



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
MÜNCHEN

# **Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit MATLAB**

R. Schmidt

IAPG / FESG No. 5

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie  
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

München 1999

# Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit MATLAB

R. Schmidt

IAPG / FESG No. 5

München 1999

ISSN 1437-8280

ISBN 3-934205-04-6

## Adressen:

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23190

Telefax: +49-89-289-23178

<http://step.iapg.verm.tu-muenchen.de/iapg/>

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23191

Telefax: +49-89-289-23178

<http://alpha.fesg.tu-muenchen.de/fesg/>

Technische Universität München  
Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Roland Schmidt

**Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit MATLAB**

Diplomarbeit

Betreuer: Dr.-Ing. Jürgen Müller  
Univ. Prof. Dr. rer.nat. Manfred Schneider

München, Juni 1998

## Vorwort

Das im Rahmen dieser Diplomarbeit entstandene Programm SATLAB 1.0: ‚Bahnberechnung‘ bildet einen Teil eines umfassenderen Software-Pakets SATLAB. Unter SATLAB ist eine Auswertesoftware zu verstehen, mit deren Hilfe zahlreiche Aufgaben der Satellitengeodäsie (Bahnbestimmung künstlicher Erdsatelliten, Parameterschätzung, Visualisierung) vorgenommen werden können. Es ist angedacht dieses Software-Paket (basierend auf MATLAB) im Zuge mehrerer Diplomarbeiten entstehen zu lassen. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt (Juni 1998) sind zwei Teilbereiche konkret realisiert. Dies ist einmal das hier vorgestellte Bahnrechnungsprogramm, zum anderen ein Programmpaket zur graphischen Darstellung von Satellitenbahnen in verschiedenen Koordinatensystemen (siehe dazu *M. Nitschke, SATLAB – Ein Werkzeug zur Visualisierung von Satellitenbahnen*, Schriftenreihe IAPG/FESG, No.2, ISSN 1437-8280). Innerhalb dieser Arbeit bezieht sich der Begriff SATLAB stets auf den hier beschriebenen Programmteil ‚Bahnberechnung‘. Der zugehörige MATLAB-Code, sowie eine Bedienungsanleitung sind auf Anfrage erhältlich. Entsprechende Anfragen sind bitte an Herrn Dr.-Ing. Jürgen Müller (Adresse siehe letzte Seite) oder an den Verfasser (an nachfolgende Anschrift) zu richten:

Roland Schmidt  
Gautinger Straße 67  
D-82234 Oberpfaffenhofen  
Tel: +49-8153-952463

Abschließend möchte ich an dieser Stelle noch all jenen danken, die zum erfolgreichen Gelingen dieser Arbeit mit beigetragen haben. Allen voran möchte ich Herrn Dr.-Ing. Jürgen Müller für die umfassende Betreuung danken. Den Herren Prof. Dr.-Ing. Reiner Rummel und Prof. Dr. rer. nat. Manfred Schneider danke ich für ihr fortwährendes Interesse an meiner Arbeit und zahlreichen fruchtbaren Diskussionen. Herrn Nico Sneeuw danke ich für Tips und Tricks zur Programmierung in MATLAB, Herrn Dr. rer.nat. Dieter Egger gilt mein Dank für die Bereitstellung seines Scanners. Für die Bereitstellung und Erläuterung von Teilen des Software-Pakets DOGS danke ich Herrn Michael Gerstl vom Deutschen Geodätischen Forschungsinstitut. Schließlich möchte ich meinen Eltern danken, die mir meine Ausbildung ermöglicht haben.

München, im Juni 1998

Roland Schmidt

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b> .....	1
1.1 Bewegungsgleichung einer gestörten Satellitenbahn.....	1
1.2 Bewegungsgleichung in einem bewegten Bezugssystem.....	3
1.3 Bahnbestimmung als Anfangswertaufgabe.....	4
<b>2. Koordinatensysteme</b> .....	6
2.1 Conventional Inertial Reference System (CIS).....	6
2.2 International Celestial Reference Frame (ICRF).....	7
2.3 Präzession, Nutation.....	7
2.4 Mittleres Äquinoktium des Datums (MDS).....	8
2.5 Wahres Äquinoktium des Datums (TDS).....	8
2.6 Conventional Terrestrial Reference System (CTS)-ITRF.....	10
2.7 Erdrotation.....	10
2.8 Polbewegung.....	10
2.9 Zusammenfassung: Übergang CIS-CTS.....	11
<b>3. Zeitsysteme</b> .....	13
3.1 Sternzeit und Weltzeit (Universal Time).....	13
3.2 Dynamische Zeit.....	15
3.3 Atomzeit.....	16
3.4 Koordinierte Weltzeit UTC.....	17
3.5 Transformation zwischen den Zeitsystemen.....	17
<b>4. Kräftemodell</b> .....	19
4.1 Integration im vereinbarten Ekliptiksystem.....	19
4.2 Anisotropes Gravitationsfeld der Erde (statischer Anteil).....	20
4.2.1 Gradientenbildung $\nabla V$ .....	21
4.3 Drittkörper.....	23
4.3.1 Allgemeines Modell.....	23
4.3.2 Diskussion des Drittkörpermodells.....	25
4.3.3 Ephemeriden der Drittkörper aus mittleren Bahnelementen.....	25
4.3.4 Ephemeriden der Drittkörper durch Interpolation.....	27
4.4 Atmosphärenwiderstand (drag).....	28
4.4.1 Allgemeines zur Modellierung des Atmosphärenwiderstandes.....	28
4.4.2 Modell zur Berechnung des Atmosphärenwiderstandes.....	29
4.4.3 Diskussion des Atmosphärenmodells.....	29
4.4.4 Atmosphärendichte mit einem Kugelschalenmodell.....	30
4.4.5 Atmosphärendichte mit CIRA86.....	31

4.4.6 Bestimmung der Flughöhe z .....	33
<b>5. Test der Programme</b> .....	34
5.1 Quantitative und qualitative Tests .....	34
5.2 Modulare Programmierung, Rechenzeiten.....	34
5.3 Parameter <i>RelTol</i> , <i>AbsTol</i> der MATLAB-Integratoren.....	35
<b>6. Integratoren in MATLAB</b> .....	36
6.1 Test der Integratoren ode45, ode113 .....	36
6.2 Testparameter .....	37
6.3 Ergebnisse: Test der Integratoren.....	37
6.4 Bewertung: Test der Integratoren.....	47
<b>7. Jacobi-Integral</b> .....	48
7.1 Testparameter.....	49
7.2 Ergebnisse: Jacobi-Integral .....	49
7.3 Bewertung: Jacobi-Integral .....	50
<b>8. Störungen aufgrund des anisotropen Gravitationsfeldes</b> .....	51
8.1 Testparameter .....	52
8.2 Charakteristik der Elementstörungen.....	53
8.3 Berechnung von Kepler-Elementen aus Ephemeriden .....	54
8.4 Ergebnisse: Störungen aufgrund des anisotropen Gravitationsfeldes.....	55
8.5 Bewertung: Störungen aufgrund des anisotropen Gravitationsfeldes.....	58
<b>9. Interpolation von Präzessions-, Nutationswinkeln</b> .....	59
9.1 Vorgehensweise.....	60
9.2 Lineare Interpolation .....	60
9.3 Testparameter.....	61
9.4 Ergebnisse: Interpolation von Präzessions-, Nutationswinkeln .....	61
9.5 Bewertung: Interpolation von Präzessions-, Nutationswinkeln .....	62
<b>10. Einfluß von Drittkörpern</b> .....	63
10.1 Testparameter .....	63
10.2 Ergebnisse: Einfluß von Drittkörpern.....	64
10.3 Bewertung: Einfluß von Drittkörpern.....	68
<b>11. Einfluß der Atmosphäre: Dichte mit Kugelschalenmodell</b> .....	69
11.1 Testparameter .....	69
11.2 Ergebnisse: Atmosphäreneinfluß mit Kugelschalenmodell .....	69
11.3 Bewertung: Atmosphäreneinfluß mit Kugelschalenmodell .....	71
<b>12. Einfluß der Atmosphäre: CIRA86</b> .....	72

12.1 Testparameter.....	72
12.2 Ergebnisse: Atmosphäreneinfluß mit CIRA86.....	72
12.3 Bewertung: Atmosphäreneinfluß mit CIRA86.....	76
<b>13. Schlußbetrachtung und Ausblick.....</b>	<b>77</b>
Literaturverzeichnis.....	79

## Anhang

Anhang 1: Verfahren der numerischen Integration

Anhang 2: Ableitung der Legendre-Polynome

Anhang 3: Lagrange-Interpolation für Planetenephemeriden

Anhang 4: Variation von Atmosphäreparametern mit der Sonnenaktivität



## 1. Einleitung

Die Bewegung künstlicher Erdsatelliten um die Erde erfolgt unter dem Einfluß einer Reihe von Kräften. Durch die Beobachtung der Bahn eines Satelliten lassen sich Rückschlüsse auf die auf den Satelliten wirkenden Kräfte gewinnen und gehen so in eine physikalische Modellbildung ein. Umgekehrt bestimmt man auf Grundlage solcher Kräftemodelle die Bahn eines Satelliten. Diesen Vorgang nennt man die Ephemeridenrechnung, wobei unter einer Ephemeride der Zustandsvektor eines Satelliten zu einer bestimmten Epoche zusammengesetzt aus seinem Orts- und Geschwindigkeitsvektor verstanden wird.

Dabei ergänzen sich Bahnbeobachtung und Ephemeridenrechnung im Rahmen einer Parameterschätzung von Modellgrößen zur Beschreibung der Satellitenbewegung. Die Ephemeridenrechnung erfüllt den Zweck der Beschaffung von Näherungswerten für die Satellitenörter im linearen Modell der Ausgleichung von Beobachtungen.

Ziel dieser Arbeit war es, ausgehend vom Anfangswertproblem ein Programm zur Bahnvorhersage unter Verwendung konkreter Modelle der Satellitenbewegung unter MATLAB<sup>1</sup> zu erstellen. Wegen der Art und Vielfalt der auf den Satelliten wirkenden Kräfte wird die Bewegungsgleichung numerisch integriert.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. In den Kapiteln 1 bis 4 werden die theoretischen Grundlagen der Bewegungsgleichung und ihre konkrete Realisierung im Bahnrechnungsprogramm SATLAB 1.0: Bahnrechnung zusammengestellt. Die Abschnitte 6 bis 12 umfassen quantitative und qualitative Tests des Bahnrechnungsprogramms. Neben den implementierten Modellen wurden die von MATLAB zur Verfügung gestellten Integratoren hinsichtlich ihrer Eignung in einem solchen Bahnvorhersageprogramm näher untersucht.

### 1.1 Bewegungsgleichung einer gestörten Satellitenbahn

Die Bewegungsgleichung der gestörten Satellitenbewegung wird im Rahmen einer Newton'schen Mechanik dargestellt. Für die Relativbewegung der Massenmittelpunkte des Satelliten und der Erde gilt in einem Inertialsystem  $K$  (Schneider, 1989)

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{G}_{ES} + \sum_{k=1}^N \vec{G}_{ES,k} + \mu \left( \frac{\vec{K}_S}{m_S} - \frac{\vec{K}_E}{M_E} \right) + \mu \left( \frac{\vec{F}_S}{m_S} - \frac{\vec{F}_E}{M_E} \right), \quad (1.1.1)$$

mit  $\vec{G}_{ES}$ : Gravitationswechselwirkung Erde - Satellit

$\sum_{k=1}^N \vec{G}_{ES,k}$ : Gezeitenkräfte dritter Körper (z.B. Sonne, Mond)

$\mu \left( \frac{\vec{K}_S}{m_S} - \frac{\vec{K}_E}{M_E} \right)$ : nichtgravitative Volumenkräfte (z.B. elektromagnetische Einflüsse)

$\mu \left( \frac{\vec{F}_S}{m_S} - \frac{\vec{F}_E}{M_E} \right)$ : nichtgravitative Flächenkräfte (z.B. Atmosphärenwiderstand,

Strahlungsdruck der Sonne)

$$\mu = \frac{M_E m_S}{M_E + m_S} \approx m_S: \text{reduzierte Masse des Systems Erde - Satellit}$$

Die Angabe einer strengen analytischen Lösung für die Bewegungsgleichung (1.1.1) ist im Falle der ungestörten, sogenannten Kepler-Bewegung möglich. Dort reduziert man die auf den Satelliten wirkenden Kräfte auf die Gravitationswechselwirkung zwischen Erde und Satelliten, wobei für die Erde ein kugelsymmetrisches Gravitationsfeld angenommen wird. Damit vereinfacht sich (1.1.1) zu

<sup>1</sup> Die Realisierung erfolgte konkret in MATLAB 5.

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_{Erde}}{r^3} \vec{r}, \quad (1.1.2)$$

mit  $\vec{r}, r$ : Relativvektor bzw. dessen Betrag im Inertialsystem  $K$   
 $GM_{Erde}$ : Produkt Gravitationskonstante mal Erdmasse in  $\left[\frac{km^3}{s^2}\right]$ .

Die analytische Integration der Gleichung (1.1.2) führt auf die bekannten Gleichungen der Lösung des Kepler-Problems, wie man sie beispielsweise in (Schneider, 1989) findet. Die Lösung hat die formale Gestalt:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}(t; a_1, \dots, a_6) \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{\vec{r}}(t; a_1, \dots, a_6). \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Die Elemente  $a_1, \dots, a_6$  sind dabei frei wählbare Integrationskonstanten, wobei oft die bekannten sechs Kepler-Elemente  $a, e, i, \omega, \Omega, M$  verwendet werden.

Die Satellitenbewegung wird hauptsächlich durch den kugelsymmetrischen Anteil des Gravitationsfeldes der Erde beeinflusst. Die Einflüsse der übrigen auf den Satelliten wirkenden gravitativen und nichtgravitativen Kräfte machen sich als Abweichungen von der Bahn der ungestörten Bewegung bemerkbar. Diese Einflüsse werden daher als Störkräfte bezeichnet.

Nachfolgende Gleichung bringt dies besonders zum Ausdruck

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_{Erde}}{r^3} \vec{r} + \vec{k}_s, \quad (1.1.4)$$

mit  $\vec{k}_s$ : Summe der Störbeschleunigungen auf den Satelliten.

Wie oben bereits angedeutet, gibt es eine Vielzahl von Störbeschleunigungen, die für eine ‚exakte‘ Ephemeridenrechnung berücksichtigt werden müssen. Seeber (1989) gibt folgende wesentlichen Störbeschleunigungen an

1. Beschleunigungen wegen der Inhomogenität des Gravitationsfeldes der Erde
2. Beschleunigungen verursacht durch die Gravitationskräfte sog. Drittkörper (Sonne, Mond, große Planeten)
3. Beschleunigungen aufgrund von Erd- und Meeresgezeiten
4. Beschleunigungen aufgrund des atmosphärischen Strömungswiderstandes (sog. drag)
5. Beschleunigungen aufgrund des direkten oder reflektierten Strahlungsdrucks der Sonne

Die Störbeschleunigungen sind gravitativer (1-3) bzw. nichtgravitativer Natur (4-5) und werden durch entsprechende Modelle für eine numerische Auswertung zugänglich gemacht.

Die Lösung von Gleichung (1.1.2) wird im Rahmen der Tests des Programms SATLAB 1.0 von Bedeutung sein. Gleichung (1.1.4) deutet die Vorgehensweise zur Berücksichtigung der Störkräfte an. Jeder Störeinfluß wird mit einem geeigneten Modell berechnet und dem Zentralterm additiv überlagert.

## 1.2 Bewegungsgleichung in einem bewegten Bezugssystem

Die Beschreibung der Bewegungsgleichung hängt wesentlich von dem gewählten Bezugssystem ab. Betrachtet man die Bewegungsgleichung eines Satelliten mit der konstanten Masse  $m_s$ , so gilt bzgl. einem Bezugssystem  $S$ , das sich in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung befindet,

$$m_s \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t; \vec{r}, \dot{\vec{r}}), \quad (1.2.1)$$

mit  $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ : Orts-, Geschwindigkeitsvektor bzgl.  $S$   
 $\vec{F}$ : Kräftefunktion aller angreifenden Kräfte bzgl.  $S$   
 $m_s$ : Masse des Satelliten

Wird die Bewegung des Satelliten bzgl. eines Systems  $\bar{S}$  dargestellt, das sich gegenüber  $S$  in Bewegung befindet, so lautet die Bewegungsgleichung:

$$m_s \frac{D^2 \bar{\vec{r}}}{Dt^2} = \bar{\vec{F}}\left(t; \bar{\vec{r}}, \frac{D\bar{\vec{r}}}{Dt}\right) - m_s \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} - \bar{C} - \bar{Z} - \bar{S}, \quad (1.2.2)$$

mit  $\frac{d}{dt}, \frac{D}{Dt}$ : Zeitableitungen im System  $S$  bzw.  $\bar{S}$ <sup>2</sup>

$\bar{\vec{r}}$ : Ortvektor des Satelliten in  $\bar{S}$   
 $\bar{R}$ : Translation von  $O$  nach  $O'$   
 $\bar{\omega}$ : Rotationsvektor von  $\bar{S}$  gegenüber  $S$   
 $\bar{\vec{F}}$ : Kräftefunktion ausgedrückt im System  $\bar{S}$   
 $\bar{C} = -2m_s \bar{\omega} \times \frac{D\bar{\vec{r}}}{Dt}$ : Coriolis-Kraft  
 $\bar{Z} = -m_s \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\vec{r}})$ : Zentrifugalkraft  
 $\bar{S} = -m_s \frac{D\bar{\omega}}{Dt} \times \bar{\vec{r}}$ : Euler-Kraft

Man vergleiche dazu Abbildung 1.1. In einem translatorisch und/oder rotatorisch beschleunigtem System  $\bar{S}$  treten also neben der Kräftefunktion  $\bar{\vec{F}}$  noch zusätzliche Kräfte, die Trägheitskräfte auf.

Bezugssysteme für die  $\ddot{\bar{R}} \equiv \vec{0}$  und  $\dot{\bar{\omega}} \equiv \vec{0}$  gilt werden als inertielle Bezugssysteme bezeichnet. Für die numerische Integration der Bewegungsgleichung in SATLAB 1.0 wird ein solches System benötigt. Da sich der Satellit um das Geozentrum bewegt, wird bequemerweise ein geozentrisch gelagertes Inertialsystem gewählt. Dies wird in Kapitel 2 Koordinatensysteme diskutiert. Geht man davon aus, daß ein derartiges Bezugssystem zur Verfügung steht, kann die Aufgabe der numerischen Integration der Bewegungsgleichung der Form (1.1.4) angegangen werden.

*Anmerkung:* Alternativ zur Integration der Bewegungsgleichung (1.1.4) im Inertialsystem könnte als Bezugssystem der Integration das wahre Äquinoktium (TDS, vgl. 2.5) verwendet werden. Wegen der

<sup>2</sup> Die Newton'sche Mechanik setzt eine absolute Zeit voraus, die für alle Bezugssysteme gilt. Nach der speziellen Relativitätstheorie wird dieses Postulat der absoluten Zeit fallen gelassen. Jedes Koordinatensystem besitzt sein eigenes Zeitsystem, das fest mit ihm verbunden ist. Transformationen zwischen solchen Systemen erfolgen mit der Lorentz-Transformation.

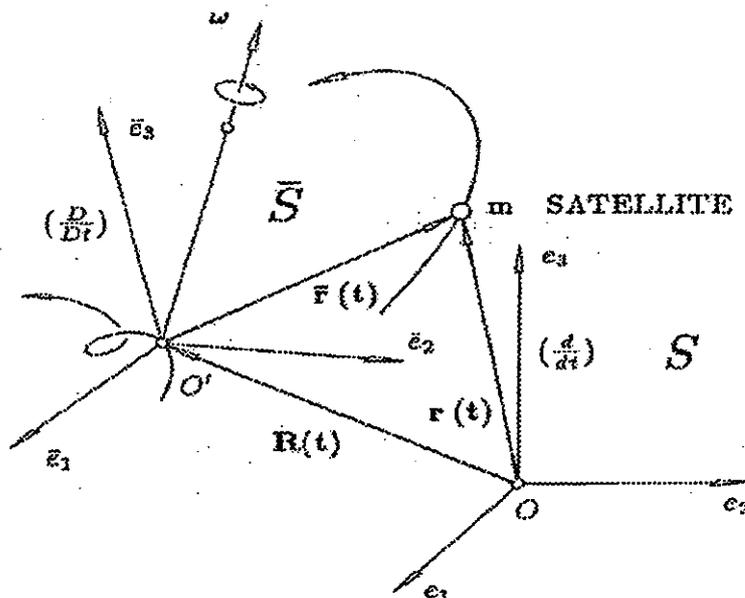


Abbildung 1.1: Bewegung eines Satelliten in einem bewegten System  $\bar{S}$  und einem Ruhsystem  $S$

(Reigber, 1989)

Präzessions- und Nutationsbewegung wäre dieses System kein Inertialsystem mehr und in der Bewegungsgleichung müßten die Anteile der Trägheitskräfte, verursacht durch Präzession und Nutation, berücksichtigt werden.

In der Rechenpraxis solcher Bahnberechnungsprogramme werden die Winkel für Präzession und Nutation sowie deren Änderungsraten vorausberechnet und in der Integration interpoliert. Damit werden dann die Trägheitskräfte berechnet (Reigber, 1989). Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß während der Integration explizit nur Winkel für die Erddrehung und Polbewegung bzw. entsprechende Rotationen berücksichtigt werden müssen.

In dieser Arbeit wurde der Methode der Integration der Bewegungsgleichung im Inertialsystem der Vorzug gegeben. Dort entfällt die Berechnung der Anteile der Trägheitskräfte, dafür müssen aber in jedem Integrationsschritt Ausdrücke zur Bestimmung von Präzessions- und Nutationswinkeln ausgewertet werden. In Kapitel 9 wurde die Möglichkeit untersucht, eine Senkung der Rechenzeit durch Interpolation von vorausberechneten Präzessions- und Nutationswinkeln zu erzielen, um damit die explizite Auswertung v.a. der Nutationstheorie abzukürzen.

### 1.3 Bahnbestimmung als Anfangswertaufgabe

Das Problem der Ephemeridenrechnung eines künstlichen Erdsatelliten wird hier als Anfangswertaufgabe formuliert, d.h. für einen gegebenen Zeitpunkt (Startpunkt der numerischen Integration) ist der entsprechende Orts- und Geschwindigkeitsvektor des Satelliten bekannt (z.B. Brennschlußwerte einer Rakete, die den Satelliten in einen Orbit bringt oder der letzte Orts- und Geschwindigkeitsvektor eines ausgeglichenen Bahn Bogens). Mit Hilfe des Integrationsverfahrens werden dann Ephemeriden für spätere Zeitpunkte berechnet.

Die numerisch zu integrierende vektorielle Differentialgleichung der Bewegung ist mit Gleichung (1.1.4) gegeben. Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die zur Lösung in ein System zweier Differentialgleichungen 1. Ordnung umgestellt wird. Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten: die Methode von Cowell und die Methode von Encke. Hier wurde der Methode von Cowell der Vorzug gegeben. Eine Beschreibung der Encke-Methode findet man z.B. in Schneider (1993) oder Seeber (1989).

Cowell stellt die grundlegende Differentialgleichung (1.1.4) wie folgt in zwei Differentialgleichungen

1. Ordnung um

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \vec{v}, \\ \dot{\vec{v}} &= -\frac{GM_{\text{Erde}}}{r^3} \vec{r} + \vec{k}_S\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

bzw. in Vektorkomponenten dargestellt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x & \dot{v}_x &= k_{sx} - \frac{GM_{\text{Erde}}}{r^3} x \\ \dot{y} &= v_y & \dot{v}_y &= k_{sy} - \frac{GM_{\text{Erde}}}{r^3} y \\ \dot{z} &= v_z & \dot{v}_z &= k_{sz} - \frac{GM_{\text{Erde}}}{r^3} z\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

Die Anfangswerte dieser Gleichungen werden durch einen Orts- und Geschwindigkeitsvektor für den Anfangszeitpunkt festgelegt.

Die Störbeschleunigung (als Zusammenfassung aller modellierten Störbeschleunigungen) wird entsprechend der im Kapitel 4 Kräftemodell angegebenen Gleichungen für die gegebenen Startwerte bestimmt. Es ist darauf zu achten, daß die Störbeschleunigungen bzw. deren Summe im inertialen Bezugssystem der Bahnintegration angebracht werden. Die Zeit ist hier die unabhängige Variable der zweiteiligen Lösungsfunktion.

## 2. Koordinatensysteme

In der Satellitengeodäsie werden mindestens zwei Koordinatensysteme benötigt,

- 1) ein (quasi-) inertiiales, raumfestes Bezugssystem und
- 2) ein erdfestes Bezugssystem.

Im raumfestem Bezugssystem wird die Bewegungsgleichung der Satellitenbewegung formuliert und (in SATLAB 1.0 numerisch) integriert. Das erdfeste Bezugssystem wird im Rahmen der Ephemeridenrechnung v.a. zur Bestimmung der Orientierung der felderzeugenden Massen des Gravitationspotentials gegenüber dem Satelliten benötigt. Der Ursprung beider Systeme ist identisch und liegt im Geozentrum.

Die gegenseitige Orientierung von raumfestem und erdfestem Bezugssystem ist zeitlich veränderlich und wird durch Präzession, Nutation, Erddrehung und Polbewegung beschrieben. Da beide Systeme ihren gemeinsamen Ursprung im Massenmittelpunkt der Erde haben erfolgt der Übergang raumfestes-erdfestes Bezugssystem (und umgekehrt) mit Hilfe orthogonaler Rotationsmatrizen. Deren Argumente sind die momentanen Werte für Präzession, Nutation, Erddrehung und Polbewegung.

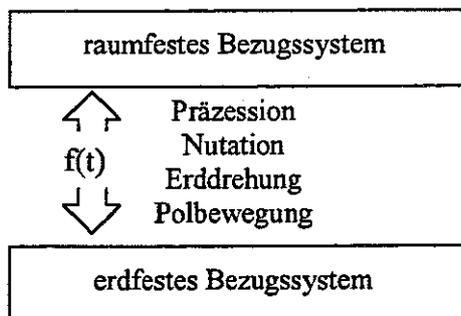


Abbildung 2.1: Verknüpfung raumfestes-erdfestes Bezugssystem

In den nachfolgenden Abschnitten werden das in SATLAB 1.0 verwendete raum- und erdfeste Bezugssystem sowie die Beziehungen zwischen den beiden Systemen dargestellt. Dort tauchen für den Begriff Bezugssystem die Ausdrücke ‚reference system‘ und ‚reference frame‘ auf.

In der englischsprachigen Literatur wird zwischen der konzeptionellen Idee eines Bezugssystems und der tatsächlichen Realisierung desselben durch Verwendung unterschiedliche Begriffe differenziert. Für erstere wird der Begriff ‚reference system‘ verwendet während der Begriff ‚reference frame‘ letzteres meint. Im Deutschen wird eine begriffliche Unterscheidung nicht getroffen und i.d.R. ein und derselbe Begriff ‚Bezugssystem‘ verwendet.

Die nachfolgende Herleitung der Zusammenhänge stützt sich bzgl. Inhalt und Notation auf *Reigber (1989)* und *Zhu (1996)*. Für die tatsächliche Realisierung der Bezugssysteme werden die IERS-Conventions 1996 verwendet.

### 2.1 Conventional Inertial Reference System (CIS)

Die Beschreibung der gestörten Bewegungsgleichung (1.1.1) bzw. (1.1.5) erfordert ein Inertialsystem. In der physikalischen Wirklichkeit lassen sich strenge Realisierungen solcher Systeme nicht finden, sondern stets nur Annäherungen.

Eine gute Annäherung an ein solches Inertialsystem  $S$ , das die eine Forderung  $\ddot{\vec{R}} \equiv \vec{0}$  erfüllt, erhält man, wenn man den Ursprung  $O$  von  $S$  ins Baryzentrum des Sonnensystems legt. Die Rotationsfreiheit des Systems  $S$ , d.h. bzgl. der raumfesten Lage seiner Achsen wird durch Orientierung dieser Achsen mit einem Satz von extragalaktischen Radioquellen oder Sternen festgelegt. Durch Angabe bzw. Tabellierung von Positionen (und Geschwindigkeiten) dieser Ziele bzgl. dem Inertialsystem wird dieses selbst definiert.

Ein solches System wird als CIS, Conventional Inertial Reference System bezeichnet und stellt die konzeptionelle Idee des raumfesten Bezugssystem in der Satellitengeodäsie dar.

Für die Beschreibung der Bewegung eines Satelliten ist nun jedoch ein geozentrisches Bezugssystem bequemer. Wegen der translatorisch beschleunigten Bewegung der Erde um das Baryzentrum Erde-Mond und um das Baryzentrum des Sonnensystems ist ein solches System kein strenges Inertialsystem mehr und wird deshalb als Quasi-Inertialsystem bezeichnet. Oben genannte translatorische Beschleunigungen können jedoch gut im Rahmen einer Störung durch Drittkörper berücksichtigt werden.

## 2.2 International Celestial Reference Frame (ICRF)

Die konkrete Realisierung des CIS ist in SATLAB 1.0 das International Celestial Reference Frame (ICRF)<sup>1</sup>. Dies geschieht in SATLAB 1.0 durch Verwendung der mit den IERS-Conventions 1996 empfohlenen Präzessions- und Nutationstheorie. Der Ursprung des ICRF liegt im Baryzentrum. Zur Epoche J2000.0 fällt es mit dem mittleren Äquatorsystem, das durch den mittleren Himmelspol (z-Achse) und mittleren Frühlingspunkt (x-Achse) definiert ist, zusammen. Das ICRF ist damit ein Äquatorsystem.

Für die Integration wird der Ursprung in das Geozentrum verschoben. Daraus resultierende translatorische Beschleunigungen werden durch Drittkörperstörungen kompensiert. Der Unterschied zwischen TDB und TDT wird im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt, d.h. J2000.0 TDB ist in SATLAB 1.0 gleich J2000.0 TDT. Anschließend wird das ICRF mit dem momentanen Wert für die Schiefe der Ekliptik um die  $x_{\text{ICRF}}$ -Achse in die Ekliptikebene gedreht. Integrationssystem der Bewegungsgleichung in SATLAB 1.0 ist damit das quasi-inertiale Ekliptiksystem ICRF J2000.0 TDT.

Der Übergang auf ein momentanes erdfestes Bezugssystem erfordert den Übergang in die Äquatorebene und dort die Berücksichtigung der Einflüsse von Präzession, Nutation, Erdrotation und Polbewegung.

## 2.3 Präzession, Nutation

Unter dem Einfluß (im wesentlichen) lunisolärer Gravitationskräfte, die auf den abgeplatteten Erdkörper wirken ist die Erdrotationsachse und die damit verbundene Äquatorebene nicht raumfest, sondern ändert ihre Orientierung in Bezug auf CIS in der Zeit. Die Gesamtbewegung setzt sich aus Präzession<sup>2</sup> und Nutation zusammen, wobei die Präzession den mittleren säkularen Anteil und die Nutation den periodischen Anteil beschreibt. Die Präzession stellt sich als Kreisbewegung der Erdrotationsachse bzgl. des Geozentrums um die z-Achse des vereinbarten Inertialsystems dar, der periodische Bewegungen (Nutation) aufgelagert sind.

Die Periode für die Präzessionsbewegung beträgt etwa ca. 25800 Jahre, die Nutationsbewegung weist Perioden im Bereich einem Tag bis etwa 18.6 Jahre auf. Beides sind zwar sehr langsame rotatorische Bewegungen, die jedoch beim Übergang vom raumfesten auf das erdfeste Bezugssystem nicht vernachlässigt werden dürfen. Zum einen dürften die von einer rotatorischen Beschleunigung wegen Präzession und Nutation herührenden Trägheitskräfte nicht vernachlässigt werden, zum anderen summieren sich die Winkel, die die gegenseitige Lage eines momentanen Äquatorsystems gegenüber dem raumfesten vereinbarten Äquatorsystem beschreiben so, daß eine Vernachlässigung dieser Bewegungen langfristig signifikante Orientierungsfehler zwischen diesen beiden Systemen ergeben

<sup>1</sup> Das ICRF wird vom IERS laufend gehalten. IERS steht für International Earth Rotation Service.

<sup>2</sup> Aufgrund der Anziehungskräfte der übrigen Planeten und des Mondes bewegt sich der Massenmittelpunkt der Erde nicht in einer ebenen Bahn um die Sonne. Der Anteil der Anziehungskräfte der Planeten bewirkt eine Drehung der Ekliptik. Dieser Effekt wird als planetare Präzession bezeichnet. Der Anteil der Anziehungskräfte des Mondes wird zusammen mit den Einflüssen der Anziehungskräfte der Sonne in der lunisolaren Präzession berücksichtigt. Planetare und lunisolare Präzession werden allgemein als Präzession bezeichnet. Die unten angegebene Theorie (Lieske et al., 1977) dient zur Berechnung der allgemeinen Präzession. Im weiteren wird die allgemeine Präzession einfach als Präzession bezeichnet.

würde. Dies würde sich in Inkonsistenzen zwischen berechneten („simulierten“) und tatsächlichen Beobachtungen bemerkbar machen.

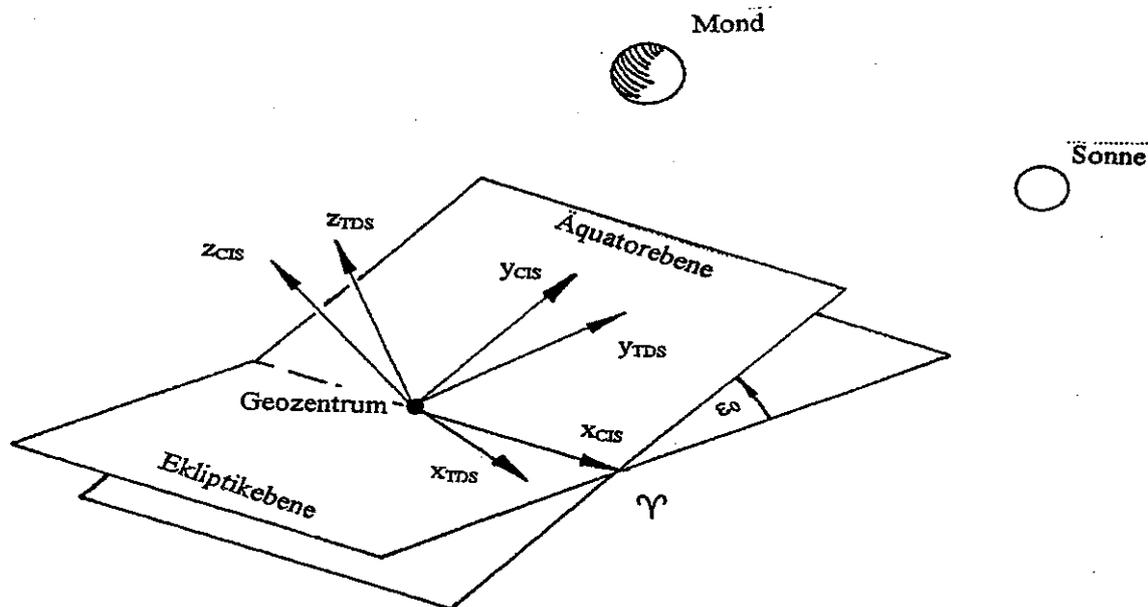


Abbildung 2.2: Präzession, Nutation

#### 2.4 Mittleres Äquinoktium des Datums (MDS)

Wird der Einfluß der Präzession berücksichtigt, gelangt man durch Verwendung der Präzessionsmatrix  $P$  in das sogenannte mittlere Äquatorsystem zur Epoche  $t$  (englisch als Mean of Date Frame MDS bezeichnet).

$$\vec{r}_{MDS} = P \cdot \vec{r}_{CIS}, \quad (2.4.1)$$

$$\text{mit } P = R_3(-z_A)R_2(\theta_A)R_3(-\zeta_A) \quad (2.4.2)$$

Die Winkelargumente der Matrix  $P$  werden mit Hilfe einer geeigneten Theorie berechnet. In SATLAB 1.0 wird die Empfehlung des IERS verwendet, der wiederum die Theorie der IAU von 1977 (*Lieske et al.*) empfiehlt. Im m-file `Prezwink2.m` wurden zur Berechnung der Winkel  $z_A$ ,  $\theta_A$ ,  $\zeta_A$  entsprechend der IAU-Theorie folgende Formeln programmiert:

$$\begin{aligned} z_A &= 2306.''218t + 0.''30188t^2 + 0.''017998t^3 \\ \theta_A &= 2004.''3109t - 0.''42665t^2 - 0.''041833t^3, \\ \zeta_A &= 2306.''218t + 1.''09468t^2 + 0.''018203t^3 \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

wobei die Epoche  $t$  in julianischen Jahrhunderten seit J2000.0 TDT einzusetzen ist.

#### 2.5. Wahres Äquinoktium des Datums (TDS)

Berücksichtigt man den Einfluß der Nutation, so gelangt man ins wahre Äquatorsystem zur Epoche  $t$  (englisch: True of Date Frame TDS). Es gilt:

$$\vec{r}_{TDS} = NP \cdot \vec{r}_{CIS}, \quad (2.5.1)$$



Die Einheiten der *Perioden* sind [Tage], der  $A_i, A_i', B_i, B_i'$  sind jeweils [0.0001 mas].

*Anmerkung:* Beobachtungen mit VLBI und LLR haben gezeigt, daß oben beschriebene Nutationstheorie Mängel aufweist. Die Theorie wird jedoch vom IERS beibehalten. An den Größen  $\Delta\varepsilon, \Delta\psi$  werden beobachtete Differenzen als Korrekturen  $\delta\Delta\psi, \delta\Delta\varepsilon$  angebracht. Entsprechende Werte werden in den IERS-Bulletins verbreitet. Die mittels IERS-Bulletin verbreiteten Korrekturen  $\delta\Delta\psi, \delta\Delta\varepsilon$  werden in SATLAB 1.0 nicht berücksichtigt. Jedoch wurden an manchen Amplituden  $A_i, A_i', B_i$  und  $B_i'$  entsprechende Korrekturen angebracht, so daß die in SATLAB 1.0 verwendeten Ausdrücke in nut.mat nicht exakt den vertafelten Werten im Anhang entsprechen.

## 2.6 Conventional Terrestrial Reference System CTS - ITRF

Das CTS ist das vereinbarte erdfeste Bezugssystem. CTS ist ein kartesisches Äquatorsystem. Es wird festgelegt durch Stationskoordinaten und -geschwindigkeiten ausgewählter Beobachtungsstationen auf der Erde, sowie weiterer Konstanten und Theorien, so daß bzgl. dem Netz der Stationen und der Erdoberfläche keine Rotationen oder Translationen existieren. Der Ursprung des CTS liegt im Geozentrum<sup>3</sup>. Die  $z_{CTS}$ -Achse ist so festgelegt, daß sie mit dem mittleren Himmelspol zu einer gewählten Epoche zusammenfällt. Die  $x_{CTS}$ -Achse zeigt in Richtung Greenwich und ist so definiert, so daß Netzrotationen um die  $z_{CTS}$ -Achse verschwinden.

Hier ist das vereinbarte erdfeste Bezugssystem der International Terrestrial Reference Frame des IERS in der Realisierung von 1996 (ITRF 1996). Man beachte, daß die Verwendung anderer tatsächlicher Realisierungen erdfester Bezugssysteme (z.B. frühere Realisierungen von ITRF oder andere Bezugssysteme z.B. WGS84, GRS80, etc.) Koordinatentransformationen erforderlich machen. Der IERS empfiehlt hierzu eine 7-Parameter Ähnlichkeitstransformation zwischen kartesischen Koordinatensystemen mit einer Translation des Ursprungs, sowie kleinen Drehwinkeln zwischen den Achsen. Ausführliches dazu findet man in den *IERS Conventions (1996)*, Dennis D. McCarthy et al.

## 2.7 Erdrotation

Das vereinbarte erdfeste Bezugssystem CTS unterscheidet sich bzgl. seiner Orientierung vom momentanen raumfesten Bezugssystem TDS durch die Phase der Erdrotation. Die momentane Erdrotation wird durch UT1 bzw. die wahre Sternzeit bzgl. Greenwich beschrieben (GAST). Zur Berechnung von Satellitenephemeriden genügt die Verwendung der mittleren Sternzeit Greenwich (GMST), die ebenfalls aus UT1 berechnet wird (vgl. 3.1). Die Berechnung simulierter Beobachtungen dagegen, bei der die Position der Beobachtungsstation(en) möglichst genau bekannt sein muß, ist zur Bestimmung der momentanen Orientierung des vereinbarten erdfesten Bezugssystems gegenüber dem vereinbarten raumfesten Bezugssystem GAST statt GMST zu verwenden.

Damit lautet der Übergang von CIS nach CTS:

$$\vec{r}_{CTS} = SNP \cdot \vec{r}_{CIS}, \quad (2.7.1)$$

$$\text{mit } S = R_3(GAST). \quad (2.7.2)$$

In SATLAB 1.0 wird die mittlere Sternzeit Greenwich (GMST) statt GAST verwendet.

## 2.8 Polbewegung

Das vereinbarte erdfeste Bezugssystem CTS, das mit GAST/GMST gegenüber raumfesten Systemen rotiert, unterscheidet sich vom momentanen erdfesten Bezugssystem durch die Polbewegung. Die Polbewegung bringt zum Ausdruck, daß die Lage der momentanen Rotationsachse gegenüber der vereinbarten  $z_{CTS}$ -Achse verändert ist, d.h. die Drehachse bewegt sich relativ zur Erdkruste. Die

<sup>3</sup> Der Bezug zum Geozentrum wird durch Beobachtungen zu Erdsatelliten hergestellt. VLBI-Beobachtungen ergänzen die CTS-Definition durch Maßstabsinformationen, d.h. Längen von Basislinien zwischen den Stationen. VLBI-Messungen haben keinen direkten Bezug zum Geozentrum.

Polbewegung wird in rechtwinkligen Koordinaten  $y_P$ ,  $x_P$  auf der Kugel gemäß Abbildung 2.3 in Bogensekunden angegeben.

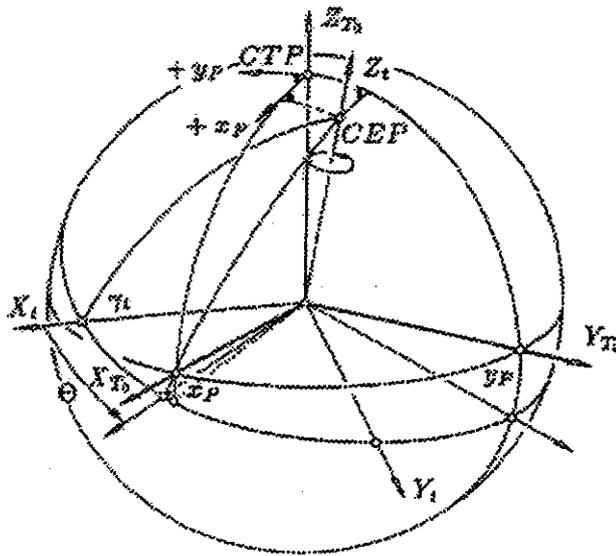


Abbildung 2.3: Erdrotation, Polbewegung, GAST mit  $\theta$  bezeichnet (Reigber, 1989)

Die Transformationsmatrix  $W$  vom momentanen zum vereinbarten Bezugssystem (CTS) lautet:

$$W = R_2(-x_P)R_1(-y_P). \quad (2.8.1)$$

Damit lautet der Gesamtübergang vom vereinbarten Inertialsystem CIS zum vereinbarten CTS wie folgt:

$$\vec{r}_{CTS} = WSNP \cdot \vec{r}_{CIS}, \quad (2.8.2)$$

Die Polbewegung ist einerseits zur Beschreibung der momentanen Lage von Beobachtungsstationen nötig. Dies ist für die Berechnung simulierter Beobachtungen in der Satellitengeodäsie wichtig, kann aber für eine Ephemeridenrechnung der Satelliten zunächst unterbleiben.

Andererseits wird die Orientierung des momentanen erdfesten Bezugssystems zur Bestimmung der Gravitationsbeschleunigung auf den Satelliten verursacht durch den statischen Anteil des Erdgravitationsfeldes benötigt. Zur Bestimmung dieser gravitativen Beschleunigung wird angenommen, daß die felderzeugenden Massen fest mit der Erde verbunden sind, d.h. die angegebenen Potentialkoeffizienten gelten bzgl. des vereinbarten CTS. Zur Berechnung der momentanen Beschleunigung auf den Satelliten muß das momentane erdfeste Bezugssystem verwendet werden bzw. dessen Orientierung gegenüber dem CTS bekannt sein, das sich eben um die Polbewegung vom CTS unterscheidet. Für die Ephemeridenrechnung muß die Polbewegung also für die Bestimmung der Kräftefunktion der Gravitationsbeschleunigung durch die Erde berücksichtigt werden.

In SATLAB 1.0 wird die Polbewegung bislang nicht berücksichtigt, sie ist jedoch in späteren Versionen zu implementieren. Bei der Verwendung entsprechender Werte  $x_P$ ,  $y_P$  für die Polbewegung ist darauf zu achten, bzgl. welchem vereinbarten erdfesten System diese Werte gegeben werden.

## 2.9 Zusammenfassung: Übergang CIS-CTS

In SATLAB 1.0 wird als Bahnintegrationssystem das ICRF in ekliptikaler Lage verwendet. Dazu muß das ICRF, das als Äquatorsystem vereinbart ist, mit dem aktuellen Wert der Schiefe der Ekliptik in die Ekliptikebene gedreht werden. Die Polbewegung bleibt in SATLAB 1.0 bislang noch unberücksichtigt. Damit lautet der Gesamtübergang vom Bahnintegrationssystem in das vereinbarte erdfeste Bezugssystem ITRF96

$$\vec{r}_{ITRF96} = SNPR_1(\varepsilon_0)\vec{r}_{ICRF,ekliptikal} \tag{2.9.1}$$

und umgekehrt

$$\vec{r}_{ICRF,ekliptikal} = (SNPR_1(\varepsilon_0))^{-1}\vec{r}_{ITRF96} \tag{2.9.2}$$

mit	$S = R_3(GMST) :$	Erdrotation
	$N = R_1(-\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon)R_3(-\Delta\psi)R(\varepsilon_0) :$	Nutation
	$P = R_3(-z_A)R_2(\theta_A)R_3(-\zeta_A) :$	Präzession
	$R_1(\varepsilon_0) :$	Schiefe der Ekliptik
	$\vec{r}_{ICRF,ekliptikal} :$	geozentrischer Ortsvektor bzgl. ICRF in ekl. Lage
	$\vec{r}_{ITRF96} :$	geozentrischer Ortsvektor bzgl. ITRF96.

An dieser Stelle werden alle notwendigen Transformationen zum Übergang vom vereinbarten Inertialsystem (CIS) zum vereinbarten erdfesten Bezugssystem (CTS) und umgekehrt zusammengefaßt.

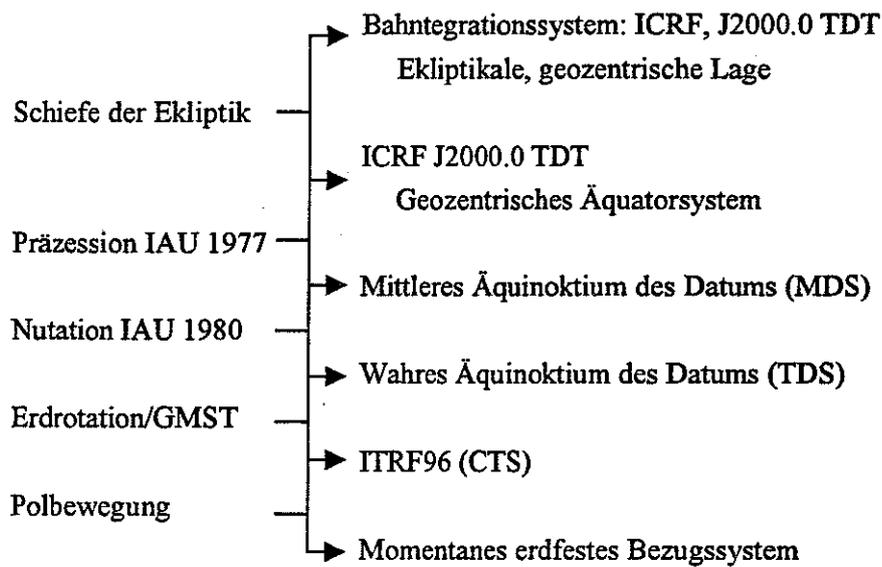


Abbildung 2.4: Übergang CIS - CTS

### 3. Zeitsysteme

Die Bewegung eines Satelliten ist zeitabhängig, d.h. Orts- und Geschwindigkeitsvektor variieren in der Zeit. Zeit tritt damit quasi als 4. Koordinate auf, mit der der Bewegungszustand des Satelliten eindeutig beschrieben werden kann. Analog zu Bezugssystemen bedarf es einer Definition von Zeitsystemen.

Im Rahmen der Bewegung und Beobachtung von Satelliten spielen drei Zeitskalen eine Rolle.

(1) Mit der Zeitskala der Weltzeit bzw. Sternzeit, die sich beide von der Erdrotation ableiten wird die zeitabhängige Orientierung eines erdfesten Bezugssystems gegenüber einem raumfesten Bezugssystem festgelegt.

(2) Die Beschreibung der Satellitenbewegung bzgl. eines geozentrischen, raumfesten Bezugssystems erfordert ein streng gleichförmiges Zeitmaß. Dieses kann beispielsweise aus der Bewegung der Erde im Raum abgeleitet werden und wird als Dynamische Zeit bezeichnet.

(3) Die Messung von Signallaufzeiten von und/oder zu Satelliten erfordert ebenfalls ein streng gleichförmiges und darüber hinaus hochauflösendes Zeitmaß, das sich gut beobachten, d.h. messen läßt. Das geeignete Zeitmaß wird mit der sogenannten Atomzeit realisiert.

Es ist offensichtlich, daß die Beziehungen zwischen diesen verwendeten Zeitsystemen so genau wie möglich bekannt sein müssen, um eine sinnvolle Nutzung der Satellitengeodäsie im Rahmen der jeweiligen Anwendung zu ermöglichen.

Die Satellitengeodäsie stellt an das jeweilige Zeitsystem folgende Genauigkeitsansprüche (Seeber, 1989). Bei einer maximal zulässigen Positionsabweichung von 1 cm auf dem Äquator muß die Erdrotation mit einer Genauigkeit von  $2 \cdot 10^{-5}$  s bekannt sein. 1 cm in der Bahn des erdnahen Satelliten entspricht etwa einem Zeitfehler von  $1 \cdot 10^{-6}$  s. Ein Fehler von  $1 \cdot 10^{-10}$  s in der Signallaufzeit bei Entfernungsmessungen zum Satelliten verursacht einen Positionsfehler von 1 cm.

Damit ergeben sich unterschiedlich hohe Anforderungen an die Genauigkeit des jeweils benötigten Zeitsystems.

$dT_1 [s] \leq 2 \cdot 10^{-5}$	Erdrotation
$dT_2 [s] \leq 1 \cdot 10^{-6}$	Bahnbewegung
$dT_3 [s] \leq 1 \cdot 10^{-10}$	Signallaufzeiten

Tabelle 3.1: Genauigkeitsanforderungen Zeit (Seeber, 1989)

In den nachfolgenden Abschnitten werden die einzelnen Zeitsysteme und ihre gegenseitigen Beziehungen genauer vorgestellt.

#### 3.1 Sternzeit und Weltzeit (Universal Time)

Sternzeit und Weltzeit leiten sich beide aus der Erdrotation ab und sind damit einander äquivalent. Unter Sternzeit ist allgemein der Stundenwinkel des Frühlingspunktes  $\gamma$  bzgl. eines beliebigen Ortsmeridian zu verstehen. Bezieht man die scheinbare oder wahre Sternzeit am lokalen Ortsmeridian auf den wahren Frühlingspunkt, auf dem beispielsweise eine astronomische Beobachtung durchgeführt wird, so spricht man von

LAST = Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes bzgl. des lokalen Ortsmeridians (3.1.1)

Wählt man als Ortsmeridian den Meridian von Greenwich, der für die Definition eines erdfesten Bezugssystems eine Rolle spielt, so spricht man von

GAST = Greenwicher Stundenwinkel des wahren Frühlingspunktes. (3.1.2)

Der Frühlingspunkt ist nun jedoch nicht raumfest, sondern wandert unter dem Einfluß von Präzession und Nutation. Der Nutationsanteil läßt sich im Stundenwinkel berücksichtigen, so daß man den Stundenwinkel (sowohl für einen Ortsmeridian, als auch für den Meridian von Greenwich) bzgl. des mittleren Frühlingspunktes erhält. Die so berechneten Größen werden mit LMST bzw. GMST bezeichnet. Abbildung 3.1 faßt dies noch einmal zusammen.

Die Zeitskala der Sternzeit ist nun nicht die scheinbare Sternzeit, die für astronomische Beobachtungen benötigt wird, sondern die mittlere Sternzeit. Die Zeiteinheit der mittleren Sternzeit ist der Sterntag, der durch zwei aufeinander folgende Durchgänge des mittleren Frühlingspunktes durch den Meridian festgelegt wird<sup>1</sup>.

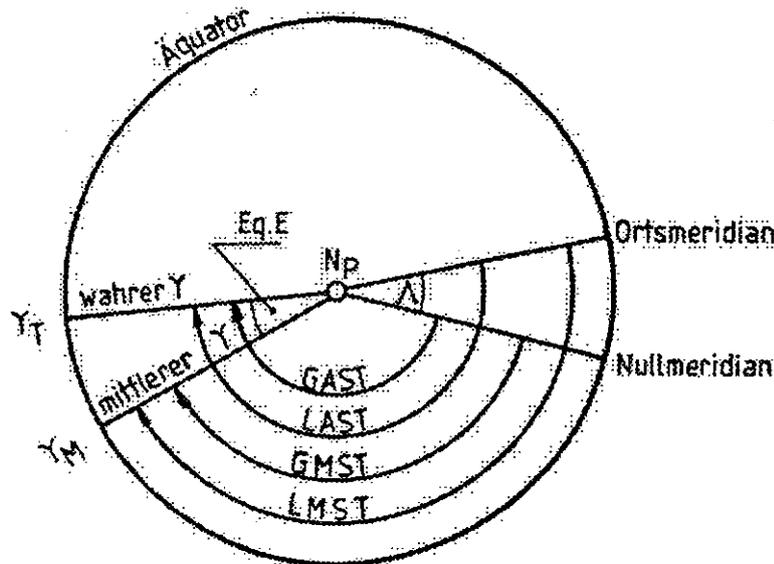


Abbildung 3.1: Wahre, mittlere Sternzeit (Seeber, 1989)

Die Größen GAST bzw. GMST werden zur Bestimmung der Erdrotationsrate bzw. zur Bestimmung der Orientierung des vereinbarten erdfesten Bezugssystems gegenüber dem raumfesten Bezugssystem benötigt. Die Sternzeitskala ist aber nicht unmittelbar zugänglich, sondern wird erst über die Weltzeit zugänglich.

Dies liegt daran, daß die Sternzeitskala für die Nutzung im täglichen Leben weniger geeignet ist. Statt dessen verwendet man ein Zeitmaß, das sich am scheinbaren täglichen Lauf der Sonne orientiert. Wegen der wechselnden Sonnenhöhe im Lauf des Jahres und der Elliptizität der Erdbahn variiert der wahre Stundenwinkel der Sonne sehr stark, so daß er als Zeitskala ungeeignet ist. Deshalb führt man eine fiktive mittlere Sonne ein, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Äquator bewegt. Entsprechend zum mittleren Sterntag definiert man einen mittleren Sonnentag, als das Zeitintervall zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen der mittleren Sonne durch den Meridian.

Der Stundenwinkel der mittleren Sonne bzgl. des Meridians von Greenwich heißt Weltzeit UT (Universal Time). Da der mittlere Sonnentag um Mitternacht beginnt, gilt:

$$UT = 12 \text{ h} + \text{Greenwicher Stundenwinkel der mittleren Sonne.} \quad (3.1.3)$$

Zwischen Stern- und Weltzeit besteht der formelmäßige Zusammenhang:

$$1 \text{ mittlerer Sterntag} = 1 \text{ mittlerer Sonnentag} - 3^m 55.^s 909. \quad (3.1.4)$$

Der Unterschied zwischen mittlerem Stern- und mittlerem Sonnentag resultiert daraus, daß sich die Erde im Laufe zwischen zwei Meridiandurchgängen der mittleren Sonne um etwa  $1^\circ/\text{Tag}$  (abgeleitet

<sup>1</sup> Der so definierte Sterntag entspricht wegen der Präzession nicht einer vollen Erdumdrehung im inertialen Raum. Die tägliche Differenz beträgt  $0.^m 0084$ .

aus 360° in 365 Tagen) auf ihrer Bahn weiterbewegt hat. Der Durchgang des Frühlingspunktes durch den Meridian ist dagegen von der Bewegung der Erde um die Sonne (abgesehen vom Einfluß von Präzession und Nutation) unabhängig.

Die Weltzeit UT wird aus Beobachtungen mit VLBI, SLR, LLR, GPS und DORIS abgeleitet. Hier ist zu berücksichtigen, daß sich derartige Beobachtungen auf ein momentanes erdfestes Bezugssystem beziehen. Benötigt wird aber ein Zeitmaß bzgl. eines vereinbarten erdfesten Bezugssystems. Die Abweichung eines momentanen erdfesten und eines vereinbarten Bezugssystems wird als Polbewegung bezeichnet (vgl. Kapitel 2: Bezugssysteme). Die um den Einfluß der Polbewegung korrigierte und damit auf den vereinbarten Pol bezogene Weltzeit wird mit UT1 bezeichnet. UT1 ist nun das Zeitargument mit dem die aktuelle Orientierung eines erdfesten gegenüber einem raumfesten Bezugssystem berechnet wird. Es gilt (seit dem 1.1.1984 durch Festlegung der IAU):

$$\text{GMST} = \text{UT1} + 6^{\text{h}} 41^{\text{m}} 50.^{\text{s}}5481 + 8640184.^{\text{s}}812866 T_u + 0.^{\text{s}}093104 T_u^2 - 6.^{\text{s}}2 \cdot 10^{-6} T_u^3. \quad (3.1.5)$$

Darin ist  $T_u$  die Zeit seit der Standarddepoche J2000, 1. Januar 12 h UT1 (als J2000.0 bezeichnet) ausgedrückt in julianischen Jahrhunderten.

Man beachte, daß UT1 nur zur Bestimmung der Rotation der Erde im inertialen Raum benützt wird, nicht jedoch als Zeitsystem für die Beschreibung der Satellitenbewegung. Dies liegt daran, daß eine mit der Erdrotation verbundene Zeitskala wegen Unregelmäßigkeiten in der Erddrehrate nicht gleichförmig ist.

### 3.2 Dynamische Zeit

Ein gleichförmiges Zeitmaß zur Beschreibung der Satellitenbewegung kann aus den Bewegungsgleichungen der Himmelsmechanik abgeleitet werden. Unter Verwendung einer entsprechenden dynamischen Theorie und entsprechenden beobachteten Ephemeriden (der in der Theorie berücksichtigten Himmelskörper) bzgl. einem geeigneten Bezugssystems kann ein entsprechendes Zeitsystem abgeleitet werden. Ein solches Zeitsystem erfüllt bestmöglich das Konzept einer Inertialzeit.

Es gibt nun eine dynamische Zeitskala, die aus der Bewegung von Himmelskörpern um das Massenzentrum des Sonnensystems (Baryzentrum) und einer die aus der Bewegung von Himmelskörpern um das Geozentrum abgeleitet wird. Erstere wird als TDB (Temps Dynamique Barycentrique) bezeichnet, letztere als TDT (Temps Dynamique Terrestre). TDB ist Koordinatenzeit im Baryzentrum des Sonnensystems (im Sinne der Terminologie der Allgemeinen Relativitätstheorie), während TDT die Eigenzeit auf dem Geoid darstellt. Die Abweichungen zwischen TDT und TDB aufgrund der jährlichen Bewegung einer mit der Erde verbundenen Uhr im Gravitationsfeld der Sonne erreichen periodische Veränderungen bis zu 1.6 Millisekunden. Dies kann aus der Näherungsformel (Seidelmann, 1992)

$$TDB = TDT + 0.001658^{\text{sec}} \sin g + 0.000014^{\text{sec}} \sin 2g, \quad (3.2.1)$$

mit  $g = 357.^{\circ}53 + 0.9856003(JD - 2451545.0)$  mittlere Anomalie der Erde  
 $JD$ : julianisches Datum

abgelesen werden.

Für die Bewegung eines Satelliten um die Erde braucht dies jedoch nicht berücksichtigt werden, da sich der Satellit mit der Erde bewegt. Als unabhängige Zeitvariable in den Bewegungsgleichungen wird das Zeitsystem TDT gewählt.

Die TDB-Zeitskala spielt im Zusammenhang mit der Bestimmung der Örter der Drittkörper eine Rolle. In SATLAB 1.0 jedoch wird vereinfachend angenommen, daß TDT-Zeitskala und TDB-Zeitskala identisch sind (vgl. Kapitel 4.3 Drittkörperstörungen).

Neuerdings tritt als weitere dynamische Zeitskala in den Bewegungsgleichungen die sogenannte Geocentric Coordinate Time (TCG) auf. Der Unterschied zwischen TDT (neuerdings auch als Terrestrial Time TT bezeichnet) und TCG liegt darin, daß TDT auf dem Geoid definiert ist, während TCG im Geozentrum definiert wird. Im Konzept der allgemeinen Relativitätstheorie erfährt eine Uhr auf dem Geoid einen Gangunterschied gegenüber einer Uhr im Geozentrum, da die Uhr auf dem Geoid dem Gravitationsfeld der Erde ausgesetzt ist. Wiederum kann man die Begriffe Eigenzeit und Koordinatenzeit anwenden: TCG ist (wie der Name schon beinhaltet) bzgl. einem erdfesten Bezugssystem Koordinatenzeit, während TDT die Eigenzeit darstellt.

Der Unterschied zwischen TCG und TDT ist wie folgt definiert. Es gilt für das Verhältnis von Eigen- und Koordinatenzeit:

$$\Delta\tau = \Delta t \left(1 - \frac{U}{c^2}\right), \quad (3.2.2)$$

mit  $c = 300000$  [km/s] Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$U = \text{Gravitationspotential der Erde im Ort der Uhr, vereinfacht } U = \frac{GM_{\text{Erde}}}{r}$$

$$GM_{\text{Erde}} = 398600.5 \text{ [km}^3/\text{s}^2\text{]}$$

$$r = 6378 \text{ [km]}$$

Setzt man für  $\Delta t$  ein Jahr ein mit  $\Delta t = 365.25 \cdot 24 \cdot 3600$  [sec], so erhält für die Differenz  $\Delta\tau - \Delta t$  (unter Verwendung obiger Daten) einen Wert von  $-0.022$  [sec] nach einem Jahr. Dieser Unterschied entspricht wiederum  $-6 \cdot 10^{-5}$  [sec] nach einem Tag. Beachtet man nun, daß für die Bahnbewegung eine Zeitgenauigkeit von  $1 \cdot 10^{-6}$  [sec] bei 1 [cm] Lagegenauigkeit gefordert ist, so ergibt sich bei der Verwendung von TCG und TDT doch ein deutlicher Lageunterschied. Eine inkonsistente Verwendung oder Vermischung der beiden Zeitsysteme verursacht signifikante Fehler.

Die Verwendung von TCG erfordert nun aber eine Angleichung einer Vielzahl von verwendeten Parametern wie z.B.  $GM_{\text{Erde}}$ ,  $GM_{\text{Sonne}}$ , große Halbachse des Erdellipsoids oder Stationskoordinaten, etc. um die Konsistenz zu wahren. Von daher ist die Implementierung von TCG nicht einfach. Im weiteren wird TDT als unabhängige Zeitvariable der Bewegungsgleichungen verwendet.

### 3.3 Atomzeit TAI

Die Atomzeit TAI (Temps Atomique International) wird aus Beobachtungen an Atomuhren verschiedener Institute bestimmt. Federführend ist das BIH bzw. BIPM (Bureau International de l'Heure bzw. seit 1998 Bureau International des Poids et Mesures).

Die Atomzeit ist im Gegensatz zu einer dynamischen Zeitskala eine unmittelbar zugängliche gleichförmige Zeitskala. Die Atomzeitsekunde ist definiert als das 9 192 631 770 fache der Periodendauer der beim Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung.

Mit dieser Festlegung wurde die Länge der Atomzeitsekunde bestmöglich der Dauer der Ephemeridensekunde der dynamischen Zeit angepaßt. Damit besitzt die Sekunde in TAI und TDT dieselbe Länge, so daß zwischen Atomzeit und TDT gilt:

$$\text{TDT} = \text{TAI} + 32.184 \text{ [sec]}. \quad (3.3.1)$$

Die Atomzeit wurde so festgelegt, daß ihr Zeitpunkt am 1. Januar 1958, 0 Uhr mit dem entsprechenden Zeitpunkt der Weltzeitskala näherungsweise übereinstimmte. Da sich die Erdrotation ständig verlangsamt weichen UT1 und TAI immer weiter voneinander ab.

### 3.4 Koordinierte Weltzeit UTC

UTC ist eine Kompromißzeitskala die zweierlei Forderungen erfüllt. Wie man Abbildung 3.2 entnehmen kann ist UTC einerseits eine gleichförmige Zeitskala, andererseits orientiert sie sich an UT1 und damit der Erdrotation. UTC unterscheidet sich von der Atomzeit nur durch eine ganze Anzahl von Sekunden, den sogenannten Schaltsekunden. Zeiteinheit von UTC ist damit die SI-Sekunde. Die Schaltsekunden werden je nach Bedarf zu UT1 dazu gezählt bzw. abgezogen, so daß stets gilt:

$$dUT1 = UTC - UT1 < 0.9 \text{ [sec]} \quad (3.4.1)$$

Entsprechende Werte für  $dUT1$  werden seit 1984 durch den IERS verbreitet. Abbildung (3.2) zeigt die Beziehungen zwischen den Zeitsysteme noch einmal zusammenfassend.

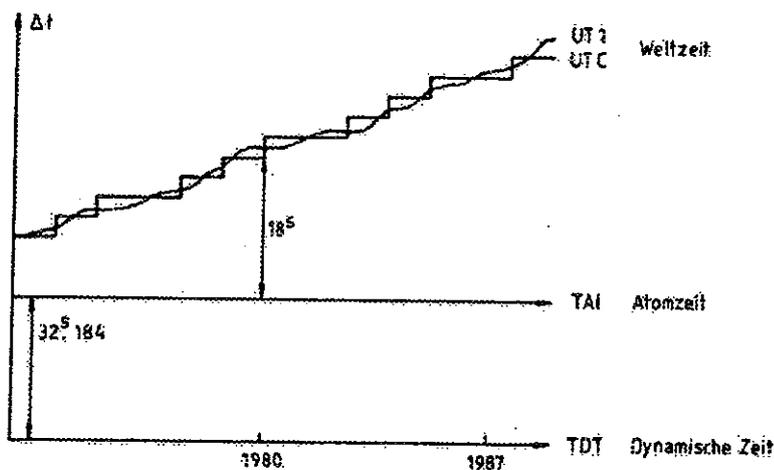


Abbildung 3.2: Zeitsysteme (Seeber, 1989)

### 3.5 Transformationen zwischen den Zeitsystemen in SATLAB 1.0

In SATLAB 1.0 werden die Epochen bzgl. TDT-Zeitskala für die Integration der Bewegungsgleichung benötigt. Zur Bestimmung der Rotationsphase der Erde werden die Epochen bzgl. UT1 ausgedrückt. Abbildung 3.5 zeigt die Vorgehensweise und die Bedeutung der Epoche in der jeweiligen Zeitskala.

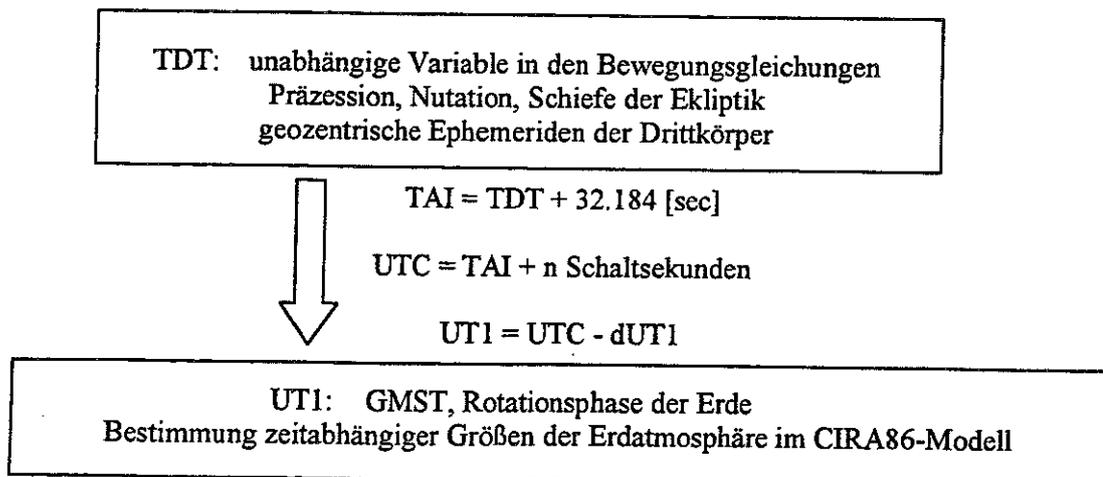


Abbildung 3.3: Zeitsysteme in SATLAB 1.0

Für die Transformation TDT – UT1 werden folgende Größen benötigt

UTC - UT1: bestimmt aus Beobachtungen mit VLBI, LLR, SLR, GPS. Entsprechende Werte werden vom IERS gesammelt und veröffentlicht.

UTC - TAI: ganze Anzahl von Schaltsekunden für die jeweilige Epoche (ebenfalls IERS)

TDT - TAI: 32.184 [sec] , konstant für alle Epochen

TDB - TDT: *Hirayama et al.(1987)*, in SATLAB 1.0 gilt jedoch  $TDB - TDT = 0$

Damit kann jede Epoche von TDT nach UT1 umgerechnet werden.

#### 4. Kräftemodell

In den nachfolgenden Abschnitten wird das in SATLAB 1.0 verwendete Kräftemodell erläutert. Grundlage hierfür ist die gestörte Bewegungsgleichung des Satelliten im vereinbarten Newton-System wie sie in Kapitel 1 vorgestellt wurde (vgl. Gleichung (1.1.1) bzw. (1.1.4)). Konkret werden von den in Kapitel 1 genannten Beschleunigungen auf den Satelliten, folgende in SATLAB 1.0: Bahnberechnung durch Modelle erfaßt

- Anisotropes Gravitationsfeld der Erde (statischer Anteil)
- Drittkörper
- Atmosphärenwiderstand.

##### 4.1 Integration im vereinbarten Ekliptiksystem

Abbildung 4.1 zeigt die in SATLAB 1.0 eingeschlagene Vorgehensweise zur numerischen Integration der gestörten Bewegungsgleichung anhand des Beispiels der Beschleunigung wegen des anisotropen Gravitationsfeldes der Erde.

Analog werden die Störbeschleunigung wegen des Atmosphärenwiderstandes und wegen der Anziehungskräfte der Drittkörper im jeweiligen Modellsystem berechnet und zur Integration ins Ekliptiksystem überführt. Für den nächsten Integrationschritt muß dann die im Ekliptiksystem neu berechnete Ephemeride in das jeweilige Modellsystem zur Berechnung der Beschleunigung transformiert werden.

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, müssen bei dieser Vorgehensweise keine Trägheitskräfte berechnet werden. Dafür sind aber für jeden Integrationszeitpunkt die Ausdrücke der Theorien für Präzession und Nutation auszuwerten und entsprechende Rotationsmatrizen zu berechnen. Jede Beschleunigung wird aus Sicht des Inertialsystems berechnet und die Transformationen für Präzession, Nutation, Erddrehung und Polbewegung sind lediglich geometrische Transformationen, die den inertialen Berechnungspunkt zur Berechnung der jeweiligen Beschleunigung entsprechend orientieren und anschließend den so bestimmten Beschleunigungsvektor in das Ekliptiksystem zur Integration rein geometrisch rücktransformieren.

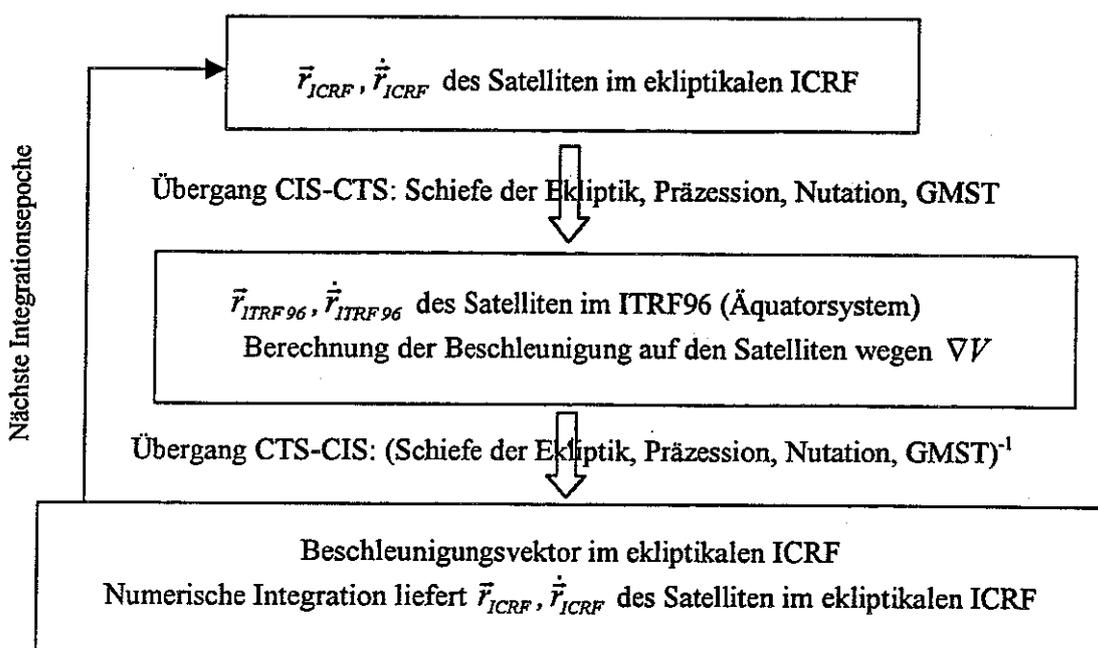


Abbildung 4.1: Transformation der Beschleunigungen ins Ekliptiksystem in SATLAB 1.0

Anteile von Trägheitskräften, wie sie aus den Gleichungen (2.4.1), (2.5.1), (2.7.1), (2.7.2) durch zweimalige Differentiation beider Seiten nach der unabhängigen Zeitvariablen der Bewegungsgleichung auch in Beschleunigungsvektoren in beschleunigten Bezugssystemen hervorgehen, brauchen hier nicht berücksichtigt zu werden. Man beachte auch, daß wie in Kapitel 2 erwähnt die an sich notwendige Transformation zur Berücksichtigung der Polbewegung in SATLAB 1.0 nicht durchgeführt wird.

Abbildung (4.2) gibt einen Überblick über die Größenordnung der von *Seeber (1989)* genannten Störbeschleunigungen.

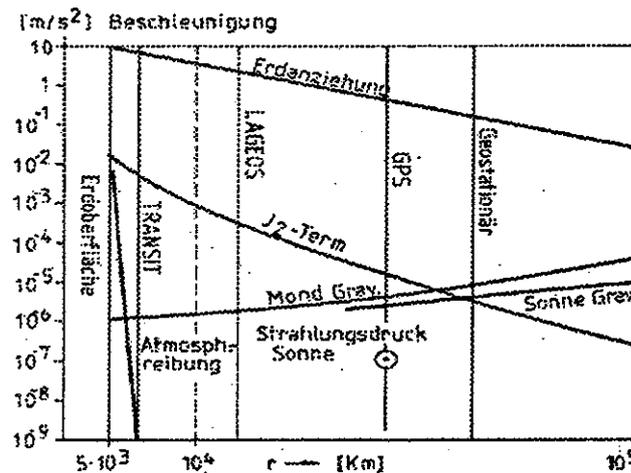


Abbildung 4.2: Größenordnung von Störbeschleunigungen auf Satelliten (Seeber, 1989)

#### 4.2 Anisotropes Gravitationsfeld der Erde (statischer Anteil)

Das Gravitationspotential der Erde kann mit der bekannten Kugelfunktionsentwicklung als Reihe dargestellt werden. Es gilt für das Potential außerhalb der felderzeugenden Massen der Erde:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_{\text{Erde}}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \left[ \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (4.2.1)$$

- mit  $r, \theta, \lambda$ : Kugelkoordinaten des Aufpunktes P  
 $r$ : radialer Abstand in [km]  
 $\theta$ : Co-Breite mit  $\theta = 90^\circ - \varphi$ ,  $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$   
 $\lambda$ : geograph. Länge,  $\lambda \in [-180^\circ, 180^\circ]$ , nach Westen negativ, nach Osten positiv  
 $GM_{\text{Erde}}$ : Gravitationskonstante mal Erdmasse in  $\left[\frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}\right]$   
 $a_e$ : große Halbachse des Erdellipsoids  
 $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ : vollständig normierte Potentialkoeffizienten  
 $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ : zugeordnete Legendre-Polynome (ebenfalls vollständig normiert).

Wird das Bezugssystem, bzgl. dem die Potentialkoeffizienten gelten, so gewählt, daß der Ursprung im Geozentrum zu liegen kommt und die Richtungen der Achsen des Bezugssystems mit den Hauptträgheitsachsen der Erde zusammenfallen, so nehmen die Koeffizienten  $\bar{C}_{10}, \bar{C}_{11}, \bar{S}_{10}, \bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}$  jeweils den Wert Null an. Damit vereinfacht sich die Reihe zu

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM_{\text{Erde}}}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \left[ \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda \right] \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right]. \quad (4.2.2)$$

In Formel (4.2.2) kann der Zentralterm  $\frac{GM_{Erde}}{r}$  (auch als Kepler-Term bezeichnet) und der Anteil des Störpotentials als Rest der Summation in (4.2.2) abgelesen werden.

Die Formeln (4.2.1) bzw. (4.2.2) zur Bestimmung des Gravitationspotentials gelten für eine Erde, deren felderzeugende Massen fest mit einem gewählten Koordinatensystem verbunden sind. Naturgemäß ist dieses Koordinatensystem erdfest. Bezüglich dieses Systems gilt ein berechneter Satz von Potentialkoeffizienten sowie je ein vereinbarter Wert für  $GM_{Erde}$  und  $a_e$ . Das so beschriebene Gravitationsmodell nimmt die Koeffizienten  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  als zeitlich konstant an. Säkulare und periodische Veränderungen in den Koeffizienten werden zweckmäßigerweise in anderen Modellen (z.B. Veränderung der  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  wegen Erd- und Meereszeiten) erfasst. Eine zeitliche Variation der Potentialkoeffizienten wird in SATLAB 1.0 nicht berücksichtigt.

SATLAB 1.0 verwendet konkret die Potentialkoeffizienten des Erdmodells EGM96, die bis Grad und Ordnung  $n_{max} = m_{max} = 180$  vorhanden sind. Für  $a_e$  und  $GM_{Erde}$  werden die Werte der IERS-Conventions 1996 verwendet. Dies sind

$$a_e = 6378.13649 \text{ [km]},$$

$$GM_{Erde} = 398600.4418 \left[ \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2} \right].$$

#### 4.2.1 Gradientenbildung $\nabla V$

Die durch das Gravitationsfeld verursachte Beschleunigung auf den Satelliten läßt sich durch Gradientenbildung angewendet auf Gleichung (4.2.2) bestimmen. Benötigt wird der Gradient am Ort des Satelliten zunächst in kartesischen Koordinaten bzgl. des erdfesten Bezugssystems. Hierzu gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Berechnung des Beschleunigungsvektors in einem lokalen System im Aufpunkt P unter Verwendung des Gradienten in Kugelkoordinaten in diesem System.  $z_{\text{lokal}}$  zeigt in Richtung des Ortsvektors P,  $y_{\text{lokal}}$  in Richtung der z-Achse des globalen Systems und steht senkrecht auf dem Ortsvektor,  $x_{\text{lokal}}$  ergänzt zum Rechtssystem. Anschließend wird dieser Tensor durch geeignete Drehmatrizen in das geozentrische System transformiert (vgl. Abbildung 4.3). Diese Vorgehensweise wird auch als Tensormethode bezeichnet.
2. Berechnung des Beschleunigungsvektors durch partielles Differenzieren von Gleichung (4.2.2) nach Kugelkoordinaten mit anschließendem Nachdifferenzieren nach kartesischen Koordinaten.

Beide Vorgehensweisen sind im Ergebnis identisch. Hier wurde der zweiten Methode gegenüber der Tensormethode der Vorzug gegeben.

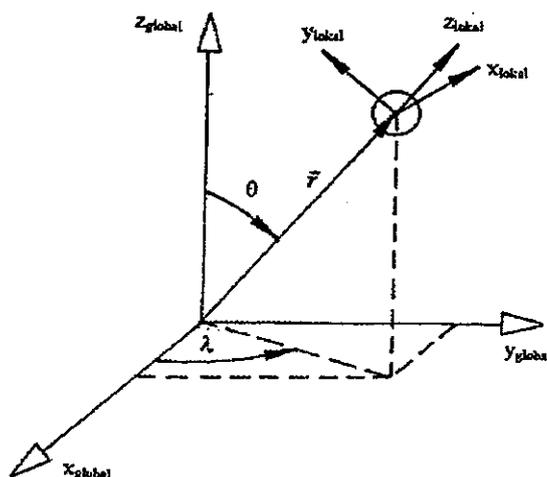


Abbildung 4.3: Lokales, globales Koordinatensystem zur Berechnung von  $\nabla V$

Im globalen System gilt für die Gravitationsbeschleunigung am Ort P des Satelliten ausgedrückt in kartesischen Koordinaten:

$$\nabla V = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (4.2.1.1)$$

mit  $\frac{\partial V}{\partial i} : i = r, \theta, \lambda$  partielle Ableitungen von  $V$  nach globalen Kugelkoordinaten

$\frac{\partial i}{\partial j} : j = x, y, z$  partielle Ableitung der globalen Kugelkoordinaten nach globalen kartesischen Koordinaten.

Die  $\frac{\partial V}{\partial i}$  lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= -\frac{GM_{\text{Erde}}}{r^2} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right], \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{GM_{\text{Erde}}}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} \right], \\ \frac{\partial V}{\partial \lambda} &= \frac{GM_{\text{Erde}}}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n m (\bar{S}_{nm} \cos m\lambda - \bar{C}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right], \end{aligned} \quad (4.2.1.2)$$

mit  $\frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta}$ : partielle Ableitung der vollständig normierten Legendre-Polynome. Eine Herleitung hierzu findet man im Anhang 2: Ableitung der Legendre-Polynome.

Die partiellen Koordinatendifferentiale lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \sin \theta \cos \lambda & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos \theta \cos \lambda}{r} & \frac{\partial \lambda}{\partial x} &= -\frac{\sin \lambda}{r \sin \theta} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \theta \sin \lambda & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta \sin \lambda}{r} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} &= \frac{\cos \lambda}{r \sin \theta}, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \cos \theta & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\partial \lambda}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.1.3)$$

Mit diesen Formeln erhält man die Gravitationsbeschleunigung im Punkt P bzgl. des erdfesten Bezugssystems.

Für die Integration wird jedoch der Gravitationstensor bzgl. dem vereinbarten raumfesten Bezugssystem (hier: ICRF J2000.0 TDT) in kartesischen Koordinaten benötigt. Dazu wird der Vektor, berechnet im ITRF96, durch Anbringen von Erdrotation, Nutation und Präzession nach ICRF transformiert. Abschließend wird dieser Vektor noch mit dem momentanen Wert der Schiefe der Ekliptik ins Ekliptiksystem gedreht. Damit folgt

$$\ddot{\vec{r}}_{CIS} = (SNPR_1(\varepsilon_0))^T \ddot{\vec{r}}_{CTS}, \quad (4.2.1.4)$$

mit  $S$ : Matrix der Erdrotation, vgl. (2.7.1)  
 $N$ : Nutationsmatrix, vgl. (2.5.2)  
 $P$ : Präzessionsmatrix, vgl. (2.4.2).  
 $R_1(\varepsilon_0)$ : Matrix mit Schiefe der Ekliptik



$$\ddot{\vec{r}}_{OE} = G \frac{m_m}{r_m^3} \vec{r}_m, \quad (4.3.1.2)$$

mit  $\vec{r}_m, r_m$ : geozentrischer Ortsvektor des Mondes bzw. dessen Betrag.

Die Relativbeschleunigung auf den Satelliten durch die Gravitationswirkung der Mondmassen in bezug auf die Erde erhält man durch Differenzbildung von Gleichung (4.3.1.1) und (4.3.1.2).

$$\ddot{\vec{r}}_O - \ddot{\vec{r}}_{OE} = \ddot{\vec{r}}_{Mond} = G \left[ \frac{m_m}{\rho_m^3} \vec{\rho}_m - \frac{m_m}{r_m^3} \vec{r}_m - \frac{m_E}{r^3} \vec{r} \right],$$

bzw. 
$$\ddot{\vec{r}}_{Mond} = -\frac{Gm_E}{r^3} \vec{r} + Gm_m \left( \frac{\vec{\rho}_m}{\rho_m^3} - \frac{\vec{r}_m}{r_m^3} \right). \quad (4.3.1.3)$$

Berücksichtigt man noch, daß der erste Term der rechten Seite in (4.3.1.3) dem Zentralterm der Gravitationsbeschleunigung der Erdmassen auf den Satelliten entspricht und bereits mit Gleichung (4.2.1.4) bzw. (4.2.1.5) berücksichtigt wird, so ergibt sich für die Störbeschleunigung auf den Satelliten wegen der Gravitationswirkung des Mondes

$$\delta \ddot{\vec{r}}_{Mond} = Gm_m \left( \frac{\vec{r}_m - \vec{r}}{|\vec{r}_m - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_m}{r_m^3} \right). \quad (4.3.1.4)$$

Entsprechend gilt für die Sonne bzw. die Planeten des Sonnensystems

$$\delta \ddot{\vec{r}}_i = Gm_i \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{|\vec{r}_i - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right), \quad (4.3.1.5)$$

mit  $m_i$ : Masse des i-ten Körpers

$\vec{r}_i, r_i$ : geozentrischer Ortsvektor des i-ten Körpers bzw. dessen Betrag

$\vec{r}, r$ : geozentrischer Ortsvektor des Satelliten bzw. dessen Betrag

$i$ : Drittkörper (Sonne, Mond, Merkur, Mars, Venus, Jupiter,...)

Die gesamte Störbeschleunigung durch Drittkörper erhält man als Summation über alle Störkörper

$$\delta \ddot{\vec{r}}_{Drittkörper, gesamt} = \sum_i \delta \ddot{\vec{r}}_i. \quad (4.3.1.6)$$

Zur Berechnung der Drittkörperstörung benötigt man die Massen  $m_i$  der Drittkörper, die geozentrischen Ortsvektoren der Drittkörper bzw. deren Beträge  $\vec{r}_i, r_i$  zur Epoche der Integration, sowie den geozentrischen Ortsvektor (und dessen Betrag) des Satelliten zur selben Epoche in einem geozentrischen System. In SATLAB 1.0 ist dies ICRF J2000.0 TDT in ekliptikaler, geozentrischer Lage. Zur Berechnung der geozentrischen Ortsvektoren der Drittkörper wurden in SATLAB 1.0 zwei Wege eingeschlagen. Ein Modul bietet die Möglichkeit die geozentrischen Ephemeriden der Drittkörper über die Gleichungen der Lösung des Kepler-Problems zu bestimmen. Ein zweites Modul berechnet geozentrische Örter der Drittkörper durch Interpolation der Örter zur Integrationsepoche aus vorausberechneten (und tabellierten) Ephemeriden. Eine dritte Möglichkeit bestünde unter Verwendung einer Bahntheorie die Örter der Drittkörper ebenfalls durch numerische Integration simultan mit der Integration der Satellitenbahn zu bestimmen. Dies ist jedoch sehr aufwendig und würde die Rechenzeit belasten, so daß von dieser Alternative abgesehen wird. Die Abschnitte 4.3.3 und 4.3.4 erläutern die beiden zu erst genannten Modelle.

### 4.3.2 Diskussion des Drittkörpermodells

Das Modell der Punktmassen ist für alle Himmelskörper genügend genau. Lediglich für den Mond ist wohl eine Genauigkeitssteigerung in der Berechnung der Drittkörperstörung zu erreichen, wenn das Gravitationspotential des Mondes in einer Kugelfunktionsreihe dargestellt wird. Davon wird aber in SATLAB 1.0 abgesehen und der Mond ebenfalls als Punktmasse betrachtet.

Singularitäten für den Ausdruck  $|\vec{r}_i - \vec{r}|^3$  in (4.3.1.5) treten für mögliche Konfigurationen künstlicher Erdesatelliten nicht auf. Der Term  $|\vec{r}_i - \vec{r}|^3$  nimmt nur für  $\vec{r} = \vec{r}_i$  den Wert Null an, d.h. wenn sich der Satellit am Ort des (als Punktmasse gedachten) Störkörpers befindet. Dies ist natürlich nicht sinnvoll. Die Größe des Einflusses nach Gleichung (4.3.1.5) hängt für tatsächliche Anwendungen von der Masse und/oder dem Betrag der Relativentfernung  $|\vec{r}_i - \vec{r}|$  ab. Insgesamt kann man sagen, daß je näher der Satellit am betreffenden Störkörper ist und je größer die Masse des Störkörpers ist, desto größer ist die vom Störkörper verursachte Störbeschleunigung auf den Satelliten. Ist  $|\vec{r}| \ll |\vec{r}_i|$  und  $\vec{r}$  kollinear mit  $\vec{r}_i$ , wird der Ausdruck innerhalb der Klammer von Gleichung (4.3.1.5) sehr klein. Die Größenordnung von (4.3.1.5) wird in diesem Fall im wesentlichen von der Größenordnung der Massen des Störkörpers bestimmt. Besonders deutlich wird dies im Fall der Sonne. Man betrachte dazu die vereinfachte Situation, wie sie in Abbildung 4.5 dargestellt ist.

Für  $r = 42000$  km (geostationärer Satellit) und  $r_{\text{Sonne}} = 149 \cdot 10^6$  km (mittlerer Abstand Sonne Erde) erreicht der Klammerausdruck in (4.3.1.5) einen Wert von etwa  $2.5 \cdot 10^{-20} \left[ \frac{1}{\text{km}^2} \right]$ . Wegen der großen Sonnenmasse erhält man mit  $GM_{\text{Sonne}} \approx 1325 \cdot 10^8 \left[ \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2} \right]$  als Störbeschleunigung auf den Satelliten  $\delta \ddot{r}_{\text{Sonne}} \approx 3.36 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ .

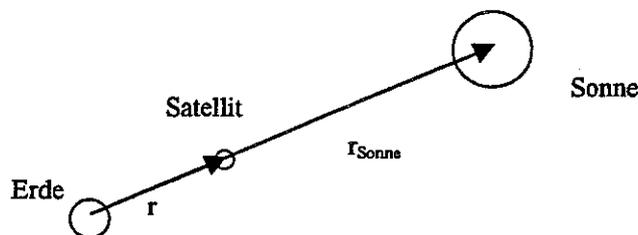


Abbildung 4.5: Störung durch die Sonne auf geostationären Satelliten

Werte in derartiger Größenordnung sind für eine Bahnberechnung nicht vernachlässigbar. In Abbildung 4.1 erkennt man, daß für einen geostationären Satelliten die Störbeschleunigung von Sonne (und Mond) die Größenordnung der Beschleunigung, die durch den  $\bar{C}_{20}$ -Term verursacht wird, erreicht hat. Im Fall des Mondes resultiert eine Störbeschleunigung im Bereich von  $10^{-5} - 10^{-6} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$  im wesentlichen aus der relativ geringen Entfernung zwischen Satellit und Störkörper.

Eine weiterführende Diskussion der Einflüsse der Drittkörper auf unterschiedliche Orbits sowie, welche Drittkörper in SATLAB 1.0 berücksichtigt werden, findet man in Kapitel 10.

### 4.3.3 Ephemeriden der Drittkörper aus mittleren Bahnelementen

Für die großen Planeten des Sonnensystems werden die Ortsvektoren der Drittkörper bzgl. des vereinbarten geozentrischen, inertialen Ekliptiksystems aus mittleren Bahnelementen berechnet. Der in accpla.m (und zugehörigen Programmen) umgesetzte Algorithmus folgt der in Meeus (1992), S.233 ff. beschriebenen Methode. Dieser wird nachfolgend näher dargestellt.

Zunächst werden über einen Polynomansatz der Form

$$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (4.3.3.1)$$

für den Integrationszeitpunkt  $t$  in [julian. Jahrhunderten] seit J2000.0 TDT gültige Bahnelemente des jeweiligen Drittkörpers berechnet. Die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, a_3$  liegen für jeden Planeten tabelliert vor und gelten in diesem Fall für J2000.0 (siehe *Meeus, Astronomische Algorithmen, S.221 ff.*). Die so berechneten Bahnelemente spiegeln die Bewegung der großen Planeten nur im ‚Mittel‘ wieder, d.h. kurzperiodische Störungen in den Planetenbewegungen bleiben in den gegebenen Koeffizienten unberücksichtigt. Von daher werden diese Bahnelemente im weiteren als mittlere Bahnelemente bezeichnet, obwohl für jeden Zeitpunkt  $t$  ein Satz von Bahnelementen bestimmt wird.

Mit diesen Bahnelementen wird unter Verwendung der Gleichungen der Ephemeridenrechnung, wie sie für eine ungestörte Kepler-Bewegung gelten, rechtwinklige heliozentrische, ekliptikale Koordinaten für den Integrationszeitpunkt  $t$  berechnet.

Der Übergang auf ein geozentrisches Ekliptiksystem erfolgt durch eine einfache Translation. Dazu wird der Differenzvektor Ortsvektor des Drittkörpers und Ortsvektor der Erde bzgl. des heliozentrischen Koordinatensystems gebildet (vgl. Abbildung 4.6). Der geozentrische Ortsvektor der Sonne ist der mit negativem Vorzeichen versehene Ortsvektor der Erde bzgl. des heliozentrischen Systems.

Es gilt:  $\vec{r}_{\text{Drittkörper, geozentrisch}} = \vec{r}_{\text{Drittkörper, heliozentrisch}} - \vec{r}_{\text{Erde, heliozentrisch}}$

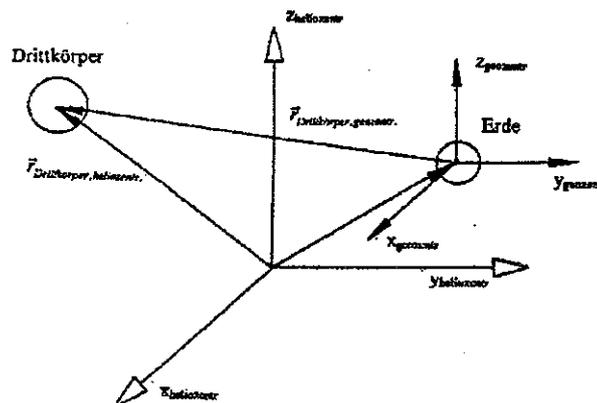


Abbildung 4.6: Transformation heliozentrische-geozentrische Koordinaten

Die so berechneten geozentrischen Ortsvektoren gehen in die Berechnung der Störkörperbeschleunigung nach obigem Modell (4.3.1.5) ein.

Für den Mond werden unmittelbar rechtwinklige geozentrische Koordinaten bzgl. dem mittleren Äquinoktium des Datums (MDS) berechnet. Die Vorgehensweise wurde *Meeus (1992), S.336 ff.* entnommen. Um rechtwinklige Koordinaten bzgl. des vereinbarten ICRF in ekliptikaler Lage zu erhalten, müssen die Koordinaten in MDS mit der Präzessionsmatrix und dem Wert der Schiefe der Ekliptik gedreht werden.

$$\vec{r}_{\text{Mond,ICRF in ekliptikaler Lage}} = (PR_1(\epsilon_0))^{-1} \vec{r}_{\text{Mond,MDS}} \quad (4.3.3.2)$$

mit  $P$ : Präzessionsmatrix für den Integrationszeitpunkt  
 $R_1(\epsilon_0)$ : Drehmatrix für die Schiefe der Ekliptik.

Bei diesem Ansatz handelt es sich um ein relativ einfaches Modell. Die erste Vereinfachung besteht darin, daß mittlere Bahnelemente zur Berechnung der Planetenephemeriden verwendet werden. Wie oben bereits angedeutet, lassen sich damit nicht exakte Ephemeriden der großen Planeten bestimmen. Eine andere wesentliche Vereinfachung besteht darin, daß die Ephemeriden zwar quasi-baryzentrisch

berechnet werden, aber als Zeitskala TDT statt TDB verwendet wird. Damit kann der Übergang auf geozentrische Koordinaten durch die oben beschriebene einfache Translation erfolgen. Bei einer strengen Berechnung der Planetenörter bzgl. einem baryzentrischen Inertialsystem mit der Zeitskala TDB müßte die Transformation ins geozentrische Bezugssystem erfolgen. Dazu müssen geeignete Transformationsgleichungen auf Basis der Einstein'schen Gravitationstheorie verwendet werden.

#### 4.3.4 Ephemeriden der Drittkörper durch Interpolation

Die zweite Möglichkeit zur Bestimmung geozentrischer Planetenörter, die in SATLAB 1.0 verwirklicht wurde, besteht darin, mit Hilfe einer (in diesem Fall relativistischen) Planetentheorie numerisch außerhalb von SATLAB integrieren zu lassen. Die Planetenörter (inklusive Mond) werden bzgl. einem baryzentrischen Ekliptiksystem J2000.0 TDB für fest vorgegebene Zeitpunkte vor der numerischen Integration berechnet. Hier wird wiederum vereinfachend angenommen, daß J2000.0 TDB = J2000.0 TDT. Anschließend werden diese baryzentrischen Koordinaten mit der in (4.3.3) beschriebenen Translation in geozentrische Koordinaten umgewandelt. Damit liegen für feste Epochen bzgl. TDT bekannte Planetenörter vor. Für SATLAB wurden mat-files für den Zeitraum 1.1.1996 0<sup>h</sup> TDT – 9.5.2005 0<sup>h</sup> TDT mit einem Zeitinkrement  $\Delta t = 12$  h erzeugt, so daß lange auf diese Matrix zurückgegriffen werden kann.

Für den jeweiligen Integrationszeitpunkt  $t$  werden entsprechende Ephemeriden durch Interpolation gewonnen. Zur Approximation des Ortsvektors bzw. dessen Komponenten wird ein Polynom vom Grad 5 mit Hilfe der Lagrange-Interpolation berechnet. Eine Beschreibung der in SATLAB 1.0 implementierten Lagrange-Interpolation findet man im Anhang.

Die mit dieser Methode berechneten Ephemeriden bzw. Drittkörperstörungen weisen gegenüber der ersten Methode v.a. für hochfliegende Satelliten Differenzen in den Satellitenephemeriden auf. Da die Planetenephemeriden mit Hilfe einer ‚genauen‘ Bahntheorie bestimmt werden, ist diese Methode dem Verfahren ‚Planetenephemeriden aus mittleren Bahnelementen‘ vorzuziehen, wenn es um möglichst genaue Ergebnisse (im Rahmen der Leistungsfähigkeit von SATLAB 1.0) geht.

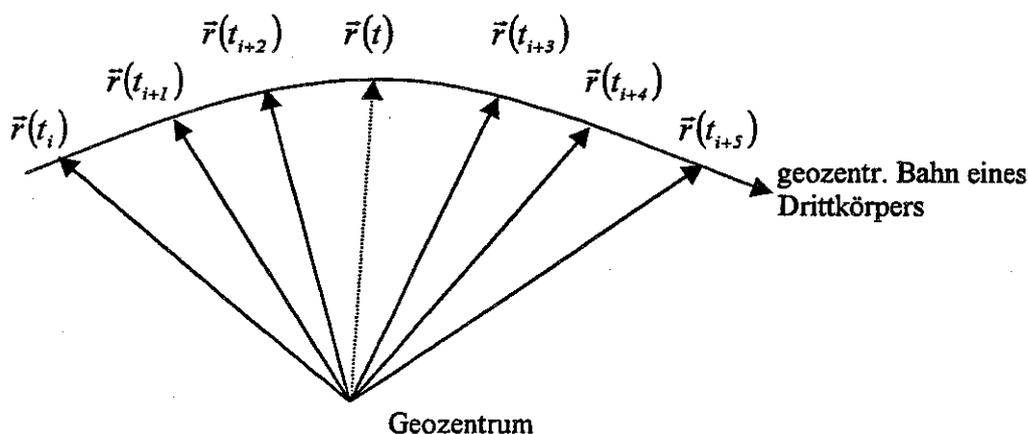


Abbildung 4.7: Lagrange-Interpolation für Planetenephemeriden

Der Nachteil der zweiten Methode liegt in der im Gegensatz zum erstgenannten Verfahren erhöhten Rechenzeit. Entsprechende numerische Vergleiche hinsichtlich der Rechenzeit sowie Differenzen in den integrierten Ephemeriden findet man in Kapitel 10.

Wie bei der erstgenannten Methode wird beim Übergang Baryzentrum-Geozentrum auch hier auf die formal notwendigen Transformationsgleichungen verzichtet. In dieser Beziehung sind also beide Berechnungsweisen einschränkend modelliert.

#### 4.4 Atmosphärenwiderstand (drag)

##### 4.4.1 Allgemeines zur Modellierung des Atmosphärenwiderstandes

Gerade für niedrigfliegende Satelliten stellt der Strömungswiderstand der Atmosphäre eine erhebliche Störung auf die Bewegung eines Satelliten dar und muß in einem Bahnintegrationsprogramm berücksichtigt werden. Die Wechselwirkung der Partikel der Atmosphäre und der Satellitenoberfläche verursachen aerodynamische Kräfte, die im wesentlichen von

- der Geometrie des Satelliten
- der Oberflächenbeschaffenheit des Satelliten
- der Orientierung des Satelliten relativ zur Strömung
- der Satellitengeschwindigkeit
- der Dichte der Atmosphäre in der Umgebung des Satelliten

abhängen.

Im Gegensatz zu den Modellen ‚Anziehung des inhomogenen Gravitationsfeldes der Erde‘ und ‚Anziehung von Drittkörpern‘ kann der Satellit streng genommen nicht mehr als Punktmasse aufgefaßt werden, sondern muß als ausgedehnter Körper mit bestimmter Geometrie betrachtet werden. Neben der geometrischen Ausdehnung des Satellitenkörpers spielt in der Berechnung des Atmosphärenwiderstandes seine Masse eine Rolle.

Die Modellierung der Geometrie des Satelliten bzw. die zeitliche Änderung der Orientierung der Satellitenflächen relativ zur Strömung ist für einen nichtkugelförmigen Satelliten sehr aufwendig. In SATLAB 1.0 wird die Orientierung der Satellitenflächen zur umgebenden Erdatmosphäre nicht modelliert. Stattdessen werden zeitlich konstante Verhältnisse für die angeströmte Fläche des Satelliten angenommen. Abweichungen der Geometrie des Satelliten von der Kugelform ( $C_D = 1$ ) werden durch entsprechende (höhere)  $C_D$ -Werte berücksichtigt. Weiterhin wird vereinfachend angenommen, daß die Erdatmosphäre nur einen Widerstand entgegen der Bewegungsrichtung verursacht, jedoch keine sog. Lift-Effekte<sup>2</sup>.

In SATLAB 1.0 sind also bei der Berechnung des Atmosphärenwiderstandes nur die Satellitengeschwindigkeit und die Dichte in der unmittelbaren Umgebung des Satelliten zeitlich variabel.

Die Dichte der Atmosphäre variiert mit der Höhe, der geographischen Position, der Jahres- und Tageszeit, der Sonnenaktivität und dem Geomagnetismus. Damit wird die Bestimmung der Atmosphärendichte zu einem komplexen Problem. Eine ausführliche Darstellung der Zusammenhänge oben genannter Größen mit der Atmosphärendichte findet man z.B. bei Nagel, Reigber (1973), Thalhammer (1989).

Zur Berechnung des Atmosphärenwiderstandes werden wie bei der Drittkörperstörung zwei Module angeboten, die sich nur durch eine unterschiedliche Berechnung der Atmosphärendichte am Ort des Satelliten unterscheiden. In der einen Methode wird die Atmosphärendichte aus fest vorgegebenen Dichtewerten durch Interpolation einer Potenzreihe bis Grad  $n = 8$  bestimmt. Dieses Modell geht von einer kugelsymmetrisch geschichteten und zeitlich unveränderlichen Erdatmosphäre aus. In einer zweiten Methode wurde zur Berechnung der Atmosphärendichte das Atmosphärenmodell CIRA86 in SATLAB 1.0 implementiert.

Zunächst wird das grundlegende Modell erläutert, mit dem in SATLAB 1.0 der Atmosphärenwiderstand und die daraus resultierende Störbeschleunigung berechnet werden. Die Abschnitte 4.4.4, 4.4.5 stellen dann die beiden unterschiedlichen Modelle zur Berechnung der Atmosphärendichte dar.

---

<sup>2</sup> Der Satellit erfährt nicht nur einen Strömungswiderstand, sondern je nach Geometrie des Satelliten auch einen Auftrieb (sog. lift).

#### 4.4.2 Modell zur Berechnung des Atmosphärenwiderstandes

Die Störbeschleunigung aufgrund des Atmosphärenwiderstandes berechnet sich nach der Formel (vgl. Seeber, 1989, S. 104<sup>3</sup>)

$$\ddot{\vec{r}}_D = -\frac{1}{2} C_D \rho(\vec{r}, t) \frac{A}{m_s} (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_a) \left| \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_a \right|, \quad (4.4.2.1)$$

mit  $m_s$ : Masse des Satelliten in [kg]  
 $C_D$ : satellitenspezifischer Widerstandsbeiwert  
 $A$ : wirksamer Strömungsquerschnitt des Satelliten  
 $\rho(\vec{r}, t)$ : Atmosphärendichte in der Umgebung des Satelliten  
 $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$ : Orts- und Geschwindigkeitsvektor des Satelliten  
 $\dot{\vec{r}}_a$ : Geschwindigkeit der Atmosphäre am Ort des Satelliten.

Im weiteren wird stets angenommen, daß die Atmosphäre starr mit der Erde rotiert; damit erhält man für

$$\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_a = \begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{\theta}y \\ \dot{y} - \dot{\theta}x \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad (4.4.2.2)$$

mit  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ : Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\vec{r}}$ ,  
 $x, y$ : Komponenten des Ortsvektors  $\vec{r}$ ,  
 $\dot{\theta}$ : Rotationsrate der Erde.

In SATLAB 1.0 werden die Größen  $m_s$ ,  $A$ ,  $C_D$  als zeitlich konstant angenommen. Entsprechende Werte können unter dem Menüpunkt Atmosphärenwiderstand eingegeben werden. Der satellitenspezifische Widerstandsbeiwert  $C_D$  beträgt für einen kugelförmigen Satelliten  $C_D = 1$ . Für andere Satelliten gelten andere, höhere Werte. Typische Werte findet man z.B. in *Cappelari et al. 1976*.

#### 4.4.3 Diskussion des Modells für den Atmosphärenwiderstand

Singularitäten tauchen in den Termen der Gleichungen (4.4.2.1) nicht auf, so daß sich keine Unstetigkeiten im Verlauf der Beschleunigungsfunktion ergeben. Die Störbeschleunigung aufgrund des Atmosphärenwiderstandes nimmt den Wert Null an, falls der Satellit sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt wie die Atmosphäre. Dies trifft unter der Voraussetzung für eine starr mit der Erde rotierende Atmosphäre für einen geostationären Satelliten in der Äquatorebene zu, der sich relativ zu einem erdfesten, rotierenden System nicht bewegt. Ein solcher Satellit befindet sich aber mit einer geozentrischen Entfernung von größer als 40000 [km] deutlich außerhalb der Erdatmosphäre.

Kritischer in dem Zusammenhang einer realistischen Berechnung des Strömungswiderstandes sind die Vereinfachungen bzgl. konstanter Verhältnisse der Orientierung des Satelliten bzw. des wirksamen Strömungsquerschnitts des Satelliten zu sehen. Gerade für ausgedehnte, nicht kugelförmige Satelliten (wie z.B. die ERS-Satelliten) mit Antennen, Sonnenpanels, etc. muß diese Vereinfachung fallen gelassen werden. Für spätere Versionen von SATLAB wird es sinnvoll sein, obiges Modell durch entsprechende Module (zeitabhängige Größe  $A$ ) zu erweitern oder durch völlig andere Modelle zu ersetzen (z.B. Modell des Atmosphärenwiderstandes in *Zhu et al., 1996*).

In SATLAB 1.0 hängt die Qualität der Berechnung des Atmosphärenwiderstandes in erster Linie von der Berechnung der Atmosphärendichte in unmittelbarer Satellitenumgebung ab.

<sup>3</sup> Die zitierten Formeln weisen dort Fehler auf. Die hier dargestellten Ausdrücke sind die vollständigen.

#### 4.4.4 Atmosphärendichte mit einem Kugelschalenmodell

Ausgehend von gegebenen mittleren Dichtewerten der Erdatmosphäre in bestimmten Höhen über der Erdoberfläche wird der jeweilige Dichtewert als konstant in dieser Höhe global über die ganze Erde angenommen. Damit erhält man eine kugelsymmetrische Dichteverteilung außerhalb der Erde, die nur höhenabhängig ist.

Die Dichte  $\rho$  nimmt dabei nach außen hin ab, so daß gilt  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3, \dots$ . Auf Grundlage der barometrischen Höhenformel wurde versucht den höhenabhängigen Dichteverlauf mit Hilfe einer Potenzreihe zu approximieren. Die barometrische Höhenformel lautet

$$\rho(z) = \rho_0 e^{\left(-\frac{z}{H}\right)}, \quad (4.4.4.1)$$

mit  $\rho(z)$ : Dichte der Erdatmosphäre in der Höhe  $z$  über der Erdoberfläche  
 $\rho_0$ : Dichte in einer gewählten Ausgangshöhe  
 $z$ : Höhe über der Erdoberfläche  
 $H$ : sog. Dichteskalenhöhe.

Wie man aus Formel (4.4.4.1) sieht, sinkt die Atmosphärendichte auf den  $e$ -ten Teil ab, falls  $z = H$  und die Dichteskalenhöhe konstant ist.

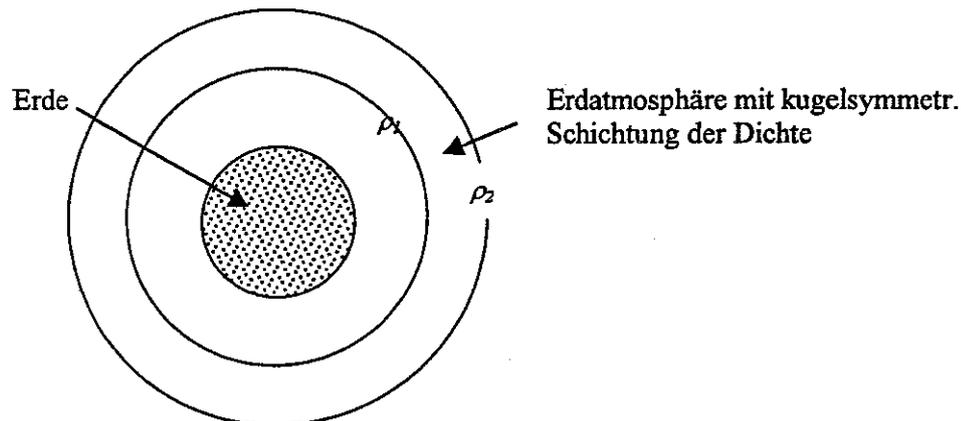


Abbildung 4.8: Kugelsymmetrische Dichteverteilung

Für  $H$  gilt

$$H = \frac{RT}{Mg}, \quad (4.4.4.2)$$

mit  $R$ : universelle Gaskonstante  
 $T$ : Temperatur in [°K]  
 $M$ : Molekulargewicht  
 $g$ : Schwerebeschleunigung.

Abgesehen von  $R$  sind alle Größen zur Berechnung der Dichteskalenhöhe räumlich und zeitlich variabel, so daß ein konstanter Wert für  $H$  wohl nur in engen räumlichen und zeitlichen Bereichen möglich ist. Von daher scheidet der Versuch aus gegebenen Dichtewerten die Größen  $\rho_0$  und  $H$  über einen größeren Höhenbereich im Rahmen einer vermittelnden Ausgleichung zu schätzen. Stattdessen wurde die Dichte  $\rho(z)$  in diesem Modell als Funktion der Höhe in einer Potenzreihe der Form

$$\rho(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots = \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} \quad (4.4.4.3)$$

dargestellt. Die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sind Konstanten. Diese können mit Hilfe gegebener Dichtewerte für dazugehörige Höhen bestimmt werden. Hierzu standen die Dichtewerte aus Tabelle 4.1 zur Verfügung (vgl. *Seeber, 1989, S.105*).

Die sinnvollsten Ergebnisse erhält man, wenn man die Koeffizienten  $a_i$  in einer ‚vermittelnden‘ Ausgleichung für ein Polynom vom Grad  $n = 8$  bestimmt. Als bekannte Dichtewerte wurden aus obiger Tabelle jeweils die Mittelwerte der Dichte für jede Höhe im Höhenbereich 300 – 1000 [km] verwendet<sup>4</sup>. Die bei der Ausgleichung auftretende Jacobi-Matrix ist wegen des hohen Grades  $n = 8$  fast singular (für  $z = 1000$  [km] ist  $z^{-3} = 1000^{-3}$ !). Versucht man die Dichtewerte für 100 und 200 [km] mit in die Ausgleichung einzubeziehen, ergeben sich nicht akzeptable Verbesserungen in den gegebenen Dichtewerten.

Höhe in [km]	Dichte in $\left[\frac{g}{km^3}\right]$
100	497400
200	255 – 316
300	17 – 35
400	2.2 – 7.5
500	0.4 – 2.0
600	0.08 – 0.64
700	0.02 – 0.22
800	0.07 – 0.01
900	0.003 – 0.04
1000	0.001 – 0.02

Tabelle 4.1: Dichte der hohen Atmosphäre (nach Seeber, 1989)

Die als Potenzreihe bestimmte Dichteformel weist also einige numerische und qualitative Schwächen auf. Sie dient damit nur zur näherungsweisen Berechnung einer wegen des Atmosphärenwiderstands gestörten Satellitenbahn, erlaubt aber wegen der Einfachheit des Modells schnelle Berechnungen.

#### 4.4.5 Atmosphärendichte mit CIRA86

CIRA86 ist ein globales semi-empirisches Modell zur Bestimmung der Erdatmosphäre im Bereich von 90 bis 2000 [km] über der Erdoberfläche. Die Abkürzung CIRA steht für COSPAR International Reference Atmosphere, wobei COSPAR selbst Committee on Space Research bedeutet. CIRA86 ist das bislang zuletzt veröffentlichte Atmosphärenmodell (1986) von COSPAR, die seit den 60er Jahren solche Modelle veröffentlichen.

In diesem Modell ist die Atmosphärendichte eine Funktion des Ortes, der Höhe, der Jahres- und Tageszeit, der Sonnenaktivität und des Geomagnetismus. Die Berechnung der Dichte der Erdatmosphäre in der Umgebung des Satelliten erfolgt mit Hilfe analytischer Ausdrücke, wobei zunächst Partialdichten der Konstituenten Helium, Argon, atomarer und molekularer Stickstoff, atomarer und molekularer Sauerstoff, sowie Wasserstoff einzeln bestimmt werden. Daraus wird die Atmosphärendichte in der Umgebung des Satelliten berechnet. Dieser Wert wird in Gleichung (4.4.2.1) zur Berechnung des Atmosphärenwiderstandes verwendet.

Im nachfolgenden wird der Weg zur Berechnung der Partial- sowie der Gesamtdichte grob skizziert. Eine ausführliche Darstellung findet man in *COSPAR International Reference Atmosphere:1986, Part*

<sup>4</sup> Verwendet man ein Polynom vom Grad  $n = 8$  ergibt sich mit acht gegebenen Dichtewerten eine Redundanz von  $r = 0$ , d.h. die Koeffizienten  $a_i$  wurden eigentlich in einem minimal besetzten linearen Gleichungssystem bestimmt!

*I: Thermosphere Models.* Die hier verwendete Notation entspricht der der Literaturangabe. Vollständige Formeln findet man ebenfalls dort.

In einem ersten Schritt werden die  $G$ -Funktionen ausgewertet. Diese Funktionen sind abhängig von gegebenen Modellparametern der einzelnen Konstituenten und Eingabeparametern für Sonnenaktivität, Geomagnetismus, Zeit und Ort des Satelliten bzgl. dem erdfesten Bezugssystem.

$$G_i = G(\text{Sonnenaktivität, Geomagnetismus, Zeit, Ort}). \quad (4.4.5.1)$$

Der Index  $i$  drückt aus, daß für jeden Konstituenten solche  $G$ -Funktionen ausgewertet werden müssen. Die Struktur der  $G$ -Funktionen ist für alle Konstituenten im wesentlichen dieselbe, jedoch variieren die Anzahl und Werte der einzusetzenden Modellparameter mit den Konstituenten.

Die Sonnenaktivität wird in diesem Modell mit den Größen  $F_{10.7}$ ,  $\bar{F}_{10.7}$  beschrieben.  $F_{10.7}$  ist der Strahlungsfluß der 10.7 [cm]-Strahlung der Sonne am vorhergehenden Tag des Berechnungstages.  $\bar{F}_{10.7}$  ist das arithmetische Mittel der  $F_{10.7}$ -Werte über drei Sonnenrotationen ( $3 \cdot 27 = 81$  Tage) vor dem Berechnungszeitpunkt.

Die geomagnetische Aktivität wird in diesem Modell durch Angabe von sog.  $a_p$ -Werten berücksichtigt. CIRA86 sieht entweder die Verwendung eines mittleren täglichen  $a_p$ -Wertes oder eines Satzes von je 3-stündlichen  $a_p$ -Werten vor, die für den Berechnungstag gültig sind. Verwendet man 3-stündliche  $a_p$ -Werte, benötigt man konkret:

- $a_1 = a_p$ -Wert für den Berechnungszeitpunkt,
- $a_2 = a_p$ -Wert drei Stunden vor dem Berechnungszeitpunkt,
- $a_3 = a_p$ -Wert sechs Stunden vor dem Berechnungszeitpunkt,
- $a_4 = a_p$ -Wert neun Stunden vor dem Berechnungszeitpunkt,
- $\bar{a}_{12} =$  mittlerer Wert aus acht  $a_p$ -Werten 12 bis 35 Stunden vor dem Berechnungszeitpunkt,
- $\bar{a}_{36} =$  mittlerer Wert aus acht  $a_p$ -Werten 36 bis 59 Stunden vor dem Berechnungszeitpunkt.

Werte für die Sonnenaktivität, als auch für die geomagnetische Aktivität kann mittels ftp z.B. von der NASA beziehen. Entsprechende Adressen findet man im Anhang (Bedienungsanleitung).

Alle mit dem Berechnungsort (= Satellitenposition) verknüpften Terme in der Gleichung (4.4.5.1) gelten bzgl. des vereinbarten erdfesten Bezugssystems, hier ITRF96<sup>5</sup>. Benötigte Zeitangaben werden in UT1 eingesetzt.

Mit den ausgewerteten  $G$ -Funktionen werden Temperaturen für die Exosphäre, der Mesopause und in der momentanen Flughöhe des Satelliten bestimmt. Die momentane Flughöhe  $z$  des Satelliten wird aus dem geozentrischen Ortsvektor bzgl. ITRF96 als Höhe über einem gewählten Referenzellipsoid bestimmt (vgl. Abschnitt 4.4.5.1).

Mit diesen Temperaturwerten und der Flughöhe des Satelliten wird dann für jeden Konstituenten ein Dichteprofil berechnet.

$$n_i = n_i(z, M_i), \quad (4.4.5.2)$$

mit  $n_i$ : Partialteilchendichte des jeweiligen Konstituenten  
 $z$ : Flughöhe des Satelliten  
 $M_i$ : Molekulargewicht des jeweiligen Konstituenten.

<sup>5</sup> Die Modellparameter in CIRA86 wurden nicht bzgl. ITRF96 berechnet, sondern bzgl. eines anderen erdfesten Bezugssystems. Es konnte jedoch in der zur Verfügung stehenden Literatur das betreffende Bezugssystem nicht ausfindig gemacht werden. Es wird damit im weiteren davon ausgegangen, daß die Verwendung des ITRF96 keine signifikanten Fehler in der Berechnung der Atmosphärendichte verursacht.

Die Gesamtdichte der Atmosphäre in der Umgebung des Satelliten ergibt sich aus der Summe aller Partialdichten  $n_i$ :

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^7 n_i, \quad (4.4.5.3)$$

wobei die Dichte in der Umgebung des Satelliten in  $\left[\frac{\text{kg}}{\text{km}^3}\right]$  angegeben wird.

Die so berechnete Dichte wird in Gleichung (4.4.2.1) eingesetzt und damit der momentane Atmosphärenwiderstand berechnet.

CIRA86 ist ein komplexes Modell zur Berechnung der aktuellen Atmosphärendichte in der Umgebung des Satelliten. Der rechentechnische Aufwand ist hoch, die Rechenzeit zur Integration steigt an (vgl. Abschnitt 12). Im Gegensatz zum Kugelschalenmodell liefert CIRA86 natürlich wesentlich realistischere Werte.

#### 4.4.6 Bestimmung der Flughöhe $z$

Unter der Flughöhe eines Satelliten kann mit genügender Genauigkeit der Abstand Satellit-Subsatellitenpunkt verstanden werden. Der Subsatellitenpunkt ist der Schnittpunkt des geozentrischen Ortsvektors bzgl. CTS und dem gewählten Erdellipsoid.

Es gilt:

$$h \approx z = |\vec{r}| - r_{\text{Sub}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - a_e \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (4.4.6.1)$$

mit  $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  : geozentrischer Ortsvektor des Satelliten bzgl. CTS

$a_e$ : große Halbachse des gewählten Erdellipsoids

$e$ : Exzentrizität des Meridianschnittes;  $e^2 = 2f - f^2$  ( $f$  Abplattung des Erdellipsoids)

$\varphi$ : geozentrische Breite

$\Phi$ : geodätische Breite bzgl. Erdellipsoid

$h$ : senkrechter Abstand Satellit-Oberfläche des Erdellipsoids (eigentliche Flughöhe)

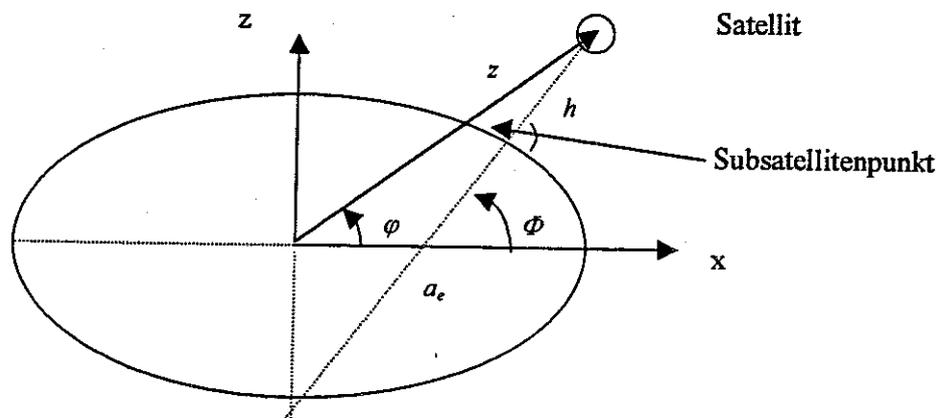


Abbildung 4.9: Flughöhe  $z$  über Erdellipsoid

Die Größen  $a_e$ ,  $f$  sind mit der Wahl des ITRF96 als erdfestes Bezugssystem festgelegt. Für dieses System gelten die Werte  $a_e = 6378.13649$  [km] und  $1/f = 298.25645$ .

## 5. Test der Programme

In den Abschnitten 6 bis 12 werden die Ergebnisse von Testrechnungen mit dem Programmpaket SATLAB 1.0 zusammengestellt. Mit Testrechnungen der Programme von SATLAB 1.0 wurden drei wesentliche Aspekte untersucht:

1. Untersuchung der in MATLAB zur Verfügung stehenden Integratoren ode45 und ode113 hinsichtlich ihrer Eignung für ein Bahnrechnungsprogramm.
2. Überprüfung der Programme auf richtige Implementation der verwendeten Modelle.
3. Sammeln von Erfahrungen in der Nutzung der Modelle u.a. in Hinblick auf benötigte Rechenzeiten.

### 5.1 Quantitative und qualitative Tests

Im Rahmen der Untersuchung oben genannter Aspekte wurden quantitative und qualitative Tests durchgeführt. Quantitative Tests zielen auf exakte numerische Vergleiche ab, beispielsweise der Vergleich zwischen einer analytisch und numerisch integrierten ungestörten Kepler-Bahn oder die Überprüfung der Güte der Energieerhaltung einer numerisch integrierten Kepler-Bahn. Verbleibende Abweichungen zwischen Ist- und Sollwert werden gegebenenfalls mit Toleranzwerten verglichen.

Qualitative Tests kommen immer dort zur Anwendung, wo einfache Abschätzungen genügen und/oder exakte numerische Vergleiche nicht (einfach) möglich sind. Beispiele hierfür sind die Untersuchungen der Störungen in den Kepler-Elementen aufgrund des anisotropen Gravitationsfeldes der Erde (Kapitel 8) oder der Einfluß des Atmosphärenwiderstandes (Kapitel 11). Gegebene Referenzwerte dienen an dieser Stelle zum Vergleich von Größenordnungen und letztlich als Plausibilitätskontrolle der erzielten Ergebnisse.

### 5.2 Modulare Programmierung, Rechenzeiten

Numerische Verfahren sind im allgemeinen rechenintensiv und damit zeitaufwendig. So auch hier. Mit wachsender Anzahl von Modellen in einem Bahnrechnungsprogramm und der Verfeinerung dieser Modelle steigt die Rechenzeit. Da man aber in der Modellierung i.d.R. keine Abstriche machen will bzw. kann, kommen als Mittel zur Minimierung der Rechenzeit nur eine ‚optimale‘ Programmierung und die Verwendung leistungsfähiger Rechenmaschinen in Frage.

In SATLAB 1.0 wurde eine modulare Programmierweise angestrebt, d.h. die Implementierung der Modelle erfolgte in Teilprogrammen für jedes Modell. Innerhalb des Teilprogrammes für ein Modell erfolgte i.d.R. eine Zerlegung in weitere Unterprogramme (vgl. Anhang Programmstrukturen).

Die modulare Programmierweise besitzt zwei wesentliche Vorteile. Einerseits wird die Programmierarbeit durch Zerlegung in überschaubare Einzelabschnitte erleichtert und damit ebenso die unvermeidliche Fehlersuche/-behebung (Debugging) während der Programmierung. Andererseits erleichtert bzw. ermöglicht die modulare Programmierung die Verbesserung und den Austausch von Modellen, sowie die Erweiterung um zusätzliche Modelle zu einem späteren Zeitpunkt. Die Software kann damit stets weitergeführt und verbessert werden. Damit steht die modulare Vorgehensweise einer ‚optimalen‘ Programmierung entgegen, wenn man darunter einen Algorithmus mit einer minimalen Anzahl an Rechenschritten bei bestmöglich erzielbaren Ergebnissen versteht. Dieser Widerspruch läßt sich aufheben, wenn man in der Gesamtprogrammstruktur einen modularen Aufbau anstrebt, die einzelnen Module jedoch versucht mit hoher rechentechnischer Effizienz zu gestalten.

Die in den nachfolgenden Kapiteln angegebenen Rechenzeiten sind abhängig von den Leistungsdaten des verwendeten Rechners. Alle nachfolgenden Tests wurden mit einem PC mit folgenden Leistungsdaten durchgeführt<sup>1</sup>:

- Pentium II-Prozessor
- Taktfrequenz 300 MHz
- 64 MB Arbeitsspeicher.

<sup>1</sup> Die Verwendung eines Rechners mit anderen Leistungsdaten führt i.d.R. auf andere Rechenzeiten.

Dies stellt zum gegenwärtigen Zeitpunkt (Juni 1998) einen relativ leistungsfähigen, handelsüblichen PC dar. Die angegebenen Rechenzeiten sind die reine Integrationszeit, d.h. die Zeit, die der Rechner zur Integration der Bewegungsgleichung benötigt.

### 5.3 Parameter *RelTol*, *AbsTol* der MATLAB-Integratoren

Die Steuerung der Genauigkeit der Ergebnisse der numerischen Integration durch Steuerung der Schrittweite  $h$  ist dem Anwender von MATLAB-Integratoren nicht unmittelbar möglich. Stattdessen können dort für jedes Integrationsverfahren die Parameter *RelTol*, *AbsTol* zur Steuerung der Integration verwendet werden. Für Spezialfälle können die Parameter *MaxStep*, *InitialStep* in den Integrationsverfahren angepaßt werden. Dies war hier aber jedoch nicht notwendig.

Die prinzipielle Vorgehensweise der Integratoren in MATLAB ist nun folgende: für jeden Integrationsschritt wird der lokale Diskretisationsfehler an der Integrationsstelle mit Hilfe der für das jeweilige Verfahren gültigen theoretisch abgeleiteten Abschätzung bestimmt. Dieser Wert soll nun kleiner oder gleich einem tolerierbaren bzw. akzeptablen Fehler sein, der wiederum eine Funktion von *RelTol*, *AbsTol* ist:

$$|e(i)| \leq \max(\text{RelTol} \cdot |y(i)|, \text{AbsTol}(i)), \quad (5.4.1)$$

mit  $|e(i)|$ : Betrag des lokalen Diskretisationsfehlers der  $i$ -ten Komponente des Lösungsvektors  $\bar{y}$ .

*RelTol* ist darin die relative Fehlertoleranz bzgl. der  $i$ -ten Komponente der Lösung  $\bar{y}$ . Dies bedeutet, daß *RelTol* sinnvollerweise in Abhängigkeit der Größenordnung von  $\bar{y}$  einzusetzen ist. Damit kontrolliert *RelTol* in etwa die Anzahl der korrekten Stellen, die bei den Berechnungen verwendet werden.

Wird beispielsweise eine GPS-Bahn mit dem Wert  $\text{RelTol} = 10^{-14}$  integriert und beachtet, daß sich in den Komponenten  $y(i)$  des Lösungsvektors für den Ortsvektor Werte in der Größenordnung von ca. 26000 [km] ergeben können, so erhält man:

$$|e(i)| \leq \text{RelTol} \cdot |y(i)| \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ [mm]}.$$

Liegt der Betrag des lokalen Diskretisationsfehlers oberhalb des Toleranzwertes, wird der Integrationsschritt mit einer verkürzten Schrittweite  $h$  erneut berechnet und wieder der Vergleich (5.4.1) durchgeführt. Die Verkürzung der Schrittweite erfolgt solange bis das Ergebnis angenommen werden kann. Die Verkürzung der Schrittweite läuft jedoch nur innerhalb, durch den Integrator festgelegten, bestimmten Grenzen. Wird trotz maximaler Verkürzung der Schrittweite nicht die Bedingungsgleichung (5.4.1) erfüllt, wird das Integrationsverfahren automatisch von MATLAB mit einer entsprechenden Fehlermeldung abgebrochen<sup>2</sup>. Damit weisen die in MATLAB implementierten Integrationsverfahren eine variable Schrittweite bzw. automatische Schrittweitensteuerung aus.

Mit *AbsTol* wird eine absolute Fehlertoleranz gesteuert. *AbsTol* ist entweder ein Skalar und der angegebene Wert gilt für alle Komponenten des Lösungsvektors oder es ist ein Vektor entsprechend der Länge des Lösungsvektors, der für jede Komponente unterschiedliche absolute Fehlertoleranzen haben kann. Die entsprechenden Werte für *AbsTol* gegeben damit einen Schwellenwert an, unterhalb dessen Werte der zugehörigen Komponente des Lösungsvektors vernachlässigt werden können. Außerdem bestimmen die absoluten Fehlertoleranzwerte die Genauigkeit der Integration im Bereich von Nulldurchgängen der Lösung, wenn also der Ausdruck  $\text{RelTol} \cdot |y(i)|$ , wegen  $|y(i)| \approx 0$  sehr klein wird. In allen nachfolgenden Testrechnungen wurde stets  $\text{RelTol} = \text{AbsTol} = 2.2204 \cdot 10^{-14}$  verwendet. Diese Werte sind im m-file `numsat.m` fest eingestellt. Etwaige Änderungen müssen dort erfolgen.

<sup>2</sup> Dies kann beispielsweise passieren, wenn in der zu integrierenden Bewegungsgleichung in der Kräftefunktion Unstetigkeiten auftreten. Da dies in MATLAB 1.0 nicht der Fall ist, arbeiten die Integratoren stabil.

## 6. Integratoren in MATLAB

MATLAB stellt folgende Integratoren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Verfügung:

Integrator	Beschreibung
ode45	Einschrittverfahren Explizites Runge-Kutta-Verfahren in Form des Dormand-Prince-Paares
ode23	Einschrittverfahren Explizites Runge-Kutta-Verfahren in Form des Bogacki-Shampine-Paares
ode113	Mehrschrittverfahren Adams-Bashfort-Moulton, Prädiktor-Korrektorverfahren
ode15s, ode23s	Integratoren für ‚steife‘ Probleme; hier nicht geeignet

Tabelle 6.1: Integratoren in MATLAB

Mit den MATLAB-Integratoren lassen sich nur Differentialgleichungen 1. Ordnung bzw. Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung lösen. Zur Lösung der Bewegungsgleichung nach der Methode von Cowell wird die Bewegungsgleichung, die zunächst ein vektorielle Differentialgleichung 2. Ordnung ist, in ein System von sechs Differentialgleichungen 1. Ordnung umgeordnet (vgl. Kapitel 1.3). Damit können oben genannte MATLAB-Funktionen zur numerischen Integration verwendet werden. Die zugehörigen mathematischen Grundlagen der Runge-Kutta-Verfahren bzw. des Adams-Bashfort-Verfahren werden kurz im Anhang 1. Verfahren der numerischen Integration vorgestellt, so daß an dieser Stelle darauf verzichtet wird.

Hinsichtlich der Fehlerordnung kommen für die numerische Integration der Bewegungsgleichungen von Satelliten aus obiger Tabelle nur die Routinen ode45 und ode113 in Frage. Diese sollen im weiteren hinsichtlich numerischer Genauigkeit und Rechenzeit getestet werden.

### 6.1 Test der Integratoren ode45, ode113

Für einen Satelliten für den sechs Kepler-Elemente vorgegeben sind, wird dessen Bahn auf analytischem Wege, als auch durch numerische Integration berechnet. Die Bewegung des Satelliten ist ungestört und verläuft allein unter dem Einfluß eines kugelsymmetrischen Gravitationsfeld der Erde. Daher können für die analytische Lösung die Gleichungen zur Lösung des Kepler-Problems (z.B. *Schneider, 1989*) herangezogen werden. Die numerische Integration der (hier vereinfachten) Bewegungsgleichungen erfolgt mit den Integratoren ode45 und ode113.

Die so berechneten Ephemeriden werden nun für folgende Tests herangezogen:

1. Vergleich von numerisch und analytisch berechneten Ephemeriden. Mit diesem Test wird überprüft, ob die numerische Bahn mit ausreichender Genauigkeit gleich der analytischen Bahn gesetzt werden kann.

2. Für die Bewegung eines Satelliten allein unter dem Einfluß eines kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes der Erde gilt folgender Satz der Energieerhaltung (vgl. *Schneider, 1989*):

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_{Erde}}{r} = \text{const.}, \quad (6.1.1)$$

mit  $GM_{Erde} = 398600.5 \text{ [km}^3/\text{s}^2]$

$v$  : Betrag des Geschwindigkeitsvektors

$r$  : Betrag des Ortsvektors.

Dies ist ein weiterer Test um die Güte der numerischen Integration zu überprüfen, sowohl im Vergleich mit dem Ergebnis aus der analytischen Berechnung, als auch im Vergleich zwischen den beiden numerisch integrierten Bahnen.

3. In einem dritten Test werden die Ortsvektoren der beiden numerisch integrierten Bahnen miteinander verglichen, indem Differenzen zwischen den kartesischen Komponenten berechnet werden. Hier zeigen sich eventuelle Unterschiede im Integrationsverhalten des Einschrittverfahrens ode45 und des Mehrschrittverfahrens ode113.
4. Als unabhängiger Test des Mehrschrittverfahrens ode113 dient ein Vergleich mit Satellitenephemeriden, die mit einem unter FORTRAN zur Verfügung stehenden Integrator berechnet wurden.

## 6.2 Testparameter

Für den Satelliten gelten folgende Parameter:

$a$ in [km]	6800
$e$	0.01
$i$ in [°]	60
$\Omega$ in [°]	30
$\omega$ in [°]	60
$\tau$	0

Tabelle 6.2: Kepler-Elemente des Testsatelliten

Bezugssystem: geozentrisches Ekliptiksystem für die analytisch und numerisch berechneten Ephemeriden.

Umlaufzeit: 6 h; es werden relative Zeitpunkte verwendet, der Satellit befindet sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Perigäum ( $t = \tau = 0$ ). Zeitinkrement  $dt = 60 \text{ [sec]}$ .

Es wurde eine Bahn mit relativ geringer Halbachse gewählt, um eine möglichst große Wirkung des Gravitationspotentials auf die Bahn des Satelliten zu erzielen.

## 6.3 Ergebnisse: Test der Integratoren

Zunächst wurde ein Vergleich vom Typ 1 (Abschnitt 6.1) durchgeführt, d.h. es wurde überprüft, ob eine numerische Bahn mit ausreichender Genauigkeit gleich der analytischen Referenzbahn gesetzt werden kann. Für den einfachen Fall einer Kepler-Bahn muß diese Forderung unter Ausnützung der maximal möglichen numerischen Genauigkeit erfüllt sein.

Abbildung 6.1 zeigt die Abweichungen der Komponenten der analytisch berechneten Bahnvektoren und der numerisch berechneten Bahnvektoren. Als Integrator wurde das Mehrschrittverfahren ode113 verwendet.

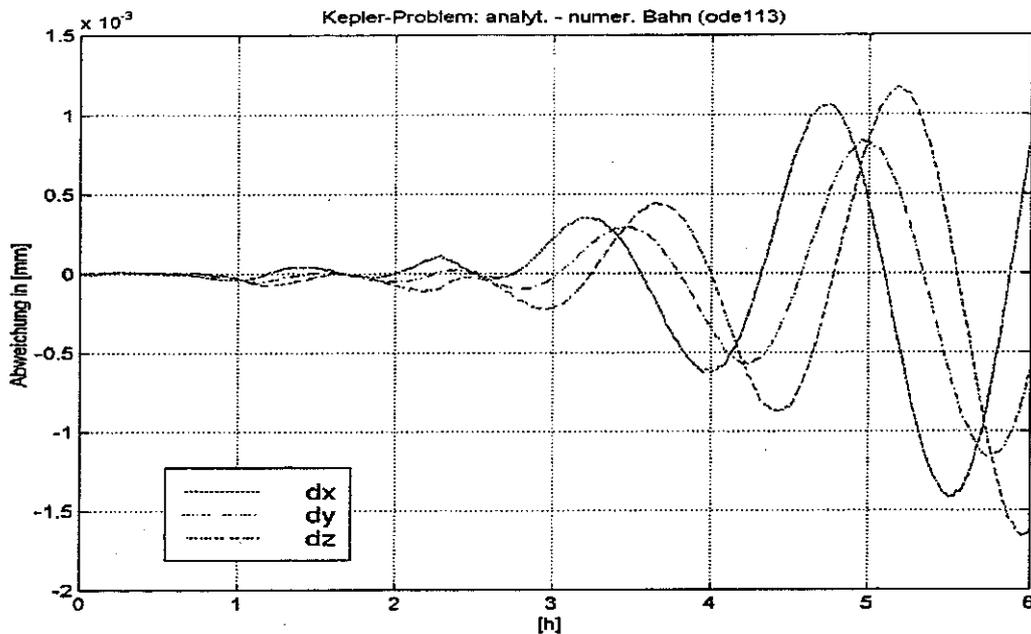


Abbildung 6.1: Vergleich numerisch und analytisch berechnete Bahn

Man sieht ein zeitabhängiges Verhalten der Abweichungen, d.h. mit fortlaufender Integration weicht die numerische Bahn von der Referenzbahn ab. Jedoch erreichen in diesem Fall die Abweichungen in den Komponenten nur maximal  $-1.7 \cdot 10^{-3}$  [mm]. Von daher kann die mit ode113 berechnete Bahn gleich der Referenzbahn gesetzt werden. Selbst eine angenommene Abweichung von  $-1.7 \cdot 10^{-3}$  [mm] in allen drei Komponenten  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  für einen Zeitpunkt ergäbe im Betrag des Ortsvektors lediglich eine Abweichung von  $dr = 2.9 \cdot 10^{-3}$  [mm]. Die numerisch berechneten Bahnvektoren unterscheiden sich also weder in ihrer Richtung, noch in ihrem Betrag. Ein Vergleich zwischen den Komponenten der Geschwindigkeitsvektoren zeigte sogar noch um etwa eine Größenordnung bessere Ergebnisse. Die Ursache liegt darin, daß zunächst die Komponenten der Beschleunigung integriert werden (dies liefert die Komponenten der Geschwindigkeit), um diese dann noch einmal zu integrieren, um letztlich auf den Ortsvektor zu kommen. Es wirken sich also die typischen Fehler numerischer Integrationsverfahren auf die Ortsvektoren zweimal aus.

Die Abweichungen numerische Bahn – analytische Bahn (unter Verwendung der mit ode45 berechneten Bahn) lagen ebenfalls im  $[\mu\text{m}]$ -Bereich. Nach einem 6 h-Orbit beträgt die maximale Abweichung in der  $dy$ -Komponente etwa  $5 \mu\text{m}$  (vgl. Abbildung 6.2). Von daher kann die mit ode45 berechnete Bahn ebenfalls der analytischen Bahn gleich gesetzt werden.

Die maximale Abweichung erreicht absolut gesehen etwa dem Dreifachen des Wertes der Integration mit ode113. Die Abweichungen bzgl. der jeweiligen Zeitpunkte differieren jedoch teilweise deutlich (Test vom Typ 3). Dies ist in Abbildung 6.3 dargestellt.

Absolut gesehen liefern jedoch beide Integrationsverfahren Ephemeriden, die mit genügendender Genauigkeit gleich der analytischen Lösung genommen werden können.

Neben den günstigeren numerischen Ergebnissen des Mehrschrittverfahrens stellt ein anderer Aspekt einen deutlichen Vorteil des Mehrschrittverfahrens dar: die Rechenzeit. Es ergibt sich ein deutlicher Unterschied in der Rechenzeit für die Integration ein und derselben Bahn mit ode45 und ode113, wie nachfolgende Werte zeigen:

$$t_{R, \text{ode113}} = 11.4 \text{ [sec]}$$

$$t_{R, \text{ode45}} = 24.1 \text{ [sec].}$$

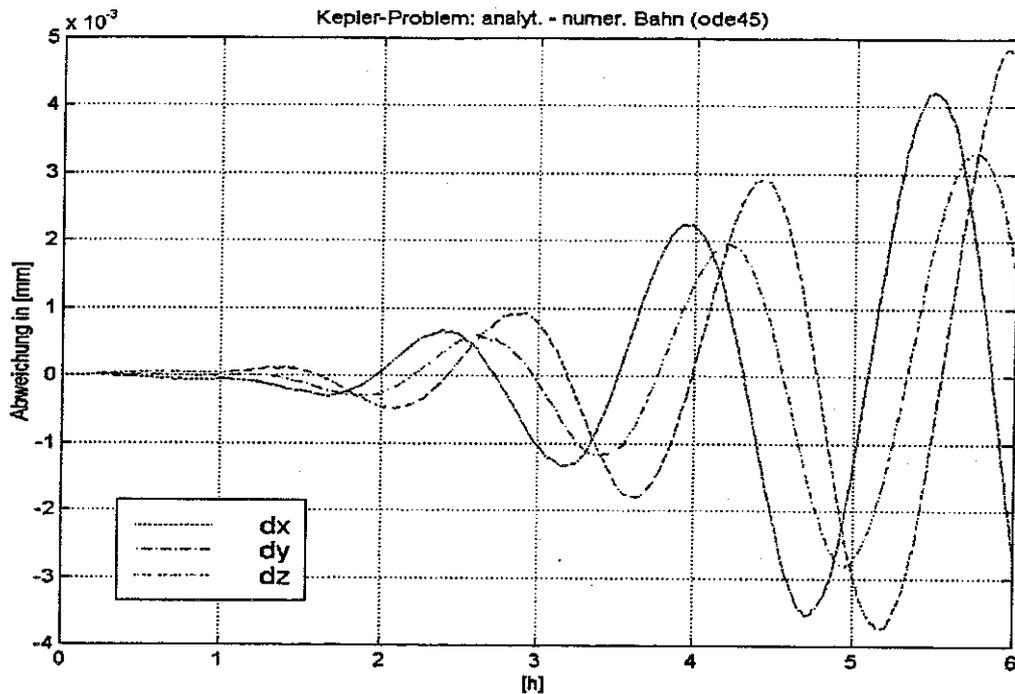


Abbildung 6.2: Vergleich numerisch und analytische berechnete Bahn

Das Mehrschrittverfahren ist also doppelt so schnell wie das Einschrittverfahren, bei besseren numerischen Ergebnissen. Diese Zwischenergebnisse sprechen für den Einsatz des Mehrschrittverfahrens ode113 in einem Bahnintegrationsprogramm.

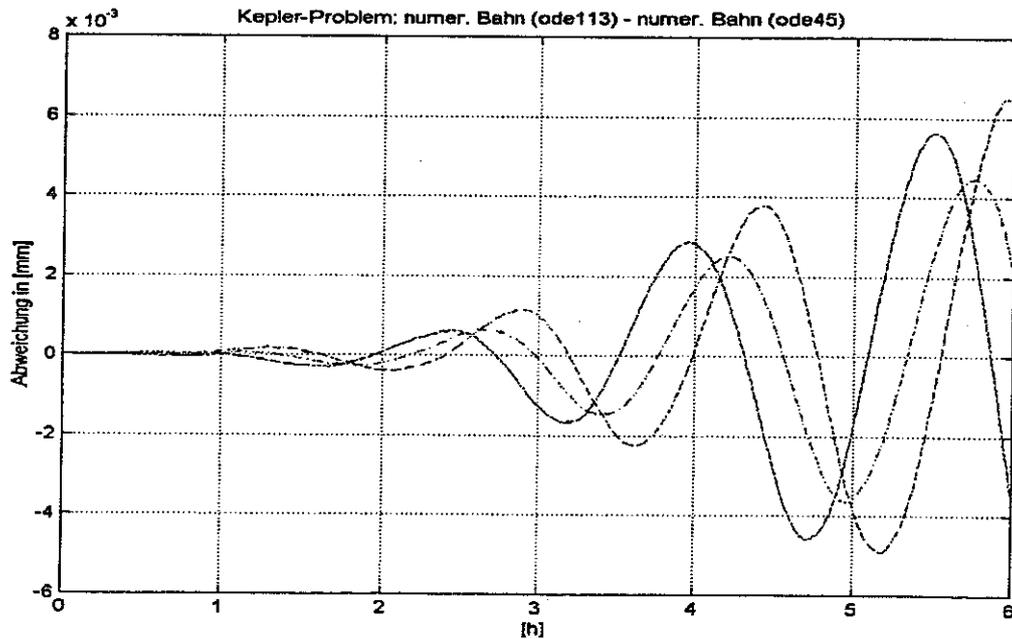


Abbildung 6.3: Vergleich numerisch und analytisch berechnete Bahn

Bevor aber einem der beiden Integratoren der Vorzug gegeben wurde, wurden noch weitere Tests vorgenommen. Mit denen für obigen Vergleich berechnete Ephemeriden wurden dann Tests vom Typ 2, d.h. eine Überprüfung der Energieerhaltung durchgeführt. Dieser Vergleich zeigt einerseits wiederum das numerische Verhalten der Integratoren, andererseits ist dieser Test eine gute Kontrolle,

ob das physikalische Modell in den MATLAB-Routinen für die numerische Integrationsverfahren überhaupt richtig umgesetzt wurde. Da in der Formel (6.1.1) für die Energieerhaltung einer Kepler-Bahn sowohl die Beträge der Geschwindigkeiten des Satelliten, als auch die Beträge seiner Position eingehen, können mit diesem Test beide Größen gleichzeitig überprüft werden.

Mit den numerisch berechneten Ephemeriden wurden nun nach obiger Formel (6.1.1) für jeden Integrationszeitpunkt ein Energiewert berechnet und mit dem Sollwert verglichen. Dieser Sollwert (vgl. *Schneider, 1989*) ergibt sich zu:

$$E_{\text{Soll}} = - \frac{GM_{\text{Erde}}}{2a} \quad (6.3.1)$$

Dieser Wert wurde dann von den jeweiligen Werten der numerischen Bahnen abgezogen. Dies ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

Für beide Integrationsverfahren wird das Kriterium der Energieerhaltung im Rahmen der Rechengenauigkeit gut erfüllt. Dies bestätigt obige Aussage, daß beide Verfahren zur Bahnbestimmung herangezogen werden können. Es werden jedoch wieder Unterschiede im numerischen Verhalten der beiden Integratoren sichtbar. Während die Differenz der Energiewerte mit ode113 vom Sollwert um Null oszilliert, zeigt sich für ode45 ein ‚lineare‘ Zunahme der Residuen. Dieses Ergebnis spricht wiederum für das Mehrschrittverfahren.

Die bisher durchgeführten Test beinhalten bzgl. ihrer Testparameter einige Einschränkungen. Einerseits ist das Integrationsintervall mit sechs Stunden relativ kurz, andererseits wurde mit  $e = 0.01$  eine schwach elliptische Bahn gewählt. Im folgenden wurde nun das Integrationsverhalten für längere Bahnbögen und stärker exzentrische Bahnen untersucht. Hierzu wurden bzgl. der Testparameter des gewählten Satelliten diese Änderungen vorgenommen:

- Ausdehnung des Integrationsintervalls auf 96 Stunden (= 4-Tage-Orbit), wobei das Zeitinkrement  $dt = 60$  [sec] beibehalten wurde.
- Verwendung von numerischen Exzentrizitäten  $e = 0.3$  und  $e = 0.9$

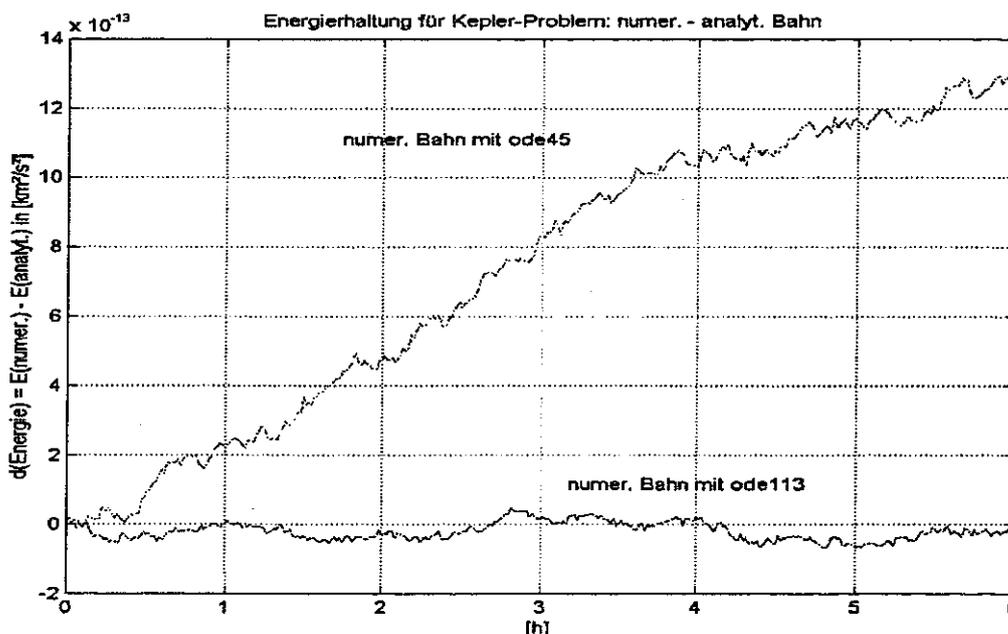


Abbildung 6.4: Energierhaltung ungestörter Bahnen, numerisch integriert

*Anmerkung:* Verwendet man für den Testsatelliten mit einer großen Halbachse  $a = 6800$  [km] Werte für die numerische Exzentrizität von 0.3 bzw. 0.9 stellt man fest, daß die sich daraus ergebende Bahn

teilweise innerhalb der festen Erde verläuft. Bereits für einen Wert oberhalb von  $e = 0.062$  ist dies der Fall. Eine derartige Bahn entspricht damit nicht den Zielen einer praktischen Anwendung für künstliche Erdsatelliten, es läßt sich aber an diesen Beispielen das Verhalten der Integratoren studieren. Von daher sind diese Tests als reine numerische Untersuchungen zu verstehen.

Tabelle 6.3 faßt die Erweiterungen der bisherigen Tests zusammen.

Test	Integrator	Parameter
A	ode113	$e = 0.01, \Delta t = 96$ [h]
B	ode113	$e = 0.3, \Delta t = 6$ [h]
C	ode45	$e = 0.3, \Delta t = 6$ [h]
D	ode113	$e = 0.9, \Delta t = 6$ [h]
E	ode45	$e = 0.9, \Delta t = 6$ [h]

Tabelle 6.3: Testerweiterungen

Für jede dieser Bahnen wurde eine entsprechende analytische Bahn berechnet, die dann als Referenzbahn im Sinne von Sollwerten für die numerischen Vergleiche herangezogen wurde.

Mit Test A) wurde das Integrationsverhalten des Mehrschrittverfahrens über einen längeren Bahnbogen untersucht. Hier wurde für den Testsatelliten ein 96 h, d.h. 4-Tage-Orbit gewählt. Von Interesse ist nun wie groß die zu erwartenden Abweichungen der numerischen Bahn von der analytischen Bahn werden. Dazu wurden nun die Komponenten der Ortsvektoren miteinander verglichen und in Abbildungen 6.5 dargestellt. Desweiteren wurde die Energierhaltung über den Integrationszeitraum betrachtet.

In Abbildung 6.5 sind lediglich die Abweichungen der x-Komponenten dargestellt. Für die y-, z-Komponente ergeben sich ähnliche Kurven, die betragsmäßig in derselben Größenordnung, jedoch etwas ‚phasenverschoben‘ zu den dargestellten  $dx$ -Werten zu liegen kommen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde auf eine Darstellung der  $dy$ -,  $dz$ -Werte in Abbildung 6.5 verzichtet. Für alle Zeitpunkte ist  $|dx| < 0.3$  [mm]. Nimmt man nun in allen drei Komponenten einen Abweichungswert von  $|dx| = |dy| = |dz| = 0.3$  [mm] an, so ergäbe sich für den Betrag der Abweichung  $|dr| = 0.5$  [mm].

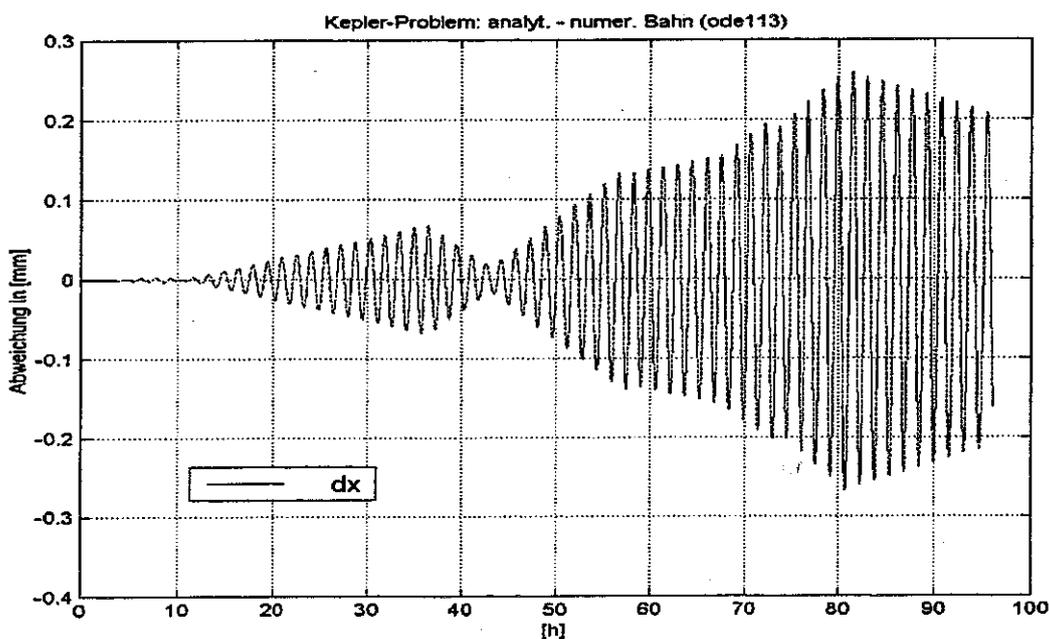


Abbildung 6.5: Vergleich numerisch und analytisch berechnete Bahn

Damit ergibt sich für einen längeren Bahnbogen eine (zu erwartende) Zunahme der Abweichungen zwischen analytischer und numerischer Bahn. Die Abweichungen liegen jedoch für den Ortsvektor in der Größenordnung  $< 1$  [mm]. Mit ausreichender Genauigkeit kann also die numerische Bahn der analytischen Bahn gesetzt werden. Abbildung 6.6 zeigt die Energieerhaltung für diese Bahn.

Auch hier sieht man nun eine langfristige Zunahme der Abweichungen zwischen dem Energiewert aus numerisch berechneten Ephemeriden und dem Sollwert. Insgesamt wird jedoch die Bedingung der Energieerhaltung gut erfüllt. Selbst nach 96 Stunden liegt die maximale Abweichung immer noch unter dem Maximalwert der Abweichung für den Integrator ode45 nach einem 6-h-Orbit (vgl. dazu Abb. 6.4).

*Anmerkung:* Betrachtet man einen Wert von  $dE = 13 \cdot 10^{-13}$  [km<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>] als die Differenz zweier Potentialwerte eines kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes mit unterschiedlichem Abstand  $r_1, r_2$  vom Mittelpunkt der felderzeugenden Erdmasse, so erhält man für den Unterschied im Abstand  $dr = r_2 - r_1$  folgendes:

$$V(r) = \frac{GM_{\text{Erde}}}{r}, \text{ gilt für ein kugelsymmetrisches Gravitationspotential}$$

$$dE = V(r_2) - V(r_1), \text{ mit } r_2 > r_1$$

$$dE = \frac{GM_{\text{Erde}}}{r_2} - \frac{GM_{\text{Erde}}}{r_1}$$

$$\Rightarrow dr = r_2 - r_1 = \frac{dE}{GM_{\text{Erde}}} r^2, \text{ mit } r \approx r_2 \approx r_1 = 6800 \text{ [km]}$$

$$dr = 0.15 \text{ [\mu m]}.$$

Dies bedeutet, daß eine Abweichung von der Energieerhaltung mit  $dE = 13 \cdot 10^{-13}$  [km<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>] ausgedrückt als Potentialunterschied eines kugelsymmetrischen Gravitationspotentials der Erde durch eine Abweichung von 0.15 [μm] im radialen Abstand von den felderzeugenden Massen hervorgerufen wird<sup>1</sup>. Umgekehrt kann man sagen, daß die Abweichung der Energieerhaltung um den Wert  $dE = 13 \cdot 10^{-13}$  [km<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>] in etwa einen Lagefehler von  $dr = 0.15$  [μm] verursacht. Ein derart niedriger Wert steht jedoch deutlich unterhalb einer geforderten Positionsgenauigkeit für einen Erdsatelliten. Von daher kann man die Energieerhaltung der Testrechnungen als konstant betrachten.

In den Tests B, C, D, E wurde die Umlaufzeit wieder auf sechs Stunden verkürzt, jedoch die numerische Exzentrizität der Bahn auf  $e = 0.3$  bzw.  $e = 0.9$  erhöht. Mit der Erhöhung der numerischen Exzentrizität wird die Bahn des Satelliten stärker elliptisch, d.h. die Bahn ist in Apo- bzw. Perigäum stärker gekrümmt. Für die numerische Integration bedeutet dies, daß in diesem Bereich mehr bzw. enger beieinander liegende Stützstellen berechnet werden müssen, um die Bahn mit genügender Genauigkeit zu approximieren. Numerische Instabilitäten können sich bei der Integration deutlicher bemerkbar machen, da sich gerade im Perigäum die Ephemeriden (v.a. der Geschwindigkeitsvektor) stärker ändern, als im Vergleich mit einer weniger exzentrischen Bahn (bei sonst gleichen Kepler-Elementen). In den nachfolgenden Abbildungen ( 6.7 – 6.10) ist das numerische Verhalten der Integratoren ode45 bzw. ode113 für  $e = 0.3$  dargestellt. Als Vergleich dient wiederum eine analytisch berechnete Referenzbahn mit entsprechender Energieerhaltung.

Während die Ergebnisse für eine numerische Exzentrizität  $e = 0.3$  mit dem Runge-Kutta-Verfahren nur gering von denen für die mit demselben Integrator berechnete Bahn mit einer Exzentrizität von  $e = 0.01$  abweichen, sieht man in den Ergebnissen des Mehrschrittverfahrens eine Verschlechterung der Ergebnisse mit Zunahme der Exzentrizität auf  $e = 0.3$ .

<sup>1</sup> Gilt für diesen Satelliten mit einer großen Halbachse von  $a = 6800$  [km]

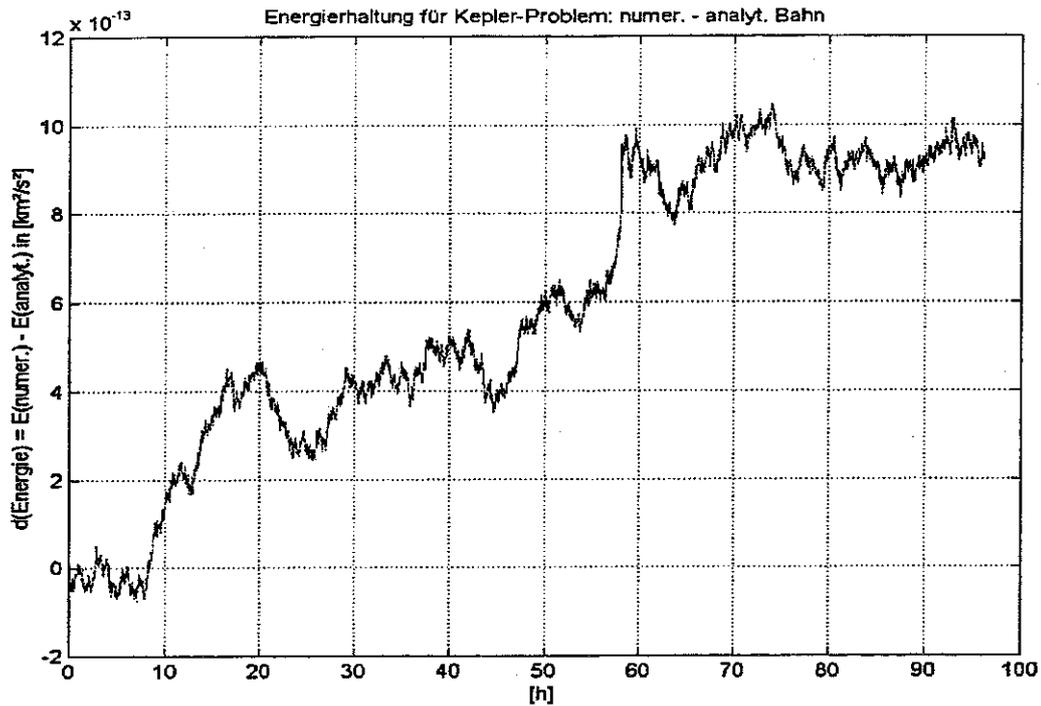


Abbildung 6.6: Energieerhaltung einer numerisch berechneten Bahn

Die Rechenzeit für diesen Orbit betrug 3 [min] 23.58 [sec].

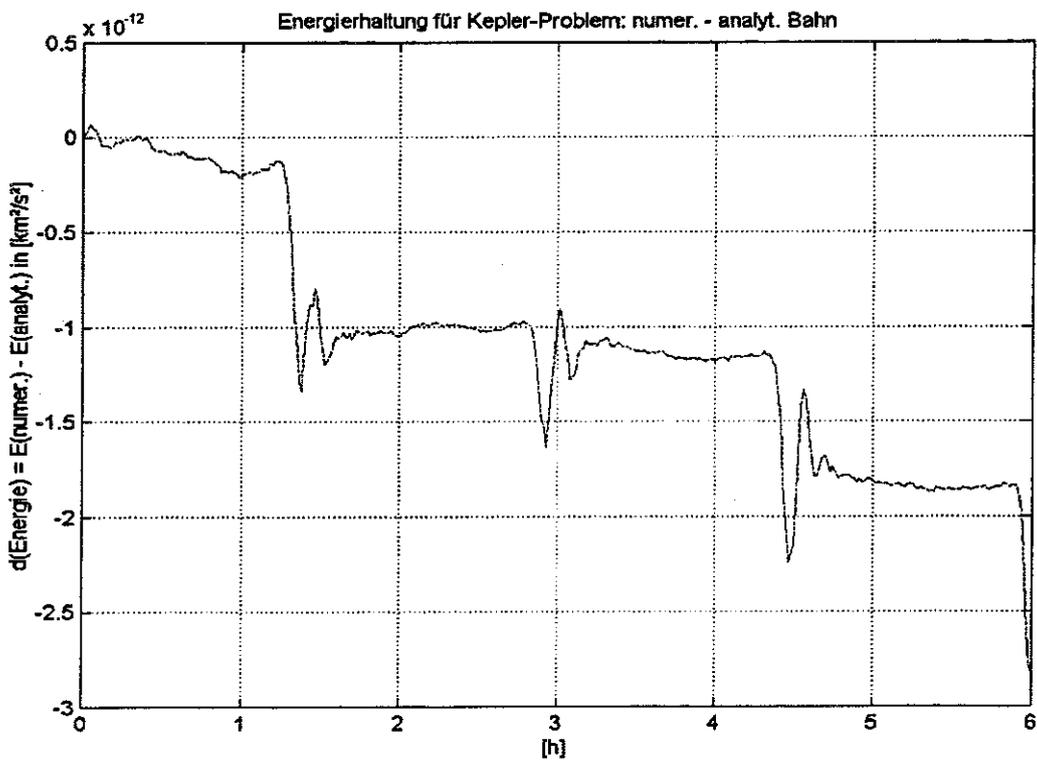


Abbildung 6.7:  $e = 0.3$ , Integrator ode113

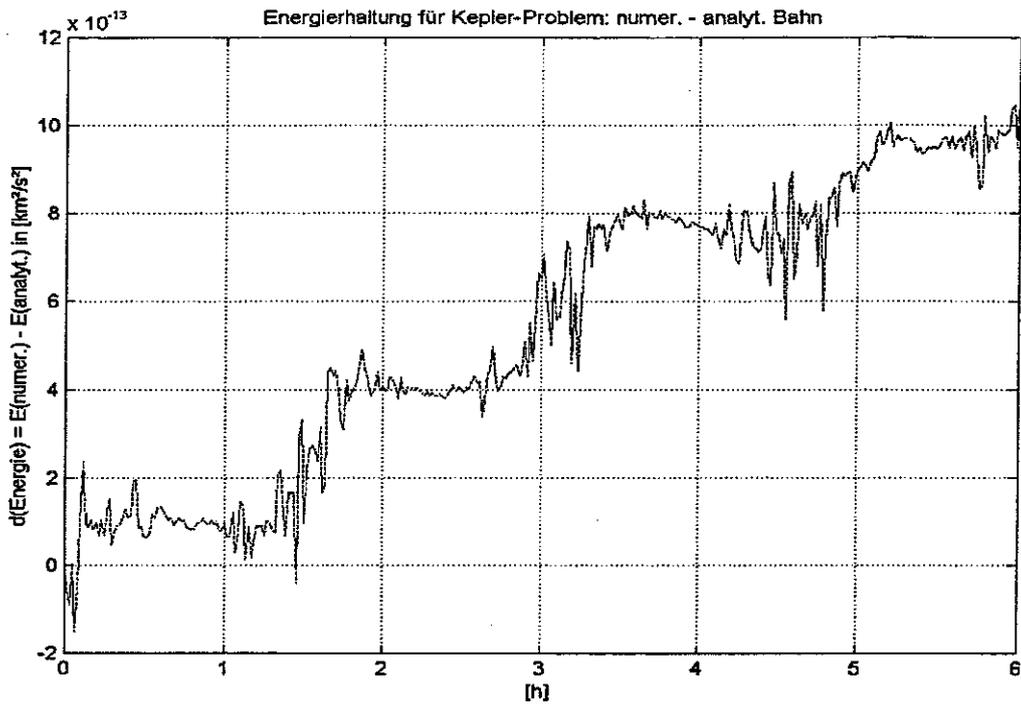


Abbildung 6.8:  $e = 0.3$ , Integrator ode45

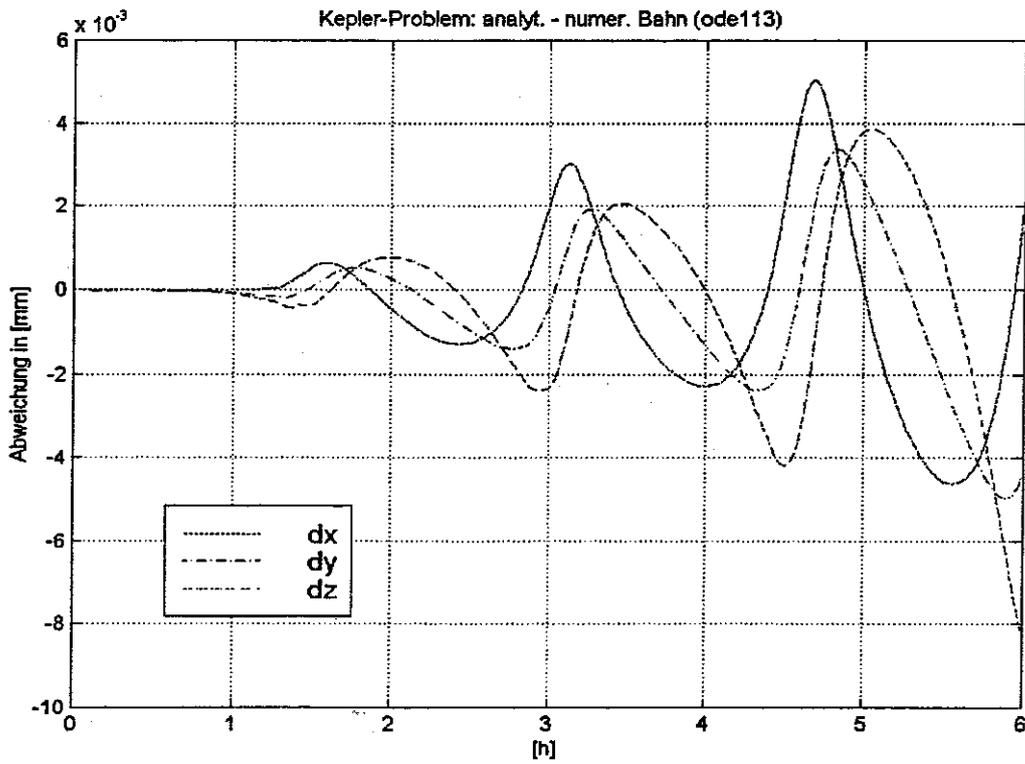


Abbildung 6.9:  $e = 0.3$ , Integrator ode113

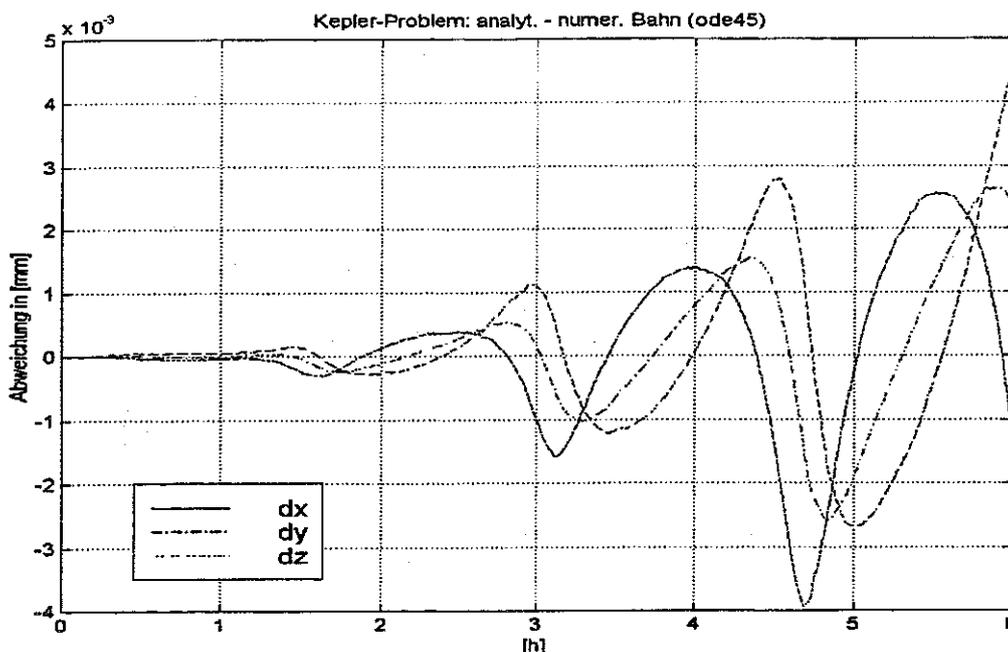


Abbildung 6.10:  $e = 0.3$ , Integrator ode45

Absolut gesehen sind die Abweichungen mit ode113 im Vergleich mit der Referenzbahn immer noch ausreichend gering, jedoch im Verhältnis zum Integrator ode45 liefert nun das Mehrschrittverfahren schlechtere Ergebnisse. Entsprechende Darstellungen für  $e = 0.9$  sind im Anhang dargestellt. In nachfolgender Tabelle sind Teile der Tests hinsichtlich ihrer Ergebnisse und v.a. der benötigten Rechenzeit dargestellt.

Test	Integrator, Parameter	Rechenzeit	Ergebnis, Bewertung
Vergleich numerischer und analytischer Bahn	ode113, $e = 0.01$ , $\Delta t = 6$ [h], $dt = 60$ [sec]	11.4 [sec]	$ dx ,  dy ,  dz  < 1.5$ [ $\mu\text{m}$ ] $r_{\text{numer.}} \equiv r_{\text{analyt.}}$
Vergleich numerischer und analytischer Bahn	ode45, $e = 0.01$ , $\Delta t = 6$ [h], $dt = 60$ [sec]	24.1 [sec]	$ dx ,  dy ,  dz  < 5$ [ $\mu\text{m}$ ] $r_{\text{numer.}} \equiv r_{\text{analyt.}}$
Vergleich numerischer und analytischer Bahn	ode113, $e = 0.01$ , $\Delta t = 96$ [h], $dt = 60$ [sec]	203.58 [sec]	$ dx ,  dy ,  dz  < 0.3$ [mm] $r_{\text{numer.}} \equiv r_{\text{analyt.}}$
Vergleich numerischer und analytischer Bahn	ode113, $e = 0.3$ , $\Delta t = 6$ [h], $dt = 60$ [sec]	18.89 [sec]	$ dx ,  dy ,  dz  < 8$ [ $\mu\text{m}$ ] $r_{\text{numer.}} \equiv r_{\text{analyt.}}$
Vergleich numerischer und analytischer Bahn	ode45, $e = 0.3$ , $\Delta t = 6$ [h], $dt = 60$ [sec]	185.32 [sec]	$ dx ,  dy ,  dz  < 8$ [ $\mu\text{m}$ ] $r_{\text{numer.}} \equiv r_{\text{analyt.}}$
Vergleich numerischer und analytischer Bahn	ode113, $e = 0.9$ , $\Delta t = 6$ [h], $dt = 60$ [sec]	42.62 [sec]	$ dx ,  dy ,  dz  < 0.1$ [mm]. $r_{\text{numer.}} \equiv r_{\text{analyt.}}$
Vergleich numerischer und analytischer Bahn	ode45, $e = 0.9$ , $\Delta t = 6$ [h], $dt = 60$ [sec]	311.97 [sec]	$ dx ,  dy ,  dz  < 0.025$ [mm] $r_{\text{numer.}} \equiv r_{\text{analyt.}}$

Tabelle 6.4: Zusammenfassung aller Testergebnisse

Abschließend wurde ein Vergleich des Mehrschrittverfahrens ode113 mit einem Mehrschrittverfahren (vom Typ Adams-Bashforth-Moulton), das als FORTRAN-Routine zur Verfügung stand, durchgeführt. Dazu wurde eine gravitativ gestörte Bahn zunächst mit dem Verfahren ode113 mit SATLAB 1.0 berechnet. Die gravitative Störung rührt vom anisotropen Gravitationsfeld der Erde her, das in diesen Testrechnungen mit Potentialkoeffizienten aus dem Erdmodell EGM96 bis Grad und Ordnung  $n_{max} = m_{max} = 10$  entwickelt war.

Analog wurde dieselbe gravitativ gestörte Bahn mit einem in der Programmiersprache FORTRAN vorhandenen Bahnintegrationsprogramm numerisch integriert. Dort wird zur Integration ebenfalls ein Mehrschrittverfahren vom Typ Adams-Bashforth-Moulton verwendet. Die beiden integrierten Bahnen wurden bzgl. Abweichungen in den Komponenten der Ortsvektoren untersucht.

Dieser Test zeigt nun einerseits, ob das Modell zur Berücksichtigung der gravitativen Störung verursacht durch das anisotrope Gravitationsfeld der Erde richtig implementiert wurde. Andererseits läßt sich die Qualität des MATLAB-Integrators überprüfen. Abbildung 6.11 zeigt die Unterschiede in den Komponenten der Ortsvektoren nach einem Tag.

In den Komponenten erreichen die Abweichungen  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$  eine Größenordnung von etwa 0.5 [mm]. Nimmt man für jede Komponente diesen Maximalwerte an, so erhält man im schlechtesten Fall einen Verschiebungsvektor (am Ort des Satelliten) mit der Länge

$$|dr| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0.87 \text{ [mm]},$$

mit  $dx, dy, dz = 0.5 \text{ [mm]}$ .

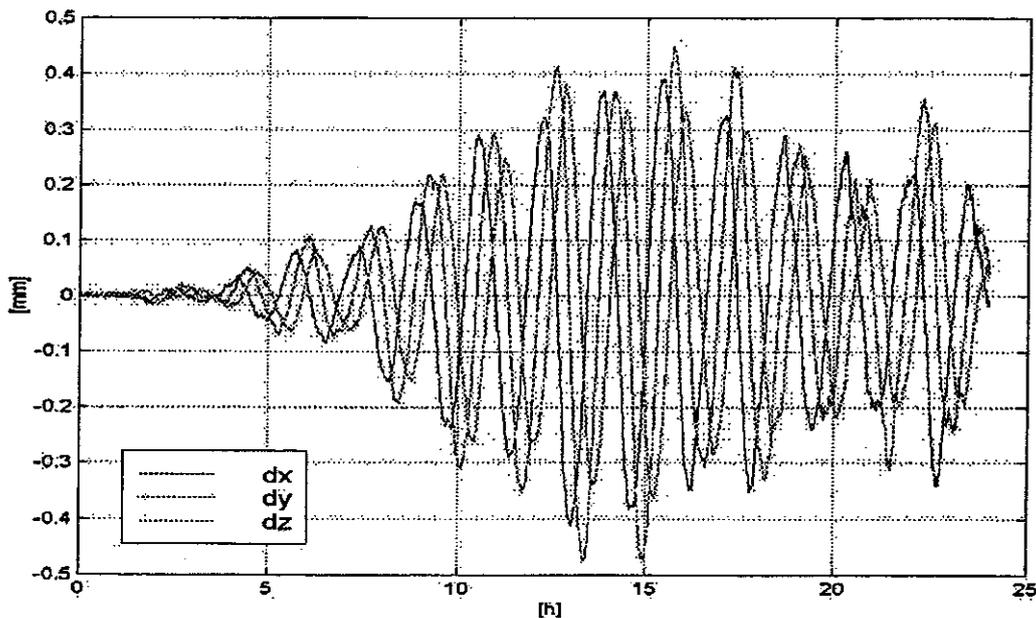


Abbildung 6.11: Vergleich numer. integrierte Bahn mit SATLAB 1.0 (ode113) und FORTRAN-Programm

Ein derartiger Wert ist vernachlässigbar klein, d.h. die Richtung der Ortsvektoren aus beiden Bahnen kann als identisch angenommen werden. Betrachtet man die Unterschiede in den Beträgen der Ortsvektoren der beiden Bahnen, so ergibt sich hier ein ebenfalls vernachlässigbarer Maximalwert  $dr_{max} = 0.01 \text{ [mm]}$ . Die Länge entsprechender Ortsvektoren des Satelliten unterscheidet sich damit nicht.

Mit diesem Ergebnis werden das Modell zur Berücksichtigung der Störung verursacht durch das anisotrope Gravitationsfeld auf den Satelliten, das in SATLAB 1.0 implementiert ist und der MATLAB-Integrator ode113 bestätigt.

## 6.4 Bewertung der Integratoren in MATLAB

Ephemeriden (ungestörter Satellitenbewegungen) berechnet durch numerische Integration mit dem Einschrittverfahren ode45 und dem Mehrschrittverfahren ode113 können mit ausreichender Genauigkeit analytisch berechneten Ephemeriden gleich gesetzt werden. Für das Mehrschrittverfahren, daß für die Realisierung des Bahnberechnungsprogramms SATLAB 1.0 favorisiert wird, wurden für einen 4-Tage-Orbit (einer Kepler-Bahn) Abweichungen in den kartesischen Komponenten bzgl. einem geozentrischen quasi-inertialen Ekliptiksystems deutlich kleiner als 1 [mm] erreicht.

Die Bevorzugung des Mehrschrittverfahrens leitet sich aus der in allen Fällen z.T. erheblich kürzeren Rechenzeit bei ausreichend kleinen Abweichungen von der jeweiligen analytischen Referenzbahn ab.

Eingeschränkt wird dieses Ergebnis durch die numerische Exzentrizität der jeweiligen Bahn. Im Vergleich zwischen ode45 und ode113 zeigt das Runge-Kutta-Verfahren bzgl. der Genauigkeit der Ephemeriden eine geringere Empfindlichkeit gegenüber Veränderungen in  $e$ , als das Mehrschrittverfahren. Jedoch sind die festgestellten Abweichungen des Mehrschrittverfahrens vernachlässigbar gering.

Für Bahnen mit einer numerischen Exzentrizität  $e \leq 0.3$  wird zur Integration der Bewegungsgleichungen das Mehrschrittverfahren ode113 empfohlen und fest in SATLAB 1.0 implementiert. Für stärker elliptische Bahnen kann der Integrator ode45 u.U. bessere Ergebnisse erzielen. Jedoch wird dies mit einer deutlichen Zunahme der Rechenzeit erreicht. Von daher ist ode45 nur bedingt zu empfehlen. In diesem Zusammenhang ist zu erwähnen, daß Satelliten bzw. deren Bahnen für geowissenschaftliche Anwendungen i.d.R. numerische Exzentrizitäten  $e < 0.1$  besitzen. Für derartige Satelliten kann ode113 verwendet werden.

Ein Vergleich mit einem Bahnintegrationsprogramm unter FORTRAN bestätigt die Richtigkeit des in SATLAB 1.0 implementierten Modells für das anisotrope Gravitationspotentials der Erde und das Mehrschrittverfahren ode113.

Längerfristig sollte mit zukünftigen Erweiterungen der Programmodule und/oder Steigerung der Genauigkeit der verwendeten Modelle über die Implementierung von Integratoren höherer Fehlerordnung nachgedacht werden, da die Anforderungen an numerische Genauigkeit ansteigen. Zum gegenwärtigen Stand der Programme (Juni 1998) wird jedoch die Leistungsfähigkeit von ode113 als ausreichend betrachtet.

## 7. Jacobi-Integral

Für eine wegen des inhomogenen Gravitationsfeldes gestörte Satellitenbahn gilt nicht mehr die Energieerhaltung der Kepler-Bahn. Für die Bewegung eines Satelliten im anisotropen Gravitationsfeld einer mit konstanter Rotationsgeschwindigkeit drehenden Erde läßt sich die sogenannte Jacobi-Konstante als Integral der Bewegung angeben.

$$J = \frac{1}{2} \vec{v}^2 + V(\vec{r}') - \omega L_z = \text{const} \quad (7.1)$$

Darin ist:  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit des Satelliten im raumfesten Bezugssystem  
 $V(\vec{r}') := -V(\vec{r}')$  das Potential am Ort des Satelliten bzgl. des erdfesten Bezugssystems  
 $\omega$  die Drehrate des erdfesten Bezugssystems gegenüber dem raumfesten Bezugssystem

$L_z$  ist die z-Komponente der Drehimpulses  $L = (\vec{r} \times \vec{v})$

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x \cos \omega t + y \sin \omega t \\ y \cos \omega t - x \sin \omega t \\ z \end{pmatrix} \text{ Ortsvektor zum Zeitpunkt } t \text{ im erdfesten System}$$

$x, y, z$  Komponenten des Ortsvektors zum Zeitpunkt  $t$  im raumfesten System

Für rotationssymmetrische Körper (d.h. nur zonale Potentialkoeffizienten) wären im Bewegungsablauf eines Satelliten die Energie  $E = \frac{1}{2} \vec{v}^2 + V(\vec{r})$  und die z-Komponente des Drehimpulses  $L = (\vec{r} \times \vec{v})$  separat erhalten. Die Energieerhaltung der Satellitenbewegung gilt jedoch nur unter bestimmten Bedingungen.

- (1) Die felderzeugenden Massen sind fest mit dem erdfesten System verbunden und rotieren
- (2) gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die gemeinsame z-Achse.
- (3) Die Potentialkoeffizienten sind zeitlich konstant.

Ist eine dieser Bedingungen verletzt gilt die Erhaltung der Jacobi-Konstante nicht mehr. Von daher mußten einige Parameter in den Programmen zur numerischen Integration angepaßt werden, um die Erhaltung der Jacobi-Konstanten überprüfen zu können. Statt dem variablen GMST wurde  $\omega_{Erde} = 0.7292115 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = \text{const.}$  zur Bestimmung der Orientierung der Erde im Raum verwendet. Drehungen für Präzession, Nutation wurden weggelassen, da diese zeitlich variabel sind und außerdem nicht ausschließlich um die z-Achse des erdfesten Systems erfolgen. Ebenso wurde die Schiefe der Ekliptik (entspricht einer Drehung um die x-Achse des raumfesten Systems) nicht angebracht. Damit ergab sich die vereinfachte Situation, daß

- das raumfeste Bezugssystem ein raumfestes Äquatorsystem ist, dessen
- z-Achse mit der z-Achse des erdfesten Äquatorsystems identisch ist und
- das erdfeste System mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um diese gemeinsame Achse rotiert.

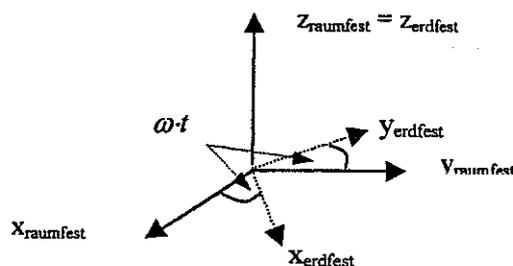


Abbildung 7.1: raumfestes und erdfestes Äquatorsystem

Die Bahn wird damit nicht im vereinbarten Ekliptiksystem, sondern in einem als raumfest angenommenen Äquatorsystem integriert. Abbildung 7.1 stellt die vereinfachte Beziehung zwischen raumfesten und erdfestem Äquatorsystem dar. Die Potentialkoeffizienten gelten bzgl. dem erdfesten Äquatorsystem und sind zeitlich konstant. Mit diesen Parametern wurde nun die Jacobi-Konstante für zwei verschiedene Testbahnen berechnet.

### 7.1 Testparameter

Als Integrationsverfahren wurde das Mehrschrittverfahren ode113 verwendet. Da der Integrator ode113 abhängig von der numerischen Exzentrizität der Bahn ist, wurde eine Bahn mit  $e = 0.01$  und  $e = 0.3$  berechnet, um einen Aufschluß über derartige Abhängigkeiten zu erhalten.

Die Bewegung des Satelliten wird durch ein inhomogenes Gravitationsfeld der Erde, dessen Kugelfunktionsreihe bis Grad und Ordnung  $n_{max} = m_{max} = 10$  entwickelt ist, gestört. Die zugehörigen Potentialkoeffizienten wurden dem Erdmodell EGM96 entnommen und als konstant betrachtet. Eine Variabilität der Koeffizienten  $\bar{C}_{21}, \bar{S}_{21}$  wurde ausgeschlossen. Es gilt  $\bar{C}_{21}, \bar{S}_{21} = 0$ . Als große Halbachse gilt für dieses Erdmodell der Wert  $a_e = 6378.13649$  [km]. Die Erddrehrate wurde mit  $\omega_{Erde} = 0.7292115 \cdot 10^{-4} \left[ \frac{rad}{s} \right]$  als konstant angenommen.

Es wurden folgende Bahnen integriert:

Parameter	Satellit 1	Satellit 2
$a$ [km]	6800	10000
$E$	0.01	0.3
$i$ [°]	60	60
$\Omega$	30	30
$\omega$	60	60
$\tau$	0	0
$\Delta t$ [h]	8	8
$dt$ [sec]	60	60

Tabelle 7.1: Satellitenparameter Jacobi-Integral

Beide Satelliten starten zum Zeitpunkt  $t = \tau = 0$  im Perigäum. Für jeden Zeitpunkt wurden nun numerisch Ephemeriden integriert und mit diesen für jeden Integrationszeitpunkt die zugehörige Jacobi-Konstante berechnet.

### 7.2 Ergebnisse: Jacobi-Integral

Abbildung 7.2 zeigt die Differenz der Jacobi-Konstanten minus ihrem Mittelwert für Satellit 1. Die Abweichungen bewegen sich im Mittel in der Größenordnung von  $-2 \cdot 10^{-13} \left[ \frac{km^2}{s^2} \right]$ . Dieser Wert kann als hinreichend klein betrachtet werden (für eine Abschätzung siehe Kapitel 6.3, Test der Integratoren in MATLAB). Die Jacobi-Konstante ist für diese Bahn konstant.

Für den Satelliten 2, mit seiner stärker exzentrischen Bahn zeigt sich ein ähnliches Verhalten, wie es im Kapitel 6.3, Test der Integratoren in MATLAB bereits deutlich wurde. Im Bereich des Perigäums werden die Abweichungen vom Mittelwert aller berechneten Jacobi-Konstanten deutlich. In Abbildung 7.3 ist dieses Ergebnis graphisch dargestellt. Wiederum ist von den Jacobi-Konstanten bzgl. jeden Integrationszeitpunktes der gemeinsame Mittelwert abgezogen worden. Absolut gesehen sind die Abweichungen vom Mittelwert mit maximal  $-6 \cdot 10^{-13} \left[ \frac{km^2}{s^2} \right]$  wiederum vernachlässigbar gering.

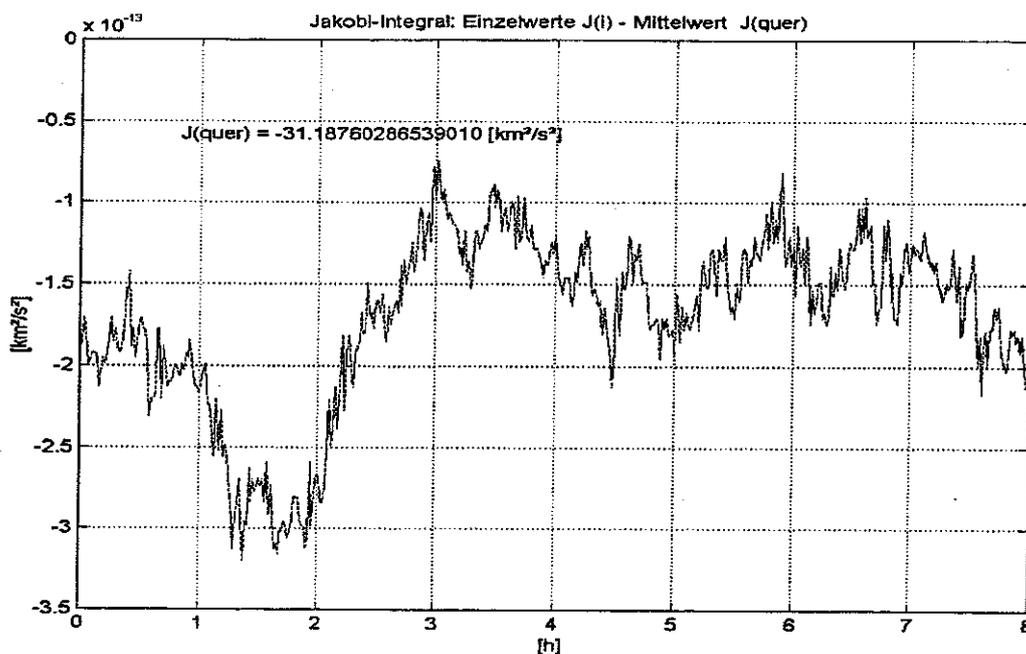


Abbildung 7.2: Jacobi-Integral Satellit 1

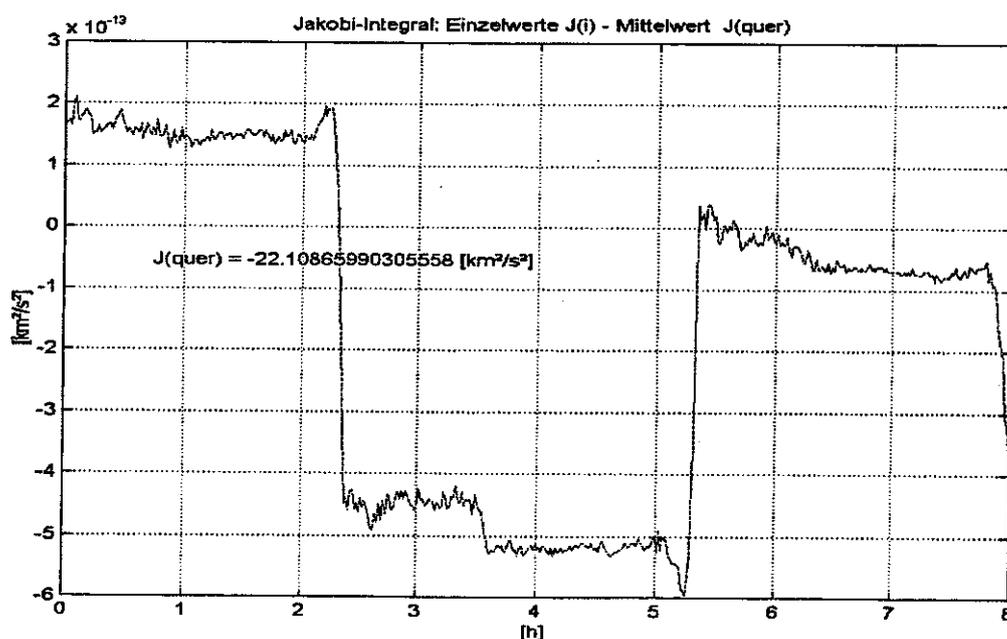


Abbildung 7.3: Jacobi-Integral für Satellit 2

### 7.3 Bewertung: Jacobi-Integral

Die Erhaltung der Jacobi-Konstanten für den Bewegungsablauf dient als Test in zweifacher Hinsicht. Einerseits wird damit die Richtigkeit des implementierten Modells für die Beschleunigung auf den Satelliten aufgrund des anisotropen Gravitationspotentials überprüft, andererseits dient sie als zusätzlicher Test des verwendeten Mehrschrittverfahrens zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen des jeweiligen Satelliten.

In Anbetracht der Ergebnisse kann man nun festhalten, daß das Modell für den statischen Anteil des Gravitationspotentials der Erde im Rahmen der Rechengenauigkeit richtig implementiert wurde und daß das verwendete Mehrschrittverfahren in seiner Leistungsfähigkeit bestätigt wird.

## 8. Störungen aufgrund des anisotropen Gravitationsfeldes

Die Erde ist ein abgeplatteter Körper mit einer inhomogenen Massenverteilung innerhalb dieses Körpers. Das von diesen Massen erzeugte Gravitationsfeld ist damit ebenfalls inhomogen und erzeugt Abweichungen von einer entsprechenden Satellitenbewegung wie sie mit den Gleichungen der Lösung des Kepler-Problems zu erwarten wäre.

Die inhomogene Massenverteilung des Zentralkörpers wird durch die bekannte Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationpotentials der Erde beschrieben. Es gilt (vgl. 4.2.2):

$$V(r, \lambda, \vartheta) = \frac{GM_{\text{Erde}}}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\max(n)} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \right], \quad (8.1)$$

mit den aus Kapitel 4.2 bekannten Größen. Der führende Term  $\frac{GM_{\text{Erde}}}{r}$  beschreibt das Potential einer homogenen Kugel, wie sie für die Kepler-Bahn angenommen wird (sog. Kepler-Term oder Zentralterm). Die restlichen Terme der Doppelsumme entsprechen dann dem sogenannten Störpotential  $R$ .

$$R(r, \lambda, \vartheta) = \frac{GM_{\text{Erde}}}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\max(n)} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a_e}{r} \right)^n \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \right] \quad (8.2).$$

Im Zusammenhang mit den Störungsgleichungen nach Lagrange kann man die Variation der klassischen Kepler-Elemente als Funktion des Störpotentials  $R$  darstellen. Diese Lagrange'schen Störungsgleichungen findet man u.a. bei *Kaula, Schneider*. Im Verlauf der Lösung dieser Gleichungen ist es nötig die Störfunktion  $R$  nach den Kepler-Elementen zu entwickeln. Dies führt auf Differentiale der Form  $\frac{d\vec{\alpha}}{dt}$ , mit  $\vec{\alpha} = [a, e, i, \Omega, \omega, M]$  zu deren Lösung vierfache Summationen über (theoretisch) unendlich viele Glieder, die u.a. die Potentialkoeffizienten  $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$  enthalten berechnet werden müßten. Selbst die Verwendung nur endlich vieler Terme läßt die analytische Integration dieser Gleichungen sehr schnell hinreichend komplex werden. Von daher beschränkt man sich oft bei der Integration der Störungsgleichungen über ein bestimmtes Zeitintervall auf eine Approximation 1.Ordnung unter der Annahme, daß die Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Störungen vernachlässigbar klein sind. Die Gesamtstörung auf das jeweilige Kepler-Element ergibt sich dann durch Summation aller Einzelstörungen.

Mit diesen Störungsgleichungen lassen sich nun quantitative, v.a. aber qualitative Einflüsse der Potentialkoeffizienten auf die Kepler-Elemente studieren. Man unterscheidet drei Gruppen von Störungen:

- säkulare,
- langperiodische und
- kurzperiodische Störungen,

wobei bestimmte Störungen an bestimmten Gruppen der harmonischen Koeffizienten festgemacht werden können.

In diesem Abschnitt sollen nun diese Störungen aufgrund des anisotropen Gravitationsfeldes der Erde auf die numerisch berechnete Bahn eines Satelliten nachgewiesen werden.

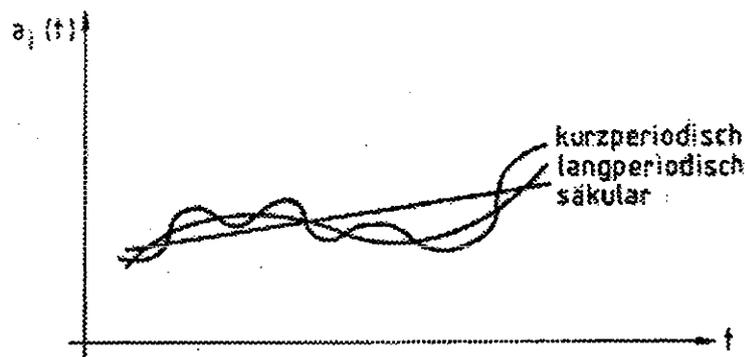


Abbildung 8.1: Charakteristische Störungen in den Bahnelementen (Seeber 1989)

### 8.1 Testparameter

Die Größenordnung der Störungen, die durch das anisotrope Gravitationsfeld der Erde verursacht werden ist u.a. abhängig vom radialen Abstand des Satelliten von den felderzeugenden Massen (siehe (8.2)). Um entsprechende Störungen nachweisen zu können wurde deshalb die Bahn eines relativ niedrigfliegenden Satelliten untersucht. Für diesen gelten folgende Parameter:

$a$ in [km]	6800
$e$	0.01
$i$ in $^{\circ}$	60
$\Omega$ in $^{\circ}$	30
$\omega$ in $^{\circ}$	60
$\tau$	0

Tabelle 8.1: Satellitenparameter, Test Gravitationsfeld

Der Satellit startet im Perigäum. Die Umlaufzeit beträgt acht Stunden ( $\Delta t = 8$  [h]), wobei Ephemeriden für alle  $dt = 60$  [sec] berechnet werden. Bezugssystem ist das ekliptikale Inertialsystem J2000.0.

Die Störungen auf die Bahn des Satelliten werden durch ein Gravitationsfeld verursacht, dessen Kugelfunktionsentwicklung bis Grad und Ordnung  $n_{max} = m_{max} = 10$  entwickelt ist. Die zugehörigen vollständig normierten Koeffizienten wurden dem Erdmodell EGM96 entnommen (siehe Anhang).

Mit den so berechneten Ephemeriden wurde folgende Vergleiche gegenüber einer analytisch berechneten ungestörten Referenzbahn durchgeführt:

- Störung im Betrag der Ortsvektoren aufgrund der Potentialkoeffizienten bis Grad und Ordnung  $n_{max} = m_{max} = 10$ , sowie des Anteils allein von  $\bar{C}_{20}$ .
- Störung in den Kepler-Elementen durch Rückrechnung von instantanen Kepler-Elementen aus den gestörten Ephemeriden (wiederum  $n_{max} = m_{max} = 10$ ) und Vergleich mit Werten aus der analytischen Störungsrechnung

*Anmerkung:* Im wesentlichen handelt es sich um qualitative Tests, da quantitative Vergleiche zwischen dieser ‚empirischen Störungsrechnung‘ und der analytischen Störungsrechnung nicht einfach möglich sind. Dies liegt daran, daß die analytische Störungsrechnung (hier) nur in 1. Ordnung entwickelt ist und somit Abhängigkeiten zwischen den Störungen vernachlässigt. Bei der numerischen Integration dagegen sind diese Abhängigkeiten implizit enthalten und tauchen damit in den berechneten Werten für die Störungen der Kepler-Elemente auf. Von daher können exakte numerische Vergleiche nicht gelingen.

## 8.2 Charakteristik der Elementstörungen

Wie oben bereits erwähnt verursachen die harmonischen Koeffizienten drei Typen von Störungen. Untersucht man das Spektrum dieser Einflüsse so lassen sich für bestimmte Koeffizientengruppen typische Störungen angeben.

Koeffizienten mit  $m = 0$  nennt man zonal  
 $m \neq 0$  tesseral  
 und  $m = n$  sektorial.

Man kann nun zeigen, daß säkulare Störungen allein auf die zonalen Koeffizienten ( $\bar{C}_{n0}$ ) zurückzuführen sind, wobei der Hauptanteil vom Koeffizienten  $\bar{C}_{20}$  herrührt. Dieser beschreibt die Abplattung des Erdkörpers. Da dieser Koeffizient alle anderen Koeffizienten um den Faktor  $10^3$  übersteigt, wird der Hauptanteil aller Störungen bereits mit  $\bar{C}_{20}$  erfaßt.

Die beiden wichtigsten säkularen Störungen sind die Wanderung der Knoten- und Perigäumslage. Die Variation der Perigäumslage ist abhängig von der Exzentrizität der Bahn. Desweiteren wird die mittlere Anomalie  $\bar{M}$  säkular gestört. Für den Anteil von  $\bar{C}_{20}$  erhält man mit der analytischen Störungsrechnung folgende Zusammenhänge (Kaula, 1964):

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= \bar{C}_{20} \frac{3\bar{n}a_e^2}{2a^2(1-e^2)^2} \cos i \\ \frac{d\omega}{dt} &= \bar{C}_{20} \frac{3\bar{n}a_e^2}{4a^2(1-e^2)^2} (1-5\cos^2 i) \\ \frac{d\bar{M}}{dt} &= \bar{n} - \bar{C}_{20} \frac{3\bar{n}a_e^2}{4a^2\sqrt{(1-e^2)^3}} (3\cos^2 i - 1) \\ \frac{di}{dt} &= \frac{da}{dt} = \frac{de}{dt} = 0.\end{aligned}\tag{8.2.1}$$

Die Bahnneigung  $i$ , die Exzentrizität  $e$  und die große Halbachse  $a$  werden durch  $\bar{C}_{20}$  nicht säkular gestört. Desweiteren kann man daraus erkennen, daß Polbahnen ( $i = 90$  [°]) keine Wanderung der Knotenlinie wegen  $\bar{C}_{20}$  aufweisen. Für  $i < 90$  [°] ergibt sich ein Knotenrücklauf, für  $i > 90$  [°] ein Knotenvorlauf.

Für Bahnen mit einer Bahnneigung  $i \approx 63.4$  [°], der sogenannten kritischen Bahnneigung ( $i_{krit}$ ) gehen Änderungen der Perigäumslage gegen Null, wobei zu beiden Seiten dieser Bahnneigung die säkulare Apsidenstörung verschiedenes Vorzeichen hat. Für Bahnen mit  $i < i_{krit}$  erreicht der Satellit das Perizentrum später, für  $i > i_{krit}$  dagegen früher. Umlaufzeiten, die bzgl. dem Perizentrum ausgedrückt werden, sind wegen der Wanderung der Apsidenlinie nicht mehr konstant. Mit den Formeln (8.2.1) können dann Vergleichswerte für die mit der Vorgehensweise 8.3 bestimmten Änderungsraten berechnet werden.

Langperiodische Störungen werden durch die Wanderung der Apsidenlinie hervorgerufen und haben oft Wellenlängen von mehreren 100 Tagen. Wiederum wirken besonders zonale Koeffizienten. Sie bewirken langperiodische Störungen in  $\Omega$ ,  $\omega$ , sowie  $e$  und  $i$ . In Anbetracht des relativ kurzen berechneten 8-h-Orbits ist die Unterscheidung zwischen säkularer und langperiodischer Störung in aus Ephemeriden abgeleiteten Störungen u.U. nicht einfach.

Kurzperiodische Störungen hängen mit der Umlaufzeit des Satelliten und der Rotation der Erde zusammen. Sie werden allein durch sektorielle und tesserale Koeffizienten hervorgerufen. Als längste Periode einer Störung, verursacht durch eine tesserale Harmonische der Ordnung  $m = 1$ , ist ein Tag. Zusammenfassend kann man eine Übersicht angeben, welche Typen von Störungen auf ein Kepler-Element wirken. Die Gesamtstörung ist dann die Überlagerung aller möglichen Einzelstörungen.

Parameter	Säkular	Langperiodisch	Kurzperiodisch
$A$	-	-	x
$E$	-	x	x
$I$	-	x	x
$\Omega$	x	x	x
$\omega$	x	x	x
$\bar{M}$	x	x	x

Tabelle 8.2: Charakteristik von Elementstörungen (Seeber, 1989)

### 8.3 Berechnung von Kepler-Elementen aus Ephemeriden

Ausgehend von den numerisch integrierten Ephemeriden kann man für jeden Integrationszeitpunkt einen Satz von sechs Kepler-Elementen angeben die für diesen Zeitpunkt gültig sind. Die Variation der Kepler-Elemente von Zeitpunkt zu Zeitpunkt kann dann quantitativ und qualitativ mit Werten aus der analytischen Störungsrechnung verglichen werden.

Es gelten zur Berechnung der Kepler-Elemente aus gegebenen Ephemeriden folgende Formeln:

$$a = -\frac{GM_{Erde}r}{v^2r - 2GM_{Erde}},$$

$$\tan \Omega = \frac{C_{o1}}{-C_{o2}}, \quad \tan i = \frac{\sqrt{C_{o1}^2 + C_{o2}^2}}{C_{o3}}, \quad (8.3.1)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}, \quad \cos \omega = \langle \bar{K}, \bar{P} \rangle,$$

mit:  $\bar{C} = \bar{r} \times \bar{v}$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_o = \frac{\bar{C}}{|\bar{C}|} = \begin{bmatrix} C_{o1} \\ C_{o2} \\ C_{o3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = \frac{\bar{r}}{r} \cos \nu - \left( \bar{C}_o \times \frac{\bar{r}}{r} \right) \sin \nu$$

$$p = \frac{C^2}{GM_{Erde}}$$

$$\cos \nu = \frac{p - r}{e \cdot r}$$

### 8.4 Ergebnisse: Störungen aufgrund des anisotropen Gravitationsfeldes

Zunächst wurde der Einfluß eines anisotropen Gravitationsfeldes entwickelt als Kugelfunktionsreihe bis Grad und Ordnung  $n_{max} = m_{max} = 10$  auf den Betrag des Ortsvektors dargestellt. Abbildung 8.2 zeigt das Ergebnis. In der oberen Graphik ist die Differenz der Beträge der Ortsvektoren der ungestörten und der gestörten Bahn dargestellt. Die Differenz liegt nach ca. 5 Umläufen im Bereich von  $0 \text{ [km]} \leq d \leq 9 \text{ [km]}$ . Da  $d$  stets größer als Null ist sieht man, daß die gestörte Bahn stets betragsmäßig innerhalb der ungestörten Bahn liegt.  $d$  erreicht im Apogäum die größten Werte ( $8 - 9 \text{ [km]}$ ), im Perigäum ist  $d < 1 \text{ [km]}$ . Wegen der exzentrischen Bahn wirken die Störungen nicht gleichmäßig, sondern variieren mit dem Umlauf des Satelliten. Die Anzahl der Satellitenumläufe läßt sich direkt aus dem Verlauf von  $d$  ablesen.

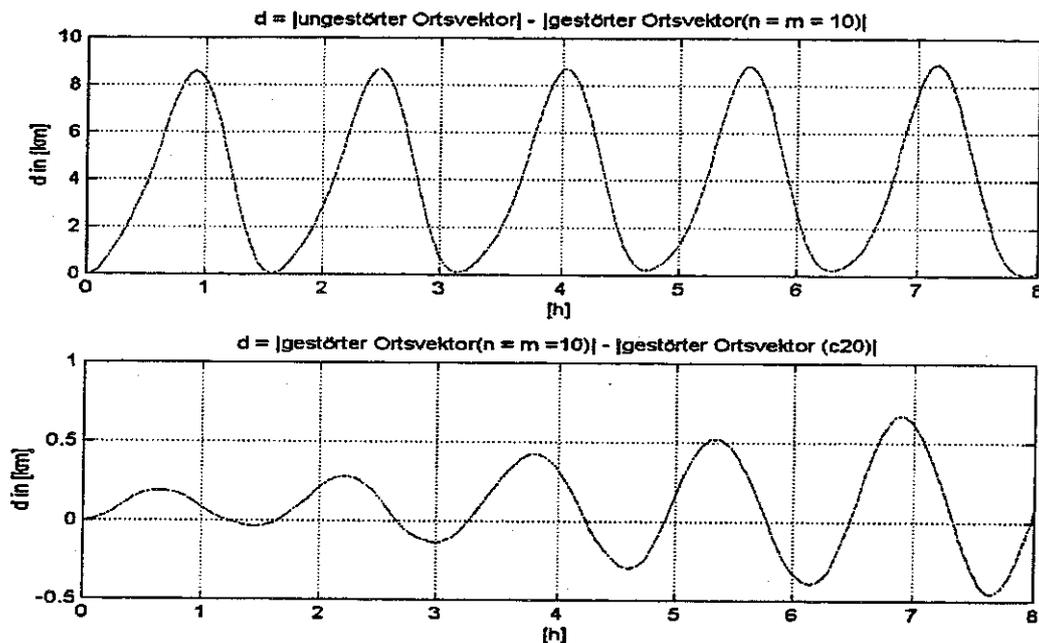


Abbildung 8.2: Störung einer Satellitenbahn durch Gravitationsfeld entwickelt bis  $n_{max} = m_{max} = 10$

Berechnet man eine nur vom  $\bar{C}_{20}$ -Term gestörte Bahn, bildet anschließend die Beträge der Ortsvektoren und zieht diese von den Beträgen der mit einem 10er Feld gestörten Ortsvektoren ab, so erhält man den Einfluß aller Koeffizienten dieses 10er Feldes ausschließlich des  $\bar{C}_{20}$ -Terms.

Dies ist in der unteren Graphik von Abbildung 8.2 dargestellt. Der Hauptanteil der Störungen auf eine wegen der Inhomogenität des Gravitationsfeldes der Erde verursachten Störung beruht wie zu erwarten auf dem  $\bar{C}_{20}$ -Term. Die restlichen harmonischen Koeffizienten verursachen nach ca. 5 Umläufen Abweichungen kleiner  $\pm 0.75 \text{ [km]}$ , wobei die Abweichungen in der Zeit zunehmen.

In einem weiteren Schritt wurden die Störungen verursacht durch das 10er Feld bzgl. der Kepler-Elemente ausgedrückt. Dazu wurde mit den Formeln (8.3.1) für jeden Zeitpunkt solche Elemente berechnet und mit den konstanten Elementen der ungestörten Kepler-Bahn verglichen. In Abbildung 8.3 ist die Störung auf die große Halbachse dargestellt. Man sieht kurzperiodische Störungen auf die Halbachse im Bereich  $\pm 4 - 5 \text{ [km]}$ . Dies ist für  $a$  eine charakteristische Elementstörung, die nur solche kurzperiodischen Störungen aufweist (vgl. Tabelle 1).

Die Wanderung der Knotenlinie ist in Abbildung 8.4 dargestellt. Entsprechend der Bahnneigung ergibt sich eine negative Wanderungsrate der Knotenlinie, d.h.  $\Omega$  wird im Lauf der Zeit kleiner bzw. die Knotenlinie wandert Richtung Westen. Aus den Ephemeriden kann man eine mittlere Drehrate von

$\frac{d\Omega}{dt} = -4.45 \frac{\circ}{\text{Tag}}$  ableiten. Mit der Formel aus (8.3.1) ergibt sich für den Anteil von  $\bar{C}_{20}$  ein Wert von  $\frac{d\Omega}{dt} = -3.98 \frac{\circ}{\text{Tag}}$ . Der Hauptanteil rührt also von der Erdabplattung her.

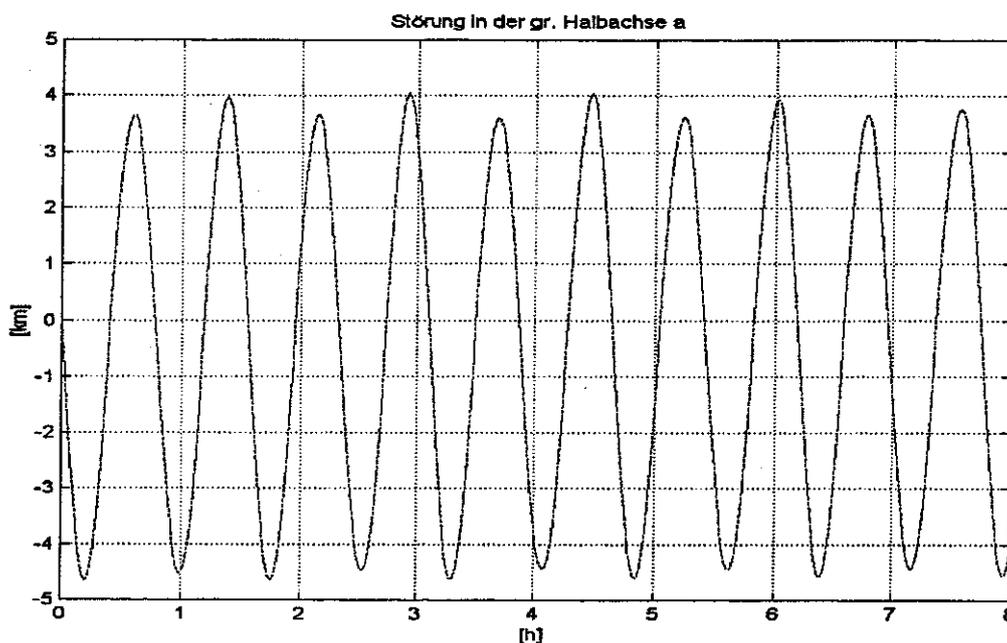


Abbildung 8.3: periodische Störung der Halbachse  $a$ ,  $\frac{da}{dt}$

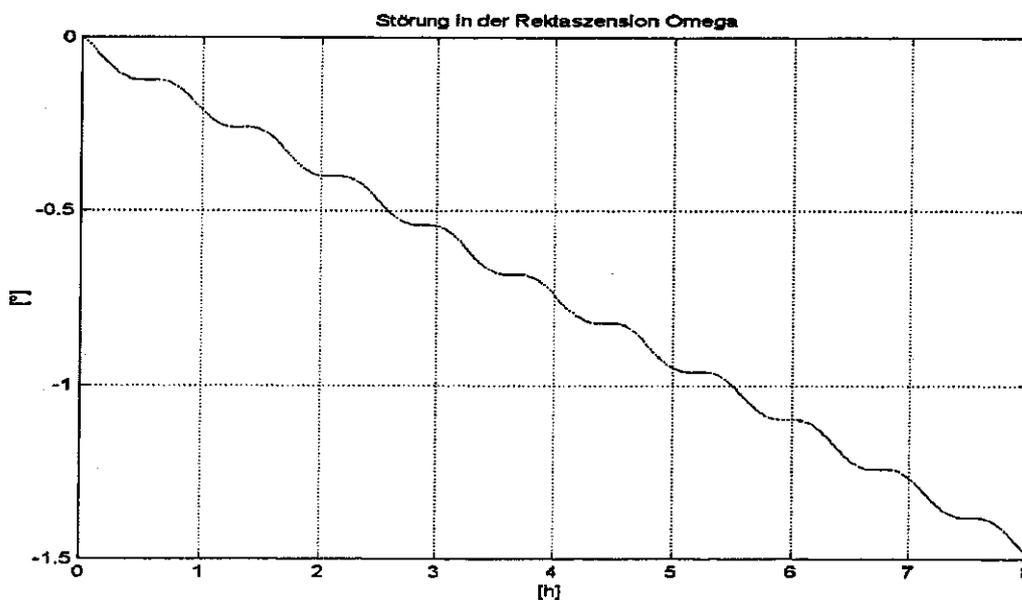


Abbildung 8.4: Störung von  $\Omega$ ,  $\frac{d\Omega}{dt}$

Die übrigen Koeffizienten und Abhängigkeiten zwischen den Einzelstörungen bedingen die Differenz der beiden numerischen Ergebnisse für die Drehrate  $\frac{d\Omega}{dt}$ . Wie man am Verlauf von  $\frac{d\Omega}{dt}$  erkennen kann ist die säkulare Störung von kurzperiodischen Störungen überlagert. Langperiodische Störungen sind gemäß der Störungsrechnung ebenfalls enthalten, können jedoch aus der Graphik wegen der Kürze des

Bahnogens nicht abgelesen werden. Für Abbildung 8.4 wurde aus den Ephemeriden für jeden Zeitpunkt ein Wert für die Rektaszension des aufsteigenden Bahnknotens  $\Omega(t)$  berechnet und anschließend das arithmetische Mittel  $\bar{\Omega}$  von jedem  $\Omega(t)$ -Wert abgezogen.

Die Bahnneigung  $i$  und die numerische Exzentrizität  $e$  weisen nur kurz- und langperiodische Störungen auf. In den Abbildungen 8.5 und 8.6 sind v.a. kurzperiodische Störungen auf diese Elemente erkennbar.

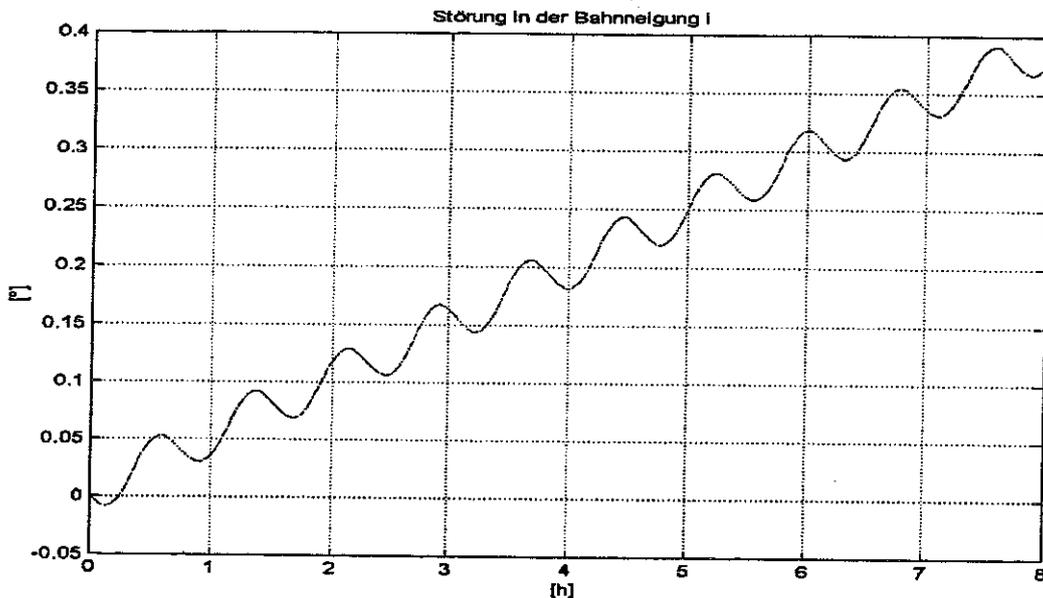


Abbildung 8.5: Störung der Bahnneigung  $i$ ,  $\frac{di}{dt}$

Die Zunahme der Bahnneigung ist als Ausschnitt einer langperiodischen Störung zu interpretieren. Auch in der Graphik für die Störung der numerischen Exzentrizität sind kurzperiodische Anteile direkt sichtbar. Langperiodische Einflüsse dagegen sind unmittelbar nicht erkennbar.

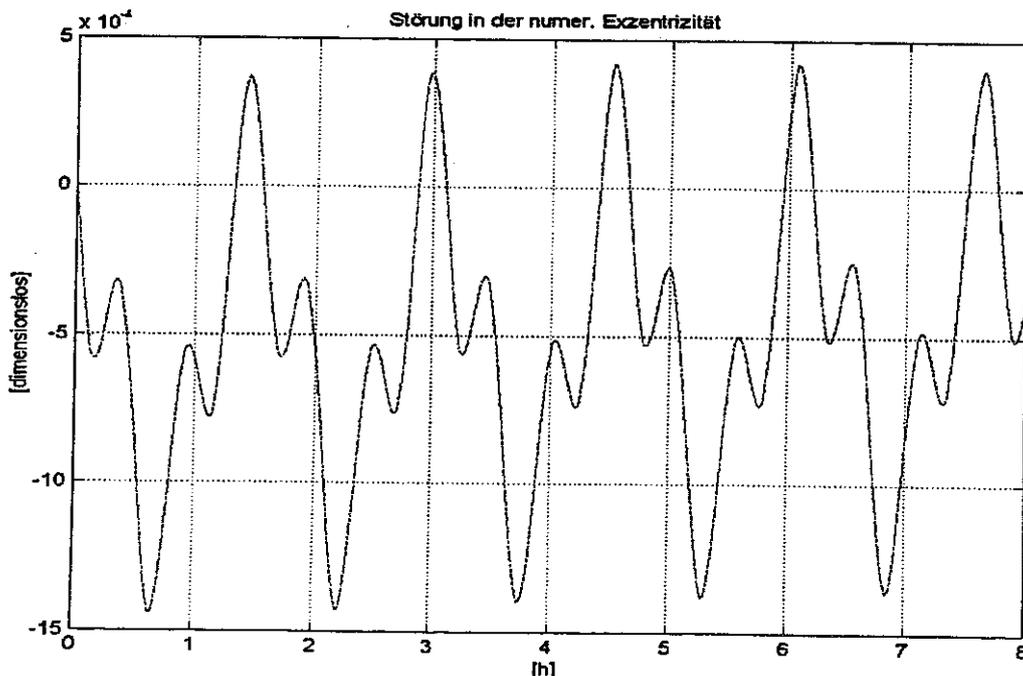


Abbildung 8.6: Störung von  $e$ ,  $\frac{de}{dt}$

Abschließend wurde die Drehrate der Apsidenlinie  $\frac{d\omega}{dt}$  untersucht. Aus den berechneten Ephemeriden kann man einen Wert von  $\frac{d\omega}{dt} = 0.693 \frac{^\circ}{\text{Tag}}$  ableiten. Ein entsprechender Wert nur wegen Störung durch  $\bar{C}_{20}$  ist  $\frac{d\omega}{dt} = 0.996 \frac{^\circ}{\text{Tag}}$ . Wiederum resultieren die Unterschiede aus den Anteilen der übrigen Koeffizienten. Mit  $e = 0.01$  ist die Bahn des Satelliten relativ gering exzentrisch, so daß sich insgesamt eine relativ geringe Wanderung der Apsidenlinie ergibt. Abbildung 8.7 zeigt das Ergebnis.

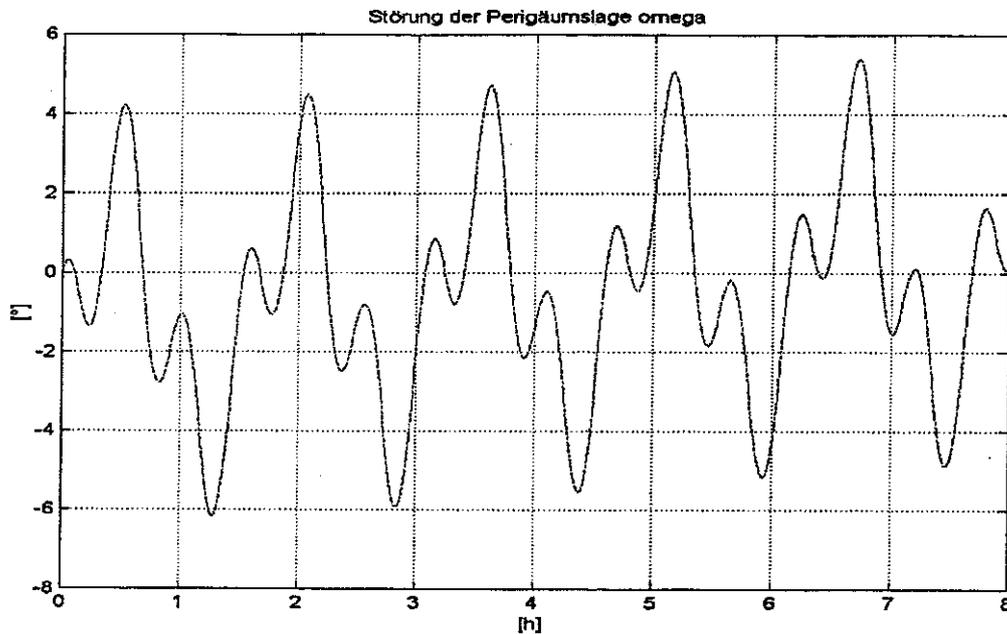


Abbildung 8.7: Störung von  $\omega$ ,  $\frac{d\omega}{dt}$

### 8.5 Bewertung: Störung aufgrund des anisotropen Gravitationsfeldes

Zusammenfassend kann man sagen, daß die zu erwartenden Störungen auf die Bahn eines Satelliten wegen eines inhomogenen Gravitationsfeldes der Erde mit den numerisch integrierten Ephemeriden qualitativ verifiziert werden konnten. Vergleichswerte für die Drehrate der Knotenlinie und die Drehrate der Apsidenlinie aus der analytischen Störungsrechnung bzw. den berechneten Ephemeriden stimmen gut überein. Zusammen mit den Ergebnissen des Abschnitts 7. Jacobi-Integral wird das Modell für das anisotrope Gravitationsfeld als richtig bestätigt.

## 9. Interpolation von Präzessions-, Nutationswinkeln

Der Übergang vom erdfesten Bezugssystem ins raumfeste Bezugssystem (oder umgekehrt) wird durch Drehmatrizen beschrieben, deren Argumente die momentane Präzessions-, Nutationswinkel, sowie die momentane Schiefe der Ekliptik sind. Diese Winkelargumente sind für eine Beschreibung der gegenseitigen Orientierung oben genannter Bezugssysteme unerlässlich.

$$\vec{r}_{CTS} = SNPR_1(-\varepsilon_0)\vec{r}_{CIS}, \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } P &= R_3(-z_A)R_2(\theta_A)R_3(-\zeta_A) \\ N &= R_1(-\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon)R_3(-\Delta\Psi)R_1(\varepsilon_0) \\ S &= R_3(GMST) \end{aligned}$$

Da SATLAB 1.0 die Polbewegung bislang nicht berücksichtigt, wurden in (9.1) entsprechende Ausdrücke weggelassen.

Die Winkelargumente der Präzession, Nutation und Schiefe der Ekliptik (vgl. Kapitel 2.3, 2.4, 2.5) werden mit Hilfe von vereinbarten Theorien berechnet (vgl. Kapitel 2.4, 2.5).

In SATLAB 1.0 ist das Bezugssystem der Bahnintegration das quasi-inertiale ICRF in geozentrischer, ekliptikaler Lage. Die auf den Satelliten wirkenden Beschleunigungen werden aber in dem jeweils geeigneten System berechnet, also z.B. Beschleunigung wegen Gravitationsfeld der Erde im erdfesten Bezugssystem oder Drittkörperstörung im ICRF in geozentrischer, ekliptikaler Lage. Von daher ist es notwendig, die Transformationen bzw. Rücktransformationen in (9.1) für jeden Rechenschritt der numerischen Integration zu bestimmen. Dies kann je nach verwendeter Präzessions-, Nutationstheorie und der gewählten Integrationsschrittweite (z.B.  $dt = 60$  [sec]) sehr mühsam und damit zeitaufwendig sein. Oft wird daher als Bezugssystem der Integration der Bewegungsgleichung das wahre Äquinoktium des Datums (TDS) verwendet. Dadurch sind zunächst nur Rotationen für Erddrehung und Polbewegung auszuwerten. Jedoch müssen die wegen Präzessions- und Nutationsbewegung entstehenden Trägheitskräfte berücksichtigt werden.

Dazu kann man, wie *Reigber* in *Reference Frames in Astronomy and Geophysics* (1989) anregt, die Winkel für Präzession und Nutation, sowie entsprechende Änderungsraten der Winkelargumente für den zu berechnenden Orbit für größere Intervalle  $\Delta t$  innerhalb der Zeitdauer des Orbits mit Hilfe der exakten Theorie vorausberechnen, um dann mit diesen Werten während der Integration entsprechende Ausdrücke für den jeweiligen Integrationszeitpunkt zu interpolieren.

Diese Idee wurde im Rahmen dieser Diplomarbeit in abgewandelter Form aufgegriffen. Das Bezugssystem der Bahnintegration bleibt das ICRF in geozentrischer, ekliptikaler Lage. Statt nun die Theorien für Präzession, Nutation für jeden Integrationsschritt auszuwerten, werden für den Bahnintegrationszeitraum mit einem festen Zeitintervall  $\Delta t$  die Winkelargumente für Präzession, Nutation und Schiefe der Ekliptik vor der Integration mit der exakten Theorie bestimmt und tabelliert. Während der numerischen Integration der Bahn werden dann entsprechende Winkelargumente mit Hilfe dieser Tabellen interpoliert. Wegen der relativ geringen Änderungsraten in den Winkeln für Präzession und Nutation wird eine lineare Interpolationsvorschrift vorgeschlagen. Die Idee ist also eine Verkürzung der Rechenzeit durch Interpolation der Winkelargumente für Präzession, Nutation und Schiefe der Ekliptik aus vorausberechneten Werten zu erzielen.

In diesem Abschnitt wird diese Vorgehensweise untersucht und überprüft, ob damit eine Verkürzung der Rechenzeit bei entsprechenden numerischen Ergebnissen zu erzielen ist.

## 9.1 Vorgehensweise

Es wurde zunächst ein 5-Tage-Orbit eines GPS-Satelliten mit dem m-File numsat.m auf zwei Arten berechnet.

- 1) Die Winkel für Präzession und Nutation wurden mit den m-Files Prezwick2.m, Nutwink2.m für jeden Integrationszeitpunkt ausgewertet und daraus entsprechende Drehmatrizen berechnet. Die so berechnete Bahn dient als Referenzbahn. Prezwick2.m und Nutwink2.m enthalten die vom IERS empfohlenen Theorien, wie sie in den Kapiteln 2.4, 2.5 beschrieben sind.
- 2) Die Winkel der Präzession und Nutation wurden mit Hilfe der m-Files Prezwick2.m und Nutwink2.m für die Bahn für ein Zeitintervall von  $\Delta t = 6$  [h] vor der eigentlichen Integration berechnet (m-File prenutprez.m). Die so berechneten Werte werden in den Matrizen Nuta.mat, Prez.mat und epsilon.mat gespeichert. In der Integration werden diese gespeicherten Matrizen aufgerufen und entsprechende Winkel für den jeweiligen Integrationszeitpunkt durch lineare Interpolation gewonnen.

Die auf diese Weisen berechneten Bahnen werden bzgl. Abweichungen ihrer Ephemeriden und der benötigten Rechenzeiten untersucht. Beide Bewegungen wurden nur unter Einfluß des Kepler-Terms des Gravitationsfeldes der Erde numerisch integriert (d.h. ungestörte Bahnen).

## 9.2 Lineare Interpolation

Unter der Annahme, daß sich die Winkelargumente für entsprechend kurze Zeiträume nur linear innerhalb dieser Zeiträume ändern, werden die Winkel aus vorausberechneten Werten nach folgender Vorschrift interpoliert.

Es sei  $t_j$  der jeweilige Integrationszeitpunkt, für den gilt

$$t_j \in [T_i, T_{i+1}], \text{ wobei}$$

$T_i, T_{i+1}$  Zeitpunkte der vorausberechneten Präzessions-, Nutationswinkel sind.

$$T = [T_1, T_2, \dots, T_i, T_{i+1}, \dots, T_n]$$

$$\text{hier: } \Delta t = T_{i+1} - T_i = 6 \text{ [h]}$$

Gesucht ist nun die Größe  $G(t_j)$  mit  $G \in [z_A, \theta_A, \zeta_A, \Delta\psi, \varepsilon_0, \Delta\varepsilon]$ . Diese wird nun mit Hilfe folgender linearen Interpolationsvorschrift berechnet.

Es gilt:

$$G(t_j) = G(T_i) + m \cdot (G(T_{i+1}) - G(T_i)), \quad (9.2.1)$$

mit  $m = \frac{dt_j}{\Delta t}$  und

$$dt_j = t_j - T_i.$$

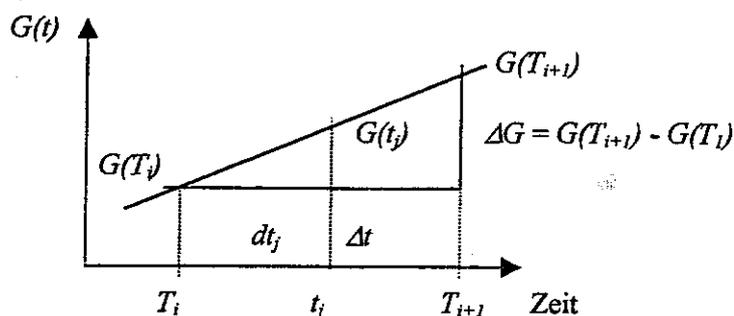


Abbildung 9.1: Lineare Interpolation

$G(T_i)$ ,  $G(T_{i+1})$  sind darin die mit Hilfe der ‚exakten‘ Theorien aus `Prezwink2.m` und `Nutwink2.m` vorausberechneten Winkel. Für den Zeitraum  $\Delta t = T_{i+1} - T_i = 6$  [h] können die Änderungen der  $G(t_j)$  als linear betrachtet werden. Die jeweilige Größe  $G(t_j)$  ergibt sich dann aus der vorausberechneten Größe  $G(T_i)$ , wobei  $T_i < t_j$ , an der ein skaliertes Zuschlag  $m \cdot \Delta G$  angebracht wird.

### 9.3 Testparameter

Für den Satelliten wurden mit folgenden Kepler-Elementen Startwerte für denselben im geozentrischen, ekliptikalen Newton-System berechnet.

Der Satellit startet im Perigäum am 6.5.1998 0<sup>h</sup> TDT. Als Endzeitpunkt wurde der 11.5.1998 0<sup>h</sup> TDT gewählt. Die Orbit beträgt also fünf Tage. Alle  $dt = 120$  [sec] wurden Ephemeriden berechnet. Die Bewegung ist gravitativ und nichtgravitativ ungestört. Zur Integration der Bewegungsgleichungen wird das Mehrschrittverfahren `ode113` verwendet.

$a$ in [km]	26560
$e$	0
$i$ in [°]	55
$\Omega$ in [°]	30
$\omega$ in [°]	60

Tabelle 9.1: Satellitenparameter, Interpolation Präzessions-, Nutationswinkel

Die Satellitenparameter gelten bzgl. dem Ekliptiksystem. Die Bahn des Satelliten entspricht in etwa einer GPS-Satellitenbahn. Es wurde ein Orbit mit einer großen Halbachse gewählt damit sich etwaige Orientierungsunterschiede, die aus der Berechnung der Bahn mit interpolierten Nutations- und Präzessionswerten herrühren können, besonders deutlich werden.

Die Dauer des Orbits von fünf Tagen hat für aus der Interpolation resultierende mögliche Orientierungsunterschiede der beiden Bahnen ebenfalls eine Bedeutung. Es werden zwar alle sechs Stunden Präzessions- und Nutationswinkel verwendet, die mit Hilfe der ‚exakten‘ Theorien vorausberechnet wurden, so daß die Abweichungen dieser Winkel innerhalb eines solchen Intervalls relativ gering bleiben. Jedoch verursachen Abweichungen in den Winkeln, die innerhalb eines 6-Stunden-Intervalls interpoliert werden Abweichungen in den Ephemeriden, die mit der Zunahme der Dauer des Integrationsintervalls anwachsen und über ein tolerierbares Maß hinausgehen können. Die Ursache dafür liegt in den für das jeweilige Interpolationsverfahren typischen Rundungs – bzw. Absolutfehlern. Außerdem wurde ein 5-Tage-Orbit gewählt, um Unterschiede in der Rechenzeit deutlich sichtbar zu machen.

### 9.4 Ergebnisse: Interpolation von Präzessions-, Nutationswinkeln

Die Abweichungen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  in den kartesischen Komponenten bzgl. dem Ekliptiksystem der beiden Bahnen für den 5-Tage-Orbit liegen im Submillimeterbereich (vgl. Abbildung 9.2). Dabei werden die maximalen Abweichung jeweils innerhalb des 6-Stundenintervalls erreicht. Damit wird die oben vorgeschlagene Möglichkeit als Alternative zur expliziten Berechnung von Präzessions- und Nutationswinkeln für jeden Integrationsschritt bestätigt. Die sich ergebenden Abweichung in den Bahnen sind vernachlässigbar klein.

Hinsichtlich der Rechenzeit ergab sich jedoch nicht der gewünschte Effekt einer Verkürzung. Unter Verwendung der expliziten Berechnung der Präzessions- und Nutationswinkel ergab sich eine Rechenzeit von  $t_R = 53.17$  [sec]. Im Fall der Interpolation der entsprechenden Winkel ergab sich eine Rechenzeit von  $t_{Rint} = 64.70$  [sec]. Statt der gewünschten Verkürzung ergab sich also eine Verlängerung der Rechenzeit um etwa 22 %. Für einen 1-Tag-Orbit und einen 10-Tage-Orbit ergaben sich ähnliche Werte (vgl. Tabelle 9.2).

Die Ursache für die kürzere Rechenzeit, trotz der expliziten Auswertung der Formeln für Präzession und Nutation für jeden Integrationsschritt liegt darin, daß der zunächst scheinbar rechenintensive Anteil der Auswertung der Nutationsreihen mit je 106 Gliedern in MATLAB bequem matrizenorientiert programmiert werden kann (vgl. m-File `Nutwink2.m`). Da die entsprechenden

Glieder als Vektor bzw. Matrix gespeichert sind und bei der Verarbeitung als ein ‚Objekt‘ in MATLAB betrachtet werden, ergibt sich eine geringere Rechenzeit, als bei der Interpolation. Dort muß für jeden Integrationsschritt zunächst der entsprechende Wert aus Matrizen bzw. Vektoren herausgefunden werden und kann dann erst weiterverarbeitet werden.

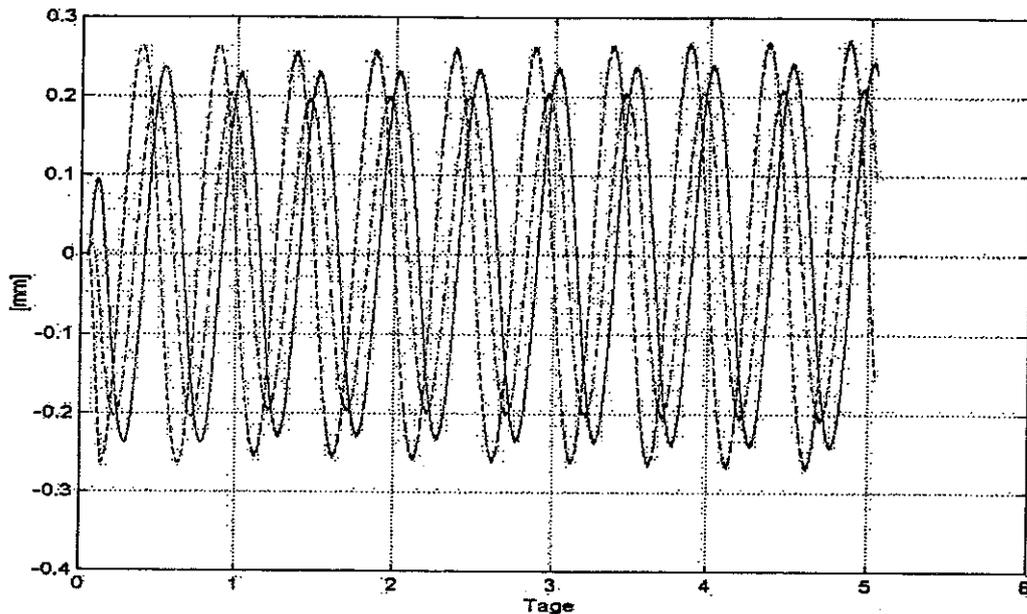


Abbildung 9.2: Abweichungen der kartesischen Komponenten für 5-Tage-Orbit

Von daher wird die explizite Berechnung der Präzessions- und Nutationswinkel für jeden Integrationspunkt mit den m-Files PrezWink2.m und NutWink2.m beibehalten.

	$t_{\text{explizit}} [\text{sec}]$	$t_{\text{interp.}} [\text{sec}]$	$\delta t [\%]$
1-Tag-Orbit	11.87	14.55	22.6
5-Tage-Orbit	53.17	64.7	21.7
10-Tage-Orbit	107.43	128.63	19.7

Tabelle 9.2: Rechenzeiten für Satellitenorbits mit ‚exakten‘ und linear interpolierten Nutations-, Präzessionswinkeln

### 9.5 Bewertung: Interpolation von Präzessions-, Nutationswinkeln

Die alternative Berechnung von Winkeln für Präzession und Nutation durch lineare Interpolation vorausberechneter Werte ergibt vernachlässigbare Abweichungen für Satellitenephemeriden im Vergleich zur Berechnung von Satellitenephemeriden unter Auswertung der exakten Theorien für Präzession und Nutation. Eine Verringerung der Rechenzeit konnte jedoch nicht erzielt werden.

## 10. Einfluß von Drittkörpern

In SATLAB 1.0 sind zwei Modelle zur Berücksichtigung von Störbeschleunigungen aufgrund der Gravitationswirkung von sogenannten Drittkörpern implementiert. In diesem Abschnitt wird die Leistungsfähigkeit der beiden Module im Hinblick auf Differenzen in den integrierten Satellitenephemeriden sowie der benötigten Rechenzeit mit verschiedenen Orbits untersucht. Wesentliches Unterscheidungskriterium der gewählten Testorbits ist deren Flughöhe bzw. große Halbachse, da die Drittkörperstörung von Seiten des Satelliten durch den Abstand desselben von den Drittkörpern abhängt. Wie nachfolgende Testrechnungen zeigen werden, rührt der Hauptanteil der Drittkörperstörungen von Sonne und Mond her. Diese wurden in SATLAB 1.0 als default-Werte bei der Berücksichtigung von Drittkörpern eingestellt, d.h., sobald ein Modell für die Drittkörperstörung angewählt wird, ist der Einfluß Sonne und Mond in der Integration enthalten. Darüber hinaus können optional folgende Planeten mit einbezogen werden:

Drittkörper	Einstellungen	GM-Werte in $\left[\frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}\right]$
Sonne	default	$1.327124 \cdot 10^{11}$
Mond	default	$4.902671 \cdot 10^3$
Mars	optional	$4.282830 \cdot 10^4$
Venus	optional	$3.248585 \cdot 10^5$
Saturn	optional	$3.794061 \cdot 10^7$
Jupiter	optional	$1.267128 \cdot 10^8$

Tabelle 10.1: Drittkörper in SATLAB 1.0, GM-Werte IERS-Conventions 1996

Der Einfluß der übrigen Planeten des Sonnensystems ergab bei Testrechnungen vernachlässigbar geringe Werte, so daß auf deren Berücksichtigung verzichtet wurde. Mit diesen Störkörpern wurden nun die in Tabelle 10.2 zusammengefaßten Testrechnungen durchgeführt.

Test	Störkörper	Satellit	Modell
A1	Sonne, Mond	niedrigfliegend	Ephemerideninterpolation
A2	Sonne, Mond	hochfliegend	Ephemerideninterpolation
B	alle Störkörper aus Tab. 10.1	hochfliegend	Ephemerideninterpolation
C1	Sonne, Mond	niedrigfliegend	mittlere Bahnelemente
C2	Sonne, Mond	hochfliegend	mittlere Bahnelemente

Tabelle 10.2: Testrechnungen für Drittkörper

### 10.1 Testparameter

Aus gewählten Kepler-Elementen wurde mit dem m-file start.m Startwerte für einen niedrig- und einen hochfliegenden Satelliten bzgl. dem geozentrischen Ekliptiksystem berechnet. Die beiden Orbits unterscheiden sich in den Kepler-Elementen nur in ihrer großen Halbachse. Tabelle 10.3 faßt die gewählten Kepler-Elemente zusammen.

Kepler-Elemente	niedrig	hoch
$a$ in [km]	7000	26560
$e$	0.01	0.01
$i$ in $^\circ$	55	55
$\Omega$ in $^\circ$	30	30
$\omega$ in $^\circ$	60	60

Tabelle 10.3: Satellitenparameter, Einfluß von Drittkörpern

Integrationsbeginn:  $t_{Start} = [1998\ 6\ 30\ 12.0]$  (TDT)  
 Integrationsende:  $t_{Ende} = [1998\ 6\ 30\ 15.0]$  (TDT)  
 Zeitinkrement:  $dt = 60$  [sec]

Die Satelliten starten jeweils zum Zeitpunkt  $t_{Start}$  im Perigäum. Damit sind die Startwerte der numerischen Integration eindeutig festgelegt. Die Störung auf die Bahn des Satelliten rührt allein von Drittkörpern her; für das Gravitationsfeld der Erde wurde nur der Zentralterm zugelassen. Für jeden Testfall wurde als Referenzbahn eine Bahn unter Einfluß des Zentralterms numerisch integriert. Anschließend wurde Koordinatendifferenzen zwischen gestörten und ungestörten Ephemeriden bzgl. dem geozentrischen, inertialen Ekliptiksystem berechnet.

## 10.2 Ergebnisse: Einfluß von Drittkörpern

Zunächst wurde der Einfluß aufgrund der Gravitationswirkung von Sonne und Mond auf die Bahn des niedrigfliegenden Satelliten untersucht (Test A1). Abbildung 10.1 zeigt das Ergebnis für einen 3-h-Orbit. Dargestellt sind die Koordinatendifferenzen der ungestörten und gestörten Ephemeriden (beide Bahnen wurden numerisch integriert). Es ergeben sich Abweichungen bis zu  $\pm 6$  [m]. In den Beträgen der ungestörten und gestörten Ortsvektoren erreicht die Differenz einen maximalen Abweichungswert von  $-1.5$  [m].

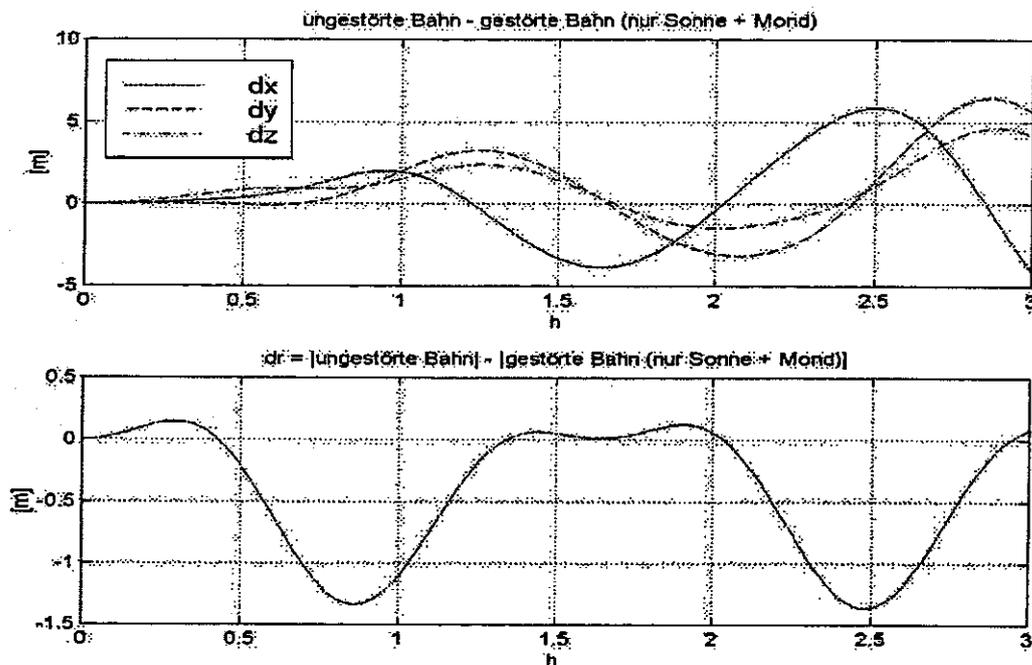


Abbildung 10.1: Einfluß Sonne, Mond auf 3-h-Orbit eines niedrigfliegenden Satelliten

Für einen hochfliegenden Satelliten (Test A2) erreichen die Abweichungen wegen der Drittkörperstörung verursacht durch Sonne und Mond z.T. wesentlich größere Beträge. Dies zeigt die allgemeine Zunahme der Größenordnung einer Drittkörperstörung mit Zunahme der großen Halbachse einer Satellitenbahn und der damit verbundenen Verringerung des Abstandes zum jeweiligen Drittkörper, die aus dem Modell für die Drittkörperstörung abgelesen werden kann. In diesem konkreten Fall betragen die maximalen Koordinatendifferenzen zwischen ungestörten und gestörten Ortsvektoren für  $dx = 43.6$  [m], für  $dy = 3.3$  [m] und für  $dz = 141.1$  [m]. In den Beträgen der Ortsvektoren wird eine maximale Abweichung von  $dr = 35$  [m] erreicht (vgl. Abbildung 10.2).

Da das Zeitintervall mit 3 [h] für den hochfliegenden Satelliten sehr kurz ist (der Satelliten durchläuft in diesem Zeitraum nur etwa ein Drittel seiner Bahn) und damit die Dauer der Störungen von Sonne und Mond ebenfalls kurz sind, wurde für diesen Satelliten ein 3-Tage-Orbit berechnet.

Aus Abbildung 10.3 können die verursachten Störungen in den Richtungen und den Beträgen zwischen ungestörten und gestörten Bahnvektoren abgelesen werden. Die Koordinatendifferenzen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  erreichen Werte bis zu 5 [km]. In den Beträgen erreichen die Abweichungen eine Größenordnung von ca. 500 [m].

Die Drittkörperstörung von Sonne und Mond bewirken in starkem Maße eine Änderung der Richtung der Ortsvektoren des Satelliten, die in der Zeit wächst (Aufschaukeln), während sein Abstand vom Geozentrum im Vergleich zur ungestörten Bahn relativ geringe Störungen erfährt und nur langsam in der Zeit anwächst. Die maximale Abweichung wird bereits über den ersten Satellitenumlauf erreicht, danach erkennt man eine mit dem Satellitenumlauf gehende periodische Abweichung in  $dr$ , die langsam in der Zeit zunimmt.

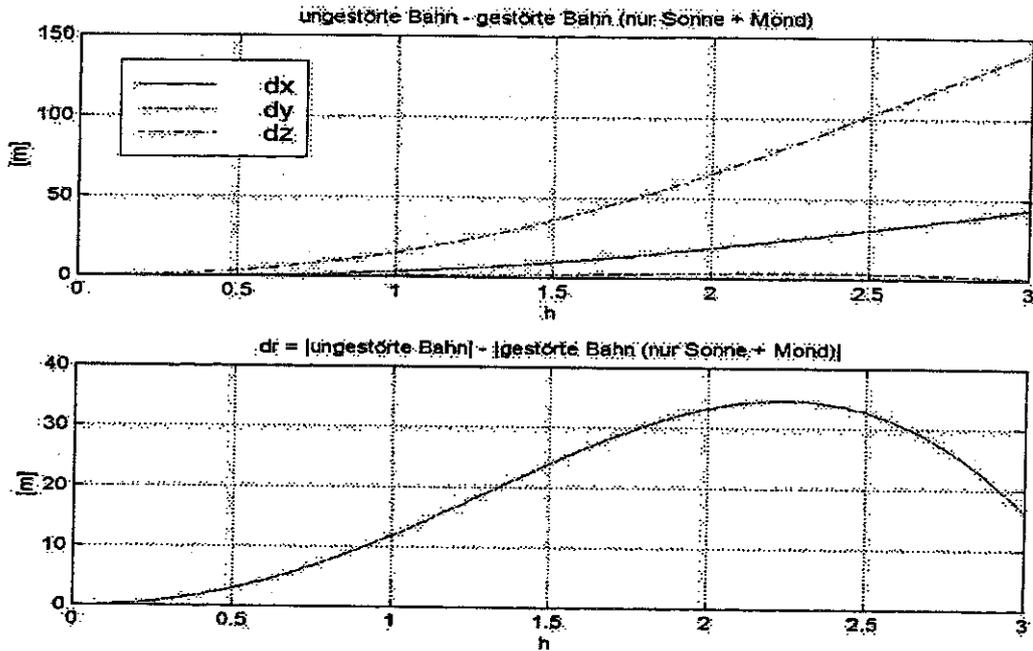


Abbildung 10.2: Einfluß Sonne, Mond auf 3-h-Orbit eines hochfliegenden Satelliten

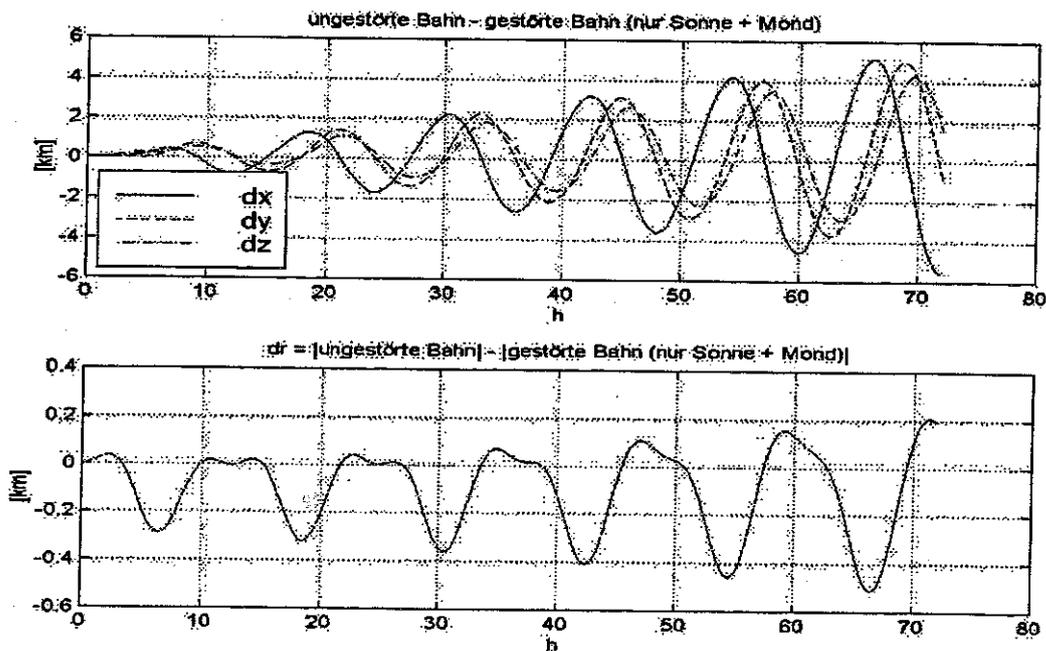


Abbildung 10.3: Einfluß Sonne, Mond auf 3-Tage-Orbit eines hochfliegenden Satelliten

Der nächste Test diente der Untersuchung des Einflusses der übrigen in SATLAB 1.0 zugelassenen Störkörper (Mars, Venus, Saturn, Jupiter) auf die Bahn des hochfliegenden Satelliten für den 3-Tage-Orbit (Test B). In der Integration dieser Bahn wurden also zusätzlich zu Sonne und Mond die Drittkörper Mars, Venus, Saturn und Jupiter berücksichtigt. Die so berechneten Ephemeriden wurden von den Ephemeriden, die nur die gravitative Störung von Sonne und Mond beinhalten abgezogen.

Damit ergab sich ein numerischer Vergleich des Einflusses der übrigen Störkörper für die gestörte Satellitenbewegung (vgl. Abbildung 10.4). Wiederum sieht man das Aufschaukeln in den Differenzen  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  mit dem Satellitenumläufen, während die Amplitude der radialen Abweichung  $dr$  nur relativ langsam anwächst.

Insgesamt sind die Abweichungen relativ gering (im Vergleich zum Einfluß von Sonne und Mond). Dennoch werden Abweichungen im [cm]-Bereich erreicht, so daß für eine möglichst

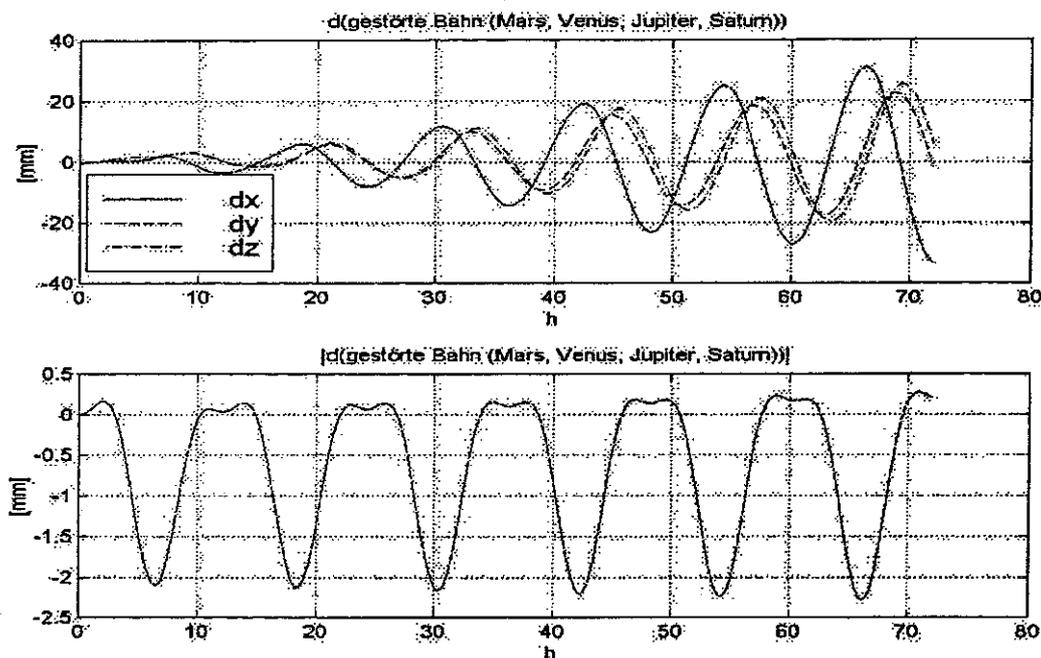


Abbildung 10.4: Einfluß Mars, Venus, Jupiter, Saturn auf hochfliegenden Satelliten

genaue Ephemeridenbestimmung eines hochfliegenden Satelliten Mars, Venus, Saturn und Jupiter in der Bahnintegration berücksichtigt werden sollten.

Daß in  $dr$  die maximale Größenordnung der Störung bereits im ersten Umlauf nahezu erreicht wird und dann nur relativ langsam in der Zeit zunimmt liegt daran, daß sich die Positionen der Störkörper während der Satellitenbewegung kaum ändern. Während der Satellit also einen vollen Umlauf um das Geozentrum vollzogen hat, sind die Störkörper um ihren Bahnmittelpunkt nur geringfügig weiter gewandert. Im nächsten Umlauf des Satelliten besteht zwischen allen beteiligten Körpern fast dieselbe, nur geringfügig geänderte Geometrie, so daß der Betrag der Störbeschleunigung in identischen Bahnpunkten zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Umläufen nahezu gleich ist.

Die Richtung dagegen variiert wesentlich stärker, da in jedem Umlauf die Störungen additiv wirken und so relativ große Abweichungen von der Bahnebene des Satelliten verursachen. Die Bewegung des Satelliten ist also nicht mehr, wie im ungestörten Fall eine ebene Bewegung.

In den bisherigen Tests wurden die Planetenörter mit Hilfe der Lagrange Interpolation aus präzidierten Planetenörtern berechnet. In den nachfolgenden Tests vom Typ C wurden Ephemeriden der Störkörper aus mittleren Bahnelementen berechnet und in der Bahnintegration verwendet. Die so berechneten Satellitenephemeriden wurden mit denen aus den Tests A und B hinsichtlich Koordinatenunterschieden und der Rechenzeit verglichen.

Für die Koordinatendifferenzen gilt wiederum das geozentrische, quasi-inertiale Ekliptiksystem als Bezugssystem.

Zunächst wurde der 3-Tage-Orbit des hochfliegenden Satelliten, dessen Bewegung durch die Gravitationswirkung von Sonne und Mond gestört wird, unter Verwendung von entsprechenden Örtern für Sonne und Mond, berechnet aus mittleren Bahnelementen, untersucht. Als Vergleichsbahn dient die in Test A2 berechnete Bahn.

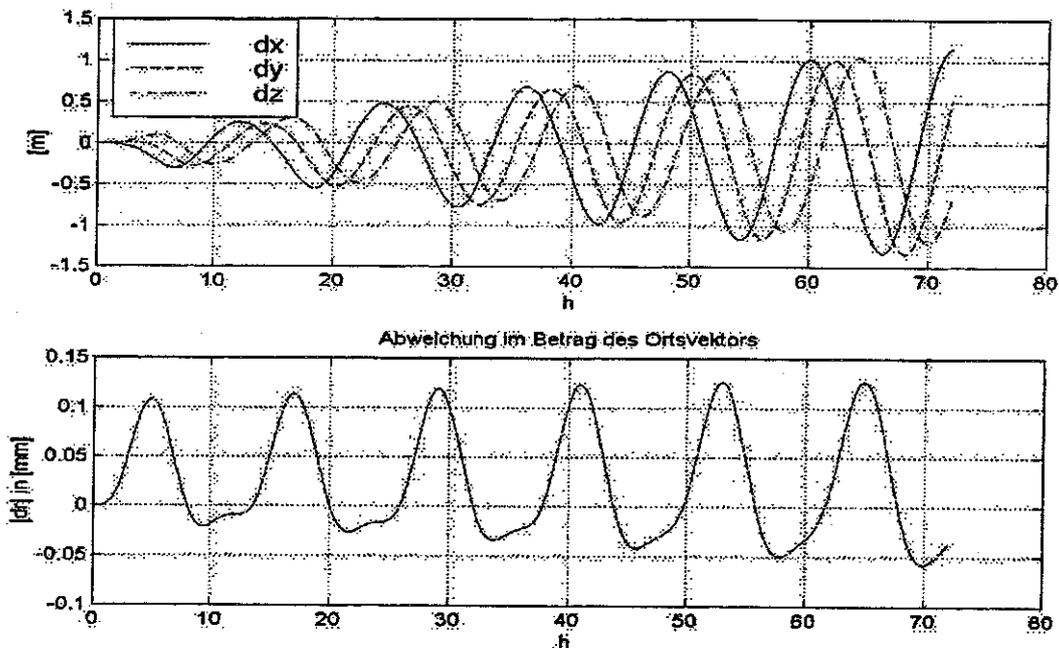


Abbildung 10.5: Verwendung verschiedener Planetenephemeriden

Abbildung 10.5 zeigt das Ergebnis. Während die radialen Abweichungen vernachlässigbar gering sind, ergeben sich in den Richtungen der Ortsvektoren des Satelliten deutliche Abweichungen im [m]-Bereich. Für einen hochfliegenden Satelliten wird zur Berechnung der Örtter der Störkörper die Interpolation aus vorausberechneten Planetenephemeriden empfohlen.

Die Ergebnisse aus diesem Test deuten darauf hin, daß in der Vorgehensweise Planetenörter mit mittleren Bahnelemente zwar die geozentrischen Entfernungen gut modelliert werden, geozentrische Richtungen dagegen nur ungenau.

Der Vorteil der Methode mit mittleren Bahnelementen läge in der eindeutigen Verkürzung der Rechenzeit. Für die Berechnung des 3-Tage-Orbits unter Verwendung der Interpolationsmethode wird eine Rechenzeit von  $t_{A2} = 7 \text{ [min]} 38.41 \text{ [sec]}$  benötigt, für denselben Orbit unter Verwendung mittlerer Bahnelemente (Test C1) dagegen nur  $t_{C1} = 60.97 \text{ [sec]}$  ! Die Verkürzung der Rechenzeit beträgt hier etwa einen Faktor 7.

Dieser Wert wurde in einem weiteren Test bestätigt. In Test C2 wurde nun das Verhalten im Falle des niedrigfliegenden Satelliten für den 3-h-Orbit untersucht. Als Vergleichsbahn dient die in Test A1 numerisch integrierte gestörte Bahn. Die Rechenzeit im Fall A1 betrug  $t_{A1} = 145.17 \text{ [sec]}$ , im Fall C2 dagegen nur  $t_{C2} = 20.1 \text{ [sec]}$ . Die Verkürzung der Rechenzeit beträgt also wiederum etwa einen Faktor 7.

In diesem Fall ergibt sich neben dem positiven Effekt der Verkürzung der Rechenzeit, das erfreuliche Ergebnis, daß sowohl die Koordinatendifferenzen, als auch die radialen Abweichungen zwischen beiden gestörten Orbits sehr klein ausfallen (vgl. Abbildung 10.6). Im Falle des niedrigfliegenden Satelliten kann also zur Berechnung der Drittkörperstörung verursacht durch Sonne und Mond die Methode der Berechnung der Ortsvektoren der Störkörper aus mittleren Bahnelementen verwendet werden. Tabelle 10.4 faßt die benötigten Rechenzeiten aller Tests in diesem Kapitel zusammen.

Test	Rechenzeit
A1	145.17 [sec]
A2(3-h-Orbit)	33.84 [sec]
A2(3-Tage-Orbit)	7 [min] 38.41 [sec]
B	7 [min] 55.93 [sec]
C1	60.97 [sec]
C2	20.1 [sec]

Tabelle 10.4: Rechenzeiten bei Drittkörperstörungen

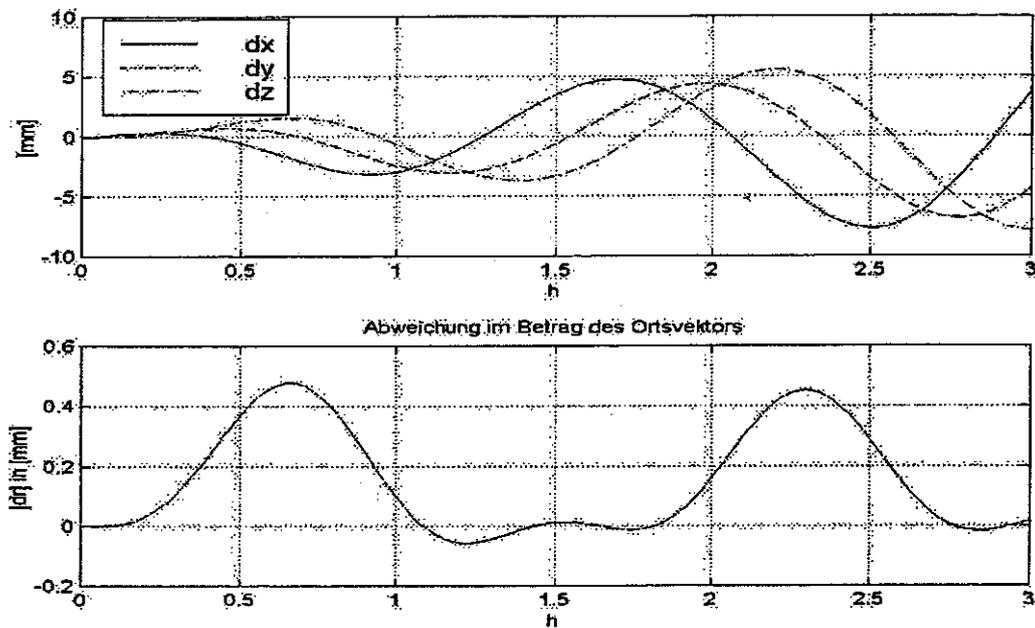


Abbildung 10.6: Verwendung unterschiedlicher Planetenephemeriden

### 10.3 Bewertung: Einfluß von Drittkörpern

Die von Drittkörpern verursachte Störbeschleunigung aufgrund ihrer Gravitationswirkung kann in der Beschreibung der Satellitenbewegung nicht vernachlässigt werden. Der Hauptanteil rührt von Sonne und Mond her, während die anderen Planeten relativ geringe, jedoch für genaue Anwendungen nicht vernachlässigbare Störungen verursachen.

Für eine möglichst genaue Ephemeridenrechnung des Satelliten wird die Methode Interpolation der Orte der Störkörper aus vorausberechneten Planetenörtern empfohlen. Berücksichtigt man neben Sonne und Mond noch Mars, Venus, Saturn und Jupiter in der Integration erzielt man noch genauere Ergebnisse bei einer geringen Zunahme der Rechenzeit (vgl. Tabelle 10.4, Zeile 4/5). Insgesamt ist die Rechenzeit mit dieser Methode relativ hoch im Vergleich zur Berechnung Planetenörter aus mittleren Bahnelementen. Diese Methode bietet geringe Rechenzeiten, jedoch sind die Ergebnisse ungenauer als gegenüber der Interpolationsmethode und für niedrigfliegende Satelliten bedingt empfehlenswert. Sie ist jedoch sicherlich geeignet, relativ schnell Näherungswerte für Satellitenephemeriden zu berechnen. Von daher wurde diese Methode ebenfalls in SATLAB 1.0 beibehalten.

## 11. Einfluß der Atmosphäre: Dichte mit Kugelschalenmodell

In den nachfolgenden Abschnitten wird der alleinige Einfluß des Atmosphärenwiderstandes auf verschiedene Satellitenbahnen untersucht. Andere Störungen wurden ausgenommen. Die Dichte wird dabei mit dem in (4.4.4) beschriebenen Kugelschalenmodell bestimmt.

### 11.1 Testparameter

Das verwendete Dichtemodell gilt in einem Höhenbereich von 300 – 1000 [km]. Um den Einfluß der Atmosphäre über diesen Höhenbereich zu testen wurden zwei Orbits mit unterschiedlichen Flughöhen untersucht. Tabelle 11.1 stellt die Kepler-Elemente aus denen Startwerte bzgl. dem geozentrischen, quasi-inertialen Ekliptiksystem für die numerische Integration berechnet wurden, sowie satellitenspezifische Parameter (angeströmte Fläche, Masse,  $C_D$ -Wert) zusammen. Mit  $C_D = 1$  wurde ein kugelförmiger Satellit gewählt.

	Satellit 1	Satellit 2
$a$ in [km]	6778	7000
$e$	0	0.01
$i$	45	45
$\Omega$	0	0
$\omega$	0	0
$A$ in [m <sup>2</sup> ]	1	1
$m$ in [kg]	300	300
$C_D$	1	1

Tabelle 11.1: Satellitenparameter Atmosphärenwiderstand

Im ungestörten Fall durchläuft Satellit 1 eine Kreisbahn mit einer Flughöhe von 400 [km] (bei Annahme einer kugelförmigen Erde mit  $R_{\text{Erde}} = 6378$  [km]). Wegen der numerischen Exzentrizität von  $e = 0.01$  variiert die Flughöhe von Satellit 2 im Bereich von etwa 600 – 700 [km] über einer wiederum kugelförmig gedachten Erde. Beide Satelliten starten im Perigäum, die Orbitdauer beträgt sechs Stunden, wobei für jede Minute eine Ephemeride integriert wurde. Für die Satelliten wurde jeweils eine ungestörte Referenzbahn ebenfalls numerisch integriert.

### 11.2 Ergebnisse: Atmosphäreinfluß mit Kugelschalenmodell

Abbildung 11.2 zeigt die Abnahme der Flughöhe des Satelliten 1 über einer kugelförmig angenommenen Erde. Nach etwa vier Umläufen hat sich die Flughöhe um ca. 20 [m] verringert. Man sieht eine stufenförmige Abnahme der Satellitenhöhe, die mit dem Satellitenumlauf geht. Dies liegt an der zugrunde gelegten Kreisbahn und der kugelsymmetrischen Schichtung der Atmosphärendichte.

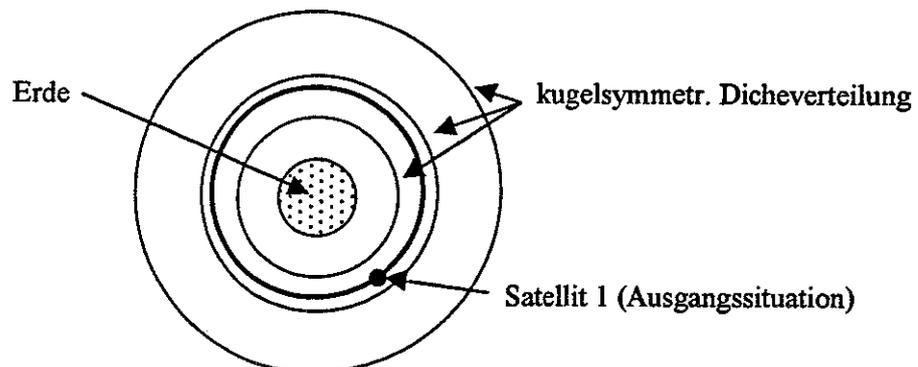


Abbildung 11.1: Kreisbahn im Kugelschalenmodell

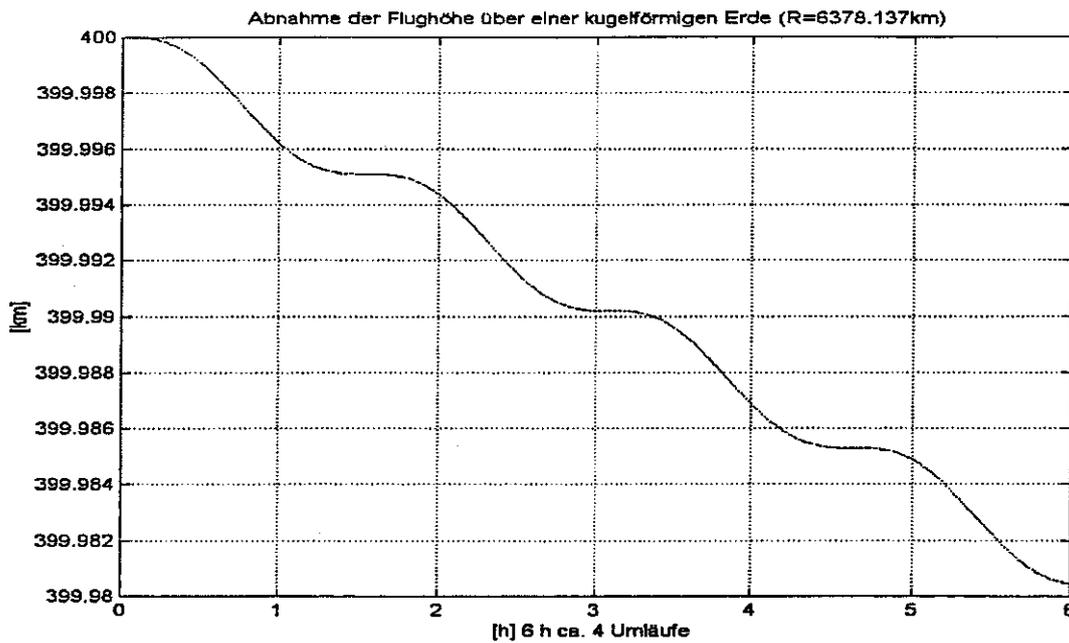


Abbildung 11.2: Abnahme der Flughöhe

Die Ausgangsbahn des Satelliten 1 ist kreisförmig. Der Atmosphärenwiderstand bewirkt ein Absinken in darunter liegende Höhenbereiche mit stetig zunehmender Dichte. Da nun die Dichte nicht linear mit der Höhe zu- bzw. abnimmt und sich die Relativgeschwindigkeit Satellit-Atmosphäre wegen der Zunahme der Satellitengeschwindigkeit mit Abnahme des Abstandes von den felderzeugenden Massen ändert, ergibt sich keine lineare Abnahme in der Flughöhe.

Im Falle von Satellit 2 ergibt sich wegen der Exzentrizität der Bahn ein anderes Bild. Die Exzentrizität der Bahn bewirkt, daß der Satellit in seinem Umlauf Schichten der Erdatmosphäre mit höherer und niedrigerer Dichte durchfliegt, so daß sich pro Orbit Bereiche mit unterschiedlich starkem Atmosphärenwiderstand ergeben (vgl. Abb. 11.3). In Abbildung 11.4 ist das numerische Ergebnis für Satellit 2 dargestellt. Dort ist allerdings nicht die Flughöhe über einer kugelförmigen Erde dargestellt, sondern hier wurde die Differenz der Beträge der atmosphärisch gestörten und ungestörten Bahn geplottet.

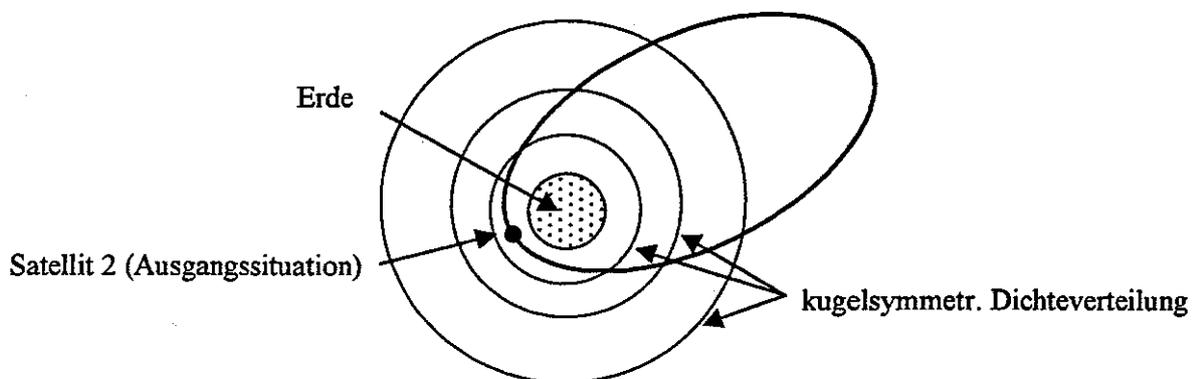


Abbildung 11.3: Exzentrische Bahn im Kugelschalenmodell

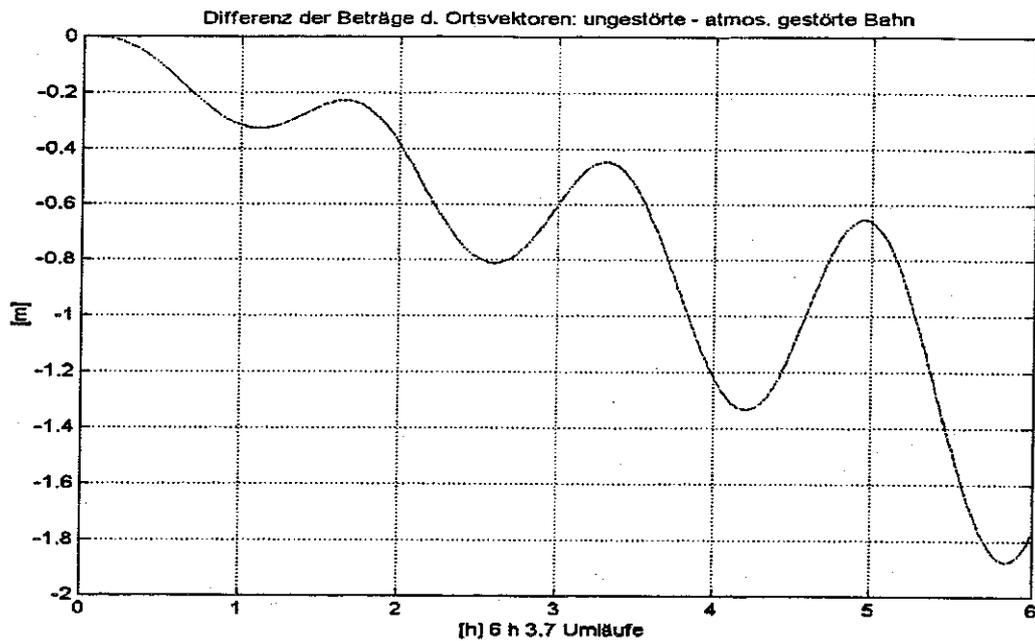


Abbildung 11.4: Atmosphärische Störung

Die Abweichungen in den Beträgen nehmen im Mittel zwar zu, weisen jedoch unterschiedlich starke Abweichungen auf, die von der Exzentrizität der Bahn herrühren. Insgesamt sind die Abweichungen mit  $dr_{max} = -1.9$  [m] geringer als im Fall von Satellit 1. Dies liegt an der größeren Flughöhe von Satellit 2.

### 11.3 Bewertung: Atmosphärenwiderstand mit Kugelschalenmodell

Die Annahme einer zeitlich konstanten, rein höhenabhängigen Atmosphärendichte ist an sich unrealistisch. Für die Bestimmung ‚realistischer‘ Ephemeriden, wie sie beispielsweise als Näherungswerte für eine Ausgleichung von Beobachtungen notwendig sind, wird das Modell mit der Berechnung der Atmosphärendichte mit CIRA86 empfohlen. Für schnelle Abschätzungen des Atmosphärenwiderstandes auf die Bahn eines Satelliten liefert das Modell der Berechnung der Atmosphärendichte mit dem Kugelschalenmodell im angegebenen Höhenbereich jedoch relativ plausible Ergebnisse.

## 12. Einfluß der Atmosphäre: CIRA86

In diesem Test wurde die Atmosphärendichte mit Hilfe des Atmosphärenmodells CIRA86 unter Verwendung aktueller Daten für die geomagnetische Aktivität und Sonnenaktivität bzw. der daraus resultierende Atmosphärenwiderstand berechnet. Das CIRA86-Modell bietet die Möglichkeit für die geomagnetische Aktivität 3-stündliche  $a_p$ -Werte oder tägliche  $a_p$ -Werte zur Berechnung der Atmosphärendichte zu verwenden (vgl. Kapitel 4.4.5).

Untersucht werden in diesem Kapitel die Größenordnung der Störung auf eine Satellitenbahn aufgrund des Atmosphärenwiderstandes, wenn die Dichte mit CIRA86 berechnet wird, eventuelle Unterschiede in der Größenordnung der Störung, wenn 3-stündliche  $a_p$ -Werte bzw. tägliche  $a_p$ -Werte verwendet werden, sowie die benötigte Rechenzeit.

### 12.1 Testparameter

Um einen Vergleich mit dem vorgehenden Kapitel zu ermöglichen, wurden für nachfolgenden Testrechnungen die Testparameter aus Kapitel 11.1 (vgl. Tabelle 11.1) übernommen. Als Testkörper wurde Satellit 1 mit den in Tabelle 11.1 gegebenen spezifischen Bahn- und Satellitenparametern verwendet. Es gilt damit die besondere Situation, daß der Betrag des Ortsvektors als Flughöhe über einer kugelförmig gedachten Erde angenommen werden kann.

Die Orbitdauer wurde in den folgenden Tests auf 24 Stunden verlängert, um Abhängigkeiten in der Verwendung von 3-stündliche  $a_p$ -Werten oder tägliche  $a_p$ -Werten sichtbar zu machen. Für das Integrationsintervall gültige Werte für geomagnetische Aktivität und Sonnenaktivität wurden mittels ftp von den in Kapitel 4.4.5 angegebenen Internet-Adressen bezogen. Für die gegebenen Parameter wurden drei Bahnen numerisch integriert:

- ungestörte Referenzbahn (nur Zentralterm)
- atmosphärisch gestörte Bahn mit CIRA86 und 3-stündliche  $a_p$ -Werten
- atmosphärisch gestörte Bahn mit CIRA86 und tägliche  $a_p$ -Werten

### 12.2 Ergebnisse: Atmosphäreneinfluß mit CIRA86

Da der Satellit im ungestörten Fall eine Kreisbahn mit einer Flughöhe von 400 [km] über einer kugelförmigen Erde ( $R_{Erde} = 6378.137$  [km]) durchläuft, stellen Abweichungen im Betrag des Ortsvektors der aufgrund des Atmosphärenwiderstandes gestörten Bahn unmittelbar Abweichungen in der Flughöhe dar. Abbildung 12.1 stellt dies dar. Dort wurden zur Berechnung der Atmosphärendichte mit CIRA86 3-stündliche  $a_p$ -Werte verwendet.

Nach einem Tag hat die Flughöhe um ca. 12 [m] abgenommen. Verwendet man zur Bestimmung der Atmosphärendichte das Kugelschalenmodell, so wird bereits nach sechs Stunden ein Wert von ca. 20 [m] erreicht (vgl. 11.2). Extrapoliert man diesen Wert linear, so ergäbe sich unter Verwendung des Kugelschalenmodells nach einem Tag eine Abnahme der Flughöhe um etwa 80 [m]. Die Dichteunterschiede aus dem Kugelschalenmodell und CIRA86 liefern für diese Bahn nach einem Tag eine Differenz in der Abnahme der Flughöhe von  $\delta(dz) \approx 70$  [m]. Die Berechnung des Atmosphärenwiderstandes unter Verwendung des Kugelschalenmodells liefert damit wohl nur grobe Näherungswerte für eine atmosphärisch gestörte Bahn.

Bildet man die Differenz zwischen den geozentrischen Ortsvektoren der ungestörten und gestörten Bahn (bzgl. dem Ekliptiksystem) und transformiert die so bestimmten Differenzvektoren in das ‚Bahnsystem‘, so erhält man Differenzwerte in Flugrichtung, senkrecht zur Bahnebene und in radialer Richtung des Vektors Geozentrum-Massenmittelpunkt des Satelliten. Unter ‚Bahnsystem‘ ist das (für jeden Zeitpunkt unterschiedliche) begleitende Dreibein mit Ursprung im Massenmittelpunkt des Satelliten zu verstehen. Die Koordinatenrichtungen sind wie in Abbildung 12.2 dargestellt, festgelegt. Die x-Achse zeigt in Flugrichtung, die z-Richtung in Richtung des Vektors Geozentrum-Massenmittelpunkt des Satelliten; die y-Achse ergänzt zum Rechtssystem.

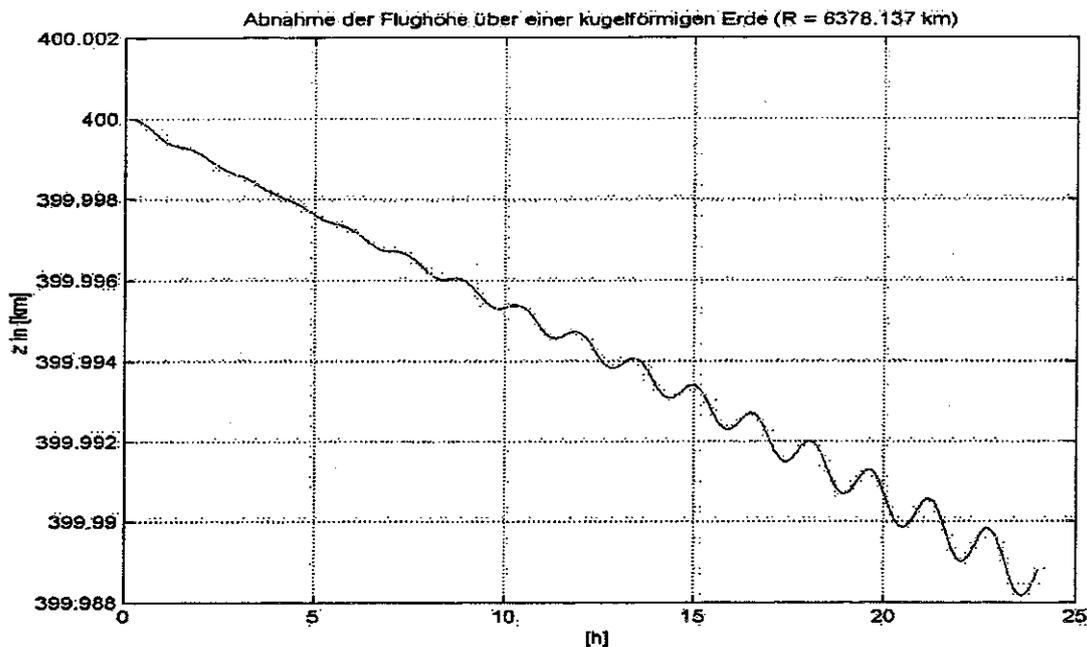


Abbildung 12.1: Abnahme der Flughöhe

Die Abbildungen 12.3 und 12.4 zeigen die Abweichung in x-, y-, z-Richtung. Die größte Differenz erhält man in Flugrichtung bzw. entgegengesetzt dazu, d.h. der Satellit wird in Bewegungsrichtung deutlich gebremst. Dies führt zur Abnahme der Flughöhe. Die in Abbildung 12.4 dargestellten Kurve entspricht der aus Abbildung 12.1. Senkrecht zur Bahn bewirkt die Atmosphäre nur geringe Störungen. Dies stimmt mit der Modellierung des Atmosphärenwiderstandes (vgl. Kapitel 4.4.2) überein.

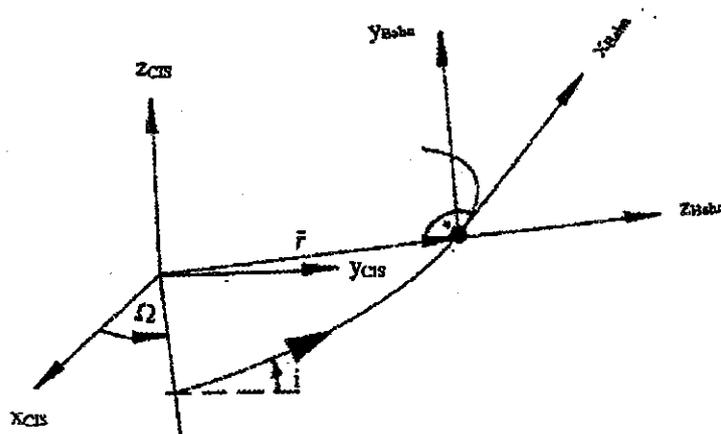


Abbildung 12.2: Begleitendes Dreibein, ‚Bahnsystem‘

Zur Berechnung der Atmosphärendichte mit CIRA86 bzw. des Atmosphärenwiderstandes wurden bislang 3-stündliche  $a_p$ -Werte verwendet. Berechnet man dieselbe Bahn mit entsprechenden täglichen  $a_p$ -Werten, ergeben sich in den kartesischen geozentrischen Koordinaten der Ortsvektoren der beiden gestörten Bahnen Unterschiede im Bereich  $\pm 60$  [m]. Die Differenzvektoren  $\vec{d}(t)$  wurden wie folgt berechnet:

$$\vec{d}(t) = \vec{r}_g(\text{tägliche } a_p\text{-Werte}, t) - \vec{r}_g(\text{3-stündliche } a_p\text{-Werte}, t), \tag{12.1}$$

mit  $\vec{r}_g(\dots)$ : Ortsvektoren der gestörten Bahnen bzgl. dem Ekliptiksystem.

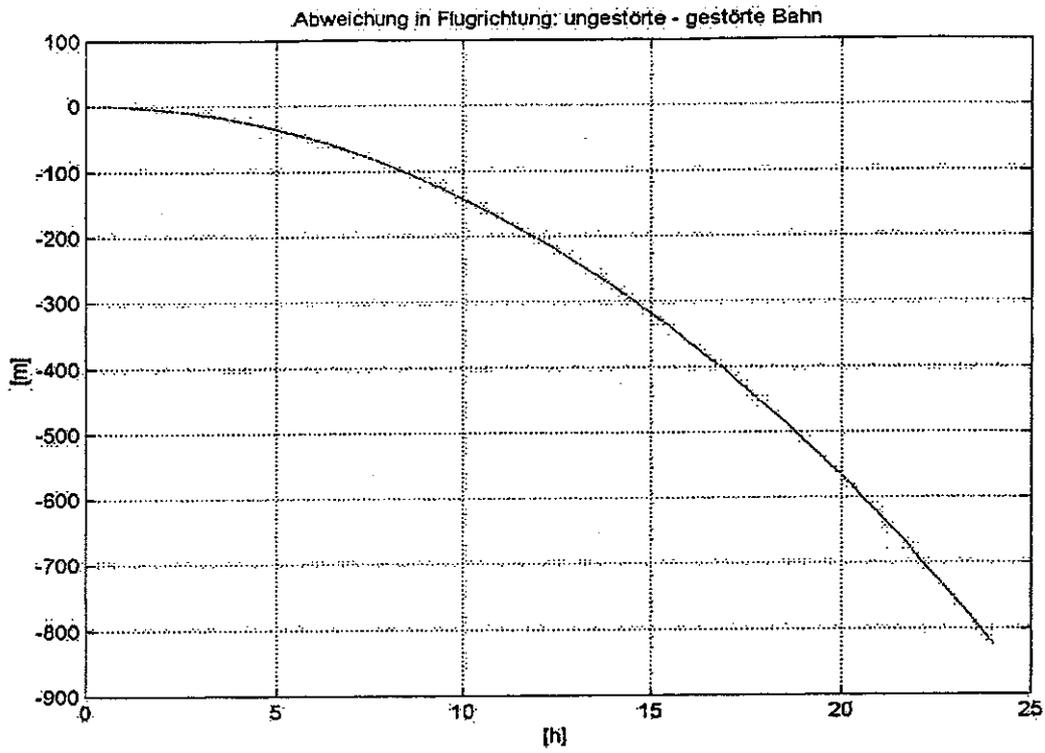


Abbildung 12.3: Abweichung in Flugrichtung

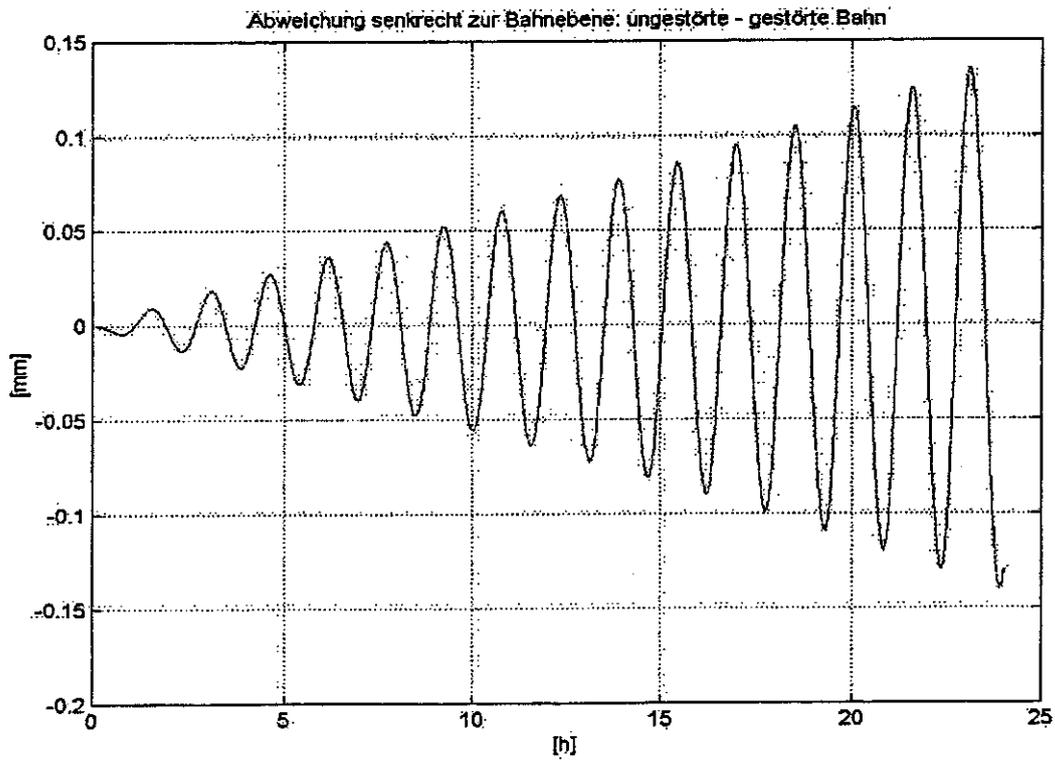


Abbildung 12.4: Abweichung senkrecht zur Bahnebene

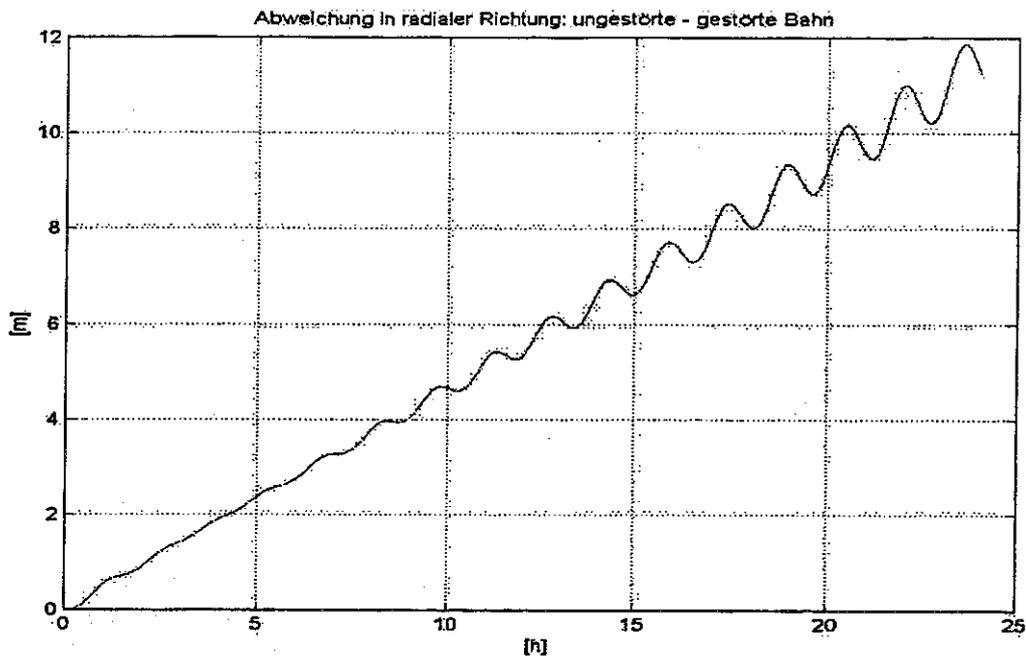


Abbildung 12.5: Abweichung in radialer Richtung

Drückt man diese Abweichungen wiederum in der Bahnebene aus, so erhält man den größten Differenzwert in Flugrichtung (Abbildung 12.6).

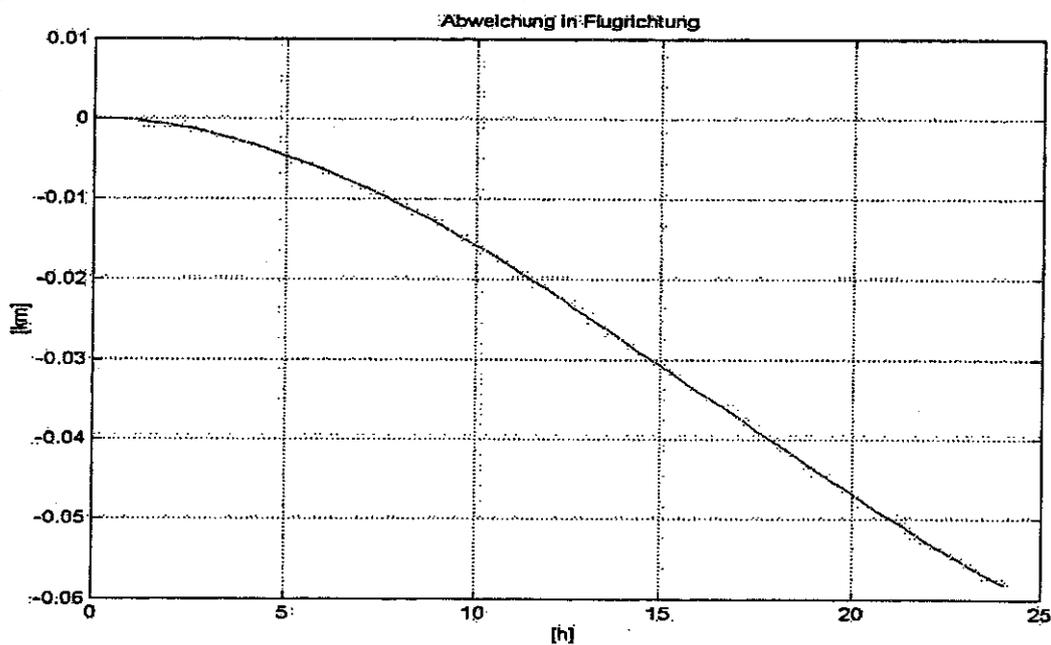


Abbildung 12.6: Abweichung in Flugrichtung, Verwendung täglicher bzw. 3-stündlicher  $a_p$ -Werte

Die Abweichungen senkrecht zur Bahnebene liegen im Submillimeterbereich. Die Unterschiede in radialer Richtung zwischen beiden gestörten Bahnen erreichen ein Maximum von etwa 60 [cm].

### 12.3 Bewertung: Atmosphäreneinfluß mit CIRA86

Die Verwendung von 3-stündlichen  $a_p$ -Werten bzw. täglichen  $a_p$ -Werten verursacht in der Bahnbestimmung deutliche Differenzen in den Ephemeriden. Für genaue Anwendungen werden deshalb 3-stündliche  $a_p$ -Werte empfohlen.

Der zeitliche Mehraufwand für die Auswertung von 3-stündliche  $a_p$ -Werten ist, wie nachfolgende Tabelle 12.1 zeigt, relativ gering. Insgesamt sieht man jedoch, daß die Rechenzeit mit der Bestimmung der Atmosphärendichte mit CIRA86 im Verhältnis zur Verwendung des Kugelschalenmodells deutlich ansteigt.

Bahn	Rechenzeit
ungestört	1 [min] 9.34 [sec]
gestört, 3-stündliche $a_p$ -Werte	35 [min] 55.57 [sec]
gestört, tägliche $a_p$ -Werte	31 [min] 6.69 [sec]

Tabelle 12.1: Rechenzeiten, Atmosphärenwiderstand mit CIRA86

*Anmerkung:* Die Verwendung 3-stündlicher  $a_p$ -Werte zur Bestimmung der Atmosphärendichte und damit zur Bestimmung des Atmosphärenwiderstandes suggeriert eine Genauigkeitssteigerung gegenüber der Berechnung mit täglichen  $a_p$ -Werten, wenn man annimmt, daß die Verwendung von 3-stündliche  $a_p$ -Werten einer feineren Modellierung der Atmosphäre entspricht. Ob nun tatsächlich eine bessere Modellierung der Atmosphärendichte durch Verwendung von 3-stündliche  $a_p$ -Werten erfolgt, könnte erst anhand realer Beobachtungen überprüft werden. Diese Überprüfung ist noch an weitere Bedingungen geknüpft, wie z.B. einem besseren Modell zur Bestimmung des Atmosphärenwiderstandes (Geometrie des Satelliten, zeitlich variable angeströmte Fläche, zusätzliche Lift-Effekte) sowie die Modellierung aller wesentlicher Störkräfte (z.B. direkter und indirekter Strahlungsdruck, Erd- und Meereszeiten, usw.) und nicht nur eines Teiles der Störkräfte, wie es in SATLAB 1.0 der Fall ist.

### 13. Schlußbetrachtung und Ausblick

Die Ephemeridenrechnung von künstlichen Erdsatelliten durch numerische Integration der gestörten Bewegungsgleichung ist für die Auswertung von Beobachtungen der Satellitengeodäsie und zur Schätzung von Modellparametern erforderlich. Mit SATLAB 1.0: Bahnberechnung steht ein solches Ephemeridenrechnungsprogramm zur Verfügung. SATLAB 1.0: Bahnberechnung liefert geozentrische, kartesische Orts- und Geschwindigkeitsvektoren bzgl. dem vereinbarten Inertialsystem J2000.0 (in äquatorialer Lage).

Störkräfte verursacht durch das anisotrope Gravitationsfeld der Erde, Gravitationswirkung von Drittkörpern und Reibungswiderstand der Hochatmosphäre werden in Modellen erfaßt und können optional berücksichtigt werden. SATLAB 1.0: Bahnberechnung bietet damit die Möglichkeit einzelne Störeinflüsse bzw. Gruppen von Störeinflüssen gezielt zu berücksichtigen. Zur Bestimmung der Störkräfte durch die Gravitationswirkung von Drittkörpern und dem Atmosphärenwiderstand stehen je zwei Alternativmodelle zur Verfügung, die einerseits eine schnelle Bahnberechnung bei eingeschränkter Genauigkeit, andererseits genauere Ergebnisse bei längerer Rechenzeit erlauben.

Die implementierten Modelle wurden durch qualitative und quantitative Tests bestätigt. Von den in MATLAB 5 zur Verfügung stehenden Integratoren bietet sich die Routine `odel13` für ein Bahnrechnungsprogramm an, weil sich mit diesem Mehrschrittverfahren gute numerische Ergebnisse bei geringer Rechenzeit erzielen lassen. Insgesamt ist die Verwendung von MATLAB, als ‚matrixorientierte‘ Software, vorteilhaft. Ein Beispiel hierfür ist die geringere Rechenzeit in der Nutationsberechnung mit der vollständigen IAU-Theorie mit 106 Nutationstermen für jeden Integrationsschritt im Gegensatz zur Interpolation der Nutationswinkel aus vorausgerechneten Werten (vgl. Kapitel 9).

Bei der Umsetzung der Modelle in konkrete MATLAB-Programme (sog. m-Files) wurde eine modulare Programmierweise angestrebt. Durch die Zerlegung eines Problems in überschaubare Teilabschnitte wird die tatsächliche Programmierung und die unvermeidliche Fehlersuche während der Softwareerstellung erleichtert. Für eine Weiterentwicklung der Software ergibt sich der Vorteil, daß bestehende Modelle leichter geändert (z.B. Verfeinerung eines bereits implementierten Modells) oder zusätzliche Modelle (z.B. Modell für Strahlungsdruck der Sonne) leichter implementiert werden können.

In der Modellierung des Atmosphärenwiderstandes ergibt sich eine Einschränkung durch Annahme konstanter Werte für das Oberflächenmasseverhältnis, wie sie eigentlich nur für kugelförmige Satelliten gelten. Dies stellt für die Bahnbestimmung konkreter (nichtkugelförmiger) Satelliten sicherlich einen Nachteil dar, andererseits erlaubt SATLAB 1.0: Bahnberechnung die Integration von Bahnen beliebiger Satelliten, sofern man sinnvolle (konstante) Werte für die angeströmte Fläche  $A$  und den Widerstandsbeiwert  $C_D$  angeben kann. Insgesamt ist jedoch durch Modellierung des Satelliten als ausgedehnter Körper in einem verfeinerten Modell für den Atmosphärenwiderstand eine Genauigkeitssteigerung in den Ephemeriden zu erwarten<sup>1</sup>.

Schließlich stellen die in SATLAB 1.0 modellierten Störkräfte nur einen Teil der auf einen künstlichen Erdsatelliten wirkenden Störeinflüsse dar. Für eine genauere Bahnbestimmung ist die Modellierung folgender zusätzlicher Einflüsse erforderlich

- Zeitliche Variationen der Potentialkoeffizienten
- Gezeitenwirkung der festen Erde und der Ozeane
- direkter Strahlungsdruck der Sonne
- Albedostrahlung der Erde
- Thermische Emission

---

<sup>1</sup> Dies gilt darüber hinaus für die durch Störkräfte verursachten Drehmomente. Neben der Beschreibung des Satelliten als ausgedehnten Körper, ist dort die Berechnung der Rotation des Satelliten, d.h. die Bestimmung der zeitabhängigen Orientierung eines ‚satellitenfesten‘ Bezugssystems notwendig.

- Magnetfeld der Erde
- Relativistische Effekte
- Bahnmanöver

Im Rahmen der Systemübergänge raumfestes – erdfestes Bezugssystem ist die Polbewegung zu berücksichtigen. Eine spätere Implementierung dieser Modelle bzw. die Verbesserung bestehender Modelle wird durch die modulare Programmierung von SATLAB 1.0: Bahnberechnung erleichtert.

## Literaturverzeichnis

- Henriksen, S.W. (Editor): NATIONAL GEODETIC SATELLITE PROGRAMME, Part I, Scientific and Technical Information Office, NASA, Washington D.C., 1977
- Hirayama, Th.; et al.: Analytical Expression of TDB-TDT. Distributed at IUGG General Assembly, Vancouver, Canada, August 1987
- Kaula, W.M.: Theory of Satellite Geodesy, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, 1966
- Kertz, W.: Einführung in die Geophysik, Band II, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971
- King-Hele, D.: Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere, Butterworths, London, 1964
- Koop, R.; Stelstra, D.: On the computation of the gravitational potential and its first and second order derivatives, manuscripta geodetica (1989) 14: 373 – 382, Springer-Verlag 1989
- Kovalevsky, J.; Mueller I.I.; Kolaczek, B. (Editors): Reference Frames in Astronomy and Geophysics, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1989
- Lieske, J.H.; et al.: Expressions for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976), System of Astronomical Constants. Astronomical Astrophysics, Vol. 58, 1, 1977
- MATLAB Reference Guide, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, 1997
- McCarthy, D.D.: IERS TECHNICAL NOTE 21, IERS Conventions (1996), Obs. de Paris, 1996
- Meeus, J.: Astronomische Algorithmen, J.A. Barth, Leipzig, 1992
- Montag, H.: Zu einigen Grundlagen globaler und regionaler Referenzsysteme, DVW Tagungsband ,GPS-Anwendungen und Ergebnisse 96', Konrad Verlag, Schriftenreihe 28/1997, Stuttgart, 1997
- Montenbruck, O.: Ephemeridenrechnung und Bahnbestimmung geostationärer Satelliten mit Hilfe der Taylorreihenintegration, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 384, München 1994
- Müller, J.: Aufgaben des IERS und IGS, DVW-Seminar, 21. Januar 1998, Aktuelles zum Entstehen von 3d-/2d-Koordinaten und von Höhen
- Nagel, E.; Reigber, Ch.: Verwendung der Atmosphärenmodelle CIRA65 und CIRA72 in der Bahnbestimmung geodätischer Satelliten, Bundesministerium für Forschung und Technologie, BMFT-FBW 73-11, 1973
- Oliver, W.L.: CAD: A Code for the Calculation of Atmospheric Density, Lincoln Laboratory, MIT Lexington, Massachusetts, 1980
- Reed, G.B.: Application of Kinematical Geodesy for Determining the Short Wave Length Components of the Gravity Field by Satellite Gradiometry, Reports of the Department of Geodetic Science, Report No. 201, Columbus, Ohio, 1973
- Rees, D. (Editor): COSPAR INTERNATIONAL REFERENCE ATMOSPHERE: 1986, Part I: Thermosphere Models, Advances in Space Research, Volume 8, Number 5-6, 1988
- Reigber, Ch.: IERS und IGS – Stand und Perspektiven, DVW Tagungsband ,GPS-Anwendungen und Ergebnisse 96', Konrad Verlag, Schriftenreihe 28/1997, Stuttgart, 1997
- Reigber, Ch.: Reference frames for artificial satellites of the Earth, in Kovalevsky et al., 1989
- Rummel, R.: Physical Geodesy I, Collegediktaat, Facultät der Geodesie, Technische Universität Delft, Oktober 1992
- Schneider, M.: Himmelsmechanik, Band 1, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 3. Auflage 1992
- Schneider, M.: Satellitengeodäsie, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1989
- Schwarz, H.R.: Numerische Mathematik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1988
- Seeber, G.: Satellitengeodäsie, Walter de Gruyter, Berlin, New York 1989
- Sigl, R.: Geodätische Astronomie, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1973
- Smith, D.E., et al.: LAGEOS Geodetic Analysis—SL7.1, NASA Technical Memorandum 104549, Greenbelt, MD, 1991
- Thalhammer, M.: Nichtgravitative Kräfte und Drehmomente im Flugbereich künstlicher Erdsatelliten, Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie der TU München, Diplomarbeit, 1989
- Tscherning C.C., et al.: Some Geodetic Applications of Clenshaw Summation, BOLLETTINO DI GEODESIA E SCIENZE AFFINI, Nr. 4, 1982
- Zhu, S.Y.; Reiger, Ch.; Massmann, F.-H.: THE GERMAN PAF FOR ERS, ERS STANDARDS USED AT D-PAF, September 1996

## **Anhang**

## Anhang 1: Verfahren der numerischen Integration

Die numerische Mathematik bietet zur (numerischen) Lösung von Differentialgleichungen eine Vielzahl von Methoden und Verfahren, mit der eine genäherte Lösung der exakten, aber unbekannt Lösung bestimmt werden kann. Die Ergebnisse der numerische Integration sind also im strengen Sinne stets Näherungen, für die aber im Rahmen der Anwendung diese Näherungslösung mit genügender Genauigkeit gleich der exakten Lösung gesetzt werden kann bzw. soll.

Gleichung (1) zeigt anhand einer skalaren Differentialgleichung 1.Ordnung die grundsätzliche Problemstellung

$$y'(x) = f(x, y(x)). \quad (1)$$

Die Lösungsfunktion  $y(x)$  der unabhängigen Variablen  $x$  ist unbekannt. Bekannt ist jedoch eine Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Als einfachste Methode die Lösungsfunktion durch numerische Integration zu bestimmen besteht in der Anwendung der sog. Euler-Methode. Mit der Schrittweite  $h$  erhält man äquidistante Stützstellen

$$x_k = x_0 + kh, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3)$$

mit denen sich nach der Vorschrift

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

Näherungswerte  $y_k$  der exakten Lösung  $y(x_k)$  bestimmen lassen. Bei der Methode nach Euler wird die Information über die Tangente einer Funktion zur Bestimmung eines genäherten Verlaufs der wahren Lösungsfunktion genutzt.

An dieser Stelle kann nur eine ausgewählte Darstellung der Verfahren der numerischen Integration erfolgen. Die Auswahl konzentriert sich auf die prinzipielle Darstellung von Runge-Kutta-Verfahren, sowie von Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren (ABM). Beide Verfahren werden in MATLAB als fertige Tools zur numerischen Integration von Differentialgleichungen 1. Ordnung angeboten. Das Einschrittverfahren nach Runge-Kutta ist im Integrator ode45, das Mehrschrittverfahren nach Adams-Bashforth-Moulton im Integrator ode113 implementiert. Eine Zusammenstellung aller Integratoren in MATLAB findet man in Kapitel 6 (Test der Integratoren). In den Abschnitten 3, 4 werden die den beiden Integratoren ode45 und ode113 zugrundeliegenden Verfahren erläutert.

Die Verwendung von Notation und Begriffen, sowie Herleitung von Sachverhalten ist *Schwarz, H.R. (1988), S.358 ff.* entnommen.

### 1. Ein- und Mehrschrittverfahren

Zur numerischen Integration oben genannter Differentialgleichung (Gleichung (1)) können Ein- und Mehrschrittverfahren herangezogen werden.

In einem Einschrittverfahren wird der zu berechnende Wert  $y_{k+1}$  aus dem unmittelbar vorher berechneten Wert  $y_k$  bzw. der Stützstelle  $x_k$  bestimmt, d.h.

$$y_{k+1} = y_k + h \phi(x_k, y_k, h), \quad (1.1)$$

wobei  $\phi(x_k, y_k, h)$ : das gewählte Einschrittverfahren und  
 $h$ : die Integrationsschrittweite ist.

Bei einem Mehrschrittverfahren wird der gesuchte Wert  $y_{k+1}$  durch Verwendung der Informationen an mehreren vorhergehenden Stützstellen  $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots$  bestimmt also

$$y_{k+1} = y_k + h \Psi(x_k, y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, h), \quad (1.2)$$

wobei  $\Psi(x_k, y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, h)$  das gewählte Mehrschrittverfahren und  $h$ : die Integrationsschrittweite ist.

In beiden Fällen wird die Qualität der numerischen Integration u.a. von der Schrittweite  $h$  gesteuert. In den MATLAB-Routinen ode45 und ode113 wird die Schrittweite  $h$  innerhalb der Tools selbstständig gesteuert. Der Nutzer kann auf die Schrittweitensteuerung indirekten Einfluß nehmen, indem er Parameter für relative und absolute Fehler eingeben kann<sup>1</sup>.

## 2. Lokaler, globaler Diskretisationsfehler, Rundungsfehler

Jedes numerische Integrationsverfahren zur Bestimmung einer Lösung weist aufgrund seines Lösungskonzepts Abweichungen von der exakten Lösung auf. Im Rahmen der numerischen Integration treten sogenannte lokale und globale Diskretisationsfehler auf, die von der Wahl des Integrationsverfahrens abhängen.

Der lokale Diskretisationsfehler  $d_k$  meint die Abweichung der exakten Lösung von der genäherten Lösung nach einem Integrationsschritt mit dem gewählten Verfahren. Es gilt

$$d_{k+1} := y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\phi(x_k, y_k, h), \quad (2.1)$$

$$\text{bzw. } d_{k+1} := y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\Psi(x_k, y_k, x_{k-1}, y_{k-1}, x_{k-2}, y_{k-2}, \dots, h). \quad (2.2)$$

$y(x_{k+1}) - y(x_k)$  ist die Differenz zwischen exakten Funktionswerten an den Stützstellen  $x_k$ .  $h\phi(x_k, y_k, h)$  bzw.  $h\Psi(x_k, y_k, x_{k-1}, y_{k-1}, x_{k-2}, y_{k-2}, \dots, h)$  ist die Differenz zwischen den numerisch integrierten Werte  $y_{k+1}, y_k$  mit dem Ein- bzw. Mehrschrittverfahren.

Der globale Diskretisationsfehler  $g_k$  ist dann die Abweichung zwischen exakter und genäherter Lösung nach der Ausführung mehrerer solcher Integrationsschritte. Hinter dem Begriff Abweichung verbirgt sich nur im einfachsten Fall tatsächlich die Differenz exakter Wert minus Näherungswert.

Intuitiv ist klar, daß der globale Diskretisationsfehler von lokalen Diskretisationsfehlern abhängt. Dieser Zusammenhang sowie die Qualität des Integrationsverfahrens wird im Begriff der Fehlerordnung zum Ausdruck gebracht, d.h. jedes Integrationsverfahren besitzt eine bestimmte Fehlerordnung, die u.a. von der gewählten Schrittweite  $h$  abhängt. Die Fehlerordnung hängt mit dem lokalen Diskretisationsfehler  $d_k$  wie folgt zusammen

$$\max |d_k| \leq \text{const} \cdot h^{p+1} = O(h^{p+1}) \quad (2.3)$$

Darin ist  $\max |d_k|$  der maximale Diskretisationsfehler,  $\text{const}$  eine für das jeweilige Verfahren gültige Konstante.  $p$  ist die Fehlerordnung. Zusammen mit einer kleinen Schrittweite  $h$  und einer hohen Fehlerordnung  $p$  ergibt sich also ein geringer lokaler Diskretisationsfehler.

Rundungsfehler überlagern lokale und globale Diskretisationsfehler und kommen dadurch zustande, daß jede praktische Berechnung nur mit einer endlichen Anzahl von relevanten Rechenstellen erfolgen kann. Rundungsfehler gehören damit nicht zum theoretischen Fehlerbudget des jeweiligen Verfahrens, können aber in den Ergebnissen, je nach geforderter Genauigkeit der Anwendung, signifikante Fehler verursachen.

<sup>1</sup> An dieser Stelle sei angemerkt, daß durch Wahl einer feinen Auflösung für den Zeitvektor der numerischen Integration i.d.R. keine Verbesserung (oder Verschlechterung) des Integrationsverfahren erzielt werden kann. MATLAB wählt sich selbst Stützstellen für die Integration und interpoliert anschließend die Ergebnisse auf die Zeitpunkte des benutzerdefinierten Zeitvektors.

Während der lokale und globale Diskretisationsfehler durch das Verfahren gesteuert werden kann, muß dem (unvermeidbaren) Auftreten von Rundungsfehlern durch den Einsatz adäquater Rechenmaschinen entgegengewirkt werden.

### 3. Runge-Kutta-Verfahren

Für ein m-stufiges Runge-Kutta-Verfahren berechnet sich der genäherte Funktionswert  $y_{k+1}$  aus dem bekannten Variablenwert  $x_k$  und Funktionswert  $y_k$  nach folgender Vorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h \{c_1 f(\xi_1, y(\xi_1)) + c_2 f(\xi_2, y(\xi_2)) + \dots + c_m f(\xi_m, y(\xi_m))\}, \quad (3.1)$$

mit  $\xi_1 = x_k$ ,  $\xi_2 = x_k + a_2 h$ ,  $\xi_3 = x_k + a_3 h$ ,  $0 < a_2, a_3 \leq 1$ , und

$$y(\xi_2) = y_k + h b_{21} f(x_k, y_k),$$

$$y(\xi_m) = y_k + h b_{m1} f(x_k, y_k) + h b_{m2} f(x_k + a_2 h, y(\xi_2)) + \dots,$$

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in [x_k, x_{k+1}].$$

Faßt man diese Ansätze zusammen, erhält man beispielsweise für ein dreistufiges Runge-Kutta-Verfahren den Ansatz

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + a_2 h, y_k + h b_{21} k_1) \\ k_3 &= f(x_k + a_3 h, y_k + h(b_{31} k_1 + b_{32} k_2)) \\ y_{k+1} &= y_k + h\{c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Der Näherungswert  $y_{k+1}$  ergibt sich aus dem zuvorberechneten Näherungswert  $y_k$ , sowie den Hilfspunkten  $\xi_i$ . Die  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sind Steigungen in den Hilfspunkten  $\xi_i$ , die durch die konstanten Koeffizienten  $c_i$  gewichtet werden. Die anderen Parameter  $a_2, a_3, b_{21}, b_{32}$  sind ebenfalls konstant. Abbildung .1 zeigt die Methode von Heun (Verfahren dritter Ordnung).

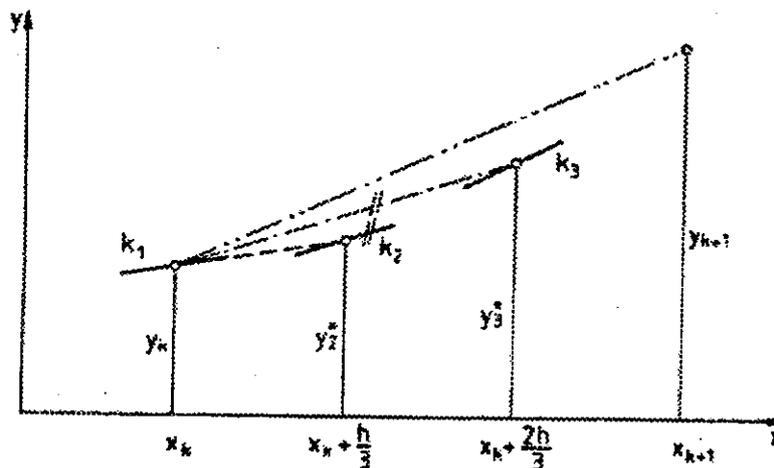


Abbildung 1: Verfahren von Heun 3. Ordnung (Schwarz, 1988)

Die Koeffizienten  $a_2, a_3, b_{21}, b_{32}, c_1, c_2, c_3$  werden so bestimmt, daß das Verfahren eine möglichst hohe Fehlerordnung aufweist. Dies führt auf nichtlineare Gleichungssysteme dieser Parameter, bei denen einige frei gewählt werden können. Einmal bestimmt gelten sie fix für das entsprechende Verfahren. Im Fall der ältesten, sogenannten klassischen, Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung gelten folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k) \\
k_2 &= f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + h \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + h \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= f(x_k + h, y_k + hk_3) \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6} \{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Wie man aus Gleichung (3.2) sieht, muß zur sukzessiven Bestimmung der  $k_r$ -Terme die gegebene Differentialgleichung  $f(x,y)$  dreimal ausgewertet werden, im Falle von (3.3) sogar viermal. Dies ist ein Nachteil der Runge-Kutta-Verfahren, weil dadurch die benötigte Rechenzeit (im Vergleich zu Mehrschrittverfahren gleicher Fehlerordnung) zunimmt. Ein wesentlicher Vorteil der Runge-Kutta-Verfahren ist ihre Einfachheit mit der Integrationsverfahren höherer Fehlerordnung mit dem Ansatz (3.1) konstruiert werden können.

#### 4. Adams-Bashforth-Moulton-Verfahren (ABM-Verfahren)

Bei diesem Verfahren handelt es sich um ein Mehrschrittverfahren bei dem explizite und implizite Verfahren zu einer Prädiktor-Korrektor-Methode kombiniert werden. Die ABM-Methode baut sich aus dem Adams-Bashforth- und dem Adams-Moulton-Verfahren auf.

##### 4.1 Adams-Bashforth-Verfahren

Ausgangspunkt ist die zur Differentialgleichung (4.1.1) äquivalenten Integralgleichung

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx. \tag{4.1.1}$$

Dieses Integral wird an den bekannten Stellen  $f_k = f(x_k, y_k)$ ,  $f_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1})$ ,  $f_{k-2} = f(x_{k-2}, y_{k-2})$  und  $f_{k-3} = f(x_{k-3}, y_{k-3})$  durch eine interpolatorische Quadraturformel approximiert. Man beachte, daß zur Bestimmung des Integrals vier bekannte Funktionswerte  $f_i$  verwendet werden. Dies geschieht hier nur, um die grundsätzliche Darstellung des Verfahrens einfach zu halten. Prinzipiell können beliebig viele bekannte  $f_i$ -Werte verwendet werden.

Zur Interpolation wird das eindeutig bestimmte Polynom  $P_3(x)$  dritten Grades benützt, das mit den Lagrange-Polynomen  $L_{k-j}(x)$  wie folgt lautet

$$P_3(x) = \sum_{j=0}^3 f_{k-j} L_{k-j}(x). \tag{4.1.2}$$

Das Integral (4.1.1) wird durch das Integral von  $P_3(x)$  angenähert und man erhält

$$y_{k+1} = y_k + \sum_{j=0}^3 f_{k-j} \int_{x_k}^{x_{k+1}} L_{k-j}(x) dx. \tag{4.1.3}$$

Wertet man die Integrale der Lagrange-Polynome  $L_{k-j}(x)$  analytisch aus, erhält man für das 4-Schrittverfahren von Adams-Bashforth

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}). \tag{4.1.4}$$

$h$  ist die Schrittweite.

Mit einem Verfahren vom Typ Adams-Bashforth erhält man also durch Linearkombination bekannter Funktionswerte eine Näherung für den gesuchten Funktionswert  $y_{k+1}$ . Die Adams-Bashforth-Methode ist eine explizite Methode.

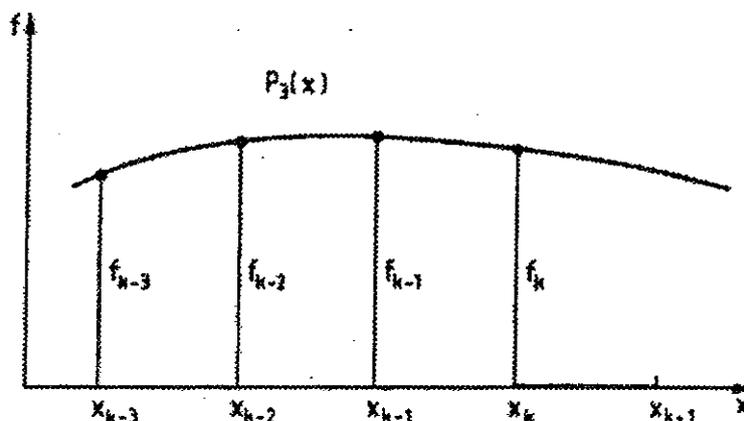


Abbildung 2: Approximation des Integrals (4.1.1) (Schwarz, 1988)

#### 4.2 Adams-Moulton-Verfahren

In dieser Methode wird zur Berechnung des Integrals (4.1.1) nun auch der eigentlich unbekannte Funktionswert  $f_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$  mit verwendet. Analog der Vorgehensweise in (4.1) erhält man ein Interpolationspolynom  $P_4(x)$  vierten Grades. Wird dies ebenfalls analytisch integriert, erhält man für die Methode von Adams-Moulton

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720} (251f_{k+1} + 646f_k - 264f_{k-1} + 106f_{k-2} - 19f_{k-3}), \quad (4.2.1)$$

mit  $h$ : Schrittweite.

Wie man sieht, ist die Integrationsvorschrift (4.2.1) implizit, weil sie zur Bestimmung von  $y_{k+1}$  bereits den Funktionswert  $f_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$  benötigt.

Für  $f_{k+1}$  setzt man den mit einem Adams-Bashforth-Verfahren bestimmten Wert ein und betrachtet diesen als Näherung. Die Auswertung des Adams-Moulton-Verfahrens liefert dann einen verbesserten Wert für  $y_{k+1}$ .

In der Mathematik ist diese Vorgehensweise als Prädiktor-Korrektor-Methode bekannt.

$y_{k+1}^P$ : Näherungswert mit Adams-Bashforth (Prädiktor)

$y_{k+1}^K$ : Verbesserter Wert mit Adams-Moulton (Korrektor)

Der Vorteil der ABM-Methode liegt darin, daß bereits bekannte Information wieder verwendet wird und die Funktion  $f(x, y)$  nur einmal ausgewertet werden muß, um  $y_{k+1}$  zu bestimmen.

Die ABM-Methode kann nur starten, wenn entsprechende Werte  $f_k, f_{k-1}, \dots, f_{k-m}$  bekannt sind. Diese werden in einer Initialisierungsphase mit einem Einschrittverfahren gewonnen.

## Anhang 2: Ableitung der Legendre-Polynome

Für die Berechnung der Gravitationsbeschleunigung auf einen Satelliten in CTS wegen des anisotropen Gravitationspotentials der Erde werden neben den vollständig normierten zugeordneten Legendre-Polynomen  $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$  auch deren Ableitungen nach der Co-Breite  $\theta$  benötigt. Diese können nun mit den bereits berechneten  $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ -Werten bestimmt werden.

1. Bestimmung der  $\frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta}$ 

Die Ableitung der Polynome wird hier aus der Rekursionsvorschrift zur Bestimmung der Ableitungen der nicht-normierten zugeordneten Legendre-Polynome gewonnen (vgl. *Rummel, 1992*). Für diese gilt:

$$\frac{\partial P_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} = -P_{n,m+1}(\cos \theta) + m \cot \theta P_{nm}, \quad (1.1)$$

mit  $n, m$ : Grad und Ordnung  
 $\theta$ : Co-Breite des Satelliten bzgl. CTS

Führt man nun den für das Polynom  $P_{nm}(\cos \theta)$  gültigen Normierungsfaktor  $H_{nm}$  in die Rekursion (1.1) ein und beachtet, daß dieser von einer Differentiation des Polynoms vom Grad  $n$  und der Ordnung  $m$  nach der Co-Breite unabhängig ist, so erhält man eine Rekursionsformel für die Ableitung der vollständig normierten Legendre-Polynome.

$$\bar{P}_{nm} = H_{nm} \cdot P_{nm}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \bar{P}_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} = H_{nm} \frac{\partial P_{nm}(\cos \theta)}{\partial \theta} = -A_{nm} \cdot \bar{P}_{n,m+1}(\cos \theta) + m \cot \theta \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (1.3)$$

$$\text{mit } H_{nm} = \begin{cases} \sqrt{2n+1} & m=0 \\ \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & m \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

$$A_{nm} = \frac{H_{nm}}{H_{n,m+1}} \quad (1.5)$$

Wie bereits in Gleichung (1.1) deutlich wird, sind Ableitungen von Legendre-Polynomen für  $\theta = 90^\circ$  wegen  $\cot \theta$  nicht definiert. Damit ergibt sich, daß Polbahnen mit  $\theta$  exakt  $90^\circ$  nicht berechnet werden können<sup>1</sup>. Für den Skalierungsfaktor  $A_{nm}$  ergeben sich in Abhängigkeit von der Ordnung  $m$  vereinfachte Ausdrücke. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

<sup>1</sup> Für polnahe Bahnen, d.h.  $\theta \approx 90^\circ$  geht der Ausdruck  $\cot \theta$  gegen  $\infty$ . Hier ergeben sich u.U. numerische Instabilitäten.

1. Fall  $m = 0$

$$A_{n0} = \frac{H_{n0}}{H_{n1}} = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2(2n+1) \frac{(n-1)!}{(n+1)!}}} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (1.6)$$

2. Fall  $m \neq 0$

$$A_{nm} = \frac{H_{nm}}{H_{n,m+1}} = \dots = \sqrt{(n-m)(n+m+1)} \quad (1.7)$$

Man beachte, daß die  $A_{nm}$  für  $n = m$  den Wert Null annehmen, so daß die Ableitungen der sektorialen Polynome allein vom Term  $m \cot \theta \overline{P}_{nm}(\cos \theta)$  bestimmt werden.

Diese Formeln wurden im m-file dPdth.m realisiert. dPdth.m verwendet die zuvor mit pnm2.m berechneten Funktionswerte der vollständig normierten Legendre-Polynome für die Co-Breite  $\theta$ .

### Anhang 3: Lagrange-Interpolation für Planetenephemeriden

Die Herleitung der Lagrange-Interpolation folgt im wesentlichen der in *Schwarz, H.R., (1988)* beschriebenen Vorgehensweise.

Gegeben sind in der allgemeinen mathematischen Situation  $(n+1)$  Stützstellen  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sowie dazugehörige Stützwerte  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . In diesem Fall sind die Stützstellen die in julianischen Jahrhunderten seit J2000.0 TDT ausgedrückte Epochen für die Planetenörter, die Stützwerte entsprechen den mit Hilfe der genauen Planetentheorie im voraus berechneten Planetenörtern. Die Stützstellen wurden im mat-File *eph.mat* gespeichert. Die Stützwerte sind die (bereits) geozentrischen kartesischen Koordinaten der Ephemeriden (gespeichert in *eph.mat*).

Gesucht ist ein Polynom  $P_n(x)$  vom (maximal)  $n$ -ten Grad für das gilt

$$P_n(x_k) = y_k, \quad (1)$$

mit

$$x_k \in [x_0, x_1, \dots, x_n],$$

$$y_k \in [y_0, y_1, \dots, y_n].$$

Die prinzipielle Vorgehensweise wird für ein Polynom vom Grad  $n = 5$  vorgestellt. Mit den gegebenen Stützwerten bzw. -stellen berechnet sich ein solches Polynom nach der Vorschrift von Lagrange nach folgenden Formeln:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad (2)$$

mit  $y_i$ : bekannte Stützwerten

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} : \text{Lagrange-Polynome} \quad (3)$$

$x_{i,j}$ : bekannte Stützstellen

Im Falle von  $n = 5$  lautet  $P_n(x)$  also

$$P_5(x) = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3 + y_4 L_4 + y_5 L_5. \quad (4)$$

*Anmerkung:* Die Lagrange-Interpolation bietet die Möglichkeit aus  $(n+1)$  Stützstellen und Stützwerten ein Polynom vom Grad  $n$  für den ganzen Stützstellenbereich  $x_0, x_1, \dots, x_n$  zu bestimmen.

Hier wird für je sechs Zeitpunkte der vorausberechneten Ephemeriden ein Interpolationspolynom vom aus sechs Stützstellen maximal möglichen Grad  $n = 5$  gebildet. Für den momentanen Integrationszeitpunkt  $t$  werden aus *eph.mat* bzw. *eph.mat* je drei davorliegende bzw. zwei zurückliegende vorausberechnete Werte entnommen und ein für dieses Intervall gültiges Interpolationspolynom berechnet (siehe Abbildung 1).

Es gilt:

$$t \in [t_{i+2}, t_{i+3}]$$

$$\vec{r}(t_k): k = i, i+1, \dots, i+5 \text{ vorausberechnete Ephemeriden für die Epochen } t_k$$

$$\vec{r}(t): \text{ zu interpolierende Ephemeride des jeweiligen Drittkörpers.}$$

Das Interpolationspolynom  $P_5(t)$  gilt für den Zeitraum  $t \in [t_{i+2}, t_{i+3}]$ ; wandert  $t$  über dieses Intervall hinaus muß ein neues Polynom vom Grad  $n = 5$  berechnet werden. Im m-File *lagrintp.m* wird kein analytisches Polynom  $P_5(t)$  für den jeweiligen Integrationszeitraum  $t \in [t_{i+2}, t_{i+3}]$  aufgestellt und ein Wert für  $t$  eingesetzt, sondern für jeden Integrationszeitpunkt  $t$  das betreffende Polynom sofort numerisch berechnet.

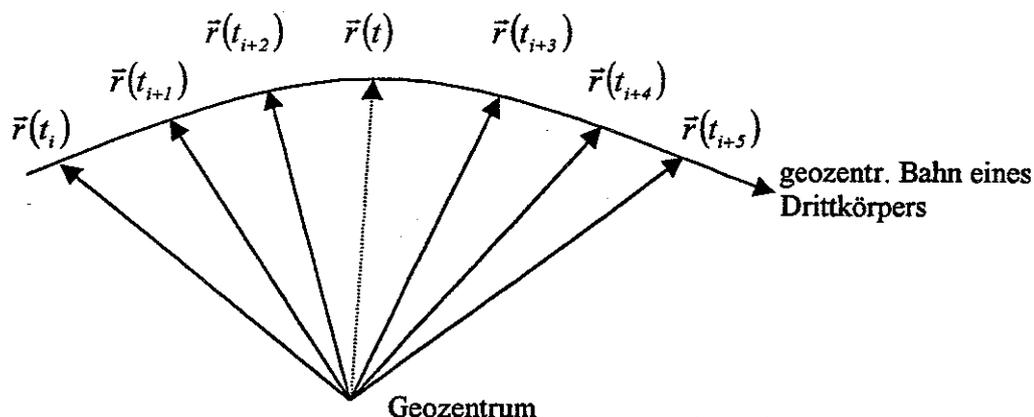


Abbildung 1: Lagrange-Interpolation für Planetenephemeriden

Die Lagrange-Interpolation läuft dort schematisch folgendermaßen ab

1. Suche für  $t$  aus eph.mat das Intervall  $t \in [t_{i+2}, t_{i+3}]$
2. Suche die Ephemeriden  $x(t_k), y(t_k), z(t_k)$  für  $k = i, i+1, \dots, i+5$  aus eph.mat
3. Wende die Lagrange-Interpolation explizit für  $t$  an und bestimme  $x(t), y(t), z(t)$
4. Berechne mit  $x(t), y(t), z(t)$  die Störbeschleunigung des jeweiligen Drittkörpers.

### 1. Lagrange-Interpolation mit Polynomen verschiedenen Grades

Die Interpolationsgenauigkeit hängt vom Grad des verwendeten Polynoms und vom zeitlichen Abstand der Stützstellen ab. An dieser Stelle wurde die Approximationsgüte durch Verwendung von Polynomen unterschiedlichen Grades untersucht, nicht durch Verringerung des Stützstellenabstandes. Dazu wurde eine allein wegen der Anziehungskräfte von Drittkörpern gestörte Satellitenbahn numerisch integriert. Die Ephemeriden der Störkörper wurden aus dem Satz vorausberechneter Planetenörter mit der Lagrange-Interpolation berechnet. Zur Interpolation wurde jeweils ein Polynom vom Grad  $n = 3$ , ein Polynom vom Grad  $n = 5$  und ein Polynom  $n = 7$  verwendet. Als Störkörper wurden Sonne, Mond, Mars, Venus, Saturn und Jupiter berücksichtigt. Differenzen in den so berechneten Satellitenephemeriden bzw. deren kartesische Komponenten bzgl. des Bahnintegrationssystems zeigen die unterschiedliche Approximationsgüte.

Satellitenparameter:

Kepler-Elemente	
$a$ in [km]	26560
$e$	0.01
$i$ in [°]	55
$\Omega$ in [°]	30
$\omega$ in [°]	60

Tabelle 1: Satellitenparameter Lagrange-Interpolation

Der Satellit startet im Perigäum, die Umlaufzeit beträgt 24 Stunden, wobei für jede Minute eine Ephemeride integriert wurde. Abbildung 2 zeigt die Unterschiede in den Komponenten der Ortsvektoren bei Verwendung der Polynome  $P_3(t)$  und  $P_5(t)$ . Durch Verwendung des Polynoms vom Grad  $n = 5$  erreicht man eine Steigerung in der Genauigkeit der Satellitenephemeriden im [cm]-Bereich.

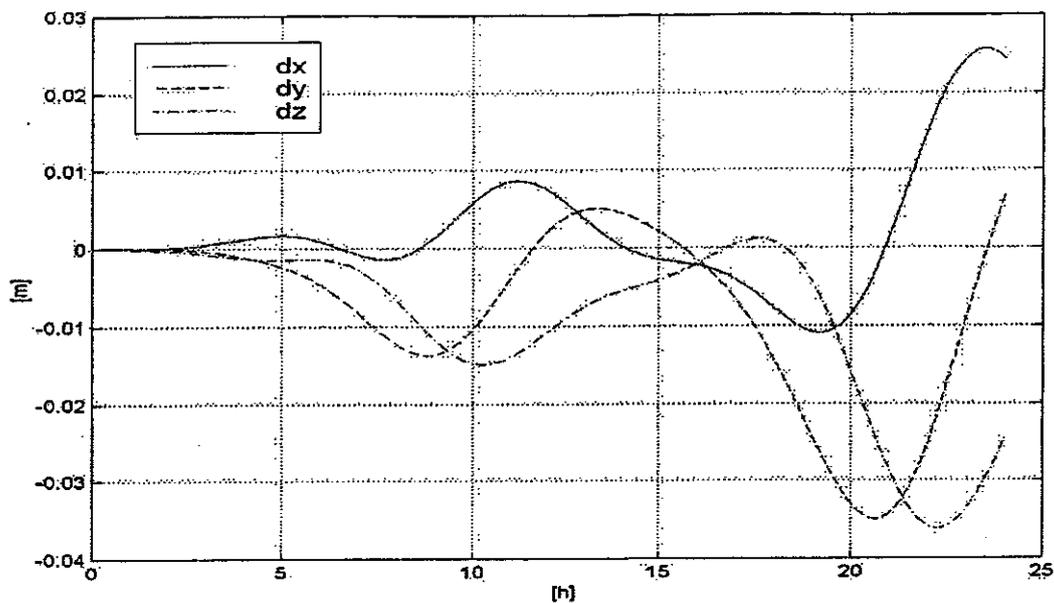


Abbildung 2: Abweichungen in Satellitenephemeriden durch Verwendung von  $P_3(t)$  und  $P_5(t)$  in der Lagrange-Interpolation zur Berechnung der Örter von Störkörpern

Verwendet man zur Lagrange-Interpolation ein Polynom vom Grad  $n = 7$ , erhält man Abweichungen in den Satellitenephemeriden im Bereich  $\pm 2-3$  [mm] verglichen mit denen, die unter Verwendung der Lagrange-Interpolation mit  $P_5(t)$  berechnet wurden. Dies ist in Abbildung 3 nochmals veranschaulicht. Durch Verwendung von Polynomen höheren Grades wird die Approximationsgüte der Örter der Störkörper und damit letztlich die Genauigkeit von numerisch integrierten Satellitenephemeriden gesteigert. Mit der Erhöhung des Polynomgrades steigt jedoch auch die Zahl der auszuwertenden Terme pro Integrationsschritt und damit die Rechenzeit. So wurden folgende Rechenzeiten benötigt

Grad $n$ des Polynoms	Rechenzeit in [sec]
3	145.97
5	154.75
7	222.57

Tabelle 2: Rechenzeiten Lagrange-Interpolation verschiedenen Grades

In Anbetracht der deutlichen Zunahme der Rechenzeit bei Verwendung von  $P_7(t)$  und der relativ geringen Genauigkeitssteigerung von wenigen [mm] wird in SATLAB 1.0 die Lagrange-Interpolation mit einem Polynom vom Grad  $n = 5$  fest implementiert. Für genauere Anwendungen steht die Lagrange-Interpolation mit einem Polynom vom Grad  $n = 7$  im m-File lagrintp2.m zur Verfügung. Dieser kann bei Bedarf vom Nutzer im m-File accintpla.m anstelle von lagrintp.m eingesetzt werden. Alternativ kann zur Steigerung der Genauigkeit der Ergebnisse unter Beibehaltung der Lagrange-Interpolation mit  $P_5(t)$  einer neuer Satz von Planetenörtern vorausberechnet werden, jedoch mit einem geringeren zeitlichen Abstand der Planetenörter als es bisher in epht.mat bzw. eph.mat der Fall ist.

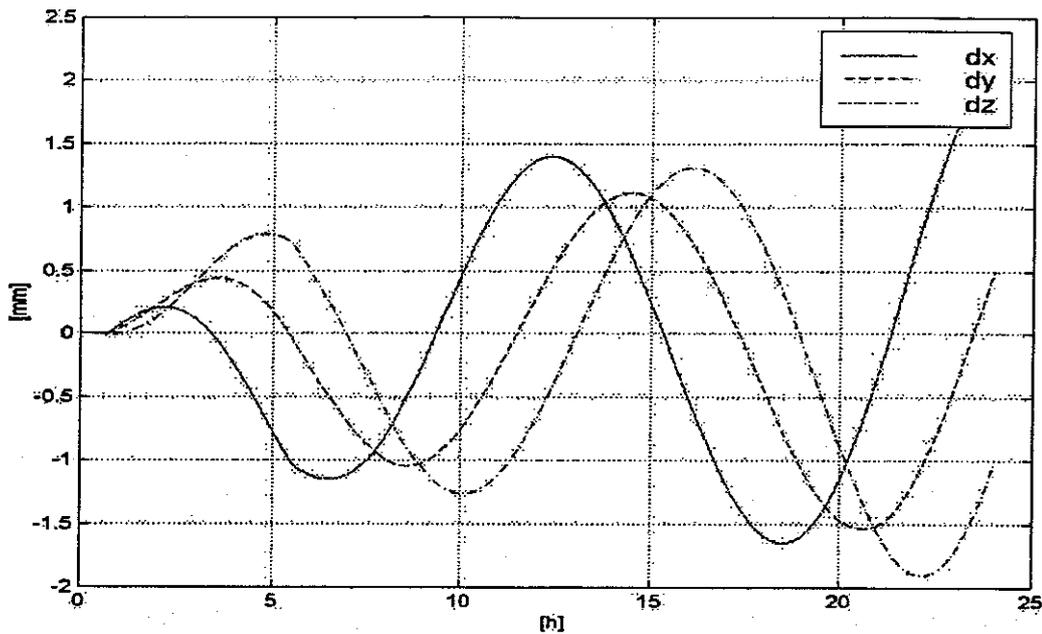


Abbildung 3: Abweichungen in Satellitenephemeriden durch Verwendung von  $P_3(t)$  und  $P_7(t)$  in der Lagrange-Polynome zur Berechnung der Örtter von Störkörpern

### Anhang 4: Variation der Exosphärentemperatur, Partialdichten der Konstituenten und der Gesamtdichte mit der Sonnenaktivität

In diesem Abschnitt wird die Abhängigkeit der Atmosphärendichte in CIRA86 von der Sonnenaktivität in unterschiedlichen Höhen anhand zweier numerischer Beispiele dargestellt. Die Sonnenaktivität, dargestellt in Werten der extremen ultravioletten Strahlung  $F_{10.7cm}$ , wird in

$F_{10.7cm} = 75$	geringe Aktivität
$F_{10.7cm} = 150$	mittlere Aktivität
$F_{10.7cm} = 250$	starke Aktivität

unterteilt.

CIRA86 benötigt als Eingabeparameter zur Berechnung der Atmosphärendichte einen Wert der Sonnenaktivität des vorhergehenden Tages<sup>1</sup>  $F_{10.7cm}$  sowie einen Mittelwert über drei Sonnenrotationen (81 Tage)  $\bar{F}_{10.7cm}$ .

In den nachfolgenden Tests wurde der Mittelwert mit  $\bar{F}_{10.7cm} = 150$ , d.h. mittlere Sonnenaktivität angenommen. Als unabhängige Variable in den Testrechnungen wurde der Wert der Sonnenaktivität des vorhergehenden Tages  $F_{10.7cm}$  im Intervall  $F_{10.7cm} = [75, 250]$  variiert. Mit diesem variablen  $F_{10.7cm}$ -Wert wurden für zwei Höhenbereiche ( $z_1 = 120$  [km] und  $z_2 = 400$  [km]) Atmosphärendichte-, Exosphärentemperatur- und Partialdichtenwerte berechnet. Die übrigen benötigten Parameter wurden jeweils konstant gehalten, u.a. wurde der Einfluß des Geomagnetfeldes durch Verwendung von  $a_p = 4$  eliminiert.

#### 1. Ergebnisse: Variation von Atmosphärenparameter mit der Sonnenaktivität

Abbildung 1 zeigt die Variation der Partialdichten der einzelnen Konstituenten in einer Höhe von 400 [km] über der Erdoberfläche. Man sieht eine deutliche Korrelation (bzw. Antikorrelation) der beteiligten Gase. Die Ausnahme bildet Helium, dessen Dichte nahezu konstant bleibt.

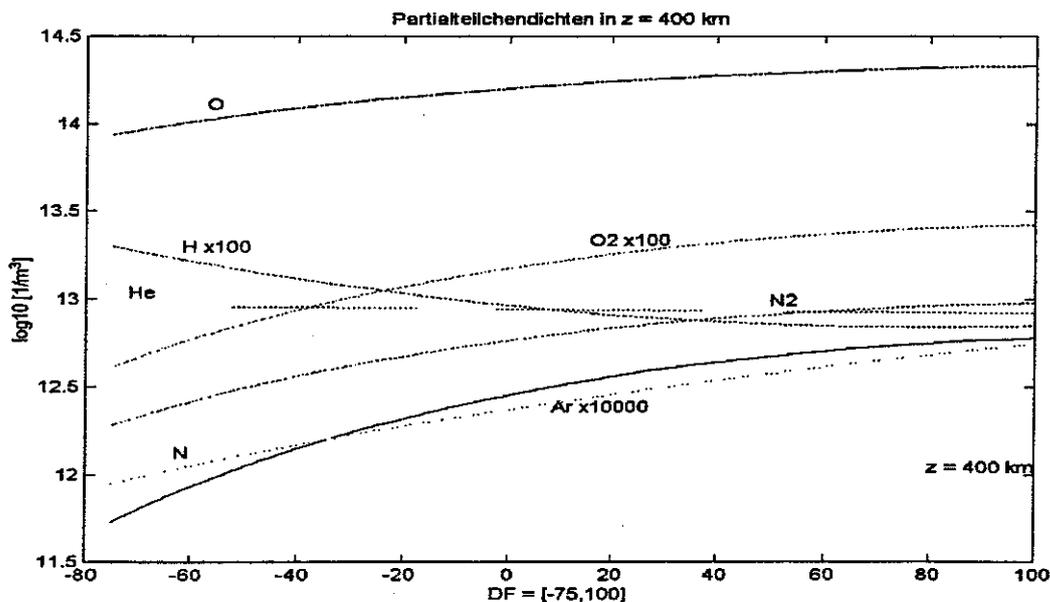


Abbildung 1: Partialdichten in 400 [km] Höhe

<sup>1</sup> Vom Berechnungstag aus gesehen.

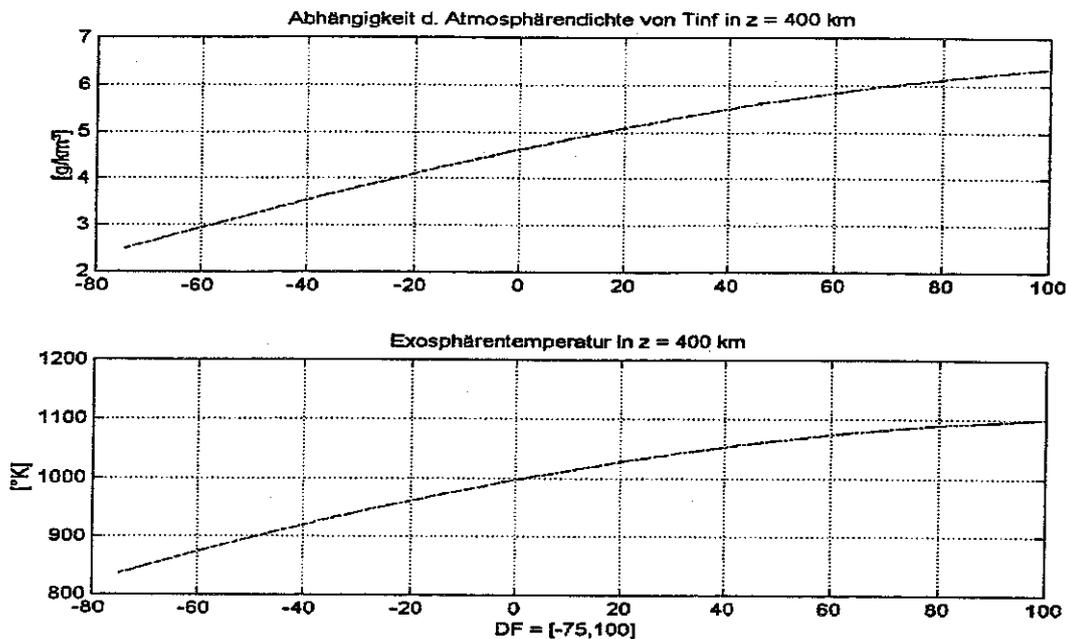


Abbildung 2: Atmosphärendichte, Exosphärentemperatur in 400 [km] Höhe

Abbildung 2 zeigt deutlich die Korrelation zwischen Sonnenaktivität, Exosphärentemperatur und Atmosphärendichte. Die Zunahme der Atmosphärendichte (zwischen  $\rho_{min}$  und  $\rho_{max}$ ) erreicht in diesem Beispiel einen Wert von 160 % !

In einer Höhe von 120 [km] macht sich der Einfluß der Sonnenaktivität deutlich gedämpfter bemerkbar.

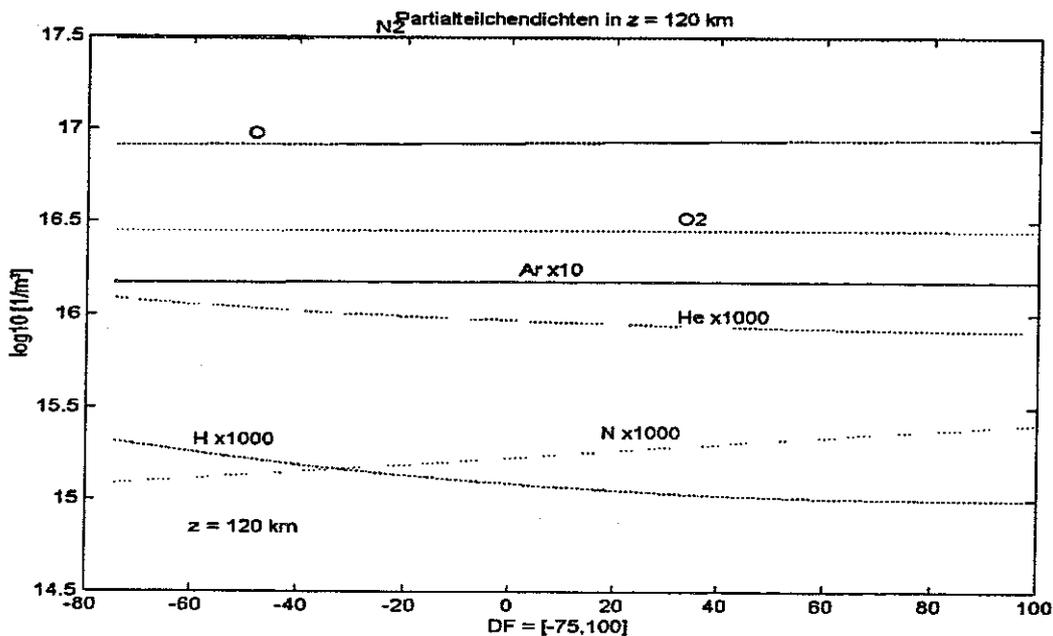


Abbildung 3: Partialdichten in 120 [km] Höhe

Die Partialdichten der meisten Konstituenten sind in dieser Höhe konstant und damit weitgehend unabhängig von der Sonnenaktivität. Dies spiegelt sich auch in der Gesamtdichtendichte wieder. Die Dichtezunahme verursacht durch Zunahme der Sonnenaktivität, erreicht hier lediglich 8 % (vgl. Abb. 4).

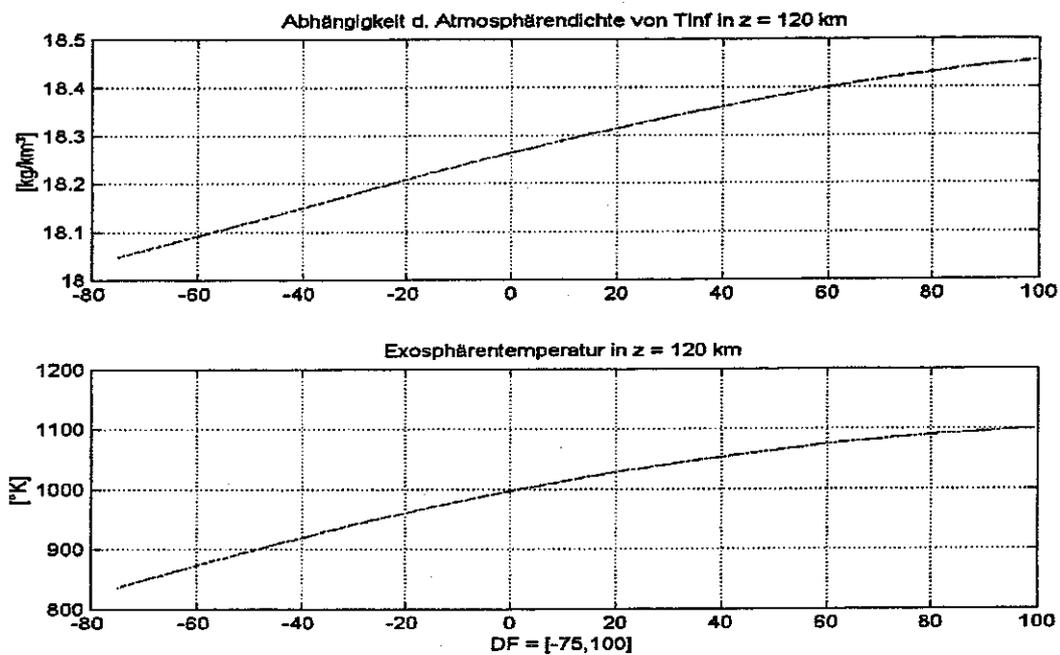


Abbildung 4: Atmosphärendichte, Exosphärentemperatur in 120 [km] Höhe

**Veröffentlichungen in der Schriftenreihe IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):**  
**Reports in the series IAPG / FESG (ISSN 1437-8280):**

**No. 1:** Müller J., Oberndorfer H. (1999). *Validation of GOCE Simulation*. ISBN 3-934205-00-3.

**No. 2:** Nitschke M. (1999). *SATLAB - Ein Werkzeug zur Visualisierung von Satellitenbahnen*. ISBN 3-934205-01-1.

**No. 3:** Tsoulis D. (1999). *Spherical harmonic computations with topographic/isostatic coefficients*. ISBN 3-934205-02-X.

**No. 4:** Dorobantu R. (1999). *Gravitationsdrehwaage*. ISBN 3-934205-03-8.

**No. 5:** Schmidt R. (1999). *Numerische Integration gestörter Satellitenbahnen mit MATLAB*. ISBN 3-934205-04-6.

**Weitere Exemplare können bezogen werden unter:**

**Copies are available from:**

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie

Technische Universität München

Arcisstrasse 21

D-80290 München

Germany

Telefon: +49-89-289-23190

Telefax: +49-89-289-23178

Email: [jxmx@bv.tum.de](mailto:jxmx@bv.tum.de)

**Oder im Internet:**

**Or via Internet:**

<http://step.iapg.verm.tu-muenchen.de/reports/>