

**Lehrstuhl für Baumechanik
Technische Universität München**

Simulation von Bremsenquietschen (Brake Squeal)

Alexander Buck

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. M. Mensinger

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. G. H. Müller
2. Prof. Dr.-Ing. habil. F. Duddeck,
Queen Mary University of London / Großbritannien

Die Dissertation wurde am 20.03.2008 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 10.06.2008 angenommen.

Kurzfassung

Zur Sicherstellung einer geräuscharmen Bremse ist im Serienentwicklungsprozess eines PKWs ein bedeutender Aufwand erforderlich. Dieser Prozess kann durch die Simulation von Bremsenquietschen unterstützt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Simulation von Bremsenquietschen (*Brake Squeal*) vorgestellt und bei der Lösung eines in der Serienentwicklung aufgetretenen hochfrequenten Quietschproblems angewendet. Dieses Verfahren besteht aus einer Stabilitätsanalyse eines Finite-Element-Modells der Bremse. Durch eine Berechnung der komplexen Eigenwerte werden instabile Schwingformen des Systems ermittelt. Voraussetzung dafür ist ein repräsentatives Modell, was in der Regel mit Hilfe von Messdaten validiert werden muss. Neben den mechanischen Hintergründen wird auf Vorteile und Grenzen des Verfahrens eingegangen.

Bei dem untersuchten Quietschproblem tritt eine spezielle *in-plane*-Bewegung einer innenbelüfteten Brems Scheibe auf. Anhand von durchgeführten Messungen und Simulationen kann eine physikalische Erklärung dieses Phänomens gefunden und daraus eine Reihe von Abhilfemaßnahmen abgeleitet werden.

Abstract

Securing a quiet brake requires a significant effort during an automotive serial development process. That process may be supported by the simulation of brake squeal.

This work presents a method to simulate brake squeal and its application to the solution of a high-frequency squeal problem. It consists of a stability analysis of a Finite-Element-Model of the brake. By means of the calculation of the complex eigenvalues unstable modes of the system are obtained. This requires a representative model which generally has to be validated with measurements. Besides the mechanical background advantages and limits of the method are addressed.

The investigated squeal problem consists of a special kind of in-plane movement of a ventilated brake disk. By carrying out measurements and simulations a physical explanation of this phenomenon is found and corrective measures are derived.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit im Bereich Entwicklung Fahrdynamik der BMW Group und meiner wissenschaftlichen Mitarbeit am Lehrstuhl für Baumechanik an der TU München.

Mein ganz besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. Gerhard Müller für die vielen wertvollen Diskussionen und die ständige Gesprächsbereitschaft, die maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Bei meinen Kollegen der Abteilung EF-503 der BMW Group bedanke ich mich für die überaus angenehme Teamarbeit und die freundliche und hilfreiche Beratung in zahlreichen Dingen. Eine große Motivation war mir die Unterstützung von Dipl.-Ing. (FH) Hans-Jörg Kolbinger, der sich stets sehr für mich und meine Arbeit eingesetzt hat.

Weiterhin bedanke ich mich bei Dipl.-Ing. (FH) Georg Eichner, der mir den Einstieg in die Bremsgeräuschproblematik erleichtert hat. Seine zur Verfügung gestellten Ergebnisse sind Grundlage vieler meiner Untersuchungen.

Auch gilt mein Dank den Kollegen vom Lehrstuhl für Baumechanik, die jederzeit zu einer Diskussion bereit waren und mir damit viele hilfreiche Anregungen liefern konnten.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Fabian Duddeck danke ich für die bereitwillige und unkomplizierte Übernahme des Korreferates und die damit verbundenen Arbeiten.

Meiner Familie, meinen Freunden und ganz besonders meiner lieben Frau Britta danke ich, dass sie mir mit Motivation, Hilfsbereitschaft und Geduld stets zur Seite standen.

Inhaltsverzeichnis

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	IX
1 Einleitung	1
1.1 Geschichte	2
1.2 Stand der Technik	2
1.3 Ziel und Inhalt dieser Arbeit	3
2 Reibungserregte Schwingungen	5
2.1 Reibschwinger mit einem Freiheitsgrad	6
2.1.1 Reibgesetze	6
2.1.1.1 <i>Stick-Slip</i>	7
2.1.1.2 Negative $\frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}}$ -Beziehung	9
2.2 Reibschwinger mit zwei Freiheitsgraden	11
2.2.1 Reibungskopplung	11
2.2.1.1 Aufstellen der Bewegungsgleichungen	11
2.2.1.2 Lösung der Bewegungsgleichung	12
2.2.1.3 Modenkopplung	13
2.2.1.4 Einfluss von Dämpfung	15
2.2.1.5 Energiebetrachtung	17
2.2.2 <i>Follower-Forces</i>	18
2.3 <i>Sprag-Slip</i>	20
3 Stabilitätsanalyse	23
3.1 Der Stabilitätsbegriff	23
3.1.1 Stabilitätskriterien in der Mechanik	23
3.1.2 LJAPUNOW-Stabilität	24
3.2 Stabilitätsanalyse von Bremsen	26
3.2.1 Mechanische Modelle	28
3.2.2 Nichtlineare quasi-statische Berechnung mit anschließender komplexen Eigenwertanalyse	29
3.2.2.1 Systemgrenzen und Elementgröße	29
3.2.2.2 Abbildung der Scheibenrotation	31
3.2.2.3 Störung der Symmetrie	38

4	Materialverhalten	41
4.1	Bremsscheibe	41
4.2	Sattel und Halter	42
4.3	Bremsbeläge	43
4.3.1	Reibmaterial	43
4.3.1.1	Transversal isotropes Materialverhalten	44
4.3.1.2	Messung der transversal isotropen Materialeigenschaften	47
4.3.2	Belagträgerplatte	52
4.3.3	Dämpfungsblech (<i>Shim</i>)	52
4.4	Parameteridentifikation	53
4.4.1	Korrelation	53
4.4.2	Sensitivitäten	54
4.4.3	<i>Updating</i> -Prozess	54
5	Dämpfung	57
5.1	Dämpfungsmodelle	57
5.1.1	Reibungsdämpfung	57
5.1.2	Viskose Dämpfung	59
5.1.3	Strukturelle/hysteretische Dämpfung	60
5.1.4	Vergleich der Dämpfungsmodelle	61
5.1.5	Modale Dämpfung	64
5.2	Dämpfungsmechanismen	65
5.2.1	Reibungsdämpfung	65
5.2.2	Materialdämpfung	68
5.2.3	<i>Constrained-Layer</i> -Dämpfung	71
5.2.4	Abstrahldämpfung	72
5.3	Quantifizierung der Dämpfungsmechanismen	72
5.3.1	Reibungsdämpfung	73
5.3.2	Materialdämpfung	73
5.3.3	Abstrahldämpfung	75
6	Schwingformen von Bremsscheiben	77
6.1	Klassen von Schwingformen	77
6.1.1	<i>Out-of-plane</i> (OP) Moden	78
6.1.2	<i>In-plane</i> (IP) Moden	80
6.1.2.1	<i>In-plane</i> -Radial (IPR)	82
6.1.2.2	<i>In-plane</i> -Tangential (IPT)	83
6.1.2.3	<i>In-plane</i> -Tangential mit Schubverformung (IPTS)	83
6.1.2.4	OP/IP-Mischmoden	83
6.2	Abstrahlverhalten	84
6.2.1	OP-Moden	85
6.2.2	IP-Moden	86
6.2.3	Einfluss des Topfes und der Rippen	88

7	Instabilitäten mit IPTS-Moden der Bremsscheibe	91
7.1	Analyse der auftretenden instabilen Schwingformen	91
7.2	Mechanische Erklärung	96
7.3	Abhilfemaßnahmen	97
7.3.1	Verstimmung	97
7.3.2	Versteifung	97
7.3.3	OP Komponente	103
7.3.4	IPR Komponente	105
7.3.5	Störung der Symmetrie	110
7.3.5.1	Teilung von Doppelmoden	110
7.3.5.2	Kontaminierung mit weiteren Wellenzahlen	114
8	Unterschiede bei IPT- und IPTS-Moden	117
8.1	Berücksichtigung der Scheibenrotation	118
8.2	Kopplung von Sattel- und Scheibenmode	123
8.3	Fazit	125
9	Zusammenfassung und Ausblick	127

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

griechische Buchstaben:		$\hat{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}$	komplexe und konjugiert komplexe Dehnung, Seite 69
α	Koeffizient für massenproportionale Dämpfung, Seite 60	ε	Dehnungstensor, Seite 45
α	Phasenwinkel, Seite 59	ϵ_{Mat}^n	Dämpfungsarbeitsanteil, Seite 74
β	Koeffizient für steifigkeitsproportionale Dämpfung, Seite 60	ζ	Dämpfungsgrad, Seite 64
β	Basistransformationsmatrix, Seite 46	η	Frequenzverhältnis, Seite 33
γ	Parameter in der Kreisplattenlösung, Seite 79	η	Verlustfaktor, Seite 60
$\gamma, \dot{\gamma}$	Gleitung, Ableitung nach der Zeit, Seite 45	η	Maß für die Störung einer Bewegung, Seite 24
γ^P, γ^S	Parameter in der Kreisscheibenlösung, Seite 81	θ	Variable für Winkelgröße, Zylinderkoordinate
δ	Abklingkonstante in der Lösung des Einmassenschwingers, Seite 59	κ	Konstante, Seite 106
δu	virtuelle Verschiebung, Seite 39	λ	LAMÉsche Konstante, Seite 80
δ_{km}	KRONECKERdelta, Seite 47	$\lambda, \hat{\lambda}$	komplexer Eigenwert, Seite 12
$\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}$	Dehnungen, Ableitungen nach der Zeit	$\bar{\lambda}$	konjugiert komplexer Eigenwert, Seite 59
ε	Maß für eine gestörte Bewegung, Seite 24	λ_n	Wellenlänge der Mode n , Seite 86
		μ	Reibkoeffizient, Seite 6
		μ	LAMÉsche Konstante, Seite 80

μ_0	Konstante der linearen Beziehung $\mu(v_{rel})$, Seite 7	ω_E	Eigenkreisfrequenz des Einmassenschwingers, Seite 8
μ_G	Gleitreibungskoeffizient, Seite 5	ω_E^*	Gedämpfte Eigenkreisfrequenz des Einmassenschwingers, Seite 58
μ_H	Haftreibungskoeffizient, Seite 7	Ω	Anregungskreisfrequenz
μ_{grenz}	Reibkoeffizient, ab dem Modenkopplung eintritt, Seite 13	mathematische Symbole:	
μ_{krit}	Reibkoeffizient, ab dem Instabilität eintritt, Seite 15	Σ	Summe
ν	Querkontraktionszahl	∂	Operator für eine partielle Ableitung
ρ	Dichte	Δ	LAPLACE-Operator, Seite 79
σ	Realteil des Eigenwertes λ , Seite 12	∇	Nabla-Operator, Seite 80
σ	Abstrahlgrad, Seite 85	i	imaginäre Einheit
$\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}$	Spannungen, Ableitungen nach der Zeit	\Re	Realteil
σ	Spannungstensor, Seite 45	\Im	Imaginärteil
τ	Schubspannungen	\det	Determinante
$\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$	Verdrehung, Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung	\min	Minimum, Seite 70
Φ	Eigenvektor	lateinische Buchstaben:	
χ	Winkel zwischen Wellengruppen- und Wellenphasengeschwindigkeitsvektor, Seite 50	a	innerer Scheibenradius, Seite 78
ψ	konstante Winkelgeschwindigkeit, Seite 118	a_C	CORIOLISbeschleunigung, Seite 118
ω	Eigenkreisfrequenz, Imaginärteil des komplexen Eigenwertes λ , Seite 12	a_n, b	Koeffizienten gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungen, Seite 5
		a_Z	Zentripetalbeschleunigung, Seite 118
		A	Amplitude, Seite 59
		A	Fläche
		A_D	Dämpfungsarbeit, Seite 69
		\mathbf{A}	Zustandsmatrix, Seite 12

b	äußerer Scheibenradius, Seite 78	f	Frequenz
c	Wellengeschwindigkeit, Seite 47	f_{ch}	charakteristische Frequenz, Seite 73
c	Dämpferkonstante	F	äußere Kraft
\tilde{c}	dimensionslose Dämpfer- konstante, Seite 15	F_c	Dämpferkraft
c_L	(Kompressions)-Wellen- geschwindigkeit in Luft, Seite 86	F_D	Dämpfungskraft, Seite 58
c_P	Kompressionswellen- geschwindigkeit	F_i	Trägheitskraft
c_{PEA}	Kompressionswellen- geschwindigkeit des Dehnstabes, Seite 36	F_k	Federkraft
c_S	Scherwellen- geschwindigkeit	F_N	Reibnormalkraft
c_μ	Steigung der linearen Beziehung $\mu(v_{rel})$, Seite 7	F_R, \mathbf{F}_R	Reibkraft, Reibkraftvektor
c_φ	Drehdämpfer, Seite 62	G	Schubmodul
C_{klmn}	Elastizitätstensor, Seite 44	G', G''	Speicher(schub)modul, Verlust(schub)modul, Seite 68
$C_1 - C_8$	Konstanten	h	Höhe
\tilde{C}	generalisierte Dämpfung der Mode n , Seite 63	h_R	Rippenhöhe (Kühlkanalhöhe), Seite 103
\mathbf{C}	Dämpfungsmatrix	I_\ominus^S	Rotationsträgheit für Drehung um den Schwerpunkt
d	Durchmesser	I_m	modifizierte BESSEL- Funktion der Ordnung m , Seite 79
d	Plattendicke, Seite 79	I_R	Flächenmoment einer Rippe, Seite 100
D	Plattensteifigkeit, Seite 79	\mathbf{I}	Einheitsmatrix, Seite 12
E	Elastizitätsmodul	J_m	BESSEL-Funktion der Ordnung m , Seite 79
\hat{E}	komplexer Elastizitäts- modul, Seite 70	k	Index
E', E''	Speicher(elastizitäts)modul, Verlust(elastizitäts)modul, Seite 69	k	Federkonstante
		\hat{k}	komplexe Federkonstante, Seite 60

$k_\varphi, \hat{k}_\varphi$	Drehfederkonstante, komplexe Drehfederkonstante, Seite 62	P_0	Bezugswert für Schallleistungspegel, Seite 76
\tilde{K}	generalisierte Steifigkeit der Mode n , Seite 63	r	Radius
K_m	MACDONALD-Funktion der Ordnung m , Seite 79	r	Zylinderkoordinate
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix	\mathbf{r}	Ortsvektor, Seite 111
l	Index	$\mathbf{s}, \dot{\mathbf{s}}$	vektorielle Größen einer Störung, Seite 25
l	Länge	S	Sensitivität, Seite 54
L_v	Schallschnellepegel, Seite 76	$\tilde{S}, \tilde{\mathbf{S}}$	normierte Sensitivität, Sensitivitätsmatrix, Seite 54
L_W	Schallleistungspegel, Seite 76	t	Dicke
m	Index	t	Variable der Zeit
m	Masse	t_R	Rippendicke, Seite 102
\tilde{M}	generalisierte Masse der Mode n , Seite 63	t_{RR}	Reibringdicke, Seite 102
\mathbf{M}	Massenmatrix	T	Schwingperiodendauer
n	Index	u	Verschiebung
\mathbf{n}	Normalenvektor, Seite 47	\mathbf{u}	Verschiebungsvektor, Seite 80
N	Index	U	Formänderungsenergie, Seite 73
p	Last	U	Umfang
p	FOURIERkoeffizienten, Seite 31	U_{Φ^n}	Formänderungsenergie der Mode Φ^n , Seite 74
p, q	Koeffizienten des Materialgesetzes, Seite 68	U_m	mittlerer Reibringumfang, Seite 86
\mathbf{p}	Vektor der Partikelbewegung, Seite 47	v_0	Bezugswert für Schallschnellepegel, Seite 76
P	Last, Seite 32	v_B	Geschwindigkeit der bewegten Unterlage, Tangentialgeschwindigkeit an der Reibkontaktstelle
P	Parameter, Seite 54	v_{rel}	Relativgeschwindigkeit, Seite 6
P	Leistung, Seite 85		

\mathbf{v}_{rel}	Vektor der zweidimensionalen Relativgeschwindigkeit, Seite 67	CAE	<i>Computer Aided Engineering</i> , Seite 1
V	Volumen	CEA	<i>Complex Eigenvalue Analysis</i> , Seite 2
V	Vergrößerungsfunktion, Seite 33	DGL	Differentialgleichung
w	Verschiebung, Seite 79	ESPI	elektronische Speckle-Interferometrie, Seite 92
x, \dot{x}, \ddot{x}	Verschiebung, Geschwindigkeit, Beschleunigung	FE,FEM	Finite Elemente, Finite Element Methode, Seite 2
\tilde{x}	bewegte Koordinate, Seite 33	FRF	<i>Frequency Response Function</i> , Seite 53
\dot{x}_{ch}	charakteristische Geschwindigkeit aus Messungen, Seite 73	GJL	Grauguss mit Lamellengraphit, Seite 41
\hat{x}, \bar{x}	komplexe und konjugiert komplexe Verschiebung, Seite 59	GJS	Grauguss mit Kugelgraphit, Seite 42
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$	vektorielle Größen einer Bewegung	IP	<i>in-plane</i> , Seite 77
$\check{\mathbf{x}}, \dot{\check{\mathbf{x}}}$	vektorielle Größen einer gestörten Bewegung, Seite 24	IPR	<i>in-plane</i> , radial, Seite 77
Y_m	NEUMANN-Funktion der Ordnung m , Seite 79	IPT	<i>in-plane</i> , tangential, Seite 77
$\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}$	Zustandsvektoren, Seite 12	IPTS	<i>in-plane</i> , tangential mit Scherbewegung, Seite 83
$\hat{\mathbf{z}}$	komplexer Zustandsvektor, Seite 12	MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i> , Seite 53
Abkürzungen:		MKS	Mehrkörpersimulation, Seite 28
ALE	<i>Arbitrary Lagrangian Eulerian</i> , Seite 31	NC	<i>nodal circle</i> , Seite 78
BEM	<i>Boundary Element Methode</i> , Seite 85	ND	<i>nodal diameter</i> , Seite 78
BSA	Betriebschwinganalyse, Seite 92	NVH	<i>Noise Vibration Harshness</i> , Seite 129
		OP	<i>out-of-plane</i> , Seite 77

Kapitel 1

Einleitung

Das Thema Bremsgeräusche und insbesondere das Teilgebiet des Bremsenquietschens (engl. *Brake Squeal*)¹ hat in der Automobilindustrie eine große Bedeutung. Wenngleich es die Funktion und Sicherheit der Bremse nicht beeinträchtigt, wird die Immission hochfrequenter Schalldrücke als besonders unangenehm empfunden. Diese Geräusche haben in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen, da in modernen Personenkraftwagen durch eine Vielzahl von akustischen Maßnahmen Motor-, Getriebe-, Wind- und Reifengeräusche deutlich reduziert werden konnten. Bei geringen Fahrzeuggeschwindigkeiten, vor allem kurz vor dem Stillstand, können sie besonders in der Nähe des Fahrzeuges, aber auch im Innenraum wahrgenommen werden.

Bremsgeräusche werden nicht nur als unangenehm, sondern oft auch als Mangel empfunden, was bei den Automobilherstellern Gewährleistungskosten verursacht. Vermieden werden kann dieses nur durch einen bedeutenden Aufwand im Serienentwicklungsprozess eines Automobils. Die Sicherstellung einer geräuscharmen Bremse erfolgt derzeit hauptsächlich mittels Prüfstands- und Fahrversuchen in einer Kombination aus Erfahrung und „trial and error“. Um diesen Prozess zu beschleunigen und damit Kosten zu sparen, besteht ein großer Bedarf an Simulationstechniken, mit denen Abhilfemaßnahmen erarbeitet, bewertet und verifiziert sowie Wirkzusammenhänge verstanden werden können.

Die Simulation oder auch das *Computer Aided Engineering* (CAE) von Bremsgeräuschen setzt voraus, dass die Mechanismen, die dazu führen, bekannt sind. Nach dem heutigen Stand der Forschung gibt es keine eindeutige, geschlossene Erklärung dafür. Vielmehr gibt es verschiedene mechanische Modelle, anhand derer eine Erklärung für bestimmte Phänomene gelingt. Sehr viele z.T. unbekannte Effekte beeinflussen das Geräuschverhalten einer Bremse. Aufgrund z.B. extremer Temperaturunterschiede, verschiedener Betriebszustände und tribologischer Vorgänge unterliegen die Parameter aller bisher vorgestellten Modelle großen Schwankungen.

¹Als Abgrenzung zu anderen Bremsgeräuschen (z.B. Rubbeln, Knarzen, Heulen) werden Geräusche oberhalb von 1kHz als Bremsenquietschen bezeichnet.

1.1 Geschichte

Der in diesem Abschnitt enthaltene kurze historische Abriss hat nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Weitere detailliertere Literaturrecherchen zur Geschichte von Bremsgeräuschen findet man z.B. in den Arbeiten von ALLGAIER [3], FLINT [30], oder KINKAID et al. [45].

Erste Untersuchungen zu mechanischen Ursachen von Bremsgeräuschen begannen in den 50er Jahren unter der Annahme, dass der bereits bekannte *Stick-Slip*-Effekt die Ursache sei [30, 29]. BASFORD & TWISS [8] fanden heraus, dass dieser bei hohen Geschwindigkeiten nicht mehr auftritt. Sie machen u.a. ein charakteristisches Reibgesetz als Hauptursache für das Auftreten von Geräuschen aus.

Anfang der 60er Jahre wurde das Bremsenquietschen von SPURR mit einem *Sprag-Slip*-Effekt erklärt [81]. Dieser wurde u.a. durch JARVIS und MILLS anhand von *Pin-on-Disc*-Modellen untersucht [42]. Sie beschreiben u. a., wie durch die Kombination von Doppelmoden einer Scheibe stehende und fortschreitende Wellenmuster erzeugt werden können, welches eine wichtige Grundlage für die Abbildung der rotierenden Scheibe in vielen folgenden Modellen ist [30].

Dieses berücksichtigt NORTH Anfang der 70er Jahre und bringt in seinen Modellen das Bremsenquietschen mit dem Flutterphänomen (engl. *binary flutter*) infolge Reibungskopplung in Verbindung [66]. Zusammen mit dem charakteristischen Reibgesetz bildet das die Grundlage für die heute in der Praxis angewendeten Simulationsverfahren.

Die Forschung auf dem Gebiet der Bremsgeräusche konzentriert sich in den 70er und 80er Jahren jedoch auf die Weiterentwicklung der *Pin-on-Disc*-Modelle [61]. Diese basieren auf der geometrischen Änderung der Kontaktbedingung (*geometrically induced instability* oder *kinematic constrained instability* [25]). Seit den 80er Jahren werden aber auch komplexe Eigenwertanalysen mittels Finite-Element-(FE-) Modellen von Bremsen durchgeführt, welche auf der Reibungskopplung bzw. dem Flutterphänomen beruhen [53].

Seit den 90er Jahren stehen immer leistungsstärkere Computer und FE-Programme zur Verfügung, die es erlauben, Bremsen detailliert mit vielen Freiheitsgraden abzubilden. Dieses hat sich bis in die Gegenwart fortgesetzt. Heute sind kommerzielle FE-Programme erhältlich, die Berechnungen an Modellen mit mehreren Millionen Freiheitsgraden ermöglichen. Solche Analysen können entweder in Form einer nichtlinearen direkten Zeitschrittintegration oder als nichtlineare Berechnung der Bremse mit anschließender komplexer Eigenwertanalyse durchgeführt werden [2, 49, 6].

1.2 Stand der Technik

In der Praxis kommen zur Simulation von Bremsenquietschen fast ausschließlich Simulationsverfahren zur Anwendung, die auf komplexen Eigenwertanalysen (engl. *Complex Eigenvalue Analysis*, CEA) mit FE-Modellen basieren [26]. In der Bremsenentwicklung von Automobilen gibt es verschiedene Anwendungen der FE-Methode (FEM). Neben Temperatur- und Festigkeits- können auch Geräusch-

untersuchungen an einem FE-Modell durchgeführt werden. Der Aufwand für die Modellerstellung verteilt sich damit auf mehrere Anwendungen.

Schwierigkeiten in der Simulation bereitet die Anpassung der Modelle an die realen Verhältnisse. Viele Parameter, insbesondere Materialkenngrößen, sind entweder unbekannt und müssen aufwändig ermittelt bzw. sinnvoll abgeschätzt werden, oder sie gehorchen komplexeren Gesetzen, die in einer linearen Methode vereinfacht werden müssen. Viele Modellparameter sind z.B. temperatur-, frequenz- oder druckabhängig und werden durch nichtlineare Zusammenhänge beschrieben. Durch den Belagverschleiß ist die Kontaktdruckverteilung zwischen Scheibe und Belag nicht konstant. Das in der Praxis vorwiegend verwendete CEA-Verfahren verlangt eine Vereinfachung oder Linearisierung dieser Zusammenhänge.

Inkorrekte Annahmen haben nicht nur ungenaue Ergebnisse zur Folge, sondern können auch zu Prognosen von Instabilitäten führen, die real nicht existieren. Ebenso kann es sein, dass am Prüfstand oder im Fahrversuch beobachtete Quietschprobleme in der Simulation nicht als instabile Lösungen auftreten. Daher war in den letzten Jahren die Ermittlung von Materialkenngrößen ein Schwerpunkt der Forschung [31, 76, 95].

Neben der von z.B. BAJER et al. [5] beschriebenen Reibungsdämpfung wird in jüngeren Publikationen nur in ELVENKEMPER et al. [26] von der Berücksichtigung einer Dämpfung in Form von Materialdämpfung in der komplexen Eigenwertanalyse berichtet. Einige in der Praxis angewendete Maßnahmen zur Geräuschabhilfe wirken aufgrund dämpfender Effekte. Deshalb stellt die Implementierung einer Dämpfung in das Simulationsmodell eine Herausforderung dar.

1.3 Ziel und Inhalt dieser Arbeit

Grund zur Initiierung dieser Arbeit waren in der Serienentwicklung gehäuft im Bereich 8-15 kHz auftretende Bremsen(quietsch)geräusche, die mit konventionellen Maßnahmen nicht zufriedenstellend gelöst werden konnten und für die neuartige Lösungsansätze entwickelt werden mussten. Außer der Untersuchung dieses Problems sollte eruiert werden, inwieweit CEA-Verfahren geeignet sind, die Serienentwicklung eines PKWs im Bereich der Bremsgeräusche zu unterstützen.

In der vorliegenden Arbeit wird die praktische Anwendung des CEA-Verfahrens sowie die mechanischen Grundlagen, auf denen es basiert, erläutert. Dazu werden zunächst im zweiten Kapitel neben weiteren Mechanismen, die ursächlich für reibungsinduzierte Schwingungen sind, die mechanischen Zusammenhänge, die dem CEA-Verfahren zugrunde liegen, anhand von Beispielmotoren erklärt. Da das Bremsenquietschen als Stabilitätsproblem der Bremse aufgefasst werden kann, enthält das dritte Kapitel eine allgemeine Erläuterung des Stabilitätsbegriffes. Außerdem wird dort ein CEA-Stabilitätsanalyseverfahren mit FE-Modellen

beschrieben. Dieses Verfahren beschränkt sich aufgrund verschiedener Annahmen auf das Bremsenquietschen (Bremsgeräusche >1 kHz). Die Untersuchung von niederfrequenten Bremsgeräuschen (<1 kHz, z.B. Rubbeln, Knarzen, Heulen) ist nicht Ziel dieser Arbeit.

Möglichst detaillierte Kenntnisse über das Materialverhalten der Bremsenbauteile sind Voraussetzung für die Simulation. Im vierten Kapitel werden daher die in einer Scheibenbremse typischerweise verwendeten Materialien vorgestellt. Außerdem wird erläutert, wie die Kennwerte je nach Materialgesetz ermittelt werden können.

Eine Abbildung der Dämpfung in dem vorliegenden Simulationsverfahren setzt in besonderem Maße ein vertieftes Verständnis des verwendeten Dämpfungsmodells voraus. Deshalb widmet sich das fünfte Kapitel der Dämpfung. Es enthält eine allgemeine Beschreibung der in der Mechanik bekannten Dämpfungsmodelle. Besonderes Augenmerk wird auf die in einer Bremse wirkenden Dämpfungsmechanismen gelegt, die in einer linearen komplexen Modalanalyse verwendet werden können.

Das eingangs erwähnte, an mehreren PKW-Scheibenbremsen beobachtete, hochfrequente Quietschproblem wird in Kapitel sieben analysiert. Dieses geschieht aufbauend auf Erkenntnissen aus vorangegangenen Untersuchungen anhand von weiteren Messungen und insbesondere CAE-Simulationen. Als Ursache konnte eine bisher in der Literatur wenig beschriebene instabile *in-plane*-Schwingung der Bremsscheibe ausgemacht werden.

In dieser praktischen Anwendung des CEA-Verfahrens können dessen Vorteile und Einschränkungen erläutert werden. Aus den Ergebnissen werden verschiedene Abhilfemaßnahmen abgeleitet und deren mechanische Wirkungsweise erläutert. Im Zuge dieser Untersuchung verwendete Bezeichnungen werden zusammen mit einer Klassifizierung der Moden als Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung für eine Bremsscheibe in Kapitel sechs vorgenommen. Ferner wird dort auf das Abstrahlverhalten dieses Bauteils eingegangen.

Zur Erklärung von in Kapitel sieben beobachteter Diskrepanzen zwischen Simulation und Versuch wird der Einfluss von Zentrifugal- und CORIOLISkräften, welche in dem verwendeten CEA-Verfahren nicht berücksichtigt werden, in Kapitel acht gesondert untersucht.

Kapitel 2

Reibungserregte Schwingungen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Mechanismen erklärt, die zu reibungserregten Schwingungen führen und deren Relevanz hinsichtlich der in einer Bremse auftretenden Effekte diskutiert.

Bei allen beschriebenen „selbsterregten“ Systemen handelt es sich um nicht konservative Systeme, da sie einerseits in der Lage sind, Energie über einen Reibungsmechanismus aufzunehmen und weiterhin, beim Vorhandensein einer Dämpfung, Energie zu dissipieren. Da selbsterregte Schwinger zur Aufnahme von Energie nicht auf einen externen Energieeintrag in Form einer periodischen oder transienten Erregung angewiesen sind, werden diese als autonome Systeme bezeichnet [78]. Man spricht auch von parametererregten Schwingungen, also Schwingungen mit zeitveränderlichen Randbedingungen. Im Falle von reibungserregten Schwingungen erfolgt der Leistungseintrag durch die während der Schwingung variierende Reibkraft.

Viele Schwingungsphänomene können durch gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen (DGL) zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten in der Form

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b \quad (2.1)$$

beschrieben werden. Bei parametererregten Schwingungen sind die Koeffizienten a_n und b nicht konstant, sondern können auch von der Zeit abhängen, was zu selbsterregten Schwingungen führen kann [46]. Reibungserregte Schwingungen entstehen aufgrund einer nicht konstanten Reibkraft, welche in (2.1) einem veränderlichen b entspricht.

Wird die durch die Gleitreibung entstehende Reibkraft über einen konstanten Reibkoeffizienten μ_G beschrieben, ist die Größe der Relativgeschwindigkeit zwischen den Reibungsparen für eine statische Betrachtung nicht relevant. Man spricht dann auch von einem quasi-stationären oder quasi-statischen Ausgangszustand [82].

Weiterhin kann zwischen linearen und nichtlinearen Schwingungen unterschieden werden. Die Nichtlinearität kann durch Reib- oder Materialgesetze oder aber durch geometrische Verhältnisse bedingt sein. Während für die Untersuchung der linearen Schwingungen modale Verfahren uneingeschränkt zur Anwendung kommen können, erfordern nichtlineare Schwingungen, so weit möglich, eine Linearisierung oder eine Berechnung im Zeitbereich.

2.1 Reibschwinger mit einem Freiheitsgrad

Als einfachstes Modell für eine reibungsinduzierte, parametererregte Schwingung dient der in Abbildung 2.1 gezeigte Schwinger mit der Masse m , der Feder k und dem viskosen Dämpfer c , der mit der Normalkraft F auf ein sich mit konstanter Geschwindigkeit v_B bewegendes Band gedrückt wird. Für die Relativgeschwindigkeit zwischen Schwinger und Band gilt:

$$v_{rel} = v_B - \dot{x} \quad (2.2)$$

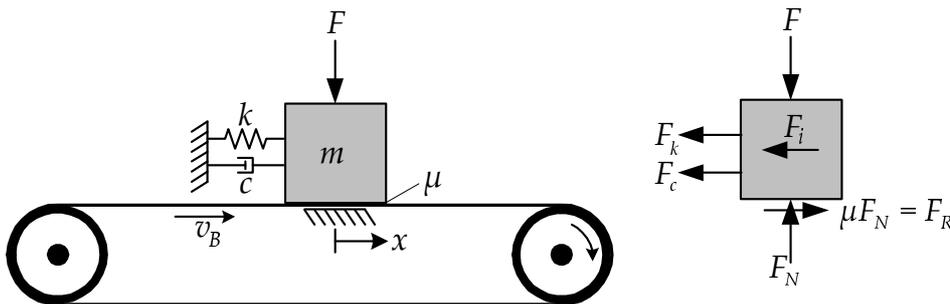


Abbildung 2.1: Reibschwinger mit einem Freiheitsgrad

2.1.1 Reibgesetze

Die auftretende Reibung wird im Folgenden nach den Gesetzen von AMONTON und COULOMB angenommen. Diese besagen, dass sowohl bei Gleit- als auch bei Haftreibung die Reibkraft proportional zu der Normalkraft und unabhängig von der Kontaktfläche ist [20, 90]. Der Proportionalitätsfaktor μ muss dabei nicht konstant sein, sondern kann von weiteren Größen abhängen. Dabei ist insbesondere die Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit des Reibungspaares von Bedeutung. In Abbildung 2.2 ist in der Mitte ein typischer Verlauf des Reibwertes μ über die Relativgeschwindigkeit v_{rel} dargestellt, wie er z.B. bei einem Kontaktpaar Bremsbelag/-scheibe gemessen wird [11]. Der Reibwert steigt mit Annäherung an den Nullpunkt an.

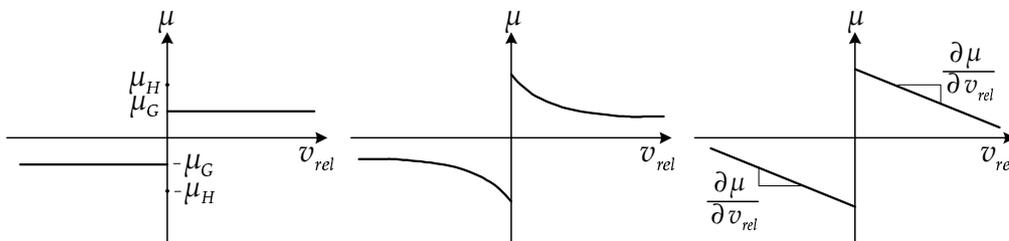


Abbildung 2.2: $\mu(v_{rel})$ -Beziehungen

Wird dieses Verhalten in einer Weise idealisiert, dass nur zwischen

$$v_{rel} < 0, \quad v_{rel} = 0 \quad \text{und} \quad v_{rel} > 0 \quad (2.3)$$

unterschieden wird, so wie in Abbildung 2.2, links dargestellt, wird das Reibgesetz durch zwei Parameter, dem Gleitreibungswert μ_G und dem Haftreibungswert μ_H , beschrieben.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Verlauf zu linearisieren, so wie es in Abbildung 2.2, rechts gezeigt ist. Dabei wird das Reibgesetz durch die Beziehung

$$\mu(v_{rel}) = \begin{cases} +\mu_0 + c_\mu \cdot v_{rel} & \forall v_{rel} > 0 \\ -\mu_0 + c_\mu \cdot v_{rel} & \forall v_{rel} < 0 \end{cases} \quad \text{mit } c_\mu < 0 \quad (2.4)$$

und

$$c_\mu = \frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} \quad (2.5)$$

charakterisiert.

2.1.1.1 *Stick-Slip*

Zur Beschreibung der selbsterregten Schwingung des in Abbildung 2.1 gezeigten Beispiels durch den *Stick-Slip*-Effekt wird das durch Gleit- und Haftreibung idealisierte Reibgesetz aus Abbildung 2.2, links verwendet. Bei der Gleit- oder auch dynamischen Reibung [20] ist die Relativgeschwindigkeit $v_{rel} \neq 0$, wobei die Masse auf der Unterlage gleitet. Die Reibkraft ergibt sich mit dem Gleitreibungswert μ_G zu

$$F_R = \mu_G \cdot F_N \cdot \frac{v_{rel}}{|v_{rel}|}. \quad (2.6)$$

Bei der Haft- oder auch statischen Reibung [20] ist die Relativgeschwindigkeit $v_{rel} \equiv 0$ und die Masse haftet auf der Unterlage. Die Grenzkraft, die maximal über den Reibkontakt übertragen werden kann, wird dabei durch den Haftreibungswert μ_H beschrieben:

$$F_{H,max} = \mu_H \cdot F_N \quad (2.7)$$

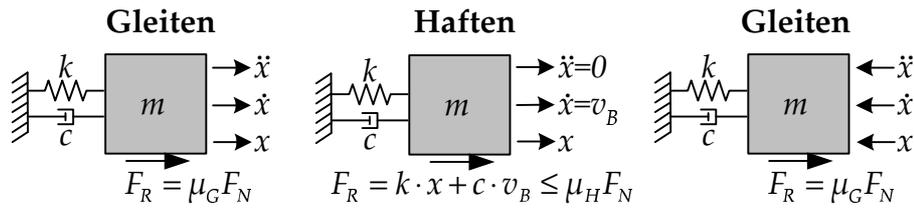
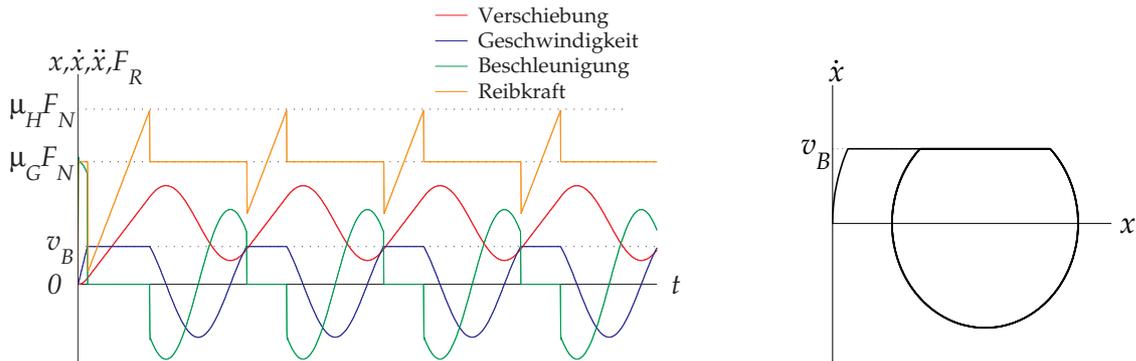
Bewegt sich das Band mit konstanter Geschwindigkeit $v_{rel} = \text{const.}$ gleitet der Reibschwinger zunächst über das Band und wird durch die Reibkraft F_R beschleunigt. Sobald er die Geschwindigkeit des Bandes v_B erreicht hat, bleibt er haften und bewegt sich mit konstanter Bandgeschwindigkeit v_B . Wird die Summe aus Rückstellkraft der Feder und der Dämpferkraft größer als die Haftreibungskraft $F_{H,max}$, geht der Schwinger wieder in eine gleitende Bewegung über, bis er erneut durch die Beschleunigung mit F_R die Bandgeschwindigkeit erreicht.

Dabei gilt für den Gleitzustand

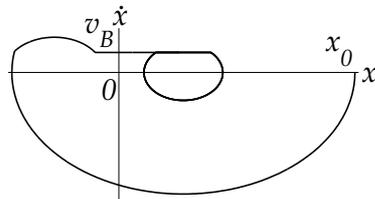
$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = \begin{cases} +\mu_G \cdot F_N & \forall \dot{x} < v_B, \\ -\mu_G \cdot F_N & \forall \dot{x} > v_B \end{cases} \quad (2.8)$$

und für den Haftzustand:

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x} = v_B \quad \text{für} \quad |k \cdot x + c \cdot v_B| \leq \mu_H \cdot F_N \quad (2.9)$$

Abbildung 2.3: Haft- und Gleitzustände einer *Stick-Slip*-SchwingungAbbildung 2.4: Typische *Stick-Slip*-Schwingung

Eine typische *Stick-Slip*-Schwingung ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Der in Gleichung (2.8) beschriebene Fall, in dem die Geschwindigkeit des Schwingers größer der des Bandes ist, kann dann auftreten, wenn z.B. aufgrund einer großen Anfangsauslenkung x_0 soviel Energie im System ist, dass bei $v_{rel} = 0$ die Haftbedingung (2.9) nicht erfüllt ist. Der Reibschwinger wird dann durch die entgegengesetzt wirkende Reibkraft gebremst, bis soviel Energie dissipiert ist, dass die Bandgeschwindigkeit erreicht ist und die Haftbedingung eingehalten werden kann (vgl. Abbildung 2.5).

Abbildung 2.5: Grenzzykel einer *Stick-Slip*-Schwingung mit großer Anfangsauslenkung x_0

Unter Vernachlässigung der Dämpfung lässt sich aus (2.9) mit

$$\dot{x} = \omega_E \cdot x \quad \text{und} \quad \omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.10)$$

eine Grenzgeschwindigkeit $v_{B,max}$ ableiten, bei welcher der Schwinger die Ge-

schwindigkeit der Unterlage nicht mehr erreicht:

$$v_{B,max} = \omega_E \frac{\mu_G F_N}{k} \quad (2.11)$$

Bewegt sich die Unterlage also schneller als $v_{B,max}$, kann der *Stick-Slip*-Effekt nicht mehr auftreten.

Eine Dämpfung des *Stick-Slip*-Schwingers bewirkt eine Reduzierung der Amplitude bzw. des Grenzykels. Die Grenzgeschwindigkeit bei einem gedämpften System ist zusätzlich noch abhängig vom Verhältnis $\frac{\mu_G}{\mu_H}$ [75].

In der Arbeit von RINS DORF [75] findet man eine Parameterstudie, die zeigt, dass eine geringe Systemdämpfung c , eine niedrige Eigenkreisfrequenz ω_E , eine große Differenz $\frac{\mu_G}{\mu_H}$ und eine große Reibnormalkraft F_N das Auftreten des *Stick-Slip*-Effektes begünstigt.

Durch die sich abwechselnden Gleit- und Haftzustände stellt ein *Stick-Slip*-Schwinger eine nichtlineare Schwingung dar, die eine Berechnung im Zeitbereich erfordert.

In der Fachwelt herrscht Einigkeit darüber, dass der *Stick-Slip*-Effekt nicht die Ursache von Bremsenquietschen ist (z.B. [3, 30, 37]). Es findet kein Haften des Belages auf der Bremsscheibe während der Schwingung statt. Dies kann einfach mit der Beziehung (2.11) gezeigt werden. Eine Schwingung, die ein quietschendes Geräusch erzeugt, hat eine Frequenz $f > 1000$ Hz. Mit einer Bremssattelmasse von $m=5$ kg, einem Gleitreibungswert $\mu_G=0,5$ und einer Bremskraft von 1000 N ergibt sich die Grenzgeschwindigkeit

$$v_{B,max} = 1,5 \cdot 10^{-2} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \quad (2.12)$$

welches einer Fahrzeuggeschwindigkeit von weniger als 1 km/h entspricht. Bremsenquietschen tritt jedoch auch bei deutlich höheren Fahrzeuggeschwindigkeiten auf.

An dieser Stelle sei zu bemerken, dass das niederfrequente (<1 kHz) *Bremsenknarzen* durch den *Stick-Slip*-Effekt hervorgerufen wird [11].

2.1.1.2 Negative $\frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}}$ -Beziehung

Ein weiterer Effekt, der zu reibungserregten Schwingungen führt, lässt sich unter Verwendung des idealisierten Reibgesetzes aus Abbildung 2.2, rechts bzw. Gleichung (2.4) herleiten. In einem Bremsvorgang ist eine solche Linearisierung des tatsächlich auftretenden Verlaufes möglich, da für das Verhältnis Schwinggeschwindigkeit zu Scheibengeschwindigkeit

$$\frac{\dot{x}}{v_{rel}} \ll 1 \quad (2.13)$$

gilt.

Die Bewegungsdifferentialgleichung für den Reibschwinger aus Abbildung 2.1 kann unter Annahme des Reibgesetzes (2.4) mit (2.2) und (2.5) als

$$m \cdot \ddot{x} + (c + c_\mu \cdot F_N)\dot{x} + k \cdot x = \begin{cases} (\mu_0 + c_\mu \cdot v_B)F_N & \forall \dot{x} < v_B \\ (-\mu_0 + c_\mu \cdot v_B)F_N & \forall \dot{x} > v_B \end{cases} \quad (2.14)$$

geschrieben werden. An Gleichung (2.14) ist zu erkennen, dass durch ein negatives c_μ der geschwindigkeitsproportionale Teil der DGL negativ werden kann. Selbst bei einer sehr kleinen negativen Steigung kann dieses durch eine große Normalkraft verstärkt werden. Dieser Zustand kann auch als „negative Dämpfung“ aufgefasst werden. Tritt dieser ein, stellt der erste Fall der Gleichung (2.14) eine aufklingende Schwingung dar. Sobald der Schwinger soweit aufgeschwungen ist, dass er die Geschwindigkeit v_B der Unterlage erreicht, wirkt die Reibkraft entgegen der Schwingungsrichtung und das System kann keine weitere Energie mehr aufnehmen. Somit stellt sich auch hier ähnlich wie in Abschnitt 2.1.1.1 ein Grenzykel ein. In Abbildung 2.6 ist eine solche Schwingung dargestellt.

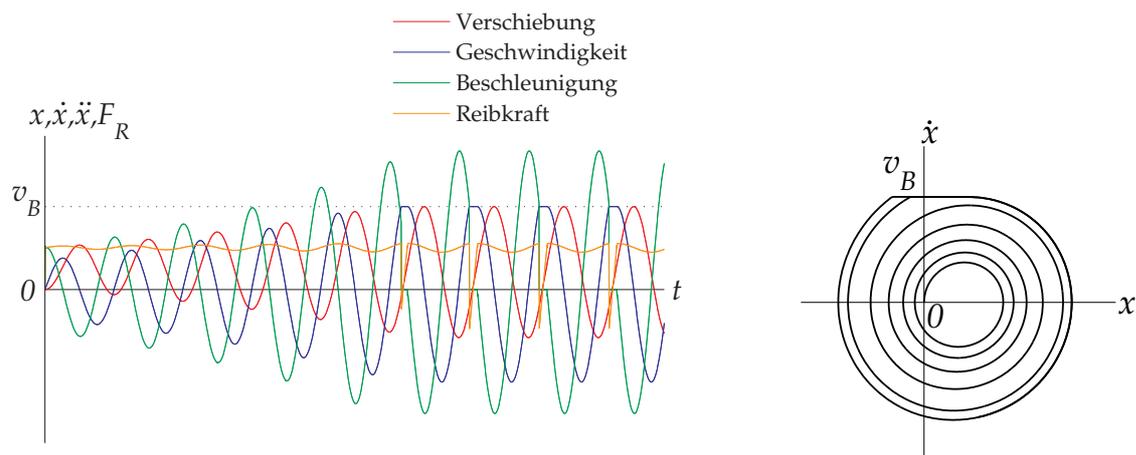


Abbildung 2.6: Schwingung aufgrund fallender Reibkennlinie

Bei dieser Art von parametererregter Schwingung ist ebenfalls die Reibkraft der nicht konstante Parameter. Das Auftreten dieses Effektes sowie die auftretende Frequenz sind unabhängig von der Geschwindigkeit v_B der Unterlage solange der Schwinger diese nicht erreicht.

Durch die Systemdämpfung c wird der Effekt des negativen Dämpfungsanteiles verringert. Es sei darauf hingewiesen, dass bei einer ausreichend großen Normalkraft immer eine „negative Dämpfung“ erreicht werden kann.

Auch diese Schwingung ist nach Erreichen des Grenzykels eine nichtlineare Schwingung, die nur durch eine Analyse im Zeitbereich berechnet werden kann. Bevor der Schwinger die Grenzgeschwindigkeit zum ersten Mal erreicht, handelt es sich um eine lineare, exponentiell aufklingende Schwingung, deren Verlauf durch eine lineare, komplexe Eigenwertanalyse ermittelt werden kann.

In Bezug auf die Relevanz für das Bremsenquietschen ist in Kapitel 7 gezeigt, dass dieser Effekt für das Auftreten einer bestimmten Klasse von instabilen Schwingformen der Bremsscheibe verantwortlich ist.

Es existieren kommerzielle FEM-Programme, die in einer Stabilitätsanalyse eine lineare $\frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}}$ -Beziehung berücksichtigen können [6, 49, 5].

2.2 Reibschwinger mit zwei Freiheitsgraden

Im vorangegangenen Abschnitt wurden anhand eines Einmassenschwingers das Auftreten von parametererregten Schwingungen erklärt. Weiterhin existieren Mechanismen, die zu Instabilitäten führen, welche auf einer Kopplung von mehreren Freiheitsgraden beruhen. Diese können nur durch Mehrmassenschwinger abgebildet werden. Im Folgenden werden mit Zweifreiheitsgradsystemen zwei weitere Mechanismen von reibungserregten Schwingungen erläutert.

2.2.1 Reibungskopplung

Zur Beschreibung des Effektes der Reibungskopplung dient das in Abbildung 2.7 gezeigte Minimalmodell in Form eines Schwingers mit zwei Freiheitsgraden. Wie der Reibschwinger aus Abschnitt 2.1 besteht auch dieser aus einer Masse m , die auf einer bewegten Unterlage mit der Geschwindigkeit v_B reibt. Die Feder k und der viskose Dämpfer c sind um den Winkel θ zur Horizontalen geneigt. Am Reibkontakt ist eine zusätzliche Feder k_v eingefügt.

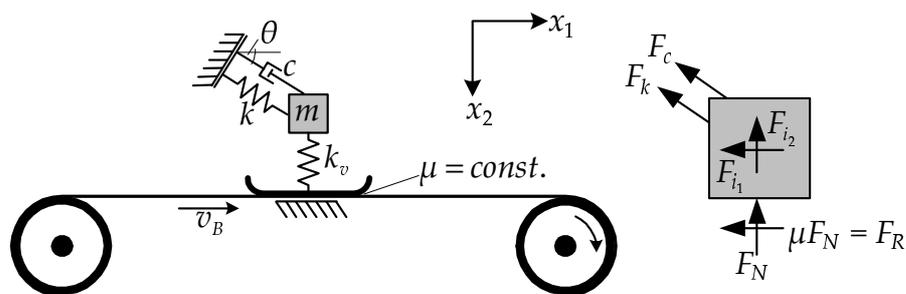


Abbildung 2.7: Reibschwinger mit zwei Freiheitsgraden

2.2.1.1 Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen werden um die quasi-statische Ruhelage aufgestellt. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die Andruckkraft F_N auf die Unterlage immer groß genug ist, dass der Schwinger nicht davon abheben kann und dass die Bandgeschwindigkeit v_B immer größer als die des Schwingers \dot{x} ist; also ein lineares Verhalten vorliegt. Der Verlauf $\mu(v_B)$ wird als konstant angenommen.

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} c_{11} &= c \cdot \cos^2(\theta), & k_{11} &= k \cdot \cos^2(\theta), \\ c_{22} &= c \cdot \sin^2(\theta), & k_{22} &= k \cdot \sin^2(\theta) + k_v, \\ c_{12} = c_{21} &= c \cdot \sin(\theta) \cos(\theta), & k_{12} = k_{21} &= k \cdot \sin(\theta) \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Reibkraft auf der rechten Seite von Gleichung (2.15) kann über den Reibkoeffizienten μ in Abhängigkeit von der Verschiebung der x_2 -Richtung ausgedrückt werden:

$$F_R = \mu F_N = \mu \cdot k_v \cdot x_2 \quad (2.17)$$

Umgeformt erhält man eine homogene Bewegungsgleichung mit unsymmetrischer Steifigkeitsmatrix:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\ddot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ -c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & -k_{12} + \mu k_v \\ -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Durch die schräge Anordnung von Feder und Dämpfer sowie den Zusammenhang zwischen Normalkraft F_N und F_R über die Konstante μ sind die beiden Richtungen x_1 und x_2 durch unsymmetrische Einträge in der Steifigkeitsmatrix gekoppelt. Systeme dieser Art werden auch als aktiv bezeichnet [64].

2.2.1.2 Lösung der Bewegungsgleichung

Dieses Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit $n = 2$ Freiheitsgraden lässt sich mit Hilfe des Zustandsvektors

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

in das Zustandsdifferentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \mathbf{z} \quad (2.20)$$

mit der Zustandsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

überführen [59], wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix darstellt. Durch den Exponentialansatz

$$\mathbf{z}(t) = \hat{\mathbf{z}} e^{\hat{\lambda}t} \quad (2.22)$$

mit dem komplexen Eigenwert²

$$\hat{\lambda} = \sigma \pm \omega i \quad (2.23)$$

erhält man das spezielle Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Die nichttriviale Lösung dieses komplexen Eigenwertproblems der Ordnung $2n$ wird durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \det(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{C}\lambda + \mathbf{K}) \quad (2.25)$$

beschrieben. Die Nullstellen von Gleichung (2.25) stellen die $2n$ Eigenwerte des Zustandssystems aus Gleichung (2.20) dar. Aufgrund des Exponentialansatzes in Gleichung (2.22) stellt ein rein imaginärer Eigenwert λ eine freie, ungedämpfte, harmonische Schwingung dar. Ein rein reeller, positiver Eigenwert entspricht einer exponentiell ansteigenden, ein negativer einer exponentiell abfallenden Bewegung. Eigenwerte mit Real- und Imaginärteil beschreiben je nach Vorzeichen auf- oder abklingende harmonische Schwingungen. Der Sonderfall eines doppelten, rein imaginären Eigenwertes beschreibt eine harmonische, linear ansteigende Schwingung [13].

Aufgrund dieses Zusammenhanges kann die Stabilität eines durch ein Eigenwertproblem beschreibbares, lineares System anhand der Eigenwerte beurteilt werden. Systeme, die Eigenwerte mit positiven Realteilen haben, sind daher instabil (vgl. Kapitel 3).

Das viskos gedämpfte System in Gleichung (2.18) besitzt für $\mu = 0$ symmetrische Matrizen \mathbf{K} und \mathbf{C} und hat entweder rein reelle oder paarweise konjugiert komplex auftretende Eigenwerte, deren Realteile immer negativ sind [64]. Bei $\mu \neq 0$ werden die Matrizen \mathbf{K} und \mathbf{C} unsymmetrisch. Darum sind sowohl positive als auch negative Realteile der Eigenwerte möglich.

2.2.1.3 Modenkopplung

Unter der Kopplung von Moden versteht man die „Vereinigung der Eigenfrequenzen“ bei Variation eines Systemparameters wie z.B. dem Reibwert μ . Das Verhalten der Eigenwerte wird im Folgenden anhand des Modells aus Abbildung 2.7 mit $k/k_v = 0,6$ und $\theta = 30^\circ$ veranschaulicht. Zunächst wird vorausgesetzt, dass das System keine Dämpfung hat ($c = 0$).

Für Reibwerte kleiner μ_{grenz} sind die Realteile beider Eigenwerte des Systems in Gleichung (2.18) gleich 0. Die Bewegung wird durch den Imaginärteil, also die Frequenz einer harmonischen Eigenschwingung, charakterisiert. Beide Frequenzen sind voneinander verschieden.

Steigert man nun den Wert von μ , verändern sich diese Frequenzen und nähern

²Abweichend zu der in dieser Arbeit verwendeten Notation wird die komplexe Größe $\hat{\lambda}$ im Folgenden zur Vereinfachung lediglich mit λ bezeichnet.

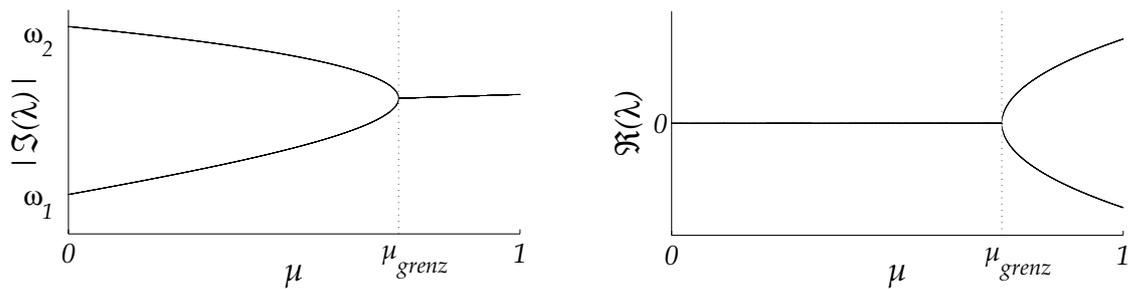


Abbildung 2.8: Modenkopplung (System ohne Dämpfung)

sich einander an (vgl. Abbildung 2.8). Ab einem bestimmten Grenzwert μ_{grenz} vereinigen sich beide Frequenzen; beide Eigenwerte haben den gleichen Imaginärteil. Die Realteile der Eigenwerte sind ab diesem Punkt von Null verschieden und unterscheiden sich nur durch ihr Vorzeichen. Auch beide Eigenmoden $\hat{\Phi}_1$ und $\hat{\Phi}_2$, die jeweils als konjugiert komplexe Paare auftreten, sind bis auf ihr Vorzeichen identisch. Die beiden Lösungen in der Form

$$\mathbf{x}_1(t) = \hat{\Phi}_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{\hat{\Phi}}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_2(t) = \hat{\Phi}_2 e^{\lambda_2 t} + \bar{\hat{\Phi}}_2 e^{\bar{\lambda}_2 t} \quad (2.26)$$

beschreiben zwei gleiche, aber entgegengerichtete Bewegungen (vgl. Abbildung 2.9). Die eine Lösung ist eine stabile, abklingende und die andere eine instabile, aufklingende Bewegung.

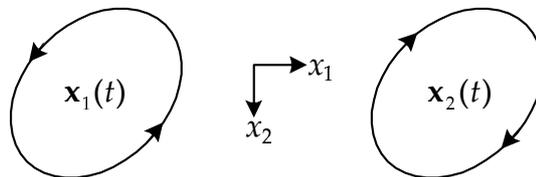


Abbildung 2.9: Bewegungen der stabilen und instabilen Lösungen bei der Modenkopplung

Die Modenkopplung in diesem Beispiel ist außer vom Reibwert μ auch noch vom Winkel θ , also von der geometrischen Kopplung der beiden Richtungen x_1 und x_2 abhängig. Nur in bestimmten Konstellationen dieser Werte kommt es zu einer Modenkopplung (vgl. Abbildung 2.10).

2.2.1.4 Einfluss von Dämpfung

Proportionale Dämpfung

Betrachtet man das System aus Abbildung 2.7 mit einer zusätzlichen viskosen, (steifigkeits-) proportionalen Dämpfung ($\mathbf{C} = \beta \mathbf{K}$, $c = 0$), verändert sich die

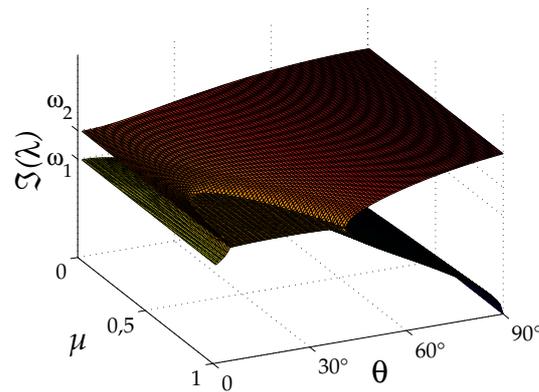
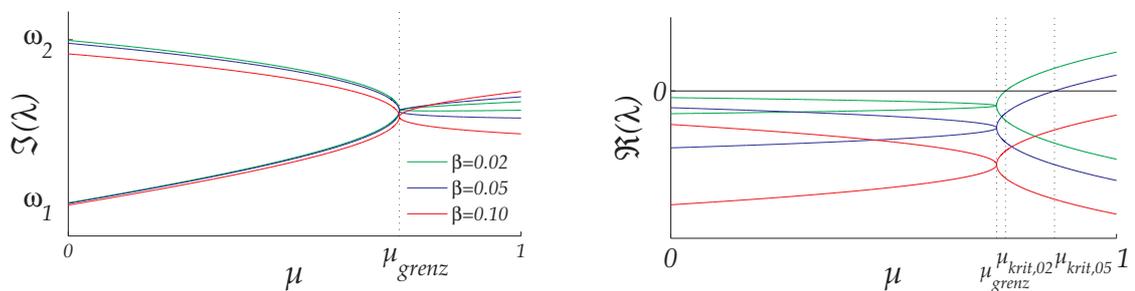
Abbildung 2.10: Modenkopplung abhängig von μ und θ 

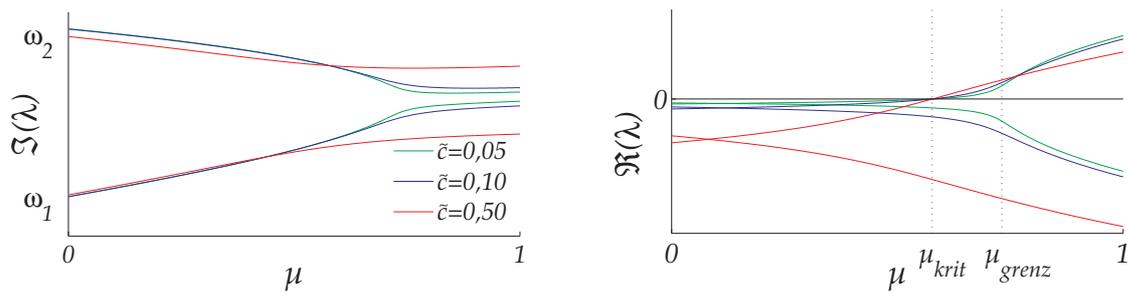
Abbildung 2.11: Einfluss proportionaler Dämpfung auf die Modenkopplung

Kopplungscharakteristik. Wie in Abbildung 2.11 gezeigt, nähern sich die beiden Eigenfrequenzen ebenfalls mit steigendem μ einander an. Der Reibbeiwert μ_{grenz} , bei dem sich die Eigenfrequenzen treffen, verändert sich gegenüber dem ungedämpften Fall nicht. Sie vereinigen sich jedoch nicht, sondern haben immer unterschiedliche Werte. Betrachtet man die Anwachsrate σ bzw. den Realteil des Eigenwertes, so steigt er, wie auch im ungedämpften Fall, oberhalb von μ_{grenz} stark an. Allerdings ist je nach Dämpfung ein größeres μ_{krit} erforderlich, bevor eine Mode instabil wird. Bei ausreichend großer Dämpfung tritt unabhängig vom Reibwert keine Instabilität auf.

Die beiden komplexen Eigenmoden sind ebenfalls voneinander verschieden. Das System hat also immer zwei voneinander verschiedene Lösungen, wobei es oberhalb von μ_{grenz} zu positiven Anwachsrate und damit zu instabilem Verhalten kommen kann.

Diskrete Dämpfung

Wird eine nichtproportionale Dämpfung gewählt, indem lediglich der viskose Dämpfer c aus Abbildung 2.7 berücksichtigt wird, ändert sich das Systemverhalten. Es gibt keinen Wert von μ , bei dem beide Frequenzen gleich sind. Hingegen existiert ein gemeinsames μ_{krit} , bei dem für alle Werte von $\tilde{c} = c\sqrt{km}$ der Übergang von stabilem zu instabilem Verhalten stattfindet. Dieses μ_{krit} ist kleiner als das μ_{grenz} aus dem ungedämpften Fall. Das bedeutet zum Einen, dass

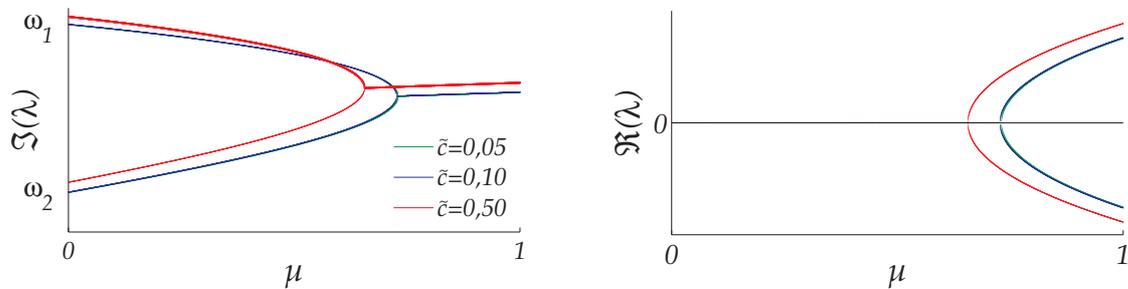
Abbildung 2.12: Einfluss des Dämpfers c auf die Modenkopplung

eine Dämpfung ausschließlich mit dem Dämpfer c keinen positiven Beitrag zum Stabilitätsverhalten des Systems liefert. Es tritt sogar das Gegenteil auf, da sich der instabile Bereich vergrößert. Zum Anderen ist der Übergang vom stabilen zum instabilen Bereich unabhängig von der Größe c .

Dieses Phänomen ist dadurch zu erklären, dass durch den Dämpfer c die Kopplung der Freiheitsgrade verstärkt wird. Wird anstelle des Dämpfers c und der Feder k nur eine (reelle) Feder mit der Steifigkeit

$$\tilde{k} = |k + \tilde{c} i \omega| \quad (2.27)$$

verwendet, ergibt sich das Ergebnis aus Abbildung 2.13. Mit zunehmender Dämpfung verändert sich die Kopplung der Freiheitsgrade und damit der instabile Bereich. Anders ausgedrückt entspricht dieses einer Variation des Verhältnisses k/k_v .

Abbildung 2.13: Einfluss des Dämpfers c mit der modifizierten Feder \tilde{k} auf die Modenkopplung

Nun bleibt zu klären, warum in Abbildung 2.12, rechts jeweils eine der beiden Lösungen für einen Wert μ_{krit} identisch und damit unabhängig von der Dämpferkonstante c ist. Eine Erklärung findet sich durch eine genauere Betrachtung der in diesem Fall auftretenden Mode

$$\Phi_{\mu_{krit}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Diese ist wie auch der zugehörige Eigenwert rein reell und beschreibt nicht wie in Abbildung 2.9 eine „kreisende“, sondern eine linienförmige Bewegung. Diese

Bewegung ist so gerichtet, dass der Dämpfer c und die Feder k in Abbildung 2.7 nicht daran beteiligt sind bzw. die Bewegungskomponenten in dem Verhältnis

$$\frac{\Phi^{\mu_{krit},1}}{\Phi^{\mu_{krit},2}} = \tan(\theta) \quad (2.29)$$

stehen (vgl. Abbildung 2.14).

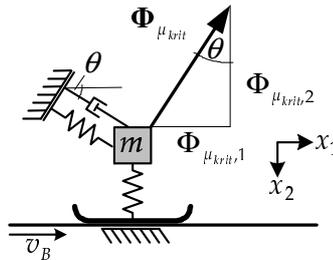


Abbildung 2.14: Auftretende reelle Eigenform bei $\mu = \mu_{krit}$

Die Größe des stabilen bzw. instabilen Bereiches ist somit abhängig vom Anstellwinkel θ von Feder und Dämpfer aus Abbildung 2.14. Abbildung 2.15 zeigt die Abhängigkeit des Reibwertes μ_{krit} vom Winkel θ .

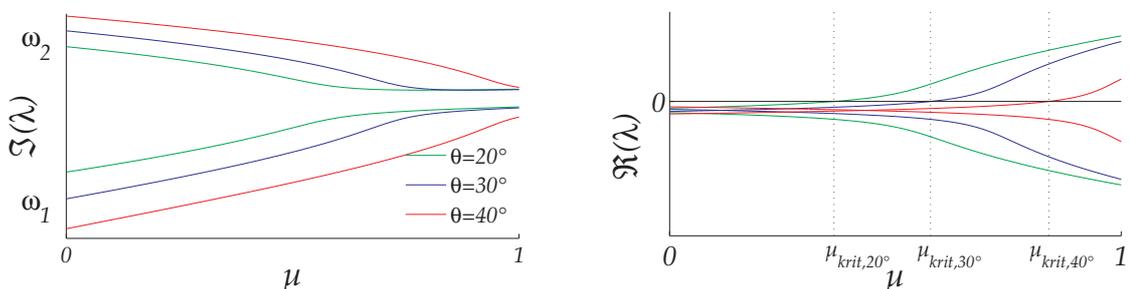


Abbildung 2.15: Einfluss des Winkels θ auf die Modenkopplung

Das Beispiel zur Modenkopplung mit Dämpfung verdeutlicht, dass bei einem Reibschwinger das Einbringen eines diskreten Dämpfers durch eine Verstärkung der Kopplung der Freiheitsgrade das Stabilitätsverhalten nicht unbedingt verbessert. Unter bestimmten Voraussetzungen kann dies sogar zu instabilem Verhalten führen. Dieses wird in HOFFMANN & GAUL [38] an einem ähnlichen Modell gezeigt. Auch MOTTERSHEAD & CHAN [62] machen analoge Beobachtungen.

2.2.1.5 Energiebetrachtung

Auch der zuvor beschriebene Effekt kann als parametererregte Schwingung aufgefasst werden, mit der Reibkraft als ursächlichem Parameter. Die im vorangegangenen Abschnitt gegebene Erklärung für das Auftreten der Instabilität ist

rein mathematischer Natur. Eine andere, etwas anschaulichere Erklärung gelingt über eine Arbeitsbetrachtung einer Bewegung in einem nichtkonservativen Kraftfeld [39]. Das Modell in Abbildung 2.16 zeigt einen Bremsbelag in Form eines elastischen Materials, das mit einer Kraft F auf eine bewegte Unterlage gedrückt wird, welche die rotierende Bremsscheibe darstellt. Soll nun eine Bewegung von Punkt A nach Punkt B ausgeführt werden, besteht ein Unterschied zwischen den beiden dargestellten Pfaden. Wird das Material zunächst auf die bewegte Unterlage gedrückt und dann nach links verschoben, ist aufgrund der Reibkraft eine größere Arbeit aufzuwenden, als wenn das Material erst nach links bewegt und dann auf die Unterlage gedrückt wird. Diese Betrachtung kann auch auf das Modell in Abbildung 2.7 angewendet werden. Hat das System eine kreisförmige Bewegung in dieser Form als Eigenlösung, kann eine Schwingung in jedem Zykel Energie aufnehmen. Einer entgegengesetzten Kreisbewegung wird Energie entzogen.

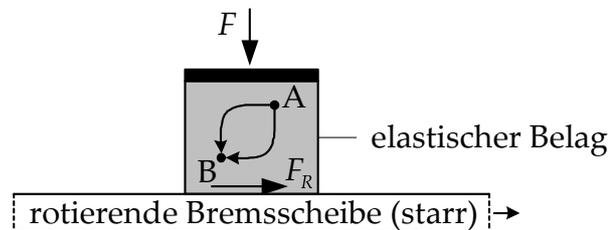


Abbildung 2.16: Nichtkonservative Reibkraft [39]

An dieser Stelle sei auf die Arbeit von ALLGAIER [3] verwiesen, in der anhand eines zu Abbildung 2.7 ähnlichen Modells sehr anschaulich das auf die bewegte Masse wirkende Kraftfeld für verschiedene Zustände dargestellt ist. Mittels Zeitbereichsberechnungen wird u.a. auch der Grenzfall (μ_{grenz}), bei dem sich beide Eigenwerte koppeln, aber noch keinen Realteil aufweisen, untersucht.

Für das Bremsenquietschen ist der Effekt der Reibungskopplung die wesentliche Ursache [39, 30]. Er ist Grundlage für das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Simulationsverfahren und kann in verschiedenen kommerziellen FE-Programmen (z.B. NASTRAN, ABAQUS, ANSYS) abgebildet werden.

2.2.2 Follower-Forces

Mit *Follower-Forces* werden Kräfte auf einer Struktur bezeichnet, deren Richtungen sich ändern, indem sie der verformten Struktur „folgen“ [52]. Im Falle eines Reibkontaktes stellt die Reib- bzw. die Normalkraft eine solche *Follower-Force* dar. In Abbildung 2.17 sind links Normal- und Reibkraft für einen Reibkontakt im unverformten Zustand dargestellt. Rechts ist der Fall einer biegedeformierten Bremsscheibe dargestellt. Die tangential auf der Scheibenoberfläche ausgerichtete Reibkraft F_R wird durch die normal auf der Scheibenoberfläche wirkende Komponente der Kraft F_N erzeugt. Durch eine Aufteilung der Reibkraft in

horizontale (Scheibendrehrichtung) und vertikale Anteile entsteht eine vertikale Komponente, die eine translatorische Bewegung hervorruft. Rotatorische (Biege-) Freiheitsgrade und translatorische Freiheitsgrade normal zur Scheibenebene sind somit gekoppelt.

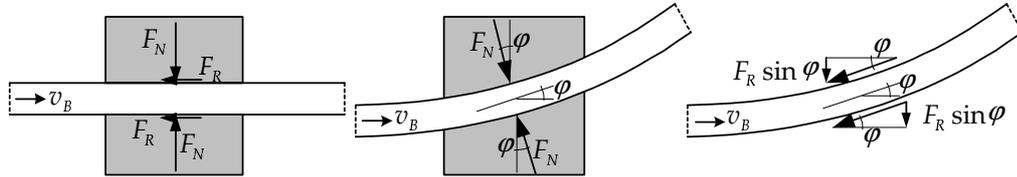


Abbildung 2.17: *Follower-Forces* an einem Reibkontakt

Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 2.18 ein Modell mit zwei Freiheitsgraden φ und x dargestellt. Ein drehbar gelagerter Stab (Länge l , Masse m , Rotationsträgheit bezüglich des Schwerpunktes I_{Θ}^S) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v_B in horizontaler Richtung. Über Reibkontakte wirken die vertikalen Federn k_1 , die durch eine Vorspannung eine Kontaktkraft F_N erzeugen.

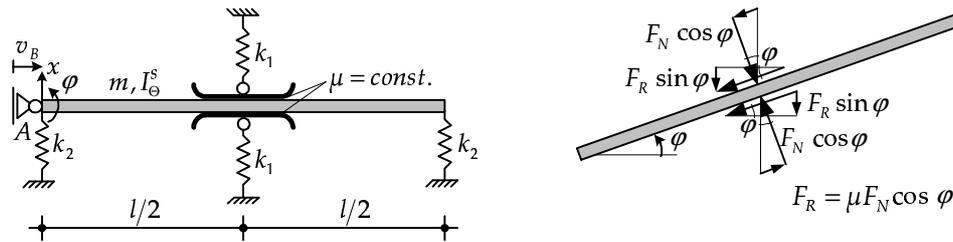


Abbildung 2.18: *Follower-Force-Modell* mit zwei Freiheitsgraden

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2F_R \sin \varphi \\ F_R l \sin \varphi \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_F}, \quad (2.30)$$

mit

$$\begin{aligned} m_{11} &= m, & k_{11} &= 2(k_1 + k_2), \\ m_{22} &= I_{\Theta}^S + m \frac{l^2}{4}, & k_{22} &= \left(\frac{k_1}{2} + k_2 \right) l^2, \\ m_{12} &= m_{21} = m \frac{l}{2}, & k_{12} &= k_{21} = (k_1 + k_2) l. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Geht man von kleinen Verformungen aus, kann der inhomogene Teil in (2.30) linearisiert und die *Follower-Forces* wie folgt in die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} integriert werden:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} - 2\mu F_N \\ k_{21} & k_{22} - \mu F_N l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

Dadurch wird die Matrix \mathbf{K} unsymmetrisch und analog zu dem Beispiel in Abschnitt 2.2.1 können instabile Lösungen für bestimmte Parameterkombinationen existieren.

Durch die erst bei einer geometrischen Verformung auftretende Kopplung ist auch dieser Effekt nichtlinear. Er kann jedoch, wie gezeigt, für kleine Deformationen linearisiert und somit durch eine komplexe Modalanalyse berechnet werden.

Im Falle instabiler Lösungen wird der damit verbundene Effekt auch als Flutter- (engl. *Flutter*-) Phänomen bezeichnet und wurde erstmals in Form von Tragflächenschwingungen an Flugzeugen untersucht [85, 86]. Er kann aber auch z.B. bei Brückenkonstruktionen auftreten [71].

MOTTERSHEAD & CHAN [62] untersuchen das Instabilitätsverhalten einer Scheibe mit Reibkontakt mit einer Kopplung durch *Follower-Forces*. OUYANG et al. [69] kombinieren dieses mit einem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz (vgl. Abschnitt 2.1.1.2). In Bezug auf das Bremsenquietschen zeigen die Untersuchungen von HULTÉN [39] und FLINT [30], dass *Follower-Forces* nur einen sehr geringen Beitrag zu den an Bremsen auftretenden Instabilitäten haben.

2.3 Sprag-Slip

Der Effekt des *Srag-Slips*, auch Selbsthemmung oder *Kinematic Constraint Instability* genannt [3], beschreibt das „Verkeilen“ eines Reibungspaares und ist in einem einfachen Modell nach SPURR [81] in Abbildung 2.19, links dargestellt [45]. Ein gelenkig gelagerter, starrer Stab wird mit der Kraft F auf einen sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegendem (starr) Untergrund gedrückt. Durch Reibung entsteht eine horizontale Reibkraft F_R , die den Stab zusammen mit der Reibnormalkraft F_N zwischen der oberen Lagerung und dem Untergrund „verkeilen“ kann. Der Zusammenhang zwischen Reibwert μ , Anstellwinkel θ , An-

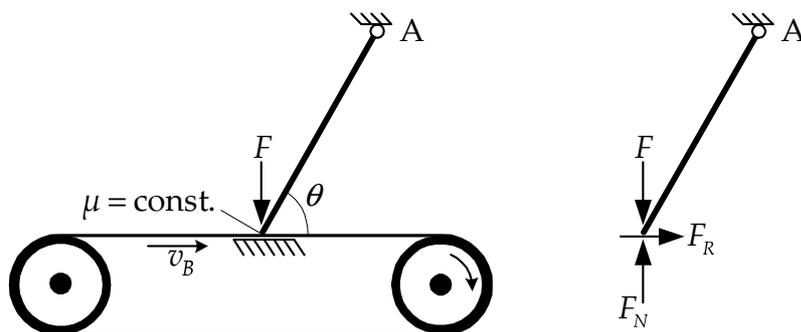


Abbildung 2.19: *Srag-Slip*-Mechanismus nach SPURR [81]

druckkraft F , Reibnormalkraft F_N und Reibkraft F_R wird über das Momentengleichgewicht um den Lagerungspunkt A ermittelt. Mit

$$F_N = \frac{F_R}{\mu} \quad (2.33)$$

folgt für Reib- und Reibnormalkraft:

$$F_R = \frac{\mu F}{1 - \mu \tan(\theta)} \quad F_N = \frac{F}{1 - \mu \tan(\theta)} \quad (2.34)$$

Erreicht der Anstellwinkel den Wert

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{\mu}\right) \quad (2.35)$$

werden die Nenner in (2.34) zu Null und damit Reib-, Reibnormal- und Stabkraft unendlich groß; eine Bewegung des Untergrundes ist nicht mehr möglich.

Bevor dieses eintritt, werden sich die geometrischen Bedingungen durch tatsächlich auftretende elastische Verformungen des Stabes oder der Lagerung ändern. Dadurch wird ein Verkeilen verhindert. Dieses wird beispielsweise von POPP et. al. [73] anhand des in Abbildung 2.20 dargestellten Modells gezeigt. Mit den beiden Freiheitsgraden x und φ wird insbesondere der Fall abgebildet, bei dem sich der Stab von der bewegenden Unterlage abhebt. POPP et. al. zeigen, dass eine nichtlineare, oszillierende Bewegung entstehen kann, bei der der Stab entweder auf der Unterlage haftet oder sich davon abhebt.

Aufgrund der beim Abheben entstehenden nichtlinearen Zusammenhänge kann auch diese Schwingung ausschließlich im Zeitbereich berechnet werden.

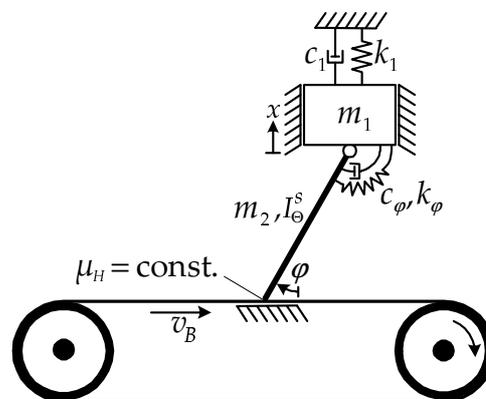


Abbildung 2.20: Sprag-Slip-Modell nach POPP et. al. [73]

Da solche geometrischen Verhältnisse in PKW Bremsen nicht vorliegen, ist ein Verkeilen als Ursache für Bremsenquietschen auszuschließen [3, 39]. Die Anstellwinkel sind in der Regel $>90^\circ$, wodurch diese Form geometrischer Instabilität nicht entstehen kann.

Kapitel 3

Stabilitätsanalyse

Dieses Kapitel behandelt zunächst die allgemeine Stabilitätsbetrachtung in der Mechanik und deren mögliche Verfahren. Im zweiten Teil dieses Kapitels wird auf die Stabilitätsanalyse von den heute üblicherweise in PKW zum Einsatz kommenden Scheibenbremsen eingegangen. Es wird ein Verfahren beschrieben, welches im Rahmen dieser Arbeit für die Stabilitätsuntersuchungen anhand von FE-Modellen angewendet wird und in der Praxis dem Stand der Technik entspricht [26].

3.1 Der Stabilitätsbegriff

Ganz allgemein bezeichnet man ein System als stabil, wenn es dazu neigt, seinen momentanen Zustand beizubehalten, auch wenn Störungen von außen einwirken. Der Stabilitätsbegriff kann jedoch nicht allgemein gültig definiert werden, da er oft von einer speziellen Problemstellung abhängt und sich im Laufe der Geschichte ständig geändert hat. Eine umfangreichere Definition sowie einen historischen Abriss findet man in LEIPHOLZ [51].

Das Bremsenquietschen kann als dynamischer Stabilitätsverlust der Bremse aufgefasst werden. Eine Störung, die als immer vorhanden angenommen wird, führt zu einem Aufschwingen der Bremse in einer Eigenlösung. Durch nichtlineare Effekte erreichen diese Schwingungen irgendwann einen Grenzykel. Diese können z.B. große Verformungen nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Beziehungen und/oder nichtlineare geometrische Verhältnisse sein [47]. Vor Erreichen dieses Zustandes können durch die Schallemission bereits signifikante Schalldrücke entstehen.

3.1.1 Stabilitätskriterien in der Mechanik

Die in der Elastomechanik gebräuchlichen Stabilitätskriterien können in drei Bereiche eingeteilt werden [50, 51]:

- Bei dem statischen oder auch geometrischen Stabilitätskriterium wird die kleinste Last gesucht, unter der neben der ursprünglichen (trivialen) eine

weitere Gleichgewichtslage des Systems existiert. Beispiele für die Anwendung des geometrischen Stabilitätskriteriums sind Knick-, Kipp- und Beul-Probleme [70]. Die Bewegung selbst wird nicht betrachtet. Trägheits- und Dämpfungskräfte bleiben unberücksichtigt.

- Nach dem energetischen Stabilitätskriterium ist ein System dann stabil, wenn das Integral der potentiellen Energie positiv definit ist. Auch bei diesem Kriterium bleibt der Verlauf der Bewegung des Systems unberücksichtigt.
- Beim kinetischen Stabilitätskriterium hingegen wird der Bewegungsverlauf unter dem Einfluss von Störungen betrachtet. Demnach ist ein System stabil, wenn sein Bewegungsverlauf durch eine beliebig große Störung lediglich um einen endlichen Betrag von seinem ursprünglichen (ungestörten) Verlauf abweicht. Dieses Stabilitätskriterium, auf welches im Folgenden näher eingegangen wird, eignet sich in spezieller Form zur Untersuchung des durch Stabilitätsverlust verursachten Bremsenquietschens.

Weiterhin ist noch der Ausdruck „Grad der Stabilität“ zu erwähnen [51]. Hierbei handelt es sich um ein Maß, welches das Bestreben der gestörten Bewegung in ihren ungestörten Verlauf zurückzukehren, beschreibt. Je größer der Grad der Stabilität, desto schneller kehrt eine gestörte Bewegung wieder in ihren ungestörten Bewegungsverlauf zurück.

3.1.2 LJAPUNOW-Stabilität

Das kinetische Stabilitätskriterium geht auf A.M. LJAPUNOW zurück, der in seiner Dissertation 1892 *Das allgemeine Problem der Stabilität einer Bewegung* [54] erstmalig ein allgemeines mathematisches Kriterium mit Lösungsmethoden veröffentlichte. Das vorgestellte Kriterium ist die Grundlage einer Vielzahl von Erweiterungen und Anwendungen der kinetischen Stabilitätstheorie [10, 55].

Für eine Bewegung, die auf ein System von Differentialgleichungen in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

zurückgeführt werden kann und dessen ungestörte Bewegung durch $\mathbf{x}(t)$ mit dem Anfangswert $\mathbf{x}(t_0)$ beschrieben wird, sei $\check{\mathbf{x}}(t)$ der gestörte Bewegungsverlauf mit dem Anfangswert $\check{\mathbf{x}}(t_0)$. Stabilität im Sinne LJAPUNOW liegt vor, wenn für eine Störung des Anfangszustandes

$$|\mathbf{x}(t_0) - \check{\mathbf{x}}(t_0)| \leq \eta(\varepsilon) \quad (3.2)$$

gilt und die Störung der daraus resultierenden Bewegung für alle $t > t_0$

$$|\mathbf{x}(t) - \check{\mathbf{x}}(t)| < \varepsilon \quad (3.3)$$

ist. Soll also die aus einer Störung der Anfangsbedingungen entstehende gestörte Bewegung maximal um den Betrag ε vom Verlauf der ungestörten abweichen, muss es einen beliebig kleinen, von ε abhängigen Betrag η geben, um das die Anfangslage höchstens gestört werden darf. Lässt sich so ein $\eta(\varepsilon)$ nicht angeben, ist das System instabil.

Wenn zusätzlich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \check{\mathbf{x}}(t)| = 0 \quad (3.4)$$

gilt, die gestörte Bewegung also nach einer endlichen Zeit wieder in ihren ungestörten Verlauf übergeht, spricht man von asymptotischer Stabilität. Eine Bewegung, die stabil aber nicht asymptotisch stabil ist, wird auch grenz- oder schwach stabil genannt.

Für die Untersuchung einer Ruhelage hinsichtlich Stabilität ist es sinnvoll, eine partikuläre Lösung des DGL-Systems (3.1) als ungestörten Zustand anzunehmen. Damit gilt:

$$\dot{\check{\mathbf{x}}} = \mathbf{X}(\check{\mathbf{x}}, t) \quad (3.5)$$

Die Bewegungsgleichungen der Störung erhalten mit der Transformation

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}(t) - \check{\mathbf{x}}(t) \quad (3.6)$$

die Form

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{X}(\mathbf{s} + \check{\mathbf{x}}, t) - \mathbf{X}(\check{\mathbf{x}}, t). \quad (3.7)$$

Die triviale Lösung dieses DGL-Systems entspricht der ungestörten Bewegung. Die Stabilitätsbedingungen (3.2) bis (3.4) lauten dann

$$|\mathbf{s}(t_0)| \leq \eta(\varepsilon) \quad (3.8)$$

und für alle $t > t_0$

$$|\mathbf{s}(t)| < \varepsilon \quad (3.9)$$

bzw. im Falle asymptotischer Stabilität

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{s}(t)| = 0. \quad (3.10)$$

Wird für den ungestörten Zustand die statische Ruhelage angenommen ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$), kann das DGL-System (3.1) direkt zur Stabilitätsuntersuchung mittels der Beziehungen (3.8) bis (3.10) hergenommen werden und es gilt

$$\mathbf{s}(t) \equiv \check{\mathbf{x}}(t). \quad (3.11)$$

Um über die Stabilität des gestörten Zustandes etwas aussagen zu können, ist es notwendig, den zeitlichen Verlauf der daraus resultierenden Bewegung zu kennen. Ist dieser bekannt, kann die so genannte erste Methode nach LJAPUNOW angewendet werden und die Stabilität unmittelbar untersucht werden. Dieses ist allerdings bei vielen Problemstellungen in der Mechanik nicht der Fall. Dazu hat LJAPUNOW die zweite oder direkte Methode entwickelt. Darin kann durch den

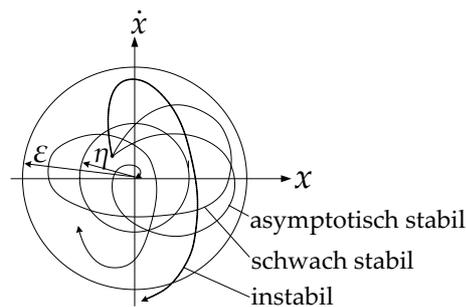


Abbildung 3.1: Stabilität einer gestörten Ruhelage [7]

Nachweis der Existenz von so genannten LJAPUNOW-Funktionen die Stabilität einer Ruhelage nachgewiesen werden. Alle Anfangsbedingungen, die im Gebiet dieser LJAPUNOW-Funktion definiert sind, stellen stabile Lösungen dar. Diese Methode ist beispielsweise in LASALLE & LEFSCHETZ [50] beschrieben.

3.2 Stabilitätsanalyse von Bremsen

Zur Übertragung des Stabilitätsbegriffes auf eine Bremse wird zunächst das Beispiel aus Abschnitt 2.2.1 herangezogen. Die dort aufgestellten Bewegungsgleichungen stellen ein System von linearen, gekoppelten Differentialgleichungen dar, welche durch eine (komplexe) modale Transformation entkoppelt und gelöst werden können. Somit kommt für eine Stabilitätsbetrachtung die erste Methode nach LJAPUNOW zur Anwendung, da der zeitliche Verlauf der Lösung bekannt ist. Die ungestörte Bewegung entspricht darin der quasi-statischen Ruhelage des Systems und es gilt (3.11).

Diese Lösung des Gleichungssystem besteht aus komplexen Eigenwerten und Eigenvektoren. Diese können grundsätzlich drei verschiedene Formen annehmen.³

1. Alle Eigenwerte sind rein imaginär:

Bei einer beliebigen Störung reagiert das System mit einer harmonischen Schwingung. Es liegt Grenzstabilität vor. Dieser Fall tritt nur auf, wenn keine Systemdämpfung berücksichtigt wird. Das System ist grenzstabil.

2. Es existieren nur komplexe Eigenwerte mit negativen Realteilen und/oder rein reelle (negative) Eigenwerte:

Dieses ist immer dann der Fall, wenn Dämpfung berücksichtigt wird. Störungen klingen in Form von harmonischen Schwingungen ab oder gehen direkt in ihren Ausgangszustand zurück (überkritische Dämpfung). Das System ist asymptotisch stabil.

³Der in der Praxis nicht vorkommende Fall des Auftretens von doppelten Eigenwerten (vgl. Abschnitt 2.2.1.2) ist hier ausgenommen.

3. Es existieren komplexe Eigenwerte mit positiven Realteilen:

In diesem Fall liegen Schwingungen mit exponentiell aufklingender Amplitude vor. Das System ist instabil.

Der allgemeine Stabilitätsbegriff nach LJAPUNOW bezeichnet eine gestörte Bewegung, die eine Abweichung um einen endlichen Betrag ε von der ungestörten Bewegung aufweist, als stabil. Streng genommen ist das bei einer Bremse immer gegeben, da irgendwann ein Grenzykel erreicht wird, es also einen endlichen Wert ε gibt. Daher muss im Sinne LJAPUNOWS asymptotische Stabilität (3.10) gefordert werden.

Der Realteil des Eigenwertes ist ein Maß für den Grad der Stabilität (vgl. Abschnitt 3.1.1). Aufgrund des für die Lösung der Bewegungsgleichungen angewandten Exponentialansatzes (2.22) gilt im Falle von Stabilität ($\sigma < 0$); je kleiner (negativer) σ ist, desto schneller fällt eine Schwingung, verursacht durch eine Störung, exponentiell in die ungestörte Lage zurück. Daraus folgt unmittelbar, dass im Falle von Instabilität ($\sigma > 0$) der Grad der Stabilität negativ ist und damit den exponentiellen Anstieg einer aus einer Störung resultierenden Schwingung beschreibt. Dieses kann auch als Grad der Instabilität aufgefasst werden.

Außer der Eigenwerte erhält man durch eine lineare, komplexe Eigenwertanalyse auch die Eigenformen als Ergebnis. Diese entsprechen im instabilen Fall den auftretenden Schwingformen. Das hier zugrunde liegende lineare Verfahren erfordert eine Linearisierung aller Zusammenhänge, was z.B. nicht das Abbilden der Kontaktmechanismen ermöglicht.

Alternativ ist es möglich, den zeitlichen Verlauf der Bewegung durch eine direkte Zeitschrittintegration zu ermitteln. Dabei können auch nichtlineare Effekte, insbesondere Kontaktbedingungen, berücksichtigt werden. Das Ergebnis der Berechnung im Zeitbereich sind die zeitlichen Verläufe der Bewegungsgrößen (Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung). Diese müssen in nachgeschalteten Rechenschritten weiterverarbeitet werden, um Informationen über die auftretenden Frequenzen, Schwingformen und Instabilitätsgrade zu erhalten. Ein Nachteil dabei ist der hohe numerische Rechenaufwand bei einer großen Anzahl von Freiheitsgraden.

Stabilitätsbetrachtungen an Bremsen werden in der Praxis überwiegend durch eine komplexe Eigenwertanalyse durchgeführt. In ABUBAKAR & OUYANG [1] und ABUBAKAR et al. [2] werden sowohl komplexe Eigenwertanalysen als auch direkte Zeitbereichsintegrationen an FE-Modellen von Bremsen durchgeführt und deren Ergebnisse gegenübergestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Schwimmsattel-Scheibenbremsen betrachtet. Auch andere Bremsenkonzepte wie z.B. Festsattel-Scheibenbremsen oder Trommelbremsen können analog dazu in ihrem Stabilitätsverhalten bewertet werden.

3.2.1 Mechanische Modelle

Es existieren verschiedene Ansätze zur Modellierung von Scheibenbremsen. Obligatorisch bei der Modellierung zur Stabilitätsuntersuchung ist die Abbildung des Reibkontaktes bzw. Reibgesetzes wie er in den Minimalmodellen aus Kapitel 2 beschrieben ist.

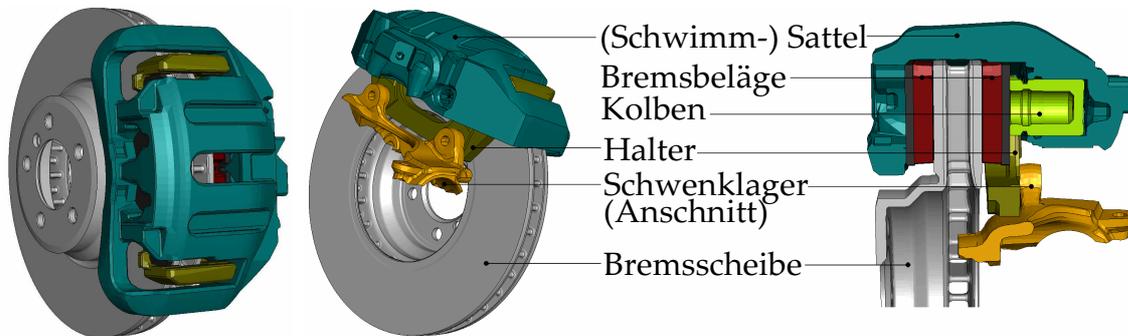


Abbildung 3.2: Komponenten einer Schwimmsattel-Scheibenbremse

JEARSIRIPONGKUL et al. [43, 91] verwenden ein nichtlineares MKS-Modell einer Scheibenbremse. Das Scheibenbremsenmodell von FLINT [30] enthält für die Beläge und die Scheibe kontinuierliche Balken. Solche Modelle eignen sich sehr gut, um das Phänomen des Bremsenquietschens mechanisch zu erklären. Auch die wesentlichen Charakteristiken der auftretenden Schwingformen können damit abgebildet werden. Durch eine Anpassung der Modellparameter gelingt es in der Regel ebenfalls, die Ergebnisse, mit an realen Bremsen erhaltenen Messergebnissen zu korrelieren. Der Nachteil dieser Modelle ist die eingeschränkte Modellierungstiefe. Hier sind FE-Modelle von Vorteil, mit denen ein System in vielen Details diskretisiert werden kann. Von Nachteil ist dabei der im Allgemeinen große Rechenaufwand.

In der Automobil-Serienentwicklung erfolgt die Untersuchung des Geräuschverhaltens einer Bremse normalerweise zu einem Zeitpunkt, an dem der Entwicklungsprozess bereits recht weit fortgeschritten ist. In erster Linie wird eine Bremse nach Leistungs- und Gewichtsanforderungen entwickelt. Sind diese erfüllt, wird das Geräuschverhalten untersucht und die Konstruktion ggf. geändert, um auch den akustischen Anforderungen zu genügen. Dafür sind oft nur noch sehr kleine konstruktive Änderungen möglich. Um den Einfluss solcher Änderungen in einem Modell auflösen zu können, ist häufig eine große Modellierungstiefe notwendig. Diese ist in der Regel nur mit FE-Modellen zu realisieren.

3.2.2 Nichtlineare quasi-statische Berechnung mit anschließender komplexen Eigenwertanalyse

Das in der Praxis und auch im Rahmen dieser Arbeit angewendete Verfahren besteht aus einer zunächst nichtlinearen, quasi-statischen Analyse des Betriebszustandes der Bremse. Darin wird ein definierter Bremsdruck aufgebracht und unter der Definition der Bremsscheibenrotation nach Abschnitt 3.2.2.2 in einer nichtlinearen, quasi-statischen Berechnung die elastische Verformung des Systems, der Zustand sämtlicher Kontakte sowie die Kontaktdruckverteilung zwischen Belag und Scheibe ermittelt. Anschließend wird die lineare, komplexe Eigenwertanalyse durchgeführt. Dazu werden die Systemmatrizen um den zuvor ermittelten Betriebszustand linearisiert. Das bedeutet insbesondere für die Kontakte im Modell, dass geöffnete Kontakte als frei und geschlossene Kontakte als fest verbunden angenommen werden. Effekte, die aufgrund sich in einer Schwingung öffnender und schließender Kontakte entstehen, sind somit nicht dargestellt. Frequenzabhängige Parameter können nicht in einer einzelnen Rechnung abgebildet werden. Sie erfordern eine Berechnung für verschiedene Frequenzen bzw. in Frequenzbereichen. Das gilt auch für das Dämpfungsverhalten, auf das näher in Kapitel 5 eingegangen wird.

Da es Größen gibt, die wiederum von mehreren Parametern abhängen, ist es erforderlich, mehrere Betriebszustände zu untersuchen. Dabei ist zunächst der Bremsdruck zu variieren, der bei Komfortbremsungen⁴ in PKW etwa zwischen 0 und 15 bar auftritt. Dieser beeinflusst über das entstehende Bremsmoment die vorliegenden Kontakt- und Lagerungsbedingungen der Beläge sowie die elastische Verformung aller Komponenten.

Der Gleitreibungswert ist abhängig von vielen Größen, wie z.B. Temperatur, Geschwindigkeit oder Druck. Daher wird er entsprechend seines Streubereiches zwischen etwa 0,4 und 0,6 variiert.

Die Abhängigkeit der elastischen Eigenschaften einiger Materialien (z.B. Belag, Scheibe) von der Temperatur oder dem Bremsdruck kann in diesem Verfahren ebenfalls durch mehrere Rechnungen mit verschiedenen Werten im Streubereich simuliert werden.

3.2.2.1 Systemgrenzen und Elementgröße

Bei der Modellbildung mittels FEM stellt sich die Frage, wo die Systemgrenzen gezogen werden sollen. Der in Abschnitt 2.2.1 beschriebene Effekt erfordert in jedem Fall die Abbildung von Bremsscheibe und Belägen sowie deren Kontaktbedingungen. Auch der Bremsattel, der die Lagerung der Bremsbeläge darstellt, ist in der Regel für eine Systembetrachtung unerlässlich. Ob weitere Komponenten wie Radlager, Schwenklager oder sonstige Achsbauteile für eine hinreichend genaue Analyse hinzugezogen werden müssen, kann nicht allgemein gültig angegeben werden. Das hängt von der untersuchten Schwingform

⁴Komfortbremsungen sind in Abgrenzung zu Notfallbremsungen alle Bremsvorgänge, die unter normalen Bedingungen bei einem PKW auftreten. Notfallbremsungen stellen Extremsituationen dar, für die keine Anforderungen an Bremsgeräusche gestellt werden.

bzw. deren Frequenz ab. Manche Schwingformen werden nur korrekt ermittelt, wenn angrenzende Bauteile in ihrem strukturdynamischen Verhalten ebenfalls abgebildet werden.

Ähnlich verhält es sich mit der FE-Netzfeinheit, für die ebenfalls keine allgemeine Anforderung definiert werden kann. Je höher die untersuchten Frequenzbereiche sind, desto feiner müssen die Bauteile diskretisiert sein, um die auftretenden Moden korrekt abzubilden.

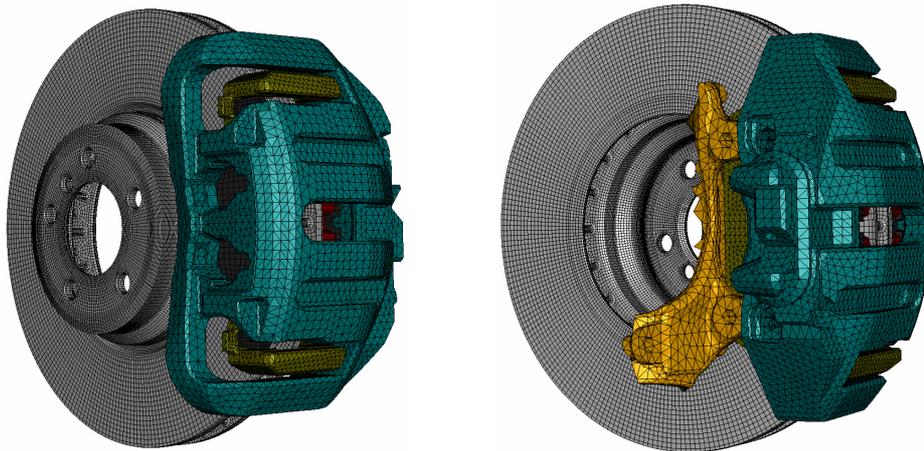


Abbildung 3.3: FE-Modell einer PKW-Scheibenbremse

Die in Kapitel 7 vorgestellten Ergebnisse mit hochfrequenten IPTS-Moden wurden mit einem FE-Modell berechnet, welches aus Scheibe, Sattel, Halter und einem kleinen Teil des Schwenklagers besteht (vgl. Abbildung 3.3). Die Knoten der Fläche der Bremsscheibe, die zwischen dem Radlager und der Felge über die Radmuttern eingespannt ist, sind darin in allen drei Verschiebungsrichtungen gelagert.

Der Halter ist über Bolzenelemente am Schwenklager befestigt, welches kurz unterhalb der Anbindung des Halters abgeschnitten ist und deren Knoten an der Schnittkante ebenfalls in den drei translatorischen Richtungen gelagert sind. Dieses Modell hat sich als geeignet für die Untersuchung von hochfrequenten Quietschproblemen (ca. 8 bis 15 kHz) erwiesen (vgl. Kapitel 7).

Die Elementabmessungen wurden so gewählt, dass bei einem modalen Abgleich von numerischer und experimenteller Modalanalyse der Einzelkomponenten hinreichend genaue Übereinstimmungen erzielt werden konnten. Das gilt insbesondere für Belag und Scheibe.

Werden Instabilitäten im niederfrequenten Bereich (ca. 1 bis 8 kHz) untersucht, haben oft die angrenzenden Bauteile wie Rad- und/oder Schwenklager einen bedeutenden Anteil an der auftretenden Schwingform. Bleibt deren Einfluss unberücksichtigt, kann die Stabilitätsanalyse zu falschen Ergebnissen führen. Eine hinreichend genaue Abbildung der Eigenmoden aller Bauteile im niederfrequenten Bereich gelingt dafür in der Regel mit einer weniger feinen Vernetzung.

3.2.2.2 Abbildung der Scheibenrotation

Die Rotation der Bremsscheibe kann in einer dynamischen Berechnung im Zeitbereich in Form einer direkten Zeitschrittintegration umgesetzt werden. Darin bewegt sich das FE-Netz der Bremsscheibe und die Kontaktbedingungen werden mit der geänderten Position der Scheibe in jedem Zeitschritt neu ermittelt.

Alternativ kann man sich für die Bremsscheibe der EULERSchen Betrachtungsweise bedienen und sich bei einem ortsfesten FE-Netz das Material durch das Netz bewegend denken. Man spricht hier auch von gemischten LAGRANGE-EULER oder ALE-Formulierungen (engl. *Arbitrary Lagrangian Eulerian*, [21]). Nicht rotierende Komponenten der Bremse (Sattel, Halter, etc.) werden in LAGRANGEkoordinaten und die rotierende Bremsscheibe in EULERkoordinaten ausgedrückt. Das gesamte FE-Netz ist demnach ortsfest.

Das dynamische Verhalten der rotierenden Scheibe kann für geringe Drehgeschwindigkeiten näherungsweise unabhängig von der Rotation der Scheibe untersucht werden. Dieses soll im Folgenden an einem Beispiel gezeigt werden.

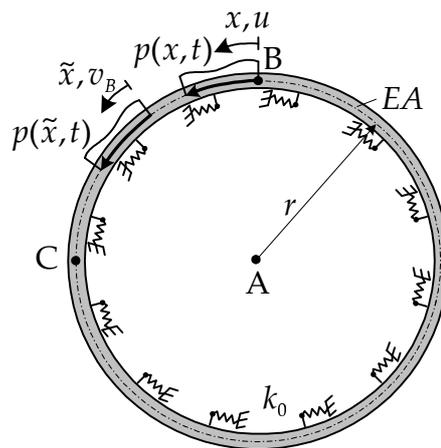


Abbildung 3.4: Ringförmiger Dehnstab

In Abbildung 3.4 ist ein ringförmiger Dehnstab mit der Dehnsteifigkeit EA (Querschnittsfläche A , Elastizitätsmodul E), der Dichte ρ und dem Radius der Mittellinie r dargestellt. Dieser ist über eine kontinuierliche Federbettung k_0 entlang des Umfanges gelagert. Die Variable x stellt die ortsfeste Koordinate bezüglich des Punktes B dar. Die Bewegungsdifferentialgleichung für den Ring lautet in der Koordinate x :

$$k_0 \cdot u(x,t) - EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t) \quad (3.12)$$

Für $m = 0, 1, 2, \dots$ stellt der Ansatz

$$u^m(x, t) = u_s^m \cdot \sin\left(m \frac{2\pi}{U} x\right) \sin(\omega_m t) \quad (3.13)$$

$$+ u_c^m \cdot \cos\left(m \frac{2\pi}{U} x\right) \sin(\omega_m t) \quad (3.14)$$

$$= u_s^m \cdot \sin\left(\frac{m}{r} x\right) \sin(\omega_m t) \quad (3.15)$$

$$+ u_c^m \cdot \cos\left(\frac{m}{r} x\right) \sin(\omega_m t) \quad (3.16)$$

mit dem Umfang U und den Eigenfrequenzen

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k_0 + EA\left(\frac{m}{r}\right)^2}{\rho A}} \quad (3.17)$$

homogene Lösungen der DGL (3.12) dar.

Wirkt eine ortsfeste, harmonische und bezüglich des Ortes beliebige Last in der Form

$$p(x, t) = P(x) \cdot \sin(\Omega t) \quad (3.18)$$

auf den Ring (vgl. Abbildung 3.4), kann der ortsabhängige Teil mittels einer FOURIER-Reihe

$$P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p_s^m \sin\left(\frac{m}{r} x\right) + \sum_{m=0}^{\infty} p_c^m \cos\left(\frac{m}{r} x\right) \quad (3.19)$$

für $m = 0, 1, 2, \dots$ durch sin- und cos-Anteile dargestellt werden. Die FOURIER-Koeffizienten werden für $m = 1, 2, 3, \dots$ über die Integrale

$$p_s^m = \frac{2}{U} \int_0^U P(x) \sin\left(\frac{m}{r} x\right) dx, \quad p_c^m = \frac{2}{U} \int_0^U P(x) \cos\left(\frac{m}{r} x\right) dx \quad (3.20)$$

und für $m = 0$ durch

$$p_c^0 = \frac{1}{U} \int_0^U P(x) dx \quad (3.21)$$

gebildet.

Im Folgenden werden daher lediglich Lastterme in der Form

$$p^m(x, t) = p_s^m \sin\left(\frac{m}{r} x\right) \sin(\Omega t) \quad (3.22)$$

$$+ p_c^m \cos\left(\frac{m}{r} x\right) \sin(\Omega t) \quad (3.23)$$

betrachtet. Werden die Lastterme (3.22) und (3.23) mit den zugehörigen Verschiebungsansätzen

$$u^m(x, t) = u_s^m \sin\left(\frac{m}{r} x\right) \sin(\Omega t) \quad (3.24)$$

$$+ u_c^m \cos\left(\frac{m}{r} x\right) \sin(\Omega t) \quad (3.25)$$

in die DGL (3.12) eingesetzt, ergeben sich mit den Frequenzverhältnissen und den Vergrößerungsfunktionen

$$\eta_m = \frac{\Omega}{\omega_m} \quad \text{und} \quad V_m = \frac{1}{|1 - (\eta_m)^2|} \quad (3.26)$$

die Lösungen:

$$u^m(x, t) = \frac{p_s^m}{k_0 + EA\left(\frac{m}{r}\right)^2} V_m \sin\left(\frac{m}{r}x\right) \sin(\Omega t) \quad (3.27)$$

$$+ \frac{p_c^m}{k_0 + EA\left(\frac{m}{r}\right)^2} V_m \cos\left(\frac{m}{r}x\right) \sin(\Omega t) \quad (3.28)$$

Die Lösung (3.27) ist in Abbildung 3.5 für $m=1$ und

$$\frac{E \cdot \Omega^2}{\rho \cdot A \cdot r} = 2 \times 10^{-16} \quad (3.29)$$

dargestellt.

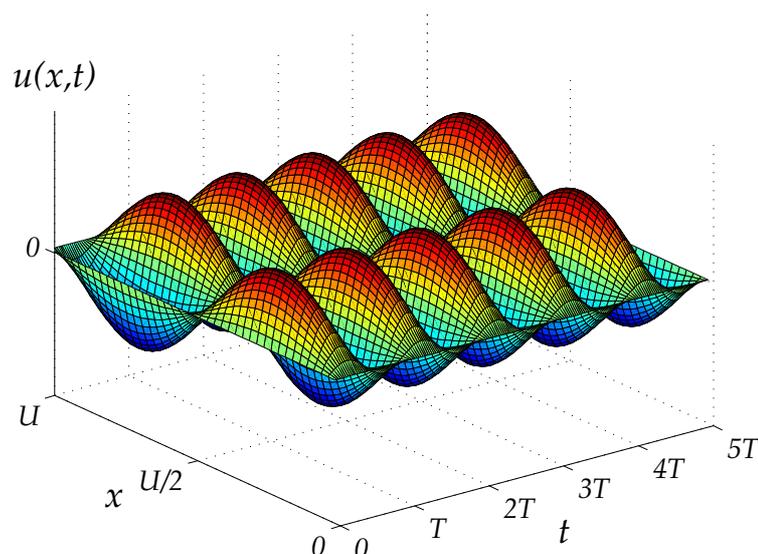


Abbildung 3.5: Lösung $u(x, t)$ des Ringes mit ortsfester Last

Wird auf den Ring in Abbildung 3.4 eine entlang des Umfanges mit der Tangentialgeschwindigkeit v_B gegen den Uhrzeigersinn bewegte Last $p(\tilde{x}, t)$ in der bewegten Koordinate

$$\tilde{x} = x - v_B \cdot t \quad (3.30)$$

aufgebracht, entspricht dieses einer ortsfesten Last $p(x, t)$ bei einem mit der Geschwindigkeit v_B im Uhrzeigersinn rotierenden Ringes.

Für die bewegte Last werden die Lastansätze (3.22) und (3.23) in der ortsfesten Koordinate x durch

$$p^m(x, t) = p_s^m \sin\left(\frac{m}{r}(x - v_B t)\right) \sin(\Omega t) \quad (3.31)$$

$$+ p_c^m \cos\left(\frac{m}{r}(x - v_B t)\right) \sin(\Omega t) \quad (3.32)$$

$$= p_s^m \sin\left(\frac{m}{r}x - \frac{m}{r}v_B t\right) \sin(\Omega t) \quad (3.33)$$

$$+ p_c^m \cos\left(\frac{m}{r}x - \frac{m}{r}v_B t\right) \sin(\Omega t) \quad (3.34)$$

ausgedrückt. Für die sin-förmige Last (3.33) kann über die Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen eine Separierung der Variablen nach Ort und Zeit erfolgen [13].

$$p_{\sin}^m(x, t) = p_s^m \left[\sin\left(\frac{m}{r}x\right) \cos\left(\frac{m}{r}v_B t\right) \sin(\Omega t) - \cos\left(\frac{m}{r}x\right) \sin\left(\frac{m}{r}v_B t\right) \sin(\Omega t) \right] \quad (3.35)$$

$$= \frac{p_s^m}{2} \left\{ \sin\left(\frac{m}{r}x\right) \left[\sin\left(\overbrace{\left(\Omega - \frac{m}{r}v_B\right)t}^{\Omega^-}\right) + \sin\left(\overbrace{\left(\Omega + \frac{m}{r}v_B\right)t}^{\Omega^+}\right) \right] \right. \\ \left. - \cos\left(\frac{m}{r}x\right) \left[\cos\left(\overbrace{\left(\Omega - \frac{m}{r}v_B\right)t}^{\Omega^-}\right) - \cos\left(\overbrace{\left(\Omega + \frac{m}{r}v_B\right)t}^{\Omega^+}\right) \right] \right\} \quad (3.36)$$

$$= \frac{p_s^m}{2} \left[\sin\left(\frac{m}{r}x\right) \sin(\Omega^- t) + \sin\left(\frac{m}{r}x\right) \sin(\Omega^+ t) \right. \\ \left. - \cos\left(\frac{m}{r}x\right) \cos(\Omega^- t) + \cos\left(\frac{m}{r}x\right) \cos(\Omega^+ t) \right] \quad (3.37)$$

Analog ergibt eine Separation von x und t für den cos-Anteil der Last (3.34):

$$p_{\cos}^m(x, t) = \frac{p_c^m}{2} \left[\cos\left(\frac{m}{r}x\right) \sin(\Omega^- t) + \cos\left(\frac{m}{r}x\right) \sin(\Omega^+ t) \right. \\ \left. + \sin\left(\frac{m}{r}x\right) \cos(\Omega^- t) - \sin\left(\frac{m}{r}x\right) \cos(\Omega^+ t) \right] \quad (3.38)$$

Die Lösung der DGL (3.12) lautet mit den Frequenzverhältnissen

$$\eta_m^+ = \frac{\Omega^+}{\omega_m} \quad \text{und} \quad \eta_m^- = \frac{\Omega^-}{\omega_m} \quad (3.39)$$

sowie den Vergrößerungsfunktionen

$$V_m^+ = V(\eta_m^+) = \frac{1}{|1 - (\eta_m^+)^2|} \quad \text{und} \quad V_m^- = V(\eta_m^-) = \frac{1}{|1 - (\eta_m^-)^2|} \quad (3.40)$$

für den sin-förmigen Teil der bewegten Last:

$$u_{\sin}^m(x, t) = \frac{1}{2} \frac{p_s^m}{k_0 + EA \left(\frac{m}{r}\right)^2} \left[V_m^- \sin\left(\frac{m}{r}x\right) \sin(\Omega^- t) + V_m^+ \sin\left(\frac{m}{r}x\right) \sin(\Omega^+ t) \right. \\ \left. - V_m^- \cos\left(\frac{m}{r}x\right) \cos(\Omega^- t) + V_m^+ \cos\left(\frac{m}{r}x\right) \cos(\Omega^+ t) \right] \quad (3.41)$$

Diese kann mit der Beziehung (3.30) durch $x = \tilde{x} + v_B t$ in der bewegten Koordinate \tilde{x} ausgedrückt werden:

$$u_{\sin}^m(\tilde{x}, t) = \frac{p_s^m}{k_0 + EA \left(\frac{m}{r}\right)^2} \left[\frac{V_m^+ + V_m^-}{2} \sin\left(\frac{m}{r}\tilde{x}\right) \sin(\Omega t) \right. \\ \left. + \frac{V_m^+ - V_m^-}{2} \cos\left(\frac{m}{r}\tilde{x}\right) \cos(\Omega t) \right] \quad (3.42)$$

Abbildung 3.6 stellt die Lösung (3.42) für $m = 1$, (3.29) und

$$\frac{\Omega \cdot r}{v_B} = 40 \quad (3.43)$$

dar.

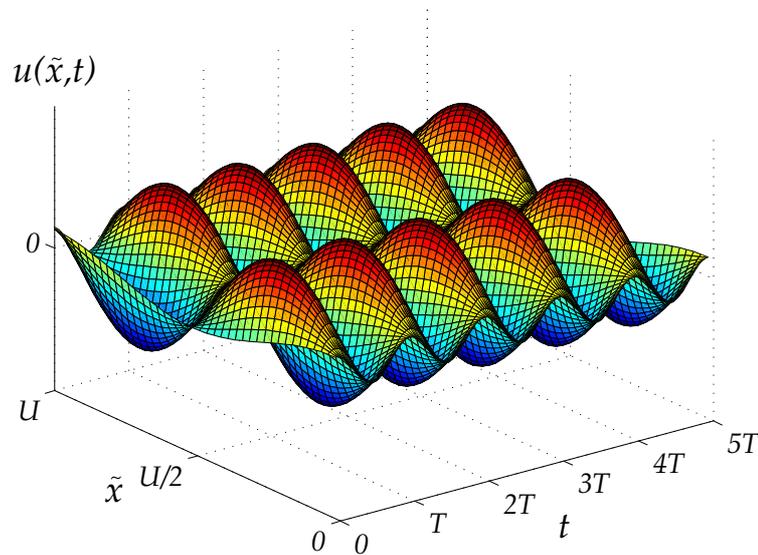


Abbildung 3.6: Lösung $u(\tilde{x}, t)$ des Ringes mit bewegter Last

Für den cos-förmigen Anteil ergibt sich analog:

$$u_{\cos}^m(\tilde{x}, t) = \frac{p_c^m}{k_0 + EA \left(\frac{m}{r}\right)^2} \left[\frac{V_m^+ + V_m^-}{2} \cos\left(\frac{m}{r}\tilde{x}\right) \sin(\Omega t) \right. \\ \left. - \frac{V_m^+ - V_m^-}{2} \sin\left(\frac{m}{r}\tilde{x}\right) \cos(\Omega t) \right] \quad (3.44)$$

Der konstante Bewegungsanteil für $m = 1$ in (3.28)

$$u^0(x, t) = u^0(\tilde{x}, t) = \frac{p_c^0}{k_0} V_0 \sin(\Omega t) \quad (3.45)$$

ist unabhängig vom Ort und damit von der Geschwindigkeit der bewegten Last. Er ist in der bewegten und in der ortsfesten Betrachtung gleich.

Werden die Lösungen der bewegten Lasten (3.42) und (3.44) in der bewegten Betrachtung mit denen der ortsfesten Lasten (3.27) und (3.28) in der ortsfesten Betrachtung verglichen, unterscheiden sie sich zum Einen durch die Vergrößerungsfunktionen V_m und V_m^+ bzw. V_m^- . Zum Anderen haben die Lösungen für die bewegten Lasten eine zusätzliche phasenversetzte Komponente.

Die durch die bewegte Last auftretenden Verschiebungen entsprechen also nicht den Eigenmoden wie für den Fall der ortsfesten Last. Je kleiner v_B ist, desto mehr nähern sie sich diesen an.

In der Betrachtung einer ortsfesten Last mit rotierendem Ring stellen diese Verschiebungen, welche den Eigenmoden des Ringes sehr ähnlich sind, „stehende Wellen“ bezüglich der Last dar.

Die Vergrößerungsfunktionen

$$V_m = \frac{1}{|1 - (\eta_m^\pm)^2|} = \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{\Omega \pm \frac{m}{r} v_B}{\omega_m}\right)^2\right|} \quad (3.46)$$

können für $k_0 = 0$ mit den Eigenfrequenzen

$$\omega_m = \sqrt{\frac{EA(\frac{m}{r})^2}{\rho A}} = \frac{m}{r} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{m}{r} c_{PEA} \quad (3.47)$$

in Abhängigkeit von der (quasi-)Kompressionswellengeschwindigkeit⁵ c_{PEA} ausgedrückt werden:

$$V_m = \frac{1}{\left|1 - \left(\eta_m \pm \frac{v_B}{c_{PEA}}\right)^2\right|} \quad (3.48)$$

Bei einer bewegten Last sind die Vergrößerungsfunktionen also außer von η_m noch vom Verhältnis der Tangentialgeschwindigkeit zur Kompressionswellengeschwindigkeit im Ring abhängig. Diese Abhängigkeiten sind in Abbildung 3.7 für V_m^+ und V_m^- dargestellt.

Für $v_B \ll c_{PEA}$ ist dieser Einfluss jedoch sehr gering, was bei der Betrachtung von rotierenden Brems scheiben in der Stabilitätsanalyse von Bremsen der Fall ist. Die Kompressionswellengeschwindigkeit c_{PEA} für das Brems scheibenmaterial (Grauguss) beträgt etwa 4×10^3 m/s. Die Instabilitäten an der Bremse werden

⁵siehe Fußnote 7 auf Seite 49

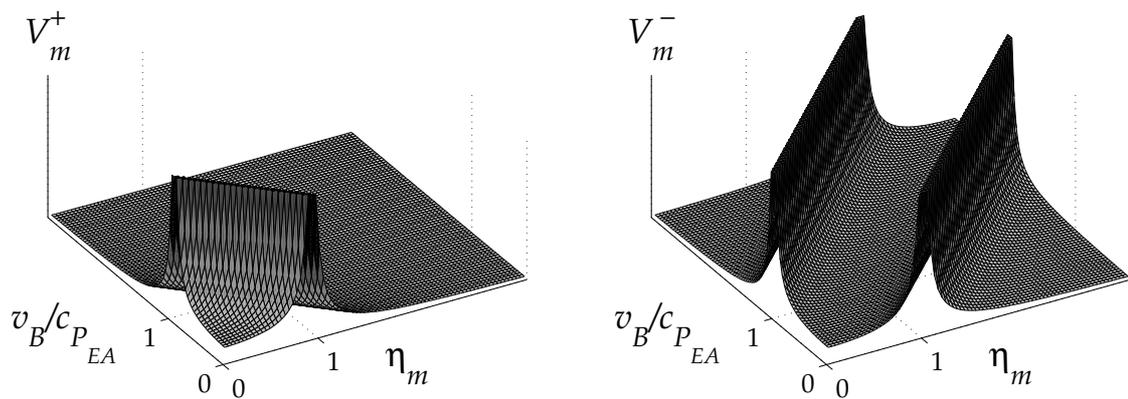


Abbildung 3.7: Abhängigkeit der Vergrößerungsfunktionen V_m von η_m und $\frac{v_B}{c_{P_{EA}}}$

bei Fahrzeuggeschwindigkeiten von weniger als 10 km/h beobachtet. Das entspricht einer Tangentialgeschwindigkeit an der Reibkontaktstelle v_B von etwa 1 m/s. Für das Beispiel mit dem Ring ergibt sich damit das Verhältnis

$$\frac{v_B}{c_{P_{EA}}} = 2,5 \times 10^{-4}. \quad (3.49)$$

Abbildung 3.8 zeigt für diesen Fall die Abweichungen der Lösungen in der Form

$$\Delta V_m^1 = \frac{V_m^+ + V_m^-}{2} - V_m \quad \text{und} \quad \Delta V_m^2 = \frac{V_m^+ - V_m^-}{2}. \quad (3.50)$$

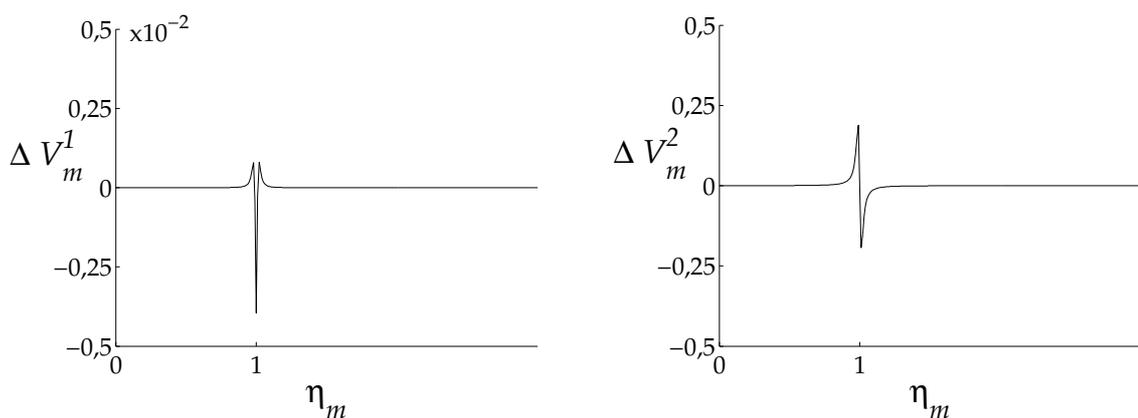


Abbildung 3.8: Abweichungen der bewegten zur unbewegten Lösung

Darin wurde abweichend von (3.26) bzw. (3.40) die Vergrößerungsfunktion für

eine gedämpfte Schwingung

$$V_m = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta_m^2)^2 + (2\zeta\eta_m)^2}} \quad (3.51)$$

mit dem Dämpfungsgrad $\zeta = 0,005$ verwendet. Das entspricht etwa der Materialdämpfung von Grauguss.

Abbildung 3.8 zeigt, dass nur in der Nähe der Resonanz erkennbare Unterschiede zwischen den Vergrößerungsfunktionen einer ruhenden und einer bewegten Last bestehen. In der Praxis treten in der Regel keine Anregungen mit nur einer distinkten Frequenz auf. Für etwas breitbandigere Anregungen um den Resonanzpunkt $(\omega - \Delta\Omega) < \Omega < (\omega + \Delta\Omega)$ führt eine Mittelung der Amplituden in (3.42) bzw. (3.44) und (3.27) bzw. (3.28) zum jeweils gleichen Ergebnis:

$$\begin{aligned} |u_m| &= \frac{p_{s/c}^m}{k_0 + EA\left(\frac{m}{r}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\Delta\Omega} \int_{\omega - \Delta\Omega}^{\omega + \Delta\Omega} \sqrt{\left(\frac{V_m^+ + V_m^-}{2}\right)^2 + \left(\frac{V_m^+ - V_m^-}{2}\right)^2} d\Omega \\ &= \frac{p_{s/c}^m}{k_0 + EA\left(\frac{m}{r}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\Delta\Omega} \int_{\omega - \Delta\Omega}^{\omega + \Delta\Omega} V_m d\Omega \quad (3.52) \end{aligned}$$

Aufgrund des sehr geringen Einflusses der Scheibenrotation kann diese in der EULERSchen Betrachtung bei der Stabilitätsanalyse von Bremsen in der Regel vernachlässigt werden. Sie wird lediglich in Form einer Relativgeschwindigkeit zwischen Scheibe und Belag in der Reibkontaktformulierung berücksichtigt.

OUYANG [68] berichtet von einem Einfluss der Rotation auf das Stabilitätsverhalten eines Bremsen-FE-Modells im Falle von Biegeschwingungen der Bremsscheibe.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen lieferten auch ohne eine Berücksichtigung der Scheibenrotation zufriedenstellende Ergebnisse mit den in Versuchen beobachteten Instabilitäten.

Zentripetal- und CORIOLISbeschleunigungen bleiben in dieser Betrachtung ebenfalls unberücksichtigt. Bei den für das Bremsenquietschen relevanten Drehgeschwindigkeiten und Scheibenradien haben auch diese nur einen sehr geringen Einfluss (vgl. Kapitel 8).

3.2.2.3 Störung der Symmetrie

Die EULERSche Betrachtung setzt voraus, dass der Ring rotationssymmetrisch ist und damit für jede Ordnung m unabhängige sin- und cos-förmige Lösungen bezüglich des Ortes gemäß den Gleichungen (3.15) und (3.16) aufweist. Ist die Symmetrie jedoch gestört, sind die m Lösungen untereinander gekoppelt.

Wirkt beispielsweise in Abbildung 3.4 im Punkt C eine einzelne tangentielle Feder

k_C , erhält man unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten mit $k_0 = 0$ die Beziehung

$$-EA \int_0^U \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \delta u(x) dx + \varrho A \int_0^U \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \delta u(x) dx + k_C \cdot u(x,t) \Big|_{\frac{U}{4}} \delta u(x) \Big|_{\frac{U}{4}} = \int_0^U p(x,t) \delta u(x) dx \quad (3.53)$$

mit der virtuellen Verschiebung $\delta u(x)$. Verwendet man darin für eine sin-förmige Belastung den Verschiebungsansatz (3.24) sowie

$$\delta u(x) = \sin\left(\frac{m}{r} x\right) \quad (3.54)$$

für die virtuelle Verschiebung, sind für dieses Beispiel die Lösungen für alle ungeraden m untereinander gekoppelt.

$$\begin{bmatrix} \frac{EAU}{2r^2} - \frac{\Omega^2 \varrho AU}{2} + k_C & 0 & k_C & 0 & \dots \\ 0 & 4 \frac{EAU}{2r^2} - \frac{\Omega^2 \varrho AU}{2} & 0 & 0 & \dots \\ k_C & 0 & 9 \frac{EAU}{2r^2} - \frac{\Omega^2 \varrho AU}{2} + k_C & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 16 \frac{EAU}{2r^2} - \frac{\Omega^2 \varrho AU}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_s^1 \\ u_s^2 \\ u_s^3 \\ u_s^4 \\ \vdots \\ u_s^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_s^1 \\ p_s^2 \\ p_s^3 \\ p_s^4 \\ \vdots \\ p_s^m \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Im Falle einer rotierenden Last ist in (3.53) der Anteil der virtuellen Arbeit der Feder k_C für ungerade m abhängig von der Zeit:

$$k_C \cdot u(\tilde{x}, t) \Big|_{\frac{U}{4} + v_b \cdot t} \delta u(\tilde{x}) \Big|_{\frac{U}{4} + v_b \cdot t} = k_C \cdot u_s^m \delta u \sin^2\left(\frac{m\pi}{2} + \frac{m v_b}{r} t\right) \quad (3.56)$$

In Abbildung 3.9 ist die Systemantwort einer sin-förmigen Belastung mit $m = 1$ und den Lösungen u_s^1 bis u_s^{10} für

$$\frac{E \cdot A}{U \cdot k_C} = 0,01 \quad \text{und} \quad \frac{\Omega \cdot r}{v_B} = 10 \quad (3.57)$$

dargestellt. Die Anteile der durch die Symmetriestörung in der Lösung enthaltenen Wellenzahlen sind nicht nur von der Anregungskreisfrequenz Ω , sondern außerdem von der Geschwindigkeit v_B abhängig.

Inwieweit Symmetriestörungen das Auftreten von Instabilitäten verhindern können, kann in der zuvor beschriebenen EULERSchen Betrachtung nicht untersucht werden. Das gilt z.B. auch für Effekte, die bei innenbelüfteten Scheiben durch die unterschiedliche Steifigkeit zwischen Rippen und Kühlkanälen entstehen können und ebenfalls eine Symmetriestörung darstellen. Auch das Bremsenrubbeln (engl. *brake judder*), was durch Unebenheiten auf der Scheibenoberfläche entsteht, fällt in diese Kategorie.

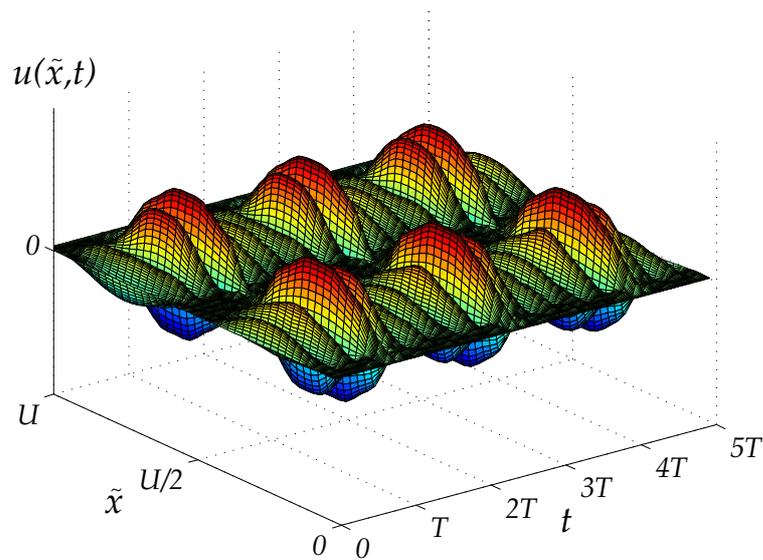


Abbildung 3.9: Systemantwort einer sin-förmigen Belastung mit $m = 1$ bei gestörter Symmetrie

Um Symmetriestörungen der Bremsscheibe in einer Stabilitätsbetrachtung zu berücksichtigen, muss auch die Bremsscheibe in LAGRANGEkoordinaten ausgedrückt und die Berechnung in Form einer nichtlinearen direkten Zeitschrittintegration durchgeführt werden.

Kapitel 4

Materialverhalten

Dieses Kapitel stellt die in einem Bremssystem typischerweise verwendeten Materialien hinsichtlich ihrer Eigenschaften sowie die in der Simulation verwendeten Materialgesetze vor. Darüber hinaus wird auf Besonderheiten im Abgleich Rechnung-Messung eingegangen.

4.1 Brems Scheibe

Brems scheiben werden üblicherweise aus Grauguss hergestellt. In speziellen Fällen, wie z.B. im Rennsport, kommen auch Materialien wie Keramik und Kohlefasern oder Edelstahl zum Einsatz. Aufgrund der hohen Kosten dieser Materialien sind sie jedoch in der Serienproduktion bisher wenig verbreitet. Zur Gewichtseinsparung existieren auch zusammengesetzte Scheiben, deren Topf aus Aluminium besteht. Die Reibringe, die hohen Temperaturen ausgesetzt sind, sind aus thermisch widerstandsfähigeren Materialien wie Grauguss oder Edelstahl hergestellt.

Die Bezeichnung Grauguss ist auf die gräuliche Farbe der Bruchkanten von Bauteilen aus diesem Material zurückzuführen. Bei dem für Brems scheiben verwendeten Material handelt es sich um Grauguss mit Lamellengraphit (Bezeichnung GJL). Das bedeutet, dass der Kohlenstoff im Eisengefüge in Lamellenform eingebunden ist und einen Massenanteil von 3 bis 4% hat. Grauguss mit Lamellengraphit zeichnet sich durch gute Wärmeleiteigenschaften und gute Gießbarkeit sowie sprödes und relativ hoch dämpfendes Verhalten aus [72].

Die allgemeine Angabe der Materialeigenschaften von Grauguss in Brems scheiben ist schwer möglich. Während die Dichte in der Regel in allen Bereichen gleich ist, kann ein charakteristischer E-Modul durch eine Zugprobe nicht ermittelt werden. Wird das Material für eine Zugprobe an einer bestimmten Stelle entnommen, hängt das elastische Verhalten wesentlich von der Anordnung der Kohlenstofflamellen in dieser Probe ab. Diese Einschlüsse sind in Brems scheiben nicht homogen verteilt. Aufgrund der Kohlenstoffeinschlüsse besteht insbesondere ein Unterschied des E-Moduls zwischen Druck- und Zugbelastung.

Diese Inhomogenitäten sind auf die in den verschiedenen Bauteilbereichen stark variierenden Abkühlbedingungen bei der Fertigung zurückzuführen. So werden

bei einer Bremscheibe im Bereich der Kühlrippen andere E-Module gemessen als im Reibringbereich. Auch die sogenannte Gushaut hat andere Gefügeeigenschaften. Diese Oberfläche der Kühlkanäle, welche bei einer fertigen Bremscheibe nicht abgeschliffen wird, wird durch den Sandkern bzw. dessen Bindemittel während des Gieß- und Abkühlprozesses beeinflusst. Dort bildet sich ein anderes Gefüge aus, als in Bereichen, die weiter im Inneren des Bauteils liegen [89]. Unter Verwendung eines linear elastischen, isotropen Materialgesetzes stehen für einen Abgleich von experimentell und numerisch ermittelten Eigenformen und -frequenzen die Parameter Dichte, E-Modul und Querkontraktion zur Verfügung. Werden diese Größen bei einer Parameteridentifikation als globale Größen ermittelt, ergibt sich ein E-Modul als verschmierte Größe über alle Bereiche. Es können aber im FE-Modell auch Bereiche mit unterschiedlichen Materialeigenschaften definiert werden. Dann stehen im Abgleichprozess mehr Parameter zur Verfügung.

Bei den Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit wurde lediglich ein konstanter E-Modul für alle Bereiche definiert. Damit gelang eine Korrelation der numerisch und experimentell ermittelten Eigenfrequenzen mit einer Abweichung von $\leq 5\%$.

Der E-Modul für Grauguss ist nahezu nicht frequenz-, jedoch temperaturabhängig. Das hat insbesondere bei der Bremscheibe einen Einfluss, da hier Temperaturen bis 600°C vorkommen können.

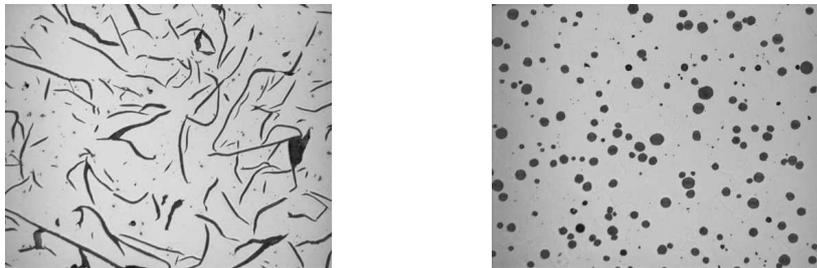


Abbildung 4.1: Gefüge von Lamellen- (links) und Kugelgraphit (rechts)

4.2 Sattel und Halter

Bremssättel und -halter sind in der Regel aus Spheroguss hergestellt. Häufig kommen aber auch Leichtbau-Bremssättel zum Einsatz. Diese sind aus einer Aluminiumlegierung gegossen. Bei Spheroguss handelt es sich um eine Art von Gusseisen mit Kugelgraphit (Bezeichnung GJS), was bedeutet, dass eingelagerte Kohlenstoffpartikel eine rundliche Form haben. Gusseisen mit Kugelgraphit hat ähnliche Eigenschaften wie Stahl; hohe Festigkeit bei duktilem Verhalten. Im Vergleich zum Grauguss bei Bremscheiben hat Spheroguss schlechtere Gießeigenschaften. Das stellt bei den Sattelbauteilen, die im Vergleich zu Bremscheiben einfachere Geometrien aufweisen, keinen Nachteil dar [72].

Der Streubereich der elastischen Eigenschaften dieser Materialien ist deutlich

kleiner als beim Grauguss mit Lamellengraphit. Die kugelförmigen Kohlenstoffeinschlüsse im Gefüge entstehen wie beim Grauguss ebenfalls während des Abkühlprozesses, sind aber deutlich kleiner. Daher entsteht ein homogeneres Gefüge. Somit kann für den Halter und den Bremssattel, egal ob er aus Aluminium oder Grauguss besteht, ein isotropes Materialgesetz verwendet werden. Da diese Bauteile keinen extremen Temperaturschwankungen ausgesetzt sind, kann die Temperaturabhängigkeit des E-Moduls in der Regel vernachlässigt werden.

4.3 Bremsbeläge

Die Bremsbeläge von Scheibenbremsen bestehen zunächst aus dem Reibmaterial, welches zusammen mit der Bremsscheibenoberfläche am Reibkontakt beteiligt ist und mit fortschreitender Anzahl von Bremsvorgängen verschleißt. Dieses Reibmaterial ist auf die Belagträgerplatte geklebt. Zwischen Reibmaterial und Belagträgerplatte liegt oft noch eine Zwischenschicht (*Underlayer*). Auf der Rückseite der Belagträgerplatte ist in der Regel ein Dämpfungsblech (*Shim*) geklebt, welches aus ein oder mehreren Metallschichten besteht, die wiederum mit einer Gummischicht überzogen sein können.

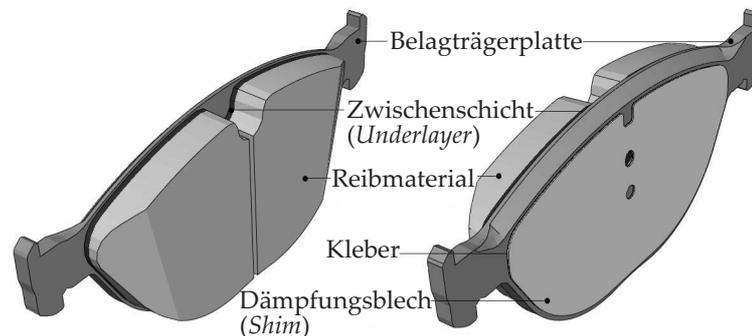


Abbildung 4.2: Komponenten eines Bremsbelages

4.3.1 Reibmaterial

Im Gegensatz zu den anderen Belagkomponenten hat das Reibmaterial kein isotropes Materialverhalten. Durch den Pressvorgang in der Produktion von Bremsbelägen und durch die Metallfasern, die dabei quer zur Pressrichtung ausgerichtet werden, hat das Reibmaterial normal zur Reibebene ein anderes Verhalten als in der Ebene. Zur Beschreibung dieses Verhaltens muss ein anisotropes Materialgesetz formuliert werden.

Das Reibmaterial besteht aus bis zu 30 verschiedenen Komponenten wie Metallen, Füllstoffen, Gleitmitteln und organischen Stoffen. Die Metalle, welche in Form von Fasern vorkommen, erhöhen die Festigkeit, Wärmeleitfähigkeit und den Reibwert und führen gleichzeitig zu einer Verringerung des Verschleißes.

Mit Füllstoffen aus z.B. Aluminium- oder Eisenoxid können Porosität, Kompressibilität und Oberflächeneigenschaften beeinflusst werden. Gleitmittel wie z.B. Graphit werden zur Einstellung eines bestimmten Reibwertes und zur Beeinflussung der Wärmeleiteigenschaften eingesetzt. Die organischen Stoffe sind im Wesentlichen Harze, die zur Bindung des Materials dienen [75].

Die Zwischenschicht, die in vielen Belägen eingebracht ist, besteht grundsätzlich aus ähnlichen Komponenten wie das Reibmaterial selbst. Sie ist aber deutlich weicher und dient zur gezielten Veränderung der elastischen Eigenschaften sowie zur Dämpfung des Belages. Die Schicht ist nur ca. 2 mm dick und nicht für einen Reibkontakt vorgesehen.

Im Herstellungsprozess der Bremsbeläge werden zunächst die einzelnen Komponenten des Reibmaterials miteinander vermischt. Mittels einer Form werden die Mischungen (Reibmaterial und Zwischenschicht) auf die mit Kleber beschichtete Belagträgerplatte gepresst. Während des Pressvorganges wird das Reibmaterial in Pressrichtung komprimiert. Dabei richtet sich ein Großteil der in Faserform vorliegenden Komponenten quer zur Pressrichtung aus. Somit erhöht sich die Steifigkeit senkrecht zur Pressrichtung und das Material verhält sich anisotrop. Da die Richtungen, in denen das Reibmaterial unterschiedliche elastische Eigenschaften aufweist, senkrecht zueinander stehen, kann von orthotropen Bedingungen ausgegangen werden. Da weiterhin das Verhalten in der Belagebene gleich ist, ist die Beschreibung der elastischen Eigenschaften in Form eines transversal isotropen Materialgesetzes möglich [12].

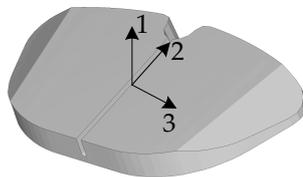


Abbildung 4.3: Koordinatensystem für transversal isotropes Reibmaterial

4.3.1.1 Transversal isotropes Materialverhalten

Allgemein linear elastisches, anisotropes Materialverhalten kann für kartesische Koordinaten in der Indexschreibweise durch die Beziehung

$$\sigma_{kl} = C_{klmn} \varepsilon_{mn} \quad (4.1)$$

ausgedrückt werden. Dabei ist σ_{kl} der CAUCHYSche Spannungstensor und ε_{mn} der Tensor der GREEN-ST.VENANTSchen Dehnungen. C_{klmn} ist ein Tensor vierter Ordnung, der die elastischen Eigenschaften des jeweiligen Materials beschreibt und einen linearen Operator zwischen Spannungen und Dehnungen darstellt.

In einer orthogonalen Basis mit kartesischen Koordinaten können die CAUCHY-

schen Spannungen in der bekannten Matrixform

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

geschrieben werden.

Analog gilt für die GREEN-ST.VENANTSchen Dehnungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

wobei die Definition der Gleitung

$$\gamma_{mn} = \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \quad (4.4)$$

durch ein Vertauschen der Indizes zeigt, dass die Komponenten des Dehnungstensors symmetrisch sind. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \tau_{12} &= \tau_{21} = \sigma_{12}, \\ \tau_{13} &= \tau_{31} = \sigma_{13}, \\ \tau_{23} &= \tau_{32} = \sigma_{23}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Somit reduzieren sich Spannungs- und Dehnungstensor auf jeweils sechs unabhängige Komponenten:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Der Elastizitätstensor \mathbf{C} hat damit 36 von null verschiedene Einträge. Dieser muss unter Voraussetzung der Existenz eines elastischen Potentials symmetrisch sein und hat daher 21 unabhängige Komponenten [9].

Die Einträge des Tensors \mathbf{C} können auch als Matrix geschrieben und das linear elastische, anisotrope Materialgesetz wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1113} & C_{1123} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2213} & C_{2223} & C_{2212} \\ & & C_{3333} & C_{3313} & C_{3323} & C_{3312} \\ & & & C_{1313} & C_{1323} & C_{1312} \\ & & & & C_{2323} & C_{2312} \\ & \text{sym.} & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Anders als bei isotropem Material kann bei orthotropem Material das kartesische Koordinatensystem nicht beliebig gedreht werden, ohne dass sich die Komponenten des Elastizitätstensors ändern. Eine 180°-Drehung der orthogonalen Basisachsen ändert aber auch bei orthotropem Material die Einträge von C_{klmn} nicht. Mit den Basistransformationen des Elastizitätstensors

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\beta}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

(Drehung um 1-Achse) (Drehung um 2-Achse) (Drehung um 3-Achse)

$$C_{k^\circ l^\circ m^\circ n^\circ}^{(j)} = \beta_{kk^\circ}^{(j)} \cdot \beta_{ll^\circ}^{(j)} \cdot \beta_{mm^\circ}^{(j)} \cdot \beta_{nn^\circ}^{(j)} \cdot C_{klmn} \quad (4.9)$$

dürfen sich die Einträge von \mathbf{C} nicht ändern und es muss gelten:

$$C_{k^\circ l^\circ m^\circ n^\circ}^{(j)} = C_{klmn} \quad \text{für} \quad j = 1 \dots 3 \quad (4.10)$$

Diese Bedingung ist nur erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} C_{1113} &= C_{1123} = C_{1112} = C_{2213} = C_{2223} = C_{2212} = \\ C_{3313} &= C_{3323} = C_{3312} = C_{1323} = C_{1312} = C_{2312} = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Das linear elastische, orthotrope Materialgesetz hat damit neun unabhängige Komponenten:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1313} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & C_{2323} & 0 \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Bei transversal isotropem Material unterscheidet sich das Verhalten in der 1/2-Ebene zu dem der Richtung 3. Wird also das System um einen beliebigen Winkel um die 3-Achse gedreht, muss ebenfalls die Bedingung (4.10) erfüllt sein.

Durch eine 90° -Basisdrehung um die 3-Achse

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

gilt für die Einträge von \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} C_{1^\circ 1^\circ 1^\circ 1^\circ} &= \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot C_{2222} = C_{2222} \\ C_{1^\circ 1^\circ 3^\circ 3^\circ} &= \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{33^\circ} \cdot \beta_{33^\circ} \cdot C_{2233} = C_{2233} \\ C_{1^\circ 3^\circ 1^\circ 3^\circ} &= \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{33^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{33^\circ} \cdot C_{2323} = C_{2323} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Durch eine 45° Basisdrehung um die 3-Achse

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

gilt weiterhin für den Eintrag

$$\begin{aligned}
C_{1^\circ 1^\circ 2^\circ 2^\circ} &= \beta_{11^\circ} \cdot \beta_{11^\circ} \cdot \beta_{12^\circ} \cdot \beta_{12^\circ} \cdot C_{1111} \\
&+ \beta_{11^\circ} \cdot \beta_{11^\circ} \cdot \beta_{22^\circ} \cdot \beta_{22^\circ} \cdot C_{1122} \\
&+ \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{12^\circ} \cdot \beta_{12^\circ} \cdot C_{2211} \\
&+ \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{22^\circ} \cdot \beta_{22^\circ} \cdot C_{2222} \\
&+ \beta_{11^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{12^\circ} \cdot \beta_{22^\circ} \cdot C_{1212} \\
&+ \beta_{11^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{12^\circ} \cdot \beta_{22^\circ} \cdot C_{2121} \\
&+ \beta_{11^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{12^\circ} \cdot \beta_{22^\circ} \cdot C_{1221} \\
&+ \beta_{11^\circ} \cdot \beta_{21^\circ} \cdot \beta_{12^\circ} \cdot \beta_{22^\circ} \cdot C_{2112}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie und Gleichung (4.10) gilt:

$$\begin{aligned}
C_{1^\circ 1^\circ 2^\circ 2^\circ} &= C_{1122} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2C_{1111} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2C_{1122} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4C_{1212} \\
&= C_{1111} - 2C_{1212},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

was die Zahl der unabhängigen Größen auf fünf reduziert.

4.3.1.2 Messung der transversal isotropen Materialeigenschaften

Mittels Ultraschallmessung ist es möglich, die Ausbreitungsgeschwindigkeiten sowohl von Kompressions- als auch von Scherwellen in einem Kontinuum zu bestimmen [83]. Der Zusammenhang zwischen den Wellengeschwindigkeiten c und den Komponenten des Tensors \mathbf{C} in kartesischen Koordinaten wird durch die KELVIN-CHRISTOFFELschen-Gleichungen beschrieben [63]:

$$(C_{klmn}n_l n_n - \rho c^2 \delta_{km})p_m = 0 \tag{4.18}$$

Darin ist \mathbf{n} die Richtung der Wellenausbreitung, δ_{km} das KRONECKERdelta und \mathbf{p} der Vektor der Partikelbewegung. Dieses führt für die Kompressionswellen mit

$$\mathbf{n} = \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

direkt auf die Zusammenhänge

$$C_{1111} = c_{11}^2 \rho, \quad C_{2222} = c_{22}^2 \rho, \quad C_{3333} = c_{33}^2 \rho, \tag{4.20}$$

wobei der erste Index in den Geschwindigkeiten c die Ausbreitungsrichtung und der zweite die Polarisierung, d.h. die Richtung der Partikelbewegung darstellt.

Für die Scherwellen gilt analog:

$$\begin{aligned} C_{1313} &= C_{1331} = C_{3113} = C_{3131} = c_{13}^2 \varrho = c_{31}^2 \varrho \\ C_{2323} &= C_{2332} = C_{3223} = C_{3232} = c_{23}^2 \varrho = c_{32}^2 \varrho \\ C_{1212} &= C_{1221} = C_{2112} = C_{2121} = c_{12}^2 \varrho = c_{21}^2 \varrho \end{aligned} \quad (4.21)$$

Für transversal-isotropes Material können zunächst mit vier Messungen die unabhängigen Konstanten

$$C_{1111} = C_{2222}, \quad C_{3333}, \quad C_{1313} = C_{2323} \quad \text{und} \quad C_{1212} \quad (4.22)$$

ermittelt werden. In diesen Messungen wird durch einen Sender (S) ein Ultraschallsignal angeregt. Dieses ist entweder normal zur Probenkante polarisiert und erzeugt damit eine Kompressionswelle (vgl. Abbildung 4.4, b) und c)), oder es ist parallel zur Kante polarisiert und erzeugt dadurch eine Scherwelle (vgl. Abbildung 4.4, a) und d)). Diese Signale werden auf der anderen Probenkante am Empfänger (E) registriert. Mit den gemessenen Durchlaufzeiten des Ultraschallsignals und den Abmessungen der Probekörper lassen sich die Wellengeschwindigkeiten und damit die Konstanten (4.22) des Elastizitätstensors ermitteln.

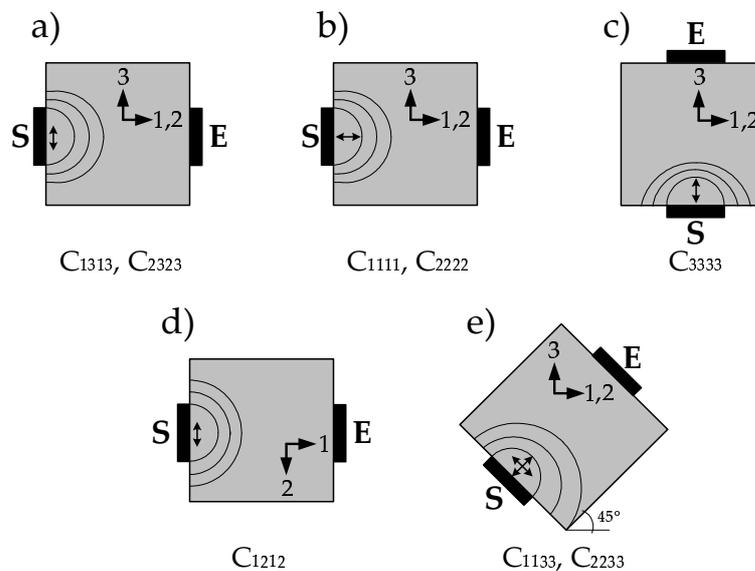


Abbildung 4.4: Ultraschall-Messungen an Probekörpern zur Ermittlung der Materialkonstanten

Den Eintrag für C_{1122} erhält man aus den bereits ermittelten Werten durch die Beziehung (4.17):

$$C_{1122} = C_{1111} - 2C_{1212} \quad (4.23)$$

Für die Einträge C_{1133} bzw. C_{2233} ist eine zusätzliche Messung notwendig. Dazu ist ein weiterer Probekörper erforderlich. Dieser hat zwei parallele Kanten, die einen 45° Winkel zu der 3-Basisachse und der 1- bzw. 2-Basisachse aufweist (vgl.

Abbildung 4.4, e)). Damit kann die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit normal zu diesen Kanten gemessen werden:

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

Für \mathbf{n}_2 lautet das Eigenwertproblem (4.18)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(C_{1212} + C_{1313}) - \varrho c^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(C_{2222} + C_{2323}) - \varrho c^2 & \frac{1}{2}(C_{2233} + C_{2323}) \\ 0 & \frac{1}{2}(C_{2233} + C_{2323}) & \frac{1}{2}(C_{3333} + C_{1313}) - \varrho c^2 \end{bmatrix} \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (4.25)$$

Über die Eigenwerte dieses Gleichungssystem erhält man die Wellengruppengeschwindigkeiten.⁶ Die Eigenvektoren geben die Richtung der Wellenausbreitung an. Die Beziehungen für die erste Mode

$$\varrho c_1^2 = \frac{1}{2}(C_{1212} + C_{1313}) \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Scherwelle}) \quad (4.26)$$

sind redundant, da die Konstanten C_{1212} und C_{1313} aus anderen Messungen bereits bekannt sind.

Aus der zweiten und dritten Mode erhält man die Bedingung

$$\varrho c_{2/3}^2 = \frac{1}{4} \left[C_{2222} + C_{3333} + 2C_{1313} \pm \sqrt{(C_{2222} - C_{3333})^2 + 4(C_{1133} + C_{1313})^2} \right] \quad (4.27)$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$\mathbf{p}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_3. \quad (4.28)$$

Die Partikelbewegung ist dabei jedoch nicht normal bzw. parallel zur Anregungsebene. Da die sich ausbreitenden Wellen in der Regel eine longitudinale bzw. transversale Ausprägung bezogen auf die Anregungsebene haben, spricht MUSGRAVE [63] von quasi-Kompressions-⁷ und quasi-Scherwellen. Gegenüber den Wellen in einem isotropen Medium sind darin Gruppen- und Phasengeschwindigkeit nicht gleich groß und die Ausbreitungsrichtung ist nicht normal zu der Anregungsebene (vgl. Abbildung 4.5). Mit der gemessenen Gruppengeschwindigkeit c_{45° in der 2-3-Ebene kann aus Gleichung (4.27) die Konstante C_{2233} ermittelt werden:

⁶Mit der Wellengruppengeschwindigkeit beschreibt man die Geschwindigkeit, mit der sich die Hüllkurve einer Wellengruppe ausbreitet. Eine Wellengruppe besteht aus mehreren überlagerten Einzelwellen, die sich jeweils mit ihrer eigenen Phasengeschwindigkeit ausbreiten.

⁷Der Begriff quasi-Kompressionswelle wird von CREMER & HECKL [19], zur Differenzierung von sich in einem unendlich ausgedehnten Kontinuum ausbreitenden Kompressionswellen, für Kompressionswellen in Platten und Stäben verwendet, bei denen eine eingeschränkte Querdehnungsbehinderung vorliegt.

$$C_{2233} = \sqrt{\left[2\varrho c_{45^\circ}^2 - \frac{1}{2}(C_{2222} + C_{3333} + 2C_{1313})\right]^2 - \frac{1}{4}(C_{2222} - C_{3333})^2} - C_{1313} \quad (4.29)$$

Alternativ erhält man die Konstante C_{2233} auch direkt aus den gemessenen Gruppengeschwindigkeiten [15]:

$$C_{2233} = 2\varrho \sqrt{\left(c_{13}^2 - \frac{1}{2}c_{45^\circ}^2 - \frac{1}{2}c_{33}^2\right) \left(c_{13}^2 - \frac{1}{2}c_{22}^2 - \frac{1}{2}c_{45^\circ}^2\right)} - \varrho c_{45^\circ}^2 \quad (4.30)$$

In beiden Gleichungen (4.29) und (4.30) können entweder die gemessene Kompressions- oder die Scherwellengeschwindigkeit für die Ermittlung von C_{2233} verwendet werden. Unabhängig davon, ob bezogen auf die Probenkante eine longitudinale oder transversale Erregung aufgebracht wird, werden immer beide Wellentypen angeregt. Wird vom Sender ein Impuls ausgesendet, misst der Empfänger zwei Signale nacheinander. Das erste gehört zur schnelleren Kompressionswelle, das zweite zur langsameren Scherwelle. Beide Geschwindigkeiten führen auf das gleiche C_{2233} .

Bei der Ultraschallmessung einer 45° Probe wird jedoch in der Regel nicht die Wellengruppengeschwindigkeit, sondern die Phasengeschwindigkeit ermittelt, da die gemessene Durchlaufzeit eines Ultraschallimpulses auf die Probendicke und nicht auf die tatsächliche Durchlaufstrecke bezogen wird (s. Abbildung 4.5). Der entstehende Fehler ist von dem Winkel χ abhängig, den Gruppen- und Phasengeschwindigkeitsvektor einschließen. Die Abweichung ist umso größer, je mehr sich die elastischen Eigenschaften des Materials in den Raumrichtungen unterscheiden.

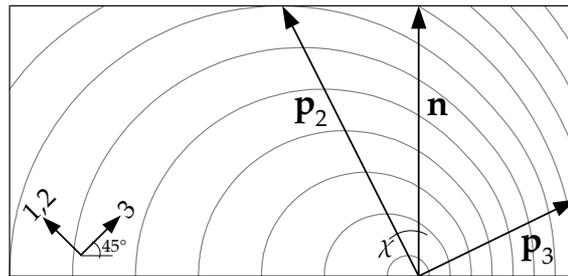


Abbildung 4.5: Winkel zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Um diesen Fehler zu berücksichtigen, ist eine Korrektur der gemessenen Phasengeschwindigkeit notwendig. Das kann in einem Iterationsprozess erfolgen, indem zunächst ein Winkel χ angenommen und damit das Eigenwertproblem (4.25) gelöst wird. Aus dem Winkel zwischen dem Vektor \mathbf{p}_2 der Partikelbewegung der Kompressionswelle (entspricht der Ausbreitungsrichtung) und dem Vektor \mathbf{n} der Anregungsnormalenrichtung erhält man eine neue Schätzung für χ .

Durch Invertierung der Matrix kann die Beziehung (4.12) mit den in der Praxis üblicherweise verwendeten *engineering constants* geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Die Invertierung ergibt für transversal isotropes Material die Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 &= 4C_{1212} - \frac{4C_{3333}C_{1212}^2}{C_{1111}C_{3333} - C_{1133}^2} \\ E_3 &= C_{3333} - \frac{C_{1133}^2}{C_{1111} - C_{1212}} \\ \nu_{13} = \nu_{23} &= \frac{C_{1133}}{2(C_{1111} - C_{1212})} \\ \nu_{12} &= 1 - \frac{2C_{3333}C_{1212}}{C_{1111}C_{3333} - C_{1133}^2} \\ G_{13} &= G_{23} = C_{1313} \\ G_{12} &= C_{1212} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Aufgrund der frequenzabhängigen Eigenschaften des Reibmaterials ist dieses Verfahren nicht geeignet, um die relevanten Werte direkt zu ermitteln. Die Ultraschallmessungen werden bei ca. 2 MHz durchgeführt, während die für das Quietschen relevanten Frequenzen im Bereich von 1 bis 15 kHz liegen. Daher ist eine Parameteridentifikation durch einen Vergleich der Ergebnisse einer numerischen und einer experimentellen Modalanalyse (vgl. Abschnitt 4.4) unerlässlich.

Nimmt man an, dass die Verhältnisse von Elastizitäts- und Schubmodulen der beiden Richtungen sowie die der Querkontraktionen nicht frequenzabhängig sind, können diese beibehalten und somit die Anzahl der Parameter in der Parameteridentifikation reduziert werden.

Liegen keine Messergebnisse der Materialkenngrößen aus z.B. einer Ultraschallmessung vor, ist es auch möglich, die Parameteridentifikation mit geschätzten Startwerten durchzuführen. GUGGENBERGER [36] zeigt, dass mit Werten eines ähnlichen Materials als Startgröße eine gute Übereinstimmung zwischen numerischer und experimenteller Modalanalyse zu erzielen ist.

Auch bei dem Reibmaterial sind die Materialeigenschaften nicht gleichmäßig verteilt. Durch die Geometrie und den Herstellungsprozess gibt es Inhomogenitäten, welche bei der Parameteridentifikation durch eine Aufteilung in mehrere Bereiche berücksichtigt werden können. Durch die beim transversal isotropen Material auftretenden fünf unabhängigen Konstanten erhöht sich damit die Anzahl der Parameter gegenüber isotropem Material um den Faktor fünf.

4.3.2 Belagträgerplatte

Die Belagträgerplatten von Bremsbelägen bestehen in der Regel aus Stahl und können durch ein isotropes Materialgesetz abgebildet werden. Durch den Herstellungsprozess (Stanzen von Löchern, Schmieden von Verstärkungen) können ebenfalls Bereiche mit abweichenden Materialparametern entstehen. Diese Unterschiede wurden im Rahmen dieser Arbeit als gering eingeschätzt und daher nicht berücksichtigt. Eine Frequenzabhängigkeit des E-Moduls bei Stahl ist vernachlässigbar und der Einfluss der Temperaturabhängigkeit ist gering, da die Belagträgerplatten keinen extremen Temperaturen ausgesetzt sind.

4.3.3 Dämpfungsblech (*Shim*)

Auf der Rückseite der Belagträgerplatte wird häufig aus Gründen der Dämpfung ein dünnes Blech (auch Entdröhnblech oder *Shim*) geklebt. Dieses hat mehrere Funktionen. Zum Einen erzeugt es den sogenannten *constraint-layer-damping*-Effekt (vgl. Abschnitt 5.2.3). Zum Anderen bewirkt die Gummierung außer einer Dämpfung eine Entkopplung von Kolben und Belag bzw. Sattel und Belag. Außerdem beeinflusst es die Kontaktdruckverteilung zwischen den Kontaktpaaren. Die Simulation des dynamischen Verhaltens von *Shims* wurde von FLINT et al. [31] und MCDANIEL et al. [57] durchgeführt. Dieses erfordert eine sehr detaillierte Abbildung als FE-Modell, welches im Rahmen dieser Arbeit vereinfacht wird. Ziel ist es, den wesentlichen Effekt des *Shims*, das *constrained layer damping*, prinzipiell abzubilden. Dazu wurden Blech- und Klebeschicht in Form von jeweils nur einer Volumenelementschicht im FE-Modell abgebildet. Die frequenz-, druck- und temperaturabhängigen Materialdaten wurden als Mittelwerte aus der Literatur, insbesondere aus den Untersuchungen von FLINT et al. [31] übernommen. Aufgrund der sehr geringen Blechdicke (ca. 0,5 mm) und der sehr geringen Steifigkeit des Klebermaterials (ca. 10 N/mm²) ist der Einfluss des *Shims* auf die Steifigkeit bzw. die Eigenfrequenzen der Beläge sehr gering [36]. Lediglich die Dämpfung hat einen signifikanten Einfluss auf das Schwingverhalten der Beläge. Diese wird mit dem in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Verfahren abgebildet.

Da die Abbildung der Dämpfung in einer linearen Eigenwertanalyse nur eingeschränkt möglich ist (vgl. Abschnitt 5.1), ist das Ziel dieser Vorgehensweise weniger ein exakter quantitativer Abgleich der Dämpfung als vielmehr eine Möglichkeit zur qualitativen Bewertung des *constraint-layer-damping*-Effektes von Dämpfungsblechen auf Bremsbelägen.

4.4 Parameteridentifikation

Ziel der Parameteridentifikation oder des Parameter-*Fittings* ist es, für die Ergebnisse von numerischer und experimenteller Modalanalyse von Bauteilen sowohl bei den ermittelten Eigenfrequenzen als auch bei den Eigenformen eine möglichst gute Übereinstimmung durch Variation von Parametern im numerischen Modell zu erzielen. Dieses Verfahren wird auch als *Model-Updating* bezeichnet [32]. Dadurch ist es möglich, unbekannte Materialkonstanten bzw. -parameter eines Werkstoffes zu ermitteln.

Direkte Methode

Bei der direkten Methode wird durch eine Anpassung von Massen- und Steifigkeitsmatrix des numerischen Modells eine Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Ergebnissen erreicht. Da die Komponenten dieser Matrizen von mehreren physikalischen Größen (Parametern) abhängen, erhält man damit keine Informationen über die physikalische Bedeutung einer solchen Änderung. Bei jeder Modifikation der Geometrie des Modells ist ein erneutes Updating erforderlich. Der Vorteil dieser direkten Methode ist, dass keine Iterationen notwendig sind und somit die Anpassung in einem Rechenschritt erfolgen kann.

Iterative Methoden

Iterative Methoden zeichnen sich dadurch aus, dass die Parameter, anhand derer ein Updating durchgeführt werden soll, frei gewählt werden können. Somit ist es im Gegensatz zur direkten Methode möglich, durch einen iterativen Updating-Prozess die Materialparameter eines Modells näherungsweise zu ermitteln. Bei Änderungen des Modells, die z.B. nur die Geometrie betreffen, braucht unter der Annahme, dass das richtige Materialgesetz Grundlage der Parameter ist, kein weiteres Updating zu erfolgen.

4.4.1 Korrelation

Während die Eigenfrequenzen aus Rechnung und Messung direkt miteinander verglichen werden können, kann für den Vergleich der Eigenformen u.a. das *Modal Assurance Criterion* (MAC) für einen Vergleich herangezogen werden. Der MAC-Wert wird mit den Vektoren der berechneten Φ_{num} und gemessenen Φ_{exp} Schwingformen ermittelt.

$$MAC(\Phi_{num}, \Phi_{exp}) = \frac{\|\Phi_{num}^T \cdot \Phi_{exp}\|^2}{(\Phi_{num}^T \cdot \Phi_{exp})(\Phi_{exp}^T \cdot \Phi_{num})} \quad (4.33)$$

Zwei identische Vektoren haben den MAC-Wert 1,0. Je größer die Übereinstimmung der Vektoren ist, desto größer ist der MAC-Wert.

Es können auch *Frequency Response Functions* (FRFs) zur Korrelation von numerischen und experimentellen Berechnungen im Zeitbereich herangezogen werden.

Damit ist es möglich, auch Dämpfungsgrößen zu bestimmen. Ein solches Verfahren ist z.B. in DASCOTTE & STROBBE [22] näher beschrieben.

4.4.2 Sensitivitäten

Die Sensitivitäten S_{mn} stellen die Ableitung einer Zielgröße Z_m nach einem Parameter P_n dar. Für die Eigenfrequenz als Zielgröße ($Z = \omega$) ergibt sich die Sensitivitätsmatrix in normierter Form:

$$\tilde{S} = \tilde{S}_{mn} = \omega_m^{-1} \left(\frac{\partial \omega_m}{\partial P_n} \right) P_n \quad (4.34)$$

Abbildung 4.6 zeigt exemplarisch die Sensitivitätsmatrix \tilde{S} für einen Bremsbelag (vgl. Abbildung 4.2) mit transversal isotropen Materialparametern (vgl. Abschnitt 4.3.1.1) für Reibmaterial und Zwischenschicht.

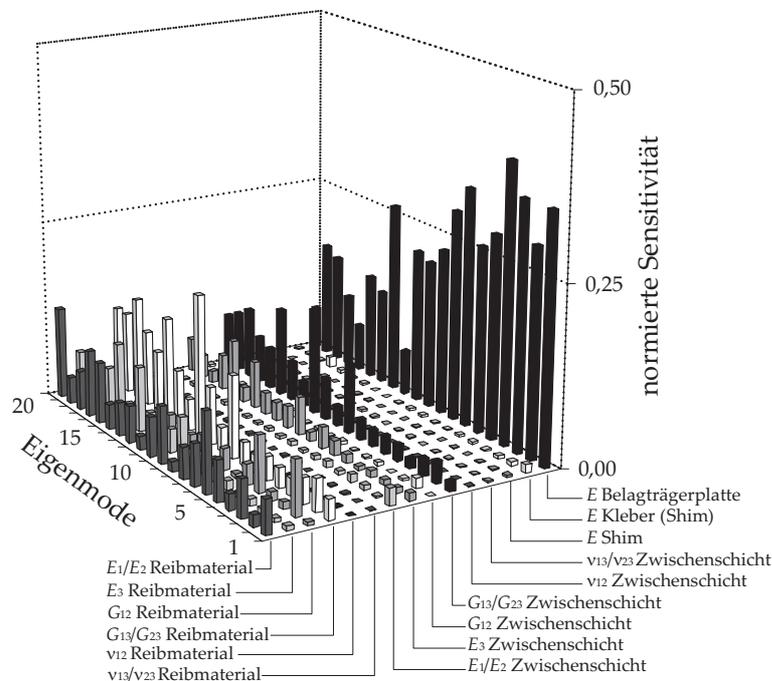


Abbildung 4.6: Sensitivitätsmatrix für einen Bremsbelag mit transversal isotropen Materialparametern

4.4.3 Updating-Prozess

In Abbildung 4.7 ist der *Updating*-Prozess schematisch dargestellt. Die experimentell und durch Schätzwerte numerisch ermittelten Zielgrößen werden korreliert, bevor die Sensitivitäten der Parameter, anhand derer ein Updating erfolgen soll, bestimmt werden. Stimmt die Anzahl der Parameter n mit der Anzahl der Zielgrößen m überein, erhält man über die Invertierung der Sensitivitätsmatrix (4.34) eine neue Parameterschätzung.

$$\Delta P_n = S_{nm}^{-1} \cdot \Delta Z_m \quad (4.35)$$

Mit dieser Schätzung erfolgt dann eine erneute numerische Berechnung der Zielgrößen. In der Regel ist die Anzahl der Zielgrößen (Eigenwerte und Ei-

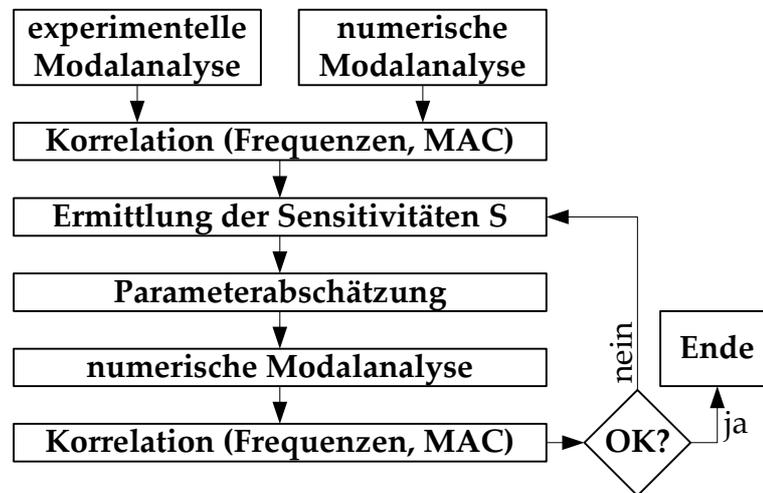


Abbildung 4.7: *Updating*-Prozess

genformen) größer als die Anzahl der Parameter. Eine Invertierung der Matrix in (4.35) ist nicht möglich, so dass Schätzverfahren zur Anwendung kommen müssen.

Bei der Parameterschätzung besteht die Möglichkeit, sowohl die Zielgrößen als auch die Parameter zu wichten. Basiert eine Zielgröße (z.B. MAC-Wert) auf qualitativ weniger guten Messergebnissen, können diese mit einem größeren Streuparameter als bessere Messergebnisse gewichtet werden. Gleichzeitig können bei den Parametern Größen, die weniger streuen (z.B. E-Modul von Stahl), anders gewichtet werden, als welche mit größeren Streubreiten (z.B. Kennwerte des Reibmaterials). Eine solche gewichtete Parameterschätzung kann analog dem Verfahren von BAYES erfolgen [64]. In einem Iterationsprozess werden solange neue Schätzungen ermittelt, bis die Korrelation der aktualisierten Rechnungen mit den Messergebnissen zufriedenstellend ist.

FRISWELL & MOTTERSHEAD [32] gehen näher auf weitere Themen des *Model-Updateings* wie z.B. Eigenvektor-Sensitivitäten oder Korrelation von komplexen Moden ein.

Kapitel 5

Dämpfung

In Abschnitt 2.2.1.4 wurde gezeigt, dass Dämpfung einen besonderen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten von Reibschwingern haben kann. Folglich müssen bei der Simulation von Bremsenquietschen möglichst dem physikalischen Verhalten entsprechende Dämpfungsmodelle abgebildet werden.

In diesem Kapitel werden zunächst verschiedene Dämpfungsmodelle anhand der Bewegungsgleichung eines Einmassenschwingers erklärt und mittels eines Mehrmassenschwingers untereinander verglichen. Hinsichtlich der Anwendung von Dämpfungsmodellen in dem in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Verfahren werden lediglich freie Schwingungen betrachtet. Weiterhin werden die verschiedenen Dämpfungsmechanismen, die in einer Bremse wirken, aufgeführt und deren mögliche Berücksichtigung auf die Simulation von Bremsenquietschen diskutiert.

Der Begriff Dämpfung beschreibt ganz allgemein eine Energieentnahme aus einem schwingenden System. Dabei wird Bewegungsenergie in eine andere Energieform, in der Regel Wärme, umgewandelt. Diese Energieentnahme entspricht einer „positiven Dämpfung“. Von „negativer Dämpfung“ spricht man, wenn ein schwingendes System in jedem Zykel Energie aufnimmt (vgl. Abschnitt 2.1.1.2, [41]).

5.1 Dämpfungsmodelle

5.1.1 Reibungsdämpfung

Bei Reibungsdämpfung, welche nach dem verwendeten Reibungsmodell auch COULOMBSche Dämpfung genannt wird [40], gilt für den Einmassenschwinger aus Abbildung 5.1:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x + \underbrace{\mu F_N \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}}_{F_D} = 0 \quad (5.1)$$

Darin ist die Dämpfungskraft

$$F_D = F_R = \mu F_N \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \quad (5.2)$$

vom Betrag konstant und wirkt stets gegen die Bewegungsrichtung. Bei jeder Richtungsänderung des Schwingers ändert sich das Vorzeichen der Dämpfungskraft sprunghaft. Der Schwinger verhält sich wie ein ungedämpftes System mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (5.3)$$

dessen Gleichgewichtslage bei jedem halben Schwingzykel sprunghaft zwischen

$$\pm x_0 = \frac{|F_R|}{k} \quad (5.4)$$

alterniert (vgl. Abbildung 5.1) und dessen Amplitude pro Zykel um

$$\Delta x = 4x_0 = 4 \frac{|F_R|}{k} \quad (5.5)$$

abnimmt. Das entspricht einer linear abfallenden Amplitude [18, 41].⁸ Die Eigenkreisfrequenz wird in diesem Fall nicht von der Dämpfung beeinflusst.

$$\omega_E^* = \omega_E \quad (5.6)$$

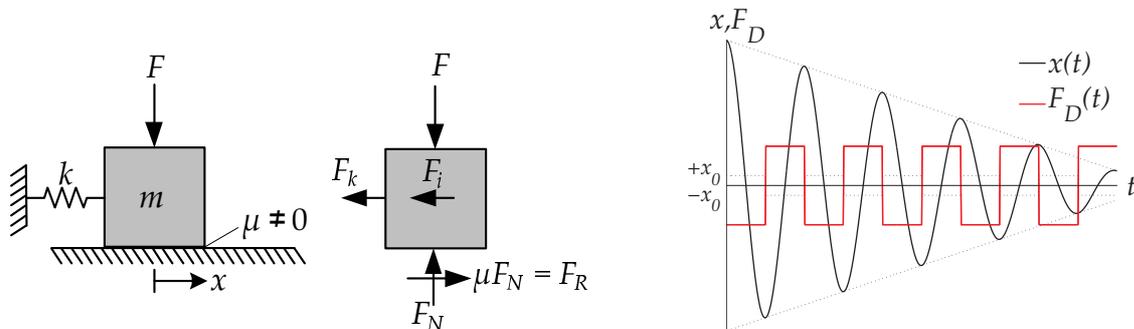


Abbildung 5.1: Reibungsdämpfung

Streng genommen kann hier nicht von einer Eigenkreisfrequenz gesprochen werden, da es sich nur abschnittsweise um eine harmonische Bewegung handelt [34]. Für die Periodendauer bzw. die Länge eines Schwingzykels gilt jedoch wie im Falle einer harmonischen Schwingung die Beziehung [40]:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_E} \quad (5.7)$$

⁸Bei vollständig abgeklungener Schwingung verbleibt der Schwinger bei $\pm x_0$ aus Gleichung (5.4).

5.1.2 Viskose Dämpfung

Von viskoser Dämpfung spricht man bei einem Schwinger mit einem Dämpfer, der eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft erzeugt. Die Bewegungsgleichung ergibt sich mit der Dämpfungskonstante c zu

$$m \cdot \ddot{x} + \underbrace{c \cdot \dot{x}}_{F_D} + k \cdot x = 0. \quad (5.8)$$

Die Lösung dieses Systems erhält man mit dem Exponentialansatz

$$x(t) = \hat{x} \cdot e^{\lambda t} \quad (5.9)$$

durch konjugiert komplex auftretende Eigenwerte $\lambda, \bar{\lambda}$ und Koeffizienten $\hat{x}, \bar{\hat{x}}$ als

$$x(t) = \hat{x} \cdot e^{\lambda t} + \bar{\hat{x}} \cdot e^{\bar{\lambda} t}. \quad (5.10)$$

Darin entspricht der Imaginärteil des Eigenwertes

$$|\Im(\lambda)| = \omega_E^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (5.11)$$

der gedämpften Eigenkreisfrequenz des Systems. Der Realteil

$$\Re(\lambda) = \sigma = -\delta = -\frac{c}{2m} \quad (5.12)$$

beschreibt den exponentiellen Abfall⁹ der Amplitude. Mit dem Satz von MOIVRE [13] kann die Verschiebung $x(t)$ in Gleichung (5.10) mittels der Beziehungen

$$\lambda = -\delta \pm \omega_E^* \quad A = 2|\hat{x}| \quad \alpha = \arctan\left(-\frac{\Im(\hat{x})}{\Re(\hat{x})}\right) \quad (5.13)$$

durch rein reelle Größen dargestellt werden [40]:

$$x(t) = A e^{-\delta t} (\cos \omega_E^* t - \alpha) \quad (5.14)$$

Mit dem Exponentialansatz (5.9) und

$$\dot{x}(t) = \lambda \cdot \hat{x} \cdot e^{\lambda t} = \lambda \cdot x(t) \quad (5.15)$$

ergibt sich die Dämpfungskraft in (5.8) zu

$$F_D = F_c = c \cdot \lambda \cdot x = c (-\delta + \omega_E^* i) \cdot x. \quad (5.16)$$

Sie ist in Phase mit der Geschwindigkeit und bei schwacher Dämpfung $\delta \ll \omega_E$ etwa proportional zur Eigenkreisfrequenz ω_E und Auslenkung x .

Bei dieser Form von Dämpfung fällt die Amplitude der freien Schwingung exponentiell ab (vgl. Abbildung 5.2). Die Eigenkreisfrequenz dieser Schwingung wird durch die Dämpfung beeinflusst. Gleichung (5.11) zeigt, dass sich die Eigenkreisfrequenz ω_E^* mit steigender Dämpfung verringert. Dieser Effekt kann in der Regel bei schwach gedämpften Strukturen vernachlässigt werden.

⁹Im Falle „negativer Dämpfung“ (vgl. Abschnitt 2.1.1.2, [41]) wird ein exponentieller Anstieg beschrieben.

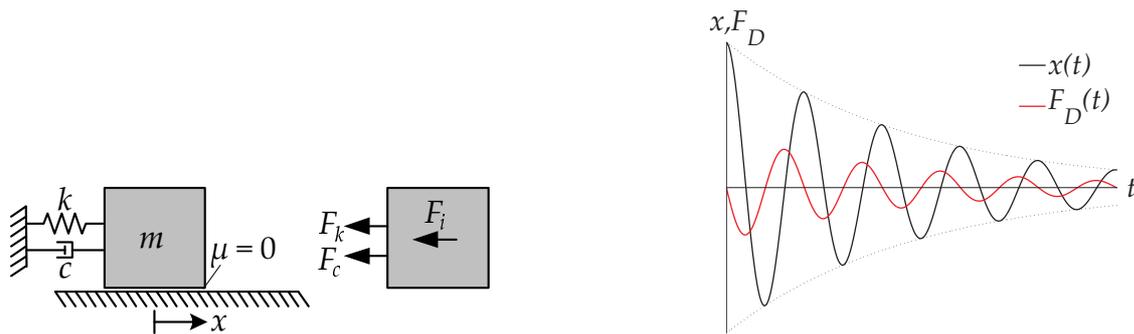


Abbildung 5.2: Einmassenschwinger mit viskoser Dämpfung

RAYLEIGH-Dämpfung

Das RAYLEIGHsche Dämpfungsmodell stellt einen Sonderfall der viskosen Dämpfung dar [40]. Die Dämpferkonstante c aus (5.8) wird hier als Linearkombination von Masse und/oder Steifigkeit gebildet:

$$c = \alpha \cdot m + \beta \cdot k \quad (5.17)$$

Die Dämpfungskraft ergibt sich dabei zu

$$F_D = (\alpha m + \beta k) \lambda \cdot x. \quad (5.18)$$

Für $\beta = 0$ spricht man auch von massenproportionaler bzw. für $\alpha = 0$ von steifigkeitsproportionaler Dämpfung [40].

Die Dämpfungskraft ist wie in Gleichung (5.16) abhängig von der Kreisfrequenz ω_E^* , aber nicht von einer unabhängigen Dämpferkonstante c wie in (5.8), sondern zusätzlich noch von Masse und/oder Steifigkeit über die Konstanten α und β . Die Dämpfung ist wie in (5.8) viskos, also in Phase und proportional zur Geschwindigkeit. Darum hat auch in diesem Fall die Schwingungsamplitude wie in Abbildung 5.2 eine exponentiell abfallende Amplitude. Analog zu (5.11) wird die Eigenkreisfrequenz der Schwingung durch die Dämpfung gemindert.

5.1.3 Strukturelle/hysteretische Dämpfung

Beim strukturellen oder auch hysteretischen Dämpfungsmodell hat die Bewegungsgleichung keinen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungsterm [34]. Die Dämpfung wird über eine komplexe Steifigkeit der Feder $\hat{k} = k(1 \pm i\eta)$ durch den Verlustfaktor η abgebildet [40]. Dieses wird auch als *Korrespondenzprinzip* bezeichnet [93]:

$$m \cdot \ddot{x} + k(1 \pm i\eta) \cdot x = 0 \quad (5.19)$$

Mit dem Exponentialansatz (5.9) erhält man auch hier komplexe Eigenwerte λ . Wie in Abschnitt 5.1.2 entspricht der Imaginärteil des Eigenwertes der Eigenkreisfrequenz des gedämpften Schwingers,

$$|\Im(\lambda)| = \omega_E^* = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \eta^2}}{2}} \quad (5.20)$$

und der Realteil dem Koeffizienten des exponentiellen Amplitudenabfalls,

$$\Re(\lambda) = -\delta = -\sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 + \eta^2}}{2}}. \quad (5.21)$$

In diesem Fall entsteht eine Dämpfungskraft, die unabhängig vom Dämpfungsgrad immer genau in Phase mit der Geschwindigkeit \dot{x} ist. Sie ist über die Konstante η proportional zur Steifigkeit k , jedoch im Gegensatz zu den oben beschriebenen Dämpfungsmodellen (5.8) und (5.17) nicht frequenzabhängig:

$$F_D(t) = \Im(\hat{F}_k) = \eta k i \cdot \hat{x} \quad (5.22)$$

Die Schwingungsamplitude hat auch in dieser Lösung einen exponentiell abfallenden Verlauf wie in Abbildung 5.3 mit dem Unterschied, dass die Kreisfrequenz der abklingenden Schwingung ω_E^* mit steigendem Verlustfaktor η größer wird. Das erkennt man am Imaginärteil des Eigenwertes in Gleichung (5.20). Auch das ist bei schwach gedämpften Strukturen in der Regel vernachlässigbar.

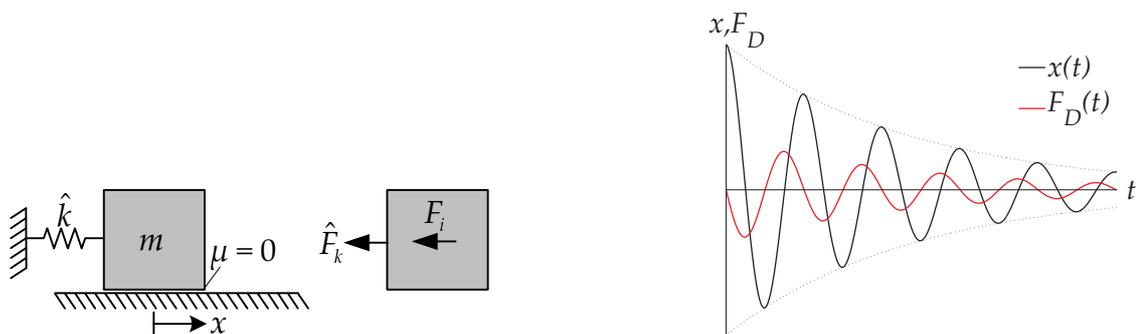


Abbildung 5.3: Einmassenschwinger mit viskoser Dämpfung

5.1.4 Vergleich der Dämpfungsmodelle

Mit Ausnahme der Reibungsdämpfung (Abschnitt 5.1.1) unterscheiden sich die in Abschnitt 5.1 beschriebenen Dämpfungsmodelle bezogen auf die Lösung freier Schwingungen von Einfreiheitsgradsystemen nicht. Die verschiedenen Parameter c , α , β und η können so gewählt werden, dass das Schwingungsverhalten identisch ist¹⁰. Die Zusammenhänge sind in Tabelle 5.1 aufgeführt.

Strukturen mit mehreren Freiheitsgraden

Werden die im vorangegangenen Abschnitt erläuterten Dämpfungsmodelle auf Systeme mit mehreren Freiheitsgraden angewendet, bestehen Unterschiede in den Eigenlösungen. Je nach Dämpfungsmodell entstehen unterschiedliche Dämpfungsmatrizen. Dabei sind insbesondere Systeme mit ungleichmäßig

¹⁰Mit Ausnahme der Frequenz bei struktureller Dämpfung

	c	α	β	η
c		αm	βk	$\sqrt{2mk(\sqrt{1+\eta^2}-1)}$
α	$\frac{c}{m}$		$\beta \frac{k}{m}$	$\sqrt{\frac{2k}{m}(\sqrt{1+\eta^2}-1)}$
β	$\frac{c}{k}$	$\alpha \frac{m}{k}$		$\sqrt{\frac{2m}{k}(\sqrt{1+\eta^2}-1)}$
η	$\sqrt{\left(1+\frac{c^2}{2km}\right)^2-1}$	$\sqrt{\left(1+\frac{\alpha^2 m}{2k}\right)^2-1}$	$\sqrt{\left(1+\frac{\beta^2 k}{2m}\right)^2-1}$	

Tabelle 5.1: Beziehungen zwischen den Dämpfungsgrößen bei den verschiedenen Dämpfungsmodellen

verteilter (diskreter) Dämpfung oder diskretisierte, kontinuierliche Systeme von Interesse. Letztere lassen sich durch eine endliche Zahl von Einzelmassen und Spannungs-Dehnungs-Beziehungen untereinander darstellen [48]. Die System- bzw. Materialdämpfung kann dabei entweder durch gleichmäßig verteilt angeordnete, einzelne viskose Dämpfer oder durch die Verwendung von komplexen Federn berücksichtigt werden.

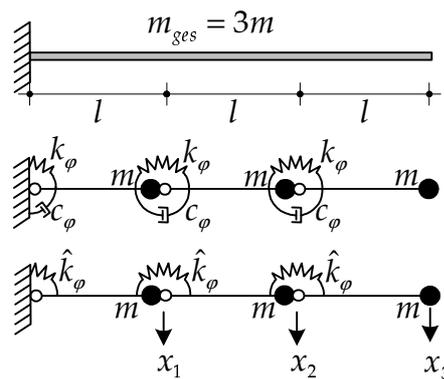


Abbildung 5.4: Diskretisierter Kragarm mit drei Freiheitsgraden

Zur Veranschaulichung wird der Kragarm in Abbildung 5.4 durch drei Freiheitsgrade diskretisiert und die Materialdämpfung in Form von diskreten Dämpfern bzw. komplexen Federn abgebildet. Entsprechend des verwendeten Dämpfungsmodells ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen:

viskose Dämpfung

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \frac{c_\varphi}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \frac{k_\varphi}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

massenproportionale Dämpfung

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \alpha m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \frac{k_\varphi}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

steifigkeitsproportionale Dämpfung

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \beta \frac{k_\varphi}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \frac{k_\varphi}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

strukturelle Dämpfung

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \frac{k_\varphi}{l^2} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} (1 \pm i\eta) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

Mehrfreiheitsgradsysteme können modal zerlegt und deren entkoppelte Gleichungen mittels der Lösung des Einmassenschwingers gelöst werden [17, 41]. Bei der Zerlegung wird jeder Mode eine modale Masse, modale Steifigkeit und eine modale Dämpfung zugeordnet.

Im Falle einer beliebig besetzten Dämpfungsmatrix kann diese durch den Ansatz reeller Moden und Eigenwerte nicht entkoppelt werden. Dazu ist ein komplexer Ansatz zu wählen und folglich ein komplexes Gleichungssystem zu lösen.

Beim RAYLEIGH-Dämpfungsmodell ist die Dämpfungsmatrix nicht beliebig besetzt. Die Gleichungssysteme können durch eine reelle modale Transformation entkoppelt werden. Beim strukturellen Dämpfungsmodell ist aufgrund der komplexen Steifigkeit unbedingt ein komplexes Gleichungssystem zu lösen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden alle Systeme mit dem komplexen Ansatz (5.9) modal zerlegt. Darin sind außer den Eigenwerten λ auch die Eigenvektoren Φ des Systems

$$\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

wie auch die generalisierten (modalen) Größen

$$\begin{aligned} \tilde{M}_n &= \Phi_n^T \mathbf{M} \Phi_n \\ \tilde{C}_n &= \Phi_n^T \mathbf{C} \Phi_n \\ \tilde{K}_n &= \Phi_n^T \mathbf{K} \Phi_n \end{aligned} \quad (5.28)$$

ebenfalls komplex [58, 7].

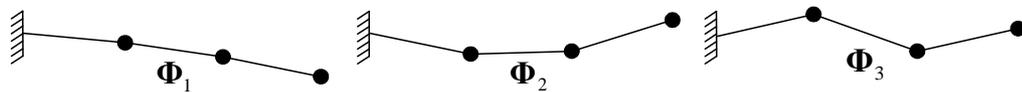


Abbildung 5.5: Eigenmoden des Kragarms mit drei Freiheitsgraden

Die durch die modale Zerlegung für das jeweilige Einfreiheitsgradsystem zugeordnete modale Dämpfung wird in der Regel durch den Anteil der kritischen Dämpfung des jeweiligen modalen Systems beschrieben. Diese kann z.B. durch den Dämpfungsgrad ζ ausgedrückt werden und ergibt sich aus den komplexen Eigenwerten

$$\lambda = \sigma \pm \omega i \quad (5.29)$$

zu [48]:

$$\zeta_n = \frac{-\Re(\lambda_n)}{|\Im(\lambda_n)|} = -\frac{\sigma}{|\omega|} \quad (5.30)$$

Zum Vergleich der Dämpfungsmodelle aus (5.23) bis (5.26) wird für das viskose Dämpfungsmodell eine Dämpfung c angenommen und die Konstanten α , β und η der übrigen Dämpfungsmodelle so gewählt, dass die modale Dämpfung bei der zweiten Eigenmode für alle Modelle gleich ist. Mit den Beziehungen aus Tabelle 5.1 und den generalisierten Größen (5.28) aus der zweiten Lösung des Systems mit viskoser Dämpfung ergeben sich die Dämpfungsgrößen:

$$\alpha = \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{M}_2} \quad \beta = \frac{\tilde{C}_2}{\tilde{K}_2} \quad \eta = \sqrt{\left(1 + \frac{\tilde{C}_2^2}{2\tilde{K}_2\tilde{M}_2}\right)^2 - 1} \quad (5.31)$$

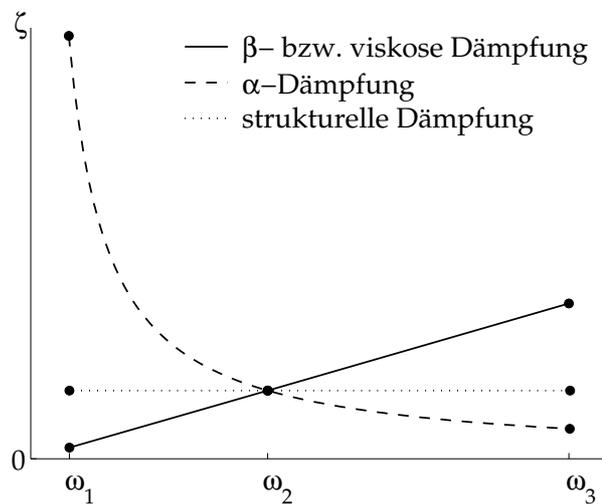


Abbildung 5.6: Vergleich der Dämpfungsmodelle

Abbildung 5.6 zeigt das Verhältnis der modalen Dämpfungsgrade aller vier Dämpfungsmodelle zueinander. Viskose und β -Dämpfung sind in diesem Fall gleich, was man auch schon in den Dämpfungsmatrizen in (5.23) und (5.25) erkennen kann. Während bei der strukturellen Dämpfung der Verlauf der Dämpfungsgrade über die Frequenz konstant ist, nimmt er bei viskoser bzw. β -Dämpfung linear zu und bei α -Dämpfung invers-proportional zur Frequenz ab.

5.1.5 Modale Dämpfung

In der Praxis werden die Matrizen der Bewegungsgleichungen oft ganz ohne Dämpfung aufgestellt und den modal zerlegten Systemen jeweils eine modale Dämpfung ζ_n zugeordnet. Diese modalen Dämpfungen sind aber in der Regel nicht bekannt und müssen geschätzt werden. Dabei wird oft für alle Moden

ein Wert verwendet. Dieses ist aber nur möglich, wenn die Dämpfung im System gleich verteilt ist. Sind z.B. nur einige wenige Freiheitsgrade im System gedämpft, wirkt sich das nicht auf alle Moden aus (vgl. Abbildung 5.7, [7]).

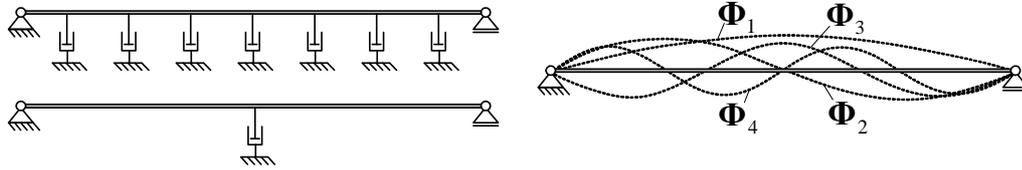


Abbildung 5.7: Modale Dämpfung am Einfeldbalken

In der in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Stabilitätsanalyse sind die modalen Dämpfungen das Ergebnis. Durch eine komplexe Modalanalyse werden die modalen Dämpfungen jeder Eigenlösung des Systems ermittelt. Existieren modale Dämpfungen mit negativem Vorzeichen, ist das System instabil.

5.2 Dämpfungsmechanismen

Im Allgemeinen kann man zwischen externer und interner Dämpfung unterscheiden [33]. Bei externer Dämpfung greifen äußere Kräfte auf das Schwingungssystem, die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt sind. Durch die damit geleistete Arbeit wird dem System Energie entzogen. Beispiele für solche Kräfte sind externe Reibkräfte, Luftwiderstand oder diskrete (Visko-) Dämpfer.

Bei interner Dämpfung wird durch Hysterese oder innerer (Bauteil-) Reibung ebenfalls Energie dissipiert.

5.2.1 Reibungsdämpfung

Wie bereits erwähnt kann Reibungsdämpfung als innere oder äußere Dämpfung auftreten. Reibt beispielsweise eine Komponente des Schwingungssystems an einer Systemgrenze, wirkt eine äußere Reibkraft. Reiben zwei Komponenten eines Schwingungssystems untereinander, wie z.B. an einer Fügestelle, wirkt eine innere Reibkraft [67, 19].

Obwohl dieser Dämpfungsmechanismus durchaus als innere Dämpfung zwischen verschiedenen Komponenten in selbsterregten (Bremsen-) Systemen vorkommt, wird er in der in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Simulationmethode nicht berücksichtigt. Durch die Signumfunktion in Gleichung (5.1) ist dieser Effekt nichtlinear und kann deshalb nicht in einer linearen Stabilitätsbetrachtung abgebildet werden.

Reibung bei bewegter Unterlage

Anders ist das für den Fall, wenn sich die Unterlage des Reibschwingers mit der Geschwindigkeit v_B bewegt (vgl. Abbildung 5.8). Dann hängt die Richtung der

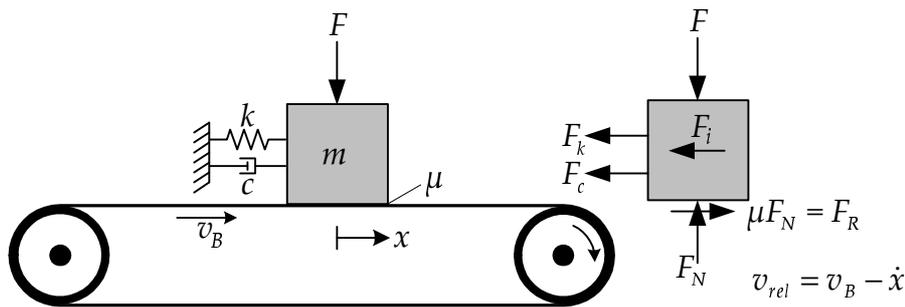


Abbildung 5.8: Reibschwinger mit einem Freiheitsgrad

Reibkraft F_R (vgl. Abschnitt 5.2) von der Relativgeschwindigkeit $v_{rel} = v_B - \dot{x}$ zwischen Schwinger und Unterlage ab. Für den eindimensionalen Fall gilt:

$$F_R = \mu F_N \frac{v_{rel}}{|v_{rel}|} \quad (5.32)$$

Damit gibt es für ein geschwindigkeitsunabhängiges Reibgesetz ($\frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} = 0$) zwei Möglichkeiten. Entweder die Geschwindigkeit des Schwingers \dot{x} ist größer oder kleiner als die der Unterlage. Im ersten Fall wirkt die Reibkraft F_R solange immer gegen die Bewegungsrichtung, bis $\dot{x} \leq v_B$ ist und hat somit einen dämpfenden Effekt (vgl. Abschnitt 5.1.1).

Im Fall $\dot{x} \leq v_B$ ist die Reibkraft unabhängig von der Bewegung des Schwingers. Sie wirkt dann immer in die gleiche Richtung und ruft keinen dämpfenden Effekt hervor.

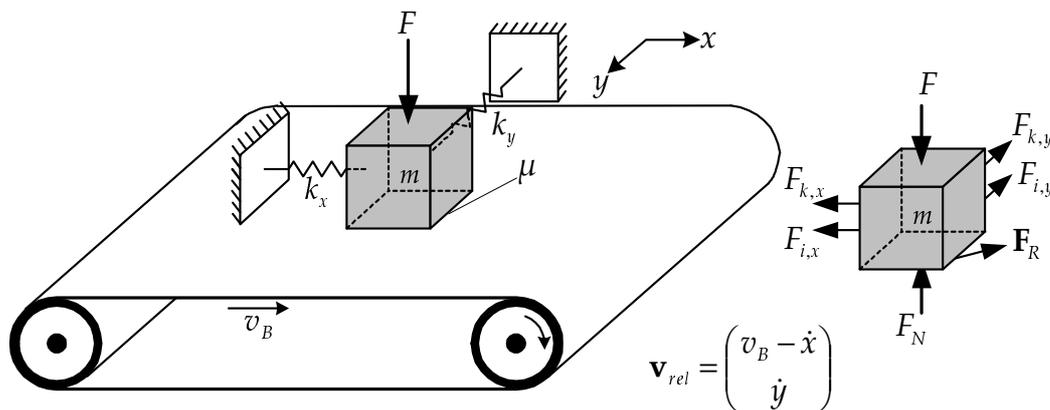


Abbildung 5.9: Reibschwinger mit zwei Freiheitsgraden

Hat der Schwinger wie in dem Beispiel aus Abbildung 5.9 auch eine Komponente y normal zur Geschwindigkeitsrichtung der Unterlage, gilt für die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{R_x} \\ F_{R_y} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Darin ist der Vektor der Reibkraft mit

$$\dot{x}_{rel} = v_B - \dot{x} \quad (5.34)$$

$$|\mathbf{v}_{rel}| = \sqrt{\dot{x}_{rel}^2 + \dot{y}^2} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{v}_{rel} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{rel} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

nichtlinear [82].

$$\begin{pmatrix} F_{R,x} \\ F_{R,y} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_R = \mu F_N \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|} = \frac{\mu F_N}{\sqrt{\dot{x}_{rel}^2 + \dot{y}^2}} \begin{pmatrix} \dot{x}_{rel} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

Zunächst wird dessen x -Komponente mittels einer TAYLOR-Entwicklung unter Verwendung des ersten Gliedes um das quasi-statische Gleichgewicht linearisiert:

$$F_{R,x,lin} = F_{R,x}|_{equ} + \left. \frac{\partial F_{R,x}}{\partial \dot{x}_{rel}} \right|_{equ} (-\dot{x}) + \left. \frac{\partial F_{R,x}}{\partial \dot{y}} \right|_{equ} \dot{y} \quad (5.38)$$

Zusammen mit den quasi-statischen Geschwindigkeiten

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{rel} \\ \dot{y} \end{pmatrix}_{equ} = \begin{pmatrix} v_B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

und den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F_{R,x}}{\partial \dot{x}_{rel}} = \frac{\mu F_N}{\sqrt{\dot{x}_{rel}^2 + \dot{y}^2}} - \frac{\mu F_N \cdot \dot{x}_{rel}^2}{\sqrt{(\dot{x}_{rel}^2 + \dot{y}^2)^3}}, \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial F_{R,x}}{\partial \dot{y}} = -\frac{\mu F_N \cdot \dot{x}_{rel} \cdot \dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}_{rel}^2 + \dot{y}^2)^3}} \quad (5.41)$$

$$(5.42)$$

vereinfacht sich die x -Komponente der Reibkraft zu

$$F_{R,x,lin} = \mu F_N. \quad (5.43)$$

Mit der TAYLOR-Reihe der y -Komponente von (5.37)

$$F_{R,y,lin} = F_{R,y}|_{equ} + \left. \frac{\partial F_{R,y}}{\partial \dot{x}_{rel}} \right|_{equ} (-\dot{x}) + \left. \frac{\partial F_{R,y}}{\partial \dot{y}} \right|_{equ} \dot{y}, \quad (5.44)$$

den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F_{R,y}}{\partial \dot{x}_{rel}} = -\frac{\mu F_N \cdot \dot{x}_{rel} \cdot \dot{y}}{\sqrt{(\dot{x}_{rel}^2 + \dot{y}^2)^3}}, \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial F_{R,y}}{\partial \dot{y}} = \frac{\mu F_N}{\sqrt{\dot{x}_{rel}^2 + \dot{y}^2}} - \frac{\mu F_N \cdot \dot{y}^2}{\sqrt{(\dot{x}_{rel}^2 + \dot{y}^2)^3}} \quad (5.46)$$

sowie den quasi-statischen Geschwindigkeiten (5.39) ergibt die y -Komponente der Reibkraft aus (5.37)

$$F_{R,y,lin} = -\frac{\mu F_N}{v_B} \dot{y}. \quad (5.47)$$

Die Reibkraft ist also in x -Richtung konstant und in y -Richtung geschwindigkeitsabhängig. Damit kann das System (5.33) mit einem viskosen Dämpfungsteil geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu F_N}{v_B} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu F_N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

Durch die Linearisierung muss $v_B \geq \dot{x}$ sein. Die Reibkraft in x -Richtung ändert nicht das Vorzeichen und hat damit keinen dämpfenden Effekt. Die linearisierte Reibkraft in y -Richtung hingegen ist geschwindigkeitsproportional und entspricht damit einer viskosen Dämpfung. Diese viskose Dämpfungskraft ist proportional zur Reibnormalkraft F_N und invers proportional zur Geschwindigkeit der Unterlage v_B . Dieser Effekt kann also mit einem viskosen Dämpfungsmodell (vgl. Abschnitt 5.1.2) in der linearen Stabilitätsanalyse (vgl. Abschnitt 3.2.2) abgebildet werden.

5.2.2 Materialdämpfung

Materialdämpfung entsteht durch das Hystereseverhalten von Materialien. Ganz allgemein bedeutet dies, dass sich die Spannungen nicht linear zu den Dehnungen verhalten. Das kann z.B. durch das Auftreten von plastischen Verformungen oder durch Reibungskräfte zwischen den Molekülen hervorgerufen werden [40].

In einer Bremse tragen hauptsächlich die Materialien des Belagmaterials und ggf. der Zwischenschicht sowie die der Klebeschicht des Dämpfungsbleches (siehe Abschnitt 5.2.3) zur Systemdämpfung bei. Die übrigen Komponenten aus Grauguss, Stahl und Aluminium haben dagegen eine vergleichsweise geringe Dämpfung (vgl. Abschnitt 5.3.2).

Für den ebenen Spannungszustand kann ein allgemeines Materialgesetz mit

$$\dots + p_2 \ddot{\sigma} + p_1 \dot{\sigma} + \sigma = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} + \dots \quad (5.49)$$

angegeben werden [48]. Darin können die Koeffizienten p_n und q_n von verschiedenen Parametern wie z.B. Frequenz und Temperatur abhängen.

FLINT et al. [31] ermitteln das Dämpfungsverhalten einer Dämpfungsblech-Klebeschicht und passen es an verschiedene Dämpfungsmodelle an. Bei Annahme eines viskoelastischen Materialgesetzes

$$\sigma = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} \quad (5.50)$$

in einem ebenen Schubspannungszustand

$$\tau = G'(\omega) \gamma + G''(\omega) \dot{\gamma} \quad (5.51)$$

mit linear von der Frequenz abhängigem Speichermodul $G'(\omega)$ und ebenfalls linear von der Frequenz abhängigem Verlustmodul $G''(\omega)$ konnte eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung erzielt werden. Bei Verwendung eines RAYLEIGH-Dämpfungsmodells konnte die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung nicht annähernd korrekt dargestellt werden. Durch eine Anpassung an das strukturelle Dämpfungsmodell, indem weder Schubmodul noch das Dämpfungsverhalten frequenzabhängig sind, wurde zumindest für die Dämpfung eine zufriedenstellende Übereinstimmung in einem breiteren Frequenzbereich erzielt.

In der in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen linearen Stabilitätsanalyse können keine beliebigen, in Versuchen ermittelten, Hystereseverhalten berücksichtigt werden. Es können lediglich zwei spezielle Fälle des Materialgesetzes aus (5.49) zur Anwendung kommen, die im Folgenden anhand eines ebenen Spannungszustandes erläutert werden.

Im ersten Fall hängt die Spannung von Dehnung und Dehnungsgeschwindigkeit ab:

$$\sigma = E' \cdot \varepsilon + E'' \cdot \dot{\varepsilon} \quad (5.52)$$

Speicher- und Verlustmodul sind aber, entgegen des allgemeinen viskoelastischen Materialgesetzes, nicht frequenzabhängig, sondern konstant.

Unter Annahme einer harmonischen Anregung mit der Kreisfrequenz Ω gilt für die Dehnungen:

$$\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon} e^{i\Omega t} + \bar{\hat{\varepsilon}} e^{-i\Omega t} \quad (5.53)$$

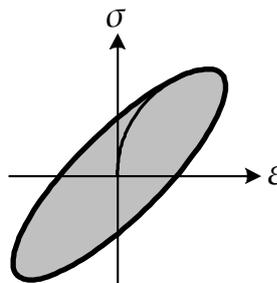


Abbildung 5.10: Hysteretisches Materialverhalten bei harmonischem Spannungs- und Dehnungsverlauf

Die Dämpfungsarbeit pro Zyklus bezogen auf ein Volumenelement kann mit (5.53) und (5.52) als

$$A_{Dv} = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \sigma \dot{\varepsilon} dt = \pi E'' \Omega \hat{\varepsilon}^2 \quad (5.54)$$

angegeben werden. Sie entspricht der Fläche der Hysteresekurve (vgl. Abbildung 5.10) und ist frequenzabhängig. Dieses Materialverhalten stimmt mit dem

viskosen Dämpfungsmodell aus Abschnitt 5.1.2 überein.

Im zweiten Fall wird ein komplexer E-Modul mit dem Verlustfaktor η

$$\hat{E} = E (1 \pm \eta i) \quad (5.55)$$

definiert. Mit dem daraus resultierenden Materialgesetz

$$\sigma = \hat{E} \cdot \varepsilon = E (1 \pm \eta i) \varepsilon \quad (5.56)$$

und dem Ansatz (5.53) ergibt sich für die Dämpfungsarbeit eines Volumenelementes pro Zyklus

$$A_{D_V} = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \sigma \dot{\varepsilon} dt = \pi \eta E \hat{\varepsilon}^2, \quad (5.57)$$

welche in diesem Fall frequenzunabhängig ist.

Ein solches Materialverhalten entspricht dem strukturellen Dämpfungsmodell aus Abschnitt 5.1.3.

Materialdämpfung in der Stabilitätsanalyse

Bei der in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Stabilitätsanalyse wird eine lineare, komplexe Zerlegung des untersuchten Systems in den Frequenzbereich vorgenommen. Damit sind die Dämpfungsmodelle, die darin verwendet werden können, auf die in den Abschnitten 5.1.2 bis 5.1.3 beschriebenen Dämpfungsmodelle oder eine Kombination daraus beschränkt. Es ist also nicht möglich, beliebige für beteiligte Materialien experimentell ermittelte Frequenz-Dämpfungsbeziehungen zu berücksichtigen.

Wird nur ein enger Frequenzbereich oder eine diskrete Frequenz betrachtet, ist ein Abgleich möglich. Für die Untersuchung eines größeren Frequenzbereiches ist es in der Regel notwendig, die Dämpfung im Modell für verschiedene Bereiche getrennt abzugleichen und die Stabilitätsanalyse für diese Bereiche getrennt durchzuführen. Da diese Berechnungen aber recht aufwendig sind, ist eine Unterteilung in viele Frequenzbereiche zu vermeiden. Für den Fall, dass weitere Parameter, wie z.B. der E- bzw. Speichermodul E' ebenfalls frequenzabhängig sind, ist eine Aufteilung in Frequenzbereiche unvermeidbar. ELVENKEMPER et al. [26] führen dieses an einem Bremsbelag durch.

Eine Verwendung von nur einem Dämpfungsmodell führt in der Regel zu keiner besonders guten Übereinstimmung von Berechnungs- und Versuchsergebnissen in einem breiteren Frequenzspektrum. Werden alle drei Modelle aus den Abschnitten 5.1.2 bis 5.1.3 verwendet, muss für n , bei der Kreisfrequenz ω_n experimentell ermittelten, modale Dämpfungen D_n das Minimierungsproblem

$$\min_{\alpha, \beta, \eta} \sum_n \left(\frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\omega_n \beta}{2} + \frac{\eta}{2} - D_n \right)^2 \quad (5.58)$$

gelöst werden. In Abbildung 5.11 sind die aus einer *Frequency-Response-Analyse* ermittelten modalen Dämpfungen einer Reibmaterialprobe aufgeführt. Die modalen Dämpfungen wurden darin über die Halbwertsbreite¹¹ aus den Peaks der Übertragungsfunktion berechnet. In der rechten Grafik ist der Dämpfungsverlauf über die Frequenz mittels des Minimierungsproblems (5.58) durch ein *Least-Square-Verfahren* gelöst und damit die Parameter α , β und η bestimmt. In der linken Grafik wurde dieses nur unter Berücksichtigung der RAYLEIGH-Dämpfung (Parameter α und β) durchgeführt. Es ist zu erkennen, dass bei einer Anpassung unter ausschließlicher Verwendung der RAYLEIGH-Parameter ein größerer Fehler verbleibt, als wenn auch die strukturelle Dämpfung hinzugezogen wird.

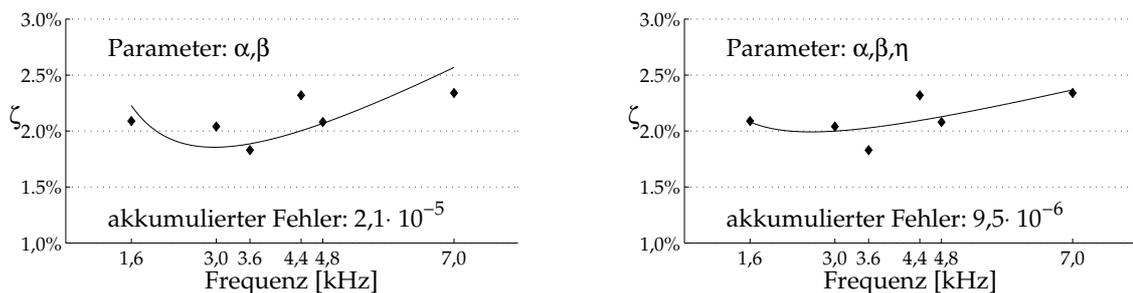


Abbildung 5.11: Modale Dämpfungen einer Reibmaterialprobe unter Berücksichtigung von RAYLEIGH-Dämpfung (links) und zusätzlich struktureller Dämpfung (rechts)

Wie bereits in Abschnitt 5.2.2 erwähnt, passen FLINT et al. [31] das viskoelastische Materialverhalten einer Dämpfungsblech-Klebeschicht sowohl an das RAYLEIGH- als auch an das hysteretische Dämpfungsmodell an und stellen fest, dass RAYLEIGHdämpfung nicht geeignet ist, um das frequenzabhängige Dämpfungsverhalten zufriedenstellend abzubilden. Unter Hinzunahme des Parameters η kann dieses deutlich verbessert werden.

5.2.3 Constrained-Layer-Dämpfung

Das häufig auf die Rückseite der Belagträgerplatte geklebte Dämpfungsblech (*Shim*) funktioniert durch eine spezielle Form der Materialdämpfung. Die relativ weiche, hoch dämpfende Klebeschicht, mit der dieses dünne Blech auf dem Bremsbelag befestigt wird, wird bei den Biegeformen des Belages starken Schubdeformationen ausgesetzt (vgl. Abbildung 5.12, [23]). Durch das viskoelastische bzw. hysteretische Verhalten des Klebermaterials können Biegeformen des Belages effektiv gedämpft werden. Es ist auch möglich, das Dämpfungsblech als „Sandwich“ auszuführen und den Dämpfungseffekt durch mehrere Blech- und Klebeschichten weiter zu erhöhen.

Eine Abschätzung des Verlustfaktors eines solchen aufgeklebten Bleches findet man in CREMER & HECKL [19]. FLINT [30] und FLINT et al. [31] bilden das *Constraint Layer Damping* anhand von mehreren Theorien ab und vergleichen die Er-

¹¹siehe z.B. [23]

gebnisse miteinander.

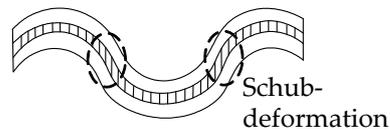


Abbildung 5.12: Schubverformungen einer weichen Schicht zwischen zwei Metallschichten [23]

Dieser Dämpfungseffekt ist in vielen Fällen entscheidend für die Behebung von Geräuschproblemen an Bremsen. Deshalb wird er durch Verwendung von Materialdämpfung des Klebermaterials in der in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Stabilitätsanalyse berücksichtigt. Dort wird sowohl die Blech- als auch die Klebeschicht des Dämpfungsbleches im FE-Modell abgebildet.

5.2.4 Abstrahldämpfung

Unter Abstrahldämpfung versteht man den Effekt, dass Energie an den Systemgrenzen dissipiert wird. Sich ausbreitende Wellen, die nicht an den Systemgrenzen reflektiert werden, bewirken eine Energieabfuhr.

Durch die FE-Modellierung einer Bremse wird eine strukturelle Systemgrenze festgelegt. Das ist die Stelle, an der das FE-Modell gelagert bzw. die Bremse an weiteren Fahrzeugkomponenten befestigt ist.

Eine weitere Systemgrenze stellt der Übergang zur umgebenden Luft dar. Das Bremsgeräusch ist deshalb wahrnehmbar, weil die schwingende Struktur Wellen in die umgebende Luft abstrahlt.

5.3 Quantifizierung der Dämpfungsmechanismen

Außer der Wirkungsweise der verschiedenen Dämpfungsmechanismen in einer Bremse ist eine Abschätzung über deren Beiträge zu der gesamten Systemdämpfung von Interesse. In diesem Abschnitt sollen die zuvor vorgestellten Mechanismen anhand von konkreten Zahlenwerten quantifiziert und untereinander verglichen werden.

Ein Vergleich ist über die während eines Schwingungszykels dissipierte Dämpfungsenergie möglich. Dazu werden die Amplituden von Geschwindigkeit und Verschiebung der Schwingung benötigt.

Im Zuge von Messungen mittels Laservibrometrie [24] an quietschenden Bremsen wurden maximale Geschwindigkeitsamplituden im Bereich 0,1 mm/s bis etwa 100 mm/s bei Frequenzen von 1 bis 15 kHz gemessen. Damit können für den Zustand einer quietschenden Bremse, zusammen mit einem mittleren Reibwert μ , einem typischen Bremsdruck p , der Kolbenfläche A_K und einer tangentialen

Scheibengeschwindigkeit v_B an der Reibkontaktstelle, die etwa 10 km/h Fahrzeuggeschwindigkeit entspricht, die charakteristischen Werte

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ch} &= 1,0 \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}} \right], & f &= 5000 \text{ [Hz]}, & p &= 0,2 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right], \\ \mu &= 0,5 \text{ [-]}, & A_K &= 3000 \text{ [mm}^2\text{]}, & v_B &= 1,0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \end{aligned} \quad (5.59)$$

herangezogen werden.

5.3.1 Reibungsdämpfung

Existiert bei einer Scheibenbewegung eine radiale Bewegungskomponente, leistet die entstehende Reibkraft (5.47) in einem Schwingungszykel die Dämpfungsarbeit

$$A_{D_{FR}} = 2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_R \dot{y} dt = 2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\mu p A}{v_B} \dot{y}^2 dt. \quad (5.60)$$

Da keine Messgrößen für die radiale Schnelle \dot{y} vorliegen, wird zum Vergleich für die maximale Amplitude der charakteristische Wert \dot{x}_{ch} aus (5.59) verwendet. Weiter wird angenommen, dass eine harmonische, sinusförmige Schwingung vorliegt. Der abklingende Charakter wird dabei vernachlässigt.

Aus (5.60) und (5.59) ergibt sich ein Wert für die Reibungsdämpfungsarbeit pro Schwingungszykel von

$$A_{D_{FR}} \approx 1 \times 10^{-7} \text{ J}. \quad (5.61)$$

5.3.2 Materialdämpfung

Unter Verwendung des strukturellen Dämpfungsmodells, in dem die Materialdämpfung über den Verlustfaktor η beschrieben wird (vgl. Abschnitt 5.2.2), ist die geleistete Materialdämpfungsarbeit A_{DM} während einer Periode einer harmonischen Bewegung proportional zu der maximalen Formänderungsenergie U_{max} :

$$A_{DM} = \eta U_{max} \quad (5.62)$$

Die maximale Formänderungsenergiegedichte in einem linear-elastischen Spannungs-/Dehnungszustand σ, ε ist in kartesischen Koordinaten durch

$$U_V = \frac{1}{2} \varepsilon_{ki} \sigma_{kj} \quad (5.63)$$

gegeben [9]. Eine große Formänderungsenergie und damit eine große Dämpfungsarbeit entsteht also durch große Verformungen (Dehnungen) bzw. durch große Spannungen.

Durch einen Vergleich der Verhältnisse modaler Dämpfungsarbeiten von verschiedenen Materialien der Bremse können die Dämpfungsbeiträge der unterschiedlichen Komponenten relativ zueinander bestimmt werden. Die gesamte

Formänderungsenergie einer Mode Φ^n kann über die Beziehung

$$U_{\Phi^n} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_{ki}^n \sigma_{kj}^n dV \quad (5.64)$$

ermittelt werden. Die Formänderungsenergie einer Materialkomponente der Bremse erhält man, wenn nur über das jeweilige Materialvolumen V_{Mat} integriert wird:

$$U_{\Phi^n_{Mat}} = \frac{1}{2} \int_{V_{Mat}} \varepsilon_{ki}^n \sigma_{kj}^n dV_{Mat} \quad (5.65)$$

Durch die proportionale Beziehung zwischen Dämpfungsarbeit und Formänderungsenergie (5.62) erhält man mit dem Verhältnis

$$\epsilon_{Mat}^n = \frac{\eta_{Mat} \cdot U_{\Phi^n_{Mat}}}{\sum_{Mat} \eta_{Mat} \cdot U_{\Phi^n_{Mat}}} \quad (5.66)$$

eine Größe, die den Anteil der Dämpfungsarbeit des Materials Mat bezogen auf die gesamte Dämpfungsarbeit der Mode Φ^n beschreibt.

Die Verlustfaktoren der Materialien (vgl. Tabelle 5.2) sind für Grauguss, Stahl und Aluminium der Literatur entnommen [65]. Für das Reibmaterial, die Zwischenschicht und den Kleber wurden die Verlustfaktoren in einer Parameteridentifikation (vgl. Abschnitt 4.4, [36]) ermittelt.

Material	η_{Mat}
Stahl	0,0001
Aluminium	0,0001
Grauguss (GJL/GJS)	0,001
Reibmaterial/ Zwischenschicht	0,4
Klebeschicht	1,2

Tabelle 5.2: Verlustfaktoren für die verschiedenen Materialien einer Bremse

In Tabelle 5.3 sind die Dämpfungsanteile der unterschiedlichen Bremsenkomponenten (-materialien) nach Gleichung (5.66) für acht verschiedene Moden gegenübergestellt. Es ist zu erkennen, dass bei den meisten Moden der Anteil der Klebeschicht und des Reibmaterials an der Gesamtdämpfung am größten ist. Die Moden 6 und 7 bilden eine Ausnahme. Darin liegt eine *in-plane* Scheibenbewegung vom Typ IPT-2ND vor (vgl. Abschnitt 6.1.2.2). Die Beläge und damit auch die *Shim*-Klebeschicht sind kaum an der Bewegung beteiligt. Die Dämpfungsarbeit wird fast ausschließlich in der Bremsscheibe verrichtet.

Die Moden, die die Grundlage der Verhältnisse in Tabelle 5.3 bilden, sind so skaliert, dass die maximale Verschiebung 1 mm beträgt. In der Formänderungsenergie und damit auch in der Dämpfungsarbeit geht die Verschiebung im Quadrat ein. Um die Materialdämpfungsarbeit quantifizieren zu können, müssen die

Mode Φ^n	Scheibe (GJL)	Sattel (Alu)	Halter (GJS)	Reibmat./ Zw.-schicht	BTP (Stahl)	Shim (Blech)	Shim (Kleber)	$\sum_{Mat} \eta_{Mat} U_{\Phi^n_{Mat}}$ [J/mm ²]
1	1,4%	<1%	7,6%	16%	<1%	<1%	75%	$3,0 \times 10^2$
2	<1%	<1%	<1%	84%	<1%	<1%	15%	$3,0 \times 10^3$
3	<1%	<1%	<1%	74%	<1%	<1%	25%	$5,5 \times 10^3$
4	1,2%	<1%	1,0%	74%	<1%	<1%	23%	$3,8 \times 10^3$
5	6,6%	<1%	<1%	55%	<1%	<1%	39%	$9,3 \times 10^3$
6	84%	<1%	<1%	5,3%	<1%	<1%	11%	$2,0 \times 10^3$
7	99%	<1%	<1%	<1%	<1%	<1%	<1%	$3,0 \times 10^3$
8	<1%	<1%	<1%	27%	<1%	<1%	70%	$4,3 \times 10^2$

Tabelle 5.3: Dämpfungsanteile der verschiedenen Materialien

Werte der gesamten modalen Dämpfungsarbeiten

$$\sum_{Mat} \eta_{Mat} U_{\Phi^n_{Mat}} \quad (5.67)$$

in der letzten Spalte in Tabelle 5.3 mit dem Quadrat einer charakteristischen Verschiebung multipliziert werden:

$$A_{D_M}^{\Phi^n} = \sum_{Mat} \eta_{Mat} U_{\Phi^n_{Mat}} \cdot x_{ch}^2 \quad (5.68)$$

Unter Verwendung von (5.59), (5.68) und der letzten Spalte in Tabelle 5.3 liegt die Dämpfungsarbeit infolge von Materialdämpfung je nach auftretender Schwingform in einem Bereich von

$$A_{D_M} = A_{D_M}^{\Phi} \left(\frac{\dot{x}_{ch}}{\omega} \right)^2 = A_{D_M}^{\Phi} \left(\frac{1,0}{5000 \cdot 2\pi} \right)^2 \approx 1 \times 10^{-10} - 1 \times 10^{-8} \text{J}. \quad (5.69)$$

5.3.3 Abstrahldämpfung

Die Dämpfung, die über die Systemgrenzen an angrenzende Bauteile dissipiert wird, bleibt in dem in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Verfahren unberücksichtigt. Bauteile wie Schwenklager, Radlager oder andere Achsbauteile bestehen in der Regel aus Stahl, Grauguss oder Aluminium. Im vorangegangenen Abschnitt ist gezeigt, dass diese Materialien einen geringen Anteil an der Systemdämpfung haben, es sei denn, sie sind maßgeblich an der Mode beteiligt. Die Wahl der Systemgrenzen muss derart erfolgen, dass die Bauteile, die einen wesentlichen Anteil an der untersuchten Schwingform haben, auch in dem verwendeten Modell enthalten sind, um die auftretende Schwingform korrekt abzubilden. Haben diese angrenzenden Bauteile keinen nennenswerten Beitrag an der Schwingform, leisten sie auch keine signifikante Dämpfungsarbeit.

Für die Quantifizierung der Abstrahldämpfung durch die Schallemission wird vereinfachend und konservativ angenommen, die Bremse strahle optimal ($\sigma = 1$) Schall über eine Fläche von $A = 1 \text{ [m}^2\text{]}$ mit der charakteristischen Oberflächenschnelle \dot{x}_{ch} aus (5.59) als Effektivwert in die Umgebung ab. Die abgestrahlte Leistung kann dann über einen Vergleich von Schallleistungspegel L_W und

Schallschnellepegel L_v mit den Bezugswerten

$$P_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ [W]} \quad \text{und} \quad v_0 = 5 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (5.70)$$

abgeschätzt werden [60]:

$$L_W = 20 \lg \left(\frac{P}{P_0} \right) = L_v = 20 \lg \left(\frac{\dot{x}_{ch}}{v_0} \right) + 10 \lg(A) - 10 \lg(\sigma) \text{ [dB]} \quad (5.71)$$

Daraus ergibt sich mit der Schwingperiodendauer $T = 1/f$ die Abstrahldämpfungsarbeit pro Schwingzykel

$$A_{D_A} = P \cdot T \approx 1 \cdot 10^{-12} \text{ J.} \quad (5.72)$$

Ein Vergleich der Dämpfungsarbeiten (5.61), (5.69) und (5.72) zeigt, dass die Reibungsdämpfung gegenüber Material- und Abstrahldämpfung den größten Beitrag an der Systemdämpfung hat. Diese tritt aber nur bei ganz bestimmten Moden auf, bei denen eine radiale Bewegungskomponente der Scheibenschwingung vorliegt. Bei den meisten Moden ist diese Art von Dämpfung deshalb nicht vorhanden.

Die Größe der Materialdämpfung ist in hohem Maße von der auftretenden Schwingform abhängig. Je nachdem welche Komponenten der Bremse an der Schwingform beteiligt sind, kann Materialdämpfung mehr oder weniger relevant zur Systemdämpfung beitragen.

Die Modellierung einer Abstrahldämpfung durch Schallabstrahlung ist nur mit einem erheblichen numerischen Aufwand in einem CAE-Modell abbildbar. Der Dämpfungsbeitrag liegt deutlich unter dem der Materialdämpfung gering gedämpfter Moden und kann daher vernachlässigt werden.

Kapitel 6

Schwingformen von Bremsscheiben

In diesem Kapitel werden zunächst die möglichen Schwingformen einer Bremsscheibe anhand der Lösungen einer Kreisplatte bzw. -scheibe mit Loch vorgestellt und in Klassen eingeteilt. Die hier größtenteils aus der Literatur übernommenen und etwas erweiterten Begriffe werden in den folgenden Kapiteln für die Beschreibung von Phänomenen verwendet. Weiterhin enthält dieses Kapitel auch eine Untersuchung des Abstrahlverhaltens von verschiedenen Scheibenmodentypen.

Eine Kreisplatte bzw. -scheibe mit Loch stellt eine rotationssymmetrische Struktur dar, welche Lösungen in Form von Eigenmoden hat, die als Doppellösung vorkommen. Eine solche Doppellösung besteht aus einem Paar von orthogonalen Moden [87, 88, 80]. Dieses ist insbesondere bei rotierenden Strukturen interessant, da durch die Symmetrie für relativ geringe Rotationsgeschwindigkeiten stehende Wellen der rotierenden Struktur auftreten können (vgl. Abschnitt 3.2.2.2 und 3.2.2.3). Diese Symmetrie der Bremsscheibe ist ursächlich für das Auftreten von vielen instabilen Lösungen der Radbremse [62].

6.1 Klassen von Schwingformen

Bei dem Schwingverhalten von Bremsscheiben kann zunächst zwischen Bewegungen in und senkrecht zur Scheibenebene unterschieden werden. Erstere nennt man auch *in-plane* (IP) und letztere *out-of-plane* (OP) Bewegungen [94]. Bei Kreisscheiben kann unter Zugrundelegung von Zylinderkoordinaten bei *in-plane*-Bewegungen weiter zwischen radialen (IPR) und tangentialen (IPT) differenziert werden.

Bei Eigenmoden der Kreisplatte bzw. -scheibe mit Loch als Lösungen der LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen kann entsprechend ihrer Bewegungen dieselbe Einteilung vorgenommen werden.

OP-Bewegungen stellen Lösungen der Kreisplatten-Bewegungsgleichung und IP-Bewegungen Lösungen der Kreisscheiben-Bewegungsgleichung dar und treten entkoppelt voneinander auf. Das gilt streng genommen aber nicht mehr für Bremsscheiben mit fest verbundenem Topf. In diesem Fall treten die Bewegungen bzw. Moden gekoppelt auf und es existieren auch Mischmoden mit OP und

IP Bewegungen [44, 4].

Bei der Mehrzahl der Bremscheibenmoden ist aber entsprechend ihrer dominanten Bewegung eine Einteilung in diese Klassen möglich. Auch bei den instabilen Schwingformen einer Bremse kann eine Einteilung entsprechend der Bremscheibenbewegungen vorgenommen werden, wengleich die o.g. Scheibenmoden dort in der Regel in entarteter Form auftreten.

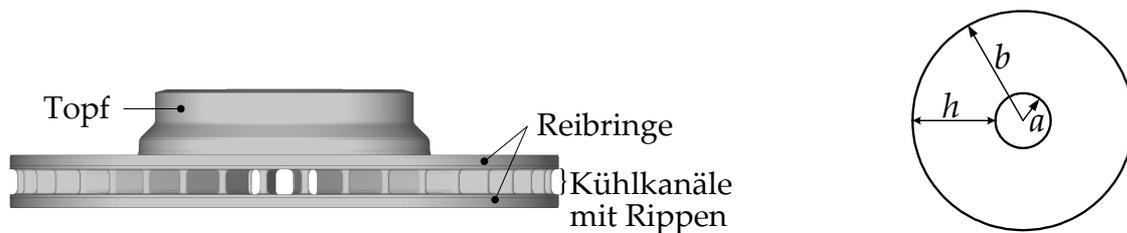


Abbildung 6.1: Bezeichnungen der Bremscheibe und der Kreisplatte bzw. Kreisplatte mit Loch

6.1.1 Out-of-plane (OP) Moden

OP-Moden werden entsprechend ihrer Verformung auch Biegemoden genannt [4]. Sie ergeben ein Wellenmuster, welches durch radiale Knotenlinien und tangentielle Knotenkreise beschrieben wird (vgl. Abbildung 6.2). In der Literatur werden häufig die Abkürzungen ND, für *nodal diameter* und NC für *nodal circle* verwendet [44].

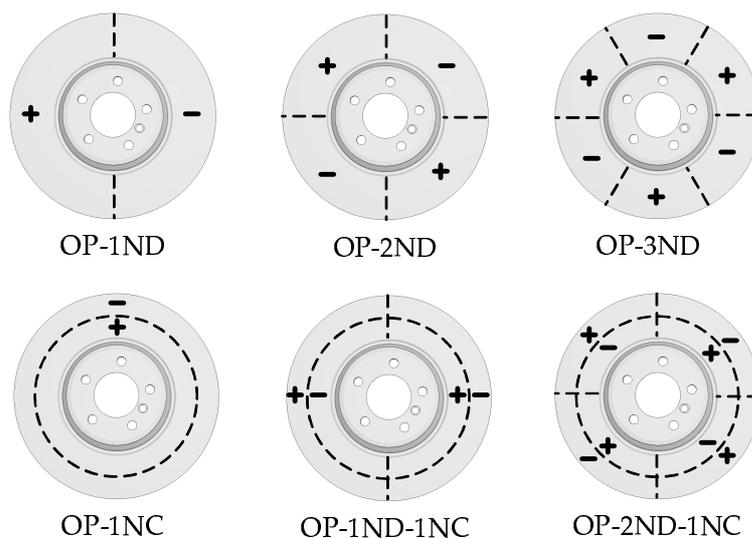


Abbildung 6.2: OP-Bremscheibenmoden mit radialen Knotenlinien und tangentialen Knotenkreisen

Die Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung für Plattenschwingungen

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.1)$$

mit der Platten-Biegesteifigkeit

$$D = \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6.2)$$

(Plattendicke d , Elastizitätsmodul E , Querdehnung ν) erfolgt zweckmäßig in Zylinderkoordinaten r und θ . Damit lautet der LAPLACE-Operator Δ in (6.1) [13]:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (6.3)$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (6.1) für eine Kreisplatte mit Loch wird durch die BESSEL-Funktionen J_m und Y_m sowie den modifizierten BESSEL-Funktionen I_m und K_m mit dem Parameter

$$\gamma_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (6.4)$$

beschrieben [34]:

$$w(r, \theta, t) = \left[C_1 J_m(\gamma_{mn}r) + C_2 Y_m(\gamma_{mn}r) + C_3 I_m(\gamma_{mn}r) + C_4 K_m(\gamma_{mn}r) \right] \left\{ \begin{array}{l} \sin(m\theta) \\ \cos(m\theta) \end{array} \right\} e^{i\omega_{mnt}} \quad (6.5)$$

Y_m wird auch als NEUMANN-Funktion und K_m als MACDONALD-Funktion bezeichnet. Die Konstanten C_1 bis C_4 ergeben sich aus den Randbedingungen für z.B. einen freien Rand am inneren und äußeren Radius (vgl. Abbildung 6.1):

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right|_{r=b} = \left. \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right|_{r=b} = 0 \quad (6.6)$$

Wird der Lösungsansatz (6.5) mit den angepassten Randbedingungen (6.6) in die DGL (6.1) eingesetzt, erhält man die Eigenfrequenzen ω_{mn} .

In der Lösung (6.5) ist zu erkennen, dass die OP-Bewegung über die Winkelkoordinate θ durch Sinus- bzw. Kosinus-Funktionen und über den Radius r durch BESSEL- bzw. modifizierte BESSEL-Funktionen beschrieben werden. Die Knotenkreise (n NC) entstehen durch die Nulldurchgänge der Funktionen J_m, Y_m, I_m und K_m , die Knotenlinien (m ND) durch die der sin- bzw. cos-Funktionen.

In Abbildungen 6.3 und 6.4 sind die Funktionen J_m, Y_m, I_m und K_m nullter bis dritter Ordnung abgebildet.

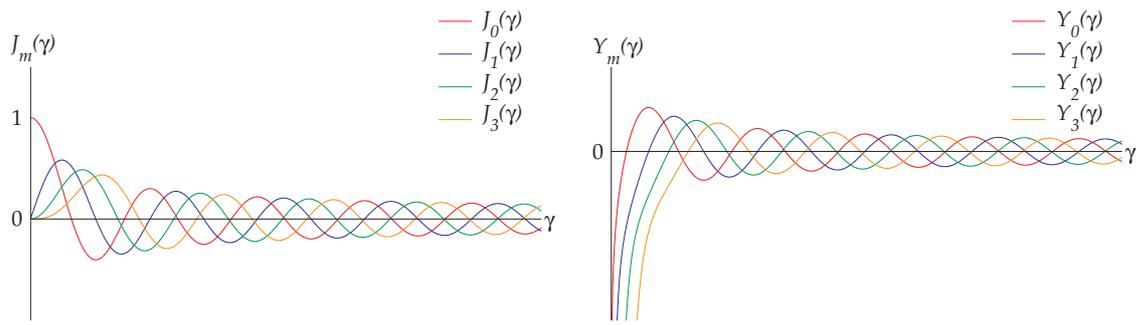


Abbildung 6.3: BESSEL- und NEUMANN-Funktionen J_m, Y_m der Ordnung $m = 0, 1..3$

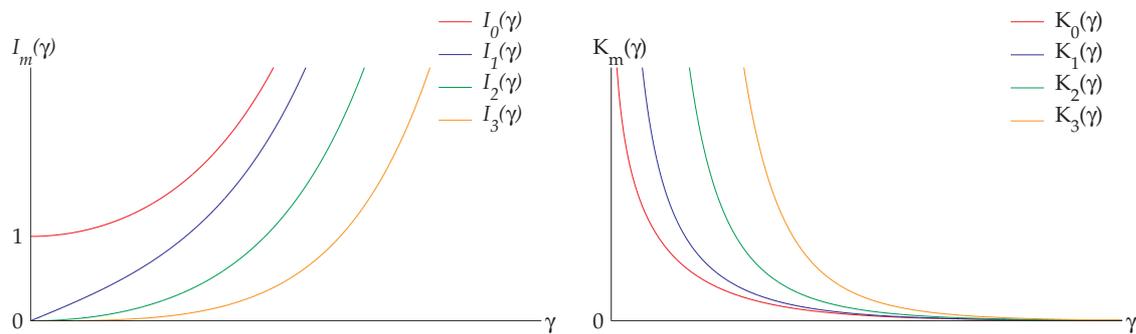


Abbildung 6.4: Modifizierte BESSEL- und MACDONALD-Funktionen I_m, K_m der Ordnung $m = 0, 1..3$

6.1.2 *In-plane* (IP) Moden

IP-Moden einer Kreisscheibe können mit der Lösung der LAMÉ-NAVIERschen Bewegungsdifferentialgleichung eines Kreiszyinders beschrieben werden, wenn darin die LAMÉschen Konstanten λ und μ für den ebenen Spannungszustand verwendet werden [27]. Mit der Dichte ρ und dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} lautet die Bewegungsgleichung [35]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (6.7)$$

Im Falle von Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

gilt außer dem LAPLACE-Operator (6.3) für den Nabla-Operator

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (6.9)$$

und für die Divergenz [13]

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}. \quad (6.10)$$

Die allgemeinen Lösungen von (6.7) werden mit

$$\gamma_{mn}^P = \frac{\omega_{mn}}{c_P} \quad \text{und} \quad \gamma_{mn}^S = \frac{\omega_{mn}}{c_S} \quad (6.11)$$

in radialer Richtung durch die BESSEL-Funktionen J_m, Y_m und in tangentialer Richtung durch Sinus- und Kosinus-Funktionen ausgedrückt [96]:

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, t) = & \left\{ \left[C_1 \frac{m}{r} J_m(\gamma_{mn}^S r) + C_2 \frac{m}{r} Y_m(\gamma_{mn}^S r) - C_3 \left(\frac{m}{r} J_m(\gamma_{mn}^P r) - \gamma_{mn}^P J_{m-1}(\gamma_{mn}^P r) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - C_4 \left(\frac{m}{r} Y_m(\gamma_{mn}^P r) - \gamma_{mn}^P Y_{m-1}(\gamma_{mn}^P r) \right) \right] \cos(m\theta) \right. \\ & \left. - \left[C_5 \frac{m}{r} J_m(\gamma_{mn}^S r) - C_6 \frac{m}{r} Y_m(\gamma_{mn}^S r) - C_7 \left(\frac{m}{r} J_m(\gamma_{mn}^P r) - \gamma_{mn}^P J_{m-1}(\gamma_{mn}^P r) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - C_8 \left(\frac{m}{r} Y_m(\gamma_{mn}^P r) - \gamma_{mn}^P Y_{m-1}(\gamma_{mn}^P r) \right) \right] \sin(m\theta) \right\} e^{i\omega_{mn}t} \quad (6.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_\theta(r, \theta, t) = & \left\{ \left[C_5 \frac{m}{r} J_m(\gamma_{mn}^P r) + C_6 \frac{m}{r} Y_m(\gamma_{mn}^P r) + C_7 \left(\frac{m}{r} J_m(\gamma_{mn}^S r) - \gamma_{mn}^S J_{m-1}(\gamma_{mn}^S r) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + C_8 \left(\frac{m}{r} Y_m(\gamma_{mn}^S r) - \gamma_{mn}^S Y_{m-1}(\gamma_{mn}^S r) \right) \right] \cos(m\theta) \right. \\ & \left. + \left[C_1 \frac{m}{r} J_m(\gamma_{mn}^P r) + C_2 \frac{m}{r} Y_m(\gamma_{mn}^P r) - C_3 \left(\frac{m}{r} J_m(\gamma_{mn}^S r) - \gamma_{mn}^S J_{m-1}(\gamma_{mn}^S r) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - C_4 \left(\frac{m}{r} Y_m(\gamma_{mn}^S r) - \gamma_{mn}^S Y_{m-1}(\gamma_{mn}^S r) \right) \right] \sin(m\theta) \right\} e^{i\omega_{mn}t} \quad (6.13) \end{aligned}$$

Die Konstanten $C_1 - C_8$ ergeben sich durch die Anpassung der Randbedingungen bei $r = a$ und $r = b$. Die Eigenfrequenzen ω_{mn} erhält man durch Einsetzen der Lösungen (6.12) und (6.13) in die Bewegungsgleichung (6.7).

Für den Sonderfall $m = 0$, wenn also die Bewegungen u_r und u_θ unabhängig von der Koordinate θ sind und somit rotationssymmetrische Bewegungen vorliegen, vereinfachen sich (6.12) und (6.13) zu:

$$u_r(r, t) = \left\{ C_3 \gamma_n^P J_1(-\gamma_n^P r) + C_4 \gamma_n^P Y_1(-\gamma_n^P r) \right\} e^{i\omega_n t} \quad (6.14)$$

$$u_\theta(r, t) = \left\{ C_5 \gamma_n^S J_1(-\gamma_n^S r) + C_6 \gamma_n^S Y_1(-\gamma_n^S r) \right\} e^{i\omega_n t} \quad (6.15)$$

Gleichung (6.14) stellt eine reine Kompressionswellenlösung mit einer rotationssymmetrischen Verschiebung in radialer Richtung und n Knotenkreisen dar. In (6.15) liegt eine reine Scherwellenlösung vor, in der sich die Scheibenelemente mit n Knotenkreisen in tangentialer Richtung bewegen (vgl. Abbildung 6.5). Für den Fall $m \neq 0$ hat die Lösung Anteile aus Scher- und Kompressionswellen.

In ERINGEN & ŞUHUBI [27] und GAZIS [35] werden deshalb eine Einteilung der IP-Schwingungen in reine Schubschwingungen, reine Dehnschwingungen und Mischformen daraus vorgenommen. Im Folgenden wird es jedoch vorgezogen, eine Einteilung nach der Art der überwiegenden Verformung vorzunehmen.

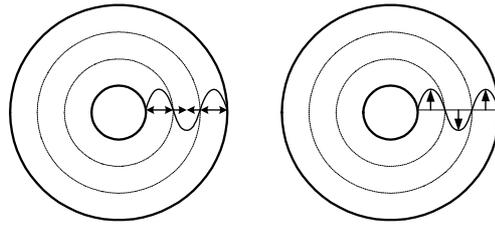


Abbildung 6.5: Reine Kompressions- (links) und Scherwellenlösung (rechts) mit $n = 3$ Knotenkreisen

6.1.2.1 *In-plane-Radial (IPR)*

Bei radialen IP-Moden (IPR) verformen sich die Scheiben (unter Annahme von extremen Amplituden) zu einem Oval (IPR-2ND), einem „Dreieck“ (IPR-3ND), einem „Viereck“ (IPR-4ND) usw., was in Abbildung 6.6 gezeigt ist.

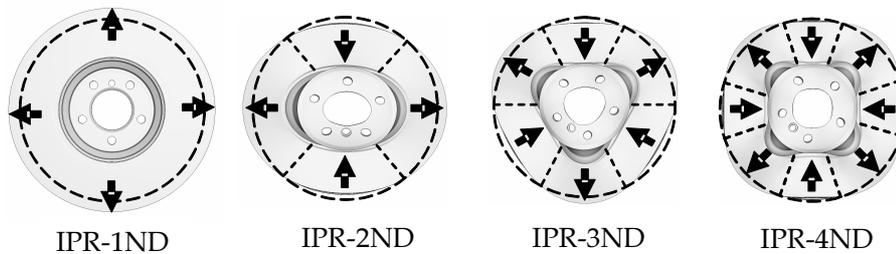


Abbildung 6.6: IPR-Bremscheibenmoden mit radialen Knotenlinien

Eine IPR-Mode mit nur einer Knotenlinie gibt es nicht. Die erste Ordnung dieses Modentyps entspricht einer pumpenden Bewegung des Reibringes in der Scheibenebene. Sie wird im Rahmen dieser Arbeit dennoch als IPR-1ND bezeichnet. Es sei bemerkt, dass es sich in diesem Fall um keine Doppelmode, sondern um eine Einzellösung handelt.

Es existieren auch IPR-Moden mit Knotenkreisen. Diese liegen jedoch bei den in PKW üblichen Bremscheibengeometrien in der Regel außerhalb des hörbaren¹² Bereiches. Das kann leicht mit den Ergebnissen von GAZIS [35] gezeigt werden. Für die bei Bremscheibengeometrien üblichen Verhältnisse von etwa $0,5 < \frac{h}{a} < 1,0$ können die Eigenfrequenzen reiner Kompressionswellenlösungen mit

$$\omega_n \approx \frac{n \cdot \pi \cdot c_p}{h} \quad \left[\frac{1}{s} \right] \quad (6.16)$$

abgeschätzt werden. Mit einer Reibringhöhe $h < 100$ mm und der Kompressionswellengeschwindigkeit für Grauguss $c_p \approx 4,5 \times 10^6 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ ergibt sich für die IPR-1NC-Mode eine Frequenz von $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} > 22$ kHz, was deutlich außerhalb des hörbaren Bereiches liegt.

¹²Unter dem Hörbereich versteht man mechanische Schwingungen zwischen 16 Hz und 16 kHz [60].

6.1.2.2 *In-plane-Tangential* (IPT)

Tangentiale IP-Moden (IPT) zeichnen sich durch umlaufende Kompressionswellen aus. Die nullte Ordnung ist eine Drehbewegung der unverzerrten Scheibe relativ zum elastischen Topf.

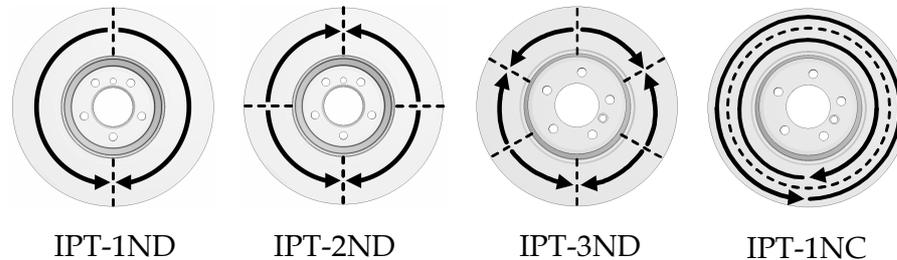


Abbildung 6.7: IPT-Bremsscheibenmoden

Die Lösungen mit Knotenkreisen liegen bei relativ hohen Frequenzen. Auch diese können mit den Untersuchungen von GAZIS [35] abgeschätzt werden. IPT- n NC-Moden entsprechen der Lösung mit reinen Scherwellen. Mit

$$\omega_n \approx \frac{n \cdot \pi \cdot c_S}{h} \left[\frac{1}{s} \right], \quad (6.17)$$

einer Reibringhöhe $h < 100$ mm und der Scherwellengeschwindigkeit in Grauguss $c_S \approx 2,4 \times 10^6 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ liegt die IPT-1NC-Mode bei $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} < 12$ kHz. Damit kann dieser Modentyp nicht grundsätzlich unberücksichtigt bleiben.

6.1.2.3 *In-plane-Tangential mit Schubverformung* (IPTS)

Diese Kategorie ist ein Sonderfall, der nur bei innenbelüfteten Bremscheiben vorkommen kann. Bei IPTS-Moden verformen sich die beiden Reibringe jeweils wie im vorherigen Abschnitt beschrieben. Die Reibringe führen aber zueinander gegenphasige Bewegungen aus (vgl. Abbildung 6.8). Diese Moden liegen bei der in PKW üblichen Bremscheibengeometrien in der Regel außerhalb des hörbaren Bereiches [49]. Lediglich Bremscheiben mit Kühlkanälen, deren Höhe etwa 1,5 mal so groß wie die Reibringdicke ist, weisen diese Moden im hörbaren Frequenzbereich auf. Dieses wird ausführlich in Kapitel 7 behandelt.

Die nullte Ordnung ist hier die Bewegung, bei der sich die Reibringe in sich nicht dehnen bzw. stauchen, aber über eine Biegeverformung der Rippen zueinander eine Scherbewegung ausführen.

6.1.2.4 OP/IP-Mischmoden

Wie bereits erwähnt sind nur im Falle einer Kreisscheibe mit Loch OP- und IP-Bewegungen entkoppelt. Bei Bremscheiben beginnt jedoch am inneren Reibring der sogenannte Topf, mit dem die Scheibe an der Achse befestigt wird. Dieser kann, je nach Bremse, unterschiedliche Abmessungen aufweisen. Im Falle von

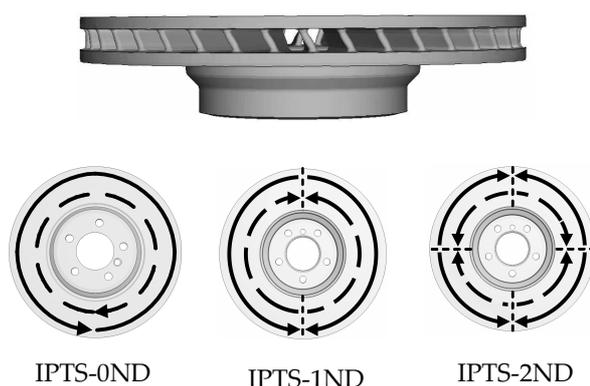


Abbildung 6.8: IPTS-Bremscheibenmoden

innenbelüfteten Scheiben kann dieser am inneren oder äußeren Reibring befestigt sein. Abhängig von den Abmessungen von Scheibe und Topf entstehen gekoppelte Eigenmoden der Scheibe, die sowohl OP- als auch IP-Komponenten aufweisen. Das Kopplungsverhalten wird in BAE & WICKERT [4] für den Fall einer Massivscheibe untersucht. Dort ist gezeigt, dass für besonders tiefe Töpfe die IPR- n ND-Moden eine signifikante OP-Komponente aufweisen. Allerdings sind Moden mit IPR-Anteil aufgrund der an der Reibkontaktstelle aktivierten Reibungsdämpfung (vgl. Abschnitt 5.2.1) als weniger kritisch einzustufen. OP/IP-Mischmoden sind hinsichtlich des Auftretens als instabile Lösungen eines Bremsengsamtsystems allgemein als unkritischer im Vergleich zu reinen IP-Moden zu werten, da sie zwangsläufig auch weitere Komponenten des Systems eine Bewegung aufzwingen, die im Gegensatz zu der Bremscheibe selbst leichter bedämpft werden können (vgl. Abschnitt 7.3.3).

6.2 Abstrahlverhalten

Das in Abschnitt 3.2.2 beschriebene Verfahren bewertet das Stabilitätsverhalten einer Bremse. Im Falle einer Instabilität wird davon ausgegangen, dass die auftretende Schwingform in der Lage ist, Schall in das umliegende Fernfeld zu emittieren. Die Bremscheibe wird oft als dominanter Strahler in einer quietschenden Scheibenbremse angesehen [84].

Bei der Unterdrückung von selbsterregtem Bremsenquietschen wird eine Verhinderung des Auftretens der Instabilität angestrebt. Viele akustische Probleme werden hingegen durch die Beeinflussung bzw. Verschlechterung des Abstrahlverhaltens gelöst. Dieses ist hier nicht zielführend, da durch das Auftreten einer Instabilität theoretisch unendlich große Amplituden entstehen können, die auch bei niedrigen Abstrahlgraden eine Schallabstrahlung zur Folge haben. Die Struktur so zu verändern, dass eine Schallabstrahlung aller Flächen verhindert wird, ist kaum möglich.

Im Folgenden wird deshalb auf das Schallabstrahlverhalten von Bremscheiben nur kurz eingegangen. Im Rahmen einer Diplom- bzw. Masterarbeit [79] wur-

de das modale Schallabstrahlverhalten von einer innenbelüfteten Bremscheibe ($a \approx 110$ mm, $b \approx 190$ mm, Reibringdicke ≈ 10 mm Scheibendicke 36 mm, vgl. Abbildung 6.1) mittels der *Boundary Element Methode* (BEM) [16] untersucht. Dabei sollte insbesondere geprüft werden, inwieweit IP-Moden einer innenbelüfteten Bremscheibe in der Lage sind, Schall abzustrahlen. Außer dem Abstrahlgrad σ wird die Verteilung der abgestrahlten Leistung auf die Teiloberflächen von Reibringen, Topf und Rippen ermittelt.

Der Abstrahlgrad σ beschreibt das Verhältnis von tatsächlich abgestrahlter Schalleistung P zu der Leistung, die die gesamte Strukturfläche A unter Annahme einer Abstrahlimpedanz von $\rho \cdot c_L$ abstrahlen würde [92]:

$$\sigma = \frac{P}{\rho \cdot c_L \cdot \bar{v}^2 \cdot A} \quad [-] \quad (6.18)$$

Darin ist \bar{v}^2 das Quadrat der zeitlich und räumlich gemittelten Oberflächenschnelle [77].

6.2.1 OP-Moden

Für das Schallabstrahlverhalten von Bremscheiben ist die Abstrahlung in das Fernfeld von wesentlichem Interesse. Diese kann bei einem unendlich ausgehenden Strahler nur stattfinden, wenn die Wellenlänge größer oder gleich der der Luft ist [60]. Unter Vernachlässigung von Randeffekten, die bei einer endlichen Struktur entstehen, können mit dieser prinzipiellen Überlegung generell alle OP-Moden von Bremscheiben als schallabstrahlende Strukturen ausgemacht werden. In Abbildung 6.9 sind die mittels eines FE-Modells ermittelten Eigenfrequenzen für die innenbelüftete Bremscheibe in Abbildung 6.11 die OP- m ND Moden mit ihrer Frequenz dargestellt.

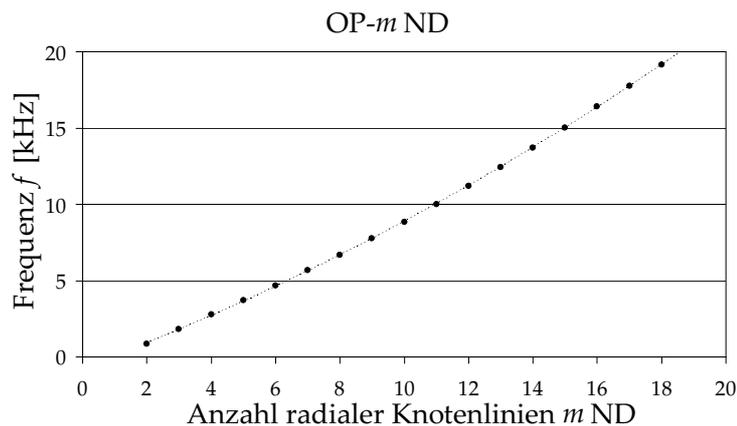


Abbildung 6.9: Zusammenhang von ND-Knotenlinien und Frequenz von OP-Eigenmoden

Der Zusammenhang zwischen Eigenfrequenz f und Anzahl der Knotenlinien m ND der OP-Eigenmoden kann für $m \geq 2$ durch ein quadratisches Polynom mit

der Methode der kleinsten Fehlerquadrate approximiert werden:

$$f_m \approx 17,3m^2 + 788m - 720 \quad \left[\frac{1}{s} \right] \quad (6.19)$$

Mit den inneren und äußeren Scheibenradien $a = 100$ mm, $b = 200$ mm (vgl. Abbildung 6.1) und einem mittleren Reibringumfang

$$U_m = 2\pi \frac{(a+b)}{2} \approx 0,9 \quad [\text{m}] \quad (6.20)$$

kann die Wellenlänge λ_m der Moden näherungsweise abhängig von der Zahl der Knotenlinien m ND angegeben werden:

$$\lambda_m \approx \frac{U_m}{m} = \frac{0,9}{m} \quad [\text{m}] \quad (6.21)$$

Wird nun die Wellenlänge der Luft λ_L mit Gleichung (6.19) und der Geschwindigkeit $c_L \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ebenfalls durch die Anzahl Knotenlinien ausgedrückt

$$\lambda_{L_m} = \frac{c_L}{f_m} = \frac{340}{17,3m^2 + 788m - 720} \quad [\text{m}] \quad (6.22)$$

kann mit (6.21) und (6.22) die Bedingung

$$\begin{aligned} \lambda_m &\geq \lambda_{L_m} \\ \frac{0,9}{m} &\geq \frac{340}{17,3m^2 + 788m - 720} \\ \Rightarrow \quad m &\geq 1,64 \end{aligned} \quad (6.23)$$

aufgestellt werden. Damit ist gezeigt, dass alle OP- m ND-Moden der untersuchten Bremscheibe mit $m \geq 2$ besonders gut in das Fernfeld Schall abstrahlen können.

Die Untersuchungen in SELIMEFENDIGIL [79] kommen zu dem selben Ergebnis. Alle dort untersuchten OP-Eigenmoden einer innenbelüfteten Bremscheibe mit den Abmessungen gemäß (6.20) weisen Abstrahlgrade σ von etwa 0,4 bis 0,9 auf (vgl. Tabelle 6.1). Ferner sind für die Abstrahlung im Wesentlichen die Flächen der Reibringe verantwortlich.

6.2.2 IP-Moden

Auch für IP-Moden lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen. IPT-Moden verformen sich in sich und ändern ihre äußerer Kontur aufgrund der Querdehnung. Mit der gleichen Herangehensweise wie für OP-Moden in Abschnitt 6.1.1 und dem approximierten Zusammenhang zwischen Eigenfrequenz und Knotenlinie aus Abbildung 6.10 durch das quadratische Polynom

$$f_m \approx -146,3m^2 + 3729m + 1638 \quad \left[\frac{1}{s} \right] \quad (6.24)$$

Frequenz	Modentyp	Abstrahlgrad
1184	OP-2ND	0,36
2338	OP-3ND	0,42
3547	OP-4ND	0,63
4753	OP-5ND	0,58
5973	OP-6ND	0,55
7228	OP-7ND	0,57
8528	OP-8ND	0,90
4966	OP-1ND-1NC	0,68
5880	OP-2ND-1NC	0,61
7245	OP-3ND-1NC	0,55
8237	OP-4ND-1NC	0,90

Tabelle 6.1: Abstrahlgrade verschiedener Bremsscheiben OP-Moden aus [79]

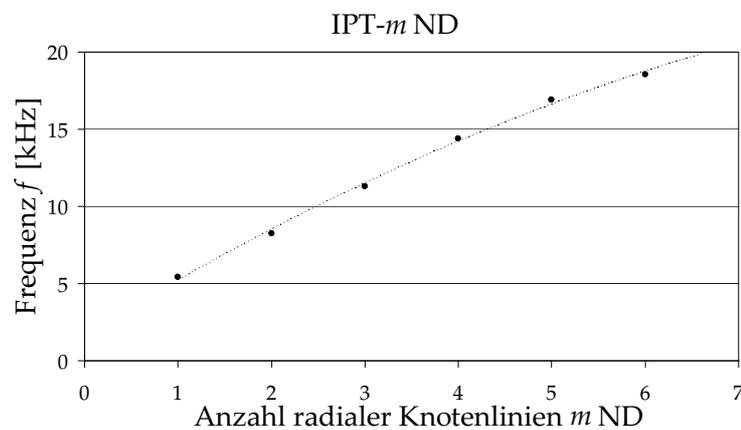


Abbildung 6.10: Zusammenhang von ND-Knotenlinien und Frequenz von IPT-Eigenmoden

ergibt sich für die durch Querdehnung entstehende OP-Bewegung die generelle Abstrahlbedingung mit (6.21) und (6.22) zu:

$$\begin{aligned}
 \lambda_m &\geq \lambda_{L_m} \\
 \frac{0,9}{m} &\geq \frac{340}{-146,3m^2 + 3729m + 1638} \\
 \Rightarrow m &\leq 23,4
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Somit ist auch hier eine Schallabstrahlung durch alle IPT-Moden, deren Frequenzen im hörbaren Bereich liegen, zu erwarten.

Für die Schallabstrahlung bei Scheibenmoden vom Typ IPR lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen. Da dieser Modentyp aufgrund der Reibungsdämpfung in Scheibenbremsen nicht als Instabilität auftritt (vgl. Abschnitt 5.2.1), wird darauf verzichtet.

Bei innenbelüfteten Scheiben ist durch die komplexere Geometrie der Scheibe mit Rippen und Kühlkanälen eine genauere Betrachtung erforderlich. Lediglich ein Effekt, der bei IPTS-*m*ND-Moden auftritt, kann durch generelle Überlegungen bewertet werden. Hierbei handelt es sich um das Entstehen des wellenförmigen Musters auf der Bremscheibenoberfläche durch die in den Reibringen eingespannten Rippen (vgl. Abbildung 6.11). Die harmonischen Verdrehungen an diesen Einspannungen erzeugen eine Schnelle mit Wellenform.

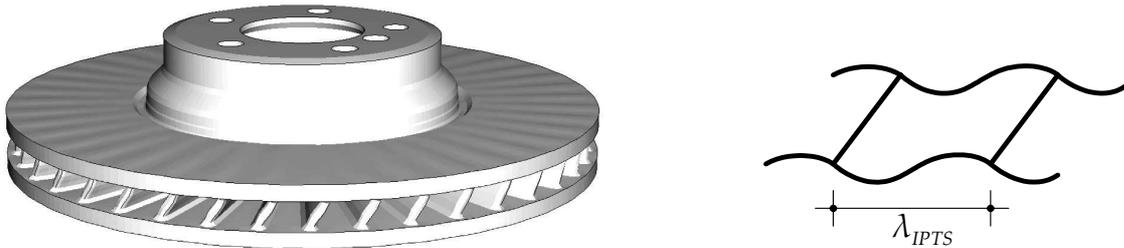


Abbildung 6.11: Wellenförmige Schnelleverteilung auf den Reibringen bei der Verformung in IPTS-Moden

Die untersuchte Bremscheibe (vgl. Abbildung 6.11) hat 40 Rippen. Mit einem mittleren Reibringumfang von etwa $U_m = 0,9$ m entspricht das einer Wellenlänge von $\lambda_{IPTS} = 0,023$ m. Mit der Abstrahlbedingung (6.23) und der Schallgeschwindigkeit $c_L \approx 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ würde mit dieser Wellenlänge bei einer unendlich ausgedehnten Struktur eine Abstrahlung in das Fernfeld nur stattfinden, wenn

$$0,023 \geq \frac{340}{f_{IPTS}} \quad \Rightarrow \quad f_{IPTS} \geq 15 \text{ kHz.} \quad (6.26)$$

Somit liegen bei den IPTS-Moden dieser Scheibe durch die wellenförmige Schnelleverteilung auf der Scheibenoberfläche gegenüber den Biegeformen der OP-Moden deutlich ungünstigere Abstrahlbedingungen vor. Dieses stimmt mit den Ergebnissen von SELIMEFENDIGIL [79] überein. Die IPTS-0ND-Mode der Scheibe aus Abbildung 6.11 weist darin im Vergleich zu anderen Scheibenmoden nur eine sehr geringe Abstrahlung ($\sigma \approx 0,001$) auf.

6.2.3 Einfluss des Topfes und der Rippen

Die Überlegungen in den Abschnitten 6.2.1 und 6.2.2 beziehen sich nur auf Moden der Scheibe bzw. der Reibringe. Der Einfluss auf das Abstrahlverhalten durch die lateralen Flächen des Topfes und der Rippen kann nicht mit ähnlich einfachen Betrachtungen untersucht werden. In der BEM-Berechnung in SELIMEFENDIGIL [79] wurde für die Bremscheibe aus Abbildung 6.11 auch die Mode IPTS-1ND bewertet, welche einen Abstrahlgrad von $\sigma = 0,14$ aufweist. Dieser ist signifikant größer als der der IPTS-0ND-Mode, obwohl auch hier die generellen Überlegungen aus Abschnitt 6.2.2 für IPTS-Moden gelten.

Bei einer genaueren Betrachtung der IPTS-1ND-Mode ist zu erkennen, dass sie nicht ganz „rein“ ausgebildet ist. Die Reibringe weisen außer dem Effekt aus

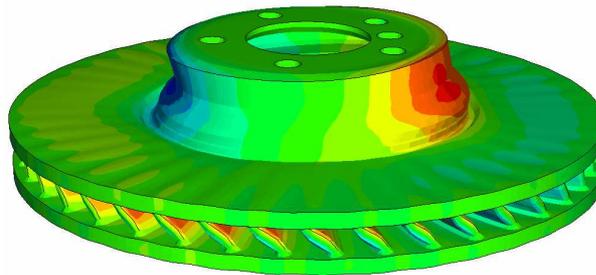


Abbildung 6.12: IPTS-1ND-Mode der untersuchten Bremsscheibe

Abbildung 6.11 zusätzlich eine weitere OP-Bewegung auf, die aus der Querdehnung entsteht. Auch die lateralen Flächen des Topfes sind an der Schwingform beteiligt (vgl. Abbildung 6.12). Die Leistung wird in diesem Fall zu etwa einem Drittel über die Fläche des Topfes und zu zwei Dritteln über die Reibringflächen emittiert (vgl. Tabelle 6.2).

Teilfläche	Anteil an der Abstrahlung
Reibringe	70%
Topf	30%
Rippen	<1%

Tabelle 6.2: Anteil der Teilflächen an der Abstrahlung [79]

Auch wenn die Reibringflächen im Verhältnis zum Topf normal zur Ebene relativ geringe Verschiebungen aufweisen, haben sie den größten Anteil an der Abstrahlung.

Die Abstrahlung der IPTS-1ND-Mode wird also nicht primär durch die tangentielle Reibringbewegung, sondern vielmehr durch die daraus resultierende OP-Bewegung sowie der Bewegung der lateralen Topfflächen hervorgerufen.

Aufgrund der Komplexität der bei Instabilitäten auftretenden Schwingformen der Bremsscheibe ist eine generelle Quantifizierung des Abstrahlverhaltens verschiedener Moden nicht möglich. Wie gezeigt wurde, können auch IP-Moden Abstrahlgrade aufweisen, die in einer ähnlichen Größenordnung wie die von OP-Moden liegen. Wenngleich IP-Moden nicht primär durch ihre radiale oder tangentielle Bewegung an der Abstrahlung beteiligt sind, existieren oft sekundäre Bewegungen, die einen Beitrag an der Abstrahlung liefern [84, 56].

Wie eingangs erwähnt, hängt die Größe der Schallabstrahlung auch von der Amplitude der Oberflächenschnelle ab. Selbst bei sehr geringen Abstrahlgraden können durch hinreichend große Schwingamplituden bzw. -schnellen wahrnehmbare Schalldrücke entstehen. Beim Auftreten einer Instabilität der Bremse steigen die Amplituden zunächst exponentiell an, bis sie aufgrund nichtlinearer Effekte einen Grenzyklus erreichen (vgl. Abschnitt 3.2). Die Absolutwerte der Oberflächenschnelle sind aber in der Regel nicht bekannt und können mit dem in Ab-

schnitt 3.2.2 vorgestellten Simulationsverfahren auch nicht ermittelt werden. Sie gehen lediglich aus Messungen (z.B. durch Laservibrometrie) hervor. Deshalb ist eine Ermittlung des Abstrahlgrades für die virtuelle Bewertung des Geräuschverhaltens einer Bremse nicht zielführend. Abstrahlgrade von $\sigma \equiv 0$ sind nicht möglich, daher muss zur Verhinderung der Schallemission das Auftreten der Instabilität unterbunden werden.

Kapitel 7

Beispiel: Instabilitäten mit IPTS-Moden der Bremsscheibe

Durch steigende Motorleistungen und Fahrzeuggewichte steigen ebenfalls die Leistungsanforderungen von Bremsanlagen. Ein wesentlicher Aspekt ist dabei die Kühlleistung der Bremsscheibe. Durch innenbelüftete Scheiben mit großem Kühlkanalquerschnitt wird diese positiv beeinflusst. Zur Erfüllung dieser Anforderung kommen mittlerweile auch PKW Bremsscheiben mit einem Verhältnis von Kühlkanalhöhe zu Reibringdicke von $>1,5$ zum Serieneinsatz.

Bei Bremsen mit solchen Scheiben traten im Entwicklungsprozess gehäuft Geräuschprobleme bei hohen Frequenzen (ca. 8-15 kHz) auf. Diese Probleme haben sich in der Vergangenheit als extrem hartnäckig und resistent gegen jegliche konventionelle Abhilfemaßnahme gezeigt und erforderten neue Lösungsstrategien. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dieses Phänomen intensiv untersucht und aus den Ergebnissen mögliche Abhilfemaßnahmen abgeleitet.

7.1 Analyse der auftretenden instabilen Schwingformen

Die eingangs genannten Probleme wurden an vier Bremsen mit Hilfe von CAE-Simulationen und Schwingformmessungen an der rotierenden Bremsscheibe untersucht. Wenn auch der Grad der Ausprägung bei den vier untersuchten Bremsen unterschiedlich ist, konnte dennoch für alle das gleiche Phänomen als Ursache der hochfrequenten Geräusche nachgewiesen werden. Im Folgenden werden daher die Untersuchungsergebnisse exemplarisch für eine dieser vier Bremsen vorgestellt.

Bei der untersuchten Bremse handelt es sich um eine Schwimmsattel-Scheibenbremse mit zwei Kolben und Aluminium-Rahmensattel. Bei dieser Bremse traten im Entwicklungsprozess sowohl am Prüfstand als auch im Fahrversuch Quietschprobleme bei 8,1 kHz, 11,4 kHz und besonders gehäuft bei 9,3 kHz auf (vgl. Abbildung 7.1). Diese waren sowohl in der Häufigkeit des Auftretens als auch in der Höhe der aufgetretenen Schalldrücke für den Serieneinsatz nicht akzeptabel. Alle, sowohl an der Sattelgeometrie und -masse als auch an

der Belaggeometrie und -masse vorgenommenen Modifikationen zeigten wenig Einfluss auf die vorhandenen Problemfrequenzen. Kleine Änderungen an der Bremsscheibengeometrie beeinflussten das Auftreten dieser Frequenzen ebenfalls kaum.

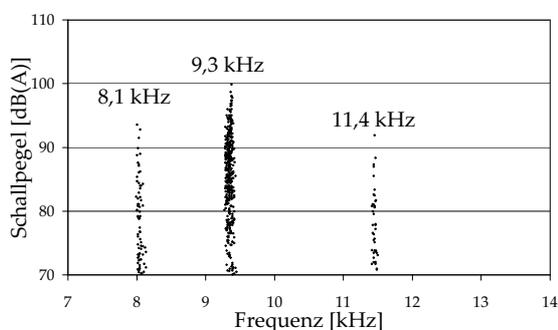


Abbildung 7.1: Geräuschprüfstandsergebnisse: jeder Punkt stellt einen „Quietscher“ dar

Die mittels Doppelpuls-Laser-Holographie bzw. dem ESPI-Verfahren (elektronische Speckle-Interferometrie, [74]) durchgeführte Betriebschwinganalyse (BSA) bei 9,3 kHz zeigte eine Starrkörperbewegung des Sattels und des Halters (vgl. Abbildung 7.2, Mitte). Eine Ausnahme ist die Gehäusehaltefeder, welche eine Schwingform ausführt, die als Interferenzmuster zu erkennen ist. Die Feder war aber für die Ursache des Quietschens bei 9,3 kHz unbedeutend, da auch ein Entfernen keine Änderung des Geräuschverhaltens hervorrief.

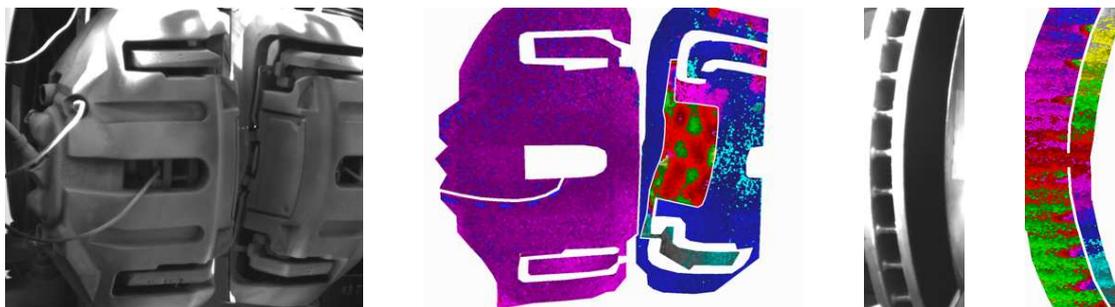


Abbildung 7.2: BSA bei 9,3 kHz mittels Doppelpuls Laserholographie/ESPI

Die BSA der rotierenden Bremsscheibe ergab eine entgegengesetzte Bewegung der Reibringe zueinander, welches an dem Interferenzmuster in Abbildung 7.2, rechts zu erkennen ist. Offensichtlich liegt hier eine spezielle tangentielle *in-plane*-Bewegung der Bremsscheibe vor, bei der die Reibringe sich gegenphasig zueinander bewegen (Typ IPTS, vgl. Abschnitt 6.1.2.3). Um dieses Phänomen näher zu untersuchen, wurden die betroffenen Bremsen als FE-Modell abgebildet und der in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Stabilitätsanalyse unterzogen.

In dieser Analyse wurde zunächst von einem konstanten (geschwindigkeitsunabhängigen) Reibgesetz ausgegangen. Hier zeigte das System keine Instabilitäten

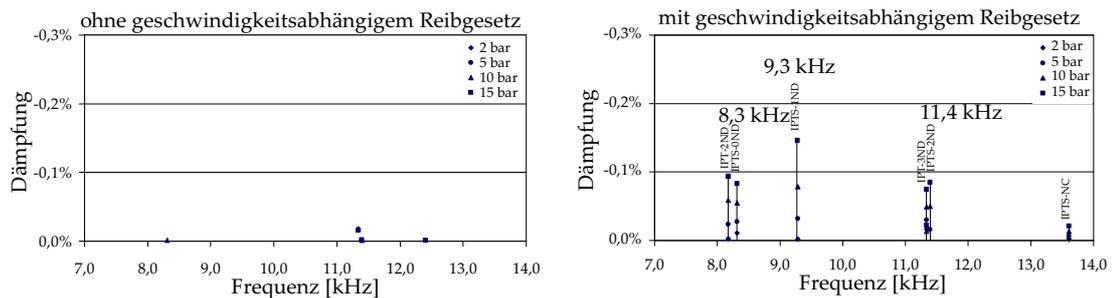


Abbildung 7.3: Stabilitätsanalyse mit und ohne geschwindigkeitsunabhängigem Reibgesetz

bei den am Prüfstand und im Fahrversuch verstärkt aufgetretenen 9,3 kHz und eine nur sehr schwache Instabilität bei 8,3/11,4 kHz (vgl. Abbildung 7.3, links). Bei Annahme eines geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetzes in der Form (2.4) treten jedoch einige Instabilitäten der Bremse auf (vgl. Abbildung 7.3, rechts), welche als tangentielle IP-Moden mit gleichphasiger Bewegung der Reibringe zueinander (Typ IPT-*mND*, vgl. Abschnitt 6.1.2.2) oder mit gegenphasiger Bewegung (Typ IPTS-*mND*, vgl. Abschnitt 6.1.2.3) identifiziert werden können. Die zugehörigen Schwingformen der Scheibe bei den Instabilitäten vom Typ IPTS sind in Abbildung 7.4 dargestellt. Unter Einbeziehung der Ergebnisse der BSA aus Abbildung 7.2 und denen der Stabilitätsanalyse lag die Vermutung nahe, dass es sich bei den drei Quietschfrequenzen um instabile Moden vom Typ IPTS handelt.

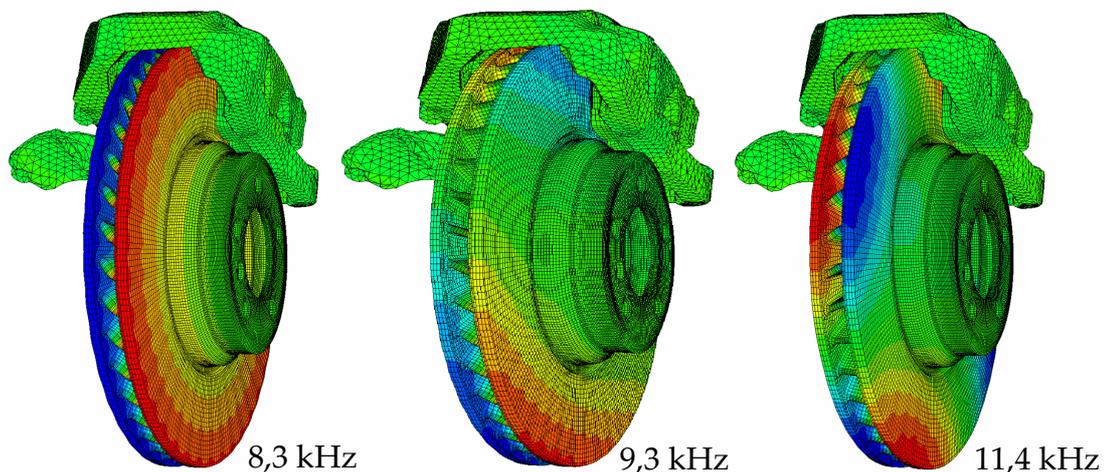


Abbildung 7.4: Durch CAE-Simulation ermittelte instabile Schwingformen

Während das Ergebnis der mittels Doppelpuls-laserholographie/ESPI durchgeführten BSA zwar auf eine entgegengerichtete Bewegung der Reibringe zueinander hinweist, liefert es keine weiteren Informationen über die auftretende Schwingform der Bremsscheibe. Um diese genauer zu untersuchen, wurde eine weitere BSA an den Bremsen durchgeführt. Zur Messung der tangentialen IP-

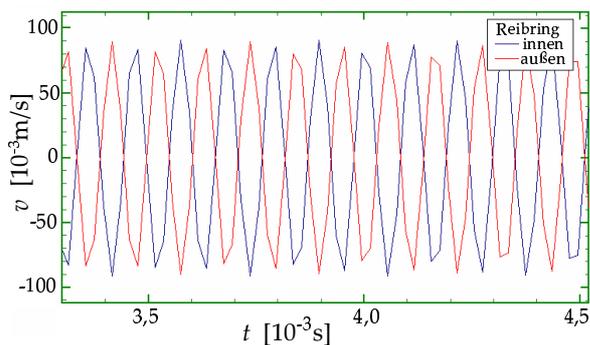
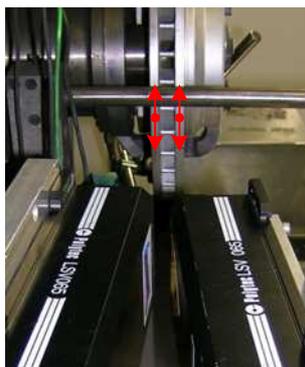


Abbildung 7.5: BSA mit *In-plane*-Vibrometern

Schwingung der Bremsscheiben-Reibringe, wurden, wie in Abbildung 7.5, links gezeigt, zwei *In-plane*-Vibrometer der Fa. POLYTEC radial auf die beiden Reibringe gerichtet. Dadurch werden die tangentialen Bewegungen der Reibringe gemessen. Die Grafik rechts in Abbildung 7.5 zeigt einen Bereich des zeitlichen Verlaufs der von den beiden Vibrometern gemessenen Schwinggeschwindigkeiten. Es ist klar zu erkennen, dass beide Reibringe mit der gleichen Amplitude schwingen und die Signale um genau 180° phasenversetzt sind. Dieses konnte nicht nur bei 9,3 kHz, sondern ebenfalls bei 11,4 kHz gemessen werden. Die in Fahrversuchen bzw. am Prüfstand ebenfalls registrierte Problemfrequenz bei 8,1 kHz konnte im Rahmen dieser zweiten BSA am Messaufbau nicht reproduziert und somit auch nicht gemessen werden.

Um die räumliche Verteilung der IP-Bewegungen auf den Reibringen zu ermitteln, wurde das eine IP-Vibrometer an der Referenzposition bei 270° auf einem Reibring belassen (siehe Abbildung 7.6), während mit dem zweiten in etwa 30°-Schritten an verschiedenen Positionen gemessen wurde. Aufgrund der eingeschränkten Zugänglichkeit durch den Prüfstand bzw. Sattel konnten nicht alle Positionen gemessen werden.

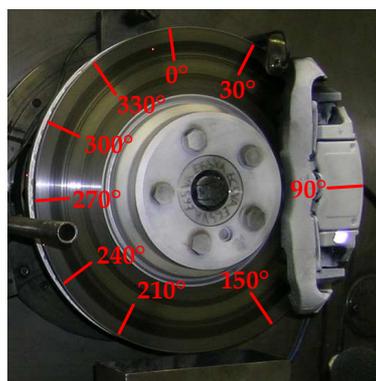
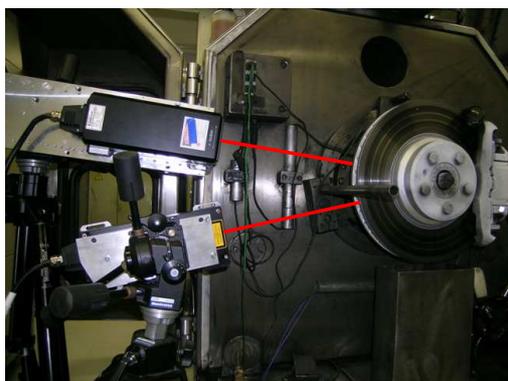


Abbildung 7.6: Messung der IP-Bewegung entlang des Umfanges.

Ein Amplitudenvergleich der gemessenen Geschwindigkeiten an den verschiedenen Positionen gibt Aufschluss über die auftretenden Knotenlinien auf der Scheibe. Abbildungen 7.7 und 7.8 zeigen das Ergebnis dieser Messungen. Die

maximalen Amplituden sind dabei jeweils auf das an 270° gemessene Referenzsignal bezogen. Bei der 9,3 kHz Quietschfrequenz ist der sinusförmige Verlauf der auftretenden Amplituden entlang des Umfanges der Bremsscheibe eindeutig zu erkennen. Damit existiert eine Knotenlinie entlang 0° - 180° wie in Abbildung 7.7 angedeutet. Bei 11,4 kHz ist der sinusförmige Verlauf nicht ganz so eindeutig zu erkennen. Das ist auf die nicht exakt eingehaltenen 30° -Abschnitte bei der Messanordnung und der eingeschränkten Anzahl von Messstellen zurückzuführen. Die Existenz von zwei Knotenlinien kann jedoch durch den vierfachen Vorzeichenwechsel entlang des Umfanges belegt werden.

Ein weiteres Ergebnis der BSA mittels Laservibrometrie ist, dass die zusätzlich zu den IP-Schwingungen der Scheibe gemessenen OP Schwingamplituden an verschiedenen Positionen des Sattels und Halters um ca. Faktor zehn kleiner sind, als die IP-Amplituden der Scheibe. Damit ist die IP-Schwingung der Scheibe die dominierende Bewegung dieser instabilen Schwingform.

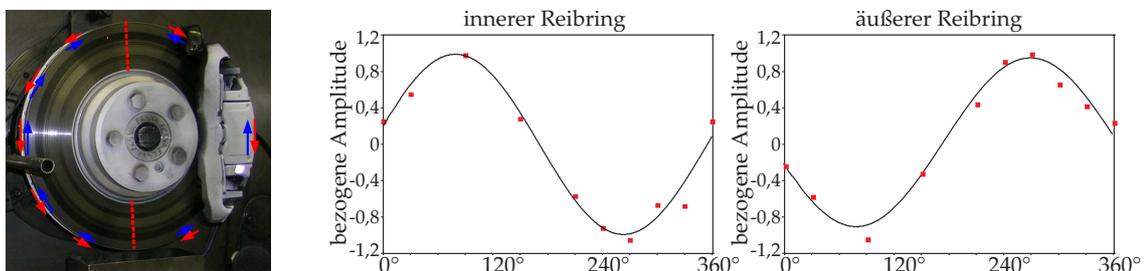


Abbildung 7.7: Gemessene instabile Schwingform bei 9,3 kHz

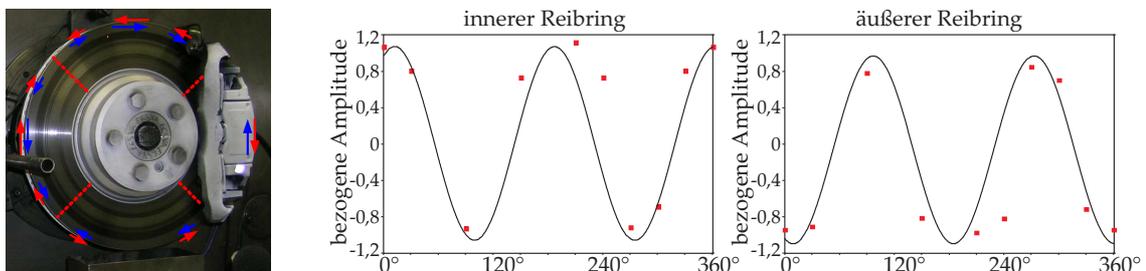


Abbildung 7.8: Gemessene instabile Schwingform bei 11,4 kHz

Die in diesem Abschnitt beschriebene BSA belegt also, dass die bei 9,3/11,4 kHz auftretenden instabilen Moden der Scheibe vom Typ IPTS-1ND und IPTS-2ND sind. Weiterhin ist gezeigt, dass die Ergebnisse der CAE-Simulation zum selben Ergebnis kommen.

Wie anfangs bereits erwähnt, wurden insgesamt vier Bremsen mit ähnlichen Problemen untersucht. Bei allen vier wurde die in diesem Abschnitt beschriebene BSA mittels Laservibrometrie durchgeführt und das Auftreten von instabilen IPTS-1ND und/oder IPTS-2ND Moden nachgewiesen. In allen Fällen wurden diese Moden auch in der CAE-Simulation als instabile Lösungen ermittelt.

Die Lösung λ_1/Φ_1 stellt dabei die Schwingung vom Typ IPT und die Lösung λ_2/Φ_2 den Typ IPTS dar. An den Realteilen von λ ist zu erkennen, dass bei einer negativen Steigung des geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetzes $c_\mu < 0$ beide Lösungen eine aufklingende Schwingung darstellen.

Dieses Ersatzmodell gibt also eine Erklärung für das Auftreten von IPTS-Brems-scheibenmoden in Bremsen. Es zeigt aber auch, dass IPT-Moden gleichermaßen als Instabilitäten hervortreten können. Dieses deckt sich mit den Ergebnissen der numerischen Stabilitätsanalyse (vgl. Abbildung 7.3), steht allerdings im Gegensatz zu den im Versuch gemachten Beobachtungen. Dort traten keine instabilen Schwingformen der Scheibe vom Typ IPT auf. Dieser Umstand wird daher in Kapitel 8 weiter untersucht.

7.3 Abhilfemaßnahmen

Nachdem das Problem im vorherigen Abschnitt analysiert wurde und auf das Auftreten von instabilen IPTS-Moden der Bremsscheibe zurückgeführt werden konnte, sollen im nächsten Schritt sinnvolle Abhilfemaßnahmen abgeleitet werden. Die Frage, warum gerade diese bestimmte Klasse von Bremsen solche davor noch nicht beobachteten hochfrequenten Geräuschprobleme hat, lässt sich einfach mit dem großen Verhältnis von Kühlkanalhöhe zu Reibringdicke begründen ($\approx 1,9$). Bremsen mit einem geringeren Verhältnis haben bislang keine vergleichbaren Geräuschprobleme gezeigt. Der Grund ist der Umstand, dass die Höhe der Rippe bei der Biege- bzw. Kippsteifigkeit in der dritten Potenz eingeht. Dadurch haben innenbelüftete Bremsscheiben mit einem Verhältnis Kühlkanalhöhe zu Reibringdicke von $< 1,5$ Moden vom Typ IPTS in einem deutlich höheren (nicht hörbaren¹³) Frequenzbereich.

7.3.1 Verstimmung

Das Ersatzmodell aus Abschnitt 7.2 zeigt, dass ein Verstimmen der Reibpartner, was in vielen Fällen eine Lösung des durch Instabilitäten hervorgerufenen Bremsenquietschens ist (vgl. Abschnitt 2.2), hier keine Lösung sein kann. Eine Veränderung der Steifigkeiten k_1, k_2 oder k_{12} bzw. der Massen hat keinerlei Einfluss auf das Auftreten der Instabilität. Lediglich die Frequenz der auftretenden instabilen Schwingung wird beeinflusst. Hier ist ausschließlich das geschwindigkeitsabhängige Reibgesetz aus 2.1.1.2 und nicht die Reibungskopplung aus 2.2.1.3 Ursache der Instabilität.

7.3.2 Versteifung

Eine einfach erscheinende Lösungsmöglichkeit besteht darin, die Rippensteifigkeit so zu erhöhen, dass die IPTS-*m*ND-Moden in einen nicht hörbaren

¹³siehe Fußnote 12 auf Seite 82

Frequenzbereich verschoben werden. Die Frage dabei ist, welche systemverträgliche Maßnahme dieses bewirkt.

Für die o.g. Bremse wurde eine alternative Bremsscheibengeometrie mit dickeren, nach innen keilförmig geformten Rippen erprobt (vgl. Abbildung 7.10).

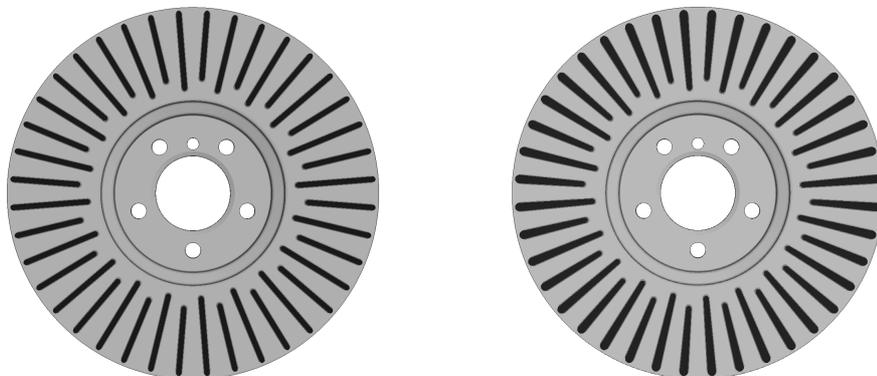


Abbildung 7.10: Standard- und modifizierte Scheibe mit verdickten Rippen

Das Ergebnis dieser Erprobung war, dass die Quietschprobleme bei 8,1/9,3/11,4 kHz zwar nicht mehr bestehen, dafür aber eines bei 11,2 kHz auftritt. Das bestätigen auch die Simulationsergebnisse (vgl. Abbildung 7.11). Durch die Versteifung werden die IPTS-*m*ND Problemfrequenzen zwar in einen höheren Frequenzbereich verschoben, aber nicht hoch genug, so dass sie weiterhin im hörbaren Bereich liegen. Diese Maßnahme alleine kann das Problem demnach nicht lösen.

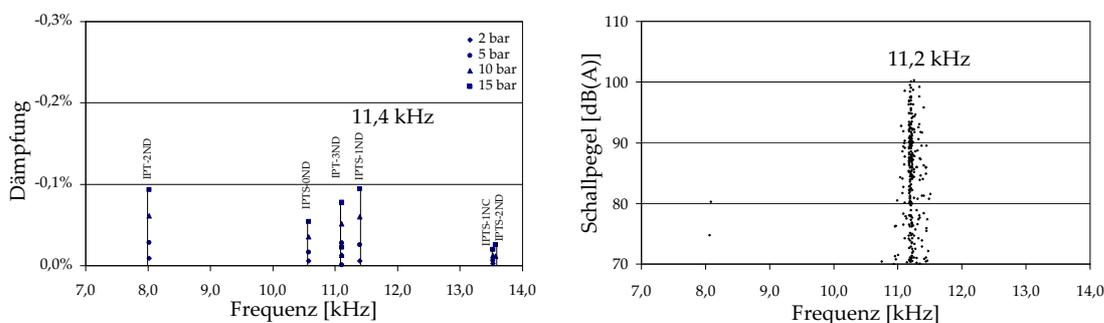


Abbildung 7.11: Ergebnis von Simulation (links) und Versuch (rechts) der Bremse mit modifizierter Scheibe

Bei einer Bremsscheibe sind der Modifikation der Geometrie enge Grenzen gesetzt. Die Rippendicke kann nicht beliebig verstärkt bzw. dessen Anzahl beliebig erhöht werden, da dieses zu Lasten der Kühlleistung geht. Außen- und Innendurchmesser sowie die Dicken der Reibringe sind ebenfalls einigen Zwängen unterworfen, damit sie weiteren Anforderungen z.B. hinsichtlich des Bauraums oder der Thermomechanik genügen.

Um zu untersuchen, welche Parameter der Scheibengeometrie einen großen

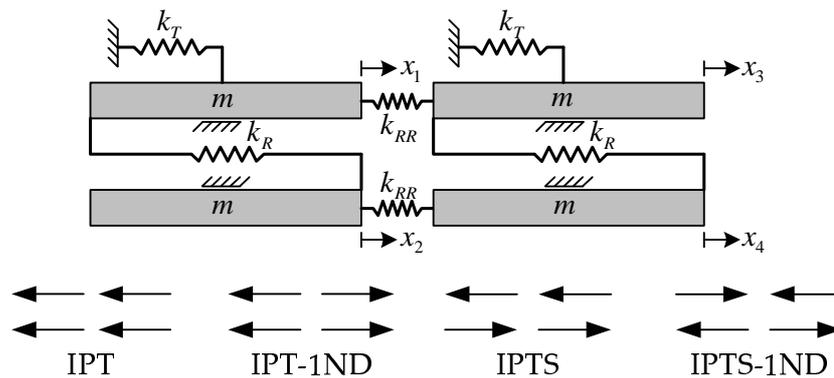


Abbildung 7.12: Erweitertes Ersatzmodell für IPT-1ND und IPTS-1ND

Einfluss auf die Frequenz der IPTS-*m*ND-Moden haben, wurde ein weiteres Ersatzmodell erstellt. Im Gegensatz zur Analyse von Instabilitäten mit dem Phänomen der Reibungskopplung aus Abschnitt 2.2 ist es bei der hier vorliegenden Ursache (vgl. Abschnitt 2.1.1.2) möglich, nur die Scheibe als Einzelkomponente zu untersuchen.

Dazu wird das in Abbildung 7.12 gezeigte Ersatzsystem verwendet, welches lediglich die Eigenformen IPT-0ND, IPT-1ND, IPTS-0ND und IPTS-1ND einer an der Topfauflagerfläche gelagerten Bremscheibe, nicht aber die die Instabilität verursachende Reibung bzw. Sattel und Beläge abbildet. Die Massen und Federn werden in Abhängigkeit von den Bremscheibenparametern bzw. -abmessungen ausgedrückt. Somit kann der Einfluss einer Parametervariation auf diese vier Bremscheibenmoden untersucht werden.

Die berücksichtigten Bremscheibenparameter sind:

Außendurchmesser	$d_a = 374 \text{ mm}$	Reibringhöhe	$h_{RR} = 76 \text{ mm}$
Reibringdicke	$t_{RR} = 9,25 \text{ mm}$	Rippenhöhe	$h_R = 17,5 \text{ mm}$
Rippendicke	$t_R = 5 \text{ mm}$	Topfwanddicke	$t_T = 6 \text{ mm}$
Topfhöhe	$h_T = 50 \text{ mm}$	Anzahl Rippen	$n_R = 40$

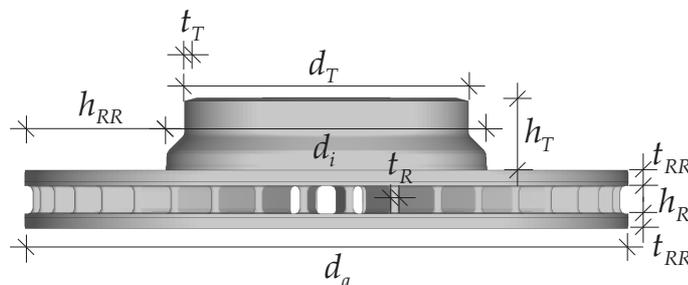


Abbildung 7.13: Bremscheibenparameter

Mit den Materialparametern

$$E = 112000 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right], \quad G = 43100 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right], \quad \varrho = 7,8 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{to}}{\text{mm}^3} \right] \quad (7.5)$$

können die folgenden Werte abgeleitet werden:

innerer Reibringdurchmesser	$d_i = d_a - 2 \cdot h_{RR}$
Topfdurchmesser	$d_T = d_i - 60 \text{ mm}$
mittlerer Reibringradius	$r_m = \frac{d_a - d_i}{2}$
Reibringfläche	$A_{RR} = \frac{(d_a^2 - d_i^2)}{4} \pi$
Topffläche	$A_T = \frac{d_T^2}{4} \pi$
Reibringmasse mit Rippenanteil	$m_{RR} = \left(A_{RR} \cdot t_{RR} + n_R \cdot l_R \cdot \frac{h_R}{2} \cdot t_R \right) \varrho$
Rotationsträgheit Reibring	$I_{\Theta_{RR}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{m_{RR}}{A_{RR}} \cdot \frac{(d_a^2 - d_i^2)}{16}$
Torsionsfeder zum Topf	$k_{\varphi_T} = \frac{2 \cdot G \cdot A_T^2 \cdot t_T}{\pi \cdot \frac{d_T}{2} \cdot h_T}$
Flächenmoment einer Rippe	$I_R = \frac{h_R \cdot t_R^3}{12}$
Kippsteifigkeit einer Rippe	$k_{R_{kipp}} = \frac{12 \cdot E \cdot I_R}{h_R^3}$
Drehfeder aller Rippen	$k_{\varphi_R} = n_R \cdot k_{R_{kipp}} \cdot r_m^2$
Dehnsteifigkeit Reibring	$k_{\varphi_{RR}} = \frac{E \cdot t_{RR} \cdot h_{RR}}{2 \cdot \pi \cdot r_m} \cdot r_m^2$

Diese werden durch folgende Beziehungen auf das Ersatzmodell aus Abbildung 7.12 übertragen:

$$\begin{aligned} m_{13} &= 1,10 \cdot I_{\Theta_{RR}} \\ m_{24} &= 0,95 \cdot I_{\Theta_{RR}} \\ k_T &= \frac{k_{\varphi_T}}{2} \\ k_R &= \frac{k_{\varphi_R}}{2} \\ k_{RR} &= 18 \cdot k_{\varphi_{RR}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Der Faktor 1,10 bei den Massen m_{13} berücksichtigt die etwas höhere Reibringdicke auf der Topfseite sowie einen Trägheitsanteil vom Topf, der Faktor 0,95 bei den Massen m_{24} die etwas geringere Reibringdicke auf der Innenseite. Die Dehnsteifigkeit der Reibringe $k_{\varphi_{RR}}$ erfordert eine Korrektur, da die relativ komplizierten Schwingformen bei IPT bzw. IPT-1ND Moden nur näherungsweise durch

vier Freiheitsgrade dargestellt werden können.

Mode	Frequenz FE-Modell	Frequenz Ersatzmodell	Abweichung
IPT	1214 Hz	1306 Hz	7,6%
IPT-1ND	5546 Hz	4952 Hz	12%
IPTS	8152 Hz	7848 Hz	3,9%
IPTS-1ND	9138 Hz	9196 Hz	0,6%

Tabelle 7.1: Abweichungen der Frequenzen zum FE-Modell bei der Standardscheibe

Mode	Frequenz FE-Modell	Frequenz Ersatzmodell	Abweichung
IPT	1169 Hz	1289 Hz	10,2%
IPT-1ND	5421 Hz	4855 Hz	11,7%
IPTS	10574 Hz	10560 Hz	0,1%
IPTS-1ND	11392 Hz	11559 Hz	1,5%

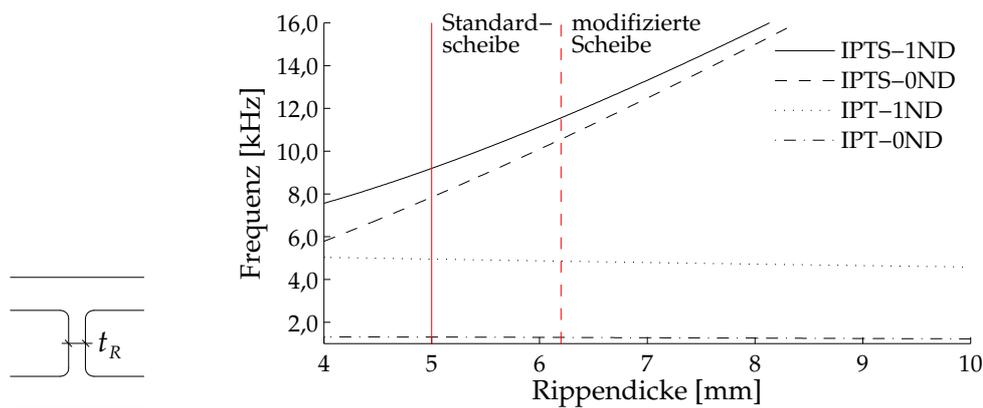
Tabelle 7.2: Abweichungen der Frequenzen zum FE-Modell bei der Scheibe mit verdickten Rippen

In Tabelle 7.1 ist zu erkennen, dass die vier Eigenfrequenzen dieses Ersatzmodells gut zu denen des FE-Modells mit der Standardscheibe passen. Auch ein Vergleich mit den Ergebnissen der modifizierten Scheibe aus Abbildung 7.10, deren einzig unterschiedliche Parameter die mittlere Rippendicke von $t_R = 6,2$ mm ist, liefert eine ähnlich gute Übereinstimmung des Ersatzmodells und der FE-Analyse (vgl. Tabelle 7.2). Die Materialparameter der FE-Modelle sind dabei so abgestimmt, dass die Ergebnisse mit denen der experimentellen Modalanalyse übereinstimmen.

Im Folgenden wird nun eine Variation einiger Bremsscheibenparameter durchgeführt. Dabei wird zunächst die Rippendicke im Bereich $4 \text{ mm} \leq t_R \leq 10 \text{ mm}$ variiert. In Abbildung 7.14 ist die Veränderung der Eigenfrequenzen dargestellt. Darin ist die Rippendicke der Standardscheibe und die mittlere Rippendicke der modifizierten Scheibe markiert.

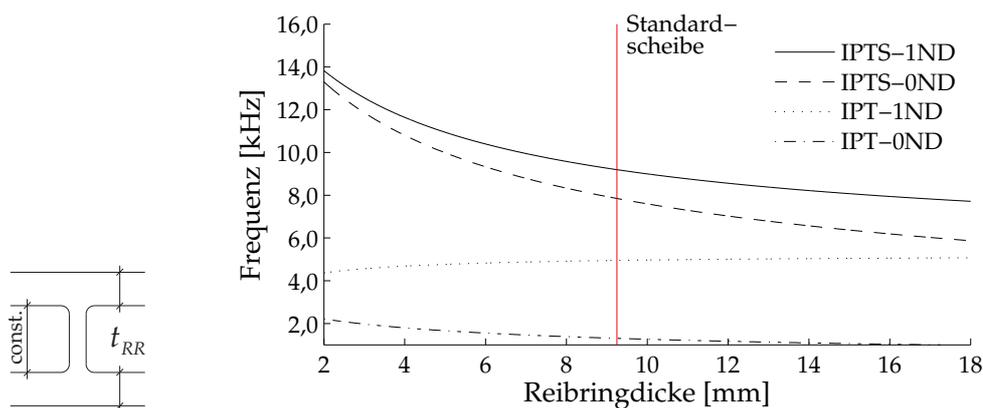
Es ist zu erkennen, dass zur Verlagerung der IPTS-*m*ND-Moden in den nicht hörbaren Bereich eine Rippendicke notwendig ist, die geometrisch nicht mehr umsetzbar ist.

Zu erwähnen ist, dass das Ersatzmodell bei größeren Rippendicken nicht mehr gültig ist, da die Feder nicht mehr durch die Biegesteifigkeit der Rippen abgebildet und der Einfluss der Schubsteifigkeit nicht mehr vernachlässigt werden kann. Da eine deutliche Überschreitung der mittleren Rippendicke der modifizierten Scheibe aus Gründen der Kühlleistungsanforderungen nicht möglich ist, wird dieses nicht weiter berücksichtigt.

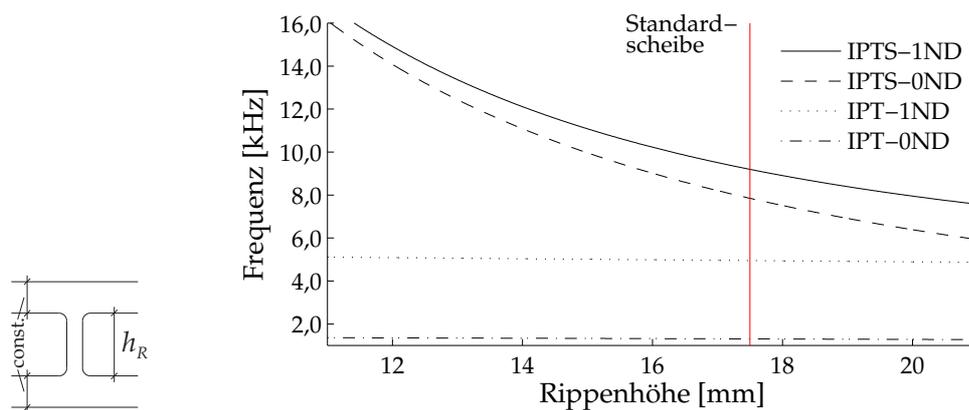
Abbildung 7.14: Variation der Rippendicke t_R

Eine Erhöhung der Rippenanzahl n_R ist nicht sehr effektiv, da sie linear in die Rippenersatzfeder eingeht, während die Rippendicke t_R in der dritten Potenz eingeht. Denkbar wäre eine Verkleinerung der Rippenanzahl bei vergrößerter Rippendicke. Damit würde die Rippenfeder deutlich steifer, ohne dass die Kühlkanalquerschnitte zu sehr verengt werden. Aber auch solch eine Maßnahme würde sich ungünstig auf das Kühlverhalten auswirken, da die Oberfläche in den Kühlkanälen und der Volumenstrom deutlich kleiner wird.

Eine Variation der Reibringdicke t_{RR} bei konstanter Rippenhöhe h_R (=Kühlkanalhöhe) ergibt das Ergebnis aus Abbildung 7.15. Durch eine Reduzierung der Reibringmassen lässt sich ebenfalls eine Erhöhung der IPTS- m ND-Moden erreichen. Jedoch ist auch hier die notwendige Reduzierung der Reibringdicke, um eine Verlagerung der Problem-Moden in den nichthörbaren Bereich zu erzielen, nicht umsetzbar.

Abbildung 7.15: Variation der Reibringdicke t_{RR}

Wird die Rippenhöhe h_R bei konstanten Reibringdicken t_{RR} variiert, gelten für die Anwendung der Biegetheorie die gleichen Einschränkungen wie bei der Variation der Rippendicke. In Abbildung 7.16 ist zu erkennen, dass bei einer Reduzierung der Rippenhöhe auf etwa 11 mm, welches einem Verhältnis von Kühlkanalhöhe zu Reibringdicke von etwa 1,2 entspricht, die IPTS- m ND-Frequenzen

Abbildung 7.16: Variation der Rippenhöhe h_R

den hörbaren Bereich verlassen haben. Das deckt sich mit der Tatsache, dass bei Bremscheiben mit diesem oder einem geringeren Verhältnis derartige Probleme nicht bekannt sind.

Die Ergebnisse dieses Ersatzmodells veranschaulichen, dass die instabilen IPTS- m ND-Moden bei Bremscheiben mit einem Verhältnis von Kühlkanalhöhe zu Reibringdicke von etwa 1,2 oder weniger nicht mehr im hörbaren Bereich liegen.

Weiterhin ist zu erkennen, dass durch kleinere Modifikationen an der Bremscheibe, welche die Scheibe geometrisch nicht wesentlich verändern, keine signifikante Verlagerung der Frequenzen von IPTS- m ND-Moden möglich ist. Ist aus Leistungs- bzw. Kühlungsgründen eine große Rippenhöhe erforderlich, kann nicht auf die herkömmliche Scheibengeometrie zurückgegriffen werden, ohne dass die Gefahr des Auftretens von instabilen IPTS- m ND Moden besteht.

Werden Kühlkanäle bzw. die Rippen in Form eines Fachwerks ausgebildet (vgl. Abbildung 7.17), wird die Rippensteifigkeit in tangentialer Richtung deutlich erhöht. Wird dieses Prinzip auf die hier untersuchte Bremse angewendet (60 dreiecksförmige Kühlkanäle mit einer Rippendicke von 4 mm), liegen die IPTS- m ND-Moden außerhalb des hörbaren Bereiches. Bei einer Betrachtung des Kühlverhaltens stellt man fest, dass sich die erhöhte Fläche in den Kanälen positiv auf die Kühlung auswirkt.¹⁴ Nachteil dieser Rippen- bzw. Kühlkanalform ist ein erhöhter Herstellungsaufwand und ein größeres Gewicht.

7.3.3 OP Komponente

Ein großes Problem bei der Verhinderung des Auftretens von instabilen IPTS- m ND-Moden ist der Umstand, dass Dämpfungsmaßnahmen an der Scheibe nur schwer möglich sind. Da bei diesen Schwingformen im Wesentlichen nur die Scheibe an der Schwingform beteiligt ist, können auch nur hier Dämpfungsmaßnahmen wirken. Wenn nun die auftretende instabile Mode nicht nur eine „reine“ IPTS-Bewegung ausführt, sondern gleichzeitig auch OP-Komponenten

¹⁴Der Nachweis erfolgte ausschließlich durch CAE-Simulationen.

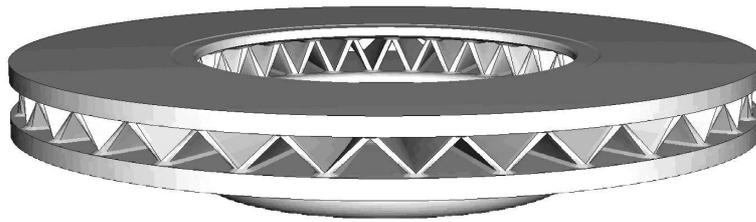


Abbildung 7.17: Scheibengeometrie mit als Fachwerk ausgebildeten Kühlkanälen bzw. Rippen

hat, sind andere Bauteile der Bremse, insbesondere die Beläge, zwangsläufig mit an der Schwingung beteiligt. Die Beläge vollziehen dabei nicht selten eine Biegebewegung und können mit einem Dämpfungsblech (*Shim*) durch den *constrained-layer-damping*-Effekt bedämpft werden. Auch die Materialdämpfung des Reibmaterials oder ggf. der Zwischenschicht bewirken dann eine Dämpfung (vgl. Abschnitt 5.3.2).

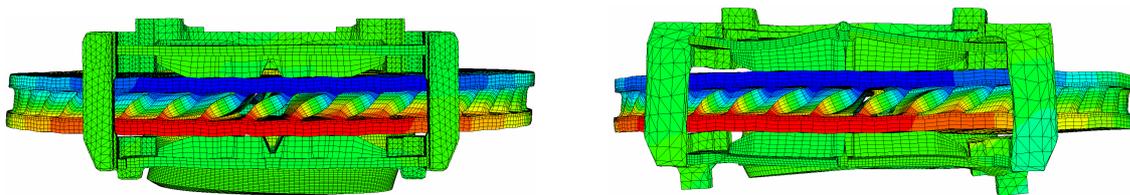


Abbildung 7.18: Instabilität mit „reiner“ IPTS-Scheibenmode (links) und mit zusätzlicher Bewegung/Verformung der Beläge (rechts) OP-Komponente

Diese Hypothese wird durch die Ergebnisse der BSA und der CAE-Simulation an einer weiteren untersuchten Bremse bestätigt, bei der Beläge von zwei verschiedenen Firmen erprobt wurden. BSA und CAE-Simulation ergeben eine instabile IPTS-1ND Schwingform der Scheibe bei 9,1 kHz, in der zwar die tangentielle IP-Bewegung dominierend, aber auch eine geringe OP-Bewegung und eine Bewegung/Verformung der Beläge vorhanden ist (vgl. Abbildung 7.18, rechts).

Bei der Verwendung der Beläge der Firma A trat dieses Problem auf, bei Belägen der Firma B nicht. Eine experimentelle FRF-Analyse der beiden Belagtypen ergibt nur marginale Unterschiede in den Eigenfrequenzen, aber einen deutlichen Unterschied in der Materialdämpfung der Zwischenschicht.

So konnte dieses Problem einer instabilen IPTS-1ND-Bewegung der Scheibe, bei gleichzeitiger Bewegung/Verformung der Beläge, durch eine erhöhte Materialdämpfung in der Zwischenschicht gelöst werden.

Ein allgemein gültiges Kriterium für die Bedämpfbarkeit von IPTS-Formen der Bremsscheibe mit OP-Anteil kann jedoch nicht angegeben werden. Sie ist abhängig von der individuellen, instabilen Schwingform des Gesamtsystems. Auch wenn in der Modalanalyse der Scheibe alleine eine „reine“ IPTS-Mode ermittelt wird, was bedeutet, dass nur IPTS-Bewegungen auftreten, kann sich im Gesamt-

system trotzdem eine Instabilität der IPTS-Mode mit OP-Komponente ausbilden. Daher ist das Auftreten von instabilen IPTS Schwingformen bzw. die Häufigkeit und/oder Intensität der hochfrequenten Quietschprobleme bei allen untersuchten Bremsen nicht gleich, obwohl die Bremsscheibengeometrien in allen Bremsen sehr ähnlich sind. Je nachdem wie „rein“ sich die IPTS Moden der Scheibe im Bremsengesamtsystem ausbilden, stellen sie instabile Lösungen dar, die zu Geräuschen führen.

7.3.4 IPR Komponente

Einen weiteren Dämpfungseffekt erhält man, wenn eine Schwingform außer der IPT- gleichzeitig eine IPR-Komponente an der Reibfläche Belag-Scheibe aufweist (vgl. Abschnitt 5.2.1, [5, 49, 82]). Durch den Vektor der auftretenden Relativgeschwindigkeit zwischen den Reibpartnern erhält man zu der negativen Dämpfung aus dem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz zusätzlich auch eine positive Reibungsdämpfung. Beide sind proportional zum Bremsdruck σ_N . Nimmt man an, dass sich die Bremsbeläge weder in radialer noch in tangentialer Richtung bewegen, entspricht die Relativbewegung an der Reibkontaktfläche A_μ der Bewegung der Scheibe x_{rad}, x_{tan} in diesem Bereich. Dann gilt für die positive Reibungsdämpfungsarbeit aus der radialen Bewegung

$$A_{D_{pos}} = \int_0^T \int_{A_\mu} \frac{\mu}{v_B} \sigma_N \cdot \dot{x}_{rad}(t)^2 dA dt \quad (7.7)$$

und für die negative Reibungsdämpfungsarbeit aus der tangentialen Bewegung

$$A_{D_{neg}} = \int_0^T \int_{A_\mu} \frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} \sigma_N \cdot \dot{x}_{tan}(t)^2 dA dt. \quad (7.8)$$

Die Bewegung wird instabil, wenn

$$A_{D_{neg}} > A_{D_{pos}} \quad (7.9)$$

ist. Nimmt man vereinfachend an, dass $\sigma_N, \mu, \dot{x}_{rad}, \dot{x}_{tan}$ und v_B über die Reibkontaktfläche A_μ konstant sind, können die Beziehungen (7.7) und (7.8) wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} A_{D_{pos}} &= \frac{\mu}{v_B} F_N \int_0^T \dot{x}_{rad}(t)^2 dt \\ A_{D_{neg}} &= \frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} F_N \int_0^T \dot{x}_{tan}(t)^2 dt \end{aligned} \quad (7.10)$$

Da die Verschiebungen x_{rad} und x_{tan} Bestandteil der selben Mode sind, ist der zeitliche Verlauf identisch. Unter der Annahme einer geringen Dämpfung können die Integrale in (7.10) über eine gemeinsame Konstante κ und das Quadrat der Verschiebung ausgedrückt werden:

$$A_{D_{pos}} = \frac{\mu}{v_B} F_N \kappa x_{rad}^2 \quad (7.11)$$

$$A_{D_{neg}} = \frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} F_N \kappa x_{tan}^2 \quad (7.12)$$

Mit (7.9) kann nun ein Stabilitätskriterium in der Form

$$\frac{x_{rad}}{x_{tan}} > \sqrt{\frac{\frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} v_B}{\mu}} \quad (7.13)$$

angegeben werden. Für die in diesem Kapitel durchgeführten Stabilitätsuntersuchungen wurden folgende charakteristische Werte angenommen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial v_{rel}} &= 5,0 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{s}}{\text{mm}} \right] \\ v_{B_{tan}} &= 1,0 \cdot 10^3 \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}} \right] \\ \mu &= 0,5 [-] \end{aligned} \quad (7.14)$$

Daraus ergibt sich ein Verhältnis

$$\frac{x_{rad}}{x_{tan}} > 0,3. \quad (7.15)$$

Werden also Bremsscheiben mit IPTS-Eigenmoden verwendet, die nicht nur eine reine IPTS-Bewegung, sondern gleichzeitig eine IPR-Komponente haben, die mindestens 30% der tangentialen entspricht, sind demnach keine Instabilitäten mit IPTS-Schwingformen zu erwarten.

Um diese Hypothese zu belegen, wurden weitere alternative Bremsscheibengeometrien untersucht (siehe Abbildung 7.19). Diese Varianten sind aus einer Optimierung des Kühlverhaltens hervorgegangen. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie keine reinen IPTS-Schwingformen ausbilden, sondern diese auch relevante radiale und/oder OP-Komponenten aufweisen.

Im Folgenden werden zunächst für alle untersuchten Bremsscheiben die Eigenformen mittels FE-Modellen unter frei-frei Bedingungen ermittelt. Die Verschiebungen in radialer, tangentialer und normaler Richtung für die IPTS-0ND, -1ND und -2ND Moden werden an einem äußeren Knotenring des topfseitigen Reibringes (vgl. Abbildung 7.20) in Diagrammen in den Abbildungen 7.21 bis 7.24 als Abwicklung dargestellt. Die Schwingformen sind so skaliert, dass das jeweilige Maximum der tangentialen Verschiebung 1,0 ergibt.

Bei der Standard-Scheibe (vgl. Abbildung 7.21) hat die IPTS-0ND-Mode eine sehr geringe radiale Komponente. Die bei der IPTS-Bewegung entstehende

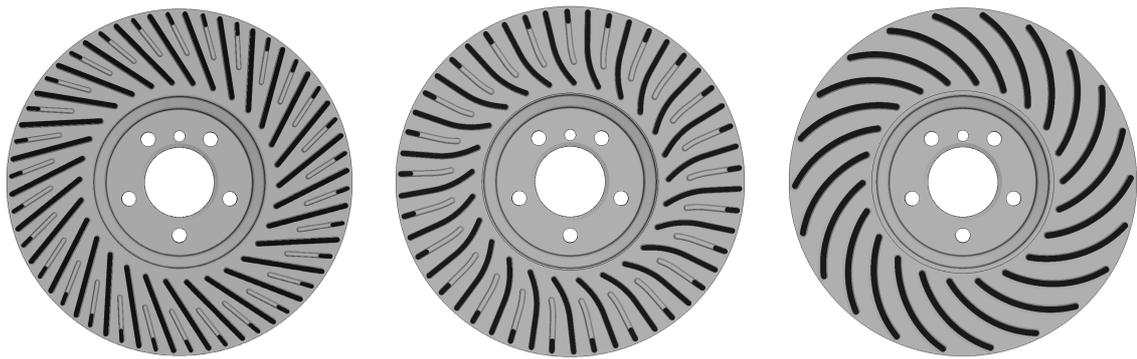


Abbildung 7.19: Alternative, laufrichtungsabhängige Bremsscheibengeometrien

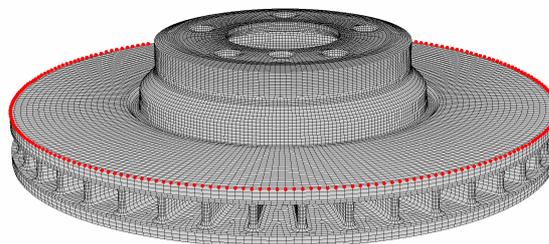


Abbildung 7.20: Knotenring für Ausgabe von Verschiebungen

Welligkeit auf der Scheibenoberfläche (40 Perioden aufgrund der Rippenanzahl) ist u.a. in dieser Darstellung zu erkennen.

Bei den IPTS-1ND- und -2ND-Moden ist der Verlauf der radialen Komponente in Relation zur tangentialen um 90° bzw. 45° phasenversetzt. Dort, wo die tangentialen Verschiebungen ihr Maximum haben, sind die radialen null bzw. sehr klein.

Die Stabilitätsanalysen wie auch die erweiterte BSA zeigen, dass sich die instabilen IPTS-1ND und -2ND Moden jeweils so einstellen, dass das tangential Maximum im Bereich der Reibkontaktstelle Belag-Scheibe auftritt (vgl. Abbildung 7.4, 7.7 und 7.8). Dadurch ist der positive Energieeintrag nach (7.8) maximal. Die radiale Komponente hat dort einen Nulldurchgang. Folglich ist die positive Reibungsdämpfung nach (7.7) gering.

Bei der Scheibe mit verdickten Rippen (vgl. Abbildung 7.10, rechts) ist das Verhalten ähnlich.

Die Scheibe mit 45° -schrägen Rippen (vgl. Abbildung 7.22) hat dagegen deutlich größere radiale und normale Komponenten. Bei der IPTS-0ND Mode ist ebenfalls eine Periodizität durch die 2×30 Rippen zu erkennen. Es fällt auf, dass hier kein Phasenversatz bei den IPTS-1ND und -2ND Moden vorhanden ist. An der Kontaktstelle Belag/Scheibe, bei der das Maximum der tangentialen Bewegung auftritt, hat auch die radiale Bewegung ihr Maximum. Daher hat der Vektor der Relativgeschwindigkeit außer in tangentialer auch in radialer Richtung eine

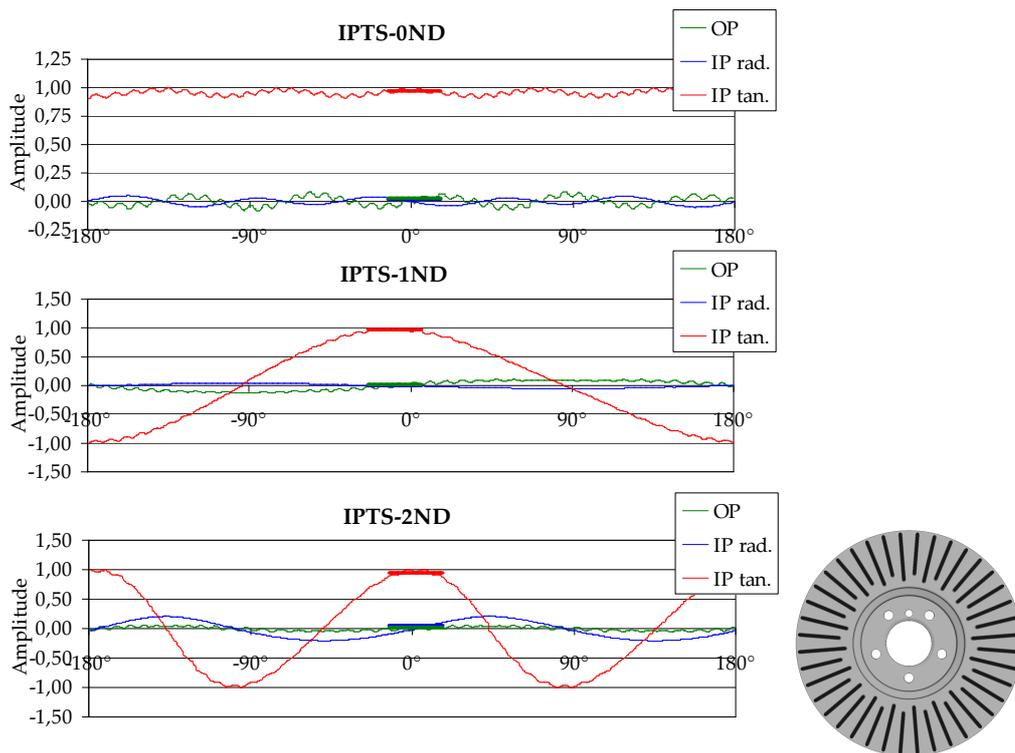


Abbildung 7.21: IPT/IPR/OP-Komponenten der IPTS- m ND-Schwingformen von der Scheibe mit Standard- (radialen) Rippen

Komponente und erzeugt dadurch positive Reibungsdämpfung.

Bei der Scheibe mit gekrümmten Rippen (vgl. Abbildung 7.23) verhält es sich ähnlich. Im Bereich der Kontaktstelle ist der Phasenversatz zwischen tangentialer und radialer Komponente sehr klein, so dass auch hier radiale und tangentiale Bewegungen zusammenfallen und eine positive Reibungsdämpfung existiert.

Im Falle der Scheibe mit teilgekrümmten Rippen (vgl. Abbildung 7.24) ist das Ergebnis indifferent. Während die IPTS-0ND Schwingform eine radiale Komponente entlang des Umfanges zeigt, sind die radialen Anteile bei den IPTS-1ND und -2ND Moden gering. Hier zeigt sich wiederum der Phasenversatz von 90° bzw. 45° gegenüber der tangentialen Komponente.

Die Reibkontaktfläche erstreckt sich etwa über einen 30° -Sektor der Bremsscheibe. Um das Stabilitätskriterium (7.13) zu überprüfen, wird für die untersuchten Bremsscheiben das Verhältnis x_{rad}/x_{tan} (7.15) ermittelt. Das ergibt sich vereinfacht aus dem Mittelwert der Bewegungen im Bereich $\pm 15^\circ$ um ein Maximum der tangentialen Verschiebung. Da in diesem Bereich für die tangentiale Verschiebung sowohl positive als auch negative Werte auftreten, wird der Mittelwert dabei aus den Beträgen der Knotenwerte berechnet. Radiale Relativverschiebungen erzeugen, unabhängig, ob sie nach innen oder außen gerichtet

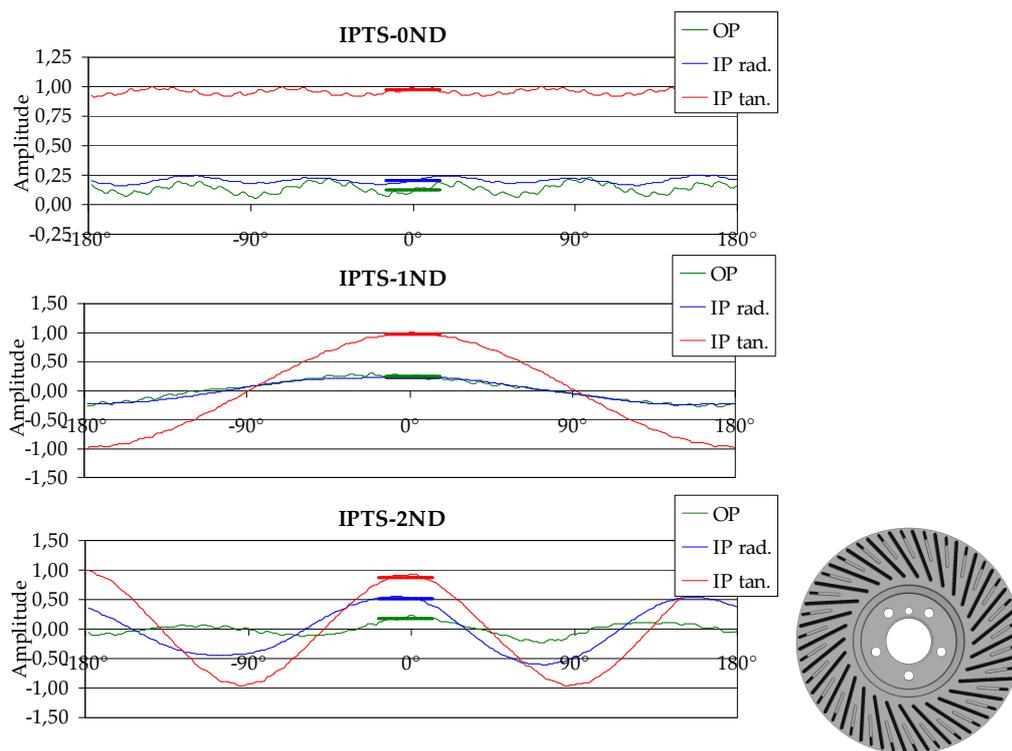


Abbildung 7.22: IPT/IPR/OP-Komponenten der IPTS- m ND-Schwingformen von den Scheiben mit 45° schrägen Rippen

sind, immer eine positive Dämpfung und heben sich nicht auf.

Diese Mittelwerte sind in den Abbildungen 7.21 bis 7.24 in einem Sektor von $\pm 15^\circ$ um ein lokales Maximum der tangentialen Bewegung markiert. In Tabelle 7.3 sind die Verhältnisse von radialer zu tangentialer Bewegung aus diesen Mittelwerten für die drei Scheibentypen dargestellt. Es zeigt sich, dass das Kriterium (7.15) bei der Standard-Scheibe und der Scheibe mit verdickten Rippen für alle IPTS-Moden nicht eingehalten ist. Auch die Verhältnisse bei der Scheibe mit teilgekrümmten Rippen liegt deutlich darunter. Die Scheibenvarianten mit 45° -schrägen und gekrümmten Rippen haben hingegen ein deutlich größeres Verhältnis von radialer zu tangentialer Bewegung, was jedoch nicht in allen Fällen den Wert aus (7.15) erreicht. Dabei ist zu beachten, dass sowohl die Herleitung des Stabilitätskriteriums (7.15) als auch die Ermittlung der Werte in Tabelle 7.3 der Scheibe einigen vereinfachenden Annahmen unterliegt.

Dennoch ist in Tabelle 7.3 zu erkennen, dass sich die Varianten mit gekrümmten und 45° -schrägen Rippen durch deutlich höhere Verhältnisse von den anderen Varianten unterscheiden.

Die durchgeführte CAE-Stabilitätsanalyse der Bremse mit den hier beschriebenen drei modifizierten Scheiben zeigt das Auftreten von allen IPTS- m ND Moden als instabile Lösung für die Scheibe mit schräg-radialen Rippen. Bei der Scheibe mit gekrümmten Rippen treten gar keine Instabilitäten mit IPTS- m ND Moden auf. Bei der Scheibe mit 45° schrägen Rippen nur die IPTS-1ND Mode, allerdings mit einem wesentlich geringeren Grad der Stabilität und mit signifikanter

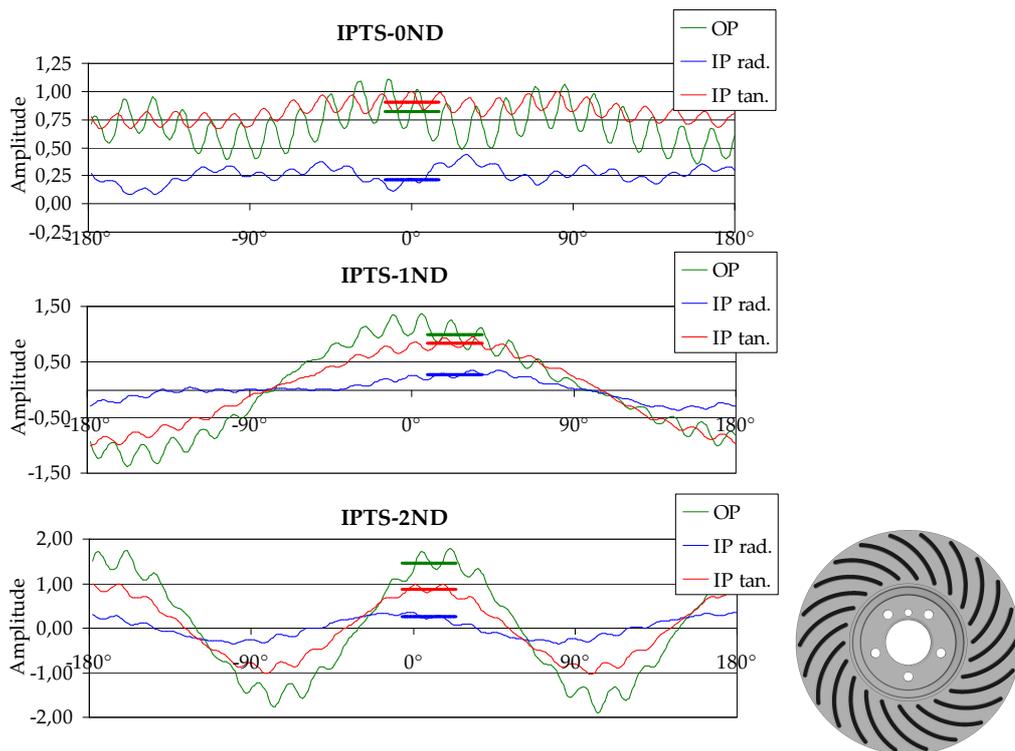


Abbildung 7.23: IPT/IPR/OP-Komponenten der IPTS- m ND-Schwingformen von den Scheiben mit gekrümmten Rippen

OP-Komponente, als bei der mit geraden Rippen.

In Versuchen am Geräuschprüfstand sind die Scheibengeometrien der Varianten 45° schräg, schräg-radial und gekrümmt in einer ähnlichen Bremse erprobt worden. Die dort gewonnenen Erkenntnisse stimmen mit denen aus der CAE-Simulation überein. Im Gegensatz zur Scheibe mit teilgekrümmten Rippen zeigten die Scheiben mit 45° schrägen und die mit gekrümmten Rippen eine klare Verbesserung in Bezug auf das Auftreten von hochfrequenten Quietschproblemen.

7.3.5 Störung der Symmetrie

Ein weiterer Ansatz zur Verhinderung des Auftretens von instabilen Moden in Bremsen ist die Störung der Rotationssymmetrie der Scheibe. Dabei gibt es allgemein zwei Effekte, die das Schwingverhalten von rotationssymmetrischen Strukturen beeinflussen, welche im Folgenden erläutert werden.

7.3.5.1 Teilung von Doppelmoden

Durch die Symmetrie der Bremsscheiben können stehende Wellen auf der rotierenden Scheibe entstehen, welche bei instabilen Bremszuständen beobachtet werden (vgl. Abschnitt 3.2.2.2). Wird bei Scheiben die Achssymmetrie gestört,

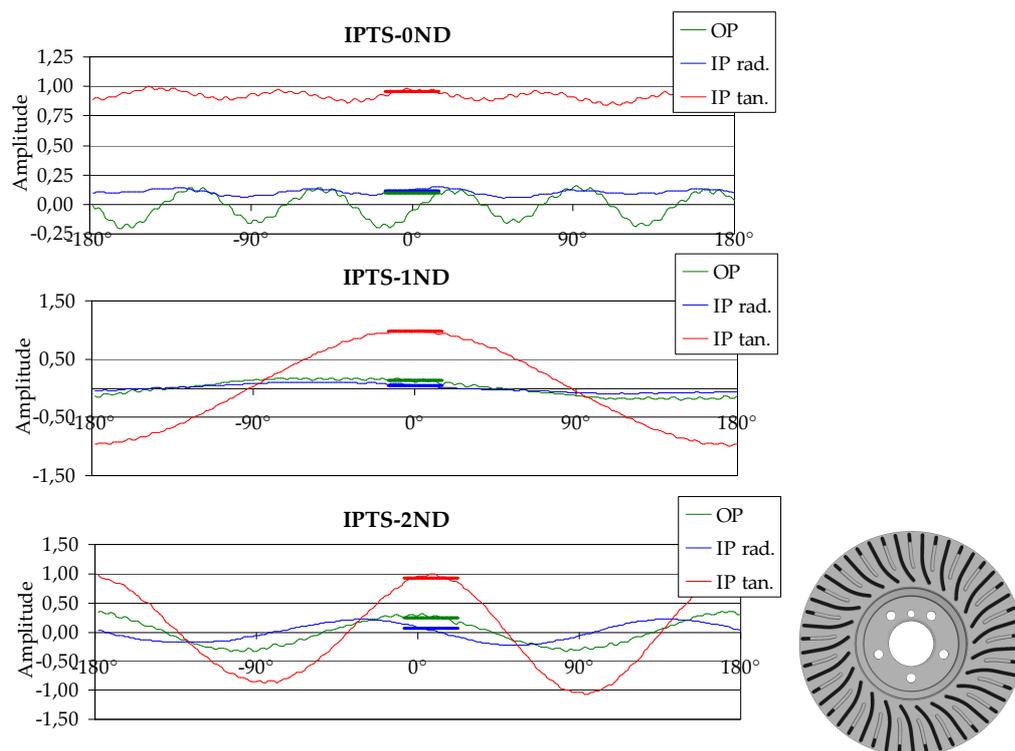


Abbildung 7.24: IPT/IPR/OP-Komponenten der IPTS- m ND-Schwingformen von der Scheibe mit teilgekrümmten Rippen

d.h. die Scheibe ist nicht um jeden beliebigen Durchmesser auf der Scheibe symmetrisch, hat dieses einen Einfluss auf das Auftreten von bestimmten Doppelmoden [44].

Eine Störung der Achssymmetrie muss immer so geartet sein, dass die Scheibe ausgewuchtet bleibt. Das bedeutet, dass die Hauptträgheitsachse mit der Rotationsachse übereinstimmen muss [28]. Innenbelüftete Bremscheiben weisen eine Störung der Achssymmetrie auf. Durch die äquidistant um den Umfang verteilten Rippen ist für alle Volumenelemente mit dem Ortsvektor \mathbf{r} bezüglich der Drehachse die Bedingung der Auswuchtung erfüllt:

$$\rho \int_V \mathbf{r} dV = 0 \quad (7.16)$$

KIM et al. [44] geben die Regel an, dass es für OP-Moden einer Scheibe bei N äquidistant um den Umfang verteilten Störungen zwei Fälle gibt:

1. **N ist gerade:**

Moden mit radialen Knotenlinien $ND = m \cdot \frac{N}{2}$ mit $m = 1, 2, 3, \dots$ treten nicht mehr als Doppelmode auf.

2. **N ist ungerade:**

Moden mit radialen Knotenlinien $ND = m \cdot N$ mit $m = 1, 2, 3, \dots$ treten nicht mehr als Doppelmode auf.

Scheibentyp	IPTS-0ND	IPTS-1ND	IPTS-2ND
Standard	0,02	<0,01	0,06
verdickte Rippen	0,01	0,02	0,14
45°-schräg	0,21	0,25	0,58
gekrümmt	0,24	0,33	0,29
schräg-radial	0,12	0,05	0,07

Tabelle 7.3: Verhältnisse der gemittelten radialen und tangentialen Verschiebungen für IPTS-Moden im Bereich der Reibkontaktstelle

Durch die Störung von 40 Rippen werden also erst Moden mit über 20 Knotenlinien beeinflusst, die in der Regel nicht mehr im hörbaren Frequenzbereich liegen.

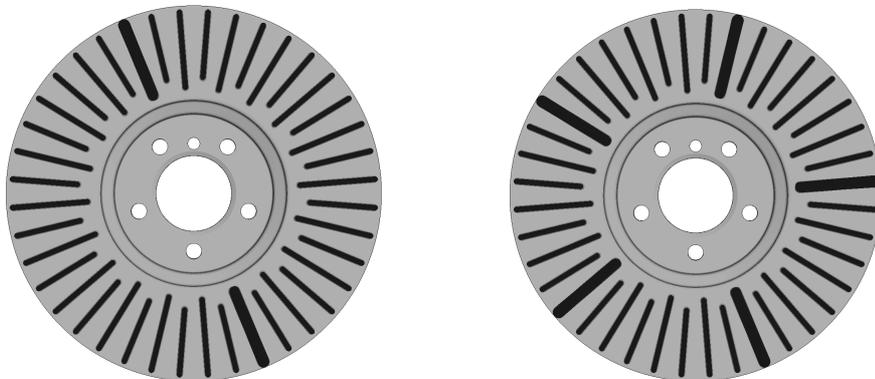


Abbildung 7.25: Bremsscheibe mit zwei (links) und fünf (rechts) äquidistant angeordneten dicken Rippen

Unter der Annahme, dass die Regel für das Teilen von Doppelmoden auch für IPTS-Moden gilt, wäre zur Teilung der IPTS-1ND-Mode eine Störung durch $N = 1$ oder $N = 2$ Elemente notwendig. Ersteres ist aus Gründen der Wuchtung schwer möglich. Für die IPTS-2ND-Mode hingegen wäre eine Störung durch $N = 2$ oder $N = 4$ notwendig. Daher ist eine Störung mit $N = 2$ Elementen sinnvoll, da sie beide instabile Moden beeinflusst.

Die IPTS-0ND Mode kommt nicht als Doppelmode vor. Sie kann auch als Einzellösung eine stehende Welle erzeugen (vgl. Abschnitt 3.2.2.2).

Um den Einfluss von Störungen der Symmetrie auf IP-Moden zu untersuchen, wurde zunächst die alternative Bremsscheibengeometrie aus Abbildung 7.25, links untersucht. Sie hat zwei gegenüberliegende Rippen mit doppelter Dicke. Dadurch entsteht eine Störung der Achssymmetrie von $N = 2$, die die Wuchtbedingung (7.16) erfüllt. Entsprechend der o.g. Regel werden dadurch alle Moden mit radialen Knotenlinien $m=1,2,3,\dots$ beeinflusst. In Tabelle 7.4 werden die Auswirkungen dieser Störung auf die Eigenfrequenzen der IP-Moden unter frei-frei Bedingungen mit denen der Standardscheibe aus Abbildung 7.10, links

verglichen.

Modentyp	Standardscheibe	$N = 2$ Störungen
IPT-1ND	5430	5407
	5431	5421
IPT-2ND	8227	8170
	8227	8243
IPT-3ND	11315	11221
	11316	11325
IPTS-0ND	8821	8832
IPTS-1ND	9200	9205
	9200	9517
IPTS-2ND	11432	11446
	11435	11924
IPR-2ND	1955	1947
	1956	1969
IPR-3ND	4016	3993
	4017	4041
IPR-4ND	6133	6108
	6135	6207
OP-1ND	1940	1932
	1941	1986
OP-2ND	867	860
	867	883
OP-3ND	1807	1795
	1807	1846

Tabelle 7.4: Teilung der Doppelmoden durch Störung der Symmetrie mit $N = 2$

Darin ist zu erkennen, dass sich die Störung auf alle Doppelmoden auswirkt. IPT-, IPR- und OP-Moden entfernen sich um etwa 15-100 Hz voneinander. Die Auswirkung auf die IPTS-Moden ist deutlich größer. Hier beträgt der Frequenzabstand der geteilten Moden über 300 Hz.

Die in diesem Kapitel beschriebenen Instabilitäten mit IPTS-Schwingformen der Bremscheibe treten mit Ausnahme der IPTS-0ND-Mode durch die Existenz von Doppelmoden, also bei symmetrischen Verhältnissen, als stehende Moden der rotierenden Scheibe auf. Durch Unsymmetrien entsteht jedoch ein Einfluss durch die Rotation (vgl. Abschnitt 3.2.2.3).

Eine Bewertung dieses Effektes in einem Bremsengesamtmodell ist mit dem Verfahren aus Abschnitt 3.2.2 nicht möglich. Darin wird vorausgesetzt, dass die Bremscheibe rotationssymmetrisch und der Einfluss der Scheibenrotation gering ist.

Ob die Symmetriestörung ausreicht, um das Auftreten der instabilen IPTS- m ND zu verhindern, muss daher entweder mit anderen Simulationsverfahren (vgl.

Abschnitt 3.2) oder experimentell ermittelt werden.

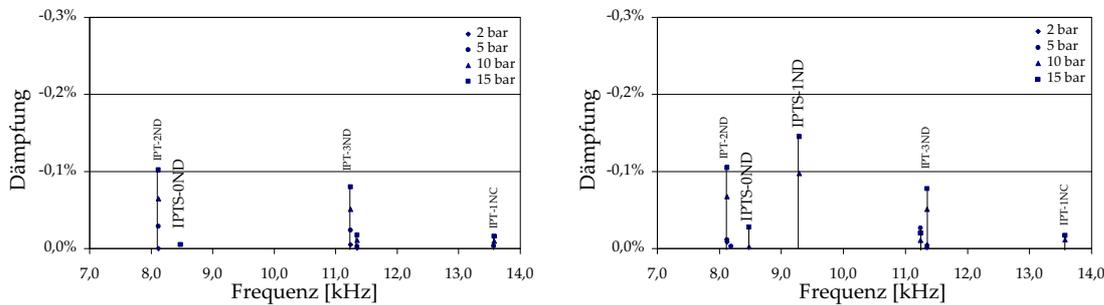


Abbildung 7.26: Stabilitätsanalyse mit der Scheibe aus Abbildung 7.25, links mit Symmetriestörung an der Reibkontaktstelle (links) und 90° dazu (rechts)

Wird dennoch das Verfahren nach Abschnitt 3.2.2 angewendet, ist das Ergebnis erwartungsgemäß abhängig von der Lage der verdickten Rippen relativ zur Reibkontaktstelle. Die Knotenlinien von IPTS-1ND- und IPTS-2ND-Mode bilden sich entlang der Linie der verdickten Rippen aus. Daher treten in dem Fall, dass eine verdickte Rippe in der Reibkontaktstelle liegt, weder instabile IPTS-1ND- noch IPTS-2ND-Moden auf (vgl. Abbildung 7.26, links). Bei einer Drehung der Scheibe um 90° kommt es zu einer instabilen Mode vom Typ IPTS-1ND, nicht aber zur einer vom Typ IPTS-2ND (vgl. Abbildung 7.26, rechts).

Eine Ausnahme bildet die IPTS-0ND-Mode, die mit symmetrischer Schwingform nicht als Doppelmode vorkommt, sich jedoch auch bei Rotation der Scheibe als stehende Mode ausbilden kann. Sie wird allerdings auch durch die Symmetriestörung beeinflusst, welches im folgenden Abschnitt näher erklärt wird.

7.3.5.2 Kontaminierung mit weiteren Wellenzahlen

Störungen der Symmetrie können das Schwingverhalten von Bremsscheiben jedoch noch in anderer Hinsicht beeinflussen. Auch wenn durch das Einbringen einer Störung nicht das Teilen einer Doppelmode erreicht wird, so kann dies trotzdem Einfluss auf die Form bestimmter Moden haben.

Ergebnisse der Untersuchungen von KIM et al. [44] und CHANG & WICKERT et al. [14] zeigen, dass durch das Einfügen von Störungen die Formen von Moden beeinflusst bzw. mit zusätzlichen Wellenzahlen kontaminiert werden. Die vorgestellten Ergebnisse beziehen sich jedoch auf OP-Moden und können daher nicht direkt auf die IPTS-Moden übertragen werden. Daher soll im Folgenden eine Bremsscheibe mit $N = 5$ Störungen wiederum in Form von äquidistant verteilten, dickeren Rippen, wie in Abbildung 7.25, rechts abgebildet, untersucht werden.

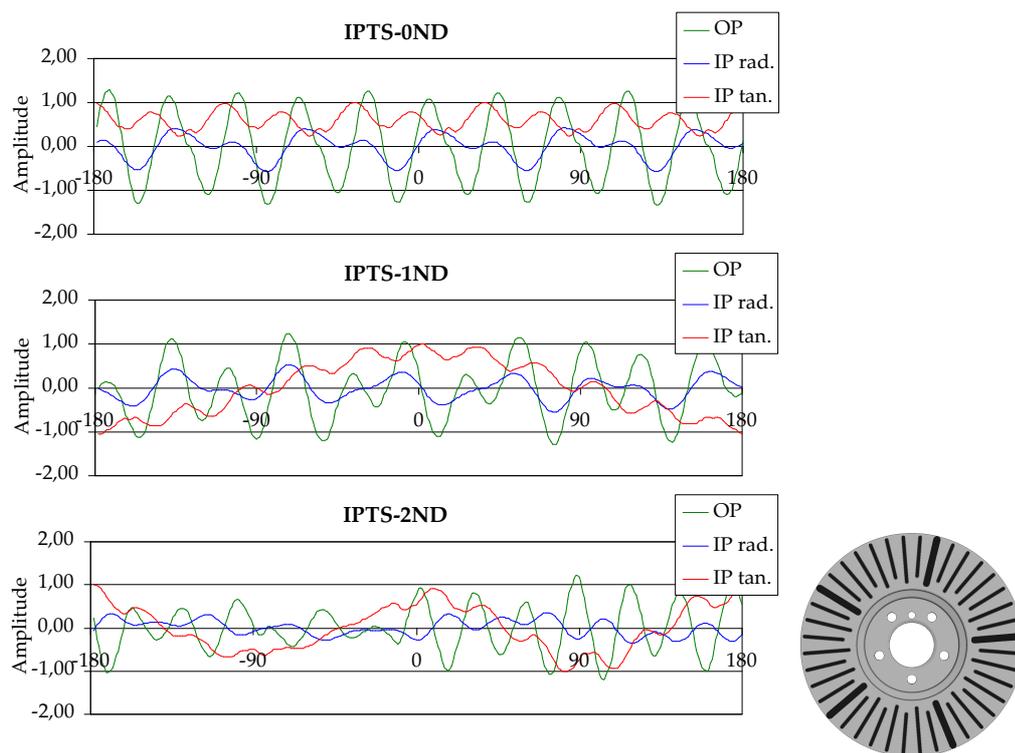


Abbildung 7.27: IPT/IPR/OP-Komponenten der IPTS- m ND-Schwingformen von der Scheibe mit fünf äquidistant angeordneten dicken Rippen

Bei dieser Scheibe kommen sowohl IPTS-1ND- als auch -2ND-Doppelmoden mit nahezu identischer Eigenfrequenz vor. Bei Betrachtung der Eigenformen in Abbildung 7.27 sind jedoch auch weitere Wellenzahlen aller Bewegungsrichtungen zu erkennen. Das gilt auch für die Mode vom Typ IPTS-0ND. Anhand des Verlaufes der IPT-Komponenten sind die Schwingformen als vom Typ IPTS zu erkennen. Man kann im Hinblick auf die relativ großen OP-Bewegungen allerdings nicht mehr von einer dominanten IPTS-Bewegung sprechen. Somit ist auch hier eine reine IPTS-Bewegung nicht ohne OP-Komponente möglich (vgl. Abschnitt 7.3.3). Das gilt insbesondere auch für die Moden vom Typ IPTS-0ND.

Auch hier ist aufgrund der gestörten Rotationssymmetrie eine Stabilitätsanalyse nach Abschnitt 3.2.2 nicht zulässig. Um das Verhalten dennoch einigermaßen abschätzen zu können, wurden zwei Positionen der verdickten Rippen relativ zur Reibkontaktstelle untersucht. Einmal liegt eine verdickte Rippe genau in der Mitte der Reibkontaktstelle, beim zweiten Mal ist die Scheibe um genau den halben Winkelabstand (36°) gedreht. Beide Rechnungen kommen zu dem Ergebnis, dass instabile Lösungen mit IPTS-Charakteristik nicht auftreten.

In Prüfstandsversuchen konnte dieses bestätigt werden. Dort traten bei Verwendung dieser Scheibengeometrie kaum hochfrequente Geräuschprobleme auf.

Kapitel 8

Unterschiede bei IPT- und IPTS-Moden

Die Berechnungsergebnisse aus Kapitel 7 zeigen, bei Annahme eines geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetzes, das Auftreten von Instabilitäten bei nahezu allen im untersuchten Frequenzbereich auftretenden IPT- und IPTS-Moden der Bremscheibe. So stimmen die Simulationsergebnisse bezogen auf das IPTS-Problem sehr gut mit den im Feld und Versuch auftretenden Quietschfrequenzen überein. Das Auftreten der IPT-Moden, als instabile Lösung in der Simulation, steht im Gegensatz zu den am Prüfstand oder im Fahrzeug gemachten Beobachtungen.

IPT-Moden sind bei allen Scheibengeometrien insbesondere auch bei Massivscheiben in dem relevanten Frequenzbereich vorzufinden. Die in der Simulation auftretenden instabilen IPT-Moden deuten daher auf eine Vielzahl von Quietschfrequenzen bei jedem Scheibenbremsentyp hin, welche in Fahr- und Prüfstandsversuchen nicht oder zumindest nicht in diesem Umfang vorzufinden sind.

Grundlage für das Auftreten von instabilen IPT und IPTS-Moden in der Simulation ist das geschwindigkeitsabhängige Reibgesetz. Diese Reibgesetzcharakteristik ist in Versuchen bestätigt [11]. Auch die sehr gute Übereinstimmung bei IPTS-Moden zwischen Versuch und Simulation setzt diese Charakteristik voraus, so dass sie nicht in Frage zu stellen ist.

Dieses Kapitel beschäftigt sich damit, die Unterschiede zwischen dem Auftreten von instabilen IPT- und IPTS-Moden näher zu untersuchen, um eine Erklärung für die o.g. Unstimmigkeiten zu finden. Dazu wird zunächst untersucht, ob die Zentripetal- und CORIOLISbeschleunigung, die in dem in Abschnitt 3.2.2 beschriebenen Verfahren unberücksichtigt bleiben, auf die Modentypen IPT und IPTS unterschiedliche Einflüsse haben. Weiterhin wird überprüft, ob eine IPT-Mode der Scheibe, nicht aber eine IPTS-Mode an der Dämpfung der Sattelkomponenten beteiligt ist.

8.1 Berücksichtigung der Scheibenrotation

Das in Abschnitt 3.2.2 beschriebene Verfahren bedient sich der EULERSchen Betrachtungsweise. Die Scheibe wird nicht tatsächlich gedreht, sondern es werden lediglich die Bedingungen an der Reibkontaktstelle so angenommen, dass sie denen einer rotierenden Scheibe entsprechen (vgl. Abschnitt 3.2.2.2). Die durch die Rotation auftretenden Zentripetal- und CORIOLISbeschleunigungen werden vernachlässigt. Diese Beschleunigungen bewirken eine Kopplung der radialen und tangentialen Bewegungsrichtung.

Diese Kopplung wird anhand des Zweifreiheitsgradsystems in Abbildung 8.1 verdeutlicht. Das System besteht aus der Masse m , welche am Ende einer masselosen Stange mit der Länge r und der Dehnsteifigkeit k_r um einen gelenkig gelagerten Punkt rotiert. An der Stange wirkt eine Drehfeder k_φ , deren Lagerungspunkt mit der konstanten Geschwindigkeit ψ ebenfalls rotiert. Über die Freiheitsgrade x_r und φ kann die Masse m zu ihrer mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Bewegung zusätzlich oszillierende Radial- und Tangentialbewegungen ausführen. Die dabei auf die Masse wirkenden Kräfte sind ebenfalls in Abbildung 8.1 dargestellt.

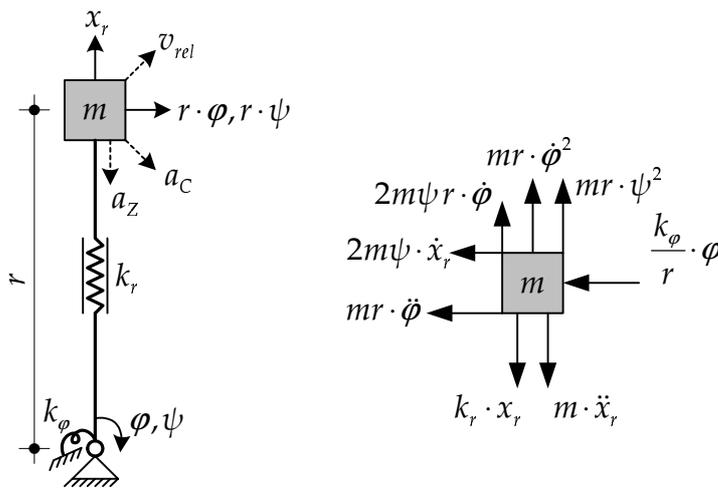


Abbildung 8.1: Zweifreiheitsgradsystem mit CORIOLIS- und Zentrifugalkräften

Die Bewegungsgleichungen für dieses System lauten:

$$mr^2 \cdot \ddot{\varphi} + \underbrace{2mr\psi \cdot \dot{x}_r}_{r \cdot F_{\text{CORIOLIS}}} + k_\varphi \cdot \varphi = 0 \quad (8.1)$$

$$m \cdot \ddot{x}_r - \underbrace{2mr\psi \cdot \dot{\varphi}}_{F_{\text{CORIOLIS}}} + k_r \cdot x_r = \underbrace{mr(\dot{\varphi}^2 + \psi^2)}_{F_{\text{Zentripetal}}} \quad (8.2)$$

Dieses Gleichungssystem enthält die Zentripetalkraft als nichtlineare Komponente. Diese besteht aus einem konstanten Teil, der durch die konstante Drehung ψ^2 beschrieben wird und aus dem veränderlichen Teil, abhängig von $\dot{\varphi}^2$. Wird die

Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ linearisiert und damit der nichtlineare veränderliche Anteil der Zentrifugalkraft vernachlässigt, lautet das System:

$$\begin{bmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x}_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2mr\psi \\ -2mr\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x}_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_\varphi & 0 \\ 0 & k_r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mr\psi^2 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Hier ist zu erkennen, dass für eine rotierende Scheibe ($\psi \neq 0$) die beiden Freiheitsgrade φ und x_r gekoppelt sind. Diese Kopplung ist um so stärker, je höher die Drehgeschwindigkeit der Scheibe ψ ist. Durch die Kopplung kann mit einer tangentialen Bewegung auch eine radiale Bewegung einher gehen.

Für eine rotierende Bremsscheibe mit Reibkontakt bedeutet dies, dass die radiale Bewegung aufgrund der Reibung zwischen Belag und Scheibe gedämpft ist (vgl. Abschnitt 5.2.1). Somit könnte also eine vorwiegend tangential schwingende Mode aufgrund ihrer gleichzeitig auftretenden radialen Bewegungskomponente gedämpft sein.

Im Folgenden soll an einem Vierfreiheitsgrad-Ersatzsystem untersucht werden, inwieweit durch die Kopplung von radialer und tangentialer Bewegung der rotierenden Scheibe, unter Bedingungen die beim Auftreten von Bremsenquietschen vorliegen, IPT bzw. IPTS-Moden an der Dämpfung der radialen Reibung beteiligt sind.

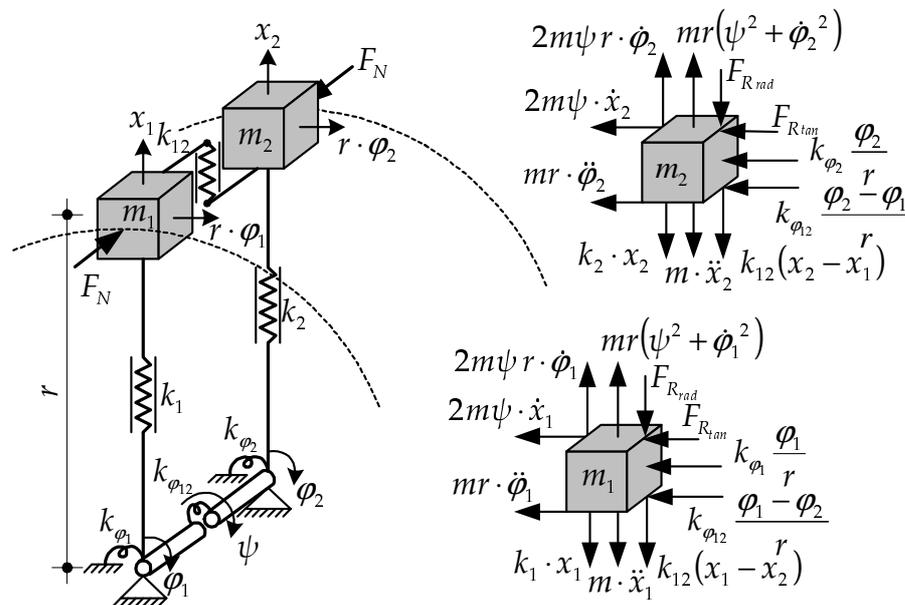
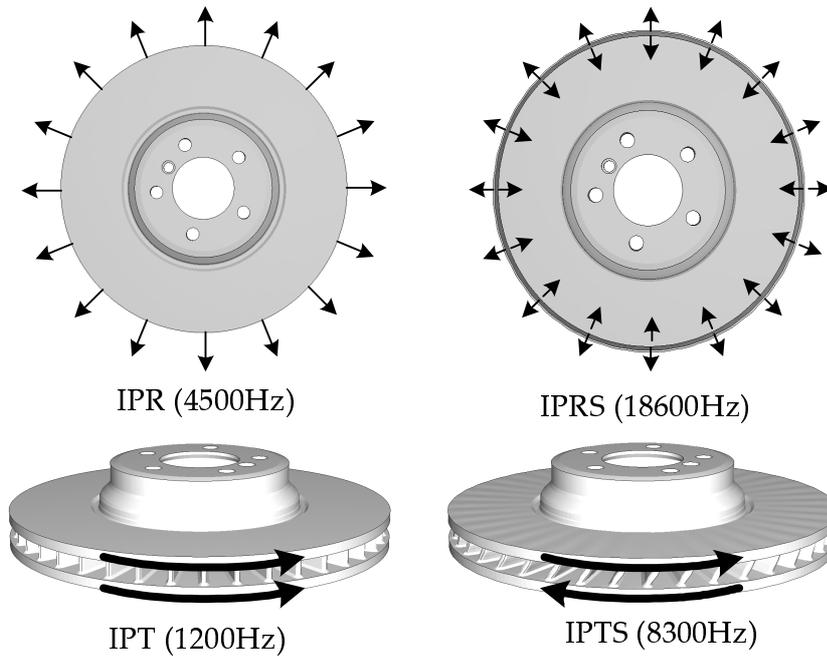


Abbildung 8.2: Vierfreiheitsgradsystem mit CORIOLIS-, Zentrifugal- und Reibkräften

Das *Lumped-Mass*-Ersatzmodell in Abbildung 8.2 kann die vier Bremscheibenmoden aus Abbildung 8.3 abbilden. Diese sind typisch für die in den untersuchten Bremsen auftretenden Moden bei einer an der Topfauflagerfläche gelagerten Bremsscheibe. Das Modell besteht aus zwei Massen mit jeweils Dreh- und radialem Verschiebungsfreiheitsgrad. Massen, Federn, Radius, Kräfte, Reibgesetz und

Abbildung 8.3: Bremsscheibenmoden für *Lumped-Mass*-Ersatzmodell

die Drehgeschwindigkeit werden so gewählt, dass sie den Verhältnissen an der untersuchten Bremsscheibe entsprechen. Das Modell kann so Effekte mit Moden der Bremsscheibe vom Typ IPT, IPTS, IPR und IPRS mit ihren radialen und tangentialen Bewegungen sowie der auftretenden Kopplung näherungsweise abbilden.

Mit dem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz (vgl. Abschnitt 2.1.1)

$$\mu(v_{rel}) = \mu_0 + c_\mu \cdot v_{rel} \quad (8.4)$$

und der bereits linearisierten Reibungskraft (vgl. Abschnitt 5.2.1)

$$\mathbf{F}_R = \begin{pmatrix} F_{R_{rad}} \\ F_{R_{tan}} \end{pmatrix} = \mu F_N \frac{\mathbf{v}_{rel}}{|\mathbf{v}_{rel}|} = \frac{\mu \cdot F_N}{\sqrt{\dot{x}^2 + (r\dot{\varphi}_{rel})^2}} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ r\dot{\varphi}_{rel} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{lin.}} \mathbf{F}_{R_{lin}} = \begin{pmatrix} \frac{\mu F_N}{\psi r} \dot{x} \\ \mu F_N \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 r^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mu(\psi r)F_N}{\psi r} & 0 & 2\psi m_1 r & 0 \\ 0 & \frac{\mu(\psi r)F_N}{\psi r} & 0 & 2\psi m_2 r \\ -2\psi m_1 r & 0 & -c_\mu r^2 F_N & 0 \\ 0 & -2\psi m_2 r & 0 & -c_\mu r^2 F_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} & 0 & 0 \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{\varphi_1} + k_{\varphi_{12}} & -k_{\varphi_{12}} \\ 0 & 0 & -k_{\varphi_{12}} & k_{\varphi_2} + k_{\varphi_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mr(\dot{\varphi}_1^2 + \psi^2) \\ mr(\dot{\varphi}_2^2 + \psi^2) \\ (\mu_0 + c_\mu \psi r) F_N r \\ (\mu_0 + c_\mu \psi r) F_N r \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

Der Anteil $\dot{\varphi}^2$ im rechten Teil von Gleichung (8.6) wird ebenfalls linearisiert. Diese oszillierende Komponente der Zentrifugalkraft bewirkt immer eine nach au-

ßen gerichtete Kraft, egal welches Vorzeichen die Geschwindigkeit $\dot{\varphi}$ hat.

Bei IPT- und IPTS-Moden besteht daher bei der gleichen Schwinggeschwindigkeit kein Unterschied in der radialen Kraftwirkung auf die Bremscheibe. Da in diesem Kapitel gerade diese Unterschiede im Fokus stehen, wird dieser Effekt nicht weiter untersucht und im Folgenden vernachlässigt.

Es wird zunächst von einem geschwindigkeitsunabhängigen Reibgesetz $\mu(v_{rel}) = \mu_0 = \text{const.}$ ausgegangen; das System hat also keine „negative Dämpfung“, sondern nur „positive Dämpfung“ aus der Reibung. Damit ergeben sich zusammen mit den Werten

$$\begin{aligned}
 m_1 = m_2 &= 3,5 \cdot 10^{-3} \quad [\text{to}] & r &= 0,150 \cdot 10^3 \quad [\text{mm}] \\
 k_1 = k_2 &= 5,25 \cdot 10^5 \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] & k_{12} &= 2,36 \cdot 10^7 \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] \\
 k_{\varphi_1} = k_{\varphi_2} &= 4,55 \cdot 10^9 \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right] & k_{\varphi_{12}} &= 1,05 \cdot 10^{11} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{mm}} \right] \\
 \mu_0 &= 0,5 \quad [-] & c_\mu &= 0 \\
 F_N &= 3,0 \cdot 10^3 \quad [\text{N}] & \psi &= 10 \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

und Abschnitt 2.2.1.2 die homogenen Lösungen in Form von Eigenwerten $\lambda = \sigma \pm \omega i$ mit zugehörigen Eigenmoden zu

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -3,87 \times 10^{-4} \pm 7,60 \times 10^3 i & \Phi_1 &= \begin{pmatrix} -5,81 \times 10^{-3} - 2,47 \times 10^{-1} i \\ -5,81 \times 10^{-3} - 2,47 \times 10^{-1} i \\ 1,00 \times 10^0 - 5,10 \times 10^{-8} i \\ 1,00 \times 10^0 - 5,10 \times 10^{-8} i \end{pmatrix} & (\text{IPT}), \\
 \lambda_2 &= -1,43 \times 10^2 \pm 1,23 \times 10^4 i & \Phi_2 &= \begin{pmatrix} 1,00 \times 10^0 - 1,17 \times 10^{-2} i \\ 1,00 \times 10^0 - 1,17 \times 10^{-2} i \\ -6,71 \times 10^{-7} - 1,77 \times 10^{-5} i \\ -6,71 \times 10^{-7} - 1,77 \times 10^{-5} i \end{pmatrix} & (\text{IPR}), \\
 \lambda_3 &= -1,30 \times 10^{-6} \pm 5,22 \times 10^4 i & \Phi_3 &= \begin{pmatrix} -1,96 \times 10^{-5} - 1,43 \times 10^{-2} i \\ 1,96 \times 10^{-5} + 1,43 \times 10^{-2} i \\ 1,00 \times 10^0 - 2,50 \times 10^{-11} i \\ -1,00 \times 10^0 + 2,50 \times 10^{-11} i \end{pmatrix} & (\text{IPTS}), \\
 \lambda_4 &= -1,43 \times 10^2 \pm 1,17 \times 10^5 i & \Phi_4 &= \begin{pmatrix} 1,00 \times 10^0 - 1,22 \times 10^{-3} i \\ -1,00 \times 10^0 + 1,22 \times 10^{-3} i \\ -4,35 \times 10^{-9} - 1,43 \times 10^{-6} i \\ 4,35 \times 10^{-9} + 1,43 \times 10^{-6} i \end{pmatrix} & (\text{IPRS}).
 \end{aligned}$$

Es ist zu erkennen, dass die Kopplung zwischen Dreh- und Radialbewegung bei der Lösung Φ_1 (IPT-Mode) stärker ist als bei Φ_3 (IPTS-Mode):

$$\frac{|\Phi_{11}|}{|\Phi_{31}|} = \frac{|\Phi_{21}|}{|\Phi_{41}|} = 2,47 \times 10^{-1} > 1,43 \times 10^{-2} = \frac{|\Phi_{13}|}{|\Phi_{33}|} = \frac{|\Phi_{23}|}{|\Phi_{43}|} \tag{8.8}$$

An den Eigenwerten erkennt man ferner, dass die zugehörige IPT-Mode eine

(positive) Dämpfung aufweist, die IPTS-Mode hingegen nicht. Wird nun ein geschwindigkeitsabhängiges Reibgesetz mit

$$\mu_0 = 0,5 \quad [-], \quad c_\mu = -5,0 \cdot 10^{-5} \quad \left[\frac{\text{s}}{\text{mm}} \right] \quad (8.9)$$

berücksichtigt, welches den an der Brems Scheibe vorliegenden Verhältnissen entspricht (vgl. dazu Abschnitt 2.1.1.2), ergeben sich die Lösungen zu

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2,14 \times 10^1 \pm 7,60 \times 10^3 i & \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} -6,68 \times 10^{-3} - 2,47 \times 10^{-1} i \\ -6,68 \times 10^{-3} - 2,47 \times 10^{-1} i \\ 1,00 \times 10^0 + 2,82 \times 10^{-3} i \\ 1,00 \times 10^0 + 2,82 \times 10^{-3} i \end{pmatrix} & \quad (\text{IPT}), \\ \lambda_2 = -1,43 \times 10^2 \pm 1,23 \times 10^4 i & \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 1,00 \times 10^0 - 1,17 \times 10^{-2} i \\ 1,00 \times 10^0 - 1,17 \times 10^{-2} i \\ -7,71 \times 10^{-7} - 1,77 \times 10^{-5} i \\ -7,71 \times 10^{-7} - 1,77 \times 10^{-5} i \end{pmatrix} & \quad (\text{IPR}), \\ \lambda_3 = 2,14 \times 10^1 \pm 5,22 \times 10^4 i & \quad \Phi_3 = \begin{pmatrix} -2,25 \times 10^{-5} - 1,43 \times 10^{-2} i \\ 2,25 \times 10^{-5} + 1,43 \times 10^{-2} i \\ 1,00 \times 10^0 + 4,10 \times 10^{-4} i \\ -1,00 \times 10^0 - 4,10 \times 10^{-4} i \end{pmatrix} & \quad (\text{IPTS}), \\ \lambda_4 = -1,43 \times 10^2 \pm 1,17 \times 10^5 i & \quad \Phi_4 = \begin{pmatrix} 1,00 \times 10^0 - 1,22 \times 10^{-3} i \\ -1,00 \times 10^0 + 1,22 \times 10^{-3} i \\ -5,01 \times 10^{-9} - 1,43 \times 10^{-6} i \\ 5,01 \times 10^{-9} + 1,43 \times 10^{-6} i \end{pmatrix} & \quad (\text{IPRS}). \end{aligned}$$

Der Kopplungseffekt durch die CORIOLISKraft in der Dämpfungsmatrix reicht offensichtlich nicht aus, um für die IPTS-Mode einen Dämpfungsbeitrag zu leisten, der die negative Dämpfung aus dem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz ausgleicht.

Der Dämpfungsbeitrag aus der radialen Reibung ist zwar vorhanden, aber für die beim Bremsenquietschen auftretenden Scheibengeschwindigkeiten so gering, dass er gegenüber den wesentlich größeren negativen Dämpfungsbeiträgen aus dem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz unbedeutend wird.

Die Bewegungsgleichungen für das Ersatzmodell aus Abbildung 8.5

$$2m_1\ddot{x}_1 + 2c_1\dot{x}_1 + 2k_1x_1 = F_{R_{12}} + F_{R_{13}} \quad (8.10)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 + k_{23}(x_2 - x_3) = -F_{R_{12}} \quad (8.11)$$

$$m_2\ddot{x}_3 + k_2x_3 + k_{23}(x_3 - x_2) = -F_{R_{13}} \quad (8.12)$$

können mit der dem geschwindigkeitsabhängigen Reibgesetz (8.4), den Relativgeschwindigkeiten

$$v_{rel_{12}} = v_B + \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \quad \text{und} \quad v_{rel_{13}} = v_B + \dot{x}_3 - \dot{x}_1 \quad \text{für} \quad v_{rel} < v_B \quad (8.13)$$

durch die Reibkräfte

$$F_{R_{12}} = \mu(v_{rel_{12}})F_N = (\mu_0 + c_\mu v_B)F_N - c_\mu F_N \cdot \dot{x}_1 + c_\mu F_N \cdot \dot{x}_2, \quad (8.14)$$

$$F_{R_{13}} = \mu(v_{rel_{13}})F_N = (\mu_0 + c_\mu v_B)F_N - c_\mu F_N \cdot \dot{x}_1 + c_\mu F_N \cdot \dot{x}_3, \quad (8.15)$$

ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 2(c_1 + c_\mu F_N) & -c_\mu F_N & -c_\mu F_N \\ -c_\mu F_N & c_\mu F_N & 0 \\ -c_\mu & 0 & c_\mu F_N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 2k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 + k_{23} & -k_{23} \\ 0 & -k_{23} & k_3 + k_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\mu_0 + c_\mu v_B)F_N \\ -(\mu_0 + c_\mu v_B)F_N \\ -(\mu_0 + c_\mu v_B)F_N \end{pmatrix} \quad (8.16) \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} m_1 &= 2,85 \cdot 10^{-3} \quad [\text{to}] & m_2 &= m_3 = 3,5 \cdot 10^{-3} \quad [\text{to}] \\ k_1 &= 1,8 \cdot 10^4 \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] & k_2 &= k_3 = 2,02 \cdot 10^5 \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] \\ k_{23} &= 4,67 \cdot 10^6 \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right] & c_1 &= 0 \\ c_\mu &= -5,0 \cdot 10^{-4} \quad \left[\frac{\text{mm}}{\text{s}} \right] & F_N &= 3,0 \cdot 10^3 \quad [\text{N}] \end{aligned}$$

und Abschnitt 2.2.1.2 ergeben sich die homogenen Lösungen in Form von Eigenwerten $\lambda = \sigma \pm \omega i$ mit zugehörigen Eigenmoden zu

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2,632 \times 10^1 \pm 2,51 \times 10^3 i & \Phi_1 &= \begin{pmatrix} 1,00 \times 10^0 + 1,05 \times 10^{-2} i \\ -1,00 \times 10^{-6} - 2,10 \times 10^{-3} i \\ -1,00 \times 10^{-6} - 2,10 \times 10^{-3} i \end{pmatrix} \quad (\text{Sattel}), \\ \lambda_2 &= 2,143 \times 10^1 \pm 7,60 \times 10^3 i & \Phi_2 &= \begin{pmatrix} 1,12 \times 10^{-5} + 7,78 \times 10^{-3} i \\ 1,00 \times 10^0 + 2,82 \times 10^{-3} i \\ 1,00 \times 10^0 + 2,82 \times 10^{-3} i \end{pmatrix} \quad (\text{IPT}), \\ \lambda_3 &= 2,143 \times 10^1 \pm 5,22 \times 10^4 i & \Phi_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1,00 \times 10^0 + 4,10 \times 10^{-4} i \\ -1,00 \times 10^0 - 4,10 \times 10^{-4} i \end{pmatrix} \quad (\text{IPTS}). \end{aligned}$$

An den Nebendiagonaleinträgen der Dämpfungsmatrix aus (8.16) ist zu erkennen, dass durch die Einträge aus dem Reibgesetz die Richtungen x_1 und x_2 bzw. x_1 und x_3 gekoppelt sind. Am Eigenvektor Φ_3 sieht man, dass aufgrund der anti-symmetrischen Reibkräfte dort die Kopplung nicht besteht. Wird nun eine Dämpfung c_1 für den Sattel angenommen

$$c_1 = 1,5 \left[\frac{\text{Ns}}{\text{mm}} \right] \quad (\text{entspricht } \zeta_1 \approx 10\%) \quad (8.17)$$

erhält man die homogenen Lösungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -2,369 \times 10^2 \pm 2,50 \times 10^3 i \quad \Phi_1 &= \begin{pmatrix} 1,00 \times 10^0 & -9,47 \times 10^{-2} i \\ 5,27 \times 10^{-5} & -2,10 \times 10^{-3} i \\ 5,27 \times 10^{-5} & -2,10 \times 10^{-3} i \end{pmatrix} \quad (\text{Sattel}), \\ \lambda_2 = 2,144 \times 10^1 \pm 7,60 \times 10^3 i \quad \Phi_2 &= \begin{pmatrix} -5,91 \times 10^{-4} + 7,74 \times 10^{-3} i \\ 1,00 \times 10^0 & + 2,82 \times 10^{-3} i \\ 1,00 \times 10^0 & + 2,82 \times 10^{-3} i \end{pmatrix} \quad (\text{IPT}), \\ \lambda_3 = 2,143 \times 10^1 \pm 5,22 \times 10^4 i \quad \Phi_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1,00 \times 10^0 & + 4,10 \times 10^{-4} i \\ -1,00 \times 10^0 & - 4,10 \times 10^{-4} i \end{pmatrix} \quad (\text{IPTs}). \end{aligned}$$

Diese Dämpfung bewirkt eine stabile Lösung für die Sattelmode Φ_1 . Auf die Mode Φ_3 (IPTs) hat sie keinen Einfluss; der Eigenwert bleibt identisch. Der aufklingende Charakter der Mode Φ_2 (IPT) hingegen wird durch diese (positive) Dämpfung sogar ganz leicht verstärkt.¹⁵

Die Kopplung von Sattel- und IPT-Mode durch die Nebendiagonaleinträge der Dämpfungsmatrix kann also nicht für eine Dämpfung der IPT Moden verantwortlich sein. Sie ist aufgrund kleiner c_μ -Werte nur sehr schwach und eine Dämpfung der Sattelschwingung begünstigt offensichtlich eher das Aufklingen von IPT-Moden.

Für die an der untersuchten Bremsscheibe vorliegenden Verhältnisse bei IPT/IPTs-Moden kann dieser Effekt deshalb nicht zu einer abklingenden Lösung für Φ_2, λ_2 bei gleichzeitig aufklingender Lösung für Φ_3, λ_3 führen.

8.3 Fazit

Die vorangegangenen Untersuchungen zeigen, dass weder die Vernachlässigung der Zentrifugal- und CORIOLISkräfte noch eine Kopplung von Sattel- und Scheibenmode Ursache der in Kapitel 7 beschriebenen Abweichungen zwischen Simulations- und Versuchsergebnissen sind. Eine weitere mögliche Ursache könnte in der Wahl der Systemgrenzen liegen. Bei dem in Kapitel 7 verwen-

¹⁵HOFFMANN & GAUL [38] und OUYANG et al. [69] stellen in ihren Untersuchungen ebenfalls fest, dass das Einbringen von Dämpfung nicht grundsätzlich zu einer Verbesserung des Stabilitätsverhaltens führt.

deten FE-Modell ist die Bremsscheibe an den Knoten der Topfauflagerfläche unverschieblich gelagert, da die angrenzenden Bauteile (Radlager, Felge, Schwenklager) nicht abgebildet sind. In der Realität wird diese Fläche über Schrauben zwischen Felge und Radlager eingespannt. Durch eine Verschiebung der Systemgrenzen, in Form einer Erweiterung des Modells um diese Bauteile, ergeben sich evtl. andere CAE-Simulationsergebnisse. Für die in Kapitel 7 untersuchten Probleme mit instabilen IPTS-Moden der Bremsscheibe hat sich die Wahl der Systemgrenzen als hinreichend genau erwiesen, was nicht unbedingt auch für die Untersuchung von IPT-Moden gelten muss.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein CAE-Verfahren zur Simulation von Bremsenquietschen vorgestellt und angewendet, dass in der Praxis eingesetzt werden kann. Ein spezielles Problem hochfrequenter Bremsgeräusche bei Bremscheiben mit einem großen Verhältnis von Kühlkanalhöhe zu Reibringdicke, welches Anlass zur Initiierung dieser Arbeit war, konnte mit Unterstützung der CAE-Simulation gelöst werden. Außer einer mechanischen Erklärung werden verschiedene Abhilfemaßnahmen abgeleitet. Diese wurden z.T. in Form von alternativen Kühlkanalgeometrien umgesetzt und deren Wirksamkeit virtuell und auch in Versuchen bestätigt. Die so gewonnenen Erkenntnisse sind in aktuelle Fahrzeugprojekte eingeflossen. Sie erlauben es, weitere Bremscheibengeometrien hinsichtlich dieses Phänomens auch rein virtuell zu bewerten. Dadurch ist gezeigt, dass sich die Simulation von Bremsenquietschen eignet, den Serienentwicklungsprozess eines Fahrzeuges durch wertige Beiträge zu unterstützen. Im Gegensatz zur Grundlagenforschung oder Vorentwicklung geht es darin um die konkrete Umsetzung und Absicherung der Anforderungen einer Bremse in einem Serienfahrzeug. Die in der Serienentwicklung geforderten Lösungen unterliegen in der Regel besonderen konstruktiven, vor allem aber wirtschaftlichen und terminlichen Anforderungen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Simulation von Bremsenquietschen bezogen auf das o.g. spezielle Problem erfolgreich in den Bremsgeräuschprozess der Entwicklung eines Serienfahrzeugs integriert.

An einem validierten Modell ist es möglich, den Einfluss geplanter Maßnahmen auf das Stabilitätsverhalten zu bewerten. Auch können Sensitivitäten von ausgewählten Parametern auf die Stabilität bekannter Problemmoden beurteilt werden. Hier besteht der Vorteil, dass ganz gezielt Parameter gewählt werden können, deren Variation keine anderen Größen beeinflusst. Dieses ist unter Versuchsbedingungen aufgrund der realen Streuung vieler Parameter nicht immer sichergestellt. Die so erhaltenen Ergebnisse sind abgesehen von numerischen Ungenauigkeiten immer reproduzierbar.

Ein weiterer großer Vorteil besteht in der Möglichkeit der Visualisierung der instabilen Schwingformen. Das Schwingverhalten der im Inneren der Bremse liegenden Komponenten kann wegen der eingeschränkten Zugänglichkeit

häufig nicht durch Messungen veranschaulicht werden. In der CAE-Simulation können dagegen die auftretenden Schwingungen für alle Bereiche in fast jeder denkbaren Form dargestellt werden. Dadurch erhält man häufig zusätzliche wertvolle Informationen, die es ermöglichen, das bestehende Problem besser zu verstehen und eine gezieltere Problemlösung zu finden.

Am effektivsten zeigt sich die Simulation durch eine enge Zusammenarbeit mit den Prüfstands- und Fahrversuchen. So lieferte die Einbeziehung der Versuchsergebnisse im Rahmen dieser Arbeit entscheidende Impulse für die Durchführung der CAE-Simulationen. Umgekehrt gaben auch Simulationsergebnisse wichtige Hinweise für die Durchführung von Betriebschwinganalysen an den Prüfständen. Ziel der Simulation von Bremsenquietschen mit dem CEA-Verfahren muss daher nicht der Ersatz, sondern vielmehr die Erweiterung und Unterstützung der Prüfstands- und Fahrversuche sein.

Wenngleich dem CAE-Verfahren durch den modalen Ansatz Grenzen gesetzt sind und insbesondere nichtlineare Effekte nicht abgebildet werden können, ist dennoch, bei Kenntnis der mechanischen Hintergründe und der Einschränkungen, ein Einsatz in der Praxis sinnvoll. Es können damit ausgewählte Phänomene untersucht, erklärt und infolgedessen auch rein virtuell bewertet werden. Dieses wurde anhand eines praktischen Beispiels gezeigt. Lediglich eine Einbeziehung und Bewertung aller möglichen Effekte, die zu Bremsenquietschen führen, ist nicht möglich.

Da sich hinter dem Begriff Bremsenquietschen eine Vielzahl von Effekten und Phänomenen verbirgt, muss auch in der Bewertung der Simulation eine Differenzierung stattfinden. Die Einsetzbarkeit und Prognosegüte hängt von dem individuellen Problem ab. Bei bereits ausführlich untersuchten Problemen, für die Erkenntnisse und Erfahrungen in der Simulation vorhanden sind, ist durchaus eine Prognose anhand von rein virtuellen Modellen möglich.

Die Modellierung der FE-Modelle orientiert sich neben den verfügbaren Computer-Ressourcen an dem jeweils vorliegenden oder vermuteten Problem. Aufgrund der gesammelten Erfahrungen und Erkenntnisse bei der Simulation von mehreren, verschiedenen Bremsen und der damit einhergehenden ständigen Verbesserung der Modelle konnte die Aussagekraft der CAE-Ergebnisse sukzessiv erhöht werden. Insbesondere durch die Abbildung der Materialdämpfung werden weitere Effekte berücksichtigt und somit die Ergebnisqualität verbessert.

In der Praxis tritt es immer wieder auf, dass Instabilitäten Ergebnis der Berechnung sind, aber in der Realität nicht auftreten. Anders kommt es auch vor, dass im Versuch beobachtete akustische Probleme nicht in der Simulation ermittelt werden. Die Beurteilung der Ergebnisse erfordert die genaue Kenntnis der Annahmen und Grenzen des verwendeten Verfahrens. Auch das Verständnis über die Mechanismen, die zu selbsterregten Schwingungen durch Reibkontakte führen, ist Voraussetzung für die erfolgreiche Durchführung der Simulation von Bremsenquietschen und der kritischen Bewertung der Ergebnisse. Die Gefahr einer Fehlinterpretation der Simulationsergebnisse ist ungleich höher, als in

derzeit typischen Anwendungsfällen der NVH¹⁶- bzw. Strukturmechanikanalyse im Bereich der FE-Simulation. Bei der Erstellung der FE-Modelle und der nichtlinearen Simulation des Betriebszustandes, der die Ausgangsbasis für die CEA-Analyse ist, sind fundierte Kenntnisse auf dem Gebiet der nichtlinearen Finiten Element Methode notwendig.

Ein kurzfristig nutzbares Potential des CEA-Verfahrens liegt in der verbesserten Berücksichtigung der Dämpfung. Wird das Dämpfungsverhalten der verschiedenen Materialien sowie weitere Dämpfungsmechanismen im Modell hinreichend genau abgebildet, kann dieses insbesondere die Fälle reduzieren, bei denen Probleme in der Simulation berechnet werden, aber in der Realität nicht auftreten. Durch eine erweiterte Berücksichtigung der dämpfenden Elemente in der Bremse sowie die weitergehende Untersuchung des Dämpfungsverhaltens der Materialien können Abhilfemaßnahmen für Geräusche, in denen Dämpfung eine Rolle spielt, besser abgebildet werden.

Die Steigerung der Modellierungstiefe durch die Verwendung feinerer FE-Netze, was in Zukunft aufgrund leistungsstärkerer Computer und verbesserter Rechenalgorithmen möglich sein wird, führt dazu, dass weitere Effekte in der Simulation von Bremsenquietschen mit einbezogen werden können. Jedoch ist es dadurch nicht möglich, die fundamentalen Einschränkungen des CEA-Verfahrens aufzuheben. Nichtlineare Zusammenhänge können wegen des modalen Ansatzes nicht berücksichtigt werden. Dazu ist eine Berechnung im Zeitbereich notwendig, wobei z.B. detailliert formulierte, nichtlineare Materialgesetze zur Anwendung kommen können, aber auch sehr große Rechenkapazitäten erforderlich sind. Eine gegenüber heute deutliche Steigerung der verfügbaren Computer-Ressourcen ermöglicht langfristig evtl. die effektive Verwendung dieses Ansatzes in der Simulation von Bremsenquietschen.

¹⁶Die im Automobilbereich geläufige Abkürzung NVH steht für *Noise Vibration Harshness* und beschreibt das Gebiet der unerwünschten Geräusche und Vibrationen in einem Fahrzeug.

Literaturverzeichnis

- [1] ABUBAKAR, A.R. und H. OUYANG: *Complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis in predicting disc brake squeal*. International Journal of Vehicle Noise and Vibration, 2(2):143–155, 2006.
- [2] ABUBAKAR, A.R., A. SHARIF und M.Z.A. RASHID: *Brake Squeal: Complex Eigenvalue vs. Dynamic Transient Analysis*. Technischer Bericht 2007-01-3964, SAE International, 2007.
- [3] ALLGAIER, R.: *Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Bremsenquietschen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [4] BAE, J.C. und J.A. WICKERT: *Free Vibration of Coupled Disk-Hat Structures*. Journal of Sound and Vibration, 235(1):117–132, 2000.
- [5] BAJER, A., V. BELSKY und S.-W. KUNG: *The influence of Friction-Induced Damping and Nonlinear Effects on Brake Squeal Analysis*. Technischer Bericht 2004-01-2794, SAE International, 2004.
- [6] BAJER, A., V. BELSKY und L.J. ZENG: *Combining a Nonlinear Static Analysis and Complex Eigenvalue Extraction in Brake Squeal Simulation*. Technischer Bericht 2003-01-3349, SAE International, 2003.
- [7] BASELER, J.: *Die Schwingungsantwort der Eigenformen unter Berücksichtigung ihrer Dämpfungskopplung*. Dissertation, TU München, 1989.
- [8] BASFORD, P.R. und S.B. TWISS: *Properties of Friction Materials I/II*. Transactions of the ASME, Seiten 402–410, 1958.
- [9] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1993.
- [10] BOLOTIN, W.W.: *Kinetische Stabilität elastischer Systeme*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961.
- [11] BRECHT, J.: *Untersuchung zum Bremsenknarzen - Ein Beitrag zur Beschreibung von Schwingungen in Bremssystemen*. Dissertation, Universität Siegen, 2000.
- [12] BRECHT, J., A. ELVENKEMPER, J. BETTEN, U. NAVRATH und J.B. MÜLLER: *Elastic Properties of Friction Materials*. Technischer Bericht 2003-01-3333, SAE International, 2003.

- [13] BRONSTEIN, I.N. und SEMENDJAJEW K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1989.
- [14] CHANG, J.-Y. und J.A. WICKERT: *Response of Modulated Doublet Modes to Travelling Wave Excitation*. *Journal of Sound and Vibration*, 242(1):69–83, 2001.
- [15] CHEADLE, S.P., R.J. BROWN und D.C. LAWTON: *Orthorhombic anisotropy: A physical seismic modeling study*. *Geophysics*, 56(10):1603–1613, Oktober 1991.
- [16] CISKOWSKI, R.D. und C.A. BREBBIA: *Boundary Element Methods in Acoustics*. International series on computational engineering. Computational Mechanics Publishers, Southampton, 1991.
- [17] CLOUGH, R.W. und J. PENZIEN: *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, San Francisco, 1975.
- [18] CRAIG, R.R. JR.: *Structural Dynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1. Auflage, 1981.
- [19] CREMER, L. und M. HECKL: *Körperschall*. Springer Verlag, Heidelberg, 2. Auflage, 1996.
- [20] CZICHOS, H. und K.-H. HABIG: *Tribologie-Handbuch:Reibung und Verschleiß*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.
- [21] DAMME, S.: *Zur Finite-Element-Modellierung des stationären Rollkontakts von Rad und Schiene*. Dissertation, TU-Dresden, 2006.
- [22] DASCOTTE, E. und J. STROBBE: *Updating Finite Element Models Using FRF Correlation Functions*. In: *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Seiten 1169–1174, Kissimmee, Florida, 1999.
- [23] DENYS, E., M. YANG und F. CHEN: *Disc Brake Squeal*, Kapitel Brake Pad Damping, Seiten 187–214. SAE International, Warrendale, Pennsylvania USA, 2006.
- [24] DRAIN, L.E.: *The Laser Doppler Technique*. John Wiley & Sons, Chichester, 1980.
- [25] EARLES, S.W.E. und P.W. CHAMBERS: *Disc Brake Squeal Noise Generation; Predicting Its Dependence On System Parameters Including Damping*. *International Journal of Vehicle Design*, 8(4/5/6):538–552, 1987.
- [26] ELVENKEMPER, A., E. WEGMANN, A. WANG, J. FLINT, J.G. MCDANIEL und K. TSENG: *Application of state of the art FE software for simulating the effect of insulators*. Technischer Bericht 2006-01-3218, SAE International, 2006.
- [27] ERINGEN, A. C. und E. S. ŞUHUBI: *Elastodynamics*, Band 2. Academic Press, New York, 1975.

- [28] FEDERN, K.: *Auswuchttechnik*, Band 1, Allgemeine Grundlagen, Messverfahren und Richtlinien. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1977.
- [29] FEENY, B., A. GURAN, N. HINRICHS und K. POPP: *A Historical Review On Dry Friction And Stick-Slip Phenomena*. Applied Mechanics Review, (51):321–341, 1998.
- [30] FLINT, J.: *Disc Brake Squeal*. Dissertation, University of Southern Denmark, Odense, 2002.
- [31] FLINT, J., J.G. MCDANIEL, X. LI, A. ELVENKEMPER, A. WANG und S.-E. CHEN: *Measurement and Simulation of the Complex Shear Modulus of Insulators*. Technischer Bericht 2004-01-2799, SAE International, 2004.
- [32] FRISWELL, M. I. und J.M. MOTTERSHEAD: *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [33] GASCH, R., R. NORDMANN und H. PFÜTZNER: *Rotordynamik*. Springer Verlag, Berlin, 2. Auflage, 2002.
- [34] GATTI, P.L. und V. FERRARI: *Applied Structural and Mechanical Vibrations*. E & FN Spon, 11 New Fetter Lane, London EC4P 4EE, 1999.
- [35] GAZIS, D.C.: *Exact Analysis of the Plain-Strain Vibrations of Thick-Walled Hollow Circular Cylinders*. Journal of The Acoustical Society of America, 30(8):786–794, August 1958.
- [36] GUGGENBERGER, J.: *Dynamische Untersuchung von Bremsenkomponenten*. Fa. Müller-BBM, Bericht Nr. M65 999/2, 2007.
- [37] HOCHLENERT, D.: *Selbsterregte Schwingungen in Scheibenbremsen: Mathematische Modellbildung und aktive Unterdrückung von Bremsenquietschen*. Dissertation, TU Darmstadt, 2006.
- [38] HOFFMANN, N. und L. GAUL: *Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations*. ZAMM, 83(8):524–534, 2003.
- [39] HULTÉN, J.: *Drum Brake Squeal*. Dissertation, Department of Machine and Vehicle Design, Chalmers University of Technology Göteborg, 1998.
- [40] HUMAR, J.L.: *Dynamics of Structures*. Swets & Zeitlinger B.V., Lisse, 2. Auflage, 2002.
- [41] HURTY, W.C. und M.F. RUBINSTEIN: *Dynamics of Structures*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
- [42] JARVIS, R.P. und B. MILLS: *Vibration Induced by Dry Friction*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 178(32):847–866, 1963.

- [43] JEARSIRIPONGKUL, T., D. HOCHLENERT, U. VON WAGNER und P. HAGEDORN: *Nonlinear Floating Caliper Disk Brake Model to Incorporate Squeal*. Technischer Bericht 2004-01-2802, SAE International, 2004.
- [44] KIM, M., J. MOON und J.A. WICKERT: *Spatial Modulation of Repeated Vibration Modes in Rotationally Periodic Structures*. Journal of Vibration and Acoustics, 122:62–68, Januar 2000.
- [45] KINKAID, N.M., O.M. O'REILLY und P. PAPADOPOULOS: *Automotive disc brake squeal*. Journal of Sound and Vibration, 267:105–166, 2003.
- [46] KLOTTER, K.: *Technische Schwingungslehre*, Band 1, Teil A: Lineare Schwingungen. Springer, Berlin/Heidelberg, 3. Auflage, 1978.
- [47] KLOTTER, K.: *Technische Schwingungslehre*, Band 1, Teil B: Nichtlineare Schwingungen. Springer, Berlin/Heidelberg, 3. Auflage, 1980.
- [48] KRÄMER, E.: *Dämpfung aus Sicht des Ingenieurs*. In: *Dämpfung von Schwingungen bei Maschinen und Bauwerken*, VDI Berichte 627, Seiten 1–20, Düsseldorf, 1987. VDI-Verlag.
- [49] KUNG, S.-W., G. STELZER, A. BAJER und V. BELSKY: *Brake Squeal Analysis Incorporating Contact Conditions and Other Nonlinear Effects*. Technischer Bericht 2003-01-3343, SAE International, 2003.
- [50] LA SALLE, J. und S. LEFSCHETZ: *Die Stabilitätstheorie von Ljapunow*. Hochschultaschenbücher-Verlag, 1967.
- [51] LEIPHOLZ, H.: *Stabilitätstheorie*, Band 10 der Reihe *Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1968.
- [52] LEIPHOLZ, H.: *Stability Theory*. B. G. Teubner, Stuttgart/Chichester/New York, 2. Auflage, 1987.
- [53] LILES, G.D. und D. MORAINÉ: *Analysis of Disc Brake Squeal Using Finite Element Methods*. Technischer Bericht 891150, SAE International, 1989.
- [54] LJAPUNOW, A.M.: *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la Faculté des Sciences Toulouse, 9(2):204–474, 1907. Übersetzung aus dem Russischen.
- [55] MALKIN, J.G.: *Theorie der Stabilität einer Bewegung*. R. Oldenbourg, München, 1959.
- [56] MATSUZAKI, M. und T. IZUMIHARA: *Brake Noise Caused by Longitudinal Vibration of the Disc Rotor*. Technischer Bericht 930804, SAE International, 1993.
- [57] MCDANIEL, J.G., X. LI, A. ELVENKEMPER, E. WEGMANN, A. WANG, S.-E. CHEN und J. FLINT: *Simulating the effect of insulators in reducing disc brake squeal*. Technischer Bericht 2005-01-3944, SAE International, 2005.

- [58] MESKOURIS, K.: *Baudynamik*. Ernst & Sohn, Berlin, 1999.
- [59] MÜLLER, F.H. und J. BASELER: *Zur Eigenformmethode nichtproportional gedämpfter Schwingungssysteme*. Ingenieur-Archiv, 55:348–357, 1985.
- [60] MÜLLER, G. und M. MÖSER (Herausgeber): *Taschenbuch der Technischen Akustik*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 3. Auflage, 2004.
- [61] MOTTERSHEAD, J.E. und S.N. CHAN: *Brake Squeal - An Analysis of Symmetry And Flutter Instability*. In: IBRAHIM, R.A. und A. SOOM (Herausgeber): *Friction-Induced Vibration, Chatter, Squeal, And Chaos*, Band DE-49, Seiten 87–97. ASME, 1992.
- [62] MOTTERSHEAD, J.E. und S.N. CHAN: *Flutter Instability of Circular Discs with Frictional Follower Forces*. Journal of Vibration and Acoustics, 117:161–163, 1995.
- [63] MUSGRAVE, M.J.P.: *Crystal Acoustics*. Holden-Day, Inc., San Francisco, USA, 1970.
- [64] NATKE, H.G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 3. Auflage, 1992.
- [65] NIEMANN, G., H. WINTER und B.-R. HÖHN: *Maschinenelemente*, Band 1. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 4. Auflage, 2005.
- [66] NORTH, M.R.: *Frictionally Induced Self-Excited Vibrations in a Disc Brake System*. Dissertation, Loughborough University of Technology, 1972.
- [67] OTTL, D.: *Fügestellendämpfung*. In: *Dämpfung von Schwingungen bei Maschinen und Bauwerken*, VDI Berichte 627, Seiten 67–90, Düsseldorf, 1987. VDI-Verlag.
- [68] OUYANG, H.: *Disc Brake Squeal*, Kapitel Parametric Vibration Induced by Moving Loads, Seiten 49–78. SAE International, Warrendale, Pennsylvania USA, 2006.
- [69] OUYANG, H., J.E. MOTTERSHEAD, M.P. CARTMELL und M.I. FRISWELL: *Friction-Induced Parametric Resonances in Discs: Effect of a Negative Friction-Velocity Relationship*. Journal of Sound and Vibration, 209:251–264, 1998.
- [70] PETERSEN, C.: *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 2. Auflage, 1982.
- [71] PETERSEN, C.: *Dynamik der Baukonstruktionen*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1996.
- [72] PIWOWARSKY, E.: *Hochwertiges Gußeisen (Grauguß)*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2. Auflage, 1961.

- [73] POPP, K., M. RUDOLPH, M. KRÖGER und M. LINDNER: *Mechanisms to Generate and to Avoid Friction Induced Vibrations*. In: *Reibung und Schwingungen in Fahrzeugen, Maschinen und Anlagen*, VDI Berichte 1736, Seiten 1–15, Düsseldorf, 2002. VDI-Verlag.
- [74] REEVES, M., N. TAYLOR, C. EDWARDS, D. WILLIAMS und C.H. BUCKBERY: *A study of brake disc modal behaviour during squeal generation using high-speed electronic speckle pattern interferometry and near-field sound pressure measurements*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D, 214(3):285–296, 2000.
- [75] RINSDORF, A.: *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Komfortoptimierung von Scheibenbremsen*. Dissertation, Universität-Gesamthochschule Siegen, 1996.
- [76] SANDERS, P.G.: *Friction Material Elastic Property Round Robin Study*. Technischer Bericht 2007-01-3940, SAE International, 2007.
- [77] SCHIRMER, W.: *Technischer Lärmschutz*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1996.
- [78] SCHROTH, R.: *Zum Entstehungsmechanismus des Bremsenquietschens*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2003.
- [79] SELIMEFENDIGIL, F.: *Sound Propagation Behaviour of Brake Discs Using Numerical Techniques*. Diplomarbeit, Technische Universität München, 2006.
- [80] SHEN, I.Y.: *Vibration of Rotationally Periodic Structures*. Journal of Sound and Vibration, 172(4):459–470, 1994.
- [81] SPURR, R.T.: *A Theory of Brake Squeal*. Proceedings of the Automobile Division, Institution of Mechanical Engineers, Part D, 1:33–52, 1961.
- [82] STORCK, H. und F. MOSER: *Two-dimensional friction force in brake squeal simulation*. In: BARTON, D. und A. BLACKWOOD (Herausgeber): *BRAKING 2004, Vehicle Braking and Chassis Control*, Seiten 113–121. Professional Engineering Publishing Ltd., 2004.
- [83] STRICKLAND, W. und D.E. YUHAS: *Development of Correlation Between Experimental and Analytical Modal Analysis of Brake Pads*. Technischer Bericht 962130, SAE International, 1996.
- [84] TAN, C.A. und F. CHEN: *Disc Brake Squeal*, Kapitel Mechanisms and Causes of Disc Brake Squeal, Seiten 1–26. SAE International, Warrendale, Pennsylvania USA, 2006.
- [85] THEODORSEN, T. und I.E. GARRRICK: *General Theory of Aerodynamic Instability And The Mechanism of Flutter*. Technischer Bericht 496, N.A.C.A, 1934.

- [86] THEODORSEN, T. und I.E. GARRRICK: *Mechanism of Flutter; A Theoretical And Experimental Investigation of The Flutter Problem*. Technischer Bericht 685, N.A.C.A, 1939.
- [87] THOMAS, D.L.: *Standing Waves in Rotationally Periodic Structures*. Journal of Sound and Vibration, 37(2):288–290, 1974.
- [88] THOMAS, D.L.: *Dynamics of Rotationally Periodic Structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 14:81–102, 1979.
- [89] VENEZIANO, C., C. FEHRENBACH, Y. SGUAIZER, E. HAAS, M. PALISCH und R. WESTERHEIDE: *Festigkeitsuntersuchungen an belüfteten Bremsscheiben aus GG 15 UHC*. Technischer Bericht V 46/2001, Fraunhofer IWM, Freiburg, 2001.
- [90] VOGELPOHL, G.: *Geschichte der Reibung: Eine vergleichende Betrachtung aus der Sicht der klassischen Mechanik*. Nummer 35 in *Technikgeschichte in Einzeldarstellungen*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1981.
- [91] VON WAGNER, U., T. JEARSIRIPONGKUL, T. VOMSTEIN, G. CHAKRABORTY und P. HAGEDORN: *Brake Squeal: Modeling and Experiments*. Technischer Bericht, Institut für Mechanik, TU-Darmstadt, 2003.
- [92] WHITE, R.G. und J.G. WALKER (Herausgeber): *Noise and Vibration*. Ellis Horwood Ltd., West Sussex, England, 1982.
- [93] WOLF, J.P.: *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
- [94] YANG, F., C.-A. TAN und F. CHEN: *Identification of In-Plane and Out-of-Plane Modal Coupling Mechanism in Brake Squeal by the Empirical Mode Decomposition Method*. Technischer Bericht 2003-01-0682, SAE International, 2003.
- [95] YUHAS, D.E., J.J. DING und S. VENKATESAN: *Non-Linear Aspects of Friction Material Elastic Constants*. Technischer Bericht 2006-01-3193, SAE International, 2006.
- [96] ZIMMERMANN, P.: *Erzwungene und freie ungedämpfte Schwingungen kreisförmig begrenzter Scheiben*. Ingenieur-Archiv, 40:377–401, 1974.