

# Automatisierte Konstruktion von Zahnradgetrieben für die Herstellung mittels Rapid-Prototyping-Verfahren

Mattias F. Träger \*; Erwin Krohmer \*; Yannick S. Krieger \*;  
Tim C. Lüth \*

\* Technische Universität München

Lehrstuhl für Mikrotechnik und Medizingerätetechnik (MIMED)  
mattias.traeger@tum.de, yannick.krieger@tum.de, tim.lueth@tum.de

## Kurzfassung

Mit Rapid-Prototyping-Verfahren (RP) lassen sich aus virtuellen, dreidimensionalen Modellen in kurzer Zeit physische Funktionsmuster und Prototypen herstellen. Sind darin Zahnradgetriebe enthalten, werden in der Regel Normteile oder teure Sonderanfertigungen eingesetzt. Stattdessen können die Elemente eines Zahnradgetriebes ebenfalls direkt mit RP-Verfahren hergestellt werden. Hierzu benötigt man 3D-Daten, was im Fall von Zahnrädern aufwändig sein kann. In diesem Artikel wird ein in Matlab implementierter Konstruktionsalgorithmus vorgestellt, mit dem man Zahnradgetriebe anhand weniger, leicht verständlicher Vorgaben automatisch auslegen und STL-Dateien für das RP erzeugen kann.

## Abstract

Using Rapid-Prototyping (RP) technologies it is possible to manufacture physical functional models or prototypes based on virtual, three-dimensional models. If gear drives are installed, standard parts or costly special-designs are being usually used. Instead of that, elements needed for the gear drive can be manufactured likewise using RP technologies. Therefore 3D-data are needed, which can be complex regarding the gearwheels. In this article we present a design algorithm implemented in Matlab for the automatic calculation of gear-drives based on a few, easily understandable parameters and the generation of STL-files needed RP.

# 1 Einführung

Prototypen sind im Maschinenbau vereinfachte Modelle einzelner Bauteile oder ganzer Produkte, die unter anderem dazu dienen Konzepte und Ideen zu präsentieren und zu diskutieren, die Umsetzbarkeit einer Serienproduktion zu prüfen oder konzeptionelle Fehler frühzeitig zu erkennen. Zur Herstellung von Prototypen werden häufig Verfahren aus dem Bereich des Rapid-Prototyping (RP) eingesetzt, womit in aller Regel additive Fertigungsverfahren gemeint sind. Bei der additiven Fertigung (AM, engl. *additive manufacturing*) – auch als generative Fertigung bezeichnet – wird ein physisches Objekt aus formlosem Ausgangsmaterial (flüssig, pulverförmig etc.) hergestellt. Dazu wird ein 3D-Modell in einzelne Schichten zerlegt, die beim AM nacheinander hergestellt werden und das Bauteil so von unten nach oben „wächst“. Der Industriestandard zum Speichern und Übertragung der 3D-Modelle ist dabei das STL-Format (STereoLithography), in dem die Modell-Oberflächen mit Dreiecksflächen beschrieben werden. [1–4]

Prototypen können zur Beurteilung verschiedener Aspekte dienen: Rein statische Eigenschaften bezüglich Design und Ergonomie einerseits und funktionale Eigenschaften wie die Übertragung von Bewegungen andererseits. Bei letzteren spricht man auch von funktionalen Prototypen oder von Funktionsmustern, wenn man sich nur auf einen bestimmten Teil des gesamten Prototyps oder finalen Geräts beschränkt. Eine mögliche Funktion ist die Übertragung und Umformung einer Rotationsbewegung mit einem Zahnradgetriebe. Stellt man einen funktionalen Prototypen mittels AM her, kann man beispielsweise an den entsprechenden Stellen Platz für ein Zahnradgetriebe mitsamt Lagern vorsehen und alle notwendigen Elemente nachträglich einbauen. Eine einfache Möglichkeit dafür besteht darin, das Zahnradgetriebe aus einzelnen Standardbauteilen zusammenzusetzen, wie man sie in Baukastensystemen wie AUTOMAT<sup>1</sup>, eitech<sup>2</sup> oder LEGO Technic<sup>3</sup> findet. Benötigt man für die Realisierung einer gewünschten Bewegungsübertragung allerdings Sonderverzahnungen, so müssen die entsprechenden Bauteile unter Umständen aufwendig und teuer hergestellt werden. Mit der immer weiter steigenden Genauigkeit des AM und den von der Bauteilkomplexität unabhängigen Fertigungskosten ist es heutzutage ohne weiteres möglich, funktionale Prototypen gemeinsam mit benötigten Zahnrädern mittels AM herzustellen [5–7].

So wird in [8] der Aufbau eines schaltbaren Getriebes beschrieben, bei dem die Zahnräder mittels FDM (Schmelzschichtung, engl. *Fused Deposition Modelling*) hergestellt wurden. In [9] wird die Berechnung sphärischer Zahnräder mit sich kreuzenden Radachsen und deren Herstellung mittels SL (Stereolithografie)

---

<sup>1</sup> Knotech GmbH, Erbes-Büdesheim, Deutschland

<sup>2</sup> Eichsfelder Technik eitech GmbH, Pfaffschweide, Deutschland

<sup>3</sup> LEGO System A/S, Billund, Dänemark

beschrieben. Um Zahnräder mittels AM herzustellen, benötigt man die 3D-Modelle in Form einer STL-Datei. Um diese nach eigenen Vorgaben selbst zu erzeugen gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Die manuelle Konstruktion eines Zahnrads in einem CAD-System.
2. Die Auslegung eines Zahnrads oder einer Zahnradpaarung mit speziellen Plugins für CAD-Systeme.
3. Die Auslegung eines Zahnrads, einer Zahnradpaarung oder eines Zahnradgetriebes mit (professioneller) Auslegungssoftware.

Aufgrund der komplexen Geometrie eines Zahnrads – insbesondere der Konturen der Zahnflanken, über die sich Zahnräder miteinander im Eingriff befinden und Bewegungen und Kräfte übertragen – benötigt man für die manuelle Konstruktion in CAD-Systemen fundierte Kenntnisse. Für die Auslegung ganzer Getriebe ist viel Erfahrung notwendig und unterstützende Auslegungssoftware optimiert in der Regel automatisch Details zuvor manuell definierter Geometrien [10].

Möchte man schnell zu einem Ergebnis kommen und zwischen verschiedenen Verzahnungen (gerade-, schräg-, pfeilverzahnt, evolventisch, zyklodisch etc.) und Zahnradarten (Stirnrad, Schneckenrad, Kegelrad, Kronenrad) wechseln, bieten sich entsprechende Plugins für CAD-Systeme an. Ein Beispiel ist das Plugin ZaRaGen (Zahnradgenerator)<sup>4</sup> für Catia<sup>5</sup>. Über eine Benutzeroberfläche können verschiedene Parameter vorgegeben und evolventische Stirnräder gerade-, oder schräg-, innen-, oder außenverzahnt konstruiert werden. Das CAD-System Autodesk Inventor Professional<sup>6</sup> hat mit dem Design Accelerator ein integriertes Plugin, mit dem sich Zahnradpaarungen evolventisch verzahnter Stirnräder erzeugen und berechnen lassen (ebenfalls gerade-, oder schräg-, innen-, oder außenverzahnt).

Im Bereich der professionellen Auslegungssoftware finden sich verschiedene Ansätze, für die man fundierte Kenntnisse und einige Erfahrung auf dem Gebiet der Zahnradgetriebe haben sollte. Manche Systeme sind primär dafür gedacht den Festigkeitsnachweis einzelner Zahnräder oder ganzer Zahnradgetriebe zu erbringen, wie die kostenlosen Excel-Kalkulationstabellen GeoStirn oder GeoStirn-P<sup>7</sup>. Als Ausgabe erhält man ein umfangreiches Datenblatt und 2D-Zeichnungsdaten im DXF-Format zur manuellen Weiterverarbeitung in einem CAD-System. Professionelle Softwaresysteme wie KISSsoft mit den Erweiterungen KISSsys und GPK (Gearbox Package)<sup>8</sup> bieten umfangreiche Möglichkeiten vollständige Getriebe auszulegen, nachzurechnen, nach bestimmten Kriterien zu optimieren und zu visualisieren. Ausgabeformate sind

---

<sup>4</sup> Prof. Dr.-Ing. Bernd Schwarze der Hochschule Osnabrück, Deutschland

<sup>5</sup> Dassault Systèmes, Vélizy-Villacoublay, Frankreich

<sup>6</sup> Autodesk Inc., San Rafael, CA, USA

<sup>7</sup> Prof. Dr.-Ing Manfred Anzinger, Fakultät 09 WI, Hochschule München, Deutschland

<sup>8</sup> KISS Soft AG, Bubikon, Schweiz

die 3D-Formate STEP oder IGES, die in gängigen CAD-Systemen weiter verarbeitet werden können.

Die oben vorgestellten Lösungen zur Auslegung von Zahnradgetrieben und einzelner Zahnräder sind bei weitem nicht vollständig. Andere, hier nicht erwähnte Softwaresysteme oder Kalkulationstabellen verfolgen ähnliche Ansätze. Im Hinblick auf das RP von Zahnradgetrieben mittels AM erhält man allerdings nie direkt STL-Dateien, sondern 2D- oder 3D-Dateien, die in CAD-Systemen manuell weiterverarbeitet oder umgewandelt werden müssen<sup>9</sup>.

## 1.1 Selektives Lasersintern als Beispiel für AM-Verfahren

Mittlerweile existiert eine Vielzahl an verfügbaren AM-Verfahren. In diesem Artikel wird exemplarisch das von uns verwendete selektive Lasersintern (SLS) von Polyamid betrachtet. Beim SLS (Abb. 1) wird ein Bauteil aus pulverförmigem Ausgangsmaterial Schicht für Schicht hergestellt. Das Pulver wird dazu aus einem Vorratsbehälter (2) mit einem Beschichter (1) auf den Bauraum (9) aufgetragen und bis knapp unterhalb der Schmelztemperatur erwärmt. Ein Laserstrahl (3) wird über Spiegel (4) so abgelenkt, dass der Laserfokus die aktuell herzustellende Schicht des Bauteils auf der zuletzt aufgetragenen Pulverschicht abfährt. Durch die Energie des Laserstrahls schmilzt das bereits erwärmte Pulver auf und verfestigt sich beim Abkühlen (5). Die Bauplattform (9) senkt sich um eine Schichthöhe ab (typischerweise  $\Delta z \approx 0,1\text{mm}$ ) und der Prozess wiederholt sich, bis aus den einzelnen Schichten (5) das gesamte Bauteil (6) von unten nach oben hergestellt ist. Das fertige Bauteil wird nach dem Abkühlen aus dem Pulverbett entnommen und von nicht verschmolzenem Pulver befreit, typischerweise durch Sandstrahlen.

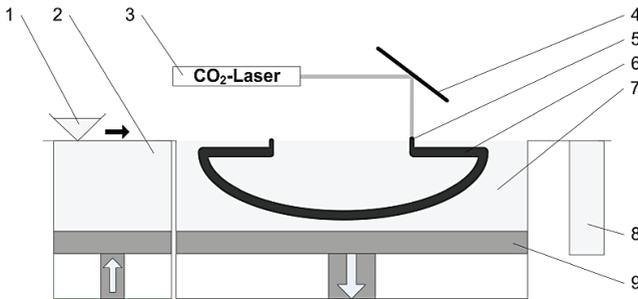


Abb. 1: Prinzipdarstellung des selektiven Lasersinterns (SLS): (1) Beschichter, (2) Pulvervorratsbehälter, (3) CO<sub>2</sub>-Laser, (4) X-Y-Scanner, (5) Verfestigungszone, (6) generiertes Bauteil, (7) Stützkonstruktion, (8) Überlaufbehälter, (9) Hubtisch. (Entnommen aus [11])

<sup>9</sup> Einzige Ausnahme: Das Programm Gearotic Motion für Bastler und Hobbykonstrukteure exportiert Konturen als 2,5D STL-Dateien (<http://www.gearotic.com/>).

## 2 Automatisierte Konstruktion von Zahnradgetrieben

In diesem Artikel wird ein Konzept vorgestellt, mit dem Nutzer, die mit Zahnradgetrieben wenig vertraut sind, durch Vorgabe weniger Parameter eine Zahnradpaarung mit Evolventenverzahnung spezifizieren können. Darauf basierend werden automatisch 3D-Oberflächenmodelle der benötigten Zahnräder mit oder ohne Wellen berechnet, die für die Fertigungstoleranzen und Randbedingungen des SLS von Polyamid optimiert sind<sup>10</sup> und als STL-Datei gespeichert. Auf diese Weise soll es möglich sein, eigene konstruktive Ideen mit Zahnradgetrieben im Sinne des RP schnell und einfach umzusetzen.

Ausgangspunkt ist in diesem Fall ein Anwender, der das Funktionsmuster eines Zahnradgetriebes aufbauen oder in einen funktionalen Prototypen einbauen möchte. Die Spezifikation des Zahnradgetriebes soll möglichst einfach mit leicht verständlichen Parametern erfolgen und die benötigten Bauteile sollen mittels AM hergestellt werden (vgl. Abb. 2):

1. Der Anwender spezifiziert das Zahnradgetriebe über:
  - a. Die Lage der Radachsen im Raum (Achsabstand  $a$  und Kreuzungswinkel  $\Sigma$ ),
  - b. Die Bewegungsübertragung (Übersetzung  $i$ , Drehmoment  $T_1$  und Drehzahl  $n_1$  am Antrieb<sup>11</sup>)
2. Über die Wahl eines AM-Verfahren samt Material gibt man vor<sup>12</sup>:
  - a. Die Materialeigenschaften (E-Modul  $E$ , Zugfestigkeit  $\sigma_t$ , Reibungskoeffizient  $\mu$ , Querkontraktionszahl  $\nu$ ),
  - b. Die Fertigungstoleranzen bzw. Randbedingungen des AM, wie minimal herstellbare Wandstärke  $w_{min}$ , minimal einzuhaltendes Spaltmaß  $s_{min}$ , Auflösung in der Höhe (z.B. Schichthöhe  $\Delta z$ ) Auflösung in der Ebene (z.B. Durchmesser des Laserfokus  $d_{laser}$ ).
3. Diese Parameter werden von einem Konstruktionsalgorithmus verarbeitet und die STL-Dateien des Zahnradgetriebes erzeugt.
4. Die STL-Dateien werden mit dem gewünschten AM-Verfahren hergestellt und die fertigen Bauteile nach dem Abkühlen z.B. durch Sandstrahlen nachbearbeitet.
5. Mit den Bauteilen kann das Zahnradgetriebe als Funktionsmuster aufgebaut oder in einen funktionalen Prototypen eingebaut werden.

---

<sup>10</sup> Für diese Arbeit wird die SLS-Anlage Formiga P100 mit dem Polyamidpulver PA 2200 verwendet (EOS GmbH, Krailling, Deutschland).

<sup>11</sup> Das Drehmoment wird zur Auslegung der Wellen und die Drehzahl zur Berechnung der Lebensdauer verwendet. Beides wird in diesem Artikel nicht näher erläutert.

<sup>12</sup> Die Parameter sind beispielhaft für das SLS von Polyamid.

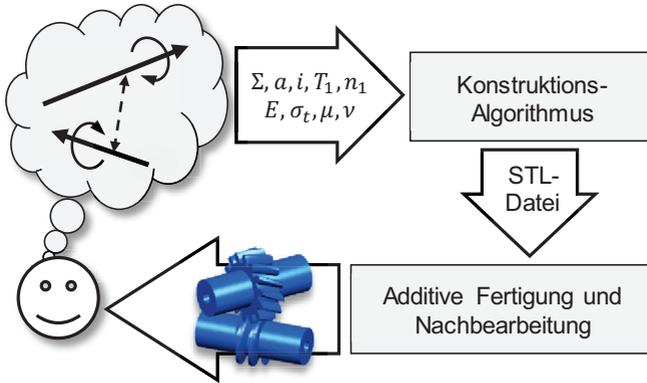


Abb. 2: Von der Idee zum Funktionsmuster – Ablauf des Entwurfsprozesses.

## 2.1 Konstruktionsalgorithmus für Zahnradgetriebe

Bei dem im Folgenden vorgestellten Vorgehen zur Auslegungsberechnung von Zahnradgetrieben geht es nicht darum diese zu optimieren, sondern darum ein Zahnradgetriebe mit wenigen Parametern zu spezifizieren und ein umlauffähiges Funktionsmuster herzustellen. Wir beschränken uns dabei auf die Auslegung einfacher Getriebestufen mit Paarungen von Stirnrädern, Schraubrädern und Schneckenrädern. Die vorzugebenden Parameter zur Spezifikation und die daraus zu berechnenden Größen sind in Tab. 1 aufgelistet.

Tab. 1: Vorzugebende Parameter für die automatisierte Konstruktion eines Zahnradgetriebes. Die Indizes bezeichnen Größen an An- (1) und Abtrieb (2).

Verwendung	Parameter	Formelzeichen	Einheit
Erforderliche Vorgabe	Achsabstand	$a$	[mm]
	Kreuzungswinkel	$\Sigma$	[°]
	Übersetzung	$i$	[-]
Optionale Vorgabe	Drehmoment Antrieb	$T_1$	[Nm]
	Drehzahl Antrieb	$n_1$	[min <sup>-1</sup> ]
Indirekte Vorgabe über Material	E-Modul	$E$	[N/mm <sup>2</sup> ]
	Reibungszahl	$\mu$	[-]
	Zugfestigkeit	$\sigma_t$	[N/mm <sup>2</sup> ]
	Querkontraktionszahl	$\nu$	[-]

Verwendung	Parameter	Formelzeichen	Einheit
Berechnete Kenngrößen der Zahnräder	Zähnezahl	$z_{1/2}$	[-]
	Modul	$m$	[mm]
	Zahnradbreite	$b_{1/2}$	[mm]
	Eingriffswinkel	$\alpha_{1/2}$	[°]
	Schrägungswinkel	$\beta_{1/2}$	[°]

Der erste Schritt der Auslegungsberechnung besteht darin, über die vorgegebene Übersetzung  $i = z_2/z_1$  die Zähnezahl des antreibenden Zahnrads  $z_1$  zu bestimmen. In der Literatur wird für Übersetzungen im Bereich  $i \in [1; 5]$  und einem Kreuzungswinkel  $\Sigma > 0^\circ$  der Einsatz von Schraubradpaarungen empfohlen [12], was in dem hier vorgestellten Konstruktionsalgorithmus auch als Grundlage für Paarungen geradzahnter Stirnräder mit  $\Sigma = 0^\circ$  gilt. In Tab. 2 sind für verschiedene Übersetzungen  $i$  empfohlene Zähnezahlen  $z_1$  und Größenverhältnisse zwischen Wälzkreisdurchmesser  $d_1$  und Achsabstand  $a$  angegeben.

Tab. 2: Richtwerte nach [12] zur Auslegung des antreibenden Zahnrads von Schraubradgetrieben für Übersetzungen im Bereich  $i \in [1; 5]$ .

Übersetzung $i$	1 ... 2	2 ... 3	3 ... 4	4 ... 5
Zähnezahl $z_1$	20 ... 16	15 ... 12	12 ... 10	10 ... 8
Verhältnis $y = d_1/a$	1 ... 0,7	0,7 ... 0,55	0,55 ... 0,5	

Bei Übersetzungen  $i > 5$  sind nach [13] Paarungen von Schnecke und Stirnrad zu bevorzugen, wobei für die Zähnezahl  $z_1$  der antreibenden Schnecke näherungsweise gilt:

$$z_1 \approx \frac{1}{i} \cdot (7 + 2,4 \cdot \sqrt{a}), z_1 \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Für die Zähnezahl  $z_2$  des angetriebenen Zahnrads gilt damit:

$$z_2 = i \cdot z_1, z_2 \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Der aufwändigste Teil der Berechnung der Zahnräder ist das Bestimmen des Schrägungswinkels  $\beta_{1/2}$ . Für den hier gewählten Ansatz wird das Maximum des Verzahnungswirkungsgrads  $\eta_Z$  in Abhängigkeit von  $\beta_1$  gesucht. Es gilt nach [13]:

$$\eta_Z(\beta_1) = 1 - \frac{v_{gm}}{v_{t1}}(\beta_1) \cdot \frac{\mu_m \cdot \cos \rho^*}{\cos \alpha_n \cdot \cos(\beta_1 - \rho^*)} \quad (3)$$

$\alpha_n$  bezeichnet den Eingriffswinkel des Zahnrads im Normalschnitt<sup>13</sup> und wird auf den Standardwert  $\alpha_n = 20^\circ$  nach DIN 867 [14] gesetzt.  $\mu_m$  bezeichnet die mittlere Zahnreibungszahl. Für das verwendete Polyamid PA 2200 wird basierend auf experimentellen Untersuchungen aus [15] näherungsweise  $\mu_m \approx 0,3$  gewählt. Damit kann man nach [16] den fiktiven Reibwinkel  $\rho^*$  berechnen:

$$\rho^* = \tan^{-1} \mu_m \quad (4)$$

Die beiden übrigen Größen  $v_{gm}(\beta_1)$  und  $v_{t1}(\beta_1)$  in (3) werden über Betrachtungen der Zahnradgeometrien und der Gleitgeschwindigkeiten zwischen den Zahnflanken berechnet. Die Gleichungen nach [13] werden im Folgenden aufeinander aufbauend erklärt. Die Abhängigkeit vom Schrägungswinkel wird mit der Schreibweise ( $\beta_1$ ) veranschaulicht. Es bestehen folgende grundlegenden Zusammenhänge:

$$\Sigma = \beta_1 + \beta_2 \quad (5)$$

$$d_{1/2}(\beta_1) = \frac{m_n \cdot z_{1/2}}{\cos \beta_{1/2}} \quad (6)$$

$$a(\beta_1) = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (7)$$

Zunächst wird der Normalmodul  $m_n$  der Zahnradpaarung berechnet. Eine Abhängigkeit von  $\beta_2$  lässt sich mit (5) auf  $\beta_1$  zurückführen.

$$m_n(\beta_1) = \frac{2 \cdot a}{\frac{z_1}{\cos(\beta_1)} + \frac{z_2}{\cos(\beta_2)}} = \frac{2 \cdot a}{\frac{z_1}{\cos(\beta_1)} + \frac{i \cdot z_1}{\cos(\Sigma - \beta_1)}} \quad (8)$$

Die Eingriffswinkel im Stirnschnitt  $\alpha_{t_{1/2}}$  betragen (mit  $\alpha_n = 20^\circ$ ):

$$\alpha_{t_{1/2}}(\beta_1) = \tan^{-1} \left( \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta_{1/2}} \right) \quad (9)$$

Mit (9) kann man nun die Schrägungswinkel  $\beta_{b_{1/2}}$  am Grundkreis bestimmen:

$$\beta_{b_{1/2}}(\beta_1) = \cos^{-1} \left( \frac{\sin \alpha_n}{\sin \alpha_{t_{1/2}}} \right) \quad (10)$$

Mit den bisher berechneten Größen lassen sich die Durchmesser von Grundkreis  $d_{b_{1/2}}$ , Kopfkreis  $d_{a_{1/2}}$  und Fußkreis  $d_{f_{1/2}}$  der Stirnräder berechnen, wobei nach DIN 867 [14] Standardwerte gesetzt werden für Kopfspiel ( $c_p = 0,25 \cdot m$ ), Kopfhöhen-Faktor ( $h_{aP}^* = 1$ ) und Fußhöhen-Faktor ( $h_{fP}^* = 1$ ):

<sup>13</sup> Bei schrägverzahnten Zahnrädern werden Größen im Normalschnitt mit Index  $n$  und Größen im Stirnschnitt mit Index  $t$  bezeichnet.

$$d_{b_{1/2}}(\beta_1) = d_{1/2} \cdot \cos \alpha_{t_{1/2}} \quad (11)$$

$$d_{a_{1/2}}(\beta_1) = d_{1/2} + 2 \cdot m_n \quad (12)$$

$$d_{f_{1/2}}(\beta_1) = d_{1/2} - 2,5 \cdot m_n \quad (13)$$

Für die später folgenden Berechnungen der Gleitgeschwindigkeiten benötigt man zusätzlich die sogenannten Kopfeingriffsstrecken  $g_{an_{1/2}}$  und Fußeingriffsstrecken  $g_{fn_{1/2}}$ . Das sind die Strecken, auf denen sich bei der Bewegungsübertragung die Zahnköpfe bzw. Zahnfüße eines Zahnrads mit dem Gegenrad im Eingriff befinden.

$$g_{an_{1/2}}(\beta_1) = 0,5 \cdot \frac{\sqrt{d_{a_{1/2}}^2 - d_{b_{1/2}}^2} - \sqrt{d_{1/2}^2 - d_{b_{1/2}}^2}}{\cos \beta_{b_{1/2}}} \quad (14)$$

$$g_{fn_{1/2}}(\beta_1) = 0,5 \cdot \frac{\sqrt{d_{a_{1/2}}^2 - d_{b_{1/2}}^2} - \sqrt{d_{a_{1/2}}^2 - d_{1/2}^2}}{\cos \beta_{b_{1/2}}} \quad (15)$$

Die Kopfeingriffsstrecken nach (14) ergeben die gesamte Eingriffsstrecke  $\overline{AE}$ :

$$\overline{AE}(\beta_1) = g_{an_1} + g_{an_2} \quad (16)$$

Nun werden die Gleitgeschwindigkeiten zwischen den Zahnflanken nach Abb. 3 betrachtet. Dazu wird die Bewegung der Zahnräder über eine Drehzahl  $n_1 [\text{min}^{-1}]$  am Antrieb beschrieben, die für die Herleitung notwendig ist, sich allerdings in Gleichung (3) für  $\eta_Z(\beta_1)$  wieder heraus kürzt. Mit  $d_1 [\text{mm}]$  gilt für die Umfangsgeschwindigkeit  $v_{t_1} [\text{m/s}]$  am antreibenden Zahnrad:

$$v_{t_1}(\beta_1, n_1) = d_1 \cdot n_1 \cdot \frac{\pi}{6 \cdot 10^4} \quad (17)$$

Damit beträgt die Umfangsgeschwindigkeit  $v_{t_2} [\text{m/s}]$  des angetriebenen Rads:

$$v_{t_2}(\beta_1, n_1) = v_{t_1} \cdot \frac{\cos|\beta_1|}{\cos|\beta_2|} \quad (18)$$

Mit Gleichung (17) kann man außerdem die relative Gleitgeschwindigkeit  $v_{gs}$  zwischen beiden Zahnflanken im Schraubpunkt<sup>14</sup> bestimmen:

$$v_{gs}(\beta_1, n_1) = v_{t_1} \cdot \frac{\sin|\Sigma|}{\cos|\beta_2|} \quad (19)$$

Die Gleitgeschwindigkeiten der Zahnräder betragen dann:

---

<sup>14</sup> Punkt auf dem Gemeinlot der Radachsen, in dem sich die Zähne im Eingriff befinden.

$$v_{g_1}(\beta_1, n_1) = \frac{2 \cdot v_{t_1} \cdot g_{an_1} \cdot \cos \beta_{b_1}}{d_1} \quad (20)$$

$$v_{g_2}(\beta_1, n_1) = \frac{2 \cdot v_{t_1} \cdot g_{fn_2} \cdot \cos \beta_{b_2}}{d_2} \quad (21)$$

Diese Gleitgeschwindigkeiten kann man, wie in Abb. 3 rechts dargestellt, über den Winkel  $\gamma$  in Anteile in Richtung von Zahnhöhe und Zahnbreite aufteilen:

$$\gamma_{1/2}(\beta_1) = \tan^{-1}(\sin \alpha_n \cdot \tan \beta_{1/2}) \quad (22)$$

Damit lautet der Anteil der Gleitgeschwindigkeit an den Zahnrädern in Richtung der Zahnhöhe  $v_{g\alpha}$  und der Zahnbreite  $v_{g\beta}$ :

$$v_{g\alpha_{1/2}}(\beta_1, n_1) = v_{g_{1/2}} \cdot \cos \gamma_{1/2} + v_{g_{2/1}} \cdot \cos \gamma_{2/1} \quad (23)$$

$$v_{g\beta_{1/2}}(\beta_1, n_1) = v_{g_s} + v_{g_{1/2}} \cdot \sin \gamma_{1/2} - v_{g_{2/1}} \cdot \sin \gamma_{2/1} \quad (24)$$

Die Gesamtgeschwindigkeit  $v_{g\gamma_1}$  beträgt damit:

$$v_{g\gamma_{1/2}}(\beta_1, n_1) = \sqrt{v_{g\alpha_{1/2}}^2 + v_{g\beta_{1/2}}^2} \quad (25)$$

Mit den Gleichungen (17) bis (25) lässt sich nun die mittlere Gesamtgeschwindigkeit näherungsweise berechnen:

$$v_{gm}(\beta_1, n_1) \approx v_{g_s} + \frac{(v_{g\gamma_1} - v_{g_s})^2 + (v_{g\gamma_2} - v_{g_s})^2}{2 \cdot (v_{g\gamma_1} + v_{g\gamma_2} - 2 \cdot v_{g_s})} \quad (26)$$

Über den Term  $v_{gm}(\beta_1, n_1)/v_{t_1}(\beta_1, n_1)$  in Gleichung (3) kürzt sich die Abhängigkeit von der Drehzahl  $n_1$  wieder heraus, so dass der Wirkungsgrad  $\eta_Z$  tatsächlich nur vom Schrägungswinkel  $\beta_1$  abhängt. Für das Maximum der Funktion  $\eta_Z(\beta_1)$  erhält man den Schrägungswinkel  $\beta_1$  des antreibenden Zahnrads und mit Gleichung (5) den Schrägungswinkel  $\beta_2$ .

Für Übersetzungen  $i > 5$  wird nach [13], wie oben bereits erwähnt, am Antrieb eine Schnecke verwendet. Bei kleinen Zähnezahlen und kleinen Schrägungswinkeln  $\beta_1$  erhält man kleine Durchmesser am Fußkreis, d.h. einen kleinen Kern der Schnecke. Um ausreichend stabile Schnecken zu erhalten, empfiehlt es sich, den Schrägungswinkel  $\beta_1$  nicht zu klein zu wählen. Für die Implementierung des Konstruktionsalgorithmus haben wir einen praxistauglichen Minimalwert von  $60^\circ$  bzw.  $\cos 60^\circ = 0,5$  für den Schrägungswinkel der Schnecke gewählt und mit verschiedenen gesinterten Schnecken überprüft:

$$\beta_{1, Schnecke} \geq 60^\circ, \text{ für } i > 5 \quad (27)$$

Abschließend kann man mit Gleichung (8) den Modul  $m_n$  und mit Gleichung (6) die Wälzkreisdurchmesser  $d_{1/2}$ , berechnen. Die mindestens erforderlichen Zahnradbreiten  $b_{\min_{1/2}}$  berechnen sich mit der Eingriffsstrecke  $\overline{AE}$  nach

Gleichung (16) wie folgt, wobei für zusätzliche Seitenstabilität der Zähne nach [13]  $b_{\min_{1/2}} \geq 6 \cdot m_n$  gelten soll:

$$b_{\min_{1/2}}(\beta_1) = \overline{AE} \cdot \sin|\beta_{b_{1/2}}| \geq 6 \cdot m_n \quad (28)$$

Mit den so bestimmten geometrischen Kenngrößen können die Oberflächenmodelle der Zahnräder nach dem in [17] vorgestellten Verfahren berechnet und als STL-Datei gespeichert werden.

Bei Bedarf kann diese Auslegungsrechnung noch um die Vorgabe eines zu übertragenden Drehmoments und das Ergänzen von Wellen erweitert werden. Die dazu notwendigen Tragfähigkeitsberechnungen der Zahnräder (Flankenpressung und Zahnfußfestigkeit) und der Wellen werden in diesem Artikel nicht weiter erklärt, sind jedoch in dem später vorgestellten Konstruktionsalgorithmus implementiert.

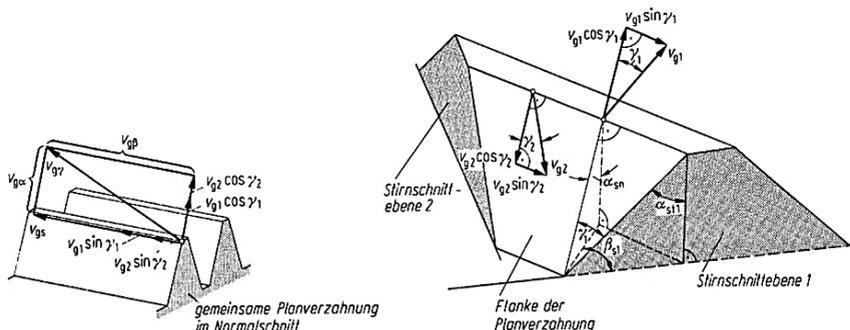


Abb. 3: Links: Anteile der Gleitgeschwindigkeiten. Rechts: Anteile des Profilleitens. (Entnommen aus [13])

## 2.2 Umsetzung in Matlab

Das oben vorgestellte Vorgehen zum Auslegen von Zahnradpaarungen wurde als Konstruktionsalgorithmus in Matlab<sup>15</sup> implementiert. Matlab wurde gewählt, weil es als technische Berechnungssoftware in Universität und Forschung weit verbreitet ist und viele mathematische Funktionen zur Verfügung stellt, wodurch sich Algorithmen schnell und einfach umsetzen und testen lassen. So ist im Laufe der Zeit eine Toolbox mit mehreren hundert Funktionen rund um das automatisierte Konstruieren entstanden<sup>16</sup>, in die sich das Konzept der automatisierten Auslegung von Zahnradgetrieben einfügt. Vorarbeiten zur Konstruktion in Matlab sind in [17–19] beschrieben.

<sup>15</sup> MATLAB R2015a (The MathWorks, Inc., Natick, MA, USA)

<sup>16</sup> SG-Library (Prof. Tim C. Lüth, Lehrstuhl für Mikrotechnik und Medizingerätetechnik (MIMED), Technische Universität München, Deutschland)

Anhand eines einfachen Beispiels wird im Folgenden die Vorgehensweise zur Auslegung eines Zahnradgetriebes und das Erzeugen der STL-Dateien beschrieben. Für den Demonstrationsstand in Abb. 4 soll eine Schraubradpaarung mit dem Übersetzungsverhältnis  $i = 6$  ausgelegt und gesintert werden. Der Demonstrationsstand hat folgende Abmessungen:

- Kreuzungswinkel  $\Sigma = 30^\circ$
- Achsabstand  $a = -15$  mm
- Länge der Antriebswelle  $l_1 = 46$  mm
- Länge der Abtriebswelle  $l_2 = 46$  mm
- Durchmesser der Antriebswelle  $d_{o,1} = 6$  mm
- Durchmesser der Abtriebswelle  $d_{o,2} = 6$  mm

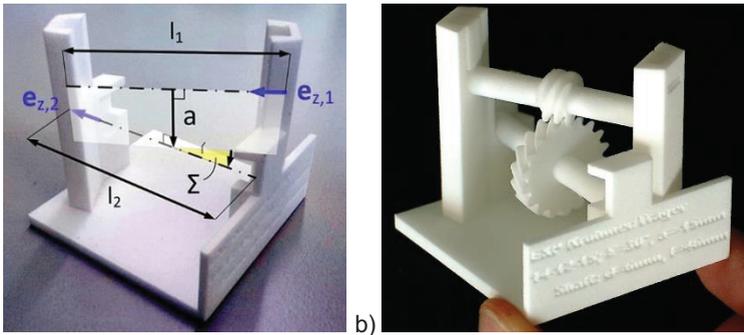


Abb. 4: a) Demonstrationsstand für Schraubradpaarungen mit Kreuzungswinkel  $\Sigma$ , Achsabstand  $a$ , Vektoren der Radachsen von Antrieb  $e_{z,1}$  und Abtrieb  $e_{z,2}$  und Länge der Wellen  $l_1, l_2$ . b) Gesintertes Funktionsmuster einer automatisch konstruierten Schraubradpaarung mit der Übersetzung  $i = 6$ .

Die Parameter werden zunächst in drei Strukturen definiert, PG spezifiziert dabei Parameter, die für beide Zahnräder gelten und P1 bzw. P2 spezifizieren Parameter für An- und Abtrieb:

```
PG = struct('Sigma',30,'a',-15,'trans',6)
P1 = struct('lshaft',46,'do',6), P2 = P1
```

Diese Parameterstrukturen werden an eine Auslegungsfunktion übergeben, in welcher der oben vorgestellte Konstruktionsalgorithmus implementiert ist. Als Ergebnis erhält man eine Solid Geometry (SG), in der die Punkte (Vertex-List VL) und Flächen (Facet-List FL) enthalten sind, die die Oberflächen der einzelnen Schraubräder samt Wellen beschreiben.

```
[SG1,SG2] = SGgearset(PG,P1,P2)
```

In `SGgearset` wird das Maximum des Wirkungsgrads nach (3) über die Matlab-Funktion `fminbnd` für einen Wertebereich von  $0^\circ \leq \beta_1 \leq 85^\circ$  ermittelt. Da `fminbnd` nach einem Minimum sucht, wird der in Abb. 5 dargestellte Verlauf von

$-\eta_z(\beta_1)$  verwendet. In Abb. 5 sieht man außerdem, wie für die Berechnung von  $\beta_1$  vorgegangen wird: Zunächst bestimmt man  $\beta_{1,optimal} = 34,0^\circ$  über den Wirkungsgrad. Da in dem hier vorgestellten Beispiel eine Übersetzung von  $i = 6$  realisiert werden soll, wird nach Gleichung (27)  $\beta_{1,Schnecke} = 60,0^\circ$  gesetzt. Beim Hinzufügen der Wellen darf außerdem der Fußkreis der Schnecke nicht kleiner sein als der gewünschte Wellendurchmesser. Gemeinsam mit der passenden Steigungsrichtung erhält man abschließend  $\beta_{1,Welle} = -70,7^\circ$ .

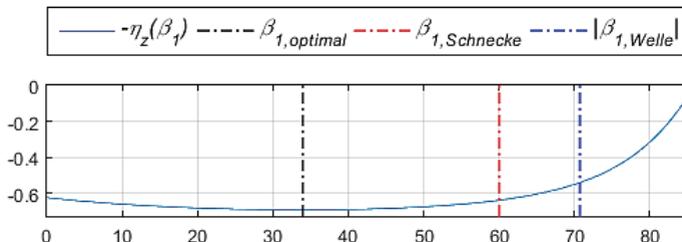


Abb. 5: Wirkungsgrad  $-\eta_z(0 \leq \beta_1 \leq 85^\circ)$  einer Schraubradpaarung mit  $\Sigma = 30^\circ$ ,  $a = -15$  mm,  $i = 6$  und  $\eta_z(\beta_{1,optimal} = 34,0^\circ) = 0,69$ ,  $\eta_z(\beta_{1,Schnecke} = 60,0^\circ) = 0,64$ ,  $\eta_z(|\beta_{1,Welle}| = |-70,7^\circ|) = 0,54$ .

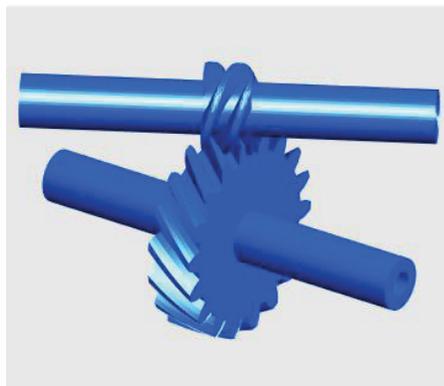
Die mit `SGgears` berechneten Parameter der Zahnräder und Wellen mit den Oberflächen kann man sich wie folgt anzeigen lassen (Abb. 6):

```
previewGears(SG1,SG2)
```

In einem letzten Schritt werden die Oberflächen mit den Stützpunkten (VL) und Flächen (FL) in eine STL-Datei geschrieben (Abb. 7):

```
SGwriteSTL(SG1,'Part1'), SGwriteSTL(SG2,'Part2')
```

Das gesinterte Funktionsmuster als Ergebnis der automatisiert konstruierten Schraubradpaarung ist in Abb. 4-b zu sehen.



Transmission: 6.00	
Crossing angle: 30.0 °	
Axis distance: -15.0 mm	
Normal module: 0.91 mm	
Pressure angle: 20.0 °	
Drive gear:	
Number of teeth: 3	Height: 5.5 mm
Addendum circle: 10.1	Bore/d_shaft: 6.0 mm
Helical angle: -70.7 °	Shaft length: 46.0
Output gear:	
Number of teeth: 18	Height: 5.5 mm
Addendum circle: 23.5	Bore/d_shaft: 6.0 mm
Helical angle: 40.7 °	Shaft length: 46.0

Abb. 6: Mit `SGgears` automatisiert konstruierte Schraubradpaarung.

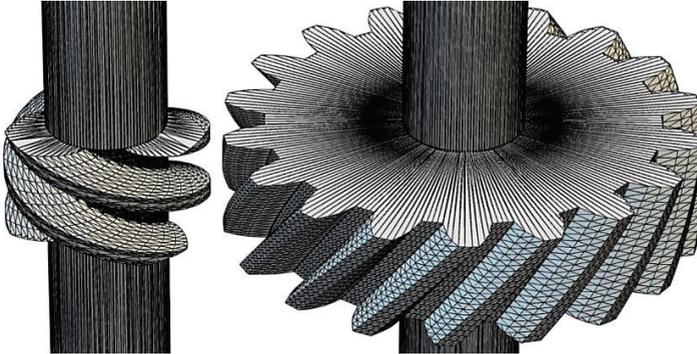


Abb. 7: Darstellung der STL-Dateien einer automatisiert konstruierten Schraubradpaarung. Die Oberflächen werden mit Dreiecksflächen beschrieben.

### 3 Herstellungsgrenzen lasergesinterter Zahnräder

Bei der automatisierten Konstruktion von Zahnradgetrieben für die additive Fertigung ist es wichtig zu wissen, welche Zahnradgeometrien mit einem gewünschten Verfahren überhaupt herstellbar sind. Durch die begrenzte Auflösung stoßen die Verfahren bei zu kleinen Abmessungen an ihre Grenzen. Für die Herstellbarkeit von gerad- und schrägverzahnten Zahnrädern haben wir zwei charakteristische Größen identifiziert, mit denen sich die Herstellbarkeit der Zahnräder während der automatisierten Konstruktion überprüfen lässt und Warnungen an den Nutzer ausgegeben werden können.

Bei geradverzahnten Stirnrädern ist die Herstellbarkeit hauptsächlich abhängig von der Zahnkopfbreite  $s_a$ . Diese darf beim SLS nur so klein sein, dass der Laserstrahl mit Durchmesser  $d_{laser}$  noch in den Zahnkopf passt, ohne die Grenzen des Zahnes zu überschreiten (Abb. 8-a). Für die von uns verwendeten Zahnräder mit dem Standardwert für den Kopfhöhen-Faktor ( $h_{aP}^* = 1$ ) [14], kann man  $s_a$  mit der Involut-Funktion<sup>17</sup> wie folgt berechnen:

$$s_a = m_n \cdot (z + 2) \cdot \left( \frac{\pi}{2 \cdot z} + \text{inv } \alpha_n - \text{inv} \left( \cos^{-1} \left( \frac{m_n \cdot z \cdot \cos \alpha_n}{m_n \cdot (z + 2)} \right) \right) \right) \quad (29)$$

Die von uns verwendete SLS-Anlage hat einen Laserstrahldurchmesser von  $d_{laser} \approx 0,45$  mm. Der ermittelte Grenzwert für die minimale Zahnkopfbreite von Stirnrädern liegt bei  $s_{a,min} \approx 0,4$  mm. Für verschiedene Moduln, Eingriffswinkel und Zähnezahlen sind damit die Zahnkonturen per SLS noch so herstellbar, dass Bewegungen formschlüssig übertragen werden können.

<sup>17</sup> Die Involut-Funktion wird zur Berechnung von Evolventenverzahnungen verwendet und ist für den Bereich von  $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$  definiert als  $\text{inv}(\alpha^\circ) = \tan(\alpha^\circ) - (\alpha^\circ \cdot \pi)/180^\circ$ .

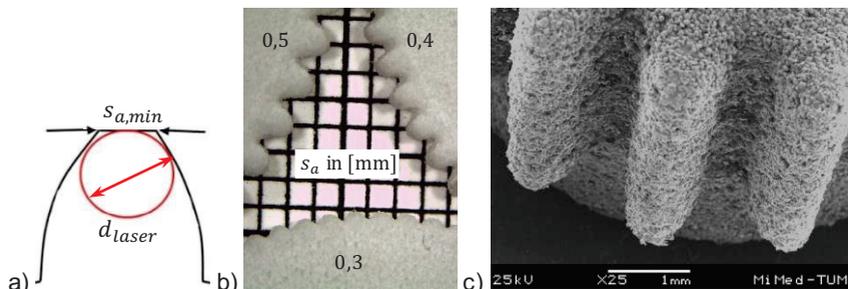


Abb. 8: a) Zusammenhang von  $d_{laser}$  und  $s_{a,min}$ , b) gesinterte Zahnräder ( $z = 70, \alpha = 15^\circ$ ), c) REM-Aufnahme ( $z = 25, \alpha = 20^\circ, m = 0,56 \text{ mm}, s_a = 0,4 \text{ mm}$ ).

Bei schrägverzahnten Stirnrädern ist deren Herstellbarkeit mit additiven Verfahren zusätzlich durch den Schrägungswinkel begrenzt. Bei zunehmender Schrägung verkleinert sich der Abstand zwischen den Flächen der Zahnflanken (Abb. 10-a). Gängige Konstruktionsempfehlungen für Bauteile, die per SLS hergestellt werden sollen, erwähnen einen Mindestabstand von 0,3 mm zwischen getrennten Flächen [20]. Wird dieser Abstand unterschritten, können die Flächen miteinander verschmelzen. Den Abstand zwischen den Zahnflanken einer Schrägverzahnung kann man mit der Lückenweite  $e_{tb}$  am Grundkreis  $d_b$  im Stirnschnitt über die Teilung  $p_{tb}$  und die Zahndicke  $s_{tb}$  berechnen. Der Grundkreis wird verwendet, da hier die evolventische Zahnflanke ihren Ursprung hat, über die sich die Zahnräder im Eingriff befinden. Mit dem Konstruktionsalgorithmus für die einzelnen Zahnräder kann es nach den Gleichungen (11) und (13) vorkommen, dass bei bestimmten Kombinationen von Schrägungswinkel  $\beta$ , Eingriffswinkel  $\alpha_n$  und Zähnezahl  $z$  der Fußkreis größer als der Grundkreis wird ( $d_f > d_b$ ):

$$1 - \frac{2,5}{z} \cdot \cos \beta - \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta} \right) \right) > 0 \quad (30)$$

In diesen Fällen ist in den nachfolgenden Gleichungen der Durchmesser des Grundkreises durch den des Fußkreises zu ersetzen ( $d_f = d_b$ ). Es gilt nach [21] für die Berechnungen am Grundkreis:

$$e_{tb} = p_{tb} - s_{tb} \quad (31)$$

$$p_{tb} = d_b \cdot \frac{\pi}{z} \quad (32)$$

$$s_{tb} = d_b \cdot \left( \frac{\pi}{2 \cdot z} + \text{inv } \alpha_t - \text{inv } \alpha_{tb} \right) \quad (33)$$

Mit den Gleichungen (9) bis (11) und (31) bis (33) erhält man über den Zusammenhang in (34) die Lückenweite am Grundkreis im Normalschnitt:

$$e_{nb} = e_{tb} \cdot \cos \beta_b \quad (34)$$

$$e_{nb} = d_b \left( \frac{\pi}{2 \cdot z} - \operatorname{inv} \alpha_t + \operatorname{inv} \alpha_{tb} \right) \cdot \cos \beta_b \quad (35)$$

Dabei wird  $\alpha_{tb}$  mit folgender Gleichung nach [21] berechnet:

$$\alpha_{tb} = \cos^{-1} \left( \frac{d}{d_b} \cdot \cos \alpha_t \right) \quad (36)$$

Für den Fall  $d_f > d_b$  nach Gleichung (30), werden in den Gleichungen (31) bis (36) die Größen nicht am Grundkreis, sondern am Fußkreis berechnet. Dazu werden in die Indizes  $b$  durch  $f$  ersetzt und die Berechnungen anstelle von  $d_b$  mit  $d_f$  durchgeführt. Für den Eingriffswinkel  $\alpha_{tf}$  (analog zu (36)) und den Schrägungswinkel  $\beta_f$  (nach Abb. 9 rechts) gilt dann:

$$\alpha_{tf} = \cos^{-1} \left( \frac{d}{d_f} \cdot \cos \alpha_t \right) \quad (37)$$

$$\beta_f = \tan^{-1} \left( \frac{d_f}{d} \cdot \tan \beta \right) \quad (38)$$

Ein Verlauf der Lückenweite im Normalschnitt  $e_{nb}(\beta)$  ist in Abb. 11 für vorgegebene Zähnezah und Eingriffswinkel dargestellt. Man erkennt, dass mit einer Vergrößerung des Schrägungswinkels  $\beta$  die Durchmesser wachsen, bis bei  $\beta_{\text{grenz}}$  der Fußkreis größer als der Grundkreis wird. Zur Ermittlung der kleinstmöglichen Lückenweite  $e_{nb,\text{min}}$  in Bezug auf eine Fertigung mittels SLS wurden Zahnradpaarungen mit verschiedenen Kombinationen von Parametern für Modul, Eingriffs- und Schrägungswinkel sowie Zähnezah entworfen. Die gesinterten Zahnräder wurden bei Einhaltung des vorgegeben Achsabstands auf Umlauffähigkeit getestet. Auf diese Weise wurde ein Minimalwert der Lückenweite am Grundkreis im Normalschnitt von  $e_{nb,\text{min}} \approx 0,35$  mm ermittelt.

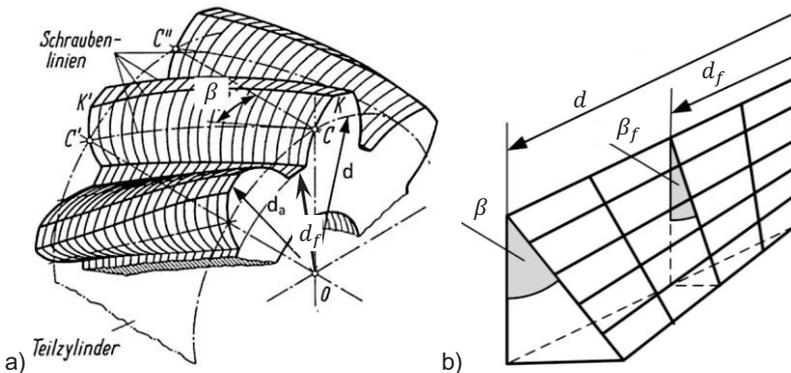


Abb. 9: a) Darstellung von Schrägungswinkeln und Durchmessern (Entnommen aus [21] und ergänzt). b) Veränderung des Schrägungswinkels im Stirnschnitt von der Radachse ( $d = 0$ ) bis zum Wälzkreisdurchmesser ( $d = d$ ).

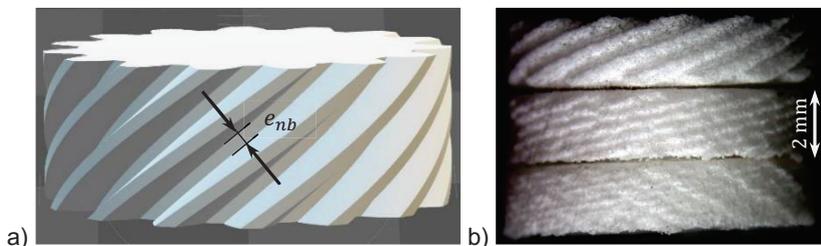


Abb. 10: a) Lückenweite  $e_{nb}$  im Normalschnitt, b) Testreihe gesinterter Zahnräder mit  $z = 15$ ,  $\alpha_n = 20^\circ$  und oben:  $m_n = 0,21$  mm,  $\beta = 67,0^\circ$ , mittig:  $m_n = 0,11$  mm,  $\beta = 78,0^\circ$ , unten:  $m_n = 0,09$  mm,  $\beta = 80,4^\circ$ .

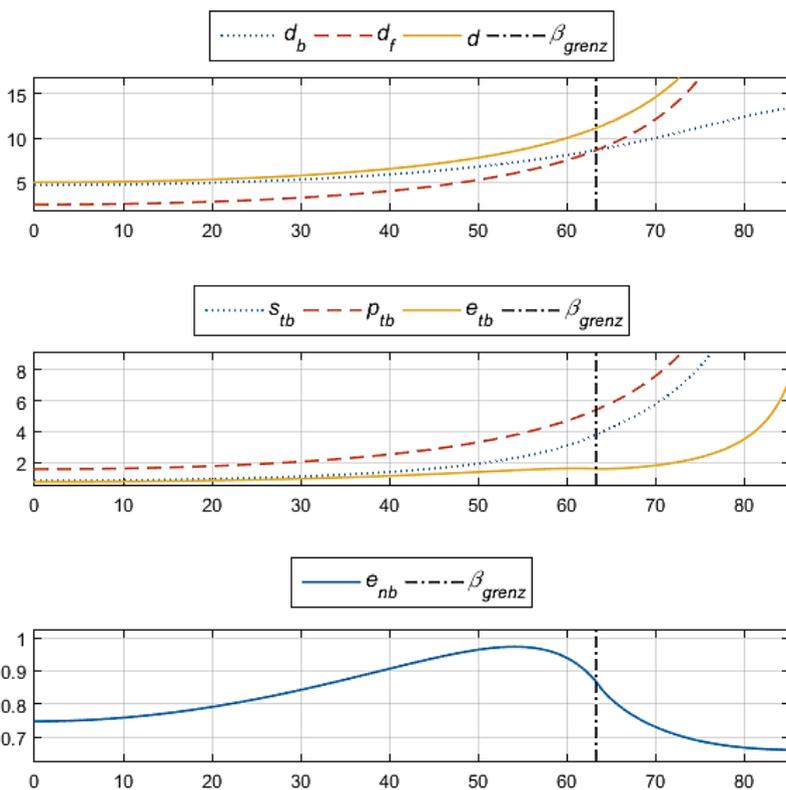


Abb. 11: Verlauf einiger Kenngrößen in Abhängigkeit vom Schrägungswinkel  $0^\circ \leq \beta \leq 85^\circ$  an einem Stirnrad mit  $m_n = 1$  mm,  $z = 5$ ,  $\alpha = 20^\circ \rightarrow \beta_{grenz} \approx 63,3^\circ$ .

Oben: Durchmesser von Grundkreis  $d_b$ , Fußkreis  $d_f$  und Wälzkreis  $d$ . Mitte: Zahndicke  $s_{tb}$ , Teilung  $p_{tb}$  und Lückenweite  $e_{tb}$  im Stirnschnitt am Grundkreis. Unten: Zahnlückenweite  $e_{nb}$  im Normalschnitt am Grundkreis.

## 4 Zusammenfassung

In diesem Artikel wird ein Konzept für das automatisierte Konstruieren von Zahnradgetrieben beschrieben. Der Konstruktionsalgorithmus zur Auslegung der benötigten Zahnradpaarung auf Basis weniger, leicht verständlicher Parameter wurde in Matlab implementiert. Neben der Berechnung der geometrischen Größen am Zahnrad werden auch die Oberflächenmodelle der Zahnräder erzeugt, als STL-Datei gespeichert und für die additive Fertigung verwendet. Als Beispiel eines additiven Verfahrens wird das SLS von Polyamid vorgestellt und dabei gezeigt, wie im Zuge der Oberflächenberechnung der Zahnräder die Fertigungstoleranzen des SLS automatisch berücksichtigt werden können. Dazu werden zwei geometrische Größen am Zahnrad identifiziert, mit denen überprüft werden kann, ob ein Zahnrad mit der berechneten Geometrie von dem ausgewählten additiven Verfahren hergestellt werden kann. Die Parameter mit Werten für das SLS sind die kleinstmögliche Zahnkopfbreite ( $s_{a,min} \approx 0,4 \text{ mm}$ ) und die kleinstmögliche Lückenweite am Grundkreis im Nomalschnitt ( $e_{nb,min} \approx 0,35 \text{ mm}$ ), die insbesondere bei schrägverzahnten Zahnrädern wichtig ist.

## 5 Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Bewilligung der Anlage zum selektiven Lasersintern Formiga P100 (EOS GmbH, Krailling, Deutschland).

## 6 Literatur

- [1] Gebhardt, A. (2014), *3D-Drucken: Grundlagen und Anwendungen des Additive Manufacturing (AM)*, Hanser, Carl, München
- [2] Berger, U., Hartmann, A. & Schmid, D. (2013), *Additive Fertigungsverfahren: Rapid Prototyping, Rapid Tooling, Rapid Manufacturing, Bibliothek des technischen Wissens*, 1. Aufl., Verl. Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten
- [3] Chua, C.K., Leong, K.F. & Lim, C.S. (2010), *Rapid prototyping: Principles and applications*, 3rd ed., World Scientific, Singapore, Hackensack, NJ
- [4] Zäh, M.F. (2006), *Wirtschaftliche Fertigung mit Rapid-Technologien: Anwender-Leitfaden zur Auswahl geeigneter Verfahren, Kostengünstig produzieren*, Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, München
- [5] Conner, B.P., Manogharan, G.P., Martof, A.N., Rodomsky, L.M., Rodomsky, C.M., Jordan, D.C. & Limperos, J.W. (2014), "Making sense of 3-D printing: Creating a map of additive manufacturing products and services", *Additive Manufacturing*, 1-4, pp. 64–76

- [6] Campbell, I., Bourell, D. & Gibson, I. (2012), "Additive manufacturing. Rapid prototyping comes of age", *Rapid Prototyping Journal*, Vol. 18 No. 4, pp. 255–258
- [7] Campbell, R.I., De Beer, D. J., Barnard, L.J., Booysen, G.J., Truscott, M., Cain, R., Burton, M.J., Gyi, D.E. & Hague, R. (2007), "Design evolution through customer interaction with functional prototypes", *Journal of Engineering Design*, Vol. 18 No. 6, pp. 617–635
- [8] Novakova-Marcincinova, L., Barna, J., Fecova, V., Janak, M. & Novak-Marcincin, J. (2011), "Intelligent design of experimental gearbox with Rapid Prototyping technology support", in *2011 15th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES)*, Poprad, Slovakia, pp. 77–80
- [9] Tsai, Y.-C. & Jehng, W.-K. (1999), "Rapid prototyping and manufacturing technology applied to the forming of spherical gear sets with skew axes", *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 95 No. 1-3, pp. 169–179
- [10] Lin, Y.-s., Shea, K., Johnson, A., Coultate, J. & Pears, J. (2009), "A Method and Software Tool for Automated Gearbox Synthesis", in *ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, San Diego, California, USA, August 30–September 2, 2009, pp. 111–121
- [11] VDI 3405:2014-12, *Additive Fertigungsverfahren; Grundlagen, Begriffe, Verfahrensbeschreibungen*, ICS 25.020. Verein Deutscher Ingenieure e.V., Beuth Verlag GmbH, Berlin
- [12] Wittel, H., Muhs, D., Jannasch, D. & Voßiek, J. (2011), *Roloff/Matek Maschinenelemente: Normung, Berechnung, Gestaltung, SpringerLink Bücher*, 20., überarbeitete und erweiterte Auflage, Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, Wiesbaden, Wiesbaden
- [13] Winter, H. & Niemann, G. (2004), *Maschinenelemente: Band 3: Schraubrad-, Kegelrad-, Schnecken-, Ketten-, Riemen-, Reibradgetriebe, Kupplungen, Bremsen, Freiläufe*, ICS 3, 2. Aufl., Springer, Berlin [u.a.]
- [14] DIN 867:1986-02, *Bezugsprofile für Evolventenverzahnungen an Stirnrädern (Zylinderrädern) für den allgemeinen Maschinenbau und den Schwermaschinenbau*. Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag GmbH, Berlin
- [15] Roppenecker, D.B., Grazek, R., Coy, J.A., Irlinger, F. & Lueth, T.C. (2013), "Friction Coefficients and Surface Properties for Laser Sintered Parts", in *ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, San Diego, California, USA, November 15–21, 2013, pp. V02AT02A009

- [16] Wassermann, J. (2005), *Einflussgrößen auf die Tragfähigkeit von Schraubradgetrieben der Werkstoffpaarung Stahl/Kunststoff*, Schriftenreihe / Institut für Konstruktionstechnik, Ruhr-Universität Bochum, ICS 2005,3, Ruhr.-Univ., LMGK, Lehrstuhl für Maschinenelemente, Getriebe und Kraftfahrzeuge, Bochum
- [17] Traeger, M.F., Krieger, Y.S. & Lueth, T.C. (2013), "Automated construction of gear racks, spur gears and helical gears using Matlab & STL files for rapid manufacturing", in *2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, pp. 1603–1608
- [18] Coy, J.A., Miyashita, K., Entsfellner, K., Gumprecht, J.D.J. & Luth, T.C. (2013), "First pullout strength measurements of threads produced by selective laser sintering", in *2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, Wollongong, NSW, pp. 1381–1386
- [19] Lueth, T.C. & Irlinger, F. (2013), "Berechnete Erzeugung von dreidimensionalen Oberflächenmodellen im STL-Format aus der Beschreibung planarer Mechanismen für die generative Fertigung durch selektives Lasersintern", in *Kolloquium Getriebetechnik: 10. Kolloquium Getriebetechnik*, Ilmenau, pp. 267–284
- [20] Breuninger, J., Becker, R., Wolf, A., Rommel, S. & Verl, A. (2013), *Generative Fertigung mit Kunststoffen: Konzeption und Konstruktion für Selektives Lasersintern*, SpringerLink Bücher, Springer, Berlin, Heidelberg
- [21] Haberhauer, H. & Bodenstern, F. (2014), *Maschinenelemente: Gestaltung, Berechnung, Anwendung*, Springer-Lehrbuch, 17., bearb. Aufl., Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg