TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik

Unterstützungsmaßnahmen am Beginn des Mathematikstudiums: Heuristische Lösungsbeispiele und Problemlösen in problembasierten Lernumgebungen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz

Elisabeth Reichersdorfer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät *TUM School of Education*
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Philosophie (Dr. phil.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzende: Univ.- Prof. Dr. Claudia Nerdel

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.- Prof. Dr. Kristina Reiss
2. Univ.- Prof. Dr. Stefan Ufer
   Ludwig-Maximilians-Universität München
3. Univ.- Prof. Dr. Christina Seidel
4. Univ.- Prof. Dr. Manfred Prenzel

Die Dissertation wurde am 11.03.2013 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät *TUM School of Education* am 17.04.2013 angenommen.

Inhalt

Zusammenfassung

Fachbedingte Disparitäten zwischen der Mathematik im schulischen Sekundarbereich und der akademischen Disziplin kombiniert mit einer neuen Lernkultur werden von Hochschuldozierenden häufig als Barriere zu Studienbeginn wahrgenommen. Davon betroffen sind insbesondere auch Lehramtsstudierende mit Unterrichtsfach Mathematik. Obwohl diese Problemlage schon von Klein (1924) angesprochen wurde, gibt es dazu kaum systematische Untersuchungen. Es existieren zwar diverse Unterstützungsangebote für diesen Übergang, jedoch mit einer defizitären konzeptionellen Fundierung und ohne kontrollierte Begleitforschung über deren Wirksamkeit (Biehler, *in Druck*). Dazu kommt ein Mangel an empirischen Untersuchungen zu spezifischen Problemen in dieser Phase (Fischer, Heinze & Wagner, 2009). Außerdem fehlen empirisch validierte Messverfahren. Deshalb ist es das Ziel dieser Arbeit Fördermaßnahmen an der Schnittstelle Schule – Hochschule systematisch zu untersuchen. Zunächst (Aufsatz 1) werden dazu theoretisch begründete oder empirisch fundierte Unterschiede zwischen der schulischen und der akademischen Mathematik zusammengefasst. Daraus werden Zielbereiche für Unterstützungsmaßnahmen abgeleitet, die in einem Münchner Brückenkurskonzept exemplarisch umgesetzt werden. Ergebnisse einer Untersuchung zeigen, dass diese Zielbereiche auch von den Studierenden wahrgenommen und als hilfreich eingeschätzt werden. In einem zweiten Schritt wird eine Restriktion und Fokussierung auf einen Zielbereich, nämlich mathematische Argumentationskompetenz, vorgenommen. Dabei dient die Entwicklung eines theoretisch begründeten und empirisch fundierten, vierdimensionalen Kompetenzstrukturmodells als Grundlage für ein adäquates Messverfahren (Aufsatz 2). Als Fördermaßnahme wurde die Bearbeitung von heuristischen Lösungsbeispielen dem Problemlösen in problembasierten Settings gegenübergestellt. Im Ergebnis zeigen sich differentielle Effekte der beiden Lernumgebungen auf die vier Dimensionen mathematischer Argumentationskompetenz auch in Abhängigkeit von den allgemeinen kognitiven Voraussetzungen (Aufsatz 3). Diese Befunde bestätigen die Relevanz bei derartig komplexen Konstrukten unterschiedliche Kompetenzaspekte zu berücksichtigen. Auf dieser Grundlage können gezielt Fördermöglichkeiten für die Kompetenzentwicklung von Studienanfängerinnen und Studienanfängern mit heterogenen allgemeinen kognitiven Voraussetzungen untersucht und adäquat eingesetzt werden. Somit wird mit der Arbeit ein Beitrag zur Lehramtsausbildung in Mathematik beim Übergang von der Schule zur Hochschule geleistet, wobei fachspezifische Kompetenzen im Vordergrund stehen.

Danksagung

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Heinz Nixdorf-Stiftungslehrstuhl für Didaktik der Mathematik. Diese Zeit ist geprägt durch viele spannende, interessante und äußerst lehrreiche Erfahrungen. An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen ganz herzlich bedanken, die mich auf diesem Weg auf unterschiedliche Weise unterstützt und begleitet haben.

An erster Stelle möchte ich meiner Erstbetreuerin und wissenschaftlichen Mentorin Frau Prof. Kristina Reiss für die fortwährende Unterstützung und das entgegengebrachte Vertrauen danken. Sie hat es mir ermöglicht an einem spannenden Forschungsprojekt mitzuwirken und dabei neue Ideen zu entfalten. Mein besonderer Dank geht ebenso an Herrn Prof. Stefan Ufer, der als Zweitbetreuer meine Arbeit von Anfang an außerordentlich engagiert begleitet hat. Die wertvollen Gespräche mit ihm und seine konstruktive Kritik haben mich immer wieder inspiriert. Ferner bedanke ich mich bei allen Beteiligten des DFG Projekts ELK-Math, die meine Arbeit ermöglicht haben, bei Frau Prof. Anke Lindmeier als Koautorin für wertvolle Anregungen, bei Frau Prof. Tina Seidel und Herrn Prof. Manfred Prenzel für das Interesse an meiner Arbeit und die Erstellung des Dritt- und Viertgutachtens und bei Frau Prof. Claudia Nerdel für den Vorsitz der Prüfungskommission.

Ebenfalls bedanke ich mich bei den Kolleginnen und Kollegen aus der Mathematikdidaktik an der TU München und LMU München für die wertvollen Diskussionsbeiträge im Oberseminar und die Motivation bei der Fertigstellung der Arbeit. Weiterhin gilt mein Dank den studentischen Hilfskräften, die mich tatkräftig und zuverlässig in den unterschiedlichen Phasen meiner Arbeit unterstützt haben, genauso wie den Studierenden und Dozenten die an den Teilstudien teilgenommen haben!

Mein tiefempfundener Dank gilt meinem Mann Holger für seine unendliche Geduld und den emotionalen Rückhalt während meiner Promotion! Mein Freundeskreis hat mich insbesondere in Zeiten des Zweifels und der Aussichtslosigkeit ermutigt und bekräftigt. Vielen lieben Dank! Abschließend bedanke ich mich ganz herzlich bei meiner Familie, vor allem bei meinen Eltern Max und Johanna Lorenz, für die Unterstützung und das Vertrauen während meiner gesamten Ausbildungszeit.

1. Einleitung

Sowohl in nationalen als auch internationalen Bildungsstandards für Mathematik hat sich im letzten Jahrzehnt die Sichtweise auf die Zielsetzungen von Mathematikunterricht verschoben. Statt einer alleinigen Beschreibung von fachlichen Inhalten, werden der Umgang mit diesen Inhalten und Prozesse mathematischen Arbeitens betont (Commom Core State Standards Initiative, 2010; Kultusministerkonferenz [KMK], 2003; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Dazu zählen beispielsweise Problemlösen, Modellieren oder mathematisch Argumentieren. Die Umsetzung dieser Reformen ist in erster Linie von den Lehrkräften als Akteure in den Klassenzimmern abhängig (Ma, 1999, 2010; Spillane, 1999) und damit auch von ihrer professionellen Kompetenz. Theoretische und empirische Arbeiten bestätigen dabei, dass fachspezifische Kompetenzen eine zentrale Komponente des Professionswissens von Lehrkräften ausmachen (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Baumert et al., 2010; Hill, Rowan & Ball, 2005; Shulman, 1986; Terhart, 2002). Für die Vermittlung dieses Wissens trägt die akademische Mathematikausbildung eine große Mitverantwortung (Borko, 1989; Brunner et al., 2006).

Beispielsweise sollen fachlich kompetente Lehrkräfte in der Lage sein, auf Vermutungen von Schülerinnen und Schülern adäquat zu reagieren, indem sie diese Aussagen evaluieren, anpassen, widerlegen oder Begründungsmöglichkeiten produzieren und abwägen. Untersuchungen zum Argumentieren und Beweisen belegen jedoch, dass nicht nur Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten in diesem Bereich haben (Heinze, Reiss & Rudolph, 2005), sondern auch angehende und bereits im Beruf stehende Lehrerinnen und Lehrer (z. B. Barkai, Tabach, Tirosh, Tsamir & Dreyfus, 2009; Barkai, Tsamir, Tirosh & Dreyfus, 2002; Knuth, 2002; Martin & Harel, 1989; Schwarz et al., 2008; Tirosh & Vinner, 2004). Letztere stehen im Fokus dieser Arbeit.

Etwa ein Jahrhundert ist verstrichen, seit Felix Klein (1924) erstmals die Problematik der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik bedingt durch eine „doppelte Diskontinuität“ thematisierte. Am Übergang von der Schule zur Hochschule gelingt es Studierenden zunächst nur selten, eine Verbindung zwischen der wissenschaftlichen Mathematik und den bisherigen Erfahrungen aus der Schulmathematik herzustellen. Charakteristisch für diesen Übergang sind hohe Studienabbruchzahlen (Heublein, Richter, Schmelzer & Sommer, 2012[1]) und niedrige Erfolgsquoten in den Grundlagenvorlesungen. Die zweite Diskontinuität tritt nach dem Studium ein, wenn die akademische Mathematik auf die Schulmathematik übertragen werden soll (Borko et al., 1992). Aufgabe der Universitäten ist es, (angehende) Lehrerinnen und Lehrer in diesen schwierigen Phasen differenziert zu unterstützen (Prenzel, Reiss & Seidel, 2011). Obwohl diese Übergangsproblematik bereits früh erkannt wurde, gibt es bisher kaum empirisch fundierte und systematische Ansätze zur Förderung mathematischer Kompetenzen von angehenden Lehrerinnen und Lehrer.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Beitrag für die Schnittstelle Schule – Hochschule zu leisten, um den Einstieg in ein Lehramtsstudium Mathematik zu erleichtern. Dementsprechend wird die erste Diskontinuität fokussiert. Ein Schwerpunkt der Arbeit findet sich in der Analyse von Unterschieden zwischen dem Fach Mathematik im schulischen Sekundarbereich und der akademischen Disziplin Mathematik aus einer theoretischen Perspektive unter Einbezug empirischer Arbeiten. Darauf aufbauend werden Zielbereiche für Veranstaltungen zu Studienbeginn formuliert, die in einem Münchner Brückenkurskonzept exemplarisch realisiert und evaluiert wurden. Kontrollierte Untersuchungen wurden zunächst auf die Wirksamkeit von Unterstützungsmaßnahmen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz im Bereich der Teilbarkeitslehre eingeschränkt. Daraus leitet sich ein zweiter Schwerpunkt der Arbeit ab, bestehend aus der empirischen Überprüfung einer theoretisch begründeten Struktur mathematischer Argumentationskompetenz. Abschließend werden in einem dritten Schwerpunkt Effekte von problembasierten Lernumgebungen mit unterschiedlichem Grad instruktionaler Unterstützung auf verschiedene Facetten mathematischer Argumentationskompetenz analysiert.

[1] Die Abbruchquote im Studienbereich Mathematik (ohne Lehramt) liegt bei 55 %. Deutlich niedriger ist diese Quote mit 6 % für die Gruppe der Lehramtsstudierenden über die verschiedenen Bundesländer, Schulformen und Fächer hinweg. Auch wenn es keine gesicherten Zahlen für Lehramtskandidaten *mit Unterrichtsfach Mathematik* gibt, kann man davon ausgehen, dass die Probleme dieser Teilgruppe ähnlich zum Studienbereich Mathematik sind.

2. Theoretischer Hintergrund

Bevor Ansätze für die Lehramtsausbildung in Mathematik diskutiert werden können, sollen zunächst durch eine Analyse von Unterschieden der Mathematik in der Sekundar- und Tertiärstufe mögliche Problembereiche aufgedeckt und Zielbereiche für Fördermaßnahmen abgeleitet werden (2.1). Auf einen dieser Zielbereiche, nämlich mathematische Argumentationskompetenz, konzentriert sich die weitere Arbeit. Dazu wird in einem gesonderten Absatz (2.2) eine Begriffsklärung und –abgrenzung vorgenommen. Schließlich werden Theorie und empirische Ergebnisse zu Unterstützungsmaßnahmen, die sich zur Förderung komplexer Fähigkeiten in anderen Teilbereichen bewährt haben, dargestellt (2.3).

2.1 Disparitäten zwischen schulischer und akademischer Mathematik

Wesentliche fachbedingte Unterschiede der akademischen Mathematik im Vergleich zur Schulmathematik findet man in einer veränderten Sicht auf die Disziplin Mathematik sowie in einer veränderten Lernkultur (für eine ausführliche Darstellung siehe Reichersdorfer, Ufer, Lindmeier & Reiss, *in Druck*).

Das Ziel der universitären Mathematikausbildung ist die Vermittlung der wissenschaftlichen Disziplin Mathematik mit seinen Spezifika (Freudenthal, 1973) und nicht nur eine anwendungsorientierte Darstellung, wie sie für die Schule häufig gefordert wird (KMK, 2003). Charakteristisch für die akademische Mathematik ist zunächst der Aufbau einer *formal-axiomatischen* Theorie (Heintz, 2000), wobei neue Aussagen deduktiv aus einem axiomatischen Rahmengerüst hergeleitet werden (Ufer & Reiss, 2009). Falls in der Schule axiomatische Theoriebildung betrieben wird, so basieren Folgerungen häufig auf Sätzen, die aus Anschauungen heraus gewonnen werden (*inhaltliche Axiomatik*; Heintz, 2000). Die neue Art des Theorieaufbaus in der Hochschulmathematik stellt für viele Studienanfängerinnen und –anfänger zunächst eine Hürde dar. Einerseits wirkt sich diese neue Vorgehensweise auf mathematisches Argumentieren und Beweisen aus, insbesondere auf das Finden neuer Aussagen und deren Überprüfung auf ihre Gültigkeit. Andererseits ist davon auch die Begriffsbildung betroffen: Begriffe werden an der Universität meist durch eine formal axiomatische Definition eingeführt (*formale Axiomatik*; Heintz, 2000), im Gegensatz dazu werden in der Schule häufig definierende Eigenschaften eines Begriffs aus Repräsentanten abstrahiert (*inhaltliche Axiomatik*; Heintz, 2000). Eine Schwierigkeit zu Studienbeginn besteht nun darin, dass die Studierenden selbstständig geeignete

Anschauungen und Vorstellungen zu formal-axiomatischen Definitionen aufbauen müssen. Umgekehrt ist aber auch eine Verbindung und Integration von bereits bestehenden Begriffsvorstellungen mit neu erlernten Definitionen notwendig. Individuell unvollständig oder fehlerhaft repräsentierte Begriffe fallen im schulischen Kontext nicht zwingend auf.

Ein zweites Spezifikum der akademischen Mathematik im Vergleich zur Schulmathematik stellt der erhöhte Formalisierungsgrad zu Studienbeginn dar. Der Nutzen formaler Darstellung liegt in der exakten und widerspruchsfreien Darstellung mathematischer Inhalte (Freudenthal, 1973). Dies kann durch eine formale Notation gestützt werden. Diese Formalisierung ist zwar nicht zwingend notwendig, jedoch typisch für die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin (Freudenthal, 1973). Hier treten häufig Fehlvorstellungen auf. So schätzen Schülerinnen und Schüler, aber auch angehende und im Beruf stehende Lehrerinnen und Lehrer Argumentationen in formaler Notation eher als inhaltlich korrekt ein, als solche in verbaler Form (Healy & Hoyles 1998; Tabach et al., 2011; Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009). Neben einer adäquaten Einschätzung der Bedeutung des Formalismus bereitet vielen Studienanfängerinnen und –anfängern der Umgang mit formalen Repräsentationen Probleme (Vinner, 1991).

Abgesehen von diesen Umbrüchen bezüglich der Disziplin Mathematik ergeben sich für Lernende am Übergang Herausforderungen durch Veränderungen in der Lernkultur, beispielsweise durch die Art und Weise, wie Mathematik an der Universität vermittelt wird. Durch eine *Definition – Satz – Beweis* Kultur in den Vorlesungen wird Mathematik als fertiges Produkt präsentiert (Freudenthal, 1973). Zu hinterfragen wie solche Ideen und Theorien entstanden sind, wird meist den Studierenden überlassen. Selbstreguliertes Lernen erhält somit eine besondere Bedeutung.

Fachunabhängig ist der Wechsel von der Schule an die Hochschule oft auch ein starker Einschnitt in das Leben der Studierenden. Die meisten Studierenden verlassen ihr familiäres, vertrautes Umfeld, indem Sie von Zuhause ausziehen. Damit fallen alltägliche Aufgaben an, die für die meisten neu sind. Außerdem müssen sich Studierende weitgehend selbstständig um die Studienorganisation kümmern. Dazu gehören auch das Kennenlernen der räumlichen Umgebung sowie das Knüpfen neuer Kontakte.

Ausgehend von diesen Übergangsschwierigkeiten werden für das Lernen akademischer Mathematik fünf Zielbereiche von Unterstützungsmaßnahmen an der Schnittstelle Schule – Hochschule begründet. Diese betreffen die Vermittlung von (1) *Arbeitsweisen der akademischen Mathematik*, wobei hier speziell auf die Herausforderungen beim mathematischen Argumentieren und Beweisen im Rahmen einer formal-axiomatischen

Theorie eingegangen wird, (2) *Lernstrategien*, vor allem für den Begriffserwerb und das Studium von Beweisen, (3) *Methodenwissen*, für eine situationsbedingte, adäquate Wahl von Argumenten und (4) *spezifische Fertigkeiten*, wie etwa Prinzipien der Logik, um so Fehlvorstellungen zu formalen Notationen entgegenzuwirken. Ein letzter, überfachlicher Zielbereich betrifft die (5) *Aspekte der Studienorganisation* wie Orientierung in der neuen Lernumwelt und das Kennenlernen zukünftiger Kommilitonen. Verschiedene Ansätze für die einzelnen Zielbereiche werden bei Reichersdorfer et al. (*in Druck*) diskutiert. Im Folgenden soll zunächst der erste Zielbereich, die Entwicklung mathematischer Argumentationskompetenz, mit einer Diskussion adäquater Fördermaßnahmen fokussiert werden.

2.2 Mathematische Argumentationskompetenz

Mathematisch argumentieren zählt in den deutschen Bildungsstandards zu den sechs prozessbezogenen Standards (KMK, 2003). Mit den fünf inhaltlichen Standards oder auch Leitideen wird ein zweidimensionales Modell verfolgt, auf dem auch die aktuell erschienen Bildungsstandards für die Sekundarstufe II basieren (KMK, 2012). Jedoch steht die empirische Überprüfung dieses Modells noch aus (Winkelmann, Robitzsch, Stanat & Köller, 2012).

Mathematische Argumentationskompetenz soll in dieser Arbeit im Sinne einer Kompetenz nach Weinert (2001) verstanden werden „…als die Fähigkeit und Bereitschaft in einer mathematischen Argumentationssituation eine plausible mathematische Aussage zu finden, formulieren und evaluieren, nach adäquaten Argumenten für und gegen diese Aussage zu suchen und diese Argumente schrittweise zu einem Beweis zusammenzuführen“ (Reichersdorfer, Ufer & Reiss, 2013, S. 6). Diese Definition umfasst einerseits *Beweisen*, d.h. die Suche und das Aufstellen einer deduktiven Argumentationskette (Ufer & Reiss, 2009) als eine spezifische Argumentationsform. Andererseits werden auch Aktivitäten des *Conjecturing* (Koedinger, 1998; Lin, Yang, Lee, Tabach & Stylianides, 2012) wie das Suchen nach Regelmäßigkeiten in einer mathematischen Situation oder das Überprüfen und Anpassen einer Vermutung integriert, wozu häufig induktive und informelle Argumente herangezogen werden (Koedinger & Anderson, 1991; Thurston, 1994). Als Konsequenz gestalten sich die Anforderungen bei mathematischen Argumentationen vielfältiger als beim Beweisen.

Für die empirische Erfassung von Kompetenzen sind zunächst theoretische Modelle in Form von Anforderungsniveaus (Kompetenzstufenmodelle) und relevanten Teilfacetten einer Kompetenz (Kompetenzstrukturmodelle) notwendig. Für das Beweisen in der Geometrie wurde von Reiss, Hellmich und Thomas (2002) ein eindimensionales, dreistufiges Kompetenzstufenmodell entwickelt und empirisch validiert. Anforderungen der ersten Stufe umfassen dabei Basisqualifikationen wie das einfache Anwenden von Regeln oder Definitionen. Kompetenzstufe II ist charakterisiert durch einschrittige und Kompetenzstufe III mehrschrittige Beweise. Der Inhaltsbereich der ebenen Geometrie zeichnet sich jedoch gegenüber anderen mathematischen Inhaltsbereichen wie der Analysis oder Teilbarkeitslehre durch die spezifische Repräsentation von Problemsituationen in Form visuell leicht zugänglicher Figuren aus (Arzarello, Paola & Sabena, 2009; Fischbein, 1993; Koedinger & Anderson, 1990). Entsprechend ist es fraglich, ob dieses Modell zum Beweisen auf andere Bereiche neben der Geometrie übertragen werden kann.

Analysen zu individuellen Charakteristika, die für die erfolgreiche Bewältigung mathematischer Argumentationssituationen notwendig sind, fokussieren demgegenüber die Kompetenzstruktur. Insbesondere für das Beweisen gibt es hierzu Vorarbeiten, wobei Methodenwissen, Wissen über geometrische Konzepte, strategisches Wissen, allgemeine Problemlösefähigkeiten und metakognitive Fähigkeiten zu den relevanten Einflussgrößen gehören (Chinnappan, Ekanayake & Brown, 2012; Healy & Hoyles, 1998; Schoenfeld, 1992; Ufer et al., 2009; Ufer, Heinze & Reiss, 2008; Weber, 2001). Für Conjecturing-Aktivitäten werden zusätzlich Wissen über Schlussweisen, etwa die Funktion von Gegenbeispielen (Lin & Wu Yu, 2005; Tabach et al., 2011), aber auch spezifische Strategien wie das Betrachten von Beispielen oder inhaltlichen Skizzen für die Untersuchung einer Vermutung (Koedinger, 1998) erforderlich.

2.3 Problembasierte Lernumgebungen zur Förderung komplexer Fähigkeiten

In den vergangenen zwei Jahrzehnten sind zur Förderung komplexer Fähigkeiten, wie etwa mathematischer Argumentationskompetenz, *problembasierte Lernumgebungen* in den Fokus gerückt (e.g. National Committee on Science Education Standards and Assessment, 1996; Williams & Hmelo, 1998). Problembasierte Lernumgebungen sind nach Barrows (1996) charakterisiert durch die kooperative, selbstgesteuerte Arbeit an einem authentischen Problem mit der Unterstützung eines Lehrers, Tutors oder in Ausnahmefällen auch durch computerbasierte Skriptunterstützung (Eysink et al., 2009; Hmelo-Silver, 2004). Die

Wirksamkeit problembasierter Lernumgebungen zur Förderung von Problemlösefähigkeiten wurde mehrfach durch empirische Studien bestätigt (Cognition and Technology Group at Vanderbilt, 1993; Dochy, Segers, van den Bossche & Gijbels, 2003, Gijbels, Dochy, van den Bossche & Segers, 2005; Hmelo-Silver, 2004; Walker & Leary, 2009).

Problembasierte Lernumgebungen können sich in der Gestaltung unterscheiden und diverse Unterstützungsmaßnahmen bereitstellen (Hmelo-Silver, Duncan & Chinn, 2007). Im Gegensatz zum *entdeckenden Lernen* (Bruner, 1961) sind die Lerner nicht völlig auf sich gestellt. Unter anderem ist vor allem die Frage nach dem *Umfang der Unterstützung* in Form von instruktionalen Informationen in problembasierten Lernumgebungen entscheidend. Bell, Smetana und Binns (2005) unterscheiden vier Ebenen bei Erkundungen von Schülerinnen und Schülern: Auf einer ersten Ebene wird die Frage, Methode und Lösung des Problems vorgegeben. Auf der zweiten Ebene wird die Lösung, der dritten Ebene die Methode und der vierten Ebene zusätzlich die Frage ausgeblendet. Schworm und Renkl (2007) treffen eine ähnliche Kategorisierung, nach der instruktionale Informationen auf drei Ebenen vorgegeben werden. Die *inhaltliche Ebene* enthält relevante Informationen aus dem entsprechenden Kontext und Inhaltsbereich (z.B. Definitionen, Sätze). Strukturelle Aspekte zur Lösung einer Aufgabe gehören zur *allgemeinen Lernebene* (z.B. allgemeine Prinzipien und Konzepte für einen mathematischen Beweis) und die *strategische Ebene* bezieht sich auf metakognitive Aspekte einer Aufgabe (z.B. die Wahl von geeigneten Strategien und Heuristiken). *Heuristische Lösungsbeispiele* sind dadurch charakterisiert, dass sie instruktionale Informationen auf allen drei Ebenen enthalten mit der Intention, die Aufmerksamkeit des Lerners auf die strategische Ebene zu richten. Lernumgebungen ohne Informationen auf diesen Ebenen werden meist als *Problemlösen* bezeichnet. Bevor die Lernumgebungen weiter modifiziert werden, sollen in einem ersten Schritt spezifische Effekte dieser beiden Extrempositionen untersucht werden.

2.3.1 Problemlösen als Fördermaßnahme

Problemlösen soll hier verstanden werden als eine Fördermaßnahme in der Lernende selbst eine Lösung zu einer gegebenen Problemstellung entwickeln sollen im Sinne von Funke und Frensch (2007). Gerade die Mathematik wird traditionell immer wieder in engen Zusammenhang zum Problemlösen gebracht (Halmos, 1980; Schoenfeld, 1992). Insbesondere konstruktivistisch orientierte Forscher vertreten dazu die Hypothese, dass Problemlösen nur durch zahlreiche Erfahrungen beim aktiven Problemlösen gelernt werden kann (Funke & Frensch, 2007; Polya, 1948; van Engen, 1959). Außerdem sollen Lerner beim

Problemlösen neben inhaltlichem Wissen gleichzeitig Problemlösestrategien erwerben (Bruner, 1961), zwei wichtige Prädiktoren für Problemlösefähigkeiten (Jonassen, 2000) und insbesondere auch Beweiskompetenz (Ufer et al., 2008).

Empirische Studien bestätigen die Effektivität des Problemlösens als Intervention. Allerdings müssen diese Ergebnisse mit Vorsicht interpretiert werden, da häufig diverse Einflussfaktoren, wie etwa die Rolle der Lehrkraft, unberücksichtigt blieben. Schoenfeld (1985) hat in seinen Problemlösekursen positive Erfolge im Hinblick auf den Erwerb von Problemlösestrategien festgestellt. Auch die Meta-Analyse von Dochy et al. (2003) belegt die Wirksamkeit von problembasiertem Lernen ohne die Vorgabe zusätzlicher instruktionaler Informationen im Vergleich zu traditionellen Vorlesungen. Dabei haben die Autoren Studien aufgenommen, die der Definition von problembasiertem Lernen nach Barrows (1996) entsprechen mit der zusätzlichen Bedingung, dass die Lerner Probleme selbst lösen sollten ohne die Vorgabe von Lösungsschritten. Somit wurde Problemlösen in problembasierten Lernumgebungen umgesetzt. Auch in kooperativen Settings haben Kirschner, Paas, Kirschner und Janssen (2011) in einer ersten Studie Problemlösen mit traditionellen Lösungsbeispielen verglichen und fanden eine Überlegenheit des Problemlösens. Nachdem die Problemlösebedingung in dieser Studie nicht in eine problembasierte Lernumgebung eingebettet war, glich dieses Setting jedoch eher dem entdeckenden Lernen. Sweller, Kirschner und Clark (2007) äußern darüber hinaus die Kritik, dass für das Problemlösens eine theoretische Fundierung fehlt. Dabei weisen sie insbesondere auf eine Unvereinbarkeit des Problemlösens mit Ideen der *Cognitive Load Theory* hin, die im nächsten Abschnitt thematisiert wird.

2.3.2 Heuristische Lösungsbeispiele

Heuristische Lösungsbeispiele beinhalten neben der Problemstellung und der Lösung des Problems einen realistischen Bearbeitungsweg (Reiss & Renkl, 2002). Strukturiert durch ein Prozessmodell der jeweiligen Fähigkeit werden in den einzelnen Phasen des Modells heuristische Strategien expliziert. Theoretisch können Vorteile von heuristischen Lösungsbeispielen mit der *Cognitive Load Theory* erklärt werden (Sweller, van Merriënboer & Paas, 1998). Demzufolge ist das menschliche Arbeitsgedächtnis in seiner Kapazität beschränkt und es sollten nur Lernumgebungen eingesetzt werden, welche die vorhandene Kapazität optimal für lernförderliche Aktivitäten nutzen. Während der Bearbeitung eines heuristischen Lösungsbeispiels kann sich der Lerner voll und ganz auf die Herangehensweise in dem Lösungsbeispiel und die verwendeten Strategien konzentrieren, um diese in einer ähnlichen Situation abzurufen. Empirische Ergebnisse belegen die Effektivität heuristischer Lösungsbeispiele (Hilbert, Renkl, Kessler & Reiss, 2008; Reiss, Heinze, Kessler, Rudolph-Albert & Renkl, 2007; Zöttl, Ufer & Reiss, 2010).

Allerdings wird in der traditionellen Lösungsbeispielforschung häufig die Gestaltung der Kontrollgruppe kritisiert. Statt einer realistischen Bedingung in der Schülerinnen und Schüler kooperativ authentische Probleme lösen und Hilfen erhalten (jedoch ohne Vorgabe instruktionaler Informationen) wie bei Problemlösen in problembasierten Lernumgebungen, wird das Studieren von klassischen Lösungsbeispielen häufig mit entdeckendem Lernen verglichen (Hmelo-Silver et al., 2007; Schmidt, Loyens, van Gog & Paas, 2007). Außerdem beschränkte sich der Einsatz von Lösungsbeispielen meist auf gut-strukturierte Probleme (Schmidt et al., 2007), für deren Lösung nur eine begrenzte Anzahl von Konzepten, Prinzipien oder Regeln aus dem jeweiligen Inhaltsbereich relevant sind (Jonassen, 2000). Im Gegensatz dazu wurden in problembasierten Lernumgebungen überwiegend komplexe Probleme mit schlecht strukturierten Problemräumen behandelt (Hmelo-Silver, 2004).

Hinzu kommt, dass die Wirksamkeit von (heuristischen) Lösungsbeispielen in kooperativen Lernsettings weitgehend ungeklärt ist (Kalyuga, Ayres & Sweller, 2011; Kirschner et al., 2011; Kollar et al., 2013). Auch die angemessene Gestaltung und Implementation von Lösungsbeispielen in kooperativen Settings stellt bislang noch eine Herausforderung dar. Ein grundlegendes Prinzip für eine gelungene kooperative Lernumgebung ist die Herstellung positiver Interdependenz, in der Lernende eine wechselseitige Abhängigkeit wahrnehmen (Johnson & Johnson, 2009). Beispielsweise könnten zwei Lösungsbeispiele mit verschiedenen Ansätzen zu einer Problemstellung und ein angeregter interaktiver Diskurs über Gemeinsamkeiten und Unterschiede, eine Möglichkeit darstellen. Um jedoch von derartigen Vergleichen zu profitieren, benötigen Lerner ausreichend Vorwissen (Rittle-Johnson, Star & Durkin, 2009). Erste Ergebnisse von Kollar et al. (2013) deuten an, dass Lerner in kooperativen Lernumgebungen mit günstigen allgemeinen kognitiven Lernvoraussetzungen mehr bei der Bearbeitung von heuristischen Lösungsbeispielen, die auf der strategischen Ebene variieren, lernen als beim Lösen von Problemen.

2.3.3 Kognitive Aktivierung

Eine weitere Herausforderung bei der Gestaltung von problembasierten Lernumgebungen betrifft die kognitive Aktivierung der Lerner durch eine Fokussierung auf zentrale Konzepte (Renkl & Atkinson, 2007). Kooperatives Lernen ist insbesondere dann wirksam, wenn

Lernende in der Interaktion mit einem Partner ihr Wissen umstrukturieren und neue Wissenselemente in bereits vorhandene integrieren (Mayer, 2004). Dieser Prozess kann durch Lernstrategien wie Elaborations- oder Monitoringstrategien forciert werden (Weinstein & Mayer, 1986). Durch den Einsatz von Prompts können diese Lernstrategien angeregt werden (Rosenshine, Meister & Chapman, 1996). Beispielsweise sollen während dem Studieren von Lösungsbeispielen zusätzlich eingesetzte Selbsterklärungsprompts einer oberflächlichen Bearbeitung vorbeugen (Chi, Bassok, Lewis, Reimann & Glaser, 1989). Renkl (1997) hat dabei untersucht, inwieweit sich Vorwissen auf die Selbsterklärungsaktivität auswirkt und fand nur eine schwache Korrelation. Für traditionelle Lösungsbeispiele mit instruktionalen Informationen auf der inhaltlichen und allgemeinen Lernebene haben sich Prompts, welche sich auf die allgemeine Lernebene beziehen sowie Prompts auf beiden Ebenen bewährt (Schworm & Renkl, 2007). Nachdem sich die relevanten Konzepte und Prinzipien bei heuristischen Lösungsbeispielen vor allem auf der strategischen Ebene finden, scheinen Selbsterklärungsprompts auf dieser Ebene sinnvoll. Dennoch steht eine empirische Überprüfung aus. Auf welche Ebene sich die kognitive Aktivierung beim Problemlösen konzentrieren soll, bleibt ebenso offen. Lerner arbeiten beim selbständigen Lösen von Problemen auf allen drei Ebenen. Dabei sollen sie sowohl inhaltliches Wissen als auch Problemlösestrategien erwerben (Bruner, 1961). Somit kann angenommen werden, dass die inhaltliche Ebene beim Problemlösen an Bedeutung gewinnt. Um die Effektivität verschiedener Lernumgebungen zu erklären, fehlt jedoch bislang kontrollierte Forschung, die gezielt auch die Prozesse während des Lernens in kooperativen Settings analysiert und zusätzlich allgemeine kognitive Fähigkeiten von Lernenden beachtet.

3. Forschungsfragen

Insgesamt wird deutlich, dass Lehramtsstudierende mit Unterrichtsfach Mathematik am Übergang von der Schule zur Hochschule mit zahlreichen Umbrüchen in Bezug auf die Natur des studierten Faches sowie die Gestaltung des individuellen Lernprozesses kämpfen. Ausgehend von einem Defizit an strukturierter Forschung für Unterstützungsmaßnahmen in diesem Bereich (Fischer et al., 2009), fokussiert diese Arbeit die folgenden drei Fragen:

(1) Ist es möglich, Zielbereiche für Unterstützungsmaßnahmen am Übergang von der Schule zur Hochschule in einem zweiwöchigen Brückenkurs so zu integrieren, dass sie von den Studierenden in den Veranstaltungen wahrgenommen und als hilfreich bewertet werden? *(Aufsatz 1)*

(2) Kann das eindimensionale Modell zum Beweisen in der Geometrie auf mathematische Argumentationskompetenz übertragen werden oder liegt hier eine differenziertere Struktur vor? *(Aufsatz 2)*

(3) Beeinflusst die Verfügbarkeit instruktionaler Informationen in problembasierten Lernumgebungen Facetten mathematischer Argumentationskompetenz unterschiedlich? *(Aufsatz 3)*

Hypothesen zu den einzelnen Fragen werden in der Darstellung der jeweiligen Aufsätze thematisiert.

4. Anbindung der Forschungstätigkeit an das DFG Projekt ELK-Math

Die vorliegende Dissertation ist eingebettet in das DFG Projekt „ELK-Math“ (Fördernummer: RE 1247/9-1 und FI 792/7-1), ein Kooperationsprojekt zwischen der Empirischen Pädagogik und Pädagogischen Psychologie an der LMU München und der Mathematikdidaktik an der TU München unter Leitung von Prof. Frank Fischer und Prof. Kristina Reiss. Ziel dieses Projekts ist es, Effekte von heuristischen Lösungsbeispielen und Kooperationsskripts auf mathematische Argumentationskompetenz von Studienanfängerinnen und Studienanfängern eines Lehramts mit Unterrichtsfach Mathematik zu untersuchen.

In der bisherigen Darstellung wurde mathematische Argumentationskompetenz in der Fachdidaktik vor allem aus einem fachspezifischen Blickwinkel betrachtet. Sozial diskursive Aspekte, wie der Austausch von Argumenten in kooperativen Settings, blieben dabei unberücksichtigt. Untersuchungen von Stegmann, Weinberger und Fischer (2007) decken jedoch auch allgemeine Schwierigkeiten von Studierenden bei der Formulierung von Argumenten auf. So fehlen häufig Begründungen für eingebrachte Behauptungen und es wird selten mit Gegenargumenten Bezug auf die Äußerungen des Kooperationspartners genommen. Im Projekt ELK-Math wird dementsprechend zwischen einer fachspezifischen, individuell-kognitiven und einer fachübergreifenden, sozial-diskursiven Komponente mathematischer Argumentationskompetenz unterschieden.

Während sich heuristische Lösungsbeispiele zur Förderung individuell-kognitiver Komponenten mathematischer Argumentationskompetenz bewährt haben (Reiss et al., 2007; Zöttl et al., 2010), erwiesen sich Kooperationsskripts (O’Donnell & Dansereau, 1992) zur Aneignung allgemeiner Argumentationsfähigkeiten als effektiv (z.B. Kollar, Fischer & Slotta, 2007; Stegmann et al., 2007). Kooperationsskripts verteilen dabei auf die Lernenden einer Gruppe spezifische Rollen oder segmentieren den Argumentationsprozess.

In einer ersten Studie wurde in einem *2 x 2* Design untersucht, ob und wann heuristische Lösungsbeispiele zusammen mit Kooperationsskripts positiv im Hinblick auf die individuell-kognitive und sozial-diskursive Komponente mathematischer Argumentationskompetenz interagieren. Zunächst konnte vor allem für Lerner mit günstigen allgemeinen kognitiven Voraussetzungen gezeigt werden, dass heuristische Lösungsbeispiele für die Aneignung beider Komponenten mathematischer Argumentationskompetenz besser geeignet waren als Problemlösen. Die Implementation von Kooperationsskripts bewirkte einen ähnlichen Effekt für die sozial-diskursive Komponente mathematischer Argumentationskompetenz. Ein Interaktionseffekt im Sinne positiver Synergien der beiden Lernumgebungen konnte durch diese Ergebnisse nicht belegt werden (Kollar et al., 2013). Zwei weitere Studien in dem Projekt konzentrierten sich auf die Adaptierbarkeit der heuristischen Lösungsbeispiele als auch der Kooperationsskripts. Die Ergebnisse der beiden Studien werden derzeit aufbereitet.

Diese Dissertation geht über die Fragestellungen des Projekts ELK-Math hinaus, indem zum einen die Voraussetzungen und Schwierigkeiten der Zielgruppe in diesem Projekt und damit der Studienanfängerinnen und Studienanfänger eines Lehramts Mathematik analysiert wurden und darauf aufbauend Zielbereiche für Unterstützungsmaßnahmen in der Studieneingangsphase formuliert und untersucht wurden. Außerdem wurde zur Erfassung der individuell-kognitiven Komponente mathematischer Argumentationskompetenz ein Kompetenzstrukturmodell theoretisch begründet und empirisch überprüft. Die Auswertungen der ersten Studie wurden durch differenzierte Analysen und Fragestellungen im Hinblick auf die inhaltsspezifische Unterstützung, heuristische Lösungsbeispiele und Problemlösen, erweitert.

5. Darstellung der einzelnen Beiträge

Im Folgenden werden die Ergebnisse, gegliedert nach den drei Forschungsfragen zusammengefasst. Eine ausführliche Darstellung findet man in den korrespondierenden Publikationen.

5.1 Implementation und Evaluation des Münchner Brückenkurskonzepts (Aufsatz 1)

Konzeption der Publikation, Aufbereitung (Review) und Einordnung bisheriger Arbeiten, Durchführung, Auswertung der Evaluation und publikationsbasierte Darstellung wurden im Rahmen der Dissertation vollzogen und federführend in Aufsatz 1 umgesetzt. Die Koautoren unterstützten den Prozess beratend und waren insbesondere bei der Konzeption und Umsetzung der Münchner Brückenkurse beteiligt. Der Aufsatz wird als Buchkapitel in einem Band der Springer Reihe „Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik“ veröffentlicht.

Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2013). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In R. Biehler (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*. Springer.

Die hergeleiteten Zielbereiche für Unterstützungsmaßnahmen am Übergang von der Schule zur Hochschule wurden für diesen Beitrag in kürzeren Veranstaltungen, sogenannten Brücken- oder Vorkursen untersucht, was allerdings mit einer Einschränkung der verfügbaren Ressourcen einhergeht. Wie auf dieser Basis für den Münchner Brückenkurs eine fachdidaktisch begründete Auswahl an Inhalten und Konzepten zu korrespondierenden Zielbereichen getroffen wurde, wird an drei ausgewählten Fällen detailliert aufgezeigt. Ein erstes Beispiel betrifft überwiegend den Zielbereich (2) *Lernstrategien*. Am Beispiel des Funktionsbegriffs sollen Studienanfängerinnen und Studienanfänger verschiedene Herangehensweisen und Strategien kennenlernen, um die formal-axiomatische Definition mit der Begriffsvorstellung aus der Schule abzugleichen. Bei der Einführung von neuen Begriffen auf einer formal-axiomatischen Basis (z.B. der Begriff „injektiv“) werden die Studierenden außerdem durch detaillierte Analysen der Definitionen und grafische

Repräsentationen dazu angeregt, geeignete mentale Modelle zu konstruieren. In einem zweiten Beispiel wird (4) der *Aufbau spezifischer Fertigkeiten* verfolgt. In einer Einführung von Quantoren und Junktoren wird zunächst weniger Wert auf die konkreten Fachbegriffe und Notationen gelegt als auf die dahinterstehenden Beziehungen. Ein Übersetzen zwischen Repräsentationsformen soll diese Verbindung fördern. Außerdem sollen Studierende so auf eine präzise Verwendung mathematischer Sprache aufmerksam gemacht werden. Ein weiterer Schwerpunkt der Münchner Brückenkurse liegt in einer Einführung in die (1) *Arbeitsweisen der akademischen Mathematik*. Die Studierenden sollen aktiv am Aufbau eines formal-axiomatischen Theoriebausteins, der Teilbarkeitslehre, teilnehmen. Die Aneignung von zielführenden Strategien und Vorgehensweisen bei mathematischen Argumentationsproblemen soll durch gezielte instruktionale Unterstützung gefördert werden. Eine detailliertere Darstellung dazu findet man in 4.3. Diese Beispiele stellen nur einen Auszug aus den Inhalten des Brückenkurses dar. Inwieweit diese Ziele und das Konzept auch von den Studierenden wahrgenommen wurde, soll durch die folgenden Erhebungen geklärt werden.

An der Studie beteiligten sich Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Brückenkurse 2010 und 2011 aus drei süddeutschen Universitäten, an denen das Münchner Brückenkurskonzept umgesetzt wurde. Neben demographischen Daten sollten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer unmittelbar nach dem Brückenkurs offene Fragen zum Kurs beantworten. Aus organisatorischen Gründen konnte diese Befragung an einer Universität nicht stattfinden und so liegen lediglich Daten von N = 267 von N = 599 Studienanfängerinnen und -anfängern vor. Außerdem wurden die Teilnehmenden der Brückenkurse zu Beginn des Sommersemesters 2012, also sieben bzw. 19 Monate nach Belegung des Kurses, per Email gebeten einen Online Fragebogen auszufüllen. Insgesamt wurden 552 Emails versendet, die Rücklaufquote liegt bei 58%. Etwa ein halbes Jahr nach dem Brückenkurs 2010 wurde zusätzlich ein Test mit Argumentationsaufgaben im Themenbereich „Lineare Unabhängigkeit“ bei Studierenden mit (N = 60) und ohne Brückenkursbesuch (N = 60) durchgeführt.

Alle drei Untersuchungen bestätigen den Erfolg und das Potenzial des Münchner Brückenkurskonzepts. Neben einer erfreulichen Studienerfolgsquote werden die Zielbereiche durchaus von den Studierenden in den Veranstaltungen wahrgenommen, erkannt und als hilfreich eingeschätzt. Dies ergibt sich zum einen aus einer Kategorisierung der offenen Antworten auf die Frage „Was war (aus heutiger Sicht) von dem, was Sie im Brückenkurs Mathematik gelernt haben am Wichtigsten“, als auch aus den Multiple Choice Fragen zu den einzelnen Zielbereichen in der Online-Evaluation. Auch die schriftlichen Argumentationsaufgaben zeigen, dass Studierende mit Brückenkurs signifikant besser abschneiden als diejenigen ohne Brückenkurs. Diese Ergebnisse müssen allerdings mit Vorsicht interpretiert werden, da eine Überprüfung des Messinstruments auf Validität aussteht. Außerdem muss die Selektivität der Rückmeldungen und die Eingangsselektivität der Brückenkursteilnehmerinnen und -teilnehmer berücksichtigt werden.

5.2 Strukturüberprüfung mathematischer Argumentationskompetenz (Aufsatz 2)

Konzeption der Publikation, Aufbereitung (Review) bisheriger Arbeiten, die Erstellung und Pilotierung der Items sowie Durchführung, Auswertung der Evaluation und publikationsbasierte Darstellung wurden im Rahmen der Dissertation vollzogen und federführend in Aufsatz 2 umgesetzt. Die Koautoren unterstützten den Prozess beratend. Der Aufsatz wurde bei der Zeitschrift „Diagnostica" zur Veröffentlichung eingereicht.

Reichersdorfer, E., Ufer, S. & Reiss, K. (2013). Kompetenzstrukturmodelle zur Erfassung mathematischer Argumentationskompetenz in der Teilbarkeitslehre. *Manuskript eingereicht zur Publikation bei der Zeitschrift Diagnostica.*

Mathematisch Argumentieren steht im Zentrum mathematischen Arbeitens (Heintz, 2000) und gilt als eine der Herausforderungen, die Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Mathematik am Übergang von der Schule in die Hochschule für einen erfolgreichen Studienfortgang bewältigen müssen. Da sich insbesondere die psychometrische Modellierung nach prozessbezogenen Standards bei den Bildungsstandards als schwierig gestaltet, wird in diesem Beitrag versucht, eine dieser Kompetenzen, mathematisch Argumentieren, differenzierter zu betrachten. Dabei wurde zunächst eine Einschränkung auf einen eng eingegrenzten Inhaltsbereich, die Teilbarkeitslehre, vorgenommen und es werden lediglich Allaussagen untersucht. Die Offenheit mathematischer Argumentationsaufgaben wird in einem ersten Versuch mit der zusätzlichen Evaluation von Aussagen aufgegriffen, wobei die Formulierung einer Vermutung vorerst noch unberücksichtigt bleibt. Im Folgenden werden drei Kompetenzstrukturmodelle theoretisch begründet und im Hinblick auf deren Passung zu den empirischen Daten verglichen.

Falls die zusätzlichen Anforderungen zum Beweisen bei mathematischen Argumentationen genauso wie die inhaltlichen Differenzen zwischen der Geometrie und der

Teilbarkeitslehre keine wesentliche Rolle spielen, kann das *eindimensionale Modell* zum Beweisen aus der Geometrie auf mathematisches Argumentieren übertragen werden. Andernfalls lassen sich mehrere Dimensionen unterscheiden. Ein *dreidimensionales Modell* würde zum einen Argumentationen mit Hilfe von einfachen Regeln und Definitionen (siehe Kompetenzstufe I beim Beweisen), die keinen Wechsel zwischen Repräsentationsebenen erfordern (Dimension 1: technisches Beweisen) und komplexeren Beweisen, die einen Wechsel erfordern (Dimension 2: komplexes Beweisen) unterscheiden (analog zu Kompetenzstufen II und III beim Beweisen). Aufgrund der Differenzen in den Inhaltsbereichen Geometrie und Teilbarkeitslehre ist eine Aufgliederung in ein- und mehrschrittige Beweise in der Teilbarkeitslehre nicht möglich. Da für technische Beweise nur eine begrenzte Anzahl von Sätzen und Definitionen aus der Teilbarkeitslehre relevant sind, zählen Items dieser Dimension zu gut-strukturierten Problemen im Sinne von Jonassen (2000). Items der Dimension komplexes Beweisen hingegen erfordern einen flexiblen Umgang mit verschiedenen Repräsentationen, wobei unterschiedliche Lösungswege zur Wahl stehen, die nicht zwingend zielführend sind. Derartige Probleme werden nach Jonassen (2000) eher als schlecht-strukturiert charakterisiert. Eine dritte Dimension ergibt sich durch die zusätzliche Evaluation einer Aussage. Darüber hinaus wäre ein *vierdimensionales Modell* mit einer Aufspaltung der letzten Dimension in wahre (Dimension 3) und falsche Aussagen (Dimension 4) für die Evaluation ebenso plausibel, aufgrund unterschiedlicher Anforderungen beim Beweisen einer wahren und Widerlegen einer falschen Aussage. Durch eine zusätzliche Evaluation der Aussage steigen die zur Auswahl stehenden Lösungsmöglichkeiten noch einmal und dementsprechend werden derartige Items auch eher als schlecht-strukturierte, komplexe Probleme eingeordnet.

Die Studie zur Strukturprüfung mathematischer Argumentationskompetenz fand an drei süddeutschen Universitäten im Herbst 2010 und 2011 statt. Teilnehmerinnen und Teilnehmer waren $N = 453$ Studienanfängerinnen und Studienanfänger hauptsächlich eines Lehramts mit Unterrichtsfach Mathematik. Nur wenige aus dieser Gruppe waren für den Studiengang Diplom oder Bachelor Mathematik eingeschrieben.

Insgesamt 17 Items mit offenem Antwortformat wurden von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern bearbeitet und auf einer 0-1-2 Punkte Skala in Anlehnung an Reiss et al. (2002) von zwei Mitarbeitern kodiert. Ein Punkt wurde vergeben, falls mehr als die Hälfte der Argumente korrekt angegeben wurde und zwei Punkte für eine vollständig richtige Begründung. Auf dieser Grundlage wurde für die drei Modelle eine konfirmatorische Faktorenanalyse gerechnet und insbesondere das dreidimensionale als auch das vierdimensionale Modell liefern gute Fit Indizes (nach Schermelleh-Engel, Moosbrugger & Müller, 2003). Der χ^2 Differenzentest nach Satorro und Bentler (2001) zeigt schließlich, dass das vierdimensionale Modell den anderen beiden Modellen überlegen ist und damit die empirischen Daten am besten repräsentiert.

Zusammenfassend konnte durch die Studie gezeigt werden, dass ein komplexes Konstrukt wie die mathematische Argumentationskompetenz durch eindimensionale Messinstrumente nicht adäquat erfasst wird und sich daher eine differenzierte Betrachtung anbietet.

5.3 Effektivität instruktionaler Informationen in problembasierten Lernumgebungen (Aufsatz 3)

Konzeption der Publikation, Aufbereitung des theoretischen Hintergrunds und der empirischen Ergebnisse zu den Lernumgebungen sowie die Durchführung der Studie, Auswertung der Daten und publikationsbasierte Darstellung wurden im Rahmen der Dissertation vollzogen und federführend in Aufsatz 3 umgesetzt. Die Koautoren unterstützten den Prozess durch inhaltliche und methodische Beratung. Der Aufsatz wurde bei der Zeitschrift „International Journal of Science and Mathematics Education“ zur Veröffentlichung eingereicht.

Reichersdorfer, E., Ufer, S. & Reiss, K. (2013) Differential Guidance in Problem-Based Learning Settings to Foster Mathematical Argumentation Skills of Prospective Teachers. *Manuscript submitted for publication in the International Journal of Science and Mathematics Education.*

Zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz bei Studienanfängerinnen und Studienanfängern gibt es bisher kaum empirisch fundierte Ansätze. Problembasierte Lernumgebungen haben sich jedoch bereits für komplexe Fähigkeiten in anderen Bereichen bewährt und werden deshalb auch hier eingesetzt. Unklar ist lediglich, auf wie vielen Ebenen (Schworm & Renkl, 2007) eine zusätzliche instruktionale Unterstützung der Lernenden notwendig ist. In einer ersten Studie wurden *heuristische Lösungsbeispiele* mit instruktionalen Informationen auf allen Ebenen, also der inhaltlichen Ebene, allgemeinen Lernebene und der strategischen Ebene, mit einer Lernumgebung ohne instruktionale Informationen, häufig auch *Problemlösen* genannt, verglichen. Konzeption und Gestaltung von heuristischen Lösungsbeispielen intendieren, die Aufmerksamkeit des Lerners auf die strategische Ebene zu richten. Beim Problemlösen hingegen werden die Lerner zunächst aufgefordert die inhaltlichen Voraussetzungen und Angaben zu studieren, um damit weiter zu arbeiten. Für diese Studie wurden im Detail die folgenden Forschungsfragen betrachtet:

(1) Wirkt sich die Verfügbarkeit von instruktionalen Informationen in einer problembasierten Lernumgebung positiv auf verschiedene Dimensionen mathematischer Argumentationskompetenz aus? Hierzu wird insbesondere die Bedingung heuristische Lösungsbeispiele mit Problemlösen verglichen. Basierend auf der theoretischen Fundierung und früheren Ergebnissen zu heuristischen Lösungsbeispielen für gut-strukturierte Probleme wird zunächst deren Überlegenheit für technische Beweise angenommen (Reiss et al., 2007; Sweller et al., 1998; Zöttl et al., 2010). Für komplexe Probleme mit schlecht-strukturierten Problemräumen haben sich problembasierte Lernumgebungen, in denen Lernende Probleme lösten, bewährt (e.g. Dochy et al., 2003). Basierend auf diesen Ergebnissen wird vermutet, dass Problemlösen für komplexes Beweisen, Conjecturing mit wahren und falschen Aussagen am besten geeignet ist. Dabei soll berücksichtigt werden, dass sich allgemeine kognitive Voraussetzungen, gemessen mit der Abiturnote, auf das mathematische Fachwissen von Lehrkräften auswirken (Blömeke, Suhl, Kaiser & Döhrmann, 2012; Kollar et al., 2013).

(2) Deshalb wird zusätzlich untersucht, ob die Effektivität der problembasierten Lernumgebungen mit unterschiedlichem Grad instruktionaler Informationen von den allgemeinen kognitiven Voraussetzungen abhängt. Es wird vermutet, dass Studienanfängerinnen und Studienanfänger mit günstigen allgemeinen kognitiven Voraussetzungen Lernmaterialien auch in der Vergangenheit gut nutzen konnten und deshalb auch am meisten von den heuristischen Lösungsbeispielen profitieren (Kollar et al., 2013).

Für ein tieferes Verständnis der Ergebnisse, sind zusätzlich die Prozesse während der Bearbeitung des heuristischen Lösungsbeispiels und dem selbstständigen Lösen des Problems von Interesse, da die angenommene Effektivität der beiden Lernumgebungen vor allem durch die Selbsterklärungs- und Reflexionsaktivitäten erklärt werden. Konkret bedeutet das hier:

(3) Werden die inhaltliche und die strategische Ebene in den Bedingungen heuristisches Lösungsbeispiel und Problemlösen mit unterschiedlicher Intensität diskutiert? Entsprechend der Intention von heuristischen Lösungsbeispielen wird vermutet, dass in dieser Bedingung mehr Diskussionen auf der strategischen Ebene geführt werden, während die inhaltliche Ebene beim Problemlösen dominiert.

(4) Sind darüber hinaus die Effekte von heuristischen Lösungsbeispielen bzw. Problemlösen auf Facetten mathematischer Argumentationskompetenz mediiert durch Diskussionen auf der strategischen bzw. inhaltlichen Ebene? Wenn Lerner während der

Bearbeitung von heuristischen Lösungsbeispielen überwiegend auf der strategischen Ebene diskutieren, sind die Intentionen der Selbsterklärungsprompts erfüllt. Es kann angenommen werden, dass diese fokussierten Diskussionen positive Effekte von heuristischen Lösungsbeispielen auf Facetten mathematischer Argumentationskompetenz erklären können, weil Lernende durch die aktive Auseinandersetzung mit den Strategien und Herangehensweisen in den heuristischen Lösungsbeispielen diese auch adaptieren und in den Tests anwenden. Umgekehrt wird erwartet, dass Diskussionen während dem Problemlösen hauptsächlich die inhaltliche Ebene betreffen. Demzufolge findet in den kooperativen Lernphasen eine Konzentration auf inhaltliche Ideen statt. Falls sich positive Effekte von Problemlösen auf Facetten mathematischer Argumentationskompetenz herausstellen, wird vermutet, dass diese Effekte mit einem höheren inhaltlichen Wissen in der Teilbarkeitslehre zusammenhängen und dementsprechend von Diskussionen auf der inhaltlichen Ebene mediiert werden.

An der Studie nahmen N = 119 Studienanfängerinnen und Studienanfänger eines Lehramts mit Unterrichtsfach Mathematik aus zwei süddeutschen Universitäten teil. Zur Messung mathematischer Argumentationskompetenz wurden Vor- und Nachtests mit Items aus den vier zuvor identifizierten Dimensionen eingesetzt. Während der Arbeit in der Lernumgebung wurden Desktop, Ton und Video des Lerners aufgezeichnet. Die Ergebnisse sind im Folgenden nach den Forschungsfragen gegliedert:

(1) Für technische Beweise stellte sich heraus, dass die Bedingung heuristische Lösungsbeispiele dem Problemlösen überlegen war. Der entgegengesetzte Effekt lag für die vierte Dimension, Conjecturing mit falschen Aussagen vor. Für komplexes Beweisen und Conjecturing mit wahren Aussagen wurden keine signifikanten Ergebnisse gefunden.

(2) Bei der zusätzlichen Berücksichtigung der allgemeinen kognitiven Voraussetzungen der Studienanfängerinnen und – anfänger, blieben die Effekte für technische Beweise unverändert. Jedoch war für Conjecturing mit falschen Aussagen die Wirksamkeit von heuristischen Lösungsbeispielen positiv von den allgemeinen kognitiven Voraussetzungen abhängig. Erwartungskonform zeigte sich die Tendenz, dass Lerner mit günstigen allgemeinen kognitiven Voraussetzungen eher von den heuristischen Lösungsbeispielen profitieren und Lerner mit durchschnittlichen und niedrigeren allgemeinen kognitiven Voraussetzungen mehr beim Problemlösen lernten.

(3) Die Analyse der Diskussionsdaten ergab die erwarteten Effekte. Lerner in der heuristischen Lösungsbeispielbedingung diskutieren signifikant mehr auf der strategischen

Ebene als in der Problemlösebedingung. Umgekehrt finden Diskussionen auf der inhaltlichen Ebene häufiger beim Problemlösen statt.

(4) Heuristische Lösungsbeispiele sowie Diskussionen auf der strategischen Ebene beeinflussen Fähigkeiten für technische Beweise positiv. Kontrolliert man den Effekt der heuristischen Lösungsbeispiele auf Fähigkeiten für technische Beweise, so wird der Faktor Diskussionen auf der strategischen Ebene nicht mehr signifikant und trägt somit, entgegen den Erwartungen, nicht zu einer weiteren Erklärung der Wirksamkeit heuristischer Lösungsbeispiele bei. Ein ähnliches Muster findet man für die Effekte von Problemlösen auf Conjecturing mit falschen Aussagen, wobei auch hier Diskussionen auf der inhaltlichen Ebene keine weiteren Zusammenhänge aufdecken.

6. Diskussion

Basierend auf dem theoretischen Hintergrund zu Umbrüchen und Schwierigkeiten beim Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik und Lernumgebungen zur Förderung komplexer Fähigkeiten wie der mathematischen Argumentationskompetenz sollen im Folgenden die empirischen Ergebnisse der Arbeit reflektiert werden. Dazu werden noch einmal die zentralen Befunde der Studien zusammengefasst und übergreifend diskutiert (6.1). Daraus werden sowohl theoretische als auch praktische Implikationen abgeleitet (6.2), bevor das methodische Vorgehen in einem eigenen Abschnitt dargelegt wird (6.3). Schließlich werden die Grenzen dieser Untersuchung thematisiert und weiterführende Forschungsfragen in einem Ausblick ergänzt (6.4).

6.1 Überblick und Diskussion zentraler Befunde

Diese Arbeit ist angesiedelt an der Schnittstelle Schule - Hochschule im Fach Mathematik und verfolgt dabei primär das Ziel, effektive Unterstützungsmaßnahmen in dieser Übergangsphase zu identifizieren. Aufgrund einer defizitären Forschungsgrundlage zu wesentlichen Schwierigkeiten und Problemen der Studienanfängerinnen und Studienanfänger (Fischer et al., 2009), wurden zunächst Differenzen zwischen der schulischen Mathematik im Sekundarbereich und der akademischen Disziplin hauptsächlich theoriebasiert zusammengefasst. Darauf aufbauend wurden fünf Zielbereiche für Unterstützungsmaßnahmen in der Studieneingangsphase formuliert, bestehend aus (1) Arbeitsweisen der akademischen Mathematik, (2) Lernstrategien, (3) Methodenwissen, (4) Spezifische Fertigkeiten und (5) Aspekte der Studienorganisation. Diese Zielbereiche wurden in einem zweiwöchigen Brückenkurs kurz vor Beginn des ersten Semesters exemplarisch realisiert. In speziellen computerbasierten Übungen wurden zwei problembasierte Lernumgebungen, heuristische Lösungsbeispiele und Problemlösen, eingesetzt, die sich dem ersten Zielbereich und speziell der Förderung mathematischer Argumentationskompetenz widmeten.

Insgesamt belegen die Ergebnisse aus zwei Brückenkursjahrgängen, dass die intendierten und exemplarisch implementierten Zielbereiche von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern wahrgenommen, vor allem aber auch als hilfreich und relevant für das Studium eingeschätzt werden. Schriftliche Tests in einem eingeschränkten Inhaltsbereich mit einer Teilstichprobe aus Zweitsemesterstudierenden mit und ohne Brückenkurs zeigen zudem, dass

Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Brückenkurses signifikant bessere Leistungen erzielen. Unter den Brückenkursteilnehmerinnen und –teilnehmern ist auch die Studienabbruchquote nach einem bzw. drei Semestern nur marginal.

Ausgangspunkt für die Untersuchung der Wirksamkeit der beiden Bedingungen „heuristische Lösungsbeispiele" und „Problemlösen" auf mathematische Argumentationskompetenz war die Entwicklung eines theoretisch und empirisch fundierten Kompetenzstrukturmodells, das für die Gestaltung eines Messinstruments notwendig wird. Ein differenziertes Modell mit den vier Dimensionen (1) technisches Beweisen, (2) komplexes Beweisen, (3) Conjecturing mit wahren Aussagen und (4) Conjecturing mit falschen Aussagen zeigte sich dabei als überlegen. Basierend auf diesem Modell wurden schließlich entsprechende Messinstrumente für ein Pre-/ Posttest Design erarbeitet.

Die Auswertungen belegen differentielle Effekte für den Vergleich von heuristischen Lösungsbeispielen und Problemlösen auf die verschiedenen Facetten mathematischer Argumentationskompetenz. Für technische Beweisfähigkeiten haben sich die heuristischen Lösungsbeispiele bewährt. Im Gegensatz dazu war für die falschen Conjecturing Aussagen die Problemlösebedingung effektiver. Dieses Ergebnis findet man deskriptiv auch für die Dimensionen komplexes Beweisen und Conjecturing mit wahren Aussagen, statistische Signifikanz wird jedoch nicht erreicht.

Unter Berücksichtigung der allgemeinen kognitiven Fähigkeiten lässt sich bei den falschen Conjecturing Aussagen die Tendenz erkennen, dass nur noch Studienanfängerinnen und Studienanfänger mit unterdurchschnittlichen und durchschnittlichen allgemeinen kognitiven Voraussetzungen mehr von der Bedingung Problemlösen profitieren als von heuristischen Lösungsbeispielen, während Studienanfängerinnen und Studienanfänger mit günstigen allgemeinen kognitiven Lernvoraussetzungen bessere Leistungen durch die Bearbeitung von heuristischen Lösungsbeispielen erzielen. Strategien und Herangehensweisen für Repräsentationswechsel, wie sie für Items zu komplexen Beweisen und wahren Conjecturing Aussagen erforderlich gewesen wären, aber auch das Widerlegen einer Aussage durch ein Gegenbeispiel, relevant für falsche Conjecturing Aussagen, wurden in den heuristischen Lösungsbeispielen insbesondere für schwache Lerner vermutlich zu wenig expliziert. Hinzu kommt, dass der Vergleich von zwei verschiedenen Lösungsansätzen, das interpretieren unterschiedlicher Strategien sowie die Identifikationen von Gemeinsamkeiten und Unterschieden insbesondere schwache Lerner überfordert haben könnte (Rittle-Johnson et al., 2009). Als Konsequenz hätte diese Gruppe auch nicht von einer positiven Interdependenz profitiert (Johnson & Johnson, 2009). Im Gegensatz dazu wurden beim Problemlösen zahlreiche Beispiele von den Lernern aktiv untersucht, wobei vermutet wird, dass sich gerade diese Aktivitäten positiv auf die Suche nach einem Gegenbeispiel ausgewirkt haben.

Ergebnisse aus der Analyse der Diskussionsdaten zeigen, dass die heuristischen Lösungsbeispiele genauso wie die Bedingung Problemlösen in der intendierten Form genutzt wurden. Dementsprechend wurden während der Bearbeitung von heuristischen Lösungsbeispielen mehr Diskussionen auf der strategischen Ebene geführt als beim Problemlösen. Das umgekehrte Muster lag für Diskussionen auf der inhaltlichen Ebene vor. Allerdings konnte nicht nachgewiesen werden, dass Unterschiede im Diskussionsverhalten das vorliegende Befundmuster bei den schriftlichen Tests mediieren. Auffällig war jedoch, dass eine hohe Diskussionsaktivität auf der strategischen Ebene, die mit der Bearbeitung von heuristischen Lösungsbeispielen einhergeht, vor schwachen Leistungen bei technischen Beweisen schützt, für besonders gute Leistungen aber nicht notwendig ist. Umgekehrt liegt ein derartiges Befundmuster für Diskussionen auf der inhaltlichen Ebene im Zusammenhang mit Conjecturing mit falschen Aussagen nicht vor. Entsprechend sind weitere Faktoren für den Erfolg der einzelnen Lernumgebungen verantwortlich, die bislang nicht identifiziert werden konnten. Eine Möglichkeit wäre, während dem Problemlösen durch entsprechende Selbsterklärungsprompts zusätzlich Diskussionen auf der strategischen Ebene anzuregen, da metakognitive Fähigkeiten eine wichtige Einflussgröße für das Problemlösen darstellen (Schoenfeld, 1992). Nachdem auch Schworm und Renkl (2007) keine Überlegenheit von Prompts auf einer Ebene (allgemeine Lernebene) gegenüber Prompts auf zwei Ebenen gefunden haben, sollten in Folgestudien Prompts eingesetzt und untersucht werden, die mehrere Ebenen adressieren.

6.2 Theoretische und praktische Implikationen

Der wissenschaftliche Beitrag dieser Arbeit besteht darin, dass vorangegangene Forschungsergebnisse und Theorien teilweise repliziert werden konnten, aber auch neue Erkenntnisse ergänzend hinzukommen. So können die zusammengefassten Differenzen zwischen Schul- und Hochschulmathematik als Grundlage für weitere empirisch fundierte Untersuchungen zu Schwierigkeiten in der Übergangsphase verwendet werden. Die formulierten und im Münchner Brückenkurs überprüften Zielbereiche dienen als Fundament für eine weitere Ausdifferenzierung und Adaption möglicher Schwerpunktsetzungen in der Studieneingangsphase.

Eher für die Psychometrie und Diagnostik von Interesse sind die Ergebnisse der durchgeführten Strukturanalyse, womit eine erste messtheoretische Annäherung an das Konstrukt mathematische Argumentationskompetenz erreicht wurde. Insbesondere das Resultat, dass eine derartig komplexe Fähigkeit von einem eindimensionalen Modell eher unzureichend erfasst wird, kann als mögliche Ursache für Probleme bei der empirischen Trennung prozessbezogener Kompetenzen in den Bildungsstandards (Winkelmann et al., 2012) herangezogen werden.

Durch die mehrdimensionale Erfassung werden auch differenzierte Analysen von Fördermaßnahmen möglich. So können teilweise komplementäre Ergebnisse von Kollar et al. (2013) und Kirschner et al. (2011) durch detaillierte Auswertungen weitere Aufschlüsse ermöglichen. Während Kirschner et al. (2011) in kooperativen Lernsettings eine Überlegenheit von Problemlösen gegenüber Lösungsbeispielen feststellten, profitierten bei Kollar et al. (2013) vor allem Lerner mit günstigen allgemeinen kognitiven Voraussetzungen eher von den heuristischen Lösungsbeispielen. Konform zu Kirschner et al. (2011) sind Ergebnisse aus dieser Studie für falsche Conjecturing Aussagen. Allerdings liegt für technische Beweise ein entgegengesetztes Befundmuster vor, das eher in die Richtung von Kollar et al. (2013) geht, aber hier nicht von den allgemeinen kognitiven Voraussetzungen der Studierenden abhängig ist. Mit dieser Untersuchung wird erstmals systematisch Wissen über den Einsatz von instruktionalen Fördermaßnahmen für unterschiedliche Kompetenzfacetten unter Berücksichtigung diverser Einflussgrößen zur Verfügung gestellt. Damit wird insbesondere auch der Forderung nach einer wissenschaftlichen Fundierung der Lehramtsausbildung entgegen gekommen (Prenzel, 2009).

Daraus ergeben sich wiederum Implikationen für die Praxis der Lehramtsausbildung mit Hinweisen zur Durchführung und Konzeption von Unterstützungsmaßnahmen, um die Kluft zwischen schulischer Mathematik im Sekundarbereich und der akademischen Mathematik zu überwinden. Neben einer Berücksichtigung der hergeleiteten Zielbereiche in Brücken- oder Vorkursen wären insbesondere eine Implementation und angemessene Berücksichtigung in den Grundlagenvorlesungen der Studieneingangsphase wünschenswert. Dabei können die untersuchten Lernsettings je nach allgemeinen kognitiven Voraussetzungen und Defiziten bei einzelnen Kompetenzfacetten adäquat von den entsprechenden Dozenten eingesetzt werden.

6.3 Diskussion des methodischen Vorgehens

Die Problemlage der Studieneingangsphase in Studiengängen mit Hauptfach Mathematik ist nicht neu und wird durch eine Vielzahl von Maßnahmen am Übergang von der Schule zur Hochschule adressiert (Biehler, *in Druck*). Statt einer wissenschaftlichen Fundierung und Begleitforschung findet man jedoch häufig nur Erfahrungsberichte, sodass sich selten allgemeine Empfehlungen ableiten lassen. Im Gegensatz dazu basiert das Münchner Brückenkurskonzept auf theoretischen Analysen und soweit vorhanden, wurden empirisch fundierte Ansätze integriert. In einer angeschlossenen Interventionsstudie wurden zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz zwei problembasierte Lernumgebungen in einem Pre-/Posttest Design untersucht. Vorangegangene Studien zu heuristischen Lösungsbeispielen, problembasierten Lernumgebungen und Problemlösen werden häufig im Hinblick auf die Kontrollgruppe oder zu viel Variation in den Rahmenbedingungen kritisiert (Hmelo-Silver et al., 2007; Schmidt et al., 2007; Sweller et al., 2007). Deshalb wurde in dieser Untersuchung vor allem auf ein klares Studiendesign mit einer möglichst realistischen Implementation der Lernumgebungen geachtet. Problembasiertes Lernen nach Barrows (1996) sollte ursprünglich durch einen Tutor oder Lehrer unterstützt werden. Häufig wurden dazu Untersuchungen in Klassen durchgeführt mit unterschiedlichen Lehrkräften, sodass die Ergebnisse nicht selten von zahlreichen weiteren Faktoren moderiert sind. Durch eine computerbasierte Skriptunterstützung und weitere integrierte Tools in der Lernumgebung wurde die Unterstützung durch einen Tutor hier ersetzt. So war für alle Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Lernumgebung äquivalent bis auf den Grad der Skriptunterstützung. Da dieser Faktor keinen signifikanten Einfluss aufwies (Kollar et al., 2013), wird er nicht weiter berücksichtigt. Auf diese Art der Implementation sollten einerseits mögliche Störfaktoren minimiert werden. Andererseits sollte so eine realistische Bedingung geschaffen werden, in der Lernende nicht völlig auf sich gestellt sind, wie das bei entdeckendem Lernen häufig der Fall ist. Letzteres dient in der traditionellen Lösungsbeispielforschung oft als Kontrollgruppe. Variiert wurde in der Lernumgebung lediglich die Verfügbarkeit von instruktionalen Informationen. Die Kontrastierung von heuristischen Lösungsbeispielen, einer Lernumgebung mit Informationen auf drei möglichen Ebenen und Problemlösen ohne Informationen in einer problembasierten Lernumgebung stellt zwei Extrempositionen im Hinblick auf die Vorgabe von instruktionalen Informationen dar. In einem ersten Schritt sollten hier spezifische Effekte der einzelnen Positionen untersucht werden, bevor weitere Anpassungen vorgenommen werden.

Um die Wirksamkeit der beiden Lernumgebungen zu erheben, wurde basierend auf dem Kompetenzstrukturmodell mathematischer Argumentationskompetenz ein Messinstrument entwickelt und eingesetzt. Die Selbsteinschätzungen und schriftlichen Tests allgemein zum Brückenkurskonzept stellen einen ersten Ansatz für eine empirische Begleitforschung dar; vor allem in der Entwicklung eines reliablen und validen Testinstruments besteht jedoch noch dringend Bedarf.

6.4 Grenzen der Untersuchung und Ausblick

In den bisherigen Ausführungen wurden bereits vereinzelt Grenzen der Untersuchung angedeutet, die im Folgenden noch einmal zusammengefasst werden. Im Hinblick auf die Evaluation des Münchner Brückenkurskonzepts fehlt bisher ein umfassendes Testverfahren, das den Gütekriterien genügt. Dabei muss sowohl die Eingangsselektivität der Brückenkursteilnehmerinnen und Brückenkursteilnehmer als auch die Selektivität der Rückmeldungen bei der Interpretation der Ergebnisse bedacht werden. Die Wirksamkeit derartig kurzer Unterstützungsmaßnahmen ist natürlich beschränkt und kann sich nur durch adäquate, anschlussfähige Veranstaltungen im ersten Semester entfalten. Anregungen dazu findet man zum Beispiel bei Schichl und Steinbauer (2009).

Das vierdimensionale Modell mathematischer Argumentationskompetenz wurde bisher nur mit 17 Items untersucht. Eine weitere Überprüfung unter Einbindung eines größeren Itempools wäre wünschenswert. Inwieweit das Widerlegen falscher Aussagen in das bisherige Modell eingeordnet werden kann ist eine weitere interessante und ungeklärte Fragestellung in diesem Bereich. Außerdem sollte die Offenheit mathematischer Argumentationsaufgaben durch Pilotierungsstudien weiter vorangetrieben werden, um schließlich eine ganzheitliche Erfassung des Konstrukts zu erreichen. Nicht zuletzt stellt sich dann noch die Frage, ob dieses Modell auf andere Inhaltsbereiche der Mathematik übertragen werden kann.

In Bezug auf die problembasierten Lernumgebungen wurde zwar versucht, ein möglichst klares Design zu verwirklichen, die Ersetzung des Tutors oder Lehrers durch Computerunterstützung ist aber womöglich mit gewissen Einschränkungen verbunden, die hier nicht ignoriert werden sollen (Mäkitalo-Siegl, Kohnle & Fischer, 2011). Gezielte individuelle Unterstützung muss der Lerner selbst nachschlagen, wohingegen eine Anleitung durch den Lehrer ausbleibt. Außerdem wurden hier zwei Extrempositionen im Hinblick auf die Verfügbarkeit instruktionaler Informationen (heuristische Lösungsbeispiele vs.

Problemlösen) untersucht. Gegenstand weiterer Untersuchungen in diesem Bereich sollte eine Modifikation der Verfügbarkeit von instruktionalen Informationen sein, unter Berücksichtigung der allgemeinen kognitiven Voraussetzungen von Studienanfängerinnen und Studienanfängern. Mit einer sukzessiven Ausblendung von Informationen können möglicherweise Ergebnisse aus der traditionellen Lösungsbeispielforschung in individuellen Lernersettings im Sinne des Guidance Fading Effects (Renkl & Atkinson, 2003; Renkl, Atkinson & Große, 2004; Renkl, Atkinson, Maier & Staley, 2002) auf problembasierte Lernumgebungen übertragen werden. Außerdem sollten die heuristischen Lösungsbeispiele noch mehr auf die Bedürfnisse von Studienanfängerinnen und –anfängern mit unterdurchschnittlichen allgemeinen kognitiven Voraussetzungen abgestimmt werden. Expliziter müssen Strategien und Herangehensweisen für Repräsentationswechsel und damit verbundene Argumentationsschritte, aber auch das Widerlegen von falschen Aussagen durch ein Gegenbeispiel thematisiert werden. Auch Selbsterklärungsprompts auf mehreren Ebenen stellen eine Verbesserungsmöglichkeit der bislang untersuchten problembasierten Lernumgebungen dar.

Literatur

Arzarello, F., Paola, D. & Sabena, C. (2009). Proving in early calculus. In F. L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference* (pp. 35–40). Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Ball, D. L., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433–456). New York: MacMillan.

Barkai, R., Tabach, M., Tirosh, D., Tsamir, P. & Dreyfus, T. (2009). Modes of argument representation for proving - The case of general proof. In *Proceedings of CERME 6* (pp. 271–280). Lyon: Institut national de recherche pédagogique.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D. & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57–64). Norwich: PME.

Barrows, H. S. (1996). Problem-based learning in medicine and beyond: A brief overview. In L. Wilkerson & W. H. Gijselaers (Eds.), *New directions for teaching and learning,* No.68 (pp. 3–12). San Francisco: Jossey-Bass.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., …Tsai, Y.-M. (2010). Teachers´ Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133-180.

Bell, L. R., Smetana, L. & Binns, I. (2005). Simplifying inquiry instruction: assessing the inquiry level of classroom activities. *The Science Teacher, 72*(7), 30–33.

Biehler, R. (Ed.). (*in Druck*). *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung*. *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*: Springer.

Blömeke, S., Suhl, U., Kaiser, G. & Döhrmann, M. (2012). Family background, entry selectivity and opportunities to learn: What matters in primary teacher education? An international comparison of fifteen countries. *Teaching and Teacher Education*, *28*(1), 44-55.

Borko, H. (1989). Research on learning to teach: Implications for graduate teacher preparation. In A. W. Hoy (Ed.), *Research perspectives on the graduate preparation of teachers* (pp. 69–87). Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D. & Agard, P. C. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(3), 194–222.

Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review, 31*, 21-32.

Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Dubberke, T., …, Neubrand, M. (2006). Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *9*(4), 521–544.

Chi, M. T., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P. & Glaser, R. (1989). Self-explanation: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, *13*(2), 145–182.

Chinnappan, M., Ekanayake, M. & Brown, C. A. (2012). Knowledge use in the construction of geometry proof by Sri Lankan students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(4), 865–887.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from www.corestandards.org.

Cognition and Technology Group at Vanderbilt (1993). Anchored instruction and situated cognition revisited. *Educational Technology Research and Development*, *33*(3), 52–70.

Dochy, F., Segers, M., van den Bossche, P. & Gijbels, D. (2003). Effects of problem-based learning: a meta-analysis. *Learning and Instruction*, *13*, 533–568.

Eysink, T., de Jong, T., Berthold, K., Kolloffel, B., Opfermann, M. & Wouters, P. (2009). Learner Performance in Multimedia Learning Arrangements: An Analysis Across Instructional Approaches. *American Educational Research Journal*, *46*(4), 1107-1149.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 139-162.

Fischer, A., Heinze, A. & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule - Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für* *den Mathematikunterricht* (pp. 245–264). Münster, New York, NY, München, Berlin: Waxmann.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.

Funke, J. & Frensch, P. (2007). Complex Problem Solving: The European Perspective-10 Years After. In D. H. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems* (pp. 25–47). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Gijbels, D., Dochy, F., van den Bossche, P. & Segers, M. (2005). Effects of Problem-Based Learning: A Meta-Analysis from the Angle of Assessment. *Review of Educational Research*, *75*(1), 27–61.

Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *87*(7), 519–524.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. J. Kaput (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education. Research in Collegitate Mathematics Education* (Vol. 7, pp. 234–283). Providence, RI: American Mathematical Society.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics*. London: Univ. of London, Inst. of Education.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien, New York: Springer.

Heinze, A., Reiss, K. & Rudolph, F. (2005). Mathematics achievement and interest from a differential perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(3), 212–220.

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2012). *Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010.* Hannover: Hochschul-Informations-System.

Hilbert, T., Renkl, A., Kessler, S., & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction*, *18*(1), 54–65.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371–406.

Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychologist Review*, *16*(3), 235–266.

Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G. & Chinn, C. (2007). Scaffolding and Achievement in Problem-Based and Inquiry Learning: A Response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist, 42*(2), 99–107.

Johnson, D. W. & Johnson, R. T. (2009). An Educational Psychology Success Story: Social Interdependence Theory and Cooperative Learning. *Educational Researcher, 38*(5), 365–379.

Jonassen, D. H. (2000). Toward a Design Theory of Problem Solving. *Educational Technology Research and Development, 48*(4), 63-85.

Kalyuga, S., Ayres, P. & Sweller, J. (2011). *Cognitive load theory*. New York: Springer.

Kirschner, F., Paas, F., Kirschner, P. A. & Janssen, J. (2011). Differential effects of problem-solving demands on individual and collaborative learning outcomes. *Learning and Instruction*, *21*, 587–599.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte* (Vol. 1). Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer.

Knuth, E. (2002). Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*, 61–88.

Koedinger, K. R. (1998). Conjecturing and Argumentation in High-School Geometry Students. In R. Lehrer (Ed.), *Studies in mathematical thinking and learning. Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 319–347). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Koedinger, K. R. & Anderson, J. R. (1991). Interaction of Deductive and Inductive Reasoning Strategies in Geometry Novices. In K. J. Hammond & D. Gentner, (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Koedinger, K. R. & Anderson, J. R. (1990). Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science, 14*, 511-550.

Kollar, I., Fischer, F. & Slotta, J. D. (2007). Internal and external scripts in computer-supported collaborative learning. *Learning and Instruction*, *17*, 708–721.

Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F. & Reiss, K. (2013). Effects of Heuristic Worked Examples and Collaboration Scripts on the Acquisition of Mathematical Argumentation Skills of Teacher Students with Different Levels of Prior Achievement. *Manuscript submitted for publication in Learning and Instruction.*

Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Bonn: KMK.

Kultusministerkonferenz (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Retrieved from: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Lin, F. L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M. & Stylianides, G. (2012). Principles of Task Design for Conjecturing and Proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305–325). Dodrecht: Springer.

Lin, F.-L. & Wu Yu, J.-Y. (2005). *False Proposition - As a means for making conjectures in mathematics classrooms*. Invited Speech in the Asian Mathematical Conference 2005, Singapore 20-23 July. Retrieved from http://ww1.math.nus.edu.sg/AMC/papers/Lin-Fou-Lai.pdf.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States* (Anniversary ed.). New York: Routledge.

Mäkitalo-Siegl, K., Kohnle, C. & Fischer, F. (2011). Computer-supported collaborative inquiry learning and classroom scripts: Effects on help-seeking processes and learning outcomes. *Learning and Instruction, 21*, 257-266.

Martin, W. G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41–51.

Mayer, R. E. (2004). Schould There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? The Case for Guided Methods of Instruction. *American Psychologist, 59*(1), 14-19.

National Committee on Science Education Standards and Assessment (1996). *National Science Education Standards: Observe, interact, change, learn.* Washington, DC: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

O'Donnell, A. M. & Dansereau, D. F. (1992). Scripted Cooperation in student dyads: A method for analyzing and enhancing academic learning and performance. In R. Hertz-

Lazarowitz & N. Miller (Eds.), *Interaction in cooperative groups: The theoretical anatomy of group learning* (pp. 120–141). New York: Cambridge University Press.

Polya, G. (1948). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton [N.J.]: Princeton Univ. Press.

Prenzel, M. (2009). Von der Unterrichtsforschung zur Exzellenz in der Lehrerbildung. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *27*(3), 327–345.

Prenzel, M., Reiss, K. & Seidel, T. (2011). Lehrerbildung an der TUM School of Education. *Erziehungswissenschaft*, *22*(43), 47–56.

Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (*in Druck*). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In R. Biehler (Hrsg.), *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung. Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven.* Springer.

Reichersdorfer, E., Ufer, S. & Reiss, K. (2013). Mathematische Argumentationskompetenz - Formulierung und Überprüfung verschiedener Strukturmodelle. *Manuskript eingereicht zur Publikation bei Diagnostica*.

Reiss, K., Heinze, A., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2007). Fostering argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. In M. Prenzel (Ed.), *Studies on the educational quality of schools: the final report on the DFG priority programme* (pp. 251–264). Münster: Waxmann.

Reiss, K., Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen. Zeitschrift für Pädagogik. 45. Beiheft,* (S. 51–64). Weinheim: Beltz

Renkl, A. (1997). Learning from Worked-Out Examples: A Study on Individual Differences. *Cognitive Science*, *21*(1), 1-29.

Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(1), 29–35.

Renkl, A. & Atkinson, R. K. (2003). Structuring the Transition From Example Study to Problem Solving in Cognitive Skill Acquisition: A Cognitive Load Perspective. *Educational Psychologist*, *38*(1), 15–22.

Renkl, A. & Atkinson, R. K. (2007). Interactive Learning Environments: Contemporary Issues and Trends. An Introduction to the Special Issue. *Educational Psychology Review, 19*, 235-238.

Renkl, A., Atkinson, R. K. & Große, C. S. (2004). How Fading Worked Solution Steps Works - A Cognitive Load Perspective. *Instructional Science, 32*, 59–82.

Renkl, A., Atkinson, R. K., Maier, U. & Staley, R. (2002). From Example Study to Problem Solving: Smooth Transitions Help Learning. *The Journal of Experimental Education, 70*(4), 293–315.

Rittle-Johnson, B., Star, J. R., & Durkin, K. (2009). The Importance of Prior Knowledge When Comparing Examples: Influences on Conceptual and Procedural Knowledge of Equation Solving. *Journal of Educational Psychology, 101*(4), 836-852.

Rosenshine, B., Meister, C., & Chapman, S. (1996). Teaching students to generate questions: A review of the intervention studies. *Review of Educational Research, 66,* 181–221.

Satorra, A. &. Bentler, P. M. (2001). A scaled difference chi-square test statistic for moment structure analysis. *Psychometrika*, *66*(4), 507–514.

Schermelleh-Engel, K., Moosbrugger, H. & Müller, H. (2003). Evaluating the Fit of Structural Equation Models: Tests of Significance and Descriptive Goodness-of-Fit. *Methods of Psychological Research Online*, *8*(2), 23–74.

Schichl H. & Steinbauer, R. (2009). Einführung in das mathematische Arbeiten: Ein Projekt zur Gestaltung der Studieneingangsphase an der Universität Wien. *Mitteilungen der DMV*, *17*(4), 244–246.

Schmidt, H. G., Loyens, S. M. M., van Gog, T. & Paas, F. (2007). Problem-Based Learning is Compatible with Human Cognitive Architecture: Commentary on Kirschner, Sweller and Clark (2006). *Educational Psychologist*, *42*(2), 91–97.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: MacMillan.

Schwarz B., Leung, I., Buchholtz, N., Kaiser, G., Stillman, G., Brown, J. & Colleen, V. (2008). Future teachers’ professional knowledge on argumentation and proof: a case study from universities in three countries. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40*(5), 791–812.

Schworm, S. & Renkl, A. (2007). Learning argumentation skills through the use of prompts for self-explaining examples. *Journal of Educational Psychology*, *99*, 285–296.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Spillane, J. P. (1999). External reform initiatives and teachers' efforts to reconstruct their practice: the mediating role of teachers' zones of enactment. *Journal of Curriculum Studies*, *31*(2), 143–175.

Stegmann, K., Weinberger, A. & Fischer, F. (2007). Facilitating argumentative knowledge construction with computer-supported collaboration scripts. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *2*(4), 421–447.

Sweller, J., Kirschner, P. A. & Clark, R. E. (2007). Why Minimally Guided Teaching Techniques Do Not Work: A Reply to Commentaries. *Educational Psychologist*, *42*(2), 115–121.

Sweller, J., van Merriënboer, J. & Paas, F. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, *10*, 251–295.

Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, P. & Dreyfus, T. (2011). Secondary teachers’ knowledge of elementary number theory proofs: the case of general-cover proofs. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(6), 465-481.

Terhart, E. (2002). *Standards für die Lehrerbildung: Eine Expertise für die Kultusministerkonferenz*. Retrieved from http://miami.uni-muenster.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-1151/Standards_fuer_die_Lehrerbildung_Eine_Expertise_fuer_die_Kultusministerkonferenz.pdf

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161-177.

Tirosh, C. & Vinner, S. (2004). Prospective Teachers' Knowledge of Existence Theorems. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference of PME* (p. 360). Bergen University College: PME.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S. & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematikdidaktik*, *30*(1), 30–54.

Ufer, S., Heinze, A. & Reiss, K. (2008). Individual predictors of geometrical proof competence. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, pp. 361–368). Mexico: PME.

Ufer, S. & Reiss, K. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der DMV, 4-2009*, 155–177.

van Engen, H. (1959). Twentieth Century Mathematics for the Elementary School. *The Arithmetic Teacher*, *6*(2), 71–76.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Dordrecht [u.a.]: Kluwer.

Walker, A. & Leary, H. (2009). A Problem Based Learning Meta Analysis: Differences Across Problem Types, Implementation Types, Disciplines, and Assessment Levels. *The Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning*, *3*(1), 12–43.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need of strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101–119.

Weinert, F. E. (2001). Concept of Competence: A Conceptual Clarification. In D. S. Rychen & L. H. Salganik (Eds.), *Defining and selecting key competencies* (pp. 45–65). Seattle: Hogrefe & Huber.

Weinstein, C. E., & Mayer, R. E. (1986). The Teaching of Learning Strategies. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 315-327). New York: Macmillan.

Winkelmann, H., Robitzsch A., Stanat P. & Köller O. (2012). Mathematische Kompetenzen in der Grundschule: Struktur, Validierung und Zusammenspiel mit allgemeinen kognitiven Fähigkeiten. *Diagnostica*, *58*(1), 15–30.

Williams, S. M. & Hmelo, C. E. (1998). Learning through Problem Solving. *The Journal of the Learning Sciences*, *7*(3/4), 265–270.

Zöttl, L., Ufer, S. & Reiss, K. (2010). Modeling with heuristic worked examples in the KOMMA learning environment. *Journal für Mathematikdidaktik*, *31*(1), 143–165.

Anhang

Anlage A:

Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2013). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In R. Biehler (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven. Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik*. Springer.

Anlage B:

Reichersdorfer, E., Ufer, S. & Reiss, K. (2013). Kompetenzstrukturmodelle zur Erfassung mathematischer Argumentationskompetenz in der Teilbarkeitslehre. *Manuskript eingereicht zur Publikation bei der Zeitschrift Diagnostica.*

Anlage C:

Reichersdorfer, E., Ufer, S. & Reiss, K. (2013). Differential Guidance in Problem-Based Learning Settings to Foster Mathematical Argumentation Skills of Beginning Mathematics Teacher Students. *Manuscript submitted for publication in the International Journal of Science and Mathematics Education.*