TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten

M. Schneider

IAPG / FESG No. 15

Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie

München 2002

Zur Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten

M. Schneider

IAPG / FESG No. 15

München 2002

ISSN 1437-8280
ISBN 3-934205-14-3

Adressen:
Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie
Technische Universität München
Arcisstrasse 21
D-80290 München
Germany
Telefon: +49-89-289-23190
Telefax: +49-89-289-23178
http://step.iapg.verm.tu-muenchen.de/iapg/

Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie
Technische Universität München
Arcisstrasse 21
D-80290 München
Germany
Telefon: +49-89-289-23191
Telefax: +49-89-289-23178
http://alpha.fesg.tu-muenchen.de/fesg/

Inhaltsverzeichnis

1.Vorbemerkungen

Mit den Satellitenmissionen CHAMP, GRACE und GOCE , die speziell der räumlich und zeitlich hochauflösenden Bestimmung des äußeren Gravitationsfeldes der Erde gewidmet sind, wird sich die Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Satelliten grundlegend wandeln. Erstmals wird die Bahnverfolgung dieser Satelliten lückenlos mit Hilfe der Satelliten des GPS-Systems möglich sein, es entfällt damit das Problem, die geozentrische Umlaufbewegung aus den in der Regel stark lückenhaften Bahnverfolgungsdaten von Bodenstationen zu rekonstruieren. Genaue Lasermessungen von Bodenstationen dienen jetzt eher der Eichung der aus GPS-Messungen abgeleiteten Bahnen, und nicht mehr der Gravitationsfeldbestimmung. Hinzu kommt, daß diese Satellitenmissionen neuartige Observablen liefern, wie beispielsweise satellite – to – satellite – tracking (SST) – Daten bei CHAMP und GRACE in einer hoch – niedrig- bzw. niedrig – niedrig – Variante oder Satellitengradiometrie-Daten im Falle von GOCE. Hinzu kommt die in situ – Messung der Resultierenden aller nichtgravitativen Kräfte im Flugbereich der Satelliten durch Akzelerometrie sowie die Möglichkeit der Lagebestimmung der Satelliten in Bezug auf Fixsterne durch Sternsensoren.

Die neuartigen Observablen stehen zusammen mit den Bahnverfolgungsdaten sowie der Lagesbestimmung in hoher zeitlicher Dichte und nahezu global zur Verfügung. Dieser veränderten Situation muß die Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten angepaßt werden. Im Folgenden sollen hierzu einige vorgeschlagene Verfahrensweisen dargestellt werden.

2. Konzepte der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten

Die Satellitengeodäsie hat die Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde von Beginn an im Rahmen eines allgemeinen Bahnbestimmungsproblems gelöst. Dabei wurden aus der astronomischen Bahnbestimmung bekannte Verfahren angepaßt und im Hinblick auf neue Observable (Entfernungen, Entfernungsänderungen) der Bahnverfolgungs- und Ortungsverfahren weiterentwickelt.

Mit dem Aufkommen der satellitengestützten Flughöhenmessung (Radaraltimetrie) begann sich die Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erd-Satelliten zu wandeln. Besonders deutlich wird das werden durch die Möglichkeiten des satellite – to – satellite – tracking (SST) und die Satellitengradiometrie (SGG).

Im folgenden sollen Konzepte der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten dargestellt werden.

2.1 Nutzung akkumulierter Bahnstörungen

Aus der Theorie der Umlaufbewegung der Erdsatelliten ist bekannt, daß die **Anisotropie** des Gravitationsfeldes der Erde zu

> charakteristischen **Akkumulationen** monotoner (säkularer) und/oder periodischer Natur der Bahnstörungen (etwa der Keplerschen Bahnelemente $i, \Omega, \omega, a, e, \tau$)

führt:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{gerade Zonale}\\ \text{ungerade Zonale}\\ \text{Nichtzonale}\end{array}\right\} \text{ zu } \left\{\begin{array}{l}\text{säkularen}\\ \text{langperiodischen}\\ \text{periodischen}\end{array}\right\} \text{Störungsanteilen}$$

Die analytischen Darstellungen dieser Störungsanteile können als Bestimmungsgleichungen für die Potentialkoeffizienten der zonalen/nichtzonalen Harmonischen der Entwicklung des Außenraumpotentials der Erde nach Kugelflächenfunktionen herangezogen werden.

Beispiel: Für die auf die zonalen Potentialkoeffizienten $C_{l,0}$ zurückzuführenden Störungsanteile ergibt sich im Rahmen einer Bahntheorie 1.Ordnung (ω steht für die gestörte Apsidenlage)

$$\begin{aligned} i(t) &= i_0 + A_i \sin\omega \\ e(t) &= e_0 + A_e \sin\omega \\ \omega(t) &= \omega_0 + \dot{\omega}t + A_\omega \cos\omega \\ \Omega(t) &= \Omega_0 + \dot{\Omega}t + A_\omega \cos\omega \end{aligned} \quad , \tag{2.1}$$

trennt man aus der Gesamtstörung die kurzperiodischen Anteile heraus. Die Änderungsraten $\dot{\omega},\dot{\Omega}$ der säkularen Anteile und die Amplituden A_{α_i} der langperiodischen Störungsanteile erhält man zu

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}(i,a,e) C_{2l,0} \\ \dot{\omega} &= \sum_{l=1}^{\infty} b_{2l}(i,a,e) C_{2l,0} \\ A_{\alpha_i} &= \sum_{l=1}^{\infty} c_{2l}(i,a,e) C_{2l+1,0} \qquad \alpha_i \in \{i,\Omega,a,e\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Hat man aus den Bahnverfolgungsdaten die Raten $\dot{\omega},\dot{\Omega}$ sowie die Amplituden A_{α_i} berechnet, können aus den in den Potentialkoeffizienten $C_{2l,0}, C_{2l+1,0}$ der Zonalen linearen Gleichungen die Potentialkoeffizienten ermittelt werden.

Da je Satellitenbahn maximal 6 solcher Gleichungen zur Bestimmung der theoretisch unendlich vielen Potentialkoeffizienten der geraden und ungeraden Zonalen anfallen, ist die Aufgabe grundsätzlich unterbestimmt. Es muß deshalb der Laufbereich des Grades l beschränkt werden auf einen maximalen Grad L, d.h., die linearen Bestimmungsgleichungen, die tatsächlich zur Verfügung stehen, lauten [21,22]

$$\dot{\Omega} = \sum_{l=1}^{L_\Omega} a_{2l}(i,a,e)C_{2l,0}$$
$$\dot{\omega} = \sum_{l=1}^{L_\omega} b_{2l}(i,a,e)C_{2l,0} \qquad (2.3)$$
$$A_{\alpha_i} = \sum_{l=1}^{L_{\alpha_i}} c_{2l}(i,a,e)C_{2l+1,0} \qquad \alpha_i \in \{i,\Omega,a,e\}$$

Die Summationsindizes $L_\Omega, L_\omega, L_{\alpha_i}$ können unterschiedlich sein.

Zur Auflösung nach den Potentialkoeffizienten muß noch sichergestellt werden, daß die einzelnen Gleichungen hinreichend von einander unabhängig sind.

Um das zu erreichen, sind Satellitenbahnen mit ausreichend unterschiedlichen mittleren Bahnelementen i, a, e zu wählen, also. Die Abhängigkeit der Koeffizientenfunktionen a_{2l}, b_{2l}, c_{2l+1} von i, a,e auszunutzen. Der nur geringe Variationsbereich von a, e und die lückenhafte Verteilung in der Bahnneigung der nutzbaren Erdsatelliten beschränkt die Anzahl bestimmbarer Potential-koeffizienten erheblich.

Die Nutzung der akkumulierten Bahnstörungen setzt voraus, daß man möglichst hypothesenfrei, d.h. ohne Vorabkenntnis der gesuchten Potentialkoeffizienten aus den Bahnverfolgungsdaten die Größen $\dot{\omega}, \dot{\Omega}$ sowie die Amplituden A_{α_i} ermittelt. Dazu greift man auf ein aus der astronomischen Bahnbestimmung, d.h. der sog. definitiven Bahnbestimmung bekanntes Verfahren zurück, die differentielle Korrektur von Modellparametern, zurück, das in der Satelliten-geodäsie entscheidend weiterentwickelt worden ist und zum Verfahren der Wahl zur Lösung des allgemeinen Bahn- und Parameterbestimmungsproblems [21] schlechthin geworden ist. Darauf soll kurz eingegangen werden.

2.2 Differentielle Verbesserung von Parametern

Der Observablen *O*, gemessen zur Zeit t^*, wird die theoretisch korrespondie-rende Größe A, gerechnet zum Zeitpunkt *t*, gegenübergestellt[22].
Das Ergebnis dieses Vergleiches wird eine Differenz

$$O(t^*) - A(t) \neq 0 \qquad (2.4)$$

sein. Dieser Widerspruch von Observabler und testbarem Funktional zu den korrespondierenden Zeitpunkten t^* und t ist auf verschiedene Ursachen zurückzuführen, insbesondere auf korrekturbedürftige Parameter $\mathbf{P^0}$, mit denen das Funktional A berechnet wird. Zu diesen zählen beispielsweise

- geozentrische Koordinaten der Bahnverfolgungsstationen oder Satelliten
- Transformationselemente beim Wechsel der Bezugssysteme
- Feld- und Wechselwirkungsparameter aus der Kräftefunktion

Der Widerspruch $O(t^*) - A(t) \neq 0$ wird nach dem Verfahren differentieller Korrektur dadurch aufgelöst, daß man geringfügige Korrekturen ΔO, ΔA an O *bzw.* A anbringt, also

$$O + \Delta O - (A(\mathbf{P}^*, t^* + \Delta t) + \Delta A) = 0 \tag{2.5}$$

Die Korrektur ΔA des Funktionals selbst führt man zurück auf Korrekturen der

- Parameterwerte $\mathbf{P^0}$
- Korrekturen an den Epochen t^* der abgelesenen Uhren, die die bei der Beschreibung der Bewegung unterlegte t-Skala nur näherungsweise erzeugen.

Geht man mit einer Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} A(\mathbf{P^0} + \Delta\mathbf{P}, t^* + \Delta t) \approx A(\mathbf{P^0}, t^*) + \\ \Delta t \frac{\partial A}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{P^0}, t^*} + \Delta\mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{P}} A\Big|_{\mathbf{P^0}, t^*} + \ldots \end{aligned} \tag{2.6}$$

in die Gleichung zur Beseitigung des Widerspruchs ein, so erhält man die linearisierte Beobachtungsgleichung

$$\Delta\mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{P}} A\Big|_{\mathbf{P^0}, t^*} + \Delta t \frac{\partial A}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{P^0}, t^*} = O(t^*) - A(\mathbf{P^0}, t^*) + \Delta O \tag{2.7}$$

Diese Gleichung ist linear in den Korrekturen $\Delta\mathbf{P}$ sowie Δt und ΔO. Sie kann zu jedem Meßzeitpunkt t^* aufgeschrieben werden. Benötigt werden hierzu noch die partiellen Ableitungen

$$\nabla_{\mathbf{P}} A\Big|_{\mathbf{P}^0,t^*} \quad und \quad \frac{\partial A}{\partial t}\Big|_{\mathbf{P}^0,t^*} \tag{2.8}$$

des testbaren Funktionals A, gerechnet am Taylorpunkt $\mathbf{P}^0, t^*$. Zu diesen gelangt man über die Lösung von Variationsgleichungen[21,22].

Um die Gesamtheit der so anfallenden Beobachtungsgleichungen nach den Parameterkorrekturen $\Delta\mathbf{P}$ auflösen zu können, werden Arbeitshypothesen über die Epochenkorrekturen Δt bzw. die Verbesserungen ΔO an den Meß- bzw. Beobachungsdaten benötigt. D.h., es muß u.a.

- das jeweilige Meß-/Beobachtungsverfahren
- die zugehörige Vorverarbeitung der rohen Daten O^*
- das Uhrenverhalten

hinsichtlich systematischer und/oder stochastischer Fehler bewertet/eingeschätzt werden.

2.3 Neuere Konzepte

Auf neuere Konzepte in der Methodik der Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten soll im folgenden näher eingegangen werden, und zwar auf die

- Nutzung des Jacobi-Integrals (in § 3)
- Verwendung von Potenzreihen (in § 4)
- Parameterbestimmung bei Randwertdeterminierung (in § 5)
- Verallgemeinerung des GAUSS-Verfahrens für gestörte Kepler-Bahnen (in § 6)
- Nutzung des Prinzips von Neumann zur Gravitationsfeldbestimmung (in § 7)
- Gravitationsfeldbestimmung basierend auf impliziten Störungsgleichungen (in § 8).

3. Nutzung des Jacobi - Integrals

Die Bahn ist Zwischenunbekannte [21,22] im allgemeinen Bahn - und Parameterbestimmungsproblem. Mit der Möglichkeit, den Bahnverlauf und den Geschwindigkeitsverlauf weitgehend entkoppelt von der Parameterbestimung messen zu können, wie das bei den Missionen CHAMP und GRACE der Fall ist, ergeben sich neue Wege der eigentlichen Parameterbestimmung, speziell der Gravitationsfeldbestimmung.
Ein Weg, nämlich die Existenz von Bewegungsintegralen zu nutzen, soll in diesem Abschnitt diskutiert werden.
O`KEEFE hatte 1957 für die Bewegung eines Satelliten im Schwerefeld einer gleichförmig um eine feste Achse rotierenden Erde gezeigt, daß ein Bewegungsintegral existiert, das für das eingeschränkte Dreikörperproblem von JACOBI bereits 1836 gefunden worden ist. Dieses sog. Jacobi-Integral wurde dann 1967 von SCHNEIDER [26] im Rahmen der Hamilton-Mechanik hergeleitet und dabei die Möglichkeit einer zeitveränderlichen Jacobi-Konstanten in Betracht gezogen, um die einschränkenden Voraussetzungen für die Existenz des Jacobi-Integrals im Hinblick auf eine geodätische Nutzung dieses Bewegungsintegrals abzuschwächen. Ebenfalls 1967 hat BJERHAMMER[2] seinen Vorschlag zur geodätischen Nutzung des Jacobi-Integrals – in der Interpretation als Energieerhaltungssatz im terrestrischen Bezugssystem - veröffentlicht. REIGBER[19] legte 1969 erstmals Ergebnisse umfangreicher Simulationsrechnungen zu dieser Möglichkeit der Gravitationsfeldbestimmung vor, die sich an der seinerzeitigen Qualität der Ortungs- und Bahnverfolgungsverfahren orientierten; die eher wenig befriedigenden Ergebnisse ließen sich deutlich verbessern, wenn eine höhere Genauigkeit der Ortung und Bahnverfolgung angenommen wurde. Die seinerzeit getroffenen optimistischen Annahmen sind inzwischen übertroffen worden.. Der Weg wurde ab 1983 von ILK[6-8] in mehreren Arbeiten in methodischer Hinsicht weiter entwickelt und 1999 von JEKELI [12] angesichts des sich abzeichnenden SST erneut aufgegriffen. GERLACH et. al.[4] haben erste Versuche unternommen, um Daten der CHAMP- Mission zur Gravitationsfeldbestimmung auf der Basis des Jacobi-Integrals zu nutzen. Weiter ist zu nennen die Studie von HAN et. al. [5].
Im folgenden werden die methodischen Grundlagen dargelegt, insbesondere Möglichkeiten aufgezeigt, wie man die engen Voraussetzungen der Existenz des Jacobi-Integrals weitgehend beseitigen kann, und zwar durch den Nachweis eines verallgemeinerten Jacobi-Integrals. Auch wird diskutiert, wie eine zeitveränderliche Jacobi-Konstante zu interpretieren ist.

3.1. Herleitung des Jacobi – Integrals

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens in einem beliebigen GALILEI-System B lautet [21]

$$m\frac{D^2\overline{\mathbf{x}}}{Dt^2} = \overline{\mathbf{K}}\left(\overline{\mathbf{x}}, \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}; t\right) + \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{C}} \tag{3.1}$$

worin

	$\overline{\mathbf{F}} := -m\ddot{\overline{\mathbf{R}}} + \overline{\mathbf{Z}} + \overline{\mathbf{T}}$	Führungskraft
	$\overline{\mathbf{Z}} := -m\overline{\mathbf{d}} \times \left(\overline{\mathbf{d}} \times \overline{\mathbf{x}}\right)$	Zentrifugalkraft
worin	$-m\ddot{\overline{\mathbf{R}}}$	translatorische Führungskraft .
	$\overline{\mathbf{T}} := -m\frac{D\overline{\mathbf{d}}}{Dt} \times \overline{\mathbf{x}}$	Euler-(Kreisel-)Kraft
	$\overline{\mathbf{C}} := -2m\overline{\mathbf{d}} \times \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}$	Coriolis-Kraft

Mit den Potentialfunktionen [21,22]

$U_Z := \frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{d}}(t) \times \overline{\mathbf{x}}\right)^2$	Potential der bezogenenFliehkraft	
$U_F := \overline{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\overline{\mathbf{R}}}$	Potential der bezogenen translatorischen Führungskraft	(3.2)
$\Phi := -2\overline{\mathbf{x}} \cdot \left(\overline{\mathbf{d}}(t) \times \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)$	Potential der bezogenen Coriolis-Kraft	
$\overline{\mathbf{A}} := \frac{1}{3}\overline{\mathbf{x}} \times \left(\frac{D\overline{\mathbf{d}}}{Dt} \times \overline{\mathbf{x}}\right)$	Potential der bezogenen Euler-Kraft	

läßt sich die Bewegungsgleichung schreiben in der Gestalt

$$\frac{D^2\overline{\mathbf{x}}}{Dt^2} = \frac{1}{m}\overline{\mathbf{K}}(\overline{\mathbf{x}}, \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}; t) + \nabla_{\overline{\mathbf{x}}}(U_F + U_Z + \Phi) + \nabla_{\overline{\mathbf{x}}} \times \overline{\mathbf{A}} \tag{3.3}$$

Skalare Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}$ ergibt

$$\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\frac{D^2\bar{\mathbf{x}}}{Dt^2}=\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\left(\ \frac{1}{m}\bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{x}},\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt};t)+\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}(U_F+U_Z+\Phi)+\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\times\bar{\mathbf{A}}\ \right) \tag{3.4}$$

oder

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}(\frac{D\mathbf{x}}{Dt})^2\right)=\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{x}},\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt};t)+\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}(U_F+U_Z+\Phi)+\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\times\bar{\mathbf{A}}\,. \tag{3.5}$$

Die rechte Seite kann dann als vollständige Zeitableitung eines Ausdrucks geschrieben werden, wenn

1. Die bezogene Kraft $\frac{1}{m}\bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{x}},\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt};t)$ nicht explizit zeitabhängig ist und überdies als Gradient einer skalaren Potentialfunktion darstellbar ist, also

$$\bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{x}})= m\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}U_G\,. \tag{3.6}$$

2. $U_F+U_Z+\Phi$ nicht explizit zeitabhängig ist, also insbesondere nicht von einem $\bar{\mathbf{d}}(t)$ und einem $\ddot{\bar{\mathbf{R}}}(t)\neq\mathbf{0}$ abhängt. D.h., die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Bezugssystems B darf nicht zeitveränderlich sein. Dann ist $\frac{D\bar{\mathbf{d}}}{Dt}=\mathbf{0}$ und es entfällt der Term mit dem Vektorpotential $\bar{\mathbf{A}}$. Und es darf keine translatorische Führungsbeschleunigung auftreten.

   Dann folgt

$$\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}(U_G+U_Z+\Phi)=\frac{D(U_G+U_Z+\Phi)}{Dt} \tag{3.7}$$

   Da außerdem

$$\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\Phi=0 \tag{3.8}$$

   folgt (C Integrationskonstante)

$$\frac{1}{2}\frac{D}{Dt}\left(\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2=\frac{DU_S}{Dt}\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2=2U_S(\bar{\mathbf{x}})-C\ . \tag{3.9}$$

Darin ist

$$U_S = U_G + U_Z \tag{3.10}$$

das Schwerepotential im Bezugssystem B.

3.2. Jacobi-Integral und Gauss-Prinzip

Die Beschleunigung eines Teilchens , das sich unter der alleinigen Einwirkung einer alleinigen Kraft **K** bewegt , würde sich nach der Newton-Eulerschen Bewegungsgleichung ergeben zu

$$\ddot{\mathbf{r}}_f = \frac{\mathbf{K}}{m}. \tag{3.11}$$

Bei Bestehen einer Nebenbedingung[21]

$$N(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t) = 0 \tag{3.12}$$

wird sich die tatsächliche Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ des Teilchens davon unterscheiden. Die Wirkung der Nebenbedingung läßt sich durch eine geeignete Zwangskraft **Z** erzielen [21].

GAUSS definiert als Maß für den durch eine Nebenbedingung auf die Bewegung ausgeübten ***Zwang*** die Größe

$$Z := m(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_f)^2 \tag{3.13}$$

und formuliert für den Verlauf einer Teilchenbewegung bei Vorliegen einer Nebenbedingung das

Prinzip des kleinsten Zwanges:

> Die tatsächliche Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$, verglichen mit allen anderen mit der Nebenbedingung verträglichen Beschleunigungen, macht den Zwang Z zu einem Extremum [21]

$$m\left(\ddot{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{K}}{m}\right)^2 = \text{extremal}. \tag{3.14}$$

Die Auswertung dieses Gaussschen Prinzips läuft auf die Aufgabe hinaus , eine **Extremwertaufgabe** bei Vorliegen von Nebenbedingungen zu lösen [21].
Das führt auf eine Bestimmungsgleichung für die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ des Teilchens unter der gemeinsamen Wirkung der Kraft **K** und einer den Nebenbedingungen entsprechenden Zwangskraft **Z**

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} + \lambda \nabla_{\mathbf{v}} N =: \mathbf{K} + \mathbf{Z}. \tag{3.15}$$

Der **Lagrange-Multiplikator** λ ergibt sich zu [21]

$$\lambda = -\frac{\frac{\mathbf{K}\bullet\nabla_{\mathbf{v}} N}{m} + G}{\frac{1}{m}\left|\nabla_{\mathbf{v}} N\right|^2} \quad \text{mit} \quad G(t;\mathbf{r},\mathbf{v}) =: \frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} N\,, \tag{3.16}$$

so daß die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} + \lambda \nabla_{\mathbf{v}} N =: \mathbf{K} + \mathbf{Z} \tag{3.17}$$

lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} - \frac{\frac{\mathbf{K}\bullet\nabla_{\mathbf{v}} N}{m} + G}{\frac{1}{m}\left|\nabla_{\mathbf{v}} N\right|^2}\nabla_{\mathbf{v}} N\,. \tag{3.18}$$

3.2.1 Bewegungsintegrale als Nebenbedingungen

Ein nichtholonom - rheonomes Bewegungsintegral

$$N(\mathbf{r},\mathbf{v}:t) \tag{3.19}$$

ist Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung 1.Ordnung (PDE)

$$\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}\bullet\nabla_{\mathbf{v}} N + G = 0 \tag{3.20}$$

Trägt man für *G* ein, so lautet diese PDE

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla_{\mathbf{r}} N = \mathbf{K} \bullet \nabla_{\mathbf{v}} N \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial N}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3} K_k \frac{\partial N}{\partial v_k} \tag{3.21}$$

Die ***charakteristischen Gleichungen*** zu dieser linearen partiellen Differentialgleichung ergeben sich aus der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) \quad \hat{=} \quad \lambda = 0 \tag{3.22}$$

nimmt man die Variablensubstitution $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$ vor.

3.2.2 Jacobi-Integral als Nebenbedingung

Im Galilei-System B definiert das Jacobi-Integral eine nichtholonom-skleronome Nebenbedingung

$$\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 - 2U_S(\overline{\mathbf{x}}) + C =: N(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{v}} \equiv \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}) \tag{3.23}$$

Die aus dem Gauss - Prinzip folgende PDE lautet für eine solche Nebenbedingung

$$\overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\overline{\mathbf{x}}} N = -\overline{\mathbf{K}} \cdot \nabla_{\overline{\mathbf{v}}} N \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial N}{\partial x_k} = -\sum_{k=1}^{3} K_k \frac{\partial N}{\partial v_k} \tag{3.24}$$

Trägt man in diese Gleichung das Jacobi - Integral als Nebenbedingung ein und setzt für die Kraft die Schwerkraft im Bezugssystem B

$$\overline{\mathbf{K}} = m\nabla_{\overline{\mathbf{x}}} U_S \tag{3.25}$$

ein, so bestätigt man, daß das Jacobi - Integral die PDE erfüllt.

3.2.3 Herleitung des Jacobi-Integrals im Rahmen der Hamilton-Mechanik

Die in Abschnitt 3.2.1 formulierte Vermutung, daß Bewegungsintegrale durch Lösung der verschwindendem Zwang $\lambda = 0$ entsprechenden partiellen Differentialgleichung gefunden werden können, kann auf eine andere Weise bestätigt werden.

Dazu sei ein dynamisches System mit der Hamilton-Funktion H betrachtet [21]. Sind in dessem Phasenraum zwei Funktionen $u(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$ und $v(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$ erklärt, so ist deren ***Poisson-Klammer*** definiert durch (Querstriche bedeuten Transposition der als Matrizen gelesenen Variablen)

$$(u;v) \quad := \quad u_{\bar{\mathbf{q}}} v_{\mathbf{p}} - v_{\bar{\mathbf{q}}} u_{\mathbf{p}} \quad = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial v}{\partial q_i} \frac{\partial u}{\partial p_i} \right). \tag{3.26}$$

Die vollständige Zeitableitung einer auf dem Phasenraum erklärten Funktion $A(\mathbf{q},\mathbf{p};t)$ ergibt sich damit zu

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (A_{\bar{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \bar{\dot{\mathbf{p}}} A_{\mathbf{p}}) \tag{3.27}$$

bzw. mit den kanonischen Gleichungen

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = H_{\mathbf{p}} \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -H_{\mathbf{q}} \tag{3.28}$$

zu

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (A_{\bar{\mathbf{q}}} H_{\mathbf{p}} - H_{\bar{\mathbf{q}}} A_{\mathbf{p}}) \tag{3.29}$$

oder mit der Poisson-Klammer von A und H zu

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(A;H\right) \tag{3.30}$$

Ist nun

$$A(\mathbf{q},\mathbf{p};t) = const \tag{3.31}$$

ein Bewegungsintegral, so verschwindet die vollständige Zeitableitung

$$\frac{dA}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial t} + (A;H) = 0 \tag{3.32}$$

Diese Gleichung korrespondiert der aus dem Gauss - Prinzip hergeleiteten partiellen Differentialgleichung, d.h., sie ist deren Gegenstück für ein

Hamiltonsches System. Die Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung für ein nichtholonom - rheonomes Bewegungsintegral, sie vereinfacht sich für ein nichtholonom - skleronomes Bewegungsintegral zu

$$(A;H)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}-\mathbf{K}\cdot\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}N=0 \tag{3.33}$$

Mit dem Jacobi-Integral

$$\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2-2U_S(\overline{\mathbf{x}})+C=:N(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{v}}\equiv\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt})=:m\ A(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{v}}) \tag{3.34}$$

sowie der Hamilton-Funktion

$$H=T+\tilde{V}=\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2-mU_S \tag{3.35}$$

bestätigt man, daß die partielle Differentialgleichnung

$$(A;H)=0 \tag{3.36}$$

durch das Jacobi-Integral gelöst wird.

Zum Jacobi-Integral gelangt man aber auch ausgehend von einer nicht explizit von der Zeit abhängigen Hamilton - Funktion. Wenn nämlich

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}=0\,, \tag{3.37}$$

dann ist H eine Erhaltungsgröße

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p})=\overline{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{q}}-L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p}))=E\ . \tag{3.38}$$

Gilt für die Lagrange - Funktion

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};t)=T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};t)-\tilde{V}(\mathbf{q};t)\,, \tag{3.39}$$

so ergibt sich, weil T eine quadratische Form in den generalisierten Geschwindigkeiten [21]

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}^T\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}c \\ &=: \quad T_2 \;+\; T_1 \;+\; T_0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &:= m\mathbf{r}_{\mathbf{q}}\mathbf{r}_{\mathbf{q}}^T \\ \mathbf{b}^T &:= m\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial t}\mathbf{r}_{\mathbf{q}}^T \\ c &:= m\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \end{aligned} \tag{3.41}$$

ist, beachtet man die Eulersche Homogenitätsrelation [21]

$$\bar{\dot{\mathbf{q}}}\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}T = \bar{\dot{\mathbf{q}}}\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}(T_2 + T_1 + T_0) = 2T_2 + T_1 \tag{3.42}$$

und die Definition der generalisierten Impulse

$$\mathbf{p} := \nabla_{\dot{\mathbf{q}}}L \tag{3.43}$$

für die Hamilton - Funktion

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q};\mathbf{p};t) &= \bar{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}};t) = \bar{\dot{\mathbf{q}}}\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}L - (T - \tilde{V}) \\ &= \bar{\dot{\mathbf{q}}}\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}T - (T - \tilde{V}) = T_2 - T_0 + \tilde{V}(\mathbf{q};t) \end{aligned} \;. \tag{3.44}$$

Wenn nun H nicht explizit zeitabhängig ist, dann kann es auch $\tilde{V}$ nicht sein, und es resultiert der Erhaltungssatz für die Hamilton - Funktion

$$T_2 - T_0 + \tilde{V}(\mathbf{q}) = E\,. \tag{3.45}$$

Bei **skleronomer** Transformation

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}) \tag{3.46}$$

bedeutet das wegen

$$T_1 = T_0 = 0 \;\Rightarrow\; T = T_2 \tag{3.47}$$

die Erhaltung der Gesamtenergie $T+\tilde{V}$ des dynamischen Systems mit der (nicht explizit zeitabhängigen) Hamilton - Funktion $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$.

Bei **rheonomer** Transformation

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q},t) \tag{3.48}$$

ist die erhaltene Hamilton - Funktion wegen

$$T \neq T_2 - T_0 \tag{3.49}$$

nicht mehr die Gesamtenergie $T+\tilde{V}$. Das Bewegungsintegral

$$T_2 - T_0 + \tilde{V} = E \tag{3.50}$$

heißt in diesem Fall das **Jacobi-Integral**.

Anm.: Mit einer Umdefinition entsprechend[15]

$$T^B_{kin} := T_2 \quad und \quad \tilde{V}^B_{pot} := -T_0 + \tilde{V} \tag{3.51}$$

kann man das Jacobi-Integral (3.39) interpretieren als Erhaltungssatz für eine durch

$$E^B := T^B_{kin} + \tilde{V}^B_{pot} \tag{3.52}$$

*erklärte **Gesamtenergi**e (vgl. $3.3).*

Die bei der Herleitung des Jacobi-Integrals getroffenen Annahmen sind erfüllt, wenn die potentielle Energie des Teilchens nicht explizit von der Zeit abhängt.

Beispiele: 1. Im eingeschränkten Dreikörperproblem bewegt sich das Teilchen im Gravitationsfeld zweier endlicher Massen, die einander in festem Abstand auf Kreisbahnen umlaufen. Dieses Feld ist in einem mitrotierenden Bezugssystem, in dem die endlichen Massen an festen Plätzen ruhen, unveränderlich und damit die potentielle Energie des Teilchens [11,21].
Als generalisierte Koordinaten **q** werden zweckmäßig die kartesischen Koordinaten $x_i (i = 1,2,3)$ des Teilchens im rotierenden Bezugssystem B gewählt:

$$\mathbf{r} = \mathbf{D}_3(t)\bar{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{x}} := (x_1, x_2, x_3)$$

$$\mathbf{D}_3(t) := \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.53}$$

ω Winkelgeschwindigkeit der Drehung

Diese Drehtransformation ist eine rheonome Transformation

$$\bar{\mathbf{x}} \to \mathbf{r}: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q} = \bar{\mathbf{x}}, t) \tag{3.54}$$

des Ortsvektors $\bar{\mathbf{x}}$ im rotierenden Bezugssystem B auf den Ortsvektor **r** des Teilchens im Inertialsystem K.

Für den Anteil T_0 der kinetischen Energie erhält man mit dieser Transformation

$$T_0 := \frac{m}{2}\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{m}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2) \tag{3.55}$$

und damit als potentielle Energie des Teilchens im Bezugssystem B

$$\begin{aligned} \tilde{V}^B_{pot} &:= -T_0 + \tilde{V} = -\frac{m}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + \tilde{V} \\ &= -\frac{m}{2}\omega^2(x_1^2 + x_2^2) - mU_G =: mU_S \end{aligned} \tag{3.56}$$

Zusammen mit

$$T_2 := \frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} = \frac{m}{2}\left(\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 \tag{3.57}$$

ergibt sich das Jacobi – Integral zu

$$\frac{m}{2}\left(\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 = mU_S(\bar{\mathbf{x}}) - C \tag{3.58}$$

in Übereinstimmung mit der in § 3.1 gegebenen Herleitung [26].

2. Für die hier interessierende Bewegung eines Satelliten im Schwerefeld einer um eine feste Achse gleichförmig rotierenden Erde ist die potentielle Energie im erdfesten Bezugssystem B ebenfalls nicht explizit zeitabhängig (in B!).Der Übergang von einem geozentrisch gelagerten Inertialsystem K zum erdfesten System B ist eine rheonome Tranformation .
Das Jacobi – Integral nimmt die Gestalt an [22,26]

$$\frac{m}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 = mU_S(\overline{\mathbf{x}}) - C\,. \tag{3.59}$$

3.3 Interpretation des Jacobi-Integrals als Energie-Bilanz

Stellt man das Jacobi-Integral

$$\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 = 2U_S(\overline{\mathbf{x}}) - C \tag{3.60}$$

um

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 - U_S(\overline{\mathbf{x}}) = -C\,, \tag{3.61}$$

so sieht man, daß der erste Term

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 =: \frac{1}{m}T^B_{kin} \Rightarrow T^B_{kin} = \frac{m}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 \tag{3.62}$$

die bezogene kinetische Energie des Teilchens zufolge seiner Geschwindigkeit $\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}$ im gleichförmig rotierenden Bezugssystem B bedeutet.
Andererseits kann man den zweiten Term

$$U_S(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{d}}) =: U_G + U_Z \tag{3.63}$$

mit einer potentiellen Energie

$$\tilde{V}^B(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{d}}) := -mU_S(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{d}}) \tag{3.64}$$

des Teilchens zufolge seiner Lagerung im Schwerefeld

$$\overline{\mathbf{G}}(\overline{\mathbf{x}}) = m\ gradU_S \equiv m\nabla_{\overline{\mathbf{x}}} U_S(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{d}}) \tag{3.65}$$

in Verbindung bringen, womit sich dann das Jacobi - Integral in der Gestalt

$$T^B_{kin} + \tilde{V}^B = -mC := E_{gesamt} \triangleq H \tag{3.66}$$

schreiben läßt, also in der Form eines **Erhaltungssatzes für die Gesamtenergie** des Teilchens im Galilei-Sytem B [2,15,26]

$$T_{kin} + E_{pot} = E_{gesamt}\,. \tag{3.67}$$

Die so definierte **potentielle Energie** $\tilde{V}^B(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{d}})$ ist p. def. nicht nur von der Lage $\overline{\mathbf{x}}$ des Teilchens m im Bezugssystems B, sondern auch von der Winkelgeschwindigkeit $\overline{\mathbf{d}}$, mit der B gegen ein Inertialsystem K rotiert, abhängig . Es ist ja

$$U_S := U_G + U_Z =: U_G + \frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{d}}\times\overline{\mathbf{x}}\right)^2 =: U_S(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{d}})\,. \tag{3.68}$$

Diese Interpretation bringt das Transformationsgesetz für die Energie beim Übergang von einem Inertialsystem zu einem dagegen gleichförmig um eine feste Achse rotierenden Galilei-System zum Ausdruck. Der zur potentiellen Energie im Inertialsystem hinzutretende Term ist eine von der Rotation herrührende Zentrifugalenergie [15,26].

3.4 Verallgemeinertes Jacobi-Integral

Die bei der Herleitung des Jacobi-Integrals getroffenen Annahmen sind nur genähert erfüllt: die Erde rotiert um eine variable Achse mit veränderlicher Winkelgeschwindigkeit und das Schwerefeld ist zeitlich veränderlich. Hinzu kommt eine Reihe von gravitativen und nichtgravitativen Störkräften.
Es stellt sich daher die Frage, ob ein verallgemeinertes Jacobi-Integral existiert oder ob man auf andere Weise den Abweichungen von den getroffenen Annahmen Rechnung tragen kann. Darauf soll jetzt näher eingegangen werden.

3.4.1 Herleitung eines verallgemeinerten Jacobi-Integrals

Die Gleichung

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2\right) = \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\overline{\mathbf{K}}(\overline{\mathbf{x}},\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt};t) + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}(U_F + U_Z + \Phi) + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}\times\overline{\mathbf{A}}\,, \tag{3.69}$$

die aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{D^2\bar{\mathbf{x}}}{Dt^2} = \frac{1}{m}\bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{x}}, \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}; t) + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}}(U_F + U_Z + \Phi) + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \times \bar{\mathbf{A}} \tag{3.70}$$

nach skalarer Multiplikation mit der Geschwindigkeit $\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}$ folgte, geht mit der Aufspaltung der Kraft

$$\bar{\mathbf{K}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = m\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}U_G(\bar{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{Z}(\bar{\mathbf{x}}, \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}, t) \quad \text{und} \quad U_S := U_G + U_F + U_Z + \Phi\,, \tag{3.71}$$

worin

$$\mathbf{Z}(\bar{\mathbf{x}}, \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}, t) \tag{3.72}$$

die Resultierende aller ***nichtgravitativen*** Kräfte wie z.B. Atmosphärenwiderstand, Strahlungsdruckkräfte etc. bedeute, über in

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2\right) = +\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\left(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}(U_S) + \mathbf{Z}(\bar{\mathbf{x}}, \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}, t)\right) + \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \times \bar{\mathbf{A}}\,. \tag{3.73}$$

Nach unbestimmter Integration über die Zeit t

$$\left(\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 = 2U_S - \int^t \left(\frac{\partial U_S}{\partial t} + \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\left(\mathbf{Z}(\bar{\mathbf{x}}, \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}, t) + \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} \times \bar{\mathbf{A}}\right)\right)Dt - C\,. \tag{3.74}$$

Wegen [21]

$$\frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\bar{\mathbf{x}}}\Phi = 0 \tag{3.75}$$

kann man in

$$U_S := U_G + U_F + U_Z + \Phi \tag{3.76}$$

die Potentialfunktion Φ der (bezogenen) Corioliskraft weglassen, so daß das ***verallgemeinerte Jacobi-Integral*** lautet

$$\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 = 2U_S - \int^t \left(\frac{\partial U_S}{\partial t} + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\left(\mathbf{Z}(\overline{\mathbf{x}},\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt},t\ \right) + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}\times\overline{\mathbf{A}}\right)Dt - C \tag{3.77}$$

mit der Potentialfunktion [21]

$$U_S := U_G + U_F + U_Z = U_G(\overline{\mathbf{x}},t) - \overline{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\overline{\mathbf{R}}} - \frac{1}{2}\left(\overline{\mathbf{d}}(t)\times\overline{\mathbf{x}}\right)^2 . \tag{3.78}$$

Der Integrand

$$\left(\frac{\partial U_S}{\partial t} + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\left(\mathbf{Z}(\overline{\mathbf{x}},\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt},t\ \right) + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}\times\overline{\mathbf{A}}\right) \tag{3.79}$$

verschwindet, wenn sich $\overline{\mathbf{d}}$ zeitlich nicht ändert und wenn das Bezugssystem B translatorisch nicht beschleunigt ist, d.h. wenn $\dot{\overline{\mathbf{d}}} \equiv \mathbf{0}$ und $\ddot{\overline{\mathbf{R}}} = \mathbf{0}$.

Bemerkungen zum Integranden:

1. Er kann **nicht** als vollständige Zeitableitung einer skalaren Funktion *F* geschrieben werden, d.h., es ist

$$\frac{DF}{Dt} = \left(\frac{\partial U_S}{\partial t} + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\left(\mathbf{Z}(\overline{\mathbf{x}},\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt},t\ \right) + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}\times\overline{\mathbf{A}}\right) \tag{3.80}$$

   nicht erreichbar .

2. Man kann ihn physikalisch nicht zum Verschwinden bringen oder zu einer Konstanten machen, d.h., es gelingt **nicht**

$$\left(\frac{\partial U_S}{\partial t} + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\left(\mathbf{Z}(\overline{\mathbf{x}},\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt},t\ \right) + \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\cdot\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}\times\overline{\mathbf{A}}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad =\text{const.} \tag{3.81}$$

   zu erreichen.

Ein Ausweg aus dieser Situation könnte sein:

Annahme*:* Längs der aktuellen Bahn sind

$$\frac{1}{m}\mathbf{Z}(\overline{\mathbf{x}},\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt},t) =: \mathbf{F}(t) \qquad \text{und} \qquad rot\ \mathbf{A} =: \mathbf{G}(t) \tag{3.82}$$

reine Zeitfunktionen, so daß mit einer weiteren Potentialfunktion

$$U_T(t) := \overline{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{1}{m} \mathbf{Z}(\overline{\mathbf{x}}(t), \frac{D\overline{\mathbf{x}}(t)}{Dt}, t) + rot\ \mathbf{A}(\overline{\mathbf{x}}(t), t) \right) \\ = \overline{\mathbf{x}} \cdot \left(\quad \mathbf{F}(t) \quad + \quad \mathbf{G}(t) \right) \tag{3.83}$$

die Bewegungsgleichung des Teilchens in B lautet

$$\frac{D^2\overline{\mathbf{x}}}{Dt^2} = \nabla_{\overline{\mathbf{x}}}(U_{vS}) \qquad \text{mit} \qquad U_{vS} = U_S + U_T \\ = U_G + U_F + U_Z + \Phi + U_T \tag{3.84}$$

und man das verallgemeinerte Jacobi-Integral schreiben kann in der Gestalt

$$\left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 = 2U_{vS} - 2\int^t \frac{\partial U_{vS}}{\partial t} Dt - C' \\ =: 2U_{vS} - C(t) \tag{3.85}$$

und einer zeitveränderlichen Jacobi-Konstanten [26]

$$C(t) := 2\int^t \frac{\partial U_{vS}}{\partial t} Dt - C' . \tag{3.86}$$

Das unbestimmte Integral

$$\int^t \frac{\partial U_{vS}}{\partial t} Dt \tag{3.87}$$

kann mit dem verallgemeinerten Schwerepotential $U_{vS}(t)$ berechnet werden, wenn man die Bewegung $\overline{\mathbf{x}}(t)$ kennt.

Ergebnis: In der verallgemeinerten Fassung kann das Jacobi-Integral in der aktuell gegebenen Situation zur Gravitationsfeldbestimmung angewendet werden. Es ist ein nur für die aktuelle Bewegung gültiges Bewegungsintegral, es hat also nicht den allgemeinen Charakter des eigentlichen Jacobi-Integrals, in das es in der dort angenommenen Situation (konstante Drehung, keine nichtgravitativen Kräfte, unveränderliche Gravitation im Bezugssystem der Bewegungsgleichung aber übergeht.

Anm.: 1. Die partielle Zeitableitung im Integranden von

$$\int^{t} \frac{\partial U_{vS}}{\partial t} Dt$$

wirkt auf die explizite Zeitabängigkeit von U_{vS}*, insbesondere auf die explizite Zeitabhängigkeit im Anteil*

$$U_T(t) := \overline{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{1}{m} \mathbf{Z}(\overline{\mathbf{x}}(t), \frac{D\overline{\mathbf{x}}(t)}{Dt}, t) + rot\ \mathbf{A}(\overline{\mathbf{x}}(t), t) \right) \tag{3.88}$$

von U_{vS}*, d.h. der expliziten Zeitabhängigkeit der Kräftefunktion*

$$\mathbf{Z}(\overline{\mathbf{x}}(t), \frac{D\overline{\mathbf{x}}(t)}{Dt}, t) + mrot\ \mathbf{A}(\overline{\mathbf{x}}(t), t)\,. \tag{3.89}$$

2. Die Kraft

$$\mathbf{Z}(\overline{\mathbf{x}}(t), \frac{D\overline{\mathbf{x}}(t)}{Dt}, t) = m\nabla_{\overline{\mathbf{x}}} U_{G3}(\overline{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{R}(\overline{\mathbf{x}}(t), \frac{D\overline{\mathbf{x}}(t)}{Dt}, t) \tag{3.90}$$

enthält eine gravitative Komponente herrührend von dritten Körpern (Sonne,Mond etc.), die von einer zeitabhängigen Potentialfunktion $U_{G3}(\overline{\mathbf{x}}, t)$ *ableitbar ist, so daß*

$$\frac{\partial U_{vS}}{\partial t} = ...+ ...\overline{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\partial \nabla_{\overline{\mathbf{x}}} U_{G3}(\overline{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}(\overline{\mathbf{x}}(t), \frac{D\overline{\mathbf{x}}(t)}{Dt}, t)}{m\ \partial t} \right) + \overline{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial rot\ \mathbf{A}(t)}{\partial t}\,. \tag{3.91}$$

3.4.2 Bestimmungsgleichung für ein verallgemeinertes Jacobi- Integral

Die Differentialgleichung für ein nichtholonom - rheonomes Bewegungs-integral $N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ lautet

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N = -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N \tag{3.92}$$

bzw. mit dem Ansatz

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = N_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \varepsilon N_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \tag{3.93}$$

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial N_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_0 + \varepsilon \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_1 = -\mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} (N_0 + \varepsilon N_1) \tag{3.94}$$

Gruppiert nach Potenzen des Kleinheitsparameters ε

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_0 + \mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 \\ +&\varepsilon(\frac{\partial N_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_1 + \mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_1) \quad = 0 \end{aligned} \tag{3.95}$$

Wenn man für die Kraft ansetzt

$$\mathbf{K} = \mathbf{K_0} + \varepsilon \mathbf{K_1} \tag{3.96}$$

und in die Gleichung (3.95) einträgt, dann erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_0 + (\mathbf{K}_0 + \varepsilon \mathbf{K_1}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 \\ +&\varepsilon(\frac{\partial N_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_1 + (\mathbf{K}_0 + \varepsilon \mathbf{K_1}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_1) \quad = 0 \end{aligned} \tag{3.97}$$

bzw. umgestellt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_0 \\ +&\varepsilon(\frac{\partial N_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_1) = -\mathbf{K}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 - \varepsilon \mathbf{K_1} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 - \varepsilon \mathbf{K}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_1 - \varepsilon^2 \mathbf{K_1} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_1 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Gruppiert nach Potenzen des Kleinheitsparameters folgt

in der Ordnung ε^0
$$\frac{\partial N_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_0 + \mathbf{K}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 = 0 \tag{3.99}$$

in der Ordnung ε^1
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_1 + \mathbf{K_1} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 + \mathbf{K}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_1 = 0 \tag{3.100}$$

in der Ordnung ε^2
$$\mathbf{K_1} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_1 \approx 0 \tag{3.101}$$

Bis zu linearen Termen bestehen also die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial N_0}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_0 + \mathbf{K}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 = 0 \tag{3.102}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_1 + \mathbf{K_1} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 + \mathbf{K}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_1 = 0 \tag{3.103}$$

zur Bestimmung der Funktionen $N_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ und $N_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.
Sucht man ein skleronomes Integral $N(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, so vereinfachen sich diese Gleichungen zu

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_0 + \mathbf{K}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 = 0 \tag{3.104}$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} N_1 + \mathbf{K_1} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_0 + \mathbf{K}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{v}} N_1 = 0 \tag{3.105}$$

Wenn man nun in der Ordnung 0 die Gleichung als gelöst betrachten kann, also die Funktion $N_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ bereits bekannt ist, dann ist die zweite Gleichung eine Gleichung zur Bestimmung der Funktion $N_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$.
Analoges gilt für den rheonomen Fall.

*Anm.: Wenn man bis zur zweiten Ordnung geht, dann muß in jedem Fall beachtet werden, daß sich die unabhängigen Variablen **r** und **v** in den verschiedenen Ordnungen unterscheiden, d.h. man muß dann auch die partiellen Ableitungen unterscheiden! (Ungestörte und gestörte Bahn gehen durch eine Transformation auseinander hervor!).*

Um nun etwa eine Verallgemeinerung des Jacobi-Integrals zu erhalten, die zufolge der zeitveränderlichen Drehung des Bezugssystems und weiterer Kräfte $\mathbf{Z}(\bar{\mathbf{x}}, \frac{D\bar{\mathbf{x}}}{Dt}, t)$, die Gravitation dritter Körper wie Sonne und Mond eingeschlossen, erforderlich ist, könnte man ausgehen von dem skleronomen Jacobi-Integral, das die Gleichung

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} N_0 + \bar{\mathbf{K}}_0 \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{v}}} N_0 = 0 \tag{3.106}$$

erfüllt, und der Gleichung

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} N_1 + \bar{\mathbf{K}}_\mathbf{1} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{v}}} N_0 + \bar{\mathbf{K}}_0 \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{v}}} N_1 = 0 \tag{3.107}$$

zur Bestimmung der Funktion $N_1(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{v}}, t)$. In dieser PDE wären einzutragen

$$N_0(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{v}} \equiv \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}) := \left(\frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}\right)^2 - 2U_S(\overline{\mathbf{x}}) + C \tag{3.108}$$

und

$$\overline{\mathbf{K}}_0 = m\nabla_{\overline{\mathbf{x}}} U_S(\overline{\mathbf{x}}) \tag{3.109}$$

sowie

$$\overline{\mathbf{K}}_1 = \overline{\mathbf{Z}}(\overline{\mathbf{x}}, \frac{D\overline{\mathbf{x}}}{Dt}, t) + \nabla_{\overline{\mathbf{x}}} \times \mathbf{A} + m\left\{\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}(U_G(\overline{\mathbf{x}}, t) + U_Z)\ \Big|_{\overline{\mathbf{d}}} - \nabla_{\overline{\mathbf{x}}}(U_G(\overline{\mathbf{x}}, t) + U_Z)\ \Big|_{\mathbf{d}_0}\right\}. \tag{3.110}$$

Die geschweifte Klammer berücksichtigt die zeitveränderliche Drehung in ihrer Auswirkung auf die Potentialfunktionen

$$U_G + U_Z\,. \tag{3.111}$$

Es ist unterstellt, daß keine translatorische Führungskraft

$$\overline{\mathbf{F}}_T = m\nabla_{\overline{\mathbf{x}}} U_F = -m\ddot{\overline{\mathbf{R}}} \tag{3.112}$$

auftritt, sich das System B also nicht translatorisch beschleunigt gegen K bewegt.

Die Potentialfunktion Φ und damit die Corioliskraft **C** bleibt auch bei zeitveränderlicher Drehung ohne Einfluß. D.h., schon bei der Herleitung des Jacobi-Integrals kann Φ als zeitabhängig angenommen werden.

3.5 Zur Gravitationsfeldbestimmung mit Hilfe des Jacobi-Integrals

3.5.1 Zur Anwendung des Jacobi-Integrals

Eine Bewegung, für die das Jacobi-Integral besteht, ist eine ***Freifallbewegung***, hier im Schwerefeld der Erde, das im terrestrischen Bezugssystem feststellbar ist und das dort voraussetzungsgemäß unveränderlich sein muß. Durch einen besimmten Wert der Jacobi-Konstanten C ist eine spezielle Freifallbewegung

aus der Schar aller möglichen Freifallbewegungen im gegebenen Schwerefeld ausgewählt.
Wenn nun die Jacobi-Konstante abgeändert wird [26,19], dann wird dadurch eine andere Freifallbewegung im gleichen Schwerefeld ausgewählt.

Die aus der Bahnbestimmung zur Verfügung stehende Bahn als Freifallbewegung interpretiert, zu der die abgeänderte Jacobi-Konstante C+DC gehört. Die CHAMP-Bahn ist aber keine Freifallbewegung, sie ist ja nicht störkraftkompensiert. Es werden von Null verschiedene nichtgravitative Kräfte gemessen.

Die Differenzen sind nicht Null als Folge der Tatsache, daß die aus der Bahnbestimmung gegebene Bewegung keine Freifallbewegung ist, sondern eine durch die nichtgravitativen Kräfte gestörte Bewegung ist.
Diese so rekonstruierte Freifalbewegung kann man dann verwenden, um das JACOBI-Integral für die Feldbestimmung heranzuziehen.

3.5.2 Rekonstruktion der Freifallbewegung

Bezeichne

$$\begin{array}{rl} \mathbf{r}(t) & \text{aktuelle Bahn} \\ \mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t) & \text{Freifallbewegung} \\ \Delta(t) := \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t) & \text{Abweichung der aktuellen Bahn von der Freifallbewegung} \end{array}$$

und seien im geozentrischen Bezugssystem N_E

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{m}\left(\mathbf{G} + \mathbf{G}_3 + \mathbf{Z}\right) \\ \ddot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}} &= \frac{1}{m}\mathbf{G} \end{aligned} \tag{3.113}$$

die Bewegungsgleichungen der aktuellen Bewegung bzw. der Freifallbewegung, wobei

$\mathbf{G}(\mathbf{r},t)$ das Gravitationsfeld der Erde
$\mathbf{G_3}$ die Resultierende der sonstigen Gravitationskräfte
$\mathbf{Z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)$ die Resultierende der nichtgravitativen Kräfte

seien.

Für die Abweichung $\Delta(t)$ bekommt man nach Taylorentwicklungen der Bahnen die Darstellung [21,22]

$$\Delta\left(t_0 + Dt\right) \approx \frac{1}{2m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}},\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}},\Delta,\dot{\Delta};t)_{|t=t_0}\left(Dt\right)^2, \tag{3.114}$$

wenn man am Taylorpunkt t_0 Oskulation annimmt, d.h.

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0) \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0) \tag{3.115}$$

Dort ist dann auch

$$\Delta(t_0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \dot{\Delta}(t_0) = \mathbf{0} \tag{3.116}$$

so daß die die Abweichung bedingende Störkraft

$$\mathbf{S} := \left(\mathbf{G} + \mathbf{G_3} + \mathbf{Z}\right) - \mathbf{G} = \mathbf{G_3} + \mathbf{Z} \tag{3.117}$$

am Taylorpunkt zu berechnen ist, also

$$\frac{1}{2m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}},\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}},;t)_{|t=t_0} \tag{3.118}$$

Zwischenergebnis: Wenn am Taylorpunkt Oskulation gegeben ist, dann laufen die aktuelle Bewegung und die Freifallbewegung entsprechend

$$\Delta\left(t_0 + Dt\right) \approx \frac{1}{2m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0),\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0),t_0)\left(Dt\right)^2 \tag{3.119}$$

auseinander, d.h. gemäß einem Fallgesetz mit der Fallbeschleunigung

$$\frac{1}{2m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0),\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0),t_0), \tag{3.120}$$

die berechenbar ist mit den Daten

$$\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0)=\mathbf{r}(t_0) \ \textit{und} \ \ \dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0)=\dot{\mathbf{r}}(t_0) \tag{3.121}$$

Rekonstruktion der Freifallbewegung: aus der Definition der Abweichung

$$\Delta(t):=\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t) \tag{3.122}$$

erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t)&=\mathbf{r}(t)-\Delta(t)\\ &=\mathbf{r}(t)-\frac{1}{2m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0),\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0),t_0)\left(Dt\right)^2\end{aligned} \tag{3.123}$$

und zwar im Zeitraum t_0 bis $t_0+\Delta t$.

In dieser Näherung ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t)&=\dot{\mathbf{r}}(t)-\dot{\Delta}(t)\\ &=\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{t})-\frac{1}{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0),\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0),t_0)Dt\end{aligned} . \tag{3.124}$$

Da Δt i.allg. nicht den gesamten Zeitraum überdeckt, muß man die Rekonstruktion der Freifallbewegung abschnittsweise vornehmen.

Hinweise: 1. Die Länge von Dt bestimmt neben der Störbeschleunigung die Genauigkeit, mit der die Freifallbewegung rekonstruierbar ist im Zeitabschnitt $[t_0, t_0+Dt]$.

Anm.: Würde man die Taylorentwicklungen erst später abbrechen, wäre prinzipiell eine höhere Genauigkeit zu erwarten. Dazu aber muß man höhere Zeitableitungen der Störbeschleunigung berechnen was aufwendig oder praktisch nicht möglich ist.

2. Da die Störbeschleunigung bis auf die Komponente $\mathbf{G}_3$ am Taylorpunkt als gemessene Größe vorliegt, kann sie nach Transformation ins geozentrische Bezugssystem direkt verwendet werden.

3. Die ganzen Überlegungen können auch in einem terrestrischen Bezugssystem vorgenommen werden.

Löst man das Jacobi-Integral

$$\left(\frac{D\bar{\mathbf{r}}}{Dt}\right)^2 = 2U_S(\bar{\mathbf{r}},\bar{\mathbf{d}}) - C \qquad \text{mit} \quad U_S = U_G + U_Z \tag{3.125}$$

nach dem Gravitationspotential $U_G(\bar{\mathbf{r}})$ auf, so erhält man

$$U_G(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}\left(\frac{D\bar{\mathbf{r}}}{Dt}\right)^2 - U_Z + \frac{C}{2}. \tag{3.126}$$

Entwickelt man das Gravitationspotential $U_G(\bar{\mathbf{r}})$ nach (orthonormierten) Kugelflächenfunktionen

$$U_G(\bar{\mathbf{r}}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} U_{G,lm} \tag{3.127}$$

mit

$$U_{G,lm} = GM_\otimes \frac{a_\otimes^l}{r^{l+1}}\left[\bar{C}_{lm}\bar{C}_l^m(\vartheta,\lambda) + \bar{S}_{lm}\bar{S}_l^m(\vartheta,\lambda)\right], \tag{3.128}$$

dann folgt

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} GM_\otimes \frac{a_\otimes^l}{r^{l+1}}\left[\bar{C}_{lm}\bar{C}_l^m(\vartheta,\lambda) + \bar{S}_{lm}\bar{S}_l^m(\vartheta,\lambda)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{D\bar{\mathbf{r}}}{Dt}\right)^2 - U_Z + \frac{C}{2} \tag{3.129}$$

Daraus erhält man nach Multiplikation mit der Kugelflächenfunktion

$$\bar{C}_l^m(\vartheta,\lambda) \quad bzw. \quad \bar{S}_l^m(\vartheta,\lambda)$$

und anschließender Integration über die Einheitskugel

$$\bar{C}_l^m(\vartheta,\lambda) = \oiint_{'E} \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{D\bar{\mathbf{r}}}{Dt}\right)^2 - U_Z + \frac{C}{2} \right\} d\vartheta' d\lambda' \quad \text{analog für } \bar{S}_{lm}. \tag{3.130}$$

Danach lassen sich die Potentialkoeffizienten berechnen aus der Verteilung der Funktion

$$\frac{1}{2}\left(\frac{D\bar{\mathbf{r}}}{Dt}\right)^2 - U_Z + \frac{C}{2}, \tag{3.131}$$

deren Werte aus den Daten $\bar{\mathbf{r}}(t), \frac{D\bar{\mathbf{r}}}{Dt}$ der Bahnbestimmung berechnet werden können.

Anwendung auf CHAMP: Da der Satellit eine polnahe Umlaufbahn beschreibt, die kreisnah (e= 0.004) ist, sind die Daten $\bar{\mathbf{r}}(t), \frac{D\bar{\mathbf{r}}}{Dt}$ genähert auf einer Kugel um das Geozentrum verteilt. Damit aber ergibt sich die Möglichkeit, die Potentialkoeffzienten einzeln aus den Bahndaten durch Ausführung eines Flächenintegrals zu berechnen und dieses Ergebnis mit der Auflösung des Jacobi-Integrals

$$\left(\frac{D\bar{\mathbf{r}}}{Dt}\right)^2 = 2U_S(\bar{\mathbf{r}},\bar{\mathbf{d}}) - C \tag{3.132}$$

zu vergleichen.

> *Anm.: Da die CHAMP-Bahn nicht exakt kreisförmig ist und auch nicht genau über die Pole verläuft, verbleibt noch die Aufgabe, die Bahndaten auf eine Kugel zu übertragen.*

3.5.3 Variation DC der Jacobi-Konstanten

Bildet man das vollständige Differential des Jacobi-Integral, also

$$D\left(\frac{1}{2}\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\right)^2 + D\tilde{V}(\mathbf{r}) = DC \tag{3.133}$$

bzw.

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\cdot D\dot{\mathbf{r}}+\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{V}(\mathbf{r})\cdot D\mathbf{r}=DC \tag{3.134}$$

oder mit

$$\begin{aligned} D\mathbf{r}&=\frac{1}{2}\frac{1}{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0),\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0),t_0)\left(Dt\right)^2\\ D\dot{\mathbf{r}}&=\frac{1}{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0),\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0),t_0)Dt \end{aligned} \tag{3.135}$$

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0),\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0);t_0)\left(Dt\right)+\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{V}(\mathbf{r})\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{m}\mathbf{S}(\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t_0),\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t_0);t_0)\left(Dt\right)^2=DC\,. \tag{3.136}$$

Setzt man für die Störbeschleunigung ein entsprechend

$$\mathbf{S}=\mathbf{G}_3+\mathbf{Z}\,, \tag{3.137}$$

so ergibt sich die Änderung der Jacobi-Konstanten C im Zeitelement Dt zu

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\left(\mathbf{G}_3+\mathbf{Z}\right)Dt+\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{V}(\mathbf{r})\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{m}\left(\mathbf{G}_3+\mathbf{Z}\right)\left(Dt\right)^2=DC \tag{3.138}$$

oder als zeitliche Änderungsrate der Jacobi-Konstanten

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\left(\mathbf{G}_3+\mathbf{Z}\right)+\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{V}(\mathbf{r})\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{m}\left(\mathbf{G}_3+\mathbf{Z}\right)\left(Dt\right)=\frac{DC}{Dt}\,. \tag{3.139}$$

Vernachlässigt man die Gravitation dritter Körper $\mathbf{G}_3$, so ergibt sich

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\mathbf{Z}Dt+\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{V}(\mathbf{r})\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{m}\mathbf{Z}\left(Dt\right)^2=DC \tag{3.140}$$

bzw.

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\mathbf{Z}+\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{V}(\mathbf{r})\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{m}\mathbf{Z}\left(Dt\right)=\frac{DC}{Dt}\,. \tag{3.141}$$

Da aber der zweite Term gegen den ersten vernachlässigbar ist, folgt genähert

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\cdot\frac{1}{m}\mathbf{Z}Dt = DC \quad\Rightarrow\quad \Delta C_{t_0\to t_0+\Delta t} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\mathbf{Z}}{m}\cdot D\mathbf{r} \tag{3.142}$$

bzw.

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{D\mathbf{r}}{Dt}\cdot\frac{\mathbf{Z}}{m}Dt = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{DC}{Dt}Dt = \Delta C_{t_0\to t_0+\Delta t} \tag{3.143}$$

3.5.4 Interpretation der Abänderung der Jacobi-Konstanten

Die Bewegung eines Teilchens im Schwerefeld einer konstant rotierenden Erde erfüllt das Jacobi-Integral. Wird nun zu einem Zeitpunkt t_0 eine Störkraft zugeschaltet, so besteht das Jacobi-Integral von diesem Zeitpunkt nicht mehr. Man kann aber im Zeitintervall $[t_0, t_0 + Dt]$ eine die aktuelle Bewegung oskulierende Freifallbewegung im Schwerefeld auffinden, mit einer geeignet abgeänderten Jacobi-Konstanten C+DC. Die Abänderung DC ist aus der Störkraft zum Oskulationszeitpunkt t_0 berechenbar. Dabei kann wie in der Methode der Variation der Konstanten vorgegangen werden.
Die aktuelle Bewegung unter der Wirkung der Schwerkraft und der nicht-gravitativen Kräfte stellt sich dann dar als die

> *Einhüllende einer Folge ungestört durchlaufener (differentieller) Ausschnitte von Freifallbewegungen im Schwerefeld der konstant rotierenden Erde, die sich von Zeitpunkt zu Zeitpunkt durch eine geänderte Jacobi-Konstante unterscheiden.*

Bei der Herleitung des verallgemeinerten Jacobi-Integrals in § 3.4.1 wurde die Zeitveränderlichkeit der Jacobi-Konstanten angegeben zu [26,19,4]

$$C(t) := 2\int^{t}\frac{\partial U_{vS}}{\partial t}Dt - C' \tag{3.144}$$

Daraus entnimmt man, daß C(t) genau dann eine Konstante ist, wenn die partielle Zeitableitung im Integranden verschwindet. Das ist dann der Fall, wenn die Vorausetzungen (s.§ 3.1 unf 3.4.1) des klassischen Jacobi-Integrals erfüllt sind.

3.5.5 SST und Jacobi-Integral

Für jeden der beteiligten Satelliten $m_i\ (i=1,2)$ besteht in einem terrestrischen Bezugssystem B_{terr} eine Bewegungsgleichung

$$m_i \frac{D^2\overline{\mathbf{x}}_i}{Dt^2} = \overline{\mathbf{K}}_i\left(\overline{\mathbf{x}}_i, \frac{D\overline{\mathbf{x}}_i}{Dt}; t\right) + \overline{\mathbf{F}}_i + \overline{\mathbf{C}}_i \quad . \tag{3.145}$$

Darin bedeuten

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{F}}_i := -m_i\ddot{\overline{\mathbf{R}}} + \overline{\mathbf{Z}}_i + \overline{\mathbf{T}}_i && \text{Führungskraft}\\
&\overline{\mathbf{Z}}_i := -m_i\overline{\mathbf{d}} \times (\overline{\mathbf{d}} \times \overline{\mathbf{x}}_i) && \text{Zentrifugalkraft}\\
&\overline{\mathbf{T}}_i := -m_i \frac{D\overline{\mathbf{d}}}{Dt} \times \overline{\mathbf{x}}_i && \text{Euler-(Kreisel-)Kraft}\\
&\mathbf{C}_i := -2m_i\overline{\mathbf{d}} \times \frac{D\overline{\mathbf{x}}_i}{Dt} && \text{Coriolis-Kraft}
\end{aligned} \quad . \tag{3.146}$$

Durch Differenzbildung erhält man als Bewegungsgleichung der Relativbewegung der beiden Satelliten ($\ddot{\overline{\mathbf{R}}}$ ist indexfrei!)

$$\begin{aligned}
\frac{D^2\overline{\mathbf{x}}_2}{Dt^2} - \frac{D^2\overline{\mathbf{x}}_1}{Dt^2} &= \frac{\overline{\mathbf{K}}_2}{m_2} - \frac{\overline{\mathbf{K}}_1}{m_1} + \left(\frac{\overline{\mathbf{F}}_2 + \overline{\mathbf{C}}_2}{m_2}\right) - \left(\frac{\overline{\mathbf{F}}_1 + \overline{\mathbf{C}}_1}{m_1}\right)\\
&= \frac{\overline{\mathbf{K}}_2}{m_2} - \frac{\overline{\mathbf{K}}_1}{m_1} + \left(\frac{\overline{\mathbf{Z}}_2 + \overline{\mathbf{T}}_2 + \mathbf{C}_2}{m_2}\right) - \left(\frac{\overline{\mathbf{Z}}_1 + \overline{\mathbf{T}}_1 + \mathbf{C}_1}{m_1}\right)
\end{aligned} \tag{3.147}$$

Die Kräfte werden sich aus verschiedenen Komponenten zusammensetzen

$$\overline{\mathbf{K}}_i(\overline{\mathbf{x}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i; t) = \underbrace{m_i \nabla_{\overline{\mathbf{x}}_i} U_G(\overline{\mathbf{x}}_i, t)}_{\text{Erde}} + \underbrace{\overline{\mathbf{Z}}_{Gi}(\overline{\mathbf{x}}_i; t)}_{\text{dritte Körper}} + \underbrace{\mathbf{Z}_{Ni}(\overline{\mathbf{x}}_i, \overline{\mathbf{v}}_i; t)}_{\text{nichtgravitative Kräfte}} \quad , \tag{3.148}$$

Gravitationskräfte

so daß folgt [22]

$$\frac{D^2\bar{\mathbf{x}}_2}{Dt^2}-\frac{D^2\bar{\mathbf{x}}_1}{Dt^2}=\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2}U_G(\bar{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1}U_G(\bar{\mathbf{x}}_1,t)$$
$$+\frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G2}(\bar{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G1}(\bar{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\bar{\mathbf{x}}_2,\bar{\mathbf{v}}_2;t}{m_2})-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\bar{\mathbf{x}}_1,\bar{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1} \tag{3.149}$$
$$+(\frac{\bar{\mathbf{Z}}_2+\bar{\mathbf{T}}_2+\mathbf{C_2}}{m_2}-\frac{\bar{\mathbf{Z}}_1+\bar{\mathbf{T}}_1+\mathbf{C_1}}{m_1})$$

Mit

$$\bar{\Delta}_{12}:=\bar{\mathbf{x}}_2-\bar{\mathbf{x}}_1 \tag{3.150}$$

läßt sich dafür schreiben

$$\frac{D^2\bar{\Delta}_{12}}{Dt^2}=\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2}U_G(\bar{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1}U_G(\bar{\mathbf{x}}_1,t)$$
$$+\frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G2}(\bar{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G1}(\bar{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\bar{\mathbf{x}}_2,\bar{\mathbf{v}}_2;t}{m_2})-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\bar{\mathbf{x}}_1,\bar{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1} \tag{3.151}$$
$$+(\frac{\bar{\mathbf{Z}}_2+\bar{\mathbf{T}}_2+\mathbf{C_2}}{m_2}-\frac{\bar{\mathbf{Z}}_1+\bar{\mathbf{T}}_1+\mathbf{C_1}}{m_1})$$

Trägt man die Darstellungen der Trägheitskräfte ein, so ergibt sich

$$\frac{D^2\bar{\Delta}_{12}}{Dt^2}=\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2}U_G(\bar{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1}U_G(\bar{\mathbf{x}}_1,t)$$
$$+\frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G2}(\bar{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G1}(\bar{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\bar{\mathbf{x}}_2,\bar{\mathbf{v}}_2;t}{m_2})-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\bar{\mathbf{x}}_1,\bar{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1}\,. \tag{3.152}$$
$$-\bar{\mathbf{d}}\times(\bar{\mathbf{d}}\times\bar{\Delta}_{12})-\frac{D\bar{\mathbf{d}}}{Dt}\times\bar{\Delta}_{12}-2\bar{\mathbf{d}}\times\frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt}$$

Skalare Multiplikation mit der Relativgeschwindigkeit $\frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt}$ führt auf

$$\frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot\frac{D^2\bar{\Delta}_{12}}{Dt^2}=\frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2}U_G(\bar{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1}U_G(\bar{\mathbf{x}}_1,t))$$
$$+\frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(\frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G2}(\bar{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\bar{\mathbf{Z}}_{G1}(\bar{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\bar{\mathbf{x}}_2,\bar{\mathbf{v}}_2;t}{m_2}-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\bar{\mathbf{x}}_1,\bar{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1})$$
$$-\frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(\bar{\mathbf{d}}\times(\bar{\mathbf{d}}\times\bar{\Delta}_{12})+\frac{D\bar{\mathbf{d}}}{Dt}\times\bar{\Delta}_{12}+2\bar{\mathbf{d}}\times\frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt})$$

bzw.

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2\right)=\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_2}U_G(\overline{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_1}U_G(\overline{\mathbf{x}}_1,t))$$
$$+\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G2}(\overline{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G1}(\overline{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\overline{\mathbf{x}}_2,\overline{\mathbf{v}}_2;t}{m_2})-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1}) \quad (3.153)$$
$$-\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(\overline{\mathbf{d}}\times(\overline{\mathbf{d}}\times\overline{\Delta}_{12})+\frac{D\overline{\mathbf{d}}}{Dt}\times\overline{\Delta}_{12})$$

beachtet man

$$\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(2\mathbf{d}\times\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt})=0\,. \quad (3.154)$$

Da weiter

$$-\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(\overline{\mathbf{d}}\times(\overline{\mathbf{d}}\times\overline{\Delta}_{12})=\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot\nabla_{\overline{\Delta}_{12}}\left(\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{d}}\times\overline{\Delta}_{12})^2\right)=:\frac{DU_{Z_{12}}}{Dt}\,, \quad (3.155)$$

folgt mit den weiteren Annahmen

$$(1)\quad \frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G2}(\overline{\mathbf{x}}_2;t)}{m_2}-\frac{\overline{\mathbf{Z}}_{G1}(\overline{\mathbf{x}}_1;t)}{m_1}+\frac{\mathbf{Z}_{N2}(\overline{\mathbf{x}}_2,\overline{\mathbf{v}}_2;t}{m_2})-\frac{\mathbf{Z}_{N1}(\overline{\mathbf{x}}_1,\overline{\mathbf{v}}_1;t)}{m_1}=\mathbf{0} \quad (3.156)$$

$$(2)\quad \frac{D\overline{\mathbf{d}}}{Dt}=\mathbf{0} \quad (3.157)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2\right)=\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_2}U_G(\overline{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_1}U_G(\overline{\mathbf{x}}_1,t))+\frac{DU_{Z_{12}}}{Dt} \quad (3.158)$$

und nach unbestimmter Integration über die Zeit t

$$\left(\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2=2(\int^t\frac{D\overline{\Delta}_{12}}{Dt}\cdot(\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_2}U_G(\overline{\mathbf{x}}_2,t)-\nabla_{\overline{\mathbf{x}}_1}U_G(\overline{\mathbf{x}}_1,t))Dt+\left(\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{d}}\times\overline{\Delta}_{12})^2\right))-C \quad (3.159)$$

mit

$$U_{Z_{12}}:=\left(\frac{1}{2}(\overline{\mathbf{d}}\times\overline{\Delta}_{12})^2\right). \quad (3.160)$$

Das ist die Entsprechung des Jacobi-Integrals für den SST-Fall.

Das unbestimmte Integral

$$\int^{t} \frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt} \cdot (\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2} U_G(\bar{\mathbf{x}}_2,t) - \nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1} U_G(\bar{\mathbf{x}}_1,t))Dt \tag{3.161}$$

läßt sich wie folgt umformen:

Da in der runden Klammer des Integranden die Differenz der Anziehungskraft der Erde auf die beiden Satelliten steht, also die **Gezeitenkraft** der Erde auf das Satellitenpaar, kann man mit einem **Gezeitenpotential** $V_{\oplus(1,2)}$ schreiben [6,7,8]

$$\nabla_{\bar{\mathbf{x}}_2} U_G(\bar{\mathbf{x}}_2,t) - \nabla_{\bar{\mathbf{x}}_1} U_G(\bar{\mathbf{x}}_1,t) =: \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} V_{\oplus(1,2)} \tag{3.162}$$

so daß folgt

$$\left(\frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2 = 2(\int^{t} \frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} V_{\oplus(1,2)} Dt + U_{Z_{12}}) - C \tag{3.163}$$

Der Integrand ließe sich dann als vollständige Zeitableitung schreiben, wenn die Gradientenbildung sich auf $\bar{\Delta}_{12}$ und nicht auf $\bar{\mathbf{x}}$ beziehen würde, d.h. wenn man bilden könnte

$$\nabla_{\bar{\Delta}_{12}} V_{\otimes 12} \to \frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt} \cdot \nabla_{\bar{\Delta}_{12}} V_{\otimes 12} = \frac{DV_{\otimes 12}}{Dt}. \tag{3.164}$$

Dann ergäbe sich im SST - Fall als Bewegungsintegral

$$\left(\frac{D\bar{\Delta}_{12}}{Dt}\right)^2 = 2(V_{\otimes 12} + U_{Z_{12}}) - C \tag{3.165}$$

3.5.6 Bewertung des Konzeptes

Voraussetzung der Nutzung des Jacobi-Integrals für die Gravitationsfeldbestimmung ist die Verfügbarkeit des Bahn- und des Geschwindigkeitsverlaufes.

Für den Fall des CHAMP- Satelliten sind solche Verläufe weitgehend hypothesenfrei aus der Bahnverfolgung durch die GPS- Satelliten u.a. von SVEHLA &ROTHACHER [36,37,38] bestimmt worden.

Darauf aufbauend haben GERLACH et.al. erste Ergebnisse für das statische Gravitationsfeld der Erde erzielt [4]. SNEEUW et.al. haben dann versucht, eine Zeitveränderlichkeit des Feldes nachzuweisen [34].

Die verbesserte Genauigkeit der von SVEHLA&ROTHACHER mittlerweile bestimmten Verläufe sind in diesen ersten Versuchen der Feldbestimmung allerdings noch nicht zum Tragen gekommen. Es können verbesserte Ergebnisse der Feldbestimmung erwartet werden.

4. Verwendung von Potenzreihen zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten

4.1. Lösung der Volterra-Gleichung mit Potenzreihen

Eine Anfangswertaufgabe zur Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K} = \mathbf{G} + \mathbf{S} \qquad \begin{array}{ll} \mathbf{G} & \text{Gravitation der Erde} \\ \mathbf{S} & \text{Resultierende aller sonstigen Kräfte} \end{array} \tag{4.1}$$

wird durch die **Volterra-Gleichung** beschrieben [21,22]

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \int_{t_0}^{t} (t-\tau)\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};\tau)d\tau \,, \tag{4.2}$$

worin

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) := \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)(t-t_0) \tag{4.3}$$

eine Trägheitsbewegung mit den Anfangswerten $\mathbf{r_0}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ bedeutet.

Mit einer **Taylor - Reihe** für die Kraft **K** um den Zeitpunkt t_0

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu \mathbf{K}}{dt^\nu}\bigg|_0 (t-t_0)^\nu =: \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathbf{K}_\mathbf{0}^{(\nu)} (t-t_0)^\nu \,, \tag{4.4}$$

ergibt sich die Volterra-Gleichung zu

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{K}_\mathbf{0}^{(\nu)}}{\nu!} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)(\tau-\tau_0)^\nu d\tau \tag{4.5}$$

bzw. mit den Integralen

$$N_\nu(t,t_0) := \int_{t_0}^{t} (t-\tau)(\tau-\tau_0)^\nu d\tau = \frac{(t-t_0)^{\nu+2}}{(\nu+2)(\nu+1)} \tag{4.6}$$

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{K}_{\mathbf{0}}^{(\nu)}}{\nu!} N_\nu(t,t_0) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{K}_{\mathbf{0}}^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(t-t_0)^{\nu+2}}{(\nu+2)(\nu+1)}. \tag{4.7}$$

Die Taylorreihen-Koeffizienten

$$\mathbf{K}_{\mathbf{0}}^{(\nu)} := \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu \mathbf{K}}{dt^\nu}\Big|_0 \tag{4.8}$$

setzen sich aus denjenigen der Kraftkomponenten **G** und **S**

$$\mathbf{K}_0^{(\nu)} := \mathbf{G}_0^{(\nu)} + \mathbf{S}_0^{(\nu)} \tag{4.9}$$

aus den Potenzreihen

$$\mathbf{G} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathbf{G}_{\mathbf{0}}^{(\nu)} (t-t_0)^\nu \tag{4.10}$$

und

$$\mathbf{S} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathbf{S}_{\mathbf{0}}^{(\nu)} (t-t_0)^\nu \tag{4.11}$$

zusammen.

4.2 Formulierung von Bestimmungsgleichungen für die Gravitationsfeldbestimmung

Die Resultierende **S** enthält gravitative und nichtgravitative Komponenten

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}_3 + \tilde{\mathbf{S}} \tag{4.12}$$

Der Anteil $\tilde{\mathbf{S}}$ ist bei den Missionen CHAMP, GRACE der Messung zugänglich

$$\tilde{\mathbf{S}}(t_i) \quad t_i \text{ Meßzeitpunkte}$$

während die Komponente $\mathbf{G}_3$ zu den Meßzeitpunkten ausreichend genau berechenbar ist.

Aus den damit gegebenen Daten

$$\mathbf{S}(t_i) = \mathbf{G_3}(t_i) + \tilde{\mathbf{S}}(t_i) \tag{4.13}$$

berechnet man durch Auflösung der Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{\nu!} \mathbf{S_0}^{(\nu)} (t_i - t_0)^{\nu} = \mathbf{S}(t_i) \tag{4.14}$$

die Reihen-Koeffizienten $\mathbf{S}_0^{(\nu)}$ bis zu einem endlichen Grad N.

Die Reihen-Koeffizienten

$$\mathbf{G}_0^{(\nu)} = \frac{1}{\nu!} \frac{d^{\nu}\mathbf{G}}{dt^{\nu}}\bigg|_0 \tag{4.15}$$

berechnet man ausgehend von einer in den Feldparametern linearen Parametrisierung der Gravitationskraft der Erde (Beispiel: Kugelflächenfunktionsentwicklung)

$$\mathbf{G} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathbf{G_n}(\mathbf{r}, t) \;\Rightarrow\; \frac{d^{\nu}\mathbf{G}}{dt^{\nu}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{d^{\nu}\mathbf{G}_n}{dt^{\nu}} \tag{4.16}$$

am Taylorpunkt t_0

$$\frac{d^{\nu}\mathbf{G}}{dt^{\nu}} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{d^{\nu}\mathbf{G}_n}{dt^{\nu}} =: \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{G}_{n,0}^{(\nu)} \,. \tag{4.17}$$

Trägt man die Reihen-Koeffizienten in die obige Gleichung

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{K_0}^{(\nu)}}{\nu!} \frac{(t-t_0)^{\nu+2}}{(\nu+2)(\nu+1)} \tag{4.18}$$

ein, so resultiert

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathbf{G}_0^{(\nu)} + \mathbf{S}_0^{(\nu)} \right) \frac{(t_i - t_0)^{\nu+2}}{(\nu+2)(\nu+1)} = \mathbf{r}(t_i) - \tilde{\mathbf{r}}(t_i) \tag{4.19}$$

Das ist ein in den Feldparametern g_n lineares Gleichungssystem.

Aus der Bahnbestimmung sind die rechten Seiten zu den Meßzeitpunkten t_i bekannt.

4.3 Bewertung des Konzeptes

Da die Reihen ein **endliches Konvergenzintervall** haben, muß man einen längeren Bahnbogen in der Regel aufteilen. Man kann dann für jeden dieser Teilbögen die obigen Schritte anwenden und gelangt so für jeden Teilbogen zu einem Satz von Bestimmungsgleichungen für die Feldparameter

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathbf{G}_{n,0}^{(\nu)} + \mathbf{S}_0^{(\nu)} \right) \frac{(t_{i_k} - t_k)^{\nu+2}}{(\nu+2)(\nu+1)} = \mathbf{r}(t_{i_k}) - \tilde{\mathbf{r}}(t_{i_k}) . \tag{4.20}$$

Darin gehören die Zeitpunkte t_{i_k} jeweils dem Zeitintervall $t_k \le t_{i_k} \le t_{k+1}$ an. Vertauscht man die Summationen, so folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathbf{G}_{n,0}^{(\nu)} N_\nu(t_{i_k}) \right) = \frac{1}{N_\nu(t_{i_k})} (\mathbf{r}(t_{i_k}) - \tilde{\mathbf{r}}(t_{i_k})) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathbf{S}_0^{(\nu)} N_\nu(t_{i_k}) . \tag{4.21}$$

Anm.: *1. Das **Konvergenzintervall** der Reihen ist i.allg. kürzer als die Umlaufszeit der Satelliten, im Falle der Satelliten CHAMP, GRACE dürfte es zweckmäßig sein, einen Umlauf wenigstens zu dritteln, also Teilbögen dieser Länge zu bearbeiten.*
Für die Gravitationsfeldbstimmung ist aber auch die obige Darstellung der gemessenen Kräfte durch eine Potenzreihe ein begrenzender Faktor.

*2. Anstelle der Potenzreihen kommen auch Reihenentwicklungen nach den **STUMPFFschen c-Funktionen** oder die ihnen gleichwertigen **G-Funktionen**, die Stiefel und Scheifele [35] untersucht haben, in Frage. Bei diesen kommt man bei geforderter Genauigkeit mit weniger Reihentermen aus.*

*Allen drei Alternativen ist gemeinsam, daß man die Berechnung der benötigten vollständigen Zeitableitungen **rekursiv** gestalten kann [21.26,35].*

3. *Die vorstehenden Überlegungen lassen sich auf ein terrestrisches Bezugssystem übertragen.*

4. *Wenn man sich in der Potenzreihenentwicklung auf den Term* $\nu = 0$ *beschränken kann, dann lautet das obige System von Bestimmungsgleichungen*

$$\left(\sum_{n=0}^{N_G} g_n \mathbf{G}_{n,0}^{(0)} + \mathbf{S}_0^{(0)}\right)\frac{(t_{i_k} - t_k)^2}{2!} = \mathbf{r}(t_{i_k}) - \tilde{\mathbf{r}}(t_{i_k}) \tag{4.22}$$

bzw.

$$\sum_{n=0}^{N_G} g_n \mathbf{G}_{n,0}^{(0)} = \frac{2!}{(t_{i_k} - t_k)^2}\left(\mathbf{r}(t_{i_k}) - \tilde{\mathbf{r}}(t_{i_k})\right) - \mathbf{S}_0^{(0)} . \tag{4.23}$$

Das sind je Zeitintervall $t_k \le t_{i_k} \le t_{k+1}$ *drei lineare Gleichungen für die* $N_G + 1 \quad (N_G \text{ Entwicklungsgrad})$ *Potentialkoeffizienten* g_n. *Auf der rechten Seite steht genähert eine beschleunigte Bewegung*

$$\mathbf{r}(t_{i_k}) \approx \tilde{\mathbf{r}}(t_{i_k}) - \frac{1}{2}\mathbf{S}_0^{(0)} = \tilde{\mathbf{r}}(t_{i_k}) - \frac{1}{2}\left(\widehat{\mathbf{G}}_3^{(0)} + \tilde{\mathbf{S}}_0^{(0)}\right)(t_{i_k} - t_k)^2 \tag{4.24}$$

Die Beschleunigung ist gegeben durch die Kraft

$$\mathbf{S}_0^{(0)} = \mathbf{G}_3^{(0)} + \tilde{\mathbf{S}}_0^{(0)} \tag{4.25}$$

zum Zeitpunkt t_k $(\triangleq t_0 \text{ des } k - \text{ten Teilbogens})$.

5. *Man kann aus den Bestimmungsgleichungen (6) Terme mit a priori bekannten Feldparametern herauslösen und auf die rechte Seite verlagern.*

4.4 SST-Analyse mit Potenzreihen

Im folgenden werden die Bezeichnungen verwendet:

$\mathbf{r_A}, \mathbf{r_B}$	geozentrische Ortsvektoren der Satelliten A und B
Δ_{AB}	Verbindungs-oder Abstandsvektor von A nach B

sowie

$$\begin{aligned}
&\delta\mathbf{r}_{AB} := \mathbf{r_B} - \mathbf{r_A}\\
&\delta\tilde{\mathbf{r}}_{AB} := \tilde{\mathbf{r}}_\mathbf{B} - \tilde{\mathbf{r}}_\mathbf{A}\\
&\delta\mathbf{G}_{n,0}^{(\nu)} := \mathbf{G}_{n,0}^{(\nu)}\big|_B - \mathbf{G}_{n,0}^{(\nu)}\big|_A\\
&\delta\mathbf{S}_0^{(\nu)} := \mathbf{S}_0^{(\nu)}\big|_B - \mathbf{S}_0^{(\nu)}\big|_A\\
&N_\nu(t_{i_k}) := \frac{(t_{i_k} - t_k)^{\nu+2}}{(\nu+2)(\nu+1)}\\
&\mathbb{S}(t_{i_k}) := \Delta_{AB}(t_{i_k}) - \delta\tilde{\mathbf{r}}_{AB}(t_{i_k})\\
&\mathbb{F}(t_{i_k}) := \mathbb{S}(t_{i_k}) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\delta\mathbf{S}_0^{(\nu)} N_\nu(t_{i_k})
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Schreibt man die Lösung

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{K}_\mathbf{0}^{(\nu)}}{\nu!} N_\nu(t, t_0) \tag{4.27}$$

der Volterra-Gleichung für jeden der Satelliten A und B auf, bildet die Differenz der Lösungen und spaltet die Koeffizienten $\mathbf{K}_0^{(\nu)}$ auf entsprechend

$$\mathbf{K}_0^{(\nu)} := \mathbf{G}_0^{(\nu)} + \mathbf{S}_0^{(\nu)}, \tag{4.28}$$

erhält man als ***Grundgleichung für die SST-Analyse***

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \delta\mathbf{G}_{n,0}^{(\nu)} N_\nu(t_{i_k}) = \mathbb{F}(t_{i_k}) \tag{4.29}$$

oder mit der Bezeichnung

$$\mathfrak{M}_n := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \delta \mathbf{G}_{n,0}^{(\nu)} N_\nu (t_{i_k}) \tag{4.30}$$

in der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n \mathfrak{M}_n (t_{i_k}) = \mathbb{F}(t_{i_k}) \qquad \text{mit} \qquad t_k \le t_{i_k} \le t_{k+1} \tag{4.31}$$

Ein solches System von Bestimmungsgleichungen erhält man für jeden Teilbogen $t_k \le t_{i_k} \le t_{k+1}$.

Anm.:1. Wieder könnte die Verwendung von G-Reihen [35] Vorteile gegenüber den Potenzreihen bringen.

2. Terme mit a priori bekannten Feldparametern kann man auf die rechten Seiten verlagern.

5. Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten als Randwertaufgabe

Von SCHNEIDER wurde 1967[23,24] ein neuer Weg zur Lösung des allgemeinen Bahnbestimmungsproblems vorgeschlagen, basierend auf einer Randwertaufgabe [19,20,30]. Dieser Vorschlag war auch als eine Alternative zum GAUSS – Verfahren [21] der vorläufigen /definitiven Bahnbestimmung gedacht und sollte die in der Anwendung wichtigen Sonderfälle

- Ephemeridenrechnung
- vorläufigen Bahnbestimmung
- definitiven Bahnbestimmung und der
- Parameterbestimmung

umfassen.
In der Folge wurden eingehende Untersuchungen durchgeführt, in denen vor allem methodische Einzelheiten des Lösungsvorschlages geklärt wurden, so

- die zuverlässige Berechnung der auftretenden bestimmten Integrale mit rasch oszillierenden Integranden durch ILK und KLOSE [9]

- der Bereitstellung von Restgliedfunktionen , um das asymptotische Abklingverhalten der Koeffizienten der Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen des Integralgleichungskerns einer Fredholmschen Integralgleichung abzuschätzen durch ILK und KLOSE [10]

- das Konvergenzverhalten der iterativen Auflösung der unendlichen Systeme der anfallenden nichtlinearen Gleichungen durch ILK [41], REIGBER[42] und SCHNEIDER

- der praktischen Durchführbarkeit des Verfahrens in den oben angeführten Sonderfällen durch SCHNEIDER [23], BERGER [1], REIGBER[19], ILK [41], LUDWIG, FRÖHLICH [3], LANSARD&BIANCALE [16], THALHAMMER [39], KUSCHE [14] und RUDOLPH [20].

Darüber hinaus wurden von SCHNEIDER, REIGBER, FRÖHLICH und ILK im Hinblick auf die Anwendung eine Reihe methodischer Erweiterungen des ursprünglichen Vorschlages vorgenommen, beispielsweise

- die Verbindung mit der differentiellen Verbesserung von Modellparametern [21,22]
- die Formulierung für spezielle testbare Funktionale (Observable) [21,22],
- Varianten zur iterativen Auflösung der Bedingungsgleichungen (basierend auf einem Satz von Helge von Koch) [21].

5.1. Allgemeines Bahnbestimmungsproblem als Randwertaufgabe

Neben den sog. Laplace-Methoden, die sich auf die Anfangswertdeterminierung eines Bewegungsproblems stützen, spielen in der Bahnbestimmung die Gauss-Methoden eine bedeutende Rolle. Sie basieren auf einer Determinierung des Bewegungsproblems durch zeitliche Randwerte[21,22].
In diesem Sinne soll im folgenden das allgemeine Bahnbestimmungsproblem als Randwertaufgabe [17,18,19,23,24,27,28,33] behandelt werden.

Die Bewegungsgleichung eines Satelliten

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \tag{5.1}$$

und die zeitlichen Randwerte beispielsweise einer Zielbewegung
können mit dem Integralgleichungskern (Dreieckskern) [21,22]

$$K^I(t_n,\tau_n) = \begin{cases} \tau_n(1-t_n) & \tau_n \le t_n \\ & \textit{für} \qquad\qquad 0 \le t_n,\tau_n \le 1 \\ t_n(1-\tau_n) & t_n \le \tau_n \end{cases} \tag{5.2}$$

sowie der gleichförmig - geradlinigen Bewegung vom einen zum anderen Randort in der Zeitspanne $T := t_B - t_A$

$$\overline{\mathbf{r}}(t_n) := \mathbf{r}_A + (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)t_n \tag{5.3}$$

zur Fredholmschen Integralgleichung

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) - T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{K}(\mathbf{r}(\tau_n),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n);\tau_n)d\tau_n \tag{5.4}$$

zusammengefaßt werden.

Ihr korrespondiert im Falle der Anfangswertdeterminierung die in §4 zugrundegelegte Volterrasche Integralgleichung

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(t) - \int_{t_0}^{t} (t-\tau)\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; \tau) d\tau \qquad \text{mit} \qquad \tilde{\mathbf{r}}(t) := \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)(t - t_0) \,. \tag{5.5}$$

In beiden Fällen der Determinierung wird die Lösung der gestellten Anfangs-/Randwertaufgabe in halbexpliziter Form dargestellt. Im Integranden ist ja die auftretende Kräftefunktion von der Bahn i.allg. abhängig.
Für die RWA soll jetzt ein von der Kräftefunktion **K** weitgehend unabhängiger Lösungsweg angegeben werden [25,27,33].

5.2. Lösung der Randwertaufgabe durch Entwicklung nach Eigenfunktionen

Auf dem normierten Zeitintervall $0 \le t_n \le 1$ bilden die Eigenfunktionen des Dreieckskerns K^I

$$\varphi_\nu^I(t_n) := \sqrt{2} \sin \lambda_\nu t_n \qquad \nu = 1(1)\infty \quad \text{zu den Eigenwerten} \;\; \lambda_\nu = \nu^2 \pi^2 \tag{5.6}$$

ein orthonormiertes Funktionensystem. Nach diesem können die gesuchte Lösung der Randwertaufgabe als auch der Integralgleichungskern in gleichmäßig konvergente Reihen entwickelt werden [21,22,26,31,33,40,43]:

$$\begin{gathered} \mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \\ K^I(\tau_n) = \frac{\sum_{\sigma=1}^{\infty} \varphi_\sigma^I(\tau_n) \overline{\varphi}_\sigma^I(\tau_n')}{\lambda_\sigma} \,. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Geht man mit diesen Reihen in die zu lösende Integralgleichung ein, folgt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \varphi_\nu^I(t_n) = T^2 \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\varphi_\sigma^I(\tau_n)}{\lambda_\sigma} \int_0^1 \varphi_\sigma^I(\tau_n') \, \mathbf{K} \, d\tau_n' \,. \tag{5.8}$$

Darin bedeutet

$$T := t_B - t_A \;\; \text{mit} \;\; t_A, t_B \;\; und \quad t_A < t_B \,. \tag{5.9}$$

Multiplikation der Gleichung mit der $\mu -$ten Eigenfunktion und anschließende Integration über das Intervall $0 \le \tau_n \le 1$ ergibt, beachtet man die Orthonormierung

$$\int_0^1 \varphi_\mu^I(\tau_n)\varphi_\nu^I(\tau_n)d\tau_n = \delta_{\mu\nu} \ , \tag{5.10}$$

ein unendliches System von Bedingungsgleichungen für die im Lösungsansatz zunächst unbestimmten Koeffizienten $\mathbf{r}_\nu$

$$\mathbf{r}_\nu = -\frac{T^2}{\lambda_\nu}\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n')\mathbf{K}(\mathbf{r}(\tau_n'),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n');\tau_n')d\tau_n' \qquad \nu \le 1(1)\infty \tag{5.11}$$

Im Integranden ist der Lösungsansatz einzutragen, d.h.

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}(\tau_n'),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n');\tau_n') = \mathbf{K}(\overline{\mathbf{r}} + \sum_{\sigma=1}^{\infty}\mathbf{r}_\sigma\overline{\varphi}_\sigma^I(\tau_n'),\dot{\overline{\mathbf{r}}} + \sum_{\sigma=1}^{\infty}\mathbf{r}_\sigma\dot{\overline{\varphi}}_\sigma^I(\tau_n');\tau_n') \tag{5.12}$$

Das Gleichungssystem ist i.allg. ein nichtlineares Gleichungssystem der Gestalt

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(T^2,\lambda_\nu;\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_B;\mathbf{r}_1,...) \qquad \nu = 1(1)\infty \,, \tag{5.13}$$

dessen Auflösung die gesuchten Entwicklungskoeffizienten $\mathbf{r}_\nu$ des Lösungsansatzes sind. $\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_B$ sind die gegebenen Randwerte der gesuchten Lösung zu den Randzeitpunkten t_A *und* t_B.

5.3. Bestimmungsgleichungen für Feldparameter

5.3.1 Nutzung der Bedingungsgleichungen

Liegt eine Parametrisierung der Kräftefunktion der Gestalt [22]

$$\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) = \sum_{i=0}^{I}k_i\mathbf{k}_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{u}(t_n) \tag{5.14}$$

vor, worin der erste Term die interessierenden Parameter k_i enthält, der zweite nicht parametrisiert ist und der dritte Term der Existenz eventueller unbekannter, aber zeitveränderlicher Kraftkomponenten Rechnung trägt.

Im Hinblick auf die Gravitationsfeldbestimmung wird die Kräftefunktion die Gestalt haben

$$\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) = \sum_{i=0}^{I} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{u}(t_n) \qquad (5.15)$$

worin

$$\mathbf{G}(\mathbf{r};t_n) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r};t_n) \qquad (5.16)$$

die Gravitation der Erde bedeutet und g_i die interessierenden Feldparameter.

Das System der Bestimmungsgleichungen für diese Parameter nimmt dann mit den parameterfreien Integralen

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{i\nu}^{s} &:= \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n')\mathbf{G}_i(\mathbf{r}(\tau_n');\tau_n')d\tau_n' \\ \mathbf{Z}_\nu^{s} &:= \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n')\mathbf{Z}(\mathbf{r}(\tau_n'),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n');\tau_n')d\tau_n' \end{aligned} \qquad (5.17)$$

die Gestalt an

$$\mathbf{r}_\nu = -\frac{T^2}{\lambda_\nu}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{J}_{i\nu}^s + \mathbf{Z}_\nu^s + \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n')\mathbf{u}(\tau_n')d\tau_n'\right\} \qquad \nu \le 1(1)\infty\,. \qquad (5.18)$$

Setzt man noch für den Zeitverlauf des nichtmodellierten/nichtmodellierbaren Anteil eine Entwicklung [22]

$$\mathbf{u}(\tau_n) = \overline{\mathbf{u}}(\tau_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n) \qquad (5.19)$$

an, so erhält man schließlich das im Prinzip unendliche System von Bestimmungsgleichungen für die Feldparameter

$$\mathbf{r}_\nu = -\frac{T^2}{\lambda_\nu}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{J}_{i\nu}^s + \mathbf{Z}_\nu^s + N_\nu^s \mathbf{u}_A + K_\nu^s(\mathbf{u}_B - \mathbf{u}) + \mathbf{u}_\nu\right\} \qquad (5.20)$$

mit den Integralen

$$N_\nu^s := \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n')d\tau_n' = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \nu \text{ gerade} \\ 2\sqrt{\dfrac{2}{\lambda_\nu}} & \quad \nu \text{ ungerade} \end{cases} \tag{5.21}$$

$$K_\nu^s := \int_0^1 \tau_n'\overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n')d\tau_n' = \begin{cases} +\sqrt{\dfrac{2}{\lambda_\nu}} & \text{für} \quad \nu \text{ gerade} \\ -\sqrt{\dfrac{2}{\lambda_\nu}} & \quad \nu \text{ ungerade} \end{cases} . \tag{5.22}$$

Damit liegt ein Gleichungssystem der Struktur

$$\mathbb{F}_\nu(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B; T \,|\, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \,|\; g_1, g_2, ... |\, \mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...) = \mathbf{0} \tag{5.23}$$

vor, das bei bekannter Lösung

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \tag{5.24}$$

zur Parameterbestimmung und zur Schätzung des nichtmodellierten Anteils $\mathbf{u}(t_n)$ der Kräftefunktion herangezogen werden kann.

5.3.2 Direkte Nutzung der Integralgleichung

Trägt man in die Fredholmsche Integralgleichung

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n)\mathbf{K}(\mathbf{r}(\tau_n), \dot{\mathbf{r}}(\tau_n); \tau_n)d\tau_n \tag{5.25}$$

die Parametrisierung der Kräftefunktion

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t_n) = \sum_{i=0}^{I} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t_n) + \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t_n) + \mathbf{u}(t_n) \tag{5.26}$$

ein , folgt

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{G}_i(\mathbf{r},\tau_n)d\tau_n = \mathbf{r}(t_n) - \overline{\mathbf{r}}(t_n) + T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\big(\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};\tau_\mathbf{n}) + \mathbf{u}(\tau_n)\big)d\tau_n \,. \quad (5.27)$$

Im Falle der CHAMP-Mission sind bekannt

- $\mathbf{r}(t_n) - \overline{\mathbf{r}}(t_n)$ aus der Einmessung der Satellitenbahn in das GPS-System
- die nichtgravitativen Anteile der bezogenen Kräfte $\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n)$.

Die gravitativen Anteile von $\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n)$, herrührend von der Gravitation dritter Körper wie Sonne und Mond können genau genug als Zeitfunktionen berechnet werden.
Schreibt man die Gleichung für alle Meßzeitpunkte $t_n^{(\sigma)} := t_\sigma$ auf

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i T^2 \int_0^1 K^I(t_n^\sigma,\tau_n)\mathbf{G}_i(\mathbf{r},\tau_n)d\tau_n = \mathbf{r}(t_n^\sigma) - \overline{\mathbf{r}}(t_n^\sigma) + T^2 \int_0^1 K^I(t_n^\sigma,\tau_n)\big(\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};\tau_\mathbf{n}) + \mathbf{u}(\tau_n)\big)d\tau_n \quad (5.28)$$

so liegt damit ein in den gesuchten Parametern $k_i \; (i = 0,1,...\infty)$ lineares Gleichungssystem vor, das an die Stelle der Bestimmungsgleichungen

$$\mathbf{r}_\nu = -\frac{T^2}{\lambda_\nu}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{J}_{i\nu}^s + \mathbf{Z}_\nu^s + N_\nu^s \mathbf{u}_A + K_\nu^s(\mathbf{u}_B - \mathbf{u}) + \mathbf{u}_\nu\right\} \quad (5.29)$$

treten kann. Dieses ist die Transformation des ersteren in den Spektralbereich.

Anstelle der Integralgleichung

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) - T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{K}(\mathbf{r}(\tau_n),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n);\tau_n)d\tau_n \quad (5.30)$$

können folgende Varianten verwendet werden, auf deren Herleitung hier nicht eingegangen werden soll [21]:

a) $$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}_K(t_n) - T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n;\lambda)\mathbf{K}_{eff}(\mathbf{r}(\tau_n),\dot{\mathbf{r}}(\tau_n);\tau_n)d\tau_n \quad (5.31)$$

mit der die Randörter die verbindenden Kreisbahn

$$\overline{\mathbf{r}}_K(t_n) := \frac{\sin\sqrt{\lambda}(1-t_n)}{\sin\sqrt{\lambda}}\mathbf{r}_A + \frac{\sin\sqrt{\lambda}t_n}{\sin\sqrt{\lambda}}\mathbf{r}_B \tag{5.32}$$

sowie dem Integralgleichungskern

$$K^I(t_n,\tau_n;\lambda) := \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}t_n \sin\sqrt{\lambda}(1-\tau_n)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} & t_n \le \tau_n \\ & \textit{für} \\ \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\tau_n \sin\sqrt{\lambda}(1-t_n)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}} & \tau_n \le t_n \end{cases} . \tag{5.33}$$

Die Kraft $\mathbf{K}_{eff}$ ist erklärt durch

$$\mathbf{K}_{eff} := \mathbf{K} + \frac{GMm}{a^3}\mathbf{r} = \mathbf{K} - (-\frac{GMm}{a^3}\mathbf{r}) \tag{5.34}$$

und der Parameter λ in der hier zugrundeliegenden linearen Erweiterung des primären Newtonschen Differentialausdrucks durch

$$\lambda := \frac{GM}{a^3} = n^2 \;\hat{=}\; \text{3.Kepler-Gesetz} . \tag{5.35}$$
a Radius der Kreisbahn

Diese Fassung der grundlegenden Integralgleichung ist der nahezu kreisförmigen CHAMP-Bahn besser angepaßt als eine die Randörter verbindende Trägheitsbewegung

$$\overline{\mathbf{r}}(t_n) := \mathbf{r}_A + (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)t_n \tag{5.36}$$

b) Mit der von Brumberg 1962 angegebenen Integralgleichung [21]

$$\mathbf{r}(t) = \overline{\mathbf{r}}_B(t) - \int_{t_A}^{t_B} K^I(t,\tau)\mathbf{Q}(\tau)d\tau \tag{5.37}$$

läßt sich eine noch weitergehende Annäherung an die aktuelle Bahn erzielen, nämlich durch eine die Randörter verbindende elliptische Kepler-Bahn. Es bedeuten

$$K^I(t;\tau) := \begin{cases} \dfrac{1}{n}\dfrac{\sin n(t_B - t)\sin n(\tau - t_A)}{\sin n(t_B - t_A)} & \tau \le t \\ & \text{für} \\ \dfrac{1}{n}\dfrac{\sin n(t_B - \tau)\sin n(t - t_A)}{\sin n(t_B - t_A)} & t \le \tau \end{cases} \tag{5.38}$$

und

$$\mathbf{Q} := GM\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{a^3}\right)\mathbf{r} - \mathbf{F}^*(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)\,, \tag{5.39}$$

worin die Kraft $\mathbf{F}^*(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t)$ definiert ist durch

$$\mathbf{K} + \frac{GM}{r^3}\mathbf{r} =: \mathbf{F}^*(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) \tag{5.40}$$

Wollte man $\overline{\mathbf{r}}(t)$ als eine die Randörter verbindende elliptische Kepler-Bahn mit säkular gestörter Knoten- und Apsidenlinie sowie veränderter mittlerer Bewegung einführen, so könnte man beispielsweise von der intermediären

Lösung ausgehen, die Kyner und Bennett im Rahmen einer modifizierten Encke-Methode vorgeschlagen haben oder die ihr Lösung, die Cui seiner Bahntheorie 2.Ordnung zugrunde gelegt hat. Das soll hier nicht näher untersucht werden. Man wird hier aber anstelle einer Greenschen Funktionen auf einen Tensor solcher Funktionen zurückgreifen müssen. Hierzu sei auf die Arbeiten von SCHNEIDER [21] und FRÖHLICH [3] verwiesen.

In den Kräftefunktionen $\mathbf{K}_{eff}$ *bzw.* $\mathbf{Q}$ kommt zum Ausdruck, daß die reichere Struktur der Bewegung $\overline{\mathbf{r}}(t)$ aus der Kräftefunktion $\mathbf{K}$ Komponenten herausnimmt, und zwar die dominierende Kepler-Kraft.

5.3.3 Analyse von SST-Daten mit Hilfe der Integralgleichung

Zur Anwendung auf eine SST-Mission wie GRACE schreibt man die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{G}_i(\mathbf{r},\tau_n)d\tau_n = \mathbf{r}(t_n) - \overline{\mathbf{r}}(t_n) + T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\big(\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};\tau_\mathbf{n}) + \mathbf{u}(\tau_n)\big)d\tau_n \quad (5.41)$$

für jeden der beteiligten Satelliten (1) und (2) auf

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{G}_i(\mathbf{r}^{(1)},\tau_n)d\tau_n = \mathbf{r}^{(1)}(t_n) - \overline{\mathbf{r}}^{(1)}(t_n) + T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\Big(\mathbf{z}(\mathbf{r}^{(1)},\dot{\mathbf{r}}^{(1)};\tau_\mathbf{n}) + \mathbf{u}^{(1)}(\tau_n)\Big)d\tau_n \quad (5.42)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{G}_i(\mathbf{r}^{(2)},\tau_n)d\tau_n = \mathbf{r}^{(2)}(t_n) - \overline{\mathbf{r}}^{(2)}(t_n) + T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\Big(\mathbf{z}(\mathbf{r}^{(2)},\dot{\mathbf{r}}^{(2)};\tau_\mathbf{n}) + \mathbf{u}^{(2)}(\tau_n)\Big)d\tau_n \quad (5.43)$$

und bildet anschließend die Differenz dieser Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} g_i T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)(\mathbf{G}_i(\mathbf{r}^{(2)},\tau_n) - \mathbf{G}_i(\mathbf{r}^{(1)},\tau_n))d\tau_n &= \\ = \Delta^{(2)}(t_n) - \overline{\Delta}^{(2)}(t_n) &+ \\ + T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\Big(\mathbf{z}(\mathbf{r}^{(2)},\dot{\mathbf{r}}^{(2)};\tau_\mathbf{n}) - \mathbf{z}(\mathbf{r}^{(1)},\dot{\mathbf{r}}^{(1)};\tau_n) &+ (\mathbf{u}^{(2)}(\tau_n) - \mathbf{u}^{(1)}(\tau_n)\Big)d\tau_n\end{aligned} \quad (5.44)$$

Für eine SST-Konfiguration , in der sich die Örter der Satelliten nur wenig voneinander unterscheiden, kann man an eine Taylorentwicklung der Funktionen in den Integranden vornehmen

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{r}^{(2)},\tau_n) = \mathbf{G}_i(\mathbf{r}^{(1)} + \Delta,\tau_n) \approx \mathbf{G}_i(\mathbf{r}^{(1)},\tau_n) + \Delta\cdot(\nabla_\mathbf{r}\mathbf{G}_i(\mathbf{r},\tau_n))\Big|_{\mathbf{r}^{(1)},\tau_n} + \ldots, \quad (5.45)$$

womit man erhält

$$\sum_{i=0}^{\infty} g_i T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)(\mathbf{G}_i(\mathbf{r}^{(2)},\tau_n)-\mathbf{G}_i(\mathbf{r}^{(1)},\tau_n))d\tau_n \approx \sum_{i=0}^{\infty} g_i T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\Delta\cdot(\nabla_{\mathbf{r}}\mathbf{G}_i(\mathbf{r},\tau_n)) \Big|_{\mathbf{r}^{(1)},\tau_n} d\tau_n + \dots \tag{5.46}$$

In dieser linearen Näherung wird deutlich, wie man auf diesem Wege auch die ***Satellitengradiometrie*** bearbeiten könnte.

Analog lassen sich auch die anderen Varianten der Integralgleichung heranziehen.

Im Hinblick auf die Anwendung kommt es darauf an, die auftretenden Integrale unter Berücksichtigung der besonderen Verläufe der Integralgleichungskerne zu berechnen. Verglichen mit der Feldbestimmung im Spektralbereich (s 5.3.1) treten hier keine rasch oszillierenden Integranden auf.

5.4 Bewertung des Konzeptes

5.4.1 Methodische Vorarbeiten

Im Hinblick auf die Anwendung auf die Gravitationsfeldbestimmung waren vor allem folgende Fragen zu klären:

1. Berechnung der bestimmten Integrale
2. Abschätzung der Fehler zufolge Reihenabbruch
3. Regionale vs. Globale Feldbestimmung zufolge der begrenzten Länge der nutzbaren Bahnbögen
4. Auflösung der Bestimmungsgleichungen

Hier sollen Literaturstellen angeführt werden, in denen Antworten auf die vorstehenden Fragen zu finden sind.

Zu 1. Zur praktischen Durchführung des Verfahrens wurden von SCHNEIDER [21,22] für die wichtigsten Operationen mit den Reihen die benötigten Formelausdrücke ausgearbeitet, insbesondere im Hinblick auf eine symbolische Formelmanipulation, und in Testrechnungen erprobt.

Die bestimmten Integrale können wie ILK und KLOSE [9] gezeigt haben, auch bei rasch oszillierenden Integranden zuverlässig und mit vertretbarem Rechenaufwand durch numerische Quadratur berechnet werden.

Zu 2. Der durch Reihenabbruch begangene Fehler kann durch Restglied-funktionen zuverlässig abgeschätzt werden, wie ILK und KLOSE [10] gezeigt haben.

Zu 3. Die nutzbare Länge der Bahnbögen ist im Falle der Variante mit der Trägheitsbewegung $\overline{\mathbf{r}}(t_n) = \mathbf{r}_A + (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)t_n$ zwischen den Randörtern deutlich unter einem Umlauf begrenzt, wie in zahlreichen Simulationen von ILK gezeigt worden ist. Um längere Zeitintervalle nutzen zu können, muß ein

langer Bahnbogen

entweder geeignet unterteilt und die Teilbögen getrennt verarbeitet werden, was in den bisherigen Untersuchungen geschieht

oder man synthetisiert die Amplitudenspektren der Teilbögen zu einem Amplitudenspektrum des Gesamtbogens nach einem Vorschlag von SCHNEIDER [21].

Eine andere Möglichkeit wäre die Verwendung der die Randörter verbindenden Kreis- oder Ellipsenbahn sein und Anpassung der Methode der unendlich vielen Variablen, d.h. der Entwicklung nach Eigenfunk-tionen. Oder man greift von Beginn an auf die direkte Nutzung der Integralgleichungen zurück (s.5.3.2). Damit aber verliert man die Vorzüge der Spektraldarstellung.

Zu 3. und 4. Die Begrenztheit der Länge der nutzbaren Bahnbögen hat das Problem der regionalen Felddarstellung aufgeworfen, das ist eingehend von ILK, THALHAMMER [39], KUSCHE [14] und RUDOLPH [20] untersucht worden, vor allem auch im Hinblick auf die globale Feldbestimmung durch Synthese regionaler Feldbestimmungen.

Zu 4. Die Auflösung der anfallenden großen Gleichungssysteme insbesondere im Hinblick auf eine globale Feldbestimmung haben RUDOLPH [20] und ILK untersucht.

Die umfangreichen Untersuchungen von ILK et.al. zeigen, daß die Voraussetzungen für die praktische Anwendung des Weges der Gravitaionsfeldbestimmung durch Lösung einer Randwertaufgabe [41] in methodischer Hinsicht als gegeben angesehen werden. Eine Bewertung des Weges wird man erst nach einer solchen Anwendung auf Echtdaten beispielsweise aus Satellitenmissionen vornehmen können.
Erste Anwendungen (s.5.4.3) waren jedenfalls erfolgreich.

5.4.2 Methodische Ergänzungen

In diesem Abschnitt sollen drei methodische Ergänzungen zu den Entwicklungen nach Eigenfunktionen bzw. in Potenzreihen angeführt werden.

5.4.2.1 Zusammenhang der Reihenkoeffizienten

Betrachtet sei eine eindimensionale Bewegung, die einerseits nach Eigenfunktionen entwickelt und andererseits durch eine Potenzreihe dargestellt sei

$$\underbrace{x_A + (x_B - x_a)t_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \bar{\varphi}^I_\nu(t_n)}_{\textit{Entwicklung nach den Eigenfunktionen}} = x(t_n) = \underbrace{\sum_{\sigma=0}^{\infty} x^\sigma (t-t_0)^\sigma}_{\textit{Potenzreihe}} \tag{5.47}$$

$$\varphi^I_\nu(t_n) = \sqrt{2}\sin(\nu\pi t_n)$$

und zwar im Zeitintervall $T = t_B - t_A$, von dem angenommen werde, daß es kleiner als das Konvergenzintervall der Potenzreihe ist. Andernfalls müßte man die Potenzreihe über ihr Konvergenzintervall analytisch fortsetzen.

Mit

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} x^{(\sigma)} (t-t_0)^\sigma = x^{(0)} + x^{(1)}(t-t_0) + \sum_{\sigma=2}^{\infty} \frac{1}{\sigma!} x^{(\sigma)} (t-t_0)^\sigma \tag{5.48}$$

normiert man die Zeitzählung auch in der Potenzreihe gemäß

$$t_n := \frac{t-t_0}{T} = \frac{t-t_A}{T} \Rightarrow (t-t_0)^\sigma = t_n^\sigma T^\sigma \tag{5.49}$$

folgt

$$x_A + (x_B - x_a)t_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) = x_n(t_n) = x_A + x^{(1)} t_n T + \quad \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{x^{(\sigma)}}{\sigma!} T^\sigma t_n^\sigma \tag{5.50}$$

bzw.

$$(x_B - x_a)t_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) = x_n(t_n) = x^{(1)} t_n T + \quad \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{x^{(\sigma)}}{\sigma!} T^\sigma t_n^\sigma \ . \tag{5.51}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\overline{\varphi}_\lambda^I(t_n)$ und integriert man über t_n, so erhält man wegen der Orthonormierung der Eigenfunktionen

$$(x_B - x_a)\int_0^1 t_n \overline{\varphi}_\lambda^I(t_n)dt_n + x_\lambda = \dot{x}(t_n = 0)T\int_0^1 t_n \overline{\varphi}_\lambda^I(t_n)dt_n + \quad \sum_{\sigma=2}^{\infty} \frac{x^{(\sigma)}T^\sigma}{\sigma!} \int_0^1 t_n^\sigma \overline{\varphi}_\lambda^I(t_n)dt_n \tag{5.52}$$

bzw. mit den Abkürzungen

$$K_\lambda^s := \int_0^1 t_n \overline{\varphi}_\lambda^I(t_n)dt_n \quad und \quad I_\lambda^\sigma := \int_0^1 t_n^\sigma \overline{\varphi}_\lambda^I(t_n)dt_n \tag{5.53}$$

$$(x_B - x_A)K_\lambda^s + x_A = \dot{x}(t_n = 0)T_n K_\lambda^s + \sum_{\sigma=2}^{\infty} \frac{x^{(\sigma)}T^\sigma}{\sigma!} I_\lambda^\sigma \tag{5.54}$$

oder umgestellt

$$x_B - x_A - \dot{x}(t_n = 0)T)K_\lambda^s + x_\lambda = \sum_{\sigma=2}^{\infty} \frac{x^{(\sigma)}T^\sigma}{\sigma!} I_\lambda^\sigma \ . \tag{5.55}$$

Wenn man die Potenzreihenkoeffizienten $x^{(\sigma)}$ kennt, dann können daraus die Entwicklungskoeffizienten x_λ berechnet werden.
Die Potenzreihenkoeffizienten können rekursiv ermittelt werden, wenn man die ersten beiden Koeffizienten

$$x^{(0)} = x(t_n = 0) = x_A \quad und \quad x^{(1)} = \dot{x}(t_n = 0) \tag{5.56}$$

kennt. Ersterer ist durch den linken Randwert bekannt, letzterer ergibt sich wie folgt

$$\dot{x}(t_n) \equiv \frac{dx(t_n)}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dx(t_n)}{dt_n} = \frac{1}{T}\left[x_B - x_A + \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \nu\pi \overline{\Phi}_\nu^I(t_n)\right] \tag{5.57}$$

mit den orthonormierten Eigenfunktionen vom Typ II [21]

$$\overline{\Phi}_\nu^{II}(t_n) = \sqrt{2}\cos(\nu\pi t_n)\,, \tag{5.58}$$

woraus für $t_n = 0$ folgt

$$x^{(1)} \equiv \dot{x}(t_n = 0) = \frac{1}{T}\left[x_B - x_A + \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \nu\pi\right]. \tag{5.59}$$

Damit ergibt sich folgender Algorithmus zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten x_ν

(1) Berechne mittels einer Ausgangsnäherung $x_\nu^{(k)}$ die Potenzreihenkoeffizienten $\left(x^{(\sigma)}\right)^{(k)}$ rekursiv mittels der Differentialgleichung für $x(t)$
(2) Berechne mittels eine neue Näherung $x_\nu^{(k+1)}$
(2) Ist $\left|x_\nu^{(k+1)}\right| < \varepsilon$?
(4) Wenn nein, dann gehe zurück zu (1) usw.

Die oben eingeführten Integrale K_λ^s *und* I_λ^σ lassen sich geschlossen berechnen:

$$K_\lambda^s := \int_0^1 t_n \overline{\varphi}_\lambda^I(t_n)dt_n = \begin{cases} 0 & \nu \text{ gerade} \\ & \text{für} \\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{(\nu\pi)^2} & \nu \text{ ungerade} \end{cases} \tag{5.60}$$

Zur Berechnung von

$$I_\lambda^\sigma := \int_0^1 t_n^\sigma \overline{\varphi}_\lambda^I(t_n)dt_n \tag{5.61}$$

kann man die Formel

$$\int x^p \sin x dx = \cos x \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} (-1)^{\nu+1} (p;-1;2\nu) x^{p-2\nu} + \sin x \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} (-1)^{\nu} (p;-1;2\nu+1) x^{p-2\nu+1} + C \quad (5.62)$$

verwenden. Es bedeuten

$$\begin{aligned} [a] &:= entier\ (a) \\ (a;b;c) &:= \frac{b^c \Gamma\left(\frac{a}{b}+c\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)} \quad . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Die vorstehend geschilderte Umrechnung der Potenzreihenkoeffizienten in die Entwicklungskoeffizienten einer Entwicklung nach den orthonormierten Eigeenfunktionen

$$\overline{\varphi}_\nu^I(t_n) = \sqrt{2}\sin(\nu\pi t_n) \quad (5.64)$$

kann auf beliebige Vektorfunktionen $\mathbf{A}(t_n)$ übertragen werden, wenn diese als Lösung einer Differentialgleichung ist, die die rekursive Berechnung der Potenzreihenkoeffizienten $\mathbf{A}^{(\sigma)}$ ermöglicht. Das ist bei einer Teilchenbewegung, die durch die Newton-Eulersche Bewegungsgleichung geregelt wird, der Fall.

5.4.2.2 Modifizierte Entwicklung nach Eigenfunktionen

Die Lösung einer I. Randwertaufgabe zur Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt_n^2} =: x'' = T^2 f(x) = T^2\left(f_0(x) + \varepsilon f_1(x)\right) \quad (5.65)$$

werde angesetzt in der Form

$$x(t_n) = \overline{x}(t_n) + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\nu j} \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \quad (5.66)$$

Sei auch $f(x)$ in gleicher Weise entwickelt

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0(x) + \varepsilon f_1(x) \\ &= \overline{f}_0(t_n) + \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j \sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{\sigma j}^{(0)}\overline{\varphi}_{\sigma}^{I}(t_n) + \overline{f}_1(t_n) + \varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{\sigma j}^{(1)}\overline{\varphi}_{\sigma}^{I}(t_n) \end{aligned} \tag{5.67}$$

Trägt man die Reihenentwicklungen in die Differentialgleichung ein , so resultiert

$$\overline{x}''(t_n) + \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\nu j}\ \overline{\varphi}_{\nu}''^{I}(t_n) = T^2\left(\overline{f}_0(t_n) + \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{\sigma j}^{(0)}\ \overline{\varphi}_{\sigma}^{I}(t_n) + \overline{f}_1(t_n) + \varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{\sigma j}^{(1)}\ \overline{\varphi}_{\sigma}^{I}(t_n)\right) \tag{5.68}$$

bzw.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\nu=1}^{\infty} x_{\nu j}\ \overline{\varphi}_{\nu}''^{I}(t_n) = T^2\left(\overline{f}_0(t_n) + \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{\sigma j}^{(0)}\ \overline{\varphi}_{\sigma}^{I}(t_n) + \varepsilon\overline{f}_1(t_n) + \varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{\sigma j}^{(1)}\ \overline{\varphi}_{\sigma}^{I}(t_n)\right) \tag{5.69}$$

oder wegen

$$\overline{\varphi}_{\nu}''^{I}(t_n) = -(\nu\pi)^2\,\overline{\varphi}_{\nu}^{I}(t_n) \tag{5.70}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\nu=1}^{\infty} -(\nu\pi)^2 x_{\nu j}\ \overline{\varphi}_{\nu}^{I}(t_n) = T^2\left(\overline{f}_0(t_n) + \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{\sigma j}^{(0)}\ \overline{\varphi}_{\sigma}^{I}(t_n) + \overline{f}_1(t_n) + \varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{\sigma=1}^{\infty} f_{\sigma j}^{(1)}\ \overline{\varphi}_{\sigma}^{I}(t_n)\right) \tag{5.71}$$

Multiplikation mit der Eigenfunktion $\overline{\varphi}_{\nu}^{I}(t_n)$ und anschließende Integration über $0 \le t_n \le 1$ ergibt wegen der Orthonormierung der Eigenfunktionen über diesem Intervall

$$-\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\left\{(\lambda\pi)^2 x_{\lambda j} + f_{\lambda j}^{(0)}\right\} = T^2\left(\int_0^1\left(\overline{f}^{(0)}(\tau_n) + \varepsilon\overline{f}^{(1)}(\tau_n)\right)\overline{\varphi}_{\lambda}^{I}(\tau_n)\,d\tau_n + \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j+1} f_{\lambda j}^{(1)}\right) \tag{5.72}$$

Vergleich der Koeffizienten gleicher Potenzen von ε ergibt

$$x_{\lambda j} = -\frac{f_{\lambda j}^{(0)} - f_{\lambda j}^{(1)}}{(\lambda\pi)^2} + T^2\int_0^1\left(\overline{f}^{(0)}(\tau_n) + \varepsilon\overline{f}^{(1)}(\tau_n)\right)\overline{\varphi}_{\lambda}^{I}(\tau_n)\,d\tau_n \qquad \text{für} \qquad \begin{array}{l}\lambda = 1,2,\ldots\infty \\ j = 0,1,\ldots\infty\end{array} \tag{5.73}$$

Das Integral ist geschlossen auswertbar

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\overline{f}^{(0)}\left(\tau_n\right) \quad + \quad \varepsilon\overline{f}^{(1)}\left(\tau_n\right)\right)\overline{\varphi}_\lambda^I\left(\tau_n\right)d\tau_n = \\
&= f_A^{(0)}N_\lambda^s + (f_B^{(0)} - f_A^{(0)})K_\lambda^s \quad + \quad \varepsilon\left(f_A^{(1)}N_\lambda^s + (f_B^{(1)} - f_A^{(1)})K_\lambda^s\right) = \\
&= \left(f_A^{(0)} + \varepsilon f_A^{(1)}\right)N_\lambda^s + \left((f_B^{(0)} - f_A^{(0)}) + \varepsilon(f_B^{(1)} - f_A^{(1)})\right)K_\lambda^s = \\
&= \left(f_A N_\lambda^s + \varepsilon\left(f_B - f_A\right)K_\lambda^s\right)
\end{aligned}
\tag{5.74}
$$

so daß folgt

$$
x_{\lambda j} = -\frac{f_{\lambda j}^{(0)} - f_{\lambda j}^{(1)}}{\left(\lambda\pi\right)^2}\left(f_A N_\lambda^s + \varepsilon\left(f_B - f_A\right)K_\lambda^s\right). \tag{5.75}
$$

5.4.2.3 Randwertaufgabe zu Störungsgleichungen

Zur Lösung einer I. Randwertaufgabe zu Störungsgleichungen

$$
\frac{d\alpha}{dt} = \varepsilon f(\alpha,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\alpha}{dt_n} =: \alpha' = \varepsilon T f(\alpha,t_n) \tag{5.76}
$$

sollen die Ansätze

$$
\begin{aligned}
&\alpha(t_n) = \overline{\alpha}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \;\Rightarrow\; \alpha'(t_n) = \overline{\alpha}'(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\nu\pi\right)\alpha_\nu\overline{\Phi}_\nu^{II}(t_n) \\
&f(t_n) = \overline{f}(t_n) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} f_\sigma\overline{\varphi}_\sigma^I(t_n)
\end{aligned}
\tag{5.77}
$$

herangezogen werden. Geht man damit in die Störungsgleichungen ein, so erhält man eine Darstellung der α_ν durch die f_σ

$$
\overline{\alpha}'(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\nu\pi\right)\alpha_\nu\overline{\Phi}_\nu^{II}(t_n) = \varepsilon\left(\overline{f}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\overline{\varphi}_\nu^I(t_n)\right) \tag{5.78}
$$

bzw. nach Multiplikation der Gleichung mit $\overline{\Phi}_\lambda^{II}(t_n)$ und anschließender Integration über t_n

$$\int_0^1 \bar{a}'\bar{\Phi}_l^{II}\,dt_n + (lp)\,a_l = e\left\{\int_0^1 \bar{f}\bar{\Phi}_l^{II}\,dt_n + \sum_{n=1}^{\infty} f_n K_{ln}\right\} \tag{5.79}$$

bzw. umgestellt

$$lpa_l = \int_0^1 \left(e\bar{f} - \bar{a}'\right)\bar{\Phi}_l^{II}\,dt_n + e\sum_{n=1}^{\infty} f_n K_{ln} \tag{5.80}$$

Eine Darstellung der f_s durch die a_n ergibt sich wie folgt:

Man multipliziere

$$\bar{a}'(t_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(np)a_n\bar{\Phi}_n^{II}(t_n) = e\left(\bar{f}(t_n) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\bar{J}_n^{I}(t_n)\right) \tag{5.81}$$

mit $\bar{J}_l(t_n)$ und integriere anschließend über t_n

$$\int_0^1 \bar{a}'\bar{J}_l^{I}\,dt_n + \sum_{n=1}^{\infty}(np)a_n K_{nl} = e\left\{\int_0^1 \bar{f}\bar{J}_l^{I}\,dt_n + f_l\right\} \tag{5.82}$$

oder umgestellt

$$ef_l = \int_0^1 (\bar{a}' - e\bar{f})\bar{J}_l^{I}\,dt_n + \sum_{n=1}^{\infty}(np)a_n K_{nl}\,. \tag{5.83}$$

Die aufretenden Integrale lauten

$$K_n^s := \int_0^1 t_n\bar{J}_n^{I}(t_n)\,dt_n = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{(np)^2} & n \;\; gerade \\[2ex] +\dfrac{\sqrt{2}}{(np)^2} & n \;\; ungerade \end{cases} \tag{5.84}$$

$$K_n^c := \int_0^1 t_n\bar{\Phi}_n^{II}(t_n)\,dt_n = \begin{cases} 0 & n \;\; gerade \\[1ex] -\dfrac{2\sqrt{2}}{(np)^2} & n \;\; ungerade \end{cases} \tag{5.85}$$

$$N_\nu^s := \int_0^1 \bar{\varphi}_\nu^I(t_n)dt_n = \begin{cases} 0 & \nu \ \ gerade \\ 2\sqrt{\dfrac{2}{(\nu\pi)^2}} & \nu \ \ ungerade \end{cases} \tag{5.86}$$

$$N_\nu^c := \int_0^1 \bar{\Phi}_\nu^{II}(t_n)dt_n = 0 \ \ f\ddot{u}r \ \ alle \ \ \nu \tag{5.87}$$

sowie

$$K_{\mu\nu n} := \int_0^1 \bar{\Phi}_\mu^{II}(t_n)\bar{\Phi}_\nu^{II}(t_n)\bar{\Phi}_n^{II}(t_n)dt_n = \begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^3 \dfrac{2n}{\pi} \dfrac{n^2-\mu^2-\nu^2}{\left[n^2-(\mu+\nu)^2\right]\left[\left[n^2-(\mu-\nu)^2\right]\right]} & (\mu+\nu+n) \ \ ungerade \\ 0 & (\mu+\nu+n) \ \ gerade \end{cases} \tag{5.88}$$

bzw. im hier interessierenden Sonderfall $\mu = 0$

$$K_{\nu n} := \int_0^1 \bar{\Phi}_\nu^{II}(t_n)\bar{\varphi}_n^I(t_n)dt_n = \begin{cases} \left\{\left(\sqrt{2}\right)^2 \dfrac{2n}{\pi} \dfrac{1}{n^2-\nu^2} & (\nu+n) \ \ ungerade \\ 0 & (\nu+n) \ \ gerade \end{cases} \tag{5.89}$$

Damit erhält man die Darstellungen der Koeffizienten in der Gestalt

$$\begin{aligned} & f_\nu \ \Rightarrow \ \alpha_\lambda : \ \lambda\pi\alpha_\lambda = \varepsilon\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu K_{\nu\lambda} \\ & \alpha_\nu \ \Rightarrow \ f_\lambda : \varepsilon f_\lambda = \Delta\alpha N_\lambda^s - \varepsilon\left[f_A N_\lambda^s + \Delta f K_\lambda^s\right] + \sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu\pi)\alpha_\nu K_{\nu\lambda} \end{aligned} \tag{5.90}$$

Der Lösungsweg läßt sich auf Systeme von Differentialgleichungen 1.Ordnung übertragen, beispielweise auf Störungsgleichungen [19,21,22,].

5.4.3 Bisherige Anwendungen

Die bisherigen Anwendungen des vorgeschlagenen Verfahrens galten den Fragestellungen:

- Vorläufige Bahnbestimmung aus Richtungsmessungen durch SCHNEIDER [23] und Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur

- Ephemeridenrechnung durch Lösung der Randwertaufgabe bei vorgegebenen Randwerten durch ILK [41]

- Bestimmung der resonanten Harmonischen C_{13}, S_{13} aus Laserentfernungs- und Richtungsmessungen nach Edsatelliten durch BERGER [1]

- Bestimmung resonanter Harmonischer verschiedener Ordnungen und von Stationskoordinaten aus Satellitenbeobachtungen durch REIGBER [19,28,42]

- Parameterbestimmung aus Erdrotationsdaten durch FRÖHLICH [3]

- Analyse von Doppler-Beobachtungen durch LANSARD& BIANCALE [16]

- Umfangreiche Simulationen der hochauflösenden regionalen/globalen Gravitationsfeldbestimmung aus SST- und SGG-Daten durch ILK, THALHAMMER [39], KUSCHE [14] und RUDOLPH [20].

Die Vorarbeiten für die Anwendung des Verfahrens auf Echtdaten der neuen Missionen wie CHAMP, GRACE und GOCE werden von der Gruppe von ILK derzeit durchgeführt.

6. Verallgemeinerung des GAUSS-Verfahrens für gestörte Keplerbahnen

Das von Gauss 1809 angegebene Verfahren zur vorläufigen Bahnbestimmung ist auf Kepler-Bewegungen beschränkt. Kernstück dieses Verfahrens ist das sog. Sektor-zu-Dreieck-Verfahren, das die nichtlineare Fredholmsche Integralgleichung [21]

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) - \frac{T^2}{m}\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{K}^\mathbf{I}(\mathbf{r}(\tau_n))d\tau_n \tag{6.1}$$

im Falle der Kepler-Kraft

$$\mathbf{K}^\mathbf{I}(\mathbf{r}) := -\frac{mGM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{6.2}$$

exakt zu lösen gestattet, und zwar für alle Arten ungestörter Kepler-Bahnen.

Das Sektor – zu - Dreieck - Verfahren stützt sich wesentlich auf die Ebenheit der Kepler-Bewegung [21].

Bucerius hat aber 1955 gezeigt, daß sich das Gauss-Verfahren auf nichtebene Bewegungen, auf gestörte Kepler-Bewegungen erweitern läßt und dies für die Bestimmung einer Kometenbahn ausgearbeitet [21].

Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich das Gauss-Verfahren auch für die Bahnen von Erdsatelliten verallgemeinern läßt. Das ermöglicht dann die definitive Bahnbestimmung gestörter Kepler-Bahnen.

6.1 Separation der Fredholmschen Integralgleichung

Die Randörter $\mathbf{r}_A$ und $\mathbf{r}_B$ bilden mit dem durch

$$\mathbf{r}_S := \mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_B \tag{6.3}$$

definierten Vektor $\mathbf{r}_S$ eine Basis, wenn die Randvektoren $\mathbf{r}_A$ und $\mathbf{r}_B$ nicht kollinear sind, was im folgenden vorausgesetzt werden soll. Diese Basisvektoren sind allerdings nicht orthogonal. Orthogonale Basisvektoren erhält man, wenn man den Randvektor $\mathbf{r}_B$ durch den sog. **Mertonschen Vektor [**21**]** ersetzt.

Er ist definiert durch

$$\mathbf{r}_M := \mathbf{r}_B - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_A^2}\mathbf{r}_A . \tag{6.4}$$

Er liegt in der von den Randvektoren aufgespannten Ebene und steht senkrecht auf $\mathbf{r}_A$. Es gilt

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_A \times \mathbf{r}_M \tag{6.5}$$

Nach der Basis

$$\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_B \quad bzw. \quad \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M$$

sollen der Ortsvektor **r(**t) und der Kraftvektor **K** zerlegt werden

$$\mathbf{r}(t_n) =: n_A(t_n)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_B \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{m}\mathbf{K} =: A\mathbf{r}_A + S\mathbf{r}_S + B\mathbf{r}_B \tag{6.7}$$

Trägt man diese Zerlegungen in die zu lösende Fredholmsche Integralgleichung ein, so resultiert das folgende System gekoppelter (i.allg. nichtlinearer) Integralgleichungen [21]

$$\begin{aligned}
n_A(t_n) &= \hat{n}_A(t_n) - T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) A\, d\tau_n & & \\
& & & \hat{n}_A(t_n) := 1 - t_n \\
n_S(t_n) &= \qquad\quad - T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) S\, d\tau_n & mit & \\
& & & \hat{n}_B(t_n) := t_n \\
n_B(t_n) &= \hat{n}_B(t_n) - T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) B\, d\tau_n & &
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Daraus sind die skalaren Funktionen $n_{A,S,B}(t_n)$ zu bestimmen. Sie nehmen an den Rändern des zeitlichen Grundgebietes die Werte an

Rand	$n_A(t_n)$	$n_S(t_n)$	$n_B(t_n)$
$t_n = 0$	1	0	0
$t_n = 1$	0	0	1

(6.9)

Für die Funktionen A, S, B erhält man nach skalarer Multiplikation von

$$\frac{1}{m}\mathbf{K} =: A\mathbf{r}_A + S\mathbf{r}_S + B\mathbf{r}_B \tag{6.10}$$

mit den Vektoren $\mathbf{r}_s$ *bzw.* $\mathbf{r}_M$

$$S = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_S}{r_S^2} \quad und \quad B = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_M}{r_M^2} \tag{6.11}$$

und damit nach skalarer Multiplikation der Zerlegung der Kraft nach der Basis $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M$

$$\frac{1}{m}\mathbf{K} =: A\mathbf{r}_A + S\mathbf{r}_S + B\mathbf{r}_B = \left(A + B\frac{\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B}{r_A^2}\right)\mathbf{r}_A + S\mathbf{r}_S + B\mathbf{r}_M \tag{6.12}$$

mit dem Randvektor $\mathbf{r}_A$ die Komponente

$$A = \frac{1}{r_A^2}\frac{\mathbf{K}}{m}\cdot\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A\cdot\mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M\right). \tag{6.13}$$

Ersetzt man in der Zerlegung des Ortsvektors

$$\mathbf{r}(t_n) =: n_A(t_n)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_B \tag{6.14}$$

den Randvektor $\mathbf{r}_B$ durch den Mertonschen Vektor gemäß der Definition

$$\mathbf{r}_M := \mathbf{r}_B - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_A^2}\mathbf{r}_A \;\Rightarrow\; \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_M + \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_A^2}\mathbf{r}_A\,, \tag{6.15}$$

so bekommt man als Zerlegung des Ortsvektors nach der Basis $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_M$

$$\mathbf{r}(t_n) = n_A(t_n)\left(1 + \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_A^2}\right)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_M\,. \tag{6.16}$$

Beispiel: Für die bezogene Kepler-Kraft

$$\frac{1}{m}\mathbf{K} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{6.17}$$

ergeben sich die Funktionen $A \text{ und } B$ zu

$$\begin{aligned} A &= -\frac{GM}{r^3} n_A(t_n) \\ B &= -\frac{GM}{r^3} n_B(t_n) \end{aligned} \tag{6.18}$$

und wegen der Ebenheit der Bewegung im Zentralkraftfeld

$$S = -\frac{GM}{r^3} n_S(t_n) = 0 \quad . \tag{6.19}$$

Für den Abstand r gilt

$$r = \left|\; n_A(t_n)\mathbf{r}_A + n_B(t_n)\mathbf{r}_B \quad \textit{wegen} \;\; n_S(t_n) \equiv 0 \right|, \tag{6.20}$$

so daß nur die skalaren Integralgleichungen

$$n_A(t_n) = 1 - t_n + \tau^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \frac{n_A(\tau_n)}{r^3} d\tau_n$$

$$mit \;\; \tau^2 := GMT^2 \qquad (6.21)$$

$$n_B(t_n) = \qquad t_n + \tau^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \frac{n_B(\tau_n)}{r^3} d\tau_n$$

für die beiden Funktionen $n_{A,B}(t_n)$ verbleiben. Diese lassen sich mit dem Gaussschen ***Sektor-zu-Dreieck–Verfahren*** exakt lösen.

6.2 Lösung der separierten Integralgleichungen

Ist $S \neq 0$, so sind die drei gekoppelten Integralgleichungen

$$\begin{aligned} n_A(t_n) &= 1 - t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) A d\tau_n \\ n_B(t_n) &= \qquad t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) B d\tau_n \\ n_S(t_n) &= \qquad\quad - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) S d\tau_n \end{aligned} \qquad (6.22)$$

zu lösen.

Bucerius hat wie schon gesagt 1955 am Beispiel einer gestörten Kometenbahn gezeigt, wie sich das Gausssche Sektor-zu-Dreieck –Verfahren auf gestörte Keplerbewegungen verallgemeinern läßt [21]. Im folgenden soll gezeigt werden, wie man sich von diesem Sonderfall lösen kann.

Dazu wird ausgegangen von den separierten Integralgleichungen

$$
\begin{aligned}
n_A(t_n) &= 1 - t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) A \, d\tau_n \\
n_B(t_n) &= \qquad\; t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) B \, d\tau_n \\
n_S(t_n) &= \qquad\quad\; - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) S \, d\tau_n
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

und für die Kräftefunktion **K** angesetzt

$$
\mathbf{K} = \mathbf{K_0} + \mathbf{S} \quad mit \quad \mathbf{K}_0 \gg \mathbf{S} \quad und \quad \mathbf{K_0} := -\frac{mGM}{r^3}\mathbf{r} \tag{6.24}
$$

so daß die zu lösenden Integralgleichungen lauten

$$
\begin{aligned}
n_A(t_n) &= 1 - t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n)(A_0 + A_1) \, d\tau_n \\
n_B(t_n) &= \qquad\; t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n)(B_0 + B_1) \, d\tau_n \\
n_S(t_n) &= \qquad\quad\; - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n)(S_0 + S_1) \, d\tau_n
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

mit den Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{r_A^2} \frac{(\mathbf{K}_0 + \mathbf{S})}{m} \cdot \left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2} \mathbf{r}_M \right) =: A_0 + A_1 \\
B &= \frac{1}{m} \frac{(\mathbf{K}_0 + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{r}_M}{r_M^2} =: B_0 + B_1 \\
S &= \frac{1}{m} \frac{(\mathbf{K}_0 + \mathbf{S}) \cdot \mathbf{r}_S}{r_S^2} =: S_0 + S_1
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

Ist

$$
\mathbf{K_0} := -\frac{mGM}{r^3}\mathbf{r} \tag{6.27}
$$

so erhält man

$$A_0 = -\frac{GM}{r^3} n_A(t_n) \qquad B_0 = -\frac{GM}{r^3} n_B(t_n) \qquad S_0 = -\frac{GM}{r^3} n_S(t_n) \ , \tag{6.28}$$

womit für die zu lösenden Integralgleichungen folgt

$$\begin{aligned} n_A(t_n) &= 1 - t_n + \tau^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) \frac{n_A(t_n)}{r^3}(1+\frac{A_1}{A_0})\, d\tau_n \\ n_B(t_n) &= \qquad t_n + \tau^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)(\frac{n_B(t_n)}{r^3}(1+\frac{B_1}{B_0})\, d\tau_n \ . \\ n_S(t_n) &= \qquad -T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\left(\frac{n_S(t_n)}{r^3} 1 + \frac{S_1}{S_0}\right) d\tau_n \end{aligned} \tag{6.29}$$

In den beiden ersten Integralgleichungen ist

$$(1+\frac{A_1}{A_0}) = 1 + O(\varepsilon) \qquad (1+\frac{B_1}{B_0}) = 1 + O(\varepsilon) \tag{6.30}$$

$$\varepsilon \ \ \textit{Kleinheitsparameter}$$

so daß man einen zeitlichen Mittelwert $< \ >_t$ dieser Klammern als Korrektionsfaktor – der Integralgleichungskern ist im Grundgebiet $0 \le \tau_n \le 1$ nichtnegativ! - vor das jeweilige Integral ziehen kann, also

$$\begin{aligned} n_A(t_n) &= 1 - t_n + \tau^2 < 1 + \frac{A_1}{A_0} >_t \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) \frac{n_A(t_n)}{r^3}\, d\tau_n \\ n_B(t_n) &= \qquad t_n + \tau^2 < 1 + \frac{B_1}{B_0} >_t \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)(\frac{n_B(t_n)}{r^3}\, d\tau_n \end{aligned} \tag{6.31}$$

Diese beiden Integralgleichungen für $n_{A,B}(t_n)$ sind fast wieder die Integralgleichungen des ungestörten Kepler - Problems. Im Integranden ist jedoch wegen der Nichtebenheit $n_S(t_n) \neq 0$ zu setzen

$$r^3 = \left| n_A \mathbf{r_A} + n_B \mathbf{r}_B + n_S \mathbf{r}_S \right|^3 . \tag{6.32}$$

Da n_S unter den getroffenen Voraussetzungen klein ist, kann man wie folgt binomisch um die ungestörte Bewegung entwickeln

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\left|n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right|^3} \left\{ 1 - 3n_S \frac{\mathbf{r}_S \cdot \left(n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right)}{\left|n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right|^2} + \ldots \right\}. \tag{6.33}$$

Eingetragen in obige Integralgleichungen für $n_{A,B}(t_n)$ und nochmalige Mittelwertbildung – Dreieckskern im Grundgebiet nichtnegativ! - im Integranden führt auf

$$n_A(t_n) = 1 - t_n + \tau^2 < 1 + \frac{A_1}{A_0} >_t < \left\{ 1 - 3n_S \frac{\mathbf{r}_S \cdot \left(n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right)}{\left|n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right|^2} + \ldots \right\} >_t \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \frac{n_A(t_n)}{\left|n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right|^3} d\tau_n$$

$$n_B(t_n) = \qquad t_n + \tau^2 < 1 + \frac{B_1}{B_0} >_t < \left\{ 1 - 3n_S \frac{\mathbf{r}_S \cdot \left(n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right)}{\left|n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right|^2} + \ldots \right\} >_t \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n)(\frac{n_B(t_n)}{\left|n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right|^3} d\tau_n \tag{6.34}$$

Verzerrt man jetzt alle Zeitintervalle nach der Vorschrift

$$\tau_i^* := \sqrt{\tilde{K}} \tau_i \qquad i = 1, 2, 3 \tag{6.35}$$

mit dem Verzerrungsfaktor

$$K := < 1 + \frac{A_1}{A_0} >_t < \left\{ 1 - 3n_S \frac{\mathbf{r}_S \cdot \left(n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right)}{\left|n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right|^2} + \ldots \right\} >_t \approx < \left\{ 1 + \frac{A_1}{A_0} - 3n_S \frac{\mathbf{r}_S \cdot \left(n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right)}{\left|n_A \mathbf{r}_A + n_B \mathbf{r}_B\right|^2} + \ldots \right\} >_t =: \tilde{K} \tag{6.36}$$

so lauten die Gleichungen für $n_{A,B}(t_n)$

$$\begin{aligned} n_A(t_n) &= \hat{n}_A(t_n) + \tau_2^{*2} \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \frac{n_A(\tau_n)}{\left|n_A(\tau_n)\mathbf{r}_A + n_B(\tau_n)\mathbf{r}_B\right|^3} d\tau_n \\ n_B(t_n) &= \hat{n}_B(t_n) + \tau_2^{*2} \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \frac{n_B(\tau_n)}{\left|n_A(\tau_n)\mathbf{r}_A + n_B(\tau_n)\mathbf{r}_B\right|^3} d\tau_n \end{aligned} \tag{6.37}$$

Sie stimmen formal mit den Gleichungen im ungestörten Fall überein.

In der Integralgleichung für $n_S(t_n)$ ist

$$n_S^{(0)} = 0 \tag{6.38}$$

eine gute Ausgangsnäherung, die eingetragen im Integranden der Gleichung

$$n_S(t_n) = \qquad -T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(\frac{n_S(t_n)}{r^3} + \frac{S_1}{S_0} \right) d\tau_n \tag{6.39}$$

die bessere Näherung

$$n_S^{(1)} = \tau_2^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \frac{S_1}{S_0} \, d\tau_n \tag{6.40}$$

nach sich zieht. Hier kann wieder ein Mittelwert der Klammer im Integranden vor das Integralzeichen gezogen werden, und es genügt zur Bestimmung von $n_S(t_n)$ die Näherung

$$n_S^{(0)} = 0 \ . \tag{6.41}$$

Die Lösung der gekoppelten Gleichungen für $n_{A,B}(t_n)$ gelingt wie im ungestörten Fall mit Hilfe des η – Verfahrens.

6.3 Bahn- und Parameterbestimmung nach dem verallgemeinerten Gauss-Verfahren

Die Gravitationsfeldbestimmung kann direkten Gebrauch machen von den gekoppelten Integralgleichungen

$$\begin{aligned}
n_A(t_n) &= 1 - t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) A\, d\tau_n \\
n_B(t_n) &= \phantom{1 -{}} t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) B\, d\tau_n \qquad (6.42)\\
n_S(t_n) &= - T^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) S\, d\tau_n
\end{aligned}$$

Hier können die Funktionen

$$n_A(t_n),\quad n_S(t_n),\quad n_B(t_n)$$

bei bekannter Bahnbewegung $\mathbf{r}(t_n)$ berechnet werden aus der Zerlegung

$$\mathbf{r}(t_n) =: n_A(t_n)\mathbf{r}_A + n_S(t_n)\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_B \mathbf{r}(t_n) = n_A(t_n)\left(1 + \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_A^2}\right)\mathbf{r}_A + n_S(t_{n)})\mathbf{r}_S + n_B(t_n)\mathbf{r}_B \,. \qquad (6.43)$$

Die Komponenten der Kräftefunktion $A,\ S,\ B$ bezüglich der Basis $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_S, \mathbf{r}_B$

aus
$$\frac{1}{m}\mathbf{K} =: A\mathbf{r}_A + S\mathbf{r}_S + B\mathbf{r}_B \qquad (6.44)$$

bzw. bezüglich der Basis $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_M, \mathbf{r}_B$

aus
$$\frac{1}{m}\mathbf{K} = \left(A + B\frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_a^2}\right)\mathbf{r}_A + S\mathbf{r}_S + B\mathbf{r}_M \qquad (6.45)$$

also
$$A = \frac{1}{r_A^2}\frac{\mathbf{K}}{m}\cdot\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M\right) \qquad S = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_S}{r_S^2} \qquad B = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_M}{r_M^2} \qquad (6.46)$$

sind mit der Darstellung der Kraft

$$\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) = \sum_{i=0}^{I} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{u}(t_n) \qquad (6.47)$$

zu parametrisieren.

Man erhält so

$$A = \frac{1}{r_A^2}\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M \right) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{I} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) + \mathbf{u}(t_n)}{m} =: A_G + A_z + A_u \qquad (6.48)$$

mit

$$\begin{aligned} A_G &:= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r},t_n) \cdot \frac{1}{mr_A^2}\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M \right) =: \sum_{i=0}^{\infty} g_i A_G^i \\ A_z &:= \mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) \cdot \frac{1}{mr_A^2}\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M \right) \\ A_u &:= \mathbf{u}(t_n) \cdot \frac{1}{mr_A^2}\left(\mathbf{r}_A - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r_M^2}\mathbf{r}_M \right) \end{aligned} \qquad (6.49)$$

und analog

$$S = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_S}{r_S^2} =: S_G + S_z + S_u \qquad (6.50)$$

mit

$$\begin{aligned} S_G &:= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r},t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{mr_S^2} =: \sum_{i=0}^{\infty} g_i S_G^i \\ S_z &:= \mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{mr_S^2} \\ S_u &:= \mathbf{u}(t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{mr_S^2} \end{aligned} \qquad (6.51)$$

sowie

$$B = \frac{1}{m}\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}_M}{r_M^2} =: B_G + B_z + B_u \qquad (6.52)$$

mit

$$
\begin{aligned}
B_G &:= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \mathbf{G}_i(\mathbf{r}, t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{m r_M^2} =: \sum_{i=0}^{\infty} g_i B_G^i \\
B_z &:= \mathbf{z}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{m r_M^2} \qquad . \\
B_u &:= \mathbf{u}(t_n) \cdot \frac{\mathbf{r}_S}{m r_M^2}
\end{aligned}
\tag{6.53}
$$

Eingetragen in die gekoppelten Integralgleichungen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
n_A(t_n) &= 1 - t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} g_i A_G^i + A_z + A_u \right\} d\tau_n \\
n_B(t_n) &= \qquad t_n - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} g_i B_G^i + B_z + B_u \right\} d\tau_n \\
n_S(t_n) &= \qquad - T^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} g_i S_G^i + S_z + S_u \right\} d\tau_n
\end{aligned}
\tag{6.54}
$$

oder umgestellt

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) S_G^i d\tau_n &= -\int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(A_z + A_u \right) d\tau_n - \frac{n_A(t_n) + 1 - t_n}{T^2} \\
\sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) B_G^i d\tau_n &= -\int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(B_z + B_u \right) d\tau_n - \frac{n_B(t_n) + t_n}{T^2} \qquad . \\
\sum_{i=0}^{\infty} g_i \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) S_G^i d\tau_n &= -\int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(S_z + S_u \right) d\tau_n - \frac{n_S}{T^2}
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

Dieses Tripel von Gleichungen ist für jeden Meßzeitpunkt t_n^σ aufzuschreiben. Es entsteht ein System von (3xAnzahl der Meßzeitpunkte) linearen Gleichungen zur Bestimmung der Feldparameter g_i.

Die Koeffizientenmatrix dieses Systems wird aus den bestimmten Integralen

$$
\int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \begin{Bmatrix} A_G^i \\ B_G^i \\ S_G^{ii} \end{Bmatrix} d\tau_n \qquad \text{für alle } t_n^\sigma \quad \sigma = 1, 2, ... \tag{6.56}
$$

gebildet. Sie können ausgehend von den aus der Bahnbestimmung bekannten Bahnen $\mathbf{r}(t_n)$ berechnet werden , unter Berücksichtigung des Dreieckskerns $K^I(t_n,\tau_n)$.

Zur Berechnung der rechten Seiten sind außer der Bahn $\mathbf{r}(t_n)$ die gemessenen Störkräfte heranzuziehen.

Wenn man andererseits die Gleichungen

$$\begin{aligned} n_A(t_n) &= 1-t_n-T^2\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\,A\,d\tau_n \\ n_B(t_n) &= \quad\;\; t_n-T^2\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\,B\,d\tau_n \\ n_S(t_n) &= \qquad\;\; -T^2\int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\,S\,d\tau_n \end{aligned} \tag{6.57}$$

nach der Methode der unendlich vielen Variablen löst, dann erhält man ebenfalls ein in den Feldparametern lineares System von Bestimmungsgleichungen. Dieses ist das Gegenstück zu obigem Gleichungssystem im Spektralbereich und korrespondiert den Gleichungen aus § 5.3.1

$$\mathbf{r}_\nu = -\frac{T^2}{\lambda_\nu}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} g_i\mathbf{J}^s_{i\nu} + \mathbf{Z}^s_\nu + N^s_\nu\mathbf{u}_A + K^s_\nu(\mathbf{u}_B-\mathbf{u}) + \mathbf{u}_\nu\right\}. \tag{6.58}$$

6.4 Bewertung des Konzeptes

Es liegen bisher noch keine Testrechnungen einer Gravitationsfeldbestimmung nach dieser Variante der direkten Nutzung der Integralgleichungen vor, weder im Rahmen einer Simulation noch aus einer Verarbeitung von Echtdaten. Eine Bewertung ist daher noch nicht möglich.

7. Prinzip von Neumann zur Lösung der Fredholmschen Integralgleichung

Die Fredholmsche Integralgleichung [21,22]

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) - \frac{T^2}{m} \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \mathbf{K}(\mathbf{r}(\tau_n)) d\tau_n \tag{7.1}$$

lautet für die Kräftefunktion

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) := -\frac{mGM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{7.2}$$

des Kepler-Problems

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) + \tau^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) (\frac{\mathbf{r}(\tau_n)}{r^3}) d\tau_n \quad mit \quad \tau^2 := GMT^2 . \tag{7.3}$$

Die Lösung dieser Integralgleichung kann mit Hilfe der Neumannschen Reihe schrittweise angenähert werden [21].

7.1 Prinzip der Neumannschen Reihe

Aus der Theorie der Integralgleichungen ist bekannt der

Satz: Falls für ein λ die Neumannsche Reihe

$$\Gamma(x, \xi; \lambda) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} K^{(\nu+1)}(x, \xi) \tag{7.4}$$

absolut und gleichmäßig in

$$a \le x, \xi \le b \tag{7.5}$$

konvergiert, dann existiert für dieses λ zu beliebig vorgegebener Funktion $f(x)$ genau eine stetige Lösung der inhomogenen (linearen) Fredholmschen Integralgleichung

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi) y(\xi) d\xi \tag{7.6}$$

der Gestalt

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\xi;\lambda) f(\xi) d\xi \ . \tag{7.7}$$

Das kann auch als Abbildung gelesen werden

$$f(x) \to y(x): \ y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\xi;\lambda) f(\xi) d\xi \ . \tag{7.8}$$

Anm.: 1.Die in der Definition der Neumannschen Reihe auftretenden iterierten Kerne ergeben sich aus dem Integralgleichungskern $K(x,\xi)$ gemäß

$$K^{(n)}(x,\xi) := \int_a^b K^{(1)}(x,u) K^{(n-1)}(x,u) du \tag{7.9}$$

mit

$$K^{(1)}(x,\xi) := K(x,\xi). \tag{7.10}$$

2 Die Neumannsche Reihe ist konvergent, wenn, wie in der Integralgleichungstheorie gezeigt wird,

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x,\xi| \, dx d\xi}} = 3\sqrt{10} \, . \tag{7.11}$$

Der Satz besagt, daß das durch

$$\begin{aligned}
&y^0(x) := f(x) \\
&y^{(1)}(x) := f(x) + \lambda \int_a^b K^{(1)}(x,\xi) f(\xi) d\xi \\
&\vdots \\
&y^{(n)}(x) := f(x) + \lambda \int_a^b K^{(1)}(x,\xi) f(\xi) d\xi + ... \\
&\qquad\qquad \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x,\xi) f(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{7.12}$$

beschriebene Iterationsverfahren, eingeleitet durch die Inhomogenität $f(x)$ als Ausgangsnäherung, eine Funktionenfolge liefert, die gegen die Lösung der Integralgleichung konvergiert

$$y^{(0)}(x), y^{(1)}(x), ... y^{(n)}(x), .. \rightarrow y(x)\,. \tag{7.13}$$

Die Neumannsche Reihe ist dabei der lösende Kern, die Resolvente der Fredholmschen Integralgleichung.

7.2 Übertragung des Prinzips der Neumannschen Reihe

Zur schrittweisen Annäherung an die Lösung der Integralgleichung des Kepler-Problems [21]

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}(t_n) + \tau^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n)(\frac{\mathbf{r}(\tau_n)}{r^3})\, d\tau_n \tag{7.14}$$

wird als Ausgangsnäherung

$$\mathbf{r}^{(\mathbf{0})}(t) := \hat{\mathbf{r}}(t) \tag{7.15}$$

gewählt und in die Integralgleichung eingetragen, was zu der neuen Näherung

$$\mathbf{r}^{(1)}(t_n) := \overline{\mathbf{r}}(t_n) + \tau^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(\frac{\mathbf{r}^{(0)}(\tau_n)}{\left| \mathbf{r}^{(0)}(\tau_n) \right|^3} \right) d\tau_n \tag{7.16}$$

führt. Da der Dreieckskern $K^I(t_n, \tau_n)$ im Grundgebiet $0 \le t_n, \tau_n \le 1$ nichtnegativ ist, kann man im Intervall $0 \le \tau_n \le 1$ einen Mittelwert von

$$\left| \mathbf{r}^{(0)}(\tau_n) \right| := \left| \hat{\mathbf{r}}(\tau_\mathbf{n}) \right| \tag{7.17}$$

vor das Integral

$$\mathbf{r}^{(1)}(t_n) := \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \tau^2 \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(\frac{\mathbf{r}^{(0)}(\tau_n)}{\left| \mathbf{r}^{(0)}(\tau_n) \right|^3} \right) d\tau_n = \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \frac{\tau^2}{\overline{r}_{(1)}} \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \left(\hat{\mathbf{r}}(\tau_n) \right) d\tau_n \tag{7.18}$$

ziehen mit dem Zeitmittel $< \ >_t$

$$\overline{r}_{(1)} :=< \left| \mathbf{r}^{(0)}(\tau_n) \right| >_t , \tag{7.19}$$

so daß folgt

$$\hat{\mathbf{r}}(t_n) \to \mathbf{r}^{(1)}(t_n): \quad \mathbf{r}^{(1)}(t_n) := \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \frac{\tau^2}{\overline{r}_{(1)}} \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n)\big(\hat{\mathbf{r}}(\tau_n)\big)\, d\tau_n . \tag{7.20}$$

Definiert man einen Parameter

$$\lambda_{(\nu)} := \frac{\tau^2}{\overline{r}^3_{(\nu)}} \qquad \nu = 1(1)\infty , \tag{7.21}$$

so lautet diese Integralgleichung schließlich

$$\mathbf{r}^{(1)}(t_n) = \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \lambda_{(1)} \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \hat{\mathbf{r}}(\tau_{\mathbf{n}})\, d\tau_n . \tag{7.22}$$

In dieser Gestalt stellt die Gleichung eine Abbildung

$$\hat{\mathbf{r}}(t_n) \to \mathbf{r}^{(1)}(t_n): \ \mathbf{r}^{(1)}(t_n) = \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \lambda_{(1)} \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) \hat{\mathbf{r}}(\tau_{\mathbf{n}})\, d\tau_n \tag{7.23}$$

dar. Sie wird gelöst durch

$$\mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{r}}(t) + \lambda_{(1)} \int_0^1 \Gamma(t_n, \tau_n, \lambda) \hat{\mathbf{r}}(t_n) d\tau_n . \tag{7.24}$$

Das entspricht formal der in § 7.1 diskutierten Lösungsdarstellung

$$f(x) \to y(x): \ y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi \tag{7.25}$$

der Integralgleichung

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi . \tag{7.26}$$

Trägt man diese Näherung in die zu lösende Integralgleichung ein, so ergibt sich als nächste Näherung

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{(2)}(t_n) &:= \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \tau^2 \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) \frac{\mathbf{r}^{(1)}(\tau_n)}{\left|\mathbf{r}^{(1)}(\tau_n)\right|^3}\, d\tau_n \\
&= \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \frac{\tau^2}{\overline{r}^3_{(2)}} \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\mathbf{r}^{(1)}(\tau_n)\, d\tau_n \\
&= \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \lambda_{(2)} \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) \left\{ \hat{\mathbf{r}}(\tau_n) + \lambda_{(1)} \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n)\hat{\mathbf{r}}(\tau_n) \right\} d\tau_n \\
&= \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \lambda_{(2)} \int_0^1 K^{(1)}(t_n,\tau_n)\hat{\mathbf{r}}(\tau_n) d\tau_n + \lambda_{(2)}\lambda_{(1)} \int_0^1 K^{(2)}(t_n,\tau_n)\hat{\mathbf{r}}(\tau_n) d\tau_n
\end{aligned} \tag{7.27}$$

mit den iterierten Kernen

$$K^{(\nu)}(t_n,\tau_n) := \int_0^1 K^{(1)}(t_n,\tau_n) K^{(\nu-1)}(t_n,\tau_n) d\tau_n \qquad \nu = 1,2,\dots . \tag{7.28}$$

Analog erhält man für den ν-ten Annäherungsschritt

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{(\nu)}(t_n) = \hat{\mathbf{r}}(t_n) &+ \lambda_{(\nu)} \int_0^1 K^I(t_n,\tau_n) d\tau_n \\
&+ \lambda_{(\nu)}\lambda_{(\nu-1)} \int_0^1 K^{(2)}(t_n,\tau_n)\hat{\mathbf{r}}(\tau_n) d\tau_n \quad . \\
&+ \dots\dots + \lambda_{(\nu)}\lambda_{(\nu-1)} \dots \lambda_{(1)} \int_0^1 K^{(\nu)}(t_n,\tau_n)\hat{\mathbf{r}}(\tau_n) d\tau_n
\end{aligned} \tag{7.29}$$

7.3 Feldbestimmung mit der Neumannschen Reihe

Die Faktoren

$$\lambda_{(\nu)} := \frac{\tau^2}{\overline{r}^3_{(\nu)}} = \frac{GMT^2}{\overline{r}^3_{(\nu)}} \qquad \nu = 1(1)\infty \tag{7.30}$$

enthalten sämtlich den (im Kepler - Problem einzigen!) Feldparameter GM, so daß die Gleichung

$$\mathbf{r}^{(\nu)}(t_n) = \hat{\mathbf{r}}(t_n) + \frac{GMT^2}{\overline{r}^3_{(\nu)}} \int_0^1 K^I(t_n, \tau_n) d\tau_n + \frac{GMT^2}{\overline{r}^3_{(\nu)}} \frac{GMT^2}{\overline{r}^3_{(\nu-1)}} \int_0^1 K^{(2)}(t_n, \tau_n) \hat{\mathbf{r}}(\tau_n) d\tau_n . +$$

$$.. + \frac{GMT^2}{\overline{r}^3_{(\nu)}} \frac{GMT^2}{\overline{r}^3_{(\nu-1)}} ... \frac{GMT^2}{\overline{r}^3_{(1)}} \int_0^1 K^{(\nu)}(t_n, \tau_n) \hat{\mathbf{r}}(\tau_n) d\tau_n \tag{7.31}$$

als Bestimmungsgleichung für GM gelesen werden kann.

Sie ist ein Polynom in GM vom Grade ν. Alle Koeffizienten dieses Polynoms können aus der bekannten Bahn $\mathbf{r}(t)$ berechnet werden. Die iterierten Kerne $K^{(\nu)}(t_n, \tau_n)$ lassen sich sämtlich geschlossen angeben.

Die Konvergenz der Neumannschen Reihe ist gesichert, wenn alle $\lambda_{(\nu)}$ durch ein $\overline{\lambda}$ majorisiert werden können, d.h. wenn gilt

$$\overline{\lambda} \geq \lambda_{(\nu)} . \tag{7.32}$$

Das ist für Kepler - Bahnen möglich und dürfte in gleicher Weise auch für gestörte KEPLER-Bahnen sichergestellt werden können.

Eine Verallgemeinerung auf mehrere Feldparameter sollte ähnlich wie im obigen Fall des Kepler-Problems möglich sein. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Wie im Falle der Gravitationsfeldbestimmung basierend auf Potenzreihen wird man die endliche Länge des Konvergenzintervalls der Reihe als Nachteil sehen.

8. Gravitationsfeldbestimmung basierend auf impliziten Störungsgleichungen

8.1 Grundgleichung der Gravitationsfeldbestimmung

Durch die Kräftefunktion $\mathbf{K}_\mathbf{I}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)$ werde ein integrables Bewegungsproblem [21]

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}_\mathbf{I}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \tag{8.1}$$

beschrieben mit der Lösung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^\mathbf{I}(t,\alpha) \qquad \alpha \text{ Integrationskonstanten} \tag{8.2}$$

Im Sinne der Variation der Integrationskonstanten soll die Lösung des aktuellen Bewegungsproblems

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \tag{8.3}$$

angesetzt werden in der Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^\mathbf{I}(t,\alpha(t)) \tag{8.4}$$

mit zu bestimmenden Zeitfunktionen $\alpha(t)$. Diese genügen den impliziten Störungs- oder Variationsgleichungen [21]

$$\Psi\dot{\alpha} = \nabla_\alpha \tilde{R} + \mathbf{n} \tag{8.5}$$

Sie sind hier in **impliziter** Form aufgeschrieben, also nicht aufgelöst nach den Änderungsraten $\dot{\alpha}$,. Es bedeutet

$$\Psi := \left(\left[\alpha_i;\alpha_j\right]\right) \tag{8.6}$$

die Matrix der Lagrange - Klammern [21]

$$\left[\alpha_i;\alpha_j\right] := \frac{\partial \mathbf{r}^\mathbf{I}}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^\mathbf{I}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \mathbf{r}^\mathbf{I}}{\partial \alpha_j}\cdot\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}^\mathbf{I}}{\partial \alpha_i}\,. \tag{8.7}$$

Sie ist schiefsymmetrisch und hat daher nicht 36 Elemente, sondern nur 15 von Null verschiedene.
Weiter bedeutet $\tilde{R} = \tilde{R}(\mathbf{r},t)$ den hier interessierenden Anteil aus der Potentialfunktion $U_G(\mathbf{r},t)$ des Gravitationsfeldes der Erde. D.h. für die Störkraft gelte

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) &:= \mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) - \mathbf{K_I}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \\ &= m\nabla_{\mathbf{r}} U_G(\mathbf{r},t) + m\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) - \mathbf{K_I}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \quad , \\ &= m\nabla_{\mathbf{r}}(U_{G,0}(\mathbf{r},t) + \tilde{R}(\mathbf{r},t)) + m\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) - \mathbf{K_I}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t) \end{aligned} \tag{8.8}$$

Darin ist

$$m\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)$$

die Resultierende aller gravitativen und nichtgravitativen Kräfte, von denen angenommen wird, daß sie entweder ausreichend genau modellierbar oder meßbar sind.

In der Potentialfunktion

$$U_{G,0}(\mathbf{r},t) + \tilde{R}(\mathbf{r},t) = U_{G,0}(\mathbf{r},t) + \tilde{R}(\mathbf{r}(t,\alpha),t) = U_{G,0}(\mathbf{r},t) + \tilde{R}(\alpha,t) \tag{8.9}$$

ist der erste Anteil $U_{G,0}(\mathbf{r},t)$ die Potentialfunktion des integrablen Bewegungsproblems, während der zweite Anteil die zu bestimmende Potentialfunktion bedeutet, also in der hier interessierenden Gravitationsfeldbestimmung die Anisotropie des Außenraumfeldes der Erde. Der erste Term ist beispielsweise das Potential der Kepler-Kraft, wenn man als intermediäres, integrables Bewegungsproblem das Kepler-Problem wählt. Im Falle der Cui-Lösung [21] erfaßt der erste Term mehr vom Gesamtpotential $U_G(\mathbf{r},t)$ als $U_{G0} := GM/r$, das Potential im Kepler-Problem.
In der **Grundgleichung für die Gravitationsfeldbestimmung**

$$\Psi\dot{\alpha} = \nabla_\alpha \tilde{R} + \mathbf{n} \tag{8.10}$$

bzw. umgestellt

$$\nabla_\alpha \tilde{R} = \Psi\dot{\alpha} - \mathbf{n} \tag{8.11}$$

ist der Term $$\mathbf{n} := \mathbf{z} \cdot \nabla_\alpha \alpha \tag{8.12}$$

durch die Resultierende $\mathbf{z}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)$ bestimmt und wird im Hinblick auf die Gravitationsfeldbestimmung als ausreichend modellierbar/meßbar angenommen.

Auf der linken Seite von (8.11) steht die partielle Ableitung von $\tilde{R}(\mathbf{r},t)$ nach den gewählten zu variierenden Konstanten α . Man kann von diesen Ableitungen zu den in der Regel interessierenden partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten $\mathbf{r}=(x,y,z)^T$, also dem Beitrag $\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(\alpha,t)$ der Anisotropie zur Gravitationsfeldstärke $\nabla_{\mathbf{r}}U_G(\mathbf{r},t)$ übergehen vermittels der Beziehung

$$\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(\alpha(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t),t)=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\tilde{R}(\alpha(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t),t)}{\partial\alpha_j}\nabla_{\mathbf{r}}\alpha_j \quad . \tag{8.13}$$

Trägt man entsprechend der Grundgleichung (8.11) ein, so resultiert für die Gravitationsfeldbestimmung die Gleichung

$$\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(\alpha(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t),t)\mathrel{\hat{=}}\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(\mathbf{r}(t,\alpha),t)=\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha}-\mathbf{z}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\right)_j\nabla_{\mathbf{r}}\alpha_j \tag{8.14}$$

Die rechten Seiten können im Falle von CHAMP angegeben werden zufolge

1. GPS-Bahnverfolgung von CHAMP $\mathbf{r}(t_n),\dot{\mathbf{r}}(t_n)\ \rightarrow\ \alpha(t_n)$

2. Die Messung der nichtgravitativen Störkraftkomponenten und die Modellierung der gravitativen Störkräfte ergeben die Vektoren $\mathbf{z}(t_n)$

3. Die Lösung des integrablen Bewegungsproblems erlaubt die Berechnung der partiellen Ableitungen der Matrix der Lagrange-Klammern

$$\left[\alpha_i;\alpha_j\right]:=\frac{\partial\mathbf{r}^{\mathbf{I}}}{\partial\alpha_i}\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}}{\partial\alpha_j}-\frac{\partial\mathbf{r}^{\mathbf{I}}}{\partial\alpha_j}\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}}{\partial\alpha_i} \tag{8.15}$$

und wegen der Reziprozität

$$\Psi^{-1} = -\Phi \tag{8.16}$$

auch die der Matrix Φ der Poisson-Klammern [21]

$$\Phi := \left((\alpha_i ; \alpha_j) \right) := \left((\nabla_{\mathbf{r}} \alpha_i)^T \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \alpha_j - (\nabla_{\mathbf{r}} \alpha_j)^T \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \alpha_i \right) . \tag{8.17}$$

4. Die Zeitableitungen $\dot{\alpha}(t_n)$ können durch die rechten Seiten der expliziten Störungsgleichungen berechnet werden. Sie haben die Funktionsstruktur

$$\dot{\alpha} = f(\alpha, \nabla_\alpha \tilde{R}(\alpha, t), \mathbf{z}; t) . \tag{8.18}$$

Somit ergibt sich als Funktionsstruktur der Grundgleichung (8.10)

$$\nabla_\alpha \tilde{R} = \Psi \dot{\alpha} - \mathbf{n} = \Psi f(\alpha, \nabla_\alpha \tilde{R}(\alpha, t), \mathbf{z}; t) - \mathbf{n} . \tag{8.19}$$

8.2 SST - Fall

Es liegt im SST - Fall nahe, die Grundgleichung für jeden Satelliten aufzuschreiben

$$\nabla_{\mathbf{r}} \tilde{R}(\mathbf{r}(t, \alpha), t) = \sum_{j=1}^{6} \left(\Psi \dot{\alpha} - \mathbf{z} \cdot \nabla_\alpha \mathbf{r} \right)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \alpha_j \big|_B \tag{8.20}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \tilde{R}(\mathbf{r}(t, \alpha), t) = \sum_{j=1}^{6} \left(\Psi \dot{\alpha} - \mathbf{z} \cdot \nabla_\alpha \mathbf{r} \right)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \alpha_j \big|_A \tag{8.21}$$

und dann deren Differenz zu bilden, also

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{r}} \tilde{R}(\mathbf{r}(t, \alpha), t) \;\big|_B - \nabla_{\mathbf{r}} \tilde{R}(\mathbf{r}(t, \alpha), t) \;\big|_A = \\ &(\sum_{j=1}^{6} \left(\Psi \dot{\alpha} - \mathbf{z} \cdot \nabla_\alpha \mathbf{r} \right)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \alpha_j) \;\big|_B - (\sum_{j=1}^{6} \left(\Psi \dot{\alpha} - \mathbf{z} \cdot \nabla_\alpha \mathbf{r} \right)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \alpha_j) \;\big|_A \end{aligned} \tag{8.22}$$

Auf der linken Seite von (8.22) kann man in eine Taylorreihe um die Bahn von A entwickeln, wodurch die räumliche Änderungsrate der Gravitationsfeldstärke, der Gravitationsgradient, ins Spiel kommt

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}}(\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(t,\alpha)\right)_A \cdot \Delta_{BA} + \textit{Terme höherer Ordnung in } \Delta_{BA} = \delta(RS) \tag{8.23}$$

mit

$$\begin{aligned} &\Delta_{BA} := \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \\ &\delta(RS) := \Big(\sum_{j=1}^{6}\big(\Psi\dot{\alpha} - \mathbf{z}\cdot\nabla_\alpha \mathbf{r}\big)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j\Big)_B - \Big(\sum_{j=1}^{6}\big(\Psi\dot{\alpha} - \mathbf{z}\cdot\nabla_\alpha \mathbf{r}\big)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j\Big)_A \end{aligned} \tag{8.24}$$

In dieser Linearisierung ist die Gleichung (8.23-24) brauchbar für geringe Abstände der Satelliten A und B.
Ausgehend davon sollte der Fall der Satellitengradiometrie (GOCE) zugänglich sein, die aber auch wie folgt behandelt werden kann.

8.3 Satellitengradiometrie

Entwickelt man in (8.23) auch $\delta(RS)$, also

$$\delta(RS) = \Delta_{BA} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\Big(\sum_{j=1}^{6}\big(\Psi\dot{\alpha} - \mathbf{z}\cdot\nabla_\alpha \mathbf{r}\big)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j\Big)\Big|_A \ , \tag{8.25}$$

so folgt

$$(\nabla_{\mathbf{r}}(\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(t,\alpha))_A \cdot \Delta_{BA} = \Delta_{BA} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}\Big(\sum_{j=1}^{6}\big(\Psi\dot{\alpha} - \mathbf{z}\cdot\nabla_\alpha \mathbf{r}\big)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j\Big)_A \tag{8.26}$$

bzw.

$$(\nabla_{\mathbf{r}}(\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(t,\alpha))_A = \left(\nabla_{\mathbf{r}}\Big(\sum_{j=1}^{6}\big(\Psi\dot{\alpha} - \mathbf{z}\cdot\nabla_\alpha \mathbf{r}\big)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j\Big)\right)_A \ . \tag{8.27}$$

Diese Gleichung gilt längs derBahn ($|_A$) des Gradiometrie-Satelliten.

Zur Ausführung des Gradienten auf der rechten Seite der Gleichung (8.27), also von

$$\nabla_{\mathbf{r}}(\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha}-\mathbf{z}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\right)_j\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j) \tag{8.28}$$

kann man die Ableitung nach dem Ortsvektor auf diejenige nach den Elementen zurückführen [21]

$$\nabla_{\mathbf{r}}=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\nabla_{\mathbf{r}}\alpha_j\quad . \tag{8.29}$$

Damit ergibt sich

$$\nabla_{\mathbf{r}}(\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha}-\mathbf{z}\cdot\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha\right)_j\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j)=\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial\left(\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha}-\mathbf{z}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\right)_j\nabla_{\mathbf{r}}\alpha_j\right)}{\partial\alpha_k}\nabla_{\mathbf{r}}\alpha_k\quad . \tag{8.30}$$

Als Alternative hierzu bietet sich an, auf die Produktregel für die Gradientenbildung zurückzugreifen

$$\nabla_{\mathbf{r}}(UV)=U\nabla_{\mathbf{r}}V+V\nabla_{\mathbf{r}}U\qquad , \tag{8.31}$$

worin U und V skalarwertige Funktionen sind.

Angewendet auf die linke Seite von (8.30) ist dann in

$$\nabla_{\mathbf{r}}(\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha}-\mathbf{z}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\right)_j\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j) \tag{8.32}$$

zu setzen

$$\begin{aligned}&U:=\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha}-\mathbf{z}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\right)_j\\&V:=(\nabla_{x_k}\alpha_j)\qquad mit\qquad \mathbf{r}=:(x_1,x_2,x_3)^T\end{aligned}\quad , \tag{8.33}$$

so daß folgt

$$\nabla_{\mathbf{r}}(\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(t,\alpha) = \sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha} - \mathbf{z}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\right)_j \nabla_{\mathbf{r}}(\nabla_{x_k}\alpha_j) + (\nabla_{x_k}\alpha_j)\nabla_{\mathbf{r}}\left(\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha} - \mathbf{z}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\right)_j\right) \quad (8.34)$$

bzw. wenn man die Kraftkomponente **z** vernachlässigt

$$\nabla_{\mathbf{r}}(\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(t,\alpha) = \sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha}\right)_j \nabla_{\mathbf{r}}(\nabla_{x_k}\alpha_j) + (\nabla_{x_k}\alpha_j)\nabla_{\mathbf{r}}\left(\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha}\right)_j\right). \quad (8.35)$$

8.4 Ausformulierung der Grundgleichung –Arbeitsschritte

Die **Grundgleichung**

$$\nabla_{\alpha}\tilde{R} = \Psi\dot{\alpha} - \mathbf{n} = \Psi f(\alpha, \nabla_{\alpha}\tilde{R}(\alpha,t), \mathbf{z}; t) - \mathbf{n} \quad (8.36)$$

soll ausformuliert werden für den Fall, daß als integrables Bewegungsproblem das Kepler-Problem gewählt wird.

Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen unter der Keplerkraft

$$\mathbf{K}_{Kep} = -\frac{mGM_{\otimes}}{r^2}\frac{\mathbf{r}^{\mathbf{I}}}{r}$$

G = Newtonsche Gravitationskonstante (8.37)

$M_{Ä}$ =Masse des Zentralkörpers

lautet in einem geozentrischen Bezugssystem

$$m\ddot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}} = -\frac{mGM_{\oplus}}{r^2}\frac{\mathbf{r}^{\mathbf{I}}}{r}. \quad (8.38)$$

Die Lösung läßt sich im geozentrisch gelagerten Bahnsystem $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{C_0}$ (Bahnnormalenvektor $\mathbf{C_0}$) darstellen in der Form [21]

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t,\alpha) = a(\cos E - e)\mathbf{P} + a\sqrt{1-e^2}\,\sin E\mathbf{Q} \\
&\dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t,\alpha) = \frac{C\sqrt{1-e^2}}{p(1-e\cos E)}\left(-\sin E\mathbf{P} + \sqrt{1-e^2}\,\cos E\mathbf{Q}\right) \\
&p = a(1-e^2) \quad \textit{Parameter der Bahnkurve} \\
&\quad E \quad \textit{exzentrische Anomalie}
\end{aligned}
\tag{8.39}
$$

wählt man die Keplerschen Bahnelemente [21]

$$
\alpha = (i,\Omega,\omega,a,e,M)^T . \tag{8.40}
$$

Für diese bestehen die Störungsgleichungen [21,22]

$$
\dot{\alpha} = f(t,\alpha) \Rightarrow
\begin{pmatrix}
\dfrac{di}{dt} \\[2mm]
\dfrac{d\Omega}{dt} \\[2mm]
\dfrac{d\omega}{dt} \\[2mm]
\dfrac{da}{dt} \\[2mm]
\dfrac{de}{dt} \\[2mm]
\dfrac{d\sigma}{dt}
\end{pmatrix}
= \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\cos iF_\omega - F_\Omega}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i} \\[3mm]
\dfrac{F_i}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i} \\[3mm]
\dfrac{-\cos iF_i + \dfrac{1-e^2}{e}\sin iF_e}{na^2\sqrt{1-e^2}\,\sin i} \\[3mm]
\dfrac{2}{na}F_\sigma \\[3mm]
\dfrac{-\sqrt{1-e^2}\,F_\omega + (1-e^2)F_\sigma}{na^2 e} \\[3mm]
\dfrac{-2aeF_a - (1-e^2)F_e}{na^2 e}
\end{array}
\right. . \tag{8.41}
$$

Darin bedeuten

$$
\begin{aligned}
&n = \sqrt{\frac{GM_\otimes}{a^3}} \qquad \text{mittlere Bewegung} \\
&F_{\alpha_i} := \frac{1}{m}\mathbf{S}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}^{\mathbf{I}}}{\partial\alpha_i} =: \frac{1}{m}(\mathbf{K}-\mathbf{K}_{Kep})\cdot\frac{\partial\mathbf{r}^{\mathbf{I}}}{\partial\alpha_i}
\end{aligned}
. \tag{8.42}
$$

Da im Kepler-Problem ein Erhaltungssatz für die Gesamtenergie besteht, sind die Lagrange-Klammern stationär [21], d.h., sie können für einen beliebigen Zeitpunkt berechnet werden, beispielsweise für den Zeitpunkt des Perigäums-durchgangs. Die von Null verschiedenen Lagrange-Klammern ergeben sich so zu

$$[\alpha_1 \ \alpha_2] = [i \ \Omega] = na^2\sqrt{1-e^2}\sin i \qquad (8.43) \qquad\qquad [\Omega \ a] = \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2}\cos i \qquad (8.44)$$

$$[\Omega \ e] = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i \qquad (8.45) \qquad\qquad [\omega \ a] = \frac{na}{2}\sqrt{1-e^2} \qquad (8.46)$$

$$[a \ \sigma] = -\frac{1}{2}na\,. \qquad (8.47)$$

Anm.: An Stelle von σ verwendet man häufig die mittlere Anomalie[21]

$$M = n(a)t + \sigma\,. \qquad (8.48)$$

Dann tritt an die Stelle der Störungsgleichung für σ eine Gleichung für M

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2 e}F_e - \frac{2}{na}\left(F_a\right)_{\text{explizit}}\,. \qquad (8.49)$$

Damit sind nahezu alle Beziehungen verfügbar, um die Grundgleichung explizit aufzuschreiben.

Bleiben noch die partiellen Ableitungen der Störungsfunktion $\tilde{R}(t,\alpha)$.Sie können mit der bekannten Entwicklung von $\tilde{R}(t,\alpha)$ nach den Kepler-Elementen [21]

$$R(t,\alpha) = GM\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\sum_{p=0}^{l}\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty}\frac{a_{\otimes}^{l}}{a^{l+1}}F_{lmp}(i)G_{lpq}(e)S_{lmpq}(\omega,M,\Omega,\Theta)\,, \qquad (8.50)$$

gebildet werden.Die ersten beiden Summationen rühren von den Summationen in der Entwicklung des Außenraumpotentials der Erde nach Kugelflächen-funktionen her [21]

$$\tilde{R} := U_G(\mathbf{r},t) - U_{G,00} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{m} U_{G,lm}$$

$$mit \quad U_{G,lm} := GM \frac{a_{\otimes}^{l}}{r^{l+1}} P_l^m(\sin\delta)\left[C_{lm}\cos m\lambda + S_{lm}\sin m\lambda\right]$$

$$P_l^m(\sin\delta) \quad zugeordnete\ \ Kugelfunktionen\ 1.Art \qquad (8.51)$$

$$r,\delta,\lambda \ \ räumliche\ \ Polarkoordinaten\ im\ terrestrischen\ Bezugssystem$$

$$F_{lmp}(i) \quad Neigungsfunktionen \quad G_{lpq}(e) \quad Exzentrizitätsfunktionen \qquad (8.52)$$

und

$$S_{lmpq}(\omega,M,\Omega,\Theta) := \begin{bmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{bmatrix} \cos\left[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega-\Theta)\right]$$
$$+ \begin{bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{bmatrix} \sin\left[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega-\Theta)\right] \qquad (8.53)$$

$$\begin{bmatrix} A_{ik} \\ B_{ik} \end{bmatrix} := \ man\ nehme\ den\ oberen\ Wert,\ \ wenn\ \ i-k\ \ gerade$$
$$\Theta \ \ Sternzeit\ \ Greenwich \qquad (8.54)$$

berechnet werden. Dabei ist hilfreich, daß diese Entwicklung weitgehend faktorisiert ist hinsichtlich der Abhängigkeit von den Kepler-Elementen. Das Ergebnis ist beispielsweise in [21] zu finden.

Anm.: Die benötigten ersten partiellen Ableitungen für die verschiedenen Indexkombinationen der Neigungs- und Exzentrizitätsfunktionen können auch rekursiv aus diesen Funktionen selbst ermittelt werden[21].

Damit sind alle erforderlichen Beziehungen verfügbar, um die Grundgleichung auszuformulieren.

Die Grundgleichung ist im Idealfall eine Identität. Setzt man nämlich in

$$\nabla_\alpha \tilde{R} = \Psi \dot{\alpha} - \mathbf{n} = \Psi f(\alpha, \nabla_\alpha \tilde{R}(\alpha, t); t) - \mathbf{n} \tag{8.55}$$

die rechten Seiten der expliziten Störungsgleichungen ein, also entsprechend

$$\dot{\alpha} = \Psi^{-1} F_\alpha = \Psi^{-1}\left(\nabla_\alpha \tilde{R} + \mathbf{n}\right) =: f(t, \alpha), \tag{8.56}$$

so folgt die Behauptung.

Das ist aber nur dann richtig, wenn insbesondere die einander korrespondierenden Werte von $\alpha(t)$ *und* C_{lm}, S_{lm} gegeben sind.

Es sollen jetzt die **Arbeitsschritte** näher ausgeführt werden:

Gegeben seien der Bewegungsablauf

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t, \alpha(t)) \quad und \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t, \alpha(t)) \tag{8.57}$$

sowie die gemessenen nichtgavitativen Störkräfte.Weiter seien die Modelle zur Berechnung der gravitativen Störkräfte, so daß die Beschleunigung $\mathbf{z}(t)$ als Zeitfunktion bekannt ist.

Damit können nun folgende Schritte ausgeführt werden:

1. Umrechnung von Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt in oskulierende Kepler-Elemente

$$\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t), \dot{\mathbf{r}}^{\mathbf{I}}(t) \Rightarrow \alpha(t) \tag{8.58}$$

2. Berechnung der Matrix der Lagrange-Klammern und ihrer Inversen

$$\alpha(t) \Rightarrow \Psi(t), \Psi^{-1}(t) \tag{8.59}$$

3. Berechnung der partiellen Ableitungen der Störungsfunktion mit den vorhandenen Werten der Feldparameter

$$C_{lm}, S_{lm} \ \ und \ \ \alpha(t) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{R}(t, \alpha(t))}{\partial \alpha} \tag{8.60}$$

.

4. Bereitstellung der Terme

$$\mathbf{n}(t) := \mathbf{z}(t) \cdot \nabla_{\alpha} \mathbf{r}(t) \tag{8.61}$$

5. Berechnung der rechten Seiten der Störungsgleichungen

$$\alpha(t), \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \alpha} \ \ und \ \ \mathbf{n}(t) \Rightarrow f(t, \alpha(t)) \tag{8.62}$$

6. Aufstellen der Grundgleichung (8.11)(Iterationsfunktion)

$$\left(\nabla_{\alpha} \tilde{R}\right)^{(k+1)} := \Psi f(\alpha, \left(\nabla_{\alpha} \tilde{R}(\alpha, t); t)\right)^{(k)} - \mathbf{n} \tag{8.63}$$

Damit werden aus der Darstellung der linken Seite durch die Feldparameter neue Näherungswerte für diese bestimmbar:

Beispielsweise liefert die partielle Ableitung [21]

$$\frac{\partial \tilde{R}}{\partial i} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \frac{\partial U_{G,lm}}{\partial i} = GM_{\otimes} \sum_{lmpq} \frac{a_{\otimes}^{l}}{a^{l+1}} \frac{\partial F_{lmp}(i)}{\partial i} G_{lpq}(e) S_{lmpq}(\omega, M, \Omega, \Theta) \tag{8.64}$$

wegen

$$\begin{aligned} S_{lmpq}(\omega, M, \Omega, \Theta) := & \begin{bmatrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{bmatrix} \cos\left[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \Theta)\right] \\ & + \begin{bmatrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{bmatrix} \sin\left[(l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \Theta)\right] \end{aligned} \tag{8.65}$$

eine in den Feldparametern C_{lm} *und* S_{lm} lineare Gleichung. Zusammen erhält man also je Zeitpunkt 6 solcher linearer Bestimmungsgleichungen für die Feldparameter.
Für N Zeitpunkte ergeben sich so 6N lineare Gleichungen. Die Koffizientenmatrix A dieses Gleichungssystems kann mit den oskulierenden Kepler-Elementen $\alpha(t)$ aus den Darstellungen der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \tilde{R}(t,\alpha(t)}{\partial \alpha}$ berechnet werden. Deren über die Grundgleichung (8.11) berechneten Werte bilden die rechten Seiten des Gleichungsssystems

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{b} \tag{8.66}$$

mit dem Vektor **X** der Unbekannten C_{lm} *und* S_{lm}.

Hat man die neuen Werte dieser Feldparameter durch Auflösung des Gleichungssystems ermittelt, so geht man damit zurück zu Schritt 3 und verfährt wie geschildert- bis die Iteration steht.

Anm.: Man kann aber auch zuerst die partiellen Ableitungen umrechnen in der Störungsfunktion entsprechende Gravitationsfeldstärken

$$\nabla_{\mathbf{r}} \tilde{R}(\mathbf{r}(t,\alpha),t) = \sum_{j=1}^{6} \left(\Psi \dot{\alpha} - \mathbf{z} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \alpha \right)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} \alpha_j \tag{8.67}$$

und dann diese zur Bestimmung der Potentialkoeffizienten heranziehen. Man wird zuvor die Gesamtfeldstärke bilden

$$\nabla_{\mathbf{r}} U_G = \nabla_{\mathbf{r}} (U_{G,00} + \tilde{R}) \tag{8.68}$$

Die Wahl der Kepler-Elemente kann zu numerischen Instabilitäten führen, wenn man das Verfahren auf den CHAMP-Satelliten anwendet. Dessen kreisnahe Bahn $e \approx 0$ führt in den Störungsgleichungen zu kleinen Nennern. Als Ausweg bietet sich der Übergang zu nichtsingulären Elementen [21] an und den ihnen zugeordneten Störungsgleichungen, oder man wählt von vorne herein beispielsweise die Hillschen Variablen und als Störungsgleichungen die Hillschen Gleichungen etwa in der Gaussschen Form [21]. Darüber hinaus kann als integrables Bewegungsproblem das von Cui [21] seiner Bahntheorie zugrundeliegende intermediäre Bewegungsproblem verwendet werden. Der Verfahrensablauf bleibt ähnlich dem oben geschilderten.

8.5 Bewertung des Konzeptes

Das vorgeschlagene Verfahren der Gravitationsfeldbestimmung läßt sich wie folgt charakterisieren:

1. Es kann ein beliebiges integrables (intermediäres) Bewegungsproblem zugrunde gelegt werden.

2. Die Integrationskonstanten des intermediären Bewegungsproblems sind frei wählbar.

3. Es wird keine Störungstheorie benötigt, weder eine analytische Theorie noch eine numerisch erzeugte, sondern es werden nur die Variations-gleichungen für die Integrationskonstanten gebraucht.

4. Grundlage sind allein
   - die aus der Ortung/Bahnverfolgung rekonstruierte Bahnbewegung
   - die Messungen der nichtgravitativen Störkräfte
   - die ausreichende Modellierung der gravitativen Störkräfte
5. Eine zeitliche Begrenzung in Folge von Konvergenzradien etc. ist nicht gegeben.

Das Verfahren ist in der praktischen Durchführung iterativ angelegt.
Die Frage eines Fixpunktes der Iteration bleibt zu prüfen.

Als Iterationsvorschrift dient gemäß (8.63)

$$\left(\nabla_\alpha \tilde{R}\right)^{(k+1)} := \Psi f\left(\alpha, \left(\nabla_\alpha \tilde{R}(\alpha,t), \mathbf{z}; t\right)\right)^{(k)} - \mathbf{n}\,, \tag{8.69}$$

worin (k) den Iterationsindex bezeichnet.
Benötigt wird zur Einleitung der Iteration ein Startwert der partiellen Ableitungen

$$\left(\nabla_\alpha \tilde{R}\right)^{(0)} \tag{8.70}$$

zu berechnen mit a priori - Werten der Feldparameter.

Hilfreich für die Bildung der partiellen Ableitungen ist es, wenn die Störungsfunktion $\tilde{R}(\alpha;t)$ entwickelt nach den zu variierenden Konstanten α vorliegt. Das ist beispielsweise bei der Wahl der Kepler-Elemente und der nach diesen entwickelten Störungsfunktion aus der Kaula-Theorie [22] der Fall. Aber auch bei Wahl der Hillschen Variablen und der nach diesen entwickelten Störungsfunktion aus der Cui-Theorie ist das der Fall. Als weiteres Beispiel sei die Theorie von You genannt, die auf KS-Elementen [21] basiert. Auch hier ist die Entwicklung der Störungsfunktion nach den gewählten Elementen bekannt.

Cui hat ausgehend von den für die Hillschen Variablen bestehenden Gaussschen Gleichungen[21] diese nach den Kraftkomponenten in radialer, transversaler und normaler Richtung aufgelöst und deren Verwendung mit Ergebnissen aus seiner Bahntheorie diskutiert.
Das hier vorgestellte Verfahren der Gravitationsfeldbestimmung verallgemeinert diesen Grundgedanken auf beliebig wählbare integrable Bewegungsprobleme und darin frei wählbare zu variierende Integrationskonstanten.

Wählt man das Keplerproblem, so ist der gesamte Formalismus wie Lösungsdarstellung des Keplerproblems, Matrix der Lagrange-Klammern, Störungsgleichungen bekannt.

Um einer variablen Erddrehung Rechnung zu tragen, kann man auf die von SCHNEIDER in [21] angegebenen Störungsgleichungen in einem beliebigen Galilei-System [21] zurückgreifen.

Das Verfahren teilt mit den anderen in dieser Arbeit vorgestellten Möglichkeiten die Vorstellung, die ***inverse Aufgabe zur Lösung eines Bewegungsproblems*** zu lösen. Mit den neuen Satellitenmissionen ist ja die Möglichkeit gegeben, die Lösung des aktuellen Bewegungsproblems geliefert zu bekommen, mit der man dann in die Bewegungsgleichung eingehen und dadurch die Kräftefunktion ermitteln kann.

Es liegen bisher noch keine Ergebnisse aus Simulationsrechnungen oder aus der Verarbeitung von Echtdaten vor. Wesentlich für eine erfolgreiche Durchführung des Verfahrens wird die möglichst hypothesenfreie Bahnbestimmung sein, also die Bereitstellung von $\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)$, woraus die zeitlich variablen Integrationskonstanten $\alpha(t)$ über die als bekannt vorausgesetzte Lösungsdarstellung $\mathbf{r}^{\mathbf{I}}(t)$ berechenbar sind.

Als Ergebnis der Gravitationsfeldbestimmung nach dem vorgestellten Verfahren erhält man

- die **Gravitationsfeldstärke** $\nabla_{\mathbf{r}} U_G$ längs der Bahn des CHAMP-Satelliten ,
- den **Gradienten** $\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}} U_G$ **der Gravitationsfeldstärke** längs der Bahn A im GRACE- Fall. In (8.23), also

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}}(\nabla_{\mathbf{r}}\tilde{R}(t,\alpha)\right)_A \cdot \Delta_{BA} = \delta(RS)$$

kann man auf der linken Seite die gemessenen Abstandsvektoren einführen und auf der rechten Seite die Ergebnisse der Bahnbestimmung für die beiden Satelliten A und B, womit die rechte Seite

$$\delta(RS) := (\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha} - \mathbf{z}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\right)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j)_B - (\sum_{j=1}^{6}\left(\Psi\dot{\alpha} - \mathbf{z}\cdot\nabla_{\alpha}\mathbf{r}\right)_j \nabla_{\dot{\mathbf{r}}}\alpha_j)_A \quad (8.71)$$

bekannt ist, so daß eine Gleichung für den zu bestimmenden Gradienten der Gravitationsfeldstärke resultiert, und zwar längs der Bahn von A. Die Mitnahme nur des linearen Terms aus der Taylorentwicklung der linken Seite wird zu Abbruchfehlern [29] führen, wie ILK gezeigt hat [7,21].

bzw.

- den **Gravitationstensor** $\nabla_{\mathbf{r}}\nabla_{\mathbf{r}} U_G$ längs der Satellitenbahn im GOCE- Fall.

ANHANG A

Zur Berechnung des Geschwindigkeitsverlaufes aus dem Bahnverlauf

Bekannt sei der Bahnverlauf [36,38,38] $\mathbf{r}(t)$ im Zeitraum $t_A \le t \le t_B$. Er soll dargestellt werden durch [21,22]

$$\mathbf{r}(t_n) = \mathbf{r}_K(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \tag{0.1}$$

mit der die Randörter $\mathbf{r}_A$ und $\mathbf{r}_B$ verbindenden Kreisbahn (Radius a)

$$\overline{\mathbf{r}}_K(t_n) := \frac{\sin\sqrt{\lambda}(1-t_n)}{\sin\sqrt{\lambda}}\mathbf{r}_A + \frac{\sin\sqrt{\lambda}t_n}{\sin\sqrt{\lambda}}\mathbf{r}_B \quad mit \;\; \lambda := \tilde{\lambda}T^2 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}T^2 \,, \tag{0.2}$$

den im Zeitintervall $0 \le t_n \le 1$ orthonormierten Eigenfunktionen [21]

$$\overline{\varphi}_\nu^I(t_n) := \sqrt{2}\sin\left(\sqrt{\lambda_\nu}t_n\right) \;\; mit \;\; \lambda_\nu := \left(\nu\pi\right)^2 \tag{0.3}$$

und der normierten Zeitvariablen

$$t_n := \frac{t-t_A}{T} \quad mit \quad T := t_B - t_A \,. \tag{0.4}$$

Mit Hilfe der Örter $\mathbf{r}(t_i) \mathrel{\hat{=}} \mathbf{r}(t_n^i)\,, i = 1...I$ berechne man die Entwicklungskoeffizienten $\mathbf{r}_\nu$ sowie die Randörter $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B$.Das nach den $\mathbf{r}_\nu$ aufzulösende Gleichungssystem lautet für I Örter

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \; \overline{\varphi}_\nu^I(t_n^i) &= \mathbf{r}(t_n^i) - \mathbf{r}_K(t_n^i) \quad i = 1,....I \\ \sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \sin\,(\nu\pi t_n^i) &= \;\; \mathbf{r}_i \;\; - \mathbf{r}_K(t_n^i) \end{aligned} \quad . \tag{0.5}$$

Alternativ zur Auflösung dieses Gleichungssystems kann man die Orthonormierung der Eigenfunktionen zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten nutzen [21]:

Multipliziert man die gegebene Bahndarstellung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) = \mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}_K(t_n) \tag{0.6}$$

mit der Eigenfunktion $\overline{\varphi}_\sigma^I(t_n)$ und integriert anschließend, also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n) d\tau_n = \int_0^1 \left(\mathbf{r}(\tau_n) - \mathbf{r}_K(\tau_n)\right) \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n) d\tau_n \tag{0.7}$$

so folgt wegen

$$\int_0^1 \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n) \overline{\varphi}_\sigma^I(\tau_n) = \delta_{\nu\sigma} \tag{0.8}$$

für die Entwicklungskoeffizienten die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\nu &= \int_0^1 \mathbf{r}(\tau_\mathbf{n}) \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n) d\tau_n - \int_0^1 \mathbf{r}_K(\tau_\mathbf{n}) \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n) d\tau_n \\ &=: \quad I^{(\nu)} \quad - \quad I_K^{(\nu)} \end{aligned} \tag{0.9}$$

Die Integrale

$$I^{(\nu)} = \int_0^1 \mathbf{r}(\tau_\mathbf{n}) \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n) d\tau_n \tag{0.10}$$

sind numerisch auszuwerten mit Hilfe der gegebenen Örter $\mathbf{r}(t_i) \mathrel{\hat{=}} \mathbf{r}(t_n^i)\,, i = 1 \ldots I$.
Es dürfte vorteilhaft sein, wenn die Zeitrpunkte t_i dieser Örter äquidistant liegen.
Die Integrale

$$I_K^{(\nu)} = \int_0^1 \mathbf{r}_K(\tau_\mathbf{n}) \overline{\varphi}_\nu^I(\tau_n) d\tau_n \tag{0.11}$$

können geschlossen ausgewertet werden.

Damit ist die obige Bahndarstellung bekannt. Sie stellt die aktuelle Bahn $\mathbf{r}(t_n)$ als Überlagerung einer die Randörter verbindenden Kreisbahn und einer Entwicklung der Abweichungen

$$\Delta(t_n) := \mathbf{r}(t_n) - \mathbf{r}_K(t_n) \quad mit \;\; \Delta(t_n = 0) = \Delta(t_n = 1) = 0 \tag{0.12}$$

nach den Eigenfunktionen

$$\Delta(t_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \;\; . \tag{0.13}$$

Differenziert man jetzt

$$\mathbf{r}(t_n) = \mathbf{r}_K(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \tag{0.14}$$

nach der Zeit t, d.h. bildet man [21]

$$\frac{d\mathbf{r}(t_n)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(t_n)}{d(Tt_n)} = \frac{1}{T}\frac{d\mathbf{r}(t_n)}{dt_n}, \tag{0.15}$$

so folgt wegen

$$\frac{d\,\mathbf{r}(t_n)}{dt_n} = \frac{d\,\mathbf{r}_K(t_n)}{dt_n} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \;\nu\pi\; \overline{\Phi}_\nu^{II}(t_n) \;\; mit \;\; \overline{\Phi}_\nu^{II}(t_n) := \sqrt{2}\cos(\nu\pi t_n) \tag{0.16}$$

für die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{T}\frac{d\mathbf{r}}{dt_n} &= \frac{1}{T}\left(\frac{d\,\mathbf{r}_K(t_n)}{dt_n} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\mathbf{r}_\nu \;\nu\pi\;\overline{\Phi}_\nu^{II}(t_n)\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}(1-t_n)}{\sin\sqrt{\lambda}}\mathbf{r}_A + \frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t_n}{\sin\sqrt{\lambda}}\mathbf{r}_B + \sum_{\nu=1}^{\infty}\mathbf{r}_\nu \;\nu\pi\;\overline{\Phi}_\nu^{II}(t_n)\right) \end{aligned} \;. \tag{0.17}$$

Die Verwendung einer die Randörter verbindenden Kreisbahn (die CHAMP-Bahn ist nahezu kreisförmig!!) hat gegenüber einer die Randörter verbindenden Trägheitsbewegung in der Bahndarstellung

$$\overline{\mathbf{r}}\left(t_n\right) := \mathbf{r}_A + \left(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\right) t_n \quad \rightarrow \; \mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}\left(t_n\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \, \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \tag{0.18}$$

vermutlich Vorteile.

Die Summe kann praktisch nur bis zu einem endlichen Index N geführt werden, d.h. , es liegt eine Bahndarstellung der Gestalt

$$\mathbf{r}(t_n) \approx \overline{\mathbf{r}}\left(t_n\right) + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \, \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \tag{0.19}$$

vor. Um den dadurch begangenen Abbruchfehler

$$\mathbf{d}(t_n) := \sum_{\nu=N}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \, \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) - \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \, \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \tag{0.20}$$

zu verringern, kann man nach ILK&KLOSE [10,41] Restgliedfunktionen $\mathbf{d}_\mathbf{R}(t_n)$ einführen

$$\mathbf{d}(t_n) \approx \mathbf{d}_\mathbf{R}(t_n) \tag{0.21}$$

so daß die Bahndarstellung (0.19) die Gestalt annimmt

$$\mathbf{r}(t_n) = \overline{\mathbf{r}}\left(t_n\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}_\nu \, \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) \approx \overline{\mathbf{r}}\left(t_n\right) + \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \, \overline{\varphi}_\nu^I(t_n) + \mathbf{d}_\mathbf{R}(t_n) \quad . \tag{0.22}$$

Schließlich verbleibt noch die Aufgabe, die Auswirkung von fehlerhaften Bahnverfolgungsdaten auf die Amplitudenspektren durch eine Filterung zu vermindern. Diese Fehler wirken sich im allgemeinen auf alle Amplituden aus. Es ist anzunehmen, daß vor allem der hochfrequente Teil des Spektrums betroffen ist. Hierzu liegen Erfahrungen aus Simulationsrechnungen vor.

ANHANG B

Ergänzungen zur Analyse von SST-Daten

B.1 Analyse der SST-Daten nach der Methode der unendlich vielen Variablen

Die Bewegungsgleichung des Massenmittelpunktes O_{MZ}^{B} des Satelliten B in einem Bezugssystem B_A, dessen Ursprung ständig mit dem Massenmittelpunkt O_{MZ}^{A} des Satelliten A zusammenfällt, lautet

$$m\frac{D^2\overline{\Delta}_{AB}}{Dt^2} = \overline{\mathbf{K}}\left(\overline{\Delta}_{AB}, \frac{D\overline{\Delta}_{AB}}{Dt}; t\right) + \overline{\mathbf{F}} + \overline{\mathbf{C}} \tag{0.23}$$

Darin bezeichnet $\overline{\Delta}_{AB}$ den Ortsvektor von O_{MZ}^{B} nach O_{MZ}^{A} , wobei der Querstrich über den Vektoren auf deren Darstellung im Bezugssystem B_A hinweist. Weiter bezeichnen $\overline{\mathbf{F}}\,bzw.\,\overline{\mathbf{C}}$ die auf O_{MZ}^{B} wirkende Führungskraft bzw. Corioliskraft zufolge der nichtinertialen Bewegung des Bezugssystems B_A gegen ein geozentrisch gelagertes Bezugssystems B_{geo}. Die Kräftefunktion

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{K}}(\overline{\mathbf{r}}, \frac{D\overline{\mathbf{r}}}{Dt}; t) &= \overline{\mathbf{G}}(\overline{\mathbf{r}}, t) + \overline{\mathbf{Z}}_{nongrav}(\overline{\mathbf{r}}, \frac{D\overline{\mathbf{r}}}{Dt}; t) \\ &= \sum_{i=1}^{N} c_i \overline{\mathbf{g}}_i(\overline{\mathbf{r}}, t) + \overline{\mathbf{Z}}_{nongrav}(\overline{\mathbf{r}}, \frac{D\overline{\mathbf{r}}}{Dt}; t)\end{aligned} \tag{0.24}$$

in der $\overline{\mathbf{G}}(\overline{\mathbf{r}}, t)$ bzw. $\overline{\mathbf{Z}}_{nongrav}(\overline{\mathbf{r}}, \frac{D\overline{\mathbf{r}}}{Dt}; t)$ die Gravitation der Erde bzw. die Resultierende aller übrigen Kräfte bezeichnet, werde entwickelt um die Bahn des Massen-mittelpunktes O_{MZ}^{A} des Satelliten A In linearer Näherung erhält man mit

$$\overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{r}}_A + \Delta_{AB} \tag{0.25}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{K}}(\overline{\mathbf{r}}, \frac{D\overline{\mathbf{r}}}{Dt}; t) &= \sum_{i=1}^{N} c_i \overline{\mathbf{g}}_i(\overline{\mathbf{r}}_A, t) + \overline{\mathbf{Z}}_{nongrav}(\overline{\mathbf{r}}_A, \frac{D\overline{\mathbf{r}}_A}{Dt}; t) \\ &\approx \overline{\mathbf{G}}(\overline{\mathbf{r}}_A, t) + \sum_{i=1}^{N} c_i \Delta_{AB} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}} \overline{\mathbf{g}}_i(\overline{\mathbf{r}}, t)\right)_A + \ldots + \overline{\mathbf{Z}}_{nongrav}(\overline{\mathbf{r}}_A, \frac{D\overline{\mathbf{r}}_A}{Dt}; t)\end{aligned} \tag{0.26}$$

Da das Bezugssystem B_A voraussetzungsgemäß im Gravitationsfeld der Erde sich translatorisch beschleunigt bewegt, ist die translatorische Führungskraft gegeben durch

$$m\ddot{\mathbf{R}} \triangleq \overline{\mathbf{G}}(\overline{\mathbf{r}}_A, t) + \overline{\mathbf{Z}}_{nongrav}(\overline{\mathbf{r}}_A, \frac{D\overline{\mathbf{r}}_A}{Dt}; t) \tag{0.27}$$

so daß sich die auf O^A_{MZ} wirksame Führungskraft ergibt zu

$$\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{Z}} + \overline{\mathbf{T}} + \overline{\mathbf{C}} \tag{0.28}$$

und damit die Bewegungsgleichung zu

$$m\frac{D^2\overline{\Delta}_{AB}}{Dt^2} = \approx \sum_{i=1}^{N} c_i \Delta_{AB} \cdot \left(\nabla_{\mathbf{r}} \overline{\mathbf{g}}_i(\overline{\mathbf{r}}, t)\right)_A + \ldots + \overline{\mathbf{C}} \tag{0.29}$$

Mit dem Ansatz

$$\Delta_{AB}(t_n) = \overline{\Delta}_{AB}(t_n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta^{\nu}_{AB} \overline{\varphi}^I_{\nu}(t_n) \tag{0.30}$$

also im Sinne der Methode der unendlichen Variablen (s.§ 5.2) folgt für die Koeffizienten Δ^{ν}_{AB} das Gleichungssystem

$$\Delta^{\nu}_{AB} = -\frac{T^2}{\lambda_{\nu}} \sum_{i=1}^{N} c_i \int_0^1 \Delta_{AB}(\tau_n) \cdot \left\{\left(\nabla_{\mathbf{r}} \overline{\mathbf{g}}_i(\overline{\mathbf{r}}, \tau_n)\right)_A + \ldots + \overline{\mathbf{C}}\right\} d\tau_n \tag{0.31}$$

bzw. nach Eintragen der Reihe im Integranden

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_{\nu}}{T^2} \Delta^{\nu}_{AB} = \sum_{i=1}^{N} c_i [\ & \int_0^1 \overline{\Delta}_{AB}(\tau_n) \cdot \left\{\left(\nabla_{\mathbf{r}} \overline{\mathbf{g}}_i(\overline{\mathbf{r}}, \tau_n)\right)_A + \ldots + \overline{\mathbf{C}}\right\} d\tau_n \\ & \sum_{\sigma=1}^{\infty} \Delta^{\sigma}_{AB} \int_0^1 \overline{\varphi}^I_{\sigma}(\tau_n) \cdot \left\{\left(\nabla_{\mathbf{r}} \overline{\mathbf{g}}_i(\overline{\mathbf{r}}, \tau_n)\right)_A + \ldots + \overline{\mathbf{C}}\right\} d\tau_n \end{aligned} \tag{0.32}$$

Das ist ein in den zu bestimmenden Feldparametern c_i lineares Gleichungssytem. Die linken Seiten sind über die Darstellung der SST- und Sternsensordaten durch die Reihe nach den Eigenfunktionen bekannt. Auf den rechten Seiten sind die Amplituden Δ^{σ}_{AB} aus dieser Reihe zu entnehmen, die Faktoren

$$\left\{\left(\nabla_{\mathbf{r}} \overline{\mathbf{g}}_i(\overline{\mathbf{r}}, \tau_n)\right)_A + \ldots + \overline{\mathbf{C}}\right\} \tag{0.33}$$

in den Integralen sind bekannte Zeitfunktionen als Ergebnis der Bahnverfolgung des Satelliten A und der aus den Sternsensordaten bekannten Orientierung des mit dem Satelliten A verbundenen Bezugssytems A im geozentrischen Bezugssystem:

- Berechnung von $\nabla_{\mathbf{r}}\overline{\mathbf{g}}_i(\overline{\mathbf{r}},\tau_n)$ entlang der Bahn von A
- Berechnung der Trägheitskräfte (s.§ 3.1)

$$\overline{\mathbf{Z}} := -m\overline{\mathbf{d}}\times\left(\overline{\mathbf{d}}\times\Delta_{AB}\right) \tag{0.34}$$

$$\overline{\mathbf{T}} = -m\frac{D\overline{\mathbf{d}}}{Dt}\times\Delta_{AB} \tag{0.35}$$

$$\overline{\mathbf{C}} = -2m\overline{\mathbf{d}}\times\frac{D\Delta_{AB}}{Dt} \tag{0.36}$$

mit den Orientierungsdaten des Sternsensors. $\overline{\mathbf{d}}$ ist der Winkelgeschwindigkeitsvektor, mit dem das Bezugssystem B_A gegen das geozentrische Bezugssystem rotiert.

Anm.: Die gleiche Überlegung kann mit dem Satelliten B anstellen. Es resultiert ein zweites System von Bestimmungsgleichungen für die Feldparameter.

B.2 Formulierung der Bewegungsgleichung für die Relativbewegung mit Hilfe des Prinzips des kleinsten Zwanges von GAUSS

Die SST-Daten der GRACE – Mission sind genauer als die aus der GPS-Bahnverfolgung erhaltenen Bahnen. Wie in [21] ausgeführt, kann man die Methode der unendlich vielen Variablen mit dem Verfahren der differentiellen Korrektion von Parametern verknüpfen, um die SST- und Sternsensor-Daten zur Verbesserung der aus der GPS-Bahnverfolgung der GRACE- Satelliten bestimmten Bahnen heranzuziehen.

Um diese höhere Genauigkeit für die Feldbestimmung nutzbar zu machen, könnte man auf die Relativbewegung der Satelliten A und B

$$\Delta_{AB}(t) := \mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t) \tag{0.37}$$

das GAUSSsche Prinzip des kleinsten Zwanges (s.§ 3.2) anwenden beispielsweise durch Verwendung des genau gemessenen Zeitverlaufs des Abstandes der Satelliten

$$
\begin{aligned}
N(\Delta_{AB},t) &:= \left|\Delta_{AB}\right| \quad - \left|\mathbf{r}_B(t)-\mathbf{r}_A(t)\right| = 0 \\
&=: \left|\Delta_{AB}\right| \quad - \quad \delta(t) \qquad = 0
\end{aligned}
\tag{0.38}
$$

oder

$$
N(\Delta_{AB},t) := \frac{1}{2}\left(\left|\Delta_{AB}\right|^2 - \delta^2(t)\right) = 0 \tag{0.39}
$$

als holonom-rheonome Nebenbedingung. Man müßte dann versuchen, zwei Bahnen als Lösungen der Bewegungsgleichungen der beiden Satelliten so zu bestimmen, daß deren Zeitverlauf gerade die Nebenbedingung einhält. Die Bewegungsgleichungen der Satelliten in einem geozentrischen Newton-System [21] lauten

$$
\begin{aligned}
m_a\ddot{\mathbf{r}}_a &= \mathbf{K}(\mathbf{r}_a,\dot{\mathbf{r}}_a;t) \quad a = A,B \\
&= \mathbf{K}_a^{(e)} + \mathbf{K}_a^{(i)} + \mathbf{F}_a
\end{aligned}
\tag{0.40}
$$

mit

$\mathbf{K}_a^{(e)}$ äußere Volumenkräfte

$\mathbf{K}_a^{(i)}$ innere Volumenkräfte

$\mathbf{F}_a$ Flächenkräfte

Wenn für die inneren Volumenkräfte ein Reaktionsprinzip

$$
\mathbf{K}_A^{(i)} = -\mathbf{K}_B^{(i)} =: \mathbf{K}^{(i)} \tag{0.41}
$$

gilt, wie es zum Beispiel bei Gravitationswechselwirkung der Satelliten A und B der Fall ist, dann folgt durch Subtraktion der Bewegungsgleichungen der Satelliten

$$
\begin{aligned}
\ddot{\Delta}_{AB} &= \ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A = \frac{\mathbf{K}_B}{m_B} - \frac{\mathbf{K}_A}{m_A} = \\
&= \frac{m_A+m_B}{m_A m_B}\mathbf{K}^{(i)} + \frac{\mathbf{K}_B^{(e)}}{m_B} - \frac{\mathbf{K}_A^{(e)}}{m_A} + \frac{\mathbf{F}_B}{m_B} - \frac{\mathbf{F}_A}{m_A}
\end{aligned}
\tag{0.42}
$$

oder mit der reduzierten Masse [21]

$$
\mu_{(AB)} := \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \tag{0.43}
$$

als Bewegungsgleichung der Relativbewegung [21]

$$\mu_{(AB)}\ddot{\Delta}_{AB} = \mathbf{K}^{(i)} + \mu_{(AB)}\left(\frac{\mathbf{K}_B^{(e)}}{m_B} - \frac{\mathbf{K}_A^{(e)}}{m_A} + \frac{\mathbf{F}_B}{m_B} - \frac{\mathbf{F}_A}{m_A}\right) =: \mathbf{K}_{relativ}\,. \tag{0.44}$$

bzw. wenn man die Gravitationswechselwirkung der Satelliten vernachlässigt

$$\mu_{(AB)}\ddot{\Delta}_{AB} = \mu_{(AB)}\left(\frac{\mathbf{K}_B^{(e)}}{m_B} - \frac{\mathbf{K}_A^{(e)}}{m_A} + \frac{\mathbf{F}_B}{m_B} - \frac{\mathbf{F}_A}{m_A}\right) =: \mathbf{K}_{relativ} \tag{0.45}$$

Um die Nebenbedingung an die Lösung $\Delta_{AB}(t)$ dieser Gleichung einzuhalten, muß nach dem GAUSSschen Prinzip des kleinsten Zwanges eine Zwangskraft

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{NB}} := \lambda \nabla_{\Delta_{AB}} N(\Delta_{AB}(t)) \tag{0.46}$$

hinzugefügt werden.Der LAGRANGE- Multiplikator λ ergibt sich im hier betrachteten Fall einer holonom-rheonomen Nebenbedingung [21] zu

$$\lambda = -\frac{\vec{\Delta}\cdot\dfrac{\mathbf{K}_{relativ}}{\mu_{(AB)}} + \left|\dot{\vec{\Delta}}\right|^2 - (\dot{\delta}^2 - \delta\ddot{\delta})}{\left|\vec{\Delta}\right|^2} \tag{0.47}$$

und damit als Zwangskraft

$$\mathbf{Z}_{NB} = -\frac{\vec{\Delta}\cdot\dfrac{\mathbf{K}_{relativ}}{\mu_{(AB)}} + \left|\dot{\vec{\Delta}}\right|^2 - (\dot{\delta}^2 - \delta\ddot{\delta})}{\left|\vec{\Delta}\right|^2}\vec{\Delta} \tag{0.48}$$

und als Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{\Delta}} =: \frac{\mathbf{K}_{relativ}}{\mu_{(AB)}} - \frac{\vec{\Delta}\cdot\dfrac{\mathbf{K}_{relativ}}{\mu_{(AB)}} + \left|\dot{\vec{\Delta}}\right|^2 - (\dot{\delta}^2 - \delta\ddot{\delta})}{\left|\vec{\Delta}\right|^2}\vec{\Delta}\quad . \tag{0.49}$$

Sie ist einer Bahnbestimmung für das Satellitenpaar GRACE zugrunde zu legen, wenn man ein Paar von geozentrischen Umlaufbahnen bestimmen will unter Verwendung der GPS-gestützten Bahnverfolgung und der SST-Abstandsmessungen und dabei deren höhere Genauigkeit nutzen will.

Sonderfall: Ändert sich der gegenseitige Abstand der beiden Satelliten nicht, wie es beispielsweise bei einer starren Hantel der Fall ist, dann ergibt sich bei Abwesenheit von Kräften, also $\mathbf{K}_{relativ} = \mathbf{0}$, wegen $\ddot{\delta} \equiv 0 \;\rightarrow\; \delta(t) = const$ (es ist i.allg. $\dot{\vec{\Delta}} \neq \mathbf{0}$) als Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{\Delta}} = -\frac{\left|\dot{\vec{\Delta}}\right|^2}{\left|\vec{\Delta}\right|^2}\vec{\Delta} \tag{0.50}$$

wie sie BAUMGARTE in seiner Untersuchung [45] zur numerischen Stabilisierung der Bewegungsgleichung der Kepler-Bewegung angegeben hat. Der Fall der starren Hantel im Gravitationsfeld eines kugelförmigen Zentralkörpers wird u.a. in [21] behandelt.

Um auch eine gemessene Richtung $\Delta_0(t)$ bei der Bestimmung der Bahnen des Satellitenpaars zu berücksichtigen, hätte man eine weitere Nebenbedingung in die Bewegungsgleichung einzuarbeiten.

Danksagung

Für zahlreiche Diskussionen und Testrechnungen im Zusammenhang mit der Nutzung des Jacobi-Integrals zur Gravitationsfeldbestimmung danke ich den Herren Dipl.-Ing. Christian Gerlach , Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie der Technischen Universität München, sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Karlheinz Ilk, Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn. Mein Dank gilt weiter Herrn Prof. Dr.- Ing. Jürgen Müller , Institut für Erdmessung der Universität Hannover für die kritische Durchsicht des Manuskripts und zahlreiche Anregungen und Verbesserungsvorschläge. Schließlich danke ich Herrn Dr. - Ing. Chunfang Cui, Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik der TU Berlin, mit dem ich eingehend die Frage der Bestimmung der wirksamen Kraft aus einem gegebenen Bewegungsverlauf diskutieren konnte.

Herrn Prof. Dr.- Ing. Reiner Rummel danke ich für die Aufnahme der Arbeit in die Reihe der Veröffentlichungen des Instituts für Astronomische und Physikalische Geodäsie/ Forschungseinrichtung Satellitengeodäsie der Technischen Universität München.

Literaturhinweise

[1] BERGER, X. (196?):
Application de la Theorie de Schneider a l`Etude des coefficients d`Ordre 13 du potentiel terrestre These, Paris.

[2] BJERHAMMER, A. (1968):
On the energy integral for satellites Res. Note 29, U.S. Army Eng. Topogr. Lab.

[3] FRÖHLICH, H. (1994):
Bestimmung von Modellparametern der Erde durch Analyse ihrer Drehbewegung Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe C, Nr. 137, München.

[4] GERLACH, Ch., SNEEUW , N., VISSER, P., SVEHLA, D.(2003):
CHAMP Gravity Field Recovery with the Energy Balance Approach: First Results, in: Reigber Ch., H. Lühr, P. Schwintzer (eds.), First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies, pp. 134-139, Springer Verlag.

[5] HAN,S.-C.,JEKELI, Ch., SHUM, C.K.(2002):
Efficient gravity field recovery using in situ disturbing potential observables from CHAMP, Geophys. Res. Lett., 29(16), 1789, doi:10.1029/2002GL015180.

[6] ILK,K.H.(1983):
Formulierung von Energieaustauschbeziehungen zur Ausmessung des Gravitationsfeldes, in [29].

[7] ILK,K.H.(1990):
Zukünftige Möglichkeiten der globalen hochauflösenden Schwerefeldbestimmung, in [29].

[8] ILK, K.H.(2001):
Energy Relations for the Motion of two Satellites within the Gravity Field of the Earth, in: M.G. Sideris (ed.): Gravity, Geoid and Geodynamics 2000, IAG Symposia, Vol. 123, pp. 129-135, Springer-Verlag .

[9] ILK, K.H., KLOSE, U.(1984):
Zur numerischen Quadratur von Integralen im Rahmen der Bestimmung des hochfrequenten Anteils des Gravitationsfeldes, Veröff. d . Komm. f . d. Intern. Erdm., Astron. Geod. Arb., Heft Nr. 45 München.

[10] ILK, K.H., KLOSE, U.(1986):
Zur Konstruktion von Restgliedfunktionen bei der Lösung von Randwertproblemen zur NEWTON – EULERschen Bewegungsgleichung Veröff. d . Komm. f . d. Intern. Erdm., Astron. Geod. Arb., Heft Nr. 48 München.

[11] JACOBI, C.G.J.(1836):
Über ein neues Integral für den Fall der drei Körper wenn die Bahn des störenden Planeten kreisförmig angenommen und die Masse des gestörten vernachlässigt wird.

Auszug aus einem Schreiben an die Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Monatsbericht Juli 1836, 59-60 = Math. Werke 7, 20-23.

[12] JEKELI, Ch. (1999):
The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite-tracking Cel.Mech. , Vol. 75 , p.85-10.

[13] O´KEEFE, J. A. (1957) :
An application of Jacobi´s integral to the motion of an earth satellite, Astron. J. 62(8), 266-267.

[14] KUSCHE, J . (2002):
Inverse Probleme bei der Gravitationsfeldbestimmung mittels SST- und SGG-Satellitenmissionen, Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe C, Nr. 548, München.

[15] LANDAU ,L.D., LIFSCHITZ, E.M. (1976):
Lehrbuch der Theoretischen Physik , Bd. I, Akademie-Verlag, Berlin.

[16] LANSARD,E., BIANCALE,R. (1987):
An alternative method of orbit improvement for a Doppler-tracked satellite: a step toward Earth gravity model refinement, J.of Geophys.Research, Vol.92, No. B10, p.10,697-10,710.

[17] PAUL, M.K. (1988):
A Versatile Set of Observation Equations fo Range Data from Satellite to Satellite Tracking (private communication to Prof. Ilk).

[18] PAUL, M.K. (1988):
On some aspects of analysis of SST data for gravimetry (private communication to Prof. Ilk).

[19] REIGBER, Ch. (1969):
Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen, Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe C, Nr. 137, München.

[20] RUDOLPH, St.(2000):
Regionale und globale Gravitationsfeldanalyse hochauflösender Satellitendaten mittels Mehrgitterverfahren Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe C, Nr.528, München.

[21] SCHNEIDER,M.(1992-1999):
Himmelsmechanik Bde. I-IV, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg-Berlin.

[22] SCHNEIDER,M.(1988):
Satellitengeodäsie, Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus Heidelberg.

[23] SCHNEIDER,M (1967):
Lösungsvorschlag zum Bahnbestimmungsproblem, BMwF-FB W 67-35.

[24] SCHNEIDER,M. (1968):
A General Method of Orbit Determination Library Translation No.1279 (Royal Aircraft Establishment, Farnborough Hants U.D.C. 521.3).

[25] SCHNEIDER,M.(1969):
Neuere Methoden zur Bestimmung von Feldparametern, Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe A Heft49/I, München.

[26] SCHNEIDER, M. (1967):
Beiträge zur Bahnmechanik künstlicher Erdsatelliten. Teil II, Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe C, Nr. 113, München.

[27] SCHNEIDER, M. (1969):
Outline of a general Orbit Determination Method in Space Research IX, North Holland Publ. Comp.

[28] SCHNEIDER, M. REIGBER, Ch. (1970):
On the Determination of Field Parameters Using a Generalized Fourier Analysis, in: B.Morando (ed.): Dynamics of Satellites, Springer Verlag Berlin.

[29] SCHNEIDER, M.(1983), Hrsg.:
Die Arbeiten des Sonderforschungsbereiches 78 der Technischen Universität München im Jahre 1982, Astronomisch - Geodätische Arbeiten der Bayerischen Kommission für die Internationale Erdmessung, Heft Nr. 43, München.

[30] SCHNEIDER, M.(1973):
Expansions in orthonormalized eigenfunctions and their application in point mechanics (orbital mechanics), Übersetzung von C.R. Haave der Veröffentlichung BMBW-FB 72-33, erschienen unter T- 2780 (ed. H.D. Black) des Applied Physics Laboratory der Johns Hopkins University, Maryland.

[31] SCHNEIDER, M. (1973):
Über die Verwendung von Entwicklungen nach orthonormierten Eigenfunktionen bei der Behandlung von Randwertaufgaben der Punktmechanik, BMFT-FB W 73-16, München.

[32] SCHNEIDER , M. (1990), Hrsg.:
Satellitengeodäsie – Ergebnisse aus dem gleichnamigen Sonderforschungsbereich der Technischen Universität München DFG, Dt. Forschungsgemeinschaft, VCH Weinheim, Basel, Cambridge , New York

[33] SCHNEIDER, M.(1984):
Observation equations based on Expansions into Eigenfunctions Manuscripta geodaetica 9:169-208.

[34] SNEEUW,N.GERLACH,Ch.,SVEHLA,D.,GRUBER,Ch. (2003):
A first attempt at time-variable gravity recovery from CHAMP using the energy balance approach, in: Tziavos I.N. (ed.): Gravity and Geoid 2002, pp. 237-242, Ziti-Publishing Thessaloniki.

[35] STIEFEL;E., SCHEIFELE, G. (1971):
Linear and Regular Celestial Mechanics, Springer Verlag, Berlin.

[36] SVEHLA, D.,ROTHACHER, M. (2003):
CHAMP double-difference kinematic orbit with ambiguity resolution, in: Reigber Ch., H. Lühr, P. Schwintzer (eds.), First CHAMP Mission Results for Gravity, Magnetic and Atmospheric Studies, pp. 134-139, Springer Verlag.

[37] SVEHLA, D.,ROTHACHER, M. (2002):
Kinematic Orbit Determination of LEOs Based on Zero- or Double-Difference Algorithms Using Simulated and Real SST Data, in: Adam J.,Schwarz K.P. (eds.): Vistas for Geodesy in the New Millenium, IAG Symposia, Vol. 125, p.322-328, Springer Verlag.

[38] SVEHLA, D.,ROTHACHER, M. (2003):
Kinematic and Reduced-Dynamic Precise Orbit Determination of Low Earth Orbiters, Advances in Geosciences, Vol. 1, pp. 47-56.

[39] THALHAMMER, M.(1995):
Regionale Gravitationsfeldbestimmung mit zkünftigen Satellitenmissionen (SST und Gradiometrie), Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe C, Nr. 437 , München.

Nachträge:

[40] HAMMERSTEIN, A.(1930):
Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, Acta math., Bd. 54.

[41] ILK, K.H. (1977):
Berechnung von Referenzbahnen durch Lösung selbstadjungierter Randwertaufgaben, Veröff.d. Dt.Geod.Komm., Reihe C, Heft 228, München.

[42] REIGBER, Ch.(1974):
Bestimmungsgleichungen für die Resonanzparameter der Ordnung 13 aus der Analyse von Bahnen der Satelliten GEOS C, BEC und D1D, Veröff. d. Dt. Geod. Komm., Reihe C, Nr. 198 , München.

[43] SCHNEIDER, M. (1972):
Determinierung von Bewegungsproblemen durch zeitliche Randwerte, Forschungsbericht W 72-17, Bundesministerium f. Bildung und Wissenschaft, München.

[44] SCHNEIDER, M. (1968):
Zum Bahnbestimmungsproblem der Satellitengeodäsie, Forschungsbericht W 68-11, Bundesministerium f. wissensch. Forschung, München.

[45] BAUMGARTE, J. (1973):
Stabilization of the differential equations of Keplerian motion, in: Tapley B.D., Szebehely,V. (eds.): Recent advances in Dynamical Astronomy, Reidel Publishing Company, Dordrecht –Holland.