Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Kreditrisiko
Modelle und Derivatebewertung

Diplomarbeit

von

Alexander Szimayer

Themensteller:	Prof. Dr. C. Klüppelberg
Betreuer:	Dr. M. Borkovec
Abgabetermin:	12. Mai 1999

Hiermit erkläre ich, daß ich die Diplomarbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, 12. Mai 1999

Danksagung

An dieser Stelle bedanke ich mich bei Frau Prof. Dr. Claudia Klüppelberg für ihre wohlwollende Kritik und tatkräftige Unterstützung bei der Erstellung der vorliegenden Arbeit und bei Dr. Milan Borkovec, der mich auf meinem Weg durch die stochastische Analysis und die stochastische Finanzmarkttheorie stets ausgezeichnet betreut hat.
Desweiteren gilt mein Dank den Herren Dr. Michael Hies, Dr. Oliver Holzner und Stefan Meier. Sie regten mich zu dem Thema Kreditrisko während meiner Zeit als Praktikant und Werkstudent bei der Bayerischen Vereinsbank an und lenkten mich auf den ersten wesentlichen Schritten.
Dank gebührt zudem Herrn Prof. Dr. Ralf Korn für sein Interesse und die konstruktive Kritik, die er mir entgegengebracht hat.
Schließlich bedanke ich mich bei den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Mathematische Statistik, Herrn Dr. Dirk Tasche, Frau Dipl.–Math. Susanne Emmer, Frau Dipl.–Math. Evelin Hofbauer, Herrn Dipl.–Math. Martin Severin und Frau Alexandra Franzmann, die sich stets Zeit nahmen, meine Fragen zu beantworten, und meine Arbeit in vielerlei Hinsicht unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Zielsetzung der vorliegenden Diplomarbeit ist, einen Überblick über einige ausgewählte Kreditrisikomodelle zu geben und deren Anwendungsmöglichkeiten aufzuzeigen. Möglichst einfach gesprochen ist Kreditrisiko ein im Bankenwesen gebräuchliches Synonym für die Unsicherheit, die in einem versprochenen zukünftigen Zahlungsstrom liegt. Wie der Name selbst andeutet, stammt der Begriff "Kreditrisiko" aus dem Kreditbereich. Am augenfälligsten treten Kreditrisiken bei der Darlehensvergabe auf. Betrachten wir diesen Fall aus der Sicht des Gläubigers. Für ihn stellt sich zum einen die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, mit der er die ausstehende Schuld zurückerhält, und zum anderen nach der "Schadenshöhe", falls der Kredit nicht zurückgezahlt werden kann. Diese Problematik sollen alle Kreditrisikomodelle angemessen erfassen. Zentrale Begriffe sind also die Ausfallwahrscheinlichkeit, die *Default Probability*, und die *Loss Rate*, die den Bruchteil der Schuld beziffert, die im Kreditausfall verloren geht. Anstelle der *Loss Rate* verwendet man auch die *Recovery Rate*, die "$1 -$ *Loss Rate*" beträgt.
Die Ansätze, denen wir im Rahmen dieser Arbeit Beachtung schenken, behandeln den Fall von Krediten, die an Börsen gehandelt werden. Es handelt sich um sogenannte *Corporate Bonds*, also von Firmen begebene Anleihen. Die Anfänge gehen auf Merton (1974) zurück. Mit Duffie und Singleton (1995) setzt eine neue Entwicklung ein, die in den Arbeiten von Jarrow, Lando und Turnbull (1997), Lando (1998) und Schönbucher (1998a) ihre Fortsetzung findet.

Wir behandeln das Thema Kreditrisiko vom finanzmathemathischen Blickpunkt aus. In Kapitel 2 legen wir die dazu nötigen Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie dar. Wir zitieren nützliche Ergebnisse aus Brémaud (1981), Karatzas und Shreve (1997), Øksendahl (1995) und Protter (1995). Zunächst befassen wir uns mit stochastischen Prozessen, insbesondere mit Martingalen. Daran schließen sich Abschnitte über die stochastische Integrationstheorie, die Itô–Formel und Doléans–Dade–Exponentiale sowie über $\mathcal{H}^2$–Semimartingale nach Protter an. Stochastische Integrale bezüglich der Brownschen Bewegung sind Thema des folgenden Abschnitts, der auf Karatzas und Shreve und Øksendahl beruht. Zum Abschluß studieren wir nach Brémaud Punktprozesse als Integratoren.

Kapitel 3 ist der zeitstetigen Marktmodellierung gewidmet. Dabei greifen wir auf die Arbeiten von Harrison und Pliska (1981) und Grünewald (1998) zurück. In Kapitel 3.3 untersuchen wir das verallgemeinerte Black&Scholes–Modell, das einen Aktienmarkt mit mehren Aktien beschreibt, die als korellierte geometrische Brownsche Bewegungen modelliert sind. An diesem Beispiel werden die Begriffe "äquivalentes Martingalmaß" und "Vollständigkeit eines Marktmodells" vor Augen geführt.

In Kapitel 4 legen wir zuerst das Modell nach Merton (1974) dar, wobei wir auf die Ausführung von Madan (1998) zurückgreifen. In diesem Modell betrachten wir ausschließlich *Corporate Bonds* und ziehen den Firmenwert als erklärende Variable heran. Die Schulden der Firma können genau dann nicht mehr zurückgezahlt werden, wenn der Firmenwert bei Fälligkeit unter der Höhe der Zahlungsforderung liegt. Der Ansatz basiert auf dem Aktienmarktmodell nach Black und Scholes, denn der Firmenwert wird als geometrische Brownsche Bewegung modelliert. Im Ergebnis läßt sich ein *Corporate Bond* als Derivat des Firmenwerts darstellen, und sein Wert kann mittels der Black&Scholes–Formel berechnet werden.

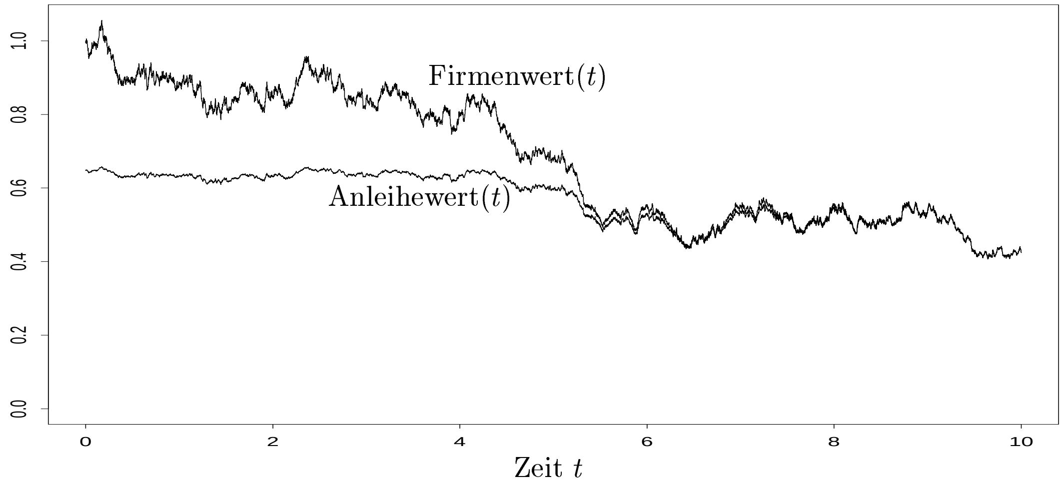

Abbildung 1.1: Simulierter Pfad des Firmenwertprozeß mit Startwert 1 und der entsprechende Anleihewert mit einer Verschuldung von 0.70 und einer Laufzeit von 10 Jahren.

In Abbildung 1.1 sehen wir den simulierten Verlauf eines auf den Startwert 1 normierten Firmenwertprozesses. Er wird durch eine Geometrische Brownsche Bewegung ohne Drift mit Volatilität $\sigma = 0.15$ beschrieben. Die dargestellte Anleihe hat eine Laufzeit von 10 Jahren und eine Höhe von 70% des Firmenwertes, berechnet auf den Startzeitpunkt $t = 0$. Im Jahr 5 fällt der Firmenwert drastisch ab. Von da an sind Firmenwert und Anleihewert fast identisch, da sämtliche Wertgegenstände der Firma zur Deckung der Schuld herangezogen werden müssen. Der Kreditausfall tritt in $t = 10$ ein. Von der ausstehenden Schuld in Höhe von 0.70 wird etwa 0.40 beglichen, was einer *Recovery Rate* von 0.57 entspricht.

Im Ansatz von Jarrow, Lando und Turnbull (1997) modellieren wir das Kreditrisiko, indem wir die Ratingklasse der untersuchten Anleihe betrachten. *Ratings* sind subjektive Einstufungen, die nach der Kreditwürdigkeit des Anleiheemittenten vergeben werden. Eine Anleihe kann während ihrer Laufzeit verschiedenen Ratingklassen zugeordnet werden. In jeder Ratingklasse wird eine andere Ausfallwahrscheinlichkeit unterstellt. Dieser Ansatz legt es nahe, die Bewegungen zwischen den Ratingklassen durch eine zeitstetige homogene Markovkette zu modellieren. In diesem Modell können wir das Ausfallereignis probabilistisch beschreiben. Beim Eintritt des Kreditausfalls stellt sich die Frage, wie hoch der Wertverlust der Anleihe ist, beziehungsweise, welche Summe der Emittent den Besitzern seiner Anleihe auszahlen kann. Erfolgt der Kreditausfall vor dem Fälligkeitstermin der Anleihe, wird angenommen, daß der Emittent einen festen Bruchteil des Anspruches, die *Recovery Rate*, am Fälligkeitstermin auszahlt.
Abbildung 1.2 zeigt empirische Ausfallwahrscheinlichkeiten, die gegen die Zeit aufgetragen sind,

wobei wir uns exemplarisch auf drei Ratingklassen beschränken. Die größte Zahlungsfähigkeit hat die Ratingklasse AA. Ihr ist die Funktion P^1 zugeordnet. P^2 identifizieren wir mit der Ausfallwahrscheinlichkeit der nächsthöheren Stufe BBB und P^3 mit der Ratingklasse B.

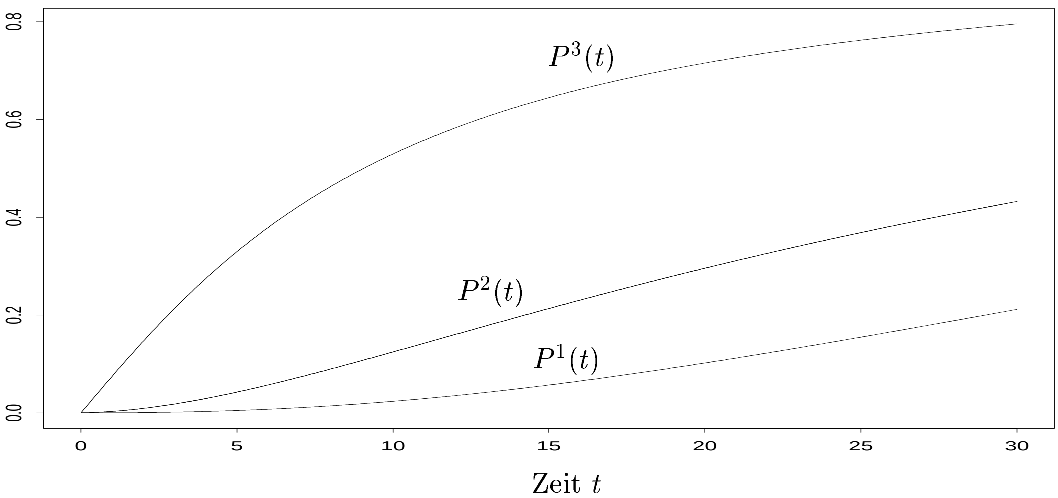

Abbildung 1.2: Empirische Ausfallwahrscheinlichkeiten nach Ratingklasse. P^1 entspricht der besten Ratingklasse AA, P^2 der zweitbesten BBB und P^3 der drittbesten B.

Ist die *Recovery Rate*, beziehungsweise die *Loss Rate*, von außen vorgegeben, dann kann man mit dem Ansatz nach Jarrow, Lando und Turnbull die Preise von Anleihen mit Kreditrisiko anhand ihres *Ratings* berechnen. Zudem besteht die Möglichkeit, Derivate – also *Contingent Claims* – auf die Anleihe zu bewerten. Gängige Derivate sind beispielsweise sogenannte *Default Options*. Der Käufer einer *Default Option* versichert sich gegen den Kreditausfall einer Anleihe. Fällt die Anleihe aus, so erhält er eine Entschädigung. Im anderen Fall geht er leer aus. Weitere Derivate sind unter anderem gewöhnliche Optionen auf Anleihen mit Kreditrisiko und sogenannte *Spread Options*. Der *Spread* bezeichnet die Renditedifferenz zwischen den risikolosen Anlagen und einer Anleihe mir Kreditrisiko. Genauer gesagt, spricht man hier von *Credit Spread*. Der *Spread* ist gewissermaßen das Ausübungskriterium einer *Spread Option*. In Kapitel 5.3 werden wir die hier erwähnten Derivate genauer untersuchen und im Modell nach Jarrow, Lando und Turnbull bewerten.

Das Modell von Schönbucher (1998a) basiert auf Überlegungen von Duffie und Singleton (1995). Duffie und Singleton betrachten Kreditrisiken in einer Welt mir risikoneutralen Investoren. Schönbucher geht einen Schritt weiter, indem auf Basis des Zinsstrukturmodells nach Heath, Jarrow und Morton (1992) ein Marktmodell entwirft. In diesem Modell sind die Preise der Anleihen mit Kreditrisiko gegeben. Sie sind stochastische Größen und mit dem Aktienkurs innerhalb des Black&Scholes–Modell vergleichbar. Es läßt sich dann eine breite Auswahl von Derivaten, den sogenannten *Credit Risk Derivatives*, bewerten, nicht zuletzt die schon erwähnten gewöhnliche Optionen auf Anleihen mit Kreditrisiko, *Spread Options*, *Default Options* und *Default Swaps*. Auf die Derivatebewertung gehen wir in Kapitel 5 ausführlich ein.

Kapitel 2

Grundlagen

Im diesem Kapitel werden die notwendigen Grundlagen der Arbeit dargelegt. Das Kapitel teilt sich in sechs Abschnitte. Im ersten Abschnitt befassen wir uns mit der "klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie". Es werden grundlegende Begriffe erläutert und die Sätze wiedergegeben, die für die Arbeit wesentlich sind. Darauf baut der zweite Abschnitt "Stochastische Integrationstheorie" auf. Das Doléans–Dade–Exponential und $\mathcal{H}^2$–Semimartingale diskutieren wir in den beiden folgenden Abschnitten. Danach wird die Brownsche Bewegung als Integrator thematisiert. Zum Abschluß beschäftigen wir uns mit Punktprozessen und der stochastischen Integrationstheorie.

2.1 Klassische Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieser Abschnitt faßt die wesentlichen Definitionen und Sätze von Protter (1995) und Øksendahl (1995) zusammen. Der mathematische Weg, zufällige Bewegungen zu beschreiben, führt uns zum Konzept der Wahrscheinlichkeitsräume. Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist die Welt, in der ein stochastischer Prozeß, eine zufällige Bewegung wie beispielsweise ein Aktienkurs, eingebettet ist.

Definition 2.1 *Es sei Ω eine Menge. Dann ist eine $\sigma-$***Algebra** *auf Ω eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von Ω, die die Eigenschaften besitzt*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(ii) $A \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad A \equiv \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Das Paar $(\Omega, \mathcal{F})$ nennt man einen **Meßraum**. *Ein* **Wahrscheinlichkeitsmaß** *P auf einem Meßraum $(\Omega, \mathcal{F})$ ist eine Funktion $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$, so daß gilt*

(i) $P(\emptyset) = 0$ *und* $P(\Omega) = 1$,

(ii) Die Mengen $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ seien paarweise disjunkt, dann gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right).$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *heißt* **Wahrscheinlichkeitsraum**. *Ein Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ist* **vollständig**, *falls* $\mathcal{F}$ *alle Teilmengen* G *von* Ω *mit äußerem Maß Null enthält, d.h.*

$$G \subset \Omega \quad \textit{und} \quad \inf\{P(F) : F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0 \quad \Rightarrow \quad G \in \mathcal{F}.$$

Jeder Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kann vervollständigt werden. Man erweitert $\mathcal{F}$ um die Teilmengen von Ω mit äußerem Maß Null und setzt das Maß auf die erweiterte σ–Algebra fort. Die Teilmengen F von $\mathcal{F}$ nennt man $\mathcal{F}$–meßbar. Wir interpretieren F als Ereignis und $P(F)$ als die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis F eintritt. Gilt $P(F) = 1$, dann sprechen wir davon, daß das Ereignis F P–fast–sicher eintritt.

Definition 2.2 *Auf einer Menge* Ω *betrachten wir eine Familie* $\mathcal{U}$ *von Teilmengen von* Ω. *Die* σ–*Algebra*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{U}} \equiv \bigcap \{\mathcal{H} : \mathcal{H} \textit{ ist } \sigma\textit{–Algebra auf } \Omega, \mathcal{U} \subset \mathcal{H}\}$$

heißt die von $\mathcal{U}$ *erzeugte* σ–*Algebra.*

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum kann man ein Struktur in Form einer Filtrierung definieren. Die Filtrierungen werden später als Familie von Informationsmengen interpretiert.

Definition 2.3 *Eine Familie von* σ–*Algebren* $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le \infty}$ *heißt* **Filtrierung** *in* $\mathcal{F}$, *wenn gilt*

$$0 \le s \le t \le \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \quad \textit{für } 0 \le t \le \infty.$$

Ein filtrierter Wahrscheinlichkeitssraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le \infty}\right)$ *erfüllt die* **üblichen Bedingungen**, *falls*

(i) $\mathcal{F}_0$ *enthält alle* P–*Nullmengen von* $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$, *für alle* $t \ge 0$; *d.h. die Filtrierung* $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le \infty}$ *ist rechtsseitig stetig.*

Wir nehmen im folgenden an, daß die üblichen Bedingungen stets erfüllt sind.

Definition 2.4 *Es sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le \infty}\right)$ *gegeben. Eine Zufallsvariable* $\tau : \Omega \mapsto [0, \infty]$ *ist eine* **Stopzeit**, *falls das Ereignis* $\{\tau \le t\}$ *in* $\mathcal{F}_t$ *liegt, für alle* $t \in [0, \infty]$.

Es gelten die üblichen Bedingungen. Insbesondere ist die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le \infty}$ rechtseitig stetig. Darauf gründet sich der folgende Satz.

Satz 2.1 *Das Ereignis* $\{\tau < t\}$ *liegt in* $\mathcal{F}_t$, *für alle* $t \in [0, \infty]$, *genau dann, wenn* τ *eine Stopzeit ist.*

Im allgemeinen sind alle stochastische Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definiert. Stochastischen Prozesse interpretieren wir hier zumeist als Preisprozesse von Anlagemöglichkeiten wie Aktien und Anleihen.

Definition 2.5 *Ein* **stochastischer Prozeß** *ist ein Familie von reellwertigen Zufallsvariablen*

$$X \equiv \{X(t) : t \ge 0\},$$

die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *definiert sind. Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitssraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le \infty}\right)$ *heißt ein stochastischer Prozeß* $X = \{X(t) : t \ge 0\}$ **adaptiert**, *falls gilt*

$$X(t) \textit{ ist } \mathcal{F}_t\textit{–meßbar für alle } t \ge 0.$$

Für ein festes $t \geq 0$ haben wir auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine Zufallsvariable gegeben mittels

$$\omega \mapsto X(t, \omega), \qquad \text{für } \omega \in \Omega.$$

Andererseits erhalten wir für ein festes ω aus Ω die Funktion

$$t \mapsto X(t, \omega) \qquad \text{für } t \geq 0,$$

die wir **Pfad** von X nennen.

Die Gleichheit zweier stochastischer Prozesse muß sorgfältig defniert werden. Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten.

Definition 2.6 *Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}\right)$ *und die adaptierten stochastischen Prozesse* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *und* $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$. X *und* Y *sind genau dann* **Modifikationen**, *wenn*

$$X(t) = Y(t) \quad P\text{–f.s.}, \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Die beiden Prozesse sind genau dann **ununterscheidbar**, *wenn* P*–fast–sicher gilt*

$$X(t) = Y(t), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Sind X und Y Modifikationen, existiert eine P–Nullmenge $\mathcal{N}_t$ für alle $t \geq 0$, so daß für alle $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}_t$ gilt $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$. Die Menge $[0, \infty)$ ist überabzählbar, also ist $\mathcal{N} \equiv \bigcup_{t \in [0,\infty)} \mathcal{N}_t$ nicht unbedingt eine P–Nullmenge. $\mathcal{N}$ muß nicht einmal meßbar sein. Sind die Prozesse X und Y ununterscheidbar, gibt es eine P–Nullmenge $\mathcal{N}$, so daß für alle $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$ und für alle $t \geq 0$ gilt $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$. Mit anderen Worten, X und Y besitzen auf $\Omega \setminus \mathcal{N}$ identische Pfade. Die Nullmenge $\mathcal{N}$ liegt in $\mathcal{F}_0$ – demnach auch in allen $\mathcal{F}_t$ für $t \geq 0$. Folglich sind ununterscheidbare Prozesse Modifikationen.

Definition 2.7 *Ein stochastischer Prozeß* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ist* **càdlàg**, *falls er Pfade besitzt, die* P*–fast–sicher rechtsseitig stetig sind und deren linksseitiger Limes an jeder Stelle existiert.*
Der Prozeß X *ist* **càglàd**, *wenn seine Pfade* P*–fast–sicher linksseitig stetig sind und der rechtsseitiger Limes an jeder Stelle existiert.*

Jeder càdlàg–Prozeß $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ besitzt eine càglàd–Version. Die càglàd–Version lautet X_-, wobei $X_-(t) = \lim_{s \to t, s < t} X(s)$ definiert ist für $t \geq 0$.
Càdlàg–Prozesse bieten eine elemetares Beispiel für Stopzeiten.

Beispiel 1 *Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}\right)$ *sei ein adaptierter càdlàg–Prozeß* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *gegeben. Zu einer Borelmenge aus den reellen Zahlen* Λ *definieren wir*

$$\tau(\omega) \equiv \inf\{t > 0 : X(t, \omega) \in \Lambda\}.$$

τ *heißt* **Ersteintrittszeit von** X **in** Λ. *Ist* Λ *eine offene Menge, dann ist* τ *eine Stopzeit.*

Eine spezielle Klasse der stochastischen Prozesse sind Martingale, Super– und Submartingale. Ein Martingal ist ein Prozeß, dessen erwartete Zuwächse gleich Null sind. Submartingale haben eine positive Zuwachserwartung; im Falle der Supermartingale verhält es sich umgekehrt.

Definition 2.8 *Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le\infty}\right)$ *sei ein adaptierter Prozeß* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *gegeben.* X *heißt* **Martingal** *(beziehungsweise* **Supermartingal** *oder* **Submartingal***) bezüglich der Filtrierung* $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le\infty}$*, falls gilt*

(i) $\mathbf{E}\{|X(t)|\} < \infty, \qquad$ *für alle* $t \geq 0$.

(ii) Für $s \leq t$ *gilt* $\mathbf{E}\{X(t)\,|\mathcal{F}_s\} = X(s)$ *P–f.s. (beziehungsweise "$\leq$" oder "$\geq$").*

Nach Korollar 1 von Theorem 9, Chapter I, von Protter (1995) besitzt jedes Martingal eine eindeutige Modifikation, die ein càdlàg–Prozeß ist. Von nun an betrachten wir ausschließlich die càdlàg–Version eines Martingals.

Wir bereiten das Optional Sampling Theorem mit den drei folgenden Definitionen und einem Satz vor.

Definition 2.9 $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *sei ein càdlàg–Prozeß und* T *sei eine zufällige Zeit, also eine Zufallsvariable mit Werten in* $[0, \infty]$*. Dann heißt* $X^T = \left\{X^T(t) : t \geq 0\right\}$ *definiert durch*

$$X^T(t) \equiv X(t \wedge T) = X(t)\,\mathbf{1}_{\{t<T\}} + X(T)\,\mathbf{1}_{\{t\geq T\}}$$

der in T **gestoppte Prozeß***.*

Definition 2.10 *Ein Martingal* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le\infty}\right)$ *wird durch eine Zufallsvariable* Y **abgeschlossen***, wenn* $\mathbf{E}\{|Y|\} < \infty$ *und* $X(t) = \mathbf{E}\{Y\,|\mathcal{F}_t\}$ *für* $0 \leq t < \infty$ *gilt.*

Definition 2.11 *Eine Familie von Zufallsvariablen* $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ *auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ist* **gleichgradig integrierbar***, falls gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\alpha\in A} \int_{\{|U_\alpha|\geq n\}} |U_\alpha| dP = 0.$$

Hierbei bezeichnet A *eine beliebige Indexmenge.*

Im Falle eines stochastischen Prozesses setzen wir die Indexmenge $A \equiv \mathbb{R}_0^+$ und interpretieren den stochastischen Prozeß als Familie von Zufallsvariablen, indiziert durch die "Zeit" $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Satz 2.2 *Es sei* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *ein Martingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le\infty}\right)$*.* X *ist genau dann gleichgradig integrierbar, wenn* $Y = \lim_{t\to\infty} X(t)$ *P–f.s. existiert,* $\mathbf{E}\{|Y|\} < \infty$ *und* $X = \{X(t) : 0 \leq t \leq \infty\}$ *ist ein Martingal. Hierbei ist* $X(\infty) = Y$*.*

Ein gleichgradig integrierbares Martingal kann durch eine Zufallsvariable abgeschlossen werden. Die Umkehrung gilt auch. Jedes Martingal, das durch eine Zufallsvariable abgeschlossen werden kann, ist gleichgradig integrierbar.

Satz 2.3 (Doobs Optional Sampling Theorem) *Es sei* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *ein Martingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le\infty}\right)$*, das durch eine Zufallsvariable* $X(\infty)$ *abgeschlossen wird.* τ_1 *und* τ_2 *seien Stopzeiten mit* $\tau_1 \leq \tau_2$ *P–fast–sicher. Dann sind* $X(\tau_1)$ *und* $X(\tau_2)$ *integrierbar, und es gilt*

$$X(\tau_1) = \mathbf{E}\{X(\tau_2)\,|\mathcal{F}_{\tau_1}\}\ P\text{–f.s.}$$

Auf das Optional Sampling Theorem stützt sich der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 2.4 *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}\right)$ und τ eine Stopzeit. Dann ist $X^\tau = \{X(t \wedge \tau) : 0 \leq t \leq \infty\}$ ebenfalls ein gleichgradig integrierbares Martingal.*

Ein nützlicher Satz ist die Jensensche Ungleichung.

Satz 2.5 (Jensensche Ungleichung) *Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine integrierbare reellwertige Zufallsvariable X gegeben. Sei φ eine konvexe Funktion auf den reellen Zahlen und $\varphi(X)$ integrierbar, dann gilt für jede σ–Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$*

$$\varphi\left(\mathbf{E}\{X|\mathcal{G}\}\right) \leq \mathbf{E}\{\varphi(X)|\mathcal{G}\}.$$

Korollar 1 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei ein Martingal auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}\right)$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Ist $\varphi(X(t))$ für $0 \leq t < \infty$ integrierbar, dann ist $\varphi(X) = \{\varphi(X(t)) : t \geq 0\}$ ein Submartingal. Insbesondere gilt für jedes Martingal M, $|M|$ ist ein Submartingal.*

Beweis:
Nach der Jensensche Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\varphi(X(t))|\mathcal{F}_s\} &\geq \varphi\left(\mathbf{E}\{X(t)|\mathcal{F}_s\}\right) \\ &= \varphi(X(s)) \quad P\text{–f.s.}, \qquad \text{für } t \geq 0. \end{aligned}$$

Die Betragsfunktion $|\cdot|$ ist konvex; demnach ist die zweite Aussage eine Konseqenz der Grundaussage des Korollars. □

Die Doobsche Ungleichung ist ein wesentliches Hilfsmittel bei Abschätzungen.

Satz 2.6 (Doobsche Ungleichung) *Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}\right)$ sei ein positives Submartingal $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ gegeben. Für alle $p > 1$ und q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt*

$$\| \sup_{t \geq 0} |X(t)| \, \|_{L^p} \quad \leq \quad q \sup_{t \geq 0} \|X(t)\|_{L^p}.$$

Korollar 1 (Doobsche maximale quadratische Ungleichung) *Zusätzlich fordern wir $X(\infty) \in L^2(P)$ und definieren $X^* \equiv \sup_{t \geq 0} |X(t)|$. Dann ist $|X|$ ein positives Submartingal, und für $p = 2$ gilt*

$$\mathbf{E}\{(X^*)^2\} \quad \leq \quad 4\,\mathbf{E}\{X(\infty)^2\}.$$

Wenden wir uns nun den stochastischen Prozessen zu und betrachten zwei elementare Beispiele. Zunächst umschreiben wir Zählprozesse und studieren speziell den Poissonprozeß. Der am häufigsten zitierte Prozeß in der Finanzmathematik ist die Brownsche Bewegung. Sie ist ein Martingal mit stetigen Pfaden und der "gebräuchliche Integrator" in der stochastischen Integrationstheorie. Wir befinden uns in den nachfolgenden Beispielen immer in einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}\right)$.

Definition 2.12 *$(T_n)_{n\geq 0}$ sei eine Folge von streng wachsenden Zufallsvariablen auf $\mathcal{F}$. Es sei $T_0 = 0$. Der Prozeß $N = \{N(t) : 0 \leq t \leq \infty\}$ definiert durch*

$$N(t) \equiv \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{t\geq T_n\}}$$

mit Werten in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ heißt **Zählprozeß** *bezüglich der Folge $(T_n)_{n\geq 1}$*

Durch die besondere Definition von T_0 ist sichergestellt, daß $N(0) = 0$ P–f.s. gilt. Wir setzen $T \equiv \sup_n T_n$ und nennen T **Explosionszeitpunkt** von N. Ist $T = \infty$ P–f.s., dann ist N ein Zählprozeß ohne Explosion. Sei $T = \infty$, dann ist für $0 \leq s < t < \infty$

$$N(t) - N(s) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{s<T_n\leq t\}}$$

der Zuwachs von N im Intervall $(s, t\,]$.
Der Zählprozeß ist, so wie wir ihn definiert haben, nicht unbedingt adaptiert bezüglich der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$. Der nächste Satz gibt Aufschluß darüber, in welchem Fall ein Zählprozeß adaptiert ist.

Satz 2.7 *Ein Zählprozeß $N = \{N(t) : 0 \leq t \leq \infty\}$ ist genau dann adaptiert, wenn die Zufallsvariablen $(T_n)_{n\geq 1}$ Stopzeiten sind.*

Zählprozesse ohne Explosion besitzen rechtsseitig stetige Pfade mit linksseitigem Grenzwert, sind also càdlàg–Prozesse.

Definition 2.13 *Ein Zählprozeß $N = \{N(t) : 0 \leq t \leq \infty\}$ ohne Explosion ist ein* **Poissonprozeß**, *wenn gilt*

(i) Für alle $0 \leq s < t < \infty$ ist der Zuwachs $N(t) - N(s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$.

(ii) Sind s, t, u und v beliebig mit $0 \leq s < t < \infty$, $0 \leq u < v < \infty$ und $t - s = v - u$, dann besitzen $N(t) - N(s)$ und $N(v) - N(u)$ die gleiche Verteilung.

Die Eigenschaften (i) und (ii) sind bekannt als von der Vergangenheit unabhängige Zuwächse und stationär verteilte Zuwächse. Über die Verteilung des Prozesses gibt der folgende Satz Aufschluß.

Satz 2.8 *$N = \{N(t) : 0 \leq t \leq \infty\}$ sei ein Poissonprozeß. Dann gilt*

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda\, t}\,(\lambda t)^n}{n!},$$

für $n = 0, 1, 2, ...$ und ein $\lambda \geq 0$. λ heißt **Intensität** *des Poissonprozesses. $N(t)$ ist Poisson–verteilt mit Parameter $\lambda\, t$. Weiter ist*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{N(t)\} &= \lambda\, t, \\ var(N(t)) &= \lambda\, t, \qquad \textit{für } t \geq 0. \end{aligned}$$

Leicht sieht man, daß der Poissonprozeß ein Submartingal ist, da er steigende Pfade besitzt. Wie muß man die Steigung kompensieren, damit der auf diese Weise korrigierte Prozeß ein Martingal ist? Der nachstehende Satz beantwortet die Frage.

Satz 2.9 *$N = \{N(t) : 0 \le t \le \infty\}$ sei ein Poissonprozeß mit Intensität λ. Definieren wir die Prozesse $A = \{A(t) : 0 \le t \le \infty\}$ und $M = \{M(t) : 0 \le t \le \infty\}$ mittels*

$$\begin{aligned} A(t) &\equiv \lambda\, t \quad \textit{und} \\ M(t) &\equiv N(t) - A(t) = N(t) - \lambda\, t, \qquad \textit{für } t \ge 0. \end{aligned}$$

Dann ist M ein Martingal.

Beweis:
Wir nutzen die Unabhängkeit und die Stationarität der Zuwächse aus. Wir müssen zeigen, daß $M(t) \in L^1$ gilt.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{|M(t)|\} &= \mathbf{E}\{|N(t) - A(t)|\} \\ &\le \mathbf{E}\{|N(t)| + |A(t)|\} \\ &= \mathbf{E}\{N(t)\} + \mathbf{E}\{A(t)\} \\ &= \lambda t + \lambda t \\ &= 2\lambda t \quad < \quad \infty, \qquad \text{für alle } t \ge 0. \end{aligned}$$

Unter dieser Voraussetzung können wir den bedingten Erwartungswert von M berechnen. Für $0 \le s < t$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{M(t)\,|\mathcal{F}_s\} &= \mathbf{E}\{N(t) - \lambda\, t\,|\mathcal{F}_s\} \\ &= \mathbf{E}\{N(t) - N(s) + N(s) - \lambda\, s - \lambda\,(t-s)\,|\mathcal{F}_s\} \\ &= N(s) - \lambda\, s + \mathbf{E}\{N(t) - N(s)\,|\mathcal{F}_s\} - \lambda\,(t-s) \\ &= M(s) + \mathbf{E}\{N(t) - N(s)\} - \lambda\,(t-s) \\ &= M(s) + \mathbf{E}\{N(t-s) - N(0)\} - \lambda\,(t-s) \\ &= M(s) + \lambda\,(t-s) - \lambda\,(t-s) \\ &= M(s) \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß M ein Martingal ist. □

Den Prozeß A nennt man den Kompensator von N. Es gilt $N = M - A$. A besitzt die Eigenschaft der Vorhersehbarkeit, da A stetige Pfade besitzt. Zudem sind die Pfade von A von beschränkter Variation auf kompakten Intervallen. Im Folgenden ist die Zerlegung eines Prozesses in ein Martingal und einen vorhersehbaren Prozeß mit beschränkter Variation von grundlegender Bedeutung. Die Begriffe "vorhersehbar" und "von beschränkter Variation" werden später genau definiert.

Wenden wir uns nun der Brownschen Bewegung zu.

Definition 2.14 *Ein reellwertiger adaptierter Prozeß $B = \{B(t) : 0 \le t < \infty\}$ heißt* **Brownsche Bewegung**, *falls gilt*

(i) Für alle $0 \le s < t < \infty$ ist der Zuwachs $B(t) - B(s)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$.

(ii) Für alle $0 < s < t < \infty$ ist $B(t) - B(s)$ normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz $\sigma^2(t-s)$ für eine reelle Konstante $\sigma > 0$.

Die Brownsche Bewegung startet in x, wenn $P(B(0) = x) = 1$. Ist $\sigma = 1$ und startet B in 0, dann nennen wir B eine **Standard Brownsche Bewegung**.

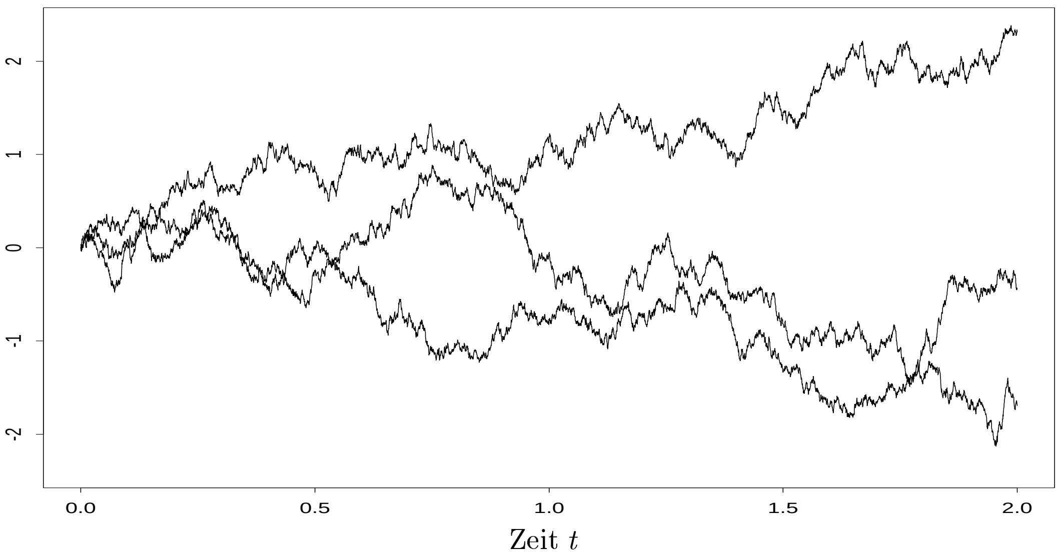

Abbildung 2.1: 3 simulierte Pfade einer Standard Brownschen Bewegung

Gilt $\mathbf{E}\{|B(0)|\} < \infty$, dann ist die Brownsche Bewegung ein Martingal. Falls die Brownsche Bewegung ein Martingal ist, besitzt sie eine càdlàg–Modifikation. Wir können sogar noch mehr über die Pfade von B aussagen.

Satz 2.10 *Es sei $B = \{B(t) : 0 \leq t < \infty\}$ eine Brownsche Bewegung. Dann existiert eine Modifikation von B mit stetigen Pfaden P–fast–sicher.*

Wir benutzen im weiteren stets eine Version der Brownschen Bewegung mit stetigen Pfaden.

Über die Brownsche Bewegung gibt es zwei Aussagen, die uns mit der Problematik der stochastischen Integration vertraut machen.

Satz 2.11 *Es sei $B = \{B(t) : 0 \leq t < \infty\}$ eine Brownsche Bewegung und $(\pi_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Partitionen des Intervalls $[a, a+t]$, für $a \geq 0$ und $t > 0$. Die Folge $(\pi_n)_{n\geq 1}$ sei verfeinernd; d.h.: für $m > n$ ist $\pi_m \supset \pi_n$. Definieren wir $\pi_n B \equiv \sum_{t_i \in \pi_n} (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2$. Geht die Feinheit von π_n gegen Null für $n \to \infty$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} \pi_n B = t$ P–fast–sicher.*

Das Konzept der Folge $(\pi_n)_{n\geq 1}$ wird später auf Stopzeiten erweitert. Die Aussage des Satzes bleibt jedoch in dem verallgemeinerten Fall erhalten. Es gilt dann $[B, B](t) = \lim_{n\to\infty} \pi_n B = t$. Der Prozeß $[\cdot, \cdot]$ heißt quadratische Variation oder Bracket–Prozeß. Die Brownsche Bewegung kann mithilfe der quadratischen Variation charakterisiert werden. Nach Lèvy ist ein Prozeß $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung, wenn X ein stetiges Martingal ist mit $[X, X](t) = t$ für $t \geq 0$ (siehe Satz 2.45).

Wir definieren die Variation eines Prozesses entlang eines Pfades.

Definition 2.15 *Sei $X = \{X(t) : 0 \leq t < \infty\}$ ein càdlàg–Prozeß. Für ein kompaktes Intervall $I \equiv [a, b]$ mit $0 \leq a < b$ definieren wir die Zufallsvariable $V_I(X)$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ durch*

$$V_I(X)(\omega) \equiv \sup_{\pi \in \mathcal{P}} \sum_{t_i \in \pi} |X(t_{i+1}, \omega) - X(t_i, \omega)|, \qquad \textit{für alle } \omega \in \Omega,$$

wobei $\mathcal{P}$ alle endlichen Partitionen von I umfaßt. $V_I(X)(\omega)$ heißt die **Variation entlang eines Pfades** *des Prozesses X für ein gegebenes $\omega \in \Omega$. X ist ein Prozeß von* **beschränkter Variation** *auf kompakten Intervallen, ein* **FV–Prozeß**, *wenn für alle kompakten Intervalle I gilt $V_I(X) < \infty$ P–fast–sicher.*

Satz 2.12 *Es sei $B = \{B(t) : 0 \leq t < \infty\}$ eine Brownsche Bewegung. Die Pfade von B sind alle von unbeschränkter Variation P–fast–sicher.*

Im nächsten Abschnitt sehen wir, daß im Falle eines FV–Prozesses X mit stetigen Pfaden das stochastische Integral $\int \cdot dX$ sich pfadweise wie das Lebesgue–Stieltjes–Integral berechnen läßt.

Wir verallgemeinern den Begriff des Martingals.

Definition 2.16 *Ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}\right)$ sei gegeben. Ein adaptierter càdlàg–Prozeß $X = \{X(t) : 0 \leq t < \infty\}$ heißt genau dann ein* **lokales Martingal**, *wenn eine Folge von wachsenden Stopzeiten $(\tau_n)_{n\geq 1}$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ P–fast–sicher und $X^{\tau_n}\,\mathbf{1}_{\{\tau_n>0\}}$ ein Martingal für alle $n \geq 1$ ist. Die Folge von Stopzeiten $(\tau_n)_{n\geq 1}$ nennen wir* **fundamentale Folge**.

Ein Martingal ist ein einfaches Beispiel für ein lokales Martingal. Wir setzen $\tau_n = n$, dann sind die Voraussetzungen erfüllt. Unter welchen Bedingungen ist ein lokales Martingal ein Martingal? Eine mögliche Antwort bietet der nachstehende Satz.

Satz 2.13 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei ein lokales Martingal auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}\right)$.*
Der Prozeß $X^* = \{X^*(t) : t \geq 0\}$ sei gegeben mittels $X^*(t) \equiv \sup_{0\leq s\leq t} |X(s)|$ für $t \geq 0$. Ist $\mathbf{E}\{X^*(t)\} < \infty$ für alle $t \geq 0$, dann ist X ein Martingal. Gilt zusätzlich $\mathbf{E}\{X^*\} < \infty$, dann ist X ein gleichgradig integrierbares Martingal.

2.2 Stochastische Integrationstheorie

Das stochastische Integral können wir nicht als Erweiterung der Integration nach Lebesgue und Stieltjes gewinnen. Sei ein Prozeß $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ als Integrator gegeben, und $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ der Prozeß, den man integrieren möchte. Wir versuchen das stochastische Integral

$$I_X(H)(\omega) = \int_0^\infty H(s,\omega)\, dX(s,\omega)$$

für jedes $\omega \in \Omega$ als das Lebesgue–Stieltjes–Integral zu definieren. Als Voraussetzung benötigen wir, daß $X(\omega)$ auf Kompakta von beschränkter Variation ist. Die Brownsche Bewegung erfüllt nach Satz 2.12 diese Voraussetzung nicht. Zudem könnten wir verlangen, daß die Pfade von X differenzierbar sind; sprich für alle $\omega \in \Omega$ soll

$$\frac{dX(t,\omega)}{dt}, \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

existieren. Dann wäre die Integrationstheorie nach Riemann anwendbar. Solche Forderungen schränken die Menge der Integratoren zu stark ein. Viele Prozesse wie die Brownsche Bewegung kann man auf diese Weise nicht fassen. Ein erweitertes Konzept ist notwendig.
Der Aufbau der Stochastischen Integrationstheorie im Sinne von Itô ist in Protter ausführlich

beschrieben. Hier gehen wir nicht auf jedes Detail ein. Wir geben wesentliche Ergebnisse an, beschränken uns hierbei zumeist auf Integranden mit càglàd–Pfaden. Unter gewissen technischen Voraussetzungen kann man das stochastische Integral für vorhersehbare Prozesse als Integranden definieren. Teilweise geben wir hierfür Ergebnisse an.
Das stochastische Integral wird zunächst für einfach vorhersehbare Prozesse als Integrand definiert. Die Prozesse, welche übliche Integraleigenschaften besitzen, betrachten wir als zulässige Integratoren und nennen sie Semimartingale. Dringt man tiefer in die Theorie ein, sieht man, daß das "klassische" Semimartingal nach Doob und Meyer mit der Definition in diesem Zusammenhang identisch ist. Im Rahmen des "neuen Konzepts" nach Protter fällt das stochastische Integral für FV–Prozesse als Integratoren mit der pfadweisen Erweiterung des Lebesgue–Stieltjes–Integrals zusammen.

Im weiteren Vorgehen befinden wir uns stets in einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$, der die üblichen Bedingungen erfüllt.

Definition 2.17 *Ein Prozeß $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ heißt* **einfach vorhersehbar**, *wenn er folgende Darstellung besitzt.*

$$H(t) = H_0\, \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i\, \mathbf{1}_{(T_i, T_{i+1}]}(t),$$

wobei $0 = T_1 \leq \ldots \leq T_{n+1} < \infty$ eine endliche Folge von Stopzeiten ist und H_i eine $\mathcal{F}_{T_i}$–meßbare Zufallsvariable ist, mit $|H_i| < \infty$ P–f.s. für $0 \leq i \leq n$. Die Menge aller einfach vorhersehbaren Prozesse sei mit $\mathbf{S}$ bezeichnet.

Den Raum der einfach vorhersehbaren Prozesse $\mathbf{S}$ versehen wir mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, welche wir $\mathcal{T}_{\mathbf{S^0}}$ nennen. Das Integral definieren wir für einfach vorhersehbare Prozesse. Es ist eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Der Raum aller Zufallsvariable auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum, die fast–sicher endliche Werte annehmen, sei $\mathbf{L^0}$. Den Raum $\mathbf{L^0}$ versehen wir mit der Topologie in Wahrscheinlichkeit $\mathcal{T}_{\mathbf{L^0}}$.
Gegeben einen Prozeß $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ definieren wir die lineare Abbildung $I_X : (\mathbf{S}, \mathcal{T}_{\mathbf{S^0}}) \to (\mathbf{L^0}, \mathcal{T}_{\mathbf{L^0}})$ durch

$$I_X(H) \equiv H_0\, X(0) + \sum_{i=1}^{n} H_i\, \left(X(T_{i+1}) - X(T_i)\right).$$

Hierbei ist $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ ein einfach vorhersehbarer Prozeß der Gestalt

$$H(t) = H_0\, \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i\, \mathbf{1}_{(T_i, T_{i+1}]}(t).$$

Obenstehende Definition ist eine pfadweise Definition für jedes $\omega \in \Omega$.

Definition 2.18 *Ein Prozeß $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ist ein* **totales Semimartingal**, *falls X ein adaptierter càdlàg–Prozeß ist und die Abbildung $I_X : (\mathbf{S}, \mathcal{T}_{\mathbf{S^0}}) \to (\mathbf{L^0}, \mathcal{T}_{\mathbf{L^0}})$ stetig ist.*
Der Prozeß $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ heißt **Semimartingal**, *falls für jedes reelle $t \geq 0$ der gestoppte Prozeß X^t ein totales Semimartingal ist.*

Die folgenden Sätze geben Aufschluß über die Struktur der Menge der totalen Semimartingale und der Menge der Semimartingale.

Satz 2.14 *Die Menge der (totalen) Semimartingale ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen.*

Satz 2.15 *Sei Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, das absolut stetig zu P ist. Dann ist jedes (totale) P-Semimartingal ein (totales) Q–Semimartingal.*

Verkleinert man die ursprüngliche Filtrierung, so daß ein Semimartingal adaptiert ist bezüglich der verkleinerten Filtrierung, bleibt die Semimartingaleigenschaft bestehen.

Satz 2.16 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei ein Semimartingal zur Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sei $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtrierung, die in $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ enthalten ist; d.h.: $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ für jedes $t \geq 0$. Dann ist X ein $\mathcal{G}$–Semimartingal, falls X adaptiert ist bezüglich der Filtrierung $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$.*

Semimartingale bilden die Menge der Integratoren in der stochastischen Integrationstheorie. Von Interesse ist, welche Integratoren zur Verfügung stehen. Es folgen einige Beispiele.

Satz 2.17 *Jedes quadratintegrierbare Martingal (mit càdlàg–Pfaden) ist ein Semimartingal.*

Den Begriff des lokalen Martingals haben wir bereits kennengelernt. Das Prinzip der Lokalisierung läßt sich allgemein formulieren.

Definition 2.19 *Sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozeß.* **Eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ gilt lokal**, *falls eine Folge von wachsenden Stopzeiten $(\tau_n)_{n\geq 1}$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$, so daß $X^{\tau_n}\,\mathbf{1}_{\{\tau_n>0\}}$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$ für $n \geq 1$ besitzt.*

Mit dieser Definition betrachten wir den folgenden Satz.

Satz 2.18 *Jedes lokal quadratintegrierbare lokale Martingal mit càdlàg–Pfaden ist ein Semimartingal.*

Korollar 1 *Ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden ist ein Semimartingal.*

Korollar 2 *Die Brownsche Bewegung ist ein Semimartingal.*

Neben den lokal quadratintegrierbaren lokalen Martingalen ist eine andere Klasse von Integratoren wichtig: die FV–Prozesse.

Definition 2.20 *Der stochastische Prozeß $A = \{A(t) : t \geq 0\}$ sei ein FV–Prozeß. Wir definieren den Prozeß $|A| = \{|A|(t) : t \geq 0\}$ durch*

$$|A|(t) \equiv \sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{2^n} |A(t\frac{k}{2^n}) - A(t\frac{k-1}{2^n})|.$$

$|A|$ heißt **totaler Variationsprozeß**.

Der totale Variationsprozeß $|A|$ ist wachsend und es gilt $|A|(t) < \infty$ P–fast–sicher, für $t \geq 0$.

Satz 2.19 *Jeder adaptierte FV–Prozeß (mit endlicher totaler Variation $|A|(\infty)$) ist ein (totales) Semimartingal.*

Die Menge der Semimartingale bilden einen Vektorraum. Demnach ist die Summe aus einem konstanten Prozeß, einem lokal quadratintegrierbaren Martingal und einem FV–Prozeß ebenfalls ein Semimartingal. Prozesse, die sich in diese drei Summanden aufspalten lassen, nennen wir zerlegbare Prozesse.

Definition 2.21 *Ein adaptierter Prozeß $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ mit càdlàg–Pfaden heißt* **zerlegbar**, *falls er die Darstellung besitzt*

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Hierbei ist $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ ein lokal quadratintegrierbares Martingal und $A = \{A(t) : t \geq 0\}$ ein FV–Prozeß, und es gilt $M(0) = A(0) = 0$.

Satz 2.20 *Jeder zerlegbare Prozeß ist ein Semimartingal.*

Wir haben die Integratoren relativ ausführlich diskutiert. Nun wenden wir uns den Integranden zu. Wir gehen der Frage nach, wie sich die Menge der einfach vorhersehbaren Prozesse als Integranden geeignet erweitern läßt. Als Ergebnis erhalten wir die adaptierten Prozesse, die linksseitig stetig sind und deren rechtsseitiger Grenzwert existiert.

Definition 2.22 *Die Menge der càdlàg–Prozesse nennen wir* **D**. *Die Menge der adaptierten Prozesse, deren rechtsseitiger Grenzwert existiert und die linksseitig stetig sind, die also càglàd–Prozesse sind, bezeichnen wir mit* **L**.

Auf den Räumen **S** und $\mathbf{L^0}$ haben wir die Topologien $\mathcal{T}_{\mathbf{S^0}}$ und $\mathcal{T}_{\mathbf{L^0}}$ kennengelernt. Wir benötigen eine weitere, eine dritte Form der Konvergenz.

Definition 2.23 *Eine Folge von Prozessen $(H^n)_{n\geq 1}$ mit $H^n = \{H^n(t) : t \geq 0\}$ konvergiert gegen einen Prozeß $H = \{H(t) : t \geq 0\}$* **gleichmäßig auf kompakten Intervallen in Wahrscheinlichkeit**, *falls gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq t} |H^n(s) - H(s)| = 0 \ P\text{–f.s.}, \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Der Raum **S** liegt in **L**, was man direkt aus der Definition der einfach vorhersehbaren Prozesse erkennt. Wir versehen **L**, **D** und **S** mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta $\mathcal{T}_{\mathbf{L}}$, $\mathcal{T}_{\mathbf{D}}$, beziehungsweise $\mathcal{T}_{\mathbf{S}}$. Das nächste Ergebnis ist der Schlüssel, um die Definition $I_X(H)$ auf **L** zu erweitern.

Satz 2.21 *Der Raum* **S** *liegt dicht in* **L** *unter der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta $\mathcal{T}_{\mathbf{L}}$.*

I_X bildet einen Prozeß auf eine Zufallsvariable ab. Nun definieren wir einen Operator (den stochastischen Integraloperator), der einen Prozeß auf einen Prozeß abbildet.

Definition 2.24 *Es sei $H = \{H(t) : t \geq 0\} \in \mathbf{S}$ und $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein stochastischer Prozeß mit càdlàg–Pfaden. Die (lineare) Abbildung $J_X : \mathbf{S} \to \mathbf{D}$ ist definiert durch*

$$J_X(H) \equiv H_0\, X(0) + \sum_{i=1}^{n} H_i \left(X^{T_{i+1}} - X^{T_i} \right).$$

Hierbei ist $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ ein einfach vorhersehbarer Prozeß der Gestalt

$$H(t) = H_0\, \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i\, \mathbf{1}_{(T_i, T_{i+1}]}(t).$$

$J_X(H)$ heißt **das stochastische Integral von H bezüglich X**.

Im weiteren benutzen wir die drei gleichwertigen Schreibweisen.

$$J_X(H) = \int H(s)\, dX(s) = H \cdot X.$$

Die Beziehung zwischen I_X und J_X ist $J_X(H)(t) = I_{X^t}(H)$, zudem gilt $I_X(H) = \int_0^\infty H(s)dX(s)$.

Satz 2.22 *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal. Die Abbildung $J_X : (\mathbf{S}, \mathcal{T}_\mathbf{S}) \to (\mathbf{D}, \mathcal{T}_\mathbf{D})$ ist stetig.*

Wir haben gesehen, daß für ein Semimartingal X der Integrationsoperator J_X stetig auf $(\mathbf{S}, \mathcal{T}_\mathbf{S})$ ist. Zudem liegt $\mathbf{S}$ dicht in $(\mathbf{L}, \mathcal{T}_\mathbf{L})$. Da $(\mathbf{D}, \mathcal{T}_\mathbf{D})$ vollständig und metrisierbar ist, können wir den stochastischen Integrationsoperator J_X von $\mathbf{S}$ auf $\mathbf{L}$ fortsetzen.

Definition 2.25 *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal. Die stetige Abbildung $J_X : (\mathbf{L}, \mathcal{T}_\mathbf{L}) \to (\mathbf{D}, \mathcal{T}_\mathbf{D})$, die man als Fortsetzung von $J_X : \mathbf{S} \to \mathbf{D}$ erhält heißt* **stochastisches Integral**.

Im weiteren Verlauf des Abschnitts bezeichnet $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal und $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ einen Prozeß aus $\mathbf{L}$. Wir werten das stochastische Integral $H \cdot X$ an der Stelle $t \geq 0$ aus.

$$(H \cdot X)(t) = \int_0^t H(s)\, dX(s) = \int_{[0,t]} H(s)\, dX(s).$$

Um 0 auszuschließen, schreiben wir

$$\int_{0+}^t H(s)\, dX(s) = \int_{(0,t]} H(s)\, dX(s).$$

Mit diesen Bezeichnung gilt $\int_0^t H(s)\, dX(s) = H(0)X(0) + \int_{0+}^t H(s)\, dX(s)$.

Definition 2.26 *Für $Y = \{Y(t) : t \geq 0\} \in \mathbf{D}$ sei der zugehörige* **Sprunganteil** *$\Delta Y = \{\Delta Y(t) : t \geq 0\}$ definiert durch $\Delta Y(t) \equiv \Delta Y(t) - \Delta Y(t-)$ für $t \geq 0$. Hierbei ist $Y(0-) \equiv 0$. Es gilt also $\Delta Y(0) = Y(0)$.*

Es folgt eine Zusammenstellung von Eigenschaften des stochastischen Integrals.

Satz 2.23 *Es sei τ eine Stopzeit. Dann gilt $(H \cdot X)^\tau = H\mathbf{1}_{[0,\tau]} \cdot X = H \cdot (X^\tau)$.*

Satz 2.24 (Assozitivität) *Der stochastische Integralprozeß $Y = H \cdot X$ ist ein Semimartingal und für $G = \{G(t) : t \geq 0\} \in \mathbf{L}$ gilt*

$$G \cdot Y = G \cdot (H \cdot X) = (G\,H) \cdot X.$$

Die stochastische Integration erhält die Semimartingaleigenschaft. Ist der Integrator X ein FV–Prozeß, dann wird diese Eigenschaft unter der stochastischen Integration ebenfalls erhalten. Gleiches gilt für lokal quadratintegrierbare lokale Martingale.

Satz 2.25 *Falls $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal und FV–Prozeß ist und $H = \{H(t) : t \geq 0\} \in \mathbf{L}$, dann ist $H \cdot X$ ununterscheidbar vom pfadweise berechneten Lebesgue–Stieltjes–Integral und ebenfalls ein FV–Prozeß.*

Satz 2.26 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei ein (lokal quadratintegrierbares) lokales Martingal und $H = \{H(t) : t \geq 0\} \in \mathbf{L}$. Dann ist das stochastische Integral $H \cdot X$ ein (lokal quadratintegrierbares) lokales Martingal.*

Für Berechnungen benötigen wir die nachstehende Definition.

Definition 2.27 *Es sei σ eine endliche Folge von endlichen Stopzeiten*

$$0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_k < \infty.$$

Die Folge σ heißt **zufällige Partition**. *Eine Folge von zufälligen Partitionen $(\sigma_n)_{n \geq 1}$*

$$\sigma_n : \tau_0^n \leq \ldots \leq \tau_{k_n}^n < \infty$$

konvergiert zur Identität, *falls gilt*

(i) $\lim_{n\to\infty} \sup_k \tau_k^n = \infty$ *P–fast–sicher.*

(ii) $||\sigma_n|| \equiv \sup_k |\tau_{k+1}^n - \tau_k^n|$ *konvergiert gegen 0 P–fast–sicher.*

Der quadratische Variationsprozeß eines Semimartingals, den man auch als "Bracket–Prozeß" bezeichnet, spielt eine fundamentale Rolle.

Definition 2.28 $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *und* $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ *seien Semimartingale. Der* **quadratische Variationsprozeß** *von* $[X, X] = \{[X, X](t) : t \geq 0\}$, *sei gegeben mittels*

$$[X, X](t) \equiv X(t)^2 - 2 \int_0^t X(s-)\, dX(s), \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Der **quadratische Kovariationsprozeß** *von X und Y ist definiert durch*

$$[X, Y](t) \equiv X(t)Y(t) - \int_0^t X(s-)\, dY(s) - \int_0^t Y(s-)\, dX(s), \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Aus der Definition ist klar, daß die Abbildung $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ eine symmetrische Bilinearform ist. Deshalb gilt die **Polarisierungsidentität**

$$[X, Y] = \frac{1}{2}([X + Y, X + Y] - [X, X] - [Y, Y]).$$

Der nächste Satz gibt einige Eigenschaften des quadratischen Variationsprozeß wieder.

Satz 2.27 *Der quadratische Variationsprozeß eines Semimartingals $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ist ein wachsender adaptierter Prozeß, der càdlàg–Pfade besitzt. Darüberhinaus gilt*

(i) $[X, X](0) = X(0)^2$ *und* $\Delta[X, X] = (\Delta X)^2$.

(ii) Falls $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von zufälligen Partitionen ist, die gegen die Identität strebt, dann gilt

$$X(0)^2 + \sum_i (X^{\tau_{i+1}^n} - X^{\tau_i^n})^2 \to [X, X]$$

in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.

(iii) Ist τ eine Stopzeit, dann gilt $[X^\tau, X] = [X, X]^\tau = [X^\tau, X^\tau]$.

Korollar 1 *Der Kovariationsprozeß $[X, Y] = \{[X, Y](t) : t \geq 0\}$ zweier Semimartingale X und Y ist ein FV–Prozeß und ebenfalls ein Semimartingal.*

Korollar 2 (Partielle Integration) *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ und $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ seien Semimartingale. Dann ist $XY = \{X(t)Y(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal und es gilt*

$$(XY)(t) = X(t)Y(t) = \int_0^t X(s-)\,dY(s) + \int_0^t Y(s-)\,dX(s) + [X,Y](t), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Korollar 3 *Alle Semimartingale auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum bilden eine Algebra.*

Im folgenden betrachten wir einige Beispiele, die das Verständnis der eingeführten abstrakten Theorie ermöglichen sollen. Wir zeigen, daß der Poissonprozeß ein FV–Prozeß ist und untersuchen das Integral $\int B(s)\,dB(s)$.

Beispiel 2 *Sei $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ ein Poissonprozeß. Der Pfad $N(\cdot,\omega)$ ist konstant bis auf die Sprungstellen und monoton wachsend. Insbesondere ist die Differenz $N(t_{i+1},\omega) - N(t_i,\omega)$ positiv. Für die Variation entlang eines Pfades gilt*

$$\begin{aligned} V_{[0,t]}(N)(\omega) &= \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} |N(t_{i+1},\omega) - N(t_i,\omega)| \\ &= \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} N(t_{i+1},\omega) - N(t_i,\omega) \\ &= \sup_{\pi\in\mathcal{P}} N(t,\omega) - N(0,\omega) \\ &= N(t,\omega) - N(0,\omega) \quad = \quad N(t,\omega), \qquad \text{für alle } \omega\in\Omega \text{ und } t \geq 0. \end{aligned}$$

Der Poissonprozeß ist ein Punktprozeß ohne Explosion. Mit anderen Worten $P(N(t) = \infty) = 0$ für $t \geq 0$. Deshalb ist $V_{[0,t]}(N) < \infty$ P–f.s. Ein Poissonprozeß ist folglich ein FV–Prozeß.

Beispiel 3 *In diesem Beispiel suchen wir die Lösung des Integrals $\int B(s)\,dB(s)$. $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ sei eine Standard Brownsche Bewegung. Aus Satz 2.11 wissen wir $[B,B](t) = t$ für $t \geq 0$. Nach dem Korollar 2 von Satz 2.27 gilt*

$$\int_0^t B(s)\,dB(s) = \frac{1}{2}\Big(B(t)^2 - t\Big), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Im Sinne der klassischen Integrationstheorie erwarten wir $\frac{1}{2}B(t)^2$. Den zusätzlichen Summanden $-\frac{1}{2}t$ verdanken wir der quadratischen Variation der Brownschen Bewegung. Das ist ein konkretes Beispiel, daß wir das Lebesgue–Stieltjes–Integral nicht gefahrlos auf stochastische Prozesse ausdehnen können.

Einen stochastischer Prozeß mit càdlàg–Pfaden kann man als Summe aus seinem stetigen Anteil und den Sprüngen darstellen.

Definition 2.29 *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal und $\Delta X = \{\Delta X(t) : t \geq 0\}$ der Sprunganteil von X. Der* **stetige Anteil** *von X ist definiert durch*

$$X^c(t) \equiv X(t) - \sum_{0\leq s\leq t} \Delta X(s), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Satz 2.28 *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein adaptierter FV–Prozeß mit càdlàg–Pfaden. Dann ist der stetige Anteil des quadratischen Variationsprozesses $[X,X]^c = 0$. Es gilt also $[X,X](t) = X(0)^2 + \sum_{0<s\leq t}(\Delta X(s))^2$.*

Für einen stetigen FV–Prozeß ist die quadratische Variation ein konstanter Prozeß. Wir können auch Aussagen für den quadratischen Kovariationprozeß treffen.

Satz 2.29 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ und $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ seien Semimartingale. Für den Kovariationsprozeß $[X,Y] = \{[X,Y](t) : t \geq 0\}$ gilt*

(i) $[X,Y](0) = X(0)Y(0)$ *und* $\Delta[X,Y] = \Delta X \Delta Y$.

(ii) Falls $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von zufälligen Partitionen ist, die gegen die Identität konvergiert, dann gilt

$$X(0)Y(0) + \sum_i (X^{\tau_{i+1}^n} - X^{\tau_i^n})(Y^{\tau_{i+1}^n} - Y^{\tau_i^n}) \to [X,Y]$$

in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta.

(iii) Ist τ eine Stopzeit, dann gilt $[X^\tau, Y] = [X, Y^\tau] = [X^\tau, Y^\tau] = [X,Y]^\tau$.

Ist X zudem ein adaptierter FV–Prozeß, erhalten wir

$$[X,Y](t) = X(0)Y(0) + \sum_{0<s\leq t} \Delta X(s)\Delta Y(s), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Besitzt X oder Y stetige Pfade, dann ist $[X,Y](t) = X(0)Y(0)$.

Der quadratische Kovariationsprozeß ist in diesem Fall nicht konstant, falls X und Y mindestens einmal zur gleichen Zeit springen.

Beispiel 4 *Nach Beispiel 2 gilt für einen Poissonprozeß $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ $V_{[0,t]}(N) = N(t)$ für alle $t \geq 0$. Eine weitere Aussage ist, daß N ein FV–Prozeß. Der vorangegangene Satz läßt sich deswegen auf die quadratische Variation von N anwenden. Einen Poissonprozeß konstruiert man über dessen Zwischenankunftszeiten, die unabhängige exponentialverteilte Stopzeiten sind. Für die Sprunghöhe gilt $P(\{\Delta N(s) \geq 2 : s \in [0,t]\}) = 0$ für alle $t \geq 0$. Insbesondere ist $N^c = 0$, da N ein Punktprozeß ist.*

$$\begin{aligned}
[N,N](t) &= N(0)^2 + \sum_{0<s\leq t} \Delta N(s)^2 \\
&= \sum_{0<s\leq t} \Delta N(s) \\
&= N(t) \quad P\text{–f.s.}, \qquad \text{für alle } t \geq 0.
\end{aligned}$$

Für einen Poissonprozeß N haben wir die interessante Gleichheit $V_{[0,t]}(N) = [N,N](t) = N(t)$ für alle $t \geq 0$ hergeleitet.

Die Frage, unter welchen Bedingungen ein lokales Martingal ein quadratintegrierbares Martingal ist, beantwortet der folgende Satz.

Satz 2.30 *Falls $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ ein lokales Martingal ist mit $\mathbf{E}\{[M,M](\infty)\} < \infty$, dann ist M ein quadratintegrierbares Martingal. Darüberhinaus gilt $\mathbf{E}\{[M,M](t)\} = \mathbf{E}\{M(t)^2\}$, für alle $t \in [0,\infty]$.*

Itô studierte die Brownsche Bewegung als Integrator. Aus dem nächsten Satz leitet sich die Itô–Isometrie für Integranden aus $\mathbf{L}$ ab.

Satz 2.31 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ und $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ seien Semimartingale und $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ und $L = \{L(t) : t \geq 0\}$ Prozesse aus $\mathbf{L}$. Dann gilt*

$$[H \cdot X, L \cdot Y](t) = \int_0^t H(s)L(s)\, d[X,Y](s),$$

und insbesondere erhalten wir

$$[H \cdot X, H \cdot X](t) = \int_0^t H(s)^2\, d[X,X](s).$$

Für die Standard Brownsche Bewegung $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ gilt nach Satz 2.11 $[B,B](t) = t$. $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ sei ein Prozeß aus $\mathbf{L}$ mit $\mathbf{E}\{\int_0^\infty H(s)^2\, ds\} < \infty$. Aus Satz 2.26 folgt, daß $H \cdot B$ ein lokales Martingal ist. $[H \cdot B, H \cdot B](t) = \int_0^t H(s)^2\, ds$ sieht man aus dem letzten Satz. Wir wenden Satz 2.30 an. $H \cdot B$ ist ein lokales Martingal mit $\mathbf{E}\{[H \cdot B, H \cdot B](\infty)\} = \mathbf{E}\{\int_0^\infty H(s)^2\, ds\} < \infty$ nach Voraussetzung. Damit ist $H \cdot B$ ein quadratintegrierbares Martingal und $\mathbf{E}\{[H \cdot B, H \cdot B](t)\} = \mathbf{E}\{(H \cdot B)(t)^2\}$ für alle $t \geq 0$. Wir erhalten die **Itô–Isometrie**

$$\mathbf{E}\{(\int_0^t H(s)\, dB(s))^2\} = \mathbf{E}\{(H \cdot B)(t)^2\} = \mathbf{E}\{[H \cdot B, H \cdot B](t)\} = \mathbf{E}\{\int_0^t H(s)^2\, ds\}.$$

2.3 Die Itô–Formel und das Doléans–Dade–Exponential

Wir betrachten das Verhalten eines Semimartingals X unter der Transformation durch eine Funktion f. Unter gewissen Bedingungen ist $f(X)$ ebenfalls ein Semimartingal. Das Verhalten des "Differentials" von $f(X)$ beschreibt die Itô–Formel.

Satz 2.32 (Die Itô–Formel) *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal und f eine $\mathcal{C}^2$–Funktion auf den reellen Zahlen. Dann ist $f(X) = \{f(X(t)) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal, und es gilt*

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) &= \int_{0+}^t f'(X(s-))\, dX(s) + \frac{1}{2}\int_{0+}^t f''(X(s-))\, d[X,X]^c(s) \\ &\quad + \sum_{0<s\leq t} \{f(X(s)) - f(X(s-)) - f'(X(s-))\, \Delta X(s)\}, \qquad \textit{für } t \geq 0. \end{aligned}$$

Die Itô–Formel vereinfacht sich in einigen Spezialfällen.

Korollar 1 *Es sei $V = \{V(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal und FV–Prozeß. Für eine $\mathcal{C}^2$–Funktion f auf den reellen Zahlen ist $f(V) = \{f(V(t)) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal und FV–Prozeß, und es gilt*

$$\begin{aligned} f(V(t)) - f(V(0)) &= \int_{0+}^t f'(V(s-))\, dV(s) \\ &\quad + \sum_{0<s\leq t} \{f(V(s)) - f(V(s-)) - f'(V(s-))\, \Delta V(s)\}, \qquad \textit{für } t \geq 0. \end{aligned}$$

Korollar 2 *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal mit stetigen Pfaden und f eine Funktion auf den reellen Zahlen aus $\mathcal{C}^2$. Dann ist $f(X) = \{f(X(t)) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal, und es gilt*

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \int_{0+}^t f'(X(s))\, dX(s) + \frac{1}{2}\int_{0+}^t f''(X(s))\, d[X,X](s), \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Der vorangegangene Satz läßt sich auf einen mehrdimensionalen Prozeß ausdehnen.

Satz 2.33 *Es sei* $X = (X^1, \dots, X^n)$ *ein n–Tupel von Semimartingalen,* $X^k = \{X^k(t) : t \geq 0\}$ *für* $k = 1, \dots, n$. f *sei ein Funktion* $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, *deren partielle Ableitungen zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Dann ist* $f(X) = \{f(X^1(t), \dots, X^n(t)) : t \geq 0\}$ *ein Semimartingal, und es gilt für* $t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(X(t)) - f(X(0)) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{0+}^{t} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(s-))\, dX^i(s) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{0+}^{t} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X(s-))\, d[X^i, X^j]^c(s) \\ &+ \sum_{0<s\leq t} \{f(X(s)) - f(X(s-)) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(s-))\, \Delta X^i(s)\}. \end{aligned}$$

Die Itô–Formel wendet man zumeist zum Lösen von stochastischen Differentialgleichungen an. Ein elementares, dennoch sehr wichtiges Beispiel wird nun behandelt.

Satz 2.34 *Es sei* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *ein Semimartingal mit* $X(0) = 0$. *Dann existiert ein (eindeutiges) Semimartingal* $Z = \{Z(t) : t \geq 0\}$, *das die stochastische Differentialgleichung* $Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s-)\, dX(s)$ *erfüllt.* Z *ist für* $t \geq 0$ *gegeben mittels*

$$Z(t) = \exp\left(X(t) - \frac{1}{2}[X, X](t)\right) \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X(s)) \exp\left(-\Delta X(s) + \frac{1}{2}(\Delta X(s))^2\right).$$

Definition 2.30 *Für ein Semimartingal* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *mit* $X(0) = 0$ *ist das* **stochastische Exponential** *von* X *das (eindeutige) Semimartingal* $Z = \{Z(t) : t \geq 0\}$, *das die stochastische Differentialgleichung* $Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s-)\, dX(s)$, $t \geq 0$, *löst.* Z *schreibt man auch* $\mathcal{E}(X)$ *und nennt es* **Doléans–Dade–Exponential** *von* X.

Wir untersuchen den vorangegangenen Satz für spezielle Klassen von Prozessen.

Korollar 1 *Ist* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *ein Semimartingal und FV–Prozeß mit* $X(0) = 0$, *dann hat das Doléans–Dade–Exponential von* X *die Gestalt*

$$\mathcal{E}(X)(t) = \exp(X(t)) \prod_{0<s\leq t} (1 + \Delta X(s)) \exp(-\Delta X(s)), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Ein einfaches Beispiel erhalten wir, wenn wir X als eine lineare Funktion von der Zeit annehmen.

Beispiel 5 *Der Prozeß* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *sei definiert durch*

$$X(t) \equiv \mu\, t, \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Hierbei ist μ *eine reelle Konstante. Für das Doléans–Dade–Exponential von* X *gilt*

$$\mathcal{E}(X)(t) = \exp(\mu\, t), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Denn nach Definition ist X *ein stetiger FV–Prozeß.*

Korollar 2 *Ist $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein stetiges Semimartingal mit $X(0) = 0$, gilt für das Doléans–Dade–Exponential von X*

$$\mathcal{E}(X)(t) = \exp\left(X(t) - \frac{1}{2}[X,X](t)\right), \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Ein wichtiges Beispiel ist die sogenannte "geometrische Brownsche Bewegung". Sie ist der Prozeß, durch den im allgemeinen die Preisprozesse von Aktien modelliert werden.

Beispiel 6 *Es sei $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ eine Standard Brownsche Bewegung. Der Prozeß $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei definiert durch $X(t) \equiv \mu t + \sigma B(t)$ für $t \geq 0$. Hierbei sind $\sigma > 0$ und μ reelle Konstanten. Für $t \geq 0$ gilt*

$$\mathcal{E}(X)(t) = \exp\left(\sigma B(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right).$$

$\mathcal{E}(X)$ heißt **geometrische Brownsche Bewegung**. *Ist $\mu = 0$, dann ist die geometrische Brownsche Bewegung ein Martingal mit stetigen Pfaden, und $\mathcal{E}(X)(t) = \exp\left(\sigma B(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$.*

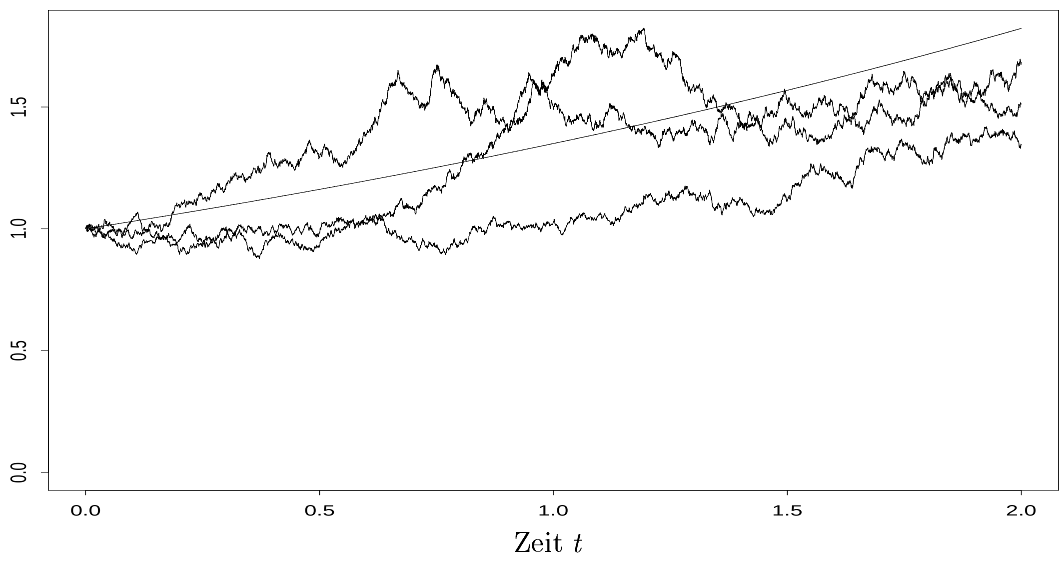

Abbildung 2.2: 3 simulierte Pfade einer geoemtrischen Brownschen Bewegung mit $\mu = 0.3$ und $\sigma = 0.20$, sowie der zugehörige Erwartungswert.

Korollar 3 *Ist $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein stetiges Semimartingal und FV–Prozeß mit $X(0) = 0$, dann hat das Doléans–Dade–Exponential von X die Gestalt*

$$\mathcal{E}(X)(t) = \exp(X(t)), \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Korollar 4 *$N = \{N(t) : 0 \leq t \leq T\}$ sei ein Semimartingal, das zu einer Stopzeit τ, mit $\tau > 0$ P–f.s., von 0 auf $\kappa \in \mathbb{R}$ springt*

$$N(t) \equiv \kappa \mathbf{1}_{\{t \geq \tau\}}, \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T.$$

Dann gilt

$$\mathcal{E}(N) = 1 + N.$$

Beweis:
N ist ein Sprungprozeß; es gilt $N^c = 0$ und $N(t) = N(0) + \sum_{0<s\le t} \Delta N(s)$ für $t \ge 0$. Insbesondere sehen wir mithilfe von Satz 2.29 $[N,N](t) = N(0)^2 + \sum_{0<s\le t}(\Delta N(s))^2$ für $t \ge 0$. Desweiteren ist $N(0) = 0$ wegen $\tau > 0$ P–f.s.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(N)(t) &= \exp\left(N(t) - \frac{1}{2}[N,N](t)\right) \prod_{0<s\le t} (1+\Delta N(s))\exp\left(-\Delta N(s) + \frac{1}{2}\Delta N(s)^2\right) \\
&= \exp\left(N(t) - \frac{1}{2}[N,N](t)\right) \prod_{0<s\le t} \exp\left(-\Delta N(s) + \frac{1}{2}\Delta N(s)^2\right) \prod_{0<s\le t}(1+\Delta N(s)) \\
&= \exp\left(N(t) - \frac{1}{2}[N,N](t)\right) \exp\left(\sum_{0<s\le t} -\Delta N(s) + \frac{1}{2}\Delta N(s)^2\right) \prod_{0<s\le t}(1+\Delta N(s)) \\
&= \exp\left(N(t) - \frac{1}{2}[N,N](t)\right) \exp\left(-N(t) + \frac{1}{2}[N,N](t)\right) \prod_{0<s\le t}(1+\Delta N(s)) \\
&= \prod_{0<s\le t}(1+\Delta N(s)) \\
&= 1 + N(t) \qquad \text{für } 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich, da N höchstens einen Sprung in τ besitzt. $t \ge 0$ sei fest. Ist $\tau(\omega) \le t$, dann gilt $\Delta N(\tau,\omega) = \kappa$ und $\Delta N(s,\omega) = 0$ für $s \in [0,t] \setminus \{\tau(\omega)\}$. Damit sehen wir

$$\prod_{0<s\le t}(1+\Delta N(s,\omega)) = 1 + \Delta N(\tau,\omega) = 1 + \kappa = 1 + N(t,\omega).$$

Für $\tau(\omega) > t$ gilt $N(s,\omega) = 0$ und $\Delta N(s,\omega) = 0$ für $s \in [0,t]$, woraus

$$\prod_{0<s\le t}(1+\Delta N(s,\omega)) = 1 = 1 + N(t,\omega)$$

folgt. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Korollar 5 *$X = \{X(t) : t \ge 0\}$ sei ein stetiges Semimartingal mit $X(0) = 0$. Dann gilt*

$$\exp(X(t)) = \mathcal{E}\left(X + \frac{1}{2}[X,X]\right)(t), \qquad \textit{für } t \ge 0.$$

Beweis:
Satz 2.27 besagt $\Delta[X,X](t) = (\Delta X(t))^2$ für $t \ge 0$. X ist als stetig vorausgesetzt. Es ist $\Delta[X,X](t) = 0$ für $t \ge 0$. Nach Korollar desselben Satzes ist $[X,X]$ ein FV–Prozeß. Wir sehen, daß $[X,X]$ ein stetiger FV–Prozeß ist. Mit Satz 2.29 schließen wir $[X,[X,X]] = 0$ und $[[X,X],[X,X]] = 0$. Auf die rechte Seite der Behauptung wenden wir Korollar 2 an

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left(X + \frac{1}{2}[X,X]\right)(t) &= \exp\left(X(t) + \frac{1}{2}[X,X](t) - \frac{1}{2}\left[X + \frac{1}{2}[X,X], X + \frac{1}{2}[X,X]\right](t)\right) \\
&= \exp\left(X(t) + \frac{1}{2}[X,X](t) - \frac{1}{2}[X,X](t)\right) \\
&= \exp(X(t)), \qquad \text{für } t \ge 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage gezeigt. □

Die Menge der Doléans–Dade–Exponentiale auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum bilden eine spezielle Prozeßklasse.

Satz 2.35 *Es seien* $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *und* $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ *Semimartingale mit* $X(0) = Y(0) = 0$. *Dann gilt*

$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + [X,Y]).$$

Im Falle eines stetigen Semimartingals X besitzt des Doléans–Dade–Exponential $\mathcal{E}(X)$ eine Inverse $\mathcal{E}(X)^{-1}$. Die Inverse $\mathcal{E}(X)^{-1}$ hat die Gestalt

$$\mathcal{E}(X)^{-1} = \mathcal{E}(-X + [X,X]).$$

Das Produkt zweier Doléans–Dade–Exponentiale ist wieder ein Doléans–Dade–Exponential. Dennoch bilden die Doléans–Dade–Exponentiale keine Algebra, da sie unter der Addition nicht stabil sind. Welche Prozesse lassen sich als Doléans–Dade–Exponentiale darstellen? Wir finden eine teilweise Antwort für strikt positive Semimartingale.

Satz 2.36 $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ *sei ein strikt positives Semimartingale mit* $X(0) = 1$. *Es existiert ein Semimartingal* $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$, *so daß gilt*

$$X = \mathcal{E}(Y).$$

Insbesondere ist Y P*–f.s. eindeutig.*

Beweis:
Der stochastische Prozeß $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ werde erklärt durch $H \equiv \left(\frac{1}{X}\right)_-$. H ist die càglàd–Version von $\frac{1}{X}$; vergleiche Definition 2.7. und die darauf folgende Erläuterung. Nach Definition ist $X(t-) = \lim_{s \nearrow t} X(s)$, für $t \geq 0$, und $X(0-) = 0$. Aus diesem Grund existiert $\frac{1}{X_-}$ in Null nicht, was uns zur oben angeführten Definition von H veranlaßt hat. Mittels H definieren wir $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$

$$Y(t) \equiv \int_0^t H(s)\, dX(s), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

X ist ein càdlàg–Prozeß, also ist $\frac{1}{X}$ ebenfalls ein càdlàg–Prozeß. Zudem ist ist $\frac{1}{X}$ wohldefiniert, da X strikt positiv ist. H ist die càglàd–Version von $\frac{1}{X}$, liegt demnach in $\mathbf{L}$. Y ist nach Satz 2.24 ein Semimartingal und es gilt mit der Assoziativität des stochastischen Integrals

$$\begin{aligned}
(X_- \cdot Y)(t) &= (X_- \cdot (H \cdot X))(t) \\
&= ((X_- H) \cdot X)(t) \\
&= \int_0^t X(s-) H(s)\, dX(s) \\
&= \int_0^t \mathbf{1}_{\{s>0\}}\, dX(s) \\
&= \int_{0+}^t dX(s) \\
&= X(t) - X(0), \qquad \text{für } t \geq 0.
\end{aligned}$$

Da $X(0) = 1$ und $Y(0) = 0$, erhalten wir

$$X(t) = 1 + \int_0^t X(s-)\, dY(s) = \mathcal{E}(Y)(t), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Es bleibt die Frage der Eindeutigkeit zu klären. $Y^* = \{Y^*(t) : t \geq 0\}$ sei ein weiterer Prozeß, der $X = \mathcal{E}(Y^*)$ und $Y^*(0) = 0$ erfüllt. Der stochstische Prozeß $Z = \{Z(t) : t \geq 0\}$ sei die Differenz von Y und Y^*, $Z \equiv Y - Y^*$. Nach der eben getroffenen Annahme ist $\mathcal{E}(Y^*) = \mathcal{E}(Y)$. In der Integralschreibweise ist das gleichbedeutend mit

$$1 + \int_0^t X(s-)\,dY^* = 1 + \int_0^t X(s-)\,dY, \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Daraus sehen wir

$$(*) \qquad \int_0^t X(s-)\,dZ(s) = 0 \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Erneut fließt ein, daß X als strikt positiv vorausgestzt ist. Wir integrieren den oben definierten Prozeß H bezüglich des letzten Ausdrucks und erhalten mit der Assoziativität nach Satz 2.24

$$\begin{aligned}(H \cdot (X_- \cdot Z))(t) &= \int_0^t H(s)\,d\,(X_- \cdot Z)\,(s)\\ &= \int_0^t H(s) X(s-)\,dZ(s)\\ &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{s>0\}} dZ(s)\\ &= Z(t) - Z(0), \qquad \text{für } t \geq 0.\end{aligned}$$

Aber $X_- \cdot Z$ ist nach $(*)$ gleich Null, und deswegen gilt $(H \cdot (X_- \cdot Z)) = 0$. Hieraus sehen wir $Z(t) = Z(0)$ für alle $t \geq 0$. Nach Voraussetzung gilt $Y(0) = Y^*(0) = 0$. Nun ist $Z(0) = Y(0) - Y^*(0) = 0$, was $Z = 0$ P–f.s. impliziert. Y und Y^* sind folglich ununterscheidbar. Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt. □

Mit den Bezeichnungen des Beweises gelten die beiden Korollare.

Korollar 1 *X ist genau dann ein FV–Prozeß, wenn Y ein FV–Prozeß ist.*

Korollar 2 *X ist genau dann ein (lokal quadratintegrierbares) lokales Martingal, wenn Y ein (lokal quadratintegrierbares) lokales Martingal ist.*

Beweis:
Die Behauptungen folgen direkt aus den Sätzen 2.26 und 2.27 und der Definition von Y, sowie der Beziehung $X = \mathcal{E}(Y)$. □

Unter gewissen Voraussetzung können wir die obigen Korollare auf Prozesse X ausdehnen, die nicht–negativ sind.

Korollar 3 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei ein positives Semimartingal mit $X(0) = 1$ und $Y = \{Y(t) : t \geq 0\}$ ein Semimartingal mit $Y(0) = 0$, so daß $X = \mathcal{E}(Y)$ gilt. Wir definieren die Stopzeit τ durch*

$$\tau \equiv \inf\{t \geq 0 : X(t) = 0\}.$$

Y besitze die Zerlegung $Y = M + \widetilde{Y}$, wobei $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ ein lokales Martingal ist und $\widetilde{Y} = \{\widetilde{Y}(t) : t \geq 0\}$ die Beziehung $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}^\tau$ erfüllt. X ist genau dann ein lokales Martingal, wenn Y ein lokales Martingal ist.

Beweis:
Y sei als lokales Martingal vorausgesetzt. Aus Satz 2.27 folgt direkt, daß $X = 1 + X_- \cdot Y$ ein lokales Martingal ist.
Wir setzten X als lokales Martingal voraus. Der Prozeß $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ sei geben mittels

$$H(t) \equiv \begin{cases} \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} \frac{1}{X(t-)}, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

H ist wohldefiniert, denn $X(t-) > 0$ auf $\{t \leq \tau\}$. Aus der konkreten Darstellung des stochastischen Exponentials sehen wir, daß X in τ nicht "stetig" gegen Null geht, sondern dorthin springt. Insbesondere ist H das Produkt zweier *càglàd*–Prozesse und liegt demnach in $\mathbf{L}$. Für ein festes $t \geq 0$ und ein $\omega \in \{t \leq \tau\}$ ist $Y(t)$ auf $\{t \leq \tau\}$ durch

$$Y(t,\omega) = \int_0^t H(s,\omega)\, dX(s,\omega)$$

P–f.s. eindeutig bestimmt. Die Gestalt von Y und die Eindeutigkeit folgen wie im Beweis des vorangegangenen Satzes. Wegen $Y = \widetilde{Y} + M$ und $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}^\tau$ ist $\widetilde{Y}$ durch

$$\widetilde{Y}(t) = \widetilde{Y}^\tau(t) = Y^\tau(t) - M^\tau(t) = \int_0^{t\wedge\tau} H(s)\, dX(s) - M(t \wedge \tau), \qquad \text{für } t \geq 0,$$

P–f.s. eindeutig darstellbar. $\widetilde{Y}$ ist ein lokales Martingal, denn $H \in \mathbf{L}$ und X ist ein lokales Martingal, schließlich ist M als lokales Martingal vorausgesetzt. Aus $Y = \widetilde{Y} + M$ folgt die Aussage. □

2.4 $\mathcal{H}^2$–Semimartingale

Eine spezielle Klasse der Semimartingale sind die $\mathcal{H}^2$–Semimartingale. Hier führen wir auf dem Raum aller Semimartingale die $\mathcal{H}^2$–Norm ein. In einem auf diese Weise normierten Raum können wir das stochastische Integral auf vorhersehbare Integranden ausdehnen.

Definition 2.31 *Ein adaptierter Prozeß $H = \{H(t) : t \geq 0\}$ heißt* **vorhersehbar**, *falls für alle $t \geq 0$ gilt, $H(t)$ ist $\mathcal{F}_{t-}$–meßbar. Hierbei ist $\mathcal{F}_{t-} \equiv \bigvee_{0 \leq s < t} \mathcal{F}_s$ die kleinste σ–Algebra, die alle σ–Algebren $\mathcal{F}_s$ mit $0 \leq s < t$ enthält.*

Die Filtrierung ist rechtseitig stetig. Es ist $\bigvee_{0 \leq s < t} \mathcal{F}_s = \bigvee_{s \in [0,t) \cap \mathbb{Q}} \mathcal{F}_s$, s läuft somit durch eine abzählbare Indexmenge. Das einfachste Beispiel für vorhersehbare Prozesse sind stetige adaptierte Prozesse.

Definition 2.32 *Das Semimartingal $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ist ein* **spezielles Semimartingal**, *falls X die Zerlegung besitzt*

$$X = X(0) + M + A.$$

Hierbei ist $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ ein lokales Martingal und $A = \{A(t) : t \geq 0\}$ ein adaptierter vorhersehbarer FV–Prozeß, und es gilt $M(0) = A(0) = 0$. Diese Zerlegung heißt **kanonische Zerlegung**.

Eine andere Zerlegung haben wir in Definition 2.21 kennengelernt. Eine Semimartingal heißt "zerlegbar", falls es sich als Summe aus einem konstanten Anteil, einem lokal quadratintegrierbaren Martingals und einem FV–Prozeß darstellen läßt.

Satz 2.37 *Ist $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein spezielles Semimartingal, dann ist die kanonische Zerlegung $X = X(0) + M + A$ eindeutig.*

Die Eindeutigkeit der Zerlegung hat eine nützliche Konsequenz. Sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein adaptierter Prozeß, der ein lokales Martingal und ein vorhersehbarer FV–Prozeß ist, dann ist X konstant.

Jetzt definieren wir die $\mathcal{H}^2$–Norm für spezielle Semimartingale.

Definition 2.33 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei ein spezielles Semimartingal mit $X(0) = 0$ und kanonischer Zerlegung $X = M + A$, wobei $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ ein lokales Martingal und $A = \{A(t) : t \geq 0\}$ ein adaptierter vorhersehbarer FV–Prozeß ist. Zudem gilt $M(0) = A(0) = 0$. Die $\mathcal{H}^2$–**Norm** von X ist gegeben durch*

$$||X||_{\mathcal{H}^2(P)} \equiv ||[M,M](\infty)^{1/2}||_{L^2(P)} + |||A|(\infty)||_{L^2(P)}.$$

Der Raum $\mathcal{H}^2$ besteht aus allen speziellen Semimartingalen, deren $\mathcal{H}^2$–Norm endlich ist.

Bemerkung: Formal ist die $\mathcal{H}^2$–Norm nur für spezielle Semimartingale X mit $X(0) = 0$ definiert. Im allgemeinen Fall berechnet man nach der obigen Definition die $\mathcal{H}^2$–Norm eines speziellen Semimartingals X, indem man $X - X(0)$ betrachtet. Ist $X(0)$ eine feste relle Zahl, dann sagen wir, daß X ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal ist, falls $||X - X(0)||_{\mathcal{H}^2} < \infty$ gilt.

Ein lokales Martingal M aus $\mathcal{H}^2$ ist nach Satz 2.30 ein quadratintegrierbares Martingal. Es sei A ein FV–Prozeß aus $\mathcal{H}^2$. Dann gilt für die totale Variation von A, $\mathbf{E}\{|A|(\infty)^2\} < \infty$.

Eine wichtige Abschätzung für $\mathcal{H}^2$–Semimartingale liefert der folgende Satz, Theorem 5, Chapter IV, von Protter (1995).

Satz 2.38 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal mit $X(0) = 0$. Dann gilt*

$$\mathbf{E}\left\{(\sup_{t\geq 0} |X(t)|)^2\right\} \leq 8||X||^2_{\mathcal{H}^2}.$$

Korollar 1 *Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}\right)$ sei $Y = \{Y(t) : 0 \leq t \leq T\}$ ein $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingal mit $Y(0) \in \mathbb{R}$ und Q ein zu P äquivalentes Maß, wobei $T > 0$ ein endlicher Zeithorizont ist. Ist Y ein lokales Q–Martingal und $\frac{dQ}{dP}$ quadratintegrierbar, dann ist Y ein Q–Martingal.*

Beweis: Wir schließen auf die Martingaleigenschaft des lokalen Q–Martingals Y mithilfe von Satz 2.13. Als hinreichende Bedingung wird $\mathbf{E}_Q\left\{\sup_{0\leq t\leq T} |Y(t)|\right\} < \infty$ verlangt. $L = \{L(t) : 0 \leq t \leq T\}$ sei der Prozeß, der den Maßwechsel $P \mapsto Q$ beschreibt. Dann gilt

$$L(t) = \mathbf{E}_P\left\{\frac{dQ}{dP}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Aus der Gleichung folgt, daß L ein P–Martingal ist, das nach Annahme sogar quadratintegrierbar ist. Die Erwartungswertoperatoren unter P und Q sind durch

$$\mathbf{E}_Q\{\,\cdot\,\} = \mathbf{E}_P\{\,\cdot\, L(T)\}$$

miteinander verknüpft. Mit Satz 2.38 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_Q\left\{\sup_{0\le t\le T}|Y(t)|\right\} &= \mathbf{E}_Q\left\{\sup_{0\le t\le T}|Y(t)-Y(0)+Y(0)|\right\}\\
&\le \mathbf{E}_Q\left\{|Y(0)|+\sup_{0\le t\le T}|Y(t)-Y(0)|\right\}\\
&= |Y(0)|+\mathbf{E}_Q\left\{\sup_{0\le t\le T}|Y(t)-Y(0)|\right\}\\
&= |Y(0)|+\mathbf{E}_P\left\{\sup_{0\le t\le T}|Y(t)-Y(0)|\,L(T)\right\}\\
&\le |Y(0)|+\frac{1}{2}\mathbf{E}_P\left\{(\sup_{0\le t\le T}|Y(t)-Y(0)|)^2+L(T)^2\right\}\\
&\le |Y(0)|+4||Y-Y(0)||^2_{\mathcal{H}^2(P)}+\frac{1}{2}\mathbf{E}_P\left\{L(T)^2\right\}\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Damit ist die Bedingung von Satz 2.13 erfüllt und Y ein Q–Martingal. □

Die Sätze, die sich auf càglàd–Integranden beziehen, lassen sich unter Regularitätsvoraussetzungen auf vorhersehbare Integranden übertragen. Als Beispiel, welche Bedingungen dazu notwendig sind, sei der folgende Satz zitiert.

Satz 2.39 *$M=\{M(t):t\ge 0\}$ sei ein lokales Martingal aus $\mathcal{H}^2$ (also quadratintegrierbar) und $H=\{H(t):t\ge 0\}$ ein adaptierter vorhersehbarer Prozeß. Ist $\mathbf{E}\{\int_0^\infty H(s)^2 d[M,M](s)\}<\infty$, dann ist $H\cdot X=\{(H\cdot X)(t):t\ge 0\}$ ein quadratintegrierbares Martingal.*

Ein einfaches Beispiel für das Verhalten von vorhersehbaren Prozessen als Integratoren liefert der nachstehende Satz.

Satz 2.40 *Der Prozeß $A=\{A(t):t\ge 0\}$ sei definiert durch $A(t)\equiv t\wedge T$, für eine gegebene reelle Zahl $T>0$. A ist ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal und für einen positiven stetigen Prozeß $H=\{H(t):t\ge 0\}$ aus $\mathbf{L}$ ist $H\cdot A$ ein FV–Prozeß mit*

$$V_{[0,t]}(H\cdot A)=\int_0^{t\wedge T}H(s)\,ds,\qquad \text{für } t\ge 0.$$

Ist $\mathbf{E}\{(\int_0^T H(s)\,ds)^2\}<\infty$, dann ist $H\cdot A$ ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal.

Beweis:
Die Variation von A ist offensichtlich gegeben durch

$$V_{[0,t]}(A)=t\wedge T\le T,\qquad \text{für } t\ge 0.$$

Also ist A ein FV–Prozeß, sogar ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal. Denn A ist stetig, also vorhersehbar, und es gilt

$$||A||^2_{\mathcal{H}^2}=\mathbf{E}\{|A|(\infty)^2\}=T^2<\infty.$$

Wir betrachten das stochastische Integral $H\cdot A$. Wegen $A(t)=T$ für $t\ge T$ gilt

$$(H\cdot A)(t)=\int_0^t H(s)\,dA(s)=\int_0^{T\wedge t}H(s)\,ds,\qquad \text{für } t\ge 0.$$

Mit der Stetigkeit der Pfade von H schließen wir

$$\begin{aligned}
V_{[0,t]}(H\cdot A)(\omega) &= \sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{2^n} \Big| \int_0^{t\frac{k}{2^n}} H(s,\omega)\,dA(s) - \int_0^{t\frac{k-1}{2^n}} H(s,\omega)\,dA(s)\Big| \\
&= \sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{2^n} \Big| \int_0^{T\wedge t\frac{k}{2^n}} H(s,\omega)\,ds - \int_0^{T\wedge t\frac{k-1}{2^n}} H(s,\omega)\,ds\Big| \\
&= \sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{2^n} \Big| \int_{T\wedge t\frac{k-1}{2^n}}^{T\wedge t\frac{k}{2^n}} H(s,\omega)\,ds\Big| \\
&= \sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{2^n} \int_{T\wedge t\frac{k-1}{2^n}}^{T\wedge t\frac{k}{2^n}} H(s,\omega)\,ds \\
&= \int_0^{T\wedge t} H(s,\omega)\,ds \\
&\leq T \max_{s\in[0,T]} H(s,\omega) \\
&< \infty, \quad P\text{–f.s. für } t\geq 0.
\end{aligned}$$

Nach Definition besitzt $H\cdot A$ stetige Pfade, ist folglich vorhersehbar. Wegen $||H\cdot A||_{\mathcal{H}^2}{}^2 = \mathbf{E}\{(\int_0^T H(s)\,ds)^2\}$ ist $H\cdot A$ unter der Bedingung $\mathbf{E}\{(\int_0^T H(s)\,ds)^2\} < \infty$ ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal. □

Proposition 2.41 *Sei $Z = \{Z(t) : t\geq 0\}$ eine geometrische Brownsche Bewegung auf $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}\right)$ für eine reelle Zahl $T>0$ mit der Darstellung*

$$\begin{aligned}
Z(t) &= Z(0)\,\mathcal{E}\left(\sigma B + m\right)(t) \\
&= Z(0)\exp\left(\sigma B(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\,t\right), \qquad \text{für } 0\leq t\leq T.
\end{aligned}$$

Hierbei seien $\sigma, Z(0) > 0$ und μ relle Konstanten und $m = \{m(t) : t\geq 0\}$ erklärt durch $m(t) = \mu\,t$, für $t\geq 0$, sowie $B = \{B(t) : t\geq 0\}$ eine Standard Brownsche Bewegung unter P. Dann gilt

$$(a) \quad V_{[0,t]}\left(\int_0^{\cdot} Z(s)ds\right) = \int_0^t Z(s)\,ds, \qquad \text{für } 0\leq t\leq T.$$

$$(b) \quad \mathbf{E}\left\{\int_0^t Z(s)^2\,ds\right\} = \begin{cases} Z(0)^2\,t & \text{für } \mu = -\frac{1}{2}\sigma^2 \\ \dfrac{Z(0)^2}{2\mu+\sigma^2}\left(\exp\left(2\mu\,t + \sigma^2\,t\right) - 1\right) & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \text{für } t\geq 0.$$

Beweis:
Die Aussage (a) folgt aus Proposition 2.40, da Z stetige Pfade besitzt und $Z\geq 0$ gilt. Den Satz von Fubini wenden wir auf die Aussage (b) an, was erlaubt ist, da $Z^2\geq 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\{\int_0^t Z(s)^2\,ds\right\} &= \int_0^t \mathbf{E}\left\{Z(s)^2\right\}\,ds \\
&= \int_0^t \mathbf{E}\left\{\left(Z(0)\exp\left(\sigma B(s) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\,s\right)\right)^2\right\}\,ds \\
&= Z(0)^2\int_0^t \mathbf{E}\left\{\exp\left(2\sigma B(s) + (2\mu - \sigma^2)\,s\right)\right\}\,ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= Z(0)^2 \int_0^t \exp\left(\left(2\mu+\sigma^2\right)s\right) \mathbf{E}\left\{\exp\left(2\sigma B(s) - \frac{1}{2}\left(2\sigma\right)^2 s\right)\right\} ds \\
&= Z(0)^2 \int_0^t \exp\left(\left(2\mu+\sigma^2\right)s\right) ds \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} Z(0)^2\, t & \text{für } \mu = -\frac{1}{2}\sigma^2 \\ & \\ \dfrac{Z(0)^2}{2\mu+\sigma^2}\left(\exp\left(2\mu\, t + \sigma^2\, t\right) - 1\right) & \text{sonst} \end{array} \right. , \qquad \text{für } t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Die vorletzte Zeile folgt aus der Martingaleigenschaft einer geometrischen Brownschen Bewegung ohne Drift. □

Satz 2.42 *Sei $Z = \{Z(t) : 0 \leq t \leq T\}$ eine geometrische Brownsche Bewegung auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}\right)$ für eine reelle Konstante $T > 0$. Dann ist Z ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal.*

Beweis:
Nach Definition der geometrischen Brownschen Bewegung gilt mit den Bezeichnungen der vorangegangenen Proposition

$$
Z(t) = Z(0) + \sigma \int_0^t Z(s)\, dB(s) + \mu \int_0^t Z(s)\, ds, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.
$$

Wir definieren die Prozesse $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ und $A = \{A(t) : t \geq 0\}$ mittels

$$
\begin{aligned}
M(t) &\equiv \sigma \int_0^t Z(s)\, dB(s) \qquad \text{und} \\
A(t) &\equiv \mu \int_0^t Z(s)\, ds\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}
$$

A ist nach Satz 2.40 ein FV–Prozeß. Offensichtlich folgt aus der Definition von A, daß der Prozeß stetige Pfade besitzt. Mit anderen Worten, A ist vorhersehbar. Da $\mathbf{E}\left\{\int_0^T Z(s)^2\, ds\right\} < \infty$ gilt, ist M ein Martingal. Z besitzt demnach die kanonische Zerlegung $Z = Z(0) + M + A$. Mit der vorangegangenen Proposition und der Cauchy–Schwarz–Ungleichung gilt

$$
\begin{aligned}
\| Z \|_{\mathcal{H}^2} &= \| [M,M](T)^{\frac{1}{2}} \|_{L^2} + \| |A|(T) \|_{L^2} \\
&= \mathbf{E}\left\{[\sigma Z \cdot B, \sigma Z \cdot B](T)\right\}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{E}\left\{\left(|\mu| \int_0^T Z(t)\, dt\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \sigma\, \mathbf{E}\left\{\int_0^T Z(t)^2 d[B,B](t)\right\}^{\frac{1}{2}} + |\mu| \mathbf{E}\left\{\left(\int_0^T |Z(t)\, 1|\, dt\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sigma\, \mathbf{E}\left\{\int_0^T Z(t)^2 d[B,B](t)\right\}^{\frac{1}{2}} + |\mu| \mathbf{E}\left\{\left((\int_0^T Z(t)^2\, dt)^{1/2} (\int_0^T 1\, dt)^{1/2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \sigma\, \mathbf{E}\left\{\int_0^T Z(t)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} + |\mu|\, \mathbf{E}\left\{T \int_0^T Z(t)^2\, dt\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sigma + |\mu|\sqrt{T}\right) \mathbf{E}\left\{\int_0^T Z(t)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Wir haben gezeigt, daß die geometrische Brownsche Bewegung innerhalb eines beschränkten Zeithorizontes ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal ist. □

Die geometrische Brownsche Bewegung ist das Doléans–Dade–Exponential einer skalierten Brownschen Bewegung versehen mit einem konstanten Drift. Dadurch modelliert man häufig den Preiprozeß von Aktien. Alternativ dazu ersetzen wir die Brownsche Bewegung durch einen kompensierten Poissonprozeß.

Proposition 2.43 *$N = \{N(t) : t \geq 0\}$ sei ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda > 0$ und $\kappa > -1$ eine reelle Konstante. Es gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\kappa N)(t) &= \exp\left(\ln(1+\kappa)\, N(t)\right) && \textit{und} \\ \mathbf{E}\left\{(\mathcal{E}(\kappa N)(t))^n\right\} &= \exp\left(\lambda\left(\,(1+\kappa)^n - 1\right) t\right), && \textit{für } t \geq 0 \textit{ und } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweis:
Aus $P\left(\Delta N(s) \geq 2 : 0 \leq s \leq t\right) = 0$ für alle $t \geq 0$ folgt mit Korollar 1 von Satz 2.34

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\kappa N)(t) &= \exp\left(\kappa N(t)\right) \prod_{0<s\leq t} (1 + \kappa\, \Delta N(s)) \exp\left(-\kappa\, \Delta N(s)\right)) \\ &= \exp\left(\kappa N(t)\right) \prod_{0<s\leq t} \exp\left(-\kappa\, \Delta N(s)\right)) \prod_{0<s\leq t} (1 + \kappa\, \Delta N(s)) \\ &= \exp\left(\kappa N(t)\right) \exp\left(-\kappa \sum_{0<s\leq t} \Delta N(s))\right) \prod_{0<s\leq t} (1 + \kappa\, \Delta N(s)) \\ &= \prod_{0<s\leq t} (1 + \kappa\, \Delta N(s)) \quad = \quad (1+\kappa)^{N(t)} \\ &= \exp\left(\ln(1+\kappa)\, N(t)\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Mit der eben bewiesenen Darstellung gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left\{(\mathcal{E}(\kappa N)(t))^n\right\} &= \mathbf{E}\left\{\exp\left(n\, \ln(1+\kappa)\, N(t)\right)\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(n\, \ln(1+\kappa)\, k\right)\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1+\kappa)^{n\,k}\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\,(1+\kappa)^n\, t)^k}{k!} \\ &= \exp\left(\lambda\left((1+\kappa)^n - 1\right) t\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Wir haben damit auch gezeigt, daß alle Momente von $\mathcal{E}(\kappa N)(t)$ existieren. □

Satz 2.44 *$N = \{N(t) : 0 \leq t \leq T\}$ sei ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda > 0$ innerhalb eines endlichen Zeithorizontes $T > 0$. Der Prozeß $M = \{M(t) : 0 \leq t \leq T\}$ definiert durch*

$$M(t) \equiv N(t) - \lambda\, t, \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T,$$

ist nach Satz 2.9 ein Martingal. Für reelle Konstanten $\kappa > -1$ und μ definieren wir den Prozeß $Y = \{Y(t) : 0 \leq t \leq T\}$ mittels

$$Y(t) \equiv \mu\, t + \kappa\, M(t), \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T.$$

Das Dolèans–Dade–Exponential von Y besitzt die Darstellung

$$\mathcal{E}(Y)(t) = \exp\left((\mu + \lambda \ln(1+\kappa) - \kappa\lambda)\, t + \ln(1+\kappa) M(t)\right), \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T.$$

Insbesondere ist $\mathcal{E}(Y)$ ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal.

Beweis:
Wir zerlegen Y in $Y = m + \kappa N$. Wir bezeichnen mit $m = \{m(t) : 0 \leq t \leq T\}$ die Funktion $m(t) = \mu\, t - \kappa\, \lambda t$ für $0 \leq t \leq T$. Nach Satz 2.28 ist $[m, N] = 0$, da m ein stetiger FV–Prozeß ist. Mit Proposition 2.43 und Satz 2.35 folgt mit $Y(0) = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Y)(t) &= \mathcal{E}(m + \kappa N)(t) \quad = \quad \mathcal{E}(m)(t)\, \mathcal{E}(\kappa N)(t) \\ &= \exp\left(\mu\, t - \kappa\, \lambda t\right) \exp\left(\ln(1+\kappa)\, N(t)\right) \\ &= \exp\left((\mu + \lambda \ln(1+\kappa) - \kappa\lambda)\, t + \ln(1+\kappa) M(t)\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Aus der Integraldarstellung des stochastischen Exponentials erhalten wir die kanonische Zerlegung von $\mathcal{E}(Y)$ in ein lokales Martingal und einen vorhersehbaren, weil stetigen FV–Prozeß.

$$\mathcal{E}(Y)(t) = 1 + \kappa \int_0^t \mathcal{E}(Y)(s-)\, dM(s) + (\mu - \kappa\, \lambda) \int_0^t \mathcal{E}(Y)(s-)\, ds, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Wir berechnen die $\mathcal{H}^2$–Norm des lokalen Martingalanteils. Zunächst betrachten wir $[M, M]$. Nach Definition ist $M(t) = N(t) - \lambda t$, für $t \in [0, T]$. Der Kompensator "λt" ist ein stetiger FV–Prozeß mit Startwert Null. Nach Satz 2.29 gilt $[M, M] = [N, N]$. Aus Beispiel 4 wissen wir $[N, N] = N$, woraus $[M, M] = N$ folgt. Damit und mit Satz 2.31 erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\kappa \mathcal{E}(Y)_- \cdot M\|^2_{\mathcal{H}^2} &= \kappa^2\, \mathbf{E}\left\{[\mathcal{E}(Y)_- \cdot M, \mathcal{E}(Y)_- \cdot M]\,(T)\right\} \\ &= \kappa^2\, \mathbf{E}\left\{\int_0^T \mathcal{E}(Y)(t-)^2\, d[M, M](t)\right\} \\ &= \kappa^2\, \mathbf{E}\left\{\int_0^T \mathcal{E}(Y)(t-)^2\, dN(t)\right\}. \end{aligned}$$

An dieser Stelle greifen wir auf Resultate vor, die erst in Abschnitt 6 angeführt werden. N ist nach Satz 2.59 ein Punktprozeß mit konstanter Intensität λ. Nach Definition 2.36 können wir innerhalb des Erwartungswertes "$dN(t)$" durch "$\lambda\, dt$" ersetzen. Zudem setzen wir das Ergebnis von Proposition 2.43 für den Fall $n = 2$ ein.

$$\begin{aligned} \|\kappa \mathcal{E}(Y)_- \cdot M\|^2_{\mathcal{H}^2} &= \kappa^2\, \mathbf{E}\left\{\int_0^T \mathcal{E}(Y)(t-)^2\, \lambda\, dt\right\} \\ &= \kappa^2\, \lambda \int_0^T \mathbf{E}\left\{\mathcal{E}(Y)(t-)^2\right\}\, dt \\ &= \kappa^2\, \lambda \int_0^T \exp\left(\lambda\, (\,(1+\kappa)^2 - 1)\, t\right)\, dt \\ &< \kappa^2\, \lambda\, T\, \exp\left(\left|\lambda\, (\,(1+\kappa)^2 - 1)\,\right| T\right) \\ &< \infty\,. \end{aligned}$$

Die totale Variation des stetigen Anteils berechnet sich mit Satz 2.40

$$V_{[0,T]}\left((\mu - \kappa\, \lambda) \int_0^{\cdot} \mathcal{E}(Y)(t-)\, dt\right) = |\mu - \kappa\, \lambda| \int_0^T \mathcal{E}(Y)(t-)\, dt.$$

Ähnlich wie bei der geometrisch Brownschen Bewegung berechnen wir die L^2–Norm der totalen Variation. Wir benutzen die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung, wenden Fubini an und greifen auf Proposition 2.43 zurück.

$$\begin{aligned}
\left|\left| |\mu - \kappa\,\lambda| \int_0^T \mathcal{E}(Y)(t-)\,dt \right|\right|_{L^2}^2 &= |\mu - \kappa\,\lambda|^2\ \mathbf{E}\left\{ \left(\int_0^T \mathcal{E}(Y)(t-)\,dt \right)^2 \right\} \\
&\leq |\mu - \kappa\,\lambda|^2\ \mathbf{E}\left\{ T \int_0^T \left(\mathcal{E}(Y)(t-)\right)^2\,dt \right\} \\
&= |\mu - \kappa\,\lambda|^2\ T \left(\int_0^T \mathbf{E}\left\{ \left(\mathcal{E}(Y)(t-)\right)^2 \right\} dt \right) \\
&= |\mu - \kappa\,\lambda|^2\ T \left(\int_0^T \mathbf{E}\left\{ \exp\left(2\,\mu\,t - 2\,\lambda\,\kappa\,t\right)\ \left(\mathcal{E}(\kappa\,N)(t-)\right)^2 \right\} dt \right) \\
&= |\mu - \kappa\,\lambda|^2\ T \left(\int_0^T \exp\left(2\,\mu\,t - 2\,\lambda\,\kappa\,t\right)\ \mathbf{E}\left\{ \left(\mathcal{E}(\kappa\,N)(t-)\right)^2 \right\} dt \right) \\
&= |\mu - \kappa\,\lambda|^2\ T \left(\int_0^T \exp\left(2\,\mu\,t - 2\,\lambda\,\kappa\,t\right)\ \exp\left(\lambda\left((1+\kappa)^2 - 1\right)t\right)\ dt \right) \\
&= |\mu - \kappa\,\lambda|^2\ T \left(\int_0^T \exp\left(\left(2\,\mu + \lambda\,\kappa^2\right)t\right)\ dt \right) \\
&\leq |\mu - \kappa\,\lambda|^2\ T^2\ \exp\left(|2\mu + \lambda\,\kappa^2|\,T\right) \\
&< \infty\,.
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Ergebnissen schließen wir, daß $||\mathcal{E}(Y)||_{\mathcal{H}^2} < \infty$ gilt. □

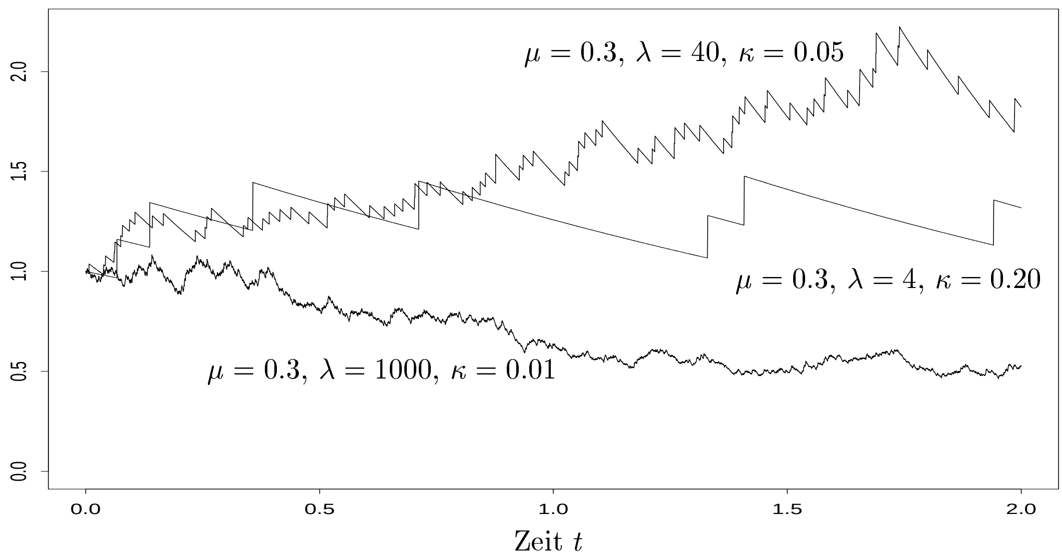

Abbildung 2.3: Simulierte Pfade von "geometrischen" kompensierten Poissonprozessen: $\mathcal{E}(Y)$. Die Parameter sind so gewählt, daß die Varianz des "Störterms" $\kappa\,M$ in allen drei Fällen gleich ist, und zwar $\mathrm{var}\,(\kappa\,M) = \kappa^2\,\lambda = 0.1$. Für $\lambda = 1000$ und $\kappa = 0.01$ approximiert $\mathcal{E}(Y)$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Diffusionskoeffizient $\sigma = 0.01$.

2.5 Die Brownsche Bewegung als Integrator

Der Abschnitt, der die Brownsche Bewegung als Integrator thematisiert, stützt sich auf die Abhandlungen von Øksendal (1995) und Karatzas und Shreve (1991).

Die Brownsche Bewegung wurde in Abschnitt 2.1 definiert. Eine andere Möglichkeit, die Brownsche Bewegung zu charakterisieren geht auf Lévy zurück. Er beschreibt die Brownsche Bewegung mithilfe der quadratischen Kovariation.

Satz 2.45 (Lévys Charakterisierung einer Brownschen Bewegung) $X = \left(X^1, ..., X^d\right)$ *sei ein d-dimensionales lokales Martingal mit stetigen Pfaden,* $X^k = \left\{X^k(t) : t \geq 0\right\}$ *für* $k = 1, ..., d$. X *ist genau dann eine d–dimensionale Standard Brownsche Bewegung, wenn*

$$X^k(0) = 0 \quad \textit{und} \quad [X^k, X^j](t) = \delta_{kj}\, t, \qquad \textit{für } t \geq 0 \textit{ und } k, j = 1, ..., d,$$

gilt.

Wir betrachten die natürliche Filtrierung einer d–dimensionalen Brownschen Bewegung, die Filtrierung, die durch den Prozeß selbst erzeugt wird. Die natürliche Filtrierung erfüllt im allgemeinen nicht die *üblichen Bedingungen.* Wir nehmen alle Nullmengen, die in der "End–σ–Algebra" liegen und fügen sie zur "Start–σ–Algebra" hinzu. Diese Filtrierung nennt man auch P–**Erweiterung** der natürlichen Filtrierung einer Brownschen Bewegung.

Satz 2.46 *Für* $k = 1, ..., d$ *seien* $B^k = \{B^k(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *Brownsche Bewegungen auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq \infty}\right)$. *Die P–Erweiterung der natürlichen Filtrierung von* $B^1, ..., B^d$ *sei mit* $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ *bezeichnet. Die P–Erweiterung* $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ *ist stetig.*

Auf $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}\right)$ ist jeder adaptierte Prozeß vorhersehbar. Denn ein adaptierter Prozeß ist für jedes $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$–meßbar und wegen der Stetigkeit gilt $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$.

Die Aussagen der stochastischen Integrationstheorie lassen sich auf Integrale bezüglich der Brownschen Bewegung anwenden. Im vorangegangenen Satz charakterisieren wir die Brownsche Bewegung als lokales Martingal mit stetigen Pfaden und durch den Kovariationsprozeß. Mit etwas tieferer Kenntnis können wir das stochastische Integral bezüglich der Brownschen Bewegung definieren, für den Fall daß wir vorhersehbare Integranden verwenden. Der nachstehende Satz gründet sich auf die Definitionen der $(\mathcal{H}^2, X)$–Integrierbarkeit, beziehungsweise der X–Integrierbarkeit. Er ist eine auf die Brownsche Bewegung zugeschnitten Version von Theorem 19 und Theorem 22, Chapter IV, von Protter (1995).

Satz 2.47 $B = (B^1, \ldots, B^d)$ *sei eine d–dimensionale Standard Brownsche Bewegung,* $B^k = \{B^k(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *für* $k = 1, \ldots, d$. $H = \{H(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *und* $K = \{K(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *seien vorhersehbare Prozesse mit*

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^T H(t)^2\, dt\right\} < \infty \quad \textit{und} \quad \mathbf{E}\left\{\int_0^T K(t)^2\, dt\right\} < \infty.$$

Das stochastische Integral $H \cdot B^1$ *existiert und besitzt stetige Pfade. Ist* τ *eine Stopzeit, dann erhalten wir*

$$\left(H \cdot B^1\right)^\tau = H\mathbf{1}_{[0,\tau]} \cdot B^1 = H \cdot \left(B^1\right)^\tau.$$

Für den quadratischen Kovariationsprozeß gilt

$$[H \cdot B^k, K \cdot B^k](t) = \int_0^t H(s)K(s)\,ds, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T \text{ und } k = 1, ..., d$$

und für $1 \leq k < j \leq d$ *ist* $[H \cdot B^k, K \cdot B^j] = 0$.

Die Itô–Formel vereinfacht sich für eine d–dimensionale Brownsche Bewegung.

Satz 2.48 (Die Itô–Formel für die Brownsche Bewegung) *Es sei* $B = (B^1, \ldots, B^d)$ *eine* d*–dimensionale Standard Brownsche Bewegung,* $B^k = \{B^k(t) : t \geq 0\}$ *für* $k = 1, \ldots, d$. f *sei ein Funktion* $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, *deren partielle Ableitungen zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Dann ist* $f(B) = \{f(B^1(t), \ldots, B^d(t)) : t \geq 0\}$ *ein Semimartingal, und es gilt für* $t \geq 0$

$$f(B(t)) - f(B(0)) = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B(s))\,dB^i(s) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(B(s))\,ds.$$

Ein klassisches Konstrukt, um zufällige Bewegungen zu beschreiben, ist die Itô-Diffusion. Das Verhalten eines Aktienkurses S beschreibt man oft mittels stochastischer Differentialgleichungen der Gestalt

$$dS(t) = \mu S(t)\,dt + \sigma S(t)\,dB(t), \qquad t \geq 0,$$

gegeben einen Startwert $S(0) \in \mathbb{R}^+$. Der Driftterm wird durch den Ausdruck $\mu S(t)$ beschrieben, die zufällige Schwankung durch $\sigma S(t)$, wobei B eine Standard Brownsche Bewegung ist.

Wir definieren die Itô-Diffusion im eindimensionalen Fall; allerdings läßt sich die Definition problemlos samt Existenzbedingungen in den mehrdimensionalen Fall übertragen.

Definition 2.34 (Itô–Diffusion) *Ein stochastischer Prozeß* $X = \{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}\right)$ *ist eine* **Itô-Diffusion**, *falls gilt*

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))\,ds + \sum_{k=1}^n \int_0^t \sigma^k(s, X(s))\,dB^k(s), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Hierbei sind $B^k = \{B^k(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *unabhängige Standard Brownsche Bewegungen, für* $k = 1, ..., n$, *und* $x \in \mathbb{R}$ *ist der gegebene Startwert.* $b : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^n) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *sind meßbare Funktionen, die*

$$||b(t,x)||_2 + ||\sigma(t,x)||_2 \leq C(1 + ||x||_2), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t \in [0,T],$$

für eine Konstante $C > 0$ *und*

$$||b(t,x) - b(t,y)||_2 + ||\sigma(t,x) - \sigma(t,y)||_2 \leq D||x - y||_2, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t \in [0,T],$$

für eine Konstante $D > 0$ *erfüllen. Im Falle einer* d*–dimensionalen Itô-Diffusion ist* $||\sigma||_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}^2$.

Bemerkung:

(i) Die Forderungen an b und σ sichern, daß die stochastische Differentialgleichung eine eindeutige Lösung besitzt – siehe Theorem 5.5 von Oksendal (1995).

(ii) X ist nach Exercise 7.5 von Oksendal (1995) quadratintegrierbar und es gilt die Abschätzung

$$\mathbf{E}\left\{|X(t)|^2\right\} \leq \left(1+x^2\right) \exp(Kt) - 1 \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T,$$

wobei $K > 0$ eine Konstante ist.

(iii) Die Existenz einer Lösung ist unabhängig vom Startwert x. Nach Theorem 5.5 von Oksendal (1995) können wir sogar als "Startwert" eine Zufallsvariable Z wählen, die quadratintegrierbar ist, und zudem von $\sigma\left(B^1(t), ..., B^n(t) : 0 \leq t \leq T\right)$ unabhängig ist. Die Ungleichung aus Bemerkung (iii) bleibt erhalten, wenn wir x^2 durch $\mathbf{E}\left\{X(0)^2\right\}$ ersetzen.

(iv) Die Itô–Diffusion heißt **zeithomogen**, falls gilt

$$b(t,x) = b(x) \quad \text{und} \quad \sigma(t,x) = \sigma(x)\,, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t \in [0,T].$$

Die Itô–Formel für eine d–dimensionale Brownsche Bewegung haben wir schon kennengelernt. Es gibt allerdings auch eine Version, die zeigt, wie sich Itô–Diffusionen unter Transformationen verhalten.

Satz 2.49 (Die Itô–Formel für Itô–Diffusionen) *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei eine Itô–Diffusion der Form*

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))\, ds + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dB(s), \qquad \textit{für } t \geq 0,$$

mit Startwert $x \in \mathbb{R}$. f sei ein Funktion aus $\mathcal{C}^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann ist $f(\cdot, X(\cdot)) = \{f(t, X(t)) : t \geq 0\}$ eine Itô–Diffusion, und es gilt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} f(t,X(t)) &= f(0,x) + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s,X(s)) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X(s))\, dB(s) \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,X(s)) + b(s,X(s))\, \frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s)) + \frac{1}{2}\sigma(s,X(s))^2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

Eine Eigenschaft der Itô–Diffusion ist, daß sie einen Markov–Prozeß beschreibt; das zukünftige Verhalten wird allein vom derzeitigen Zustand beeinflußt.

Satz 2.50 (Markov–Eigenschaft von Itô–Diffusionen) *Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ eine Itô–Diffusion. Dann gilt für jede beschränkte Borel–meßbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*

$$\mathbf{E}\left\{f(X(t+h))|\mathcal{F}_t\right\}(\omega) = \mathbf{E}\left\{f(X(t+h))|X(t)\right\}(\omega), \qquad \textit{für } t,h \geq 0 \textit{ und } \omega \in \Omega.$$

Im zeithomogenen Fall bietet sich die Möglichkeit an, durch das Maß P ein Maß Q^x zu definieren. Für ein festes $x \in \mathbb{R}^d$ sei Q^x das Maß, unter dem $X(0) = x$ gilt. Den dazugehörigen Erwartungswertoperator bezeichnen wir mit $\mathbf{E}^x$. Mit dem Operator $\mathbf{E}^x$ vereinfacht sich die Aussage des obigen Satzes

$$\mathbf{E}^x\left\{f(X(t+h))|\mathcal{F}_t\right\}(\omega) = \mathbf{E}^{X(t,\omega)}\left\{f(X(h))\right\}, \qquad \text{für } t,h \geq 0 \text{ und } \omega \in \Omega.$$

Bei Anwendungen ist es oft nützlich, einen Differentialoperator zweiter Ordnung A mit einer Itô–Diffusion X zu verbinden.

Definition 2.35 *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ eine zeithomogene d–dimensionale Itô–Diffusion auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$. Der* **Generator** *von X ist definiert durch*

$$Af(x) \equiv \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{E}^x\{f(X(t))\} - f(x)}{t}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ für die der Grenzwert in x existiert sei mit $\mathcal{D}_A(x)$ bezeichnet, und $\mathcal{D}_A$ ist die Menge für die der Grenzwert für alle $x \in \mathbb{R}^d$ existiert.

Der Generator einer Itô–Diffusion hängt mit dem Driftterm b und dem Diffusionskoeffizient σ zusammen.

Satz 2.51 *Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ sei eine zeithomogene d–dimensionale Itô–Diffusion $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ gegeben der Form*

$$X^m(t) = x^m + \int_0^t b^m(X(s))\,ds + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \sigma_{m,k}(X(s))\,dB^k(s), \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und } m = 1, ...d.$$

Ist f eine Funktion aus $\mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, dann liegt f in $\mathcal{D}_A$ und für den Generator A von X gilt

$$Af(x) = \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\sigma^T)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Beispiel 7 *Wir betrachten eine d–dimensionale Brownsche Bewegung $B = (B^1, ..., B^d)$, mit $B^k = \{B^k(t) : t \geq \infty\}$ für $k = 1, ..., d$. In der obigen Formulierung gilt $dX = dB$. Es ist $b = 0$ und $\sigma = I_d$, wobei I_d die d–dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt*

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Das bedeutet $A = \frac{1}{2}\Delta$, wobei Δ der Laplace–Operator ist.

Am nächsten Beispiel studieren wir, wie sich der Generator einer Itô–Diffusion verhält, die **nicht zeithomogen** ist.

Beispiel 8 *$X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei eine eindimensionale Itô–Diffusion, die nicht zeithomogen ist.*

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\,dB(s), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Wir definieren den 2–dimensionalen Prozeß $\widetilde{X} = \{\widetilde{X}(t) : t \geq 0\}$ mittels

$$\widetilde{X}(t) \equiv (t, X(t)), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Mit

$$\tilde{b} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}, \tilde{\sigma} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{x} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

ist $\widetilde{X}$ eine zeithomogene Itô–Diffusion und es gilt für die k-te Komponente $\widetilde{X}^k$ von $\widetilde{X}$

$$\widetilde{X}^k = \tilde{x}^k + \int_0^t \tilde{b}^k(\widetilde{X}(s))\,ds + \int_0^t \tilde{\sigma}^k(\widetilde{X}(s))\,dB(s), \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und } k = 1, 2.$$

Für $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $\tilde{x} \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ erhalten wir

$$Af(t, x) = Af(\tilde{x}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + b(t, x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma(t, x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x).$$

Den Generator kann man auch für zeitheterogene Diffusionen definieren. Die Vorgehensweise orientiert sich an der des vorangegangenen Beispiels, doch unterscheidet sie sich dadurch, daß man t festhält und die allgemeine Definition des Generators auf die Funktion $x \mapsto f(t,x)$ anwendet. Naturgemäß ist der Generator dann im Zeitverlauf nicht konstant, sondern wie die Diffusionskoeffizienten selbst von der Zeit abhängig.

$$A_t f(t,x) \equiv \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{E}^{t,x}\{f(t,X(t+h))\} - f(t,x)}{h}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \text{ und } t \geq 0.$$

Der Erwartungswertoperator $\mathbf{E}^{t,x}\{\ \cdot\ \}$ entspricht $\mathbf{E}\{\ \cdot\ |X(t)=x\}$, und kann als Erweiterung des ursprünglichen Operators $\mathbf{E}^x\{\ \cdot\ \}$ wie im obenstehenden Beispiel gewonnen werden. Insbesondere gilt dann für $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \geq 0$

$$A_t f(t,x) = \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\sigma^T)_{i,j}(t,x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t,x).$$

Wir sehen, daß im Vergleich zu Beispiel 8 der Ausdruck $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ wegfällt. Die Ursache ist, daß die Zeit t in Beispiel 8 als erste Komponente in den "erweiterten" Prozeß $\widetilde{X}$ hinzugefügt wird. Der Generator von $\widetilde{X}$ berechnet sich, indem man $\tilde{x} = (t,x)$ variiert. In der Definition von A_t wird t festgehalten und ausschließlich x variiert.

Satz 2.52 (Formel von Dynkin) *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ eine d–dimensionale Itô–Diffusion, τ eine Stopzeit und $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$. Gilt $\mathbf{E}^x\{\tau\} < \infty$ für $x \in \mathbb{R}^d$, dann erhalten wir*

$$\mathbf{E}^x\{f(X(\tau)\} = f(x) + \mathbf{E}^x\left\{\int_0^\tau Af(X(s))\,ds\right\}.$$

Ein Ziel dieses Abschnittes ist, den Darstellungssatz von Feynman–Kac zu diskutieren. Die Kolmogorovschen Rückwärtsgleichung ist ein wesentlicher Schritt hin zum angestrebten Darstellungssatz.

Satz 2.53 (Kolmogorovsche Rückwärtsgleichung) *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ eine d–dimensionale Itô–Diffusion und $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d)$.*

(i) Wir definieren $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$u(t,x) \equiv \mathbf{E}^x\{f(X(t))\}, \qquad \textit{für } t \geq 0 \textit{ und } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann ist $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}_A$ für alle $t > 0$ und es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \qquad \textit{für } t > 0 \textit{und } x \in \mathbb{R}^d,$$

sowie die Anfangsbedingung $u(0,x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^d$.
Hierbei ist Au der Generator angewandt auf die Funktion $x \to u(t,x)$ für ein festes $t > 0$.

(ii) Erfüllt eine beschränkte Funktion $w \in C^{1,2}(R \times R^d)$ die Differentialgleichung $\frac{\partial w}{\partial t} = Aw$ und die Randbedingung $w(0,x) = f(x)$, dann ist $w = u$.

Der Satz von Feynman und Kac trifft eine erweiterte Aussage. Von $f(X(t))$ gehen wir auf $\exp\left(-\int_0^t q(X(s))\,ds\right) f(X(t))$ über.

Satz 2.54 (Darstellungssatz von Feynman–Kac I) *Es sei $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ eine d–dimensionale Itô–Diffusion, $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ eine von unten beschränkte Funktion.*

(i) Wir definieren $v : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$v(t,x) \equiv \mathbf{E}^x \left\{ \exp\left(-\int_0^t q(X(s))\, ds \right) f(X(t)) \right\}, \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann ist $v(t,\cdot) \in \mathcal{D}_A$ für alle $t > 0$, und es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv, \qquad \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^d,$$

sowie die Anfangsbedingung $v(0,x) = f(x)$, für $x \in \mathbb{R}^d$.
Hierbei ist Av der Generator angewandt auf die Funktion $x \mapsto v(t,x)$ für ein festes $t > 0$.

(ii) Erfüllt eine Funktion $w \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^d)$ die Differentialgleichung $\frac{\partial w}{\partial t} = Aw - qw$ und die Randbedingung $w(0,x) = f(x)$, und ist zusätzlich auf $K \times \mathbb{R}^d$ beschränkt für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$, dann ist $w = v$.

Der Beweis basiert darauf, daß man die Itô–Formel auf $Z(t) = Y(t)\, f(X(t))$ anwendet, wobei Y definiert ist durch $Y(t) = \exp\left(-\int_0^t q(X(s))\, ds\right)$. Die Feynman–Kac Formel gibt es noch in der Version mit endlichem Zeithorizont T und einer Endbedingung $v(T,x) = f(x)$ anstelle der Anfangswertbedingung.

Satz 2.55 (Darstellungssatz von Feynman–Kac II) *Es sei $X = \{X(t) : 0 \leq t \leq T\}$ eine d–dimensionale Itô–Diffusion innerhalb eines beschränkten Zeithorizontes $T > 0$. Wir betrachten die stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ und $q : [0,T] \times \mathbb{R}^d \mapsto [0,\infty)$ mit*

$$f(x) \geq 0, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Löst eine Funktion v aus $\mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ das Cauchy–Problem

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + q\, v = A_t\, v, \qquad \text{auf } [0,T] \times \mathbb{R}^d,$$

$$v(T,x) = f(x), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^d,$$

und erfüllt zudem die polynomiale Wachstumsbedingung

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v(t,x)| \leq M \left(1 + ||x||^{2\mu}\right), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^d,$$

für beliebige Konstanten $M > 0$ und $\mu \geq 1$, dann besitzt v auf $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ die Darstellung

$$v(t,x) = \mathbf{E}^{t,x} \left\{ f(X(T)) \exp\left(-\int_t^T q(s, X(s))\, ds \right) \right\}.$$

Eine solche Lösung ist eindeutig.

Bedeutend für viele Anwendungen ist der Satz von Girsanov. Dieser Satz ist ein wichtiges Hilfmittel, den wir bei der Untersuchungen des verallgemeinerten Black&Scholes–Modells verwenden.

Satz 2.56 (Satz von Girsanov) *Für $T > 0$ sei auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}\right)$ ein Prozeß $Y = (Y^1, \ldots, Y^d)$ gegeben mit $Y^k = \{Y^k(t) : 0 \leq t \leq T\}$ der Form*

$$Y^k(t) = \int_0^t H^k(s)\, ds + B^k(t), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T \text{ und } k = 1, ..., d.$$

Hierbei ist $B = (B^1, \ldots, B^d)$ eine d–dimensionale Standard Brownsche Bewegung mit $B^k = \{B^k(t) : t \geq 0\}$ für $k = 1, \ldots, d$, und $H = (H^1, \ldots, H^n)$, $H^k = \{H^k(t) : t \geq 0\}$ für $k = 1, \ldots, d$, ein adaptierter Prozeß. Wir definieren den Prozeß $M = \{M(t) : 0 \leq t \leq T\}$ durch

$$M(t) \equiv \exp\left(-\sum_{k=1}^{d} \int_0^t H^k(s) dB^k(s) - \frac{1}{2}\int_0^t ||H(s)||_2^2\, ds\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Erfüllt H die **Novikov–Bedingung**

$$\mathbf{E}_P \left\{\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T ||H(s)||_2^2\, ds\right)\right\} < \infty,$$

dann ist M ein P–Martingal und wir können das Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf dem Meßraum $(\Omega, \mathcal{F})$ durch

$$dQ(\omega) \equiv M(T)\, dP(\omega), \qquad \text{für } \omega \in \Omega,$$

definieren. In diesem Fall ist Y eine d–dimensionale Standard Brownsche Bewegung unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q.

Die Transformation $P \to Q$ heißt Girsanov–Transformation. Die Novikov–Bedingung sichert, daß M unter Q ein Martingal ist, was eine Grundlage für den Beweis des Satzes ist. Den Satz von Girsanov gibt es in mehreren Version, auch für Semimartingale.

Ein weiteres nützliches Hilfsmittel ist der Martingaldarstellungssatz. Er besagt, daß sich ein Martingal, das an die P–Erweiterung der natürlichen Filtrierung einer d–dimensionalen Bewegung adaptiert ist, als stochastisches Integral bezüglich der Brownschen Bewegung darstellen läßt.

Satz 2.57 (Martingaldarstellungssatz) *$B = \left(B^1, ..., B^d\right)$ sei eine d–dimensionale Standard Brownsche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}\right)$, $B^k = \left\{B^k(t) : t \geq 0\right\}$ für $k = 1, ..., d$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die P–Erweiterung der natürlichen Filtrierung von B. Für ein quadratintegrierbares $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$–Martingal $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ existieren die progressiv meßbaren Prozesse $Y^k = \left\{Y^k(t) : t \geq 0\right\}$, $k = 1, ..., d$, mit*

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^t Y^k(s)^2\, ds\right\} < \infty, \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und } k = 1, ..., d,$$

so daß M die Darstellung besitzt

$$M(t) = M(0) + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t Y^k(s)\, dB^k(s), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Insebsondere sind die Prozesse $Y^1, ..., Y^d$ P–f.s. eindeutig.

Korollar *Mit den Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes sei X eine quadratintegrierbare Zufallsvariable aus $\mathcal{F}_T$ für eine reelle Zahl $T \geq 0$. Auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}_T, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}\right)$ existiert ein quadratintegrierbares Martingal $M = \{M(t) : 0 \leq t \leq T\}$ mit $M(T) = X$, das die Darstellung besitzt*

$$M(t) = \mathbf{E}\{X\} + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t Y^k(s)\, dB^k(s), \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Die Prozesse $Y^1, ..., Y^d$ sind progressiv meßbar, und es gilt

$$\mathbf{E}_P \left\{ \int_0^t Y^k(s)^2\, ds \right\} < \infty, \qquad \textit{für } t \geq 0 \textit{ und } k = 1, ..., d.$$

Beweis: Wir definieren M durch $M(t) = \mathbf{E}_P\{X|\mathcal{F}_t\}$ für $0 \leq t \leq T$. Nach Definition ist M ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. M ist nach Satz 2.30 ein quadratintegrierbares Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Wir wenden die Aussage des obenstehenden Satzes an und erhalten das gewünschte Ergebnis. □

2.6 Punktprozesse und stochastische Integrationstheorie

Dieser Abschnitt befaßt sich ausschließlich mit Punktprozessen, wobei Punktprozesse mit stochastischen Intensitäten im Mittelpunkt stehen. Insbesondere werden doppelt stochastische Prozesse behandelt, die auch als Cox–Prozesse bekannt sind. Der doppelt stochastische Prozeß ist eine natürliche Erweiterung des Poissonprozesses. Der Intensitätsparameter λ ist in diesem Fall zufällig. Im wesentlichen werden die Ergebnisse von Brémaud (1981) aus Kapitel II und III zusammengefaßt.

Definition 2.36 *Auf einem gegebenen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ sei $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ ein adaptierter Punktprozeß und $\lambda = \{\lambda(t) : t \geq 0\}$ ein nicht–negativer progressiv–meßbarer Prozeß mit*

$$\int_0^t \lambda(s)\, ds < \infty \quad P\text{–}\textit{f.s.}, \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Gilt für alle vorhersehbaren Prozesse $C = \{C(t) : t \geq 0\}$ die Gleichung

$$\mathbf{E}\left\{ \int_0^\infty C(s)\, dN(s) \right\} = \mathbf{E}\left\{ \int_0^\infty C(s)\lambda(s)\, ds \right\},$$

dann heißt λ eine **Intensität** *von N.*

Bemerkung : Die Intensität ist im allgemeinen nicht eindeutig.

Die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit der Intensität werden wir später beantworten. Zunächst studieren wir einige nützliche Ergebnisse.

Satz 2.58 *$N = \{N(t) : t \geq 0\}$ sei ein adaptierter Punktprozeß mit Intensität $\lambda = \{\lambda(t) : t \geq 0\}$. Wir definieren $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ durch*

$$M(t) \equiv N(t) - \int_0^t \lambda(s)\, ds\,, \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Es gilt

(i) N ist ein Punktprozeß ohne Explosion (siehe Ausführung nach Definition 2.12).

(ii) M ist ein lokales Martingal.

(iii) Ist $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein vorhersehbarer Prozeß mit

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^t |X(s)|\,\lambda(s)\,ds\right\} < \infty\,, \qquad \textit{für } t \geq 0,$$

dann ist $X \cdot M$ ein Martingal.

(iv) Ist $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ ein vorhersehbarer Prozeß mit

$$\int_0^t |X(s)|\,\lambda(s)\,ds < \infty \quad P\text{–}\textit{f.s.}\,, \qquad \textit{für } t \geq 0,$$

dann ist $X \cdot M$ ein lokales Martingal.

Bemerkung : Aus (iii) folgt direkt, daß der Prozeß M ein Martingal ist, falls gilt

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^t \lambda(s)\,ds\right\} < \infty\,, \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Mithilfe von (ii), der lokalen Martingaleigenschaft von M, können wir die Intensität charakterisieren.

Satz 2.59 *$N = \{N(t) : t \geq 0\}$ sei ein adaptierter Punktprozeß ohne Explosion und $\lambda = \{\lambda(t) : t \geq 0\}$ ein nicht–negativer Prozeß. Ist $M = \{M(t) : t \geq 0\}$, gegeben durch*

$$M(t) \equiv N(t) - \int_0^t \lambda(s)\,ds\,, \qquad \textit{für } t \geq 0,$$

ein lokales Martingal, dann ist λ eine Intensität von N.

Wir gehen davon aus, daß M ein Martingal ist. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir für $0 \leq s < t$

$$\mathbf{E}\,\{N(t) - N(s)\,|\mathcal{F}_s\} = \mathbf{E}\left\{\int_s^t \lambda(u)\,du \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right\}\,,$$

was uns dem "klassischen" Intensitätsbegriff näherbringt. Insbesondere erhalten wir für den Fall, daß λ rechtseitig stetig und beschränkt ist,

$$\lim_{t \searrow s} \frac{1}{t-s}\mathbf{E}\,\{N(t) - N(s)\,|\mathcal{F}_s\} = \lambda(s)\,, \qquad \text{für } s \geq 0.$$

Ist $\lambda(t)$ $\mathcal{F}_0$–meßbar für alle $t \geq 0$, dann interpretieren wir N als bedingten Poisson–Prozeß. Denn im allgemeinen ist $\mathcal{F}_0$ nicht trivial, sondern kann auch "Zufälliges" enthalten. Ist $\mathcal{F}_0$ dennoch trivial, dann ist N ein inhomogener Poissonprozeß.

Der folgende Satz beantwortet die Frage, unter welcher Bedingung eine Intensität eindeutig ist. Wir sehen, daß das für vorhersehbare Intensitäten der Fall ist.

Satz 2.60 *$N = \{N(t) : t \geq 0\}$ sei ein adaptierter Punktprozeß mit Intensität $\lambda = \{\lambda(t) : t \geq 0\}$. Dann existiert eine Intensität $\tilde{\lambda} = \{\tilde{\lambda}(t) : t \geq 0\}$, die vorhersehbar ist. Insbesondere ist $\tilde{\lambda}$ eindeutig; d.h. jede vorhersehbare Intensität von N ist ununterscheidbar von $\tilde{\lambda}$.*

Punktprozesse assoziiert man mit einer streng wachsenden Folge von Stopzeiten $(T_n)_{n\geq 0}$. Der Punktprozeß – oder Zählprozeß – zählt, wieviele Stopzeiten bis zu einem bestimmten Zeitpunkt "eingetreten" sind, sprich, wieviele der T_n kleiner sind als ein festes $t \geq 0$. Formal gesprochen bedeutet das $N(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$. Die Zwischenankunftszeiten $(S_n)_{n\geq 1}$ sind definiert durch $S_{n+1} \equiv T_{n+1} - T_n$, $n \geq 0$. Bei der stochastischen Modellierung von tatsächlichen Problemen nimmt man häufig an, daß die Zwischenankunftszeiten exponentialverteilt sind. Kreditausfallrisiko kann man auf ähnliche Weise modellieren. Im folgenden konstruieren wir einen Punktprozeß, der höchstens einen Sprung besitzt, also $T_0 = 0, T_1 = \tau, T_2 = T_3 = ... = \infty$, wobei τ eine Stopzeit ist, die exponentialverteilt ist mit stochastischem Parameter. Der mit dieser Folge $(T_n)_{n\geq 0}$ assozierte Punktprozeß N ist nichts anderes als der Indikatorprozeß der Stopzeit τ, sprich $N(t) = \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$. Bei der folgenden Definition ist wichtig, daß $\mathcal{F}_0$ nicht unbedingt die triviale σ–Algebra ist.

Definition 2.37 *Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ *heißt eine Stopzeit* τ **exponentialverteilt mit stochastischem Parameter** $\lambda^e = \{\lambda^e(t) : t \geq 0\}$*, falls gilt*

(i) $\lambda^e(t)$ *ist* $\mathcal{F}_0$*–meßbar und nicht–negativ für* $t \geq 0$.

(ii) $\int_0^t \lambda^e(s)\, ds < \infty$ P*–f.s.,* *für* $t \geq 0$.

(iii) $P(\tau \leq t \,|\mathcal{F}_0) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda^e(s)\, ds\right)$, *für* $t \geq 0$.

Wir stellen uns vor, daß zum Zeitpunkt Null die Parameterfunktion $\lambda^e = \{\lambda^e(t) : t \geq 0\}$ zufällig gezogen wird. Die Stopzeit τ ist dann exponentialverteilt bedingt auf diese Parameterfunktion.

Der nächste Satz zeigt, wie man eine geeignete Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ finden kann, so daß die Eigenschaft (i) gilt.

Satz 2.61 *Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{H}, P, (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}\right)$ *sei eine Stopzeit* τ *gegeben.* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *sei eine Unterfiltrierung von* $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ *mit* $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}_0$*, und* $\lambda^e = \{\lambda^e(t) : t \geq 0\}$ *sei ein nicht–negativer* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$*–adaptierter vorhersehbarer Prozeß mit*

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^t \lambda^e(s)\, ds\right\} < \infty\,, \qquad \text{für } t \geq 0,$$

und

$$P(\tau \leq t \,|\mathcal{G}_\infty) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda^e(s)\, ds\right)\,, \qquad \text{für } t \geq 0,$$

wobei $\mathcal{G}_\infty \equiv \vee_{t\geq 0}\mathcal{G}_t$ *gilt. Wir definieren die Filtrierung* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *durch* $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{H}_t \vee \mathcal{G}_\infty$, $t \geq 0$. *Dann ist* τ *eine exponentialverteilte* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*–Stopzeit und die Darstellung* (iii) *aus Definition 2.37 gilt.*

Beweis: Nach Konstruktion ist $\lambda^e(t)$ $\mathcal{F}_0$–meßbar für $t \geq 0$, und nach Voraussetzung gilt

$$\mathbf{E}\left\{\int_0^t \lambda^e(s)\, ds\right\} < \infty\,, \qquad \text{für } t \geq 0,$$

woraus wir direkt $\int_0^t \lambda^e(s)\,ds < \infty$ P–f.s. sehen für $t \geq 0$. Da $\mathcal{G}_0 = \mathcal{H}_0$ und $\mathcal{F}_0 = \mathcal{H}_0 \vee \mathcal{G}_\infty$ gilt, erhalten wir

$$P\left(\tau \leq t \,|\mathcal{F}_0\right) = P\left(\tau \leq t \,|\mathcal{G}_\infty\right) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda^e(s)\,ds\right), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

was den Beweis abschließt. □

Die folgenden Korollare bauen aufeinander auf und wir nehmen an, daß die Voraussetzungen von Satz 2.61 gelten.

Korollar 1 *$N = \{N(t) : t \geq 0\}$ sei der Indikatorprozeß der Stopzeit τ*

$$N(t) \equiv \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}, \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Der Prozeß $\lambda = \{\lambda(t) : t \geq 0\}$ gegeben durch

$$\lambda(t) \equiv \lambda^e(t)\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}, \qquad \textit{für } t \geq 0,$$

ist die (eindeutige) vorhersehbare Intensität von N.

Beweis: Der Beweis beruht auf Satz 7, Kapitel III, von Brémaud. N betrachten wir als Punktprozeß mit einem Punkt in τ. Die Folge $(T_n)_{n\geq 0}$, die mit N assoziiert ist, lautet dann $T_0 = 0, T_1 = \tau, T_2 = T_3 = ... = \infty$. Die zufällige Funktion

$$G(t) \equiv P\left(\tau \leq t \,|\mathcal{F}_0\right) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda^e(s)\,ds\right), \qquad \text{für } t \geq 0,$$

ist die auf $\mathcal{F}_{T_0} = \mathcal{F}_0$ bedingte Verteilungsfunktion von $\tau = T_1$. G ist $\mathcal{F}_0$–meßbar und pfadweise differenzierbar mit

$$g(t) \equiv \frac{dG}{dt}(t) = \lambda^e(t)\,\exp\left(-\int_0^t \lambda^e(s)\,ds\right), \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Nach Brémaud berechnet sich die Intensität $\lambda = \{\lambda(t) : t \geq 0\}$ von N durch

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \frac{g(t)}{1 - G(t)}\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \\
&= \frac{\lambda^e(t)\,\exp\left(-\int_0^t \lambda^e(s)\,ds\right)}{\exp\left(-\int_0^t \lambda^e(s)\,ds\right)}\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \\
&= \lambda^e(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}, \qquad \text{für } t \geq 0.
\end{aligned}$$

λ ist wie λ^e vorhersehbar. Nach Satz 2.60 ist λ die eindeutige vorhersehbare Intensität. □

Korollar 2 *Der Prozeß $M = \{M(t) : t \geq 0\}$, definiert durch*

$$M(t) \equiv N(t) - \int_0^t \lambda(s)\,ds, \qquad \textit{für } t \geq 0,$$

ist ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$–Martingal, sogar ein $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$–Martingal.
Insbesondere erhalten wir mittels

$$N(t) = M(t) + \int_0^t \lambda(s)\,ds, \qquad \textit{für } t \geq 0,$$

die eindeutige Zerlegung von N in das Martingal M und den vorhersehbaren FV–Prozeß $\int_0^{\cdot} \lambda(s)\,ds$.

Beweis: Nach Satz 2.58 ist M ein lokales $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$–Martingal. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\{\int_0^t \lambda(s)\,ds\right\} &= \mathbf{E}\left\{\int_0^t \lambda^e(s)\,\mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\,ds\right\} \\
&\leq \mathbf{E}\left\{\int_0^t \lambda^e(s)\,ds\right\} \\
&< \infty\,, \qquad \text{für } t \geq 0,
\end{aligned}$$

woraus mit der Bemerkung nach Satz 2.58 folgt, daß M ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$–Martingal ist.
M ist $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$–adaptiert, denn die Prozesse N und λ sind selbst adaptiert bezüglich der Filtrierung $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$. Zudem ist $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ eine Unterfiltrierung von $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$; d.h. $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$ für $t \geq 0$. Wegen $\mathbf{E}\{|M(t)|\} < \infty$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{M(t)\,|\mathcal{H}_s\} &= \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{M(t)\,|\mathcal{F}_s\}\,|\mathcal{H}_s\} \\
&= \mathbf{E}\{M(s)\,|\mathcal{H}_s\} \\
&= M(s)\,, \qquad \text{für } 0 \leq s < t.
\end{aligned}$$

M ist ein $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$–Martingal. Nach Satz 2.37 ist die Zerlegung $N = M + \int_0^\cdot \lambda(s)\,ds$ eindeutig. □

Korollar 3 *Der Prozeß $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ sei das stochastische Exponential von $-M$, sprich $X \equiv \mathcal{E}(-M)$. Es gilt*

(i) X besitzt die Darstellung

$$X(t) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \exp\left(\int_0^t \lambda^e(s)\,ds\right)\ P\text{–f.s.}\,, \qquad \text{für } t \geq 0.$$

(ii) X ist ein lokales $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$–Martingal.

(iii) Insbesondere erhalten wir

$$\mathbf{E}\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,\middle|\,\mathcal{H}_s \vee \mathcal{G}_\infty\right\} = \mathbf{1}_{\{\tau>s\}} \exp\left(-\int_s^t \lambda^e(s)\,ds\right)\,, \qquad \text{für } 0 \leq s < t.$$

Beweis: Wir beweisen zunächst (i). Nach Definition gilt $X(t) = \mathcal{E}(-M)(t) = \mathcal{E}(-N+A)(t)$, wobei der Prozeß $A = \{A(t) : t \geq 0\}$ durch

$$A(t) \equiv \int_0^t \lambda(s)\,ds\,, \qquad \text{für } t \geq 0,$$

definiert ist. N ist ein FV–Prozeß und A sogar ein stetiger FV–Prozeß. Mit Satz 2.29 und Korollar 4 von Satz 2.34 gilt

$$\begin{aligned}
X(t) &= \mathcal{E}(-N+A)(t) \\
&= \mathcal{E}(-N)(t)\mathcal{E}(A)(t) \\
&= (1-N(t))\exp(A(t)) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \exp\left(\int_0^t \lambda(s)\,ds\right)\,, \qquad \text{für } t \geq 0.
\end{aligned}$$

Auf der Menge $\{\tau \le t\}$ ist $X(t)$ wegen des ersten Faktors Null und auf $\{\tau > t\}$ gilt $\lambda(t) = \lambda^e(t)$, $t \ge 0$. Den Faktor $\exp(\,\cdot\,)$ können wir auf $\{\tau \le t\}$ gefahrlos abändern, indem wir λ durch λ^e ersetzen. Aus dieser Überlegung folgt die angekündigte Darstellung

$$X(t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \exp\left(\int_0^t \lambda^e(s)\, ds\right), \qquad \text{für } t \ge 0.$$

(ii) folgt aus Satz 2.58 (ii); Demzufolge ist $X = 1 + X_- \cdot M$ ein lokales $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$–Martingal.

Der Beweis von Aussage (iii) des Korollars ist wie folgt aufgebaut: Wir konstruieren eine Folge von Stopzeiten $(T_n)_{n\ge 1}$, die X im Sinne von Definition 2.16 als Martingal lokalisiert und betrachten dann die Aussage für den gestoppten Prozeß $X^{T_n}\,\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$, $n \ge 1$. Mithilfe der Martingaleigenschaft des gestoppten Prozeß leiten wir das Gewünschte her. Die Folge $(T_n)_{n\ge 1}$ sei definiert durch

$$T_n(\omega) \equiv \begin{cases} \inf\left\{t \ge 0 : \displaystyle\int_0^t \lambda^e(u,\omega)\, du > n\right\}, & \text{falls } \displaystyle\int_0^\infty \lambda^e(u,\omega)\, du > n \\ \infty\,, & \text{falls } \displaystyle\int_0^\infty \lambda^e(u,\omega)\, du \le n \end{cases} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Das Integral $\int_0^\cdot \lambda^e(u,\omega)\, du$ ist ein monoton wachsender Prozeß mit Anfangswertwert Null. Deshalb ist $(T_n)_{n\ge 1}$ eine monoton wachsende Folge von Stopzeiten, und es gilt $\mathbf{1}_{\{T_n>0\}} = 1$. Wegen $\mathbf{E}\left\{\int_0^t \lambda^e(s)\, ds\right\} < \infty$, $t \ge 0$, existiert für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge $\mathcal{N}_k \in \mathcal{H}$ mit

$$\int_0^k \lambda^e(u,\omega)\, du < \infty\,, \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}_k\,.$$

Sei $\mathcal{N} \equiv \bigcup_{k\ge 1} \mathcal{N}_k$. Dann ist $\mathcal{N}$ als abzählbare Vereinigung von P–Nullmengen selbst eine P–Nullmenge. Insbesondere gilt dann

$$\int_0^t \lambda^e(u,\omega)\, du < \infty\,, \qquad \text{für alle } t \ge 0 \text{ und } \omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}\,.$$

Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ P–f.s. Das Integral $\int_0^\cdot \lambda^e(u)\, du$ ist stetig, woraus wir

$$\int_0^{t\wedge T_n} \lambda^e(u)\, du \le n\,, \qquad \text{für } t \ge 0 \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

sehen. Mit Satz 2.58 (iii) zeigen wir, daß $X^{T_n}\,\mathbf{1}_{\{T_n>0\}} = X^{T_n}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$–Martingal ist. Es gilt nach Satz 2.23

$$X^{T_n}\,\mathbf{1}_{\{T_n>0\}} = X^{T_n} = 1 + (X_- \cdot M)^{T_n} = 1 + X_- \mathbf{1}_{[0,T_n]} \cdot M.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left\{\int_0^t |X(s-)\,\mathbf{1}_{\{T_n\ge s\}}|\,\lambda(s)\, ds\right\} &= \mathbf{E}\left\{\int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau > s-\}} \exp\left(\int_0^s \lambda^e(u)\, du\right) \mathbf{1}_{\{T_n \ge s\}}\,\lambda(s)\, ds\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau \ge s\}} \exp\left(\int_0^s \lambda^e(u)\, du\right) \mathbf{1}_{\{T_n \ge s\}}\,\lambda^e(s)\,\mathbf{1}_{\{\tau > s\}}\, ds\right\} \\ &\le \mathbf{E}\left\{\int_0^t \exp\left(\int_0^s \lambda^e(u)\, du\right) \mathbf{1}_{\{T_n \ge s\}}\,\lambda^e(s)\,\mathbf{1}_{\{\tau > s\}}\, ds\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbf{E}\left\{\int_0^t e^n\,\lambda^e(s)\,\mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\,ds\right\}\\
&\leq e^n\,\mathbf{E}\left\{\int_0^t \lambda^e(s)\,ds\right\}\\
&< \infty\,, \qquad \text{für } t \geq 0.
\end{aligned}$$

$X^{T_n} = X^{T_n}\,\mathbf{1}_{\{T_n>0\}}$ ist tatsächlich ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$–Martingal. Es gilt damit $\mathbf{E}\left\{X^{T_n}(t)\,|\mathcal{F}_s\right\} = X^{T_n}(s)$, für $0 \leq s < t$ und $n \in \mathbb{N}$, beziehungsweise

$$\mathbf{E}\left\{\mathbf{1}^{T_n}_{\{\tau>t\}}\exp\left(\int_0^{t\wedge T_n}\lambda^e(u)\,du\right)\middle|\,\mathcal{F}_s\right\} = \mathbf{1}^{T_n}_{\{\tau>s\}}\exp\left(\int_0^{s\wedge T_n}\lambda^e(u)\,du\right).$$

Wir halten t und s fest. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist T_n nach Definition eine $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$–Stopzeit. λ^e ist $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$–adaptiert. Deswegen ist $\exp\left(-\int_0^{t\wedge T_n}\lambda^e(u)\,du\right)$ $\mathcal{G}_\infty$–meßbar. Wir multiplizieren beide Seiten damit. Aus $\mathcal{G}_\infty \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_s$ folgt, daß wir den Faktor in den bedingten Erwartungswert hineinziehen dürfen.

$$(*) \qquad \mathbf{E}\left\{\mathbf{1}^{T_n}_{\{\tau>t\}}\middle|\,\mathcal{F}_s\right\} = \mathbf{1}^{T_n}_{\{\tau>s\}}\exp\left(-\int_{s\wedge T_n}^{t\wedge T_n}\lambda^e(u)\,du\right), \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Wir untersuchen, wie sich die "linke" und "rechte" Seite von $(*)$ im Grenzübergang für $n \to \infty$ verhalten. Die Folge $(T_n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend mit $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ P–f.s. Damit gilt für P–fast alle $\omega \in \Omega$

$$\mathbf{1}^{T_n}_{\{\tau>t\}} \searrow \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,, \quad n \to \infty.$$

$\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}$ im bedingten Erwartungswert ist nicht–negativ und durch 1 nach oben beschränkt. Mit Proposition 4.24 von Breiman (1993) gilt

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left\{\mathbf{1}^{T_n}_{\{\tau>t\}}\middle|\,\mathcal{F}_s\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,|\mathcal{F}_s\right\}$$

Die Proposition von Breiman ist für den Fall der Konverganz von unten "$\nearrow$" ausgelegt. Da $\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}$ durch 1 nach oben beschränkt ist wenden wir die Aussage auf $1 - \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}$ an. Für P–fast alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{1}^{T_n(\omega)}_{\{\tau(\omega)>s\}}\exp\left(-\int_{s\wedge T_n(\omega)}^{t\wedge T_n(\omega)}\lambda^e(u,\omega)\,du\right) = \mathbf{1}_{\{\tau(\omega)>s\}}\exp\left(-\int_s^t\lambda^e(u,\omega)\,du\right),$$

da $(T_n)_{n\geq 1}$ P–f.s. gegen unendlich geht. Wir setzen die Ergebnisse in $(*)$ ein und erhalten nach dem Grenzübergang für $n \to \infty$ mit $\mathcal{H}_s \vee \mathcal{G}_\infty = \mathcal{F}_s$

$$\mathbf{E}\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\middle|\,\mathcal{H}_s \vee \mathcal{G}_\infty\right\} = \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\exp\left(-\int_s^t\lambda^e(s)\,ds\right), \qquad \text{für } 0 \leq s < t\,,$$

was den Beweis abschließt. □

Bemerkung : Ein nützlicher Spezialfall tritt ein, wenn wir die stochastische Parameterfunktion λ^e deterministisch modellieren. Dann ist die Stopzeit τ exponentialverteilt mit Parameterfunktion λ^e. Folglich gilt $\mathcal{G}_\infty \subseteq \mathcal{H}_0$. Wegen $\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \vee \mathcal{G}_\infty \subseteq \mathcal{H}_t \vee \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_t$ und $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ gilt $\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t$.

Die Ergebnisse, die bezüglich der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gezeigt wurden, sind dann auch für die "ursprüngliche" Filtrierung $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ gültig. Insbesondere erhalten wir

$$\mathbf{E}\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \,\Big|\, \mathcal{H}_s\right\} = \mathbf{1}_{\{\tau>s\}} \exp\left(-\int_s^t \lambda^e(s)\,ds\right), \qquad \text{für } 0 \leq s < t.$$

Der Prozeß X ist ein $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$–Martingal und $\exp\left(-\int_0^T \lambda^e(u)\,du\right)$ ist eine reelle Zahl. Damit ist das Produkt aus dieser Zahl und X

$$\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int_t^T \lambda^e(s)\,ds\right), \qquad \text{für } t \geq 0,$$

ebenfalls ein $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$–Martingal.

Der letzte Teil der Bemerkung ist hilfreich, wenn wir in Kapitel 4 ein "einfaches" Modell einer Anleihe mit Kreditrisiko definieren. T interpretieren wir als die Fälligkeit der Anleihe, die Stopzeit τ als den Zeitpunkt des Kreditausfalls und λ^e als den "Renditespread" zur risikolosen Anleihe.

Den Satz von Girsanov für die Brownsche Bewegung haben wir im vorangegangenen Abschnitt kennengelernt. Es folgt eine Erweiterung, die in allgemeinerem Zusammenhang auf Jacod und Shiryaev (1987), Kapitel III, Abschnitt 3 bis 5, zurückgeht. Die hier zitierte Version ist von Schönbucher (1998a), Theorem 1, entnommen. Sie bindet Punktprozesse mit zufälligen Intensitäten in Satz 2.45 ein.

Satz 2.62 *Auf einem gegebenem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}\right)$ *sei* τ *eine Stopzeit und* $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ *deren Indikatorprozeß* $N(t) = \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$, *für* $t \geq 0$. $A = \{A(t) : t \geq 0\}$ *sei der Kompensator von* N *und* $M = \{M(t) : t \geq 0\}$ *erklärt durch* $M \equiv N - A$. *Wir nehmen an, daß* N *die Intensität* $\lambda = \{\lambda(t) : t \geq 0\}$ *besitzt; d.h.*

$$A(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds, \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T.$$

$B = \left(B^1, ..., B^d\right)$ *sei eine d–dimensionale Standard Brownsche Bewegung,* $B^k = \left\{B^k(t) : t \geq 0\right\}$ *für* $k = 1, ..., d$. *Wir setzen voraus, daß* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}$ *die P–Erweiterung der natürlichen Filtrierung der Prozesse* B *und* N *ist und* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ *gilt.*
Sei $\psi = \left(\psi^1, ..., \psi^d\right)$ *ein d–dimensionaler vorhersehbarer Prozeß,* $\psi^k = \{\psi^k(t) : t \geq 0\}$ *für* $k = 1, ..., d$, *und* $\phi = \{\phi(t) : t \geq 0\}$ *ein strikt positiver vorhersehbarer Prozeß mit*

$$\int_0^t ||\psi(s)||^2\,ds < \infty \quad \textit{und} \quad \int_0^t |\phi(s) - 1|\,\lambda(s)\,ds < \infty \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Wir definieren den Prozeß $L = \{L(t) : t \geq 0\}$ *mittels*

$$L \equiv \mathcal{E}\left(\sum_{k=1}^d \psi^k \cdot B^k + (\phi - 1) \cdot M\right).$$

Ist $\mathbf{E}_P\left\{|L(t)|\right\} < \infty$ *für alle* $t \geq 0$, *dann können wir das Maß* Q *definieren durch*

$$dQ(t) = L(t)\,dP(t), \qquad \textit{für } t \geq 0.$$

Dann ist Q ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, $\widetilde{B} = \left(\widetilde{B}^1, ..., \widetilde{B}^d\right)$ definiert durch

$$\widetilde{B}^k(t) \equiv B^k(t) - \int_0^t \psi^k(s)\, ds,, \qquad \textit{für } t \geq 0 \textit{ und } k = 1, ..., d,$$

ist eine Standard Brownsche Bewegung unter dem Maß Q und der Prozeß $\lambda_Q = \{\lambda_Q(t) : t \geq 0\}$,

$$\lambda_Q(t) \equiv \phi(t)\,\lambda(t), \qquad \textit{für } t \geq 0, \tag{2.1}$$

ist die Intensität von N unter Q.
Insbesondere läßt sich jedes zu P äquivalente Maß mithilfe geeigneter Prozesse ψ und ϕ darstellen.

Bemerkung:

(i) Der Maßtransformationssatz gilt in allgemeinerem Zusammenhang. N ist hier nur der Indikatorprozeß einer Stopzeit; in der ursprünglichen Form des Satzes ist N ein "markierter" Punktprozeß, der eine Intensität besitzt; siehe Theorem 4, Schönbucher (1998).

(ii) Die Forderung, daß ϕ strikt positiv ist, sichert, daß L strikt positiv ist.

(iii) In unserem Fall können wir uns fragen, wodurch der Maßwechsel – also der Prozeß L – eindeutig festgelegt wird. Wir müssen untersuchen, wie τ die Prozesse ψ und ϕ, die L parametrisieren, beeinflußt. Beachte zuerst, daß auf $\{t > \tau\}$ $\lambda(t) = 0$ gilt (vgl. Korollar 1 von Satz 2.61). Wegen (2.1) gilt $\lambda_Q(t) = 0$ auf $\{t > \tau\}$. Folglich kann $\phi(t)$ auf $\{t > \tau\}$ beliebig gewählt werden, ohne daß sich der Prozeß L und damit das Maß Q verändert.

(iv) Auf dem gegebenen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq\infty}\right)$ betrachten wir eine Unterfiltrierung $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq\infty}$; d.h.: es gilt $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ für $0 \leq t \leq \infty$. Genauer gesagt, wir untersuchen den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{G}, P^{\mathcal{G}}, (\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq\infty}\right)$, wobei $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_\infty$ und $P^{\mathcal{G}}(A) \equiv P(A)$ für $A \in \mathcal{G}$ gelten soll. Auch in diesem Fall können wir den Maßtransformationssatz anwenden. Den Maßwechsel $P^{\mathcal{G}} \mapsto Q^{\mathcal{G}}$ auf $\left(\Omega, \mathcal{G}, P^{\mathcal{G}}, (\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq\infty}\right)$ führen wir auf dem ursprünglichen Raum durch; allerdings muß der Prozeß L, durch den der Maßwechsel beschrieben wird, $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq\infty}$–adaptiert sein. L ist genau dann $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq\infty}$–adaptiert, wenn die stochastische Integrale $\psi^1 \cdot B^1$, ..., $\psi^d \cdot B^d$ und $(\phi - 1) \cdot M$ $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq\infty}$–adaptiert sind.
Wir studieren diese Überlegung an einem Spezialfall, der uns in Kapitel 4 von Nutzen sein wird. In der Formulierung des Satzes sei $d = 2$ und $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq\infty}$ definiert durch

$$\mathcal{G}_t \equiv \sigma\left(B^1(s), (B^2)^\tau(s), N(s) : 0 \leq s \leq t\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq \infty.$$

Wir stoppen die zweite Brownsche Bewegung B^2 in τ. Danach soll keine "Information" von ihr in die σ–Algebren einfließen. L ist genau dann $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq\infty}$–adaptiert, wenn gilt

(a) ψ^1, ψ^2 und ϕ sind $(\mathcal{G}_t)_{0\leq t\leq\infty}$–adaptiert.

(b) B^2 wird innerhalb der Definition von L durch $(B^2)^\tau$ ersetzt.

Das stochastische Integral $\psi^2 \cdot (B^2)^\tau$ läßt sich auch $\int_0^\cdot \psi^2(s)\, \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\, dB^2(s)$ schreiben. Wir betten diese Konstruktion in den ursprünglichen Raum ein und erhalten für $t \geq 0$

$$L(t) = \mathcal{E}\left(\int_0^\cdot \psi^1(s)\, dB^1(s) + \int_0^\cdot \psi^2(s)\, \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\, dB^2(s) + \int_0^\cdot (\phi(s) - 1)\, dM(s)\right)(t).$$

Mit (iii) sehen wir, daß L – und damit die Maßtransformation $P^{\mathcal{G}} \mapsto Q^{\mathcal{G}}$ – durch

$\psi^1(t)$ für $t \geq 0$,
$\psi^2(t,\omega)$ und $\phi(t,\omega)$ für $t \geq 0$ und $\omega \in \{\tau > t\}$,

eindeutig bestimmt ist.

Kapitel 3

Zeitstetige Modellierung des Marktes

In diesem Kapitel wird der Markt mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie modelliert. Zunächst folgt eine allgemeine Beschreibung, die auf die Arbeiten von Harrison und Pliska (1981) und Grünewald (1998) zurückgreift. Nach den Definition der Marktmodelle werden einige nützliche Sätz zusammengefaßt. Im letzten Abschnitt verallgemeinern wir das Aktienmarktmodell nach Black und Scholes.

3.1 Die stochastische Marktmodellierung

Die stochastische Marktmodellierung ist stark an die Ausführung von Harrison und Pliska (1981) anglehnt. In der Folgezeit wurde der Ansatz verallgemeinert und in mancher Hinsicht präzisiert; hierfür dient Grünewald (1998) als Referrenz.

Der Markt wird innerhalb eines **endlichen Zeithorizontes** $[0, T]$ mit $T > 0$ betrachtet, und ist durch einen **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gegeben. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P steht für die subjektive Einschätzung *eines* Marktteilnehmers. Alle auf dem Markt tätigen Investoren halten die gleichen Ereignisse für möglich, beziehungsweise für unmöglich. Mit anderen Worten, die Markteinschätzung des Akteurs A sei gegeben durch das Wahrscheinlichkeitsmaß P, und die des Akteurs B durch P^*, dann gilt P ist äquivalent zu P^*. Die **Informationsstruktur** ist durch eine Familie von $\sigma-$Algebren $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ gegeben, die folgenden Anforderungen genügt

(i) Die *üblichen Bedingungen* gelten – vergleiche Definition 2.3.

(ii) $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

(iii) Für alle $A \in \mathcal{F}_0$ gilt $P(A) \in \{0, 1\}$.

In die auf diese Weise festgelegte Welt werden die Preisprozesse eingebettet. Den Pfad eines Preisprozesses kann man als den Kursverlauf einer bestimmten Anlagemöglichkeit betrachten.

Das **Anlageuniversum** sei gegeben durch den stochastischen Vektorprozeß $\mathbf{S} = \left(S^0, ..., S^N\right)$ mit den Komponenten $S^k = \left\{S^k(t) : 0 \leq t \leq T\right\}$, $k = 0, ..., N$, die den **Preisprozessen** der Anlagen entsprechen. $N + 1$, $N \in \mathbb{N}$, ist die Anzahl der Anlagemöglichkeiten. S^k besitzt für $k = 0, ..., N$ die Eigenschaften

(i) S^k ist (strikt) positiv.

(ii) S^k ist ein *càdlàg–Prozeß.*

(iii) S^k *ist* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$*–adaptiert.*

(iv) $S^k \in \mathcal{H}^2(P)$

Wir nehmen an, daß S^0 ein stetiger FV–Prozeß ist. Die endliche Variation interpretiert man als lokal risikolos. S^0 heißt **risikoloses Geldmarktkonto**. Zur Vereinfachung fordern wir $S^0(0) = 1$ und darüberhinaus soll S^0 die Darstellung

$$S^0(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T,$$

besitzen, wobei $r = \{r(t) : 0 \leq t \leq T\}$ ein positiver adaptierter Prozeß ist.

Bemerkung: Die Annahmen (ii), (iii) und (iv) sind rein technischer Natur. Annahme (i) in der Form "strikt positiv" sichert die Arbitragefreiheit. Würden wir beispielsweise erlauben, daß der Wert einer Aktie auch den Wert Null erreichen und sich danach wieder positiv entwickeln kann, dann bestünde die Möglichkeit, risikolosen Gewinn zu erwirtschaften. Der Anleger sollte dann die Aktie kaufen, wenn sie auf Null gefallen ist, und bei einem beliebigen positiven Wert verkaufen. Es läge kein Risiko vor, da der Aktienwert nicht ins Negative fallen kann. Möglichkeiten dieser Art wollen wir allerdings ausschließen. Zudem bietet diese Voraussetzung die Möglichkeit, die Preisprozesse als Doléans–Dade–Exponential darzustellen.

Definition 3.1 *Der* **risikolose Renditeprozeß** $R^0 = \{R^0(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *sei auf folgende Weise definiert*

$$R^0(t) \equiv \ln\left(S^0(t)\right), \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T. \tag{3.1}$$

R^0 ist wohldefiniert, da S^0 strikt positiv ist. Aus der Definition sehen wir, daß R^0 stetige Pfade besitzt, und $R^0(0) = 0$ gilt. Wegen $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ folgt aus der Itô–Formel für stetige FV–Prozesse

$$R^0(t) = \int_{0+}^t \frac{1}{S^0(s)}\,dS^0(s), \qquad \text{für } t \geq 0. \tag{3.2}$$

R^0 ist ein stochastisches Integral mit einem FV–Prozeß als Integrator. Nach Satz 2.25 ist R^0 ebenfalls ein FV–Prozeß. Aus Korollar 3 von Satz 2.34 – das Doléans–Dade–Exponential stetiger FV–Prozesse – folgt die Darstellung

$$S^0(t) = \exp\left(R^0(t)\right) = \mathcal{E}\left(R^0\right)(t), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{3.3}$$

Beispiel 9 *Die einfachste Möglichkeit, den risikolosen Renditeprozeß zu modellieren, besteht darin, als Verzinsungsrate eine positive reelle Konstante* r *zu wählen. In diesem Fall ist*

$$R^0(t) = \int_0^t r\,dt = rt, \quad \textit{für } 0 \leq t \leq T.$$

Daraus resultiert $S^0(t) = \exp(rt)$.

Das risikolose Geldmarktkonto S^0 spiegelt eine Anlagemöglichkeit wider. Daneben steht der Diskontierungsprozeß β. Hier wird nicht zu einem Zeitpunkt Vermögen angelegt, sondern man betrachtet den Sachverhalt von der umgekehrten Seite. β verwendet man, um zukünftige Zahlungen abzuzinsen.

Definition 3.2 *Der* **Diskontierungsprozeß** $\beta = \{\beta(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *sei erklärt durch*

$$\beta(t) \equiv \frac{1}{S^0(t)} = \exp\left(-R^0(t)\right) = \mathcal{E}\left(-R^0\right)(t), \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{3.4}$$

Der **diskontierte Preisprozeß** $\mathbf{Z} = \left(Z^0, Z^1, ..., Z^N\right)$ *sei gegeben mittels*

$$Z^k(t) \equiv \beta(t)\, S^k(t), \qquad 0 \leq t \leq T \text{ und } k = 0, ..., N. \tag{3.5}$$

Nachdem wir mit $\mathbf{Z}$ und β Vorbereitungen für das weitere Vorgehen getroffen haben, kehren wir zu den Preisprozessen $S^1, ..., S^N$ zurück. Im Falle des Geldmarktkontos konnten wir den risikolosen Renditeprozeß einfach beschreiben, indem wir S^0 logarithmierten. Für $S^1, ..., S^N$ definieren wir die Renditeprozesse über stochastische Integrale. Hierbei greifen wir Satz 2.36 auf. Wir haben gezeigt, daß sich jedes strikt positive Semimartingal als Doléans–Dade–Exponential darstellen läßt.

Definition 3.3 *Für die k–te Anlage sei der* **Renditeprozeß** $R^k = \left\{R^k(t) : 0 \leq t \leq T\right\}$ *definiert durch*

$$R^k(t) \equiv \int_0^t \left(\frac{1}{S^k}\right)_-(u)\, dS^k(u), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T \text{ und } k = 1, ..., N. \tag{3.6}$$

In symbolischer Schreibweise gilt

$$dR^k(t) = \frac{1}{S^k(t-)}\, dS^k(t), \qquad 0 < t \leq T \quad \text{und} \quad R^k(0) = 0 \quad \text{für } k \in \{1, ..., N\}.$$

Die Renditeprozesse sind derart definiert, daß nach Satz 2.36 gilt

$$S^k(t) = S^k(0)\, \mathcal{E}\left(R^k\right)(t), \qquad 0 < t \leq T \quad \text{und } k = 1, ..., N. \tag{3.7}$$

Damit erhalten wir

$$dS^k(t) = S^k(t-)\, dR^k(t), \qquad 0 < t \leq T \quad \text{und } k = 1, ..., N.$$

Die diskontierten Preisprozesse lassen sich mit Satz 2.35 folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} Z^k(t) &= \beta(t)\, S^k(t) && (3.8)\\ &= \mathcal{E}\left(-R^0\right)(t)\, \mathcal{E}\left(R^k\right)(t) && (3.9)\\ &= S^k(0)\, \mathcal{E}\left(R^k - R^0\right)(t), \qquad 0 < t \leq T \quad \text{und } k = 1, ..., N. && (3.10) \end{aligned}$$

R^0 ist ein stetiger FV–Prozeß. Aus diesem Grund ist nach Satz 2.29 $[R^0, R^k] = 0$ für $k = 1, ..., N$.

Definition 3.4 *Der* **diskontierte Rendite Prozeß** $\mathbf{Y} = \left(Y^0, ..., Y^N\right)$ *sei*

$$Y^k(t) \equiv R^k(t) - R^0(t), \qquad 0 < t \leq T \quad \text{und } k = 0, ..., N. \tag{3.11}$$

Den auf diese Weise definierten diskontierten Renditeprozeß setzen wir in (3.10) ein, und erhalten den diskontierten Preisprozeß Z^k als Doléans–Dade–Exponential von Y^k.

$$Z^k(t) = S^k(0)\, \mathcal{E}\left(Y^k\right)(t), \qquad 0 < t \leq T \quad \text{und } k = 1, ..., N. \tag{3.12}$$

Ein am Markt tätiger Akteur investiert sein Geld in die verschiedensten Anlagemöglichkeiten. Die Art und Weise, wie er vorgeht – sprich, wann er welche Anlage kauft oder verkauft, läßt sich durch seine **Handelsstrategie** $\Phi = (\phi^0, ..., \phi^N)$ modellieren. Zu einem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gibt $\phi^k(t)$ an, wieviele Anteile der k–ten Anlage der Investor gerade besitzt, sich also im Portfolio des Investors befinden. Der zur Handelsstrategie gehörende **Vermögensprozeß** ist der Gesamtwert der Anlagemöglichkeiten, aus denen sich das Portfolio zusammensetzt.

Definition 3.5 *Der* **Vermögensprozeß** $U^\Phi = \left\{U^\Phi(t) : 0 \leq t \leq T\right\}$, *der zu einer Handelsstrategie* Φ *gehört, sei gegeben durch*

$$U^\Phi(t) \equiv \sum_{k=0}^{N} \phi^k(t)\, S^k(t), \quad \textit{für } 0 \leq t \leq T. \tag{3.13}$$

Den **diskontierten Vermögensprozeß** $V^\Phi = \left\{V^\Phi(t) : 0 \leq t \leq T\right\}$ *definieren wir durch*

$$V^\Phi(t) \equiv \beta(t)\, U^\Phi(t) = \sum_{k=0}^{N} \phi^k(t)\, Z^k(t), \quad \textit{für } 0 \leq t \leq T. \tag{3.14}$$

$U^\Phi(0)$, *bzw.* $V^\Phi(0)$, *nennt man das* **Anfangsvermögen** *von* U^Φ, *beziehungsweise* V^Φ.

Eine Handelsstrategie wird durch einen vektorwertigen vorhersehbaren Prozeß $\Phi = (\phi^0, ..., \phi^N)$ dargestellt mit $\phi^k = \left\{\phi^k(t) : 0 \leq t \leq T\right\}$ für $k = 0, ..., N$. Die Forderung der Vorhersehbarkeit bedeutet, daß die Entscheidung des Investors, wie er sein Geld in $t \in [0, T]$ anlegt, "kurz" vor dem Zeitpunkt feststehen muß, an dem die Marktpreise der Anlagemöglichkeiten bekannt sind. Die Menge der Handelsstrategien, die im weiteren verwendet werden, müssen noch gewisse technische Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen spielen eine Rolle bei der Überprüfung der Arbitragefreiheit. Die **Menge der zulässigen Handelsstrategien** $\mathcal{T}$ sei gegeben durch

$$\mathcal{T} \equiv \left\{\Phi = \left(\phi^0, ..., \phi^N\right) : \phi^k \text{ ist vorhersehbar und } \phi^k \cdot S^k \in \mathcal{H}^2 \quad \text{für } k = 0, ..., N\right\} \tag{3.15}$$

Wir beschränken uns auf Handelstrategien, die mit einem fest eingesetzten Startkapital arbeiten, bei denen also kein Geld zu– oder abfließt. Die Umschichtungen im Portfolio sollen so vorgenommen werden, daß eine bestimmte Menge an Anlagemöglichkeit verkauft wird, um zeitgleich den Gegenwert in anderen Anlagemöglichkeiten zu investieren. Die Änderungen des Portfoliowertes werden allein durch die Preisschwankungen der Anlagen verursacht. Diese Strategien heißen selbstfinanzierend.

Definition 3.6 *Eine Handelsstrategie* Φ *heißt genau dann* **selbstfinanzierend**, *wenn gilt*

$$U^\Phi(t) = \sum_{k=0}^{N} \left(\phi^k \cdot S^k\right)(t) = \sum_{k=0}^{N} \int_0^t \phi^k(s)\, dS(s), \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T. \tag{3.16}$$

Ein Marktmodell genügt der Forderung der Arbitragefreiheit, wenn jede selbstfinanzierende Handelsstrategie, die mit Sicherheit – eigentlich P–f.s. – einen nicht negativen Vermögensprozeß einen strikt positiven Preis besitzt.

Definition 3.7 *Ein Marktmodell ist* **arbitragefrei**, *falls aus*

$$\Phi \in \mathcal{T} \textit{ selbstfinanzierend mit } P\left(U^\Phi(t) \geq 0\right) = 1 \textit{ und } P\left(U^\Phi(T) > 0\right) > 0$$

folgt

$$U^\Phi(0) > 0 \quad P\text{–}\textit{f.s.}$$

Neben den gewöhnlichen Anlagemöglichkeiten gibt es noch andere "Instrumente", die am Markt gehandelt werden. Eine spezielle Form dieser Instrumente stellen beispielweise Kauf– und Verkaufsoptionen dar. Die Instrumente fassen wir unter dem Begriff *Contingent Claims* zusammen. Unter den *Contingent Claims* zeichnen wir diejenigen aus, welche sich durch ein selbstfinanzierendes Portfolio darstellen lassen. So ist es innerhalb des Black&Scholes–Modells möglich, eine Europäische Aktienoption mithilfe eines Portfolios aus Aktien und Bonds nachzubilden.

Definition 3.8 *Unter einem* **Contingent Claim** X *versteht man eine quadratintegrierbare Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Einen Contingent Claim X *nennt man* **duplizierbar**, *wenn eine selbstfinanzierende Handelsstrategie* $\Phi \in \mathcal{T}$ *existiert mit* $U^\Phi(T) = X$. *Da das Anfangsvermögen* $U^\Phi(0)$ *benötigt wird, um* X *in* T *nachzubilden, heißt* $\pi_X \equiv U^\Phi(0)$ *der Preis von* X.
Ein Marktmodell heißt **vollständig**, *wenn jeder Contingent Claim duplizierbar ist.*

Mit $\mathcal{Q}$ sei die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ bezeichnet, für deren Elemente Q gilt

(i) P und Q sind äquivalent.

(ii) $\frac{dQ}{dP}$ ist P–quadratintegrierbar mit $\frac{dQ}{dP}(0) = 1 \quad P$–f.s.

(iii) $\mathbf{Z} = (Z^0, ..., Z^N)$ ist ein Q–Martingal.

$Q \in \mathcal{Q}$ nennt man ein zu P **äquivalentes Martingalmaß**.

Eine fundamentale **Annahme** treffen wir mit

$$\mathcal{Q} \text{ ist nicht leer.}$$

Diese Annahme sichert, daß die Forderung der Arbitragefreiheit nicht verletzt wird. Wir wählen von nun an ein festes $Q \in \mathcal{Q}$ als **Referenzmaß**.

Bemerkung: Im allgemeinen liegt das "subjektive" Maß P nicht in $\mathcal{Q}$. Trivialerweise sind (i) und (ii) erfüllt, doch sind die diskontierten Preisprozesse nicht unbedingt P–Martingale. Geht man allerdings davon aus, daß $P \in \mathcal{Q}$ gilt, dann spricht man von **Martingale Modelling**. Denn unter dieser Voraussetzung sind die diskontierten Preisprozesse Martingale unter dem "subjektiven" Maß P.

3.2 Folgerungen aus dem Marktmodell

In diesem Abschnitt untersuchen wir das oben definierte Marktmodell. Zunächst studieren wir die selbstfinanzierenden Handelsstrategien aus $\mathcal{T}$. Eine Handelsstrategie ist selbstfinanzierend, wenn $U^\Phi = \sum_{k=0}^N \phi^k \cdot S^k$ gilt. Wir zeigen, daß diese Definition zur Formulierung mithilfe der diskontierten Preisprozesse $V^\Phi = \sum_{k=0}^N \phi^k \cdot Z^k$ äquivalent ist. Allerdings benötigen wir hierfür folgende Proposition.

Proposition 3.1 *Sei* A *ein* FV*–Prozeß mit stetigen Pfaden sowie* $A(0) = 0$ *und* H *ein vorhersehbarer Prozeß. Dann gilt*

$$H \cdot A \;=\; H_- \cdot A \quad P\text{–}f.s.$$

Beweis:
Nach Satz 2.25 ist das stochastische Integral eines FV–Prozeß ununterscheidbar vom pfadweise berechneten Lebesgue–Stieltjes–Integral. Sei $\mathcal{N} \subset \Omega$ eine Nullmenge, so daß auf $\Omega \setminus \mathcal{N}$ das stochastische Integral mit dem pfadweise berechneten Lebesgue–Stieltjes–Integral übereinstimmt. Wir nehmen ein festes $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$.

$$
\begin{aligned}
(H \cdot A)(t,\omega) &= H(0,\omega)A(0,\omega) + \int_{0+}^{t} H(s,\omega)\, dA(s,\omega) \\
&= \int_{0+}^{t} H(s,\omega)\, dA(s,\omega) \\
&= \int_{0+}^{t} \left(H(s-,\omega) + \Delta H(s,\omega)\right)\, dA(s,\omega) \\
&= H_-(0,\omega)A(0,\omega) + \int_{0+}^{t} H_-(s,\omega)\, dA(s,\omega) + \int_{0+}^{t} \Delta H(s,\omega)\, dA(s,\omega) \\
&= (H_- \cdot A)(t,\omega) + \sum_{0<s\le t} \Delta H(s,\omega)\Delta A(s,\omega) \\
&= (H_- \cdot A)(t,\omega), \qquad\qquad \text{für } 0 \le t \le T.
\end{aligned}
$$

Im vorletzten Schritt haben benutzt, daß $\Delta A = 0$ gilt. Denn wir haben A als pfadweise stetig vorausgesetzt. □

Lemma 3.2 $\Phi \in \mathcal{T}$ *ist genau dann eine selbstfinanziernde Handelsstrategie, wenn gilt*

$$V^\Phi = \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot Z^k \quad P\text{–}f.s.$$

Beweis:
Zunächst setzen wir Φ als selbstfinanzierend voraus. Dann gilt $U^\Phi = \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot S^k$. Mit der partiellen Integration und mit der Eigenschaft, daß β ein stetiger FV–Prozeß mit $\beta(0) = 1$ ist, sehen wir

$$
\begin{aligned}
V^\Phi &= \beta U^\Phi \\
&= \beta_- \cdot U^\Phi \quad + \quad U_-^\Phi \cdot \beta \quad + \quad [\beta, U^\Phi] \\
&= \sum_{k=0}^{N} \beta_- \cdot \left(\phi^k \cdot S^k\right) \quad + \quad \sum_{k=0}^{N} \left(\phi_-^k\, S_-^k\right) \cdot \beta \quad + \quad V^\Phi(0).
\end{aligned}
$$

Wegen $\beta(\cdot) = 1 - \int_0^{\cdot} \beta(t)\, dR^0(t)$ und $S^k(\cdot) = S^k(0) + \int_0^{\cdot} S^k(t)\, dR^k(t)$ folgt

$$
\begin{aligned}
V^\Phi &= \sum_{k=0}^{N} \left(\beta_-\, \phi^k\right) \cdot S^k \quad + \quad \sum_{k=0}^{N} (\phi_-^k\, S_-^k) \cdot \left(1 - \beta_- \cdot R^0\right) \quad + \quad V^\Phi(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(\beta_-\, \phi^k\right) \cdot \left(S^k(0) + S_-^k \cdot R^k\right) \quad + \quad \sum_{k=0}^{N} \left(\phi_-^k\, S_-^k\right) \cdot 1 \\
&\quad - \sum_{k=0}^{N} (\phi_-^k\, S_-^k) \cdot \left(\beta_- \cdot R^0\right) \quad + \quad V^\Phi(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N} \Big(\beta_- \, \phi^k\Big) \cdot \Big(S^k_- \cdot R^k\Big) \quad + \quad \sum_{k=0}^{N} \Big(\beta_- \, \phi^k\Big) \cdot S^k(0) \quad + \quad \sum_{k=0}^{N} \phi^k_-(0) \, \underbrace{S^k_-(0)}_{=0} \, 1 \\
&\quad - \quad \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi^k_- \, \beta_- \, S^k_-\Big) \cdot R^0 \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi^k \, \beta_- \, S^k_-\Big) \cdot R^k \quad + \quad \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\beta_-(0)}_{=0} \, \phi^k(0) \, S^k(0) \\
&\quad - \quad \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi^k \, \beta \, S^k\Big) \cdot R^0 \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi^k \, Z^k_-\Big) \cdot R^k \quad - \quad \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot \Big(\Big(\beta \, S^k\Big) \cdot R^0\Big) \quad + \quad V^{\Phi}(0).
\end{aligned}
$$

Der letzte Schritt gilt, denn $Z^k = \beta \, S^k$ für $k = 1, ..., N$. Nun wenden wir Proposition 3.1 auf den Ausdruck $\Big(\beta \, S^k\Big) \cdot R^0$ an.

$$
\begin{aligned}
V^{\Phi} &= \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi^k \, Z^k_-\Big) \cdot R^k \quad - \quad \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot \Big(\Big(\beta_- \, S^k_-\Big) \cdot R^0\Big) \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi^k \, Z^k_-\Big) \cdot R^k \quad - \quad \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi^k \, \beta_- \, S^k_-\Big) \cdot R^0 \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi^k \, Z^k_-\Big) \cdot \Big(R^k - R^0\Big) \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \Big(\phi^k \, Z^k_-\Big) \cdot Y^k \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot \Big(Z^k_- \cdot Y^k\Big) \quad + \quad V^{\Phi}(0)
\end{aligned}
$$

Aus der Darstellung von Z^k als Doléans–Dade–Exponential von Y^k, $Z^k = Z^k(0) \, \mathcal{E}(Y^k) = Z^k(0) + (Z^k_- \cdot Y^k)$, folgt

$$
\begin{aligned}
V^{\Phi} &= \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot \Big(Z^k - Z^k(0)\Big) \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot Z^k \quad - \quad \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot Z^k(0) \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot Z^k \quad - \quad \sum_{k=0}^{N} \phi^k(0) \, Z^k(0) \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot Z^k \quad - \quad V^{\Phi}(0) \quad + \quad V^{\Phi}(0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \phi^k \cdot Z^k, \qquad P\text{–}f.s.
\end{aligned}
$$

Wenn Φ eine selbstfinanzierend Handelsstrategie aus $\mathcal{T}$ ist, haben wir $V^\Phi = \sum_{k=0}^N \phi^k \cdot Z^k$ gezeigt. Gilt für eine Handelsstrategie aus $\mathcal{T}$ die Gleichheit $V^\Phi = \sum_{k=0}^N \phi^k \cdot Z^k$, dann zeigt man in analoger Vorgehensweise, daß $U^\Phi = \sum_{k=0}^N \phi^k \cdot S^k$ gilt. Das ist gleichbedeutend damit, daß Φ eine selbstfinanzierend Handelsstrategie ist. □

Eine wichtige Voraussetzung für unser weiteres Vorgehen ist, daß für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\Phi \in \mathcal{T}$ der diskontierte Vermögensprozeß V^Φ ein Q–Martingal ist.

Lemma 3.3 *Die diskontierten Preisprozesse $Z^1, ..., Z^N$ liegen in $\mathcal{H}^2(P)$. Ist $\Phi \in \mathcal{T}$ eine selbstfinanzierende Handelstrategie, dann ist $V^\Phi = \beta U^\Phi$ ein $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingal. Insbesondere sind $\phi^1 \cdot Z^1$, ..., $\phi^N \cdot Z^N$ und V^Φ Q–Martingale, falls die Preisprozesse $S^1, ..., S^N$ stetige Pfade besitzen.*

Beweis:
Wir gliedern den Beweis in zwei Teile.

Teil 1
In diesem Teil des Beweises zeigen wir, daß Z^k und V^Φ $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingale sind. Den Index k lassen wir im folgenden weg, da sich für jedes beliebige $k \in \{1, ..., N\}$ die gleiche Argumentation anwenden läßt. Wir zeigen zunächst, daß $Z = \beta S \in \mathcal{H}^2(P)$ aus $S \in \mathcal{H}^2(P)$ folgt. In gleicher Weise gilt die Aussage für V^Φ, da U^Φ als endliche Summe von $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingalen selbst ein $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingal ist (Eigenschaft der Subadditivität einer Norm).
S ist aus $\mathcal{H}^2(P)$ und besitzt damit die eindeutige Zerlegung

$$S = S(0) + M + A,$$

wobei $M = \{M(t) : 0 \leq t \leq T\}$ ein lokales Martingal und $A = \{A(t) : 0 \leq t \leq T\}$ ein vorhersehbarer FV–Prozeß ist mit $M(0) = A(0) = 0$. Insbesondere gilt

$$\mathbf{E}_P\{[M,M](T)\} < \infty \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_P\left\{|A|(T)^2\right\} < \infty. \tag{3.17}$$

Z ist ein spezielles Semimartingal, denn nach der partiellen Integration, Korollar 2, Satz 2.27, und, da β ein stetiger FV–Prozeß ist, gilt

$$\begin{aligned} Z &= \beta S \\ &= \beta_- \cdot S + S_- \cdot \beta + [\beta, S] \\ &= \beta_- \cdot M + \beta_- \cdot A + S_- \cdot \beta + \beta(0)S(0) \\ &= Z(0) + \beta_- \cdot M + \beta_- \cdot A + S_- \cdot \beta \\ &\equiv Z(0) + M_Z + A_Z\,, \end{aligned}$$

wobei die Prozesse $M_Z = \{M_Z(t) : 0 \leq t \leq T\}$ und $A_Z = \{A_Z(t) : 0 \leq t \leq T\}$ durch $M_Z \equiv \beta_- \cdot M$ und $A_Z \equiv \beta_- \cdot A + S_- \cdot \beta$ definiert sind. M_Z ist nach Satz 2.26 ein lokales Martingal und A_Z nach Satz 2.25 ein vorhersehbarer FV–Prozeß. Weiter gilt $M_Z(0) = A_Z(0) = 0$. Im folgenden berechnen wir getrennt die $\mathcal{H}^2$–Norm von M_Z und A_Z.
β ist nach Definition ein monoton fallender FV–Prozeß mit Startwert 1; d.h.: $0 \leq \beta(t) \leq 1$ für $t \in [0, T]$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} ||M_Z||^2_{\mathcal{H}^2(P)} &= \mathbf{E}_P\{[M_Z, M_Z](T)\} \\ &= \mathbf{E}_P\{[\beta_- \cdot M, \beta_- \cdot M](T)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{E}_P\left\{\int_0^T \beta(t-)^2 d[M,M](t)\right\} \\
&\leq \mathbf{E}_P\left\{\int_0^T d[M,M](t)\right\} \\
&= \mathbf{E}_P\left\{[M,M](T)\right\} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen (3.17). $\mathcal{P}$ sei die Menge aller endlicher Partitionen von $[0,T]$. Nach Definition der totalen Variation gilt

$$
\begin{aligned}
|A_Z|(T) &= \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} |A_Z(t_{i+1}) - A_Z(t_i)| \\
&= \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} \left|\int_{t_i+}^{t_{i+1}} \beta(t)\,dA(t) + \int_{t_i+}^{t_{i+1}} S(t-)\,d\beta(t)\right| \\
&\leq \underbrace{\sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} \left|\int_{t_i+}^{t_{i+1}} \beta(t)\,dA(t)\right|}_{\equiv V_1} + \underbrace{\sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} \left|\int_{t_i+}^{t_{i+1}} S(t-)\,d\beta(t)\right|}_{\equiv V_2}
\end{aligned}
$$

V_1 und V_2 sind Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$ mit denen wir die $\mathcal{H}^2(P)$–Norm von A_Z abschätzen. Für V_1 gilt nach dem Korollar zu Theorem 48, Chapter I, von Protter (1995)

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} \left|\int_{t_i+}^{t_{i+1}} \beta(t-)\,dA(t)\right| \\
&\leq \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} \int_{t_i+}^{t_{i+1}} \underbrace{|\beta(t-)|}_{\leq 1}\,|dA|(t) \\
&\leq \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} \int_{t_i+}^{t_{i+1}} |dA|(t) \\
&= |A|(T),
\end{aligned}
$$

da $|A|$ ein monoton wachsender Prozeß ist.

Bei der Berechnung für V_2 nutzen wir aus, daß S nicht–negativ ist, und β ein monoton fallender Prozeß mit Startwert 1 ist. Es sei $S^*(T) \equiv \sup_{0\leq t\leq T} |S(t)|$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} \left|\int_{t_i+}^{t_{i+1}} S(t-)\,d\beta(t)\right| \\
&= \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \sum_{t_i\in\pi} \int_{t_{i+1}}^{t_i+} S(t-)\,d\beta(t) \\
&= \sup_{\pi\in\mathcal{P}} \int_T^0 S(t-)\,d\beta(t) \\
&\leq \int_T^0 S^*(T)\,d\beta(t) \\
&= S^*(T) \int_T^0 d\beta(t) \\
&= S^*(T)\,(\beta(0) - \beta(T)) \\
&\leq S^*(T).
\end{aligned}
$$

Damit und mit Satz 2.38 erhalten wir

$$\begin{aligned}
||A_Z||^2_{\mathcal{H}^2(P)} &= \mathbf{E}_P\left\{|A_Z|(T)^2\right\} \\
&\le \mathbf{E}_P\left\{(V_1+V_2)^2\right\} \\
&\le 2\left(\mathbf{E}_P\left\{{V_1}^2\right\}+\mathbf{E}_P\left\{{V_2}^2\right\}\right) \\
&\le 2\left(\mathbf{E}_P\left\{|A|(T)^2\right\}+\mathbf{E}_P\left\{S^*(T)^2\right\}\right) \\
&\le 2\left(\mathbf{E}_P\left\{|A|(T)^2\right\}+8\,||S||^2_{\mathcal{H}^2(P)}\right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen (3.17) und, da S ein $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingal ist.
Wir haben gezeigt, daß $||Z-Z(0)||_{\mathcal{H}^2(P)} = ||M_Z||_{\mathcal{H}^2(P)} + ||A_Z||_{\mathcal{H}^2(P)} < \infty$ gilt. Mit anderen Worten, Z ist ein $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingal. Aus der gleichen Argumentation schließen wir, daß für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\Phi \in \mathcal{T}$ der diskontierte Vermögensprozeß V^Φ ein $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingal ist.

Teil 2

Im zweiten Teil setzen wir voraus, daß die Preisprozesse $S^1,...,S^N$ stetige Pfade besitzen. Es reicht aus, die lokale Martingaleigenschaft von $\phi^k \cdot Z^k$ unter dem Maß Q zu zeigen, $k=1,..,N$. Denn nach Voraussetzung ist $\left(\phi^k \cdot Z^k\right)(0) = \phi^k(0)\,Z^k(0) \in \mathbb{R}$, da $\mathcal{F}_0$ ausschließlich Mengen vom Maß 0 und 1 enthält, $\dfrac{dQ}{dP}$ ist quadratintegrierbar und $\phi^k \cdot Z^k$ liegt, wie wir soeben bewiesen haben, in $\mathcal{H}^2(P)$. Aus dem Korollar zu Satz 2.38 folgt dann, daß $\phi^k \cdot Z^k$ ein Q–Martingal ist. Damit ist V^Φ eine endliche Summe von Q–Martingalen und folglich selbst ein Q–Martingal.
Unsere Vorgehensweise ist wie folgt: Wir zeigen, $\phi^k \cdot Z^k$ ist ein lokales Q–Martingal für $k = 0,...,N$. Daraus folgt, daß $V^\Phi = \sum_{k=0}^N \phi^k \cdot Z^k$ ein lokales Q–Martingal ist, woraus sich das Gewünschte mit der oben angeführten Überlegung ergibt. Wir verzichten erneut auf den Index k. Die lokale Martingaleigenschaft von $\phi \cdot Z$ zeigen wir mithilfe einiger Aussagen von Protter (1995). Im wesentlichen wenden wir Theorem 28, Chapter IV, an. Als Voraussetzung benötigen wir

(i) Z ist ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal unter Q.

(ii) ϕ ist ein vorhersehbarer Prozeß und es existiert eine wachsende Folge von Stopzeiten $(T_n)_{n\ge1}$ mit $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ Q–f.s., für die gilt

$$\mathbf{E}_Q\left\{\int_0^{T_n} \phi(s)^2\, d[Z,Z](s)\right\} < \infty\,, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Gelten (i) und (ii), dann ist $\phi \cdot Z$ ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal.
Wir zeigen zunächst, daß die Voraussetzung (i) erfüllt ist. Die Beweisstruktur läßt sich in ihren Grundzügen auch auf (ii) anwenden. Z ist nach Definintion des äquivalenten Martingalmaßes ein Q–Martingal. Wie wir bereits gezeigt haben, liegt Z in $\mathcal{H}^2(P)$; mit anderen Worten $||Z||_{\mathcal{H}^2(P)} < \infty$. Mit Theorem 24, Chapter IV, von Protter (1995) sehen wir

$$\mathbf{E}_P\left\{[Z,Z](T)\right\} \le 3\,||Z||^2_{\mathcal{H}^2(P)} < \infty. \tag{3.18}$$

Der quadratische Variationsprozeß eines Semimartingals ist nach Satz 2.27 ein wachsender nicht–negativer Prozeß. Es gilt

$$\sup_{0\le t\le T}[Z,Z](t) = [Z,Z](T).$$

Mit (3.18) folgt

$$\sup_{0\le t\le T}[Z,Z](t) < \infty\,, \qquad P\text{–f.s. und } Q\text{–f.s.} \tag{3.19}$$

Q–f.s. folgt, da P und Q äquivalente Maße sind. Wir konstruieren eine wachsende Folge von Stopzeiten $(R_n)_{n\ge1}$, so daß diese Folge Z im Sinne von Definition 2.19 als quadratintegrierbar lokalisiert. Daraus folgt direkt die Forderung (i). Die Folge $(R_n)_{n\ge1}$ muß $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ Q–f.s. erfüllen. Wir betrachten in unserem Rahmen einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum, der auf einen endlichen Zeithorizont T zugeschnitten ist. In diesem Zusammenhang kann $\lim_{n\to\infty} R_n$ höchstens gleich T sein. Wir definieren $(R_n)_{n\ge1}$ durch

$$R_n(\omega) \equiv \begin{cases} \inf\{t\in[0,T]:[Z,Z](t,\omega)>n\}\,, & \text{falls } [Z,Z](T,\omega)>n \\ T\,, & \text{falls } [Z,Z](T,\omega)\le n \end{cases} \qquad \text{für } n\in\mathbb{N}.$$

Nach Theorem 3, Chapter I, von Protter (1995) ist R_n eine Stopzeit für $n\in\mathbb{N}$. Aus (3.19) folgt $\lim_{n\to\infty} R_n T$ Q–f.s. Aus der Definition sehen wir, daß $(R_n)_{n\ge1}$ eine wachsende Folge ist, und

$$\mathbf{E}_Q\left\{[Z^{R_n},Z^{R_n}](T)\right\}\le n\,, \qquad \text{für } n\in\mathbb{N},$$

gilt, da S stetige Pfade besitzt. Z ist als Martingal vorausgesetzt, und damit ist Z ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal unter dem Maß Q.
ϕ ist Komponente einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie und deswegen ein vorhersehbarer Prozeß. Wir beweisen nun, daß

$$[Z,Z](t) = Z(0)^2 + \int_{0+}^t \beta(s)^2\, d[S,S](s)\,, \qquad \text{für } 0\le t\le T. \tag{3.20}$$

gilt. Diese Gleichheit zeigen wir, indem wir ausnutzen, daß β ein stetiger FV–Prozeß ist. Für den quadratischen Kovariatonsprozeß gilt damit nach Satz 2.29 $d[\beta,\cdot]=0$. Um die Notation zu erleichtern definieren wir für ein Semimartingal $X=\{X(t):0\le t\le T\}$ den quadratischen Variationsprozeß $\langle X\rangle = \{\langle X\rangle(t):0\le t\le T\}$ durch $\langle X\rangle(t)\equiv[X,X](t)$ für $0\le t\le T$. Mittels der partiellen Integration, Korollar 2, Satz 2.27, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle Z\rangle(t) &= \langle\beta S\rangle(t)\\
&= \langle\beta_-\cdot S + S_-\cdot\beta + [\beta,S]\rangle(t)\\
&= \langle\beta_-\cdot S + S_-\cdot\beta + \beta(0)\,S(0)\rangle(t)\\
&= \beta(0)^2\,S(0)^2 + \langle\beta_-\cdot S + S_-\cdot\beta\rangle(t)\\
&= Z(0)^2 + \langle\beta_-\cdot S\rangle(t) + 2\,[\beta_-\cdot S, S_-\cdot\beta](t) + \langle S_-\cdot\beta\rangle(t)\\
&= Z(0)^2 + \int_0^t \beta(s-)^2\, d[S,S](s) + 2\int_0^t \beta(s-)S(s-)\, d[S,\beta](s) + \int_0^t S(s-)^2\, d[\beta,\beta](s)\\
&= Z(0)^2 + \int_0^t \beta(s-)^2\, d[S,S](s)\,, \qquad \text{für } 0\le t\le T.
\end{aligned}$$

Die eben gezeigt Gleichheit gilt für "beliebige" Preisprozesse S; d.h.: auf die Forderung, daß S stetige Pfade besitzt, kann in dem Beweis verzichtet werden. S ist ein $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingal und $\Phi\in\mathcal{T}$. Mit der oben verwendeten Abschätzung und $\beta\le1$ sehen wir

$$\mathbf{E}_P\left\{\int_0^T \phi(s)^2\, d[Z,Z](s)\right\} \;=\; \mathbf{E}_P\left\{\int_0^T \phi(s)^2\beta(s)^2\, d[S,S](s)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathbf{E}_P \left\{ \int_0^T \phi(s)^2 \, d[S,S](s) \right\} \\
&\leq 3 \, ||\phi \cdot S||^2_{\mathcal{H}^2(P)} \\
&< \infty \, .
\end{aligned}
$$

Wir nutzen erneut, daß der quadratische Variationsprozeß $[\phi \cdot Z, \phi \cdot Z]$ monoton wachsend sowie nicht–negativ ist, und erhalten

$$
\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \phi(s)^2 \, d[Z,Z](s) < \infty \, , \qquad P\text{–f.s. und } Q\text{–f.s.} \tag{3.21}
$$

Wir definieren die Folge von Stopzeiten $(T_n)_{n \geq 1}$ mittels

$$
T_n \equiv \begin{cases} \inf \left\{ t \in [0,T] : \int_0^t \phi(s)^2 \, d[Z,Z](s) > n \right\} \, , & \text{falls } [\phi \cdot Z, \phi \cdot Z](T,\omega) > n \\ T \, , & \text{falls } [\phi \cdot Z, \phi \cdot Z](T,\omega) \leq n \end{cases} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.
$$

Mit der gleichen Begründung, die wir im Fall von $(R_n)_{n \geq 1}$ angeführt haben, sehen wir, daß $(T_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Folge von Stopzeiten ist und wegen (3.21) $\lim_{n \to \infty} T_n = T$ Q–f.s. gilt. Nach Konstruktion und wegen der Stetigkeit von Z erhalten wir

$$
\mathbf{E}_Q \left\{ \int_0^{T_n} \phi(s)^2 \, d[Z,Z](s) \right\} \leq n \, , \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.
$$

Damit werden wir Forderung (ii) gerecht. $\phi \cdot Z$ ist ein lokal quadratintegrierbares lokales Martingal, und nach der Argumentation zu Beginn von Beweisteil 2 ein Q–Martingal. □

Bemerkung:

(i) Im letzten Teil haben wir vorausgestzt, daß die Preisprozesse stetige Pfade besitzen. Man kann diese Einschränkung um den Preis komplizierter technischer Forderungen an die zulässigen Handelstrategien, wie sie beispielsweise in Theorem 31, Chapter IV, von Protter (1995) angegeben sind, fallenlassen, so daß die Aussage erhalten bleibt.

(ii) Ein möglicher Ausweg ist das oben erwähnte **Martingale Modelling**. Die Preisprozesse sind unter dem subjektiven Maß P derart modelliert, daß die diskontierten Preisprozesse P–Martingale sind. Mit anderen Worten, es gilt $P \in \mathcal{Q}$. Nach Teil 1 ist ein beliebiger diskontierter Preisprozeß Z ein $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingal und zugleich ein Martingal, da wir $P \in \mathcal{Q}$ voraussetzen. Folglich ist Z ein quadratintegrierbares P–Martingal. Aus (3.20) erhalten wir

$$
\mathbf{E}_P \left\{ \int_0^T \phi(s)^2 \, d[Z,Z](s) \right\} \leq \mathbf{E}_P \left\{ \int_0^T \phi(s)^2 \, d[S,S](s) \right\} \leq 3 \, ||\phi \cdot S||^2_{\mathcal{H}^2(P)} < \infty \, .
$$

Nach Satz 2.39 ist $\phi \cdot Z$ ein quadratintegrierbares Martingal unter dem Maß P – und damit in $\mathcal{H}^2(P)$.

Lemma 3.3 liefert die Grundlage, duplizierbare *Contingent Claims* zu bewerten. Darüberhinaus sind wir dann in einem vollständigen Marktmodell in der Lage, den eindeutigen fairen Preis eines beliebigen *Contingent Claims* zu berechnen.

Satz 3.4 *Sei X ein duplizierbarer Contingent Claim und $\Phi \in \mathcal{T}$ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit $U^\Phi(T) = X$. Dann ist der arbitragefreie Preis von X in t durch*

$$U^\Phi(t) = \frac{1}{\beta(t)} \mathbf{E}_Q\{\beta(T)\, X | \mathcal{F}_t\}, \quad \text{für } 0 \le t \le T,$$

gegeben und hängt nicht von der speziellen Wahl von $Q \in \mathcal{Q}$ ab.

Beweis:
Nach Lemma 3.3 ist $V^\Phi = \sum_{k=0}^N \phi^k \cdot Z^k$ ein Martingal unter Q. Mit der Beziehung $V^\Phi = \beta\, U^\Phi$ gilt

$$\begin{aligned} U^\Phi(t) &= \frac{1}{\beta(t)} V^\Phi(t) &=& \frac{1}{\beta(t)} \mathbf{E}_Q\{V^\Phi(T)|\mathcal{F}_t\} \\ &= \frac{1}{\beta(t)} \mathbf{E}_Q\{\beta(T)\, U^\Phi(T)|\mathcal{F}_t\} &=& \frac{1}{\beta(t)} \mathbf{E}_Q\{\beta(T)\, X|\mathcal{F}_t\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Nach Definition 3.6 ist U^Φ durch $U^\Phi = \sum_{k=0}^N \phi^k \cdot S^k$ gegeben. Für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ können wir U^Φ auf die eben gezeigte Weise darstellen, was naturgemäß vom Maß Q unabhängig ist. □

Die erwartete Rendite eines diskontierten Wertpapiers beträgt unter dem Maß Q Null. Das ist gleichbedeutend damit, daß die diskontierten Preisprozesse Q–Martingal sind. Hat der risikolose Renditeprozeß die Gestalt $R^0(t) = \int_0^t r\, ds = rt$ für $t \ge 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_Q\{S^k(T)|\mathcal{F}_t\} &= e^{rT}\, \mathbf{E}_Q\{\beta(T) S^k(T)|\mathcal{F}_t\} = e^{rT}\, e^{-rt} S^k(t) = e^{-r(T-t)} S^k(t)\,, \\ \mathbf{E}_Q\{Z^k(T)|\mathcal{F}_t\} &= Z^k(t), \qquad \text{für } t \ge 0 \text{ und } k = 1, ..., N. \end{aligned}$$

Die beiden folgenden Sätze arbeiten mit der Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{Q}$. Die abstrakte Konstruktion von $\mathcal{Q}$ löst sich hier auf und zeigt, welche Aussagekraft und praktischer Nutzen in ihr liegt.
Die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{Q}$ haben wir als eine nicht–leere Menge vorausgesetzt. Das ist eine hinreichende Bedingung für die Arbitragefreiheit des Marktmodells.

Satz 3.5 *Existiert ein zu P äquivalentes Martingalmaß Q, dann ist das Marktmodell arbitragefrei.*

Beweis:
Φ ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie aus $\mathcal{T}$ mit

$$V^\Phi(T) = V^\Phi(0) + \sum_{k=0}^N \int_{0+}^T \phi^k(t)\, dZ^k(t) \ge 0 \quad P\text{–f.s.} \quad \text{und} \quad P\Big(V^\Phi(T) > 0\Big) > 0,$$

dann folgt mit Satz 3.4

$$V^\Phi(0) = \mathbf{E}_Q\{V^\Phi(T)\} > 0.$$

Die Bedingungen aus der Definition der Arbitragefreiheit können wir von U^Φ auf V^Φ übertragen, da β ein strikt positiver Prozeß ist und $V^\Phi = \beta\, U^\Phi$ gilt. □

Eine hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit eines Marktmodells liefert der folgende Satz.

Satz 3.6 *Besteht die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{Q}$ aus einem Element, dann ist das Marktmodell vollständig.*

3.3 Das verallgemeinerte Black&Scholes–Modell

Wir betrachten nun ein mehrdimensionales Diffusionsmodell, bestehend aus dem risikolosen Geldmarktkonto S^0 und $N \in \mathbb{N}$ möglicherweise korrelierten Aktien $S^1, ..., S^N$. Die Verzinsungsrate auf dem Geldmarktkonto sei wie in Beispiel 3.1 eine reelle Konstante $r \geq 0$. Dann gilt

$$R^0(t) \equiv \int_0^t r\, ds = r\, t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Die Aktienpreise folgen einer geometrischen Brownschen Bewegung. Allerdings wollen wir hier nicht direkt die Aktienpreisprozesse modellieren, wir beginnen mit den diskontierten Renditeprozessen und entwickeln über die diskontierten Preisprozesse schließlich die Preisprozesse $S^1, ..., S^N$.

$\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ sei eine nicht–singuläre $N \times N$–Matrix. Wir definieren die **Kovarianzmatrix** $\Sigma = (s_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ durch

$$s_{ij} \equiv \sum_{k=1}^{N} \lambda_{ik}\lambda_{jk} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq N,$$

und $\sigma_k \equiv \sqrt{s_{kk}}$ für $k = 1, ..., N$. Sei $\mu = (\mu^1, ..., \mu^N)^T$ ein konstanter N-dimensionaler Vektor mit reellen Einträgen und $B = \left(B^1, ..., B^N\right)^T$ unabhängige Standard Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{G}, P, (\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq T})$. Den **diskontierten Renditeprozeß Y** erklären wir durch

$$Y(t) \equiv \Lambda\, B + \mu\, t\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{3.22}$$

$\mathbf{Y} = (Y^1, ..., Y^N)$ ist eine N–dimensionale Brownsche Bewegung mit Kovarianzmatrix Σ und Drift μ.

$Z^1(0), ..., Z^N(0)$ seien positive reelle Konstanten. Wir definieren den **diskontierten Preisprozeß Z** $= (Z^1, ..., Z^N)$ mittels

$$Z^k(t) \equiv Z^k(0)\, \exp(Y^k(t) - \frac{1}{2}\sigma_k^2\, t), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T \text{ und } k = 1, ..., N.$$

Nun betrachten wir die quadratische Variation von Y^k. Der Summand $\mu^k t$ fällt nicht ins Gewicht, da er deterministisch ist, stetig in t ist, und zudem den Startwert Null besitzt. Es gilt

$$\begin{aligned}
[Y^k, Y^k](t) &= \left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_{ki} B^i, \sum_{j=1}^{N} \lambda_{kj} B^j\right](t) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ki}\lambda_{kj} \left[B^i, B^j\right](t) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \lambda_{ki}\lambda_{kj}\delta_{ij}\, t = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ki}^2\, t = \sigma_k^2\, t, \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und } k = 1, ..., N.
\end{aligned}$$

Aus der Darstellung des Doléans–Dade–Exponentials für Exponenten mit stetigen Pfaden sieht man

$$\begin{aligned}
Z^k &= Z^k(0)\, \exp(Y^k - \frac{1}{2}[Y^k, Y^k]) & (3.23)\\
&= Z^k(0)\, \mathcal{E}(Y^k), \qquad \text{für } k = 1, ..., N. & (3.24)
\end{aligned}$$

Nun sind wir in der Lage, den **Preisprozeß** $\mathbf{S} = (S^1, ..., S^N)$ zu definieren.

$$\mathbf{S}(t) \equiv \frac{\mathbf{Z}(t)}{\beta(t)}, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T,$$

Die Gestalt von S^k wird durch Z^k und β bestimmt. Wir erhalten

$$S^k = Z(0)^k \mathcal{E}(Y^k)\,\mathcal{E}(R^0) = Z(0)^k \mathcal{E}(Y^k + R^0) \qquad \text{für } k = 1, ..., N.$$

Die letzte Gleichheit beruht darauf, daß R^0 ein FV–Prozeß mit stetigen Pfaden ist. In Abschnitt 3.1 war der **Renditeprozessen** von S^k als Summe von R^0 und Y^k definiert. Demnach ist

$$R^k(t) = Y^k(t) + rt = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ki} B^i(t) \; + \; \left(\mu^k + r\right) t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T \text{ und } k = 1, ..., N.$$

R^k ist einen Brownsche Bewegung mit Varianz σ_k^2 und Drift $\mu^k + r$. Demnach sind die Preisprozesse der Aktien – wie anfangs angekündigt – geometrische Brownsche Bewegungen. Die geometrische Brownsche Bewegung wurde in Beispiel 2.6 vorgestellt.

Das Black&Scholes–Modell behandelt einen Markt, der aus einer Aktie und einer festverzinslichen Anleihe mit einer konstanten Verzinsungsrate besteht. Die Aktie wird als geometrische Brownsche Bewegung definiert. Im verallgemeinerten Black&Scholes–Modell finden wir anstelle einer Aktie N Aktien, die – wie im speziellen Fall – geometrische Brownsche Bewegungen sind. Allerdings sind die Preisprozesse nicht unabhängig, sondern durch die korellierten Brownschen Bewegungen Y, beziehungsweise R, miteinander verbunden. Eine andere Möglichkeit ist, die Renditeprozesse $R^1, ..., R^N$ als korrelierte Brownsche Bewegungen zu modellieren. Dieser Ansatz liegt näher, doch muß man dann "rückwärts" die anderen Brownschen Bewegungen Y und B definieren.

Zu Beginn haben wir einen abstrakten Wahrscheinlichkeitsraum gewählt, auf dem die treibenden Prozesse $B^1, ..., B^N$ definiert sind. Dazu benutzten wir eine σ–Algebra, die mehr "Information" enthalten kann, als von $\mathbf{B}$ erzeugt wird. Auf dem hier modellierten Markt soll nur die Information eingehen, die aus den Preisprozessen, beziehungsweise von den erzeugenden Brownschen Bewegungen, herrühren. Die **Informationsstruktur** habe die Gestalt

$$\mathcal{F}_t \equiv \sigma(\mathbf{B}(s) : 0 \leq s \leq t), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Die Abbildungen von $\mathbf{B} = (B^1, ..., B^N)^T$ auf $\mathbf{Y} = (Y^1, ..., Y^N)^T$, $\mathbf{S} = (S^1, ..., S^N)^T$ und $\mathbf{Z} = (Z^1, ..., Z^k)^T$ sind stetig und invertierbar. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t &= \sigma(\mathbf{B}(s) : 0 \leq s \leq t) \\
&= \sigma(\mathbf{Y}(s) : 0 \leq s \leq t) \\
&= \sigma(\mathbf{S}(s) : 0 \leq s \leq t) \\
&= \sigma(\mathbf{Z}(s) : 0 \leq s \leq t), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Das entworfene Modell fällt in den allgemeinen Rahmen, der in Abschnitt 3.1 definiert wurde. Die Preisprozesse $S^0, ..., S^N$ sind strikt positiv, adaptiert und besitzen stetige Pfade, sind also càdlàg–Prozesse. Nach Satz 2.40 sind geometrische Brownsche Bewegungen $\mathcal{H}^2$–Semimartingale.

Wir konstruieren das **Referenzmaß** Q, unter dem die diskontierten Preisprozesse Z^k, $k = 1, ..., N$, Martingale sein sollen. Nach der oben getroffenen Annahme ist Λ nicht–singulär. Es existiert ein N–dimensionaler Vektor $\gamma = (\gamma^1, ..., \gamma^N)^T$ mit

$$\Lambda\,\gamma = \mu. \tag{3.25}$$

Wir definieren den N–dimensionalen Vektorprozeß $\xi = (\xi^1, ..., \xi^N)^T$, $\xi^k = \{\xi^k(t) : 0 \leq t \leq T\}$ mittels

$$\xi(t) \equiv B(t) + \gamma\, t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{3.26}$$

Mit (3.25) und (3.22) gilt

$$Y(t) = \Lambda\, B + \mu\, t = \Lambda\, B + \Lambda\,\gamma\, t = \Lambda\,(B + \gamma\,) = \Lambda\xi(t), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{3.27}$$

Der Prozeß $M = \{M(t) : 0 \leq t \leq T\}$ sei gegeben durch

$$M(t) \equiv \exp\left(-\sum_{k=1}^{N}\gamma^k B^k(t) \quad - \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(\gamma^k)^2 t\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{3.28}$$

M ist der Prozeß, durch den der Maßwechsel erfolgt. Also muß M gewisse Eigenschaften erfüllen.

Proposition 3.7 *M ist ein strikt positives quadratintegrierbares P–Martingal mit $M(0) = 1$ P–f.s.*

Beweis:
Durch Einsetzen sieht man sofort, daß $M(0) = 1$ gilt. Der Prozeß $\widetilde{B} = \{\widetilde{B}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ sei gegeben durch

$$\widetilde{B}(t) \equiv -\sum_{k=1}^{N}\gamma^k B^k(t), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Dann ist $\left[\widetilde{B}, \widetilde{B}\right](t) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\gamma^k\,\gamma^l\left[B^k, B^l\right](t) = \sum_{k=1}^{N}(\gamma^k)^2 t$. M läßt sich somit als Doléans–Dade–Exponential von $\widetilde{B}$ darstellen: $M = \mathcal{E}(\widetilde{B})$. Zudem ist M nach Definition strikt positiv. Der Exponent $\widetilde{B}$ ist nach Satz 2.45 Brownsche Bewegung unter P mit Varianz $\sum_{k=1}^{N}(\gamma^k)^2$. Aus Satz 2.42 folgt die Quadratintegrierbarkeit von M. □

Das Maß Q sei definiert durch

$$dQ \equiv M(T)dP.$$

Die Vorbereitung zielt darauf ab, Q als ein äquivalentes Martingalmaß zu konstruieren. Nach Proposition 3.7 muß das durch M definierte Maß Q nur noch erfüllen, daß die diskontierten Preisprozesse Q–Martingale sind. Wir können zwei Wege gehen, das zu zeigen. Der erste, welcher hier durchgeführt wird, ist der direkte; alternativ dazu kann man beweisen, daß $\mathbf{Z}\,M$ ein P–Martingal ist. Wir benötigen folgende Proposition.

Proposition 3.8 *Die Prozesse $\xi^1, ..., \xi^N$ sind unabhängige Standard Brownsche Bewegungen unter dem Referenzmaß Q*

Beweis:
Der Aufbau war darauf ausgerichtet, den Satz von Girsanov, Satz 2.56, anzuwenden. Es bleibt nur

zu zeigen, daß die Novikov–Bedingung erfüllt ist. In symbolischer und vektorieller Schreibweise gilt nach Gleichung (3.26)

$$d\xi(t) = \gamma\, dt \,+\, dB(t) \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Die Novikov–Bedingung fordert

$$\mathbf{E}_P \left\{ \exp(\frac{1}{2} \int_0^T \parallel \gamma \parallel_2^2 dt) \right\} \;<\; 0.$$

Das Integral nimmt den endlichen Wert $T \sum_{i=1}^{N} {\gamma^k}^2$ an, also werden wir obiger Forderung gerecht. □

Der nachstehende Satz läßt sich mit der eben bewiesenen Proposition zeigen.

Satz 3.9 *Die diskontierten Preisprozesse $Z^1, ..., Z^N$ sind Q–Martingale.*

Beweis:
Mit den Gleichung (3.24) und (3.27) gilt

$$\begin{aligned} Z^k(t) &= Z^k(0)\mathcal{E}\left(Y^k\right)(t) && \text{und} \\ Y^k(t) &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ki}\, \xi_i(t), && \text{für } 0 \le t \le T \text{ und } k = 1, ..., N. \end{aligned}$$

$\mathbf{Y}$ ist demnach eine N–dimensionale Brownsche Bewegung unter dem Maß Q, also ein Q–Martingal. Das Doléans–Dade–Exponential eines Martingals ist ein lokales Martingal. Z^k ist eine geometrische Brownsche Bewegung für $k = 1, ..., N$. Nach Satz 2.42 ist Z^k ein $\mathcal{H}^2$–Semimartingal, folglich ein quadratintegrierbares Q–Martingal. □

Der Satz sagt, daß $\mathcal{Q}$ nicht leer ist, denn wir haben $Q \in \mathcal{Q}$ gezeigt und damit die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes bewiesen. Es gilt sogar, daß Q das einzige äquivalente Martingalmaß ist, mit anderen Worten: Das verallgemeinerte Black&Scholes–Modell ist vollständig.

Mit den oben geleisteten Voraussetzungen können wir mithilfe von Satz 3.4 duplizierbare Contingent Claims bewerten. Sind wir in der Lage, zu zeigen, daß das verallgemeinerte Black&Scholes–Modell vollständig ist, so läßt sich der Preis jedes beliebigen Contingent Claims über das äquivalente Martingalmaß Q explizit berechnen.

Satz 3.10 *Das verallgemeinerte Black&Scholes–Modell ist vollständig.*

Beweis:
Wir zeigen die Aussage mit Satz 3.5, indem wir $\mathcal{Q} = \{Q\}$ beweisen. Satz 2.45 gibt uns über mögliche Maßtranformation $P \mapsto Q$ Auskunft, wobei P und Q äquivalent sind. Die Novikov–Bedingung sichert, daß die Martingaldichte $L = \dfrac{dQ}{dP}$ ein P–Martingal ist. Nach Satz 2.62 können wir alle äquivalente Maße auf gleiche Weise "erzeugen", indem wir auf die Novikov–Bedingung verzichten und stattdessen fordern, daß der Prozeß L ein Martingal unter P ist. Auf diese Weise erhalten wir sämtliche zu P äquivalenten Maße. Q^* sei ein äquivalentes Martingalmaß, also ist Q^* ein zu P äquivalentes Maß. Daher läßt sich die Maßtransformation durch einen N–dimensionalen vorhersehbaren Prozeß $\psi = \left(\psi^1, ..., \psi^d\right)$ beschreiben, $\psi^k = \{\psi^k(t) : t \ge 0\}$ für $k = 1, ..., N$, mit

$$\int_0^t ||\psi(s)||^2\, ds < \infty \quad P\text{–f.s.}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Die Martingaldichte $L = \{L(t) : 0 \leq t \leq T\}$ ist mittels

$$L \equiv \mathcal{E}\left(\sum_{k=1}^{d} \psi^k \cdot B^k\right).$$

definiert. Unter Q^* ist $\widetilde{B} = \left(\widetilde{B}^1, ..., \widetilde{B}^d\right)$, gegeben durch

$$\widetilde{B}^k(t) \equiv B^k(t) - \int_0^t \psi^k(s)\, ds, , \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und } k = 1, ..., d, \tag{3.29}$$

eine N–dimensionale Standard Brownsche Bewegung. Nach Annahme ist Q^* ein äquivalentes Martingalmaß, sprich $Q^* \in \mathcal{Q}$. Damit sind die diskontierten Preisprozesse $Z^1, ..., Z^N$ Q^*–Martingale, also auch lokale Q^*–Martingale. Mit den Gleichung (3.24) und (3.22) sehen wir

$$\begin{aligned} Z^k(t) &= Z^k(0)\mathcal{E}\left(Y^k\right)(t) \qquad \text{und} \\ Y(t) &= \Lambda B + \mu\, t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T \text{ und } k = 1, ..., N. \end{aligned}$$

Nach Korollar 2 von Satz 2.36 sind die diskontierten Preisprozesse $Z^1, ..., Z^N$ genau dann lokale Martingale unter dem Maß Q^*, falls die stochastischen Exponenten $Y^1, ..., Y^N$ lokale Q^*–Martingale sind. Weiter ist Y genau dann ein lokales Q^*–Martingal, wenn

$$\Lambda^{-1}Y(t) = B + \gamma\, t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T, \tag{3.30}$$

lokales Q^*–Martingal ist, da Λ eine nicht–singuläre Matrix ist und $\Lambda^{-1}\,\mu = \gamma$ nach (3.25) gilt. Wir setzen (3.29) in (3.30) ein und erhalten

$$B^k + \gamma^k\, t = \widetilde{B}^k(t) + \int_0^t \psi^k(s)\, ds + \gamma^k\, t, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T \text{ und } k = 1, ..., N. \tag{3.31}$$

$\widetilde{B}$ ist ein Standard Brownsche Bewegung unter Q^*, also sind $\widetilde{B}^k$ lokale Q^*–Martingale für $k = 1, ..., N$. Der Driftterm $\int_0^{\cdot} \psi^k(s) + \gamma^k\, ds$ muß wegfallen, da der Ausdruck in (3.31) ein lokales Q^*–Martingal sein soll. Das ist aber gleichbedeutend mit $\psi^k = -\gamma^k$ für $k = 1, ..., N$. Nach Korollar 2 von Satz 2.34 und (3.28) gilt damit für L

$$L(t) = \mathcal{E}\left(\sum_{k=1}^{d} -\gamma^k\, B^k\right)(t) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{N} \gamma^k B^k(t)\; - \;\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} (\gamma^k)^2 t\right) = M(t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Damit ist $Q^* = Q$ und die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes Q gezeigt. Es gilt $\mathcal{Q} = \{Q\}$ und nach Satz 3.5 ist das Marktmodell vollständig. □

Mit der Bewertungsformel aus Abschnitt 3.2 läßt sich in einigen Spezialfällen der Preis direkt berechnen. Betrachten wir nun eine Europäische Kaufoption auf eine Aktie S.

Beispiel 10 (Die Black&Scholes–Formel) *Der Markt bestehe aus einer Aktie S und dem risikolosen Geldmarktkonto. Sei der Contingent Claim X eine Europäische Kaufoption auf die Aktie S zum Ausübungspreis $q > 0$ mit Fälligkeit $T > 0$. X besitzt die Gestalt*

$$X = \max\left(S(T) - q, 0\right)$$

und der Wert der Option $c_S(t,T,q)$ zur Zeit t berechnet sich wie folgt.

$$c_S(t,T,q) \quad = \quad S(t)\,\Phi(d_1(t)) - q\,\exp\left(-r(T-t)\right)\,\Phi(d_2(t)),$$

mit

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \frac{\ln(S(t)/q) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\,(T-t)}{\sigma\,\sqrt{T-t}} \\ d_2(t) &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\,. \end{aligned}$$

Den Beweis findet man beispielsweise in Karatzas und Shreve (1998), Beispiel 4.1 in Kapitel II.

Kapitel 4

Kreditrisikomodelle

In diesem Kapitel werden einige Kreditrisikomodelle vorgestellt. Die Vorgehensweise ist chronologisch in der Entwicklung solcher Modelle; das entspricht auch einer wachsender mathematischen Komplexität der Modelle. Zuerst wird das Modell dargelegt, das auf Merton (1974) zurückgeht. Es ist in die Black&Scholes-Welt eingebettet und benutzt die Optionspreistheorie. Als Ergebnis erhält man die Ausfallswahrscheinlichkeit, die *Recovery Rate* und den Wert einer Anleihe. Einen anderen Weg beschreiten Jarrow, Lando und Turnbull (1997). Sie modellieren die Ausfallwahrscheinlichkeit mithilfe des Anleihe–*Ratings*. Die *Recovery Rate* betrachten sie als eine von außen gegebene Konstante. Mit diesen Vorgaben können sie den Wert einer Anleihe berechnen. Alternativ versucht man dieser Tage, die Zinsstruktur von risikobehafteten Anleihen zu modellieren. Diese Art, an das Modellierungsproblem heranzugehen, geht auf im wesentlichen auf Duffie und Singleton (1995) zurück und wurde von Schönbucher (1998a) weitergeführt.

4.1 Der optionspreistheoretische Ansatz von Merton

Der optionspreistheoretische Ansatz beruht auf Überlegungen Mertons (1974). Eine ausführliche Schilderung findet man bei Madan (1998), worauf sich die vorliegende Darstellung stützt. Folgt man diesem Ansatz, ist der Kauf einer Unternehmensanleihe gleichbedeutend mit dem Erwerb des Rechts, das Unternehmen zu übernehmen, falls es den Betrag, der in der Anleihe festgelegt ist, zum Stichtag nicht aufbringen kann.
Betrachten wir eine Anleihe, die zum Zeitpunkt $T > 0$ fällig wird. In T ist das Unternehmen verpflichtet, dem Anleihebesitzer den Betrag $D > 0$ zu zahlen. Liegt der Marktwert des Unternehmens dann unter D, kann die Zahlung nicht vollständig geleistet werden. Man spricht vom *Default*–Ereignis. Der Anleihebesitzer bekommt gewissermaßen das Unternehmen und tauscht es gegen dessen Marktwert ein. Beträgt der Marktwert in T mehr als D, kann die ausstehende Schuld beglichen werden – das *Default*–Ereignis tritt nicht ein.

Der optionspreistheoretische Ansatz ist in die Black&Scholes–Welt eingebettet. Im Sinne von Abschnitt 3.3 ist $N = 1$, und $T > 0$ ist ein fest gewählter Zeithorizont. Wir befinden uns auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P\right)$. Hierauf sei $W = \{W(t) : 0 \leq t \leq T\}$, eine Standard–Brownsche Bewegung, gegeben. $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ ist die P–Erweiterung der natürlichen Filtrierung von W. Neben dem risikolosen Geldmarktkonto $B = \{B(t) : 0 \leq t \leq T\}$ ist $A = \{A(t) : 0 \leq t \leq T\}$ der Preisprozeß der einzigen weiteren Anlagemöglichkeit.
Wir modellieren den Wert des Unternehmens wie einen Aktienkurs im Black&Scholes–Modell. Das erlaubt zu jeder Zeit den Erwerb und Leerverkauf des Unternehmens in beliebiger Stück-

zahl. Ein Marktteilnehmer kann c–mal das Unternehmen besitzen, wobei c eine reelle Zahl ist. Diese Annahme steht im Widerspruch zur Wirklichkeit, die $c \in [0, 1]$ impliziert. Allerdings greift nur unter dieser Annahme das Black&Scholes–Modell, wodurch wir die Unternehmensanleihe bewerten wollen.

Der Marktwert des Unternehmens A nimmt die Rolle des Aktienkurs ein. Mit den reellen Konstanten $A(0) > 0$, $\sigma > 0$, μ und r gelte

$$B(t) \equiv \exp(rt)\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T \tag{4.1}$$

$$A(t) \equiv A(0) + \mu \int_0^t A(s)\,ds + \sigma \int_0^t A(s)\,dW(s)\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{4.2}$$

Wir formulieren nun den Anleiheprozeß auf mathematische Weise. Die Anleihe des Unternehmens mit Auszahlungsanspruch $D > 0$ und Fälligkeit T ist ein *Contingent Claim* X der Gestalt

$$X \equiv \min\left(A(T), D\right). \tag{4.3}$$

Wegen $A(T) > 0$ können wir X auch als Differenz zweier Maxima schreiben

$$X = \max\left(A(T), 0\right) - \max\left(A(T) - D, 0\right). \tag{4.4}$$

Der Wert der Anleihe sei $C = \{C(t) : 0 \le t \le T\}$. Mit der Vollständigkeit des Black&Scholes–Modells, Beispiel 3.10 und (4.4) erhalten wir

$$C(t) = e^{-r(T-t)}\, \mathbf{E}_Q \left\{\min\left(A(T), D\right) | \mathcal{F}_t\right\} \tag{4.5}$$

$$= e^{-r(T-t)}\, \mathbf{E}_Q \left\{\max\left(A(T), 0\right) | \mathcal{F}_t\right\} - e^{-r(T-t)}\, \mathbf{E}_Q \left\{\max\left(A(T) - D, 0\right) | \mathcal{F}_t\right\} \tag{4.6}$$

$$= c_A(t, T, 0) - c_A(t, T, D), \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{4.7}$$

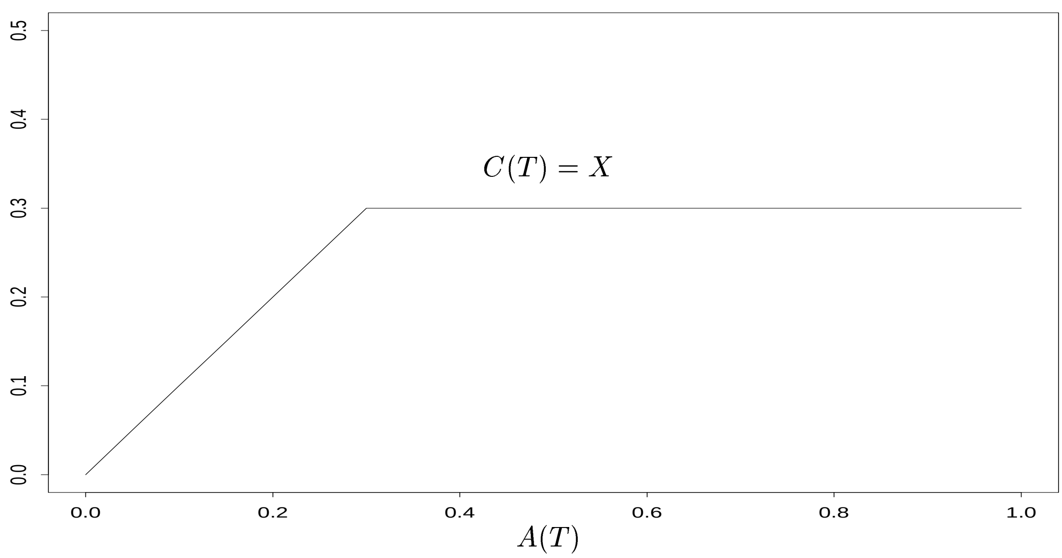

Abbildung 4.1: Auszahlungsprofil einer Anleihe mit Laufzeit T und Auszahlungsanspruch $D = 0.30$.

Insbesondere ist $\pi \equiv C(0)$ der Preis der Anleihe. Wir definieren die stochastischen Prozesse $P_D = \{P_D(t) : 0 \leq t \leq T\}$ und $\delta = \{\delta(t) : 0 \leq t \leq T\}$ durch

$$P_D(t) \equiv Q\left(A(T) < D \,|\, \mathcal{F}_t\right) \quad \text{und} \tag{4.8}$$

$$\delta(t) \equiv \mathbf{E}_Q\left\{ \frac{C(T)}{D} \,\middle|\, A(T) < D,\, \mathcal{F}_t \right\} \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{4.9}$$

$P_D(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit unter dem Maß Q, daß der *Default* eintritt, gegeben die Information zum Zeitpunkt t. P_D heißt bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit oder *Conditional Default Probability*. Der Prozeß δ ist die *Conditional Recovery Rate*. $\delta(t)$ ist die erwartete Auszahlung im Verhältnis zum Auszahlungsanspruch D, die der Anleihebesitzer erhält unter der Bedingung, daß der *Default*–Zustand erreicht wird, und gegeben die Information zur Zeit t.

Proposition 4.1 *Für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit P_D und die bedingte Recovery Rate δ gilt*

$$P_D(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(A(t)/D) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\delta(t) = 1 - \frac{D - C(t)\, e^{r\,(T-t)}}{D\, P_D(t)}, \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T.$$

Beweis: Zunächst betrachten wir P_D und nutzen, daß A nach Abschnitt 3.3 die Darstellung besitzt

$$A(t) = A(0)\exp\left(\sigma\widetilde{W}(t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T,$$

wobei $\widetilde{W} = \{\widetilde{W}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ eine Brownsche Bewegung unter dem äquivalenten Martingalmaß Q ist. Der Zuwachs $\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)$ ist für $t \in [0,T]$ unabhängig von der σ–Algebra $\mathcal{F}_t$.

$$\begin{aligned}
P_D(t) &= Q\left(A(T) < D \,|\, \mathcal{F}_t\right) \\
&= Q\left(A(t)\exp\left(\sigma\left(\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right) < D \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) \\
&= Q\left(\sigma\left(\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) < \ln(D/A(t)) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) \\
&= Q\left(\frac{\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)}{\sqrt{T-t}} < \frac{\ln(D/A(t)) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln(D/A(t)) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(A(t)/D) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt folgt, da $\dfrac{\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)}{\sqrt{T-t}}$ unter dem Maß Q standardnormalverteilt ist.
Für δ gilt damit

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \mathbf{E}_Q\left\{\frac{C(T)}{D} \,\middle|\, A(T) < D,\, \mathcal{F}_t\right\} \\
&= \frac{1}{D}\,\frac{\mathbf{E}_Q\left\{C(T)\,\mathbf{1}_{\{A(T)<D\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right\}}{Q\left(A(T) < D \,|\, \mathcal{F}_t\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{D\,P_D(t)}\,\mathbf{E}_Q\left\{\min\{A(T),D\}\,\mathbf{1}_{\{A(T)<D\}}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}\\
&= \frac{1}{D\,P_D(t)}\,\mathbf{E}_Q\left\{\min\{A(T),D\}\,\left(1-\mathbf{1}_{\{A(T)\geq D\}}\right)\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}\\
&= \frac{1}{D\,P_D(t)}\left(\mathbf{E}_Q\left\{\min\{A(T),D\}\,|\,\mathcal{F}_t\right\}-\mathbf{E}_Q\left\{D\mathbf{1}_{\{A(T)\geq D\}}\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}\right)\\
&= \frac{1}{D\,P_D(t)}\left(e^{r\,(T-t)}\,\mathbf{E}_Q\left\{e^{-r\,(T-t)}\,\min\{A(T),D\}\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}-D\,Q\left(\mathbf{1}_{\{A(T)\geq D\}}\middle|\,\mathcal{F}_t\right)\right)\\
&= \frac{1}{D\,P_D(t)}\left(e^{r\,(T-t)}\,C(t)-D\,\left(1-P_D(t)\right)\right)\\
&= 1-\frac{D-e^{r\,(T-t)}\,C(t)}{D\,P_D(t)}, \qquad \text{für } 0\leq t\leq T.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Wir formen die letzte Gleichung um und erhalten

$$
C(t)=\delta(t)\,D\,e^{-r\,(T-t)}+(1-P_D(t))(1-\delta(t))\,D\,e^{-r\,(T-t)}. \tag{4.10}
$$

δ und P_D sind stochastische Prozesse, die vom Verlauf der Diffusion A abhängen. Die gleiche Formel erhält man allerdings auch, wenn die *Recovery Rate* δ konstant ist, und das Ausfallereignis vom Zins r unabhängig ist. Dann ist $\delta(t)\,D\,e^{-r\,(T-t)}$ der Barwert der Auszahlung, die der Anleihebesitzer im Fall des *Default* erwartet, und $(1-\delta(t))\,D\,e^{-r\,(T-t)}$ der Anteil, der mit Wahrscheinlichkeit $1-P_D(t)$ zurückgezahlt wird.

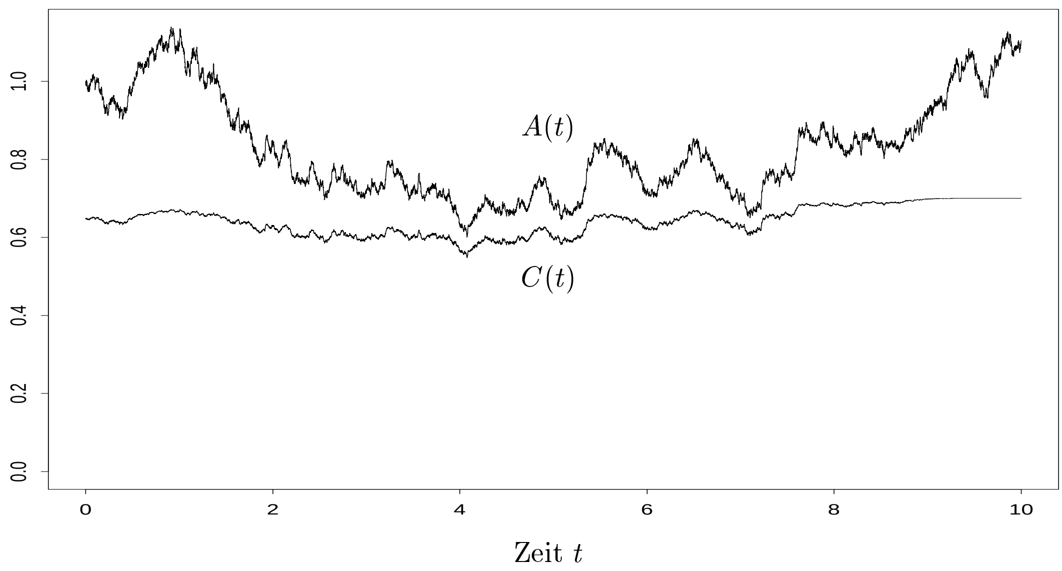

Abbildung 4.2: Simulierter Pfad des Firmenwertprozeß A mit $r=\mu=0$, $\sigma=0.15$ und $A(0)=1$, und der entsprechende Pfad des Anleihewertes C mit $T=10$ und Auszahlungsanspruch $D=0.70$.

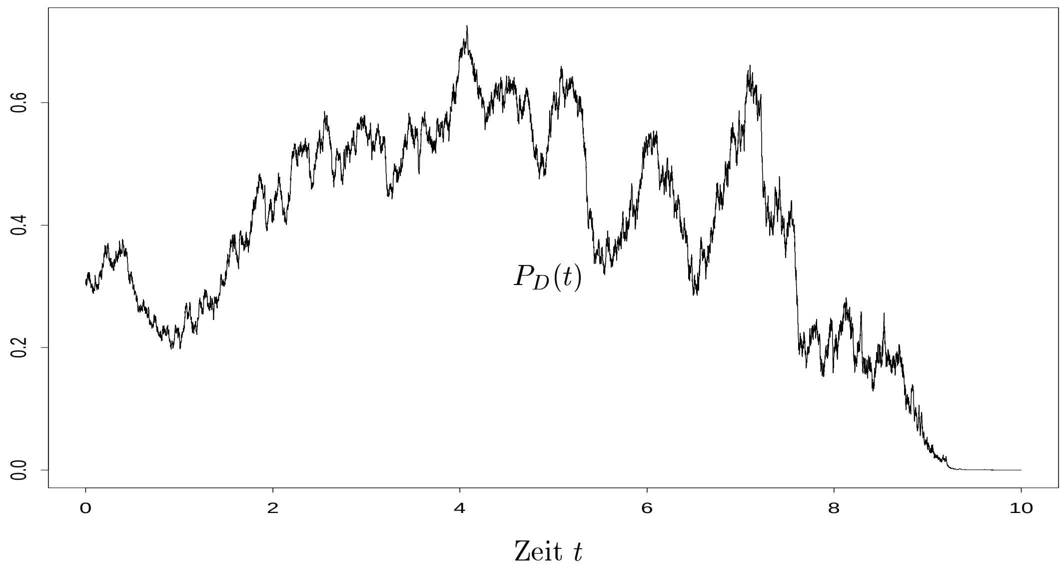

Abbildung 4.3: Die zu Abb 4.2 korrespondierende bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit P_D.

In Abbildung 4.2 sehen wir, wie der Firmenwert A den Preis der Anleihe C beeinflußt. Im zweiten Jahr bewegt sich der Firmenwert in dem Bereich, der eine Kreditrückzahlung in T in Frage stellt. Als Folge steigt die Ausfallwahrscheinlichkeit in Abbildung 4.3 an. Erst im achten Jahr steigt der Firmenwert deutlich an. Das Kreditrisiko wird verschwindend gering, die Anleihe bleibt fast konstant auf dem "Nennwert" $D = 0.70$.

Das Modell läßt sich auf Anleihen erweitern, deren Ansprüche verschiedene Abstufungen besitzen. D sei, wie oben, die gesamte Schuld, die in T zurückerstattet werden muß. D ist die Summe der einzelnen Ansprüche $D_n > 0$, für $n = 1, ..., N$ und $N \in \mathbb{N}$. Es gilt demnach $D = \sum_{m=1}^{N} D_m$. Für $1 \leq n < m \leq N$ muß D_n in T voll ausgezahlt werden, bevor die Anleihe, die zu D_m gehört, bedient wird. Je kleiner n ist, desto größer ist die sogenannte Seniorität, die Stärke des Anspruchs. Für $n = 1, ..., N$ sei X_n der *Contingent Claim*, der die Anleihe der n–ten Priorität bezeichnet; er wird in Analogie zu (4.4) wie folgt dargestellt

$$X_n = \max\left\{A(T) - \sum_{m=1}^{n-1} D_m\,,\,0\right\} \quad - \quad \max\left\{A(T) - \sum_{m=1}^{n} D_m\,,\,0\right\} \tag{4.11}$$

Hierbei gelte $\sum_{n=1}^{0} D_n = 0$. Der Preisprozeß der Anleihe mit Auszahlungsprofil X_n sei $C_n = \{C_n(t) : 0 \leq t \leq T\}$ für $n \in \{1, ..., N\}$.

$$\begin{aligned} C_n(t) \;&=\; e^{-r(T-t)}\,\mathbf{E}_Q\left\{\max\left\{A(T) - \sum_{m=1}^{n-1} D_m\,,\,0\right\}\middle|\,\mathcal{F}_t\right\} && (4.12)\\ &\quad - e^{-r(T-t)}\,\mathbf{E}_Q\left\{\max\left\{A(T) - \sum_{m=1}^{n} D_m\,,\,0\right\}\middle|\,\mathcal{F}_t\right\} && (4.13)\\ &=\; c_A(t, T, \sum_{m=1}^{n-1} D_m) - c_A(t, T, \sum_{m=1}^{n} D_m), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T \text{ und } n = 1, ..., N. && (4.14) \end{aligned}$$

Auch hier können wir die Ausfallwahrscheinlichkeit und die *Recovery Rate* berechnen. Die Aus-

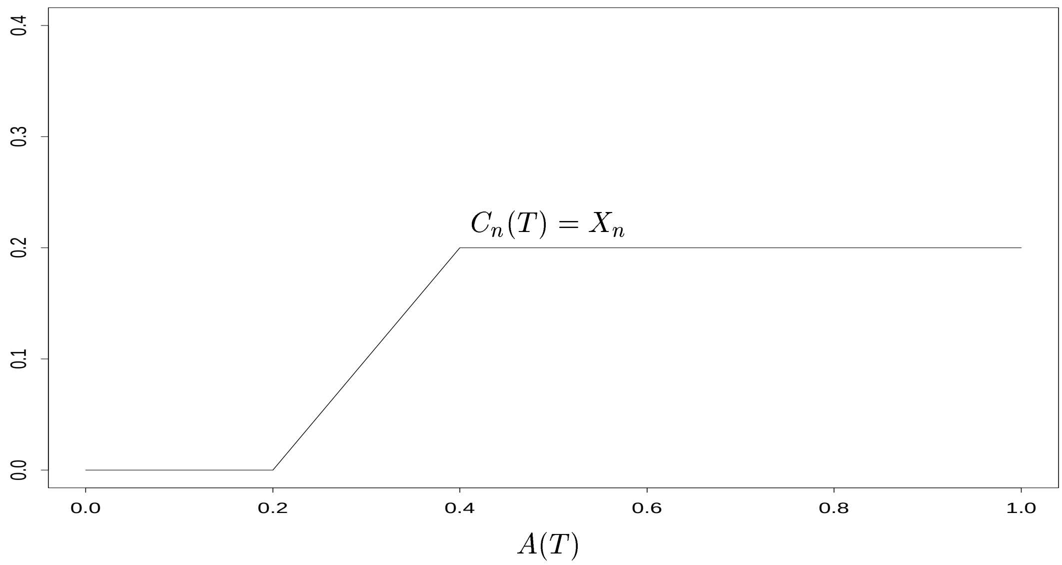

Abbildung 4.4: Auszahlungsprofil einer Anleihe der Seniorität n mit Laufzeit T, $\sum_{m=1}^{n-1} D_m = 0.20$ und $\sum_{m=1}^{n} D_m = 0.40$.

fallwahrscheinlichkeit P_D ist in allen Fällen die gleiche. Denn ein Kreditausfall tritt dann ein, wenn der Emittent der Anleihen eine seiner Zahlungen nicht leisten kann. Die *Recovery Rate* $\delta_n = \{\delta_n(t) : 0 \leq t \leq T\}$, $n = 1, ..., N$, ist von der Einstufung n abhängig.

$$P_D(t) \equiv Q\left(A(T) < D \,|\mathcal{F}_t\right) \tag{4.15}$$

$$\delta_n(t) \equiv \mathbf{E}_Q\left\{ \frac{C_n(T)}{D_n} \,\middle|\, A(T) < D,\, \mathcal{F}_t \right\} \tag{4.16}$$

$\pi_n \equiv C_n(0)$ ist der Preis der n–ten Anleihe.

Proposition 4.2 *Für P_D und δ_n gilt*

$$P_D(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(A(t)/D) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\,(T-t)}{\sigma\,\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\delta_n(t) = 1 - \frac{D_n - C_n(t)\,e^{r\,(T-t)}}{D_n\,P_D(t)}, \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T \textit{ und } n = 1, ..., N.$$

Der Beweis verläuft analog zum Beweis der vorangegangenen Proposition.

Die Information, die man aus dem Markt benötigt, ist die Zinsstruktur, die in diesem einfachen Modell durch ein konstante Verzinsungsrate r gegeben ist. Die Daten des Unternehmens, die gebraucht werden, sind die Struktur der Verschuldung, sowie der aktuelle Marktwert des Unternehmens $A(0)$ und dessen Volatilität σ. Seitens der Anleihe geht die Seniorität der Anleihe, die man untersuchen möchte, in das Bewertungsmodell, ein. Das Modell bietet getrennt für jede Laufzeit eine Kreditausfallszeit τ. Eine Firma kann bei Schulden mit kurzer Laufzeit zahlungsunfähig sein, jedoch Schulden mit höherer Laufzeit in vollem Umfang begleichen.

In Tabelle 4.1 sehen wir, wie sich Anleihen nach ihrer Seniorität unterscheiden. Die Anleihe

C_1 ist die "sicherste", bei keiner hier angegebenen Laufzeiten wirkt sich das Kreditrisiko auf den Nennwert $D_1 = 0.1$ aus. Bei den Anleihen der zweiten und dritten Senioritätsklasse wächst das Risiko mit der Laufzeit. C_2 verliert bei einer Laufzeit von 10 Jahren etwa 8% vom Nennwert $D_2 = 0.3$. Im Fall von C_3 wirkt sich das Kreditrisiko am deutlichsten aus. Bei einer Laufzeit von 10 Jahren erfährt die Anleihe einen "Abschlag" von 33% vom Nennwert $D_3 = 0.3$ auf 0.2.

Laufzeit	P_D	$C_1(0)$	$\delta_1(0)$	$C_2(0)$	$\delta_2(0)$	$C_3(0)$	$\delta_3(0)$
$T = 1$	0.0%	.100	0.0%	.300	0.0%	.300	0.0%
$T = 2$	9.6%	.100	100.0%	.300	100.0%	.293	75.2%
$T = 3$	20.3%	.100	100.0%	.300	99.5%	.276	61.1%
$T = 4$	27,2%	.100	100.0%	.298	98.0%	.260	51.5%
$T = 5$	32.1%	.100	100.0%	.296	95.8%	.247	44.7%
$T = 6$	36.0%	.100	100.0%	.293	93.3%	.235	39.6%
$T = 7$	39.1%	.100	100.0%	.289	90.6%	.224	35.5%
$T = 8$	41.7%	.100	100.0%	.285	87.8%	.215	32.3%
$T = 9$	44.0%	.100	99.9%	.280	85.1%	.207	29.6%
$T = 10$	46.0%	.100	99.9%	.276	82.5%	.200	27.4%

Tabelle 4.1: Rechenbeispiel für $A(0) = 1$, $\sigma = 0.25$, $r = 0$, $N = 3$, sowie $D_1 = 0.1$ und $D_2 = D_3 = 0.3$.

Abbildung 4.5 zeigt im erweiterten Modell den simulierten Verlauf des Firmenwerts und der Anleihepreise. Die Gesamtschuld beträgt in diesem Beispiel 0.90. Schon im zweiten Jahr fällt der Firmenwert unter die Höhe der Gesamtschuld. Allerdings reagieren zunächst nur die beiden Anleihen von niedrieger Seniorität C_2 und C_3 darauf, indem sie an Wert verlieren. Ab dem sechsten Jahr ist die Anleihe C_3 beinahe wertlos. C_2 wird erst zum Ende hin abgewertet, da der Firmenwert sich weiter nach unten bewegt. Die Anleihe mit der höchsten Seniorität C_1 erleidet erst ab dem sechsten Jahr geringen Wertverlust.

Wir studieren den Indikatorprozeß des Ausfallereignisses. Die Zeit des Kreditausfalls τ kann nur den Wert T annehmen. Der Indikatorprozeß des Zeitpunktes des Kreditausfalls $N = \{N(t) : 0 \leq t \leq T\}$ hat die Gestalt

$$N(t) \equiv \mathbf{1}_{\{t \geq \tau\}} = \mathbf{1}_{\{t \geq T\}} \mathbf{1}_{\{A(T) < D\}}, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{4.17}$$

Der Indikatorprozeß N ist vorhersehbar, denn auf $[0, T)$ ist N konstant gleich Null. Für alle $t \in [0, T)$ ist $N(t)$ $\mathcal{F}_{t-}$–meßbar. In T gilt $N(T) = \mathbf{1}_{\{A(T)<D\}} = \mathbf{1}_{\{A(T-)<D\}}$, da A als Diffusion stetige Pfade besitzt. Demnach ist $N(T)$ $\mathcal{F}_{T-}$–meßbar, also N vorhersehbar. In den folgenden

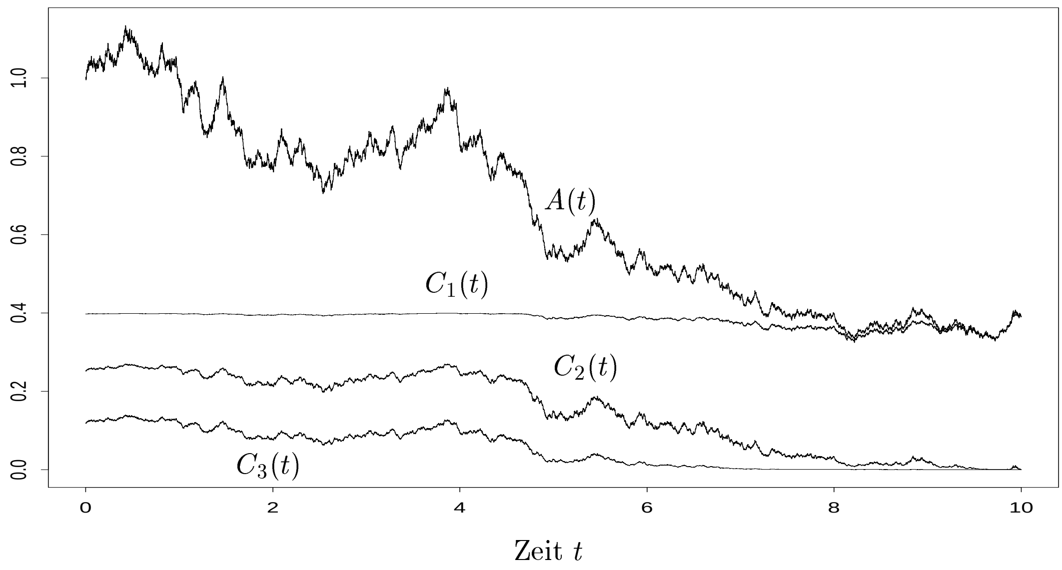

Abbildung 4.5: Simulierter Pfad des Firmenwertprozeß A mit $r = \mu = 0$, $\sigma = 0.15$ und $A(0) = 1$, und der entsprechenden Anleihepreise C_1, C_2 und C_3, wobei $D_1 = 0.40$, $D_2 = 0.30$, $D_3 = 0.20$ und $T = 10$ gilt.

Abschnitten begegnen wir Indikatorprozessen des Kreditausfallereignisses, die nicht vorhersehbare FV–Prozesse sind.

4.2 Das Modell von Jarrow, Lando und Turnbull

Jarrow, Lando und Turnbull (1997) modellieren das Kreditrisiko, indem sie die Ratingklasse der untersuchten Anleihe betrachten. *Ratings* sind subjektive Einstufungen, die nach der Kreditwürdigkeit des Anleiheemittenten vergeben werden. Anerkannte *Ratings* werden zum Beispiel von *Moody's*, *Standard and Poor's* und *Lehman Brothers* gestellt. Eine Anleihe kann während ihrer Laufzeit verschiedenen Ratingklassen zugeordnet werden. Das *Default*–Ereignis wird in den verschiedenen Klassen unterschiedlich bewertet. Dieser Ansatz legt es nahe, die Bewegungen zwischen den Ratingklassen durch eine zeitstetige homogene Markovkette zu modellieren. Der *Default* wird als absorbierender Zustand aufgefaßt. In diesem Modell können wir das Ausfallereignis probabilistisch beschreiben. Beim Eintritt des Kreditausfalls stellt sich die Frage, wie hoch der Wertverlust der Anleihe ist, beziehungsweise, welche Summe der Emittent den Besitzern seiner Anleihe auszahlen kann. Erfolgt der *Default* vor dem Fälligkeitstermin der Anleihe, soll der Emittent einen festen Bruchteil des Anspruches am Fälligkeitstermin auszahlen. Diesen Bruchteil nennen wir *Recovery Rate*. In der Realität ist die *Recovery Rate* von den Geldmitteln des Schuldners und dessen Zahlungsmoral abhängig. Man kann diese Faktoren nicht von vorneherein durch die *Recovery Rate* festlegen; allerdings geht man innerhalb des Modells genau von dieser Voraussetzung aus.
Mit dem Ansatz von Jarrow, Lando und Turnbull sind wir in der Lage, Anleihen eines Emittenten mit gleicher Laufzeit und verschiedenen Senioritäten durch unterschiedliche *Recovery Rates* zu beschreiben. Das Kreditrisikomodell verträgt sich mit jedem beliebigen Zinsstrukturmodell. Das bietet die Möglichkeit, die Zinstruktur von Anleihen mit Kreditrisiko zu berechnen. Unter

bestimmten Voraussetzungen können wir *Contingent Claims* unter Berücksichtigung des Kreditrisikos bewerten.
Eine wesentliche Einschränkung stellt die Homogenität der Markovkette dar. Innerhalb des Ansatzes von Jarrow, Lando und Turnbull kann die Ausfallwahrscheinlichkeit nicht von anderen stochastischen Größen, wie beispielsweise einer Zinsveränderung, beeinflußt werden.

In diesem Abschnitt steht das Kreditrisikomodell im Vordergrund. Wir modellieren zunächst das Ausfallsereignis durch eine zeithomogene Markovkette. Wir untersuchen das Modell und leiten die Ausfallwahrscheinlichkeiten ab. Später modellieren wir mithilfe der Ausfallwahrscheinlichkeiten Preisprozesse und betrachten ein "einfaches Marktmodell" mit konstanter Verzinsungsrate. Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{K}, \widetilde{P}\right)$ gegeben. Im folgenden konstruieren wir die Zeit des Kreditausfalls τ. Der Zustandsraum $S = \{1, ..., K\}$ enthält die Ratingklassen $1, ..., K-1$, K sei der *Default*–Zustand und absorbierend, $K \in \mathbb{N}$. Der stochastische Prozeß $\eta = \{\eta(t) : t \geq 0\}$ sei eine zeithomogene Markovkette auf dem endlichen Zustandsraum S. Wir interpretieren $\eta(t)$ als die Ratingklasse, die der untersuchten Anleihe zum Zeitpunkt t zugeordnet ist. In den betrachteten Beispielen ist $K = 8$, und mit den Zahlen $1, ..., K$ identifizieren wir die *Ratings* $1 \widehat{=} AAA$, $2 \widehat{=} AA$, $3 \widehat{=} A$, $4 \widehat{=} BBB$, $5 \widehat{=} BB$, $6 \widehat{=} B$, $7 \widehat{=} CCC$ und $8 \widehat{=}$"*Default*". Die Startverteilung von η sei $(\nu_i)_{1 \leq i \leq K}$. Die Familie von Übergangmatrizen, die η beschreibt, sei $P = \{P(t) : t \geq 0\}$. Hierbei ist $P(t) = (P_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq K}$ eine stochastische $K \times K$–Matrix. $P_{ij}(t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß η zur Zeit t den Zustand j einnimmt, gegeben den Anfangszustand i. Es gilt

$$P_{ij}(t) = \widetilde{P}(\eta(t) = j \,|\, \eta(0) = i), \qquad \text{für } t \geq 0. \tag{4.18}$$

Mit dieser Beziehung und der Startverteilung $(\nu_i)_{1 \leq i \leq K}$ erhalten wir

$$\widetilde{P}(\eta(t) = j) \;=\; \sum_{i=1}^{K} \widetilde{P}(\eta(0) = i)\, \widetilde{P}(\eta(t) = j \,|\, \eta(0) = i) \;=\; \sum_{i=1}^{K} \nu_i \, P_{ij}(t), \qquad \text{für } t \geq 0. \tag{4.19}$$

Die Vorwärtsgleichung lautet

$$\frac{dP}{dt}(t) = P(t)\, A, \qquad \text{für } t \geq 0, \tag{4.20}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{K \times K}$ die Generatormatrix der Markovkette η ist. Die Generatormatrix gibt die "infinitesimalen Übergangswahrscheinlichkeiten" zwischen den einzelnen Zuständen an. Da die zugrundeliegende Markovkette homogen ist, ist die Generatormatrix konstant. Wegen der natürlichen Anfangsbedingung $P(0) = I_K$, wobei I_K die K-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet, löst

$$P(t) = e^{A\,t} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (A\,t)^n, \qquad \text{für } t \geq 0, \tag{4.21}$$

die Vorwärtsgleichung eindeutig. Wir fordern, daß die Generatormatrix A diagonalisierbar ist. Mit dieser Voraussetzung lassen sich Ausfallwahrscheinlichkeiten explizit berechnen.

Lemma 4.3 *Die Familie der Übergangsmatrizen $\{P(t) : t \geq 0\}$ besitzt die Darstellung*

$$P(t) = B\, diag\left(e^{-\mu_1 t}, ..., e^{-\mu_K t}\right) B^{-1}, \qquad \textit{für } t \geq 0,$$

wobei $B = (B_{ik})_{1 \leq i,k \leq K} \in \mathbb{R}^{K \times K}$ eine nichtsinguläre Matrix ist und $-\mu_1, ..., -\mu_K$ die Eigenwerte der Generatormatrix A sind. Es gilt $\mu_1, ..., \mu_K \geq 0$.

Ordnen wir $\mu_1, ..., \mu_K$ absteigend an, dann erhalten wir $\mu_K = 0$ und für die Matrix B die Gleichungen

$$B_{\cdot,K} = (1, ..., 1)^T \,, \qquad \textit{und} \qquad B^{-1}_{K,\cdot} = (0, ..., 0, 1)\,.$$

Beweis : Wir haben die Annahme getroffen, daß A diagonalisierbar ist. Die Eigenwerte von A seien $-\mu_1, ..., -\mu_K$. Die nichtsinguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{K\times K}$ enthält als Spalten die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren. Damit gilt

$$A = B\, diag(-\mu_1, ..., -\mu_K)\, B^{-1}.$$

Wir setzen das Ergebnis in (4.21) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
P(t) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(t\, B\, diag(-\mu_1, ..., -\mu_K)\, B^{-1})^n \\
&= B \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{n!} diag(-\mu_1\, t, ..., -\mu_K\, t))^n\right) B^{-1} \\
&= B\, diag \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(-\mu_1\, t)^n, ..., \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(-\mu_K\, t)^n \right) B^{-1} \\
&= B\, diag \left(e^{-\mu_1\, t}, ..., e^{-\mu_K\, t}\right) B^{-1}, \qquad \text{für } t \geq 0.
\end{aligned}$$

Wir betrachten den Fall $t = 1$

$$P(1) = B\, diag \left(e^{-\mu_1}, ..., e^{-\mu_K}\right) B^{-1}\,.$$

Aus dieser Darstellung sehen wir, daß $P(1)$ diagonalisierbar ist. Zudem ist $P(1)$ eine Übergangsmatrix und besitzt deswegen nur positive Einträge, die sich zeilenweise zu Eins summieren. Die Eigenwerte sind folglich durch 1 nach oben beschränkt. Es gilt

$$e^{-\mu_i} \leq 1\,, \qquad \text{für } 1 \leq i \leq K.$$

Der natürliche Logarithmus ist eine streng monoton wachsende Funktion. Wir erhalten

$$\mu_i \geq 0\,, \qquad \text{für } 1 \leq i \leq K.$$

Insbesodere ist $(1, ..., 1)^T$ ein Eigenvektor von $P(1)$ zum Eigenwert 1, da die Zeilensumme jeder Übergangsmatrix Eins beträgt. $P(1)^T$ besitzt die gleichen Eigenwerte wie $P(1)$. Den Zustand K haben wir als absorbierend vorausgesetzt. Das ist gleichbedeutend mit $P(1)_{K,\cdot} = (0, ..., 0, 1)$, beziehungsweise $P(1)^T_{\cdot,K} = (0, ..., 0, 1)^T$. Offensichtlich ist $(0, ..., 0, 1)^T$ Eigenvektor zum Eigenwert 1 von $P(1)^T$. μ_i sind absteigend angeordnet, $i = 1, ..., K$. Es folgt $\mu_K = \ln 1 = 0$. B besitzt als Spalten die Eigenvektoren von $P(1)$. $(1, ..., 1)^T$ ist der Eigenvektor, der zum Eigenwert 1 gehört. Damit sehen wir

$$B_{\cdot,K} = (1, ..., 1)^T\,.$$

$P(1)^T$ hat die Gestalt

$$P(1)^T = \left(B^{-1}\right)^T diag \left(e^{-\mu_1}, ..., e^{-\mu_K}\right) B^T\,.$$

Die Spalten von $(B^{-1})^T$ sind die Eigenvektoren von $P(1)^T$. Deswegen gilt

$$B^{-1}_{K,\cdot} = (0, ..., 0, 1)\ .$$

Naturgemäß ist die Gestalt von B nicht eindeutig. Selbst wenn wir die Eigenvektoren durch die Anordnung der Eigenwerte innerhalb der Diagonalmatrix festlegen, können wir die Eigenvektoren beliebig skalieren und in die Matrix B als Spalten "eintragen". In unserer Überlegung haben wir zunächst $B_{\cdot,K} = (1, ..., 1)^T$ festgelegt. Danach haben wir die transponierte Inverse von B betrachtet. Die speziell gewählte "Skalierung" von $(B^{-1})^{-1}_{K,\cdot}$ ist zulässig, da die Gleichung

$$B^{-1}_{K,\cdot} B_{\cdot,K} = (0, ..., 0, 1)\ (1, ..., 1)^T = 1$$

hält. □

Wir untersuchen die Ausfallwahrscheinlichkeiten im Zeitintervall $[0, t]$.

$$\widetilde{P}\left(\tau \leq t\right) = \widetilde{P}\left(\eta(t) = K\right) = \sum_{j=1}^{K} \nu_j P_{jK}(t), \qquad \text{für } t \geq 0. \tag{4.22}$$

$\widetilde{P}^i$ sei das Maß mit der Startverteilung $\nu_j = \delta_{ij}$ und $\mathbf{E}^i$ der zugehörige Erwartungswertoperator, für $1 \leq i, j \leq K$; d.h. die Markovkette η startet mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand i. Die Funktionen $S_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seien definiert durch

$$S_i(t) \equiv 1 - \widetilde{P}^i\left(\tau \leq t\right), \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und } 1 \leq i \leq K. \tag{4.23}$$

S_i ist die "Überlebenswahrscheinlichkeit" gegeben die Startverteilung ν_i, $i = 1, ..., K$.

Proposition 4.4 *Für die Überlebenswahrscheinlichkeiten S_i, $i = 1, ..., K$, gilt*

$$S_i(t) = \sum_{k=1}^{K-1} \beta_{i,k}\, e^{-\mu_k t}, \qquad \textit{für } t \geq 0\,,$$

wobei $\beta_{i,k} \equiv -B_{i,k}\, B^{-1}_{k,K}$, $1 \leq i, k \leq K$.
Die Intensitäten $\lambda_i : \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\lambda_i(t) \equiv \frac{\sum_{k=1}^{7} \mu_k\, \beta_{i,k}\, e^{-\mu_k t}}{\sum_{k=1}^{7} \beta_{i,k}\, e^{-\mu_k t}}, \qquad \textit{für } t \geq 0 \textit{ und } 1 \leq i \leq K-1,$$

erlauben die Darstellung

$$S_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(s)\, ds\right), \qquad \textit{für } t \geq 0 \textit{ und } 1 \leq i \leq K.$$

Insbesondere sind die Intensitäten λ_i nicht–negativ, $i = 1, ..., K-1$.

Beweis : Mit den Beziehungen für B und B^{-1}, die in Lemma 4.3 hergeleitet wurden, und (4.22) gilt

$$\begin{aligned} S_i(t) &= 1 - \widetilde{P}^i\left(\tau \leq t\right) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{K} \delta_{ij} P_{j,K}(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P_{i,K}(t) \\
&= 1 - B_{i,\cdot}\, diag\left(e^{-\mu_1 t}, ..., e^{-\mu_K t}\right)\, B^{-1}_{\cdot,K} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{K} B_{i,k}\, e^{-\mu_k t}\, B^{-1}_{k,K} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{K-1} B_{i,k}\, e^{-\mu_k t}\, B^{-1}_{k,K} \quad - \quad B_{i,K}\, e^{-\mu_K t}\, B^{-1}_{K,K} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{K-1} B_{i,k}\, e^{-\mu_k t}\, B^{-1}_{k,K} \quad - \quad 1\, e^{0}\, 1 \\
&= \sum_{k=1}^{K-1} -B_{i,k}\, B^{-1}_{k,K}\, e^{-\mu_k t} \\
&= \sum_{k=1}^{K-1} \beta_{i,k}\, e^{-\mu_k t}\,, \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und } 1 \leq i \leq K.
\end{aligned}
$$

Es ist unser Ziel, die Überlebenswahrscheinlichkeiten S_i zu charakterisieren. Wir untersuchen den jeweiligen Startwert.

$$
\begin{aligned}
S_i(0) &= 1 - B_{i,\cdot}\, \underbrace{diag\left(e^{-\mu_1 0}, ..., e^{-\mu_K 0}\right)}_{=I_K}\, B^{-1}_{\cdot,K} \\
&= 1 - B_{i,\cdot}\, B^{-1}_{\cdot,K} \\
&= 1 - \delta_{iK} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{falls } i = K, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Der Index i sei im folgenden beliebig aus der Menge $\{1, ..., K\}$. S_i beschreibt die Überlebenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Zeit. Aus diesem Grund ist S_i monoton fallend und bildet auf das Interval $[0, 1]$ ab. Insbesondere folgt daraus

$$S_K(t) = 0\,, \qquad \text{für } t \geq 0.$$

S_i ist eine endliche Summe von Exponentialfunktionen. Demnach ist S_i stetig und beliebig oft differenzierbar. Für die nächste Überlegung sei $t \geq 0$ fest. Der Index i sei nun aus der Menge $\{1, ..., K-1\}$. Wir schließen den Fall "$i = K$" aus. Es gilt

$$S_i(t) > 0\,, \qquad \text{für } t \geq 0.$$

Denn gäbe es ein $t_0 \geq 0$ mit $S_i(t_0) = 0$, dann würde daraus

$$S_i(t) = 0\,, \qquad \text{für } t \geq t_0,$$

folgen, da S_i monoton fallend ist und auf $[0, 1]$ abbildet. Das Intervall $I \equiv [t_0, \infty)$ besteht aus unendlich vielen (sogar überabzählbar vielen) Elementen, und für jedes $t \in I$ würde

$$0 = S_i(t) = \sum_{k=1}^{K-1} e^{-\mu_k t}\, \beta_{i,k}$$

gelten. Verstehen wir $\alpha_{t\,k} \equiv e^{-\mu_k t}$, $k = 1, ..., K-1$, als Koeffizienten eines linearen Gleichungssystem der Form

$$\alpha_{t\,1}\,\beta_{i\,1} + \; ... \; + \alpha_{t\,K-1}\,\beta_{i\,K-1} = 0\,, \qquad t \in I,$$

dann besitzt das Gleichungssystem nur die triviale Lösung, sprich $\beta_{i1} = ... = \beta_{iK-1} = 0$; denn es gibt unendliche viele Gleichungen und für die Koeffizienten gilt $\alpha_{t\,k} = e^{-\mu_k t} > 0$. Daraus wäre zu schließen, daß

$$S_i(0) = \sum_{k=1}^{K-1} \beta_{ik} = 0$$

gilt, was im Widerspruch zum oben Gezeigten, $S_i(0) = 1$, steht.
Mit diesem Ergebnis können wir die Intensitäten diskutieren. Wieder sei $i \in \{1, ..., K-1\}$. Die Ableitung von S_i lautet

$$\begin{aligned} \frac{dS_i}{dt}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{K-1} \beta_{i,k}\, e^{-\mu_k t}\right) = \sum_{k=1}^{K-1} -\mu_k\, \beta_{i,k}\, e^{-\mu_k t} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{K-1} -\mu_k\, \beta_{i,k}\, e^{-\mu_k t}}{\underbrace{\sum_{k=1}^{K-1} \beta_{i,k}\, e^{-\mu_k t}}_{=S_i(t)>0}} S_i(t) = -\lambda_i(t)\, S_i(t), \qquad \text{für } t \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen $S_i > 0$ ist die Intensität λ_i wohldefiniert. Aus der Anfangsbedingung $S_i(0) = 1$ sehen wir, daß

$$S_i(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(s)\, ds\right)\,, \qquad \text{für } t \geq 0,$$

die Differentialgleichung eindeutig löst. □

Wir betrachten die empirische Einjahresübergangsmatrix $\widehat{P}(1)$, die wir aus Jarrow, Lando und Turnbull (1997), Tabelle 4, übernehmen.

$$\widehat{P}(1) \equiv \begin{pmatrix} 0.8918 & 0.0915 & 0.0110 & 0.0026 & 0.0028 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0081 & 0.9025 & 0.0710 & 0.0120 & 0.0033 & 0.0030 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0010 & 0.0280 & 0.8930 & 0.0610 & 0.0111 & 0.0054 & 0.0002 & 0.0003 \\ 0.0006 & 0.0060 & 0.0640 & 0.8480 & 0.0581 & 0.0181 & 0.0022 & 0.0030 \\ 0.0004 & 0.0025 & 0.0102 & 0.0670 & 0.7816 & 0.0960 & 0.0124 & 0.0299 \\ 0.0000 & 0.0020 & 0.0040 & 0.0083 & 0.0462 & 0.8291 & 0.0355 & 0.0749 \\ 0.0000 & 0.0003 & 0.0115 & 0.0120 & 0.0205 & 0.0694 & 0.6510 & 0.2353 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix} \qquad (4.24)$$

Die Matrix interpretiert man auf folgende Weise. Der Eintrag in der zweiten Zeile und der dritten Spalte, 0.0710, ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Anleihe mit Startrating AA nach einem Jahr das Rating A besitzt. Aus der empirischen Matrix $\widehat{P}(1)$ können wir die Transformationsmatrix $\widehat{B}$, $\widehat{\mu}_1$,... und $\widehat{\mu}_7$ berechnen (siehe Beweis von Lemma 4.3). Daraus können wir die Überlebenswahrscheinlichkeiten $\widehat{S}_1$,...,$\widehat{S}_7$ sowie die Parameter $\widehat{\lambda}_1$,...,$\widehat{\lambda}_7$ gewinnen.

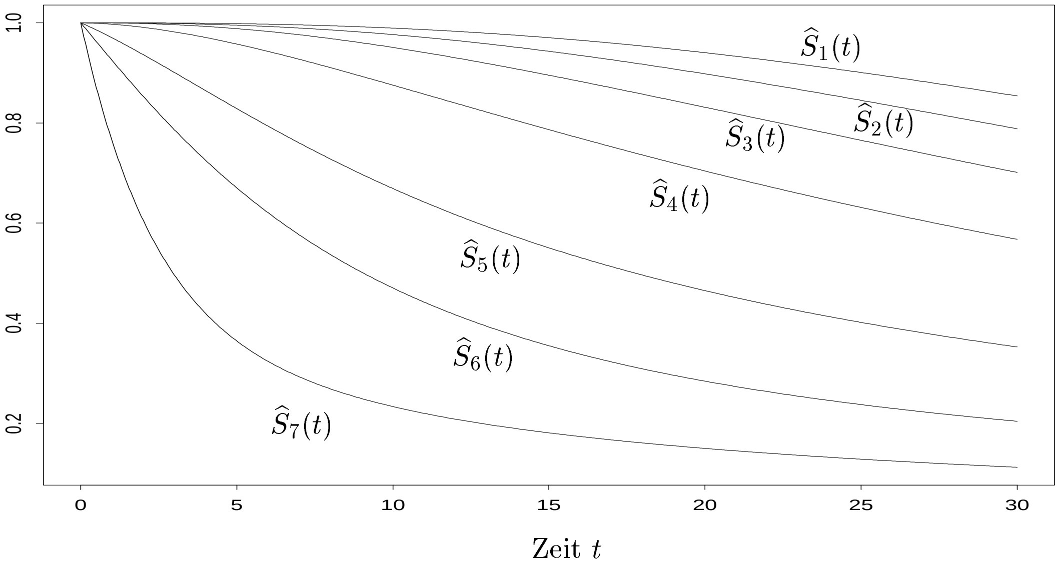

Abbildung 4.6: Empirische Überlebenswahrscheinlichkeiten

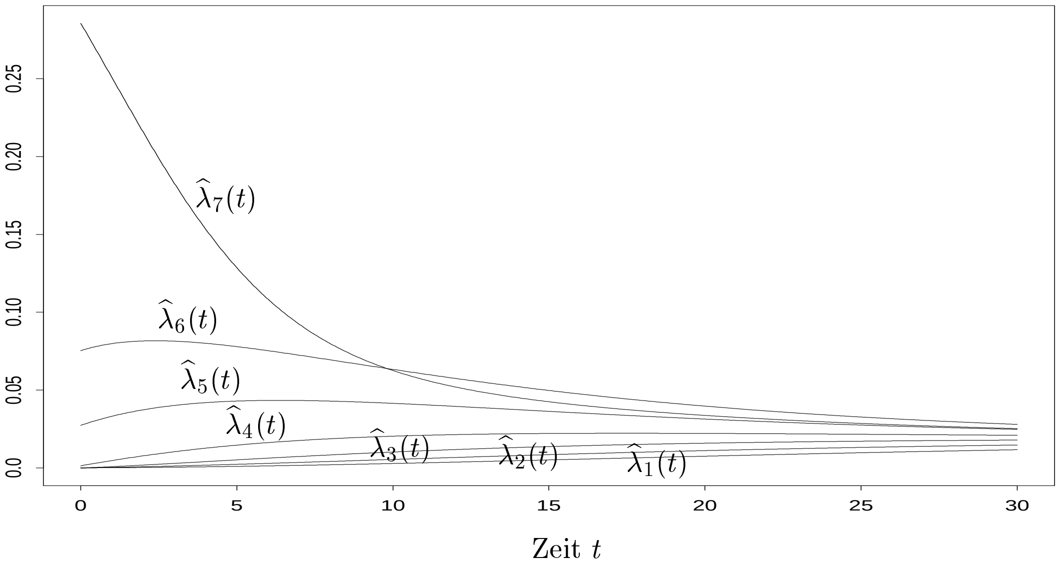

Abbildung 4.7: Empirische Ausfallintensitäten

In den Abbildungen 4.6 und 4.7 sind die Überlebenswahrscheinlichkeiten und Ausfallintensitäten aufgetragen. Mit den Indices 1 bis 7 sind die Ratingklassen bezeichnet, in die eine entsprechende Anleihe zum Zeitpunkt Null eingestuft ist, wobei wir mit den Zahlen die Klassen wie folgt identifizieren: $1 \hat{=} AAA$, $2 \hat{=} AA$, $3 \hat{=} A$, $4 \hat{=} BBB$, $5 \hat{=} BB$, $6 \hat{=} B$, $7 \hat{=} CCC$ und $8 \hat{=}$ *Default.*

Als Beispiel betrachten wir ein **"einfaches Marktmodell"**. Wir wählen uns einen festen Zeithorizont $T > 0$. Die Zinsstruktur ist durch eine konstante Verzinsungsrate $r > 0$ gegeben. Die risikolosen Anlagen besitzen folglich deterministische Preisprozesse. Allein das Ausfallrisiko ist stochastisch und wird durch eine exponentialverteilte Stopzeit modelliert. In dem Ansatz von Jarrow, Lando und Turnbull wählt man ein festes Anfangsrating $i \in \{1, ..., K-1\}$. Unter dem Maß $\widetilde{P}^i$ ist τ exponentialverteilt mit Parameterfunktion λ_i; d.h.: $\widetilde{P}^i\,(\tau \leq t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(s)\,ds\right)$ für $t \in [0, T]$. Wir müssen einen "geeigneten" filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum definieren. Die zugrundeliegende Filtrierung sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, wobei

$$\mathcal{F}_t \equiv \sigma\left(\mathbf{1}_{\{\tau \leq s\}} : 0 \leq s \leq t\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T, \qquad \text{und} \qquad \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_T\,, \tag{4.25}$$

gilt. Wir erinnern uns, daß $\{\tau \leq t\} = \{\eta(t) = K\}$ gilt und η eine Markovkette auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{K}, \widetilde{P}\right)$ ist. Durch Konstruktion der Filtrierung ist τ eine $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$–Stopzeit. Insbesondere geht nur die "Information" über den Eintritt von η in K in die Filtrierung ein. Die anderen Zustände werden nicht "beobachtet".

Wir befinden uns damit auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P}^i, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}\right)$, wobei $\widetilde{P}^i$ das auf $\mathcal{F}$ induzierte Maß ist, denn es gilt $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$. Die Preisprozesse $B = \{B(t) : 0 \leq t \leq T\}$ und $C^i(\cdot, T) = \{C^i(t, T) : 0 \leq t \leq T\}$ seien für $0 \leq t \leq T$ gegeben mittels

$$B(t) \equiv \exp(rt) \qquad \text{und} \tag{4.26}$$

$$C^i(t,T) \equiv \delta \exp(-r(T-t)) + (1-\delta)\,\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \exp\left(-\int_t^T (r + \lambda_i(u))\,du\right), \tag{4.27}$$

wobei $\delta \in [0, 1)$ die *Recovery–Rate* ist. B ist das risikolose Geldmarktkonto und $C^i(\cdot, T)$ die Anleihe mit Laufzeit T, die Kreditrisiko ausgesetzt ist und in $t = 0$ in Ratingklasse i startet. Wir erhalten die "Randbedingung"

$$C^i(T, T) = \delta + (1-\delta)\,\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}. \tag{4.28}$$

Diese Darstellung rechtfertigt den Begriff *Recovery–Rate*, denn der Wert der Anleihe ist am Laufzeitende δ, falls der Kreditausfall eintritt, sonst eine Geldeinheit. $\beta = \{\beta(t) : 0 \leq t \leq T\}$ sei der Diskontierungsprozeß; d.h. $\beta \equiv B^{-1}$, beziehungsweise

$$\beta(t) = \exp(-rt)\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{4.29}$$

Für den diskontierten Preisprozeß $Z^i = \{Z^i(t) : 0 \leq t \leq T\}$ der Anleihe erhalten wir für $0 \leq t \leq T$

$$Z^i(t) = \beta(t) C^i(t, T) \tag{4.30}$$

$$= \delta \exp(-rT) + (1-\delta) \exp(-rT)\,\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \exp\left(-\int_t^T \lambda_i(u)\,du\right). \tag{4.31}$$

Proposition 4.5 *Z^i ist ein quadratintegrierbares $\widetilde{P}^i$–Martingal und damit ein $\mathcal{H}^2(\widetilde{P}^i)$–Semimartingal. Insbesondere gilt*

$$\mathbf{E}^i\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,|\mathcal{F}_s\right\} = \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\exp\left(-\int_s^t \lambda_i(u)\,du\right), \qquad \textit{für } 0 \le s < t \le T.$$

Beweis : Aus der Darstellung von Z^i und $r, \lambda_i \ge 0$ folgt $|Z^i| \le 1$. Nach Korollar 3 von Satz 2.61 ist $X = \{X(t) : 0 \le t \le T\}$, definiert durch

$$X(t) \equiv \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,\exp\left(\int_0^t \lambda_i(u)\,du\right), \qquad \text{für } 0 \le t \le T,$$

ein $\widetilde{P}^i$–Martingal. Denn λ_i ist als Quotient zweier stetiger Funktionen selbst eine stetige Funktion. Damit existiert das Integral von λ_i über das Kompaktum $[0, T]$, woraus mit besagtem Satz die Martingaleigenschaft folgt. Z^i läßt sich mithilfe von X schreiben. Definieren wir die reellen Konstanten a und b durch

$$\begin{aligned} a &\equiv \delta\exp(-rT) \qquad \text{und} \\ b &\equiv (1-\delta)\,\exp(-rT))\exp\left(-\int_0^T \lambda_i(u)\,du\right), \end{aligned}$$

dann erhalten wir $Z^i = a + bX$. Da X ein Martingal ist, gilt das auch für Z^i. Insbesondere ist $|Z^i| \le 1$, woraus wir $\mathbf{E}^i\left\{Z^i(t)^2\right\} \le 1$ schließen für $0 \le t \le T$. Mit Satz 2.30 und Definition 2.33 sehen wir, daß Z^i ein $\mathcal{H}^2(\widetilde{P}^i)$–Semimartingal ist.
Aus der Bemerkung nach Satz 2.61 Korollar 3 – speziell aus der Martingaleigenschaft von X – folgt

$$\mathbf{E}^i\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,|\mathcal{F}_s\right\} = \mathbf{1}_{\{\tau>s\}}\exp\left(-\int_s^t \lambda_i(u)\,du\right), \qquad \text{für } 0 \le s < t \le T,$$

was den Beweis abschließt. □

Später werden wir zeigen, daß ein Marktmodell, wie es hier vorgestellt wird, vollständig ist. Das liefert die Grundlage, *Contingent Claims* mithilfe von Satz 3.4 zu bewerten.

Als Beispiel betrachten wir eine sogenannte *"Default Option"* .

Beispiel 11 (Bewertung einer Default Option im einfachen Marktmodell)
Der Besitzer einer Default Option mit Fälligkeit T_1, $0 \le T_1 \le T$, erhält eine Geldeinheit in T_1, falls die zugrundeliegende Anleihe innerhalb des Zeitintervalls $[0, T_1]$ ausfällt, ansonsten verfällt die Option ohne Auszahlung. Der Contingent Claim X einer Default Option hat somit die Gestalt

$$X = \mathbf{1}_{\{\tau \le T_1\}}. \tag{4.32}$$

Nach Definition ist τ eine Stopzeit, mit anderen Worten $\{\tau \le T_1\} \in \mathcal{F}_{T_1}$. $|X|$ ist durch 1 beschränkt. Damit ist X $\mathcal{F}_{T_1}$–meßbar und $\mathbf{E}\{X^2\} \le 1$. Im Sinne von Definition 3.8 ist X ein Contingent Claim. Der Preisprozeß von X sei $c_X^i = \{c_X^i(t) : 0 \le t \le T_1\}$ für eine Anleihe, die in Ratingklasse i startet. Mit Satz 3.5 und Proposition 4.5 gilt

$$\begin{aligned} c_X^i(t) &= \frac{1}{\beta(t)}\mathbf{E}^i\left\{\beta(T_1)\,X\,|\mathcal{F}_t\right\} \\ &= e^{-r(T_1-t)}\,\mathbf{E}^i\left\{\mathbf{1}_{\{\tau\le T_1\}}\,|\mathcal{F}_t\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-r(T_1-t)}\left(1-\mathbf{E}^i\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>T_1\}}\,|\mathcal{F}_t\right\}\right)\\
&= e^{-r(T_1-t)}\left(1-\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\exp\left(-\int_t^{T_1}\lambda_i(u)\,du\right)\right), \qquad \textit{für } 0\le t\le T_1.
\end{aligned}
$$

Insbesondere gilt für $t=0$ und Anfangszustand i

$$
c_X^i(0) \;=\; e^{-r\,T_1}\left(1-\exp\left(-\int_0^{T_1}\lambda_i(u)\,du\right)\right) \;=\; e^{-r\,T_1}\,\widetilde{P}^i\left(\tau\le T_1\right). \tag{4.33}
$$

Die selbstfinanzierende Handelsstrategie Φ, die den Contingent Claim X nachbildet, läßt sich explizit angeben. Zunächst erinnern wir daran, daß jede Handelsstrategie, die nicht umschichtet, per Definition selbstfinanzierend ist. Finden innerhalb eines Portfolios keine Umschichtungen statt, dann fließt weder Kapital zu noch ab, was gerade den Begriff "selbstfinanzierend" ausmacht. Im "einfachen Marktmodell" läßt sich eine Handelsstrategie finden, durch die wir die Default Option ohne Umschichten nachbilden.

Die Werte, die B und C^i in T_1 annehmen, hängen allein von τ ab. Die Entwicklung von B ist sogar deterministisch. Es gilt nach Definition von B und $C^i(\cdot,T)$

$$
\begin{aligned}
B(T_1) &= e^{r\,T_1}\\
C^i(T_1,T) &= \begin{cases} \delta\, e^{-r(T-T_1)} & \textit{auf } \{\tau\le T_1\}\\ \delta\, e^{-r(T-T_1)} + (1-\delta)\,e^{-r(T-T_1)}\exp\left(-\int_{T_1}^T\lambda_i(u)\,du\right) & \textit{auf } \{\tau> T_1\}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Mit diesem Wissen konstruieren wir eine statische, also selbstfinanzierende Handelsstrategie $\Phi=(\varphi_0,\varphi_1)$, indem wir das nachstehende lineare Gleichungssystem lösen

$$
\begin{aligned}
\varphi_0\,B(T_1) + \varphi_1\,C^i(T_1,T) &= 1 \quad \textit{auf } \{\tau\le T_1\}\\
\varphi_0\,B(T_1) + \varphi_1\,C^i(T_1,T) &= 0 \quad \textit{auf } \{\tau> T_1\}.
\end{aligned}
$$

Als Lösung erhalten wir

$$
\varphi_0 = e^{-r\,T_1} + \frac{\delta\, e^{-r\,T_1}}{1-\delta}\exp\left(\int_{T_1}^T\lambda_i(u)\,du\right) \tag{4.34}
$$

$$
\varphi_1 = -\frac{e^{r(T-T_1)}}{1-\delta}\exp\left(\int_{T_1}^T\lambda_i(u)\,du\right). \tag{4.35}
$$

In Abbildung 4.8 sehen wir, wie sich die Handelsstrategie (ϕ_0,ϕ_1) verhält, wenn wir die Laufzeit der *Default Option* variieren. Mittels (ϕ_0,ϕ_1) können wir den *Contingent Claim X* nachbilden. Dazu nimmt man eine *Long–Position* im risikolosen Geldmarktkont ein ($\phi_0>0$) und eine *Short–Position* in der Anleihe mit Kreditrisiko ein($\phi_1<0$). Mit wachsender Laufzeit T^1 steigt der Wert der Option, doch die Beträge von ϕ_0 und ϕ_1 fallen.

Das "einfache Marktmodell" geht von einer positiven Konstante r als Verzinsungsrate aus; modelliert man die Zinsstruktur nach Heath–Jarrow–Morton (1992), kann man jedes beliebige Zinsstrukturmodell mit dem *Default*–Modell nach Jarrow, Lando und Turnbull verbinden, solange man annimmt, daß Zins und Ausfallrisiko unabhängig sind. In Abschnitt 3 werden wir diesen Fall diskutieren.

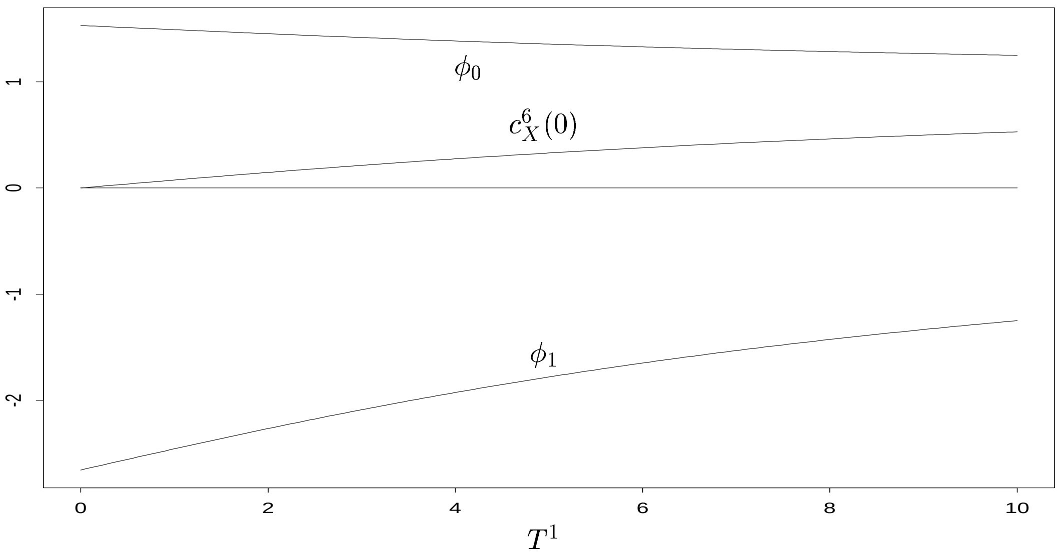

Abbildung 4.8: Die Anleihe hat das Startrating B, Laufzeit $T = 10$ Jahre und $\delta = 0.2$. Wir betrachten den Preis einer *Default Option*, $c_X^6(0)$, und tragen den Wert gegen T^1 auf, wobei wir die selbstfinanzierende Handelstrategie (ϕ_0, ϕ_1) angeben, die den *Contingent Claim* $X = \mathbf{1}_{\{\tau \leq T_1\}}$ nachbildet.

Lando (1997) verallgemeinert das hier vorgestellten Kreditrisikomodell. Der Grundgedanke, daß die Anleihe verschiedene Ratingklassen durchläuft, bleibt erhalten. Die Markovkette ist allerdings nicht mehr homogen, vielmehr ist die Generatormatrix A zeitabhängig und zufällig. Als Ergebnis erhält man, daß die Intensität ein positiver stochastischer Prozeß ist, der von zuvor gewählten "Zustandsvariablen" abhängt. Eine vernünftige "Zustandsvariable" ist beispielsweise die Verzinsungsrate $r = \{r(t) : 0 \leq t \leq T\}$. Der Kreditausfall ist dann – probabilistisch umschrieben – der erste Sprung eines Cox–Prozesses, also eine Stopzeit, die Definition 2.37 gerecht wird.

4.3 Kreditrisiko mit stochastischer Ausfallsintensität

Zunächst konstruieren wir den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum, durch den das Marktmodell beschrieben wird. Wir beginnen mit einem "abstrakten" filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{K}, \widetilde{P}, (\mathcal{K}_t)_{0\le t\le T}\right)$, wobei $T > 0$ ein endlicher Zeithorizont ist. Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum sollen die Prozesse "leben", die unsere Preisprozesse vorantreiben. $W = (W^1, W^2)$ sei eine 2–dimensionale Standard Brownsche Bewegung, $W^k = \left\{W^k(t) : 0 \le t \le T\right\}$ für $k = 1, 2$. Wieder sei τ eine Stopzeit mit $\tau > 0$ P–f.s. und $N = \{N(t) : 0 \le t \le T\} \equiv \left\{\mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} : 0 \le t \le T\right\}$ deren Indikatorprozeß. Wir nehmen an, daß N die Intensität $\lambda = \{\lambda(t) : 0 \le t \le T\}$ besitzt. Die Prozesse $W^1, (W^2)^\tau$ und N erzeugen die relevanten Informationsmengen, wobei wir unter $(W^2)^\tau$ den gestoppten Prozeß $(W^2)^\tau(t) = (W^2)(t \wedge \tau)$ verstehen, $t \in [0, T]$.

$$\mathcal{F}_t \equiv \sigma\left(W^1(s), (W^2)^\tau(s), N(s) : 0 \le s \le t\right), \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Von der zweiten Brownschen Bewegung W^2 fließt nur bis zur Stopzeit τ die "Information" in die σ–Algebren ein. Wir definieren eine zweite Filtrierung, genauer gesagt eine Unterfiltrierung von $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$

$$\mathcal{G}_t \equiv \sigma\left(W^1(s), (W^2)^\tau(s) : 0 \le s \le t\right), \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Die Intensität λ von N soll $(\mathcal{G}_t)_{0\le t\le T}$–adaptiert sein.

Wir betrachten von nun an den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}\right)$, wobei wir $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_T$ setzen und unter P das auf der Unter–σ–Algebra $\mathcal{F}$ von $\widetilde{P}$ induzierte Maß verstehen; d.h. $P(A) \equiv \widetilde{P}(A)$ für alle $A \in \mathcal{F}$. Denn nach Voraussetzung gilt $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$. Die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ wird den Anforderungen aus Kapitel 3.1 gerecht. Die Prozesse W^1, $(W^2)^\tau$ und N besitzen den Startwert Null und sind zudem càdlàg. Deshalb ist $\mathcal{F}_0$ die P–Erweiterung einer trivialen σ–Algebra und enthält nur Mengen vom Maß Null oder Eins. Die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ ist rechtseitig stetig. Mit anderen Worten, $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ genügt den *üblichen Bedingungen* (siehe Definition 2.3). Nach Definition ist die Filtrierung aufsteigend und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.
Auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}\right)$ modellieren wir die Preisprozesse B, $p(\cdot, T)$, B und $p(\cdot, T)$ sind die Preisprozesse der risikolosen Anlagemöglichkeiten. Das risikolose Geldmarktkonto ist modelliert durch

$$B(t) \equiv \exp\left(\int_0^t r(s)\, ds\right), \qquad \text{für } 0 \le t \le T, \tag{4.36}$$

und $p(\cdot, T)$, gegeben durch

$$p(t, T) \equiv \exp\left(-\int_t^T f(t, s)\, ds\right), \qquad \text{für } 0 \le t \le T, \tag{4.37}$$

ist der *Zero Bond* mit Laufzeit T. Die Preisprozesse B und $p(t, T)$ werden nach Heath, Jarrow und Morton (1992) durch die *Forward*–Zinsstruktur modelliert, gegeben durch

$$f(s, t) \equiv f(0, t) + \int_0^s \alpha(u, t)\, du + \int_0^s \sigma(u, t)\, dW^1(u) \quad \text{und} \tag{4.38}$$

$$r(t) \equiv f(t, t), \qquad \text{für } 0 \le s \le t \le T. \tag{4.39}$$

Hierbei sind α und σ $(\mathcal{G}_t)_{0\le t\le T}$–adaptierte Prozesse.
Die Dynamik des kreditrisikobehafteten Geldmarktkontos C und des *Defaultable Zero Bonds* $v(\cdot,T)$ wird durch

$$\begin{aligned} C(t) &\equiv (1-N(t))\exp\left(\int_0^t r^d(s)\,ds\right) \qquad \text{und} && (4.40)\\ v(t,T) &\equiv (1-N(t))\exp\left(-\int_t^T f(t,s)\,ds-\int_t^T h(t,s)\,ds\right), \qquad \text{für } 0\le t\le T, && (4.41)\end{aligned}$$

beschrieben. Dabei modellieren wir den *Forward Spread* zwischen der zukünftigen risikolosen Zinsstruktur und der *Defaultable Term Structure* erneut nach Heath, Jarrow und Morton

$$\begin{aligned} h(s,t) &\equiv h(0,t)+\int_0^s \tilde\alpha(u,t)\,du+\int_0^s \tilde\sigma^1(u,t)\,dW^1(u)+\int_0^s \tilde\sigma^2(u,t)\,dW^2(u) \quad \text{und} && (4.42)\\ r^d(t) &\equiv f(t,t)+\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,h(t,t), \qquad \text{für } 0\le s\le t\le T. && (4.43)\end{aligned}$$

Hierbei sind $\tilde\alpha$, $\tilde\sigma^1$ und $\tilde\sigma^2$ $(\mathcal{G}_t)_{0\le t\le T}$–adaptierte Prozesse.

Wir modellieren die Zinsstruktur mit Kreditrisiko, indem wir den Zins als Summe aus dem risikolosen Zins $f(\cdot,\cdot)$ und dem *Spread* $h(\cdot,\cdot)$ darstellen.

Im folgenden betrachten wir die risikolosen Preisprozesse B und $p(\cdot,T)$. Einige Annahmen sind notwendig, um mit der *Forward*–Zinsstruktur sinnvoll arbeiten zu können.

Annahme 4.1 *Für P–fast–alle $\omega\in\Omega$ erlauben die "zweidimensionalen Pfade" von $\alpha(\cdot,\cdot)$ und $\sigma(\cdot,\cdot)$, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen. Unter den "zweidimensionalen Pfaden" von beispielsweise $\alpha(\cdot,\cdot)$ verstehen wir die Abbildung $\alpha(\cdot,\cdot,\omega):[0,T]\times[0,T]\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, für $\omega\in\Omega$.*

Proposition 4.6 *Der Prozeß $F(\cdot,T)=\{F(t,T):0\le t\le T\}$, definiert durch*

$$F(t,T)\equiv\int_t^T f(t,s)\,ds, \qquad \text{für } 0\le t\le T,$$

besitzt unter den Voraussetzungen von Annahme 4.1 für $t\in[0,T]$ die Gestalt

$$F(t,T)=F(0,T)-R(t)+\int_0^t A(s,T)\,ds+\int_0^t S(s,T)\,dW^1(s),$$

wobei die Prozesse $R=\{R(t):0\le t\le T\}$, $A(\cdot,T)=\{A(t,T):0\le t\le T\}$ und $S(\cdot,T)=\{S(t,T):0\le t\le T\}$ gegeben sind mittels

$$\begin{aligned} R(t) &\equiv \int_0^t r(s)\,ds,\\ A(t,T) &\equiv \int_t^T \alpha(t,s)\,ds \qquad \text{und}\\ S(t,T) &\equiv \int_t^T \sigma(t,s)\,ds \qquad \text{für } 0\le t\le T.\end{aligned}$$

Für den Preisprozeß $p(\cdot,T)$ gilt dann

$$p(t,T)=p(0,T)\,\exp\left(R(t)-\int_0^t A(s,T)\,ds-\int_0^t S(s,T)\,dW^1(s)\right), \qquad \text{für } 0\le t\le T,$$

beziehungsweise für $0\le t\le T$

$$p(t,T)=p(0,T)\,\mathcal{E}\left(R-\int_0^\cdot A(s,T)\,ds+\frac{1}{2}\int_0^\cdot S(s,T)^2\,ds-S(\cdot,T)\cdot W^1\right)(t).$$

Beweis:
Der Beweis der Proposition folgt direkt aus Annahme 4.1 und ist zum Beispiel bei Björk (1996) nachzulesen. Der letzte Teil der Aussage ist eine Konsequenz von Korollar 5, Satz 2.34. □

Nach den risikolosen Instrumenten wenden wir uns den Anlagemöglichkeiten zu, die Kreditrisiko ausgesetzt sind. Im Fall der risikobehafteten *Forward*–Zinsstruktur schaffen wir Voraussetzungen technischer Natur.

Annahme 4.2 *Für P–fast–alle $\omega \in \Omega$ erlauben die "zweidimensionalen Pfade" von $\tilde{\alpha}(\cdot,\cdot)$, $\tilde{\sigma}^1(\cdot,\cdot)$ und $\tilde{\sigma}^2(\cdot,\cdot)$, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen.*

Proposition 4.7 *Der Prozeß $H(\cdot,T) = \{H(t,T) : 0 \le t \le T\}$, gegeben mittels*

$$H(t,T) \equiv \int_t^T h(t,s)\,ds, \qquad \text{für } 0 \le t \le T,$$

besitzt unter den Voraussetzungen von Annahme 4.2 für $t \in [0,T]$ die Gestalt

$$H(t,T) = H(0,T) - \int_0^t h(s,s)\,ds + \int_0^t \widetilde{A}(s,T)\,ds + \int_0^t \widetilde{S}^1(s,T)\,dW^1(s) + \int_0^t \widetilde{S}^2(s,T)\,dW^2(s),$$

wobei die Prozesse $\widetilde{A}(\cdot,T) = \{\widetilde{A}(t,T) : 0 \le t \le T\}$, $\widetilde{S}^1(\cdot,T) = \{\widetilde{S}^1(t,T) : 0 \le t \le T\}$ und $\widetilde{S}^2(\cdot,T) = \{\widetilde{S}^2(t,T) : 0 \le t \le T\}$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} \widetilde{A}(t,T) &\equiv \int_t^T \tilde{\alpha}(t,s)\,ds, \qquad \text{für } 0 \le t \le T \quad \text{und} \\ \widetilde{S}^k(t,T) &\equiv \int_t^T \tilde{\sigma}^k(t,s)\,ds, \qquad \text{für } 0 \le t \le T \text{ und } k = 1,2. \end{aligned}$$

Für $v(\cdot,T)$ erhalten wir

$$v(t,T) = v(0,T)\ (1 - N(t)) \exp\left(E(t)\right), \qquad \text{für } 0 \le t \le T,$$

wobei der Prozeß $E = \{E(t) : 0 \le t \le T\}$ gegeben ist durch

$$E(t) \equiv -F(t,T) - H(t,T)^{\tau} + F(0,T) + H(0,T), \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Desweiteren besitzt $v(\cdot,T)$ die Darstellung als Doléans–Dade–Exponential

$$v(t,T) = v(0,T)\mathcal{E}\left(-N + X + Y\right)(t), \qquad \text{für } 0 \le t \le T,$$

wobei $X = \{X(t) : 0 \le t \le T\}$ und $Y = \{Y(t) : 0 \le t \le T\}$ erklärt sind durch

$$\begin{aligned} X(t) &\equiv R(t) - \int_0^t A(s,T)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t S(s,T)^2\,ds - \int_0^t S(s,T)\,dW^1(s) \qquad \text{und} \\ Y(t) &\equiv E(t) + \frac{1}{2}[E,E](t) - X(t) \\ &= \int_0^{t\wedge\tau} h(s,s)\,ds - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{A}(s,T)\,ds - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^1(s,T)\,dW^1(s) \\ &\quad - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^2(s,T)\,dW^2(s) + \int_0^{t\wedge\tau} S(s,T)\widetilde{S}^1(s,T)\,ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^1(s,T)^2\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^2(s,T)^2\,ds\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $Y = Y^{\tau}$.

Beweis:
Die Darstellung von $H(\cdot,T)$ folgt mit Fubini aus Annahme 4.2 und ist beispielsweise bei Björk (1996) nachzulesen.
$v(t,T)$ dürfen wir in $\exp(\cdot)$ auf der Menge $\{\tau \le t\}$ gefahrlos abändern, da der Faktor $(1-N(t))$ auf dieser Menge Null ist, woraus $v(t,T)=0$ auf $\{\tau \le t\}$ folgt. Es gilt

$$v(t,T) = (1-N(t))\exp\left(-F(t,T) - H(t,T)^{\tau}\right).$$

Durch das Stoppen von $H(\cdot,T)$ in τ verändern wir die Gestalt des Exponenten für jedes $t\in[0,T]$ nur auf $\{\tau < t\} \subset \{\tau \le t\}$.
Nach Voraussetzung ist $\tau > 0$ P–f.s. Es gilt

$$v(0,T) = (1-N(0))\exp\left(-F(0,T) - H(0,T)\right) = \exp\left(-F(0,T)-H(0,T)\right).$$

Mit der Defninition von E erhalten wir für $t\in[0,T]$

$$v(t,T) = (1-N(t))\exp\left(-F(t,T)-H(t,T)^{\tau}\right) = v(0,T)\ (1-N(t))\exp\left(E(t)\right).$$

Der Prozeß E besitzt stetige Pfade. E ist die Summe aus den Prozessen $-F(\cdot,T)$ und $-H(\cdot,T)$ abzüglich einer Konstanten. Diese Prozesse bestehen aus Integralen, die als Integratoren "dW" und "dt" verwenden. Die Integrale bezüglich "dt" sind nach Satz 2.25 stetig. Nach Satz 2.47 besitzen die Brownschen Integrale stetige Pfade. Mithilfe von Satz 2.34, Korollar 5, erhalten wir

$$\exp\left(E(t)\right) = \mathcal{E}\left(E + \frac{1}{2}[E,E]\right)(t), \qquad \text{für } 0\le t\le T.$$

Wir berechnen $[E,E]$ und zerlegen den "stochastischen Exponenten" $E+\frac{1}{2}[E,E]$ in den Teil, der in τ gestoppt wird und einen Restanteil. Nach Proposition 4.5 und der Darstellung von $H(\cdot,T)$ gilt für $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned} E(t) \;=\;& R(t) - \int_0^t A(s,T)\,ds - \int_0^t S(s,T)\,dW^1(s) + \int_0^{t\wedge\tau} h(s,s)\,ds \\ & - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{A}(s,T)\,ds - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^1(s,T)\,dW^1(s) - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^2(s,T)\,dW^2(s). \end{aligned} \tag{4.44}$$

R und die Integrale bezüglich "ds" sind nach Satz 2.25 stetige FV–Prozesse und haben den Startwert Null. Diese Prozesse fallen bei der Berechnung der quadratischen Variation von E wegen Satz 2.29 weg. Auf die Brownschen Integrale wenden wir Satz 2.47 an, wobei wir für die gestoppten Prozesse Satz 2.29 erneut benötigen. Um den folgenden Sachverhalt besser zu überblicken, benutzen wir für den quadratischen Variationsprozeß eine neue Schreibweise. Für eine Semimartingal $Z=\{Z(t): t\ge 0\}$ definieren wir den Prozeß $\langle Z\rangle = \{\langle Z\rangle(t) : t\ge 0\}$ durch $\langle Z\rangle \equiv [Z,Z]$. Für $t\in[0,T]$ gilt

$$\begin{aligned} [E,E](t) \;&=\; \left\langle S(\cdot,T)\cdot W^1 + \left(\widetilde{S}^1(\cdot,T)\cdot W^1\right)^{\tau} + \left(\widetilde{S}^2(\cdot,T)\cdot W^2\right)^{\tau}\right\rangle(t) \\ &=\; \int_0^t S(s,T)^2\,ds + 2\int_0^{t\wedge\tau} S(s,T)\widetilde{S}^1(s,T)\,ds \\ &\quad + \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^1(s,T)^2\,ds + \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^2(s,T)^2\,ds. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Der Prozeß X, wie er in der Aussage der Proposition definiert ist, faßt exakt die Summanden von $E+\frac{1}{2}[E,E]$ zusammen, die nicht in τ gestoppt werden. Nach (4.44) und (4.45) sehen wir, daß Y die Gestalt besitzt, die nach Aussage der Proposition gelten soll. Daraus folgt direkt $Y = Y^\tau$. Weiter gilt

$$\exp\left(E(t)\right) = \mathcal{E}\left(X + Y\right)(t), \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Insbesondere besitzen X und Y stetige Pfade. Das sieht man mit derselben Argumentation, mit der man zeigt, daß E stetige Pfade besitzt. Der Faktor $(1 - N)$ läßt sich nach Korollar 4, Satz 2.34, als stochastisches Exponential schreiben $1 - N = \mathcal{E}(-N)$. Wir erhalten

$$v(t,T) = v(0,T)\mathcal{E}(-N)(t)\mathcal{E}(X+Y)(t), \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{4.46}$$

Das Produkt zweier Doléans–Dade–Exponentiale ist nach Satz 2.35 ebenfalls ein Doléans–Dade–Exponential, wobei sich die Exponenten addieren und wir als zusätzlichen Summanden die quadratische Kovariation der Exponenten erhalten. N ist offensichtlich ein FV–Prozeß. Denn N springt in τ um eine Einheit und ist sonst konstant. Die Variation entlang eines Pfades von N ist damit stets durch 1 nach oben beschränkt. Mit Satz 2.29 sehen wir $[N,X] = [N,Y] = 0$, da X und Y stetige Pfade besitzen. Wir wenden diese Überlegung auf (4.46) an und schließen

$$\begin{aligned} v(t,T) &= v(0,T)\mathcal{E}\left(-N\right)(t)\mathcal{E}\left(X+Y\right)(t) \\ &= v(0,T)\mathcal{E}\left(-N + X + Y - [N,X] - [N,Y]\right)(t) \\ &= v(0,T)\mathcal{E}\left(-N + X + Y\right)(t), \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Damit ist der letzte Teil der Aussage gezeigt. □

Die vier Preisprozesse haben wir in (4.36), (4.37), (4.40) und (4.41) definiert. Jetzt stellen wir eine Forderung, die garantiert, daß unser Marktmodell in den allgemeinen Zusammenhang, wie er in Kapitel 3.1 vorgestellt wurde, hineinpaßt. Aus der Definition der Preisprozesse sehen wir, daß sie positiv, càdlàg und $(\mathcal{F}_t)_{0 \le t \le T}$–adaptiert sind. Sie müssen zudem in $\mathcal{H}^2(P)$ liegen.

Annahme 4.3 *Die Preisprozesse B, $p(\cdot,T)$, C und $v(\cdot,T)$ sind $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingale.*

In Kapitel 3.3 haben wir das verallgemeinerte Black&Scholes–Modell behandelt. Die Vollständigkeit des Marktes hat sich als eine sehr nützliche Eigenschaft herausgestellt. In einem vollständigen Markt können wir beliebige *Contingent Claims* eindeutig bewerten. Ist der hier definierte Markt vollständig, dann sind wir zudem in der Lage, jeden beliebigen *Contingent Claim* durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie nachzubilden.

Wir definieren die diskontierten Preisprozesse, wobei wir als Numeraire – wie im verallgemeinerten Black&Scholes–Modell – das risikolose Geldmarktkonto B verwenden.

Definition 4.1 *Die diskontierten Preisprozesse $Z_B = \{Z_B(t) : 0 \le t \le T\}$, $Z_p = \{Z_p(t) : 0 \le t \le T\}$, $Z_C = \{Z_C(t) : 0 \le t \le T\}$ und $Z_v = \{Z_v(t) : 0 \le t \le T\}$ sind gegeben mittels*

$$Z_B \equiv \frac{B}{B}, \quad Z_p \equiv \frac{p(\cdot,T)}{B}, \quad Z_C \equiv \frac{C}{B} \quad \textit{und} \quad Z_v \equiv \frac{v(\cdot,T)}{B}.$$

Die diskontierten Preisprozesse lassen sich als Doléans–Dade–Exponentiale darstellen. Z_B haben wir lediglich aus formalen Gründen definiert. Naturgemäß gilt $Z_B = 1$, da wir B als Numeraire verwenden.

Proposition 4.8 *Für die diskontierten Preisprozesse Z_p, Z_C und Z_v gilt*

$$\begin{aligned} Z_p(t) &= p(0,T)\,\mathcal{E}\left(R_p\right)(t), \\ Z_C(t) &= \mathcal{E}\left(R_C\right)(t) \quad \textit{und} \\ Z_v(t) &= v(0,T)\,\mathcal{E}\left(R_{v,1} + R_{v,2}\right)(t) \qquad \textit{für } 0 \le t \le T, \end{aligned}$$

wobei die stochastischen Prozesse $R_p = \{R_p(t) : 0 \leq t \leq T\}$, $R_B = \{R_B(t) : 0 \leq t \leq T\}$, $R_{v,1} = \{R_{v,1}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *und* $R_{v,2} = \{R_{v,2}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ *definiert sind durch*

$$\begin{aligned} R_p(t) &\equiv -\int_0^t A(s,T)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t S(s,T)^2\,ds - \int_0^t S(s,T)\,dW^1(s) \\ R_C(t) &\equiv -N(t) + \int_0^{t\wedge\tau} h(s,s)\,ds \\ R_{v,1}(t) &\equiv R_p(t) \quad \textit{und} \\ R_{v,2}(t) &\equiv -N(t) + Y(t)\,, \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $R_C = {R_C}^\tau$ *und* $R_{v,2} = {R_{v,2}}^\tau$.

Beweis:
R ist nach Satz 2.25 ein stetiger FV–Prozeß. Mit Satz 2.34, Korollar 3, erhalten wir $B = \mathcal{E}(R)$. Die Inverse von B hat wegen Satz 2.35 die Gestalt $B^{-1} = \mathcal{E}(R)^{-1} = \mathcal{E}\left(-R + [R,R]\right)$. R ist ein stetiger FV–Prozeß mit Startwert Null. Nach Satz 2.29 gilt $[R,R] = 0$. Es folgt $B^{-1} = \mathcal{E}(-R)$. Aus demselben Grund gilt für jedes stochastische Exponential $\mathcal{E}(\,\cdot\,)$ die Gleichung

$$\mathcal{E}(\,\cdot\,)\,\mathcal{E}(-R) = \mathcal{E}(\,\cdot\, - R). \tag{4.47}$$

Auf $p(\cdot,T)$ angewendet erhalten wir mit Proposition 4.6

$$\begin{aligned} Z_p(t) &= p(0,T)\,\mathcal{E}\left(R - \int_0^\cdot A(s,T)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^\cdot S(s,T)^2\,ds - \int_0^\cdot S(s,T)\,dW^1(s)\right)(t)\,\mathcal{E}(-R)(t) \\ &= p(0,T)\,\mathcal{E}\left(-\int_0^\cdot A(s,T)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^\cdot S(s,T)^2\,ds - \int_0^\cdot S(s,T)\,dW^1(s)\right)(t) \\ &= p(0,T)\,\mathcal{E}\left(R_p\right)(t)\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Für C gilt nach Definition

$$\begin{aligned} C(t) &= (1 - N(t))\exp\left(\int_0^t f(s,s)\,ds + \int_0^t \mathbf{1}_{\{\tau > s\}}\,h(s,s)\,ds\right) \\ &= (1 - N(t))\exp\left(R(t) + \int_0^{t\wedge\tau} h(s,s)\,ds\right)\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Aus Korollar 4, Satz 2.34, erhalten wir wie in der vorangegangenen Proposition die Beziehung $(1 - N) = \mathcal{E}(-N)$. $\int_0^\cdot f(s,s)\,ds$ und $\int_0^{\cdot\wedge\tau} h(s,s)\,ds$ sind nach Satz 2.25 stetige FV–Prozesse. Nach Korollar 3, Satz 2.34, folgern wir

$$C(t) = \mathcal{E}\left(-N\right)(t)\,\mathcal{E}\left(R + \int_0^{\cdot\wedge\tau} h(s,s)\,ds\right)(t)\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

N ist ein FV–Prozeß, und R sowie das Integral $\int_0^{\cdot\wedge\tau} h(t,t)\,dt$ besitzen stetige Pfade. Mit Satz 2.29 sehen wir, daß die Kovariation zwischen diesen Prozessen und N Null ist. Aus Korollar 3, Satz 2.34, erhalten wir dann

$$C(t) = \mathcal{E}\left(-N + R + \int_0^{\cdot\wedge\tau} h(s,s)\,ds\right)(t)\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Damit und aus (4.47) folgt

$$\begin{aligned} Z_C(t) &= \mathcal{E}\left(-N + R + \int_0^{\cdot\wedge\tau} h(s,s)\,ds\right)(t)\,\mathcal{E}(-R)(t) \\ &= \mathcal{E}\left(-N + \int_0^{\cdot\wedge\tau} h(s,s)\,ds\right)(t) \\ &= \mathcal{E}\left(R_C\right)(t)\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Auf Z_v wenden wir ebenfalls (4.47) an:

$$\begin{aligned} Z_v(t) &= v(0,T)\,\mathcal{E}\left(-N + X + Y\right)(t)\,\mathcal{E}(-R)(t) \\ &= v(0,T)\,\mathcal{E}\left(X - R - N + Y\right)(t)\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Proposition 4.6 liefert

$$\begin{aligned} X(t) - R(t) &= R(t) - \int_0^t A(s,T)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t S(s,T)^2\,ds - \int_0^t S(s,T)\,dW^1(s) - R(t) \\ &= -\int_0^t A(s,T)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t S(s,T)^2\,ds - \int_0^t S(s,T)\,dW^1(s) \\ &= R_p(t)\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Nach Definition gilt $R_{v,2} = -N + Y$. Wir erhalten die gewünschte Darstellung

$$Z_v(t) = v(0,T)\,\mathcal{E}\left(R_{v,1} + R_{v,2}\right)(t)\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Es gilt $N^\tau = N$, denn

$$N^\tau(t) = \mathbf{1}^\tau_{\{\tau\le t\}} = \mathbf{1}_{\{\tau \le t\wedge\tau\}} = \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}\cap\{\tau\le\tau\}} = \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}\cap\Omega} = \mathbf{1}_{\{\tau\le t\}} = N(t)\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Mit Proposition 4.6 sehen wir $Y^\tau = Y$. Deshalb gilt $R_C = {R_C}^\tau$ und $R_{v,2} = {R_{v,2}}^\tau$. □

Wir treffen einige technische Annahmen, die die Existenz von äquivalenten Martingalmaßen sichern. Dadurch werden wir der Forderung $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ gerecht, wobei $\mathcal{Q}$ die Menge der zu P äquivalenten Martingalmaße bezeichnet.

Annahme 4.4 *(i) $S(\cdot,T)$, $\widetilde{S}^2(\cdot,T)$ und λ sind positiv:*

$$\begin{aligned} S(t,T) &> 0\,, \qquad \textit{für } 0 \le t \le T, \\ \widetilde{S}^2(t,T) &> 0 \qquad \textit{und} \\ \lambda(t) &> 0, \qquad \textit{für } 0 \le t \le T\wedge\tau. \end{aligned}$$

(ii) $L = \{L(t) : 0 \le t \le T\}$ sei gegeben mittels

$$L \equiv \mathcal{E}\left(\psi^1 \cdot W^1 + \psi^2 \cdot (W^2)^\tau + (\phi - 1)\cdot M\right).$$

Die Prozesse ψ^1, ψ^2und ϕ sind so, daß L ein quadratintegrierbares P–Martingal ist, wobei die Prozesse $\psi^k = \left\{\psi^k(t) : 0 \le t \le T\right\}$, $k = 1,2$, und $\phi = \{\phi(t) : 0 \le t \le T\}$ definiert sind *durch*

$$\begin{aligned}
\psi^1(t) &= \frac{-A(t,T)+\frac{1}{2}S(t,T)^2}{S(t,T)}, \qquad \textit{für } 0 \le t \le T, \\
\psi^2(t) &= \frac{1}{\widetilde{S}^2(t,T)}\Bigg(-\widetilde{A}(t,T)+S(t,T)\widetilde{S}^1(t,T)+\frac{1}{2}\widetilde{S}^1(t,T)^2+\frac{1}{2}\widetilde{S}^2(t,T)^2 \\
&\qquad -\frac{-A(t,T)+\frac{1}{2}S(t,T)^2}{S(t,T)}\widetilde{S}^1(t,T)\Bigg) \qquad \textit{und} \\
\phi(t) &= \frac{h(t,t)}{\lambda(t)}, \qquad \textit{für } 0 \le t \le T \wedge \tau.
\end{aligned}$$

Die technische Annahme 4.4 ist insbesondere im Fall eines "Martingale Model" erfüllt. Dann sind die diskontierten Preisprozesse Martingale unter dem "subjektiven" Maß P und damit gilt, wie wir später sehen werden, $\psi^1 = \psi^2 = 0$ und $\phi = 1$, was $L = 1$ bedeutet. Der konstante Prozeß L ist dann selbstverständlich ein P–Martingal.

Die Vollständigkeit des Marktes zeigen wir mithilfe von Satz 3.6; wir beweisen, daß $\mathcal{Q}$ nur aus einem Element besteht.

Satz 4.9 *Der in diesem Abschnitt definierte Markt ist vollständig.*

Beweis:
Nach Satz 3.6 ist ein Marktmodell vollständig, falls die Menge der zu P äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{Q}$ nur aus einem Element besteht. Bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge der zu P äquivalenten Maße. Sei $P^* \in \mathcal{P}$. Die Maßtransformation $P \mapsto P^*$ erfolgt durch einen Prozeß L, der in Satz 2.62 mittels ψ^1, ψ^1 und ϕ gegeben ist. Insbesondere läßt sich jedes zu P äquivalente Maß auf diese Weise erfassen. Wir konstruieren $P^* \in \mathcal{P}$ so, daß die diskontierten Preisprozesse Z_p, Z_C und Z_v lokale Martingale unter dem Maß P^* sind. Diese Konstruktion ist P–f.s. eindeutig. Zum Abschluß nutzen wir Annahme 4.4 aus. Daraus folgern wir, daß $\frac{dP^*}{dP}$ P–quadratintegrierbar ist und die diskontierten Preisprozesse P^*–Martingale sind. Mit anderen Worten $P^* \in \mathcal{Q}$.

<u>Schritt 1</u>
Wir beweisen zunächst die Aussage, Z_p, Z_C und Z_v sind genau dann lokale Martingale, wenn R_p, R_C und $R_{v,2}$ lokale Martingale sind.
Wir setzen R_p, R_C und $R_{v,2}$ als lokale Martingale voraus. Die Preisprozesse Z_p, Z_C und Z_v lassen sich nach Proposition 4.7 als stochastische Exponentiale von R_p, R_C und $R_{v,1} + R_{v,2}$ darstellen. Dabei gilt $R_{v,1} = R_p$. Mit Satz 2.26 sehen wir, daß Z_p, Z_C und Z_v lokale Martingale sind.
Nun seien Z_p, Z_C und Z_v lokale Martingale. Z_p ist strikt positiv. Satz 2.36, Korollar 2, besagt, daß R_p ein lokales Martingal ist. Nach Proposition 4.7 gilt $Z_C = \mathcal{E}(R_C)$ und $R_C{}^\tau = R_C$. Nach Korollar 3 von Satz 2.36 ist R_C ein lokales Martingal. Der stochastische Exponent von Z_v ist die Summe aus $R_{v,1}$ und $R_{v,2}$. Wir haben gesehen, daß $R_{v,2} = R_p$ ein lokales Martingal ist. Für $R_{v,2}$ gilt nach Proposition 4.7 $R_{v,2}{}^\tau = R_{v,2}$. Erneut schließen wir nach Korollar 3, Satz 2.36, daß $R_{v,2}$ ein lokales Martingal ist.

<u>Schritt 2</u>
Sei $P^* \in \mathcal{P}$. Nach Satz 2.62 existieren vorhersehbare Prozesse $\psi^k = \left\{\psi^k(t) : 0 \le t \le T\right\}$, $k = 1, 2$, und $\phi = \{\phi(t) : 0 \le t \le T\}$, die die Maßtransformation $P \mapsto P^*$ beschreiben. Für die Prozesse

$\widetilde{W}^k = \left\{\widetilde{W}^k(t) : 0 \leq t \leq T\right\}$, $k = 1, 2$, definiert durch

$$\widetilde{W}^k(t) \equiv W^k(t) - \int_0^t \psi^k(s)\, ds, , \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und } k = 1, 2,$$

gilt damit, $\widetilde{W} = \left(\widetilde{W}^1, \widetilde{W}^2\right)$ ist eine Standard Brownsche Bewegung unter dem Maß P^* und der Prozeß $\lambda_{P^*} = \{\lambda_{P^*}(t) : t \geq 0\}$, gegeben durch

$$\lambda_{P^*}(t) \equiv \phi(t)\, \lambda(t), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T,$$

ist die Intensität von N unter P^*.
Die Prozesse $A_{P^*} = \{A_{P^*}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ und $M_{P^*} = \{M_{P^*}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ definieren wir durch

$$\begin{aligned} A_{P^*}(t) &\equiv \int_0^t \lambda_{P^*}(s)\, ds \quad \text{und} \\ M_{P^*}(t) &\equiv N(t) - A_{P^*}(t)\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Nach dem Maßtransformationssatz 2.62 ist M_{P^*} ein lokales P^*–Martingal.
Wir setzen die "neuen" Prozesse in die stochastischen Exponenten in R_p, R_C und $R_{v,2}$ ein und erhalten für $t \in [0, T]$

$$R_p(t) = -\int_0^t A(s, T)\, ds + \frac{1}{2} \int_0^t S(s, T)^2\, ds - \int_0^t \psi^1(s) S(s, T)\, ds - \int_0^t S(s, T)\, d\widetilde{W}^1(s)\,.$$

Der Driftterm, die Integrale bezüglich "ds", ist nach Satz 2.25 ein stetiger FV–Prozeß. Insbesondere folgt aus der Stetigkeit die Vorhersehbarkeit. Wegen Satz 2.37, der eindeutigen Zerlegung eines speziellen Semimartingals, ist R_p genau dann ein lokales P^*–Martingal, wenn der stetige Driftterm wegfällt. R_p ist folglich genau dann ein lokales P^*–Martingal ist, falls gilt

$$\psi^1(t)\, S(t, T) = -A(t, T) + \frac{1}{2} S(t, T)^2\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{4.48}$$

R_C hat die Form

$$R_C(t) = -N(t) + \int_0^{t \wedge \tau} h(s, s)\, ds\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Mit $N = M_{P^*} + A_{P^*}$ gilt

$$R_C(t) = -M_{P^*}(t) - A_{P^*}(t) + \int_0^{t \wedge \tau} h(s, s)\, ds\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Der Prozeß R_C ist wie im Fall von R_p ein lokales P^*–Martingal, wenn der Drift wegfällt. R_C ist genau dann ein lokales P^*–Martingal, wenn folgende Bedingung erfüllt ist

$$\phi(t)\lambda(t) = \lambda_{P^*}(t) = \mathbf{1}_{\{t \leq \tau\}} h(t, t)\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{4.49}$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung, die die lokale Martingaleigenschaft von $R_{v,2}$ sichert, ist wesentlich umständlicher, als die beiden zuvor diskutierten Fälle. Wegen $N = M_{P^*} + A_{P^*}$ und Proposition 4.6 gilt

$$R_{v,2}(t) \;=\; -N(t) + Y(t)$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & -M_{P^*}(t) - A_{P^*}(t) + \int_0^{t\wedge\tau} h(s,s)\,ds - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{A}(s,T)\,ds \\
& - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^1(s,T)\,dW^1(s) - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^2(s,T)\,dW^2(s) + \int_0^{t\wedge\tau} S(s,T)\widetilde{S}^1(s,T)\,ds \\
& + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^1(s,T)^2\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^2(s,T)^2\,ds \\
= \quad & -M_{P^*}(t) - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^1(s,T)\,d\widetilde{W}^1(s) - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^2(s,T)\,d\widetilde{W}^2(s) \\
& - A_{P^*}(t) + \int_0^{t\wedge\tau} h(s,s)\,ds - \int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{A}(s,T)\,ds + \int_0^{t\wedge\tau} S(s,T)\widetilde{S}^1(s,T)\,ds \\
& + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^1(s,T)^2\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau} \widetilde{S}^2(s,T)^2\,ds - \int_0^{t\wedge\tau} \psi^1(s)\widetilde{S}^1(s,T)\,ds \\
& - \int_0^{t\wedge\tau} \psi^2(s)\widetilde{S}^2(s,T)\,ds\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T.
\end{aligned}
$$

Die erste Zeile umfaßt den Teil von $R_{v,2}$, der ein lokales Martingal ist. Der stetige Driftterm sind die Integrale bezüglich "ds", die in den letzten beiden Zeilen stehen. $R_{v,2}$ ist genau dann ein lokales Martingal, wenn gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}\psi^2(t)\widetilde{S}^2(t,T) \quad = \quad & -\phi(t)\lambda(t) + \mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}h(t,t) - \mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}\widetilde{A}(t,T) \\
& + \mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}S(t,T)\widetilde{S}^1(t,T) - \mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}\psi^1(t)\widetilde{S}^1(t,T) \qquad (4.50) \\
& + \mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}\frac{1}{2}\left(\widetilde{S}^1(t,T)^2 + \widetilde{S}^2(t,T)^2\right), \qquad \text{für } 0 \le t \le T.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten die drei nichtlinearen stochastischen Gleichungen (4.48), (4.49) und (4.50), die voneinander abhängig sind. Unter den Bedingungen von Annahme 4.4 (i) können wir die Gleichungen entkoppeln und erhalten der Reihe nach

$$
\begin{aligned}
\psi^1(t) \quad &= \quad \frac{-A(t,T) + \frac{1}{2}S(t,T)^2}{S(t,T)}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T, & (4.51) \\
\phi(t) \quad &= \quad \frac{h(t,t)}{\lambda(t)} \qquad \text{und} & (4.52) \\
\psi^2(t) \quad &= \quad \frac{1}{\widetilde{S}^2(t,T)}\Bigg(-\widetilde{A}(t,T) + S(t,T)\widetilde{S}^1(t,T) + \frac{1}{2}\widetilde{S}^1(t,T)^2 + \frac{1}{2}\widetilde{S}^2(t,T)^2 \\
& \qquad - \frac{-A(t,T) + \frac{1}{2}S(t,T)^2}{S(t,T)}\widetilde{S}^1(t,T)\Bigg), \qquad \text{für } 0 \le t \le T \wedge \tau. & (4.53)
\end{aligned}
$$

Schritt 3

Wir definieren den Prozeß $L_Q = \{L_Q(t) : 0 \le t \le T\}$, durch den der Maßwechsel erfolgt. Die beschreibenden Prozesse seien $\psi_Q^k = \left\{\psi_Q^k(t) : 0 \le t \le T\right\}$, $k = 1,2$, und $\phi_Q = \{\phi_Q(t) : 0 \le t \le T\}$ und sollen die Gleichungen (4.51) – (4.53) entsprechend lösen. L_Q sei gegeben durch

$$
L_Q \equiv \mathcal{E}\left(\psi_Q^1 \cdot W^1 + \psi_Q^2 \cdot (W^2)^\tau + (\phi_Q - 1)\cdot M\right).
$$

Nach Annahme 4.4 (ii) ist L_Q ein quadratintegrierbares P–Martingal. Damit ist die Voraussetzung des Maßtransformationsatzes 2.62 efüllt. Darin wird verlangt, daß $\mathbf{E}_P\{|L_Q(t)|\} < \infty$

für $t \in [0,T]$ gilt, was aus der Quadratintegrierbarkeit von L_Q direkt folgt. Zudem ist Q damit "fast" ein äquivalentes Martingalmäß. Denn P und Q sind äquivalent, L_Q ist ein quadratintegrierbares P–Martingal, und die diskontierten Preisprozesse sind lokale Martingale unter Q. Wir müssen zeigen, daß die diskontierten Preisprozesse Q–Martingale sind.
Wir wenden das Korollar von Satz 2.38 an. Die diskontierten Preisprozesse sind $\mathcal{H}^2(P)$–Semimartingale und lokale Q–Martingale. Aus dem Korollar folgt, daß die diskontierten Preisprozesse Q–Martingale sind. Denn die σ–Algebra $\mathcal{F}_0$ ist P–f.s. trivial, weshalb die Startwerte der diskontierten Preisprozesse P–f.s. in $\mathbb{R}$ liegen, und zudem ist $\frac{dQ}{dP}$ P–quadratintegrierbar. Es gilt folglich $Q \in \mathcal{Q}$.
Nach Bemerkung (iv) von Satz 2.62 ist L_Q – sprich ψ_Q^1, ψ_Q^2 und ϕ_Q – durch die Gleichung (4.51) – (4.53) eindeutig charakterisiert. Wir erhalten das angestrebte Ergebnis $\mathcal{Q} = \{Q\}$, was den Beweis abschließt. □

Bemerkung:

(i) Aus den Gleichungen (4.51) – (4.53) können wir Bedingungen für $P \in \mathcal{Q}$ ableiten. Hierzu ist notwendig, daß die Maßtransformation, die mittels L_Q konstruiert wird, keine "echte" Maßtransformation ist; sprich, $L_Q = 1$ gilt. Das ist gleichbedeutend mit

$$\psi^1 = \psi^2 = 0 \text{ und } \phi = 1.$$

Daraus lassen sich die Driftbedingungen für $P \in \mathcal{Q}$ gewinnen. In Theorem 2 von Schönbucher (1998a) kann man diese Bedingungen nachlesen. Insbesondere ist nach (4.49) der "Renditespread" unter dem äquivalenten Martingalmaß gleich der Intensität von N

$$h(t,t) = \lambda_Q(t) \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{4.54}$$

(ii) Der Modellrahmen, wie er in diesem Abschnitt entworfen wurde, läßt sich auf den Ansatz von Jarrow, Lando und Turnbull anwenden. Denn die Intensität von N ist in diesem Fall eine stetige positive Funktion λ_i, wobei der Index i das Startrating der Anleihe bezeichnet. Allerdings geht die Arbeit, die man in das Modellieren der Ausfallsintensität gesteckt hat, nach (4.54) verloren. Aus diesem Grund ist das Modell von Jarrow, Lando und Turnbull nur dann sinnvoll, wenn man "Martingale Modelling" betreibt. Der Satz vereinfacht sich in diesem Fall, da die zweite Brownsche Bewegung W^2 wegfällt. Der Prozeß $h(\cdot,\cdot)$ hat dann die Gestalt

$$h(s,t) = \lambda_i(t) \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Kapitel 5

Derivatebewertung

Im vorangegangenen Kapitel haben wir in Abschnitt 3 ein Kreditrisikomodell mit stochastischer Ausfallsintensität studiert und abschließend gezeigt, daß der Markt vollständig ist. Im Verlauf dieses Kapitels nutzen wir die erarbeiteten Ergebnisse. Zunächst betrachten wir die Preisprozesse unter dem äquivalenten Martingalmaß Q. Danach leiten wir Bewertungsformeln für *Contingent Claims* her.

5.1 Die Preisprozesse unter dem äquivalenten Martingalmaß

Wir betrachten das in 4.3 definierte Marktmodell. Es besteht aus dem risikolosen Geldmarktkonto B, dem risikolosen *Zerobond* mit Laufzeit T $p(\cdot,T)$, dem Geldmarktkonto mit Kreditrisiko C und dem *Zerobond* mit Laufzeit T und Kreditrisiko $v(\cdot,T)$. Nach Satz 4.9 existiert ein äquivalentes Martingalmaß Q. Wir wenden im folgenden Satz 3.4 auf die Preisprozesse an.
Sei $S = \{S(t) : 0 \leq t \leq T\}$ ein beliebiger Preisprozeß. Nach Modellannahme gilt $S \in \mathcal{H}^2(P)$. Wir definieren die Zufallsvariable X_S durch $X_S \equiv S(T)$. X_S ist $\mathcal{F}_T$–meßbar und P–quadratintegrierbar, denn nach Satz 2.38 gilt

$$\mathbf{E}_P\left\{|X_S|^2\right\} = \mathbf{E}_P\left\{S(T)^2\right\} \leq \mathbf{E}_P\left\{\left(\sup_{0\leq t\leq T}|S(T)|\right)^2\right\} \leq 8\,||S||^2_{\mathcal{H}^2(P)}\,. \tag{5.1}$$

Folglich ist X_S im Sinne von Definition 3.8 ein *Contingent Claim.* X_S läßt sich duplizieren, indem zum Zeitpunkt Null die zu S korrespondierende Anlage kauft und bis T hält. Mit Satz 3.4 erhalten wir für $0 \leq t \leq T$

$$S(t) = \frac{1}{\beta(t)}\mathbf{E}_Q\left\{\beta(T)\,S(T)\;|\mathcal{F}_t\right\} = \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)\,S(T)\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}. \tag{5.2}$$

Gleichung (5.2) koennen wir für die Preisprozesse verwenden, deren "Randbedingungen" wir kennen. Für $p(\cdot,T)$ gilt $p(T,T) = 1$. Daraus schließen wir mit (5.2)

$$p(t,T) = \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{5.3}$$

In ähnlicher Weise gehen wir im Fall von $v(\cdot,T)$ vor. Wir definieren zunächst den stochastischen Prozeß $S_Q(\cdot,T) = \{S_Q(t,T) : 0 \leq t \leq T\}$ durch

$$S_Q(t,T) \equiv Q\left(\tau > T\;|\mathcal{F}_t\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{5.4}$$

Mit (5.2) und $v(T,T) = \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$ schließen wir

$$v(t,T) = \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(- \int_t^T r(s)\, ds \right) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{5.5}$$

Sind r und τ **unabhängig**, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} v(t,T) &= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(- \int_t^T r(s)\, ds \right) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} && (5.6)\\ &= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(- \int_t^T r(s)\, ds \right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} \mathbf{E}_Q \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} && (5.7)\\ &= p(t,T)\, Q\left(\tau > T \,|\, \mathcal{F}_t\right) && (5.8)\\ &= p(t,T)\, S_Q(t,T)\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T && (5.9) \end{aligned}$$

Für die beiden *Zero Bonds* $p(\cdot,T)$ und $v(\cdot,T)$ haben wir mit (5.3) und (5.5) jeweils eine Darstellung mithilfe des äquivalenten Martingalmaßes hergeleitet. Darüberhinaus sind die beiden Preisprozesse durch die zukünftige Zinsstruktur, durch $f(\cdot,\cdot)$ und $h(\cdot,\cdot)$, nach Kapitel 4.3 definiert. Die Funktion $f(0,\cdot)$ und $h(0,\cdot)$ sind $\mathcal{F}_0$–meßbar und damit deterministisch, $\mathcal{F}_0$ ausschließlich Mengen vom Maß Null und Eins enthält. Die "Anfangsinformation ", die in $f(0,\cdot)$ und $h(0,\cdot)$ steckt, können wir auch in Form von *Zero Bonds* ausdrücken, deren Laufzeit $t \ge 0$ kleiner ist als der feste Zeithorizont T. Die Funktionen $p(0,\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ und $v(0,\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ seien definiert durch

$$\begin{aligned} p(0,t) &\equiv \exp\left(- \int_0^t f(0,s)\, ds \right) \qquad \text{und} && (5.10)\\ v(0,t) &\equiv \exp\left(- \int_0^t f(0,s) + h(0,s)\, ds \right) \qquad \text{für } 0 \le t \le T. && (5.11) \end{aligned}$$

$p(0,t)$ ist der Preis eines risikolosen *Zero Bond's* mit Fälligkeit $t \in [0,T]$, der sich aus der Zinsstruktur, die in der Gegenwart gegeben ist, herleitet. In der Realität verhält es sich genau umgekehrt. Die Preise der *Zero Bonds* liegen vor, und die Zinsstruktur in Form von $f(0,\cdot)$ wird entsprechend angepasst, daß (5.10) hält. Die gleiche Überlegung gilt für $v(0,\cdot)$ und $h(0,\cdot)$.

Die Preise der *Zero Bonds* mit Laufzeit t können wir mithilfe des äquivalenten Martingalmaßes darstellen, für $0 \le t \le T$. Es gilt

$$\begin{aligned} p(0,t) &= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(- \int_0^t r(s)\, ds \right) \right\}, \qquad \text{und} && (5.12)\\ v(0,t) &= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(- \int_0^t r(s)\, ds \right) \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. && (5.13) \end{aligned}$$

Im folgenden Abschnitt werden wir die Gleichungen (5.10) – (5.13) weiter dikutieren.

Die Bewertungsformel nach Satz 3.4 können wir mit einer Maßtransformation vereinfachen. Wir führen das *Forward*–Maß Q^T ein.

Definition 5.1 *Innerhalb des spezifizierten Marktmodells nach Kapitel 4.3 sei Q das äquivalente Martingalmaß. Wir definieren den Prozeß $L^T = \{L^T(t) : 0 \le t \le T\}$ durch*

$$L^T(t) \equiv \frac{p(t,T)}{B(t)\, p(0,T)}\,, \qquad \textit{für } 0 \le t \le T,$$

und das Maß Q^T durch

$$dQ^T(t) \equiv L^T(t)\, dP(t) \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Q^T heißt **Forward–Maß**.

Bemerkung:
Die Maßtransformation $Q \mapsto Q^T$ benötigt, daß L^T ein positives Q–Martingal mit $L^T(0) = 1$ ist. Wir können L^T auf andere Weise schreiben

$$L^T = \frac{Z_p}{Z_p(0)}\,,$$

denn Z_p ist der diskontierte Preisprozeß von $p(\cdot, T)$, sprich $Z_p = p(\cdot, T)\, \beta = p(\cdot, T)\, B^{-1}$. Nach Definition des äquivalenten Martingalmaßes ist Z_p ein strikt positives Q–Martingal. Wegen $B(0) = 1$ erhalten wir $Z_p(0) = p(0, T)$. $Z_p(0)$ ist die Normierungskonstante, daß $L^T(0) = 1$ gilt. Damit ist das *Forward*–Maß Q^T wohldefiniert.

Die folgende Proposition ist von Björk (1996), Proposition 5.3, übernommen.

Proposition 5.1 *X sei ein $\mathcal{F}_T$–meßbare Zufallsvariable mit $\mathbf{E}_Q\{|\beta(T)\, X|\} < \infty$. Dann gilt*

$$\mathbf{E}_Q\left\{ \exp\left(-\int_t^T r(s)\, ds \right) X \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} = p(t, T)\, \mathbf{E}_{Q^T}\{X \;|\mathcal{F}_t\} \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T,$$

wobei $\mathbf{E}_{Q^T}$ den Erwartungswert bezüglich des Maßes Q^T bezeichnet.

Proposition 5.1 und (5.10) – (5.13) bilden die Grundlage, um *Contingent Claims* wie beispielsweise *Default Swaps* zu bewerten.

5.2 Ein Martingalmodell

Im letzten Abschnitt haben wir die Gleichungen (5.3) und (5.5) gezeigt. Die Preisprozesse $p(\cdot, T)$ und $v(\cdot, T)$ lassen sich unter einem äquivalenten Martingalmaß Q auf r und τ "reduzieren". Wir nehmen an, daß die diskontierten Preisprozesse Martingale unter unserem subjektiven Maß P sind. Mit anderen Worten, wir studieren den Fall des **Martingale Modellings**.

Nach Kapitel 4.3 befinden wir uns auf einem "abstrakten" filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{K}, P, (\mathcal{K}_t)_{0 \leq t \leq T}\right)$, auf dem eine zweidimensionale Standard Brownsche Bewegung $W = (W^1, W^2)$ und eine Stopzeit τ "leben". Die Stopzeit τ ist exponentialverteilt, wobei deren Parameter durch die Brownsche Bewegung W gesteuert wird. Die Unterfiltrierungen $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, $(\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq T}$ und $(\mathcal{H}_t)_{0 \leq t \leq T}$ von $(\mathcal{K}_t)_{0 \leq t \leq T}$ seien durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t &\equiv \sigma\left(W^1(s), (W^2)^\tau(s), N(s) : 0 \leq s \leq t\right), && (5.14)\\
\mathcal{G}_t &\equiv \sigma\left(W^1(s), (W^2)^\tau(s) : 0 \leq s \leq t\right) \qquad \text{und} && (5.15)\\
\mathcal{H}_t &\equiv \sigma\left(W^1(s), (W^2)(s) : 0 \leq s \leq t\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. && (5.16)
\end{aligned}$$

gegeben. $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist die Filtrierung, an die sämtliche Preisprozesse adaptiert sind. In Kapitel 4.3 modellieren wir die risikolose Zinsstruktur und die Zinsstruktur mit Kreditrisiko durch $f(\cdot, \cdot)$

und $h(\cdot,\cdot)$, wobei $r(t) = f(t,t)$ für $t \in [0,T]$ gilt. Der Prozeß $h = \{h(t) : 0 \leq t \leq T\}$ sei gegeben durch $h(t) \equiv h(t,t)$ für $t \in [0,T]$. r und h sollen die Darstellung als zweidimensionale Itô–Diffusion im Sinne von Definition 2.34 besitzen

$$\begin{aligned} r(t) &\equiv r(0) + \int_0^t b(s,r(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s,r(s))\,dW^1(s) \qquad \text{und} && (5.17)\\ h(t) &\equiv h(0) + \int_0^t \tilde{b}(s,r(s),h(s))\,ds + \int_0^t \tilde{\sigma}^1(s,r(s),h(s))\,dW^1(s) && (5.18)\\ &\quad + \int_0^t \tilde{\sigma}^2(s,r(s),h(s))\,dW^2(s), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. && (5.19)\end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir, daß r nur an die natürliche Filtrierung von W^1 adaptiert ist. Das erlaubt uns, jedes beliebige *Short Rate Model* für r anzusetzen. Zu *Short Rate Models* siehe Kapitel 3 von Björk(1996). h kann vom kurzfristigen Zins r beeinflußt werden. Man hat auch die Möglichkeit, h unabhängig von r zu wählen, was wir durch $\tilde{\sigma}^1 = 0$, $\tilde{b}(\cdot,r,h) = \tilde{b}(\cdot,h)$ und $\tilde{\sigma}^2(\cdot,r,h) = \tilde{\sigma}^2(\cdot,h)$ erreichen. Die Stopzeit τ wird durch h beschrieben. Es gelte

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left\{\int_0^T h(s)\,ds\right\} &< \infty \qquad \text{und} && (5.20)\\ P\left(\tau \leq t \mid \mathcal{H}_T\right) &= 1 - \exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. && (5.21)\end{aligned}$$

Nach Satz 2.61 ist τ exponentialverteilt mit stochastischem Parameter h. $N = \{N(t) : 0 \leq t \leq T\}$ ist der Indikatorprozeß von τ; d.h.: $N(t) \equiv \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$, für $t \in [0,T]$. Nach Korollar 1 von Satz 2.61 besitzt N die Intensität $\lambda = \{\lambda(t) : 0 \leq t \leq T\}$ mit

$$\lambda(t) = h(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T. \tag{5.22}$$

Wir nehmen an, daß λ $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$–adaptiert ist.

Wir befinden uns in einem Martingal Modell, falls $P \in \mathcal{Q}$ gilt. Dazu sind einige Bedingungen notwendig. Nach Annahme 4.4 und der Bemerkung (i) von Satz 4.9 geben wir eine hinreichende Bedingung an. Die Maßtransformation, die in Satz 4.9 mittels ψ^1, ψ^2 und ϕ konstruiert wird, muß die Identität sein, um $P \in \mathcal{Q}$ zu garantieren. Das ist gleichbedeutend mit $\psi^1 = \psi^2 = 0$ und $\phi = 1$.

Annahme 5.1 *Es gilt in dem Modellrahmen von Kapitel 4.3*

$$\begin{aligned} A(t,T) &= \frac{1}{2}S(t,T)^2 && (5.23)\\ \widetilde{A}(t,T) &= S(t,T)\,\widetilde{S}^1(t,T) + \frac{1}{2}\widetilde{S}^1(t,T)^2 + \frac{1}{2}\widetilde{S}^2(t,T)^2 \qquad \textit{und} && (5.24)\\ h(t,t)\,\mathbf{1}_{\{\tau>t\}} &= \lambda(t), \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T. && (5.25)\end{aligned}$$

Annahme 5.1 sichert, daß P ein äquivalentes Martingalmaß ist. Nach Bemerkung (ii) von Lemma 3.3 sind damit die technischen Voraussetzungen erfüllt. Sprich, für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie Φ aus $\mathcal{T}$ ist der diskontierte Vermögensprozeß V^{Φ} ein P–Martingal. Mit Satz 4.9 schließen wir, daß kein anderes äquivalentes Martingalmaß existiert, $\mathcal{Q} = \{P\}$ gilt. Wir setzen $Q \equiv P$. Im weiteren verwenden wir die Bezeichnung Q für unser Maß P, sofern wir auf

Gleichungen zurückgreifen, die ausnutzen, daß P ein äquivalentes Martingalmaß ist.

Im Gegensatz zu Kapitel 4.3 definieren wir $r^d = \left\{ r^d(t) : 0 \le t \le T \right\}$ mittels

$$r^d(t) \equiv r(t) + h(t)\,, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{5.26}$$

Dadurch übt τ keinen direkten Einfluß auf r^d aus, wie es in der ursprünglichen Definition (4.43) der Fall ist.

Lemma 5.2 *Die Preisprozesse besitzen die Darstellung*

$$\begin{aligned}
p(t,T) &= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^T r(s)\, ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}, && (5.27)\\
C(t) &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \exp\left(\int_0^t r^d(s)\, ds \right) \qquad \textit{und} && (5.28)\\
v(t,T) &= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}}\, \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^T r^d(s)\, ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}, \qquad \textit{für } 0 \le t \le T. && (5.29)
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$S_Q(t,T) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}}\, \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^T h(s)\, ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}, \qquad \textit{für } 0 \le t \le T. \tag{5.30}$$

Beweis: Gleichung (5.27) haben wir in (5.3) hergeleitet. Nach Kapitel 4.3 ist C durch

$$C(t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \exp\left(\int_0^t \left(r(s) + \mathbf{1}_{\{\tau > s\}} h(s) \right) ds \right), \qquad \text{für } 0 \le t \le T,$$

definiert. Denn es gilt $h(t) = h(t,t)$ für $0 \le t \le T$. Für festes $t \in [0,T]$ dürfen wir auf $\{\tau \le t\}$ im Exponenten von C Veränderungen vornehmen, da der Faktor $\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}$ auf dieser Menge Null ist, woraus (5.28) unmittelbar folgt. $v(\cdot, T)$ schreiben wir in der Form von (5.5) und wenden Korollar 3 von Satz 2.61 an. Es gilt P–f.s.

$$\begin{aligned}
v(t,T) &= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^T r(s)\, ds \right) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \middle| \mathcal{F}_t \right\} && (5.31)\\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^T r(s)\, ds \right) \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_T \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} && (5.32)\\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^T r(s)\, ds \right) \mathbf{E}_Q \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_T \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} && (5.33)\\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^T r(s)\, ds \right) \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \exp\left(-\int_t^T h(s)\, ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} && (5.34)\\
&= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}}\, \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^T \left(r(s) + h(s) \right)\, ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} && (5.35)\\
&= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}}\, \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^T r^d(s)\, ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. && (5.36)
\end{aligned}$$

Den Diskontierungsfaktor konnten wir vor den inneren Erwartungswert ziehen, da er $\mathcal{H}_T$–meßbar ist. Für $S_Q(\cdot, T)$ gilt ebenfalls mit Korollar 3 von Satz 2.61 und der $\mathcal{H}_T$–Meßbarkeit von h

$$\begin{aligned}
S_Q(t,T) &= \mathbf{E}_Q\left\{ \mathbf{1}_{\{\tau>T\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} && (5.37)\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{ \mathbf{E}_Q\left\{ \mathbf{1}_{\{\tau>T\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_T \right\} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} && (5.38)\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{ \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int_t^T h(s)\,ds \right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\} && (5.39)\\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\, \mathbf{E}_Q\left\{ \exp\left(-\int_t^T h(s)\,ds \right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. && (5.40)
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

In Abschnitt 1 haben wir die Zinsstruktur, die anfangs gegeben ist, durch die Preise der *Zero Bonds* $p(\cdot)$ und $v(\cdot)$ beschrieben. Mit der Aussage von Lemma 5.2 können wir $v(0,\cdot)$ darstellen durch

$$v(0,t) = \mathbf{E}_Q\left\{ \exp\left(-\int_0^t r^d(s)\,ds \right) \right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{5.41}$$

Wir treffen einige technische Annahmen.

Annahme 5.2 *Für $f(0,\cdot)$ und $h(0,\cdot)$, sowie r und h gilt*

(i) $f(0,\cdot)$ und $h(0,\cdot)$ sind stetig differenzierbar.

(ii) Die Funktionen $t \mapsto \mathbf{E}_Q\left\{ \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds \right) \right\}$ und $t \mapsto \mathbf{E}_Q\left\{ \exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds \right) \right\}$ erlauben es, unter dem Erwartungswert zu differenzieren.

Bemerkung: Hinreichende Bedingungen für (ii) kann man bei Elstrodt (1996) – Satz 5.7, Kapitel IV – nachlesen.

Wir definieren die Funktion $S_Q(0,\cdot) \in \mathcal{C}^1([0,T],[0,1])$ durch

$$S_Q(0,t) \equiv \mathbf{E}_Q\left\{ \exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds \right) \right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{5.42}$$

Es gilt, ähnlich wie in Lemma 5.2, $S_Q(0,t) = Q(\tau > t)$, wobei T durch t ersetzt wird. Der tatsächliche Beweis von $S_Q(0,t) = Q(\tau > t)$ folgt aus Gleichung (5.21), wenn wir den Erwartungswert bilden. $S_Q(0,\cdot)$ ist die Überlebenswahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit, daß $\tau > t$ ist. Annahme 5.2 sichert, daß $S_Q(0,\cdot)$ differenzierbar ist.

Wir interpretieren h als Verzinsungsrate einer fiktiven Anleihe. Wie im Fall der tatsächlichen Verzinsungsrate r können wir ein *Forward*–Maß $\widetilde{Q}^T$ definieren. Die Maßtransformation erfolgt durch den Prozeß $\widetilde{L}^T = \widetilde{L}^T(t) : 0 \le t \le T\}$, der durch

$$\widetilde{L}^T(t) \equiv \frac{\mathbf{E}_Q\left\{ \exp\left(-\int_t^T h(s)\,ds \right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\}}{\exp\left(\int_0^t h(s)\,ds \right) \mathbf{E}_Q\left\{ \exp\left(-\int_0^T h(s)\,ds \right) \right\}}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T, \tag{5.43}$$

definert ist. Der Zähler ist der Preisprozeß des fiktiven *Zero Bond's* und entspricht $p(\cdot, T)$ in Gleichung (5.27). Im Nenner steht das "Geldmarktkonto" und die Normierungskonstante, sodaß $\widetilde{L}^T(0) = 1$ gilt. Aus der Definition sehen wir, daß $\widetilde{L}^T$ strikt positiv ist. Die Martingaleigenschaft folgt aus der Darstellung

$$\widetilde{L}^T(t) \equiv \frac{\mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_0^T h(s)\, ds\right) \Big| \mathcal{F}_t \right\}}{\mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_0^T h(s)\, ds\right) \right\}}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T,$$

denn $\exp\left(-\int_0^T h(s)\, ds\right)$ ist eine durch 1 beschränkte $\mathcal{F}_T$–meßbare Zufallsvariable. $\widetilde{L}^T$ ist das Q–Martingal, das man daraus durch bedingte Erwartungswertbildung definiert.

Das folgende Lemma bereitet die Bewertung von *Default Swaps* vor.

Lemma 5.3 *Unter den Voraussetzungen von Annahme 5.2 gilt*

$$f(0,t)\, p(0,t) = \mathbf{E}_Q \left\{ r(t) \exp\left(-\int_0^t r(s)\, ds\right) \right\} \qquad \textit{und} \tag{5.44}$$

$$f(t,T) = \mathbf{E}_{Q^T} \left\{ r(T) \;|\mathcal{F}_t \right\}, \qquad \textit{für } 0 \le t \le T. \tag{5.45}$$

Sind r und h unabhängig, dann gilt

$$v(0,t) = p(0,t)\, S_Q(0,t), \tag{5.46}$$

$$h(0,t)\, S_Q(0,t) = \mathbf{E}_Q \left\{ h(t) \exp\left(-\int_0^t h(s)\, ds\right) \right\} \qquad \textit{und} \tag{5.47}$$

$$h(t,T) = \mathbf{E}_{\widetilde{Q}^T} \left\{ h(T) \;|\mathcal{F}_t \right\}, \qquad \textit{für } 0 \le t \le T. \tag{5.48}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die ersten beiden Gleichungen. $p(0,\cdot)$ besitzt nach (5.10) und (5.12) zwei verschiedene Darstellungen

$$p(0,t) = \exp\left(-\int_0^t f(0,s)\, ds\right) = \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_0^t r(s)\, ds\right) \right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Nach Annahme 5.2 sind beide Ausdrücke differenzierbar. Einerseits gilt

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dt}(0,t) &= -\frac{d}{dt} \left[\exp\left(-\int_0^t f(0,s)\, ds\right) \right] \Big|_t \\ &= \exp\left(-\int_0^t f(0,s)\, ds\right) f(0,t) \\ &= f(0,t)\, p(0,t), \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Andereseit dürfen wir bei der Darstellung mithilfe des äquivalenten Martingalmaßes unter dem Erwartungswert differenzieren.

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dt}(0,t) &= -\frac{d}{dt} \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_0^t r(s)\, ds\right) \right\} \\ &= -\mathbf{E}_Q \left\{ \frac{d}{dt} \left[\exp\left(-\int_0^t r(s)\, ds\right) \right] \Big|_t \right\} \\ &= \mathbf{E}_Q \left\{ r(t) \exp\left(-\int_0^t r(s)\, ds\right) \right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Aus dem Gleichsetzen der Ableitungen folgt das gewünschte Ergebnis

$$f(0,t)\,p(0,t) = \mathbf{E}_Q\left\{r(t)\exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)\right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{5.49}$$

Es gilt $\beta(T) \le 1$ P–f.s., und r ist als Itô–Diffusion nach Bemerkung (ii) von Definition 2.34 quadratintegrierbar. Folglich gilt $\mathbf{E}_Q\left\{|\beta(T)\,r(T)|\right\} < \infty$. Nach Proposition 5.1 gilt

$$\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)\,r(T)\right\} = p(0,T)\,\mathbf{E}_{Q^T}\left\{r(T)\right\}.$$

Nach Lemma 5.1 von Björk (1996) gilt

$$f(t,T) = \mathbf{E}_{Q^T}\left\{r(T)\,|\mathcal{F}_t\right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T.$$

Wir setzen voraus, daß r und h unabhängig sind. In der "Sprache" des äquivalenten Martingalmaßes erhalten wir mit (5.41)

$$\begin{aligned}
v(0,t) &= \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^t (r(s)+h(s))\,ds\right)\right\} \\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)\right\}\,\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds\right)\right\} \\
&= p(0,t)\,S_Q(0,t), \qquad \text{für } 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

Damit gilt für $S_Q(0,\cdot)$

$$\begin{aligned}
S_Q(0,t) &= \frac{v(0,t)}{p(0,t)} \\
&= \frac{\exp\left(-\int_0^T (f(0,s)+h(0,s))\,ds\right)}{\exp\left(-\int_0^T f(0,s)\,ds\right)} \\
&= \exp\left(-\int_0^T h(0,s)\,ds\right), \qquad \text{für } 0 \le t \le T.
\end{aligned}$$

$S_Q(0,\cdot)$ und $h(0,\cdot)$ verfügen nun über die gleichen Voraussetzungen wie zuvor $p(0,\cdot)$ und $f(0,\cdot)$. Mit der analogen Vorgehensweise wie im ersten Fall folgt der zweite Teil der Aussage des Lemmas. □

5.3 Derivatebewertung im Martingalmodell

In diesem Abschnitt betrachten wir *Default Options*, Europäische Optionen auf Anleihen mit Kreditrisiko, *Spread Options* und *Default Swaps*. Das Vorgehen ist an Schönbucher (1998b) angelehnt.

Wir befinden uns nach Satz 4.9 in einem vollständigen Marktmodell. Folglich ist jeder *Contingent Claim* X duplizierbar und nach Satz 3.4 ist durch

$$\pi_X(t) = \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)X\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T, \tag{5.50}$$

ein eindeutiger Preisprozeß zugeordnet.

Als Beispiel betrachten wir jeweils das Kreditrisikomodell nach Jarrow, Lando und Turnbull aus Kapitel 4.2. Der Zinssatz r und h seien unabhängig, zudem ist h nach 4.2 eine nicht zufällige Funktion. r sei nach Cox, Ingersoll und Ross (1985) modelliert

$$r(t) \equiv r(0) + \int_0^t (\beta - \alpha\, r(s))\, ds + \sigma \int_0^t \sqrt{|r(s)|}\, dW^1(s)\,, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T, \tag{5.51}$$

wobei $\alpha < 0$, $\sigma > 0$ und $\beta > \frac{1}{2}\sigma$ gilt. Speziell wählen wir $\alpha \equiv -0.2$, $\beta \equiv 1$, $\sigma \equiv 0.3$ und $r(0) \equiv 4\%$.

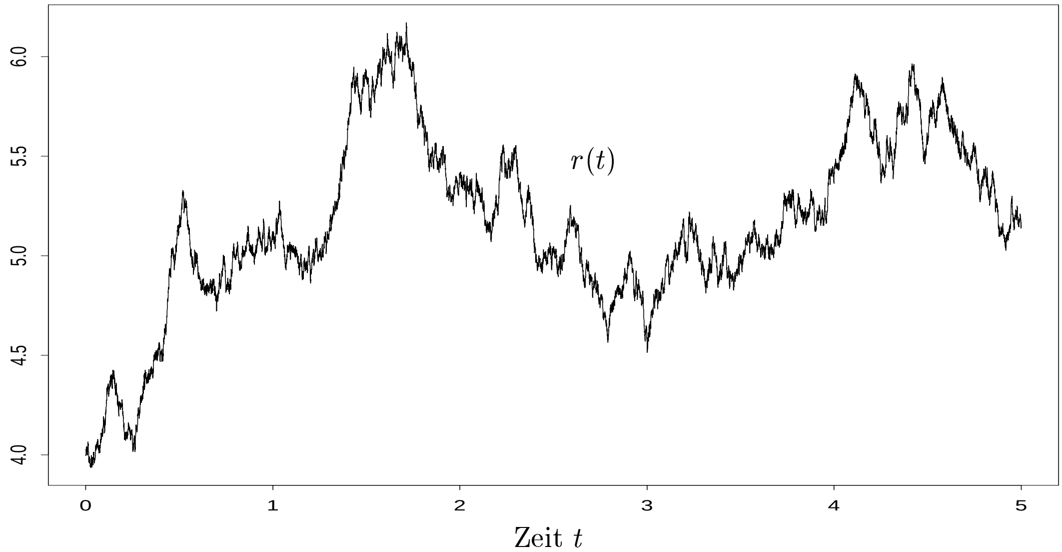

Abbildung 5.1: Simulierter Pfad eines Zinsmodells nach Cox, Ingersoll und Ross mit $\alpha = -0.2$, $\beta = 1$, $\sigma = 0.3$ und $r(0) = 4\%$.

In Abbildung 5.1 sehen wir einen simulierten Pfad von r. Durch ein *Short Rate Model* wird eine Zinsstruktur angegeben – vergleiche (5.10) und (5.12). Abbildung 5.2 zeigt die gegenwärtige Zinsstruktur, die vom gewählten Modell gegeben ist. In der Anwendung liegt die Zinsstruktur in Form von $f(0,\cdot)$ vor, und wir passen die Parameter wie beispielsweise β daran an; sprich, wir wählen $\beta(t)$ so, daß wir die tatsächlich gegebene Zinsstruktur auch im Modell erzeugen.

Zunächst studieren wir *Default Options*. Eine *Default Option* zahlt zum Zeitpunkt des Kreditausfalls eine Geldeinheit aus, falls der Kredit innerhalb einer zuvor festgelegten Frist ausfällt. $T^1 \in [0,T]$ sei die Fälligkeit der Option. Tritt ein *Default* in der Zeitspanne zwischen 0 und T^1 ein, so erfolgt die Auszahlung von Eins. Man kann eine *Default Option* als eine Versicherung gegen das Ereignis des Kreditausfalls betrachten, wobei $[0,T^1]$ den Versicherungszeitraum darstellt. Der *Contingent Claim* X_D hat die Gestalt

$$X_D \equiv \exp\left(\int_\tau^T r(s)\, ds\right) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T^1\}}. \tag{5.52}$$

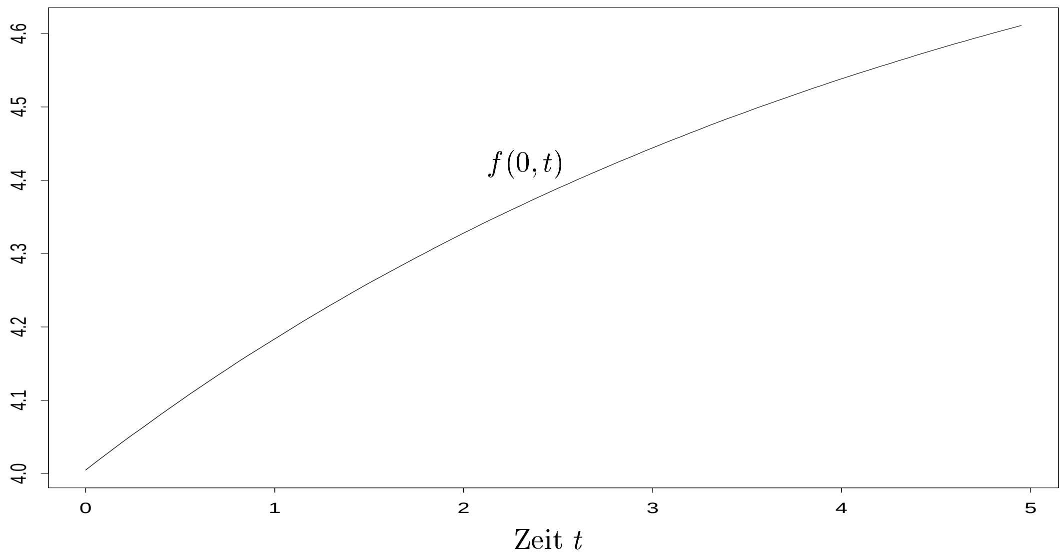

Abbildung 5.2: Die vom Modell in (5.51) implizierte Zinsstruktur zum Zeitpunkt $t = 0$.

Erfolgt der Kreditausfall bis T^1, dann erhält man eine Geldeinheit und legt sie im "Referrenzinstrument", dem risikolosen Geldmarktkonto, an. X_D ist ein *Contingent Claim* im Sinne von Definition 3.8; denn X_D ist $\mathcal{F}_T$–meßbar und nicht–negativ sowie durch $B(T) = \exp\left(\int_0^T r(s)\,ds\right)$ nach oben beschränkt. Deshalb gilt $\mathbf{E}\left\{|X_D|^2\right\} \le \mathbf{E}\left\{B(T)^2\right\} < \infty$, nach (5.1). $D(\cdot, T^1) = \{D(t,T^1) : 0 \le t \le T\}$ sei der Preisprozeß von X_D. Mit (5.50) erhalten wir

$$D(t,T^1) = \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)\exp\left(\int_\tau^T r(s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau\le T^1\}}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}, \qquad \text{für } 0 \le t \le T. \tag{5.53}$$

Proposition 5.4 *Für den Preis einer Default Option mit Laufzeit $T^1 \in [0,T]$ gilt*

$$D(0,T^1) = \int_0^{T^1} \mathbf{E}_Q\left\{\beta(t)\,h(t)\,\exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds\right)\right\}dt\,.$$

Sind h und r unabhängig, dann gilt

$$D(0,T^1) = \int_0^{T^1} h(0,t)\,v(0,t)\,dt\,.$$

Beweis: Zuerst zeigen wir

$$\beta^\tau(T^1)\,N(T^1) = \exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)\exp\left(\int_\tau^T r(s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau\le T^1\}}\,. \tag{5.54}$$

Wir betrachten die rechte Seite von (5.54). Auf $\left\{\tau > T^1\right\}$ ist der Faktor $\mathbf{1}_{\{\tau\le T^1\}}$ Null. Deshalb können wir bei den anderen Faktoren $\tau \le T^1$ voraussetzen, woraus $\tau \wedge T^1 = \tau$ folgt. Wir erhalten

$$\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)\exp\left(\int_\tau^T r(s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau\le T^1\}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)\exp\left(\int_{\tau\wedge T^1}^T r(s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau\le T^1\}}\\
&= \exp\left(-\int_0^{\tau\wedge T^1} r(s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{\tau\le T^1\}}\\
&= \beta^\tau(T^1)\,N(T^1)\,.
\end{aligned}
$$

Wir wenden die partielle Integration an (Korollar 2 von Satz 2.27) und nutzen dabei aus, daß β ein stetiger FV–Prozeß ist. Denn damit gilt nach Satz 2.29 $[\beta^\tau, N] = \beta(0)\,N(0) = 0$. Wir erhalten mit Satz 2.23

$$
\begin{aligned}
\beta^\tau(T^1)\,N(T^1) &= \int_0^{T^1}\beta^\tau(t)\,dN(t) + \int_0^{T^1}\mathbf{1}_{\{\tau<t\}}\,d\beta^\tau(t)\\
&= \int_0^{T^1}\beta^\tau(t)\,dN(t) + \int_0^{T^1}\mathbf{1}_{\{\tau<t\}}\,\mathbf{1}_{\{\tau\ge t\}}\,d\beta(t)\\
&= \int_0^{T^1}\beta^\tau(t)\,dN(t)
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt, haben wir

$$
\int_0^{T^1}\beta^\tau(t)\,dN(t) = \exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)X_D
$$

gezeigt, wobei X_D der *Contingent Claim* ist, der nach (5.52) eine *Default Option* beschreibt. Wir setzen das Ergebnis in (5.53) ein und nutzen aus, daß N ein Punktprozeß mit der Intensität λ ist. Mit Definition 2.36, Korollar 3 von Satz 2.61 und Fubini gilt für $t = 0$

$$
\begin{aligned}
D(0,T^1) &= \mathbf{E}_Q\left\{\beta(T)\,X_D\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\int_0^{T^1}\beta^\tau(t)\,dN(t)\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\int_0^{T^1}\beta^\tau(t)\,\lambda(t)\,dt\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\int_0^{T^1}\beta^\tau(t)\,h(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,dt\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\int_0^{T^1}\beta(t)\,h(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,dt\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{E}_Q\left\{\int_0^{T^1}\beta(t)\,h(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,dt\,\middle|\,\mathcal{H}_T\right\}\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\int_0^{T^1}\beta(t)\,h(t)\,\mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,dt\,\middle|\,\mathcal{H}_T\right\}\right\}\\
&= \int_0^{T^1}\mathbf{E}_Q\left\{\beta(t)\,h(t)\,\exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds\right)\right\}dt\,.
\end{aligned}
$$

Für den zweiten Teil der Aussage sei vorausgesetzt, daß r und h unabhängig sind. Das liefert mit Lemma 5.3

$$
D(0,T^1) = \int_0^{T^1}\mathbf{E}_Q\left\{\beta(t)\,h(t)\,\exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds\right)\right\}dt
$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{T^1} \mathbf{E}_Q\{\beta(t)\}\ \mathbf{E}_Q\left\{h(t)\ \exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds\right)\right\}\ dt \\
&= \int_0^{T^1} p(0,t)\,h(0,t)S_Q(0,t)\,dt \\
&= \int_0^{T^1} h(0,t)\,v(0,t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Der Beweis ist mit der letzten Gleichung abgeschlossen. □

Für den Fall, daß r und h unabhängig sind, können wir den Preis einer *Default Option* aus den aktuellen Marktdaten, aus $v(0,\cdot)$ und $h(0,\cdot)$ bestimmen.

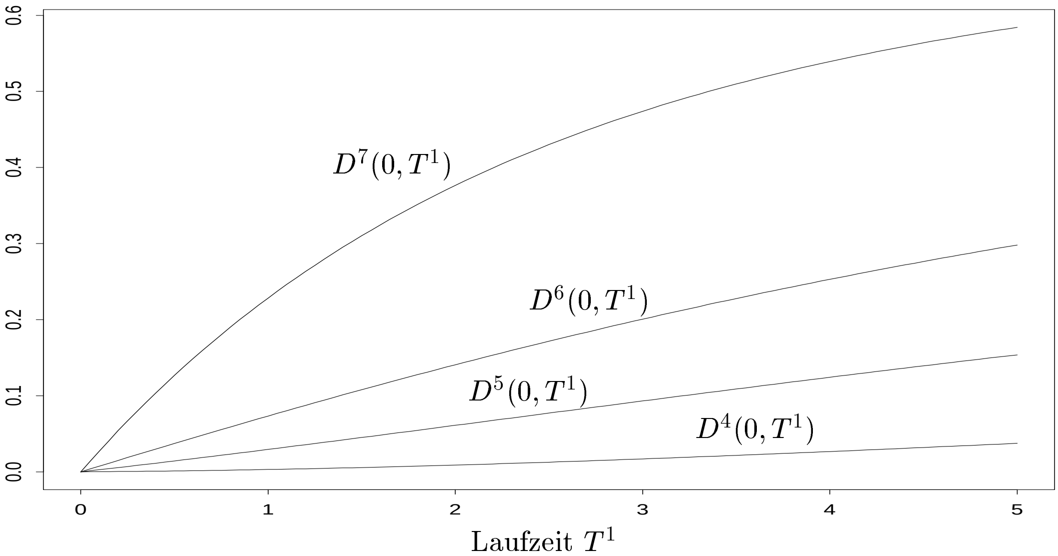

Abbildung 5.3: Preise von *Default Options* von verschiedene Startratings sind gegen die Laufzeit T^1 aufgetragen. Der Index $i = 4, ..., 7$ steht für das Startrating (vergleiche Kapitel 4.2).

Eine Kaufoption auf den *Zero Bond* mit Kreditrisiko läßt sich in der Bewertung auf eine Form bringen, die einer "gewöhnlichen" Kaufoption auf einen risikolosen *Zero Bond* gleicht. Der zugehörige *Contingent Claim* sei

$$X_C \equiv \exp\left(\int_{T^1}^T r(s)\,ds\right)\max\left\{v(T^1,T) - q, 0\right\}, \tag{5.55}$$

wobei $q \in [0,1]$ der Ausübungspreis und $T^1 \in [0,T]$ die Laufzeit der Option ist. Wir interpretieren den Verzinsungsfaktor vor der eigentlichen Option wieder so, daß man die Auszahlung in T^1 bis zum Endzeitpunkt T in die Referenzanlage B steckt. Der zum *Contingent Claim* X_C gehörige Preisprozeß sei $c(\cdot,T^1,q) = \{c(t,T^1,q) : 0 \le t \le T\}$. Mit (5.50) erhalten wir für $t \in [0,T]$

$$c(t,T^1,q) = \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_t^{T^1} r(s)\,ds\right)\max\left\{v(T^1,T) - q, 0\right\}\middle|\,\mathcal{F}_t\right\}. \tag{5.56}$$

Wir definieren "Preisprozesse", die auf dem definierten Markt nicht handelbar sind, allerdings die Bewertungsformel für unseren *Contingent Claim* X_C vereinfachen. Die Prozesse $p^*(\cdot,T) =$

$\{p^*(t,T) : 0 \leq t \leq T\}$ und $\beta^* = \{\beta^*(t) : 0 \leq t \leq T\}$ sind durch

$$p^*(t,T) = \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_t^T r^d(s)\,ds\right)\Big|\,\mathcal{F}_t\right\} \quad \text{und} \tag{5.57}$$

$$\beta^*(t) = \exp\left(-\int_0^t r^d(s)\,ds\right), \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T, \tag{5.58}$$

gegeben. Mit (5.28) und (5.29) gilt $v(t,T) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}p^*(t,T)$ und $C(t) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\beta^*(t)^{-1}$, $t \in [0,T]$. Im bedingten Erwartungswert von (5.56) steht eine $\mathcal{F}_{T^1}$–meßbare Zufallsvariable. Wir nehmen eine Maßtransformation ähnlich zu (5.43) vor. Jedoch arbeiten wir auf dem "verkürzten" filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}_{T^1}, P, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T^1}\right)$. Der Prozeß $L^* = \{L^*(t) : 0 \leq t \leq T^1\}$ sei durch

$$L^*(t) \equiv \frac{\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_t^{T^1} r^d(s)\,ds\right)\Big|\,\mathcal{F}_t\right\}}{\exp\left(\int_0^t r^d(s)\,ds\right)\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^{T^1} r^d(s)\,ds\right)\right\}}, \qquad \text{für } 0 \leq t \leq T^1, \tag{5.59}$$

definiert, wobei wir den Ausdruck im Zähler mit $p^*(t,T^1)$ bezeichnen, $t \in [0,T^1]$. Der Prozeß L^* ist ein positives Q–Martingal und erzeugt wie in Definition 5.1 ein zu Q äquivalentes Maß Q^*.

Proposition 5.5 *Für den Preis einer Kaufoption auf $v(\cdot,T)$ mit Fälligkeit in $T^1 \in [0,T]$ und Ausübungspreis q gilt*

$$c(t,T^1,q) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_t^{T^1} r^d(s)\,ds\right)\max\left\{p^*(T^1,T)-q,0\right\}\Big|\,\mathcal{F}_t\right\}, \quad \textit{für } 0 \leq t \leq T^1,$$

beziehungsweise unter dem Maß Q^*

$$c(t,T^1,q) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,p^*(t,T^1)\,\mathbf{E}_{Q^*}\left\{\max\left\{p^*(T^1,T)-q,0\right\}\Big|\,\mathcal{F}_t\right\}, \qquad \textit{für } 0 \leq t \leq T^1.$$

Beweis: Zunächst untersuchen wir die $\mathcal{F}_{T^1}$–meßbare Zufallsvariable $Y \equiv \max\{v(T^1,T)-q,0\}$. Y ist beschränkt, denn $0 \leq Y \leq p^*(T^1,T) \leq 1$. Folglich ist Y integrierbar. Wir zeigen

$$Y = \mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\max\left\{p^*(T^1,T)-q,0\right\}. \tag{5.60}$$

Das ist eine Konsequenz von (5.29) und (5.57).

$$\begin{aligned}
Y &= \max\left\{v(T^1,T)-q,0\right\}\\
&= \max\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\,p^*(T^1,T)-q,0\right\}\\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\max\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\,p^*(T^1,T)-q,0\right\}+\mathbf{1}_{\{\tau\leq T^1\}}\max\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\,p^*(T^1,T)-q,0\right\}\\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\max\left\{p^*(T^1,T)-q,0\right\}+\max\left\{\mathbf{1}_{\{\tau\leq T^1\}}\mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\,p^*(T^1,T)-\mathbf{1}_{\{\tau\leq T^1\}}\,q,0\right\}\\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\max\left\{p^*(T^1,T)-q,0\right\}.
\end{aligned}$$

Aus (5.56), (5.60) und Korollar 3 von Satz 2.61 schließen wir für $t \in [0, T^1]$

$$\begin{aligned}
c(t, T^1, q) &= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^{T^1} r(s)\, ds\right) \max\left\{v(T^1, T) - q, 0\right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^{T^1} r(s)\, ds\right) \mathbf{1}_{\{\tau > T^1\}} \max\left\{p^*(T^1, T) - q, 0\right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^{T^1} r(s)\, ds\right) \mathbf{1}_{\{\tau > T^1\}} \max\left\{p^*(T^1, T) - q, 0\right\} \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_T \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^{T^1} r(s)\, ds\right) \mathbf{E}_Q \left\{ \mathbf{1}_{\{\tau > T^1\}} \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_T \right\} \max\left\{p^*(T^1, T) - q, 0\right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^{T^1} r(s)\, ds\right) \exp\left(-\int_t^{T^1} h(s)\, ds\right) \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \max\left\{p^*(T^1, T) - q, 0\right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_t^{T^1} r^d(s)\, ds\right) \max\left\{p^*(T^1, T) - q, 0\right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} .
\end{aligned}$$

Die erste Teilaussage ist damit bewiesen. Die zweite Aussage folgt aus der Definition von L^* in (5.59) und Lemma 5.3. □

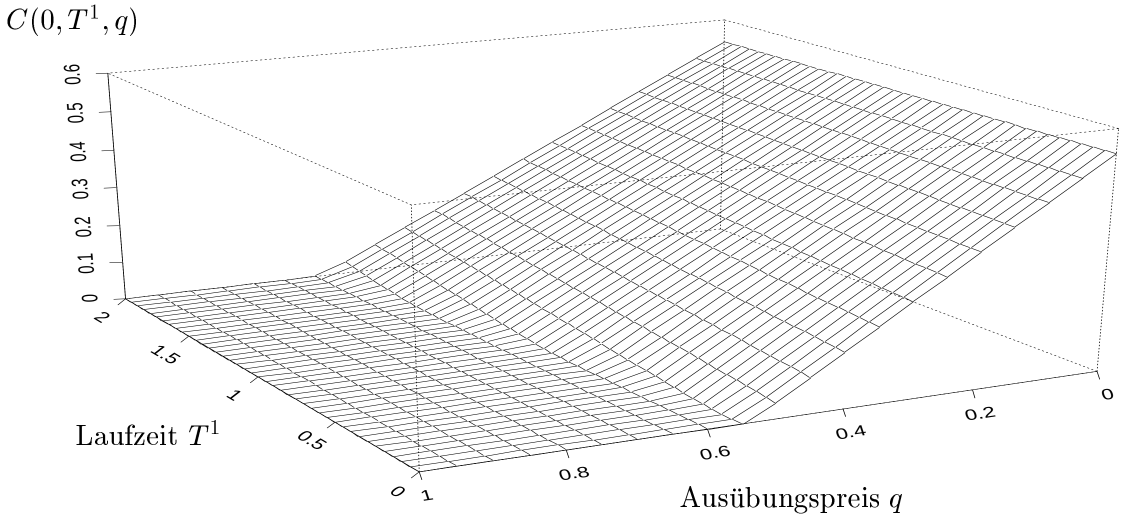

Abbildung 5.4: Für den Fall, daß r und h unabhängig sind, ist der "faire" Wert x eines *Default Swap* gegen die Laufzeit T^1 aufgetragen. Der Index $i = 4, ..., 7$ steht für das Startrating (vergleiche Kapitel 4.2).

Eine Alternative zur "gewöhnlichen" Kaufoption ist, den Ausübungspreis durch den risikolosen *Zero Bond* festzulegen. Damit erhalten wir eine Kaufoption, deren Ausübungskriterium der

Rendite–*Spread*–Struktur zwischen beiden Anlagen ist. Der *Contingent Claim* sei

$$X_{C_S} \equiv \exp\left(\int_{T^1}^{T} r(s)\,ds\right) \max\left\{v(T^1,T) - \kappa\, p(T^1,T), 0\right\}, \tag{5.61}$$

wobei $\kappa \in [0,1]$ und $T^1 \in (0,T)$ gilt. Aus (5.27), (5.29) und $h > 0$ sehen wir $v(\cdot,T) \leq p(\cdot,T)$. Die Option wird dann in T^1 "ausgeführt", wenn

$$v(T^1,T) > \kappa\, p(T^1,T) \tag{5.62}$$

gilt. Wir erinnern uns an die Darstellung von $p(\cdot,T)$ und $v(\cdot,T)$ durch die Zinsstruktur in Kapitel 4.3

$$\begin{aligned} p(t,T) &= \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\,ds\right) \quad \text{und} && (5.63)\\ v(t,T) &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\,ds - \int_t^T h(t,s)\,ds\right), \quad \text{für } 0 \leq t \leq T. && (5.64)\end{aligned}$$

$p(T^1,T)$ ist strikt positiv. Wir dividieren (5.62) durch $p(T^1,T)$ und erhalten mit (5.63) und (5.64)

$$\mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}} \exp\left(-\int_{T^1}^T h(T^1,s)\,ds\right) > \kappa \tag{5.65}$$

als Bedingung, unter der die Option ausgeübt wird. Es muß auf jeden Fall das Ereignis $\{\tau > T^1\}$ eintreten, und der Zinsstruktur–*Spread*

$$s(T^1,T) \equiv \frac{\int_{T^1}^T h(T^1,s)\,ds}{T - T^1}, \tag{5.66}$$

muß $s(T^1,T) < \dfrac{-\ln\kappa}{T-T^1}$ erfüllen. Durch κ kann man den *Spread* der Zinsstrukturen, den man auch *Yield–Spread* nennt, als Ausübungskriterium einstellen – allerdings nur bedingt auf das Überleben der Anleihe bis zum Zeitpunkt T^1. Abbildung 5.5 gibt darüber Aufschluß wie der Faktor κ mit dem "Ausübungsspread" zusammenhängt.

Der zu X_{C_S} gehörige Preisprozeß $C_S(\cdot,T^1,\kappa) = \{C_S(t,T^1,\kappa) : 0 \leq t \leq T\}$ läßt sich unter der Annahme, daß r und h unabhängig sind berechnen. Wir definieren die Prozesse $\gamma = \{\gamma(t) : 0 \leq t \leq T\}$ und $q(\cdot,T) = \{q(t,T) : 0 \leq t \leq T\}$ durch

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds\right) \quad \text{und} && (5.67)\\ q(t,T) &= \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_t^T h(s)\,ds\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right\} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T. && (5.68)\end{aligned}$$

γ interpretieren wir als Diskontierungsprozeß zum "Zins" h und $q(\cdot,T)$ als den entsprechenden *Zero Bond* mit Laufzeit T.

Proposition 5.6 *Falls r und h unabhängig sind, gilt für den Preis von X_{C_S}*

$$C_S(0,T^1,\kappa) = p(0,T)\,\mathbf{E}_Q\left\{\gamma(T^1)\ \max\left\{q(T^1,T) - \kappa, 0\right\}\right\}.$$

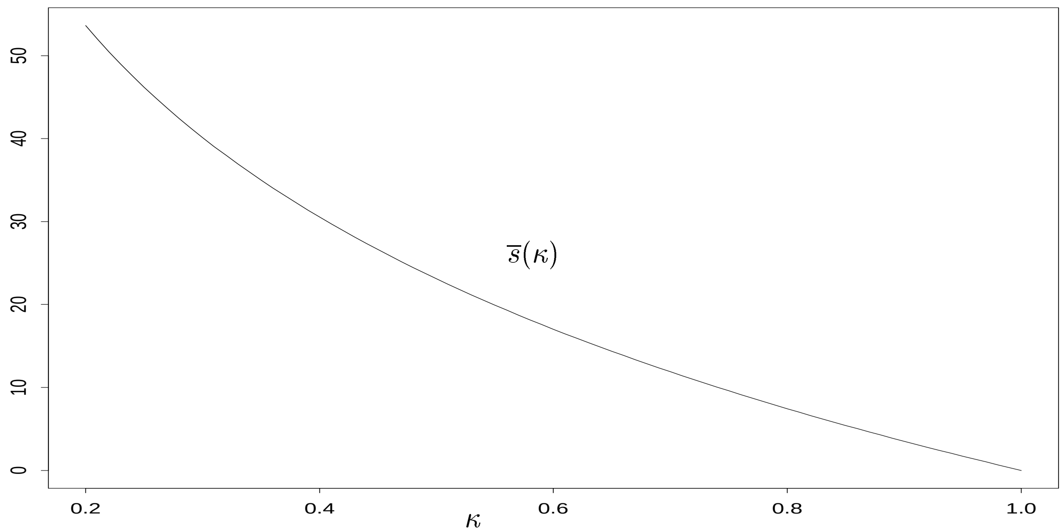

Abbildung 5.5: Der "Ausübungs*spread* $\overline{s}$ (in Prozent) in Abhängigkeit von κ für $T = 5$ und $T^1 = 3$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die zwei Gleichungen

$$\mathbf{E}_Q\left\{\beta(T^1)\, p(T^1,T)\right\} \;=\; p(0,T) \qquad \text{und} \tag{5.69}$$

$$\mathbf{E}_Q\left\{\max\left\{S_Q(T^1,T)-\kappa,0\right\}\right\} \;=\; \mathbf{E}_Q\left\{\gamma(T^1)\,\max\left\{q(T^1,T)-\kappa,0\right\}\right\} \tag{5.70}$$

Nach (5.12) gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_Q\left\{\beta(T^1)\, p(T^1,T)\right\} &= \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^{T^1} r(s)\,ds\right)\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_{T^1}^{T} r(s)\,ds\right)\,\middle|\,\mathcal{F}_{T^1}\right\}\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^{T^1} r(s)\,ds\right)\exp\left(-\int_{T^1}^{T} r(s)\,ds\right)\,\middle|\,\mathcal{F}_{T^1}\right\}\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^{T} r(s)\,ds\right)\,\middle|\,\mathcal{F}_{T^1}\right\}\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^{T} r(s)\,ds\right)\right\}\\
&= p(0,T)\,,
\end{aligned}$$

was (5.69) beweist. Die zweite Hilfsaussage (5.70) folgt mit $S_Q(T^1,T) = \mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\, q(T^1,T)$ analog zu (5.60) und Korollar 3 von Satz 2.61

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_Q\left\{\max\left\{S_Q(T^1,T)-\kappa,0\right\}\right\} &= \mathbf{E}_Q\left\{\max\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\, q(T^1,T)-\kappa,0\right\}\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\,\max\left\{q(T^1,T)-\kappa,0\right\}\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\,\max\left\{q(T^1,T)-\kappa,0\right\}\,\middle|\,\mathcal{G}_T\right\}\right\}\\
&= \mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>T^1\}}\,\middle|\,\mathcal{G}_T\right\}\max\left\{q(T^1,T)-\kappa,0\right\}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_0^{T^1} h(s)\, ds \right) \max\left\{ q(T^1,T) - \kappa, 0 \right\} \right\} \\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \gamma(T^1) \max\left\{ q(T^1,T) - \kappa, 0 \right\} \right\} .
\end{aligned}
$$

r und h sind unabhängig. Aus (5.9) sehen wir $v(T^1,T) = S_Q(T^1,T)\, p(T^1,T)$. Damit können wir $p(T^1,T)$ aus $\max\{v(T^1,T) - \kappa\, p(T^1,T), 0\}$ herausziehen und (5.69) sowie (5.70) anwenden. Das liefert

$$
\begin{aligned}
C_S(0,T^1,\kappa) &= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_0^{T^1} r(s)\, ds \right) \max\left\{ v(T^1,T) - \kappa\, p(T^1,T), 0 \right\} \right\} \\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_0^{T^1} r(s)\, ds \right) \max\left\{ S_Q(T^1,T)\, p(T^1,T) - \kappa\, p(T^1,T), 0 \right\} \right\} \\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_0^{T^1} r(s)\, ds \right) p(T^1,T) \max\left\{ S_Q(T^1,T) - \kappa, 0 \right\} \right\} \\
&= \mathbf{E}_Q \left\{ \exp\left(-\int_0^{T^1} r(s)\, ds \right) p(T^1,T) \right\} \mathbf{E}_Q \left\{ \max\left\{ S_Q(T^1,T) - \kappa, 0 \right\} \right\} \\
&= p(0,T)\, \mathbf{E}_Q \left\{ \gamma(T^1) \max\left\{ q(T^1,T) - \kappa, 0 \right\} \right\} .
\end{aligned}
$$

Beim vorletzten Schritt haben wir auf die Unabhängigkeit von r und h zurückgegriffen. Die angestrebte Bewertungsformel haben wir damit hergeleitet. □

Der Wert der Option, $C_S(0,T^1,\kappa)$ berechnet sich wie eine Kaufoption auf den "künstlichen" *Zero Bond* $q(\cdot,T)$ mit Ausübungspreis κ, was wir zusätzlich mit dem Faktor $p(0,T)$ multiplizieren.

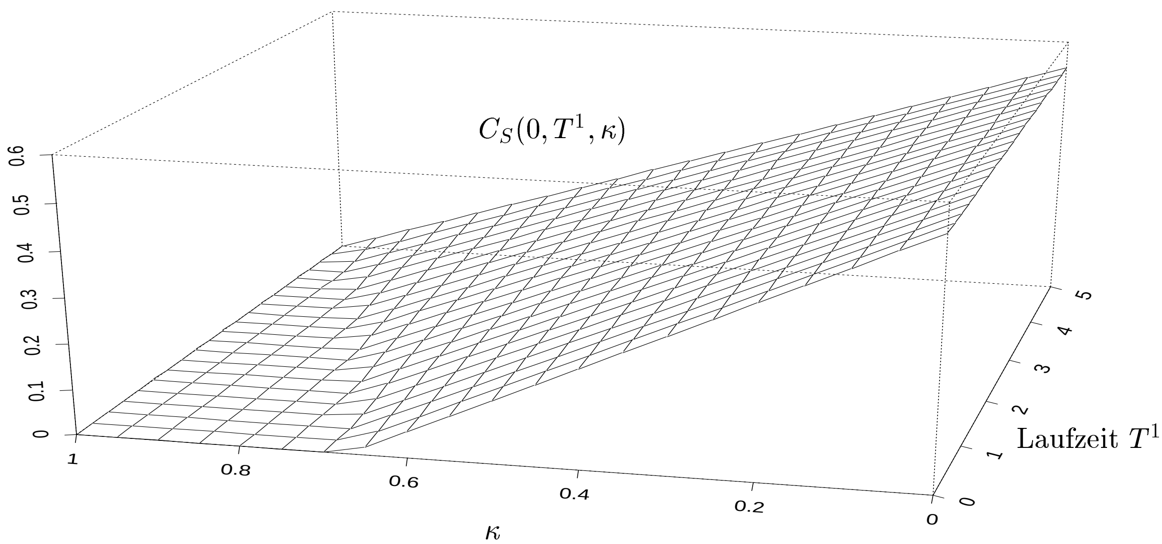

Abbildung 5.6: Der Preis einer *Spread Option* $C_S(0,T^1,\kappa)$ ist gegen die Laufzeit T^1 und κ aufgetragen. Das Startrating ist $i = 6$.

Zum Abschluß betrachten wir die Bewertung eines *Default Swaps*. Ein *Default Swap* ist ein Geschäft, in dem zwei Parteien Zahlungen austauschen. Der Wert eines *Swaps* beträgt bei Abschluß des Geschäftes Null. Wir bewerten beide Zahlungen und untersuchen, welche Bedingungen dafür notwendig sind.

Der festgelegte Dauer des *Swaps* sei T. Die eine Partei zahlt eine Geldeinheit bei Kreditausfall, falls das Ereignis bis T eintritt. Die andere Partei erbringt eine kontinuierlichen Zahlungsstrom, der mit dem Kreditausfall, doch spätestens in T, aufhört. Den Wert der erstgenannten Zahlung kennen wir. Er ist der Preis einer *Default Option* mit Laufzeit T. Nach Proposition 5.4 gilt

$$D(0,T) = \int_0^T \mathbf{E}_Q \left\{ \beta(t)\, h(t)\, \exp\left(- \int_0^t h(s)\, ds \right) \right\} dt \,, \tag{5.71}$$

beziehungsweise im Falle der Unabhängigkeit von r und h

$$D(0,T) = \int_0^T h(0,t)\, v(0,t)\, dt \,. \tag{5.72}$$

Der gesamte kontinuierliche Zahlungsstrom, der bereits mittels β diskontiert ist, sei

$$Y \equiv \int_0^T \beta(t)\, x(t)\, \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} dt \,, \tag{5.73}$$

wobei $x : [0,T] \to \mathbb{R}_0^+$ eine stetige Funktion ist. Der Preis des Auszahlungsstrom ist L

$$L \equiv \mathbf{E}_Q \left\{ \int_0^T \beta(t)\, x(t)\, \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} dt \right\} \,. \tag{5.74}$$

Wir wählen x derart, daß die Differenz aus L und $D(0,T)$ Null beträgt. Dann sind beide *Contingent Claims* gleichviel wert, was Grundbedingung für ein *Swap*–Geschäft ist.

Proposition 5.7 *L läßt sich wiefolgt darstellen*

$$L = \int_0^T x(t)\, v(0,t)\, dt \,.$$

Ist x konstant, dann ist der Swap für

$$x = \frac{\displaystyle\int_0^T \mathbf{E}_Q \left\{ \beta(t)\, h(t)\, \exp\left(- \int_0^t h(s)\, ds \right) \right\} dt}{\displaystyle\int_0^T v(0,t)\, dt} \,,$$

fair bewertet. Falls r und h unabhängig sind, gilt

$$x = \frac{\displaystyle\int_0^T h(0,t)\, v(0,t)\, dt}{\displaystyle\int_0^T v(0,t)\, dt} \,.$$

Beweis: Mit Fubini, der $\mathcal{F}_0$–Meßbarkeit von x und Korollar 3 von Satz 2.61 erhalten wir

$$\begin{aligned}
L &= \mathbf{E}_Q\left\{\int_0^T \beta(t)\,x(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\,dt\right\}\\
&= \int_0^T \mathbf{E}_Q\left\{\beta(t)\,x(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\right\}dt\\
&= \int_0^T x(t)\,\mathbf{E}_Q\left\{\beta(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\right\}dt\\
&= \int_0^T x(t)\,\mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{E}_Q\left\{\beta(t)\,\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\;|\mathcal{H}_T\right\}\right\}dt\\
&= \int_0^T x(t)\,\mathbf{E}_Q\left\{\beta(t)\,\mathbf{E}_Q\left\{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\;|\mathcal{H}_T\right\}\right\}dt\\
&= \int_0^T x(t)\,\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)\,\exp\left(-\int_0^t h(s)\,ds\right)\right\}dt\\
&= \int_0^T x(t)\,\mathbf{E}_Q\left\{\exp\left(-\int_0^t r^d(s)\,ds\right)\right\}dt\\
&= \int_0^T x(t)\,v(0,t)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Ist x konstant, dann gilt

$$L = x\int_0^T v(0,t)\,dt\,. \tag{5.75}$$

Der Wert des *Swaps* ist in der Gegenwart gleich Null. Wir erhalten die beiden Ausdrücke für x, wenn wir die Gleichung $L = D(0,T)$ mittels (5.75) und (5.71), beziehungsweise (5.72) nach x auflösen. □

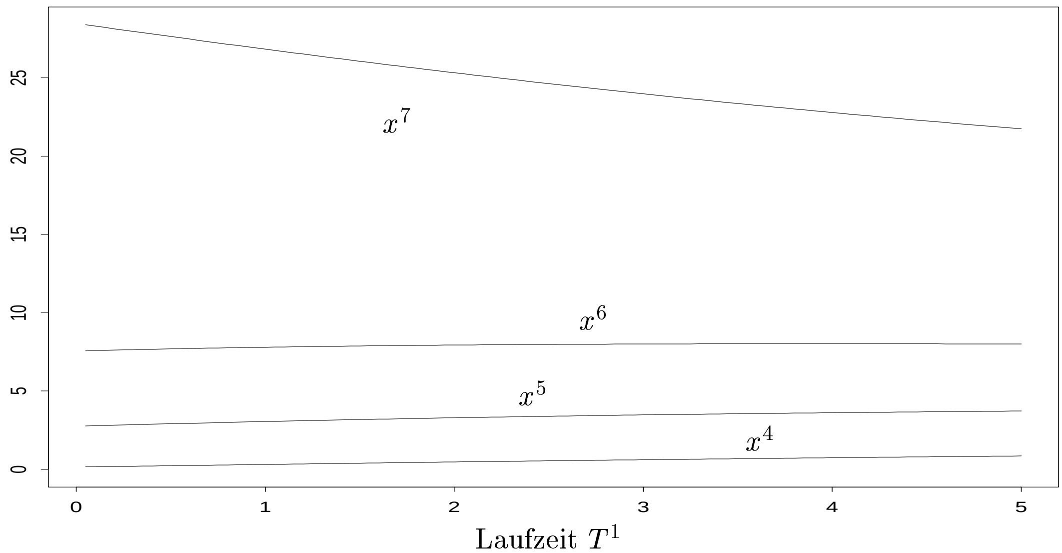

Abbildung 5.7: Für den Fall, daß r und h unabhängig sind, ist der "faire" Wert x einer *Default Swap* ist gegen die Laufzeit T^1 aufgetragen. Der Index $i = 4, ..., 7$ steht für das Startrating (vergleiche Kapitel 4.2).

Abbildung 5.7 zeigt uns, wie sich die konstante "faire Prämienrate" x eines *Default Swap* verhält, wenn wir das Startrating und die Laufzeit variieren. Bei fast allen Ratingklassen steigt x mit wachsender Laufzeit des *Default Swaps*; nur im Fall des schlechtesten *Ratings CCC* entwickelt sich x gegenläufig und fällt mit der Laufzeit T^1 ab. Das hat seinen Grund darin, daß das Kreditrisiko und damit die Gefahr eines *Default* in der ersten Zeitspann am höchsten ist und sich das *Rating* der Anleihe bedingt auf den Nicht–Kreditausfall tendetiell verbessert.

Kapitel 6

Ausblick

Mit dieser Arbeit sollte ein Überblick über wesentliche Kreditrisikomodelle gegeben werden. Die dargelegten Modelle fassen wir noch einmal kurz zusammen und weisen auf Punkte hin, die man im jeweiligen Fall mit Kritik betrachten kann. Zumeist handelt es sich hierbei um das Problem, die Modellparameter aus den vorhandenen Daten geeignet zu schätzen.

Mit dem Modell nach Merton (1974) haben wir einen der zeitlich gesehen ersten Ansätze näher untersucht. Problematisch ist hier, daß man den Firmenwert, der durch eine geometrische Brownsche Bewegung modelliert wird, nur schwer beobachten kann. Die beschreibenden Parameter wie der anfängliche Firmenwert $A(0)$ und die Schwankungskonstante σ sind aus den vorhandenen Daten kaum schätzbar. Der Ansatz nach Jarrow, Lando und Turnbull (1997) beschreibt Kreditrisiken durch zeitstetige homogene Markovketten. Lando (1997) sieht in der Homogenität der Markovkette zurecht einen Kritikpunkt. Er versucht das zu beheben, indem er die Übergangswahrscheinlichkeiten innerhalb der Ratingklassen von stochastischen Grössen wie dem kurzfristigen Zinssatz abhängig macht. Allerdings läßt sich das Modell von Jarrow, Lando und Turnbull wegen seiner Einfachheit gut auf praktische Probleme anwenden. Die Idee von Schönbucher (1998a), die Zinsstrukter von Anleihen mit Kreditrisiko zu modellieren, findet ihre Grenzen im Schätzen von Modellparametern. Oft werden von einer Firma nur sehr wenig Anleihen auf dem Markt gehandelt, sodaß man eine Zinsstruktur nur schwer auf die Daten anpassen kann.

Bei der Bewertung von Derivaten auf Anleihen mit Kreditrisko muß genau an dem heiklen Problemen der Modellidentifikation und Schätzung der entsprechenden Parameter ansetzen. Auf diesem Feld kann man Ergebnisse erzielen, die in der Anwendung, im Handelsbereich von Großbanken, nützlich sein könnten.

Literaturverzeichnis

[1] Björk, T. (1997) Interest Rate Theory. In *Financial Mathematics, Bressanone, 1996.* Hrsg Runggaldier, W., Lecture Notes in Mathematics 1656, Springer–Verlag, New York.

[2] Black, F. und Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* **81**, 637–659.

[3] Breiman, L. (1968) *Probability.* Addison–Wesley, Reading.

[4] Brémaud, P. (1981) *Point Processes and Queues. Martingale Dynamics.* Springer–Verlag, New York.

[5] Cox, J., Ingersoll, J und Ross, S. (1985) A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* **53**, 385–408.

[6] Duffie, D. (1992) *Dynamic Asset Pricing Theory.* Princeton University Press, Princeton.

[7] Duffie, D. und Singleton K. (1995) Modelling term structures of defaultable bonds, Working–Paper, *Graduate School of Business, Stanford University*, Stanford.

[8] Elstrodt, J. (1996) *Maß– und Integrationstheorie.* Springer–Verlag, Berlin.

[9] Grandell, J. (1997) *Mixed Poisson Processes.* Chapman & Hall, London.

[10] Grandell, J. (1976) *Doubly Stochastic Processes.* Lecture Notes in Mathematics 529, Springer–Verlag, New York.

[11] Grünewald, B. (1998) *Absicherungsstrategien für Optionen bei Kurssprüngen.* Gabler, Wiesbaden.

[12] Harrison, J. M. und Pliska S. (1981) Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Applications* **11**, 215–260.

[13] Heath, D., Jarrow, R. und Morton, A. (1992) Bond pricing and the term structure of interest rates. *Econometrica* **60**, 77–106.

[14] Hull, J. C. (1993) *Options, Futures and Other Derivative Securities.* Prentice–Hall, Englewood Cliffs.

[15] Jacod, J. und Shiryaev, A. N. (1987) *Limit Theorems for Stochastic Processes.* Springer–Verlag, New York.

[16] Jarrow, R. A. und Turnbull, S. M. (1996) *Derivative Securities.* South-Western College Publishing, Cincinnati.

[17] Jarrow, R. A., Lando, D. und Turnbull, S. M. (1997) A markov model for the term structure of credit risk spreads. *Review of Financial Studies* **10**, 481–523.

[18] Karatzas, I. und Shreve, S. E. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer–Verlag, New York.

[19] Karatzas, I. und Shreve, S. E. (1998) *Methods of Mathematical Finance.* Springer–Verlag, New York.

[20] Korn, R. (1997) *Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time.* World Scientific, Singapur.

[21] Lando, D. (1997) Modelling bonds and derivatives with default risk. In *Mathematics of Derivative Securities.* Hrsg Dempster, M. A. H., Camebridge University Press, Camebridge, 369–393.

[22] Liptser, R. S. und Shiryaev, A. N. (1989) *Theory of Martingales.* Kluwer, Dordrecht.

[23] Madan, D. (1998) Default Risk. In *Statistics in Finance.* Hrsg Hand D. J. und Jacka S. D., Arnold, London, 239–260.

[24] Merton, R. C. (1974) On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance* **2**, 449–470.

[25] Resnick, S. I. (1992) *Adventures in Stochastic Processes.* Birkhäuser, Boston.

[26] Øksendahl, B. (1995) *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* Springer–Verlag, New York.

[27] Protter, P. (1995) *Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach.* Springer–Verlag, New York.

[28] Schönbucher, P. J. (1998a) Term structure modelling of defaultable bonds. *Review of Derivatives Research* **2**, 161–192.

[29] Schönbucher, P. J. (1998b) Pricing credit risk derivatives. *Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, Universität Bonn*, Bonn.

[30] Standard&Poor's Credit Review (1993) *Corporate Default, Rating Transition Study Updated.*, McGraw Hill, New York.