150 Jahre
culture of
excellence

TUM Workshop Mathematik 2018

5. bis 10. Oktober 2018
Medellín, Kolumbien

Technische Universität München
TUM School of Education
Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für
Didaktik der Mathematik

In Kooperation mit:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Alcaldía de Medellín
Cuenta con vos
Deutsches Museum
SIEMENS | Stiftung
Heinz Nixdorf Stiftung

Frank Reinhold, Stefan Hoch, Bernhard Werner,
Jürgen Richter-Gebert, Kristina Reiss

Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht

Workshop Mathematik

Deutsche Version

Technische Universität München

TUM School of Education
Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik

Arcisstraße 21
80333 Munich, Germany

www.ma.edu.tum.de
frank.reinhold@tum.de

In Kooperation mit:

Universidad de Antioquia, Kolumbien
Secretaría de Educación de Medellín, Kolumbien
Technische Universität München, Deutschland
Deutsches Museum, Deutschland
Siemens Stiftung, Deutschland
Heinz Nixdorf Stiftung, Deutschland

Zitieren als:
Reinhold, F., Hoch, S., Werner, B., Richter-Gebert, J., Reiss, K. (2018). *Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht. Workshop Mathematik* (Deutsche Version). München: Technische Universität München. doi:10.14459/2018md1462083

Spanische Übersetzung des Workshops:
Anni de Martinez, Dominikanische Republik;
Zoraida Finger-Collazos, Deutschland;
Marian Anguela González, Deutschland.

Spanische Übersetzung des Buches:
Patricia Haller, Deutschland;
Marian Anguela González, Deutschland.

Umschlaggestaltung:
Frank Reinhold, Deutschland.

Layout:
Frank Reinhold, Deutschland.

Inhaltsverzeichnis


NPV
BEG/END
CFj
Nj
RND
RM
M+
DISP
LN

Spanisches Vorwort

El siglo XXI es un siglo de numerosos desafíos. Por supuesto son diferentes en distintos lugares del mundo pero hay muchos desafíos que son más o menos iguales en todos los países. Un desafío importante es la educación de los jóvenes para un mundo con muchos problemas globales. Las soluciones requieren mucho más que el conocimiento de los hechos, requieren la implementación de ideas creativas. Tenemos la responsabilidad de brindar una educación con sentido y renunciar a la mera instrucción, la mera transferencia de conocimientos del profesor al alumno. Esto significa que los estudiantes tienen que explorar, experimentar y evaluar sus resultados de una manera autónoma. Una buena enseñanza debe tener en cuenta incluir la creatividad de los alumnos. Para ello no necesitamos solamente una instrucción frontal sino una cultura de participación en clase.

Es indispensable preparar a todos nuestros estudiantes para el mundo real. Para lograr este objetivo necesitamos una educación enfocada en competencias, donde los contenidos son importantes porque los aplicamos a la solución de problemas reales. Solo así es posible enseñar para el siglo XXI y apoyar el pensamiento crítico y creativo, la comunicación y la colaboración. Necesitamos involucrar a los estudiantes en actividades significativas para desarrollar su potencial, su creatividad y su disposición a intervenir de manera responsable en su entorno.

La educación STEM es el lugar perfecto para apoyar a los estudiantes en desarrollar estas competencias. También es el lugar para utilizar la tecnología y para aprender sobre su uso en varios contextos. En este libro intentamos combinar todos los aspectos. El objetivo principal es apoyar la comprensión de fracciones. Para alcanzar este objetivo utilizamos tecnologías modernas que permiten un aprendizaje independiente de los alumnos. Además, la tecnología ofrece oportunidades para actuar en el entorno cotidiano e interiorizar las acciones.

Esperamos que les gusten los ejemplos de las matemáticas. Y esperamos que las tareas ayuden a las alumnas y a los alumnos a explorar, comprender y aprender el contenido.

¡Que se diviertan!

Kristina Reiss
Múnich, 01 de octubre de 2018

Kapitel I

Cognitive Load-Theorie

Die Grundannahme der Theorie der kognitiven Belastung (en.: *cognitive load theory*; Sweller, Ayres & Kalyuga, 2011) ist eine beschränkte Kapazität des menschlichen Arbeitsgedächtnisses. Man geht davon aus, dass sich die für das Erlernen einer Fähigkeit benötigte kognitive Belastung aus drei Komponenten zusammensetzt:

- Intrinsische kognitive Belastung (en.: *intrinsic load*): Die dem Material selbst inhärente Schwierigkeit, die durch Vorwissen individuell unterschiedlich für jeden Schüler und jede Schülerin ausfallen kann.
- Irrelevante kognitive Belastung (en.: *extraneous load*): Die kognitive Belastung, die durch die Art und Weise, wie das Material präsentiert wird, hervorgerufen wird. Sie unterstützt keine Lernprozesse.
- Lernbezogene kognitive Belastung (en.: *germane load*): Elemente, die die Informationsverarbeitung unterstützen können und zur Entwicklung von Schemata (d. h. Wissensstrukturen) beitragen können.

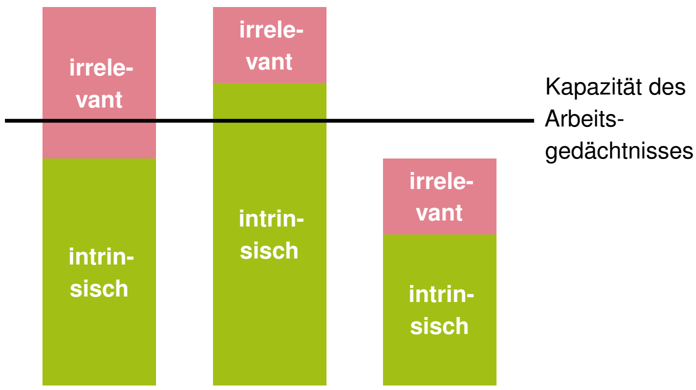
Es wird angenommen, dass Lernprozesse nur gelingen können, wenn die gesamte kognitive Belastung die Kapazität des Arbeitsgedächtnisses nicht überschreitet.

Beispiel

Die Addition gleichnamiger Brüche soll als neuer Unterrichtsinhalt gelernt werden. Als erstes Beispiel wird die sehr einfache Aufgabe $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$ gewählt (niedrige intrinsische Belastung). Zur Veranschaulichung wird das Kreismodell verwendet. Dieses Modell ist den Schülerinnen und Schülern als „Pizza-Modell" bekannt und kann ikonisch gut verdeutlichen, warum der Nenner bei der Addition gleich bleibt (niedrige irrelevante Belastung). Soll die Rechnung gleichzeitig noch in eine andere ikonische Repräsentation (z. B. auf dem Zahlenstrahl) überführt werden, kann das zur Überforderung bei einzelnen Schülerinnen und Schülern führen (zu hohe lernbezogene Belastung).

Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die schematisch dargestellten Lernprozesse nach der Cognitive Load-Theorie gelingen können, oder nicht. Übertragen Sie die schematische Darstellung auf eine konkrete Unterrichtssituation und formulieren Sie gegebenenfalls eine Lösungsstrategie, um die Schülerin bei ihrem, bzw. den Schüler bei seinem individuellen Lernprozess unterstützen zu können.

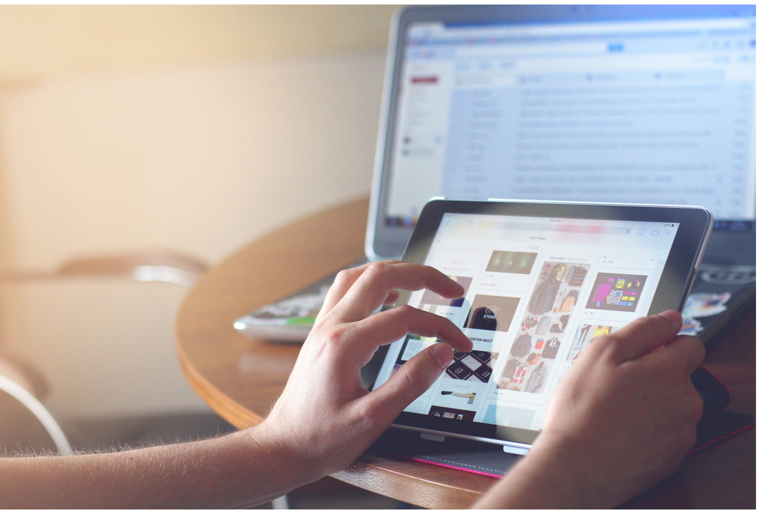


Lösung

Die intrinsische kognitive Belastung eines Lerngegenstandes kann nicht verringert werden. Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler ist hier von entscheidender Bedeutung. Die irrelevante kognitive Belastung kann durch gut aufbereitete Materialen reduziert werden. Das hat einen hohen Anspruch an das Design von digitalen Lernumgebungen zur Folge. Lernbezogene kognitive Belastung kann durch entsprechende Zusatzangebote in Lernumgebungen integriert werden. Im Zusammenhang mit digitalen Unterrichtsmedien wird diskutiert, inwiefern sich solche lernbezogenen kognitiven Ressourcen aktivieren und fokussieren lassen.

Kognitive Theorie des multimedialen Lernens

Die kognitive Theorie des multimedialen Lernens (en.: *cognitive theory of multimedia learning*; Mayer, 2014) gründet neben einer beschränkten Kapazität des Arbeitsgedächtnisses auf weiteren Annahmen: Zum einen geht man davon aus, dass Menschen einerseits auditiv und visuell dargebotene Informationen in jeweils unterschiedlichen kognitiven Strukturen verarbeiten. Weiter wird angenommen, dass auch in Texten und Bildern dargestellte Informationen in wieder unterschiedlichen kognitiven Strukturen verarbeiten. Darüber hinaus wird Lernen als ein aktiver Prozess verstanden, bei dem Wissen durch gezielte Auseinandersetzung mit einem Lerngegenstand in bestehende Schemata (d. h. Wissensstrukturen) eingegliedert werden muss.



Aufgabe

Achten Sie in folgendem Video darauf, wie auditiv und visuell dargebotene Informationen zueinander in Beziehung stehen:

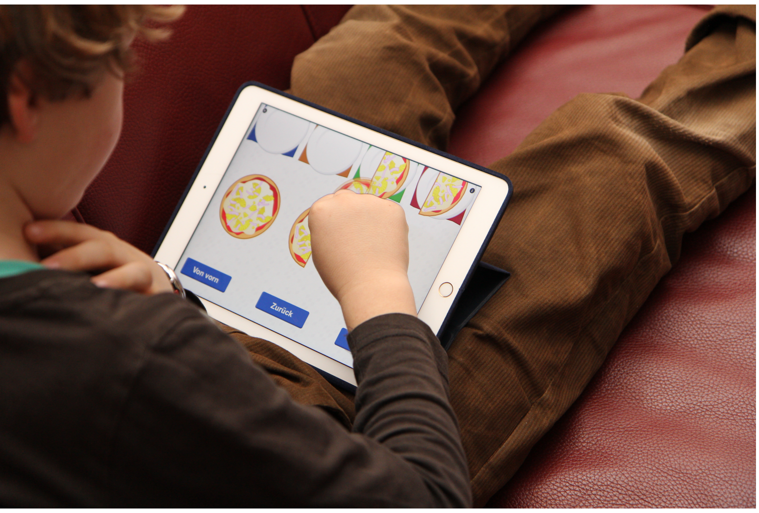
► www.youtube.com/watch?v=xSYHWFya2Rs

Erläutern Sie, welchen Mehrwert die Erklärung durch den Schüler gegenüber einer rein visuellen Darbietung der Rechnung haben kann.

Lösung

Der Schüler erklärt jeden seiner Rechenschritte während er schreibt, zeichnet oder deutet: Die auditiv dargebotenen Informationen können die visuell dargebotenen Informationen unterstützen, weil sie zeitlich passend zueinander dargeboten werden.

Ein Schulbuchausschnitt



Aufgabe

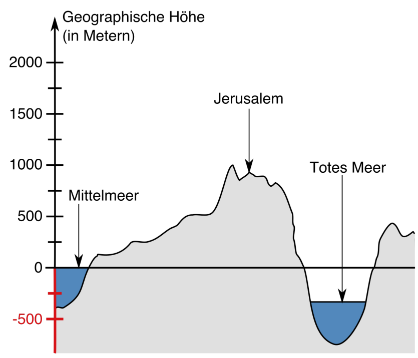
Nachfolgend sehen Sie einen Ausschnitt aus einem deutschen Mathematikbuch für die fünfte Jahrgangsstufe. Nennen und diskutieren Sie Schwierigkeiten, die sich durch die gemeinsame Darstellung von Texten und Bildern ergeben können.

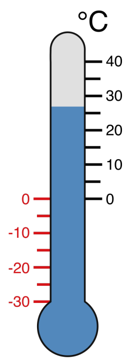
Lösung

Nach der kognitiven Theorie des multimedialen Lernens kann die Darbietung von Texten und Bildern dann vorteilhaft sein, wenn sich die Informationen gleichzeitig verarbeiten lassen. Hier erscheint dies aus verschiedenen Gründen nicht möglich: Auf die angesprochenen Kontostände wird an dieser Stelle kein Bezug genommen. Der Text passt nur zu einem der beiden Bilder (geographische Höhen). Das zweite Bild (Temperaturskala) wird im Text nicht erwähnt. Die y-Achsen der beiden Diagramme sind in unterschiedlichen Einheiten und verschiedenen Größenordnungen angegeben. Dies kann suggerieren, dass die beiden Diagramme zusammengehörige Informationen enthalten. Weiter ist das linke Bild ein zweidimensionales Bild, das rechte Bild nur eindimensional. Insgesamt erscheint die Aufteilung untereinander wenig gewinnbringend. Durch die Darstellung kann sich für Schülerinnen und Schüler während der Arbeit mit diesem Beispiel eine erhöhte irrelevante kognitive Belastung ergeben.

Bei geographischen Höhenangaben, Kontoständen oder Temperaturen können Zustände „unter Null“ vorkommen.

Die Höhe eines Berges und die Höhenlage eines Ortes (z. B. Seen) wird in Metern über dem Meeresspiegel, also „Normal-Null“, angegeben – man sagt kurz „in m über NN“. In der Abbildung ist ein sog. „Höhenprofil“ von Isreal zu sehen. Man sieht dort aber, dass es auch Orte gibt (z. B. den Wasserspiegel des Toten Meeres), die unter NN liegen.

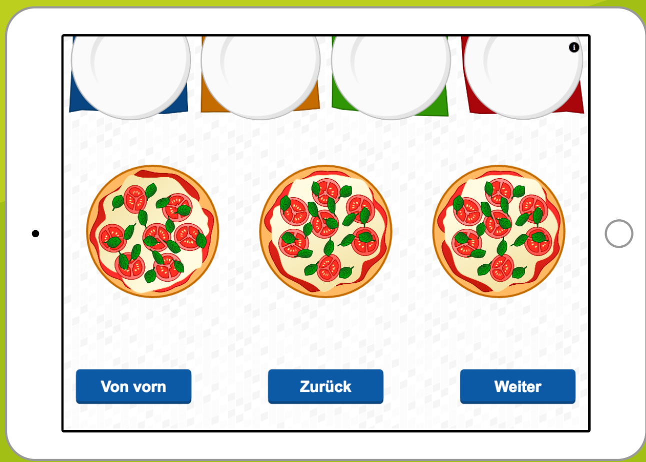




Ausschnitt aus einem deutschen Schulbuch

Embodied Cognition-Theorie

Innerhalb der Embodied Cognition-Theorie (en.: *embodied cognition theory*; Wilson, 2002) wird davon ausgegangen, dass Menschen dazu in der Lage sind, kognitive Belastung in Form von passenden Gesten oder Fingerbewegungen abzuladen. Ein Beispiel hierfür ist das Zählen mit den eigenen Fingern. Weiter wird angenommen, dass Handlungsschemata rein kognitive Prozesse losgelöst von ihren ursprünglichen sensomotorischen Zwecken unterstützen können. Beispielsweise kann beim Erwerb des Bruchzahlbegriffs das konkrete Zerschneiden einer halben Pizza in zwei gleich große Stücke die Ausbildung einer Vorstellung des Erweiterns als Verfeinern einer Einteilung unterstützen.



Widget 23: Verteile die Pizzen gerecht an die Gäste.

Aufgabe

Öffnen Sie das iBook auf Seite 23. Versetzen Sie sich in die Lage eines Kindes und bearbeiten Sie die interaktive Aufgabe 23 (en.: *widget*). Inwiefern sind Aspekte der Embodied Cognition-Theorie in dieser Aufgabe umgesetzt? Erläutern Sie, wie sich diese Aspekte verändern würden, wenn die Aufgabe auf einem Computer mit einer Maus bearbeitet werden müsste.

Lösung

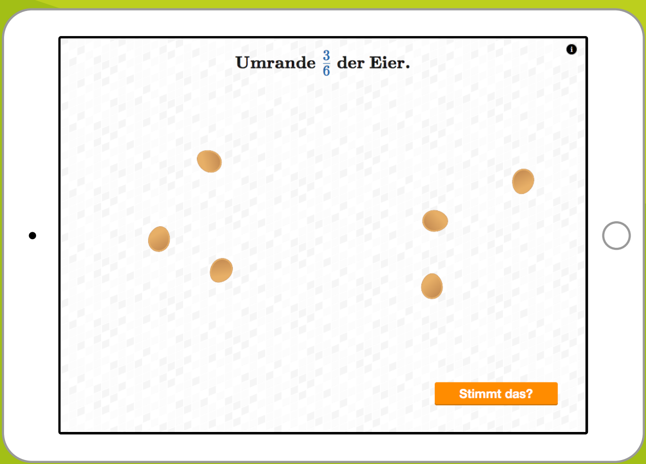
Die Pizza kann mithilfe von Fingerbewegungen zerschnitten und verschoben werden. Wie bei den realen Handlungen folgt dabei die Blickbewegung der Hand des Nutzers – in diesem Fall auf dem Touchscreen. Die interaktive Aufgabe bedient sich dabei natürlichen Gesten. Im Gegensatz dazu würde auf einem PC der Blick des Nutzers der Pizza auf dem Bildschirm – nicht der Maus auf dem Mousepad – folgen. Auch die Gesten zum Zerschneiden wären nicht mehr natürlich.

Reflexion

Überlegen Sie, wie eine interaktive Aufgabe in einem anderen mathematischen Kontext von natürlichen Gesten profitieren könnte. Skizzieren Sie grob das User Interface einer solchen Aufgabe. Welche Funktionalität würden Sie sich hier wünschen? Welche Vorteile hätte Ihre interaktive Aufgabe gegenüber einer Aktivität mit Papier und Bleistift?

Adaptivität

Aufgaben können in digitalen Lernumgebungen derart implementiert werden, dass sie sich selbstständig an individuell unterschiedliche Lernprozesse einzelner Schülerinnen und Schüler anpassen (Leutner, 1993). Derartige adaptive Aufgabenformate können einen geeigneten Umgang mit Heterogenität innerhalb einer Klasse ermöglichen. So können Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Leistungsniveaus gleichermaßen gefördert werden. Lernumgebungen dieser Art werden als adaptiv bezeichnet, wenn die Eingaben von Schülerinnen und Schülern während des Arbeitens automatisiert zu Veränderungen der Parameter dieser Lernumgebung führt.



Widget 13: Umrande den richtigen Anteil der Objekte.

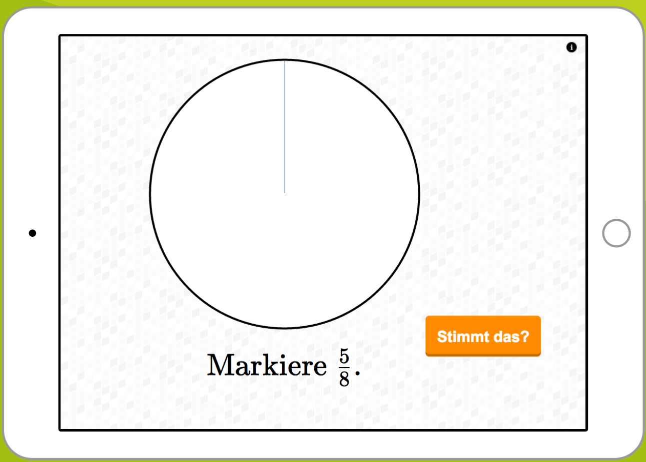
Aufgabe

Öffnen Sie das iBook auf Seite 14. Die interaktive Aufgabe 13 erhöht den Schwierigkeitsgrad ein einziges Mal. Experimentieren Sie selbst mit der Aufgabe. Beschreiben Sie, wie in dieser interaktiven Aufgabe Adaptivität implementiert wurde: Wann wird der Schwierigkeitsgrad erhöht? Wie äußert sich der Anstieg der Schwierigkeit? Wie reagiert die interaktive Aufgabe auf falsche Antworten?

Lösung

Nach drei richtigen Antworten erhöht sich die Schwierigkeit der Aufgaben. Zunächst entspricht der Nenner des Bruches der Anzahl der Elemente auf dem Bildschirm. Im zweiten Schwierigkeitsgrad ist die Anzahl der Elemente ein Vielfaches des Nenners des Bruches. Somit ist ein zusätzlicher Schritt notwendig, um die Aufgabe korrekt zu lösen.

Adaptivität im iBook



Widget 10: Markiere den Bruchteil des Kreises.

Aufgabe

Öffnen Sie das iBook auf Seite 13. Finden Sie analog zum Beispiel in der interaktiven Aufgabe 10 die drei unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen heraus.

Lösung

In der interaktiven Aufgabe werden zunächst fünf Aufgaben generiert, in denen der Nenner des Bruches ein Vielfaches von 2 (konkret: 2, 4 oder 8) ist. Werden diese korrekt beantwortet, werden fünf Aufgaben generiert, in denen der Nenner 2, 5 oder 10 ist. In der letzten Schwierigkeitsstufe werden zehn Aufgaben mit beliebigen Nennern zwischen 2 und 12 generiert. Werden innerhalb einer Stufe mehrere Aufgaben falsch gelöst, verbleibt die Schülerin oder der Schüler innerhalb dieser Stufe.

Kapitel I

Zwei Schulbuchausschnitte

Aufgabe

Nachfolgend sehen Sie Ausschnitte aus zwei deutschen Schulbüchern für unterschiedliche Jahrgangsstufen und zu unterschiedlichen Themengebieten der Mathematik. Wie verändert sich jeweils der Schwierigkeitsgrad in diesen Aufgaben? Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten fallen Ihnen zwischen den beiden Buchausschnitten und der interaktiven Aufgabe 10 – bezogen auf die Veränderung des Schwierigkeitsgrades? Welche Vorteile kann eine adaptive Anpassung der Aufgabenschwierigkeit haben?

Lösung

Im ersten Beispiel steigt der Schwierigkeitsgrad von Teilaufgabe zu Teilaufgabe kontinuierlich an. Auch verändern sich die Operationen, die in den Teilaufgaben durchgeführt werden müssen. Im zweiten Beispiel existieren – analog zur interaktiven Aufgabe im iBook – Blöcke, in denen Aufgaben des nahezu gleichen Schwierigkeitsgrades zusammengefasst sind. Adaptive Aufgaben können vor allem für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler hilfreich sein, wenn bei falschen Lösungen nicht schwierigere Teilaufgaben, sondern Teilaufgaben derselben Schwierigkeitsstufe – oder sogar leichtere Teilaufgaben – generiert werden.

Aufgabe 1. Übertrage die Teilaufgaben in dein Heft und vervollständige sie dann dort.

a)

	2	3	5	5
	1	5	4	7
+		3	8	9
	●	●	●	●

b)

	3	2	8	6	5	7	2
		4	5	3	8	6	1
+	8	3	2	1	1	6	5
●	●	●	●	●	●	●	●

c)

	1	3	3	9
	●	●	●	●
+		3	7	2
	5	3	5	4

d)

	5	1	2	3	●	8	1
	●	4	5	●	8	●	1
+	2	●	●	3	1	5	4
●	3	6	9	7	2	3	●

Aufgabe 2. Zeichne z. B. mithilfe einer Wertetabelle die Normalparabel in ein Koordinatensystem sowie mit verschiedenen Farben die Graphen der durch die Funktionsterme gegebenen Funktionen.

a) $f_1(x) = x^2 - 3$
$f_2(x) = x^2 + 2{,}5$
$f_3(x) = x^2 - 4{,}5$

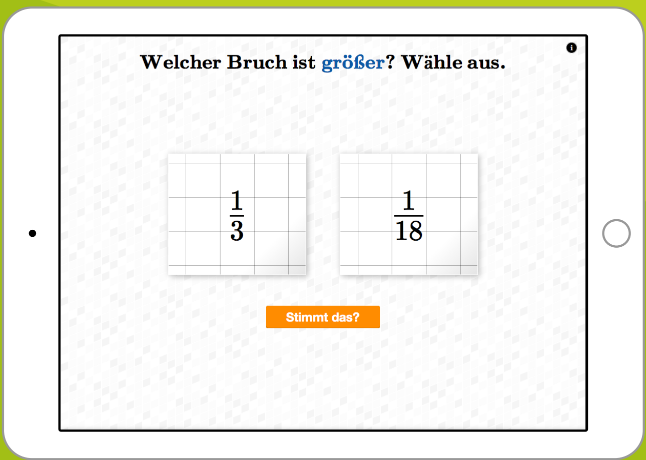
b) $g_1(x) = (x + 1)^2$
$g_2(x) = (x + 4{,}5)^2$
$g_3(x) = (x - 3{,}25)^2$

c) $h_1(x) = (x - 1)^2 - 3$
$h_2(x) = (x + 2)^2 - 1$
$h_3(x) = (x - 2{,}5)^2 + 3$

Ausschnitte aus zwei deutschen Schulbüchern

Feedback

Neben einer Anpassung des Schwierigkeitsgrades können digitale Lernumgebungen auch derart gestaltet sein, dass Schülerinnen und Schüler automatisch und umgehend eine auf ihre Antworten bezogene Rückmeldung (en.: *Feedback*) erhalten. Feedback kann auf die Lösung einer Aufgabe fokussieren (en.: *corrective feedback*), um auf konkrete Fehlvorstellungen aufmerksam zu machen sowie Rückmeldung über korrekte Antworten zu geben (Hattie & Timperley, 2007). Feedback kann sich aber auch auf den Prozess der Bearbeitung einer Aufgabe beziehen (en.: *explanatory feedback*) und Schülerinnen und Schüler dabei unterstützen, vorhandene Vorwissenslücken zu schließen, Fehlvorstellungen zu korrigieren und tiefgehendes Verständnis zu entwickeln (Hattie & Timperley, 2007).



Widget 86: Auf den beiden Kärtchen sind Brüche angegeben. Tippe auf den Bruch.

Aufgabe

Versetzen Sie sich in die Lage einer Schülerin bzw. eines Schülers der frühen Sekundarstufe. Bearbeiten Sie einzelne Teilaufgaben der beiden interaktiven Aufgaben 9 (S. 13 im iBook) und 86 (S. 65 im iBook). Beantworten Sie dabei Aufgaben sowohl richtig als auch falsch. Achten Sie auf die Art der Rückmeldung in den Aufgaben. In welchen interaktiven Aufgaben wird korrigierendes Feedback (en.: *corrective feedback*), in welchen Aufgaben erklärendes Feedback (en.: *explanatory feedback*) gegeben? Schätzen Sie den Nutzen von Feedback dieser Art für leistungsschwächere und leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler ein.

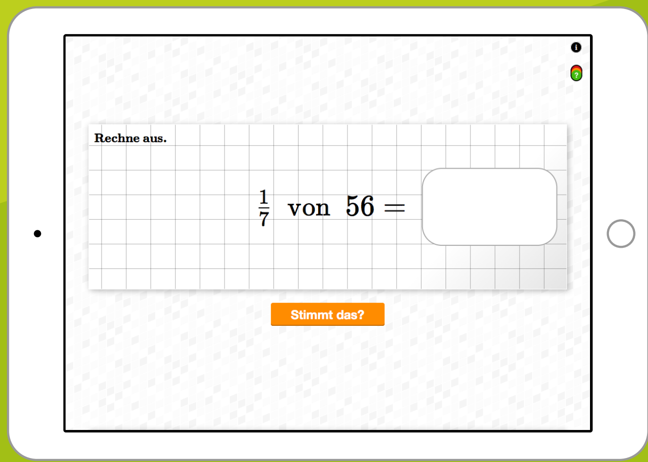
Lösung

Das Feedback in der interaktiven Aufgabe 9 ist korrigierend und gibt als zusätzlichen erklärenden Aspekt Aufschluss darüber, ob der fehlerhaft markierte Bruchteil zu groß oder zu klein war. Detailliertere Informationen über mögliche Ursachen für Fehler werden nicht generiert. In der interaktiven Aufgabe 86 wird ebenfalls zunächst nur korrigiert und eine falsche Antwort rot hervorgehoben. Entscheidet sich eine Schülerin oder ein Schüler für eine Erklärung, wird adaptiv an das jeweilige Bruchzahlpaar eine Strategie zum Größenvergleich der beiden Brüche ausgewählt und sowohl als Text als auch in ikonischer Darstellung illustriert. Leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern können diese Hinweise helfen, um Fehlvorstellungen zu korrigieren. Leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern können so auf zusätzliche – in bestimmten Situationen geschicktere – Strategien hingewiesen werden.

Feedback im iBook

Aufgabe

Öffnen Sie das iBook auf Seite 18. In der interaktiven Aufgabe 17 wird mit gestuften Lösungshilfen eine weitere Form von Feedback angeboten. Schülerinnen und Schülern können hier bereits vor der Bearbeitung auf Hinweise zur Aufgabenlösung zurückgreifen. Setzen Sie sich mit den gestuften Lösungshilfen auseinander. Tippen Sie dazu oben rechts auf das „Ampel“-Symbol. Beschreiben Sie: Wie sind die Hinweise aufgebaut? Welche Vorteile kann eine solche Option für Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Leistungsniveaus haben?



Widget 17: Bestimme den Bruchteil.

Lösung

Die Teilaufgaben der interaktiven Aufgabe 17 sind Routineaufgaben. Zunächst soll das Ganze durch den Nenner des Bruches geteilt werden. Der erste Hinweis (grün) deutet diesen Schritt an. Im zweiten Hinweis (gelb) erhält eine Schülerin oder ein Schüler das Ergebnis dieser Division und wird auf den zweiten notwendigen Schritt aufmerksam gemacht: Der Zähler des Bruches gibt an, wie viele solcher Stücke genommen werden sollen. Der letzte Hinweis (rot) enthält die vollständige Lösung der Rechenaufgabe. Durch die gestuften Lösungshilfen können leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler einen Impuls erhalten, um die mehrschrittige Rechenaufgabe – selbst, wenn ihnen einzelne Schritte nicht sofort gelingen. Durch die optionale Darbietung der Lösungshilfen können leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler die Aufgabe auch ohne Hinweise bearbeiten. Dies kann auch die Fähigkeit zur Selbsteinschätzung positiv beeinflussen.

Informationsverarbeitung und der Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht

Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit

Ergebnisse unserer Metaanalyse (Hillmayr, Reinhold, Ziernwald & Reiss, 2017) zeigen, Schülerinnen und Schüler im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht vom Einsatz digitaler Medien profitieren können. Insbesondere deuten sich folgende Implikationen für den MINT-Unterricht (en.: *STEM*) an:

- Digitale Medien haben im MINT-Unterricht einen größeren positiven Einfluss auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler, wenn sie ergänzend zu traditionellen Unterrichtseinheiten eingesetzt werden als wenn sie diese ersetzen.

- Der Einsatz digitaler Medien scheint erfolgreicher zu sein, wenn Schülerinnen und Schüler in Paaren und nicht alleine mit den Geräten arbeiten.

- Wirken Lehrerinnen und Lehrer während der Arbeit mit digitalen Medien unterstützend, deutet sich ein größerer positiver Effekt an als wenn die Schülerinnen und Schüler ohne Hilfestellung arbeiten müssen.

- Es deutet sich an, dass der sog. „Neuheitseffekt" sich auch in der Leistung der Schülerinnen und Schüler bemerkbar macht: Kürzere Unterrichtssequenzen mit digitalen Medien haben einen größeren positiven Effekt als längere Sequenzen.

- Es zeigt sich, dass Schülerinnen und Schüler von einer Ausbildung ihrer Lehrkräfte an den konkreten digitalen Geräten und der im Unterricht benutzten Software direkt profitieren können.

- Der positive Einfluss digitaler Medien zeigt sich verstärkt, wenn die Schülerinnen und Schüler selbst an den Geräten und mit den Programmen arbeiten und diese nicht nur von den Lehrerinnen und Lehrern vorgeführt werden.

Graphisches Ableiten im Mathematikunterricht

Das händische Ermitteln der Tangentensteigung an verschiedenen Punkten des Graphen der Funktion, die für eine Bestimmung des Graphen der Ableitungsfunktion notwendig ist, ist bei Kurven wechselnder Krümmung zum Teil ungenau. Die Software arbeitet hier genauer, wobei zugleich die formal notwendigen Schritte erhalten bleiben (Hillmayr et al., 2017).

Aufgabe

Skizzieren Sie zunächst händisch mit Papier, Bleistift und Taschenrechner den Graph der Ableitungsfunktion von $f(x) = sin(x)$. Sie können dabei folgendermaßen vorgehen:

- Zeichnen des Graphen der Funktion $f(x)$
- Markieren eines Punktes P auf G_f
- Zeichnen der Tangente t durch P an G_f mit Lineal und Augenmaß
- Bestimmung der Steigung m von t mit Steigungsdreieck
- Einzeichnen des Punktes Q mit der x-Koordinate von P und y-Koordinate m
- Schritte für weitere Punkte auf G_f wiederholen

Aufgabe

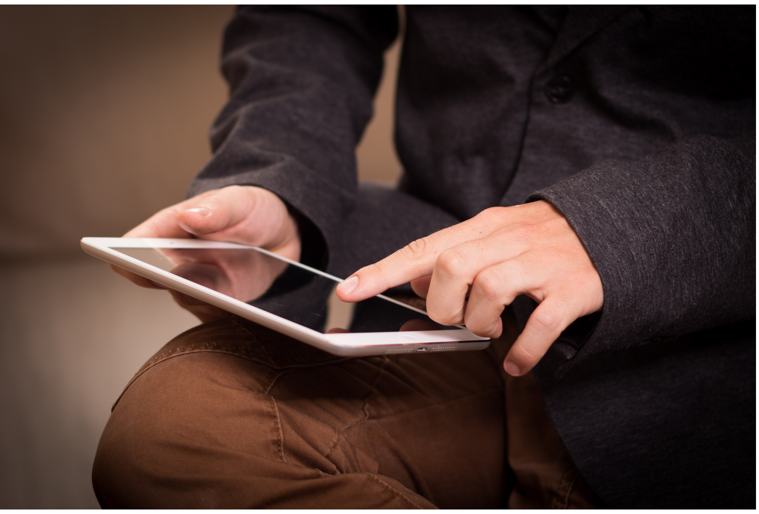
Öffnen Sie nun das Programm GeoGebra auf den iPads und erstellen Sie ein interaktives Arbeitsblatt, in dem der Graph der Ableitungsfunktion zu $f(x) = sin(x)$ interaktiv erstellt werden kann. Sie können dabei nach folgenden Schritten vorgehen:

- Eingabe der Funktion $f(x)$
- Erstellen eines „Schiebereglers" a zur Variation des Parameters
- Eingabe des Punktes $P = (a, f(a))$
- Generieren der Tangente t durch P an G_f durch das Programm
- Steigung der Tangente m durch das Programm angeben lassen
- Eingabe des Punktes $Q = (a, m)$
- Spur von Q anzeigen lassen; a mit Schieberegler variieren

GeoGebra zum Ableiten gewinnbringend einsetzen

Aufgabe

Wie könnte eine Mathematikstunde zur Bestimmung des Graphen der Ableitungsfunktion von $sin(x)$ durch den Einsatz von GeoGebra gewinnbringend ergänzt werden? Nennen Sie konkrete Handlungsempfehlungen auf der Basis der Ergebnisse der oben genannten Metaanalyse.



Lösung

Die graphische Ableitung mittels GeoGebra kann gut ergänzend zum klassischen Verfahren eingesetzt werden: Eine Durchführung des klassischen Verfahrens für einen konkreten Punkt P kann die Umsetzung der notwendigen Schritte in GeoGebra erheblich erleichtern.

GeoGebra kann dabei kurzfristig in den eigenen Unterricht etwa zur Exploration zu Beginn einer Unterrichtsstunde oder Unterrichtseinheit eingebunden werden. Das Verfahren kann im Laufe des Schuljahres immer wieder knapp aufgegriffen werden: Mit einem anderen Funktionsterm $f(x)$ können weitere Funktionen graphisch abgeleitet werden. Dabei sollte allerdings beachtet werden, dass formale Verfahren – etwa die Bestimmung der Steigung mit einem Steigungsdreieck – nicht gänzlich dem PC überlassen werden sollten, sondern als Ergänzung hin und wieder auch händisch durchgeführt werden.

GeoGebra ist ein komplexes Tool. Es empfiehlt sich daher, vor dem Einsatz im Unterricht die gestellte Aufgabe selbst durchzuführen, um gegebenenfalls Probleme und Hürden zu erkennen.

Gerade der eigenständige Umgang mit GeoGebra kann die Lernenden dazu motivieren, die Software auch bei Problemen zu Hause zur Visualisierung zu nutzen. Expertise und Kompetenz erhalten sie dabei nur, wenn sie die Anwendung selbst erstellen. Eine Entlastung durch die Bereitstellung der fertigen „Black-Box“, in der lediglich noch der Schieberegler benutzt werden muss, erscheint daher eher ungeeignet (Hillmayr et al., 2017).

Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe

Bruchzahlen als fachdidaktische Herausforderung

Bei der Zahlbereichserweiterung von natürlichen Zahlen zu Bruchzahlen verändert sich das konzeptuelle Verständnis dessen, was man unter Zahlen versteht. Diese Unterschiede, die stets mit einer notwendigen Veränderung des Verständnisses von Zahlen einhergehen, lassen sich grob in vier Teilbereiche einordnen (z. B. Obersteiner, Van Hoof, Verschaffel & Van Dooren, 2015):

- Während natürliche Zahlen eine eindeutige symbolische Darstellung haben, können wertgleiche Brüche durch verschiedene Symbole repräsentiert sein (z. B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$). Sogar natürliche Zahlen verlieren im Zahlbereich der rationalen Zahlen ihre eindeutige Darstellung (z. B. $2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3}$).

- Das von den natürlichen Zahlen wohlbekannte Konzept des Nachfolgers existiert im Kontext von Bruchzahlen nicht mehr, denn die rationalen Zahlen bilden eine dichte Teilmenge der reellen Zahlen. Jedoch kann an dieser Stelle in Klasse 6 kein fachlich einwandfreies Konzept von Dichte vermittelt werden.

- Die Frage nach der größeren von zwei vorgegebenen natürlichen Zahlen ist weitgehend einfach unter Rückgriff auf die Ziffernschreibweise zu beantworten. Das Konzept der Größe von Bruchzahlen unterscheidet sich hiervon grundlegend. So ist etwa $\frac{8}{9} < \frac{7}{6}$, obwohl $8 > 7$ und $9 > 6$. Dieser Schritt bereitet Schülerinnen und Schüler zum Teil erhebliche Schwierigkeiten, wenn sie an Konzepten natürlicher Zahlen festhalten. So sind Schülerantworten keine Seltenheit, in der $\frac{8}{9}$ fälschlicherweise als der größere Bruch interpretiert wird, „weil der Zähler größer ist".

- Auch die Interpretation grundlegender Rechenoperationen verändert sich bei der Zahlbereichserweiterung. Gängige Grundvorstellungen, etwa der Multiplikation als „wiederholtes Addieren", verlieren oder verändern ihre Bedeutung. Auch, dass „Multiplizieren vergrößert" verliert seine allgemeine Gültigkeit. So kann z. B. die Rechnung $\frac{1}{2} \cdot 4$ weder als wiederholte Addition von 4 erklärt werden, noch ist das Ergebnis 2 größer als der zweite Faktor 4.

Man geht davon aus, dass Schülerinnen und Schüler erhebliche Probleme bei der Entwicklung einer tragfähigen Vorstellung von Bruchzahlen haben, wenn sie an Konzepten natürlicher Zahlen festhalten. In der Fachdidaktik und der Psychologie ist diese Schwierigkeit als *Natural Number Bias* bekannt.

Es hat sich gezeigt, dass eine Fokussierung im Unterricht auf arithmetische Operationen sowie den Umgang mit der formal-symbolischen Schreibweise von Brüchen alleine meist nicht gewinnbringend ist. Vielmehr wird angenommen, dass gerade im Anfangsunterricht der Bruchrechnung die Verwendung bildhafter Darstellungen sowie der durch die Lehrkraft angeleitete und beständige Wechsel zwischen unterschiedlichen Repräsentationen von Brüchen sehr praktikable fachdidaktische Herangehensweisen darstellen. Gerade in diesem Zusammenhang wird auch digitalen Unterrichtsmedien bereits seit geraumer Zeit ein großes Potential beigemessen (z. B. Lesh, Post & Behr, 1987).

Brüche als Teil vom Ganzen

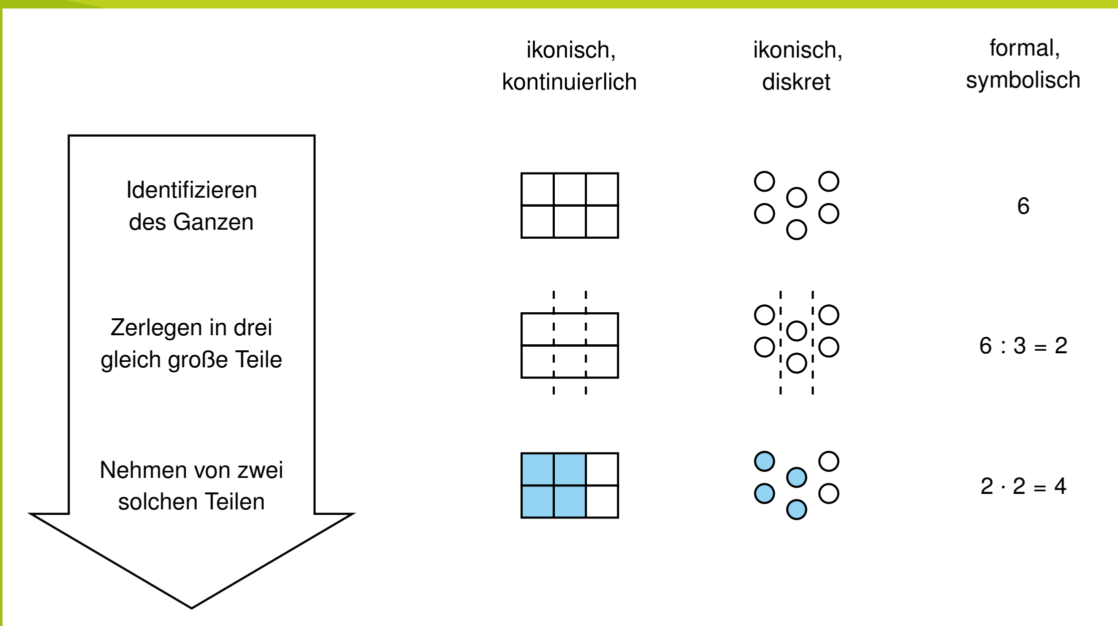
Das operative Vorgehen bei der Bildung eines „Teils $\frac{a}{b}$ vom Ganzen“ erfolgt für ikonische und symbolische Darstellung gleich: Zunächst wird das Ganze identifiziert. Anschließend wird es in *b* gleich große Teile zerlegt (en.: *partitioning*). Von diesen Teilen werden *a* Stücke genommen. Das Resultat ergibt den gesuchten Bruchteil (z. B. Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Diesem Vorgehen liegt eine operative Vorgehensweise zu Grunde. Es ist dabei unabhängig davon, ob das Ganze ikonisch kontinuierlich, diskret, oder formal symbolisch angegeben wird (Baturo & Cooper, 1999).

Aufgabe

Öffnen Sie das iBook auf Seite 18. In der interaktiven Aufgabe 17 sollen Teile vom Ganzen nach dem oben erläuterten Schema berechnet werden. Erläutern Sie, wie eine vorhergehende Bearbeitung ikonischer Aufgaben den Lernprozess in dieser interaktiven Aufgabe unterstützen kann. In welcher Form erfolgt diese Unterstützung in der interaktiven Aufgabe?

Lösung

Das operative Vorgehen kann für Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Bruchrechnung eine erhebliche Herausforderung darstellen. Eine Einführung zunächst anhand konkreter Handlungen und ikonischen Darstellungen kann hier zu einer kognitiven Entlastung führen und den Lernprozess von Kindern geeignet unterstützen (Bruner, 1977). Das in der interaktiven Aufgabe implementierte System abgestufter Lösungshilfen greift auf die Anschauungen der konkreten Handlungen „Zerlegen“ und „Vervielfachen“ zurück.



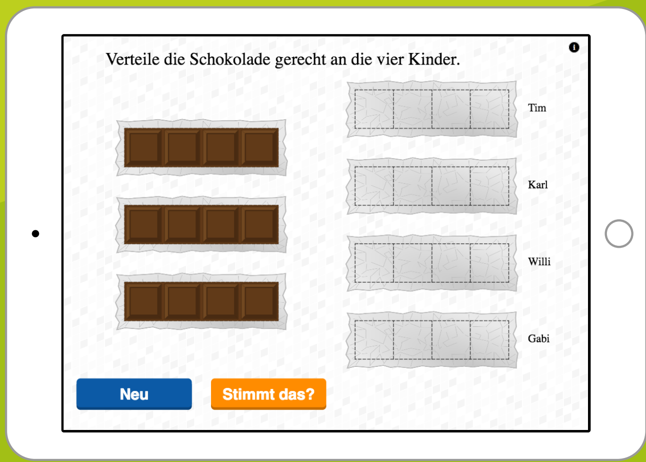
Operatives Vorgehen bei der Bildung eines Teils vom Ganzen (Reinhold, 2018).

Kapitel III

Teil mehrerer Ganzer

Aufgabe

Öffnen Sie das iBook auf Seite 24. In der interaktiven Aufgabe 24 sollen Schülerinnen und Schüler Schokolade von drei Schokoriegeln gerecht an vier Kinder verteilen. Im Anschluss daran sollen die Fragen in Aufgabe 25 beantwortet werden. Erläutern Sie den Unterschied in der oben dargestellten operativen Vorgehensweise zur Bildung von Anteilen von Ganzen und dem in Aufgabe 24 motivierten Vorgehen.



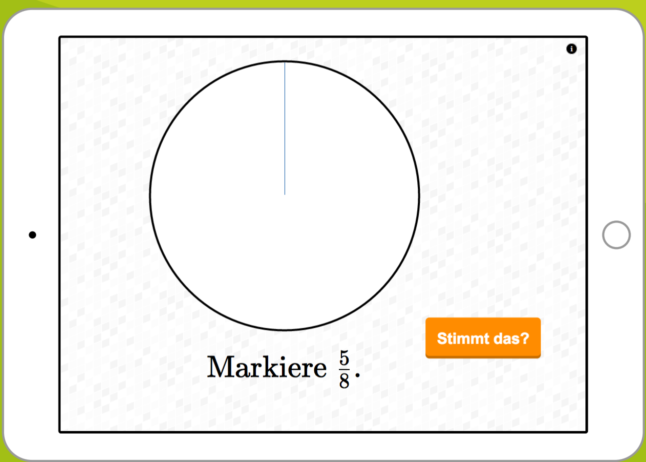
Widget 24: Verteile die drei Schokoriegel gerecht an die vier Kinder.

Lösung

In der bisher dargestellten operativen Vorgehensweise wurde zuerst „Zerlegt“ und anschließend „Vervielfacht“. Die konkrete Verteilungssituation in der interaktiven Aufgaben 24 motiviert eine andere – gleichwertige – Vorgehensweise: Zuerst wird „Vervielfacht“ und danach „Zerlegt“. Durch die zu beantwortenden Fragen können Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden, über die Gleichwertigkeit beider Vorgehensweisen nachzudenken.

Größenordnung von Brüchen

Für die Entwicklung von tragfähigen Vorstellungen zum Bruchzahlbegriff kann neben der operativen Vorgehensweise zur Bestimmung des „Teils vom Ganzen“ auch ein konzeptuelles Verständnis für die Größenordnung (en.: *magnitude*) von Brüchen hilfreich sein (Meert, Grégoire & Noël, 2010). Eine solche eher intuitive Vorstellung von der „Größe“ eines Bruches kann durch Übungen an kontinuierlichen ikonischen Darstellungen ohne Unterteilungen unterstützt werden (Carraher, 1993).



Widget 10: Markiere den Bruchteil des Kreises.

Aufgabe

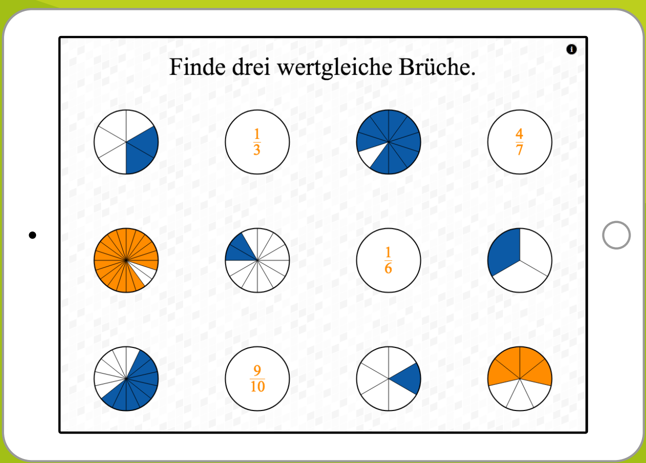
Öffnen Sie das iBook auf Seite 13. In der interaktiven Aufgabe 10 sollen Schülerinnen und Schüler einen vorgegebenen Anteil am Kreis markieren. Bearbeiten Sie einige Teilaufgaben. Überlegen Sie dann, warum die Ausbildung intuitiver Vorstellungen zur Größenordnung von Brüchen eher mit dieser interaktiven Aufgabe auf Touchscreens gelingen kann als mit entsprechenden Aufgaben auf Papier.

Lösung

Bei der Bearbeitung mit Papier und Bleistift tendieren Schülerinnen und Schüler eher dazu, auf operative Vorgehensweisen zur Bestimmung des Anteils zurück zu greifen: Etwa werden konkret Winkel berechnet und eingezeichnet. Durch die Verwendung von passenden Gesten und die Möglichkeit zum kontinuierlichen Färben des Flächenstückes werden eher intuitive Lösungen angesprochen. Diese müssen nicht zwangsläufig vollständig korrekt sein – die interaktive Aufgabe bewertet auch „ungefähr“ richtige Antworten als korrekt. Tatsächlich greifen Kinder hier auf andere Lösungsstrategien zurück (Hoch, Reinhold, Werner, Richter-Gebert & Reiss, 2018).

Verfeinern und Vergröbern einer Einteilung

Aufbauend auf der „Teil vom Ganzen"-Vorstellung kann das Erweitern des Bruches $\frac{1}{2}$ mit 2 als Verfeinern der Einteilung eingeführt und veranschaulicht werden – zunächst als Zerschneiden einer halben Pizza in zwei gleich große Stücke und im Anschluss als Einzeichnen einer geeigneten Linie im Kreisdiagramm. Dann kann unter Rückgriff auf diese bildhaften Darstellungen ein formal-symbolischer Zugang zum Erweitern als arithmetische Operation zur Erzeugung wertgleicher Brüche motiviert und illustriert werden: Das Zerschneiden der Pizza führt zum einen dazu, dass die Pizzastücke halb so groß werden und zum anderen dazu, dass nun doppelt so viele Stücke vorhanden sind – kurz $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ (z. B. Lamon, 2012).



Widget 35: In den Kreisen sind Brüche dargestellt. Es gehören drei zusammen.

Aufgabe

Öffnen Sie das iBook auf Seite 34. In der interaktiven Aufgabe 35 müssen Bruchzahlen in symbolischer Darstellung je zwei unterschiedlichen ikonischen Darstellungen am Kreisdiagramm zugeordnet werden. Bearbeiten Sie die interaktive Aufgabe. Nennen Sie Vorteile des Arbeitens auf dem Tablet-PC gegenüber einer ähnlichen Aufgabe auf Papier.

Lösung

Es kann eine unbegrenzte Anzahl an Teilaufgaben generiert werden. Der Schwierigkeitsgrad kann adaptiv erhöht werden. Die Bearbeitung einzelner Teilaufgaben kann viel schneller erfolgen, als auf Papier. Die Zuordnung geschieht über Antippen und Hervorheben der entsprechenden Symbole – diese müssen nicht umständlich verbunden werden. Bereits korrekt zugeordnete Bruchzahlen verschwinden und stellen somit für die weitere Bearbeitung keine irrelevante kognitive Belastung dar. Falsche Zuordnungen werden sofort zurückgemeldet.

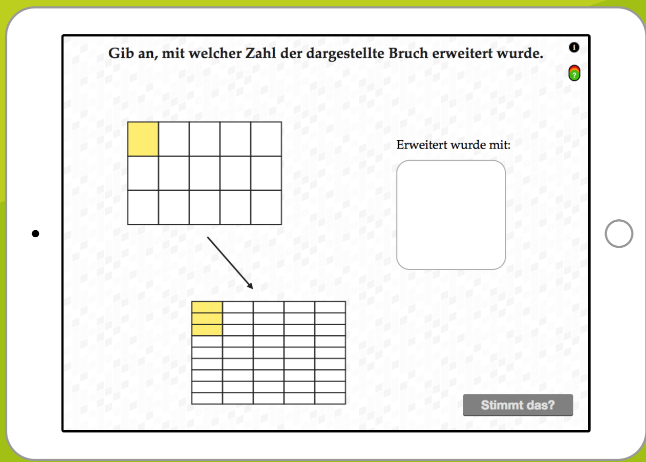
Erweitern und Kürzen

Aufgabe

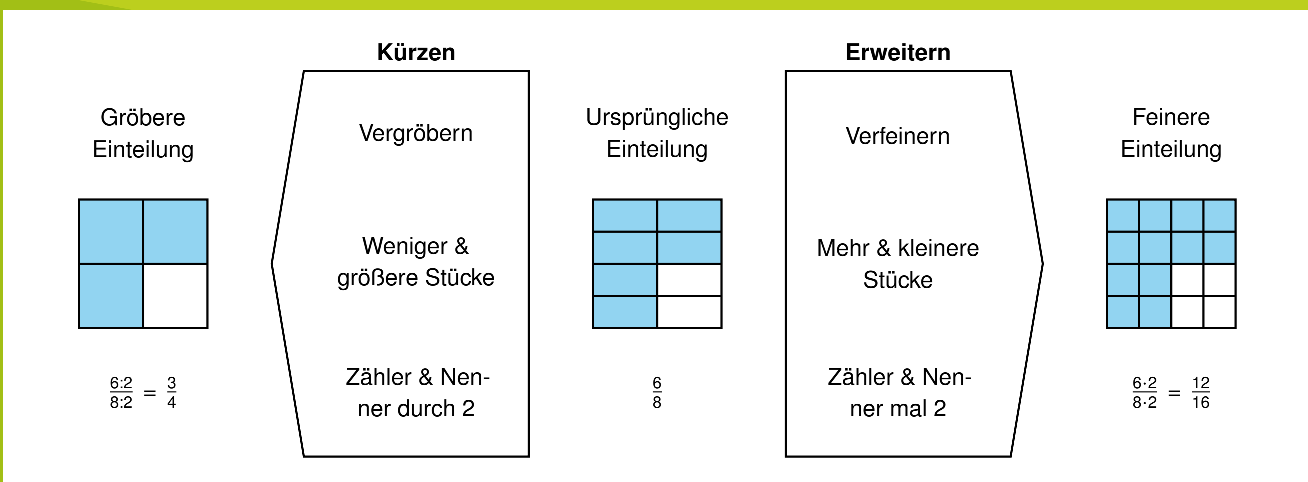
Öffnen Sie das iBook auf Seite 36. Bearbeiten Sie einige Teilaufgaben der beiden interaktiven Aufgaben 43 und 45. Erläutern Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Varianten der Aufgabe.

Lösung

In beiden interaktiven Aufgaben soll das Erweitern von Brüchen eingeübt werden. In Aufgabe 43 sind die Brüche ikonisch im Rechteckdiagramm dargestellt, in Aufgabe 45 symbolisch als Bruchzahlen. Wird die Aufgabe korrekt gelöst, wird das Ergebnis zusätzlich durch die jeweils andere Darstellungsebene veranschaulicht. Bei falschen Antworten wird erklärendes Feedback gegeben. Den Schülerinnen und Schülern stehen zur Bearbeitung der Aufgaben gestufte Lösungshilfen zur Verfügung.



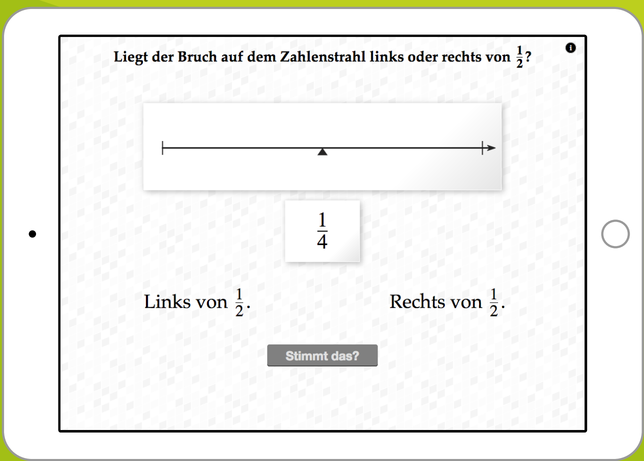
Widget 43: Mit welcher Zahl wurde der Bruch erweitert?



Erweitern und Kürzen von Brüchen (Reinhold, 2018).

Größenvergleich von Brüchen

Es zeigt sich, dass Schülerinnen und Schüler, die in Größenvergleichsaufgaben gute Leistungen erzielen, über eine Vielzahl von unterschiedlichen Vergleichsstrategien verfügen, die sie flexibel und an die konkrete Problemstellung angepasst einsetzen können (Clarke & Roche, 2009). Basis dieser Strategien sind dabei zum Teil spezifische Eigenschaften des zu vergleichenden Bruchpaares. Diese können etwa unter Rückgriff auf ein zugrundeliegendes Verständnis für die Größenordnung beider Brüche offengelegt werden (Meert et al., 2010; Reinhold, Reiss, Hoch, Werner & Richter-Gebert, 2018).



Widget 77: Entscheide, ob der Bruch rechts oder links von ein Halb auf dem Zahlenstrahl liegt.

Aufgabe

Öffnen Sie das iBook auf Seite 58-59. In den interaktiven Aufgaben 77, 78 und 79 wird sukzessive eine solche Größenvergleichsstrategie entwickelt. Arbeiten Sie sich durch diese kurze Unterrichtssequenz hindurch. Wie ist die Sequenz aufgebaut? Welche Rolle nimmt das digitale Medium ein? Welche Eigenschaften müssen Paare von Bruchzahlen erfüllen, damit sie nach diesem Vorgehen verglichen werden können? Was unterscheidet das Vorgehen vom operativen Ablauf zum Größenvergleich zweier beliebiger Bruchzahlen, der auf Seite 64 im iBook vorgestellt wird?

Lösung

Zunächst sollen die Schülerinnen und Schüler ein konzeptuelles Verständnis dafür entwickeln, wann ein Bruch kleiner oder größer als $\frac{1}{2}$ ist. Hier wird im iBook mit zwei interaktiven Aufgaben mit unterschiedlichen ikonischen Darstellungen gearbeitet: dem Rechteckmodell und dem Zahlenstrahl. Im Anschluss wird eine transitive Argumentationsstrategie dargestellt: Wenn ein Bruch weniger ist als die Hälfte (z. B. $\frac{2}{5}$) und ein Bruch mehr ist als die Hälfte (z. B. $\frac{4}{7}$), dann lassen sie sich leicht vergleichen ($\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{4}{7}$). Bei diesem Vorgehen spielt ein konzeptuelles Verständnis von Bruchzahlen eine weitaus größere Rolle als algorithmisch abzurufende Regeln (Reinhold et al., 2018).

Bruchrechnen mit Tablet-PCs begreifbar machen

Literatur

Baturo, A. R. & Cooper, T. J. (1999). Fractions, Reunitisation and the Number-Line Representation. In O. Zaslavsky (Hrsg.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 81–88). Haifa, Israel: PME.

Behr, M., Lesh, R. A., Post, T. R. & Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Hrsg.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (S. 91–125). New York: Academic Press.

Carraher, D. W. (1993). Lines of thought: A ratio and operator model of rational number. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(4), 281–305. doi:10.1007/bf01273903

Clarke, D. M. & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127–138. doi:10.1007/s10649-009-9198-9

Hattie, J. & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of educational research*, *77*(1), 81–112. doi:10.3102/003465430298487

Hillmayr, D., Reinhold, F., Ziernwald, L. & Reiss, K. (2017). *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe: Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit*. Münster, Alemania: Waxmann.

Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J. & Reiss, K. (2018). How do students visualize fractions? A finger tracking study. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Hrsg.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 5, S. 64). Umeå, Suecia: PME.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (3. Aufl.). New York: Routledge.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Dienes revisited: Multiple embodiments in computer environments. In I. Wirsup & R. Streit (Hrsg.), *Development in School Mathematics Education Around the World* (S. 647–680). Reston: NCTM.

Leutner, D. (1993). Guided discovery learning with computer-based simulation games: Effects of adaptive and non-adaptive instructional support. *Learning and Instruction*, *3*(2), 113–132. doi:10.1016/0959-4752(93)90011-n

Mayer, R. E. (2014). Cognitive Theory of Multimedia Learning. In R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (2. Aufl., S. 31–48). New York: Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9781139547369.005

Meert, G., Grégoire, J. & Noël, M.-P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, *107*(3), 244–259. doi:10.1016/j.jecp.2010.04.008

Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. *British Journal of Psychology*, *107*(3), 537–555. doi:10.1111/bjop.12161

Reinhold, F. (2018). *Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive. Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Reinhold, F., Reiss, K., Hoch, S., Werner, B. & Richter-Gebert, J. (2018). *Comparing Fractions: The Enactive Way. Supporting Students' Choice of Appropriate Strategies with iPad-Assisted Instruction*. Paper presented at the 2018 annual meeting of the American Educational Research Association. New York: AERA.

Sweller, J., Ayres, P. & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory*. New York: Springer. doi:10.1007/978-1-4419-8126-4

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin and Review*, *9*(4), 625–636. doi:10.3758/bf03196322

Bildnachweise:

Seite 1, Seite 9: ⓪ fancycrave1 / pixabay.com; Seite 5, Seite 32: ⓪ Rawpixel / stockimages.io; Seite 6: ⓪ Michal Jarmoluk / pixabay.com; Seite 10: © Roswitha Zander / TUM; Seite 10: © Bernhard Werner / TUM; Seite 13: © Roswitha Zander / TUM; Seite 17: © Astrid Eckert / TUM; Seite 18: ⓪ Gerd Altmann / pixabay.com; Seite 19: ⓪ Rawpixel / stockimages.io; Seite 20: ⓪ Niek Verlaan / pixabay.com; Seite 21: © Astrid Eckert / TUM; Seite 22: ⓪ Nadine Doerlé / pixabay.com; Seite 24: © Roswitha Zander / TUM; Seite 29: © Astrid Eckert / TUM.

Technische Universität München

TUM School of Education
Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik

Arcisstraße 21
80333 München, Deutschland

www.ma.edu.tum.de
frank.reinhold@tum.de