

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

LEHRSTUHL FÜR MESSSYSTEM- UND SENSORTECHNIK

MASTER'S THESIS

MODELLIERUNG VON FASER BRAGG GITTER ALS SENSOREN
ZUR REKONSTRUKTION DER VOLLSTÄNDIGEN
DIELEKTRIZITÄTSKONSTANTE BEI KRAFTEINWIRKUNG
AUSGEHEND VON DEN INTENSITÄTEN DES REFLEKTIERTEN LICHTS

von Alessandro Bernardini, 2903758

Lehrstuhl für
MESSSYSTEM- UND SENSORTECHNIK
Univ.Prof.Dr.Ing. Alexander W. Koch
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Technische Universität München

Betreuer: Dipl.Ing. Mathias Stefan Müller

Wintersemester 2009/10

Abgabetermin: 31.1.2010

Einführung

Dieser Text befasst sich mit Faser Bragg Gitter als Sensoren bzw. Messsysteme.

Wir betrachten dabei Glasfasern die in Materialien eingebettet sind auf die deformierende Kräfte einwirken. Diese Kräfte wirken somit auch auf den Abschnitt der Glasfaser in dem sich ein Bragg Gitter befindet. Dadurch verändert sich die Dielektrizitätskonstante des Materials aus dem das Faser Bragg Gitter besteht, gemäß dem photoelastischen Effekt.

Dies verursacht wiederum eine Veränderung des Reflexionsverhaltens des Faser Bragg Gitters selbst.

Anhand des *gemessenen* und von dem Faser Bragg Gitter reflektiertem Licht, werden wir erst die genauen Werte für den Dielektrizitätstensor (für das Material im Abschnitt des Bragg Gitters) rekonstruieren und daraus den Strain Tensor bestimmen für die Deformationen des Materials, in dem das Faser Bragg Gitter eingebettet ist.

Wir werden also ein Sensor aufbauen und modellieren, der in der Lage ist, den Strain Tensor in einem Material, im Abschnitt wo das Bragg Gitter (FBG) eingebettet ist, anhand des gemessenen vom dem Faser Bragg Gitter reflektiertem Licht, zu ermitteln.

Die Bedeutung eines solchen Sensors ist groß, da die Dimensionen einer Glasfaser sehr klein sind: es ist unproblematisch eine Glasfaser in einem Material an beliebiger Stelle einzubetten.

Darüber hinaus ist unser Sensor “einfach”, da das Kernstück eben nur aus einer Glasfaser besteht¹.

Daraus resultiert eine große praktische Bedeutung in Hinblick auf die Anwendungen.

Der Abschnitt des Bragg Gitters befindet sich eingebettet im Material für das wir den Strain Tensor ermitteln werden: bis zum Gitter wird das Licht durch eine Zuleitung transportiert die aus einer einfachen PMF Faser besteht².

Das Bragg Gitter wurde im Material der PMF Faser erzeugt und das ganze System bildet eine Einheit.

Die Kräfte sollten idealerweise auf den Abschnitt des FBG (Faser Bragg Gitter) wirken und nicht auf die Zuleitungs PMF Faser: jedoch beobachten wir keine Konsequenzen

¹natürlich muss aber das Spektrum des reflektierten Lichtes ermittelt und ausgewertet werden und es müssen entsprechende Rechnungen durchgeführt werden. Aber all diese Aufgaben betreffen nicht in erster Linie das “Kernstück” des Sensors, das aus einer einfachen Faser besteht die entsprechend an der *passenden* Stelle *im Material* eingebettet ist.

²PMF bedeutet “polarisation mantaining fiber”

falls diese Anforderung nicht exakt eingehalten wird.

Dieser Text beschreibt also den Aufbau des Systems PMF plus FBG und modelliert den gesamten Sensor, bis zur expliziten Rekonstruktion der Dielektrizitätskonstante des Materials des FBG (auf das die Kraft einwirkt). Dadurch ist es dann möglich den Strain Tensor zu rekonstruieren.

Es ist wichtig zu betonen, dass wir hier das allgemeine Problem betrachten, in dem die Dielektrizitätskonstante des Materials des FBG (bzw. der Strain Tensor im Material des FBG) nicht diagonal ist, mit beliebigen Einträgen.

Das wichtigste Ergebnis dieses Textes ist (5.50), und dessen Herleitung.

Mit (5.50) können wir die Dielektrizitätskonstante für das Material des belasteten FBG rekonstruieren (und dadurch dann den Strain Tensor) anhand von gemessenen und bekannten Größen³.

Und (5.50) liefert uns auch die Elemente außerhalb der Hauptdiagonale (man bedenke auch, dass der Dielektrizitätstensor symmetrisch ist, siehe (A.45)).

Für den Strain Tensor siehe Tabelle 5.1.

Es ist wichtig zu betonen, dass all diese Ergebnisse ausführlich und vollständig hergeleitet worden sind, ausgehend von den Maxwell Gleichungen.

Die Ergebnisse aus den Literaturquellen wurden vollständig und lückenlos nachvollzogen, und im Text findet sich immer eine explizite und ausführliche *Herleitung* der Ergebnisse und niemals ein Verweis auf Literaturquellen *ohne* komplette Herleitung in diesem Text.

Die wichtigsten Literaturquellen bestehen aus den Publikationen von meinem Betreuer, Dipl.Ing Mathias S. Müller, in erster Linie aus [17], [16], [15], [13].

Außerdem sind die Arbeit von Erdogan [18] und die Publikationen [23] und [24] wichtig.

Die Arbeit von [10] diente als Anleitung zu einer analogen Herleitung (der gekoppelten Moden Gleichungen) die unser Fall betrifft.

Als Lehrbücher sein in erster Linie [4], [12] und [11] erwähnt.

Wichtig war für mich auch das Textbuch meiner früheren Dozenten [2] was elektrodynamische Grundlagen betrifft.

Dieser Text beinhalten allerdings viele Ergebnisse die, zumindest in der angegebenen Form, nicht in der Literatur zu finden sind, und die neue Ergebnisse darstellen.

³also anhand der Intensitäten des von System PMF plus FBG reflektierten Lichtes bzw. anhand Verhältnisse dieser Intensitäten.

So ist der Ausdruck (5.50) und dessen ausführliche Herleitung in dieser Form nicht in den Literaturquellen zu finden und stellt somit ein neues Ergebnis dar.

Auch sind die Ergebnisse von Abschnitt 5.2, und insbesondere von Abschnitt 5.2.2, nicht in den Literaturquellen angegeben.

Ein Problem des beschriebenen Sensors ist, dass für bestimmte Fälle wir eine Überlappung von Gauss Glocken beobachten (was das reflektierte Licht betrifft), Überlappung die es schwieriger macht bestimmte wichtige Parameter zu rekonstruieren.

Dieses Problem wurde aber behoben mit dem Einsatz von numerischen Verfahren: die Lösung eines bestimmten Minimierungsproblems (auf numerischem Weg) ermöglicht es uns in allen Fällen die wichtigen Parameter zu rekonstruieren (und dadurch den Dielektrizitätstensor und den Strain Tensor).

Dies alles ist in Abschnitt 5.2 und in Abschnitt 5.2.2 *ausführlich* beschrieben und hergeleitet⁴.

Die präsentierten Verfahren müssen allerdings noch den "Praxistest" bestehen und es werden weitere Simulationen und Labormessungen und numerische Berechnungen notwendig sein, um die "Brauchbarkeit" der Ergebnisse zu bekräftigen.

Die genaue Wahl der Algorithmen und der Anfangswerte für die Minimierungsalgorithmen wird auch wichtig sein und bedarf weiterer Aufmerksamkeit.

Allerdings sind die hier präsentierten Ergebnisse allgemein gültig.

Insbesondere ist (5.50) ein wichtiges und allgemein gültiges Ergebnis zur Rekonstruktion des Dielektrizitätstensors.

In diesem Text wurde sehr großen Wert auf die logische Korrektheit und *Ausführlichkeit* der Beweise gelegt und *jedes* Ergebnis ist in detaillierten Schritten bewiesen worden.

Auch wurde sehr darauf geachtet, dass die Bedeutung der benutzten Symbole klar ist⁵.

Der Leser der sich nicht gut mit der Elektrodynamik auskennen sollte (oder mit den mathematischen Grundlagen), findet in den Anhängen eine in sich geschlossene Abhandlung, ausgehend von den Maxwell Gleichungen, die die wichtigen Grundlagen zusammenfasst oder herleitet.

In Anhang A werden die Grundlagen der Elektrodynamik zusammengefasst und es findet sich auch eine Herleitung des Ausdrucks für die elektrische Energiedichte die nicht leicht in Standard Textbüchern zu finden ist.

⁴auch diese Ergebnisse sind eben in der Literatur nicht zu finden. . .

⁵man bedenke übrigens, dass in diesem Text wir die *absoluten* Dielektrizitätskonstanten betrachten.

In Anhang **B** sind die Grundlagen der Vektoranalysis beschrieben und intuitiv begründet. Es wird auch die Theorie der komplexen Vektoren präsentiert, die auch nicht leicht in der Standard Literatur zu finden ist. Auf die logische Korrektheit bei der Darstellung von elektrodynamischen Größen mit komplexen Vektoren wurde großen Wert gelegt. Die Theorie der Polarisation des Lichtes wird auch angesprochen.

Anhang **C** liefert wichtige Behauptungen und Ergebnisse zur Bestimmung des Hauptkoordinatensystems $Oxyz$ des belasteten FBG, ausgehend von dem Dielektrizitätstensor ausgedrückt im Koordinatensystem $O\chi\nu\zeta$ für das *unbelastete* Faser Bragg Gitter.

Die Ergebnisse von Anhang **C** sollten immer berücksichtigt werden, während oder vor dem Betrachten der anderen Kapitel.

In Anhang **D** wird die Theorie der Polarisation des Lichtes nach [20] präsentiert (oder besser eine Zusammenfassung davon für die uns betreffenden Ergebnisse...) und auch hier wird zumindest auf eine intuitive Begründung nicht verzichtet. In diesem Anhang lernen wir mit unpolarisierten Lichtstrahlen umzugehen (für das was unsere Ergebnisse betrifft).

Der Text beginnt mit Kapitel **1**, dass die Ausbreitung von ebenen elektromagnetischen Wellen in anisotropen (homogenen und nicht dissipativen) Medien behandelt: es werden die Ergebnisse hergeleitet, die wir im späteren Textverlauf brauchen werden.

Dieser Text beinhaltet keine neuen Ergebnisse gegenüber der Standard Literatur, bis auf eine ausführliche Angabe der Gleichungen die die normale Oberfläche definieren, Gleichungen die in dieser Form in der Standard Literatur nicht (oder selten) zu finden sind.

Siehe Tabelle **1.1** und Abbildungen **1.2**, **1.2** und folgende.

Kapitel **2** beinhaltet eine Herleitung der gekoppelten Moden Theorie, die für unser Fall passend ist. Die Herleitung ist eine modifizierte Version der Abhandlung von [10], so dass wir auch tensorielle Dielektrizitätskonstanten handhaben können ohne auf die allgemeine Theorie von [11] zurückgreifen zu müssen, die sehr komplex ist.

Diese Abhandlung funktioniert nur deshalb, weil unsere anisotrope Medien den ganzen Raum füllen⁶ und in der Oxy ebene homogen sind. Die nicht Homogenität besteht nur mit z .

Kapitel **3** ist eine Anwendung der (hergeleiteten) gekoppelten Moden Theorie auf Faser Bragg Gitter. Es werden letztendlich die Reflexionskoeffizienten hergeleitet und die Ergebnisse von [18] nachvollzogen, mit ausführlicher Angabe aller logischen und rechnerischen Schritte.

Kapitel **4** und Kapitel **5** sind die wichtigsten Kapitel dieses Textes.

⁶wir modellieren so den Kern der Faser in Bezug auf die Grundmoden...

In Kapitel 4 wird unser Messsystem modelliert und ausführlich beschrieben. Siehe auch Abbildung 4.1. Es werden alle Ergebnisse hergeleitet die zur Beschreibung und Modellierung des Systems aus PMF und (belastetem) FBG dienen.

In Behauptung 4.2.1 wird das System ausführlich beschrieben, anhand der hergeleiteten Ergebnisse.

In Abschnitt 4.3 werden die Ausdrücke die das System charakterisieren dann explizit berechnet und hergeleitet.

Danach wird die Verwendung von unpolarisiertem Licht betrachtet, gemäß der Theorie in Anhang D.

Die wichtigsten Ergebnisse werden (4.42) und (4.44) sein, gemäß [17].

Das wichtigste Kapitel ist Kapitel 5 in dem beschrieben wird, wie der Sensor benutzt wird und wie die Messung durchgeführt wird.

Es wird beschrieben wie man wichtige Parameter rekonstruiert: siehe Abschnitt 5.2 und insbesondere Abschnitt 5.2.2. Die Symbole werden in einer etwas kompakteren Notation umgewandelt, die am Anfang des Kapitels eingeführt und erklärt wird.

Die zentralen Ergebnisse dieses Kapitels und des ganzen Textes sind (5.50), womit der Dielektrizitätstensor des belasteten FBG rekonstruiert werden kann, anhand von gemessenen oder rekonstruierten bekannten Größen, und die Behauptungen 5.3.1 und 5.3.2.

Die folgenden Abschnitte geben Anregungen zur Rekonstruktion des vollen Strain Tensors und zur Ermittlung der Temperatur des Materials des FBG.

Wichtig sind Tabelle 5.1 und Abschnitt 5.4.2.

Abschließend sind noch Bemerkungen zu finden zu dem optimalen Arbeitsbereich des Sensors, siehe Abschnitt 5.5, und zur Verdeutlichung einiger Konzepte in Bezug auf die Notation, siehe Abschnitt 5.6.

In Kapitel 6 finden sich dann numerische Beispiele zur Verdeutlichung und zur Bekräftigung der gefundenen und hergeleiteten Ergebnisse.

Abschließend folgt eine kurze Zusammenfassung und ein Ausblick.

Dieser Text ist in sich geschlossen, und auch jedes Kapitel ist in sich geschlossen.

Der Leser der den Text nur überfliegen möchte, kann an beliebiger Stelle anfangen zu lesen. Überall sind zusammenfassende Behauptungen aufgestellt, die die hergeleiteten Ergebnisse in kompakter, in sich geschlossener, Weise präsentieren.

Diese Behauptungen sind in sich geschlossen und auf die Bedeutung und Verständlichkeit der Symbole und der Notation wurde großen Wert gelegt, so dass es im Idealfall genügt allein eine Behauptung zu betrachten um eine entsprechende Erkenntnis über das beschriebene Thema zu erwerben. . .

Dies sollte es ermöglichen an die wichtigen Ergebnisse dieses Textes in sehr kurzer Zeit zu gelangen. . .

Allein Kapitel 5 sollte möglichst, aber nicht notwendigerweise, ausführlich betrachtet oder gelesen werden...

Da die Berechnungen in diesem Text teilweise sehr komplex sind, wurde ein Computer Algebra System zur Hilfe benutzt.

Allerdings wurden die Ergebnisse immer verifiziert, und der Weg der Herleitung ist immer angegeben und nachvollziehbar.

Bei der Durchführung der Messung sollte der Leser auch die Ergebnisse von Abschnitt 5.6 (siehe auch die Bemerkungen zu den Simulationen in Abschnitt 6.2.1 und 6.2.2) betrachten.

In diesem Text wurden die Größen in Abhängigkeit der Pulsation ω angegeben, wie in vielen Texten über Elektrodynamik üblich. Allerdings wird in vielen Publikationen über FBG die Wellenlänge des Lichtes im Vakuum λ_0 angegeben.

Die Umrechnung⁷ erfolgt sofort mit (A.116) in Abschnitt A.7.

Dieser Text wurde in L^AT_EX geschrieben mit dem hyperref Paket⁸. Die resultierende pdf Datei kann daher wie ein Hypertext benutzt werden und die Referenzen an Formeln oder Behauptungen können "angeklickt" werden: um zurück zu gelangen sollte man entsprechende Buttons der Software benutzen⁹.

Dies ermöglicht eine schnelle und unkomplizierte Betrachtung der ausführlichen Referenzen.

Der Leser der Fehler melden will oder Anregungen und Kommentare abgeben möchte, erreicht mich unter der Emil Adresse `alessandro.bernardini.1979@gmail.com`

Ich bin dankbar für jede Anregung.

Auch bedanke ich mich bei meinem Betreuer, Dipl.Ing. Mathias S. Müller vom MST Lehrstuhl der T.U. München, der diese Arbeit möglich gemacht hat □

München, Januar 2010

Alessandro Bernardini

⁷in den numerischen Beispielen in diesem Text wurde dann λ_0 als Variable benutzt.

⁸mit Hilfe des Editors gvim unter dem Betriebssystem Linux.

⁹es sind im Adobe Acrobat Reader die Buttons "previous/next page view" die oftmals nicht per default angezeigt sind und mit der Option "Page Navigation" aktiviert werden müssen... So kann dann das pdf wie eine html Datei navigiert werden.

Inhaltsverzeichnis

Einführung	2
Inhaltsverzeichnis	10
Abbildungsverzeichnis	12
1 Wellenausbreitung in anisotropen Medien	13
1.1 Ebene elektromagnetische Wellen in anisotropen Medien	13
1.2 Berechnung des elektrischen Feldes einer ebenen Welle in einem anisotropen Medium im Hauptkoordinatensystem	17
1.2.1 Ausbreitung entlang \hat{z}_0	28
1.3 Reflexion und Transmission an transversalen ebenen Grenzschichten von anisotropen Medien	33
1.4 Die Drehmatrix	37
1.5 Vernachlässigbare Reflexion	37
2 Gekoppelte Moden Theorie	39
2.1 Einführung	39
2.2 Herleitung der gekoppelten Moden Gleichungen	39
3 Faser Bragg Gitter	47
3.1 Beschreibung eines Faser Bragg Gitter	47
3.2 Lösung der gekoppelten Moden Gleichung für ein (Faser) Bragg Gitter	49
4 Faser Bragg Gitter als Messsysteme	57
4.1 Einleitung	57
4.2 Aufbau der Faser	57
4.3 Berechnung von T und P	63
4.3.1 Eliminierung der Fallunterscheidung für das Vorzeichen von $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}$	63
4.3.2 Vereinfachung der Notation und Berechnung der Elemente von T	65
4.3.3 Berechnung von P	68
4.4 Verwendung von unpolarisiertem Licht	69
4.5 Durchführung der Messung	72
5 Durchführung der Messung und Berechnung der Dielektrizitätskonstante bzw. des Strain Tensors	73
5.1 Einleitende Bemerkungen	73

5.2	Rekonstruktion von $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und $c = T_{12}^2$	77
5.2.1	Die Funktion $i_s(\omega)$ besteht aus zwei sichtbaren "Glocken"	77
5.2.2	Die Funktion i_s besteht nicht aus zwei sichtbar getrennten "Glocken"	79
5.3	Rekonstruktion des Dielektrizitätstensor des FBG	91
5.4	Rekonstruktion des Strain Tensors	96
5.4.1	Bestimmung der Einträge des Strain Tensors in Funktion von β_G	96
5.4.2	Bestimmung von β_G und von T	98
5.4.3	Zusammenfassung der Rekonstruktion des Strain Tensors	101
5.5	Optimaler Arbeitsbereich des Sensors	101
5.6	Wichtige Bemerkungen	102
6	Numerische Beispiele	105
6.1	Keine Kraftereinwirkung auf das FBG	105
6.2	Kraftereinwirkung auf das FBG	108
6.2.1	Erstes Beispiel	108
6.2.2	Zweites Beispiel	115
7	Zusammenfassung und Ausblick	123
A	Elektrodynamische Grundlagen	124
A.1	Fundamentale Gleichungen	124
A.2	Randbedingungen an Grenzschichten	127
A.3	Elektrostatische Felder und Energie	129
A.3.1	Elektrostatisches Potential	129
A.3.2	Elektrostatische Arbeit	129
A.3.3	Elektrische Feldenergie in dielektrischer Materie	130
A.4	Transformierte Gleichungen mit komplexen Vektoren	134
A.5	Der Satz von Poynting	136
A.6	Der transformierte Satz von Poynting	139
A.7	Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenlänge von elektromagnetischen Wellen	142
B	Mathematische Instrumente	145
B.1	Grundlagen der Vektoranalysis	145
B.1.1	Eine Anwendung des Divergenzsatzes	146
B.2	Wichtige vektorielle Identitäten	147
B.3	Wirbelfreie Vektorfelder und Potentiale	148
B.4	Komplexe Vektoren	148
B.4.1	Nützliche Identitäten	148
B.4.2	Parallele und orthogonale Komplexe Vektoren	149
B.5	Darstellung mit komplexen Vektoren	152
B.6	Polarisationseigenschaften von komplexen Vektoren	155
C	Drehung des Hauptkoordinatensystems in anisotrope Medien unter Kräfteeinwirkung	157

C.1	Allgemeines zur Diagonalisierung von symmetrischen Matrizen mit reellen Elementen	157
C.2	Modellierung photoelastischer Effekte auf eine Faser	161
C.3	Bestimmung des Hauptkoordinatensystems für ein belastetes Material . .	163
D	Theorie der Polarisation des Lichtes	169
	Literaturverzeichnis	174

Abbildungsverzeichnis

1.1	Die normale Oberfläche.	22
1.2	Die normale Oberfläche.	23
1.3	Die normale Oberfläche.	24
1.4	Die normale Oberfläche.	25
1.5	Die normale Oberfläche.	26
1.6	Die normale Oberfläche.	27
1.7	Die Grenzschicht Σ zwischen zwei anisotrope Medien und entsprechende Hauptkoordinatensysteme unter unseren Annahmen	34
4.1	FBG ist ein Faser Bragg Gitter. $O\chi v\zeta$ ist das Hauptkoordinatensystem für die PMF Zuleitung <i>und</i> für das unbelastete FBG. $Oxyz$ ist das Hauptkoordinatensystem für das mit Kraft belastete FBG.	58
5.1	Die zwei Möglichkeiten für die Lage von $Oxyz$ und $O\chi v\zeta$. Falls $\epsilon_{\chi v}$ oder $\epsilon_{\chi\chi} - \epsilon_{vv}$ das Vorzeichen ändern, so erfolgt ein unstetiger Übergang zwischen den beiden abgebildeten Situationen. Dies widerspricht nicht physikalischen Gesetzen und ist kein Absurdum: es folgt aus unserer Notation	103
6.1	Der Betrag von $\rho_{\text{FBG},s}$ in Funktion von ω (in s^{-1}) für das unbelastete FBG	106
6.2	Der Betrag von $\rho_{\text{FBG},s}$ in Funktion von λ_0 (in m) für das unbelastete FBG	107
6.3	Der Betrag von $\rho_{\text{FBG},s}$ und von $\rho_{\text{FBG},p}$ in Funktion von ω (in s^{-1}) für das unbelastete FBG. Für den p Modus gilt die gestrichelte Linie.	107
6.4	Der Betrag von $\rho_{\text{FBG},s}$ und von $\rho_{\text{FBG},p}$ in Funktion von λ_0 (in m) für das unbelastete FBG. Für den p Modus gilt die gestrichelte Linie.	108
6.5	Die Maxima der Beträge der Reflexionskoeffizienten für den s Modus (stetige Linie) und den p Modus (gestrichelte Linie) in Funktion von ω in s^{-1} für das unbelastete FBG.	109
6.6	Die Beträge der Reflexionskoeffizienten für den s Modus (stetige Linie) und den p Modus (gestrichelte Linie) in Funktion von λ_0 in m für den belasteten Fall aus Beispiel 6.2.1.	111
6.7	Die Funktion $i_s(\lambda_0)$ (für λ_0 in m) für Beispiel 6.2.1. Siehe (5.2).	111
6.8	Die Funktion $i_p(\lambda_0)$ (für λ_0 in m) für Beispiel 6.2.1. Siehe (5.4).	112
6.9	Die Funktion $\frac{i_s(\lambda_0)}{i_p(\lambda_0)}$ (mit λ_0 in m), für Beispiel 6.2.1 um $\lambda_{0,\text{Max},s}$ (mit Punkt dargestellt).	113
6.10	Die Beträge der Reflexionskoeffizienten für den Fall aus Abschnitt 6.2.2.	117
6.11	Der Verlauf von $i_s(\lambda_0)$ für das Beispiel aus Abschnitt 6.2.2. Wellenlänge in Meter.	117

6.12	Der Verlauf von $i_p(\lambda_0)$ für das Beispiel aus Abschnitt 6.2.2. Wellenlänge, wie immer, in m	118
6.13	Der Verlauf von $\frac{i_s(\lambda_0)}{i_p(\lambda_0)}$ für das Beispiel aus Abschnitt 6.2.2. λ_0 ist, wie immer in m angegeben.	118
6.14	Approximation des Reflexionskoeffizienten (stetige Linie) durch eine Gauss Glocke (gestrichelte Linie). In der Abbildung sind die Werte für das unbelastete System zu sehen. Bei Belastung findet eine Translation statt.	120
6.15	Der Vergleich von dem tatsächlichen Verlauf von i_s und von dem Verlauf von $i_{s,A,optimal}$: dieser wurde durch den beschriebenen Minimierungsalgorithmus bestimmt, mit der Annahme, dass $g_{s,A}$ und $g_{p,A}$ Gauss Glocken sind. Siehe auch die rechte Seite von (5.16) und (6.52)	121
6.16	Die einzelnen Summanden aus denen i_s und $i_{s,A,optimal}$ bestehen. Für $i_{s,A}$ haben wir Gauss Glocken. i_s besteht dagegen aus Funktionen des Typs wie in Abbildung 6.2 gezeigt (jeweils mit c und $1 - c$ multipliziert. . .).	121
A.1	Übergang zwischen zwei homogene Medien.	128
C.1	Die Orientierung der Achsen in einem orthonormalen Koordinatensystem $Oxyz$	166

1 Wellenausbreitung in anisotropen Medien

In diesem Kapitel soll die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in anisotropen Medien betrachtet werden.

Anisotrope Medien sind Materialien in denen sich elektromagnetische Wellenphänomene mit unterschiedlichen Eigenschaften ausbreiten, je nach dem in welche Richtung das Material orientiert ist¹.

Für die *Bedeutung der Symbole* und eine Übersicht über wichtige Grundlagen der Elektrodynamik sei auf den Anhang **A** verwiesen.

Für wichtige mathematische Grundlagen² sei auf Anhang **B** verwiesen.

Als Literaturquellen und Literaturempfehlung seien [2], [3] und [4] erwähnt.

1.1 Ebene elektromagnetische Wellen in anisotropen Medien

Wir nehmen an, dass in einem linearen, (eventuell) *elektrisch anisotropen*, stationären und nicht zeitdispersivem Medium sich eine ebene elektromagnetische Welle ausbreitet. Wir nehmen an, dass das Medium nicht dissipativ (und nicht leitend) ist und dass die Permeabilitätskonstante des Mediums ein skalar ist.

Das elektrische Feld, als komplexer Vektor ausgedrückt, einer ebenen Welle hat die Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-j\vec{\kappa}\cdot\vec{r}} \quad (1.1)$$

mit \vec{E}_0 und $\vec{\kappa}$ komplexe und konstante Vektoren. j ist die imaginäre Einheit, so dass $j^2 = -1$.

Der Ausdruck (1.1) ist also der *komplexe Vektor* der (positionsabhängig) dem elektrischen Feld zugeordnet ist, gemäß Anhang **B.5**.

¹gegenüber den Systemen die das elektromagnetische Phänomen erzeugen.

²z.B. in der Vektoranalysis

Ebene elektromagnetische Wellen im Vakuum (oder in Luft) sind in Texten über elektromagnetische Wellenausbreitung ausführlich beschrieben, siehe z.B. [2].

Wir analysieren hier ebene Wellen in einem anisotropischen Dielektrikum, suchen also nach Lösungen der Maxwell Gleichungen³ die die Form (1.1) haben. Wir werden auch die Eigenschaften dieser Lösungen beschreiben.

Aus der (transformierten) Maxwell Gleichung⁴ (A.52) wird:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\vec{\kappa} \times \vec{E} = -j\omega\vec{B} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (1.2)$$

unter Berücksichtigung von (A.55) und der Tatsache dass für ein Feld der Form (1.1) gilt:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\vec{\kappa} \times \vec{E} \quad (1.3)$$

und

$$\nabla \cdot \vec{E} = -j\vec{\kappa} \cdot \vec{E} \quad (1.4)$$

wie man durch einfache Rechnung sofort zeigen kann, wenn man die Definition von Rotation und Divergenz (bzw. vom Nabla Operator) beachtet.

Wir haben außerdem angenommen, dass

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (1.5)$$

also dass in (A.55) die absolute Permeabilitätskonstante $\underline{\underline{\mu}} = \mu \underline{\underline{\text{Id}}}$ ist, mit $\underline{\underline{\text{Id}}}$ der Identitäts-Tensor⁵.

Aus (1.2) ergibt sich sofort

$$\vec{H} = \frac{\vec{\kappa} \times \vec{E}}{\omega\mu} = \vec{H}_0 e^{-j\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \quad (1.6)$$

mit

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{\kappa} \times \vec{E}_0}{\omega\mu} \quad (1.7)$$

Wir sehen also, dass auch das magnetische Feld eine ebene Welle darstellt, die ebenfalls die Form (1.1) annimmt⁶.

³im elektrisch anisotropen Dielektrikum. Dagegen sei die Permeabilitätskonstante ein Skalar.

⁴für die Bedeutung der Symbole siehe immer Anhang A.

⁵bzw die Identitäts-Abbildung oder die Einheitsmatrix, je nach bevorzugter "Betrachtungsweise".

⁶genauer genommen sind die angegebenen Wellen nur Kandidaten für eine Lösung des gegebenen elektromagnetischen Problems die aus dem Ansatz (1.1) hervorgehen. Welche Lösungen physikalisch tatsächlich möglich und sinnvoll sind werden wir im späteren Verlauf beschreiben. Für eine genaue und logisch rigorose Einführung siehe ein Text über Elektrodynamik aus Sicht der Theoretischen Physik. Siehe auch [2] und [3].

Somit gelten auch analoge Ergebnisse für \vec{H} wie für \vec{E} in (1.3) und in (1.4), wie man sofort sieht.

Einsetzen in (A.53) ergibt

$$\nabla \times \vec{H} = -j\vec{\kappa} \times \vec{H} = -j\vec{\kappa} \times \left(\frac{\vec{\kappa} \times \vec{E}}{\omega\mu} \right) = j\omega\vec{D} = j\omega\epsilon \cdot \vec{E} \quad (1.8)$$

unter Berücksichtigung von (1.6), (A.54) und der Tatsache das wir ein nicht leitendes Dielektrikum betrachten ($\underline{\sigma} = 0$), so dass $\vec{J} = 0$, wie aus (A.56) folgt.

Aus (1.8) und (B.12) folgt⁷

$$\omega^2\mu\vec{D} = -\vec{\kappa}(\vec{\kappa} \cdot \vec{E}) + \vec{E}(\vec{\kappa} \cdot \vec{\kappa}) \quad (1.9)$$

Wir nehmen im Folgendem an, dass $\vec{\kappa}$ ein reeller Vektor ist der durch

$$\vec{\kappa} = \vec{\beta} = \beta\hat{\beta}_0 \quad (1.10)$$

gegeben ist, mit $\beta \in \mathbb{R}$ und $\hat{\beta}_0$ ein (reeller und konstanter) Einheitsvektor.

Wir nehmen also an, dass die Welle (1.1) nicht gedämpft wird (das Medium soll nicht dissipativ sein), und dass sie sich in Richtung $\hat{\beta}_0$ ausbreitet. Diese Aussagen folgen leicht, falls man (1.1) mit (1.10) betrachtet und das resultierende (gemäß (??) zeit-rücktransformiertes) Wellenphänomen betrachtet, das sich als ebene Welle in Richtung $\hat{\beta}_0$ ausbreitet ohne gedämpft zu werden, da die Intensität nicht abnimmt⁸.

Einsetzen in (1.9) ergibt

$$\vec{E} - \hat{\beta}_0(\hat{\beta}_0 \cdot \vec{E}) = \frac{\omega^2\mu}{\beta^2}\vec{D} \quad (1.11)$$

Bekanntlich gilt⁹

$$\vec{E} = \hat{\beta}_0(\vec{E} \cdot \hat{\beta}_0) + \vec{E}_t \quad (1.15)$$

⁷Das Produkt \cdot ist bei komplexen Vektoren gegeben durch (B.19). Die Gleichung (B.12) gilt auch für komplexe Vektoren, unter Berücksichtigung von (B.19).

⁸bei komplexen $\vec{\kappa}$ wäre dies anders, wie man leicht sieht.

⁹ Man bedenke immer, dass das Produkt \cdot zwischen komplexen Vektoren (und wir haben es ja mit komplexen Vektoren zu tun) gegeben ist durch (B.19). In unserem Falle folgt also, wie man sofort sieht

$$\vec{E} \cdot \hat{\beta}_0 = \vec{E}_R \cdot \hat{\beta}_0 + j\vec{E}_I \cdot \hat{\beta}_0 \in \mathbb{C} \quad (1.12)$$

und

$$\vec{E}_R = (\vec{E}_R \cdot \hat{\beta}_0)\hat{\beta}_0 + \vec{E}_{t,R} \quad (1.13)$$

$$\vec{E}_I = (\vec{E}_I \cdot \hat{\beta}_0)\hat{\beta}_0 + \vec{E}_{t,I} \quad (1.14)$$

wobei R und I für Real- und Imaginärteil stehen. Das \cdot Produkt zwischen reellen Vektoren ist das übliche Skalarprodukt zwischen reellen Vektoren.

wobei selbstverständlich \vec{E}_t die Komponente von \vec{E} bezeichnet die orthogonal zur Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$ steht, also die transversale Komponente von \vec{E} gegenüber der Ausbreitungsrichtung¹⁰.

Aus (1.11) folgt somit

$$\vec{E}_t = \frac{\omega^2 \mu}{\beta^2} \vec{D} \quad (1.16)$$

Aus alledem folgt die

Behauptung 1.1.1 *Für eine elektromagnetische Welle der Form (1.1), mit der Annahme (1.10) (nicht dissipatives Medium und ungedämpfte Welle), die sich in ein lineares, eventuell elektrisch anisotropes (aber magnetisch isotropes), stationäres, nicht zeit-dispersives und nicht dissipatives Medium ausbreitet, gilt dass*

- \vec{H} (in jedem Punkt) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$ und zu \vec{E} steht, wegen (1.6) und (1.10)
- \vec{D} ist orthogonal zur Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$, wegen (1.16), da \vec{D} mit einem reellen skalar multipliziert \vec{E}_t ergibt (und \vec{E}_t ist per Definition und per Konstruktion senkrecht zu $\hat{\beta}_0$)
- \vec{E} ist nicht im Allgemeinen transversal zur Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$

Man bedenke immer, dass man es hier mit komplexen Vektoren zu tun hat. Die Aussagen über die Orthogonalität gelten in diesem Satz auch für Real- und Imaginärteil, wie man aus (B.19) und der Fußnote 9 leicht ersehen kann¹¹. Im Allgemeinen sind aber Aussagen über Orthogonalität und Parallelismus von komplexen Vektoren mit Vorsicht zu betrachten. Der Leser sollte (auch um die Beweisführung und die Bedeutung der Aussagen besser einsehen zu können) bezüglich dieser Themen den Anhang B.4.2 und B.4.1 betrachten.

Aus den abgeleiteten Ergebnissen¹², und unter Berücksichtigung insbesondere von (1.6) und (B.40) und (1.10) kann man leicht zeigen, dass auch für die rücktransformierten von der Zeit abhängenden (reellen) Größen eine analoge Behauptung gilt¹³ wie Behauptung 1.1.1.

¹⁰ t steht selbstverständlich für transversal.

¹¹und aus (1.6).

¹²mit entsprechenden Bemerkungen

¹³in diesem Fall !

1.2 Berechnung des elektrischen Feldes einer ebenen Welle in einem anisotropen Medium im Hauptkoordinatensystem

Es gelten in diesem Abschnitt die gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt 1.1. Als Literaturquelle sei [4] erwähnt. Wir werden aber auch zusätzliche Ergebnisse herleiten die üblicherweise in der Standard Literatur nicht angegeben sind.

Wir nehmen an, dass wir im *Hauptkoordinatensystem* des anisotropen Dielektrikums arbeiten.

Wir nehmen also an, dass $\underline{\underline{\epsilon}}$ diagonal ist¹⁴.

Falls dies nicht so ist, falls also ein anderes Koordinatensystem verwendet wird, so muss eine entsprechende Diagonalisierung vorgenommen werden, also eine Koordinatentransformation. Diese Diagonalisierung von $\underline{\underline{\epsilon}}$ (bzw die Verwendung des Hauptkoordinatensystems für das gegebene Dielektrikum) ist immer möglich.

Da die Dielektrizitätskonstante im Allgemeinen immer symmetrisch ist, siehe (A.45) und aus reellen Elementen besteht, siehe Anhang A.4, ist die besprochene Diagonalisierung immer möglich mit Hilfe von einer orthogonalen Matrix¹⁵.

Daraus folgt, dass das gewünschte Hauptkoordinatensystem immer existiert und dass es ein orthonormales Kartesisches Koordinatensystem ist.

Die besprochene Koordinatentransformation ist also eine einfache Kongruenzabbildung, also eine Spiegelung und/oder eine Drehung.

Dies folgt aus dem Spektraltheorem für reelle symmetrische Matrizen: siehe ein Text über Lineare Algebra, z.B. [6]. Oder siehe auch [9].

Wir schreiben also im Hauptkoordinatensystem des anisotropen Dielektrikums:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Aus (1.8) folgt:

$$\vec{\kappa} \times (\vec{\kappa} \times \vec{E}) + \omega^2 \mu \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.18)$$

¹⁴Das Hauptkoordinatensystem des Dielektrikums ist per Definition das Kartesische Koordinatensystem in dem $\underline{\underline{\epsilon}}$ diagonal ist, mit klarer Bedeutung. Man siehe auch die Bemerkungen zu (A.16).

¹⁵die Eigenvektoren der Matrix die die Dielektrizitätskonstante darstellt (in einem beliebigen orthonormalen Koordinatensystem) formen ein Orthonormalsystem des \mathbb{R}^3 bzw. es existiert ein solches Orthonormalsystem aus Eigenvektoren (das auch gefunden werden kann)

Man kann leicht nachrechnen, dass (mit klarer Bedeutung der Symbole¹⁶)

$$\begin{aligned} \vec{\kappa} \times (\vec{\kappa} \times \vec{E}) &= \hat{x}_0(\kappa_y(\kappa_x E_y - \kappa_y E_x) - \kappa_z(\kappa_z E_x - \kappa_x E_z)) + \\ &+ \hat{y}_0(\kappa_z(\kappa_y E_z - \kappa_z E_y) - \kappa_x(\kappa_x E_y - \kappa_y E_x)) + \\ &+ \hat{z}_0(\kappa_x(\kappa_z E_x - \kappa_x E_z) - \kappa_y(\kappa_y E_z - \kappa_z E_y)) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Aus (1.18) mit (1.17) und (1.19) ergeben sich drei skalare Gleichungen (für die x, y, z Komponenten).

Diese drei Gleichungen führen zu folgendem System, das wir in Matrix Form schreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 \mu \epsilon_x - \kappa_y^2 - \kappa_z^2 & \kappa_x \kappa_y & \kappa_x \kappa_z \\ \kappa_x \kappa_y & \omega^2 \mu \epsilon_y - \kappa_x^2 - \kappa_z^2 & \kappa_y \kappa_z \\ \kappa_x \kappa_z & \kappa_y \kappa_z & \omega^2 \mu \epsilon_z - \kappa_x^2 - \kappa_y^2 \end{pmatrix}}_{=: M(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z; \omega, \mu, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (1.20)$$

Für nicht triviale Lösungen dieser Gleichung (in den Unbekannten E_x, E_y, E_z) muss bekanntlich die Determinante der angegebenen Matrix M gleich Null sein. Ansonsten würde nur die triviale Lösung $E_x = E_y = E_z = 0$ existieren, die besagt, dass das elektrische Feld verschwindet und dass somit sich keine ebene Welle ausbreiten kann.

Aus (1.1) folgt sofort

$$E_i = E_{0,i} e^{-j\vec{\kappa} \cdot \vec{r}} \quad i = x, y, z \quad (1.21)$$

und somit ergibt sich auch, mit M wie in (1.20):

$$M \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \\ E_{0,z} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.22)$$

Also ist diese Gleichung äquivalent und sogar (formal) identisch zu (1.20).

Die Matrix M besitzt mit der Annahme (1.10) nur reelle Elemente. Daher genügt es auch nur nach reellen Lösungen für \vec{E}_0 zu suchen (bzw für \vec{E} , was ja mit (1.1) äquivalent ist).

Mit Hilfe von (1.20) bzw. (1.22) können wir die Eigenschaften von ebenen Wellen in anisotropen Medien vollständig bestimmen.

Unter der Annahme (1.10) und für *eine gegebene Ausbreitungsrichtung* $\hat{\beta}_0$ der ebenen Welle muss also gelten, wie wir gesehen haben

$$\det(M(\beta\beta_{0,x}, \beta\beta_{0,y}, \beta\beta_{0,z}; \omega, \mu, \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)) = 0 \quad (1.23)$$

¹⁶so ist A_x die x Komponente von \vec{A} und \hat{x}_0 der Einheitsvektor entlang der x Achse (des Hauptkoordinatensystems des Dielektrikums).

mit klarer Bedeutung der Symbole¹⁷.

Für ein gegebenes Material und eine gegebene Pulsation ω folgt aus Gleichung (1.23) dass es nur bestimmte Werte von β geben kann, nämlich eben die Werte die Lösung von Gleichung (1.23) sind.

Mit (1.10) ergeben sich also nur bestimmte möglich Werte für den Ausbreitungsvektor $\vec{\kappa}$ der ebenen Welle. Wir werden sehen, dass es für eine bestimmte Ausbreitungsrichtung zwei¹⁸ Werte für den Ausbreitungsvektor gibt, und dass es somit zwei unterschiedliche Wellenphänomene pro Richtung gibt.

Aus (1.20) kann dann auch \vec{E} bestimmt werden, oder besser die Polarisations-eigenschaften (die Richtung) von \vec{E} , da selbstverständlich die Intensität des elektrischen Feldes (je nach Intensität der Quellen bzw. Ursachen des elektromagnetischen Phänomens) variieren kann.

Auflösen von (1.23) nach β mit Hilfe eines Computer Algebra Systems, in unserem Falle Mathematica, ergibt vier Lösungen, die wie in Tabelle 1.1 zusammenfassen¹⁹.

Da $\hat{\beta}_0$ ein Einheitsvektor ist, ergibt sich $\beta_{0,x}^2 + \beta_{0,y}^2 + \beta_{0,z}^2 = 1$, was eine *leichte* zusätzliche Vereinfachung der Lösung ermöglichen könnte.

Die in Tabelle 1.1 angegebenen vier Lösungen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ von Gleichung (1.23) können auch graphisch dargestellt werden, in Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$.

Man betrachte dazu (im Kartesischen Hauptkoordinatensystem $Oxyz$) den generischen Einheitsvektor $\hat{\beta}_0$. Man zeichne alle Vektoren (bzw. Vektorextremitäten) $\vec{\kappa} = \beta \hat{\beta}_0$ die sich für die Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$ durch (1.24)-(1.27) ergeben.

Somit kann man β in Abhängigkeit von $\hat{\beta}_0$ lesen und darstellen.

Für eine gegebene Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$ bestimme man die Intersektionen der Geraden die durch $\hat{\beta}_0$ läuft mit den Oberflächen in der graphischen Abbildung²⁰. Wir erhalten vier Intersektionspunkte P_1, P_2, P_3, P_4 .

Die verschiedenen reellen Werte für β (siehe Tabelle 1.1) sind dann die Längen der Segmente $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3, \vec{OP}_4$, wobei die Länge als positiv betrachtet wird falls \vec{OP} dieselbe orientierte Richtung besitzt wie $\hat{\beta}_0$, und als negativ falls die orientierte Richtung von \vec{OP} entgegengesetzt zu der von $\hat{\beta}_0$ ist (für $P = P_1, \dots, P_4$).

Wir beobachten, dass wir es in Wirklichkeit nur mit zwei verschiedenen Werte für β zu tun haben, da die anderen zwei sich nur um ein Vorzeichen unterscheiden, und wegen

¹⁷ β_0, i ist die Komponente von $\hat{\beta}_0$ entlang i , für $i = x, y, z$.

¹⁸oder besser vier Werte, falls man die hin- und ruckelnden Wellen separat zählt.

¹⁹zur Bedeutung der Symbole sei erwähnt, dass $\hat{\beta}_i := \beta_{0,i} = \hat{\beta}_{0,i}$, $i = x, y, z$, mit klarer Bedeutung.

²⁰siehe weiter vorne in diesem Abschnitt. Wie diese Oberflächen bestimmt werden wurde soeben geschildert. . .

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon_x(\epsilon_y+\epsilon_z)\hat{\beta}_x^2\omega^2 + \mu(\epsilon_y(\epsilon_x+\epsilon_z)\hat{\beta}_y^2 + (\epsilon_x+\epsilon_y)\epsilon_z\hat{\beta}_z^2)\omega^2 - \sqrt{\mu^2\omega^4((\epsilon_x(\epsilon_y+\epsilon_z)\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y(\epsilon_x+\epsilon_z)\hat{\beta}_y^2 + (\epsilon_x+\epsilon_y)\epsilon_z\hat{\beta}_z^2)^2 - 4\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z(\hat{\beta}_x^2 + \hat{\beta}_y^2 + \hat{\beta}_z^2)(\epsilon_x\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y\hat{\beta}_y^2 + \epsilon_z\hat{\beta}_z^2))}}{(\hat{\beta}_x^2 + \hat{\beta}_y^2 + \hat{\beta}_z^2)(\epsilon_x\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y\hat{\beta}_y^2 + \epsilon_z\hat{\beta}_z^2)}}}{\sqrt{2}} \quad (1.24)$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon_x(\epsilon_y+\epsilon_z)\hat{\beta}_x^2\omega^2 + \mu(\epsilon_y(\epsilon_x+\epsilon_z)\hat{\beta}_y^2 + (\epsilon_x+\epsilon_y)\epsilon_z\hat{\beta}_z^2)\omega^2 - \sqrt{\mu^2\omega^4((\epsilon_x(\epsilon_y+\epsilon_z)\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y(\epsilon_x+\epsilon_z)\hat{\beta}_y^2 + (\epsilon_x+\epsilon_y)\epsilon_z\hat{\beta}_z^2)^2 - 4\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z(\hat{\beta}_x^2 + \hat{\beta}_y^2 + \hat{\beta}_z^2)(\epsilon_x\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y\hat{\beta}_y^2 + \epsilon_z\hat{\beta}_z^2))}}{(\hat{\beta}_x^2 + \hat{\beta}_y^2 + \hat{\beta}_z^2)(\epsilon_x\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y\hat{\beta}_y^2 + \epsilon_z\hat{\beta}_z^2)}}}{\sqrt{2}} \quad (1.25)$$

$$\beta_3 = \frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon_x(\epsilon_y+\epsilon_z)\hat{\beta}_x^2\omega^2 + \mu(\epsilon_y(\epsilon_x+\epsilon_z)\hat{\beta}_y^2 + (\epsilon_x+\epsilon_y)\epsilon_z\hat{\beta}_z^2)\omega^2 + \sqrt{\mu^2\omega^4((\epsilon_x(\epsilon_y+\epsilon_z)\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y(\epsilon_x+\epsilon_z)\hat{\beta}_y^2 + (\epsilon_x+\epsilon_y)\epsilon_z\hat{\beta}_z^2)^2 - 4\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z(\hat{\beta}_x^2 + \hat{\beta}_y^2 + \hat{\beta}_z^2)(\epsilon_x\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y\hat{\beta}_y^2 + \epsilon_z\hat{\beta}_z^2))}}{(\hat{\beta}_x^2 + \hat{\beta}_y^2 + \hat{\beta}_z^2)(\epsilon_x\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y\hat{\beta}_y^2 + \epsilon_z\hat{\beta}_z^2)}}}{\sqrt{2}} \quad (1.26)$$

$$\beta_4 = \frac{\sqrt{\frac{\mu\epsilon_x(\epsilon_y+\epsilon_z)\hat{\beta}_x^2\omega^2 + \mu(\epsilon_y(\epsilon_x+\epsilon_z)\hat{\beta}_y^2 + (\epsilon_x+\epsilon_y)\epsilon_z\hat{\beta}_z^2)\omega^2 + \sqrt{\mu^2\omega^4((\epsilon_x(\epsilon_y+\epsilon_z)\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y(\epsilon_x+\epsilon_z)\hat{\beta}_y^2 + (\epsilon_x+\epsilon_y)\epsilon_z\hat{\beta}_z^2)^2 - 4\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z(\hat{\beta}_x^2 + \hat{\beta}_y^2 + \hat{\beta}_z^2)(\epsilon_x\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y\hat{\beta}_y^2 + \epsilon_z\hat{\beta}_z^2))}}{(\hat{\beta}_x^2 + \hat{\beta}_y^2 + \hat{\beta}_z^2)(\epsilon_x\hat{\beta}_x^2 + \epsilon_y\hat{\beta}_y^2 + \epsilon_z\hat{\beta}_z^2)}}}{\sqrt{2}} \quad (1.27)$$

Tabelle 1.1: Die vier Lösungen von Gleichung (1.23). Es gilt: $\hat{\beta}_i := \beta_{0,i}$, $i = x, y, z$.

der Symmetrie der Lösungen.

Es gilt nämlich

$$\beta_1 = -\beta_2 \quad \beta_3 = -\beta_4 \quad (1.28)$$

Physikalisch ist dies offensichtlich, da wir für jede (mögliche) hinlaufende Welle in eine bestimmte Richtung auch eine (mögliche) rücklaufende Welle erwarten die sich in nichts zur hinlaufenden unterscheidet bis auf die Orientation der Ausbreitung.

Wir wählen in den folgenden Graphiken, auf natürliche Weise, die positiven Werte²¹ β_2 und β_4 .

Um eine konkrete Graphik zu zeichnen wählen wir die realistischen Parameter Werte²², die dem Material *SbSI* entsprechen:

$$\epsilon_x = 2.7^2 \epsilon_0, \quad \epsilon_y = 3.2^2 \epsilon_0, \quad \epsilon_z = 3.8^2 \epsilon_0, \quad \omega = 10^{15} \quad (1.29)$$

mit $\mu = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ und $\epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m}$.

Die Graphik die sich so ergibt ist Abbildung 1.2 dargestellt, und besteht aus zwei ineinander verschachtelten geschlossenen Oberflächen (Schalen). Wir nennen diese Oberflächen die normale Oberfläche (normal surface).

Die einzelnen Schalen (in Rot und Blau dargestellt) geben die positiven Lösungen β_2 und β_4 wieder²³.

Um die normale Oberfläche besser deuten zu können "schneiden wir sie in Stücke bzw. wir schneiden Teile heraus". Es ergeben sich Abbildungen 1.2 bis 1.2.

Die Schalen haben im Allgemeinen vier Kontaktpunkte und sind symmetrisch.

Aus (1.22) bzw. (1.20) kann auch \vec{E}_0 bestimmt werden.

Mit (1.1) und (1.10) sind somit die Eigenschaften der sich ausbreitenden ebenen Welle vollständig bekannt.

Man bedenke, dass es genügt in (1.22) nach reellen Lösungen zu suchen.

Für komplexe \vec{E}_0 gilt nämlich, dass $\text{Re}[\vec{E}_0]$ und $\text{Im}[\vec{E}_0]$ ebenfalls Lösung von (1.22) sein müssen, wegen der Linearität der Gleichung²⁴.

Falls \vec{E}_0 eine (reelle) Lösung von (1.22) ist, dann ist selbstverständlich auch $z \vec{E}_0$ mit $z \in \mathbb{C}$ eine (komplexe) Lösung der selben Gleichung.

Für beide Lösungen ergibt sich eine lineare Polarisierung des elektrischen Feldes entlang der selben Richtung: siehe Anhang B.6.

²¹auch mit β_1 und β_3 wäre die Graphik identisch gewesen, da sie symmetrisch ist, und aus den oben gemachten Bemerkungen

²²für die Maßeinheiten im SI System siehe Anhang.

²³für β_1 und β_3 ergibt sich dieselbe Graphik aus Symmetriegründen, wie oben besprochen.

²⁴und M hat nur reelle Elemente.

Somit kann man, genauer gesagt, aus (1.22) nur die Polarisations-eigenschaften²⁵ des elektrischen Feldes bestimmen²⁶, da das tatsächliche elektrische Feld in der Intensität natürlich beliebig variieren kann²⁷.

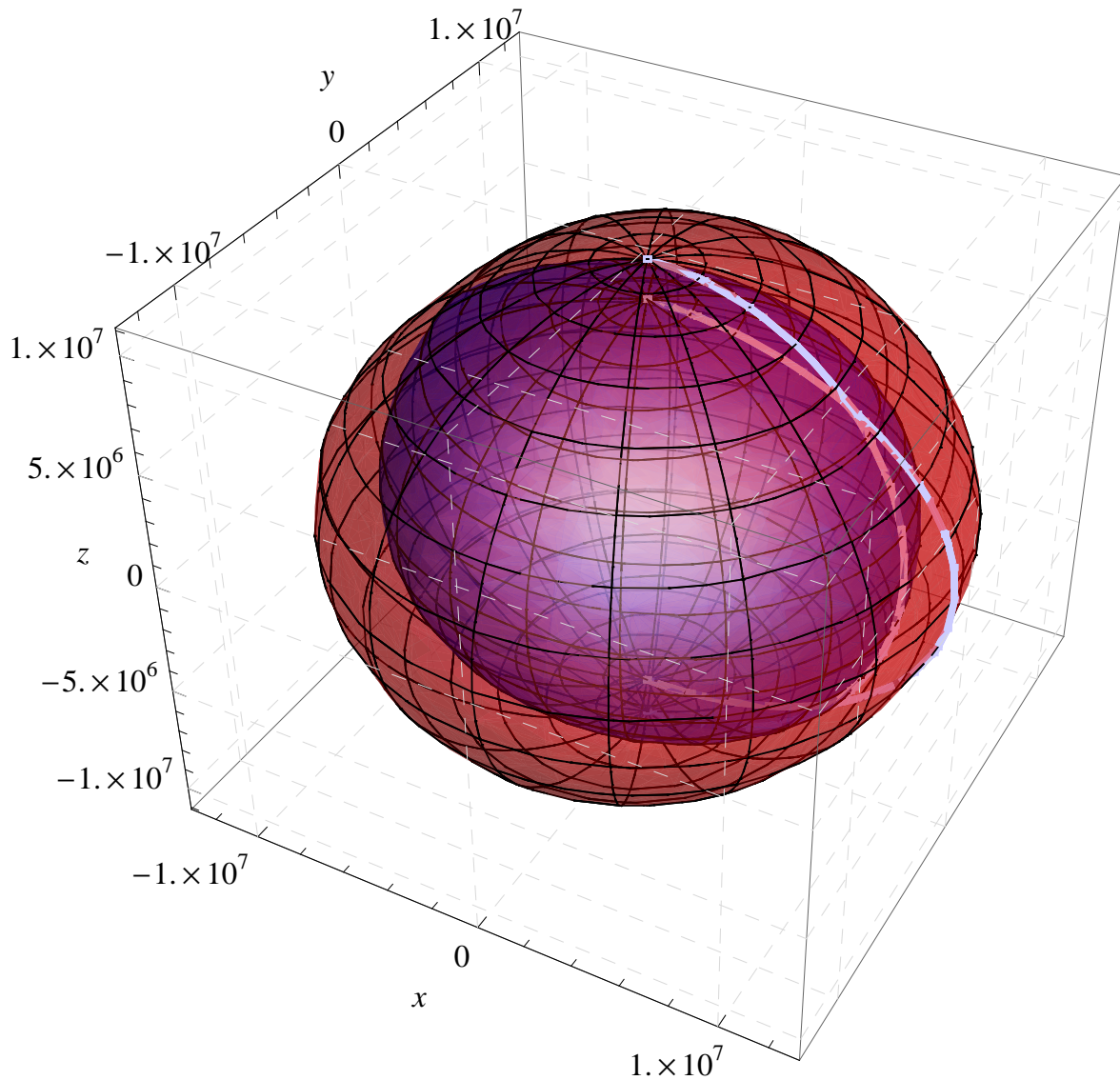


Abbildung 1.1: Die normale Oberfläche.

Es gilt somit die folgende Behauptung:

²⁵oder besser, die Richtung der linearen Polarisation. . .

²⁶in Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$ der betrachteten ebenen Welle.

²⁷die Intensität ist von den Anfangs bzw. Randbedingungen bestimmt, sprich also von den gegebenen Quellen und Ursachen des elektromagnetischen Phänomens.

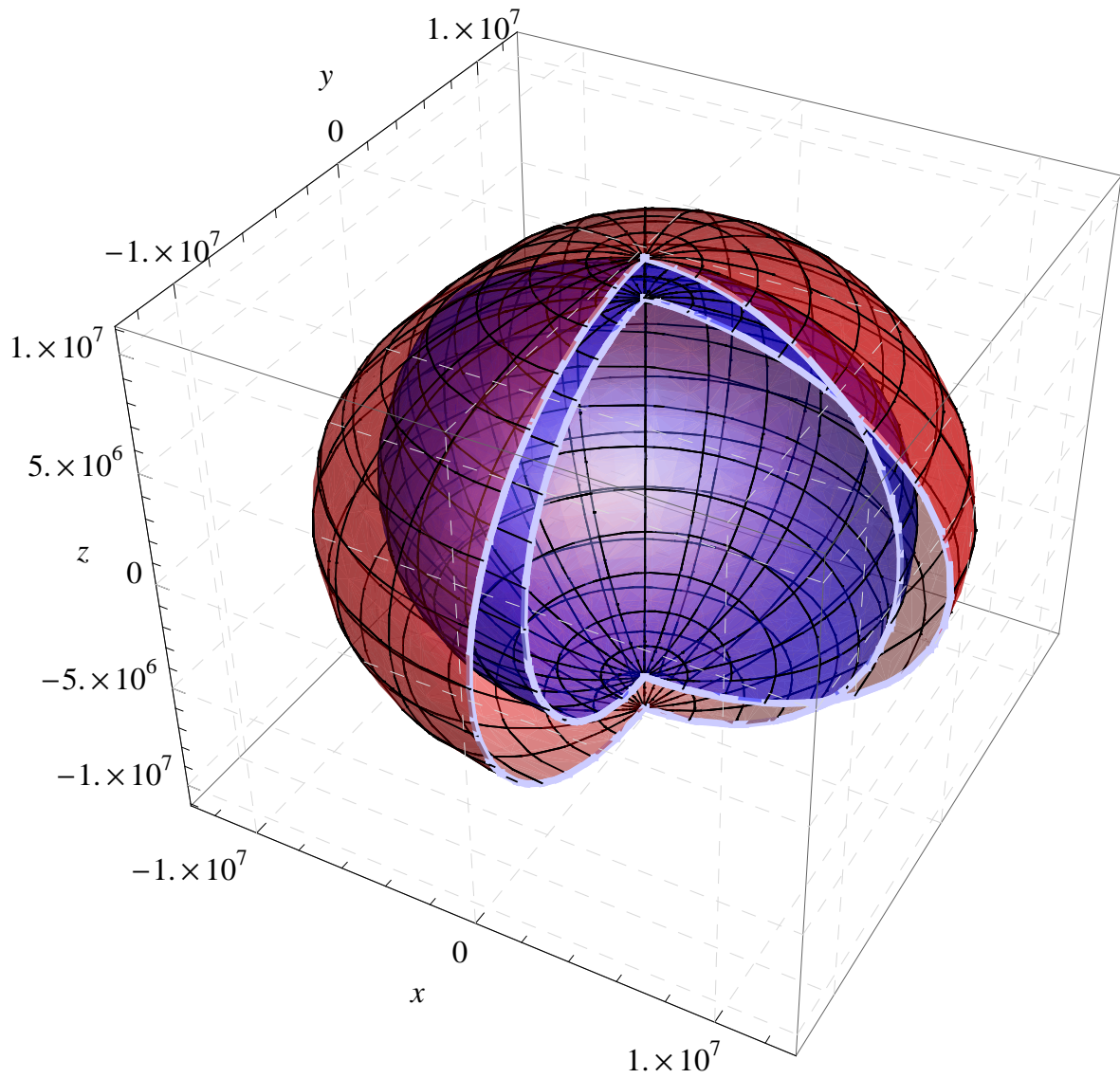


Abbildung 1.2: Die normale Oberfläche.

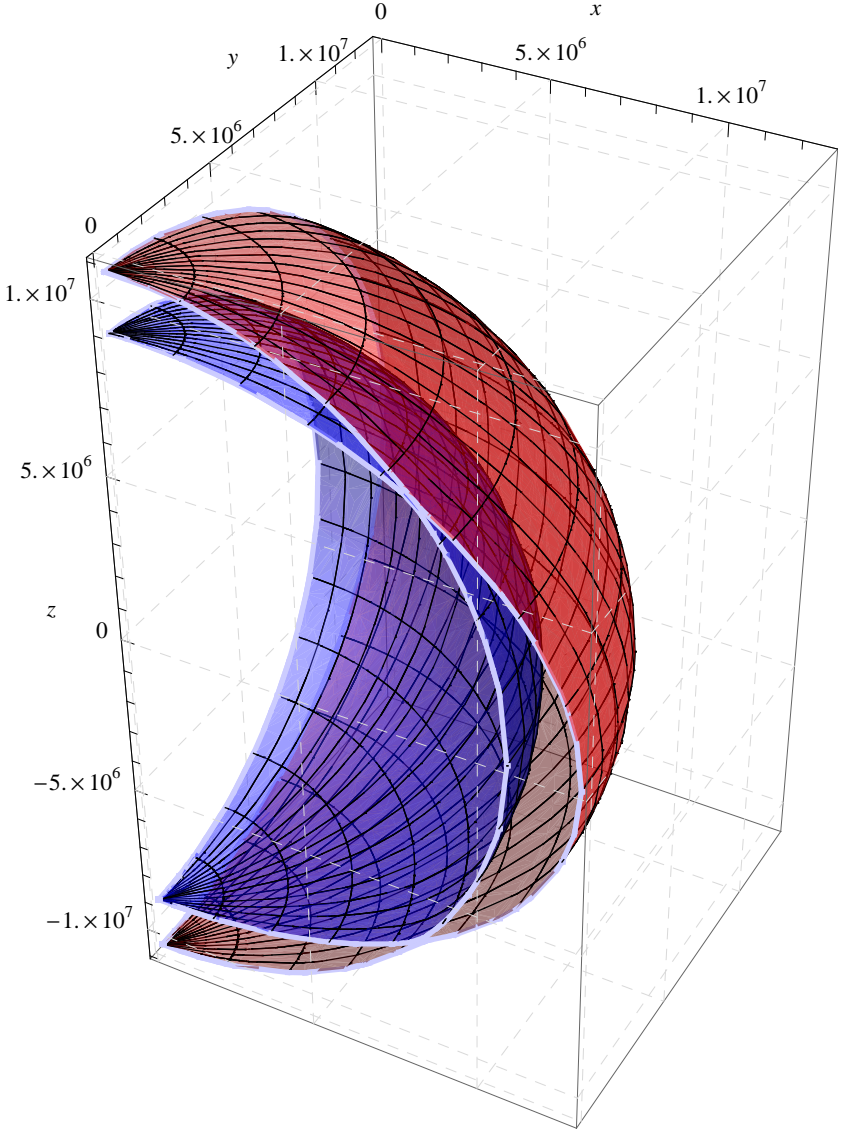


Abbildung 1.3: Die normale Oberfläche.

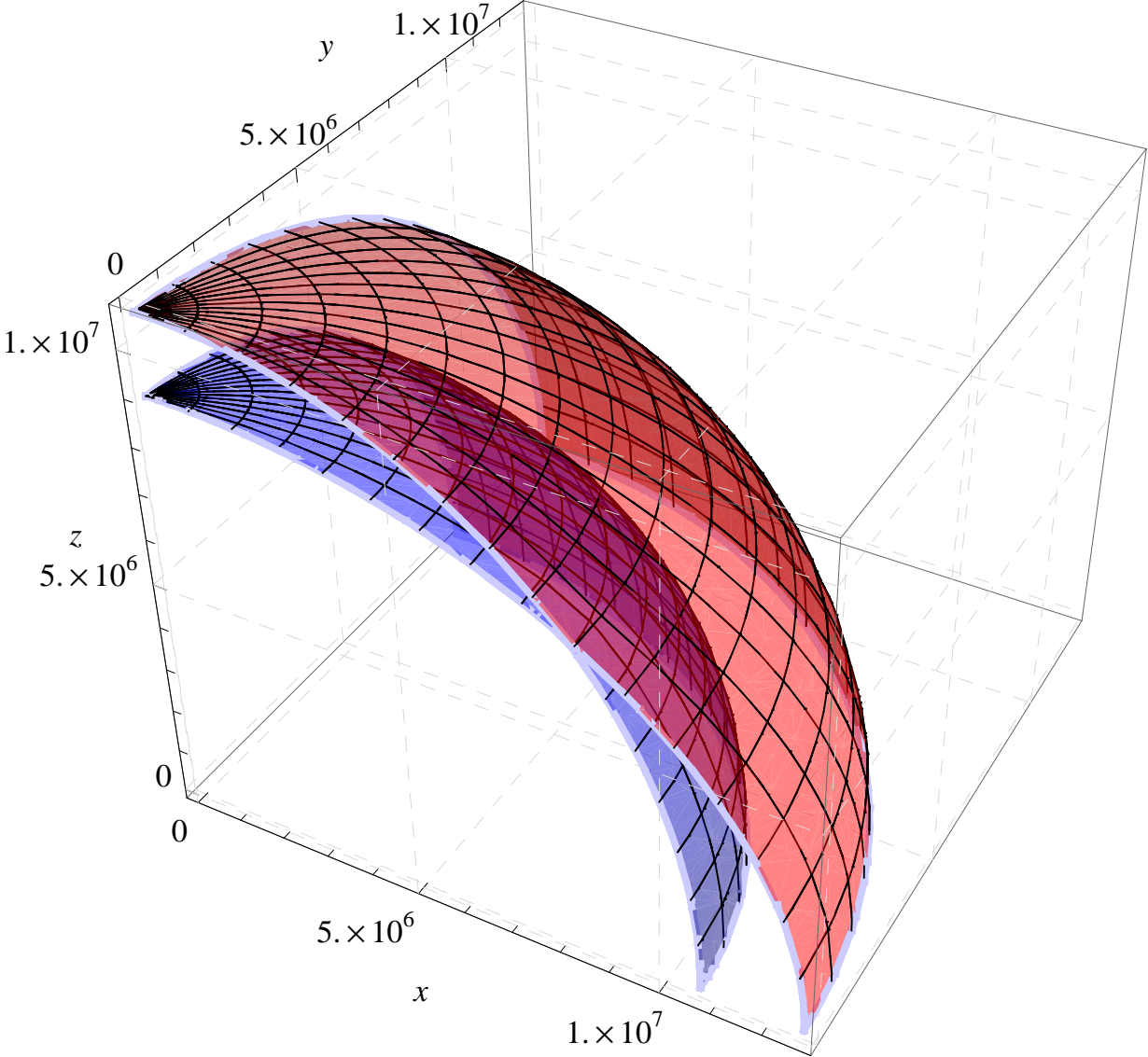


Abbildung 1.4: Die normale Oberfläche.

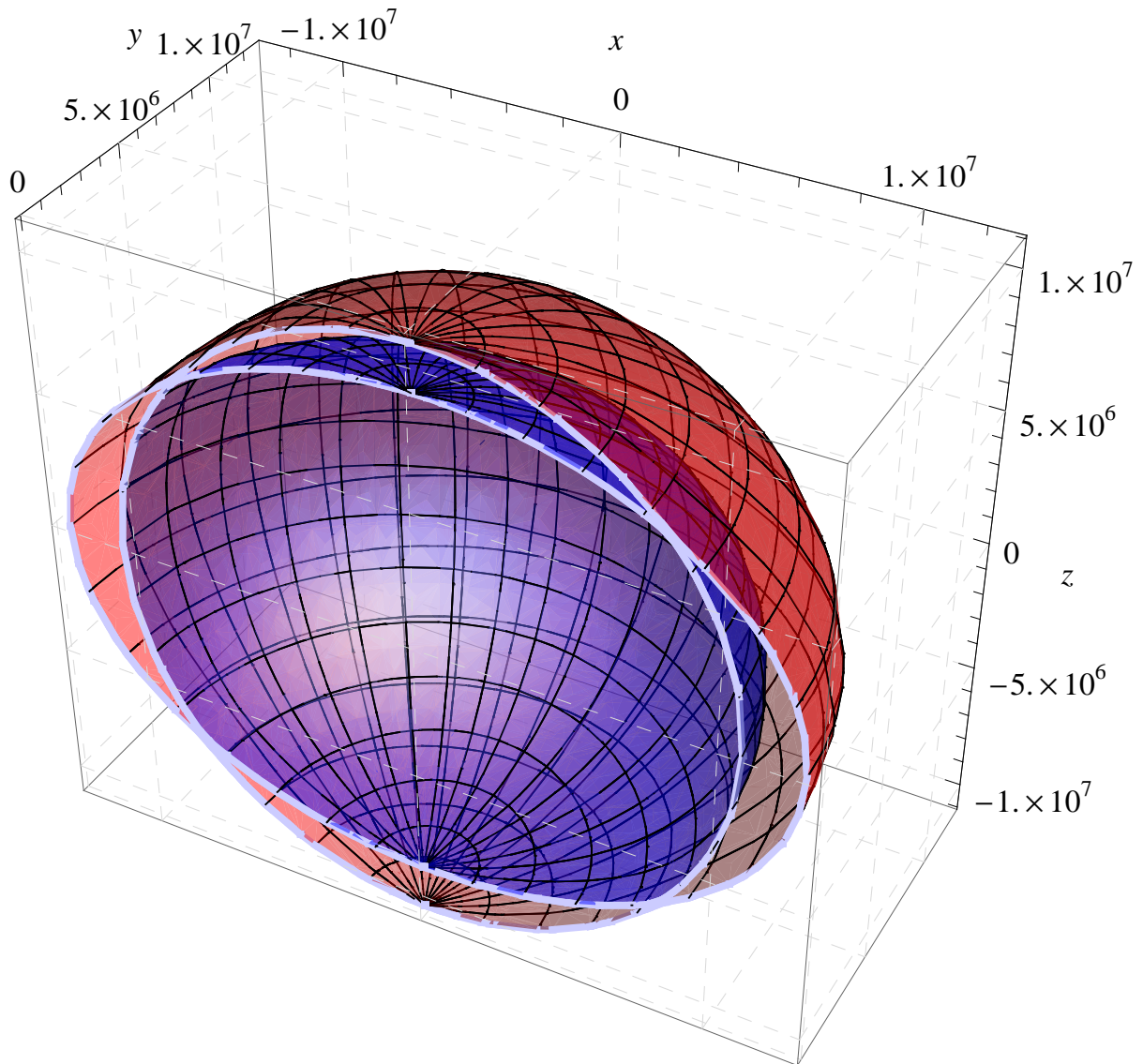


Abbildung 1.5: Die normale Oberfläche.

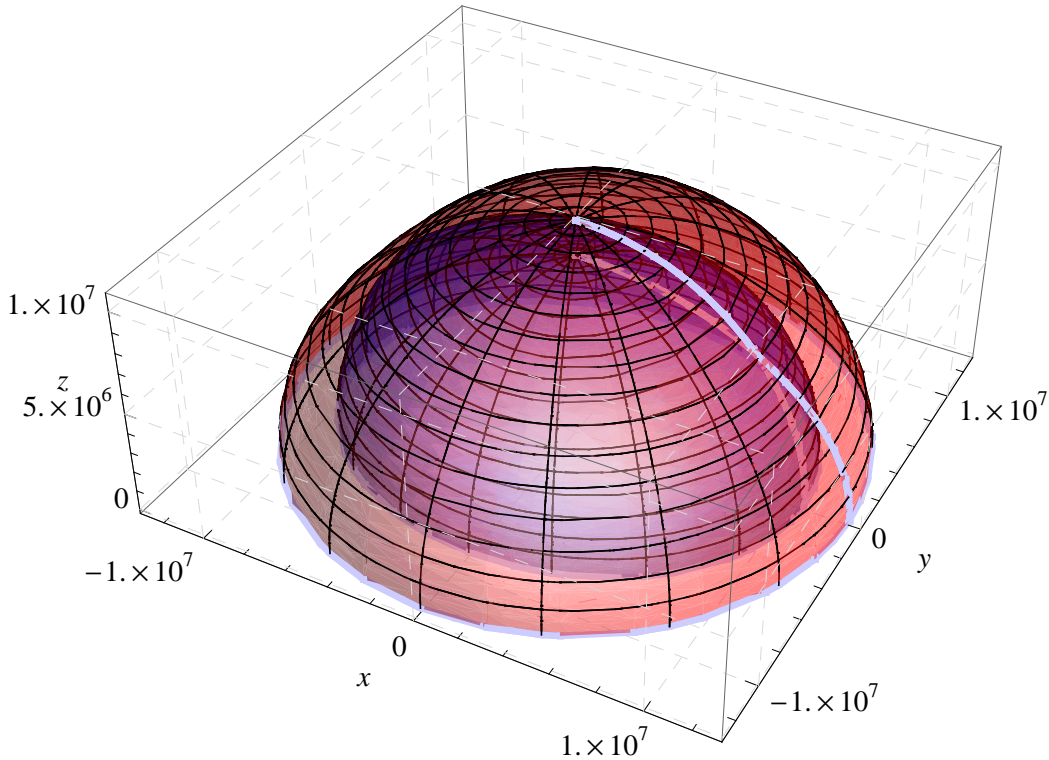


Abbildung 1.6: Die normale Oberfläche.

Behauptung 1.2.1 *Sei ein anisotropes lineares, homogenes, stationäres und nicht leitendes ($\underline{\sigma} = 0$) dielektrisches Medium gegeben.*

Man benutze das Kartesische Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ des Mediums in dem (1.17) gilt.

Unter Berücksichtigung der Annahme (1.10) können sich für eine gegebene Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$ zwei unterschiedliche ebene elektromagnetische Wellen ausbreiten. Ebene Wellen sind durch (1.1) beschrieben.

Für eine gegebene Ausbreitungsrichtung $\hat{\beta}_0$ existieren nämlich zwei (positive) Werte für β , die wir aus Tabelle 1.1 lesen können (und zwar β_2 und β_4 aus (1.25) und (1.27)).

Man setze diese Werte in (1.22) ein²⁸ und man löse die Gleichung nach reellen Werten für \vec{E}_0 auf.

Wir finden so zwei reelle Werte für \vec{E}_0 mit Länge (also Norm) gleich Eins²⁹, ein Wert für jedes β . Wir erhalten also zwei Tupel (\vec{E}_0, β) .

Einsetzen dieser Werte in (1.1) mit (1.10) ergibt so die unterschiedlichen ebenen Wellenausbreitungsarten (also die Polarisationsseigenschaften) für die Richtung $\hat{\beta}_0$ im anisotropen Material im Hauptkoordinatensystem.

Wir beobachten daher im Dielektrikum zwei Arten (bzw Klassen von) linear polarisierten³⁰ ebenen Wellen für ein gegebenes $\hat{\beta}_0$. Man kann zeigen, dass die Polarisationsrichtungen dieser beiden linear polarisierten Wellen(klassen) orthogonal zu einander stehen.

Multiplikation³¹ mit einer beliebigen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ergibt dann alle möglichen ebenen Wellen die sich tatsächlich im Medium in Richtung $\hat{\beta}_0$ ausbreiten können: diese Wellen sind alle ebenfalls linear polarisiert (und zwar immer in Richtung von \vec{E}_0 .) Siehe Anhang B.6.

Wegen der Linearität der Gleichungen können wir im Medium auch beliebige Summen von Wellen betrachten deren einzelnen Summanden ebene Wellen wie wir sie beschrieben haben sind. Falls beide beschriebenen Wellenarten auftauchen (also mit verschiedenen und orthogonalen Polarisierungen) dann muss die resultierende Welle nicht mehr die Form (1.1) haben. Im Spezialfall von isotropen Medien ergeben sich aus solchen Summen allgemeine elliptisch polarisierte ebene Wellen.

Wir werden im nächsten Abschnitt all diese Tatsachen ausführlich betrachten, für eine Wellenausbreitung entlang der z Achse im Hauptkoordinatensystem des Mediums.

1.2.1 Ausbreitung entlang \hat{z}_0

Wir werden im Folgendem die genauen elektromagnetischen Wellen(arten) bestimmen, die sich in einem anisotropen Medium entlang einer der Achsen des Hauptkoordinatensystems ausbreiten können.

²⁸die Matrix M hängt eben von diesen Werten ab, da sie von \vec{k} abhängt. Man siehe (1.20) und (1.10).

²⁹die allgemeine reelle Lösung ist natürlich ein beliebiger Vektor der zu \vec{E}_0 parallel ist, also $c\vec{E}_0$.

³⁰siehe Anhang B.6

³¹des gefundenen elektrischen Feldes

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit wählen wir als Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle die z Achse des Hauptkoordinatensystems des Mediums. Es gilt somit³²:

$$\hat{\beta}_0 = \hat{z}_0 \quad (1.30)$$

Mit (1.10) folgt somit

$$\kappa_x = 0 \quad \kappa_y = 0 \quad \kappa_z = \beta \quad (1.31)$$

Einsetzen in (1.22) (siehe auch (1.20) für die Bedeutung der Symbole) ergibt

$$\begin{pmatrix} \omega^2 \mu \epsilon_x - \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \mu \epsilon_y - \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \mu \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \\ E_{0,z} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.32)$$

Die Determinante der Matrix muss verschwinden damit nicht triviale Lösungen existieren, also damit sich eine ebene Welle ausbreiten kann. Das heißt:

$$(\omega^2 \mu \epsilon_x - \beta^2)[(\omega^2 \mu \epsilon_y - \beta^2)\omega^2 \mu \epsilon_z] = 0 \quad (1.33)$$

Daraus folgen vier mögliche Werte für β :

$$\beta_1 = -\omega \sqrt{\mu \epsilon_x}, \quad \beta_2 = \omega \sqrt{\mu \epsilon_x}, \quad \beta_3 = -\omega \sqrt{\mu \epsilon_y}, \quad \beta_4 = \omega \sqrt{\mu \epsilon_y} \quad (1.34)$$

Wir finden so ein Spezialfall vom Ergebnis wieder, das wir in Tabelle 1.1 aufgelistet hatten und das wir mit einem Computer Algebra System (Mathematica) berechnet hatten.

Wir sehen sofort, dass die physikalisch interessanten Lösungen β_2 und β_4 sind, die zwei verschiedene fortlaufende Wellen beschreiben³³ (β_1 und β_3 sind dann die rücklaufende Wellen).

Aus (1.32) folgt sofort

$$E_{0,z} = 0 \quad (1.35)$$

und somit ist die sich ausbreitende (generische) Welle transversal.

Einsetzen von β_2 in (1.32) ergibt

$$\begin{cases} E_{0,x} = c \in \mathbb{R} \\ E_{0,y} = 0 \quad \text{falls } \epsilon_y \neq \epsilon_x \end{cases} \quad (1.36)$$

und $E_{0,y} = c_2 \in \mathbb{R}$ falls $\epsilon_y = \epsilon_x$.

³²man beachte auch immer (1.17).

³³so dass $\vec{\kappa}$ dieselbe orientierte Richtung besitzt wie $\hat{\beta}_0$.

Einsetzen von β_4 in (1.32) ergibt

$$\begin{cases} E_{0,x} = 0 & \text{falls } \epsilon_x \neq \epsilon_y \\ E_{0,y} = c \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.37)$$

und $E_{0,x} = c_2 \in \mathbb{R}$ falls $\epsilon_x = \epsilon_y$.

Wir beobachten also im anisotropen Medium eine lineare entlang x polarisierte³⁴ Welle für die Lösung β_2 und eine lineare entlang y polarisierte Welle für die Lösung β_4 falls $\epsilon_x \neq \epsilon_y$. Ansonsten, falls $\epsilon_x = \epsilon_y$ sind auch zusätzliche transversale ebene Wellen möglich mit orthogonaler Polarisationsrichtung (zu den eben beschriebenen Wellen).

Wir setzen daher

$$\beta_{s+} = \beta_2 = \omega\sqrt{\mu\epsilon_x} \quad (1.38)$$

und

$$\beta_{p+} = \beta_4 = \omega\sqrt{\mu\epsilon_y} \quad (1.39)$$

und

$$\beta_{s-} = -\beta_{s+} \quad \beta_{p-} = -\beta_{p+} \quad (1.40)$$

Aus diesen Ergebnissen folgt mit (1.34) und (1.10) und (1.30) und (1.1) die

Behauptung 1.2.2 *In einem anisotropen, linearen, stationären, homogenen, nicht dispersivem und nicht leitenden und nicht dissipativem dielektrischem Medium können sich entlang der z Achse im Hauptkoordinatensystem des Mediums zwei verschiedene ebene fortlaufende Wellen(arten) ausbreiten, falls $\epsilon_x \neq \epsilon_y$, und zwar:*

$$\vec{E}_{s+} = A_{s+} \hat{x}_0 e^{-j(\omega\sqrt{\mu\epsilon_x})z_0 \cdot \vec{r}} = A_{s+} \hat{x}_0 e^{-j\beta_{s+} z_0 \cdot \vec{r}} \quad (1.41)$$

mit $A_{s+} \in \mathbb{C}$ eine beliebige skalare Konstante.

Und

$$\vec{E}_{p+} = A_{p+} \hat{y}_0 e^{-j(\omega\sqrt{\mu\epsilon_y})z_0 \cdot \vec{r}} = A_{p+} \hat{y}_0 e^{-j\beta_{p+} z_0 \cdot \vec{r}} \quad (1.42)$$

mit $A_{p+} \in \mathbb{C}$ eine beliebige skalare Konstante.

Diese beiden Wellen sind, wie man sieht, linear orthogonal zueinander polarisiert: \vec{E}_{s+} entlang x und \vec{E}_{p+} entlang y .

Es können selbstverständlich auch die rücklaufenden Wellen \vec{E}_{s-} und \vec{E}_{p-} existieren, die man erhält wenn man jeweils β_{s+} mit $\beta_{s-} = -\beta_{s+} = \beta_1$ und β_{p+} mit $\beta_{p-} = -\beta_{p+} = \beta_3$ ersetzt³⁵ in Gleichung (1.41) und (1.42).

Auch beliebige Summen dieser Wellen können im Medium existieren, wegen der Linearität der Gleichungen.

Man beobachte aber, dass Summen der Wellen³⁶ der Form (1.41) und (1.42) im Allgemeinen für $\beta_{s+} \neq \beta_{p+}$ nicht mehr die Form (1.1) annehmen.

³⁴siehe Anhang B.6

³⁵es sein auch die komplexen Konstanten mit entsprechenden Symbolen dargestellt.

³⁶diese Summen von Wellen können sich aber natürlich im Medium ausbreiten wegen der Linearität der Gleichungen und des Problems.

Die Berechtigung der komplexen Konstanten A ist offensichtlich³⁷: man siehe auch Behauptung 1.2.1 und relative Bemerkungen. Man siehe auch Anhang B.6 über die Auswirkungen auf die Polarisation von einer Multiplikation von einem komplexen Vektor mit einem komplexen Skalar.

Es gilt außerdem die

Behauptung 1.2.3 *Unter denselben Voraussetzungen wie in Behauptung 1.2.2 gilt, dass falls $\epsilon_x = \epsilon_y$ (also speziell auch für isotrope Medien) sich im Medium Wellen der Form*

$$\vec{E}_+ = (A_{s_+} \hat{x}_0 + A_{p_+} \hat{y}_0) e^{-j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_{x=y}}) \hat{z}_0 \cdot \vec{r}} \quad (1.43)$$

ausbreiten können mit $A_{s_+}, A_{p_+} \in \mathbb{C}$ beliebige Konstanten.

Der Klarheit wegen haben wir gesetzt $\epsilon_{x=y} := \epsilon_x = \epsilon_y$.

Diese ebenen fortlaufenden Wellen sind im Allgemeinen elliptisch polarisiert und, wie man sieht, transversal zur Ausbreitungsrichtung \hat{z}_0 .

Wir erhalten entsprechende rücklaufende Wellen wenn wir im Exponential das Vorzeichen ändern.

Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich sofort, wenn man die vorherige Abhandlung betrachtet.

Zusammenfassend ergibt sich somit die

Behauptung 1.2.4 *In einem anisotropem (wobei im Allgemeinen auch ein isotropes Medium als ein Spezialfall von einem anisotropen angesehen werden darf), linearem, stationärem, homogenem, nicht dispersivem und nicht leitendem dielektrischem Medium können sich folgende Wellen(arten) entlang der Ausbreitungsrichtung \hat{z}_0 (im Hauptkoordinatensystem des Mediums) ausbreiten:*

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \underbrace{A_{s_+} \hat{x}_0 e^{-j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_x})z}}_{= \vec{E}_{s_+}} + \underbrace{A_{s_-} \hat{x}_0 e^{+j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_x})z}}_{= \vec{E}_{s_-}} + \\ & + \underbrace{A_{p_+} \hat{y}_0 e^{-j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_y})z}}_{= \vec{E}_{p_+}} + \underbrace{A_{p_-} \hat{y}_0 e^{+j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_y})z}}_{= \vec{E}_{p_-}} \end{aligned} \quad (1.44)$$

mit klarer Bedeutung. $A_{s_+}, \dots, A_{p_-} \in \mathbb{C}$ sind beliebige komplexe skalare Konstanten.

Das Feld \vec{E} besteht aus einer hinlaufenden und einer zurücklaufenden entlang \hat{x}_0 polarisierten³⁸ Welle \vec{E}_{s_+} bzw. \vec{E}_{s_-} und aus einer hinlaufenden und zurücklaufenden entlang \hat{y}_0 polarisierten Welle \vec{E}_{p_+} bzw. \vec{E}_{p_-} . Die entlang x und entlang y polarisierten Wellen haben, wie man sieht, unterschiedliche Ausbreitungseigenschaften³⁹ falls $\epsilon_x \neq \epsilon_y$.

\vec{E} ändert also seine Polarisationsseigenschaften entlang z . Also ist \vec{E} nicht mehr im Allgemeinen eine ebene Welle von Typ (1.1).

³⁷immer wegen der Linearität...

³⁸siehe Anhang B.6

³⁹also unterschiedliche Werte für den Propagationsvektor $\vec{\kappa}$. Das heißt, wie wir gesehen haben, unterschiedliche Werte für β .

Aber im Spezialfall $\epsilon_x = \epsilon_y$, also auch für isotrope Medien, ist \vec{E} im Allgemeinen ein elliptisch polarisierter Vektor (mit konstanten Polarisations-eigenschaften entlang z). Nur in diesem Spezialfall ist \vec{E} im Allgemeinen eine ebene Welle, also des Typs (1.1).

Auch der Beweis dieser Behauptung ist offensichtlich anhand unserer vorheriger Ab-handlung⁴⁰.

Da \vec{E} in (1.44) eine Summe von ebenen Wellen der Form (1.1) ist, können wir für jede einzelne dieser Wellen das zugehörige Magnetfeld aus (1.6) bestimmen⁴¹. Wegen der Linearität der Gleichungen ist dann das zu \vec{E} zugehörige Magnetfeld \vec{H} die Summe der einzelnen Terme.

Wir schreiben $\vec{H}_{(\vec{E})}$ um das zum Feld \vec{E} zugehörige Magnetfeld \vec{H} zu bezeichnen.

Somit, und mit der Tatsache, dass $z = \hat{z}_0 \cdot \vec{r}$ ergibt sich:

$$\vec{H}_{(\vec{E}_{s+})} = A_{s+} \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon_x}}{\omega \mu} (\hat{z}_0 \times \hat{x}_0) e^{-j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_x})z} = A_{s+} \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\mu}} \hat{y}_0 e^{-j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_x})z} = \vec{H}_{p+} \quad (1.45)$$

Ganz analog ergibt sich

$$\vec{H}_{(\vec{E}_{s-})} = -A_{s-} \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\mu}} \hat{y}_0 e^{+j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_x})z} = \vec{H}_{p-} \quad (1.46)$$

Außerdem beobachten wir, dass

$$\vec{H}_{(\vec{E}_{p+})} = A_{p+} \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon_y}}{\omega \mu} (\hat{z}_0 \times \hat{y}_0) e^{-j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_y})z} = -A_{p+} \sqrt{\frac{\epsilon_y}{\mu}} \hat{x}_0 e^{-j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_y})z} = \vec{H}_{s+} \quad (1.47)$$

und analog

$$\vec{H}_{(\vec{E}_{p-})} = +A_{p-} \sqrt{\frac{\epsilon_y}{\mu}} \hat{x}_0 e^{+j(\omega \sqrt{\mu \epsilon_y})z} = \vec{H}_{s-} \quad (1.48)$$

Aus diesen Tatsachen und aus der Linearität des Problems folgt die

Behauptung 1.2.5 *Unter denselben Voraussetzungen wie in Behauptung 1.2.4, und mit derselben Bedeutung der Symbole, ergibt sich für das dem Feld \vec{E} in (1.44) zugehörigen Magnetfeld \vec{H} , dass*

$$\vec{H} = \vec{H}_{p+} + \vec{H}_{p-} + \vec{H}_{s+} + \vec{H}_{s-} \quad (1.49)$$

wobei die einzelnen Summanden durch (1.45), (1.46), (1.47) und (1.48) gegeben sind.

Wellenausbreitungen vom Typ (1.44) und (1.49) sind sehr wichtig und charakteristisch in dielektrischen Medien und zur Modellierung von vielen Phänomenen.

Sie spielen auch in der Messtechnik mit Glasfasern eine wichtige Rolle.

⁴⁰man bedenke auch, dass $\hat{z}_0 \cdot \vec{r} = z$, mit klarer Bedeutung.

⁴¹ansonsten, wenn wir es nicht mit ebenen Wellen zu tun hätten wäre dies nicht der Fall da (1.3) nicht mehr gültig sein würde.

1.3 Reflexion und Transmission an transversalen ebenen Grenzschichten von anisotropen Medien

Wir befassen uns nun mit den Eigenschaften von Reflexion und Transmission von elektromagnetischen Wellen der Form (1.44) an Grenzschichten zwischen anisotrope Medien.

Ein isotropes Medium darf im Allgemeinen als ein Spezialfall von einem anisotropen angesehen werden.

Wir befassen uns also mit der Frage über die Effekte von einem Übergang von einem (anisotropen) Medium 1 zu einem (anisotropen) Medium 2 (also einer Grenzschicht) auf die Ausbreitung von elektromagnetische Wellen der Form (1.44), mit zugehörigem magnetischem⁴² Feld (1.49), in den beiden Medien.

Wir fixieren ein Koordinatensystem wie in Abbildung 1.7 wobei die z -Achse in der Abbildung der z -Achse vom Hauptkoordinatensystem sowohl des Mediums 1 *als auch* der z -Achse vom Hauptkoordinatensystem des Mediums 2 entspricht. Die beiden Medien haben also die z -Achsen der jeweiligen Hauptkoordinatensysteme parallel zueinander, so dass wie sie als übereinstimmen ansehen können⁴³.

Dagegen werden die x, y Achsen des Hauptkoordinatensystems des Mediums 1 nicht im Allgemeinen den x, y Achsen des Mediums 2 entsprechen.

Wir schreiben also, mit Hinblick auf Abbildung 1.7, für das Hauptkoordinatensystem des Medium 1 $Ox^{(1)}y^{(1)}z$ und für das Hauptkoordinatensystems des Mediums 2 $Ox^{(2)}y^{(2)}z$ da die z Achsen wegen unserer Annahme übereinstimmen sollen.

Die Grenzfläche Σ zwischen den Medien sei transversal zur z Achse, so dass $Ox^{(1)}y^{(1)}$ und $Ox^{(2)}y^{(2)}$ in Σ liegen, siehe Abbildung 1.7. Sei α der Rotationswinkel zwischen den beiden Koordinatensystemen in der Fläche Σ , wie in der Abbildung gezeigt.

Der Fall den wir hier betrachten ist also nur ein (wichtiger) Spezialfall einer ebenen Grenzschicht zwischen anisotrope Medien.

Wir haben, der Einfachheit wegen, den gemeinsamen Nullpunkt der beiden Hauptkoordinatensysteme auf Σ gewählt. Es ist aber auch sinnvoll eine Translation entlang der z Achse in Abbildung 1.7 zu betrachten für eines (oder beide) der Hauptkoordinatensysteme der Medien.

Da eine solche Translation keine physikalischen Unterschiede ausmacht⁴⁴, nehmen wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit an, dass der Nullpunkt O beider Koordinatensysteme auf Σ liegt.

⁴²siehe die Behauptung 1.2.5.

⁴³eine Translation ist immer denkbar.

⁴⁴und auch keine besonderen mathematischen Komplikationen beinhaltet...

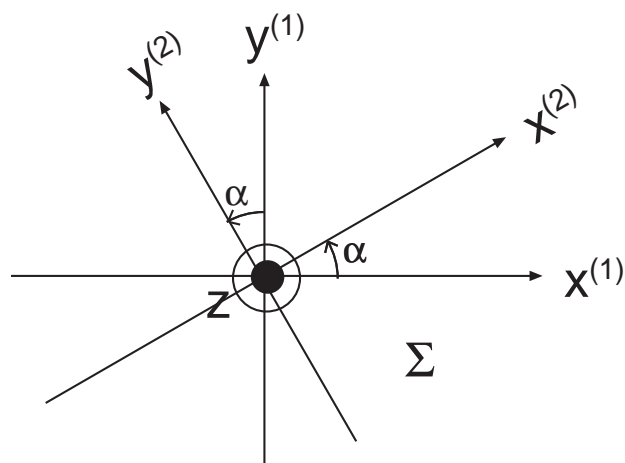
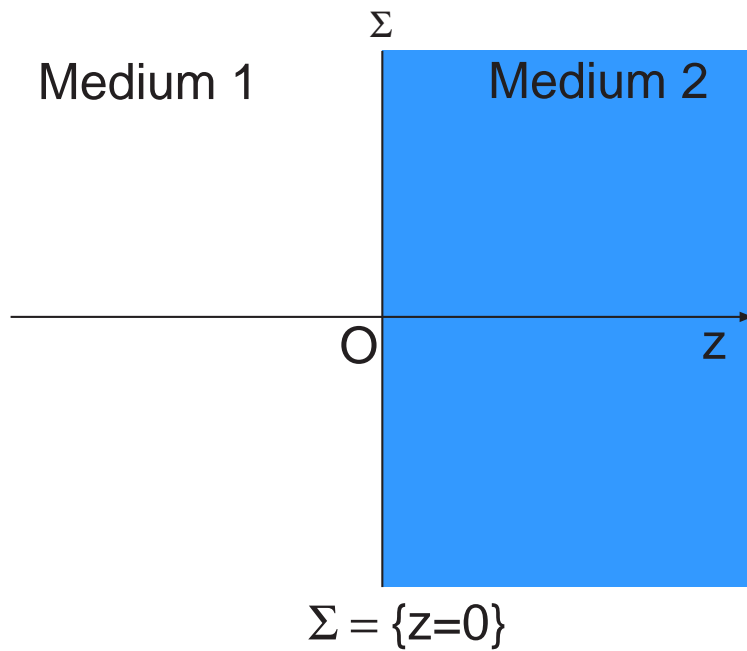


Abbildung 1.7: Die Grenzschicht Σ zwischen zwei anisotrope Medien und entsprechende Hauptkoordinatensysteme unter unseren Annahmen

Die Größen die im Folgendem mit (1) bzw. (2) gekennzeichnet sind beziehen sich auf das *Hauptkoordinatensystem* des Medium 1 bzw. 2.

So ist z.B. $\vec{E}^{(1)}$ das elektrische Feld im Medium 1, $\hat{y}_0^{(2)}$ der Einheitsvektor entlang $y^{(2)}$ also entlang der y Achse des Hauptkoordinatensystems des Mediums 2, und $A_{s+}^{(2)}$ bezieht sich auf das Hauptkoordinatensystem des Medium 2, gemäß (1.44).

Analoges gilt natürlich für alle anderen Größen.

Wir nehmen an (wir machen also einen Ansatz), dass sich sowohl im Medium 1 als auch im Medium 2 eine Welle der Form (1.44) mit (1.49) ausbreitet (unter Berücksichtigung von (1.45), (1.46), (1.47), (1.48)).

Dieser Ansatz erscheint vernünftig, da solche Wellenausbreitungen charakteristisch sind, wie wir gesehen haben. Außerdem zeigen physikalische Messungen, dass in Wirklichkeit gerade solche Wellenausbreitungen stattfinden: falls eine fortlaufende ebene Welle die sich in z Richtung ausbreitet auf eine Grenzschicht Σ trifft die normal zu \hat{z}_0 liegt, dann beobachten wir eine reflektierte (im Medium 1) und eine transmittierte (im Medium 2) ebene Welle, die auch wieder transversal zu z sind. All diese Phänomene lassen sich mit Hilfe von (1.44) mit (1.49) modellieren, unter Berücksichtigung von (1.45) bis (1.48).

Daher erscheint der Ansatz berechtigt.

Die folgende Abhandlung entstammt einer direkten Rechnung und nicht einer Literaturrecherche.

Wir studieren die Randbedingungen an der Grenzschicht⁴⁵ Σ , um zu sehen unter welchen Bedingungen eine solche Wellenausbreitung möglich ist.

Aus der Stetigkeitsbedingung (A.61) für das transversale elektrische Feld folgt (da in beiden Medien das \vec{E} Feld *nur* transversal zu z ist, was bedeutet, dass in beiden Medien \vec{E} parallel zu Σ ist, wie man sofort sieht), dass:

$$\vec{E}^{(1)} = \vec{E}^{(2)} \quad \text{für } z \rightarrow 0, \text{ also auf } \Sigma \quad (1.50)$$

Somit folgt aus (1.44), nach Grenzübergang $z \rightarrow 0$, dass

$$\begin{aligned} A_{s+}^{(1)} \hat{x}_0^{(1)} + A_{s-}^{(1)} \hat{x}_0^{(1)} + A_{p+}^{(1)} \hat{y}_0^{(1)} + A_{p-}^{(1)} \hat{y}_0^{(1)} &= \\ = A_{s+}^{(2)} \hat{x}_0^{(2)} + A_{s-}^{(2)} \hat{x}_0^{(2)} + A_{p+}^{(2)} \hat{y}_0^{(2)} + A_{p-}^{(2)} \hat{y}_0^{(2)} & \end{aligned} \quad (1.51)$$

Außerdem folgt aus der Stetigkeitsbedingung (A.60) und aus der Tatsache, dass \vec{H} in beiden Medien transversal zu z ist (also parallel zu Σ), wie man sofort sieht, dass

$$\vec{H}^{(1)} = \vec{H}^{(2)} \quad \text{für } z \rightarrow 0, \text{ also auf } \Sigma \quad (1.52)$$

⁴⁵siehe immer Abbildung 1.7.

Somit folgt aus (1.49), mit (1.45) bis (1.48), mit Grenzübergang $z \rightarrow 0$, dass

$$\begin{aligned} & A_{s_+}^{(1)} \sqrt{\frac{\epsilon_x^{(1)}}{\mu^{(1)}}} \hat{y}_0^{(1)} - A_{s_-}^{(1)} \sqrt{\frac{\epsilon_x^{(1)}}{\mu^{(1)}}} \hat{y}_0^{(1)} - A_{p_+}^{(1)} \sqrt{\frac{\epsilon_y^{(1)}}{\mu^{(1)}}} \hat{x}_0^{(1)} + A_{p_-}^{(1)} \sqrt{\frac{\epsilon_y^{(1)}}{\mu^{(1)}}} \hat{x}_0^{(1)} = \\ & = A_{s_+}^{(2)} \sqrt{\frac{\epsilon_x^{(2)}}{\mu^{(2)}}} \hat{y}_0^{(2)} - A_{s_-}^{(2)} \sqrt{\frac{\epsilon_x^{(2)}}{\mu^{(2)}}} \hat{y}_0^{(2)} - A_{p_+}^{(2)} \sqrt{\frac{\epsilon_y^{(2)}}{\mu^{(2)}}} \hat{x}_0^{(2)} + A_{p_-}^{(2)} \sqrt{\frac{\epsilon_y^{(2)}}{\mu^{(2)}}} \hat{x}_0^{(2)} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Aus (1.51) und (1.53) ergeben sich vier skalare Gleichungen (man schreibe die Gleichungen komponentenweise entlang x und y in eines der Hauptkoordinatensysteme der Medien) die den Übergang durch die Grenzschicht Σ charakterisieren.

Falls die Wellen bekannt sind, die sich auf die Grenzschicht "zubewegen", dann ist es möglich die reflektierten und die transmittierten Wellen aus dem Gleichungssystem zu bestimmen, wie wir sehen werden.

Auch ist es möglich, die Welle im Medium 2 zu bestimmen, falls die Welle im Medium 1 vollständig bekannt ist, wie wir sehen werden.

Um dies zu tun ist es notwendig $\hat{x}_0^{(2)}, \hat{y}_0^{(2)}$ als Funktion von $\hat{x}_0^{(1)}, \hat{y}_0^{(1)}$ (oder umgekehrt) und des Winkels α zu schreiben.

Es gilt offensichtlich, dass für die betrachtete Rotation gilt

$$\begin{cases} \hat{x}_0^{(2)} = \cos \alpha \hat{x}_0^{(1)} + \sin \alpha \hat{y}_0^{(1)} \\ \hat{y}_0^{(2)} = -\sin \alpha \hat{x}_0^{(1)} + \cos \alpha \hat{y}_0^{(1)} \end{cases} \quad (1.54)$$

Einsetzen in (1.51) ergibt

$$\begin{aligned} & (A_{s_+}^{(1)} + A_{s_-}^{(1)}) \hat{x}_0^{(1)} + (A_{p_+}^{(1)} + A_{p_-}^{(1)}) \hat{y}_0^{(1)} = \\ & = (A_{s_+}^{(2)} + A_{s_-}^{(2)}) \left(\cos \alpha \hat{x}_0^{(1)} + \sin \alpha \hat{y}_0^{(1)} \right) + \\ & + (A_{p_+}^{(2)} + A_{p_-}^{(2)}) \left(-\sin \alpha \hat{x}_0^{(1)} + \cos \alpha \hat{y}_0^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (1.55)$$

und aus (1.53) folgt

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\epsilon_x^{(1)}}{\mu^{(1)}}} (A_{s_+}^{(1)} - A_{s_-}^{(1)}) \hat{y}_0^{(1)} + \sqrt{\frac{\epsilon_y^{(1)}}{\mu^{(1)}}} (A_{p_-}^{(1)} + A_{p_+}^{(1)}) \hat{x}_0^{(1)} = \\ & = \sqrt{\frac{\epsilon_x^{(2)}}{\mu^{(2)}}} (A_{s_+}^{(2)} - A_{s_-}^{(2)}) \left(-\sin \alpha \hat{x}_0^{(1)} + \cos \alpha \hat{y}_0^{(1)} \right) + \\ & + \sqrt{\frac{\epsilon_y^{(2)}}{\mu^{(2)}}} (A_{p_-}^{(2)} - A_{p_+}^{(2)}) \left(\cos \alpha \hat{x}_0^{(1)} + \sin \alpha \hat{y}_0^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (1.56)$$

Projektion entlang (bzw. Skalarprodukt mit) $\hat{x}_0^{(1)}$ bzw. $\hat{y}_0^{(1)}$ ergibt schließlich die vier skalare Gleichungen:

$$A_{s_+}^{(1)} + A_{s_-}^{(1)} = (A_{s_+}^{(2)} + A_{s_-}^{(2)}) \cos \alpha - (A_{p_+}^{(2)} + A_{p_-}^{(2)}) \sin \alpha \quad (1.57)$$

$$A_{p_+}^{(1)} + A_{p_-}^{(1)} = (A_{s_+}^{(2)} + A_{s_-}^{(2)}) \sin \alpha + (A_{p_+}^{(2)} + A_{p_-}^{(2)}) \cos \alpha \quad (1.58)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_y^{(1)}}{\mu^{(1)}}} (A_{p_-}^{(1)} - A_{p_+}^{(1)}) = -\sqrt{\frac{\epsilon_x^{(2)}}{\mu^{(2)}}} (A_{s_+}^{(2)} - A_{s_-}^{(2)}) \sin \alpha + \sqrt{\frac{\epsilon_y^{(2)}}{\mu^{(2)}}} (A_{p_-}^{(2)} - A_{p_+}^{(2)}) \cos \alpha \quad (1.59)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_x^{(1)}}{\mu^{(1)}}} (A_{s_+}^{(1)} - A_{s_-}^{(1)}) = \sqrt{\frac{\epsilon_x^{(2)}}{\mu^{(2)}}} (A_{s_+}^{(2)} - A_{s_-}^{(2)}) \cos \alpha + \sqrt{\frac{\epsilon_y^{(2)}}{\mu^{(2)}}} (A_{p_-}^{(2)} - A_{p_+}^{(2)}) \sin \alpha \quad (1.60)$$

Es ist üblich $A_{s_-}^{(1)}, A_{p_-}^{(1)}, A_{s_+}^{(2)}, A_{p_+}^{(2)}$ als Funktion der anderen Größen darzustellen⁴⁶.

Man kann aber auch die Größen im Medium 2 als Funktion der Größen im Medium 1 bestimmen, oder umgekehrt.

1.4 Die Drehmatrix

Aus (1.54) folgt⁴⁷, wenn wir das Koordinatensystem (1) mit $O\chi\nu\zeta$ bezeichnen, und das Koordinatensystem (2) mit $Oxyz$, für einen beliebigen Vektor \vec{w} des Raumes (siehe auch Anhang C), dass

$$\underbrace{\begin{pmatrix} w_\chi \\ w_\nu \\ w_\zeta \end{pmatrix}}_{\text{System 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}}_{\text{System 2}} \quad (1.61)$$

Somit ist die Transformation T definiert.

Wie man (auf unterschiedlichen Wegen) leicht zeigen kann, gilt

$$T = (T^{-1})^{-1} = (T^{-1})^T \quad (1.62)$$

also

$$T^T = T^{-1} \quad (1.63)$$

Die Matrix T ist eine orthogonale Matrix, und sie beschreibt die Drehung um die gemeinsame $\zeta = z$ Achse.

1.5 Vernachlässigbare Reflexion

In manchen Fällen, kann die Reflexion an einer Grenzschicht vernachlässigt werden. Man denke nur an eine Glasscheibe die fast komplett "durchsichtig" ist.

⁴⁶oder auch umgekehrt

⁴⁷man multipliziere die erste Gleichung mit w_x und die zweite mit w_y , summiere die beiden so erhaltenen Gleichungen, und man betrachte die Komponenten, mit der Bemerkung, dass der Vektor \vec{w} unabhängig von einem Koordinatensystem ist.

Wir schreiben für das Koordinatensystem des Medium (1) $O\chi\nu\zeta$ und für das Koordinatensystem des Medium (2) $Oxyz$.

Wir nehmen an, dass an der Grenzschicht Σ keine Reflexion stattfindet⁴⁸, und dass sich im Medium 2 keine rücklaufende Welle ausbreitet.

Unter diese Voraussetzungen gilt, mit (5.19) und (5.20):

$$A_{s_+}^{(1)} \simeq A_{s_+}^{(2)} \cos \alpha - A_{p_+}^{(2)} \sin \alpha \quad (1.64)$$

$$A_{p_+}^{(1)} \simeq A_{s_+}^{(2)} \sin \alpha + A_{p_+}^{(2)} \cos \alpha \quad (1.65)$$

in dem wir A_{s_-} und A_{p_-} gleich Null setzen in (5.19) und (5.20).

Wenn wir dagegen annehmen, dass sich nur rücklaufende Moden ausbreiten, dann gelten dieselben Gleichungen und man soll die Symbole s_+, p_+ durch s_-, p_- ersetzen.

Falls dann sowohl fortlaufende als auch rücklaufende Moden vorhanden sind, so ergeben sich wegen der Linearität und des Superpositionsprinzips zwei unabhängige Gleichungssysteme.

Wir fassen diese so zusammen

$$\begin{pmatrix} A_{s_r}^{(2)} \\ A_{p_r}^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_{s_r}^{(1)} \\ A_{p_r}^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = +, - \quad (1.66)$$

mit der Matrix T aus (1.62) und (1.61).

In beiden Medien beobachten wir immer Wellenarten des Typs (1.44).

Das Hauptkoordinatensystem des Medium 1 sei, wie gesagt, $O\chi\nu\zeta$, und das Hauptkoordinatensystem des Medium 2 sei $Oxyz$.

Wir beobachten daher im Übergang der beiden Medien nur eine Koordinatentransformation (sprich also eine Projektion) die vom Winkel α bestimmt ist.

Was hier gesagt ist ist selbstverständlich nur eine Approximation unter den gegebenen Voraussetzungen.

⁴⁸das heißt, sie soll in Wirklichkeit vernachlässigbar sein.

2 Gekoppelte Moden Theorie

2.1 Einführung

Die gekoppelte Moden Theorie ist ein wichtiges mathematisches Werkzeug um elektromagnetische Wellenausbreitungen in nicht homogenen Wellenleitern zu bestimmen.

So ein Wellenleiter ist typischerweise eine Glasfaser und die nicht Homogenität entsteht dadurch, dass sich die Eigenschaften der Glasfaser entlang seiner Achse verändern.

Dies ist auch der Fall bei den so genannten Faser Bragg Gitter.

Im Allgemeinen wird vorausgesetzt, dass wir die Wellenausbreitungen in einem (entlang seiner Achse) homogenen¹ Wellenleiter bestimmen können, und dass der nicht homogene Wellenleiter als eine Perturbation des homogenen angesehen werden darf.

Im Folgenden betrachten wir aber nur Medien die den ganzen Raum füllen und deren Eigenschaften konstant sind in der Ebene die transversal zur Ausbreitungsrichtung der Wellen liegt. Diese Medien dürfen anisotrop sein.

Die genauen Annahmen werden im folgendem Abschnitt beschrieben werden.

Diese Vereinfachung ist dennoch akzeptabel um die so genannten Grundmoden in dielektrischen Wellenleitern wie Glasfasern zu beschreiben und mit guter Approximation zu berechnen.

Als Literaturquelle bzw. Empfehlung sei [10] und [11] erwähnt.

2.2 Herleitung der gekoppelten Moden Gleichungen

Wir werden nun annehmen, dass das anisotrope Medium das wir in den vorangegangenen Kapiteln betrachtet haben nicht mehr homogen ist.

Wir beschränken uns auf eine alleinige Abhängigkeit in z Richtung für die Dielektrizitätskonstante.

Es gilt also

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{(p)}(z) = \underline{\underline{\epsilon}} + \Delta\underline{\underline{\epsilon}}(z) \quad (2.1)$$

¹falls wir die Achse des Wellenleiters mit z bezeichnen, sollen sich also die Eigenschaften des Wellenleiters nicht mit z ändern.

wobei $\underline{\underline{\Delta}}_{\underline{\underline{\epsilon}}}$ nur von z Abhängt. (p) steht für "perturbiert" (gestört) und die Perturbation $\underline{\underline{\Delta}}_{\underline{\underline{\epsilon}}}$ soll hinreichend klein sein.

$\underline{\underline{\epsilon}}$ ist dagegen konstant und beschreibt ein homogenes (anisotropes) unperturbirtes Medium dessen *Hauptkoordinatensystem* $Oxyz$ sein soll. Wir werden wie immer alle Größen in diesem (Haupt)Koordinatensystem ausdrücken.

Wir nehmen an (wie immer in diesem Text), dass das Medium² auch linear, stationär, nicht dispersiv³ und nicht dissipativ (mit $\underline{\underline{\sigma}} = 0$) ist.

Wir studieren⁴ nur elektromagnetische Wellen im betrachteten anisotropen und inhomogenen Medium, die sich in Richtung z ausbreiten.

Wir treffen den Ansatz, dass (1.44) mit (1.49) unter Berücksichtigung von (1.45) bis (1.48) immer noch gültig sind⁵ wenn die Koeffizienten A_m , $m \in \{s_+, s_-, p_+, p_-\}$ nicht mehr konstant sind sondern als Funktion von z angesehen werden.

Dies ist vernünftig, da die Inhomogenität nur in Abhängigkeit von z besteht, wie wir angenommen haben.

Wie angedeutet, betrachten wir auch das zum Problem dazugehörige unperturbirte Medium, für das natürlich gilt

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{(u)} = \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2.2)$$

mit $\underline{\underline{\epsilon}}$ konstant gemäß (2.2).

Dieses "dazugehörige" homogene elektromagnetische Medium (mit entsprechendem elektromagnetischem Problem) ist hier natürlich eine ideale Konstruktion, die nur zum Zwecke der Modellierung und der Lösung des reellen Problems im perturbirtem Medium dient.

Die Lösung für das (dazugehörige ideale) unperturbirte homogene anisotrope Medium ist uns schon bekannt: wir wissen aus (1.44) in Behauptung 1.2.4 dass sich folgende Wellen ausbreiten können in z Richtung:

$$E_{s_+}^{(u)} = \hat{x}_0 e^{-j\beta_{s_+} z} \quad (2.3)$$

$$E_{s_-}^{(u)} = \hat{x}_0 e^{-j\beta_{s_-} z} \quad (2.4)$$

$$E_{p_+}^{(u)} = \hat{y}_0 e^{-j\beta_{p_+} z} \quad (2.5)$$

$$E_{p_-}^{(u)} = \hat{y}_0 e^{-j\beta_{p_-} z} \quad (2.6)$$

unter Berücksichtigung von (1.38) und (1.39) und (1.40).

²sowohl das perturbirte als auch das ideale, dazu gedachte, unperturbirte Medium

³es sollen also keine Hysterese Phänomene auftreten

⁴wie immer in diesem Text

⁵zumindest mit guter Approximation bei kleinen Perturbationen

Wir verwenden hier und im Folgendem, sowohl für das unperturbierte als auch für das perturbirte Medium, das *Hauptkoordinatensystem* $Oxyz$ des *unperturbierten* Medium⁶, mit klarer Bedeutung⁷.

Die oben aufgelisteten Wellen nennen wir *Grundmoden* des (unperturbierten) Mediums und sie beschreiben wegen Behauptung 1.2.4 die typischen Wellenarten die sich im Medium in z Richtung ausbreiten können. Der Name "modus" bedeutet auf lateinisch eben "Art".

Diese Moden (Wellenarten) beschreiben auch mit guter Approximation die Grundmoden in dielektrischen Wellenleitern wie Glasfasern: aus diesem Grund ist alles was wir im folgendem herleiten werden auch auf die Grundmoden von Glasfasern anwendbar.

Somit ist die gekoppelte Moden Theorie, die wir hier herleiten, ein wichtiges Werkzeug in Betracht auf Faser Bragg Gitter.

Um die Notation zu vereinfachen definieren wir

$$M := \{s_+, s_-, p_+, p_-\} \quad (2.7)$$

und wir setzen

$$\hat{e}_{s_+} = \hat{e}_{s_-} = \hat{x}_0 \quad (2.8)$$

und

$$\hat{e}_{p_+} = \hat{e}_{p_-} = \hat{y}_0 \quad (2.9)$$

Für die unperturbierten Grundmoden können wir also schreiben, in kompakter Notation

$$\vec{E}_m^{(u)} = \hat{e}_m e^{-j\beta_m z} \quad \forall m \in M \quad (2.10)$$

Die folgende Herleitung ist eine modifizierte Version der Abhandlung von Snyder, siehe [10].

Als Literaturempfehlung für eine vollständige Übersicht der gekoppelten Moden Theorie sei [11] erwähnt.

Wir definieren

$$\vec{F}_m := \vec{E}_m^{(u)*} \times \vec{H}^{(p)} + \vec{E}^{(p)} \times \vec{H}_m^{(u)*} \quad \forall m \in M \quad (2.11)$$

wobei $*$ komplexe Konjugation bedeutet und (p) bedeutet auf das perturbirte Medium bezogen und (u) bedeutet auf das unperturbierte Medium bezogen. m steht für einen Modus in M .

⁶für das (2.2) gilt.

⁷es ist also klar wie man dieses Koordinatensystem $Oxyz$ fixiert, sowohl für das perturbirte als auch für das unperturbierte Medium: wir betrachten einfach das dazugehörige ideale unperturbierte Medium, bestimmen dessen Hauptkoordinatensystem $Oxyz$, und drücken auch die Größen für das perturbirte inhomogene Medium in diesem Koordinatensystem aus.

Wegen (1.6) mit (1.10) gilt für $\hat{\beta}_0 = \hat{z}_0$ dass

$$\vec{H}_m^{(u)} = \frac{\beta_m}{\omega\mu} (\hat{z}_0 \times \vec{e}_m) e^{-j\beta_m z} \quad \forall m \in M \quad (2.12)$$

Mit (B.14) ergibt sich

$$\nabla \cdot \vec{F}_m = \vec{H}^{(p)} \cdot \nabla \times \vec{E}_m^{(u)*} - \vec{E}_m^{(u)*} \cdot \nabla \times \vec{H}^{(p)} + \vec{H}_m^{(u)*} \cdot \nabla \times \vec{E}^{(p)} - \vec{E}^{(p)} \cdot \nabla \times \vec{H}_m^{(u)*} \quad (2.13)$$

für alle $m \in M$.

Einsetzen der (transformierten) Maxwell Gleichungen, mit (B.22) und (B.26) und unter Berücksichtigung von (B.15) und der Tatsache dass $\underline{\underline{\epsilon}}$ symmetrisch ist und aus reellen Elementen besteht⁸, ergibt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F}_m &= j\omega\mu \vec{H}^{(p)} \cdot \vec{H}_m^{(u)*} - j\omega \vec{E}_m^{(u)*} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}^{(p)} \cdot \vec{E}^{(p)}) - j\omega\mu \vec{H}_m^{(u)*} \cdot \vec{H}^{(p)} + \\ &+ j\omega \vec{E}^{(p)} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}^{(u)*} \cdot \vec{E}_m^{(u)*}) = j\omega \left(\vec{E}^{(p)} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}^{(u)*} \cdot \vec{E}_m^{(u)*}) - \vec{E}_m^{(u)*} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}^{(p)} \cdot \vec{E}^{(p)}) \right) = \\ &= j\omega \left(\vec{E}_m^{(u)*} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}^{(u)} \cdot \vec{E}^{(p)}) - \vec{E}_m^{(u)*} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}^{(p)} \cdot \vec{E}^{(p)}) \right) = \\ &= j\omega \vec{E}_m^{(u)*} \cdot \left((\underline{\underline{\epsilon}}^{(u)} - \underline{\underline{\epsilon}}^{(p)}) \cdot \vec{E}^{(p)} \right) = -j\omega \vec{E}_m^{(u)*} \cdot (\Delta \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{E}^{(p)}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

für alle $m \in M$.

Mit (B.10) können wir schreiben wegen (2.14)

$$\begin{aligned} \int_A \nabla \cdot \vec{F}_m dA &= \frac{\partial}{\partial z} \int_A \vec{F}_m \cdot \hat{z}_0 dA + \oint_{L_A} \vec{F}_m \cdot \hat{n} dL = \\ &= -j\omega \int_A \vec{E}_m^{(u)*} \cdot (\Delta \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{E}^{(p)}) dA \end{aligned} \quad (2.15)$$

für alle $m \in M$.

A sei ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet das ganz in einer Ebene liegt die transversal zu z ist. Somit steht A senkrecht zu \hat{z}_0 . Sei L_A der Rand von A in der Ebene in der A liegt⁹.

Wir beobachten, dass *alle* Größen die wir betrachten *nicht* abhängig sind von x und y . Dies folgt aus (2.11), (2.10), (2.12) sowie aus den Ansätzen (2.18), (2.19) wie wir sehen werden.

Einfacher kann man behaupten, dass die Geometrie des Problems diese Tatsache als selbstverständlich erscheinen lässt.

Also sind alle Integranden konstant gegenüber den Integrationsvariablen (x und y) und die Integrale können mit dem Maß der Fläche A ersetzt werden.

⁸siehe Anhang

⁹die wie gesagt senkrecht zu \hat{z}_0 ist, also transversal zu z .

Wir wählen für A eine Fläche mit Maß gleich 1.

Man sieht sofort, dass

$$\oint_{L_A} \vec{F}_m \cdot \hat{n} dL = 0 \quad \forall m \in M \quad (2.16)$$

da \vec{F}_m konstant ist gegenüber den Integrationsvariablen. Dies folgt aus dem Divergenz-satz im zweidimensionalen Raum, siehe [8].

Es folgt aus (2.15):

$$-j\omega \vec{E}_m^{(u)*} \cdot (\Delta_{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{E}^{(p)}) = \frac{\partial}{\partial z} (\vec{F}_m \cdot \hat{z}_0) \quad \forall m \in M \quad (2.17)$$

In Einklang mit (1.44) und unter Berücksichtigung von (2.10) treffen wir den Ansatz

$$\vec{E}^{(p)} = \sum_{m \in M} A_m(z) \vec{E}_m^{(u)} = \sum_{m \in M} A_m(z) \hat{e}_m e^{-j\beta_m z} \quad (2.18)$$

für das elektrische Feld im perturbiertem Medium¹⁰.

Dies entspricht der Annahme, dass in (1.44) die Koeffizienten A_m durch Funktionen ersetzt werden können die nur von z abhängen, $A_m(z)$, für alle $m \in M$ (also für alle Moden).

Diese Annahme erscheint vernünftig für kleine Perturbationen $\Delta_{\underline{\epsilon}}$ die nur Funktion von z sind.

Mit Hinblick auf (1.49) und (2.12) können wir schreiben, wie man sofort sehen kann auch wenn man die Linearität des Problems betrachtet:

$$\vec{H}^{(p)} = \sum_{m \in M} A_m(z) \frac{\beta_m}{\omega\mu} (\hat{z}_0 \times \hat{e}_m) e^{-j\beta_m z} = \sum_{m \in M} A_m(z) \vec{H}_m^{(u)} \quad (2.19)$$

für das unperturbierete Medium.

Man beachte aber *hier*, dass $\vec{H}_m^{(u)}$ mit $\vec{H}_{(\vec{E}_m)}$ in den Gleichungen (1.45) bis (1.48) übereinstimmt und *nicht* mit \vec{H}_m in denselben Gleichungen, mit $m \in M$.

Der Zusatz (u) ist also in dieser Notation besonders bedeutsam.

(2.19) entspricht aber inhaltlich komplett der Gleichung (1.49) in Behauptung 1.2.5, wie man sofort sieht.

Wir setzen auch

$$\hat{h}_m := \hat{z}_0 \times \hat{e}_m \quad \forall m \in M \quad (2.20)$$

¹⁰daher das Symbol (p) . Dagegen steht (u) für "unperturbed", also nicht gestört.

wobei wir es selbstverständlich nur mit reellen Einheitsvektoren zu tun haben.

Einsetzen von (2.18) in (2.17) mit (2.10) und (2.11) ergibt:

$$\begin{aligned} -j\omega\hat{e}_m e^{j\beta_m z} \cdot \left(\Delta_{\underline{\underline{\epsilon}}} \cdot \sum_{n \in M} A_n(z) \hat{e}_n e^{-j\beta_n z} \right) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\hat{z}_0 \cdot \left(\vec{E}_m^{(u)*} \times \vec{H}^{(p)} + \vec{E}^{(p)} \times \vec{H}_m^{(u)*} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Wir beobachten nun, dass

$$\hat{z}_0 \cdot (\hat{e}_m \times (\hat{z}_0 \times \hat{e}_n)) = \hat{e}_m \cdot \hat{e}_n \quad \forall m, n \in M \quad (2.22)$$

Dies folgt sofort aus (2.8), (2.9) und (B.12).

Mit diesen Positionen und mit (2.18), (2.10), (2.12) und (2.19) folgt, mit Hinblick¹¹ auf (2.21), dass

$$\begin{aligned} &\hat{z}_0 \cdot \left(\vec{E}_m^{(u)*} \times \vec{H}^{(p)} + \vec{E}^{(p)} \times \vec{H}_m^{(u)*} \right) = \\ &= \hat{z}_0 \left[\hat{e}_m e^{j\beta_m z} \times \left(\sum_{n \in M} A_n(z) \frac{\beta_n}{\omega\mu} (\hat{z}_0 \times \hat{e}_n) e^{-j\beta_n z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{n \in M} A_n(z) \hat{e}_n e^{-j\beta_n z} \right) \times \left(\frac{\beta_m}{\omega\mu} (\hat{z}_0 \times \hat{e}_m) e^{j\beta_m z} \right) \right] = \\ &= \sum_{n \in M} e^{j\beta_m z - j\beta_n z} A_n(z) \frac{\beta_n}{\omega\mu} (\hat{e}_m \cdot \hat{e}_n) + \sum_{n \in M} A_n(z) e^{-j\beta_n z + j\beta_m z} \frac{\beta_m}{\omega\mu} (\hat{e}_m \cdot \hat{e}_n) = \\ &= \sum_{n \in M} A_n(z) e^{j\beta_m z - j\beta_n z} (\hat{e}_m \cdot \hat{e}_n) (\beta_n + \beta_m) \frac{1}{\omega\mu} = A_m(z) 2\beta_m \frac{1}{\omega\mu} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Wir beobachten nämlich, dass

$$(\hat{e}_m \cdot \hat{e}_n) (\beta_n + \beta_m) = \begin{cases} 2\beta_m, & \text{falls } n = m \\ 0, & \text{falls } n \neq m \end{cases} \quad (2.24)$$

Um dies zu zeigen, beobachten wir dass wegen (1.40) gilt

$$\beta_n + \beta_m = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} n = s_+, m = s_- \\ n = s_-, m = s_+ \\ n = p_+, m = p_- \\ n = p_-, m = p_+ \end{cases} \quad (2.25)$$

¹¹man siehe den Ausdruck den man ableitet auf der Rechten Seite...

und außerdem wegen (2.8) und (2.9) gilt

$$\hat{e}_m \cdot \hat{e}_n = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} m \in \{s_+, s_-\}, n \in \{p_+, p_-\} \\ m \in \{p_+, p_-\}, n \in \{s_+, s_-\} \end{cases} \quad (2.26)$$

Es bleiben also die Fälle für $m = n$, wo also m und n den gleichen Modus bezeichnen, $m, n \in M$, in denen das Ergebnis offensichtlich ist¹².

Mit Hilfe von (2.23) wird aus (2.21):

$$-j\omega \hat{e}_m e^{j\beta_m z} \cdot \left(\underline{\Delta} \underline{\epsilon} \cdot \sum_{n \in M} A_n(z) \hat{e}_n e^{-j\beta_n z} \right) = \frac{2\beta_m}{\omega\mu} \frac{\partial A_m}{\partial z} \quad \forall m \in M \quad (2.27)$$

Daraus ergibt sich das wichtige Gleichungssystem

$$\frac{\partial A_m}{\partial z} = -j\omega^2 \mu \sum_{n \in M} \frac{\hat{e}_m \cdot (\underline{\Delta} \underline{\epsilon}(z) \cdot \hat{e}_n)}{2\beta_m} e^{j(\beta_m - \beta_n)z} A_n(z) \quad \forall m \in M \quad (2.28)$$

Aus (2.28) ergeben sich vier skalare Gleichungen, die das System der gekoppelten Moden Gleichungen ergeben.

Wie man sieht haben wir ein System von linearen Differentialgleichungen der ersten Ordnung¹³ mit nicht konstanten Koeffizienten.

Wir finden somit für unseren Fall das allgemeine Ergebnis wieder, das in [11] beschrieben ist.

Siehe auch [13] und [14].

Aus diesem System kann man $A_m(z)$ mit $m \in M$ bestimmen, falls entsprechende Anfangs bzw. Randwerte gegeben sind.

Und dadurch kann man mit (2.18) und (2.19) die elektromagnetische Welle bestimmen die sich in Richtung z ausbreitet im anisotropem, perturbierten, inhomogenem Medium das wir betrachtet haben.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen in folgender

Behauptung 2.2.1 *In einem anisotropem, nicht homogenem, stationärem, nicht dispersivem und nicht leitendem Medium das durch (2.1) beschrieben ist, mit hinreichend kleiner Perturbation $\underline{\Delta} \underline{\epsilon}(z)$, das als eine Perturbation von einem entsprechenden idealen homogenen Medium angesehen werden darf (siehe (2.2)) gilt folgendes:*

- *Das elektrische Feld $\vec{E}^{(p)}$ im perturbiertem Medium kann durch (2.18) dargestellt werden*
- *Das magnetische Feld kann mit (2.19) dargestellt werden*

¹²wir erhalten eben den Wert $2\beta_m$ in (2.24).

¹³und von Dimension vier

- Die Koeffizienten $A_m(z)$, $m \in M$ müssen das System der gekoppelten Moden Gleichungen (2.28) erfüllen. Man kann dieses System eindeutig lösen falls entsprechende Anfangs- bzw. Randwerte bekannt sind.

Für die Bedeutung der Symbole siehe außerdem (2.8), (2.9), (2.7), (1.38), (1.39), (1.40).

Das benutzte Koordinatensystem $Oxyz$ ist fixiert durch das Hauptkoordinatensystem des zum Problem dazugehörigen unperturbierten Medium, gemäß (2.2) (man beachte auch (2.1)), mit klarer Bedeutung.

Die Ausbreitungsrichtung wurde immer parallel zu der z Achse angenommen.

3 Faser Bragg Gitter

3.1 Beschreibung eines Faser Bragg Gitter

Ein Faser Bragg Gitter ist ein dielektrischer Wellenleiter (eine Glasfaser) in dem Inhomogenitäten (Perturbationen) entlang der Achse (gezielt) erzeugt wurden. Diese Perturbationen bilden das so genannte Gitter oder Grating in der Faser.

Wir können die Grundmoden (Grund-Wellenarten) und dessen Kopplung miteinander in einem Faser Bragg Gitter gut berechnen mit Hilfe der Theorie die wir bisher hergeleitet haben.

Dazu benutzen wir die gekoppelte Moden Theorie die wie in Kapitel 2 hergeleitet haben unter Berücksichtigung der gegebenen Rand- bzw. Anfangswerte.

Wir können annehmen, mit guter Approximation, für die Grundmoden in Faser Bragg Gitter, dass das Faser Bragg Gitter selbst durch ein entsprechendes lineares, inhomogenes (entlang der Achse der Faser), anisotropes, stationäres, nicht dispersives und nicht leitendes Medium modelliert werden kann.

Siehe z.B. [13].

Die elektromagnetische Wellenausbreitung in diesem (unendlich ausgedehntem) anisotropem inhomogenem Medium (die wie mit Hilfe der gekoppelten Moden Theorie berechnen) entspricht dann mit guter Approximation der elektromagnetischen Wellenausbreitung (der Grundmoden) *im Kern* des Faser Bragg Gitters.

Siehe auch [15], [16] und [18] und [14] für eine genaue Übersicht.

Wegen der Inhomogenität entlang der Achse der Faser (im Faser Bragg Gitter) ist die gekoppelte Moden Theorie ein wichtiges und hilfreiches Werkzeug zur Berechnung der Wellenausbreitungen (der Grundmoden im Bragg Gitter).

Wir treffen dieselben Annahmen wie in Kapitel 2 und verwenden dieselben Symbole mit derselben Bedeutung¹.

Die Richtung z entspreche der Achse der Glasfaser *und* der z -Achse des *Hauptkoordinatensystems* des Dielektrikums aus welchem der Faser Kern besteht².

¹bzw. analoge Symbole mit analoger und klarer Bedeutung.

²ohne die Perturbation des Gitters zu berücksichtigen natürlich

Wie angedeutet, können wir das Faser Bragg Gitter durch ein unendlich ausgedehntes Medium modellieren, dass durch folgende Dielektrizitätskonstante charakterisiert ist

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{(p)}(z) = \underbrace{\underline{\underline{\epsilon}}_m + \Delta\underline{\underline{\epsilon}}_m}_{=: \underline{\underline{\epsilon}}_{\text{FBG}}^{(u)}} + \Delta\underline{\underline{\epsilon}}_G(z) \quad (3.1)$$

wobei die Abhängigkeit nur von z besteht und wobei $\underline{\underline{\epsilon}}_m$ und $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}_m$ (also auch $\underline{\underline{\epsilon}}_{\text{FBG}}^{(u)}$) Konstanten sind.

Diese Größen sollen den Größen (also den Dielektrizitätskonstanten) *im Kern* des Faser Bragg Gitters entsprechen³.

Die resultierenden Wellenausbreitungen im unendlich ausgedehnten Medium entsprechen dann natürlich den Wellenausbreitungen der Grundmoden im Kern der Faser.

Die genaue Bedeutung der Symbole wird im folgendem erklärt werden.

Das benutzte Koordinatensystem $Oxyz$ ist das Hauptkoordinatensystem für $\underline{\underline{\epsilon}}_{\text{FBG}}^{(u)}$. Wir werden immer annehmen, dass die z Achse dieses Koordinatensystems mit der geometrischen Symmetrieachse der Faser übereinstimmt.

Dies bedeutet also, dass im Kern der Faser das Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ für $\underline{\underline{\epsilon}}_{\text{FBG}}^{(u)}$, also für das Material des Kerns⁴ der Faser, die z Achse parallel zur geometrischen Symmetrieachse der Faser haben muss, mit klarer Bedeutung. Dies soll für alle betrachteten Werte von $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}_m$ gelten⁵.

Wir studieren nur Wellen die sich in z Richtung ausbreiten⁶.

Über die Legitimität dieser Annahmen und für weitere wichtige Bemerkungen sei auf Anhang C verwiesen und auf [16].

Siehe insbesondere Abschnitt C.2 und (C.23) und (C.20) und Abschnitt C.3.

In (3.1) ist $\underline{\underline{\epsilon}}_m$ die Dielektrizitätskonstante des unperturbierten Materials aus dem der Kern der Faser besteht. Diese Größe sei konstant und unabhängig von der Position.

Der Term $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}_m$ modelliert den Einfluss von mechanischen Einwirkungen auf den Kern der Glasfaser unter Berücksichtigung von photoelastischen Effekten, siehe [16].

Wir können hier annehmen, dass $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}_m$ eine konstante ist.

Falls das Faser Bragg Gitter als Messinstrument dienen soll, wollen wir gerade diesen Term berechnen können ausgehend von den gemessenen Reflektierten Amplituden des elektrischen Feldes. Siehe auch Anhang C.

³also mit ihnen übereinstimmen

⁴ohne die Gitter Perturbation mit einzubeziehen

⁵und speziell auch für $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}_m = 0$, sprich für $\underline{\underline{\epsilon}}_{\text{FBG}}^{(u)} = \underline{\underline{\epsilon}}_m$, mit klarer Bedeutung.

⁶eben in diesem Koordinatensystem $Oxyz$.

$\Delta_{\underline{\underline{\epsilon}}_G}(z)$ sei die (zusätzliche) Perturbation die das Bragg Gitter ausmacht. Wir können annehmen (siehe [16]), dass

$$\Delta_{\underline{\underline{\epsilon}}_G}(z) = \Delta\epsilon_G \cos(2\beta_G z) \underline{\underline{\text{Id}}} \quad (3.2)$$

mit den konstanten $\Delta\epsilon_G, \beta_G \in \mathbb{R}$. Mit $\underline{\underline{\text{Id}}}$ bezeichnen wir den Identitätstensor.

Wir haben außerdem die Konstante definiert:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{\text{FBG}}^{(u)} := \underline{\underline{\epsilon}}_m + \Delta_{\underline{\underline{\epsilon}}_m} \quad (3.3)$$

wobei wir nochmals betonen, dass das Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ bezüglich des Mediums $\underline{\underline{\epsilon}}_{\text{FBG}}^{(u)}$ die z Achse parallel zur Symmetrie Achse der Faser haben soll. Diese Annahme ist ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit möglich, siehe Anhang C. Wir werden hier $Oxyz$ benutzen.

3.2 Lösung der gekoppelten Moden Gleichung für ein (Faser) Bragg Gitter

Wir arbeiten im beschriebenen (Haupt)Koordinatensystem $Oxyz$, also im Koordinatensystem der *belasteten* Faser⁷.

Der Einfachheit wegen werden wir die Symbole FBG weglassen: die Bedeutung ist dennoch offensichtlich⁸ wenn man bedenkt, dass wir eben im Koordinatensystem der *belasteten* Faser arbeiten.

Aus den gekoppelten Moden Gleichungen (2.28) ergibt sich

$$\frac{\partial A_m}{\partial z} = -\frac{j\omega^2\mu}{2\beta_m} \sum_{n \in M} \hat{e}_m \cdot (\Delta\epsilon_G \cos(2\beta_G z) \underline{\underline{\text{Id}}}) \cdot \hat{e}_n e^{j(\beta_m - \beta_n)z} A_n(z) \quad \forall m \in M \quad (3.4)$$

mit der üblichen Bedeutung der Symbole im System der *belasteten* Faser.

Da sich das Koordinatensystem $Oxyz$ auf das Hauptkoordinatensystem für (3.3) bezieht, können wir nämlich für die Perturbation der Dielektrizitätskonstante⁹ in (2.28) den Ausdruck (3.2) annehmen (wegen (3.1)).

Unter Berücksichtigung von (2.8) und (2.9) ergibt sich aus (3.4):

$$\frac{\partial A_{s_+}}{\partial z} = -\frac{j\omega^2\mu}{2\beta_{s_+}} \Delta\epsilon_G \cos(2\beta_G z) (A_{s_+}(z) + A_{s_-}(z) e^{j2\beta_{s_+}z}) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial A_{s_-}}{\partial z} = \frac{j\omega^2\mu}{2\beta_{s_+}} \Delta\epsilon_G \cos(2\beta_G z) (A_{s_+}(z) e^{-j2\beta_{s_+}z} + A_{s_-}(z)) \quad (3.6)$$

⁷wir hatten dieses mit FBG gekennzeichnet. Dies bedeutet, dass wir $\Delta_{\underline{\underline{\epsilon}}_m}$ berücksichtigen.

⁸man siehe auch Kapitel 2.

⁹die die Inhomogenität entlang z ausmacht

und formal dieselben Gleichungen ergeben sich für die p Moden¹⁰.

Wie man sieht gibt es keine Kopplung zwischen s und p Moden im Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ für die belastete Faser, das wie besprochen definiert ist.

Wir unternehmen eine Transformation und setzen, siehe [18]:

$$A_{s_+} = R(z)e^{j(\beta_{s_+} - \beta_G)z} \quad (3.7)$$

und

$$A_{s_-} = S(z)e^{j(-\beta_{s_+} + \beta_G)z} \quad (3.8)$$

Die angegebene Transformation ist selbstverständlich invertierbar, da das Exponential für alle z verschieden von Null ist.

Einsetzen in (3.5) und (3.6) ergibt das System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{ie^{-2iz\beta_G} \mu R(z) \Delta \epsilon_G \omega^2}{2\beta_{s_+}} + \frac{ie^{2iz\beta_G} \mu R(z) \Delta \epsilon_G \omega^2}{2\beta_{s_+}} + \frac{ie^{4iz\beta_G} \mu S(z) \Delta \epsilon_G \omega^2}{2\beta_{s_+}} + \\ + \frac{i\mu S(z) \Delta \epsilon_G \omega^2}{2\beta_{s_+}} - 2iR(z)\beta_G + 2iR(z)\beta_{s_+} + 2R'(z) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{ie^{-4iz\beta_G} \mu R(z) \Delta \epsilon_G \omega^2}{4\beta_{s_+}} + \frac{i\mu R(z) \Delta \epsilon_G \omega^2}{4\beta_{s_+}} + \frac{ie^{-2iz\beta_G} \mu S(z) \Delta \epsilon_G \omega^2}{4\beta_{s_+}} + \\ + \frac{ie^{2iz\beta_G} \mu S(z) \Delta \epsilon_G \omega^2}{4\beta_{s_+}} - iS(z)\beta_G + iS(z)\beta_{s_+} - S'(z) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Wir haben diese Ausdrücke mit Hilfe des Computer Algebra Systems Mathematica berechnet. i ist hier die imaginäre Einheit $i^2 = -1$ und der Strich ' symbolisiert die Ableitung nach z . Die trigonometrischen Funktionen wurden mit Hilfe von komplexen Exponentialen ausgedrückt.

Diese Symbole werden auch im folgendem verwendet werden.

Wir machen nun die so genannte synchronous Approximation und lassen in den obigen Differentialgleichungen die Terme weg die sehr schnell oszillieren, siehe [18] und [19].

Eine intuitive Begründung für diese Approximation kann folgendermaßen beschrieben werden: falls wir eine Differentialgleichung haben der Form

$$\frac{dy}{dz} = f(z) + e^{jbz}g(z) \quad (3.11)$$

¹⁰wenn man das Symbol s durch p ersetzt, natürlich.

mit einem ausreichend großen Wert für b , dann ist

$$\int e^{jbz} g(z) dz \simeq \int e^{jbz} g dz = g \frac{e^{jbz}}{jb} \quad (3.12)$$

da $g(z)$ als konstant angesehen werden kann im Vergleich zum schnell oszillierendem Exponential und wir setzen $g = \overline{g(z)} \simeq g(z)$ wobei der Überstrich den Mittelwert symbolisiert.

Es gilt daher

$$y = \int f(z) dz + \int e^{jbz} g(z) dz \simeq \int f(z) dz \quad (3.13)$$

Diese Behauptung folgt aus der Tatsache, dass der periodische Term (3.12) keinen Beitrag zum Aufbau von y im Durchschnitt bringt und aus der Beobachtung das (3.12) "klein" ist im Betrag, da sich jb im Nenner befindet, mit b "groß".

Dies impliziert, dass wir in (3.11) den schnell oszillierenden Term vernachlässigen können, und für die rechte Seite nur $f(z)$ setzen können.

Daher ist die synchronous Approximation berechtigt.

Mit der synchronous Approximation wird aus (3.9) und (3.10)

$$\frac{i\mu S(z)\Delta\epsilon_G\omega^2}{2\beta_{s_+}} - 2iR(z)\beta_G + 2iR(z)\beta_{s_+} + 2R'(z) = 0 \quad (3.14)$$

und

$$\frac{i\mu R(z)\Delta\epsilon_G\omega^2}{4\beta_{s_+}} - iS(z)\beta_G + iS(z)\beta_{s_+} - S'(z) = 0 \quad (3.15)$$

Es ergibt sich somit ein System von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten das bekanntlich analytisch lösbar ist.

$i = j$ ist die imaginäre Einheit und der Strich ' symbolisiert Ableitung nach z .

Die analytische allgemeine Lösung ist in Tabelle 3.2 angegeben, mit (3.17) und (3.17).

Aus (3.7) und (3.8) folgt somit (* bedeutet hier Multiplikation):

$$A_{s_+} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s_+})^2\beta_{s_+}^2}} * \\ * \left\{ e^{iz\delta_{s_+}} \left(c_1 \cosh \left(\frac{z\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s_+})^2\beta_{s_+}^2}}{4\beta_{s_+}} \right) \sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s_+})^2\beta_{s_+}^2} - \right. \right. \\ \left. \left. i \sinh \left(\frac{z\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s_+})^2\beta_{s_+}^2}}{4\beta_{s_+}} \right) (\mu c_2 \Delta\epsilon_G \omega^2 + 4c_1 \beta_{s_+} (\beta_{s_+} - \beta_G)) \right) \right\} \quad (3.18)$$

$$R(z) = \frac{c_1 \cosh \left(\frac{z \sqrt{\mu^2 \omega^4 \Delta \epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2 \beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) \sqrt{\mu^2 \omega^4 \Delta \epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2 \beta_{s+}^2} - i \sinh \left(\frac{z \sqrt{\mu^2 \omega^4 \Delta \epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2 \beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) (\mu c_2 \Delta \epsilon_G \omega^2 + 4c_1 \beta_{s+} (\beta_{s+} - \beta_G))}{\sqrt{\mu^2 \omega^4 \Delta \epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2 \beta_{s+}^2}} \quad (3.16)$$

$$S(z) = \frac{c_2 \sqrt{\mu^2 \omega^4 \Delta \epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2 \beta_{s+}^2} \cosh \left(\frac{z \sqrt{\mu^2 \omega^4 \Delta \epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2 \beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) + i \sinh \left(\frac{z \sqrt{\mu^2 \omega^4 \Delta \epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2 \beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) (\mu c_1 \Delta \epsilon_G \omega^2 + 4c_2 \beta_{s+} (\beta_{s+} - \beta_G))}{\sqrt{\mu^2 \omega^4 \Delta \epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2 \beta_{s+}^2}} \quad (3.17)$$

Tabelle 3.1: Die allgemeine analytische Lösung zum System (3.14)-(3.15)

und

$$A_{s-}(z) = \frac{1}{\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}} * \\ * \left\{ e^{iz\delta_{s-}} \left(c_2 \sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2} \cosh \left(\frac{z \sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + i \sinh \left(\frac{z \sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) (\mu c_1 \Delta\epsilon_G \omega^2 + 4c_2 \beta_{s+} (\beta_{s+} - \beta_G)) \right) \right\} \quad (3.19)$$

Das Symbol $*$ bedeutet hier Multiplikation.

Die Konstanten c_1, c_2 folgen aus den Randbedingungen.

Falls das Bragg Gitter eine Länge L besitzt, falls es also in $z = 0$ beginnt und in $z = L$ endet, sind die üblichen Randbedingungen:

$$A_{s+}(0) =: A_{s+,0} \quad (3.20)$$

und

$$A_{s-}(L) = 0 \quad (3.21)$$

da am Ende des Bragg Gitters keine zurücklaufende Welle erzeugt wird, wie man aus dem üblichen Versuchsaufbau sehen kann.

Mit diesen Bedingungen ergibt sich

$$c_1 = A_{s+,0} := A_{s+}(0) \quad (3.22)$$

und c_2 gegeben durch (3.23) in Tabelle (3.2).

Mit diesen Ausdrücken sind somit die Lösungen vollständig bekannt.

Für die Anwendungen interessiert jedoch meistens nur der Reflexionskoeffizient $\rho_s(z) = \frac{A_{s-}(z)}{A_{s+}(z)}$ der sich folgendermaßen ergibt:

$$\rho_s(z) = \frac{e^{iz(\delta_{s-} - \delta_{s+})} \mu \omega^2 \Delta\epsilon_G}{i \sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2} \coth \left(\frac{(L-z) \sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) + 4(\beta_G - \beta_{s+})\beta_{s+}} \quad (3.24)$$

mit $\delta_{s+} = \beta_{s+} - \beta_G$ und $\delta_{s-} = -\beta_{s+} + \beta_G$.

$$c_2 = - \frac{i\mu\omega^2 c_1 \sinh \left(\frac{L\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) \Delta\epsilon_G}{4i \sinh \left(\frac{L\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) \beta_{s+}^2 - 4i \sinh \left(\frac{L\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) \beta_{G, \beta_{s+}} + \cosh \left(\frac{L\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}} \right) \sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}} \quad (3.23)$$

Tabelle 3.2: Die Konstante c_2 für die Randwerte (3.21) und (3.20)

Insbesondere gilt am Anfang des Bragg Gitters, also für $z = 0$, dass

$$\begin{aligned} \rho_{\text{FBG},s} &:= \rho_s(z=0) = \frac{A_{s-}(0)}{A_{s+}(0)} = \\ &= \frac{\mu\omega^2\Delta\epsilon_G}{i\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2} \coth\left(\frac{L\sqrt{\mu^2\omega^4\Delta\epsilon_G^2 - 16(\beta_G - \beta_{s+})^2\beta_{s+}^2}}{4\beta_{s+}}\right) + 4(\beta_G - \beta_{s+})\beta_{s+}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Somit ist alles gesagt.

Wir fassen alles zusammen in folgender

Behauptung 3.2.1 *Für ein (Faser) Bragg Gitter der Länge L (für $z \in [0, L]$) des Typs (3.2) (uniform Grating), mit einer Dielektrizitätskonstante gegeben durch (3.1), im Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ des belasteten Materials (des Kerns der Faser) (3.3) mit der z Achse gleich der Symmetrieachse der Faser gilt für Wellen des Typs (1.44) die sich in z Richtung ausbreiten, dass:*

- *Es gelten die gekoppelten Moden Gleichungen (3.5) und (3.6) und identische Gleichungen für die p Moden¹¹. Es gibt somit keine Kopplung zwischen s und p Moden im Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ der belasteten Faser bzw. des belasteten Materials.*
- *Die Lösung der gekoppelten Moden Gleichungen ist (3.18) und (3.19) und es gelten identische Ausdrücke für die p Moden¹².*
- *Mit den Randbedingungen (3.20) und (3.21) ergibt sich für die Konstanten c_1, c_2 der Ausdruck (3.22) und (3.23)*
- *Mit diesen Randbedingungen folgt für den Reflexionskoeffizienten $\rho_s(z) = \frac{A_{s-}(z)}{A_{s+}(z)}$, dass (3.24) gilt.*
- *Am Anfang des Bragg Gitters ist der Reflexionskoeffizient gegeben durch ρ_{FBG} aus (3.25) für die besprochenen Randbedingungen.*
- *für die p Moden gelten genau dieselben Ausdrücke¹³, falls man das Symbol s durch p ersetzt. Dies gilt natürlich auch für (3.25)*

Bezüglich der Bedeutung vom benutzten Koordinatensystem $Oxyz$ der belasteten Faser und von (3.3) siehe auch (C.23) und Abschnitt C.2 und C.3 und Anhang C.

¹¹mit dem Symbol p statt s

¹²mit dem Symbol p statt s natürlich

¹³da wir dieselben Gleichungen vorfinden wie wir besprochen haben

Für die Ausdrücke β_{s_+} und β_{s_-} gilt hier immer noch (1.38) und (1.39) und (1.40) falls man für ϵ_x und ϵ_y die entsprechenden Einträge der Diagonalmatrix für $\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(u)}$ (in $Oxyz$) betrachtet (annimmt).

Diese sind gegeben durch (C.30) bzw. (C.32) und die Wahl erfolgt wie in Abschnitt C.3 beschrieben.

Es gilt also (C.40) und (C.41) und diese Werte sind zu benutzen, mit klarer Bedeutung.

Man berücksichtige nun (A.108) für die Wellenlängen der Moden *im Medium*. Für die Bedeutung der Symbole sei auf Anhang A.7 verwiesen.

Gemäß [18] beobachten wir, dass, für¹⁴

$$\lambda_{s_+} = \frac{2\pi}{\beta_G} \quad (3.26)$$

also für¹⁵

$$\omega = \omega_{\text{Max},s} := \frac{\beta_G}{\sqrt{\mu\epsilon_x}} \quad (3.27)$$

ergibt sich, dass der Betrag des Reflexionskoeffizienten $\rho_{\text{FBG},s}$ aus (3.25) maximal wird: wir haben daher für $\omega = \omega_{\text{Max}}$ die maximale Amplitude des reflektierten s Modus (also für s_-). Siehe [18].

Man bedenke, dass hier die Wellenlänge λ_{s_+} (bzw. λ_{p_+} sich auf die elektromagnetische Welle *im Medium* bezieht.

Siehe Anhang A.7 für wichtige Bemerkungen.

Entsprechend, mit analoger Herleitung, gilt auch

$$\omega_{\text{Max},p} := \frac{\beta_G}{\sqrt{\mu\epsilon_y}} \quad (3.28)$$

Für diese Pulsation $\omega = \omega_{\text{Max},p}$ wird der Betrag des Reflexionskoeffizient für die p Moden, $\rho_{\text{FBG},p}$ maximal, mit klarer Bedeutung.

¹⁴mit β_G aus (3.2)

¹⁵siehe (A.108) und Anhang A.7, mit Auflösung nach der Pulsation.

4 Faser Bragg Gitter als Messsysteme

4.1 Einleitung

Ein Faser Bragg Gitter kann als Messsystem dienen für Kräfte die auf ein Material einwirken. Dazu bettet man ein Faser Bragg Gitter im Material ein: falls auf das Material Kräfte wirken wird die Dielektrizitätskonstante des Materials des Kerns des Faser Bragg Gitter auf Grund des Photoelastischen Effektes (leicht) verändert.

Diese Veränderung verursacht eine Veränderung im Reflexionsverhalten der Faser selbst.

Mit Hilfe von Messungen des reflektierten Lichtes (unter geeigneten Bedingungen) versucht man die Dielektrizitätskonstante im Kern der Faser zu bestimmen, und dadurch die Kräfte die auf das Material einwirken in dem die Faser eingebettet ist.

Das Bragg Gitter selbst hat nur eine begrenzte Länge, und das Licht wird über eine Zuleitungsfaser bis zum Gitter geleitet.

Wir dürfen annehmen, dass die Kräfte auf den Bragg Gitter Abschnitt (in der Faser) einwirken und nicht auf den Abschnitt der Zuleitung.

Die einwirkenden Kräfte dürfen als Konstant angenommen werden, sowohl zeitlich¹ als auch räumlich über den Bragg Gitter Abschnitt (der Faser).

Für eine genaue Beschreibung siehe [16] und den Anhang C.2 und Anhang C.

Als wichtige Literaturquelle sei [17] angegeben und [15].

4.2 Aufbau der Faser

Im Folgendem betrachten wir eine Glasfaser, die wie in Abbildung 4.1 aufgebaut ist.

Wie immer werden wir die Faser² durch ein transversal unendlich ausgedehntes Medium modellieren und wir betrachten (nur) die Ausbreitung der Grundmoden.

¹da sie im Vergleich zum elektromagnetischen Phänomen viel langsamer variieren und also de facto konstant sind.

²bzw. den Kern der Faser. . .

Die Abbildung 4.1 verdeutlicht den Aufbau des Faserkerns³

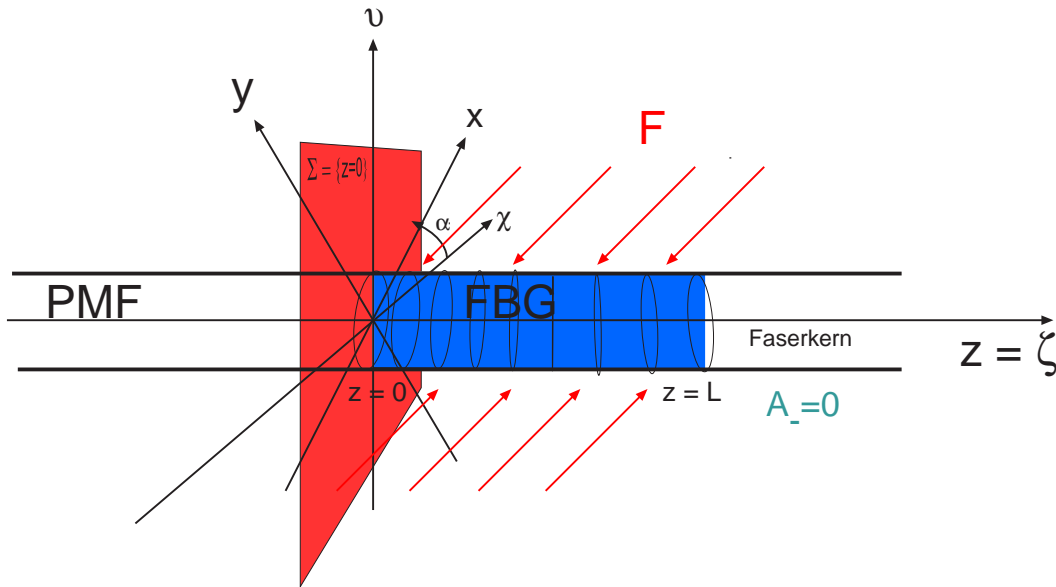


Abbildung 4.1: FBG ist ein Faser Bragg Gitter. $O\chi v\zeta$ ist das Hauptkoordinatensystem für die PMF Zuleitung und für das unbelastete FBG. $Oxyz$ ist das Hauptkoordinatensystem für das mit Kraft belastete FBG.

Die geometrische Symmetrie Achse der Faser ist die $\zeta = z$ Achse.

Für $\zeta \in]-\infty, 0[$ sei der Kern der Glasfaser durch ein anisotropes, homogenes, lineares, nicht dispersives und nicht leitendes Medium gegeben, das durch die Dielektrizitätskonstante

$$\underline{\epsilon}_{\text{PMF}} = \underline{\epsilon}_{m,\text{PMF}} \quad \text{für } z = \zeta < 0 \quad (4.1)$$

beschrieben ist.

Das Hauptkoordinatensystem für dieses Medium sei $O\chi v\zeta$ mit ζ gleich der geometrischen Achse der Faser. Siehe Abbildung 4.1.

Von $\zeta = 0$ und bis $\zeta = L$ (also für $z \in [0, L]$) ist ein Bragg Gitter (Grating) erzeugt worden, und in diesem Abschnitt ist die Dielektrizitätskonstante gegeben durch (3.1) also:

$$\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(p)}(z) = \underbrace{\underline{\epsilon}_{m,\text{FBG}} + \Delta\underline{\epsilon}_{m,\text{FBG}}}_{=\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(u)}} + \Delta\underline{\epsilon}_G(z) \quad \text{für } z = \zeta \in [0, L] \quad (4.2)$$

³und entsprechend die Eigenschaften des transversal unendlich ausgedehnten Mediums mit den wir den Kern modellieren, wie üblich in diesem Text.

Für $z = \zeta > L$ geht die PMF Faser weiter.

Man beachte aber, dass dies keine Bedeutung hat solange die Randbedingungen (3.21) gelten sowohl für den s_- als für den p_- Modus.

$\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_G(z)$ ist durch (3.2) gegeben.

$\Delta \underline{\underline{\epsilon}}_{m,\text{FBG}}$ folgt aus (C.23) mit (C.19) und modelliert die Kraftbelastung wegen des photoelastischen Effektes.

Siehe [16].

Wir werden im Folgendem und im weiteren Textverlauf annehmen, dass $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} \neq 0$ ist in $O\chi v\zeta$. Wir werden diese Annahme nicht mehr wiederholen.

Der Fall $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} = 0$ kann trotzdem studiert werden mit Grenzwertbildung $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} \rightarrow 0^+$ bzw. mit bekannten Ergebnissen aus der Literatur, da in diesem Fall keine Drehung der Hauptkoordinatensysteme stattfindet zwischen PMF und FBG.

(u) steht hier und im Folgendem für (mit Kräften) belastet aber unperturbiert, also ohne die Gitter Perturbation⁴.

Im Allgemeinen dürfen wir annehmen, dass

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{m,\text{FBG}} = \underline{\underline{\epsilon}}_{m,\text{PMF}} + \Delta \epsilon_{\text{OFF}} \underline{\underline{\text{Id}}} \quad (4.3)$$

mit $\Delta \epsilon_{\text{OFF}} \in \mathbb{R}$ eine Konstante die ein Offset repräsentiert, das bei der Herstellung des Gitters entsteht.

Siehe [18].

Das Hauptkoordinatensystem für (4.3) ist also immer noch $O\chi v\zeta$, wie man sofort sieht, wenn man bedenkt, dass die Summe von diagonalen Matrizen diagonal ist, und dass die Identitätsabbildung in jedem Koordinatensystem diagonal ist.

Dies ist eine wichtige Tatsache, weil wir so die Transitivitätseigenschaften ausnutzen können: die Transformation T vom Hauptkoordinatensystem der PMF auf das Hauptkoordinatensystem des (mit Kräften) belastetes FBG wird dieselbe sein wie die Transformation T vom System des unbelasteten FBG auf das System des belasteten FBG, mit klarer Bedeutung.

Sei $Oxyz$ das Hauptkoordinatensystem für $\underline{\underline{\epsilon}}_{\text{FBG}}^{(u)}$ aus (4.2).

Es gilt $z = \zeta$ (siehe auch Anhang C), und wir beobachten also nur eine Rotation um die gemeinsame ζ Achse.

Siehe Abschnitt C.3.

⁴in Bezug auf das Material des FBG

Wir definieren $\Sigma := \{z = 0\}$ und bemerken natürlich, dass die Achsen χ, ν, x, y in Σ liegen.

Wir modellieren, wie immer, die ganze Faser allein mit der Dielektrizitätskonstante des Kerns und erhalten ein transversal unendlich ausgedehntes Medium: die Wellenausbreitungen in diesem Medium entsprechen mit guter Approximation die Wellenausbreitungen der Grundmoden im Kern der Faser.

Wir dürfen außerdem annehmen, dass die Reflexion an Σ vernachlässigbar klein ist.

Wir kennzeichnen die elektromagnetischen Größen mit *PMF* oder *FBG* je nachdem in welchem Abschnitt der Faser wir sie betrachten, mit klarer Bedeutung.

Die Bedeutung der Symbole ist die übliche in diesem Text.

Wir nehmen an, dass sich in der Zuleitungsfaser PMF eine Welle der Form (1.44) ausbreitet (im System $O\chi\nu\zeta$, es sind also entsprechende Symbole einzusetzen), wobei aber die rücklaufende Welle eine Funktion der hinlaufenden sein wird, wegen den entsprechenden Randbedingungen.

An der Grenzfläche Σ selbst findet aber keine nennenswerte Reflexion statt⁵, und somit gilt (1.66) wobei das Symbol (1) die PMF Faser bezeichnet, und das Symbol (2) das (unperturbierte aber belastete) Faser Bragg Gitter.

Die Amplituden der Moden für (1) (PMF) und (2) (belastetes FBG) beziehen sich auf das jeweilige Hauptkoordinatensystem des Mediums, also auf $O\chi\nu\zeta$ für die PMF und $Oxyz$ für das belastete Faser Bragg Gitter.

Die Matrix T ist die Transformationsmatrix (Drehmatrix) von Hauptkoordinatensystem $O\chi\nu\zeta$ der PMF auf das Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ des belasteten FBG.

Da das Hauptkoordinatensystem $O\chi\nu\zeta$ der PMF *dasselbe* Hauptkoordinatensystem ist wie für $\underline{\epsilon}_{m,FBG}$ in (4.2), so gilt für die Transformationsmatrix T der Ausdruck (C.17), mit der Bedeutung der Symbole wie in Abschnitt C.3 beschrieben.

Siehe Anhang C.

Diese Matrix T die eine Drehung repräsentiert (von $O\chi\nu\zeta$ auf $Oxyz$ um die gemeinsame $\zeta = z$ Achse) ist eindeutig, und somit identisch mit (1.62) mit (1.61), wie man sofort sieht wenn man die obigen Bemerkungen beachtet.

Aus Abschnitt 1.5 wissen wir dann, dass sich auch in der FBG, für $z \rightarrow 0^+$ (bzw für $z \in [0, dz[$ mit dz "klein") eine Welle der Form (1.44) ausbreitet, mit Bezug auf das Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ des (mit Kraft) belasteten FBG.

⁵die Reflexion wird allein durch das Gitter verursacht

Die fortlaufenden und rücklaufenden Moden für das FBG sind aber (in $Oxyz$) gekoppelt⁶, wie aus Kapitel 3 folgt und es gilt (3.25) für die s und p Moden⁷ in $Oxyz$ (weil entsprechende Randbedingungen am Ende des Gitters zutreffen natürlich).

Somit ist das ganze System beschrieben.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Behauptung 4.2.1 *Für eine Faser die wie in Abbildung 4.1 aufgebaut ist, breitet sich im der PMF Faser (also für $\zeta = z < 0$) eine Welle der Form (1.44) aus mit Bezug auf das Hauptkoordinatensystem $O\chi\nu\zeta$ des Mediums (4.1) der PMF Faser. Es gilt also (mit $\zeta = z$):*

$$\begin{aligned} \vec{E}_{PMF} = & A_{s_+}^{(PMF)} \hat{\chi}_0 e^{-j(\omega\sqrt{\mu\epsilon_\chi^{(PMF)}})\zeta} + A_{s_-}^{(PMF)} \hat{\chi}_0 e^{+j(\omega\sqrt{\mu\epsilon_\chi^{(PMF)}})\zeta} + \\ & + A_{p_+}^{(PMF)} \hat{\nu}_0 e^{-j(\omega\sqrt{\mu\epsilon_\nu^{(PMF)}})\zeta} + A_{p_-}^{(PMF)} \hat{\nu}_0 e^{+j(\omega\sqrt{\mu\epsilon_\nu^{(PMF)}})\zeta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

mit klarer Bedeutung.

$O\chi\nu\zeta$ ist auch das Hauptkoordinatensystem des Materials $\underline{\epsilon}_{m,FBG}$ des unbelasteten FBG, siehe Anhang C und Gleichung (4.2).

$Oxyz$ ist dagegen das Hauptkoordinatensystem des belasteten FBG (mit $z = \zeta$), also für $\underline{\epsilon}_{FBG}^{(u)}$ aus (4.2).

$Oxyz$ ist (siehe auch Anhang C.3) eine Drehung um $z = \zeta$ von $O\chi\nu\zeta$. Der Drehwinkel sei α .

Für die Transformationsmatrix T gilt (C.17) mit $\hat{\nu}_1, \hat{\nu}_2, \hat{\nu}_3$ gegeben durch (C.26), (C.37), (C.38) (siehe auch (C.29) und (C.31)).

Diese Matrix T hat die Form (1.62) mit (1.61), wodurch der Winkel α berechnet werden kann.

Wie man leicht sieht, gilt an $\Sigma = \{z = 0\}$ entsprechend (1.66)

$$\begin{pmatrix} A_{s_r}^{(FBG)} \\ A_{p_r}^{(FBG)} \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A_{s_r}^{(PMF)} \\ A_{p_r}^{(PMF)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = +, - \quad (4.5)$$

auf Σ also für $z \rightarrow 0$, mit klarer Bedeutung.

Die Matrix T ist dieselbe wie oben, da eben $O\chi\nu\zeta$ auch das Hauptkoordinatensystem der PMF ist, also das Hauptkoordinatensystem für (4.1).

⁶wir haben aber keine Kopplung zwischen s und p Moden, wie wir gesehen haben.

⁷siehe auch Fußnote 8

Für $z \rightarrow 0^+$ (also hinter Σ) breitet sich in dem FBG immer noch eine Welle der Form (1.44) aus.

Allerdings gibt es wegen dem Gitter eine Kopplung der hinlaufenden und rücklaufenden Moden (aber nicht zwischen s und p Moden⁸) im System $Oxyz$ der belasteten Faser, wie in Kapitel 3 hergeleitet wurde⁹.

Diese Kopplung geht bis zur Totalreflexion (oder fast), in einem bestimmten Frequenzspektrum.

Aus (3.25) folgt¹⁰, dass:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{s-}^{(FBG)}(0) \\ A_{p-}^{(FBG)}(0) \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \vec{A}_{-}^{(FBG)}(0)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_{FBG,s} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{FBG,p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: P} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{s+}^{(FBG)}(0) \\ A_{p+}^{(FBG)}(0) \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \vec{A}_{+}^{(FBG)}(0)} \quad (4.6)$$

Man bedenke, dass in der Berechnung von $\rho_{FBG,s}$ und $\rho_{FBG,p}$ die Größen β_{s+} und β_{p+} gegeben sind durch (1.38), (1.39) (und (1.40)) mit ϵ_x , ϵ_y aus (C.40), (C.41), unter Berücksichtigung von (C.30) und (C.32) und (C.25) mit (C.24). Siehe Anhang C.

Es ergibt sich so aus (4.5) und (4.6):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{s-}^{(PMF)} \\ A_{p-}^{(PMF)} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \vec{A}_{-}^{(PMF)}} = \underbrace{T^{-1}PT}_{=: S} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{s+}^{(PMF)} \\ A_{p+}^{(PMF)} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \vec{A}_{+}^{(PMF)}} \quad (4.7)$$

Mit (4.4) folgt dann das elektrische Feld in der PMF.

T und P sind wie beschrieben berechnet. Da T orthogonal ist gilt

$$T^{-1} = T^T \quad (4.8)$$

Für die explizite Berechnung des Koordinatensystems $Oxyz$ gilt (??), (C.38), (C.36) mit (C.29), (C.31) mit derselben Bedeutung der Symbole wie hier.

In $Oxyz$ ist $\underline{\epsilon}_{FBG}^{(u)}$ eben diagonal wie in (C.16) mit (C.40), (C.41), (C.27) mit (C.30) und (C.32).

Die Bedeutung der Symbole in diesen Gleichungen ist dieselbe wie hier. Man siehe auch (C.25) und relative Bemerkungen.

⁸sei hier erwähnt das per Definition ein s Modus ein entlang \hat{x} polarisierter Modus ist, und ein p Modus ein entlang \hat{y} polarisierter Modus ist; deswegen bezieht sich die Bezeichnung s oder p Modus immer auf ein spezifiziertes Koordinatensystem $Oxyz$.

⁹wir haben auch den gesamten Verlauf von $A_{s+}(z)$ bzw. $A_{p+}(z)$ und $A_{s-}(z)$ bzw. $A_{p-}(z)$ hergeleitet für $z \in [0, L]$.

¹⁰derselbe Ausdruck gilt für die p Moden in $Oxyz$

Diese Abhandlung gilt falls $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} \neq 0$ (in $O\chi v\zeta$).

Falls dies nicht so ist, dann gibt es keine Drehung der Hauptkoordinatensysteme und $O\chi v\zeta$ ist identisch mit $Oxyz$.

Somit ist T die Identitätsmatrix und entsprechende Abhandlung folgt auf triviale Weise, mit leichten Bemerkungen.

Somit ist alles gesagt und der Aufbau des Messsystems ist vollständig beschrieben.

4.3 Berechnung von T und P

In diesem Abschnitt wollen wir die Elemente der Matrizen T und P explizit berechnen, in Hinblick auf die wichtige Gleichung (4.7), die das Ganze System des¹¹ belasteten Faser Bragg Gitter (mit Berücksichtigung der PMF Zuleitungsfaser¹²) beschreibt.

Als erster Schritt werden wir die Fallunterscheidungen in (C.37), (C.38), (C.40) und (C.41) verschwinden lassen, durch eine passende Umformulierung der Gleichungen mit Hilfe der Signum Funktion, wie wir sehen werden.

4.3.1 Eliminierung der Fallunterscheidung für das Vorzeichen von $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}$.

T und P wurden in Behauptung 4.2.1 klar beschrieben und definiert: wir werden nun die Elemente explizit ausschreiben unter Berücksichtigung eben der entsprechenden Aussagen in Behauptung 4.2.1 und in Abschnitt 4.2.

Für P siehe¹³ speziell auch (4.6).

Man berücksichtige auch immer Anhang C.3, (C.17) und den gesamten Anhang C.

Aus (C.37) und (C.38) mit (C.29) und (C.31) folgt, dass wenn wir setzen

$$\vec{v}_{1,\text{unnormiert}} := \begin{pmatrix} \frac{-\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} - \text{sgn}(\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}) \sqrt{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)2} - 2\epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)}\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + 4\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)2} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)2}}}{2\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in } O\chi v\zeta \quad (4.9)$$

¹¹mit Kräften

¹²auf der keine Kraft einwirken soll. . .

¹³hier soll P der griechische Großbuchstabe für ρ sein, und nicht der lateinische Großbuchstabe für p .

mit der üblichen Bedeutung der Symbole¹⁴, dann ist

$$\hat{v}_1 = \frac{\vec{v}_{1,\text{unnormiert}}}{\|\vec{v}_{1,\text{unnormiert}}\|} \quad (4.10)$$

Wir stellen fest, dass $\vec{v}_{1,\text{unnormiert}}$ ein reeller Vektor ist, siehe Anhang C.3.

Analog gilt¹⁵, dass wenn wir setzen

$$\vec{v}_{2,\text{unnormiert}} := \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} + \text{sgn}(\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}) \sqrt{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)2} - 2\epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)}\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + 4\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)2} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)2}}}{2\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in } O_{\chi v \zeta} \quad (4.11)$$

gilt:

$$\hat{v}_2 = \frac{\vec{v}_{2,\text{unnormiert}}}{\|\vec{v}_{2,\text{unnormiert}}\|} \quad (4.12)$$

Auch $\vec{v}_{2,\text{unnormiert}}$ ist ein reeller Vektor, siehe Anhang C.3.

\hat{v}_3 folgt selbstverständlich aus (C.26).

Mit diesen Positionen folgt T aus (C.17) ohne Fallunterscheidungen¹⁶.

Die Funktion sgn ist natürlich die Signum Funktion¹⁷.

$v_{i,j}$ ist die j Komponente des Vektors \hat{v}_i (wie oben angegeben), mit $i = 1, 2, 3$ und $j = \chi, v, \zeta$, mit klarer Bedeutung.

Somit ist T vollständig angegeben.

Aus (C.30), (C.32), (C.40) und (C.41) (mit (C.25)) folgt entsprechend für die Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon_x = \lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} + \text{sgn}(\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}) \sqrt{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)2} - 2\epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)}\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + 4\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)2} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)2}} \right) \quad (4.13)$$

¹⁴So ist $O_{\chi v \zeta}$ das Hauptkoordinatensystem der *PMF* Faser, und $\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(u)}$ ist die Dielektrizitätskonstante des (mit Kraft) *belasteten* FBG (ohne die Gitter Perturbation zu berücksichtigen (daher das Symbol (u) für *unperturbiert* d.h. ohne Gitter Perturbation aber *mit* Kraftbelastung !), wie üblich in diesem Text). Da wir die Dielektrizitätskonstante diagonalisieren wollen (um das Hauptkoordinatensystem O_{xyz} zu finden des belasteten Materials des FBG), suchen wir eine orthonormale Basis von Eigenvektoren um die Transformationsmatrix T zu finden, gemäß Anhang C und Abschnitt 4.2, wie wir schon wissen (siehe immer (C.17))...

¹⁵der einzige Unterschied ist das Zeichen (hier + Zeichen) vor der Signum Funktion.

¹⁶natürlich für $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} \neq 0$ wie man sofort sieht. Ansonsten ist der behandelte Fall ziemlich trivial, da keine Drehung der Hauptkoordinatensysteme stattfindet...

¹⁷ $\text{sgn}(x) = +1$ für $x > 0$ und $\text{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$

und

$$\epsilon_y = \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} - \text{sgn}(\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}) \sqrt{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)2} - 2\epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)}\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + 4\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)2} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)2}} \right) \quad (4.14)$$

mit der üblichen Bedeutung der Symbole¹⁸.

Wir können nun eine wichtige zusammenfassende Behauptung formulieren, um diese wichtigen Ergebnisse auf kompakte Weise überschaubar zu machen.

Behauptung 4.3.1 *Unter denselben Voraussetzungen wie in Behauptung 4.2.1 gilt (4.7) mit T aus (C.17) mit \hat{v}_i , $i = 1, 2, 3$ aus (4.10), (4.12), (C.26) mit (4.9) und (4.11) (in $O\chi\nu\zeta$, das Hauptkoordinatensystem der PMF Zuleitungs-Faser bzw. des unbelasteten FBG), ohne Fallunterscheidungen¹⁹.*

Man beachte (4.2) und Anhang C.

T ist eine Drehmatrix und es gelten $T^{-1} = T^T$ mit (1.61), für ein Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ der somit berechnet werden kann.

Daraus resultiert (wie man auch direkt nachrechnen kann), dass

$$T_{11} = T_{22} \quad T_{12} = -T_{21} \quad T_{11}^2 + T_{12}^2 = 1 \quad (4.15)$$

Die Matrix²⁰ P folgt aus (4.6) und (3.25) (und analoge Gleichung für die p Moden nach Ersetzen des Symbols s durch p) mit

$$\beta_{s_+} = \omega\sqrt{\mu\epsilon_x} \quad \beta_{p_+} = \omega\sqrt{\mu\epsilon_y} \quad (4.16)$$

mit ϵ_x, ϵ_y aus (4.13) und (4.14).

Im Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ für das Material des belasteten FBG (siehe (C.17)) ist die Dielektrizitätskonstante selbstverständlich diagonal gemäß (1.17) mit (4.13), (4.14) und (C.27).

Man siehe auch Anhang C (mit (C.25)) für wichtige Zwischenergebnisse.

Der Beweis folgt aus der vorausgegangenen Abhandlung.

4.3.2 Vereinfachung der Notation und Berechnung der Elemente von T

Da die bisher verwendete Notation etwas aufwendig ist und "schwer" wirkt, werden wir sie im Folgendem vereinfachen.

¹⁸so bezieht sich natürlich x und y auf das Hauptkoordinatensystem des belasteten Materials $Oxyz$.

Man siehe auch Anhang C.3 und (C.25).

¹⁹für $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} \neq 0$ wir wir immer annehmen.

²⁰ P ist der Großbuchstabe für ρ

Da wir uns nur auf Größen für das Faser Bragg Gitter beziehen (es sei denn es wird ausdrücklich anders behauptet), lassen wir die Symbole FBG weg.

Wir lassen auch das (u) weg für unperturbiert (aber mit Kraft belastet), da es klar ist, dass wir uns nicht (mehr) auf die Gitter-Perturbation beziehen, sondern auf das (belastete) Grundmaterial.

Wir schreiben auch χ, ν, ζ an Stelle von 1, 2, 3 in Hinblick auf (C.25). Somit ist

$$\epsilon_{\chi\nu} = \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} \quad \epsilon_{\chi\chi} = \epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} \quad \epsilon_{\nu\nu} = \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} \quad \epsilon_{\zeta\zeta} = \epsilon_{\text{FBG},33}^{(u)} \quad (4.17)$$

natürlich in Bezug auf $O\chi\nu\zeta$.

Mit der so vereinfachten Notation berechnen wir explizit die Elemente von T .

In diesem Text treffen wir die Annahme, dass $\epsilon_{\chi\nu} \neq 0$: wir werden diese Annahme im Folgendem nicht mehr wiederholen.

Der Fall $\epsilon_{\chi\nu} = 0$ bereitet keine Probleme, da das Hauptkoordinatensystem der PMF Faser und das des FBG übereinstimmen, siehe Abbildung 4.1, mit klarer Bedeutung. Dieser Fall ist in der Literatur weitgehend bekannt.

Wenn wir aber unsere Ergebnisse für $\epsilon_{\chi\nu} \rightarrow 0^+$ betrachten, so können auch diese genutzt werden um den Fall $\epsilon_{\chi\nu} = 0$ handzuhaben²¹.

Wir werden diese Bemerkungen nicht wiederholen.

Falls nicht anders spezifiziert, ist das benutzte Koordinatensystem $O\chi\nu\zeta$.

Falls aber x oder y (oder z) angegeben wird, wie z.B. in ϵ_x, ϵ_y so beziehen wir uns auf $Oxyz$, mit der üblichen Bedeutung²²...

Wenn wir nun die Berechnungen explizit durchführen, ergibt sich, mit klarer Bedeutung

$$\hat{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4\epsilon_{\chi\nu}^2 + (\epsilon_{\nu\nu} - \epsilon_{\chi\chi})^2 \text{sgn}(\epsilon_{\chi\nu}) - \epsilon_{\nu\nu} + \epsilon_{\chi\chi}}}{2\epsilon_{\chi\nu} \sqrt{\frac{(\sqrt{4\epsilon_{\chi\nu}^2 + (\epsilon_{\nu\nu} - \epsilon_{\chi\chi})^2 \text{sgn}(\epsilon_{\chi\nu}) - \epsilon_{\nu\nu} + \epsilon_{\chi\chi})^2}{4\epsilon_{\chi\nu}^2} + 1}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{(\sqrt{4\epsilon_{\chi\nu}^2 + (\epsilon_{\nu\nu} - \epsilon_{\chi\chi})^2 \text{sgn}(\epsilon_{\chi\nu}) - \epsilon_{\nu\nu} + \epsilon_{\chi\chi})^2}{4\epsilon_{\chi\nu}^2} + 1}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

²¹natürlich wegen Überlegungen die mit der Stetigkeit zu tun haben

²²und wenn das benutzte Koordinatensystem weiterhin explizit angegeben wird, so ist ja nichts zu sagen...

in $O_{\chi v \zeta}$.

Und

$$\hat{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) - \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi}}{2\epsilon_{\chi v} \sqrt{\frac{(\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2}{4\epsilon_{\chi v}^2} + 1}} \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{(\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2}{4\epsilon_{\chi v}^2} + 1}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

in $O_{\chi v \zeta}$.

Und

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\epsilon_{vv}^2 - 2\epsilon_{\chi\chi}\epsilon_{vv} + 4\epsilon_{\chi v}^2 + \epsilon_{\chi\chi}^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi} \right) \quad (4.20)$$

und

$$\epsilon_y = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\epsilon_{vv}^2 - 2\epsilon_{\chi\chi}\epsilon_{vv} + 4\epsilon_{\chi v}^2 + \epsilon_{\chi\chi}^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi} \right) \quad (4.21)$$

Mit (C.17) und (C.26) folgt²³

$$T_{11} = \frac{\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) - \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi}}{2\epsilon_{\chi v} \sqrt{\frac{(\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) - \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi})^2}{4\epsilon_{\chi v}^2} + 1}} \quad (4.22)$$

$$T_{12} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) - \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi})^2}{4\epsilon_{\chi v}^2} + 1}} \quad (4.23)$$

$$T_{21} = \frac{-\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) - \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi}}{2\epsilon_{\chi v} \sqrt{\frac{(\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2}{4\epsilon_{\chi v}^2} + 1}} \quad (4.24)$$

und

$$T_{22} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2}{4\epsilon_{\chi v}^2} + 1}} \quad (4.25)$$

Außerdem

$$T_{13} = 0 \quad T_{23} = 0 \quad T_{31} = 0 \quad T_{32} = 0 \quad (4.26)$$

²³man bedenke, dass in den folgenden Gleichungen $\sqrt{\dots} \operatorname{sgn}(\cdot) = \operatorname{sgn}(\cdot) \sqrt{\dots} = (\sqrt{\dots}) \operatorname{sgn}(\cdot)$ ist, mit klarer Bedeutung.

und

$$T_{33} = 1 \quad (4.27)$$

Man sieht, dass, wie erwartet:

$$T_{21} = -T_{12} \quad T_{22} = T_{11} \quad T_{11}^2 + T_{12}^2 = 1 \quad (4.28)$$

Mit (1.61) und der Tatsache, dass $T^{-1} = T^T$ folgt nämlich

$$\cos \alpha = T_{11} \quad \sin \alpha = T_{12} \quad (4.29)$$

wodurch der Drehwinkel α berechnet werden kann.

Alle Elemente T_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ sind reelle Zahlen.

Auch $\epsilon_x, \epsilon_y \in \mathbb{R}$.

Siehe Anhang C.3.

4.3.3 Berechnung von P

Die Matrix P (griechischer Großbuchstabe für ρ) besteht aus den Reflexionskoeffizienten $\rho_{\text{FBG},s}$ und $\rho_{\text{FBG},p}$ gemäß (4.6).

Der Verlauf dieser Reflexionskoeffizienten ist gegeben durch (3.25) und analoge Gleichung für den p Modus (nach Ersetzen des Symbols s durch p), wie wir wissen.

Wichtig ist zu berücksichtigen, dass (4.16) gilt, mit ϵ_x, ϵ_y aus (4.20) und (4.21).

Mit diesen Positionen haben die Reflexionskoeffizienten ihr Maximum (natürlich im Betrag) für $\omega = \omega_{\text{Max},s}$ (für den s Modus²⁴) bzw. für $\omega = \omega_{\text{Max},p}$ (für den p Modus²⁵).

Die Ausdrücke sind gegeben durch (3.27) bzw. (3.28).

Die Laborpraxis hat aber gezeigt, dass es sinnvoll (und praktisch) ist die Reflexionskoeffizienten (im Betrag) durch Gauss-Glocken (ähnliche) Funktionen zu approximieren.

Wir setzen also

$$g_s(\omega) := |\rho_s(\omega)| \simeq m_s e^{-\frac{(\omega - \omega_{\text{Max},s})^2}{2\sigma_s^2}} \quad (4.30)$$

und analog

$$g_p(\omega) := |\rho_p(\omega)| \simeq m_p e^{-\frac{(\omega - \omega_{\text{Max},p})^2}{2\sigma_p^2}} \quad (4.31)$$

wobei $m_i, \sigma_i \in \mathbb{R}$ für $i = s, p$.

²⁴mit Bezug auf $Oxyz$ im FBG

²⁵mit Bezug auf $Oxyz$

Diese Gleichungen sind natürlich eine Approximation der Realität.

Wir dürfen annehmen, dass

$$\sigma_s = \sigma_p = \sigma \quad (4.32)$$

mit σ annähernd *konstant* und unabhängig von der einwirkenden Kraft bzw. vom Dielektrizitätstensor.

Auch darf

$$m_p = m_s =: m \quad (4.33)$$

sein, wobei auch m *konstant* ist und unabhängig ist von der einwirkenden Kraft bzw. vom Dielektrizitätstensor.

Auch diese sind Approximationen.

Dagegen ist $\omega_{\text{Max},i}$ für $i = s, p$ *nicht* konstant, wie wir wissen²⁶.

4.4 Verwendung von unpolarisiertem Licht

Um unsere Messungen durchzuführen, hat sich der Einsatz von unpolarisiertem Licht als besonders günstig bzw. notwendig erwiesen.

In diesem Abschnitt werden wir deswegen wichtige Gleichungen herleiten, um das System zu modellieren bei Verwendung von unpolarisiertem Licht.

Siehe Anhang D und [20].

Wie wir wissen ist unser Messsystem beschrieben durch (4.7) und durch Behauptung 4.2.1.

Mit P aus (4.6) und mit (4.28) ergibt sich

$$\vec{A}_-^{(\text{PMF})} = \begin{pmatrix} A_{s-}^{(\text{PMF})} \\ A_{p-}^{(\text{PMF})} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (T_{11}T_{12}\rho_s - T_{11}T_{12}\rho_p) A_{p+}^{(\text{PMF})} + (\rho_s T_{11}^2 + T_{12}^2 \rho_p) A_{s+}^{(\text{PMF})} \\ (\rho_p T_{11}^2 + T_{12}^2 \rho_s) A_{p+}^{(\text{PMF})} + (T_{11}T_{12}\rho_s - T_{11}T_{12}\rho_p) A_{s+}^{(\text{PMF})} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Für die Intensität der Felder gilt bekanntlich²⁷

$$I_i = |E_i|^2 \quad i = \chi, \nu, \zeta \quad (4.35)$$

Mit (4.4) in Behauptung 4.2.1) folgt, wie man leicht sieht, dass

$$I_{i-}^{(\text{PMF})} = \left| A_{i-}^{(\text{PMF})} \right|^2 = A_{i-}^{(\text{PMF})} A_{i-}^{(\text{PMF})*} \quad i = s, p \quad (4.36)$$

²⁶es gelten (3.27) und (3.28).

²⁷natürlich darf hier i auch eine beliebige Richtung symbolisieren, also $\chi, \nu, \zeta, x, y, z$ bzw. s, p , mit klarer Bedeutung.

wobei s für χ und p für ν steht in $O\chi\nu\zeta$, mit der üblichen Bedeutung in diesem Text.

Wir berücksichtigen (4.28) und gehen von (4.34) aus um die Intensitäten zu berechnen. Anschließend werden wir den zeitlichen Mittelwert betrachten.

Bei der Bildung der komplexen Konjugation²⁸, ist es wichtig zu bemerken, dass T nur aus reellen Elementen besteht, wie wir gezeigt haben.

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
I_{s-}^{(\text{PMF})} = & \rho_p A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12}^4 - \rho_s A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12}^4 - \\
& - T_{11} \rho_p A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12}^3 + T_{11} \rho_s A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12}^3 + \\
& + T_{11} \rho_p A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12}^3 - T_{11} \rho_s A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12}^3 - \\
& - T_{11} \rho_p A_{p+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12}^3 + \\
& + T_{11} \rho_s A_{p+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12}^3 + T_{11}^2 \rho_p A_{p+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12}^2 - \\
& - T_{11}^2 \rho_s A_{p+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12}^2 - T_{11}^2 \rho_p A_{p+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12}^2 + \\
& + T_{11}^2 \rho_s A_{p+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12}^2 + \rho_s A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12}^2 + \\
& + T_{11}^2 \rho_p A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12}^2 - T_{11}^2 \rho_s A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12}^2 - \\
& - T_{11} \rho_s A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12} + T_{11} \rho_s A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p+}^{(\text{PMF})} T_{12} - \\
& - T_{11}^3 \rho_p A_{p+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12} + T_{11}^3 \rho_s A_{p+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12} + \\
& + T_{11}^2 \rho_s A_{s+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s+}^{(\text{PMF})} T_{12}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Dieser Ausdruck kann erheblich vereinfacht werden, wenn wir unpolarisiertes Licht verwenden und den zeitlichen Mittelwert betrachten.

In der Laborpraxis wird schließlich der Mittelwert der Intensitäten gemessen.

Für unpolarisiertes Licht gilt (D.14). Für die Bedeutung der Symbole siehe (D.6) und Anhang D bzw. [20] und [22].

Wir bilden nun den zeitlichen Mittelwert.

Mit (4.4), (1.1), (1.10), der Tatsache dass $\hat{\beta}_0 \hat{z}_0 = \hat{\zeta}_0$ (und den bekannten Ausdrücken für β), folgt sofort²⁹ dass

$$\left\langle A_{s+}^{(\text{PMF})} A_{p+}^{(\text{PMF})} \right\rangle = 0 \tag{4.38}$$

und (man bilde die komplexe Konjugation):

$$\left\langle A_{p+}^{(\text{PMF})} A_{s+}^{(\text{PMF})} \right\rangle = 0 \tag{4.39}$$

Die Klammern $\langle \rangle$ bedeuten eben den zeitlichen Mittelwert, siehe (D.6).

²⁸durch $*$ symbolisiert, wie immer

²⁹siehe auch (D.5) und (D.13)

Für unpolarisiertes Licht gilt außerdem (D.18). Mit (D.7) gilt

$$\langle I_{s_+} \rangle = \langle I_{p_+} \rangle = \langle I_0 \rangle =: I_{0,M} \quad (4.40)$$

wobei hier s sich auf χ bezieht und p auf v in $O\chi v\zeta$, das Hauptkoordinatensystem der PMF Faser³⁰.

Das heißt (unter Berücksichtigung von (4.4)):

$$\left\langle A_{s_+}^{(\text{PMF})*} A_{s_+}^{(\text{PMF})} \right\rangle = \left\langle A_{p_+}^{(\text{PMF})*} A_{p_+}^{(\text{PMF})} \right\rangle = \langle I_0 \rangle = I_{0,M} \quad (4.41)$$

Wenn wir beim bilden des zeitlichen Mittelwerts von (4.37) diese Tatsachen berücksichtigen (mit (4.28)) und der Tatsache das T eine reelle Matrix ist, erhalten wir nach Simplifikation die wichtige Gleichung

$$\langle I_{s_-}^{(\text{PMF})} \rangle = \left(T_{12}^2 |\rho_p|^2 + \underbrace{(1 - T_{12}^2)}_{=T_{11}^2} |\rho_s|^2 \right) \langle I_0 \rangle \quad (4.42)$$

Wir gehen ganz analog vor für $\langle I_{p_-}^{(\text{PMF})} \rangle$.

Aus (4.36) mit (4.34) folgt³¹:

$$\begin{aligned} I_{p_-}^{(\text{PMF})} = & -\rho_p A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^4 + \rho_s A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^4 - \\ & -T_{11} \rho_p A_{s_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^3 + T_{11} \rho_s A_{s_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^3 + \\ & +T_{11} \rho_p A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^3 - T_{11} \rho_s A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^3 - \\ & -T_{11} \rho_p A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^3 + T_{11} \rho_s A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^3 - \\ & -T_{11}^2 \rho_p A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^2 + T_{11}^2 \rho_s A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^2 + \\ & +\rho_p A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^2 + T_{11}^2 \rho_p A_{s_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^2 - \\ & -T_{11}^2 \rho_s A_{s_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^2 - T_{11}^2 \rho_p A_{s_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^2 + \\ & +T_{11}^2 \rho_s A_{s_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12}^2 - T_{11}^3 \rho_p A_{s_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} T_{12} + \\ & +T_{11}^3 \rho_s A_{s_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} T_{12} - T_{11} \rho_p A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12} + \\ & +T_{11} \rho_p A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_s^* A_{s_+}^{(\text{PMF})*} T_{12} + T_{11}^2 \rho_p A_{p_+}^{(\text{PMF})} \rho_p^* A_{p_+}^{(\text{PMF})*} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Wir bilden den Mittelwert und wenden die üblichen Simplifikationen an, gemäß (4.38) und (4.39) und (4.41) und (4.28).

Nach Durchführung der Berechnung erhalten wir

$$\langle I_{p_-}^{(\text{PMF})} \rangle = \left(\underbrace{(1 - T_{12}^2)}_{=T_{11}^2} |\rho_p|^2 + T_{12}^2 |\rho_s|^2 \right) \langle I_0 \rangle \quad (4.44)$$

³⁰und des unbelasteten Faser Bragg Gitters...

³¹man bedenke immer, dass $(ab)^* = a^*b^*$ und $(a+b)^* = a^* + b^*$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.

Wenn wir diese Gleichung mit (4.42) summieren, ergibt sich

$$\langle I_{s-}^{(\text{PMF})} \rangle + \langle I_{p-}^{(\text{PMF})} \rangle = (|\rho_p|^2 + |\rho_s|^2) \langle I_0 \rangle \quad (4.45)$$

was uns nicht verwundern soll, wegen (4.40).

4.5 Durchführung der Messung

Um nun das beschriebene System (siehe immer Abbildung 4.1) als Messsystem zu verwenden konzentrieren wir uns auf die Gleichungen (4.42) bzw. (4.44).

Dazu ist es notwendig das Reflexionsverhalten des Systems in Abhängigkeit der Pulsation ω zu messen.

Das heißt, dass die Frequenz des eingestrahnten (unpolarisierten quasi monochromatischen) Lichtes ³² variiert werden soll³³, mit gleich bleibender Intensität, und dass $\langle I_{s-}^{(\text{PMF})} \rangle$ bzw. $\langle I_{p-}^{(\text{PMF})} \rangle$ gemessen werden soll³⁴.

Anhand dieser gemessenen Reflexionspektren möchten wir gerne die Dielektrizitätskonstante des FBG rekonstruieren, um so Rückschlüsse auf die auf die Faser wirkende Kraft zu ziehen.

Wir verwenden dabei immer unpolarisiertes Licht.

In der Labor Praxis ist es einfacher breitbandiges Licht zu verwenden (also in die Faser einzustrahlen) und dann das reflektierte Licht in einem Spektrometer zu analysieren, statt einen quasi monochromatischen (unpolarisierten) Lichtstrahl zu verwenden mit einer langsam variierenden (mittleren) Frequenz.

Wegen der Linearität des Problems sind diese beiden Methoden äquivalent und liefern das gleiche Ergebnis.

Wir befassen uns mit diesen Themen ausführlich im nächsten Kapitel.

³²langsam

³³damit das Phänomen als quasi statisch angesehen werden darf. . .

³⁴natürlich mit Berücksichtigung der Frequenz- bzw. Pulsationsabhängigkeit.

5 Durchführung der Messung und Berechnung der Dielektrizitätskonstante bzw. des Strain Tensors

In diesem Kapitel wollen wir das System das wir in Kapitel 4 ausführlich beschrieben haben (bestehend aus eine PMF Zuleitungsfaser und aus einem Faser Bragg Gitter) nutzen um anhand des gemessenen Reflexionsverhalten (des Lichtes) Rückschlüsse auf die Dielektrizitätskonstante im Abschnitt des Faser Bragg Gitter zu ziehen: dadurch soll die Kraft bestimmt werden die auf das FBG einwirkt.

Siehe Abbildung 4.1.

Als Literaturquelle siehe [17] und [16].

5.1 Einleitende Bemerkungen

In diesem Text verstehen wir unter Gauss-Glocke (oder besser Gauss-Glocken ähnliche Funktion) eine Funktion des Typs

$$g(\omega) = m e^{-\frac{(\omega - \omega_{\text{Max}})^2}{2\sigma^2}} \quad (5.1)$$

mit $m, \sigma \in \mathbb{R}_+$ konstanten. Siehe Abschnitt 4.3.3.

ω_{Max} ist unabhängig von ω , wird aber von anderen Größen abhängen, also von der Dielektrizitätskonstante.

Das integral über \mathbb{R} von $g(\omega)$ ist hier nicht im Allgemeinen gleich 1, so dass wir keine echte Normalverteilung betrachten, daher auch die Bezeichnung Gauss-Glocken ähnliche Funktion.

Aus (4.42) mit (4.30) und (4.31) folgt

$$i_s(\omega) := \frac{\langle I_{s-}^{(\text{PMF})} \rangle}{\langle I_0 \rangle} = c g_p^2 + (1 - c) g_s^2 \quad (5.2)$$

mit $g_p = g_p(\omega)$ und $g_s = g_s(\omega)$ Gauss-Glocken ähnliche Funktionen.

Es ist natürlich¹

$$c = T_{12}^2 = T_{21}^2 = \sin^2 \alpha \quad (5.3)$$

gemäß (4.28) und (4.23) (und auch (4.24) und (4.29)).

c ist eine reelle nicht negative Konstante die von ω unabhängig ist.

Wir wissen auch, dass sich die beiden Gauss Glocken g_s und g_p nur durch ω_{Max} unterscheiden, siehe Abschnitt 4.3.3.

Wichtig ist für uns folgende

Behauptung 5.1.1 Die Größe $i_s(\omega)$, siehe (5.2), ist als Funktion von ω bekannt, da sie im Labor gemessen wird

Natürlich wird in erster Linie $\langle I_{s-}^{(\text{PMF})} \rangle$ (und auch $\langle I_{s-}^{(\text{PMF})} \rangle$) in Abhängigkeit von ω gemessen, aber die Eingestrahlte Intensität $\langle I_0 \rangle$ ist ja bekannt, also ist i_s bekannt.

Um die Messung zu realisieren kann man entweder langsam die Frequenz des eingestrahnten Lichtes variieren² und dabei die reflektierte mittlere Intensität der s (und p) Moden messen in Abhängigkeit von ω oder man kann breitbandiges unpolarisiertes Licht verwenden und das reflektierte Licht in einem Spektrometer analysieren lassen.

Wegen der Linearität des Problems sind beide Methoden äquivalent. Die zweite Methode ist vorteilhafter, aus nahe liegenden Gründen der Schnelligkeit und der Praktischen Durchführung.

Natürlich können wir auch i_p analog zu i_s definieren. Mit (4.44), (5.3), (4.30) und (4.31) ergibt sich

$$i_p(\omega) := \frac{\langle I_{p-}^{(\text{PMF})} \rangle}{\langle I_0 \rangle} = (1 - c)g_p^2(\omega) + c g_s^2(\omega) \quad (5.4)$$

Behauptung 5.1.2 Auch die Funktion $i_p(\omega)$ ist bekannt aus den Labormessungen

In der Laborpraxis wird oft statt ω die Wellenlänge $\lambda_V = \lambda_0$ des verwendeten Lichtes im Vakuum benutzt als unabhängige Variable.

Die Umrechnung erfolgt leicht wenn man die Ergebnisse von Abschnitt A.7 betrachtet³.

Der Vollständigkeit und der Übersichtlichkeit wegen schreiben wir nochmals, mit (4.30) und (4.31), dass

$$g_s(\omega) = m e^{-\frac{(\omega - \omega_{\text{Max},s})^2}{2\sigma^2}} \simeq |\rho_s(\omega)| \quad (5.5)$$

¹man soll im Folgenden c natürlich nicht mit der Lichtgeschwindigkeit verwechseln...

²als quasi monochromatischer unpolarisierter Lichtstrahl der sich in der Faser entlang der Achse $\zeta = z$ ausbreitet mit einer langsamen Variation der mittleren Pulsation, so dass wir ein quasi statisches Phänomen haben.

³man vergesse nicht die Umrechnung mit n_{eff} durchzuführen...

und

$$g_p(\omega) = m e^{-\frac{(\omega - \omega_{\text{Max},p})^2}{2\sigma^2}} \simeq |\rho_p(\omega)| \quad (5.6)$$

mit $m, \sigma \in \mathbb{R}_+$ nahezu konstant, um zu betonen, dass die beiden Gauss-Glocken g_s und g_p sich nur durch ω_{Max} unterscheiden.

Also sind m und σ in etwa gleich für die g_s und g_p , in erster Approximation.

Natürlich ist, wegen mit (5.3)

$$0 \leq c \leq 1 \quad (5.7)$$

Wir wollen nun anhand des gemessenen Verlaufs für $i_s(\omega)$ die Werte $c = T_{12}^2$, $\omega_{\text{Max},s}$ und $\omega_{\text{Max},p}$ bestimmen, ausgehend von (5.2) und (5.5) und (5.6).

Dies ist banal, falls sich die beiden Glocken g_s und g_p nicht überlappen: in diesem Falle existiert auch eine große Fehlertoleranz.

Wir sagen hier, dass sich zwei Gauss-Glocken ähnliche Funktionen des Typs (5.1) nicht überlappen, falls

$$|\omega_{\text{Max},1} - \omega_{\text{Max},2}| > k(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (5.8)$$

mit $k \in \mathbb{R}_+$ hinreichend groß, aber in unserem Falle nicht zu groß (ansonsten gilt die Umkehrung der folgenden Behauptung nicht mehr).

Für unsere Zwecke ist es geeignet anzunehmen, dass

$$k = 3 \quad (5.9)$$

Wir formulieren also die

Behauptung 5.1.3 *Es gilt folgendes*

- Falls sich g_s und g_p nicht überlappen, also falls $|\omega_{\text{Max},s} - \omega_{\text{Max},p}| > 3(2\sigma) = 6\sigma$ und falls c und $1 - c$ nicht verschwinden (es sei $c \in [0.1, 0.9]$) dann hat i_s zwei deutliche Maxima für $\omega = \omega_{\text{Max},s}$ und $\omega = \omega_{\text{Max},p}$ zwischen denen sich ein deutliches Minimum befindet das viel kleiner ist als die (Werte der) beiden Maxima⁴.

- Umgekehrt gilt dass, falls $i_s(\omega)$ zwei (deutliche) Maxima besitzt zwischen denen ein (deutliches) Minimum liegt (das viel kleiner ist als die Maxima), dann überlappen sich g_s und g_p nicht und c und $1 - c$ sind nicht verschwindend gering.

Daraus folgt wiederum, dass die beiden Maxima von i_s gerade in $\omega_{\text{Max},s}$ und in $\omega_{\text{Max},p}$ angenommen werden. Diese Werte können also dann vom Verlauf von $i_s(\omega)$ ermittelt werden.

- Analoge Behauptungen gelten für i_p , also für den p Modus.

⁴also kleiner sowohl als das erste wie auch als das zweite Maximum, im angenommenen Wert

Bewies: die direkte Behauptung ist trivial und folgt leicht aus der Tatsache, dass die Gaussglocken sehr schnell abklingen. Für eine Normalverteilung gilt, dass für $x = \mu \pm 3\sigma$ die Funktion nur noch $\frac{1}{80}$ ihres Maximalwertes annimmt (dass für $x = \mu$ angenommen wird), mit klarer Bedeutung.

Der umgekehrte Beweis ist für die *logische Korrektheit* unserer Argumentation sehr wichtig.

Er folgt als Widerspruchsbeweis (reductio ad absurdum).

Falls sich nämlich g_s und g_p überlappen *oder* $c \simeq 0$ *oder* $c \simeq 1$ *dann* hat i_s kein deutliches Minimum zwischen zwei deutliche Maxima⁵.

Dies impliziert natürlich wiederum, dass falls i_s ein deutliches Minimum zwischen zwei deutliche Maxima besitzt, *dann* werden diese Maxima gerade für $\omega_{\text{Max},s}$ und $\omega_{\text{Max},p}$ angenommen, wegen der Eindeutigkeit dieser zwei Maxima (i_s hat höchstens zwei Maxima) und wegen dem ersten Teil des Satzes.

Die Aussage für i_p folgt sofort, wenn man (5.4) betrachtet.

So ist die Behauptung bewiesen. □

Wie man sieht ist der rigorose und logisch Korrekte Beweis der formulierten Aussage nicht ganz trivial, obwohl die Aussage intuitiv als trivial erscheint.

Zum Verständnis sei noch erwähnt, dass deutliches Minimum zwischen zwei deutliche Maxima heißen soll, dass das Minimum viel kleiner sein soll sowohl als das erste als auch das zweite Maximum (sagen wir mindestens 10 mal kleiner). Die Maxima selber sollten einen Wert größer als $0.1 R_W$ haben, damit sie als "deutlich" klassifiziert werden können. R_W soll ein passender Referenzwert sein. Typische Werte können $R_W = 1$ oder $R_W = 0.5$ (oder vielleicht auch $R_W = 0.25$) sein, je nach Eigenschaften des FBG.

Die ganze Argumentation ist hier eher qualitativer Natur und dient lediglich zur Verdeutlichung der Ideen.

Wir machen nun eine Fallunterscheidung, für die Fälle

- das $i_s(\omega)$ aus zwei deutlichen Maxima besteht, zwischen denen ein deutliches Minimum zu finden ist, gemäß der oben erklärten Ausdrucksweise
- das der eben genannte Fall nicht eintritt

Welcher Fall eintritt ist natürlich sofort erkennbar anhand des *gemessenen* Verlaufs von $i_s(\omega)$ (oder von i_p)

⁵siehe auch weiter vorne im Text

In den folgenden Abschnitten werden die Fälle näher untersucht.

5.2 Rekonstruktion von $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und $c = T_{12}^2$

In diesem Abschnitt wollen wir die Werte von $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und $c = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ anhand des gemessenen Verlaufs von $i_s(\omega)$ (und von i_p) ermitteln.

Mit diesen Werten soll dann der Dielektrizitätstensor des (belasteten) FBG rekonstruiert und ermittelt werden, was uns wiederum ermöglichen wird den Strain Tensor zu rekonstruieren für das Material des FBG (Kerns).

Wir machen, wie gesagt, eine Fallunterscheidung für die Fälle, dass i_s zwei "deutliche" Maxima zwischen denen ein "deutliches" Minimum zu finden ist besitzt oder nicht.

Siehe auch die Bemerkungen aus Abschnitt 5.6.

5.2.1 Die Funktion $i_s(\omega)$ besteht aus zwei sichtbaren "Glocken"

Falls $i_s(\omega)$ in der Messung zwei deutliche Maxima besitze (beide größer als z.B. $0.1 R_W$ mit R_W passender Referenzwert⁶) zwischen denen ein deutliches Minimum besteht (kleiner als z.B. $\frac{1}{10}$ sowohl des einen als auch des anderen Maximum), dann folgt aus Behauptung 5.1.3, dass die beiden Maxima von i_s in $\omega_{\text{Max},s}$ und in $\omega_{\text{Max},p}$ angenommen werden.

Die Messung von i_s als Funktion von ω (oder λ_0 natürlich), ermöglicht uns also die direkte Ermittlung von $\omega_{\text{Max},s}$ und $\omega_{\text{Max},p}$.

Bleibt nur die Ermittlung von $c = T_{12}^2$.

Die Ermittlung von c kann folgendermaßen geschehen.

Aus Behauptung 5.1.3 wissen wir, dass im betrachteten Fall, die Glocken g_s und g_p sich nicht überlappen.

Insbesondere gilt also, wie man sofort sieht, dass

$$g_s(\omega_{\text{Max},p}) \simeq 0 \quad (5.10)$$

und

$$g_p(\omega_{\text{Max},s}) \simeq 0 \quad (5.11)$$

⁶typische Werte könnten $R_W = 1$ oder $R_W = 0.5$ oder auch $R_W = 0.25$ sein...

in diesem Fall.

Mit (5.2) folgt somit

$$i_s(\omega_{\text{Max},p}) = c g_p^2(\omega_{\text{Max},p}) \quad (5.12)$$

und aus (5.4) folgt

$$i_p(\omega_{\text{Max},p}) = (1 - c) g_p^2(\omega_{\text{Max},p}) \quad (5.13)$$

Dies impliziert, dass

$$b_p := \frac{i_s(\omega_{\text{Max},p})}{i_p(\omega_{\text{Max},p})} = \frac{\langle I_{s-}^{(\text{PMF})} \rangle}{\langle I_{p-}^{(\text{PMF})} \rangle} \Bigg|_{\omega=\omega_{\text{Max},p}} = \frac{c}{(1 - c)} \quad (5.14)$$

Das Symbol b_p soll hier eine kompakte Schreibweise ermöglichen. p soll hier heißen, dass wir $\omega_{\text{Max},p}$ betrachten, und b soll für "Bruch" stehen, also Verhältnis⁷.

Die Gleichung kommt zustande, da sich $\langle I_0 \rangle$ simplifiziert. Siehe (5.4) und (5.2).

Dieser Weg um b_p zu errechnen ist sehr robust.

Auch wenn g_s und g_p in Hinblick auf die Werte σ und m , also in Hinblick auf $m_s, \sigma_s, m_p, \sigma_p$, vom idealisierten Modell abweichen sollen, dann ist die hier beschriebene Methode immer noch gültig und brauchbar⁸

Es gilt außerdem

$$b_s := \frac{i_s(\omega_{\text{Max},s})}{i_p(\omega_{\text{Max},s})} = \frac{\langle I_{s-}^{(\text{PMF})} \rangle}{\langle I_{p-}^{(\text{PMF})} \rangle} \Bigg|_{\omega=\omega_{\text{Max},s}} = \frac{(1 - c)}{c} = b_p^{-1} \quad (5.15)$$

Deswegen ist es wichtig, dass man weiß welches Maximum von i_s an $\omega_{\text{Max},p}$ anzurechnen ist und welches an $\omega_{\text{Max},s}$.

Mit Behauptung 5.3.2 auf Seite 95 und mit (5.14) und (5.15) können wir aber in diesem Kontext die besprochene Fallunterscheidung ignorieren⁹ !

Man achte auf die wichtigen Bemerkungen in Abschnitt 5.6 und in Anhang C.

So bereitet uns die Unkenntnis des Vorzeichens von $\epsilon_{\chi v}$ (und von $\epsilon_{\chi\chi} - \epsilon_{\chi v}$) hier keine Probleme in Hinblick auf die praktischen Anwendungen.

Für sehr große Krafterwirkungen können sich dagegen die Maxima "vertauschen".

⁷das Symbol r für "ratio" oder v für Verhältnis hätte mit anderen betrachteten Größen verwechselt werden können...

⁸unter den getroffenen Annahmen...

⁹man soll aber nicht "nochmals" die Werte von ω_{Max} gegenseitig vertauschen ohne auch c mit $1 - c$ und umgekehrt zu vertauschen, ansonsten entsteht ein "tatsächlicher" Fehler...

Anders ausgedrückt kann sich, theoretisch, das Vorzeichen von $\omega_{\text{Max},s} - \omega_{\text{Max},p}$ ändern.

Dieser Fall kann aber erkannt werden, falls man die "Aktivität" des Sensors kontinuierlich überwacht, ausgehend von einem bekanntem und kalibriertem Anfangszustand. Sobald die Glocken (also die Maxima) von i_s sich "zu nahe" kommen oder gar "vertauschen" so soll die Messung verworfen werden, da auch die Linearisierung in [16] möglicherweise nicht mehr ausreichen exakt ist. . .

Wir gehen hier auf diesen Fall nicht mehr ein.

Zusammenfassend behaupten wir die

Behauptung 5.2.1 *Falls i_s zwei deutliche Maxima aufweist, zwischen denen ein deutliches Minimum zu finden ist, so sind $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und $b_p = \frac{c}{1-c} = \frac{T_{12}^2}{1-T_{12}^2} = \frac{T_{21}^2}{1-T_{21}^2}$ bekannt und eindeutig bestimmt und (korrekt) ermittelt. Mit b_p ist natürlich auch $c = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ bekannt*

Es gilt $1 - T_{12}^2 = T_{11}^2$, siehe (4.15).

Mit diesen Daten werden wir den Dielektrizitätstensor des FBG rekonstruieren und dadurch den Strain Tensor ermitteln.

Vorher aber eine kurze Erläuterung für den Fall, dass sich die Gauss Glocken überlappen.

5.2.2 Die Funktion i_s besteht nicht aus zwei sichtbar getrennten "Glocken"

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, dass die Annahme von Abschnitt 5.2.1 nicht zutrifft.

Wegen Behauptung 5.1.3 wissen wir, dass sich die Gauss-Glocken überlappen.

Dies hat zur Folge, dass die Maxima von $i_s(\omega)$ nicht mehr für $\omega = \omega_{\text{Max},s}$ und $\omega = \omega_{\text{Max},p}$ auftreten.

Daher können diese Größen nicht mehr direkt von Verlauf von i_s abgelesen werden.

Dies stellt aber dennoch kein größeres Problem dar für die Praxis der Messung, wie wir sehen werden.

Probleme ergeben sich aber, falls es Störungen gibt in der Leitung des Lichtes in der Faser, also falls Dämpfungen stattfinden¹⁰.

¹⁰z.B. bei Verbindungen. . .

Am Ende dieses Abschnittes wird aber dennoch versucht, auch diese Probleme zu umgehen, die im Falle von einer Dämpfung des Lichtes in der Faser entstehen können.

Leider lassen sich die Ausdrücke für die Maxima von i_s , siehe (5.2), bzw. für die Pulsationen in denen eben die Maxima angenommen werden, nicht mehr analytisch bestimmen (zumindest nicht auf einfache Weise), da die Berechnung der Nullstellen der Ableitung eine transzendente Gleichung ergibt die nicht einfach analytisch lösbar zu sein scheint.

Mit numerischen Methoden, wie wir sehen werden, ist es dennoch einfach $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und c zu bestimmen.

Als erstes soll bemerkt werden, dass eine "Zerlegung" von i_s in Form von (5.2) mit (5.5) und (5.6) eindeutig ist.

Der Beweis dieser Behauptung dient lediglich der mathematischen und logischen Korrektheit und Vollständigkeit: wir werden diesen Beweis im folgendem skizzieren.

Eindeutigkeit bedeutet hier, dass falls¹¹

$$i_s(\omega) = i_{s,A}(\omega) := c_A g_{p,A}^2 + (1 - c_A) g_{s,A}^2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (5.16)$$

mit $0 < c_A < 1$ und

$$g_{s,A}(\omega) := m e^{-\frac{(\omega - \omega_{\text{Max},s,A})^2}{2\sigma^2}} \quad (5.17)$$

und

$$g_{p,A}(\omega) := m e^{-\frac{(\omega - \omega_{\text{Max},p,A})^2}{2\sigma^2}} \quad (5.18)$$

mit m, σ gleich wie in (5.5) und (5.6), dann muss entweder

$$c_A = c \quad \omega_{\text{Max},p,A} = \omega_{\text{Max},p} \quad \omega_{\text{Max},s,A} = \omega_{\text{Max},s} \quad (5.19)$$

¹¹die Definition von $i_{s,A}(\omega)$ in Abhängigkeit von den Parametern $\omega_{\text{Max},s,A}$, $\omega_{\text{Max},p,A}$ und c_A ist anhand der rechten Seite der folgenden Gleichung (5.16) klar, für beliebige Werte dieser Parameter. Wir nehmen dann an, dass für *einen bestimmten* Wert dieser Parameter $i_{s,A} = i_s$ ist für alle ω . Dieser eine Wert ist hier immer noch mit $\omega_{\text{Max},s,A}$, $\omega_{\text{Max},p,A}$ und c_A symbolisiert.

Die Definition von $i_{s,A}$ soll natürlich aber im Allgemeinen, für alle möglichen Werte der Parameter $\omega_{\text{Max},s,A}$, $\omega_{\text{Max},p,A}$ und c_A gelten.

Die Bedeutung wird immer aus dem Kontext klar sein: es ist klar wann wir die Funktion $i_{s,A}$ im Allgemeinen betrachten (als Funktion der Parameter im Allgemeinen), und wann wir sie für die bestimmten *optimalen* Parameter betrachten die sie mit i_s übereinstimmen lassen, die also das Minimierungsproblems (5.25) lösen.

Diese optimalen Werte werden dann für die gesuchten Werte von $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und c angenommen, gemäß (5.19) bzw. (5.20).

Mit dieser Bemerkung brauchen wir $i_{s,A}$ nicht nochmals explizit zu definieren in Abhängigkeit von den Parameter und von ω (und wir verwenden keine zusätzlichen Symbole).

Ganz analoge Bemerkungen werden für b_A gelten. Wir werden diese nicht mehr wiederholen.

oder

$$c_A = 1 - c \quad \omega_{\text{Max},p,A} = \omega_{\text{Max},s} \quad \omega_{\text{Max},s,A} = \omega_{\text{Max},p} \quad (5.20)$$

sein.

Der Buchstabe A soll hier "alternative" symbolisieren.

Die zweite Möglichkeit ist äquivalent zur ersten, wenn man bedenkt, dass man nur die Werte vertauscht. Man beachte auch Abschnitt 5.6 und Anhang C.

Die Zerlegung von i_s in Form von (5.2) ist also eindeutig.

Dies verwundert und nicht, denn (5.16) soll ja für alle $\omega \in \mathbb{R}_+$ gelten, und wir haben nur drei Parameter, denn m und σ sind fix.

Siehe (5.2).

Um diese Behauptung dennoch *rigoros* zu beweisen, betrachte man folgende Argumentation¹².

Es muss natürlich per Annahme

$$\Delta_{i_s}(\omega) := i_s(\omega) - i_{s,A}(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (5.21)$$

sein.

Deswegen verschwinden *alle* Ableitungen dieser Funktion in jedem Punkt.

Fixieren wir einen beliebigen Punkt ω_1 .

Wenn wir bis zur dritten Ableitung rechnen, und diese alle gleich Null setzen, so ergibt sich ein System von *algebraischen* Gleichungen in den Unbekannten $(\omega_1 - \omega_{\text{Max},s,A})$, $(\omega_1 - \omega_{\text{Max},p,A})$, $e^{-\frac{(\omega_1 - \omega_{\text{Max},s,A})^2}{\sigma^2}}$ und $e^{-\frac{(\omega_1 - \omega_{\text{Max},p,A})^2}{\sigma^2}}$ das leicht analytisch gelöst werden kann in diesen Unbekannten.

Es ist auch möglich $\omega_1 \rightarrow 0$, (also $\omega_1 = 0$ wegen der Stetigkeit) zu betrachten um die Berechnungen zu vereinfachen, dies ist aber nicht wesentlich.

Die Lösung diese algebraische Gleichungssystems ergibt sofort, dass $\omega_{\text{Max},p,A} = \omega_{\text{Max},p}$ und $\omega_{\text{Max},s,A} = \omega_{\text{Max},s}$ (oder umgekehrt) sein muss.

Es folgt sofort auch, dass $c_A = c$ (oder $c_A = 1 - c$) sein muss, wenn wir die Gleichheit der Pulsationen auf die Werte der Exponentiale übertragen und eine triviale Simplifikation durchführen.

¹²es möge mit Sicherheit noch andere Argumentationen geben...

Unabhängig von dieser Argumentation, sollte dennoch die Eindeutigkeit der Zerlegung von i_s in Form von (5.2) klar sein, falls wie hier $m, \sigma \in \mathbb{R}_+$ gegeben sind und (in etwa) gleich sind für die Glocken g_s und g_p .

Wegen dieser Eindeutigkeit ist es dennoch leicht $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und c auf *numerischen* Weg zu bestimmen.

Wir setzen

$$i_{s,A} = i_{s,A}(\omega; \omega_{\text{Max},s,A}, \omega_{\text{Max},p,A}, c_A) \quad (5.22)$$

in Hinblick auf (die rechte Seite von¹³) (5.16), um die Abhängigkeit von den Parametern zu betonen.

$i_s(\omega)$ ist uns dagegen aus der Messung vollständig bekannt.

Wir definieren die *Funktion*

$$M(\omega_{\text{Max},s,A}, \omega_{\text{Max},p,A}, c_A) := \|i_s - i_{s,A}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \quad (5.23)$$

Anstelle der $L^2(\mathbb{R}_+)$ Norm können wir natürlich auch andere passende Normen wählen. Wir können¹⁴ natürlich die Berechnung nur auf das Intervall beschränken in dem i_s nicht verschwindend gering ist¹⁵.

Die Funktion (5.23) kann leicht numerisch evaluiert werden, da nur drei Parameter vorkommen. Auch ist es kein Problem den Gradienten davon zu bestimmen, zumindest in erster Approximation, was für unsere Zwecke ausreicht.

Wir können auch leicht sinnvolle Anfangsparameter schätzen für unser numerisches Verfahren, man setze einfach $\omega_{\text{Max},s,A}$ und $\omega_{\text{Max},p,A}$ in der Nähe der Werte von ω für die i_s maximal wird.

Wir erinnern dass die L^2 Norm folgendermaßen definiert ist, siehe ein Text über Funktionalanalysis¹⁶

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.24)$$

mit klarer Bedeutung der Symbole.

¹³ das Zeichen $:=$ in (5.16) soll selbstverständlich $i_{s,A}$ definieren für alle Werte der betrachteten Variablen und nicht nur für die speziellen Werte für die $i_s = i_{s,A}$ gilt. Siehe auch Fußnote 11 auf Seite 80.

¹⁴ die Exponentialfunktionen klingen sehr rasch ab. . .

¹⁵ mit passender Wahl für die unabhängigen Parameter, so dass alle Gauss Glocken nicht aus dem betrachteten Intervall "raus rutschen", mit klarer Bedeutung und mit trivialen Bemerkungen. . .

¹⁶ in unserem Fall ist es natürlich egal ob wir die Quadratwurzel bilden. Wir könnten auch eine andere L^p Norm wählen.

M ist eine nicht negative Funktion der drei Variablen $\omega_{\text{Max},s,A}$, $\omega_{\text{Max},p,A}$ und c_A .

Wegen der besprochenen Eindeutigkeit besitzt M nur zwei globale Minima für (5.19) und (5.20) in denen $M = 0$, wie man sofort sieht anhand der bisherigen Abhandlung.

Es ist kein Problem diese Minima (oder eins von beiden, mit der Bemerkung das sie für unsere Zwecke äquivalent sind) mit einem numerischen Verfahren zu finden da sowohl M als auch der Gradient davon leicht auf numerischem Wege berechnet werden können mit einem Computer, Punkt für Punkt während der Durchführung des Algorithmus. *Es ist also nicht Notwendig die Werte dieser Funktionen für alle Punkte im Voraus (a priori) explizit zu kennen, was wichtig ist..* Auch können die Werte der Variablen nur in einem begrenzten Bereich variieren, was die Suche natürlich möglich macht.

Wir wollen also die Minimierungsaufgabe lösen

$$M(\omega_{\text{Max},s,A}, \omega_{\text{Max},p,A}, c_A) := \|i_s - i_{s,A}\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \rightarrow \min \quad (5.25)$$

mit¹⁷ $\min \simeq 0$ bzw. im Idealfall $\min = 0$, mit Hilfe von einem Gradientenverfahren oder einer passenden Variante davon¹⁸.

Bezüglich des Integrationsintervall bei Berechnen der Norm, ist es wichtig zu betonen, dass nicht auf ganz \mathbb{R}_+ integriert werden muss, was ja numerisch nicht machbar ist. Es reicht der Bereich $[a, b]$ in dem die Funktionen nicht verschwinden, wie man sofort sieht mit einfachen Bemerkungen.

Die gefundenen *optimalen*¹⁹ Werte werden dann für $\omega_{\text{Max},s}, \omega_{\text{Max},p}, c = T_{12}^2$ angenommen, mit den üblichen Bemerkungen und auch in Hinblick auf (5.19) und (5.20).

Somit²⁰ können wir die gesuchten Parameter $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und c rekonstruieren.

Wegen Behauptung 5.3.2 wissen wir außerdem a posteriori, dass die Vertauschung von $\omega_{\text{Max},s}$ mit $\omega_{\text{Max},p}$ und umgekehrt und von c mit $1 - c$ und umgekehrt keine Probleme bereitet.

Als numerische Algorithmen kommen verschiedene Abstiegsverfahren in Frage (siehe ein Text über Optimierung), also das Gradientenverfahren oder eine Variation davon.

¹⁷das Minimum sollte zumindest viel kleiner sein als die Fläche von i_s , also viel kleiner als $\int_{\mathbb{R}_+} i_s d\omega$

¹⁸die Anfangswerte für den Algorithmus kann man leicht schätzen mit Hilfe der Maxima von i_s bzw. i_p . Der Anfangswert für c kann in erster Approximation durch die Amplituden von i_s bzw i_p geschätzt werden, im Vergleich zum unbelasteten Fall... Siehe auch die Bemerkungen weiter vorne

¹⁹wir werden, hier und im folgendem, diese *nicht* mit einem Symbol wie $\omega_{\text{Max},s,A,\text{optimal}}, \omega_{\text{Max},p,A,\text{optimal}}, c_{A,\text{optimal}}$ bezeichnen, der Kompaktheit wegen. Die Bedeutungen sind klar...

²⁰also durch Lösung des Minimierungsproblems und wegen (5.19) und (5.20), mit klarer Bedeutung...

Bei guter Implementierung auf einem schnellen Rechner können diese Algorithmen sehr schnell arbeiten.

Der Gradient von M kann leicht numerisch evaluiert werden, in erster Approximation.

Falls wir Werte finden für die $M \simeq 0$, dann haben wir die Lösung gefunden, wegen der gezeigten Eindeutigkeit, siehe (5.19) bzw. (5.20).

Wir müssen nur $\omega_{\text{Max},s}$ von $\omega_{\text{Max},p}$ unterscheiden können, das heißt das Vorzeichen von $\omega_{\text{Max},s} - \omega_{\text{Max},p}$ kennen.

Diesbezüglich gelten dieselben Überlegungen wie in Abschnitt 5.2.1.

Die Messung sollte ständig von einem Rechner überwacht werden, der entsprechende Berechnungen durchführt, und der in der Lage ist zu melden, falls der Sensor aus seinem Arbeitsbereich geriet. . .

Bei einem guten Rechner sollte dies in Echtzeit erfolgen können, vorausgesetzt natürlich die Kraft variiert nicht "zu schnell" (wir nehmen hier eine quasi statische Variation der einwirkenden Kraft auf das FBG an. . .).

Aus alledem folgt die

Behauptung 5.2.2 *Auch in diesem Fall kennen wir $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und $c = T_{12}^2$ wegen (5.19) und (5.20) und wegen der besprochenen Eindeutigkeit, falls wir, wie beschrieben, ein passendes numerisches Verfahren implementieren.*

Wie man sieht, brauchen wir nicht i_p zu kennen. Das bedeutet, dass i_p keine wesentliche Information liefert, was uns nicht verwundern soll, wenn wir die Ausdrücke von i_s und i_p betrachten.

Das beschriebene Verfahren erscheint jedoch in dieser Form fehleranfällig, und wir werden eine Abänderung vornehmen um es robuster zu machen.

Falls nämlich die beiden Gauss Glocken Veränderungen aufweisen (außer des Wertes der mittleren Pulsation, der ja verschieden ist für die beiden Glocken. . .), so kann dies eine Fehlerquelle sein.

Auch können Dämpfungen²¹ in der Lichtleitung problematisch werden, da sie die Ergebnisse verzerren.

Man könnte denken, das man das Verfahren einfach analog für i_p wiederholen kann (um dann z.B. die Mittelwerte der gefundenen Parameter anzunehmen. . .), was auch ein Versuch sein könnte.

²¹die bei guter Konstruktion aber minimiert werden sollten

Die Lösung könnte folgendermaßen aussehen. Wie im Fall der sich nicht überlappenden Gauss Glocken, können wir das Verhältnis von i_s zu i_p betrachten, wodurch eine Dämpfung "ausgeblendet" wird.

Wir definieren, siehe wie immer (5.2) und (5.4):

$$b(\omega) := \frac{i_s(\omega)}{i_p(\omega)} = \frac{c g_p^2 + (1 - c) g_s^2}{(1 - c) g_p^2 + c g_s^2} \quad (5.26)$$

b ist natürlich aus den Labormessungen bekannt (wenn wir das Verhältnis ausrechnen).

Ganz analog zum oben betrachteten Fall, wenden wir denselben numerischen Algorithmus an.

Wir definieren, mit klarer Bedeutung²²:

$$b_A(\omega; \omega_{\text{Max},s,A}, \omega_{\text{Max},p,A}, c_A) := \frac{c_A g_{p,A}^2 + (1 - c_A) g_{s,A}^2}{(1 - c_A) g_{p,A}^2 + c_A g_{s,A}^2} \quad (5.27)$$

und Lösen eine ganz analoge Minimierungsaufgabe wie die oben beschriebene.

Wir wollen also mit einem numerischen Abstiegsverfahren (Gradientenverfahren oder Variante davon) $\omega_{\text{Max},s,A}, \omega_{\text{Max},p,A}, c_A$ so bestimmen, dass, mit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ ein hinreichend großes Intervall²³ (aber nicht zu groß...) das den Bereich umschließt in dem i_s, i_p und die beiden Gauss Glocken $g_{s,A}$ und $g_{p,A}$ verschieden von Null sind (oder besser größer als $\epsilon \ll 1$ sind²⁴), gilt:

$$\|b - b_A\|_{L^2([a,b])} \rightarrow \min \quad (5.28)$$

Das Minimum²⁵ soll natürlich annähernd Null sein²⁶, $\min \simeq 0$.

Bei der Norm Berechnung²⁷ wird natürlich über ω (numerisch²⁸) integriert.

²²siehe auch Fußnote 11 auf Seite 80, wobei hier *analoge* Bemerkungen gelten.

²³natürlich soll hier und im Folgendem die Zahl $b \in \mathbb{R}$ die das Intervall $[a, b]$ charakterisiert nicht mit der Funktion b verwechselt werden die wir betrachten... Diese Verwechslungsgefahr ist aber in der Praxis nicht vorhanden, da es immer klar ist was wir bezeichnen (aus dem Kontext heraus).

²⁴mit $\epsilon > 0$ natürlich

²⁵Man bedenke, dass b und b_A nicht abklingen für $|\omega| \rightarrow \infty$, was aber auch kein Problem darstellt. Diese Funktionen tendieren zu einem konstanten Wert, wie man mit leichten Überlegungen sieht. Man Bedenke auch, dass alle Gaussglocken und alle Koeffizienten positiv sind, mit c und c_A zwischen 0 und 1.

²⁶und zumindest viel Kleiner als die Integrale von b und b_A (also die Flächen) auf dem Intervall $[a, b]$.

²⁷selbstverständlich ist auch $\|b - b_A\|_{L^2([a,b])}$ eine Funktion (nur) von $\omega_{\text{Max},s,A}, \omega_{\text{Max},p,A}$ und c_A , mit den üblichen Bemerkungen, siehe auch Fußnote 11 auf Seite 80.

²⁸und nicht unbedingt mit großer Präzision, da es genügt festzustellen, dass das nicht negative Integral verschwindet...

Die gefundenen *optimalen* Werte werden dann für $\omega_{\text{Max},s}, \omega_{\text{Max},p}, c = T_{12}^2$ angenommen, mit den üblichen Bemerkungen und auch in Hinblick auf (5.19) und (5.20).

Es gelten analoge Bemerkungen wie oben, was dieses Verfahren angeht. So kann man die Funktion (in den drei betrachteten Variablen) $\|b - b_A\|_{L^2}$ und den Gradienten davon, leicht numerisch auswerten (Punkt für Punkt) *während* der Durchführung des Algorithmus. Also müssen die Werte nicht im Voraus bekannt sein.

Bei schnellen Rechnern, kann diese Verfahren in Echtzeit implementiert werden.

Dieses Verfahren ist weniger anfällig für Störungen in der Leitung des Lichtes, da wir nur Verhältnisse von reflektierten Intensitäten betrachten.

Ein rigoroser Beweis der Eindeutigkeit der Darstellung in der Form (5.26) wurde aber nicht hergeleitet.

Diese Eindeutigkeit erscheint dennoch sinnvoll und intuitiv plausibel, denn die Eindeutigkeit besagt, dass $b_A = b$ für alle $\omega \in \mathbb{R}_+$, und wir haben nur drei unabhängige Parameter die wir variieren können, $\omega_{\text{Max},s,A}, \omega_{\text{Max},p,A}, c_A$.

Nur falls $\omega_{\text{Max},s} = \omega_{\text{Max},p}$ so ist sicherlich keine Eindeutigkeit gegeben, und diese Methode ist unbrauchbar. Denn in diesem Fall ist $b(\omega) = 1$. Und es gilt, dass $b_A(\omega) = 1$ für alle Werte so dass $\omega_{\text{Max},s,A} = \omega_{\text{Max},p,A}$, ohne Eindeutigkeit. Also falls die *gefundenen* Werte für ω_{Max} gleich sind, also falls $\omega_{\text{Max},s,\text{gefunden}} = \omega_{\text{Max},p,\text{gefunden}}$ ist und diese Werte das Minimierungsproblem lösen²⁹, so muss das Ergebnis verworfen werden, mit klarer Bedeutung.

Wir können aber die gefundenen Werte mit Hilfe des Verfahrens bestätigen lassen, das wir als erstes beschrieben haben. Bei Übereinstimmung ist das Ergebnis ausreichend bekräftigt.

Oder umgekehrt können wir die Ergebnisse vom ersten Algorithmus als Anfangswerte für den zweiten Algorithmus einsetzen, der uns dann genauere Werte liefern soll, da er Fehler ausblendet, die durch Dämpfungen entstehen.

Wir wissen also, dass

Behauptung 5.2.3 *Die eben beschriebene Methode ist auch bei Dämpfungen in Bezug auf die Leitung des Lichtes in der Faser anwendbar.*

Es wäre auch noch eine alternative Vorgehensweise denkbar.

Wir beobachten, dass mit (5.2) und (5.5) und (5.6) gilt

$$\int_{\mathbb{R}} i_s(\omega) d\omega = \int_{\mathbb{R}} (c g_p^2 + (1 - c) g_s^2) d\omega = c m^2 \sigma \sqrt{\pi} + (1 - c) m^2 \sigma \sqrt{\pi} = m^2 \sqrt{\pi} \sigma \quad (5.29)$$

²⁹mit c_A bzw. c beliebig

Da σ bekannt ist und das Integral leicht numerisch evaluiert werden kann, so kann man m mit dieser Gleichung berechnen.

Dieses m wird *dann* in (5.5) und (5.6) eingesetzt und es wird das Verfahren angewendet, dass wir als erstes beschrieben haben.

So wird mehr Robustheit erreicht was Fehlern betrifft, die durch Dämpfungen in der Leitung entstehen.

Diese Dämpfungen verringern nämlich den Mittleren wert der Reflexionskoeffizienten, also m , siehe (5.5) und (5.6), so dass es Schwankungen gibt in realen Wert für m , der dann nicht mehr bekannt ist.

Mit der eben besprochenen Methode, kann man dennoch m bestimmen, wodurch wir die gesuchten Größen wie beschrieben bestimmen können.

Auch kann das Integral von i_p (mit) evaluiert werden...

Auch können wir c abschätzen, durch folgende Überlegung.

Es gilt³⁰

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} b = \begin{cases} \frac{1-c}{c}, & (\omega_{\text{Max},s} > \omega_{\text{Max},p} \wedge \omega \rightarrow +\infty) \vee (\omega_{\text{Max},s} < \omega_{\text{Max},p} \wedge \omega \rightarrow -\infty) \\ \frac{c}{1-c}, & (\omega_{\text{Max},s} > \omega_{\text{Max},p} \wedge \omega \rightarrow -\infty) \vee (\omega_{\text{Max},s} < \omega_{\text{Max},p} \wedge \omega \rightarrow +\infty) \end{cases} \quad (5.30)$$

je nach Vorzeichen von $\omega_{\text{Max},s} - \omega_{\text{Max},p}$ und Richtung in dem der Grenzwert gebildet wird, wie man sofort sieht³¹.

Daraus ergibt sich eine Möglichkeit c abzuschätzen, und/oder als Anfangswert für die Algorithmen einzusetzen.

Wir fassen all diese Ergebnisse zusammen in folgender abschließender

Behauptung 5.2.4 Falls i_s nicht aus zwei sichtbar getrennten "Glocken" besteht, so kann man $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und $c = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ auf folgenden alternativen Wegen rekonstruieren:

- wir lösen numerisch die Minimierungsaufgabe in den Variablen $\omega_{\text{Max},s,A}$, $\omega_{\text{Max},p,A}$, c_A die gegeben ist durch

$$M(\omega_{\text{Max},s,A}, \omega_{\text{Max},p,A}, c_A) := \|i_s - i_{s,A}\|_{L^2} \rightarrow \min \simeq 0 \quad (5.31)$$

gemäß (5.23) mit $i_{s,A}$ wie in der rechten Seite von (5.16) angegeben³².

³⁰dies gilt vor allem, falls g_s und g_p sich gut an eine Gauss Glocken Form annähern. Ansonsten, für Funktionen wie in Abbildung 6.1 mit (3.25) könnte die folgende Überlegung ihre Gültigkeit verlieren, wegen der Schwankungen der Funktionen, siehe Abbildung 6.13.

³¹hier \vee bedeutet "oder", und \wedge bedeutet "und", wie üblich. Der Fall $\omega_{\text{Max},s} = \omega_{\text{Max},p}$ ist trivial, denn die Funktion b wird konstant gleich 1 sein, wie man sieht. Die Unstetigkeit des Grenzwertes ist hier kein Problem, da in der L^2 Norm Bildung wir auf $]a, b[$ integrieren.

³²siehe Bemerkung in Fußnote 13.

Dann gilt (5.19) bzw. (5.20), was für unsere Zwecke kein Unterschied macht (da wie die beiden Werte für $\omega_{Max,s}$ und $\omega_{Max,p}$ unterscheiden können...).

Wegen der besagten Eindeutigkeit kennen wir also $\omega_{Max,s}, \omega_{Max,p}, c$.

Als numerisches Verfahren kommt das Gradientenverfahren³³ in Frage oder eine geeignete Variante davon.

Es ist natürlich wichtig, dass $\min \simeq 0$, da so aus der Eindeutigkeit die Korrektheit des Ergebnis folgt.

- Wir lösen mit analogem Verfahren (5.28) (mit $\min \simeq 0$). Siehe (5.26) und (5.27).

Diese Methode soll resistenter sein gegen Fehler die entstehen, falls die Leitung des Lichtes gedämpft wird, da wir nur das Verhältnis von $\frac{i_s}{i_p}$ berücksichtigen.

Als Anfangswerte für den numerischen Algorithmus (Gradientenverfahren oder Variante davon) können (eventuell) die Werte dienen, die mit dem Verfahren gefunden worden sind, das wir im ersten Punkt dieser Behauptung beschrieben haben³⁴.

Falls aber die gefundenen Werte für ω_{Max} gleich sind, also falls $\omega_{Max,s,gefunden} = \omega_{Max,p,gefunden}$ (diese Werte sein natürlich Lösungen des Minimierungsproblems³⁵), so muss das Ergebnis verworfen werden³⁶.

- wir schätzen erst m durch (5.29) bzw. c durch (5.30) ab, setzen dann diese Werte in (5.5) und (5.6) ein und führen dann die erste hier beschriebene Methode durch (bzw. die zweite Methode), also die Minimierung der Funktion $\|i_s - i_{s,A}\|_{L^2}$ (bzw. der Funktion $\|b - b_A\|_{L^2}$).

Auch so soll eine Fehlertoleranz entstehen, gegenüber Dämpfungen in der Leitung des Lichtes.

Siehe auch die Bemerkungen weiter vorne in diesem Abschnitt³⁷.

Wir können natürlich auch mehrere der hier beschriebenen Methoden gleichzeitig einsetzen und die Ergebnisse vergleichen.

Anstelle der L^2 Norm können andere Normen verwendet werden. Die Integrationsvariable bei der Berechnung der Norm ist natürlich ω und es wird über \mathbb{R}_+ integriert bzw. über die Intervalle $[a, b]$ in denen i_s nicht und $i_{s,A}$ nicht verschwindend gering sind, also größer sind als ein positives $\epsilon \ll 1$, da die Funktionen nie ganz verschwinden, sondern exponentiell abklingen; außerdem tendieren b und b_A zu konstanten Werten, wie

³³siehe ein Standardtext über Optimierung bzw. über numerische Methoden der Suche nach Minima von Funktionen (numerische Optimierungsverfahren)...

³⁴die passende Einschränkung des Integrationsintervalls auf $[a, b]$, damit der Algorithmus numerisch durchführbar ist, ist auch hier kein Problem (auch nicht wenn, wie in diesem Fall $b_A, b \neq 0$ für $|\omega| \rightarrow \infty$), wie wir angedeutet haben und wie man mit einfachen Bemerkungen sehen kann...

³⁵mit c_A beliebig...

³⁶diese Überlegung folgt aus der Tatsache, dass in diesem Fall $b(\omega) = 1$ ist, und dass für alle Werte so dass $\omega_{Max,s,A} = \omega_{Max,p,A}$ die Funktion $b_A(\omega) = 1$ ist. Also ist hier die Eindeutigkeit nicht gegeben. c bzw. c_A kann hier beliebig sein...

³⁷auch was die Wahl der Anfangswerte für die Algorithmen betrifft

wir gesehen haben und in diesem Fall kann nur über $]a, b[$ integriert werden, man siehe (5.30)...

Dies ist kein Problem, da i_s aus der Messung bekannt ist, und da die Gaussglocken von $i_{s,A}$ (bzw. die in b_A) sehr rasch abklingen. So ist die Durchführung des Algorithmus möglich.

Die Funktion $M(\omega_{Max,s,A}, \omega_{Max,p,A}, c_A)$ und die linke Seite von (5.28) und deren Gradienten (in erster Approximation) können leicht numerisch berechnet werden während der Durchführung des Algorithmus, wodurch man auf einem schnellen Rechner Ergebnisse in Echtzeit bekommt³⁸.

Die Evaluierung der Integrale (in der Integrationsvariable ω) beim berechnen der L^2 Norm, siehe (5.24) muss keine hohe Präzision aufweisen.

Der Integrationsbereich kann problemlos eingeschränkt werden auf das Intervall $]a, b[$ in dem i_s, i_p bzw. die Gauss-Glocken³⁹ nicht verschwinden (also größer sind als ein hinreichend kleines positives $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, da sie nie ganz verschwinden sonder nur exponentiell abklingen...). So erst kann natürlich die Integration numerisch erfolgen⁴⁰.

Wir müssen aber in der Lage sein $\omega_{Max,s}$ von $\omega_{Max,p}$ zu unterscheiden, also das Vorzeichen von $\omega_{Max,s} - \omega_{Max,p}$ zu kennen. Diesbezüglich gelten dieselben Bemerkungen wie in Abschnitt 5.2.1.

Es ist auch kein Problem, die Funktionen $i_{s,A}$ bzw. b_A so abzuändern, dass der Tatsächliche Verlauf der Reflexionskoeffizienten, siehe Abbildung 6.1, berücksichtigt werden kann. Alternativ (oder zusätzlich) kann man auch, teilweise, i_s bzw. b "zurecht schneiden" in dem Mann seitliche kleinere "Glocken" heraus filtert⁴¹.

Dies alles folgt, wenn man einfache Bemerkungen berücksichtigt, was diese "Zurechtschneidung" und die Minimierungsprobleme angeht⁴²...

An dieser Stelle wären auch numerische Methoden denkbar, die keine Berechnung von Normen für Funktionen benötigen.

Man könnte z.B. die Maxima und Minima von $i_{s,A}$ und/oder von b_A (numerisch) errechnen (und auch die Werte der Pulsationen in denen diese Maxima und Minima angenommen werden), in Abhängigkeit der Variablen $\omega_{Max,s,A}, \omega_{Max,p,A}, c_A$.

Man kann die gefundenen Werte dann mit den tatsächlichen Maxima und Minima von i_s und b vergleichen (und mit den Pulsationen in denen diese Werte angenommen werden), da diese aus der (spektroskopischen) Messung bekannt sind.

³⁸das Integrationsintervall ist ja beschränkt

³⁹auch für das was b_A und $i_{s,A}$ betrifft...

⁴⁰wobei keine große Präzision notwendig ist, wie gesagt.

⁴¹siehe Abbildung 6.1. Man sollte zumindest die seitlichen "Glocken" heraus filtern, die ab einer gewissen Entfernung von der Hauptglocke auftreten, also ab einer gewissen Entfernung von ω_{Max} .

Dies alles gilt für den s als auch für den p Modus und folgt mit einfachen Bemerkungen.

Siehe Abbildung 6.1 und (3.25) und analoge Abbildungen bzw. Gleichungen für den p Modus.

⁴²und die Eigenschaften der betrachteten Normen.

Die Parameter $\omega_{\text{Max},s,A}$, $\omega_{\text{Max},p,A}$, c_A würden dann mit einem Suchalgorithmus variiert werden bis eine Übereinstimmung der Maxima und Minima stattfindet (und der Pulsationen in denen sie angenommen werden): dann hätten wir mögliche Kandidaten für $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$, C .

Wir werden aber auf diese Alternativen hier nicht eingehen.

Wichtige Bemerkungen

Bei der praktischen Implementierung der hier beschriebenen Methoden wird es sehr wichtig sein, ob man für $g_{s,A}$ und $g_{p,A}$ Gauss Glocken verwendet oder Translationen von Funktionen wie in Abbildung 6.1 gemäß (3.25) dargestellt.

Auch wird die genaue Wahl des Integrationsbereichs $[a, b]$ auf dem die Funktionsnormen berechnet werden, siehe⁴³ (5.25) und (5.28), von großer praktischer Wichtigkeit sein, auch was Konvergenzfragen des Algorithmus betrifft.

$[a, b]$ soll die Bereiche beinhalten in dem i_s und i_p nicht verschwindend gering sind, es soll aber auch nicht "zu groß" sein, damit eine rasche Konvergenz des Algorithmus möglich ist.

Natürlich wird auch die Wahl und die Implementation der Algorithmen von großer Bedeutung sein.

Auch wird es sehr wichtig sein die Anfangswerte für die numerischen Algorithmen sorgfältig zu wählen.

Dabei sollen die Anfangswerte für $\omega_{\text{Max},s/p}$ so gewählt werden, dass sie mit den Maxima von i_s in etwa übereinstimmen und der Anfangswert für c soll in Bezug auf die Amplitude von i_s bzw. i_p auf "vernünftige" Weise gewählt werden⁴⁴.

Das gefundene Minimum soll außerdem $\simeq 0$ sein, also viel kleiner als die Fläche⁴⁵ $\int_{\mathbb{R}_+} i_s d\omega$.

Diese numerische Algorithmen konvergieren nämlich zu ein lokales Minimum: wir sind aber in der Lage zu wissen ob das Minimum lokal oder global ist, anhand seines Wertes. Wenn es $\simeq 0$ ist, also viel kleiner als $\int_{[a,b]} i_s d\omega$ ist, so ist es mit Sicherheit eines von den beiden globalen Minima.

Wenn wir dagegen nur ein lokales Minimum gefunden haben, so kann es genügen etwas andere Anfangswerte zu benutzen, solange bis das gefundene Minimum ein Wert $\simeq 0$ besitzt, und somit global ist...

Es wäre auch denkbar, Teile von i_s und i_p zu glätten, um den Algorithmus besser

⁴³natürlich integrieren wir nicht über ganz \mathbb{R}_+ sonder nur auf einem beschränkten Intervall

⁴⁴natürlich im Bereich $]0, 1[$

⁴⁵es wird in der Praxis natürlich auf $[a, b]$ integriert

durchführen zu können.

Siehe Abschnitt 6.2.2 für ein wichtiges numerisches Beispiel und für wichtige Bemerkungen. Siehe auch die Bemerkungen aus Abschnitt 5.6.

5.3 Rekonstruktion des Dielektrizitätstensor des FBG

Wir sind nun in der Lage, da wir $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und $c = T_{12}^2 = T_{21}^2 = \sin^2 \alpha$ kennen⁴⁶ (siehe vorhergehende Abschnitte), den Dielektrizitätstensor $\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(u)}$ zu ermitteln, siehe (C.25) und Anhang C.2 und C.3 für die genaue Bedeutung der Symbole⁴⁷.

Wir werden die Einträge des Dielektrizitätstensors des FBG im System $O\chi v\zeta$ angeben, in Funktion von bekannten Größen.

Falls β_G nicht bekannt sein sollte, so kann man diese Größe ermitteln, mit einer Methode die wir in den nächsten Abschnitten angeben werden.

Aus (3.27) und (3.28) folgt mit Einsetzen von (4.20) und (4.21) (unter Berücksichtigung der vereinfachten Notation (4.17)), dass

$$\omega_{\text{Max},s} = \frac{\sqrt{2}\beta_G}{\sqrt{\mu \left(\sqrt{\epsilon_{vv}^2 - 2\epsilon_{\chi\chi}\epsilon_{vv}} + 4\epsilon_{\chi v}^2 + \epsilon_{\chi\chi}^2 \text{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi} \right)}} \quad (5.32)$$

und

$$\omega_{\text{Max},p} = \frac{\sqrt{2}\beta_G}{\sqrt{\mu \left(-\sqrt{\epsilon_{vv}^2 - 2\epsilon_{\chi\chi}\epsilon_{vv}} + 4\epsilon_{\chi v}^2 + \epsilon_{\chi\chi}^2 \text{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi} \right)}} \quad (5.33)$$

wobei, wie immer, wir die absoluten Dielektrizitätskonstanten verwenden⁴⁸

Das System $O\chi v\zeta$ ist wie immer, das Hauptkoordinatensystem der PMF bzw. des unbelasteten FBG.

Wir benötigen noch eine dritte Gleichung. Diese wird $c = T_{12}^2$ sein.

Vorher aber noch eine Bemerkung.

⁴⁶mit der üblichen Bedeutung der Symbole in diesem Text

⁴⁷die dieselbe ist wie im übrigen Text

⁴⁸und die absolute Permeabilitätskonstante.

Falls, gemäß Behauptung 5.2.1 b_p aus (5.14) bekannt ist, siehe Abschnitt 5.2.1, so ist natürlich

$$c = \frac{b_p}{b_p + 1} \quad (5.34)$$

Im Folgenden setzen wir auch

$$c_P := c \quad (5.35)$$

um zu betonen, dass $c_P = c$ ein bekannter Parameter ist, der aus den Messungen hervorgeht. Diese Größe soll natürlich nicht mit der Lichtgeschwindigkeit verwechselt werden. . .

Wir betonen nochmals, dass $\omega_{\text{Max},s}$ und $\omega_{\text{Max},p}$ und $c_P = c = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ in jedem Fall aus den Messungen von i_s und i_p bekannt sind, wie wir gezeigt haben.

Mit Gleichung (4.23) für T_{12} folgt⁴⁹

$$c_P = c = T_{12}^2 = T_{21}^2 = \sin^2 \alpha = \frac{1}{\frac{(\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \text{sgn}(\epsilon_{\chi v}) - \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi})^2}{4\epsilon_{\chi v}^2} + 1}} \quad (5.36)$$

Um nun diese Gleichungen nach $\epsilon_{\chi\chi}$, $\epsilon_{\chi v}$, ϵ_{vv} auf eindeutige Weise aufzulösen, werden wir sie in einer "bequemere" Form bringen.

Um die Radikale handhaben zu können ist es praktisch, die Gleichungen (5.32) und (5.33) in der Potenz mit Exponent -2 zu nehmen⁵⁰.

Es ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{1}{\omega_{\text{Max},s}^2} = \frac{\mu (\sqrt{\epsilon_{vv}^2 - 2\epsilon_{\chi\chi}\epsilon_{vv} + 4\epsilon_{\chi v}^2 + \epsilon_{\chi\chi}^2} \text{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi})}{2\beta_G^2} \quad (5.37)$$

und

$$\frac{1}{\omega_{\text{Max},p}^2} = \frac{\mu (-\sqrt{\epsilon_{vv}^2 - 2\epsilon_{\chi\chi}\epsilon_{vv} + 4\epsilon_{\chi v}^2 + \epsilon_{\chi\chi}^2} \text{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi})}{2\beta_G^2} \quad (5.38)$$

Wir setzen, um die Berechnungen zu vereinfachen

$$M_1 = \frac{2\beta_G^2}{\mu\omega_{\text{Max},s}^2} \quad (5.39)$$

und erhalten aus (5.37)

$$M_1 = \sqrt{\epsilon_{vv}^2 - 2\epsilon_{\chi\chi}\epsilon_{vv} + 4\epsilon_{\chi v}^2 + \epsilon_{\chi\chi}^2} \text{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi} \quad (5.40)$$

⁴⁹es ist also $c \in [0, 1]$

⁵⁰wir nehmen also selbstverständlich $\text{LHS}^{-2} = \text{RHS}^{-2}$ von diesen Gleichungen mit LHS die linke und RHS die rechte Seite davon.

Und mit

$$M_2 := \frac{2\beta_G^2}{\mu\omega_{\text{Max},p}^2} \quad (5.41)$$

folgt aus (5.38)

$$M_2 = -\sqrt{\epsilon_{vv}^2 - 2\epsilon_{\chi\chi}\epsilon_{vv} + 4\epsilon_{\chi v}^2 + \epsilon_{\chi\chi}^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) + \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi} \quad (5.42)$$

Wir brauchen nur noch eine dritte handhabbare Gleichung, die wie folgt gefunden werden kann.

Aus (4.15) folgt mit (5.3):

$$\frac{T_{11}^2}{T_{12}^2} = \frac{1 - T_{12}^2}{T_{12}^2} = \frac{1 - c_P}{c_P} \quad (5.43)$$

wobei natürlich die rechte Seite bekannt ist, da $c = c_P$ bekannt ist.

Die linke Seite nimmt wegen (4.22) und (4.23) eine handhabbare Form an.

Wir setzen

$$M_3 = \frac{1 - c_P}{c_P} = \frac{1 - c}{c} \quad (5.44)$$

dann ergibt sich die Gleichung

$$M_3 = \frac{\left(\sqrt{4\epsilon_{\chi v}^2 + (\epsilon_{vv} - \epsilon_{\chi\chi})^2} \operatorname{sgn}(\epsilon_{\chi v}) - \epsilon_{vv} + \epsilon_{\chi\chi}\right)^2}{4\epsilon_{\chi v}^2} \quad (5.45)$$

die eine handhabbare Form annimmt.

Wie man sieht, sind die Werte M_1, M_2, M_3 aus den Messungen bekannt.

Man siehe auch Gleichung (5.15), die aber nur im beschriebenen Spezialfall⁵¹ gilt von Abschnitt 5.2.1.

Auflösen von (5.40), (5.42) und (5.45) nach $\epsilon_{\chi\chi}, \epsilon_{vv}, \epsilon_{\chi v}$ ergibt die Lösungen

$$\epsilon_{\chi\chi} = \frac{M_2 + M_1 M_3}{2(M_3 + 1)} \quad (5.46)$$

und

$$\epsilon_{vv} = \frac{M_1 + M_2 M_3}{2(M_3 + 1)} \quad (5.47)$$

⁵¹unsere Argumentation gilt natürlich im Allgemeinen

und

$$\epsilon_{\chi\nu} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{(M_1 + M_2 M_3)^2}{(M_3 + 1)^2} + \frac{M_1 (M_1 + M_2 M_3)}{M_3 + 1} + \frac{M_2 (M_1 + M_2 M_3)}{M_3 + 1} - M_1 M_2} \quad (5.48)$$

Hier soll \pm betonen, das beide Werte Lösungen des (durch unsere Manipulationen verändertes) Gleichungssystems sind, mit klarer Bedeutung und offensichtlichen Bemerkungen.

Natürlich ist es klar das der reale Wert von $\epsilon_{\chi\nu}$ einer von den beiden Werten ist, er ist also in der Lösungsmenge der manipulierten Gleichungen enthalten, da diese von den Ausgangsgleichungen impliziert werden. . . .

Wir können daher hier \pm als "oder" interpretieren, mit der Bedeutung das entweder der + oder der - Wert gilt. Näheres am Ende dieses Abschnittes.

Diesen Ausdruck kann man simplifizieren, und wir erhalten

$$\epsilon_{\chi\nu} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(M_1 - M_2)^2 M_3}{(M_3 + 1)^2}} \quad (5.49)$$

Die Gleichungen (5.46), (5.47) und (5.49) ergeben die gesuchten Lösungen und ermöglichen eine explizite Ermittlung des Dielektrizitätstensors des belasteten FBG (bis auf das Vorzeichen von $\epsilon_{\chi\nu}$).

Mit den Ausdrücken für M_1 , M_2 und M_3 aus (5.39), (5.41), (5.44) ergibt sich schließlich die endgültige Lösung

$$\left\{ \begin{array}{l} |\epsilon_{\chi\nu}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1-c) \left(\frac{2\beta_G^2}{\mu\omega_{\text{Max},s}^2} - \frac{2\beta_G^2}{\mu\omega_{\text{Max},p}^2} \right)^2}{\left(\frac{1-c}{c} + 1 \right)^2 c}} \\ \epsilon_{\chi\chi} = \frac{\frac{2\beta_G^2}{\mu\omega_{\text{Max},p}^2} + \frac{2(1-c)\beta_G^2}{\mu c \omega_{\text{Max},s}^2}}{\frac{2(1-c)}{c} + 2} \\ \epsilon_{\nu\nu} = \frac{\frac{2(1-c)\beta_G^2}{\mu c \omega_{\text{Max},p}^2} + \frac{2\beta_G^2}{\mu\omega_{\text{Max},s}^2}}{\frac{2(1-c)}{c} + 2} \end{array} \right. \quad (5.50)$$

mit $c = c_P = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ sowie $\omega_{\text{Max},s}$ und $\omega_{\text{Max},p}$ bekannt aus den Messungen von $i_s(\omega)$ und $i_p(\omega)$ wie wir in den vorherigen Abschnitten gezeigt haben, siehe Abschnitt 5.2.

Somit ist alles gesagt.

$O\chi\nu\zeta$ ist das Hauptkoordinatensystem der PMF und des unbelasteten FBG, wie wir wissen.

Die Dielektrizitätskonstanten sind hier die absoluten Dielektrizitätskonstanten, wie immer in diesem Text. Auch μ ist absolut.

In der Herleitung wurde $\epsilon_{\chi\nu} \neq 0$ angenommen.

Der Fall $\epsilon_{\chi\nu} = 0$ impliziert keine Drehung der Hauptkoordinatensysteme der PMF und des belasteten FBG.

$\omega_{\text{Max},s}$ und $\omega_{\text{Max},p}$ sind *nicht* im Allgemeinen die Werte der Pulsationen in denen i_s maximal wird. Im Falle einer Überlappung gelten die Ergebnisse von Abschnitt 5.2.2.

$\epsilon_{\chi\chi}, \epsilon_{\nu\nu}, \epsilon_{\chi\nu}$ sind die Elemente des Dielektrizitätstensors des *belasteten* FBG im System $O\chi\nu\zeta$.

Als kurze Zusammenfassung gilt die folgende

Behauptung 5.3.1 *Der Dielektrizitätstensor des belasteten FBG kann anhand der uns bekannten⁵² Größen $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$ und $c = c_P = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ auf eindeutige Weise⁵³ rekonstruiert werden (in Abhängigkeit von β_G) mit Hilfe der Gleichungen (5.50).*

Der hier betrachtete Dielektrizitätstensor ist, wie immer in diesem Text, der absolute⁵⁴. Wir benutzen das Koordinatensystem $O\chi\nu\zeta$.

Außerdem beobachten wir, dass

Behauptung 5.3.2 *Falls wir in (5.50) $\omega_{\text{Max},s}$ mit $\omega_{\text{Max},p}$ und umgekehrt vertauschen, und falls wir c mit $1 - c$ vertauschen (oder umgekehrt⁵⁵), so erhalten wir dieselben Ausdrücke, also dieselbe Lösung.*

Der Beweis dieser Behauptung folgt durch simples Einsetzen, mit einfachen Bemerkungen. □

Wir sehen also, dass die angesprochene Vertauschung keinerlei Auswirkungen hat. So sind unsere Bedenken aus Abschnitt 5.2 a posteriori aus dem Weg geräumt worden.

Es bleibt nur noch die explizite Bestimmung von β_G die wir uns im nächsten Abschnitt vornehmen.

⁵²und aus dem gemessenen Verlauf von i_s bzw. i_p ermittelten

⁵³bis auf das Vorzeichen von $\epsilon_{\chi\nu}$ wie man sieht. . .

⁵⁴auch μ ist absolut für das Medium der Faser.

⁵⁵man bedenke auch, dass $c \in [0, 1]$

Siehe auch die Bemerkungen aus Abschnitt 5.6.

Ob es möglich ist mit dieser Methode auch das Vorzeichen von $\epsilon_{\chi v}$ zu bestimmen erscheint sehr fraglich. Man bedenke, dass mit unserer Methode eine Vorzeichenänderung von $\epsilon_{\chi v}$ eine Vertauschung der Werte für ω_{Max} zur Folge hat, siehe Abschnitt 5.6 und Anhang C.

Außerdem erscheint in (5.32) (??) und (5.36) $\epsilon_{\chi v}$ nur im Quadrat, außerhalb der sgn Funktion. . .

5.4 Rekonstruktion des Strain Tensors

In diesem Abschnitt wollen wir endlich den vollen Strain Tensor rekonstruieren.

Als erstes drücken wir die Einträge des Strain Tensors in Funktion von β_G aus, und implizit auch von der Temperatur T . Danach skizzieren wir eine Methode mit der man auch diese Größen explizit bestimmen kann.

5.4.1 Bestimmung der Einträge des Strain Tensors in Funktion von β_G

Wir sind nun in der Lage den Strain Tensor zu rekonstruieren, in Funktion von β_G und (implizit) von der Temperatur T des Materials aus dem das Fiber Bragg Grating (FBG) besteht.

Nach der expliziten Bestimmung von β_G und T sind somit alle Größen explizit bekannt.

Wir werden hier eine Methode beschreiben, mit der man auch β_G und T bestimmen kann, anhand der uns aus den Messungen schon explizit bekannten Größen $\omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{\text{Max},p}$, $c = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$.

Dazu lösen wir das System der Gleichungen⁵⁶ (3), (4), (8) und (14) aus [16].

⁵⁶ Der Vollständigkeit wegen schreiben wir diese Gleichungen aus [16] hier nochmals auf, mit unserer Notation

$$\Delta\epsilon_{\chi\chi,r} = -(\epsilon_{\chi\chi,r}^{(0)})^2(p_{11}e_{\chi\chi} + p_{12}(e_{vv} + e_{\zeta\zeta})) \quad (5.51)$$

$$\Delta\epsilon_{vv,r} = -(\epsilon_{vv,r}^{(0)})^2(p_{11}e_{vv} + p_{12}(e_{\chi\chi} + e_{\zeta\zeta})) \quad (5.52)$$

$$\Delta\epsilon_{\chi v,r} = -\epsilon_{\chi\chi,r}^{(0)}\epsilon_{vv,r}^{(0)}\frac{1}{2}(p_{11} - p_{12})e_{\chi v} \quad (5.53)$$

$$\beta_G = \frac{\pi}{\Lambda(1 + e_{\zeta\zeta})} \quad (5.54)$$

für die Bedeutung der Symbole siehe auch [16] mit der Bemerkung, dass wir hier $O_{\chi v \zeta}$ als Koordinatensystem verwenden. r bedeutet relative Dielektrizitätskonstante. Siehe auch (5.56) und (5.57).

Wir erhalten somit die Lösung

$$\begin{cases} e_{\chi v} = -\frac{2\Delta\epsilon_{\chi v,r}}{(p_{11}-p_{12})\epsilon_{vv,r}^{(0)}\epsilon_{\chi\chi,r}^{(0)}} \\ e_{\chi\chi} = \frac{p_{12}\left(p_{12}\left(\frac{\pi}{\Lambda\beta_G}-1\right)+\frac{\Delta\epsilon_{vv,r}}{\epsilon_{vv,r}^{(0)}2}\right)+p_{11}\left(p_{12}\left(1-\frac{\pi}{\Lambda\beta_G}\right)-\frac{\Delta\epsilon_{\chi\chi,r}}{\epsilon_{\chi\chi,r}^{(0)}2}\right)}{p_{11}^2-p_{12}^2} \\ e_{vv} = \frac{p_{11}\left(p_{12}\left(1-\frac{\pi}{\Lambda\beta_G}\right)-\frac{\Delta\epsilon_{vv,r}}{\epsilon_{vv,r}^{(0)}2}\right)+p_{12}\left(p_{12}\left(\frac{\pi}{\Lambda\beta_G}-1\right)+\frac{\Delta\epsilon_{\chi\chi,r}}{\epsilon_{\chi\chi,r}^{(0)}2}\right)}{p_{11}^2-p_{12}^2} \\ e_{\zeta\zeta} = \frac{\pi}{\Lambda\beta_G} - 1 \end{cases} \quad (5.55)$$

wobei p_{11}, p_{12} elastooptische konstanten sind wie in [16] definiert.

$e_{\chi\chi}, e_{vv}, e_{\zeta\zeta}, e_{\chi v}$ sind die Einträge des Strain Tensors im Koordinatensystem $O\chi v\zeta$, mit der üblichen Bedeutung.

$\epsilon_{\chi\chi,r}^{(0)}, \epsilon_{vv,r}^{(0)}, \epsilon_{\zeta\zeta,r}^{(0)}$ sind die Einträge des *relativen* Dielektrizitätstensor des Mediums des FBG *ohne* Kraftereinwirkung, also für das unbelastete⁵⁷ Material des FBG (ausgedrückt in $O\chi v\zeta$).

Da gerade $O\chi v\zeta$ das Hauptkoordinatensystem für dieses unbelastete Medium ist, haben wir selbstverständlich nur die Diagonalelemente die verschieden von Null sind⁵⁸.

Es ist

$$\Delta\epsilon_{ij,r} = \epsilon_{ij,r} - \epsilon_{ij,r}^{(0)} \quad i, j = \chi, v, \zeta \quad (5.56)$$

wobei r symbolisiert, dass wir es mit *relativen* Dielektrizitätskonstanten zu tun haben. Es ist $\epsilon_{\chi v,r}^{(0)} = 0$, wie gesagt, und analoges gilt für andere Elemente die nicht auf der Hauptdiagonale sind.

Es gilt bekanntlich

$$\underline{\underline{\epsilon}}_r = \frac{1}{\epsilon_0} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (5.57)$$

Wir können, um die Notation zu vereinfachen, die Ergebnisse von (5.55) in Matrix Form schreiben

$$\begin{pmatrix} e_{\chi v} \\ e_{\chi\chi} \\ e_{vv} \\ e_{\zeta\zeta} \end{pmatrix} = E(\epsilon_{\chi v}, \epsilon_{\chi\chi}, \epsilon_{vv}, \beta_G, \Lambda, \underline{\underline{\epsilon}}^{(0)}, p_{11}, p_{12}) \quad (5.58)$$

Die Funktion E ist natürlich bekannt und folgt aus (5.55), (5.56) und (5.57).

⁵⁷daher natürlich das Symbol (0)

⁵⁸also sind alle anderen Elemente gleich Null.

Außerdem ist eine implizite Abhängigkeit von der Temperatur T vorhanden.
 $p_{11}, p_{12}, \underline{\underline{\epsilon}}^{(0)}, \Lambda$ sind bekannte Größen in Funktion der Temperatur.

Λ ist die Nennperiode (nominal period), siehe [18].

Wir können nun die Ergebnisse (5.50) einsetzen, und erhalten (nach Berechnungen und Simplifikationen) so die Lösungen in Tabelle 5.1 mit klarer Bedeutung der Symbole.

Es ist $\omega_{M_s} = \omega_{\text{Max},s}, \omega_{M_p} = \omega_{\text{Max},p}, c = c_P = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ mit der üblichen Bedeutung.

Wir fassen diese wichtige Ergebnisse zusammen in

Behauptung 5.4.1 *Der Strain Tensor, in Funktion von den bekannten und gemessenen Größen $\omega_{M_s} = \omega_{\text{Max},s}, \omega_{M_p} = \omega_{\text{Max},p}, c = c_P = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ und von β_G und (implizit) in Funktion von der Temperatur T ist gegeben in Tabelle 5.1. Es ist natürlich $\epsilon_{\chi\nu}^{(0)} = 0$ wegen der Definition von $O\chi\nu\zeta$.*

Wie schreiben auch hier eine vereinfachte Notation

$$\begin{pmatrix} |e_{\chi\nu}| \\ e_{\chi\chi} \\ e_{\nu\nu} \\ e_{\zeta\zeta} \end{pmatrix} = \tilde{E}(\beta_G, T; \underbrace{\omega_{\text{Max},s}, \omega_{\text{Max},p}, c}_{\text{bekannt}}) \quad (5.59)$$

Die Funktion \tilde{E} folgt natürlich aus Tabelle 5.1. Wir berücksichtigen auch die implizite Abhängigkeit von der Temperatur.

Wir werden nun β_G und die Temperatur bestimmen.

5.4.2 Bestimmung von β_G und von T

Wenn wir unsere Glasfaser so konstruieren, dass ein doppeltes superponiertes Gitter vorhanden ist, mit deutlich verschiedenen Gitterkonstante bzw. Wellenlänge für das Gitter, so können wir den vollen Strain Tensor (und die Dielektrizitätskonstante) und die Temperatur explizit rekonstruieren.

Diese Methode ist in [23] und [24] beschrieben.

Sie beruht auf der Tatsache, dass das Material der Faser nicht ganz linear ist, wie in [23] deutlich betont ist.

Da die beiden Gitter sich nicht gegenseitig beeinflussen gilt, mit ganz analoger Vor-

$$\begin{aligned}
|e_{\chi v}| &= \frac{2\epsilon_0 \left(\sqrt{\frac{(c-1)c\beta_G^2 \left(\frac{\omega_{Mp}^2}{\omega_{Ms}^2} - \omega_{Ms}^2 \right)^2}{\mu^2 \omega_{Mp}^2 \omega_{Ms}^2}} \right)}{(p_{11} - p_{12}) \epsilon_{vv}^{(0)} \epsilon_{\chi\chi}^{(0)}} \\
\epsilon_{\chi\chi} &= \frac{p_{11} \left(\Lambda \epsilon_0 \left((c-1) \omega_{Mp}^2 - c \omega_{Ms}^2 \right) \beta_G^2 + \Lambda \mu \omega_{Mp}^2 + p_{12} \left(\Lambda \epsilon_0 \left(\epsilon_0 + p_{12} \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \right) \beta_G - \pi \mu p_{12} \omega_{Mp}^2 \omega_{Ms}^2 \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \right) \epsilon_{vv}^{(0)} + p_{12} \left(\Lambda c \epsilon_0 \left(\omega_{Mp}^2 - \omega_{Ms}^2 \right) \beta_G^2 + \omega_{Ms}^2 \left(\Lambda \beta_G^2 \epsilon_0 - \mu \omega_{Mp}^2 \epsilon_{vv}^{(0)} \right) \right) \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \right) \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \right)}{\Lambda \mu \left(p_{11}^2 - p_{12}^2 \right) \beta_G \omega_{Mp}^2 \omega_{Ms}^2 \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \epsilon_{\chi\chi}^{(0)}} \\
\epsilon_{vv} &= \frac{\mu p_{12}^2 (\pi - \Lambda \beta_G) \omega_{Mp}^2 \omega_{Ms}^2 \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \epsilon_{vv}^{(0)} + p_{12} \left(\Lambda \epsilon_0 \left(c \omega_{Ms}^2 - (c-1) \omega_{Mp}^2 \right) \beta_G^2 + \Lambda \mu \omega_{Mp}^2 \omega_{Ms}^2 \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \right) \beta_G - \pi \mu p_{11} \omega_{Mp}^2 \omega_{Ms}^2 \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \epsilon_{vv}^{(0)} + \Lambda p_{11} \beta_G \epsilon_0 \left(c \left(\omega_{Ms}^2 - \omega_{Mp}^2 \right) \beta_G^2 + \omega_{Ms}^2 \left(\mu \omega_{Mp}^2 \epsilon_{vv}^{(0)} - \beta_G^2 \right) \right) \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \right)}{\Lambda \mu \left(p_{11}^2 - p_{12}^2 \right) \beta_G \omega_{Mp}^2 \omega_{Ms}^2 \epsilon_{\chi\chi}^{(0)} \epsilon_{\chi\chi}^{(0)}} \\
\epsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{\pi}{\Lambda \beta_G} - 1
\end{aligned}$$

Tabelle 5.1: Die Einträge des Strain Tensors im System $O\chi v\zeta$ in Funktion von gemessenen Größen und von β_G . Es ist $\omega_{Ms} = \omega_{\text{Max},s}$, $\omega_{Mp} = \omega_{\text{Max},p}$, $C = C_P = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ mit der üblichen Bedeutung. $\epsilon_{\chi v}^{(0)} = 0$.

gehensweise wie bisher, dass

$$\begin{pmatrix} |e_{\chi v}| \\ e_{\chi\chi} \\ e_{vv} \\ e_{\zeta\zeta} \end{pmatrix} = \tilde{E}_{G_2}(\beta_{G,G_2}, T; \underbrace{\omega_{\text{Max},s,G_2}, \omega_{\text{Max},p,G_2}, c_{G_2}}_{\text{bekannt}}) \quad (5.60)$$

mit klarer Bedeutung⁵⁹. Natürlich ist und die Funktion \tilde{E}_{G_2} bekannt, mit einer analogen Vorgehensweise wie bisher beschrieben (für das Gitter 1).

Die Einträge des Strain Tensors müssen dieselben sein wie in (5.59), da nur eine Kraft auf beide Gitter gleichermaßen einwirkt. Auch die Temperatur T wird dieselbe sein für beide Gitter.

G_2 symbolisiert Größen und Funktionen die sich auf das zweite (superponierte) Gitter beziehen.

Das Verhältnis zwischen β_G und β_{G,G_2} ist bekannt aus der Konstruktion der superponierten Gratings in derselben Faser, mit $\beta_{G,G_2} = r \beta_G$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ bekannt.

Man sieht also, mit (5.59) und (5.60), dass gelten muss

$$\tilde{E}(\beta_G, T; \underbrace{\omega_{\text{Max},s}, \omega_{\text{Max},p}, c}_{\text{bekannt}}) = \tilde{E}_{G_2}(r \beta_G, T; \underbrace{\omega_{\text{Max},s,G_2}, \omega_{\text{Max},p,G_2}, c_{G_2}}_{\text{bekannt}}) \quad (5.61)$$

“bekannt” bedeutet, dass die entsprechenden Größen aus den Messungen der reflektierten mittleren Intensitäten (der Moden in der PMF Faser) hervorgehen, wie wir gesehen haben.

Die Auflösung dieses Gleichungssystems liefert uns explizit die Werte für β_G und für T .

Dies ist möglich wegen der besprochenen leichten nicht Linearität des optischen Mediums, siehe [23].

Einsetzen des Wertes von β_G in (5.50) liefert somit explizit die numerischen Werte für $\epsilon_{\chi v}, \epsilon_{\chi\chi}, \epsilon_{vv}$.

Einsetzen dieser Größen in (5.58) bzw. in Tabelle 5.1 (mit β_G bzw. T) bzw. in (5.55) liefert somit die expliziten numerischen Werte für den Strain Tensor, die somit bekannt sind.

Wir haben somit $e_{\chi v}, e_{\chi\chi}, e_{vv}, e_{\zeta\zeta}$ rekonstruiert und kennen diese (numerischen) Werte explizit.

⁵⁹auch hier soll gelten $c_{G_2} = c_{P,G_2} = T_{12,G_2}^2 = \sin^2 \alpha_{G_2}$.

Man beachte auch immer (5.56) mit (5.57) bei der Bestimmung der Funktionen E bzw. \tilde{E} .

Wir fassen diese Ergebnisse im folgenden zusammen.

5.4.3 Zusammenfassung der Rekonstruktion des Strain Tensors

Zusammenfassend gilt also die

Behauptung 5.4.2 *Wir haben somit den vollen Strain Tensor rekonstruiert⁶⁰ und kennen explizit die numerischen Werte für $e_{\chi\nu}, e_{\chi\chi}, e_{\nu\nu}, e_{\zeta\zeta}$, ausgehend von den reflektierten mittleren Intensitäten in der PMF Faser (also von den mittleren Intensitäten der rücklaufenden Moden in der PMF), mit der Methode die in diesem Text beschrieben und hergeleitet wurde.*

Man beachte die Ausdrücke in Tabelle 5.1 bzw in (5.55) die den Strain Tensor angeben, in Funktion von bekannten Größen.

Man beachte auch (5.50) für die Einträge des Dielektrizitätstensors des belasteten FBG.

Man beachte, wie immer, die Definition der Koordinatensysteme $O\chi\nu\zeta$ und $Oxyz$.

Siehe Abbildung 4.1.

5.5 Optimaler Arbeitsbereich des Sensors

Wir wissen, dass der Sensor⁶¹ den wir betrachten “am brauchbarsten” ist, falls die Situation von Abschnitt 5.2.1 vorhanden ist: wir brauchen dann keinerlei numerische Verfahren anzuwenden und die Ergebnisse werden schnell, einfach und robust geliefert, wie wir hergeleitet und gezeigt haben.

Mit Behauptung 5.1.3 wissen wir, dass diese Lage äquivalent ist zu dem Fall, dass sich die Gauss Glocken g_s und g_p nicht überlappen.

Siehe Abschnitt 5.2.1.

Hier wollen wir eine Bedingung herleiten um zu wissen, *wann* sich die Gauss Glocken g_s und g_p nicht überlappen, so dass wir den optimalen Arbeitsbereich des Sensors ermitteln können.

Außerhalb dieses optimalen Bereiches bzw. wenn sich die Glocken g_s und g_p überlappen können wir aber natürlich *trotzdem* zu einem brauchbaren Ergebnis kommen, mit Hilfe

⁶⁰das soll heißen, das wir eben die Elemente $e_{\chi\nu}, e_{\chi\chi}, e_{\nu\nu}, e_{\zeta\zeta}$ kennen...

⁶¹also natürlich das System, das wir bisher betrachtet haben, siehe Abbildung 4.1...

auch von numerischen Verfahren, wie wir ausführlich in diesem Text gezeigt haben. Siehe Abschnitt 5.2.2.

Wir wollen nun also den *optimalen* Arbeitsbereich des Sensors ermitteln, für den g_s und g_p sich⁶² eben nicht überlappen.

Dies bedeutet, dass

$$|\omega_{\text{Max},s} - \omega_{\text{Max},p}| > k(2\sigma) \quad (5.62)$$

sein soll, siehe Behauptung 5.1.3. Es ist, wegen unseren Annahmen, $k = 3$.

Einsetzen von (5.32) und (5.33) in (5.62), liefert somit eine Bedingung die $\epsilon_{\chi\chi}$, ϵ_{vv} , $\epsilon_{\chi v}$ und β_G erfüllen müssen damit g_s und g_p (als Funktionen von ω) sich nicht überlappen und damit also der Sensor optimal arbeitet.

Wenn wir nun die Gleichungen (3), (4), (8) und (14) aus [16] betrachten, und somit $\epsilon_{\chi\chi}$, ϵ_{vv} , $\epsilon_{\chi v}$ und β_G in Funktion der Elemente des Strain Tensors ausdrücken⁶³, erhalten wir eine Bedingung, die die Elemente des Strain Tensors erfüllen müssen, damit sich g_s und g_p *nicht* überlappen.

Die Gleichungen aus [16] sind nochmals in Fußnote 56 auf Seite 96 aufgelistet, mit Berücksichtigung der in diesem Text üblichen Notation⁶⁴.

Die so gefundene Bedingung (die natürlich aus (5.62) folgt) ist eine Ungleichung: für alle Strain Tensoren die diese Ungleichung erfüllen arbeitet der in diesem Text beschriebene Sensor robust und optimal und "am einfachsten", da sich eben g_s und g_p nicht überlappen und somit die Ergebnisse aus Abschnitt 5.2.1 gelten, für die nur einfache Schritte notwendig sind, ohne Einsatz von numerischen Verfahren, wie wir gezeigt haben.

Wir werden aber hier diese "Optimalitätsbedingung" nicht explizit herleiten, da auch die notwendigen Schritte einfach sind.

Man beachte aber in der Herleitung (5.56) und (5.57) und die genaue Definition des (von uns verwendeten) Koordinatensystems $O\chi v\zeta$.

5.6 Wichtige Bemerkungen

In unserer Abhandlung ist $Oxyz$ immer ein Koordinatensystem mit der üblichen gegenseitigen Orientierung der Achsen, siehe Abbildung C.1. Siehe auch Fußnote 10 auf Seite 166.

⁶²als Funktion von ω

⁶³in unserem Koordinatensystem $O\chi v\zeta$ natürlich. . .

⁶⁴siehe auch (5.56) und (5.57) mit der Bemerkung, dass $\epsilon_{\chi v,r}^{(0)} = 0$ wegen der Eigenschaften von $O\chi v\zeta$.

Natürlich gilt dies auch für $O\chi v\zeta$.

Außerdem ist immer $z = \zeta$, wie wir wissen, siehe Anhang C.

Es sind allerdings zwei Situationen möglich⁶⁵, die in Abbildung 5.1 gezeigt sind. Siehe auch Abbildung 4.1.

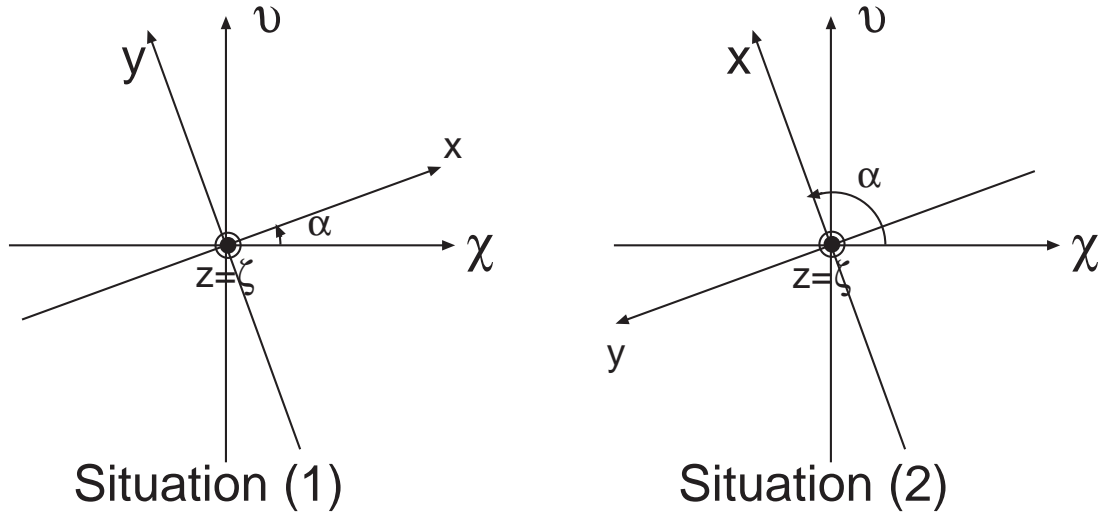


Abbildung 5.1: Die zwei Möglichkeiten für die Lage von $Oxyz$ und $O\chi v\zeta$. Falls $\epsilon_{\chi v}$ oder $\epsilon_{\chi\chi} - \epsilon_{vv}$ das Vorzeichen ändern, so erfolgt ein unstetiger Übergang zwischen den beiden abgebildeten Situationen. Dies widerspricht nicht physikalischen Gesetzen und ist kein Absurdum: es folgt aus unserer Notation

Es ist möglich das man unstetig von der einen Situation in die andere gelangt, wenn $\epsilon_{\chi v}$ und/oder $\epsilon_{\chi\chi} - \epsilon_{vv}$ das Vorzeichen wechseln⁶⁶.

Diese sprunghafte Unstetigkeit von α (mit einem Sprung von $\frac{\pi}{2}$) ist aber nicht widersprüchlich und es folgt kein physikalisches Absurdum.

Die Lage folgt allein aus unserer Notation.

Wenn wir in Abbildung 5.1 (2) erst die Orientierung der y Achse vertauschen (also y durch $-y$ ersetzen, und wir erinnern, dass falls \vec{v} Eigenvektor ist von $\underline{\underline{\epsilon}}$, dann ist auch $-\vec{v}$ ein Eigenvektor (mit derselben Länge) für denselben Eigenwert) und dann die Achsen

⁶⁵und nur diese zwei. . .

⁶⁶also von negativ positiv werden oder umgekehrt.

umbenennen kehren wir zur Lage (1) zurück.

Dies impliziert auch eine Umbenennung von ϵ_x und ϵ_y (also eine Vertauschung der Werte) und, mit (3.27) und (3.28) eine Vertauschung von $\omega_{\text{Max},s}$ mit $\omega_{\text{Max},p}$ (und umgekehrt), mit unserer Notation⁶⁷.

Außerdem würde α durch $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ersetzt werden.

Es gilt

$$\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin^2\alpha \quad (5.63)$$

Das bedeutet, dass mit (5.3) aus $c_{\text{alt}} = \sin^2\alpha$, $c_{\text{neu}} = \sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin^2\alpha = 1 - c_{\text{alt}}$ wird.

Entsprechendes gilt für T , siehe (4.28).

Wir werden aber a posteriori sehen, dass so eine Vertauschung bzw. Uneindeutigkeit keinerlei Konsequenzen auf die Ergebnisse haben wird, da diese in sich selbst transformiert werden.

Siehe Behauptung 5.3.2 und (5.50).

Man sieht also sofort, dass wenn wir nicht a priori wissen ob die Situation (1) oder (2) von Abbildung 5.1 eintritt, dies keine Rolle spielt für unsere Zwecke⁶⁸.

Wir bestimmen mit der Methode die wir im Text hergeleitet haben die beiden Werte für ω_{Max} ohne sie dem s oder p *Symbol* zuzuordnen. . .

Oder besser wir wählen eine willkürliche Zuordnung.

Wir bestimmen $c = c_P$ wie in Abschnitt 5.2.2 oder mit (5.14) bzw. (5.15) beschrieben (man beachte, dass eine Vertauschung von den ω_{Max} Werten *immer* eine Vertauschung von c und $1 - c$ zur Folge hat. . .).

Mit Behauptung 5.3.2 folgt dann aus der Lösung (5.50) für alle Fälle das korrekte Ergebnis⁶⁹.

Also stellt die Uneindeutigkeit kein Problem dar.

Dies erklärt auch, warum in manchen Graphiken im Kapitel 6 die Funktionen g_s und g_p bzw. i_s und i_p vertauscht erscheinen.

In Wirklichkeit ist dies nur eine Frage der Notation⁷⁰.

Wir werden diese Bemerkungen nicht mehr wiederholen.

⁶⁷siehe Anhang C und die bisherigen Ergebnisse.

⁶⁸letztendlich beobachten wir keinen Unterschied

⁶⁹wobei $\epsilon_{\chi v}$ nur im Betrag bestimmt wird.

⁷⁰speziell von unserer Notation

6 Numerische Beispiele

Wir wollen in diesem Kapitel einige numerische Beispiele angeben was die in diesem Text hergeleiteten Ergebnisse betrifft.

Dies sowohl zur Verdeutlichung als auch zur Bekräftigung dieser Ergebnisse.

Wir fangen mit dem einfachen Fall an, dass auf das FBG keine Kraft einwirkt, und studieren dann die Effekte der Krafteinwirkung auf das Material des FBG.

6.1 Keine Krafteinwirkung auf das FBG

Wir nehmen als erstes an, dass auf das FBG keine Kraft einwirkt, wie gesagt.

Es sei

$$L = 5 \times 10^{-3} m \quad (6.1)$$

für die Länge des Gitters.

Für die Dielektrizitätskonstante des unbelasteten Materials gelte in $O\chi\nu\zeta$

$$\epsilon_{\nu\nu}^{(0)} = 1.46^2 \epsilon_0 = 1.88475 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.2)$$

$$\epsilon_{\chi\chi}^{(0)} = 1.88395 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.3)$$

und es sei

$$\Delta\epsilon_G = 2.58194 \times 10^{-15} \frac{F}{m} \quad (6.4)$$

Wir berechnen nun die Antwort des Messsystems für dieses unbelastete Material.

Dazu setzen wir die Werte von $\epsilon_{\nu\nu}^{(0)}$ und $\epsilon_{\chi\chi}^{(0)}$ für ϵ_y und ϵ_x ein in (1.39) und (1.38) und setzen die gefundenen Ausdrücke in (3.25) ein und in die analoge Gleichung für den p Modus.

Wir dürfen (4.20) und (4.21) dagegen nicht verwenden, da diese Gleichungen nur für $\epsilon_{\chi\nu} \neq 0$ gelten, wie wir immer angenommen haben, explizit oder implizit.

Es ist natürlich $\mu = \mu_0$ und

$$\beta_G = \frac{\pi}{\Lambda} = 5.91836 \times 10^6 m^{-1} \quad (6.5)$$

für das unbelastete Gitter (so ist $e_{\zeta\zeta} = 0$), mit

$$\Lambda = 5.30822 \times 10^{-7} m \quad (6.6)$$

Der Betrag des Reflexionskoeffizienten $\rho_{\text{FBG},s}$ ist in Funktion von ω (in s^{-1}) in Abbildung 6.1 gezeigt. In Abbildung 6.2 ist nochmals $|\rho_{\text{FBG},s}|$ zu sehen in Funktion von λ_0 (in

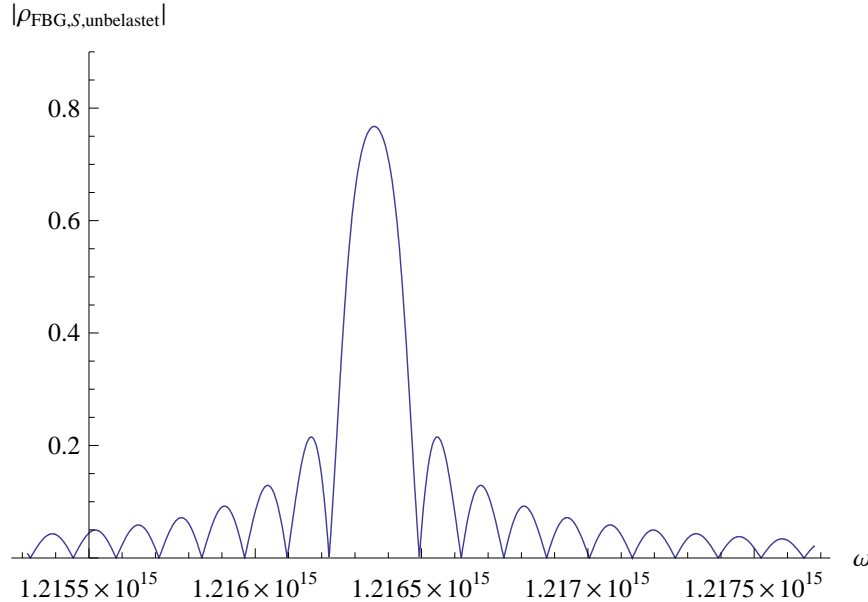


Abbildung 6.1: Der Betrag von $\rho_{\text{FBG},s}$ in Funktion von ω (in s^{-1}) für das unbelastete FBG

m), gemäß (A.116). Man beachte das Maximum für $\lambda_0 = 1.5497 \times 10^{-6} m$ circa.

Die Breite der Glocke in Abbildung 6.2 ist etwas kleiner als $3 \times 10^{-10} m$. An diesem Wert können wir uns orientieren für die Berechnung von σ .

In Abbildung 6.3 ist auch der Verlauf von $|\rho_{\text{FBG},p}|$ eingezeichnet (gestrichelte Linie) in Funktion von ω in s^{-1} . Entsprechend ist in Abbildung 6.4 der Verlauf des Betrages der beiden Reflexionskoeffizienten gezeichnet in Funktion von λ_0 (in m).

Man sieht, dass ohne Krafteinwirkung sich die beiden Glocken nicht überlappen. Auch für hinreichend kleine Belastungen des FBG werden sich entsprechend die Glocken nicht überlappen bzw. nur vernachlässigbar wenig überlappen.

Man sieht, dass für den Fall ohne Krafteinwirkung $|\rho_{\text{FBG},p}$ nur eine Translation von $|\rho_{\text{FBG},s}|$ ist.

Wir sehen, dass das Maximum für den Betrag des Reflexionskoeffizienten des p Modus für Wellenlängen um $1.550 \times 10^{-6} m$ circa stattfindet.

Für die Werte der Maxima finden wir

$$\omega_{\text{Max},s} = 1.21636 \times 10^{15} s^{-1} \quad (6.7)$$

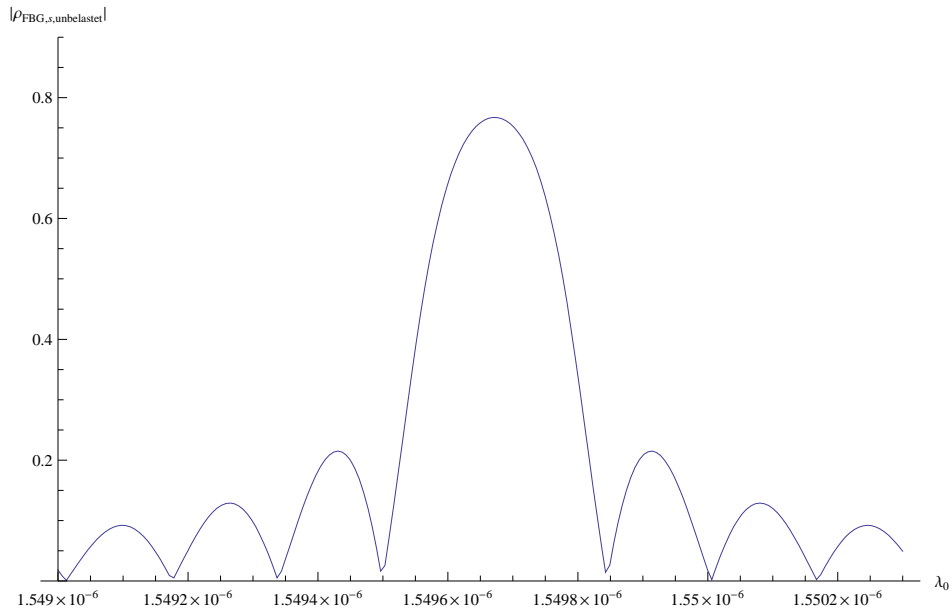


Abbildung 6.2: Der Betrag von $\rho_{\text{FBG},s}$ in Funktion von λ_0 (in m) für das unbelastete FBG

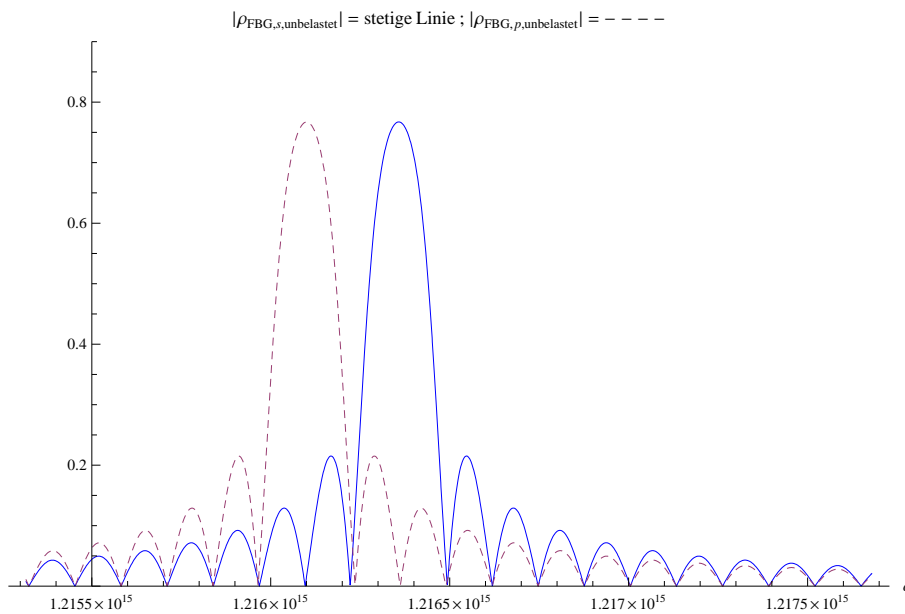


Abbildung 6.3: Der Betrag von $\rho_{\text{FBG},s}$ und von $\rho_{\text{FBG},p}$ in Funktion von ω (in s^{-1}) für das unbelastete FBG. Für den p Modus gilt die gestrichelte Linie.

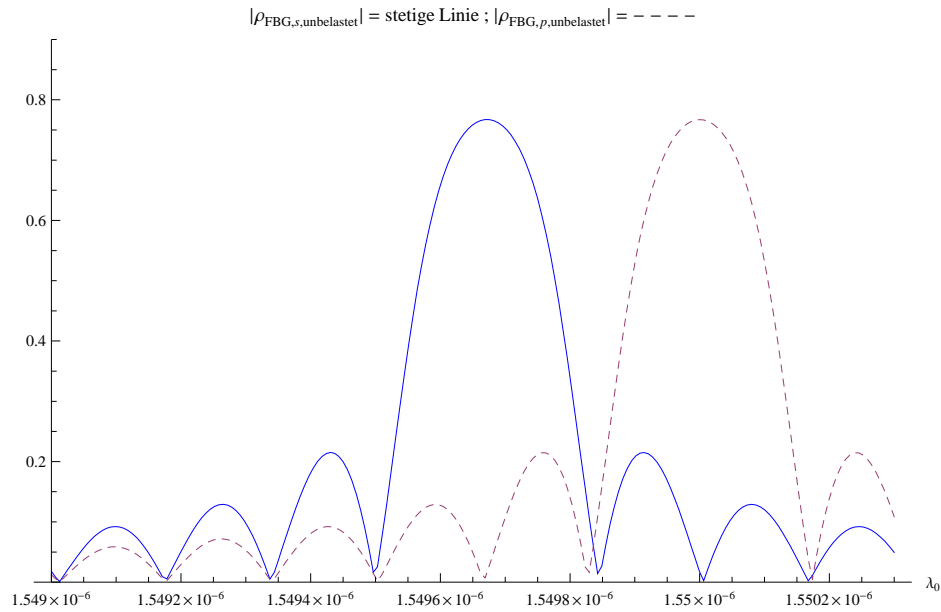


Abbildung 6.4: Der Betrag von $\rho_{\text{FBG},s}$ und von $\rho_{\text{FBG},p}$ in Funktion von λ_0 (in m) für das unbelastete FBG. Für den p Modus gilt die gestrichelte Linie.

$$\lambda_{0,\text{Max},s} = 1.54967 \times 10^{-6} m \quad (6.8)$$

$$\omega_{\text{Max},p} = 1.2161 \times 10^{15} s^{-1} \quad (6.9)$$

$$\lambda_{0,\text{Max},p} = 1.550 \times 10^{-6} m \quad (6.10)$$

wobei wir natürlich (A.115) bzw. (A.116) berücksichtigt haben.

Für diese Werte gilt

$$|\rho_{\text{FBG},p}(\omega_{\text{Max},p})| \simeq |\rho_{\text{FBG},s}(\omega_{\text{Max},s})| = 0.7673 \quad (6.11)$$

Diese Ergebnisse sind graphisch in Abbildung 6.5 gezeigt.
Siehe auch die Bemerkungen aus Abschnitt 5.6.

Wir werden nun eine Kraft auf unser FBG einwirken lassen

6.2 Krafteinwirkung auf das FBG

6.2.1 Erstes Beispiel

Wir werden nun eine Kraft auf das FBG einwirken lassen, siehe Abbildung 4.1.

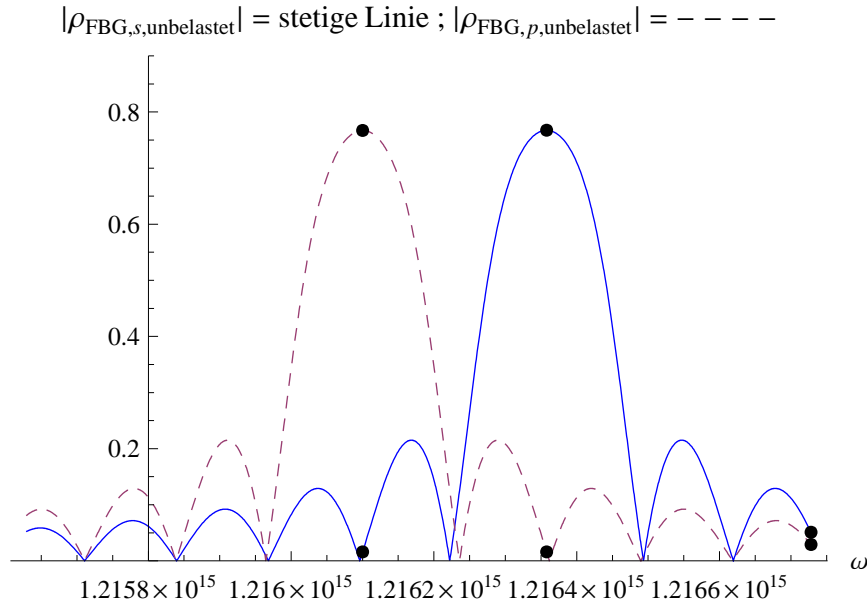


Abbildung 6.5: Die Maxima der Beträge der Reflexionskoeffizienten für den s Modus (stetige Linie) und den p Modus (gestrichelte Linie) in Funktion von ω in s^{-1} für das unbelastete FBG.

Mit Hinblick auf (3), (4), (8) und (14) aus [16], siehe Fußnote 56 auf Seite 96, nehmen wir an, dass

$$p_{11} = 0.11 \quad p_{12} = 0.25 \quad (6.12)$$

Wir nehmen als erstes Beispiel an, dass

$$e_{\chi\chi} = 10^{-3} \quad e_{\chi v} = 0.25 \times 10^{-3} \quad e_{vv} = 0.75 \times 10^{-3} \quad e_{\zeta\zeta} = 0 \quad (6.13)$$

um unsere Ergebnisse zu testen.

Die Bedeutung der Koordinatensysteme $O\chi v\zeta$ und $Oxyz$ ist die übliche in diesem Text, siehe auch Abbildung 4.1.

Mit diesen Positionen folgt mit (5.56) und (5.57) und (6.2) und (6.3) und der Tatsache, dass $\epsilon_{\chi v}^{(0)} = 0$:

$$\epsilon_{\chi\chi} = 1.88276 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.14)$$

$$\epsilon_{vv} = 1.88341 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.15)$$

$$\epsilon_{\chi v} = 7.0277 \times 10^{-16} \frac{F}{m} \quad (6.16)$$

und

$$\beta_G = 5.91835 \times 10^6 \quad (6.17)$$

in internationalen Einheiten.

Die Dielektrizitätskonstanten sind, wie immer in diesem Text, absolut.

Mit diesen Werten ergibt sich mit (4.20) und (4.21) im Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ des *belasteten* Mediums des FBG

$$\epsilon_x = 1.88342 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.18)$$

$$\epsilon_y = 1.88275 \times 10^{-12} \frac{F}{m} \quad (6.19)$$

und mit (4.23) folgt

$$T_{12} = \sin \alpha = 0.99446 \quad (6.20)$$

Damit ergibt sich, mit (5.36) dass

$$c = T_{12}^2 = 0.988923 \quad (6.21)$$

Es soll nicht verwundern, dass dieser Wert sich 1 nähert und nicht 0, da die x Achse nicht unbedingt zur χ Achse tendieren muss, für $\alpha \rightarrow 0$, sondern eventuell auch zur v Achse tendieren kann. Siehe Anhang C.3 und Abschnitt 5.6.

Mit (3.27) und (3.28) ergibt sich, siehe auch (5.32) und (5.33):

$$\omega_{\text{Max},s} = 1.21653 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \quad (6.22)$$

$$\omega_{\text{Max},p} = 1.21675 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \quad (6.23)$$

Umrechnung mit (A.115) bzw. (A.116) folgt

$$\lambda_{0,\text{Max},s} = 1.54945 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (6.24)$$

$$\lambda_{0,\text{Max},p} = 1.54918 \times 10^{-6} \text{ m} \quad (6.25)$$

Die Reflexionskoeffizienten sind in Abbildung 6.6 dargestellt. Wie wir sehen, haben wir es mit einer leichten beginnenden Überlappung zu tun.

Die Vertauschung der Kurven der s und der p Moden gegenüber Abbildung 6.4 ist hier korrekt und hängt allein mit der passenden Wahl von \hat{x}_0 und \hat{y}_0 ab, siehe Anhang C und Abschnitte C.3 und 5.6.

Der Verlauf von $i_s(\lambda_0)$, siehe (A.115) bzw. (A.116) und (5.2) ist in Abbildung 6.7 gezeigt Die Punkte entsprechen den Werten für $\lambda_{0,\text{Max},s}$ und $\lambda_{0,\text{Max},p}$ mit klarer Bedeutung. Wie man sieht entsprechen diese Punkte *nicht ganz* den Werten für die i_s maximal wird, wie wir wissen.

Wir dürfen hier annehmen, dass es keine Überlappung gibt, da diese hinreichend klein ist wie aus einfachen Bemerkungen folgt, siehe Behauptung 5.1.3.

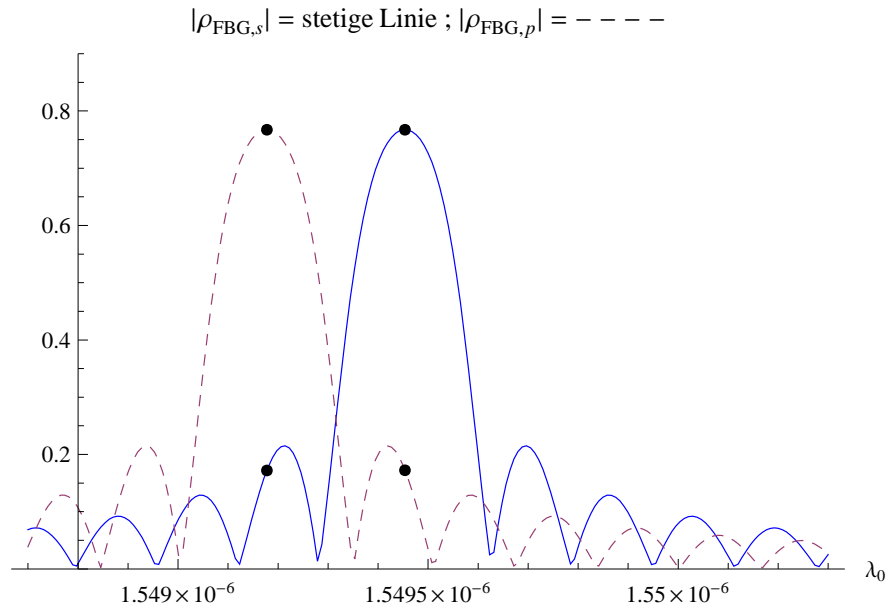


Abbildung 6.6: Die Beträge der Reflexionskoeffizienten für den s Modus (stetige Linie) und den p Modus (gestrichelte Linie) in Funktion von λ_0 in m für den belasteten Fall aus Beispiel 6.2.1.

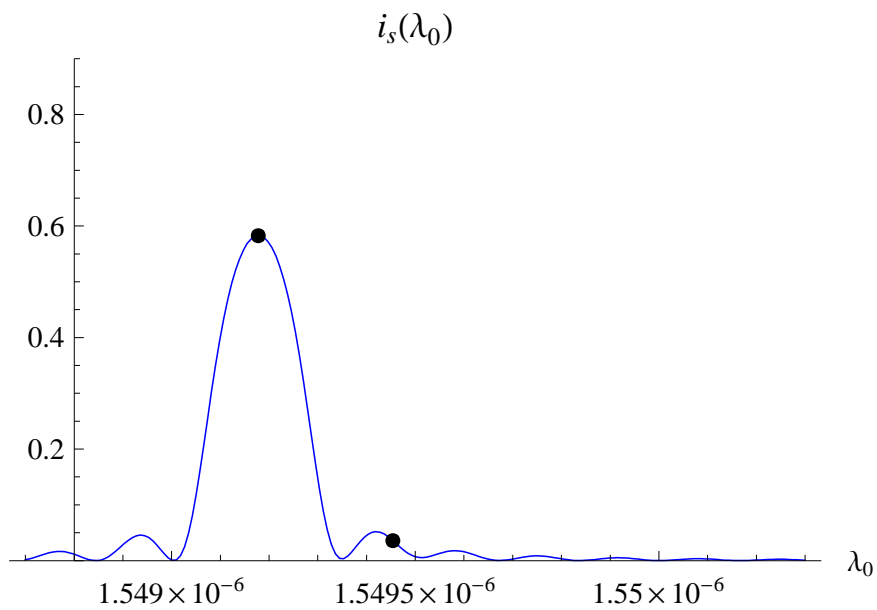


Abbildung 6.7: Die Funktion $i_s(\lambda_0)$ (für λ_0 in m) für Beispiel 6.2.1. Siehe (5.2).

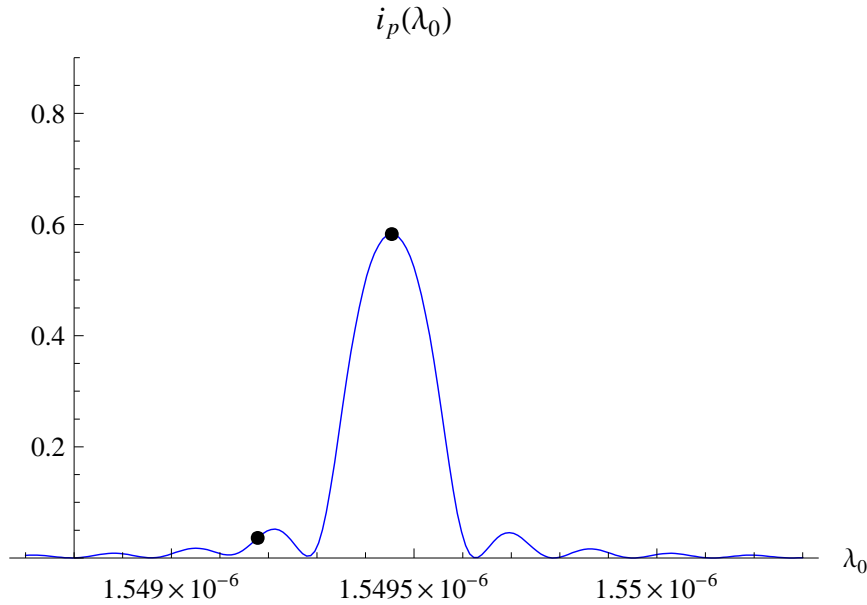


Abbildung 6.8: Die Funktion $i_p(\lambda_0)$ (für λ_0 in m) für Beispiel 6.2.1. Siehe (5.4).

In Abbildung 6.8 ist dagegen i_p in Funktion von λ_0 zu sehen, siehe (5.4) und wie immer (A.116). Die Punkte haben dieselbe Bedeutung wie oben.

Die Reihenfolge der Maxima ist korrekt anhand unserer Notation.

Die Punkte haben dieselbe Bedeutung wie für i_s .

Das Verhältnis $\frac{i_s}{i_p}$ ist in Abbildung 6.9 zu sehen, in Funktion von λ_0 (in m) um $\lambda_0 = \lambda_{0,\text{Max},s}$ herum. Für $\lambda_{0,\text{Max},s}$ gilt mit (5.15)

$$b_s = \frac{1-c}{c} = 0.011 \quad (6.26)$$

Die Werte für $\lambda_{0,\text{Max},s}$ und $\lambda_{0,\text{Max},p}$ (bzw. $\omega_{\text{Max},s}$ und $\omega_{\text{Max},p}$) sind leicht mit guter Approximation aus den Graphiken ablesbar, wie wir im Text besprochen haben.

Aus Abbildung 6.9 geht hervor, dass

$$b_s = \left. \frac{i_s}{i_p} \right|_{\lambda_0=\lambda_{0,\text{Max},s}} \simeq 0.06 \quad (6.27)$$

Entweder wir nehmen in erster Approximation diesen Wert an, woraus sich $c = 0.943$ ergibt (wie man sieht) oder wir wenden die Methoden von Abschnitt 5.2.2 an um genauere Ergebnisse zu erzielen.

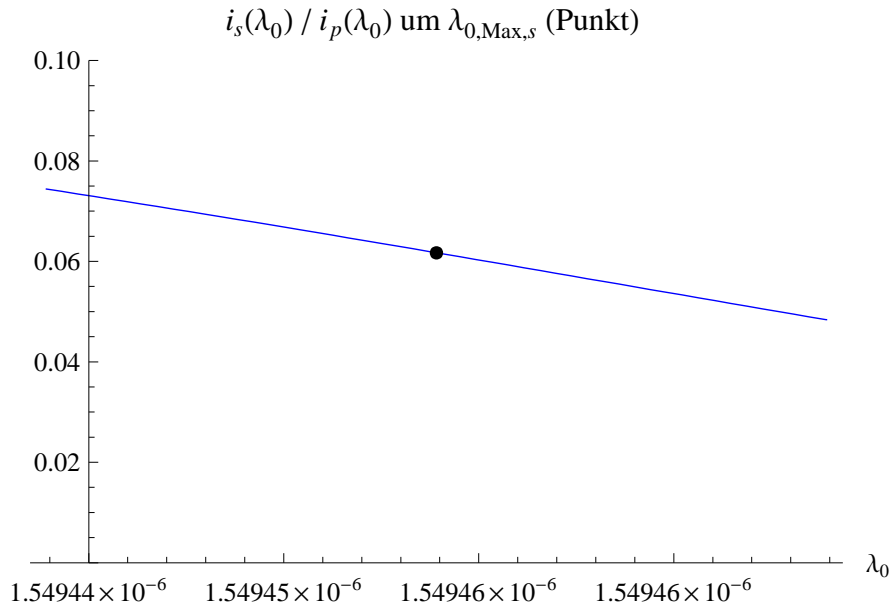


Abbildung 6.9: Die Funktion $\frac{i_s(\lambda_0)}{i_p(\lambda_0)}$ (mit λ_0 in m), für Beispiel 6.2.1 um $\lambda_{0, \text{Max}, s}$ (mit Punkt dargestellt).

Diese Methoden sollten eventuell so abgeändert werden, dass wir Verläufe wie in Abbildung 6.1 berücksichtigen können statt "reine" Gauss Glocken, mit klarer Bedeutung. Dies ist nicht schwierig¹.

Wir werden annehmen, dass wir den wahren Wert $c = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha = 0.988923$ gefunden haben² um unsere Ergebnisse so zu testen. Siehe (6.21).

Einsetzen von (6.22) (6.23) (6.21) in (5.50) mit (6.17) ergibt, dass

$$|\epsilon_{\chi v}| = 7.0277 \times 10^{-16} \frac{F}{m} \quad (6.28)$$

$$\epsilon_{\chi \chi} = 1.88276 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.29)$$

$$\epsilon_{vv} = 1.88341 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.30)$$

Wir finden so die korrekten Anfangswerte wieder, wie erwartet und erhofft. Siehe (6.14)-(6.16).

Siehe auch die Bemerkungen aus Abschnitt 5.6 was die Anordnung der Glocken betrifft.

¹es können auch noch Filter eingesetzt werden, um unerwünschte Frequenzbereiche auszublenden

²mit entsprechenden Methoden

Wichtige Bemerkungen

Nehmen wir nun an, dass wir die Werte für $\lambda_{0,\text{Max},s/p}$ falsch benannt haben (wir können nämlich aus den Messungen die genaue Reihenfolge nicht bestimmen, wie wir besprochen haben. Siehe Abschnitt 5.6).

Nehmen wir also an die beiden Werte (für den s und den p Modus) seien (fälschlicher Weise) vertauscht worden. . .

Wir werden sehen, dass dies keinerlei Konsequenzen zur Folge hat und dass wir dasselbe (korrekte) Ergebnis bekommen für die Elemente des Dielektrizitätstensors des FBG (in $O\chi v\zeta$ beschrieben, wie immer). Wir werden also die Ergebnisse von Abschnitt 5.6 verdeutlichen.

Es sei also im Folgendem

$$\omega_{\text{Max},s,\text{vert}} = 1.21675 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \quad (6.31)$$

$$\omega_{\text{Max},p,\text{vert}} = 1.21653 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \quad (6.32)$$

Wir haben also die Werte vertauscht.

Mit diesen Werten folgt aus (5.15)

$$b_{s,\text{vert}} = 16.22 \quad (6.33)$$

wobei "vert" für die Vertauschung der "wahren" Werte für ω_{Max} steht.

Daraus folgt, mit klarer Bedeutung

$$c_{\text{vert}} = 0.058 \quad (6.34)$$

Wir sehen dass

$$c_{\text{vert}} = 1 - 0.943 = 1 - c \quad (6.35)$$

ist, wobei c der im voraus in diesem Abschnitt 6.2.1 angegebene Wert ist.

Dieser Wert ist aber, wie wir gesehen hatten, nur eine Approximation der Realität.

Wir setzen daher, mit klarer Bedeutung

$$c_{\text{vert}} = 1 - c = 1 - 0.988923 = 0.0110772 \quad (6.36)$$

Einsetzen dieser Werte³ in der Lösung (5.50) ergibt

$$|\epsilon_{\chi v}| = 7.0277 \times 10^{-16} \frac{F}{m} \quad (6.37)$$

³also der Werte für die "Vertauschung"

$$\epsilon_{\chi\chi} = 1.88276 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.38)$$

$$\epsilon_{\nu\nu} = 1.88341 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.39)$$

Wir sehen also, dass wir mit den “vertauschten” Werten dieselbe Lösung erhalten wie im voraus in diesem Beispiel⁴.

Dies Bekräftigt also die Behauptung 5.3.2 und die Aussagen aus Abschnitt 5.6.

Wir wissen außerdem aus Abschnitt 5.2.2, dass die dort betrachteten Minimierungsprobleme zwei (absolute) Lösungen besitzen, nämlich (5.19) und (5.20).

Aus Behauptung 5.3.2 (und aus Abschnitt 5.6 und aus dem hier betrachteten Beispiel...) wissen wir, dass wir für die beiden Alternativen mit (5.50) *dieselbe* Lösung erhalten.

Wir können daher für die Werte von $\omega_{\text{Max},s/p}$ und c *willkürlich* eine der beiden Alternativen wählen (die hier mit “vertauscht” oder nicht bezeichnet wurden) und erhalten mit (5.50) immer die *korrekte* Lösung.

Dies folgt aus der Tatsache das aus c eben $1 - c$ wird⁵. Siehe Abschnitt 5.2.

Daraus folgt sofort, dass bei der Durchführung der Messung es egal ist, ob wir wissen bzw annehmen, dass $\omega_{\text{Max},s} \geq \omega_{\text{Max},p}$ wahr ist oder umgekehrt: beide Alternativen führen zum selben korrektem Ergebnis⁶.

6.2.2 Zweites Beispiel

Wir betrachten nun ein Zweites, sehr interessantes Beispiel.

Dazu verändern wir wie folgt die Parameter⁷ von Beispiel 6.2.1:

$$e_{\chi\chi} = 2 \times 10^{-3} \quad e_{\chi\nu} = -0.3 \times 10^{-3} \quad e_{\nu\nu} = 0.5 \times 10^{-3} \quad e_{\zeta\zeta} = 0 \quad (6.40)$$

Mit analoger Vorgehensweise wie im vorherigen Beispiel ergibt sich für die Dielektrizitätskonstante des FBG in $O\chi\nu\zeta$:

$$\epsilon_{\chi\chi} = 1.88257 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.41)$$

$$\epsilon_{\nu\nu} = 1.88252 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.42)$$

⁴diese Tatsache gilt natürlich im Allgemeinen, wie wir auch hier wieder betonen werden...

⁵wir erinnern außerdem, dass $0 \leq c \leq 1$.

⁶da eben $c_{\text{vert}} = 1 - c$. Siehe Abschnitt 5.2.

⁷die nicht angegebenen Größen sind dieselben wie im Beispiel aus Abschnitt 6.2.1.

$$\epsilon_{\chi\nu} = -8.43324 \times 10^{-16} \frac{F}{m} \quad (6.43)$$

Es ist $\beta_G = 5.91835 \times 10^6$ wie im vorhergehenden Beispiel.

Es ergibt sich

$$T_{12} = \sin \alpha = 0.795796 \quad (6.44)$$

und somit

$$c = T_{12}^2 = 0.633291 \quad (6.45)$$

Des weiteren ist

$$\lambda_{0,\text{Max},s} = 1.54906 \times 10^{-6} m \quad (6.46)$$

und

$$\lambda_{0,\text{Max},p} = 1.54913 \times 10^{-6} m \quad (6.47)$$

und hier findet keine Inversion der Reihenfolge statt.

Siehe Auch Behauptung 5.3.2 und Abschnitt 5.2.

Für diese Werte überlappen sich die Gauss Glocken, so dass die entsprechenden Parameter nicht mehr auf einfache Weise aus den Verläufen von i_s und i_p rekonstruiert werden können.

Wir gehen daher vor wie in Abschnitt 5.2.2 beschrieben.

Die Reflexionskoeffizienten sind in Abbildung 6.10 zu sehen.
 Der Verlauf von i_s ist in Abbildung 6.11 dargestellt.

Der Verlauf von i_p ist in Abbildung 6.12 dargestellt.

Der Verlauf von $\frac{i_s}{i_p}$ in Funktion von λ_0 (in m) ist in Abbildung 6.13 zu sehen.

Es ergibt sich, mit (4.20) und (4.21)

$$\epsilon_x = 1.88245 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.48)$$

und

$$\epsilon_y = 1.88263 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.49)$$

Wir gehen nun vor wie in Abschnitt 5.2.2 angegeben.

Wir erinnern außerdem an die Tatsache, dass statt Gauss Glocken für $g_{s,A}$ und $g_{p,A}$ zu wählen, wir auch eine Translation der Funktion aus Abbildung 6.2 wählen könnten, Funktion die uns vollständig bekannt ist mit (3.25), für den unbelasteten Fall.

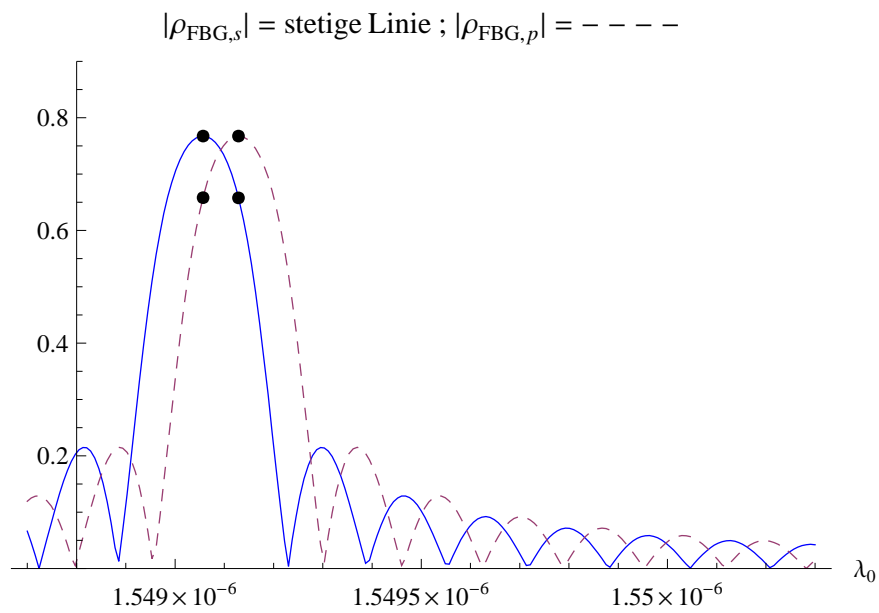


Abbildung 6.10: Die Beträge der Reflexionskoeffizienten für den Fall aus Abschnitt 6.2.2.

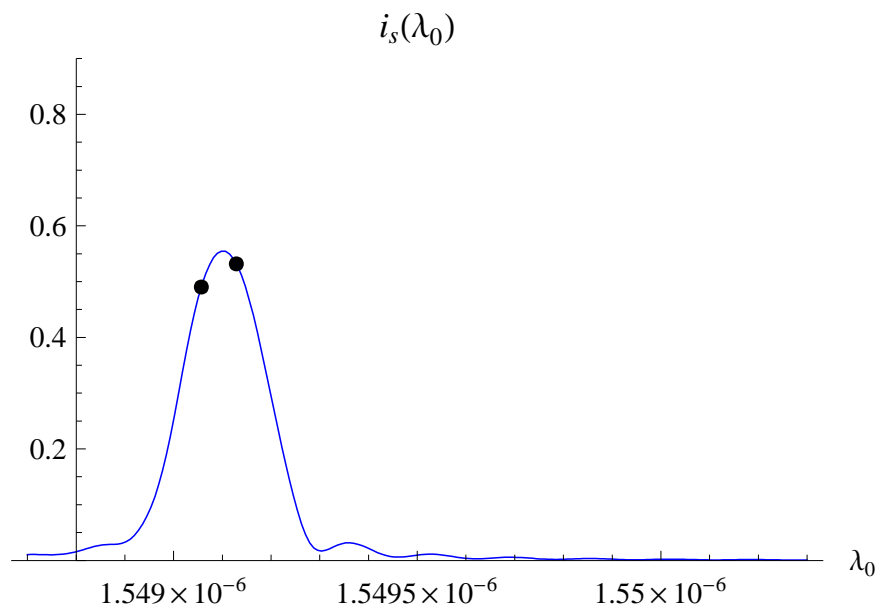


Abbildung 6.11: Der Verlauf von $i_s(\lambda_0)$ für das Beispiel aus Abschnitt 6.2.2. Wellenlänge in Meter.

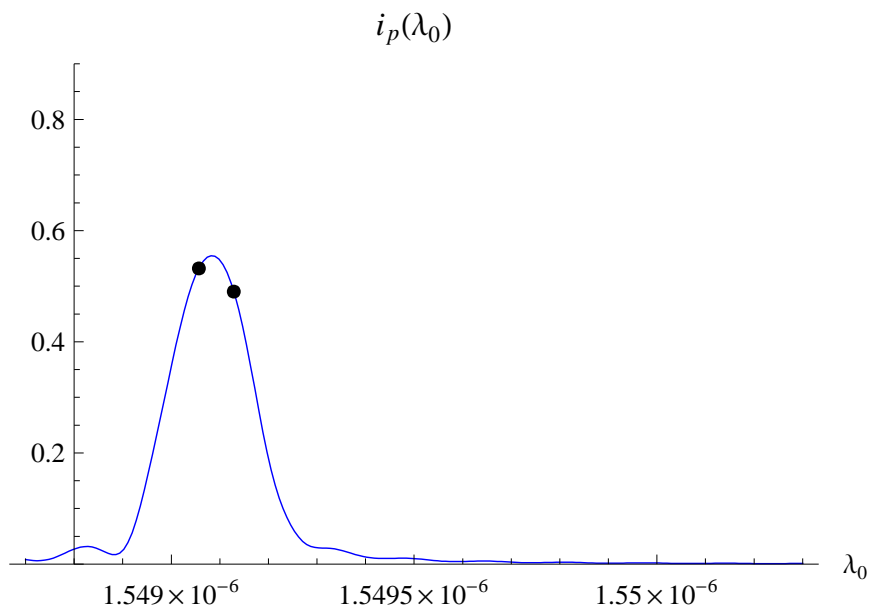


Abbildung 6.12: Der Verlauf von $i_p(\lambda_0)$ für das Beispiel aus Abschnitt 6.2.2. Wellenlänge, wie immer, in m .

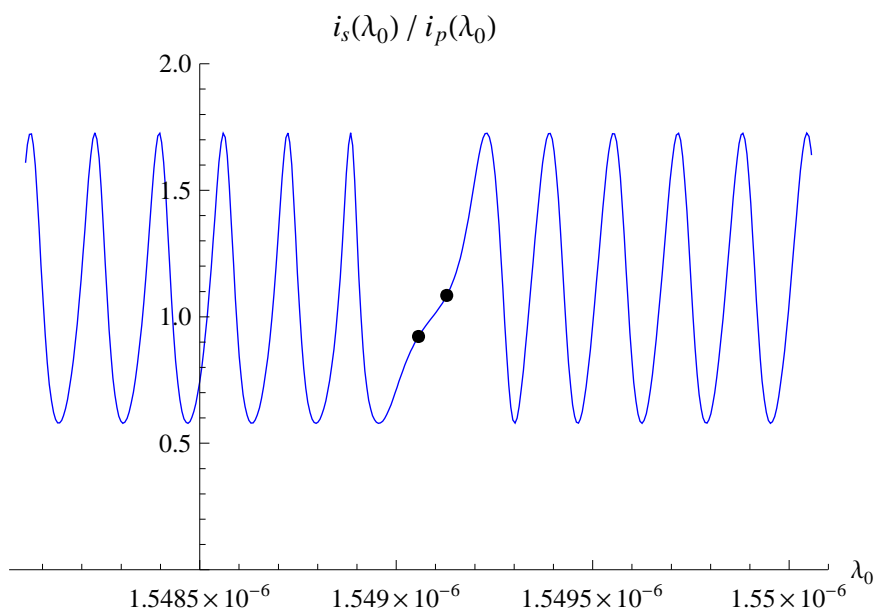


Abbildung 6.13: Der Verlauf von $\frac{i_s(\lambda_0)}{i_p(\lambda_0)}$ für das Beispiel aus Abschnitt 6.2.2. λ_0 ist, wie immer in m angegeben.

Diese Translation soll so konstruiert sein, dass das absolute Maximum gerade für $\lambda_{0,\text{Max},i,A}$ vorkommt, $i = s, p$, mit klarer Bedeutung⁸. Ganz analog zu dem Fall mit den Gauss Glocken.

Für dieses Beispiel wählen wir dennoch Gauss Glocken für $g_{s,A}$ und $g_{p,A}$ und wir werden sehen, dass die Wahl zufriedenstellend ist⁹.

Als passende Werte ergeben sich

$$\sigma = 100 \times 10^{-12} m \quad (6.50)$$

und

$$m \simeq 0.8 \quad (6.51)$$

Die Bedeutung der Symbole ist dieselbe wie in Abschnitt 5.2.2, nur dass wir hier die Größen in Funktion von $\lambda_0 = \lambda_V$ (der Wellenlänge des benutzten Lichtes im Vakuum) angeben und nicht von ω .

Somit ergibt sich

$$g_{i,A}(\lambda_0; \lambda_{0,\text{Max},i,A}) = m e^{-\frac{(\lambda_0 - \lambda_{0,\text{Max},i,A})^2}{2\sigma^2}} \quad i = s, p \quad (6.52)$$

wobei $\lambda_{0,\text{Max},i,A}$ ein Parameter ist und A wie üblich für alternativ steht.

In Abbildung 6.14 ist ein Vergleich zu sehen zwischen dem tatsächlichen Verlauf des (Betrags des) Reflexionskoeffizienten und seiner Approximation mit einer Gauss Glocke des Typs (6.52).

Die Maxima werden in der Abbildung natürlich für denselben Wert angenommen um einen Vergleich zu ermöglichen. Für beliebige Situationen werden wir entsprechende Translationen der Verläufe von Abbildung 6.14 vorfinden¹⁰.

Eine numerische Lösung des Minimierungsproblems (5.25), wobei wir als Integrationsintervall $[1548.9 \times 10^{-9} m, 1549.3 \times 10^{-9} m]$ wählen¹¹ (statt \mathbb{R}_+), ergibt die Werte

$$\lambda_{0,\text{Max},s,A,\text{opt}} = 1.54907 \times 10^{-6} m \quad (6.53)$$

$$\lambda_{0,\text{Max},p,A,\text{opt}} = 1.54914 \times 10^{-6} m \quad (6.54)$$

$$c_{A,\text{opt}} = 0.5 \quad (6.55)$$

die den Tatsächlichen Werten für $\lambda_{0,\text{Max},s}$ und $\lambda_{0,\text{Max},p}$ und c sehr nahe kommen. opt steht hier für "optimal", und betont die Tatsache, dass die betrachteten Werte Lösung

⁸siehe auch weiter Vorne und vergleiche mit Abschnitt 5.2.2.

⁹der Buchstabe A soll für alternativ stehen.

¹⁰Wir erinnern aber, dass für das *unbelastete* System die Mittelwerte bekannt sind.

¹¹natürlich mit λ_0 als Integrationsvariable

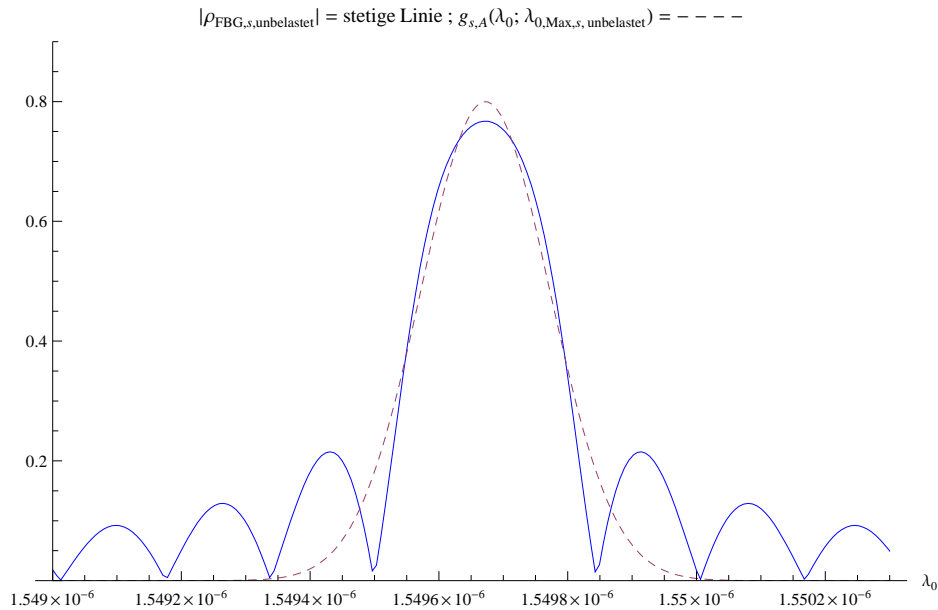


Abbildung 6.14: Approximation des Reflexionskoeffizienten (stetige Linie) durch eine Gauss Glocke (gestrichelte Linie). In der Abbildung sind die Werte für das unbelastete System zu sehen. Bei Belastung findet eine Translation statt.

des Minimierungsproblems (5.25) sind.

Wir hätten auch (5.28) lösen können: in diesem Fall wäre es aber vielleicht besser gewesen Translationen von (bekannten!) Funktionen des Typs von Abbildung 6.2 statt Gauss Glocken zu benutzen, für $g_{s,A}$, $g_{p,A}$, da wir ansonsten hohe Schwankungen hätten.

In Abbildung 6.15 ist der Verlauf von i_s im Vergleich zu dem von $i_{s,A,\text{optimal}}$ gezeichnet.

$i_{s,A,\text{optimal}}$ folgt natürlich aus der rechten Seite von (5.16) nach Einsetzen der optimalen Werte (6.53) (6.54) (6.55), mit (6.52).

λ_0 ist wie immer in m .

Abbildung 6.16 zeigt die einzelnen “Bestandteile”, also die Summanden, aus denen $i_s(\lambda_0)$ bzw. $i_{s,A,\text{optimal}}(\lambda_0)$ bestehen, mit klarer Bedeutung.

Für $i_{s,A}$ beobachten wir “echte” Gauss Glocken im Gegensatz zu i_s , gemäß der bisherigen Abhandlung.

Falls wir dagegen das Problem (5.28) betrachten würden, wäre es empfehlenswert entweder i_s und i_p zu glätten oder $g_{s,A}$ und $g_{p,A}$ als eine passende Translation der bekannten Funktion in Abbildung 6.2 zu wählen. Siehe (3.25) für den analytischen Ausdruck dieser

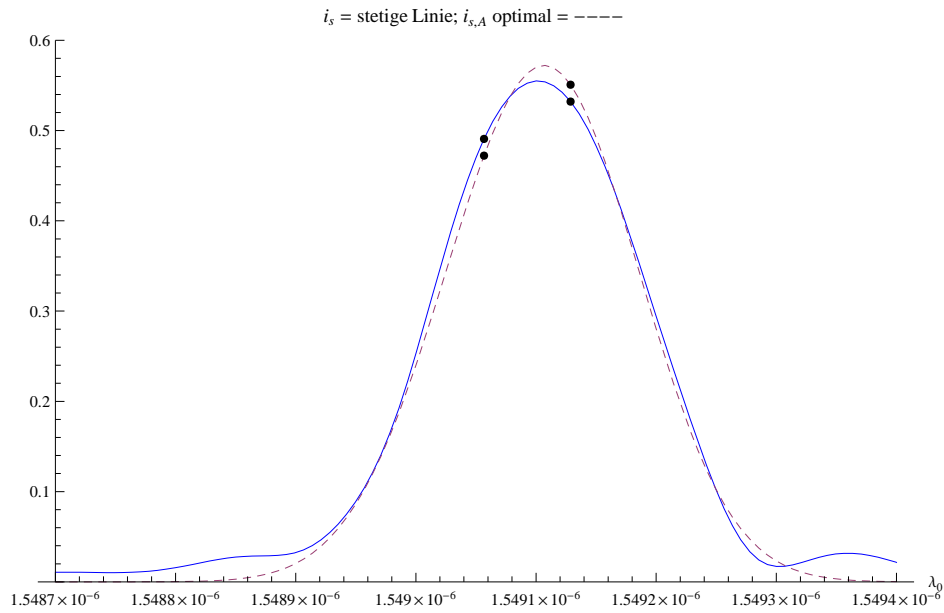


Abbildung 6.15: Der Vergleich von dem tatsächlichen Verlauf von i_s und von dem Verlauf von $i_{s,A,optimal}$: dieser wurde durch den beschriebenen Minimierungsalgorithmus bestimmt, mit der Annahme, dass $g_{s,A}$ und $g_{p,A}$ Gauss Glocken sind. Siehe auch die rechte Seite von (5.16) und (6.52)

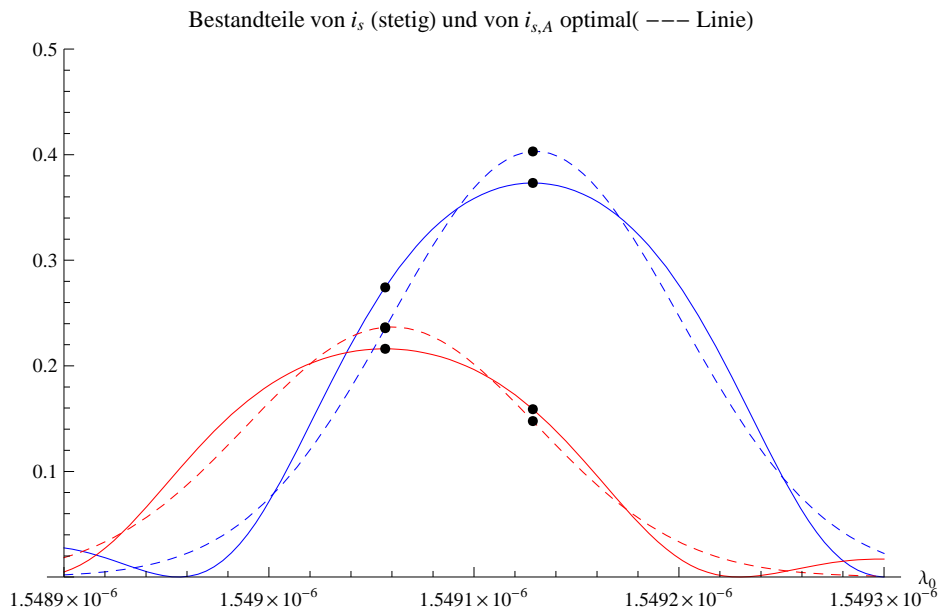


Abbildung 6.16: Die einzelnen Summanden aus denen i_s und $i_{s,A,optimal}$ bestehen. Für $i_{s,A}$ haben wir Gauss Glocken. i_s besteht dagegen aus Funktionen des Typs wie in Abbildung 6.2 gezeigt (jeweils mit c und $1 - c$ multipliziert...).

Funktion.

Auch sollte das Integrationsintervall $[a, b]$ zur Berechnung der Funktionsnorm passend und nicht zu groß (aber auch nicht zu klein) gewählt werden, damit der numerische Algorithmus gut arbeiten kann. Das Integrationsintervall soll gerade den Bereich umschließen in den i_s und i_p nicht verschwindend gering sind (diese Größen sind aus der Messung bekannt).

Mit (5.50) erhalten wir schließlich

$$|\epsilon_{\chi v}| = 8.43324 \times 10^{-16} \frac{F}{m} \quad (6.56)$$

$$\epsilon_{\chi\chi} = 1.88257 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.57)$$

$$\epsilon_{vv} = 1.88252 \times 10^{-11} \frac{F}{m} \quad (6.58)$$

Wir finden also wie erwartet und erhofft die Werte (6.41) (6.42) und (6.43) wieder.

Man beachte auch immer Behauptung 5.3.2.

Die Rekonstruktion des Strain Tensors erfolgt dann wie in Abschnitt 5.4 beschrieben.

Siehe auch die Bemerkungen aus Abschnitt 5.6.

Wichtige Bemerkungen

Es gelten hier dieselben Bemerkungen wie für das Beispiel in Abschnitt 6.2.1.

Eine analoge Vertauschung der Werte für ω_{Max} ergibt auch hier $c_{\text{vert}} = 1 - c$.

Mit (5.50) folgen auch hier dieselben Werte für die Elemente des Dielektrizitätstensors des FBG (in $O_{\chi v \zeta}$) wie im "unvertauschtem" Fall¹², gemäß 5.3.2.

Deswegen gelten dieselben Bemerkungen wie in Abschnitt 6.2.1.

¹²und wir betonen nochmals, dass dies im Allgemeinen gilt

7 Zusammenfassung und Ausblick

Das wichtigste Ergebnis dieses Textes ist die Rekonstruktion des Dielektrizitätstensors gemäß (5.50). Siehe auch die Behauptung 5.3.1 in Kapitel 5.

Wichtig ist natürlich auch die Ermittlung von $\omega_{\text{Max},p}$ und $\omega_{\text{Max},2}$ und $c = c_P = T_{12}^2 = \sin^2 \alpha$ mit den Methoden die wir in Abschnitt 5.2 beschrieben haben.

Insbesondere der Fall aus Abschnitt 5.2.2 für den sich die “Glocken” überlappen ist interessant.

Die Methoden von Abschnitt 5.2.2 könnten sich somit als wichtig erweisen.

Der Strain Tensor wird in Abschnitt 5.4 rekonstruiert.

Abschnitt 5.4.2 gibt wichtige Ansätze zur Bestimmung von β_G und der Temperatur.

Abschnitt 5.5 beschreibt eine Gleichung mit der der optimale Arbeitsbereich des Sensors (möglicherweise) festgelegt wird, falls die numerischen Methoden sich nicht als robust erweisen sollten.

Es ist wichtig, dass die hier beschriebenen und hergeleiteten Ergebnisse durch Simulationen und Labormessungen bestätigt werden.

Es ist auch wichtig, dass die numerischen Methoden die in Abschnitt 5.2.2 beschrieben worden sind optimal implementiert werden. Dazu gehört eine Passende Wahl für $g_{s,A}$ und $g_{p,A}$ (Gauss Glocken oder Translationen von bekannten Funktionen des Typs (3.25) wie in Abbildung 6.1 dargestellt) und eine Passende Wahl des numerischen Integrationsintervalls $[a, b] \in \mathbb{R}_+$ für die Berechnung der Funktionsnormen zur Lösung von (5.25) (mit $]a, b[$ statt \mathbb{R}_+ natürlich, wie besprochen) bzw. von (5.28).

Wir haben diese Themen im Text besprochen in Abschnitt 5.2.

Die passende Wahl des numerischen Algorithmus ist auch wichtig: in Frage kommen Varianten des Gradientenverfahrens oder andere Algorithmen zur Suche nach Minima.

A Elektrodynamische Grundlagen

A.1 Fundamentale Gleichungen

Elektromagnetische Phänomene sind von den *Maxwell Gleichungen* beschrieben, siehe [2]

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

wobei die Symbole folgende Bedeutung besitzen, mit entsprechenden internationalen Maßeinheiten

$\vec{\mathcal{E}}$	elektrische Feldstärke in <i>Volt/meter</i>	V/m	
$\vec{\mathcal{H}}$	magnetische Feldstärke in <i>Ampère/meter</i>	A/m	
$\vec{\mathcal{B}}$	magnetische Induktion in <i>Weber/meter²</i>	Wb/m^2	
$\vec{\mathcal{D}}$	dielektrische Verschiebung in <i>Coulomb/meter²</i>	C/m^2	(A.5)
$\vec{\mathcal{J}}$	Stromdichte in <i>Ampère/meter²</i>	A/m^2	
ρ	Ladungsdichte in <i>Coulomb/meter³</i>	C/m^3	

Diese Größen sind im Allgemeinen abhängig von der Zeit t und von der Position \vec{r} .

Um die Maxwell Gleichungen zu deuten ist es wichtig die vektoranalytischen Gleichungen (B.2) und (B.8) zu betrachten.

Aus dem Satz von Gauss (B.2) wird ersichtlich, dass die Maxwell Gleichungen implizieren, dass es keine Quellen für die magnetische Induktion gibt, während die dielektrische Verschiebung die elektrische Ladung als Quelle besitzt.

Aus (B.8) wird ersichtlich, dass die Maxwell Gleichungen implizieren, dass das Linienintegral von $\vec{\mathcal{E}}$ entlang einer infinitesimalen geschlossenen Linie¹ s (Rand von einer infinitesimalen Fläche S) von der Zeitvariation der magnetischen Induktion abhängt.

¹oder besser die Wirbelstärke $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_s \hat{s}_0 \cdot \vec{A} ds$ gemäß (B.8).

Analoges gilt gemäß (B.8) für die magnetische Feldstärke gegenüber der dielektrische Verschiebung, wobei aber zusätzlich eine Abhängigkeit zur Stromdichte besteht.

Es erscheint daher natürlich, dass sich elektromagnetische Phänomene in Wellen ausbreiten: eine *zeitliche* Variation des magnetischen Feldes verursacht in ihrer Umgebung eine Variation der elektrischen Feldstärke (bzw. des Linienintegrals der elektrischen Feldstärke). Dies wiederum erzeugt letztendlich eine zeitliche Variation des magnetischen Feldes in der Umgebung, und so baut sich eine Welle auf die sich ausbreiten kann.

Es gelten die Fundamentalen Relationen:

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 \vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{M}} \quad (\text{A.7})$$

wobei die Symbole folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}} & \text{ Polarisierung} \\ \vec{\mathcal{M}} & \text{ Magnetisierung} \\ \epsilon_0 & \text{ Dielektrizitätskonst. des Vakuums in Farad/meter} \quad \epsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m \\ \mu_0 & \text{ Permeabilitätskonst. des Vakuums in Henry/meter} \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Polarisierung und Magnetisierung sind Funktionen der Zeit t und der Position \vec{r} . Mit ihnen beschreibt man elektromagnetische Phänomene in Materialien.

Für lineare, stationäre, nicht Zeit-dispersive und nicht Raum-dispersive Medien², gilt:

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t) = \underline{\underline{\mu}}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \quad (\text{A.11})$$

wobei die Symbole folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}} & \text{ absolute tensorielle Dielektrizitätskonstante des Mediums} \\ \underline{\underline{\mu}} & \text{ absolute tensorielle Permeabilitätskonstante des Mediums} \\ \underline{\underline{\sigma}} & \text{ tensorielle Leitfähigkeit des Mediums} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Wir erläutern die Bedeutung dieser tensoriellen Größen, anhand von $\underline{\underline{\epsilon}}$.

Die Gleichung (A.9) bedeutet nur, dass es eine lineare Abbildung gibt (für jeden Punkt \vec{r} des Raumes), so dass $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})$ die Abbildung von $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ ist³. Diese lineare Abbildung wird

²und die sich nicht bewegen

³eben durch die betrachtete lineare Transformation

durch $\underline{\underline{\epsilon}}$ symbolisiert. Wenn ein Koordinatensystem festgelegt ist, kann man bekanntlich die gegebene Lineare Abbildung mit Hilfe von einer Matrix (Tensor der zweiten Ordnung) repräsentieren. Daher die Bezeichnung "tensoriell". Im Folgenden betrachten wir als Beispiel Gleichung (A.9).

Sei ein orthonormales Koordinatensystem q_1, q_2, q_3 gegeben, wobei für jeden Punkt P der Raumes (der durch \vec{r} beschrieben wird) ein System von drei orthogonalen Einheitsvektoren (ein System von orthonormalen Vektoren) definiert ist

$$\hat{q}_{10}(\vec{r}), \quad \hat{q}_{20}(\vec{r}), \quad \hat{q}_{30}(\vec{r}) \quad (\text{A.13})$$

Bekanntlich gilt dann für eine vektorwertige Funktion der Position $\vec{A}(\vec{r})$ dass

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_1(\vec{r})\hat{q}_{10}(\vec{r}) + A_2(\vec{r})\hat{q}_{20}(\vec{r}) + A_3(\vec{r})\hat{q}_{30}(\vec{r}) \quad (\text{A.14})$$

mit $A_i(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{q}_{i0}(\vec{r})$, $i = 1, 2, 3$.

Das Koordinatensystem kann beliebig sein (z.B. kartesisch, zylindrisch, sphärisch).

Mit dieser Notation bedeutet (A.9):

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \\ \mathcal{D}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

wobei alle Größen von der Position \vec{r} abhängen (\mathcal{D}_i und \mathcal{E}_i , $i = 1, 2, 3$ sind zusätzlich von der Zeit t abhängig).

$\underline{\underline{\epsilon}}(\vec{r})$ wird also in einem Koordinatensystem q_1, q_2, q_3 durch eine 3×3 Matrix (Tensor der zweiten Ordnung) beschrieben

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

wobei das Symbol $=$ bedeutet das wir $\underline{\underline{\epsilon}}$ mit der angegebenen Matrix identifizieren solange wir das Koordinatensystem q_1, q_2, q_3 betrachten.

Diese Matrix ist immer symmetrisch⁴, wie wir in (A.45) gezeigt haben und sie besteht aus reellen Elementen, wie man sofort sieht.

In einem anderen Koordinatensystem q'_1, q'_2, q'_3 müssen entsprechende Transformationen durchgeführt werden, so dass die Matrix Repräsentation von $\underline{\underline{\epsilon}}$ verschieden sein wird. Die Gleichung (A.9) behält aber natürlich ihre Gültigkeit, so wie auch (A.15) wenn alle Größen im neuen Koordinatensystem betrachtet werden.

⁴also für alle Koordinatensysteme

Oft sucht man ein Koordinatensystem in dem $\underline{\underline{\epsilon}}$ durch eine diagonale Matrix repräsentiert wird, so dass die Berechnungen vereinfacht werden. Dieses Koordinatensystem ist ein orthonormales Kartesisches Koordinatensystem, da $\underline{\underline{\epsilon}}$ im Allgemeinen symmetrisch ist wegen (A.45) und aus reellen Elementen besteht (auch in transformierten Gleichungen mit komplexen Vektoren wie wir sehen werden). Wir sprechen vom (orthonormalem Kartesischen) Hauptkoordinatensystem.

Ausgehend von einem beliebigen (orthonormalem Kartesischen) Koordinatensystem existiert immer eine Kongruenzabbildung (bestehend aus Spiegelungen und/oder Drehungen) die uns das Kartesische orthonormale Hauptkoordinatensystem liefert, in dem $\underline{\underline{\epsilon}}$ diagonal ist.

Dies folgt aus der Tatsache, dass es für eine reelle und symmetrische Matrix immer ein Orthonormalsystem gibt aus Eigenvektoren der Matrix (in diesem Fall für den dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3).

Siehe ein Text über Lineare Algebra, z.B. [6].

Analoge Bemerkungen gelten auch für $\underline{\underline{\mu}}$ mit entsprechenden Gleichungen.

Mit den angegebenen Gleichungen (die ein System von partiellen Differentialgleichungen formen) kann im Prinzip ein elektromagnetisches Problem gelöst werden, das heißt dass das elektromagnetische Feld und dessen Ausbreitung im Raum berechnet werden kann, in Abhängigkeit von der Zeit. Um dies auf eindeutige Weise zu tun, müssen jedoch Anfangs- und Randbedingungen gegeben sein. Voraussetzung ist natürlich, dass man das System von partiellen Differentialgleichungen lösen kann, analytisch oder numerisch. Oft werden nur bestimmte Lösungen gesucht, z.B. so genannte ebene Wellen, die bestimmten Anfangs- und Randbedingungen entsprechen.

Im Folgenden betrachten wir spezielle Randbedingungen, die es ermöglichen elektromagnetische Phänomene zu beschreiben im Übergang zwischen zwei lokal-homogene Materialien. Dieser Übergang entspricht z.B. der Situation von Medien die aus dünnen homogenen Schichten bestehen. Man denke auch an eine Lichtwelle die sich aus dem Vakuum (oder aus der Luft) in ein Kristall (oder in Glas) fortsetzt.

A.2 Randbedingungen an Grenzschichten

Betrachten wir zwei Medien die zumindest lokal als homogen gelten und die (lokal) durch eine Grenzfläche Σ getrennt sind. Im Übergang über die Grenzschicht verändern sich die Eigenschaften der Medien (Materialien) unstetig.

Im Übergang zwischen den zwei homogenen Medien gilt:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) = \rho_S \quad (\text{A.17})$$

wobei, mit Beziehung auf Abbildung A.1, \vec{D}^+ die dielektrische Verschiebung nahe der Trennfläche Σ im Medium 2 darstellt und \vec{D}^- die dielektrische Verschiebung nahe der Trennfläche Σ im Medium 1 darstellt.

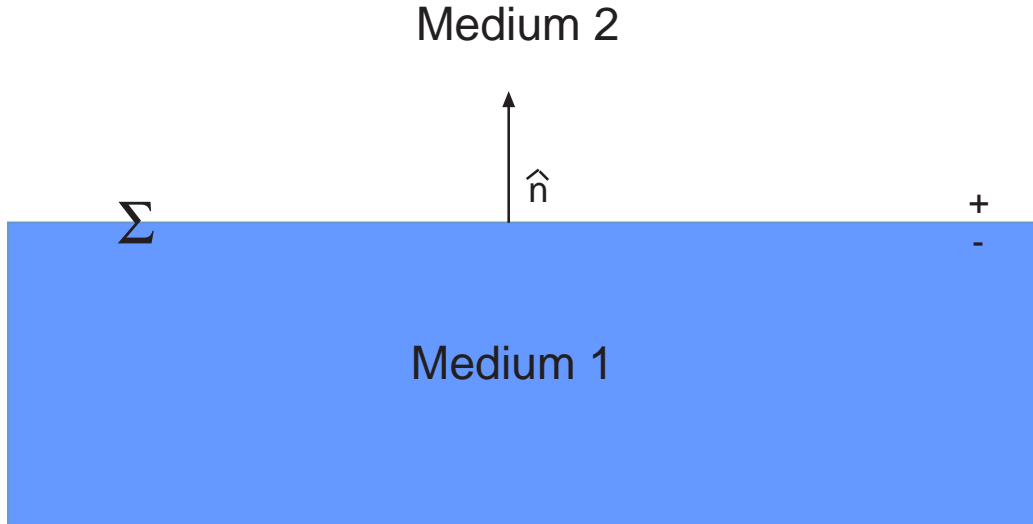


Abbildung A.1: Übergang zwischen zwei homogene Medien.

\hat{n} ist die Normale von der Trennfläche Σ die vom Medium 1 in Richtung vom Medium 2 zeigt, wie in Abbildung A.1 dargestellt.

ρ_s ist die Oberflächenladungsdichte in C/m^2 .

Falls die Medien keine *perfekten* Leiter sind (was bei Glasfasern zutrifft) gilt also

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) = 0 \quad (\text{A.18})$$

analog gilt

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0 \quad (\text{A.19})$$

Das heißt dass die normale Komponente von \vec{D} und \vec{B} stetig ist am Übergang zwischen zwei Medien (im Falle von \vec{D} dürfen die Medien keine perfekten Leiter sein).

Außerdem gilt:

$$\hat{n} \times (\vec{H}^+ - \vec{H}^-) = 0 \quad \text{falls die Medien keine perfekten Leiter sind} \quad (\text{A.20})$$

und

$$\hat{n} \times (\vec{E}^+ - \vec{E}^-) = 0 \quad (\text{A.21})$$

das heißt:

$$\vec{H}_t^+ = \vec{H}_t^- \quad \text{falls die Medien keine perfekten Leiter sind} \quad (\text{A.22})$$

und

$$\vec{\mathcal{E}}_t^+ = \vec{\mathcal{E}}_t^- \quad (\text{A.23})$$

wobei t die tangentielle Komponente entlang der Trennfläche Σ der Medien darstellt. Das Symbol $+$ (bzw $-$) bedeutet, dass die Größe nahe der Trennfläche im Medium 2 (bzw 1) betrachtet wird.

Für eine ausführliche Einführung in die Elektrodynamik sei [2], [1] und [3] erwähnt.

Für einen verständlichen Beweis⁵ der Ergebnisse die in dieser Sektion beschrieben wurden, siehe ebenfalls ein Standardtext der Elektrodynamik, wie z.B. [2].

A.3 Elektrostatische Felder und Energie

A.3.1 Elektrostatisches Potential

Für ein elektrostatisches Feld gilt, gemäß (A.3), dass

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (\text{A.24})$$

also ist eine elektrostatisches Feld wirbelfrei.

Gemäß Sektion B.3 existiert also (in einfach zusammenhängende Gebiete) ein elektrostatisches Potential \mathcal{V} , so dass

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla\mathcal{V} \quad (\text{A.25})$$

A.3.2 Elektrostatische Arbeit

In einem vorhandenen elektrostatischen Feld $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ wird auf eine Punkt förmige Ladung q folgende Kraft ausgeübt

$$\vec{F} = q\mathcal{E} = -q\nabla\mathcal{V} = -\nabla(q\mathcal{V}) \quad (\text{A.26})$$

Falls sich diese Ladung q von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 bewegt⁶ (ohne dass sich restliche Ladungen bewegen können bzw. für infinitesimale Probeladungen $q = dq$) wird folgende Arbeit A geleistet:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{s} = q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{s} = \\ &= -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \nabla\mathcal{V} \cdot d\vec{s} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial s} ds = -q \mathcal{V}|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = q [\mathcal{V}(\vec{r}_1) - \mathcal{V}(\vec{r}_2)] \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

⁵dieser Beweis ist nicht schwierig und folgt leicht mit Hilfe der Ergebnisse von Sektion B.1 wenn man die Maxwell Gleichungen betrachtet: dazu wählt man eine geeignete Region um die Grenzschicht herum, betrachtet dort die Maxwell Gleichungen, wendet die Ergebnisse von Sektion B.1 an und bildet schließlich den Grenzübergang für immer "dünner" werdende Regionen um die (unstetige) Grenzschicht. So erhält man leicht die beschriebenen Bedingungen. Siehe eben ein Standardtext der Elektrodynamik um eine ausführliche Beweisführung, z.B. [2].

⁶diese Bewegung sollte unendlich langsam erfolgen, so dass wir immer in einer (quasi)statischen Situation bleiben

wobei wir (A.25) und (B.6) benutzt haben und die Tatsache, dass $d\vec{s} = ds \hat{s}$ mit \hat{s} Einheitsvektor.

Die Integrale sind weg unabhängig, da das elektrostatische Feld wirbelfrei ist.

Das elektrostatische Feld $\vec{\mathcal{E}}$ wird berechnet ohne den Einfluss der Ladung q mit einzubeziehen. q soll sozusagen kein Einfluss auf $\vec{\mathcal{E}}$ besitzen, und das eigene Feld von q soll vernachlässigbar sein. Dies ist physikalisch sinnvoll für infinitesimale Probeladungen dq oder für den Fall das das Feld $\vec{\mathcal{E}}$ von einer fixen Ladungsverteilung erzeugt ist die nicht von q gestört wird.

A.3.3 Elektrische Feldenergie in dielektrischer Materie

Wir wollen hier die Herleitung des Ausdruckes für die elektrische Feldenergie in dielektrischer Materie präsentieren. Diese Herleitung ist nicht in allen Texten über elektromagnetische Phänomene zu finden.

Wir lehnen uns im Folgenden an die Abhandlung von [1] an.

Die Feldenergie kann aus der Arbeit bestimmt werden, die notwendig ist, um alle Ladungen aus dem Unendlichen an ihren Platz im Endlichem zu bringen, wobei wir annehmen, dass sich das (eventuell nicht homogenes und/oder nicht isotropes) vorhandene Dielektrikum schon in seiner endgültigen Position befindet.

$\mathcal{V}_\rho(\vec{r})$ sei das (elektrostatische) Potential, das durch eine schon an ihrem Platz gebrachte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ und die *dadurch* im Dielektrikum hervorgerufene Polarisierung erzeugt wird. Die ganze räumliche Verteilung des Potentials und der Ladung ist von Interesse.

Durch Hereinbringen⁷ der zusätzlichen Ladungsdichte $\Delta\rho$ wird das Potenzial \mathcal{V} in $\mathcal{V}_{\rho+\Delta\rho}$ abgewandelt (in jedem Punkt des Raumes). $\Delta\rho$ soll eine hinreichend kleine Veränderung repräsentieren, und das Symbol Δ steht hier für eine (kleine) Differenz.

Dazu muss das System der bereits vorhandenen Ladungen an der nach \vec{r} (in das Volumenelement $d\tau$) zu bringende Ladung $\Delta\rho d\tau$ die folgende Arbeit leisten (man siehe (A.27)), die der Energie des Feldes verloren geht⁸:

$$\Delta A = -\Delta\rho d\tau \mathcal{V}_\rho(\vec{r}) \tag{A.28}$$

⁷wobei dieser Vorgang als (quasi)statisch angesehen werden soll.

⁸Man bedenke, dass die Effekte der Polarisierung des Mediums in \mathcal{V}_ρ berücksichtigt sind. So muss die Polarisierung nicht explizit im Ausdruck vorhanden sein. Die Variation der Polarisierung durch das Einbringen der zusätzlichen Ladung $\Delta\rho$ würde nur Terme höherer Ordnung zu ΔA liefern. Siehe [1]. Beziehungsweise, der Beitrag zu ΔA den die Veränderung der Polarisierung hervorruft (in Beziehung auf das Hereinbringen der Ladung $\Delta\rho d\tau$ im betrachteten Punkt \vec{r} aus dem Unendlichen), ist verschwindend Klein gegenüber dem Beitrag der geleistet wird um die Ladung selbst hereinzubringen.

In (A.27) wurde natürlich $q = \Delta\rho d\tau$ eingesetzt und es wird berücksichtigt, dass $\mathcal{V}(\infty) = 0$.

Die Arbeit ΔA wird geleistet, um die Ladung $\Delta\rho d\tau$ aus dem Unendlichen in den Punkt \vec{r} zu bringen.

Diese Arbeit (Energie) wird vom elektrostatischen Feld geleistet und geht so dem elektrischen Feld verloren. Das heißt

$$\Delta W_{\mathcal{E}} = -\Delta A \quad (\text{A.29})$$

wobei $W_{\mathcal{E}}$ die *Gesamtenergie* des elektrischen Feldes ist. Das Δ repräsentiert hier nur die Energiedifferenz die für das Hereinbringen der Ladung $\Delta\rho d\tau$ in den Punkt \vec{r} gegeben ist, also nur die Energiedifferenz für eine kleine (infinitesimale) Ladungsdifferenz $\Delta\rho d\tau$ in *einem* Punkt des Raumes !

Aus (A.1) folgt für jeden Punkt des Raumes

$$\Delta\rho = \nabla \cdot (\Delta\vec{\mathcal{D}}) \quad (\text{A.30})$$

wobei Δ mit klarer Bedeutung eine (kleine) Differenz repräsentiert.

Um also in *allen* Punkten des Raumes τ die Ladung von $\rho(\vec{r})$ nach $\rho(\vec{r}) + \Delta\rho(\vec{r})$ zu bringen (aus dem Unendlichen) benötigt das elektrische Feld die Energie (τ ist der gesamte Raum):

$$\begin{aligned} \Delta W_{\mathcal{E},\text{Raum}} &= \int_{\tau} \Delta W_{\mathcal{E}} = \int_{\tau} \Delta\rho(\vec{r})\mathcal{V}_{\rho}(\vec{r})d\tau = \\ &= \int_{\tau} \nabla \cdot (\Delta\vec{\mathcal{D}})\mathcal{V}_{\rho}d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot (\mathcal{V}_{\rho}\Delta\vec{\mathcal{D}})d\tau - \int_{\tau} \Delta\vec{\mathcal{D}} \cdot \nabla\mathcal{V}_{\rho}d\tau = \\ &= \underbrace{\oint_{S_{\infty}} \hat{n} \cdot (\mathcal{V}_{\rho}\Delta\vec{\mathcal{D}})dS}_{=0} + \int_{\tau} \vec{\mathcal{E}}_{\rho} \cdot \Delta\vec{\mathcal{D}}d\tau = \Delta W_{\mathcal{E},\text{Raum}} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

wobei wir (A.29), (A.28), (A.30), (B.13), (B.2), (A.25) verwendet haben.

Das Oberflächenintegral das aus dem Satz von Gauss (B.2) resultiert ist vernachlässigbar ($\rightarrow 0$) falls $S \rightarrow S_{\infty}$, also für Oberflächen die hinreichend groß sind und den gesamten Raum einschließen⁹.

Um nun die gesamte Ladungsverteilung ρ_{end} zu erzeugen¹⁰ ergibt sich, mit klarer Bedeutung

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{E},\text{Raum, end}} &= \int_0^{\vec{\mathcal{D}}_{\text{end}}} \Delta W_{\mathcal{E},\text{Raum}} = \int_0^{\vec{\mathcal{D}}_{\text{end}}} \int_{\tau} \vec{\mathcal{E}}_{\rho} \cdot \Delta\vec{\mathcal{D}}d\tau = \\ &= \int_{\tau} \int_0^{\vec{\mathcal{D}}_{\text{end}}} \vec{\mathcal{E}}(\vec{\mathcal{D}}) \cdot d\vec{\mathcal{D}}d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

⁹mit einem Grenzwertübergang natürlich.

¹⁰am Anfang waren alle Ladungen im Unendlichen

wobei wir $d\vec{\mathcal{D}}$ schreiben, statt $\Delta\vec{\mathcal{D}}$, mit $\Delta\vec{\mathcal{D}} \rightarrow d\vec{\mathcal{D}}$. $W_{\mathcal{E},\text{Raum,End}}$ gibt die gesamte Energie des elektrischen Feldes wieder, im gesamten Raum, mit der betrachteten (End)Verteilung der Ladungsdichte.

Die Bedeutung der Integrale ist klar: wir integrieren einerseits über den gesamten Raum τ und andererseits betrachten wir die gesamte Entwicklung der dielektrischen Verschiebung, die natürlich durch die Zeit parametrisiert wird. Die Vertauschung der Integrale ist begründet. Alle Größen sind implizit von Position und Zeit abhängig.

Im Folgenden schreiben wir der Einfachheit wegen $\vec{\mathcal{E}}(\vec{\mathcal{D}}) = \vec{\mathcal{E}}_\rho(\vec{\mathcal{D}})$ da das Feld in jedem Punkt nur von der dielektrischen Verschiebung abhängt¹¹, wenn auch nicht unbedingt auf eindeutige Weise (bei zeitdispersiven Medien): man denke an das Phänomen der Hysterese.

Wir setzen

$$W_{\mathcal{E},\text{Raum,End}} = \int_{\tau} w_{\mathcal{E}} d\tau \quad (\text{A.33})$$

mit

$$w_{\mathcal{E}} = \int_0^{\vec{\mathcal{D}}_{\text{end}}} \vec{\mathcal{E}}(\vec{\mathcal{D}}) \cdot d\vec{\mathcal{D}} \quad (\text{A.34})$$

Wir interpretieren $w_{\mathcal{E}}$ als *elektrische Energiedichte* im Dielektrikum (im Punkt \vec{r} und im betrachteten (End)Zeitpunkt).

Diese Interpretation ist physikalisch Sinnvoll: wir kommen auf dasselbe Ergebnis wenn wir z.B. planare Kondensatoren betrachten und auch das Poynting Theorem bekräftigt diese Interpretation. Gleichung (A.34) gilt auch im allgemeinen elektrodynamischen Fall, für nicht elektrostatische Felder.

Die Bedeutung des Integrals in (A.34) ist offensichtlich, nämlich:

$$w_{\mathcal{E}} = w_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \int_0^t \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t') dt' \quad (\text{A.35})$$

Wir formen Gleichung (A.35) folgender massen um, mit einfachen und offensichtlichen Berechnungen

$$\begin{aligned} w_{\mathcal{E}} = w_{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) &= \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} \left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t') \right] - \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t') \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \right\} dt' = \\ &= \left[\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t') \right]_0^t - \int_0^{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t') \cdot d\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t') \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

mit der Bemerkung, dass $w_{\mathcal{E}}(\vec{r}, 0) = 0$.

¹¹siehe (A.30) mit der üblichen Bemerkung, dass Δ eine Differenz symbolisiert, und nicht den Laplace Operator. Siehe auch (A.9).

Die elektrische Energiedichte $w_{\mathcal{E}}$ ist in einem zeitdispersivem Medium keine Zustandsfunktion, sondern hängt von der Transformation ab, die gewählt wurde um nach dem (End)Wert $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ zu gelangen. Man denke an die Hysterese.

In einem linearen, stationären, eventuell anisotropen aber nicht zeitdispersivem Medium ist die Energiedichte $w_{\mathcal{E}}$ eine Zustandsfunktion, sie hängt also nur vom Endwert von $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ ab, egal auf welchem Weg dieser erreicht wurde. Damit folgt, mit klarer Bedeutung, und unter Berücksichtigung von (A.36), dass

$$\oint_c \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (\text{A.37})$$

für jede geschlossene Transformation c .

Aus der Vektoranalysis (siehe auch (B.8)) bzw. mit [2] folgt¹² aus der oberen Gleichung, dass

$$\nabla_{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{D}} = 0 \quad (\text{A.38})$$

wobei $\nabla_{\mathcal{E}}$ der Nabla Operator im Raum des Vektors $\vec{\mathcal{E}}$ ist, also

$$\nabla_{\mathcal{E}}[] = \hat{x}_{01} \frac{\partial[]}{\partial \mathcal{E}_1} + \hat{x}_{02} \frac{\partial[]}{\partial \mathcal{E}_2} + \hat{x}_{03} \frac{\partial[]}{\partial \mathcal{E}_3} \quad (\text{A.39})$$

mit \hat{x}_{0i} , $i = 1, 2, 3$ orthonormale Vektoren¹³.

Daraus ergibt sich

$$\nabla_{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{D}} = \begin{vmatrix} \hat{x}_{01} & \hat{x}_{02} & \hat{x}_{03} \\ \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_1} & \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_2} & \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_3} \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.40})$$

also

$$\hat{x}_{01} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_3}{\partial \mathcal{E}_2} - \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \mathcal{E}_3} \right) + \hat{x}_{02} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \mathcal{E}_3} - \frac{\partial \mathcal{D}_3}{\partial \mathcal{E}_1} \right) + \hat{x}_{03} \left(\frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial \mathcal{E}_1} - \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial \mathcal{E}_2} \right) = 0 \quad (\text{A.41})$$

Bei linearen, stationären, (eventuell) anisotropen, nicht zeitdispersiven Medien gilt (A.9) woraus folgt:

$$\mathcal{D}_i = \epsilon_{i1} \mathcal{E}_1 + \epsilon_{i2} \mathcal{E}_2 + \epsilon_{i3} \mathcal{E}_3 \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.42})$$

also gilt

$$\frac{\partial \mathcal{D}_i}{\partial \mathcal{E}_j} = \epsilon_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.43})$$

Aus (A.41) folgt somit

$$\hat{x}_{01}(\epsilon_{32} - \epsilon_{23}) + \hat{x}_{02}(\epsilon_{13} - \epsilon_{31}) + \hat{x}_{03}(\epsilon_{21} - \epsilon_{12}) = 0 \quad (\text{A.44})$$

¹²ein wirbelfreies Feld ist irrotational

¹³sie hätten selbstverständlich einen beliebigen Namen haben können.

In (linearen, stationären) anisotropen Medien gilt also

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.45})$$

und somit ist $\underline{\underline{\epsilon}}$ ein symmetrischer¹⁴ Tensor.

Daher ergibt sich:

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\mathcal{D}} = \vec{\mathcal{E}} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot d\vec{\mathcal{E}}) = (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{\mathcal{E}}) \cdot d\vec{\mathcal{E}} \quad (\text{A.46})$$

Nämlich aus (A.9) ergibt sich, mit der Symmetrie von $\underline{\underline{\epsilon}}$

$$\sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} d\mathcal{E}_j = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathcal{E}_j \right) d\mathcal{E}_i \quad (\text{A.47})$$

wie man sofort nachrechnen kann. Das ergibt (A.46).

Somit (und mit (A.9)) gilt

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \left[\vec{\mathcal{E}} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot d\vec{\mathcal{E}}) + d\vec{\mathcal{E}} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{\mathcal{E}}) \right] = \frac{1}{2} d(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}) \quad (\text{A.48})$$

Aus (A.34) (mit (A.9)) wird somit für die Energiedichte des elektrischen Feldes in einem linearen, stationären, (eventuell) anisotropen, nicht zeitdispersivem Medium

$$w_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{E}_i \epsilon_{ij} \mathcal{E}_j \quad (\text{A.49})$$

A.4 Transformierte Gleichungen mit komplexen Vektoren

In der Elektrodynamik ist es üblich mit komplexen Vektoren zu arbeiten (bzw. mit Fourier Transformationen), so dass sich die Gleichungen vereinfachen, da die Ableitungen nach der Zeit durch Multiplikationen ersetzt werden.

Für eine allgemeine Übersicht über komplexe Vektoren, siehe die Sektion B.5.

Aus der Sektion B.5 und aus den Maxwell Gleichungen (A.1), (A.2), (A.3) und (A.4) folgen die transformierten Maxwell Gleichungen:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_K \quad (\text{A.50})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{A.51})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (\text{A.52})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (\text{A.53})$$

¹⁴und aus reellen Elementen bestehender (wie wir gesehen haben)

wobei $\vec{\mathcal{E}} \leftrightarrow \vec{E}$, $\vec{\mathcal{D}} \leftrightarrow \vec{D}$ und $\rho \leftrightarrow \rho_K$ im Sinne von Sektion B.5.

Die transformierten Größen sind Funktionen der Position \vec{r} und hängen vom Parameter ω (Pulsation) ab.

Aus der Transformation von (A.9), (A.10) und (A.11) folgt

$$\vec{D}(\vec{r}) = \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (\text{A.54})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \underline{\underline{\mu}}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r}) \quad (\text{A.55})$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (\text{A.56})$$

die Angabe der Pulsation ω vervollständigt die Informationen des betrachteten elektromagnetischen Phänomens.

$\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{\mu}}, \underline{\underline{\sigma}}$ sind reelle Tensoren¹⁵ zweiter Ordnung (oder besser: sie repräsentieren lineare Abbildungen).

Die Dielektrizitätskonstante $\underline{\underline{\epsilon}}$ in (A.54) ist dieselbe wie in (A.9), sie wird also mit demselben Tensor zweiter Ordnung (Matrix) repräsentiert sofern dasselbe Koordinatensystem verwendet wird¹⁶. Sie besteht aus reellen Elementen.

Analoges gilt für die anderen Tensoren.

Die Elemente von $\underline{\underline{\epsilon}}$ sind reell und $\underline{\underline{\epsilon}}$ ist symmetrisch wegen (A.45).

Für die Randbedingungen an Grenzschichten die in Sektion A.2 erläutert wurden, gilt entsprechend

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) = \rho_{S,K} \quad (\text{A.57})$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}^+ - \vec{D}^-) = 0 \quad \text{falls Medien keine perfekten Leiter sind} \quad (\text{A.58})$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}^+ - \vec{B}^-) = 0 \quad (\text{A.59})$$

$$\vec{H}_t^+ = \vec{H}_t^- \quad \text{falls Medien keine perfekten Leiter sind} \quad (\text{A.60})$$

$$\vec{E}_t^+ = \vec{E}_t^- \quad (\text{A.61})$$

siehe auch Abbildung A.1 für die Bedeutung der Symbole + und – und des Einheitsvektors \hat{n} .

¹⁵da alle Elemente reell sind in einem beliebigen Koordinatensystem, wie man leicht sieht

¹⁶diese Behauptung ist offensichtlich: man betrachte die einzelnen Komponenten der Vektoren und man gehe zu einer Repräsentation mit komplexen Phasoren über; unter Berücksichtigung von (B.40) folgt somit leicht die Behauptung.

A.5 Der Satz von Poynting

Der Satz von Poynting folgt aus den Maxwell Gleichungen und mit seiner Hilfe ist es möglich eine wichtige Aussage über den Energie Transport von elektromagnetischen Wellen zu formulieren.

Wir werden nun den Poynting Satz herleiten und deuten.

Multiplizieren wir die Maxwell Gleichung (A.3) skalar mit $\vec{\mathcal{H}}$ und die Gleichung (A.4) skalar mit $\vec{\mathcal{E}}$ und subtrahieren wir die so gewonnenen Gleichungen.

Wir erhalten

$$\vec{\mathcal{H}} \cdot \nabla \times \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{E}} \cdot \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} - \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} - \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (\text{A.62})$$

Aus (B.14) und mit Integration über ein Volumen τ mit Oberfläche $S = \partial\tau$ mit äußerer Normalfläche \hat{n} ergibt sich

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) d\tau = - \int_{\tau} \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} d\tau - \int_{\tau} \left(\vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right) d\tau \quad (\text{A.63})$$

Mit dem Satz von Gauß (B.2) folgt

$$\oint_S \hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) dS + \int_{\tau} \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} d\tau + \int_{\tau} \left(\vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right) d\tau = 0 \quad (\text{A.64})$$

Dies ist der Satz von Poynting.

Um ihn auf die übliche Weise zu deuten, setzen wir

$$\vec{\mathcal{J}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}}(\vec{r}) + \vec{\mathcal{J}}_{\text{induziert}}(\vec{r}) \quad (\text{A.65})$$

wobei $\vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}} = 0$ falls $\vec{\mathcal{J}}_{\text{induziert}} \neq 0$ und $\vec{\mathcal{J}}_{\text{induziert}} = 0$ falls $\vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}} \neq 0$ sein soll.

Wir unterscheiden also konventionell zwischen Ströme die zu den Ursachen des E.M. Phänomen gehören (z.B. Ströme in Generatoren oder Sendeantennen) und zwischen Ströme die durch eben diese Ursachen hervorgerufen (induziert) werden (z.B. Ströme in einem passiven Widerstand oder in einer Empfängerantenne).

Mit (A.65) wird aus dem Satz von Poynting (A.64)

$$\begin{aligned} \oint_S \hat{n} \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) dS + \int_{\tau} \vec{\mathcal{J}}_{\text{induziert}} \cdot \vec{\mathcal{E}} d\tau + \int_{\tau} \left(\vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \right) d\tau = \\ = - \int_{\tau} \vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}} \cdot \vec{\mathcal{E}} d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

In dieser Form ist der Satz von Poynting besonders sinnvoll im Sinne einer energetischen Deutung.

Wir setzen

$$\vec{\Pi} := \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \quad (\text{A.67})$$

und nennen $\vec{\Pi}$ den Poynting Vektor.

Wir setzen außerdem:

$$p_v = \vec{\mathcal{J}}_{\text{induziert}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \text{v: verbraucht} \quad (\text{A.68})$$

$$p_g = -\vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad \text{g: geliefert} \quad (\text{A.69})$$

$$p_{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (\text{A.70})$$

$$p_{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (\text{A.71})$$

Aus dem Satz von Poynting (A.66) wird somit

$$\oint_S \hat{n} \cdot \vec{\Pi} dS + \int_{\tau} p_v d\tau + \int_{\tau} (p_{\mathcal{H}} + p_{\mathcal{E}}) d\tau = + \int_{\tau} p_g d\tau \quad (\text{A.72})$$

Wir beobachten nun, wie dieser Satz eine wichtige energetische physikalische Deutung besitzt.

Auf eine Punktladung q die sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{u} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ bewegt, wirkt bekanntlich die Kraft

$$\vec{\mathcal{F}} = q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{u} \times \vec{\mathcal{B}}) \quad (\text{A.73})$$

Die Leistung \mathcal{L} die das elektromagnetische Feld der Ladung q liefert beträgt also

$$\mathcal{L} = \frac{d\mathcal{W}}{dt} = \vec{\mathcal{F}} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{u} = q(\vec{u} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \vec{u} \cdot \vec{u} \times \vec{\mathcal{B}}) = q\vec{u} \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad (\text{A.74})$$

wobei $d\mathcal{W} = \vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{s}$ die geleistete Arbeit darstellt, die die Kraft $\vec{\mathcal{F}}$ die auf der Punktladung q einwirkt leistet (beim zurücklegen der Strecke $d\vec{s}$ die in der Zeit dt zurückgelegt wird).

Wir haben außerdem (B.11) verwendet.

Wegen (A.73) gilt auch¹⁷, mit klarer Bedeutung

$$\vec{f} = \rho(\vec{\mathcal{E}} + \vec{u} \times \vec{\mathcal{B}}) \quad (\text{A.75})$$

mit ρ Ladungsdichte und \vec{f} Kraftdichte, so dass $d\vec{\mathcal{F}} = \vec{f}d\tau$. Der Ausdruck $d\vec{\mathcal{F}}$ ist selbstverständlich die infinitesimale Kraft die auf die Ladung wirkt, die im Volumenelement $d\tau$ enthalten ist.

¹⁷man teile durch $d\tau$.

Die *Leistungsdichte* p (mit $d\mathcal{L} = p d\tau$, mit klarer Bedeutung) die das elektromagnetische Feld leistet ist demnach, aus (A.74)

$$p = \vec{u} \cdot \vec{f} = \rho(\vec{u} \cdot \vec{\mathcal{E}} + \vec{u} \cdot \vec{u} \times \vec{\mathcal{B}}) = \rho \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad (\text{A.76})$$

wobei $\vec{\mathcal{J}} = \rho \vec{u}$ gilt, wie man leicht zeigen kann.

Demnach beschreibt p_v in (A.68) die Leistungsdichte die das elektromagnetische Feld an die Ladung(sdicthe) liefert, die die Stromdicthe $\vec{\mathcal{J}}_{\text{induziert}}$ verursacht¹⁸.

p_v in (A.68) beschreibt also die Leistungsdichte die durch den Joule Effekt verbraucht (dissipiert) wird.

Analog beschreibt p_g in (A.69) die Leistungsdichte die von der durch die Quellen verursachte Stromdicthe $\vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}}$ an das E.M. Feld geliefert wird (man beachte das Minus Zeichen).

Aus (A.48) und (A.49) folgt dass¹⁹:

$$\frac{dw_{\mathcal{E}}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}}\right)}{dt} = \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{d\vec{\mathcal{D}}}{dt} \quad (\text{A.77})$$

Somit folgt aus (A.71) dass

$$p_{\mathcal{E}} = \frac{dw_{\mathcal{E}}}{dt} \quad (\text{A.78})$$

also ist $p_{\mathcal{E}}$ in (A.71) die elektrische Leistungsdichte (Leistung pro Volumeneinheit die in den Aufbau des elektrischen Feldes fließt).

Analoges folgt für $p_{\mathcal{H}}$ in (A.70).

Man bedenke immer, dass diese Größen von der Position \vec{r} und von der Zeit t abhängen.

Wir können nun den Satz von Poynting (A.72) deuten.

Wir beobachten, dass

- die rechte Seite von Gleichung (A.72) beschreibt²⁰ die Leistung die durch die Quellströme $\vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}}$ an das elektromagnetische Feld im Volumen τ gegeben wird.
- wegen der Erhaltung der Gesamtenergie beschreibt somit die linke Seite von (A.72) die verschiedenen "Wege" die die oben genannte Leistung einschlägt. Der Term $\int_{\tau} p_v d\tau$ ist die Leistung die in τ durch den Joule Effekt verbraucht (dissipiert) wird; der Term $\int_{\tau} (p_{\mathcal{H}} + p_{\mathcal{E}}) d\tau$ repräsentiert die Leistung die im Volumen τ im elektromagnetischem Feld gespeichert wird.

¹⁸eine Ladung die sich bewegt bildet einen Strom.

¹⁹man teile durch dt

²⁰wie hervorgeht aus den vorherigen Ergebnissen.

Der Term $\oint_S \vec{\Pi} \cdot \hat{n} dS$ repräsentiert somit die Leistung die durch die geschlossene Fläche S (Rand von τ) ausgesendet (ausgestrahlt) wird.

Der Poynting Vektor $\vec{\Pi}$ heißt demnach auch Strahlungsvektor.

Der Poynting Satz ist ein Integralsatz. Es ist *nicht* in Allgemeinem korrekt, dem Ausdruck $\vec{\Pi} \cdot \hat{n}$ die Bedeutung einer Leistung die durch dS fließt zukommen zu lassen, mit dS infinitesimales Flächenelement²¹ mit Normale \hat{n} .

A.6 Der transformierte Satz von Poynting

Wir leiten in diesem Abschnitt den Satz von Poynting für komplexe Vektoren her.

Dieser Satz besitzt ebenfalls eine interessante energetische Deutung.

Die Bedeutung der Symbole ist die übliche. Man bedenke, dass wir komplexe Vektoren verwenden.

Multiplizieren wir Gleichung (A.52) skalar²² mit \vec{H}^* und die komplexe Konjugation von Gleichung (A.53) mit \vec{E} und subtrahieren die so gewonnenen Gleichungen.

Wir erhalten

$$\vec{H}^* \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}^* = -j\omega \vec{B} \cdot \vec{H}^* - \vec{J}^* \cdot \vec{E} + j\omega \vec{E} \cdot \vec{D}^* \quad (\text{A.79})$$

wobei wir (B.22) bzw (B.23) berücksichtigt haben²³.

Wir gehen nun analog vor wie in Abschnitt A.5) und erhalten (wir teilen noch durch 2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_S \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^*) dS + \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{J}_{\text{induziert}}^* \cdot \vec{E} d\tau + j\omega \frac{1}{2} \int_{\tau} (\vec{H}^* \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \vec{D}^*) d\tau = \\ = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{J}_{\text{Ursache}}^* \cdot \vec{E} d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Die Bedeutung der Symbole ist analog zu Abschnitt A.5, nur dass wir es mit komplexen Vektoren zu tun haben und ggf. mit zusätzlicher Konjugation.

Wir setzen

$$\vec{\Pi}_K := \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (\text{A.81})$$

$$p_{v,K} = \frac{1}{2} \vec{J}_{\text{induziert}}^* \cdot \vec{E} \quad \text{v: verbraucht} \quad (\text{A.82})$$

$$p_{g,K} = -\frac{1}{2} \vec{J}_{\text{Ursache}}^* \cdot \vec{E} \quad \text{g: geliefert} \quad (\text{A.83})$$

²¹das nicht Rand eines Volumens ist, sondern ein offenes infinitesimales Flächenelement, im Sinne der Geometrie.

²²das Symbol * bedeutet natürlich die komplexe Konjugation.

²³man bedenke, dass ω reell ist.

$$p_{H,K} = \frac{1}{2}j\omega\vec{H}^* \cdot \vec{B} \quad (\text{A.84})$$

$$p_{E,K} = -\frac{1}{2}j\omega\vec{E} \cdot \vec{D}^* \quad (\text{A.85})$$

Man achte auf das Minus Zeichen in der letzten Gleichung.

Der Buchstabe K steht für "komplex" und wir werden ihn weglassen, falls im Kontext keine Gefahr von Doppeldeutigkeit besteht.

$\vec{\Pi}_K$ ist der komplexe Poynting Vektor.

Aus (A.80) wird mit diesen Positionen der Poynting Satz für komplexe Vektoren

$$\oint_S \hat{n} \cdot \vec{\Pi}_K dS + \int_\tau p_{v,K} d\tau + \int_\tau (p_{H,K} + p_{E,K}) d\tau = \int_\tau p_{g,K} d\tau \quad (\text{A.86})$$

Wir wollen nun diese Gleichung deuten.

Aus Abschnitt B.5 wissen wir, dass man komplexe Vektoren benutzt um periodische sinusförmige Größen darzustellen.

Die Periode T ist

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{A.87})$$

Wir schreiben den zeitlichen Mittelwert über eine Periode für eine²⁴ Größe $\mathcal{A}(t)$ mit folgendem Symbol

$$\bar{\mathcal{A}} := \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{A}(t) dt \quad (\text{A.88})$$

Wir bilden nun den zeitlichen Mittelwert (über eine Periode) von beiden Seiten der Gleichung (A.66) und, nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge, erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint_S \hat{n} \cdot \overline{\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}} dS + \int_\tau \overline{\vec{\mathcal{J}}_{\text{induziert}} \cdot \vec{\mathcal{E}}} + \int_\tau \left(\overline{\vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}} + \overline{\vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}} \right) d\tau = \\ = - \int_\tau \overline{\vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}} \cdot \vec{\mathcal{E}}} d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

Wir beobachten nun, dass²⁵

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} = \text{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}] \times \text{Re}[\vec{H}e^{j\omega t}] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\vec{E}e^{j\omega t} + \vec{E}^*e^{-j\omega t} \right) \times \frac{1}{2} \left(\vec{H}e^{j\omega t} + \vec{H}^*e^{-j\omega t} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\vec{E} \times \vec{H}e^{2j\omega t} + \vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} + \vec{E}^* \times \vec{H}^*e^{-2j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

²⁴gegebenenfalls Vektorwertige

²⁵wobei $\vec{\Pi}$ der reelle Poynting Vektor ist wie in Abschnitt A.5 definiert, während $\vec{\Pi}_K$ der komplexe Poynting Vektor ist, wie in diesem Abschnitt definiert. Analoges gilt für die anderen Größen.

Dieser Ausdruck stellt eine reelle Größe dar, da $\vec{\Pi}$ ein reeller Vektor ist.

Für den zeitlichen Mittelwert ergibt sich, wie man sofort sieht

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4}(\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H}) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^*\right] = \operatorname{Re}[\vec{\Pi}_K] \quad (\text{A.91})$$

unter Berücksichtigung von (B.22) und sonstiger Identitäten von Abschnitt B.4.1.

Also ist der Realteil vom komplexen Poynting Vektor $\vec{\Pi}_K$ der zeitliche Mittelwert²⁶ vom (reellen) Poynting Vektor $\vec{\Pi}$.

Wir werden zeigen, dass dies auch für die anderen Terme des Poynting Satzes gilt. Für die Bedeutung der Symbole vergleiche man auch immer Abschnitt A.5.

Wir beobachten dass

$$p_g = -\vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}} \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{2} \left(\vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}} e^{j\omega t} + \vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}}^* e^{-j\omega t} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\vec{E} e^{j\omega t} + \vec{E}^* e^{-j\omega t} \right) \quad (\text{A.92})$$

woraus man, analog wie oben, leicht schließen kann, dass

$$\overline{p_g} = \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} \vec{\mathcal{J}}_{\text{Ursache}}^* \cdot \vec{E} \right] = \operatorname{Re}[p_{g,K}] \quad (\text{A.93})$$

Analog folgt auch

$$\overline{p_v} = \operatorname{Re}[p_{v,K}] \quad (\text{A.94})$$

für die durch den Joule Effekt verbrauchte (dissipierte) Leistungsdichte.

Außerdem gilt, unter Berücksichtigung von (B.45) bzw. (B.44) und (B.22) dass

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{H}} &= \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = \operatorname{Re}[\vec{\mathcal{H}} e^{j\omega t}] \cdot \operatorname{Re}[j\omega \vec{B} e^{j\omega t}] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\vec{\mathcal{H}} e^{j\omega t} + \vec{\mathcal{H}}^* e^{-j\omega t} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(j\omega \vec{B} e^{j\omega t} - j\omega \vec{B}^* e^{-j\omega t} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(j\omega \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{B} e^{2j\omega t} - j\omega \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{B}^* + j\omega \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{B} - j\omega \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{B}^* e^{-2j\omega t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Für den zeitlichen Mittelwert ergibt sich somit

$$\overline{p_{\mathcal{H}}} = \frac{1}{4} \left(j\omega \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{B} + (j\omega \vec{\mathcal{H}}^*)^* \cdot \vec{B}^* \right) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} j\omega \vec{\mathcal{H}}^* \cdot \vec{B} \right] = \operatorname{Re}[p_{\mathcal{H},K}] \quad (\text{A.96})$$

was zu zeigen war.

Analog ergibt sich

$$\overline{p_{\mathcal{E}}} = \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} j\omega \vec{E} \cdot \vec{D}^* \right] = \operatorname{Re}[p_{\mathcal{E},K}] \quad (\text{A.97})$$

²⁶über eine Periode gemäß (A.88).

wobei man aber das Minus Zeichen beachte.

Aus (A.86) und (A.89), mit den hier hergeleiteten Ergebnissen, sieht man folgendes wichtiges Ergebnis: der Realteil der Gleichung (A.86) des Poynting Satzes mit komplexen Vektoren ergibt den zeitlichen Mittelwert (über eine Periode) der Gleichung des Poynting Satzes (A.72) im zeitlichen Bereich.

Somit ergibt sich aus (A.86) eine Aussage über den zeitlichen Mittelwert der Energiebilanz für die Region τ in Hinblick auf elektromagnetische Phänomene.

Diese Aussage erfolgt analog zu den Aussagen die wir in Abschnitt A.5 formuliert haben.

A.7 Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenlänge von elektromagnetischen Wellen

Für eine (ebene monochromatische) Welle der Form (1.1) mit (1.10), folgt aus (B.40) für das elektrische Feld in der Zeit, dass

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_{0,R} \cos(\omega t - \beta \hat{\beta}_0 \cdot \vec{r}) - \vec{E}_{0,J} \sin(\omega t - \beta \hat{\beta}_0 \cdot \vec{r}) \quad (\text{A.98})$$

Diese Welle breitet sich in Richtung $\hat{\beta}_0$ aus.

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass

$$\hat{\beta}_0 = \hat{z}_0 \quad (\text{A.99})$$

im Kartesischem Koordinatensystem $Oxyz$.

Somit gilt

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}_{0,R} \cos(\omega t - \beta z) - \vec{E}_{0,J} \sin(\omega t - \beta z) \quad (\text{A.100})$$

da $\hat{z}_0 \cdot \vec{r} = z$ mit $\vec{r} = x\hat{x}_0 + y\hat{y}_0 + z\hat{z}_0$.

Man siehe (B.40) für die Bedeutung der Symbole.

Wir setzen

$$\Psi = \omega t - \beta z \quad (\text{A.101})$$

Mit einer Differentiation gilt bekanntlich, für eine infinitesimale Veränderung dt und dz , dass

$$d\Psi = \omega dt - \beta dz \quad (\text{A.102})$$

Für einen idealisierten Betrachter²⁷ der sich (in z Richtung) mit einer Wellenfront fortbewegt, also für einen idealisierten Betrachter der sich mit Lichtgeschwindigkeit (im

²⁷aus Sicht der klassischen, nicht relativistischen, Elektrodynamik...

Medium) fortbewegt, gilt, siehe [2], wie man intuitiv nachvollzieht, dass

$$d\Psi = 0 \quad (\text{A.103})$$

also

$$\omega dt = \beta dz \quad (\text{A.104})$$

Das bedeutet

$$c := \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{A.105})$$

mit c Lichtgeschwindigkeit²⁸ *im Medium*.

In anisotrope Medien gilt, für Wellen die sich in z Richtung im *Hauptkoordinatensystem* (sei es immer noch *Oxyz*) ausbreiten, die Behauptung 1.2.4 mit (1.38) und (1.39) somit gilt, mit klarer Bedeutung für die s_+ und p_+ Moden, dass

$$c_{s_+} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon_x}} \quad c_{p_+} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon_y}} \quad (\text{A.106})$$

mit c_i die Lichtgeschwindigkeit im Medium für die Moden $i = s_+, p_+$. Die beiden Moden breiten sich also mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus, falls $\epsilon_x \neq \epsilon_y$.

In einer Periode T legt die Welle eine Wellenlänge λ (im Medium !) zurück, also

$$\lambda = cT = \frac{\omega}{\beta}T = \frac{\omega}{\beta f} = \frac{2\pi}{\beta} \quad (\text{A.107})$$

Wieder gilt also

$$\lambda_{s_+} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon_x}} \quad \lambda_{p_+} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon_y}} \quad (\text{A.108})$$

wegen (1.38) und (1.39) unter denselben Voraussetzungen wie oben. λ symbolisiert die Wellenlänge (der einzelnen Moden) *im Medium*.

Es gilt natürlich

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{A.109})$$

mit ω Pulsation, f Frequenz und T Periode der (ebenen monochromatischen elektromagnetischen) Welle. Natürlich ist $f = \frac{1}{T}$.

Für eine Welle der Form (1.1) mit (1.10) und mit (B.40) betrachtet man auch oft die *zugehörige* Welle im Vakuum.

Für diese gilt

$$\beta_V = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \quad (\text{A.110})$$

wobei wir in diesem Text immer annehmen, dass $\mu \simeq \mu_0$.

²⁸also die Geschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen

μ_0 ist selbstverständlich die absolute Permeabilitätskonstante des Vakuums, und ϵ_0 ist die absolute Dielektrizitätskonstante des Vakuums.

Wir definieren

$$n_{\text{eff},i} := \frac{\beta_i}{\beta_V} \quad i = s_+, p_+ \quad (\text{A.111})$$

mit klarer Bedeutung. Siehe [12].

Mit den Ausdrücken für β ergibt sich sofort

$$n_{\text{eff},s_+} = \sqrt{\frac{\epsilon_x}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_{r,x}} \quad n_{\text{eff},p_+} = \sqrt{\frac{\epsilon_y}{\epsilon_0}} = \sqrt{\epsilon_{r,y}} \quad (\text{A.112})$$

im Hauptkoordinatensystem des Mediums, mit $\underline{\epsilon}_r$ relative Dielektrizitätskonstante des Mediums (im Hauptkoordinatensystem). Man bedenke, dass $\mu = \mu_0$.

Aus (A.107) folgt sofort

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{A.113})$$

also

$$n_{\text{eff},i} = \frac{\lambda_V}{\lambda_i} \quad i = s_+, p_+ \quad (\text{A.114})$$

mit $\lambda_V = \lambda_0$ Wellenlänge *im Vakuum* von einer Welle der Pulsation ω , also der Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

In Publikationen, wie z.B. in [18] wird üblicherweise diese Wellenlänge im Vakuum betrachtet.

In diesem Text verwenden wir dagegen die Wellenlänge im Medium (für die Pulsation ω). Um die Konversion durchzuführen sei der Ausdruck für n_{eff} daher immer berücksichtigt.

Wir verwenden im Text außerdem die absolute und nicht die relative Dielektrizitätskonstante für die betrachteten Medien.

Mit (A.107) und (A.110) folgt für die Wellenlänge im Vakuum $\lambda_V = \lambda_0$ von einer elektromagnetischen Welle mit Pulsation ω , dass

$$\lambda_0 = \lambda_V = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (\text{A.115})$$

also ist

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda_0\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (\text{A.116})$$

Diese Umrechnungen sind wichtig, da in den Publikationen meist λ_0 statt ω angegeben wird.

B Mathematische Instrumente

B.1 Grundlagen der Vektoranalysis

Sei im Folgendem $\Phi(\vec{r})$ eine skalare Funktion der Position \vec{r} und $\vec{A}(\vec{r})$ eine vektorwertige Funktion der Position.

Es gelten die Sätze des Gradienten, der Divergenz (oder Satz von Gauss) und der Rotation, die mit Hilfe des Nabla Operators ∇ folgende Form annehmen, siehe [2]:

$$\int_{\tau} \nabla \Phi d\tau = \oint_S \hat{n} \Phi dS \quad (\text{B.1})$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{A} d\tau = \oint_S \hat{n} \cdot \vec{A} dS \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \vec{A} d\tau = \oint_S \hat{n} \times \vec{A} dS \quad (\text{B.3})$$

wobei τ eine offene und zusammenhängende Region des Raumes ist mit Rand $S = \partial\tau$. S besitzt in jedem Punkt die (äußere) Normale \hat{n} .

Am wichtigsten ist der Divergenzsatz (Satz von Gauss) der durch (B.2) gegeben ist.

Er besagt, dass die Quellen von \vec{A} durch die Divergenz $\nabla \cdot \vec{A}$ beschrieben werden können: ein positiver Wert der Divergenz (in einem Punkt \vec{r}) bedeutet, dass wir es mit einer Quelle von \vec{A} zu tun haben, wo Feldlinien “entstehen”; ein negativer Wert der Divergenz bedeutet dass wir es mit einer Senke zu tun haben, wo Feldlinien “verschwinden”.

Die oberen Gleichungen kann man in der kompakten Form

$$\int_{\tau} \nabla[\] d\tau = \oint_S \hat{n}[\] dS \quad (\text{B.4})$$

angeben.

Daraus folgt auch eine physikalische Deutung des Nabla Operators ∇ die unabhängig ist vom verwendeten Koordinatensystem.

Wegen dem Mittelwertsatz folgt aus (B.4):

$$\nabla[\] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \nabla[\] d\tau = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \oint_S \hat{n}[\] dS \quad (\text{B.5})$$

Daraus folgt sofort¹ eine physikalische Deutung des Gradienten von $\Phi(\vec{r})$, $\nabla\Phi$, und der Divergenz $\nabla \cdot \vec{A}$ und der Rotation $\nabla \times \vec{A}$ von $\vec{A}(\vec{r})$.

¹man ersetze die leeren Klammern [] mit entsprechenden Ausdruck

Wir werden nun wichtige Gleichungen der Vektoranalysis angeben.
 Man beobachte das

$$\nabla\Phi \cdot \hat{r} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(\hat{x} \cdot \hat{r}) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(\hat{y} \cdot \hat{r}) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\hat{z} \cdot \hat{r}) = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (\text{B.6})$$

wobei $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ die Einheitsvektoren entlang den x, y, z Achsen eines Kartesischen Koordinatensystems sind, während \hat{r} ein beliebiger Einheitsvektor ist. Man sieht also, dass das Skalarprodukt eines Gradienten $\nabla\Phi$ einer Funktion Φ mit einem Einheitsvektor \hat{r} eben der Richtungsableitung von Φ in Richtung r entspricht, also $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$.

Ein weiterer wichtiger Satz ist der Satz von Stokes

$$\int_S \hat{n} \cdot \nabla \times \vec{A} dS = \oint_s \hat{s}_0 \cdot \vec{A} ds \quad (\text{B.7})$$

wobei S eine zusammenhängende *Oberfläche* im Raum ist mit Rand s . Der Einheitsvektor \hat{n} ist die Oberflächen Normale und \hat{s}_0 ist der Einheitsvektor der Tangential zu s verläuft (entsprechend der Orientierung von \hat{n} . Das heißt, dass ein Betrachter der gemäß \hat{n} orientiert ist, den Einheitsvektor \hat{s}_0 entlang s in umgekehrtem Uhrzeigersinn verlaufen sehen würde.).

Aus dem Mittelwertsatz und aus dem Satz von Stokes (B.7) folgt nun:

$$\hat{n} \cdot \nabla \times \vec{A} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \int_S \hat{n} \cdot \nabla \times \vec{A} dS = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_s \hat{s}_0 \cdot \vec{A} ds \quad (\text{B.8})$$

was eine wichtige physikalische Bedeutung der Rotation ermöglicht.

Man sieht, durch (B.8), wie die Rotation mit der Wirbelstärke zusammenhängt.

Für eine ausführliche Einführung in die Vektoranalysis sei [5] erwähnt.

B.1.1 Eine Anwendung des Divergenzsatzes

Aus dem Satz von Gauss (Divergenzsatz)

$$\int_\tau \nabla \cdot \vec{F} d\tau = \oint_S \hat{n} \cdot \vec{F} dS \quad (\text{B.9})$$

(mit klarer Bedeutung) folgt, dass, wenn τ ein Volumen ist, dass aus einem Zylinder besteht, mit (flacher) Basis A und infinitesimale Höhe dz (mit dz natürlich entlang der z Achse; also mit Basis A parallel zur x, y -Ebene), wir schreiben können:

$$\int_A \nabla \cdot \vec{F} dA dz = \oint_{L_A} \vec{F} \cdot \hat{n} dL dz + \int_A (\vec{F}(\vec{r} + \hat{z}dz) - \vec{F}(\vec{r})) \cdot \hat{z} dA(x, y)$$

Außerdem

$$\int_A (\vec{F}(\vec{r} + \hat{z}dz) - \vec{F}(\vec{r})) \cdot \hat{z} dA(x, y) = \int_A \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial z} dz \right) \cdot \hat{z} dA = \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_A \vec{F} \cdot \hat{z} dA \right) dz$$

Daraus folgt schließlich

$$\int_A \nabla \cdot \vec{F} dA = \frac{\partial}{\partial z} \int_A \vec{F} \cdot \hat{z} dA + \oint_{L_A} \vec{F} \cdot \hat{n} dL \quad (\text{B.10})$$

wobei selbstverständlich L_A die (eindimensionale) geschlossene Kurve ist die die (zweidimensionale) Fläche A umschließt (im dreidimensionalen Raum). \hat{n} ist die äußere Normale zu der Kurve L_A , die in derselben Fläche wie L_A liegt. Natürlich liegt A in einer Ebene, ist also „flach“ !

\hat{z} ist selbstverständlich der Einheitsvektor in z Richtung.

B.2 Wichtige vektorielle Identitäten

Seien $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ drei Vektoren² (bzw vektorwertige Funktionen der Position). Und sei Φ ein Skalar bzw eine skalare Funktion der Position. Dann gilt

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} \quad (\text{B.11})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (\text{B.12})$$

$$\nabla \cdot (\Phi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \vec{A} \quad (\text{B.13})$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \quad (\text{B.14})$$

$$\vec{A} \cdot (\underline{\underline{\alpha}} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\underline{\underline{\alpha}} \cdot \vec{A}) \quad \text{für } \underline{\underline{\alpha}} \text{ symmetrisch} \quad (\text{B.15})$$

zum Beweis dieser Aussage betrachte man, dass

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\underline{\underline{\alpha}} \cdot \vec{B}) &= \sum_{i=1}^3 A_i \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} B_j \right) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 A_i \alpha_{ij} B_j = \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 B_j \alpha_{ji} A_i = \sum_{j=1}^3 B_j \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{ji} A_i \right) = \vec{B} \cdot (\underline{\underline{\alpha}} \cdot \vec{A}) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

falls $\underline{\underline{\alpha}}$ symmetrisch ist ($\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$). □

²sie dürfen auch komplexe Vektoren sein, es sei denn es wird ausdrücklich anders behauptet.

B.3 Wirbelfreie Vektorfelder und Potentiale

Sei ein Vektorfeld \vec{F} gegeben und sei

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad \text{in } \tau \quad (\text{B.17})$$

mit τ ein einfach zusammenhängendes Gebiet³ des Raumes.

Dann existiert eine skalare Funktion $\Phi = \Phi(\vec{r})$, so dass in τ gilt

$$\vec{F} = \nabla \Phi \quad (\text{B.18})$$

Φ wird skalares Potential vom Vektorfeld \vec{F} genannt.

Es gilt auch die Umkehrung dieser Schlussfolgerung.

Wir behaupten also dass in einfach zusammenhängende Gebiete ein wirbelfreies Vektorfeld ein Potentialfeld ist, und umgekehrt.

Wirbelfrei bedeutet (siehe auch (B.8)) dass $\nabla \times \vec{F} = 0$. Und Potentialfeld bedeutet eben, dass ein skalares Potential Φ existiert, so dass $\vec{F} = \nabla \Phi$.

B.4 Komplexe Vektoren

B.4.1 Nützliche Identitäten

Sei \vec{A} (und \vec{B} , etc) ein komplexer Vektor $\vec{A} = \vec{A}_R + j\vec{A}_I$, mit \vec{A}_R und \vec{A}_I (dreidimensionale) reelle Vektoren.

Es gilt⁴:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = \vec{A}_R \cdot \vec{B}_R - \vec{A}_I \cdot \vec{B}_I + j(\vec{A}_R \cdot \vec{B}_I + \vec{A}_I \cdot \vec{B}_R) \in \mathbb{C} \quad (\text{B.19})$$

daher ist \cdot kein Skalarprodukt im Sinne der Hilbertraum Theorie, und wir definieren ein Skalarprodukt im Sinne der Hilbertraumtheorie⁵ zwischen komplexen Vektoren, wie folgt

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle := \vec{A} \cdot \vec{B}^* \quad (\text{B.20})$$

wodurch der Raum der komplexen Vektoren normierbar ist, mit induzierter Norm

$$||\vec{A}||^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}^* \quad (\text{B.21})$$

³wir haben ein einfach zusammenhängendes Gebiet falls jede einfache geschlossene Kurve (ohne mehrfach auftretende Punkte) in τ , Rand von einer offenen Fläche ist, die ganz in τ enthalten ist. Z.B. sind Quader, Kugeln, alle konvexen Gebiete einfach zusammenhängend, selbst noch wenn sie "blasenartige" Löcher enthalten.

⁴man sieht also, dass man mit komplexen Vektoren "genau so" rechnen kann, wie mit reellen

⁵siehe ein Text über Funktionalanalysis

Wie bei komplexen Zahlen auch, gilt außerdem, für alle $z \in \mathbb{C}$, dass

$$(z\vec{A})^* = z^*\vec{A}^* \quad (\text{B.22})$$

so dass z.B., mit ω reell, gilt

$$(j\omega\epsilon\vec{E})^* = -j\omega\epsilon^*\vec{E}^* \quad (\text{B.23})$$

Sei \hat{z} ein reeller Einheitsvektor, dann gilt

$$\hat{z} \cdot \text{Re}[\vec{A}] = \text{Re}[\vec{A} \cdot \hat{z}] \quad (\text{B.24})$$

Für alle komplexen Zahlen oder komplexen Vektoren z gilt

$$z + z^* = 2\text{Re}[z] = 2\text{Re}[z^*] \quad (\text{B.25})$$

* bedeutet, wie immer in diesem Text, komplex konjugiert.

Es gilt auch, wie man sofort beweisen kann

$$(\nabla \times \vec{A})^* = \nabla \times \vec{A}^* \quad (\text{B.26})$$

und

$$(\vec{A} \times \vec{B})^* = \vec{A}^* \times \vec{B}^* \quad (\text{B.27})$$

und

$$(\vec{A} \cdot \vec{B})^* = \vec{A}^* \cdot \vec{B}^* \quad (\text{B.28})$$

B.4.2 Parallele und orthogonale Komplexe Vektoren

Ein komplexer Vektor $\vec{A} = \vec{A}_R + j\vec{A}_J$ kann nicht im dreidimensionalen Raum visualisiert werden, da er 6 Freiheitsgrade besitzt. Man kann den Realteil $\vec{A}_R = \text{Re}[\vec{A}]$ eines komplexen Vektors im dreidimensionalen Raum darstellen, und den Imaginärteil $\vec{A}_J = \text{Im}[\vec{A}]$, aber nicht ein komplexer Vektor "als ganzes". Darüber hinaus, hat die imaginäre Einheit j keine konkret "visualisierbare" physikalische Bedeutung.

Bezüglich Parallelismus und Orthogonalität von komplexen Vektoren, gibt es keine eindeutigen Definitionen.

In der Elektrodynamik setzt man⁶ (meistens):

$$\vec{A} = z\vec{B} \quad \Leftrightarrow \quad \text{die komplexen Vektoren } \vec{A} \text{ und } \vec{B} \text{ sind parallel} \quad (\text{B.29})$$

mit $z \in \mathbb{C}$.

⁶und wir folgen diese Konvention in diesem Text

Und:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \text{die komplexen Vektoren } \vec{A} \text{ und } \vec{B} \text{ sind orthogonal} \quad (\text{B.30})$$

wobei \cdot durch (B.19) definiert ist (also wie üblich definiert ist).

Wir betonen aber nochmals, dass das \cdot Produkt von komplexen Vektoren *kein* Skalarprodukt im Sinne der Hilbertraumtheorie darstellt, da es entsprechende Definition nicht erfüllt⁷.

Das \cdot Produkt von komplexe Vektoren⁸ kann, wie üblich, durch Summation der einzelnen Komponenten berechnet werden.

Es gilt nämlich, wie man sofort aus (B.19) sieht:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 (A_{R,i} B_{R,i} - A_{J,i} B_{J,i}) + j \sum_{i=1}^3 (A_{R,i} B_{J,i} + A_{J,i} B_{R,i}) = \sum_{i=1}^3 A_i B_i \quad (\text{B.31})$$

Daraus folgt sofort, dass für beliebige komplexe Vektoren \vec{A}, \vec{B} und für beliebige $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\vec{A} \cdot (z\vec{B}) = \sum_{i=1}^3 A_i z B_i = z \sum_{i=1}^3 A_i B_i = z(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (z\vec{A}) \cdot \vec{B} \quad (\text{B.32})$$

was wiederum impliziert⁹, dass auch für komplexe Vektoren

$$\vec{C} \text{ parallel zu } \vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{A} \text{ orthogonal zu } \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \text{ orthogonal zu } \vec{C} \quad (\text{B.33})$$

Falls zwei komplexe Vektoren orthogonal sind, bedeutet dies nicht im Allgemeinen, dass die Realteile und die Imaginärteile der einzelnen Vektoren orthogonal sind, und umgekehrt.

Wir betrachten folgendes

Gegenbeispiel:

$$\vec{A} = (2 + 3j)\hat{x} + \hat{y} \quad \vec{B} = -j\hat{x} + (-3 + 2j)\hat{y} \quad (\text{B.34})$$

Gemäß (B.30) (mit (B.19)) sind \vec{A} und \vec{B} orthogonal. Jedoch gilt, wie man leicht sieht $\vec{A}_R \cdot \vec{B}_R = -3$ und $\vec{A}_J \cdot \vec{B}_J = -3$.

Auch die Umkehrung ist nicht allgemein gültig.

⁷im Gegensatz zum Falle von reellen Vektoren.

⁸einige Autoren nennen dieses Produkt weiterhin Skalarprodukt, obwohl es im mathematischen Sinne keines ist.

⁹da

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot (z\vec{B}) = z(\vec{A} \cdot \vec{B}) = 0$$

Sei z.B.

$$\vec{A} = \hat{x} + j\hat{z} \quad \vec{B} = \hat{z} + j\hat{y} \quad (\text{B.35})$$

Man erkennt sofort, dass $\vec{A}_R \cdot \vec{B}_R = 0$ und $\vec{A}_J \cdot \vec{B}_J = 0$.

Jedoch folgt aus (B.19) dass

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 + j(0 + \hat{z} \cdot \hat{z}) = j \neq 0 \quad (\text{B.36})$$

Wegen (B.30) sind die beiden Vektoren also nicht orthogonal. \square

Für das Vektorprodukt von zwei komplexen Vektoren \vec{A}, \vec{B} gilt

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{A}_R + j\vec{A}_J) \times (\vec{B}_R + j\vec{B}_J) = \vec{A}_R \times \vec{B}_R - \vec{A}_J \times \vec{B}_J + j(\vec{A}_R \times \vec{B}_J + \vec{A}_J \times \vec{B}_R) \quad (\text{B.37})$$

also auch in diesem Falle rechnen wir wie mit reellen Vektoren.

Wir zeigen nun folgendes wichtige Ergebnis: auch für *komplexe* Vektoren gilt, dass:

$$\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \text{ und } \vec{A} \cdot \vec{C} = 0 \quad (\text{B.38})$$

also ist \vec{A} orthogonal sowohl zu \vec{B} als auch zu \vec{C} .

Beweis: offensichtlich gilt, dass

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{B} = \underbrace{\text{Re}[(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{B}]}_{=: \Phi} + j \underbrace{\text{Im}[(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{B}]}_{=: \Psi} = \Phi + j\Psi = 0$$

da, mit (B.19) und (B.37) gilt

$$\begin{aligned} \Phi &= (\text{Re}[\vec{B} \times \vec{C}]) \cdot \vec{B}_R - (\text{Im}[\vec{B} \times \vec{C}]) \cdot \vec{B}_J = \\ &= (\vec{B}_R \times \vec{C}_R - \vec{B}_J \times \vec{C}_J) \cdot \vec{B}_R - (\vec{B}_R \times \vec{C}_J + \vec{B}_J \times \vec{C}_R) \cdot \vec{B}_J = \\ &= -(\vec{B}_J \times \vec{C}_J) \cdot \vec{B}_R - (\vec{B}_R \times \vec{C}_J) \cdot \vec{B}_J = -\vec{C}_J \cdot (\vec{B}_R \times \vec{B}_J) - \vec{C}_J \cdot (\vec{B}_J \times \vec{B}_R) = \\ &= \vec{C}_J \cdot (\vec{B}_J \times \vec{B}_R) - \vec{C}_J \cdot (\vec{B}_J \times \vec{B}_R) = 0 \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von (B.11). Man bedenke auch, dass die Vektoren die mit R und J gekennzeichnet sind reelle Vektoren sind, für die die üblichen Rechnungen gelten.

Ganz analog¹⁰ gilt

$$\Psi = \vec{B}_J \cdot (\vec{B}_R \times \vec{C}_R) + \vec{B}_R \cdot (\vec{B}_J \times \vec{C}_R) = 0$$

Man wende ebenfalls (B.11) an und rechen analog wie zuvor.

Daraus folgt $\vec{A} \cdot \vec{B} = \Phi + j\Psi = 0$.

¹⁰wir überspringen die einzelnen Schritte

Um zu zeigen, dass auch $\vec{A} \cdot \vec{C} = 0$ gültig ist kann man analog vorgehen, oder man kann beobachten, dass

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{C} = -(\vec{C} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = -0 = 0$$

mit einem Vergleich zum vorangegangenen Fall und mit der Bemerkung, dass \vec{B}, \vec{C} beliebige komplexe Vektoren sind.

Aus alledem folgt (B.38) □

Auch für komplexe Vektoren definieren wir die transversale Komponente gegenüber einer bestimmten Richtung die durch einen *reellen* Einheitsvektor \hat{r} gegeben ist:

$$\vec{A}_t = \vec{A} - \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{A}) \quad (\text{B.39})$$

Dass \vec{A}_t orthogonal zu \hat{r} ist folgt sofort, wenn wir $\vec{A}_t \cdot \hat{r}$ berechnen¹¹.

Abschließend sei noch erwähnt, dass in der Mathematik eine andere Definition der Orthogonalität von komplexen Vektoren zu finden ist. Man geht vom Skalarprodukt (B.20) aus, und behauptet dass zwei komplexe Vektoren orthogonal sind falls *dieses* Skalarprodukt Null ist. Diese Betrachtungsweise ist mathematisch konsistent (im Sinne der Theorie der Hilberträume), wird jedoch in der Elektrodynamik (fast) nie verwendet.

B.5 Darstellung mit komplexen Vektoren

Wir nehmen im Folgendem an, dass

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}] = \text{Re}[(\vec{E}_R + j\vec{E}_J)e^{j\omega t}] = \vec{E}_R \cos(\omega t) - \vec{E}_J \sin(\omega t) \quad (\text{B.40})$$

wobei ω die Pulsation darstellt, j die imaginäre Einheit, t die Zeit, \vec{r} die Position und

$$\vec{E} = \vec{E}_R + j\vec{E}_J \quad (\text{B.41})$$

ein *komplexer* Vektor ist, mit Realteil \vec{E}_R und Koeffizient des Imaginärteils \vec{E}_J . Letztere Größen sind selbstverständlich reelle Vektoren. $\vec{E}, \vec{E}_R, \vec{E}_J$ sind nur von der Position und *nicht* von der Zeit abhängig.

Wir haben also, mit anderen Worten, angenommen, dass die Abhängigkeit des Feldes von der Zeit (und vom Ort) die Form

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_R \cos(\omega t) - \vec{E}_J \sin(\omega t) \quad (\text{B.42})$$

besitzt, mit \vec{E}_R und \vec{E}_J eben reelle Vektoren die nur von der Position abhängen und nicht von der Zeit.

¹¹das offensichtlich gleich 0 ist, mit der Bemerkung dass $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$.

Für eine tiefere Erklärung siehe [2].

Im Allgemeinen werden wir annehmen, dass das elektrische (und das magnetische) Feld in dem betrachteten Medium aus einer Summe von Summanden der Form (B.40) besteht. Dies ist gerechtfertigt aus der Fourier Analysis und aus der Tatsache, dass innerhalb *linearer* Medien das Superpositionsprinzip gilt.

Gelte also (B.40) bzw. (B.42), mit den oben angegebenen Erläuterungen. In diesem Fall ist der komplexe Vektor \vec{E} *eindeutig* bestimmt, wie man leicht sieht. Das heißt also, dass dem Feld $\vec{\mathcal{E}}$ *eindeutig* ein komplexer Vektor \vec{E} zugeordnet werden kann und umgekehrt. Wir schreiben also

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \leftrightarrow \vec{E}(\vec{r}) \quad (\text{B.43})$$

wobei die zusätzliche Angabe der (fixen) Pulsation ω die Daten vervollständigt.

In diesem Schreiben werden wir immer der Konvention folgen, die durch (B.40) Ausdruck findet¹². Man bedenke immer implizit diese Tatsache.

Wir beobachten, dass

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}] \right) = \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}e^{j\omega t}) \right] = \text{Re}[j\omega \vec{E}e^{j\omega t}] \quad (\text{B.44})$$

da \vec{E} nicht von t abhängt. Aus der oben besprochenen Eindeutigkeit, folgt also, wie man leicht sieht und mit klarer Bedeutung der Symbole, dass

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \leftrightarrow j\omega \vec{E} \quad (\text{B.45})$$

Außerdem

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} \leftrightarrow \nabla \times \vec{E} \quad (\text{B.46})$$

¹² man beachte, dass man statt $e^{j\omega t}$ auch $e^{-j\omega t}$ betrachten könnte, wobei aber für gleiches $\vec{\mathcal{E}}$ wir ein anderes \vec{E} erhalten würden (nämlich den komplex konjugierten Wert von dem komplexen Vektor bei unserer Schreibweise). Die alternative Konvention würde aber selbstverständlich auch eine eindeutige Zuordnung hervorbringen.

und¹³

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} \leftrightarrow \nabla \cdot \vec{E} \quad (\text{B.50})$$

Analoge Notation verwenden wir für die anderen Größen.

Wichtig ist es zu betonen, dass jeder Größe ein komplexer Vektor zugeordnet ist und umgekehrt (auf eindeutige Weise) und dass aus dem Ableitungsoperator $\frac{\partial}{\partial t}$ eben eine Multiplikation mit $j\omega$ wird, gemäß (B.45). Es wird also bequemer, mit den transformierten Größen zu arbeiten, da die Differentiationsoperationen nach der Zeit wegfallen. Für ein tieferes Verständnis sei [2] empfohlen.

Wenn eine Gleichung gilt, kann man beide Seiten der Gleichung transformieren und man erhält (immer wegen der besprochenen Eindeutigkeit !) eine transformierte Gleichung die ebenfalls gültig sein muss. So kann man dann das betrachtete transformierte Problem lösen, wo keine Zeitabhängigkeit mehr vorkommt (da man mit komplexen Vektoren arbeitet), und wo die ursprünglichen Ableitungen nach der Zeit eben Multiplikationen mit $j\omega$ werden. Wenn man die gefundenen Ergebnisse rücktransformiert, erhält man dann die anfänglich gesuchte Lösung im Zeit-Domain (immer gemäß (B.40)). Dies folgt alles aus der Eindeutigkeit der Transformation.

Bezüglich der Intensitäten beachte man

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}_i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (E_{R,i} \cos(\omega t) - E_{I,i} \sin(\omega t))^2 dt = \frac{1}{2} (E_{R,i}^2 + E_{I,i}^2) = \frac{1}{2} |E_i|^2 \quad (\text{B.51})$$

für $i = x, y, z$. R und I symbolisieren Real- und Imaginärteil und $|z|$ ist der Betrag von $z \in \mathbb{C}$. Hier ist $T = \frac{2\pi}{\omega}$ die Periode der Welle.

¹³man beobachte dass man es in folgender Gleichung (B.50) in Wirklichkeit mit einer skalaren Gleichung zu tun hat. Daher betrachten wir *skalare Phasoren* gemäß folgender Gleichung

$$a = a(\vec{r}, t) = \text{Re}[a_k e^{j\omega t}] = a_{K,R} \cos(\omega t) - a_{K,I} \sin(\omega t) \quad (\text{B.47})$$

mit $a_K \in \mathbb{C}$ und $A_{K,R} = \text{Re}[a_K]$ und $A_{K,I} = \text{Im}[a_K]$. Wir schreiben also, mit klarer Bedeutung:

$$a(\vec{r}, t) \leftrightarrow a_K(\vec{r}) \in \mathbb{C} \quad (\text{B.48})$$

auf eindeutige Weise (die logischen Schritte sind ganz analog zu denen die wie für komplexe Vektoren betrachtet haben). Es ist nun ganz leicht zu zeigen, dass

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\nabla \cdot \vec{E} e^{j\omega t}] \quad (\text{B.49})$$

Daraus folgt die Gleichung (B.50) mit der Bedeutung die durch (B.48) und (B.47) ersichtlich ist.

Ähnliche Bemerkungen gelten auch für andere ähnliche skalare Gleichungen, wie man leicht sehen kann.

B.6 Polarisations-eigenschaften von komplexen Vektoren

Aus (B.40) kann man folgern, dass für einen gegebenen komplexen Vektor \vec{E} der zeitlich rücktransformierte Vektor $\vec{\mathcal{E}}$ im Allgemeinen eine Ellipse beschreibt (bzw. die Extremität von $\vec{\mathcal{E}}$ beschreibt eine Ellipse).

Diese Ellipse liegt in der Fläche in der \vec{E}_R und \vec{E}_J liegen.

Für einen mathematisch ausführlichen Beweis dieser Aussage siehe [2].

Wir sehen auch, dass falls $\vec{E}_R \cdot \vec{E}_J = 0$ (also falls sie orthogonal sind) und $E_R = E_J$ (also falls die beiden Vektoren die gleiche Länge (Norm) haben) die besprochene Ellipse zu einem Kreis wird.

Man redet dann von kreisförmiger Polarisierung.

Falls dagegen \vec{E}_R parallel (oder antiparallel) zu \vec{E}_J ist, oder falls $\vec{E}_R = 0$ oder $\vec{E}_J = 0$, dann beschreibt $\vec{\mathcal{E}}$ ein Segment (entlang der Richtung von \vec{E}_R bzw. \vec{E}_J) und wir reden von linearer Polarisierung (entlang der gegebenen Richtung).

Somit gibt der komplexe Vektor \vec{E} Auskunft über das Verhalten von $\vec{\mathcal{E}}$ und wir unterscheiden zwischen elliptischer, zirkularer und linearer Polarisierung von (komplexen) Vektoren.

Wir beobachten zum Schluss, dass der Vektor $z\vec{E}$ dieselbe Polarisierung besitzt wie \vec{E} , für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ und für alle komplexe Vektoren \vec{E} .

Wenn wir nämlich schreiben

$$z = |z| e^{j\phi_z} \tag{B.52}$$

folgt aus (B.40) dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[z\vec{E}e^{j\omega t}] &= \operatorname{Re}\left[|z|(\vec{E}_R + j\vec{E}_J)e^{j(\omega t + \phi_z)}\right] = \\ &= |z|\left[\vec{E}_R \cos(\omega t + \phi_z) - \vec{E}_J \sin(\omega t + \phi_z)\right] = \vec{\mathcal{E}}_{(z\vec{E})} \end{aligned} \tag{B.53}$$

Wir haben natürlich gesetzt (siehe Anhang B.5):

$$\vec{\mathcal{E}}_{(z\vec{E})} \leftrightarrow z\vec{E} \tag{B.54}$$

Der Vektor $\vec{\mathcal{E}}_{(z\vec{E})}$ beschreibt also dieselbe Ellipse wie $\vec{\mathcal{E}}$, bis auf die Tatsache, dass diese Ellipse um ein Faktor $|z|$ größer ist, was aber die Art der Polarisierung nicht ändert.

Auch wird diese Ellipse zeitlich versetzt beschrieben¹⁴ (gegenüber der von $\vec{\mathcal{E}}$), wegen der Existenz der Phase ϕ_z in Gleichung (B.53).

Daraus folgt die Behauptung.

Es folgt auch, dass ebene Wellen wie in (1.1) beschrieben, immer dieselbe Polarisierung besitzen wie die von \vec{E}_0 .

¹⁴was aber auf die Polarisierungseigenschaften kein Einfluss hat.

C Drehung des Hauptkoordinatensystems in anisotrope Medien unter Kräfteeinwirkung

C.1 Allgemeines zur Diagonalisierung von symmetrischen Matrizen mit reellen Elementen

Im folgendem werden wir uns mit der Diagonalisierung von symmetrischen Matrizen mit reellen Elementen befassen.

Die Theorie der Diagonalisierung von Matrizen ist in jedem Text über Lineare Algebra zu finden.

Hier wollen wir aber das Problem aus unserem speziellen Blickwinkel nochmals betrachten und zusammenfassen, der Klarheit wegen.

Wir werden nicht nur von Matrizen sprechen, sondern von Linearen Abbildungen zwischen Vektoren des dreidimensionalen geometrischen Raumes.

Falls ein Koordinatensystem gegeben ist, dann kann man bekanntlich eine gegebene Lineare Abbildung durch eine Matrix repräsentieren, gemäß (A.15) und (A.14).

Man sollte aber nicht die lineare Abbildung selbst mit seiner Repräsentation verwechseln, genau so wie man einen Vektor des Raumes nicht mit seinen Koordinaten (bzw. Komponenten) verwechseln darf. Wenn man das Koordinatensystem wechselt, dann wechseln auch diese Darstellungen.

Vektoren und Lineare Abbildungen selbst sind aber Entitäten die unabhängig von einem Koordinatensystem gedacht werden können: das Koordinatensystem dient lediglich als ein Hilfsmittel um diese Entitäten zu beschreiben.

Im folgendem sei $\underline{\alpha}$ eine *lineare Abbildung* zwischen *Vektoren* \vec{w} des Raumes¹.

Es ist üblich die Menge der Vektoren des Raumes mit \mathcal{V}^3 zu bezeichnen.

¹unabhängig vom benutzten Koordinatensystem.

Bekanntlich gibt es eine injektive und surjektive Abbildung (eine bijektive Korrespondenz) zwischen \mathcal{V}^3 und \mathbb{R}^3 , *sobald* ein Koordinatensystem $O\chi\nu\zeta$ fixiert ist. Siehe ein Text über Geometrie und lineare Algebra, z.B. [7].

Es gilt also, mit klarer Bedeutung

$$\underline{\underline{\alpha}} : \mathcal{V}^3 \longrightarrow \mathcal{V}^3 \quad (\text{C.1})$$

Wir schreiben das Abbild durch $\underline{\underline{\alpha}}$ von einem beliebigen Vektor $\vec{w} \in \mathcal{V}^3$ mit den Symbolen $\underline{\underline{\alpha}} \cdot \vec{w}$.

Sei nun ein beliebiges Koordinatensystem $O\chi\nu\zeta$ gegeben, mit orthonormalen Einheitsvektoren $\hat{\chi}_0, \hat{\nu}_0, \hat{\zeta}_0$, dann gilt bekanntlich

$$\vec{w} = w_\chi \hat{\chi}_0 + w_\nu \hat{\nu}_0 + w_\zeta \hat{\zeta}_0 \quad (\text{C.2})$$

mit

$$w_\chi = \vec{w} \cdot \hat{\chi}_0 \quad w_\nu = \vec{w} \cdot \hat{\nu}_0 \quad w_\zeta = \vec{w} \cdot \hat{\zeta}_0 \quad (\text{C.3})$$

Mit diesen Positionen, können wir (im Koordinatensystem $O\chi\nu\phi$) den Vektor \hat{w} des Raumes auf *eindeutige* Weise mit dem Element aus \mathbb{R}^3 identifizieren das gegeben ist durch $(w_\chi, w_\nu, w_\zeta)^T$.

Es gilt also, mit klarer Bedeutung

$$\mathcal{V}^3 \ni \vec{w} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} w_\chi \\ w_\nu \\ w_\zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für das System } O\chi\nu\zeta \quad (\text{C.4})$$

Für ein anderes (orthonormales) System $Oxyz$ gilt entsprechend

$$\vec{w} = w_x \hat{x}_0 + w_y \hat{y}_0 + w_z \hat{z}_0 \quad (\text{C.5})$$

mit

$$w_x = \vec{w} \cdot \hat{x}_0 \quad w_y = \vec{w} \cdot \hat{y}_0 \quad w_z = \vec{w} \cdot \hat{z}_0 \quad (\text{C.6})$$

und

$$\mathcal{V}^3 \ni \vec{w} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für das System } Oxyz \quad (\text{C.7})$$

Um von den *Koordinaten* in $O\chi\nu\zeta$ auf die Koordinaten in $Oxyz$ zu gelangen gibt es bekanntlich die Matrix der Koordinatentransformation.

Es gilt also, mit klarer Bedeutung, dass für alle Vektoren $\vec{w} \in \mathcal{V}^3$ gilt

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} w_\chi \\ w_\nu \\ w_\zeta \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

mit einer konstanten² Transformationsmatrix T .

Die umgekehrte Transformation erfolgt selbstverständlich mit T^{-1} .

Falls man ein Koordinatensystem $O\chi v\zeta$ fixiert hat, dann kann man bekanntlich die Lineare Abbildung $\underline{\underline{\alpha}}$ durch eine Matrix (Tensor der zweiten Ordnung) repräsentieren

$$\underline{\underline{\alpha}}_{O\chi v\zeta} = (\alpha_{ij}) \quad \text{mit } i, j = \chi, v, \zeta \quad (\text{C.9})$$

mit klarer Bedeutung.

Für alle $\vec{w} \in \mathcal{V}^3$ gilt dann, für die Abbildung durch $\underline{\underline{\alpha}}$ die wir mit \vec{w}_{Abb} symbolisieren,

$$\vec{w}_{\text{Abb}} := \underline{\underline{\alpha}} \cdot \vec{w} \quad (\text{C.10})$$

dass

$$\begin{pmatrix} w_{\text{Abb},\chi} \\ w_{\text{Abb},v} \\ w_{\text{Abb},\zeta} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{i,j=\chi,v,\zeta} \begin{pmatrix} w_\chi \\ w_v \\ w_\zeta \end{pmatrix} \quad \text{für } O\chi v\zeta \quad (\text{C.11})$$

mit einer konstanten Matrix $(\alpha_{ij})_{i,j=\chi,v,\zeta}$ für alle $\vec{w} \in \mathcal{V}^3$.

Entsprechendes gilt natürlich in $Oxyz$, mit

$$\begin{pmatrix} w_{\text{Abb},x} \\ w_{\text{Abb},y} \\ w_{\text{Abb},z} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{i,j=x,y,z} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} \quad \text{für } Oxyz \quad (\text{C.12})$$

Wir definieren selbstverständlich auch das Symbol

$$\underline{\underline{\alpha}}_{Oxyz} = (\alpha_{ij})_{i,j=x,y,z} \quad (\text{C.13})$$

Diese Repraesentationsmatrizen sind konstant und hängen nur vom Koordinatensystem ab.

Es ist selbstverständlich, dass die Berechnungen besonders einfach sind falls die Lineare Abbildung durch eine diagonale Matrix repräsentiert ist.

Wir suchen also ein Koordinatensystem $Oxyz$ in dem $\underline{\underline{\alpha}}_{Oxyz}$ diagonal ist (und wir suchen natürlich den Ausdruck für diese diagonale Matrix).

Für dieses Koordinatensystem wollen wir die Einheitsvektoren $\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{z}_0$ (im Raum) bestimmen und die Transformationsmatrix T finden die uns von den Koordinaten in $O\chi v\zeta$ eben auf die Koordinaten in $Oxyz$ "bringt", mit klarer Bedeutung.

²sie hängt nur von der Wahl für $O\chi v\zeta$ und $Oxyz$ ab.

$O\chi\nu\zeta$ darf ein beliebiges orthonormales Koordinatensystem im Raum sein.

Wir nehmen an, dass $\underline{\underline{\alpha}}_{O\chi\nu\zeta}$ im Allgemeinen symmetrisch ist und aus reellen Elementen besteht, siehe (A.45).

Dann wissen wir aus der Linearen Algebra, siehe [6], dass eben ein *orthonormales* Koordinatensystem $Oxyz$ existiert für das eben $\underline{\underline{\alpha}}_{Oxyz}$ diagonal ist.

Bekanntlich muss man für die Diagonalisierung von Matrizen Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen: wir fassen diese Begriffe hier kurz zusammen.

Für die Lineare Abbildung $\underline{\underline{\alpha}}$ sagen wir das λ_i ein Eigenwert der Abbildung ist, mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, falls

$$\underline{\underline{\alpha}} \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i \quad (\text{C.14})$$

Ein Eigenwert ist in also in erster Linie eine Eigenschaft von einer Linearen Abbildung und in zweiter Linie natürlich auch entsprechend eine Eigenschaft der Matrix mit der man die Lineare Abbildung repräsentiert in einem Koordinatensystem.

Wegen der Linearität des Problems gibt es zu einem Eigenwert λ_i unendlich viele Eigenvektoren³ (und die sich durch Multiplikation mit einem beliebigen Skalar ergeben, oder auch als Linearkombinationen von Eigenvektoren die verschiedene Richtungen haben, falls zu λ_i Eigenvektoren gehören können die verschiedene Richtungen aufweisen können. . .).

Für unsere Annahmen gilt aber (siehe [6] bzw. das Spektraltheorem), dass es ein System von *orthonormalen* Eigenvektoren gibt

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \quad (\text{C.15})$$

für die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ für $\underline{\underline{\alpha}}$.

Diese Eigenvektoren (und die Eigenwerte natürlich) sind als solche unabhängig vom benutzten Koordinatensystem⁴ und bilden eine (sehr bequeme) Basis des dreidimensionalen (geometrischen) Raumes.

Sei $Oxyz = Ov_1v_2v_3$ das Koordinatensystem das fixiert wird eben durch diesen orthonormalen Satz von Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \hat{v}_1 = \hat{x}_0$, $\vec{v}_2 = \hat{v}_2 = \hat{y}_0$ und $\vec{v}_3 = \hat{v}_3 = \hat{z}_0$.

Dann kann man leicht zeigen, dass

$$\underline{\underline{\alpha}}_{Oxyz} = \underline{\underline{\alpha}}_{Ov_1v_2v_3} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

³die per Definition verschieden von Null sein sollen.

⁴sie sind eine Eigenschaft der Linearen Abbildung.

Da der Beweis ganz einfach ist werden wir ihn hier nicht angeben bzw. wir verweisen auf ein Text über Geometrie und Lineare Algebra, mit der Bemerkung, dass man die Bijektion (C.7) immer im Sinn haben soll.

Für die Koordinatentransformationen von $O\chi v\zeta$ auf $Oxyz$ gilt außerdem folgendes, für alle Vektoren $\vec{w} \in \mathcal{V}^3$:

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_{1,\chi} & v_{1,v} & v_{1,\zeta} \\ v_{2,\chi} & v_{2,v} & v_{2,\zeta} \\ v_{3,\chi} & v_{3,v} & v_{3,\zeta} \end{pmatrix}}_{=T} \begin{pmatrix} w_\chi \\ w_v \\ w_\zeta \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

Die umgekehrte Transformation erfolgt natürlich durch T^{-1} .

In unserem Falle, mit $\underline{\alpha}$ (reell) und symmetrisch gilt aber, da T eine orthogonale Matrix ist, dass

$$T^{-1} = T^T \quad (\text{C.18})$$

was die Berechnungen erheblich vereinfacht. T^T ist natürlich die transponierte Matrix von T .

Um zurück zu einer vektoriellen Identität zu kommen (und umgekehrt zu der Koordinatendarstellung) genügt es (C.2), (C.5), (C.3), (C.6) anzuwenden, gemäß (C.4) bzw. (C.7).

Entsprechendes gilt auch für die orthonormalen Eigenvektoren von $\underline{\alpha}$, $\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3$. Die Bedeutung der Symbole für die Einträge der Matrix T und $T^{-1} = T^T$ sind klar.

C.2 Modellierung photoelastischer Effekte auf eine Faser

Falls auf ein anisotropes Material Kräfte einwirken, verändert sich seine Dielektrizitätskonstante und wir haben

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}_m + \Delta\underline{\epsilon}_P \quad (\text{C.19})$$

wobei eben $\Delta\underline{\epsilon}_P$ den *photoelastischen Effekt* berücksichtigt: wir dürfen hier diese Größe als eine Konstante annehmen in unserer Modellierung, siehe [16]. Dies folgt einerseits aus der so genannten center strain Approximation und aus der Tatsache dass die Länge des Bragg Gitters ausreichen klein ist⁵ und andererseits aus der Tatsache, dass wir für unsere Modellierung mit einem unendlich ausgedehnten Medium für die Dielektrizitätskonstante

⁵außerdem sollen die Kräfte nur auf den Gitterabschnitt selbst einwirken und nicht auf die Zuleitungsfaser zum Gitter

eben die Dielektrizitätskonstante im Kern der Faser betrachten, wie wir besprochen haben. Siehe Kapitel 3.

Man beachte außerdem, dass die zeitliche Veränderung der einwirkenden Kraft sehr viel kleiner ist als die Pulsation der elektromagnetischen Wellen, so dass man annehmen darf, dass $\Delta\epsilon_{\underline{P}}$ auch zeitlich konstant ist: wir modellieren also das Problem immer noch mit einem stationären Medium.

Für die Abhängigkeit von $\Delta\epsilon_{\underline{P}}$ gegenüber der (konstanten) einwirkenden Kraft⁶ siehe Gleichungen (3) bis (8) in [16].

In einem Faser Bragg Gitter haben wir entsprechend

$$\epsilon_{\underline{P}}^{(p)}(z) = \epsilon_{\underline{m}} + \underbrace{\Delta\epsilon_{\underline{P}} + \Delta\epsilon_{\underline{G}}(z)}_{=: \Delta\epsilon} \quad (\text{C.20})$$

gemäß (15) in [16]. $\epsilon_{\underline{m}}$ sei die Dielektrizitätskonstante des unperturbierten und unbelasteten Materials des Kern der Faser, mit Hauptkoordinatensystem $O\chi v\zeta$ mit ζ gleich der geometrischen Achse der Faser.

Es gilt (3.2): siehe auch (13) in [16].

Wir können nun die gekoppelte Moden Gleichung (2.28) verwenden um die Wellenausbreitung zu bestimmen, wobei wir die ganze Perturbation $\Delta\epsilon_{\underline{}}$ in (C.20) berücksichtigen.

Wir arbeiten hier im Koordinatensystem $O\chi v\zeta$, dass das Hauptkoordinatensystem für $\epsilon_{\underline{m}}$ sein soll, mit ζ Achse gleich der geometrischen Achse der Faser.

In (2.28) mit (2.8) und (2.9) ergibt sich (wir schreiben hier natürlich, gemäß der Annahmen, χ, v, ζ statt x, y, z):

$$\hat{e}_m \cdot \Delta\epsilon_{\underline{}} \cdot \hat{e}_n = \hat{e}_m \cdot (\Delta\epsilon_{11}\hat{\chi}_0 + \Delta\epsilon_{12}\hat{v}_0 + \Delta\epsilon_{31}\hat{\zeta}_0) \quad n = s_+, s_-, \forall m \in M \quad \text{in } O\chi v\zeta \quad (\text{C.21})$$

und

$$\hat{e}_m \cdot \Delta\epsilon_{\underline{}} \cdot \hat{e}_n = \hat{e}_m \cdot (\Delta\epsilon_{12}\hat{\chi}_0 + \Delta\epsilon_{22}\hat{v}_0 + \Delta\epsilon_{32}\hat{\zeta}_0) \quad n = p_+, p_-, \forall m \in M \quad \text{in } O\chi v\zeta \quad (\text{C.22})$$

da \hat{e}_m entweder $\hat{\chi}_0$ oder \hat{v}_0 ist (für alle $m \in M$) ergibt sich, dass die einzigen Elemente die eine Wirkung auf die elektromagnetische Wellenausbreitung zeigen $\Delta\epsilon_{11}, \Delta\epsilon_{22}, \Delta\epsilon_{12} = \Delta\epsilon_{21}$ sind da, wie man sieht, alleine diese Elemente in der gekoppelten Moden Gleichung (2.28) vorkommen. Siehe auch [16].

Das impliziert, dass alle anderen Elemente keinen Einfluss haben auf das elektromagnetische Phänomen und entsprechend vernachlässigt werden können.

⁶im Kern der Faser mit Hinblick auf unsere Modellierung

Unter Berücksichtigung von (C.20) und (3.2) können wir daher in (C.20) $\Delta_{\underline{\epsilon}_P}$ ersetzen mit einer (beliebigen) anderen *linearen Abbildung* $\Delta_{\underline{\epsilon}_m}$ die in $O\chi\nu\zeta$ (also im Hauptkoordinatensystem für $\underline{\epsilon}_m$) die gleichen Werte besitzt in der Matrixrepräsentation für die beschriebenen Elementen⁷.

Wir setzen natürlich

$$\Delta_{\underline{\epsilon}_m} = \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{P,11} & \Delta\epsilon_{P,12} & 0 \\ \Delta\epsilon_{P,12} & \Delta\epsilon_{P,22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } O\chi\nu\zeta \quad (\text{C.23})$$

wobei sich selbstverständlich die Elemente $\Delta\epsilon_{P,ij}$ auf die Matrixrepräsentation von $\Delta_{\underline{\epsilon}_P}$ in $O\chi\nu\zeta$ beziehen.

Wenn wir nun in (C.20) $\Delta_{\underline{\epsilon}_P}$ durch $\Delta_{\underline{\epsilon}_m}$ ersetzen, erhalten wir nach Anwendung der gekoppelten Moden Theorie mit (2.28) dasselbe Resultat. Es ergibt sich also dasselbe Wellenphänomen.

Dies erklärt warum aus (C.20) schließlich (3.1) wird, und die Annahmen in Abschnitt 3.1.

Bleibt zu zeigen, dass das Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ von (3.3), also von $\underline{\epsilon}_m + \Delta_{\underline{\epsilon}_m}$ eine Drehung von $O\chi\nu\zeta$ darstellt um die gemeinsame Achse $z = \zeta =$ geometrische Achse der Faser.

Wir werden auch den Drehwinkel α bestimmen.

Somit sind die Annahmen von Kapitel 3 berechtigt.

C.3 Bestimmung des Hauptkoordinatensystems für ein belastetes Material

In diesem Abschnitt wollen wir die Bestimmung des Hauptkoordinatensystems für $\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(u)}$ aus (3.3) näher betrachten.

Die Bedeutung der Symbole sei hier analog wie in Abschnitt 3.1 und wie in Abschnitt C.2.

Sei $O\chi\nu\zeta$ das Hauptkoordinatensystem für $\underline{\epsilon}_m$ in (3.3) bzw. (3.1) und $Oxyz$ das Hauptkoordinatensystem für $\underline{\epsilon}_m + \Delta_{\underline{\epsilon}_m}$ in (3.3) mit $\Delta_{\underline{\epsilon}_m}$ gegeben durch (C.23) mit (C.19), wie

⁷die gleichen Werte die eben für $\Delta_{\underline{\epsilon}_P}$ gelten, immer in der Matrixdarstellung in $O\chi\nu\zeta$.

wir gesehen haben. Siehe [16].

Somit gilt

$$\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(u)} = \begin{pmatrix} \epsilon_{m,11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{m,22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{m,33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{P,11} & \Delta\epsilon_{P,12} & 0 \\ \Delta\epsilon_{P,12} & \Delta\epsilon_{P,22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } O\chi v\zeta \quad (\text{C.24})$$

Die gesuchte Koordinatentransformation von $O\chi v\zeta$ zu $Oxyz$ ist durch (C.17) gegeben, wobei natürlich $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ein *orthonormaler* Satz von Eigenvektoren für $\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(u)}$ ist. Deswegen schreiben wir auch \hat{v}_i , $i = 1, 2, 3$ für diese orthonormalen Vektoren.

Die Koordinaten dieser Einheitsvektoren in $O\chi v\zeta$ bilden dann die Einträge der Transformationsmatrix, gemäß (C.17).

Um die Notation zu vereinfachen, mit Blick auf (C.24) setzen wir

$$\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(u)} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} & \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} & 0 \\ \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} & \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\text{FBG},33}^{(u)} \end{pmatrix} \quad \text{in } O\chi v\zeta \quad (\text{C.25})$$

Somit ist die Bedeutung der Ausdrücke $\epsilon_{\text{FBG},ij}^{(u)}$, $i, j = 1, 2, 3$ im Folgendem klar.

Mit diesen Positionen wären auch zusätzliche Perturbationen berücksichtigbar, z.B. könnten wir $\Delta\epsilon_{P,33}$ berücksichtigen, oder ein Offset der Form $\Delta\epsilon_{\text{OFF}}\underline{\text{Id}}$: der Ausdruck bliebe derselbe und die Abhandlung wäre dieselbe.

Siehe auch Gleichungen (13),(14),(15),(16) und (5) in [16].

Mit diesen Positionen gilt für die Eigenvektoren und Eigenwerte von (C.25), die wir mit \vec{v}_i und λ_i , $i = 1, 2, 3$ kennzeichnen⁸, dass

$$\vec{v}_3 = \hat{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in } O\chi v\zeta \quad (\text{C.26})$$

$$\lambda_3 = \epsilon_z = \epsilon_{\text{FBG},33}^{(u)} \quad (\text{C.27})$$

Es gilt, wie besprochen $Oxyz = Ov_1, v_2, v_3$ und somit gilt

$$\hat{z}_0 = \hat{v}_3 = \hat{\zeta}_0 = \text{geometrische Achse der Faser} \quad (\text{C.28})$$

⁸ \vec{v}_i ist natürlich der Eigenvektor der zum Eigenwert λ_i gehört, für $i = 1, 2, 3$

wie man sofort sieht.

Somit haben wir schon mal gezeigt, dass die Annahmen aus Abschnitt 3.1 in Kapitel 3 zutreffend sind und Sinn machen⁹.

Wir haben es tatsächlich mit einer Drehung um die $\zeta = z$ (= geometrische Achse) Achse zu tun, wie angenommen.

Es bleibt also nur noch die explizite Bestimmung von \hat{v}_1 und \hat{v}_2 , so dass die Transformationsmatrix T aus (C.17) explizit bekannt wird.

Die Darstellung der Dielektrizitätskonstante $\epsilon_{\text{FBG}}^{(u)}$ erfolgt dann in $Oxyz$ natürlich durch die Eigenwerte, gemäß der diagonalen Matrix (C.16), was ja gewünscht war.

Wir finden zwei andere Eigenwerte mit zusätzlichen Eigenvektoren für (C.25) und kennzeichnen diese mit den Buchstaben a und b : eine Normierung auf Länge 1 und eine geeignete Wahl aus diesen Eigenvektoren \vec{v}_a und \vec{v}_b ergeben dann mit $\vec{v}_3 = \hat{z}_0 = \hat{\zeta}_0$ das gesuchte orthonormales Koordinatensystem.

Es ist

$$\vec{v}_a = \begin{pmatrix} -\frac{-\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} + \sqrt{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)2} - 2\epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)}\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + 4\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)2} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)2}}}{2\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.29})$$

in $O\chi v\zeta$, für den Eigenwert:

$$\lambda_a = \frac{1}{2} \left(\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} - \sqrt{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)2} - 2\epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)}\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + 4\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)2} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)2}} \right) \quad (\text{C.30})$$

und

$$\vec{v}_b = \begin{pmatrix} -\frac{-\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} - \sqrt{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)2} - 2\epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)}\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + 4\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)2} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)2}}}{2\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.31})$$

in $O\chi v\zeta$, für den Eigenwert:

$$\lambda_b = \frac{1}{2} \left(\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)} + \sqrt{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)2} - 2\epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)}\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + 4\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)2} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)2}} \right) \quad (\text{C.32})$$

Wie man sieht sind \vec{v}_a und \vec{v}_b orthogonal zu $\vec{v}_3 = \hat{z}_0 = \hat{\zeta}_0$ = geometrische Achse der Faser. Und sie sind orthogonal zueinander, denn

$$\vec{v}_a \cdot \vec{v}_b = 0 \quad (\text{C.33})$$

⁹man bedenke auch, dass $Oxyz$ immer existiert, wie aus dem Spektraltheorem folgt, wie wir gesehen haben.

Damit gilt für \hat{x}_0 (mit $\hat{x}_0 = \hat{v}_1$), dass \hat{x}_0 entweder $\frac{\vec{v}_a}{\|\vec{v}_a\|}$ oder $\frac{\vec{v}_b}{\|\vec{v}_b\|}$ ist. Die umgekehrte Wahl gilt dann für \hat{y}_0 ($= \hat{v}_2$).

Die Wahl soll so getroffen werden, dass das Koordinatensystem orthonormal wird, mit der richtigen Orientierung der Achsen.

Wir beobachten, dass alle Eigenwerte reell sind, und alle Eigenvektoren auch, da die Ausdrücke unter den Quadratwurzeln immer nicht negativ sind.

Wir wollen \hat{x}_0 und \hat{y}_0 explizit berechnen.

Es soll sich natürlich die übliche Orientierung ergeben, die in Abbildung C.1 dargestellt ist¹⁰.

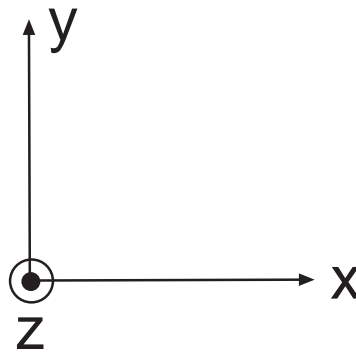


Abbildung C.1: Die Orientierung der Achsen in einem orthonormalen Koordinatensystem $Oxyz$

Es soll also sein

$$\hat{x}_0 \times \hat{y}_0 = \hat{z}_0 \quad (\text{C.34})$$

Wir müssen also eine geeignete Auswahl aus \vec{v}_a und \vec{v}_b treffen, so dass diese Bedingung erfüllt ist.

Es ist

$$\vec{v}_a \times \vec{v}_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)2} - 2\epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)}\epsilon_{\text{FBG},11}^{(u)} + 4\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)2} + \epsilon_{\text{FBG},22}^{(u)2}}}{\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}} \end{pmatrix} \quad \text{in } O\chi\nu\zeta \quad (\text{C.35})$$

Dieser Ausdruck soll ein Vektor ergeben der Parallel zu $\hat{z}_0 = \hat{\zeta}_0$ ist und nicht antiparallel.

¹⁰ möglicherweise wäre aber auch eine Vertauschung von der x und der y Achse zulässig oder könnte gar den Formalismus vereinfachen, in dem Fallunterscheidungen wegfallen, siehe Abschnitt 5.6.

Also soll die ζ ($= z$) Komponente positiv sein.

Der Ausdruck unter der Quadratwurzel (die Diskriminante) ist immer nicht negativ (und reell natürlich).

Somit ergibt sich, dass die $\zeta = z$ Komponente von $\vec{v}_a \times \vec{v}_b$ positiv ist, falls $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}$ negativ ist, und (umgekehrt) negativ ist, falls $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)}$ positiv ist¹¹.

Es folgt also, wie man sofort sieht

$$\hat{z}_0 = \hat{\zeta}_0 = \hat{v}_3 \quad (\text{C.36})$$

$$\hat{x}_0 = \hat{v}_1 = \begin{cases} \frac{\vec{v}_a}{\|\vec{v}_a\|}, & \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} < 0 \\ \frac{\vec{v}_b}{\|\vec{v}_b\|}, & \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} > 0 \end{cases} \quad (\text{C.37})$$

und umgekehrt:

$$\hat{y}_0 = \hat{v}_2 = \begin{cases} \frac{\vec{v}_b}{\|\vec{v}_b\|}, & \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} < 0 \\ \frac{\vec{v}_a}{\|\vec{v}_a\|}, & \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} > 0 \end{cases} \quad (\text{C.38})$$

unter Berücksichtigung von (C.29) und (C.31).

Bleibt noch der Fall $\epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} = 0$. Aber dieser Fall ist trivial, da die Matrix in (C.25) schon diagonal ist.

Wir schreiben dennoch explizit für diesen Fall

$$\hat{v}_1 = \hat{x}_0 = \hat{\zeta}_0, \quad \hat{v}_2 = \hat{y}_0 = \hat{v}_0, \quad \hat{v}_3 = \hat{z}_0 = \hat{\zeta}_0, \quad \text{falls } \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} = 0 \quad (\text{C.39})$$

Aus (C.37), (C.38), (C.36) und (C.39) ergibt sich also das gesuchte Hauptkoordinatensystem $Oxyz$ in dem $\underline{\epsilon}_m + \Delta\underline{\epsilon}_m$ in (3.3) diagonal ist, und auch die Koordinatentransformationsmatrix T um von $O\chi\nu\zeta$ auf $Oxyz$ zu kommen.

Diese ist aus (C.17) zu lesen, wenn wir die hier gefundenen Ausdrücke für \hat{v}_i , $i = 1, 2, 3$ (im Koordinatensystem $O\chi\nu\zeta$) einsetzen.

In $Oxyz$ gilt dann für $\underline{\epsilon}_{\text{FBG}}^{(u)}$ der Ausdruck (1.17) mit der diagonalen Matrix gegeben durch (C.16), wobei für die Eigenwerte λ_i , $i = 1, 2, 3$ dieselbe Wahl gilt wie für die Eigenvektoren (ohne Normierung natürlich). Das heißt, dass (C.27) gilt, und λ_1 und λ_2 sind aus (C.30) bzw. (C.32) gewählt: die Wahl erfolgt analog zu¹² (C.37) und (C.38) (also passend zu den Eigenvektoren), mit klarer Bedeutung.

¹¹wegen des Minus Vorzeichens

¹²aber natürlich ohne Normierung...

Es gilt also

$$\epsilon_x = \lambda_1 = \begin{cases} \lambda_a, & \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} < 0 \\ \lambda_b, & \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} > 0 \end{cases} \quad (\text{C.40})$$

und umgekehrt:

$$\epsilon_y = \lambda_2 = \begin{cases} \lambda_b, & \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} < 0 \\ \lambda_a, & \epsilon_{\text{FBG},12}^{(u)} > 0 \end{cases} \quad (\text{C.41})$$

unter Berücksichtigung von (C.30) und (C.32).

Wir beobachten, aus leichten geometrischen Überlegungen, dass wir es mit einer Drehung zu tun haben um die $\zeta = z$ Achse. Dies folgt auch aus den Eigenschaften der Matrix T .

Die Matrix T ist eindeutig bestimmt¹³.

Um den Drehwinkel α zu bestimmen genügt es die gefundene Matrix T mit den Ausdrücken in (1.62) und (1.61) zu vergleichen, die eine entsprechende Drehung beschreiben, mit klarer Bedeutung¹⁴.

Der Winkel α folgt dann aus trivialen trigonometrischen Bemerkungen.

Somit ist alles gesagt und begründet.

Man bedenke aber auch die Bemerkungen in Abschnitt 5.6.

¹³und es gilt $T^{-1} = T^T$ in diesem Fall (die Matrix ist orthogonal).

¹⁴die Matrizen sind natürlich identisch wegen der Eindeutigkeit...

D Theorie der Polarisation des Lichtes

Für eine monochromatische ebene elektromagnetische Welle gilt der Ausdruck (1.1) mit (1.10).

Die Polarisation einer solchen monochromatischen Welle wurde in Abschnitt B.6 beschrieben.

In Wirklichkeit ist es unmöglich ein exakt monochromatisches Licht zu erzeugen mit \vec{E}_0 konstant in Amplitude und Phase.

Deshalb muss die *Fourier Analysis* benutzt werden, um Wellen zu beschreiben, die aus mehreren Frequenzkomponenten bestehen, mit einem kontinuierlichem Spektrum.

Wir betrachten im Folgendem quasi-monochromatische (ebene) Lichtwellen, also Wellen deren Fourier Transformation nur ein schmales Frequenzspektrum bzw. Pulsationsspektrum $B = \Delta\omega$ beinhaltet.

Eine solche Welle kann durch eine leichte Amplituden- und Frequenz- bzw. Phasenmodulation von einer monochromatischen Welle dargestellt werden und modelliert sehr gut das Licht von einem (realen) Laser.

Der Laser erzeugt nur im Idealfall konstantes monochromatisches Licht: es ist klar, dass sowohl die Amplitude als auch die Frequenz- und die Phase des Lichtes des (realen) Lasers leicht mit der Zeit variieren, auf *zufällige* Weise.

Genauer gesagt, setzen wir

$$\vec{E}_0 = E_{0,x}\hat{x}_0 + E_{0,y}\hat{y}_0 \quad (\text{D.1})$$

mit Hinblick auf (1.1) und (1.35).

Für eine quasi monochromatische Lichtwelle gilt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_m} \ll 1 \quad (\text{D.2})$$

mit $B = \Delta\omega$ Bandbreite des Signals, und ω_m der Mittelwert der Pulsationen im Spektrum des Signals (also der elektromagnetischen Welle).

Mit diesen Annahmen, setzen wir

$$E_{0,x} = a_x(t)e^{j\phi_x(t)} = |E_{0,x}|e^{j\phi_{E_{0,x}}} \quad (\text{D.3})$$

$$E_{0,y} = a_y(t)e^{j\phi_y(t)} = |E_{0,y}|e^{j\phi_{E_{0,y}}} \quad (\text{D.4})$$

mit klarer Bedeutung.

Es folgt nun, dass mit (1.1) alle Resultate von Abschnitt B.5 immer noch gültig sind, für $\omega = \omega_m$, obwohl $|E_{0,i}| = a_i(t)$ und $\phi_{E_{0,i}} = \phi_i(t)$ mit $i = x, y$ nun zeitabhängig sind!

Insbesondere gilt immer noch (B.40), (B.44) und (B.45) für den Mittelwert (des Pulsationsspektrums) $\omega = \omega_m$.

Dies ist so, da $a_i(t)$ und $\phi_i(t)$ mit $i = x, y$ viel langsamer variieren als die Pulsation ω_m : diese langsame Variation modelliert eben die nicht Idealität der Lichtquelle¹.

Mathematisch müssen wir die Fourier Analysis betrachten, mit der Annahme (D.2).

Siehe [20] und [2].

Als Literaturquellen und Literaturempfehlung für diesen Abschnitt seien außerdem [20], [21] und [22] erwähnt.

Da eben a_i und ϕ_i (mit $i = x, y$) langsam variieren, können wir behaupten, dass alle Ergebnisse die wir für monochromatisches Licht hergeleitet haben, auch für quasi-monochromatisches Licht gelten, wenn wir (D.3) und (D.4) in die Gleichungen einsetzen, und zwar in die transformierten Gleichungen gemäß Anhang B.5 und (B.40) mit (1.1).

Da eben $a_i(t)$ und $\phi_i(t)$, mit $i = x, y$ langsam variieren gegenüber ω_m können nämlich die zeitlichen Ableitungen dieser Größen vernachlässigt werden, so dass unsere Herleitungen berechtigt bleiben. Insbesondere bleibt (B.44) gültig.

Wenn das Licht (vollständig) polarisiert ist, dann ist \vec{E}_0 zeitlich konstant und es gelten die Ergebnisse vom Abschnitt B.6.

In der Realität ist es aber oft der Fall, dass \vec{E}_0 in Abhängigkeit von der Zeit durch (D.3) und (D.4) mehr oder weniger zufällig variiert².

Je zufälliger diese zeitliche Variation ist, desto unpolarisiertes ist das Licht.

Daher benötigen wir die Theorie der *stochastischen Prozesse* um die Eigenschaften von \vec{E}_0 zu beschreiben, also die Polarisation des (realen) Lichtes.

$E_{0,x}$ und $E_{0,y}$ sind dann statistische Signale (stochastische Prozesse). Also sind auch $a_i(t)$ und $\phi_i(t)$ für $i = x, y$ statistische Signale (stochastische Prozesse).

¹also z.B. des Lasers

²man bedenke immer auch (1.1) und (B.40) mit $\omega = \omega_m$

Für die Theorie der statistischen Signale sei [21] empfohlen.

Für die Anwendung dieser Theorie auf die Polarisation des Lichtes sei [20] empfohlen.

Wir fassen im folgenden wichtige Ergebnisse zusammen und werden diese intuitiv begründen: für eine rigorose Ableitung siehe die oben erwähnte Literatur.

Als erstes definieren wir die *Polarisationsmatrix*, auch Kohärenzmatrix genannt, wie folgt

$$J := \begin{pmatrix} \langle E_{0,x}^*(t)E_{0,x}(t) \rangle & \langle E_{0,x}^*(t)E_{0,y}(t) \rangle \\ \langle E_{0,y}^*(t)E_{0,x}(t) \rangle & \langle E_{0,y}^*(t)E_{0,y}(t) \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

wobei * komplex konjugiert bedeutet und

$$\langle X(t) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad (\text{D.6})$$

für alle Funktionen $X(t)$ den zeitlichen Mittelwert symbolisiert.

Wir befassen uns zuerst mit der Bedeutung der Diagonalelemente J_{ii} , $i = x, y$ der Polarisationsmatrix (Kohärenzmatrix) J und beobachten dass, für $i = x, y$

$$\begin{aligned} J_{ii} = \langle E_{0,i}^* E_{0,i} \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E_{0,i}^* E_{0,i} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |E_{0,i}|^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T I_i dt = \langle I_i \rangle \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

mit $I_i = |E_{0,i}|^2$ Intensität³ der i Komponente von \vec{E}_0 , $i = x, y$.

Wegen (1.1) sind die Diagonalelemente von J die mittleren Intensitäten des elektrischen Feldes \vec{E} in x bzw y Richtung in jedem Punkt \vec{r} des Raumes.

Siehe auch (B.51) mit einfachen Bemerkungen.

Die Deutung der Elemente $J_{xy} = J_{12}$ bzw. $J_{yx} = J_{21}$ der Polarisationsmatrix J bedarf der Theorie der stochastischen Prozesse und gibt wichtige Informationen über den Polarisationsgrad des elektrischen Feldes.

Es gilt offensichtlich

$$J_{yx} = J_{xy}^* \quad (\text{D.9})$$

so dass nur ein Element von Bedeutung ist.

³es gilt im Allgemeinen dass

$$I_i = |E_{0,i}|^2 \quad i = x, y, z \quad (\text{D.8})$$

für die Intensität der Komponenten eines Feldes. Mit $I = I_x + I_y + I_z$.

Wir definieren folgenden Korrelationskoeffizienten

$$j_{xy} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx}}\sqrt{J_{yy}}} \quad (\text{D.10})$$

mit $J_{xx} = J_{11}$ und $J_{yy} = J_{22}$.

Betrachten wir nun J_{xy} . Es ist offensichtlich

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \langle E_{0,x}^* E_{0,y} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E_{0,x}^* E_{0,y} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a_x(t) a_y(t) e^{j(\phi_y(t) - \phi_x(t))} dt \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Sei

$$\delta := \phi_y - \phi_x \quad (\text{D.12})$$

Falls das Licht vollständig polarisiert ist, so sind $E_{0,x}$ und $E_{0,y}$ konstant. Also ist δ konstant und (D.11) ist verschieden von Null falls⁴ $a_x, a_y \neq 0$.

Andererseits, falls das Licht völlig unpolarisiert ist (also für das übliche natürliche Licht), so wird δ alle möglichen Zufallswerte annehmen können, da (die stochastischen Prozesse) ϕ_x und ϕ_y zufällig und unkorreliert verlaufen.

Dies hat die Folge, dass das Integral in (D.11) verschwindet, wie man intuitiv sehen kann (positive und negative Beiträge⁵ eliminieren sich gegenseitig).

Wir haben also intuitiv begründet, dass

$$J_{xy} = J_{yx}^* = 0 \quad \text{für unpolarisiertes Licht} \quad (\text{D.13})$$

Also

$$\langle E_{0,x}^* E_{0,y} \rangle = 0 \quad \text{für unpolarisiertes Licht} \quad (\text{D.14})$$

wobei die Klammern $\langle \rangle$ den zeitlichen Mittelwert symbolisiert.

Wenn das Licht dagegen nur zum Teil polarisiert ist, so wird δ um ein Mittelwert δ_m variieren, so dass das Integral in (D.11) im Betrag weder verschwindet noch maximal ist. Wie nehmen an, dass $a_x \neq 0$ und $a_y \neq 0$ (im Mittelwert): falls dies nicht so sein sollte, so ist die Polarisationsrichtung ja offensichtlich⁶ und falls $a_x = a_y = 0$ so breitet sich gar keine Lichtwelle aus, da die Felder verschwinden.

⁴genauer gesagt: falls dies im zeitlichen Mittelwert gilt, wenn wir annehmen, dass die Intensitäten variieren können.

⁵sowohl beim Real- als auch beim Imaginärteil

⁶ x bzw. y

Aus diesen Beobachtungen folgt eine Theorie mit der es möglich ist die Polarisation des Lichtes zu behandeln.

Insbesondere ist j_{xy} aus (D.10) ein Index für den Polarisationsgrad des Lichtes.

Man kann zeigen, siehe [20], dass

$$0 \leq |j_{xy}| \leq 1 \quad (\text{D.15})$$

gilt mit

$$|j_{xy}| = 1 \quad \text{für voll polarisiertes Licht} \quad (\text{D.16})$$

und

$$j_{xy} = 0 \quad \text{für unpolarisiertes Licht} \quad (\text{D.17})$$

Für einen beliebigen Fall kann man zeigen, siehe [20], dass ein beliebiger Lichtstrahl immer als Summe von ein voll polarisierter und ein unpolarisierter Lichtstrahl auf *eindeutige Weise* zerlegt werden bzw. gedeutet werden kann.

In der Theorie der Polarisation des Lichtes ist es auch bequem die Stokes Parameter einzuführen. Mit den Stokes Parameter ergibt sich eine simple Beschreibung von verschiedenen Arten der Polarisation des Lichtes, sei es vollständig oder unvollständig polarisiert Licht.

Siehe [20]

Die hier intuitiv begründeten Aussagen werden rigoros durch die Theorie der stochastischen Prozesse (für komplexe Signale) begründet.

Die zeitlichen Mittelwerte entsprechen dann (für ergodische Prozesse) den Erwartungswerten, und wir haben es mit Kreuzkorrelationen und Korrelationskoeffizienten zu tun.

a_i und ϕ_i ($i = x, y$) sind entsprechend statistische Signale.

Für unpolarisiertes Licht sind $E_{0,x}$ und $E_{0,y}$ im statistischen Sinn unkorreliert und wir finden, nach Berechnung der Kreuzkorrelation das Ergebnis (D.14) wieder.

Siehe [20] und [21].

Für eine Beschreibung der Stokes Parameter sei auch [22] empfohlen.

Für natürliches unpolarisiertes Licht gilt, wie man leicht intuitiv nachvollziehen kann anhand der bisherigen Abhandlung, dass

$$J_{xx} = J_{yy} \quad \text{für unpolarisiertes Licht} \quad (\text{D.18})$$

Aus alledem folgt, zusammenfassend, dass für natürliches unpolarisiertes Licht gilt

$$J = J_{xx} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für unpolarisiertes Licht} \quad (\text{D.19})$$

Wir werden insbesondere das Ergebnis (D.14) benutzen.

Literaturverzeichnis

- [1] Eckard Rebhan, Theoretische Physik: Elektrodynamik, Spektrum Akademischer Verlag, 2007 129, 130
- [2] G. Gerosa, P. Lampariello, Lezioni di Campi Elettromagnetici, Edizioni Ingegneria 2000, 1995 3, 13, 14, 124, 129, 133, 143, 145, 153, 154, 155, 170
- [3] Max Born, Emil Wolf, Principles of optics, Seventh Edition, Cambridge University Press 13, 14, 129
- [4] Amnon Yariv, Pochi Yeh, Optical Waves in Crystals, John Wiley & Sons, 1984 3, 13, 17
- [5] Klemens Burg, Herbert Haf, Friedrich Wille, Vektoranalysis, Teubner, 2006 146
- [6] Smirnov, Linear Algebra and Group Theory, Mc Graw-Hill, New York, 1961 17, 127, 160
- [7] Paolo Maroscia, Introduzione alla Geometria e all'Algebra Lineare, Zanichelli, 2004 158
- [8] Antonio Avantaggiati, Analisi Matematica 2, Casa Editrice Ambrosiana, 1995 43
- [9] Carlo Someda, Electromagnetic Waves, Chapman & Hall, 1998 17
- [10] Allan W. Snyder, Coupled-Mode Theory for Optical Fibers, Journal of the Optical Society of America, Volume 62, November 1972 3, 5, 39, 41
- [11] Anatoly Barybin, Victor Dmitriev, Modern Electrodynamics and Coupled Mode Theory, application to Guided-Wave Optics, Rinton Press, 2002 3, 5, 39, 41, 45
- [12] Dietrich Marcuse, Theory of Dielectric Optical Waveguides, Second Edition, Academic Press, 1991 3, 144
- [13] Mathias S. Müller, Hala El-Khozondar, Alessandro Bernardini and Alexander W. Koch, Transfer Matrix Approach to Four Mode Coupling in Fiber Bragg Gratings, IEEE Journal of Quantum Electronics, 2009 3, 45, 47
- [14] Alessandro Bernardini, Methoden der Modellierung optisch anisotrop belasteter Faser-Bragg-Gitter und Ableitung einer Transfermatrix-Formulierung optisch anisotroper Störungen in Lichtleitfasern, Hauptseminar und Projektpraktikum, Lehrstuhl für Messsystem- und Sensortechnik, T.U. München, 2008 45, 47

- [15] Mathias S. Müller, Hala J. El-Khozondar, Thorbjörn C. Buck and Alexander W. Koch, Analytical Solution of Four-Mode Coupling in Shear Strain Loaded Fiber-Bragg-Grating Sensors, *Optics Letters* **3**, [47](#), [57](#)
- [16] Mathias S. Müller, Lars Hoffmann, Andreas Sandmair, and Alexander W. Koch, Full Strain Tensor Treatment of Fiber Bragg Grating Sensors, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 45, No. 5, pag. 547, May 2009 [3](#), [47](#), [48](#), [49](#), [57](#), [59](#), [73](#), [79](#), [96](#), [97](#), [102](#), [109](#), [161](#), [162](#), [164](#)
- [17] Mathias S. Müller and Christoph D.A. Schnarr, Analytical coherency matrix treatment of shear strained fiber Bragg gratings, *Optics Express*, Vol. 17, No. 25, 2009 [3](#), [6](#), [57](#), [73](#)
- [18] Turan Erdogan, Fiber Grating Spectra, *Journal of Lightwave Technology*, Vol. 15, No. 8, pag. 1277, August 1997 [3](#), [5](#), [47](#), [50](#), [56](#), [59](#), [98](#), [144](#)
- [19] H. Kogelnik, Theory of optical waveguides, *Guided-Wave Optoelectronics*, T. Tamir, Ed. New York: Springer-Verlag, 1990 [50](#)
- [20] Emil Wolf, Introduction to the Theory of Coherence and Polarisation of Light, Cambridge University Press, 2007 [5](#), [69](#), [70](#), [170](#), [171](#), [173](#)
- [21] Eberhard Hänsler, *Statistische Signale*, 3. Auflage, Springer, 2001 [170](#), [171](#), [173](#)
- [22] Serge Huard, *Polarization of Light*, Wiley, 1996 [70](#), [170](#), [173](#)
- [23] Tadamichi Mawatari and Drew Nelson, A multi-parameter Bragg grating fiber optic sensor and triaxial strain measurement, *Smart Materials and Structures*, 9 May 2008 [3](#), [98](#), [100](#)
- [24] Udd. E., Nelson D.V., Lawrence C.M. and Ferguson B.A., Three-axis strain and temperature fiber optic grating sensor, *Smart Structures and Materials 1996: Smart Sensing, Processing and Instrumentation*, Proc. SPIE 2718 104-9 [3](#), [98](#)