



Technische Universität München  
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
Fachgebiet Energiewandlungstechnik

---

# Anwendung vektorieller Hystereseemodelle zur Charakterisierung ferromagnetischer Werkstoffe

Stephan Willerich

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzende: Prof. Dr. rer. nat. Eva Weig

Prüfer der Dissertation: 1. Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Herzog

2. Prof. Dr. techn. Oszkár Bíró

Die Dissertation wurde am 08.07.2020 bei der Technischen Universität München eingereicht  
und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 20.07.2021  
angenommen.



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Energiewandlungstechnik der Technischen Universität München.

An dieser Stelle möchte ich den Menschen danken, die zur Entstehung der Arbeit beigetragen haben. Allen voran gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Herzog für die Möglichkeit, eine wissenschaftliche Tätigkeit am Fachgebiet aufzunehmen, sowie für die große gestalterische Freiheit bei der Durchführung der Promotion. Ich denke gerne an die Jahre der Zusammenarbeit und die zahlreichen fachlichen und persönlichen Diskussionen zurück.

Herrn Prof. Dr. techn. Oszkár Bíró möchte ich für die freundliche Übernahme der Funktion des Zweitprüfers danken. Weiter möchte ich mich bei Frau Prof. Dr. rer. nat. Eva Weig für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes bedanken.

Mein Dank gilt allen ehemaligen Kollegen am Fachgebiet Energiewandlungstechnik. Durch sie entstand eine familiäre, motivierende Arbeitsatmosphäre, die es leicht gemacht hat, gelegentlich nicht ausbleibende Rückschläge wegzustecken. Hervorheben möchte ich meine langjährige Bürokollegin Sonja Flügel für ihre stete Hilfsbereitschaft und die angenehme Zusammenarbeit. Weiter möchte ich mich bei Dr.-Ing. Jörg Kammermann, Sebastian Straßer und Laurenz Tippe für ihre Anmerkungen und Korrekturen zur vorliegenden Arbeit bedanken. Ein herzlicher Dank gilt Sabine Prucker, die schier unermüdlich in allen organisatorischen Belangen mit Rat und Tat zur Seite stand. Zudem gilt mein Dank dem gesamten Team der Fakultätswerkstatt für alle Hilfestellungen bei mechanischen, elektrischen und elektronischen Arbeiten.

Weiterhin gebührt mein Dank allen Studierenden, die durch verschiedenste Formen von studentischen Arbeiten zum Gelingen des Promotionsvorhabens beigetragen haben.

Meiner Frau Mendy bin ich enorm dankbar für das Verständnis, das sie für den notwendigen Verzicht auf gemeinsame Freizeit aufgebracht hat, sowie für die humorvollen Aufheiterungen und Ermutigungen während des Verfassens der Arbeit.

Zuletzt möchte ich meinen Eltern Rainer und Margarete danken, die meinen Weg stets mit Interesse und Unterstützung begleitet haben.



# Kurzfassung

Durch gestiegene Anforderungen an elektrische Maschinen, vor allem was deren Bauraum und Effizienz betrifft, hat der Wunsch nach verlustarmen ferromagnetischen Werkstoffen mit hoher Sättigungsflussdichte sowie das Bestreben, diese optimal einzusetzen, neue Aktualität erlangt. Das Werkstoffverhalten im Betrieb einer elektrischen Maschine wird durch eine Vielzahl von Faktoren bestimmt. Um diese gezielt zu beeinflussen, ist eine genaue Kenntnis der magnetischen Eigenschaften des Werkstoffs notwendig. Viele dieser Eigenschaften werden durch das Hystereseverhalten des Werkstoffs wiedergegeben, welches für gewöhnlich in der elektromagnetischen Feldrechnung nicht betrachtet wird. Insbesondere trifft dies auf vektorielle Hystereseeffekte zu, die intuitiv schwerer fassbar sind als skalare Hystereseeffekte, welche häufig mit dem Auftreten von Hystereseschleifen gleichgesetzt werden.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, vektorielle Hystereseamodelle zur Charakterisierung ferromagnetischer Werkstoffe bei der Berechnung elektromagnetischer Felder einzusetzen. Der Fokus liegt hierbei auf einer Klasse von vektoriellen Preisach-Modellen (auch bekannt als DPC-Modell), die trotz ihrer vielversprechenden Eigenschaften in der Feldrechnung bisher wenig Anwendung findet. Es gilt zwischen der in dieser Arbeit betrachteten ratenunabhängigen Hysterese und allgemeinen Wirbelstromeffekten zu unterscheiden, die für das relevante Werkstoffverhalten ebenfalls von großer Bedeutung sind. Diese Unterscheidung wird sowohl auf Ebene der physikalischen Vorgänge in Ferromagnetika als auch auf Ebene der Beschreibung elektromagnetischer Felder getroffen. Die Implikationen und Konsequenzen der Beschränkung auf ratenunabhängige Hysterese werden aufgezeigt.

Hysterese wird in den Kontext der Feldrechnung mithilfe der Methode der finiten Elemente eingebunden. Zum Einsatz in der Feldrechnung wird auf Basis der betrachteten Preisach-Modelle das Hysterongruppenmodell konstruiert. Dieses lässt im Gegensatz zu anderen Implementierungen des DPC-Modells eine überabzählbare Anzahl von vektoriellen Preisach-Relais zu. Damit wird erreicht, dass alle mit dem Hysterongruppenmodell nachgebildeten Magnetisierungskennlinien kontinuierlich sind. Die Eigenschaften des Hysterongruppenmodells werden anderen Hysterese-Modellen, wie z. B. Modellen auf Basis des vektoriellen Spiel-Operators, gegenübergestellt. Neben einer Betrachtung der durch die Modelle vorgegebenen Abbildung von Eingangsgrößen auf Ausgangsgrößen betrifft dies auch eine Betrachtung des Dissipationsverhaltens der Modelle.

Bei der Anwendung der Methode der finiten Elemente ergeben sich durch die Modellierung von Hysterese Besonderheiten bezüglich des Einsatzes von Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme. Dies betrifft vor allem Newton-Verfahren, die in diesem Falle der Klasse der nichtglatten Newton-Verfahren angehören. Werden die damit einhergehenden Besonderheiten berücksichtigt, entstehen effiziente numerische Verfahren zur Lösung von Variationsproblemen mit Hysterese.

Die vorgeschlagenen Materialmodelle und Lösungsverfahren werden anhand des TEAM Problems 32 verifiziert. Die berechneten Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Messergebnissen. Weiteres Verbesserungspotential besteht durch die Berücksichtigung von anisotropem Materialverhalten.



# Abstract

Requirements concerning efficiency and installation space of electric machines have recently been increasing. This led to a renewed wish for magnetic materials with low energy losses and high saturation flux densities on the one hand, on the other hand large efforts are made to use these ferromagnetic materials in an optimal way. The material behaviour during the operation of an electric machine is determined by numerous factors. In order to influence these factors, detailed knowledge of the material behaviour is required. Many properties of ferromagnetic materials are reflected by their hysteresis behaviour, which is usually not considered in electromagnetic field calculations. This is especially true for vectorial hysteresis effects. These are harder to grasp than scalar hysteresis effects, which are normally equated with the occurrence of hysteresis loops.

This thesis targets the application of vectorial hysteresis models to characterize ferromagnetic materials in electromagnetic field computations. The focus is laid on a class of vectorial Preisach models (also known as DPC-model), which, despite its favourable properties, has only found few applications in field computations. It is crucial to distinguish between rate-independent hysteresis, as considered in this thesis, and general eddy current effects, which also play an important role for the magnetic material behaviour. The distinction is made on a physical basis, as well as on basis of the description of electromagnetic fields. The implications and consequences of the restriction to rate-independent hysteresis are presented.

Hysteresis is included in the computation of electromagnetic fields using the finite element method. The hysteron group model is constructed based on the considered Preisach models specifically for the use in field computations. In contrast to other implementations of the DPC-model, it permits an infinite number of vectorial Preisach relays. As a consequence all magnetization curves modelled with the hysteron group model are continuous. The properties of the hysteron group model are compared with the properties of other hysteresis models (e.g. models based on the vector play operator). Besides a comparison of the input-output-mapping defined by the models, this also concerns a comparison of the dissipation behaviours of the models.

For the finite element method some particularities concerning the application of methods to solve non-linear systems of equations arise from modelling hysteresis. This applies specifically for Newton's method, which in this case belongs to the class of non-smooth Newton methods. If this is considered appropriately, efficient numerical schemes can be constructed to solve variational problems with hysteresis.

The proposed material models and numerical schemes are verified by an application to the TEAM problem 32. The calculated results agree well with the measured reference values. By accounting for anisotropic material behaviour further improvement is expected.





# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>V</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation der Arbeit . . . . .	1
1.2 Zielsetzung und Aufbau . . . . .	3
1.3 Bemerkungen zur Notation . . . . .	4
<b>2 Physikalische Grundlagen des Ferromagnetismus</b>	<b>5</b>
2.1 Feinstrukturen in ferromagnetischen Werkstoffen . . . . .	5
2.2 Ablauf von Magnetisierungsvorgängen . . . . .	8
2.3 Wirbelströme und Verlusttrennung . . . . .	10
<b>3 Formulierung und Diskretisierung von Variationsproblemen mit Hysterese</b>	<b>13</b>
3.1 Maxwell-Gleichungen und Materialgesetze . . . . .	13
3.2 Reduktion zu Wirbelstromproblemen . . . . .	14
3.3 Randwertprobleme und Potentialformulierungen . . . . .	15
3.3.1 Magnetisches Vektorpotential $\mathbf{A}$ und elektrisches Skalarpotential $V$ . .	17
3.3.2 Magnetisches Skalarpotential $\Phi$ und Strömungsvektorpotential $\mathbf{T}$ . . .	19
3.4 Variationsformulierungen . . . . .	21
3.4.1 Mathematische Grundlagen . . . . .	21
3.4.2 Anwendung auf die Potentialformulierungen . . . . .	26
3.5 Methode der finiten Elemente . . . . .	28
3.5.1 Zeitliche Diskretisierung . . . . .	29
3.5.2 Räumliche Diskretisierung . . . . .	29
3.5.3 Verwendete Elementtypen . . . . .	31
3.5.4 Diskretisierung der Magnetisierung und der Stromdichte . . . . .	34
3.5.5 Linearisierung der Feldgrößen . . . . .	35
3.5.6 Erstellung des linearen Gleichungssystems . . . . .	37
<b>4 Modellierung ferromagnetischer Hysterese</b>	<b>39</b>
4.1 Grundlagen zur Modellierung von skalarer Hysterese . . . . .	39
4.1.1 Phänomenologische Beschreibung nach Madelung . . . . .	39
4.1.2 Überblick zu Hysterese-Modellen . . . . .	40
4.1.3 Mathematische Charakterisierung von Hystereseoperatoren . . . . .	42
4.1.4 Skalare Preisach-Operatoren . . . . .	43
4.1.5 Skalärer Spieloperator und energiebasiertes Hysterese-Modell in einer Dimension . . . . .	46
4.2 Modellierung vektorieller Hysterese . . . . .	51
4.2.1 Hysterese-Modelle mit vektorwertigen Spieloperatoren . . . . .	52
4.2.2 Vektoriell-Preisach-Modell nach Mayergoyz . . . . .	53
4.2.3 Preisach-Modelle mit vektorwertigen Relaisoperatoren . . . . .	53

<b>5</b>	<b>Vektor-Preisach-Modelle für die elektromagnetische Feldrechnung</b>	<b>59</b>
5.1	Interpolationsmodell . . . . .	59
5.1.1	Beschreibung der Interpolation . . . . .	59
5.1.2	Monotonie und Strukturänderung . . . . .	61
5.2	Hysterongruppenmodell . . . . .	62
5.2.1	Charakterisierung der Hysterongruppen . . . . .	62
5.2.2	Hysterongruppen mit kreisförmigen kritischen Oberflächen . . . . .	63
5.2.3	Eigenschaften des Hysterongruppenmodells . . . . .	72
5.2.4	Reduktion auf ein skalares Preisach-Modell . . . . .	79
5.3	Hysterongruppenmodell für anisotrope Materialien . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Dissipationsverhalten der vektoriellen Hystereseemodelle</b>	<b>83</b>
6.1	Skalares Preisach-Modell . . . . .	84
6.2	Energiebasiertes Hysteresemodell . . . . .	85
6.3	Vektor-Preisach-Modell nach Mayergoyz . . . . .	85
6.4	DPC-Modell und Hysterongruppenmodell . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Identifikation der Modellparameter des vektoriellen Preisach-Modells</b>	<b>89</b>
7.1	Auswahl der Identifikationshysterons . . . . .	89
7.1.1	Allgemeingültige Symmetrien . . . . .	90
7.1.2	Messdatenbasierte Begrenzung . . . . .	90
7.1.3	Parameterreduktion für isotrope Materialien . . . . .	91
7.2	Bestimmung der Preisach-Dichten . . . . .	91
7.2.1	Nichtnegative Minimierung der Fehlerquadrate . . . . .	92
7.2.2	Regularisierung der Identifikation . . . . .	93
7.2.3	Nachgelagerte Berechnungen . . . . .	95
7.3	Adaptive Verfeinerung der Parameterebene . . . . .	96
7.4	Resultierender Identifikationsalgorithmus . . . . .	97
7.5	Zusammenfassung zu Hysterongruppen . . . . .	98
7.6	Bemerkungen zu weiterführenden Themen . . . . .	98
7.6.1	Identifikation für anisotrope Materialien . . . . .	99
7.6.2	Messtechnische Bestimmung der Identifikationsdaten . . . . .	99
<b>8</b>	<b>Berechnung statischer Magnetfelder mit Hysterese</b>	<b>101</b>
8.1	$M(\mathbf{B})$ - und $M(\mathbf{H})$ -Iteration . . . . .	101
8.2	Polarisationsmethode . . . . .	101
8.3	Newton-Verfahren . . . . .	102
8.3.1	$\mathbf{A}$ -basierte Iterationsschemata . . . . .	103
8.3.2	$\Phi$ -basierte Iterationsschemata . . . . .	107
8.4	Numerische Experimente mit dem Interpolationsmodell . . . . .	107
<b>9</b>	<b>Anwendung auf das TEAM Problem 32</b>	<b>111</b>
9.1	Beschreibung des Problems . . . . .	111
9.1.1	Beschreibung der Geometrie . . . . .	111
9.1.2	Beschreibung der Testfälle . . . . .	113
9.2	Materialdaten und Identifikation . . . . .	113
9.2.1	Modellierung mit dem Hysterongruppenmodell . . . . .	114
9.2.2	Modellierung mit einer nichtlinearen Kennlinie . . . . .	115
9.3	Dreidimensionale Modellierung . . . . .	117
9.4	Berechnung und Bewertung der Testfälle . . . . .	117
9.4.1	Testfall 1 und Testfall 2 . . . . .	118
9.4.2	Testfall 3 . . . . .	122

---

9.4.3 Bewertung der Validierung . . . . .	127
<b>10 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>131</b>
<b>Literatur</b>	<b>i</b>
<b>Eigene Veröffentlichungen</b>	<b>xiii</b>
<b>A Ergänzende Definitionen</b>	<b>xv</b>
A.1 Sobolev-Räume . . . . .	xv
A.2 Normen und Skalarprodukte . . . . .	xvi
<b>B Ergänzungen zur Modellierung von Hysterese</b>	<b>xvii</b>
B.1 Metrik auf der Menge der kritischen Oberflächen . . . . .	xvii
B.2 Nichtmonotones Verhalten von Hysterons und Hysterongruppen . . . . .	xviii
B.3 Numerische Anisotropie . . . . .	xix
<b>C Ergebnisse TEAM Problem 32 Fall 1</b>	<b>xxi</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Räumliche Ausdehnung verschiedener Strukturen in Ferromagnetika . . . . .	6
2.2	Kubisch-raumzentrierte elementare Gitterzelle von Eisen . . . . .	7
2.3	Schematische Darstellung von Domänen und Körnern (angelehnt an [93]) . . .	8
2.4	Schematischer Ablauf der Magnetisierung (übertragen aus [107, S. 36]) . . . .	8
2.5	Zusammenhang zwischen Magnetisierungsprozessen und Magnetisierungskurve	9
3.1	Lösungsgebiet der behandelten Wirbelstromprobleme . . . . .	16
3.2	Subkomplex in 2D mit Nédélec-Elementen erster Art . . . . .	33
3.3	Subkomplex in 2D mit Raviart-Thomas-Elementen . . . . .	33
3.4	Subkomplex in 2D mit Nédélec-Elementen zweiter Art . . . . .	33
3.5	Subkomplex in 2D mit Brezzi-Douglas-Marini-Elementen . . . . .	33
3.6	Subkomplex niedrigster Ordnung in 3D mit Nédélec-Elementen erster Art . .	34
3.7	Subkomplex niedrigster Ordnung in 3D mit Nédélec-Elementen zweiter Art .	34
4.1	Grafische Darstellung der madelungschen Regeln . . . . .	40
4.2	Schaltfunktion eines Preisach-Relais . . . . .	44
4.3	Repräsentation des Preisach-Operators in der Preisach-Ebene . . . . .	44
4.4	Zusammenhang zwischen Preisach-Ebene und Everett-Funktion . . . . .	45
4.5	Bewegung von Sphären und Repräsentation der Bewegung . . . . .	49
4.6	Repräsentation des EBM in der Preisach-Ebene . . . . .	50
4.7	Exemplarische Kurvenform der Preisach-Dichtefunktionen des EBM . . . . .	51
4.8	Hysteron mit zugehörigen Zustandsvektoren für eine gegebene Evolution . . .	54
4.9	Grafische Repräsentation der Hysteronzustände des DPC-Modells . . . . .	56
5.1	Interpolationsgitter $\mathcal{T}$ in der $\mathbf{H}$ -Ebene . . . . .	60
5.2	Nichtmonotones Verhalten der Interpolation . . . . .	61
5.3	Hysterongruppe mit exemplarischem relevanten Pfad . . . . .	63
5.4	Dreieck $\mathbf{H}_I$ , $\mathbf{H}(t_3)$ und $\mathbf{H}(t_4)$ . . . . .	64
5.5	Klassifizierung der $\mathbf{H}$ -Ebene der möglichen Lage von $\mathbf{e}$ bei gegebenem $\mathbf{a}$ . . .	65
5.6	Fallunterscheidung zur Bestimmung der Initialisierungswerte . . . . .	68
5.7	Vergleich der Ausgänge einer Hysterongruppe und eines diskreten Hysterons .	69
5.8	Berechnungsfälle für die Initialisierung des Hysterongruppenmodells . . . . .	70
5.9	Fallunterscheidung zur Berechnung der Jacobi-Matrix des starren Anteils . .	73
5.10	Anpassung des relevanten Pfads bei Schnitt von $c_i$ . . . . .	76
5.11	Preisach-Dichtefunktion eines Gruppenmodells . . . . .	80
6.1	Berechnung von Hystereseverlusten im Hysterongruppenmodell . . . . .	87
7.1	Verteilung von Hysterons nach Berücksichtigung der Symmetrie . . . . .	90
7.2	Verteilung von Hysterons nach Berücksichtigung der Isotropie . . . . .	91
7.3	Topologie der Hysteronverteilung . . . . .	94
7.4	Schematische Darstellung von Verfeinerung und Korrektur der Parameterebene	97
7.5	Schematische Darstellung des Identifikationsalgorithmus . . . . .	97
7.6	Ermittlung des Gewichts einer Hysterongruppe aus Gewichten diskreter Hysterons	98

---

8.1	<b>A</b> -basierte Iterationsschemata für Feldprobleme mit Hysterese . . . . .	106
8.2	$\Phi$ -basierte Iterationsschemata für Feldprobleme mit Hysterese . . . . .	108
8.3	Exemplarische Flussdichteverteilung in der betrachteten Maschinengeometrie	109
8.4	Konvergenzplot für verschiedene Iterationsschemata und Materialmodelle . .	109
9.1	Geometrie und Wicklungsverteilung des TEAM Problems 32 . . . . .	111
9.2	Übersicht der eingebrachten Messspulen . . . . .	112
9.3	Vergleich gemessener Hysteresekurven . . . . .	114
9.4	Identifikationsergebnisse für die verschiedenen Messreihen . . . . .	115
9.5	Identifikationsergebnisse bei unterschiedlicher Priorisierung . . . . .	115
9.6	Hystereseschleife und Tangente mit maximaler Steigung . . . . .	116
9.7	Ansichten des dreidimensionalen FE-Modells des Transformators . . . . .	118
9.8	Berechnete und gemessene Flussdichteverläufe durch Spule 5 . . . . .	119
9.9	Magnetisches und elektrisches Ersatzschaltbild des TEAM Problems 32 . . .	119
9.10	Vergleich mit 2D-FEM und 3D-FEM berechneter Flussdichteverläufe . . . .	121
9.11	Vergleich der Ergebnisse zwischen Reluktanznetzwerk und 3D-FEM . . . . .	122
9.12	Berechnungsergebnisse des Reluktanznetzwerks bei Spannungsspeisung . . .	122
9.13	Gemessene Spannungen und Ströme zu Testfall 3 . . . . .	123
9.14	Exemplarische Flussdichteverteilung zu Testfall 3 . . . . .	124
9.15	Gemessene und berechnete Verläufe des <b>B</b> -Felds Variante 1 (HGM) . . . . .	124
9.16	Gemessene und berechnete Verläufe des <b>B</b> -Felds Variante 2 (HGM) . . . . .	124
9.17	Gemessene und berechnete Verläufe des <b>B</b> -Felds Variante 1 (ATAN) . . . . .	125
9.18	Gemessene und berechnete Verläufe des <b>B</b> -Felds Variante 2 (ATAN) . . . . .	125
9.19	Qualitativer Vergleich der Kurvenverläufe des <b>H</b> -Felds und des <b>B</b> -Felds . . .	126
9.20	Schrittweise Bestimmung der Modellparameter . . . . .	129
B.1	Konfiguration von Testhysteron und Eingangs- und Ausgangsgrößen . . . . .	xviii
B.2	Testgröße $z$ in Abhängigkeit der Winkel $\alpha$ und $\beta$ . . . . .	xviii
B.3	Maximale Abweichung zweier Hystereseschleifen . . . . .	xix
C.1	Vergleich der berechneten und gemessenen Flussdichteverläufe durch Spule 5	xxi
C.2	Berechnungsergebnisse des Reluktanznetzwerks bei Spannungsspeisung . . . .	xxi

# Tabellenverzeichnis

3.1	Funktionsräume und zugehörige konforme Elemente der Ordnung $k$ . . . . .	32
9.1	Daten der Messspulen . . . . .	112
9.2	Originalangaben und mögliche Varianten zur Berechnung . . . . .	113
9.3	Übersicht der Parameter der nichtlinearen Kennlinie . . . . .	116
9.4	Vorgegebene Parameterwerte zur Berechnung von Testfall 2 . . . . .	120
9.5	Geometrische Werte zur Berechnung der Parameter des Reluktanznetzwerks .	121
9.6	Vorgegebene Parameterwerte zur Berechnung von Testfall 3 . . . . .	123
9.7	Metriken zu den globalen Berechnungsvorgängen von Testfall 3 . . . . .	126
9.8	Metriken zum Hysterongruppenmodell bei der Berechnung von Testfall 3 . . .	127





# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation der Arbeit

Die Verbreitung von rotierenden elektrischen Maschinen und Transformatoren in Produktionsprozessen, Infrastruktur, Energieversorgung, Automobilität und in vielen weiteren Anwendungsbereichen ist bereits heute enorm hoch und tendenziell steigend. Obwohl die elektromechanische Energiewandlung seit ihrer Nutzbarmachung im 19. Jahrhundert immens an Bedeutung gewonnen hat und sich auf der Ebene der Materialien und Fertigungstechnologien viel bewegt hat, ist der Aufbau des aktiven Teils eines elektromechanischen Wandlers oder Transformators im Grundprinzip gleich geblieben. Dieser besteht bei einer rotierenden elektrischen Maschine, abgesehen von Sonderbauformen wie Maschinen mit Luftspulenwicklung oder Ähnlichem, aus einem Blechpaket aus ferromagnetischem Material und einer Wicklung aus Material mit hoher elektrischer Leitfähigkeit, für gewöhnlich Kupferdraht, und eventuell Permanentmagneten.

Deutlich verändert haben sich in den letzten Jahren hingegen die Anforderungen, die vor allem an rotierende elektrische Maschinen gestellt werden. Durch die angestrebte Elektrifizierung des Antriebsstrangs von Straßenfahrzeugen, Bestrebungen, Flugzeuge elektrisch anzutreiben, aber auch durch restriktivere Vorschriften (z. B. die EG-Verordnung 640/2009 [164]), steigen schlussendlich vor allem die Anforderungen an die Effizienz und den benötigten Bauraum einer elektrischen Maschine. Für beide Kriterien sind die in den aktiven Teilen auftretenden Verluste ein maßgeblich limitierender Faktor. Diese lassen sich – analog zum Aufbau einer elektrischen Maschine – aufteilen in Kupferverluste in den Leitern der Wicklung und Eisenverluste im Blechpaket. Während im Falle beider Verlustarten viel Aufwand betrieben wurde, um sie zu charakterisieren, kann nur im Falle der Kupferverluste konstatiert werden, dass sich Standardmethoden etabliert haben, um diese zu quantifizieren und Aussagen über ihren Einfluss auf den Betrieb einer Maschine zu treffen.

Im Falle der Eisenverluste ist dies bisher nicht gelungen, obwohl umfassend daran geforscht wurde. Es existieren Arbeiten, die eine sehr genaue Bestimmung der Verluste präsentieren [28, 85, 93]. Da die Anwendung der vorgeschlagenen Methoden mit großem Aufwand verbunden ist, sowohl was die Berechnung als auch die messtechnische Charakterisierung des Werkstoffs angeht, haben diese jedoch bisher keine größere Verbreitung gefunden. Dies hat zur Konsequenz, dass mit Methoden und Formeln gearbeitet wird, deren Unzulänglichkeiten bekannt sind (z. B. das Verlustmodell von Steinmetz), da diese Ergebnisse liefern, die für viele Anwendungen hinreichend genau sind.

Es ist bemerkenswert, dass daher vor allem der zweite Teil eines Absatzes aus dem Vorwort von Erwin Mayers 1932 veröffentlichter Dissertation auch heute noch verwendet werden könnte, um den Stand der Technik bezüglich verbreiteter Standardmethoden zur Berechnung der Eisenverluste wiederzugeben: *„Die durch die periodische Ummagnetisierung im Eisen entstehenden Verluste waren in den letzten vier Jahrzehnten häufig Gegenstand von theoretischen und experimentellen Untersuchungen. Das Endresultat all dieser Arbeiten entspricht jedoch in keiner Weise dem gewaltigen Aufwand an Zeit und Arbeit. Dies geht wohl am besten daraus hervor, daß auch in der neuesten Literatur zugegeben werden muß, daß eine einigermaßen*

*genaue Vorausberechnung der Eisenverluste einer elektrischen Maschine heute noch nur in den seltensten Fällen möglich ist. In der Tat bestehen die meisten der zur Anwendung empfohlenen Ansätze aus einem Konglomerat von ‚Materialkonstanten‘ und ‚Erfahrungskoeffizienten‘. Diese können dann je nach Umständen ganz verschiedene willkürliche Werte annehmen und weisen auch für ein und denselben Fall noch große und theoretisch gar nicht oder nur mangelhaft erklärliche Schwankungen auf.“ [131, S. 5]*

Im Zuge der zuvor gestiegenen Anforderungen an elektrische Maschinen ist jedoch auch die Frage nach dem richtigen Umgang mit den Eisenverlusten und ferromagnetischen Werkstoffen allgemein erneut in den Fokus des Interesses von Industrie und Universitäten gerückt. Wie bereits erwähnt zeigen neuere Arbeiten zu Eisenverlusten (siehe [6, 28, 85, 93]), dass es nicht möglich sein wird, diese genau zu berechnen, ohne genaue Kenntnis über den Werkstoff zu besitzen.

Hierfür wiederum müssen die magnetischen (sowie thermischen, elektrischen, usw.) Eigenschaften eines Werkstoffs messtechnisch erfasst werden können. Bei Elektroblech, wie es für elektrische Maschinen eingesetzt wird, geschieht dies häufig bei Wechsellagerung mithilfe eines Epstein-Rahmens [69]. Es existieren weitere Messaufbauten für Wechsellagerung wie Einzelblechtester oder Ringkerntester. Sie gelten als verhältnismäßig genau und weisen eine gute Reproduzierbarkeit der Messergebnisse auf (siehe hierzu die Aufsatzserie [111–114] und zu Messverfahren für Ferromagnetika im Allgemeinen [71]).

Die Fokussierung auf Wechsellagerung stellt ein Problem dar, da sie insbesondere in Teilen von elektrischen Maschinen stark von den dort vorzufindenden Lagerungsformen abweicht. Diese besitzen neben einem Wechsellagerungsanteil im Allgemeinen einen rotierenden Lagerungsanteil. Die Charakterisierung von weichmagnetischen Materialien unter rotierender Lagerung ist deutlich aufwändiger und es existiert kein Standardmessaufbau, um die Materialien zu charakterisieren (zur Messung bei rotierender Lagerung siehe [175]). Weiter ist bekannt (siehe z. B. [6, 93]), dass mechanische Einflüsse auf das Material, wie z. B. durch Stanzen, Schneiden oder Druck durch Gehäuse Teile etc., einen großen Einfluss auf das Materialverhalten und, damit einhergehend, das Verlustverhalten haben. Diese Bearbeitungen sowie weitere Unsicherheiten durch Fertigungstoleranzen und Ähnliches treten auch bei Messaufbauten auf (unabhängig von der Lagerungsform). Eine Bewertung der konkreten Einflüsse auf die Messung ist meist nur durch den Vergleich von Materialproben möglich. Weiterhin ist insbesondere bei Messaufbauten für rotierende Felder durch die Messgrößen nur ein kleiner Teil des Aufbaus charakterisiert (z. B. das von Messspulen umschlossene Teilgebiet eines Prüflings). Es ist jedoch schwierig, Aussagen darüber zu treffen, inwiefern der restliche Aufbau die Messergebnisse beeinflusst.

Eine Analyse von Messaufbauten mithilfe von numerischen Simulationen bietet die Möglichkeit, derartige Einflüsse isoliert zu betrachten und sie zu bewerten. Um dies zu ermöglichen, muss das Werkstoffverhalten exakt nachgebildet werden. Dies ist für gewöhnlich bei der Simulation von Apparaturen, die ferromagnetische Werkstoffe beinhalten (Transformatoren, rotierende elektrische Maschinen oder Messaufbauten), nicht der Fall. Während z. B. das Sättigungsverhalten von ferromagnetischen Werkstoffen standardmäßig nachgebildet wird (z. B. durch eine Arkustangenskennlinie), trifft dies u. a. auf den Effekt der ferromagnetischen Hysterese nicht zu. Dies ist jedoch unabdingbar, um z. B. den Verlauf von Messsignalen rekonstruieren zu können. Das hysteresebehaftete Verhalten eines Werkstoffs beinhaltet weiter eine Vielzahl von Informationen über den Werkstoff, z. B. über dessen Verlustverhalten oder dessen mechanische Beanspruchung.

Dies motiviert die grundsätzliche Zielsetzung der vorliegenden Arbeit, ferromagnetische Hysterese bei der Modellierung von Apparaturen und Aufbauten zu berücksichtigen und Werkstoffe mithilfe von Hysterese-Modellen zu charakterisieren.

## 1.2 Zielsetzung und Aufbau

Die Modellierung von Hysterese im Kontext elektromagnetischer Feldprobleme wurde bereits mehrfach durchgeführt. Hierbei wird Hysterese z. B. bei Verlustberechnungen in nachgelagerten Berechnungen (*post-processing*) modelliert oder Hystereseemodelle werden direkt in die Feldrechnung integriert. In den folgenden Kapiteln wird ausschließlich letztgenannter Weg besprochen. Die Berücksichtigung von Hysterese bei der Feldrechnung war schon mehrfach Gegenstand von Forschungsarbeiten (siehe z. B. [157, 169]). Mitunter die größten Unterschiede ergeben sich durch die eingesetzten Hystereseemodelle.

Bei Hystereseemodellen muss zwischen skalaren und vektoriellen Modellen unterschieden werden. Es wurden viele skalare Hystereseemodelle vorgeschlagen und im Rahmen von elektromagnetischen Feldrechnungen angewendet. Eine Schwierigkeit hierbei ist jedoch, dass sich die Erkenntnisse über hysteresebehaftetes Werkstoffverhalten und dessen Modellierung nicht trivial von einer auf zwei oder mehr Dimensionen übertragen lassen. Dies wiederum hat zur Folge, dass zu einzelnen skalaren Hystereseemodellen mehrere mögliche vektorwertige Hystereseemodelle existieren. Auf ebendiesen vektorwertigen Hystereseemodellen liegt der Fokus der vorliegenden Arbeit. Diese besitzen jeweils unterschiedliche Vor- und Nachteile z. B. bezüglich der Nachbildung physikalischer Effekte oder ihrer Implementierbarkeit.

Hinsichtlich der Modellierung physikalischer Effekte ist das sog. *DPC-Modell* (Details siehe Kapitel 4) eine interessante Wahl. Wie skalare Preisach-Modelle stellt dieses weniger ein Modell an sich dar, sondern kann als Klasse von Modellen gesehen werden, die ähnliche Eigenschaften aufweisen. Es wurde in bisherigen Veröffentlichungen (v. a. [127]) trotz seiner interessanten Eigenschaften nur rudimentär bei der elektromagnetischen Feldrechnung eingesetzt. Dies umzusetzen und das Modell auf ein Kontrollproblem anzuwenden, bildet den Kernbeitrag der vorliegenden Arbeit.

Die Gliederung der Arbeit spiegelt eine sukzessive Fokussierung wider, ausgehend von recht allgemein gehaltenen physikalischen Zusammenhängen hin zur Modellierung eines Transformators mit dem in dieser Arbeit entwickelten Hysterongruppenmodell.

In Kapitel 2 werden zunächst die physikalischen Mechanismen während Magnetisierungsvorgängen betrachtet und es wird abgegrenzt, welche Effekte dem makroskopischen Phänomen der Hysterese zugeordnet werden und welche nicht. Es wird betont, dass innerhalb der folgenden Ausführungen lediglich statische Hysterese detailliert betrachtet wird, die von makroskopischen Wirbelstromeffekten unterschieden werden muss.

Anschließend wird in Kapitel 3 ausgehend von den Maxwell-Gleichungen hergeleitet, wie allgemeine Magnetisierungskurven (mit oder ohne Hysterese) bei der elektromagnetischen Feldrechnung berücksichtigt werden können. Hierbei liegt der Fokus auf der Berechnung der Felder mithilfe der Methode der finiten Elemente. Obwohl an späterer Stelle ausschließlich magnetostatische Probleme gelöst werden, wird darauf geachtet, die Anknüpfungspunkte für die Modellierung von Wirbelströmen aufzuzeigen.

Die darauffolgenden Kapitel 4 bis 7 widmen sich verschiedenen Aspekten der Modellierung von Hysterese. In Kapitel 4 wird ein allgemeiner mathematischer Rahmen zur Behandlung des Themas gegeben. Dabei ist sowohl die Betrachtung skalarer als auch vektorieller Hysteresemodellierung von Interesse, da die Eigenschaften der vektoriellen Modelle ohne Kenntnis der Eigenschaften der skalaren Modelle schwer zu erfassen sind. Kapitel 5 führt anschließend Hystereseemodelle ein, die im Rahmen dieser Arbeit für die Feldrechnung genutzt wurden. Mit den erarbeiteten Modellen wird in Kapitel 6 das Dissipationsverhalten verschiedener Hystereseemodelle miteinander verglichen, was diese nochmals unter neuen Gesichtspunkten erscheinen lässt. Kapitel 7 geht auf die Identifikation der benötigten Modellparameter ein.

In den Kapiteln 8 und 9 werden die zuvor vorgestellten Inhalte bezüglich Feldrechnung und Hysteresemodellierung kombiniert. Dies führt zu einigen Besonderheiten bei der numerischen Berechnung der Felder, die in Kapitel 8 diskutiert werden. Kapitel 9 dient dem Test des Hysterongruppenmodells anhand des TEAM Problems 32. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick in Kapitel 10.

### 1.3 Bemerkungen zur Notation

In späteren Kapiteln tauchen einige bewusste Brüche und Inkonsistenzen in der Notation auf. Diese werden erläutert, wenn sie zum ersten Mal in Erscheinung treten. Auf einige Besonderheiten bezüglich der Notation soll jedoch an dieser Stelle explizit hingewiesen werden, da sie in der gesamten Arbeit zu finden sind:

- Für einen Vektor  $\boldsymbol{x}$  im euklidischen Raum bzw. in  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  werden je nach Zweckmäßigkeit die beiden Koordinatenschreibweisen

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

äquivalent verwendet.

- Eine nicht weiter spezifizierte Norm  $\|\boldsymbol{x}\|$  eines Vektors  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$  oder  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$  bezeichnet die euklidische Norm  $\|\boldsymbol{x}\|_2$ .
- Mehrdimensionale Größen werden fett geschrieben, sowohl Matrizen als auch Tensoren und Vektoren. Wo es möglich ist, werden Matrizen durch Großbuchstaben und Vektoren durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Von diesem Schema weichen z. B. die Bezeichnungen der elektromagnetischen Feldgrößen ab.
- Es werden teilweise Symbole mit doppelter Bedeutung belegt. Diese werden im jeweiligen Kontext neu eingeführt.

## 2 Physikalische Grundlagen des Ferromagnetismus

Mit Hysterese (von griechisch ὕστερος [*hysteros*]: später) wird im weitesten Sinne das Phänomen bezeichnet, dass eine Ausgangsgröße einer Eingangsgröße mit einer gewissen Verzögerung folgt. Mathematisch wird Hysterese in Kapitel 4 deutlich exakter charakterisiert. In der magnetischen Domäne ist dieses Verhalten bezüglich des magnetischen Felds und der magnetischen Flussdichte bei ferromagnetischen Materialien festzustellen.

Die klassische Hysterese, wie sie z. B. zu den bekannten Hystereseschleifen von ferromagnetischen Materialien führt, kann als makroskopisches Phänomen betrachtet werden. Nachfolgend wird näher darauf eingegangen, welche mikroskopischen Vorgänge dabei zusammenwirken. Zudem wird Hysterese gegenüber anderen makroskopischen Phänomenen wie klassischen Wirbelströmen abgegrenzt. Die Ausführungen haben vornehmlich beschreibenden Charakter und verzichten darauf, die zugehörigen mathematischen Zusammenhänge zu präsentieren. Diese sind in den jeweils angegebenen Literaturstellen zu finden. Auf makroskopischer Ebene werden die mathematischen Beschreibungen der magnetischen Größen ausführlich in Kapitel 3 diskutiert. Im Folgenden wird das magnetische Feld mit  $\mathbf{H}$ , die magnetische Flussdichte mit  $\mathbf{B}$ , die Polarisation mit  $\mathbf{I}$  und die Magnetisierung mit  $\mathbf{M}$  oder dem jeweiligen skalaren Äquivalent bezeichnet.

### 2.1 Feinstrukturen in ferromagnetischen Werkstoffen

Gemeinhin werden Diamagnetismus, Paramagnetismus, Ferromagnetismus, Ferrimagnetismus, Antiferromagnetismus und weitere Arten von Magnetismus unterschieden (siehe [55, S. 8] für eine umfassende Übersicht). Lediglich die Grundlagen des Ferromagnetismus werden im Rahmen dieses Abschnitts in Ausschnitten betrachtet, für weiterführende Informationen wird auf [55, 101, 107] verwiesen.

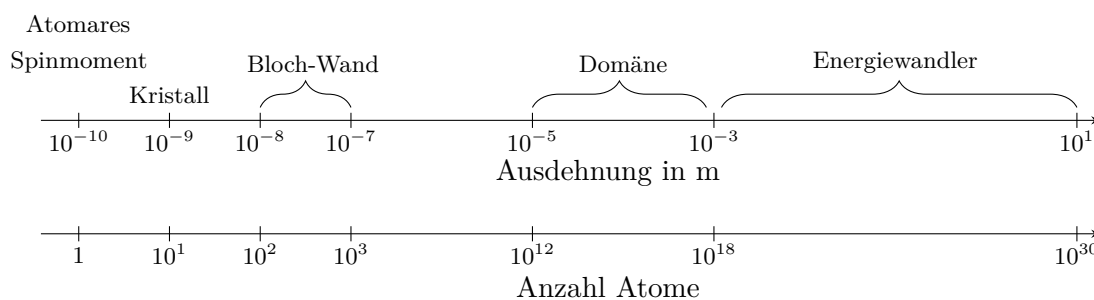
Auf atomarer Ebene, das heißt im Bereich der räumlichen Ausdehnung einzelner Atome oder kleiner Atomverbände, zeigen sich bereits grundlegende magnetische Eigenschaften eines Werkstoffs. Im Folgenden reicht es, das überholte Bohr'sche Atommodell zu betrachten. Darin lässt sich das magnetische Moment, das einem Elektron zugeschrieben werden kann, aufteilen in das Bahnmoment (aufgrund seiner Bewegung um einen Atomkern) und das Spinnmoment [107, S. 14 f.]. Ohne ein äußeres Feld sind die Impulsmomente und die Spinnmomente der Elektronen in abgeschlossenen Schalen stets so gekoppelt, dass das resultierende Moment Null ergibt. Dies ergibt sich aus den quantenmechanischen Bedingungen, denen die Zustände der einzelnen Elektronen genügen müssen (vgl. [107, S. 18]).

Erfahren Werkstoffe (Ionen oder Atome) mit abgeschlossenen Elektronenschalen ein äußeres Feld, so entsteht ein geringes magnetisches Präzessionsmoment, das im Mittel, bei einer größeren Anzahl von Atomen, dem äußeren Feld entgegenwirkt. Dieses Verhalten wird diamagnetisch genannt (Relative Permeabilität  $\mu_r < 1$ , vgl. [107, S. 21]). Ist wenigstens eine Elektronenschale nicht abgeschlossen, besitzen Stoffe ein permanentes magnetisches Moment.

Wird ein äußeres Feld angelegt (und ist dieses stark genug), richtet sich dieses permanente magnetische Moment nach dem äußeren Feld aus. Dieses Verhalten wird paramagnetisch genannt ( $\mu_r > 1$ ). Um von Paramagnetismus im klassischen Sinne zu sprechen, wird vorausgesetzt, dass die Wechselwirkung zwischen einzelnen Atomen gering ist. Dies trifft z. B. bei Gasen oder wässrigen Lösungen zu (vgl. [107, S. 23 ff.]). Bei ferromagnetischen Werkstoffen ist ebendiese letztgenannte Voraussetzung nicht gegeben. Bei Ferromagnetika richtet sich das magnetische Moment jedes Atoms tendenziell parallel zu den Momenten seiner Nachbarn aus. Dadurch kommt es auch ohne äußeres Feld zu einer spontanen Magnetisierung in makroskopischen Kristallbereichen (vgl. [107, S. 30]). Diese Eigenschaft heißt Ferromagnetismus und tritt abgesehen von z. B. metallischen Gläsern überwiegend bei kristallinen Werkstoffen auf. Der Ferromagnetismus kann dementsprechend als eine Form des Paramagnetismus gesehen werden (analog zu [55]). Bei Raumtemperatur verhalten sich unter den Elementen nur Nickel (Ni), Eisen (Fe), Cobalt (Co) und Ruthenium (Ru) ferromagnetisch (letzteres unterliegt Bedingungen an die Kristallstruktur [148]). Auf eine detaillierte Begründung für das Auftreten der Wechselwirkung bei ebendiesen Elementen wird an dieser Stelle verzichtet, hierfür wird auf [48] verwiesen.

Die Einschränkung bei Raumtemperatur weist bereits darauf hin, dass Ferromagnetismus nur bis zu einer werkstoffabhängigen Maximaltemperatur auftritt. Die Temperatur, bei der die ferromagnetische Eigenschaft vollständig verschwunden ist, wird als Curie-Temperatur bezeichnet. Bei Eisen beträgt diese ca. 1040 K. Die Curie-Temperatur ist ein Maß für die Stärke der Wechselwirkung zwischen den atomaren magnetischen Momenten. Ist sie bekannt, kann darauf geschlossen werden, welcher magnetischen Feldstärke ein Paramagnet mit gleichen elementaren magnetischen Momenten (ohne Wechselwirkung) ausgesetzt werden müsste, um eine Magnetisierung gleicher Stärke zu erhalten. Diese liegt im Falle von Eisen in der Größenordnung von  $H \approx 10^8 - 10^9 \frac{\text{A}}{\text{m}}$  [107, S. 31].

Für die Anwendung von ferromagnetischen Materialien in elektromechanischen Energiewandlern ist vor allem das makroskopische Materialverhalten von Interesse. Um dieses zu erklären, werden im Folgenden verschiedene Größenskalen betrachtet. Diese erstrecken sich von der Größenordnung weniger Atome bis hin zur Größe des betrachteten Körpers (z. B. des Energiewandlers) im Bereich einiger Millimeter bis Meter. In Abb. 2.1 sind einige der im folgenden diskutierten Begriffe gemeinsam mit der räumlichen Ausdehnung der zugehörigen Strukturen abgebildet<sup>1</sup>.

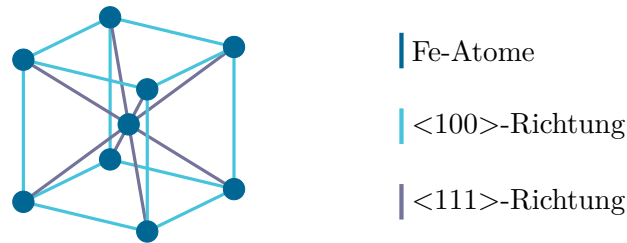


**Abb. 2.1** – Räumliche Ausdehnung verschiedener Strukturen in Ferromagnetika

Bereits das Kristallgitter, das die betrachteten Ferromagnetika (hier v. a. Eisen) ausbilden, beeinflusst dessen magnetische Eigenschaft, genauer die Wechselwirkungen zwischen den elementaren magnetischen Momenten der Atome. Die Elementarzellen des Kristallgitters bestehen aus nur wenigen Atomen und es tritt für gewöhnlich eine Kristallanisotropie

<sup>1</sup>Die Größenangaben wurden [101, S. 109, S. 134] und [107, S. 281, S. 287, S. 300 ff.] entnommen.

auf. Eisenatome ordnen sich unterhalb der Schmelztemperatur entsprechend des kubisch-raumzentrierten Kristallsystems an, wie in Abb. 2.2 dargestellt. Dies hat zur Folge, dass sich die elementaren magnetischen Momente bevorzugt entlang der Kanten des Kristallsystems, entsprechend der kristallographischen  $\langle 100 \rangle$ -Richtung, ausrichten. Demgegenüber ist die Ausrichtung entlang der Raumdiagonalen des kubisch-raumzentrierten Kristallsystems entsprechend der  $\langle 111 \rangle$ -Richtung ungünstiger.



**Abb. 2.2** – Kubisch-raumzentrierte elementare Gitterzelle von Eisen

Entscheidend für das ferromagnetische Verhalten eines Werkstoffs sind u. a. Vorgänge auf Ebene der magnetischen Domänen. Diese bestehen aus einer deutlich größeren Anzahl von Atomen als die zuvor angesprochenen Elementarzellen. Eine magnetische Domäne bezeichnet einen Bereich mit homogener Magnetisierung innerhalb eines Werkstoffs. Diese Bereiche werden auch Weiss'sche Bezirke (vgl. [107, S. 36]) genannt. Die Grenze zwischen den Domänen heißt (im betrachteten Fall) Bloch-Wand, in ihr findet der Übergang zwischen den Magnetisierungen zweier Domänen statt<sup>2</sup>. Ohne äußeres Feld bilden sich die Weiss'schen Bezirke in einem Kristall so aus, dass die im Werkstoff gespeicherte magnetische Energie minimal ist. Dies wird maßgeblich von Veränderungen der Kristallstruktur, Fehlstellen, Fremdpartikeln oder Ähnlichem (siehe [107, S. 315]) beeinflusst, sodass Bloch-Wände sich bevorzugt um diese herum ausbilden. Darüber hinaus spielt auch die Korngeometrie eine Rolle. Grundsätzlich kann davon ausgegangen werden, dass die Magnetisierung innerhalb jeder Domäne gleich der Sättigungsmagnetisierung ist.

Im Allgemeinen liegen ferromagnetische Werkstoffe wie Elektroblech nicht in homogener Kristallgitterstruktur vor, sodass nur kleinere Bereiche, die sog. Körner, monokristallin sind, das Elektroblech selbst jedoch polykristallin ist. Die Körner entstehen in Folge der Ausbildung mehrerer Kristallisationspunkte innerhalb des Elektroblechs, wenn dessen Phase im Herstellungsprozess von flüssig zu fest wechselt. In kornorientiertem Elektroblech wird angestrebt, die Unterschiede in der Orientierung der Kristalle von Korn zu Korn gering zu halten, sodass sich das Blech also näherungsweise wie ein einziger Kristall verhält [107, S. 316]. In nicht kornorientierten Blechen ist es dagegen gewünscht, eine möglichst breite Streuung der Orientierung der Kristalle zu erreichen, was letztendlich dazu führt, dass nicht kornorientierte Bleche näherungsweise isotrope magnetische Materialeigenschaften besitzen. Ein Korn besteht demnach aus einer oder mehreren magnetischen Domänen. In Abb. 2.3 sind die Strukturen aus Weiss'schen Bezirken und Körnern schematisch dargestellt.

### Mathematische Beschreibung der Feinstruktur

Die Vorgänge auf Ebene der Domänen werden dem sog. Mikromagnetismus (engl. *micro-magnetism*) zugeschrieben. Die Maxwell-Gleichungen, deren Lösung den zentralen Inhalt von Kapitel 3 bildet, beschreiben elektromagnetische Felder auf makroskopischer Ebene.

<sup>2</sup>Je nachdem wie der Magnetisierungswechsel vonstattengeht, werden Bloch-Wände und Néel-Wände unterschieden. Für die genaue Differenzierung wird auf [107] verwiesen.

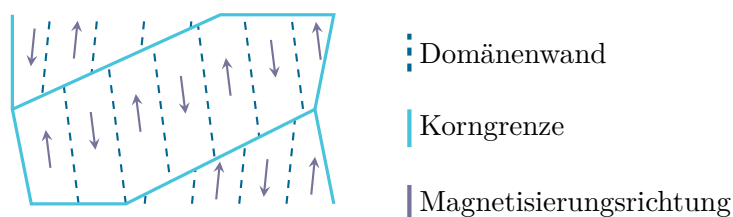


Abb. 2.3 – Schematische Darstellung von Domänen und Körnern (angelehnt an [93])

Sie sind nicht dazu geeignet, die Wechselwirkung zwischen magnetischen Momenten in ferromagnetischen Werkstoffen auf mikroskopischer Ebene zu beschreiben. Dies leistet die Landau-Lifschitz-Gilbert-Gleichung, welche die Grundlage für Berechnungsvorgänge im Mikromagnetismus bildet. Eine makroskopische Beschreibung des magnetischen Verhaltens des Werkstoffs auf Basis der Landau-Lifschitz-Gilbert-Gleichung ist nicht ohne Weiteres möglich. Es wird daher weiter qualitativ auf die Vorgänge bei der Magnetisierung eingegangen, um die spätere makroskopische Betrachtung zu motivieren.

## 2.2 Ablauf von Magnetisierungsvorgängen

Im Wesentlichen existieren zwei Begriffe, die für das Verständnis von Magnetisierungsvorgängen in Ferromagnetika erklärt werden müssen: Wandverschiebungen und Drehprozesse.

Diese werden anhand eines Beispielmateriale erläutert, das ohne Einfluss eines äußeren Felds vier Domänen besitzt. Das Beispiel wurde aus [107, S. 36] übernommen. Nach außen hin ist das Material nicht magnetisiert, da sich die Magnetisierungen der Domänen aufheben (siehe Schritt 1 in Abb. 2.4).

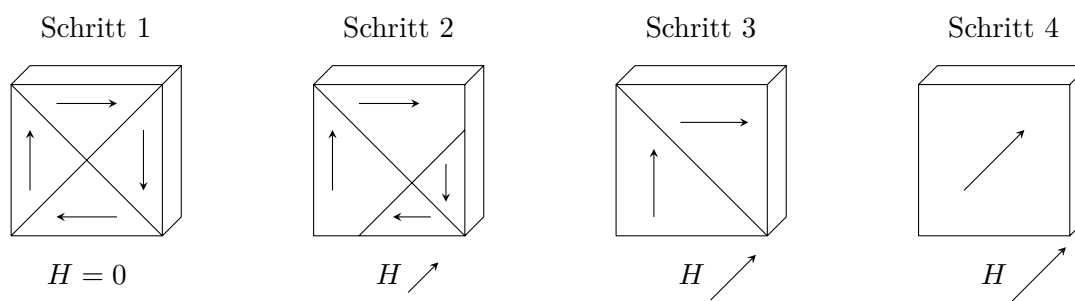


Abb. 2.4 – Schematischer Ablauf der Magnetisierung (übertragen aus [107, S. 36])

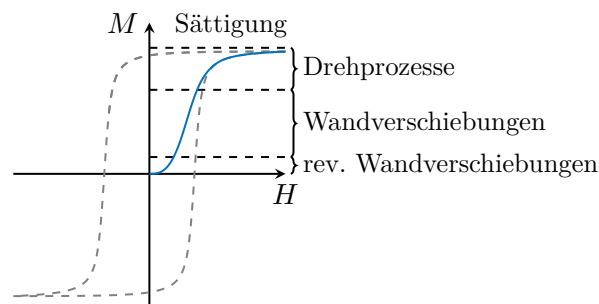
Wird nun ein Magnetfeld angelegt, kommt es zu einer Verschiebung der Wandgrenzen. Das heißt die Domänen, deren Magnetisierung mit dem äußeren Feld einen spitzen Winkel einschließen, werden größer, die benachbarten Domänen dementsprechend kleiner (Schritt 2 in Abb. 2.4). Die für Wandverschiebungen benötigte Energie ist gering, und sie finden bereits bei verhältnismäßig kleinen äußeren Feldstärken statt.

Die Wandverschiebungen können so lange stattfinden, bis nur noch zwei Domänen vorhanden sind, die im Feld die gleiche Energie besitzen (Schritt 3 in Abb. 2.4). Bei weiter steigender äußerer Feldstärke wird die Magnetisierung der Domänen in Richtung des äußeren Felds gedreht. Diese Drehprozesse benötigen deutlich mehr Energie als die zuvor behandelten Wandverschiebungen. Sind die Magnetisierungen in beiden Domänen ausgerichtet, verschwindet auch die Bloch-Wand zwischen ihnen, das heißt schlussendlich liegt nur noch eine Domäne vor (Schritt 4 in Abb. 2.4).



Fehlstellen im Kristall können die Verschiebung der Domänenwand behindern bzw. die Wand festsetzen. Dieser Effekt wird im Englischen als *pinning* bezeichnet. Wird, nachdem die Wandbewegung gestoppt wurde, die magnetische Feldstärke weiter erhöht, treten zunächst reversible Wandbiegungen (kleinere Wandverschiebungen um die Fehlstelle herum) auf, schlussendlich kann die Fehlstelle jedoch überwunden werden. Die Bewegung der Domänenwand zur nächsten energetisch günstigen Position findet anschließend sehr schnell, näherungsweise sprunghaft, statt. Dieser Effekt wird als Barkhausen-Sprung bezeichnet. Die Geschwindigkeit der Wanderung der Domänenwand wird tatsächlich von den bei der Wanderung entstehenden Wirbelströmen bestimmt. Aufgrund der hohen Ablaufgeschwindigkeit des Vorgangs (siehe dazu auch [107, S. 413]) kann dieser als unabhängig von der Änderungsrate des äußeren Felds angesehen werden [19, S. 25], deren Frequenz wiederum in der Energietechnik im Kilohertzbereich und darunter liegt. Für weitere Literatur bezüglich der Dynamik und des thermodynamischen Gleichgewichts bei Wandverschiebungen wird auf [107, S. 366 und S. 387] verwiesen. Sinkt die Feldstärke, nachdem sie zuvor erhöht wurde, wieder auf ihren Ursprungswert ab, ist es möglich, dass Domänenwände nicht in ihre Ursprungsposition zurückwandern, sondern z. B. an einer Fehlstelle festgesetzt werden. Die Magnetisierung unterscheidet sich dann von ihrem ursprünglichen Wert. Dies äußert sich durch unterschiedliche absteigende und aufsteigende Äste im Magnetisierungsverlauf sowie dem Auftreten einer Remanenzflussdichte. Dies sind beides Kriterien, die intuitiv mit Hysterese verknüpft werden.

Kleinere Wandverschiebungen oder Wandbeugungen und Drehprozesse sind gemeinhin reversibel, größere Wandverschiebungen sind irreversibel [101, S. 147 f.] [107, S. 36]. Der Zusammenhang zwischen den aufgeführten Magnetisierungsprozessen und der Magnetisierungskurve wird in Abb. 2.5 veranschaulicht (detaillierte Abhandlung: [107, Kap. 24]). Der steile Abschnitt der Kennlinie entsteht vornehmlich durch Wandverschiebungen und den damit verbundenen Barkhausen-Sprüngen, für den flacheren Teil hingegen sind hauptsächlich Drehprozesse verantwortlich [107, S. 397]. Es treten z. B. aufgrund von Anisotropie [101, S. 148] auch irreversible Drehprozesse auf, denen vor allem bei kornorientierten Materialien größere Bedeutung zugewiesen wird.



**Abb. 2.5** – Zusammenhang zwischen Magnetisierungsprozessen und Magnetisierungskurve (nach [107, S. 37])

Ferromagnetische Hysterese als makroskopische Erscheinung ist stets mit irreversiblen Prozessen auf der mikroskopischen Ebene verknüpft. Die in diesem Abschnitt aufgeführten Effekte reichen aus, um das Auftreten von Hysterese zu erklären. Innerhalb eines ferromagnetischen Werkstoffs existiert eine Vielzahl weiterer Effekte, die dessen Magnetisierungsverhalten beeinflussen. Diese werden an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt, ein Beispiel hierfür ist Magnetostriktion [107, Kap. 18].

## 2.3 Wirbelströme und Verlusttrennung

Abhängig von der Änderungsrate der Magnetisierung bilden sich Wirbelströme im Material aus, die ihrerseits ein magnetisches Feld bedingen, das mit den elementaren magnetischen Momenten wechselwirkt. Da alle Ferromagnetika in elementarer und häufig auch in verarbeiteter Form eine verhältnismäßig hohe Leitfähigkeit aufweisen (typisch bei Elektroblech ca.  $2 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ ), beeinflussen Wirbelströme ihr Magnetisierungsverhalten maßgeblich.

Generell kann bei den betrachteten niedrigen Frequenzen die resultierende Magnetisierung als Überlagerung der Einflüsse der äußeren Anregung und der materialeigenen Wirbelströme gesehen werden. Allerdings muss diese Betrachtung auf Ebene der Domänen stattfinden. Die makroskopische Magnetisierung ergibt sich als Mittel aus den Magnetisierungen der Domänen. Analog treten Wirbelströme lokal im Bereich der Verschiebung der Domänenwand auf. Demgegenüber stehen die makroskopischen oder klassischen Wirbelströme, die sich abhängig von der betrachteten Geometrie und der Änderung der makroskopischen Magnetisierung einstellen. Sollen für einen Ummagnetisierungsvorgang auf Basis der makroskopischen Betrachtung die energetischen Verluste angegeben werden, sind diese gleich den ohmschen Verlusten durch die Wirbelströme, den sog. klassischen Wirbelstromverlusten, und den Verlusten durch irreversible Magnetsierungsprozesse, den sogenannten Hystereseverlusten<sup>3</sup>.

Es ist lange bekannt, dass die so berechneten makroskopischen Verluste nicht den realen Verlusten entsprechen. Dies liegt darin begründet, dass die makroskopische Betrachtung der Wirbelströme die mikroskopischen Wirbelströme nicht korrekt widerspiegelt. Dies zeigen bereits Pry und Bean [146] anhand eines Modells für wenige Domänen unter verhältnismäßig restriktiven Annahmen an den Verlauf der Domänenwandbewegungen. Da auch das Modell von Pry und Bean ungenaue Ergebnisse liefert, wurde von Bertotti eine statistische Verlusttheorie eingeführt (siehe [14–17]). Diese postuliert auf Basis von [18], dass korrelierte Barkhausen-Sprünge den maßgeblichen Einfluss auf die Domänenstruktur eines Werkstoffs darstellen. Schlussendlich wird ein Term eingeführt (siehe [13] für eine Zusammenfassung), der die Diskrepanz zwischen auftretenden und makroskopisch berechneten Verlusten kompensiert: die sog. Anomalieverluste (im Englischen *anomalous losses* oder *excess losses*). Die Eisenverluste schreiben sich damit für einen sinusförmigen  $B$ -Verlauf mit Frequenz  $f$  [13]

$$P_{\text{Fe}} = P_{\text{hys}} + P_{\text{ec}} + P_{\text{ex}} = c_{\text{hys}} \hat{B} f + c_{\text{ec}} \hat{B}^2 f^2 + c_{\text{ex}} \hat{B}^{1,5} f^{1,5} \quad (2.1)$$

mit an dieser Stelle unbestimmten Koeffizienten  $c_{\text{hys}}$ ,  $c_{\text{ec}}$  und  $c_{\text{ex}}$ . Aus der Aufteilung der Verluste in (statische) Hystereseverluste (Index hys), klassische Wirbelstromverluste (Index ec) und Anomalieverluste (Index ex) folgt, da die Polarisation in den Modellen jeweils vorgegeben ist, eine Aufteilung des magnetischen Felds in korrespondierende Bestandteile  $H_{\text{hys}}$ ,  $H_{\text{ec}}$  und  $H_{\text{ex}}$ . Das resultierende Verlustmodell besitzt Schwächen bezüglich der Anwendbarkeit auf Fälle, die weit vom Modellfall abweichen, anhand dessen es konstruiert wurde (Drehmagnetisierung, Oberwellen, etc.). Die Aufteilung des H-Felds wird jedoch unabhängig vom ursprünglichen Verlustmodell in vielen Veröffentlichungen beibehalten.

Die Hystereseverluste kennzeichnet, dass sie linear von der speisenden Frequenz abhängen. Diese zuerst rein phänomenologische Festlegung korrespondiert mit der in Kapitel 4 eingeführten Ratenunabhängigkeit von hysteresebehafteten Prozessen. Diesem Ansatz folgend müssen demnach zur korrekten makroskopischen Modellierung ferromagnetischer Materialien zwei Teilaspekte von deren Verhalten wiedergegeben werden: Hysterese und dynamisches Verhalten (Wirbelströme). Da beide sich jedoch, wie zu Beginn des Abschnitts bereits konstatiert, gegenseitig beeinflussen, wirken sich Fehler in der Modellierung des Hystereseanteils im Wirbelstromanteil aus und umgekehrt. Daher ist es, auch um Verluste korrekt zu berechnen, von

<sup>3</sup>Auch diese können als Wirbelstromverluste im Bereich der Domänenwand selbst interpretiert werden.

Interesse, über Hystereseemodelle zu verfügen, die in der Lage sind, Magnetisierungsverläufe für mehrdimensionale Eingangs- und Ausgangsgrößen zu berechnen.

Die folgenden Kapitel beschränken sich vornehmlich auf diesen Aspekt der Modellierung der statischen Hysterese. Es werden allerdings v. a. in Kapitel 3 Anknüpfungspunkte für die Modellierung des dynamischen Verhaltens gegeben. Wie noch genauer erläutert wird, ist hierbei vor allem problematisch, dass für reale Aufbauten wie einen Transformator geblechte Körper vorliegen, was bei der Berechnung von Wirbelströmen zusätzliche Schwierigkeiten birgt (siehe z. B. [85, 93, 157] für die Behandlung von geblechten Aufbauten.).



# 3 Formulierung und Diskretisierung von Variationsproblemen mit Hysterese

Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen in ihrer allgemeinen Form werden in diesem Kapitel die magnetostatischen und magnetoquasistatischen Variationsprobleme hergeleitet, die eine spätere Berücksichtigung von Hysterese ermöglichen. Darüber hinaus wird eine zweckmäßige Diskretisierung der Variationsprobleme mithilfe der Methode der finiten Elemente eingeführt. Auf Hysterese selbst wird erst in Kapitel 4 eingegangen. Es werden jedoch die meisten Werkzeuge bereitgestellt, derer es bedarf, um die magnetostatischen Feldprobleme in den Kapiteln 8 und 9 zu lösen.

## 3.1 Maxwell-Gleichungen und Materialgesetze

Elektromagnetische Phänomene, die keine relativistische Betrachtung erfordern und nicht im Bereich der Quantenmechanik angesiedelt sind, lassen sich gemeinhin mit den Maxwell-Gleichungen beschreiben. Diese können als ein Satz von vier Gleichungen dargestellt werden und lauten in differentieller Form [155]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho . \quad (3.4)$$

Während die differentielle Form der Maxwell-Gleichungen den Ausgangspunkt für eine Vielzahl von Berechnungsmethoden für elektromagnetische Felder bietet, erlaubt die integrale Form der Gleichungen eine Verknüpfung der Feldgrößen mit messbaren Größen wie z. B. der elektrischen Spannung. Das Faraday'sche Induktionsgesetz (3.1) wird nur für ruhende Anordnungen angegeben, für bewegte Anordnungen siehe [155, S. 46]. Die Maxwell-Gleichungen in integraler Form lauten dann:

$$\int_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.5)$$

$$\int_{\partial A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_A (\mathbf{j} + \partial_t \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{A} \quad (3.6)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \rho dV . \quad (3.8)$$

Die Gleichungen werden um die Materialgesetze (3.9) und (3.10) erweitert, die das magnetische Feld  $\mathbf{H}$  mit der Induktion  $\mathbf{B}$  und das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  mit der dielektrischen Verschiebung  $\mathbf{D}$

in Beziehung setzen. Im Falle der magnetischen Induktion wird im Folgenden bevorzugt die Sommerfeld-Konvention verwendet [101, S. 12]:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(\mathbf{E} + \mathbf{P}) . \quad (3.10)$$

Bei  $\mu_0$  handelt es sich um die Permeabilität des Vakuums, analog wird mit  $\epsilon_0$  die Permittivität des Vakuums bezeichnet. Der Stromdichte  $\mathbf{j}$ , der Magnetisierung  $\mathbf{M}$  sowie der Polarisation  $\mathbf{P}$  fällt jeweils die Rolle eines Quellterms zu, wobei alle Größen den Einfluss von statischen oder bewegten elektrischen Ladungen auf das elektromagnetische Feld beschreiben. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass lediglich das Induktionsgesetz (3.1) und das Durchflutungsgesetz (3.2) zur eindeutigen Beschreibung elektromagnetischer Felder benötigt werden, sofern das  $\mathbf{B}$ -Feld hinreichenden Anfangsbedingungen genügt [30, S. 5ff.].

Zwischen Stromdichte und elektrischem Feld gilt der Zusammenhang

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.11)$$

mit einer (möglicherweise richtungsabhängigen und nichtlinearen) Leitfähigkeit  $\sigma \geq 0$ .

Aus dem Durchflutungsgesetz und (3.4) folgt außerdem die Erhaltung elektrischer Ladungen nach

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho = 0 . \quad (3.12)$$

## 3.2 Reduktion zu Wirbelstromproblemen

Es ist üblich, den zuvor eingeführten Gleichungssatz an die jeweils betrachteten Problemstellungen anzupassen und das elektromagnetische Feld nicht mehr vollständig zu beschreiben. Im Falle der elektromechanischen Energiewandlung bedeutet dies, die Gleichungen in die sogenannten magnetoquasistatischen Maxwell-Gleichungen zu überführen. Dazu wird vorausgesetzt, dass die Stromdichte  $\mathbf{j}$  sehr groß gegenüber der zeitlichen Änderung der dielektrischen Verschiebung ist. Damit lässt sich der Term  $\partial_t \mathbf{D}$  in (3.2) vernachlässigen.

Dies ist gleichbedeutend mit der Vernachlässigung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. Inwiefern dies gerechtfertigt ist, hängt maßgeblich von den anregenden Frequenzen und der Topologie des Systems ab. Die Abmessungen der betrachteten Geometrie müssen deutlich größer als die aufgrund der Anregung maximal auftretende Wellenlänge sein. Die Gültigkeit der Näherung im Zeit- und Frequenzbereich wird in [36] und [152] ausführlich diskutiert.

Darüber hinaus wird vorausgesetzt, dass keine Ladungsträgeransammlungen als Quellen für ein elektrisches Feld vorhanden sind ( $\rho = 0$  und  $\mathbf{P} = 0$ ), was für die Stromdichte zur Konsequenz hat, dass

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 . \quad (3.13)$$

Das resultierende (differentielle) System von Gleichungen zur Beschreibung von Wirbelstromfeldern lautet somit:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (3.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \quad (3.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.16)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_e . \quad (3.18)$$

Die Stromdichte  $\mathbf{j}$  wird in (3.18), im Vorgriff auf die später beschriebene Feldberechnung, aufgeteilt in einen eingepprägten Quellenterm  $\mathbf{j}_e$  und einen durch das elektrische Feld hervorgerufenen Anteil  $\mathbf{j}_w = \sigma \mathbf{E}$ . Damit das Feldproblem (3.14)–(3.18) korrekt gestellt ist, müssen Anfangsbedingungen für die Felder gegeben werden [36], z. B.

$$\mathbf{j}(t_0) = 0, \quad \mathbf{E}(t_0) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{H}(t_0) = 0.$$

Im Gegensatz dazu müssen im ebenfalls häufig betrachteten zeitharmonischen Fall die Felder  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{E}$  Abstrahlungsbedingungen genügen [36]. Diese implizieren, dass die Feldamplituden in größerer Entfernung von der jeweiligen Feldanregung mit steigendem Abstand quadratisch abnehmen [36, Prop. 3.1]:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\right), \text{ gleichmäßig für } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}\right), \text{ gleichmäßig für } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

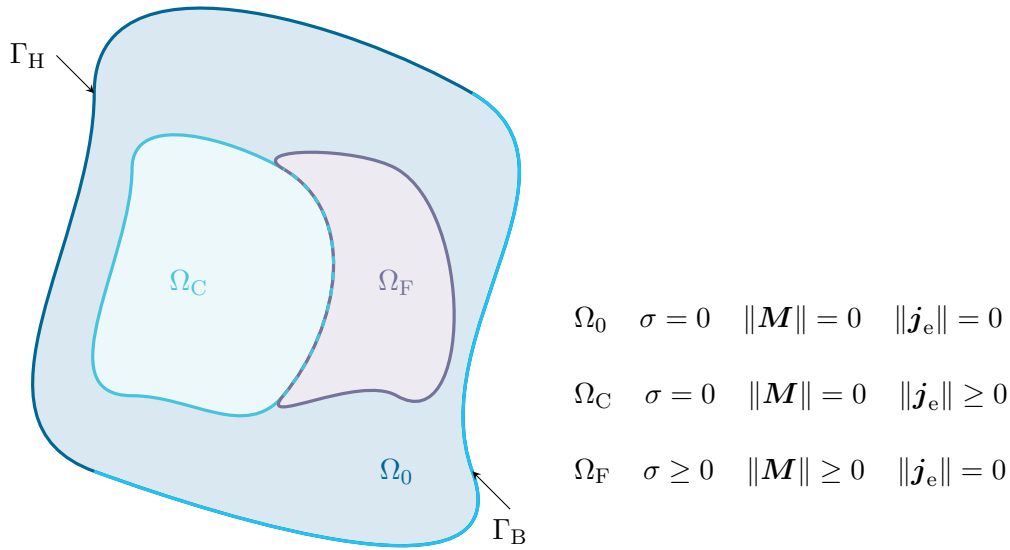
Der später betrachtete magnetostatische Fall ergibt sich, alternativ zur Herleitung auf Basis von (3.14)–(3.18), aus dem zeitharmonischen Fall für  $\omega \rightarrow 0$ . In [149] werden Existenz und Eindeutigkeit der gesuchten statischen Felder diskutiert. Es gilt zu beachten, dass in der genannten Literatur jeweils der lineare Fall untersucht wird.

Der zeitharmonische Fall wird im Folgenden nicht weiter betrachtet. Indem  $\partial_t \mathbf{B} = 0$  gesetzt wird, ergeben sich die Feldgleichungen der Magnetostatik als Spezialfall der zeitabhängigen Gleichungen (3.14)–(3.18).

### 3.3 Randwertprobleme und Potentialformulierungen

Ausgehend von den im vorherigen Abschnitt eingeführten Beschreibungen von Wirbelstromproblemen werden im folgenden Abschnitt die Potentialformulierungen hergeleitet, auf deren Basis die in den Kapiteln 8 und 9 gelösten Randwertprobleme gestellt werden. Es werden vorerst keine weiteren Einschränkungen des Wirbelstromproblems vorgenommen, wodurch im ersten Schritt gemischte Potentialformulierungen entstehen. An späterer Stelle werden die betrachteten Randwertprobleme auf den magnetostatischen Fall reduziert. Da die Klasse der Wirbelstromprobleme in der Energietechnik eine tragende Rolle spielt, sollen die statischen Probleme jedoch zuerst in deren Kontext eingebettet werden. Eine umfassende Beschreibung von Wirbelstromproblemen mit verschiedenen Potentialformulierungen ist in [26] oder [119] zu finden.

Die Umformulierung von (3.14)–(3.18) mithilfe eines magnetischen Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  gekoppelt mit einem elektrischen Skalarpotential  $V$  oder eines magnetischen Skalarpotentials  $\Phi$  gekoppelt mit einem Strömungsvektorpotential  $\mathbf{T}$  ermöglicht es, den Satz von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung als zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu schreiben. Je nachdem, welche Gleichung als Ausgangspunkt für die Potentialformulierung herangezogen wird, ergibt sich eine andere algebraische Gleichungsstruktur. Über die Beschreibung der Felder mithilfe der zuvor genannten Potentialgrößen hinaus existieren weitere Möglichkeiten zur Konstruktion von Potentialen (z. B. das totale magnetische Skalarpotential  $\Psi$  [119]), die an dieser Stelle jedoch nicht vorgestellt werden.



**Abb. 3.1** – Schematische Darstellung des Lösungsgebiets der behandelten Wirbelstromprobleme

In den folgenden Kapiteln wird die Methode der finiten Elemente zur Lösung von Wirbelstromproblemen verwendet. Diese setzt ein abgeschlossenes Lösungsgebiet und die gesonderte Betrachtung von dessen Rändern voraus. Anhand von Abb. 3.1 wird die in der Arbeit verwendete Notation erläutert sowie der Prototyp des Lösungsgebiets für die behandelten Randwertprobleme dargestellt. Der Prototyp ist an [24, 26] und [119] angelehnt. Gerade in Bezug auf die zugelassenen Randbedingungen werden im Folgenden, verglichen mit den genannten Literaturquellen, einige Einschränkungen getroffen.

Das gesamte beschränkte offene Lösungsgebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  oder  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  wird zusammengesetzt aus mehreren offenen Teilgebieten: dem nicht leitfähigen Gebiet  $\Omega_C$  mit linearen magnetischen Eigenschaften und einer Quellenstromdichte  $\mathbf{j}_e$ , dem Vakuumgebiet  $\Omega_0$  und dem unter Umständen leitfähigen ferromagnetischen Gebiet  $\Omega_F$ . Die Teilgebiete sind nicht notwendigerweise einfach zusammenhängend und überlappen sich nur auf ihren Rändern. Um seltener Fallunterscheidungen treffen zu müssen, wird im Folgenden häufig  $\mathbb{R}^d$  mit  $d \in \{2, 3\}$  geschrieben, wenn Inhalte unabhängig von der betrachteten Dimension gültig sind. Es werden folgende Definitionen zur Bezeichnung von Teilgebieten und Rändern getroffen:

$$\begin{aligned}
 \Omega &:= \Omega_0 \cup \Omega_C \cup \Omega_F \\
 \Gamma &:= \partial\Omega = \Gamma_B \cup \Gamma_H \\
 \Gamma_{CF} &:= \overline{\Omega_C} \cap \overline{\Omega_F} \\
 \Gamma_{C0} &:= \overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_C} \\
 \Gamma_{F0} &:= \overline{\Omega_0} \cap \overline{\Omega_F} \\
 \Gamma_F &:= \partial\Omega_F \\
 \Gamma_C &:= \partial\Omega_C .
 \end{aligned}$$

Es wird vorausgesetzt, dass es sich bei  $\Gamma$  um einen Lipschitz-Rand handelt und  $\Omega$  einfach zusammenhängend ist. Der Normalenvektor auf einer stückweise glatten Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^{d-1}$  wird mit  $\mathbf{n}$  bezeichnet. Der Rand  $\Gamma$  ist zusammengesetzt aus  $\Gamma_B$  und  $\Gamma_H$ . Ferner wird der Rand  $\Gamma_E \subset \Gamma_B$  eingeführt, dieser wird z. B. benötigt, wenn eine Spannungspeisung



durch die Vorgabe von Potentialdifferenzen auf dem Rand modelliert werden soll. An den Rändern wird jeweils gefordert, dass [119, S. 21]

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_B, \quad (3.21)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_H, \quad (3.22)$$

$$\sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_H \quad \text{und} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_E. \quad (3.24)$$

Dadurch sind (je nach Potentialformulierung) lediglich homogene Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen gefordert, diese reichen jedoch für die hier betrachteten Anwendungsfälle aus (Symmetrieebenen, kein Feld durch Berandung). Die meisten nachfolgend vorgestellten Inhalte lassen sich problemlos auf andersartige Randbedingungen übertragen, wie sie z. B. bei gekoppelten Gebieten oder Ähnlichem entstehen können. Der Teilabschnitt  $\Gamma_E$  des Randes wird nur der Vollständigkeit halber weiterhin mitgeführt. Für die in den späteren Kapiteln folgenden Berechnungen hat dies zur Konsequenz, dass keine Spannungsspeisung durch die Vorgabe von Potentialen auf den Rändern möglich ist<sup>1</sup> und dass keine Stromverdrängungseffekte in den der Anregung zugeordneten Leitern modelliert werden.

Auf allen Grenzflächen zwischen Teilgebieten wird gefordert, dass

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.25)$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (3.26)$$

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (3.27)$$

$$(\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.28)$$

wobei die zu den Indizes 1 und 2 gehörenden Größen entsprechend der betrachteten Grenzfläche zu wählen sind. Durch (3.26) werden keine Oberflächenströme bzw. Strombeläge zugelassen.

Durch (3.14) und (3.15) in Verbindung mit (3.21)–(3.24) und den zuvor aufgeführten Voraussetzungen sind die Felder  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{E}$  eindeutig charakterisiert [155].

### 3.3.1 Magnetisches Vektorpotential $\mathbf{A}$ und elektrisches Skalarpotential $V$

Das magnetische Vektorpotential  $\mathbf{A}$  sorgt per Definition dafür, dass die Quellenfreiheit von  $\mathbf{B}$  (siehe (3.3)) erfüllt ist. Zwischen beiden Größen besteht der Zusammenhang

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad (3.29)$$

Weiterhin folgt durch Umformung des Induktionsgesetzes (3.15):

$$\nabla \times (\partial_t \mathbf{A} + \mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla V. \quad (3.30)$$

Das elektrische Skalarpotential  $V$  beschreibt demnach den konservativen Anteil des  $\mathbf{E}$ -Felds. Mithilfe von (3.17) und (3.18) lässt sich (3.14) zu der zentralen Gleichung der sog.  $\mathbf{A}$ ,  $V$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung [24] umformen, die Wirbelstromprobleme mithilfe des Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  und des Skalarpotentials  $V$  innerhalb von  $\Omega_F$  beschreibt:

$$\nabla \times \nu_0 \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \mathbf{M} + \sigma \partial_t \mathbf{A} + \sigma \nabla V = \mathbf{0}. \quad (3.31)$$

Diese beinhaltet bereits die Quellenfreiheit der Wirbelstromdichte gemäß

$$\nabla \cdot (\sigma \partial_t \mathbf{A} + \sigma \nabla V) = 0. \quad (3.32)$$

<sup>1</sup>Dies schränkt die Möglichkeit der Spannungsanregung bei Schaltkreis Kopplung jedoch nicht ein.

Innerhalb von  $\Omega_C$  und  $\Omega_0$  entfallen alle Terme, die  $\sigma$  als Faktor beinhalten, dementsprechend wird das Feld in diesen Teilgebieten beschrieben durch

$$\nabla \times \nu_0 \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_e . \quad (3.33)$$

Das elektrische Skalarpotential kann auch als Zeitableitung eines übergeordneten Skalarpotentials geschrieben werden, was bei der Erstellung des Gleichungssystems auf Basis der Galerkin-Methode dafür sorgt, dass die Symmetrie der Systemmatrix erhalten bleibt [24].

Das Vektorpotential ist (unabhängig von nachfolgend aufgeführten Randbedingungen) durch (3.29)–(3.33) nicht eindeutig festgelegt. Gemäß der Helmholtz-Dekomposition (siehe z. B. [138]) kann jedes Vektorfeld in einen wirbelbehafteten und einen wirbelfreien Anteil aufgeteilt werden, wobei der wirbelfreie Anteil als Gradient eines Skalarfelds  $\xi$  dargestellt werden kann:

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} + \nabla \xi . \quad (3.34)$$

Lediglich der wirbelbehaftete Anteil  $\tilde{\mathbf{A}}$  ist durch (3.29)–(3.33) charakterisiert. Die konkrete Bestimmung von  $\xi$  spielt bei der Feldberechnung eine untergeordnete Rolle, da  $\xi$  keine Auswirkungen auf das magnetische Feld hat, jedoch führt die Mehrdeutigkeit von  $\mathbf{A}$  zu Problemen bei numerischen Lösungsverfahren, auf die an späterer Stelle noch eingegangen wird. Um  $\mathbf{A}$  eindeutig festzulegen, kann u. a. gefordert werden, dass  $\mathbf{A}$  die Coulomb-Eichbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.35)$$

erfüllt. Dies im Rahmen der numerischen Feldrechnung zu gewährleisten, ist im Allgemeinen nicht ohne Weiteres möglich. Die Coulomb-Eichung bildet jedoch einen wichtigen Eckpfeiler für einige numerische Verfahren zur Lösung von Wirbelstromproblemen. Für eine detaillierte Diskussion der Eindeutigkeit bzw. der Eichung von  $\mathbf{A}$  wird auf [24] verwiesen.

Eine Randbedingung an  $\mathbf{B}$  gemäß (3.21) auf  $\Gamma_B$  resultiert in einer Dirichlet-Randbedingung an  $\mathbf{A}$  der Form [24]

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} .$$

Demgegenüber resultiert eine Randbedingung an  $\mathbf{H}$  gemäß (3.22) auf  $\Gamma_H$  in einer Neumann-Randbedingung der Form

$$\mathbf{n} \times (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{M}) = \mathbf{0} .$$

Im Folgenden wird eine explizite Spannungsspeisung nicht betrachtet. Damit kann  $V = 0$  im gesamten Gebiet  $\Omega$  und auf dem gesamten Rand  $\Gamma$  gesetzt werden. Dies ist äquivalent mit der Aussage, dass keine Quelle für ein konservatives elektrisches Feld im Feldraum existiert. Der wirbelbehaftete Anteil des elektrischen Felds lässt sich vollständig mithilfe von  $\mathbf{A}$  beschreiben. Damit lassen sich die partiellen Differentialgleichungen (3.31)–(3.33) und die zugehörigen Randbedingungen (3.25)–(3.28) weiter vereinfachen. Das Ergebnis ist folgendes Randwertproblem, das in der Literatur (z. B. [119]) auch als  $\mathbf{A}^*$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung bezeichnet wird:

**Randwertproblem 3.1** ( $\mathbf{A}$  magnetoquasistatisch) *Bestimme  $\mathbf{A}$ , sodass gilt*

$$\nabla \times \nu_0 \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \mathbf{M} + \sigma \partial_t \mathbf{A} = \mathbf{j}_e \quad \text{in } \Omega \quad (3.36)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_B \quad (3.37)$$

$$(\nu_0 \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{M}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_H . \quad (3.38)$$

Weiter ergibt sich das magnetostatische Randwertproblem als Spezialfall des magnetoquasistatischen Randwertproblems für den Wert  $\sigma = 0$  in  $\Omega$ .

**Randwertproblem 3.2** ( $\mathbf{A}$  magnetostatisch) *Bestimme  $\mathbf{A}$ , sodass gilt*

$$\nabla \times \nu_0 \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_e \quad \text{in } \Omega \quad (3.39)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_B \quad (3.40)$$

$$(\nu_0 \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{M}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H . \quad (3.41)$$

Beiden Randwertproblemen lassen sich weitere Bedingungen hinzufügen, wie z. B. die Stetigkeitsbedingungen an  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  gemäß (3.25) und (3.26). Es wird an späterer Stelle gezeigt werden, dass diese durch die Wahl der Ansatzfunktionen im Kontext der finiten Elemente erfüllt sind (z. T. nur im schwachen Sinne).

### 3.3.2 Magnetisches Skalarpotential $\Phi$ und Strömungsvektorpotential $\mathbf{T}$

Im Gegensatz zum magnetischen Vektorpotential ist nicht die Induktion  $\mathbf{B}$ , sondern die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  der Ausgangspunkt für Potentialformulierungen, die ein magnetisches Skalarpotential verwenden. Gemäß der Helmholtz-Dekomposition lässt sich das Vektorfeld  $\mathbf{H}$  schreiben als

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} + \mathbf{H}_m \quad (3.42)$$

mit einem wirbelfreien Anteil  $\mathbf{H}_m$  und einem wirbelbehafteten Anteil  $\mathbf{T}$ . In Übereinstimmung mit (3.14) wird folglich gefordert, dass

$$\nabla \times \mathbf{T} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_w \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{H}_m = 0 .$$

Der wirbelfreie Anteil  $\mathbf{H}_m$  kann als Gradient des sogenannten magnetischen Skalarpotentials  $\Phi$  ausgedrückt werden:

$$\mathbf{H}_m = -\nabla \Phi . \quad (3.43)$$

Analog zur Stromdichte wird das Strömungsvektorpotential aufgeteilt in Quellenanteile  $\mathbf{T}_e$  und dynamische Anteile  $\mathbf{T}_w$ :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_w . \quad (3.44)$$

Die Bestimmung von  $\mathbf{T}_e$  kann auf verschiedene Weise erfolgen. Eine verbreitete Methode ist die Berechnung über das Biot-Savart'sche Gesetz [119], was gleichbedeutend mit der Berechnung der durch die jeweilige Stromdichteverteilung verursachten magnetischen Feldstärke im Vakuum ist (auch Quellenfeldstärke genannt). An einem festen Punkt  $\mathbf{r}_0$  im offenen Gebiet  $\Omega$  lässt sich diese berechnen nach

$$\mathbf{T}_e(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}_e(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} d\mathbf{x} . \quad (3.45)$$

Ergänzend kann angemerkt werden, dass das Quellenströmungsvektorpotential  $\mathbf{T}_e$  auch in Verbindung mit dem magnetischen Vektorpotential verwendet wird (siehe z. B. [85]). Das mithilfe des Gesetzes von Biot-Savart berechnete Quellenströmungsvektorpotential sollte jedoch in beiden Fällen nicht ohne Weiteres zur numerischen Bestimmung des magnetischen Felds herangezogen werden (dazu mehr in den folgenden Abschnitten).

Mit den zuvor eingeführten Potentialen ergibt sich für  $\mathbf{B}$  der Ausdruck

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{T} - \nabla \Phi + \mathbf{M}) . \quad (3.46)$$

Durch die Konstruktion der beiden Potentiale ist das Durchflutungsgesetz (3.14) automatisch erfüllt, jedoch muss im Gegensatz zum magnetischen Vektorpotential die Quellenfreiheit des  $\mathbf{B}$ -Felds (3.3) stets gefordert werden:

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} - \nabla \Phi + \mathbf{M}) = 0 . \quad (3.47)$$

Weiter folgt, unter Verwendung von  $\mathbf{j}_w = \sigma \mathbf{E}$ , aus dem Induktionsgesetz:

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T}_w + \mu_0 \partial_t \mathbf{T}_w - \mu_0 \partial_t \nabla \Phi + \mu_0 \partial_t \mathbf{M} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{T}_e . \quad (3.48)$$

Dies zeigt bereits, dass es bei Verwendung der  $\mathbf{T}, \Phi$ - $\Phi$ -Formulierung nicht möglich ist, konservative Anteile des  $\mathbf{E}$ -Felds direkt zu modellieren. Die Möglichkeit der Spannungsspeisung bei einer Kopplung zwischen Feld- und Schaltkreisberechnung bleibt davon unberührt.

Bezüglich der Randbedingungen muss auf  $\Gamma_H$  gelten

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{T} - \nabla \Phi) = \mathbf{0} . \quad (3.49)$$

Dies kann in zwei Bedingungen aufgespalten werden,

$$\Phi = a \quad \text{auf } \Gamma_H \quad (3.50)$$

mit beliebigem  $a \in \mathbb{R}$  sowie

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_H . \quad (3.51)$$

Das heißt die Randbedingung an  $\mathbf{H}$  führt zu Dirichlet-Randbedingungen an  $\Phi$  und  $\mathbf{T}$ . Als konstanter Wert führt  $\Phi$  auf  $\Gamma_H$  wird im Folgenden stets Null gewählt. Umgekehrt für die Randbedingung an  $\mathbf{B}$  auf  $\Gamma_B$  zu einer Neumann-Randbedingung bezüglich  $\Phi$  gemäß

$$\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{T} - \nabla \Phi + \mathbf{M}) = 0 .$$

Die Randbedingung (3.23) bezüglich der Stromdichte auf  $\Gamma_H$  ist durch (3.51) bereits erfüllt. Durch (3.24) muss zusätzlich gefordert werden

$$\left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T} \right) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_E . \quad (3.52)$$

Im allgemeinen Fall lauten die zentralen zeitabhängigen Gleichungen der sog.  $\mathbf{T}, \Phi$ - $\Phi$ -Formulierung:

**Randwertproblem 3.3** ( $\mathbf{T}, \Phi$ - $\Phi$  magnetoquasistatisch)

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T}_w + \mu_0 \partial_t \mathbf{T}_w - \mu_0 \partial_t \nabla \Phi + \mu_0 \partial_t \mathbf{M} = -\mu_0 \partial_t \mathbf{T}_e \quad \text{in } \Omega \quad (3.53)$$

$$\mu_0 \nabla \cdot (\mathbf{T}_w - \nabla \Phi + \mathbf{M}) = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{T}_e \quad \text{in } \Omega \quad (3.54)$$

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_H \quad (3.55)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H \quad (3.56)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{T} - \nabla \Phi + \mathbf{M}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_B \quad (3.57)$$

$$\left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T} \right) \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_E . \quad (3.58)$$

Ist  $\Omega_F$  mehrfach zusammenhängend, kann die  $\mathbf{T}, \Phi$ - $\Phi$ -Formulierung nicht ohne Weiteres verwendet werden, da das Skalarpotential in diesem Fall nicht eindeutig ist [119]. Dies wird an dieser Stelle nicht weiter diskutiert, in der Literatur sind jedoch Lösungsvorschläge wie die Einführung von Grenzlinien, entlang derer Potentialsprünge erlaubt sind, zu finden [137, S. 76].

Im magnetostatischen Fall vereinfacht sich das Problem deutlich, da nach Konstruktion aus  $\partial_t(\cdot) = 0$  folgt, dass  $\mathbf{T}_w = 0$ . Somit verbleibt  $\Phi$  als unbekannte Variable und das zugehörige Randwertproblem lautet:

**Randwertproblem 3.4** ( $\Phi$  magnetostatisch)

$$\mu_0 \nabla \cdot (-\nabla \Phi + \mathbf{M}) = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{T}_e \quad \text{in } \Omega \quad (3.59)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mu_0 (\mathbf{T}_e - \nabla \Phi + \mathbf{M}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_B \quad (3.60)$$

$$\Phi = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (3.61)$$

Wie bereits im Falle der Potentiale  $\mathbf{A}$  und  $V$  können weitere Bedingungen angegeben werden (z. B. aufgrund der Stetigkeitsbedingungen der Felder an Grenzflächen), um  $\mathbf{T}$  und  $\Phi$  vollständig zu charakterisieren (siehe [119]). Es wird darauf verzichtet, diese explizit aufzuführen, da sie abermals durch die Wahl der Ansatzfunktionen im Rahmen der Methode der finiten Elemente erfüllt sind (siehe dazu Abschnitt 3.5.2).

### Kombination von Potentialformulierungen

Neben der genannten Möglichkeit,  $\mathbf{j}_e$  im Falle des magnetischen Vektorpotentials durch  $\mathbf{T}_e$  auszudrücken, existiert die Möglichkeit, Potentialformulierungen gekoppelt zu verwenden, was vor allem Vorteile bezüglich der Rechenzeiten bei der numerischen Feldrechnung bringt [26, 119, 150]. Eine umfassende Darstellung von möglichen Kombinationen und resultierenden Übergangsbedingungen ist in [119] zu finden.

## 3.4 Variationsformulierungen

Nach der zuvor durchgeführten Einschränkung und Umformung der Maxwell-Gleichungen auf das Randwertproblem (3.36)–(3.38) im Falle des magnetischen Vektorpotentials bzw. (3.53)–(3.58) im Falle des magnetischen Skalarpotentials wird innerhalb der folgenden Abschnitte die Approximation der jeweiligen Lösungsfunktionen mithilfe der Methode der finiten Elemente (FEM) eingeführt. Hierzu müssen die Randwertprobleme zunächst als Variationsprobleme formuliert werden. Dies wird mithilfe der Galerkin-Methode bewerkstelligt. Es wird zunächst auf die Funktionenräume eingegangen, innerhalb derer nach der Lösung der Randwertprobleme (genauer der später eingeführten Variationsprobleme) gesucht wird. Weiter werden die zugehörigen finiten Elemente eingeführt, die zur Diskretisierung der Funktionenräume verwendet werden. Für die Beweise der aufgeführten Resultate wird auf die jeweils referenzierten Quellen verwiesen.

### 3.4.1 Mathematische Grundlagen

Im Folgenden werden grundlegende Funktionenräume eingeführt: der Lebesgue-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen  $L_2(\Omega)$  sowie die Sobolev-Räume  $H^1(\Omega)$ ,  $H(\text{rot}, \Omega)$  und  $H(\text{div}, \Omega)$  von Funktionen, deren Gradient, Rotation bzw. Divergenz quadratintegrierbar ist. Die Notation orientiert sich an [138]. Zusätzlich sind in Anhang A Zusatzinformationen aufgeführt, die hier nicht direkt benötigt werden (wie z. B. die zu den Sobolev-Räumen gehörenden Normen und Skalarprodukte).

**Definition 3.1** (Grundlegende Funktionenräume) *Auf einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  werden folgende Funktionenräume eingeführt:*

$$\begin{aligned}
 C^k(\Omega) &: \text{Menge der } k\text{-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf } \Omega \\
 C_0^k(\Omega) &: \text{Menge der } k\text{-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf } \Omega \\
 &\quad \text{mit kompaktem Träger }^2 \\
 C^\infty(\Omega) &: \text{Menge der glatten (unendlich oft stetig differenzierbaren) Funktionen auf } \Omega \\
 C_0^\infty(\Omega) &: \text{Menge der glatten Funktionen auf } \Omega \text{ mit kompaktem Träger} \\
 L_2(\Omega) &:= \left\{ u \mid \int_{\Omega} u^2 \, d\mathbf{x} < \infty \right\} \\
 H^1(\Omega) &:= \{ u \in L_2(\Omega) \mid \nabla u \in [L_2(\Omega)]^3 \} \\
 H(\text{rot}, \Omega) &:= \{ \mathbf{u} \in [L_2(\Omega)]^3 \mid \nabla \times \mathbf{u} \in [L_2(\Omega)]^3 \} \\
 H(\text{div}, \Omega) &:= \{ \mathbf{u} \in [L_2(\Omega)]^3 \mid \nabla \cdot \mathbf{u} \in L_2(\Omega) \} .
 \end{aligned}$$

Der Dualraum eines Vektorraums wird im Folgenden mit einem Apostroph gekennzeichnet (demnach ist  $C^\infty(\Omega)'$  der Dualraum von  $C^\infty(\Omega)$ ). Im Falle von Sobolev-Räumen reeller Ordnung entspricht die Ordnung des Dualraums der negativen Ordnung des Sobolev-Raums (d. h.  $H^{-1}(\Omega)$  ist der Dualraum von  $H^1(\Omega)$ ). Weiterhin wird für das  $L_2(\Omega)$ -Skalarprodukt kurz geschrieben

$$(f, g) = \int_{\Omega} f g \, d\mathbf{x}$$

und vollkommen analog für den vektoriellen Fall

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x} .$$

Die meisten Definitionen der Funktionenräume lassen sich trivial auf ein Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  übertragen. Lediglich im Falle von  $H(\text{rot}, \Omega)$  ist dies nicht ohne Weiteres möglich und wird an den betreffenden Stellen gesondert betrachtet. Allen voran muss der Rotationsoperator in zwei und drei Dimensionen definiert werden. Eine explizite Fallunterscheidung wird im Folgenden nur noch vorgenommen, wenn aus dem Kontext nicht ersichtlich ist, welche Definition des Rotationsoperators verwendet werden muss.

**Definition 3.2** (Rotationsoperator in zwei und drei Dimensionen)

- *In drei Dimensionen:  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , für ein dreidimensionales Vektorfeld  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$  auf  $\Omega$ :*

$$\text{rot } \mathbf{v} := \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^T . \quad (3.62)$$

- *In zwei Dimensionen:  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , für ein zweidimensionales Vektorfeld  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$  auf  $\Omega$  (surface curl in [138]):*

$$\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} . \quad (3.63)$$

- *In zwei Dimensionen:  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , für ein Skalarfeld  $v = v_1$  auf  $\Omega$  (scalar surface curl in [138]):*

$$\text{rot } v := \left( \frac{\partial v}{\partial x_2}, -\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^T . \quad (3.64)$$

---

<sup>2</sup>Die Funktion nimmt nur auf einer abgeschlossenen und beschränkten Menge Werte ungleich Null an.

Es sollte beachtet werden, dass das Ergebnis des Rotationsoperators in (3.63) ein Skalarfeld ist, in (3.64) jedoch ein zweidimensionales Vektorfeld. Welche Definition des Rotationsoperators benötigt wird, geht aus der jeweiligen Definition des Gebiets  $\Omega$  und der Funktion  $\mathbf{v}$  hervor.

Die üblichen Definitionen von Divergenz und Gradient lassen sich sofort auf zwei- und dreidimensionale Felder und Gebiete anwenden, siehe z. B. [171, S. 17]. Weiterhin wird festgelegt, dass die Ableitungen innerhalb der Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation im distributionellen Sinne zu verstehen sind, d. h. [138, S. 50][171, S. 18]:

**Definition 3.3** Für  $v \in C_0^\infty(\Omega)'$  wird die Funktion  $\mathbf{f} = \text{grad}v \in [C_0^\infty(\Omega)]^3$  als Gradient von  $v$  bezeichnet, wenn gilt

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u}) = -(v, \nabla \cdot \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in [C_0^\infty(\Omega)]^3. \quad (3.65)$$

**Definition 3.4** Für  $\mathbf{v} \in [C_0^\infty(\Omega)]^3$  wird die Funktion  $f = \text{div}\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)'$  als Divergenz von  $\mathbf{v}$  bezeichnet, wenn gilt

$$(f, u) = -(\mathbf{v}, \nabla u) \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.66)$$

**Definition 3.5** Für  $\mathbf{v} \in [C_0^\infty(\Omega)]^3$  wird die Funktion  $\mathbf{f} = \text{rot}\mathbf{v} \in [C_0^\infty(\Omega)]^3$  als Rotation von  $\mathbf{v}$  bezeichnet, wenn gilt

$$(\mathbf{f}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in [C_0^\infty(\Omega)]^3. \quad (3.67)$$

Zur Lösung von Randwertproblemen muss der Rand des Gebiets gesondert betrachtet werden. Hierzu werden analog zu [138, S. 53 ff.] und [171] Tangentialspuoperatoren und Normalspuoperatoren für glatte Funktionen definiert, wobei  $\boldsymbol{\tau}$  im zweidimensionalen Fall die Einheitstangente an  $\Gamma$  und  $\mathbf{n}$  abermals die Flächen- oder Kurvennormale bezeichnet:

**Definition 3.6** Gegeben  $\mathbf{v} \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^2$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , so sind Tangential- und Normalspuoperator definiert durch

$$\gamma_\tau(\mathbf{v})(\mathbf{x}) := \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.68)$$

$$\gamma_n(\mathbf{v})(\mathbf{x}) := \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.69)$$

**Definition 3.7** Gegeben  $\mathbf{v} \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^3$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ , so sind die Tangentialspuoperatoren  $\gamma_\tau$  und  $\gamma_T$  sowie der Normalspuoperator  $\gamma_n$  gegeben durch

$$\gamma_\tau(\mathbf{v})(\mathbf{x}) := \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.70)$$

$$\gamma_T(\mathbf{v})(\mathbf{x}) := (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \mathbf{v}(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (3.71)$$

$$\gamma_n(\mathbf{v})(\mathbf{x}) := \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.72)$$

In Bezug auf Randwerte ist der Sobolev-Raum  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  von zentraler Bedeutung. Dieser kann allgemein wie im Anhang A gezeigt definiert werden. Anschaulich handelt es sich um die Funktionen in  $L^2(\partial\Omega)$ , die Randwerten von  $H^1(\Omega)$ -Funktionen entsprechen. Damit wird (analog zu [47, 138]) die duale Paarung auf dem Rand  $\partial\Omega$  der Dimension  $(d-1)$  für eine Funktion  $[H^{1/2}(\partial\Omega)]^d \ni \mathbf{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $\mathbf{g} \in [H^{-1/2}(\partial\Omega)]^d$  geschrieben als<sup>3</sup>

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, d\mathbf{x}$$

sowie für eine Funktion  $H^{1/2}(\partial\Omega) \ni f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$

$$\langle f, g \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} fg \, d\mathbf{x}.$$

<sup>3</sup>Die duale Paarung in  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  kann mit dem  $L^2(\partial\Omega)$ -Skalarprodukt identifiziert werden [138, S. 44].

Mit den zuvor definierten Spurabbildungen lässt sich bereits ein erstes Resultat bezüglich der partiellen Integration in  $H(\text{rot}, \Omega)$  festhalten [138, S. 58]:

**Satz 3.1** *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^3$ , dann kann die Spurabbildung  $\gamma_\tau(\mathbf{v})(\mathbf{x})$ , die in (3.70) für Funktionen  $\mathbf{v} \in [\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})]^3$  definiert wurde, stetig fortgesetzt werden zu einer Abbildung von  $H(\text{rot}, \Omega)$  nach  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Weiterhin gilt für alle  $\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$  und  $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3$*

$$(\nabla \times \mathbf{v}, \mathbf{u}) - (\mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}) = \langle \gamma_\tau(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega} . \quad (3.73)$$

Die Einschränkung von  $\mathbf{v}$  auf Funktionen in  $[H^1(\Omega)]^3$  ist in Zusammenhang mit der Galerkin-Methode zu restriktiv. Dies motiviert, eine Aussage zur partiellen Integration mit  $\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$  zu treffen. Die Abbildung  $\gamma_\tau : H(\text{rot}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$  ist nicht surjektiv, d. h.  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  enthält Funktionen, die keiner Spur von Elementen aus  $H(\text{rot}, \Omega)$  entsprechen. Weiter kann gezeigt werden, dass  $\gamma_\tau^4$  ebenfalls zu einer Abbildung von  $H(\text{rot}, \Omega)$  nach  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  stetig fortgesetzt werden kann. Jedoch bilden  $\gamma_\tau$  und  $\gamma_\tau^4$  in unterschiedliche Unterräume von  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  ab [37]. Dies motiviert die Einführung des Spurraums

$$Y(\partial\Omega) = \{\mathbf{f} \in [H^{-1/2}(\partial\Omega)]^3 \mid \exists \mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) \text{ mit } \gamma_\tau(\mathbf{u}) = \mathbf{f}\} . \quad (3.74)$$

Die Charakterisierung wurde aus [138] übernommen und liefert kein direktes Kriterium dafür, ob eine gegebene Funktion in  $Y(\partial\Omega)$  liegt. Es wird an dieser Stelle jedoch nicht weiter auf diesen Punkt eingegangen. Charakterisierungen des Spurraums sowie Resultate bezüglich der partiellen Integration in Gebieten mit Polygonrändern und Lipschitz-Rändern sind in [37, 38] zu finden. Es stellt sich heraus, dass  $\gamma_\tau^4$  zu einer Abbildung von  $H(\text{rot}, \Omega)$  in den Dualraum des zuvor eingeführten Spurraums  $Y(\partial\Omega)$  stetig fortgesetzt werden kann. Damit kann das folgende Resultat formuliert werden:

**Satz 3.2** (verkürzt dargestellt gemäß [138, Theorem 3.31]) *Die Abbildung  $\gamma_\tau : H(\text{rot}, \Omega) \rightarrow Y(\partial\Omega)$  ist surjektiv. Die Abbildung  $\gamma_\tau^4$  von  $H(\text{rot}, \Omega)$  nach  $Y(\partial\Omega)'$  ist wohldefiniert. Für alle  $\mathbf{v} \in H(\text{rot}, \Omega)$  und  $\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$  gilt*

$$(\nabla \times \mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{u}) + \langle \gamma_\tau(\mathbf{v}), \gamma_\tau^4(\mathbf{u}) \rangle_{\partial\Omega} . \quad (3.75)$$

In zwei Dimensionen kann in ähnlicher Weise vorgegangen werden. Es gilt  $\nabla \times u \in [L_2(\Omega)]^2 \Leftrightarrow \nabla u \in [L_2(\Omega)]^2$ , weiterhin kann der Spuroperator (3.68) stetig fortgesetzt werden zu einer Abbildung  $[H^1(\Omega)]^2 \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Somit lautet das Äquivalent zu (3.75) in zwei Dimensionen

$$(\nabla \times \mathbf{u}, v) = (\mathbf{u}, \nabla \times v) + \langle \gamma_\tau(\mathbf{u}), v \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2, v \in H^1(\Omega) . \quad (3.76)$$

Dieser Zusammenhang ist für die spätere Anwendung der Methode der finiten Elemente ausreichend.

Analog kann für  $H(\text{div}, \Omega)$  in Verbindung mit (3.72) festgehalten werden [138, S. 53, Theorem 3.24]:

**Satz 3.3** *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^3$  oder  $\mathbb{R}^2$ , dann kann die Spurabbildung  $\gamma_n(\mathbf{v})(\mathbf{x})$ , die in (3.72) für Funktionen  $\mathbf{v} \in [\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})]^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$  definiert wurde, stetig fortgesetzt werden zu einer Abbildung von  $H(\text{div}, \Omega)$  nach  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Weiterhin gilt für alle  $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$  und  $v \in H^1(\Omega)$*

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, v) = -(\mathbf{u}, \nabla v) + \langle \gamma_n(\mathbf{u}), v \rangle_{\partial\Omega} . \quad (3.77)$$

<sup>4</sup> $\gamma_\tau$  liefert die Projektion eines Vektors auf die Tangentialebene und damit die entscheidende Komponente bei der Auswertung von  $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  auf dem Rand.



Im Gegensatz zur stetigen Fortsetzung von  $\gamma_\tau$  ist die stetige Fortsetzung von  $\gamma_n$  nach  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  surjektiv [138, S. 53]. Satz 3.2 und Satz 3.3 liefern die Basis zur partiellen Integration von Funktionen in  $H(\text{rot}, \Omega)$  und  $H(\text{div}, \Omega)$ , die nachfolgend zur Herleitung von Variationsformulierungen benötigt werden.

Die Räume  $H^1(\Omega)$ ,  $H(\text{rot}, \Omega)$  und  $H(\text{div}, \Omega)$  sind durch die Operatoren Gradient, Rotation und Divergenz miteinander verknüpft. Es gilt

$$u \in H^1(\Omega) \Rightarrow \nabla u \in H(\text{rot}, \Omega) \quad (3.78)$$

$$\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) \Rightarrow \nabla \times \mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega) \quad (3.79)$$

$$\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega). \quad (3.80)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich im weit verbreiteten De-Rham-Diagramm (3.81) darstellen [63]:

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H(\text{rot}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \times} H(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\nabla \cdot} L^2(\Omega). \quad (3.81)$$

Darüber hinaus lässt sich überprüfen, dass das Bild eines Operators im Nullraum des darauffolgenden Operators liegt, sofern die Funktionen gemäß der zuvor dargestellten Reihenfolge von einem Funktionenraum in den nächsten abgebildet werden. So gilt beispielsweise  $\nabla \times (\nabla u) = 0 \forall u \in H^1(\Omega)$ . Durch (3.81) ist damit eine sog. exakte Sequenz gegeben. Diese Eigenschaft ermöglicht eine Trennung von Bild- und Nullraum der jeweiligen Operatoren und spielt bei der Konstruktion von Präkonditionierern eine große Rolle (siehe z. B. [110]).

Für Feldprobleme in beschränkten Gebieten mit Dirichlet-Randbedingungen sind die Räume  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H_0(\text{rot}, \Omega)$  und  $H_0(\text{div}, \Omega)$  von Interesse. Diese können als Abschluss von  $[C_0^\infty]^d$  in der entsprechenden Norm definiert werden. Im Folgenden wird auf eine alternative Charakterisierung zurückgegriffen [138].

**Definition 3.8** Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet in  $\mathbb{R}^3$ , dann sind die Räume  $H_0^1(\Omega)$ ,  $H_0(\text{rot}, \Omega)$  und  $H_0(\text{div}, \Omega)$  definiert als

$$H_0^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \quad (3.82)$$

$$H_0(\text{rot}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \quad (3.83)$$

$$H_0(\text{div}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}. \quad (3.84)$$

Sind die Dirichlet-Randbedingungen nicht homogen, wird im Folgenden durch den Index des entsprechenden Randstücks gekennzeichnet, auf welchem Teilrand (hier:  $\Gamma_B$  oder  $\Gamma_H$ ) die Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben werden. Dementsprechend gilt  $H_{0,B}(\text{rot}, \Omega) := \{\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_B\}$ .

Die eingeführten Potentiale und Felder besitzen entsprechend ihrer zugrundeliegenden Definition, den Bedingungen an Grenzflächen und den Operatoren, mit denen sie in den Maxwell-Gleichungen verknüpft sind, eine sinnvolle Zuordnung zu den eingeführten Funktionenräumen:

$$H^1(\Omega) : \quad \Phi \in H^1(\Omega), V \in H^1(\Omega)$$

$$H(\text{rot}, \Omega) : \quad \mathbf{E} \in H(\text{rot}, \Omega), \mathbf{H} \in H(\text{rot}, \Omega), \mathbf{T} \in H(\text{rot}, \Omega), \mathbf{A} \in H(\text{rot}, \Omega)$$

$$H(\text{div}, \Omega) : \quad \mathbf{B} \in H(\text{div}, \Omega), \mathbf{D} \in H(\text{div}, \Omega), \mathbf{j} \in H(\text{div}, \Omega).$$

Die Polarisation  $\mathbf{I}$  und die Magnetisierung  $\mathbf{M}$  werden in Abschnitt 3.5.4 gesondert betrachtet.

Am Beispiel eines magnetostatischen Felds, das mithilfe von  $\mathbf{A}$  beschrieben wird, lässt sich anschaulich zeigen, dass die Wahl des Funktionenraums auch physikalisch motiviert werden kann. Die magnetische Energie in einem Volumen mit linearem Material ist gegeben durch

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \, d\mathbf{x} .$$

Für das Beispiel werden lediglich Vakuumfelder betrachtet und es gilt  $\mathbf{H} = \nu_0 \mathbf{B}$  sowie  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  und somit

$$W_{\text{mag}} = \frac{\nu_0}{2} \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, d\mathbf{x} .$$

Dies deutet bereits darauf hin, dass  $H(\text{rot}, \Omega)$  per Definition alle magnetischen Vektorpotentiale beinhaltet, deren zugehörige Felder in einem beschränkten Gebiet einen endlichen Energieinhalt besitzen (siehe auch [138]).

### 3.4.2 Anwendung auf die Potentialformulierungen

Die Randwertprobleme 3.1, 3.2, 3.3 und 3.4 besitzen im Allgemeinen keine klassische Lösung, d. h. die von den Gleichungen vorgegebenen Anforderungen an die Differenzierbarkeit als auch an die Stetigkeit der Potentiale können nicht (punktweise) erfüllt werden. Allerdings können die zuvor eingeführten Randwertprobleme, unabhängig davon, welches Potential verwendet wurde, umformuliert werden zu einem Variationsproblem. Dieses kann näherungsweise gelöst werden, allerdings werden die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen nicht mehr punktweise<sup>5</sup> erfüllt. Die Lösung wird daher eine schwache Lösung des Randwertproblems genannt. Für den Fall, dass die klassische Lösung des Randwertproblems existiert, stimmt die schwache Lösung, sofern sie innerhalb des passenden Funktionenraums bestimmt wurde, mit der klassischen Lösung überein (zur Unterscheidung der klassischen, starken, schwachen und distributionellen Lösung partieller Differentialgleichungen siehe z. B. [154, S. 64]).

Die Umformulierung der Randwertprobleme verläuft für alle gezeigten Potentialformulierungen nach einem ähnlichen Schema. Beide Seiten der jeweiligen Gleichungen werden im Sinne des  $L^2$ -Skalarprodukts mit Testfunktionen multipliziert und somit in lineare Funktionale umgewandelt. Die Lösungsfunktion ist dann diejenige Funktion, welche die Gleichheit der beiden Seiten unabhängig von der Wahl der Testfunktion sicherstellt. Es wird im Folgenden stets die Galerkin-Methode verwendet. Dies impliziert, dass der Raum der Ansatzfunktionen, also die Menge von Funktionen, innerhalb derer das jeweilige Potential gesucht wird, mit dem Raum der Testfunktionen übereinstimmt.

#### Magnetisches Vektorpotential

Konkret wird dies im Folgenden für das Randwertproblem 3.1 im zuvor charakterisierten Gebiet  $\Omega$  durchgeführt. Hierzu wird die Funktion  $\mathbf{g} \in Y(\partial\Omega)$  eingeführt, weiter wird festgelegt

$$\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_{\text{H}} .$$

Die Funktion repräsentiert die Randbedingungen an  $\mathbf{H}$  auf  $\Gamma_{\text{H}}$ , es wird auf dem Randstück gefordert  $\gamma_{\tau}(\mathbf{H}) = \gamma_{\tau}(\nu_0 \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{M}) = -\mathbf{g}$ . Der Randterm wird im Folgenden explizit aufgeführt, die zugehörigen Terme werden jedoch aufgrund der festgelegten Einschränkungen stets Null ergeben.

---

<sup>5</sup>ebenso unter Umständen nicht linienweise oder in drei Dimensionen nicht flächenweise

Eine Multiplikation von (3.36) mit Testfunktionen  $\mathbf{v} \in H_{0,B}(\text{rot}, \Omega)$  und Anwendung von (3.75) (stets auch auf Terme die  $\mathbf{M}$  beinhalten) liefert:

**Variationsproblem 3.1** Bestimme  $\mathbf{A} \in H_{0,B}(\text{rot}, \Omega)$ , sodass

$$\nu_0 (\nabla \times \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\mathbf{M}, \nabla \times \mathbf{v}) + \sigma (\partial_t \mathbf{A}, \mathbf{v}) = (\mathbf{j}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_{0,B}(\text{rot}, \Omega) . \quad (3.85)$$

Analog für den magnetostatischen Fall:

**Variationsproblem 3.2** Bestimme  $\mathbf{A} \in H_{0,B}(\text{rot}, \Omega)$ , sodass

$$\nu_0 (\nabla \times \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\mathbf{M}, \nabla \times \mathbf{v}) = (\mathbf{j}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_{0,B}(\text{rot}, \Omega) . \quad (3.86)$$

Es zeigt sich die unterschiedliche Behandlung von Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen. Während Dirichlet-Randbedingungen zu einer Einschränkung des Funktionenraums führen, bestimmen Neumann-Randbedingungen den Randterm  $\mathbf{g}$ . Wird z. B. für lineare Materialien  $\mathbf{M}(\mathbf{B}) = \nu_0((\mu_r - 1)/\mu_r)\mathbf{B}$  angesetzt, stimmen die Variationsprobleme mit der üblichen Vektorpotentialformulierung in der Literatur überein.

Das magnetostatische Variationsproblem 3.2 kann nur dann gelöst werden, wenn  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  erfüllt ist, was für den Moment vorausgesetzt wird. Selbst in diesem Fall existieren jedoch unendlich viele Lösungen, da das Potential  $\mathbf{A}$  nicht geeicht ist. Indem (3.86) die Eichbedingung (3.87) hinzugefügt wird, erfüllt  $\mathbf{A}$  die Coulomb-Eichbedingung (3.35) (ebenfalls im schwachen Sinne). Dies geschieht durch die Multiplikation von  $\mathbf{A}$  mit einer Testfunktion aus  $H^1(\Omega)$ :

$$(\mathbf{A}, \nabla \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega) . \quad (3.87)$$

Es sollte angemerkt werden, dass durch (3.87) neben  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  auch  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$  auf  $\Gamma_H$  gefordert wird. Um die Eichbedingung (3.87) in das Variationsproblem einzubinden und auch bezüglich eines Gradientenfeldanteils in  $\mathbf{j}$  Kompatibilität zu gewährleisten, muss eine Funktion  $\Psi \in H^1(\Omega)$  eingeführt werden. Deren Randwerte werden auf dem gesamten Rand oder  $\Gamma_B$  zu Null gesetzt. Damit ergibt sich (unter Berücksichtigung der Randbedingungen) ein gemischtes Variationsproblem:

**Variationsproblem 3.3** Bestimme  $\mathbf{A} \in H_{0,B}(\text{rot}, \Omega)$  und  $\Psi \in H_{0,B}^1(\Omega)$ , sodass

$$\nu_0 (\nabla \times \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\mathbf{M}, \nabla \times \mathbf{v}) + (\Psi, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{j}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_{0,B}(\text{rot}, \Omega) \quad (3.88)$$

$$(\mathbf{A}, \nabla \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in H_{0,B}^1(\Omega) . \quad (3.89)$$

Eine Anwendung der Divergenz auf die analog zu (3.88) modifizierte Differentialgleichung (3.39) liefert  $\nabla \cdot \nabla \Psi = \nabla \cdot \mathbf{j}$ . Mit dem Maximumprinzip harmonischer Funktionen und den vorgegebenen Randwerten gilt  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \Rightarrow \Psi = 0$  auch für das Variationsproblem 3.3. Das gemischte Variationsproblem besitzt eine eindeutige Lösung [171], jedoch erhöht sich die Größe des zugehörigen linearen Gleichungssystems bei der numerischen Lösung des Problems beträchtlich.

Ist im gesamten Gebiet  $\Omega$  die Leitfähigkeit  $\sigma \neq 0$ , besitzt das magnetoquasistatische Variationsproblem 3.1 eine eindeutige Lösung. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall, wird aber zu Zwecken der Regularisierung genutzt, indem auch in nicht leitfähigen Gebieten eine geringe Leitfähigkeit vorgegeben wird (siehe [171]).

In zwei Dimensionen wird lediglich das magnetostatische Variationsproblem betrachtet, welches sich als Spezialfall des dreidimensionalen Variationsproblems ergibt, sich jedoch zu einer einfacheren Form umschreiben lässt. Es wird angesetzt  $\mathbf{A} = (0, 0, A(x, y))^T$  sowie  $\mathbf{j} = (0, 0, j(x, y))^T$ . Die reduzierten Größen sind per Konstruktion quellenfrei. Die Feldgrößen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}$ , etc. besitzen nur  $x$ - und  $y$ -Komponenten. Unter Verwendung von (3.76) lautet das zu lösende Variationsproblem in zwei Dimensionen:

**Variationsproblem 3.4** Bestimme  $A \in H_{0,B}^1(\Omega)$ , sodass

$$(\nabla \times A, \nabla \times v) - (\mathbf{M}, \nabla \times v) = (j, v) + \langle g, v \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall v \in H_{0,B}^1(\Omega) . \quad (3.90)$$

In zwei Dimensionen ist  $\nabla \times \nabla \times u = -\Delta u$ , also gleich dem negativen Laplace-Operator. Das Variationsproblem 3.4 ist eindeutig lösbar.

### Magnetisches Skalarpotential

Der zuvor am Beispiel des magnetischen Vektorpotentials eingeführte Formalismus wird im Folgenden nicht auf die  $\mathbf{T}, \Phi$ -Formulierung angewendet, da diese später nicht mehr explizit verwendet wird und (im Gegensatz zum magnetischen Vektorpotential) im magnetoquasistatischen Fall immer auf eine gemischte Formulierung führt. Es müssen verschiedene Funktionenräume miteinander gekoppelt werden, da die Variable  $\mathbf{T}_w$  nur in Gebieten mit  $\sigma \neq 0$  definiert ist<sup>6</sup>. Für eine ausführliche Diskussion von schwachen  $\mathbf{T}, \Phi$ -Formulierungen wird auf [24, 119] verwiesen.

Die  $\Phi$ -Formulierung im magnetostatischen Fall kann ohne Weiteres in ein Variationsproblem überführt werden. Es wird daran erinnert, dass der Dirichlet-Rand für das magnetische Skalarpotential  $\Gamma_H$  entspricht. Der Neumann-Rand ist durch  $\Gamma_B$  gegeben. Analog zu den vorherigen Ausführungen wird eine Funktion  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  eingeführt, die

$$g = 0 \quad \text{auf } \Gamma_B$$

erfüllt und es wird (allgemein) gefordert  $\gamma_n(\mathbf{B}) = -g$ . Damit schreibt sich die schwache Formulierung des Randwertproblems 3.4 unter Verwendung von (3.77):

**Variationsproblem 3.5** Bestimme  $\Phi \in H_{0,H}^1(\Omega)$ , sodass

$$\mu_0 (\nabla \Phi, \nabla v) - (\mathbf{I}, \nabla v) = \mu_0 (\mathbf{T}_e, \nabla v) + \langle g, v \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall v \in H_{0,H}^1(\Omega) . \quad (3.91)$$

## 3.5 Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente wird genutzt, um die Lösung der zuvor hergeleiteten Variationsprobleme zu approximieren. Hierzu ist es notwendig, sowohl das Lösungsgebiet als auch die Zeitachse zu diskretisieren. Hinsichtlich beider Punkte wird auf Standardverfahren zurückgegriffen, jedoch ist die Schilderung der räumlichen Diskretisierung deutlich ausführlicher als die Schilderung der zeitlichen Diskretisierung, da hier große Wechselwirkungen zur Modellierung der Hysterese auftreten.

<sup>6</sup>Alternativ kann nicht leitfähigen Gebieten auch eine geringe Leitfähigkeit zugewiesen werden. Gleiches gilt auch für die  $\mathbf{A}, V$ - $\mathbf{A}$ -Formulierung.

### 3.5.1 Zeitliche Diskretisierung

Es wird an dieser Stelle lediglich die Zeitdiskretisierung nach dem impliziten Euler-Verfahren eingeführt, das im Folgenden stets für die Diskretisierung der Zeitachse verwendet wird. Für eine beliebige zeitabhängige skalare (oder vektorielle) Größe  $u(t)$  und einen diskreten Zeitverlauf  $t_{\text{dis}} = \{t_0, \dots, t_k, \dots, t_n\}$ , wobei  $1 \leq k \leq n$ , wird die Notation  $u_k := u(t_k)$  definiert. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass der Wert  $u(t_0) = u_0$  gegeben ist, und es wird eingeführt  $\Delta t_k := t_k - t_{k-1}$ . Die Ableitung von  $u$  nach  $t$  wird approximiert durch den Differenzenquotienten gemäß

$$\partial_t u(t_k) \approx \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta t_k}. \quad (3.92)$$

Weiter gilt für den Verlauf von  $u$  für  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$

$$u(t) \approx u_{k-1} + \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta t_k} \cdot (t - t_{k-1}). \quad (3.93)$$

Bei der Zeitintegration ist das implizite Euler-Verfahren stets stabil [40, S. 82]. Im Gegensatz dazu ist das explizite Euler-Verfahren nur bis zu einer maximalen Größe des Zeitschritts stabil, der in Zusammenhang mit der FEM durch das Courant–Friedrich–Levy-Kriterium (siehe [68] für eine Anwendung im Kontext der Maxwell-Gleichungen) vorgegeben wird. Je nachdem wie fein das Lösungsgebiet diskretisiert ist, sind sehr kleine Zeitschritte vonnöten, weshalb vorrangig das implizite Euler-Verfahren verwendet wird. Das explizite Euler-Verfahren bietet jedoch den Vorteil, dass lediglich die Massenmatrix des Gleichungssystems invertiert werden muss, nicht jedoch die Steifigkeitsmatrix, was z. B. bei diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren genutzt wird.

### 3.5.2 Räumliche Diskretisierung

Die exakte Lösung der zuvor eingeführten Variationsprobleme zu bestimmen ist im Allgemeinen nicht möglich, allem voran deshalb, weil die Funktionenräume innerhalb derer die Lösung gesucht wird (hier  $H(\text{rot}, \Omega)$  oder  $H^1(\Omega)$ ) unendlich-dimensional sind. Durch die Methode der finiten Elemente wird die gesuchte Lösung auf einem endlich-dimensionalen Unterraum des jeweiligen Funktionenraums approximiert. Eine Basis dieses Unterraums bilden die sogenannten Formfunktionen, die für jeden Funktionenraum unterschiedliche Gestalt besitzen. Sie haben die Eigenschaft, dass sie jeweils nur in einem kleinen Teilgebiet Werte ungleich Null annehmen. Ebendiese Teilgebiete werden durch eine Partitionierung des Rechengebiets  $\Omega$  definiert.

#### Charakterisierung der finiten Elemente

Die Partitionierung kann durch verschiedene geometrische Formen realisiert werden. Es werden an dieser Stelle im Speziellen nur Tetraeder in drei Dimensionen und Dreiecke in zwei Dimensionen eingeführt. In jedem Fall lässt sich ein Netz  $\mathcal{T}$  bestehend aus Elementen  $K$  wie folgt definieren (siehe auch [34, S. 79]):

**Definition 3.9** Eine Triangulierung  $\mathcal{T} := \{K_i, i \in \mathbb{Z}_+\}$  auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  oder  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ist gegeben, wenn  $\mathcal{T}$  die Eigenschaften besitzt:

1. Die Triangulierung überdeckt das Lösungsgebiet  $\bar{\Omega} = \bigcup_{K_i \in \mathcal{T}} \bar{K}_i$ ;

2. Jedes Element  $K_i$  ist eine offene Menge mit positivem Volumen (mit positiver Fläche in 2D);
3. Das Innere verschiedener Elemente ist disjunkt  $K_i \cap K_j = \emptyset$ , wenn  $i \neq j$ ;
4. Der Abschluss jedes Elements  $K_i$  besitzt die Form eines nicht entarteten Tetraeders, wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , oder eines Dreiecks, wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Innerhalb jedes geometrischen Elements der Triangulierung wird der Funktionsverlauf durch sog. Ansatzfunktionen (meist Polynome) festgelegt; diese sind eng mit den Formfunktionen verknüpft<sup>7</sup>. Jedem Element  $K$  werden weiterhin Freiheitsgrade zugeordnet, die den Verlauf der Ansatzfunktionen innerhalb eines Elements eindeutig festlegen. Ein finites Element ist in der Literatur häufig als Triple aus (geometrischem) Gebiet  $K$ , Ansatzfunktionen auf  $K$  und Freiheitsgraden definiert (z. B. in [138, S. 101 f.]). Die Freiheitsgrade des Elements werden so gewählt, dass sie die Freiheitsgrade der Ansatzfunktion (z. B. die Koeffizienten der Polynome) eindeutig festlegen.

Um beispielsweise eine vorerst beliebige bekannte Funktion  $f \in H^1(\Omega)$  innerhalb eines Elements anzunähern, werden die Freiheitsgrade bezüglich dieser Funktion ausgewertet. Formal geschieht dies durch die Einführung eines Interpolationsoperators. Bei Lagrange-Elementen erster Ordnung (Polynomen erster Ordnung) und  $f \in H^1(\Omega)$  sind die Freiheitsgrade eines Elements durch die Funktionswerte an den Ecken der Tetraeder oder Dreiecke gegeben, der Interpolationsoperator besteht dann aus der Auswertung von  $f$  an ebendiesen Ecken. Im Allgemeinen ist jedoch eine punktweise Auswertung von Funktionen in Sobolev-Räumen (hier spezieller  $H^1(\Omega)$ ) nicht wohldefiniert. In  $H(\text{rot}, \Omega)$  und  $H(\text{div}, \Omega)$  besteht ein äquivalentes Problem, wobei in  $H(\text{rot}, \Omega)$  die Freiheitsgrade im einfachsten Fall durch das Integral über die Tangentialkomponente einer Funktion entlang der Kanten (Nédélec-Elemente erster Art und nullter Ordnung) und in  $H(\text{div}, \Omega)$  (Raviart-Thomas-Elemente erster Ordnung) durch das Integral der Normalkomponente über einer Fläche gegeben sind.

In allen drei Fällen werden die Funktionenräume auf Teilräume  $U \subset H^1(\Omega)$ ,  $V \subset H(\text{rot}, \Omega)$  und  $W \subset H(\text{div}, \Omega)$  mit stärkerer Regularität eingeschränkt<sup>8</sup>. Die Teilräume  $U$ ,  $V$  und  $W$  werden nicht weiter charakterisiert, hierfür wird auf [138, S. 149] verwiesen. Im Folgenden sind mit  $p_{\text{grad}}$ ,  $p_{\text{rot}}$  und  $p_{\text{div}}$  die Interpolationsoperatoren in den jeweiligen Funktionenräumen bezeichnet. In (konformen) Finite-Elemente-Methoden werden die diskreten Funktionenräume  $H_h^1(\Omega)$ ,  $H_h(\text{rot}, \Omega)$  und  $H_h(\text{div}, \Omega)$  so gewählt, dass das folgende De-Rham-Diagramm kommutiert [138, S. 150]:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & H(\text{rot}, \Omega) & \xrightarrow{\nabla \times} & H(\text{div}, \Omega) & \xrightarrow{\nabla \cdot} & L^2(\Omega) \\
 \cup & & \cup & & \cup & & \\
 U & & V & & W & & \\
 p_{\text{grad}} \downarrow & & p_{\text{rot}} \downarrow & & p_{\text{div}} \downarrow & & \downarrow \\
 H_h^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & H_h(\text{rot}, \Omega) & \xrightarrow{\nabla \times} & H_h(\text{div}, \Omega) & \xrightarrow{\nabla \cdot} & L_h^2(\Omega) .
 \end{array} \tag{3.94}$$

Das heißt, die Anwendung der Interpolationsoperatoren und der Differentialoperatoren darf vertauscht werden, also gilt z. B.  $p_{\text{div}} \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times p_{\text{rot}} \mathbf{u}$  für alle  $\mathbf{u} \in V$ . Um dies zu erreichen,

<sup>7</sup>Während sich Ansatzfunktionen lediglich auf den Funktionsverlauf innerhalb eines Elements beziehen, spiegeln Formfunktionen bereits die Kopplung zwischen Elementen über die Identifizierung von Freiheitsgraden wider.

<sup>8</sup>Diese Einschränkung wird in  $H^1(\Omega)$  z. B. durch Verwendung eines Clément-Interpolationsoperators umgangen; dieser besitzt jedoch den Nachteil, dass eine lokale Funktionsauswertung nicht mehr ausreicht, um die benötigten Interpolationskoeffizienten zu bestimmen [138, S. 147].

müssen die diskreten Repräsentanten der jeweiligen Funktionenräume  $H_h^1(\Omega)$ ,  $H_h(\text{rot}, \Omega)$  und  $H_h(\text{div}, \Omega)$  einen abgeschlossenen Subkomplex von (3.81) bilden, d. h. die Eigenschaften (3.78)–(3.80) erhalten (die diskreten Funktionenräume bilden zusammen mit den Differentialoperatoren eine exakte Sequenz). Die Beziehungen zwischen den Funktionenräumen und Operatoren sind im De-Rham-Diagramm (3.94) dargestellt. Bevor die diskreten Funktionenräume  $H_h^1(\Omega)$ ,  $H_h(\text{rot}, \Omega)$  und  $H_h(\text{div}, \Omega)$  angegeben werden, muss geklärt werden, was es bedeutet, wenn ein Element zu dem Funktionenraum, den es diskretisiert, konform ist. Die Bedingungen für die Konformität geben Aufschluss darüber, welche Stetigkeitsbedingungen an Elementgrenzen gefordert werden müssen.

### Erläuterungen zur Konformität

Im Falle von  $H(\text{rot}, \Omega)$  ist Konformität gleichbedeutend damit, dass sich die Rotation einer Funktion  $\mathbf{u} \in H_h(\text{rot}, \Omega)$ , die aus Teilfunktionen  $\mathbf{u}_i$  innerhalb der Elemente  $K_i \in \mathcal{T}$  zusammengesetzt wurde, elementweise als die Rotation der Teilfunktionen schreiben lässt:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \dots \\ \mathbf{u}_i \text{ in } K_i \\ \mathbf{u}_j \text{ in } K_j \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{u} = \begin{cases} \dots \\ \nabla \times \mathbf{u}_i \text{ in } K_i \\ \nabla \times \mathbf{u}_j \text{ in } K_j \\ \dots \end{cases}.$$

Eine hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist, dass die Tangentialkomponente zweier Funktionen  $\mathbf{u}_i$  und  $\mathbf{u}_j$  auf gemeinsamen Flächen (oder Linien in 2D)  $\bar{K}_i \cap \bar{K}_j$  übereinstimmt, d. h.  $\mathbf{u}_i|_{\bar{K}_i \cap \bar{K}_j} \times \mathbf{n} = \mathbf{u}_j|_{\bar{K}_i \cap \bar{K}_j} \times -\mathbf{n}$  [138, S. 107][139]. Dann gilt, da

$$\langle \gamma_\tau(\mathbf{v}), \gamma_\Gamma(\mathbf{u}_i) \rangle_{\bar{K}_i \cap \bar{K}_j} + \langle \gamma_\tau(\mathbf{v}), \gamma_\Gamma(\mathbf{u}_j) \rangle_{\bar{K}_i \cap \bar{K}_j} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{rot}, \Omega),$$

dass

$$(\nabla \times \mathbf{v}, \mathbf{u}) = \sum_i (\nabla \times \mathbf{v}, \mathbf{u}_i) = \sum_i (\mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{u}_i) + \sum_i \langle \gamma_\tau(\mathbf{v}), \gamma_\Gamma(\mathbf{u}_i) \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{rot}, \Omega),$$

was wiederum genau dann der Fall ist, wenn  $\mathbf{u} \in H(\text{rot}, \Omega)$  und die Rotation der zusammengesetzten Funktion den zusammengesetzten Rotationen der Teilfunktionen entspricht. Umgekehrt gilt, dass eine zusammengesetzte Funktion, die diese Eigenschaft nicht besitzt (also (3.75) nicht erfüllt), auch kein Element aus  $H(\text{rot}, \Omega)$  ist.

Dies gilt in analoger Weise für Funktionen  $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$ , wobei gefordert werden muss, dass jeweils die Normalkomponente auf Grenzflächen übereinstimmt. Für  $u \in H^1(\Omega)$  folgt die Konformität aus der Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion  $u$  an den Elementgrenzen [138, S. 145].

### 3.5.3 Verwendete Elementtypen

In [171] ist übersichtlich dargestellt, mit welchen Elementtypen  $H^1(\Omega)$ ,  $H(\text{rot}, \Omega)$  und  $H(\text{div}, \Omega)$  diskretisiert werden können, um jeweils einen diskreten abgeschlossenen Subkomplex von (3.81) zu bilden. Die Ausführungen werden im Folgenden als Vorlage verwendet. Alle Ansatzfunktionen der verwendeten finiten Elemente sind Polynomfunktionen auf  $K$  mit maximaler Ordnung  $k$ . Diese werden mit  $P_k(K)$  bezeichnet. Weiterhin wird der Raum  $\tilde{P}_k(K)$  der Polynome auf  $K$  mit exakt  $k$ -ter Ordnung definiert. Damit lassen sich die diskreten Funktionenräume aller in dieser Arbeit relevanten Elementtypen gemäß Tab. 3.1 definieren.

**Tab. 3.1** – Funktionenräume und zugehörige konforme Elemente der Ordnung  $k$ 

Konformität	Elementbezeichnung	Definition
$H^1(\Omega)$	Lagrange-Element	$P_k(K)$
$H(\text{rot}, \Omega)$	Nédélec-Element 1. Art	$\mathcal{N}_k^I(K) := [P_k(K)]^d \oplus \{\mathbf{u} \in [\tilde{P}_{k+1}(K)]^d \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0\}$
	Nédélec-Element 2. Art	$\mathcal{N}_k^{II}(K) := [P_k(K)]^d$
$H(\text{div}, \Omega)$	Raviart-Thomas-Element	$\mathcal{RT}_k(K) := [P_k(K)]^d \oplus \mathbf{x} \tilde{P}_k(K)$
	Brezzi-Douglas-Marini-Element	$\mathcal{BDM}_k(K) := [P_k(K)]^d$

Mit den vorhergehenden Ausführungen wurde noch keine Aussage darüber getroffen, über welche Freiheitsgrade der Verlauf der Polynome innerhalb eines Elementes bestimmt wird. Dies variiert von Element zu Element und ist von vornherein nicht vorgegeben. Im Allgemeinen kann, wie schon zuvor angedeutet, festgehalten werden, dass die Freiheitsgrade so gewählt werden, dass durch die Verbindung der Elemente und die damit verbundene Identifizierung der Freiheitsgrade die Konformität des jeweiligen Elements im zugehörigen Funktionenraum sichergestellt wird. So wird durch die Freiheitsgrade eines Nédélec-Elements jeweils die Tangentialkomponente auf Grenzflächen bestimmt. Für das Nédélec-Element niedrigster Ordnung sind diese stets mit den Elementkanten verknüpft. Analog sind die Freiheitsgrade des Raviart-Thomas-Elements niedrigster Ordnung mit den Grenzflächen verknüpft und legen die Normalkomponente einer Funktion auf der Grenzfläche fest.

Bei Elementen höherer Ordnung existiert keine allgemeingültige Definition von Basisfunktionen und zugehörigen Freiheitsgraden. In der Literatur ist daher eine Vielzahl von Ansätzen zur Konstruktion von Basisfunktionen für Elemente höherer Ordnung zu finden (siehe [80, 167]). Besonders hervorzuheben sind [153] und [171]. Hier werden Basisfunktionen konstruiert, die einen variablen Polynomgrad zwischen Ansatzfunktionen in verschiedenen Elementen zulassen.

Nédélec-Elemente zweiter Art besitzen gegenüber Nédélec-Elementen erster Art bei jeweils niedrigster Ordnung ( $k = 1$  und  $k = 0$ ) einen geringeren Interpolationsfehler ([138, S. 208]), da sie den gesamten Polynomraum  $P_1(K)$  beinhalten. Bei Brezzi-Douglas-Marini-Elementen und Raviart-Thomas-Elementen verhält es sich analog ([138, S. 204]). Da Nédélec-Elemente zweiter Art signifikant mehr Freiheitsgrade als Nédélec-Elemente erster Art besitzen und Gradienten in den jeweiligen Polynomräumen bewusst ausgeblendet werden, finden diese eher selten Anwendung.

In Abb. 3.2 bis Abb. 3.5 sind (in Anlehnung an [171]) diskrete Subkomplexe von (3.81) auf Basis der jeweiligen Elemente niedrigster Ordnung für Dreiecke dargestellt. Die generelle Zuordnung der Freiheitsgrade ist durch Pfeile oder Punkte gekennzeichnet. Eine Erhöhung von Freiheitsgraden wird mit neuen Punkten oder doppelten Pfeilen gekennzeichnet. In zwei Dimensionen wird jeweils lediglich ein Ausschnitt der exakten Sequenz (3.81) betrachtet, dieser ist bedingt durch Reduktionen, die zur Herleitung des zweidimensionalen Falls durchgeführt wurden (siehe auch [171, S. 25]).



$$P_1(K) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_0^I(K) \xrightarrow{\nabla \times} P_0(K) \quad (3.95)$$

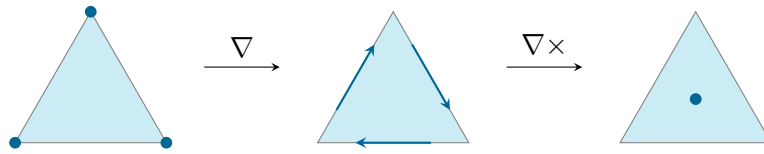


Abb. 3.2 – Subkomplex in 2D mit Nédélec-Elementen erster Art

$$P_1(K) \xrightarrow{\nabla \times} \mathcal{RT}_0(K) \xrightarrow{\nabla \cdot} P_0(K) \quad (3.96)$$

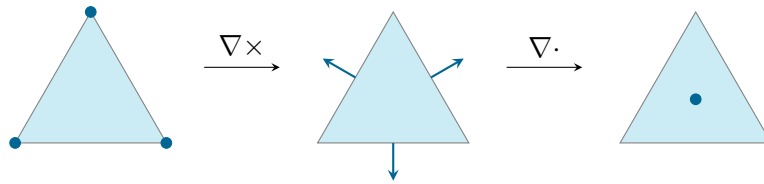


Abb. 3.3 – Subkomplex in 2D mit Raviart-Thomas-Elementen

$$P_2(K) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_1^{II}(K) \xrightarrow{\nabla \times} P_0(K) \quad (3.97)$$

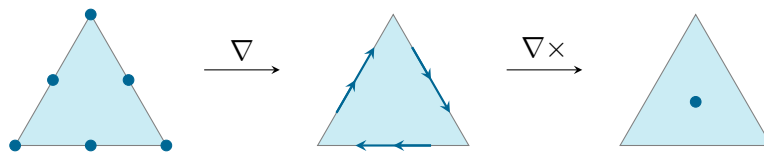


Abb. 3.4 – Subkomplex in 2D mit Nédélec-Elementen zweiter Art

$$P_2(K) \xrightarrow{\nabla \times} \mathcal{BDM}_1(K) \xrightarrow{\nabla \cdot} P_0(K) \quad (3.98)$$

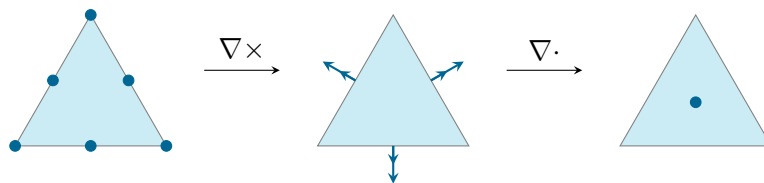


Abb. 3.5 – Subkomplex in 2D mit Brezzi-Douglas-Marini-Elementen

In drei Dimensionen wird die gesamte exakte Sequenz (3.81) (bzw. ihre diskrete Repräsentation) betrachtet. Wieder werden die Subkomplexe auf Basis der verschiedenen Diskretisierungen niedrigster Ordnung von  $H(\text{rot}, \Omega)$  und  $H(\text{div}, \Omega)$  in Abb. 3.6 und Abb. 3.7 angegeben, die Freiheitsgrade sind dann in Abb. 3.7 nur noch schematisch gegeben.

$$P_1(K) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_0^I(K) \xrightarrow{\nabla \times} \mathcal{RT}_0(K) \xrightarrow{\nabla \cdot} P_0(K) \quad (3.99)$$

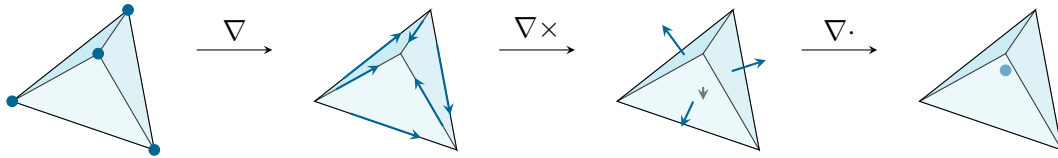


Abb. 3.6 – Subkomplex niedrigster Ordnung in 3D mit Nédélec-Elementen erster Art

$$P_3(K) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{N}_2^{II}(K) \xrightarrow{\nabla \times} \mathcal{BDM}_1(K) \xrightarrow{\nabla \cdot} P_0(K) \quad (3.100)$$

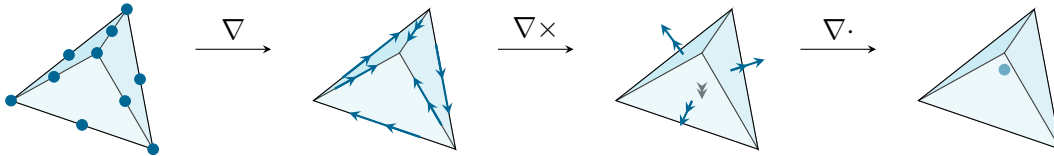


Abb. 3.7 – Subkomplex niedrigster Ordnung in 3D mit Nédélec-Elementen zweiter Art

### 3.5.4 Diskretisierung der Magnetisierung und der Stromdichte

Während für die Felder  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  passende Funktionenräume schon aufgrund der Grenzflächenbedingungen ersichtlich sind, ist dies im Falle der Magnetisierung  $\mathbf{M}$  weniger offensichtlich. Mit Blick auf das Materialgesetz (3.17) und die Übergangsbedingungen an Grenzflächen (3.25) und (3.26) ergibt sich, dass weder die Normal- noch die Tangentialkomponente der Magnetisierung an Grenzflächen stetig sein dürfen. Derartiges Verhalten kann im Kontext der FEM z. B. mit diskontinuierlichen Galerkin-Elementen realisiert werden, diese besitzen keine Konformität zu  $H^1(\Omega)$ ,  $H(\text{rot}, \Omega)$  oder  $H(\text{div}, \Omega)$ . Die Auswirkungen auf die Feldrechnungen werden nachfolgend für Variationsformulierungen auf Basis des magnetischen Vektorpotentials skizziert. Für Variationsformulierungen auf Basis des magnetischen Skalarpotentials verläuft die Argumentation sehr ähnlich.

Es wird ein Gebiet  $\Omega$  betrachtet, das aus einem Ferromagnetikum und Luft besteht. Ohne schwerwiegende Einschränkungen kann an dieser Stelle vorausgesetzt werden, dass  $\mathbf{M} \in H(\text{rot}, \Omega_F) \cap H(\text{div}, \Omega_F)$  und dass überall sonst  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$  gilt, somit kann die partielle Integration (3.75) zumindest Gebietsweise auf  $\mathbf{M}$  angewendet werden. Im Zuge des betrachteten Beispiels wird  $\Omega_1 := \Omega_F$  und  $\Omega_2 := \Omega_0$  gesetzt. Weiter wird ein fiktiver Magnetisierungsstrombelag  $\mathbf{s}_M$  eingeführt, der dem Sprung von  $\mathbf{M}$  an der Grenzfläche zwischen den Teilgebieten entspricht:

$$\mathbf{s}_M := \gamma_{\tau, \Gamma_{12}}(\mathbf{M}_1) = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \times \mathbf{n}.$$

Es gilt nach Voraussetzung  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{0}$ . Darüber hinaus gilt für den Sprung von  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , dass

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \times \mathbf{n} = \mu_0 (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \times \mathbf{n} + \mu_0 (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n}$$

und wenn weiter  $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  gefordert wird:

$$\nu_0 (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{s}_M .$$

Dies unterstreicht, dass die partielle Integration von (3.86), sofern sie auf den gesamten zu  $\mathbf{H} = \nu_0 \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{M}$  gehörenden Term angewendet wird, den Sprung von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{M}$  bereits

implizit berücksichtigt. Die partielle Integration eines einzelnen Terms ist jedoch nicht ohne Weiteres möglich<sup>9</sup>.

Weiterhin ist für die Frage nach einer sinnvollen Repräsentation der Magnetisierung entscheidend, dass es sich bei  $\mathbf{M}$  um eine Größe handelt, die stetig von  $\mathbf{B}$  oder  $\mathbf{H}$  abhängt. Dieser Zusammenhang ist jedoch für ferromagnetische Materialien nichtlinear, d. h. selbst wenn der Verlauf von  $\mathbf{B}$  oder  $\mathbf{H}$  durch die Elemente, die zu deren Diskretisierung verwendet wurden, im Voraus festgelegt ist, kann der Verlauf nicht auf  $\mathbf{M}$  übertragen werden. Dies motiviert, den Verlauf von  $\mathbf{M}$  nicht mit diskontinuierlichen Galerkin-Elementen oder Ähnlichem vorzuschreiben, sondern  $\mathbf{M}$  lediglich bezüglich  $\mathbf{B}$  oder  $\mathbf{H}$  in Quadraturpunkten auszuwerten<sup>10</sup>.

Die Vorgabe von  $\mathbf{M}$  auf Quadraturpunkten ist für gewöhnlich gegenüber einer expliziten Beschreibung von  $\mathbf{M}$  vorzuziehen. Letztere kann, wenn sie benötigt wird (z. B. im Zuge einer Visualisierung von  $\mathbf{M}$ ), aus den Werten in den Quadraturpunkten berechnet werden. Eine Ausnahme bildet die Vorgabe einer konstanten Magnetisierung in jedem Element (entspricht der Diskretisierung von  $\mathbf{M}$  mit diskontinuierlichen Galerkin-Elementen der Ordnung 0). Diese geht (abhängig von der Zahl der Quadraturpunkte) einerseits mit einem niedrigeren Rechenaufwand, andererseits mit einem höheren Interpolationsfehler einher. In den folgenden Kapiteln wird stets die Repräsentation von  $\mathbf{M}$  auf Quadraturpunkten verwendet.

Analog zur Magnetisierung bestehen zur Repräsentation der Stromdichte  $\mathbf{j}$  mehrere Möglichkeiten. Hier wird, vor allem in drei Dimensionen, oft die Variante gewählt, den Verlauf von  $\mathbf{j}$  fest vorzugeben. Es wird unter Verwendung eines Strömungsvektorpotentials  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{T}_e$  angesetzt, wobei  $\mathbf{T}_e$  mit Nédélec-Elementen repräsentiert wird. Dies stellt sicher, dass  $\mathbf{j}$ , auch bezüglich der gewählten Diskretisierung, divergenzfrei ist (siehe [150]). Eine derartige Darstellung der Stromdichte durch  $\mathbf{T}_e$  wird auch *kompatible Approximation* von  $\mathbf{j}$  genannt [119].

### 3.5.5 Linearisierung der Feldgrößen

Im vorhergehenden Abschnitt wurden die Grundgedanken hinter der Diskretisierung der zuvor beschriebenen Randwertprobleme ausgeführt. Um auf Basis der Diskretisierung ein lineares Gleichungssystem aufstellen zu können, muss zum einen die Zeitableitung aus den Variationsformulierungen eliminiert werden (dies geschieht nach dem impliziten Euler-Verfahren, wie zuvor beschrieben) zum anderen muss der im Allgemeinen nichtlineare Zusammenhang zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  gesondert behandelt werden.

Dafür ist es zweckmäßig, grundlegende mathematische Werkzeuge zur Linearisierung einzuführen. Im Folgenden wird für die Jacobi-Matrix einer  $m$ -dimensionalen Funktion  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Notation

$$\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

verwendet. Es wird innerhalb dieses Abschnitts davon ausgegangen, dass alle benötigten Ableitungen wohldefiniert sind. Dies ist in Zusammenhang mit Hysterese nicht der Fall. In Kapitel 8 wird sich zeigen, dass dies ohne große Probleme berücksichtigt werden kann.

<sup>9</sup>Ohne Verwendung der Magnetisierung wird der Sprung in der Tangentialkomponente  $\mathbf{B}$  üblicherweise durch einen Sprung der Permeabilität  $\mu$  berücksichtigt.

<sup>10</sup>Ein Bezug zu diskontinuierlichen Galerkin-Elementen ist auch in dieser Variante gegeben. So legen in zwei Dimensionen drei Werte von  $\mathbf{M}$  in Quadraturpunkten eines Elements die Freiheitsgrade eines linearen diskontinuierlichen Galerkin-Elements eindeutig fest.

Mithilfe der Jacobi-Matrix lassen sich die Zusammenhänge  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  und  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$  in linearisierter Form angeben. Dies entspricht der Entwicklung der jeweiligen Größen in eine Taylorreihe im Punkt  $\mathbf{H}_0$  bzw.  $\mathbf{B}_0$ , die nach dem linearen Glied abgebrochen wird. Es gilt näherungsweise

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}_B(\mathbf{H}_0) \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) + \mathbf{B}(\mathbf{H}_0) + \mathcal{O}(\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_0\|^2) \quad (3.102)$$

sowie

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}_H(\mathbf{B}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{B}_0) + \mathcal{O}(\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_0\|^2) . \quad (3.103)$$

Den jeweiligen Jacobi-Matrizen kommt eine besondere Bedeutung zu, da sie dem differentiellen Reluktivitätstensor und dem differentiellen Permeabilitätstensor entsprechen. Daher folgen die Definitionen

$$\boldsymbol{\nu}_d(\mathbf{B}_0) := \mathbf{J}_H(\mathbf{B}_0) \quad (3.104)$$

im Falle des Reluktivitätstensors und

$$\boldsymbol{\mu}_d(\mathbf{H}_0) := \mathbf{J}_B(\mathbf{H}_0) \quad (3.105)$$

im Falle des Permeabilitätstensors.

Für die Linearisierung von  $\mathbf{H}$  bezüglich  $\mathbf{A}$  ergibt sich mit (3.103) und (3.104)

$$\mathbf{H} \approx \boldsymbol{\nu}_d \nabla \times (\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) + \mathbf{H}_0 . \quad (3.106)$$

Der Wert  $\mathbf{H}_0$ , um den die Taylorreihe entwickelt wird, ist bezüglich  $\mathbf{A}$  gegeben durch

$$\mathbf{H}_0 = \boldsymbol{\nu}_0 \nabla \times \mathbf{A}_0 - \mathbf{M}_0 . \quad (3.107)$$

Damit lassen sich die zuvor eingeführten Variationsprobleme linearisieren und in eine Newton-Iteration umschreiben. In Kapitel 8 wird detailliert auf die Lösung der linearisierten magnetostatischen Variationsprobleme eingegangen. Deshalb wird an dieser Stelle nur die Iterationsvorschrift des Variationsproblems 3.1 eingeführt. Es wird vorausgesetzt, dass im aktuellen Zeitschritt  $t_k$  die Werte  $\mathbf{A}_{n-1}$  und  $\mathbf{M}_{n-1}$  bekannt sind (Startwerte oder aus vorhergehender Iteration). Ferner soll die Lösung  $\mathbf{A}(t_{k-1})$  des nichtlinearen Systems aus dem vorhergegangenen Zeitschritt bekannt sein. Um die Notation übersichtlich zu halten wird festgelegt, dass  $H_h(\text{rot}, \Omega)$  Dirichlet-Randbedingungen auf  $\Gamma_B$  erfüllt, also  $H_{0,B}(\text{rot}, \Omega)$  statt zuvor  $H(\text{rot}, \Omega)$  diskretisiert ( $H_h(\text{rot}, \Omega) \equiv H_{0,B,h}(\text{rot}, \Omega)$ ).

Die linearisierte und diskretisierte Version des Variationsproblems 3.1 im Zeitschritt  $k$  schreibt sich damit als:

**Variationsproblem 3.6** *Bestimme  $\mathbf{A}_\varepsilon \in H_h(\text{rot}, \Omega)$ , sodass*

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nu}_d \nabla \times \mathbf{A}_\varepsilon, \nabla \times \mathbf{v}) + \frac{\sigma}{\Delta t_k} (\mathbf{A}_\varepsilon, \mathbf{v}) &= (\mathbf{j}, \mathbf{v}) + (\mathbf{M}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\nu}_0 \nabla \times \mathbf{A}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) \\ &- \frac{\sigma}{\Delta t_k} ((\mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{v}) - (\mathbf{A}(t_{k-1}), \mathbf{v})) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_h(\text{rot}, \Omega) . \end{aligned} \quad (3.108)$$

Das Vektorpotential im  $n$ -ten Iterationsschritt ist durch  $\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{A}_\varepsilon$  gegeben.

### 3.5.6 Erstellung des linearen Gleichungssystems

Nachdem das zu lösende Variationsproblem in linearisierter Form vorliegt, muss die gesuchte Funktion mithilfe eines linearen Gleichungssystems ermittelt werden. Es wird in diesem Abschnitt lediglich kurz skizziert, wie die Aufstellung des Gleichungssystems erfolgt. Eine detaillierte Beschreibung ist u. a. in [119] zu finden.

Die gesuchte Lösungsfunktion, in diesem Abschnitt mit  $\mathbf{u}$  bezeichnet, liegt innerhalb eines Elements in der Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i c_i \mathbf{s}_i(\mathbf{x})$$

oder

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i c_i s_i(\mathbf{x})$$

vor. Hierbei ist  $c_i$  ein Freiheitsgrad, der durch die Formfunktion  $\mathbf{s}_i$  oder  $s_i$  mit einer Kante, einer Fläche oder einem Punkt verknüpft ist. Die durch die jeweiligen Variationsprobleme definierten Integrale werden elementweise ausgewertet. Hierzu wird die Integration auf einem Referenzelement durchgeführt, was wiederum zur Folge hat, dass das vorliegende finite Element auf das Referenzelement transformiert werden muss. Dieser Vorgang wird nicht weiter beschrieben, es wird hierfür auf [138] verwiesen. Die Integration wird anschließend numerisch nach der Gauß-Quadratur durchgeführt. Hierzu werden die zu integrierenden Ausdrücke an Stützstellen, den Quadraturpunkten, ausgewertet. Die Auswertungen werden anschließend gewichtet und addiert. Die Zahl der Quadraturpunkte wird für gewöhnlich so gewählt, dass die höchste durch die Formfunktionen und die Variationsformulierung vorgegebene Polynomordnung exakt integriert wird.

Alle bei der Quadratur auftretenden Operationen sind linear, sodass das Ergebnis eines Integrals angegeben werden kann als

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_i a_i c_i$$

mit Faktoren  $a_i$ , die durch die Integrationsvorschrift vorgegeben sind (der skalare Fall ergibt sich analog). Anschließend werden die Elementgleichungen zu einem globalen Gleichungssystem zusammengesetzt. Hierbei findet die bereits erwähnte Identifizierung von Freiheitsgraden statt, indem die zugehörigen Faktoren  $a_i$  im jeweiligen Element addiert werden und der jeweilige Freiheitsgrad im globalen System mit demselben Index bezeichnet wird.

Die Auswertung der bekannten Integrale der rechten Seiten der Variationsformulierungen erfolgt auf analoge Weise, sodass ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{Lc} = \mathbf{b}$$

entsteht. Hierbei ist  $\mathbf{L}$  die globale Systemmatrix (nicht aufgeteilt in Steifigkeits- und Massmatrix),  $\mathbf{c}$  der Vektor der unbestimmten Freiheitsgrade und  $\mathbf{b}$  der bekannte Quellenvektor.

#### Bemerkungen zur Lösbarkeit und Eindeutigkeit

Die Eigenschaften bezüglich der Lösbarkeit der Variationsprobleme übertragen sich auf die entstehenden linearen Gleichungssysteme. So ist die aus dem magnetostatischen Variationsproblem 3.2 auf Basis des magnetischen Vektorpotentials entstehende Matrix singular. Das gleiche Problem tritt auf, wenn für das Wirbelstromproblem 3.1 die Leitfähigkeit in

Teilgebieten gleich Null ist. Sofern die rechte Seite kompatibel ist<sup>11</sup>, kann jedoch eine Lösung des Gleichungssystems ermittelt werden. Dies geschieht für gewöhnlich unter Einsatz eines Krylov-Unterraumverfahrens, häufig dem *conjugate-gradients*-Verfahren (CG-Verfahren). Dieses besitzt eine sogenannte schwache Eichungseigenschaft. Sie äußert sich darin, dass im Rahmen der CG-Iteration keine Gradientenanteile in  $\mathbf{A}$  auftauchen, sofern die Stromdichte divergenzfrei ist [54]. Eine weitere Möglichkeit zur Lösung des Variationsproblems besteht in der Regularisierung des Gleichungssystems durch die Erweiterung um einen  $\text{div-grad}$ -Term, wie in [29] gezeigt. Weiterhin kann die Eichung des Vektorpotentials (ohne Einführung einer zusätzlichen Variable) erzwungen werden, indem Freiheitsgrade entlang eines Baums im FE-Netz zu Null gesetzt werden (siehe hierzu [25] und die darin zitierten Quellen).

Generell ist die numerische Lösung des Gleichungssystems vor allem im dreidimensionalen Fall nicht trivial und Gegenstand vieler aktueller Veröffentlichungen. Hervorzuheben sind in dieser Hinsicht algebraische Mehrgitterverfahren, die im Rahmen der Prädiktionierung von Gleichungssystemen aus rot-rot-Problemen steigende Verbreitung erfahren [91]. Das magnetostatische Variationsproblem 3.5 weist derartige Probleme bezüglich der Eindeutigkeit und Lösbarkeit nicht auf.

---

<sup>11</sup>Mit der zuvor verwendeten Notation bedeutet dies, dass  $\mathbf{b}$  im Bildraum von  $\mathbf{L}$  liegt.

## 4 Modellierung ferromagnetischer Hysterese

Nachdem im vorangegangenen Kapitel herausgestellt wurde, welchen Platz die Magnetisierung innerhalb der Maxwell-Gleichungen und den daraus resultierenden Variationsproblemen einnimmt, widmet sich das folgende Kapitel der Modellierung ferromagnetischer Hysterese. Hierzu wird zunächst auf den wichtigen Fall der sogenannten skalaren Hysterese eingegangen. Diese bezeichnet hysteresebehaftete Vorgänge mit eindimensionalen Eingangs- und Ausgangsgrößen. Skalare Hystereseemodelle dienen als Basis für viele vektorielle Hystereseemodelle. Außerdem zeigen die später vorgestellten vektoriellen Preisach-Modelle in einer Variablen Eigenschaften, die zum tieferen Verständnis der Modelle beitragen.

Zunächst gilt es, den Begriff der Hysterese genauer zu umfassen. Im Zentrum steht dabei die Ratenunabhängigkeit des beschriebenen Prozesses. Eine formale Definition ist z. B. in [35, S. 33] zu finden. An dieser Stelle wird lediglich festgehalten, dass (klassische) Hystereseemodelle im Kontext der Modellierung von Magnetisierungsvorgängen den Teil des Vorgangs beschreiben, der unabhängig von der Geschwindigkeit der Änderung der Eingangsgröße ist. Weiter gefasst handelt es sich um den Teil, der nicht von der Wirbelstromdynamik beeinflusst wird. In einem Elektroteil sind stets beide Einflüsse (Wirbelströme und Hysterese) vorhanden, allerdings lassen sich Wechselwirkungen zwischen den Effekten aufgrund limitierter Modelle oder Rechenleistung meist nicht exakt abbilden.

Im Folgenden wird die Historie der Modellierung ferromagnetischer Hysterese kurz zusammengefasst. Anschließend wird das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Hysteresemodell detaillierter vorgestellt.

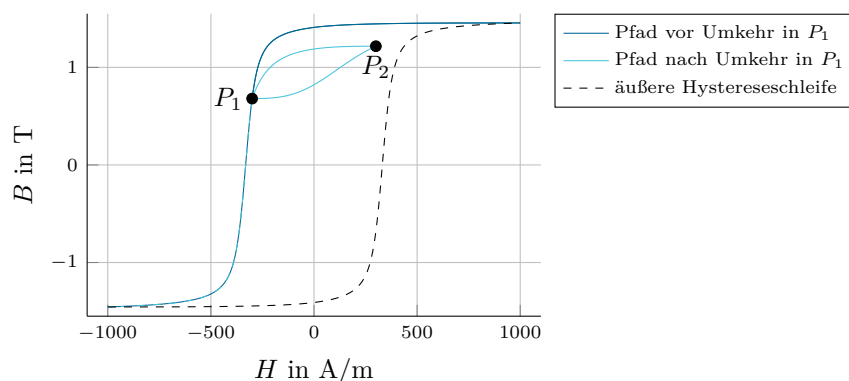
### 4.1 Grundlagen zur Modellierung von skalarer Hysterese

Obwohl die Forschung zu ferromagnetischer Hysterese deutlich weiter zurückgeht (siehe z. B. [5]), stellt Madelung phänomenologische Charakterisierung von eindimensionalen hysteresebehafteten Vorgängen heute oft den Ausgangspunkt zahlreicher Betrachtungen dar.

#### 4.1.1 Phänomenologische Beschreibung nach Madelung

Ist ein Magnetisierungsverlauf gemäß Abb. 4.1 gegeben, so lassen sich die sogenannten madelungschen Regeln wie folgt formulieren [128]:

1. Wird der Verlauf der Magnetisierung im Punkt  $P_1$  umgekehrt, so legt der Punkt  $P_1$  den weiteren Kurvenverlauf eindeutig fest.
2. Findet eine erneute Umkehr des Kurvenverlaufs im Punkt  $P_2$  statt, kehrt die Kurve zum Punkt  $P_1$  zurück.
3. Wird die Magnetisierung über den Punkt  $P_1$  hinaus weiter erhöht, so folgt sie dem Verlauf, den sie genommen hat, bevor der Punkt  $P_1$  zum Umkehrpunkt wurde.



**Abb. 4.1** – Grafische Darstellung der madelungischen Regeln anhand eines exemplarischen Flussdichteverlaufs

Die madelungischen Regeln geben das Verhalten von hysteresebehafteten Prozessen gut wieder, daher weisen auch die meisten gängigen Hystereseamodelle diese Eigenschaften auf. Allen voran wird dies bei der Diskussion des Preisach-Modells in Abschnitt 4.1.4 deutlich, wo die Auslöschungseigenschaft des Preisach-Modells die dritte madelungische Regel äquivalent wiedergibt.

#### 4.1.2 Überblick zu Hysterese modellen

Neben den in späteren Abschnitten und Kapiteln detailliert vorgestellten Preisach-Modellen gibt es zahlreiche weitere Ansätze ferromagnetische Hysterese zu modellieren. Diese sind häufig auf den skalaren Fall beschränkt und werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht explizit verwendet. Diese Modelle lassen sich jedoch ebenso in die elektromagnetische Feldrechnung einbetten, vorausgesetzt, dass ein sinnvoller vektorieller Zusammenhang zwischen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  angegeben werden kann oder, dass punktweise lediglich ein Wechselfeld betrachtet wird.

Die Modelle werden im Folgenden kurz eingeführt, um die Bandbreite möglicher Ansätze zur Modellierung ferromagnetischer Hysterese aufzuzeigen. Die Aufstellung erhebt dabei jedoch keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Abhandlungen, in denen ein breites Spektrum von Hysterese modellen vorgestellt wird, sind beispielsweise [62, 98]. Zusammenfassungen neuerer Entwicklungen sind z. B. in [46] zu finden.

##### Jiles-Atherton-Modell

Das Jiles-Atherton-Modell [99] ist neben dem Preisach-Modell eines der am meisten verwendeten Hysterese modelle. Das Jiles-Atherton-Modell basiert auf physikalischen Beobachtungen und nimmt an, dass der Hauptgrund für das Auftreten von Hysterese eine Haltekraft (engl.: pinning force) ist, die auf Bloch-Wände an Störstellen im Eisenkristall wirkt und deren Verschiebung behindert. Das Modell wird auf Basis von Energiebetrachtungen hergeleitet, die physikalische Validität des Ansatzes ist jedoch umstritten (siehe auch [88]). So wird in [174] anhand eines Gegenbeispiels gezeigt, dass der angesetzte Energieterm näherungsweise der magnetischen Koenergie entspricht und somit nicht die im Werkstoff umgesetzte Energie beschreibt.

Charakteristisch für das Jiles-Atherton-Modell ist die Aufspaltung der Magnetisierung in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil. Weiter ist der Begriff der anhysteretischen Magne-



tisierungskurve zentral, der mit der Neukurve gleichgesetzt werden kann. Die Magnetisierung  $M$  wird nach dem Jiles-Atherton-Modell durch die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{1+c} \cdot \frac{M_{\text{an}} - M}{\nu_0 \delta k - \alpha(M_{\text{an}} - M)} + \frac{c}{(1+c)} \frac{\partial M_{\text{an}}}{\partial H} \quad (4.1)$$

bestimmt [100]. Hierbei entspricht  $M_{\text{an}}$  der anhysteretischen Magnetisierungskurve, welche z. B. mit einer Langevin-Funktion beschrieben werden kann. Die hohe Verbreitung des Modells ist auch darauf zurückzuführen, dass nur wenige Parameter bestimmt bzw. angegeben werden müssen, in (4.1) sind dies  $\alpha$ ,  $c$  und  $k$ . Der Parameter  $\delta$  kann lediglich die Werte  $+1$  und  $-1$  annehmen und realisiert die Unterscheidung von absteigenden und aufsteigenden Ästen in Abhängigkeit der Entwicklung von  $H$ .

Eine Vektorisierung des ursprünglichen Konzepts ist ohne großen Aufwand möglich, häufig dient [12] dazu als Referenz. Vektormodelle besitzen ebenfalls den Vorzug der geringen Parameterzahl. In der numerischen Feldrechnung ist das Modell weit verbreitet (für aktuelle Anwendungen siehe [7] und [81]).

### Stoner-Wohlfarth-Modell

Das Stoner-Wohlfarth-Modell [159] beschreibt das Verhalten ferromagnetischer Partikel oder Körner. Diese verfügen über eine magnetisch harte und eine magnetisch weiche Achse. Auf Basis dieser Anisotropie werden Ausdrücke für die gespeicherte magnetische Energie innerhalb eines Partikels angegeben. Die Minimierung dieser Ausdrücke gibt bei gegebenem magnetischem Feld die zugehörige Magnetisierung vor. Das Modell besitzt von Grund auf eine vektorielle Form. Es ist zur Modellierung kleiner ferromagnetischer Strukturen verbreitet. Analog zu dem an späterer Stelle eingeführten Preisach-Modell können mehrere Stoner-Wohlfarth-Modelle überlagert werden, um komplexere Hysteresekurven zu beschreiben [73]. Darüber hinaus sind in der Literatur Versuche zu finden, Preisach-Modelle und Stoner-Wohlfarth-Modelle zu kombinieren [57, 102, 109].

### Grafische Hystereseemodelle

Einen vollkommen anderen Ansatz als die bis hierhin präsentierten Hystereseemodelle weist eine Gruppe von Modellen auf, die als grafische Hystereseemodelle bezeichnet werden. Sie folgen dem Grundgedanken, ausgehend von einer gegebenen (gemessenen) äußeren Hystereseschleife oder Kommutierungskurven erster Ordnung (sog. *FORCs*: *first order reversal curves*, siehe insb. [87]) beliebige Hystereseschleifen zu konstruieren, indem Teile des Verlaufs der gegebenen Kurven kopiert und zusammengefügt werden. Demnach sind grafische Hystereseemodelle vor allem zur Modellierung skalarer Hysterese geeignet und finden überwiegend in diesem Bereich Anwendung. Beispiele für (weitestgehend) grafische Hystereseemodelle und deren Anwendung sind in [8, 92] und [173] zu finden.

Als großer Vorteil der grafischen Hystereseemodelle ist die Parameteridentifikation mit bedeutend weniger Aufwand verbunden, als dies z. B. bei Preisach-Modellen der Fall ist.

### Chua-Modell

Das Chua-Modell [49, 50] wurde in den siebziger Jahren vor dem Hintergrund entwickelt, ferromagnetische Hysterese in elektrischen Schaltkreisen zu berücksichtigen. Es ist ratenabhängig, erfüllt also die später aufgeführte Definition eines Hystereseoperators nicht. Durch die

Ratenabhängigkeit sollen durch das Modell sowohl Wirbelströme als auch Hystereseeffekte berücksichtigt werden.

### Prandtl-Ishlinskii-Modell

Das Prandtl-Ishlinskii-Modell [96, 142] wurde vor dem Hintergrund, plastische Verformungen zu beschreiben, eingeführt. Der durch das Modell definierte Prandtl-Operator wurde in der Mathematik umfassend untersucht (siehe [35, 165]). Der an späterer Stelle eingeführte Spieloperator sowie der ebenfalls zur Modellierung von ferromagnetischer Hysterese eingesetzte Stop-Operator sind Prandtl-Operatoren [35]. Bemerkenswert ist, dass der dem Modell zugrundeliegende Prandtl-Operator als Spezialfall des erst später entstandenen Preisach-Operators aufgefasst werden kann, sofern dessen Definition die Abbildung reversibler Prozesse zulässt [35, S. 29].

Darüber hinaus existieren weitere Hystereseemodelle, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird, z. B. das Bouc-Wen-Modell [33, 97].

### 4.1.3 Mathematische Charakterisierung von Hystereseoperatoren

Die Erforschung von Hysterese im Bereich der Mathematik ist deutlich jünger als deren phänomenologische Charakterisierung. Als Pionier wird diesbezüglich meistens Krasnosel'Skii [115] genannt. Darauf folgend wurden die mathematischen Eigenschaften skalarer Hystereseoperatoren zum Beispiel von Brokate und Sprekels [35] untersucht. Daneben veröffentlichten Visintin [165] und Krejčí [116] weitere Standardwerke u. a. mit Resultaten zu parabolischen und hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen mit Hysterese. Die hier verwendete Definition ist an [20] und [165, S. 59] angelehnt (eine ähnliche Charakterisierung findet sich auch in [35, Prop. 2.2.9]) und beschreibt Hysterese als *ratenunabhängiges Gedächtnis*. Da die vorgestellten Inhalte dieses Abschnitts nicht notwendigerweise in Zusammenhang mit Magnetismus auftreten, und auch die Rolle von Eingangs- und Ausgangsvariablen nicht immer eindeutig ist, werden im Folgenden  $s$  als Eingangsgröße und  $q$  als Ausgangsgröße verwendet. Im Normalfall übernimmt im Kontext der Modellierung elektromagnetischer Felder das magnetische Feld  $H$  die Rolle der Eingangsvariable und  $B$ ,  $I$  oder  $M$  die Rolle der Ausgangsvariablen. In der Mathematik werden Hystereseoperatoren charakterisiert als Objekte, die Eingangsfunktionen  $s(t)$  auf Ausgangsfunktionen  $q(t)$  abbilden [35, S. 22]. Ihre grundlegende Definition ist gegeben durch:

**Definition 4.1** *Gegeben die Funktionen  $s : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s \in C^0([0, t])$  und  $q : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q(t) = \mathcal{H}[s](t)$ . Die Abbildung  $\mathcal{H} : C^0(0, t) \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein Hystereseoperator, wenn  $\mathcal{H}$  die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

1. *Ratenunabhängigkeit [35, 127, Def. 2.1.3, Def. 2.1.1]:*

*Gegeben eine Funktion  $\varphi : [0, T] \rightarrow [0, T]$ ,  $\varphi$  stetig und monoton,  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi(T) = T$ , dann gilt:*

$$\mathcal{H}[s \circ \varphi] = \mathcal{H}[s] \quad (4.2)$$

2. *Volterra-Eigenschaft (Kausalität):*

*Der Wert von  $q(t)$ ,  $t \in [0, T]$  hängt von  $s(t)$  und den vorangegangenen Werten  $s(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t]$  ab [165, S. 59]. D. h. für zwei Funktionen  $s_{1t}$  und  $s_{2t}$  der Form*

$$s_t(\tau) = \begin{cases} s(\tau) & 0 \leq \tau \leq t \\ s(t) & t < \tau \leq T \end{cases} \quad (4.3)$$

*gilt, dass aus  $s_{1t} = s_{2t}$  folgt  $q_{1t} = q_{2t}$  [127, Def. 2.1.2].*

Es sei angemerkt, dass diese Definition eines Hystereseoperators aus verschiedenen Literaturquellen zusammengestellt wurde. Manche Einschränkungen wie  $s \in C^0([0, t])$  sind nicht notwendig, ermöglichen jedoch eine deutlich kompaktere Definition eines Hystereseoperators, welche für den Rahmen der vorliegenden Arbeit ausreichend ist.

Aus (4.2) folgt, dass  $q(t)$  invariant gegenüber einer Streckung oder Stauchung der Zeitskala ist. Durch die Ratenunabhängigkeit lassen sich Eingangssequenzen reduzieren auf Teilsequenzen mit gleichbleibender Monotonie. Lediglich der Anfangs- und der Endwert einer Teilsequenz bestimmen dann den jeweiligen Wert des Hystereseoperators zu einem bestimmten Zeitpunkt [35]. Diese Eigenschaft von Hystereseoperatoren wird sich im Folgenden häufig zeigen. Weiterhin folgt aus (4.3), dass  $q(t)$  nur von einem Anfangszustand und der zeitlichen Entwicklung von  $s(t)$  abhängt.

#### 4.1.4 Skalare Preisach-Operatoren

Ein Vertreter der zuvor eingeführten Klasse der Hystereseoperatoren ist der skalare Preisach-Operator. Bemerkenswert ist, dass dieser die Madelung-Regeln befolgt. Preisach-Modelle sind in der Literatur weit verbreitet, Grundlagen sind z. B. in [133] umfassend dargelegt.

Sowohl skalaren als auch vektoriellen Preisach-Operatoren ist gemein, dass sie durch die Superposition von (evtl. überabzählbar vielen) elementaren Relais-Operatoren gegeben sind. Die zu skalaren Preisach-Modellen gehörigen elementaren Hystereseoperatoren werden *Preisach-Relais* genannt. Um die Schaltfunktion eines Relais zu definieren, müssen die Schaltwerte  $\alpha$  und  $\beta$  sowie die Menge  $X_t$  definiert werden. Diese ist analog zu [165, S. 98] definiert als

$$X_t := \{\tau \in [0, t] | s(\tau) \notin [\beta, \alpha]\} . \quad (4.4)$$

Damit lässt sich die Schaltfunktion des Preisach-Relais einführen, die in Abb. 4.2 dargestellt ist:

**Definition 4.2** Gegeben  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha \geq \beta$  und ein Anfangszustand  $\xi \in \{-1, 1\}$ , dann ist die Schaltfunktion eines Preisach-Relais gegeben durch

$$q_\alpha^\beta[s, \xi](t) = \begin{cases} +1 & \text{falls } s(t) > \alpha \\ -1 & \text{falls } s(t) < \beta \\ q_\alpha^\beta[s, \xi](\max(X_t)) & \text{falls } \beta \leq s(t) \leq \alpha \text{ und } X_t \neq \emptyset \\ \xi & \text{falls } \beta \leq s \leq \alpha \text{ und } X_t = \emptyset . \end{cases} \quad (4.5)$$

Die Überlagerung mehrerer Preisach-Relais ergibt den Preisach-Operator  $\mathcal{P}$  gemäß

**Definition 4.3** Gegeben Anfangszustände  $\xi \in \{-1, 1\}$ , Preisach-Relais  $q_\alpha^\beta[s, \xi](t)$  gemäß (4.5), die Menge  $S := \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \leq \alpha\}$  und eine Lebesgue-integrierbare Funktion  $\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dann ist der Preisach-Operator  $\mathcal{P}[s, \xi](t) : C^0(0, t) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\mathcal{P}[s, \xi](t) = \iint_S \omega(\alpha, \beta) q_\alpha^\beta[s, \xi](t) \, d\alpha \, d\beta . \quad (4.6)$$

Dies entspricht der Standarddarstellung des Preisach-Operators. Die Darstellung ist ein Spezialfall der allgemeinen Definition (siehe hierzu [35, S. 55]), die hier nicht eingeführt wird, um mit einfacheren Voraussetzungen an die sog. Preisach-Dichtefunktion  $\omega$  arbeiten zu können. Die Preisach-Dichtefunktion beschreibt die Gewichtung der Preisach-Relais innerhalb des Parameterraums. An dieser Stelle genügt es, vorauszusetzen, dass  $\omega$  Lebesgue-integrierbar ist. Dies trifft auf alle bei der konkreten Berechnung von Magnetisierungskurven verwendeten Preisach-Dichten zu und schränkt diese nicht nennenswert ein.

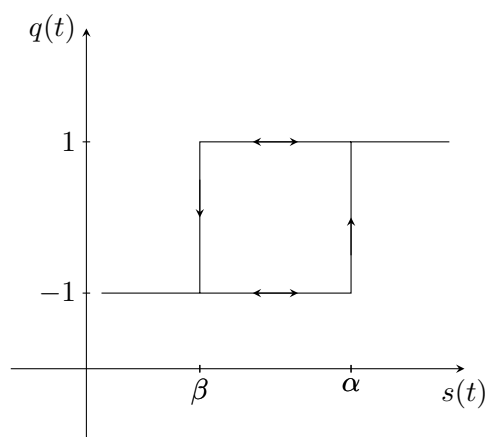


Abb. 4.2 – Schaltfunktion eines Preisach-Relais

### Darstellung in der Preisach-Ebene

Von fundamentaler Bedeutung für die Anwendung von Preisach-Modellen ist die grafische Interpretation des Preisach-Operators in der sog. *Preisach-Ebene*. Diese ist in Abb. 4.3 dargestellt und geht auf die ursprüngliche Veröffentlichung von Preisach [143] zurück. Sie spiegelt unabhängig von der vorgegebenen Preisach-Dichtefunktion den Zustand aller Preisach-Relais wider. Die Koordinatenachsen der Ebene werden durch die  $\alpha$ - und  $\beta$ -Werte der Relais beschrieben. Der aktuelle Wert des Eingangs  $s(t)$  wird entlang der Achse  $\alpha = \beta$  auf Höhe  $\alpha = s(t)$  aufgetragen. Sind die Zustände der Preisach-Relais zum Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt, können ausgehend von der Entwicklung von  $s(t)$  ihre Zustände durch die sog. *Treppenkurve* repräsentiert werden. Steigt  $s(t)$  an, so werden alle Preisach-Relais, deren  $\alpha$ -Wert kleiner als der aktuelle Wert von  $s(t)$  ist, den Ausgangswert  $+1$  besitzen. Sinkt  $s(t)$  umgekehrt ab, so werden alle Preisach-Relais, deren  $\beta$ -Wert kleiner als  $s(t)$  ist, den Ausgangswert  $-1$  besitzen. Somit gibt im Falle eines steigenden Eingangs eine parallele Gerade zur  $\beta$ -Achse die Grenze an bis zu der ausnahmslos alle Preisach-Relais den Wert  $+1$  besitzen müssen. Analog dazu gibt eine Parallele zur  $\alpha$ -Achse im Falle eines fallenden Eingangs die Grenze an, bis zu der alle Preisach-Relais den Wert  $-1$  besitzen. Wechseln sich steigende und fallende Verläufe des Eingangs ab, kann es vorkommen, dass (abhängig von den jeweiligen Extremwerten der Auslenkung) nicht alle Preisach-Relais einen Schaltzyklus durchlaufen, sondern in ihrem Zustand verharren. Die Grenzen zwischen Preisach-Relais mit dem Wert  $+1$  bzw.  $-1$  werden durch den alternierenden Verlauf von  $s(t)$  also nur teilweise aufgelöst. Dies führt dazu, dass Preisach-Relais mit dem Wert  $+1$  und  $-1$  im Allgemeinen durch eine Treppenkurve voneinander getrennt sind. Den jeweiligen Ebenen wird der Name  $S^+$  bzw.  $S^-$  gegeben, in Anlehnung an den Zustand der zugehörigen Preisach-Relais.

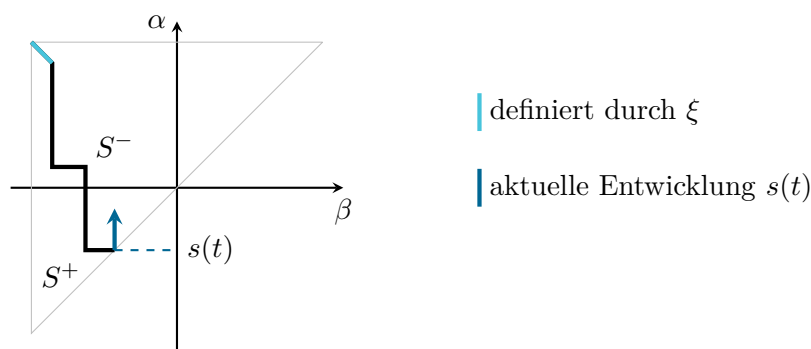


Abb. 4.3 – Repräsentation des Preisach-Operators in der Preisach-Ebene

### Auswertung mithilfe der Everett-Funktion

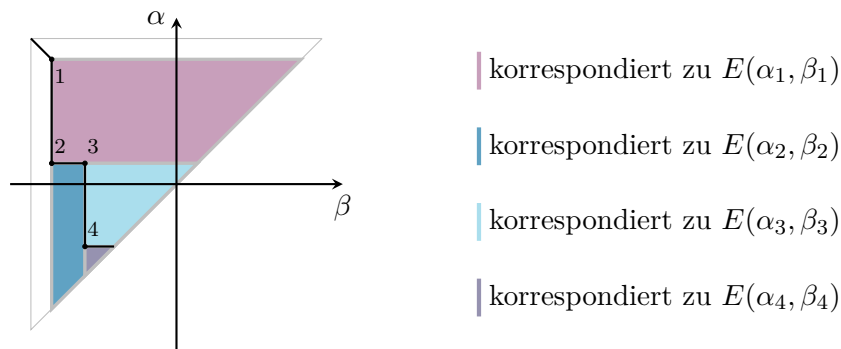
Die Treppenkurve in der Preisach-Ebene enthält alle Informationen über den Zustand der Preisach-Relais. Für eine gegebene Preisach-Dichtefunktion lässt sich mit Kenntnis der Treppenkurve der Wert von  $\mathcal{P}$  gemäß (4.6) bestimmen. Da die Preisach-Relais lediglich zwei Werte annehmen können, lässt sich der Wert des Preisach-Operators auch schreiben als

$$\mathcal{P}(t) = \iint_{S^+} \omega(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta - \iint_{S^-} \omega(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta . \quad (4.7)$$

Für gewöhnlich wird es beim Einsatz eines skalaren Preisach-Modells vermieden, die Flächenintegrale in (4.7) explizit auszuwerten. Das Ergebnis wird stattdessen mit Hilfe der sog. *Everett-Funktion*  $E(\alpha, \beta)$  berechnet (siehe z. B. [64], in [20, S. 335 f.] nicht unter dem Namen Everett-Funktion eingeführt). Diese weist jedem Punkt  $(\alpha', \beta') \in S$  in der Preisach-Ebene den Wert zu, um den sich  $\mathcal{P}(t)$  ändert, wenn durch die Variation des Eingangs die Zugehörigkeit des Dreiecks, das durch die Linien  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha = \alpha'$  und  $\beta = \beta'$  begrenzt wird, vollständig zwischen  $S^+$  und  $S^-$  wechselt:

$$E(\alpha', \beta') = \iint_{S_{\alpha' \beta'}} \omega(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta . \quad (4.8)$$

Ist die Everett-Funktion bekannt, kann (4.7) ausgewertet werden, indem die Werte der Everett-Funktion an den Ecken der Treppenfunktion in der Preisach-Ebene entsprechend ihrer Zugehörigkeit zu  $S^-$  oder  $S^+$  subtrahiert oder addiert werden.



**Abb. 4.4** – Zusammenhang zwischen Preisach-Ebene und Everett-Funktion

In Abb. 4.4 ist dies illustriert. Es gilt zu beachten, dass die Dreiecke, die den Everett-Funktionen zugeordnet sind, sich teilweise überlagern. Lediglich das zu  $E(\alpha_4, \beta_4)$  gehörende Dreieck ist vollständig abgebildet. Im konkreten Beispiel gilt demnach

$$\mathcal{P}(t) = -E(\alpha_1, \beta_1) + 2E(\alpha_2, \beta_2) - 2E(\alpha_3, \beta_3) + 2E(\alpha_4, \beta_4) .$$

Dieses Schema kann problemlos auf Treppenkurven mit beliebig vielen Eckpunkten erweitert werden. Problematisch ist die Bestimmung der Everett-Funktion. Diese muss für einige Punkte innerhalb der Preisach-Ebene messtechnisch bestimmt werden. Danach wird z. B. mithilfe von Interpolationsverfahren eine analytische Darstellung der Everett-Funktion auf Basis der Messdaten konstruiert (siehe z. B. [64]).

### Eigenschaften von Preisach-Modellen

Aufgrund ihrer Konstruktion besitzen Preisach-Modelle Eigenschaften, die sie charakterisieren [20, S. 313 ff.]:

1. *Auslöschungseigenschaft*: Das Preisach-Modell verliert die Information über ein Extremum im Verlauf der Eingangsvariable, sobald die Amplitude der Eingangsvariable größer ist als die Amplitude des Extremums.
2. *Kongruenzeigenschaft*: Alle inneren Hystereseschleifen, die zu denselben Variationen von Eingangswerten korrespondieren, sind zueinander kongruent.

Die Erfüllung beider Eigenschaften ist notwendig und hinreichend für einen Vorgang, um mit einem Preisach-Modell repräsentiert werden zu können [20, S. 324].

Die Kongruenzeigenschaft des Preisach-Modells wird in der Literatur kritisiert, da diese bei weichmagnetischen Materialien im Allgemeinen nicht dem beobachteten Materialverhalten entspricht [45]. Es existieren Ansätze zur Konstruktion von Preisach-Modellen, die keine Kongruenzeigenschaft besitzen [132, 133]. Diese haben allerdings keine weite Verbreitung gefunden. Durch eine größere Anzahl von Freiheitsgraden erschweren sie das Problem der Parameteridentifikation erheblich. Darüber hinaus benötigen sie Messdaten, die innere Hystereseschleifen charakterisieren, was z. B. die Messung von Kommutierungskurven erster Ordnung (FORCs) nicht leisten kann (siehe [135]). Es sind keine umfassenden Untersuchungen bekannt, wie gravierend die Kongruenzeigenschaft die Brauchbarkeit des Preisach-Modells zur Beschreibung ferromagnetischer Hysterese beeinflusst.

#### 4.1.5 Skalärer Spieloperator und energiebasiertes Hysteresemodell in einer Dimension

Soll mithilfe des skalaren Preisach-Operators die Magnetisierung in Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke ausgedrückt werden, kann z. B.  $M(t) := \mathcal{P}[H, \xi](t)$  gesetzt werden. Dies wird im Folgenden vorausgesetzt. Der Fokus wird weg von den rein mathematischen Eigenschaften des Preisach-Modells hin zu dessen Anwendung zur Modellierung ferromagnetischer Hysterese gelenkt. Ein interessantes Beispiel hierfür ist das energiebasierte Hysteresemodell (EBM), das auch in der elektromagnetischen Feldrechnung weite Verbreitung findet. Es wurde in [11] eingeführt und in zahlreichen Veröffentlichungen weiterentwickelt [72, 88, 89, 156]. Es ist von Grund auf vektoriell, vorerst wird allerdings nur die Reduktion des energiebasierten Hysterese Modells auf den skalaren Fall betrachtet. Einige Inhalte dieses Abschnitts wurden bereits in [W5] veröffentlicht.

Obwohl der Ausgangspunkt bei der Herleitung des energiebasierten Modells sich gänzlich vom Ausgangspunkt der Konstruktion des zuvor eingeführten Preisach-Modells unterscheidet, lässt sich das EBM im skalaren Fall stets auf ein skalares Preisach-Modell zurückführen.

Ausgangspunkt des energiebasierten Hysterese Modells, wie es in [156] gezeigt wird, ist die Änderung der Dichte der inneren Energie eines ferromagnetischen Körpers

$$\dot{u} = \dot{w}_{\text{mag}} - p_{\text{dis}} . \quad (4.9)$$

Hierbei entspricht  $\dot{w}_{\text{mag}}$  der Änderung der magnetischen Energiedichte

$$\dot{w}_{\text{mag}} = H \dot{B} . \quad (4.10)$$

Dementsprechend beschreibt  $p_{\text{dis}}$  die dissipierte Leistung pro Volumeneinheit.

Der Schlüssel zur Modellierung von Hysterese auf Basis der Energiedichten ist eine Aufspaltung der Feldgrößen (siehe [158]). Die Flussdichte  $B$  besteht aus einer Vakuumpolarisation  $I_0 = \mu_0 H$  und der Polarisation des Ferromagnetikums  $I$  gemäß

$$B = I_0 + I . \quad (4.11)$$

Für das energiebasierte Hysteresemodell wird nun (im Gegensatz zum Jiles-Atherton-Modell) die magnetische Feldstärke in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil aufgeteilt gemäß

$$H = H_r + H_i . \quad (4.12)$$

Entscheidend ist nun, wie die Anteile der Energiedichten aus den Feldanteilen berechnet werden. Es wird festgelegt

$$\dot{u} = H \dot{I}_0 + H_r \dot{I} \quad (4.13)$$

und

$$p_{\text{dis}} = H_i \dot{I} . \quad (4.14)$$

Diese Aufteilung ist konsistent mit (4.9). Der Dissipationsmechanismus wird analog zur Reibung in der Mechanik beschrieben durch [157]

$$p_{\text{dis}} = \kappa |\dot{I}| . \quad (4.15)$$

Diese Analogie kann physikalisch motiviert werden (siehe u. a. [11, 157]). Sie ist grundsätzlich jedoch eine Annahme, die erfüllt sein muss, damit das Modell seine Gültigkeit behält. Das Dissipationsfunktional ist nicht differenzierbar für  $\dot{I} = 0$ , es ist jedoch konvex (da die Betragsfunktion konvex ist), damit folgt, dass  $H_i$  ein Element des Subgradienten sein muss:

$$H_i \in \partial_{\dot{I}} p_{\text{dis}} . \quad (4.16)$$

Dieser ist wiederum gegeben durch die Menge

$$\partial_{\dot{I}} p_{\text{dis}} = \begin{cases} H_i , & |H_i| < \kappa , \text{ wenn } \dot{I} = 0 \\ \kappa \text{ sign}(\dot{I}) , & \text{sonst} . \end{cases} \quad (4.17)$$

Da  $\dot{H}_r = 0 \Leftrightarrow \dot{I} = 0$  gilt und  $\text{sign}(\dot{H}_r) = \text{sign}(\dot{I})$ , lässt (4.17) folgende Aussage zu:  $H_r$  folgt  $H$  mit beliebiger Geschwindigkeit, wenn  $|H - H_r| = \kappa$ , und  $H_r$  folgt  $H$  nicht, wenn  $|H - H_r| < \kappa$  (siehe auch [154, S. 291]).

Dieses Verhalten wird durch den Spieloperator  $\mathcal{F}_\kappa$  gemäß (4.18) wiedergegeben. Unter der Voraussetzung, dass ein konsistenter Anfangszustand gegeben ist, wird der Spieloperator zu diskreten Zeitpunkten  $t_{i-1} < t_i$  geschrieben als

$$\mathcal{F}_\kappa(H, H_r(t_{i-1})) = \max \{ H - \kappa , \min \{ H + \kappa , H_r(t_{i-1}) \} \} . \quad (4.18)$$

Für einen kontinuierlichen Zeitverlauf lässt sich der Operator sehr ähnlich definieren [35, S. 23]. Es bedarf jedoch einer genaueren Charakterisierung der Eingangsfunktion, die hier nicht erfolgen soll. Da der skalare Spieloperator ein Preisach-Operator ist (vgl. Zusammenhang zwischen Relais- und Spieloperator [35, S. 25]), ist an dieser Stelle bereits gezeigt, dass das EBM im skalaren Fall ein Preisach-Modell beschreibt.

Im Folgenden wird diese Äquivalenz anschaulich erläutert und auf die durch das EBM definierten Preisach-Dichtefunktionen eingegangen.  $H_r(t)$  wird mit dem Ausgang von  $\mathcal{F}_\kappa$  gleichgesetzt.

Die Polarisation wird lediglich über die reversible Komponente der Feldstärke berechnet mit

$$I(H) = I(H_r) = I_s \mathcal{L} \left( \frac{H_r}{H_s} \right) . \quad (4.19)$$

Hierin bezeichnet  $\mathcal{L}(x)$  die Langevin-Funktion

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} . \quad (4.20)$$

Zur Modellierung der Polarisation können jedoch auch andere Funktionen herangezogen werden, die geeignet sind, die Neukurve eines Ferromagnetikums nachzubilden (z. B.  $\arctan(x)$  oder zwei Langevin-Funktionen wie in [156]).

In [156] wird das EBM aus einer endlichen Anzahl  $k$  von Sphären mit unterschiedlichen Radien  $\kappa_k$  aufgebaut<sup>1</sup>. Die Werte für  $H_r$  und  $H_i$  der jeweiligen Sphären werden nach (4.12)–(4.17) berechnet. Die resultierende Polarisation ergibt sich, indem die einzelnen Polarisationen der Sphären mit einem Gewichtungsfaktor  $\omega_k$  multipliziert und anschließend aufsummiert werden:

$$I(H_r) = \sum_k \omega_k \mathcal{L} \left( \frac{H_{rk}}{H_s} \right) . \quad (4.21)$$

Die Gewichtungsfaktoren müssen  $\omega_k \geq 0$  erfüllen, weiter muss gelten  $\sum_k \omega_k = 1$ . Die Sphäre mit einem Wert von  $\kappa = 0$  folgt dem Eingang  $H$  direkt, d. h., es gilt zu jedem Zeitpunkt  $H = H_r$  und  $H_i = 0$ . Ein Modell bestehend aus lediglich dieser Sphäre würde demnach die durch (4.20) zugrundegelegte Neukurve beschreiben.

## Verhalten der Sphären

Im Folgenden soll anhand eines simplen Beispiels verdeutlicht werden, wie Informationen über die vorangegangene Entwicklung des Eingangs innerhalb des EBM repräsentiert werden. Es wird ein Modell bestehend aus drei Sphären betrachtet. Es wird angenommen, dass zu einem Zeitpunkt  $t_0 = 0$  alle Sphären konzentrisch ausgerichtet sind, somit besitzen alle Sphären den Wert  $H_r = 0$ . Für beliebige Verläufe von  $H$  kann  $H_r$  anschließend mithilfe von (4.18) bestimmt werden. Eine exemplarische Entwicklung von  $H_r$  in Abhängigkeit der Entwicklung von  $H$  ist in Abb. 4.5 dargestellt. Die Eingangsgröße  $H$  ist normiert und verläuft von  $H = 0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  zu  $H = 1$  zum Zeitpunkt  $t_1$  zu  $H = -1$  zum Zeitpunkt  $t_2$ . Die (normalisierten)  $\kappa$ -Werte der Sphären betragen  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 = 0,3$  und  $\kappa_3 = 0,7$ .

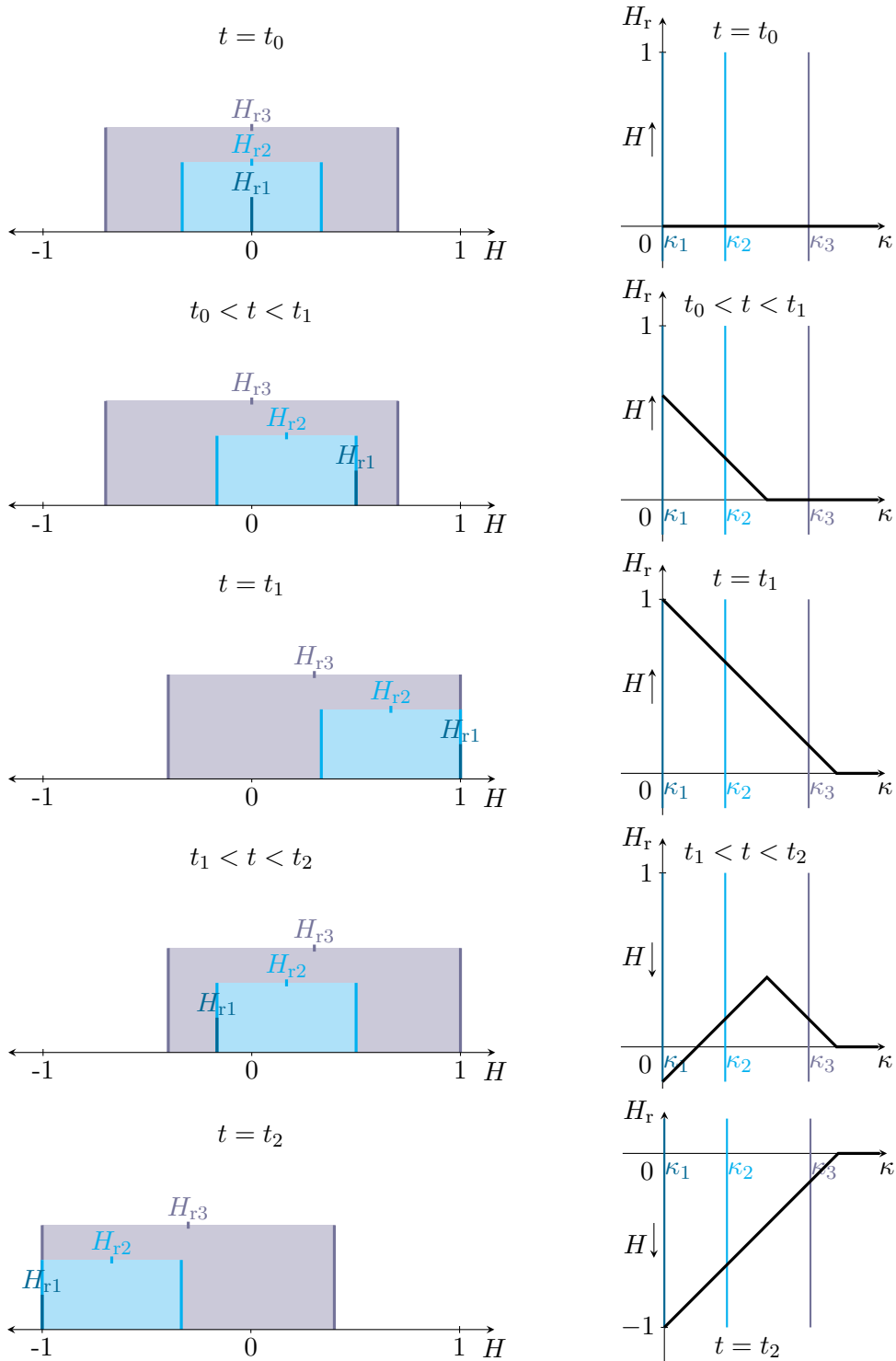
Die Position der einzelnen Sphären kann in einem Diagramm, das  $H_r$  über  $\kappa$  aufträgt, verfolgt und repräsentiert werden. Dieses Diagramm ist in Abb. 4.5 auf der rechten Seite zu finden, neben einer Darstellung der tatsächlichen Bewegung der Sphären.

Wie bereits erwähnt stimmt die Position der Sphäre mit  $\kappa = 0$  immer mit dem aktuellen Wert von  $H$  überein. Demnach variiert der Eingang im  $\kappa$ - $H_r$ -Diagramm entlang der vertikalen Achse. Da für jede Sphäre  $|H - H_r| \leq \kappa$  gilt, werden sich diese entlang von Linien mit der Steigung  $+1$ ,  $-1$  oder  $0$  ausrichten. Letzteres ist nur möglich, wenn die Sphären seit  $t_0$  nicht bewegt wurden.

Die schwarze Linie im  $\kappa$ - $H_r$ -Diagramm repräsentiert das Gedächtnis des zugrundeliegenden Spieloperators. Sie enthält alle relevanten Informationen über die Position der Sphären und die Entwicklung von  $H$ .

<sup>1</sup>Die Bezeichnung Sphären wird an dieser Stelle beibehalten, obwohl Intervall im eindimensionalen Fall treffender wäre.





**Abb. 4.5** – Bewegung dreier Sphären (links) und Repräsentation der Bewegung in einem  $\kappa$ - $H_r$ -Diagramm (rechts)

### Überführung in ein Preisach-Modell

Die gezeigte Gedächtnis-Kurve im  $\kappa$ - $H_r$ -Diagramm hat eine sehr ähnliche Form zur Treppenkurve in der Preisach-Ebene<sup>2</sup>.

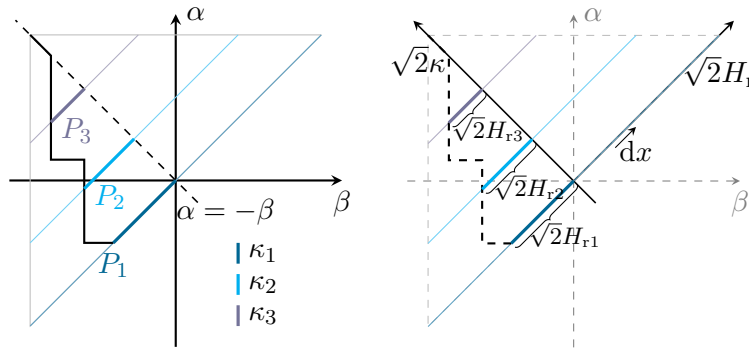
<sup>2</sup>In [35, S. 29] wird statt der Treppenkurve dieselbe Darstellung verwendet.

Eine simple Koordinatentransformation bildet die  $\kappa$ - $H_r$ -Ebene auf die  $\alpha$ - $\beta$ -Ebene ab:

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ H_r \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Das Preisach-Modell, das durch die Transformation des skalaren EBM entsteht, wird im Folgenden näher untersucht. Weiterhin wird das Beispielmodell mit drei Sphären zur Veranschaulichung herangezogen.

Eine Treppenkurve in der  $\alpha$ - $\beta$ -Ebene zu einem Zeitpunkt  $t > t_0$  wird in Abb. 4.6 dargestellt. Die zur Berechnung der Polarisation gemäß (4.19) benötigten  $H_r$ -Werte können für jedes  $\kappa_k$  aus der  $\kappa$ - $H_r$ -Ebene sofort abgelesen werden. In der  $\alpha$ - $\beta$ -Ebene wird die  $\kappa$ -Achse auf die Achse  $\alpha = -\beta$  projiziert und um den Faktor  $\sqrt{2}$  gestreckt. Die Schnittpunkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  werden bestimmt durch den Schnitt zwischen den Bildern der Geraden  $\kappa = \kappa_1$ ,  $\kappa = \kappa_2$  und  $\kappa = \kappa_3$  und der Treppenkurve in der Preisach-Ebene. Die Distanz der Punkte zur Achse  $\alpha = -\beta$  entspricht  $\sqrt{2}H_r$  der zugeordneten Sphäre. Das Vorzeichen von  $H_r$  unterscheidet sich, je nachdem ob die Schnittpunkte oberhalb (+1) oder unterhalb (-1) der Linie  $\alpha = -\beta$  liegen.



**Abb. 4.6** – Exemplarische Repräsentation des EBM in der Preisach-Ebene (links) und korrespondierende Werte von  $H_r$  und  $\kappa$  (rechts)

Die Äquivalenz der beiden Modelle ermöglicht es, eine Verbindung zwischen der Langevin-Funktion (4.19) und der durch das EBM definierten Preisach-Dichtefunktion herzustellen. Die Dichtefunktion ist lediglich auf den zu  $\kappa$  korrespondierenden Linien definiert und die Auswertung des Flächenintegrals über der Preisach-Ebene wird auf die Auswertung von  $k$  Langevin-Funktionen reduziert. Demnach kann folgender Zusammenhang hergestellt werden<sup>3</sup>:

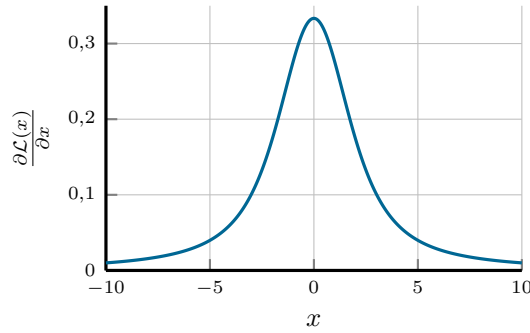
$$\iint_{S^+} \omega(\alpha, \beta) d\alpha d\beta - \iint_{S^-} \omega(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \equiv \sum_k \omega_k \mathcal{L} \left( \frac{H_{rk}}{H_s} \right). \quad (4.23)$$

Wird dieser Zusammenhang anhand einer einzelnen Sphäre betrachtet, kann festgehalten werden, dass

$$\mathcal{L} \left( \frac{H_{rk}}{H_s} \right) = \int_{-\infty}^P \omega(x) dx - \int_P^{\infty} \omega(x) dx. \quad (4.24)$$

In (4.24) misst  $dx$  Wegstücke entlang der zu den  $\kappa$  korrespondierenden Achsen in der Preisach-Ebene. Da die Langevin-Funktion punktsymmetrisch ist, müssen die korrespondierenden

<sup>3</sup>Für das klassische Flächenintegral kann diese Äquivalenz nicht gelten. Dieser Punkt soll an dieser Stelle jedoch nicht in den Fokus gerückt werden, für eine zweckmäßige Erweiterung des Maßes wird auf [35] verwiesen.



**Abb. 4.7** – Exemplarische Kurvenform der Preisach-Dichtefunktionen des EBM basierend auf (4.27)

Preisach-Dichtefunktionen symmetrisch zur Achse  $\alpha = -\beta$  sein (dies trifft auf die meisten praktisch verwendeten Preisach-Modelle zu). Somit reduziert sich (4.24) zu

$$\mathcal{L}\left(\frac{H_{rk}}{H_s}\right) = 2 \int_0^P \omega(x) dx . \quad (4.25)$$

Somit berechnet sich die zugehörige Preisach-Dichtefunktion (unter Berücksichtigung von  $x \equiv \sqrt{2}H_r$ ) zu

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \mathcal{L}\left(\frac{H_{rk}(x)}{H_s}\right)}{\partial H_r} . \quad (4.26)$$

Die benötigte Ableitung der Langevin-Funktion lautet

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x} = 1 - \coth^2(x) + \frac{1}{x^2} . \quad (4.27)$$

Daraus folgt, dass die Preisach-Dichtefunktion entlang einer Linie die in Abb. 4.7 dargestellte Form besitzt. Die globale Preisach-Dichtefunktion besteht aus  $k$  Funktionen der Form (4.27), die jeweils auf einer Parallelen zur Gerade  $\alpha = \beta$  im Abstand  $\sqrt{2}\kappa$  definiert sind.

Obwohl der Ausgangspunkt für die Herleitung des EBM ein gänzlich anderer ist als bei der Konstruktion des Preisach-Modells, welches rein phänomenologisch motiviert ist, zeigt sich, dass das EBM als Sonderfall eines Preisach-Modells gesehen werden kann. Dieses Beispiel unterstreicht, dass der durch Preisach-Modelle vorgegebene Rahmen äußerst breit ist. Je nach Ausprägung der Preisach-Dichtefunktion kann das Preisach-Modell vielfältige Formen annehmen, und die Struktur des Preisach-Modells lässt sich unter Umständen in anderen Hysterese-Modellen (wie dem EBM) wiedererkennen.

## 4.2 Modellierung vektorieller Hysterese

Während skalare Hysterese meist mit dem Auftreten von Hystereseschleifen in Verbindung gebracht wird, kennzeichnet vektorielle Hysterese kein derart markantes Merkmal. Generell lässt sich festhalten, dass bei vektoriellen Vorgängen mit Hysterese ein Phasenversatz zwischen Ausgangs- und Eingangsgrößen vorhanden ist. Es wird sich jedoch bei Betrachtung der nachfolgend eingeführten Hysterese-Modelle zeigen, dass dieser Phasenversatz sehr unterschiedliche Merkmale aufweisen kann.

Alle Konzepte zur Definition von Hysterese-Modellen für vektorwertige Eingangs- und Ausgangsfunktionen müssen das Kriterium erfüllen, dass sie sich im Falle einer Eingangsvariation

entlang einer Achse wie skalare Hystereseemodelle verhalten. Um zu einem vektoriellen Modell zu gelangen, lassen sich zwei grundlegende Ansätze unterscheiden:

1. Das vektorielle Modell entsteht aus einer Überlagerung von skalaren Modellen (z. B. Mayergoyz-Modell).
2. Das vektorielle Modell entsteht durch eine Verallgemeinerung der zugrundeliegenden Konzepte des skalaren Modells.

In Kapitel 5 wird ausschließlich der zweite Ansatz im Detail weiterverfolgt. Für diesen ist von zentraler Bedeutung, wie die Preisach-Relais für vektorwertige Funktionen definiert werden. Dies wird in Abschnitt 4.2.3 erläutert. Zuerst wird auf zwei Modellklassen eingegangen, die in der Literatur weite Verbreitung gefunden haben: das Vektor-Preisach-Modell nach Mayergoyz und Modelle, die auf dem vektorwertigen Spieloperator basieren. Dazu zählt auch die vektorielle Form des EBM aus Abschnitt 4.1.5.

### 4.2.1 Hystereseemodelle mit vektorwertigen Spieloperatoren

Der vektorwertige Spieloperator findet breite Anwendung bei der Modellierung ferromagnetischer Hysterese. Eine allgemeine mathematische Definition auf Basis von Variationsungleichungen, wie sie z. B. in [106] zu finden ist, wird an dieser Stelle nicht entwickelt. Die nachfolgend aufgeführte Abbildung gibt das Ausgangsverhalten des Operators im zeitdiskreten Fall wieder und folgt [122, 145]. Auch die vereinfachte Regel zur Berechnung der reversiblen Feldstärke im EBM [89] führt auf denselben Ausdruck. Es werden abermals die reversible und die irreversible magnetische Feldstärke unterschieden. Damit schreibt sich die durch den vektoriellen Spieloperator definierte Beziehung zwischen  $\mathbf{H}_r$  und  $\mathbf{H}$  gemäß Abschnitt 4.1.5 als

$$\mathbf{H}_r(t_n) = \begin{cases} \mathbf{H}_r(t_{n-1}) & \text{wenn } \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_r(t_{n-1})\| < \kappa \\ \mathbf{H} - \kappa \cdot \frac{\mathbf{H} - \mathbf{H}_r(t_{n-1})}{\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_r(t_{n-1})\|} & \text{wenn } \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_r(t_{n-1})\| \geq \kappa . \end{cases} \quad (4.28)$$

Die Polarisation wird analog zu (4.19) durch den reversiblen Anteil der Feldstärke bestimmt gemäß

$$\mathbf{I}(\mathbf{H}) = \mathbf{I}(\mathbf{H}_r) = I_s \mathcal{L} \left( \frac{\|\mathbf{H}_r\|}{H_s} \right) \frac{\mathbf{H}_r}{\|\mathbf{H}_r\|} . \quad (4.29)$$

Im Falle des EBM ergibt sich (4.28), indem die vereinfachende Annahme getroffen wird, dass  $\mathbf{H}_i$  und  $\dot{\mathbf{I}}$  parallel sind. Im vektoriellen Fall gelten lediglich im Umfeld des Dissipationsfunktionals leicht veränderte Zusammenhänge im Vergleich zum skalaren Fall. Analog zum skalaren Fall gilt für die irreversible Feldstärke

$$\mathbf{H}_i \in \partial_{\dot{\mathbf{I}}} p_{\text{dis}} . \quad (4.30)$$

Der Subgradient ist im vektoriellen Fall gegeben durch die Menge

$$\partial_{\dot{\mathbf{I}}} p_{\text{dis}} = \begin{cases} \mathbf{H}_i, \|\mathbf{H}_i\| < \kappa, \text{ wenn } \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0} \\ \kappa \frac{\dot{\mathbf{I}}}{\|\dot{\mathbf{I}}\|}, \text{ sonst} . \end{cases} \quad (4.31)$$

Hystereseemodelle auf Basis des Spieloperators besitzen den Vorteil einer einfachen Implementierung. Sie sind jedoch in der gezeigten Form nicht in der Lage, den Verlauf der Hystereseverluste bei rotierenden Feldern in Sättigung nachzubilden. Während Experimente zeigen, dass diese gegen Null streben, nehmen sie für das entsprechende Hysteresemodell einen konstanten Wert an. Dieser entspricht dem maximalen Wert der Verluste. Bezüglich des

energiebasierten Hysterese Modells weist dieses Verhalten auf einen kritischen Punkt hin. Die postulierte Analogie zwischen Ferromagnetismus und Reibung ermöglicht die Konstruktion eines von Grund auf vektoriellen Hysterese Modells, basierend auf den Prinzipien der Thermodynamik. Das vorgegebene Dissipationsfunktional, welches wiederum eher den Charakter einer vorab getroffenen Annahme besitzt, ist jedoch nicht in der Lage, das Dissipationsverhalten des modellierten Prozesses korrekt wiederzugeben. Es existieren Ansätze in der Literatur, diesen Mangel zu beseitigen. Diese laufen darauf hinaus, den Radius  $\kappa$  mit steigender reversibler Feldstärke zu senken. Sinkt der Radius gegen Null, so sinken auch die Verluste gegen Null (vgl. [11, 122]). Es sind nur wenige Anwendungen dieser korrigierten Modelle bekannt (siehe z. B. [122]).

Während Hysterese Modelle auf Basis des skalaren Spieloperators, wie in Abschnitt 4.1.5 am Beispiel des EBM gezeigt, problemlos auf ein Preisach-Modell zurückgeführt werden können, ist dies für ihre vektoriellen Versionen nicht möglich. Es fehlt bereits an einer eindeutigen Definition eines Preisach-Modells in mehr als einer Dimension, sodass ein Abgleich nur von Modell zu Modell erfolgen kann. Es ist keine Möglichkeit bekannt, das im folgenden Abschnitt vorgestellte vektorielle Preisach-Modell nach Mayergoyz so anzupassen, dass es dasselbe Verhalten wie die in diesem Abschnitt vorgestellten Hysterese Modelle besitzt. Gleiches gilt auch für die Hysterese Modelle mit vektorwertigen Relaisoperatoren, die im Weiteren eine große Rolle spielen. Hier wird der Unterschied (siehe Kapitel 6) noch deutlicher, da sie ein gänzlich anderes Dissipationsverhalten besitzen.

### 4.2.2 Vektorielltes Preisach-Modell nach Mayergoyz

Eine vektorielle Version des Preisach-Modells lässt sich konstruieren, indem ein vektorielles Preisach-Relais eingeführt wird (siehe Abschnitt 4.2.3). Ein weiterer Ansatz, der im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht im Detail verfolgt wird, jedoch in der Literatur weit verbreitet ist (siehe z. B. [64, 84, 162]), sieht vor, das vektorielle Preisach-Modell mithilfe von skalaren Preisach-Modellen in verschiedenen Raumrichtungen zu konstruieren. Der Ansatz geht auf Mayergoyz [134] zurück. Daher wird das resultierende Hysterese Modell auch Mayergoyz-Modell genannt. Angelehnt an die Notation in (4.6) wird das vektorielle Preisach-Modell nach Mayergoyz in zwei Dimensionen mit dem vom Winkel  $\varphi$  zum Ursprung abhängigen Einheitsvektor  $\mathbf{e}_r(\varphi)$  in  $r$ -Richtung geschrieben als

$$\mathcal{P}[\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi}](t) = \int_0^{2\pi} \mathbf{e}_r(\varphi) \iint_S \omega(\alpha, \beta) q_\alpha^\beta [\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_r(\varphi), \boldsymbol{\xi}](t) \, d\alpha \, d\beta \, d\varphi. \quad (4.32)$$

Das Modell kann (wie auch das im folgenden Abschnitt eingeführte DPC-Modell) nicht in seiner allgemeinen Form implementiert werden. Die Anzahl der betrachteten Raumrichtungen wird eingeschränkt. Besonders in drei Dimensionen führt das Modell zu einem hohen Rechenaufwand [162]. Es kann erweitert werden, um Anisotropie zu berücksichtigen [83, 134]. Bezüglich der berechneten Verluste bei rotierenden Feldern besitzt das Modell ähnliche Probleme wie Hysterese Modelle auf Basis des vektoriellen Spieloperators. Hierfür wurden u. a. in [64] rechnerische Korrekturen vorgeschlagen.

### 4.2.3 Preisach-Modelle mit vektorwertigen Relaisoperatoren

Während die in (4.6) eingeführte Definition des skalaren Preisach-Operators als universell angesehen werden kann, existiert eine Vielzahl von Ansätzen, das Prinzip auf vektorwertige Funktionen zu erweitern. Allen Ansätzen ist gemein, dass sich die resultierenden Operatoren

bei Reduktion auf eine Dimension wieder als skalare Preisach-Relais darstellen lassen. In [106] wird eine Vielzahl unterschiedlicher Definitionen vektorieller Relaisoperatoren aufgeführt. Dieser Abschnitt konzentriert sich auf das dort als *RVM-Relay-Operator* bezeichnete Relais. Dieses wurde von Della Torre, Pinzaglia und Cardelli in [59, 60] eingeführt. Das zugehörige ferromagnetische Hysteresemodell trägt auch den Namen DPC-Modell. Die Definition des vektoriellen Preisach-Relais ist an [127, Gl. 2.17] angelehnt, wobei die Voraussetzungen aus [59] übernommen werden (siehe [105] bezüglich einer allgemeineren Definition von vektoriellen Relaisoperatoren). Das Preisach-Relais wird in  $\mathbb{R}^d$  definiert.

Es wird analog zum skalaren Fall die Menge  $X_t$  eingeführt:

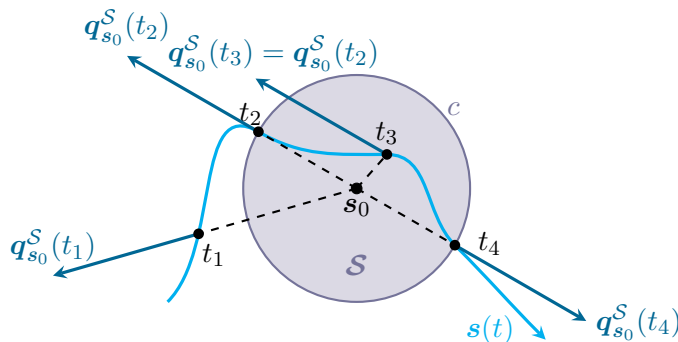
$$X_t := \{\tau \in [0, t] \mid \mathbf{s}(\tau) \notin \mathcal{S}\} . \quad (4.33)$$

Ferner wird die Menge  $\mathcal{B}_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$  definiert, also der Einheitskreis in zwei Dimensionen bzw. die Einheitssphäre in drei Dimensionen.

**Definition 4.4** Das Tupel bestehend aus einer offenen, konvexen und beschränkten Menge  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ , einem Punkt  $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{S}$  und der nachfolgend definierten Schaltfunktion  $\mathbf{q}_{\mathbf{s}_0}^{\mathcal{S}}$  wird als vektorielles Preisach-Relais oder Hysteron bezeichnet. Die Menge  $c := \partial\mathcal{S}$  wird die kritische Oberfläche und  $\mathbf{s}_0$  wird der Mittelpunkt des Preisach-Relais genannt. Ist ein Anfangszustand  $\xi$  gegeben, dann lässt sich jedem vektoriellen Preisach-Relais eine Schaltfunktion zuweisen, die Eingangsfunktionen  $\mathbf{s} \in [\mathcal{C}^0([0, T])]^d$  auf Ausgangsfunktionen  $\mathbf{q}_{\mathbf{s}_0}^{\mathcal{S}} : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}_0$  abbildet. Diese besitzt die Form

$$\mathbf{q}_{\mathbf{s}_0}^{\mathcal{S}}[\mathbf{s}, \xi](t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{s}(t) - \mathbf{s}_0}{\|\mathbf{s}(t) - \mathbf{s}_0\|} & \text{wenn } \mathbf{s}(t) \notin \mathcal{S} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{s}_0}^{\mathcal{S}}[\mathbf{s}, \xi](\max X_t) & \text{wenn } \mathbf{s}(t) \in \mathcal{S} \text{ und } X_t \neq \emptyset \\ \xi & \text{sonst .} \end{cases} \quad (4.34)$$

In Abb. 4.8 ist die Veränderung des Zustandsvektors eines Hysterons mit kreisförmiger kritischer Oberfläche dargestellt. Bis  $t_2$  folgt der Zustandsvektor dem Eingang, das Hysteron ist *beweglich* (in [59] engl. *unfrozen*). Zum Zeitpunkt  $t_2$  tritt  $\mathbf{s}(t)$  in die kritische Oberfläche ein. Solange sich  $\mathbf{s}(t)$  innerhalb der kritischen Oberfläche befindet, z. B. bei  $t_3$ , behält der Zustandsvektor den Wert, den er zum Zeitpunkt des Eintritts in die kritische Oberfläche besessen hat, das Hysteron ist *starr* oder *erstarrt* (in [59] engl. *frozen*). Zum Zeitpunkt  $t_4$  verlässt  $\mathbf{s}(t)$  die kritische Oberfläche, und es findet eine sprunghafte Änderung des Zustandsvektors statt.



**Abb. 4.8** – Hysteron mit zugehörigen Zustandsvektoren für eine gegebene Evolution von  $\mathbf{s}(t)$  (z.T. übernommen aus [151])

Analog zum skalaren Preisach-Operator entsteht der zugehörige vektorielle Preisach-Operator durch die Superposition der vektoriellen Preisach-Relais. Die hier eingeführte Definition

entspricht der aus [127] mit dem Unterschied, dass kritische Oberflächen vorerst nicht anhand ihres Radius identifiziert werden, sondern anhand eines Ordnungsparameters.

Hierzu sollte festgelegt werden, wie der Abstand zwischen zwei kritischen Oberflächen definiert ist. Dies geschieht unter Verwendung der Menge  $\mathcal{K}_0$ , die alle kritischen Oberflächen  $c$  beinhaltet, die zu Hysterons mit demselben Mittelpunkt  $\mathbf{s}_0$  gehören:

**Definition 4.5** *Seien zwei kritische Oberflächen  $c_1, c_2 \in \mathcal{K}_0$  gegeben, ferner der Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , und die Abbildung  $d_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definiert als*

$$d_c(\alpha) = \kappa \text{ mit } \kappa \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{s}_0 + \kappa(\sin(\alpha), \cos(\alpha))^T \in c .$$

Dann ist der Abstand zweier kritischer Oberflächen gegeben als

$$d_{\mathcal{K}}(c_1, c_2) = \max_{\alpha} (|d_{c_1}(\alpha) - d_{c_2}(\alpha)|) . \quad (4.35)$$

Es lässt sich zeigen (siehe Anhang B.1), dass durch (4.35) eine Metrik auf  $\mathcal{K}_0$  definiert ist<sup>4</sup>. Somit ist  $(\mathcal{K}_0, d_{\mathcal{K}})$  ein metrischer Raum.

**Definition 4.6** *Die Abbildung  $\rho_0 : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$  heißt Ordnungsparameter der kritischen Oberflächen im Punkt  $\mathbf{s}_0$ , wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

1. *(Stetigkeit) Für alle  $c \in \mathcal{K}_0$  und eine bezüglich der durch (4.35) definierten Metrik konvergenten Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow c$  gilt  $\rho_0(c_k) \rightarrow \rho_0(c)$ .*
2.  *$\rho_0$  ist injektiv.*

Da  $\rho_0$  injektiv ist, können Hysterons punktweise mit ihrem Ordnungsparameter identifiziert werden<sup>5</sup>. Der Ordnungsparameter nimmt die Rolle des Radius in [127, S. 30] ein. Damit wird im Folgenden der vektorielle Preisach-Operator definiert.

**Definition 4.7** *Gegeben Anfangszustände  $\xi \in \mathcal{B}_0$  und eine Lebesgue-integrierbare Funktion  $\omega : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ferner ein Ordnungsparameter  $\rho_0$ , dann ist der vektorielle Preisach-Operator definiert als*

$$\mathcal{P}[\mathbf{s}, \xi](t) = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \omega(\rho_0, \mathbf{s}_0) \mathbf{q}_{\mathbf{s}_0}^S[\mathbf{s}, \xi](t) \, d\mathbf{s}_0 \, d\rho_0 . \quad (4.36)$$

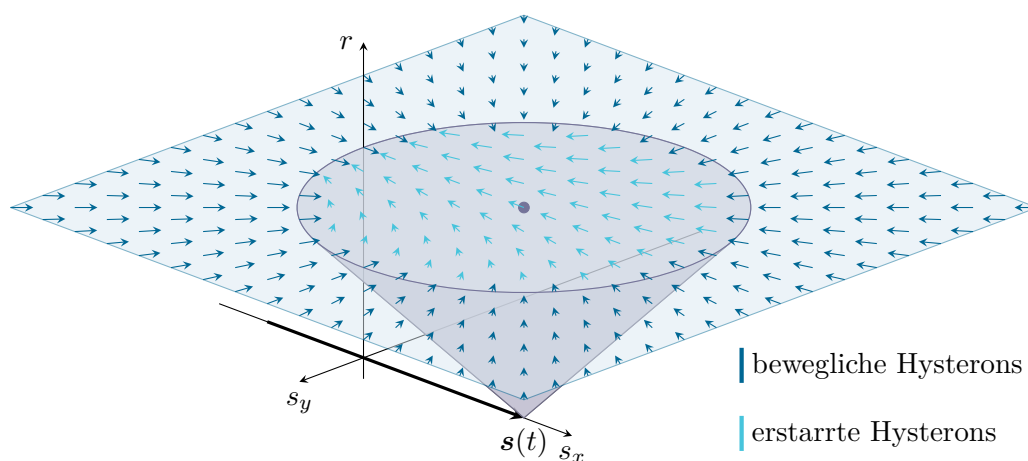
Der vektorielle Preisach-Operator nach (4.36) kann, sofern angenommen wird, dass sich die Eingangsvariable nur entlang einer Achse durch den Nullpunkt ändert, in ein skalares Preisach-Modell und einen nichtlinearen reversiblen Anteil überführt werden. Dies ist in [127] umfassend dargestellt. Dort ist auch eine Verknüpfung der Preisach-Dichtefunktionen des vektoriellen und des korrespondierenden skalaren Preisach-Operators angegeben.

<sup>4</sup>Es wird an dieser Stelle nicht betrachtet, inwiefern die Wahl der Metrik die zugelassenen kritischen Oberflächen einschränkt. Mit den resultierenden zugelassenen Ordnungsparametern lassen sich alle in Kapitel 5 verwendeten kritischen Oberflächen beschreiben.

<sup>5</sup>Darüber hinaus ließe sich auch durch  $\rho_0$  eine Metrik auf  $\mathcal{K}_0$  konstruieren.

## Grafische Repräsentation der Hysterenzustände

In [127, S. 31] wird eine grafische Repräsentation des Zustands der Hysterons mit kreisförmigen kritischen Oberflächen vorgeschlagen. Diese ist in Abb. 4.9 dargestellt. In der  $x$ - $y$ -Ebene wird der Verlauf der Eingangsgröße verfolgt. Die  $z$ -Koordinate entspricht dem Radius der kritischen Oberflächen. Hysterons mit kritischen Oberflächen mit einem Radius  $r$  lassen sich in der Ebene  $y = r$  beobachten. Hierzu wird ein Kegel gezeichnet, der sich entlang der  $r$ -Richtung aufweitet und dessen Spitze sich in der  $x$ - $y$ -Ebene befindet ( $r = 0$ ). Innerhalb einer Ebene  $r = \text{const}$  lassen sich die Zustände der zugehörigen Hysterons durch einen Kreis verfolgen, der den Radius  $r$  besitzt und dem Schnitt des Kegels durch diese Ebene entspricht. Der Mittelpunkt beweglicher Hysterons liegt außerhalb des Kreises, der zugehörige Zustandsvektor zeigt zum Mittelpunkt des Kreises. Mittelpunkte erstarrter Hysterons liegen innerhalb des Kreises. Der zugehörige Zustandsvektor zeigt zur Position des Kreismittelpunkts zu dem Zeitpunkt, als der Hysteronmittelpunkt in den Kreis eingetreten ist.



**Abb. 4.9** – Grafische Repräsentation der Hysterenzustände eines zweidimensionalen DPC-Modells (nach [127, S. 31])

## Diskretisiertes Modell

In der Form (4.36) kann der Preisach-Operator nicht ohne Weiteres implementiert werden, da der Zustand von überabzählbar vielen elementaren Preisach-Relais im Allgemeinen nicht berechnet werden kann. Es existieren Ansätze, eine stetig differenzierbare Preisach-Dichtefunktion zu verwenden [46], jedoch ermöglicht auch dies keine geschlossene analytische Auswertung der Integrale in (4.36). Dies motiviert die Einführung einer diskreten Approximation des Preisach-Operators, der aus der Superposition einer endlichen, abzählbaren Anzahl von Preisach-Relais besteht. Diese kann als numerische Approximation der Integrale mit einer endlichen Anzahl an Stützstellen interpretiert werden. Daraus resultiert die Darstellung des diskreten vektoriellen Preisach-Operators als Summe. Die Hysterons lassen sich unterschiedlich ordnen, z. B. nach Lage ihres Mittelpunkts und Form ihrer kritischen Oberflächen. Daraus resultieren verschiedene Darstellungen der Superposition (siehe z. B. [43][127, S.90]). An dieser Stelle wird lediglich vorausgesetzt, dass die Zahl der diskreten Hysterons gleich  $n$  ist. Ferner wird festgelegt, dass  $\mathbf{q}_i[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t) := \mathbf{q}_{s_{0i}}^{\mathcal{S}_i}[\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi}](t)$  ein vektorielles Preisach-Relais



gemäß (4.34) mit Mittelpunkt  $\mathbf{s}_{0i}$  und innerer Punktmenge  $\mathcal{S}_i$  bezeichnet. Ferner gilt für das diskrete Gewicht  $\omega_i$

$$\omega_i = \int_{\rho_{ui}}^{\rho_{oi}} \int_{G_i} \omega(\rho_0, \mathbf{s}_0) \, d\mathbf{s}_0 \, d\rho_0 . \quad (4.37)$$

Dieses deckt den Parameterraum des Ordnungsparameters von  $\rho_{ui}$  bis  $\rho_{oi}$  auf einem (noch nicht spezifizierten) Gebiet  $G_i \in \mathbb{R}^d$  ab. Damit lässt sich eine diskrete Version des Preisach-Operators (4.36) schreiben als

$$\mathcal{P}_d[\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi}](t) = \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbf{q}_i[\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi}](t) . \quad (4.38)$$

### Übergang zu magnetischen Feldgrößen

Das in diesem Abschnitt eingeführte vektorielle Preisach-Modell wird in den folgenden Kapiteln zur Modellierung ferromagnetischer Hysterese verwendet. Dazu wird der zuvor definierte Preisach-Operator mit den modellierten magnetischen Feldgrößen verknüpft. Im Kontext der Berechnung magnetischer Felder gilt die Festsetzung  $\mathbf{s}(t) := \mathbf{H}(t)$ . Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Magnetisierung durch einen Ausdruck der Form

$$\mathbf{M}(t) = M_s \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbf{q}_i[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t) + (\mu_r - 1)\mathbf{H}(t) \quad (4.39)$$

beschrieben wird. Messkurven, die zur Charakterisierung des Modells herangezogen werden, besitzen nicht notwendigerweise die Steigung  $\mu_0$  im Messpunkt, der die höchste Flussdichte aufweist. Darum ist es vorteilhaft, dem Modell einen weiteren Freiheitsgrad in Form eines linearen Magnetisierungsanteils  $(\mu_r - 1)\mathbf{H}(t)$  mit  $\mu_r \geq 1$  hinzuzufügen. Die Abhängigkeit der Magnetisierung von  $t$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\boldsymbol{\xi}$  werden nachfolgend im Hinblick auf eine übersichtlichere Schreibweise z. T. nicht mehr explizit genannt.

Vollkommen analog ergibt sich unter Verwendung von  $I_s = \mu_0 M_s$  für die Polarisation

$$\mathbf{I}(t) = I_s \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbf{q}_i[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t) + \mu_0(\mu_r - 1)\mathbf{H}(t) . \quad (4.40)$$

Der Mittelpunkt eines Hysterons in der  $\mathbf{H}$ -Ebene wird mit  $\mathbf{H}_I$  bezeichnet und tritt an die Stelle von  $\mathbf{s}_0$ .



# 5 Vektor-Preisach-Modelle für die elektromagnetische Feldrechnung

Mit den Ausführungen aus den vorhergehenden Kapiteln wurde das verwendete Vektor-Preisach-Modell eingeführt und herausgestellt, wie es in Variationsprobleme aus der Elektrotechnik eingebettet wird. Bevor es in Kapitel 8 und Kapitel 9 um die Bestimmung einer Lösung dieser Variationsprobleme geht, bedarf es der Konstruktion eines Hysterese Modells, das zur Anwendung in der elektromagnetischen Feldrechnung geeignet ist. Auf Basis von (4.36) kann das allgemein gehaltene DPC-Modell geradezu beliebig ausgeprägt werden. Da die darin vorkommenden Integrale im Allgemeinen nicht analytisch ausgewertet werden können, wird die diskrete Version des Modells verwendet, um die Magnetisierung zu modellieren (siehe (4.39)). Diese Reduktion bringt das Problem mit sich, dass sie zu Sprüngen in der Magnetisierungskurve führt. Daher kann auch das diskrete Modell nicht ohne Weiteres verwendet werden. Im folgenden Abschnitt wird das Interpolationsmodell basierend auf [125] entwickelt. Dieses besitzt den Vorzug eines vergleichsweise geringen Berechnungsaufwands, allerdings offenbart es Probleme bezüglich der Monotonie von Magnetisierungskurven. Das Hysterongruppenmodell wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelt und stellt einen Versuch dar, diese Probleme zu überwinden, indem die Diskretisierung nur noch bezüglich der räumlichen Verteilung der Hysteronniveaus durchgeführt wird. Zu jedem Niveaupunkt existieren jedoch (im Gegensatz zum Interpolationsmodell) unendlich viele Hysterons mit unterschiedlichen kritischen Oberflächen. Der Berechnungsaufwand des Hysterongruppenmodells ist deutlich höher, jedoch weist es stark verbesserte numerische Eigenschaften auf.

## 5.1 Interpolationsmodell

Die Grundidee des Interpolationsmodells, wie sie in [125, 127] vorgestellt wird, ist es, die Sprungdiskontinuitäten in der Magnetisierungskurve zu beseitigen, indem innerhalb des Wertebereichs von  $\mathbf{H}$ , in dem sie auftreten, nicht direkt auf das diskrete Preisach-Modell zugegriffen wird, sondern die Werte des diskreten Modells für eine Interpolation genutzt werden.

### 5.1.1 Beschreibung der Interpolation

Im Folgenden wird lediglich der zweidimensionale Fall diskutiert. In drei Dimensionen funktioniert die Interpolation äquivalent, indem die Interpolation innerhalb von Tetraedern durchgeführt wird. Einige Inhalte dieses Abschnitts wurden bereits in [W8] veröffentlicht. Die  $\mathbf{H}$ -Ebene wird mit einem Interpolationsgitter überzogen, welches das Innere aller kritischen Oberflächen überdeckt. Hierzu wird eine Triangulierung  $\mathcal{T}$  verwendet, welche der Def. 3.9 genügt. Außerhalb der kritischen Oberflächen der Hysterons gibt es keine Notwendigkeit, das Modell zu interpolieren, da die Hysterons im beweglichen Zustand keine Diskontinuitäten verursachen. Da der Magnetisierungswert der beweglichen Hysterons entlang einer Grenzlinie im Allgemeinen nicht dem mithilfe einer polynomialen Interpolation berechneten Wert

entspricht, muss der Übergang zwischen interpoliertem und nicht interpoliertem Wertebereich der  $\mathbf{H}$ -Ebene gesondert behandelt werden, dies geschieht in der Übergangszone  $\tilde{\mathcal{T}}$  der Triangulierung. Zu ihr gehören alle Dreiecke (oder Tetraeder in 3D), die mindestens einen Eckpunkt auf dem Rand der Triangulierung besitzen.

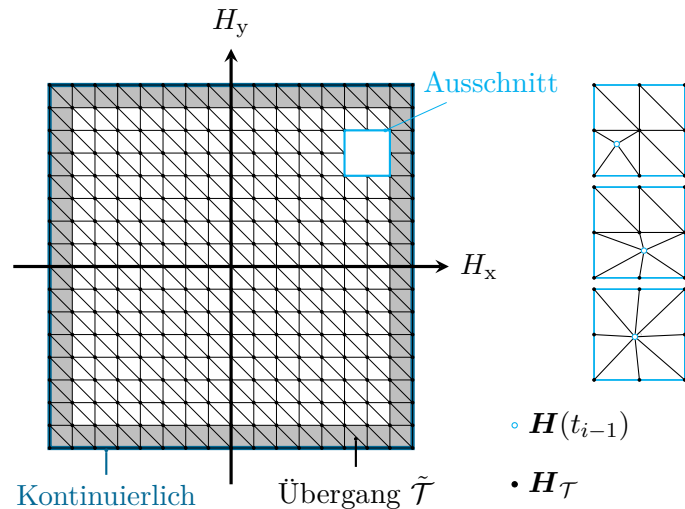
Zunächst wird auf die Berechnung des Magnetisierungswerts innerhalb des Interpolationsbereichs von  $\tilde{\mathcal{T}}$  eingegangen. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  kann der zum Gitterpunkt  $\mathbf{H}_{\mathcal{T}}$  gehörende Wert  $\mathbf{I}_{\mathcal{T}}$  direkt berechnet werden. Für jedes Dreieck der Triangulierung wird ein Eckpunkt als Bezugspunkt gewählt, anschließend kann mithilfe der restlichen beiden  $\mathbf{H}_{\mathcal{T}}$  und  $\mathbf{I}_{\mathcal{T}}$ -Werte innerhalb eines Dreiecks der Permeabilitätstensor  $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{T}}$  berechnet werden, der bei linearer Interpolation den benötigten Interpolationskoeffizienten entspricht. Für die Polarisation innerhalb eines Dreiecks mit Bezugspunkt  $\mathbf{H}_0$  gilt dann

$$\mathbf{I}_{\text{int}} = \boldsymbol{\mu}_{\mathcal{T}}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_0) + \mathbf{I}(\mathbf{H}_0) . \quad (5.1)$$

Da bei statischen Hysterese-Modellen erfüllt sein muss, dass konstante Werte von  $\mathbf{H}$  konstante Werte von  $\mathbf{B}$  bedingen, muss der jeweils letzte Wert von  $\mathbf{H}$  als Punkt in die Triangulierung eingefügt werden. Dies führt zu einer Veränderung der Struktur der Triangulierung (dargestellt in Abb. 5.1 rechts) von Zeitschritt zu Zeitschritt.

Im Übergangsbereich  $\tilde{\mathcal{T}}$  findet der Übergang zwischen interpolierten Werten und tatsächlichen Werten der Hysterons statt. Dies wird über eine lineare Funktion  $\zeta(\mathbf{H})$  realisiert, deren Freiheitsgrade so gewählt werden, dass sie an den Ecken des Dreiecks den Wert 1 besitzt, sofern diese nicht auf dem Rand der (gesamten) Triangulierung liegen und den Wert 0, sofern die Ecke auf dem Rand der Triangulierung liegt. Die Funktion ist somit sehr eng mit Lagrange-Formfunktionen erster Ordnung in der FEM verwandt und es gilt  $\zeta \in [0, 1]$ . Als globaler Ausdruck ergibt sich damit für die Polarisation:

$$\mathbf{I} = \begin{cases} \mathbf{I}_{\text{int}} & \text{wenn } \mathbf{H} \in \mathcal{T} \setminus \tilde{\mathcal{T}} \\ \zeta \mathbf{I}_{\text{int}} + (1 - \zeta) I_s \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbf{q}_i [\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}] (t) + \mu_0(\mu_r - 1) \mathbf{H}(t) & \text{wenn } \mathbf{H} \in \tilde{\mathcal{T}} \\ I_s \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbf{q}_i [\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}] (t) + \mu_0(\mu_r - 1) \mathbf{H}(t) & \text{wenn } \mathbf{H} \notin \mathcal{T} . \end{cases} \quad (5.2)$$



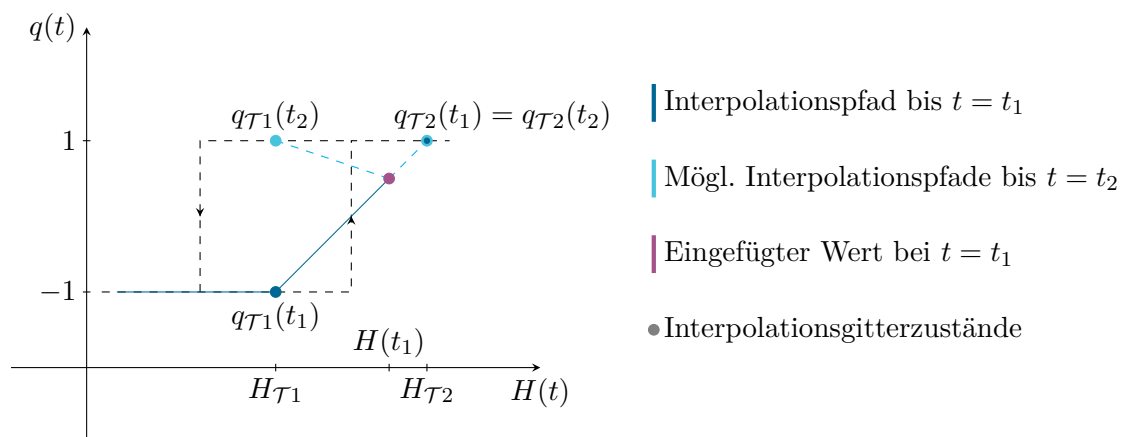
**Abb. 5.1** – Interpolationsgitter  $\mathcal{T}$  in der  $\mathbf{H}$ -Ebene mit Übergangsbereich  $\tilde{\mathcal{T}}$  und möglichen Gitterveränderungen durch Einfügen des aktuellen Werts von  $\mathbf{H}$  (z.T. übernommen aus [151])

Ein großer Vorteil des Interpolationsmodells ist, dass es für beliebige kritische Oberflächen implementiert werden kann, da die Interpolation von diesen vollkommen unabhängig ist. Weiterhin ist es mit vergleichsweise geringem Rechenaufwand verbunden, da die in jedem Zeitschritt benötigten  $\mathbf{I}_{\mathcal{T}}$  in Anteile von beweglichen und starren Hysterons aufgespalten werden können. Anteile von beweglichen Hysterons können vorab für jeden Punkt berechnet werden. Anteile von starren Hysterons müssen nur aktualisiert werden, wenn die  $\mathbf{H}$ -Werte innerhalb eines Dreiecks deren Zustand wechseln. Dadurch müssen in jedem Rechenschritt nur für einen Bruchteil der Hysterons die Werte neu berechnet werden (siehe auch Kapitel 8).

Zur Invertierung der durch das Modell vorgegebenen  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ -Charakteristik ist es ausreichend, ein Newton-Verfahren mit Schrittweitenbeschränkung auf die Berechnung von  $\mathbf{B}$  mithilfe von (5.1) anzuwenden. Die benötigten Reluktivitätstensoren  $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{T}}$  sind die Inversen der um  $\mu_0$  auf der Hauptdiagonalen erweiterten Permeabilitätstensoren  $\boldsymbol{\mu}_{\mathcal{T}}$ . Diese können, wie bereits ausgeführt, explizit berechnet werden. Innerhalb des Übergangsbereichs  $\tilde{\mathcal{T}}$  muss darauf geachtet werden, dass auch  $\zeta$  von  $\mathbf{H}$  abhängig ist. Abgesehen von der Behandlung des Übergangsbereichs verläuft die Invertierung analog zu [127, S. 91].

### 5.1.2 Monotonie und Strukturänderung

Nach jedem Zeitschritt wird das zugrundeliegende diskrete Hysteresemodell aktualisiert. In diesem Zuge zeigt sich ein schwerwiegender Nachteil des Interpolationsmodells: Der modellierte Zusammenhang zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  ist unter Umständen nicht monoton. Das Schaltverhalten einzelner Hysterons kann durch das Interpolationsmodell nicht zufriedenstellend approximiert werden. In Abb. 5.2 ist dies anhand des Zustands eines skalaren Preisach-Relais, dessen Ausgangswert nach zuvor beschriebenem Schema interpoliert wird, verdeutlicht. Im ersten Zeitschritt wird der durch das Preisach-Relais verursachte Sprung in einen linearen Anstieg überführt. Beim Übergang zum nächsten Zeitschritt wird der aktuelle Wert von  $H$  in das Gitter (Diskretisierung der  $H$ -Achse) eingefügt und der  $I$ -Wert der restlichen Gitterpunkte aktualisiert. Der Zustand des zugrundeliegenden Preisach-Relais hat sich zwischen  $t_1$  und  $t_2$  geändert. Dies kann jedoch bei der Interpolation nicht angemessen berücksichtigt werden. Dadurch steigt  $I$  für jede Entwicklung von  $H$  an und der modellierte Zusammenhang zwischen  $H$  und  $I$  ist nicht monoton.



**Abb. 5.2** – Nichtmonotones Verhalten der Interpolation am Beispiel eines skalaren Preisach-Relais

Je nachdem wie stark der Effekt ausgeprägt ist, kann ihm bei der Implementierung entgegen gewirkt werden, z. B. durch die Veränderung der zu Gitterpunkten gehörigen Zustandswerte.

Dies ist ein weitreichender Eingriff in das Modell, der auch in den Folgeschritten weiter berücksichtigt werden muss. Das Auftreten von Problemen aufgrund der Monotonie kann jedoch auch durch eine Korrektur nicht ausgeschlossen werden. Ob diese auftreten, ist stark von der Hysteronverteilung, der Wahl des Interpolationsgitters und dem Verlauf der Eingangsvariablen abhängig, sodass von vornherein meist keine Aussage darüber möglich ist.

Ein weiterer Punkt, der zu numerischen Instabilitäten bei der Verwendung des Interpolationsmodells führen kann, ist die durch das Einfügen des aktuellen  $\mathbf{H}$ -Werts entstehende Strukturänderung (siehe Abb. 5.1). Ändert sich die Konnektivität der Triangulierung grundlegend, d. h. ändern sich die Punkte, mit denen der neu eingeführte Gitterpunkt verbunden wird, so kann es v. a. in Sättigung vorkommen, dass die zur Triangulierung in der  $\mathbf{H}$ -Ebene korrespondierende Triangulierung in der  $\mathbf{I}$ -Ebene degeneriert. Dies äußert sich ebenfalls in Problemen mit der Monotonie der modellierten Magnetisierungskurve, die jedoch nicht korrigiert werden können.

## 5.2 Hysterongruppenmodell

Die Unzulänglichkeiten des Interpolationsmodells können bei dessen Anwendung dazu führen, dass numerische Instabilitäten auftreten. Ihr Auftreten vorherzusagen ist meist nicht möglich. Sie werden begünstigt durch eine geringe Anzahl von zugrundeliegenden Hysterons. Dies motiviert die Entwicklung eines weiteren Hysterese Modells, das auf dem DPC-Modell basiert. Dieses wird im Folgenden als Hysterongruppenmodell (oder kurz HGM) bezeichnet. Das HGM ermöglicht es, wenn es innerhalb des Rahmens üblicher Feldrechenmethoden eingesetzt wird, eine überabzählbare Menge von Hysterons zu berücksichtigen. Diese können jedoch nicht, wie in der allgemeinen Form des DPC-Modells, beliebig gewählt werden. Einige der Inhalte des Abschnitts wurden bereits in [W4] veröffentlicht.

### 5.2.1 Charakterisierung der Hysterongruppen

Genau wie im Falle des diskreten Modells existiert eine endliche Menge möglicher Zentren der Hysterons. Im diskreten Modell werden jedem Zentrum Hysterons mit diskret verteilten kritischen Oberflächen zugeordnet. Diese Restriktion wird aufgebrochen, indem die einzelnen Hysterons durch Hysterongruppen ersetzt werden, deren kritische Oberfläche kontinuierlich zwischen einer eindeutig definierten innersten kritischen Oberfläche  $c_i$  und einer eindeutig definierten äußersten kritischen Oberfläche  $c_o$  verteilt sind.

Der Raum zwischen diesen beiden Oberflächen wird im Folgenden mit  $V$  und die Menge aller kritischen Oberflächen zwischen  $c_i$  und  $c_o$  mit  $\mathcal{K}_V$  bezeichnet. Es wird gefordert, dass zu jedem Punkt innerhalb von  $V$  nur eine kritische Oberfläche existiert, die durch den Punkt verläuft:

$$\forall \mathbf{H} \in V, \exists ! c \in \mathcal{K}_V : \mathbf{H} \in c \quad (5.3)$$

Weiterhin wird gefordert:

$$\forall c \in \mathcal{K}_V : c \text{ ist konvex} , \quad (5.4)$$

$$\forall c_1, c_2 \in \mathcal{K}_V : \omega(c_1) = \omega(c_2) , \quad (5.5)$$

$$\forall c_1, c_2 \in \mathcal{K}_V, c_1 \neq c_2 : c_1 \cap c_2 = \emptyset . \quad (5.6)$$

Folglich besteht jede Hysterongruppe aus unendlich vielen Hysterons, die dasselbe Zentrum und dieselbe Dichte besitzen. Die kritischen Oberflächen der Hysterons sind disjunkt und

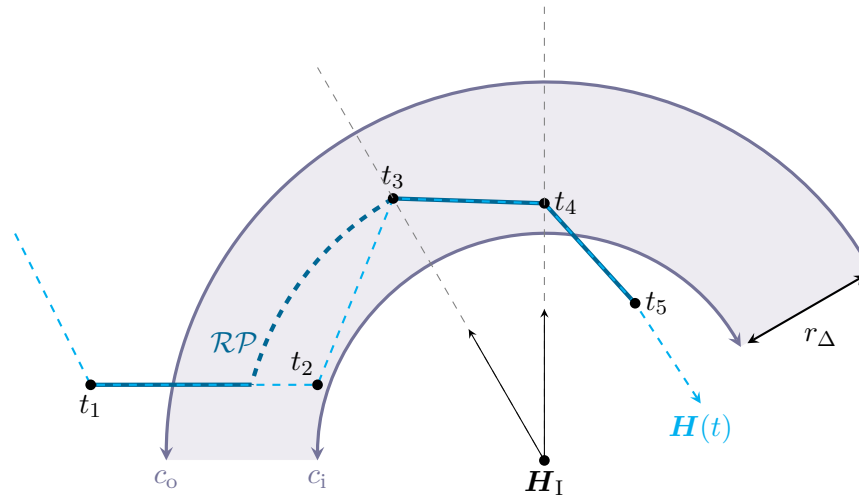


Abb. 5.3 – Hysterongruppe mit exemplarischem relevantem Pfad

kontinuierlich zwischen  $c_i$  und  $c_o$  verteilt. In Abb. 5.3 ist eine Hysterongruppe mit Zentrum  $\mathbf{H}_I$  und kreisförmigen kritischen Oberflächen dargestellt. Wird (5.6) nicht gefordert, so besteht die Möglichkeit, eine Hysterongruppe äquivalent zu einem diskreten Hysteron zu definieren. Alle kritischen Oberflächen der Hysterons einer Gruppe können dann übereinander liegen. Die von einer Hysterongruppe gemäß den zuvor geforderten Eigenschaften (5.3)–(5.6) verursachte Magnetisierung lässt sich nicht für jede beliebige stetige Evolution von  $\mathbf{H}$  exakt berechnen. Es wird für den Verlauf von  $\mathbf{H}$  gefordert, dass er stückweise linear ist. Dies trifft auf zeitdiskrete numerische Berechnungsschemata im Allgemeinen zu und deutet bereits auf den Fokus des Hysterongruppenmodells als Hysteresemodell für die numerische Feldrechnung hin.

Es gilt zu klären, wie mit Kenntnis des stückweise linearen Verlaufs von  $\mathbf{H}$  die resultierende Magnetisierung einer Hysterongruppe berechnet werden kann. Dies wird nachfolgend für eine Gruppe von Hysterons mit kreisförmigen (oder sphärischen) kritischen Oberflächen diskutiert, eine allgemeinere Betrachtung folgt in Abschnitt 5.3.

### 5.2.2 Hysterongruppen mit kreisförmigen kritischen Oberflächen

Es sei auf (4.34) verwiesen, wo festgehalten ist, dass der aktuelle Wert eines starren Hysterons durch den Wert von  $\mathbf{H}$  beim Eintritt in die kritische Oberfläche bestimmt wird. Bezogen auf die Hysterons einer Hysterongruppe bedeutet dies, dass dessen Magnetisierungsvektor entweder zu  $\mathbf{H}$  zeigt oder zu dem Punkt, an dem  $\mathbf{H}$  die kritische Oberfläche durchdrungen hat und seitdem innerhalb der kritischen Oberfläche verweilt. Alle vorhergehenden Wechsel zwischen starrem und beweglichem Zustand sind für den aktuellen Wert des Zustandsvektors irrelevant. Ausschlaggebend dafür, welcher Anteil der Hysterons innerhalb einer Hysterongruppe starr oder beweglich ist, ist der Abstand des aktuellen Werts von  $\mathbf{H}$  vom Zentrum der Hysterongruppe (gilt nur für kreisförmige kritische Oberflächen). Ist ein stückweise linearer Verlauf von  $\mathbf{H}$  gegeben, ist folglich der Teil des Pfades für die Zustände der Hysterons relevant, der bezogen auf den Abstand des letzten Punkts des Pfades eine monotone Annäherung von  $\mathbf{H}$  an  $\mathbf{H}_I$  darstellt. Dieser Teil des Verlaufs wird im Folgenden als *relevanter Pfad* bezeichnet. In Abb. 5.3 ist der relevante Pfad zum gegebenen Verlauf  $\mathbf{H}(t)$  mit  $\mathcal{RP}$  gekennzeichnet. Formal wird der relevante Pfad zu einer Hysterongruppe (mit kreisförmigen kritischen Oberflächen) und einem gegebenen Zeitverlauf  $0 \leq t_i \leq t$  wie folgt definiert:

$$\mathcal{RP} := \{ \mathbf{H}(t_i) \mid 0 \leq t_i \leq t, \|\mathbf{H}(t_i) - \mathbf{H}_I\| \geq \|\mathbf{H}(t_j) - \mathbf{H}_I\| \forall t_j \in [t_i, t] \} . \quad (5.7)$$

Die beschriebene Konstruktion des relevanten Pfads hat Gemeinsamkeiten mit der Konstruktion der Treppenkurve in der  $\alpha$ - $\beta$ -Ebene bei skalaren Preisach-Modellen. Diese kann als Repräsentation einer Folge von Eingangsextrema mit sinkender Amplitude gesehen werden. Die Auslöschungseigenschaft von Preisach-Modellen wird bezüglich des in Abb. 5.3 dargestellten Eingangsextremums bei  $t_2$  deutlich. Dieses trägt z. B. bei  $t = t_5$  nicht mehr zur Definition des Zustands eines Hysterons innerhalb der Gruppe bei.

Der relevante Pfad selbst ist stückweise linear, jedoch nicht zusammenhängend. Dies stellt keine Schwierigkeit für die Berechnung dar. Die unzusammenhängenden Stücke könnten, ohne den resultierenden Zustandsvektor der Hysterongruppe zu verändern, durch Wegstücke ergänzt werden, die entlang der kritischen Oberfläche verlaufen, auf der ein Pfadstück endet und das nächste beginnt (gestrichelter Teil von  $\mathcal{RP}$  in Abb. 5.3).

### Magnetisierungsbeitrag eines Teilpfads

Im Folgenden gilt es nun, den resultierenden Zustandsvektor einer Hysterongruppe bei Kenntnis des relevanten Pfads zu berechnen. Um vorerst keine Fallunterscheidung treffen zu müssen, wird vorausgesetzt, dass der relevante Pfad aus einem einzelnen linearen Teilpfad besteht, der außerhalb von  $c_o$  beginnt und innerhalb von  $c_i$  endet. Die Anwendung der Ergebnisse auf mehrere Teilpfade mit unterschiedlichen Anfangs- und Endkonfigurationen ist problemlos möglich.

Als Ordnungsparameter  $\rho_0$  der kritischen Oberflächen in einem Punkt wird deren Radius  $r$  verwendet. Die resultierende Magnetisierung  $\tilde{\mathbf{M}}$  einer Gruppe mit der kumulierten Preisach-Dichte  $\omega_c$  ergibt sich, indem alle Magnetisierungsbeiträge  $\mathbf{M}_r$  der Hysterons innerhalb der Gruppe überlagert werden gemäß

$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_{r_i}^{r_o} \omega(r) \mathbf{M}_r dr \quad \text{mit} \quad \int_{r_i}^{r_o} \omega(r) dr = \omega_c . \quad (5.8)$$

Jedes Teilstück des relevanten Pfads bildet zusammen mit dem Mittelpunkt  $\mathbf{H}_I$  der Hysterongruppe ein (evtl. entartetes) Dreieck. Für das Stück des relevanten Pfads zwischen  $\mathbf{H}(t_3)$  und  $\mathbf{H}(t_4)$  ist dieses in Abb. 5.4 separat dargestellt. Gemäß der Darstellung werden für jedes der möglichen Dreiecke die lokalen geometrischen Größen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{e}$  und die zugehörigen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  eingeführt.

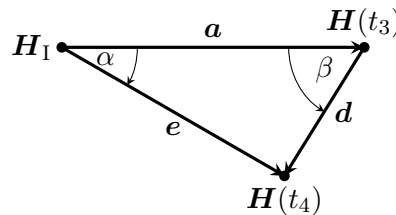


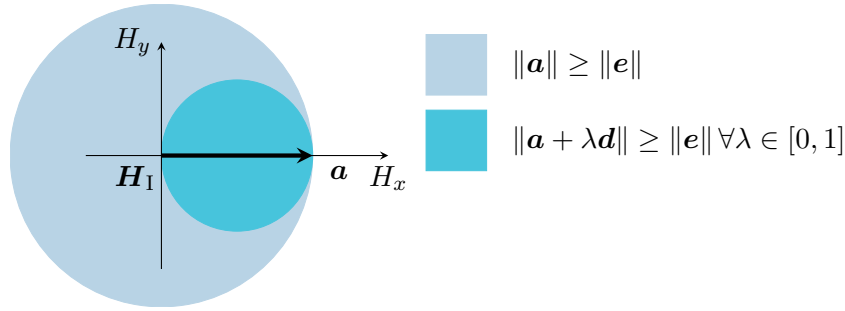
Abb. 5.4 – Dreieck  $\mathbf{H}_I$ ,  $\mathbf{H}(t_3)$  und  $\mathbf{H}(t_4)$

Der relevante Pfad verläuft linear von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{e}$ , somit gilt nach Einführung eines Pfadparameters  $\lambda$  für den Abstand  $r$  eines beliebigen Punkts auf dem Pfad zum Mittelpunkt  $\mathbf{H}_I$

$$r = \|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}\| \quad \text{mit} \quad \lambda \in [0, 1] . \quad (5.9)$$

Die Konstruktion des relevanten Pfads impliziert eine bemerkenswerte geometrische Eigenschaft von  $\mathbf{e}$  bei gegebenem Wert von  $\mathbf{a}$ . Alle Werte, die  $\mathbf{e}$  annehmen kann, sind innerhalb





**Abb. 5.5** – Klassifizierung der  $H$ -Ebene der möglichen Lage von  $e$  bei gegebenem  $a$

des Thaleskreises über  $a$  zu finden (siehe Abb. 5.5). Liegt  $e$  auf dem Thaleskreis, so schließen  $e$  und  $d$  einen rechten Winkel ein, folglich ist der Abstand zwischen  $H_I$  und der durch  $a$  und  $e$  festgelegten Gerade im Endpunkt des Vektors  $e$  minimal. Das heißt, eine weitere Bewegung von  $H$  entlang der Gerade entspricht einer Entfernung von  $H_I$ . Dies liefert ein weiteres Kriterium für die Bestimmung des relevanten Pfads: Die Strecke  $d$  ist genau dann eine monotone Annäherung an  $H_I$ , wenn  $e$  im Thaleskreis um  $a$  liegt. Alle Betrachtungen behalten auch in drei Dimensionen ihre Gültigkeit, der Thaleskreis muss lediglich durch eine Sphäre ersetzt werden.

Der Parametrisierung des Pfads folgend besitzt ein Hysteron, dessen kritische Oberfläche den Radius  $r$  hat, den Zustandsvektor

$$M_r = \frac{\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}}{\|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}\|}. \quad (5.10)$$

Die Ableitung von (5.9) nach  $\lambda$  liefert den Zusammenhang

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + \lambda (\mathbf{d}, \mathbf{d})}{\|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}\|}. \quad (5.11)$$

An späterer Stelle werden zudem benötigt:

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{d})}{\|\mathbf{d}\|^2} - \sqrt{\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{d})^2}{\|\mathbf{d}\|^4} - \frac{\|\mathbf{a}\|^2 - r^2}{\|\mathbf{d}\|^2}}, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = -\frac{r}{\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{d})^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{d}\|^2 + r^2 \|\mathbf{d}\|^2}}. \quad (5.13)$$

Per Konstruktion besitzen alle Hysterons einer Gruppe die gleiche Dichte und eine kreisförmige kritische Oberfläche. Dadurch gilt bezüglich der Preisach-Dichte

$$\omega(r) = \frac{\omega_c}{r_\Delta} \quad (5.14)$$

bzw. für den kumulierten Anteil der kritischen Oberflächen ab  $c_i$

$$\omega_\Sigma(r) = \frac{\omega_c}{r_\Delta} (r - r_i). \quad (5.15)$$

Somit lässt sich (5.8) bezogen auf ein Teilstück des relevanten Pfads zwischen  $a$  und  $e$  umformen zu

$$M_a^e = \frac{\omega_c}{r_\Delta} \int_{r_i}^{r_o} M_r \, dr. \quad (5.16)$$

Aus der Kombination von (5.16) mit (5.11) und (5.10) folgt

$$\mathbf{M}_a^e = \frac{\omega_c}{r_\Delta} \int_1^0 \frac{\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}}{\|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}\|} \cdot \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{d}) + \lambda (\mathbf{d}, \mathbf{d})}{\|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}\|} d\lambda. \quad (5.17)$$

Für die drei lokalen Größen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{e}$  wird die übliche Komponentenschreibweise verwendet:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}.$$

Damit lautet (5.17)

$$\mathbf{M}_a^e = \frac{\omega_c}{r_\Delta} \begin{pmatrix} \int_1^0 d_x + \frac{1}{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{(a_x d_y^2 - a_x d_x d_y) \lambda + a_x a_y d_y - a_y^2 d_x}{\lambda^2 + \frac{2a_x d_x + 2a_y d_y}{d_x^2 + d_y^2} \lambda + \frac{a_x^2 + a_y^2}{d_x^2 + d_y^2}} d\lambda \\ \int_1^0 d_y + \frac{1}{d_x^2 + d_y^2} \cdot \frac{(a_y d_x^2 - a_y d_x d_y) \lambda + a_x a_y d_x - a_x^2 d_y}{\lambda^2 + \frac{2a_x d_x + 2a_y d_y}{d_x^2 + d_y^2} \lambda + \frac{a_x^2 + a_y^2}{d_x^2 + d_y^2}} d\lambda \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Ausgangspunkt für die analytische Berechnung der Integrale ist der Zusammenhang [172, S. 145. f.]

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \left( \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + C. \quad (5.19)$$

Nach der Integration sind viele Umformungen und Vereinfachungen möglich, für zwei Dimensionen sind diese in (5.20)–(5.25) aufgeführt. Die entsprechenden Formeln für drei Dimensionen können vollkommen analog hergeleitet werden. Es wird im nächsten Unterabschnitt jedoch gezeigt, dass der dreidimensionale Fall durch Anwendung zweier Rotationen auf den zweidimensionalen Fall zurückgeführt werden kann.

$$\sqrt{4q - p^2} = \frac{2|a_x d_y - a_y d_x|}{d_x^2 + d_y^2} \quad (5.20)$$

$$\frac{2B_x - A_x p}{\sqrt{4q - p^2}} = -d_x |a_x d_y - a_y d_x| = -d_x \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{d}\| |\sin(\beta)| \quad (5.21)$$

$$\frac{2B_y - A_y p}{\sqrt{4q - p^2}} = -d_y |a_x d_y - a_y d_x| = -d_y \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{d}\| |\sin(\beta)| \quad (5.22)$$

$$\ln \left| \frac{1 + p + q}{q} \right| = \ln \left| \frac{(a_x + d_x)^2 + (a_y + d_y)^2}{a_x^2 + a_y^2} \right| = \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|^2}{\|\mathbf{a}\|^2} \right) \quad (5.23)$$

$$\frac{A_x}{2} \ln \left| \frac{1 + p + q}{q} \right| = (a_x d_y^2 - a_y d_x d_y) \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) = d_y \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{d}\| \sin(\beta) \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) \quad (5.24)$$

$$\frac{A_y}{2} \ln \left| \frac{1 + p + q}{q} \right| = (a_y d_x^2 - a_x d_x d_y) \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) = -d_x \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{d}\| \sin(\beta) \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) \quad (5.25)$$

Weiterhin gilt unter Verwendung von

$$\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan \left( \frac{x - y}{1 + xy} \right) \quad (5.26)$$

für die arctan-Terme, da  $|\alpha| \leq 90^\circ$  per Konstruktion

$$\arctan\left(\frac{-\sqrt{4q-p^2}}{2q+p}\right) = -\arctan\left(\frac{|a_x d_y - a_y d_x|}{a_x^2 + a_y^2 + a_x d_x + a_y d_y}\right) = \quad (5.27)$$

$$-\arctan\left(\frac{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\| |\sin(\alpha)|}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\| \cos(\alpha)}\right) = -|\alpha| = -\arccos\left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|}\right). \quad (5.28)$$

Daraus ergibt sich die folgende Form für  $\mathbf{M}_a^e$ , die vorteilhaft für eine FEM-Implementierung ist

$$\mathbf{M}_a^e = \frac{\omega_c}{r_\Delta} \begin{pmatrix} -d_x - \frac{a_x d_y^2 - a_y d_x d_y}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) + \frac{d_x |a_x d_y - a_y d_x|}{\|\mathbf{d}\|^2} \arccos\left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|}\right) \\ -d_y - \frac{a_y d_x^2 - a_x d_x d_y}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) + \frac{d_y |a_x d_y - a_y d_x|}{\|\mathbf{d}\|^2} \arccos\left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|}\right) \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Es lässt sich überprüfen, dass

$$\lim_{\|\mathbf{d}\| \rightarrow 0} \mathbf{M}_a^e = \mathbf{0}. \quad (5.30)$$

Der Fall  $\|\mathbf{a}\| \rightarrow 0$  ist durch die Konstruktion des relevanten Pfads ausgeschlossen (in diesem Fall ist keine Annäherung mehr möglich). Eine deutlich kompaktere Notation ist möglich, wenn die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  zur Parametrisierung verwendet werden. Mit ihnen schreibt sich (5.29) äquivalent als

$$\mathbf{M}_a^e = -\frac{\omega_c}{r_\Delta} \cdot \mathbf{d} + \frac{\omega_c}{r_\Delta} \cdot \frac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{d}\|} \begin{pmatrix} |\alpha \sin(\beta)| & \ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) \sin(\beta) \\ -\ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) \sin(\beta) & |\alpha \sin(\beta)| \end{pmatrix} \mathbf{d}. \quad (5.31)$$

### Transformation und Auswertung auf einem Referenzdreieck

Es bietet sich an, die lokalen Größen bezüglich  $\mathbf{a}$  zu normieren:

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \quad \mathbf{d}' = \frac{\mathbf{d}}{\|\mathbf{a}\|} \quad \mathbf{e}' = \frac{\mathbf{e}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Mithilfe der Rotationsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} a'_x & a'_y \\ -a'_y & a'_x \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

kann der Vektor  $\mathbf{a}'$  transformiert werden, sodass der resultierende Vektor  $\mathbf{a}''$  kollinear zur  $x$ -Achse ist. Analog werden  $\mathbf{e}''$  und  $\mathbf{d}''$  berechnet:

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{R} \mathbf{a}' \quad \mathbf{e}'' = \mathbf{R} \mathbf{e}' \quad \mathbf{d}'' = \mathbf{R} \mathbf{d}'. \quad (5.33)$$

Bezüglich des entstandenen Referenzdreiecks, das  $\mathbf{a}''$ ,  $\mathbf{e}''$  und  $\mathbf{d}''$  formen, kann die bezogene Magnetisierung  $\mathbf{M}_{a''}^{e''}$  berechnet werden nach

$$\mathbf{M}_{a''}^{e''} = \begin{pmatrix} -d''_x - \sin(\beta) \sin(\beta) \ln(\|\mathbf{e}''\|) - \cos(\beta) |\sin(\beta) \alpha| \\ -d''_y + \cos(\beta) \sin(\beta) \ln(\|\mathbf{e}''\|) - \sin(\beta) |\sin(\beta) \alpha| \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

mit

$$\beta = \arctan2(-d''_y, -d''_x). \quad (5.35)$$

Die ursprüngliche Magnetisierung  $\mathbf{M}_a^e$  lässt sich aus der bezogenen Magnetisierung  $\mathbf{M}_{a''}^{e''}$  mithilfe von (5.34) berechnen durch

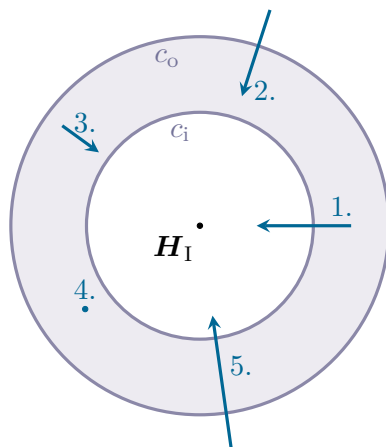
$$\mathbf{M}_a^e = \frac{\omega_c}{r_\Delta} \|\mathbf{a}\| \mathbf{R}^T \mathbf{M}_{a''}^{e''} . \quad (5.36)$$

Die Abbildung auf ein Referenzdreieck erlaubt es prinzipiell, die Auswertung von (5.29) durch eine einfachere Ersatzfunktion oder eine Wertetabelle zu ersetzen, da der Wertebereich von  $\mathbf{e}$ , für den  $\mathbf{M}_{a''}^{e''}$  berechnet werden muss, beschränkt ist (siehe Abb. 5.5). Ferner kann nach dem gleichen Schema der dreidimensionale Fall mithilfe von zwei Rotationen auf den zweidimensionalen Fall zurückgeführt werden. Die zwei Rotationen bilden den dreidimensionalen Vektor  $\mathbf{a}$  auf die  $H_x$ -Achse ab und rotieren das Dreieck definiert durch  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{e}$  in die  $H_x$ - $H_y$ -Ebene.

### Magnetisierung der gesamten Hysterongruppe

Zur Berechnung der Magnetisierungsanteile, die von unterschiedlichen Teilpfaden verursacht werden, müssen fünf Fälle unterschieden werden, welche in Abb. 5.6 illustriert sind:

1. Der Pfad beginnt zwischen  $c_o$  und  $c_i$  und endet innerhalb von  $c_i$ .
2. Der Pfad beginnt außerhalb von  $c_o$  und endet zwischen  $c_i$  und  $c_o$ .
3. Der Pfad verläuft vollständig zwischen  $c_o$  und  $c_i$ .
4. Der Pfad besteht aus einem Punkt zwischen  $c_o$  und  $c_i$ .
5. Der Pfad kreuzt  $c_o$  und  $c_i$ .



**Abb. 5.6** – Fallunterscheidung zur Bestimmung der Initialisierungswerte  $\xi$  im Falle einer fiktiven Entmagnetisierung entlang der  $H_x$ -Achse

In den Fällen 1, 3 und 5 muss jeweils ein angepasster Anfangspunkt und/oder ein angepasster Endpunkt berechnet werden. Dies ist vornehmlich für die konkrete Implementierung relevant und geschieht mithilfe des an späterer Stelle benötigten Zusammenhangs (5.68).

Die zuvor für einen relevanten Pfad gemäß Fall 5 hergeleiteten Formeln können problemlos auf Teilpfade zwischen  $r_a$  und  $r_e$  mit  $r_a \leq r_o$ ,  $r_e \geq r_i$  und  $r_a > r_e$  angewendet werden. Hierzu wird für ein Teilstück angesetzt

$$\mathbf{M}_{aj}^e = \frac{\omega_c}{r_\Delta} \int_{r_e}^{r_a} \mathbf{M}_r \, dr . \quad (5.37)$$

Da die Parametrisierung des Radius unabhängig von  $r_a$  und  $r_e$  ist, können (5.17)–(5.36) direkt auf Teilpfade angewendet werden. Es wird vorausgesetzt, dass der relevante Pfad innerhalb der begrenzenden kritischen Oberflächen eines Hysterons aus  $n$  Teilpfaden besteht, deren Endpunkte mit steigender Ordnungszahl näher an  $\mathbf{H}_I$  liegen. In diesem Fall wird die gesamte Magnetisierung einer Hysterongruppe berechnet nach

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_{a_j}^e + \frac{\omega_c(r_{en}-r_i)}{r_\Delta} \mathbf{e}_m + \boldsymbol{\xi} & \text{falls } r_{en} > r_i \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_{a_j}^e + \boldsymbol{\xi} & \text{falls } r_{en} \leq r_i \end{cases} \quad (5.38)$$

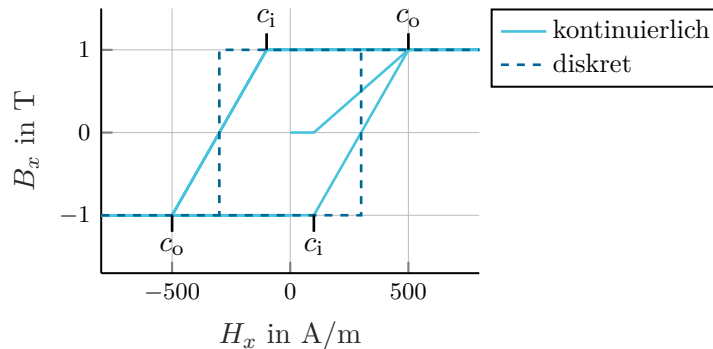
Der Wert  $\mathbf{e}_m$  ist der Einheitsvektor, der von  $\mathbf{H}_I$  zum aktuellen Wert von  $\mathbf{H}$  zeigt:

$$\mathbf{e}_m = \frac{\mathbf{H} - \mathbf{H}_I}{\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_I\|} \quad (5.39)$$

Somit entspricht der zugehörige Term in (5.38) dem Anteil  $\mathbf{M}_u$  der beweglichen Hysterons an der Magnetisierung

$$\mathbf{M}_u = \frac{\omega_c(r_{en} - r_i)}{r_\Delta} \mathbf{e}_m \quad (5.40)$$

Die durch (5.38) definierte Hysterongruppe besitzt kein diskretes Schaltverhalten. In Abb. 5.7 werden die Ausgangswerte einer Hysterongruppe und eines diskreten Hysterons mit dem Zentrum  $(0,0)^T$  für ein entlang der  $H_x$ -Achse alternierendes Eingangssignal verglichen. Wird nur die  $B_x$ -Komponente (äquivalent  $M_x$ ,  $I$  oder dimensionslos) des Ausgangs betrachtet, so werden alle Hysterons (sowohl die der Gruppe als auch das diskrete Hysteron) auf skalare Preisach-Relais reduziert. Es ist ersichtlich, dass die Schaltflanken des diskreten Hysterons durch lineare Verläufe (steigend oder fallend) zwischen  $c_o$  und  $c_i$  ersetzt werden. Zusätzlich ist im Falle der Hysterongruppe ein veränderter initialer Verlauf des Ausgangs zu erkennen, der auf den Einfluss der Initialisierung (hier: entmagnetisiert) zurückzuführen ist. Auf diese wird im folgenden Unterabschnitt näher eingegangen.



**Abb. 5.7** – Vergleich der Ausgänge einer Hysterongruppe und eines diskreten Hysterons bei einem entlang der  $H_x$ -Achse alternierenden Feld

### Initialisierung

Der Initialwert  $\boldsymbol{\xi}$  muss alle Hysterons charakterisieren, die seit  $t = 0$  stets erstarrt waren. Die Berechnung dieses Werts ist generell beliebig, indem ein Verlauf des  $\mathbf{H}$ -Felds für  $t < 0$  vorgegeben wird. Mit  $r_K$  wird der Radius eines Kreises um den Ursprung der  $\mathbf{H}$ -Ebene bezeichnet, der alle kritischen Oberflächen einhüllt. Denkbar ist zur Berechnung von  $\boldsymbol{\xi}$  z. B.

die Vorgabe  $\|\mathbf{H}\| > r_{\mathcal{K}}$ , gefolgt von einem direkten Abfall auf  $\|\mathbf{H}\| = 0$ . Dies würde den Start in einem Remanenzpunkt der Magnetisierungskennlinie bedeuten. Diese Möglichkeit stellt eine der einfachsten Initialisierungen dar. Sie ist jedoch problematisch, da im Folgenden, solange  $\|\mathbf{H}\| < r_{\mathcal{K}}$ , für  $t \geq 0$  Magnetisierungsschleifen durchlaufen werden, die nicht symmetrisch zum Punkt  $\mathbf{B} = 0$  sind.

Deshalb ist es vorteilhaft mit einem entmagnetisierten Material zu beginnen, dessen Magnetisierungsverhalten vorerst durch eine Neukurve beschrieben wird. Hierzu wird fiktiv ein Startwert  $\|\mathbf{H}\| > r_{\mathcal{K}}$  auf der  $\mathbf{H}_x$ -Achse vorgegeben (die Wahl des Startpunkts innerhalb der  $\mathbf{H}$ -Ebene ist beliebig). Ausgehend von diesem Startwert wird angenommen, dass  $\mathbf{H}$  entlang der  $\mathbf{H}_x$ -Achse alterniert, wobei die Amplitude  $\|\mathbf{H}\|$  mit einer beliebig kleinen Rate abnimmt. Die Berechnung der zu dieser Evolution des  $\mathbf{H}$ -Felds gehörenden Startwerte bedarf gesonderter Betrachtung. Diese ist nachfolgend für zwei Dimensionen zu finden, die Erweiterung auf drei Dimensionen ist abermals recht einfach möglich. Ist die Distanz zwischen dem Nullpunkt der  $\mathbf{H}$ -Ebene und  $\mathbf{H}_I$  größer als der Radius  $r_o$ , so ist das Hysteron zum Zeitpunkt  $t = 0$  beweglich und  $\xi = 0$ . Ist dies nicht der Fall, ergibt sich je nach der Lage von  $\mathbf{H}_I$  ein relevanter Pfad, anhand dessen der Startwert berechnet werden kann. Die Möglichkeiten sind in Abb. 5.8 illustriert, ihre Besonderheiten werden im Folgenden diskutiert.

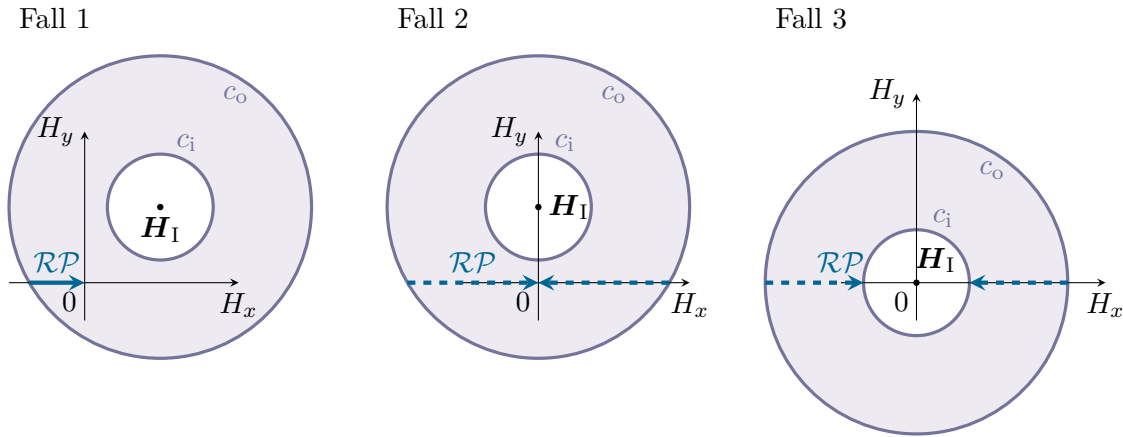


Abb. 5.8 – Berechnungsfälle für die Initialisierung des Hysterongruppenmodells

**Fall 1:** Die  $H_x$ -Koordinate von  $\mathbf{H}_I$  ist ungleich Null. Entscheidend für die Berechnung des Initialwerts ist der Zustand der kritischen Oberflächen zwischen  $c_1$  und  $c_o$ , die zum Zeitpunkt  $t = 0$  erstarrt sind. Durch die Annahme einer abnehmenden Amplitude von  $\mathbf{H}$  für  $t < 0$  ist gewährleistet, dass (abhängig von der Geschwindigkeit der Abnahme) ein Zeitpunkt angegeben werden kann, ab dem das magnetische Feld stets innerhalb der kritischen Oberfläche verweilt. Der letzte Eintritt in die jeweilige kritische Oberfläche findet dann an dem Schnittpunkt der kritischen Oberfläche mit der  $H_x$ -Achse statt, dessen Abstand zum Nullpunkt der  $\mathbf{H}$ -Ebene am kleinsten ist. Der zweite Schnittpunkt der kritischen Oberfläche mit der  $H_x$ -Achse kann hingegen als letzter Eintrittspunkt ausgeschlossen werden. Dieser wird bei einer größeren Amplitude von  $\mathbf{H}$  erreicht, was unter der Annahme einer beliebig langsamen Abnahme der Amplitude bedeutet, dass das Feld nicht innerhalb der kritischen Oberfläche verweilt, nachdem der weiter vom Nullpunkt entfernte Schnittpunkt das letzte Mal erreicht wird. Die kritische Oberfläche befindet sich also nach dem letzten Eintritt des  $\mathbf{H}$ -Felds am weiter vom Ursprung entfernten Schnittpunkt nochmals im beweglichen Zustand.

**Fall 2:** Die  $H_x$ -Koordinate von  $\mathbf{H}_I$  ist gleich Null, die  $H_y$ -Koordinate ist ungleich Null. In diesem Fall kann für die zum Zeitpunkt  $t = 0$  starren kritischen Oberflächen keiner der zwei möglichen letzten Eintrittspunkte auf der  $H_x$ -Achse ausgeschlossen werden (daher

auch zwei relevante Pfade in Abb. 5.8). Die Annahme einer beliebig langsam abnehmenden Amplitude des  $\mathbf{H}$ -Felds bedingt, dass zu jeder kritischen Oberfläche, die letztmalig von positiver  $H_x$ -Richtung her durchdrungen wird, eine kritische Oberfläche mit nahezu gleichem Radius existiert, die letztmalig von negativer  $H_x$ -Richtung her durchdrungen wird. Die zu den beiden zuvor betrachteten Oberflächen gehörigen Magnetisierungsvektoren besitzen dann (näherungsweise) die gleichen  $y$ -Komponenten, jedoch gegengleiche  $x$ -Komponenten. Daher kann die resultierende initiale Magnetisierung der Hysterongruppe berechnet werden, indem die resultierende Magnetisierung für einen der in Abb. 5.8 angedeuteten relevanten Pfade berechnet wird und anschließend die  $x$ -Komponente des berechneten Magnetisierungsvektors zu Null gesetzt wird.

**Fall 3:** Sowohl die  $H_x$ - als auch die  $H_y$ -Koordinate von  $\mathbf{H}_1$  sind gleich Null. Dieser Fall stellt einen Spezialfall von Fall 2 dar. Nach gleicher Argumentation ergibt sich die  $x$ -Komponente der resultierenden Magnetisierung der Hysterongruppe zu Null. Zusätzlich ist die  $y$ -Komponente der Magnetisierung gleich Null, da die zu beiden möglichen Eintrittspunkten in die einzelnen kritischen Oberflächen zugehörigen Magnetisierungen stets eine  $y$ -Komponente gleich Null besitzen.

Formal wird daher im Falle einer Entmagnetisierung entlang der  $H_x$ -Achse der Initialwert  $\xi$  einer Hysterongruppe berechnet nach

$$\xi = \begin{cases} \mathbf{M}_{a0}^e & \text{falls } H_{1x} \neq 0 \\ \mathbf{Y}_{\text{red}} \mathbf{M}_{a0}^e & \text{falls } H_{1x} = 0, H_{1y} \neq 0 \\ 0 & \text{falls } H_{1x} = 0, H_{1y} = 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

Für eine kürzere Notation wurde an dieser Stelle die Reduktionsmatrix  $\mathbf{Y}_{\text{red}}$  eingeführt:

$$\mathbf{Y}_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Wert  $\mathbf{M}_{a0}^e$  entspricht dem Wert der Magnetisierung gemäß (5.37), für  $\mathbf{e}$  endend in  $(0, 0)^T$  und  $\mathbf{a}$  entsprechend dem Schnittpunkt von  $c_0$  und der  $H_x$ -Achse mit der kleinsten Distanz zum Nullpunkt (siehe Fall 1, Schnittpunkt bei Fall 2 und Fall 3 beliebig).

Die vorgestellte Initialisierung durch eine fiktive Entmagnetisierung entlang der  $H_x$ -Achse besitzt den Nachteil, dass sich die resultierende Neukurve (und auch die Hystereseschleifen bis zum ersten Erreichen der Eingangsextrema) nicht isotrop verhalten. Dies kann bedingen, dass z. B. im Fall einer periodischen Anregung ein halber Zyklus zusätzlich durchlaufen werden muss, bis der Einfluss der Initialisierung egalisiert wurde. Wenn die Eingangsextrema bekannt sind, kann der Effekt abgemildert werden, indem vor der eigentlichen Berechnung der Modellzustand nach Durchlaufen der Eingangsextrema berechnet wird. Diese können direkt aufeinander folgen, da das Hysteresemodell ratenunabhängig ist. Bei sinusförmiger Speisung genügen demnach zwei Schritte bei der Vorberechnung (entsprechend dem Minimum und dem Maximum des Sinus).

Möglich wäre auch die Vorgabe einer rotierenden Entmagnetisierung. Diese besitzt den Vorteil, dass die Neukurve isotrop in allen Raumrichtungen ist und auch die weiteren Nachteile der Entmagnetisierung entlang der  $x$ -Richtung entfallen. Allerdings ist die Berechnung der zugehörigen Initialwerte nur näherungsweise möglich und mit einem deutlich erhöhten Rechenaufwand verbunden.

## Berechnung der Magnetisierung

Unter Zuhilfenahme der beschriebenen Initialisierung (5.41) kann der Wert der Magnetisierung einer einzelnen Hysterongruppe mittels (5.38) für jede Hysterongruppe berechnet werden, die den Grundvoraussetzungen (bezüglich Form, Preisach-Dichte, etc.) entspricht. Der Fokus wird weg von der einzelnen Gruppe hin zur Überlagerung der Magnetisierungsanteile mehrerer Gruppen gelegt. Die resultierende Magnetisierung aller Gruppen ergibt sich, analog zum diskreten Modell, durch die Addition der Anteile der einzelnen Gruppen. Sofern  $n$  Gruppen existieren, deren Magnetisierung jeweils mit  $\tilde{\mathbf{M}}$  bezeichnet wird, gilt für die globale Magnetisierung

$$\mathbf{M}(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{M}}_i(t) + (\mu_r - 1)\mathbf{H}(t) . \quad (5.42)$$

### 5.2.3 Eigenschaften des Hysterongruppenmodells

Im Folgenden wird auf verschiedene Eigenschaften des Hysterongruppenmodells eingegangen. Diese stehen in Zusammenhang mit den Ableitungen der durch das Modell definierten Abbildung.

#### Differentieller Permeabilitätstensor einer Hysterongruppe

In der zuvor beschriebenen Form ermöglicht das auf Hysterongruppen basierende Hysterese-Modell die Auswertung einer Relation  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ . Oft ist jedoch die inverse Relation  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$  von Interesse. Eine Inversion des Modells ist nur numerisch möglich. Eine effiziente Möglichkeit stellt in diesem Zusammenhang das Newton-Verfahren dar. Dieses benötigt jedoch eine (exakte) Bestimmung der Ableitungen. Für die Relation der Form  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  lassen sich diese direkt berechnen. Dies wird nachfolgend für zwei Dimensionen ausgeführt, die korrespondierenden Inhalte für drei Dimensionen lassen sich analog berechnen.

Vorerst wird wieder nur eine Gruppe von Hysterons mit einem gemeinsamen Mittelpunkt betrachtet und der differentielle Reluktivitätstensor für die Gruppe  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_d$  bestimmt. Der globale differentielle Permeabilitätstensor ergibt sich dann analog zu (5.42) durch eine Überlagerung der Einzelanteile der Gruppen und des linearen Anteils:

$$\boldsymbol{\mu}_d = \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{di} + \mathbf{J}_{\text{lin}} . \quad (5.43)$$

Der Permeabilitätstensor  $\boldsymbol{\mu}_d$  wurde bereits in (3.105) eingeführt, die Definition kann jedoch für das vorgestellte Hysterese-Modell nicht ohne Weiteres übernommen werden. Hystereseoperatoren besitzen die Eigenschaft, dass ihre Ableitung im aktuellen Punkt nicht definiert ist, da der Verlauf von der Eingangsmonotonie abhängt. Dieses Problem wird in Kapitel 8 adressiert. Es sei an dieser Stelle lediglich angemerkt, dass die Richtungsableitungen des Modells wohldefiniert sind.

Für differentielle Änderungen der Magnetisierung sind allein das letzte Glied, der bewegliche Teil und der aktualisierte Startwert im aktuellen Punkt verantwortlich. Dies bedeutet jedoch nicht, dass bei einer Verwendung des Modells in einer Simulation in jedem Zeitschritt nur das letzte Glied des relevanten Pfads verändert wird. Beliebig viele Glieder können innerhalb eines Zeitschritts aufgelöst werden, allerdings kann nur ein neues Glied entstehen. Abermals wird



angenommen, dass der Pfad im aktuellen Zeitschritt bzw. Iterationsschritt aus  $n$  Gliedern besteht. Für den differentiellen Permeabilitätstensor gilt dann

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_d = \begin{cases} \mu_0 (\mathbf{J}_{M_{an}^e}(\mathbf{H}) + \mathbf{J}_{M_u}(\mathbf{H}) + \mathbf{J}_\xi(\mathbf{H})) & \text{falls } r_{en} > r_i \\ \mu_0 (\mathbf{J}_{M_{an}^e}(\mathbf{H}) + \mathbf{J}_\xi(\mathbf{H})) & \text{falls } r_{en} \leq r_i . \end{cases} \quad (5.44)$$

Es ist ersichtlich, dass der Permeabilitätstensor der Summe der Jacobi-Matrizen der Einzelsummanden entspricht.

Für den zu den beweglichen Hysterons gehörigen Teil ergibt sich die Jacobi-Matrix des Einheitsvektors  $\mathbf{e}_m$  zu

$$\mathbf{J}_{\mathbf{e}_m}(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} \frac{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\| - \frac{(H_{1x}-H_x)^2}{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\|}}{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\|^2} & -\frac{(H_x-H_{1x})(H_y-H_{1y})}{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\|^3} \\ -\frac{(H_x-H_{1x})(H_y-H_{1y})}{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\|^3} & \frac{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\| - \frac{(H_{1y}-H_y)^2}{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\|}}{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\|^2} \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

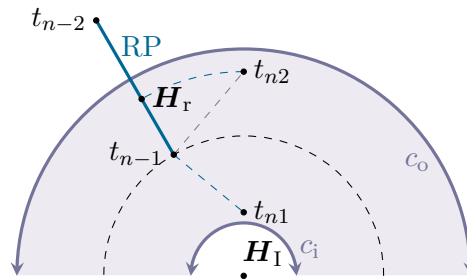
Weiter gilt für die Ableitung des Abstands

$$\mathbf{J}_r(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} \frac{H_x-H_{1x}}{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\|} \\ \frac{H_y-H_{1y}}{\|\mathbf{H}-\mathbf{H}_I\|} \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Daraus folgt für den gesamten Summanden unter Anwendung der Produktregel

$$\mathbf{J}_{M_u}(\mathbf{H}) = \frac{\omega_c}{r_\Delta} \mathbf{e}_m \mathbf{J}_r(\mathbf{H})^\top + \frac{\omega_c(r_{en} - r_i)}{r_\Delta} \mathbf{J}_{\mathbf{e}_m}(\mathbf{H}). \quad (5.47)$$

Zur Bestimmung der Jacobi-Matrix der starren Hysterons einer Gruppe muss eine Fallunterscheidung getroffen werden, je nachdem ob  $r_{n-1} > r_n$  oder  $r_{n-1} \leq r_n$  ist, ob also eine Annäherung oder eine Entfernung von  $\mathbf{H}_I$  stattfindet. Im Eindimensionalen äußert sich ebendiese Fallunterscheidung in *aufsteigenden* oder *absteigenden* Ästen. Exemplarisch ist die Fallunterscheidung in Abb. 5.9 dargestellt. Der mit  $t_{n1}$  gekennzeichnete Punkt entspricht einer Annäherung an  $\mathbf{H}_I$ , der relevante Pfad  $\mathcal{RP}$  wird um ein Teilstück erweitert. Der mit  $t_{n2}$  gekennzeichnete Punkt entspricht einer Entfernung von  $\mathbf{H}_I$ , wodurch das Teilstück zwischen  $t_{n-2}$  und  $t_{n-1}$  entsprechend der Regeln zur Anpassung von  $\mathcal{RP}$  bis zum Punkt  $\mathbf{H}_r$  verkleinert wird.



**Abb. 5.9** – Fallunterscheidung zur Berechnung der Jacobi-Matrix des starren Anteils

Im Falle einer Entfernung wird ein Teil des relevanten Pfads aufgelöst. Die Änderung der Magnetisierung in Abhängigkeit der Komponenten des magnetischen Felds wird dann berechnet gemäß

$$\frac{\partial M_{ax}^e}{\partial H_x} = \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial H_x} + \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial H_x}, \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial M_{ax}^e}{\partial H_y} = \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial H_y} + \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial H_y}, \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial M_{ay}^e}{\partial H_x} = \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial H_x} + \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial H_x}, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial M_{ay}^e}{\partial H_y} = \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial H_y} + \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial H_y}. \quad (5.51)$$

Alle benötigten Teilableitungen werden innerhalb des Abschnitts explizit aufgeführt. Bei der numerischen Berechnung führt der Faktor  $\partial\lambda/\partial r$  jedoch zu Instabilitäten. Dieser ist in (5.13) gegeben und besitzt eine Singularität, wenn das betrachtete Pfadstück näherungsweise eine Tangente an die kritische Oberfläche ist.

Deshalb ist es vorteilhafter, die infinitesimale Änderung der Magnetisierung in  $r$ -Richtung direkt anzugeben, als die Differenz zwischen den Hysterenzuständen im erstarrten und beweglichen Zustand:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial r} = \frac{\omega_c}{r_\Delta} \frac{\mathbf{H}(t_n) - \mathbf{H}_r}{\|\mathbf{H}_r - \mathbf{H}_I\|}. \quad (5.52)$$

Nach der Aufteilung gemäß (5.44) ist der zum Summanden  $\mathbf{H}(t_n)$  gehörende Anteil bereits in (5.47) enthalten. Damit gilt im Falle einer zunehmenden Entfernung von  $\mathbf{H}_I$  im aktuellen Zeitschritt unter Verwendung von (5.46)

$$\mathbf{J}_{M_{an}^e}(\mathbf{H}) = -\frac{\omega_c}{r_\Delta} \frac{\mathbf{H}_r}{\|\mathbf{H}_r - \mathbf{H}_I\|} \mathbf{J}_r(\mathbf{H})^T. \quad (5.53)$$

Der vereinfachte Term besitzt keine Singularität und eignet sich daher deutlich besser zur numerischen Implementierung.

Aufwendiger ist die Berechnung der Jacobi-Matrix der starren Hysterons im Falle einer Verringerung des Abstands zu  $\mathbf{H}_I$ . Dies erfordert ebenfalls eine Ableitung von (5.29), lässt sich jedoch nicht wie zuvor vereinfachen. Je nach Lage des relevanten Pfads können sich  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{e}$  ändern, abhängig davon, ob  $c_i$  und  $c_o$  vom neuen Teilpfad geschnitten werden.

Die Teilmatrix  $\mathbf{J}_{M_{an}^e}(\mathbf{H})$  besitzt die Form

$$\mathbf{J}_{M_{an}^e}(\mathbf{H}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial H_x} & \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial H_y} \\ \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial H_x} & \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial H_y} \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

Die benötigten partiellen Ableitungen setzen sich wie folgt zusammen:

$$\frac{\partial M_{ax}^e}{\partial H_x} = \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial a_x} \frac{\partial a_x}{\partial H_x} + \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial a_y} \frac{\partial a_y}{\partial H_x} + \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial H_x} + \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial H_x}, \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial M_{ax}^e}{\partial H_y} = \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial a_x} \frac{\partial a_x}{\partial H_y} + \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial a_y} \frac{\partial a_y}{\partial H_y} + \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial H_y} + \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial H_y}, \quad (5.56)$$

$$\frac{\partial M_{ay}^e}{\partial H_x} = \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial a_x} \frac{\partial a_x}{\partial H_x} + \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial a_y} \frac{\partial a_y}{\partial H_x} + \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial H_x} + \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial H_x}, \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial M_{ay}^e}{\partial H_y} = \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial a_x} \frac{\partial a_x}{\partial H_y} + \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial a_y} \frac{\partial a_y}{\partial H_y} + \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial H_y} + \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial H_y}. \quad (5.58)$$

Vor allem die aus der Ableitung von (5.29) nach  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $a_x$  und  $a_y$  resultierenden Terme führen auf umfangreiche Ausdrücke, die im Folgenden aufgeführt sind.

Für die partiellen Ableitungen der  $x$ -Komponente von  $M_{\mathbf{a}}^e$  nach den Komponenten  $e_x$  und  $e_y$  des Endpunkts  $\mathbf{e}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{r_{\Delta}}{\omega_c} \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_x} &= -1 + \frac{a_y d_y}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) - \frac{(a_x d_y^2 - a_y d_x d_y) e_x}{\|\mathbf{e}\|^2 \|\mathbf{d}\|^2} - \frac{d_x}{\|\mathbf{d}\|^2} \left( a_x - \frac{e_x(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{e}\|^2} \right) \\ &+ \left( \frac{|a_x d_y - a_y d_x|}{\|\mathbf{d}\|^2} - \frac{a_y d_x (a_x d_y - a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2 |a_x d_y - a_y d_x|} \right) \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \\ &+ \frac{2d_x}{\|\mathbf{d}\|^4} \left( (a_x d_y^2 - a_y d_x d_y) \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) - |a_x d_y - a_y d_x| d_x \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_{\Delta}}{\omega_c} \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial e_y} &= \frac{(a_y d_x - 2a_x d_y)}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) - \frac{(a_x d_y^2 - a_y d_x d_y) e_y}{\|\mathbf{d}\|^2 \|\mathbf{e}\|^2} \\ &- \frac{d_x}{\|\mathbf{d}\|^2} \left( a_y - \frac{e_y(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{e}\|^2} \right) + \frac{a_x d_x (a_x d_y - a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2 |a_x d_y - a_y d_x|} \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \\ &+ \frac{2d_y}{\|\mathbf{d}\|^4} \left( (a_x d_y^2 - a_y d_x d_y) \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) - |a_x d_y - a_y d_x| d_x \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.60)$$

Analog lassen sich die partiellen Ableitungen der  $y$ -Komponente von  $M_{\mathbf{a}}^e$  nach  $e_x$  und  $e_y$  berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{r_{\Delta}}{\omega_c} \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_x} &= \frac{(a_x d_y - 2a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) - \frac{(a_y d_x^2 - a_x d_x d_y) e_x}{\|\mathbf{d}\|^2 \|\mathbf{e}\|^2} \\ &- \frac{d_y}{\|\mathbf{d}\|^2} \left( a_x - \frac{e_x(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{e}\|^2} \right) - \frac{a_y d_y (a_x d_y - a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2 |a_x d_y - a_y d_x|} \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \\ &+ \frac{2d_x}{\|\mathbf{d}\|^4} \left( (a_y d_x^2 - a_x d_x d_y) \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) - |a_x d_y - a_y d_x| d_y \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_{\Delta}}{\omega_c} \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial e_y} &= -1 + \frac{a_x d_x}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) - \frac{(a_y d_x^2 - a_x d_x d_y) e_y}{\|\mathbf{e}\|^2 \|\mathbf{d}\|^2} - \frac{d_y}{\|\mathbf{d}\|^2} \left( a_y - \frac{e_y(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{e}\|^2} \right) \\ &+ \left( \frac{|a_x d_y - a_y d_x|}{\|\mathbf{d}\|^2} + \frac{a_x d_y (a_x d_y - a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2 |a_x d_y - a_y d_x|} \right) \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \\ &+ \frac{2d_y}{\|\mathbf{d}\|^4} \left( (a_y d_x^2 - a_x d_x d_y) \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) - |a_x d_y - a_y d_x| d_y \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Verschiebt sich der Anfangspunkt  $\mathbf{a}$  des betrachteten Abschnitts des relevanten Pfads, ergeben sich die benötigten partiellen Ableitungen der  $x$ -Komponente von  $M_{\mathbf{a}}^e$  nach  $a_x$  und  $a_y$  zu:

$$\begin{aligned} \frac{r_{\Delta}}{\omega_c} \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial a_x} &= 1 - \frac{(d_y^2 + a_y d_y)}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) + \frac{(a_x d_y^2 - a_y d_x d_y) a_x}{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{d}\|^2} - \frac{d_x}{\|\mathbf{d}\|^2} \left( e_x - \frac{a_x(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\|^2} \right) \\ &+ \left( \frac{e_y d_x (a_x d_y - a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2 |a_x d_y - a_y d_x|} - \frac{|a_x d_y - a_y d_x|}{\|\mathbf{d}\|^2} \right) \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \\ &- \frac{2d_x}{\|\mathbf{d}\|^4} \left( (a_x d_y^2 - a_y d_x d_y) \ln \left( \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|} \right) - |a_x d_y - a_y d_x| d_x \arccos \left( \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{r_\Delta}{\omega_c} \frac{\partial M_{ax}^e}{\partial a_y} &= \frac{(d_x d_y - a_y d_x + 2a_x d_y)}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) + \frac{(a_x d_y^2 - a_y d_x d_y) a_y}{\|\mathbf{d}\|^2 \|\mathbf{a}\|^2} \\
 &- \frac{d_x}{\|\mathbf{d}\|^2} \left( e_y - \frac{a_y(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\|^2} \right) - \frac{e_x d_x (a_x d_y - a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2 |a_x d_y - a_y d_x|} \arccos\left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|}\right) \\
 &- \frac{2d_y}{\|\mathbf{d}\|^4} \left( (a_x d_y^2 - a_y d_x d_y) \ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) - |a_x d_y - a_y d_x| d_x \arccos\left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|}\right) \right).
 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Weiterhin werden die partiellen Ableitungen der  $y$ -Komponente von  $\mathbf{M}_a^e$  nach  $a_x$  und  $a_y$  benötigt:

$$\begin{aligned}
 \frac{r_\Delta}{\omega_c} \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial a_x} &= \frac{(d_x d_y - a_x d_y + 2a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) + \frac{(a_y d_x^2 - a_x d_x d_y) a_x}{\|\mathbf{d}\|^2 \|\mathbf{a}\|^2} \\
 &- \frac{d_y}{\|\mathbf{d}\|^2} \left( e_x - \frac{a_x(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\|^2} \right) + \frac{e_y d_y (a_x d_y - a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2 |a_x d_y - a_y d_x|} \arccos\left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|}\right) \\
 &- \frac{2d_x}{\|\mathbf{d}\|^4} \left( (a_y d_x^2 - a_x d_x d_y) \ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) - |a_x d_y - a_y d_x| d_y \arccos\left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|}\right) \right),
 \end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{r_\Delta}{\omega_c} \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial a_y} &= 1 - \frac{(d_x^2 + a_x d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2} \ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) + \frac{(a_y d_x^2 - a_x d_x d_y) a_y}{\|\mathbf{d}\|^2 \|\mathbf{a}\|^2} - \frac{d_y}{\|\mathbf{d}\|^2} \left( e_y - \frac{a_y(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\|^2} \right) \\
 &- \left( \frac{e_x d_y (a_x d_y - a_y d_x)}{\|\mathbf{d}\|^2 |a_x d_y - a_y d_x|} + \frac{|a_x d_y - a_y d_x|}{\|\mathbf{d}\|^2} \right) \arccos\left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|}\right) \\
 &- \frac{2d_y}{\|\mathbf{d}\|^4} \left( (a_y d_x^2 - a_x d_x d_y) \ln\left(\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{a}\|}\right) - |a_x d_y - a_y d_x| d_x \arccos\left(\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e})}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{e}\|}\right) \right).
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

Im Allgemeinen gilt  $\frac{\partial M_{ax}^e}{\partial H_y} \neq \frac{\partial M_{ay}^e}{\partial H_x}$ , der Permeabilitätstensor ist somit, von Sonderfällen abgesehen, nicht symmetrisch.

Im nächsten Schritt müssen die Veränderungen von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{e}$  selbst angegeben werden. Diese treten auf, wenn der relevante Pfad  $c_o$  oder  $c_i$  schneidet. Eine eventuelle Anpassung der Anfangs- und Endvektoren in den zuvor eingeführten Formeln zur Auswertung von  $\mathbf{M}_a^e$  ist trivial, da für  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{e}$  die angepassten Werte verwendet werden können. Ein angepasster Wert für  $\mathbf{a}$  wird benötigt, wenn der aktuelle Pfad  $c_o$  schneidet, ein angepasster Wert für  $\mathbf{e}$  wird benötigt, wenn der aktuelle Pfad  $c_i$  schneidet. Im Folgenden wird lediglich der Fall eines angepassten Endwerts, unter Verwendung der in Abb. 5.10 dargestellten Hilfsgrößen  $\tilde{\mathbf{d}}$  und  $\tilde{\mathbf{e}}$ , diskutiert. Der Fall eines angepassten Anfangswerts ergibt sich vollkommen analog.

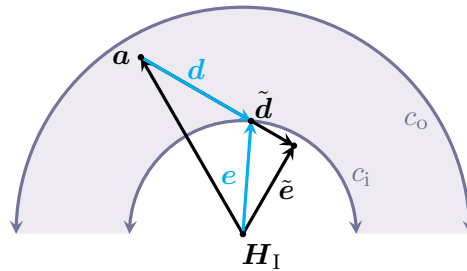


Abb. 5.10 – Anpassung des relevanten Pfads bei Schnitt von  $c_i$

Der zum Schnittpunkt mit  $c_i$  gehörende Wert von  $\lambda$  wird mit  $\lambda_c$  bezeichnet und ist durch die Lösung der Gleichung

$$\|\mathbf{a} + \lambda_c \tilde{\mathbf{d}}\| = r_i \quad (5.67)$$

gegeben. Folglich kann  $\lambda_c$  explizit berechnet werden nach

$$\lambda_c = -\frac{(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{d}})}{\|\tilde{\mathbf{d}}\|^2} - \sqrt{\frac{(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{d}})^2}{\|\tilde{\mathbf{d}}\|^4} - \frac{\|\mathbf{a}\|^2 - r_i^2}{\|\tilde{\mathbf{d}}\|^2}}. \quad (5.68)$$

Der Pfadparameter  $\lambda_c$  charakterisiert bei gegebenem tatsächlichen Endpunkt  $\tilde{\mathbf{e}}$  den gesuchten Schnittpunkt eindeutig. Für die Ableitungen des Pfadparameters bei Änderungen von  $\tilde{e}_x$  und  $\tilde{e}_y$  gilt

$$\frac{\partial \lambda_c}{\partial \tilde{e}_x} = \frac{2(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{d}}) \tilde{d}_x - a_x \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{d}}\|^4} + \frac{2\tilde{d}_x (\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{d}})^2 - a_x (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2 - d_x \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2 (\|\mathbf{a}\|^2 - r_i^2)}{\|\tilde{\mathbf{d}}\|^4 \sqrt{(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{d}})^2 - \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2 (\|\mathbf{a}\|^2 - r_i^2)}} \quad (5.69)$$

und

$$\frac{\partial \lambda_c}{\partial \tilde{e}_y} = \frac{2(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{d}}) \tilde{d}_y - a_y \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2}{\|\tilde{\mathbf{d}}\|^4} + \frac{2\tilde{d}_y (\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{d}})^2 - a_y (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2 - d_y \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2 (\|\mathbf{a}\|^2 - r_i^2)}{\|\tilde{\mathbf{d}}\|^4 \sqrt{(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{d}})^2 - \|\tilde{\mathbf{d}}\|^2 (\|\mathbf{a}\|^2 - r_i^2)}}. \quad (5.70)$$

Gibt  $\mathbf{e}$  wie gehabt den Endpunkt eines Pfadstücks innerhalb einer Hysterongruppe an, so berechnen sich die fehlenden Faktoren des Permeabilitätstensors nach

$$\frac{\partial e_x}{\partial \tilde{e}_x} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \|\tilde{\mathbf{e}}\| \leq r_i \\ \lambda_c + \tilde{d}_x \frac{\partial \lambda_c}{\partial \tilde{e}_x} & \text{wenn } \|\tilde{\mathbf{e}}\| > r_i, \end{cases} \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial \tilde{e}_y} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \|\tilde{\mathbf{e}}\| \leq r_i \\ \tilde{d}_x \frac{\partial \lambda_c}{\partial \tilde{e}_y} & \text{wenn } \|\tilde{\mathbf{e}}\| > r_i, \end{cases} \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial \tilde{e}_y} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \|\tilde{\mathbf{e}}\| \leq r_i \\ \tilde{d}_y \frac{\partial \lambda_c}{\partial \tilde{e}_y} & \text{wenn } \|\tilde{\mathbf{e}}\| > r_i, \end{cases} \quad (5.73)$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial \tilde{e}_x} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \|\tilde{\mathbf{e}}\| \leq r_i \\ \lambda_c + \tilde{d}_y \frac{\partial \lambda_c}{\partial \tilde{e}_x} & \text{wenn } \|\tilde{\mathbf{e}}\| > r_i. \end{cases} \quad (5.74)$$

Im Falle eines Schnitts von  $c_o$ , also einer Veränderung des Startpunkts  $\mathbf{a}$  eines Pfadabschnitts, wird vollkommen analog vorgegangen. Da  $\tilde{\mathbf{e}}$  im aktuellen Zeitschritt immer mit  $\mathbf{H}$  gleichgesetzt werden kann, sind alle Zusammenhänge gegeben, die benötigt werden, um  $\mathbf{J}_{M_{an}^e}(\mathbf{H})$  im Falle einer Annäherung zu berechnen.

Zuletzt muss  $\mathbf{J}_\xi(\mathbf{H})$  bestimmt werden, um den gesamten Tensor  $\boldsymbol{\mu}_d$  angeben zu können. Im Falle der vorgestellten Initialisierung kann dieser mit den zuvor hergeleiteten Formeln dargestellt werden. Bei einer Annäherung ändert sich der durch die Initialisierung vorgegebene Wert  $\xi$  nicht. Im Falle einer Entfernung (Zustandsänderung der bei der Initialisierung starren Hysterons) wird die Ableitung analog zu  $\mathbf{J}_{M_{an}^e}(\mathbf{H})$  berechnet und es kann abermals (5.53) verwendet werden. Die verschiedenen Initialisierungsfälle lassen sich in analoger Weise zu (5.41) berücksichtigen.

### Charakterisierung des globalen differentiellen Permeabilitätstensors

Der globalen Magnetisierung wurde in (4.39) ein linearer Magnetisierungsanteil hinzugefügt. Dieser trägt ebenfalls zum globalen differentiellen Permeabilitätstensor bei mit dem Anteil

$$\mathbf{J}_{\text{lin}} = \begin{pmatrix} \mu_r - 1 & 0 \\ 0 & \mu_r - 1 \end{pmatrix}. \quad (5.75)$$

Wie bereits erwähnt wurde, ist der zuvor eingeführte Permeabilitätstensor einer Hysterongruppe, sofern relevante Werte innerhalb von  $c_o$  liegen, an abzählbar vielen Punkten (dem aktuellen Punkt und den *Knickpunkten* des relevanten Pfads) nicht definiert. Diese Eigenschaft weist somit auch der globale differentielle Permeabilitätstensor  $\boldsymbol{\mu}_d$  auf. Um trotzdem einen sinnvollen Ausdruck für die benötigte Ableitung zu erhalten, wird *Clarke's generalized Jacobian* [53, Kap. 2.6] eingeführt. Mit  $\Sigma_{\mathbf{H}}$  werden an dieser Stelle alle Punkte innerhalb der  $\mathbf{H}$ -Ebene bezeichnet, in denen  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  nicht differenzierbar ist. Die verallgemeinerte Jacobi-Matrix ist definiert als die konvexe Hülle aller Richtungsableitungen in einem Punkt:

$$\partial\mathbf{B}(\mathbf{H}) = \text{Conv}(\lim \mathbf{J}_{\mathbf{B}}(\mathbf{H}) : \mathbf{H}_i \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{H}_i \notin \Sigma_{\mathbf{H}}). \quad (5.76)$$

Der Permeabilitätstensor wird im Folgenden gewählt als

$$\boldsymbol{\mu}_d \in \partial\mathbf{B}(\mathbf{H}). \quad (5.77)$$

Damit kann der differentielle Reluktivitätstensor als Inverse des differentiellen Permeabilitätstensors definiert werden

$$\boldsymbol{\nu}_d = \boldsymbol{\mu}_d^{-1} \quad (5.78)$$

und es gilt folglich analog zu (5.76) und (5.77)

$$\partial\mathbf{H}(\mathbf{B}) = \text{Conv}(\lim \mathbf{J}_{\mathbf{H}}(\mathbf{B}) : \mathbf{B}_i \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{B}_i \notin \Sigma_{\mathbf{B}}) \quad (5.79)$$

sowie

$$\boldsymbol{\nu}_d \in \partial\mathbf{H}(\mathbf{B}). \quad (5.80)$$

Die aktualisierten Definitionen des Reluktivitätstensors und des Permeabilitätstensors sind abgesehen von den Mengen  $\Sigma_{\mathbf{B}}$  und  $\Sigma_{\mathbf{H}}$  äquivalent zu (3.104) und (3.105). Weiterhin können die Mengen  $\Sigma_{\mathbf{B}}$  und  $\Sigma_{\mathbf{H}}$  direkt ineinander überführt werden, da sich ihre jeweiligen Elemente verhalten wie Bild und Urbild.

### Invertierung des Hysterongruppenmodells

Mithilfe des Permeabilitätstensors ist es möglich, die Relation  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  zu invertieren und  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$  zu bestimmen. Dazu wird nach (3.102) angesetzt

$$\mathbf{H} \approx \boldsymbol{\nu}_d(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{B}_0).$$

Nach (5.79) steht in den Knickpunkten des relevanten Pfads eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Wahl des Reluktivitätstensors zur Verfügung. Es wurde eine gute Konvergenz erzielt, indem die Wahl entweder auf die jeweils letzte wohldefinierte Richtungsableitung oder im Initialschritt der Invertierung auf die Richtungsableitung in Richtung der gewünschten Änderung  $\Delta\mathbf{B}$  gefallen ist.

Einzelne Invertierungen können schlecht konvergieren und sollten unter Bestimmung einer optimalen Schrittweite durchgeführt werden (siehe auch Kapitel 8). Weiterhin ist die Vorgabe einer maximalen Schrittweite bei der Implementierung sinnvoll. Diese vermeidet Oszillationen aufgrund großer Unterschiede der Steigung in verschiedenen Bereichen der Magnetisierungskennlinie. Metriken zu den numerischen Eigenschaften des Modells sind in Kapitel 8 und Kapitel 9 zu finden.

### Monotonie des Hysterongruppenmodells

Wie schon beim Interpolationsmodell soll das Monotonieverhalten des Hysterongruppenmodells ausführlicher betrachtet werden. Ein Materialmodell ist im vorliegenden Kontext monoton wenn gilt, dass

$$(\mathbf{M}_2(\mathbf{H}_2) - \mathbf{M}_1(\mathbf{H}_1))^T (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \geq 0 . \quad (5.81)$$

Es ist wichtig, dass ferromagnetische Materialmodelle diese Eigenschaft erfüllen, da sonst einerseits die Abbildung  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  nicht bijektiv ist, was zu numerischen Problemen führt (wie im Falle des Interpolationsmodells), andererseits ein Verhalten vorliegt, das dem physikalisch beobachtbaren Zusammenhang von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  widerspricht. Weiterhin sind die in Kapitel 3 formulierten Variationsprobleme in diesem Fall im Allgemeinen keine Lösung [127, S. 89].

Im Gegensatz zur Monotonie skalarer Preisach-Operatoren existieren für den zugrundeliegenden vektoriellen Hystereseoperator  $\mathcal{P}$  nach (4.36) keine Resultate bezüglich der Monotonie. Anhand eines numerischen Gegenbeispiels (siehe Anhang B.2) lässt sich zeigen, dass die durch eine Hysterongruppe definierte Abbildung nicht monoton ist. Dies gilt sowohl für den Prozess des Erstarrens als auch für den umgekehrten Vorgang. Die Ursache für das nichtmonotone Verhalten ist in beiden Fällen unterschiedlich und bedarf einer Diskussion der Entwicklung der Eigenwerte der zuvor eingeführten Jacobi-Matrizen (genauer des Matrixprodukts der Jacobi-Matrix und ihrer Transponierten) in Abhängigkeit von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{e}$ . Dies wird nicht weiter ausgeführt.

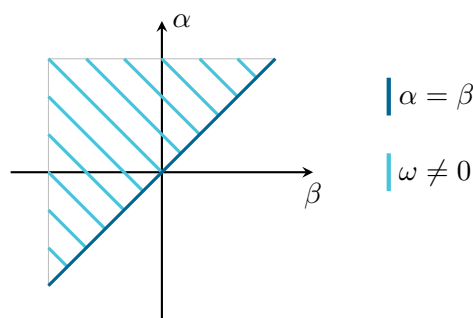
Ob sich die durch  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  definierte Abbildung monoton verhält, hängt maßgeblich von der Verteilung der Hysterons und deren Gewichtung ab. Es ist nicht ohne Weiteres möglich, alle Verteilungen von Hysterons und Gedächtniszustände des Operators bei der Diskussion der Monotonie zu berücksichtigen (siehe auch [127, S. 89]), weshalb kein direkter Zusammenhang zwischen der Monotonie und dem Aufbau des Hysterese Modells hergestellt werden kann. Im Zuge der später vorgestellten Berechnungsbeispiele konnte festgestellt werden, dass das Hysterongruppenmodell abseits von konstruierten Beispielen für einzelne Hysterongruppen monotonen Verhalten aufweist.

#### 5.2.4 Reduktion auf ein skalares Preisach-Modell

In diesem Teilabschnitt wird näher auf die Struktur des zum Hysterongruppenmodell korrespondierenden skalaren Preisach-Modells eingegangen. Diese liefert zwar keine grundsätzlich neuen Erkenntnisse, ermöglicht es jedoch, das Verhältnis zwischen EBM und Gruppenmodell aus einer neuen Perspektive zu betrachten. Um aus dem Hysterongruppenmodell ein skalares Modell zu machen, werden ausschließlich Hysterongruppen betrachtet, deren Zentren auf der  $x$ -Achse liegen, und es wird gefordert, dass sämtliche Eingangsgrößen lediglich eine  $x$ -Komponente besitzen. Die Überführung der kritischen Oberflächen in skalare Preisach-Relais ist dann trivial<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Das beschriebene Vorgehen liefert in keinem Fall ein äquivalentes skalares Modell, wie es in [127] beschrieben wird. Die Parameter des entstehenden skalaren Modells müssen neu identifiziert werden.

Analog zur Konstruktion des vektoriellen Modells besteht das korrespondierende skalare Preisach-Modell aus Gruppen von Preisach-Relais, deren Zentren auf endlich vielen Punkten entlang der  $x$ -Achse verteilt liegen. Das jeweilige Zentrum ergibt als Mitte zwischen den Schaltwerten der Relais  $\mathbf{H}_I = (\alpha + \beta)/2$ . Aufgrund der Konstruktion kann jedes Relais mit  $\alpha$ - und  $\beta$ -Werten, für die  $\mathbf{H}_I$  ein Zentrum darstellt, eine Preisach-Dichte  $\omega \neq 0$  besitzen. In der Preisach-Ebene ergibt sich somit eine Preisach-Dichtefunktion, deren Träger senkrecht auf der Achse  $\alpha = \beta$  stehen, wie in Abb. 5.11 dargestellt.



**Abb. 5.11** – Exemplarische Darstellung einer Preisach-Dichtefunktion eines Gruppenmodells in der  $\alpha$ - $\beta$ -Ebene

Bei einem Vergleich der durch ein skalares Spielmodell definierten Dichtefunktion ist auffällig, dass diese zu der durch das Gruppenmodell definierten Dichtefunktion eine Art duale Stellung einnimmt. Während es das DPC-Modell erlauben würde, eine Preisach-Dichtefunktion, wie sie durch das Spielmodell vorgegeben ist, in den vektoriellen Kontext zu überführen, kann eine Dichtefunktion wie in Abb. 5.11 dargestellt nicht in ein Spielmodell überführt werden.

### 5.3 Hysterongruppenmodell für anisotrope Materialien

Die Idee des stetigen Modells wurde im vorangegangenen Abschnitt allgemein eingeführt und ausführlich für den Fall kreisförmiger kritischer Oberflächen diskutiert. Die vorgestellten Inhalte werden nun auf Klassen von Hysterons angewendet, die elliptische kritische Oberflächen besitzen. Diese ermöglichen die Modellierung von Anisotropie.

Die grundlegenden Eigenschaften einer Hysterongruppe wurden in (5.3)–(5.6) eingeführt. Durch sie ist sichergestellt, dass innerhalb der Hysterons einer Hysterongruppe stets eine Ordnungsrelation existiert, im Sinne, dass die Begriffe *innen* und *außen* unterschieden werden können. Im Falle kreisförmiger kritischer Oberflächen geschieht dies trivial über den Radius. Gilt für die zu zwei kritischen Oberflächen  $c_1$  und  $c_2$  gehörenden Radien  $r_1$  und  $r_2$ , dass  $r_1 < r_2$  ist, so liegt  $c_1$  innerhalb von  $c_2$ , bzw.  $c_2$  außerhalb von  $c_1$ . Der Radius fungiert in diesem Fall als Ordnungsparameter.

Für anisotrope Materialien ergeben sich deutlich mehr Variationsmöglichkeiten des Modells, sodass es sinnvoll ist, die für Hysterons mit kreisförmigen kritischen Oberflächen eingeführten Konzepte zu verallgemeinern. Deshalb wird zur grundlegenden Definition des vektoriellen Preisach-Operators gemäß (4.36) der Ordnungsparameter  $\rho_0$  verwendet. Der Definition folgend, kann eine kritische Oberfläche mit ihrem Ordnungsparameter identifiziert werden und es gilt  $\omega(\rho) := \omega(c(\rho))$ . Für die Magnetisierung einer Hysterongruppe gilt damit analog zu (5.8), dass

$$\tilde{\mathbf{M}} = \int_{\rho_i}^{\rho_o} \omega(\rho) \mathbf{M}_\rho \, d\rho . \quad (5.82)$$



Der Verlauf des  $\mathbf{H}$ -Felds wird weiterhin durch die Größen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{e}$  und  $\lambda$  parametrisiert. Die Magnetisierung eines Hysterons ist somit weiterhin durch (5.10) gegeben. Die Auswertung von (5.82) erfolgt dann unter der Voraussetzung, dass eine Relation  $\rho(\lambda)$  bekannt ist durch

$$\mathbf{M}_a^e = \int_1^0 \omega(\rho(\lambda)) \frac{\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}}{\|\mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}\|} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} d\lambda . \quad (5.83)$$

Abhängig von der Form der kritischen Oberflächen und der Wahl des zugehörigen Ordnungsparameters unterscheidet sich  $\rho(\lambda)$ . Die Herausforderung bei der Bestimmung von  $\rho(\lambda)$  ist eng an die Frage geknüpft, wie bestimmt werden kann, auf welcher kritischen Oberfläche zwischen  $c_i$  und  $c_o$  ein gegebener Punkt liegt. Im Fall von Hysterongruppen mit ausschließlich kreisförmigen Oberflächen war dies durch den Abstand des Punkts zum Zentrum eindeutig festgelegt. Im Folgenden wird dies für eine einfache Hysterongruppe mit anisotropen Verhalten diskutiert.

### Elliptische kritische Oberflächen mit konstantem Achsenverhältnis

Ellipsen verfügen über eine lange Achse  $w_l$  und eine kurze Achse  $w_k$ . Besitzen beide Achsen die gleiche Länge, so entartet die Ellipse zu einem Kreis. Es werden innerhalb dieses Unterabschnitts Hysterongruppen betrachtet, die aus Hysterons mit elliptischen kritischen Oberflächen bestehen. Die Achsen der Oberflächen sind innerhalb einer Gruppe in dieselbe Richtung orientiert. Nachfolgend wird vorausgesetzt, dass die lange Achse entlang der  $H_x$ -Richtung verläuft, diese Einschränkung ist jedoch nicht notwendig. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass das Verhältnis der langen Achse zur kurzen Achse

$$\alpha = \frac{w_l}{w_k} , \quad (5.84)$$

innerhalb der Hysterongruppe konstant ist. Damit gilt  $w_l = \alpha w_k$  und für die bekannte Ellipsengleichung

$$\frac{H_x^2}{\alpha^2 w_k^2} + \frac{H_y^2}{w_k^2} = 1 . \quad (5.85)$$

Dies entspricht der Kreisgleichung mit einer modifizierten  $H_x$ -Koordinate. Analog zum Radius bei kreisförmigen kritischen Oberflächen dient  $w_k$  als Ordnungsparameter. Weiter berechnen sich die Preisach-Dichte und die benötigte Ableitung zu

$$\omega(w_k) = \frac{\omega_c}{w_{ko} - w_{ki}} \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial w_k}{\partial \lambda} = \frac{\frac{d_x(a_x + \lambda d_x)}{\alpha} + d_y(a_y + \lambda d_y)}{\sqrt{\frac{(a_x + \lambda d_x)^2}{\alpha^2} + (a_y + \lambda d_y)^2}} . \quad (5.87)$$

Werden die Ausdrücke in (5.83) eingesetzt, entsteht ein elliptisches Integral. Dessen Berechnung wird an dieser Stelle nicht durchgeführt und ist nicht trivial. Da viele physikalische Probleme auf elliptische Integrale führen, existiert eine große Zahl an Veröffentlichungen, die sich mit der Lösung derartiger Integrale auseinandersetzen. Als Startpunkt für eine weitere Betrachtung von (5.83) können z. B. [67, 82] und [141] dienen. Weiterhin wird für die numerische Auswertung auf die Arbeiten von Fukushima [75–78] verwiesen.



## 6 Dissipationsverhalten der vektoriellen Hystereseemodelle

Nachdem im vorhergehenden Kapitel einige Hystereseemodelle in verschiedener Tiefe eingeführt wurden, wird im Folgenden ihr Dissipationsverhalten diskutiert. Dieses spielt eine entscheidende Rolle bei der Berechnung von Hystereseverlusten. Neben der konkreten Anwendung ist jedoch auch die größere Perspektive bemerkenswert, die eine Untersuchung der Hystereseemodelle unter dem Aspekt ihres Energieumsatzes eröffnet. Dieser weist darauf hin, dass die verschiedenen Modelle, obwohl sie häufig ähnliche Ergebnisse bezüglich der berechneten Magnetisierungskurven liefern und dieselben physikalischen Vorgänge modellieren sollen, sehr unterschiedliche Prozesse abbilden.

Hysteresebehaftete Prozesse sind irreversibel. Daraus folgt, dass sich das zugehörige thermodynamische System nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindet [21], also ein Nichtgleichgewichtssystem ist. Aus der thermodynamischen Betrachtung einer Überlagerung von Zweizustandssystemen lässt sich zeigen, dass die phänomenologisch motivierte Beschreibung der Systemzustände mithilfe des Preisach-Modells ebenso aus einer Betrachtung der Energieflüsse für eine gegen den absoluten Nullpunkt strebende Temperatur folgt [21, Kap. 1]. Eine umfassende Diskussion der zu ratenunabhängiger Hysterese gehörenden Systeme unter thermodynamischen Gesichtspunkten liegt nicht mehr im Rahmen der vorliegenden Arbeit, hierfür wird auf [21, 22] und [35] verwiesen. Im weiteren Verlauf wird das resultierende Dissipationsverhalten verschiedener Hystereseemodelle gegenübergestellt.

Die magnetische Energie in einem Volumen  $\Omega$  ist allgemein gegeben durch

$$W_{\text{mag}} = \int_{\Omega} w_{\text{mag}} \, d\mathbf{x} . \quad (6.1)$$

Die darin enthaltene Energiedichte wird unter der Voraussetzung, dass  $\mathbf{B}(t_0) = \mathbf{0}$ , berechnet nach

$$w_{\text{mag}} = \int_0^{\mathbf{B}(t)} \mathbf{H}(\mathbf{B}) \, d\mathbf{B} . \quad (6.2)$$

Rechnerisch ermöglichen (6.1) und (6.2) den Energieumsatz im betrachteten Ferromagnetikum zu bilanzieren. Für periodische Verläufe von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  ergibt sich bei der Periodendauer  $T$  eine mittlere dissipierte Leistung von

$$\bar{P}_{\text{dis}} = \frac{1}{T} \int_T \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} \, dt \quad (6.3)$$

mit der umgesetzten Energie

$$\Delta W_{\text{mag}} = \int_T \frac{dW_{\text{mag}}}{dt} \, dt . \quad (6.4)$$

Die Betrachtung von periodischen Verläufen wird im Allgemeinen gewählt, da nicht alle Hystereseemodelle eine direkte Bestimmung der dissipierten Energie zulassen. In numerischen

Schemata lässt sich die Ableitung der magnetischen Energie wieder durch einen Differenzenquotienten ausdrücken. Die magnetische Energie selbst lässt sich durch die Auswertung der entsprechenden Volumenintegrale explizit berechnen.

In den folgenden Abschnitten wird das Verlustverhalten für eine Auswahl der zuvor betrachteten Hystereseemodelle erläutert. Hierbei werden periodische Magnetisierungen betrachtet, die entweder entlang einer Raumrichtung alternieren (Wechselmagnetisierung) oder einen Kreis in der  $M_x$ - $M_y$ -Ebene (Kreisdrehmagnetisierung) beschreiben. Im Falle des skalaren Preisach-Modells ergibt lediglich die Betrachtung von Wechselmagnetisierung Sinn.

## 6.1 Skalares Preisach-Modell

Das Preisach-Modell erlaubt unter Einführung weniger Bedingungen die direkte Berechnung der dissipierten Energie. Dies geschieht, wie bereits in Kapitel 4 gesehen, durch Betrachtung eines einzelnen Preisach-Relais und anschließender Superposition. Es wird ein periodischer Eingang angenommen, der zwischen den Extrempunkten monoton verläuft. Die Argumentation kann problemlos auf komplexere Verläufe des Eingangs übertragen werden. Die Schaltzeitpunkte innerhalb einer Periode sind analog zu den jeweiligen Grenzen bezeichnet mit  $t_\alpha$  und  $t_\beta$  und die korrespondierenden Werte des magnetischen Felds mit  $H_\alpha := H(t_\alpha)$  und  $H_\beta := H(t_\beta)$ . In einem periodischen Prozess werden entweder beide Schaltflanken eines Preisach-Relais durchlaufen oder das Relais schaltet nie<sup>1</sup>. Für die (distributionelle) Zeitableitung der Zustandsänderungen der schaltenden Relais kann angesetzt werden

$$\frac{dq_\alpha^\beta [H](t)}{dt} = 2\delta(t - t_\alpha) \quad (6.5)$$

sowie

$$\frac{dq_\alpha^\beta [H](t)}{dt} = -2\delta(t - t_\beta) . \quad (6.6)$$

Hierbei bezeichnet  $\delta$  wie üblich die Dirac-Distribution. Bezogen auf ein Einheitsvolumen folgt für die Verlustenergie, unter Verwendung von  $\dot{w}_{\text{mag}}$  gemäß (4.10), dass

$$\Delta W_{\text{mag}} = 2I_s\omega(\alpha, \beta) \int_T H(t)\delta(t - t_\alpha) - H(t)\delta(t - t_\beta) dt = 2I_s\omega(H_\alpha - H_\beta) . \quad (6.7)$$

Es ist ersichtlich, dass der Term  $I_s\omega(H_\alpha - H_\beta)$  genau der Fläche eines Preisach-Relais (mit geeigneter Skalierung des Ausgangs) entspricht. Dieser gibt direkt die dissipierte Energie (abermals bezogen auf das Einheitsvolumen) an. Die Schaltvorgänge korrespondieren mit Barkhausen-Sprüngen, daher kann angenommen werden, dass sich die Verlustenergie zu gleichen Teilen auf die beiden Sprünge verteilt. Damit wird bei einem einzelnen Sprung die Energie

$$\Delta W_\alpha^\beta = I_s\omega(H_\alpha - H_\beta) \quad (6.8)$$

dissipiert. Eine Verlustbetrachtung über eine Periode lässt sich demnach zurückführen auf die bei den einzelnen Barkhausen-Sprüngen auftretenden Verluste. Im vektoriellen Fall wurde dieses Vorgehen als Barkhausen-Sprungmethode in [58] eingeführt, die Herleitung ist an [151] angelehnt. Der hergeleitete Term deckt sich mit dem Dissipationsterm der in [165, S. 168] sowie [166] präsentierten Energiegleichung. Die dissipierte Energie kann zu jedem Zeitpunkt angegeben werden und nicht erst nach Bilanzierung über eine Periode. Die gesamten Verluste ergeben sich wieder durch Integration bzw. Summation der Verluste der einzelnen Preisach-Relais.

<sup>1</sup>Ausnahmen wie z. B. ein Relais, das innerhalb des ersten Zyklus genau einmal schaltet, können konstruiert werden. Sie spielen für die Betrachtungen an dieser Stelle jedoch eine untergeordnete Rolle.

## 6.2 Energiebasiertes Hysteresemodell

In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass das energiebasierte Hysteresemodell bei unidirektionalem Eingang einem Preisach-Modell entspricht. Daraus folgt, dass bei Wechsellmagnetisierung die Verluste stets mithilfe von (6.8) berechnet werden können. Dies wird weiter verdeutlicht mit Blick auf (4.15), da gilt

$$\kappa \equiv (H_\alpha - H_\beta) / 2 .$$

Im Falle von Drehmagnetisierung gilt, dass

$$\mathbf{H}_i = \kappa \frac{\dot{\mathbf{I}}}{\|\dot{\mathbf{I}}\|} \quad (6.9)$$

und weiter, da  $\dot{\mathbf{I}}$  und  $\mathbf{H}_i$  in diesem Fall parallel sind:

$$P_{\text{dis}} = \mathbf{H}_i \cdot \dot{\mathbf{I}} = \|\mathbf{H}_i\| \|\dot{\mathbf{I}}\| . \quad (6.10)$$

Die Näherung durch das Spielmodell ist in diesem Fall exakt [89]. Aus (6.10) geht hervor, dass bei Drehmagnetisierung in Sättigung die Verluste ihren Maximalwert annehmen, da  $\|\dot{\mathbf{I}}\|$  maximal ist und  $\|\mathbf{H}_i\|$  bei Drehmagnetisierung konstant und vom Sättigungszustand unabhängig ist. Dies widerspricht experimentellen Beobachtungen, wonach die Verluste bei Drehmagnetisierung in starker Sättigung gegen Null streben (siehe [5, 83]). Auf Ebene der Felder stellt sich ein konstanter Winkel zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  ein.

Darin zeigt sich der Charakter einer Annahme hinter dem in Kapitel 4 eingeführten Dissipationsfunktional. Dies lässt das Argument, dass das EBM anderen Hysterese modellen (wie dem Preisach-Modell [157]) überlegen ist, da es auf Grundsätzen der Thermodynamik beruht, fragwürdig erscheinen: In einer Dimension ist das EBM vollkommen gleichwertig zu einem Preisach-Modell, in mehreren Dimensionen ist das zugrunde gelegte Dissipationsfunktional nicht in der Lage, das Dissipationsverhalten wiederzugeben. Dieser Effekt wurde bereits in [11] beschrieben (und wird auch in [88, 157] erwähnt). Es wird in [11] vorgeschlagen, dem entgegenzuwirken, indem die Radien der Sphären  $\kappa$  abhängig von  $\mathbf{H}$  verkleinert werden. Dies führt zu einer Reduzierung des Winkels zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  bei steigender Sättigung, allerdings auch zu einer deutlichen Erhöhung der Modellkomplexität.

## 6.3 Vektor-Preisach-Modell nach Mayergoyz

Das Vektor-Preisach-Modell nach Mayergoyz wurde mit (4.32) kurz eingeführt. Durch seinen Aufbau aus skalaren Preisach-Modellen in jeder Raumrichtung lässt sich sein Dissipationsverhalten in jeder Raumrichtung mit den in Abschnitt 6.1 eingeführten Gleichungen beschreiben. Dies gilt sowohl für Wechsellmagnetisierung als auch für Drehmagnetisierung.

Bei Wechsellmagnetisierung ist das Verhalten des Vektor-Preisach-Modells nach Mayergoyz äquivalent zu einem skalaren Preisach-Modell. Bei Drehmagnetisierung offenbart das vektorielle Modell nach Mayergoyz dasselbe Verhalten wie das EBM: Die Verluste sind bei Drehmagnetisierung in Sättigung stets maximal. Es wird für die skalaren Preisach-Modelle in jeder Raumrichtung ein vollständiger Wechsellmagnetisierungszyklus (in der jeweiligen Raumrichtung) durchlaufen. Es existieren Korrekturen für das Modellverhalten z. B. in [66] und [83].

## 6.4 DPC-Modell und Hysterengruppenmodell

Ausgehend vom zweiten Hauptsatz der Thermodynamik muss jeder Kreisprozess dissipativ sein (unter eventueller Berücksichtigung gespeicherter Energie bei  $t = 0$ ). In [127, Lemma 2.2.8 und Prop. 2.3.21] wurde bewiesen, dass dies beim isotropen DPC-Modell für periodische Eingänge der Fall ist (siehe weiter [127, Abschn. 2.5.3] sowie [41, 126]).

Die konsequente Vektorisierung des Preisach-Modells durch das DPC-Modell spiegelt sich auch im Dissipationsverhalten wider. Die Barkhausen-Sprungmethode kann ohne Weiteres auf ein Hysteron angewendet werden. Die Methode wurde in [58] explizit für das DPC-Modell eingeführt, sodass Abschnitt 6.1 als ein Spezialfall der Methode gesehen werden kann. Im skalaren Fall kann ohne größere Konsequenzen vorausgesetzt werden, dass alle relevanten Schaltvorgänge in einer Periode paarweise auftreten. Dies trifft auf das vektorielle Modell im Allgemeinen nicht zu, lediglich wenn der Eingang eine periodische Wechselgröße ist. Im Folgenden wird daher der Fall diskutiert, dass die betrachtete periodische Entwicklung des Eingangs den Zustandswechsel von starr zu beweglich genau einmal pro Periode bewirkt. Eine Erweiterung auf mehrere derartige Zustandsänderungen ist wieder problemlos möglich. Es wird analog zum skalaren Fall ein einzelnes Hysteron betrachtet.

Es gilt nach Erweiterung um  $\mathbf{H}_I$  (analog zum Vorgehen in [127]) bezogen auf das Einheitsvolumen

$$\Delta W_{\text{mag}} = \int_{\mathbf{B}(t_0)}^{\mathbf{B}(t_0+T)} (\mathbf{H}(\mathbf{B}) - \mathbf{H}_I) \cdot d\mathbf{B} + \int_{\mathbf{B}(t_0)}^{\mathbf{B}(t_0+T)} \mathbf{H}_I \cdot d\mathbf{B} . \quad (6.11)$$

Der zweite Summand ergibt, da nach Voraussetzung  $\mathbf{B}(t_0) = \mathbf{B}(t_0 + T)$ , stets Null. Er ist also konservativ. Der erste Summand wird umgeschrieben zu

$$\Delta W_{\text{mag}} = \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{H}(\mathbf{B}) - \mathbf{H}_I) \cdot \dot{\mathbf{B}} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_I) \cdot \mathbf{J}_B(\mathbf{H}) \dot{\mathbf{H}} dt . \quad (6.12)$$

Verläuft  $\mathbf{H}$  außerhalb der kritischen Oberfläche, gilt  $\mathbf{J}_B(\mathbf{H}) = \omega I_s \mathbf{J}_{e_m}(\mathbf{H})$  mit  $\mathbf{J}_{e_m}(\mathbf{H})$  gemäß (5.45) und es kann durch Einsetzen überprüft werden, dass  $(\mathbf{H} - \mathbf{H}_I)^T \mathbf{J}_{e_m}(\mathbf{H}) = 0$ . Es verbleibt die Betrachtung des Verhaltens, wenn  $\mathbf{H}$  innerhalb der kritischen Oberfläche verläuft. Eine Zustandsänderung findet nur statt, wenn  $\mathbf{H}$  nach Eintritt in die kritische Oberfläche diese wieder verlässt. Ist der Austrittszeitpunkt  $t_a$  gegeben, so kann der Eintrittszeitpunkt mit  $t_e = \max\{\tau \in [0, t_a] \mid \mathbf{H}(\tau) \notin \mathcal{S}\}$  unter den zuvor eingeführten Voraussetzungen angegeben werden. Die distributionelle Zeitableitung des Zustandsvektors im Zeitintervall  $[t_e, t_a]$  des Hysterons kann wieder mithilfe des Dirac-Impulses angegeben werden gemäß

$$\frac{\partial \mathbf{q}_{s_0}^S[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t)}{\partial t} = (\mathbf{q}_{s_0}^S[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t_a) - \mathbf{q}_{s_0}^S[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t_e)) \delta(t - t_a) . \quad (6.13)$$

Somit gilt für die Änderung der magnetischen Energie

$$\Delta W_{\text{mag}} = \omega I_s (\mathbf{H}(t_a) - \mathbf{H}_I) \cdot (\mathbf{q}_{s_0}^S[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t_a) - \mathbf{q}_{s_0}^S[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t_e)) . \quad (6.14)$$

Eine Reduktion auf den korrespondierenden skalaren Fall ergibt

$$\left\| \mathbf{q}_{s_0}^S[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t_a) - \mathbf{q}_{s_0}^S[\mathbf{H}, \boldsymbol{\xi}](t_e) \right\| = 2$$

und  $\|\mathbf{H}(t_a) - \mathbf{H}_I\| \equiv (H_\alpha - H_\beta)/2$  und somit zusammen mit der Orientierung der jeweiligen Vektoren genau (6.8).

Die Methoden liefern einen simplen Mechanismus zur Bestimmung der Verluste des diskreten DPC-Modells: Die gesamten Verluste werden berechnet durch die Summe der Verluste der einzelnen Sprünge. Das DPC-Modell ist ohne Korrekturen in der Lage, das Absinken der Verluste bei rotierender Magnetisierung in Sättigung wiederzugeben.

### Hysterongruppenmodell

Für das Hysterongruppenmodell mit kreisförmigen kritischen Oberflächen kann das Verlustintegral den Ausführungen in Abschnitt 5.2 folgend aufgestellt werden. Es wird der aufgelöste relevante Pfad mit dem Index 1 gegeben, der Verlauf des  $\mathbf{H}$ -Felds, der ihn auflöst, mit dem Index 2. Für beide Pfade lässt sich ein Dreieck mit den lokalen Größen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{e}$ , wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, konstruieren. Die Orientierungen der Größen werden in jedem Fall beibehalten. Die Verhältnisse sind in Abb. 6.1 illustriert. Beide Pfade sind über die Distanz zum Mittelpunkt gekoppelt. Um für ein einzelnes Hysteron den Sprung zu ermitteln, muss  $r(\lambda_1) = r(\lambda_2)$  gelten. Der Sprung ist dann proportional zur Differenz der zugehörigen Zustandsvektoren. Der Ausdruck

$$\lambda_1(\lambda_2) = -\frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_1)}{\|\mathbf{d}_1\|^2} - \sqrt{\frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{d}_1)^2}{\|\mathbf{d}_1\|^4} + \frac{\lambda_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{d}_2) + \lambda_2^2 \|\mathbf{d}_2\|^2}{\|\mathbf{d}_1\|^2}} \quad (6.15)$$

kann auf Basis von (5.12), unter Verwendung von  $\|\mathbf{a}_1\| = \|\mathbf{a}_2\|$ , angegeben werden. Es gilt weiter per Konstruktion  $\|\mathbf{a}_1 + \lambda_1(\lambda_2)\mathbf{d}_1\| = \|\mathbf{a}_2 + \lambda_2\mathbf{d}_2\|$ . Mit  $\theta(\lambda_2)$  wird der Winkel zwischen  $\mathbf{a}_1 + \lambda_1(\lambda_2)\mathbf{d}_1$  und  $\mathbf{a}_2 + \lambda_2\mathbf{d}_2$  bezeichnet. Damit lässt sich das Verlustintegral für die gegebene Konfiguration analog zu (5.17) aufstellen und vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{mag}} &= \frac{\omega_c I_s}{r_\Delta} \int_1^0 (\mathbf{a}_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2)^\top \frac{(\mathbf{a}_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2) (\mathbf{a}_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_2)}{\|\mathbf{a}_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2\|^2} \\ &\quad - (\mathbf{a}_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2)^\top \frac{(\mathbf{a}_1 + \lambda_1(\lambda_2) \mathbf{d}_1) (\mathbf{a}_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_2)}{\|\mathbf{a}_2 + \lambda_2 \mathbf{d}_2\|^2} d\lambda_2 \quad (6.16) \\ &= -\frac{\omega_c I_s}{r_\Delta} \int_0^1 (1 - \cos(\theta(\lambda_2))) \cdot ((\mathbf{a}_2, \mathbf{d}_2) + \lambda_2 \|\mathbf{d}_2\|^2) d\lambda_2 . \end{aligned}$$

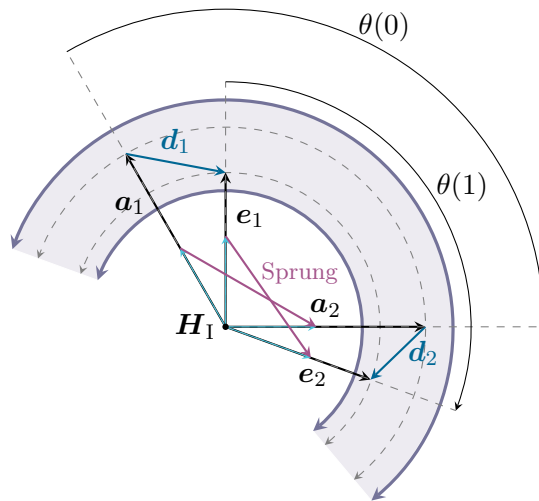


Abb. 6.1 – Lokale Größen zur Berechnung von Hystereseverlusten im Hysterongruppenmodell

Im ersten Schritt beinhaltet die Berechnung des Integrals die Bestimmung der Stammfunktion einer Funktion der Form

$$y(x) = \frac{(ax^2 + bx + c)\sqrt{dx^2 + ex + f}}{gx^2 + hx + k}.$$

Dies ist möglich, führt jedoch auf extrem große Terme, sodass es anzuraten ist, das Integral entsprechend der Gauß-Quadratur numerisch auszuwerten. Alternativ kann die Hysterongruppe wieder in diskrete Hysterons aufgeteilt werden. Die Verlustberechnung erfolgt dann mit (6.14). Ein Vorteil der numerischen Integration von (6.16) ist, dass alle Vorgänge erfasst werden, die Sprünge verursachen. Wird die Hysterongruppe durch festgelegte Hysterons approximiert, wird kein Sprung der Magnetisierung registriert, wenn keine der kritischen Oberflächen der diskreten Hysterons geschnitten wird.



## 7 Identifikation der Modellparameter des vektoriellen Preisach-Modells

In den vorhergehenden Kapiteln wurde das Hysterongruppenmodell eingeführt und untersucht. Dabei waren die Freiheitsgrade  $M_s$ ,  $\mathbf{H}_I$  und  $\omega$  der Hysterons stets beliebig. Diese Parameter allein bestimmen das konkrete Verhalten des Hysterese- oder Magnetisierungskurve nachzubilden, müssen diese demnach bestimmt werden. Generell existiert kein Ansatz, der in jedem Fall geeignet ist, das Ziel zu erreichen.

Für skalare Preisach-Modelle existieren zahlreiche Veröffentlichungen zur Identifikation der Preisach-Dichtefunktion. Diese unterscheiden sich zum Teil grundlegend in den getroffenen Annahmen, den benötigten Messdaten und den verwendeten Messverfahren. An dieser Stelle sei auf [42, 52, 56, 61, 64, 90] sowie die darin zitierte Literatur verwiesen. Häufig wird die Everett-Funktion oder Ähnliches zu Hilfe genommen (z. B. in [132, 160]), was eine direkte Anwendung der vorgestellten Konzepte schwierig gestalten kann. Generell finden sich jedoch einige Grundideen, die bei der Identifikation der Parameter skalarer Preisach-Modelle zum Vorschein treten, auch bei der Identifikation der Parameter des Hysterongruppenmodells wieder.

Im Hinblick auf das vektorielle Preisach-Modell muss zuerst geklärt werden, in welcher Form die Gewichte  $\omega$  vorliegen (siehe auch [90]). In [43, 44] wird postuliert, dass die Gewichte sich in Abhängigkeit der Position und des Radius der kritischen Oberfläche des zugehörigen Hysterons durch ein Produkt einer Gauß-Verteilung und einer Lorentz-Verteilung berechnen lassen. Die analytische Form der Verteilungsfunktion ist somit fest vorgegeben und es verbleibt die Aufgabe, drei Verteilungsparameter zu bestimmen. Der Vorteil dieser Methode liegt in der immensen Reduktion der Parameterzahl. Ferner können, sofern die Verteilungsparameter vorliegen, sofort Gewichte für beliebig aufwendige Hysterese-Modelle berechnet werden. Demgegenüber stehen die Nachteile, dass die zu bestimmenden Parameter nichtlinear in die resultierende Bestimmungsgleichung eingehen und dass die Vorgabe der Verteilungsfunktionen die modellierbaren Magnetisierungskurven unter Umständen stark einschränkt.

Im weiteren Verlauf wird ein alternativer Weg beschritten, der vorsieht, die Gewichte der Hysterons direkt zu bestimmen (dieser wird u. a. in [39, 127] gewählt). Es werden zuerst die Gewichte des diskreten Modells identifiziert, die Gewichte des Hysterongruppenmodells werden anschließend aus den Gewichten des diskreten Modells berechnet.

### 7.1 Auswahl der Identifikationshysterons

Erster Schritt bei der Identifikation der Preisach-Dichten ist die Vorgabe einer Startverteilung von Hysterons, deren Gewichte in einer Optimierung bestimmt werden. Diese wird wie später beschrieben in den folgenden Schritten verfeinert. Im Folgenden werden Regeln aufgeführt, die es erleichtern, brauchbare Verteilungen von Identifikationshysterons zu finden.

Vor der eigentlichen Identifikation der Gewichte ist es sinnvoll, Struktur in die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade zu bringen. Dies geschieht auf mehreren Ebenen, die nachfolgend beschrieben werden.

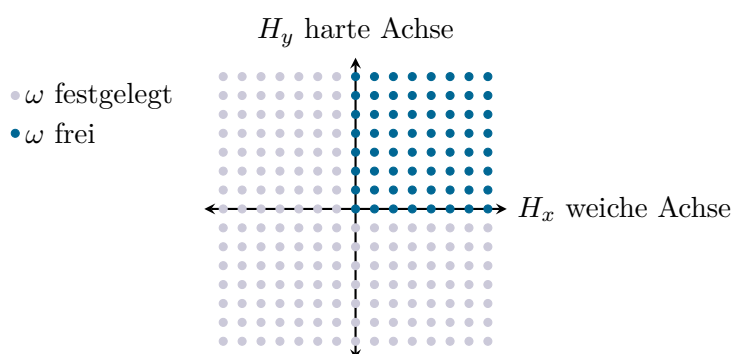
### 7.1.1 Allgemeingültige Symmetrien

Die Ausnutzung von Symmetrien ist wichtig, um bei der Identifikation Gleichungssysteme mit einer moderaten Zahl von Unbekannten zu erhalten (ca.  $10^3$ – $10^4$ ).

Ferromagnetische Werkstoffe sind im Allgemeinen anisotrop, dergestalt dass sie eine harte und eine weiche Magnetisierungsachse besitzen, jedoch ist ihr Magnetisierungsverhalten entlang einer Raumrichtung unabhängig davon, ob die Anregung entlang dieser Richtung positiv oder negativ ist. So ist u. a. die Neukurve magnetischer Werkstoffe punktsymmetrisch, bei Hysteresekurven hingegen besitzen fallende und steigende Äste (bei gleicher Amplitude der Anregung) dieselbe Form. Dieses Verhalten setzt im Falle des DPC-Modells voraus, dass Hysterons immer paarweise auftreten, sofern ihr Mittelpunkt nicht dem Nullpunkt der  $\mathbf{H}$ -Ebene entspricht. Das Hysteronpaar besitzt die Eigenschaften  $H_{11} = -H_{12}$  und die kritischen Oberflächen ergeben sich durch Spiegelung der jeweils anderen kritischen Oberfläche am Nullpunkt der  $\mathbf{H}$ -Ebene. Genauso muss der Übergang von der harten zur weichen Achse jeweils gleich verlaufen. Damit muss die Verteilung zusätzlich symmetrisch zur  $H_x$ -Achse und zur  $H_y$ -Achse sein. Dies schränkt die Lage der frei wählbaren Hysteronmittelpunkte auf den ersten Quadranten der  $\mathbf{H}$ -Ebene ein, wobei dessen Rand mit eingeschlossen ist.

Ein weiteres Argument für die Symmetrie ist, dass das Verhalten des Werkstoffs bei Rotation des magnetischen Felds im Uhrzeigersinn gleich dem Verhalten bei Rotation gegen den Uhrzeigersinn ist. Dies wurde für Messungen mit rotierenden Feldern kontrovers diskutiert (vgl. *clockwise counter-clockwise problem*); unterschiedliche Ergebnisse können jedoch auf unterschiedliche Auswirkungen von Messfehlern zurückgeführt werden [175, S. 444].

Zusammenfassend kann die Zahl der zu bestimmenden Freiheitsgrade durch Ausnutzung der allgemeingültigen Symmetrie auf ca. 25% der ursprünglichen Anzahl gesenkt werden. Entscheidend ist, dass die harte und die weiche Magnetisierungsachse durch den gewählten Ausschnitt der zu identifizierenden Hysterons abgedeckt sind, dies ist in Abb. 7.1 illustriert.



**Abb. 7.1** – Verteilung von Hysterons mit festgelegten und frei wählbaren Gewichten nach Berücksichtigung der Symmetrie

### 7.1.2 Messdatenbasierte Begrenzung

Die Startverteilung und auch die folgenden Verteilungen der Hysterons sollten die Forderung erfüllen, dass alle kritischen Oberflächen innerhalb der konvexen Hülle aller Messpunkte in

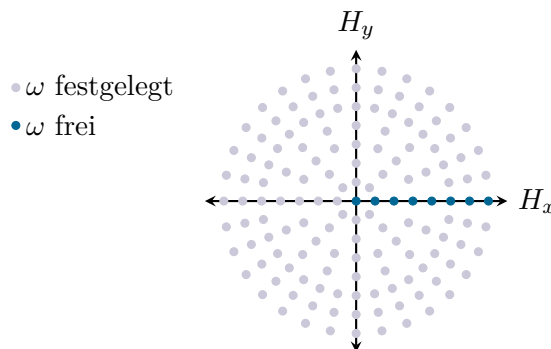
der  $\mathbf{H}$ -Ebene liegen, oder diese nur geringfügig überschreiten. Dies limitiert den Einfluss von Hysterons, deren Schaltverhalten anhand der gegebenen Messdaten nicht (hinreichend) beobachtet werden kann.

Liegen nur Messdaten für eine Magnetisierungsrichtung im Raum vor, kann eine zweckmäßige Hülle z. B. durch einen Kreis mit einem Radius entsprechend des größten innerhalb der Messdaten vorkommenden Werts des magnetischen Felds konstruiert werden. In diesem Fall bietet es sich überdies an, die Identifikationshysterons weiter einzuschränken, wie im nächsten Teilabschnitt beschrieben.

### 7.1.3 Parameterreduktion für isotrope Materialien

Im Falle isotroper Materialien kann eine weitere deutliche Reduktion der zu identifizierenden Parameter erreicht werden. Da das Verhalten des Hysterese Modells in jeder Raumrichtung (näherungsweise) gleich sein soll, genügt es, für isotrope Materialien ein radiales Gitter von Identifikationshysterons einzuführen und die Freiheitsgrade der Hysterons entlang einer Achse zu bestimmen. Die Ausführungen über Symmetrien behalten weiter ihre Gültigkeit, sodass die positive Achse genügt.

Bei radialen Gittern ist es (unabhängig von der Isotropie) ratsam, mit steigender Distanz des Hysteronsmittelpunkts zum Ursprung entlang der Winkelkoordinate neue Hysterons einzusetzen. So wird verhindert, dass es Raumrichtungen gibt, entlang derer sich die Wirkung der stattfindenden Schaltvorgänge maßgeblich unterscheidet. Mit einer diskreten Version des DPC-Modells, aber auch mit dem Hysterongruppenmodell, kann keine perfekt isotrope Magnetisierungskennlinie nachgebildet werden. In guter Näherung trifft die Annahme der Isotropie jedoch zu (siehe Anhang B.3). Ein kubisches Gitter bedingt grundsätzlich eine größere numerische Anisotropie als ein radiales Gitter, da sich die Verteilung der Hysterons zwischen den Raumrichtungen stärker unterscheidet. In Abb. 7.2 sind freie und festgelegte Identifikationshysterons für isotrope Materialien dargestellt. Haben zwei Hysterons den gleichen Abstand  $\|\mathbf{H}_I\|$  sowie die gleiche kritische Oberfläche, so besitzen sie im Falle eines isotropen Materials das gleiche Gewicht  $\omega$ .



**Abb. 7.2** – Verteilung von Hysterons mit festgelegten und frei wählbaren Gewichten nach Berücksichtigung der Isotropie

## 7.2 Bestimmung der Preisach-Dichten

In den meisten Fällen liegen magnetische Messdaten für Elektrobleche in Form von  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  vor. Dies wird in den weiteren Ausführungen vorausgesetzt. Im weiteren Verlauf bezeichnet  $\mathcal{H}$

die Menge aller bezüglich  $\mathbf{H}$  zur Verfügung stehenden Messserien  $\mathcal{H}$ . Zu den gemessenen Werten von  $\mathbf{H}$  existieren Werte von  $\mathbf{B}$ , die nach dem gleichen Schema bezeichnet werden, d. h. einzelne Messserien mit  $\mathcal{B}$  und die Menge bestehend aus allen Messserien, bzw. aus allen gemessenen Werten von  $\mathbf{B}$ , mit  $\mathcal{B}$ . Eine Messserie bezeichnet jeweils einen Verlauf von gemessenen zeitlich aufeinander folgenden  $\mathbf{H}$ - und  $\mathbf{B}$ -Werten.

### 7.2.1 Nichtnegative Minimierung der Fehlerquadrate

Unabhängig von der konkreten Topologie der vorgegebenen Hysteroneverteilung verläuft die Berechnung der Gewichte immer gleich. Es gilt das lineare Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{y}} \|\mathbf{K}\mathbf{y} - \mathbf{b}\|^2 \quad \text{mit} \quad y_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (7.1)$$

zu lösen. Darin ist  $\mathbf{K}$  die Identifikationsmatrix,  $\mathbf{y}$  der Gewichtsvektor und  $\mathbf{b}$  der Messwert- und Strafvektor.

Die Identifikationsmatrix selbst wird zusammengesetzt aus der Messmatrix  $\mathbf{S}$  und der Regularisierungsmatrix  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Für  $m$  Hysterons, deren Gewicht aufgrund von Symmetrie oder Isotropie gleich ist, werden die Zustände, die im  $n$ -ten Zeitschritt der Messserie  $\mathcal{H}_k$  vorliegen, gemäß

$$\tilde{\mathbf{q}}_i[\mathcal{H}_k](t_{kn}) = \sum_{j=1}^m \mathbf{q}_j[\mathcal{H}_k](t_{kn}) \quad (7.3)$$

zusammengefasst zum Zustand  $\tilde{\mathbf{q}}_i$ , der  $i$ -ten Klasse von Hysterons mit gleichem Gewicht.

Liegen insgesamt  $k$  Messreihen mit  $n$  Eingangswerten je Messreihe vor, ergibt sich die Messmatrix damit zu

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1[\mathcal{H}_1](t_{11}) & \cdots & \tilde{\mathbf{q}}_i[\mathcal{H}_1](t_{11}) & \mu_0 \mathcal{H}_1(t_{11}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{q}}_1[\mathcal{H}_1](t_{1n}) & \cdots & \tilde{\mathbf{q}}_i[\mathcal{H}_1](t_{1n}) & \mu_0 \mathcal{H}_1(t_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{q}}_1[\mathcal{H}_k](t_{k1}) & \cdots & \tilde{\mathbf{q}}_i[\mathcal{H}_k](t_{k1}) & \mu_0 \mathcal{H}_k(t_{k1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{q}}_1[\mathcal{H}_k](t_{kn}) & \cdots & \tilde{\mathbf{q}}_i[\mathcal{H}_k](t_{kn}) & \mu_0 \mathcal{H}_k(t_{kn}) \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Mithilfe der letzten Spalte der Matrix wird der lineare Anteil  $\mu_r \mu_0 \mathbf{H}$  der Magnetisierung bestimmt. Somit gilt nach der Identifikation

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\omega}_i \\ \mu_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \mu_r \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

wobei mit  $\tilde{\omega}$  das individuelle Gewicht der Hysterons in der jeweiligen Klasse bezeichnet wird. Der Vektor  $\mathbf{b}$  setzt sich zusammen aus der Polarisation, die aus den Messwerten berechnet werden muss, sowie Nulleinträgen, die zu den Zeilen der Regularisierungsmatrix gehören:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1(t_{11}) - \mu_0 \mathcal{H}_1(t_{11}) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_1(t_{1n}) - \mu_0 \mathcal{H}_1(t_{1n}) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_k(t_{k1}) - \mu_0 \mathcal{H}_k(t_{k1}) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_k(t_{kn}) - \mu_0 \mathcal{H}_k(t_{kn}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Als letzter unbestimmter Teil verbleibt die Regularisierungsmatrix  $\mathbf{P}$ , auf die im nächsten Abschnitt weiter eingegangen wird. Nachdem das Minimierungsproblem formuliert ist, kann ein Optimum mit Standardverfahren zur Minimierung der Fehlerquadrate unter Nebenbedingungen bestimmt werden. Hierzu wird auf [121] verwiesen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein *Innere-Punkte-Algorithmus* zur Bestimmung eines Optimums verwendet (siehe auch [168]).

### 7.2.2 Regularisierung der Identifikation

Das zuvor eingeführte Minimierungsproblem ist schlecht konditioniert. Im Normalfall überschreitet die Zahl der Hysterons die Zahl der Messpunkte deutlich, d. h. das Gleichungssystem  $\mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{b}$  ist im Fall, dass keine Regularisierungsmatrix vorhanden ist, unterbestimmt. Dies führt ohne Regularisierung im Allgemeinen dazu, dass die berechneten Preisach-Dichten nicht brauchbar sind. Mithilfe der Regularisierungsmatrix werden dem Gleichungssystem weitere Bedingungen hinzugefügt, die gewünschte Eigenschaften der Preisach-Dichteverteilung widerspiegeln. Das Hinzufügen einer Regularisierungsmatrix entspricht einer *Tikhonov-Regularisierung*, dies wird in [161] umfassend dargestellt und analysiert.

#### Topologiebasierte Regularisierung

Die Tikhonov-Matrizen werden basierend auf der Topologie der Hysteronverteilung gewählt. Die Ideen folgen [39] und [127].

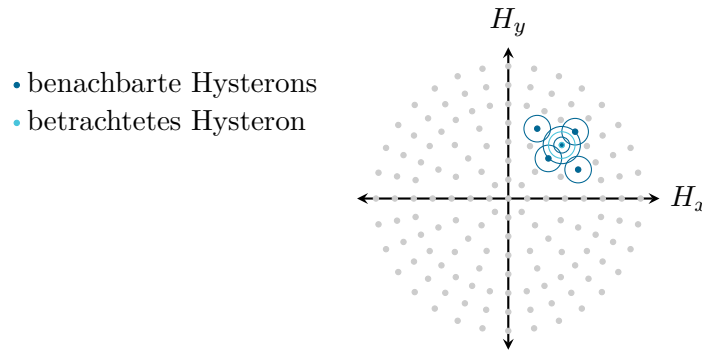
Um eine breitere Verteilung von Preisach-Dichten zu erhalten, wird in [39] vorgeschlagen, große Werte der Preisach-Dichte zu bestrafen. Dies geschieht formal, indem das Teilgleichungssystem

$$\mathbf{P}_{\text{abs}}\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (7.7)$$

in das Gleichungssystem  $\mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{b}$  integriert wird. Die Matrix  $\mathbf{P}_{\text{abs}}$  entspricht der gewichteten Einheitsmatrix, deren Dimension gleich der Zahl der unbekanntenen Preisach-Gewichte  $i$  ist, mit einer zusätzlichen Nullspalte, um den Faktor  $\mu_{\text{T}}$  nicht zu bestrafen:

$$\mathbf{P}_{\text{abs}} = \begin{pmatrix} & 0 \\ \tau_{\text{a}} \mathbf{I}^{i \times i} & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Darüber hinaus erweist es sich als vorteilhaft, wie in [127] zu fordern, dass Hysterons, die bezüglich ihrer Position oder bezüglich ihrer kritischen Oberflächen *benachbart* sind, nur geringfügig unterschiedliche Preisach-Dichten besitzen. Im Falle der kritischen Oberflächen muss für jede Form geklärt werden, was Nachbarschaft konkret bedeutet. Hierzu kann auf einen Ordnungsparameter gemäß Kapitel 4 zurückgegriffen werden. Für die hier behandelten sphärischen kritischen Oberflächen bedeutet Nachbarschaft, dass zwei Hysterons das gleiche Zentrum  $\mathbf{H}_1$  besitzen und ihre kritischen Oberflächen Radien besitzen, die in der diskreten Verteilung der Radien aufeinander folgen. Bezüglich der Position bedeutet Nachbarschaft bei einem radialen Hysterongitter, dass die Mittelpunkte zweier Hysterons mit gleicher kritischer Oberfläche nebeneinander auf demselben Kreis um den Ursprung liegen oder beide um denselben Winkel zum Ursprung gedreht sind und aufeinanderfolgende Abstände zum Ursprung besitzen. In Abb. 7.3 sind die Nachbarschaftsverhältnisse illustriert.



**Abb. 7.3** – Topologie der Hysterongitterverteilung, exemplarische Darstellung eines Hysterons und seiner Nachbarn

Es ist ersichtlich, dass die eingeführte Topologie auch um weitere Nachbarschaftsverhältnisse erweitert werden könnte, z. B. durch Diagonalverbindungen. Unter Umständen befinden sich die dadurch hinzugefügten Nachbarn eines Hysterons bezüglich ihres Mittelpunkts näher am betrachteten Hysteron als die bestehenden Nachbarn. Der Implementierungsaufwand zur Bestimmung der Topologieinformationen steigt jedoch deutlich. Ferner ist eine schwächere Kopplung zwischen den Hysterons durch die jeweils bestehenden Nachbarschaften gegeben. Im Zuge der vorliegenden Arbeit war es nicht notwendig, die Regularisierung um weitere Nachbarschaftsverhältnisse zu erweitern.

Bei der Identifikation müssen nur Nachbarschaftsverhältnisse zwischen Hysterons berücksichtigt werden, deren Gewicht nicht durch Symmetrie oder Isotropie vorgegeben ist. Besteht eine Nachbarschaft zwischen den Hysterons, denen die Gewichte  $\omega_i$  und  $\omega_j$  mit  $j > i$  zugeordnet sind, so bedeutet dies bezüglich der Teilmatrix  $\mathbf{P}_{\text{nei}}$

$$\mathbf{P}_{\text{nei}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & 0 & \tau_n & 0 & \cdots & 0 & -\tau_n & 0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Der Faktor  $\tau_n$  gewichtet (analog zu  $\tau_a$  zuvor) die Differenz der Gewichte benachbarter Hysterons. Die gesamte Regularisierungsmatrix  $\mathbf{P}$  wird aus den Teilmatrizen zur Berücksichtigung der Nachbarschaft und des Betrags zusammengesetzt:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\text{abs}} \\ \mathbf{P}_{\text{nei}} \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Die Wahl der Faktoren  $\tau_a$  und  $\tau_n$  beeinflusst die Identifikation stark, wobei eher die Größenordnung der Faktoren entscheidend ist, nicht ihr exakter Wert. Auf die Wahl der Faktoren wird bei der konkreten Identifikation in Kapitel 9 näher eingegangen.

### Priorisierung von Messreihen

Es konnte beobachtet werden, dass die korrekte Nachbildung von Messreihen, die einen großen Bereich von  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  abdecken, dazu führt, dass auch Messreihen, die kleinere Bereiche von  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  abdecken, gut nachgebildet werden. Umgekehrt trifft dies nicht zu. Darüber hinaus kann es vorkommen, wenn sehr viele Messreihen für die Identifikation verwendet werden, dass die Nachbildung der Messkurven für alle Kurven von schlechterer Qualität ist als für den Fall, dass weniger Messkurven für die Identifikation verwendet werden. Dies motiviert, neben einer Vorselektion von Messdaten, auf die später eingegangen wird, dass Messreihen priorisiert werden sollen. Dies geschieht, indem die zur jeweiligen Messreihe gehörenden Zeilen in  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{b}$  mit dem Faktor  $\tau_p$  multipliziert werden.

### Einfügen von Zwischenpunkten

Messungen bei Wechsellagerung werden meist spannungsgeführt durchgeführt. Das bedeutet, dass die Änderung von  $\mathbf{B}$  bei der Messung vorgegeben wird. Dies führt je nach Grad der erreichten Sättigung dazu, dass bei häufig äquidistanten  $\mathbf{B}$ -Werten der Abstand der  $\mathbf{H}$ -Werte stark ansteigt. Für die Identifikation ist andererseits  $\mathbf{H}$  entscheidend für eine gute Abdeckung der Parameterebene. Daher ist es sinnvoll, z. B. durch lineare Interpolation Wertepaare von  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  in die Messreihe einzufügen. Dadurch wird vermieden, dass bestimmte Bereiche einer Hystereseurve gegenüber anderen Bereichen priorisiert werden.

### 7.2.3 Nachgelagerte Berechnungen

Nach der Identifikation liegt erfahrungsgemäß eine große Anzahl von Hysterons vor, die nur wenig zum Verlauf der Magnetisierungskennlinie beitragen. Es empfiehlt sich diese aus dem Modell zu entfernen. Dies kann geschehen, indem alle Hysterons, deren Gewichte unterhalb einer gewissen Schranke  $\omega_{th}$  liegen (z.B.  $10^{-3} \omega_{max}$ ), entfernt werden<sup>1</sup>. Anschließend sollten die verbleibenden Gewichte und der lineare Anteil erhöht werden, um die entfallenen Gewichte zu kompensieren.

Mit  $\tilde{\omega}$  werden wie zuvor die Gewichte der Hysterons innerhalb der verschiedenen Klassen bezeichnet, wie sie durch die Identifikation berechnet wurden. Die Gewichte aller  $n$  Hysterons  $\omega'$  ergeben sich aus  $\tilde{\omega}$ , indem allen Hysterons einer Klasse, deren Gewicht aufgrund von Symmetrien identifiziert wurde, das entsprechende berechnete Gewicht zugewiesen wird. Die Klassen werden sozusagen wieder expandiert. Durch  $\omega_\kappa := \{\omega'_i | 1 \leq i \leq n, \omega'_i \geq \omega_{th}\}$  werden alle  $m$  Gewichte in  $\omega'$  bezeichnet, deren Wert größer ist als die zuvor festgelegte Schranke. Dann lässt sich der Korrekturfaktor bestimmen zu

$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^n \omega'_i}{\sum_{j=1}^m \omega_{\kappa j}} . \quad (7.11)$$

<sup>1</sup>Ein exakter Wert für die Schranke kann nicht angegeben werden. Gute Ergebnisse wurden mit Werten im Bereich zwischen  $10^{-3} \omega_{max}$ – $10^{-2} \omega_{max}$  erzielt.

Die schlussendlich zur Modellierung verwendeten normierten Gewichte  $\omega$  berechnen sich komponentenweise nach

$$\omega_i = \frac{\omega_{\kappa i}}{\sum_{j=1}^m \omega_{\kappa j}}, \quad (7.12)$$

wodurch für  $M_s$  gefordert werden muss

$$M_s = \nu_0 \kappa \sum_{j=1}^m \omega_{\kappa j}. \quad (7.13)$$

Die Reduktion der Hysteranzahl verschlechtert die Identifikationsgüte (abhängig von der gewählten Schranke) in kleinem Maße.

### 7.3 Adaptive Verfeinerung der Parameterebene

Nachdem die Gewichte ausgehend von einer Startverteilung der Hysterons bestimmt wurden, ist die Identifikationsgüte zumeist sehr gering. Diese kann jedoch erheblich erhöht werden, indem die Identifikation in mehreren Iterationen durchgeführt wird. Dabei wird stets das zuvor beschriebene Identifikationsschema auf verfeinerte Hysteronverteilungen angewendet. Es gilt zwei Dinge zu gewährleisten: Zum einen muss eine Degradation der Verteilung verhindert werden, zum anderen muss die Verteilung so verfeinert werden, dass eine Verbesserung der Identifikationsgüte eintritt.

Eine Degradation der Identifikationsebene (entspricht der  $\|\mathbf{H}_I\|$ - $r$ -Ebene) wird verhindert, indem darauf geachtet wird, dass der Parameterraum weitgehend zusammenhängend ist und möglichst geradlinige Ränder besitzt. Dies lässt sich realisieren, indem gewährleistet wird, dass jedes Hysteron in der für die Identifikation zugrundeliegenden Verteilung stets einen Nachbarn besitzt, dessen Position näher am Nullpunkt der  $\mathbf{H}$ -Ebene liegt. Die einzige Ausnahme bildet das Hysteron, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist. Bei großen Lücken in der Parameterebene kann darauf verzichtet werden, diese zu schließen, da das Entstehen großer Lücken bereits ein Indiz dafür ist, dass die betroffenen Hysterons nicht gut für die Modellierung der Magnetisierungskennlinie geeignet sind. Als Gradmesser für die Größe einer Lücke dient der Abstand zwischen Nachbarn in radialer Richtung im Startgitter. Ist die Lücke größer als ca. viermal der ursprüngliche Abstand zwischen zwei benachbarten Radien, kann diese als groß angesehen werden und muss nicht gefüllt werden.

Darüber hinaus sollten insbesondere für isotrope Materialien Lücken entlang der Winkelkoordinate im radialen Gitter gefüllt werden. Es ist weiterhin sinnvoll, Hysterons an Rändern hinzuzufügen, um der Verteilung zu erlauben, entlang dieses Randes zu wachsen, sofern dies benötigt wird. Erfahrungsgemäß benötigt der Algorithmus für den Fall bei isotropen Materialien ca. 3–4 Iterationen, um ein zufriedenstellendes Identifikationsergebnis zu liefern. Hierfür kann kein festes Kriterium, wie z. B. die maximale oder mittlere Abweichung zwischen gemessenen und berechneten Daten, angegeben werden. Entscheidend ist die qualitative Übereinstimmung der berechneten und gemessenen Magnetisierungsverläufe.

Für die Verfeinerung und Korrektur des Gitters können keine harten Kriterien angegeben werden, weshalb es in diesem Abschnitt bei einer eher qualitativen Schilderung bleibt. Um den Prozess zu illustrieren, wird in Abb. 7.4 anhand einer gegebenen Repräsentation von Hysterons in der  $\|\mathbf{H}_I\|$ - $r$ -Ebene gezeigt, wie die resultierende Parameterebene durch Verfeinerung und Korrektur aus der ursprünglichen Parameterebene hervorgeht. Durch die Korrektur kann die Kontinuität der identifizierten Verteilung verbessert werden, auf die Güte der Identifikation hat sie jedoch nur geringen Einfluss.



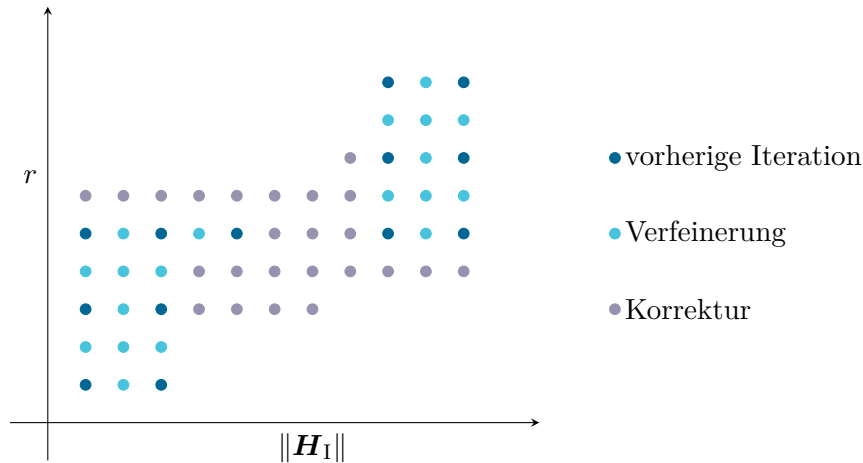


Abb. 7.4 – Schematische Darstellung von Verfeinerung und Korrektur der Parameterebene

## 7.4 Resultierender Identifikationsalgorithmus

Der resultierende Identifikationsalgorithmus ist in Abb. 7.5 dargestellt. Es besteht die Freiheit, Faktoren und Grenzen wie  $\omega_{th}$ ,  $\tau_a$ , etc. von Iteration zu Iteration anzupassen. Dies ist jedoch im Allgemeinen nicht nötig. Der Fokus des Algorithmus liegt darauf, schrittweise eine zusammenhängende Preisach-Dichteverteilung zu errechnen, welche die gegebenen Messdaten möglichst exakt nachbildet.

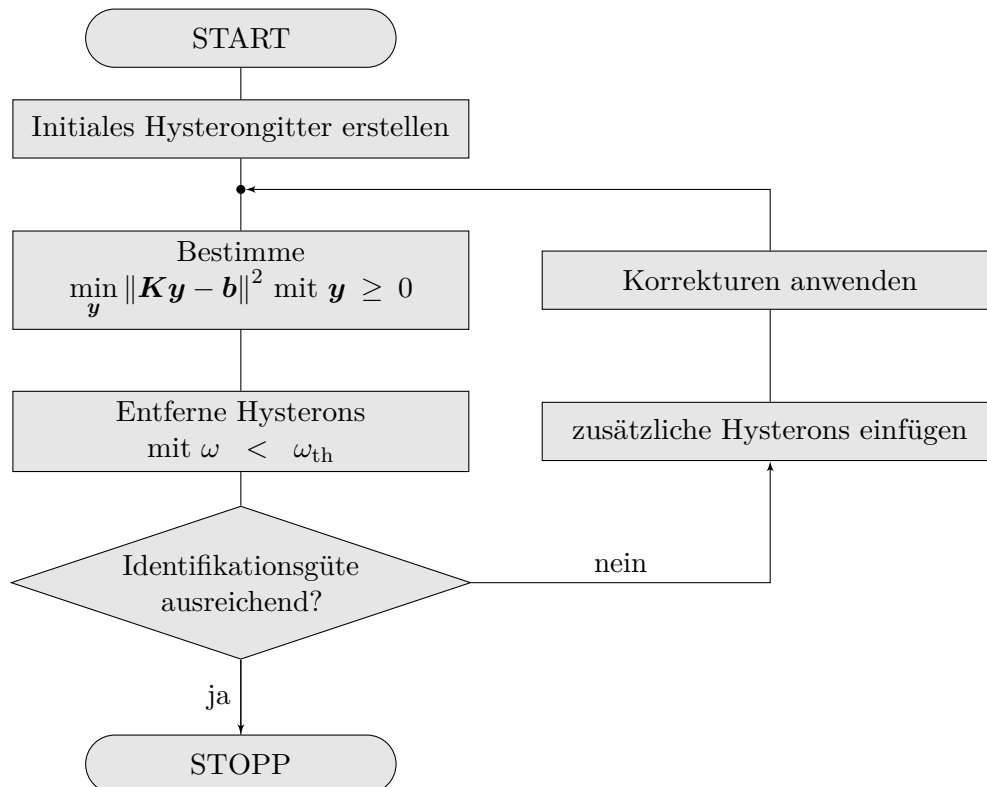


Abb. 7.5 – Schematische Darstellung des Identifikationsalgorithmus

## 7.5 Zusammenfassung zu Hysterongruppen

Durch den zuvor geschilderten Identifikationsalgorithmus werden die Gewichte eines diskreten DPC-Modells direkt bestimmt. Durch die Regularisierungsmatrizen, die für eine Bevorzugung von Verteilungen mit vielen Hysterons mit kleinen Dichtewerten sorgen, sind einem Großteil der diskret verteilten Zentren  $\mathbf{H}_1$  innerhalb der Identifikationsebene mehrere Hysterons zugeordnet. Die Grundidee bei der Bestimmung der für das Hysterongruppenmodell benötigten Parameter ist es, analog zur Idee bei der Herleitung des Modells, diese diskreten Hysterons zu einer Gruppe zusammenzufassen.

Hierzu werden Hysterons betrachtet, die dasselbe Zentrum besitzen. Es wird, ausgehend vom Zentrum der Hysterons, der Abstand zum Zentrum der Hysterons erhöht und die Dichte der dabei durchschrittenen kritischen Oberflächen kumuliert. Dies ist in Abb. 7.6 dargestellt. Anschließend wird die entstandene Treppenfunktion durch eine Gerade angenähert. Dies geschieht so, dass eine gegebene maximale Abweichung (z. B. ein Drittel der minimalen Stufenhöhe) zwischen Treppenkurve und Gerade nicht überschritten wird. Ist dies der Fall, so wird ausgehend von der letzten Stufe, die sich mit der zuvor gewählten Gerade noch zufriedenstellend annähern ließ, eine weitere Gerade eingeführt. Dieser Prozess wird fortgesetzt, bis das Ende der Treppenkurve erreicht ist. Im ungünstigsten Fall wird für jede der Stufen ein Geradenstück benötigt. Der Innenradius  $r_i$  und der Außenradius  $r_o$  einer Hysterongruppe korrespondieren dann mit dem Beginn und dem Ende eines Geradenstücks bezüglich der Radialkoordinate. Das Gewicht der Hysterongruppe entspricht dem kumulierten Gewicht der Stufen, die durch das Geradenstück ersetzt worden sind.

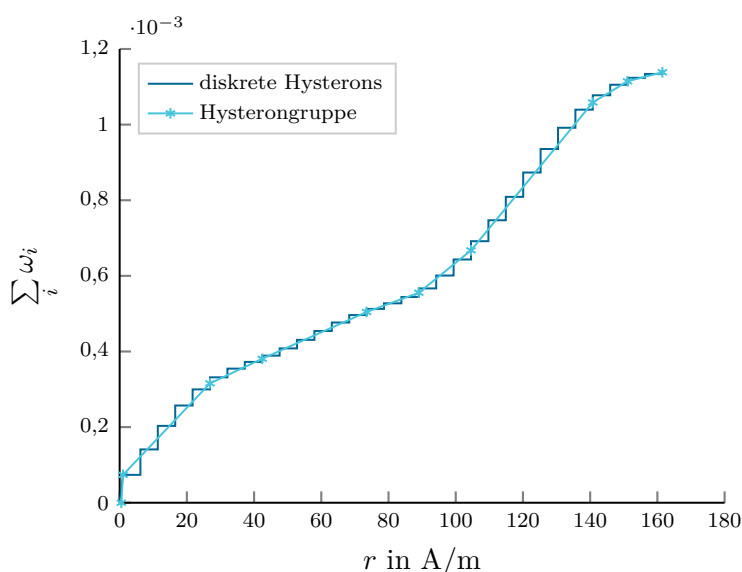


Abb. 7.6 – Ermittlung des Gewichts einer Hysterongruppe aus Gewichten diskreter Hysterons

## 7.6 Bemerkungen zu weiterführenden Themen

In den beiden folgenden Unterabschnitten wird auf die Parameteridentifikation für anisotrope Materialien und die messtechnische Bestimmung der Magnetisierungsverläufe eingegangen. Beide Themen werden jedoch nicht erschöpfend behandelt.

### 7.6.1 Identifikation für anisotrope Materialien

Die Identifikation anisotroper Materialien ist mit zusätzlichen Schwierigkeiten verbunden. Während die Reduktion der Parameterebene weiter durchgeführt werden kann (unter Umständen sogar die Reduktion für isotrope Materialien), besitzen anisotrope Materialien den zusätzlichen Freiheitsgrad der Form der kritischen Oberflächen. Dieser geht nichtlinear in die Berechnungen mit ein. Dadurch ist der Algorithmus in dieser Form für anisotrope Materialien nicht durchführbar.

Denkbar ist z. B., eine Magnetisierungsrichtung als Leitrichtung zu verwenden und die Parameter anhand dieser Richtung wie im isotropen Fall zu bestimmen. Anschließend kann z. B. bei elliptischen kritischen Oberflächen versucht werden, das Magnetisierungsverhalten in den anderen Raumrichtungen durch eine Anpassung einer Achse der Ellipse zu erreichen. Dies würde einen zweistufigen Algorithmus bedeuten. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde dieser jedoch nicht umgesetzt.

### 7.6.2 Messtechnische Bestimmung der Identifikationsdaten

Bisher wurde nicht weiter auf die Art der Messdaten eingegangen, die zur Identifikation genutzt wurden. Im Zuge dieser Arbeit wurden stets Messdaten verwendet, die unter Verwendung eines Epsteinrahmens [69] aufgenommen wurden. Dieser wird in [28, 93, 157] detailliert beschrieben. Er gehört zur Klasse der Wechselfeldmesseinrichtungen, genau wie Ringkerntester und Einzelblatttester. Durch die beschriebene starke Parameterreduktion reichen die zugehörigen Messungen entlang einer Magnetisierungsachse aus, um die Hysterengewichte zu identifizieren. Weiter enthalten sie keine Informationen über Materialanisotropien (sofern nur Messdaten für eine Richtung verwendet werden). Diese wiederum führen zu Schwierigkeiten bei der Identifikation, da das bei isotropen Materialien verwendete Identifikationsgitter (bestehend aus Hysterons mit kreisförmigen kritischen Oberflächen) per Konstruktion keine Anisotropien abbilden kann.

Demgegenüber stehen Messverfahren, die in der Lage sind, das vektorielle (v. a. zweidimensionale) Magnetisierungsverhalten von Werkstoffen zu erfassen. Zu nennen wären z. B. der *round rotational single sheet tester* (abgekürzt RRSST). Dieser wird z. B. in [83] eingesetzt, um die Parameter eines anisotropen Hysterese Modells zu bestimmen. Weiter wird die Apparatur zur Vermessung stark anisotroper kornorientierter Materialien verwendet [79]. Darüber hinaus existiert eine Vielzahl weiterer Aufbauten zur mehrdimensionalen Charakterisierung von Werkstoffen, eine umfassende Übersicht ist in [175] gegeben. Mehrdimensionalen Messungen kommt vor allem im Zuge der Parameteridentifikation für anisotrope Materialien eine große Bedeutung zu. Problematisch ist in den meisten Fällen die akkurate Erfassung des  $\mathbf{B}$ -Felds und des  $\mathbf{H}$ -Felds. Die Induktion wird meist durch Messspulen innerhalb des Prüflings bestimmt. Die Messung der magnetischen Feldstärke erfordert häufig den Einsatz von Tangentialfeldspulen. Deren Anwendung geht mit vergleichsweise hohen Ansprüchen an den Aufbau des Messplatzes einher [175, Kap. 3.2]. In Verbindung mit dem DPC-Modell ist die Frage ungeklärt, unter welchen Voraussetzungen unidirektionale Messdaten (in mehreren Raumrichtungen) ausreichen, um auch das anisotrope Materialverhalten zu charakterisieren.



# 8 Berechnung statischer Magnetfelder mit Hysterese

Auf Basis der Inhalte in den Kapiteln 3–5 werden nun Berechnungsschemata erarbeitet, die verwendet werden können, um Feldprobleme mit Hysterese zu lösen. Bei der Anwendung in Kapitel 9 wird auf das Newton-Verfahren zurückgegriffen. Da im Zusammenhang mit Hysterese jedoch auch alternative Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme große Popularität genießen, wird auch auf diese eingegangen und ein Zusammenhang zwischen den Verfahren hergestellt. Es wird lediglich mit magnetostatischen Formulierungen gearbeitet.

## 8.1 $M(\mathbf{B})$ - und $M(\mathbf{H})$ -Iteration

Die einfachsten Iterationsschemata für Feldprobleme mit Hysterese sind die  $M(\mathbf{B})$ -Iteration und die  $M(\mathbf{H})$ -Iteration. Wird das magnetische Vektorpotential zur Beschreibung des magnetischen Felds verwendet, so lösen die Iterationsschemata das Variationsproblem 3.2 direkt. Ausgehend von einem Startwert für  $\mathbf{M}$  wird die Lösung von (3.86) bestimmt, um anschließend auf Basis der erhaltenen Ergebnisse  $\mathbf{M}$  zu aktualisieren und die Berechnungen erneut durchzuführen. Entsprechend ihrem Namen wird bei der  $M(\mathbf{B})$ -Iteration  $\mathbf{M}$  auf Basis des  $\mathbf{B}$ -Felds aktualisiert (es wird demnach ein inverses Hysteresemodell benötigt). Analog wird bei der  $M(\mathbf{H})$ -Iteration  $\mathbf{M}$  auf Basis des  $\mathbf{H}$ -Felds aktualisiert (die Iterationsschemata sind am Ende des Kapitels dargestellt). Beide Iterationsverfahren werden in [120] für Feldprobleme mit Hysterese vorgestellt. Unter anderem sind darin Vorschriften für die Bestimmung von Schrittweiten zu finden.

Die Iterationsschemata finden vor allem aufgrund ihrer Robustheit Anwendung, allerdings ist ihre Konvergenzrate gering. In Verbindung mit einer  $\mathbf{A}$ -basierten Potentialformulierung sollte die  $M(\mathbf{B})$ -Iteration verwendet werden, da die  $M(\mathbf{H})$ -Iteration in diesem Fall äußerst langsam konvergiert (siehe auch [27]).

## 8.2 Polarisationsmethode

Unter den Fixpunktiterationen ist die Polarisationsmethode [51, 86] sehr verbreitet (Anwendungen u. a. in [64, 65, 118, 129, 130]). Die Methode kann in Richtung Robustheit oder schnelle Konvergenz entwickelt werden und stellt in Verbindung mit dem magnetischen Vektorpotential ein Bindeglied zwischen  $M(\mathbf{B})$ -Iteration und dem Newton-Verfahren dar. Es handelt sich um ein *Picard-Banach-Verfahren*.

Grundidee ist es die Relation

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

in den Variationsformulierungen zu ersetzen durch

$$\mathbf{B} = \mu_{\text{FP}}\mathbf{H} + \mathbf{I}_{\text{FP}} . \tag{8.1}$$

Hierbei wird die magnetische Flussdichte ausgedrückt durch eine ideelle Polarisierung  $\mathbf{I}_{\text{FP}}$  und eine ideelle Permeabilität  $\mu_{\text{FP}}$ . Analog kann eine ideelle Magnetisierung  $\mathbf{M}_{\text{FP}}$  in Verbindung mit einer ideellen Reluktivität  $\nu_{\text{FP}}$  verwendet werden, um  $\mathbf{H}$  auszudrücken. Welche der beiden Möglichkeiten verwendet wird, entscheidet die verwendete Potentialformulierung. In Anlehnung an die Quelle [86] wird im Folgenden auf Basis des durch (8.1) gegebenen Zusammenhangs argumentiert. Dieser wird zumeist mit dem magnetischen Skalarpotential verwendet. Im Fall, dass das magnetische Vektorpotential verwendet wird (siehe z. B. [65, 108]), kann mit den korrespondierenden Feldgrößen analog argumentiert werden. In jedem Iterationsschritt werden die gesuchten Potentialgrößen berechnet und die Feldgrößen aktualisiert. Gemäß

$$\mathbf{I}_{\text{FP}} = \mathbf{B} - \mu_{\text{FP}} \mathbf{H} \quad (8.2)$$

wird daraufhin die ideelle Polarisierung bestimmt. Anschließend wird mit dem neuen Polarisationswert die Bestimmung der Potentialgröße abermals durchgeführt. Als Abbruchkriterium dient entweder eine minimale Änderung der Polarisierung (siehe [86]) oder (wie im Falle des Newton-Verfahrens) eine Schranke bezüglich des Residuums.

Liegen (abhängig von der verwendeten Potentialformulierung) zwei Lösungen  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  vor, so konvergiert die Polarisationsmethode mit der Fixpunktgleichung  $\Psi(\mathbf{a})$ , wenn für ein  $\beta \in [0, 1)$  gilt, dass [86]

$$\|\Psi(\mathbf{a}_1) - \Psi(\mathbf{a}_2)\| \leq \beta \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|; \quad (8.3)$$

also dann, wenn  $\Psi(\mathbf{a})$  eine Kontraktion ist. Die Fixpunktgleichung ist meist nur indirekt gegeben und besteht aus der Kombination der Lösung des jeweiligen Variationsproblems und anschließenden Folgeberechnungen, z. B. der Berechnung der ideellen Polarisierung.

Die Schwierigkeit bei der Anwendung der Polarisationsmethode ist die Bestimmung eines geeigneten Wertes für die ideelle Permeabilität  $\mu_{\text{FP}}$ . Gewährleistet  $\mu_{\text{FP}}$ , dass der Kontraktionsfaktor  $\beta$  nahe Null liegt, so besitzt das Verfahren eine quadratische Konvergenz [65]. Das Verfahren ist in jedem Fall stabil, wenn gilt, dass

$$\mu_{\text{FP}} > \frac{\mu_{\text{max}}}{2}, \quad (8.4)$$

wobei  $\mu_{\text{max}}$  der maximalen Steigung der Magnetisierungskennlinie entspricht (siehe [51]). In [119] wird ein globaler Wert von

$$\mu_{\text{FP}} = \frac{\mu_{\text{max}} + \mu_{\text{min}}}{2} \quad (8.5)$$

vorgeschlagen (mit  $\mu_{\text{min}}$  entsprechend der minimalen Steigung der Magnetisierungskennlinie). Ein globaler Wert von  $\mu_{\text{FP}}$  resultiert jedoch im Allgemeinen in einer recht langsamen Konvergenz. Alternativ kann der Wert von  $\mu_{\text{FP}}$  in jedem Schritt angepasst werden (siehe z. B. [64, 65]). In diesem Fall wird die Methode in Richtung des Newton-Verfahrens verschoben und liefert vergleichbare Ergebnisse bezüglich der Rechenzeit (siehe [65]). Ein Vorteil der Polarisationsmethode ist, dass keine (exakte) Information über den Gradienten benötigt wird, da dieser für Hystereseemodelle häufig nicht trivial berechnet werden kann.

### 8.3 Newton-Verfahren

Das Newton-Verfahren stellt ebenfalls eine Fixpunktiteration zur Nullstellensuche dar. Das klassische Newton-Verfahren setzt voraus, dass der Gradient bzw. die Jacobi-Matrix der Größe, deren Nullstelle gesucht wird, an jeder beliebigen Stelle existiert. Dies ist, wie bereits in den Kapiteln 3 und 5 beschrieben, bei hysteresebehafteten Größen nicht der Fall. Konkret

ist  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  (sowie die inverse Relation) z. B. in Umkehrpunkten nicht differenzierbar. Dies hat zur Unterscheidung zwischen absteigenden und aufsteigenden Ästen im Falle von skalarer Hysterese geführt. Das Newton-Verfahren stellt in diesem Fall keine Konvergenz sicher und es existieren Veröffentlichungen (z. B. [70]), die aus diesem Grund auf das Newton-Verfahren in Verbindung mit Hysterese verzichten. Wird der Rahmen der Newton-Verfahren weiter als das klassische Newton-Verfahren gefasst und sogenannte nichtglatte Newton-Verfahren (engl. *non-smooth Newton methods*) mit eingeschlossen, so ergibt sich jedoch ein methodischer Rahmen, in dem Feldprobleme mit Hysterese ohne Einschränkungen behandelt werden können. Das Themengebiet der nichtglaten Newton-Verfahren ist groß, vor allem in der mathematischen Optimierung existiert eine Vielzahl von Anwendungen. Diese werden im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet, es wird die zugrundeliegende Theorie soweit eingeführt, wie es zur Behandlung der betrachteten Feldprobleme notwendig ist. Die Arbeiten rund um nichtglatte Newton-Verfahren bieten, über die nachfolgend dargestellten Inhalte hinaus, Möglichkeiten, weitere Methoden zu konstruieren, die auf die Berechnung von Feldproblemen mit Hysterese zugeschnitten sind.

Mithilfe der Methode der finiten Elemente, wie in Kapitel 3 beschrieben, sollen die im weiteren Verlauf eingeführten Variationsprobleme gelöst werden. Das Lösungsgebiet  $\Omega$  mit Rand  $\partial\Omega$  ist ein Lipschitz-Gebiet und wurde bereits gemäß Abb. 3.1 eingeführt. Hysterese ist ein zeitabhängiger Prozess, der selbst jedoch keine Dynamik besitzt. Daher genügt es, sofern keine Wirbelströme betrachtet werden, ein magnetostatisches Feldproblem zu lösen und Quellengrößen wie  $\mathbf{j}$  in jedem Iterationsschritt zu aktualisieren. Die notwendigen Anpassungen der Variationsprobleme zur Berücksichtigung von Wirbelströmen sind im Falle des magnetischen Vektorpotentials gering. Das zugehörige Variationsproblem wurde bereits in Kapitel 3 eingeführt.

### 8.3.1 A-basierte Iterationsschemata

Die Inhalte dieses Abschnitts wurden zu großen Teilen aus der eigenen Veröffentlichung [W7] übernommen. Das zu lösende magnetostatische Variationsproblem ergibt sich aus dem Wirbelstromproblem 3.6, indem alle Terme, die aus der Diskretisierung von  $\partial_t \mathbf{A}$  stammen, zu Null gesetzt werden. Damit lautet das diskrete magnetostatische Variationsproblem:

**Variationsproblem 8.1** Bestimme  $\mathbf{A} \in H_h(\text{rot}, \Omega)$ , sodass

$$(\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\mathbf{M}, \nabla \times \mathbf{v}) = (\mathbf{j}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_h(\text{rot}, \Omega) . \quad (8.6)$$

Abermals wird vorausgesetzt, dass  $H_h(\text{rot}, \Omega)$  Dirichlet-Randbedingungen an  $\mathbf{A}$  bereits berücksichtigt (siehe Kapitel 3), Neumann-Randbedingungen an  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{M}$  sind in  $\mathbf{g}$  enthalten.

Da das Variationsproblem 8.1 nichtlinear ist, muss es unter Verwendung von (3.103) linearisiert werden. Im resultierenden iterativen Berechnungsschema wird das Vektorpotential im  $n$ -ten Iterationsschritt berechnet nach

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_{n-1} + \alpha \mathbf{A}_\varepsilon , \quad (8.7)$$

wobei  $\alpha$  ein Relaxationsparameter ist. Die Änderung des Vektorpotentials  $\mathbf{A}_\varepsilon$  wird berechnet, indem das folgende Variationsproblem mithilfe der Methode der finiten Elemente gelöst wird:

**Variationsproblem 8.2** Bestimme  $\mathbf{A}_\varepsilon \in H_h(\text{rot}, \Omega)$ , sodass

$$\begin{aligned} (\nu_d \nabla \times \mathbf{A}_\varepsilon, \nabla \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{j}, \mathbf{v}) - (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) \\ &+ (\mathbf{M}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_h(\text{rot}, \Omega) . \end{aligned} \quad (8.8)$$

Es kann leicht überprüft werden, dass die Lösung des Randwertproblems im ersten Iterationsschritt berechnet wird, sofern das Variationsproblem linear ist.

Der Residuumsvektor  $\mathbf{r}$  ist in jedem Iterationsschritt  $n \in \mathbb{N}$  definiert als die rechte Seite von (8.8) für eine endliche Anzahl von Testfunktionen:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{j}, \mathbf{v}) - (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{M}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega} . \quad (8.9)$$

Der Residuumsvektor wird mit der ursprünglichen rechten Seite  $\mathbf{r}_0$  verglichen (dieser entspricht  $\mathbf{r}$  mit  $\mathbf{A}_{n-1} = 0$  und  $\mathbf{M}_{n-1} = 0$ ):

$$\mathbf{r}_0 = (\mathbf{j}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega} . \quad (8.10)$$

Es gilt nach (5.79), dass

$$\partial\mathbf{H}(\mathbf{B}) = \text{Conv}(\lim \mathbf{J}_H(\mathbf{B}) : \mathbf{B}_i \rightarrow \mathbf{B}, \mathbf{B}_i \notin \Sigma_B) .$$

Weiterhin wird gemäß (5.80) der Reluktivitätstensor im Zuge der Invertierung der Hysterese-Modelle so gewählt, dass gilt

$$\nu_d \in \partial\mathbf{H}(\mathbf{B}) .$$

Im Kontext der FEM-Berechnungen wird pro Quadraturpunkt ein Hysterese-Modell verwendet. Es definiert  $\mathbf{M}$  und  $\nu_d$  in diesem Punkt. Die globalen Werte von  $\nu_d$  werden demnach punktweise durch die lokalen Werte innerhalb einer Zelle konstruiert.

Das Interpolationsmodell und Hysterengruppenmodell (aber auch andere Hysterese-Modelle) besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Sie sind aus stückweise stetigen Funktionen aufgebaut.
2. Sie sind Lipschitz-stetig (auf das diskrete DPC-Modell trifft dies nicht zu).

Nach [163, Prop. 2.26] sind diese Eigenschaften hinreichend, damit die durch die Modelle definierte Abbildung semiglatt ist. Dies wird an späterer Stelle benötigt.

Bezüglich der Eigenschaften der durch  $(\mathbf{M}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v})$  definierten Abbildung sind folgende Resultate bezüglich nichtglatter Funktionen von Bedeutung:

1. Eine Funktion ist nur dann semiglatt, wenn ihre Komponenten semiglatt sind [163, Prop. 2.10].
2. Die Klasse der semiglaten Funktionen ist abgeschlossen bezüglich Komposition [163, Prop. 2.9].
3. Die Klasse von stückweise stetigen Funktionen ist abgeschlossen bezüglich endlicher Addition [163, Prop. 2.20].

Da die Gauß-Integration bei der Assemblierung der Matrizen und Vektoren des linearen Gleichungssystems eine lineare Operation darstellt, wird die Semiglattheitseigenschaft der Hysterese-Modelle übertragen auf die globale nichtlineare Gleichung (8.6). Des Weiteren kann ein zu (5.80) äquivalenter Zusammenhang für die Jacobi-Matrix der linearisierten Gleichung (8.8) konstruiert werden. Diese korrespondiert zur Matrix  $(\nu_d \nabla \times \mathbf{A}_\varepsilon, \nabla \times \mathbf{v})$ .

Es ist wichtig, dies herauszustellen, da dadurch nach [147] gewährleistet ist, dass das durch (8.8) definierte Iterationsschema in der Nähe der Lösung konvergiert und dies unabhängig von der Wahl des (lokalen) Reluktivitätstensors  $\nu_d$  geschieht, so lange (5.80) erfüllt ist.

In Kombination mit den verwendeten Varianten des DPC-Modells werden die (lokalen) Werte von  $\nu_d$  während der notwendigen Invertierung des Modells berechnet. Im Falle des



Interpolationsmodells kann es bei schlechter Konvergenz hilfreich sein, die Sekantenmatrizen für  $\boldsymbol{\nu}_d$  zu verwenden, die berechnet werden können, indem der aktuelle Wert von  $\mathbf{H}$  nicht in die Triangulierung eingefügt wird. Für das Hysterengruppenmodell wurden stets die exakten zuletzt berechneten Werte von  $\boldsymbol{\nu}_d$  verwendet. Alle nach den vorhergehenden Ausführungen berechneten Werte erfüllen (5.80).

Da  $\mathbf{M}$  durch die Hysterese Modelle berechnet wird, ist  $\alpha$  der einzig verbleibende Freiheitsgrad des Iterationsschemas. Im Kontext nichtglatter Newton-Verfahren entspricht die Bestimmung von  $\alpha$  der Bestimmung einer optimalen Schrittweite. Hierfür existiert eine Vielzahl von Möglichkeiten. In allen im Folgenden präsentierten Berechnungen wurde entweder kein Suchalgorithmus oder ein Intervallschachtelungsverfahren nach dem goldenen Schnitt (engl. *golden section search*) verwendet. Weitere Möglichkeiten sind beispielsweise Verfahren, die auf der Armijo-Goldstein-Bedingung aufbauen, z. B. *backtracking line search*. Da es meist mit großem Rechenaufwand verbunden ist, eine optimale Lösung für  $\alpha$  zu finden, wird auf weitere Methoden hingewiesen, die weniger rechenintensiv sind (und keine optimale Schrittweite berechnen), aber dennoch die Konvergenz begünstigen. So wird in [74] die Schrittweite zu  $\alpha = 0.5^k$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  gesetzt und  $k$  ausgehend von  $k = 0$  so lange erhöht, bis das Residuum des aktuellen Iterationsschritts kleiner als das Residuum des letzten Iterationsschritts ist.

Die Thematik kann an dieser Stelle nicht erschöpfend behandelt werden, jedoch bilden nichtglatte Newton-Verfahren einen Rahmen, in den sich Feldprobleme mit Hysterese gut einfügen. So kann, sofern die Gradienten korrekt berechnet werden, schon die Erweiterung des klassischen Newton-Verfahrens um eine simple Schrittweitenbestimmung zur sicheren Konvergenz des ansonsten in Zusammenhang mit Hysterese oft als divergent beschriebenen Verfahrens führen. In Abb. 8.1 ist der generelle Ablauf der Lösung des nichtlinearen Variationsproblems auf Basis des magnetischen Vektorpotentials dargestellt. Neben der Newton-Iteration sind die korrespondierenden Abläufe für die  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ -Iteration und die  $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ -Iteration explizit dargestellt. Über die dargestellten Möglichkeiten hinaus existieren weitere Varianten wie ein gemischtes Verfahren aus Newton-Iteration und Polarisationsmethode [170].

Soll die gemischte Formulierung in drei Dimensionen verwendet werden, so lässt sie sich auf ähnliche Weise linearisieren. Das magnetostatische Ausgangsproblem ist

**Variationsproblem 8.3** Bestimme  $\mathbf{A} \in H_h(\text{rot}, \Omega)$  und  $\Psi \in H_h^1(\Omega)$ , sodass

$$(\boldsymbol{\nu}_0 \nabla \times \mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{v}) + (\Psi, \nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{j}, \mathbf{v}) + (\mathbf{M}, \nabla \times \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_h(\text{rot}, \Omega) \quad (8.11)$$

$$(\mathbf{A}, \nabla \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in H_h^1(\Omega) . \quad (8.12)$$

Die Linearisierung wird bezüglich der Variablen  $\mathbf{A}$  und  $\Psi$  durchgeführt. Damit ergibt sich das linearisierte

**Variationsproblem 8.4** Bestimme  $\mathbf{A}_\varepsilon \in H_h(\text{rot}, \Omega)$  und  $\Psi_\varepsilon \in H_h^1(\Omega)$ , sodass

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nu}_d \nabla \times \mathbf{A}_\varepsilon, \nabla \times \mathbf{v}) + (\Psi_\varepsilon, \nabla \cdot \mathbf{v}) &= (\mathbf{j}, \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\nu}_0 \nabla \times \mathbf{A}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) \\ &+ (\mathbf{M}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\Psi_{n-1}, \nabla \cdot \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_h(\text{rot}, \Omega) \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$(\mathbf{A}_\varepsilon, \nabla \zeta) = -(\mathbf{A}_{n-1}, \nabla \zeta) \quad \forall \zeta \in H_h^1(\Omega) . \quad (8.14)$$

Die rechte Seite von (8.14) kann durch 0 ersetzt werden, da dies durch (8.12) bereits in allen vorhergehenden Schritten gefordert wird. Weiterhin wird  $\Psi$  bereits im ersten Schritt gefunden, da die Funktion den nicht quellenfreien Anteil von  $\mathbf{j}$  kompensiert und sich dieser im Verlauf

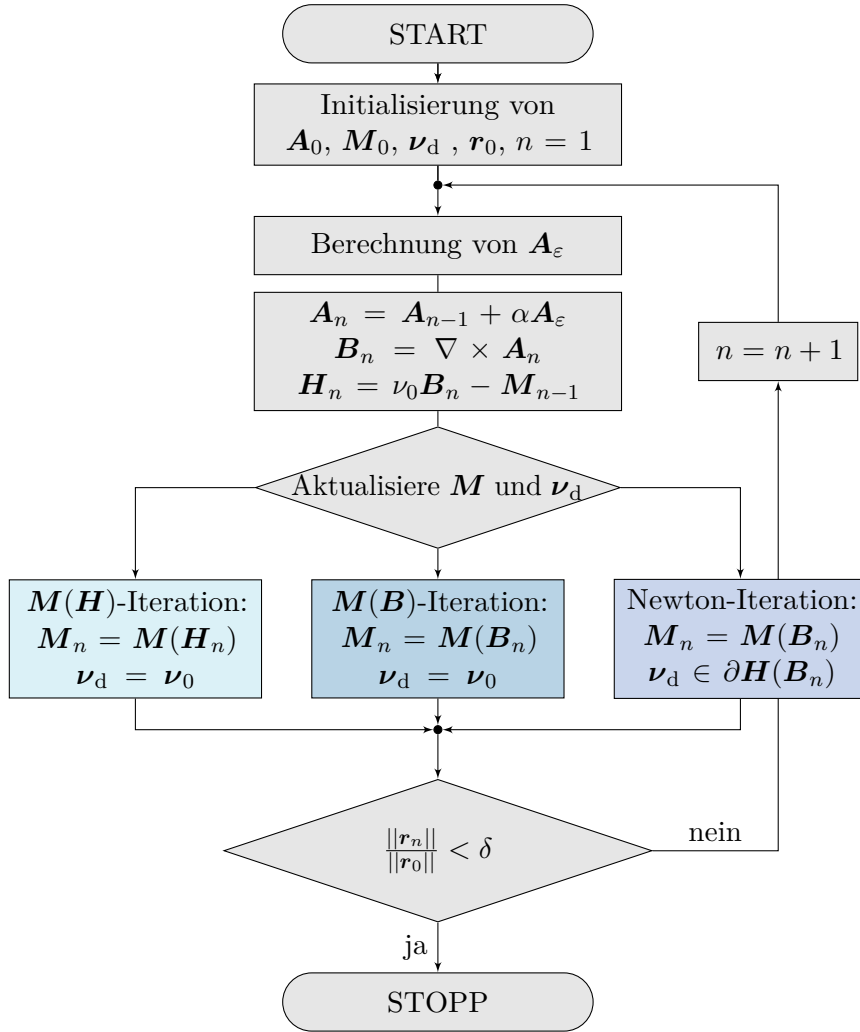


Abb. 8.1 –  $A$ -basierte Iterationsschemata für magnetostatische Feldprobleme mit Hysterese

der Iterationen nicht ändert. Dementsprechend wird zur Bewertung des aktuellen Fehlers das folgende (Teil-)Residuum verwendet:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{j}, \mathbf{v}) - (\nu_0 \nabla \times \mathbf{A}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{M}_{n-1}, \nabla \times \mathbf{v}) - (\Psi_{n-1}, \nabla \cdot \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \gamma_T(\mathbf{v}) \rangle_{\partial\Omega} . \quad (8.15)$$

Es wird in Kapitel 9 stets das gemischte Variationsproblem zur Berechnung dreidimensionaler Felder verwendet, da dieses (aufgrund der geringen Problemgröße) mit direkten Lösungsverfahren (hier: *MUMPS* [4]) gelöst werden kann. Bei der iterativen Lösung des Variationsproblems 8.2 in drei Dimensionen besteht die Schwierigkeit, dass das weit verbreitete CG-Verfahren nicht ohne Weiteres angewendet werden kann, da die Matrix des entstehenden Gleichungssystems aufgrund der Nichtsymmetrie von  $\nu_d$  ebenfalls nicht symmetrisch ist. Diese Schwierigkeit kann z. B. durch die Verwendung des *GMRES*-Verfahrens (siehe z. B. [136]) umgangen werden, allerdings wirkt sich die Nichtsymmetrie auch auf die Anwendbarkeit von Präkonditionierungsverfahren aus. Speziell für das gemischte Problem bedarf es zur effizienten Lösung Präkonditionierungs- und Lösungsverfahren, welche die Blockstruktur der resultierenden Matrix ausnutzen. Ein breiter Überblick hierzu ist in [10] zu finden. Viele Verfahren benötigen eine Approximation der Inversen des Schur-Komplements der Blockmatrix. Dafür wird im hier dargestellten Fall wiederum eine Approximation der Inversen der zu  $(\nu_d \nabla \times \mathbf{A}_\epsilon, \nabla \times \mathbf{v})$  korrespondierenden Matrix benötigt, was schlussendlich wieder auf das Problem der fehlenden Standardverfahren für nichtsymmetrische Matrizen führt.

### 8.3.2 $\Phi$ -basierte Iterationsschemata

Die im vorherigen Teilabschnitt präsentierten Konzepte können auch angewendet werden, wenn ein magnetisches Skalarpotential zur Beschreibung des elektromagnetischen Felds verwendet wird. In diesem Fall beschreibt die Potentialvariable nicht  $\mathbf{B}$  (wie im Falle des magnetischen Vektorpotentials), sondern  $\mathbf{H}$ . Es ist zweckmäßig, in diesem Zusammenhang mit der Polarisation  $\mathbf{I}$  statt mit  $\mathbf{M}$  und mit dem differentiellen Permeabilitätstensor  $\boldsymbol{\mu}_d$  statt mit  $\boldsymbol{\nu}_d$  zu arbeiten.

Nach sehr ähnlichem Schema, wie zuvor für das Vektorpotential gezeigt, lässt sich auch das magnetostatische Randwertproblem auf Basis des magnetischen Skalarpotentials  $\Phi$  und des Strömungsvektorpotentials  $\mathbf{T}$  (genauer  $\mathbf{T}_e$ ) linearisieren. In jedem Schritt des Newton-Verfahrens muss dann das nachfolgende Variationsproblem gelöst werden:

**Variationsproblem 8.5** Bestimme  $\Phi_\varepsilon \in H_h^1(\Omega)$ , sodass

$$(\boldsymbol{\mu}_d \nabla \Phi_\varepsilon, \nabla v) = (\mu_0 \mathbf{T}_e, \nabla v) - (\mu_0 \nabla \Phi_{n-1}, \nabla v) + (\mathbf{I}_{n-1}, \nabla v) + \langle g, v \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall v \in H_h^1(\Omega) . \quad (8.16)$$

Ein relatives Abbruchkriterium ist für das mit (8.16) einhergehende Iterationsschema schwer anzugeben, da das Randwertproblem auf Basis der Quellenfreiheit des  $\mathbf{B}$ -Felds formuliert wurde und die rechte Seite der Gleichung somit stets gleich Null ist. Deshalb wird die absolute Größe des Residuums als Abbruchkriterium herangezogen:

$$\mathbf{r} = (\mu_0 \mathbf{T}_e, \nabla v) - (\mu_0 \nabla \Phi_{n-1}, \nabla v) + (\mathbf{I}_{n-1}, \nabla v) + \langle g, v \rangle_{\partial\Omega} . \quad (8.17)$$

Analog zu den Ausführungen im vorangegangenen Abschnitt entsteht ein nichtglattes (genauer semiglattes) Newton-Verfahren. Die Argumentation verläuft auf Basis von (5.76), demnach gilt für  $\mathbf{B}$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{H}$

$$\partial \mathbf{B}(\mathbf{H}) = \text{Conv}(\lim \mathbf{J}_B(\mathbf{H}) : \mathbf{H}_i \rightarrow \mathbf{H}, \mathbf{H}_i \notin \Sigma_H)$$

und weiter

$$\boldsymbol{\mu}_d \in \partial \mathbf{B}(\mathbf{H}) .$$

Somit ergibt sich das in Abb. 8.2 dargestellte Iterationsschema für das Newton-Verfahren auf Basis der magnetostatischen  $\Phi$ -Formulierung. Die  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ -Iteration sowie die  $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ -Iteration können im Prinzip auch auf Variationsprobleme auf Basis des magnetischen Skalarpotentials angewendet werden, weshalb sie in Abb. 8.2 äquivalent als  $\mathbf{I}(\mathbf{H})$ -Iteration und  $\mathbf{I}(\mathbf{B})$ -Iteration weiter aufgeführt sind.

## 8.4 Numerische Experimente mit dem Interpolationsmodell

Das Hysterongruppenmodell bildet die Grundlage für die hysteresebefaheten Berechnungen in Kapitel 9. Jedoch bietet auch das Interpolationsmodell einige Vorzüge, aber auch Nachteile, auf die jeweils näher eingegangen wird. Das Interpolationsmodell besitzt einen deutlich geringeren Rechenaufwand als das Hysterongruppenmodell. Dies ist allem voran durch die Verwendung von vorberechneten Hysteronzuständen bedingt. Innerhalb der Triangulierung muss nur der Wert von Hysterons berechnet werden, deren Zustand innerhalb des betrachteten Zeitschritts von beweglich zu starr wechselt.

Wie beschrieben lässt sich der Reluktivitätstensor aus den innerhalb eines Dreiecks gültigen Tangentialmatrizen berechnen. Dementsprechend ist  $\boldsymbol{\nu}_d$  auf Ecken und Kanten der Triangulierung nicht definiert. Eine natürliche Wahl einer Sekante (die ebenfalls (5.80) erfüllt) ist

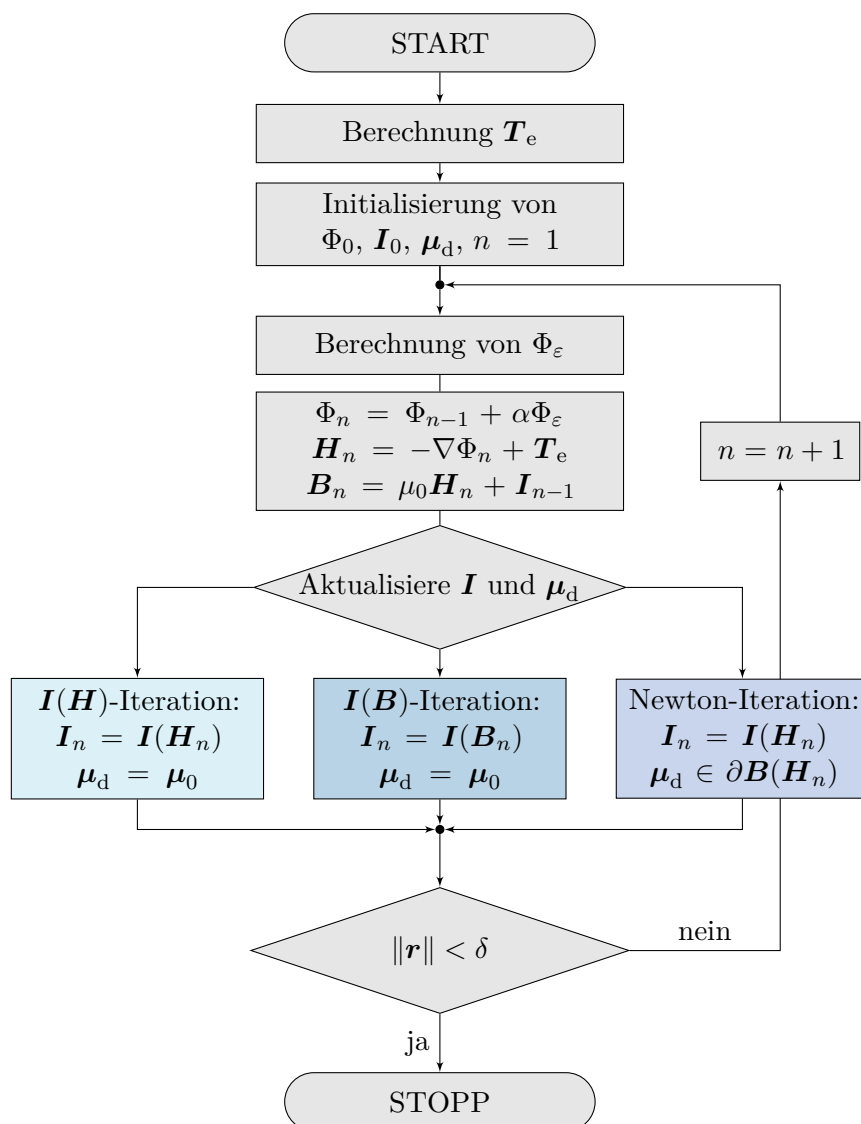
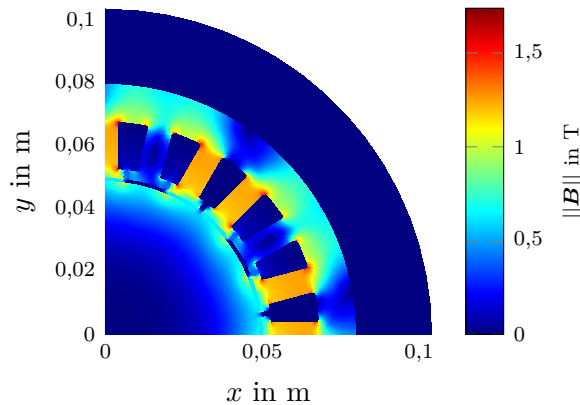


Abb. 8.2 –  $\Phi$ -basierte Iterationsschemata für magnetostatische Feldprobleme mit Hysterese

die Tangentialmatrix des Dreiecks, in welches der aktuelle Wert von  $\mathbf{H}$  eingefügt wurde. Es wurde für die Beispielrechnungen überwiegend die aktuell gültige Tangentialmatrix verwendet. Die Sekantenmatrix wurde vereinzelt verwendet, wenn bei der Invertierung des Interpolationsmodells Probleme (vorwiegend die geschilderten Monotonieprobleme) auftraten.

Das Interpolationsmodell wird in Verbindung mit dem Variationsproblem 8.2 in zwei Dimensionen verwendet. Bezüglich des Konvergenzverhaltens profitiert es stark von einer Schrittweitenbestimmung. Diese wurde mithilfe des Intervallschachtelungsverfahrens nach dem goldenen Schnitt berechnet (Algorithmus siehe [144, S. 495 f.]). Das Verfahren stellt eine der simpelsten Möglichkeiten dar, um eine optimale Schrittweite (näherungsweise) zu bestimmen. Es benötigt verhältnismäßig viele Schritte zur Bestimmung eines Optimums, besitzt im Gegenzug jedoch ein robustes Konvergenzverhalten.

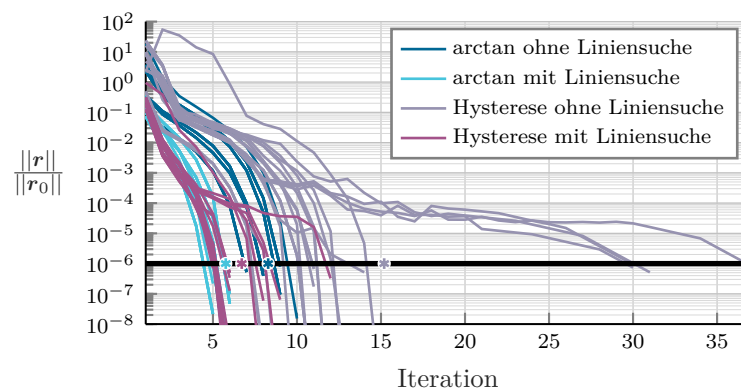
Die berechnete Beispielgeometrie ist an eine elektrische Maschine angelehnt. Der Rotor besteht aus einem unbeweglichen Eisenzylinder, der Stator entspricht dem Stator einer vierpoligen, dreisträngigen Maschine mit einer Einsichtwicklung und zwei Nuten pro Pol und Strang. Diese ist im Feldbild in Abb. 8.3 dargestellt.



**Abb. 8.3** – Exemplarische Flussdichteverteilung in der betrachteten Maschinengeometrie

Das Modell wurde unter Vorgabe einer maximalen Stromdichte von  $5,0 \text{ A/mm}^2$  mit einem symmetrischen Drehstromsystem gespeist. Dabei wurde zum einen ein nichtlineares Material ohne Hysterese, zum anderen hysteresebehaftetes Material auf Basis des TEAM Problems 32 vorgegeben (weitere Erläuterungen zu beiden Punkten in Kapitel 9). Es wurde stets das beschriebene Newton-Verfahren zur Lösung des Variationsproblems auf Basis des Vektorpotentials verwendet, je einmal mit und einmal ohne Bestimmung der optimalen Schrittweite. Die Berechnung umfasst eine elektrische Periode, bei 20 Schritten pro Periode.

In Abb. 8.4 sind die zu den jeweiligen Fällen gehörenden Konvergenzverläufe dargestellt. Das gewünschte relative Residuum wurde auf  $10^{-6}$  gesetzt. Die durchschnittliche Anzahl an Iterationen für jeden Berechnungsfall wurde durch einen Punkt auf der Abbruchgrenze ( $\|\mathbf{r}\| / \|\mathbf{r}_0\| = 10^{-6}$ ) markiert. Die bereits zu Beginn des Abschnitts erwähnte Verbesserung des Konvergenzverhaltens bei Verwendung des Interpolationsmodells und Anwendung einer Schrittweitenbestimmung ist deutlich zu erkennen. Die durchschnittliche Anzahl von Iterationen sinkt von 15,1 Iterationen ohne Schrittweitenbestimmung auf 6,7 Iterationen mit Schrittweitenbestimmung. Dieser Wert liegt zwischen den Werten der durchschnittlichen Anzahl von Iterationen, die bei Verwendung einer nichtlinearen Standardkennlinie (auf Basis des Arkustangens) für den Fall mit und ohne Schrittweitenbestimmung erhalten werden (5,7 und 8,2 Iterationen).



**Abb. 8.4** – Konvergenzplot für verschiedene Iterationsschemata und Materialmodelle

Das Berechnungsbeispiel stellt die positive Wirkung der Schrittweitenbestimmung heraus. Wie stark diese ausgeprägt ist, hängt von den Rahmenbedingungen ab. So besitzt das Hysterengruppenmodell von vornherein einen vorteilhafteren Konvergenzverlauf als das Interpolationsmodell. Weiter sorgen z. B. kleinere Zeitschritte für eine geringere Anzahl von

Iterationen für alle Modelle. Da eine Schrittweitenbestimmung, sofern Hystereseemodelle verwendet werden, relativ rechenaufwendig ist, bietet es sich an, diese nur bei Bedarf anzuwenden, z. B. bei einer Vergrößerung des Residuums, bei Initialisierungsschritten oder ab einer festgelegten Anzahl von Iterationen. Bei kleinen Schrittweiten zeigen sich die Variationsprobleme unter Verwendung des Vektorpotentials gemäß (8.8) und (8.13) kombiniert mit (8.14) relativ unanfällig für Oszillationen. Das Newton-Verfahren auf Basis des magnetischen Skalarpotentials (8.16) ist hingegen (unabhängig vom Hysteresemodell) anfälliger für Oszillationen des Konvergenzverlaufs, wenn die aktuelle Approximation weit von der tatsächlichen Lösung entfernt ist. Im Bezug auf die Hystereseemodelle ist es vorteilhaft, dass Formulierungen auf Basis des magnetischen Skalarpotentials keine Invertierung des Hysterese Modells erfordern.

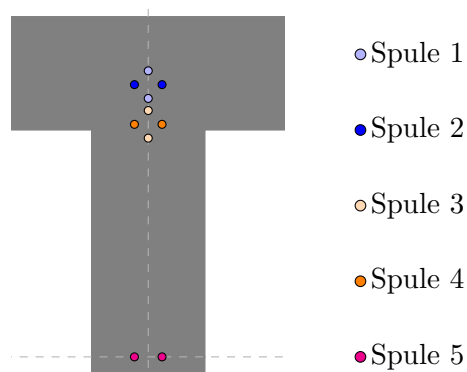
Da die Formulierungen auf Basis des Vektorpotentials und des Skalarpotentials bezüglich der Felder nahezu äquivalente Ergebnisse liefern, wird bei der Validierung der Modelle im folgenden Kapitel lediglich das Vektorpotential gemäß den Variationsproblemen 8.2 und 8.4 verwendet.

### **Bemerkungen zur Implementierung**

Die Implementierung der Hystereseemodelle wurde im Zuge der vorliegenden Arbeit umgesetzt. Die benötigte Umgebung für Berechnungen auf Basis der Methode der finiten Elemente wurde durch die Programmbibliothek *FEniCS* [1, 123] bereitgestellt. Diese erlaubt die Implementierung von beliebigen Variationsformulierungen und den Zugriff auf Matrizen, Vektoren, etc. auf jeder Ebene des Berechnungsvorgangs. *FEniCS* selbst besteht aus mehreren Teilkomponenten, für die auf die Quellen [2, 3, 103, 104, 124] verwiesen wird.



mittleren Flussdichte entlang der jeweiligen Spulenachse. Es werden nachfolgend nur die Spulen berücksichtigt, für die Messdaten vorliegen, die Nummerierung der Spulen kann größtenteils beibehalten werden. Einziger Unterschied ist, dass Spule 5 in Abb. 9.2 in [31] mit 6 nummeriert ist. Die Paare aus den konzentrischen Spulen 1 und 2 sowie 3 und 4 erlauben jeweils eine näherungsweise Bestimmung des Vektors  $\mathbf{B}$  im Zentrum der Spule, unter der Voraussetzung, dass dort gilt  $B_z \ll \|B\|$ . Spule 5 erlaubt die Beobachtung des Wechselfelds im Zentrum des mittleren Schenkels, wobei näherungsweise gilt  $|B_y| \approx \|B\|$ .



**Abb. 9.2** – Übersicht der eingebrachten Messspulen (Ausschnitt des mittleren Schenkels)

In der Originalquelle [31] sind die Spulendaten gemäß Tabelle 9.1 gegeben.

**Tab. 9.1** – Daten der Messspulen

Spule	Zentrum $x$	Zentrum $y$	Spulenweite	Windungszahl
Spule 1	0 mm	69,5 mm	7,3 mm	5
Spule 2	0 mm	69,5 mm	7,3 mm	5
Spule 3	0 mm	61,5 mm	7,3 mm	5
Spule 4	0 mm	61,5 mm	7,3 mm	5
Spule 5	0 mm	0 mm	7,3 mm	5

Bei der Platzierung der Spulen kommen die inkonsistenten Geometrieangaben zum Tragen. Um Konsistenz zu schaffen muss entweder der Spulenraum eine Höhe von 115 mm statt 120 mm besitzen oder die Schenkelhöhe von 175 mm auf 180 mm vergrößert werden (wie in Abb. 9.1 gewählt). Eine Anpassung eines einzelnen Jochquerschnitts, wie in [157] zu finden, ist nicht sinnvoll, da sie die (ebenfalls vorgegebene) Symmetrie des Aufbaus zerstört. Die Unsicherheit von 2,5 mm in der Schenkellänge führt zu einer Unsicherheit bezüglich der Position der Spulen relativ zu den Schenkeln. Auffällig ist bei der später folgenden Auswertung der Simulationsergebnisse, dass diese für die Paare 1 und 2 bzw. 3 und 4 je nach gewählter Korrekturmöglichkeit jeweils ein schlechtes und ein gutes Ergebnis liefern. Wird das Zentrum des Spulenpaares mit dem jeweils schlechten Ergebnis um 2,5 mm versetzt, so werden die guten Ergebnisse des jeweils anderen Korrekturfalles wiederhergestellt. Dies legt den Schluss nahe, dass auch in den gegebenen Spulenpositionen eine Inkonsistenz vorhanden ist, die korrigiert werden muss. Es kann nicht rekonstruiert werden, ob dies der Fall ist oder ob entstehende Abweichungen zwischen Messung und Rechnung auf Unzulänglichkeiten in der Modellierung zurückzuführen sind. Im Folgenden werden daher die Positionen der Spulen zueinander unverändert von der Originalquelle übernommen und stets die Ergebnisse für die beiden möglichen Lagen der Spulen innerhalb der Schenkel gegeben. In Tab. 9.2 sind die möglichen Rechenvarianten den Originalangaben gegenübergestellt. Es werden nachfolgend nur noch



die Varianten 1 und 2 betrachtet. Variante 1 liefert nahezu deckungsgleiche Ergebnisse zu Variante 4, dies trifft in gleicher Form auf Variante 2 und Variante 3 zu. Aufgrund der Unstimmigkeiten in der Geometriebeschreibung existiert eine Vielzahl leicht unterschiedlicher Geometrien, die in der Literatur behandelt werden, so besitzen z. B. [9, 157] und [169] zueinander unterschiedliche Geometriebeschreibungen.

**Tab. 9.2** – Originalangaben und mögliche Varianten zur Berechnung

Angabe gemäß	Original [31]	Variante 1	Variante 2	Variante 3	Variante 4
Schenkelhöhe	175 mm	180 mm	180 mm	175 mm	175 mm
Spulenraumhöhe	120 mm	120 mm	120 mm	115 mm	115 mm
Zentrum Sp. 1 Sp. 2	69,5 mm	69,5 mm	72,0 mm	69,5 mm	67,0 mm
Zentrum Sp. 3 Sp. 4	61,5 mm	61,5 mm	64,0 mm	61,5 mm	59,0 mm

### 9.1.2 Beschreibung der Testfälle

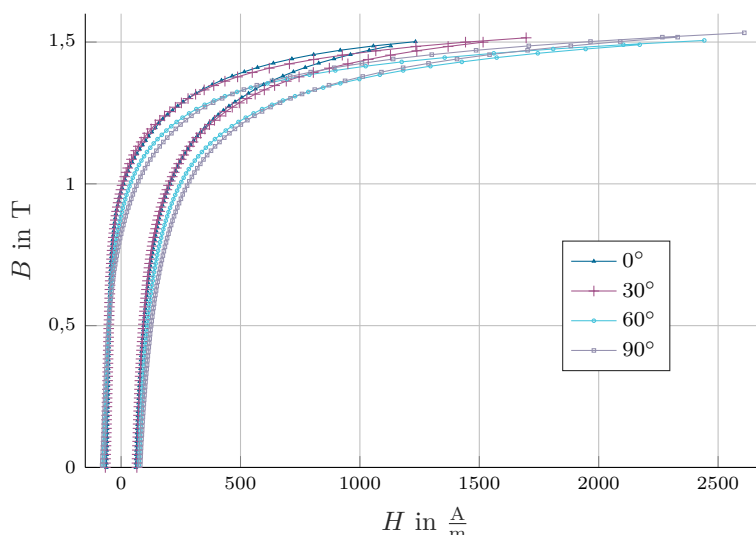
Es wurden Messdaten für vier verschiedene Testfälle veröffentlicht. Diese unterscheiden sich in der elektrischen Beschaltung der Spulen A und B. Die Spulen selbst besitzen einen Widerstand von  $0,32 \Omega$ . Alle Tests wurden bei einer Frequenz von 10 Hz durchgeführt. Es wurden die folgenden Testfälle betrachtet:

1. Fall: Die Spulen A und B sind seriell mit einem Widerstand von  $11,1 \Omega$  verschaltet und mit einer Spannungsquelle verbunden. Diese liefert eine sinusförmige Spannung mit einem Spitzenwert von 13,5 V.
2. Fall: Äquivalente Verschaltung wie in Fall 1. Die Versorgungsspannung besteht aus einer 10-Hz-Grundschiwingung mit einer Amplitude von 5,9 V, die von einer 5. Oberschwingung ( $f = 50 \text{ Hz}$ ) überlagert wird. Diese ist in Phase zur Grundschiwingung und besitzt dieselbe Amplitude<sup>1</sup>.
3. Fall: Jede Wicklung ist mit einem Widerstand von  $11,1 \Omega$  in Reihe geschaltet und mit einer sinusförmigen Spannungsquelle mit einer Amplitude von 14,5 V verbunden. Die Phasendifferenz der beiden Versorgungsspannungen beträgt  $90^\circ$ .
4. Fall: Spule A ist über einen Reihenwiderstand von  $11,1 \Omega$  mit einer sinusförmigen Spannungsquelle verbunden. Die Amplitude der Spannung beträgt 10,9 V. Die Klemmen von Spule B werden über einen Widerstand von  $0,05 \Omega$  geschlossen.

## 9.2 Materialdaten und Identifikation

Beim Material, das für das TEAM Problem 32 verwendet wird, handelt es sich um nicht kornorientiertes Elektroblech mit einem Siliziumanteil von 3%. Die Laminierungen sind 0,48 mm dick. Die magnetischen Eigenschaften des Materials wurden im Epsteinrahmen bei 10 Hz vermessen. Es liegen vier Messungen vor, mit Streifen, deren jeweilige Schnittrichtung um  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  zur Walzrichtung versetzt ist. Die Messdaten lassen vor allem im Bereich eintretender Sättigung eine Anisotropie erkennen (siehe Messkurven bis 1,5 T in Abb. 9.3).

<sup>1</sup>An dieser Stelle sind die Angaben in der Originalquelle [31] ebenfalls nicht konsistent, korrekte Angaben können jedoch rekonstruiert werden. Siehe dazu die Ausführungen zu Fall 2.



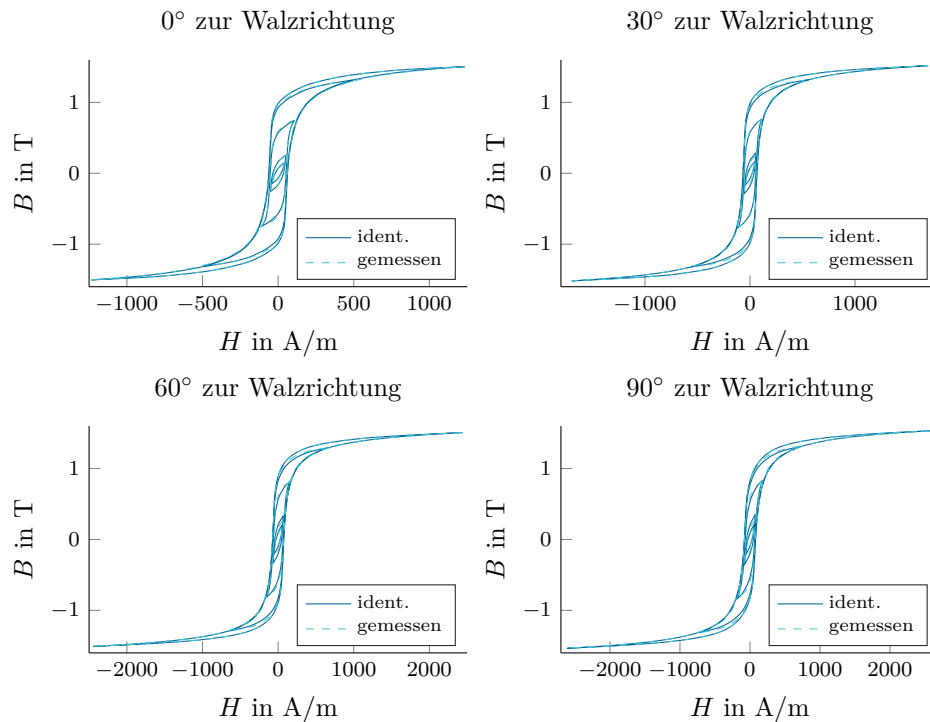
**Abb. 9.3** – Vergleich gemessener Hysteresekurven für verschiedene Magnetisierungsrichtungen bei 1,5 T

### 9.2.1 Modellierung mit dem Hysterongruppenmodell

In Abb. 9.20 auf Seite 129 ist der in Abschnitt 7.4 beschriebene schrittweise Identifikationsprozess für die  $0^\circ$ -Schnitttrichtung dargestellt. Die identifizierten Parameter sind keineswegs eindeutig. Die Parameterbestimmung ist robust gegenüber Veränderungen der Startparameterebene und gegenüber kleineren Schwankungen der Priorisierungs- und Regularisierungsparameter. Letztere können jedoch über mehrere Größenordnungen variieren (hier wurde  $\tau_a = 2 \cdot 10^2$  und  $\tau_n = 2 \cdot 10^3$  gewählt). Sie hängen u. a. von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Messpunkte ab. Werden die Regularisierungsparameter zu klein gewählt, wird die Parameterverteilung unzusammenhängend und einzelne Hysterons können einen großen Einfluss auf den Gesamtverlauf der Magnetisierung nehmen. Sind die Regularisierungsparameter dagegen zu groß gewählt, wirkt die resultierende Verteilung glatt, jedoch können die Messkurven nur unzureichend nachgebildet werden.

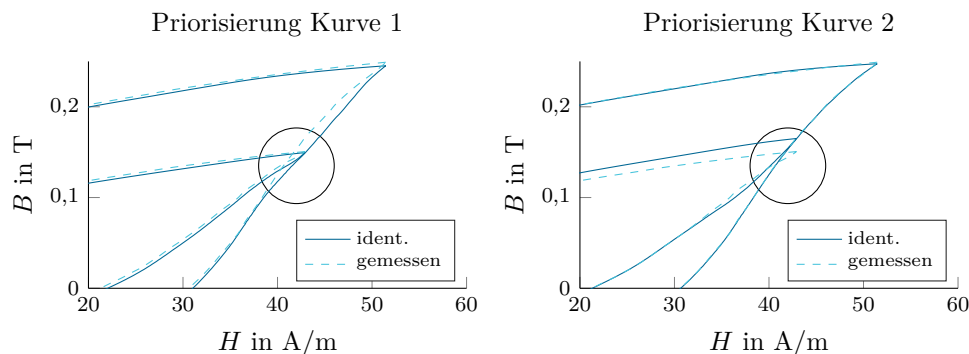
Zur Darstellung des Identifikationsvorgangs eignet sich die  $0^\circ$ -Messreihe gut, da diese die kleinste Parameterebene besitzt und die zugehörigen Größen recht gut darstellbar sind. Der Vorgang lässt sich äquivalent mit den anderen Messreihen durchführen und liefert bezüglich der Identifikationsqualität äquivalente Ergebnisse (siehe Abb. 9.4). Es wurden jeweils fünf Hysteresekurven einer Messreihe verwendet, um die Parameter zu bestimmen. In Zusammenhang mit den Messdaten, die zu dem TEAM Problem 32 vorliegen, ist es nicht empfehlenswert, alle Hysteresekurven der Messreihen (10–12) zu verwenden. Wenn Messkurven eine ähnliche maximale Flussdichte aufweisen, kann oft nur einer der Verläufe optimal nachgebildet werden. Der Versuch, beide gleichermaßen nachzubilden, resultiert häufig in schlechten Ergebnissen (z. B. Knicken in den Hysteresekurven). Dem Effekt kann durch Priorisierung einer Messreihe entgegengewirkt werden. In allen präsentierten Identifikationen wurde die äußerste Hystereseschleife priorisiert (der Fehler bezüglich der Schleife wurde mit dem Faktor 5–10 gewichtet). Für den zuvor beschriebenen Effekt konnte nicht geklärt werden, ob dieser seinen Ursprung in den Messdaten hat oder durch Unstimmigkeiten innerhalb der Identifikation auftritt.

Jedoch gibt es Eigenschaften der Messdaten, die von vornherein mit einem Preisach-Modell nicht modelliert werden können. Dazu zählen nicht geschlossene oder nicht symmetrische Hystereseschleifen. Diese können durch eine Beschränkung der Messdaten auf eine Halbwelle der Induktion oder Symmetrierung der Daten vermieden werden. Darüber hinaus ist es möglich,



**Abb. 9.4** – Identifikationsergebnisse für die verschiedenen Messreihen

dass sich gemessene Hystereseschleifen schneiden. Sofern es sich bei den Hystereseschleifen um Hauptschleifen handelt, kann dies mit Preisach-Modellen nicht modelliert werden und ist physikalisch fragwürdig. Durch die Priorisierung einer gemessenen Schleife kann die Identifikationsgüte zu Gunsten einer Schleife verändert werden. Dies wird in Abb. 9.5 illustriert.



**Abb. 9.5** – Identifikationsergebnisse für sich schneidende Messkurven bei unterschiedlicher Priorisierung

### 9.2.2 Modellierung mit einer nichtlinearen Kennlinie

Für Vergleichsrechnungen und um die Eigenschaften von Hysteresekurven näher zu untersuchen, wird die 1,5-T-Messreihe der 60°-Messung gesondert betrachtet. Zum einen wird das Sättigungsverhalten der Kurve mithilfe eines Arkustangens nachgebildet, zum anderen werden charakteristische Werte der Kurve angegeben. Die Funktion zur Nachbildung des Sättigungsverhaltens besteht aus Vakuumanteil, nichtlinearem Anteil und linearem Anteil:

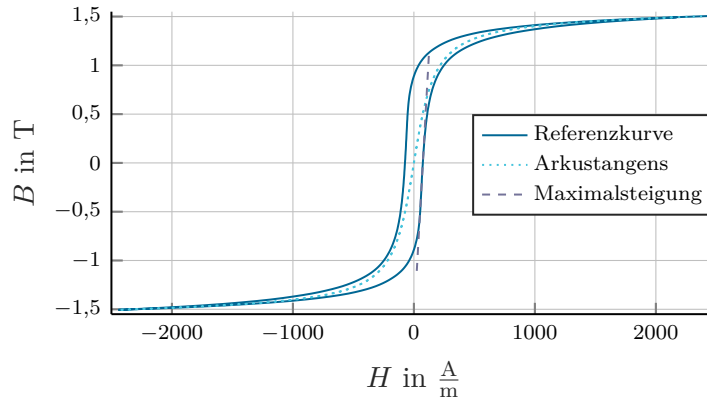
$$B(\mathbf{H}) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \frac{2B_{\text{sat}}}{\pi} \cdot \frac{\mathbf{H}}{\|\mathbf{H}\|} \arctan\left(\frac{\pi \mu_0 \mu_{\text{max}}}{2B_{\text{sat}}} \|\mathbf{H}\|\right). \quad (9.1)$$

Der Parameter  $\mu_{\max}$  entspricht der maximalen relativen Permeabilität des nichtlinearen Anteils, der Parameter  $\mu_r$  der relativen Permeabilität des linearen Anteils (samt Vakuumanteil). Die Sättigungsflussdichte des nichtlinearen Anteils ist durch  $B_{\text{sat}}$  gegeben. Ohne Anwendung eines Optimierungsalgorithmus lassen sich geeignete Werte für die Parameter recht leicht finden, eine Übersicht ist in Tab. 9.3 gegeben.

**Tab. 9.3** – Übersicht der Parameter der nichtlinearen Kennlinie

Parameter	$B_{\text{sat}}$	$\mu_{\max}$	$\mu_r$
Wert	1,50 T	$6,00 \cdot 10^3$	18,0

Obwohl die nichtlineare Kennlinie das Sättigungsverhalten gut wiedergibt, existieren bemerkenswerte Unterschiede zwischen der Kennlinie und der betrachteten Hysteresekurve. Neben den offensichtlichen Eigenschaften der Hysteresekurve, wie dem Auftreten einer Remanenzflussdichte und einer Koerzitivfeldstärke, tritt die deutlich größere maximale Steigung der Kennlinie zutage. Diese wird mit  $\mu_{\text{ext}}$  bezeichnet und ergibt sich bei der gegebenen Kennlinie zu  $\mu_{\text{ext}} = 17,6 \cdot 10^3$ , also ungefähr dem Dreifachen der maximalen Steigung der nichtlinearen Kennlinie, die durch  $\mu_{\max} + \mu_r$  gegeben ist. Die betrachtete äußere Hysteresekurve, die nichtlineare Ersatzkurve und die Tangente an die Hysteresekurve mit maximaler Steigung sind in Abb. 9.6 in einem Diagramm dargestellt. Die Koerzitivfeldstärke der Hystereseschleife beträgt ca. 74 A/m.



**Abb. 9.6** – Darstellung der äußeren Hystereseschleife sowie der zur Näherung verwendeten nichtlinearen Kennlinie und der Tangente mit maximaler Steigung

Für die Berechnung muss ferner der Reluktivitätstensor für die nichtlineare Kennlinie angegeben werden. Dieser wird wie im Falle der Hysteresemodelle aus dem Permeabilitätstensor berechnet gemäß  $\nu_d = \mu_d^{-1}$ . Der Permeabilitätstensor kann direkt berechnet werden (als Jacobi-Matrix von  $\mathbf{B}$  bezüglich  $\mathbf{H}$ ) zu

$$\boldsymbol{\mu}_d = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial H_x} & \frac{\partial B_x}{\partial H_y} \\ \frac{\partial B_y}{\partial H_x} & \frac{\partial B_y}{\partial H_y} \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Der Tensor ist symmetrisch, da gilt  $\frac{\partial B_y}{\partial H_x} = \frac{\partial B_x}{\partial H_y}$ , die Einträge sind im Folgenden explizit angegeben:

$$\frac{\partial B_x}{\partial H_x} = \mu_0 \mu_r + \frac{\mu_0 \mu_{\max}}{1 + \left( \frac{\pi \mu_0 \mu_{\max}}{2 B_{\text{sat}}} \|\mathbf{H}\| \right)^2} \cdot \frac{H_x^2}{\|\mathbf{H}\|^2} + \frac{2}{\pi} B_{\text{sat}} \arctan \left( \frac{\pi \mu_0 \mu_{\max}}{2 B_{\text{sat}}} \|\mathbf{H}\| \right) \frac{H_y^2}{\|\mathbf{H}\|^3}, \quad (9.3)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial H_y} = \frac{\mu_0 \mu_{\max}}{1 + \left( \frac{\pi \mu_0 \mu_{\max}}{2 B_{\text{sat}}} \|\mathbf{H}\| \right)^2} \cdot \frac{H_x H_y}{\|\mathbf{H}\|^2} - \frac{2}{\pi} B_{\text{sat}} \arctan \left( \frac{\pi \mu_0 \mu_{\max}}{2 B_{\text{sat}}} \|\mathbf{H}\| \right) \frac{H_x H_y}{\|\mathbf{H}\|^3}, \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial H_x} = \frac{\mu_0 \mu_{\max}}{1 + \left( \frac{\pi \mu_0 \mu_{\max}}{2 B_{\text{sat}}} \|\mathbf{H}\| \right)^2} \cdot \frac{H_x H_y}{\|\mathbf{H}\|^2} - \frac{2}{\pi} B_{\text{sat}} \arctan \left( \frac{\pi \mu_0 \mu_{\max}}{2 B_{\text{sat}}} \|\mathbf{H}\| \right) \frac{H_x H_y}{\|\mathbf{H}\|^3}, \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial H_y} = \mu_0 \mu_r + \frac{\mu_0 \mu_{\max}}{1 + \left( \frac{\pi \mu_0 \mu_{\max}}{2 B_{\text{sat}}} \|\mathbf{H}\| \right)^2} \cdot \frac{H_y^2}{\|\mathbf{H}\|^2} + \frac{2}{\pi} B_{\text{sat}} \arctan \left( \frac{\pi \mu_0 \mu_{\max}}{2 B_{\text{sat}}} \|\mathbf{H}\| \right) \frac{H_x^2}{\|\mathbf{H}\|^3}. \quad (9.6)$$

### 9.3 Dreidimensionale Modellierung

Das dreidimensionale Modell des Transformators ermöglicht es (sofern sich der Rand des betrachteten Gebiets in einem angemessenen Abstand befindet), den Einfluss von Streuflüssen auf die Rechenergebnisse zu berücksichtigen. Hiervon wird lediglich in Zusammenhang mit den Testfällen 1 und 2 im entsprechenden Abschnitt Gebrauch gemacht. Das Modell lässt sich jedoch ebenso auf Fall 3 und 4 anwenden. Die Konfiguration wird mithilfe der gemischten Formulierung beschrieben und linearisiert. Das entstehende Variationsproblem 8.4 kann mit dem (nichtglatten) Newton-Verfahren gelöst werden. Das Hysterongruppenmodell lässt sich zum Preis eines signifikant erhöhten Berechnungsaufwands ohne Weiteres in drei Dimensionen überführen. Da das TEAM Problem 32 in den ferromagnetischen Teilen Felder aufweist, die nahezu ausschließlich Komponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung besitzen, kann das Verhalten des Materials in  $z$ -Richtung durch eine konstante Permeabilität genähert werden. Es gilt dann  $B_z = \mu_z H_z$  und für den benötigten differentiellen Reluktivitätstensor wird angesetzt

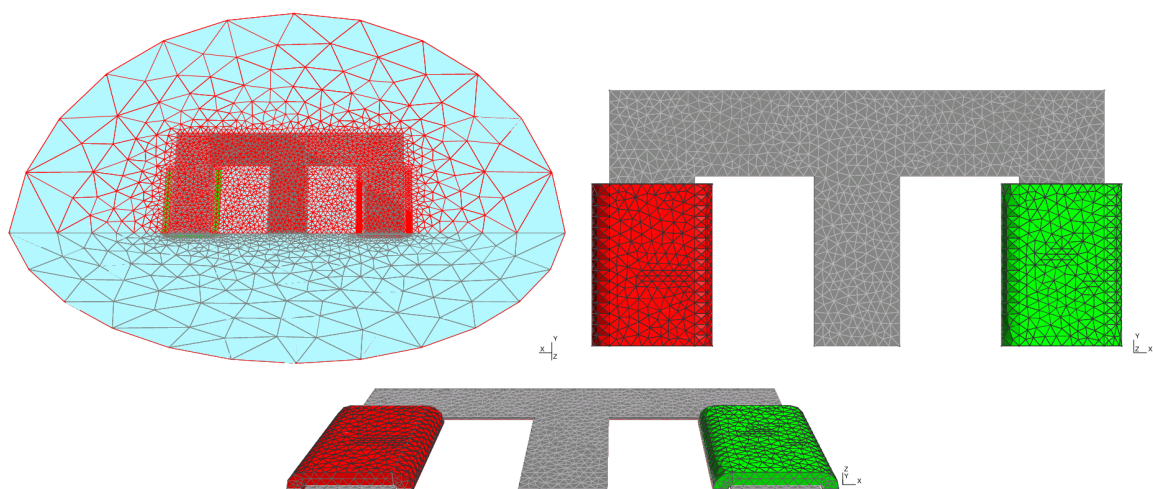
$$\boldsymbol{\nu}_d = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial H_x} & \frac{\partial B_x}{\partial H_y} & 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial H_x} & \frac{\partial B_y}{\partial H_y} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_z \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Numerische Tests mit Werten von  $\mu_z = \mu_0$  und  $\mu_z = 10^6 \cdot \mu_0$  zeigen keine nennenswerten Unterschiede im Feldbild des Transformators, was die Zulässigkeit der getroffenen Annahme bezüglich der Feldkomponenten unterstreicht. Für die präsentierten Berechnungen wurde ein Wert von  $\mu_z = 50$  gewählt.

Die Geometrie und die Vernetzung des dreidimensionalen Modells sind in Abb. 9.7 dargestellt. Zur Modellierung von  $\mathbf{A}$  werden Nédélec-Elemente erster Art und erster Ordnung verwendet, während  $\Psi$  mit Lagrange-Elementen zweiter Ordnung nachgebildet wird (beide gemäß Tab. 3.1). Analog zum 2D-Fall werden auf der  $x$ - $z$ -Ebene (graues Netz in der ersten Darstellung in Abb. 9.7) homogene Neumann-Randbedingungen an beide Potentiale vorgegeben, während auf den restlichen Rändern homogene Dirichlet-Randbedingungen, d. h.  $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0$  und  $\Psi = 0$ , vorgegeben werden.

### 9.4 Berechnung und Bewertung der Testfälle

Die Testfälle wurden auf Basis der zuvor identifizierten Materialdaten für die  $0^\circ$ -Messreihe und die  $60^\circ$ -Messreihe modelliert. Es wurde im Kontext der finiten Elemente stets ein Halbmodell der Geometrie verwendet.



**Abb. 9.7** – Ansichten des dreidimensionalen FE-Modells des Transformators

Die Testfälle stellen unterschiedliche Anforderungen an die jeweils verwendeten Materialmodelle. Die Testfälle 1 und 2 sind auch mit skalaren Hysterese-Modellen berechenbar, da in ihnen nur Wechselfelder auftreten. Testfall 3 ist auf die Überprüfung des vektoriellen Verhaltens der Hysterese-Modelle zugeschnitten. Testfall 4 ist vor allem interessant, wenn eine Kopplung des FE-Modells mit einem Schaltkreis möglich ist. Da eine derartige Kopplung im Rahmen dieser Arbeit nicht implementiert wurde, wird der Testfall nicht betrachtet.

#### 9.4.1 Testfall 1 und Testfall 2

Die Testfälle 1 und 2 weisen sehr ähnliche Eigenschaften auf. In beiden Fällen sind die zwei Erregerspulen in Reihe geschaltet, wodurch lediglich ein Wechselfeld auftritt. Der Unterschied zwischen beiden Fällen ist, dass der Grundwelle der Spannung in Fall 2 eine 5. Oberschwung überlagert wird (in beiden Fällen besitzen die Spannungen einen ähnlichen Maximalwert<sup>2</sup>). Es wird an dieser Stelle nur Testfall 2 explizit betrachtet. Alle Ausführungen treffen in annähernd derselben Weise auch auf Testfall 1 zu (Ergebnisse zu Testfall 1 sind im Anhang C zu finden).

Unter Stromvorgabe kann der Aufbau direkt gemäß des Variationsproblems 8.2 modelliert werden. Zur Identifikation des Hysterese-Modells wurde die 0°-Messreihe herangezogen. Unabhängig von der Wahl des Materialparametersatzes fallen größere Abweichungen bezüglich der gemessenen Flussdichte durch Messspule 5 auf (siehe Abb. 9.8). Diese betreffen den Kurvenverlauf beim Wechsel der Polarität sowie den Oberwellengehalt des Flussverlaufs. Der Anteil der 5. Oberwelle ist größer als in den Messdaten dargestellt. Auch in anderen Veröffentlichungen (z. B. [117]) sind qualitativ ähnliche Rechenergebnisse aufgeführt. Die Abweichungen lassen sich nicht ohne Weiteres erklären und werden meist dem Hysterese-Modell zugeschrieben, allerdings sind in der ursprünglichen Veröffentlichung [31] des TEAM Problems 32 bereits mit weniger detaillierten Hysterese-Modellen deutlich bessere Ergebnisse bezüglich der Flussdichte erzielt worden.

<sup>2</sup>Die Beschreibung steht im Widerspruch zu den Ausführungen in [31, 32]. Mit Blick auf die Messdaten der Spannungen für Fall 1 und Fall 2 [32] lassen sich die hier angegebenen Werte bestätigen.

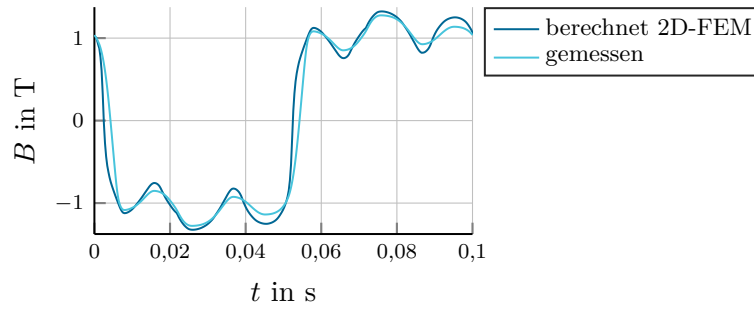


Abb. 9.8 – Vergleich der berechneten und gemessenen Flussdichteverläufe durch Spule 5 für Testfall 2

### Aufbau eines Reluktanznetzwerks

Der zuvor genannte Umstand motiviert eine detailliertere Untersuchung der Einflussfaktoren auf die Berechnung des Testfalls. Kleinere Einflüsse sind durch Streuflüsse um die Spulen und die Vorgabe verschiedener Materialien in verschiedenen Teilen des Transformator-kerns festzustellen. Diese Faktoren lassen sich gut mithilfe eines Reluktanznetzwerks abbilden. Dieses lässt sich wiederum recht einfach mit einem elektrischen Schaltkreis koppeln, was mit der verwendeten FE-Implementierung nicht ohne Weiteres möglich ist. Die resultierenden Schaltkreise sind in Abb. 9.9 dargestellt.

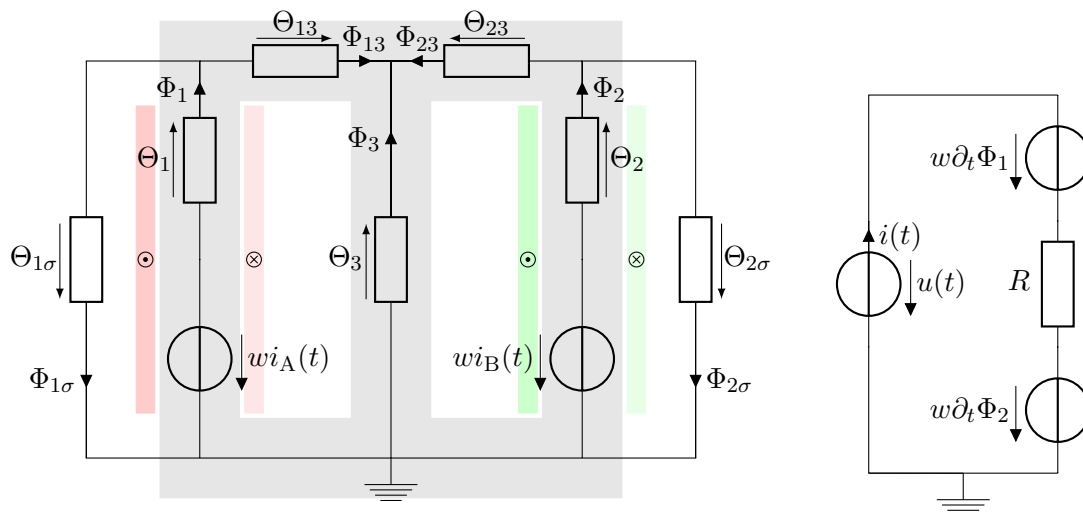


Abb. 9.9 – Magnetisches und elektrisches Ersatzschaltbild des TEAM Problems 32 für Testfall 2

Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit des Reluktanznetzwerks ist, dass sich die Geometrie gut in Teilstücke mit näherungsweise konstantem  $B$ -Feld unterteilen lässt. Dies ist gegeben, wenn die Teilabschnitte der Transformatorgeometrie, wie in Abb. 9.9 dargestellt, im Schaltkreis repräsentiert werden. Mittlere Weglängen können recht einfach mithilfe eines Pfades durch die Querschnitte der jeweiligen Teilabschnitte bestimmt werden und sind in Tab. 9.5 aufgeführt. Aufgrund der Verschaltung und der vorgegebenen Quellen gilt mit den durch Tab. 9.4 vorgegebenen Parametern:

$$u(t) = \hat{U} (\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)) \quad \text{und} \quad i_A(t) = i_B(t) = i(t) .$$

Die beschreibende Gleichung des elektrischen Schaltkreises wird nach dem impliziten Euler-Verfahren zeitlich diskretisiert, indem die Zeitableitungen der magnetischen Flüsse durch den

**Tab. 9.4** – Vorgegebene Parameterwerte zur Berechnung von Testfall 2

Parameter	$\hat{U}$	$f_1$	$f_2$	$R$	$w$
Wert	5,9 V	10 Hz	50 Hz	11,74 $\Omega$	90

Differenzenquotienten ersetzt werden. Im weiteren Verlauf gibt  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  den aktuellen Zeitschritt an (siehe Kapitel 3).

Die Beziehungen zwischen den Flüssen  $\Phi$  und den Durchflutungen  $\Theta$  werden analog zu (3.102) in einer Dimension linearisiert. Gegeben ist ein Abschnitt der Länge  $l$  mit konstantem Querschnitt  $a$  und der Flächennormalen  $\mathbf{n}$ . Es wird angenommen, dass das  $\mathbf{B}$ -Feld lediglich eine Komponente in Richtung  $\mathbf{n}$  besitzt und über die gesamte Länge konstant ist. Dann gilt für die Flüsse ausgehend von den Feldgrößen

$$\Phi \approx \Phi_0 + a \mathbf{n}^T \mu_d \frac{\Theta - \Theta_0}{l} \mathbf{n} . \quad (9.8)$$

Somit gilt für die Ableitungen der Flüsse nach den jeweiligen zugeordneten Durchflutungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} = \frac{a}{l} \mathbf{n}^T \mu_d \mathbf{n} . \quad (9.9)$$

Die Knoten- und Maschengleichungen des magnetischen und elektrischen Netzwerks lassen sich nach den üblichen Regeln aufstellen. Ausgehend von einem spannungsgespeisten elektrischen Schaltkreis ergeben sich, sofern die Flüsse in den jeweiligen Zweigen durch die zugehörigen Durchflutungen ausgedrückt werden, als Unbekannte der Strom  $i$  sowie die sieben Durchflutungen  $\Theta_1, \Theta_2, \text{etc.}$  In jedem Schritt des zeitdiskretisierten Rechenschemas muss ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Dieses wird mithilfe des Newton-Verfahrens linearisiert und besteht aus der Gleichung des elektrischen Schaltkreises gemäß

$$Ri + \frac{w}{\Delta t_n} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta_1} \Theta_{1\varepsilon} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \Theta_2} \Theta_{2\varepsilon} \right) = u(t_n) + \frac{w}{\Delta t_n} (\Phi_1(t_{n-1}) - \Phi_1 + \Phi_2(t_{n-1}) - \Phi_2) , \quad (9.10)$$

die gekoppelt ist mit dem Gleichungssystem des Reluktanznetzwerks

$$wi - \Theta_{1\varepsilon} + \Theta_{3\varepsilon} - \Theta_{13\varepsilon} = \Theta_1 - \Theta_3 + \Theta_{13} \quad (9.11)$$

$$wi - \Theta_{2\varepsilon} + \Theta_{3\varepsilon} - \Theta_{23\varepsilon} = \Theta_2 - \Theta_3 + \Theta_{23} \quad (9.12)$$

$$wi - \Theta_{1\varepsilon} - \Theta_{1\sigma\varepsilon} = \Theta_1 + \Theta_{1\sigma} \quad (9.13)$$

$$wi - \Theta_{2\varepsilon} - \Theta_{2\sigma\varepsilon} = \Theta_2 + \Theta_{2\sigma} \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \Theta_{13}} \Theta_{13\varepsilon} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial \Theta_{23}} \Theta_{23\varepsilon} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \Theta_3} \Theta_{3\varepsilon} = -\Phi_{13} - \Phi_{23} - \Phi_3 \quad (9.15)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \Theta_1} \Theta_{1\varepsilon} - \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial \Theta_{13}} \Theta_{13\varepsilon} - \frac{\partial \Phi_{1\sigma}}{\partial \Theta_{1\sigma}} \Theta_{1\sigma\varepsilon} = -\Phi_1 + \Phi_{13} + \Phi_{1\sigma} \quad (9.16)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \Theta_2} \Theta_{2\varepsilon} - \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial \Theta_{23}} \Theta_{23\varepsilon} - \frac{\partial \Phi_{2\sigma}}{\partial \Theta_{2\sigma}} \Theta_{2\sigma\varepsilon} = -\Phi_2 + \Phi_{23} + \Phi_{2\sigma} . \quad (9.17)$$

Die Flüsse und Durchflutungen des aktuellen Zeitschritts müssen nach jedem Newton-Schritt aktualisiert werden. Dies geschieht analog zum Vorgehen in Abschnitt 8.3.1. Für die Initialisierung können der Strom sowie alle Flüsse und Durchflutungen zu Null gesetzt werden. Das Modell ermöglicht eine einfache Anpassung an eine Stromspeisung, indem (9.10) gestrichen wird und  $i(t)$  als Quellgröße auf die rechte Seite der darauffolgenden Gleichungen geschrieben wird. Der Einfluss der Streuflüsse  $\Phi_{1\sigma}$  und  $\Phi_{2\sigma}$  kann durch eine Anpassung der zugehörigen (konstanten) Ableitungswerte in (9.16) und (9.17) beliebig verändert werden.



Generell kann dieser nicht exakt berechnet werden, auf seine Bestimmung wird im nächsten Unterabschnitt eingegangen. Im Joch und in den einzelnen Schenkeln des Transformator-kerns können verschiedene Materialien vorgegeben werden, was die Ergebnisse jedoch nur geringfügig beeinflusst.

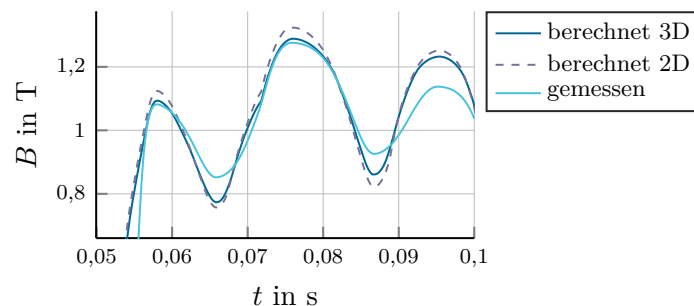
Die benötigten mittleren Weglängen und restlichen Geometriewerte zur Berechnung der Parameter des Reluktanznetzwerks sind in Tab. 9.5 angegeben.

**Tab. 9.5** – Geometrische Werte zur Berechnung der Parameter des Reluktanznetzwerks

Parameter	$l_1$	$l_2$	$l_{13}$	$l_{23}$	$a$
Wert	150 mm	150 mm	145 mm	145 mm	72 mm <sup>2</sup>

### Einfluss der Streuung

Um den Einfluss der Streuung im ersten Schritt möglichst exakt nachzubilden, wurde das dreidimensionale FE-Modell des Transformators verwendet. Innerhalb des 3D-FE-Modells kann auf dasselbe Hysterongruppenmodell auf Basis der 0°-Messung zurückgegriffen werden. Zwischen dem dreidimensionalen und dem zweidimensionalen FE-Modell entstehen vor allem Abweichungen bezüglich der erreichten Extrema. Diese fallen eher gering aus, da Sättigungserscheinungen vornehmlich im mittleren Schenkel auftreten, die Streuflüsse dagegen die äußeren Schenkel magnetisch belasten.

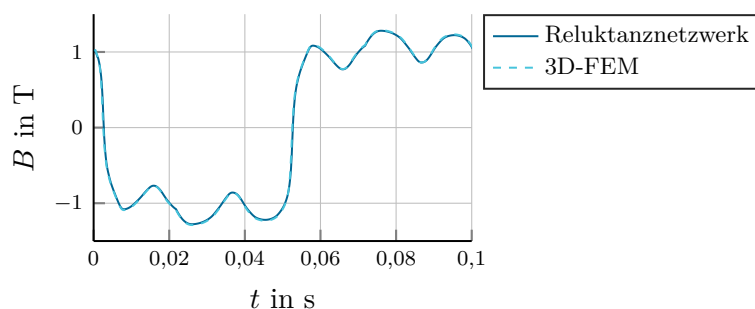


**Abb. 9.10** – Testfall 2: Vergleich mit 2D-FEM und 3D-FEM berechneter und gemessener Flussdichteverläufe durch Messspule 5

Mithilfe des 3D-Modells werden die berechneten mittleren Weglängen und die magnetischen Streuleitwerte des Reluktanznetzwerks bei Stromspeisung abgeglichen. Für die berechneten mittleren Weglängen wird durchgehend der Faktor 0,95 zur Korrektur verwendet. Ein Abgleich der berechneten Kurven zwischen Reluktanznetzwerk und 3D-FEM liefert einen magnetischen Leitwert der Streupfade von  $1,7 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A}}$ . Bei einer angenommenen mittleren Weglänge von 290 mm entspricht dieser Wert einem Streupfad mit einer Querschnittsfläche von 220 cm<sup>2</sup>. Dies wiederum entspricht einem Ausbreitungsbereich des magnetischen Flusses mit einem Radius von ca. 8,4 cm, was bezogen auf die Abmessungen des Transformator-kerns glaubhaft ist. Insgesamt ergibt sich die in Abb. 9.11 dargestellte sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse zwischen 3D-FEM und abgeglichenem Reluktanznetzwerk.

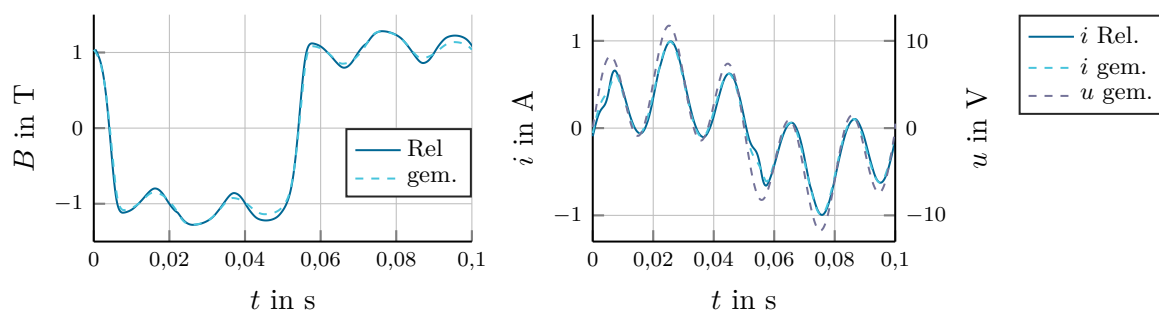
### Einfluss der Anregung

Mit den abgeglichenen Parametern des Reluktanznetzwerks ist eine Berücksichtigung der Spannungspeisung möglich. Bezüglich der Flussdichte in Abb. 9.12 ist ersichtlich, dass



**Abb. 9.11** – Testfall 2: Vergleich der Ergebnisse zwischen stromgespeistem Reluktanznetzwerk und 3D-FEM nach Abgleich der Parameter des Reluktanznetzwerks

die Messergebnisse deutlich besser nachgebildet werden als im Falle der Stromspeisung. Der Polaritätswechsel innerhalb des Schenkels wird nahezu exakt nachgebildet. Es verbleibt eine moderate Abweichung kurz vor dem Polaritätswechsel, die vermutlich auf Unzulänglichkeiten des Hysterese Modells bei der Modellierung innerer Hystereseschleifen zurückzuführen ist. Ein anderes Bild ergibt sich mit Blick auf den Strom, der nun ebenfalls eine zu berechnende Variable darstellt. Dieser stimmt größtenteils mit dem gemessenen Verlauf überein. Einzig im Bereich des Polaritätswechsels kommt es zu sichtbaren Abweichungen. Diese sind kritisch zu bewerten. Der Schaltkreis weist durch den hohen Widerstand überwiegend resistives Verhalten auf (Strom und Spannung sind überwiegend in Phase, siehe Abb. 9.12). Dies bedeutet, dass selbst kleine Abweichungen im Strom auf größere Abweichungen zwischen den modellierten und den tatsächlichen magnetischen Eigenschaften des Transformator-kerns hinweisen können. Aufgrund fehlender Daten bezüglich des  $\mathbf{H}$ -Felds können diese Abweichungen jedoch nicht weiter quantifiziert werden.



**Abb. 9.12** – Vergleich zwischen Berechnungsergebnissen des Reluktanznetzwerks bei Spannungspeisung mit den Messwerten zu Testfall 2

Zusammenfassend stellt sich heraus, dass vor allem der Unterschied zwischen Spannungspeisung und Stromspeisung des Modells einen nennenswerten Einfluss auf die Berechnungsergebnisse hat.

### 9.4.2 Testfall 3

Wie bereits beschrieben, wurden für Testfall 3 die Spulen A und B über Widerstände mit jeweils gleicher Größe mit Spannungsquellen verbunden, deren Spannungen eine Phasendifferenz von  $90^\circ$  aufweisen und gemäß

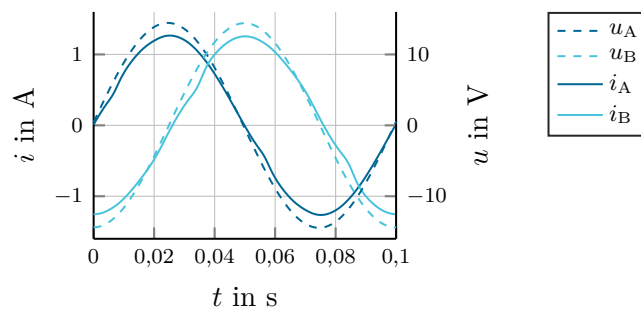
$$u_A = \hat{U} \sin(2\pi ft) \quad \text{und} \quad u_B = \hat{U} \sin(2\pi ft - \pi/2) \quad (9.18)$$

gegeben sind. Die Parameter des Stromkreises sind in Tab. 9.6 angegeben (die Widerstände der Spulen sind in  $R$  bereits berücksichtigt)<sup>3</sup>.

**Tab. 9.6** – Vorgegebene Parameterwerte zur Berechnung von Testfall 3

Parameter	$\hat{U}$	$f$	$R$
Wert	14,5 V	10 Hz	11,42 $\Omega$

Die gemessenen Ströme und Spannungen sind in Abb. 9.13 dargestellt. Obwohl die Spannungen eine nahezu identische Kurvenform aufweisen, trifft dies auf die Ströme nicht in gleicher Qualität zu (dies kann auch durch Überlagerung der Ströme überprüft werden). Diese Abweichung weist auf eine Unsymmetrie innerhalb des Messaufbaus hin, sie kann jedoch ohne Zugriff auf den Aufbau nicht näher untersucht werden. Im Folgenden werden zur Berechnung der eingepprägten Stromdichten des FE-Modells die gemessenen Ströme verwendet.



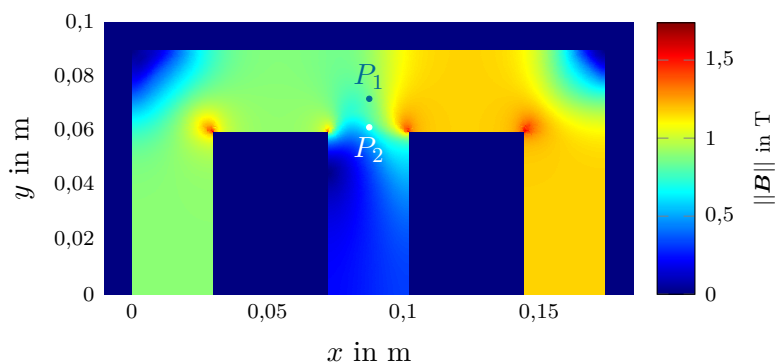
**Abb. 9.13** – Gemessene Spannungen und Ströme zu Testfall 3

Testfall 3 eröffnet die Möglichkeit, die Charakteristika vektorieller Hysterese näher zu untersuchen. Dies wird nachfolgend durchgeführt, indem die Berechnungen für eine Modellierung des Materials mit dem Hysterengruppenmodell und mit der Arkustangenskennlinie gemäß (9.1) verglichen werden.

### Berechnung unter Verwendung des Hysterengruppenmodells

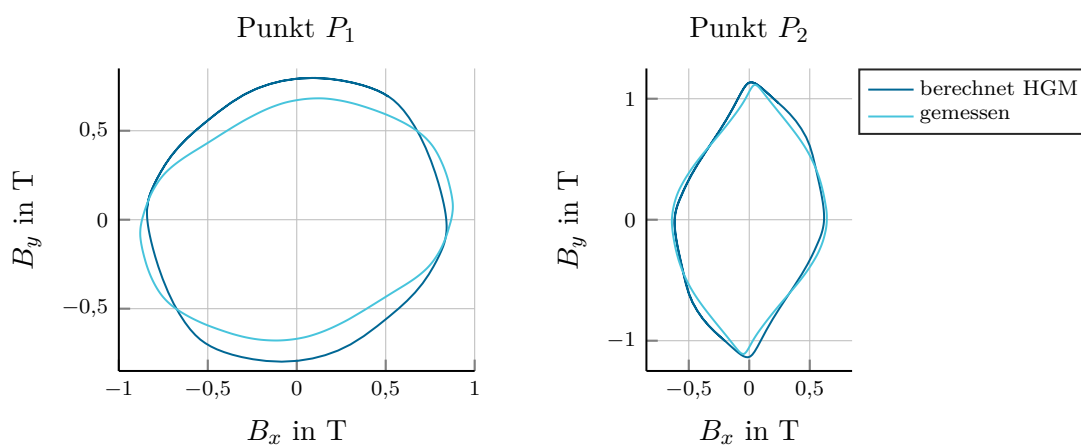
Die Konfiguration des 3. Testfalls ruft im Transformator Kern rotierende Feldvektoren hervor, die sich nicht mit skalaren Materialmodellen beschreiben lassen. Deshalb wird dieser Testfall vornehmlich zur Verifikation von Vektorhysterese Modellen herangezogen und ist auch zur Verifikation des Hysterengruppenmodells von großer Bedeutung. Auf die berechneten Flussdichteverläufe durch die Messspulen 1–4 bzw. die von ihnen definierten Kontrollpunkte  $P_1$  (definiert von Spule 1 und 2) und  $P_2$  (definiert von Spule 3 und 4) hat, sofern das Material innerhalb des Transformator Kerns homogen vorgegeben wird, die Wahl der zur Identifikation verwendeten Messreihe einen deutlichen Einfluss. Im Folgenden wurde die 60°-Messreihe verwendet. Im Allgemeinen ändert sich je nach verwendeter Messreihe der Bereich, in dem die Messkurven von den berechneten Kurven abweichen. Dies spiegelt das (schwach) anisotrope Verhalten des Elektroblechs wieder, da das Magnetisierungsverhalten in den verschiedenen Raumrichtungen durch das Hysterese Modell nicht überall gleich gut wiedergegeben wird. Die 60°-Messreihe liefert im Mittel die geringsten Abweichungen.

<sup>3</sup>Bezüglich der Spannung finden sich in [31] und auf der zugehörigen Webseite [http://www.cadema.polito.it/team32/measurement/case\\_3](http://www.cadema.polito.it/team32/measurement/case_3) unterschiedliche Angaben (14,5 V und 15 V). Weiterhin besitzt der gemessene Strom  $i_B$  einen Phasenversatz zu  $u_B$  von ca. 180°. Dies ist lediglich mit einem Vorzeichenfehler bei der Angabe der Messdaten zu erklären, da beide Schaltkreise gleichermaßen resistives Verhalten aufweisen.

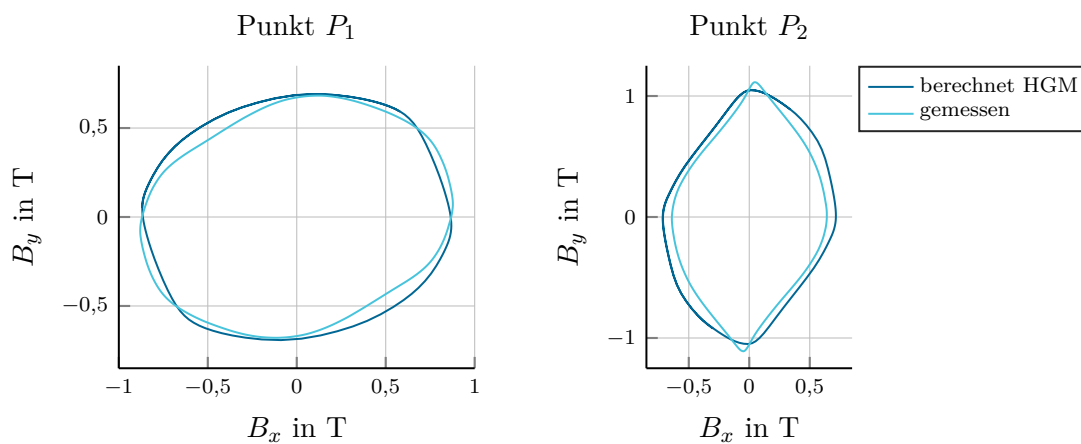


**Abb. 9.14** – Exemplarische Flussdichteverteilung zu Testfall 3

Ein exemplarisches Feldbild ist in Abb. 9.14 gegeben. Ein Vergleich der berechneten Flussdichteverläufe mit den Messergebnissen der Induktionsverläufe in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  für die verschiedenen geometrischen Varianten ist in Abb. 9.15 und Abb. 9.16 dargestellt. Es zeigt sich, dass die mithilfe des Hysterongruppenmodells erhaltenen Ergebnisse die Messverläufe gut nachbilden. Deutlich ersichtlich ist die größere Abweichung für jeweils einen Messpunkt, abhängig von der gewählten Geometrievariante.



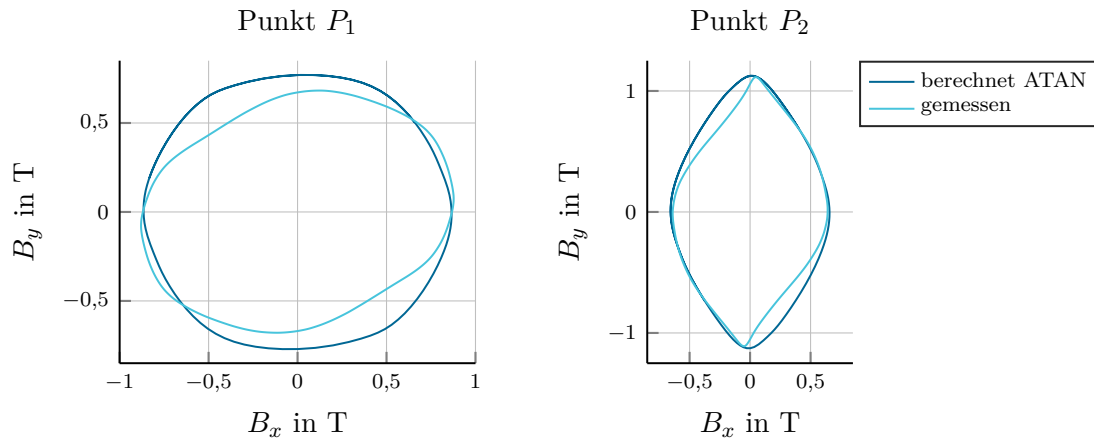
**Abb. 9.15** – Vergleich gemessener und berechneter Verläufe des  $B$ -Felds unter Verwendung des Hysterongruppenmodells für Variante 1



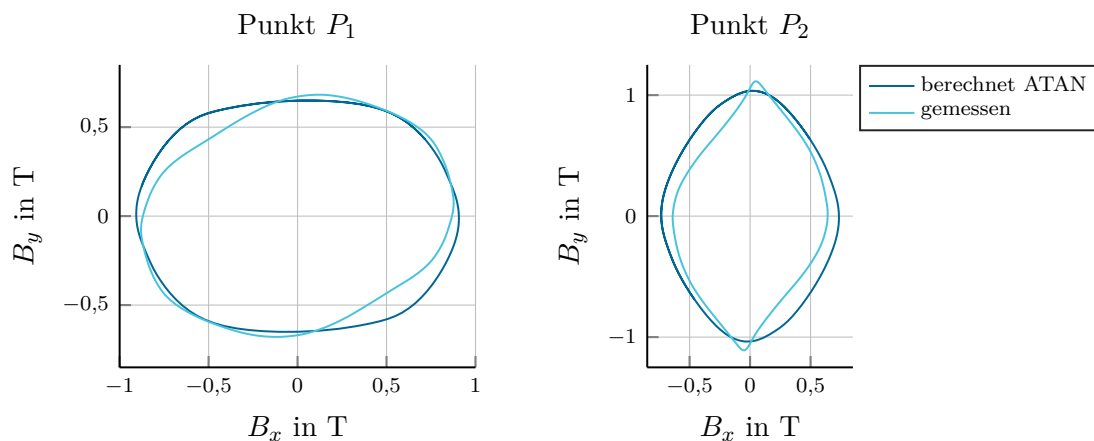
**Abb. 9.16** – Vergleich gemessener und berechneter Verläufe des  $B$ -Felds unter Verwendung des Hysterongruppenmodells für Variante 2

### Berechnung unter Verwendung der Arkustangenskennlinie

Bezüglich des qualitativen Verlaufs liefert auch die Berechnung mithilfe des Arkustangens gute Ergebnisse. Diese sind in Abb. 9.17 und Abb. 9.18 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Abweichung zwischen gemessenen und berechneten Induktionsverläufen für die unterschiedlichen Geometrievarianten einen ähnlichen Wechsel vollzieht wie im Fall des Hysterese Modells. Typisch für den Feldverlauf der hysteresebehafteten Größen ist, dass die Induktionsverläufe keine Achsensymmetrie aufweisen (siehe Punkt  $P_2$ ). Dieser Effekt kann durch die Standardkennlinie nicht nachgebildet werden.



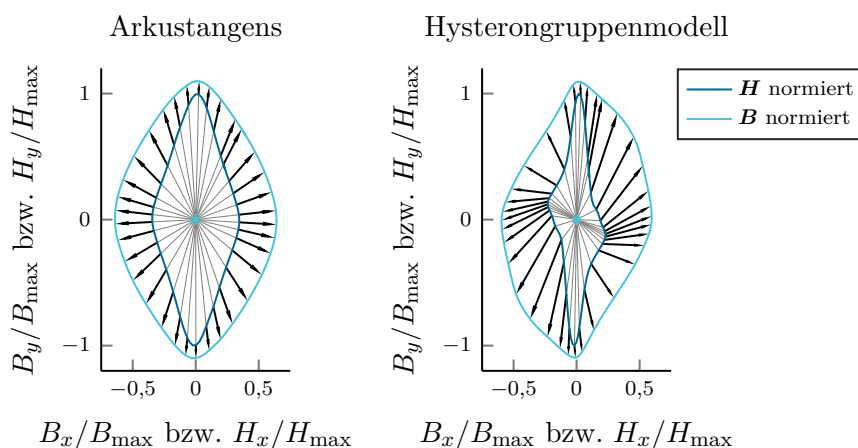
**Abb. 9.17** – Vergleich gemessener und berechneter Verläufe des  $\mathbf{B}$ -Felds unter Verwendung des Arkustangens für Variante 1



**Abb. 9.18** – Vergleich gemessener und berechneter Verläufe des  $\mathbf{B}$ -Felds unter Verwendung des Arkustangens für Variante 2

Deutlich gravierender ist der Unterschied in Bezug auf das Verhältnis zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$ . Per Konstruktion sind im Falle der Arkustangenskennlinie  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  stets kollinear. Dass eine Winkeldifferenz zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  auftritt, ist hingegen ein Kennzeichen von Hysterese. Das jeweilige Verhalten wird in Abb. 9.19 illustriert. Die Kurven von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  wurden jeweils auf den Maximalwert  $B_{\max} = \max_t \|\mathbf{B}(t)\|$  bzw.  $H_{\max} = \max_t \|\mathbf{H}(t)\|$  normiert (die resultierende Kurve für  $\mathbf{B}$  wurde anschließend zur besseren Darstellung um einen kleinen Faktor zentrisch

gestreckt). Pfeile zeigen jeweils von den  $\mathbf{H}$ -Werten zu den korrespondierenden  $\mathbf{B}$ -Werten. Der Punkt  $(0, 0)^T$  wurde in jedem Diagramm mit einem Stern markiert<sup>4</sup>.



**Abb. 9.19** – Qualitativer Vergleich der Kurvenverläufe des  $\mathbf{H}$ -Felds und des  $\mathbf{B}$ -Felds für verschiedene Materialmodelle im Punkt  $P_2$

Auch für Testfall 3 ist eine Untersuchung der Abhängigkeit der Rechenergebnisse von der Art der Anregung (Spannungs- oder Stromspeisung) von Interesse. Dies konnte jedoch nicht durchgeführt werden. Aus den veröffentlichten Messergebnissen geht hervor, dass sich der elektrische Schaltkreis wie in Testfall 2 überwiegend resistiv verhält, was eine Bewertung der Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Stromverläufen abermals schwierig gestaltet. Das zuvor erstellte Reluktanznetzwerk ist für Testfall 3 unbrauchbar, da es lediglich in der Lage ist, Wechselfelder abzubilden.

### Metriken zu den Berechnungen von Testfall 3

Beide Materialmodelle führen zu einem vergleichbaren Konvergenzverhalten. Allerdings benötigen die Berechnungen mit Hysterese signifikant mehr Rechenzeit, da der Rechenaufwand für das Materialmodell enorm steigt. In Tab. 9.7 sind einige Metriken zu den Berechnungsvorgängen angegeben. Alle Berechnungen wurden in zwei Dimensionen mit einem Gitter mit 15064 Zellen durchgeführt. Das auf eine Dimension reduzierte Vektorpotential  $\mathbf{A}$  wurde mit Lagrange-Elementen 2. Ordnung nachgebildet. Das Hysterongruppenmodell benötigte keine Schrittweitenbestimmung bei der Anwendung des Newton-Verfahrens. Daher wurde für beide Materialmodelle das in Kapitel 8 beschriebene Newton-Verfahren ohne Schrittweitenbestimmung verwendet. Es wurden zwei Perioden simuliert mit insgesamt 201 Zeitschritten.

**Tab. 9.7** – Metriken zu den globalen Berechnungsvorgängen von Testfall 3

Materialmodell	ATAN	HGM
mittlere Iterationsanzahl	3,2	4,1
max. Iterationsanzahl	10	9
Rechenzeit	6 Min.	38 Min.
Anteil Materialmodell	1,0%	73%

<sup>4</sup>Für die  $\mathbf{B}$ -Feld Messung des TEAM Problems 32 liegen keine Angaben zu Messzeitpunkten vor. Weiterhin können diese nicht konsistent zu den Zeitstempeln der Spannungs- und Strommessung zugeordnet werden. In der Literatur (z. B. [81]) werden daher zum Vergleich des zeitlichen Verlaufs berechnete oder gemessene Kurven entlang der Zeitachse verschoben. Deshalb bleibt es an dieser Stelle bei einem qualitativen Vergleich der Berechnungsergebnisse.

An dieser Stelle sollen auch die Eigenschaften des Hysterongruppenmodells in derartigen Berechnungen herausgestellt werden, einen Überblick darüber liefert Tab. 9.8. Das Modell muss wie bereits beschrieben invertiert werden. Abhängig von der aktuellen Anzahl der Iterationen wird eine Liniensuche zur Bestimmung der optimalen Schrittweite bei der Inversion der Einzelmodelle verwendet. Die Inversion wird abgebrochen, wenn der gewünschte Flussdichtewert bis auf eine absolute Genauigkeit von  $10^{-12}$  T erreicht wird. Es treten selten Fehlschläge bei der Invertierung auf. Es konnte festgestellt werden, dass deren Auftreten innerhalb der Berechnung mit einer leichten Verschiebung des vorgegebenen Äquivalenzbandes für Gleitkommazahlen (dieses spielt z. B. bei der numerischen Bestimmung des relevanten Pfads eine Rolle) scheinbar zufällig verändert wird. Dies lässt den Schluss zu, dass die Fehlschläge auf Rundungsfehler zurückzuführen sind.

**Tab. 9.8** – Metriken zum Hysterongruppenmodell bei der Berechnung von Testfall 3

Kriterium	Wert
Anzahl Hysterongruppenmodelle	21483
Iterationen pro Invertierung	3,9
Anteil fehlgeschlagener Invertierungen	$3,4 \cdot 10^{-7}$
Maximale Abweichung	$1,14 \cdot 10^{-11}$ T
Liniensuchen pro Inversion	$6,5 \cdot 10^{-5}$

### 9.4.3 Bewertung der Validierung

Das TEAM Problem 32 bietet trotz einiger Inkonsistenzen bezüglich der Messwerte und der Beschreibung des Problems ein sehr umfassendes Testfeld für Hystereseemodelle. Es ermöglicht eine von der Anwendung der Modelle separierte Identifikation der Modellparameter. Unter Vorgabe von Isotropie lassen sich mit dem zuvor eingeführten Identifikationsschema ohne größere Schwierigkeiten geeignete Modellparameter bestimmen, mit denen die jeweiligen Messergebnisse mit sehr guter Genauigkeit nachgebildet werden können. Ein offener Punkt bleibt der Einfluss der Speisung bei Testfall 3. Weiterhin ist in diesem Fall eine Modellierung der Anisotropie des Materials von Interesse. Hierbei ist die Schwierigkeit zu überwinden, dass keine Angaben existieren, wie der Transformator Kern bezüglich der Walzrichtung geschnitten wurde.

Bei der Anwendung kann das Hysterongruppenmodell vor allem bei 2D-FEM und Reluktanznetzwerk überzeugen. In beiden Fällen waren die resultierenden Iterationsschemata stabil und benötigten (abseits der Initialisierung bei der Berechnung von Testfall 2) keine Bestimmung einer optimalen Schrittweite. Auch die Anwendung des reduzierten Modells in der 3D-FEM war erfolgreich (auch für Fall 3, dessen Ergebnisse nahezu deckungsgleich zur 2D-FEM sind und daher nicht gezeigt wurden). In Bezug auf die 3D-FEM existieren jedoch noch viele offene Punkte, die bereits in Kapitel 8 erörtert wurden.

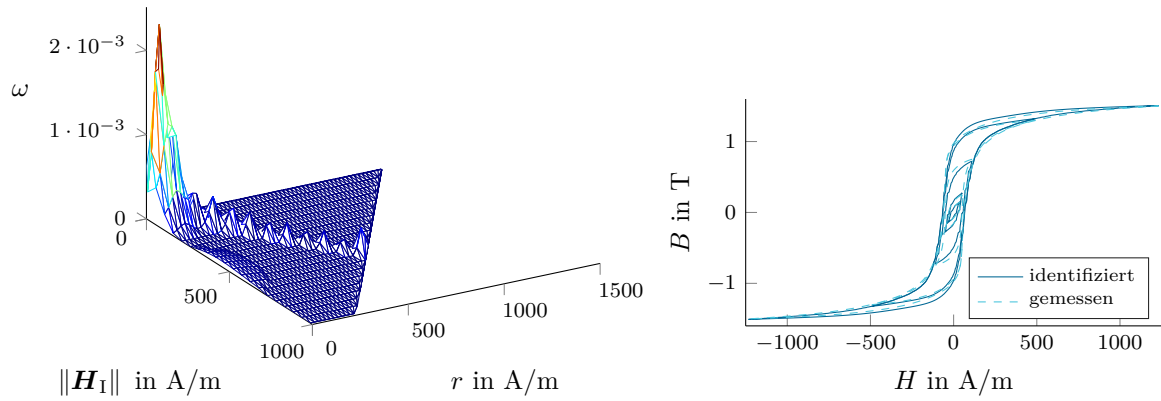
Weiterhin konnte nur auf ein reduziertes Materialmodell zurückgegriffen werden, da der Rechenaufwand für ein volles dreidimensionales Hysterongruppenmodell beträchtlich steigt. Im Falle des TEAM Problems 32 stellt dieses Modell eine sinnvolle Reduktion dar, da das Feld im Transformator Kern von vornherein eine sehr kleine  $z$ -Komponente besitzt. Darüber hinaus müsste bei einem dreidimensionalen Materialmodell berücksichtigt werden, dass in geblechten Aufbauten das ferromagnetische Material in  $z$ -Richtung durch die mechanische Bearbeitung (Walzen) veränderte Eigenschaften im Vergleich zu den anderen Raumrichtungen aufweist. Zudem entstehen durch die Schichtung der Bleche Luftspalte, die bei der Berechnung

berücksichtigt werden müssen. Insbesondere letztgenannter Punkt ist Gegenstand der aktuellen Forschung. Es existieren zahlreiche Homogenisierungsansätze, die versuchen, die heterogenen Materialeigenschaften durch Mittelwertbildungen zu homogenisieren (z. B. [140]). Weiterhin existieren Ansätze, die Materialeigenschaften in der FEM durch einen erweiterten Satz an Formfunktionen zu berücksichtigen [94, 95].

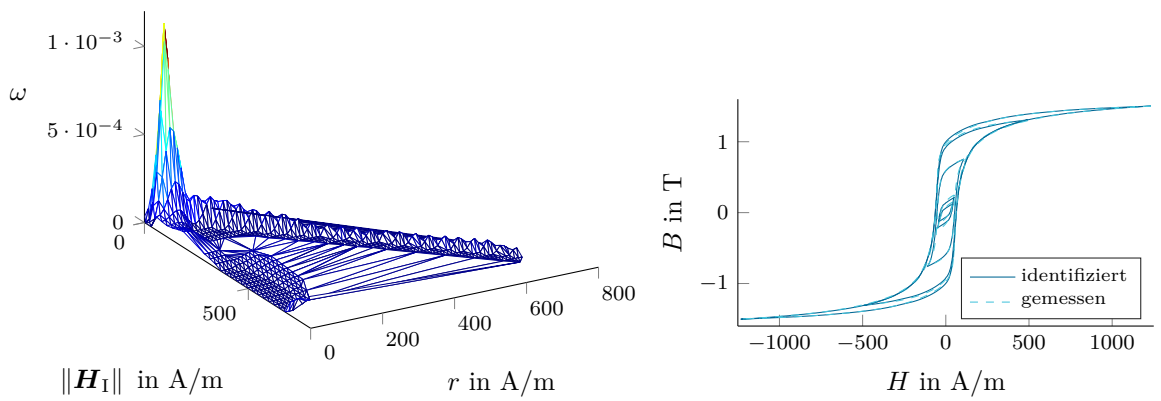
Der signifikante Unterschied zwischen Spannungspeisung und Stromspeisung für Testfall 2 wirft die Frage auf, welche Anregungsform besser geeignet ist, eine Aussage über die Güte der Materialmodelle zu treffen. Durch den resistiven Charakter der Schaltkreise folgt der Stromverlauf meist dem Spannungsverlauf. Abweichungen im Stromverlauf bei Spannungspeisung sind daher schwer zu interpretieren. Die Einprägung des Stroms hingegen führt zu erkennbaren Unterschieden im Verlauf des  $\mathbf{B}$ -Felds. Diese können jedoch nicht ohne Weiteres einer Ursache zugeschrieben werden, da durch die nicht berücksichtigte Isotropie größere Unsicherheiten bezüglich der magnetischen Spannungsabfälle innerhalb des Transformator-kerns entstehen. Zur Kontrolle des Materialmodells müssten die jeweiligen Werte des magnetischen Felds  $\mathbf{H}$  und der Flussdichte  $\mathbf{B}$  verglichen werden. Für  $\mathbf{H}$  liegen jedoch keine Messwerte vor, sodass lediglich der berechnete Strom als Maß für die benötigte Durchflutung und das  $\mathbf{B}$ -Feld (genauer der Fluss durch die Messspulen) mit Messwerten verglichen werden können.



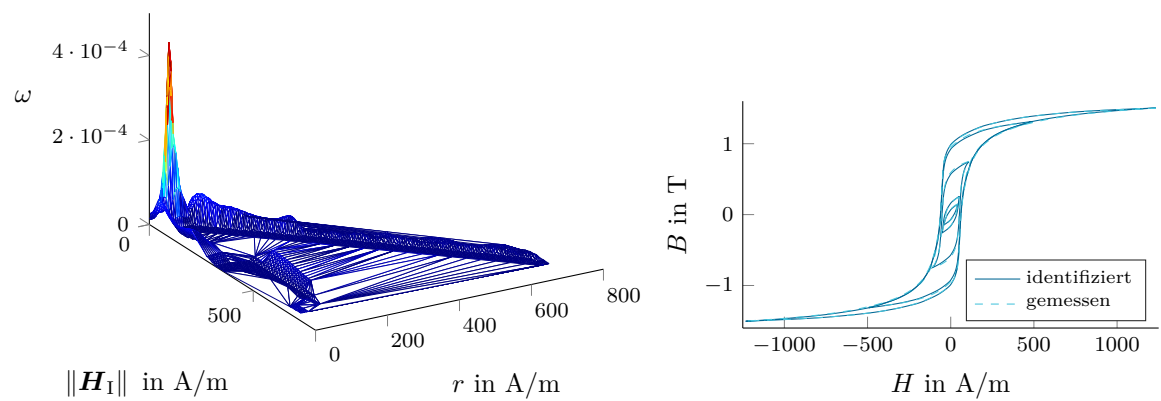
Schritt 1



Schritt 2



Schritt 3



**Abb. 9.20** – Schrittweise Bestimmung der Modellparameter: Darstellung der Parameterebenen (links) und der zugehörigen vorgegebenen und identifizierten Hysteresekurven (rechts)



## 10 Zusammenfassung und Ausblick

Zum Abschluss werden die Kernthemen der vorliegenden Arbeit nochmals rekapituliert, um anschließend einen Ausblick für eventuelle weitere Forschungsarbeiten zu geben. Die Arbeit beschäftigte sich mit verschiedenen Aspekten der Modellierung von ferromagnetischer Hysterese im Kontext der Energietechnik.

Es wurden zunächst in Kapitel 2 die grundlegenden physikalischen Beobachtungen erläutert, die zum makroskopischen Phänomen der Hysterese, insbesondere dem Auftreten von Hystereseschleifen, beitragen. Es wurde Wert darauf gelegt, die verschiedenen räumlichen Ausdehnungen innerhalb derer die maßgeblichen Prozesse stattfinden, zu unterscheiden. Für ferromagnetische Hysterese sind insbesondere Barkhausen-Sprünge verantwortlich, die auch eine enge Verbindung zum später eingeführten Preisach-Modell aufweisen. Anschließend wurden Hystereseverluste in den Kontext der Verlusttrennung eingebettet und von weiteren maßgeblichen Verlustmechanismen in ferromagnetischen Werkstoffen abgegrenzt. Besonders klassische Wirbelströme spielen in Ferromagnetika eine tragende Rolle. Diese wurden jedoch im Weiteren nicht mehr explizit betrachtet. Eine Schwierigkeit hierbei stellt vor allem die Behandlung des gebrochenen Aufbaus dar, wie er in Transformatoren oder elektrischen Maschinen zu finden ist. Dieser erfordert im Allgemeinen den Einsatz einer Homogenisierungsmethode oder detaillierte Berechnungen auf Basis eines einzelnen Blechs.

In Kapitel 3 wurde anschließend ausgehend von den Maxwell-Gleichungen hergeleitet, wie allgemeine nichtlineare Magnetisierungen bei der Berechnung elektromagnetischer Felder berücksichtigt werden können. Hierbei wurde der Fokus wie in der Energietechnik üblich auf niederfrequente Vorgänge gelegt. Die Lösung der reduzierten Gleichungen mithilfe der Methode der finiten Elemente wurde für den allgemeinen Wirbelstromfall (magnetisches Vektorpotential) und den magnetostatischen Fall (magnetisches Vektorpotential und magnetisches Skalarpotential) beschrieben. Es wurde darauf geachtet, die grundlegenden Zusammenhänge zwischen kontinuierlichen Feldern und deren diskreten Approximationen herzustellen. Die resultierenden magnetostatischen Variationsprobleme wurden in späteren Kapiteln konkret gelöst.

Zunächst wurde jedoch in den Kapiteln 4 und 5 auf die Modellierung von Hysterese eingegangen, da sich aus den Eigenschaften von Magnetisierungskennlinien mit Hysterese Besonderheiten bezüglich der Lösung der zuvor genannten Variationsprobleme ergeben. Nach einem kurzen Überblick über Hysterese Modelle wurde ausgehend von der grundlegenden mathematischen Definition eines Hystereseoperators der Fokus vorerst auf skalare Preisach-Modelle gelegt. Es wurde am Beispiel des energiebasierten Hysterese Modells gezeigt, dass diese Modelle in ihrer Grundform sehr allgemein definiert sind. Es genügt, wenn ein Prozess mit Hysterese die Auslöschungseigenschaft und die Kongruenzeigenschaft besitzt, um mit einem Preisach-Modell repräsentiert zu werden. Am Beispiel des energiebasierten Hysterese Modells wurde die Repräsentation als Preisach-Modell explizit hergeleitet. Daran anschließend wurde auf die Modellierung vektorieller Hysterese eingegangen. Diese erwies sich als deutlich komplexer, auch weil ein intuitiv gut fassbares Merkmal für vektorielle Hysterese, wie das Auftreten von Hystereseschleifen im skalaren Fall, im allgemeinen vektoriellen Fall fehlt. Weiter gibt es keinen vorgeschriebenen Weg, um Modelle wie das ursprünglich skalare Preisach-Modell zu vektorisieren. Hierfür wurden das Vektor-Preisach-Modell nach Mayergoyz und der vektorielle

Spiel-Operator als Beispiele angeführt. Letzterer wird in einer weit verbreiteten Vereinfachung des energiebasierten Hysterese Modells angewendet. Für diese Arbeit war vor allem das danach eingeführte DPC-Modell von Interesse. Dieses führt vektorielle Versionen von Preisach-Relais ein. Es besitzt den Nachteil, dass es nicht ohne Weiteres in einer kontinuierlichen Form implementiert werden kann. Diesen Nachteil zu überwinden ist das Hauptanliegen, das in Kapitel 5 behandelt wurde. Es wurde zuerst auf das bereits in der Literatur verwendete Interpolationsmodell eingegangen und dessen Vor- und Nachteile erörtert. Danach wurde in einem der Kernabschnitte der Arbeit das Hysterongruppenmodell eingeführt. Im Gegensatz zu anderen Implementierungen des DPC-Modells, basiert dieses nicht auf diskreten Hysterons, sondern verwendet Hysterongruppen als elementare Bausteine des Hysterese Modells. Es besitzt den Nachteil einer deutlich aufwendigeren Implementierung, liefert jedoch eine kontinuierliche Ausgangsgröße. Der Formalismus für die Definition der Hysterongruppen wurde allgemein eingeführt, eine Auswertung fand dann für kreisförmige kritische Oberflächen statt. Alle im Rahmen der Feldrechnung benötigten Größen lassen sich explizit berechnen und die zugehörigen Zusammenhänge wurden angegeben.

In Kapitel 6 wurde anschließend näher auf das Dissipationsverhalten der Hysterese Modelle, d. h. die durch sie vorgegebenen Hystereseverluste, eingegangen. Es wurde deutlich, dass hier zwischen den Hysterese Modellen signifikante Unterschiede bestehen. Weiter wurde die Verlustberechnung für das Hysterongruppenmodell hergeleitet. Für die entstehenden Integrale empfiehlt sich eine numerische Auswertung.

Eine größere Schwierigkeit in Zusammenhang mit Preisach-Modellen ist die Parameteridentifikation. Während dies für den skalaren Fall gut beherrscht wird, ist der Parameterraum im vektoriellen Fall deutlich größer und es fehlen Konstrukte wie die Everett-Funktion, auf die im skalaren Fall zurückgegriffen wird. In Kapitel 7 wurde die Identifikation von Parametern für das isotrope diskrete DPC-Modell und das isotrope Hysterongruppenmodell beschrieben. Hierbei war es entscheidend, den Parameterraum so weit wie möglich zu verkleinern. Dafür wurden verschiedene Kriterien präsentiert, die einzeln oder in Kombination angewendet werden können. Für isotrope Materialien verbleibt die Identifikation der Preisach-Dichten von Hysterons, die entlang einer Halbachse verteilt sind. Weiter wurde eine Methode präsentiert, den Parameterraum sukzessive anzupassen und durch einen mehrstufigen Identifikationsvorgang stark verbesserte Ergebnisse zu erhalten.

In Kapitel 8 wurden die Ausführungen aus Kapitel 3 und 5 kombiniert und Lösungsverfahren für Feldprobleme mit Hysterese diskutiert. Es wurden bekannte Fixpunktverfahren wie die  $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ -Iteration und die Polarisationsmethode präsentiert. Der Schwerpunkt lag allerdings auf der Lösung der Feldprobleme mithilfe des Newton-Verfahrens. Es wurde gezeigt, dass durch die Eigenschaften der Permeabilitätstensoren der Hysterese Modelle die entstehenden Verfahren den semiglatten Newton-Verfahren zugeordnet werden können. Unter Einsatz einer Schrittweitenbestimmung zeigte sich eine gute Konvergenz des Newton-Verfahrens in einer Beispielrechnung.

Als größeres Testfeld für das Hysterongruppenmodell diente in Kapitel 9 das TEAM Problem 32. Trotz einiger Unzulänglichkeiten und Inkonsistenzen des Testproblems, auf die im Rahmen des Kapitels hingewiesen wurde, bietet das TEAM Problem 32 vielfältige Möglichkeiten zum Testen des Hysterongruppenmodells bezüglich aller zuvor behandelten Aspekte. Das Hysterongruppenmodell wurde in verschiedenen Umgebungen, zweidimensionalen und dreidimensionalen finiten Elementen und einem Reluktanznetzwerk, eingesetzt. In allen Fällen zeigten sich die zuvor präsentierten Verfahren zur Lösung nichtlinearer Berechnungen mit Hysterese stabil, jedoch besitzen sie eine vergleichsweise hohe Rechenzeit. Die mithilfe des Hysterongruppenmodells erhaltenen Berechnungsergebnisse liegen nah an den gemessenen

---

Daten, wobei eine qualitative Bewertung der Abweichung aufgrund von Unsicherheiten bezüglich des Aufbaus des TEAM Problems 32 schwerfällt.

Es ergeben sich zahlreiche Fragestellungen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht beantwortet oder nur am Rande behandelt wurden:

1. Die konkrete Implementierung von Modellen für anisotrope Materialien. Vermutlich eignen sich hierzu elliptische kritische Oberflächen. Diese besitzen deutlich mehr Freiheitsgrade als kreisförmige kritische Oberflächen (Orientierung, Achsenverhältnis, Entwicklung des Achsenverhältnisses).
2. Die dreidimensionale FEM, wie sie in der Arbeit durchgeführt wurde, unterlag vielen Restriktionen. Allen voran musste ein direktes Lösungsverfahren in Kombination mit der gemischten Formulierung verwendet werden. Schwerwiegend bei der Verwendung des Hysterongruppenmodells ist, dass es bedingt, dass Matrizen des Gleichungssystems der FEM nicht symmetrisch sind. Dadurch können iterative Standardlösungsverfahren und Präkonditionierer im Normalfall nicht verwendet werden. Es bedarf demnach der gesonderten Konstruktion eines Lösungsverfahrens für den dreidimensionalen Fall.
3. Es wurde im dreidimensionalen Fall nur ein reduziertes Hysteresemodell verwendet. Ein vollwertiges dreidimensionales Modell kann mithilfe der präsentierten Methoden erstellt und identifiziert werden. Zu klären ist vor allem die Frage, inwiefern eine isotrope Materialmodellierung in  $z$ -Richtung bei dünnen Blechen zulässig ist. Es ist zu erwarten, dass dies nicht der Fall ist. Um dieses Verhalten abzubilden, werden jedoch Modelle für anisotrope Materialien benötigt.
4. Auch in Zusammenhang mit dem reduzierten dreidimensionalen Materialmodell ist eine Berechnung von Wirbelströmen von Interesse. Diese erfordert zum einen die Berücksichtigung von geblechten Strukturen und die eventuelle Kopplung des Hysterongruppenmodells mit einem Untermodell, wie es im Zuge von Homogenisierungsmethoden vorkommt. Weiterhin ist auch bei diesem Punkt, im Falle der dreidimensionalen Modellierung eines Wirbelstromproblems, die Verfügbarkeit eines geeigneten Lösungsverfahrens von großer Bedeutung.



# Literatur

- [1] M. S. Alnæs u. a. „The FEniCS Project Version 1.5“. In: *Archive of Numerical Software* 3.100 (2015).
- [2] M. S. Alnæs u. a. „Unified Form Language: A domain-specific language for weak formulations of partial differential equations“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 40.2 (2014).
- [3] M. S. Alnæs u. a. „Unified Framework for Finite Element Assembly“. In: *International Journal of Computational Science and Engineering* 4.4 (2009), S. 231–244.
- [4] P. R. Amestoy, I. S. Duff und J.-Y. L’Excellent. „Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 184.2 (2000), S. 501–520. ISSN: 0045-7825.
- [5] F. G. Baily. „The Hysteresis of Iron and Steel in a Rotating Magnetic Field“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 187 (1896), S. 715–746. ISSN: 0080-4614.
- [6] M. Bali. „Magnetic material degradation due to different cutting techniques and its modeling for electric machine design“. Dissertation. Graz: Technische Universität Graz, 2016.
- [7] J. P. A. Bastos u. a. „A Differential Permeability 3-D Formulation for Anisotropic Vector Hysteresis Analysis“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 50.2 (2014), S. 341–344. ISSN: 0018-9464.
- [8] J. P. A. Bastos u. a. „A New and Robust Hysteresis Modeling Based on Simple Equations“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 54.3 (2018), S. 1–4. ISSN: 0018-9464.
- [9] J. P. A. Bastos und N. Sadowski. *Magnetic materials and 3D finite element modeling*. Boca Raton: CRC Press, 2014. ISBN: 9781299990241.
- [10] M. Benzi, G. H. Golub und J. Liesen. „Numerical solution of saddle point problems“. In: *Acta Numerica* 14 (2005), S. 1–137. ISSN: 0962-4929.
- [11] A. Bergqvist. „Magnetic vector hysteresis model with dry friction-like pinning“. In: *Physica B: Condensed Matter* 233.4 (1997), S. 342–347. ISSN: 0921-4526.
- [12] A. J. Bergqvist. „A simple vector generalization of the Jiles-Atherton model of hysteresis“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 32.5 (1996), S. 4213–4215. ISSN: 0018-9464.
- [13] G. Bertotti. „General properties of power losses in soft ferromagnetic materials“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 24.1 (1988), S. 621–630. ISSN: 0018-9464.
- [14] G. Bertotti. „Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials. I. Theoretical considerations“. In: *Journal of Applied Physics* 57.6 (1985), S. 2110. ISSN: 00218979.
- [15] G. Bertotti. „Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials. II. Analysis of experimental results“. In: *Journal of Applied Physics* 57.6 (1985), S. 2118. ISSN: 00218979.

- [16] G. Bertotti. „Space–time correlation properties of the magnetization process and eddy current losses: Applications. I. Fine wall spacing“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 55.12 (1984), S. 4339–4347. ISSN: 0018-9464.
- [17] G. Bertotti. „Space–time correlation properties of the magnetization process and eddy current losses: Theory“. In: *Journal of Applied Physics* 54.9 (1983), S. 5293–5305.
- [18] G. Bertotti, F. Fiorillo und M. P. Sassi. „Barkhausen noise and domain structure dynamics in Si-Fe at different points of the magnetization curve“. In: *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 23.2 (1981), S. 136–148. ISSN: 0304-8853.
- [19] G. Bertotti. *Hysteresis in Magnetism: For Physicists, Materials Scientists, and Engineers*. Electromagnetism. Burlington: Elsevier Science, 1998. ISBN: 0080534376.
- [20] G. Bertotti und I. D. Mayergoyz. *The science of hysteresis: Volume I*. Amsterdam, Boston und London: Academic, 2006. ISBN: 978-0-12-369431-7.
- [21] G. Bertotti und I. D. Mayergoyz, Hrsg. *The science of hysteresis: Volume II*. 1st ed. Amsterdam und Boston: Academic, 2006. ISBN: 9780123694324.
- [22] G. Bertotti und I. D. Mayergoyz, Hrsg. *The science of hysteresis: Volume III*. 1st ed. Amsterdam und Boston: Academic, 2006. ISBN: 9780123694331.
- [23] *Beschreibung des Testfalls 3 von TEAM Problem 32*. URL: [http://www.cadema.polito.it/team32/measurement/case\\_3](http://www.cadema.polito.it/team32/measurement/case_3) (besucht am 12.12.2019).
- [24] O. Bíró und K. Preis. „On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 25.4 (1989). July, S. 3145–3159. ISSN: 0018-9464.
- [25] O. Bíró, K. Preis und K. R. Richter. „On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 32.3 (1996), S. 651–654. ISSN: 00189464.
- [26] O. Bíró. „Numerische Aspekte von Potentialformulierungen in der Elektrodynamik“. Habilitationsschrift. Graz: Technische Universität Graz, 1993.
- [27] D. Bloomberg und V. Castelli. „Reformulation of nonlinear integral magnetostatic equations for rapid iterative convergence“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 21.2 (1985), S. 1174–1180. ISSN: 0018-9464.
- [28] A. Böhm. *Messung magnetischer Materialeigenschaften und deren Berücksichtigung bei der Simulation elektrischer Maschinen*. München: Verlag Dr. Hut, 2015. ISBN: 3843923973.
- [29] A. Bossavit. „Stiff problems in eddy-current theory and the regularization of Maxwell’s equations“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 37.5 (2001), S. 3542–3545. ISSN: 00189464.
- [30] A. Bossavit. *Computational electromagnetism: Variational formulations, complementarity, edge elements*. Electromagnetism. San Diego: Academic Press, 1998. ISBN: 0121187101.
- [31] O. Bottauscio u. a. „A test case for validation of magnetic field analysis with vector hysteresis“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 38.2 (2002), S. 893–896. ISSN: 0018-9464.
- [32] O. Bottauscio u. a. *Description of TEAM Problem: 32 A Test-Case for Validation of Magnetic Field Analysis with Vector Hysteresis*. Verfügbar unter: <http://www.compumag.org/jsite/images/stories/TEAM/problem32.pdf> und <http://www.cadema.polito.it/team32>. (Besucht am 12.12.2019).



- [33] R. Bouc. „Modèle mathématique d’hystérésis. Application aux systèmes à un degré de liberté“. Dissertation. Marseille, 1969.
- [34] S. C. Brenner und L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. 3rd ed. Bd. 15. Texts in applied mathematics. New York, NY: Springer, 2008. ISBN: 978-0-387-75934-0.
- [35] M. Brokate und J. Sprekels. *Hysteresis and Phase Transitions*. Bd. 121. Applied mathematical sciences. New York: Springer New York, 1996. ISBN: 9781461284789.
- [36] A. Buffa, H. Ammari und J. C. Nédélec. „A Justification of Eddy Currents Model for the Maxwell Equations“. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 60.5 (2000), S. 1805–1823. ISSN: 0036-1399.
- [37] A. Buffa und P. Ciarlet Jr. „On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations Part I: An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra“. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 24.1 (2001), S. 9–30. ISSN: 0170-4214.
- [38] A. Buffa, M. Costabel und D. Sheen. „On traces for  $H(\text{curl}, \Omega)$  in Lipschitz domains“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 276.2 (2002), S. 845–867. ISSN: 0022-247X.
- [39] P. Burrascano u. a. „Numerical Identification Procedure for a Phenomenological Vector Hysteresis Model“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 45.3 (2009), S. 1166–1169. ISSN: 00189464.
- [40] J. C. Butcher. *Numerical methods for ordinary differential equations*. 3rd ed. Chichester, UK: Wiley, 2016. ISBN: 9781119121503.
- [41] E. Cardelli. „A General Hysteresis Operator for the Modeling of Vector Fields“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 47.8 (2011), S. 2056–2067. ISSN: 0018-9464.
- [42] E. Cardelli, E. Della Torre und G. Ban. „Experimental determination of Preisach distribution functions in magnetic cores“. In: *Physica B: Condensed Matter* 275.1 (2000), S. 262–269. ISSN: 0921-4526.
- [43] E. Cardelli, E. Della Torre und A. Faba. „Numerical Implementation of the DPC Model“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 45.3 (2009), S. 1186–1189. ISSN: 00189464.
- [44] E. Cardelli, E. Della Torre und A. Faba. „Numerical Modeling of Hysteresis in Si-Fe Steels“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 50.2 (2014), S. 329–332. ISSN: 0018-9464.
- [45] E. Cardelli und A. Faba. „Modelling of vector hysteresis at macromagnetic scale: Open questions and challenges“. In: *Physica B: Condensed Matter* 486 (2016), S. 130–137. ISSN: 0921-4526.
- [46] E. Cardelli. „Chapter 4 - Advances in Magnetic Hysteresis Modeling“. In: *Handbook of Magnetic Materials*. Hrsg. von K. Buschow. Bd. 24. Elsevier, 2015, S. 323–409. ISBN: 9780444636348.
- [47] Z. Chen, Q. Du und J. Zou. „Finite Element Methods with Matching and Nonmatching Meshes for Maxwell Equations with Discontinuous Coefficients“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 37.5 (2000), S. 1542–1570. ISSN: 0036-1429.
- [48] S. Chikazumi und C. D. Graham. *Physics of ferromagnetism*. 2nd ed. Bd. 94. International series of monographs on physics. Oxford und New York: Oxford University Press, 2009. ISBN: 0198517769.
- [49] L. Chua und S. C. Bass. „A Generalized Hysteresis Model“. In: *IEEE Transactions on Circuit Theory* 19.1 (1972), S. 36–48. ISSN: 0018-9324.
- [50] L. Chua und K. Stromsmoe. „Lumped-circuit models for nonlinear inductors exhibiting hysteresis loops“. In: *IEEE Transactions on Circuit Theory* 17.4 (1970), S. 564–574.

- [51] I. R. Ciric, F. I. Hantila und M. Maricaru. „Convergence acceleration in the polarization method for nonlinear periodic fields“. In: *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 30.6 (2011), S. 1688–1700.
- [52] M. Cirrincione u. a. „Preisach function identification by neural networks“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 38.5 (2002), S. 2421–2423. ISSN: 00189464.
- [53] F. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1990. ISBN: 978-0-89871-256-8.
- [54] M. Clemens und T. Weiland. „Transient eddy-current calculation with the FI-method“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 35.3 (1999), S. 1163–1166. ISSN: 00189464.
- [55] J. M. D. Coey. *Magnetism and magnetic materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9780511845000.
- [56] G. Consolo u. a. „About identification of Scalar Preisach functions of soft magnetic materials“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 42.4 (2006), S. 923–926. ISSN: 00189464.
- [57] E. Della Torre und E. Cardelli. „A Preisach-Stoner-Wohlfarth Vector Model“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 42.10 (2006), S. 3126–3128. ISSN: 0018-9464.
- [58] E. Della Torre, E. Cardelli und L. H. Bennett. „Hysteresis loss in vector Preisach models“. In: *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 29.6 (2010), S. 1474–1481. ISSN: 0332-1649.
- [59] E. Della Torre, E. Pinzaglia und E. Cardelli. „Vector modeling—Part I: Generalized hysteresis model“. In: *Physica B: Condensed Matter* 372.1–2 (2006), S. 111–114. ISSN: 0921-4526.
- [60] E. Della Torre, E. Pinzaglia und E. Cardelli. „Vector modeling—Part II: Ellipsoidal vector hysteresis model. Numerical application to a 2D case“. In: *Physica B: Condensed Matter* 372.1–2 (2006), S. 115–119. ISSN: 0921-4526.
- [61] E. Della Torre und F. Vajda. „Parameter identification of the complete-moving-hysteresis model using major loop data“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 30.6 (1994), S. 4987–5000. ISSN: 00189464.
- [62] E. Della Torre. *Magnetic hysteresis*. New York und Piscataway, New Jersey: IEEE Press und IEEE Xplore, 2000. ISBN: 0780347196.
- [63] L. Demkowicz u. a. „De Rham diagram for hp finite element spaces“. In: *Computers & Mathematics with Applications* 39.7 (2000), S. 29–38. ISSN: 0898-1221.
- [64] E. Dlala. „Efficient Algorithms for the Inclusion of the Preisach Hysteresis Model in Nonlinear Finite-Element Methods“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 47.2 (2011), S. 395–408. ISSN: 0018-9464.
- [65] E. Dlala, A. Belahcen und A. Arkkio. „Locally Convergent Fixed-Point Method for Solving Time-Stepping Nonlinear Field Problems“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 43.11 (2007), S. 3969–3975. ISSN: 0018-9464.
- [66] E. Dlala u. a. „Improving Loss Properties of the Mayergoyz Vector Hysteresis Model“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 46.3 (2010), S. 918–924. ISSN: 0018-9464.
- [67] J. L. Doob, A. Grothendieck und E. Heinz. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*. N. Berlin/Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1971. ISBN: 978-3-642-65140-3.
- [68] J. Dutiné, M. Clemens und S. Schöps. „Multiple Right-Hand Side Techniques in Semi-Explicit Time Integration Methods for Transient Eddy-Current Problems“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 53.6 (2017), S. 1–4. ISSN: 0018-9464.

- [69] J. Epstein. „Die magnetische Prüfung von Eisenblech“. In: *Elektrotechnische Zeitschrift* 16 (1900), S. 304–307.
- [70] M. Filippini, P. Alotto und A. Giust. „Anderson acceleration for electromagnetic nonlinear problems“. In: *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 38.5 (2019), S. 1493–1506. ISSN: 0332-1649.
- [71] F. Fiorillo. *Characterization and Measurement of Magnetic Materials*. Electromagnetism Ser. Burlington: Elsevier, 2004. ISBN: 9780122572517.
- [72] V. François-Lavet u. a. „Vectorial Incremental Nonconservative Consistent Hysteresis model“. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (ACOMEN2011)*.
- [73] G. Friedman und I. D. Mayergoyz. „Stoner-Wohlfarth hysteresis model with stochastic input as a model of viscosity in magnetic materials“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 28.5 (1992), S. 2262–2264. ISSN: 00189464.
- [74] K. Fujiwara u. a. „Method for determining relaxation factor for modified Newton-Raphson method“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 29.2 (1993), S. 1962–1965. ISSN: 00189464.
- [75] T. Fukushima. „Fast computation of incomplete elliptic integral of first kind by half argument transformation“. In: *Numerische Mathematik* 116.4 (2010), S. 687–719.
- [76] T. Fukushima. „Precise and fast computation of a general incomplete elliptic integral of second kind by half and double argument transformations“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 235.14 (2011), S. 4140–4148. ISSN: 0377-0427.
- [77] T. Fukushima. „Precise and fast computation of a general incomplete elliptic integral of third kind by half and double argument transformations“. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 236.7 (2012), S. 1961–1975. ISSN: 0377-0427.
- [78] T. Fukushima und H. Ishizaki. „Numerical computation of incomplete elliptic integrals of a general form“. In: *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy* 59.3 (1994), S. 237–251. ISSN: 0923-2958.
- [79] V. Goričan u. a. „Measurement of 2-D Magnetic Properties of Grain Oriented Silicon Steel Sheet Using RRSST“. In: *Computer Engineering in Applied Electromagnetism*. Hrsg. von S. Wiak, A. Krawczyk und M. Trlep. Dordrecht: Springer Netherlands, 2005, S. 287–292. ISBN: 978-1-4020-3169-4.
- [80] R. D. Graglia, D. R. Wilton und A. F. Peterson. „Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics“. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 45.3 (1997), S. 329–342. ISSN: 1558-2221.
- [81] C. Guérin u. a. „Using a Jiles-Atherton vector hysteresis model for isotropic magnetic materials with the finite element method, Newton-Raphson method, and relaxation procedure“. In: *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* 30.5 (2017), e2189. ISSN: 08943370.
- [82] H. Hancock. *Lectures on the theory of elliptic functions*. Dover phoenix editions. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2004. ISBN: 0-486-43825-2.
- [83] P. Handgruber u. a. „Anisotropic Generalization of Vector Preisach Hysteresis Models for Nonoriented Steels“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 51.3 (2015), S. 1–4. ISSN: 0018-9464.
- [84] P. Handgruber u. a. „Three-Dimensional Eddy-Current Analysis in Steel Laminations of Electrical Machines as a Contribution for Improved Iron Loss Modeling“. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 49.5 (2013), S. 2044–2052. ISSN: 0093-9994.

- [85] P. Handgruber. „Advanced eddy current and hysteresis loss models for steel laminations of rotating electrical machines“. Dissertation. Graz: Technische Universität Graz, 2015.
- [86] F. I. Hantila, G. Preda und M. Vasiliu. „Polarization method for static fields“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 36.4 (2000), S. 672–675. ISSN: 0018-9464.
- [87] R. G. Harrison. „Physical Theory of Ferromagnetic First-Order Return Curves“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 45.4 (2009), S. 1922–1939. ISSN: 0018-9464.
- [88] F. Henrotte und K. Hameyer. „A dynamical vector hysteresis model based on an energy approach“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 42.4 (2006), S. 899–902. ISSN: 0018-9464.
- [89] F. Henrotte u. a. „Iron Loss Calculation in Steel Laminations at High Frequencies“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 50.2 (2014), S. 333–336. ISSN: 0018-9464.
- [90] O. Henze und W. Rucker. „Identification procedures of Preisach model“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 38.2 (2002), S. 833–836. ISSN: 0018-9464.
- [91] R. Hiptmair. „Multigrid Method for Maxwell’s Equations“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 36.1 (1998), S. 204–225. ISSN: 0036-1429.
- [92] M. J. Hofmann und H. Herzog. „Modeling Magnetic Power Losses in Electrical Steel Sheets in Respect of Arbitrary Alternating Induction Waveforms: Theoretical Considerations and Model Synthesis“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 51.2 (2015), S. 1–11. ISSN: 0018-9464.
- [93] M. J. Hofmann. *Berechnung der Eisenverluste in elektrischen Maschinen*. 1. Auflage. Elektrotechnik. München: Verlag Dr. Hut, 2019. ISBN: 9783843940771.
- [94] K. Hollaus und J. Schoberl. „A Higher Order Multi-Scale FEM With A for 2-D Eddy Current Problems in Laminated Iron“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 51.3 (2015), S. 1–4. ISSN: 00189464.
- [95] K. Hollaus und J. Schöberl. „Multi-scale FEM and magnetic vector potential A for 3D eddy currents in laminated media“. In: *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 34.5 (2015), S. 1598–1608.
- [96] A. Y. Ishlinskii. „Some applications of statistical methods to describing deformations of bodies“. In: *Izv. AN SSSR, Techn. Ser.* 9 (1944), S. 580–590.
- [97] M. Ismail, F. Ikhouane und J. Rodellar. „The Hysteresis Bouc-Wen Model, a Survey“. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 16.2 (2009), S. 161–188. ISSN: 1134-3060.
- [98] A. Iványi. *Hysteresis models in electromagnetic computation*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1997. ISBN: 9630574160.
- [99] D. C. Jiles und D. L. Atherton. „Theory of ferromagnetic hysteresis“. In: *Journal of Applied Physics* 55.6 (1984), S. 2115–2120.
- [100] D. C. Jiles und D. L. Atherton. „Theory of ferromagnetic hysteresis“. In: *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 61.1–2 (1986), S. 48–60. ISSN: 0304-8853.
- [101] D. Jiles. *Introduction to magnetism and magnetic materials*. 2nd ed. London und New York: Chapman and Hall, 1998. ISBN: 9780412798603.
- [102] G. R. Kahler, E. Della Torre und E. Cardelli. „Implementation of the Preisach-Stoner-Wohlfarth Classical Vector Model“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 46.1 (2010), S. 21–28. ISSN: 00189464.

- 
- [103] R. C. Kirby. „Algorithm 839: FIAT, a New Paradigm for Computing Finite Element Basis Functions“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 30.4 (2004), S. 502–516.
- [104] R. C. Kirby und A. Logg. „A Compiler for Variational Forms“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 32.3 (2006).
- [105] O. Klein. „A representation result for hysteresis operators with vector valued inputs and its application to models for magnetic materials“. In: *Physica B: Condensed Matter* 435 (2014), S. 113–115. ISSN: 0921-4526.
- [106] O. Klein. „Darstellung von Hysterese-Operatoren mit stückweise monotaffinen Input-Funktionen durch Funktionen auf Strings“. Habilitationsschrift. Berlin: Humboldt-Universität, 2014.
- [107] E. Kneller. *Ferromagnetismus: Mit einem Beitrag Quantentheorie und Elektronentheorie des Ferromagnetismus*. Heidelberg: Springer, 2012 (Neuaufgabe der Erstausgabe von 1962). ISBN: 978-3-642-49129-0.
- [108] G. Koczka u. a. „Optimal Convergence of the Fixed-Point Method for Nonlinear Eddy Current Problems“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 45.3 (2009), S. 948–951. ISSN: 0018-9464.
- [109] C. S. Koh, S.-Y. Hahn und G.-S. Park. „Vector hysteresis modeling by combining Stoner-Wohlfarth and Preisach models“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 36.4 (2000), S. 1254–1257. ISSN: 00189464.
- [110] T. V. Kolev, J. E. Pasciak und P. S. Vassilevski. „H(curl) auxiliary mesh preconditioning“. In: *Numerical Linear Algebra with Applications* 15.5 (2008), S. 455–471. ISSN: 1070-5325.
- [111] G. S. Korzunin, V. K. Chistyakov und F. F. Rimshev. „Developing Techniques for Testing Magnetic Properties of Electric Steels. I. Epstein’s apparatus (Review article)“. In: *Russian Journal of Nondestructive Testing* 36 (11 2000), S. 782–799. ISSN: 1061-8309.
- [112] G. S. Korzunin, V. K. Chistyakov und F. F. Rimshev. „Developing Techniques for Testing Magnetic Properties of Electric Steels. II. Variations in Magnetic Properties and Their Effect on Reliability of Testing Results“. In: *Russian Journal of Nondestructive Testing* 37 (4 2001), S. 239–262. ISSN: 10618309.
- [113] G. S. Korzunin, V. K. Chistyakov und F. F. Rimshev. „Developing Techniques for Testing Magnetic Properties of Electric Steels. IV. Testing of Steel Sheets in Rolls“. In: *Russian Journal of Nondestructive Testing* 38 (3 2002), S. 195–211. ISSN: 10618309.
- [114] G. S. Korzunin u. a. „Developing Techniques for Testing Magnetic Properties of Electric Steels. III. Apparatus for Sheet Steel“. In: *Russian Journal of Nondestructive Testing* 37 (6 2001), S. 397–421. ISSN: 10618309.
- [115] M. A. Krasnosel’Skii. *Systems with hysteresis*. Berlin und New York: Springer, 2012. ISBN: 9783642647826.
- [116] P. Krejčí. *Hysteresis, convexity and dissipation in hyperbolic equations*. GAKUTO international series Mathematical sciences and applications. Tokyo: Gakkōtoshō, 1996. ISBN: 9784762504174.
- [117] C. Krüttgen u. a. „Parametric Homogenized Model for Inclusion of Eddy Currents and Hysteresis in 2-D Finite-Element Simulation of Electrical Machines“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 53.6 (2017), S. 1–4. ISSN: 0018-9464.

- [118] M. Kuczmann. „Identification of the 2D vector Preisach hysteresis model“. In: *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 30.2 (2011), S. 538–551. ISSN: 0332-1649.
- [119] M. Kuczmann und A. Iványi. *The finite element method in magnetics*. Budapest: Akadémiai Kiadó, 2008. ISBN: 9789630586498.
- [120] S. Kurz, J. Fetzner und G. Lehner. „Anwendung der Methode der finiten Elemente und des Vektor-Preisach-Modells zur Berechnung ebener magnetostatischer Felder in hysteresebehafteten Medien“. In: *Archiv für Elektrotechnik* 76.6 (1993), S. 405–415. ISSN: 0003-9039.
- [121] C. L. Lawson und R. J. Hanson. *Solving least squares problems*. Bd. 15. Classics in Applied Mathematics. Philadelphia, Pa: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM 3600 Market Street Floor 6 Philadelphia PA 19104), 1995. ISBN: 978-0-89871-356-5.
- [122] D. Lin, P. Zhou und A. Bergqvist. „Improved Vector Play Model and Parameter Identification for Magnetic Hysteresis Materials“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 50.2 (2014), S. 357–360. ISSN: 00189464.
- [123] A. Logg, K.-A. Mardal und G. Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*. Bd. 84. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Berlin und New York: Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-23098-1.
- [124] A. Logg und G. N. Wells. „DOLFIN: Automated Finite Element Computing“. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 37.2 (2010).
- [125] K. Löschner, V. Rischmüller und M. Brokate. „Natural Vectorial Extension of the Preisach Operator“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 44.6 (2008), S. 878–881. ISSN: 0018-9464.
- [126] K. Löschner-Greenberg. „Basic mathematical properties of a vector Preisach operator in magnetic hysteresis modeling“. In: *Journal of Physics: Conference Series* 138.1 (2008), S. 012012.
- [127] K. Löschner-Greenberg. „Vector Preisach Modeling of Magnetic Hysteresis“. Dissertation. München: Technische Universität München, 2008.
- [128] E. Madelung. „Über Magnetisierung durch schnellverlaufende Ströme und die Wirkungsweise des Rutherford-Macronischen Magnetdetektors“. In: *Annalen der Physik* (17 1905).
- [129] D. Marcsa und M. Kuczmann. „Direct preisach hysteresis model for finite element analysis of magnetic fields“. In: *Przegląd Elektrotechniczny* 85 (Jan. 2009), S. 114–117.
- [130] D. Marcsa und M. Kuczmann. „Analysis of Ferromagnetic Core Combining Preisach Hysteresis Modeling and Finite Element Techniques“. In: *Journal of Advanced Research in Physics* 1.1 (2010).
- [131] E. Mayer. „Die Eisenverluste in Elektrischen Maschinen“. Dissertation. Zürich: Eidgenössisch Technische Hochschule Zürich, 1932.
- [132] I. D. Mayergoyz. „Dynamic Preisach models of hysteresis“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 24.6 (1988), S. 2925–2927. ISSN: 00189464.
- [133] I. D. Mayergoyz. *Mathematical Models of Hysteresis*. New York, NY: Springer New York, 1991. ISBN: 978-1-4612-7767-5.
- [134] I. D. Mayergoyz. „Mathematical models of hysteresis“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 22.5 (1986), S. 603–608. ISSN: 0018-9464.

- [135] I. D. Mayergoyz und G. Friedman. „Generalized Preisach model of hysteresis“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 24.1 (1988), S. 212–217. ISSN: 0018-9464.
- [136] A. Meister und C. Vömel. *Numerik linearer Gleichungssysteme: Eine Einführung in moderne Verfahren*. 5., überarb. Aufl. Lehrbuch. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015. ISBN: 978-3-658-07199-8.
- [137] G. Meunier, Hrsg. *The finite element method for electromagnetic modeling*. London und Hoboken, N.J.: ISTE Ltd. und John Wiley & Sons, 2008. ISBN: 9781848210301.
- [138] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Numerical mathematics and scientific computation. Oxford und New York: Clarendon Press, 2003. ISBN: 9780198508885.
- [139] J. C. Nédélec. „Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ “. In: *Numerische Mathematik* 35 (3 1980). Sep, S. 315–341.
- [140] I. Niyonzima u. a. „Nonlinear Computational Homogenization Method for the Evaluation of Eddy Currents in Soft Magnetic Composites“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 50.2 (2014), S. 61–64. ISSN: 0018-9464.
- [141] F. W. J. Olver. *The NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. ISBN: 978-0-521-19225-5.
- [142] L. Prandtl. „Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper“. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 8.2 (1928), S. 85–106. ISSN: 0044-2267.
- [143] F. Preisach. „Über die magnetische Nachwirkung“. In: *Zeitschrift für Physik* 94.5-6 (1935), S. 277–302. ISSN: 0044-3328.
- [144] W. H. Press. *Numerical recipes: The art of scientific computing*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. ISBN: 978-0-521-88068-8.
- [145] L. Prigozhin u. a. „On the Energy-Based Variational Model for Vector Magnetic Hysteresis“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 52.12 (2016), S. 1–11. ISSN: 00189464.
- [146] R. H. Pry und C. P. Bean. „Calculation of the Energy Loss in Magnetic Sheet Materials Using a Domain Model“. In: *Journal of Applied Physics* 29.3 (1958), S. 532–533.
- [147] L. Qi und J. Sun. „A nonsmooth version of Newton's method“. In: *Mathematical Programming* 58.1 (1993), S. 353–367. ISSN: 1436-4646.
- [148] P. Quarterman u. a. „Demonstration of Ru as the 4th ferromagnetic element at room temperature“. In: *Nature communications* 9.1 (2018), S. 2058.
- [149] A. G. Ramm u. a. „Dissipative Maxwell's equations at low frequencies“. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 13.4 (1990), S. 305–322. ISSN: 0170-4214.
- [150] Z. Ren. „Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 32.3 (1996), S. 655–658. ISSN: 00189464.
- [151] C. Roth. „Simulation energetischer Verluste in ferromagnetischen Werkstoffen“. Masterarbeit. München: Technische Universität München, 2016.
- [152] K. Schmidt, O. Sterz und R. Hiptmair. „Estimating the Eddy-Current Modeling Error“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 44.6 (2008), S. 686–689. ISSN: 0018-9464.
- [153] J. Schöberl und S. Zaglmayr. „High order Nédélec elements with local complete sequence properties“. In: *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 24.2 (2005), S. 374–384. ISSN: 0332-1649.
- [154] B. Schweizer. *Partielle Differentialgleichungen. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Berlin: Springer Spektrum, 2013. ISBN: 978-3-642-40637-9.

- [155] K. Simonyi. *Theoretische Elektrotechnik*. ger. 10. Aufl. Leipzig: Barth Ed. Dt. Verl. der Wiss, 1993. ISBN: 978-3335003755.
- [156] S. Steentjes u. a. „A dynamical energy-based hysteresis model for iron loss calculation in laminated cores“. In: *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields* 27.3 (2014), S. 433–443. ISSN: 1099-1204.
- [157] S. Steentjes. *Efficiently Modeling Soft Magnetic Materials for Transformers, Actuators and Rotating Electrical Machines*. 1. Auflage. Bd. 28. Aachener Schriftenreihe zur Elektromagnetischen Energiewandlung. Herzogenrath: Shaker, 2018. ISBN: 9783844056976.
- [158] S. Steentjes, F. Henrotte und K. Hameyer. „Energy-based ferromagnetic material model with magnetic anisotropy“. In: *Journal of Magnetism and Magnetic Materials* 425 (2017), S. 20–24. ISSN: 0304-8853.
- [159] E. C. Stoner und E. P. Wohlfarth. „A Mechanism of Magnetic Hysteresis in Heterogeneous Alloys“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 240.826 (1948), S. 599–642. ISSN: 0080-4614.
- [160] Z. Szabó u. a. „Identification procedures for scalar Preisach model“. In: *Physica B: Condensed Matter* 343.1-4 (2004), S. 142–147. ISSN: 0921-4526.
- [161] A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky und M. Hazewinkel. *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2010. ISBN: 978-90-481-4583-6.
- [162] M. Tousignant u. a. „Incorporation of a Vector Preisach–Mayergoyz Hysteresis Model in 3-D Finite Element Analysis“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 55.6 (2019), S. 1–4. ISSN: 0018-9464.
- [163] M. Ulbrich. *Semismooth Newton Methods for Variational Inequalities and Constrained Optimization Problems in Function Spaces*. MOS-SIAM Series on Optimization. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011. ISBN: 978-1-61197-068-5.
- [164] *Verordnung (EG) Nr. 640/2009*. URL: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/DE/ALL/?uri=CELEX%3A32009R0640> (besucht am 02.01.2020).
- [165] A. Visintin. *Differential models of hysteresis*. Bd. v. 111. Applied mathematical sciences. Berlin und New York: Springer, 1994. ISBN: 9783642081323.
- [166] A. Visintin. „Quasilinear hyperbolic equations with hysteresis“. In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* 19.4 (2002), S. 451–476. ISSN: 0294-1449.
- [167] J. P. Webb und B. Forgahani. „Hierarchal scalar and vector tetrahedra“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 29.2 (1993), S. 1495–1498. ISSN: 0018-9464.
- [168] Y. Ye. *Interior point algorithms: Theory and analysis*. Wiley-Interscience series in discrete mathematics and optimization. New York: Wiley, 1997. ISBN: 0471174203.
- [169] J. Yuan. „Numerical Simulation of Hysteresis Effects in Ferromagnetic Material with the Finite Integration Technique“. Dissertation. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2005.
- [170] J. Yuan u. a. „Solution of transient hysteretic magnetic field problems with hybrid Newton-polarization methods“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 41.5 (2005), S. 1720–1723. ISSN: 0018-9464.
- [171] S. Zaglmayr. „High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation“. Institut für Numerische Mathematik. Dissertation. Linz: Johannes Kepler Universität, 2006.



- 
- [172] E. Zeidler u. a. *Springer-Taschenbuch der Mathematik. 3.*, neu bearb. und erw. Aufl. 2013. Wiesbaden: Springer, 2013. ISBN: 978-3-8351-0123-4.
- [173] S. E. Zirka u. a. „Inverse Hysteresis Models for Transient Simulation“. In: *IEEE Transactions on Power Delivery* 29.2 (2014), S. 552–559. ISSN: 0885-8977.
- [174] S. E. Zirka u. a. „On physical aspects of the Jiles-Atherton hysteresis models“. In: *Journal of Applied Physics* 112.4 (2012).
- [175] S. Zurek. *Characterisation of soft magnetic materials under rotational magnetisation*. Boca Raton: Taylor & Francis, CRC Press, 2017. ISBN: 9781138304369.



## Eigene Veröffentlichungen

- [W1] I. Bolvashenkov u. a. „Comparative Study for the Optimal Choice of Electric Traction Motors for a Helicopter Drive Train“. In: *10th Conference on Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems (SDEWES)*. Dubrovnik, Croatia, 2015.
- [W2] I. Bolvashenkov u. a. „Comparative Study of Reliability and Fault Tolerance of Multi-Phase Permanent Magnet Synchronous Motors for Safety-Critical Drive Trains“. In: *International Conference on Renewable Energies and Power Quality (ICREPQ)*. Madrid, Spanien, 2016.
- [W3] J. Igelspacher, S. Willerich und H. Herzog. „Simulation of an axial-flux squirrel-cage induction machine under stator fault conditions using winding functions“. In: *2013 International Electric Machines & Drives Conference*. 2013, S. 1283–1288.
- [W4] S. Willerich und H. Herzog. „A Continuous Vector Preisach Model Based on Vectorial Relay Operators“. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 56.3 (2020), S. 1–4. ISSN: 0018-9464.
- [W5] S. Willerich und H. Herzog. „Interpretation of an energy based hysteresis model as a scalar Preisach operator“. In: *2016 IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*. 2016, S. 1.
- [W6] S. Willerich und H. Herzog. „Prediction of the magnetic field in the air-gap of synchronous machines on a preliminary design level — Machine modelling and field calculation“. In: *2015 IEEE International Electric Machines & Drives Conference (IEMDC)*. 2015, S. 1292–1298.
- [W7] S. Willerich und H.-G. Herzog. „A non-smooth Newton method for the solution of magnetostatic field problems with hysteresis“. In: *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering* 38.5 (2019), S. 1584–1594. ISSN: 0332-1649.
- [W8] S. Willerich, C. Roth und H.-G. Herzog. „The DPC-Hysteresis Model in Two-Dimensional Magnetostatic Finite Element Analysis“. In: *International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (Compumag 2017)*. Daejeon, Korea, 2017.



# A Ergänzende Definitionen

Im Folgenden sind einige Definitionen gegeben, die für das grundsätzliche Verständnis des Hauptteils entbehrlich sind, jedoch zu einer möglichst vollständigen Darstellung beitragen.

## A.1 Sobolev-Räume

Die Notation und die folgenden Definitionen sind [138, S. 37 f.] entnommen.

Mit  $\mathbb{Z}_+$  sei die Menge aller nicht-negativen ganzen Zahlen gegeben, weiter sei  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T \in \mathbb{Z}_+^N$  gegeben. Unter Verwendung der Betragssummennorm  $|\boldsymbol{\alpha}|_1 = \sum_1^N |\alpha_i|$  wird die folgende Schreibweise für partielle Ableitungen der Funktion  $u \in \mathcal{C}^{|\boldsymbol{\alpha}|_1}(\Omega)$  nach einer oder mehreren Variablen eingeführt:

$$\frac{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u}{\partial \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|_1} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} . \quad (\text{A.1})$$

Wird der Ableitungsbegriff von (A.1) erweitert (siehe [138, S. 37 f.]) und mit  $\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)'$  die distributionelle Ableitung einer Funktion  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)'$  bezeichnet, lässt sich die grundlegende Definition eines Sobolev-Raums angeben.

Der Sobolev-Raum  $W^{s,p}(\Omega)$  besteht aus allen  $p$ -integrierbaren Funktionen, deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $s$  ebenfalls  $p$ -integrierbar sind:

**Definition A.1** (Sobolev-Räume ganzzahliger Ordnung) *Gegeben ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{1, 2, 3\}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$  und  $1 \leq p < \infty$ , dann ist der Raum  $W^{s,p}(\Omega)$  definiert durch*

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L^p(\Omega) \forall |\boldsymbol{\alpha}|_1 \leq s\} . \quad (\text{A.2})$$

Die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|_1 \leq s} \int_{\Omega} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} . \quad (\text{A.3})$$

Allgemeiner ist die Definition für reellwertige Sobolev-Räume (entnommen aus [138, S. 41 f.]):

**Definition A.2** (Sobolev-Räume reeller Ordnung) *Gegeben  $1 \leq p < \infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \geq 0$  und ein Lipschitz-Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Weiter sei  $m \in \mathbb{Z}_+$  und  $s = m + \sigma$ , wobei  $\sigma \in \mathbb{R}$  und  $0 < \sigma < 1$ , dann wird der Sobolev-Raum  $W^{s,p}(\Omega)$  definiert als der Raum der Distributionen  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)'$  für die gilt  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  und*

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x}) - \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\sigma p}} \, d\mathbf{x} d\mathbf{y} < \infty \quad \forall |\boldsymbol{\alpha}|_1 = m . \quad (\text{A.4})$$

Die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|_1 = m} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{x}) - \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+\sigma p}} \, d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right\}^{\frac{1}{p}} . \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Normen und Skalarprodukte

Die in Kapitel 3 eingeführten Funktionenräume  $H^1(\Omega)$ ,  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  und  $H(\operatorname{rot}, \Omega)$  sind Sobolev-Räume und besitzen die Eigenschaften eines Hilbertraums. Nachfolgend werden die Skalarprodukte aufgeführt, welche die Normen induzieren, bezüglich derer die Funktionenräume vollständig sind.

Alle Skalarprodukte sind die Summe der  $L_2$ -Skalarprodukte angewendet auf die Funktionen des jeweiligen Funktionenraums sowie die jeweils wohldefinierten Ableitungen.

Für  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in H(\operatorname{rot}, \Omega)$  ergibt sich

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\operatorname{rot}, \Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad (\text{A.6})$$

sowie die induzierte Norm

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{rot}, \Omega)} = \left( (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H(\operatorname{rot}, \Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.7})$$

Für  $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  ergibt sich

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad (\text{A.8})$$

sowie die induzierte Norm

$$\|\mathbf{v}\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \left( (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{H(\operatorname{div}, \Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.9})$$

Für  $v, u \in H^1(\Omega)$  ergibt sich

$$(v, u)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} v \cdot u \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} \quad (\text{A.10})$$

sowie die induzierte Norm

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left( (v, v)_{H^1(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.11})$$

# B Ergänzungen zur Modellierung von Hysterese

Im Folgenden sind einige Ergänzungen zur Modellierung von Hysterese ausgeführt, auf die in den Kapiteln 4–7 verwiesen wird.

## B.1 Metrik auf der Menge der kritischen Oberflächen

Es gilt zu zeigen, dass (4.35) eine Metrik auf  $\mathcal{K}_0$  ist. Dazu werden die drei Eigenschaften einer Metrik überprüft:

1. Positive Definitheit:

$$d_{\mathcal{K}}(c_1, c_2) \geq 0 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathcal{K}_0 ,$$

da  $\max(|a|) \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ .

Aus  $d_{\mathcal{K}}(c_1, c_2) = 0$  folgt  $d_{c_1}(\alpha) = d_{c_2}(\alpha) \quad \forall \alpha$ . Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt, dass  $\overline{c_1} \cap c_2 = \emptyset$ . Hieraus folgt

$$d_{\mathcal{K}}(c_1, c_2) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 .$$

2. Symmetrie: Folgt aus der Symmetrie der Betragsfunktion, da

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_1| \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} .$$

3. Dreiecksungleichung: Sei  $\alpha_{12}$  ein Winkelwert, für den gilt

$$d_{\mathcal{K}}(c_1, c_2) = |d_{c_1}(\alpha_{12}) - d_{c_2}(\alpha_{12})| ,$$

dann folgt für die Abstände von  $c_1$  und  $c_2$  zu einer dritten kritischen Oberfläche  $c_3$ :

$$d_{\mathcal{K}}(c_1, c_3) \geq |d_{c_1}(\alpha_{12}) - d_{c_3}(\alpha_{12})| \tag{B.1}$$

und ebenso

$$d_{\mathcal{K}}(c_2, c_3) \geq |d_{c_2}(\alpha_{12}) - d_{c_3}(\alpha_{12})| . \tag{B.2}$$

Verläuft  $c_3$  bei  $\alpha_{12}$  näher an  $\mathbf{s}_0$  oder weiter entfernt von  $\mathbf{s}_0$  als beide kritischen Oberflächen  $c_1$  und  $c_2$ , gilt automatisch  $d_{\mathcal{K}}(c_1, c_3) \geq d_{\mathcal{K}}(c_1, c_2)$  oder  $d_{\mathcal{K}}(c_2, c_3) \geq d_{\mathcal{K}}(c_1, c_2)$ . Verläuft  $c_3$  zwischen  $c_1$  und  $c_2$ , so gilt

$$d_{\mathcal{K}}(c_1, c_2) = |d_{c_1}(\alpha_{12}) - d_{c_3}(\alpha_{12})| + |d_{c_2}(\alpha_{12}) - d_{c_3}(\alpha_{12})|$$

und unter Berücksichtigung von (B.1) und (B.2)

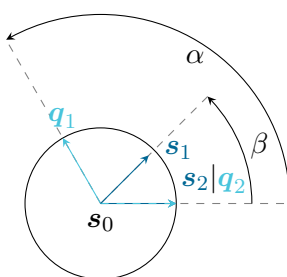
$$d_{\mathcal{K}}(c_1, c_2) \leq d_{\mathcal{K}}(c_1, c_3) + d_{\mathcal{K}}(c_2, c_3) .$$

## B.2 Nichtmonotones Verhalten von Hysterons und Hysterengruppen

Das nichtmonotone Verhalten eines diskreten Hysterons beim Zustandswechsel von erstarrt nach beweglich lässt sich anhand eines Gegenbeispiels zeigen. Es muss ein Beispiel gefunden werden, sodass

$$(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \cdot (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) < 0 . \quad (\text{B.3})$$

Hierfür wird ein Testhysteron definiert mit  $\mathbf{s}_0 = (0, 0)^T$  und mit einer kreisförmigen kritischen Oberfläche, die den Radius  $r = 1$  besitzt. Ferner wird vorgegeben  $\mathbf{q}_2 = (1, 0)^T$  und  $\mathbf{s}_2 = (1, 0)^T$ . Alle Zustände des Hysterons vor dem Zustandswechsel sind durch  $\mathbf{q}_1 = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T$  gegeben. Alle Werte der Eingangsfunktion müssen innerhalb von  $\mathcal{S}$  liegen, es wird die Kurve  $\mathbf{s}_1 = c(\cos(\beta), \sin(\beta))^T$  mit  $c = 0,99999$  vorgegeben. Die Verhältnisse sind in Abb. B.1 dargestellt.

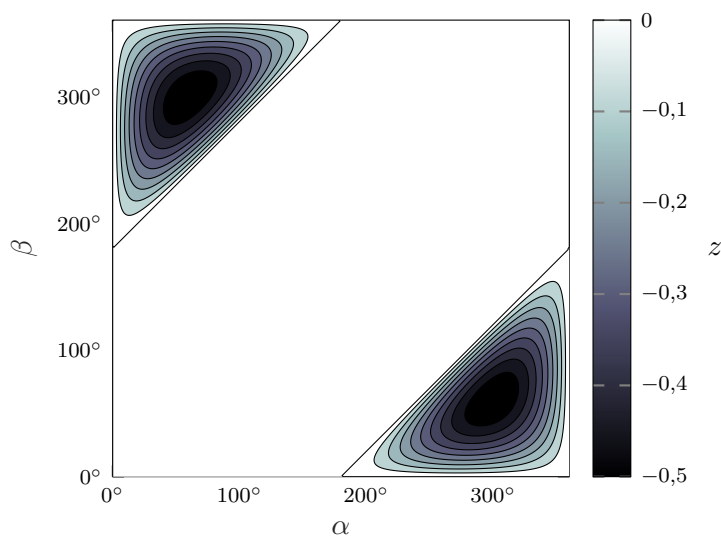


**Abb. B.1** – Konfiguration von Testhysteron und Eingangs- und Ausgangsgrößen

Damit lässt sich die Testgröße  $z$  nach (B.3) einführen als

$$z(\alpha, \beta) = \min(((1, 0)^T - (\cos(\alpha), \sin(\alpha))^T) \cdot ((1, 0)^T - c(\cos(\beta), \sin(\beta))^T), 0) . \quad (\text{B.4})$$

In Abb. B.2 ist der Verlauf von  $z$  für beliebige Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  aufgetragen. Es existieren zwei Bereiche, in denen  $z$  negativ ist, also keine Monotonie vorliegt. Die Bereiche besitzen die maximale Größe bei  $c = 1$  und verschwinden gänzlich bei  $c = 0$ .



**Abb. B.2** – Testgröße  $z$  in Abhängigkeit der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$

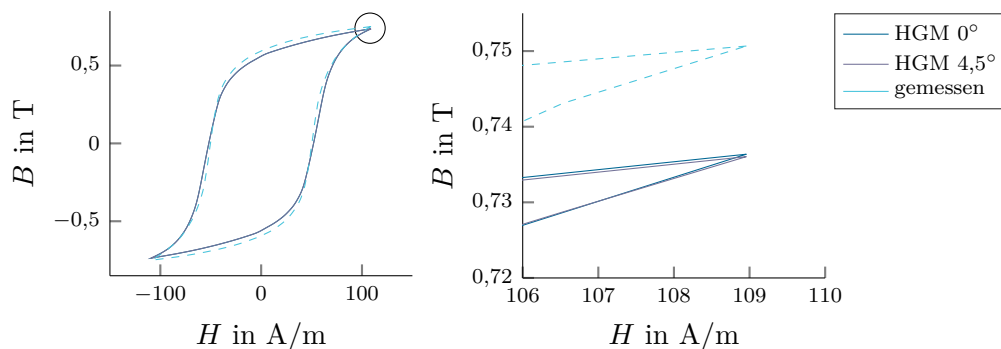


Das Verhalten überträgt sich von den diskreten Hysterons auf die Hysterongruppen. Da nur wenige Hysterons innerhalb eines Schritts von dem Effekt betroffen sind und zur Modellierung von realen Materialien eine hohe Anzahl von Hysterons verwendet wird, besitzt der Effekt im Allgemeinen keine negativen Auswirkungen, d. h. es gilt  $(\mathbf{M}_2(\mathbf{H}_2) - \mathbf{M}_1(\mathbf{H}_1))^T(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \geq 0$ .

Weiterhin können sich Hysterongruppen nicht monoton verhalten, wenn innerhalb eines Zeitschritts der Beginn des letzten Stücks des relevanten Pfads  $\mathbf{a}$  konstant bleibt und das Ende des Pfadstücks  $\mathbf{e}$  sich ändert. Dies entspricht der umgekehrten Zustandsänderung (beweglich zu starr) und wird nicht im Detail diskutiert. Hinsichtlich seiner Auswirkungen kann ebenfalls festgehalten werden, dass dieser Effekt die modellierte Magnetisierungskennlinie nicht negativ beeinflusst.

### B.3 Numerische Anisotropie

Aufgrund unterschiedlicher Verteilungen von Hysterons entlang verschiedener Raumachsen kann das Hysterongruppenmodell kein perfekt isotropes Verhalten aufweisen. Die Anisotropie kann jedoch vernachlässigt werden. In Abb. B.3 ist die maximale Abweichung für das in Kapitel 9 für die  $0^\circ$ -Richtung bestimmte Hysterongruppenmodell für eine Hystereseschleife dargestellt. Da die Hysteronsmittelpunkte entlang von Achsen mit einer Winkeldifferenz von  $9^\circ$  in der Parameterenebene verteilt sind, tritt die maximale Abweichung zwischen Eingangssignalen, die entlang der  $4,5^\circ$ -Achse verlaufen, und Eingangssignalen, die entlang der  $0^\circ$ -Achse verlaufen, auf.

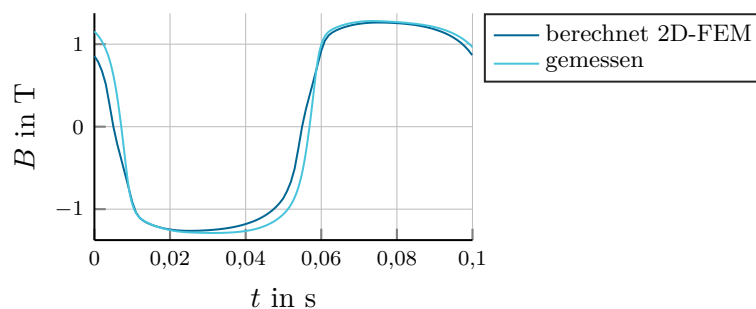


**Abb. B.3** – Beispiel für die maximale Abweichung zweier Hystereseschleifen für unterschiedliche Raumrichtungen



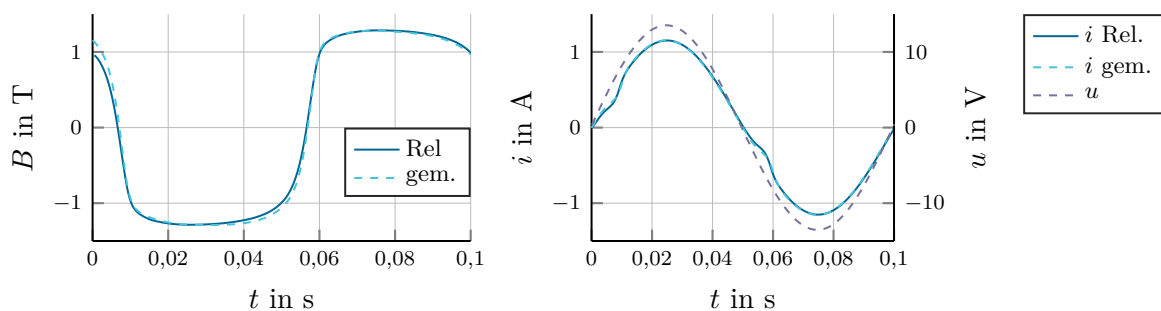
## C Ergebnisse TEAM Problem 32 Fall 1

Der Testfall wurde mit den Materialparametern für die 60°-Richtung berechnet. Bei der Lösung des Testfalls mit der zweidimensionalen Methode der finiten Elemente, fallen, analog zu Testfall 2, Abweichungen beim Wechsel der Polarität des  $B$ -Felds im Messpunkt auf (siehe Abb. C.1).



**Abb. C.1** – Vergleich der berechneten und gemessenen Flussdichteverläufe durch Spule 5 für Testfall 1

Testfall 1 wurde ebenfalls mit dem spannungsgespeisten Reluktanznetzwerk berechnet. Die Parameter des Netzwerks wurden größtenteils übernommen, lediglich für das Hysteresemodell wurden die Parameter der 60°-Richtung verwendet. Es zeigt sich, dass (wie bei Testfall 2) die Abweichung bei Spannungspeisung deutlich kleiner ist als bei Stromspeisung (siehe Abb. C.2).



**Abb. C.2** – Vergleich zwischen Berechnungsergebnissen des Reluktanznetzwerks bei Spannungspeisung mit den Messwerten zu Testfall 1