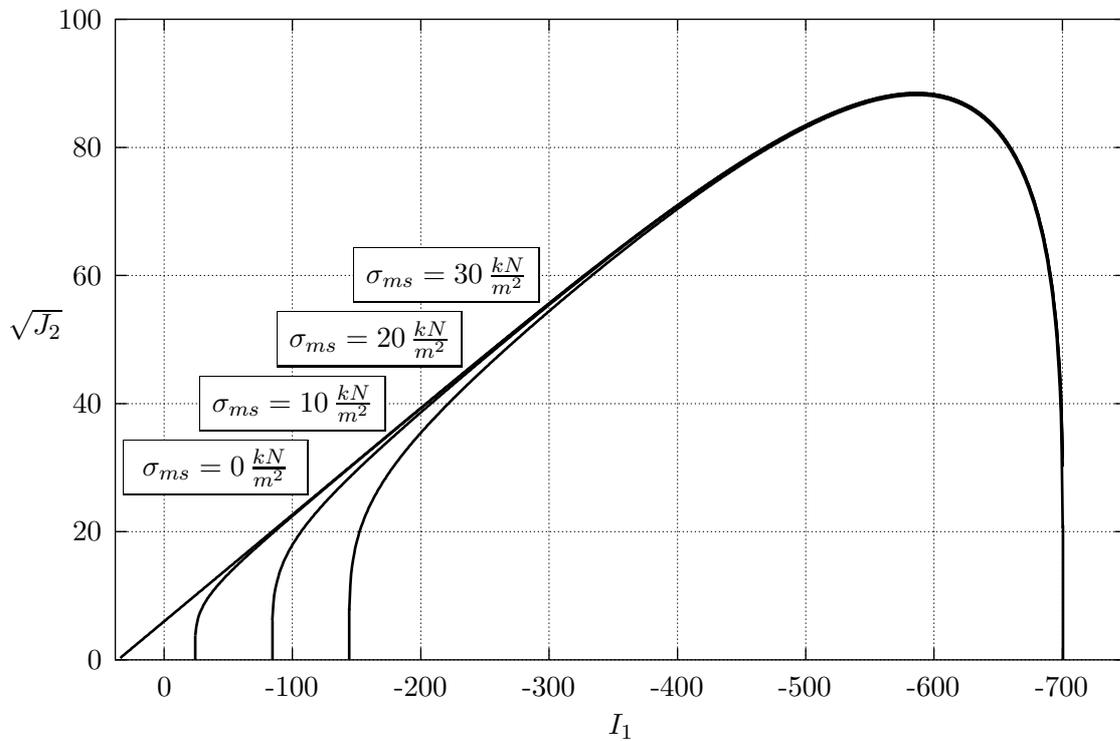
Dabei wird ein sechspannametrischer Ansatz

$$\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \gamma, n, \sigma_{ms}, k\} \quad (4.35)$$

verwendet, wobei $\gamma = \varrho_t/\varrho_c$ wiederum die Gestalt in der Deviatorebene bestimmt und die restlichen Parameter die Form in der hydrostatischen Ebene festlegen. Eine graphische Darstellung im Hauptspannungsraum für den allgemeinen Fall zeigt Abbildung 4.6, die deutlich sowohl die Ausrundungen im Zug- und Druckbereich als auch die angepasste Form in der Deviatorebene aufweist. Der Vorteil der gewählten Formulierung liegt zum einen darin, dass die Konvexität der Fließfläche für eine beliebige Wahl der Parameter gewährleistet bleibt und zum anderen in einer anschaulichen Bedeutung der einzelnen Koeffizienten. Den Einfluss der Parameter α , β , n und σ_{ms} auf die Gestalt der Fließfläche in der hydrostatischen Ebene veranschaulichen die Abbildungen 4.7 bis 4.10. Es wird folgendes deutlich:

- Die Parameter α und k definieren die Konusform, der die gesamte Fließfläche einbeschrieben ist. Dabei beschreibt α den Öffnungswinkel und k den Radius bei $I_1 = 0$. In Analogie zum DRUCKER–PRAGER–Modell können diese beiden Parameter aus dem Reibungswinkel φ und der Kohäsion c bestimmt werden (siehe Gleichungen 4.29). Mit $\alpha = \beta = 0$ kann eine Unabhängigkeit vom hydrostatischen Druckzustand erreicht werden und kohäsionslose Böden führen auf $k = 0$.
- Die Größe der Kappe im Druckbereich wird hauptsächlich durch den Parameter β beschrieben. Ist α bekannt, kann β aus einer Information über den natürlichen Konsolidationsdruck p_c , d.h. aus einer Angabe über die zweite Nullstelle der Fließfunktion auf der hydrostatischen Achse $f(I_1 = -3p_c) = 0$, berechnet werden. Mit $\beta = 0$ wird wieder eine im Druckbereich offene konusförmige Gestalt erreicht.
- Der Exponent n legt die Form der Abkappung fest. Durch die Wahl von $n > 0.5$ wird eine senkrechte Tangente am Kappenende und damit eine glatte Oberfläche gewährleistet. Wie aus Abbildung 4.9 ersichtlich ist, wird im Fall sehr hoher Werte (z.B. $n = 10$) näherungsweise ein cut-off im Druckbereich definiert. Der glatte Übergang zur Kappe bleibt jedoch erhalten.
- Mit Hilfe der Spannungsminderung $\sigma_{ms} \geq 0$ im Zugbereich wird schließlich die Ausrundung der Kegelspitze gesteuert. Sie stellt ein Maß für den Abstand der Nullstelle zur Kegelspitze dar, wobei der Unterschied der Funktion zum Konus für kleinere Werte immer geringer ausfällt.

Abbildung 4.7: Parameter α – ÖffnungswinkelAbbildung 4.8: Parameter β – Kappengröße im Druckbereich

Abbildung 4.9: Parameter n – KappenformAbbildung 4.10: Parameter σ_{ms} – Kappengröße im Zugbereich

Die verwendeten Parameter stellen zwar keine direkt messbaren Materialkennwerte dar, sind jedoch mittels Kurvenanpassung aus experimentellen Auswertungen bestimmbar. Der Vorteil dieser Formulierung liegt weiterhin darin, dass durch eine geeignete Wahl der Parameter bekannte Bruchkriterien beschrieben werden können. Mit $\gamma = n = 1$ und $\beta = \sigma_{ms} = 0$ ergibt sich der DRUCKER–PRAGER–Kegel und eine weitere Reduktion mittels $\alpha = 0$ führt zur Fließfunktion nach VON MISES.

Um die allgemeine Forderung nach Konvexität der Fließfläche einzuhalten, sind weiterhin die Bedingungen

$$\frac{r^2 + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 - r \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \right)}{\left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{3/2}} \geq 0 \quad (4.36)$$

für die Deviatorebene und

$$\frac{\partial^2 r}{\partial I_1^2} \leq 0 \quad (4.37)$$

für die hydrostatische Ebene zu erfüllen, wobei $r = r(I_1, \theta)$ den Radius der Fließfläche $\partial \mathbb{E}_\sigma$ in Abhängigkeit der Invarianten I_1 und des LODE–Winkels θ beschreibt. Bei der verwendeten Fließfunktion sind jedoch keine wesentlichen Einschränkungen zu beachten.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das beschriebene Einflächen–Modell sowohl in seiner kompakten Formulierung als auch in seiner Anwendbarkeit auf die numerische Analyse von Böden ein leistungsfähiges Werkstoffgesetz darstellt. Durch die glatte Oberfläche im Hauptspannungsraum kann die zweite Ableitung nach den Spannungen immer eindeutig ermittelt werden, so dass sich stabile Integrationsoperatoren ergeben. Es ist in der Lage ein kontraktant plastisches Verhalten unter Einbeziehen der Kohäsion zu beschreiben und liegt allen Berechnungen in dieser Arbeit zugrunde, bei denen bindige Böden analysiert werden.

4.4 Nicht-assozierte Fließregel

Um die Stabilität des Materials unter der Annahme eines elastoplastischen Materialverhaltens zu gewährleisten, postulierte DRUCKER in [53] unter anderem das Kriterium der *Konvexität* und der *Normalität*. Dies führte direkt zu einer *assozierten* Fließregel, bei der die Richtung der plastischen Dehnungen senkrecht zur Fließfläche $\partial \mathbb{E}_\sigma$ steht:

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.38)$$

Die absolute Größe der Inkremente wird dabei durch den LAGRANGESchen Multiplikator $\dot{\gamma}$ festgelegt. Spätere Untersuchungen [54] zeigten, dass die Normalität der Fließregel eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für ein stabiles Materialverhalten ist und für Böden ein zu restriktives Kriterium darstellt. Unter anderem wurde nachgewiesen, dass bei Anwendung einer assoziierten Fließregel die plastische Volumenexpansion bei Belastung im Mittel zu hoch eingeschätzt wird. Das *Prinzip der maximalen plastischen Dissipation* ist somit für Geomaterialien nicht anwendbar. Für realitätsnahe Aussagen werden deshalb bei Böden *nicht-assozierte* Fließregeln verwendet, die die Richtung des plastischen Fließens in Abhängigkeit der plastischen Potenzialfunktion g angeben:

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4.39)$$

Versuchsauswertungen in [94] und [189] haben gezeigt, dass das plastische Potenzial in der hydrostatischen Ebene von der Fließfunktion f abweicht und weniger flach geneigt verläuft. In

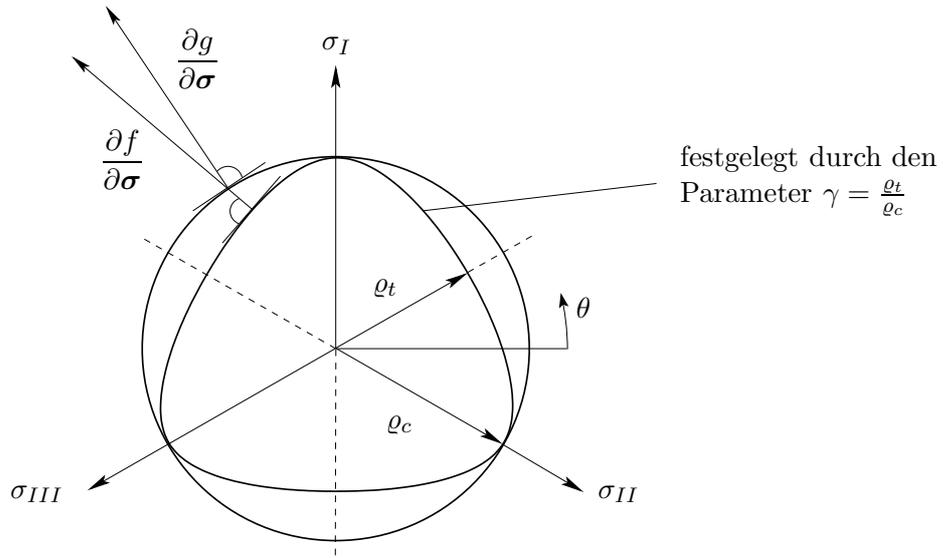


Abbildung 4.11: Plastisches Potenzial und Fließfunktion in der Deviatorebene

der Deviatorebene kann g in guter Näherung als Kreis abgebildet werden (siehe Abbildung 4.11). Hier vereinfacht sich eventuell die Formulierung im Vergleich zu f , da die Abhängigkeit vom LODE-Winkel θ entfällt. Im Folgenden wird die plastische Potenzialfunktion mit Hilfe desselben Ansatzes beschrieben, der auch für die Fließfunktion verwendet wird. Durch den geänderten Parametersatz

$$\mathcal{A}_g = \{\alpha_g, \beta_g, \gamma_g, n_g, \sigma_{ms,g}, k_g\} \tag{4.40}$$

ist es darüber hinaus möglich, die Richtung des plastischen Fließens sowohl in der deviatorischen als auch in der hydrostatischen Ebene realistisch anzugeben. Eine sinnvolle Formulierung für g mit einer kreisförmigen Gestalt in Deviatorebene ($\gamma_g = 1$) und unter Vernachlässigung des konstanten Terms k_g ergibt sich zu:

$$g = \left[J_2^{n_g} + (\beta_g^2 I_1^4)^{n_g} + \sigma_{ms,g}^{2n_g} \right]^{\frac{1}{2n_g}} + \alpha_g I_1 . \tag{4.41}$$

Im Fall granularer Böden mit $\beta_g = \beta = 0$ ist es somit durch eine Modifikation des Parameters α_g möglich, den Öffnungswinkel der Konusform zu variieren. Die Differenz zwischen α und α_g

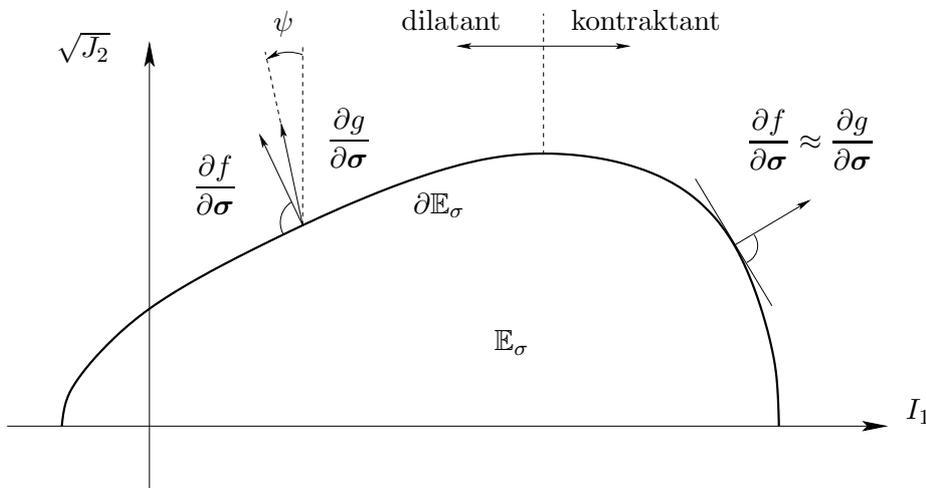


Abbildung 4.12: Illustration der nicht-assozierten Fließregel

lässt sich mit Hilfe des Dilatanzwinkels ψ beschreiben, der die Abweichung der Fließrichtung von der Deviatorebene angibt. Mit einer Wahl von α_g kann ein dilatant plastisches Verhalten definiert werden, das zwischen assoziierter Plastizität ($\alpha_g = \alpha$) und volumenkonstantem Fließen ($\alpha_g = 0$) variiert.

Sollen bindige Böden in Betracht gezogen werden, so kann mit dem Parameter β_g und n_g das plastische Potenzial so definiert werden, dass sich im Bereich der Kappen näherungsweise eine assoziierte ($\psi = 0$) und im übrigen Bereich eine nicht-assozierte Fließrichtung ($\psi > 0$) beschrieben wird. Damit ist es möglich sowohl dilatantes als auch kontraktantes Materialverhalten mit einer realistischen Volumenänderung abzubilden. Abbildung 4.12 veranschaulicht die Verhältnisse.

4.5 Erweiterung auf mikropolare Materialien

Die Erweiterung des klassischen Stoffgesetzes (4.5) in Ratenform zum COSSERAT-Kontinuum besteht zum einen in der getrennten Berücksichtigung der symmetrischen und antisymmetrischen Anteile des Verzerrungstensors bzw. des Krümmungstensors und zum anderen in einer konstitutiven Beziehung für den Momentenspannungstensor

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_\sigma : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_c, \quad (4.42)$$

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{C}_\mu : \dot{\boldsymbol{\kappa}}_c \quad (4.43)$$

mit den Stofftensoren

$$\mathbf{C}_\sigma = 2\mu \mathbb{I}^{sym} + 2\mu_c \mathbb{I}^{ant} + \lambda (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (4.44)$$

$$\mathbf{C}_\mu = 2\bar{\mu} \mathbb{I}^{sym} + 2\bar{\mu}_c \mathbb{I}^{ant} + \bar{\lambda} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}). \quad (4.45)$$

Dabei werden mit den Fundamentaltensoren vierter Stufe \mathbb{I}^{sym} und \mathbb{I}^{ant} die symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteile eines Tensors berechnet. Die Materialparameter werden um den COSSERAT-Schubmodul μ_c erweitert, der den Einfluss der antisymmetrischen Anteile des Verzerrungstensors auf die Spannungen definiert. Die Parameter $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}_c$ und $\bar{\lambda}$ stellen die korrespondierenden Größen für die Stoffbeziehungen der Momentenspannungen dar. Diese können prinzipiell in einer zu (4.42) und (4.44) analogen Form definiert werden. Da es ein bis jetzt ungelöstes Problem darstellt, diese Parameter aus Versuchsergebnissen einwandfrei zu bestimmen bzw. deren exakte mechanische Bedeutung zu definieren, wird für die Berechnungen eine aus den Arbeiten von DE BORST [29] übernommene vereinfachte Form verwendet:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = 2\mu_c l_c^2 \dot{\boldsymbol{\kappa}}_c. \quad (4.46)$$

Mit der Annahme $\bar{\lambda} = 0$ und $\bar{\mu} = \bar{\mu}_c = \mu_c l_c^2$ wird eine interne Längeneinheit l_c in die Formulierung eingebracht, deren regularisierender Charakter für die numerischen Berechnungen ausgenützt wird. Auch l_c stellt keinen festen Materialparameter dar, jedoch wird eine Kalibrierung des Modells an durchgeführten Berechnungen vereinfacht. Mit der Variation dieser internen Länge ist eine Änderung der Breite von Lokalisierungszonen verbunden. Durch die Vermessung von real auftretenden Scherbändern kann also ein Rückschluss auf die Größe von l_c getroffen werden. Numerische Untersuchungen über die Abhängigkeit der Scherbandbreite von der internen Länge wurden von VOLK durchgeführt [176].

Ausgehend von den Gleichungen (2.18) und (2.19) zur Definition der COSSERAT-Verzerrungs- und Krümmungstensoren, wird in Analogie zu (4.6) eine additive Aufspaltung in elastische und

plastische Anteile vorgenommen:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c^{pl}, \quad (4.47)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_c = \dot{\boldsymbol{\kappa}}_c^{el} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_c^{pl}. \quad (4.48)$$

Auch die Fließfunktion muss im Kontext der COSSERAT–Theorie angepasst werden [105]. Es ist nötig, die Momentenspannungen $\boldsymbol{\mu}$ als zusätzliche Größe zu integrieren:

$$f_c = f_c(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}). \quad (4.49)$$

Ob eine plastische Deformation auftritt hängt also nicht mehr allein vom Spannungszustand und den inneren Parametern ab. Bei Anwendung der J_2 –Plastizität kann der Einfluss der Momentenspannungen leicht als additiver Term berücksichtigt werden. Die zweite Invariante des Spannungsdeviatorortensors \mathbf{s} wird dabei durch den folgenden Ausdruck substituiert

$$\tilde{J}_2 = a_1 J_2^{sym} + a_2 J_2^{ant} + a_3 \frac{J_2^\mu}{l_c^2}, \quad (4.50)$$

mit den symmetrischen bzw. antimetrischen Anteilen

$$J_2^{sym} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^{sym} : \mathbf{s}^{sym}, \quad (4.51)$$

$$J_2^{ant} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^{ant} : \mathbf{s}^{ant}, \quad (4.52)$$

$$J_2^\mu = \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} : \boldsymbol{\mu}, \quad (4.53)$$

$$J_3^{sym} = \det(\mathbf{s}^{sym}). \quad (4.54)$$

Die Koeffizienten bzw. Wichtungen a_1 , a_2 und a_3 werden in der Literatur unterschiedlich besetzt. Von DE BORST [29, 31] werden beispielsweise die Werte $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ und $a_3 = 1$ vorgeschlagen. Aufgrund mikromechanischer Betrachtungen verwenden MÜHLHAUS und VARDOULAKIS [114] die Werte $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ und $a_3 = \frac{1}{4}$. Um abgesicherte Koeffizienten zu erhalten sind jedoch weitere experimentelle Untersuchungen notwendig. Die klassische Formulierung erhält man als Spezialfall mit $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ und $a_3 = 0$. Auch die Definition der effektiven plastischen Dehnungsrate muss im Rahmen der COSSERAT–Theorie entsprechend angepasst werden. Dies geschieht mit dem Ansatz

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{eff} = \sqrt{b_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl,sym} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl,sym} + b_2 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl,ant} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl,ant} + b_3 \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{pl} : \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{pl} l_c^2}. \quad (4.55)$$

Die Koeffizienten b_1 , b_2 und b_3 sind zusätzlich von der verwendeten Fließfunktion abhängig. Um im Fall des DRUCKER–PRAGER–Kriteriums eine zu \tilde{J}_2 energetisch korrespondierende Form zu erhalten, verwendet DE BORST beispielsweise die Werte $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_2 = 0$ und $b_3 = \frac{2}{3}$.

Mit Hilfe der Substitution (4.50) wird es möglich, in einfacher Weise mikropolare Stoffgesetze auf die in dieser Arbeit verwendete Fließfunktion anzuwenden. Es ergibt sich dann

$$f_c = \left[\left(a_1 m(\gamma, \theta)^2 J_2^{sym} + a_2 J_2^{ant} + a_3 \frac{J_2^\mu}{l_c^2} \right)^n + (\beta^2 I_1^4)^n + \sigma_{ms}^{2n} \right]^{\frac{1}{2n}} + \alpha I_1 - k = 0 \quad (4.56)$$

als mikropolare Fließfunktion mit der Deviatorausrundung

$$m(\gamma, \theta) = \left(\frac{1 + \gamma^4 + (1 - \gamma^4) \sin(3\theta)}{2 \gamma^4} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.57)$$

und der Definition des LODE-Winkels

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{\sqrt{27}}{2} \frac{J_3^{sym}}{(J_2^{sym})^{3/2}} \right). \quad (4.58)$$

Als plastische Potenzialfunktion wird auch im mikropolaren Fall ein identischer Ansatz mit variierten Parametern angenommen:

$$g_c = \left[\left(a_1 J_2^{sym} + a_2 J_2^{ant} + a_3 \frac{J_2^\mu}{l_c^2} \right)^{n_g} + (\beta_g^2 I_1^4)^{n_g} + \sigma_{ms,g}^{2n_g} \right]^{\frac{1}{2n_g}} + \alpha_g I_1. \quad (4.59)$$

Da die Momentenspannungen $\boldsymbol{\mu}$ in g_c auftauchen, wird mit dieser Festlegung des plastischen Potenzials auch eine nicht-assozierte Fließregel für die plastischen Krümmungsraten $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_c^{pl}$ definiert. Inwieweit diese Annahme der Realität entspricht muss ebenfalls durch weitere experimentelle Untersuchungen verifiziert werden.

Als Nachteil dieser Formulierung ist zu nennen, dass die Größen a_1 , a_2 und a_3 , die als Wichtungskoeffizienten den mikropolaren Einfluss auf die Fließfunktion ausmachen, derzeit nicht aus Versuchen bestimmt werden können. Berechnungsergebnisse belegen jedoch die Notwendigkeit, sowohl den antimetrischen Anteil des Spannungstensors als auch die Momentenspannungen in die Fließbedingung mit aufzunehmen [159].

Kapitel 5

Numerische Umsetzung

5.1 Definition des vollständigen Anfangs-Randwert-Problems

In den beiden letzten Kapiteln wurden die beherrschenden Differenzialgleichungen dargestellt, die das elastoplastische Deformationsverhalten wassergesättigter Böden bestimmen. Da sowohl die räumliche Koordinate \mathbf{x} als auch die zeitliche Koordinate t unabhängig voneinander auftreten, ergibt sich daraus ein Anfangs–Randwert–Problem, das wie folgt spezifiziert werden kann: Es bezeichnet im Fall von $\dim u$ Raumdimensionen $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{\dim u}$ die Referenzkonfiguration des zu berechnenden Mischungskörpers mit der glatten Oberfläche $\partial\mathcal{B}$. Weiterhin bezeichnet $\mathcal{I} = [0, T] \subset \mathbb{R}_+$ das zu behandelnde Zeitintervall. Gesucht sind dann das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, das Rotationsfeld $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ sowie das skalare Porenwasserdruckfeld $p(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{u} : \mathcal{B} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim u} , \quad (5.1)$$

$$\boldsymbol{\omega} : \mathcal{B} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim \omega} , \quad (5.2)$$

$$p : \mathcal{B} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R} , \quad (5.3)$$

die im Gebiet \mathcal{B} den folgenden lokalen *Differenzialgleichungen* genügen:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}) + \varrho\bar{\mathbf{b}} = 0 \quad \text{Impulsbilanz} \quad (5.4)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{Drallbilanz} \quad (5.5)$$

$$\operatorname{div} \left(\dot{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot (\operatorname{grad} p + \varrho^{FR}\bar{\mathbf{b}}) \right) = 0 \quad \text{Massenbilanz} \quad (5.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \operatorname{grad} \mathbf{u} - \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{Verzerrungskinetik} \quad (5.7)$$

$$\boldsymbol{\kappa} - \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{Verkrümmungskinetik} \quad (5.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = 0 \quad \text{Dehnungsratenbilanz} \quad (5.9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{el} - \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{pl} = 0 \quad \text{Krümmungsratenbilanz} \quad (5.10)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} - \mathbf{C}_\sigma^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \text{elastische Dehnungsrate} \quad (5.11)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{el} - \mathbf{C}_\mu^{-1} : \dot{\boldsymbol{\mu}} = 0 \quad \text{elastische Krümmungsrate} \quad (5.12)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad \text{plastische Dehnungsrate} \quad (5.13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{pl} - \dot{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 0 \quad \text{plastische Krümmungsrate} \quad (5.14)$$

$$\dot{\mathbf{q}} + \dot{\gamma} \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad \text{innere Variable} \quad (5.15)$$

$$\dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = 0 \quad \text{Konsistenzbedingung} \quad (5.16)$$

$$\dot{\gamma} - \frac{1}{\eta} \langle r(f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q})) \rangle = 0 \quad \text{Evolutionsgleichung (Viskoplastizität)} \quad (5.17)$$

Hier wurden zur besseren Übersichtlichkeit im Vergleich zum letzten Kapitel einige Schreibvereinfachungen verwendet. $\boldsymbol{\sigma}$ stellt den jetzt nicht mehr symmetrischen Spannungstensor des Korngerüsts dar, $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\kappa}$ bezeichnen die gesamten Verzerrungs- und Krümmungstensoren des Korngerüsts, also jeweils die Summe aus symmetrischen und antisymmetrischen Anteilen und $\boldsymbol{\omega}$ repräsentiert die Gesamtrotation der Mikropartikel als Summe der Kontinuumsrotation und der zusätzlich eingeführten COSSERAT-Mikrorotation. Die zusätzliche Evolutionsgleichung (5.14) wird aus der Annahme abgeleitet, dass die plastischen Verkrümmungen unabhängig von den plastischen Verzerrungen berechnet werden können. Alternativ ist es möglich mittels einer für die geometrisch lineare Berechnung zulässigen mikropolaren Kompatibilitätsbedingung $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{pl}$ als Funktion von $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ darzustellen. Diese Zwangsbedingung kann nach VOLK ebenfalls als Evolutionsbeziehung herangezogen werden [176].

Eine Sonderstellung nimmt die Gleichung der Massenbilanz (5.6) ein, da hier Zeitableitungen ($\dot{\boldsymbol{u}}$) und absolute Größen (p) der unabhängigen Feldvariablen gekoppelt auftreten. Diese Konstellation bewirkt im Gegensatz zur reinen Spannungs-Verformungs-Analyse, bei der nur eine *Pseudo-Zeitskala* zur Identifikation des inkrementellen Vorgehens definiert wird, eine implizite Abhängigkeit der Lösung von der Zeit als unabhängige Koordinate. Eine Skalierung erfolgt dabei durch die gewählte Größe der DARCY-Permeabilität \mathbf{K}_{Darcy} mit der Einheit $[\frac{m}{s}]$.

Neben diesen lokalen Differenzialgleichungen müssen *Anfangsbedingungen* erfüllt werden, die die zu Beginn des Betrachtungszeitraums $t = 0$ an jedem Ort \boldsymbol{x} herrschenden Verhältnisse wiedergeben. Im vorliegenden Fall wird deshalb gefordert:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t = 0) &= \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t = 0) &= \boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{x}) \\ p(\boldsymbol{x}, t = 0) &= p_0(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t = 0) &= \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, t = 0) &= \boldsymbol{\mu}_0(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t = 0) &= \boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \right\} \text{in } \mathcal{B}. \quad (5.18)$$

Weiterhin sorgen die *Randbedingungen* auf der Oberfläche $\partial\mathcal{B}$ für die Ankopplung des Körpers an das umgebende Medium. Hier kann in DIRICHLETSche Randbedingungen

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}(t) \quad \text{auf } \partial_u\mathcal{B} \quad (5.19)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \bar{\boldsymbol{\omega}}(t) \quad \text{auf } \partial_\omega\mathcal{B} \quad (5.20)$$

$$p = \bar{p}(t) \quad \text{auf } \partial_p\mathcal{B} \quad (5.21)$$

und in NEUMANNsche Randbedingungen

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}) = \bar{\boldsymbol{t}}(t) \quad \text{auf } \partial_\sigma\mathcal{B} \quad (5.22)$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \bar{\boldsymbol{m}}(t) \quad \text{auf } \partial_\mu\mathcal{B} \quad (5.23)$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{Q} = \bar{Q}(t) \quad \text{auf } \partial_Q\mathcal{B} \quad (5.24)$$

unterschieden werden. Dabei bezeichnen $\bar{\boldsymbol{u}}$, $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ und \bar{p} feste Werte für die Verschiebungen, Verdrehungen bzw. Porenwasserdrücke und $\bar{\boldsymbol{t}}$, $\bar{\boldsymbol{m}}$ und \bar{Q} eingeprägte Oberflächenkräfte, Oberflächenmomente bzw. Fluid-Flüsse. \boldsymbol{n} stellt den nach außen gerichteten Flächennormalenvektor dar. Für die Aufteilung der Oberfläche $\partial\mathcal{B}$ gilt dabei:

$$\partial_u\mathcal{B} \cup \partial_\sigma\mathcal{B} = \partial\mathcal{B} \quad \partial_u\mathcal{B} \cap \partial_\sigma\mathcal{B} = \emptyset \quad (5.25)$$

$$\partial_\omega\mathcal{B} \cup \partial_\mu\mathcal{B} = \partial\mathcal{B} \quad \partial_\omega\mathcal{B} \cap \partial_\mu\mathcal{B} = \emptyset \quad (5.26)$$

$$\partial_p\mathcal{B} \cup \partial_Q\mathcal{B} = \partial\mathcal{B} \quad \partial_p\mathcal{B} \cap \partial_Q\mathcal{B} = \emptyset \quad (5.27)$$

Es ist festzustellen, dass mit der Randbedingung (5.22) dem System freigestellt wird, ob die äußere Last \bar{t} im Randbereich durch Korngerüstspannungen oder Porenwasserdrücke aufgenommen wird. Dies stimmt mit Versuchsauswertungen überein, die belegen, dass das Verhältnis der Abtragungsmöglichkeiten von mehreren Faktoren wie z.B. der Belastungsgeschwindigkeit und der Permeabilität des Bodens abhängig ist. Eine schematische Veranschaulichung des Problems zeigt Abbildung 5.1.

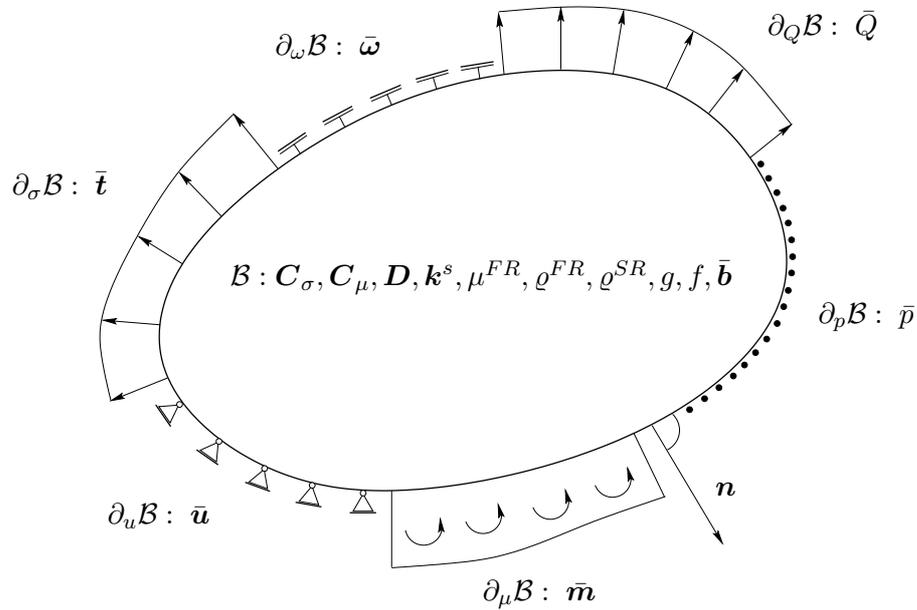


Abbildung 5.1: Randbedingungen des FE-Gebiets

5.2 Stabilität von Zeitintegrationsverfahren

Um das in Kapitel 5.1 definierte Anfangs–Randwert–Problem numerisch zu lösen, ist ein diskretes Verfahren zu entwickeln, das die Lösung der partiellen Differentialgleichungen in einem Gebiet \mathcal{B} und einem Zeitintervall \mathcal{I} in einer verlässlichen und effizienten Weise liefert [64]. Für die räumliche Koordinate wird in dieser Arbeit eine Diskretisierung mittels der adaptiven Finite–Element–Methode beschrieben. Jedoch spielt in diesem Zusammenhang auch die Auswahl eines geeigneten Verfahrens zur Zeitintegration des Anfangswert–Problems eine besondere Rolle. Hier sind deshalb einige wichtige Grundlagen vorzuschicken.

5.2.1 Klassifizierung

In der Literatur werden sehr unterschiedliche Zeitintegrationsverfahren vorgeschlagen, die sich bezüglich ihres Gültigkeits- bzw. Anwendungsbereichs teilweise stark unterscheiden. Die Aufgabe besteht darin, das gestellte Anfangswert–Problem zu gewissen diskreten Zeitpunkten $t = t_0, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots, T$ zu lösen. Eine erste Unterteilung kann in *explizite* bzw. *implizite* und *Einschritt-* bzw. *Mehrschritt-Verfahren* geschehen. Die Lösung eines Anfangswert–Problems zur Zeit t_{n+1} kann bei expliziten Verfahren in direkter Konsequenz der Lösung zur Zeit t_n angegeben werden. Dagegen beziehen implizite Verfahren die a priori unbekannte Lösung eines Zeitpunkts in der Zukunft $t \in [t_n, t_{n+1}]$ in die Berechnung mit ein. Dadurch werden oft iterative Strategien notwendig.

Einschrittverfahren berechnen die Lösung zur Zeit t_{n+1} lediglich in Abhängigkeit der Lösung zur Zeit t_n . Dem gegenüber werden bei Mehrschrittverfahren in der Zeit weiter zurück liegende

Lösungen $t_i < t_n$ zusätzlich verwendet. Da dies bei adaptiver Netzverfeinerung das Vorhalten von Daten auf verschiedenen Netzen und einen aufwändigen Datentransfer bzw. Interpolationsroutinen bedingt, spielen Mehrschrittverfahren in diesem Zusammenhang eine untergeordnete Rolle.

Eine weitere Klassifizierung verschiedener numerischer Methoden erfolgt im Hinblick auf ihre grundlegenden Eigenschaften bezüglich

- Genauigkeit und
- Stabilität.

Um ein Anfangs-Problem erfolgreich zu lösen, muss ein numerisches Verfahren sowohl gewisse Stabilitäts- als auch Genauigkeitsanforderungen erfüllen. Die Genauigkeit steht dabei in direkter Verbindung mit dem Diskretisierungsfehler der aus dem approximativen Charakter der numerischen Lösung resultiert und ist damit z.B. abhängig vom verwendeten Polynomgrad der Näherungslösung oder den getroffenen Annahmen für das Integrationsschema. Die Stabilität eines Verfahrens kann nur in Bezug zu der Klasse von Differenzialgleichungen bestimmt werden, auf die es angewandt wird.

5.2.2 Steife Differenzialgleichungen

Durch eine rein räumliche Diskretisierung der grundlegenden Gleichungen (5.4), (5.5) und (5.6) entsteht ein System von steifen differenzial-algebraischen Gleichungen in der Zeitkoordinate. Da lediglich die Kontinuitätsbedingung (5.6) eine Zeitabhängigkeit beinhaltet, enthält das System somit gewöhnliche Differenzialgleichungen als auch nichtlineare algebraische Gleichungen.

Die Eigenschaft der Steifheit besagt in diesem Zusammenhang, dass bei Anwendung expliziter Verfahren nicht mehr die Genauigkeitseigenschaften sondern die Stabilitätseigenschaften für die Wahl der Zeitschrittweite maßgebend werden, wenn eine gewisse Güte der Lösung erzielt werden soll (Fehler \leq Toleranz). Meist sind explizite Verfahren zur Integration steifer Differenzialgleichungen gänzlich ungeeignet, weil schon bei mittelsteifen Problemen unrealistisch kleine Schrittweiten maßgebend werden. Dies trifft vor allem auf die Klasse der expliziten RUNGE-KUTTA-Verfahren zu. Wesentliche Eigenschaften von steifen Differenzialgleichungen sind weiterhin:

- Es existieren (für gewisse Anfangsbedingungen) langsam veränderliche Lösungen.
- Lösungen in der Umgebung dieser “glatten” Lösungen nähern sich ihnen schnell an.

Man nennt diese Eigenschaft auch *Dissipativität* oder *Kontraktivität*. Zwei Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten nähern sich dann monoton an. Abbildung 5.2 veranschaulicht dieses Verhalten an einem Beispiel. Im Allgemeinen ist dies durch das Auftreten von Lösungskomponenten mit stark unterschiedlichen Geschwindigkeiten bedingt. Ein Vorteil besteht darin, dass sich Fehler in den Anfangswerten nicht stark fortpflanzen. Bei diskreten Verfahren mit größeren Schrittweiten würde dies zu einem Abdriften der Lösung führen [65]. Auch räumliche Diskretisierungen mit der Finite-Element-Methode führen zu steifen Differenzialgleichungen. Das Maß der Steifheit wird hauptsächlich von der Maschenweite beeinflusst und nimmt bei adaptiver Netzverfeinerung stark zu. Für eine verlässliche Lösung sind somit Zeitintegrationsverfahren anzuwenden, die bestimmte Stabilitätseigenschaften aufweisen.

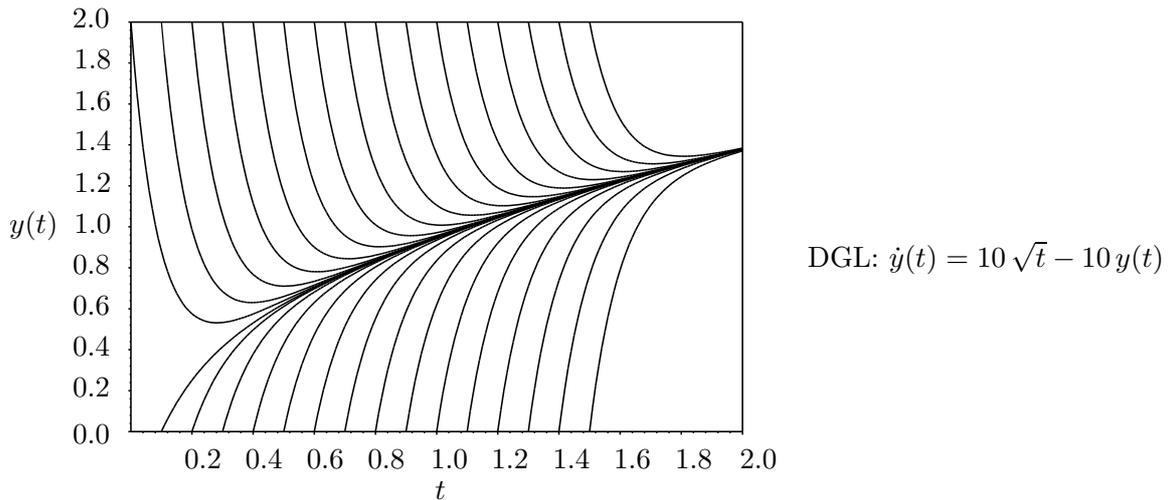


Abbildung 5.2: Kontraktivität steifer Differentialgleichungen

5.2.3 Stabilitätseigenschaften

Zur Einstufung der Stabilitätseigenschaften verschiedener numerischer Verfahren gegenüber steifen Differentialgleichungen wurde von DAHLQUIST ein Testproblem eingeführt:

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t) \quad \begin{cases} \lambda \in \mathbb{C} \\ \Re(\lambda) \leq 0 \\ y(0) = 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

Dabei bezeichnet $\Re(\lambda)$ den Realteil des komplexen Parameters λ . Die Anforderung an ein Integrationsschema besteht nun darin, für einen Startzeitpunkt t_0 und eine Schrittweite h eine Lösung zu liefern, die mit der exakten Lösung $y(t_0 + h) = e^{h\lambda} y(t_0)$ möglichst gut übereinstimmt. Insbesondere ist man an der Übertragung der folgenden Eigenschaften interessiert:

$$|y(t_0 + h)| \leq |y(t_0)| \quad \forall h > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h \Re(\lambda) \rightarrow -\infty} y(t_0 + h) = 0. \quad (5.29)$$

Die Näherungslösung zeigt dann ein der Exponentialfunktion ähnliches abklingendes Verhalten und verschwindet im Grenzfall. Je nach Gültigkeit dieser Eigenschaften für ein numerisches Verfahren wird ein A-stabiles bzw. L-stabiles Verhalten definiert. Ein Verfahren heißt dann A-stabil, wenn gilt:

$$|y(t_0 + h)| \leq |y(t_0)| \quad \text{bzw.} \quad R(z) = \left| \frac{y(t_0 + h)}{y(t_0)} \right| \leq 1, \quad (5.30)$$

wobei $R(z)$ mit $z = h\lambda$ als *Stabilitätsfunktion* des Verfahrens bezeichnet wird. Ein A-stabiles Verfahren beinhaltet als *Stabilitätsgebiet*

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| \leq 1\} \quad (5.31)$$

somit die gesamte linke komplexe Halbebene. Überträgt sich auch die Eigenschaft

$$\lim_{h \Re(\lambda) \rightarrow -\infty} y(t_0 + h) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Re(z) \rightarrow -\infty} R(z) = 0, \quad (5.32)$$

so spricht man von L-stabilen Verfahren.

| numerisches Verfahren | Stabilitätsfunktion | Stabilität | Genauigkeit |
|--|--|------------|-----------------------|
| EULER explizit | $R(z) = 1 + z$ | – | $\mathcal{O}(h)$ |
| EULER implizit | $R(z) = \frac{1}{1 - z}$ | L-stabil | $\mathcal{O}(h)$ |
| CRANK–NICOLSON (Trapezregel) | $R(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$ | A-stabil | $\mathcal{O}(h^2)$ |
| Time–Discontinuous–GALERKIN (linear) | $R(z) = \frac{2(3 + z)}{z^2 - 4z + 6}$ | L-stabil | $\mathcal{O}(h^3)$ |
| Time–Discontinuous–GALERKIN (quadratisch) | $R(z) = \frac{3(z^2 + 8z + 20)}{-z^3 + 9z^2 - 36z + 60}$ | L-stabil | $\mathcal{O}(h^5)$ |
| RUNGE–KUTTA (implizit) | $R(z) = \frac{\det(\mathbf{I} - z\mathbf{A} + z\mathbf{1}\mathbf{b}^T)}{\det(\mathbf{I} - z\mathbf{A})}$ | L-stabil | $\geq \mathcal{O}(h)$ |

Tabelle 5.1: Vergleich von Stabilität und Genauigkeit verschiedener Zeitintegrationsverfahren

Tabelle 5.1 zeigt anhand der Stabilitätsfunktionen, dass sowohl die Klasse der impliziten RUNGE–KUTTA–Verfahren mit dem bekannten Spezialfall des impliziten EULER Verfahrens als auch die Klasse der Time–Discontinuous–GALERKIN–Verfahren L–stabil sind und damit zur Lösung von steifen Differenzialgleichungen angewendet werden können. In der Literatur wurde vielfach das CRANK–NICOLSON–Schema auf das Konsolidierungsproblem angewandt [74, 101, 173]. Es ist zwar von 2. Ordnung genau, jedoch wegen $\lim_{\Re(z) \rightarrow \infty} R(z) \rightarrow -1$ nicht L–stabil. Für das numerische Lösungsverhalten bleibt die Stabilität zwar gewahrt, jedoch beobachtet man oft starke Oszillationen um die exakte Lösung. Ein Beispiel in Kapitel 6.9 belegt dieses Verhalten. Das implizite EULER–Verfahren führt aufgrund seiner eingeschränkten Genauigkeit (1. Ordnung) zur Notwendigkeit, kleinere Schrittweiten zu verwenden. Von ELLSIEPEN wurden daher implizite RUNGE–KUTTA–Verfahren (SDIRK) höherer Ordnung verwendet [62]. In diesem Kapitel wird auch im Hinblick auf die Konstruktion eines Verfahrens zur adaptiven Zeitschrittsteuerung eine kombinierte Raum–Zeit–Diskretisierung auf der Basis des L–stabilen Time–Discontinuous–GALERKIN–Verfahrens vorgeschlagen.

5.3 Lösungsstrategie

Aus der vollständigen Definition des Anfangs–Randwert–Problems ergibt sich ein im mathematischen Sinn gut gestelltes Problem, dem ein eindeutiges Ergebnis zugeordnet werden kann. Bedingt durch die nichtlineare Kopplung der einzelnen Teilgleichungen ist eine simultane Lösung der unbekanntenen Feldgleichungen \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$, p , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$ und \mathbf{q} nicht vorteilhaft zu bewerkstelligen. Dies wird zwar von einigen Autoren durchgeführt [82], resultiert aber in sehr großen Gleichungssystemen mit großen Bandbreiten. Im Folgenden wird deshalb eine Aufspaltung des Gesamtproblems in die Verformungs–Porenwasserdruck–Analyse und die Spannungs–Verzerrungs–Analyse erfolgen. Die Erfüllung aller Grundgleichungen geschieht dabei mittels eines iterativen *Prädiktor–Korrektor–Algorithmus*. Ausgehend von der konsistent linearisierten Form der Spannungs–Dehnungs–Beziehung werden in einer globalen Iteration die inkrementellen Zuwächse der primären unbekanntenen Feldvariablen \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$ und p für den aktuellen Zeitschritt bestimmt. Sind

diese bekannt, können mittels einer nachlaufenden Spannungsintegration auf lokaler Integrationspunktebene die sekundären Feldgrößen σ , μ und q auf der Basis des gewählten Werkstoffgesetzes ermittelt werden. Da die lokalen Gleichungen entkoppelt formuliert werden, kann diese Bestimmung für jeden räumlichen Integrationspunkt separat durchgeführt werden, was zu einer wesentlichen Reduzierung der benötigten Rechenzeit führt. Im Falle eines inelastischen Verhaltens muss die Angleichung zwischen einwirkenden äußeren und widerstehenden inneren Kräften mit weiteren globalen Korrektorschritten erreicht werden. Sowohl für die globale als auch für die lokale Iteration werden im Rahmen dieser Arbeit NEWTON-Verfahren angewendet, die bei konsistenter Linearisierung der zugrunde liegenden Gleichungen ein quadratisches Konvergenzverhalten und optimale Stabilitätseigenschaften aufweisen.

In der weiteren Gliederung dieser Arbeit wird zuerst auf die globale Formulierung und anschließend auf die Darstellung der Spannungsintegration eingegangen. Dieses Vorgehen erzwingt zwar das vorzeitige Einführen des bis dahin noch nicht vorgestellten *konsistenten Tangentenoperators* C^{ct} , fördert jedoch die Übersichtlichkeit, da der Berechnungsablauf chronologischer dargestellt werden kann.

5.4 Finite-Element-Formulierung

Da sich die gesamte Problemstellung bei der Analyse wassergesättigter Böden aus einem System von gekoppelten und zugleich hochgradig nichtlinearen Differenzialgleichungen zusammensetzt, ist eine analytisch exakte Lösung nur in Ausnahmefällen möglich. Schon für einfach berandete Gebiete mit trivialer Laststellung muss daher auf approximative Lösungsverfahren zurückgegriffen werden. Dieser Abschnitt befasst sich deshalb mit der Konstruktion eines Näherungsverfahrens im Rahmen der Finite-Element-Methode, die sich für derartig gestaltete Problemstellungen als äußerst leistungsfähig erwiesen hat [15]. Um das für die FEM benötigte globale Gleichungssystem zu erhalten, sind die folgenden Schritte durchzuführen:

- Übergang zu einer äquivalenten integralen Formulierung,
- Wahl der Wichtungsfunktionen,
- Diskretisierung des Raum-Zeit-Kontinuums.

5.4.1 Übergang zur integralen Formulierung

Für den Übergang von der differentiellen zur äquivalenten integralen oder schwachen Formulierung stehen mehrere Möglichkeiten zur Auswahl. Für die Spannungs-Verformungs-Analyse im Rahmen der Standard-FEM werden dafür hauptsächlich *Arbeits-* bzw. *Variationsprinzip* verwendet. Bei Problemen, für die solche Prinzipie nicht zur Verfügung stehen, haben sich auch Optimierungsverfahren wie die *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* als leistungsfähig erwiesen. Im Folgenden wird für die hier vorgestellte gekoppelte Verformungs-Porenwasserdruck-Analyse ein erweitertes *Prinzip der virtuellen Arbeiten* vorgestellt. Dabei wird neben einer Semidiskretisierung mit zeitlich kontinuierlichen Verläufen auch eine zeitlich diskontinuierliche Diskretisierung im Sinne des Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahrens vorgestellt, wobei eine zusätzliche Berücksichtigung der Sprungterme im Arbeitsprinzip notwendig wird.

Eine alternative Vorgehensweise, die zwar nicht physikalisch motiviert ist, aber oft zur gleichen Struktur der Integralaussagen führt, liefert die *Methode der gewichteten Residuen*. Dieses Näherungsverfahren ist allgemein auf die Lösung von Differenzialgleichungen der Form

$$G(\mathbf{u}) = 0 \tag{5.33}$$

mit gegebenen Rand- bzw. Anfangsbedingungen anwendbar und wird im Folgenden dazu verwendet, die Äquivalenz des später vorgestellten Arbeitsprinzips mit den differenziellen Grundgleichungen und den statischen Randbedingungen zu zeigen. Grundlage ist eine auf der Basis von Ansatzfunktionen und geeigneten Freiwerten konstruierte approximative Lösung \mathbf{v} , die als Voraussetzung nur die Rand- bzw. Anfangsbedingungen erfüllt. Da nur die exakte Lösung $\hat{\mathbf{u}}$ die Differentialgleichung im gesamten Berechnungsgebiet identisch erfüllt ($G(\hat{\mathbf{u}}) \equiv 0$), diese aber im Allgemeinen nicht durch die gewählten Ansatzfunktionen (z.B. Polynome) darstellbar ist, ergibt sich bei Auswertung mit der Näherungslösung \mathbf{v} ein Fehler, das Residuum

$$\mathbf{R} = G(\mathbf{v}) . \quad (5.34)$$

Dieser residuale Fehler wird somit nie identisch zu Null, obwohl er an einzelnen Stellen durchaus verschwinden kann. Die Methode der gewichteten Residuen erzwingt nun, dass das Integral dieses Residuums über das Berechnungsgebiet Ω multipliziert mit einer noch zu wählenden *Wichtungsfunktion* Ψ verschwindet:

$$\int_{\Omega} \Psi \cdot \mathbf{R}(\mathbf{v}) \, dV = 0 . \quad (5.35)$$

Die Differentialgleichung (5.33) wird somit nur im integralen Mittel erfüllt. Aus (5.35) ergeben sich schließlich die algebraischen Bestimmungsgleichungen für die Freiwerte, die die approximierte Lösung festlegen. Diese stellt dann die optimalste Lösung im Raum der Ansatzfunktionen dar. Nur im Spezialfall einer durch die Ansätze exakt darstellbaren strengen Lösung liefert die Methode der gewichteten Residuen auch verschwindende Residuentерme.

Für die oben angegebenen Grundgleichungen der Impulserhaltung (5.4), der Drehimpulserhaltung (5.5) und der Massenerhaltung (5.6) wird dieses Verfahren im Folgenden konsequent angewendet. Es entstehen die folgenden integralen Aussagen:

$$\text{Anteil aus Impulserhaltung:} \quad \int_{\mathcal{B}} \Psi_u \cdot \left[\operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}) + \varrho \bar{\mathbf{b}} \right] \, dV , \quad (5.36)$$

$$\text{Anteil aus Drehimpulserhaltung:} \quad \int_{\mathcal{B}} \Psi_\omega \cdot \left[\operatorname{div} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \right] \, dV , \quad (5.37)$$

$$\text{Anteil aus Massenerhaltung:} \quad \int_{\mathcal{B}} \Psi_p \left[\operatorname{div} \left(\dot{\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot (\operatorname{grad} p + \varrho^{FR} \bar{\mathbf{b}}) \right) \right] \, dV . \quad (5.38)$$

In diesem gekoppelten System weisen die ersten beiden Anteile (5.36) und (5.37) die Charakteristik eines elliptischen Randwertproblems auf. Erst durch den zusätzliche Anteil (5.38) wird im Gesamtzusammenhang das parabolische Anfangs–Randwert–Problem definiert. Dementsprechend wird neben der bereits hier durchgeführten Integration über das Gebiet \mathcal{B} später auch eine Integration über das Zeitintervall \mathcal{I} nötig. Unter Verwendung des Divergenztheorems für einen Tensor zweiter Stufe \mathbf{T}

$$\operatorname{div} [\Psi_u \cdot \mathbf{T}] = \Psi_u \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} + [\operatorname{grad} \Psi_u] : \mathbf{T} \quad (5.39)$$

und des Divergenztheorems für einen Vektor \mathbf{v}

$$\operatorname{div} [\Psi_p \mathbf{v}] = \Psi_p \operatorname{div} \mathbf{v} + [\operatorname{grad} \Psi_p] \cdot \mathbf{v} \quad (5.40)$$

kann eine Verschiebung der Gradienten auf die Wichtungsfunktion erreicht werden. Eine Anwendung der Gleichungen (5.39) und (5.40) auf die obigen integralen Aussagen (5.36), (5.37) und (5.38) führt zu:

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \left(\Psi_u \cdot (\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}) \right) - [\operatorname{grad} \Psi_u] : (\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}) + \Psi_u \cdot \varrho \bar{\mathbf{b}} \, dV, \quad (5.41)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} (\Psi_\omega \cdot \boldsymbol{\mu}) - [\operatorname{grad} \Psi_\omega] : \boldsymbol{\mu} - \Psi_\omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dV, \quad (5.42)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \left(\Psi_p \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot (\operatorname{grad} p + \varrho^{FR} \bar{\mathbf{b}}) \right) - [\operatorname{grad} \Psi_p] \cdot \left[\frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot (\operatorname{grad} p + \varrho^{FR} \bar{\mathbf{b}}) \right] + \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} \, dV. \quad (5.43)$$

Eine weitere Umformung kann unter Verwendung des GAUSSSchen Integralsatzes erfolgen. Für einen Vektor \mathbf{v} ist dieser definiert als

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dA. \quad (5.44)$$

Dabei steht dA für ein differenzielles Oberflächenelement auf $\partial\Omega$ und \mathbf{n} bezeichnet den nach außen gerichteten Normalenvektor zu dA . Beachtet man die Aufteilung der Ränder $\partial\mathcal{B} = \partial_u\mathcal{B} \cup \partial_\sigma\mathcal{B}$ und lässt ausschließlich auf $\partial_u\mathcal{B}$ verschwindende Wichtungsfunktionen Ψ_u zu, so entfällt das Residuum $\mathbf{n} \cdot [\Psi_u \cdot (\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I})]$ auf $\partial_u\mathcal{B}$. Wird weiterhin die Randbedingung (5.22) substituiert, so entsteht unter Verwendung des HAMILTON-Operators ∇ die integrale Formulierung des Gleichgewichtsanteils

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla \Psi_u : \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \nabla \Psi_u : p\mathbf{I} \, dV - \int_{\partial_\sigma\mathcal{B}} \Psi_u \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_{\mathcal{B}} \Psi_u \cdot \varrho \bar{\mathbf{b}} \, dA. \quad (5.45)$$

Eine analoge Vorgehensweise wird für die Drallbilanz- und die Massenbilanzanteile eingeschlagen. Auch hier werden nur auf $\partial_\omega\mathcal{B}$ bzw. $\partial_p\mathcal{B}$ verschwindende Wichtungsfunktionen Ψ_ω und Ψ_p zugelassen. Dadurch entfällt zum einen das Residuum aus $\mathbf{n} \cdot [\Psi_\omega \cdot \boldsymbol{\mu}]$ auf der Oberfläche $\partial_\omega\mathcal{B}$ und zum anderen das Residuum aus $\mathbf{n} \cdot \left[\Psi_p \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot (\operatorname{grad} p + \varrho^{FR} \bar{\mathbf{b}}) \right]$ auf $\partial_p\mathcal{B}$. Aus (5.42) folgt dann die integrale Formulierung des Anteils aus der Drehimpulserhaltung

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla \Psi_\omega : \boldsymbol{\mu} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \Psi_\omega \cdot \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\partial_\mu\mathcal{B}} \Psi_\omega \cdot \bar{\mathbf{m}} \, dA. \quad (5.46)$$

Durch die Einführung der Schreibvereinfachung für die Oberflächen-Fluid-Flüsse

$$\bar{Q} = \mathbf{n} \cdot \left[\frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot (\operatorname{grad} p + \varrho^{FR} \bar{\mathbf{b}}) \right] \quad (5.47)$$

und der Umformung

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = \nabla \dot{\mathbf{u}} : \mathbf{I} \quad (5.48)$$

entsteht für die integrale Formulierung des Massenbilanzanteils

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla \Psi_p \cdot \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot \nabla p \, dV + \int_{\mathcal{B}} \nabla \Psi_p \cdot \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot \varrho^{FR} \bar{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\mathcal{B}} \Psi_p \nabla \dot{\mathbf{u}} : \mathbf{I} \, dV - \int_{\partial_Q\mathcal{B}} \Psi_p \bar{Q} \, dA. \quad (5.49)$$

5.4.2 Wahl der Wichtungsfunktionen

Für die Wichtungsfunktionen Ψ lässt sich fast jedes System unabhängiger Funktionen verwenden. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass die Eigenschaften der resultierenden Integrationsverfahren durch die Verwendung unterschiedlicher Wichtungskonzepte im Hinblick auf Genauigkeit und Stabilität entscheidend beeinflusst werden können. Entsprechend des gewählten Typs haben sich im Wesentlichen die drei folgenden Varianten durchgesetzt:

- punktweise Kollokation,
- PETROV–GALERKIN–Verfahren,
- GALERKIN–Verfahren.

Mit dem Verfahren der punktuweisen Kollokation wird der residuale Fehler an einzelnen spezifizierten Punkten innerhalb des Gebiets Ω zu Null erzwungen. Dies wird durch die Wahl von DIRAC–Funktionen δ als Wichtungsgrößen an diesen Punkten erreicht. Durch die Eigenschaft

$$\int_{\Omega} \delta \, dV = 1 \quad (5.50)$$

liegt damit im engeren Sinne nur eine Pseudo–Integration vor, da alle anderen Punkte des Integrationsgebiets ihren Einfluss auf die Lösung verlieren. Kollokationsverfahren werden im Rahmen der FEM hauptsächlich für die Integration im Zeitbereich eingesetzt.

Beim PETROV–GALERKIN–Verfahren werden für die Wichtungsfunktionen Ansätze über das gesamte Gebiet verwendet, die prinzipiell frei wählbar sind und auch von der FE–Lösung abhängig sein können. Dies wird z.B. bei stabilisierten Verfahren der GALERKIN–Least–Squares–Methoden oder dem Streamline–Upwind–PETROV–GALERKIN–Verfahren ausgenützt [173].

Das Verfahren von GALERKIN stellt einen Spezialfall des allgemeineren PETROV–GALERKIN–Verfahrens dar und wird sehr oft bei Elementformulierungen im Rahmen der FEM verwendet. Es ist geprägt von einem einheitlichen Ansatz–Wichtungs–Konzept, bei dem für die Wichtungsfunktionen diesselben Ansätze zur Anwendung kommen wie für die unbekanntenen FE–Variablen. Häufig – jedoch nicht immer – führt dieses Vorgehen zu symmetrischen Gleichungssystemen und somit zu einer Vereinfachung des Berechnungsablaufs bei der Gleichungslösung. Für viele Problemstellungen, wie auch hier im Fall der gekoppelten Verformungs–Porenwasserdruck–Analyse, lässt sich eine Äquivalenz mit den zugehörigen Arbeitsprinzipien ableiten, wenn die Wichtungsfunktionen als virtuelle Größen gedeutet werden. Also beispielsweise

$$\Psi_u = \delta \mathbf{u} \, , \quad (5.51)$$

$$\Psi_\omega = \delta \boldsymbol{\omega} \, , \quad (5.52)$$

$$\Psi_p = \delta p \, . \quad (5.53)$$

Da der residuale Fehler infolge der approximierten Lösung verteilt im Raum- und Zeitbereich auftritt, sollte er ebenfalls verteilt gewichtet werden. HUCKFELDT macht bei der gekoppelten Verschiebungs–Temperatur–Analyse von Beton die Erfahrung, dass GALERKINSche Wichtungsverfahren im Zeitbereich entscheidende Vorteile besitzen [83]. Speziell wurde festgestellt, dass die Stabilitätseigenschaften der Zeitintegrationsverfahren verbessert werden konnten. Auch im Rahmen dieser Arbeit wird dieses Konzept bevorzugt.

5.4.3 Diskretisierung des Raum-Zeit-Kontinuums

Die Konstruktion einer Näherungslösung von Anfangs-Randwert-Problemen stützt sich im Regelfall auf eine Approximation der unbekanntten Feldgrößen mit Hilfe von räumlich und zeitlich begrenzten Ansatzfunktionen. In diesem Zusammenhang sind mehrere Vorgehensweisen denkbar. ASKES verwendet beispielsweise die Element-Free-GALERKIN-Methode [4]. Diese Diskretisierungsvariante kommt ohne feste Elementbeziehungen aus und definiert Ansatzfunktionen allein auf der Basis von Knoten mit definierten Einflussbereichen. Vorteile ergeben sich aus diesem Grund bei der Nicht-lokalen Kontinuumsformulierung. Da jedoch aufwendige *moving-least-squares-Prozeduren* eingesetzt werden müssen und Randbedingungen nur über Nebenbedingungen wie z.B. *penalty-Formulierungen* einbezogen werden können, beobachtet man sehr oft numerische Instabilitäten. Im Rahmen dieser Arbeit wird deshalb auf die im Allgemeinen stabilere Finite-Element-Methode zurückgegriffen. Dabei erfolgt eine Unterteilung des zu untersuchenden Raum-Zeit-Kontinuums in endliche, sich nicht überlappende Bereiche, sogenannte finite Elemente:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\mathcal{N}_E} \mathcal{B}^i . \quad (5.54)$$

Auf der Basis von diskreten Freiwerten an den Elementknoten werden Ansatzfunktionen in Polynomform über dem Elementgebiet definiert, die den Verlauf der Beschreibungsvariablen, also den Verlauf der Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, der Verdrehungen $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ und der Porenwasserdruck $p(\mathbf{x}, t)$ approximieren. Durch elementweise definierte Basisfunktionen im Sinne kompakter Träger werden die räumlichen Abhängigkeiten der Koeffizienten beschränkt. Dies führt zu schwach besetzten Gleichungssystemen mit ausgeprägter Bandstruktur und somit zu einem minimierten Lösungsaufwand. Durch den Einsatz von *Bandbreitenoptimierern*, die eine optimale Organisation der Freiwerte bewerkstelligen, lässt sich dieser positive Effekt der Finite-Element-Methode effizient ausnutzen. Besonders im Hinblick auf ortsadaptive Strategien sind Bandbreitenoptimierer unerlässlich und führen oft zu einer signifikanten Reduktion der Zeit, die zur Lösung der Gleichungssysteme benötigt wird.

Hier sei angemerkt, dass das Berechnungsgebiet \mathcal{B} oft nicht exakt mit einer Geometrieapproximation in Form von Polynomen dargestellt werden kann. Dies trifft z.B. auf kreisförmige Ausschnitte im Gebiet zu. Mit zunehmender Netzverfeinerung tritt dieser Effekt in den Hintergrund, da sich die Abweichung zwischen Kreis und Polynom-Approximation bei kleineren Elementlängen stetig verringert. Mit Hilfe von Hintergrunddaten zur Beschreibung der exakten Geometrie muss jedoch die Anpassung der Knotenkoordinaten bei der Netzgenerierung berücksichtigt werden. In der vorliegenden Arbeit werden derartige Techniken nicht weiter verfolgt.

Im Folgenden werden zwei alternative Diskretisierungsmöglichkeiten verglichen. Zum einen wird ein Verfahren vorgestellt, das auf einer zeitlich kontinuierlichen Approximation der unbekanntten Feldgrößen beruht und auf einem Zeitschrittalgorithmus aufbaut, bei dem abhängig von bekannten Anfangsbedingungen die Zustandsvariablen am Intervallende berechnet werden. Die Grundlage bildet dabei ein auf das Mehrphasenproblem erweitertes Prinzip der virtuellen Arbeiten. Da dieses Verfahren in verschiedenen Belangen zu unbefriedigenden Ergebnissen führt, wird zum anderen eine Methode auf der Basis von Raum-Zeit-Elementen entwickelt, bei der eine diskontinuierliche Zeitdiskretisierung eingesetzt wird. Die Entwicklung dieser Methode stellt einen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit dar.

5.5 Zeitschrittalgorithmus mit kontinuierlicher Approximation

Als Ausgangspunkt für eine Diskretisierung wird in diesem Fall die folgende Variationsgleichung verwendet, die die virtuellen Arbeiten der Spannungen, Momentenspannungen und Porenwasserdrücke sowie die der eingepprägten Kräfte bzw. Fluid-Flüsse bilanziert:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta \mathbf{u} : p \mathbf{I} dV - \int_{\partial_{\sigma} \mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} dA - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \varrho \bar{\mathbf{b}} dV + \\
 & \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta \boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{\mu} dV + \int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\partial_{\mu} \mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\omega} \cdot \bar{\mathbf{m}} dA + \\
 & \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta p \cdot \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot \nabla p dV - \int_{\mathcal{B}} \delta p \nabla \dot{\mathbf{u}} : \mathbf{I} dV + \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta p \cdot \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot \varrho^{FR} \bar{\mathbf{b}} dV - \int_{\partial_Q \mathcal{B}} \delta p \bar{Q} dA dt = 0 .
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Durch einen Vergleich mit den Gleichungen (5.45), (5.46) und (5.49) wird deutlich, dass eine GALERKINSche Wichtung mit $\Psi_u = \delta \mathbf{u}$, $\Psi_\omega = \delta \boldsymbol{\omega}$ und $\Psi_p = \delta p$ eine äquivalente Struktur der Grundgleichungen erzeugt, wenn zusätzlich eine Zeitintegration der Massenbilanzgleichung berücksichtigt wird. Zum anderen ist unter Verwendung des *Fundamentallemmas der Variationsrechnung* ein Rückschluss auf die lokalen Differenzialgleichungen und die statischen Randbedingungen möglich.

Wie bereits oben erwähnt erfolgt die Approximation der primären Unbekannten hier mit Polynomansätzen, die über die räumlichen Elementengrenzen stetig verlaufen und die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Für die räumliche Diskretisierung werden isoparametrische, zweidimensionale Elemente der SERENDIPITY- bzw. LAGRANGE-Klasse verwendet, die lineare bzw. quadratische Ansatzfunktionen aufweisen. Auch im Rahmen einer adaptiven Netzverfeinerungsstrategie werden ausschließlich 4-, 8- und 9-Knoten Elemente eingesetzt.

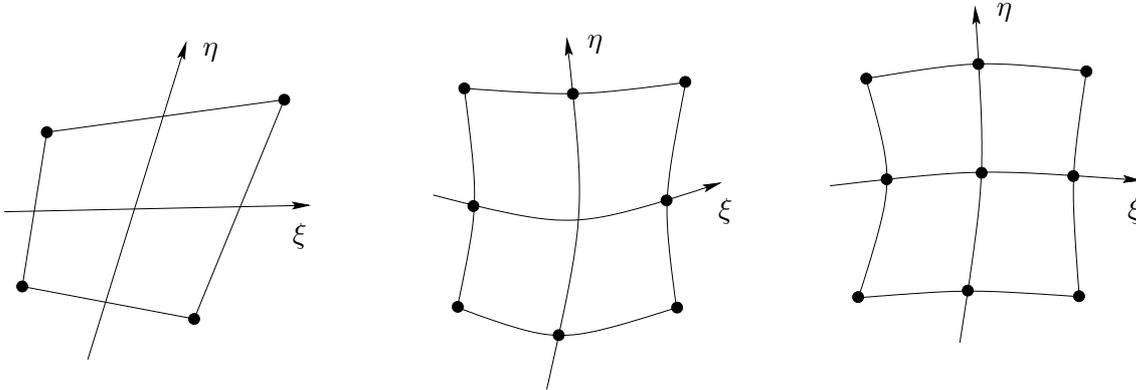


Abbildung 5.3: Isoparametrische 4-, 8- und 9-Knotenelemente

Dabei werden die gesuchten Feldvariablen und deren Variation mit denselben Formfunktionen beschrieben:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} , \quad \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_u \delta \hat{\mathbf{u}} , \tag{5.56}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\omega \hat{\boldsymbol{\omega}} , \quad \delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_\omega \delta \hat{\boldsymbol{\omega}} , \tag{5.57}$$

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_p \hat{p} , \quad \delta p(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_p \delta \hat{p} , \tag{5.58}$$

wobei $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ und \hat{p} die Vektoren der Knotenfreiwerte darstellen und \mathbf{N}_u , \mathbf{N}_ω bzw. \mathbf{N}_p die Ansatzfunktionen für die Verschiebungen, Verdrehungen und die Porenwasserdrücke bezeichnen.

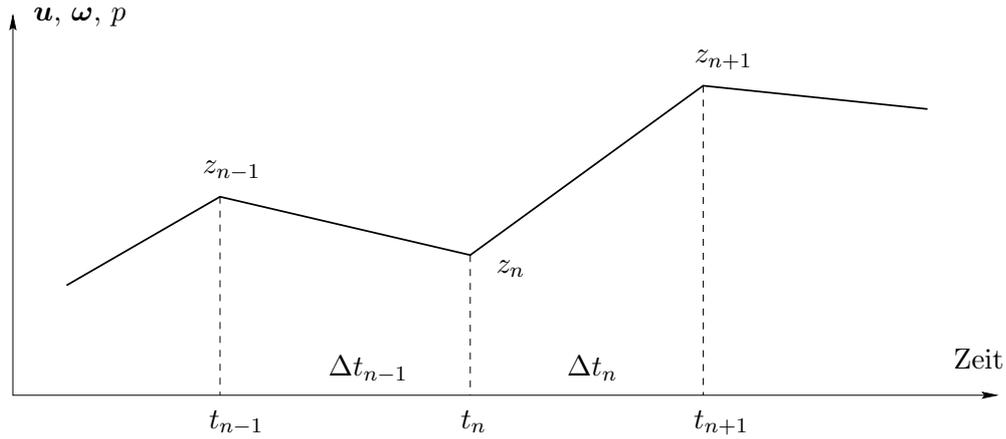


Abbildung 5.4: Kontinuierliche Zeitdiskretisierung

Der zu berechnende Zeitbereich $\mathcal{I} = [0, T]$ wird in eine Anzahl von Teilintervalle $\mathcal{I}_n = [t_n, t_{n+1}]$ mit der nicht notwendig konstanten Zeitschrittweite $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ unterteilt. Die Zeitpunkte

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < T \quad (5.59)$$

legen somit die Diskretisierung des Zeitbereichs fest. Werte für die primären Feldgrößen werden ausschließlich an den diskreten Zeitpunkten berechnet. Die eigentlichen zeitlichen Verläufe ergeben sich dann aus einer linearen Interpolation. Für die Integration über ein Zeitintervall werden vorerst kontinuierliche und linear veränderliche Zustandsgrößen angenommen. Ausgehend von den Werten am Intervallanfang werden schrittweise die Werte an den diskreten Zeitpunkten t_{n+1} bestimmt. Zu Beginn der Berechnung werden die vorgegebenen Anfangsbedingungen als Startwerte festgelegt. Das in der Variationsgleichung (5.55) auftretende Zeitintegral wird folgendermaßen aufgelöst:

$$\int_{\mathcal{I}_n} \dot{\mathbf{u}} dt = \Delta t_n \dot{\mathbf{u}} = \Delta \mathbf{u}_n, \quad (5.60)$$

$$\int_{\mathcal{I}_n} p dt = \Delta t_n [(1 - \alpha) p_n + \alpha p_{n+1}] = \Delta t_n (p_n + \alpha \Delta p_n). \quad (5.61)$$

Dabei wurde im Fall der Gleichung (5.61) eine verallgemeinerte Trapezregel mit dem Parameter α angesetzt. Dieser bestimmt die Art der Integration und nimmt Werte zwischen $\alpha = 0$ (explizite Integration) und $\alpha = 1$ (implizite Integration) an. Verschiedene Autoren wiesen für $\alpha \geq 0.5$ eine uneingeschränkte Stabilität des Verfahrens nach [101, 175]. Den Grenzfall bildet das CRANK–NICHOLSON–Schema mit $\alpha = 0.5$. Im Bezug zur räumlichen und zeitlichen Berechnung ergibt sich mit (5.60) und (5.61) eine *Semidiskretisierung*, bei der die räumliche Finite-Element-Methode mit einem *Finite-Differenzen-Verfahren* zur Bewerkstelligung der Zeitintegration gekoppelt wird. Die resultierenden Gleichungen sind dabei identisch zu einer zeitlichen Integration in Form einer Punkt-Kollokation zum Zeitpunkt $t_\delta = t_n + \alpha \Delta t_n$.

Die Anteile in der Variationsgleichung, die die Impulsbilanz und die Drehimpulsbilanz repräsentieren und primär nicht die Charakteristik eines Anfangs-Problems aufweisen, müssen in eine inkrementelle Formulierung überführt werden. Erst dann wird die Anwendung eines Stoffgesetzes in Ratenform bzw. eines zeitlich fortschreitenden Berechnungsablaufs möglich. Hierzu verwendet man die Beziehung

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_n + \Delta \mathbf{z}_n \quad (5.62)$$

für die auftretenden Zustandsgrößen \mathbf{u} , $\boldsymbol{\omega}$ und p . Da die Gebietsdifferentialgleichungen am Intervallanfang durch die iterative Berechnung des vorherigen Inkrements im Rahmen einer Toleranzschranke erfüllt sind, ergibt sich eine reine Formulierung in Zuwächsen. Zusammen mit den kinematischen Beziehungen

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{D}_u \Delta \mathbf{u}_n + \mathbf{E}_\omega \Delta \boldsymbol{\omega}_n = \mathbf{D}_u \mathbf{N}_u \Delta \hat{\mathbf{u}}_n + \mathbf{E}_\omega \mathbf{N}_\omega \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_n, \quad (5.63)$$

$$\Delta \boldsymbol{\kappa}_n = \mathbf{D}_\omega \Delta \boldsymbol{\omega}_n = \mathbf{D}_\omega \mathbf{N}_\omega \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_n \quad (5.64)$$

und den inkrementellen Formen der elastoplastischen Stoffgesetze

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{C}_\sigma \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad (5.65)$$

$$\Delta \boldsymbol{\mu}_n = \mathbf{C}_\mu \Delta \boldsymbol{\kappa}_n \quad (5.66)$$

ergibt sich unter der Annahme von verschwindenden Oberflächen-Fluid-Flüssen aus (5.55) schließlich das diskrete Gleichungssystem in inkrementeller Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\omega} & \mathbf{L} \\ \mathbf{K}_{\omega u} & \mathbf{K}_{\omega\omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} & -\alpha \Delta t \mathbf{H} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}_n \\ \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_n \\ \Delta \hat{p}_n \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{n+1}^{u,ext} - \mathbf{F}_{n+1}^{u,int} \\ \mathbf{F}_{n+1}^{\omega,ext} - \mathbf{F}_{n+1}^{\omega,int} \\ \mathbf{F}_{n+1}^p \end{bmatrix}^i, \quad (5.67)$$

wobei i den Iterationsfortschritt bis zur Konvergenz indiziert. Danach berechnen sich die Gesamtzuwächse im Intervall durch eine Summation über alle Iterationsschritte:

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}_n \\ \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_n \\ \Delta \hat{p}_n \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}_n \\ \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_n \\ \Delta \hat{p}_n \end{bmatrix}^i. \quad (5.68)$$

Die im Gleichungssystem (5.67) auftretenden Matrizen und Vektoren sind wie folgt definiert:

$$\mathbf{K}_{uu} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{D}_u^T \mathbf{C}_\sigma \mathbf{D}_u \mathbf{N}_u dV, \quad (5.69)$$

$$\mathbf{K}_{u\omega} = \mathbf{K}_{\omega u}^T = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{D}_u^T \mathbf{C}_\sigma \mathbf{E}_\omega \mathbf{N}_\omega dV, \quad (5.70)$$

$$\mathbf{K}_{\omega\omega} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_\omega^T \mathbf{D}_\omega^T \mathbf{C}_\mu \mathbf{D}_\omega \mathbf{N}_\omega + \mathbf{N}_\omega^T \mathbf{E}_\omega^T \mathbf{C}_\sigma \mathbf{E}_\omega \mathbf{N}_\omega dV, \quad (5.71)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{D}_u^T \mathbf{1} \mathbf{N}_p dV, \quad (5.72)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{N}_p^T \mathbf{D}_p^T \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \mathbf{D}_p \mathbf{N}_p dV, \quad (5.73)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{u,ext} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} N_u^T \varrho \bar{\mathbf{b}}_{n+1} dV + \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}^e} N_u^T \bar{\mathbf{t}}_{n+1} dA, \quad (5.74)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{u,int} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} N_u^T \mathbf{D}_u^T [\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \mathbf{1} p_{n+1}]^i dV, \quad (5.75)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{\omega,ext} = \mathbf{A} \int_{\partial_\mu \mathcal{B}^e} N_\omega^T \bar{\mathbf{m}}_{n+1} dA, \quad (5.76)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{\omega,int} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} N_\omega^T \mathbf{D}_\omega^T [\boldsymbol{\mu}_{n+1}]^i + N_\omega^T \mathbf{E}_\omega^T [\boldsymbol{\sigma}_{n+1}]^i dV, \quad (5.77)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \mathbf{L}^T [\hat{\mathbf{u}}_n - \hat{\mathbf{u}}_{n+1}]^i + \Delta t \mathbf{H} [(1 - \alpha) \hat{\mathbf{p}}_n + \alpha \hat{\mathbf{p}}_{n+1}]^i. \quad (5.78)$$

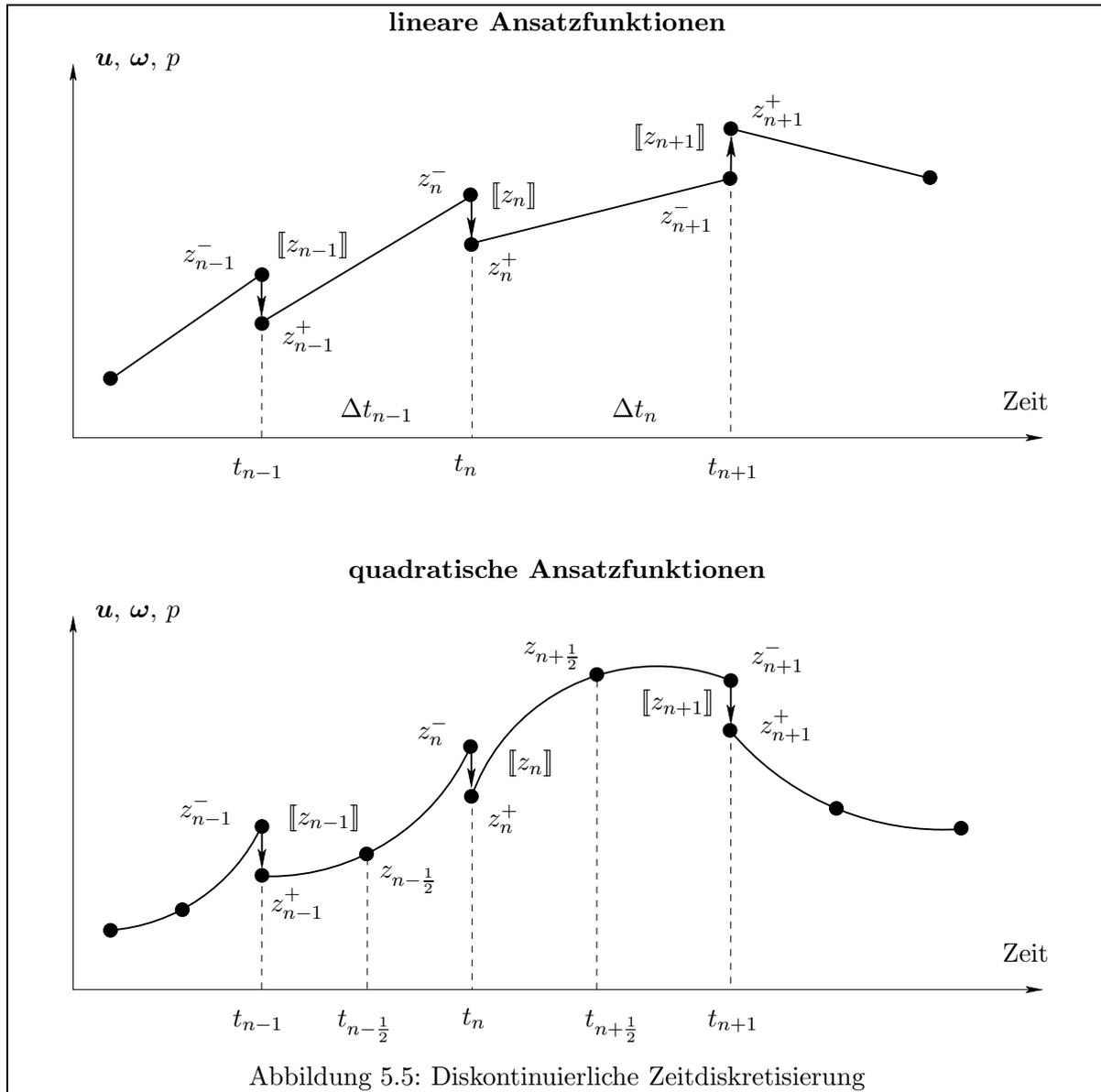
Dabei bedeuten \mathbf{A} den FE-Assemblierungsoperator, \mathbf{D}_u , \mathbf{D}_ω und \mathbf{D}_p die Standard-Gradienten-Operatoren, \mathbf{E}_ω erfasst die Wirkung des Permutationstensors dritter Stufe und $\mathbf{1} = [1, 1, 1, 0]^T$. Da die Werte am Intervallende $(\cdot)_{n+1}$ zu Beginn der Iteration noch nicht bekannt sind, werden als Startwerte die ausiterierten Größen des letzten Intervalls vorgegeben. Am Anfang der gesamten Berechnung sind hier die Anfangsbedingungen (5.18) zu berücksichtigen. Die NEWTON-Iteration wird solange fortgesetzt, bis die inneren Kräfte im Rahmen einer vorgegebenen Toleranz mit den eingepprägten Lasten im Gleichgewicht stehen:

$$\|\mathbf{F}^{u,ext} - \mathbf{F}^{u,int}\| \leq \text{tol}_u, \quad \|\mathbf{F}^{\omega,ext} - \mathbf{F}^{\omega,int}\| \leq \text{tol}_\omega. \quad (5.79)$$

Der Vorteil dieser Methode liegt in der Anwendungsmöglichkeit des impliziten EULER-Verfahrens zur Bestimmung des Spannungszustands $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ am Intervallende. Dieses Verfahren korrespondiert direkt mit der kontinuierlichen Zeitdiskretisierung und dem inkrementellen Charakter des globalen Gleichungssystems. Durch einen Closest-Point-Algorithmus kann in jedem Iterationsschritt aus dem aktuellen Verschiebungs- und Rotationszustand $(\mathbf{u}_{n+1}, \boldsymbol{\omega}_{n+1})^i$ unter Anwendung der Stoffgesetze (5.65) und (5.66) der jeweilige Vektor der inneren Kräfte bestimmt werden. Bei konsistenter Linearisierung der Grundgleichungen und Anwendung des algorithmischen Tangentenoperators zur Assemblierung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} zeigt ein NEWTON-Verfahren für die iterative Behandlung der Systemgleichungen (5.67) eine quadratische Konvergenzrate. Auf die ausführliche Beschreibung des EULER-Rückwärts-Verfahrens zur Spannungsintegration wird an dieser Stelle verzichtet. Details sind der umfangreichen Literatur zu entnehmen [84, 149]. Es ist anzumerken, dass bei Anwendung der COSSERAT-Theorie die Symmetrie des globalen Gleichungssystems verloren geht. Dies stellt jedoch keinen Nachteil dar, da nicht-assozierte Fließregeln, die bei der Abbildung von Böden eine essentielle Rolle spielen, ohnehin zu einer Unsymmetrie der Gleichungen führen. Für die unsymmetrischen Systeme muss jedoch ein entsprechender Gleichungslöser eingesetzt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dazu ein direkter Löser verwendet, um insbesondere im Hinblick auf adaptive Strategien zusätzliche Fehlereinflüsse zu vermeiden.

5.6 Zeitlich diskontinuierliche Raum-Zeit-Diskretisierung

Ein grundlegender Aspekt dieser Arbeit besteht in der Formulierung eines kombinierten Raum-Zeit-Elements für das elastoplastische Konsolidierungsproblem. Dies wird auf der Basis des sogenannten Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahrens möglich, das ursprünglich von HULBERT und HUGHES [86] für partielle Differenzialgleichungen 1. Ordnung in der Zeit vorgestellt



und in den Arbeiten von WIBERG und LI [106, 178] sowie von HULBERT [85] auf Probleme der Strukturmechanik angewendet wurde. Dieser Abschnitt befasst sich mit der Anwendung der Grundidee zeitlich diskontinuierlicher Ansätze auf die quasi-statische Analyse wassergesättigter Böden unter Verwendung von elastoplastischen Materialgesetzen. Hierbei werden die Beschreibungsvariablen durch einen Produktansatz aus Funktionen der räumlichen und zeitlichen Koordinaten approximiert. Das heißt, das zu untersuchende Raum-Zeit-Kontinuum $\mathcal{S} = \mathcal{B} \times \mathcal{I}$ wird mittels konventioneller isoparametrischer finiter Elemente im räumlichen Bereich gekoppelt mit rechteckigen Elementen im Zeitbereich diskretisiert. Im Vergleich zu der oben dargestellten Methode der Semidiskretisierung liegt ein Vorteil also in der Anwendungsmöglichkeit einer identischen Raumdiskretisierung. Die Einsatzmöglichkeit von Ansätzen der SERENDIPITY- bzw. LAGRANGE-Klasse bleibt erhalten. Durch eine Aufteilung in Zeitscheiben $\mathcal{I}_n = [t_n^-, t_{n+1}^-]$ wird auch hier eine zeitlich schrittweise Berechnung möglich. Im Gegensatz zur kontinuierlichen Zeitapproximation werden Sprünge in den Feldvariablen an den diskreten Zeitpunkten zugelassen, die in einer variationellen Formulierung der Grundgleichungen Berücksichtigung finden. Abbildung 5.5 zeigt den zeitlichen Verlauf der Zustandsvariablen unter der Annahme linearer bzw. quadratischer Ansatzfunktionen im Zeitintervall.

Im Folgenden werden die Schritte, die zur Formulierung eines Raum-Zeit-Elements notwendig sind, detailliert beschrieben. Dazu gehört die Diskretisierung der primären und sekundären Variablen in Raum und Zeit und eine Erweiterung der variationellen Aussage um die Sprungterme. Ein wesentlicher Unterschied zum kontinuierlichen Verfahren besteht weiterhin in der iterativen Ermittlung der wegabhängigen Variablen bei Anwendung elastoplastischer Stoffgesetze. Die klassischen Methoden zur Integration der Spannungen wie z.B. das implizite EULER-Verfahren verlieren beim Einbeziehen von Diskontinuitäten ihre Anwendbarkeit. Um eine mathematisch korrekte Form zu erhalten, werden variationelle Formulierungen sowohl für die kinematischen Beziehungen als auch für die Ratengleichungen der Plastizität entwickelt.

5.6.1 Approximation der primären Variablen

Die primären Variablen werden durch die Verschiebungen \mathbf{u} , Verdrehungen $\boldsymbol{\omega}$ und Porenwasserdrücke p gebildet. Um zu einer diskreten Beschreibung dieser zeitlich und räumlich veränderlichen Zustandsgrößen zu gelangen, werden Ansatzfunktionen für den räumlichen und zeitlichen Bereich mittels eines Produktansatzes gekoppelt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_u \mathbf{T}_u \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.80)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_\omega \mathbf{T}_\omega \hat{\boldsymbol{\omega}}, \quad (5.81)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_p \mathbf{T}_p \hat{p}. \quad (5.82)$$

$\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ und \hat{p} repräsentieren dabei wiederum die Knotenfreiwerte, jedoch nun geordnet nach den diskreten Zeitpunkten. Die zeitlichen Stützstellen ergeben sich je nach Ansatzpolynom. Bei linearen Funktionen werden dementsprechend Anfang und Ende des aktuellen Intervalls herangezogen, bei quadratischen Funktionen ergibt sich die Intervallmitte als zusätzliche Stützstelle. Im Vergleich mit der kontinuierlichen Zeitdiskretisierung ergeben sich somit pro Zeitschritt die doppelte bzw. dreifache Anzahl an Unbekannten. Die Vektoren sowie die Ansätze \mathbf{N}_u , \mathbf{N}_ω und \mathbf{N}_p bzw. \mathbf{T}_u , \mathbf{T}_ω und \mathbf{T}_p sind für ein Element mit i Raum-Knoten und j Zeit-Knoten für die Verschiebungen, k Raum-Knoten und l Zeit-Knoten für die Verdrehungen und m Raum-Knoten und n Zeit-Knoten für die Porenwasserdrücke folgendermaßen definiert:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = \left[{}^1\hat{u}_1^1 \dots {}^1\hat{u}_1^i \dots \dim u \hat{u}_1^1 \dots \dim u \hat{u}_1^i \dots {}^1\hat{u}_j^1 \dots {}^1\hat{u}_j^i \dots \dim u \hat{u}_j^1 \dots \dim u \hat{u}_j^i \right], \quad (5.83)$$

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}^T = \left[{}^1\hat{\omega}_1^1 \dots {}^1\hat{\omega}_1^k \dots \dim \omega \hat{\omega}_1^1 \dots \dim \omega \hat{\omega}_1^k \dots {}^1\hat{\omega}_l^1 \dots {}^1\hat{\omega}_l^k \dots \dim \omega \hat{\omega}_l^1 \dots \dim \omega \hat{\omega}_l^k \right], \quad (5.84)$$

$$\hat{p}^T = \left[\hat{p}_1^1 \dots \hat{p}_1^m \dots \hat{p}_n^1 \dots \hat{p}_n^m \right], \quad (5.85)$$

$$\mathbf{N}_u(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} {}^1N_u^1 \dots {}^1N_u^i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \dim u N_u^1 \dots \dim u N_u^i & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad (5.86)$$

$$\mathbf{N}_\omega(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} {}^1N_\omega^1 \dots {}^1N_\omega^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & \dim \omega N_\omega^1 \dots \dim \omega N_\omega^k & \\ & & & \end{bmatrix}, \quad (5.87)$$

$$\mathbf{N}_p(\mathbf{x}) = \left[N_p^1 \dots N_p^m \right], \quad (5.88)$$

$$\mathbf{T}_u(t) = \left[\mathbf{I}_u T_u^1 \dots \mathbf{I}_u T_u^j \right], \quad (5.89)$$

$$\mathbf{T}_\omega(t) = \left[\mathbf{I}_\omega T_\omega^1 \dots \mathbf{I}_\omega T_\omega^l \right], \quad (5.90)$$

$$\mathbf{T}_p(t) = \left[\mathbf{I}_p T_p^1 \dots \mathbf{I}_p T_p^n \right]. \quad (5.91)$$

\mathbf{I}_u , \mathbf{I}_ω und \mathbf{I}_p stehen für Einheitsmatrizen der Ordnung $(i \cdot \dim u)$, $(k \cdot \dim \omega)$ bzw. m und $\dim u$ bzw. $\dim \omega$ stehen für die Anzahl der Verschiebungs- bzw. Verdrehungsdimensionen. Zeitliche Ansatzfunktionen linearer und quadratischer Ordnung sind in Abbildung 5.6 dargestellt.

Werden im Rahmen von Mehrfeldproblemen unterschiedliche Größen approximiert, müssen bei der Wahl der einzelnen Ansatzfunktionen bestimmte Restriktionen beachtet werden. Da in den Elementformulierungen sowohl primäre Größen als auch deren Gradienten auftreten, sind die Ansatzfunktionen \mathbf{N}_u , \mathbf{N}_ω und \mathbf{N}_p bezüglich ihres Polynomgrades aufeinander abzustimmen. Diese Forderung basiert auf der BABUŠKA–BREZZI–Bedingung für den Grenzfall eines undurchlässigen Materials. In diesem Zusammenhang wird gefordert, dass die Porenwasserdrücke, die von ihrer Einheit her mit den Spannungen korrelieren, um eine Stufe niedriger approximiert werden als die Verschiebungen. Da sich die Spannungen bei verschiebungsformulierten Elementen als sekundäre Größen durch eine Differenziation berechnen, weisen sie eine verminderte Approximationsgüte auf. Eine Nichtbeachtung der BABUŠKA–BREZZI–Bedingung hat in aller Regel eine numerische Instabilität zur Folge und ist durch das Auftreten starker Oszillierungen im Porenwasserdruckverlauf charakterisiert. Ähnliche Inkonsistenzen ergeben sich beispielsweise bei finiten Plattenelementen, wenn für Durchbiegungen und Verdrehungen Ansätze gleicher Ordnung verwendet werden. Um dieses Problem bei einfachen Quaderelementen mit 8 Knoten zu umgehen, wurden von verschiedenen Autoren Stabilisierungstechniken auf der Basis von least-squares–Termen vorgeschlagen [173].

Da auch in der Drehimpulserhaltung sowohl primäre als auch abgeleitete Größen auftreten, sollte das Rotationsfeld ebenfalls einen niedrigeren Polynomgrad aufweisen als das Verschiebungsfeld [29]. Beispielsweise kann mit der Wahl quadratischer Ansätze für die Verschiebungen und linearer Ansätze für die Rotationen im elastischen Bereich ein konsistent linearer Verzerrungstensor sichergestellt werden. Jedoch ergeben sich im Gegensatz zur Bestimmung der Porenwasserdrücke im Rahmen der hier betrachteten Aufgabenstellungen keine ausschlaggebenden numerischen Instabilitäten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass im Bereich starker plastischer Verzerrungen diese Abhängigkeiten ihren Einfluss verlieren. Vergleichsberechnungen haben gezeigt, dass eine Ansatzgüte gleicher Ordnung für Rotationen und Verschiebungen zu Vorteilen bei der Geometriebeschreibung der Lokalisierungszone führt. Bei der Simulation des post-kritischen Bereichs kann somit eine erhöhte Genauigkeit erreicht werden.

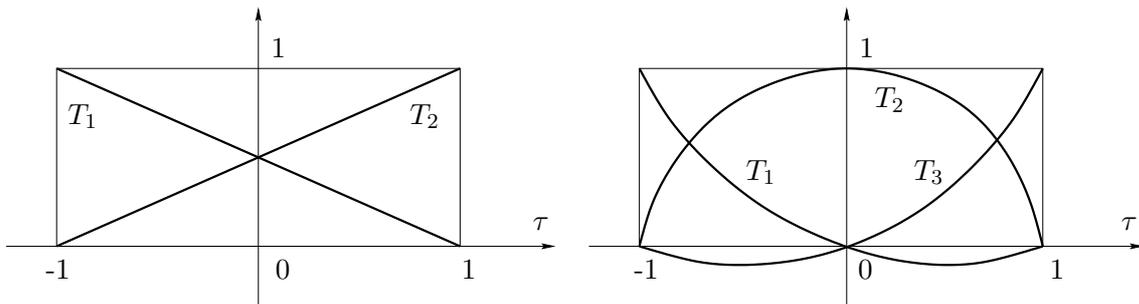


Abbildung 5.6: Lineare und quadratische Zeitansätze

Im Bezug zur zeitlichen Diskretisierung werden alle Felder mit derselben Ansatzgüte approximiert, da eine unterschiedliche Anzahl zeitlicher Elementknoten für die einzelnen Felder zu einer wesentlich aufwändigeren Implementierung führen würden. Eine Unterteilung in Zeitscheiben mit einheitlicher zeitlicher Ausdehnung für alle Elemente bleibt dabei ebenfalls gewahrt. Bei den durchgeführten Berechnungen wurden ausschließlich eine biquadratische Approximation der Verschiebungen und der Verdrehungen und eine bilineare Approximation der Porenwasserdrücke im Ortsbereich verwendet. Somit ergibt sich für das Standardelement mit 9 Verschiebungs-, 9 Verdrehungs- und 4 Porenwasserdruck–Freiheitsgraden bei linearer Zeitapproximation die in Abbildung 5.7 gezeigte anschauliche Darstellung.

Durch die Unstetigkeit an den Intervallgrenzen werden die folgenden Definitionen notwendig, um zwischen den beiden Werten der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t_n zu unterscheiden:

$$\mathbf{z}_n^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{z}(t_n + \varepsilon) = \mathbf{z}(t_n^+), \quad (5.92)$$

$$\mathbf{z}_n^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \mathbf{z}(t_n + \varepsilon) = \mathbf{z}(t_n^-), \quad (5.93)$$

$$[[\mathbf{z}_n]] = \mathbf{z}_n^+ - \mathbf{z}_n^-. \quad (5.94)$$

Dabei bezeichnet $[[\mathbf{z}_n]]$ also den Sprung in der Zustandsgröße zum Zeitpunkt t_n . Durch diese Unstetigkeit kann eine bessere Approximation der zeitlich veränderlichen Variablen erreicht werden. Genauere Betrachtungen zu Genauigkeits- und Stabilitätseigenschaften der Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahren sind in Anhang C zusammengestellt.

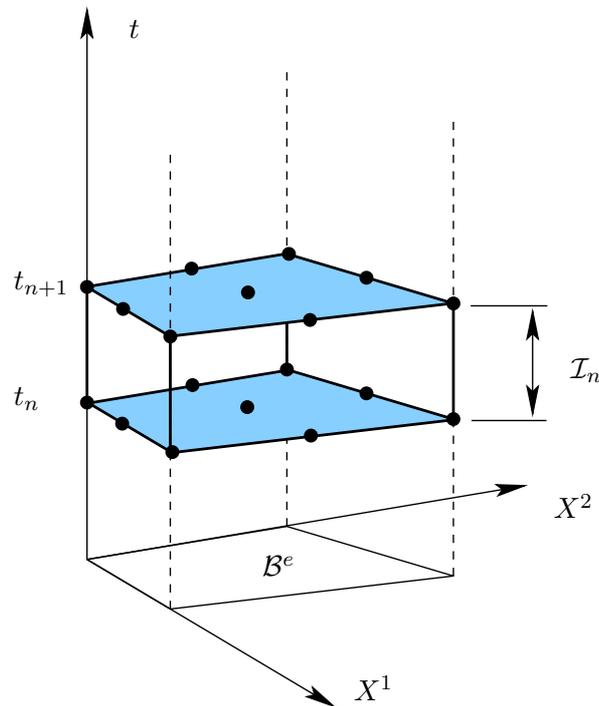


Abbildung 5.7: 18-Knoten Raum-Zeit-Element

5.6.2 Approximation der sekundären Variablen

Die sekundären Variablen berechnen sich in Abhängigkeit der Systemunbekannten und werden von den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$, Momentenspannungen $\boldsymbol{\mu}$, inneren Variablen \mathbf{q} , Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$, Krümmungen $\boldsymbol{\kappa}$ und plastischen Multiplikatoren $\boldsymbol{\gamma}$ gebildet. Wie bereits in Abschnitt 5.3 angedeutet erfolgt die Auswertung dieser Größen in einem nachgeschalteten Berechnungsschritt. Durch die räumlich entkoppelte Formulierung werden deren Verläufe ausschließlich im zeitlichen Bereich benötigt. Die Berechnung diskreter Werte kann getrennt für jeden einzelnen räumlichen Integrationspunkten erfolgen, die in den Raumkoordinaten analog zum kontinuierlichen Verfahren definiert sind, jedoch in diesem Zusammenhang auf Raum-Zeit-Koordinaten erweitert werden müssen. Die lokale Ermittlung der wegabhängigen Variablen geschieht mit Hilfe des später vorgestellten NEWTON-Verfahrens auf Integrationspunktebene. Eine Darstellung in η - ξ - τ -Koordinaten zeigt Abbildung 5.8. Im Rahmen dieser Arbeit werden sowohl lineare als auch quadratische Funktionen zur zeitlichen Approximation verwendet, die dementsprechend eine Integrationsordnung

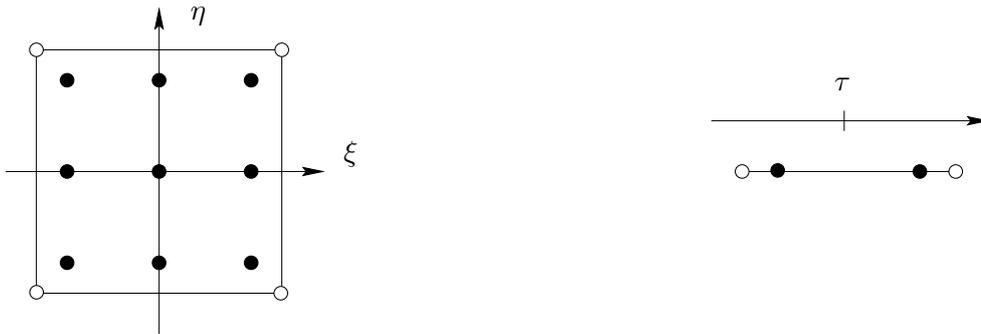


Abbildung 5.8: Raum- und Zeitkoordinaten der Auswertungspunkte der internen Variablen

von $ip = 2$ bzw. $ip = 3$ aufweisen. Die Wahl geschieht hier in Übereinstimmung mit der Ansatzordnung der primären Variablen im Zeitelement. Höhere Ansätze (kubisch usw.) sind mit der im Folgenden beschriebenen Methode ohne weiteres möglich, jedoch scheint ein Einsatz solcher hoher Polynomgrade im Hinblick auf die Anzahl von Systemunbekannten weniger sinnvoll.

Die diskreten zeitlichen Stützstellen in lokalen Koordinaten $\tau \in [-1, 1]$ ergeben sich für die Zweipunkt- bzw. Dreipunktintegration zu:

$$\tau_{1/2}^{lin} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \tau_{1/2/3}^{quad} = \pm \frac{1}{5}\sqrt{15}, 0. \quad (5.95)$$

Die Position der GAUSS-Punkte im Intervall bei Anwendung eines Zweipunkt-Schemas kann Abbildung 5.9 entnommen werden.

Mit diesen Definitionen ist es möglich, den zeitlichen Verlauf der sekundären Variablen für das aktuelle Zeitintervall zu interpolieren:

$$z(t) = \mathbf{T}_z \begin{bmatrix} z|_{\tau_1} \\ \vdots \\ z|_{\tau_{ip}} \end{bmatrix} \quad \text{with: } z \in \{\sigma, \mu, q, \dot{\epsilon}, \kappa\} \quad \forall t \in \mathcal{I}_n. \quad (5.96)$$

Dabei stellen \mathbf{T}_z Ansatzfunktionen entsprechender Ordnung mit den GAUSS-Punkten als Stützstellen dar. Mit dieser Approximation wird klar, dass auch in den sekundären Variablen Sprünge an den diskreten Zeitpunkten auftreten können.

Die festgelegte Approximation der primären und sekundären Variablen im räumlichen wie im zeitlichen Bereich kann somit als direkte Erweiterung auf kombinierte Raum-Zeit-Koordinaten

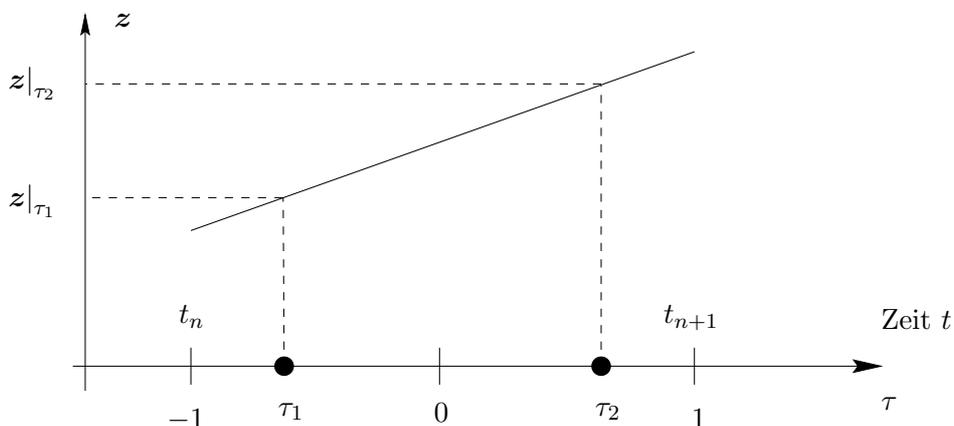


Abbildung 5.9: Lokale Koordinate τ und lineare Interpolation bei Zweipunkt-Integration

verstanden werden. In Analogie zur FE-Diskretisierung reiner Randwertprobleme fallen auch hier die Integrationspunkte der sekundären Variablen nicht mit den Elementknoten zusammen. Sie werden dagegen an Punkten des Raum-Zeit-Kontinuums ausgewertet, mit denen eine numerische Integration (GAUSS-Integration) bei höherer Genauigkeit durchgeführt werden kann. Zur Berechnung der inneren Kräfte wird es bei dieser Vorgehensweise nötig, die Spannungen auf die zeitlichen Elementknoten zu extrapolieren.

5.6.3 Kinematik

Um im Rahmen der vorgeschlagenen Methode mit Diskontinuitäten in den Feldgrößen zu einer konsistenten Formulierung zu gelangen, wird eine integrale Aussage der kinematischen Beziehungen notwendig. Da die Integration der wegbabhängigen Variablen die Raten der Verzerrungen $\dot{\varepsilon}$ und Krümmungen $\dot{\kappa}$ an den zeitlichen GAUSS-Punkten mit den inkrementellen Spannungs- bzw. Momentenspannungszuwächsen verknüpft, wird im Folgenden eine Relation zur Berechnung der Raten hergeleitet. Diese werden aus dem zeitlichen Verlauf der Verformungen $\mathbf{u}(t)$ und $\boldsymbol{\omega}(t)$ im Intervall \mathcal{I}_n mit der zeitlichen Koordinate $\tau \in [-1, 1]$ im integralen Sinn berechnet und stellen die Eingangsgröße der Spannungsintegration dar. Die Kinematik wird somit nicht mehr exakt, sondern nur im zeitlichen Mittel über Δt erfüllt. Die differentiellen Formen

$$\dot{\varepsilon} = \nabla \dot{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (5.97)$$

$$\dot{\kappa} = \nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (5.98)$$

lassen sich in eine äquivalente Integralaussage im Bezug zum aktuellen Zeitintervall \mathcal{I}_n umformen:

$$\int_{\mathcal{I}_n} \delta \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\varepsilon}) + \delta \boldsymbol{\mu} : (\nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\kappa}) dt = 0. \quad (5.99)$$

Mit Berücksichtigung der Sprünge $[[\mathbf{u}_n]]$ und $[[\boldsymbol{\omega}_n]]$ in den Verschiebungen und Verdrehungen und $\mathcal{I}_n = [t_n^-, t_{n+1}^-]$ ergibt sich schließlich die erweiterte Formulierung

$$\begin{aligned} & \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} \delta \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\varepsilon}) + \delta \boldsymbol{\mu} : (\nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\kappa}) dt + \\ & + \delta \boldsymbol{\sigma}(t_n) : \nabla [[\mathbf{u}_n]] + \delta \boldsymbol{\sigma}(t_n) : \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot [[\boldsymbol{\omega}_n]] + \delta \boldsymbol{\mu}(t_n) : \nabla [[\boldsymbol{\omega}_n]] = 0. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Sie stellt eine um die Sprungterme ergänzte Beziehung dar, die in ähnlicher Form auch bei der Herleitung von gemischt-formulierten Elementen auf der Grundlage erweiterter Variationsprinzipie verwendet wird [135]. Die Integration findet hier jedoch über den Zeitbereich statt. Für die Verläufe von $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\kappa}$, $\delta \boldsymbol{\sigma}$ und $\delta \boldsymbol{\mu}$ werden wiederum Polynomansätze verwendet, deren Interpolation auf der Basis von Integrationspunktwerten erfolgt. Die Integrale in (5.100) können nun leicht ausgewertet werden. Mit

$$\nabla \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{D}_u \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{T}}_u \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.101)$$

$$\nabla \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{D}_\omega \mathbf{N}_\omega \dot{\mathbf{T}}_\omega \hat{\boldsymbol{\omega}} \quad (5.102)$$

ergibt sich nach Auflösen der Gleichung nach den Verzerrungsraten an den GAUSS-Punkten des Intervalls \mathcal{I}_n

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}|_{\tau_1} \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}|_{\tau_{ip}} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_{\varepsilon u} \hat{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{B}}_{\varepsilon \omega} \hat{\boldsymbol{\omega}}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\kappa}|_{\tau_1} \\ \vdots \\ \dot{\kappa}|_{\tau_{ip}} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_{\kappa \omega} \hat{\boldsymbol{\omega}}, \quad (5.103)$$

mit den Matrizen

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\varepsilon u} = \left[\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}_\sigma^T \mathbf{T}_\varepsilon dt \right]^{-1} \left[\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}_\sigma^T \mathbf{D}_u \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{T}}_u dt + \mathbf{T}_\sigma^T(t_n) \mathbf{D}_u \mathbf{N}_u \mathbf{T}_u(t_n) \right], \quad (5.104)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\varepsilon \omega} = \left[\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}_\sigma^T \mathbf{T}_\varepsilon dt \right]^{-1} \left[\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}_\sigma^T \mathbf{E}_\omega \mathbf{N}_\omega \dot{\mathbf{T}}_\omega dt + \mathbf{T}_\sigma^T(t_n) \mathbf{E}_\omega \mathbf{N}_\omega \mathbf{T}_\omega(t_n) \right], \quad (5.105)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\kappa \omega} = \left[\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}_\mu^T \mathbf{T}_\kappa dt \right]^{-1} \left[\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}_\mu^T \mathbf{D}_\omega \mathbf{N}_\omega \dot{\mathbf{T}}_\omega dt + \mathbf{T}_\mu^T(t_n) \mathbf{D}_\omega \mathbf{N}_\omega \mathbf{T}_\omega(t_n) \right]. \quad (5.106)$$

Diese Matrizen müssen für gewählte räumliche und zeitliche Ansatzfunktionen nur einmal berechnet werden, wodurch sich im Vergleich zur kontinuierlichen Zeitapproximation (5.63) unter dem Aspekt der Rechenzeit kein Nachteil ergibt. Die Auswertung der zeitlichen Integration für lineare und quadratische Ansätze zeigt Tabelle 5.2.

| lineare Ansatzfunktionen | |
|---|---|
| $\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}} dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ | $\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}^T \mathbf{T} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Delta t$ |
| quadratische Ansatzfunktionen | |
| $\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}} dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ | $\int_{\mathcal{I}_n} \mathbf{T}^T \mathbf{T} dt = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{15} & \frac{8}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \Delta t$ |
| Tabelle 5.2: Auswertung der zeitlichen Integrale | |

5.6.4 Globales Gleichungssystem

Die zugrundeliegenden Differenzialgleichungen des Problems bleiben auch bei Anwendung von diskontinuierlichen Ansatzfunktionen unberührt. Da die Gleichgewichtsbedingungen ohne Einfluss der zeitlichen Approximation gelten und ein reines Randwertproblem darstellen, müssen hier keine zusätzlichen Anteile durch die Einführung von Sprungtermen berücksichtigt werden. Im Vergleich mit Gleichung (5.55) sind jedoch die Terme der Massenbilanz um Anteile zu ergänzen, die die Sprünge in den Verschiebungen enthalten. Bedingt durch

$$\int_{t_n^-}^{t_n^+} \dot{\mathbf{z}} dt = \mathbf{z}(t_n^+) - \mathbf{z}(t_n^-) = \llbracket \mathbf{z}_n \rrbracket \quad (5.107)$$

ergibt sich die folgende Variationsgleichung für die diskontinuierliche Zeitapproximation, die alle

virtuellen Arbeiten des Mehrfeldproblems bilanziert:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} \left\{ \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta \dot{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta \dot{\mathbf{u}} : p \mathbf{I} \, dV - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}} \delta \dot{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_{\mathcal{B}} \delta \dot{\mathbf{u}} \cdot \varrho \bar{\mathbf{b}} \, dV + \right. \\
& \quad \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta \dot{\boldsymbol{\omega}} : \boldsymbol{\mu} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \delta \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_{\partial_\mu \mathcal{B}} \delta \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \bar{\mathbf{m}} \, dA + \\
& \quad \left. \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta p \cdot \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot \nabla p \, dV - \int_{\mathcal{B}} \delta p \nabla \dot{\mathbf{u}} : \mathbf{I} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \nabla \delta p \cdot \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot \varrho^{FR} \bar{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\partial_Q \mathcal{B}} \delta p \bar{Q} \, dA \right\} dt + \\
& \quad \int_{\mathcal{B}} \delta p_n^+ \nabla \llbracket u_n \rrbracket : \mathbf{I} \, dV = 0 . \tag{5.108}
\end{aligned}$$

Dabei sind sowohl die unbekanntenen Feldgrößen als auch die virtuellen Größen jetzt zusätzlich auch von der Zeitkoordinate abhängig. Mit der Einführung von virtuellen Geschwindigkeiten $\delta \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, virtuellen Winkelgeschwindigkeiten $\delta \dot{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}, t)$ und virtuellen Porenwasserdrücken $\delta p(\mathbf{x}, t)$ sowie einer zeitlichen Integration über das Intervall \mathcal{I}_n , resultieren einheitliche Energieausdrücke. Unter der Annahme in Raum und Zeit unabhängiger, beliebiger virtueller Größen kann gezeigt werden, dass aus dieser Variationsgleichung mit Hilfe des *Fundamentallemmas der Variationsrechnung* die lokalen Differenzialgleichungen sowie die statischen Randbedingungen abgeleitet werden können.

Eine analoge Struktur kann auch in diesem Fall aus den Gleichungen (5.45), (5.46) und (5.49) erhalten werden, wenn als GALERKINSches Wichtungskonzept $\Psi_u = \delta \dot{\mathbf{u}}$, $\Psi_\omega = \delta \dot{\boldsymbol{\omega}}$ und $\Psi_p = \delta p$ in Verbindung mit einer Zeitintegration aller Einzelgleichungen verwendet werden. Aus diesen Gründen hat sich für diese Art der Diskretisierung der Name “Time-Discontinuous-GALERKIN-Methode” eingebürgert. Im Gesamtzusammenhang ergibt sich somit eine echte Raum-Zeit-Formulierung mit GALERKINScher Wichtung auch im Zeitbereich.

Um im Hinblick auf die Anwendung von Stoffgesetzen in Ratenform eine inkrementelle Formulierung zu erhalten, werden die Spannungen und Momentenspannungen an den zeitlichen Integrationspunkten durch die inkrementellen Zuwächse des aktuellen Intervalls und die Werte am Ende des letzten Zeitintervalls ausgedrückt:

$$[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ip}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}|_{\tau_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}|_{\tau_{ip}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_n^- \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_n^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n, \tau_1} \\ \vdots \\ \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n, \tau_{ip}} \end{bmatrix} . \tag{5.109}$$

Mit den Beziehungen der kinematischen Abhängigkeiten und der Stoffgesetze, resultiert schließlich das globale Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{uu} & \bar{\mathbf{K}}_{u\omega} & \bar{\mathbf{L}}_{up} \\ \bar{\mathbf{K}}_{\omega u} & \bar{\mathbf{K}}_{\omega\omega} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{L}}_{pu} & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{H}} \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}_n \\ \Delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_n \\ \Delta \hat{p}_n \end{bmatrix}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{DG}^{u,ext} - \mathbf{F}_{DG}^{u,int} \\ \mathbf{F}_{DG}^{\omega,ext} - \mathbf{F}_{DG}^{\omega,int} \\ \mathbf{F}_{DG}^p \end{bmatrix}^i . \tag{5.110}$$

Dieses System wird wiederum mittels eines exakt linearisierten NEWTON-Verfahrens iterativ gelöst. i indiziert den Iterationsfortschritt und die jeweils verbesserten Gesamtzuwächse an den

Zeitknoten im Bezug zum Zeitpunkt t_n^- ergeben sich als Summation in Analogie zu Gleichung (5.68). Die verallgemeinerten Untermatrizen nehmen dabei die folgenden Formen für das Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahren an:

$$\bar{K}_{uu} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \tilde{B}_{u\sigma} C_\sigma \tilde{B}_{\varepsilon u} dV, \quad (5.111)$$

$$\bar{K}_{u\omega} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \tilde{B}_{u\sigma} C_\sigma \tilde{B}_{\varepsilon\omega} dV, \quad (5.112)$$

$$\bar{K}_{\omega u} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \tilde{B}_{\omega\sigma} C_\sigma \tilde{B}_{\varepsilon u} dV, \quad (5.113)$$

$$\bar{K}_{\omega\omega} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \tilde{B}_{\omega\mu} C_\mu \tilde{B}_{\kappa\omega} + \tilde{B}_{\omega\sigma} C_\sigma \tilde{B}_{\varepsilon\omega} dV, \quad (5.114)$$

$$\bar{L}_{up} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \int_{\tilde{I}_n} \mathbf{T}_u^T N_u^T D_u^T \mathbf{1} N_p T_p dt dV, \quad (5.115)$$

$$\bar{L}_{pu} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \int_{\tilde{I}_n} \mathbf{T}_p^T N_p^T \mathbf{1}^T D_u N_u \dot{T}_u dt + \mathbf{T}_p^T(t_n) N_p^T \mathbf{1}^T D_u N_u T_u(t_n) dV, \quad (5.116)$$

$$\bar{H} = \mathbf{A} \int_{\mathcal{B}^e} \int_{\tilde{I}_n} \mathbf{T}_p^T N_p^T D_p^T \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} D_p N_p T_p dt dV. \quad (5.117)$$

Eine wesentliche Charakteristik des Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahrens besteht darin, dass in den Koppelmatrizen die zeitlichen Ansatzfunktionen gemeinsam mit deren zeitlichen Ableitungen auftreten. Diese Tatsache führt – wie bereits in Tabelle 5.2 angedeutet – im Allgemeinen auf unsymmetrische Gleichungssysteme. Darüber hinaus müssen in \bar{L}_{pu} die Sprungterme zu Beginn des Intervalls berücksichtigt werden. Die Matrizen $\tilde{B}_{u\sigma}$, $\tilde{B}_{\omega\sigma}$ und $\tilde{B}_{\omega\mu}$ sind folgendermaßen definiert:

$$\tilde{B}_{u\sigma} = \int_{\tilde{I}_n} \mathbf{T}_u^T N_u^T D_u^T T_\sigma dt, \quad (5.118)$$

$$\tilde{B}_{\omega\sigma} = \int_{\tilde{I}_n} \mathbf{T}_\omega^T N_\omega^T E_\omega^T T_\sigma dt, \quad (5.119)$$

$$\tilde{B}_{\omega\mu} = \int_{\tilde{I}_n} \mathbf{T}_\omega^T N_\omega^T D_\omega^T T_\mu dt. \quad (5.120)$$

Zur Assemblierung der Steifigkeitsmatrix \bar{K} werden im Rahmen eines vollständigen NEWTON-Verfahrens die konsistenten Tangentematrizen C_σ^{ct} und C_μ^{ct} benötigt. Diese werden jedoch erst später im Abschnitt 5.6.5 definiert, da sie vom verwendeten Verfahren für die Integration der wegbabhängigen Variablen bestimmt werden. Auch die Vektoren der rechten Seite müssen an die

Discontinuous–GALERKIN–Formulierung angepasst werden. Sie ergeben sich letztendlich zu:

$$\mathbf{F}_{DG}^{u,ext} = \mathbf{A} \int_{e=1}^{\mathcal{N}_E} \int_{\mathcal{I}_n} \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}^e} \mathbf{T}_u^T \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} dA + \int_{\mathcal{B}^e} \mathbf{T}_u^T \mathbf{N}_u^T \varrho \bar{\mathbf{b}} dV dt, \quad (5.121)$$

$$\mathbf{F}_{DG}^{\omega,ext} = \mathbf{A} \int_{e=1}^{\mathcal{N}_E} \int_{\mathcal{I}_n} \int_{\partial_\mu \mathcal{B}^e} \mathbf{T}_\omega^T \mathbf{N}_\omega^T \bar{\mathbf{m}} dA dt, \quad (5.122)$$

$$\mathbf{F}_{DG}^{u,int} = \mathbf{A} \int_{e=1}^{\mathcal{N}_E} \int_{\mathcal{B}^e} \tilde{\mathbf{B}}_{u\sigma} [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ip}^{tot}]^i dV, \quad (5.123)$$

$$\mathbf{F}_{DG}^{\omega,int} = \mathbf{A} \int_{e=1}^{\mathcal{N}_E} \int_{\mathcal{B}^e} \tilde{\mathbf{B}}_{\omega\mu} [\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ip}]^i + \tilde{\mathbf{B}}_{\omega\sigma} [\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ip}]^i dV, \quad (5.124)$$

$$\mathbf{F}_{DG}^p = \bar{\mathbf{L}}_{pu} [\{\mathbf{u}_n^-\} - \hat{\mathbf{u}}]^i + \bar{\mathbf{H}} [\hat{p}]^i. \quad (5.125)$$

Dabei stellen $[\hat{\boldsymbol{\mu}}_{ip}]$, $[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ip}]$ und $[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ip}^{tot}]$ die Vektoren der Momentenspannungen, Spannungen und totalen Spannungen an den zeitlichen Integrationspunkten des Elements dar. Als Testwerte im ersten Iterationsschritt werden wiederum die gesicherten Werte am Ende des zu letzt berechneten Intervalls herangezogen. Die Iteration wird abgebrochen, wenn die Differenz der äußeren und inneren Kräfte an jedem Zeitknoten einen vorgegebenen Toleranzwert unterschreitet:

$$\|\mathbf{F}_{DG}^{u,ext} - \mathbf{F}_{DG}^{u,int}\| \leq \text{tol}_u, \quad \|\mathbf{F}_{DG}^{\omega,ext} - \mathbf{F}_{DG}^{\omega,int}\| \leq \text{tol}_\omega. \quad (5.126)$$

Wie aus den Gleichungen (5.121) und (5.122) zu entnehmen ist, lässt die gewählte Formulierung durch geringfügige Erweiterungen auch eine sprunghafte Änderung der einwirkenden Lasten $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{t}}$ und $\bar{\mathbf{m}}$ zu. Dies stellt eine grundlegende Erweiterung zur kontinuierlichen Zeitdiskretisierung dar. Da in der Realität hauptsächlich kontinuierliche Lastverläufe in der Zeit auftreten, ist dieser Vorteil jedoch nur von geringer praktischer Bedeutung.

5.6.5 Integration der wegabhängigen Variablen

Der folgende Abschnitt befasst sich mit der Bestimmung der wegabhängigen Zustandsvariablen d.h. Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$, Momentenspannungen $\boldsymbol{\mu}$, inneren Variablen \mathbf{q} und Konsistenzparameter $\dot{\gamma}$ als Resultat der in der globalen Iteration berechneten Verschiebungen \mathbf{u} , Verdrehungen $\boldsymbol{\omega}$ und Porenwasserdrücken p bzw. den daraus resultierenden Verzerrungen und Verkrümmungen. Ausgehend von bekannten Zuständen am Ende des vorherigen Berechnungsintervalls ($\boldsymbol{\sigma}_n^-$, $\boldsymbol{\mu}_n^-$ und \mathbf{q}_n^-) ergibt sich ein nichtlineares Anfangswertproblem zur Berechnung des Verlaufs der Zustandsgrößen im neuen Intervall $\mathcal{I}_n = [t_n^-, t_{n+1}^-]$, das durch die Wahl eines Zeitinkrements Δt festgelegt wurde. Auf der Grundlage der gewählten Raum–Zeit–Formulierung ist es möglich, dieses nichtlineare Anfangswertproblem in der Zeit für jeden räumlichen Integrationspunkt des Systems separat zu behandeln. Im Gegensatz zum Formelwerk des Nicht–lokalen Kontinuums, bei dem sich die räumlichen Integrationspunkte gegenseitig beeinflussen, ergibt sich im vorliegenden Fall eine streng lokale Formulierung. Die räumliche Koordinate \mathbf{x} wird deshalb in dieser Ausführung weggelassen.

Für die Lösung des Anfangswertproblems wurden in der Literatur bereits eine Reihe von Möglichkeiten aufgezeigt. Früher propagierte explizite Verfahren wie z.B. bei PREVORST [129] stellen für hochgradig nichtlineare Berechnungen kein adäquates Werkzeug dar, da sie im Bereich des Traglastniveaus sehr oft mit Konvergenzproblemen bzw. mit einer Divergenz der Iteration

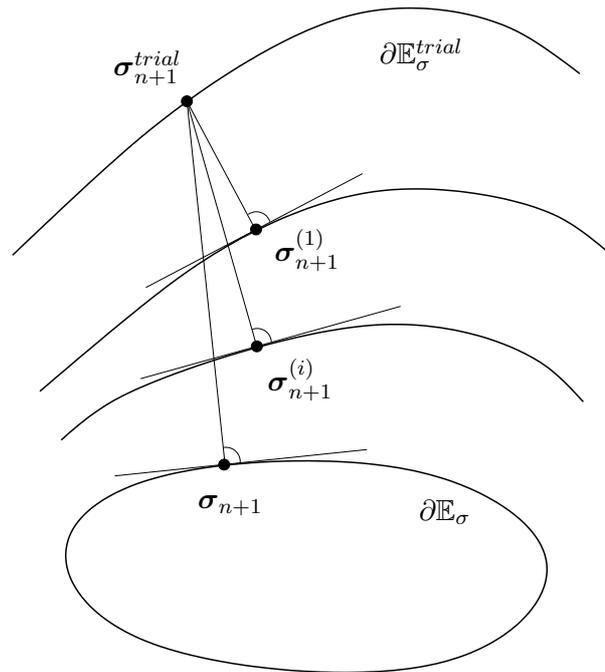


Abbildung 5.10: Geometrische Interpretation des *Closest-Point-Return* im Spannungsraum

verbunden sind. Im Zuge steigender Rechnerleistung wurden sie fast durchwegs durch die stabileren impliziten Verfahren ersetzt [52, 118, 149, 157]. Diese erzielen darüber hinaus in Verbindung mit der globalen Gleichgewichtsiteration bei konsistenter Linearisierung der Grundgleichungen eine *superlineare Konvergenzordnung*. Durchgesetzt hat sich hier vor allem das implizite EULER-Verfahren, das die korrekten Spannungen am Intervallende – ausgehend von einem Testzustand unter der Annahme elastischen Materialverhaltens – unter Einhalten der Fließbedingung iterativ berechnet. Anschaulich entspricht dies einer senkrechten Projektion des Testzustands auf die elastische Grenze ∂E_σ in einer durch den Stofftensor \mathbf{C} gegebenen Norm. Demzufolge hat sich dafür auch der anschauliche Begriff des *Closest-Point-Return* eingebürgert. Wird ein verfestigendes Materialverhalten zugrunde gelegt, so ändert sich auch die Größe und die Form der elastischen Grenze. Es ist somit notwendig, die Evolutionsbeziehung der inneren Parameter in den Algorithmus einzubeziehen. Eine mögliche geometrische Interpretation des Optimierungsalgorithmus zeigt Abbildung 5.10.

Von CRAMER, FINDEISS und WUNDERLICH wurde bereits in [41] erkannt, dass bei der hier gewählten diskontinuierlichen Formulierung dieses Verfahren nicht ohne weiteres anwendbar ist, da es auf einer kontinuierlichen Approximation der Verschiebungen basiert. Eine Integration über Sprungstellen, die lediglich eine integrale Unschärfe darstellen, wäre im mathematischen Sinn inkorrekt. Im Folgenden wird deshalb eine Methode vorgestellt, die auf einer GAUSS-Punkt-Integration über das Zeitintervall beruht. Die Zustandsgrößen werden dabei an ausgewählten Zeitpunkten – den Stützstellen der numerischen GAUSS-Integration – iterativ berechnet. An diesen wird die strenge Einhaltung der KUHN-TUCKER-Bedingungen, also der Fließbedingung und der Konsistenzbedingung gefordert. Um auch hier eine optimale Stabilität zu garantieren, wurde ein konsistent linearisiertes NEWTON-Verfahren zur Lösung der Optimierungsaufgabe gewählt. Da an jedem dieser zeitlichen Integrationspunkte ein eigener Konsistenzparameter zu bestimmen ist, ergibt sich eine Struktur der Gleichungen ähnlich zu Integrationsalgorithmen der Mehrflächenplastizität.

Um die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, wird für alle wesentlichen Größen der Vektor der GAUSS-Punkt-Werte definiert. Darüberhinaus werden in der folgenden Darstellung die Größen der Spannungen und Momentenspannungen in einem generalisierten Vektor kombiniert. Das-

erhält man eine äquivalente integrale Aussage im Bezug zum aktuellen Intervall:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C}_\sigma : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{C}_\sigma : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\gamma} \right) dt + \delta \boldsymbol{\varepsilon}(t_n) : \llbracket \boldsymbol{\sigma}_n \rrbracket + \\
& \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} \delta \boldsymbol{\kappa} : \left(\dot{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{C}_\mu : \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \mathbf{C}_\mu : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\mu}} \dot{\gamma} \right) dt + \delta \boldsymbol{\kappa}(t_n) : \llbracket \boldsymbol{\mu}_n \rrbracket + \\
& \int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} \dot{\gamma} \right) dt + \delta \boldsymbol{\alpha}(t_n) \cdot \llbracket \mathbf{q}_n \rrbracket = 0 .
\end{aligned} \tag{5.134}$$

Ähnliche Ansätze werden im erweiterten Variationsprinzip von HU–WASHIZU für den räumlichen Bereich verwendet [177], um das Stoffgesetz in einer variationellen Form zu gewährleisten. Im Zusammenhang mit diskontinuierlichen Funktionen im Zeitbereich sind jedoch die auftretenden Sprungterme als zusätzliche Anteile einzubeziehen. $\delta \boldsymbol{\alpha}$ bezeichnet hierbei die virtuellen Größen im Dehnungsraum, die zu den inneren Parametern \mathbf{q} energetisch korrespondieren. Mit Hilfe von Ansätzen für $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$, \mathbf{q} , $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$ sowie den entsprechenden virtuellen Größen analog zu (5.96) werden deren zeitliche Verläufe im Intervall festgelegt. Es kommen erneut Polynomfunktionen zum Einsatz, deren Freiwerte auf die Koordinaten der Integrationspunkte bezogen sind. Zusammen mit einer numerischen Integration über das Zeitintervall ergeben sich die folgenden Ausdrücke für die GAUSS–Punkt–Werte:

$$\boldsymbol{\Sigma}_n = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma}_n^- \\ \boldsymbol{\mu}_n^- \end{array} \right\} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta t_n \mathbf{X}_\sigma \mathbf{W}_\sigma [\mathbf{C}] : \left(\dot{\mathbf{E}}_n - \partial_\sigma g_n \dot{\mathbf{I}}_n \right)}_{\tilde{\mathbf{C}}}, \tag{5.135}$$

$$\mathbf{Q}_n = \left\{ \mathbf{q}_n^- \right\} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta t_n \mathbf{X}_q \mathbf{W}_q [\mathbf{D}] \partial_q g_n \dot{\mathbf{I}}_n}_{\tilde{\mathbf{D}}}. \tag{5.136}$$

Auch hier wurde für zeitlich veränderliche Größen das GALERKINSche Wichtungskonzept angewendet. $[\mathbf{C}]$ und $[\mathbf{D}]$ stehen für Matrizen der Ordnung ip , die auf der Diagonalen mit \mathbf{C} bzw. \mathbf{D} besetzt sind. In \mathbf{W}_σ und \mathbf{W}_q sind die Wichtungskoeffizienten der numerischen Integration zusammengefasst. Die Matrizen \mathbf{X}_σ und \mathbf{X}_q sind auch auf der Nebendiagonalen besetzt und bewirken damit eine Kopplung der Einflüsse aller Integrationspunkte:

$$\mathbf{X}_\sigma = \left[\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{W}_\sigma \dot{\mathbf{T}}_\sigma(\tau) + \mathbf{T}_\varepsilon^T(t_n) \mathbf{T}_\sigma(t_n) \right]^{-1}, \tag{5.137}$$

$$\mathbf{X}_q = \left[\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{W}_q \dot{\mathbf{T}}_q(\tau) + \mathbf{T}_q^T(t_n) \mathbf{T}_q(t_n) \right]^{-1}. \tag{5.138}$$

Ausgehend von den Gleichungen (5.135) und (5.136) und unter Verwendung der vereinfachten Schreibweise mit $\tilde{\mathbf{C}}$ und $\tilde{\mathbf{D}}$ als verallgemeinerten Matrizen, wird im Folgenden ein impliziter Algorithmus zur Berechnung der GAUSS–Punkt–Werte vorgestellt. $\boldsymbol{\Sigma}_n$, \mathbf{Q}_n und $\dot{\mathbf{I}}_n$ werden damit iterativ so bestimmt, dass an den zeitlichen Integrationspunkten die Konsistenzbedingung und die Fließbedingung eingehalten werden. Da sich die Wirkungen der Integrationspunkte im Zeitbereich gegenseitig stark beeinflussen, werden diese Größen simultan an allen Punkten berechnet. Dies geschieht mit einem erweiterten NEWTON–Verfahren, das Residuen Gleichungen an allen GAUSS–Punkten beinhaltet. Nur durch eine konsistente Linearisierung kann letztendlich ein – auch bei Auftreten von Entlastungseffekten – stabiles Integrationsverfahren mit einer quadratischen Konvergenzrate sichergestellt werden.

Newton-Verfahren

Die Eingangsgröße bildet der aus Gleichung (5.103) ermittelte Vektor der Gesamtverzerrungsra-
ten $\dot{\mathbf{E}}_n$. Mit ihm wird als Ausgangspunkt für die Iteration ein Testzustand bestimmt, der unter
der Annahme eines elastischen Verhaltens berechnet wird. Die Testgrößen dieses sogenannten
Prädiktorschrittes ergeben sich zu:

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^{trial} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\sigma}_n^- \\ \boldsymbol{\mu}_n^- \end{array} \right\} + \tilde{\mathbf{C}} : \dot{\mathbf{E}}_n, \quad (5.139)$$

$$\mathbf{Q}_n^{trial} = \{ \mathbf{q}_n^- \}, \quad (5.140)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_n^{trial} = 0. \quad (5.141)$$

Weitere *Korrektorschritte* d.h. die Durchführung einer iterativen Berechnung erübrigen sich,
wenn die Fließbedingung $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) \leq 0$ an allen definierten GAUSS-Punkten eingehalten wird.
Die Testwerte (5.139) bis (5.141) stellen in diesem Fall die exakten Werte dar und können direkt
zur Ermittlung der inneren Kräfte verwendet werden. Ist hingegen an wenigstens einem GAUSS-
Punkt die Fließbedingung verletzt, so müssen die Werte der wegabhängigen Variablen aufgrund
der gekoppelten Formulierung an allen zeitlichen Stützstellen iterativ berechnet werden.

Für die Bestimmung der Konsistenzparameter $\dot{\mathbf{I}}_n$ wird die Menge aller aktiven d.h. plastischen
GAUSS-Punkte $^{act}\mathbb{J}_n^{(i)}$ festgelegt, an denen die Bedingung $\dot{\gamma} > 0$ erfüllt ist. Als erste Näherung
bzw. Testmenge werden in $^{act}\mathbb{J}_n^{(i)}$ diejenigen Punkte eingetragen, an denen die Fließfunktion auf
der Basis der Testgrößen positive Werte annimmt:

$$^{act}\mathbb{J}_n^{(i)} = \left\{ \alpha \in \{1, 2, \dots, ip\} \mid f(\boldsymbol{\sigma}^{(i)}, \boldsymbol{\mu}^{(i)}, \mathbf{q}^{(i)}) \Big|_{\tau_\alpha} > 0 \right\}. \quad (5.142)$$

Jedoch bedeutet die Aussage $f^{trial} \Big|_{\tau_j} > 0$ nicht in jedem Fall, dass der entsprechende Punkt
auch letztendlich ein plastisches Verhalten aufweist. Vielmehr kann sich die Menge der aktiven
Punkte $^{act}\mathbb{J}_n^{(i)}$ im Verlauf der Iteration ändern. Ein ähnliches Phänomen tritt bei Modellen der
Mehrfächen-Plastizität auf. Auch hier ist die Bestimmung der aktiven Fließflächen nicht trivial
und ändert sich im Iterationszyklus [38, 150].

Zur Konstruktion eines NEWTON-Verfahrens werden Residuengleichungen verwendet, die sich
durch Umstellen der Gleichungen (5.135) und (5.136) ergeben. Als zusätzliche Bestimmungs-
gleichung für die Konsistenzparameter dient die Einhaltung der Fließbedingung. Es ergeben
sich:

$$\mathbf{R}_\sigma^{(i)} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)} - \boldsymbol{\Sigma}_n^{trial} + \tilde{\mathbf{C}} : \partial_\sigma g_n^{(i)} \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)}, \quad (5.143)$$

$$\mathbf{R}_q^{(i)} = \mathbf{Q}_n^{(i)} - \mathbf{Q}_n^{trial} + \tilde{\mathbf{D}} \partial_q g_n^{(i)} \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)}, \quad (5.144)$$

$$\mathbf{R}_f^{(i)} = \mathbf{F}_n^{(i)} \left(\boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)}, \mathbf{Q}_n^{(i)} \right). \quad (5.145)$$

Aus einer Linearisierung dieser drei Gleichungen nach den auftretenden Veränderlichen resultie-
ren die Bestimmungsgleichungen für die iterativen Verbesserungen.

$$\mathbf{R}_\sigma^{(i+1)} = \mathbf{R}_\sigma^{(i)} + \partial_\sigma \mathbf{R}_\sigma : \Delta \boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)} + \partial_q \mathbf{R}_\sigma \cdot \Delta \mathbf{Q}_n^{(i)} + \partial_\gamma \mathbf{R}_\sigma \Delta \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} = 0, \quad (5.146)$$

$$\mathbf{R}_q^{(i+1)} = \mathbf{R}_q^{(i)} + \partial_\sigma \mathbf{R}_q : \Delta \boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)} + \partial_q \mathbf{R}_q \cdot \Delta \mathbf{Q}_n^{(i)} + \partial_\gamma \mathbf{R}_q \Delta \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} = 0, \quad (5.147)$$

$$\mathbf{R}_f^{(i+1)} = \mathbf{R}_f^{(i)} + \partial_\sigma f : \Delta \boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)} + \partial_q f \cdot \Delta \mathbf{Q}_n^{(i)} = 0. \quad (5.148)$$

Dies ergibt nach Einsetzen der partiellen Ableitungen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma^{(i+1)} \\ \mathbf{R}_q^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma^{(i)} \\ \mathbf{R}_q^{(i)} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_n^{(i)} : \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)} \\ \Delta \mathbf{Q}_n^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} : \partial_\sigma g_n^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{D}} \partial_q g_n^{(i)} \end{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} = 0, \quad (5.149)$$

$$\mathbf{R}_f^{(i+1)} = \mathbf{R}_f^{(i)} + [\partial_\sigma f \quad \partial_q f] : \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)} \\ \Delta \mathbf{Q}_n^{(i)} \end{bmatrix} = 0, \quad (5.150)$$

mit dem konsistent linearisierten Tangentenoperator

$$\mathbf{A}_n^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{C}} : \partial_{\sigma\sigma} g_n^{(i)} \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} & \tilde{\mathbf{C}} : \partial_{\sigma q} g_n^{(i)} \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{D}} \partial_{q\sigma} g_n^{(i)} \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} & \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{D}} \partial_{qq} g_n^{(i)} \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} \end{bmatrix}. \quad (5.151)$$

Durch Einsetzen von (5.150) in Gleichung (5.149) berechnet sich die iterative Verbesserung des Konsistenzparameters zu

$$\Delta \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} = \left[[\partial_\sigma f \quad \partial_q f] : [\mathbf{A}_n^{(i)}]^{-1} : \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} : \partial_\sigma g_n^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{D}} \partial_q g_n^{(i)} \end{bmatrix} \right]^{-1} \left[\mathbf{R}_f^{(i)} - [\partial_\sigma f \quad \partial_q f] : [\mathbf{A}_n^{(i)}]^{-1} : \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma^{(i)} \\ \mathbf{R}_q^{(i)} \end{bmatrix} \right]. \quad (5.152)$$

Es ist anzumerken, dass die KUHN–TUCKER–Bedingungen

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = 0, \quad (5.153)$$

die an jedem GAUSS–Punkt einzuhalten sind, durch die testweise Festlegung der Menge der aktiven Punkte zu Beginn der Iteration nicht allgemein erfüllt werden. Berechnen sich Werte $\dot{\gamma} < 0$ an einzelnen Punkten, so ist die Menge der aktiven GAUSS–Punkte entsprechend anzupassen, indem solche Punkte eliminiert werden. Analog zu Formulierungen der Mehrflächen–Plastizität sind auch hier zwei Varianten zu unterscheiden. Zum einen kann das gesamte NEWTON–Verfahren mit variiertem ${}^{act}\mathbb{J}_n^{(i)}$ nochmal gestartet werden, zum anderen ist eine Anpassung von ${}^{act}\mathbb{J}_n^{(i)}$ auch während der Iteration möglich, sobald ein Wert von $\dot{\gamma}^{(i)} + \Delta \dot{\gamma}^{(i)} < 0$ berechnet wird [149]. Schließlich können aus (5.152) die Zuwächse der Spannungen und der inneren Variablen ermittelt werden:

$$\begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)} \\ \Delta \mathbf{Q}_n^{(i)} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_n^{(i)}]^{-1} : \left[\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} : \partial_\sigma g_n^{(i)} \\ \tilde{\mathbf{D}} \partial_q g_n^{(i)} \end{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\sigma^{(i)} \\ \mathbf{R}_q^{(i)} \end{bmatrix} \right]. \quad (5.154)$$

Die verbesserten Größen, die als Ausgangswerte für den nächsten Iterationsschritt benötigt werden, berechnen sich letztendlich zu

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^{(i+1)} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)} + \Delta \boldsymbol{\Sigma}_n^{(i)}, \quad (5.155)$$

$$\mathbf{Q}_n^{(i+1)} = \mathbf{Q}_n^{(i)} + \Delta \mathbf{Q}_n^{(i)}, \quad (5.156)$$

$$\dot{\mathbf{I}}_n^{(i+1)} = \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)} + \Delta \dot{\mathbf{I}}_n^{(i)}. \quad (5.157)$$

Diese stellen nach Konvergenz der Iteration die resultierenden Größen dar, die sich aus einem Verformungsinkrement $(\Delta \mathbf{u}_n, \Delta \boldsymbol{\omega}_n)$ ergeben. Der Iterationszyklus wird solange fortgesetzt, bis

ein Abbruchkriterium erfüllt ist, das durch eine geeignete Norm der Residuen definiert wird. Ein Abbruch erfolgt dementsprechend bei Erreichen bestimmter, festgelegter Toleranzwerte:

$$\|\mathbf{R}_\sigma^{(i)}\| \leq tol_\sigma, \quad (5.158)$$

$$\|\mathbf{R}_q^{(i)}\| \leq tol_q, \quad (5.159)$$

$$\|\mathbf{R}_f^{(i)}\| \leq tol_f. \quad (5.160)$$

Der Algorithmus, der sich aus den Beziehungen (5.139) bis (5.160) ergibt, stellt eine allgemeine Formulierung im Spannungsraum dar. Die Iteration erfolgt deswegen in den Größen $\boldsymbol{\Sigma}_n$ und \mathbf{Q}_n . Die treibenden Größen bilden jedoch die Variablen im Dehnungsraum ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{eff}$). Alternativ wäre somit auch eine Formulierung in Variablen des Dehnungsraumes denkbar.

Um die Effizienz des Algorithmus zu steigern, kann eine Reduktion auf die iterative Lösung einer nichtlinearen Gleichung für $\dot{\mathbf{T}}_n$ erfolgen. Im Bezug zum EULER-Verfahren wurde diese Möglichkeit von SIMO [151] vorgeschlagen.

5.6.6 Konsistente Tangente

Sind die Integrationspunkt-Spannungen, die sich aus den aktuellen Verformungs- und Porenwasserdruckinkrementen ergeben, genügend genau ermittelt, kann die konsistente Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{C}^{ct} berechnet werden. Wie bereits oben erwähnt, wird diese Matrix im globalen Gleichungssystem zur Bestimmung der inkrementellen Verschiebungen, Verdrehungen und Porenwasserdrücke benötigt. Im Gegensatz zur elastoplastischen Kontinuumstangente \mathbf{C}^{ep} wird die konsistente Tangente aus einer vollständigen Linearisierung der zur Spannungsintegration verwendeten Grundgleichungen gewonnen. Im Rahmen des globalen NEWTON-Verfahrens kann nur mit ihr eine quadratische Konvergenzrate erreicht werden [46, 47]. Bei Verwendung von \mathbf{C}^{ep} wären dagegen eine merklich höhere Anzahl von Iterationsschritten zur Sicherung des globalen Gleichgewichtszustandes nötig. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass im Rahmen der computerorientierten Plastizität Lastschritte von finiter Größe verwendet werden. Die für die Iteration verwendete Tangentenmatrix darf somit nicht aus der Konsistenzbedingung auf der Basis der Ratengleichungen der Kontinuums-Plastizitätstheorie abgeleitet werden, sondern muss mit dem gewählten diskreten Verfahren zur Integration der Spannungen konsistent sein. Deswegen wird für \mathbf{C}^{ct} auch der Begriff *konsistente* oder *algorithmische Tangente* verwendet.

Zur Ermittlung von \mathbf{C}^{ct} werden die totalen Differentiale des Stoffgesetzes, der Fließregel, des Verfestigungsgesetzes und der Fließbedingung benötigt:

$$d\boldsymbol{\Sigma}_n = \tilde{\mathbf{C}} : (d\dot{\mathbf{E}}_n - d\dot{\mathbf{E}}_n^{pl}), \quad (5.161)$$

$$d\dot{\mathbf{E}}_n^{pl} = \partial_\sigma g_n d\dot{\mathbf{T}}_n + \partial_{\sigma\sigma} g_n \dot{\mathbf{T}}_n : d\boldsymbol{\Sigma}_n + \partial_{\sigma q} g_n \dot{\mathbf{T}}_n \cdot d\mathbf{Q}_n, \quad (5.162)$$

$$d\mathbf{Q}_n = -\tilde{\mathbf{D}} \left(\partial_q g_n d\dot{\mathbf{T}}_n + \partial_{q\sigma} g_n \dot{\mathbf{T}}_n : d\boldsymbol{\Sigma}_n + \partial_{qq} g_n \dot{\mathbf{T}}_n \cdot d\mathbf{Q}_n \right), \quad (5.163)$$

$$d\mathbf{F}_n = \partial_\sigma f_n : d\boldsymbol{\Sigma}_n + \partial_q f_n \cdot d\mathbf{Q}_n = 0. \quad (5.164)$$

Alle Größen in diesen Gleichungen stehen für die konvergierten Werte der NEWTON-Iteration und beziehen sich auf die Integrationspunktebene des n -ten Zeitintervalls. Um die Notation etwas zu vereinfachen, wurde der Index i zur Bezeichnung des Iterationsschrittes weggelassen. Einsetzen von (5.162) in (5.161) liefert

$$d\boldsymbol{\Sigma}_n = \boldsymbol{\Xi}_n : \left(d\dot{\mathbf{E}}_n - \partial_\sigma g_n d\dot{\mathbf{T}}_n - \partial_{\sigma q} g_n \dot{\mathbf{T}}_n \cdot d\mathbf{Q}_n \right), \quad (5.165)$$

mit

$$\boldsymbol{\Xi}_n = \left[\tilde{\mathbf{C}}^{-1} - \partial_{\sigma\sigma} g_n \dot{\mathbf{I}}_n \right]^{-1}. \quad (5.166)$$

Die anschließende Anwendung von (5.165) sowohl auf (5.163) als auch auf (5.164) führt aufgelöst nach $d\dot{\mathbf{I}}_n$ und $d\mathbf{Q}_n$ zu

$$\begin{bmatrix} d\dot{\mathbf{I}}_n \\ d\mathbf{Q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_n^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{\sigma} f_n : \boldsymbol{\Xi}_n : d\dot{\mathbf{E}}_n \\ \partial_{q\sigma} g_n \dot{\mathbf{I}}_n : \boldsymbol{\Xi}_n : d\dot{\mathbf{E}}_n \end{bmatrix}, \quad (5.167)$$

mit

$$\mathbf{Z}_n = \begin{bmatrix} \partial_{\sigma} f_n : \boldsymbol{\Xi}_n : \partial_{\sigma} g_n & \partial_{\sigma} f_n : \boldsymbol{\Xi}_n : \partial_{\sigma q} g_n \dot{\mathbf{I}}_n - \partial_q f_n \\ \partial_{q\sigma} g_n \dot{\mathbf{I}}_n : \boldsymbol{\Xi}_n : \partial_{\sigma} g_n - \partial_q g_n & -\tilde{\mathbf{D}}^{-1} - \partial_{qq} g_n \dot{\mathbf{I}}_n + \partial_{q\sigma} g_n \dot{\mathbf{I}}_n : \boldsymbol{\Xi}_n : \partial_{\sigma q} g_n \dot{\mathbf{I}}_n \end{bmatrix}. \quad (5.168)$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (5.165) ein, so ergibt sich für den konsistente Tangentenoperator

$$\mathbf{C}_n^{ct} = \frac{d\boldsymbol{\Sigma}_n}{d\dot{\mathbf{E}}_n} = \boldsymbol{\Xi}_n - \boldsymbol{\Xi}_n : [\partial_{\sigma} g_n \quad \partial_{\sigma q} g_n \dot{\mathbf{I}}_n] \otimes \mathbf{Z}_n^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{\sigma} f_n \\ \partial_{q\sigma} g_n \dot{\mathbf{I}}_n \end{bmatrix} : \boldsymbol{\Xi}_n. \quad (5.169)$$

Es wird deutlich, dass sich die konsistente Tangente \mathbf{C}^{ct} von der Kontinuumstangente \mathbf{C}^{ep} wesentlich unterscheidet:

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial g}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{C}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial g}{\partial \sigma} + H}. \quad (5.170)$$

Jedoch stimmen beide im Grenzfall infinitesimaler Last- bzw. Zeitschritte überein. Im Fall $\Delta \dot{\mathbf{I}}_n \rightarrow 0$ folgt $\boldsymbol{\Xi}_n = \tilde{\mathbf{C}}$ und somit $\mathbf{C}^{ct} = \mathbf{C}^{ep}$. Da für den ersten Iterationsschritt in jedem Zeitintervall $\Delta \dot{\mathbf{I}}_n = 0$ angenommen wird, berechnen sich die Testwerte unter Verwendung der Kontinuumstangente. Erst in den weiteren Iterationen kommt die konsistente Tangente im Fall $\Delta \dot{\mathbf{I}}_n > 0$ zum Tragen. Um das globale Gleichgewicht sicherzustellen, wird – bei Anwendung der konsistenten Tangente – die Anzahl der notwendigen Iterationen auf bis zu 25% reduziert [151, 152]. Für einen effizienten Algorithmus ist eine konsistente Linearisierung also eine zwingende Voraussetzung. Bei Systemen mit einer großen Anzahl an Freiheitsgraden ergibt sich eine wesentliche Einsparung an Rechenzeit.

Aus Gleichung (5.169) ist ersichtlich, dass sowohl bei Anwendung einer nicht-assozierten Fließregel als auch eines nicht-assozierten Verfestigungsgesetzes im Sinne von $\partial_q f \neq \partial_q g$ die Symmetrie der konsistenten Tangente verloren geht. Im Gegensatz dazu wird die Symmetrie der Kontinuumstangente vom Verfestigungsgesetz nicht berührt.

Der wesentliche Aufwand bei der Durchführung des vorgeschlagenen Iterationsschemas besteht in der Ermittlung der Inversen der Matrix $\mathbf{A}_n^{(i)}$, bei der die zweiten Ableitungen der plastischen Potenzialfunktion $g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q})$ nach $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$ und \mathbf{q} zu berechnen sind und zusätzlich eine Invertierung erfolgt. Dies erzwingt zudem eine zweifach differenzierbare Form des plastischen Potentials. Bei Verwendung der im letzten Kapitel dargestellten Einflächen-Fließfunktion und einer daran angelehnten Formulierung der plastischen Potenzialfunktion ist die Ermittlung der benötigten Ableitungen jedoch immer eindeutig möglich. Für eine ganze Reihe von konstitutiven Beziehungen wurden jedoch Möglichkeiten vorgeschlagen, den Rechenaufwand zu minimieren. Insbesondere sind hier der *Radial-Return-Algorithmus* und spezielle Verfahren zu nennen, die auf einer Zerlegung in deviatorische und hydrostatische Anteile der wegabhängigen Variablen beruhen. Eine allgemeine Beschreibung findet sich unter anderem bei GROEN [75].

In diesem Zusammenhang sei noch angemerkt, dass für einfache Fließkriterien wie z.B. das DRUCKER–PRAGER oder das VON MISES–Kriterium eine analytisch exakte Lösung der Optimierungsaufgabe zur Verfügung steht. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Richtung der Ableitung $\partial_\sigma f$ konstant bleibt. Eine Iteration des Spannungszustands mit Hilfe eines NEWTON–Verfahrens ist somit nicht nötig.

Kapitel 6

Orts- und zeitadaptive Berechnungsverfahren

6.1 Allgemeines

Vor allem im Bereich wissenschaftlicher Berechnungsmethoden haben sich adaptive Netzveränderungsstrategien als leistungsfähige und effiziente Erweiterungen der Finite-Element-Methode erwiesen. Bei der näherungsweise Berechnung von räumlich und zeitlich veränderlichen Problemstellungen wie sie in dieser Arbeit behandelt werden, sind problemangepasste Lösungsmethoden auf der Grundlage adaptiver Algorithmen von zentraler Bedeutung. Gerade bei der Traglastanalyse wassergesättigter Böden treten große Gradienten in den Feldvariablen auf, die im räumlichen Bereich durch die Ausbildung von lokalisierten Versagenszonen (sogenannten Scherbändern) und im zeitlichen Bereich z.B. durch einsetzendes plastisches Verhalten charakterisiert sind. Für eine genügend genaue Abbildung durch finite Elemente wird daher eine sowohl räumlich als auch zeitlich sehr unterschiedliche Diskretisierungsdichte notwendig. Da weder der genaue Versagensmechanismus noch der zugehörige Zeitpunkt a priori bekannt sind, ist der Anwender nicht bzw. erst nach mehreren Berechnungen mit Versuch und Irrtum in der Lage, eine entsprechend differenzierte Diskretisierung vorzunehmen. Mit der Hilfe von adaptiven Methoden wird es hingegen möglich, den Diskretisierungsfehler zu analysieren und durch gezielte Maßnahmen die Genauigkeit und damit die Verlässlichkeit der Berechnung zu erhöhen. Dies geschieht beispielsweise durch:

- Verfeinerung des Elementnetzes (h-Ortsadaption)
- Erhöhung des Polynomgrads der Ansatzfunktionen (p-Ortsadaption)
- Verschieben von Elementknoten (r-Ortsadaption)
- Verringerung der Zeitschrittweite (h-Zeitadaption)
- Erhöhung der Genauigkeit des Zeitintegrationsschemas (p-Zeitadaption).

Effiziente Verfahren beinhalten dabei meist eine ausgewogene Kombination der angesprochenen Möglichkeiten, die jedoch in der Literatur unterschiedlich bewertet werden [44, 66, 131]. Die p-Version der FEM stellt ein effizientes Verfahren dar, wenn die Lösung eine ausreichende Regularität aufweist. Für die Analyse von Lokalisierungseffekten hat sie sich aus diesem Grund als weniger günstig erwiesen, da hier eine höhere Oszillationsanfälligkeit festzustellen ist und lokale Phänomene über einen größeren Bereich verschmiert werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher eine reine h-Adaption bevorzugt, mit der sich die Ansatzgüte in den begrenzten Bereichen von Lokalisierungen erhöhen lässt. Parallel dazu wird eine Zeitschrittsteuerung vorgestellt, mit der die Schrittweite an die zeitlich veränderlichen Bedingungen angepasst werden kann. Eine

zusätzliche Änderung des Integrationsschemas durch variable Ansatzfunktionen im Zeitbereich wird an dieser Stelle nicht weiter untersucht.

Das Ziel adaptiver Verfahren besteht also darin, eine maximale Genauigkeit bei minimalem Rechenaufwand sicherzustellen. Dies wird nach LI und BETTES [103] dann erreicht, wenn der begangene Fehler in jedem Element gleich groß ist. Eine uniforme Netzverdichtung bzw. eine gleichmäßige Zeitschrittweite würde somit zu einem viel zu hohen Aufwand führen, da auch Elemente mit geringem Fehler verfeinert werden. Um sowohl die räumliche als auch die zeitliche Diskretisierung optimal anzupassen, sind dementsprechend Indikatoren notwendig, die in der Lage sind, die zugehörigen Fehler unabhängig voneinander zu bestimmen. Bei Anwendung der Semidiskretisierung (siehe Abschnitt 5.5) ist die Trennung zwischen räumlichem und zeitlichem Diskretisierungsfehler jedoch nur sehr schwer möglich. Lösungsansätze zur Ermittlung des Fehlers im Zeitbereich im Bezug zu mechanischen Kriechprozessen wurden von STEIN und MAHNKEN in [157] gegeben. Im Gegensatz dazu sind auf dem Gebiet der Strukturmechanik bereits eine Vielzahl von Zeitschrittsteuerungen erprobt worden [134, 179].

In diesem Kapitel werden aufbauend auf die Raum–Zeit–Diskretisierung des letzten Abschnitts Indikatoren vorgestellt, die eine unabhängige Aussage über den Fehler im räumlichen Bereich und im Zeitbereich zulassen. Auf dieser Grundlage wird eine Netzverfeinerung kombiniert mit einer automatisierten Zeitschrittsteuerung entwickelt, die den sich verändernden Bedingungen Rechnung trägt. Da Lokalisierungsphänomene sowohl räumlich als auch zeitlich durch stark unterschiedliche Deformationsgeschwindigkeiten geprägt sind, ist eine effiziente Simulation von Grenzzuständen in der Geomechanik derzeit nur mit orts- und zeitadaptiven Berechnungsverfahren realisierbar.

6.2 Normen

Die *Norm* einer Funktion \mathbf{f} stellt eine skalare Größe dar. Durch sie ist es möglich eine vektorwertige Funktion, die auf einem unregelmäßig berandeten Gebiet Ω im \mathbb{R}^n definiert ist, in einfacher Weise zu charakterisieren. Für jede Norm wird gefordert:

- Die Norm beliebiger Funktionen ist größer oder gleich Null:

$$\|\mathbf{f}\| \geq 0 \quad (6.1)$$

- Die Norm verhält sich bei Multiplikation mit einem Skalar vom Betrag her linear:

$$\|\lambda\mathbf{f}\| = |\lambda| \|\mathbf{f}\| \quad (6.2)$$

- Es gilt die Dreiecksungleichung:

$$\|\mathbf{f} + \mathbf{g}\| \leq \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\| \quad (6.3)$$

- Die Norm einer Funktion ist genau dann Null, wenn \mathbf{f} überall den Nullvektor darstellt:

$$\|\mathbf{f}\| = 0 \iff \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

Eine sehr einfache Norm stellt die EUKLID–Norm gekennzeichnet durch $|\mathbf{f}|$ dar, die einem Vektor im \mathbb{R}^n auf seine Länge abbildet:

$$|\mathbf{f}| = \sqrt{\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}}. \quad (6.5)$$

Für vektorwertige Funktionen, die auf einem bestimmten Gebiet Ω definiert sind, kommen bei der Formulierung von Fehlerindikatoren hauptsächlich L_q -Normen zum Einsatz. Mit $1 \leq q < \infty$ ergibt sich

$$\|\mathbf{f}\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\mathbf{f}|^q dV \right)^{\frac{1}{q}} \quad (6.6)$$

mit den LEBESGUE-Räumen $L_q(\Omega)$. Häufig auftretende Spezialfälle bilden $q = 1, 2$ und ∞ , wobei sich (6.6) im Fall der L_∞ -Norm wie folgt vereinfacht:

$$\|\mathbf{f}\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{f}|. \quad (6.7)$$

6.3 Fehlerschätzung

Das Grundprinzip der h-adaptiven Durchführung von FE-Berechnungen besteht darin, ausgehend von einem möglichst einfach strukturierten Startnetz jeweils diejenigen Gebiete zu verfeinern, die das höchste Fehlermaß aufweisen. Dadurch wird die Approximation der primären Feldvariablen in Abhängigkeit von den gewählten Ansatzfunktionen lokal verbessert und so der Diskretisierungsfehler verringert. Dieser ist durch die Differenz zwischen exakter Lösung und FE-Lösung definiert:

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_h, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{e}_\omega = \omega_{ex} - \omega_h, \quad (6.9)$$

$$e_p = p_{ex} - p_h. \quad (6.10)$$

Da die exakten Lösungen \mathbf{u}_{ex} , ω_{ex} und p_{ex} nicht bekannt sind, müssen zur Bestimmung der Fehler \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_ω und e_p Abschätzungen verwendet werden, die rein auf der Auswertung der erzielten FE-Lösung des aktuellen Netzes beruhen. Eine solche Vorgehensweise, bei der der Fehler elementweise bestimmt wird, bezeichnet man als *lokale a posteriori Fehlerschätzung*. Als Maß für den Fehler werden dabei ausschließlich geeignet gewählte Normen verwendet. Der adaptive Prozess der Fehlerbestimmung und Netzanpassung setzt sich in diesem Sinne solange fort, bis eine gewählte globale Toleranzschranke unterschritten wird.

Obwohl bereits einige unterschiedliche Abschätzungsmöglichkeiten vorgestellt wurden, konnte für nicht-assozierte PRANDTL-REUSS-Plastizität und allgemeine Fließfunktionen bisher kein mathematisch abgesichertes Verfahren formuliert werden. Im Gegensatz dazu wurden für elastische Stoffgesetze mehrere Fehlerschätzer vorgeschlagen, die eine Aussage über den Diskretisierungsfehler in Form von oberen und unteren Schranken zulassen und zumeist auf Abschätzungen in der Energienorm beruhen. Es hat sich gezeigt, dass einige dieser Fehlerschätzer mit scharfen Schrankeigenschaften jedoch auch als *heuristische Indikatoren* bei Problemstellungen der nicht-assozierten Plastizität angewendet werden können und zu guten Ergebnissen führen. Die Eigenschaft gesicherter Toleranzschranken geht dabei zwar verloren, jedoch kann der Diskretisierungsfehler durch verkleinerte Toleranzen systematisch reduziert werden. Durch eine gezielte Wahl der globalen Toleranzschranken lassen sich somit trotzdem effektive Berechnungsergebnisse erzielen.

6.3.1 Residualer Fehlerschätzer nach Babuška und Miller

Dieses Verfahren wurde ursprünglich von BABUŠKA und RHEINBOLDT [9, 10] für eindimensionale Randwertprobleme entwickelt und schließlich von BABUŠKA und MILLER [5] auf zweidimensionale elliptische Randwertprobleme erweitert. Die Grundlage dieses sogenannten *residualen*

Fehlerschätzers bildet das lokale Residuum, das beim Einsetzen der FE-Lösung in die Gleichgewichtsdifferenzialgleichung entsteht. Mit den Faktoren C_1 und C_2 kann der globale Diskretisierungsfehler in der Energienorm folgendermaßen eingegrenzt werden:

$$C_1 \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_E} \|\mathcal{P}e\|_{E,\mathcal{B}^i}^2 \leq \|e\|_{E,\mathcal{B}}^2 \leq C_2 \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_E} \|\mathcal{P}e\|_{E,\mathcal{B}^i}^2. \quad (6.11)$$

Die elementweise definierten Größen $\mathcal{P}e$ stellen die orthogonale Projektion des Fehlers auf den FE-Ansatzraum dar und ergeben sich für $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_E$ im zweidimensionalen Fall zu

$$\|\mathcal{P}e\|_{E,\mathcal{B}^i}^2 \approx h_i^2 \underbrace{\int_{\mathcal{B}^i} (\mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u \mathbf{u}_h + \varrho \mathbf{b})^T (\mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u \mathbf{u}_h + \varrho \mathbf{b}) dA}_{\text{Anteil: Elementgebiet}} + h_i \underbrace{\int_{\partial \mathcal{B}^i} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_h)^T \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_h) dS}_{\text{Anteil: Elementränder}}. \quad (6.12)$$

Dabei steht h_i für die charakteristische Länge des jeweiligen Elements, \mathbf{B}_u für die Verschiebungs-Verzerrungs-Matrix und $\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_h)$ für die Sprünge der Spannungen an den Elementrändern

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_h) = \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_h - \bar{t} & \text{auf } \partial \mathcal{B}^i \subseteq \partial_\sigma \mathcal{B} \\ 0 & \text{auf } \partial \mathcal{B}^i \subseteq \partial_u \mathcal{B} \\ \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma}_h & \text{auf Binnenelementrändern} \end{cases} \quad (6.13)$$

wobei DIRICHLETSche und NEUMANNsche Systemränder gesondert betrachtet werden müssen. Die Energienorm des Fehlers e_u kann sowohl in Verschiebungsgrößen

$$\|e_u\|_{E,\mathcal{B}} = \left(\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{B}_u e_u)^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u e_u dA \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.14)$$

als auch in Spannungsgrößen

$$\|e_u\|_{E,\mathcal{B}} = \left(\int_{\mathcal{B}} e_\sigma^T \mathbf{C}^{-1} e_\sigma dA \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.15)$$

ausgedrückt werden, wobei der Fehler in den FE-Spannungen durch

$$e_\sigma = \boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_h \quad (6.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ex} = \mathbf{C} \mathbf{B}_u \mathbf{u}_{ex} \quad (6.17)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{C} \mathbf{B}_u \mathbf{u}_h \quad (6.18)$$

definiert ist. Bei hinreichend fein gewählten FE-Netzen kann der Gebietsanteil gegenüber den Randanteilen aufgrund von $h_i^2 \ll h_i$ vernachlässigt werden. Problematisch erweist sich auch die Ermittlung geeigneter Faktoren C_1 und C_2 , die vom Polynomgrad der gewählten Ansatzfunktion im Element abhängen. Überlegungen hierzu finden sich bei KELLY [88].

6.3.2 Post-processing Fehlerschätzer nach Zienkiewicz und Zhu

Auch der Fehlerschätzer von ZIENKIEWICZ und ZHU [191] verwendet als Ausgangspunkt eine Darstellung des Fehlers in Spannungsgrößen. Da der exakte Spannungsverlauf jedoch nicht vorliegt, wird ein Fehlermaß aus der Differenz der FE-Spannungen σ_h und einem durch eine Nachlaufrechnung oder *post-processing* erzeugten, verbesserten Spannungsverlauf σ^* gewonnen. Es gilt:

$$e_\sigma = \sigma_{ex} - \sigma_h \approx \sigma^* - \sigma_h . \quad (6.19)$$

Die Vorgehensweise basiert auf der Überlegung, dass der exakte Spannungsverlauf im Berechnungsgebiet im Allgemeinen stetig verläuft, die FE-Spannungen jedoch Sprünge an den Elementengrenzen aufweisen. Dies bedingt sich aus der Tatsache, dass zu ihrer Berechnung bei verschiebungsformulierten Elementen die Ableitungen der elementweise definierten und deswegen lediglich C_0 -stetigen Ansatzfunktionen zu bilden sind. ZIENKIEWICZ und ZHU schlagen vor, eine Näherung für den exakten Spannungsverlauf aus einer Glättung der FE-Lösung zu gewinnen. Eine derartige Nachbearbeitung der FE-Lösung wurde bereits von BABUŠKA und MILLER vorgeschlagen [6, 7, 8]. Da σ_h primär an den räumlichen Integrationspunkten ausgewertet wird, kann ein Verlauf über das Elementgebiet durch Berechnung der Werte an den Knotenpunkten $\hat{\sigma}^*$ und anschließender Interpolation – unter Zuhilfenahme der regulären räumlichen Ansatzfunktionen – erhalten werden:

$$\sigma^*(\xi, \eta) = N(\xi, \eta) \hat{\sigma}^* . \quad (6.20)$$

Zur Bestimmung von verbesserten Spannungen in den Knotenpunkten der einzelnen Elemente kann weiterhin die Tatsache ausgenutzt werden, dass die FE-Spannungen bei Verkleinerung der Netzweite h an gewissen Stellen eine höhere Konvergenzrate aufweisen als im übrigen Gebiet. Diese Eigenschaft der sogenannten *Superkonvergenz* wurde bereits früh von HINTEN und CAMPBELL [81] sowie von BARLOW [13] erkannt. Nach den Veröffentlichungen von ZIENKIEWICZ und ZHU erfuhr diese Thematik durch die Anwendung im Rahmen adaptiver Methoden eine Wiederbelebung [14, 193, 194]. Obwohl ein strenger Beweis der Existenz superkonvergenter Punkte nur für rechtwinklige Elemente geführt wurde, zeigt die Anwendung jedoch auch bei unregelmäßigen Elementformen gute Ergebnisse. Um die Eigenschaft der höheren Genauigkeit für die Ermittlung eines verbesserten, geglätteten Spannungsverlaufs auszunützen, stehen im Wesentlichen die folgenden Methoden zur Berechnung der Knotenwerte zur Verfügung:

Bilden des Mittelwerts

Die Knotenwerte der Spannungen berechnen sich dabei aus einer elementweisen Transformation der Werte an den superkonvergenten Punkten bzw. den Integrationspunkten. Als einfache Methode der Übertragung bietet sich eine Auswertung der FE-Ansatzfunktionen an. Anschließend

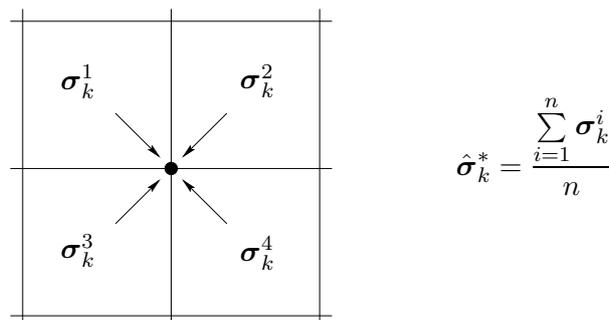


Abbildung 6.1: Knotenmittelung

erfolgt eine Mittelung aller Beiträge aus den angrenzenden Elementen. Unter gewissen Voraussetzungen können mit diesem Verfahren auch superkonvergente Knotenspannungen erhalten werden [6].

Gewichtete Mittelung

Grenzen an einen Knoten Elemente mit stark unterschiedlichen Elementgrößen an, so ist es in vielen Fällen sinnvoll, die Beiträge jedes Elements zusätzlich mit seiner Fläche zu wichten. Gerade bei adaptiver Netzverfeinerung mit einer hierarchischen Strategie tritt dieser Aspekt stärker in den Vordergrund.

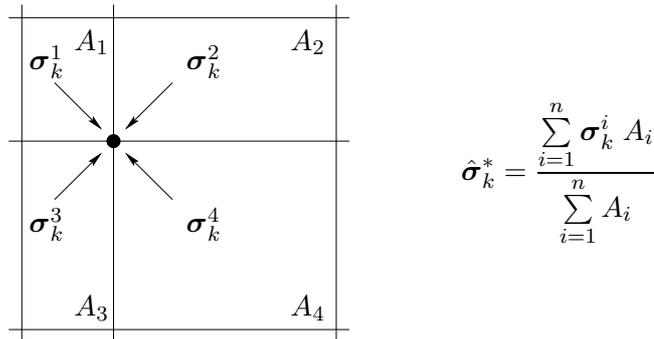


Abbildung 6.2: Gewichtete Knotenmittelung

Least-squares Mittelung

Dieses Verfahren ist rechenintensiver als die bisher vorgestellten und basiert auf einer lokal begrenzten Nachlaufrechnung. Die Knotenspannungen $\hat{\sigma}_k^*$ werden dabei aus einem optimierten Spannungsverlauf über einen sogenannten *Knoten-Patch* ermittelt. Als Optimalitätskriterium dient die *Methode der kleinsten Fehlerquadrate*.

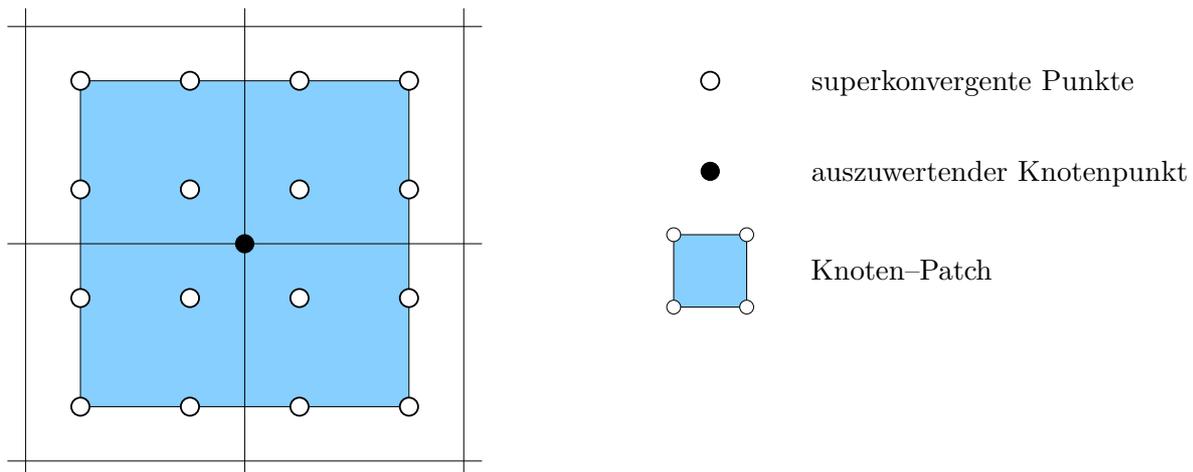


Abbildung 6.3: Knoten-Patch

Für jede einzelne Spannungskomponente wird nun über die Fläche des gesamten Knoten-Patch der Ansatz

$$\sigma^{patch}(x, y) = \mathbf{P}(x, y) \mathbf{a} \quad (6.21)$$

aufgestellt, wobei $\mathbf{P}(x, y)$ Ansatzfunktionen enthält, deren Ordnung mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden superkonvergenten Punkte abzustimmen ist und oft mit der Approximation der Verschiebungen übereinstimmt. In \mathbf{a} sind die Freiwerte zusammengefasst, die über ein Minimierungsverfahren bestimmt werden können:

$$\sum_{i=1}^n \left(\boldsymbol{\sigma}_h(x_s^i, y_s^i) - \mathbf{P}(x_s^i, y_s^i) \mathbf{a} \right)^2 \longrightarrow \text{minimal} . \quad (6.22)$$

Dabei stellen (x_s^i, y_s^i) die lokal für den Patch definierten Koordinaten der superkonvergenten Punkte dar. Die Lösung dieser Optimierungsaufgabe führt mit

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_s^i, y_s^i) \mathbf{P}(x_s^i, y_s^i) \quad (6.23)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}^T(x_s^i, y_s^i) \boldsymbol{\sigma}_h(x_s^i, y_s^i) \quad (6.24)$$

zum Gleichungssystem

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} . \quad (6.25)$$

Für alle zu mittelnden Spannungskomponenten bleibt die Matrix \mathbf{A} konstant, so dass nur eine einzige Invertierung pro Knoten–Patch nötig ist. Der Rechenaufwand kann somit in Grenzen gehalten werden und hängt hauptsächlich von der Anzahl der Ansatzfunktionen in \mathbf{P} ab. Schließlich können die Werte am eigentlichen Knotenpunkt durch eine Auswertung der Funktion $\boldsymbol{\sigma}(x, y)$ an den Knotenkoordinaten (x_k, y_k) berechnet werden:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k^* = \boldsymbol{\sigma}^{patch}(x_k, y_k) = \mathbf{P}(x_k, y_k) \mathbf{a} . \quad (6.26)$$

Problematisch wird diese Methode, wenn die Matrix \mathbf{A} singulär wird und somit eine Invertierung nicht möglich ist. Dies tritt hauptsächlich dann auf, wenn bei der Behandlung von System–Rand- oder Eck–Knoten zu wenige superkonvergente Stützstellen zur Verfügung stehen. In diesem Fall ist es sinnvoll, den Knoten–Patch um weiter innen liegende Elemente zu erweitern.

In der Literatur werden teilweise weitere Möglichkeiten vorgeschlagen, um verbesserte Knotenspannungen zu berechnen. KVAMSDAL und OKSTAD [92] verwenden beispielsweise ausschließlich statisch zulässige Ansatzfunktionen in \mathbf{P} , die die inneren Gleichgewichtsbedingungen a priori erfüllen. Von BOROOMAND und ZIENKIEWICZ [24] wurde ein Verfahren entwickelt, das auf einer Knotengleichgewichtsaussage im Patch basiert und somit eine Projektion der Integrationspunkte auf die Knotenpunkte mit minimaler Störung des globalen Gleichgewichts sichert.

Fehlerschätzung

Die eigentliche Abschätzung des Diskretisierungsfehlers in der Energienorm erfolgt im Anschluss an die Nachlaufrechnung auf der Basis der Differenz zwischen FE–Spannungen und geglätteten, verbesserten Spannungen:

$$\|e\|_{E,B} \approx \left(\int_B (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) dA \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (6.27)$$

Wie bereits angesprochen kann nur für rechtwinklige Elemente ein superkonvergentes Verhalten der Spannungen in den Integrationspunkten bewiesen werden. Dementsprechend ergeben sich effiziente Abschätzungen nur dann, wenn die verwendeten Elementgeometrien nicht allzu stark degenerieren, d.h. von der Rechteckform abweichen. Dies kann bei verschiedenen Netzveränderungsstrategien in höheren Verfeinerungsstufen geschehen. Bei der angewendeten *hierarchischen Verfeinerungsstrategie* wird ein solches Degenerieren jedoch dadurch vermieden, dass das Ausgangsnetz entsprechend gleichmäßig gewählt wird. Bei alternativen Vernetzungstechniken ist unter Umständen die Verwendung eines Netzglättungs-Algorithmus erforderlich.

RANK und ZIENKIEWICZ zeigten in [133] eine Äquivalenz der beiden bisher vorgestellten Fehlerschätzer, wenn zur Approximation der Verschiebungen bilineare Ansatzfunktionen verwendet werden. Da bei der Herleitung des Verfahrens nach BABUŠKA und MILLER ein elastisches Materialverhalten vorausgesetzt wurde, liefert es bei elastoplastischen Berechnungen keine zutreffenden Abschätzungen. Auch die post-processing Methode von ZIENKIEWICZ und ZHU gründet auf einer Formulierung in der Energienorm und kann daher plastisches Verhalten nur schlecht erfassen. Dies liegt in der Tatsache begründet, dass der eindeutige Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Spannungen bei Materialmodellen der Plastizität nicht mehr gewährleistet ist. Effiziente Netzverfeinerungen werden hier nur dann erhalten, wenn die exakte Lösung möglichst glatt über das Berechnungsgebiet verläuft. Da Lokalisierungszone eine Diskontinuität darstellen, und eine Konzentration von plastischen Dehnungen aufweisen, führt bei derartigen Berechnungen keine der beiden genannten Methoden zum Ziel. Eine Möglichkeit, die Lage von Scherbändern zu bestimmen und diese adäquat zu verfeinern bietet eine Glättung der plastischen Dehnungen. ELLSIEPEN und EHLERS setzen hier das oben angesprochene Verfahren der Fehlerquadratminimierung ein und erhalten mit der Differenz zur FE-Lösung einen Verfeinerungsindikator.

6.3.3 Fehlerschätzer für Elastoplastizität nach Johnson und Hansbo

Als mathematisch abgesicherter Fehlerschätzer für elastoplastische Problemstellungen kann das von JOHNSON und HANSBO entwickelte Verfahren betrachtet werden [87]. Dieser residuenbasierte Schätzer wurde unter der Annahme kleiner Dehnungen und assoziierter plastischer Verzerrungsraten hergeleitet. Weiterhin bleibt die Anwendung auf ideale HENCKY-Plastizität und eine VON MISES-Fließfunktion beschränkt. Die Abschätzung basiert auf einer Teilung des Berechnungsgebiets in elastische (\mathcal{B}_{el}) und plastische Bereiche (\mathcal{B}_{pl}) und verwendet je nach dem die L_2 -Norm bzw. die L_∞ -Norm zur Darstellung des Fehlers:

$$\|\mathbf{e}_u\|_{E,\mathcal{B}} \leq \left(\sum_{j=1}^2 \|C_j^i R_j(\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L_2(\mathcal{B}_{el})} + C^s \sum_{j=1}^2 \|C_j^i R_j(\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L_\infty(\mathcal{B}_{pl})} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.28)$$

Dabei bedeuten $R_j(\boldsymbol{\sigma}_h)$ die flächenresidualen Anteile ($j = 1$) und die Randanteile ($j = 2$)

$$R_1(\boldsymbol{\sigma}_h) = h_i |\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h + \varrho \mathbf{b}|, \quad (6.29)$$

$$R_2(\boldsymbol{\sigma}_h) = \max \sup_{S \subset \partial \mathcal{B}^i} \frac{h_i}{h_i^k} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_h) \quad (6.30)$$

mit der charakteristischen Elementgröße h_i , der Elementkantenlänge h_i^k und den Sprunggrößen $\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_h)$ nach Gleichung (6.13). Die Anteile der plastischen Bereiche werden mit einer Stabilitätskonstanten C^s gewichtet:

$$\begin{aligned} C^s &= \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{ex})\|_{L_1(\mathcal{B})} + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)\|_{L_1(\mathcal{B})} \\ &\approx 2 \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)\|_{L_1(\mathcal{B})}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Für sie kann die Existenz einer oberen Schranke gezeigt werden, die jedoch gegen unendlich strebt, wenn die Traglast des Systems erreicht wird. Die Faktoren C_j^i stellen Interpolationskonstanten dar, die wiederum über Abschätzungen bestimmt werden müssen. Dafür werden meist Eigenwertanalysen angewendet. Die Aufteilung in elastische und plastische Anteile wird dann problematisch, wenn die Grenze durch ein Element verläuft. Treten in Folge davon beide Arten von Integrationspunkten in einem Element auf, so muss eine Zuordnung der Residuen zum elastischen bzw. plastischen Anteil erfolgen.

Da der Fehlerschätzer auf dem Modell der HENCKY–Plastizität beruht, ist eine strenge Anwendung auf das allgemeinere inkrementelle PRANDTL–REUSS–Modell nur für monoton steigende Lastpfade abgesichert. Lokale Entlastungsvorgänge, die bei Versagensformen wie Scherbändern auftreten, sind somit nicht adäquat abbildbar.

6.3.4 Weitere Ansätze für elastoplastische Stoffmodelle

Die Theorie der Fehlerschätzung für linear elastisches Materialverhalten wurde bereits sehr früh in der Literatur behandelt und es kann deshalb auf eine Vielzahl von Algorithmen zurückgegriffen werden. Netzverfeinerungen mit einem Effektivitätsindex nahe beim Optimum von 1 sind ohne große Schwierigkeiten zu erreichen. In den letzten Jahren hat sich eine Weiterentwicklung adaptiver Methoden hauptsächlich für die Anwendung auf elastoplastische Problemstellungen ergeben. Neben abgesicherten Schätzern für assoziierte, ideale Plastizität werden für allgemeinere Plastizitätsmodelle hauptsächlich Fehlerindikatoren auf heuristischer Basis eingesetzt. Aufgrund der Vielzahl von Plastizitäts- und Viskoplastizitätsmodellen sind allgemeingültige Verfahren nur schwer zu formulieren. Eine sinnvolle Möglichkeit bietet die Konstruktion von Fehlerindikatoren aus mehreren Anteilen, mit denen der Einfluss verschiedener Fehlerquellen berücksichtigt werden kann.

PERIĆ, YU und OWEN stellen in [123] einen Indikator vor, der zwar wie der Fehlerschätzer von JOHNSON und HANSBO auf die klassische J_2 –Elastoplastizität mit assoziierter Fließregel beschränkt bleibt, jedoch in der Lage ist ein ver- bzw. entfestigendes Materialverhalten zu beschreiben und auch nach Eintreten von Lokalisierungen noch zu brauchbaren Ergebnissen führt. Von erfolgreichen Anwendungen wird vor allem im Hinblick auf eine Formulierung im Rahmen der COSSERAT–Theorie berichtet [187]. Der Fehlerindikator beruht auf der Auswertung einer erweiterten Energienorm

$$\|e_\Sigma\|_{\mathcal{B}}^2 = \int_{\mathcal{B}} \left(\Sigma^* - \Sigma^h \right) : \mathbb{G}^{-1} : \left(\Sigma^* - \Sigma^h \right) dV \quad (6.32)$$

sowie eines Ausdrucks für die Dissipation

$$\|e_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{B}}^2 = \int_{\mathcal{B}} \left| \left(\Sigma^* - \Sigma^h \right) : \left(\dot{\xi}^* - \dot{\xi}^h \right) \right| dV. \quad (6.33)$$

Die Verläufe für Σ^* und $\dot{\xi}^*$ werden durch geeignete Projektionen der FE–Lösungen Σ^h und $\dot{\xi}^h$ berechnet. Die Autoren schlagen in diesem Zusammenhang eine Glättung in Analogie zum post–processing nach ZIENKIEWICZ und ZHU vor:

$$\int_{\mathcal{B}} \Pi \left(\Sigma^* - \Sigma^h \right) dV = 0, \quad (6.34)$$

$$\int_{\mathcal{B}} \Pi \left(\dot{\xi}^* - \dot{\xi}^h \right) dV = 0. \quad (6.35)$$

Darin stellen $\Sigma = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{q})$ den verallgemeinerten Vektor der Spannungen, Momentenspannungen und inneren Variablen, \mathbb{G} einen entsprechend definierten Modul mit

$$\mathbb{G} = \text{diag}(\boldsymbol{C}_\sigma, \boldsymbol{C}_\mu, \boldsymbol{D}) \quad (6.36)$$

und $\dot{\boldsymbol{\xi}} = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}, \dot{\boldsymbol{\kappa}}^{pl}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ die generalisierten Raten der plastischen Verzerrungen, plastischen Krümmungen und inneren Parameter im Dehnungsraum dar. Im Allgemeinen erscheint eine Glättung der Variablen des Dehnungsraums sinnvoller, da diese im Vergleich mit den durch die Fließfunktion beschränkten Variablen des Spannungsraums mehr Informationen beinhalten.

Von STEIN, BARTHOLD, OHNIMUS und SCHMIDT werden in [156] drei verschiedene Indikatoren verwendet, die in ihrer Gesamtheit das elastoplastische Materialverhalten erfassen sollen. Jeder einzelne konzentriert sich jedoch in unterschiedlichen Regionen des Berechnungsgebiets. Es werden unterschieden:

- Fehler in den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\eta_{eq}^2 = C_R h^2 \|R(\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L_2(\mathcal{B})}^2 + C_J h \|J(\boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L_2(\partial\mathcal{B})}^2 \quad (6.37)$$

Dieser Indikator führt vor allem zu Verfeinerungen in Bereichen von Singularitäten und ist stark an den Fehlerschätzer von JOHNSON und HANSBO für elastische Problemstellungen angelehnt.

- Fehler in der plastischen Dissipation:

$$\eta_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}}^2 = \left\| \boldsymbol{\sigma}_* : \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_*^{pl} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_h^{pl} \right) \right\|_{L_2(\mathcal{B})}^2 + \|\boldsymbol{\beta} \cdot (\dot{\boldsymbol{\alpha}}_* - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_h)\|_{L_2(\mathcal{B})}^2 \quad (6.38)$$

Dieser Indikator ist nur innerhalb des plastischen Bereichs definiert und führt auch nur dort zu Verfeinerungen. Die mit einem Stern gekennzeichneten Größen $(\cdot)_*$ werden wiederum mittels post-processing bestimmt.

- Fehler in den KUHN–TUCKER–Bedingungen:

$$\eta_{KT}^2 = \|\dot{\gamma}_h f(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{q}_h)\|_{L_2(\mathcal{B})} \quad (6.39)$$

Der hierdurch definierte Fehler konzentriert sich auf die Übergangszonen zwischen elastischen und plastischen Bereichen. Da die KUHN–TUCKER–Bedingungen an den eigentlichen Integrationspunkten exakt eingehalten sind, wird η_{KT} durch eine numerische Integration einer höheren Ordnung bestimmt. Die Werte an den dazu benötigten Punkten werden durch Extrapolation berechnet.

Eine Schwierigkeit stellt hierbei die Wichtung der einzelnen Indikatoren zueinander dar. Diese weisen zwar eine einheitliche Dimension jedoch unterschiedliche Größenordnungen auf. Bedingt durch die Komplexität elastoplastischer Berechnungen und den damit verbundenen unterschiedlichen Einflüsse auf den Diskretisierungsfehler, erscheint eine Kombination verschiedener Indikatoren jedoch vielversprechend. Der erhöhte Berechnungsaufwand zur Auswertung von Residuentermen und geglätteten Verläufen gleichzeitig ist durch die Güte der erzielten Ergebnisse gerechtfertigt.

6.4 Fehlerindikatoren für die Analyse wassergesättigter Böden

Im Rahmen der hier vorgestellten elastoplastischen Analyse von wassergesättigten Böden bei Anwendung einer nicht-assozierten Fließregel kann derzeit kein allgemeingültiger Fehlerschätzer auf streng mathematischer Grundlage angegeben werden, der in der Lage ist, alle Aspekte der gekoppelten Verschiebungs–Verdrehungs–Porenwasserdruck Diskretisierung abzudecken. Speziell für das elastoplastische COSSERAT–Kontinuum existieren nur sehr wenige Arbeiten, die Hinweise für das Einbeziehen von Mikrorotationen und Momentenspannungen in einen Fehlerindikator geben. Darüber hinaus ist es wenig realistisch, einen Indikator zu finden, der gleichzeitig die Verfeinerung im räumlichen und im zeitlichen Bereich steuert. Deshalb wird im Folgenden der Diskretisierungsfehler mittels verschiedener Indikatoren erfasst. In diesem Abschnitt werden aufbauend auf der vorgestellten zeitlich diskontinuierlichen Raum–Zeit–Diskretisierung Indikatoren für folgende Fehler vorgestellt:

- Fehler in den lokalen Gleichgewichtsbedingungen
- Fehler in der Kontinuitätsbedingung der Fluid–Flüsse
- Zeitlicher Diskretisierungsfehler
- Fehler durch die Integration der konstitutiven Beziehungen.

Die ersten beiden Indikatoren sind elementweise definiert und steuern den ortsadaptiven Teil der Verfeinerung. Für eine automatisierte Zeitschrittsteuerung werden die beiden letzten Indikatoren herangezogen. Aufgrund der uniformen Verfeinerung im Zeitbereich ist hier ein globales Fehlermaß erforderlich. Der Fehler durch die Integration der konstitutiven Beziehungen bleibt auf plastische Bereiche beschränkt, da die Spannungen in elastischen Bereichen exakt bestimmt werden können.

6.4.1 Fehler in den Gleichgewichtsbedingungen

In Anlehnung an den residuenbasierten Fehlerschätzer von JOHNSON und HANSBO wird ein Fehlermaß durch a posteriori Auswertung von Gebietsresiduen der Gleichgewichtsdifferenzialgleichungen und den Sprunggrößen der Spannungen und Momentenspannungen an den Elementrändern definiert. Es müssen bei der gekoppelten Verformungs–Porenwasserdruck–Analyse jedoch die totalen Spannungen zugrundegelegt werden. Da bei Anwendung des vorgestellten Raum–Zeit–Elements die Gleichgewichtsbedingungen durch die Äquivalenz der inneren und äußeren Kräfte an allen diskreten Zeitpunkten erfüllt werden, kann die a posteriori Auswertung zum Zeitpunkt t_{n+1} erfolgen. Aufgrund der Tatsache, dass die Gleichungen (5.4) und (5.5) ein Randwertproblem ohne Einfluss der Zeitkoordinate darstellen, ergibt sich ein reiner Fehlerindikator für den räumlichen Bereich. Mit den Gebiets- und Randanteilen

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}_h, p_h) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_h + p_h \mathbf{I}) + \boldsymbol{q} \mathbf{b}, \quad (6.40)$$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_h, p_h) = \begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_h + p_h \mathbf{I}) - \bar{\mathbf{t}} & \text{auf } \partial \mathcal{B}^i \subseteq \partial_\sigma \mathcal{B} \\ 0 & \text{auf } \partial \mathcal{B}^i \subseteq \partial_u \mathcal{B} \\ \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \Delta(\boldsymbol{\sigma}_h + p_h \mathbf{I}) & \text{auf Binnenelementrändern} \end{cases} \quad (6.41)$$

kann der Indikator η_{GG} für jedes Element definiert werden:

$$\eta_{GG,i}^2 = C^s \left(\|C_1^i h_i \mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}_h, p_h)\|_{L_\infty(\mathcal{B}^i)} + \|C_2^i \frac{h_i}{h_k} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_h, p_h)\|_{L_\infty(\partial \mathcal{B}^i)} \right). \quad (6.42)$$

Die Aufteilung in elastische und plastische Anteile, die bei der praktischen Durchführung zu Problemen führt, wurde hier aufgegeben. Es hat sich gezeigt, dass die Anwendung der L_∞ -Norm auf alle Anteile sehr gute Ergebnisse liefert [43]. Um dem inkrementellen Charakter der Berechnung in höherem Maß gerecht zu werden, wird für die Wichtungsgröße C^s die L_1 -Norm der inkrementellen Gesamtdehnungen $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ verwendet:

$$C^s = \|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\|_{L_1(\mathcal{B}^i)}. \quad (6.43)$$

Die Konstanten C_j^i werden in Abhängigkeit des Polynomgrads der Ansatzfunktionen berechnet. Bei den verwendeten 9/4-Knoten-Elementen kommen Werte von

$$C_1 = \frac{1}{96} \qquad C_2 = \frac{1}{24} \quad (6.44)$$

zum Einsatz. Sie weisen jedoch auch eine Abhängigkeit vom behandelten Problem auf. Dieser heuristische Fehlerindikator liefert zwar keine absolute Fehlerschranke, eignet sich jedoch sehr gut für die gezielte Aufspürung und Verfeinerung von Lokalisierungszonen. Mit ähnlichen Ansätzen führt auch PRAVIDA [128] eine eingehende Analyse von Rissbildungen in Stahlbetonscheiben durch. Eine konsequente Erweiterung dieses Indikators auf die Anwendung im Rahmen der Mikropolaren Theorie wurde von CRAMER, FINDEISS, STEINL und WUNDERLICH formuliert [40]. Auf der Grundlage der freien inkrementellen Komplementärenergie

$$\Psi = \int_{\mathcal{B}} d\boldsymbol{\varepsilon} : d\boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\mathcal{B}} d\boldsymbol{\kappa} : d\boldsymbol{\mu} \, dV \quad (6.45)$$

wird eine additive Aufteilung des Fehlerindikators in klassische und mikropolare Anteile motiviert. Es ergibt sich schließlich die Form

$$\begin{aligned} \eta_{GG,i}^2 = & C^s \underbrace{\left(\|C_1^i h_i \mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}_h, p_h)\|_{L_\infty(\mathcal{B}^i)} + \|C_2^i \frac{h_i}{h_k} \mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma}_h, p_h)\|_{L_\infty(\partial\mathcal{B}^i)} \right)}_{\text{klassischer Anteil}} + \\ & + C^{s,c} \underbrace{\left(\|C_1^{i,c} h_i \mathbf{R}^c(\boldsymbol{\mu}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L_\infty(\mathcal{B}^i)} + \|C_2^{i,c} \frac{h_i}{h_k} \mathbf{J}^c(\boldsymbol{\mu}_h, \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{L_\infty(\partial\mathcal{B}^i)} \right)}_{\text{mikropolarer Anteil}}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

bei der der erste Term vollständig aus der klassischen Formulierung übernommen werden kann. Im zweiten Term indiziert der Index $(\cdot)^c$ die zusätzlichen COSSERAT-Anteile, die durch

$$\mathbf{R}^c(\boldsymbol{\mu}_h, \boldsymbol{\sigma}_h) = \operatorname{div} \boldsymbol{\mu}_h + \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}_h, \quad (6.47)$$

$$\mathbf{J}^c(\boldsymbol{\mu}_h) = \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}_h - \bar{\mathbf{m}} & \text{auf } \partial\mathcal{B}^i \subseteq \partial_\mu\mathcal{B} \\ 0 & \text{auf } \partial\mathcal{B}^i \subseteq \partial_\omega\mathcal{B} \\ \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \Delta\boldsymbol{\mu}_h & \text{auf Binnenelementrändern} \end{cases} \quad (6.48)$$

definiert sind. Die Gebietsanteile werden somit durch das Residuum der Differenzialgleichung (5.5) und die Randanteile durch die Sprünge in den Momentenspannungen $\Delta\boldsymbol{\mu}_h$ aus der FE-Lösung bestimmt. Als zusätzliche Wichtungsgröße für den neu eingeführten additiven Term kommt die L_1 -Norm der inkrementellen Gesamtkrümmungen $\Delta\boldsymbol{\kappa}$ zum Einsatz:

$$C^{s,c} = \|\Delta\boldsymbol{\kappa}\|_{L_1(\mathcal{B}^i)}. \quad (6.49)$$

Mit dieser Wahl ergibt sich ein zum klassischen Anteil energetisch korrespondierender mikropolarer Anteil, so dass eine additive Verknüpfung möglich wird. Bei der Anwendung dieses Indikators in der numerischen Simulation wurde erkannt, dass der mikropolare Anteil erst bei einsetzender Scherbandformation – geprägt durch starke lokale Rotationsgradienten – an Einfluss gewinnt. Bis zu diesem Zeitpunkt kontrolliert allein der klassische Anteil die adaptive Netzverfeinerung. Jedoch zeigen auch innerhalb des Scherbands beide Anteile ein unterschiedliches Verhalten. Während der klassische Anteil mit erhöhten Werten im Zentrum des Bands reagiert, konzentriert sich der mikropolare Anteil wie erwartet an beiden Rändern, da dort höhere Krümmungen auftreten. Da das Scherband meist eine S-förmige Gestalt aufweist, verschwindet die Krümmung und damit der mikropolare Anteil in der Mitte der Lokalisierungszone.

Zur Bestimmung der Konstanten C_j^i und $C_j^{i,c}$ wurden von STEINL genauere Betrachtungen anhand von Modellbeispielen durchgeführt [159]. In diesem Zusammenhang konnten bei biquadratischen Ansätzen für Verschiebungen und Rotationen Werte von

$$C_1 = \frac{1}{100} \qquad C_2 = C_1^c = C_2^c = \frac{1}{10} \qquad (6.50)$$

bestimmt werden. Da es sich bei η_{GG} nicht um einen Fehlerschätzer, sondern lediglich um einen Indikator handelt, ist letztendlich nur das Verhältnis der einzelnen Werte zueinander ausschlaggebend. Eine obere bzw. untere Schrankencharakteristik kann nicht abgeleitet werden. Auch hier wurde eine Abhängigkeit von der Aufgabenstellungen erkannt.

6.4.2 Fehler in der Kontinuität der Fluid-Flüsse

Sind die Porenwasserdrücke aus der Lösung des globalen Gleichungssystems bekannt, kann mittels Differenziation des Druckverlaufs und anschließender Auswertung der Beziehung

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{k}^S}{\mu^{FR}} \cdot (\nabla p + \varrho^{FR} \mathbf{b}) \qquad (6.51)$$

der Fluid-Fluss an jeder Stelle im Berechnungsgebiet bestimmt werden. Durch die Wahl von elementweise begrenzten C_0 -stetigen Ansatzfunktionen wird zwar das Feld der Porenwasserdrücke über die Elemente hinweg stetig approximiert, für die Flüsse ergeben sich als abgeleitete Größen jedoch Sprünge auf den Elementrändern. Die Kontinuitätsbedingung

$$\operatorname{div}(\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{Q}) = 0 \qquad (6.52)$$

ist folglich nur im genäherten integralen Sinn und nicht lokal an jedem Integrationspunkt erfüllt. Die Güte der Approximation wird also auch durch die Maschenweite h des FE-Netzes beeinflusst. Um den Diskretisierungsfehler in diesem Sinn zu begrenzen, ist ein Fehlerindikator und eine darauf basierende Netzverfeinerung ausgewählter Elemente nötig. Im Gegensatz zu den Gleichgewichtsbedingungen begründet Gleichung (5.6) ein Anfangs-Randwertproblem. Die Auswertung des Residuums der Kontinuitätsbedingung (6.52) führt somit nicht zu einem rein räumlichen Fehlerindikator, da ein Fehler aus der Zeitdiskretisierung überlagert wird. Ein derartiges, auf das gesamte Raum-Zeit-Element bezogenes Fehlermaß könnte somit weder als Fehlerindikator für die zeitliche noch für die räumliche Koordinate genützt werden. Ein Maß für den räumlichen Diskretisierungsfehler in der Kontinuitätsbedingung wird im Folgenden mittels einer post-processing Methode formuliert, die die berechneten Fluid-Flüsse zum Zeitpunkt t_{n+1} als Grundlage verwendet. Auf der Basis einer *Fehlerquadrat-Minimierung* im zugehörigen Element-Patch kann ein verbesserter stetiger Verlauf \mathbf{Q}^* erzeugt werden, der der exakten Lösung näher kommt als die FE-Lösung auf dem aktuellen Netz. Die Berechnung erfolgt für jede Flusskomponente in Analogie zur Spannungsglättung aus Kapitel 6.3.2, d.h. die Glättung betrifft zusätzlich

die Richtung der Fluid-Flüsse. Die Stützstellen bilden auch hier die superkonvergenten Punkte der Elemente. Aus der Differenz zwischen FE-Lösung \mathbf{Q}_h und verbesserter Lösung kann dann ein Maß für den Diskretisierungsfehler bestimmt werden. Ein lokaler Indikator ergibt sich zu

$$\eta_{Fl,i}^2 = \int_{\mathcal{B}^i} (\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}_h) \cdot (\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}_h) \, dV. \quad (6.53)$$

Da das Teilproblem der Porenwassererdruck-Fluid-Fluss-Analyse im beschriebenen Modell keine nichtlinearen Terme umfasst, kann durch die verwendete L_2 -Norm der Differenz eine zuverlässige Abschätzung erhalten werden. Im Gegensatz zum ersten Fehlerindikator η_{GG} ist der Fluid-Fluss-Indikator η_{Fl} nicht in gleichem Maß an der Aufspürung von Lokalisierungs-zonen beteiligt. Vielmehr stellt er auch im elastischen Zustand die Approximationsgüte des Porenwasserdruckverlaufs sicher.

6.4.3 Zeitlicher Diskretisierungsfehler

Während bis jetzt ausschließlich Fehleranteile betrachtet wurden, die von der räumlichen Diskretisierung des Berechnungsgebiets, d.h. von der Maschenweite h des FE-Netzes abhängen, wird im Folgenden auf diejenigen Fehleranteile eingegangen, die auf der Diskretisierung des zu berechnenden Zeitintervalls beruhen. Dieser Fehler hängt sowohl von der Genauigkeit des verwendeten Integrationsverfahrens als auch von der aktuellen Zeitschrittweite Δt ab. Da Berechnungsmethoden im Zeitbereich hauptsächlich zur Behandlung von Problemstellungen der Struktur-dynamik und Strömungsmechanik eingesetzt werden, bleiben auch Vorschläge zur zeitlichen Fehlerkontrolle in der Literatur weitgehend auf diese Gebiete beschränkt. Für das bekannte NEWMARK-Integrationsverfahren oder die HHT- α -Methode werden eine Reihe von möglichen Zeitschrittsteuerungen vorgestellt [134, 188]. Diese sind jedoch auf das behandelte quasi-statische Problem der Konsolidierung nicht in geeigneter Form übertragbar.

Die in Kapitel 5.5 beschriebene Semidiskretisierung in Zusammenhang mit einer zeitlich kontinuierlichen Approximation der Feldvariablen lässt eine Abschätzung des Fehlers nur sehr schwer zu. Eine sinnvolle Möglichkeit bietet sich hier auf der Basis eines sub-stepping Verfahrens an, bei dem jeder Zeitschritt mit halber Schrittweite wiederholt wird. Die Berechnung mit der Schrittweite $\frac{\Delta t}{2}$ liefert dabei einen genaueren Vergleichswert (siehe Abbildung 6.4). Ein Maß für den Fehler $\eta_{\Delta t}$ kann anschließend aus der L_2 -Norm der Differenz Δ zwischen beiden Resultaten berechnet werden:

$$\eta_{\Delta t,u} = \|\Delta_u\|_{L_2(\mathcal{B})}, \quad (6.54)$$

$$\eta_{\Delta t,\omega} = \|\Delta_\omega\|_{L_2(\mathcal{B})}, \quad (6.55)$$

$$\eta_{\Delta t,p} = \|\Delta_p\|_{L_2(\mathcal{B})}. \quad (6.56)$$

Da dieses Verfahren die dreimalige Lösung des globalen Gleichungssystems erfordert und weiterhin die Bereithaltung der doppelten Menge an Zwischenspeicherdaten bedingt, führt es zu hohen Rechenzeiten und vermehrtem Bedarf an Speicherplatz. Ein Einsatz im Rahmen einer kombinierten Raum-Zeit-Adaption ist daher wenig sinnvoll. Es wurde hauptsächlich für Vergleichsrechnungen herangezogen.

Das von SLOAN und ABBO in [153] vorgeschlagene Verfahren berechnet einen Fehlerindikator auf der Grundlage des zweistufigen Einschritt-Schemas nach THOMAS und GLADWELL, wofür allerdings die Zeitableitungen der Feldgrößen berechnet werden müssen. Bei elastischem Materialverhalten werden damit gute Ergebnisse erzielt [154]. Die Formulierung eines konsistenten

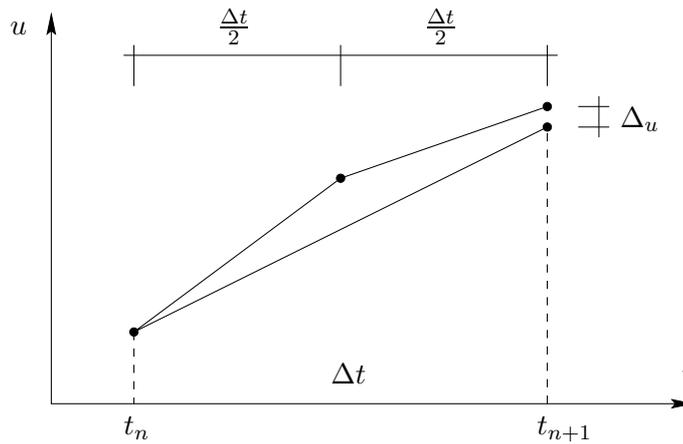


Abbildung 6.4: Sub-stepping Verfahren mit halber Zeitschrittweite

Tangentenoperators für elastoplastische Materialmodelle scheint jedoch sehr aufwändig und wird auch von den Autoren nicht weiter verfolgt.

Eine wesentlich effizientere Methode der Fehlerschätzung kann mit der in Kapitel 5.6 vorgestellten zeitlich diskontinuierlichen Approximation der Feldvariablen formuliert werden. Es wurde erkannt, dass die Größe der auftretenden Sprünge am Anfang des Zeitintervalls a posteriori eine Aussage über die Genauigkeit der Berechnung zulassen [69, 179]. Dieser Aspekt wird vor allem dadurch verdeutlicht, dass die Sprunggrößen in Zeitbereichen mit näherungsweise linearer Entwicklung der Feldvariablen fast vollständig verschwinden und bei zunehmender Krümmung größer ausfallen. Kann die exakte Lösung mit den zeitlichen Ansatzfunktionen hinreichend gut beschrieben werden, reduzieren sich also die Sprunggrößen. Als Maß für den zeitlichen Diskretisierungsfehler wird dementsprechend die L_2 -Norm der Sprünge $[[\mathbf{u}]]$, $[[\boldsymbol{\omega}]]$ und $[[p]]$ in den Verschiebungen, Verdrehungen bzw. Porenwasserdrücken herangezogen:

$$\eta_{\Delta t, u} = \| [[\mathbf{u}]] \|_{L_2(\mathcal{B})}, \quad (6.57)$$

$$\eta_{\Delta t, \omega} = \| [[\boldsymbol{\omega}]] \|_{L_2(\mathcal{B})}, \quad (6.58)$$

$$\eta_{\Delta t, p} = \| [[p]] \|_{L_2(\mathcal{B})}. \quad (6.59)$$

Durch die Beziehung

$$\Delta t \rightarrow 0 \implies \begin{cases} \eta_{\Delta t, u} \rightarrow 0 \\ \eta_{\Delta t, \omega} \rightarrow 0 \\ \eta_{\Delta t, p} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (6.60)$$

ist gewährleistet, dass im Grenzfall infinitesimaler Zeitschrittweite auch der berechnete Fehler verschwindet. Es handelt sich bei den Indikatoren $\eta_{\Delta t, u}$, $\eta_{\Delta t, \omega}$ und $\eta_{\Delta t, p}$ also um reine Fehlermaße für die Zeitintegration ohne entscheidenden Einfluss durch die räumliche Diskretisierung. Der Aufwand zur Auswertung dieser Fehlermaße ist relativ gering, da die benötigten Sprunggrößen primäre Unbekannte des globalen Gleichungssystems darstellen. Sie stehen deshalb sofort nach Lösen des Systems zur Verfügung, so dass die entsprechenden L_2 -Normen nur durch Addition der Anteile einer numerischen Integration über das Berechnungsgebiet ermittelt werden müssen. Zusammen mit dem Fehler, der durch die Integration der konstitutiven Beziehungen entsteht, wird so ein Ausgangspunkt für eine automatische Zeitschrittsteuerung geschaffen.

6.4.4 Fehler durch die Integration der konstitutiven Beziehungen

Bei Anwendung von elastoplastischen Stoffgesetzen, die eine analytische Integration der wegabhängigen Variablen nicht zulassen, werden numerische Verfahren zur Bestimmung von $\boldsymbol{\sigma}(t)$, $\boldsymbol{\mu}(t)$ und $\boldsymbol{q}(t)$ im Intervall $\mathcal{I}_n = [t_n, t_{n+1}]$ eingesetzt. Dadurch resultiert ein zusätzlicher Fehler in der Berechnung, der einen akkumulativen Charakter aufweist. Die Größe des Fehlers wird dabei neben dem verwendeten Integrationsverfahren hauptsächlich von der Inkrementlänge bzw. bei zeitabhängigen Problemstellungen von der Zeitschrittweite beeinflusst. Um also den Fehler durch die numerische Integration der konstitutiven Beziehungen zu beschränken, muss – bei fest gewähltem Integrationschema – die Größe des Berechnungsintervalls im Zeitbereich kontrolliert werden. Alternativ wurde von SLOAN und BOOKER eine Steuerung über die Anzahl der Subinkremente vorgeschlagen [155].

Für das Ziel einer automatisierten Zeitschrittsteuerung ist somit auf der Basis der resultierenden Spannungen, inneren Variablen und Konsistenzparameter ein a posteriori Fehlerindikator $\eta_{\sigma\varepsilon}$ zu formulieren. Dieser wird ausschließlich in plastischen Bereichen definiert, da die Spannungsberechnung in elastischen Bereichen exakt ausgeführt werden kann. Vorschläge werden in der Literatur hauptsächlich für zeitlich kontinuierliche Berechnungen gemacht.

STEIN, BARTHOLD, OHNIMUS und SCHMIDT definieren in [156] ein Fehlermaß mit der Abweichung zwischen HENCKY–Plastizität und PRANDT–REUSS–Plastizität und nehmen eine Wichtung mit der L_2 –Norm der Spannungen vor:

$$\eta_{\sigma\varepsilon} = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{L_2(\mathcal{B})} \left\| \int_{t=t_n}^{t_{n+1}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} dt - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \right\|_{L_2(\mathcal{B})}. \quad (6.61)$$

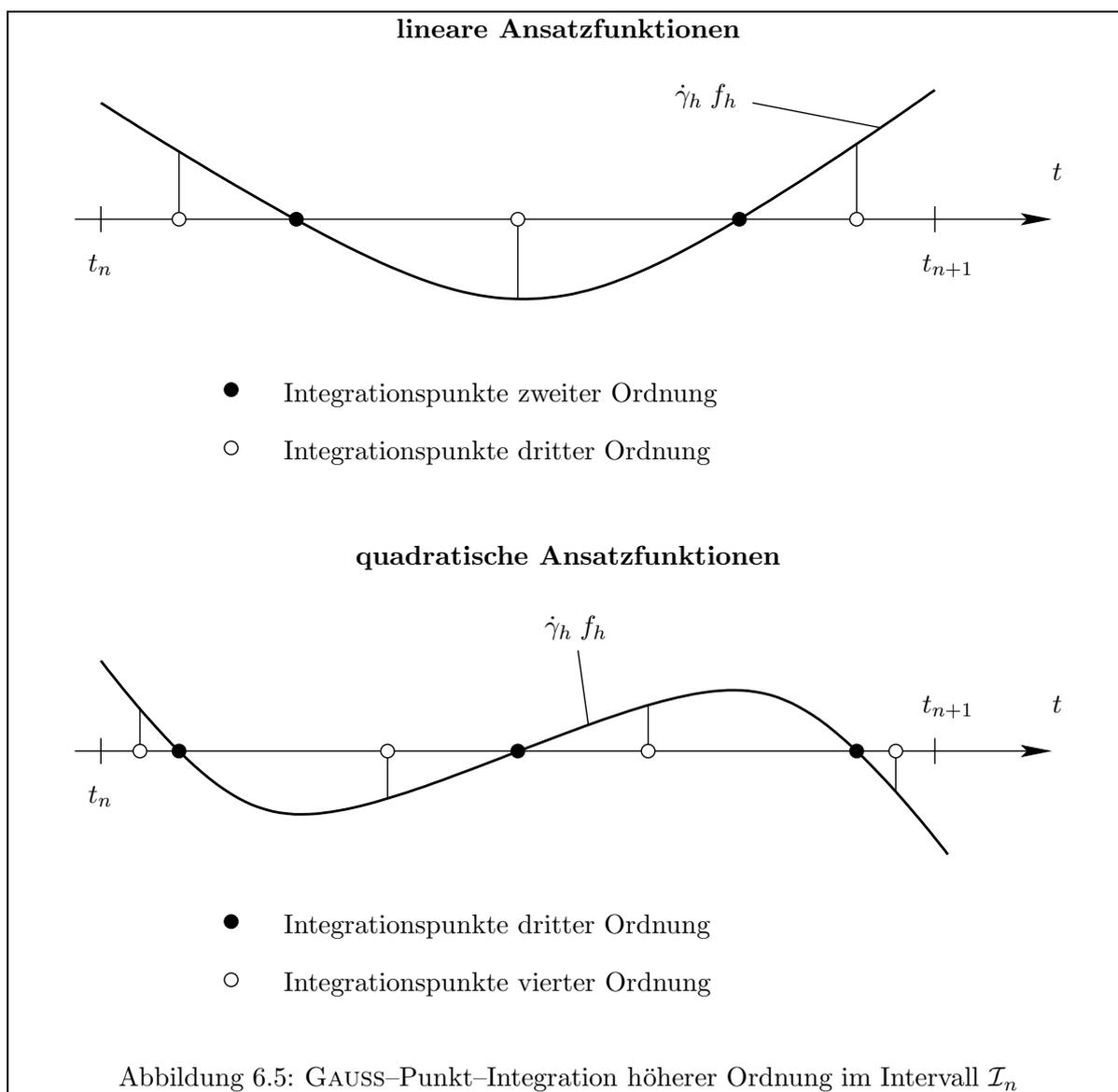
Dieses Fehlermaß konzentriert sich in seiner räumlichen Ausdehnung vor allem in den Übergangsbereichen von elastischen zu plastischen Bereichen. Ein vom Stoffmodell unabhängiges Fehlermaß wird von PRAVIDA in [128] auf der Grundlage einer sub–stepping Methode formuliert. Durch die wiederholte Ausführung der Integration mit halber Subinkrementlänge wird dabei ein Vergleichswert gewonnen, der eine höhere Genauigkeit aufweist. Die Differenz beider Werte in der EUKLID–Norm gewichtet mit den inkrementellen Dehnungen liefert das Fehlermaß:

$$\eta_{\sigma\varepsilon} = \sum_{i=0}^{\mathcal{N}_E} \int_{\mathcal{B}^i} |\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2| |\Delta\boldsymbol{\varepsilon}| dV. \quad (6.62)$$

Dieses Verfahren führt sowohl für das implizite als auch für das explizite EULER Verfahren zu guten Ergebnissen. Es ist jedoch äußerst rechenzeitintensiv, da die Routine zur Spannungsintegration für ein Inkrement insgesamt dreimal durchlaufen werden muss.

Im Folgenden wird ein Maß für den Integrationsfehler vorgestellt, das speziell auf die in Kapitel 5.6.5 formulierte Methode der GAUSS–PUNKT–Integration im Rahmen der diskontinuierlichen Zeitapproximation ausgerichtet ist. Die Grundlage bilden die konvergierten Größen $\boldsymbol{\Sigma}_n$, \boldsymbol{Q}_n und $\dot{\boldsymbol{T}}_n$, die die generalisierten Spannungen, inneren Variablen und Konsistenzparameter an den zeitlichen Integrationspunkten enthalten. Durch sie werden die Verläufe $\boldsymbol{\sigma}_h(t)$, $\boldsymbol{\mu}_h(t)$, $\boldsymbol{q}_h(t)$ und $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_h(t)$ über das gesamte Intervall $\mathcal{I}_n = [t_n, t_{n+1}]$ für jeden räumlichen Integrationspunkt separat definiert. Die Charakteristik des vorgeschlagenen Integrationschemas besteht darin, dass die KUHN–TUCKER–Bedingungen

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} \geq 0 \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{q}) \leq 0 \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{q}) = 0 \quad (6.63)$$



an jeder Stützstelle der numerischen GAUSS-Integration exakt erfüllt werden. Bedingt durch das diskrete Verfahren können die Bedingungen (6.63) jedoch nicht für alle Zeitpunkte eingehalten werden. Aufgrund der Interpolation der Zustandsgrößen im Zeitintervall ergeben sich mehr oder weniger große Abweichungen. Da für die exakte Lösung $\dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) = 0$ für alle Zeitpunkte $t \in \mathcal{I}_n$ gilt, kann ein Fehlermaß aus dem Integral über das Residuum der FE-Lösung berechnet werden. Der Indikator ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \eta_{\sigma\varepsilon} &= \int_{\mathcal{I}_n} \underbrace{|\dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) - \dot{\gamma}_h f(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{q}_h)|}_{\rightarrow 0} dt \\ &= \int_{\mathcal{I}_n} |\dot{\gamma}_h f(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{q}_h)| dt . \end{aligned} \quad (6.64)$$

Da auch diese Integration nicht analytisch ausgewertet werden kann, wird wiederum auf eine numerische GAUSS-Punkt-Integration zurückgegriffen. Eine Berechnung auf der Basis der gegebenen GAUSS-Punkte führt jedoch nicht zum Ziel, da eben dort die KUHN-TUCKER-Bedingungen streng eingehalten werden ($\Rightarrow \eta_{\sigma\varepsilon} = 0$). Eine konsequente Lösung bietet jedoch eine numerische

Integration, deren Ordnung ip^+ um eine Stufe höher liegt als diejenige, die zur Spannungsintegration verwendet wurde. Eine Verdeutlichung zeigt Abbildung 6.5. Die Werte an den hierzu erforderlichen Stützstellen werden durch eine Inter- bzw. Extrapolation der gegebenen Werte berechnet:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_h(\tau_i) \\ \boldsymbol{\mu}_h(\tau_i) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\sigma(\tau_i) \boldsymbol{\Sigma}_n, \quad (6.65)$$

$$\mathbf{q}_h(\tau_i) = \mathbf{T}_q(\tau_i) \mathbf{Q}_n, \quad i = 1, \dots, ip^+ \quad (6.66)$$

$$\dot{\gamma}_h(\tau_i) = \mathbf{T}_\gamma(\tau_i) \dot{\mathbf{I}}_n. \quad (6.67)$$

Dabei entsprechen \mathbf{T}_σ , \mathbf{T}_q und \mathbf{T}_γ den zeitlichen Ansatzfunktionen der Spannungsintegration. Bei linearer bzw. quadratischer Approximation in der Zeit entsprechen die diskreten Punkte τ_i für $i = 1, \dots, ip^+$ den GAUSS-Punkten quadratischer bzw. kubischer Ordnung. Mit den zugeordneten Wichtungskoeffizienten w_i ergibt sich somit:

$$\eta_{\sigma\varepsilon} = \sum_{i=1}^{ip^+} \left(|\dot{\gamma}_h(\tau_i) f(\boldsymbol{\sigma}_h(\tau_i), \boldsymbol{\mu}_h(\tau_i), \mathbf{q}_h(\tau_i))| w_i \right). \quad (6.68)$$

Dieser Indikator hat die Eigenschaft, bei einsetzender Plastizität mit etwas höheren Werten anzusprechen als bei fortschreitendem plastischen Verhalten. Da derartige Zeitpunkte eine Diskontinuität im Berechnungsablauf darstellen, scheint ein solches Verhalten im Hinblick auf die Genauigkeit der Ergebnisse von Vorteil zu sein. Im Rahmen einer Zeitschrittsteuerung können so kritische Zeitbereiche mit rasch anwachsenden plastischen Zonen automatisch erkannt und mit verkleinerter Intervallgröße durchschritten werden. Anschaulich entspricht dies einer Beschränkung der Spannungs- bzw. Dehnungsinkremente in Bereichen mit stärkerer Krümmung der Fließfläche.

Der Rechenaufwand zur Bestimmung dieses Fehlermaßes kann als vernachlässigbar klein bezeichnet werden. Weder für die Interpolation der Zustandsgrößen noch für die Auswertung der Fließfunktion an den Integrationspunkten sind umfangreiche Berechnungen durchzuführen.

6.5 Auswahl der Elemente

Sind mit der Methode der a posteriori Fehlerschätzung für jedes Element die lokalen Fehlermaße bestimmt, so muss nach einer gewissen Systematik festgelegt werden, ob eine Netzanpassung im aktuellen Berechnungsschritt vorgenommen werden soll oder nicht. Zu diesem Zweck wird aus den lokalen Fehlern durch Summation ein globales Fehlermaß η_{global} berechnet, das mit einer vorgegebenen Toleranzschranke tol_{global} verglichen wird:

$$\eta_{global} \begin{cases} \leq tol_{global} & \text{Berechnungsschritt wird akzeptiert} \\ > tol_{global} & \text{Adaptive Verfeinerung wird eingeleitet} \\ & \text{und Berechnungsschritt wird wiederholt.} \end{cases} \quad (6.69)$$

Ist die Fehlerschranke unterschritten, so bleibt das Netz unverändert bestehen und der nächste Berechnungsschritt kann durchgeführt werden. Ist hingegen die nötige Toleranz nicht eingehalten, so ist es notwendig, aus der Gesamtheit der Elemente diejenigen auszuwählen, die verfeinert werden sollen. Das Ziel besteht darin, so viele Elemente zu verfeinern, dass die Toleranzschranke nach Möglichkeit im folgenden adaptiven Schritt eingehalten werden kann. Um nicht unnötig viele Elemente zu bearbeiten und somit an Effizienz einzubüßen, können unterschiedliche Verfeinerungssteuerungen eingesetzt werden.

6.5.1 Prozentualsteuerung

Bei dieser Strategie wird ein festgelegter Prozentsatz $\gamma \leq 100\%$ der Elemente verfeinert. Ausgewählt werden die Elemente mit dem größten lokalen Fehler. Dazu müssen die Elemente nach der Größe des Elementfehlers sortiert werden, was einen zusätzlichen Rechenaufwand bedingt. Diese Methode ist jedoch bei annähernd gleichverteilten FE-Fehlern nicht optimal. Hier kommt es zu einer stark ungleichmäßigen Netzstruktur mit vielen Übergangselementen. Auch bei relativ grob gewählten Ausgangsnetzen, die zur Einhaltung der Toleranz in den ersten Schritten uniform verfeinert werden sollten, stellt die Prozentualsteuerung ein Hindernis dar, wenn beispielsweise ein Wert von lediglich $\gamma = 30\%$ gewählt wird.

6.5.2 Maximalfehlersteuerung

Diese Strategie verfeinert Elemente, die einen Fehler aufweisen, der über einem gewissen Bruchteil $\gamma \leq 1.0$ des maximal auftretenden Fehlerindicators η_{max} liegt:

$$\eta_i > \gamma \eta_{max} \qquad \eta_{max} = \max_{j=1, \dots, \mathcal{N}_E} \eta_j . \quad (6.70)$$

Für die Wahl von γ stehen mehrere Varianten zur Verfügung. RANK schlägt in [130] eine konkrete Wahl von $\gamma = 0.5 \dots 0.7$ vor. RICCIUS [137] berechnet aus der Konvergenzeigenschaft der linearen FEM

$$\left\| e \left(\frac{h}{2} \right) \right\|_{E, \mathcal{B}} \approx \frac{\|e(h)\|_{E, \mathcal{B}}}{2^p} \quad (6.71)$$

für genügend kleine Netzweiten h in Abhängigkeit der Polynomordnung p der Ansatzfunktionen eine Näherung von

$$\gamma \approx \frac{1}{2^{p+1}} . \quad (6.72)$$

Beim Auftreten starker Singularitäten beschränkt sich die Verfeinerung jedoch hauptsächlich auf den unmittelbaren Nahbereich der singulären Stelle. Somit ergibt sich eine hohe Zahl an Adaptionenzyklen, in denen das übrige Gebiet nahezu unverändert übernommen wird. Eine Verbesserung schafft in diesem Fall die Verwendung des mittleren Elementfehlers als Bezugsgröße:

$$\eta_i > \gamma \frac{1}{\mathcal{N}_E} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_E} \eta_j . \quad (6.73)$$

Bei einer solchen Auswahl ist jedoch eine starke Abhängigkeit vom gewählten Startnetz festzustellen [44].

Sowohl die Prozentual- als auch die Maximalfehlersteuerung können allgemein angewendet werden, wenn ein lokal definierter Fehlerindikator berechnet wurde. Eine gezieltere Steuerung lässt sich erreichen, wenn zusätzlich ein Bezugsniveau definiert wird, dem die Elementfehler gegenüber gestellt werden können. Auf diese Möglichkeit wird im Folgenden zurückgegriffen.

6.5.3 Kombination der Indikatoren im Ortsbereich

Da bei der Verformungs-Porenwasserdruck-Analyse zwei unterschiedliche Fehlerindikatoren (η_{GG} und η_{Fl}) zum Einsatz kommen, muss eine Kombination dieser Fehlermaße in die Verfeinerungssteuerung implementiert werden. Es werden deshalb alle Elemente einer Verfeinerung

zugeführt, die eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\eta_{GG,i} > \gamma_{GG} \bar{W}_{GG}, \quad (6.74)$$

$$\eta_{Fl,i} > \gamma_{Fl} \bar{W}_{Fl}. \quad (6.75)$$

Die Bezugsgröße der ersten Gleichung (6.74) bildet hierbei ein mittleres Energieniveau \bar{W}_{GG} . Um ein geeignetes Maß für \bar{W}_{GG} im Rahmen einer elastoplastischen Berechnung zu erhalten, werden in Übereinstimmung mit dem Fehlerindikator die totalen Spannungen in der L_∞ -Norm gemessen und mit der L_1 -Norm der Verzerrungsinkremente gewichtet. Werden zusätzliche mikropolare Freiheitsgrade berücksichtigt, so sind die korrespondierenden COSSERAT-Anteile der Momentenspannungen und Krümmungsinkremente in die Formulierung aufzunehmen. Für \bar{W}_{GG} ergibt sich somit

$$\bar{W}_{GG} = \frac{1}{\mathcal{N}_E} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_E} \left(\|\Delta\varepsilon\|_{L_1(\mathcal{B}^i)} \|\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}\|_{L_\infty(\mathcal{B}^i)} + \|\Delta\boldsymbol{\kappa}\|_{L_1(\mathcal{B}^i)} \|\boldsymbol{\mu}\|_{L_\infty(\mathcal{B}^i)} \right). \quad (6.76)$$

Bei Gleichung (6.75) wird als Bezugsgröße die L_2 -Norm der FE-Lösung für den Fluid-Fluss \mathbf{Q}_h verwendet:

$$\bar{W}_{Fl} = \sqrt{\frac{\|\mathbf{Q}_h\|_{L_2(\mathcal{B})}^2 + \|\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}_h\|_{L_2(\mathcal{B})}^2}{\mathcal{N}_E}}. \quad (6.77)$$

Mit der Division durch \mathcal{N}_E wird hier ebenfalls ein gemittelttes Bezugsniveau definiert. Eine ähnliche Strategie wird von ZIENKIEWICZ und ZHU [192] vorgeschlagen. Sie ist allgemein auf Indikatoren anwendbar, die mittels der post-processing-Methode berechnet wurden. Die beiden Toleranzwerte γ_{GG} und γ_{Fl} sind unabhängig voneinander definiert. Um jedoch nicht einen der beiden Fehler übermäßig zu gewichten, sollten diese in einem ausgewogenen Verhältnis gewählt werden. In den ausgeführten Berechnungen führten Werte von $\gamma_{GG} = 3\% \dots 10\%$ und $\gamma_{Fl} = 5\% \dots 15\%$ zu guten Ergebnissen. Da in vielen Fällen beide Indikatoren in denselben Gebieten ansprechen, führt eine Verfeinerung aufgrund des einen Indikators auch zu einer Reduzierung des jeweils anderen Fehlermaßes. Die Trennung in einzelne Anteile ist jedoch trotzdem gerechtfertigt, da separate Aussagen einen besseren Aufschluss über das Systemverhalten geben. Darüberhinaus ist in Fällen, in denen von beiden Indikatoren verschiedene räumliche Bereiche verfeinert werden, diese Trennung zwingend notwendig, um die Verlässlichkeit der Berechnung zu gewährleisten.

Die Teilbedingung der Auswahlstrategie nach Gleichung (6.74) hat sich bereits bei der Verfeinerung von Lokalisierungszonen hervorragend bewährt [128, 159]. Ergänzt durch die zweite Bedingung (6.75) ergibt sich eine restriktive aber verlässliche Kombination der beiden Indikatoren im Ortsbereich. Diese Methode der Elementauswahl wurde für alle numerischen Untersuchungen zugrunde gelegt. Zur Entscheidung, ob im aktuellen Zeitschritt eine adaptive Netzanpassung durchgeführt werden soll oder nicht, sind ebenfalls zwei Bedingungen zu formulieren. Mit den Definitionen für die globalen Fehlermaße

$$\eta_{GG,global} = \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_E} \eta_{GG,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \eta_{Fl,global} = \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_E} \eta_{Fl,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.78)$$

folgen die Toleranzschranken

$$\eta_{GG,global} < \gamma_{GG} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_E} \left(\|\Delta\varepsilon\|_{L_1(\mathcal{B}^i)} \|\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{I}\|_{L_\infty(\mathcal{B}^i)} + \|\Delta\boldsymbol{\kappa}\|_{L_1(\mathcal{B}^i)} \|\boldsymbol{\mu}\|_{L_\infty(\mathcal{B}^i)} \right), \quad (6.79)$$

$$\eta_{Fl,global} < \gamma_{Fl} \|\mathbf{Q}_h\|_{L_2(\mathcal{B})}. \quad (6.80)$$

Die Beziehungen (6.79) und (6.80) stellen globale Aussagen dar. Eine adaptive Netzverfeinerung wird dementsprechend durchgeführt, wenn eine dieser Bedingungen verletzt ist. Für die Festlegung der globalen Toleranzschranken $tol_{GG,global}$ und $tol_{Fl,global}$ kommen dabei dieselben Faktoren γ_{GG} und γ_{Fl} wie für die Auswahlkriterien zum Einsatz. Sind dagegen beide gewählten Toleranzschranken eingehalten, so wird die Berechnung auf dem aktuellen Netz akzeptiert und mit dem nächsten Zeitschritt fortgesetzt.

6.6 Netzverfeinerung

Wie bereits erwähnt wird im Rahmen dieser Arbeit die h-Adaption als *Netzverfeinerungsstrategie* d.h. zur Reduzierung des Diskretisierungsfehlers verwendet. Dabei wird die Elementgröße sowohl im Ortsbereich als auch im Zeitbereich so verändert, dass der durch den approximativen Charakter der FEM resultierende Fehler in der Berechnung auf ein vorgegebenes Niveau beschränkt bleibt. Die Fehlermaße, die in diesem Zusammenhang zum Einsatz kommen, wurden im vorherigen Abschnitt definiert. Eine besondere Eigenschaft besteht darin, dass im Zeitbereich eine uniforme Verfeinerung der Elemente verwendet werden muss, um die Anwendung eines Zeitschrittalgorithmus zu gewährleisten. Das bedeutet, alle Elemente besitzen immer dieselbe zeitliche Ausdehnung und es kann ein einheitliches Intervall Δt zugrunde gelegt werden. Im Ortsbereich wird mit einer uniformen Verfeinerungsstrategie dagegen keine effiziente Berechnungsmethode erhalten, da diese zu einer Erhöhung der Ansatzgüte auch in solchen Bereichen führen würde, in denen die FE-Lösung bereits hinreichend genau ausfällt. Stattdessen ist es sinnvoller, zuerst diejenigen Elemente für eine Verfeinerung auszuwählen, die den höchsten lokalen Fehler aufweisen und Elemente mit niedrigem Fehler unverändert zu übernehmen. Eine Verbesserung der Approximation in stärker fehlerbehafteten Gebieten bewirkt eine deutlichere Verminderung des globalen Fehlers und trägt so bei optimalem Rechenaufwand zu einer Gleichverteilung des Fehlers in allen Elementen bei.

An dieser Stelle ist anzumerken, dass insbesondere im Rahmen der Strukturmechanik auch eine *Netzvergrößerung* in Bereichen mit sehr kleinem Diskretisierungsfehler von Bedeutung sein kann. Speziell bei der Simulation von Wellenausbreitungen ist es sinnvoll, lediglich die sich bewegende Zone der Wellenfront feiner aufzulösen. Dazu sind mit Hilfe von Verfeinerungs- und Vergrößerungsindikatoren ständig neue Netze zu generieren. Bei Anwendung von monotonen Lastpfaden bis zum Versagen spielt dieser Aspekt jedoch nur eine untergeordnete Rolle. Einige Autoren setzen trotzdem eine Vergrößerungsstrategie ein, um beispielsweise die Netzfeinheit in Entlastungszonen wieder zu reduzieren und somit Rechenzeit einzusparen. Im Hinblick auf eine korrekte Erfassung der geschichtsabhängigen Spannungszustände bei der Analyse von Materialinstabilitäten ist dieses Vorgehen jedoch als kritisch zu beurteilen, da die Transferoperatoren zu einer Datenreduktion führen. Die vorliegende Arbeit geht auf Vergrößerungsstrategien deshalb nicht näher ein und stellt im Folgenden die grundlegenden Zusammenhänge verschiedener Verfeinerungsstrategien zusammen.

6.6.1 Neuvernetzung

Diese Netzveränderungsstrategie legt in jedem adaptiven Zyklus ein vollständig neues FE-Netz für die weitere Berechnung fest. Knotennummern, Inzidenztafeln und Elementgeometrien werden komplett verworfen und neu generiert. Dies setzt somit auch im Programmablauf selbst den Einsatz von teilweise aufwändigen Netzgenerierungsalgorithmen voraus. Besonders für dreidimensionale Aufgabenstellungen wird ein nicht unerheblicher Aufwand an Rechenzeit erforderlich. Der Vorteil dieser Methode liegt zum einen darin, dass auch für das Startnetz lediglich die Umrandung, die Art der Elemente und eine gewünschte Maschenweite festgelegt werden müssen.

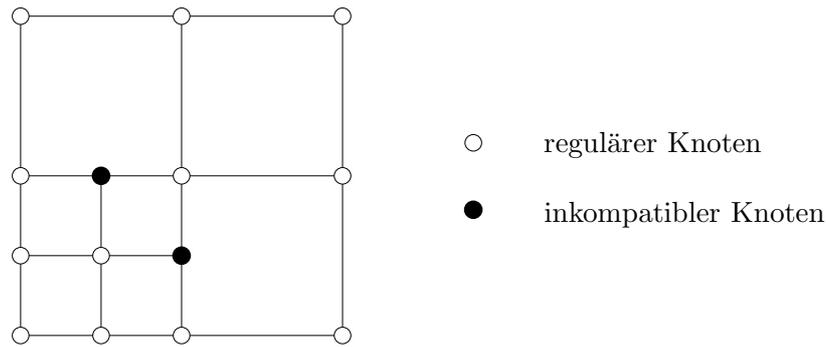


Abbildung 6.6: Inkompatible Knoten bei hierarchischer Elementteilung

Zum anderen können mit derzeitig verwendeten Programmen Informationen über Netzdichte, Netzorientierung und Elementgeometrie verwaltet und entsprechend verändert werden [132]. Es ergibt sich im optimalen Fall bereits nach der ersten Neuvernetzung eine dem Problem sehr gut angepasste Diskretisierung mit einem gleichmäßigen Verlauf der Elementgrößen zwischen stark und weniger stark verfeinerten Gebieten. Strategien zur Verfeinerung und Vergrößerung der Netze werden darüber hinaus sehr gut kombinierbar. Aus diesem Grund lässt sich in letzter Zeit eine starke Tendenz zur Verwendung von modernen Neuvernetzungsstrategien feststellen.

Da die eingesetzten Algorithmen meist zuerst eine Triangulierung des Grundgebiets vornehmen und anschließend benachbarte Dreiecke zu einem Viereck verbinden, entstehen oft stark verzerrte Elementgeometrien, die zusätzlich durch den Einsatz von Netzglättungen optimiert werden müssen. Vorschläge hierfür werden von RICCIUS aufgezeigt [137]. Auch für Systemgeometrien, bei denen im Prinzip eine regelmäßige Vernetzung mit rechtwinkligen Elementen möglich wäre, berechnen Netzgenerierer häufig unnötig verzerrte Elementformen, die die Qualität der FE-Lösung negativ beeinflussen. Ein wesentlicher Nachteil dieser Methode liegt im Rahmen von elastoplastischen Berechnungen in der Notwendigkeit begründet, die wegabhängigen Variablen auf das neu generierte Netz zu übertragen. Da bei der freien Vernetzung die Zuordnung von Elementen des alten Netzes zu neuen Elementen nur durch ihre globalen Koordinaten gegeben ist, werden beim Transfer von elementbezogenen Daten aufwändige Such- und Interpolationsroutinen notwendig. Der Einsatz der Neuvernetzung ist somit hauptsächlich für linear-elastische Problemstellungen zu empfehlen.

6.6.2 Hierarchische Netzverfeinerung

Ein einfaches und zudem effizientes Verfahren stellt die hierarchische Netzverfeinerung dar. Neue Netze werden dabei durch eine regelmäßige Unterteilung der zu verfeinernden Elemente gewonnen. Bei Anwendung von Dreieckelementen werden diese Elemente meist durch die Halbierung der längsten Kante in zwei neue Dreiecke unterteilt, um das Verhältnis der Kantenlängen zu beschränken. Bei Viereckelementen wird hauptsächlich eine Vierteilung der Elemente angewendet. Der Rechenaufwand zur Generierung des neuen Netzes beschränkt sich somit, da Elemente mit geringem lokalen Fehler ohne weitere Bearbeitung übernommen werden können. Auch die Positionen der vorhandenen Elementknoten bleiben gleich, da lediglich neue Knoten ins System integriert werden. Prinzipiell ist auch eine Netzvergrößerung ohne weiteren Aufwand zu implementieren, indem eine vorhandene Vierteilung rückgängig gemacht wird.

Nachteilig ist anzumerken, dass das Verhältnis der Elementgrößen zwischen zwei Verfeinerungsschritten auf den Wert 2 beschränkt bleibt. Zum Erreichen einer im Sinne der Toleranzschranke optimalen Diskretisierung sind somit oft mehrere Verfeinerungszyklen notwendig. Ein hauptsächlichlicher Vorteil ergibt sich jedoch für den Transfer von Integrationspunktdaten. Durch

die geschachtelte Struktur resultiert eine genau definierte Beziehung zwischen den Elementen des alten und des neuen Netzes. Die Übertragung kann also durch wesentlich schnellere Operatoren geschehen, als dies bei der freien Neuvernetzung möglich ist.

Da durch die Strategie der Vierteilung verfeinerte und unverfeinerte Elemente aneinanderstoßen, entstehen sogenannte *inkonforme Knoten*, durch die die Stetigkeit der approximierten Feldgrößen verlorengeht. Abbildung 6.6 verdeutlicht diese Problematik. Inkonforme Knoten bedürfen deshalb einer gesonderten Behandlung. Hierfür stehen prinzipiell drei Möglichkeiten zur Verfügung:

- Elimination der zugehörigen Freiwerte durch kinematische Kopplung:

Die Freiwerte der inkonformen Knoten werden dabei aus einer Linearkombination der Freiwerte aller konformen Knoten der entsprechenden Elementkante berechnet. Durch diese Abhängigkeiten können die zugeordneten Größen aus dem globalen Gleichungssystem eliminiert werden. Die Ansatzgüte selbst wird somit durch inkonforme Knoten nicht erhöht. Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass bei jeder Auswertung von Elementvektoren die Abhängigkeiten berücksichtigt werden müssen.

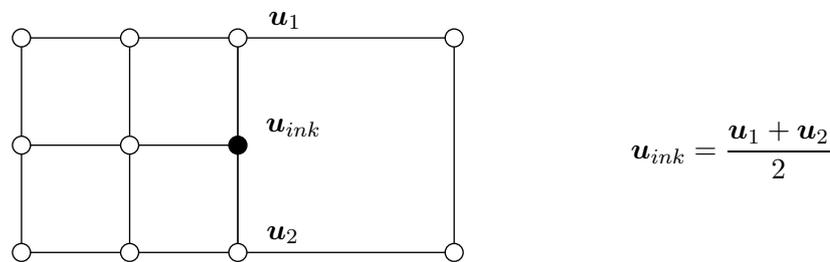


Abbildung 6.7: Kinematische Kopplung bei linearen Elementen

- Übergangselemente mit speziellen Ansatzfunktionen:

Durch die Verwendung von Übergangselementen mit einer unregelmäßigen Knotenzahl und darauf abgestimmten Ansatzfunktionen wird die Stetigkeit der Approximation gewährleistet. Die Elementbibliothek muss jedoch um solche "Exoten" erweitert werden. Beim Assemblierungsprozess kann dies zu umfangreichen Fallunterscheidungen führen.

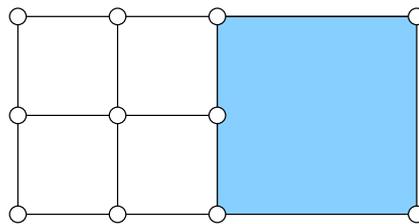


Abbildung 6.8: Übergangselement mit fünf Knoten

- Einbau von zusätzlichen regulären Elementen:

Es wird versucht, den Übergang zum unverfeinerten Bereich mit regelmäßigen Elementen konform zu gestalten [186]. Dies bedingt jedoch meist neue Elementarten oder verzerrte Elementgeometrien. Abbildung 6.9 zeigt Möglichkeiten mit reinen Dreieckelementen, gemischten Dreieck- und Viereckelementen und reinen Viereckelementen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde aufgrund der maßgeblichen Vorteile beim Datentransfer eine hierarchische Verfeinerungsstrategie mit Viereckelementen gewählt. Dem Problem des Auftretens von inkonformen Knoten wird durch den Einbau von zusätzlichen Elementen begegnet.

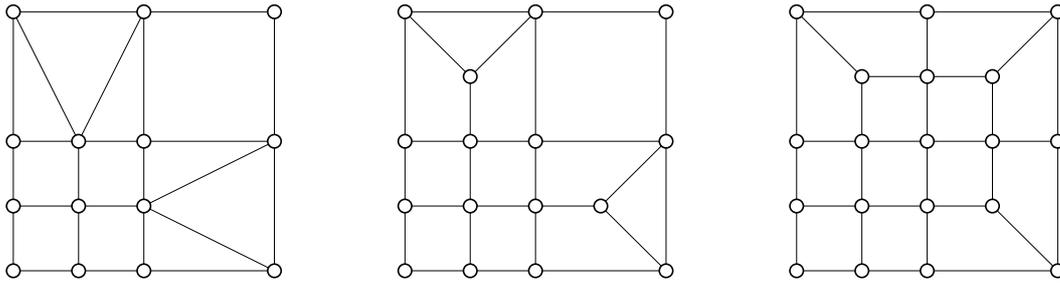


Abbildung 6.9: Reguläre Verfeinerung mit Übergangselementen

In diesem Zusammenhang wurde ein Verfahren gewählt, das es erlaubt ausschließlich weitere Viereckelemente zu verwenden. Durch eine *alternierende Knotenmarkierung* wird dabei die Eindeutigkeit der Unterteilung gewährleistet und systematisch das Auftreten von Dreieckselementen unterdrückt. Eine aufwändige Behandlung von inkonformen Knoten bei der Assemblierung des globalen Gleichungssystems kann dadurch ebenso vermieden werden wie eine Erweiterung der Elementbibliothek um Dreieckselemente oder irreguläre Übergangselemente. Das konkrete Vorgehen zeigt Abbildung 6.10 und wurde in dieser Form von PLANK entwickelt [126]. Eine detaillierte Beschreibung findet sich auch bei STEIN, SEIFERT UND RUST [158]. Ausgehend von einem zu verfeinernden Netz wird eine alternierende Knotenmarkierung so aufgebracht, dass von zwei Knoten, die über eine Kante verbunden sind jeweils nur einer markiert wird. Dies ist bei einfach zusammenhängenden Gebieten und regulären Netzen immer möglich. Durch die Viertelung der ausgewählten Elemente wird nur die Markierung in diesen Elementen beeinflusst. Bereits markierte Knoten verlieren ihre Markierung und neue eingefügte Knoten auf bestehenden Kanten werden markiert. Das anschließende Einfügen der Übergangselemente kann dann eindeutig anhand der Knotenmarkierungen geschehen. Mögliche Zweideutigkeiten sowie mehrere iterative Durchläufe der Verfeinerungsroutinen können somit ausgeschlossen werden.

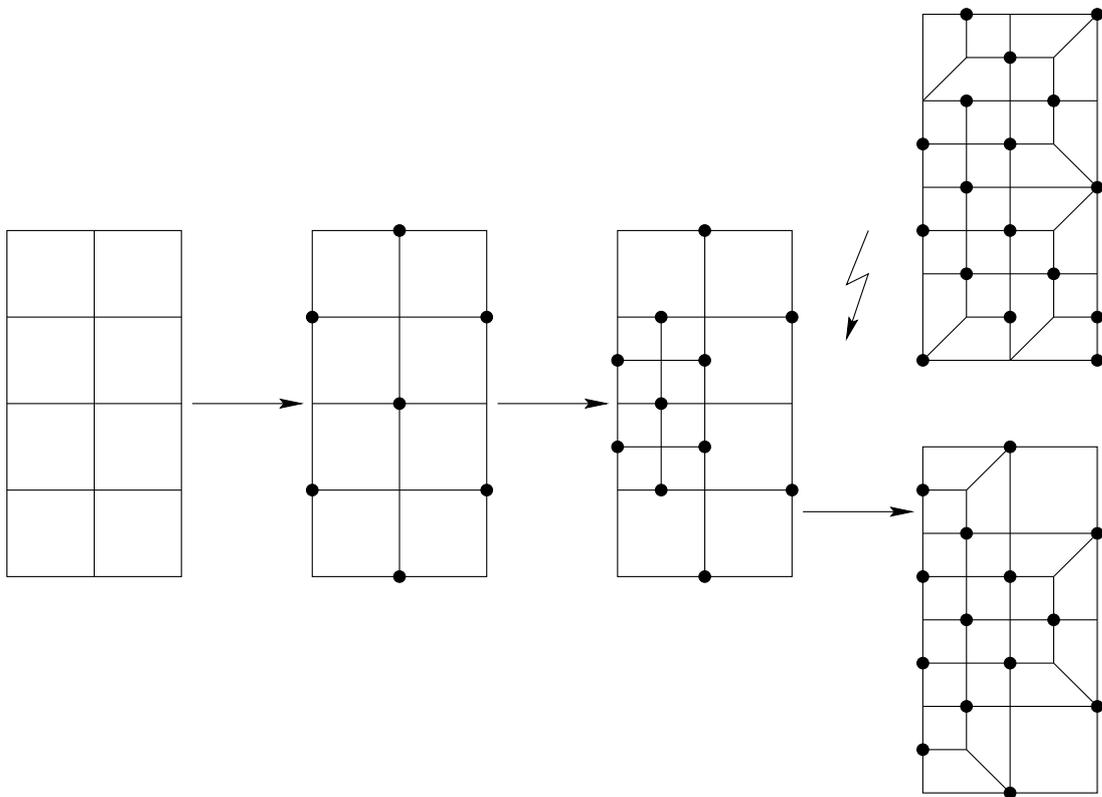


Abbildung 6.10: Verfeinerung mit Viereckelementen durch alternierende Knotenmarkierung

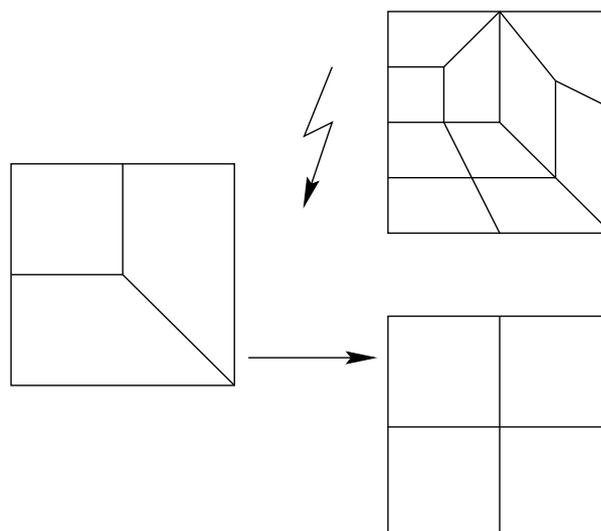


Abbildung 6.11: Vermeiden entarteter Elemente

Um im weiteren Verlauf des adaptiven Prozesses entartete Elemente zu vermeiden, müssen teilweise zur Verfeinerung ausgewählte Übergangselemente zuerst in eine reguläre Vierteilung überführt werden. Abbildung 6.11 verdeutlicht diese Notwendigkeit. Desweiteren kann an Systemrändern und in Systemecken auf eine Unterteilung in Übergangselemente verzichtet werden. Hier bietet sich aus Gründen der Einfachheit ein Übergang zur regulären Vierteilung an. Auch im Innern des Gebiets kommt es zum Teil zu Konstellationen, die eine Häufung von ungünstigen Übergangselementen aufweisen. Die angewendeten Verfeinerungsroutinen sind jedoch in der Lage, diese Elemente zu entdecken und gemäß Abbildung 6.12 durch regelmäßige Viereckelemente zu ersetzen.

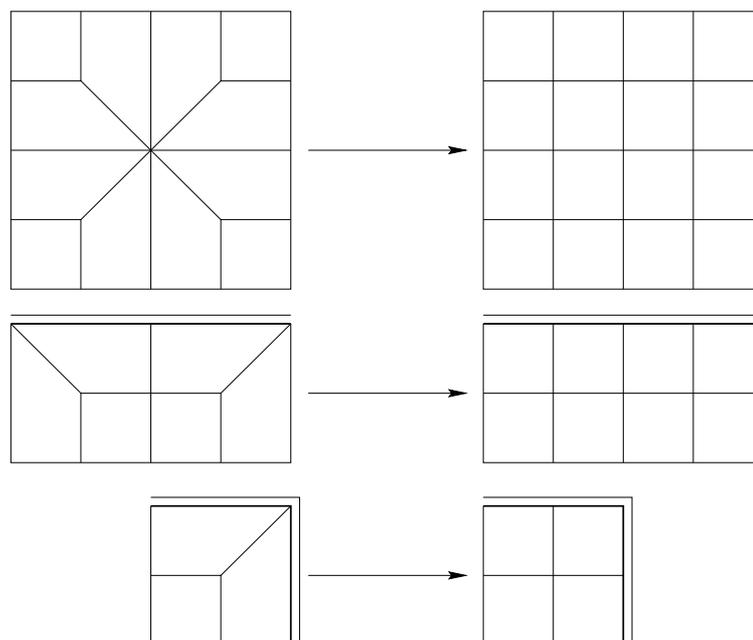


Abbildung 6.12: Ersetzen von ungünstigen Konstellationen

6.7 Datentransfer

Bei der linear-elastischen FE-Berechnung nicht zeitabhängiger Problemstellungen ist zur vollständigen Lösung nur ein einziger Berechnungsschritt nötig. Dies beruht auf der Tatsache, dass bei elastischem Materialverhalten ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Spannungen besteht. Wird eine adaptive Netzveränderung durchgeführt, so muss dieser eine Berechnungsschritt auf der Basis der neuen Netzdiskretisierung wiederholt werden. Alle bereits erhaltenen Resultate können somit verworfen werden. Dies begünstigt die Anwendung der Neuvernetzung als Netzverfeinerungsstrategie, da ein Bezug zum ursprünglichen Netz nicht benötigt wird. Die Lösung des gestellten Problems ist hier nur von den Ausgangsbedingungen und der aktuellen Netzdiskretisierung abhängig.

Ganz anders ist die Sachlage bei der inkrementellen Berechnung elastoplastischer oder explizit zeitabhängiger Aufgabenstellungen. Die Berechnung schreitet hier sukzessive voran. Die Lösung im aktuellen Inkrement ist somit abhängig vom Endzustand des vorherigen Inkrements bzw. Zeitschritts. Wird das Elementnetz in irgendeiner Weise verändert, so besteht die Notwendigkeit, alle Zwischenspeicherdaten auf das neu generierte Netz zu übertragen. Die Basis hierzu liefert das letzte akzeptierte Netz mit konvergierter Gleichgewichtssiteration und eingehaltenen Toleranzschranken. Die zu übertragenden Daten bestehen zum einen aus Werten, die an den Element-Knotenpunkten vorliegen

- Verschiebungen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$
- Verdrehungen $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$
- Porenwasserdrücke $p(\mathbf{x})$

und zum andern aus Integrationspunktwerten

- Spannungen $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ und Momentenspannungen $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$
- Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ und Krümmungen $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x})$
- plastische Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}(\mathbf{x})$ und plastische Krümmungen $\boldsymbol{\kappa}^{pl}(\mathbf{x})$
- innere Variable $\mathbf{q}(\mathbf{x})$.

Da mit neuen Elementen auch neue Knoten und Integrationspunkte dem System hinzugefügt werden, sind die Zwischenspeicherdaten an Koordinaten auszuwerten, an denen im Ausgangsnetz keine diskreten Werte vorliegen. Insofern wird eine Zuordnung von Punkten des alten Elementnetzes zu Punkten des neuen Netzes benötigt. Abbildung 6.13 veranschaulicht die Zusammenhänge sowohl für regulär verfeinerte Elemente als auch für Übergangselemente. Bei derartigen Problemstellungen hat sich deshalb die hierarchische Netzverfeinerung als vorteilhaft erwiesen. Durch eindeutige Beziehungen zwischen Vater- und Sohnelementen entfallen aufwändige Such- und Interpolationsroutinen.

Für die Bewerkstelligung des Transfers wurden verschiedene Verfahren vorgeschlagen. Die wichtigsten beinhalten:

- Auswertungen mit den Ansatzfunktionen des Elements
- Zusätzliche Glättungen der zu transformierenden Daten.

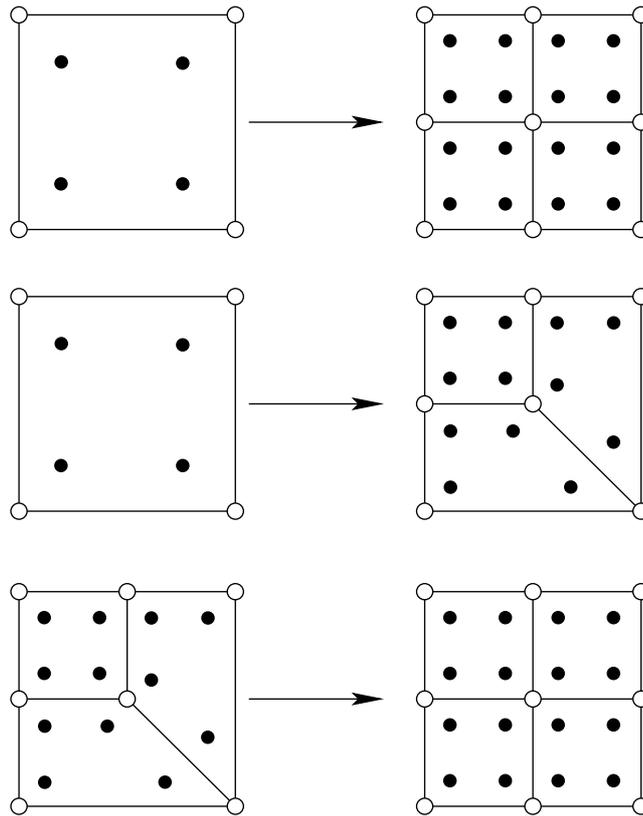


Abbildung 6.13: Datentransfer auf verfeinerte Elemente

Beide Möglichkeiten bestimmen aus den diskreten Werten des Ausgangsnetzes eine entsprechende Feldverteilung und werten diese an den neu festgelegten Koordinaten aus. Im ersten Fall erfolgt dies für jedes Element getrennt. Die Knotenwerte jedes Sohnelements können durch Interpolation mit den FE-Ansatzfunktionen N_u , N_ω und N_p direkt aus den Werten des Vaterelements berechnet werden:

$$\mathbf{u}_{Sohn}(\xi_i, \eta_i) = \mathbf{N}_u(\xi_i, \eta_i) \hat{\mathbf{u}}_{Vater} , \quad (6.81)$$

$$\omega_{Sohn}(\xi_i, \eta_i) = N_\omega(\xi_i, \eta_i) \hat{\omega}_{Vater} , \quad (6.82)$$

$$p_{Sohn}(\xi_i, \eta_i) = N_p(\xi_i, \eta_i) \hat{p}_{Vater} . \quad (6.83)$$

Wie in Abbildung 6.14 dargestellt werden die Daten an den Integrationspunkten zuerst auf die Knotenpunkte übertragen und anschließend wiederum mit Hilfe der Ansatzfunktionen N_z interpoliert. Als Ansatzfunktion kommt in dieser Arbeit im Rahmen von Mehrfeldproblemen immer diejenige mit dem höchsten Polynomgrad, d.h. im Regelfall die einer Verschiebungskomponente zum Einsatz:

$$\mathbf{z}_{Sohn}(\xi_i, \eta_i) = \mathbf{N}_z(\xi_i, \eta_i) \mathbf{M} \hat{\mathbf{z}}_{Vater} . \quad (6.84)$$

In dieser Beziehung stellt \mathbf{M} eine Transformationsmatrix dar, die die Abbildung von Integrationspunktswerten auf Knotenpunktswerte übernimmt. $\mathbf{z} \in \{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}^{pl}, \mathbf{q}\}$ steht für die zu transformierende Zustandsvariable.

Im zweiten Fall werden mit Hilfe einer *Fehlerquadrat-Minimierung* geglättete Verläufe der Zustandsgrößen erzeugt. Üblicherweise geschieht dies in Analogie zum Verfahren von ZIENKIEWICZ und ZHU auf einem Element-Patch. Dieses Vorgehen wurde bereits in Abschnitt 6.3.2 beschrieben. Aus den so gewonnenen Knotenwerten wird analog zu Gleichung (6.84) auf die Werte an den neuen Koordinaten geschlossen. Da ein geglätteter Verlauf, der durch die Auswertung an

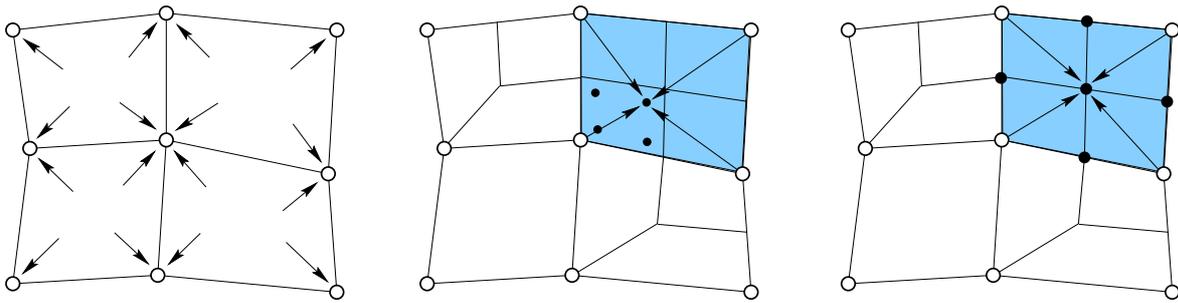


Abbildung 6.14: Transfer von Integrations- und Knotenpunktdaten

superkonvergenten Punkten gewonnen wird, oft eine erhöhte Genauigkeit aufweist, kann der Fehler, der durch den Datentransfer in die Berechnung eingebracht wird, minimiert werden. Insbesondere dann, wenn die exakte Lösung im Berechnungsgebiet eine hinreichende Regularität aufweist, stellt die zweite Alternative die bessere, wenn auch rechenintensivere Methode dar. Ein wesentlicher Nachteil besteht jedoch darin, dass auftretende lokale Effekte über die Ausdehnung des Patch-Bereichs verschmiert werden. Eine Aussage z.B. über die Breite von Scherbändern wird damit erschwert.

An dieser Stelle ist anzumerken, dass bei einer Strategie mit Übergangselementen, wie sie in dieser Arbeit verfolgt wird, zusätzliche Fallunterscheidungen zu beachten sind. Einen Spezialfall bildet der Datentransfer von temporär eingefügten Übergangselementen auf wieder regulär verfeinerte Elemente, der auch in Abbildung 6.13 dargestellt ist. Da eine einfache Auswertung der Ansatzfunktionen in diesem Zusammenhang nicht sinnvoll erscheint, wurde auf eine least-squares-Mittelung zurückgegriffen. Eine negative Beeinflussung der Lösung im Sinne der oben beschriebenen Problematik wurde aufgrund der eingeschränkten räumlichen Ausdehnung der Übergangselemente nicht beobachtet.

Ist der Transfer der Zwischenspeicherdaten auf das neu generierte Netz abgeschlossen, so ist das Knotengleichgewicht im Allgemeinen nicht exakt erfüllt. Da der Vektor der inneren Kräfte auf der Basis der neuen Elementunterteilung berechnet wird, ergeben sich mehr oder weniger große Residuentерme. Darüberhinaus ist die Fließbedingung an den neu entstandenen Integrationspunkten nicht automatisch eingehalten, da die einzelnen Komponenten des Spannungstensors separat und ohne Zwangsbedingung interpoliert werden. Bevor mit der Berechnung des nächsten Zeitschritts begonnen werden kann, müssen diese Abweichungen in einer zusätzlichen Gleichgewichtsiteration korrigiert werden. Dadurch wird sichergestellt, dass sich die transformierte Lösung mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht befindet.

In der Literatur wird als Alternative der Vorschlag gemacht, auf einen Datentransfer gänzlich zu verzichten und die gesamte Berechnung vom Startzeitpunkt aus auf der Grundlage des neuen Netzes zu wiederholen [72]. Dieses Vorgehen vermeidet somit den durch den Transfer eingebrachten Fehler. Durchgesetzt hat sich ein solches Verfahren jedoch nicht, da es mit einem enorm hohen Rechenaufwand verbunden ist. Insbesondere wird dabei im letzten Zyklus der gesamte Zeitbereich mit der feinen Diskretisierung durchschritten, wie sie zum Zeitpunkt des Versagens im Traglastniveau gefordert wird. Von dieser Möglichkeit wird deshalb kein Gebrauch gemacht.

Um die Residuentерme, die durch den Datentransfer entstehen, möglichst gering zu halten, schlagen KVAMSDAL und OKSTAD vor, anstelle einer unabhängigen Übertragung der einzelnen Spannungskomponenten ausschließlich statisch zulässige Spannungsverteilungen zu verwenden [92]. Zusätzlich kann die Einhaltung der Fließbedingung als Nebenbedingung in den Transfer integriert werden. Die Iteration zu einem Gleichgewichtszustand kann in besonderen Fällen durch solche Verbesserungen stabilisiert werden.

6.8 Zeitschrittsteuerung

Es wurde bereits angedeutet, dass bei einer zeitlich fortschreitenden Berechnung neben einer adaptiven Diskretisierung des räumlichen Bereichs auch die Anpassung der jeweils verwendeten Zeitschrittweite an die sich verändernden Bedingungen von wesentlicher Bedeutung ist. So kann ein verlässliches Resultat nur dann erzielt werden, wenn sowohl die hinreichend genaue zeitliche Approximation der primären Feldvariablen gewährleistet ist als auch – im Falle eines plastischen Verhaltens – der Fehler bei der Bestimmung der wegabhängigen Variablen kontrolliert wird. Um beispielsweise Zeitbereiche, die durch eine starke Veränderlichkeit der Verformungen bzw. Porenwasserdrücke gekennzeichnet sind oder eine schnelle Ausweitung der plastischen Bereiche aufweisen, genügend genau abzubilden, sind teilweise sehr kleine Schrittweiten vorzugeben. Ein Durchlauf der gesamten Berechnung mit einem konstant kleinen Δt führt jedoch zu einem inakzeptablen Berechnungsaufwand. Da eine in diesem Sinne ausgewogene, effiziente zeitliche Diskretisierung vom Benutzer erst nach vielen Testläufen gefunden werden könnte, wird im Folgenden eine automatisierte Zeitschrittsteuerung vorgestellt, die vom Benutzer nur die Eingabe eines Startwerts für Δt und einer Toleranzschranke verlangt. Im Anschluss an die vollständige Berechnung eines Zeitinkrements wird anhand einer a posteriori Bewertung festgelegt, ob der durchgeführte Schritt akzeptiert werden kann und, ob eine Anpassung, d.h. Vergrößerung oder Verkleinerung der Zeitinkrements durchzuführen ist.

Eine Änderung der Schrittweite wird im Rahmen dieser Arbeit auf das gesamte System bezogen. Im Gegensatz zu dieser uniformen Anpassung wurden bereits Verfahren entwickelt, die eine räumlich variable Zeitschrittweite berücksichtigen und auf tetraederförmigen Raum-Zeit-Elementen aufbauen. Dies ist jedoch mit einer sehr viel höheren Komplexität des Berechnungsablaufs verbunden und wird daher nicht weiter verfolgt. Die Grundlage der hier vorgestellten automatischen Zeitschrittsteuerung bilden die in den Abschnitten 6.4.3 und 6.4.4 definierten Fehlerindikatoren $\eta_{\Delta t}$ und $\eta_{\sigma\varepsilon}$. Dabei wird zum einen ein Maß für den Diskretisierungsfehler der primären Feldgrößen in der Zeit berechnet und zum anderen der Integrationsfehler bei der Bestimmung der wegabhängigen Variablen abgeschätzt. Beide Indikatoren stehen in direktem Bezug zu der gewählten Länge des aktuellen Zeitschritts Δt und können somit zu einer a posteriori Anpassung der Intervalllänge herangezogen werden.

Zur Kontrolle des zeitlichen Diskretisierungsfehlers bietet sich ein relatives Fehlermaß an. Dies wird durch einen Bezug des Fehlerindikators $\eta_{\Delta t}$ auf die L_2 -Norm der entsprechenden inkrementellen Größen definiert. Da bei der gekoppelten Berechnung des mikropolaren porösen Bodenmaterials drei verschiedene primäre Feldvariablen auftauchen, wird das Maximum der bezogenen Fehlerindikatoren – also der maximale relative Fehler – für die Bestimmung der neuen Zeitschrittweite maßgebend:

$$\bar{\eta}_{\Delta t} = \text{Maximum} \left(\frac{\eta_{\Delta t,u}}{\|\Delta \mathbf{u}\|_{L_2}}, \frac{\eta_{\Delta t,\omega}}{\|\Delta \boldsymbol{\omega}\|_{L_2}}, \frac{\eta_{\Delta t,p}}{\|\Delta p\|_{L_2}} \right). \quad (6.85)$$

Um aus diesem Wert eine Aussage über die optimale Schrittweite zu gewinnen, können verschiedene Strategien verfolgt werden. Eine relativ einfache Anpassung des Zeitschritts besteht in Analogie zur hierarchischen Netzverfeinerung in der Halbierung des Zeitschritts bei überschrittener Toleranzschranke:

$$\bar{\eta}_{\Delta t} > \text{tol}_{\Delta t} \Rightarrow \Delta t \rightarrow \frac{\Delta t}{2}. \quad (6.86)$$

Diese Festlegung ist vorteilhaft bei der Fehlerermittlung mit Hilfe eines substepping-Verfahrens anzuwenden, da die Berechnung des Zeitschritts mit der Länge $\frac{\Delta t}{2}$ bereits durchgeführt wurde und nicht wiederholt werden muss. Dies führt jedoch oftmals zu einer starken Unterschreitung der Toleranzschranke im darauffolgenden Schritt und daher zu wenig effizienten Rechenzeiten. Für

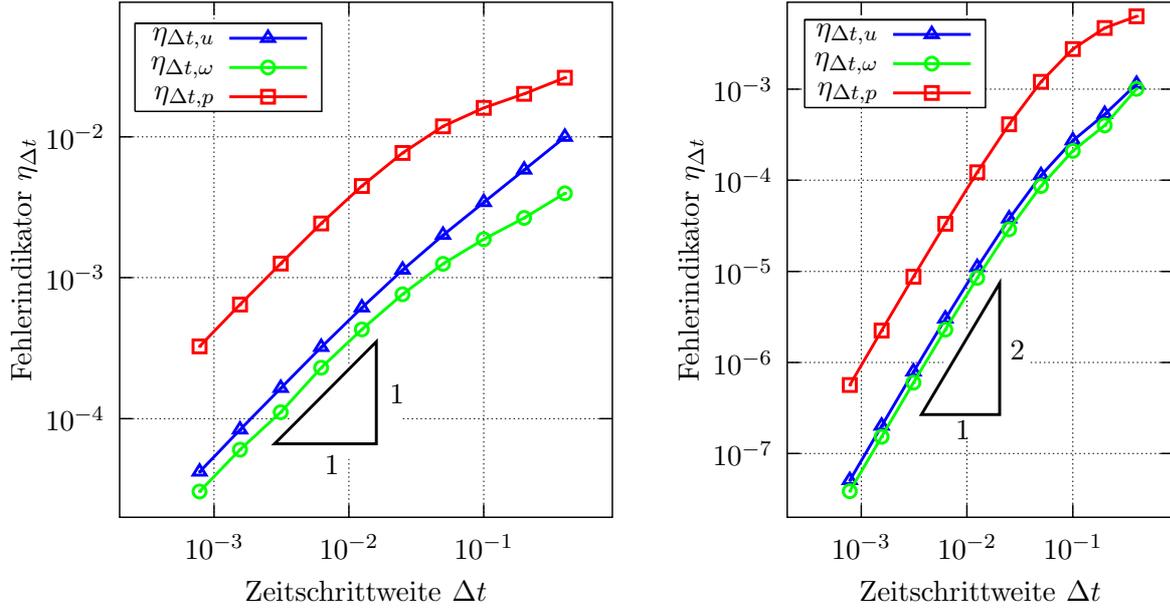


Abbildung 6.15: Konvergenzordnung p von $\eta_{\Delta t}$ bei linearen und parabolischen Ansätzen

eine flexiblere Anpassung der Schrittweite ist als zusätzliche Information die Konvergenzordnung p des ermittelten Fehlermaßes in die Formulierung aufzunehmen. Kann die Toleranzschranke nicht eingehalten werden ($\bar{\eta}_{\Delta t} > tol_{\Delta t}$), ergibt sich als Prädiktor für die neue Schrittweite

$$\Delta t_{neu} = \Delta t_{alt} \beta \left(\frac{tol_{\Delta t}}{\bar{\eta}_{\Delta t}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (6.87)$$

wobei β einen Sicherheitsfaktor darstellt, der verhindert, dass die Toleranzschranke auch im folgenden Schritt nicht eingehalten wird. Für β haben sich Werte von 0,85...0,95 bewährt. Die Konvergenzordnung p wurde im Bezug zum zeitlich diskontinuierlichen Verfahren aus einer Berechnungsreihe gewonnen, bei der $\bar{\eta}_{\Delta t}$ als Funktion der Intervalllänge Δt bestimmt wurde. Abbildung 6.15 zeigt das Verhältnis getrennt für lineare (links) und parabolische Ansätze (rechts) im Zeitbereich. Aus der Steigung der Kurve im doppelt logarithmischen Maßstab lässt sich eine lineare asymptotische Konvergenzordnung ($p = 1$) für lineare Zeitansätze und eine quadratische Konvergenzordnung ($p = 2$) für parabolische Zeitansätze ablesen. Das bedeutet, dass die Konvergenzordnung der Sprunggrößen $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$, $\llbracket \boldsymbol{\omega} \rrbracket$ und $\llbracket p \rrbracket$ bei hinreichend kleinen Intervallen um eine bzw. zwei Stufen höher ausfällt als die Konvergenzordnung der inkrementellen Größen $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \boldsymbol{\omega}$ und Δp . Diese Beobachtung ist von wesentlicher Bedeutung, da erst durch unterschiedliches Konvergenzverhalten ein relativer Fehlerindikator abgeleitet werden kann.

Ein ähnliches Vorgehen bietet sich für die Kontrolle des Fehlers an, der durch die Spannungsintegration verursacht wird. Hierbei kann jedoch nur eine absolute Toleranzschranke $tol_{\sigma \varepsilon}$ verwendet werden, da eine Bezugsgröße nicht sinnvoll definiert werden kann. In Analogie zu (6.87) ergibt sich

$$\Delta t_{neu} = \Delta t_{alt} \beta \left(\frac{tol_{\sigma \varepsilon}}{\bar{\eta}_{\sigma \varepsilon}} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (6.88)$$

wobei q die Konvergenzordnung von $\bar{\eta}_{\sigma \varepsilon}$ bei veränderlicher Intervallgröße bezeichnet. Diese wurde ebenfalls aus einer Berechnungsreihe mit sukzessive verkleinerter Schrittweite ermittelt. Die Ergebnisse für eine Zweipunkt- bzw. Dreipunkt-Integration im Zeitbereich, d.h. linearen bzw. parabolischen Ansätzen, sind in Abbildung 6.16 gezeigt. Erwartungsgemäß ergibt sich hier eine

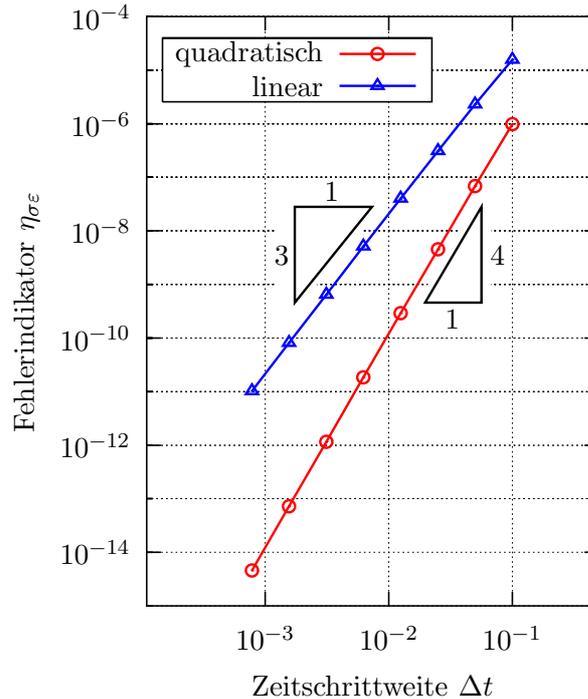


Abbildung 6.16: Konvergenzordnung q von $\eta_{\sigma\epsilon}$ bei Zwei- und Dreipunkt-Integration in der Zeit

asymptotische Konvergenzordnung von $q = 3$ bzw. $q = 4$. Dieser Indikator reagiert also wesentlich empfindlicher auf eine Änderung der Zeitschrittweite Δt .

Da sich die Zahl der Integrationspunkte mit plastischem Verhalten \mathcal{N}_{pl} im Zeitverlauf stark ändert, wird mit

$$\bar{\eta}_{\sigma\epsilon} = \frac{1}{\mathcal{N}_{pl}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{pl}} \eta_{\sigma\epsilon}^i \quad (6.89)$$

ein mittleres Fehlerniveau festgelegt. Dies geschieht im Hinblick darauf, dem Charakter eines globalen Fehlermaßes besser gerecht zu werden.

Der neue (verkleinerte) Zeitschritt berechnet sich als Minimum der beiden Prädiktorwerte aus (6.87) und (6.88). Im Falle eines rein elastischen Systemverhaltens wird nur der erste Wert für eine Anpassung verwendet. Durch die Verwendung von zwei grundsätzlich verschiedenen Fehlerindikatoren wird es wiederum notwendig, beide vorgegebenen Toleranzschranken aufeinander abzustimmen. Es hat sich gezeigt, dass in den meisten Fällen der Indikator $\eta_{\sigma\epsilon}$ erst bei fortschreitendem plastischem Verhalten bzw. im Traglastniveau maßgebend wird. Um die Verlässlichkeit der Berechnung zu gewährleisten, ist der aktuelle Berechnungsschritt zu verwerfen und mit der angepassten Intervalllänge zu wiederholen.

Bei eingehaltenen Toleranzschranken ($\bar{\eta}_{\Delta t} \leq tol_{\Delta t}$ und $\bar{\eta}_{\sigma\epsilon} \leq tol_{\sigma\epsilon}$) ist es möglich, die Zeitschrittweite im weiteren Verlauf der Berechnung zu erhöhen. Ein neuer Wert für Δt kann ebenfalls aus den beiden Gleichungen berechnet werden, wobei auf den Sicherheitsfaktor verzichtet wird ($\beta = 1$). Der durchgeführte Zeitschritt kann in diesem Fall jedoch akzeptiert werden. Im Gesamtzusammenhang der orts- und zeitadaptiven Berechnung ergibt sich das in Abbildung 6.17 dargestellte Ablaufschema.

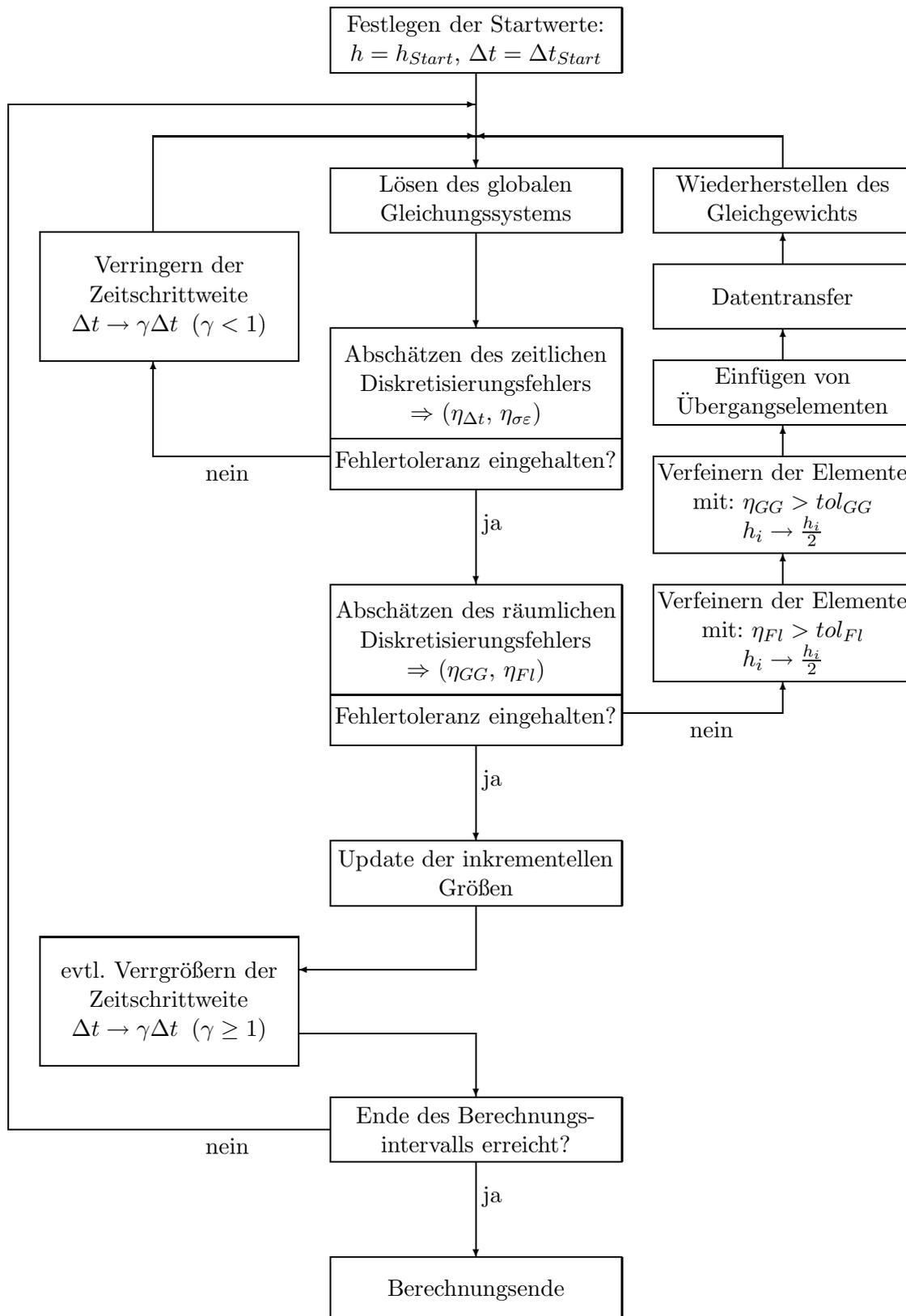


Abbildung 6.17: Ablaufschema der orts- und zeitadaptiven Berechnung

6.9 Vergleich der Ansatzordnungen im Zeitbereich

Um die Wirkungsweise der vorgestellten adaptiven Zeitschrittsteuerung zu verdeutlichen, werden im Folgenden einige numerische Studien betrachtet. Diese belegen, dass der Algorithmus robust und effizient arbeitet und in der Lage ist, die Zeitschrittweite so zu regulieren, dass der zeitliche Diskretisierungsfehler ($\eta_{\Delta t}$) im Bereich der vorgegebenen Toleranzschranke ($tol_{\Delta t}$) liegt.

Als Beispiel dient das in Abbildung 6.18 gezeigte eindimensionale Konsolidierungsproblem, bei dem eine elastische, poröse Bodenschicht der Höhe h auf einer wasserundurchlässigen Basis durch eine einheitliche Flächenlast $\bar{p}(t)$ belastet wird. Die Materialeigenschaften des Bodens werden dabei durch den E-Modul E , die Querdehnzahl ν , seine Permeabilität k_y und die Wichte des Porenwassers γ_W beschrieben. Die Oberflächenlast wird wie in Abbildung 6.19 beschrieben im Zeitraum $[0, t_0]$ von 0 auf ihren Maximalwert \bar{p}_0 gesteigert und anschließend über den gesamten Zeitraum des Konsolidierungsvorgangs konstant gehalten. Da im Folgenden ausschließlich auf die Unterschiede verschiedener zeitlicher Diskretisierungen eingegangen werden soll, wurde ein konstant feines Netz im räumlichen Bereich mit 100 Elementen gewählt, wobei die Verschiebungen quadratisch und die Porenwasserdrücke linear approximiert wurden. Mit dieser Wahl werden räumliche Oszillationen der Feldgrößen, die bei zu grober Diskretisierung am Anfang des Konsolidierungsprozesses entstehen, weitgehend eliminiert [175]. Abbildung 6.20 zeigt den erhaltenen zeitlichen Verlauf der Oberflächensetzung. Bereits mit einer relativ groben Zeitdiskretisierung bei Anwendung einer linear kontinuierlichen Approximation der Feldgrößen ergibt sich eine hinreichend genaue Beschreibung des Systemverhaltens. Als Vergleichswert dient hierbei die analytische Lösung des eindimensionalen Konsolidierungsproblems mittels Fourier-Ansätzen nach TERZAGHI [166].

Die Zeitachse wird wie allgemein üblich in dimensionsloser Form dargestellt. Die bezogene Zeit ist dabei durch

$$T_v = \frac{c_v t}{h^2} \quad (6.90)$$

definiert, wobei

$$c_v = \frac{E(1-\nu)k_y}{(1+\nu)(1-2\nu)\gamma_W} \quad (6.91)$$

den eindimensionalen Konsolidierungskoeffizienten darstellt.

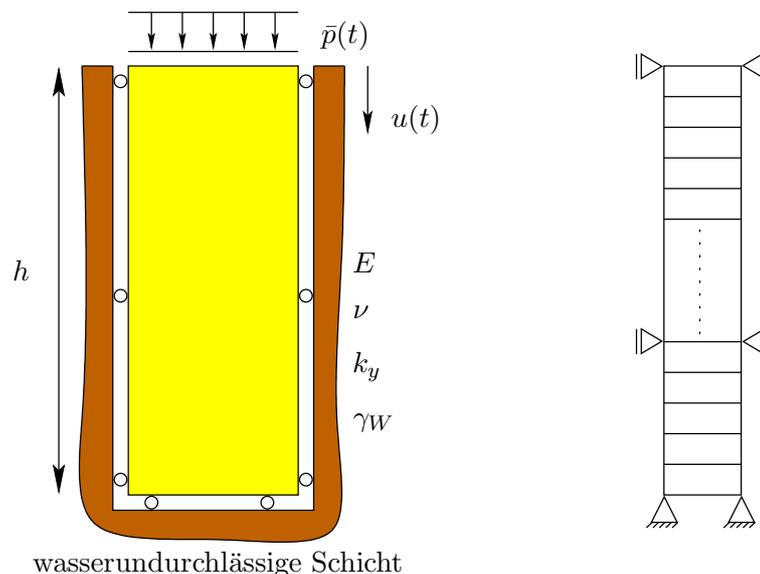


Abbildung 6.18: Eindimensionales Konsolidierungsproblem und verwendetes FE-Netz

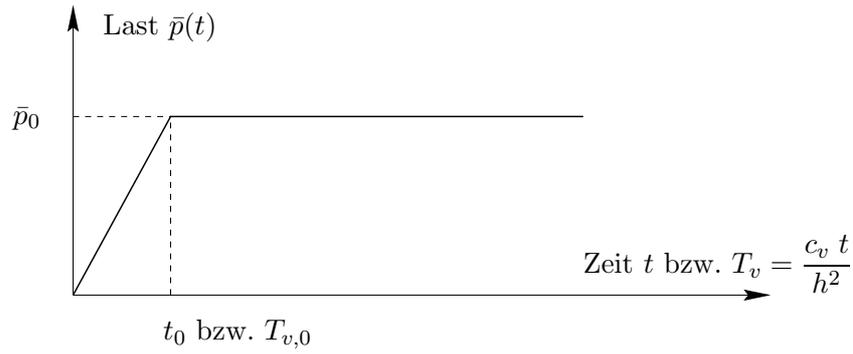


Abbildung 6.19: Zeitverlauf der aufgebrauchten Belastung

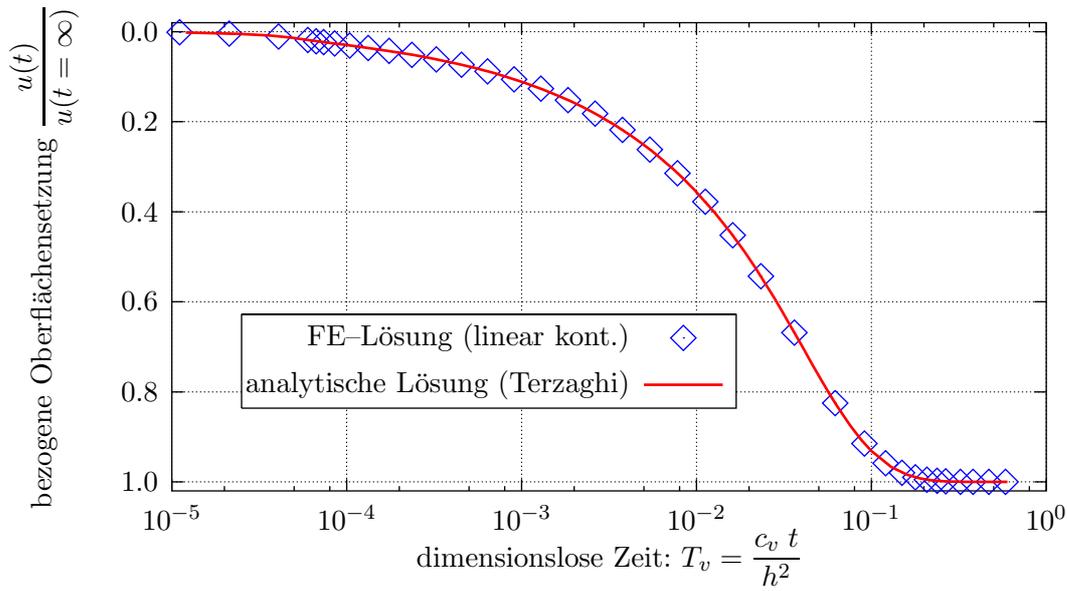


Abbildung 6.20: Vergleich FE-Lösung – Reihenlösung nach [166]

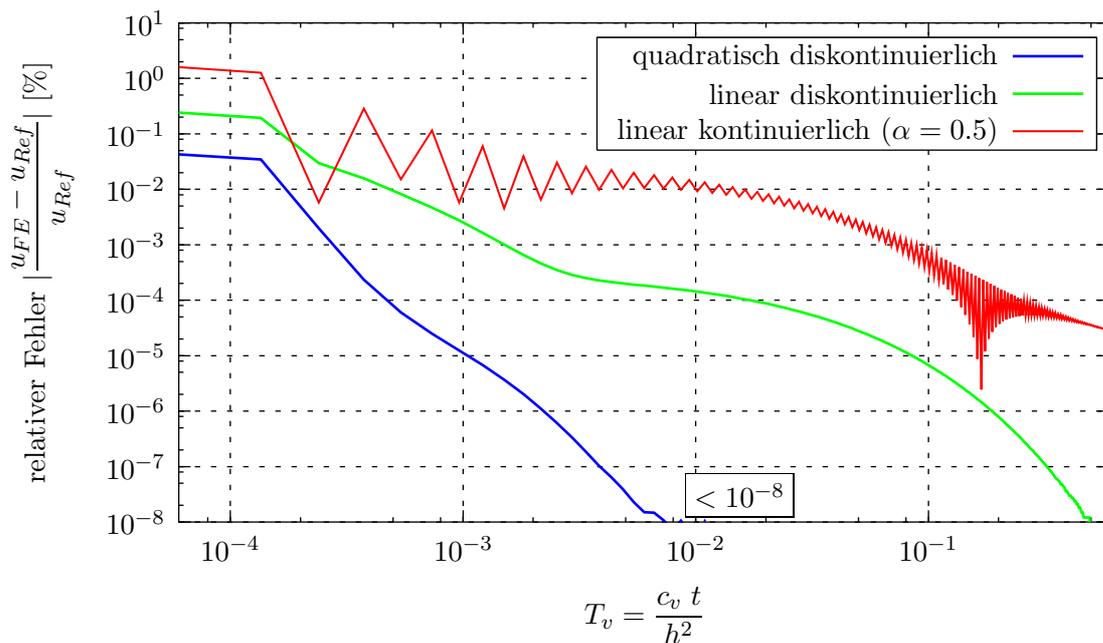


Abbildung 6.21: Relativer Fehler bei konstanter Zeitschrittweite ΔT_v

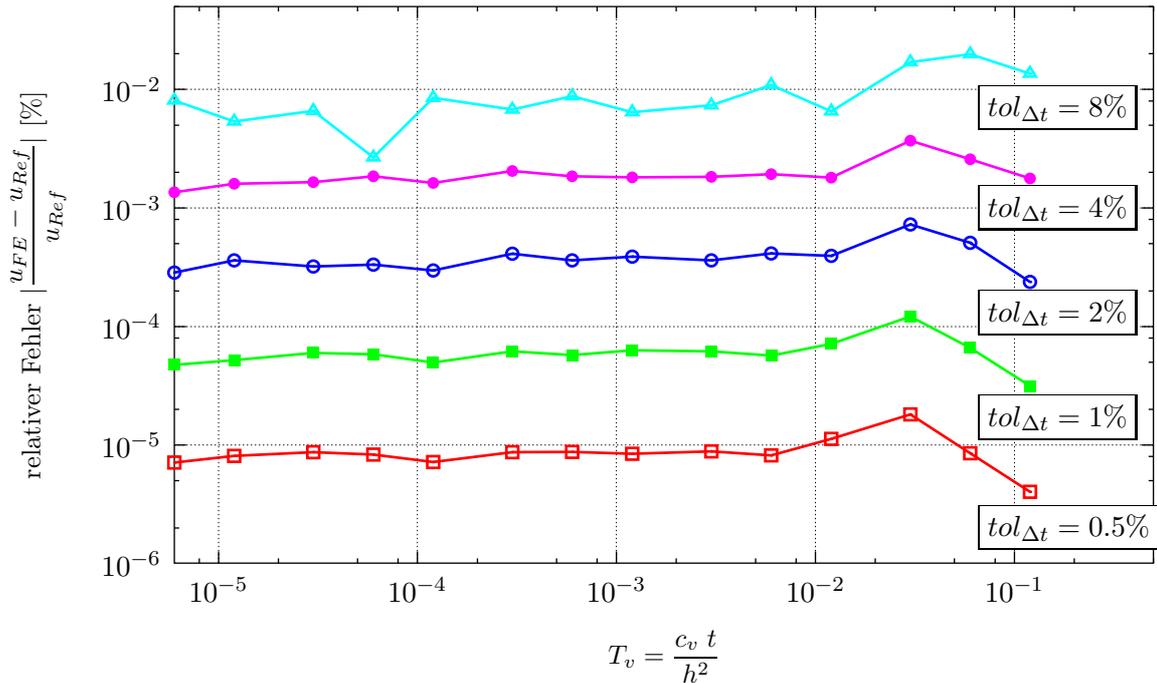


Abbildung 6.22: Zeitlicher Diskretisierungsfehler bei adaptiver Zeitschrittsteuerung

Um eine Aussage über den zeitlichen Diskretisierungsfehler zu treffen, wurde das beschriebene System mit einer über den gesamten Zeitraum der Konsolidierung konstanten Zeitschrittweite berechnet. Dabei wurde das Verhalten der drei möglichen, in Kapitel 5 vorgeschlagenen Zeitapproximationen verglichen. Unterschieden werden demnach

- linear kontinuierliche (Semidiskretisierung mit $\alpha = 0.5$),
- linear diskontinuierliche (Raum–Zeit–Elemente) und
- quadratisch diskontinuierliche (Raum–Zeit–Elemente)

Ansatzfunktionen im Zeitbereich. Der globale zeitliche Diskretisierungsfehler in den Verschiebungen wurde für jeden diskreten Zeitpunkt t_n mit

$$e_{FE}(t_n) = \frac{\|\mathbf{u}_{FE}(t_n) - \mathbf{u}_{Ref}(t_n)\|_\infty}{\|\mathbf{u}_{Ref}(t_n)\|_\infty} \quad (6.92)$$

bestimmt, wobei die Referenzlösung $\mathbf{u}_{Ref}(t)$ auf der Grundlage derselben räumlichen Diskretisierung jedoch mit einer um den Faktor 10 feineren Zeitschrittweite und einer quadratisch–diskontinuierlichen Approximation des Zeitverlaufs erstellt wurde. Der Einfluss des räumlichen Diskretisierungsfehlers kann somit vernachlässigt werden.

Das Ergebnis in Abbildung 6.21 zeigt für alle Diskretisierungsvarianten einen Abfall des Fehlers um mehrere Größenordnungen im Verlauf der Konsolidierung. Die Anwendung einer konstanten Zeitschrittweite führt demnach zu äußerst ineffizienten Rechenzeiten und verstößt gegen das Ziel einer Gleichverteilung des Fehlers über alle Elemente im Zeitbereich. Aufgrund der höheren Konvergenzordnung der diskontinuierlichen Verfahren werden hier schneller abfallende Fehlermaße erzielt, wobei quadratische Ansätze erwartungsgemäß den geringsten Fehler aufweisen. Bei gleicher Schrittweite ergibt sich aber auch mit linear diskontinuierlichen Ansätzen ein um ca. zwei Größenordnungen geringerer Fehler als mit kontinuierlichen Ansätzen. Desweiteren

wird ersichtlich, dass mit den Raum–Zeit–Diskretisierungen das typische oszillierende Verhalten des nur A–stabilen CRANK–NICOLSON–Verfahrens erfolgreich vermieden werden kann. Die GALERKINSche Wichtung im Zeitbereich führt zur L–Stabilität des Verfahrens und damit zu einem glatteren Verlauf. Hauptsächlich ist diese Eigenschaft auf die *numerische Dämpfung* hoher Moden zurückzuführen, die im Rahmen von dynamischen Problemstellungen zu ungewollter Energie–Dissipation führt. Das Time–Discontinuous–GALERKIN–Verfahren wird deshalb im Bereich der Strukturmechanik nur sehr selten verwendet, wenn Langzeitsimulationen betrachtet werden [134]. Bei quasi–statischen Berechnungen ergeben sich im Gegensatz dazu ausschließlich Vorteile.

Die Abbildungen 6.22 und 6.23 zeigen Ergebnisse bei Anwendung der automatischen Zeitschrittsteuerung. Die Inkrementlängen wurden auf der Basis der auftretenden Sprunggrößen so gesteuert, dass sich ein über den gesamten Berechnungszeitraum nahezu konstant verlaufendes Fehlermaß ergab und somit ein effizienter Einsatz der Rechenkapazität gewährleistet wurde. Am Beispiel linear diskontinuierlicher Ansätze lässt sich ein direkter Zusammenhang zwischen vorgegebener Toleranz $tol_{\Delta t}$ und erzielter Rechengenauigkeit e_{FE} ablesen. Abbildung 6.23 zeigt die bei einheitlicher Fehlergröße $e_{FE}(t) = 5 \cdot 10^{-5} = konst.$ berechneten Zeitschrittweiten ΔT_v im Verlauf der Berechnung. Während in der Anfangsphase sehr kleine Inkremente gewählt werden ($\Delta T_v \approx 10^{-7}$), um die starke Dissipation des Porenwasserdrucks hinreichend zu beschreiben, können gegen Ende des Konsolidierungsprozesses sehr viel größere Inkremente ($\Delta T_v \approx 10^{-3}$) benutzt werden. Diese starke Änderung um mehr als vier Größenordnungen zeigt erneut die Ineffizienz einer Berechnung mit konstanten Zeitschritten.

Ein Vergleich der verschiedenen Ansatzgüten zeigt, dass unter Verwendung einer linearen Raum–Zeit–Diskretisierung bei gleichem zulässigen Fehler eine durchschnittlich um 5–8 mal größere Zeitschrittweite als bei der Semidiskretisierung mit dem Integrationsparameter $\alpha = 0.5$ verwendet werden kann. Bei Einsatz von quadratischen Funktionen ist man in der Lage, Δt nochmals um einen Faktor von 6–10 zu erhöhen. Diese Beobachtung stimmt mit den Erfahrungen anderer Autoren wie z.B. HUCKFELDT [82] überein, die für quadratische Ansätze 7–12 mal größere Zeitschrittweiten benutzen als für lineare.

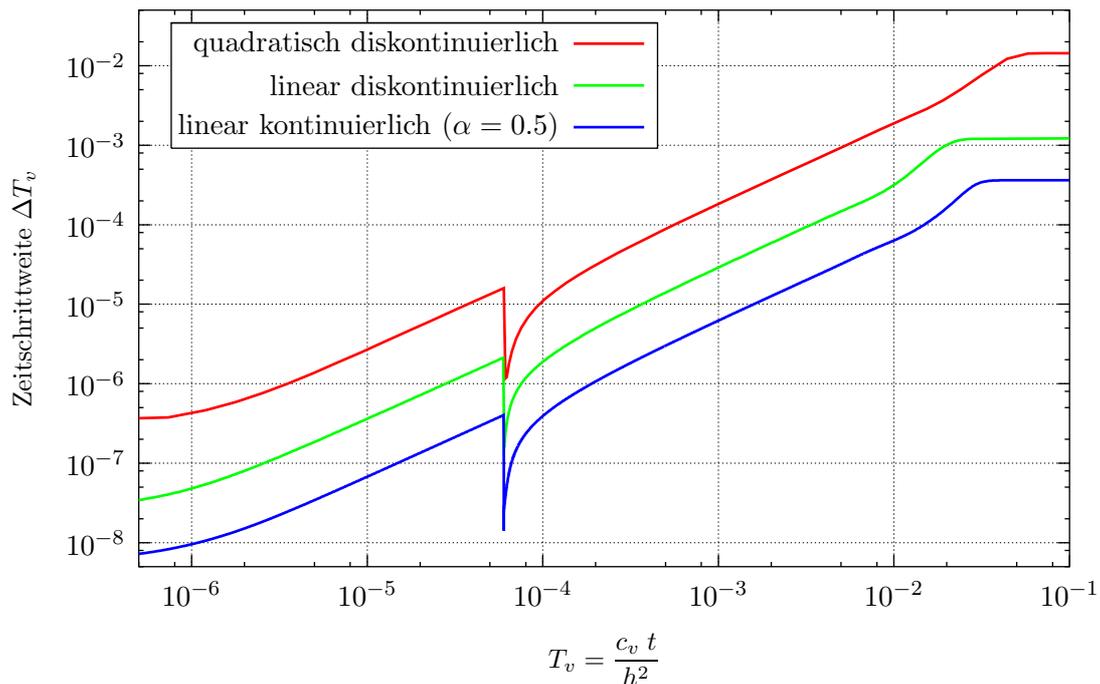


Abbildung 6.23: Veränderung der Zeitschrittweite ΔT_v im Berechnungsverlauf

Auf der anderen Seite ist dieser Vorteil auch mit einem stark erhöhten Rechenaufwand verbunden. Abbildung 6.24 verdeutlicht die Verhältnisse. Da sich bei Raum-Zeit-Elementen die Anzahl der Gleichungen im globalen System und die auftretende Bandbreite um den Faktor zwei bzw. drei erhöhen, muss zur direkten Lösung des Systems der 8-fache bzw. 64-fache Aufwand an CPU-Zeit in Kauf genommen werden. Damit gleichen sich die für eine bestimmte Genauigkeit benötigten Gesamtrechnenzeiten wieder nahezu an.

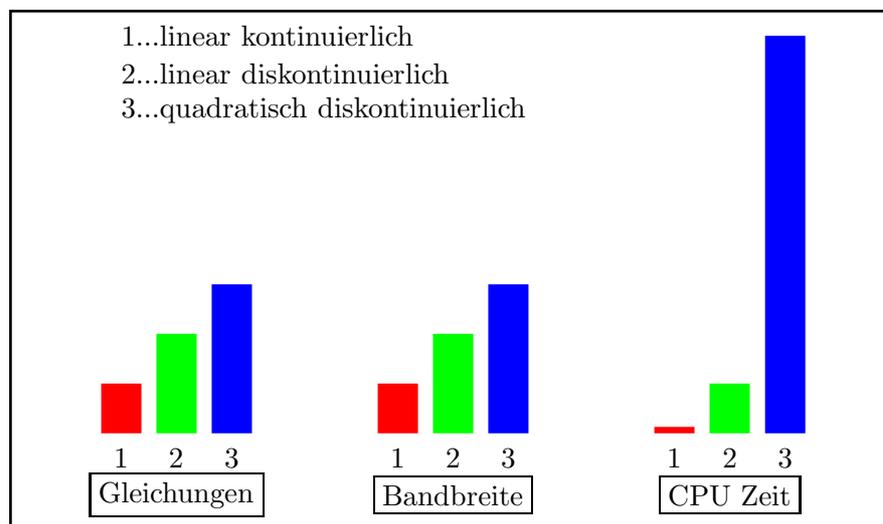


Abbildung 6.24: Vergleich der Gleichungsanzahl, der Bandbreite und der CPU-Zeit

Für den Einsatz von Raum-Zeit-Elementen spricht jedoch zum einen der geringere numerische Aufwand zur Ableitung eines zeitlichen Fehlerindicators, da die Sprungterme gleichzeitig als Systemunbekannte auftreten und zum anderen die weitaus geringere Oszillationsanfälligkeit der Lösung. Insbesondere bei der Behandlung von Lokalisierungsphänomenen spielt die Stabilität eine herausragende Rolle. Aufgrund der drastisch steigenden Anzahl von Gleichungen ist eine quadratisch diskontinuierliche Approximation bei kombinierter Raum-Zeit-Adaption im Hinblick auf den Speicherbedarf als sehr aufwändig einzuschätzen. Lineare Elemente im Zeitbereich stellen dagegen einen guten Kompromiss zwischen eingesetzter Rechenleistung und erzielter Genauigkeit dar. Bei zukünftig steigender Hardware-Leistung sollte es jedoch auch möglich werden, höhere Approximationsgüten im Zeitbereich zu untersuchen.

6.10 Verifikation der adaptiven elastoplastischen Berechnung

Eine Verifikation der elastoplastischen Berechnung im Rahmen des Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahrens ist insofern notwendig, da der vorgeschlagene Algorithmus zur Integration der wegabhängigen Variablen nicht dem Standard des impliziten EULER-Verfahrens entspricht. Gleichzeitig soll in diesem Abschnitt die Leistungsfähigkeit der adaptiven Netzverfeinerung bei elastoplastischen Berechnungen gezeigt werden. Das Problem besteht hier vor allem darin, dass als Vergleich zur FE-Näherung eine möglichst genaue Lösung vorliegen sollte. Bei nicht-trivialen Problemstellungen der Elastoplastizität kann eine streng analytische Lösung jedoch nur sehr selten gefunden werden. Aus diesem Grund wurde im Rahmen des DFG-Schwerpunkts *“Adaptive Finite-Element-Verfahren in der Angewandten Mechanik”* verschiedene *Benchmark-Berechnungen* definiert, um die Lösungen unterschiedlicher adaptiver Finite-Element-Verfahren hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit zu vergleichen. Für die in dieser Arbeit behandelten zweidimensionalen elastoplastischen Aufgabenstellungen kam das in Abbildung 6.25 dargestellte System *“Scheibe mit Loch”* zum Einsatz, das wie folgt charakterisiert werden kann.

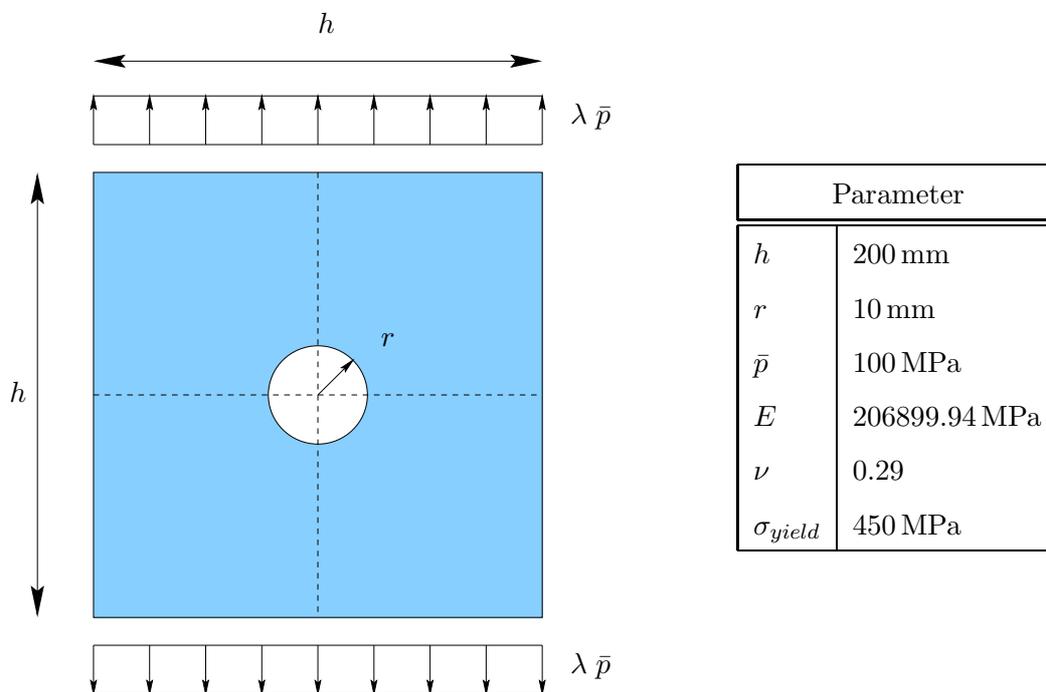


Abbildung 6.25: DFG-Benchmark *“Scheibe mit Loch”*: System und Parameter

Eine quadratische Scheibe mit der Kantenlänge $h = 200$ mm und einer kreisförmigen Aussparung mit dem Radius $r = 10$ mm wird der Beanspruchung aus Abbildung 6.26 in Form einer zyklischen Lastfunktion ausgesetzt. Die Berechnung erfolgt im ebenen Verzerrungszustand und als Material wird Stahl mit den in der Tabelle angegebenen Parametern gewählt. Für die elastoplastische Berechnung sei ideale Plastizität mit einer Fließspannung $\sigma_{yield} = 450$ MPa und eine VON MISES-Fließfunktion angenommen. Die Grenzlaster des Systems liegt bei $\lambda_{krit} = 4.66$, woraus deutlich wird, dass sich bei einem maximalen Lastfaktor von $\lambda = 4.50$, der ungefähr 96% der Grenzlaster entspricht, eine ausgedehnte plastische Zone einstellt. Als Referenzlösung dient eine *Overkill-Berechnung* auf einem uniformen Netz mit 65536 Q2/P1 Elementen (als Overkill bezeichnet man eine Lösung, die im adaptiven Sinn nicht unbedingt effizient berechnet wurde, aber aufgrund einer enorm hohen Zahl an Unbekannten als äußerst genau einzustufen ist). Diese wurde von WIENERS im Rahmen des Teilprojekts *“Adaptive, parallele Mehrgitter-Verfahren für nichtlineare Probleme der Strukturmechanik”* erstellt [180] und weist einen gesicherten Fehler von $e \leq 1\%$ auf.

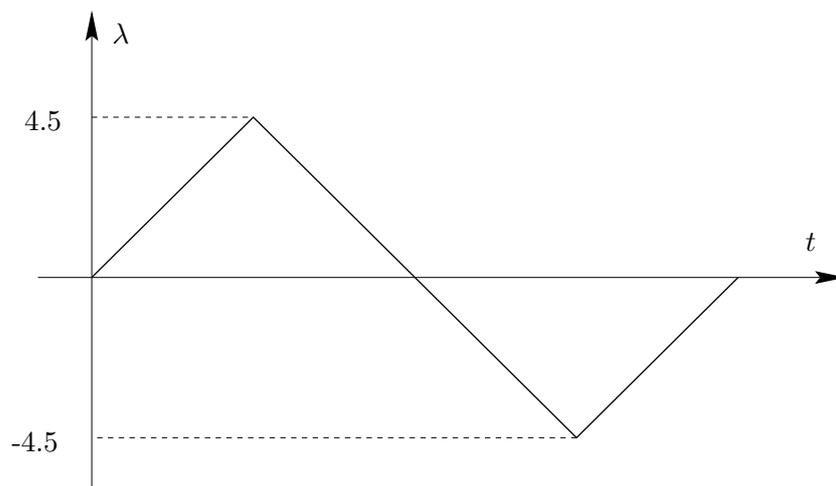


Abbildung 6.26: Zyklische Lastfunktion

Bei der hier gezeigten Vergleichsrechnung wurde vorerst auf eine Modellierung unter Verwendung der COSSERAT-Theorie verzichtet und lediglich Verschiebungsfreiheitsgrade angesetzt. Abbildung 6.27 zeigt das der Diskretisierung zugrunde liegende Viertelsystem mit der Position der Punkte, an denen eine Auswertung verschiedener Größen wie z.B. Verschiebungen oder Spannungen stattfand. Eine adaptive Anpassung der Zeitschrittweite wird in diesem Beispiel nicht in Betracht gezogen. Nachdem auch ein Porenwassertransport keine Rolle spielt, erfolgt eine Steuerung der adaptiven Netzverfeinerung ausschließlich auf der Basis des klassischen Anteils des Fehlerindikators für die Gleichgewichtsbedingungen. Da eine relativ genaue Berechnung angestrebt wurde, lag die Toleranzschränke bei $tol_{GG} = 1.5\%$. In Abbildung 6.28 ist die Sequenz der erzeugten adaptiven Diskretisierungen ausgehend von einem Startnetz mit 396 Elementen dargestellt. Es wird deutlich, dass der gewählte Fehlerindikator zuerst im Bereich um die Singularität in Punkt 2 zu Verfeinerungen führt. Aber auch die Zone mit plastischem Materialverhalten, die sich bei höherer Belastung ausbildet, wird deutlich erkannt und verfeinert. Mit der bei Lastfaktor $\lambda = 4.45$ generierten sechsten Verfeinerungsstufe wurde schließlich der gesamte Lastzyklus durchfahren.

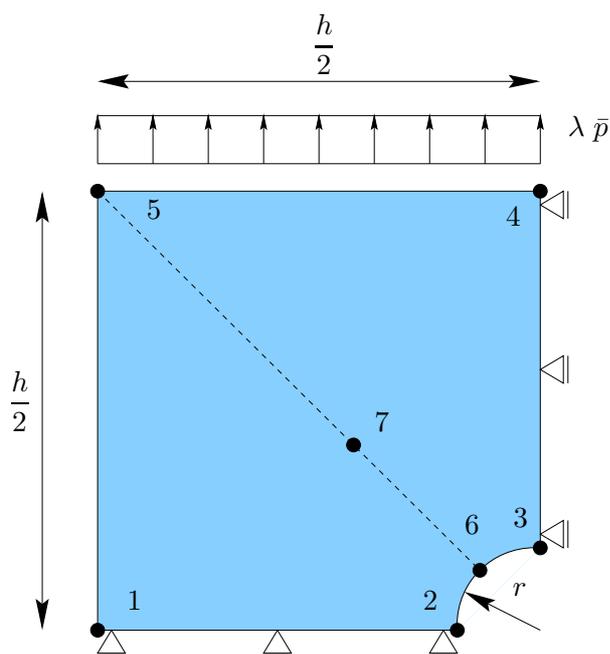
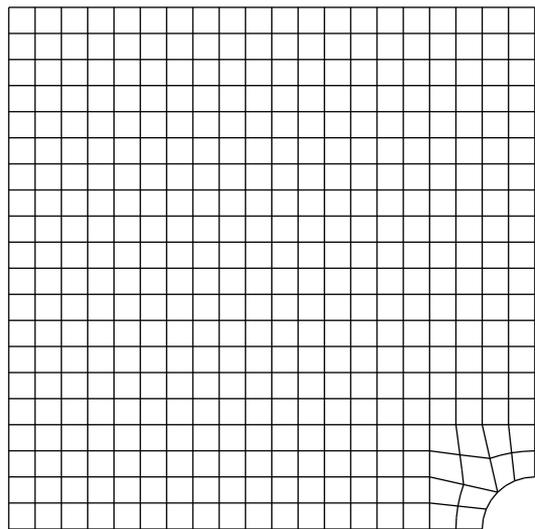
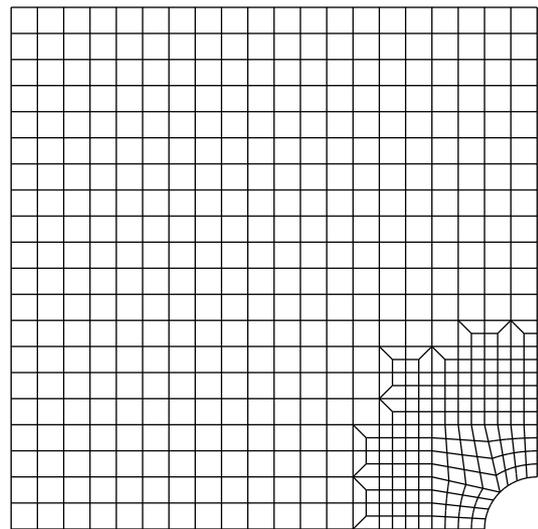


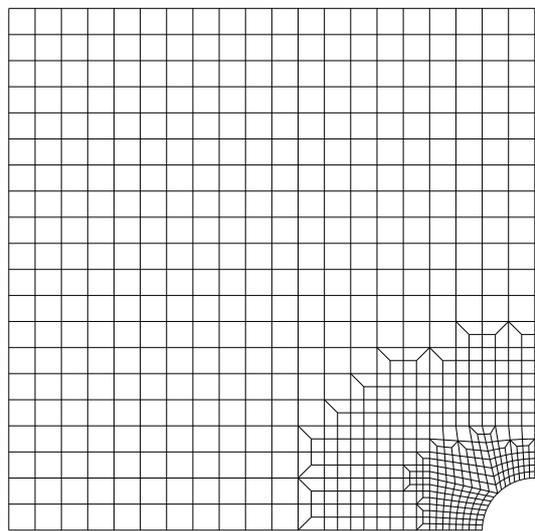
Abbildung 6.27: DFG-Benchmark: Viertelsystem



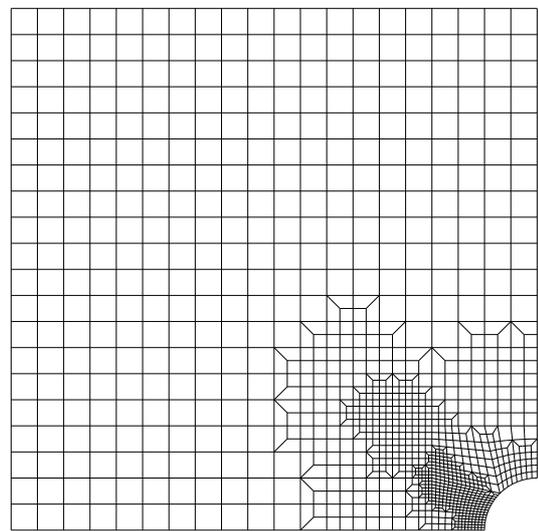
$\lambda = 0.00$ $\mathcal{N}_E = 396$ $\mathcal{N}_{Gl} = 3256$



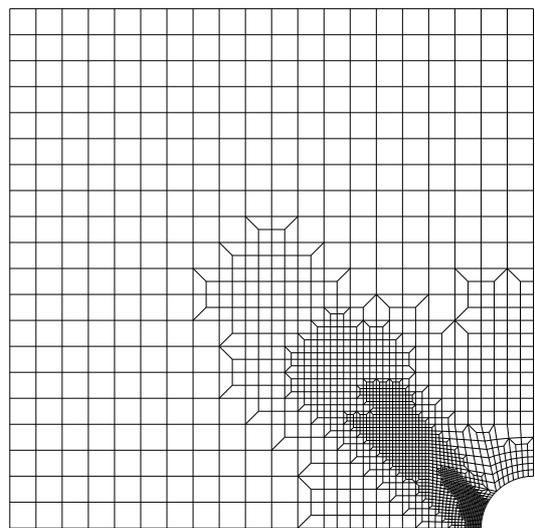
$\lambda = 1.00$ $\mathcal{N}_E = 519$ $\mathcal{N}_{Gl} = 4248$



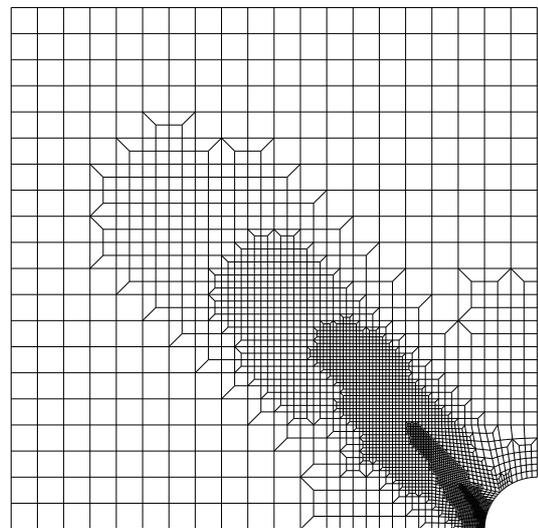
$\lambda = 3.60$ $\mathcal{N}_E = 684$ $\mathcal{N}_{Gl} = 5584$



$\lambda = 4.00$ $\mathcal{N}_E = 1123$ $\mathcal{N}_{Gl} = 9112$

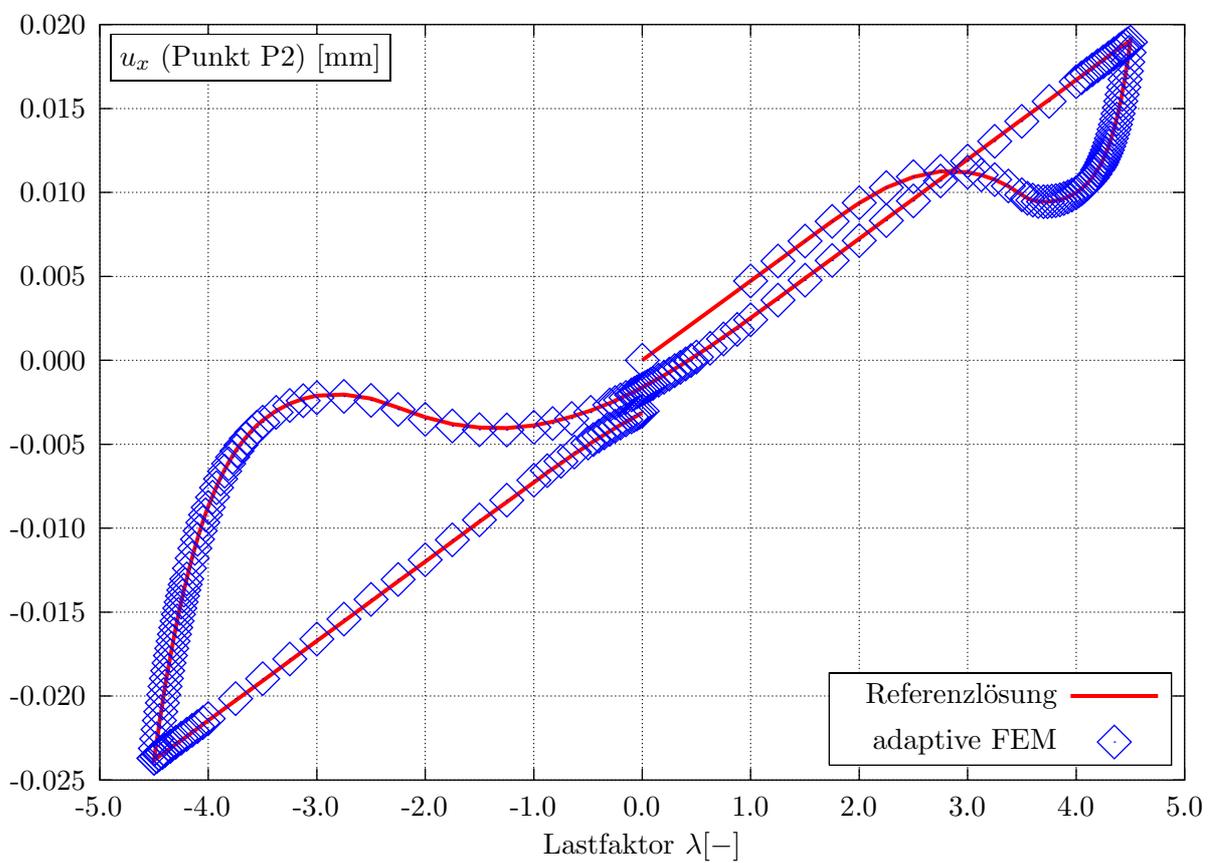
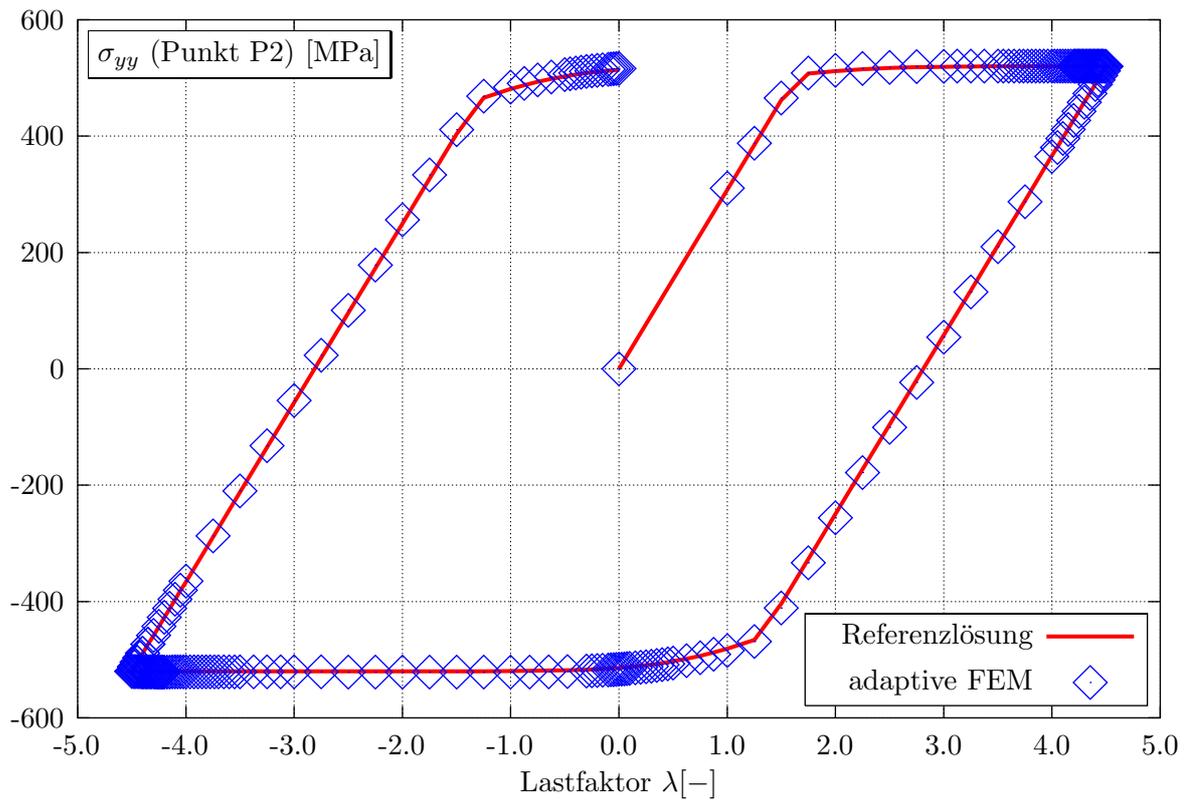


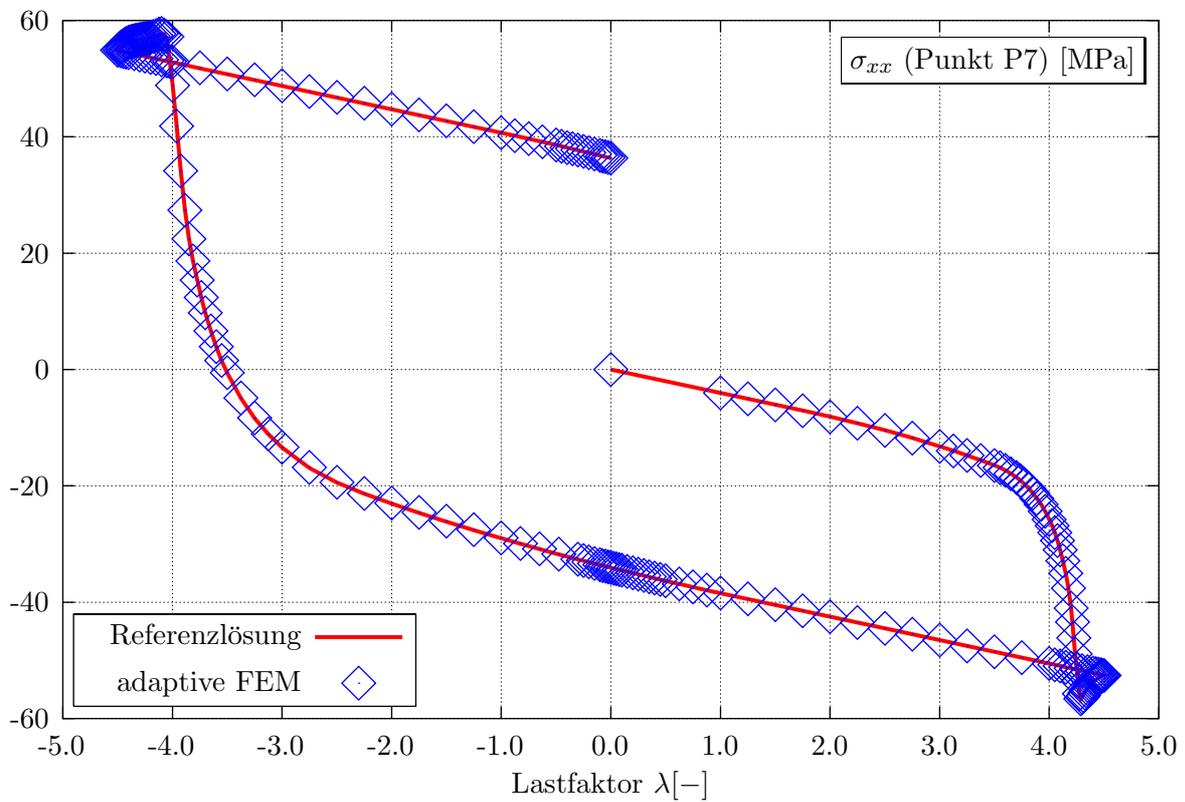
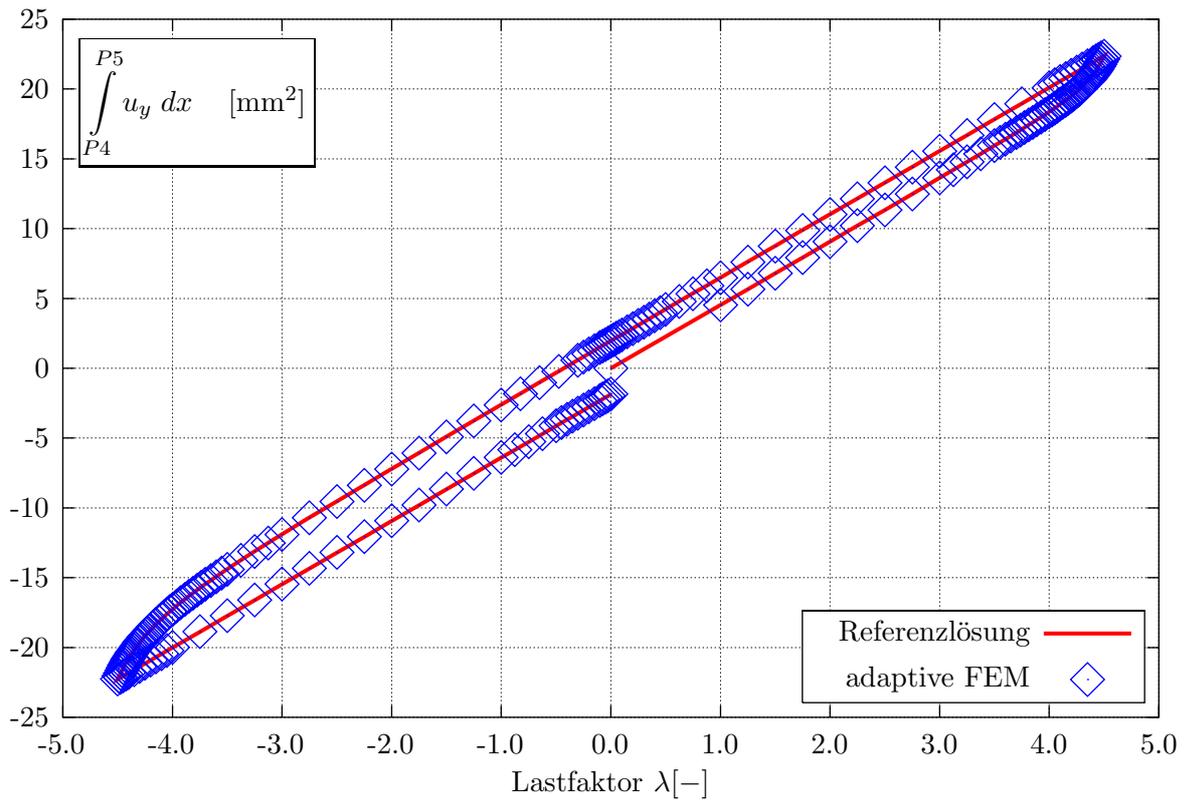
$\lambda = 4.26$ $\mathcal{N}_E = 2183$ $\mathcal{N}_{Gl} = 17616$

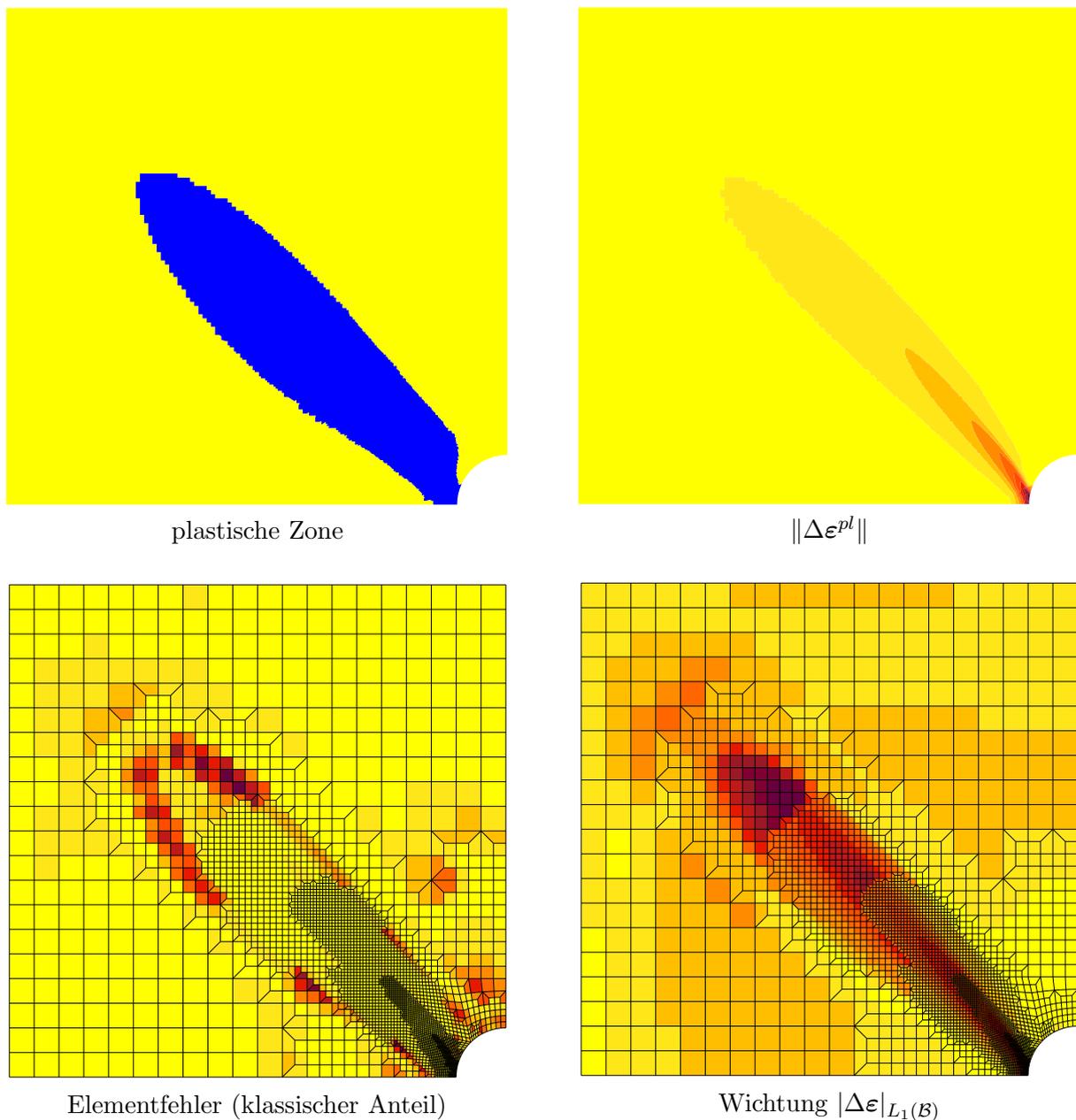


$\lambda = 4.45$ $\mathcal{N}_E = 4143$ $\mathcal{N}_{Gl} = 33328$

Abbildung 6.28: Adaptive Netzverfeinerung bei der Scheibe mit Loch





Abbildung 6.29: Bedingungen bei $\lambda = 4.50$

Den Abbildungen auf den Seiten 117 und 118 kann entnommen werden, dass bereits mit einem Bruchteil der Freiheitsgrade die Referenzlösung hervorragend angenähert wird. Im Vergleich zur Referenzlösung mit 197633 Freiheitsgraden, lagen der gezeigten adaptiven Berechnung lediglich 33328 Freiheitsgrade zugrunde. An den Verläufen von σ_{yy} und u_x im Punkt 2 wird sehr gut ersichtlich, wie sich die Begrenzung der Spannungen durch die Fließfunktion und der parallele Entlastungspfad äußern. Es kann dabei abgelesen werden, welche bleibende Verformung sich auch nach vollständiger Entlastung einstellt. Aber auch kompliziertere Verläufe wie z.B. das Integral der vertikalen Verschiebung entlang der Systemoberkante oder die Spannung σ_{xx} im Punkt 7 können mit hoher Genauigkeit erfasst werden. Die ortsadaptive Berechnung stellt also bei derartigen Problemstellungen eine wesentliche Effizienzsteigerung dar. In diesem konkreten Fall hat sich gezeigt, dass die Netzauflösung bzw. die Geometrieapproximation in Punkt 2 ebenso wichtig ist wie ein stabiles Integrationsschema.

Um einen weiteren Eindruck der elastoplastischen Berechnung zu gewinnen, sind in Abbildung 6.29 die Verhältnisse bei erstmaligem Erreichen der maximalen Last $\lambda = 4.50$ gezeigt. Dargestellt

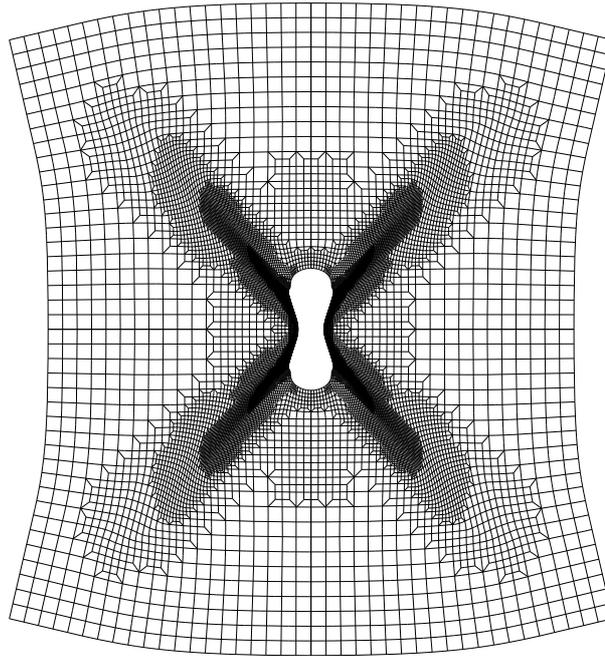


Abbildung 6.30: Verschiebungssinkremente $\Delta \mathbf{u}$ bei $\lambda = 4.50$

sind die plastische Zone und die Norm der plastischen Dehnungssinkremente, die sich diagonal durch die Scheibe erstrecken. Dabei spricht der Fehlerindikator hauptsächlich in den Übergangsbereichen zwischen elastischer und plastischer Zone an. Zusammen mit dem Wichtungskonzept, in dem die L_1 -Norm der Dehnungssinkremente auftritt, ergibt sich ein ausgewogener Gesamtindikator, der eine sinnvolle Verteilung im Bereich der plastischen Zone aufweist und so zu regulären Netzverfeinerungen führt. Bedingt durch die gleichmäßige Struktur des Ausgangsnetzes, bei dem ausgenommen vom Öffnungsbereich ausschließlich quadratische Elementgeometrien verwendet wurden, liefert die adaptive Netzverfeinerung eine sehr gut gestaffelte hierarchische Struktur der Diskretisierungen. Die einzelnen Stufen der Verfeinerung sind durch annähernd glatte Berandungen gekennzeichnet wobei Inselbildungen konsequent vermieden werden. In Abbildung 6.30 ist schließlich die Verteilung der Verschiebungssinkremente $\Delta \mathbf{u}$ zum Zeitpunkt der maximalen Last $\lambda = 4.50$ dargestellt. Deutlich erkennbar ist die Änderung der Lochgeometrie hin zu einer ovalen Öffnung.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass das vorgestellte NEWTON-Verfahren zur Bestimmung der Spannungen an den Integrationspunkten im Fall eines plastischen Verhaltens stabil arbeitet und zu Lösungen führt, die mit Hilfe der Overkill-Lösung gut verifiziert werden können. Durch die erfolgreiche Anwendung auf einen zyklischen Belastungspfad, der Ent- und Wiederbelastungen beinhaltet, wird deutlich, dass der ursprünglich für monotone Lastpfade entwickelte Algorithmus in der Lage ist, die eventuellen numerischen Probleme beim Auftreten von örtlich begrenzten Entlastungsphänomenen nach Überschreiten der Grenzlaster zu vermeiden. Auch kompliziertere Spannungszustände, wie sie beispielsweise am Punkt 7 beobachtet werden können, werfen keine Konvergenzprobleme auf. Gerade bei der Analyse von Lokalisierungen und den dabei auftretenden Konzentrationen von plastischen Deformationen spielt der Aspekt der Stabilität eine wichtige Rolle. Desweiteren ist ersichtlich, dass die ortsadaptive Strategie im vorliegenden Fall wesentlich zu einer Effizienzsteigerung der Berechnung beiträgt. Kritische Bereiche (Punkt 2) und vor allem plastische Zonen werden sinnvoll und gleichmäßig verfeinert. Diese Beobachtung lässt deshalb eine Eignung des verwendeten Fehlerindikators bei Anwendung auf Traglastanalysen von Böden und dabei insbesondere bei der Erkennung und Auflösung von Scherbändern erwarten. Die Steigerung der Effizienz sollte in solchen Fällen sogar noch bedeutender ausfallen.

Kapitel 7

Lokalisierungsphänomene

7.1 Allgemeines

Im Zusammenhang mit der Traglastanalyse von Strukturen der unterschiedlichsten Materialien spielen Lokalisierungsphänomene eine wichtige Rolle. Mit dem Begriff *Lokalisierung* bezeichnet man dabei eine starke Konzentration von plastischen Verzerrungen, die sich in einem – im Verhältnis zum Gesamtsystem – eng begrenzten Bereich ausbilden und häufig in Form von *Scherbändern* zum Versagen des Systems führen. Potenzielle Ausgangspunkte für Lokalisierungen werden generell durch lokale Defekte im Material oder geometrische Unstetigkeiten (z.B. der Berandung) bestimmt. Weitere Voraussetzungen für deren Beobachtung in numerischen Simulationen bestehen in der Anwendung eines entfestigenden Materialverhaltens oder einer nicht-assozierten Fließregel. Die Ausbildung der Lokalisierungszonen erfolgt in aller Regel plötzlich und stellt mathematisch gesehen ein Verzweigungsproblem auf der konstitutiven Ebene dar [80, 139, 160]. Weitere Deformationen beschränken sich in der Folge auf diese Zonen, während der übrige Bereich eine Entlastung erfährt. Dadurch entstehen stark inhomogene Deformationsmuster. Die typische Last-Verformungs-Kurve eines weggesteuerten Versuchs zeigt Abbildung 7.1. Der Lokalisierungszeitpunkt ist durch eine horizontale Tangente bestimmt und charakterisiert die Grenzlast der Probe. Nach Abschluss der Scherbandformation beobachtet man einen mehr oder weniger stark ausgeprägten Abfall der Last-Verformungs-Kurve.

Eine Übersicht über Lokalisierungsphänomene in unterschiedlichen Zusammenhängen kann der Arbeit von NEEDLEMAN und TVERGAARD entnommen werden [116]. Als anschauliche Beispiele aus der Bodenmechanik sind hier der Böschungsbruch (Gleitkreis) oder das diagonale Abscheren einer Biaxialprobe zu nennen. Jedoch sind lokale Versagensmechanismen auch bei spröden Materialien wie z.B. Fels, Beton oder Keramik festzustellen [140] und äußern sich hier als Mikro- bzw. Makro-Risse, die sich ausgehend von Schädigungszonen entwickeln. Abbildung 7.2 zeigt die 5000-fache Vergrößerung eines Mikro-Risses in Aluminium-Keramik. Kleine Poren bzw. Versetzungen im Kristallgitter führen hier bei Belastung zu einer Spannungskonzentration und letztendlich zum spröden Versagen in Form eines nach außen hin sichtbaren Risses. Die Breite der Lokalisierung ist im Allgemeinen klein und hängt stark vom inneren Aufbau des Materials ab. PAMIN stellt in [120] fest:

Though strain localization is a macroscopic phenomenon, its origin lies in the material microstructure. To analyze the forming and evolution of localization zones, we must go below the macroscopic level of observation. At this so-called meso-level of observation every material is inhomogeneous and, due to the presence of microvoids and microcracks, it is also discontinuous.

Bei der Untersuchung von granularen Materialien hat sich herausgestellt, dass die Breite der auftretenden Scherbänder zum mittleren Korndurchmesser in Beziehung gesetzt werden kann. In Versuchen wurden Scherbandbreiten in der Größenordnung des 15–30 fachen Korndurchmessers

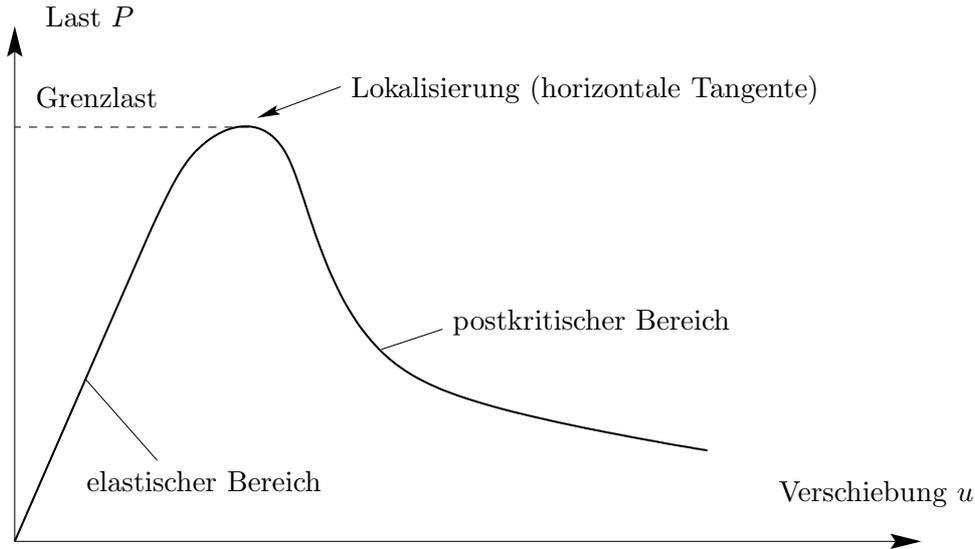


Abbildung 7.1: Schematische Last–Verschiebungs–Kurve bei entfestigendem Materialverhalten

beobachtet. Diese Feststellung führt zu der Schlussfolgerung, dass eine interne Längeneinheit des Materials (z.B. in Form der mittleren Korngröße oder des Gitterabstands in Kristallen) die Versagensform der Struktur wesentlich beeinflusst. Abbildung 7.2 belegt anschaulich diese Aussage. Bei der Strukturanalyse im Rahmen einer FE–Berechnung unter Anwendung der klassischen Kontinuumsformulierung wird das Material jedoch absolut homogen angenommen und durch ein abstraktes mathematisches Modell beschrieben. Der Einfluss einer internen Längeneinheit findet keine Berücksichtigung. Lokalisierungsphänomene können dennoch beobachtet werden, wenn das Materialmodell bestimmte Eigenschaften aufweist. Aus der lokalen Stabilitätsbedingung von DRUCKER

$$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon} > 0 \quad (7.1)$$

kann bei Annahme eines Stoffgesetzes in Ratenform nach Gleichung (4.7) die Grenzbedingung

$$\dot{\epsilon} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} = 0 \quad (7.2)$$

abgeleitet werden. Materialinstabilität ist demnach mit dem Verlust der positiven Definitheit des Tangentensteifigkeitstensors \mathbf{C} verbunden. Zusammen mit der elastoplastischen Kontinuums tangente nach Gleichung (5.170) ergibt sich

$$\dot{\epsilon} : \mathbf{C}^{ep} : \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} : \mathbf{C} : \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon} : \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial g}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{C}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{C} : \frac{\partial g}{\partial \sigma} + H} : \dot{\epsilon} = 0. \quad (7.3)$$

Im Falle einer assoziierten Fließregel ($f = g$) ist eine Instabilität nur bei entfestigendem Materialverhalten, also bei $H \leq 0$ möglich. Bei nicht–assoziertem Fließen ($f \neq g$) ist dagegen eine Instabilität auch bei verfestigendem Material ($H > 0$) nicht auszuschließen [27, 28, 142]. Von NEILSEN und SCHREYER [117] konnte dementsprechend gezeigt werden, dass bei Anwendung des DRUCKER–PRAGER–Kriteriums und einer assoziierten Fließregel keine Lokalisierung beobachtet werden kann. Trotz qualitativ richtiger Aussagen bei Anwendung der klassischen Kontinuumsformulierung besteht ein entscheidender Nachteil darin, dass FE–Berechnungen nach auftretender Lokalisierung eine fundamentale Netzabhängigkeit aufweisen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass lediglich die Maschenweite h als Information für die Breite der Lokalisierung herangezogen werden kann. Als Konsequenz berechnet sich je nach verwendeter Netzdichte eine unterschiedlich breite Scherbandzone, die in etwa der 1–1.5 fachen Elementabmessung entspricht. Bei weiterer

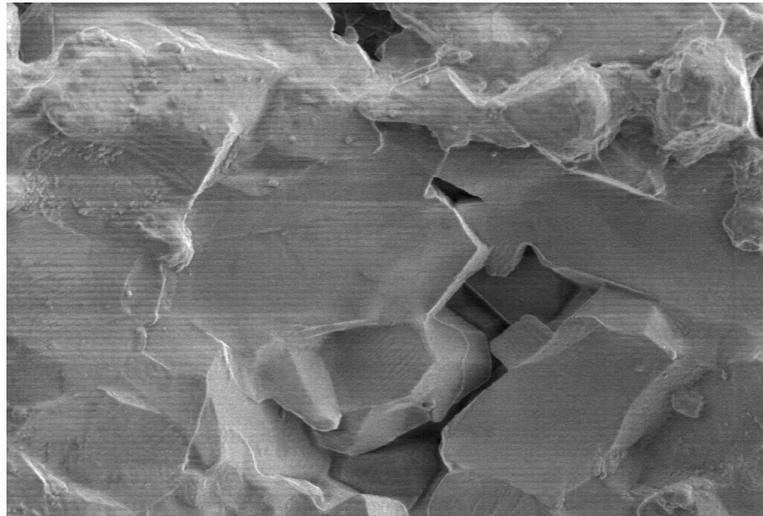


Abbildung 7.2: Lokalisierung (Riss) in Aluminium–Keramik (5000–fache Vergrößerung)

Verfeinerung des Netzes führt dies zu einer im Grenzfall infinitesimal kleinen Ausdehnung. Besonders kritisch äußert sich der Effekt im Falle einer räumlich adaptiven Berechnung. Die Lokalisierungszone wird dann bei steigendem Elementfehler immer stärker verfeinert, ohne dass sich eine konvergente Lösung erzielen lässt. Eine quantitative Aussage über die tatsächlich auftretenden Scherbandbreiten und vor allem das mechanische Verhalten im post–kritischen Bereich wird unmöglich.

Mathematisch betrachtet ist die Netzabhängigkeit der FE–Lösung auf ein schlecht gestelltes Problem zurückzuführen. Durch die lokale Materialinstabilität verlieren die beherrschenden Differenzialgleichungen ihre Elliptizität und gehen in eine hyperbolische bzw. parabolische Form über. Eine Lösung partieller Differenzialgleichungen vom hyperbolischen Typ würde dann jedoch den Einsatz von *Charakteristikenverfahren* erfordern. Sollen Grenzlaster bei Aufgabenstellungen aus der Bodenmechanik quantitativ zuverlässig berechnet werden, ist diesem Defekt der klassischen Kontinuumsformulierung besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Ansätze von erweiterten Modellbildungen vorgestellt, die zu einer korrekten Erfassung von lokalen Effekten im Rahmen der FEM beitragen können.

7.2 Numerische Erfassung von Lokalisierungsphänomenen

Um auch nach einsetzender Lokalisierung eine konvergente FE–Lösung zu erzielen und das mechanische Verhalten im post–kritischen Bereich beurteilen zu können, wurden in der Literatur bereits mehrere Möglichkeiten erörtert. Dabei können grundsätzlich zwei Vorgehensweisen unterschieden werden:

- Übergang zu Teil–Kontinua mit Interface–Elementen
- Regularisierung durch erweiterte (verbesserte) Kontinuumsformulierungen

Der erste Ansatz steht in engem Zusammenhang zur Bruchmechanik. Die verschiedenen, durch Scherbänder getrennten Teilbereiche des Systems, für die die Elliptizität der Grundgleichungen gewahrt bleibt, werden über Interface–Elemente miteinander gekoppelt, mit denen diskontinuierliche Deformationen beschrieben werden können [144]. In diese Rubrik fallen auch die Modelle mit diskreten Rissen (siehe Abbildung 7.3). Die Schwierigkeit liegt hier darin, dass das Rissbild

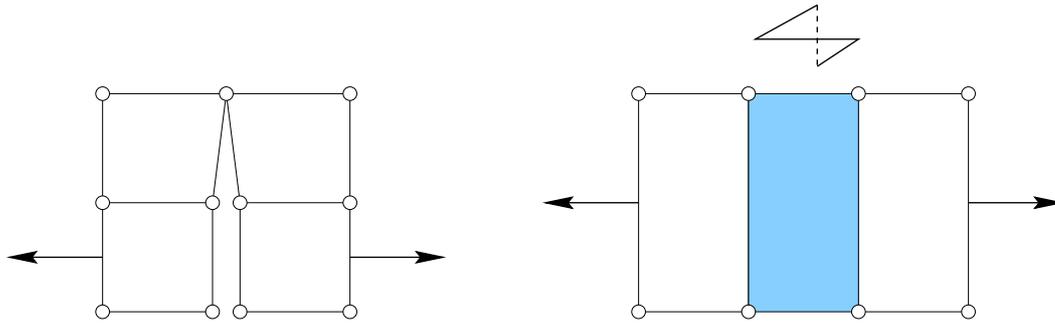


Abbildung 7.3: Diskretes Rissmodell und diskontinuierliches Interface-Element

und die Riss-Interaktionen entweder vorzugeben sind oder, dass Interface-Elemente an allen potenziellen Bruchstellen mit beliebigen Orientierungen vorgesehen werden müssen. Da der Versagensmechanismus oft a priori nicht bekannt ist, sind in jedem Fall mehrere Neuvernetzungen im Berechnungsablauf notwendig [98, 99]. Aufgrund der Vielzahl an unsicheren Annahmen, die dabei zu treffen sind, wird diese Möglichkeit zur Erfassung von Lokalisierungsphänomenen in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt.

Die zweite prinzipielle Möglichkeit besteht darin, den Verlust der Elliptizität der Grundgleichungen zu vermeiden. Alle Ansätze in dieser Richtung führen durch die Definition einer charakteristischen internen Länge zu einer *Regularisierung* des Problems. Dieser zusätzliche interne Längenparameter ist aus der Struktur des Materials auf Mikro-Ebene abzuleiten und beinhaltet somit eine direkte Information über die Geometrie der Versagensform. Zu dieser Kategorie gehören folgende Modelle:

- Theorie Mikropolarer Medien (COSSERAT-Theorie):

Das klassische Kontinuum wird durch ein zusätzliches Rotationsfeld ergänzt. Die damit entstehenden Tensoren der Momentenspannungen und Krümmungen sind über Stoffbeziehungen verknüpft, die eine charakteristische Länge l_c beinhalten (siehe Gleichung (4.46)). Wichtige Grundlagen der COSSERAT-Theorie finden sich bei ERINGEN [67] und im Rahmen elastoplastischer Stoffmodelle bei MUEHLHAUS und VARDOULAKIS [114, 174], DE BORST [29] und STEINMANN und WILLAM [161]. Eine ausführliche Herleitung der mikropolaren Kompatibilitätsbedingungen und Bilanzrelationen zeigt VOLK in [176].

- Nicht-lokale Kontinuumsformulierung:

Die tensoriellen Größen der Spannungen, Dehnungen und plastischen Dehnungen werden nicht für jeden Punkt des Kontinuums unabhängig berechnet, sondern ergeben sich aus integralen Mittelwerten über Referenzvolumina. Durch Wichtungsfunktionen, die mit der Entfernung vom Auswertungspunkt abnehmen, wird die jeweilige Zustandsvariable auch von Nachbarbereichen in einem gewissen Abstand beeinflusst. Durch diese Verschmierung ergibt sich eine interne Längeneinheit, die zur Regularisierung führt. Eine Schwierigkeit besteht in der Auswertung der entstehenden Integro-Differenzialgleichungen für die Konsistenzbedingung. Von erfolgreichen Anwendungen berichten unter anderen BAŽANT und LIN [16, 17], aber auch ASKES [4], der diese Methode mit einer netzfreien Diskretisierung verbindet.

- Höhere Gradienten-Methoden (gradientenabhängige Plastizität):

Die Fließfunktion wird bei diesem Ansatz um Terme erweitert, die die Gradienten eines invarianten plastischen Verzerrungsmaßes beinhalten (bzw. dessen zweite Ableitungen). Im Falle eines homogenen Verzerrungszustands oder, wenn sich die Verzerrungen räumlich nur langsam ändern, können die Gradiententerme vernachlässigt werden. Dagegen haben sie einen markanten Einfluss im Bereich von Lokalisierungen. Die Konsistenzbedingung nimmt

dann die Form einer Differenzialgleichung an und muss global erfüllt werden. Dies führt dazu, dass der Konsistenzparameter als Feldunbekannte im globalen Gleichungssystem auftritt. Als Nachteil entstehen zusätzliche Randbedingungen am Übergang von elastischen zu plastischen Teilbereichen. Detaillierte Ausführungen finden sich bei DE BORST und MÜHLHAUS [30] und PAMIN [120].

- Viskoplastische Regularisierung (ratenabhängige Plastizität):

Grundlage dieses Vorgehens ist das Erweitern der Stoffbeziehungen um Terme, die eine Zeitableitung der Deformation beinhalten. Ein typischer Vertreter dieser Art sind viskoplastische Stoffmodelle, bei denen eine Aufspaltung des Verzerrungstensors in elastische und viskoplastische Anteile postuliert wird. Die viskoplastischen Anteile können z.B. durch das Modell von PERZYNA [124] oder DUVAUT–LIONS [55] beschrieben werden. Der Einfluss der Deformationsrate wird durch die Viskosität bestimmt, die zu einer internen Länge in Beziehung gebracht werden kann. SIMO zeigt in [148] den regularisierenden Charakter der viskoplastischen Modelle für dynamische Problemstellungen. Obwohl für quasi–statische Lastaufbringung der Regularisierungseffekt nicht bewiesen werden kann, zeigt er sich in numerischen Studien, in denen die Zeitschrittweite und Netzdichte in geeignetem Bezug zur Viskosität bzw. Relaxationszeit gewählt werden [144].

Diese Arbeit richtet das Hauptaugenmerk auf die Analyse wassergesättigter Böden. Aufgrund der Zeitabhängigkeit, die durch die Berücksichtigung von Transportvorgängen des viskosen Fluids im porösen Korngerüst entsteht, kann bereits implizit eine interne Längeneinheit zugeordnet werden, die zu einer (schwach) regularisierenden Wirkung führt. Diese Wirkung ist umso stärker, je geringer die Permeabilität k^S des Bodens und je größer die Viskosität η^{FR} des Porenfluids ausfallen. Eine wichtige Rolle spielen auch die Belastungsgeschwindigkeit und die Randbedingungen. Erfolgt die Belastung im Verhältnis zur Durchlässigkeit sehr langsam, steht dem Fluid genug Zeit zur Verfügung, um Druckunterschiede abzubauen. Im Grenzfall liegen quasi–drainierte Verhältnisse vor und der Regularisierungseffekt geht verloren. Bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten erfolgt im Gegensatz dazu ein geringerer Druckausgleich. Deformationen stellen sich erst mit erheblicher zeitlicher Verzögerung ein und führen zu einer stärkeren Regularisierung. Da das Fluid nur hydrostatische Spannungszustände aufnimmt, müssen Schubspannungen ausschließlich vom Korngerüst übertragen werden. Kritische Spannungszustände, die zum Versagen führen, werden in Abhängigkeit der Fluidspannungen dann entweder früher oder später erreicht. Treten Porenwasserüberdrücke auf, so resultiert ein destabilisierender Effekt und im umgekehrten Fall bei Unterdrücken ein stabilisierender Effekt auf das Systemverhalten. Diese Beobachtung wurde auch von MAHNKOPF dokumentiert [108]. Den Haupteinflussfaktor bilden in diesem Zusammenhang die Plastizitätsgleichungen, deren Charakteristik für die Ausbildung eines dilatanten oder kontraktanten Scherbands verantwortlich ist. Eventuell vorhandene Regularisierungseffekte werden durch diese Phänomene überlagert und gehen auch bei kleinen Permeabilitäten sehr oft verloren.

Es hat sich darüber hinaus gezeigt, dass die Regularisierung durch das zweikomponentige Boden–Fluid–Gemisch in Verbindung mit einem viskosen Porenfluid auch von der verwendeten Schrittweite abhängt. Der Regularisierungseffekt ist somit nicht klar definiert und stark problemabhängig. Im Grenzfall infinitesimaler Zeitintervalle ($\Delta t \rightarrow 0$) kann er sogar gänzlich verloren gehen. Eine Verbesserung wird unter Verwendung des in Kapitel 4.2.3 erläuterten viskoplastischen Stoffgesetzes erzielt. Mit der Integration der Zeitschrittweite und der Relaxationszeit η in die konstitutiven Gleichungen wird eine Unabhängigkeit von der zeitlichen Diskretisierung erreicht. Die interne Längeneinheit ist dann durch die auftretenden Materialparameter implizit definiert. Sie ist damit aus physikalischen Gesichtspunkten begründet. Dies stellt einen Vorteil gegenüber der Methode des Nicht–lokalen Kontinuums und der Höheren Gradienten–Verfahren dar. Dagegen wird der Benutzer nicht in die Lage versetzt, den regularisierenden Einfluss durch einen unabhängigen Parameter zu steuern. Durch eine veränderte Durchlässigkeit, Viskosität oder

Relaxationszeit würde auch das Systemverhalten wesentlich beeinflusst. Eine mögliche Lösung bietet sich durch die Kopplung mit der Theorie Mikropolarer Medien an. Da hier mit der internen COSSERAT-Längeneinheit l_c ein zusätzlicher Regularisierungsparameter zur Verfügung steht, können sinnvolle Ergebnisse auch bei unzureichender viskoplastischer Regularisierung erzielt werden. Damit wird es auch möglich, das Lokalisierungsverhalten von Böden mit hoher Durchlässigkeit realitätsnah zu simulieren. In diesen Bereich fallen vor allem grobkörnige Sande und Kiese, die zudem ein dilatant plastisches Verhalten aufweisen. Gerade bei diesen granularen Böden ist die Mikropolare Theorie ebenfalls als physikalisch begründet zu betrachten, da eine Mikrorotation als mittlere Kornverdrehung interpretiert werden kann. Eine detaillierte Motivation des mikropolaren Stoffgesetzes findet sich bei VOLK [176].

7.3 Simulation eines Biaxialversuchs

7.3.1 Beschreibung

Anhand von Parameterstudien wird im Folgenden der Einfluss der Materialkennwerte auf das Lokalisierungsverhalten und die Scherbandbreite gezeigt. Als Beispiel dient der in Abbildung 7.4 dargestellte Biaxialversuch, bei dem eine Bodenprobe mit dem Seitenverhältnis 1:3 verformungsgesteuert komprimiert wird. Da sich dabei im Bruchzustand eine deutlich ausgebildete Lokalisierungszone in Form eines diagonal durch Probe verlaufenden geraden Scherbands ergibt, eignet sich dieser Versuch besonders gut, um das mechanische Verhalten z.B. im Hinblick auf den Effekt der Regularisierung zu untersuchen. Bereits PAMIN [120], MIEHE und SCHRÖDER [111] und DE BORST et al. [32] untersuchten aus diesem Grund das Lokalisierungsverhalten von Biaxialproben. Um die typische nicht-symmetrische Bruchfigur anzuregen, die man auch

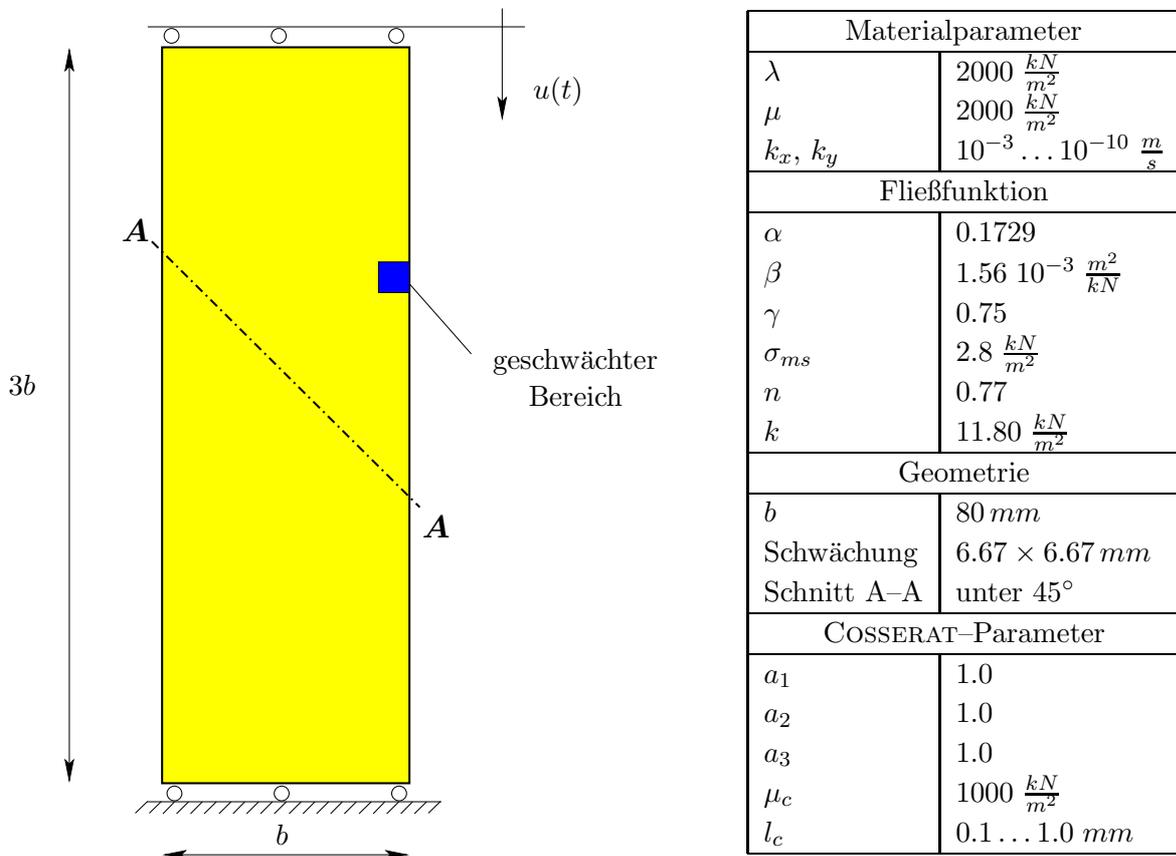


Abbildung 7.4: Verformungsgesteuerter Biaxialversuch

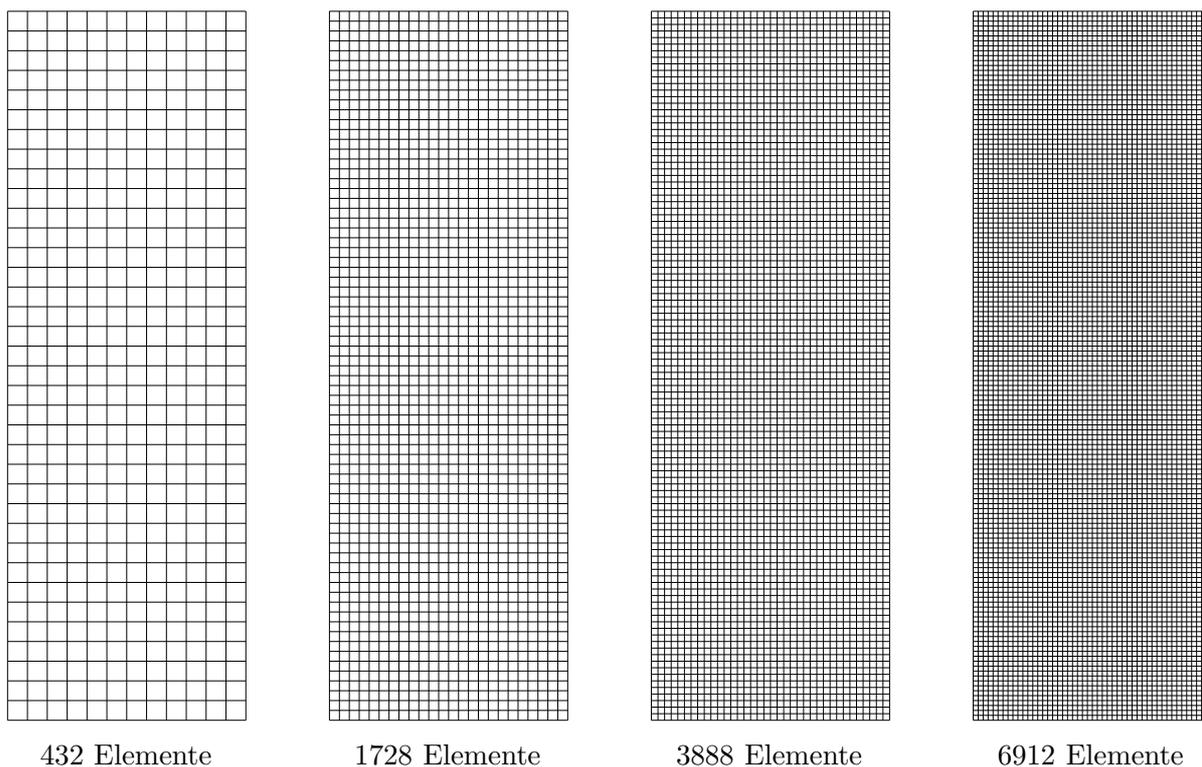


Abbildung 7.5: FE-Diskretisierungen mit unterschiedlicher Netzdichte

in experimentellen Untersuchungen beobachtet, wurde am rechten Rand der Probe ein kleiner Bereich geschwächt, d.h. die Fließspannung wurde dort um 10% erniedrigt. Die Größe dieser Schwächung blieb für alle verwendeten Netze konstant. Die elastoplastische Berechnung wurde mit einer nicht-assozierten Fließregel und der Einflächen-Fließbedingung durchgeführt. Die für diesen Zweck gewählten Material- und Geometrieparameter sind der Tabelle auf Seite 126 zu entnehmen. Um den Einfluss der Diskretisierung auf die Scherbandbreite zu untersuchen, wurden insgesamt vier verschiedene Netzdichten mit 432, 1728, 3888 und 6912 Elementen verglichen. Die entsprechenden FE-Netze sind in Abbildung 7.5 dargestellt. Da eine Berechnung auf der Basis der klassischen Kontinuumsformulierung aufgrund der geringeren Anzahl an Freiheitsgraden einen geringeren Rechenaufwand bedingt, sind in Tabelle 7.1 zum Vergleich die Unbekannten eines NEWTON-Schritts für die Einfeld-, Zweifeld- und Dreifeld-Diskretisierung angegeben.

| FE-Diskretisierung | | | Anzahl der Freiheitsgrade | | |
|--------------------|----------|---------|----------------------------|-------------------------|---|
| | Elemente | h | klassisch (\mathbf{u}) | TPM (\mathbf{u}, p) | TPM mikropolar ($\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, p$) |
| Netz 1 | 432 | 6.67 mm | 3649 | 4034 | 5859 |
| Netz 2 | 1728 | 3.33 mm | 14209 | 15842 | 22947 |
| Netz 3 | 3888 | 2.22 mm | 31681 | 35426 | 51413 |
| Netz 4 | 6912 | 1.67 mm | 56065 | 62786 | 90819 |

Tabelle 7.1: Elementanzahl, Maschenweite und Anzahl der Systemunbekannten

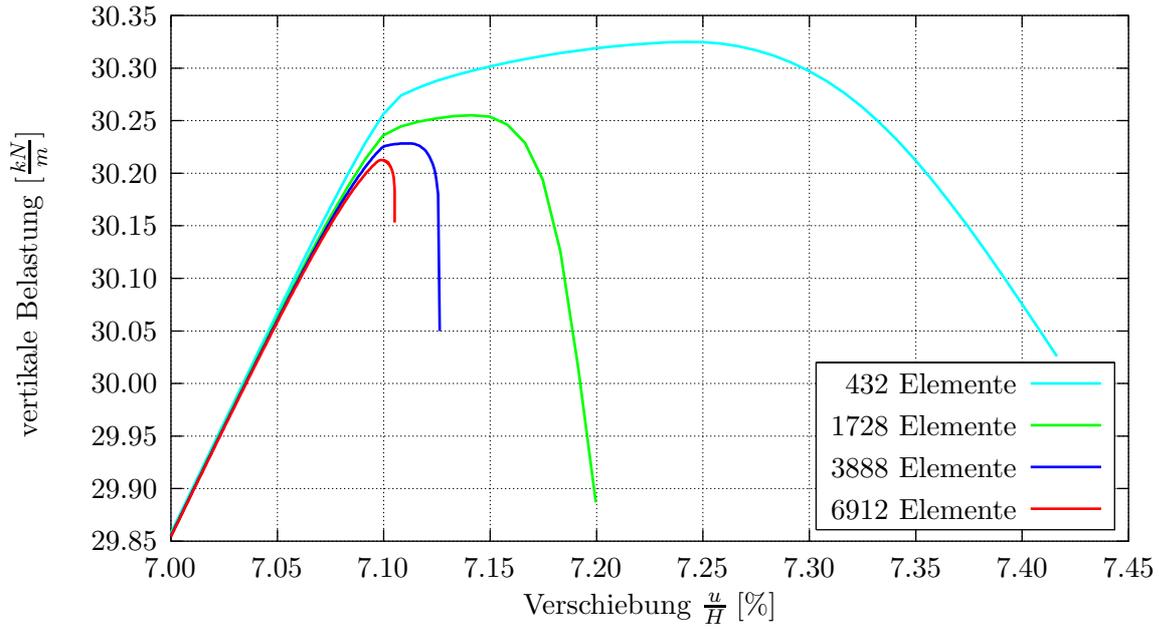
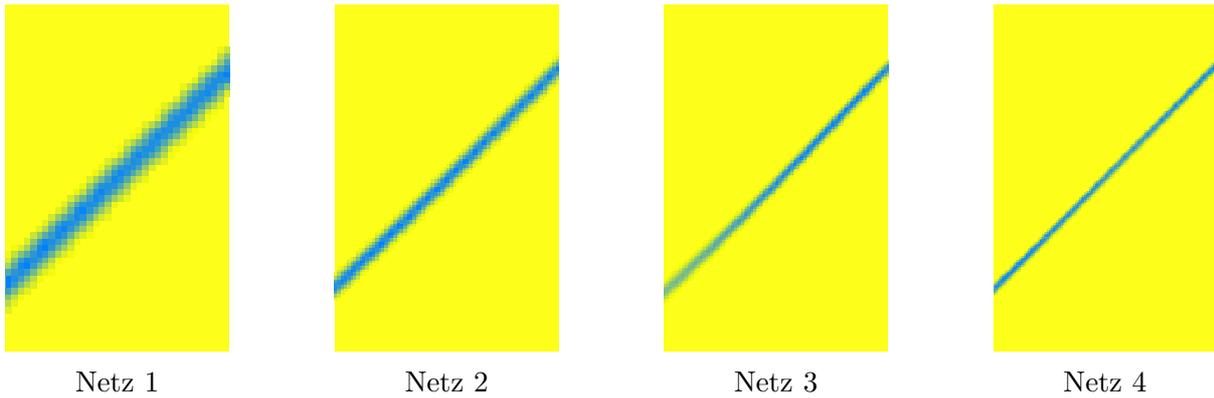
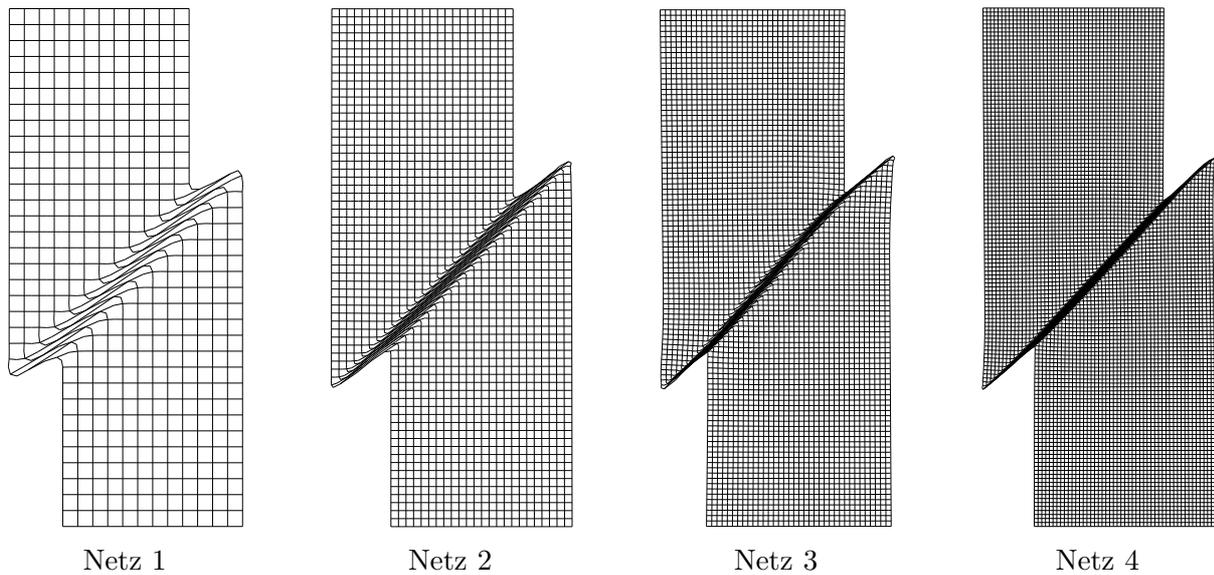


Abbildung 7.6: Vergleich der Last-Verschiebungs-Kurven im Grenzlastbereich

Abbildung 7.7: Lokalisierung der plastischen Verzerrungsinkremente $\|\Delta\varepsilon^{pl}\|$ Abbildung 7.8: Inkrementelle Verformungen $\Delta\mathbf{u}$

7.3.2 Netzabhängigkeit

Die Ergebnisse auf der Grundlage der klassischen Kontinuumsformulierung zeigen eine eindeutige Abhängigkeit von der gewählten Diskretisierung. Abbildung 7.6 zeigt die Darstellung der berechneten Last–Verschiebungs–Kurven im Bereich der einsetzenden Scherbandbildung. Da die Berechnung verformungsgesteuert durchgeführt wurde, ergab sich die vertikale Belastung aus einer Integration der Rand–Normalspannungen. Deutlich ausgeprägt sind bei allen Kurven die abfallenden Verläufe im post–kritischen Bereich. Aufgrund des fehlenden regularisierenden Einflusses werden jedoch für die einzelnen Diskretisierungsdichten unterschiedliche Verläufe berechnet. Dies ist hauptsächlich auf die variable Scherbandbreite zurückzuführen. Dabei ist festzustellen, dass mit zunehmender Netzfeinheit die Gradienten der Last–Verformung–Kurve annähernd senkrecht verläuft. Mit noch feineren Netzen können an dieser Stelle trotz feiner Zeitdiskretisierung Konvergenzprobleme im NEWTON–Verfahren beobachtet werden. Dieses Phänomen wurde bereits von DE BORST beschrieben [26] und mit einem *Snap–Back–Verhalten* begründet. Dieses Stabilitätsproblem tritt in der Regel nur bei sehr kleinen Elementgrößen und entfestigendem Materialverhalten auf. Bedingt durch die Gestalt der Fließfläche sind auch hier derartige Effekte möglich. Um einen weiteren Aufschluss zu erhalten wäre jedoch die Anwendung eines Bogenlängen–Verfahrens zur Pfadverfolgung notwendig.

Abbildung 7.7 zeigt einen Ausschnitt der Probe, in dem die Norm der plastischen Verzerrungsinkremente $\|\Delta\epsilon^{pl}\|$ für die einzelnen Netze dargestellt ist. Auch der Verlauf dieser Norm entlang des Schnitts A–A in Abbildung 7.9 und die im Versagensfall auftretenden inkrementellen Verformungen $\Delta\mathbf{u}$ in Abbildung 7.8 verdeutlichen die Verschmälerung des Scherbands mit zunehmender Netzdichte. Die klassische Kontinuumsformulierung stellt somit kein adäquates Mittel dar, um eine fundierte Aussage über das mechanische Verhalten im post–kritischen Bereich zu treffen. Insbesondere lassen ortsadaptive Verfahren trotz lokaler Verbesserung der Approximationsgüte keine Genauigkeitssteigerung erwarten, da sich im Gegenzug durch die Ausbildung singulärer Flächen die Lösungsregularität im Allgemeinen stark vermindert. MAHNKOPF führt in diesem Zusammenhang eine Analyse der singulären Flächen mit Hilfe eines Lokalisierungskriteriums für poröse Festkörper durch [108]. Im Rahmen dieser Arbeit wird gezeigt, dass mit Hilfe der beschriebenen Regularisierungstechniken die Formation singulärer Flächen vermieden werden kann, was zu einer sachgemäßen Beschreibung auch im post–kritischen Bereich führt.

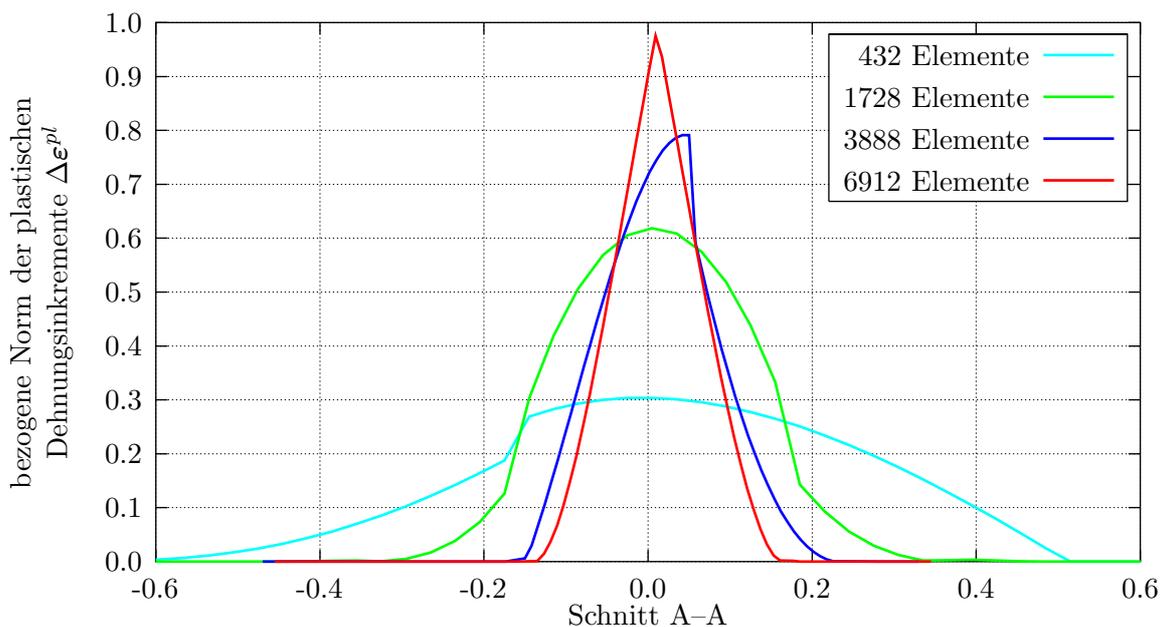
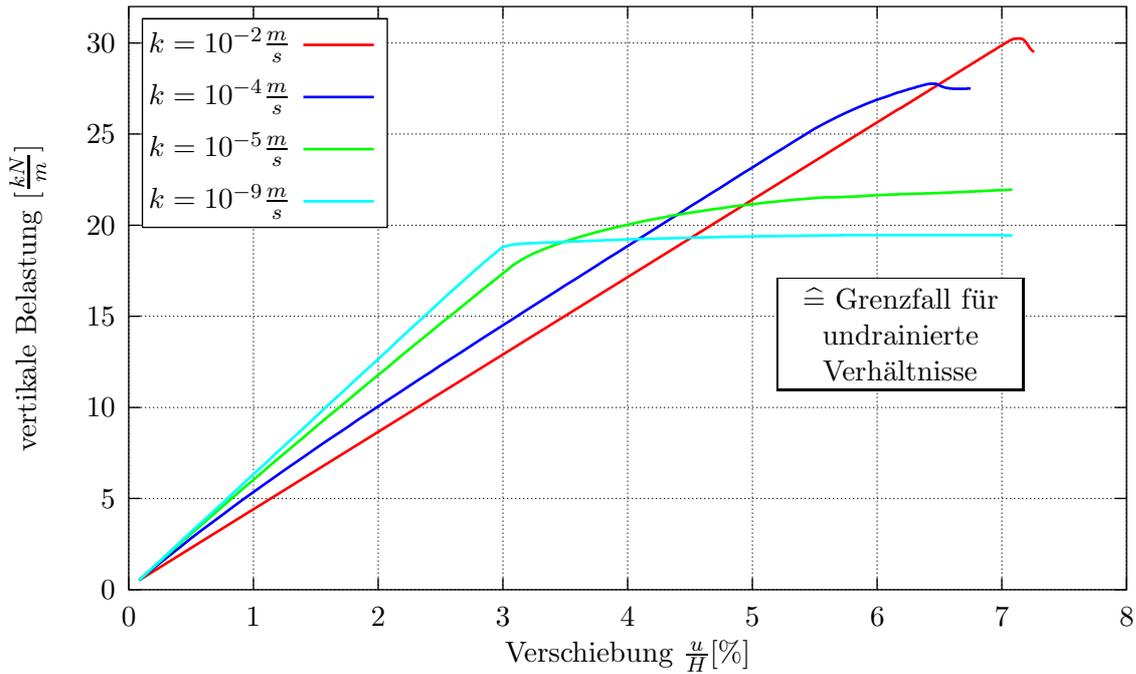
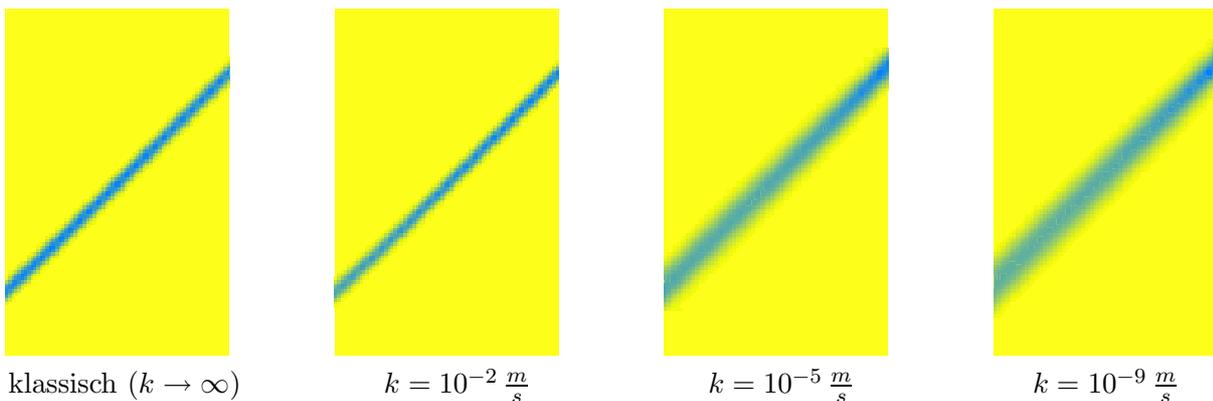


Abbildung 7.9: Vergleich der Scherbandbreiten

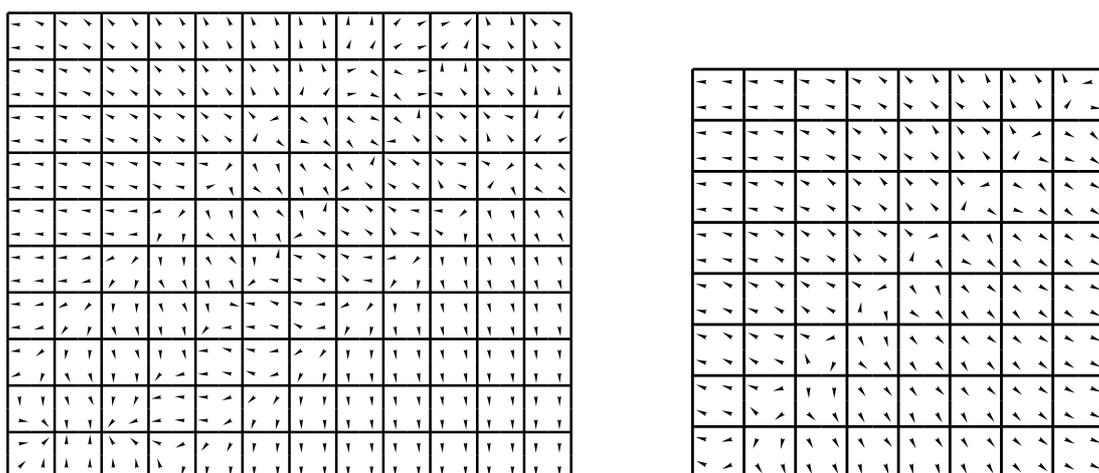
Abbildung 7.10: Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene Durchlässigkeiten k

7.3.3 Theorie Poröser Medien

Die bisher gezeigten Ergebnisse beziehen sich ausschließlich auf ein reines (leeres) Festkörperskelett ohne den Einfluss des Porenwasser-Transports. Die Belastungsgeschwindigkeit bleibt in diesem Fall ohne Auswirkung. Soll dagegen die Bodenprobe als wassergesättigt betrachtet werden, so ist ein Vergleich nur insofern gerechtfertigt, als die bisherigen Berechnungen den Spezialfall einer sehr großen Durchlässigkeit bzw. einer sehr kleinen Belastungsgeschwindigkeit darstellen. In beiden Fällen findet kein Aufbau von Porenwasserdrücken statt. Die in dieser Arbeit vorgeschlagene Berechnungsmethode für wassergesättigte Böden ist demnach als eine sinnvolle Erweiterung des Anwendungsgebiets zu betrachten. Werden Bedingungen angenommen, die zu Porenwasserdrücken in einer nicht zu vernachlässigenden Größenordnung führen, ändert sich das Systemverhalten grundlegend. Erst mit einer Zweiphasen-Modellierung wird es möglich, derartig gestaltete Aufgabenstellungen geeignet zu erfassen. Bei den Berechnungen wurde die Bodenprobe allseitig entwässert angenommen. Abbildung 7.10 zeigt die ermittelten Last-Verschiebungs-Kurven bei einer Variation der Durchlässigkeit k über mehrere Größenord-

Abbildung 7.11: Lokalisierungsbereiche bei Variation der Durchlässigkeit k

nungen. Sehr gut können damit die Grenzfälle für voll drainierte ($k > 10^{-2} \frac{m}{s}$) und gänzlich undrainierte Verhältnisse ($k < 10^{-9} \frac{m}{s}$) eingeordnet werden. Die Traglast nimmt dabei mit verminderter Durchlässigkeit ab, da gleichbleibende Schubspannungen bei geringerem hydrostatischen Druck im Korngerüst übertragen werden müssen. Das kontraktante Materialverhalten führt hierbei zu Porenwasserüberdrücken im Scherband und somit zu einer Destabilisierung. Auch ein regularisierender Einfluss des viskosen Porenfluids wird deutlich. Dieser tritt mit abnehmender Durchlässigkeit immer stärker in Erscheinung. Während bis $k = 10^{-4} \frac{m}{s}$ noch abfallende Kurven im post-kritischen Bereich berechnet werden und ein nahezu schlagartiges Versagen auftritt, zeigen kleinere Durchlässigkeiten trotz ausgeprägter Scherbandbildung ein deutlich zeitverzögertes Verhalten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Transport von Porenwasser aus der Lokalisierung heraus in die Umgebung zunehmend mehr Zeit beansprucht. Abbildung 7.12 zeigt für diesen Fall (kontraktantes Scherband), aber auch für den Fall der Ausbildung eines dilatanten Scherbands die Richtungsvektoren der Fluid-Flüsse, wobei es hauptsächlich von den gewählten Materialparametern und dem Belastungsvorgang abhängt, welcher dieser Typen tatsächlich auftritt. Durch diesen Transport-Effekt wird bei feinerer Netzauflösung eine infinitesimale Scherbandbreite verhindert. Die Ausdehnung wird zunehmend abhängig von der Durchlässigkeit. Abbildung 7.11 verdeutlicht diesen Zusammenhang, wobei ersichtlich wird, dass die Intensität der Regularisierung bei $k = 10^{-2} \frac{m}{s}$ nur sehr schwach ausfällt. Bei kleineren Durchlässigkeiten ergeben sich größere Scherbandbreiten, die sich jedoch bei Werten $k < 10^{-6} \frac{m}{s}$ nicht mehr wesentlich ändern. Die im Fall des leeren Festkörperskeletts auftretenden Netzabhängigkeiten treten bei niedrigeren Durchlässigkeiten zunehmend in den Hintergrund, und der regularisierende Charakter der Viskoplastizität führt zu einem konvergenten Lösungsverhalten. Die Scherbandbreite fällt deutlich größer als eine Elementlänge aus. Durch das Zwei-Phasen-Modell kann somit eine natürliche Regularisierung erzielt werden. Es besteht dann nicht die Notwendigkeit, zusätzliche Maßnahmen im Sinne der oben genannten Möglichkeiten zu ergreifen. Eine quantitative Aussage über den genauen Effekt der Regularisierung und die interne Länge ist jedoch nur schwer möglich. Wie bereits erwähnt spielt hier auch die Zeitdiskretisierung eine erhebliche Rolle. Von einigen Autoren wird deshalb eine zusätzliche Regularisierung durch ein viskoplastisches Stoffgesetz für die Korngerüstspannungen vorgeschlagen [63]. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch die COSSERAT-Theorie als klar definierte Regularisierungsmethode angewandt, wobei die interne Länge direkt als Parameter im Stoffgesetz angegeben wird.



dilatantes Scherband

kontraktantes Scherband

- ⇒ Porenwasserunterdruck
- ⇒ Wasser strömt in die Lokalisierung
- ⇒ stabilisierende Wirkung

- ⇒ Porenwasserüberdruck
- ⇒ Wasser strömt in die Umgebung
- ⇒ destabilisierende Wirkung

Abbildung 7.12: Richtungsvektoren der Fluid-Flüsse im Bereich des Scherbands

Hier sei noch angemerkt, dass bei Auftreten eines dilatanten Scherbands und geringer Durchlässigkeit unter Umständen unzulässige Porenwasserunterdrücke erzeugt werden. In diesem Fall maßgebende Effekte der Kavitation werden jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht genauer untersucht.

7.3.4 Cosserat-Theorie

Anders gestaltet sich das Problem bei Durchlässigkeiten, die im Vergleich zu den Systemabmessungen bzw. der Belastungsgeschwindigkeit relativ hoch ausfallen. Der Einfluss der Viskosität geht dann zunehmend verloren und der regularisierende Charakter tritt nur noch sehr schwach in Erscheinung. Dementsprechend ergeben sich immer kleinere Scherbandbreiten, die schließlich eine konvergente Lösung verhindern. Um auch in diesem Fall das post-kritische Lösungsverhalten zutreffend zu beschreiben, ohne die Zeitabhängigkeit zu vernachlässigen, wird auf eine Kopplung der Theorie Poröser Medien mit der COSSERAT-Theorie zurückgegriffen. Bereits EHLERS und VOLK berichten von guten Erfahrungen in diesem Zusammenhang [61]. Von grundlegender Bedeutung ist hier der Aspekt, dass das mechanische Verhalten des Systems bis zum Einsetzen der Lokalisierung weitgehend unbeeinflusst bleibt. Da bis dahin homogene Deformationsmuster dominieren, spielt die interne Längeneinheit l_c eine untergeordnete Rolle. Durch die zusätzliche Einführung des Rotationsfelds und des Momentenspannungstensors wird hauptsächlich der post-kritische Bereich beeinflusst, der mit der Scherbandbildung eine stark inhomogene Deformationscharakteristik aufweist. Mit der internen Länge l_c steht dann ein unabhängiger Regularisierungsparameter zur Verfügung, der einen sehr viel höheren Einfluss auf die Scherbandbreite besitzt als die Durchlässigkeit. VOLK verdeutlicht in [176] anhand von Parameterstudien die ausgeprägt nichtlineare Abhängigkeit zwischen l_c und der Scherbandbreite.

In Abbildung 7.17 sind die L_2 -Normen der plastischen Dehnungsincremente $\|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}\|$ und der plastischen Krümmungsincremente $\|\Delta\boldsymbol{\kappa}^{pl}\|$ dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass sich die plastischen Dehnungen in der Mitte des Scherbands lokalisieren und die plastischen Krümmungen ihr Maximum jeweils an den Rändern erreichen. In der Scherbandmitte reduzieren sich die Krümmungen erwartungsgemäß wieder auf Null. Da der Fehlerindikator für die räumliche Netzverfeinerung beide Anteile beinhaltet, kann eine adäquate Auflösung des gesamten Scherbands

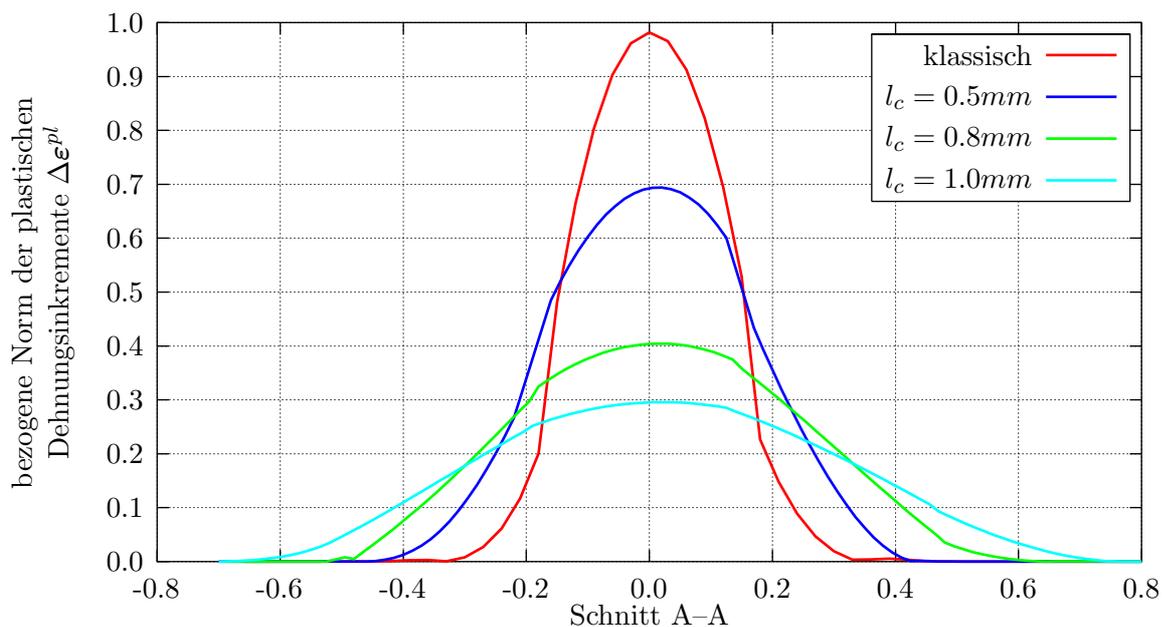
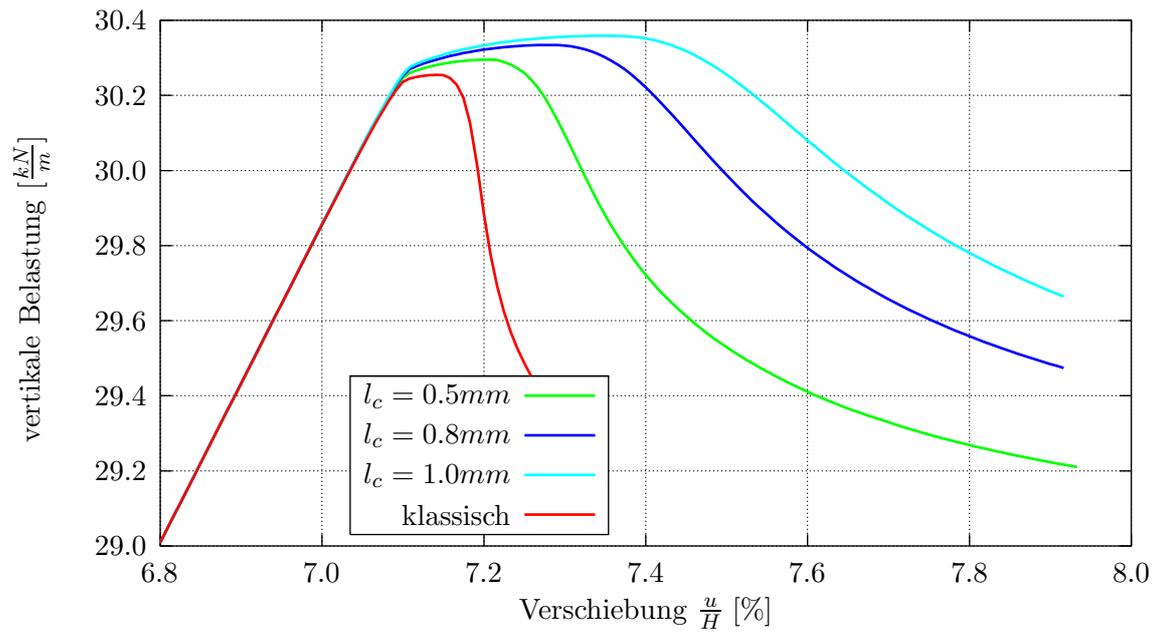
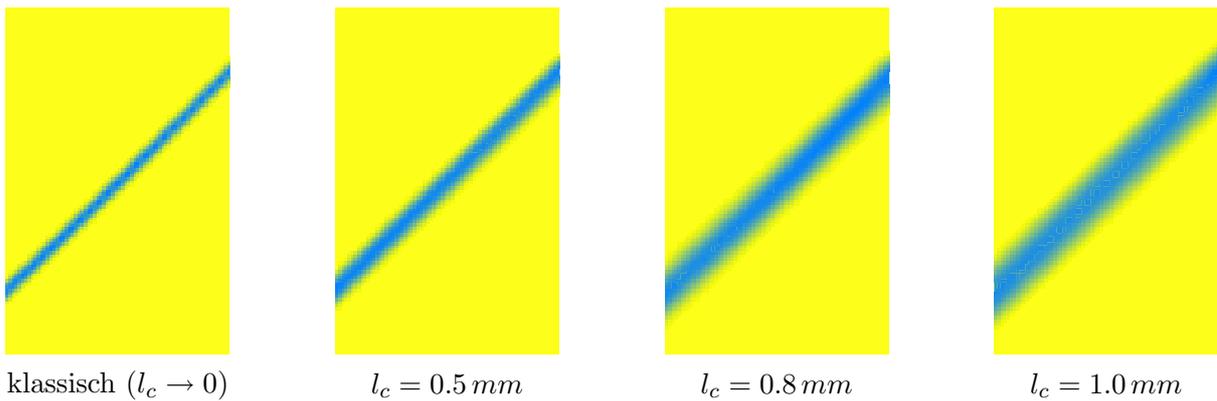
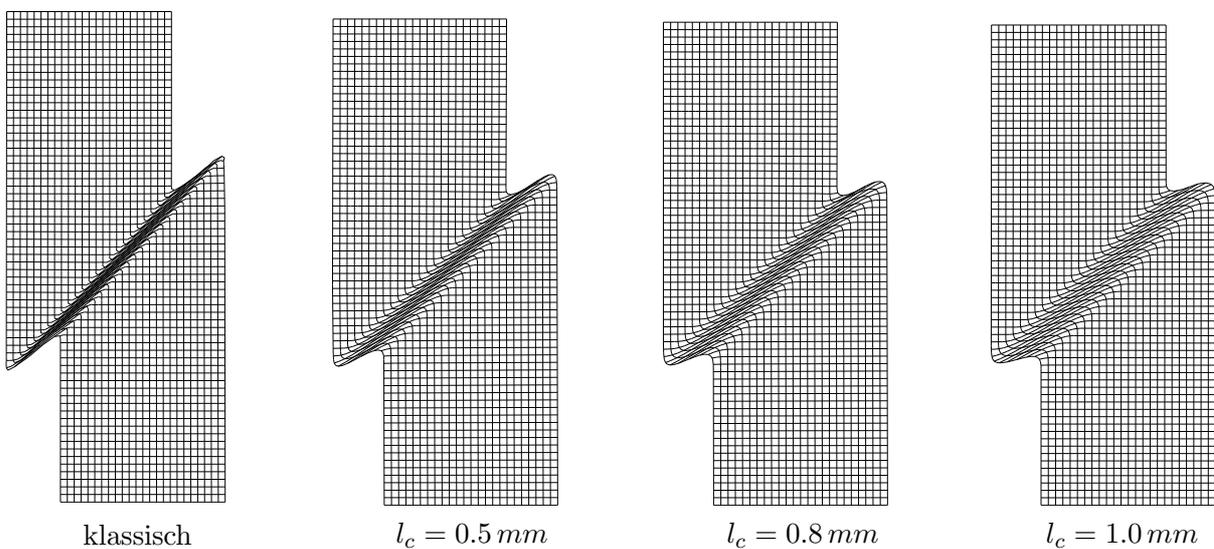


Abbildung 7.13: Scherbandbreiten bei Variation von l_c

Abbildung 7.14: Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene interne Längen l_c Abbildung 7.15: Lokalisierungsbereiche bei Variation der internen Länge l_c Abbildung 7.16: Verformungsskizzen bei Variation der internen Länge l_c

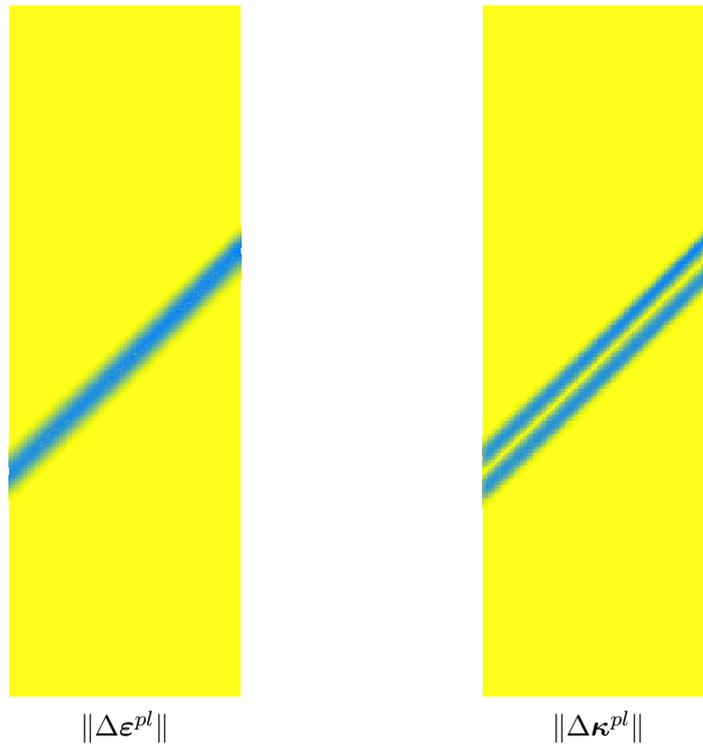


Abbildung 7.17: Plastische Dehnungs- und Krümmungsinckremente

erwartet werden. Abbildung 7.14 zeigt für des Netz mit 1728 Elementen die Last–Verschiebungs–Kurven im Traglastniveau bei einer Variation von l_c im Bereich von 0 (klassische Lösung) bis 1.0 mm und einer sehr großen Durchlässigkeit. Durch die Ausbildung von zunehmend breiteren Scherbändern (siehe Abbildung 7.15) fallen die Kurven im post–kritischen Bereich deutlich flacher aus. Die Verformungsinckremente im Versagenszustand und die Norm der plastischen Verzerrungsinckremente im Schnitt A–A (siehe Abbildungen 7.13 und 7.16) zeigen ebenfalls, dass sich die Lokalisierung mit wachsendem l_c nicht mehr wie im klassischen Fall nur über ein bzw. zwei Elementabmessungen erstreckt, sondern sich auf einen gewissen Bereich ausdehnt.

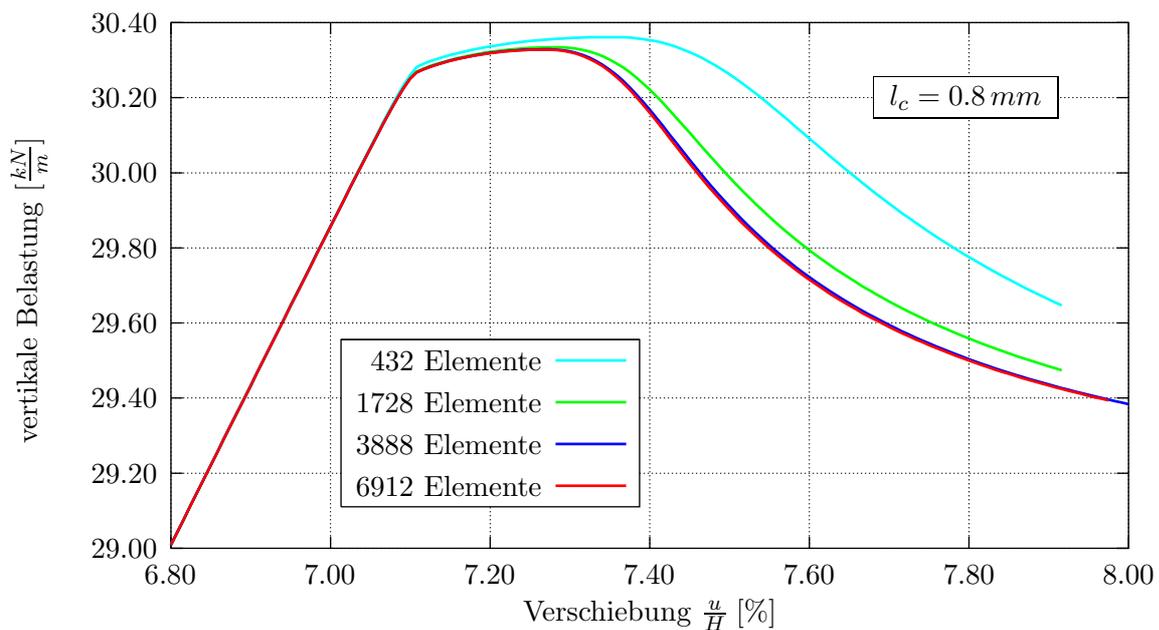


Abbildung 7.18: Konvergenz der Last–Verschiebungs–Kurven bei Reduktion der Maschenweite

Dieser bleibt auch bei feiner werdender Diskretisierung konstant. Abbildung 7.18 zeigt die Last–Verschiebungs–Kurven für die unterschiedlichen Netzweiten bei einem COSSERAT–Parameter von $l_c = 0.8\text{ mm}$. Es wird deutlich, dass das Netz mit 432 Elementen durch seine relativ grobe Diskretisierung noch nicht in der Lage ist, das lokale Phänomen hinreichend zu beschreiben. Mit abnehmender Maschenweite wird dies immer besser möglich, wobei durch die Regularisierung eine deutliche Konvergenz zu einer einheitlichen Lösung festzustellen ist. Diese ändert sich auch bei Verwendung von noch feineren Netzen kaum. Die Kurven für die Netze mit 3888 und 6912 Elementen verlaufen dementsprechend schon nahezu identisch.

Mit Hilfe der beschriebenen Regularisierungstechniken wird also die grundlegende Konvergenzcharakteristik der Finite–Element–Methode auch im post–kritischen Bereich gesichert. Eine fundamentale Netzabhängigkeit wie sie bei der klassischen Formulierung zu beobachten ist, kann zuverlässig vermieden werden. Die einzige Bedingung besteht in einer genügend feinen Auflösung der Lokalisierungszone, die von den Regularisierungsparametern abhängig ist. Die Ergebnisse zeigen, dass bei $h/l_c \approx 1.0$ eine Genauigkeit erzielt wird, die nicht mehr wesentlich verbessert werden kann. Um diese zu erreichen, sind adaptive Strategien als unverzichtbare Bestandteile in den Berechnungsablauf zu integrieren.

7.3.5 Adaptive Berechnung

Für die bisherigen Berechnungen wurden ausschließlich konstante Diskretisierungen verwendet. Da sich Verformungen und somit das Versagen letztendlich auf den Bereich des Scherbandes konzentrieren, wird zur genaueren Untersuchung eine adaptive Netzverfeinerung angewandt. Eine entsprechend feine uniforme Diskretisierung der gesamten Probe führt zu einem unverhältnismäßig großen Rechenaufwand. Als Startnetz dient die Diskretisierung mit 432 Elementen. Die Resultate zeigen in eindrucklicher Weise, dass die klassische Kontinuumsformulierung unter dem Einfluss von lokal sehr stark unterschiedlichen Netzweiten nicht in der Lage ist, das Scherversagen realistisch zu erfassen. Im Bereich des Übergangs von einer Verfeinerungsstufe auf die

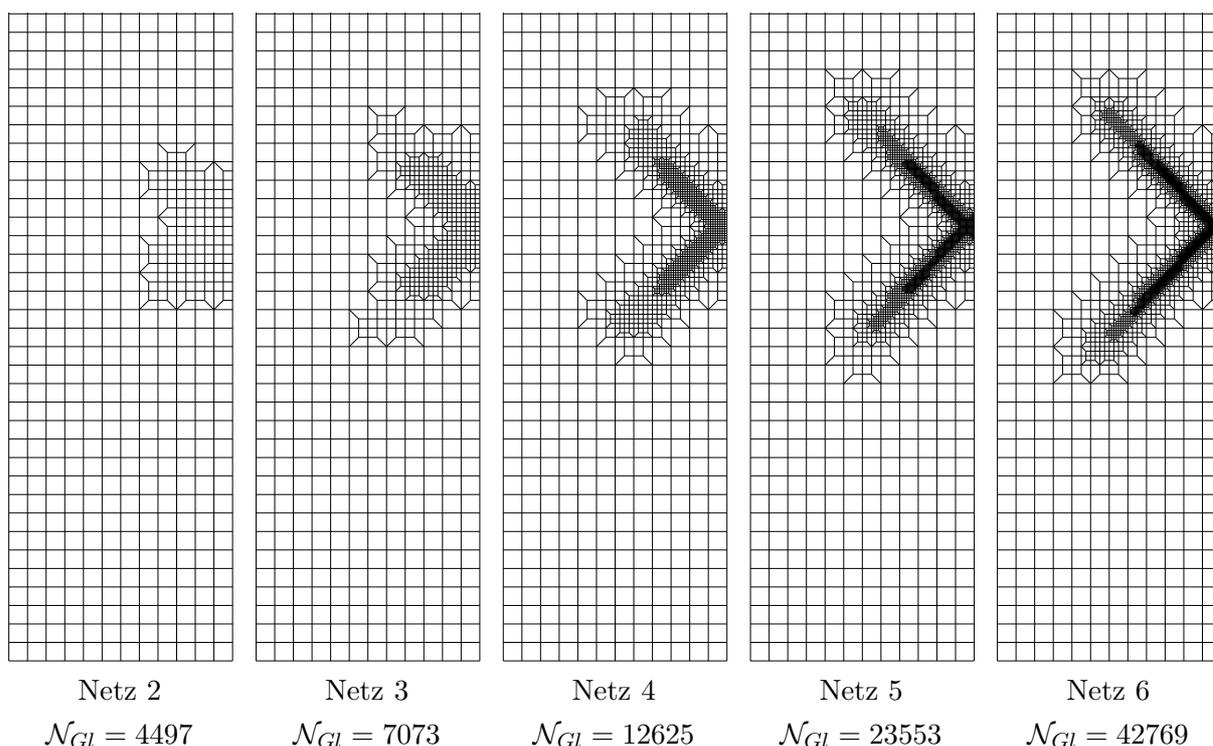


Abbildung 7.19: Adaptive Netzverfeinerung (klassisches Kontinuum)

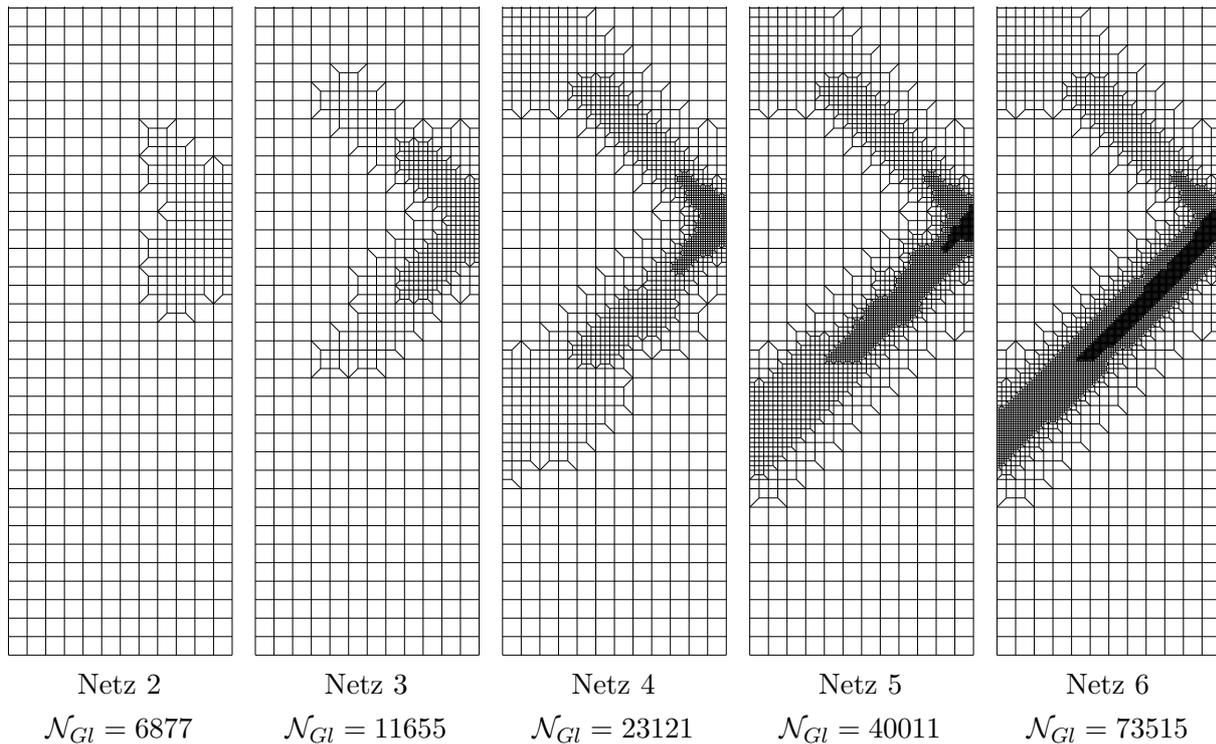


Abbildung 7.20: Adaptive Netzverfeinerung (regularisiert)

nächst höhere ergibt sich ein Sprung in der Scherbandbreite, die somit im räumlichen Verlauf nicht mehr konstant ausfällt. Durch diesen Defekt, der als physikalisch nicht nachvollziehbar eingestuft werden muss, wird im Gegensatz zu Netzen mit einheitlicher Maschenweite verhindert, dass sich das Scherband mit einer konstanten Breite über das gesamte System ausbildet. Die Netzfolgen in Abbildung 7.19 zeigen, wie lokal immer neue Netzverfeinerungen initiiert werden. Durch die damit verbundene Verkleinerung der Scherbandbreite ergibt sich auch zeitlich eine sprunghafte Änderung der Verformungscharakteristik. Im gegebenen Fall kann aufgrund der gegen eine singuläre Fläche strebenden Lokalisierungszone die vorgeschriebene Toleranzschranke auch nach erfolgter Netzanpassung nicht eingehalten werden. Dies resultiert in immer weiteren adaptiven Zyklen (Fehlerschätzung–Verfeinerung–Datentransfer–Neuberechnung), ohne dass sich ein zeitlicher Fortschritt in der Berechnung ergibt. Dementsprechend bricht auch die Last–Verschiebungs–Kurve wie in Abbildung 7.21 dargestellt zu diesem Zeitpunkt ab. Eine adaptive Netzanpassung, die als Verbesserung der Finite–Element–Methode konzipiert wurde, führt somit zu noch unrealistischeren Ergebnissen als bei Anwendung von konstanten Diskretisierungen, die zumindest ein qualitativ richtiges Versagensbild liefern.

Der Einfluss einer Regularisierung auf die adaptive Berechnung kann sowohl anhand der erzeugten Diskretisierungen aus Abbildung 7.20 als auch mittels der Last–Verschiebungs–Kurve in Abbildung 7.21 verdeutlicht werden. Ist eine gewisse Mindestfeinheit des FE–Netzes erreicht, die in der Lage ist, das lokalisierte Verhalten entsprechend genau abzubilden, so bleibt die Breite des Scherbands auch bei weiterer Netzverfeinerung konstant. Eine Abhängigkeit von der lokal unterschiedlichen Netzdicke wird nicht mehr beobachtet. Somit kann sich die Scherbandformation diagonal über das gesamte Gebiet erstrecken. Da der zugehörige Fehlerindikator die inkrementellen Krümmungen als Wichtung beinhaltet, wird der Bereich des Scherbands durch entsprechend angepasste Diskretisierungen mit der nötigen Netzauflösung abgebildet. Vergleichsrechnungen haben gezeigt, dass im Falle der COSSERAT–Theorie die charakteristische Elementlänge h mindestens bis auf die Größe der internen Länge l_c zu reduzieren ist, um die Krümmungen genau genug zu erfassen. Eine Verfeinerung darüber hinaus führt dann zu keiner weiteren wesentlichen Änderung. Die Toleranzschranke sollte deshalb so gewählt werden, dass sich im Trag-

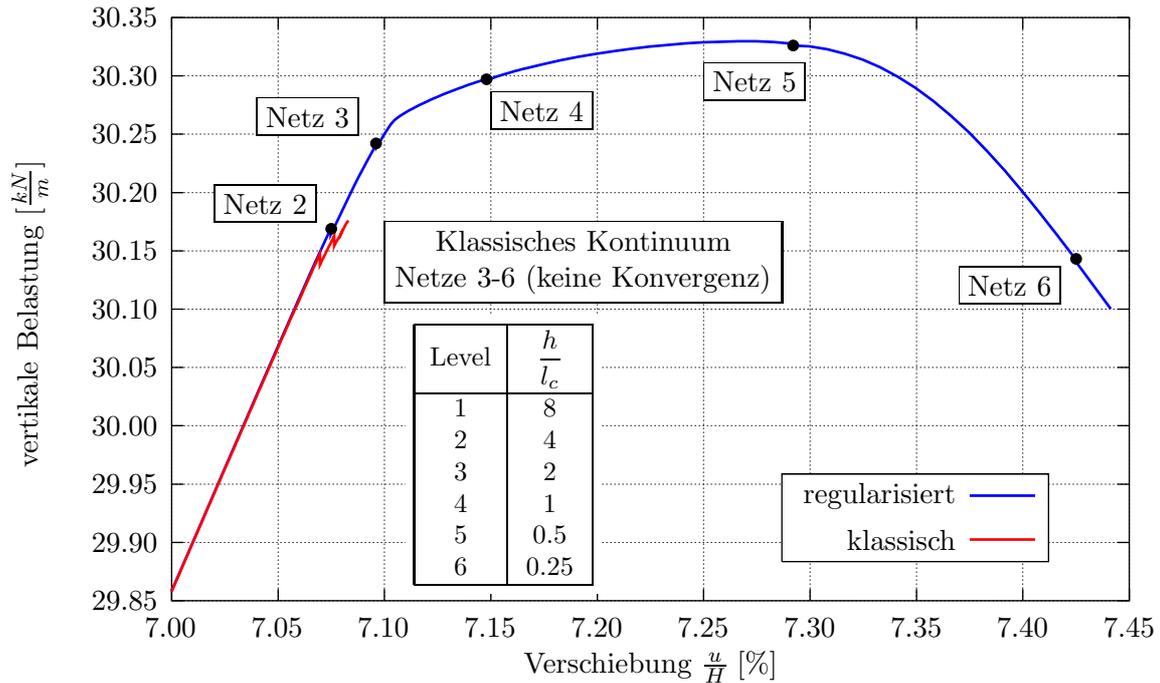


Abbildung 7.21: Last-Verschiebungs-Kurven

lastniveau ein Verhältnis von $h/l_c \leq 1.0$ einstellt. Eine weitergehende Abhängigkeit zwischen Elementlänge h , interner Länge l_c und Permeabilität k hat sich in den Berechnungen nicht gezeigt. Die Netzdichte muss jedoch für eine adäquate Abbildung des Fluid-Flusses ausreichen. Ist dies gewährleistet, so richtet sich die Breite des Scherbands nach dem stärkeren Regularisierungseffekt, d.h. bei kleinen Durchlässigkeiten wird die Wahl von l_c bestimmend, bei geringer COSSERAT-Regularisierung wird k maßgebend.

7.4 Fazit

Zusammenfassend können aus den zahlreich durchgeführten Parameterstudien die folgenden Schlussfolgerungen gezogen werden:

- Mit der klassischen Kontinuumsformulierung kann keine zutreffende Aussage über das mechanische Verhalten im post-kritischen Bereich getroffen werden. Es ergibt sich bei FE-Berechnungen eine fundamentale Abhängigkeit vom gewählten Netz. Im Grenzfall reduziert sich die Lokalisierung auf eine singuläre Fläche. Adaptive Berechnungen führen tendenziell zu noch unbefriedigenderen Ergebnissen, da lokal unterschiedliche Verfeinerungstufen bzw. Elementlängen auftreten. Ein konvergentes Lösungsverhalten wird in beiden Fällen verhindert.
- Im Falle von wassergesättigten Böden kann durch die Berücksichtigung der viskosen Porenwasserströmung im Rahmen der Theorie Poröser Medien eine Regularisierung erzielt werden. Diese wirkt sich umso stärker aus, je geringer die Durchlässigkeit des Materials gewählt wird. Die interne Längeneinheit ergibt sich implizit aus der Durchlässigkeit, der Belastungsgeschwindigkeit, sowie den Randbedingungen und den Systemabmessungen. Eine genaue Quantifizierung der internen Länge ist jedoch aufgrund der unterschiedlichen Einflüsse schwierig.

- Eine Variation der Durchlässigkeit führt zu einer prinzipiellen Änderung des Systemverhaltens über den gesamten Zeitbereich. Sie stellt deshalb kein adäquates Mittel dar, um bei eindeutig definierten Materialkennwerten den Effekt der Regularisierung zu steuern.
- Die COSSERAT–Theorie bietet sowohl bei wassergesättigten Böden als auch bei Böden ohne den Einfluss von Porenwasserdrücken eine Möglichkeit zur Regularisierung. Die interne Längeneinheit tritt als Parameter l_c explizit im Stoffgesetz auf und steuert die Intensität des Effekts. Im Allgemeinen kann mit der Mikropolaren Theorie eine wesentlich stärkere regularisierende Wirkung erzielt werden.
- Eine Variation des Parameters l_c ändert das Systemverhalten lediglich im post–kritischen Bereich. Da beide Regularisierungstechniken auch sonst unabhängig voneinander sind, führt eine Kopplung der Theorie Poröser Medien mit der Mikropolaren Theorie zu sinnvollen Ergebnissen.
- Die Kopplung zu einer Drei–Feld–Approximation ist in Fällen vorteilhaft, in denen der regularisierende Effekt durch die Viskosität des Porenfluids nicht stark genug ausfällt. Mit l_c steht dem Benutzer dann ein zusätzlicher, unabhängiger Regularisierungsparameter zur Verfügung.
- Die Scherbandbreite wird durch den stärkeren der beiden Einflüsse bestimmt (COSSERAT–Theorie bzw. Theorie Poröser Medien). Das bedeutet, dass bei gegebener Viskosität und Durchlässigkeit die Wahl eines kleinen Werts für l_c ohne Einfluss bleibt. Mit Überschreiten eines bestimmten Werts wird die Mikropolarität dagegen für die Scherbandbreite allein bestimmend. Durch eine geeignete Wahl der Regularisierungsparameter kann somit in allen Fällen eine Netzabhängigkeit der FE–Lösung vermieden werden.
- Zur Kontrolle der adaptiven Netzverfeinerung sollten die Toleranzschranken so gewählt werden, dass sich im Grenzzustand der Tragfähigkeit ein Verhältnis von $h/l_c \leq 1.0$ einstellt. Damit ist eine hinreichende Abbildung der Geometrie d.h. der auftretenden Verkrümmungen sichergestellt.

Kapitel 8

Numerische Untersuchungen

In diesem Kapitel wird das in der Arbeit entwickelte adaptive Finite-Element-Verfahren für trockene und wassergesättigte Böden auf relevante Aufgabenstellungen des Grundbaus und der Bodenmechanik angewendet. Dabei wird die Leistungsfähigkeit der vorgestellten numerischen Konzepte und Lösungsalgorithmen demonstriert, wobei das Hauptaugenmerk auf die Regularisierungseffekte sowie die erzeugten adaptiven Diskretisierungen gerichtet ist. Als Beispiele dienen die Simulation eines Böschungsbruchs und eine Grundbruchberechnung, bei denen sich im Traglastniveau schmale Scherbänder ausbilden und schließlich ein lokalisiertes Versagen zu beobachten ist. Das Tragverhalten dieser Strukturen wird im Hinblick auf die zugehörigen Grenzzustände analysiert, wobei das hauptsächliche Ziel darin besteht, eine Aussage über das erreichbare Traglastniveau zu treffen. Den Abschluss bildet ein Vergleich der numerisch berechneten Traglasten mit den Ergebnissen der verfügbaren analytischen Näherungsverfahren. Ein wesentlicher Unterschied zur adaptiven FEM liegt darin, dass die Versagensformen aufgrund theoretischer Überlegungen bestimmt und a priori fest vorgegeben werden.

8.1 Simulation eines Böschungsbruchs

Die Simulation eines Böschungsbruchs unter Bodeneigengewicht oder dem Einfluss einer nahen Fundamentbelastung wurde in der Literatur immer wieder als Testbeispiel für numerische Methoden der Bodenmechanik herangezogen [97, 141, 159, 176]. Bei der hier gewählten Variante wurde eine starre Fundamentplatte von 4 m Breite im Abstand von 4 m zur Böschungskante weggesteuert mit konstanter Geschwindigkeit abgesenkt. Die Systemgeometrie und weitere Abmessungen sind Abbildung 8.1 zu entnehmen. Das Versagen der Struktur ist typischerweise durch eine starke Lokalisierung der Verformungen und Verzerrungen in Gestalt eines Gleitkreises geprägt. Das Beispiel ist deshalb sehr gut geeignet, um zum einen die Fähigkeit des FE-Programms im Hinblick auf die korrekte Erfassung von Versagensmechanismen zu testen und zum anderen die regularisierende Wirkung der erweiterten Kontinuumsformulierungen zu studieren. Um die elastoplastischen Bodeneigenschaften realistisch zu modellieren, wurde die Einflächen-Fließfunktion aus Kapitel 4 verwendet. Die gewählten Materialparameter und die zur Regularisierung mit Hilfe der Mikropolaren Theorie notwendigen Parameter sind in Tabelle 8.1 aufgeführt. Die interne Längeneinheit des COSSERAT-Modells wurde in diesem Beispiel vorerst zu $l_c = 0.04\text{ m}$ angenommen.

Bei der Modellierung des FE-Gebiets ist zu beachten, dass die Randbedingungen einen Modellierungsfehler in die Berechnung eintragen. Im vorliegenden Fall wurden die Verschiebungen und die Fluid-Flüsse senkrecht zur seitlichen und unteren Berandung unterdrückt. RANK, DÜSTER, STEINL und WUNDERLICH weisen in [131] darauf hin, dass aus diesem Grund ein möglichst großer Geländeausschnitt in die FE-Diskretisierung einzubeziehen ist. Bereits hier ergibt sich ein Vorteil für den Anwender, wenn ortsadaptive Verfahren eingesetzt werden. Das Gebiet kann dann mit einer relativ groben Ausgangsdiskretisierung abgebildet werden und es ist möglich, eine

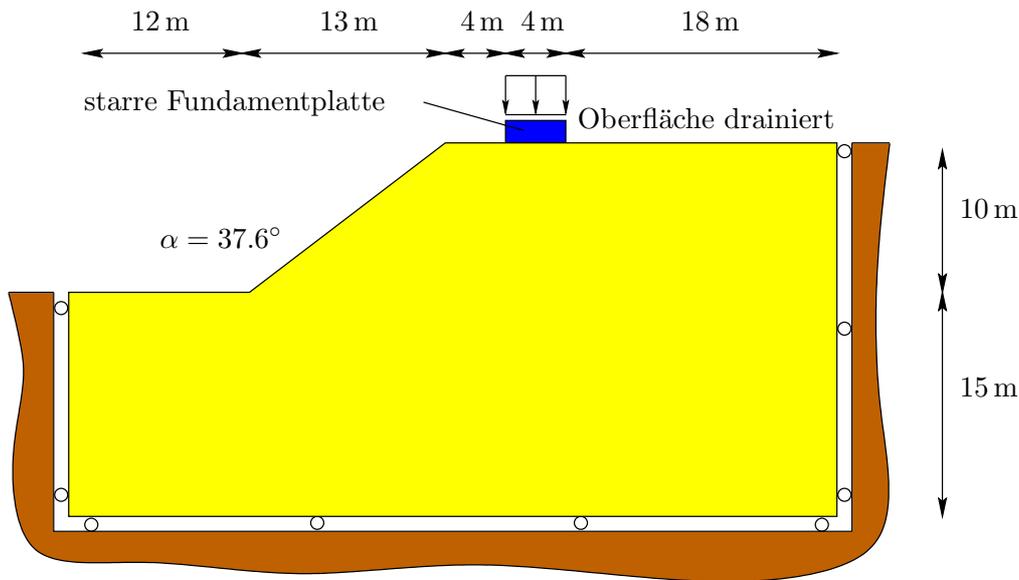


Abbildung 8.1: Systemskizze der Böschung

größere Fläche zu berücksichtigen. Die nötige Feinheit des Netzes im Bereich kritischer Zonen wird später durch adaptive Netzverfeinerung sichergestellt.

Der Prozess der fortschreitenden Belastung bis hin zum Böschungsbruch kann eindrücklich an den sukzessive generierten FE-Netzen verdeutlicht werden. Ausgehend vom Startnetz werden zuerst die unmittelbar unter dem Fundament gelegenen Bereiche verfeinert. Die Unstetigkeitsstelle an beiden Seiten des Fundaments führt im weiteren Verlauf zu einer Singularität, die weitere Verfeinerungsschritte initiiert und sich später zum Ausgangspunkt der lokalisierten Bruchzone entwickelt. Um eine zu feine Auflösung der Singularität im Hinblick auf einen akzeptablen Rechenaufwand zu vermeiden, wurde eine minimale Elementgröße vorgegeben. Ist diese erreicht wird eine weitere hierarchische Elementunterteilung unterdrückt. Im vorliegenden Beispiel ist dies in der fünften Verfeinerungsstufe der Fall. Da das Lokalisierungsverhalten des Systems und vor allem die Scherbandbreite von der Singularität nicht wesentlich beeinflusst werden und die, für eine korrekte Abbildung der COSSERAT-Rotation nötige Netzfeinheit ($h/l_c \approx 1.0$) bereits erreicht wurde, ist dieses Vorgehen als legitim anzusehen. Aus Netz 9, das den Grenzzustand der Tragfähigkeit repräsentiert, wird ersichtlich, dass die Kombination der Fehlerindikatoren im räumlichen Bereich (η_{GG} und η_{Fl}) in der Lage ist, die Lokalisierung aufzuspüren und hinreichend zu verfeinern. Im vorliegenden Beispiel wurden Toleranzschranken von $tol_{GG} = 8\%$ und $tol_{Fl} = 10\%$ verwendet. Die hierarchische Netzverfeinerungsstrategie mit Viereckelementen liefert Netze, die keine entarteten oder zu sehr verzerrten Elementgeometrien enthält. Durch den

| Bodenkennwerte | | COSSERAT-Parameter | | Fließfunktion | |
|----------------|-------------------------------------|--------------------|-----------------------|---------------|-------------------------------------|
| E | $5000 \frac{kN}{m^2}$ | a_1 | 1.0 | α | 0.1647 |
| ν | 0.25 | a_2 | 1.0 | β | $2.30 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{kN}$ |
| φ | 22° | a_3 | 1.0 | γ | 0.81 |
| ψ | 8° | μ_c | $1000 \frac{kN}{m^2}$ | σ_{ms} | $3.3 \frac{kN}{m^2}$ |
| c | $5.0 \frac{kN}{m^2}$ | l_c | 0.04 m | n | 0.90 |
| $k_x = k_y$ | $10^{-4} \dots 10^{-9} \frac{m}{s}$ | | | k | $6.12 \frac{kN}{m^2}$ |

Tabelle 8.1: Für die Böschung gewählte Parameter

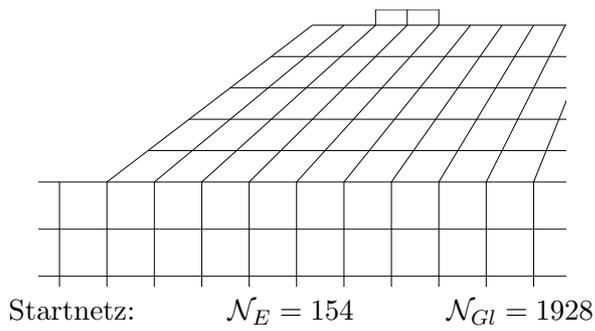
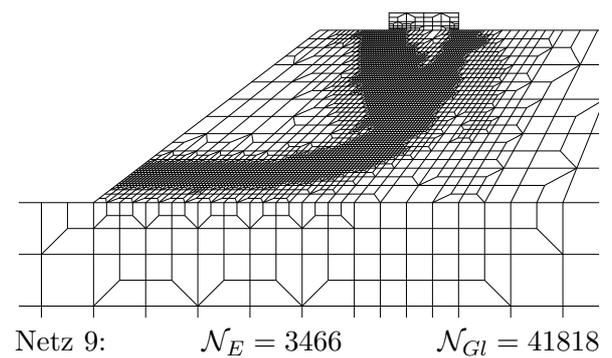
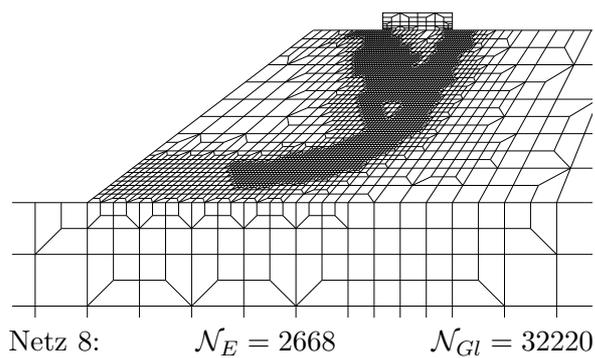
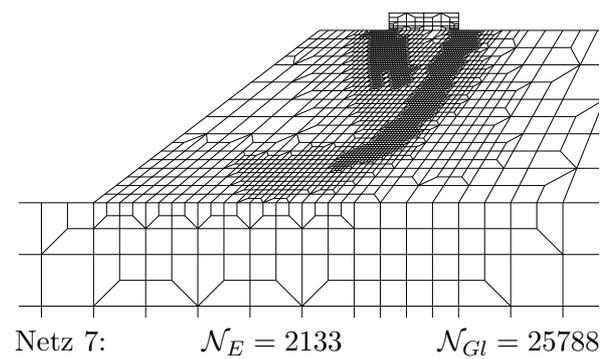
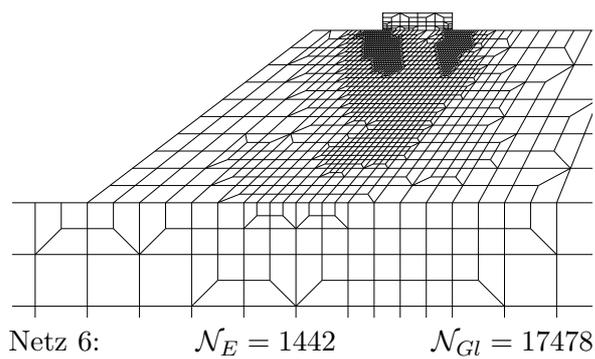
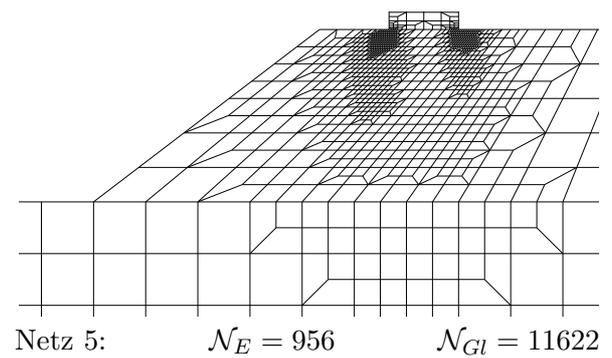
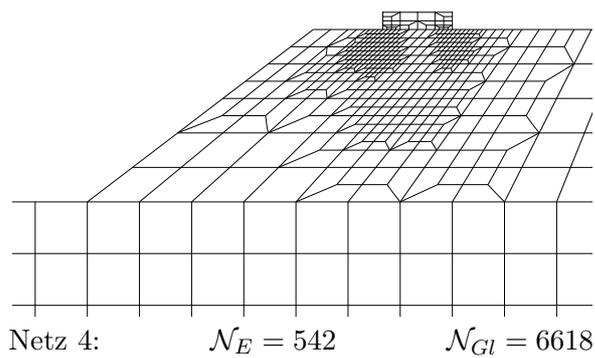
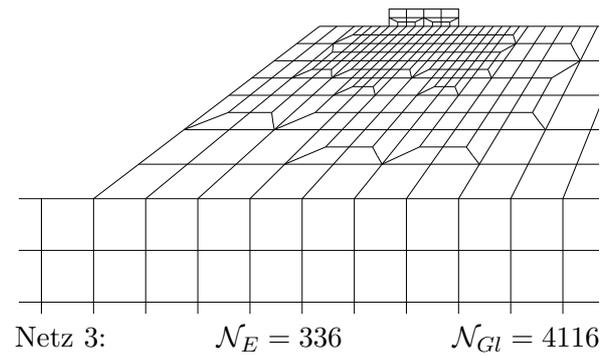
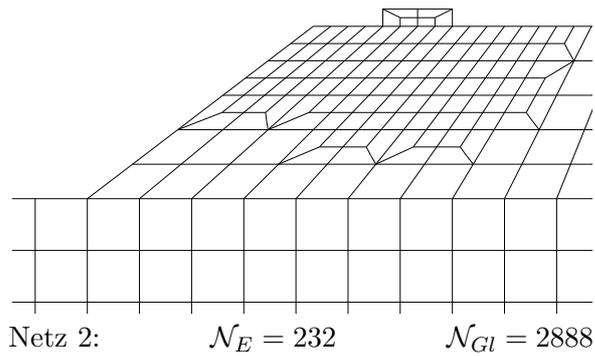


Abbildung 8.2:
Sequenzen der adaptiven Netzverfeinerung
bis zum Böschungsbruch



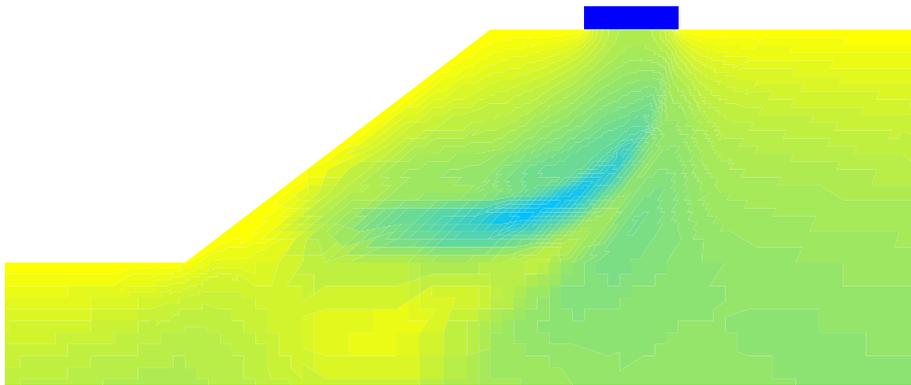


Abbildung 8.3: Porenwasserunterdrücke p bei dilatantem Scherband

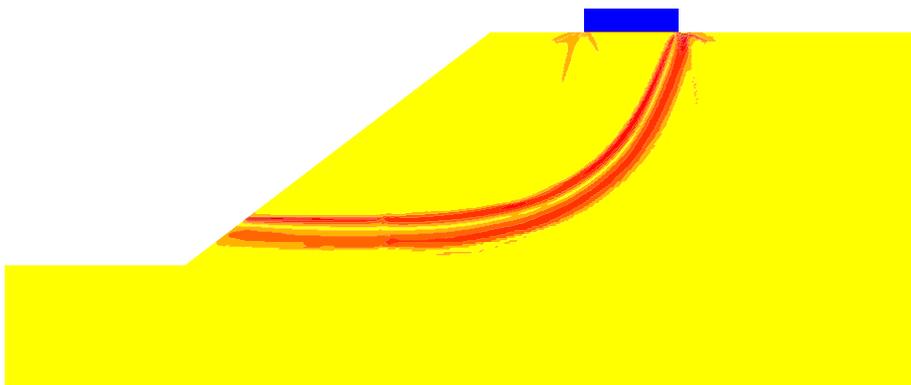


Abbildung 8.4: Norm der plastischen Krümmungsinkremente $\|\Delta\kappa^{pl}\|$

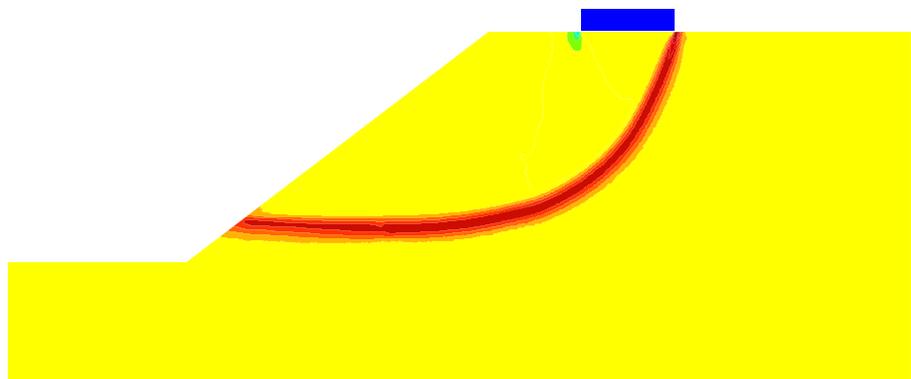


Abbildung 8.5: Norm der plastischen Dehnungsinkremente $\|\Delta\varepsilon^{pl}\|$

Einbau von konformen Übergangselementen wird auch die Umgebung der Lokalisierung mit einer ausreichenden Genauigkeit abgebildet. Vergleichsstudien haben hier ergeben, dass bei Verwendung der Strategie mit inkonformen Knoten eine schlechtere Approximationsgüte beim Übergang von stark zu weniger stark verfeinerten Bereichen erreicht wird. Dies ist auf die hohe Konzentration von abhängigen Knotenfreiheitsgraden zurückzuführen. Mit konformen Übergangselementen wird dagegen die vollständige Approximation des Verschiebungs- und Rotationsfelds in den Verfeinerungsbereichen gesichert.

Die Abbildungen 8.3, 8.4 und 8.5 zeigen die Porenwasserdrücke p , die Norm der plastischen Krümmungsincrementen $\|\Delta\kappa^{pl}\|$ und die Norm der plastischen Dehnungsincrementen $\|\Delta\varepsilon^{pl}\|$ im Traglastniveau. Deutlich ist das dilatante Scherband in der Form eines Gleitkreises zu erkennen. Der erwartete Versagensmechanismus wird mit dem gewählten Materialmodell somit zutreffend simuliert. Die Volumenvergrößerung als Konsequenz der dilatant plastischen Dehnungen, führt zu einem Unterdruck, der einen Fluidstrom in den Bereich der Lokalisierung bewirkt. Je nach gewählter Permeabilität des Bodens kann dieser Effekt stärker oder schwächer ausgeprägt sein. Die starke Kopplung zwischen Volumenänderung und Porenwassertransport erklärt den zeitlichen Einfluss und den dadurch bewirkten regularisierenden Effekt, der bei hohen Durchlässigkeiten jedoch sehr schwach ausfällt. Druckunterschiede werden in diesem Fall zu schnell ausgeglichen. Die plastischen Krümmungen zeigen eine typische Doppelbandstruktur, da die Rotationen in der Mitte des Scherbands verschwinden und ihr Maximum (mit entgegengesetztem Vorzeichen) an beiden Seiten erreichen. Dagegen konzentrieren sich die plastischen Dehnungen vorwiegend in der Mitte des Bands. Hier ist anzumerken, dass die beiden Anteile des Indikators für den Fehler in den Gleichgewichtsbedingungen nicht in identischen Bereichen mit höheren Werten reagieren. Zwar beschränken sich beide auf den Scherbandbereich, jedoch führt der klassische Anteil zu Verfeinerungen im Innern, während der COSSERAT-Anteil hauptsächlich die Randbereiche abdeckt. In der Gesamtheit ergibt sich eine hervorragende Eignung des Indikators für die Aufspürung und Verfeinerung von Lokalisierungsphänomenen.

Die Ergebnisse der adaptiven Zeitschrittsteuerung sind in Abbildung 8.6 zusammengefasst. Hier sind die ermittelten Zeitschrittweiten Δt im Zeitverlauf aufgetragen, wobei lediglich der Indikator $\eta_{\sigma\varepsilon}$ für eine Schrittweitensteuerung eingesetzt wurde. Im vorliegenden Fall kam eine sehr hohe Permeabilität von $k = 10^{-3} \frac{m}{s}$ zum Einsatz. Im Vergleich mit trockenem Boden resultierte hieraus keine wesentliche zeitliche Verzögerung der Verformungen. Bei einer gewählten Anfangsschrittweite von $\Delta t_{Start} = 3 h$ sind die Berechnungen mit absoluten Toleranzschranken

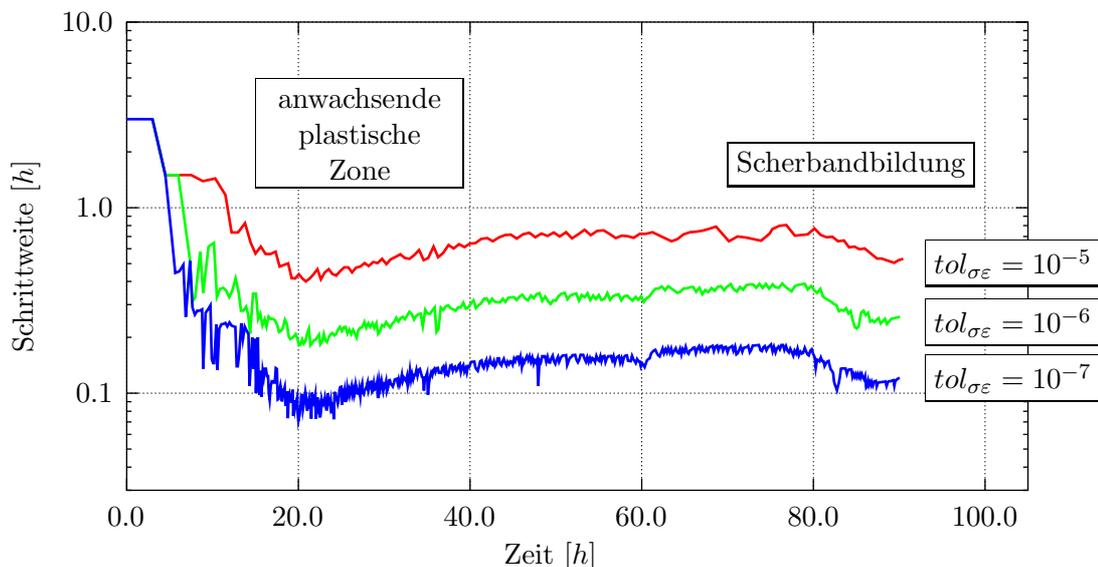


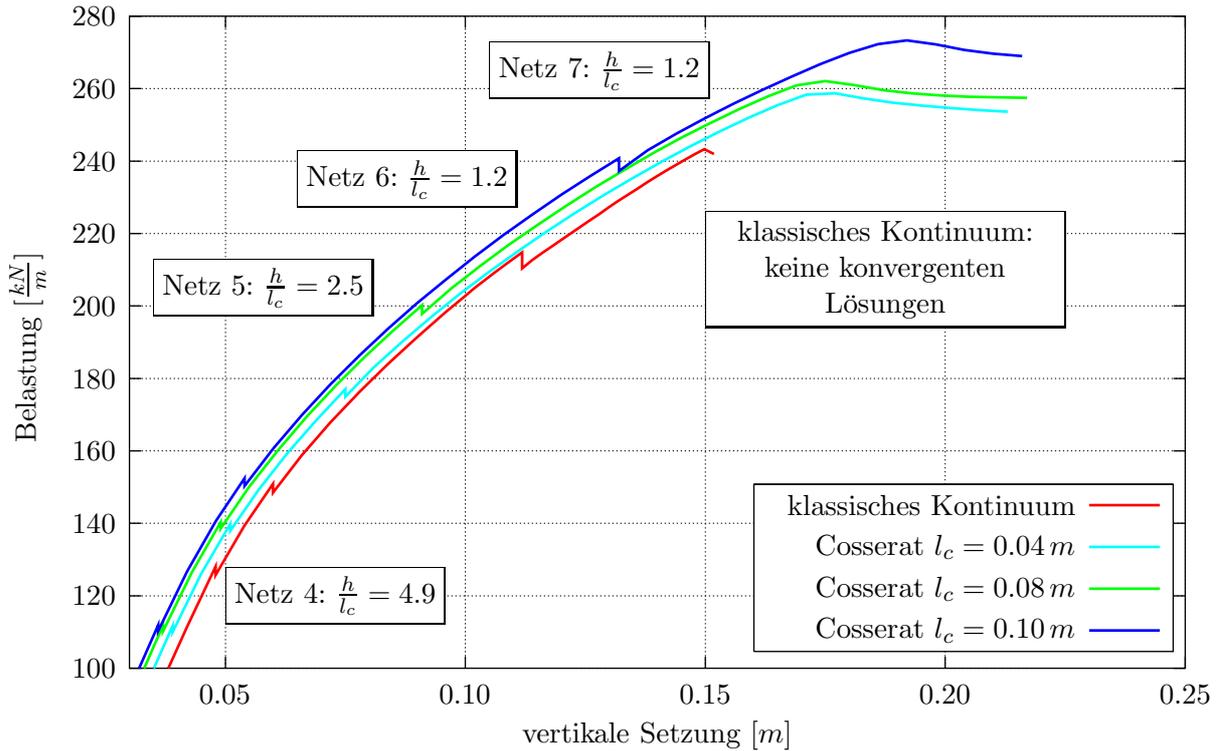
Abbildung 8.6: Entwicklung der adaptiv angepassten Zeitschrittweiten

von $tol_{\sigma\varepsilon} = 10^{-5}$, 10^{-6} und 10^{-7} verglichen. Aus den gezeigten Verläufen wird deutlich, dass im Zeitraum der stark anwachsenden plastischen Zone wie auch bei einsetzender Scherbandformation kleinere Zeitschrittweiten benötigt werden, um die jeweilige Toleranz einzuhalten. Begründet ist dies durch die Tatsache, dass der Indikator $\eta_{\sigma\varepsilon}$ sensitiv auf eine Änderung der Anzahl plastischer Integrationspunkte \mathcal{N}_{pl} reagiert. Das ist sowohl bei zunehmender Belastung am Anfang als auch bei der Entlastung weiter Bereiche des Systems zum Zeitpunkt der Scherbandbildung im Grenzzustand der Fall. Die Änderung der Schrittweite fällt in diesem Spezialfall jedoch nicht allzu deutlich aus, da der Fehler in der Integration der konstitutiven Beziehungen sehr stark von der Zeitschrittweite abhängt. Bei den in diesem Beispiel gewählten linear-diskontinuierlichen Ansätzen in der Zeit besteht eine Abhängigkeit von dritter Ordnung. Eine wesentliche Effizienzsteigerung im Vergleich mit konstant kleinen Zeitschrittweiten konnte hier nicht erreicht werden. Jedoch zeigt der Vergleich der einzelnen Kurven, dass mit einer Reduktion der Toleranzschranke $tol_{\sigma\varepsilon}$ eine restriktivere Auswahl der Zeitschrittweite erreicht wird. Dies führt zu einer systematischen Verringerung des Fehlers.

Im Folgenden soll anhand von vergleichenden Untersuchungen auf die Regularisierungseigenschaften der verwendeten erweiterten Kontinuumsformulierungen eingegangen werden. Dabei wurde ein Boden mit hoher Permeabilität gewählt, bei dem der regularisierende Einfluss allein durch den Einsatz der COSSERAT-Formulierung erzielt wurde. In diesem Fall lassen sich die Ergebnisse direkt mit der Lösung auf der Grundlage der klassischen Kontinuumsformulierung vergleichen, da wie bereits erwähnt der Einfluss der zusätzlich eingeführten Mikrorotation erst mit Beginn der Scherbandformation wirksam wird. Das Systemverhalten bleibt bis zu diesem Zeitpunkt unverändert. Auch zeitliche Effekte spielen bei hoher Permeabilität nur eine untergeordnete Rolle, da sich Porenwasserdrücke nur sehr schwach aufbauen. Das Versagen erfolgt somit im Fall einer Laststeuerung gewissermaßen unendlich schnell. Deshalb wird auch hier eine Wegsteuerung eingesetzt, um Entlastungsvorgänge während der Scherbandformation und somit das post-kritische Verhalten zu erfassen.

Abbildung 8.7 zeigt die Last-Verschiebungs-Kurven, die für das klassische Kontinuum sowie für das mikropolare Kontinuum mit COSSERAT-Parametern von $l_c = 0.04\text{ m}$, 0.08 m und 0.10 m erhalten wurden. Die Sprünge in den Kurven kennzeichnen die Zeitpunkte einer adaptiven Netz-anpassung. Durch das Wiederherstellen des Gleichgewichts nach erfolgtem Datentransfer auf das neue FE-Netz ergeben sich für die dann weichere Struktur bei vorgegebener Verformung geringfügig kleinere Belastungsintensitäten. Diese berechnen sich im Fall der Wegsteuerung aus einer Integration der auftretenden Randnormalspannungen über die Einleitungsfläche (Fundamentsohle). Vor allem wird deutlich, dass auch hier die klassische Kontinuumsformulierung nur bis zum Einsetzen der lokalen Phänomene plausible Ergebnisse liefert. Danach resultieren erneut unkontrollierte Zyklen von *Fehlerschätzung* – *Netzverfeinerung* – *Neuberechnung* ohne, dass konvergente Lösungen erzielt werden. Dementsprechend bricht die Last-Verformungs-Kurve zu diesem Zeitpunkt ab. Eine horizontale Tangente, die zur sicheren Identifikation eines Traglast-niveaus erforderlich ist, kann nicht erreicht werden.

Zu den Berechnungen auf der Grundlage der Mikropolaren Theorie ist zu bemerken, dass sie bis zum Zeitpunkt der Scherbandformation alle relativ genau übereinstimmen (zur besseren Unterscheidung wurden die Kurven etwas in horizontaler Richtung versetzt). Dass in dem gezeigten Ausschnitt bereits große plastische Deformationen auftreten, ist ein Indiz dafür, dass das Wichtungskonzept, das die Anteile des antimetrischen Spannungstensors und des Momentenspannungstensors bei der Formulierung der Fließfunktion berücksichtigt, hinreichend genau der Realität entspricht. Im Gegensatz zur klassischen Formulierung kann der Verlust der Elliptizität erfolgreich vermieden werden. Dies äußert sich in Form eines konvergenten Lösungsverhaltens und eindeutig abzulesenden Traglasten. Auch das post-kritische Verhalten, das durch eine Entlastung weiter Bereiche des Systems gekennzeichnet ist, kann mit der COSSERAT-Formulierung ohne numerische Probleme simuliert werden. Es ist weiterhin die Tendenz zu beobachten, dass sich für

Abbildung 8.7: Last-Verformungs-Kurven für verschiedene l_c

höhere Werte der internen Länge l_c auch geringfügig höhere Traglasten ergeben. Durch den Einfluss auf die konstitutive Beziehung zwischen Momentenspannungstensor und Krümmungstensor resultiert dabei ein steiferes Verhalten des Systems im Bezug zu sich einstellenden Rotationen. Diese Tatsache erklärt den sehr stark regularisierenden Charakter der mikropolaren Modellierung. Mit sehr großen Werten für l_c ergeben sich zunehmend breitere Scherbänder, wobei Lokalisierungsphänomene schließlich gänzlich unterdrückt werden.

Zur Berechnung der Traglasten von Streifenfundamenten in Böschungsnähe existieren jedoch auch Näherungsverfahren. Um den mit der adaptiven FEM berechneten Wert zu verifizieren, wurden Kontrollrechnungen mit den Verfahren von BOROWICKA [25], FRÖHLICH [71], TAYLOR [165], TERZAGHI [167] und der DIN 4084 [2] durchgeführt, wobei die Vorgehensweise der DIN auf die Überlegungen von KREY und FELLENIUS [70, 91] zurückgeht. Die mit Hilfe dieser Verfahren ermittelten Grenzlaster sind in Tabelle 8.2 zusammengestellt. Die Ergebnisse streuen im Bereich zwischen $\bar{P}_{max} = 213 \text{ kN}$ und $\bar{P}_{max} = 295 \text{ kN}$. Diese Bandbreite ergibt sich aufgrund der unterschiedlichen Annahmen zum Tragverhalten und zum Versagensmechanismus (z.B. des Gleitkreisradius) aber auch durch die unterschiedlichen Berechnungsmodelle, die sich in Scheibenverfahren und Lamellenverfahren einteilen lassen. Die mit der adaptiven FEM ermittelte Grenzlaster von $\bar{P}_{max} = 260 \text{ kN}$ liegt im mittleren Bereich und kann somit als realistisch bezeichnet werden. Es ist jedoch anzumerken, dass zusätzliche wichtige Einflussfaktoren wie z.B. der Dilatanzwinkel in den analytischen Ansätzen keine Berücksichtigung finden. Eine detailliertere Einschätzung findet sich in Abschnitt 8.3.

Die Problematik, die sich bei der Analyse wassergesättigter Böden mit geringer Durchlässigkeit ergibt, besteht in einer starken Abhängigkeit der Deformation bzw. des Versagens von der Zeit. Eine reine weggesteuerte vertikale Absenkung des Fundaments führt deshalb nicht zu anschaulichen Resultaten. Stattdessen wird im Folgenden eine Belastung aufgebracht, die während eines gewissen Zeitraums bis zu einem Maximalwert ansteigt und anschließend konstant bleibt. Der Verlauf ist in Abbildung 8.8 skizziert. Desweiteren wurden die Durchlässigkeiten k so gering gewählt, dass sich ein ausreichend regularisierender Charakter des viskosen Porenfluids ergab

| Verfahren nach | Grenzlast P_{max} |
|----------------|---------------------|
| BOROWICKA | 219 kN |
| FRÖHLICH | 279 kN |
| TAYLOR | 265 kN |
| TERZAGHI | 213 kN |
| DIN 4084 | 295 kN |
| adaptive FEM | 260 kN |

Tabelle 8.2: Vergleich der Grenzlasten – analytische Ansätze und adaptive FEM

und Netzabhängigkeiten erfolgreich vermieden wurden. Die Diagramme in Abbildung 8.9 zeigen für eine Variation der Belastungsintensität \bar{P}_{max} die Setzungsverläufe des Fundamentmittelpunkts über die Zeit. Es ist ersichtlich, dass sich ein gewisser Anteil der Setzung zeitgleich zur Belastung einstellt. Da durch diese Deformation – abhängig von der Durchlässigkeit des Bodens – jedoch Porenwasserdrücke aufgebaut werden, ergibt sich ein zweiter Setzungsanteil, der zeitlich verzögert auftritt und durch den Prozess der Konsolidierung geprägt ist. Wird im angegebenen Beispiel eine Last von $\bar{P}_{max} = 310 \text{ kN}$ nicht überschritten, so streben die Setzungen gegen einen Endwert. Das System kommt somit nach vollständigem Abbau der Porenwasserdrücke zur Ruhe und es kann von einem stabilen Zustand gesprochen werden. Im Gegensatz dazu tritt bei höherer Belastungsintensität $\bar{P}_{max} \geq 320 \text{ kN}$ eine Böschungsinstabilität ein, die mit einer Scherbandformation verbunden ist und zur Ausbildung einer lokalisierten Versagensform führt. Im Vergleich mit trockenen Böden kommt es hier jedoch nicht zu einem plötzlichen Versagen. Vielmehr ist die weitere Deformation durch eine konstante Versagensgeschwindigkeit geprägt, die von der Belastungsintensität und der Durchlässigkeit abhängt. Als Grenzlast des Systems lässt sich schließlich die größte Belastung identifizieren, für die ein stabiles Systemverhalten gewährleistet bleibt.

Alternativ kann auch eine maximale Setzung \bar{u}_{max} vorgegeben werden. Mit Hilfe der Zeit–Setzungs–Diagramme kann dann auf eine maximal zulässige Fundamentbelastung rückgeschlossen werden. Die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Durchlässigkeit des Bodens kommen auch sehr gut durch die Porenwasserdruckverläufe über die Zeit zum Ausdruck, die in Abbildung 8.10 dargestellt sind. Während bei höheren Werten ($k = 10^{-6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$) die Maximalwerte der Drücke direkt unter dem Fundament schon kurz nach Erreichen der maximalen Last auftreten, ergeben sie sich bei geringeren Durchlässigkeiten ($k = 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}}$) erst zeitlich versetzt. Gegen Ende der Konsolidierung klingen sie in beiden Fällen gänzlich ab.

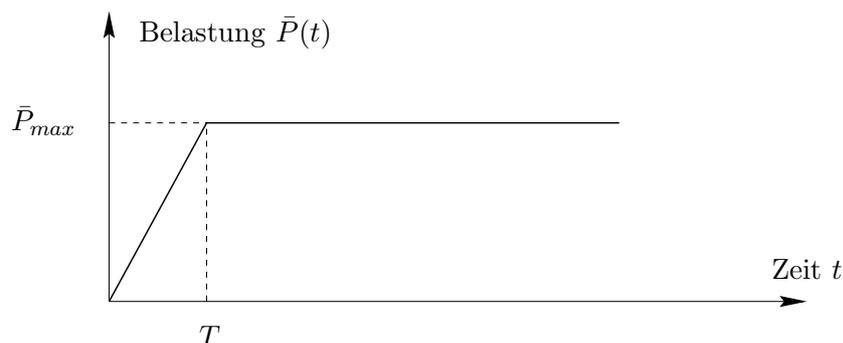


Abbildung 8.8: Zeitverlauf der aufgetragenen Fundamentbelastung

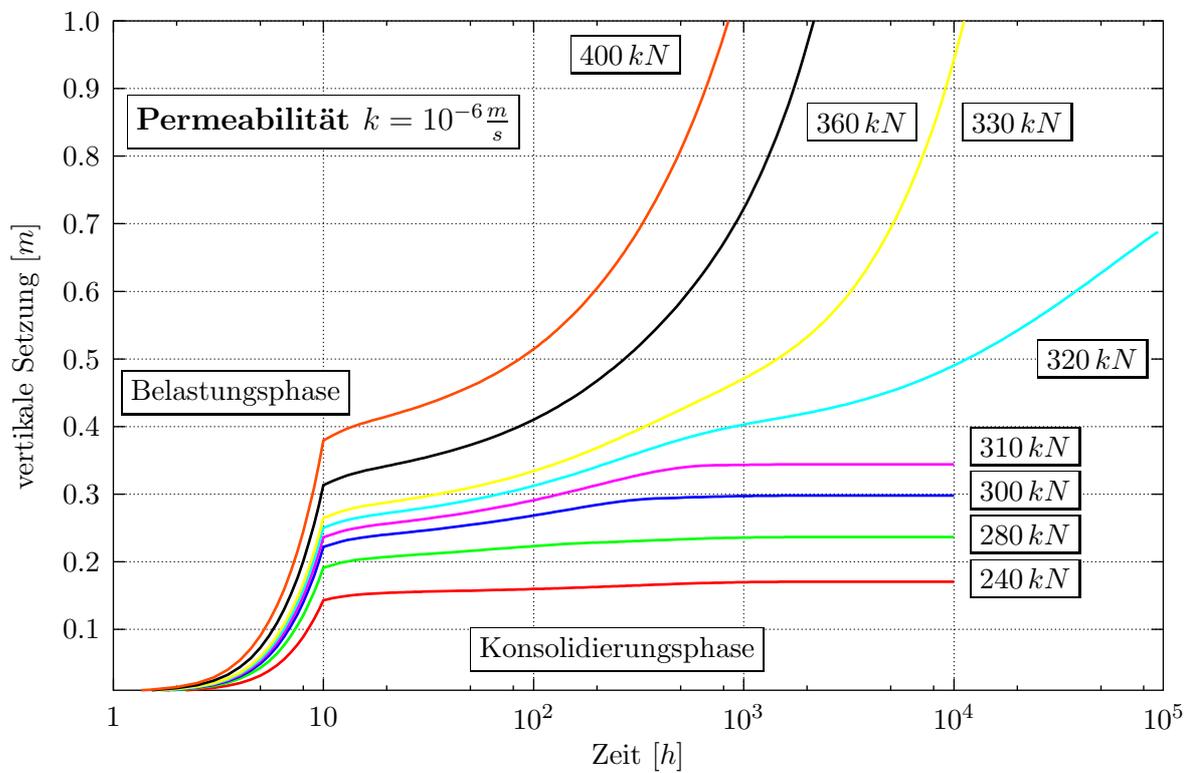
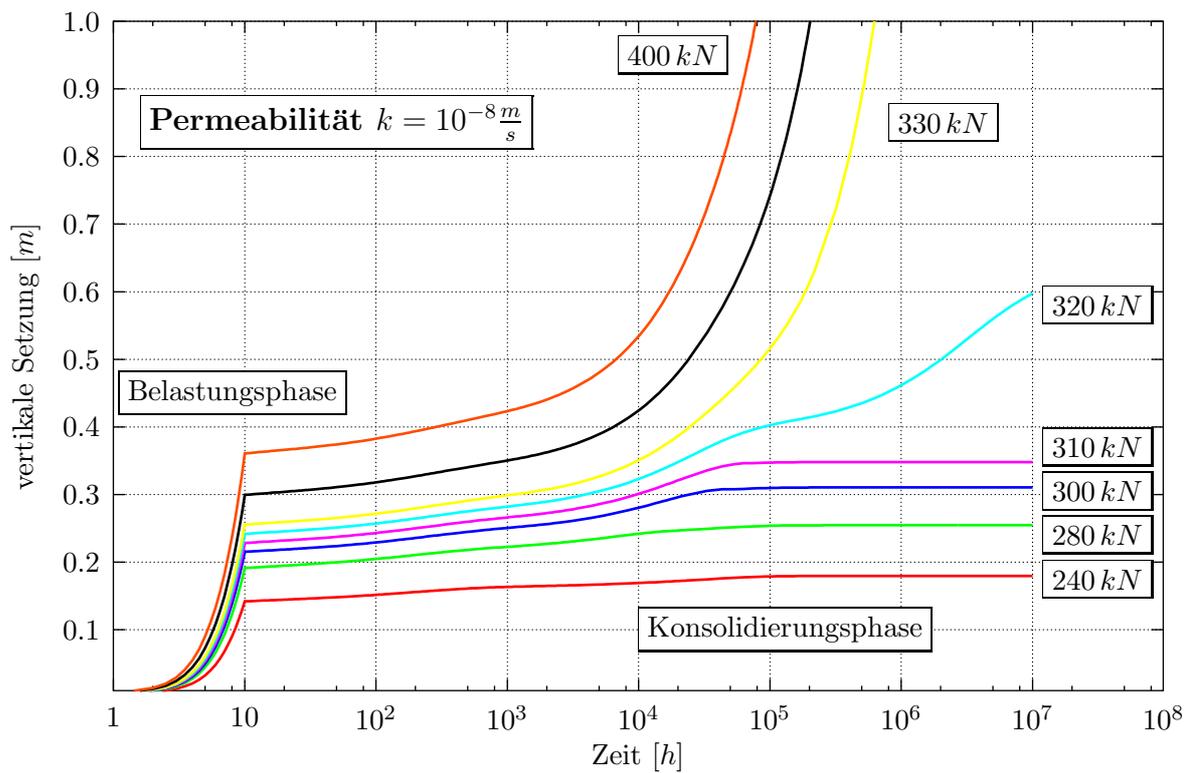


Abbildung 8.9: Setzungsverläufe für verschiedene Belastungsintensitäten

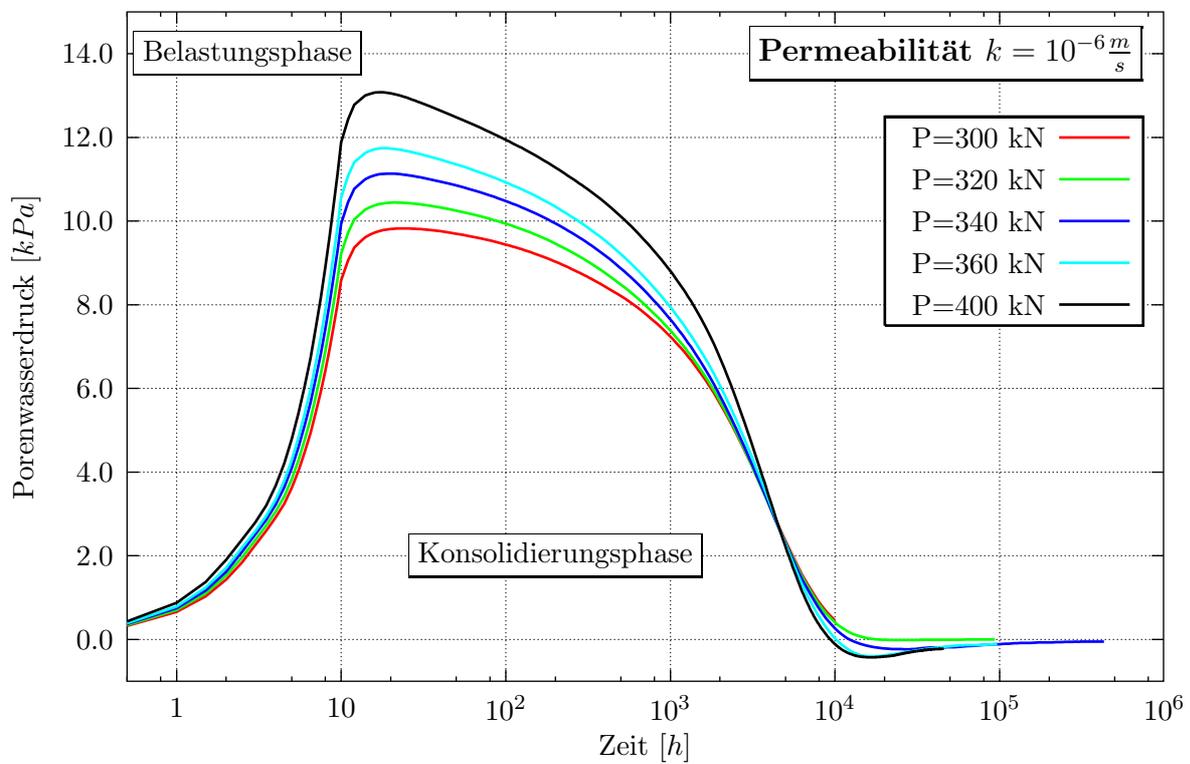
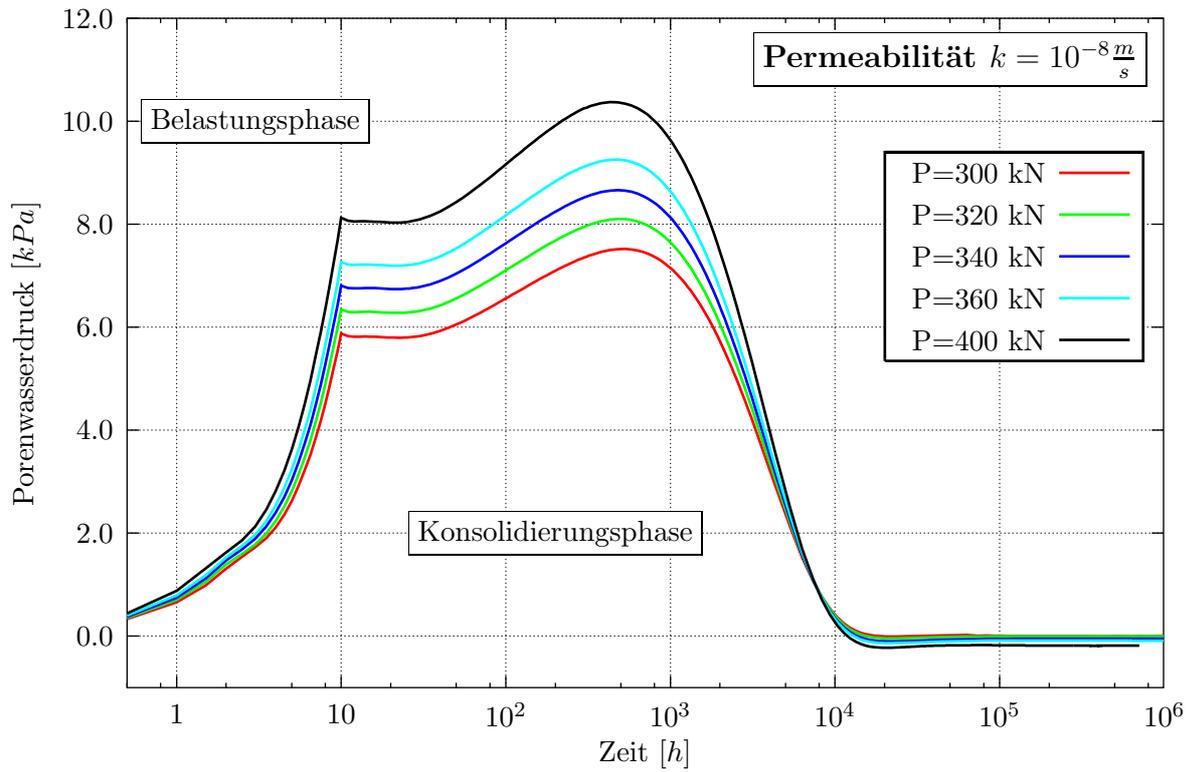


Abbildung 8.10: Vergleich der Porenwasserdruckverläufe

8.2 Grundbruchberechnung

Als weiteres Anwendungsbeispiel wurde die Simulation eines Grundbruchversagens gewählt. Abbildung 8.11 zeigt das verwendete statische System mit den gewählten Randbedingungen, das der FE-Berechnung zugrunde lag. Eine starre Fundamentplatte (Streifenfundament) von 4 m Breite wurde dabei auf einem Halbraum aus bindigem wassergesättigten Boden belastet, wobei die Oberfläche als vollständig drainiert modelliert wurde. Eine Diskretisierungsgröße von 16 m Höhe und 40 m Breite unter Ausnutzung der Symmetrie stellte sicher, dass der Einfluss der Randbedingungen auf die Berechnungsergebnisse vernachlässigt werden konnte. Als Materialparameter für den Boden kamen dieselben Werte wie im letzten Abschnitt zum Einsatz.

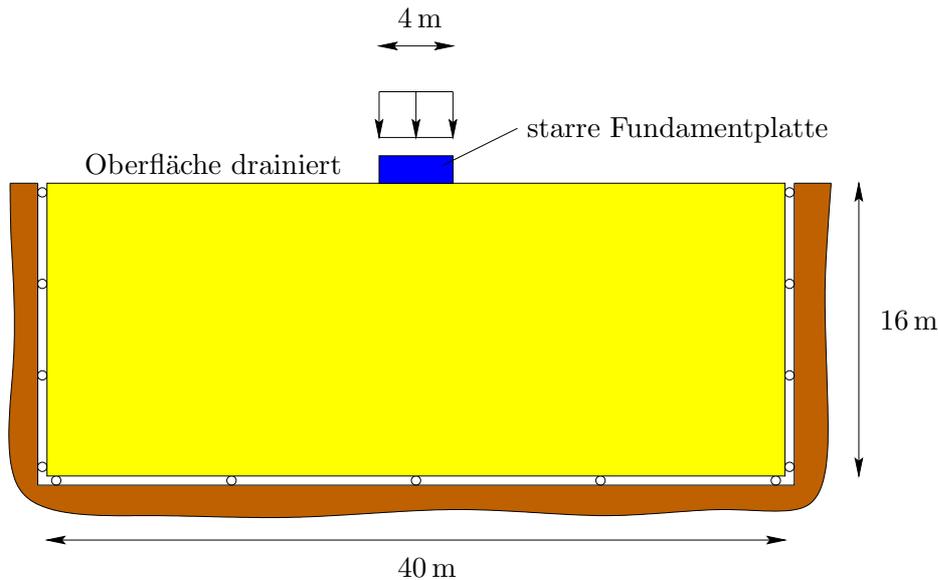


Abbildung 8.11: Systemskizze des Fundaments auf Halbraum

Bereits von PRANDTL [127] aber auch von TERZAGHI und JELINEK [168] wurde dieses Problem theoretisch sehr ausführlich behandelt. Die Basis bildete die Theorie der Gleitlinien. In Abbildung 8.12 sind die Ergebnisse dargestellt, nach denen sich eine keilförmige *aktive Zone* direkt unter dem Fundament, ein *radialer Gleitbereich* und eine *passive Zone* unterscheiden lassen. Die Richtung der Gleitlinien können durch den Reibungswinkel φ mit $45^\circ + \frac{\varphi}{2}$ bzw. $45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ angegeben werden. Im Übergangsbereich werden logarithmische Spiralen zur Darstellung verwendet.

ELLSIEPEN weist bei der numerischen Simulation darauf hin, dass das Grundbruchproblem aus mathematischer Sicht ein sehr schwieriges Anfangs-Randwertproblem darstellt [62]. Bedingt durch sehr stark ausgeprägte Spannungsumlagerungen und die Formation von Scherbändern stehen im Allgemeinen keine mathematisch fundierten Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zur Verfügung. Die Ergebnisse zeigen jedoch, dass insbesondere im Hinblick auf die berechneten Versagenszustände eine sehr gute Übereinstimmung zwischen numerischer Simulation und realen Beobachtungen festzustellen ist.

Aus den Abbildungen 8.13, 8.14 und 8.15 wird ersichtlich, wie grundlegend verschieden sich die Ergebnisse zu Beginn der Berechnung, d.h. im elastischen Zustand und bei Erreichen des Traglastniveaus, d.h. bei Ausbildung eines lokalisierten Versagens darstellen. Wie zu erwarten zeigt sich anfangs eine Konzentration von Verzerrungen an der Unstetigkeitsstelle des Fundamentecks und eine Konzentration von Porenwasserüberdrücken direkt unter der Fundamentmitte. Der Grundbruchzustand wird im Gegensatz dazu durch Scherbänder bestimmt, die in ihrer Ausrichtung mit dem theoretischen Gleitlinienfeld nach PRANDTL übereinstimmen. Das unterschiedliche Vorzeichen der Rotationen im aktiven und passiven RANKINESchen Zustand ist

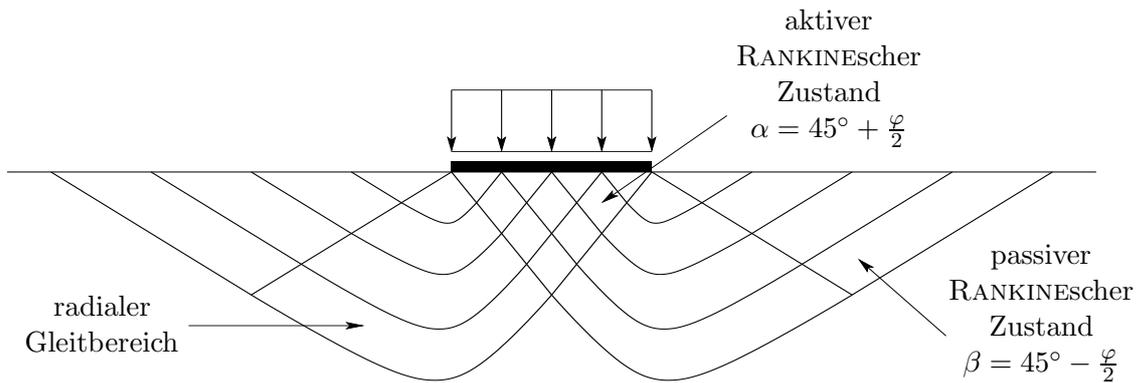


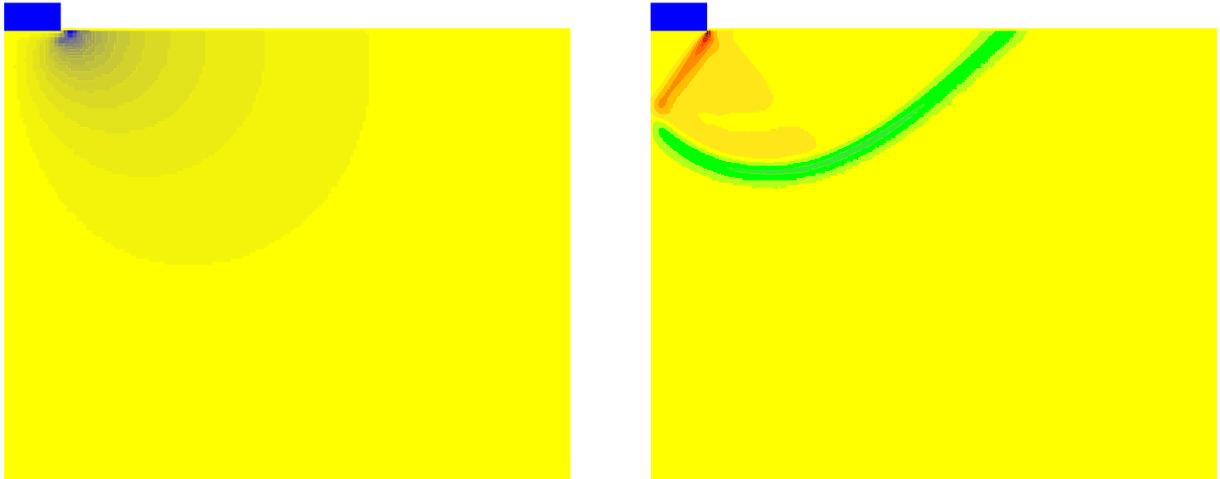
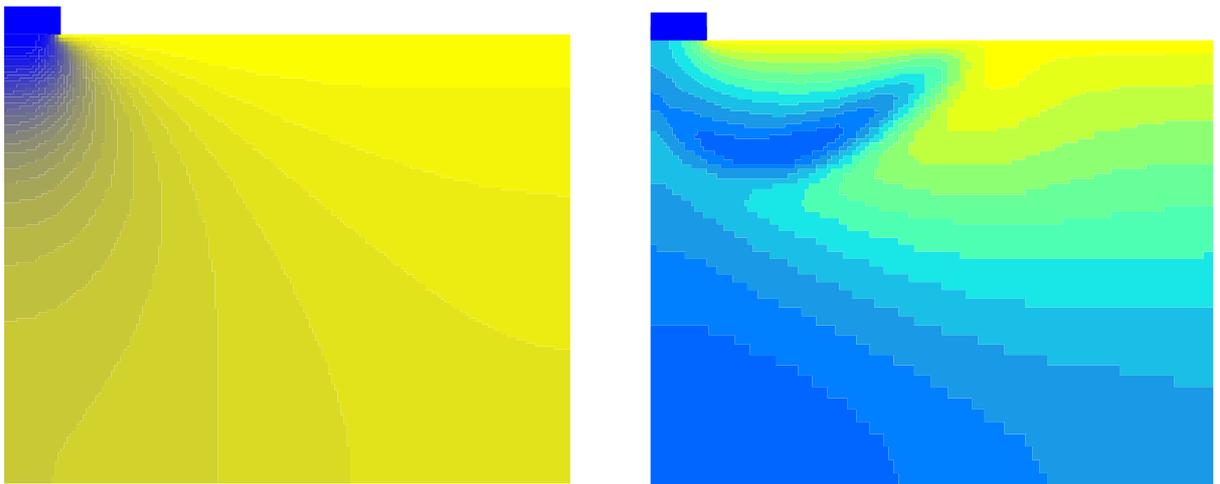
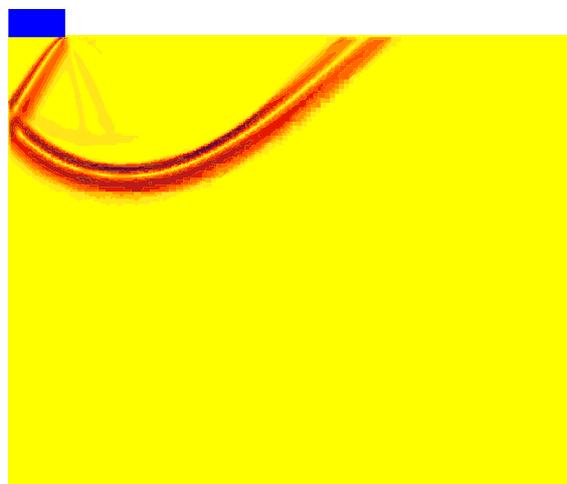
Abbildung 8.12: Gleitlinienfeld des Grundbruchs nach PRANDTL

genauso gut zu erkennen wie die Doppelbandstruktur der Krümmungen. Auch in diesem Fall bedingt das dilatante Materialverhalten einen Porenwasserunterdruck im Bereich des Scherbands. Die Lokalisierung fällt jedoch nicht so stark aus, wie die der plastischen Dehnungen. Eine derartige Änderung des Tragverhaltens während der Belastungsgeschichte erfordert eine problemangepasste Zeitdiskretisierung genauso wie stabile Algorithmen zur Spannungsintegration, um auftretende Effekte von Spannungsumlagerungen und Entlastungen möglichst exakt abzubilden. Die Ergebnisse zeigen, dass die implementierten adaptiven Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahren diese Voraussetzungen erfüllen und somit eine realitätsnahe Simulation erlauben.

Die vom ortsadaptiven Algorithmus erzeugten Diskretisierungen aus Abbildung 8.16 zeigen erneut die Leistungsfähigkeit der implementierten Fehlerindikatoren beim Aufspüren und Verfeinern von Lokalisierungszonen. Auch in diesem Beispiel konnte unter Anwendung der hierarchischen Netzverfeinerung eine Elementlänge von $h \approx l_c$ im Bereich der Scherbänder erreicht werden. In diesem konkreten Fall waren dafür jedoch mehr als 70000 Freiheitsgrade notwendig. Dies macht deutlich, dass aufgrund des relativ großen Rechenaufwand derzeit nur mit einer adaptiven Anpassung der FE-Diskretisierung annehmbare Rechenzeiten bei der Simulation realer Aufgabenstellungen erzielt werden. Berechnungen unter Verwendung einer uniform feinen Maschenweite wären bei weitem zu ineffektiv.

Die Last-Verformungs-Kurve der Grundbruchsimulation im Fall einer hohen Permeabilität ist in Abbildung 8.17 dargestellt. Sehr deutlich sind die Unstetigkeiten zu erkennen, die sich beim Datentransfer auf die neu generierten Netze ergeben. Ebenfalls eindeutig stellt sich das Traglastniveau dar. Neben der Notwendigkeit, die Geometrie der Lokalisierung hinreichend genau abzubilden, besteht ein weiterer Grund für feine Netzaufösungen in Scherbandbereichen in der korrekten Erfassung der komplexen Spannungszustände. Abbildung 8.18 zeigt für die verschiedenen Diskretisierungen (Netze 2–8) den Bereich des Traglastniveaus. Erst bei Erreichen der 5. Verfeinerungsstufe kann ein abfallender Ast in der Last-Verformungs-kurve beobachtet werden und Entlastungsphänomene werden in ausreichendem Umfang abgebildet. Bis zur 8. Verfeinerungsstufe nimmt dieser Effekt noch etwas an Bedeutung zu. Aus dem geringen Unterschied zwischen 7. und 8. Netz kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass auch hier eine weitere Netzverfeinerung nicht zur Verbesserung des Ergebnisses beitragen wird. Die Forderung $h/l_c \approx 1$ führt also auch in diesem Beispiel zu befriedigenden Ergebnissen und die gewählten Toleranzschranken $tol_{GG} = 7\%$ und $tol_{FI} = 11\%$ zur Steuerung der Netzverfeinerung können als sinnvoll angesehen werden.

Dass eine adaptive Anpassung der Zeitschrittweite in diesem Beispiel zu Vorteilen führt zeigt Abbildung 8.19. Anders als beim Böschungsbruch beobachtet man hier eine deutlich größere Streubreite der Intervalle. Zu Beginn der Berechnung werden kleinere Schritte berechnet, um die schnell zunehmende Plastifizierungszone genau genug zu beschreiben. Danach ergeben sich

Abbildung 8.13: Inkremente der Rotationen $\Delta\omega$ zu Beginn und im TraglastniveauAbbildung 8.14: Inkremente der Porenwasserdrücke Δp zu Beginn und im TraglastniveauAbbildung 8.15: Inkremente der plastischen Krümmungen $\|\Delta\kappa^{pl}\|$ im Traglastniveau

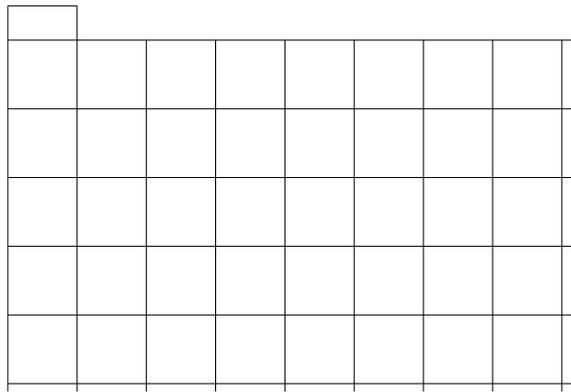
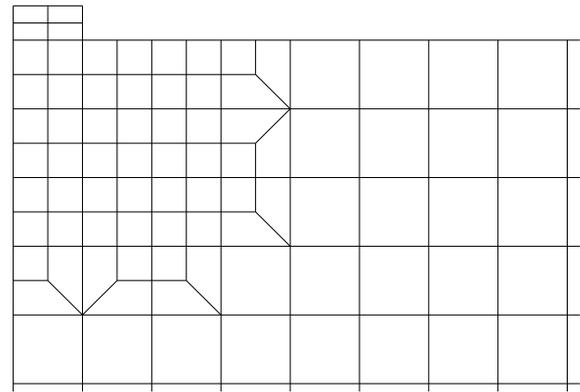
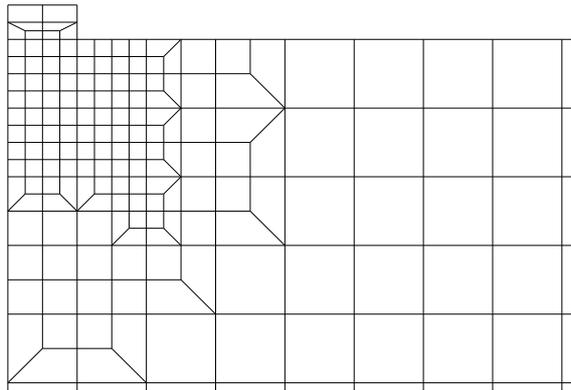
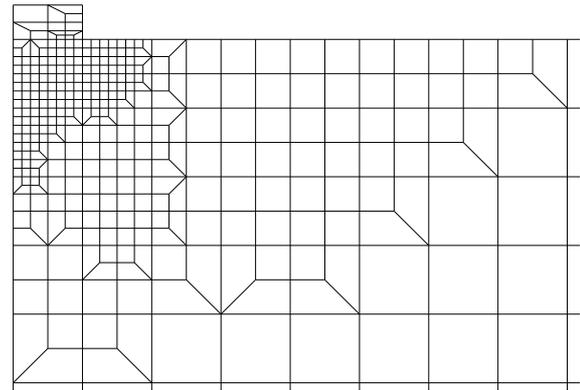
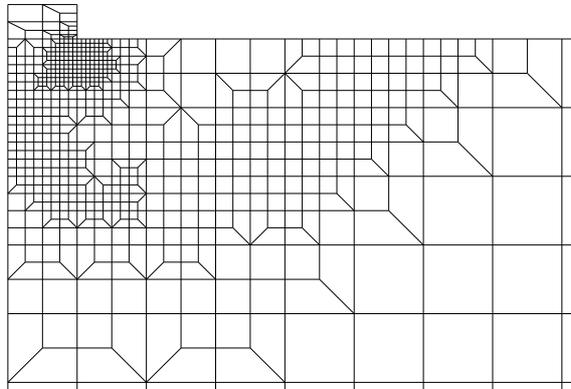
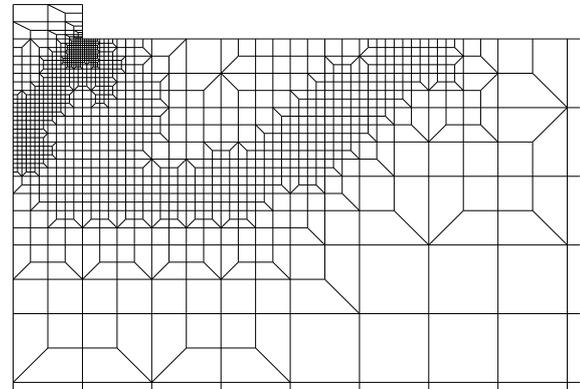
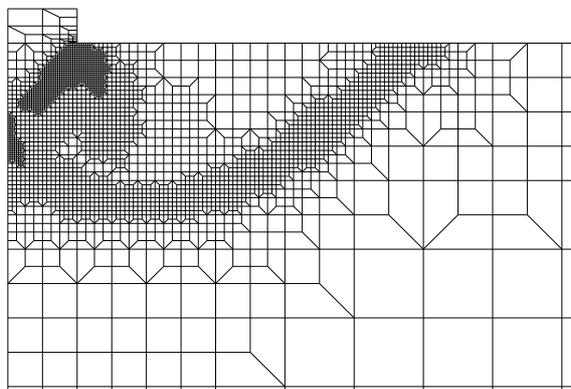
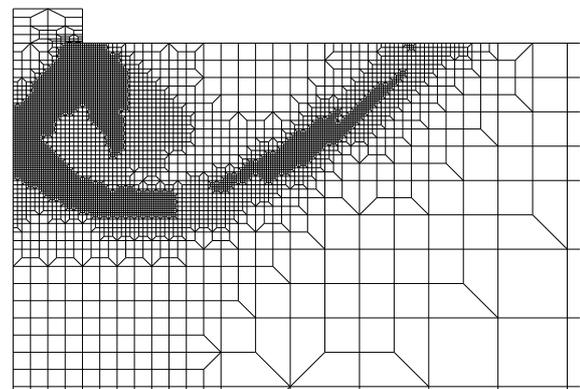
Startnetz: $\mathcal{N}_E = 82$ $\mathcal{N}_{Gl} = 1033$ Netz 2: $\mathcal{N}_E = 127$ $\mathcal{N}_{Gl} = 1571$ Netz 3: $\mathcal{N}_E = 208$ $\mathcal{N}_{Gl} = 2553$ Netz 4: $\mathcal{N}_E = 385$ $\mathcal{N}_{Gl} = 4717$ Netz 5: $\mathcal{N}_E = 707$ $\mathcal{N}_{Gl} = 8617$ Netz 6: $\mathcal{N}_E = 1333$ $\mathcal{N}_{Gl} = 16181$ Netz 7: $\mathcal{N}_E = 3071$ $\mathcal{N}_{Gl} = 37101$ Netz 8: $\mathcal{N}_E = 6045$ $\mathcal{N}_{Gl} = 72841$

Abbildung 8.16: Sequenzen der adaptiven Netzverfeinerung bis zum Grundbruch

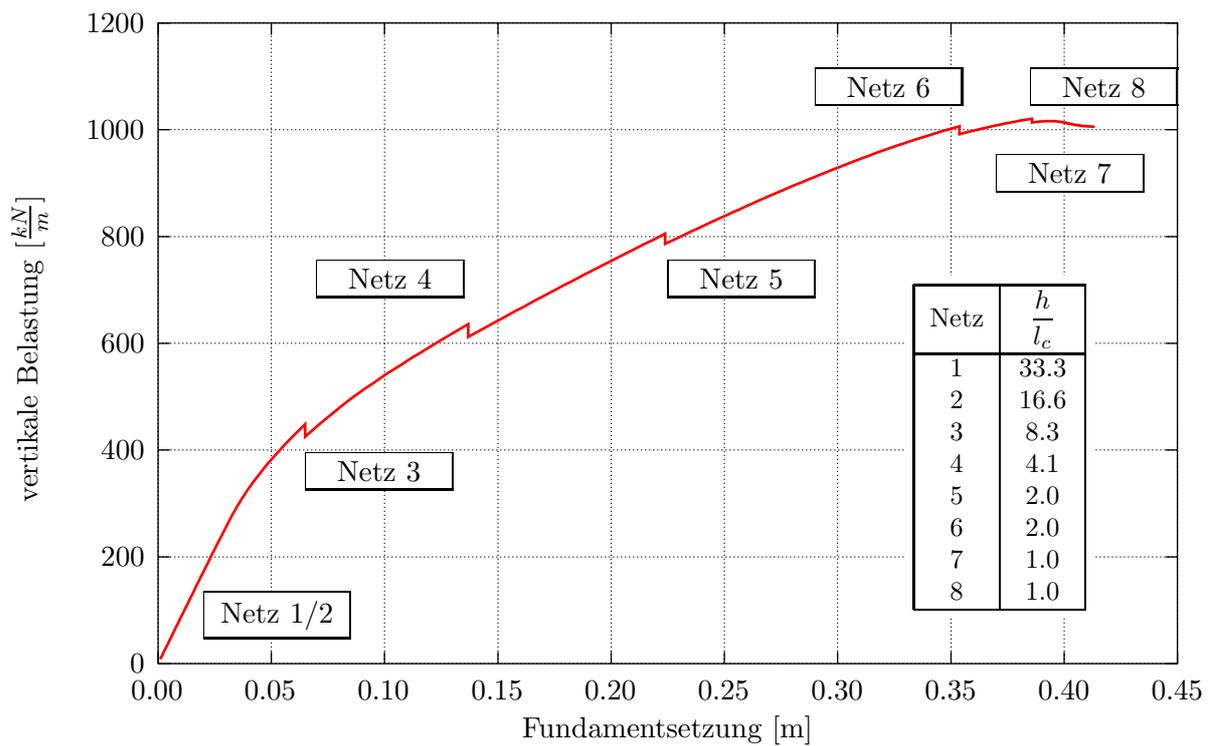


Abbildung 8.17: Last-Verformungs-Kurve der adaptiven Grundbruchberechnung

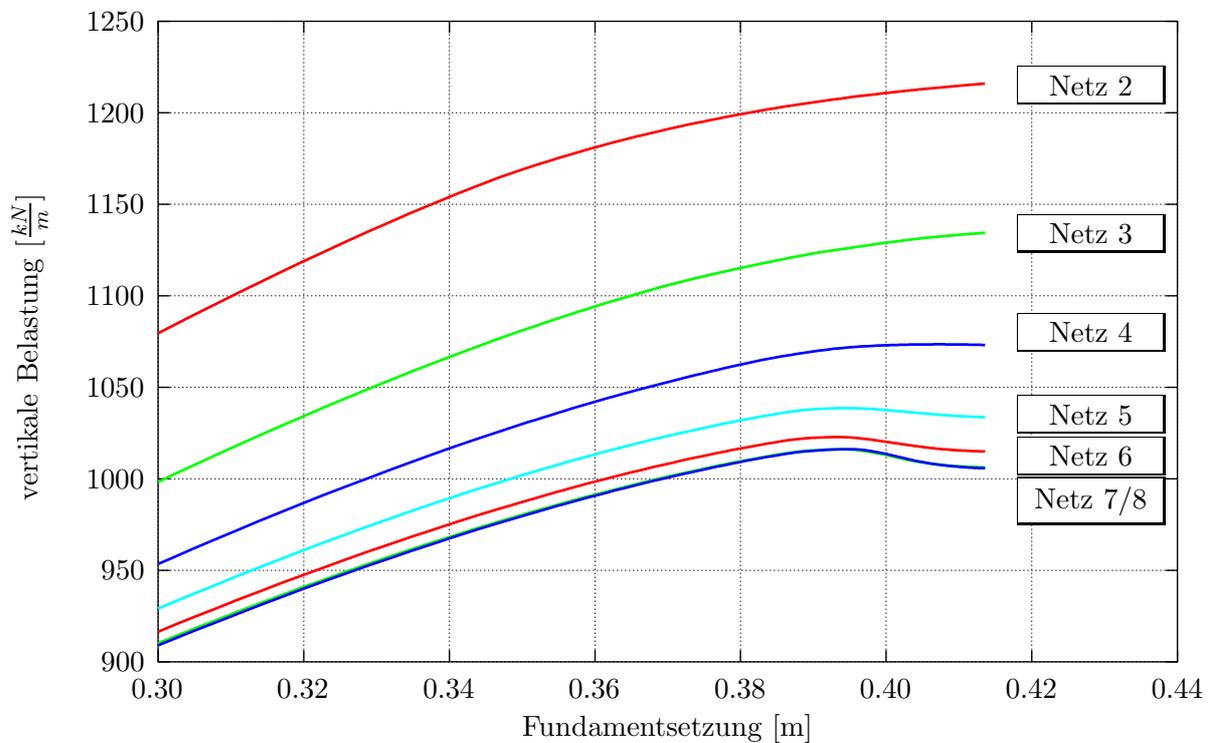


Abbildung 8.18: Traglastbereich bei unterschiedlicher Diskretisierung

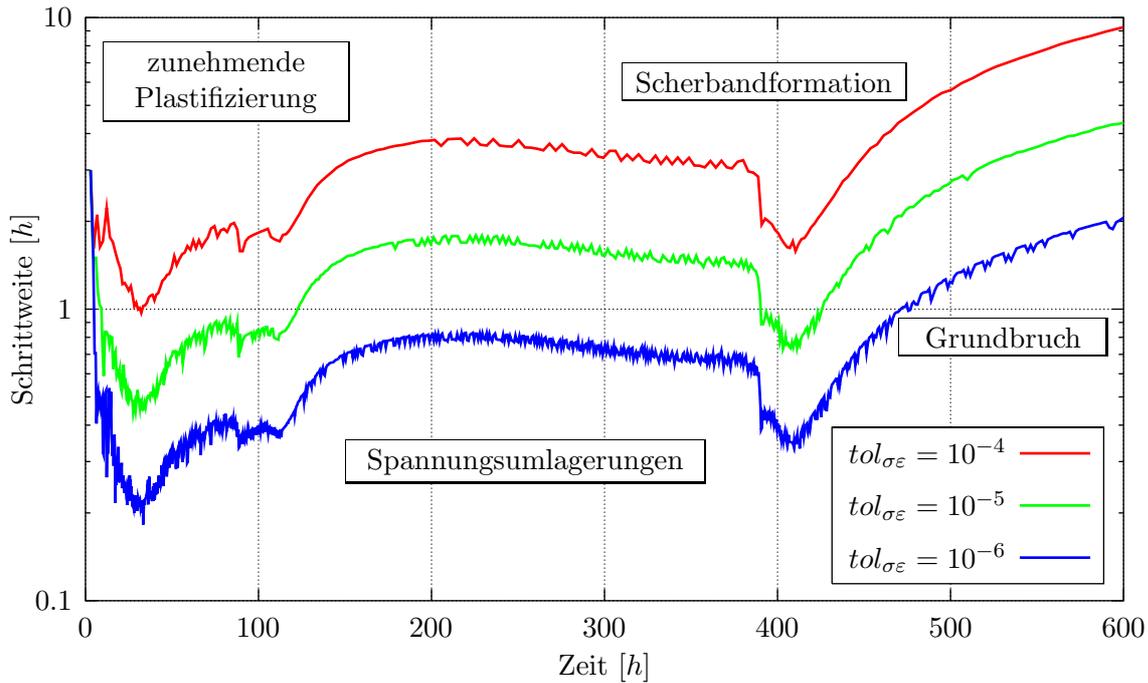


Abbildung 8.19: Entwicklung der adaptiv angepassten Zeitschrittweiten

über einen weiten Bereich nur langsame Spannungsumlagerungen mit einem relativ geringeren zugehörigen Fehlermaß. Die Schrittweiten können somit um den Faktor 4 größer gewählt werden. Eine plötzlich einsetzende Formation der Lokalisierung erzwingt dann jedoch wiederum kleinere Schrittweiten, um die Deformationscharakteristik des Versagens abzubilden. Hat sich der letztendlich maßgebende Versagensmechanismus in Form eines Grundbruchs ausgebildet, so können sukzessive größere Zeitschrittweiten verwendet werden. In diesem Beispiel wird somit deutlich, dass die vorgeschlagene Schrittweitensteuerung unter Verwendung des maßgebenden Fehlerindicators zu einer sinnvollen Wahl der Zeitintervalle führt und in der Lage ist, den Beginn der Scherbandbildung zu erkennen. Kritisch ist jedoch anzumerken, dass sich durch eine hohe Zahl an Schrittweitenreduktionen – verbunden mit einer Neuberechnung des Intervalls – die Gesamtrechnzeit wieder erhöht. Eine restriktivere Wahl der Toleranzschränke führt jedoch zu systematisch verkleinerten Schrittweiten und somit zur Verringerung des globalen Fehlers.

8.3 Vergleich mit analytischen Ansätzen

Zur Berechnung von Grundbruchlasten werden in der Praxis überwiegend analytische Näherungsverfahren verwendet, die zumeist auf den theoretischen Überlegungen zum Gleitlinienfeld von PRANDTL beruhen [127]. Eine Zusammenstellung möglicher Ansätze kann der Arbeit von HANSEN und LUNDGREN [78] oder SZÉCHY [164] entnommen werden. Alle derartigen Methoden berechnen die Grenzlast eines Fundaments auf der Basis eines dreigliedrigen Ansatzes, in den Anteile eingehen, die durch die Kohäsion, die Einbindetiefe und die Fundamentbreite bestimmt werden. In der Notation der derzeit gültigen DIN 4017, die die Ermittlung von Grundbruchlasten in Deutschland regelt, lautet dieser unter Vernachlässigung des Sicherheitskonzepts für senkrecht mittig belastete Rechteckfundamente

$$zul V = a \cdot b \cdot \left(\underbrace{c \cdot N_c \cdot s_c}_{\text{Kohäsion}} + \underbrace{\gamma_1 \cdot d \cdot N_q \cdot s_q}_{\text{Einbindetiefe}} + \underbrace{\gamma_2 \cdot b \cdot N_\gamma \cdot s_\gamma}_{\text{Fundamentbreite}} \right), \quad (8.1)$$

wobei a und b die Fundamentabmessungen, c die Kohäsion, γ_1 und γ_2 die mittleren Bodenschichten über bzw. unter der Fundamentsohle und d die Einbindetiefe darstellen. s_c , s_q und s_γ sind sogenannte Formbeiwerte und werden durch die Geometrie des Fundaments bestimmt. Bei Streifenfundamenten gilt $s_c = s_q = s_\gamma = 1.0$. Für die dimensionslosen Tragfähigkeitsbeiwerte N_c , N_q und N_γ , die in Abhängigkeit des Reibungswinkels definiert sind, werden in den Ansätzen der Literatur teilweise unterschiedliche Annahmen zugrunde gelegt. Die DIN 4017 verwendet beispielsweise

$$N_c = (N_q - 1) \cdot \cot \varphi, \quad (8.2)$$

$$N_q = e^{\pi \cdot \tan \varphi} \cdot \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right), \quad (8.3)$$

$$N_\gamma = (N_q - 1) \cdot \tan \varphi. \quad (8.4)$$

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse von Traglastberechnungen auf der Grundlage des in der Arbeit vorgestellten adaptiven Finite-Element-Verfahrens mit den Resultaten der analytischen Ansätzen in Relation gesetzt werden. Als Vergleich dienen dabei die Vorgehensweisen von TERZAGHI [168], MIZUNO [112], MEYERHOF [110] sowie der DIN 4017 [1]. Das Verfahren von PRANDTL basiert auf der Annahme eines gewichtslosen Bodens und liefert deshalb zu niedrige bzw. unrealistische Grenzlasten. Ebenfalls zu weitgehende Vereinfachungen enthält das von RITTER vorgestellte Verfahren, bei dem ausschließlich ebene Gleitlinien angenommen werden. Beide Ansätze sind deshalb hier nicht näher aufgeführt. Die anderen Verfahren lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

- Berechnung nach TERZAGHI:

Die Gleitflächen werden als logarithmische Spiralen mit anschließenden Geradenstücken vorausgesetzt. Der Bruchwiderstand wird nicht durch die Scherfestigkeit entlang der Gleitfläche sondern durch den Erdwiderstand ausgedrückt. Als Bestimmungsgleichung dient dann das elastische Gleichgewicht des unter dem Fundament befindlichen Erdkörpers.

- Berechnung nach MIZUNO:

Bei diesem Ansatz wirkt sich der Einfluss des Eigengewichts nicht nur günstig auf die Tragfähigkeit sondern auch auf die Form der Gleitfläche aus. Die Gleitlinien bestehen hier ebenfalls aus zwei Geraden und einer dazwischenliegenden Verbindungskurve. Diese geht bei gewichtslosem Boden ($\gamma = 0$) in die PRANDTLsche logarithmische Spirale über.

- Berechnung nach MEYERHOF:

MEYERHOF war der erste, der die Reibung zwischen Fundamentsohle und Boden berücksichtigte. Damit wird die Horizontalbewegung des Bodens unter dem Fundament behindert und es ergeben sich höhere Grenzlasten. Die zugrunde gelegten Gleitflächen sind wiederum logarithmische Spiralen, reichen hier jedoch bis zur Geländeoberfläche. Bereits bei geringen Einbindetiefen resultieren im Vergleich höhere Grenzlasten.

- Berechnung nach DIN 4017:

Im obigen Ansatz (8.1) können die Beiwerte N_c und N_q als theoretisch gut untermauert betrachtet werden. Mit Unsicherheiten ist jedoch N_γ behaftet, für den die DIN 4017 einen konservativen Ansatz wählt. Durch diese Wahl ergeben sich bei kleinen Einbindetiefen d gut auf der sicheren Seite liegende Grenzlasten.

Für alle Ansätze erkennt man eine exponentielle Abhängigkeit der Tragfähigkeit vom Reibungswinkel φ , für dessen Bestimmung deshalb sichere bzw. auf der sicheren Seite liegende Methoden eingesetzt werden sollten. Die Kohäsion c tritt lediglich linear in den Ansätzen auf und ist deshalb als weniger kritisch zu beurteilen. Im Gegensatz zur numerischen Simulation mit der FEM

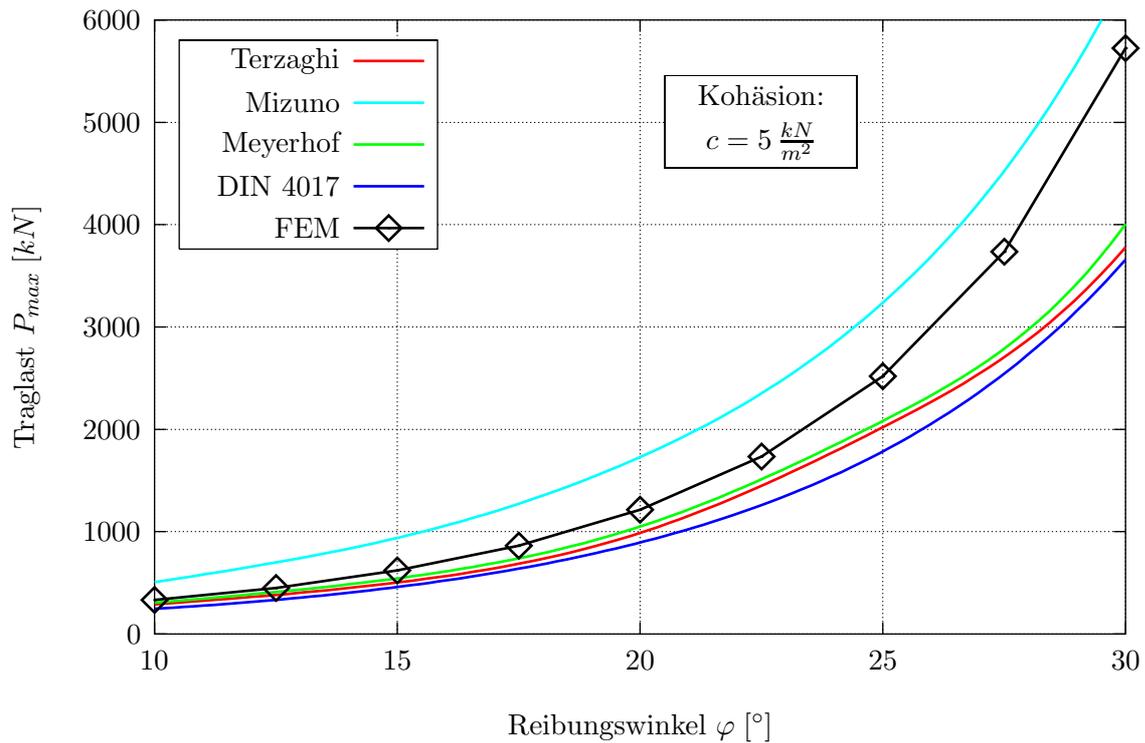


Abbildung 8.20: Abhängigkeit der Grenzlast \bar{P}_{max} vom Reibungswinkel φ

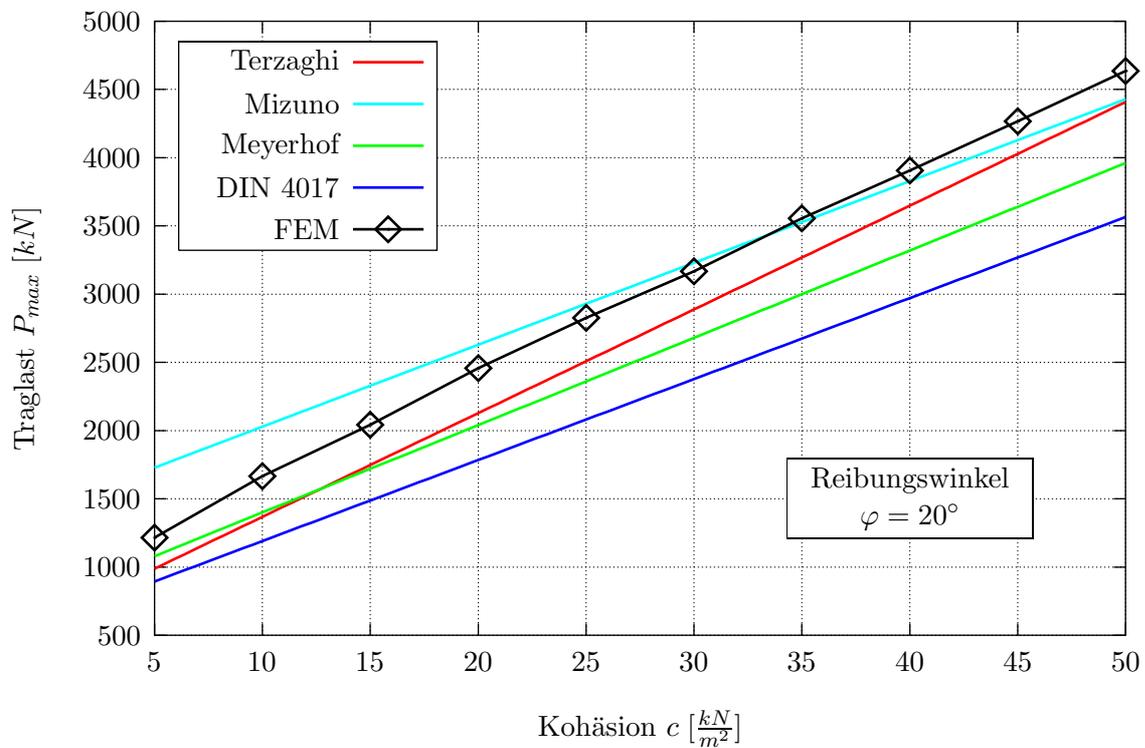


Abbildung 8.21: Abhängigkeit der Grenzlast \bar{P}_{max} von der Kohäsion c

bleiben die Materialparameter für den Boden auf die Wichte γ , die Kohäsion c und den Reibungswinkel φ beschränkt. Im Zusammenhang mit der Definition von Fließkriterien und Fließregeln gehen in die FE-Berechnung weitere Parameter ein, die einen zusätzlichen Einfluss auf die ermittelte Grenzllast bewirken. Im gewählten Beispiel sind der Dilatanzwinkel ψ bei nicht-assoziierter Fließregel und das Verhältnis zwischen Extensionsradius ϱ_t und Kompressionsradius ϱ_c der Fließfunktion bei einer ausgerundeten dreiecksförmigen Gestalt in Deviatorebene zu nennen. Außerdem beobachtet man eine Beeinflussung durch den internen COSSERAT-Längenparameter l_c . Wie aus Abbildung 8.7 zu erkennen, ist die Auswirkung auf das Traglastniveau für übliche Werte jedoch gering. Als realistisch zu bezeichnende Größen wurden deshalb

$$\psi = \frac{1}{3}\varphi, \quad l_c = 0.04 \text{ m} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_t}{\varrho_c} = 0.70 \quad (8.5)$$

fest vorgegeben. Weitere feste Materialparameter wurden mit $E = 5000 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.25$, $\mu_c = 1000 \text{ kN/m}^2$ und $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$ gewählt. Die Parameter der Fließfunktion bzw. der plastischen Potenzialfunktion wurden für den jeweiligen Fall aus dem Reibungswinkel und der Kohäsion bestimmt. Die Geometrie des Systems blieb im Vergleich zum letzten Abschnitt unverändert (siehe Abbildung 8.11). Da eine Zeitabhängigkeit der Lösungen in den Bruchtheorien nicht enthalten ist, wird auf die Erfassung von Porenwasserströmungen an dieser Stelle verzichtet. Eine Aussage, zu welchem Zeitpunkt ein Versagenszustand auftritt, ist mit Hilfe der klassischen Verfahren nicht möglich. Aus einem Vergleich der Diagramme in Abbildung 8.9 geht jedoch hervor, dass der Einfluss der Permeabilität auf die Grenzllast selbst nicht allzu stark ausgeprägt ist.

Die Diagramme auf Seite 156 zeigen die Ergebnisse der Vergleichsstudien. Abbildung 8.20 stellt die Abhängigkeit der Traglast vom Reibungswinkel in einem Bereich von $\varphi = 10^\circ \dots 30^\circ$ dar. Die Kohäsion wurde hier fest zu $c = 5 \text{ kN/m}^2$ gewählt. Deutlich ist zu sehen, dass die Traglasten der analytischen Verfahren in einem größeren Bereich streuen, wobei das Verfahren von MIZUNO in diesem Fall die größten Werte liefert und die Ergebnisse der DIN 4017 am unteren Ende der Skala liegen. Hier ist anzumerken, dass die Bruchtheorie von MEYERHOF in aller Regel sehr viel höhere Werte liefert, wenn die Einbindetiefe d vergrößert wird. Die unter Verwendung der adaptiven FEM berechneten Traglasten liegen im mittleren Bereich, zeigen jedoch eine etwas stärker ausgeprägte Abhängigkeit vom Reibungswinkel, so dass sie sich für große Werte von φ zunehmend dem Ansatz von MIZUNO nähern. Der typische exponentielle Verlauf bleibt jedoch erhalten.

Abbildung 8.21 verdeutlicht die Abhängigkeit der Traglast von der Kohäsion bei einem festen Reibungswinkel von $\varphi = 20^\circ$. Die beobachtete lineare Zunahme lässt sich einfach dadurch begründen, dass die Schubtragwirkung entlang der Gleitlinie mit der Kohäsion stetig steigt. Während mit der Änderung des Reibungswinkels auch unterschiedliche Versagensmechanismen verbunden sind, bleibt die Form und Größe der Bruchscholle bei einer Variation der Kohäsion annähernd konstant. Die Tragfähigkeitsbeiwerte N_c , N_q und N_γ ändern dementsprechend ihren Wert nicht. Auch in diesem Fall berechnen sich mit dem Verfahren von MIZUNO die größten Traglasten. Im Vergleich mit allen anderen Ansätzen zeigt der Ansatz von TERZAGHI jedoch den stärksten Anstieg bei einer Zunahme der Kohäsion. Die FEM-Ergebnisse liegen im Durchschnitt erneut etwas höher als die analytischen Verfahren, wobei die Abhängigkeit von der Kohäsion ungefähr so stark ausfällt wie bei TERZAGHI. Die lineare Zunahme konnte durch die FEM-Simulationen sehr gut verifiziert werden.

Diese Ergebnisse sind folgendermaßen zu kommentieren. Zum einen zeigen Berechnungen mit der verschiebungsformulierten Finite-Element-Methode immer eine Konvergenz von oben. D.h. es werden generell zu hohe Traglasten bestimmt. Dieser Effekt wird durch die Wahl von zu großen Lastinkrementen noch unterstützt. Bei der verwendeten orts- und zeitadaptiven Strategie sollten jedoch zuverlässige Ergebnisse erzielt werden. Dennoch ist zu überprüfen, ob eine feinere

Diskretisierung in Bereichen, die von den verwendeten Fehlerindikatoren nicht erfasst werden, einen zusätzlichen Einfluss auf die Traglast ausübt und, ob sich Versteifungseffekte durch die gewählten Randbedingungen eventuell auf das Ergebniss auswirken. Einen Schwachpunkt in der numerischen Simulation stellt weiterhin die Tatsache dar, dass ein Schlupf zwischen Bodenmaterial und Fundamentsohle nicht berücksichtigt wird. Bei Experimenten beobachtet man im Gegensatz dazu ein ausgeprägtes “Herausquetschen” von Boden unter dem Fundament. Die durch den kontinuierlichen Verschiebungsansatz bedingte unnachgiebige Verbindung zwischen weichen Boden- und starren Fundamentelementen erhöht somit die Traglast. Inwieweit sich dieser Effekt quantitativ auswirkt, könnte z.B. mit Hilfe von zwischengeschalteten Reibungselementen untersucht werden.

Einen wesentlichen Einflussfaktor stellt jedoch die Definition der nicht-assozierten Fließregel dar. Mit der möglichen Wahl des Dilatanzwinkels zwischen assoziierter Richtung und volumenkonstantem Fließen ergibt sich eine größere Bandbreite der ermittelten Traglasten. Im gezeigten Fall wurde mit $\psi = \frac{1}{3}\varphi$ versucht, ein realistisches dilatantes Materialverhalten zu simulieren. Besonders bei größeren Reibungswinkeln ergibt sich hier eine mögliche Überschätzung der Traglast. Die analytischen Verfahren beziehen den Dilatanzwinkel nicht in ihre Ansätze ein. Für stark dilatante Böden sollten sie daher bei hohen Reibungswinkeln auf der sicheren Seite liegen. Der Abstand zu den FE-Ergebnissen und insbesondere der steilere Anstieg in Abhängigkeit des Reibungswinkels war demnach zu erwarten. Alles in allem bleibt festzustellen, dass die numerische Simulation zu einer realistischen Einschätzung des Tragverhaltens führt, wobei insbesondere die Versagensformen in Analogie zu realen Beobachtungen bzw. den theoretischen Überlegungen auf der Grundlage des Gleitlinienfelds gefunden werden.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit bestand in der Entwicklung eines möglichst allgemein anwendbaren Konzepts zur numerischen Simulation wassergesättigter Böden. Das Hauptaugenmerk war dabei auf eine realistische Aussage im Bezug zu auftretenden Grenzzuständen und damit verbundenen Traglasten gerichtet. In diesem Zusammenhang wurde Wert auf eine quantitative Erfassung von Lokalisierungsphänomenen durch die Anwendung von Regularisierungstechniken und die Kontrolle der Genauigkeit der berechneten Näherungslösung mit Hilfe von orts- und zeitadaptiven Verfahren gelegt.

Nach einer Entwicklung der grundlegenden Differenzialgleichungen des vollständig gekoppelten Konsolidierungsproblems unter Verwendung der Mischungstheorie und der Mikropolaren Theorie Poröser Medien erfolgte die Darstellung der für die Geomechanik bedeutendsten Materialmodelle. Es wurde eine Einflächen-Formulierung der Fließfunktion mit sechs Parametern zur Beschreibung einer Kappe im Druckbereich vorgestellt und deren mögliche Erweiterung um den Einfluss eines mikropolaren Stoffgesetzes gezeigt. Entscheidende Vorteile ergeben sich hier im Bezug zur numerischen Stabilität der Integrationsalgorithmen, da sich – bedingt durch die glatte Oberfläche im Hauptspannungsraum – eindeutige und stetige Ableitungen berechnen. Die Anwendung erfolgte im Rahmen der ratenunabhängigen Plastizität. Die Besonderheit von Geomaterialien liegt in der Notwendigkeit, nicht-assozierte Fließregeln zu verwenden, um eine realistische Volumenänderungscharakteristik bei plastischen Deformationen zu beschreiben. Deshalb wurde auch eine mögliche Form der plastischen Potenzialfunktion angesprochen, mit der die Richtung der plastischen Dehnungen sowie der plastischen Krümmungen unabhängig von der Fließfunktion ermittelt wird.

Der Hauptteil der Arbeit befasste sich mit der Formulierung eines neuen Finite-Element-Verfahrens zur genäherten Lösung des entstehenden Mehrfeldproblems. Dabei kam eine kombinierte Raum-Zeit-Diskretisierung auf der Grundlage des Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahrens als Integrationsschema im Zeitbereich zum Einsatz. Für die Kontinuitätsbedingung, die Plastizitätsgleichungen und die Kinematik wurden variationelle Formulierungen entwickelt, die eine zeitlich diskontinuierliche Approximation der Feldvariablen erlauben. Da in diesem Zusammenhang das im Bereich der Elastoplastizität vorwiegend eingesetzte implizite EULER-Verfahren zur Bestimmung der wegabhängigen Variablen seine Gültigkeit verliert, wurde eine neue Methode zur Integration der konstitutiven Beziehungen entwickelt. Diese basiert auf einer konsistenten Erweiterung der Integrationsalgorithmen auf Raum-Zeit-Elemente, wobei die Koordinaten der GAUSS-Punkte um eine zusätzliche zeitliche Komponente ergänzt wurden.

Zur Kontrolle der Genauigkeit und damit der Verlässlichkeit der numerischen Lösung wurden in der vorliegenden Arbeit adaptive Netzanpassungsstrategien verwendet. Aufgrund der räumlichen und zeitlichen Veränderlichkeit des Konsolidierungsproblems wurde eine h -Version der adaptiven Finite-Element-Methode mit einer Zeitschrittweitensteuerung kombiniert. Die Komplexität des

Mehrfeldprobleme erzwingt dabei gesonderte Fehlerindikatoren für die im Sinne der COSSERAT-Theorie erweiterten Gleichgewichtsbedingungen und die Kontinuität der Fluid-Flüsse. Auf der Basis der daraus abgeleiteten Fehlermaße wird es möglich, eine problemangepasste Ortsdiskretisierung zu erhalten und Lokalisierungsphänomene entsprechend fein aufzulösen. Die Verwendung der Time-Discontinuous-GALERKIN-Methode führt darüber hinaus zu einem effizienten Fehlerindikator im Zeitbereich. Durch eine Auswertung der Sprungterme am Intervallanfang in einer geeigneten Norm sowie die Kontrolle der KUHN-TUCKER-Bedingungen an Integrationspunkten höherer Ordnung wurden neue Fehlermaße definiert, mit denen die Zeitschrittweite optimal an sich im Laufe der Berechnung verändernde Bedingungen angepasst werden kann. Dies wird notwendig, da sich z.B. mit einsetzendem plastischen Verhalten auch im Zeitbereich Diskontinuitäten ergeben können.

Im Rahmen einer zeitlich fortschreitenden Berechnung bzw. der Anwendung inkrementeller elastoplastischer Stoffgesetze hat sich die hierarchische Netzverfeinerungsstrategie als besonders vorteilhaft erwiesen. Die hierarchische Datenstruktur begünstigt den Einsatz schneller Suchroutinen und erlaubt so die Implementierung effizienter Transferoperatoren bei der Übertragung der Zwischenspeicherdaten auf ein neu generiertes Netz. Mit der angewendeten alternierenden Knotenmarkierung ist es darüber hinaus möglich, ausschließlich Viereckelemente im Übergangsbereich zweier unterschiedlicher Verfeinerungsstufen zu verwenden und somit eine aufwändige Elementbibliothek sowie unnötig viele abhängige Freiheitsgrade in Scherbandzonen zu vermeiden. Auch eine Behandlung von kinematischen Kopplungen, die mit einer Strategie inkonformer Knoten verbunden ist, wird überflüssig.

Es wurde erkannt, dass die Standard-Kontinuumsformulierung bei lokalen Phänomenen kein quantitativ zuverlässiges Ergebnis liefern kann, da die Elliptizität der grundlegenden Differentialgleichungen als wichtige mathematische Voraussetzung der Lösungsmethode verloren geht. Daher müssen zur realistischen Erfassung von Scherbändern sogenannte Regularisierungstechniken eingesetzt werden. Im Kontext von Geomaterialien können die Mikropolare Theorie und die Theorie Poröser Medien in Verbindung mit einem viskosen Porenfluid als physikalisch motivierte Ansätze verstanden werden. Beide Theorien beinhalten die Definition einer internen Längeneinheit und führen damit auch im post-kritischen Bereich, d.h. nach einsetzender Scherbandformation zur mathematisch sachgemäßen Beschreibung des Problems.

9.2 Ergebnisse der Forschungsarbeit

Durch die Kombination bewährter Verfahren und Modelle für elastoplastische Berechnungen mit den im Rahmen dieser Arbeit neu entstandenen Methoden für wassergesättigte Böden wurde es möglich, relevante Systeme des Grundbaus und der Bodenmechanik realitätsnah zu simulieren. Vor allem die numerische Stabilität der Algorithmen und die Effizienz der gesamten Lösungsmethode im Hinblick auf die Gleichverteilung des Diskretisierungsfehlers in Raum und Zeit sei hier noch einmal betont. Mit Hilfe des Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahrens, bei dem sowohl linear-diskontinuierliche als auch quadratisch-diskontinuierliche Approximationen im Zeitbereich zum Einsatz kamen, konnte eine gute Kombination von Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften erzielt werden. Durch die numerische Dissipation dieser Methoden und das GALERKINSche Wichtungskonzept im Zeitbereich konnten Oszillationen, wie sie z.B. bei Semidiskretisierungen und Anwendung des CRANK-NICOLSON-Integrationsschemas entstehen, zuverlässig vermieden werden. Im Gegensatz zu dynamischen Berechnungen, bei denen eine derartige numerische Dissipation sehr oft unerwünscht ist, ergibt sich bei der quasi-statischen Analyse der Konsolidierung kein negativer Nebeneffekt. Im Hinblick auf einen effizienten Einsatz der Rechnerkapazität resultieren bei diskontinuierlichen Approximationen im Vergleich mit Finiten-Differenzen-Verfahren trotz des höheren Aufwands für einen einzelnen Zeitschritt keine Nachteile, da bei gleichem Fehler entsprechend größere Zeitschrittweiten verwendet werden können.

Jedoch führen quadratisch–diskontinuierliche Ansätze zu einem sehr viel höheren Speicherbedarf, weshalb hauptsächlich auf linear–diskontinuierliche Ansätze zurückgegriffen wurde.

Die numerischen Beispiele des Biaxialversuchs, des Grundbruchs und der Simulation einer Böschungsinstabilität zeigen die Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Methode. Es wird verdeutlicht, dass die implementierten Regularisierungsmodelle zu verlässlichen Aussagen über die Ausdehnung von Scherbändern führen. Dabei zeigt die Mikropolare Theorie den weitaus stärkeren regularisierenden Effekt, dessen Intensität mit der Wahl der internen Länge beeinflusst werden kann, ohne das prinzipielle Systemverhalten zu verändern. Im Gegensatz zur Permeabilität, deren regularisierende Wirkung durch den quasi–inkompressiblen Grenzfall beschränkt bleibt, führt eine weitere Erhöhung des COSSERAT–Parameters l_c zu einer vollständigen Unterdrückung von Lokalisierungsphänomenen. Da die Permeabilität eine messbare Bodeneigenschaft darstellt, besteht keine Möglichkeit, den Regularisierungseffekt unabhängig zu steuern. Bei hohen Permeabilitäten stellt deshalb die Theorie Poröser Medien allein keine zuverlässige Regularisierungsmethode dar. Aus diesem Grund wurde von Anfang an das gekoppelte Drei–Feld–Problem mit Verschiebungen, Rotationen und Porenwasserdrücken als primären Feldvariablen betrachtet. Aufgrund der Unabhängigkeit beider Methoden ist der dann erzielte Regularisierungseffekt vom jeweils stärkeren Einfluss abhängig. Somit kann für den gesamten Bereich von Materialparametern eine verlässliche Aussage über die Geometrie des Grenzzustands getroffen werden.

Mit Hilfe von Vergleichsrechnungen auf der Basis der klassischen Kontinuumsformulierung wurde gezeigt, dass sich Netzabhängigkeiten bei adaptiver Anpassung der Maschenweite noch wesentlich kritischer äußern, als dies bei uniformen Netzen der Fall ist. Lokal unterschiedliche Elementgrößen führen dabei zu physikalisch nicht nachvollziehbaren Diskontinuitäten in der Scherbandbreite und im weiteren Verlauf der Berechnung zu unkontrollierten Verfeinerungen in sehr eng begrenzten Zonen. Eine Analyse des post–kritischen Bereichs wird verhindert. Erst mit den angesprochenen Regularisierungstechniken wurde es möglich, ein qualitativ sinnvolles Versagensbild zu simulieren und gleichzeitig eine einheitliche Ausdehnung der Scherbänder über verschiedene Verfeinerungsstufen hinweg sicherzustellen.

Um die Geometrie der Lokalisierungszone hinreichend genau abzubilden, sind feine Netzauflösungen im Bereich von Scherbändern erforderlich. Die angewendeten Fehlerindikatoren sind jedoch in der Lage, diese Bereiche auch bei relativ grober Ausgangsdiskretisierung aufzuspüren. Bei fortschreitender Plastizität gewinnt vor allem der residuenbasierte Indikator für den Fehler in den Gleichgewichtsbedingungen an Einfluss. Während der klassische Teil des Indikators bevorzugt in der Mitte des Scherbands anspricht, bewirkt der mikropolare Anteil eine Verfeinerung an den Scherbandrändern. Im Gesamtzusammenhang kann somit eine optimale Netzauflösung im Bereich von Lokalisierungszonen gewährleistet werden, wobei erkannt wurde, dass mit einer Elementlänge im Bereich der internen Länge ($h \approx l_c$) eine genügend feine Diskretisierung erreicht wird. Bei noch weitergehender Verfeinerung ändert sich die berechnete Lösung nur noch marginal. Dies wird zum Teil auch dadurch unterstützt, dass mit den Übergangselementen eine kontinuierliche Beschreibung der Feldvariablen zum Scherband hin bewerkstelligt werden kann.

Durch die Verwendung einer automatischen Zeitschrittsteuerung konnte auch im Zeitbereich eine Gleichverteilung des Fehlers erreicht werden. Abschnitte, die durch eine starke Änderung der Zahl plastischer Integrationspunkte charakterisiert sind, können so mit verminderter Intervalllänge durchschritten werden. Dies ist zum einen bei einsetzender Plastizität, zum anderen aber auch bei Entlastungsvorgängen im Zusammenhang mit der Formation eines Scherbands zu erwarten. Die Ergebnisse zeigen, dass die angewendeten Fehlerindikatoren in der Lage sind, diese Bereiche zu erfassen. Aufgrund der Sensibilität der Time–Discontinuous–GALERKIN–Verfahren gegenüber der Zeitschrittweite in Verbindung mit einer hohen Zahl an Schrittweitenanpassungen und damit verbundenden Neuberechnungen, kann nicht in jedem Fall eine Verringerung der Gesamtrechnzeit erwartet werden. Durch eine Verschärfung der Toleranzschranken wird jedoch eine systematische Reduktion des zeitlichen Diskretisierungsfehlers erreicht.

Grundsätzlich stellt das entwickelte Verfahren eine robuste Möglichkeit zur Traglastanalyse wasergesättigter Böden dar. Die ermittelten Grenzzustände erscheinen sowohl beim Grundbruch als auch bei der Böschungstabilität sinnvoll, da sie mit den Annahmen klassischer Gleitlinienverfahren zur Bemessung derartiger Systeme sehr gut übereinstimmen. Die zugehörigen Traglasten sind deshalb als realistisch anzusehen und wurden auch im Vergleich mit den analytischen Näherungsverfahren verifiziert. Durch die Berechnung im Zeitbereich ergibt sich zusätzlich der Vorteil, dass eine Aussage über die zeitliche Entwicklung von Setzungen bzw. Porenwasserdrücken möglich wird. Daraus kann letztendlich auf die zulässige Belastungsintensität zurückgeschlossen werden. Insbesondere bei zeitlich veränderlichen Belastungen können mit der numerischen Simulation verbesserte Aussagen zum Systemverhalten erzielt werden.

9.3 Ansätze für weitere Forschung

Die in dieser Arbeit vorgestellte numerische Behandlung gekoppelter Anfangs–Randwert–Probleme in der Geomechanik kann als in sich abgeschlossenes Konzept betrachtet werden, mit dem bereits wie gezeigt realistische Aufgabenstellungen zuverlässig bearbeitet werden können. Dennoch bietet es an verschiedenen Stellen Möglichkeiten zur Erweiterung.

Die Modellannahmen in Kapitel 3 schränken das Verfahren auf den Anwendungsbereich vollständig gesättigter Böden ein. Da sich bei vielen relevanten Systemen jedoch eine freie Grundwasseroberfläche im Boden einstellt, müsste das Konzept streng genommen auf teilgesättigte Böden mit dem Einfluss eines dritten gasförmigen Anteils erweitert werden. Dabei stellt sich die Frage, inwieweit eine Kapillarwirkung oder das Auftreten von Lufteinschlüssen berücksichtigt werden muss bzw. kann. Da bei einem Boden–Wasser–Luft–Modell eine Inkompresseibilitätsbedingung der gasförmigen Konstituierenden nicht aufrecht erhalten werden kann, ist zu überlegen, wie ein thermodynamisch konsistentes Modell zu verwirklichen ist. SCHREFLER und andere wiesen in diesem Zusammenhang auch darauf hin, dass Lokalisierungsphänomene in wasergesättigten Böden sehr oft in Kombination mit Kavitationserscheinungen auftreten [146, 147]. Ein Modell zur geeigneten Erfassung aller dieser Teilaspekte im Rahmen der Mischungstheorie scheint jedoch sehr kompliziert.

Eine weitere Einschränkung fordert kleine Verformungen bzw. Verzerrungen. Hier bleibt zu prüfen, inwieweit diese Annahme in Lokalisierungszone gerechtfertigt ist. Eine Erweiterung auf geometrische Nichtlinearitäten ist jedoch mit einem sehr viel höheren Aufwand verbunden und erfordert darüber hinaus die Neuformulierung der elastoplastischen Materialmodelle insbesondere im Hinblick auf die Evolutionsbeziehungen der internen Parameter. Ansätze in dieser Richtung finden sich bereits bei MAHNKOPF [108].

Eine wichtige Aufgabe der Zukunft bleibt die konsistente Formulierung von Materialgesetzen im Rahmen der COSSERAT–Theorie. Die verwendeten Ansätze stellen den derzeitigen Stand der Technik dar, sind aber noch nicht genügend durch experimentelle Auswertungen gestützt. Gerade für die Integration der Invarianten des Momentenspannungstensors und des antisymmetrischen Anteils des Spannungstensors in die verallgemeinerte Fließbedingung sind unterschiedliche Ansätze denkbar. Es ist jedoch letztendlich das gemeinsame Problem aller erweiterten Kontinuumsformulierungen, die jeweils neu definierten Parameter aus Experimenten zu bestimmen. Einen Anhaltspunkt zur Festlegung der COSSERAT–Größen l_c und μ_c können dabei Verifikationen mit experimentellen Beobachtungen geben, bei denen die auftretenden Scherbandbreiten gemessen werden und somit einen Rückschluss auf den Einfluss der Mikrostruktur des Materials möglich wird.

Die interessanteste Erweiterung des Anwendungsgebiets bietet die Umsetzung eines komplett in drei Raumdimensionen formulierten Modells. Dazu können die grundlegenden Beziehungen dieser Arbeit unverändert übernommen werden. Solche Modelle, bei denen beliebige 3D–Strukturen

berechnet werden, stellen jedoch einen sehr viel höheren Anspruch an die Rechnerkapazitäten. Die Zahl der Unbekannten nimmt sehr stark zu, was zum Problem der Lösung großer Gleichungssysteme führt. Die Effizienz des Gleichungslösers spielt dann die allein entscheidende Rolle bei der Implementierung und bedingt nach heutiger Sicht die Anwendung von parallelen Mehrgitterverfahren. Darüber hinaus sind zur dreidimensionalen Modellierung wesentlich aufwändigere adaptive Vernetzungsroutinen und Visualisierungstechniken einzusetzen. Die Berechenbarkeit von komplexeren Strukturen ist daher wohl erst in ein oder zwei Rechnergenerationen zu erwarten.

Notation

Die Notation orientiert sich an der indexfreien Tensorschreibweise nach DE BOER [20]. Zweistufige Tensoren ($\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$) sind im Allgemeinen jedoch in der bekannten Form von fetten griechischen Kleinbuchstaben dargestellt und vierstufige Tensoren (\mathbf{C} , \mathbf{E}) durch fette lateinische Großbuchstaben. Auch für Matrizen und Vektoren werden fette Buchstaben verwendet (\mathbf{K} , \mathbf{u}), dagegen stehen normale Buchstaben für skalare Größen (E , ν). Die wichtigsten Bezeichnungen und Symbole sind im Folgenden aufgelistet.

Skalare Größen

| | |
|---|---|
| c | Kohäsion |
| E | E-Modul |
| $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q})$ | Fließfunktion |
| $g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q})$ | plastische Potenzialfunktion |
| h_i | charakteristische Länge eines Elements (Maschenweite) |
| I_1, I_2, I_3 | Invarianten des Spannungstensors |
| J_1, J_2, J_3 | Invarianten des Spannungsdeviatorortensors |
| n^α | Wichtungskoeffizient der Konstituierenden φ^α |
| p | Porenwasserdruck |
| $r(I_1, \theta)$ | Radius der Fließfunktion |
| tol_u, tol_ω | vorgegebene Toleranzschranken |
| dv^α | zur Konstituierenden φ^α gehörendes Partialvolumen |
| α | Integrationsparameter |
| $\dot{\gamma}$ | plastischer Multiplikator (Konsistenzparameter) |
| $\eta_{GG}, \eta_{Fl}, \eta_{\Delta t}, \eta_{\sigma\varepsilon}$ | Fehlerindikatoren |
| φ, ψ | Reibungswinkel, Dilatanzwinkel |
| λ, μ | LAMÉsche Konstanten |
| μ_c | COSSERAT-Schubmodul |
| μ^{FR} | dynamische Viskosität des Porenfluids |
| ν | Querdehnzahl |
| ϱ^α | partielle Dichte der Konstituierenden φ^α |
| $\varrho^{\alpha R}$ | effektive Materialdichte der Konstituierenden φ^α |
| $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, m, \kappa$ | Materialparameter zur Formulierung der Fließfunktion |

Vektoren

| | |
|---|--|
| \mathbf{a}_α | Beschleunigungsfeld der Konstituierenden φ^α |
| \mathbf{b}^α | Volumenkraftdichte der Konstituierenden φ^α |
| \mathbf{E} | Vektor der Dehnungen und Krümmungen an den Integrationspunkten |
| $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_\omega, \mathbf{e}_p$ | absolute Fehlermaße |
| $\mathbf{F}^{u,ext}, \mathbf{F}^{\omega,ext}$ | Vektor der äußeren Kräfte |
| $\mathbf{F}^{u,int}, \mathbf{F}^{\omega,int}$ | Vektor der inneren Kräfte |
| \mathbf{F}^p | Vektor der Porenwasserdruckkräfte |
| \mathbf{F} | Vektor der Fließfunktionswerte an den Integrationspunkten |
| $\mathbf{J}(z)$ | Vektor der Sprunggrößen an den Elementrändern |
| \mathbf{n} | Einheitsvektor der Oberflächennormalen |
| $\mathbf{P}(x, y)$ | Ansatzfunktionen im Elementpatch |
| \mathbf{q} | Vektor der inneren Parameter |
| \mathbf{Q} | Vektor der inneren Parameter an den Integrationspunkten |
| $\mathbf{R}_\sigma, \mathbf{R}_q, \mathbf{R}_f$ | Residuenvektoren des NEWTON–Verfahrens |
| \mathbf{u}_α | Verschiebungsfeld der Konstituierenden φ^α |
| \mathbf{v}_α | Geschwindigkeitsfeld der Konstituierenden φ^α |
| $\mathbf{\Gamma}$ | Vektor der Konsistenzparameter an den Integrationspunkten |
| $\Psi_u, \Psi_\omega, \Psi_p$ | Wichtungsfunktionen |
| Σ | Vektor der (Momenten-) Spannungen an den Integrationspunkten |
| ω | Rotationsfeld |
| ω_c | unabhängiges COSSERAT–Rotationsfeld |

Tensoren und Matrizen

| | |
|---|---|
| \mathbf{A} | konsistent linearisierter Tangentenoperator |
| $\tilde{\mathbf{B}}_{\alpha\beta}$ | Verschiebungs–Verzerrungsmatrizen |
| \mathbf{C}_σ | vierstufiger Stofftensor der $\boldsymbol{\sigma}$ – $\boldsymbol{\varepsilon}$ –Beziehung |
| \mathbf{C}_μ | vierstufiger Stofftensor der $\boldsymbol{\mu}$ – $\boldsymbol{\kappa}$ –Beziehung |
| \mathbf{C}^{ct} | konsistenter Tangentenoperator |
| \mathbf{C}^{ep} | elastoplastische Kontinuumstangente |
| \mathbf{D} | Matrix der plastischen Moduli |
| $\mathbf{D}_u, \mathbf{D}_\omega, \mathbf{D}_p$ | Matrizen der Gradientenoperatoren |
| \mathbf{E} | elastischer Stofftensor |
| $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ | RICCI–Permutationstensor dritter Stufe $\boldsymbol{\mathcal{E}} = e_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ |
| $\mathbf{H}, \bar{\mathbf{H}}$ | Fluid–Fluss Matrizen |

| | |
|--|---|
| I | Fundamentaltensor zweiter Stufe $I = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ |
| II | Fundamentaltensor vierter Stufe $II = \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ |
| \mathbf{k}^S | Permeabilitätstensor des Korngerüsts |
| K_{Darcy} | DARCYsche Durchlässigkeit des Korngerüsts |
| $K_{\alpha\beta}, \bar{K}_{\alpha\beta}$ | Steifigkeitsmatrizen |
| $L, \bar{L}_{\alpha\beta}$ | Koppelmatrizen |
| N_u, N_ω, N_p | Ansatzfunktionen im Ortsbereich |
| Q^F | Fluss des Porenfluids |
| T_u, T_ω, T_p | Ansatzfunktionen für primäre Variable im Zeitbereich |
| $T_\sigma, T_\varepsilon, \dots$ | Ansatzfunktionen für sekundäre Variable im Zeitbereich |
| W_σ, W_q | Matrizen der Wichtungskoeffizienten der numerischen Integration |
| ε | LAGRANGEScher Verzerrungstensor |
| ε_c | COSSERAT–Verzerrungstensor |
| ε^{el} | elastischer Anteil des Verzerrungstensors |
| ε^{pl} | plastischer Anteil des Verzerrungstensors |
| κ | Krümmungstensor |
| κ^{el} | elastischer Anteil des Krümmungstensors |
| κ^{pl} | plastischer Anteil des Krümmungstensors |
| σ | Spannungstensor |
| σ_E^α | effektiver Spannungstensor der Konstituierenden φ^α |
| μ | Momentenspannungstensor |
| z^{ant} | antimetrischer Anteil eines Tensors |
| z^{sym} | symmetrischer Anteil eines Tensors |
| z^{trial} | Testzustand auf der Grundlage elastischen Verhaltens |

Koordinaten

| | |
|-----------------------|---|
| t | Zeitkoordinate |
| T_v | dimensionslose Zeitkoordinate |
| X_α | Referenzpositin der Konstituierenden φ^α |
| \mathbf{x} | Ortsvektor der materiellen Punkte |
| ξ_{ip}, η_{ip} | lokale Raumkoordinaten des Integrationspunkts ip im Element |
| θ | LODE–Winkel |
| τ_{ip} | lokale Zeitkoordinate des Integrationspunkts ip |
| χ_α | Bewegungsfunktion der Konstituierenden φ^α |

Symbole und Operatoren

| | |
|---|---|
| \mathcal{N}_E | |
| \mathbf{A} | FE-Assemblierungsoperator |
| $\mathcal{B}, \partial\mathcal{B}$ | Bezeichnung für den Mischungskörper bzw. seine Oberfläche |
| $\mathbb{E}_\sigma, \partial\mathbb{E}_\sigma$ | elastischer Bereich in \mathbb{S} bzw. seine Grenze |
| \mathcal{I} | Bezeichnung für das zu berechnende Zeitintervall |
| $^{act}\mathbb{J}$ | Menge der aktiven (plastischen) Integrationspunkte |
| \mathcal{N}_E | Anzahl der Elemente |
| \mathcal{N}_{pl} | Anzahl der plastischen Integrationspunkte |
| \mathcal{N}_{Gl} | Anzahl der Gleichungen |
| \mathbb{S} | Hyperraum der Spannungen |
| \mathcal{S} | Raum-Zeit-Kontinuum |
| $\dot{\mathbf{x}}$ | Ableitung nach der Zeitkoordinate |
| $\dot{\mathbf{x}}_\alpha$ | materielle Zeitableitung bezogen auf die Bewegung der Konstituierenden φ^α |
| φ^α | Bezeichnung für die Konstituierende Korngerüst, Porenfluid, etc. |
| $\hat{\rho}^\alpha, \hat{\mathbf{s}}^\alpha, \hat{\mathbf{m}}^\alpha$ | lokale Produktionsterme der Dichte, des Impulses und des Dralls |
| $\bar{\mathbf{z}}$ | eingeprägte Größen, Randbedingungen |
| $\delta\mathbf{z}$ | virtuelle Größe, erste Variation |
| $\hat{\mathbf{z}}$ | Vektor der Freiwerte im Element |
| div | Divergenzoperator |
| grad | partielle Ableitung nach dem Ortsvektor \mathbf{x} |
| Grad $_\alpha$ | partielle Ableitung nach dem Ortsvektor \mathbf{X}_α |
| ∇ | HAMILTON-Operator |
| $\partial_\sigma \mathbf{z}, \partial_{\sigma\sigma} \mathbf{z}$ | erste und zweite partielle Ableitung nach den Spannungen |
| $\Delta\mathbf{z}_n$ | inkrementelle Größen bzw. Zuwächse im Intervall \mathcal{I}_n |
| $[[\mathbf{z}_n]]$ | Sprunggröße in \mathbf{z} zum Zeitpunkt t_n |
| \mathbf{A}^{-1} | inverse Matrix |
| \mathbf{A}^T | transponierte Matrix |
| $\mathbf{A}\mathbf{b}$ | Matrix-Multiplikation |
| $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ | Kreuzprodukt zweier Vektoren |
| $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ | Skalarprodukt einstufiger Tensoren $a_i \mathbf{g}^i \cdot b^j \mathbf{g}_j = a_i b^i$ |
| $\mathbf{a} \cdot \mathbf{B}$ | Skalarprodukt eines einstufigen und eines zweistufigen Tensors $a_i \mathbf{g}^i \cdot B^{jk} \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k = a_i B^{ij} \mathbf{g}_j$ |
| $\mathbf{A} : \mathbf{B}$ | verjüngendes Produkt (lineare Abbildung) $A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j : B^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = A_{ij} B^{ij}$ |
| $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ | dyadisches Produkt $(A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \otimes (B^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) = A^{ij} B^{kl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l$ |

Anhang A

Thermodynamische Bilanzgleichungen

In der vorliegenden Arbeit wurde auf die thermodynamischen Bilanzgleichungen – d.h. die Energieerhaltung und die Entropiegleichung – im Rahmen der Mischungstheorie nicht näher eingegangen. Eine ausführliche Darstellung würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen. Zudem waren die korrekten Formulierungen dieses ersten und zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für Mischungen mit mehreren Konstituierenden lange Zeit sehr umstritten, da sie sich als äußerst komplex erwiesen [21]. Auch die Frage nach der Anzahl und Charakteristik eines kompletten Satzes an Prozessvariablen gab Anlass zu Diskussionen. Schließlich wurde insbesondere eine durchgängige Erfassung der mikropolaren Anteile erst in den Betrachtungen von DIEBELS [49, 50] vorgeschlagen. Da die Definition von (mikropolaren) Materialmodellen thermodynamisch konsistent nur auf der Basis einer Auswertung der Entropiegleichung geschehen kann, wird an dieser Stelle die derzeit allgemein anerkannte Formulierung wiedergegeben.

A.1 Energiebilanz

Im Rahmen der Mischungstheorie weisen lokale Bilanzgleichungen für eine physikalische Größe ψ^α im Bezug zu einer einzelnen Konstituierenden φ^α immer die folgende Struktur auf:

$$\dot{\psi}^\alpha + \psi^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_\alpha - \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}^\alpha - \sigma^\alpha - \hat{\psi}^\alpha = 0, \quad (\text{A.1})$$

wobei $\boldsymbol{\Phi}^\alpha$ den Fluss, σ^α die Zufuhr und $\hat{\psi}^\alpha$ die Produktion der Größe bedeuten. Diese einzelnen Anteile ergeben sich für die Energie als Erhaltungsgröße im Kontext mikropolarer Konstituierender zu:

$$\psi^\alpha = \rho^\alpha \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \frac{1}{2} \rho^\alpha \boldsymbol{\Theta}^\alpha \cdot \boldsymbol{\Omega}_\alpha \cdot \boldsymbol{\Omega}_\alpha, \quad (\text{A.2})$$

$$\boldsymbol{\Phi}^\alpha = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha)^T \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + (\boldsymbol{\mu}^\alpha)^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_\alpha - \mathbf{q}^\alpha, \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma^\alpha = \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \dot{\mathbf{x}}_\alpha + \rho^\alpha \mathbf{c}^\alpha \cdot \boldsymbol{\Omega}_\alpha + \rho^\alpha r^\alpha, \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{\psi}^\alpha = \hat{\varepsilon}^\alpha. \quad (\text{A.5})$$

In dieser Zusammenstellung repräsentieren ρ^α die partielle Dichte, $\hat{\psi}^\alpha$ die Dichteproduktion, ε^α die spezifische innere Energie, $\boldsymbol{\Theta}^\alpha$ das Mikroträgheitsmoment und $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit der einzelnen Konstituierenden. $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ und $\boldsymbol{\mu}^\alpha$ stellen die partiellen Spannungstensoren und Momentenspannungstensoren dar und \mathbf{b}^α bzw. \mathbf{c}^α sind zugehörige Volumenkräfte bzw. Volumenmomente. Schließlich stehen \mathbf{q}^α und r^α für den Wärmefluss und die Strahlungswärme der Konstituierenden. Für die Mischung als Ganzes ergibt sich der Energieerhaltungssatz wiederum aus einer Summation über alle Partialbilanzen. Auf eine Darstellung wird hier jedoch verzichtet.

A.2 Entropieungleichung

Im Gegensatz zu allen anderen Bilanzgleichungen kann eine Entropieaussage in Bezug auf eine einzelne Konstituierende nicht sinnvoll aufrecht erhalten werden. Dies wäre mit einer zu starken Restriktion der thermodynamischen Prozesse verbunden. Aus [49] wird daher der zweite Hauptsatz der Thermodynamik für die Mischung als Ganzes in einer Erweiterung um mikropolare Anteile in der folgenden Formulierung übernommen:

$$\sum_{\alpha} \left[-\varrho^{\alpha} \dot{\psi}^{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}^{\alpha} : (\text{grad } \dot{\boldsymbol{x}}_{\alpha} - \boldsymbol{W}_{\alpha}) + \boldsymbol{\mu}^{\alpha} : \text{grad } \boldsymbol{\Omega}_{\alpha} - \dot{\boldsymbol{x}}_{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}^{\alpha} - (\hat{\boldsymbol{m}}^{\alpha} - \boldsymbol{x} \times \hat{\boldsymbol{s}}^{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\alpha} \right] \quad (\text{A.6})$$

$$- \varrho \eta \dot{\vartheta} - \boldsymbol{h} \cdot \text{grad } \vartheta \geq 0 .$$

Dabei wurde eine einheitliche Temperatur aller Konstituierenden ($\vartheta^{\alpha} = \vartheta$), eine LEGENDRE-Transformation der Gestalt $\psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha} - \vartheta \eta^{\alpha}$ und eine isotrope Mikroträgheit $\boldsymbol{\Theta}^{\alpha}$ angenommen. Desweiteren finden Umsetzungsprozesse zwischen den Konstituierenden keine Berücksichtigung ($\hat{\varrho}^{\alpha} = 0$). Weitere Größen bilden der Kreiseltensor \boldsymbol{W}_{α} , die Impulsproduktion $\hat{\boldsymbol{s}}^{\alpha}$, die Drehimpulsproduktion $\hat{\boldsymbol{m}}^{\alpha}$ sowie der Entropiefluss $\boldsymbol{h}^{\alpha} = \frac{\boldsymbol{q}^{\alpha}}{\vartheta}$. Jeder Ansatz konstitutiver Gleichungen muss die Restriktion dieses zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik streng erfüllen. In der Praxis ergibt sich hier jedoch ein relativ weiter Spielraum, der für die Identifikation eines mikropolaren Materialgesetzes keine allzu engen Schranken setzt.

Anhang B

Integration des viskoplastischen Stoffgesetzes

In Kapitel 5 wurde die Integration des hauptsächlich verwendeten elastoplastischen Stoffgesetzes unter Berücksichtigung eines verfestigenden Materialverhaltens dargestellt. Da zur Regularisierung in einigen Fällen auch ein viskoplastisches Stoffgesetz angewendet werden kann, sei hier kurz auf die Implementierung der zugehörigen Integrationsalgorithmen eingegangen. Da an dieser Stelle lediglich die prinzipielle Vorgehensweise erläutert werden soll, erfolgt die Darstellung am Beispiel der idealen Viskoplastizität bei fest gewählter Fließfläche.

Die Besonderheit bei der Anwendung eines viskoplastischen Stoffgesetzes vom PERZYNA-Typ besteht darin, dass der LAGRANGE-Multiplikator $\dot{\gamma}$ nicht aus der Konsistenzbedingung abgeleitet wird, sondern aus einer eigenen Evolutionsgleichung zu bestimmen ist.

Ausgehend von einem elastischen Prädiktorschritt mit

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} , \quad (\text{B.1})$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp} = 0 \quad (\text{B.2})$$

wird im Falle eines rein elastischen Verhaltens die Trial-Spannung übernommen:

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) \leq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} . \quad (\text{B.3})$$

Verhält sich der Integrationspunkt viskoplastisch, so wird der im Folgenden beschriebene Projektionsalgorithmus verwendet, der mit Hilfe einer Iteration (Iterationsfortschritt i) den korrekten Spannungszustand am Ende des aktuellen Intervalls bestimmt.

- Berechnung des Residuums im Spannungsraum:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} : \left(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp(i)} \right) , \quad (\text{B.4})$$

$$f_{n+1}^{(i)} = f \left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} \right) , \quad (\text{B.5})$$

$$g_{n+1}^{(i)} = g \left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} \right) , \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{\gamma}_{n+1}^{(i)} = \frac{\Delta t}{\eta} f_{n+1}^{(i)} , \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{R}_\sigma^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{C} : \partial_\sigma g_{n+1}^{(i)} \Delta \dot{\gamma}_{n+1}^{(i)} . \quad (\text{B.8})$$

- Konvergenzcheck:

$$\|\mathbf{R}_\sigma^{(i)}\| < tol_\sigma \Rightarrow \text{Beenden der Iteration.} \quad (\text{B.9})$$

- Berechnung des konsistent linearisierten Tangentenoperators:

$$\underline{\boldsymbol{\Xi}}_{n+1}^{(i)} = \left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\eta} \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1}^{(i)} \otimes \partial_{\sigma} g_{n+1}^{(i)} + \Delta \dot{\gamma}_{n+1}^{(i)} \mathbf{C} : \partial_{\sigma\sigma} g_{n+1}^{(i)} \right]. \quad (\text{B.10})$$

- Berechnung der Inkremente:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(i)} = \left[\underline{\boldsymbol{\Xi}}_{n+1}^{(i)} \right]^{-1} : \mathbf{R}_{\sigma}^{(i)}, \quad (\text{B.11})$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp(i)} = \dot{\gamma}_{n+1}^{(i)} \partial_{\sigma} g_{n+1}^{(i)}. \quad (\text{B.12})$$

- Nächster Iterationsschritt:

$$i \leftarrow i + 1. \quad (\text{B.13})$$

Als Ergebnis dieser Iteration erhält man den Zuwachs der viskoplastischen Verzerrungen $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{vp}$ und der Spannungen $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ im aktuellen Intervall. Nach einem Update können die resultierenden absoluten Werte als Startwerte für die Behandlung des nächsten Intervalls herangezogen werden.

Um für das NEWTON-Verfahren der globalen Gleichgewichtsiteration eine quadratische Konvergenzrate zu gewährleisten, muss ein konsistenter Tangentenoperator \mathbf{C}^{ct} formuliert werden. Bei Anwendung eines elastoplastischen Stoffgesetzes wurde die Vorgehensweise ebenfalls in Kapitel 5 beschrieben. Bei dem hier verwendeten viskoplastischen Modell ergibt sich nach Konvergenz der lokalen Iteration:

$$\mathbf{C}^{ct} = \left[\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\eta} \mathbf{C} : \partial_{\sigma} f_{n+1} \otimes \partial_{\sigma} g_{n+1} + \Delta \dot{\gamma}_{n+1} \mathbf{C} : \partial_{\sigma\sigma} g_{n+1} \right]^{-1} : \mathbf{C}. \quad (\text{B.14})$$

Da bei diesem Modell vom Überspannungsprinzip Gebrauch gemacht wird, sind die KUHN-TUCKER-Bedingungen nach Konvergenz der Iteration im Allgemeinen nicht erfüllt. Die Anwendung des in Abschnitt 6.4.4 formulierten Fehlerindikators ist somit nicht möglich, da dort die Annahme $\dot{\gamma} f = 0$ an allen Integrationspunkten vorausgesetzt wurde. Eine adaptive Schrittweitensteuerung muss demzufolge auf die Auswertung des zeitlichen Diskretisierungsfehlers alleine beschränkt bleiben.

Anhang C

Eigenschaften der Time-Discontinuous-Galerkin-Verfahren

C.1 Anwendung auf die Testgleichung

Bei der Auswahl eines Integrationsverfahrens im Zeitbereich spielen nicht zuletzt die Genauigkeits- und Stabilitätseigenschaften eine entscheidende Rolle. Bereits in Kapitel 5 wurde unter anderem aus diesem Grund im Bezug zur Lösung des Konsolidierungsproblems die Entscheidung zu Gunsten der Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahren getroffen. Die Grundlagen zur Ableitung der Stabilitätsfunktionen bei Anwendung linearer und quadratischer Approximationen sind in diesem Abschnitt übersichtsmäßig dargestellt.

Den Ausgangspunkt bildet die Testfunktion von DAHLQUIST

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t) \quad \begin{cases} \lambda \in \mathbb{C} \\ \Re(\lambda) \leq 0 \\ y(0) = 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Wird die Time-Discontinuous-GALERKIN-Methode auf diese Testgleichung angewendet, so ergibt sich mit Hilfe der Methode der gewichteten Residuen und der Wichtungsfunktion Ψ die folgende variationelle Gleichung:

$$B(\Psi, y) = L(\Psi) \quad (\text{C.2})$$

mit

$$B(\Psi, y) = \int_{\mathcal{I}_n} \Psi(t) (\dot{y}(t) - \lambda y(t)) dt + \Psi_n^+ y_n^+, \quad (\text{C.3})$$

$$L(\Psi) = \Psi_n^+ y_n^-. \quad (\text{C.4})$$

Eine Transformation auf die lokale Koordinate $\tau \in [-1, 1]$ für das Intervall $\mathcal{I}_n = [t_n, t_{n+1}]$ führt mit $h = \Delta t = t_{n+1} - t_n$ und

$$t = \frac{h\tau + t_{n+1} + t_n}{2} \quad (\text{C.5})$$

zu

$$dt = \frac{1}{2} h d\tau. \quad (\text{C.6})$$

Damit kann die Beziehung (C.3) überführt werden in

$$B(\Psi, y) = \int_{-1}^1 \Psi(\tau) \dot{y}(\tau) d\tau - \frac{z}{2} \int_{-1}^1 \Psi(\tau) y(\tau) d\tau + \Psi_n^+ y_n^+, \quad (\text{C.7})$$

wobei $z = \lambda h$ bedeutet und $\dot{(\cdot)} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial\tau}$ die Ableitung nach der lokalen Koordinate τ darstellt.

Die Genauigkeitseigenschaften eines Integrationsverfahrens, das auf die Testgleichung (C.1) angewendet wird, können mit Hilfe der bekannten exakten Lösung

$$y(t) = e^{\lambda t} \quad (\text{C.8})$$

und sogenannten PADÉ-Approximationen bestimmt werden [12, 56]. Wird eine Funktion $f(z)$ durch eine Potenzreihe repräsentiert

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, \quad (\text{C.9})$$

so kann die PADÉ-Approximation als Bruch zweier Polynome in folgender Form geschrieben werden:

$$P_{l,m} = \frac{A_{l,m}(z)}{B_{l,m}(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_l z^l}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}. \quad (\text{C.10})$$

Dabei müssen die auftretenden Koeffizienten geeignet gewählt werden. Die für die folgenden Betrachtungen wesentliche Eigenschaft dieser Funktion besteht in der Aussage über den lokalen Abbruchfehler

$$|P_{l,m} - f(z)| = \mathcal{O}(z^{l+m+1}). \quad (\text{C.11})$$

Der globale Abbruchfehler, der die Genauigkeit eines Integrationsverfahrens charakterisiert, setzt sich aus der Summe aller lokalen Abbruchfehler zusammen und ist somit indirekt proportional zur Schrittweite h . Seine Ordnung ist demzufolge um eine Stufe niedriger $\Rightarrow \mathcal{O}(z^{l+m})$.

C.2 Linear-diskontinuierliche Ansatzfunktionen

Werden linear-diskontinuierliche Ansatzfunktionen vorausgesetzt, so können $y(\tau)$, $\dot{y}(\tau)$ sowie $\Psi(\tau)$ im Intervall \mathcal{I}_n folgendermaßen approximiert werden:

$$\begin{aligned} y(\tau) &= T_1(\tau) y_n^+ + T_2(\tau) y_{n+1}^-, \\ \dot{y}(\tau) &= \dot{T}_1(\tau) y_n^+ + \dot{T}_2(\tau) y_{n+1}^-, \\ \Psi(\tau) &= T_1(\tau) \Psi_n^+ + T_2(\tau) \Psi_{n+1}^-. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned} T_1(\tau) &= \frac{1}{2}(1 - \tau), & \dot{T}_1(\tau) &= -\frac{1}{2}, \\ T_2(\tau) &= \frac{1}{2}(1 + \tau), & \dot{T}_2(\tau) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

und den Integralauswertungen

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_1 \dot{T}_1 d\tau &= -\frac{1}{2}, & \int_{-1}^1 T_1 \dot{T}_2 d\tau &= \frac{1}{2}, & \int_{-1}^1 T_2 \dot{T}_1 d\tau &= -\frac{1}{2}, & \int_{-1}^1 T_2 \dot{T}_2 d\tau &= \frac{1}{2}, \\ \int_{-1}^1 T_1 T_1 d\tau &= \frac{2}{3}, & \int_{-1}^1 T_1 T_2 d\tau &= \frac{1}{3}, & \int_{-1}^1 T_2 T_2 d\tau &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

folgt nach Einsetzen in (C.2) ein System zur Bestimmung der Unbekannten y_n^+ und y_{n+1}^- aus dem vorgegebenen Anfangswert y_n^- :

$$\begin{bmatrix} 3-2z & 3-z \\ -3-z & 3-2z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n^+ \\ y_{n+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6y_n^- \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.15})$$

Wird dieses Gleichungssystem gelöst und anschließend y_{n+1}^- in Relation zu y_n^- gesetzt, so ergibt sich die gesuchte Stabilitätsfunktion. In diesem Fall folgt:

$$y_{n+1}^- = R_1(z) y_n^- = \underbrace{\frac{2(3+z)}{z^2-4z+6}}_{\text{Stabilitätsfunktion}} y_n^-. \quad (\text{C.16})$$

Da $R(z)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} |R_1(z)| &\rightarrow 0 & \text{bei} & \Re(z) \rightarrow -\infty, \\ |R_1(z) - e^z| &= \mathcal{O}(h^{2+1+1}) = \mathcal{O}(h^4) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

ergibt sich die Eigenschaft der L -Stabilität. Ein Vergleich zeigt, dass $R_1(z)$ identisch mit der PADÉ-Approximation $P_{1,2}$ der Exponentialfunktion ist. Es kann deshalb aus Gleichung (C.11) eine Genauigkeit des Verfahrens von dritter Ordnung abgelesen werden. Um eine Aussage über die Monotonieeigenschaft zu treffen, muss die Stabilitätsfunktion genauer betrachtet werden. Der Zähler von $R_1(z)$ besitzt eine reelle Nullstelle bei $z = -3$, während der Nenner für alle reellen $z < 0$ positiv ist. Das TDG-Verfahren ist deshalb im Allgemeinen nicht monoton. Für Werte von $-3 < z < 0$, d.h. für Schrittweiten h , die im Bezug zum Parameter λ klein genug gewählt werden kann die Monotonieeigenschaft jedoch gewährleistet werden ($z = -3$ bedeutet, dass sich bei einem Parameter von $\lambda = -2$ eine kritische Schrittweite von $h = 1.5$ berechnet). Ist diese Bedingung nicht eingehalten ergibt sich eine numerische Lösung, die Oszillationen zwischen positiven und negativen Werten aufweist.

C.3 Quadratisch-diskontinuierliche Ansatzfunktionen

Sollen quadratisch-diskontinuierliche Ansatzfunktionen im Zeitbereich verwendet werden, so ist neben den diskreten Stützstellen am Anfang und am Ende des Zeitintervalls eine zusätzliche Unbekannte zu berücksichtigen. Demzufolge kennzeichnet $y_{n+\frac{1}{2}}$ den diskreten Wert an der Stelle der Intervallmitte $t = \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1})$. Die parabelförmigen Ansätze können dann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} y(\tau) &= T_1(\tau) y_n^+ + T_2(\tau) y_{n+\frac{1}{2}} + T_3(\tau) y_{n+1}^-, \\ \dot{y}(\tau) &= \dot{T}_1(\tau) y_n^+ + \dot{T}_2(\tau) y_{n+\frac{1}{2}} + \dot{T}_3(\tau) y_{n+1}^-, \\ \Psi(\tau) &= T_1(\tau) \Psi_n^+ + T_2(\tau) \Psi_{n+\frac{1}{2}} + T_3(\tau) \Psi_{n+1}^-. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Dabei werden für T_1 , T_2 und T_3 und deren Ableitungen im lokalen Koordinatensystem die Formen

$$\begin{aligned} T_1(\tau) &= \frac{1}{2}(\tau^2 - \tau), & \dot{T}_1(\tau) &= \tau - \frac{1}{2}, \\ T_2(\tau) &= -\tau^2 + 1, & \dot{T}_2(\tau) &= -2\tau, \\ T_3(\tau) &= \frac{1}{2}(\tau^2 + \tau), & \dot{T}_3(\tau) &= \tau + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

verwendet. Die Auswertung der Integrale im lokalen Intervall $[-1, 1]$ ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_1 \dot{T}_1 d\tau &= -\frac{1}{2}, & \int_{-1}^1 T_1 \dot{T}_2 d\tau &= \frac{2}{3}, & \int_{-1}^1 T_1 \dot{T}_3 d\tau &= -\frac{1}{6}, \\ \int_{-1}^1 T_2 \dot{T}_1 d\tau &= -\frac{2}{3}, & \int_{-1}^1 T_2 \dot{T}_2 d\tau &= 0, & \int_{-1}^1 T_2 \dot{T}_3 d\tau &= \frac{2}{3}, \\ \int_{-1}^1 T_3 \dot{T}_1 d\tau &= \frac{1}{6}, & \int_{-1}^1 T_3 \dot{T}_2 d\tau &= -\frac{2}{3}, & \int_{-1}^1 T_3 \dot{T}_3 d\tau &= \frac{1}{2}, \\ \int_{-1}^1 T_1 T_1 d\tau &= \frac{4}{15}, & \int_{-1}^1 T_1 T_2 d\tau &= \frac{2}{15}, & \int_{-1}^1 T_1 T_3 d\tau &= -\frac{1}{15}, \\ \int_{-1}^1 T_2 T_2 d\tau &= \frac{16}{15}, & \int_{-1}^1 T_2 T_3 d\tau &= \frac{2}{15}, & \int_{-1}^1 T_3 T_3 d\tau &= \frac{4}{15}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Einsetzen in die Grundgleichung (C.2) führt schließlich zu einem System zur Bestimmung der Unbekannten y_n^+ , $y_{n+\frac{1}{2}}$ und y_{n+1}^- aus dem vorgegebenen Anfangswert y_n^- :

$$\begin{bmatrix} 15 - 4z & 20 - 2z & -5 + z \\ -10 - z & -8z & 10 - z \\ 5 + z & -20 - 2z & 15 - 5z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n^+ \\ y_{n+\frac{1}{2}} \\ y_{n+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30y_n^- \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.21})$$

Die Relation zwischen y_{n+1}^- und y_n^- ergibt schließlich wiederum die gesuchte Stabilitätsfunktion:

$$y_{n+1}^- = R_2(z) y_n^- = \underbrace{\frac{3(z^2 + 8z + 20)}{-z^3 + 9z^2 - 36z + 60}}_{\text{Stabilitätsfunktion}} y_n^-. \quad (\text{C.22})$$

Durch Verifikation von

$$\begin{aligned} |R_2(z)| &\rightarrow 0 \quad \text{bei} \quad \Re(z) \rightarrow -\infty, \\ |R_2(z) - e^z| &= \mathcal{O}(h^{2+3+1}) = \mathcal{O}(h^6) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

kann für das TDG-Verfahren mit quadratisch-diskontinuierlichen Ansatzfunktionen die Eigenschaft der L -Stabilität gezeigt werden. Da $R_2(z)$ mit der PADÉ-Approximation $P_{2,3}$ der Exponentialfunktion übereinstimmt resultiert nach Gleichung (C.11) eine Genauigkeit fünfter Ordnung. Nachdem der Zähler von $R_2(z)$ zwei komplexe Nullstellen und der Nenner zwei komplexe und eine positive reelle Nullstelle aufweisen, kann aus $R_2(0) = 1$ geschlossen werden:

$$R_2(z) > 0 \quad \forall \Re(z) < 0 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} < y_n. \quad (\text{C.24})$$

Daraus folgt die Eigenschaft der Monotonie für dieses Integrationsschema unabhängig von der verwendeten Schrittweite.

Betrachtet man die gezeigten Eigenschaften der Time-Discontinuous-GALERKIN-Verfahren, so ergeben sich im Hinblick auf die Lösung steifer Differenzialgleichungen wesentliche Vorteile. Durch das GALERKINSche Wichtungskonzept und die numerische Dissipation können für das quasi-statische Konsolidierungsproblem sowohl gute Stabilitätseigenschaften (L -Stabilität) als auch gute Genauigkeitseigenschaften gewährleistet werden. Oszillationen im Zeitbereich werden somit konsequent vermieden.

Literaturverzeichnis

- [1] DIN V 4017-100: *Baugrund; Berechnung des Grundbruchwiderstands von Flachgründungen. Teil 100: Berechnung nach dem Konzept mit Teilsicherheitsbeiwerten*, Vornorm, April 1996.
- [2] DIN V 4084-100: *Baugrund; Böschungs- und Geländebruchberechnungen. Teil 100: Berechnung nach dem Konzept mit Teilsicherheitsbeiwerten*, Vornorm, April 1996.
- [3] M.U. ARSLAN: *Zur Frage des elastoplastischen Verformungsverhaltens von Sand*. Mitteilungen der Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau 23, Technische Hochschule Darmstadt, 1980.
- [4] H. ASKES: *Advanced spatial discretisation strategies for localised failure – Mesh adaptivity and meshless methods*. Dissertation, Technische Universität Delft, 2000.
- [5] I. BABUŠKA und A. MILLER: *A-posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method*. Technical Report BN-968, University of Maryland, Institute for Physical Science and Technology, 1981.
- [6] I. BABUŠKA und A. MILLER: *The post-processing approach in the finite element method – Part I: Calculation of displacements, stresses and other higher derivatives of the displacements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20:1085–1109, 1984.
- [7] I. BABUŠKA und A. MILLER: *The post-processing approach in the finite element method – Part II: The calculation of stress intensity factors*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20:1111–1129, 1984.
- [8] I. BABUŠKA und A. MILLER: *The post-processing approach in the finite element method – Part III: A posteriori error estimates and adaptive Mesh refinement*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20:2311–2324, 1984.
- [9] I. BABUŠKA und W. C. RHEINBOLDT: *A-posteriori error estimates for the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12:1597–1615, 1978.
- [10] I. BABUŠKA und W. C. RHEINBOLDT: *Error estimates for adaptive finite element computations*. SIAM Journal for Numerical Analyses, 15:736–754, 1978.
- [11] M. BAI und Y. ABOUSLEIMAN: *Thermoporoelastic coupling with application to consolidation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21:121–132, 1997.
- [12] G.A. BAKER und P. GRAVES-MORRIS: *Padé Approximants, Part I: Basic Theory*. Addison-Wesley, 1981.
- [13] J. BARLOW: *Optimal stress location in the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10:243–251, 1976.

- [14] J. BARLOW: *More on optimal stress points – reduced integration, element distortions and error estimation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28:1487–1504, 1989.
- [15] K.-J. BATHE: *Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, 1986.
- [16] Z.P. BAŽANT: *Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions*. ASCE Journal for Engineering Mechanics, 120:1101–1113, 1994.
- [17] Z.P. BAŽANT und F.-B. LIN: *Non-local yield limit degradation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26:1805–1823, 1988.
- [18] M.A. BIOT: *General theory of three-dimensional consolidation*. Journal for Applied Physics, 12:155–164, 1941.
- [19] M.A. BIOT: *General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material*. Journal for Applied Mechanics, 23:91–96, 1956.
- [20] R. DE BOER: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer Verlag, Berlin, 1982.
- [21] R. DE BOER: *Theorie poröser Medien – Historische Entwicklung und gegenwärtiger Stand*. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 53, Universität-GH-Essen, 1986.
- [22] R. DE BOER und W. EHLERS: *Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme*. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 40, Universität-GH-Essen, 1986.
- [23] R. DE BOER, W. EHLERS, S. KOWALSKI und J. PLISCHKA: *Porous media, a survey of different approaches*. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 54, Universität-GH-Essen, 1991.
- [24] B. BOROOMAND und O.C. ZIENKIEWICZ: *Recovery by equilibrium in patches (REP)*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:137–164, 1997.
- [25] H. BOROWICKA: *Ein statisch einwandfreies Verfahren zur Ermittlung der Standsicherheit einer Böschung*. Bauingenieur, 45:307–313, 1970.
- [26] R. DE BORST: *Computation of post-bifurcation and post-failure behaviour of strain-softening solids*. Computers and Structures, 25(2):211–224, 1986.
- [27] R. DE BORST: *Non-linear analysis of frictional materials*. Dissertation, Technische Universität Delft, 1986.
- [28] R. DE BORST: *Bifurcations in finite element models with a non-associated flow law*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 12:99–116, 1988.
- [29] R. DE BORST: *Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum*. Engineering Computations, 8:317–332, 1991.
- [30] R. DE BORST und H.-B. MÜHLHAUS: *Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35:521–539, 1992.
- [31] R. DE BORST, H.-B. MÜHLHAUS, J. PAMINJ und L.J. SLUYS: *Computational modelling of localisation of deformation*. In: D.R.J. OWEN et al. (Herausgeber): *Computational Plasticity I*, Seiten 483–508. Pineridge, Swansea, 1992.

- [32] R. DE BORST, L.J. SLUYS, H.-B. MÜHLHAUS und J. PAMIN: *Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation*. Engineering Computations, 10:99–121, 1993.
- [33] R.M. BOWEN: *Towards a thermodynamics and mechanics of mixtures*. Archive of Rational and Mechanical Analyses, 24:370–403, 1967.
- [34] R.M. BOWEN: *Theory of mixtures*. In: A.C. ERINGEN (Herausgeber): *Continuum Physics*, Band III, Seiten 1–127. Academic Press, New York, 1976.
- [35] K.-F. BUSCH, L. LUCKNER und K. TIEMER: *Geohydraulik*. Gebrüder Borntraeger, Berlin, 3. Auflage, 1993.
- [36] J.P. CARTER, J.R. BOOKER und J.C. SMALL: *The analysis of finite elasto–plastic consolidation*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 3:107–129, 1979.
- [37] E. und F. COSSERAT: *Théorie des Corps Déformables*. Herman et fils, Paris, 1909.
- [38] H. CRAMER: *Numerische Behandlung nichtlinearer Probleme der Boden- und Felsmechanik mit elastoplastischen Stoffgesetzen*. Dissertation, Universität Bochum, 1980.
- [39] H. CRAMER, R. FINDEISS, G. STEINL und W. WUNDERLICH: *An approach to the analysis of localization in granular materials by extended continuum formulations*. In: S.R. IDELSOHN, E. OÑATE und E.N. DVORKIN (Herausgeber): *World Congress on Computational Mechanics (CD-ROM)*, Buenos Aires, 1998.
- [40] H. CRAMER, R. FINDEISS, G. STEINL und W. WUNDERLICH: *An approach to the adaptive finite element analysis in associated and non-associated plasticity considering localization phenomena*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 176(1–4):187–202, 1999.
- [41] H. CRAMER, R. FINDEISS und W. WUNDERLICH: *Elastic–plastic consolidation analysis of saturated soil by a time discontinuous method*. In: W. WUNDERLICH (Herausgeber): *European Congress on Computational Mechanics (CD-ROM)*, München, 1999.
- [42] H. CRAMER, M.J. PRABUCKI und W. WUNDERLICH: *Modellierung wassergesättigter Böden bei der Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Bauwerk und Baugrund*. In: *SFB 151/FSP 30 Gemeinschaftsseminar Baudynamik, Bericht 24–89*, Seiten 71–76, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, 1989.
- [43] H. CRAMER, M. RUDOLPH, G. STEINL und W. WUNDERLICH: *Adaptive analysis of elastic–plastic problems in soil mechanics*. In: PAHL & WERNER (Herausgeber): *Computing in Civil and Building Engineering*, Seiten 635–641. Balkema, Rotterdam, 1995.
- [44] H. CRAMER, M. RUDOLPH, G. STEINL und W. WUNDERLICH: *A hierarchical adaptive finite element strategy for elastic–plastic problems*. In: B.H.V. TOPPING (Herausgeber): *Advances in Finite Element Technology*, Seiten 292–308. Civil-Comp Press, Edinburgh, 1996.
- [45] H. CRAMER und W. WUNDERLICH: *Finite-Element-Modellierung des mechanischen Verhaltens von Mehrphasengemischen in der Bodenmechanik*. ZAMM, 71(6):T685–T687, 1991.
- [46] M.A. CRISFIELD: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Band 1: Essentials. John Wiley & Sons, 1991.

- [47] M.A. CRISFIELD: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Band 2: Advanced Topics. John Wiley & Sons, 1997.
- [48] C.S. DESAI: *Single surface yield and potential function plasticity models: A review*. Computers and Geotechnics, 7:319–335, 1989.
- [49] S. DIEBELS: *Grundgleichungen für Mischungen mit mikropolaren Konstituierenden*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 77:S73–S74, 1997.
- [50] S. DIEBELS: *Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien*. Habilitationsschrift, Universität Stuttgart, 2000.
- [51] S. DIEBELS und W. EHLERS: *On basic equations of multiphase micropolar materials*. Technische Mechanik, 16:77–88, 1996.
- [52] S. DIEBELS, P. ELLSIEPEN und W. EHLERS: *A two-phase model for viscoplastic geomaterials*. Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen) 96-II-6, Universität Stuttgart, 1996.
- [53] D.C. DRUCKER: *Plasticity*. In: J.N. GOODIER und N.J. HOFF (Herausgeber): *Structural Mechanics*, Seiten 407–445. Pergamon Press, London, 1960.
- [54] D.C. DRUCKER: *Concept of path independence and material stability for soils*. In: *Proc. Int. Symp. of Rheology and Soil Mechanics*, Seiten 23–46, Grenoble, 1964. Springer Verlag.
- [55] G. DUVAUT und J.L. LIONS: *Les Inequations en Mecanique et en Physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [56] B.L. EHLE: *A-stable methods and Padé approximations to the exponential*. SIAM Journal of Mathematical Analysis, Seiten 671–680, 1973.
- [57] W. EHLERS: *Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie*. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 47, Universität–GH–Essen, 1989.
- [58] W. EHLERS: *Constitutive equations for granular materials in geomechanical context*. In: K. HUTTER (Herausgeber): *Continuum Mechanics in Environmental Science*, Seiten 313–402. Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [59] W. EHLERS: *A single surface yield function for geomaterials*. Archive of Applied Mechanics, 65:246–259, 1995.
- [60] W. EHLERS und W. VOLK: *On shear band localization phenomena induced by elasto-plastic consolidation of fluid-saturated soils*. In: D.J.R. OWEN, E. OÑATE und E. HINTON (Herausgeber): *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, Band 2, Seiten 1657–1664. CIMNE, 1997.
- [61] W. EHLERS und W. VOLK: *On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar elasto-plastic solid material*. International Journal of Solids and Structures, 35(34–35):4597–4617, 1998.
- [62] P. ELLSIEPEN: *Zeit- und ortsadaptive Verfahren angewandt auf Mehrphasenprobleme poröser Medien*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [63] P. ELLSIEPEN, W. EHLERS und W. VOLK: *Localization phenomena in saturated and empty frictional porous media computed by time- and space-adaptive methods*. In: W. WUNDERLICH (Herausgeber): *European Congress on Computational Mechanics (CD-ROM)*, München, 1999.

- [64] K. ERIKSSON, D. ESTEP, P. HANSBO und C. JOHNSON: *Introduction to adaptive methods for differential equations*. Acta Numerica, Seiten 105–158, 1995.
- [65] K. ERIKSSON, D. ESTEP, P. HANSBO und C. JOHNSON: *Computational Differential Equations*. Cambridge University Press, 1996.
- [66] K. ERIKSSON und C. JOHNSON: *Error estimates and automatic time step control for nonlinear parabolic problems*. SIAM Journal of Numerical Analyses, 24:12–23, 1987.
- [67] A.C. ERINGEN: *Theory of micropolar elasticity*. In: H. LEIBOWITZ (Herausgeber): *Fracture, an Advanced Treatise*, Seiten 621–729. Academic Press, New York, 1968.
- [68] A.C. ERINGEN und C.B. KAFADAR: *Continuum Physics*, Band IV, Kapitel Polar Field Theories, Seiten 1–73. Academic Press, New York, 1976.
- [69] D. ESTEP und S. LARSON: *The discontinuous Galerkin method for semilinear parabolic problems*. Modél. Math. Anal. Numér., 26:35–54, 1992.
- [70] W. FELLENIUS: *Erdstatische Berechnungen mit Reibung und Kohäsion und unter Annahme kreiszylindrischer Gleitflächen*. W. Ernst & Sohn, Berlin, 1927.
- [71] O.K. FRÖHLICH: *Sicherheit gegen Rutschung einer Erdmasse auf kreiszylindrischer Gleitfläche mit Berücksichtigung der Spannungsverteilung in dieser Fläche*. Federhofer–Girkmann–Gedenkschrift, Wien, 181, 1950.
- [72] L. GALLIMARD, P. LADEVÈZE und L.P. PELLE: *Error estimation and adaptivity in elastoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39:189–217, 1996.
- [73] B. GATMIRI und P. DELAGE: *A formulation of fully coupled thermal–hydraulic–mechanical behaviour of saturated porous media – numerical approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21:199–225, 1997.
- [74] J. GHABOUSSI und E.L. WILSON: *Flow of compressible fluid in porous elastic media*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 5:419–442, 1973.
- [75] A.E. GROEN: *Three–dimensional elasto–plastic analysis of soils*. Dissertation, Technische Universität Delft, 1997.
- [76] G. GUDEHUS: *Stoffgesetze in der Bodenmechanik*. In: U. SMOLTCZYK (Herausgeber): *Grundbau Taschenbuch*, Band 1, Seiten 159–187. W. Ernst & Sohn, Berlin, 5. Auflage, 1996.
- [77] P. HANSBO und C. JOHNSON: *Adaptive finite element methods for elastostatic contact problems*. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, 113:135–149, 1999.
- [78] J.B. HANSEN und H. LUNDGREN: *Hauptprobleme der Bodenmechanik*. Springer–Verlag, Berlin, 1960.
- [79] H. HENCKY: *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 4:323–334, 1924.
- [80] R. HILL: *A general theory of uniqueness and stability in elastic–plastic solids*. Journal for the Mechanics and Physics of Solids, 6:236–249, 1958.
- [81] E. HINTON und J.S. CAMPBELL: *Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least square method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8:461–480, 1974.

- [82] J. HUCKFELDT: *Thermomechanik hydratisierenden Betons – Theorie, Numerik und Anwendung*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1993.
- [83] J. HUCKFELDT: *Zeitintegration mit Galerkinscher Wichtung?* Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 73(7/8):T689–T693, 1993.
- [84] T.J.R. HUGHES und K.S. PISTER: *Consistent linearization in mechanics of solids and structures*. Computers and Structures, 8:391–397, 1978.
- [85] G.M. HULBERT: *A unified set of single-step asymptotic annihilation algorithms for structural dynamics*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 113:1–9, 1994.
- [86] G.M. HULBERT und T.J.R. HUGHES: *Space-time finite element methods for second order hyperbolic equations*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 84:327–348, 1990.
- [87] C. JOHNSON und P. HANSBO: *Adaptive finite element methods in computational mechanics*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 101:143–181, 1992.
- [88] D.W. KELLY, J.P. GAGO, O.C. ZIENKIEWICZ und I. BABUŠKA: *A-posteriori error analysis and adaptive process in the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19:1593–1656, 1983.
- [89] Y. KLAUSNER: *Fundamentals of Continuum Mechanics of Soils*. Springer Verlag, London, 1991.
- [90] F. KÖNIG: *Stoffmodelle für isotrop-kinematisch verfestigende Böden bei nichtmonotoner Belastung und instationären Porenwasserdrücken*. Dissertation, TU Braunschweig, 1985.
- [91] H.D. KREY: *Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes*. W. Ernst & Sohn, 3. Auflage, 1926.
- [92] T. KVAMSDAL und K.M. OKSTAD: *Error estimation based on superconvergent patch recovery using statically admissible stress fields*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 42:443–472, 1998.
- [93] P.V. LADE: *Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces*. International Journal of Solids and Structures, 13:1019–1035, 1977.
- [94] P.V. LADE und J.M. DUNCAN: *Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soils*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 101:1037–1053, 1975.
- [95] P.V. LADE und M.K. KIM: *Single hardening constitutive model for frictional materials II – Yield criterion and plastic work contours*. Computers and Geotechnics, 6:13–29, 1988.
- [96] P.V. LADE und M.K. KIM: *Single hardening constitutive model for frictional materials III – Comparisons with experimental data*. Computers and Geotechnics, 6:31–47, 1988.
- [97] R. LARSSON: *Numerical simulation of plastic localization*. Dissertation, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1990.
- [98] R. LARSSON und K. RUNESSON: *Plastic localization captured by discontinuous displacement approximation*. In: D.R.J. OWEN ET AL. (Herausgeber): *Proceedings of the Third International Conference on Computational Mechanics*, Seiten 605–616, Swansea, 1992. Pineridge Press.

- [99] R. LARSSON, K. RUNESSON und N.S. OTTOSEN: *Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36:2087–2105, 1993.
- [100] T. LEGE, O. KOLDITZ und W. ZIELKE: *Strömungs- und Transportmodellierung*. Springer Verlag, Berlin, 1996.
- [101] R.W. LEWIS und B.A. SCHREFLER: *The Finite Element Method in the Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley & Sons, 1987.
- [102] R.W. LEWIS, B.A. SCHREFLER und N.A. RAHMAN: *A finite element analysis of multi-phase immiscible flow in deforming porous media for subsurface system*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 14:135–149, 1998.
- [103] L.Y. LI und P. BETTES: *Notes on optimal criteria in adaptive finite element computations*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 11:911–915, 1995.
- [104] H. LIPPMANN: *Eine Cosserat Theorie des plastischen Fließens*. Acta Mechanica, 8:255–284, 1969.
- [105] H. LIPPMANN: *Cosserat plasticity and plastic spin*. Applied Mechanics Review, 11:753–762, 1995.
- [106] X.D. LI: *Adaptive Finite Element Procedures in Structural Dynamics*. Dissertation, Chalmers University of Technology, 1996.
- [107] J. LUBLINER: *On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 7:237–254, 1972.
- [108] D. MAHNKOPF: *Lokalisierung fluidgesättigter poröser Festkörper bei finiten elastoplastischen Deformationen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2000.
- [109] H. MATSUOKA und T. NAKAI: *Stress-strain relationship of soil based on the SMP*. In: *Proceedings of Speciality Session 9*, 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Seiten 153–162, Tokio, 1977.
- [110] G.G. MEYERHOF: *The ultimate bearing capacity of foundations*. Géotechnique, 2:301–318, 1951.
- [111] C. MIEHE und J. SCHRÖDER: *Post-critical discontinuous localization analysis of small-strain softening elastoplastic solids*. Archive of Applied Mechanics, 64:267–285, 1994.
- [112] W. MIZUNO: *On the bearing power of soils*. In: *Proceedings of the Second International Conference of Soil Mechanics*, Band III, Seiten 44–53, Rotterdam, 1948.
- [113] H.-B. MÜHLHAUS: *Application of Cosserat theory in numerical solutions of limit load problems*. Ingenieur-Archiv, 59:124–137, 1989.
- [114] H.-B. MÜHLHAUS und I. VARDOULAKIS: *The thickness of shearbands in granular materials*. Géotechnique, 37:271–283, 1987.
- [115] I. MÜLLER: *A Thermodynamic Theory of Mixtures of Fluids*. Archive of Rational and Mechanical Analyses, 28:1–39, 1968.
- [116] A. NEEDLEMAN und A. TVERGAARD: *Finite element analysis of localization in plasticity*. In: *Finite Elements: Special Problems in Solid Mechanics V*. Prentice Hall, New Jersey, 1984.

- [117] M. NEILSEN und H. SCHREYER: *Bifurcations in elastic-plastic materials*. International Journal of Solids and Structures, 30:521–544, 1993.
- [118] M. ORTIZ und E.P. POPOV: *Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21:1561–1576, 1985.
- [119] M. ORTIZ und J.J. QUIGLEY: *Element design and adaptive meshing in strain localization problems*. In: D.R.J. OWEN et al. (Herausgeber): *Computational Plasticity II*, Seiten 213–236. Pineridge, Swansea, 1989.
- [120] J. PAMIN: *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*. Dissertation, Technische Universität Delft, 1994.
- [121] J.M. PANESSO, E. STEIN und P. STEINMANN: *Localization and failure analysis of fluid saturated cohesive and granular soils*. In: S. IDELSOHN, E. OÑATE und E. DVORKIN (Herausgeber): *Computational Mechanics – New Trends and Applications*, CIMNE, Barcelona, 1998.
- [122] A. PAZY: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [123] D. PERIĆ, J. YU und D.R.J. OWEN: *On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids: applications to the numerical simulation of strain localization in classical and Cosserat continua*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37:1351–1379, 1994.
- [124] P. PERZYNA: *Fundamental problems in viscoplasticity*. In: *Advances in Applied Mechanics*, Band 9. Academic Press, New York, 1966.
- [125] P. PERZYNA: *Thermodynamic theory of viscoplasticity*. In: *Advances in Applied Mechanics*, Band 11. Academic Press, New York, 1971.
- [126] L. PLANK: *Netzadaption und Mehrgitterverfahren für die numerische Behandlung von Faltwerken*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich Mechanik Nr. F90/3, Universität Hannover, 1990.
- [127] L. PRANDTL: *Über die Härte plastischer Körper*. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften, 1920.
- [128] J. PRAVIDA: *Zur nichtlinearen adaptiven Finite-Element-Analyse von Stahlbetonscheiben*. Dissertation, Technische Universität München, 1999.
- [129] J.H. PREVORST: *Consolidation of anelastic porous media*. Journal of the Engineering Mechanical Division, 107:169–186, 1981.
- [130] E. RANK: *A-posteriori-Fehlerabschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite-Element- und Randintegralelement-Methoden*. Dissertation, TU München, 1985.
- [131] E. RANK, A. DÜSTER, G. STEINL und W. WUNDERLICH: *A combination of an h- and a p-version of the finite element method for elastic-plastic problems*. In: W. WUNDERLICH (Herausgeber): *European Congress on Computational Mechanics (CD-ROM)*, München, 1999.
- [132] E. RANK, M. RÜCKER und M. SCHWEINGRUBER: *Automatische Generierung von Finite-Element-Netzen*. Der Bauingenieur, 69:373–379, 1994.
- [133] E. RANK und O.C. ZIENKIEWICZ: *A simple error estimator in the finite element method*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 3:243–249, 1987.

- [134] M. RAPOLDER: *Parallele Finite-Element-Simulation der Bauwerk-Boden-Interaktion mit adaptiven Zeitintegrationsverfahren*. Dissertation, Technische Universität München, 2000.
- [135] E. REISSNER: *On a Variational Theorem in Elasticity*. Journal of Mathematical Physics, 29:90–95, 1950.
- [136] E. REUSS: *Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 10:266–274, 1930.
- [137] J. RICCIUS: *Adaptive Methoden zur statischen und dynamischen Analyse von Flächentragwerken mit linearen Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997.
- [138] K.H. ROSCOE und J.B. BURLAND: *On the generalized stress-strain behaviour of wet clay*. In: J. HEYMAN und F.A. LECKIE (Herausgeber): *Engineering Plasticity*, Seiten 535–609. Cambridge Univ. Press, 1968.
- [139] J.W. RUDNICKI und J.R. RICE: *Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials*. Journal for the Mechanics and Physics of Solids, 23:371–394, 1975.
- [140] J.W. RUDNICKI und J.R. RICE: *A note on some features of the theory of localization of deformation*. International Journal of Solids and Structures, 16:597–605, 1980.
- [141] M. RUDOLPH: *Ein adaptives Verfahren zur Behandlung elasto-plastischer Problemstellungen des Grundbaus*. Dissertation, Technische Universität München, 2000.
- [142] K. RUNESSON und Z. MRÓZ: *A note on nonassociated plastic flow rules*. International Journal of Plasticity, 5:639–658, 1989.
- [143] H. SCHAD: *Nichtlineare Stoffgleichungen für Böden und ihre Verwendung bei der Analyse von Grundbauaufgaben*. Mitteilungen des Baugrundinstituts 10, Universität Stuttgart, 1979.
- [144] J.C.J. SCHELLEKENS und R. DE BORST: *The application of interface elements and enriched or rate-dependent continua to micromechanical analyses of fracture in composites*. Computational Mechanics, 14:68–83, 1994.
- [145] A.N. SCHOFIELD und C.P. WROTH: *Critical state soil mechanics*. McGraw Hill, London, 1968.
- [146] B.A. SCHREFLER, D. GAWIN, R. MATTEAZZI und X. WANG: *Quantitative solutions in mechanics of unsaturated porous media*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), 77(2):409–412, 1997.
- [147] B.A. SCHREFLER und R. SCOTTA: *Dynamics of partially saturated soils*. In: A.I. MELKER (Herausgeber): *Nondestructive Testing and Computer Simulations in Science and Engineering*, SPIE Proceedings, Band 4064, Seiten 410–413, 2000.
- [148] J.C. SIMO: *Strain softening and dissipation: a unification of approaches*. In: J. MAZARS und Z.P. BAŽANT (Herausgeber): *Cracking and damage, strain localization and side effects*, Seiten 440–461. Elsevier, London, 1989.
- [149] J.C. SIMO und T.J.R. HUGHES: *Computational Inelasticity*. Springer Verlag, New York, 1998.
- [150] J.C. SIMO, J.G. KENNEDY und S. GOVINDJEE: *Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26:2161–2185, 1988.

- [151] J.C. SIMO und R.L. TAYLOR: *Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity*. Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, 48:101–118, 1985.
- [152] J.C. SIMO und R.L. TAYLOR: *A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 22:649–670, 1986.
- [153] S.W. SLOAN und A.J. ABBO: *Biot consolidation analysis with automatic time stepping and error control. Part 1: Theory and implementation*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 23:467–492, 1999.
- [154] S.W. SLOAN und A.J. ABBO: *Biot consolidation analysis with automatic time stepping and error control. Part 2: Applications*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 23:493–529, 1999.
- [155] S.W. SLOAN und J.R. BOOKER: *Integration of Tresca and Mohr–Coulomb constitutive equations in plane strain elastoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33:163–196, 1992.
- [156] E. STEIN, F.J. BARTHOLD, S. OHNIMUS und M. SCHMIDT: *Adaptive finite elements in elastoplasticity with mechanical error indicators and Neumann–type estimators*. In: S.R. IDELSOHN, E. OÑATE und E.N. DVORKIN (Herausgeber): *World Congress on Computational Mechanics (CD-ROM)*, Buenos Aires, 1998.
- [157] E. STEIN und R. MAHNKEN: *Adaptive time–step control in creep analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28:1619–1633, 1989.
- [158] E. STEIN, B. SEIFERT und W. RUST: *Adaptive Verfeinerung von Finite–Element–Netzen für Stabilitätsprobleme von Flächentragwerken*. Forschungs- und Seminarbericht aus dem Bereich Mechanik Nr. F94/1, Universität Hannover, 1994.
- [159] G. STEINL: *Ein adaptives Finite–Element–Verfahren zur Behandlung von Lokalisierungseffekten im Rahmen der Cosserat–Theorie*. Dissertation, Technische Universität München, 2000.
- [160] P. STEINMANN: *Lokalisierungsprobleme in der Plasto–Mechanik*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1992.
- [161] P. STEINMANN und K. WILLAM: *Localization within the framework of micropolar elastoplasticity*. In: V. MANNL, J. NAJAR und O. BRÜLLER (Herausgeber): *Advances in Continuum Mechanics*. Springer–Verlag, Berlin, 1991.
- [162] P. STUTZ: *Comportement élasto–plastique des milieux granulaires*. In: *International Symposium on Foundations of Plasticity*, Seiten 37–49, Warschau, 1972.
- [163] Y. SUKIRMAN und R.W. LEWIS: *An implicit procedure for solving a fully coupled multiphase flow–consolidation problem*. In: S.R. IDELSOHN, E. OÑATE und E.N. DVORKIN (Herausgeber): *World Congress on Computational Mechanics (CD-ROM)*, Buenos Aires, 1998.
- [164] K. SZÉCHY: *Der Grundbau*, Band I: *Untersuchungen und Festigkeitslehre des Baugrundes*. Springer–Verlag, Wien, 1963.
- [165] D.W. TAYLOR: *Stability of earth slopes*. Boston Society of Civil Engineers, 82:1191–1383, 1937.
- [166] K. TERZAGHI: *Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage*. F. Deuticke, Wien, 1925.

- [167] K. TERZAGHI: *Mechanisms of landslides*. Harvard Soil Mechanical Series, 36, 1951.
- [168] K. TERZAGHI und R. JELINEK: *Theoretische Bodenmechanik*. Springer Verlag, Berlin, 1954.
- [169] C. TRUESDELL: *Sulle basi della termodinamica delle miscele*. Rend. Lincei, 44:381–383, 1968.
- [170] C. TRUESDELL: *Rational Thermodynamics*. Springer Verlag, New York, 2. Auflage, 1984.
- [171] C. TRUESDELL und W. NOLL: *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 1960.
- [172] C. TRUESDELL und R.A. TOUPIN: *The Classical Field Theories*. In: S. FLÜGGE (Herausgeber): *Handbuch der Physik*, Band III/1, Seiten 226–902. Springer Verlag, Berlin, 1960.
- [173] A. TRUTY: *A stabilized FE-formulation for fully saturated two-phase media*. LSC internal report 99/01, LSC-Laboratoire de mécanique des structures et milieux continus, 1999.
- [174] I. VARDOULAKIS: *Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a Cosserat continuum theory*. Ingenieur-Archiv, 59:845–858, 1989.
- [175] P.A. VERMEER und A. VERRUIJT: *An accuracy condition for consolidation by finite elements*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 5:1–14, 1981.
- [176] W. VOLK: *Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens mikropolarer poröser Medien mit Hilfe der Cosserat Theorie*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [177] K. WASHIZU: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, 3. Auflage, 1982.
- [178] N.-E. WIBERG und X.D. LI: *Structural dynamic analysis by a time-discontinuous Galerkin finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39:2131–2152, 1996.
- [179] N.-E. WIBERG und X.D. LI: *Adaptive finite element procedures for linear and nonlinear dynamics*. In: S.R. IDELSOHN, E. OÑATE und E.N. DVORKIN (Herausgeber): *World Congress on Computational Mechanics (CD-ROM)*, Buenos Aires, 1998.
- [180] C. WIENERS: *The implementation of adaptive multigrid methods for finite elements*. SFB 404 Preprint 97/14, Universität Stuttgart, 1997.
- [181] W. WUNDERLICH und H. CRAMER: *A unified approach to the dynamic analysis of soils as multiphase media*. In: E. OÑATE, J. PERIAUX und A. SAMUELSSON (Herausgeber): *The finite element method in the 1990's*, Seiten 537–546. CIMNE, Barcelona, 1991.
- [182] W. WUNDERLICH, H. CRAMER, M. RUDOLPH und G. STEINL: *Anwendung adaptiver FE-Verfahren auf statische Problemstellungen des Grundbaus*. In: E. RAMM, E. STEIN und W. WUNDERLICH (Herausgeber): *Finite Elemente in der Baupraxis*, Seiten 349–358. W. Ernst & Sohn, Berlin, 1995.
- [183] W. WUNDERLICH, H. CRAMER und G. STEINL: *An adaptive finite element approach in associated and non-associated plasticity considering localization phenomena*. In: P. LADEVÈZE und J.T. ODEN (Herausgeber): *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, Seiten 293–308. Elsevier Science, Amsterdam, 1998.

- [184] W. WUNDERLICH, H.K. KUTTER, H. CRAMER und W. RAHN: *Finite-Element-Modelle für die Beschreibung des Materialverhaltens von Fels*. Techn.-Wiss. Mitteilungen Nr. 81–10, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1981.
- [185] W. WUNDERLICH und M.J. PRABUCKI: *Numerical simulation of the behaviour of saturated sand*. In: G. SWOBODA (Herausgeber): *Numerical Methods in Geomechanics*, Seiten 335–342. Balkema, Rotterdam, 1988.
- [186] W. WUNDERLICH und W. REDANZ: *A local strategy for mesh refinement and adaptive control*. In: P. LADEVÈZE und O.C. ZIENKIEWICZ (Herausgeber): *New Advances in Computational Structural Mechanics*, Seiten 233–245, Amsterdam, 1992. Elsevier Science.
- [187] J. YU, D. PERIČ und D.R.J. OWEN: *Adaptive finite element analysis of a strain localization problem for elasto-plastic Cosserat continuum*. In: D.R.J. OWEN et al. (Herausgeber): *Computational Plasticity I*, Seiten 551–566. Pineridge, Swansea, 1992.
- [188] L.F. ZENG: *On adaptive Finite Element procedures for static and dynamic problems*. Dissertation, Chalmers University of Technology, Göteborg, Schweden, 1991.
- [189] O.C. ZIENKIEWICZ, C. HUMPHESON und R.W. LEWIS: *Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics*. *Géotechnique*, 25(4):671–689, 1975.
- [190] O.C. ZIENKIEWICZ und G.N. PANDE: *Some useful forms of isotropic yield surfaces for soil and rock mechanics*. In: G. BORM und H. MEISSNER (Herausgeber): *Numerische Methoden der Bodenmechanik und Felsmechanik*. Institut für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe, 1976.
- [191] O.C. ZIENKIEWICZ und J.Z. ZHU: *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:337–357, 1987.
- [192] O.C. ZIENKIEWICZ und J.Z. ZHU: *Adaptivity and mesh generation*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:783–810, 1991.
- [193] O.C. ZIENKIEWICZ und J.Z. ZHU: *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364, 1992.
- [194] O.C. ZIENKIEWICZ und J.Z. ZHU: *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1365–1382, 1992.