

Technische Universität München

ZENTRUM MATHEMATIK

**Value at Risk Schätzung
mit Hilfe elliptischer Copulae**

Diplomarbeit

von

Bernd Brommundt

Themensteller: Prof. Dr. Claudia Klüppelberg

Betreuer: Dipl. math. oec. Gabriel Kuhn

Dipl. math. Harald Schwer (HypoVereinsbank)

Abgabetermin: 15. April 2003

Diese Arbeit wurde von der Abteilung RCO1 der Bayerischen Hypo- und Vereinsbank AG unterstützt.

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

München, 15. April 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Aufgabe	1
1.2	Unternehmensanleihen und der Credit Spread	2
1.3	Auswahl der Daten	4
1.4	Ein erster Blick auf die Daten	5
1.5	Aufbau der Arbeit und Vorgehen	5
2	Datenanalyse	11
2.1	Autokorrelation	11
2.1.1	Autokorrelation der Tagesdifferenzen	13
2.2	Extremal Index	13
2.2.1	Methoden zum Schätzen des Extremal Index	15
2.2.2	Extremal Index für die Daten	16
2.3	Verteilungsanalyse	17
2.3.1	Quantil-Quantil-Plots	17
2.3.2	Verteilungen der Daten	18
3	Univariate Extremwerttheorie	33
3.1	Der Satz von Fisher-Tippett	33
3.2	Maximaler Anziehungsbereich von H_ξ	35
3.2.1	Charakterisierung von $\text{MDA}(H_\xi)$	37
3.3	Die verallgemeinerte Pareto Verteilung	39
3.4	Schätzen des Parameters ξ von H_ξ	40
3.4.1	Pickands Schätzer	41
3.4.2	Hill Schätzer	43
3.4.3	Maximum Likelihood Schätzer	45
4	Copulae	53
4.1	Grundlagen	53
4.2	Definition der Copula und einfache Eigenschaften	54
5	Multivariate Extremwerttheorie, Abhängigkeiten	59
5.1	Multivariate Extremwertverteilungen	59
5.1.1	Charakterisierung multivariater Extremwertverteilungen	62

5.1.2	Maximaler Anziehungsbereich der multivariaten Extremwertverteilungen	66
5.2	Abhängigkeiten	69
5.2.1	Visualisieren von Abhängigkeiten	69
5.2.2	Korrelation	70
5.2.3	Kendall's Tau	70
5.2.4	Extremal Coefficient	71
5.2.5	Tail Dependence	73
5.2.6	Selbstkonsistenz von Abhängigkeitsmaßen	76
6	Sphärische und Elliptische Verteilungen	85
6.1	Sphärische Verteilungen	85
6.1.1	Sphärische Copulae	89
6.1.2	Tail Dependence für sphärische Verteilungen	90
6.2	Elliptische Verteilungen	93
6.2.1	Elliptische Copulae	96
6.2.2	Korrelation für elliptische Verteilungen	97
6.2.3	Kendall's Tau für Elliptische Verteilungen	98
6.2.4	Tail Dependence für elliptische Zufallsvariablen	99
6.3	Selbstkonsistente elliptische Verteilungen	102
7	Verfahren zur Value at Risk Schätzung	105
7.1	Nachteile gängiger Verfahren	105
7.2	Preise von Unternehmensanleihen und Value at Risk	106
7.3	Value at Risk bei Lognormalverteilung	109
7.4	VaR Schätzung mit Hilfe elliptischer Copulae	111
7.4.1	Die Methode	111
7.4.2	Das Vorgehen im Einzelnen	112
7.4.3	Schwierigkeiten bei der Wahl von α	117
8	Zusammenfassung	123
A	Liste und Stammdaten der Anleihen	125
B	Daten einer Zinskurve am 31.10.2002	127
C	Uniform auf Einheitssphären verteilte Zufallsvariablen	129

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Aufgabe

Banken sind verpflichtet, das Risiko ihrer Handelsportfolios täglich abzuschätzen. Das gängige Maß für das Risiko ist der Value at Risk (VaR). Der VaR ist ein unteres q -Quantil der Verteilung der Wertänderung eines Handelsportfolios. Üblicherweise wird $q = 1\%$, seltener auch 5% oder 0.1% gewählt. Mit Wahrscheinlichkeit q wird also an einem Tag ein Verlust größer oder gleich dem VaR erlitten. Liegt der geschätzte VaR über einem bestimmten Wert, so muß die Bank zusätzliches Kapital bereitstellen oder das Portfolio verkleinern. Vor- und Nachteile des VaR und alternative Risikomaße diskutieren Artzner, Delbaen et. al. [1].

Schätzungen des VaR gehen von den statistischen Parametern der Wertschwankungen des Handelsportfolios aus. Man interessiert sich vor allem für das Auftreten großer Verluste. Die univariate Extremwerttheorie bietet Methoden, um die Wahrscheinlichkeiten hoher Wertverluste einzelner Portfoliokomponenten abzuschätzen.

Hohe Verluste des Portfolios entstehen häufig nicht durch große Verluste einzelner Positionen, sondern durch gleichzeitige (hohe) Verluste vieler Komponenten des Portfolios. Daher interessiert man sich für die Abhängigkeiten zwischen den Komponenten, insbesondere für die extremen Wertänderungen und für ihre Verknüpfung.

Ein Maß für die Abhängigkeit extremer Ereignisse gemeinsam verteilter Zufallsvariabler ist die Tail Dependence, die in Abschnitt 5.2.5 dieser Arbeit vorgestellt wird. Sie mißt die Wahrscheinlichkeit, mit der ein extremes Ereignis einer Zufallsvariable auftritt, wenn für andere Zufallsvariable extreme Ereignisse vorliegen.

Viele Banken arbeiten mit Modellen, die auf der Normal- bzw. der Lognormalverteilung beruhen. (Die Idee dazu geht auf eine Arbeit von Bachelier (1900) zurück.) Ihr großer Vorteil: die Modelle sind einfach aufgebaut und lassen sich leicht auf dem Rechner implementieren. Von erheblichem Nachteil ist, dass Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Zufallsvariablen nur durch die Korrelationen erfaßt und beschrieben werden können, während mit ihnen z.B. keine extremen Abhängigkeiten erfaßt werden können. Außerdem haben die

in der Realität beobachteten Verteilungen meistens schwerere Tails (hohe bzw. niedrige Quantile liegen weiter voneinander entfernt) als die Normal- und die Lognormalverteilung.

Es wäre günstiger, die multivariate Verteilung eines Portfolios mittels Copulae zu beschreiben, da sie gestatten, allgemeinere Abhängigkeitsstrukturen zu modellieren. Dabei wächst der Aufwand allerdings stark mit der Dimension, die Verfahren sind schwierig und aufwändig zu implementieren.

Diese Arbeit schlägt vor, elliptische Copulae zum Beschreiben der Tail Dependence Struktur heranzuziehen. In Kapitel 7.4 wird ein Verfahren entwickelt, das den VaR eines Portfolios ausgehend von einer Tail Dependence Struktur mit Hilfe elliptischer Copulae schätzt.

1.2 Unternehmensanleihen und der Credit Spread

Eine Unternehmensanleihe ist ein verbrieftter Kredit, den ein Unternehmen über einen Markt, z.B. eine Börse verkauft.

Wie bei einem normalen Kredit, ist dies ein Vertrag der folgenden Form: Beim Verkauf einer Anleihe durch das Unternehmen, der Emission der Anleihe, zahlt ein Käufer dem Unternehmen einen bestimmten Betrag für einen Teil der Anleihe. Dafür verpflichtet sich das Unternehmen, dem Besitzer eines Anleiheteils jedes Jahr zu einem bestimmten Termin einen Zins C zu zahlen und am Ende einer Frist, der Laufzeit T der Anleihe, einen bestimmten Betrag zu zahlen; man spricht von der Rückzahlung der Anleihe. Die Besitzer der Anleihe erhalten ferner das Recht, ihre Ansprüche auf andere Personen zu übertragen, üblicherweise durch Verkauf. Dieses ist der große Unterschied zum herkömmlichen Kredit.

Das Geschäft von Unternehmen unterliegt Schwankungen. So könnte zum Beispiel der Fall eintreten, dass das Unternehmen, welches die Anleihe emittiert hat, nicht mehr in der Lage ist, den vereinbarten Zins C zu zahlen oder die Anleihe am Ende der Laufzeit komplett zurückzuzahlen. Je nachdem, wie die Bonität des Unternehmens, die Fähigkeit die Zinszahlungen und die Rückzahlung zu leisten, zum Zeitpunkt t eingeschätzt wird, werden für die Anleihen verschiedener Unternehmen am Markt verschiedene Preise \tilde{B}_t geboten. Wird die Bonität eines Unternehmens hoch eingeschätzt, so sind die Preise hoch, wird sie gering eingeschätzt, so sind die Preise niedrig. Aus dem zum Zeitpunkt t für eine Unternehmensanleihe gezahlten Preis \tilde{B}_t kann ein neuer Zins, der aktuelle Marktzins der Anleihe, berechnet werden, indem man C in ein Verhältnis zu \tilde{B}_t setzt, z.B. nach Gleichung (1.2). Der Besitz einer Unternehmensanleihe ist riskanter als der Besitz einer risikofreien Anlage, z.B. einer Bundesanleihe ähnlicher Laufzeit, und der Zins C ist daher höher als der Zins z_T der risikofreien Anlage. Die Differenz zwischen diesen Zinssätzen kann als eine Risikoprämie für einen möglichen Zahlungsausfall aufgefasst werden.

Verschiedene Unternehmensanleihen können z.B. an Hand ihrer aktuellen Marktzinsen verglichen werden. Zusätzlich sollte aber auch beachtet werden, wie hoch die Restlaufzeiten $T - t$ der einzelnen Anleihen sind. Weiterhin muß berücksichtigt werden, dass auch der risikofreie Zins von der Restlaufzeit abhängt: für lange Restlaufzeiten wird im All-

gemeinen ein höherer Zins gezahlt als für kurze. Daher schreibt man auch z_{T-t} für den risikofreien Zins.

Um Anleihen verschiedener Laufzeit und Qualität vergleichend zu bewerten, berechnet man für den Zeitpunkt t den *Credit Spread* S_t . Der Credit Spread ist eine synthetische Größe, abgeleitet von Anleihepreisen, die am Markt geboten werden. Dazu benutzt man die Formel für den Preis \tilde{B}_0^T einer Nullkuponanleihe, das ist eine Anleihe, die keinen Zins verspricht, sondern lediglich die Rückzahlung von 1 nach Ablauf der Frist T garantiert. Zum bekannten Preis $\tilde{B}_0^T(t)$ definiert man den Credit Spread implizit durch:

$$\tilde{B}_0^T(t) = \frac{1}{(1 + z_{T-t} + S_t)^{(T-t)}}. \quad (1.1)$$

Diese Formel bewertet am Zeitpunkt t einen Zahlungsstrom nach Ablauf von $T-t$, dessen Größe zwischen 0 und 1 liegt, dessen genaue Höhe jedoch unsicher ist.

Eine Unternehmensanleihe mit Zinszahlungen $C > 0$ zu Zeitpunkten T_1, \dots, T_n (es gilt $T_i - t \geq 0$, $i = 1, \dots, n$) lässt sich in Zahlungsströme zerlegen, und ihr Preis errechnet sich aus der Kombination von Nullcouponanleihen verschiedener Restlaufzeiten $T_i - t$, $i = 1, \dots, n$:

$$\tilde{B}_C^T(t) = \sum_{i=1}^n \frac{C}{(1 + z_{T_i-t} + S_t)^{(T_i-t)}} + \frac{1}{(1 + z_{T-t} + S_t)^{(T-t)}}. \quad (1.2)$$

Üblicherweise werden die Zinsen jährlich einmal, immer zum gleichen Termin gezahlt. Die vorangegangenen Überlegungen und Gleichung (1.2) lassen sich jedoch auch für verschiedene Zinstermine und Zinshöhen verallgemeinern.

Bemerkung 1.1 Der Credit Spread ist die gängige Maßzahl, um verschiedene Anleihen zu vergleichen, daher nimmt man den Credit Spread als vorgegeben und den Anleihepreis als daraus gemäß (1.2) errechnet an.

Bemerkung 1.2 Betrachten der Märkte zeigt, dass Anleihen nach Wirtschaftssektoren der emittieren den Unternehmen und deren Bonität, beurteilt durch sogenannte Ratingagenturen (Standard&Poors, Moody's, Fitch), in Segmente eingeteilt werden.

Bemerkung 1.3 Im Kursteil einer Zeitung findet man nicht die nach (1.2) berechneten Kurse. Dort sind die aufgelaufenen Zinsen („Accrued Interest“) abgezogen. Der aufgelaufene Zins wird einfach auf Tagesbasis linear gemäß

$$C \frac{\text{Tage seit der letzten Zinszahlung}}{\text{Abstand der Zinstermine}} \quad (1.3)$$

errechnet, wobei Kalendertage, nicht Handelstage gezählt werden. In dieser Arbeit wird dies jedoch vernachlässigt, Preise werden gemäß (1.2) berechnet.

Die hier dargelegte Theorie zur Bewertung von Unternehmensanleihen lehnt an Wilson & Fabozzi [20] an.

1.3 Auswahl der Daten

Um eine Value at Risk Schätzung durchzuführen, müssen Modellannahmen hinsichtlich der Verteilungen und der Abhängigkeitsstruktur der Anleihepreise getroffen werden. Diese Annahmen sollten so gewählt werden, dass das Modell die Realität gut beschreibt. Daher werden Daten benötigt, mit denen man Annahmen erschließen und auch überprüfen kann.

In Deutschland werden mehr als 5000 verschiedene Unternehmensanleihen gehandelt. Bei näherer Betrachtung des Marktes zeigt es sich jedoch, dass viele Anleihen illiquide sind, es besteht keine Ausgewogenheit von Kauf- und Verkaufangeboten, was sich in einer hohen, stark schwankenden Differenz der An- und Verkaufpreise äußert (man spricht von Bid- und Ask-Preisen). Wählt man als Preis der Anleihe den Mittelwert oder Median dieser Preise, so schwankt dieser manchmal kaum, zu anderen Zeitpunkten jedoch sehr stark. Für illiquide Anleihen ist es daher schwer, einen Credit Spread zu bestimmen, der den wirklichen Wert der Anleihe widerspiegelt. (Man kann sich dann fragen, ob der Credit Spread für illiquide Anleihen überhaupt eine zuverlässige Bewertungsgröße ist.)

Um die mit der (mangelnden) Liquidität verbundenen Probleme zu vermeiden, werden hier sehr liquide Anleihen betrachtet, für die täglich Preise geboten werden, die den Wert der Anleihen wiedergeben. Diese Anleihen wurden aus dem Iboxx Liquids Index der Deutschen Börse AG gewählt (alle Anleihen dieses Index erfüllen das Kriterium). Die Anleihen sind in Euro denominiert, das heißt, alle durch die Anleihen festgelegten Zahlungen werden in Euro geleistet. Es wurde auch beachtet, dass Zeitreihen von Credit Spreads über mindestens 250 Tagen Länge verfügbar waren.

Die Zeitreihen stammen aus dem Bloombergsystem. Sie umfaßten 266 Handelstage vom 26.10.2001 bis 31.10.2002 einschließlich. Zunächst enthielten sie viele *Sprünge*. Durch Vergleich mit den entsprechenden Zeitreihen aus dem Credit Research der Hypovereinsbank konnte die Mehrzahl der Sprünge als Datenfehler identifiziert werden. Da an drei Handelstagen besonders viele „schlechte“ Daten auftraten, wurden diese Tage aus dem Datensatz gestrichen.

Nach dieser Vorbearbeitung liegen für die Credit Spreads die Zeitreihen

$$S_t^i, \quad t = 1, \dots, 263, \quad i = 1, \dots, 30, \quad (1.4)$$

vor.

Bemerkung 1.4 Die Credit Spreads werden üblicherweise in *Basispunkten* angegeben; ein Basispunkt entspricht 0.01 Prozentpunkten Zins. Dies ist beim Einsetzen in Formeln zu berücksichtigen. In dieser Arbeit werden die Anleihen mit ihren Kürzeln aus dem Bloombergsystem, z.B. UU1107 oder KPN0406, bezeichnet, die Anleihen wurden auch von 1 bis 30 nummeriert. Die Nummerierung erfolgte gemäß der Liste im Anhang A.

1.4 Ein erster Blick auf die Daten

Die Credit Spreads sind in den Abbildungen 1.1 und 1.2 über der Zeit aufgetragen. Sie unterscheiden sich deutlich in Größe und Schwankungsbreite (die Ordinaten der Diagramme enthalten nicht den Nullpunkt). Allerdings scheint es über längere Zeiträume eine „Marktbewegung“ derart zu geben, dass die meisten Credit Spreads zunächst zurückgehen und später wieder ansteigen. Man kann auch Gruppen finden, deren Kurven sich innerhalb kurzer Zeiträume stark ähneln, zum Beispiel finden starke Auf- und Abwärtsbewegungen zum gleichen Zeitpunkt statt.

Solche Gruppen bilden zum Beispiel die Anleihen der Telekommunikationsunternehmen in unserer Auswahl: Die Verläufe der Credit Spreads von TELEFO0905, PLTMPL0206, FRTEL0308, DT0706 ähneln sich alle stark, ebenso die von BRITEL0206 und TELECO0611. Die Kurven von TELDAN0406 und KPN0406 ähneln sich kaum. Zwischen diesen Gruppen scheinen keine starken Abhängigkeiten zu bestehen.

Da man die Credit Spreads S_t^i zu verschiedenen Anleihen i wegen ihrer sehr unterschiedlichen Größenordnung schlecht unmittelbar vergleichen kann (der maximale Credit Spread von BACR0606 liegt bei 15, der von KPN0406 bei 620), formt man sie um.

In der klassischen Finanzmathematik arbeitet man mit den logarithmierten Tagesdifferenzen

$$L_t^i := \ln \frac{S_{t+1}^i}{S_t^i}, \quad (1.5)$$

von denen man annimmt, dass sie normalverteilt sind.

In dieser Arbeit wird mit den Tagesdifferenzen

$$X_t^i = S_{t+1}^i - S_t^i \quad (1.6)$$

gearbeitet. Aus den Zeitreihen S_t^i entstehen so die Zeitreihen der Tagesdifferenzen

$$(X_t)^i, \quad t = 1, \dots, 262, \quad i = 1, \dots, 30, \quad (1.7)$$

für die kurz (X_t) oder X_t geschrieben wird. Sie werden als Sequenz der Länge 262 eines stochastischen Prozesses angesehen.

1.5 Aufbau der Arbeit und Vorgehen

Ziel der Arbeit ist ein Verfahren, das den Value at Risk ausgehend von den vorliegenden Zeitreihen der Credit Spreads S_t^i , $i = 1, \dots, 30$, unter Berücksichtigung der (paarweisen) Tail Dependence Struktur der Tagesdifferenzen X_t^i , $i = 1, \dots, 30$, schätzt.

Um dieses Verfahren in Kapitel 7 zu entwickeln, werden in den vorhergehenden Kapiteln die benötigten Grundlagen dargestellt.

Zuerst werden in Kapitel 2 die Zeitreihen der einzelnen Anleihen daraufhin untersucht, ob sie mit bekannten Methoden behandelt werden können. Die Tagesdifferenzen werden

als zweiseitig verallgemeinert Pareto verteilt angenommen, Parameter dazu ermittelt.

Mit Hilfe des zu entwickelnden Verfahrens soll die VaR Schätzung insbesondere für sehr kleine und sehr große Quantile verbessert werden. Dazu benötigt man die Begriffe und Methoden der univariaten Extremwerttheorie, die in Kapitel 3 vorgestellt werden.

Mit den in Kapitel 4 erklärten Copulae kann die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Tagesdifferenzen der Credit Spreads getrennt von den Randverteilungen betrachtet werden. Der dort vorgestellte Satz von Sklar spielt eine wichtige Rolle.

In Kapitel 5 werden die Copulae benutzt, um einen Einblick in die multivariate Extremwerttheorie zu geben. Im zweiten Teil von Kapitel 5 werden die Tail Dependence und der Extremal Coefficient als Maße für die Abhängigkeit zwischen den extremen Tagesdifferenzen vorgestellt. Die Werte dieser beiden Maße sind Eigenschaften von Copulae.

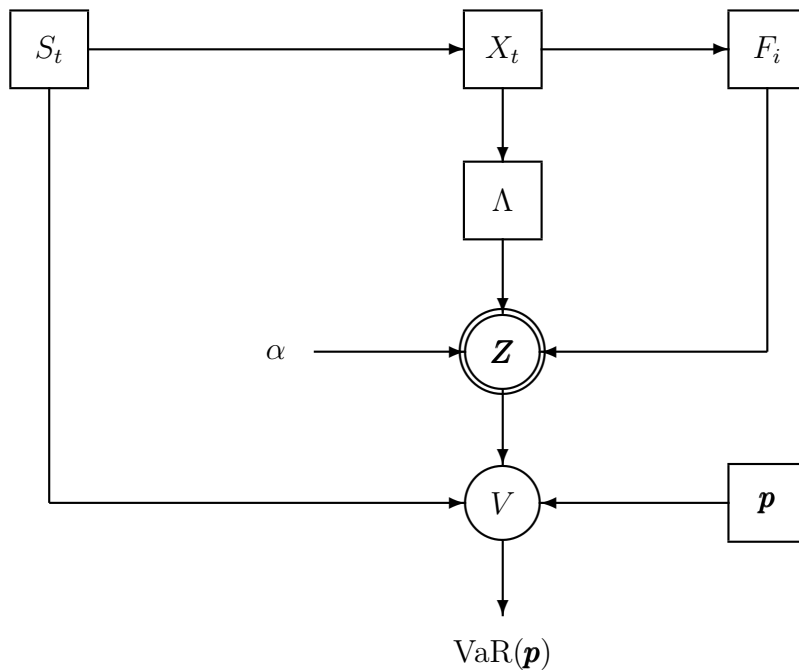
Fragt man für eine vorgegebenen Abhängigkeitsstruktur nach einem Zufallsvektor, der diese Struktur aufweist, so kommt man auf die am Ende des Kapitel 5 vorgestellte Eigenschaft der Selbstkonsistenz von Abhängigkeitsstrukturen.

Im vorgestellten Verfahren werden Zufallsvariable zu vorgegebener Tail Dependence mit Hilfe elliptischer Copulae simuliert. Dies sind die Copulae der in Kapitel 6 eingeführten elliptischen Verteilungen. Sie werden aus den zuerst betrachteten sphärischen Verteilungen durch eine Koordinatentransformation abgeleitet. Es wird festgestellt, dass für diese beiden Verteilungen die reguläre Variation der Tails der Randverteilungen mit der Tail Dependence verknüpft ist. Leider können die Verteilungsfunktionen und Copulae elliptischer Verteilungen nur in wenigen Sonderfällen explizit als Formel angeschrieben werden; auch ihre numerische Berechnung ist schwierig. Die Erzeugung elliptisch verteilter Zufallsvariabler zu vorgegebener Abhängigkeitsstruktur ist vergleichsweise einfach. Daher basiert das vorgeschagene Verfahren auf der Simulation elliptisch verteilter Zufallsvariabler.

Kapitel 7 stellt schließlich vor, wie aus den vorgegebenen Daten angepaßte Randverteilungen und die paarweise Tail Dependence ermittelt und nach Wahl eines Parameters α (Index der regulären Variation), der das Extremverhalten erfaßt, der VaR für ein gegebenes Portfolio geschätzt werden kann.

Das Vorgehen läuft, grob skizziert, wie folgt ab (vgl. Graphik):

Ausgehend von den Zeitreihen S_t der Credit Spreads werden die Tagesdifferenzen X_t berechnet, deren Tail Dependence Matrix Λ geschätzt und Randverteilungen F_i für die Tagesdifferenzen der einzelnen Anleihen ermittelt. In Abhängigkeit vom Parameter α und der Tail Dependence Matrix Λ werden elliptisch verteilte Zufallsvektoren \mathbf{Z} simuliert. Mit den \mathbf{Z} und dem jüngsten Credit Spread werden Wertänderungen V des Portfolios \mathbf{p} errechnet und der VaR daraus geschätzt.



Mit dem Verfahren wird der VaR eines Portfolios von 9 Anleihen geschätzt. (Auch die Gesamtheit der 30 Anleihen wurde untersucht, doch sind die Ergebnisse zu umfangreich, um hier wiedergegeben zu werden.)

Die Zusammenfassung in Kapitel 8 zieht eine kritische Bilanz.

Hinweis: Um die Arbeit nicht mit Grafiken zu überladen, werden häufig nur einige beispielhaft eingefügt. Alle ganzseitigen Abbildungen finden sich jeweils an den Kapitelenden.

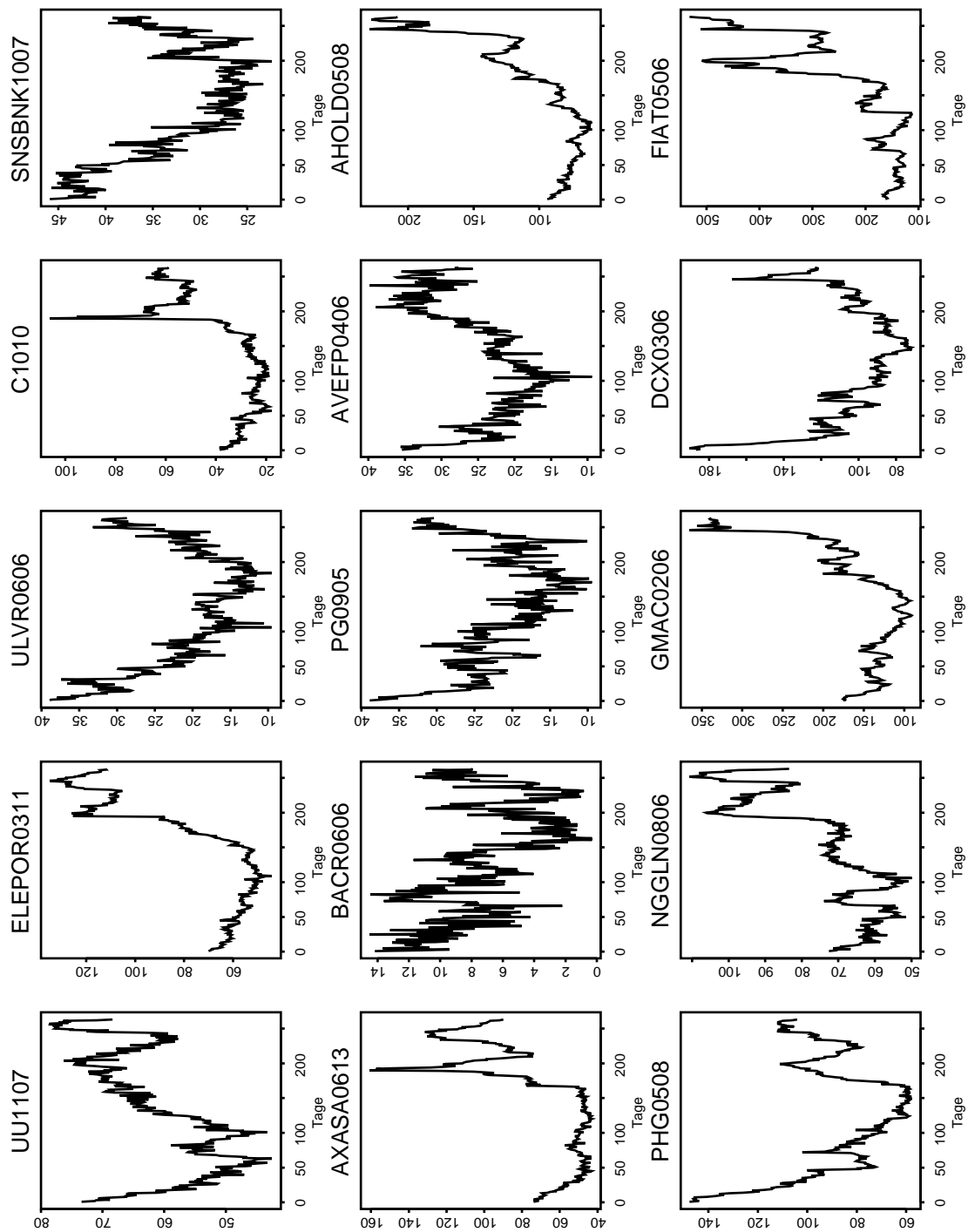


Abbildung 1.1: Verläufe der Credit Spreads über die Zeit

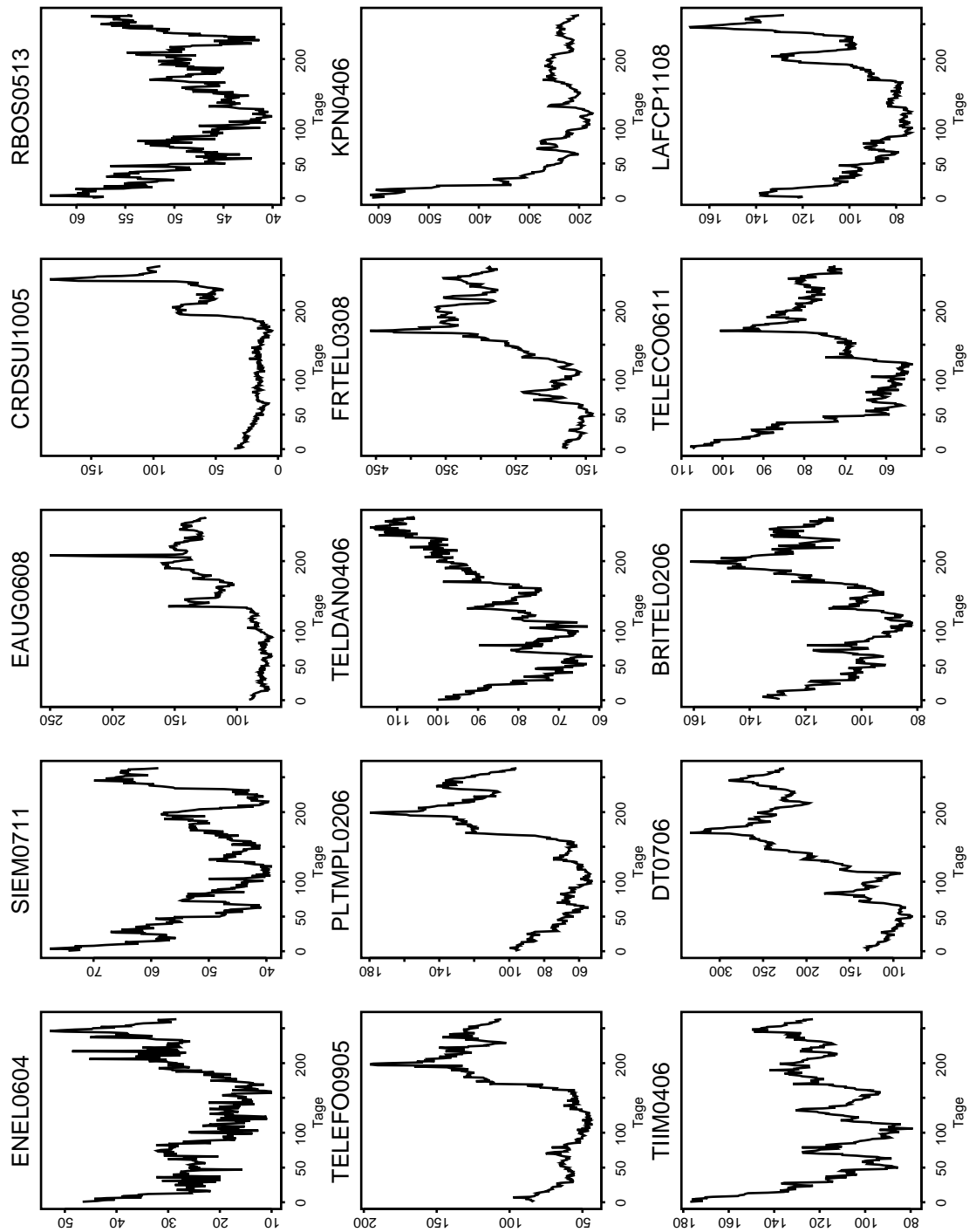


Abbildung 1.2: Verläufe der Credit Spreads über die Zeit

Kapitel 2

Datenanalyse

Anknüpfend an Abschnitt 1.4 werden die Zeitreihen X_t^i , $t = 1, \dots, 262$, $i = 1, \dots, 30$, der Tagesdifferenzen der Credit Spreads grundlegend untersucht. Die Abbildungen 2.1 und 2.2 zeigen die Verläufe der Tagesdifferenzen der Credit Spreads über die Zeit. In diesem Abschnitt interessieren die einzelnen Zeitreihen. Später, in Abschnitt 5.2, werden Abhängigkeiten zwischen den Zeitreihen betrachtet. Im Allgemeinen sieht man Zeitreihen von Finanzdaten als stochastische Prozesse $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ an, die aus über die Zeit unabhängigen und identisch verteilten (**iid**) Zufallsvariablen X_t bestehen. Die Annahme der Unabhängigkeit der Daten wird hier mittels der Autokorrelation und anschließend mit dem Extremal Index untersucht. Abschließend werden Verteilungen an die Daten angepasst, wozu Parameter geschätzt werden. Die dazu erforderlichen Grundlagen werden jeweils vorweg zusammengestellt. Die hier vorgestellten Methoden werden z.B. in Brockwell und Davis [3], [4] (Tests auf Unabhängigkeit) und EKM [6] (Extremal Index, Fitten der Verteilungen) näher erläutert.

2.1 Autokorrelation

Für einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit $\text{var}(X_t) < \infty$ für alle t kann die Kovarianz zwischen X_s und X_t für beliebige s, t berechnet werden:

$$\gamma_X(s, t) = \text{cov}(X_s, X_t) = \mathbf{E}[(X_s - \mathbf{E}[X_s])(X_t - \mathbf{E}[X_t])]. \quad (2.1)$$

Die Funktion γ_X heißt *Autokovarianzfunktion* von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Die *Autokorrelationsfunktion* $\rho_X(s, t)$ von $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist definiert durch:

$$\rho_X(s, t) = \frac{\gamma_X(s, t)}{\sqrt{\gamma_X(s, s)}\sqrt{\gamma_X(t, t)}} = \frac{\text{cov}(X_s, X_t)}{\sqrt{\text{var}(X_s)}\sqrt{\text{var}(X_t)}}. \quad (2.2)$$

Definition 2.1 (Strenge Stationarität) *Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt streng stationär, wenn seine sämtlichen n -dimensionalen Verteilungen invariant gegenüber Zeitverschiebungen sind:*

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}), \quad \forall h \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Definition 2.2 (Schwache Stationarität) Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ heißt schwach stationär, wenn gilt:

$$(i) \mathbf{E}[X_t^2] < \infty, \forall t \in \mathbb{Z},$$

$$(ii) \mathbf{E}[X_t] = \mu, \forall t \in \mathbb{Z},$$

$$(iii) \gamma_X(s, t) = \gamma_X(s + h, t + h), \forall s, t, h \in \mathbb{Z}.$$

Wenn $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ schwach stationär ist, gilt $\gamma_X(s, t) = \gamma_X(0, t - s), \forall s, t \in \mathbb{Z}$. Mit $h = t - s$ setzt man

$$\gamma_X(h) = \gamma_X(0, h) = \text{cov}(X_t, X_{t+h}). \quad (2.4)$$

Wenn aus dem Zusammenhang bekannt ist, von welchem Prozeß die Rede ist, schreibt man kurz $\gamma(h)$ statt $\gamma_X(h)$ und $\rho(h)$ statt $\rho_X(h)$ und spricht von der *Autokovarianz* bzw. *Autokorrelation* zum Lag h .

Als Schätzer der Autokovarianz bzw. Autokorrelation einer Stichprobe des Umfangs n (sog. *empirische oder Stichprobenautokovarianz bzw. Autokorrelation*) verwendet man:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n - h - 1} \sum_{j=1}^{n-h} (X_{j+h} - \bar{X})(X_j - \bar{X}), \quad 0 \leq h < n - 1, \quad (2.5)$$

und

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}. \quad (2.6)$$

Dabei schätzt das arithmetische Mittel $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ den Erwartungswert von X_t . Eine hohe Autokorrelation zum Lag h deutet auf eine lineare Abhängigkeit zwischen X_t und X_{t+h} hin.

Um zu testen, ob die vorliegenden Daten eine von Null verschiedene Autokorrelation haben, wird angenommen, dass die Daten eine Autokorrelation von 0 haben und dass die X_t mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 verteilt sind.

Seien nun

$$\boldsymbol{\rho}(h) := (\rho(1), \dots, \rho(h))^T, \quad (2.7)$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}(h) := (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(h))^T. \quad (2.8)$$

Aus dem Zentralen Grenzwertsatz folgt (nach der Formel von Bartlett, vgl. Brockwell und Davis [4]) für $N_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathbf{N}(0, 1), i = 1, \dots, h$,

$$\sqrt{n} [\hat{\boldsymbol{\rho}}(h) - \boldsymbol{\rho}(h)] \xrightarrow{d} (N_1, \dots, N_h)^T \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Ist die Annahme richtig, dass die Autokorrelation 0 ist, so liegen die Differenzen $\hat{\rho}(i) - \rho(i), i = 1, \dots, h$, für große n nahe bei 0. Üblicherweise wird zum 5%-Niveau getestet, also sollte der Schätzer im 95%-Konfidenzintervall $[-1.96 \frac{1}{\sqrt{n}}, 1.96 \frac{1}{\sqrt{n}}]$ liegen.

Bemerkung 2.3 Auch wenn einzelne $\hat{\rho}(i)$ nicht im Konfidenzintervall liegen, braucht die Annahme der Unkorreliertheit der $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ nicht abgelehnt zu werden, da die Wahrscheinlichkeit, dass alle $\hat{\rho}(i)$ in den entsprechenden Konfidenzintervallen liegen, für grosse h sehr klein ($= 0.95^h$) ist. Die Güte der Schätzer von ρ hängt von n und h ab. Nach Faustregel gelten $n \geq 50$ und $h \leq 0.25n$ als hinreichend für akzeptable Ergebnisse.

Da schwer zu entscheiden ist, ob die Daten **iid** sind, werden neben den X_i auch deren Transformationen, z.B. ihre Beträge $|X_i|$ und die quadrierten Zufallsvariablen X_i^2 auf Unkorreliertheit getestet.

Falls auch beim Testen der Beträge und der Quadrate die Nullhypothese, dass die Daten unabhängig sind, nicht verworfen werden kann, werden die Daten üblicherweise als **iid** angesehen.

2.1.1 Autokorrelation der Tagesdifferenzen

Die Autokorrelation der Tagesdifferenzen X_t^i , ihrer Beträge und der Quadrate wurden zum Lag $h = 1, \dots, 25$ geschätzt. Abbildung 2.3 zeigt die Schätzer für vier Anleihen von Telekommunikationsfirmen. Man erkennt deutlich, dass die Zeitreihen für viele Lags h eine relativ hohe Autokorrelation aufweisen. Dies könnte problematisch für das weitere Vorgehen sein. Die Untersuchung hier zielt jedoch auf eine Value at Risk Schätzung, es interessieren also vor allem die hohen und tiefen Werte der Zeitreihen. Falls diese unabhängig sind, darf der Einfachheit halber angenommen werden, dass die Daten **iid** sind.

Im nächsten Abschnitt wird eine Möglichkeit vorgestellt, die Abhängigkeit zwischen den Extremwerten der Zeitreihen zu untersuchen.

2.2 Extremal Index

Die meisten statistischen Verfahren sind für **iid** Daten entwickelt worden. In Wirklichkeit treten jedoch gerade extreme Ereignisse oft gehäuft auf. Eine mögliche Erklärung hierfür wäre, dass diese Ereignisse eine gemeinsame Ursache haben, z.B. den Rücktritt eines Vorstandsmitglieds, der für einige Zeit für „Turbulenzen“ sorgt.

Dieses Kapitel fasst wesentliche Punkte aus EKM [6] zusammen.

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, eine Folge von **iid** nicht degenerierten Zufallsvariablen, für die eine Stichprobe

$$X_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.10)$$

vorliegt. Im Folgenden wird die Verteilung der *Stichprobenmaxima*

$$M_n = \max_{i=1, \dots, n} \{X_i\} \quad (2.11)$$

untersucht.

Sind die X_t **iid**, so lässt sich die Verteilung der M_n einfach angeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_n \leq x) &= \mathbf{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leq x) \mathbf{P}(X_2 \leq x) \cdots \mathbf{P}(X_n \leq x) \\ &= F^n(x), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Verteilung der Stichprobenmaxima lässt sich für **iid** Zufallsvariablen approximieren:

Satz 2.4 (Poisson Approximation) Für ein $\tau \in [0, \infty]$ und eine Folge reeller Zahlen (u_n) sind äquivalent:

$$n\bar{F}(u_n) \rightarrow \tau \quad (2.13)$$

und

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\tau}. \quad (2.14)$$

Beweis: Zuerst sei $0 \leq \tau < \infty$. Wenn (2.13) erfüllt, dann folgt mit Gleichung (2.12) durch Umformen

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n) = F^n(u_n) = (1 - \bar{F}(u_n))^n = \left(1 - \frac{\tau}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \quad (2.15)$$

also (2.14).

Gelte nun (2.14), dann folgt $\bar{F}(u_n) \rightarrow 0$. Logarithmieren liefert:

$$-n \ln(1 - \bar{F}(u_n)) \rightarrow \tau. \quad (2.16)$$

Da $-\ln(1 - x) \sim x$, wenn $x \rightarrow 0$, folgt $n\bar{F}(u_n) = \tau + o(1)$, woraus sich (2.13) ergibt.

Für $\tau = \infty$ gelte (2.13) aber nicht (2.14). Dann existiert eine Teilfolge (n_k) , so dass $\mathbf{P}(M_{n_k} \leq u_k) \rightarrow \exp(-\tau')$, für $k \rightarrow \infty$ für ein $\tau' < \infty$. Da dann aber (2.14) mit $\tau' < \infty$ gilt, folgt (2.13) mit $n_k \bar{F}(u_k) \rightarrow \tau < \infty$, im Widerspruch zu (2.13) mit $\tau = \infty$. \square

In EKM, [6], Kapitel 4.4 werden Bedingungen gegeben, unter denen für streng stationäre Folgen von Zufallsvariablen die Äquivalenz ebenso gilt.

Für eine streng stationäre Folge von *nicht* unabhängigen Zufallsvariablen, die diese Bedingungen nicht erfüllen, gilt die Aussage der folgenden Definition:

Definition 2.5 (Extremal Index) Ist eine Folge von Zufallsvariablen (X_t) streng stationär, und existieren eine Zahl $\vartheta > 0$ sowie eine Folge (u_n) so, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(u_n) = \tau \quad (2.17)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n \leq u_n) \rightarrow e^{-\vartheta\tau}, \quad (2.18)$$

dann heißt ϑ der Extremal Index der Folge $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Es lässt sich leicht zeigen, dass $\vartheta \in (0, 1]$, da es sich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt muß. Aus

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n \{X_i > u_n\}\right) \geq 1 - n\bar{F}(u_n) \quad (2.19)$$

folgt $\vartheta \leq 1$. Der Fall $\vartheta = 0$ ist pathologisch; für Beispiele siehe EKM [6].

Bemerkung 2.6 Der Extremal Index ϑ gibt mit $\frac{1}{\vartheta}$ den Erwartungswert der Anzahl von Ereignissen in einem extremen Cluster an.

Liefern Schätzer $\vartheta \approx 1$, dann darf man Unabhängigkeit in den Tails annehmen und Standardmethoden der Extremwerttheorie anwenden.

2.2.1 Methoden zum Schätzen des Extremal Index

Hier werden zwei relativ einfache Schätzmethoden vorgestellt. Für eine umfassendere Darstellung siehe Ancona-Navarrete und Tawn [2] oder EKM [6], Kap.8.

Sei $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ eine Folge von **iid** Zufallsvariablen mit derselben Verteilungsfunktion F wie die X_1, \dots, X_n . Das Maximum der \tilde{X}_i sei

$$\tilde{M}_n = \max_{i=1, \dots, n} \{\tilde{X}_i\}. \quad (2.20)$$

Aus der Definition des Extremal Index ϑ ist bekannt, dass mit $n\bar{F}(u_n) \rightarrow \tau > 0$ auch

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n) \approx \mathbf{P}^\vartheta(\tilde{M}_n \leq u_n) = F^{\vartheta n}(u_n) \quad (2.21)$$

gilt, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbf{P}(M_n \leq u_n)}{n \ln F(u_n)} = \vartheta. \quad (2.22)$$

Für die vorliegenden Daten sind weder $F(u_n)$ noch $\mathbf{P}(M_n \leq u_n)$ bekannt. Zur Konstruktion von Schätzern für ϑ müssen diese Verteilungen geschätzt werden.

Als Schätzer für den Tail $\bar{F}(u_n)$ ergibt sich aus dem *Satz von Glivenko-Cantelli* der *empirische Tail*

$$\widehat{\bar{F}}(u_n) = \frac{n_{u_n}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i > u_n\}}, \quad (2.23)$$

wobei n den Umfang der Stichprobe und n_{u_n} die Anzahl der X_i bezeichnet, die u_n überschreiten.

Schätzer für ϑ

Mit einer weiteren Bedingung an eine spezielle Art der asymptotischen Unabhängigkeit (siehe EKM [6], Kapitel 4.4) folgt für $k = k(n)$ konstant oder langsam steigend

$$\mathbf{P}(M_n \leq u_n) \approx \mathbf{P}^k \left(M_{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \leq u_n \right). \quad (2.24)$$

Dabei wird die Stichprobe in k Blöcke der Länge $r = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} : z \leq \frac{n}{k}\}$ geteilt.

Mit $M_r^{(i)} = \max \{X_{(i-1)r+1}, \dots, X_{ir}\}$, $i = 1, \dots, k$, werden die blockweisen Maxima bezeichnet. Es gelten:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_n \leq u_n) &= \mathbf{P} \left(\max_{1 \leq i \leq k} M_r^{(i)} \leq u_n \right) \\ &\approx \mathbf{P}^k (M_r \leq u_n) \\ &\approx \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k I_{M_r^{(i)} \leq u_n} \right)^k \\ &= \left(1 - \frac{K}{k} \right)^k. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Durch Kombinieren dieser Überlegungen ergibt sich:

$$\widehat{\vartheta}_n^{(1)} := \frac{k \ln \left(1 - \frac{K}{k} \right)}{n \ln \left(1 - \frac{n u_n}{n} \right)} = \frac{1}{r} \frac{\ln \left(1 - \frac{K}{k} \right)}{\ln \left(1 - \frac{n u_n}{n} \right)}. \quad (2.26)$$

Wieder steht n_{u_n} für die Anzahl der Überschreitungen der X_i über u_n und K bezeichnet die Anzahl der Blöcke mit einer oder mehr Überschreitungen. Entwickeln der Logarithmen in Zähler und Nenner von (2.26) nach Taylor liefert einen zweiten Schätzer:

$$\widehat{\vartheta}_n^{(2)} := \frac{K}{n_{n u}} = \frac{1}{r} \frac{\frac{K}{k}}{\frac{n u_n}{n}} \approx \widehat{\vartheta}_n^{(1)}. \quad (2.27)$$

Das Betrachten der Blöcke hilft, die Tendenz zu Clusterbildung der extremen Beobachtungen (mehrere Überschreitungen von u_n in einem Block $M_r^{(i)}$) in den Daten zu quantifizieren.

Die grösste Schwierigkeit besteht in mangelnder Robustheit der Schätzer und darin, „passende“ Werte für u_n und r oder k zu bestimmen.

2.2.2 Extremal Index für die Daten

Die vorliegenden Zeitreihen sind mit 262 Beobachtungen zu kurz, um den Extremal Index verlässlich zu schätzen. In den Abbildungen 2.1 und 2.2 läßt sich nach Augenschein keine Clusterung feststellen. Am Markt sind Phasen höherer und niedrigerer Kursschwankungen zu beobachten, allerdings handelt es sich dabei nicht um Phasen mit oder ohne extreme Ereignisse. Vielmehr scheinen extreme Ereignisse einzeln aufzutreten und ihnen folgt eher eine Gegenbewegung als ein (oder mehrere) weiteres extremes Ereignis.

2.3 Verteilungsanalyse

In diesem Abschnitt wird versucht, Verteilungen für die einzelnen Tagesdifferenzen X_t^i , $i = 1, \dots, 30$, zu finden. Am Ende des letzten Abschnitts wurde festgestellt, dass die Daten als **iid** angenommen werden können.

Im nächsten Unterabschnitt werden drei Begriffe benötigt, die hier definiert werden:

Definition 2.7 (verallgemeinerte Inverse) Für eine Verteilungsfunktion F wird

$$F^{\leftarrow}(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\} \quad (2.28)$$

als die verallgemeinerte Inverse oder Quantilsfunktion bezeichnet.

Definition 2.8 (Ordnungsstatistik) Ordnet man die Elemente einer Stichprobe aufsteigend nach ihrer Größe, so bezeichnet man die sortierten Daten als *Ordnungsstatistik* der Stichprobe.

Definition 2.9 (Rang) Als *Rang* eines Elementes einer Stichprobe des Umfangs n bezeichnet man die Zahl $r \in \{1, \dots, n\}$, die angibt an welcher Stelle der *Ordnungsstatistik* das Element steht.

2.3.1 Quantil-Quantil-Plots

Zum Überprüfen, ob eine Stichprobe X_1, \dots, X_n des Umfangs n von einer **iid** Zufallsvariablen mit Verteilung F stammt, verwendet man üblicherweise *Quantil-Quantil-Plots* (QQ-Plots).

Es ist bekannt, dass für $X \sim F$ gilt $\mathbf{P}(F(X) \leq u) = F(F^{\leftarrow}(u)) = u$, also $F(X) \sim \text{uniform}(0, 1)$. Im Folgenden sei $U_i = F(X_i)$. Für die *Ordnungsstatistiken* $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ der n **iid** Zufallsvariablen gilt also

$$(F(X_{1,n}), \dots, F(X_{n,n})) \stackrel{d}{=} (U_{1,n}, \dots, U_{n,n}) \quad (2.29)$$

und

$$\mathbf{E}[F(X_{k,n})] = \mathbf{E}[U_{k,n}] = \frac{k}{n+1}. \quad (2.30)$$

Auf Grund dieser Überlegungen folgt:

Definition 2.10 (empirische Verteilungsfunktion) Man nennt

$$F_n(X_{k,n}) := \frac{k}{n+1} \quad (2.31)$$

die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe X_1, \dots, X_n .

In einem QQ-Plot wird nun die Ordnungsstatistik, werden die empirischen Quantile, einer Stichprobe gegen die n Quantile einer Verteilungsfunktion F aufgetragen. Es ergibt sich der Graph:

$$\left\{ \left(X_{k,n}, F^{\leftarrow} \left(\frac{k}{n+1} \right) \right), k = 1, \dots, n \right\}. \quad (2.32)$$

Seien nun die $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} F$. Dann sollte nach dem *Satz von Glivenko-Cantelli*, siehe z.B. EKM [6], S.62, der Graph näherungsweise auf der Winkelhalbierenden liegen, da gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \quad (2.33)$$

Liegt eine Stichprobe $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ mit Verteilung $\tilde{X}_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \tilde{F}$ vor und stammen die \tilde{X}_i über eine lineare Transformation von einer Stichprobe $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} F$ ab, so ist der QQ-Plot immer noch linear, da der Graph entsprechend linear transformiert wird. Die Verteilungen F und \tilde{F} entsprechen sich dann bis auf eine lineare Transformation. Aus systematischen Abweichungen von einer (gefitteten) Geraden kann man auf bestimmte Eigenschaften der tatsächlichen Verteilung der $X_{i,n}$ schließen: Wenn z.B. F dickere oder dünnere Tails hat als die Verteilung der $X_{i,n}$, dann ist der QQ-Plot S-förmig.

Die Abbildungen 2.4 und 2.5 zeigen Beispiele für QQ-Plots.

2.3.2 Verteilungen der Daten

Die Abbildungen 2.6 - 2.9 zeigen QQ-Plots für vier der Anleihen von Telekommunikationsunternehmen, TELEFO0905, PLTMPL0206, FRTEL0308 und DT0706. Die beobachteten positiven und negativen Tagesdifferenzen wurden gegen die Quantile einer an die Daten angepassten verallgemeinerten Pareto Verteilung, speziell gegen die der Exponentialverteilung aufgetragen. Die Annahme, dass die Daten verallgemeinert Pareto verteilt sind, scheint auch bei den anderen Anleihen gut erfüllt zu sein.

Definition 2.11 (Verallgemeinerte Pareto Verteilung) Die Verteilungsfunktion G_ξ der Standard verallgemeinerten Pareto Verteilung ist definiert durch:

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & , \text{ wenn } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x} & , \text{ wenn } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Der Definitionsbereich ist

$$x \geq 0, \quad \text{wenn } \xi \geq 0, \quad (2.35)$$

$$0 \leq x \leq -\frac{1}{\xi}, \quad \text{wenn } \xi < 0. \quad (2.36)$$

Ersetzt man x durch $\frac{x-\nu}{\beta}$, $\nu \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, und modifiziert man den Träger entsprechend, so erhält man die Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Pareto Verteilung $G_{\xi,\nu,\beta}$, also

$$G_{\xi,\nu,\beta}(x) := G_\xi \left(\frac{x-\nu}{\beta} \right). \quad (2.37)$$

Der Fall $\xi = 0$ wird als Grenzwert aufgefasst. Für $G_{\xi,0,\beta}$ wird $G_{\xi,\beta}$ geschrieben. Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(\xi, \beta)$ von $G_{\xi,\beta}$ ist

$$x \in \mathcal{D}(\xi, \beta) = \begin{cases} [0, \infty) & , \text{ wenn } \xi \geq 0, \\ \left[0, -\frac{\beta}{\xi}\right] & , \text{ wenn } \xi < 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Das Anpassen der verallgemeinerten Pareto Verteilung (GPD), an die Daten setzt voraus, dass positive und negative Tagesdifferenzen getrennt behandelt werden. In Kapitel 3.3 wird auf das Anpassen einer GPD an Daten über einer (hohen) Schwelle näher eingegangen. Hier wird die GPD an alle positiven bzw. negativen Tagesdifferenzen angepasst. Das Vorgehen entspricht dem in Kapitel 3.3 mit Schwelle $u = 0$.

Zunächst wird bei der GPD der Parameter $\xi \neq 0$ angenommen. Es wird $\nu = 0$ gewählt. Die Tabelle 2.1 zeigt die geschätzten Parameter $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$. Wie man sieht, sind die Werte häufig sehr klein.

Da der Übergang zu $\xi = 0$ stetig ist und Null meistens im 95%-Konfidenzintervall um die Schätzwerte $\hat{\xi}$ liegt, kann man aber auch annehmen, dass $\xi = 0$. In diesem Fall geht die verallgemeinerte Pareto Verteilung mit Parameter β in die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 1/\beta$ über. Schätzungen für den Parameter $\hat{\lambda}$ zeigt die Tabelle 2.2.

(Die verwendeten Schätzer werden später in Abschnitt 3.4.3 vorgestellt. Dort sind auch Plots des für ξ verwendeten Schätzers zu finden.)

Schließlich werden die einzelnen Verteilungsfunktionen der Tagesdifferenzen zusammengesetzt gemäß:

$$\mathbf{P}(X_t \leq x) = \mathbf{P}(X_t < 0) \mathbf{P}(X_t \leq x | x < 0) + \mathbf{P}(X_t \geq 0) \mathbf{P}(X_t \leq x | x \geq 0). \quad (2.39)$$

Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(X_t < 0)$ bzw. $\mathbf{P}(X_t \geq 0)$ werden durch die relativen Häufigkeiten von $X_t > 0$, $t = 0, \dots, 262$, geschätzt. Für die Verteilung von $\mathbf{P}(X_t \leq x | x \geq 0)$ und $\mathbf{P}(X_t \leq x | x < 0)$ wird eine GPD oder eine Exponentialverteilung mit den entsprechenden Parametern aus den folgenden Tabellen gewählt.

Das Ersetzen der GPD (für kleine $|\xi|$) durch die Exponentialverteilung muß man kritisch sehen: bei der Exponentialverteilung fallen die Tails sehr viel schneller (exponentiell) ab als bei der verallgemeinerten Pareto Verteilung (mit $x^{-1/\xi}$). Das Risiko großer Änderungen wird unterschätzt, die Häufigkeit moderater Änderungen wird überschätzt.

Man kann die 1%-Quantile berechnen und vergleichen: Da die Verteilungen gemäß (2.39) zusammengesetzt werden, entsprechen die 1%-Quantile (unter der Annahme $\mathbf{P}(X > x) = \mathbf{P}(X \leq x) = 0.5$) den 2%-Quantilen der positiven bzw. negativen Teil-Verteilungen. Für das obere 2%-Quantil $x_{0.02}$ einer verallgemeinerten Pareto Verteilung folgt aus

$$1 - \left(1 + \xi \frac{x_{0.02}}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = 0.98 \quad (2.40)$$

Kürzel	positiv			negativ		
	$\hat{\xi}$	$\hat{\beta}$	Häufigkeit	$\hat{\xi}$	$\hat{\beta}$	Häufigkeit
UU1107	-0.199	1.887	0.492	-0.177	1.868	0.508
ELEPOR0311	0.239	1.939	0.496	-0.155	1.590	0.504
ULVR0606	-0.229	1.925	0.473	-0.108	1.804	0.527
C1010	0.225	2,433	0.489	0.135	2,173	0.511
SNSBNK1007	-0.184	1.695	0.481	-0.151	1.639	0.519
AXASA0613	0.194	3,106	0.439	0.147	2,320	0.561
BACR0606	-0.208	1.742	0.504	-0.486	1.816	0.496
PG0905	-0.220	2,574	0.469	-0.169	2,339	0.531
AVEFP0406	-0.201	2,132	0.489	-0.150	2,094	0.511
AHOLD0508	0.253	3,420	0.500	0.128	2,547	0.500
PHG0508	0.025	2,298	0.473	-0.073	2,379	0.527
NGGLN0806	-0.006	2,193	0.504	-0.372	2,143	0.496
GMAC0206	0.169	6,113	0.489	0.024	4,624	0.511
DCX0306	0.125	3,538	0.469	-0.168	3,587	0.531
FIAT0506	0.542	10.338	0.504	0.196	7,653	0.496
ENEL0604	0.061	2,981	0.511	-0.040	3,262	0.489
SIEM0711	-0.153	1.872	0.466	-0.187	1.743	0.534
EAUG0608	0.403	3,894	0.508	0.226	3,747	0.492
CRDSUI1005	0.261	3,788	0.477	0.128	3,025	0.523
RBOS0513	-0.235	1.613	0.473	-0.208	1.475	0.527
TELEFO0905	0.240	4,563	0.477	0.193	4,011	0.523
PLTMPL0206	-0.037	3,056	0.489	-0.005	2,925	0.511
TELDAN0406	-0.054	2,582	0.504	-0.091	2,578	0.496
FRTEL0308	0.132	7,315	0.500	0.128	6,493	0.500
KPN0406	0.070	5,812	0.462	0.260	7,916	0.538
TIIM0406	-0.094	3,436	0.462	-0.061	3,332	0.538
DT0706	0.056	6,026	0.477	-0.232	4,810	0.523
BRITEL0206	-0.099	3,140	0.527	-0.019	3,632	0.473
TELECO0611	-0.013	1.736	0.492	-0.027	1.942	0.508
LAFCP1108	-0.005	2,875	0.454	-0.128	2,352	0.546

Tabelle 2.1: Parameter zu verallgemeinerten Pareto Verteilungen für die Tagesdifferenzen

Kürzel	positiv		negativ	
	$\hat{\lambda}$	Häufigkeit	$\hat{\lambda}$	Häufigkeit
UU1107	0.530	0.492	0.535	0.508
ELEPOR 0311	0.516	0.496	0.629	0.504
ULVR0606	0.519	0.473	0.554	0.527
C1010	0.411	0.489	0.460	0.511
SNSBNK1007	0.590	0.481	0.610	0.519
AXASA0613	0.322	0.439	0.431	0.561
BACR0606	0.574	0.504	0.551	0.496
PG0905	0.388	0.469	0.428	0.531
AVEFP0406	0.469	0.489	0.478	0.511
AHOLD0508	0.292	0.500	0.393	0.500
PHG0508	0.435	0.473	0.420	0.527
NGGLN0806	0.456	0.504	0.467	0.496
GMAC0206	0.164	0.489	0.216	0.511
DCX0306	0.283	0.469	0.279	0.531
FIAT0506	0.097	0.504	0.131	0.496
ENEL0604	0.335	0.511	0.307	0.489
SIEM0711	0.534	0.466	0.574	0.534
EAUG0608	0.257	0.508	0.267	0.492
CRDSUI1005	0.264	0.477	0.331	0.523
RBOS0513	0.620	0.473	0.678	0.527
TELEFO0905	0.219	0.477	0.249	0.523
PLTMPL0206	0.327	0.489	0.342	0.511
TELDAN0406	0.387	0.504	0.388	0.496
FRTEL0308	0.137	0.500	0.154	0.500
KPN0406	0.172	0.462	0.126	0.538
TIIM0406	0.291	0.462	0.300	0.538
DT0706	0.166	0.477	0.208	0.523
BRITEL0206	0.318	0.527	0.275	0.473
TELECO0611	0.576	0.492	0.515	0.508
LAFCP1108	0.348	0.454	0.425	0.546

Tabelle 2.2: Parameter zu Exponentialverteilungen für die Tagesdifferenzen

der Wert

$$x_{0.02} = \beta \frac{0.02^{-\xi} - 1}{\xi}. \quad (2.41)$$

Für das obere 2%-Quantil $x_{0.02}^e$ einer Exponentialverteilung folgt aus

$$1 - \exp(-\lambda x_{0.02}^e) = 0.98 \quad (2.42)$$

der Wert

$$x_{0.02}^e = -\frac{\ln 0.02}{\lambda}. \quad (2.43)$$

Der Vergleich der aus den jeweils angepassten verallgemeinerten Pareto bzw. Exponentialverteilungen berechneten Quantile mit den empirischen kann helfen, geeignete Verteilungsfunktionen für $\mathbf{P}(X_t \leq x | x < 0)$ und $\mathbf{P}(X_t \leq x | x \geq 0)$ zu wählen.

Tabelle 2.3 stellt die Zahlenwerte der Quantile einander gegenüber. Es erscheint sinnvoll, den Typ von Verteilungsfunktion zu wählen, der den empirischen Quantilen am nächsten kommt, da später die 1%-Quantile möglichst genau geschätzt werden sollen.

Allerdings könnte man den Verteilungstyp z.B. auch so wählen, dass man sich im Zweifelsfall eher über- als unterschätzt. Da hier die Quantile durch jeweils nur 3 Beobachtungen geschätzt werden, ist eine hohe Genauigkeit der Schätzungen jedoch unwahrscheinlich. Der Vergleich größerer Quantile mit den entsprechenden Quantilen der angepassten Verteilungsfunktionen liefert keine Aussagen über die Güte der Verteilungsannahme am 1%-Quantil.

Kürzel	GPD		Exponential		empirisches Quantil	
	positiv	negativ	positiv	negativ	positiv	negativ
UU1107	5.130	-5.274	7.382	-7.308	6.430	-5.520
ELEPOR 0311	12.528	-4.664	7.585	-6.221	8.920	-5.360
ULVR0606	4.977	-5.755	7.531	-7.057	6.300	-6.840
C1010	15.247	-11.196	9.517	-8.499	12.860	-11.540
SNSBNK1007	4.725	-4.840	6.632	-6.411	5.230	-5.970
AXASA0613	18.181	-12.261	12.149	-9.075	17.540	-9.070
BACR0606	4.660	-3.178	6.816	-7.105	6.210	-5.260
PG0905	6.756	-6.692	10.070	-9.150	8.710	-7.510
AVEFP0406	5.731	-6.198	8.340	-8.192	7.410	-7.840
AHOLD0508	22.855	-12.924	13.378	-9.965	20.270	-11.280
PHG0508	9.718	-8.096	8.988	-9.309	10.540	-7.490
NGGLN0806	8.482	-4.415	8.579	-8.383	7.460	-6.040
GMAC0206	34.541	-18.978	23.913	-18.089	33.480	-17.070
DCX0306	17.789	-10.280	13.841	-14.033	16.170	-12.460
FIAT0506	139.813	-45.041	40.441	-29.938	76.910	-45.240
ENEL0604	13.180	-11.823	11.660	-12.762	11.810	-12.470
SIEM0711	5.512	-4.838	7.323	-6.817	6.640	-6.040
EAUG0608	40.037	-23.532	15.235	-14.657	38.330	-15.760
CRDSUI1005	25.188	-15.368	14.819	-11.835	12.980	-14.790
RBOS0513	4.123	-3.947	6.309	-5.769	4.970	-5.050
TELEFO0905	29.579	-23.437	17.849	-15.693	22.370	-19.910
PLTMPL0206	11.134	-11.337	11.956	-11.443	10.710	-12.960
TELDAN0406	9.063	-8.489	10.103	-10.085	7.420	-9.920
FRTEL0308	37.485	-32.981	28.618	-25.400	31.180	-32.480
KPN0406	26.152	-53.789	22.738	-30.967	26.810	-46.180
TIIM0406	11.247	-11.596	13.443	-13.033	12.610	-14.540
DT0706	26.362	-12.368	23.576	-18.816	19.610	-16.010
BRITEL0206	10.179	-13.699	12.284	-14.207	13.090	-15.530
TELECO0611	6.626	-7.210	6.791	-7.595	6.980	-7.380
LAFCP1108	11.143	-7.236	11.245	-9.201	10.630	-8.470

Tabelle 2.3: Die nach Gleichungen (2.41) und (2.43) berechneten positiven und negativen 1%-Quantile und die empirischen 1%-Quantile (der 3. bzw. der 260. Wert der Ordnungsstatistik)

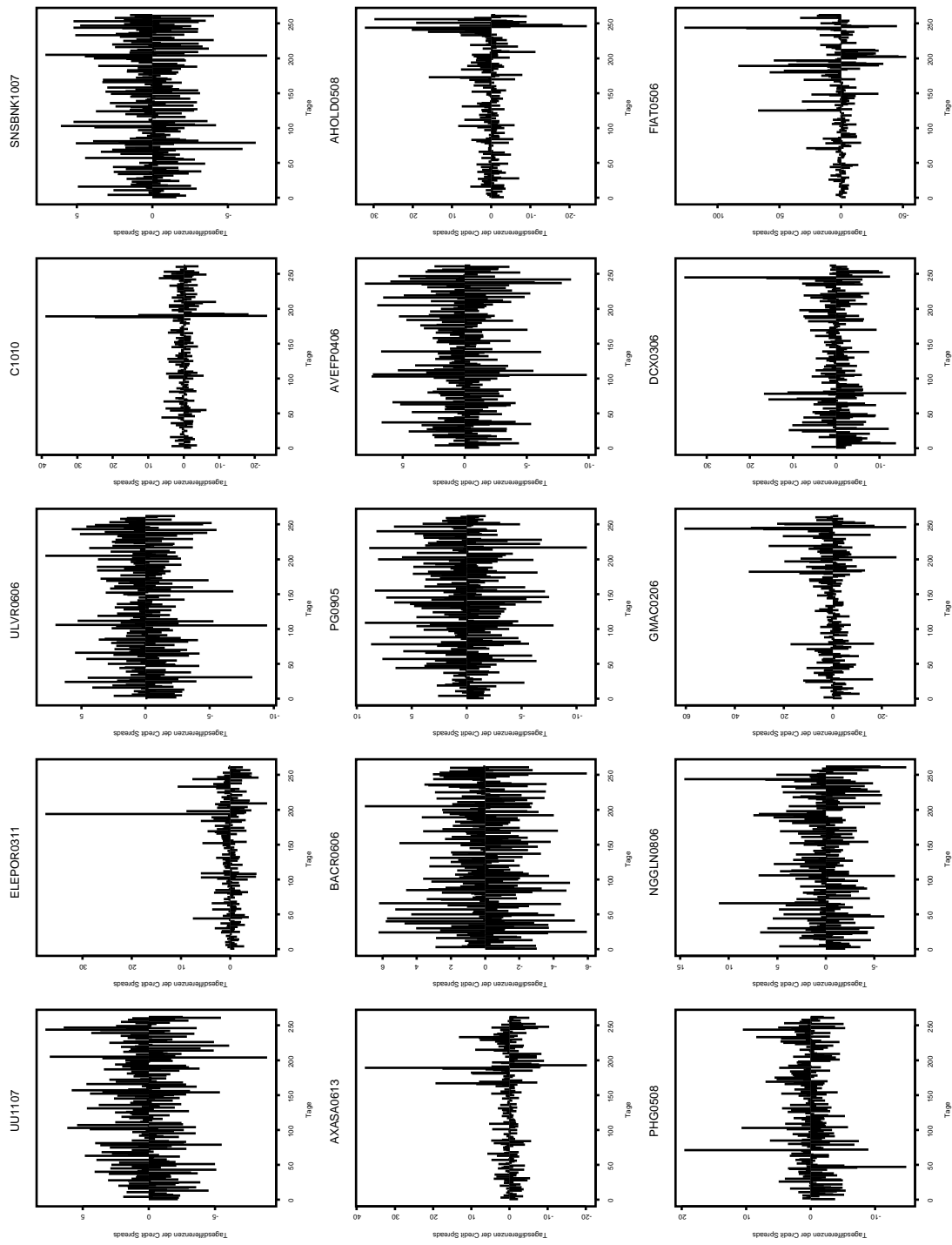


Abbildung 2.1: Tagesdifferenzen der Credit Spreads

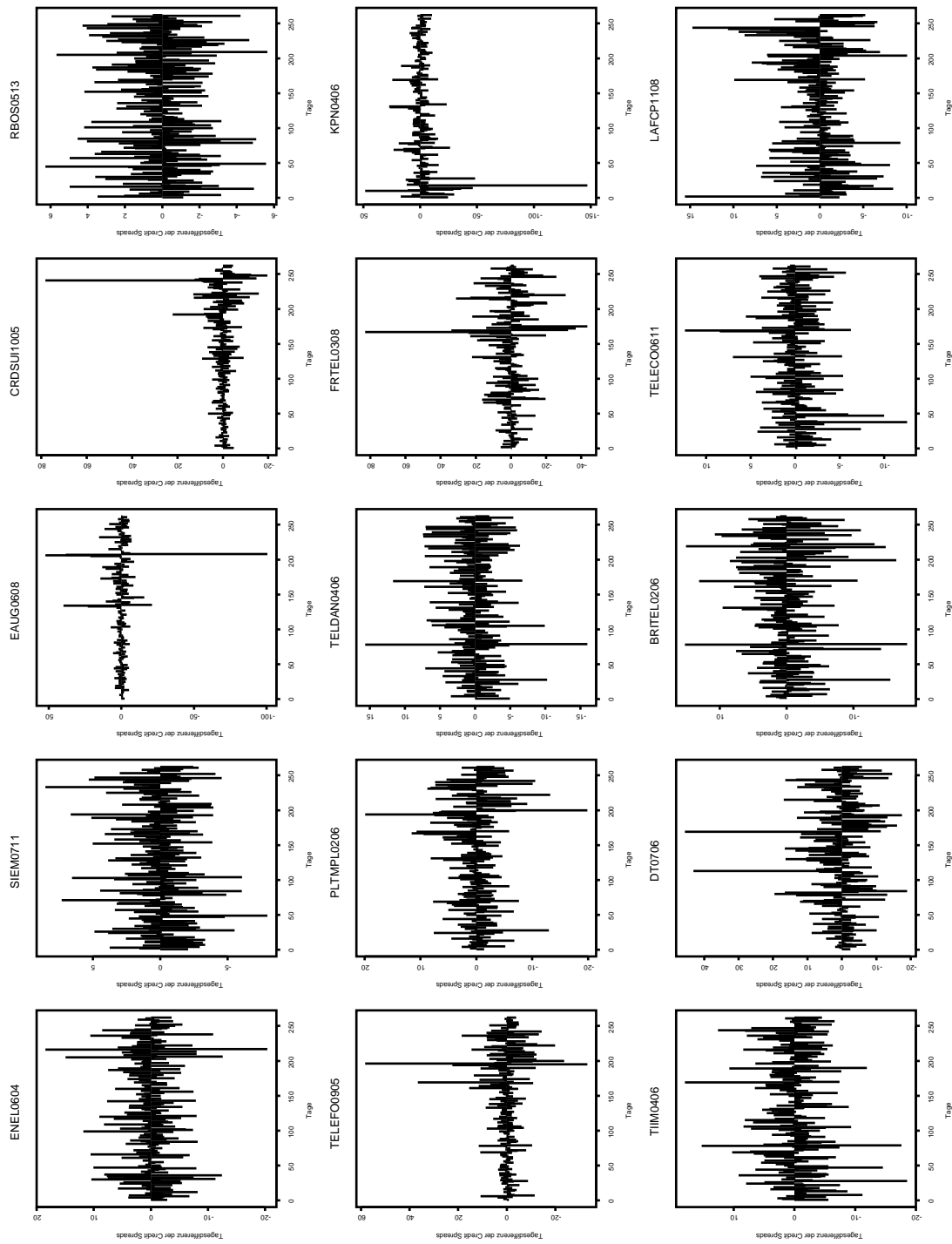


Abbildung 2.2: Tagesdifferenzen der Credit Spreads

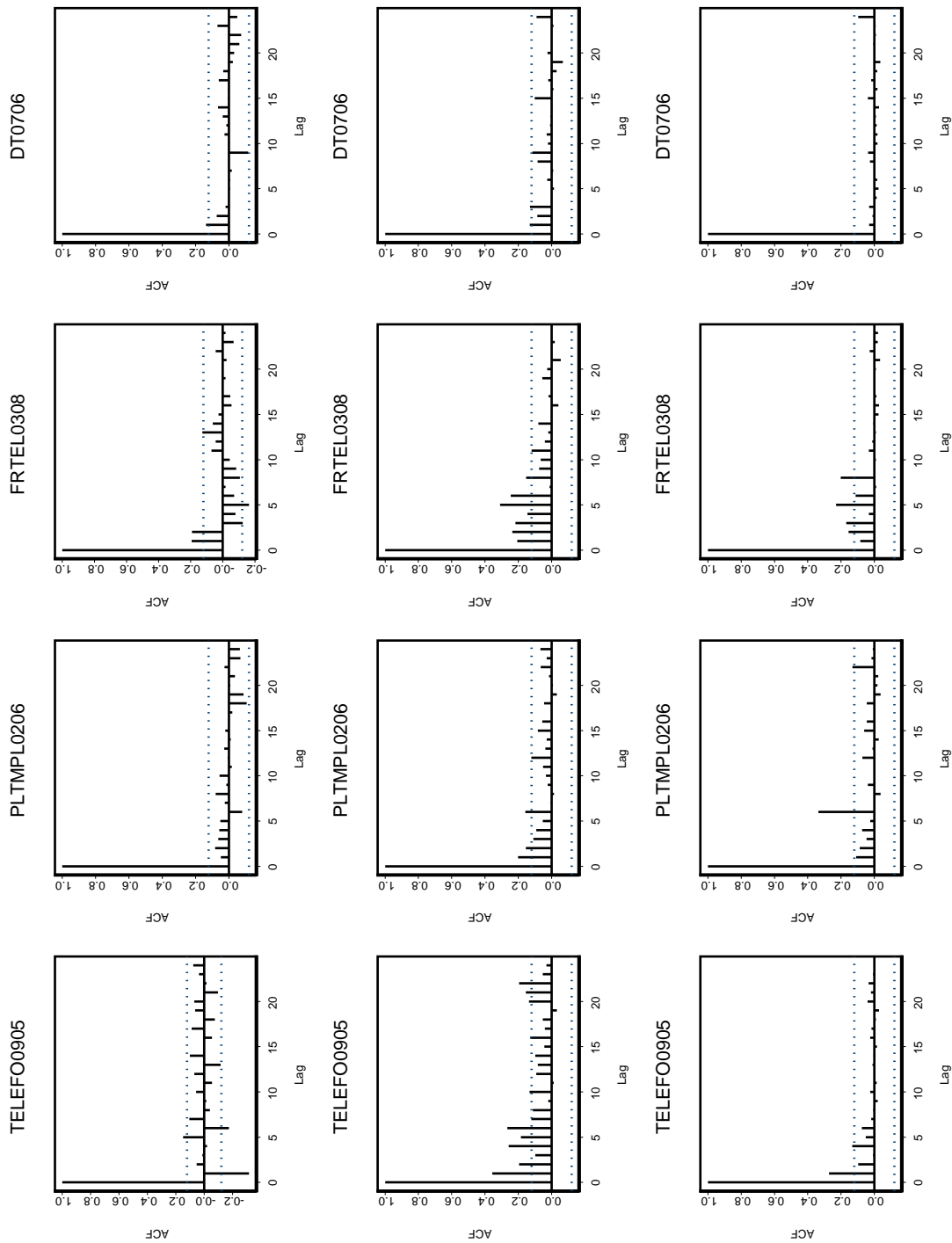


Abbildung 2.3: Autokorrelation der Tagesdifferenzen der Credit Spreads (1.Zeile), ihrer Beträge (2.Zeile) und ihrer Quadrate (3.Zeile)

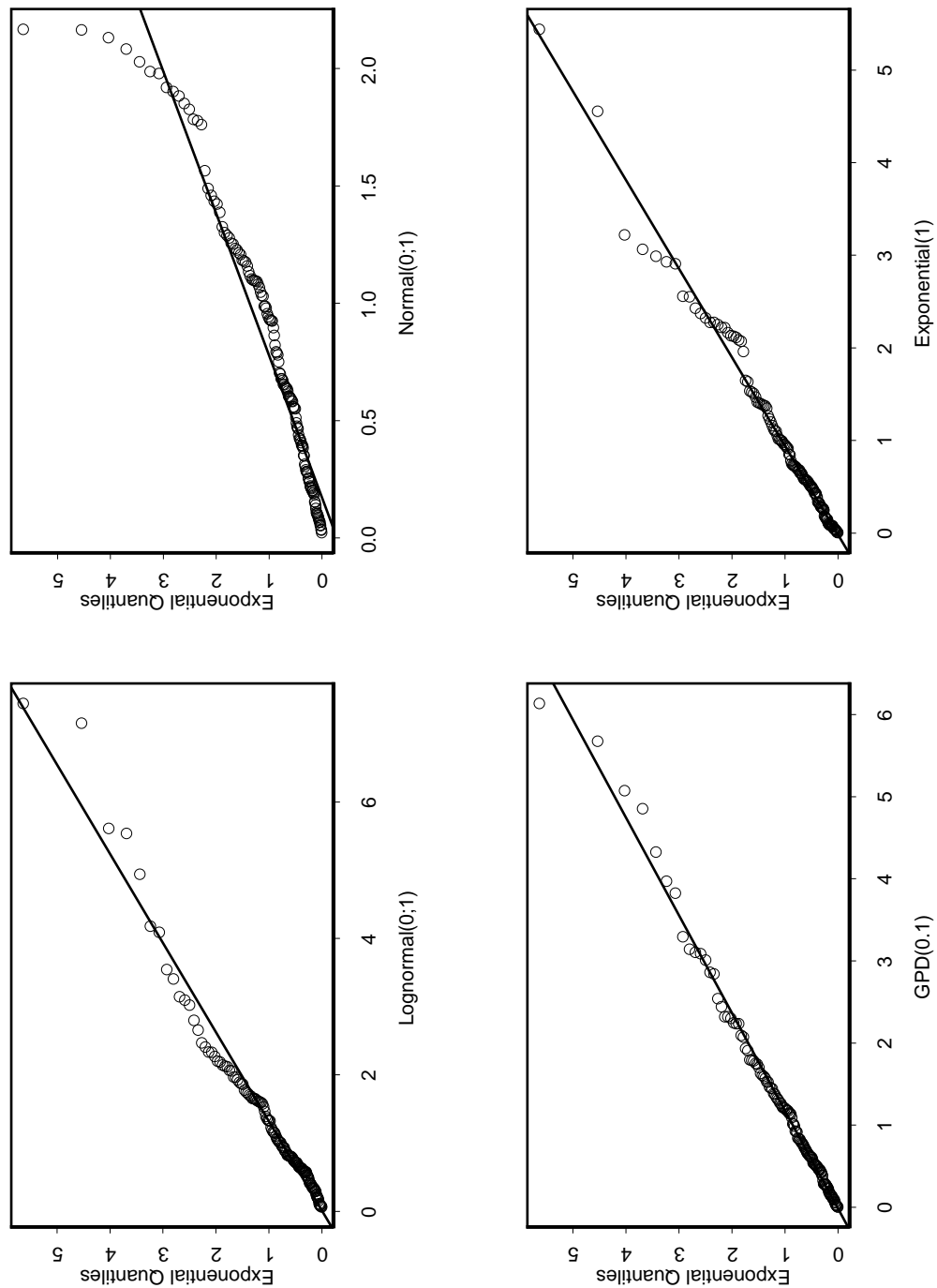


Abbildung 2.4: Beispiele für QQ-Plots: die Ordnungsstatistik simulierter Zufallsvariabler gegen die Quantile der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 1$, jeweils ungefähr 140 Werte

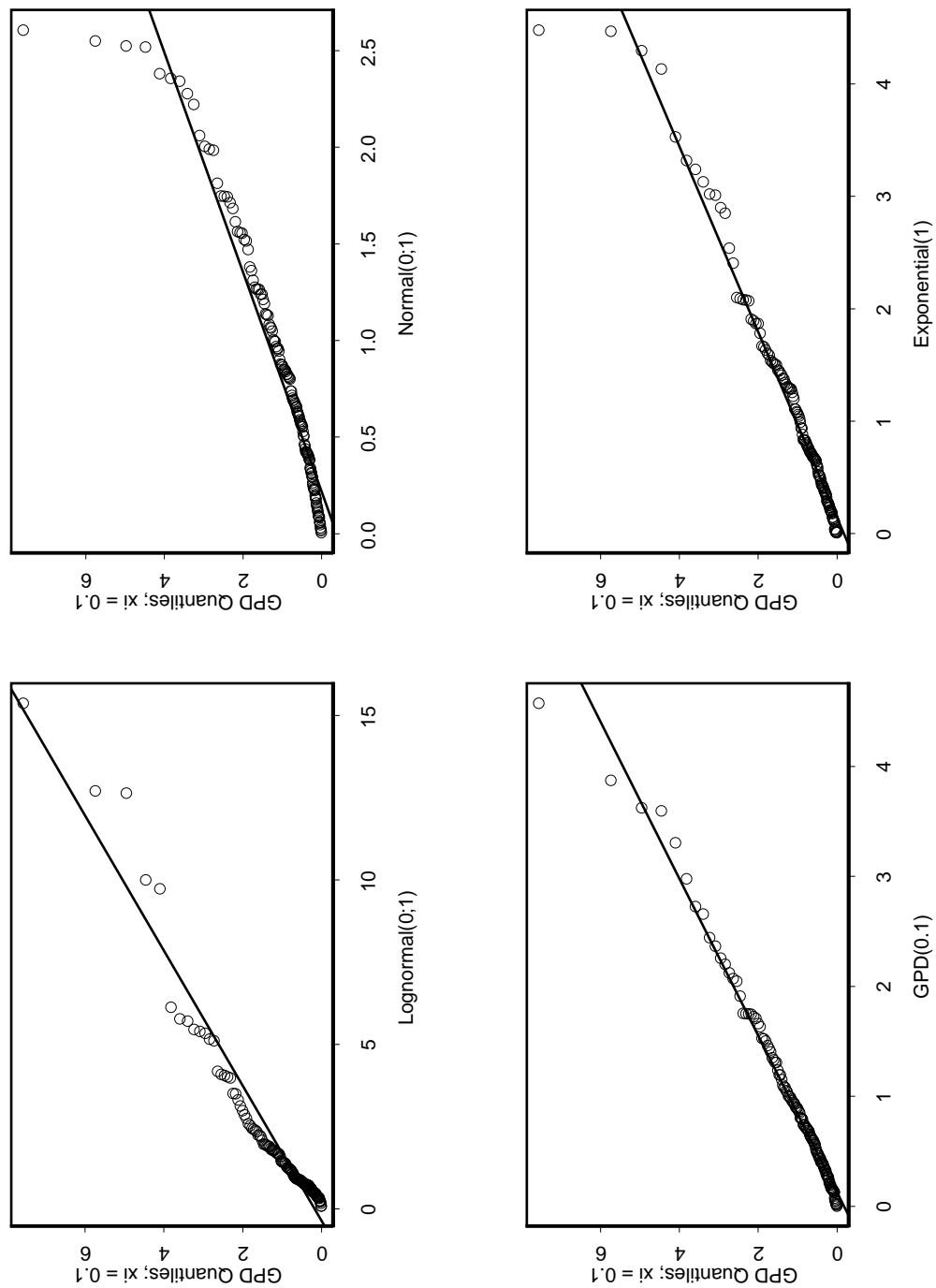


Abbildung 2.5: Beispiele für QQ-Plots: die Ordnungsstatistik simulierter Zufallsvariabler gegen die Quantile der verallgemeinerten Pareto Verteilung mit Parameter $\xi = 0.1$, jeweils ungefähr 140 Werte

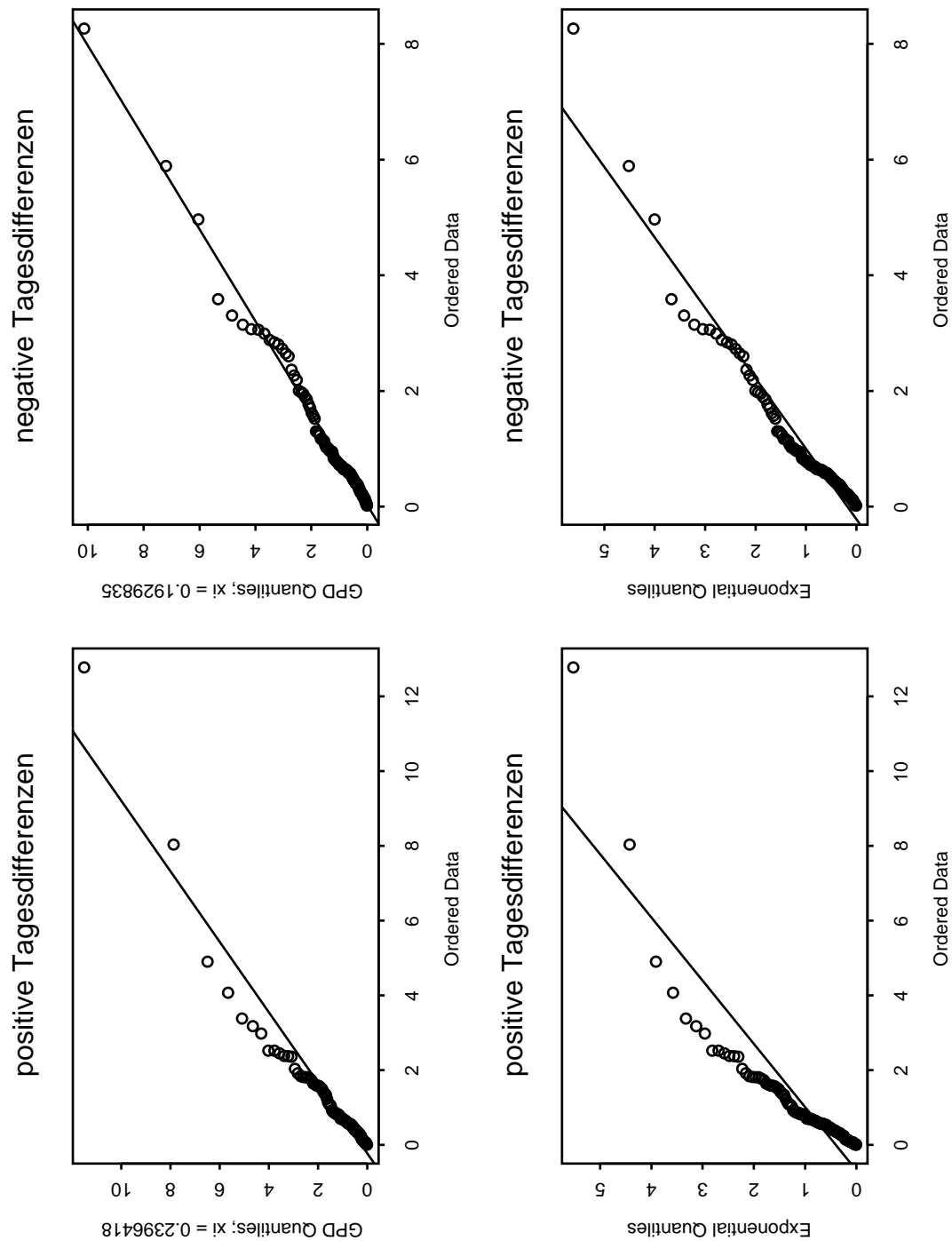


Abbildung 2.6: Die Ordnungsstatistik der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von TELEFO0905 im Vergleich zu den Quantilen der angepassten GPD und der Exponentialverteilung

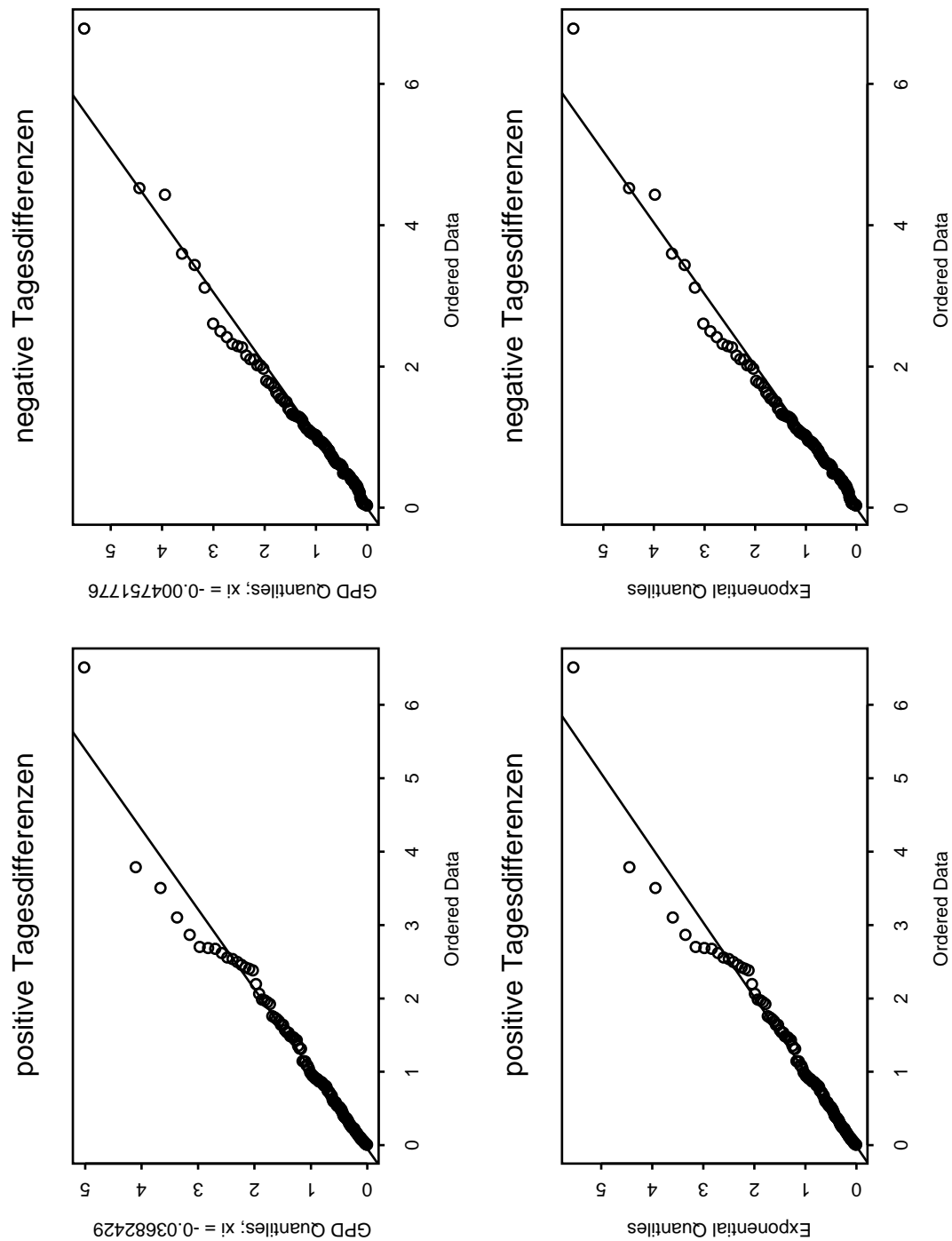


Abbildung 2.7: Die Ordnungsstatistik der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von PLTMPL0206 im Vergleich zu den Quantilen der angepassten GPD und der Exponentialverteilung

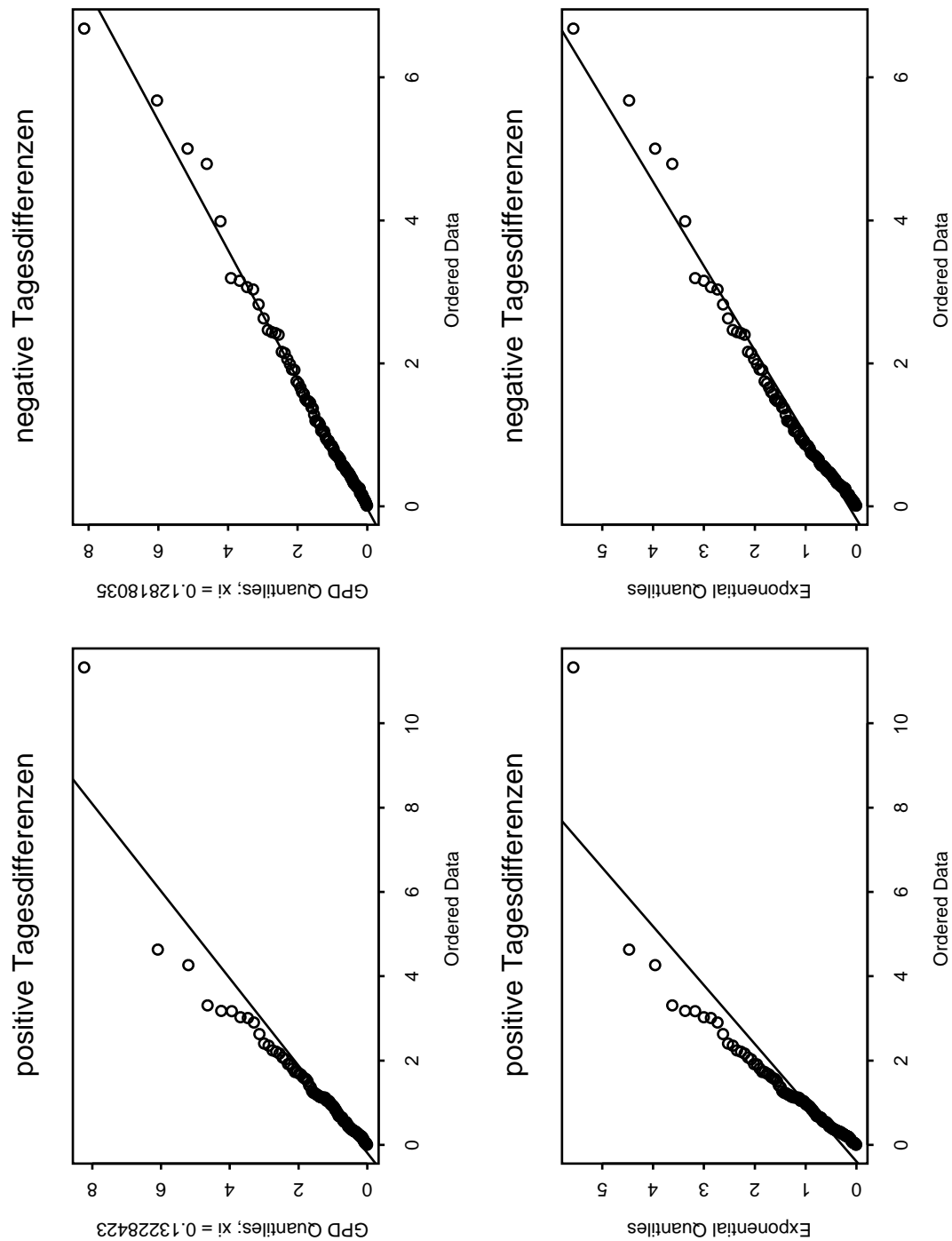


Abbildung 2.8: Die Ordnungsstatistik der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von FRTEL0308 im Vergleich zu den Quantilen der angepassten GPD und der Exponentialverteilung

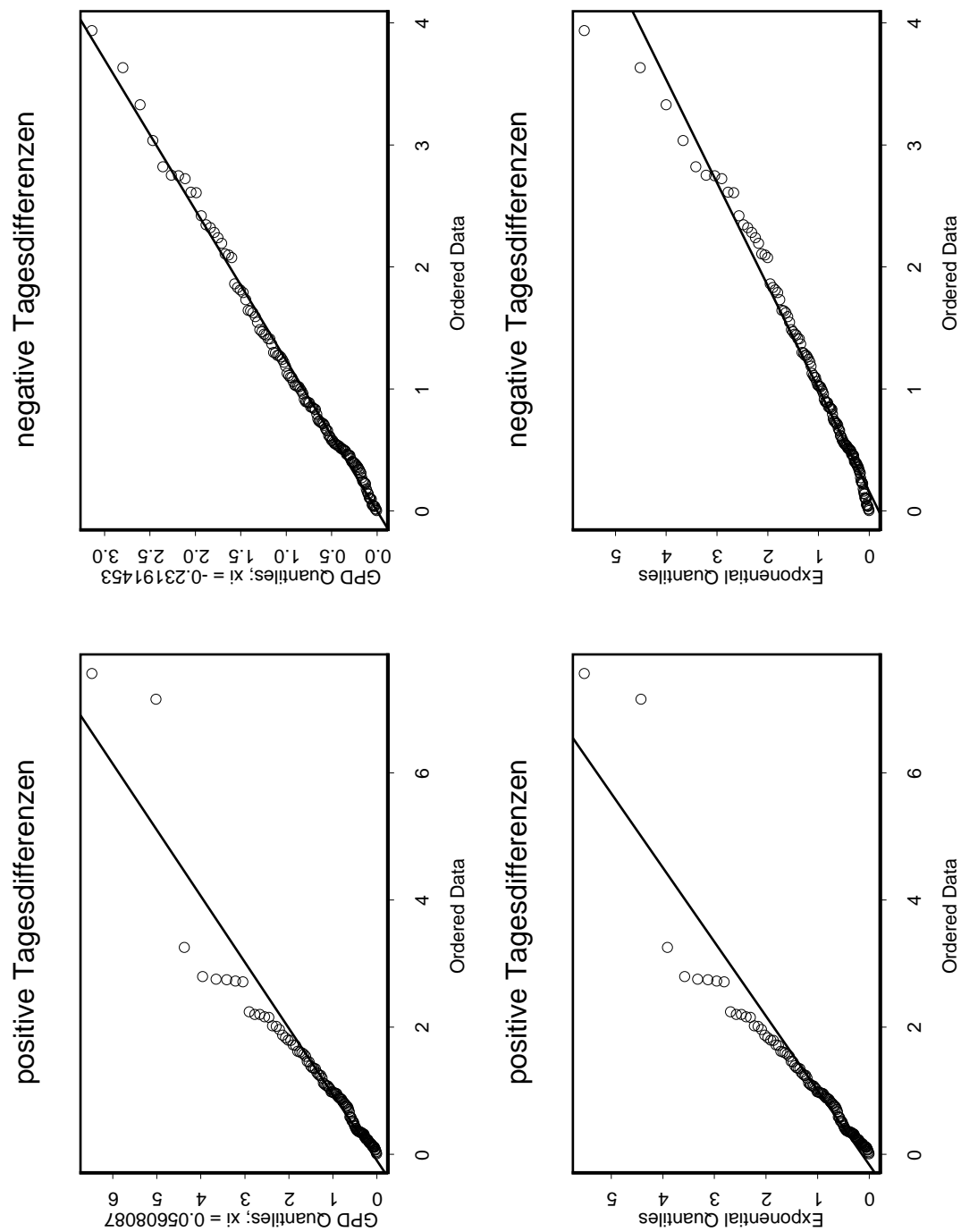


Abbildung 2.9: Die Ordnungsstatistik der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von DT0706 im Vergleich zu den Quantilen der angepassten GPD und der Exponentialverteilung

Kapitel 3

Univariate Extremwerttheorie

Die hier dargelegten Sätze der Extremwerttheorie folgen EKM [6], Kapitel 3, und Resnick [16].

3.1 Der Satz von Fisher-Tippett

Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von **iid** nicht degenerierten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und X_1, \dots, X_n eine Stichprobe vom Umfang n . Der Satz von Fisher-Tippett macht Aussagen über die Verteilung der *Stichprobenmaxima*

$$M_n = \max_{i=1, \dots, n} \{X_i\} \quad (3.1)$$

für große n . Mittels der Transformation

$$\min_{i=1, \dots, n} \{X_i\} = - \max_{i=1, \dots, n} \{-X_i\} \quad (3.2)$$

lassen sich die Überlegungen auch auf Minima übertragen.

Bei diesen Untersuchungen ist es zweckmäßig, neben der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x) \quad (3.3)$$

einer Zufallsvariablen auch ihre Überlebens- oder Tailfunktion

$$\bar{F}(x) = \mathbf{P}(X > x) = 1 - \mathbf{P}(X \leq x) = 1 - F(x) \quad (3.4)$$

zu betrachten. Häufig wird $\bar{F}(x)$ einfach Tail der Verteilung F genannt.

Da die einzelnen X_t **iid** sind, lässt sich die Verteilung der M_n einfach anschreiben:

$$\mathbf{P}(M_n \leq x) = F^n(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Als *rechten Endpunkt* der Verteilung F bezeichnet man $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$.

Einfache Folgerungen sind:

$$\mathbf{P}(M_n \leq x) = F^n(x) \rightarrow 0, \quad \forall x \leq x^* < x_F, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{P}(M_n \leq x) = 1, \quad \forall x \geq x_F, \quad \text{falls } x_F < \infty. \quad (3.7)$$

Hieraus folgt für beliebige x_F unmittelbar $M_n \xrightarrow{P} x_F$ für $n \rightarrow \infty$. Der Fall $x_F = \infty$ ist möglich. Da M_n in n nicht fällt, strebt $M_n \xrightarrow{\text{a.s.}} x_F$ für $n \rightarrow \infty$. Die Maxima liegen also für hinreichend große n „im Tail“ der zu Grunde liegenden Verteilung.

Satz 3.1 (Fischer-Tippett) Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F . Wenn normierende Folgen $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ existieren so, dass für das Maximum M_n einer Stichprobe des Umfangs n gilt:

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (3.8)$$

wobei H eine nicht degenerierte Verteilungsfunktion ist, dann hat H die Form

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) & , \quad \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}) & , \quad \xi = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Die Verteilungsfunktion H heißt verallgemeinerte Extremwertverteilung. Der Fall $\xi = 0$ wird als Grenzwert von $\xi \rightarrow 0$ aufgefasst. Die drei möglichen Fälle $\xi < 0$, $\xi > 0$ bzw. $\xi = 0$ heißen Weibull, Fréchet und Gumbel Verteilungen. Es ergeben sich für x Wertebereiche:

$$\text{Fréchet: } x > -\xi^{-1}, \quad \text{für } \xi > 0, \quad (3.10)$$

$$\text{Weibull: } x < -\xi^{-1}, \quad \text{für } \xi < 0, \quad (3.11)$$

$$\text{Gumbel: } x \in \mathbb{R}, \quad \text{für } \xi = 0. \quad (3.12)$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. in Resnick [16], Proposition 0.3.

Bemerkung 3.2 Für $\xi = \alpha^{-1} > 0$, $\xi = -\alpha^{-1} < 0$ bzw. $\xi = 0$ werden die drei Extremwertverteilungsfunktionen mit $\Psi_\alpha, \Phi_\alpha, \Lambda$ bezeichnet:

$$\text{Fréchet: } \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & , \quad x > 0 \end{cases}, \quad \text{für } \alpha > 0. \quad (3.13)$$

$$\text{Weibull: } \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}, \quad \text{für } \alpha > 0. \quad (3.14)$$

$$\text{Gumbel: } \Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Die Darstellung der drei Verteilungstypen in Gleichung (3.9) folgt Jenkinson, von Mises. Die Dichten der drei Verteilungsfunktionen zeigt Abbildung 3.1.

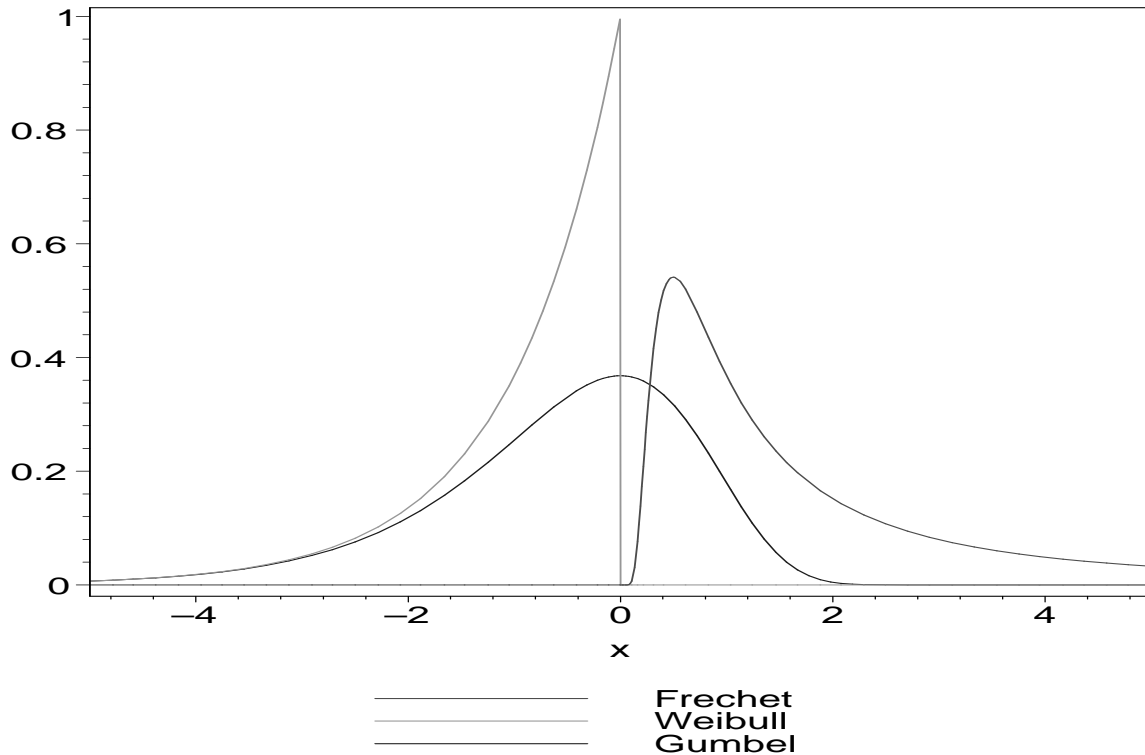


Abbildung 3.1: Dichten der drei Extremwertverteilungen

3.2 Maximaler Anziehungsbereich von H_ξ

Hier wird der Begriff des maximalen Anziehungsbereichs vorgestellt; die Anziehungsbereiche der drei Typen von Extremwertverteilungen werden kurz charakterisiert. Die Theorie entstammt EKM [6]. Aufbereitet findet man sie in Kuhn [14], Kapitel 3.

Definition 3.3 (Maximaler Anziehungsbereich) *Existieren für eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ normierende Folgen $d_n \in \mathbb{R}$, $c_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ so, dass die Bedingungen aus Satz 3.1 erfüllt sind, dann sagt man, die Zufallsvariablen X_n bzw. ihre Verteilungsfunktion F liegen im maximalen Anziehungsbereich der Extremwertverteilung H_ξ . Der maximale Anziehungsbereich von H_ξ wird mit $\mathbf{MDA}(H_\xi)$ (Maximum Domain of Attention) bezeichnet. Man schreibt kurz $X \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$ bzw. $F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$.*

Es ergeben sich die Fragen: Welche Verteilungsfunktionen liegen im maximalen Anziehungsbereich einer verallgemeinerten Extremwertverteilung H ? Welche Bedingungen muß eine Verteilungsfunktion F erfüllen, damit die mit c_n und d_n normierten Maxima einer Folge von Stichproben gegen H konvergieren? Wie müssen die Folgen $c_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$?

Zunächst stellt der folgende Satz fest, dass unterschiedliche normierende Folgen nicht zu verschiedenen Verteilungen führen können; die Verteilungen entsprechen sich bis auf eine lineare Transformation.

Satz 3.4 (Konvergenz von Verteilungstypen) Seien $A, B, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Zufallsvariablen und $a_n, \alpha_n \in \mathbb{R}$, sowie $b_n, \beta_n > 0$ normierende Folgen. Falls

$$b_n^{-1}(A_n - a_n) \xrightarrow{d} A, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.16)$$

dann gilt

$$\beta_n^{-1}(A_n - \alpha_n) \xrightarrow{d} B, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.17)$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\beta_n} = b \in [0, \infty), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \alpha_n}{\beta_n} = a \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Wenn die Gleichung (3.17) gilt, dann ist $B \stackrel{d}{=} bA + a$, und a, b sind eindeutig. Ferner ist B nicht-degeneriert genau dann, wenn $b > 0$, und dann gehören A und B dem gleichen Verteilungstyp an. Aus (3.18) folgt, dass a_n und b_n bis auf eine asymptotische Relation eindeutig sind.

Wegen der Stetigkeit der Extremwertverteilungen auf \mathbb{R} ist die Bedingung aus Satz 3.1 äquivalent zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n \leq c_n x + d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + d_n) = H_\xi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Aus (3.19) kann eine erste Charakterisierung des maximalen Anziehungsbereiches abgeleitet werden:

Satz 3.5 (Poisson Approximation) Die Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F gehört genau dann zum maximalen Anziehungsbereich der Extremwertverteilung H_ξ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(c_n x + d_n) = -\ln(H_\xi(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.20)$$

Im Fall $H_\xi(x) = 0$ wird die rechte Seite als ∞ aufgefasst.

Die reguläre Variation von (Verteilungs-) Funktionen benutzt man, um den maximalen Anziehungsbereich von Extremwertverteilungen zu charakterisieren. Beim Bestimmen des maximalen Anziehungsbereiches der Fréchet- und der Weibullverteilung stellt sie sich als sehr nützlich heraus. Die Charakterisierung des maximalen Anziehungsbereiches der Gumbelverteilung Λ ist aufwändiger.

Definition 3.6 (langsame Variation) Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion \mathcal{L} auf $(0, \infty)$ heißt langsam variierend bei ∞ , wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(tx)}{\mathcal{L}(x)} = 1, \quad \forall t > 0. \quad (3.21)$$

Mit \mathcal{R}_0 bezeichnet man die Menge aller langsam variierenden Funktionen; man schreibt $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$.

Beispiel 3.7 Da für alle $t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln tx}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln t + \ln x}{\ln x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{\ln x} = 1, \quad (3.22)$$

ist $\ln x$ langsam variierend auf $(0, \infty)$.

Definition 3.8 (reguläre Variation) Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion h auf $(0, \infty)$ heißt regulär variierend mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$ bei ∞ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha, \quad \forall t > 0. \quad (3.23)$$

Mit \mathcal{R}_α bezeichnet man die Menge aller regulär variierenden Funktionen; man schreibt $h \in \mathcal{R}_\alpha$.

Beispiel 3.9 Alle Potenzen x^α variieren offenbar regulär mit Index α . Endliche Summen von Potenzen $a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \dots + a_n x^{\alpha_n}$ variieren regulär mit Index $\alpha := \max_{i=1, \dots, n} \alpha_i$.

Definition 3.10 (Tail-Äquivalenz) Zwei Verteilungsfunktionen F, G mit gleichem rechten Endpunkt $x_F = x_G$ heißen Tail äquivalent, wenn

$$\lim_{x \nearrow x_F} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c \quad (3.24)$$

für c konstant, $0 < c < \infty$.

Bemerkung 3.11 Es kann gezeigt werden: Sind F und G Tail äquivalent, dann gehören sie beide zum maximalen Anziehungsbereich derselben Extremwertverteilung H . Der maximale Anziehungsbereich ist also abgeschlossen bezüglich der Tail Äquivalenz. Weiter können für Tail äquivalente Zufallsvariablen dieselben normierenden Konstanten c_n, d_n gewählt werden.

3.2.1 Charakterisierung von $\text{MDA}(H_\xi)$

Mittels F^\leftarrow , der Quantilsfunktion der Verteilung F , siehe Abschnitt 2.3, definiert man eine Hilfsfunktion:

$$U(t) := F^\leftarrow(1 - t^{-1}), \quad t > 0. \quad (3.25)$$

Satz 3.12 Für $\xi \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) $F \in \text{MDA}(H_\xi)$.

(ii) Es existiert $a(\cdot)$, messbar, so dass für $1 + \xi x > 0$ gilt

$$\lim_{u \nearrow x_F} \frac{\overline{F}(u + xa(u))}{\overline{F}(u)} = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & , \text{ wenn } \xi \neq 0, \\ e^{-x} & , \text{ wenn } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

(iii) Für $x, y > 0$ und $y \neq 1$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(sx) - U(s)}{U(sy) - U(s)} = \begin{cases} \frac{x^\xi - 1}{y^\xi - 1} & , \text{ wenn } \xi \neq 0, \\ \frac{\ln x}{\ln y} & , \text{ wenn } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Maximaler Anziehungsbereich der Fréchet Verteilung

Für die Fréchet Verteilung $\Phi_\alpha = \exp(-x^{-\alpha})$ ergibt sich aus der Taylor-Entwicklung der Tailfunktion

$$\bar{\Phi}_\alpha = 1 - \Phi_\alpha(x) = 1 - \exp(-x^{-\alpha}) \sim x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Der maximale Anziehungsbereich der Fréchet Verteilung, $\mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$, besteht aus allen Verteilungsfunktionen F , deren rechter Tail regulär variiert mit Index $-\alpha$. In $\mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ können für alle n die Folgenglieder $d_n = 0$ gewählt werden. Die Folge c_n kann über die Quantilsfunktion gewählt werden: $c_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) = \left(\frac{1}{F}\right)^{\leftarrow}(n)$. Dies impliziert $x_F = \infty$ für alle $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$.

Ferner gilt

$$F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha) \iff \bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}. \quad (3.29)$$

Die Menge $\mathcal{R}_{-\alpha}$ bezeichnet die Menge aller regulär mit Index $-\alpha$ variierenden Funktionen; vgl. Definition 3.8. Beispiele für Verteilungsfunktionen aus $\mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ sind die Pareto und die Cauchy Verteilungen.

Maximaler Anziehungsbereich der Weibull Verteilung

Für die Weibull Verteilung gilt nach Bemerkung 3.2

$$\Psi_\alpha(-x^{-1}) = \Phi_\alpha(x), \quad x > 0. \quad (3.30)$$

Hieraus folgt für Verteilungsfunktionen F aus $\mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$: $x_F < \infty$ und $\bar{F}(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha} \mathcal{L}(x)$, $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$; \mathcal{L} ist also eine langsam variierende Funktion, siehe Definition 3.6. Als normierende Folgen können $d_n = x_F$, $\forall n$ und $c_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}) \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ gewählt werden. Ferner gilt

$$F \in \mathbf{MDA}(\Psi_\alpha) \iff x_F < \infty \text{ und } \bar{F}(x_F - x^{-1}) \in \mathcal{R}_{-\alpha}. \quad (3.31)$$

Zum Beispiel liegt die Standard-Gleichverteilung in $\mathbf{MDA}(\Psi_1)$.

Maximaler Anziehungsbereich der Gumbel Verteilung

Für die Gumbel Verteilung $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$ ergibt sich aus der Taylor-Entwicklung der Überlebensfunktion

$$\bar{\Lambda}(x) = 1 - \Lambda(x) = 1 - \exp(-e^{-x}) \sim e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.32)$$

Die Gumbel Verteilung hat also exponentiell fallende Tails. $\mathbf{MDA}(\Lambda)$ enthält sehr viele Verteilungen, z.B. die Lognormal- und die Normalverteilungen. Der rechte Endpunkt x_F kann endlich oder ∞ sein. Das Beschreiben von $\mathbf{MDA}(\Lambda)$ ist schwieriger als das Beschreiben von $\mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ und $\mathbf{MDA}(\Psi_\alpha)$: Es gilt

$$F \in \mathbf{MDA}(\Lambda) \iff \exists z < x_F \bar{F}(x) = c(x) \exp\left(-\int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt\right), \quad z < x < x_F \leq \infty, \quad (3.33)$$

wobei c, g meßbare Funktionen sind, die für $x \nearrow x_F$ die Bedingungen $c(x) \rightarrow c > 0$ und $g(x) \rightarrow 1$ erfüllen. Die Funktion $a(t)$ ist absolut stetig (bzgl. des Lebesguemasses) mit Dichte $a'(x)$ und $\lim_{x \nearrow x_F} a'(x) = 0$. In diesem Fall können als normierende Folgen $d_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$ und $c_n = a(d_n)$ gewählt werden. Eine mögliche Wahl von a wäre

$$a(x) = \int_x^{x_F} \frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(x)} dt, \quad x < x_F. \quad (3.34)$$

Eine weitere Beschreibung ist:

$$F \in \mathbf{MDA}(\Lambda) \iff \exists \tilde{a}(x) \text{ so, dass } \lim_{x \nearrow x_F} \frac{\overline{F}(x + t\tilde{a}(x))}{\overline{F}(x)} = e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.35)$$

Hier kann $\tilde{a}(x) = a(x)$ aus (3.34) gewählt werden.

Eine schöne Eigenschaft der Verteilungsfunktionen $F \in \mathbf{MDA}(\Lambda)$ mit $x_F = \infty$ ist, dass $F \in \mathcal{R}_{-\infty}$ und $\mathbf{E}[X^+]^\alpha < \infty, \forall \alpha > 0$ gelten.

3.3 Die verallgemeinerte Pareto Verteilung

Die verallgemeinerte Pareto Verteilung (GPD), die schon in Abschnitt 2.3.2 angewandt wurde, spielt in der univariaten Extremwerttheorie eine wichtige Rolle. Sie hängt eng mit den Extremwertverteilungen zusammen und ist definiert durch:

Definition 3.13 (Verallgemeinerte Pareto Verteilung) Die Verteilungsfunktion G_ξ der Standard verallgemeinerten Pareto Verteilung ist definiert durch:

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & , \quad \text{wenn } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x} & , \quad \text{wenn } \xi = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Der Definitionsbereich ist

$$x \geq 0, \quad \text{wenn } \xi \geq 0, \quad (3.37)$$

$$0 \leq x \leq -\frac{1}{\xi}, \quad \text{wenn } \xi < 0. \quad (3.38)$$

Ersetzt man x durch $\frac{x-\nu}{\beta}$, $\nu \in \mathbb{R}, \beta > 0$, und modifiziert man den Träger entsprechend, so erhält man die Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Pareto Verteilung $G_{\xi,\nu,\beta}$, also

$$G_{\xi,\nu,\beta}(x) := G_\xi\left(\frac{x-\nu}{\beta}\right). \quad (3.39)$$

Der Fall $\xi = 0$ wird wie im Satz von Fisher-Tippett als Grenzwert aufgefasst. Für $G_{\xi,0,\beta}$ wird $G_{\xi,\beta}$ oder $\text{GPD}(\xi, \beta)$ geschrieben. Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(\xi, \beta)$ von $G_{\xi,\beta}$ ist

$$x \in \mathcal{D}(\xi, \beta) = \begin{cases} [0, \infty) & , \quad \text{wenn } \xi \geq 0, \\ \left[0, -\frac{\beta}{\xi}\right] & , \quad \text{wenn } \xi < 0. \end{cases} \quad (3.40)$$

Wichtige Eigenschaften der verallgemeinerten Pareto Verteilung sind:

Satz 3.14 (Eigenschaften der GPD)

(i) Sei $X \sim G_{\xi, \beta}$. Für $\xi < 1$ gilt

$$E \left[\left(1 + \frac{\xi}{\beta} X \right)^{-r} \right] = \frac{1}{1 + \xi r}, \quad \text{wenn } r > -\frac{1}{\xi}. \quad (3.41)$$

(ii) Für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt $F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$ genau dann, wenn für die Exzessfunktion $F_u(x) = \mathbf{P}(X - u \leq x | X > u)$ mit einer positiven Funktion $\beta(u)$ gilt

$$\lim_{u/x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0. \quad (3.42)$$

(iii) Seien $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(\xi, \beta)$. Dann gilt

$$\frac{\overline{G}_{\xi, \beta}(x_1 + x_2)}{\overline{G}_{\xi, \beta}(x_1)} = \overline{G}_{\xi, \beta + \xi x_1}(x_2). \quad (3.43)$$

(iv) Sei $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ und unabhängig von der iid Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim G_{\xi, \beta}$. Sei $M_N = \max_{i=1, \dots, N} \{X_i\}$. Dann gilt

$$\mathbf{P}(M_N \leq x) = \exp \left(-\lambda \left(1 + \xi \frac{x}{\beta} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) = H_\xi \left(\frac{x - \mu}{\psi} \right), \quad (3.44)$$

mit $\mu = \beta \xi^{-1} (\lambda^\xi - 1)$ und $\psi = \beta \lambda^\xi$. Ist $\xi = 0$, so gilt

$$\mathbf{P}(M_N \leq x) = \exp \left(-\exp \left(-\frac{1}{\beta} (x - \beta \ln \lambda) \right) \right). \quad (3.45)$$

(v) Sei $X \sim G_{\xi, \beta}$ und $\xi < 1$. Dann gilt für den mittleren Exzess $e(u)$ über eine Schranke $u < x_F$

$$e(u) := E[X - u | X > u] = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + u\xi > 0. \quad (3.46)$$

In Abschnitt 3.4.3 werden die Parameter ξ , β und ν der verallgemeinerten Extremwertverteilung unter der Annahme geschätzt, dass $X \sim GPD$ ist.

3.4 Schätzen des Parameters ξ von H_ξ

Zum Schätzen des Parameters ξ einer verallgemeinerten Extremwertverteilung $H_\xi(x) = \exp(-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}})$ wird eine Stichprobe von Zufallsvariablen $X_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$ benötigt. Eine solche Stichprobe sei X_1, \dots, X_n .

Aus den Sätzen 3.5 und 3.12 wissen wir:

$$F \in \mathbf{MDA}(H_\xi) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(c_n x + d_n) = -\ln(H_\xi(x)), \quad (3.47)$$

wenn c_n, d_n passend gewählt werden und x im Definitionsbereich von H_ξ liegt. Also gilt mit $u = c_n x + d_n$:

$$n\bar{F}(u) \approx \left(1 + \xi \frac{u - d_n}{c_n}\right)^{\frac{1}{\xi}}. \quad (3.48)$$

Für große u erhält man mittels geeigneter Schätzer $\hat{\xi}, \hat{c}_n, \hat{d}_n$ von ξ, c_n , bzw. d_n einen Schätzer für den Tail von F :

$$\widehat{\bar{F}}(u) = \frac{1}{n} \left(1 + \hat{\xi} \frac{u - \hat{d}_n}{\hat{c}_n}\right)^{\frac{1}{\hat{\xi}}}. \quad (3.49)$$

Die verallgemeinerte Extremwertverteilung beschreibt das Verhalten von Zufallsvariablen in den Tails. Also kann sich die Schätzung von ξ, c_n, d_n auf die k größten Werte $X_{k,n}, \dots, X_{1,n}$ der Stichprobe beschränken. Für die k -te Ordnungsstatistik muß gelten:

- (i) $k(n) \rightarrow \infty$, die obere Ordnungsstatistik muß groß sein, damit die Varianz der Schätzer klein ist.
- (ii) $\frac{n}{k(n)} \rightarrow \infty$, da nur die Tails in die Schätzung einfließen sollen.

Bemerkung 3.15 In der Praxis wird n gegeben sein, während man k wählen kann. Daher untersucht man das Verhalten des Schätzers für verschiedene k und wählt ein geeignetes.

3.4.1 Pickands Schätzer

Aus Satz 3.12, ist bekannt, dass $F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$ mit $U(s) = F^{\leftarrow}(1 - s^{-1})$ äquivalent ist zu

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(2s) - U(s)}{U(s) - U(s/2)} = \frac{2^\xi - 1}{1 - 2^{-\xi}} = 2^\xi, \text{ mit } \xi \neq 0. \quad (3.50)$$

Für positive Funktionen $c(s)$ mit $\lim_{s \rightarrow \infty} c(t) = 2$ gilt der Satz 3.12 in der Form

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{U(c(s)s) - U(s)}{U(s) - U(s/c(s))} = 2^\xi. \quad (3.51)$$

Sei $V_{k,n}$ das empirische $(1 - \frac{k}{n})$ -Quantil einer Stichprobe, die von der Verteilung F stammt. Es gilt

$$(X_{k,n})_{k=1, \dots, n} \stackrel{d}{=} (U(V_{k,n}))_{k=1, \dots, n}. \quad (3.52)$$

Für $k = k(n) \rightarrow \infty$ und $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ kann gezeigt werden, dass

$$\frac{k}{n} V_{k,n} \xrightarrow{P} 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.53)$$

Daraus folgen

$$V_{k,n} \xrightarrow{P} \infty \quad \text{und} \quad \frac{V_{2k,n}}{V_{k,n}} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}; \quad (3.54)$$

und Gleichung (3.51) liefert

$$\frac{U(V_{k,n}) - U(V_{2k,n})}{U(V_{2k,n}) - U(V_{4k,n})} \xrightarrow{P} 2^\xi, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.55)$$

Hiermit ergibt sich:

Definition 3.16 (Pickands Schätzer)

$$\widehat{\xi}_{k,n}^{(P)} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}. \quad (3.56)$$

Unten wird kurz $\widehat{\xi}^{(P)}$ geschrieben.

Deckers und de Haan [5] haben diesen Schätzer gründlich untersucht. Einige der von ihnen gefundenen Eigenschaften werden hier kurz zusammengefasst:

Satz 3.17 (Eigenschaften des Pickands Schätzers) Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit einer Verteilungsfunktion $F \in \text{MDA}(H_\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Dann hat der Pickands Schätzer folgende Eigenschaften:

(i) (Schwache Konsistenz) Wenn $k = k(n) \rightarrow \infty$ und $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\widehat{\xi}_{k(n),n}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.57)$$

(ii) (Starke Konsistenz) Wenn $\frac{k}{\ln \ln n} \rightarrow \infty$ und $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt

$$\widehat{\xi}_{k(n),n}^{(P)} \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.58)$$

(iii) (Asymptotische Normalität) Unter weiteren Bedingungen ([5], S.1799) für k und F gilt

$$\sqrt{k} \left(\widehat{\xi}^{(P)} - \xi \right) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, v(\xi)), \quad \text{mit } v(\xi) = \frac{\xi^2(2^{2\xi+1} + 1)}{(2(2^\xi - 1) \ln 2)^2}. \quad (3.59)$$

Allgemein betrachtet man bei der Datenanalyse mittels Pickands Schätzer den *Pickands Plot*:

$$\left\{ \left(k, \widehat{\xi}_{k,n}^{(P)} \right) : k = 1, \dots, n \right\}. \quad (3.60)$$

Man wählt nach Augenmaß einen Bereich kleinerer k , in dem der Plot ungefähr horizontal verläuft. Eine gute Wahl für k zu treffen ist schwierig, da die Punktfolge nicht eindeutig zu interpretieren ist.

Dekkers und de Haan [5] zeigen von ihrem Satz ausgehend weitere Resultate. Sie konstruieren Quantil- und Tailschätzer und bestimmen dazu Konfidenzintervalle.

3.4.2 Hill Schätzer

Mit dem Hill Schätzer wird der Parameter $\alpha = \xi^{-1}$ der verallgemeinerten Extremwertverteilung geschätzt.

Wieder bezeichne X_1, \dots, X_n eine Stichprobe vom Umfang n . Es wird angenommen, dass die Zufallsvariablen **iid** mit einer Verteilungsfunktion $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$, $\alpha > 0$, dem Anziehungsbereich einer Fréchet Verteilung sind. Es gilt $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}\mathcal{L}(x)$, $x > 0$, mit $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$, die Tails werden also fetter, je kleiner α wird. Man kann nachrechnen: $E|X|^p = \infty$, wenn $X \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ und $p \geq \alpha > 0$. Zunächst nimmt man an, dass die Zufallsvariable X eine Verteilungsfunktion F hat, für die gilt:

$$\mathbf{P}(X > x) = \bar{F}(x) = x^{-\alpha}, \quad x \geq 1, \alpha > 0. \quad (3.61)$$

Für die transformierte Zufallsvariable $Y = \ln X$ gilt $\mathbf{P}(Y > y) = e^{-\alpha y}$, für $y \geq 0$, d.h. $Y \sim \text{exponential}(\alpha)$ und α kann mit Maximum Likelihood durch das Mittel der Stichprobe geschätzt werden:

$$\hat{\alpha}_n = (\bar{Y}_n)^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln X_j \right)^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln X_{j,n} \right)^{-1}. \quad (3.62)$$

Man kennt nach Voraussetzung nur $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ mit einer langsam variierenden Funktion $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$, siehe Def. 3.6. Daher nimmt man \mathcal{L} oberhalb einer (hohen) Schwelle u als konstant an: $\mathcal{L}(x) = c$, für $x \geq u$. Damit folgt:

$$\bar{F}(x) = x^{-\alpha}\mathcal{L}(x) \approx cx^{-\alpha}, \quad x \geq u > 0. \quad (3.63)$$

Unter der Annahme, dass $c = u^\alpha$ gilt, folgt unmittelbar der Maximum Likelihood Schätzer von α :

$$\hat{\alpha}_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \left(\frac{X_{j,n}}{u} \right) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln X_{j,n} - \ln u \right)^{-1}. \quad (3.64)$$

Wenn man mit n_u die Mächtigkeit der Menge $\{i : X_{i,n} > u, i = 1, \dots, n\}$ bezeichnet,

$$n_u := \text{card} \{i : X_{i,n} > u, i = 1, \dots, n\}, \quad (3.65)$$

und dann auf $\{n_u = k\}$ bedingt, so reduziert sich der Maximum Likelihood Schätzer von α und C auf das Maximieren der gemeinsamen Dichte von $(X_{k,n}, \dots, X_{1,n})$.

Daraus folgt der Hill Schätzer für α und C :

Definition 3.18 (Hill Schätzer) Für die Stichprobe $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$ mit $\bar{F}(x) = cx^{-\alpha}$ für $x > u$ lautet der Hill Schätzer

$$\hat{\alpha}_{k,n}^{(H)} = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln \left(\frac{X_{j,n}}{X_{k,n}} \right) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1}. \quad (3.66)$$

Die Konstante c wird geschätzt durch

$$\widehat{c}_{k,n} = \frac{k}{n} X_{k,n}^{\alpha_{k,n}^{(H)}}. \quad (3.67)$$

Bemerkung 3.19 Die Schwelle u sollte in Abhängigkeit von n so gewählt werden, dass für die Anzahl k der Überschreitungen von u gilt $k(n) \rightarrow \infty$ und $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Satz 3.20 (Eigenschaften des Hill Schätzers) Sei (X_n) streng stationär mit Verteilungsfunktion $F \in \mathbf{MDA}(\Phi_\alpha)$. Die Verteilungsfunktion F erfülle

$$\overline{F}(x) = \mathbf{P}(X > x) = x^{-\alpha} \mathcal{L}(x), \quad x > 0, \quad (3.68)$$

für ein $\alpha > 0$ und $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$. Der Hill Schätzer $\alpha_{k,n}^{(H)}$, kurz $\alpha^{(H)}$, hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) (Schwache Konsistenz) Wenn die (X_n) **iid** oder schwach abhängig oder ein linearer Prozeß sind, und wenn $k \rightarrow \infty$ und $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt:

$$\widehat{\alpha}^{(H)} \xrightarrow{P} \alpha, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.69)$$

- (ii) (Starke Konsistenz) Wenn (X_n) eine **iid** Folge ist, und wenn $\frac{k}{n} \rightarrow 0$, $\frac{k}{\ln \ln n} \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt:

$$\widehat{\alpha}^{(H)} \xrightarrow{\text{a.s.}} \alpha, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.70)$$

- (iii) (Asymptotische Normalität) Wenn (X_n) eine **iid** Folge ist und weitere Bedingungen, siehe EKM [6], Kapitel 6.4, für k und F erfüllt sind, dann gilt:

$$\sqrt{k} (\widehat{\alpha}^{(H)} - \alpha) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \alpha^2), \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.71)$$

Wie beim Pickands Schätzer in (3.60) wird hier entsprechend der *Hill Plot*

$$\left\{ \left(k, \widehat{\alpha}_{k,n}^{(H)} \right) : k = 1, \dots, n \right\} \quad (3.72)$$

betrachtet, und man wählt den Schätzwert aus einem Bereich kleiner k , in dem er ungefähr horizontal verläuft. Die Varianz des Schätzers hängt von α ab, das unbekannt ist. Um Konfidenzintervalle für α zu berechnen, benutzt man geeignete Schätzer für α , z.B. $\widehat{\alpha}^{(H)}$.

Der Hill Schätzer ist sensibel gegenüber Abhängigkeiten in den Zeitreihen. Bei starker Abhängigkeit liefert er unbrauchbare Ergebnisse.

Aus Satz 3.20, Gleichung (3.71), folgt für geeignetes $k = k(n) \rightarrow \infty$

$$\sqrt{k} (\widehat{\alpha}^{(H)} - \alpha) \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, \alpha^2), \quad (3.73)$$

die asymptotische Varianz $\frac{\alpha^2}{k}$ von $\hat{\alpha}^{(H)}$ fällt in k . Daher sollte man k möglichst groß wählen. Die Wahl von k ist allerdings schwierig: wird k zu groß gewählt, so kann es passieren, dass die Annahmen ($L(x) = c, x > u$) nicht mehr hinreichend gut erfüllt sind, was zu einer Verzerrung (Bias) des Schätzers führen kann. Um dies zu vermeiden, muß $k(n)$ in Abhängigkeit von $\mathcal{L}(x) \in \mathcal{R}_0$ so gewählt werden, dass $k(n) \rightarrow \infty$ hinreichend langsam, es darf also immer nur eine verhältnismässig kleine Anzahl k der n vorliegenden X_i für den Schätzer benutzt werden. Man spricht vom *Bias-Variance Trade-Off*, siehe EKM [6], Kapitel 6.4.

Abbildung 3.2 zeigt Beispiele für den Schätzer in Abhängigkeit von der Schwelle u bzw. der Anzahl n_u der Schwellenüberschreitungen. In Abbildung 3.4 sieht man den Schätzer für 4 Anleihen.

3.4.3 Maximum Likelihood Schätzer

Eine andere Methode, um den Parameter ξ einer verallgemeinerten Extremwertverteilung zu schätzen, beruht auf der Annahme, dass die Verteilung F der **iid** Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n oberhalb einer (hohen) Schwelle näherungsweise verallgemeinert Pareto verteilt ist.

Sei X_1, \dots, X_n eine Stichprobe, die von **iid** Zufallsvariablen $X \sim F \in \mathbf{MDA}(H_\xi)$ mit $\xi \in \mathbb{R}$ stammt. Sei n_u die Anzahl der Werte der Stichprobe, die grösser sind als eine (hohe) Schwelle u :

$$n_u := \text{card}\{i : X_i > u, i = 1, \dots, n\}. \quad (3.74)$$

Mit $X_{i(n_u)}$ werden die X_i bezeichnet, die grösser sind als u .

Die Zufallsvariablen $Y_j = X_{i(n_u)} - u, j = 1, \dots, n_u$, bilden den Exzess von X über die Schwelle u . Sie folgen der *Exzessverteilungsfunktion* von X in Abhängigkeit von der Schwelle u :

$$F_u(y) = \mathbf{P}(X - u \leq y | X > u) = \mathbf{P}(Y \leq y | X > u), y \geq 0. \quad (3.75)$$

Aus dieser Gleichung gewinnt man

$$\bar{F}_u(y) = \mathbf{P}(X - u > y | X > u) = \frac{\bar{F}(u + y)}{\bar{F}(u)}, \quad (3.76)$$

woraus folgt

$$\bar{F}(u + y) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(y). \quad (3.77)$$

Nach Satz 3.14 (ii) erfüllt F_u für die verallgemeinerte Pareto Verteilung $G_{\xi, \beta}$ mit einer geeigneten Funktion $\beta(u)$

$$\lim_{u \nearrow x_F} \sup_{0 < x < x_F - u} |F_u(x) - G_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0. \quad (3.78)$$

Daher kann man für große u \bar{F}_u abschätzen:

$$\bar{F}_u(y) \approx \bar{G}_{\xi, \beta(u)}(y). \quad (3.79)$$

Werden nun $\bar{F}_u(y)$ und $\bar{F}(u)$ getrennt geschätzt, so können große Quantile von F über die Relation (3.75) geschätzt werden. Wesentlich an diesem Verfahren (POT, Peaks over Threshold, genannt) ist die Wahl von u . Es ist wichtig, dass oberhalb von u hinreichend viele Daten liegen, damit $\bar{F}(u)$ hinreichend genau geschätzt werden kann. Die Verteilung $\bar{F}_u(y)$ gewinnt man aus (3.79). Einen Schätzer für $\bar{F}(u)$ liefert die empirische Verteilungsfunktion:

$$\widehat{\bar{F}(u)} = \bar{F}_n(u) = \frac{n_u}{n}. \quad (3.80)$$

Sind die Parameter ξ, β in Gleichung (3.79) bekannt, so können die Quantile von F ermittelt werden. Die Parameter müssen allerdings meist in Abhängigkeit von u geschätzt werden.

Für die Daten $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_l)$ gelte $Y_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} G_{\xi, \beta}$. Die Dichte der GPD ist

$$g_{\xi, \beta}(y) = \frac{1}{\beta} \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}, \quad x \in \mathcal{D}(\xi, \beta). \quad (3.81)$$

Daraus ergibt sich die Log-Likelihood-Funktion

$$l((\xi, \beta); \mathbf{Y}) = -l \ln \beta - \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \sum_{i=1}^l \ln \left(1 + \frac{\xi}{\beta} \mathbf{Y}_i\right), \quad Y_i \in \mathcal{D}(\xi, \beta). \quad (3.82)$$

Für $\xi > -\frac{1}{2}$ liefert numerisches Lösen von (3.82) gute Schätzer $\hat{\xi}_l$ und $\hat{\beta}_l$. Es kann gezeigt werden, dass

$$\sqrt{l} \left(\hat{\xi}_l - \xi, \frac{\hat{\beta}_l}{\beta} - 1 \right)^T \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, M^{-1}), \quad l \rightarrow \infty, \quad (3.83)$$

wo

$$M^{-1} = (1 + \xi) \begin{pmatrix} 1 + \xi & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

und $N(\mathbf{0}, M^{-1})$ die bivariate Normalverteilung mit Erwartungswert $\mathbf{0}$ und Kovarianzmatrix M^{-1} bezeichnet. Seien nun die Y_j , $j = 1, \dots, n_u$, die Exzesse einer Stichprobe X_1, \dots, X_n . Wegen Gleichung (3.79) sind sie verallgemeinert Pareto verteilt und n_u ist unabhängig von den Y_i für hinreichend großes u . Mit $\tau = -\frac{\xi}{\beta}$ kann die resultierende bedingte Log-Likelihood ermittelt werden:

$$\hat{\xi} = \hat{\xi}(\tau) = \frac{1}{n_u} \sum_{j=1}^{n_u} \ln(1 - \tau Y_j). \quad (3.85)$$

Der Parameter τ erfüllt

$$h(\tau) := \frac{1}{\tau} + \frac{1}{n_u} \left(\frac{1}{\widehat{\xi}(\tau)} + 1 \right) \sum_{j=1}^{n_u} \frac{Y_j}{1 - \tau Y_j} = 0. \quad (3.86)$$

Die Funktion $h(\tau)$ ist auf $\tau \in (-\infty, \max\{Y_1, \dots, Y_{n_u}\})$ definiert und stetig bei 0.

Dieser Schätzer wurde in dieser Arbeit benutzt. Er ist in Alexander McNeils *EVIS* Paket unter dem Namen *shape* implementiert. Die Software kann man herunterladen von <http://www.math.ethz.ch/~mcneil/>.

Schätzer für β und ν

Der Parameter β kann ebenfalls über die Log-Likelihood Funktion (3.82) geschätzt werden. Hierzu wird die Verteilungsannahme aus Abschnitt 2.3 benötigt.

Nimmt man an, dass die vorliegenden Verteilungen verallgemeinert Pareto sind, dann wird ξ in die Funktion h aus (3.86) eingesetzt und $\widehat{\beta}$ aus $h(-\widehat{\xi}/\widehat{\beta})$ berechnet. Nimmt man eine Exponentialverteilung an, dann ergibt sich aus deren Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \quad (3.87)$$

die Log-Likelihood-Funktion

$$l(\beta; Y) = -n_u \ln \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{n_u} Y_j. \quad (3.88)$$

Um l zu minimieren, wird eine Nullstelle der Ableitung gesucht:

$$l'(\beta; Y) = -\frac{n_u}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{j=1}^{n_u} Y_j \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.89)$$

Als Schätzer für β ergibt sich:

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{n_u} \sum_{j=1}^{n_u} Y_j =: \bar{Y}. \quad (3.90)$$

Nimmt man an, dass $\xi \neq 0$, dann folgt entsprechend aus

$$\widehat{F}(u + y) = \frac{n_u}{n} \left(1 + \widehat{\xi} \frac{y}{\widehat{\beta}} \right)^{-1/\widehat{\xi}} \quad (3.91)$$

mit $z = y + u$

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(z) &= 1 - \left(\left(\frac{n_u}{n} \right)^{-\widehat{\xi}} \left(1 + \widehat{\xi} \frac{z - u}{\widehat{\beta}} \right) \right)^{-1/\widehat{\xi}} = \\
&= 1 - \left(1 - \frac{\left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\xi}} - 1}{\left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\xi}}} + \frac{\widehat{\xi}}{\widehat{\beta}} \left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\xi}} (z - u) \right) = \\
&= 1 - \left(1 + \widehat{\xi} \frac{z - u - \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left(\left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\xi}} - 1 \right)}{\widehat{\beta} \left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\xi}}} \right)^{-1/\widehat{\xi}} = \\
&= 1 - \left(1 + \widehat{\xi} \frac{z - u - \widehat{\nu}}{\widehat{\beta}'} \right)^{-1/\widehat{\xi}}.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Im letzten Schritt wurden

$$\widehat{\nu} := \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left(\left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\xi}} - 1 \right) \quad \text{und} \quad \widehat{\beta}' := \widehat{\beta} \left(\frac{n_u}{n} \right)^{\widehat{\xi}} \tag{3.93}$$

eingesetzt. Das sind die Schätzer für die Parameter ν und β der verallgemeinerten Pareto Verteilung.

Abbildung 3.3 zeigt Beispiele für den Schätzer in Abhängigkeit von der Schwelle u bzw. der Anzahl der Überschreitungen n_u von u . In Abbildung 3.5 sieht man den Schätzer für 4 Anleihen.

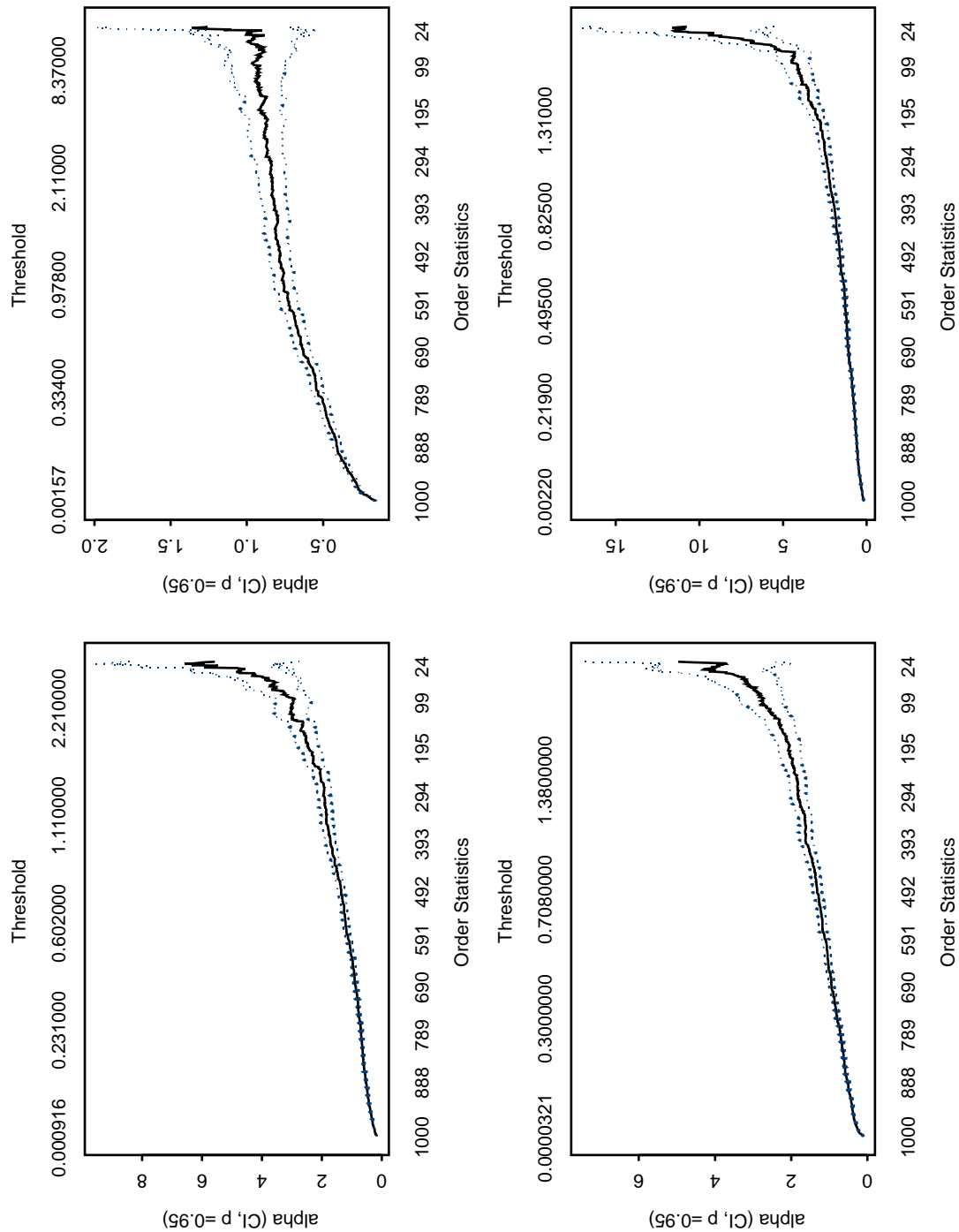


Abbildung 3.2: Beispiele für Hill-Plots von simulierten Zufallsvariablen mit exponential(1), GPD(1.0), GPD(0.1) und GPD(-0.2), auf der Ordinate: $\alpha = 1/\xi$, auf der Abszisse oben: die Schwelle u , unten: die Anzahl der Überschreitungen n_u von u

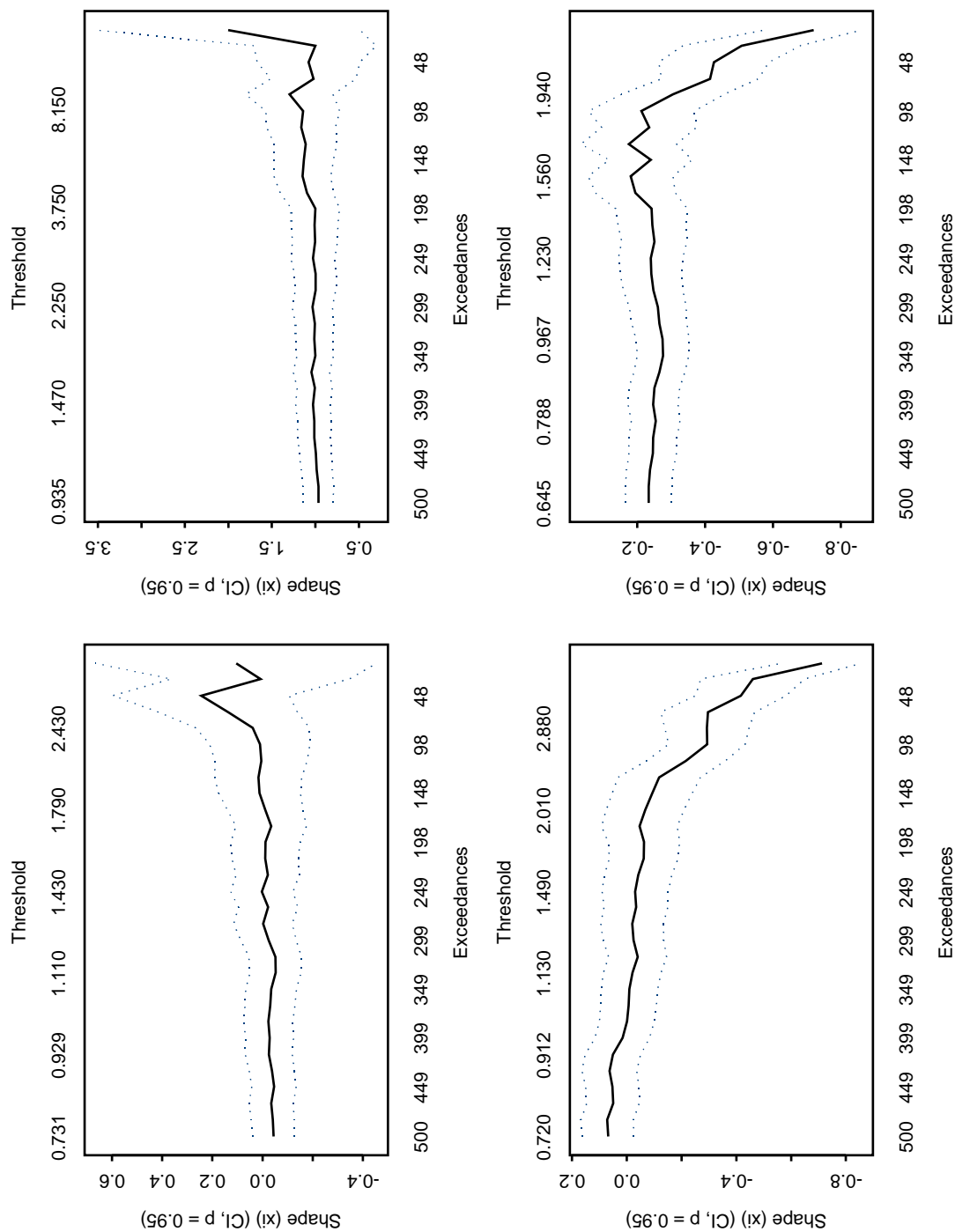


Abbildung 3.3: Beispiele für Plots der Maximum Likelihood Schätzer von Zufallsvariablen mit exponential(1), GPD(1.0), GPD(0.1) und GPD(-0.2). Auf der Ordinate: ξ , auf der Abszisse oben: die Schwelle u , unten: die Anzahl der Überschreitungen n_u von u .

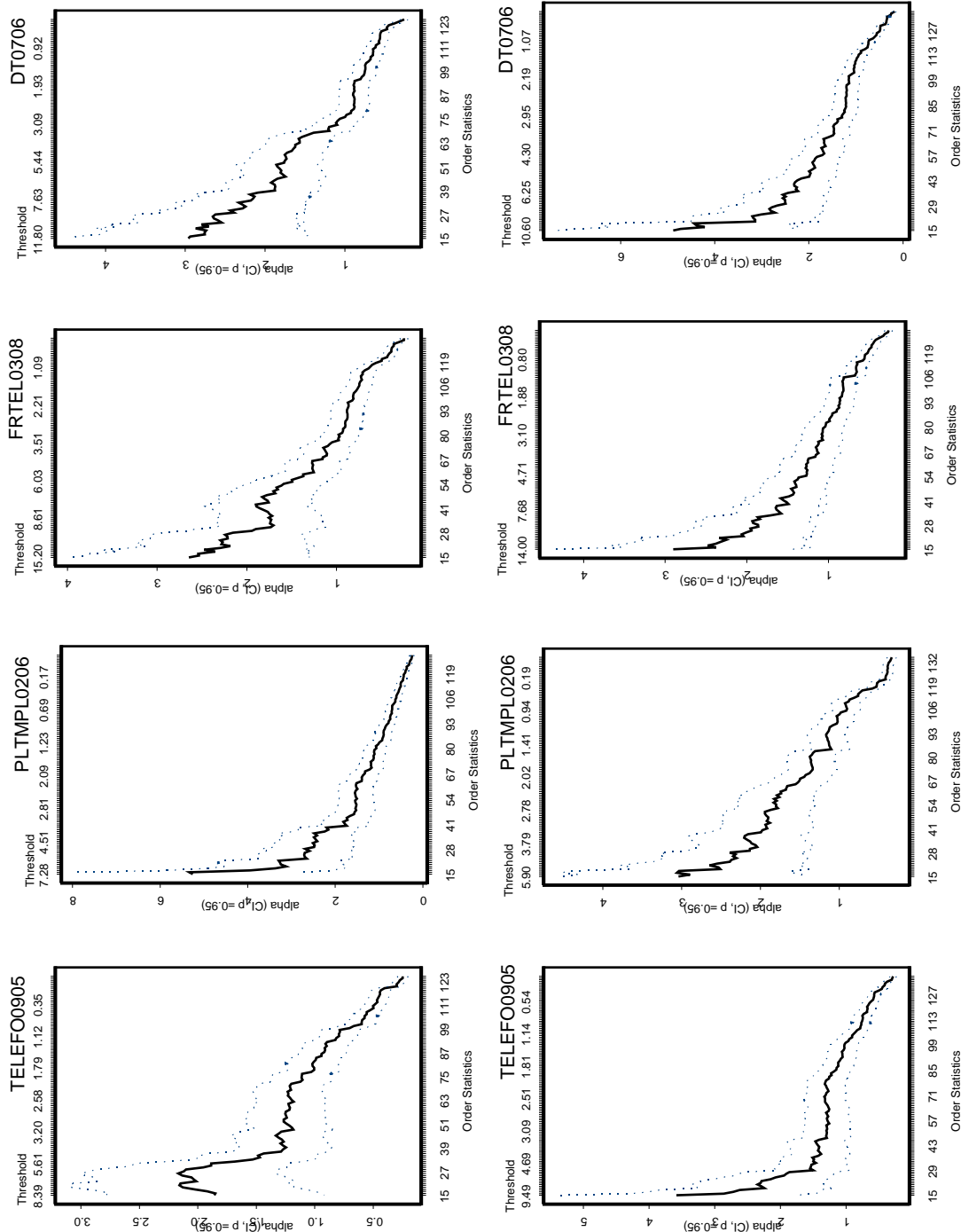


Abbildung 3.4: Beispiele für Plots der Hill Schätzer für die positiven (oben) und negativen (unten) Tagesdifferenzen. Auf der Ordinate: $\alpha = 1/\xi$, auf der Abszisse oben: die Schwelle u , unten: die Anzahl der Überschreitungen n_u von u .

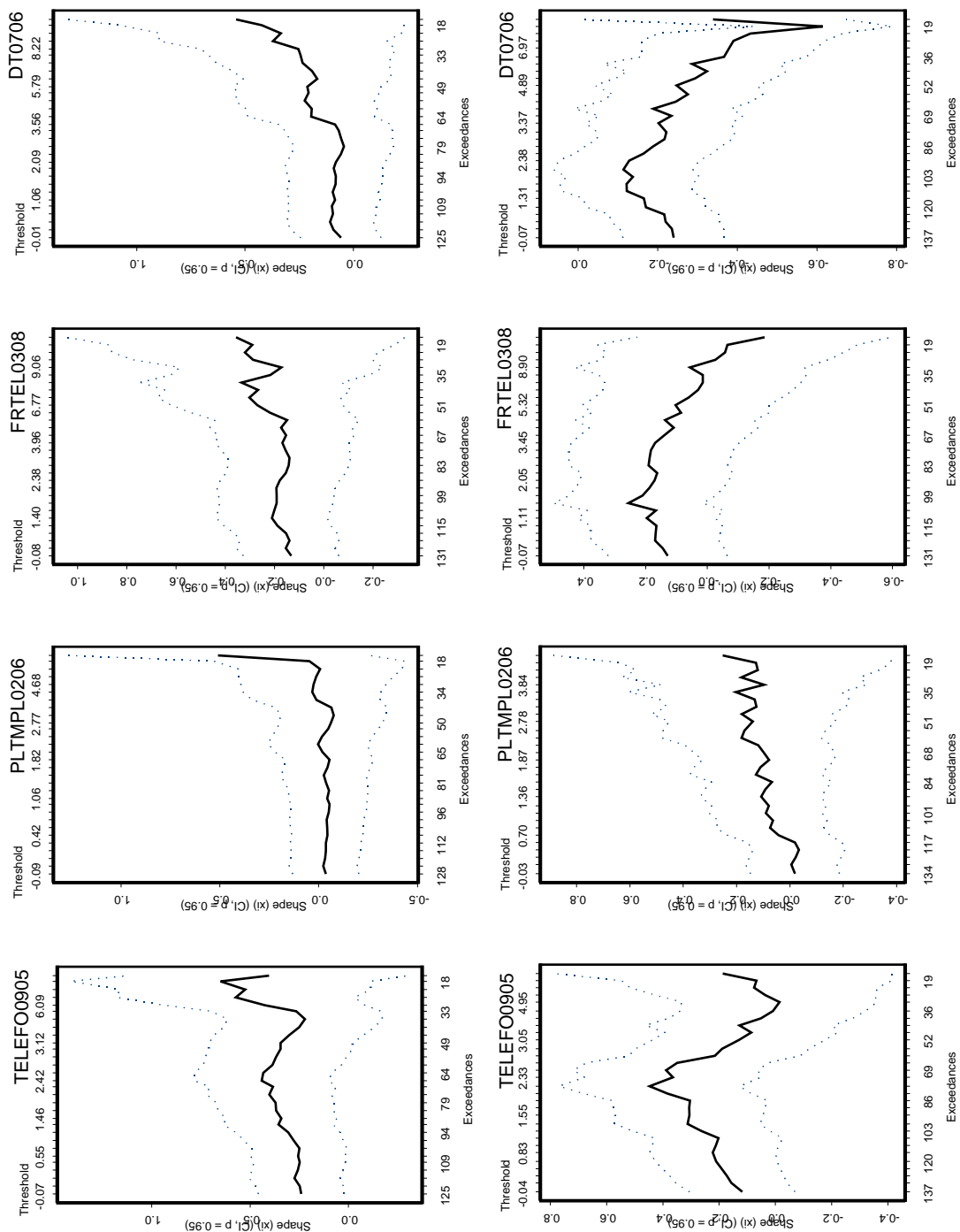


Abbildung 3.5: Beispiele für Plots der Maximum Likelihood Schätzer für die positiven (oben) und negativen (unten) Tagesdifferenzen. Auf der Ordinate: ξ , auf der Abszisse oben: die Schwelle u , unten: die Anzahl der Überschreitungen n_u von u .

Kapitel 4

Copulae

Das Konzept der Copula wird kurz vorgestellt. Ausführliche Beweise und nähere Erläuterungen findet man z.B. in Embrechts, Lindskog und McNeil [7] oder in Kuhn [14].

4.1 Grundlagen

Die Relationen \leq , $=$, $<$ und Operationen \max , \min werden für m -dimensionale Vektoren \mathbf{X} , \mathbf{x} komponentenweise angewandt, d.h.

$$\mathbf{X} \leq \mathbf{x} \iff X_i \leq x_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.1)$$

Die Mengen $D = S_1 \times \dots \times S_m$ mit $S_i = [a_i, b_i] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, \dots, m$, bezeichnet man kurz mit $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ und nennt sie m -Quader. Es gelte $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, m$. Die Fälle einzelner, mehrerer oder aller $a_i = -\infty$, $b_i = \infty$, $i = 1, \dots, m$, lässt man zu.

Definition 4.1 (Verteilungsfunktion) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}(\cdot)$ induziert auf einem Ereignisraum Ω für einen Zufallsvektor $\mathbf{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ eine (m -variate) Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ mittels

$$F(\mathbf{x}) := \mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}). \quad (4.2)$$

Die Funktion

$$F_i(x_i) := \mathbf{P}(X_i \leq x_i) \quad (4.3)$$

heißt Randverteilung der i -ten Komponente von \mathbf{X} . Mit Indexmengen $A \subseteq \{1, \dots, m\}$ kann man über

$$F_A(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(X_i \leq x_i, \forall i \in A) \quad (4.4)$$

höherdimensionale Randverteilungen definieren.

Lemma 4.2 (Eigenschaften einer Verteilungsfunktion) Die m -dimensionale Verteilungsfunktion F mit Träger $D = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) *Unmögliches Ereignis*

$$F(\mathbf{s}) = 0, \quad \forall \mathbf{s} \in \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m : \exists s_k = a_k\}. \quad (4.5)$$

(ii) *Randverteilung der k -ten Komponente*

$$F(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_m) = F_k(x). \quad (4.6)$$

(iii) *Eine Verteilung F fällt in keiner Variablen*

$$F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}), \quad \forall \Delta \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

(iv) *Sicheres Ereignis*

$$F(b_1, \dots, b_m) = 1. \quad (4.8)$$

4.2 Definition der Copula und einfache Eigenschaften

Definition 4.3 (Copula) *Eine m -Copula ist eine m -dimensionale Verteilungsfunktion*

$$C : [0, 1]^m \mapsto [0, 1], \quad (4.9)$$

für die gilt

$$C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u, \quad \forall u \in [0, 1]. \quad (4.10)$$

Bemerkung 4.4

(i) Eine m -Copula ist eine Verteilungsfunktion auf $[0, 1]^m$ mit uniformen Randverteilungen auf $[0, 1]$.

(ii) Eine m -Copula ist eine m -dimensionale Verteilungsfunktion und induziert daher für Verteilungen F_1, \dots, F_m ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, 1]^m$ mittels

$$\mathbf{P}(F_1(X_1) \leq u_1, \dots, F_m(X_m) \leq u_m) = C(u_1, \dots, u_m). \quad (4.11)$$

(iii) Redet man von Copulae schlechthin oder ist klar, welche Dimension m vorliegt, so sagt und schreibt man Copula statt m -Copula.

Satz 4.5 *Für eine Copula C und alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0, 1]^m$ gilt:*

$$|C(\mathbf{v}) - C(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^m |v_k - u_k|. \quad (4.12)$$

Also ist C gleichmäßig stetig auf $[0, 1]^m$.

Der folgende Satz besagt, dass eine multivariate Verteilungsfunktion als Komposition ihrer Randverteilungen und einer Copula, die die Abhängigkeitsstruktur beschreibt, dargestellt werden kann.

Satz 4.6 (Satz von Sklar) *Für jede m -dimensionale Verteilungsfunktion F mit inversen Randverteilungen $F_1^{\leftarrow}, \dots, F_m^{\leftarrow}$ existiert eine m -Copula C , so dass für alle $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^m$ gilt:*

$$F(x_1, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)), \quad (4.13)$$

wo also $u_i = F_i(x_i)$. Sind die F_1, \dots, F_m alle stetig, so ist C eindeutig bestimmt auf $[0, 1]^m$; also definiert eine m -Copula C mittels der Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_m die m -dimensionale Verteilungsfunktion F .

Der Satz von Sklar ist im Kapitel 5.1 wichtig für das Beschreiben multivariater Extremwertverteilungen. Nach dem Satz von Sklar kann man von F und den F_1, \dots, F_m ausgehend die Copula unmittelbar anschreiben:

Korollar 4.7 *Für die Copula C und die Verteilungsfunktion F mit den Randverteilungen F_1, \dots, F_m folgt aus dem Satz von Sklar für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^m$:*

$$C(u_1, \dots, u_m) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_m^{\leftarrow}(u_m)). \quad (4.14)$$

Satz 4.8 *Die stetigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_m mit Copula C sind genau dann unabhängig, wenn $C = u_1 u_2 \cdots u_m$.*

Copulae sind invariant gegenüber streng monoton steigenden Transformationen der Zufallsvariablen. Wendet man streng monotone Transformationen $T_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, m$, auf die Zufallsvariablen X_i , $i = 1, \dots, m$, an, so lässt sich die Copula der ursprünglichen Zufallsvariablen leicht auf die der transformierten Daten umschreiben: Falls die streng monotonen Transformationen stetig und eindeutig umkehrbar sind, ist auch die Verteilungsfunktion der transformierten Zufallsvariablen stetig. Sind alle Transformationen streng monoton steigend, so folgt aus der Invarianz der Quantilfunktion gegenüber solchen Transformationen der folgende Satz.

Satz 4.9 *Der Zufallsvektor \mathbf{X} sei stetig verteilt mit Copula C . Die Transformationen T_1, \dots, T_m seien streng monoton steigend auf dem Bild von X_1, X_2, \dots, X_m . Dann hat auch $T_1(X_1), \dots, T_m(X_m)$ die Copula C .*

Entsprechend folgt für eine streng monoton fallende Transformation eines X_k aus dem „Umdrehen“ ihrer Quantilfunktion $F_k^{\leftarrow}(u)$ zu $F_k^{\leftarrow}(1 - u)$ der nächste Satz.

Satz 4.10 *Der Zufallsvektor \mathbf{X} sei stetig verteilt mit Copula $C_{\mathbf{X}}$. Die Transformationen T_1, \dots, T_m seien streng monoton auf dem Bild von X_1, X_2, \dots, X_m und $C_{\mathbf{T}}$ sei die Copula von $T_1(X_1), \dots, T_m(X_m)$. Eine der Transformationen, T_k , sei monoton fallend; ohne Einschränkung kann $k = 1$ gewählt werden. Es gilt:*

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{T}}(u_1, \dots, u_m) &= C_{T_2(X_2), \dots, T_m(X_m)}(u_2, \dots, u_m) \\ &\quad - C_{X_1, T_2(X_2), \dots, T_m(X_m)}(1 - u_1, u_2, \dots, u_m). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Beispiel 4.11 [Copula der 2-dimensionalen Normalverteilung]

$$C_{N,\rho}(u_1, u_2) = \int_{x=-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{y=-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx dy, \quad (4.16)$$

wobei Φ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Beispiel 4.12 [2-dimensionale Gumbel-Copula]

$$C_{G,\delta}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\ln u_1)^\delta + (-\ln u_2)^\delta\right)^{\frac{1}{\delta}}\right). \quad (4.17)$$

Beispiel 4.13 [Archimedische Copula] Die Klasse der Archimedischen Copulae wird von den streng monoton fallenden Funktionen $h: (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ mit $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \infty$ und $h(1) = 0$ erzeugt:

$$C(u, v) = h^{-1}(h(u) + h(v)). \quad (4.18)$$

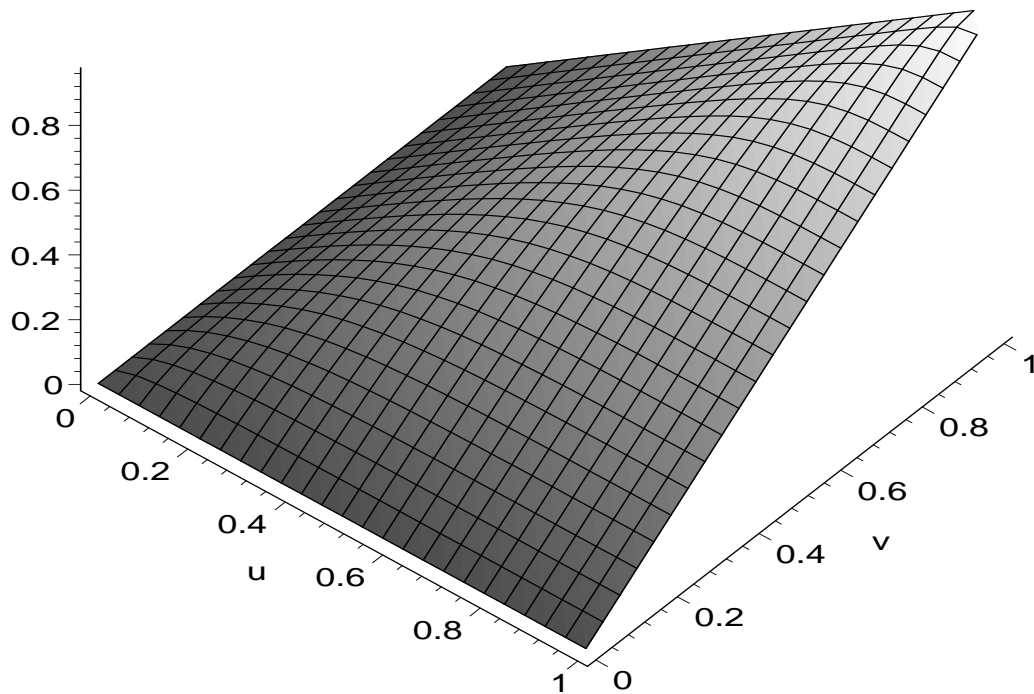


Abbildung 4.1: Gumbelcopula für $\delta = 3$

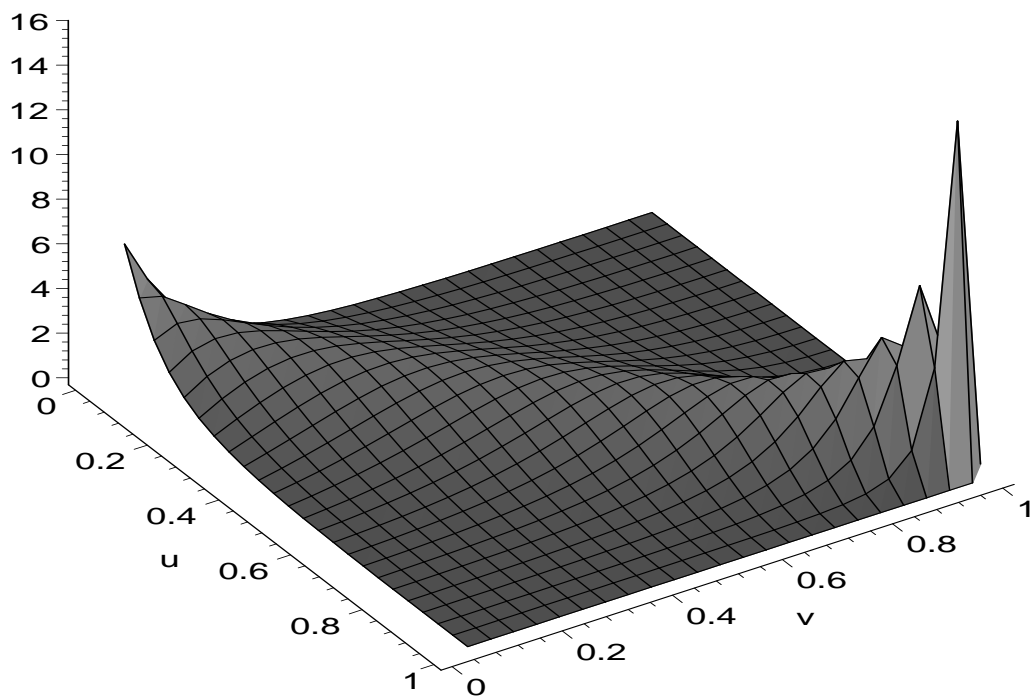


Abbildung 4.2: Dichte der Gumbelcopula für $\delta = 3$; die Zacken sind durch den groben Bildraster bedingt

Kapitel 5

Multivariate Extremwerttheorie, Abhängigkeiten

In diesem Kapitel werden zuerst einige der Ergebnisse aus Kapitel 3 mittels Copulae auf den mehrdimensionalen Fall übertragen, die Theorie dazu liefert z.B. Resnick [16]. Anschließend werden verschiedene Abhängigkeitsmaße vorgestellt, dazu werden die Veröffentlichungen von Lindskog, McNeil, Schmock [15], Schather&Tawn [18] und Kuhn [14] herangezogen.

5.1 Multivariate Extremwertverteilungen

Parallel zur univariaten Extremwerttheorie in Kapitel 3 wird die Verteilung einer Stichprobe des Umfangs n von iid Zufallsvektoren $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} F$ betrachtet. In Komponenten geschrieben:

$$\left(\begin{array}{c} X_{1,1} \\ \vdots \\ X_{m,1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} X_{1,2} \\ \vdots \\ X_{m,2} \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} X_{1,n} \\ \vdots \\ X_{m,n} \end{array} \right) \stackrel{\text{iid}}{\sim} F. \quad (5.1)$$

Die komponentenweisen Maxima werden bezeichnet mit

$$\begin{aligned} M_{1,n} &= \max_{1 \leq i \leq n} \{X_{1,i}\}, \\ M_{2,n} &= \max_{1 \leq i \leq n} \{X_{2,i}\}, \\ &\vdots = \vdots \\ M_{m,n} &= \max_{1 \leq i \leq n} \{X_{m,i}\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wenn für alle Komponenten die univariaten Extremwertverteilungen existieren, ergibt sich die multivariate Extremwertverteilung, wenn sie existiert, als Grenzverteilung von

$$\left(\begin{array}{c} \frac{M_{1,n}-d_{1,n}}{c_{1,n}} \\ \vdots \\ \frac{M_{m,n}-d_{m,n}}{c_{m,n}} \end{array} \right) \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Als multivariate Extremwertverteilung G ergibt sich:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{z}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_{1,n} \leq d_{1,n} + c_{1,n}z_1, \dots, M_{m,n} \leq d_{m,n} + c_{m,n}z_m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(d_{1,n} + c_{1,n}z_1, \dots, d_{m,n} + c_{m,n}z_m). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nach dem Satz von Sklar kann die multivariate Extremwertverteilung G mit Hilfe der univariaten Extremwerttheorie, gemäß der zu den Randverteilungen F_i die univariaten Extremwertverteilungen H_{ξ_i} gehören, nach Wahl passender Folgen $c_{i,n}$, $d_{i,n}$, $i = 1, \dots, m$, mit einer Copula angeschrieben werden:

$$G(\mathbf{z}) = C(H_{\xi_1}(z_1), \dots, H_{\xi_m}(z_m)). \quad (5.5)$$

Nun folgt eine Aussage über das Verhalten der *univariaten Extremwertverteilungen* unter streng monoton steigenden Transformationen.

Lemma 5.1 Für $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} F$ und eine streng monoton steigende Transformation T sei $X_i^* = T(X_i) \stackrel{\text{iid}}{\sim} F^*$, $i = 1, \dots, m$. Seien M_n, M_n^* die Maxima der X_1, \dots, X_n bzw. der X_1^*, \dots, X_n^* . Es gelte

$$\mathbf{P}\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq z\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(x) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}\left(\frac{M_n^* - d_n^*}{c_n^*} \leq z^*\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H^*(z^*), \quad (5.6)$$

mit den Extremwertverteilungen H, H^* . Dann folgt wegen $X_i^* = T(X_i)$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\frac{M_n^* - d_n^*}{c_n^*} \leq z^*\right) &= \mathbf{P}(M_n \leq T^{-1}(d_n^* + c_n^*z^*)) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq \frac{T^{-1}(d_n^* + c_n^*z^*) - d_n}{c_n}\right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

und es existiert die Transformation

$$s(z^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T^{-1}(d_n^* + c_n^*z^*) - d_n}{c_n}, \quad (5.8)$$

so dass $H^*(z^*) = H(s(z^*))$ gilt.

Für den m -variaten Vektor $(M_{1,n}, \dots, M_{m,n})^T$ existiere die Extremwertverteilung G gemäß (5.4). Dann kann man mit den Bezeichnungen und Bedingungen aus Lemma 5.1 unter der Annahme, dass

$$\frac{M_{i,n}^* - d_{i,n}^*}{c_{i,n}^*} \rightarrow H_{\xi_i^*}(z^*) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (5.9)$$

gilt, definieren:

$$G^*(\mathbf{z}^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_{1,n}^* \leq d_{1,n}^* + c_{1,n}^*z_1^*, \dots, M_{m,n}^* \leq d_{m,n}^* + c_{m,n}^*z_m^*); \quad (5.10)$$

mit Copula C^* geschrieben:

$$G^*(\mathbf{z}^*) = C^*(H_{\xi_1^*}(z_1^*), \dots, H_{\xi_m^*}(z_m^*)). \quad (5.11)$$

Aus Lemma 5.1 folgt dann:

$$\begin{aligned} G^*(\mathbf{z}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{M_{i,n} - d_{i,n}}{c_{i,n}} \leq \frac{T_i^{-1}(d_{i,n}^* + c_{i,n}^* z_i^*) - d_{i,n}}{c_{i,n}}, \quad i = 1, \dots, m \right) \\ &= C(H_{\xi_1}(s_1(z_1^*)), \dots, H_{\xi_m}(s_m(z_m^*))), \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit den Funktionen s_1, \dots, s_m aus Gleichung (5.8). Also gelten:

$$H_{\xi_i}(s_i(z_i^*)) = H_{\xi_i^*}(z_i^*), \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{sowie } C = C^*. \quad (5.13)$$

Wenn nun Gleichung (5.10) erfüllt ist, dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, da die \mathbf{X}_i , $i = 1, \dots, n$, **iid** sind, mit passenden Folgen $c_{j,n}, d_{j,n}$, $j = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_{1,kn} \leq d_{1,n} + c_{1,n} z_1, \dots, M_{m,kn} \leq d_{m,n} + c_{m,n} z_m) \\ = G^k(z_1, \dots, z_m) = C^k(H_{\xi_1}(z_1), \dots, H_{\xi_m}(z_m)). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Weiterhin hat man:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(M_{i,kn} \leq c_{i,n} z_i + d_{i,n}, \quad i = 1, \dots, m) = \\ &= \mathbf{P} \left(\frac{(M_{i,kn} - d_{i,kn})}{c_{i,kn}} \leq \frac{(c_{i,n} z_i + d_{i,n} - d_{i,kn})}{c_{i,kn}}, \quad i = 1, \dots, m \right) \\ &\rightarrow G \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{i,n} z_i + d_{i,n} - d_{i,kn}}{c_{j,kn}}, \quad i = 1, \dots, m \right) \\ &= G \left(H_{\xi_i} \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right), \quad i = 1, \dots, m \right) \\ &= C \left(H_{\xi_j} \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right), \quad i = 1, \dots, m \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

mit Folgen σ_i, μ_i , $i = 1, \dots, m$. Außerdem gilt, da die $X_{i,1}, \dots, X_{i,n}$ für $i = 1, \dots, m$ **iid** sind:

$$\mathbf{P}(M_{i,kn} \leq d_{i,n} + c_{i,n} z_i) \xrightarrow{P} H_{\xi_i}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.16)$$

Kombination der Gleichungen (5.10), (5.15) und (5.16) liefert für $k \in \mathbb{N}$

$$G^k(\mathbf{z}) = C^*(H_{\xi_1^k}(z_1), \dots, H_{\xi_m^k}(z_m)) \quad (5.17)$$

zur Copula C^* und $k \in \mathbb{N}$. Aus der univariaten Extremwerttheorie ist bekannt:

$$H_{\xi_i^k}(z_i) = H_{\xi_i} \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.18)$$

also folgt, dass C^* mit C , der Copula aus (5.15), übereinstimmt. Setzt man $u_i = H_{\xi_i} \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)$, so ergibt sich aus (5.14), (5.15) und (5.17)

$$C^k(u_1, \dots, u_m) = C(u_1^k, \dots, u_m^k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (5.19)$$

und

$$C^{\frac{1}{r}}(u_1, \dots, u_m) = C\left(u_1^{\frac{1}{r}}, \dots, u_m^{\frac{1}{r}}\right), \forall r \in \mathbb{N}. \quad (5.20)$$

Verknüpfen von (5.19) und (5.20) liefert

$$C^{\frac{k}{r}}(u_1, \dots, u_m) = C\left(u_1^{\frac{k}{r}}, \dots, u_m^{\frac{k}{r}}\right), \forall k, r \in \mathbb{N}, \quad (5.21)$$

also rationale Exponenten. Weil \mathbb{Q}^+ dicht in \mathbb{R}^+ liegt, folgt die Erweiterung auf positive reelle Exponenten:

$$C(u_1^s, \dots, u_m^s) = C^s(u_1, \dots, u_m), \forall s \in \mathbb{R}^+. \quad (5.22)$$

Definition 5.2 Eine Copula mit der Eigenschaft (5.22) heißt *Extremcopula*.

5.1.1 Charakterisierung multivariater Extremwertverteilungen

Bisher wurde die Existenz der multivariaten Extremwertverteilung vorausgesetzt. Nun werden Eigenschaften multivariater Extremwertverteilungen vorgestellt, auf denen später Existenzaussagen aufbauen. Zunächst werden zwei wichtige Klassen von Verteilungsfunktionen definiert.

Definition 5.3 (max-id) Die m -dimensionale Verteilung F heißt *max-infinitely divisible (max-id)*, wenn für sie zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine m -dimensionale Verteilungsfunktion F_n existiert, so dass

$$F_n^n = F. \quad (5.23)$$

Eine m -dimensionale Verteilungsfunktion F ist also max-id genau dann, wenn alle ihre n -ten Wurzeln $F^{1/n}$ Verteilungsfunktionen sind. Hat ein Zufallsvektor \mathbf{X} eine max-id Verteilung, so nennt man auch ihn max-id.

Die Menge der max-id Verteilungen hat eine Reihe besonderer Eigenschaften, vgl. Resnick [16], Kapitel 5. Folgender Satz stellt einige davon vor:

Satz 5.4 (Eigenschaften der max-id Verteilungen)

- (i) Konvergiert eine Folge von m -dimensionalen Verteilungsfunktionen $(F_i^i)_{i \in \mathbb{N}}$ schwach (punktweise an den Stetigkeitspunkten von F_0) gegen eine Verteilungsfunktion F_0 , dann ist F_0 max-id. Die Klasse der max-id Verteilungsfunktionen ist also abgeschlossen in Bezug auf schwache Konvergenz.
- (ii) Eine m -dimensionale Verteilungsfunktion F ist max-id genau dann, wenn für alle reellwertigen $s > 0$ auch die s -te Potenz F^s eine Verteilungsfunktion ist.
- (iii) Seien $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ unabhängige max-id Zufallsvektoren der Dimension m bzw. l . Dann ist $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)^T$ ein $(m + l)$ -dimensionaler max-id Zufallsvektor.

- (iv) Jede eindimensionale Zufallsvariable ist max-id.
- (v) Produkte m -dimensionaler max-id Verteilungsfunktionen sind max-id.
- (vi) Wenn $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ unabhängige m -dimensionale max-id Zufallsvektoren sind, dann ist $\max\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$ max-id; max wird komponentenweise auf Realisierungen angewendet.
- (vii) Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)^T$ max-id und seien die Funktionen $f_i, i = 1, \dots, m$, nichtfallende Funktionen. Dann ist $(f_1(X_1), \dots, f_m(X_m))$ max-id.

Satz 5.5 Eine zweidimensionale Verteilungsfunktion F mit der Dichte $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F$ ist max-id genau dann, wenn für $Q := -\ln F$ auf $\{F > 0\}$ gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} Q \leq 0, \quad (5.24)$$

ausführlich, wenn

$$\frac{\partial}{\partial x} F \frac{\partial}{\partial y} F \leq F \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F \quad \text{fast sicher auf ganz } \mathbb{R}^2. \quad (5.25)$$

Im folgenden Satz werden die *max-id* Verteilungsfunktionen durch ein Exponentenmaß charakterisiert. Ein Exponentenmaß μ ist ein Radon-Maß (das ist ein für Kompakta seines Definitionsbereiches endliches Punktmaß), welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Das Maß μ hat keine Masse auf Punkten, die eine Komponente $= \infty$ haben,

$$\mu([0, \infty]^m \setminus [0, \infty)^m) = 0. \quad (5.26)$$

- (ii) Entweder ist $\mathbf{a} > -\infty$ oder aus $\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$ und $x_i = -\infty$, für ein $i \in \{1, \dots, m\}$, folgt $\mu([-\infty, \mathbf{x}]^C) = \infty$.

Hier und im Folgenden wird das Komplement von $[\cdot]$ mit $[\cdot]^C = (0, \infty)^m \setminus [\cdot]$ bezeichnet. Die Funktion $\mathbf{1}_{\mathbf{x} \geq \mathbf{a}}$ ist die Indikatorfunktion, sie ist 1, wenn $x_i \geq a_i, i = 1, \dots, m$, und 0 sonst.

Satz 5.6 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Eine m -dimensionale Verteilungsfunktion F ist max-id.
- (ii) Für ein $\mathbf{a} \in [-\infty, \infty)^m$ existiert ein Exponentenmaß μ auf (\mathbf{a}, ∞) , mit dem F dargestellt werden kann als

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_{\mathbf{x} \geq \mathbf{a}} \exp(-\mu([-\infty, \mathbf{x}]^C)). \quad (5.27)$$

Definition 5.7 (max-stable) Eine m -dimensionale Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ heißt max-stable genau dann, wenn für alle Exponenten $s > 0$ Funktionen $c_i(s) > 0, d_i(s)$ existieren, so dass für die Potenz F^s gilt:

$$F^s(x) = F(c_1(s)x_1 + d_1(s), \dots, c_m(s)x_m + d_m(s)). \quad (5.28)$$

Für eine *max-stable* Verteilungsfunktion F ist F^s für $s > 0$ also eine Verteilungsfunktion; daraus folgt, dass jede *max-stable* Verteilungsfunktion auch *max-id* ist.

Satz 5.8 *Die Klasse der multivariaten Extremwertverteilungen fällt genau mit der der max-stable Verteilungsfunktionen mit nicht degenerierten Randverteilungen zusammen.*

Charakterisieren der Klasse der m -dimensionalen Extremwertverteilungen entspricht also dem Charakterisieren der Klasse der max-stablen Verteilungen.

Im Weiteren wird es sich als sehr hilfreich erweisen, zunächst die Randverteilungen zu standardisieren. Die Standardisierung ist willkürlich. Hier werden die Randverteilungen der $X_i \sim F_i$, $i = 1, \dots, m$, mit

$$Z_i = \frac{-1}{\ln F_i(X_i)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.29)$$

auf Einheits Fréchet Verteilungen transformiert, da diese für das weitere Vorgehen zweckmäßig sind. Es gilt

$$P(Z_i \leq z_i) = \exp\left(-\frac{1}{z_i}\right), \quad z_i > 0. \quad (5.30)$$

Satz 5.9 *Sei G eine m -dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungen G_i , $i = 1, \dots, m$. Gemäß Gleichung (5.29) können die Randverteilungen zu Einheits Fréchet Verteilungen transformiert werden. Sei*

$$G^*(\mathbf{z}) = G\left(\frac{-1}{\ln G_1(X_1)}, \dots, \frac{-1}{\ln G_m(X_m)}\right) \quad (5.31)$$

die entsprechende Verteilungsfunktion mit Einheits Fréchet Randverteilungen. Dann ist G eine m -dimensionale Extremwertverteilung genau dann, wenn G^* eine Extremwertverteilung ist.

Nun sei $F \in \mathbf{MDA}(G)$ eine m -dimensionale Verteilung mit Randverteilungen F_i , $i = 1, \dots, m$; dann ist

$$F^*(\mathbf{x}) = F\left(\left(\frac{1}{1-F_1}\right)^{\leftarrow}(x_1), \dots, \left(\frac{1}{1-F_m}\right)^{\leftarrow}(x_m)\right) \in \mathbf{MDA}(G^*), \quad (5.32)$$

und es gilt

$$(F^*(n\mathbf{x}))^n \rightarrow G^*(\mathbf{x}). \quad (5.33)$$

Bemerkung 5.10 Für die Randverteilungen F_i^* von F^* , gilt:

$$F_i\left(\left(\frac{1}{1-F_i}\right)^{\leftarrow}(x_i)\right) = 1 - \frac{1}{x_i}. \quad (5.34)$$

Die Ränder von F^* sind also Standard Pareto verteilt.

Auf Grund der letzten Überlegungen können alle m -dimensionalen Extremwertverteilungen G mittels der m -dimensionalen Extremwertverteilungen G^* mit Einheits Fréchet Randverteilungen beschrieben werden. Wenn nun für F und F^* die Forderungen aus Satz 5.9 erfüllt sind, dann wird aus 5.28

$$(G^*(s\mathbf{x}))^s = G(\mathbf{x}), \quad s > 0. \quad (5.35)$$

Da G^* *max-id* ist, existiert ein Exponentenmaß μ^* , und da die Randverteilungen identisch und nur auf $[0, \infty)$ größer als null sind gilt, erscheint die Wahl $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ in Satz 5.6 sinnvoll. Aus Gleichung (5.35) kann auf eine Homogenitätseigenschaft für μ^* geschlossen werden:

$$\mu^*([\mathbf{0}, \mathbf{x}]^C) = s \mu^*([\mathbf{0}, s\mathbf{x}]^C) = s \mu^*(s[\mathbf{0}, \mathbf{x}]), \quad \forall s > 0, \quad \mathbf{x} > \mathbf{0}. \quad (5.36)$$

Dabei wird die Schreibweise $sB = \{sb \mid b \in B\}$ benutzt. Für festes $s > 0$ kann Gleichung (5.36) auf beliebige Quader in $[0, \infty]^m$ erweitert werden. Sie gilt deshalb auf einem Erzeuger der Borel- σ -Algebra \mathcal{B} auf $[0, \infty]^m$; demnach folgt

$$\mu^*(B) = s \mu^*(sB), \quad \forall B \in \mathcal{B}. \quad (5.37)$$

Mit der Euklidischen Norm $|\cdot|$ wird auf \mathbb{R}^m eine Sphäre mit Radius $r > 0$ definiert durch

$$\mathcal{S}_m(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = r\}. \quad (5.38)$$

Bemerkung 5.11

- (i) Welche Norm gewählt wird, ist auf Grund der Äquivalenz der Normen im \mathbb{R}^m unwesentlich. Daher wird hier wegen der größeren Anschaulichkeit die euklidische Norm gewählt.
- (ii) In dieser Arbeit werden Sphären im m -dimensionalen Raum mit $\mathcal{S}_m(r)$ und nicht mit $\mathcal{S}_{m-1}(r)$ bezeichnet. (Ein Index $m - 1$ würde in Kapitel 6 verwirrend wirken.)
- (iii) Die Sphären $\mathcal{S}_m(r)$, $0 < r < \infty$, sind kompakt.

Für Borelmengen $A \in \mathcal{S}_m(1)$ kann durch μ^* ein Maß S definiert werden:

$$S(A) := \mu^* \left(\left\{ x : |x| > 1, \frac{x}{|x|} \in A \right\} \right). \quad (5.39)$$

Da μ^* für kompakte Teilmengen von $[0, \infty]^m$ endlich ist, bleibt auch S endlich auf $\mathcal{S}_m(1)$. Wegen der in Gleichung (5.37) festgestellten Homogenität von μ^* gilt für die beliebige $r > 0$:

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\left\{ y \in [0, \infty]^m : |y| > r, \frac{y}{|y|} \in A \right\} \right) &\stackrel{x=y/r}{=} \\ \frac{1}{r} \mu^* \left(\left\{ x \in [0, \infty]^m : |x| > 1, \frac{x}{|x|} \in A \right\} \right) &= \frac{1}{r} S(A). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Für die Koordinaten $\left(|x|, \frac{x}{|x|}\right)$ ist μ^* ein Produktmaß, d.h. mit der Abbildung $T : [0, \infty)^m \mapsto ([0, \infty) \times \mathcal{S}_m(1))$, $T(x) = (|x|, x/|x|)$ ist die Dichte des Maßes $\mu^* \circ T^{-1}$ ein Produkt:

$$\mu^* \circ T^{-1}(d\mathbf{r}, d\mathbf{a}) = \frac{1}{r^2} S(d\mathbf{a}). \quad (5.41)$$

Für $\mathbf{x} \in [0, \infty)^m$ kann aus (5.41) gezeigt werden, dass

$$\mu^*([\mathbf{0}, \mathbf{x}]^C) = \int_{\mathcal{S}_m(1)} \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{v_i}{x_i} \right\} S(d\mathbf{v}) \quad (5.42)$$

gilt.

Nun können die *max-stable* Verteilungsfunktionen und somit die multivariaten Extremwertverteilungen entsprechend Satz 5.6 charakterisiert werden:

Satz 5.12 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Die Verteilungsfunktion G^* ist eine m -dimensionale Extremwertverteilung mit Einheits Fréchet Randverteilungen.*

(ii) *Es existiert ein endliches Maß S auf $\mathcal{S}_m(1)$ mit*

$$\int_{\mathcal{S}_m(1)} v_i S(d\mathbf{v}) = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.43)$$

und die Verteilungsfunktion G^ nimmt die folgende Form an*

$$G^*(\mathbf{x}) = \exp\left(- \int_{\mathcal{S}_m(1)} \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{v_i}{x_i} \right\} S(d\mathbf{v})\right). \quad (5.44)$$

Bemerkung 5.13 Das Ausrechnen multivariater Extremwertverteilungen ist schwierig. Es ist auch nicht einfach möglich, zu vorgegebenen Daten eine passende multivariate Extremwertverteilung zu finden. Daher wird dieser Ansatz hier nicht weiter verfolgt.

5.1.2 Maximaler Anziehungsbereich der multivariaten Extremwertverteilungen

Die univariate reguläre Variation hat sich bei der Charakterisierung des maximalen Anziehungsbereiches als sehr nützlich erwiesen. Im m -dimensionalen leistet die multivariate reguläre Variation gute Hilfe.

Im folgenden sei $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in K$ und $K \subseteq (0, \infty)^m$ sei ein Kegel. Es gilt also:

$$\mathbf{x} \in K \iff t\mathbf{x} \in K \forall t > 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K \implies \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in K \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (5.45)$$

Definition 5.14 (Multivariate reguläre Variation) Eine meßbare Funktion $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (multivariat) regulär variierend auf K mit Grenzfunktion g , wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t\mathbf{x})}{h(t\mathbf{1})} = g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in K. \quad (5.46)$$

Ist $\mathbf{x} \in K$ fest, so gilt für $s > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(ts\mathbf{x})}{h(t\mathbf{x})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{h(ts\mathbf{x})}{h(t\mathbf{1})}}{\frac{h(t\mathbf{x})}{h(t\mathbf{1})}} = \frac{g(s\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}. \quad (5.47)$$

Für $\mathbf{x} \in K$ fest ist $h(t\mathbf{x})$ eine Funktion von t , und es gibt gemäß der Definition der eindimensionalen regulären Variation, siehe Definition 3.8, $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $h(t\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_\alpha$ und

$$\frac{g(s\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = s^\alpha. \quad (5.48)$$

Der Wert von α hängt nicht von \mathbf{x} ab, siehe Resnick [16], Kapitel 5.4. Daraus folgt, dass g homogen vom Grad α ist, d.h.

$$g(s\mathbf{x}) = s^\alpha g(\mathbf{x}). \quad (5.49)$$

Beispiel 5.15 Die Funktion

$$f(x, y) = (ax^2 + by^2)^{-\alpha/2} \quad (5.50)$$

variiert multivariat regulär. Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx, ty)}{f(t, t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(ax^2t^2 + by^2t^2)^{-\alpha/2}}{(at^2 + bt^2)^{-\alpha/2}} = \left(\frac{a + b}{ax^2 + by^2} \right)^{\alpha/2} =: g(x, y) \quad (5.51)$$

und $g(x, y)$ variiert regulär mit Index $-\frac{\alpha}{2}$.

Nun wird Satz 5.9 mit Hilfe der regulären Variation formuliert:

Satz 5.16 Sei G eine multivariate Extremwertverteilung und wie in Satz 5.9 seien F^* und G^* definiert durch

$$G^*(\mathbf{x}) := G \left(\left(\frac{-1}{\ln G_1} \right)^{\leftarrow} (x_1), \dots, \left(\frac{-1}{\ln G_m} \right)^{\leftarrow} (x_m) \right), \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (5.52)$$

bzw.

$$F^*(\mathbf{x}) := F \left(\left(\frac{-1}{1 - F_1} \right)^{\leftarrow} (x_1), \dots, \left(\frac{-1}{1 - F_m} \right)^{\leftarrow} (x_m) \right), \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{1}. \quad (5.53)$$

Es gelten

(i) Die Funktion F^* liegt im maximalen Anziehungsbereich von G^* , $F^* \in \mathbf{MDA}(G^*)$, genau dann, wenn $1 - F^*$ regulär auf $(0, \infty)^m$ variiert mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F^*(t\mathbf{x})}{1 - F^*(t\mathbf{1})} = \frac{-\ln G^*(\mathbf{x})}{-\ln G^*(\mathbf{1})}, \quad \forall \mathbf{x} > \mathbf{0}. \quad (5.54)$$

(ii) Die Funktion F liegt im maximalen Anziehungsbereich von G , $F \in \mathbf{MDA}(G)$, genau dann, wenn $F_i \in \mathbf{MDA}(G_i)$, $i = 1, \dots, m$ und $F^* \in \mathbf{MDA}(G^*)$.

Satz 5.17 Für eine Zufallsvariable $\mathbf{X}^* \in [1, \infty)^m$, $\mathbf{X}^* \sim F^*$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Eine Funktion F^* liegt im maximalen Anziehungsbereich von G^* , $F^* \in \mathbf{MDA}(G^*)$.

(ii) Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F^*(t\mathbf{x})}{1 - F^*(t\mathbf{1})} = \frac{-\ln G^*(\mathbf{x})}{-\ln G^*(\mathbf{1})} = \frac{\mu^*([\mathbf{0}, \mathbf{x}]^C)}{\mu^*([\mathbf{0}, \mathbf{1}]^C)}, \quad \text{für } \mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad (5.55)$$

wobei μ^* für das in (5.42) definierte Exponentenmaß steht.

(iii) Es gilt

$$nF^*(n \cdot) = n\mathbf{P} \left(\frac{1}{n}\mathbf{X}^* \in \cdot \right) \xrightarrow{v} \mu^* \quad \text{auf } (0, \infty)^m. \quad (5.56)$$

Hier steht \xrightarrow{v} für die vage Konvergenz:

Definition 5.18 (vage Konvergenz) Eine Folge von Maßen μ_n auf einem Raum R konvergiert vage gegen ein Maß μ , wenn für alle positiven, stetigen Funktionen f mit kompaktem Träger aus R und beliebige relativ kompakte Mengen aus R gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f d\mu_n = \int_A f d\mu. \quad (5.57)$$

Siehe z.B. Feller [9].

Von einer m -dimensionalen regulär variierenden Funktion F kann entsprechend Satz 5.17 auf die Grenzverteilung geschlossen werden:

Korollar 5.19 Sei F eine m -dimensionale Verteilungsfunktion. Wenn F regulär variiert mit Grenzfunktion $W(s\mathbf{x}) = s^{-\alpha}W(\mathbf{x})$, $t, \alpha > 0$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, wenn also gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t\mathbf{x})}{1 - F(t\mathbf{1})} = W(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad (5.58)$$

dann gilt $F \in \mathbf{MDA}(G)$ und $G(\mathbf{x}) = \exp(-W(\mathbf{x}))$.

5.2 Abhängigkeiten

Die multivariate Statistik beschäftigt sich mit Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen und versucht diese zu quantifizieren.

Die Korrelation und Kendall's Tau werden hier nur erwähnt, umfassende Erörterungen der Vor- und Nachteile dieser Abhängigkeitsmaße bieten Embrechts et al. [8] bzw. Lindskog et al. [15]. Ausführlich wird auf die Tail Dependence und den Extremal Coefficient eingegangen, auf den wichtigen Aspekt der *Selbstkonsistenz* von Abhängigkeitsmaßen wird hingewiesen.

Bemerkung 5.20 Mit Maßen für die Abhängigkeit zwischen Paaren (X, Y) von Zufallsvariablen kann man auch die Abhängigkeiten zwischen $(-X, -Y)$, $(X, -Y)$ und $(Y, -X)$ untersuchen. Bei einem mehrdimensionalen Zufallsvektor \mathbf{X} ergeben sich also für je 2 Komponenten vier Werte. Alle diese Werte gemeinsam beschreiben die Abhängigkeitsstruktur der gemeinsamen Verteilung. Viele Maße sind symmetrisch oder wechseln lediglich das Vorzeichen bei Multiplikation einer Komponente mit -1, wie z.B. die Korrelation. In solchen Fällen brauchen nicht alle Werte berechnet zu werden. Für die Tail Dependence und den Extremal Coefficient ist das nur teilweise der Fall. Dort gibt es also eine große Zahl verschiedener gemessener Werte.

Da für Portfolios der betrachteten Anleihen große Verluste dann auftreten, wenn viele Tagesdifferenzen groß sind, beschränkt sich diese Arbeit auf die Tail Dependence zwischen gemeinsamen positiven Änderungen.

5.2.1 Visualisieren von Abhängigkeiten

Um zunächst einen ersten Eindruck von möglichen Abhängigkeiten *zwischen* den Tagesdifferenzen \mathbf{X}_t^i , $i = 1, \dots, m$, zu gewinnen, werden in Abbildung 5.1 für die Anleihen TELEFO0905, PLTMPL0206, FRTEL0308 und DT0706 die Tagesdifferenzen (X_t^i, X_t^j) , $t = 1, \dots, 262$, paarweise gegeneinander aufgetragen.

In Abbildung 5.2 wurden nicht die Werte der einzelnen Tagesdifferenzen, sondern ihre Ränge, vgl. Einleitung von Abschnitt 2.3, gegeneinander aufgetragen.

In Abbildung 5.1 häufen sich die Tagesdifferenzen stark um ihre Mittelwerte. Die Haufen sind teils kreisförmig, teils eher elliptisch. Berücksichtigt man die Achsenmaßstäbe so kann man zwischen FRTEL0308 und DT0706 sowie zwischen TELEFO0905 und PLTMPL0206 aus der Orientierung der Ellipse auf eine (schwache) positive Abhängigkeit zwischen den Anleihen schließen. Es gibt nur wenige Ausreißer der einzelnen Tagesdifferenzen, die meist nicht zusammenfallen, es scheint also keine starke Abhängigkeit zwischen den extremen Beobachtungen vorzuliegen.

Beim Betrachten der Abbildung 5.2 erkennt man bei einigen Diagrammen in der Umgebung der Winkelhalbierenden, insbesondere im oberen Bereich, eine deutliche Schwärzung; dort liegen viele Punkte. Das deutet darauf hin, dass ein positiver Zusammenhang zwi-

schen den Tagesdifferenzen besteht: hohe Werte der einen Differenz gehen mit hohen Werten der anderen einher.

5.2.2 Korrelation

Ein sehr bekanntes Abhängigkeitsmaß ist die lineare Korrelation. Sie wird gemessen durch den Korrelationskoeffizienten ρ .

Definition 5.21 (Korrelationskoeffizient) *Der Korrelationskoeffizient zweier Zufallsvariablen X, Y ist definiert durch*

$$\rho(X, Y) := \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}}. \quad (5.59)$$

Der Korrelationskoeffizient mißt den linearen Zusammenhang der Zufallsvariablen X und Y . Es gilt

$$\rho \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad |\rho| = 1 \iff X = aY + b. \quad (5.60)$$

Der entscheidende Vorteil des Korrelationskoeffizienten ist seine Einfachheit. Ein Nachteil ist, dass er nichtlineare Zusammenhänge, auch sehr starke, zwischen Zufallsvariablen im Allgemeinen nicht erfaßt. Der Korrelationskoeffizient ist invariant gegenüber linearen Transformationen der Zufallsvariablen. Dieses Thema wird in Embrechts et al. [8] ausführlich erörtert.

5.2.3 Kendall's Tau

Kendall's Tau mißt die Stärke des monotonen Zusammenhanges zwischen zwei Zufallsvariablen, indem die Korrelation zwischen den Rängen von Stichproben der Zufallsvariablen gemessen wird.

Definition 5.22 (Kendall's Tau) *Kendall's Tau ist definiert durch*

$$\tau(X, Y) := \mathbf{P} \left[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0 \right] - \mathbf{P} \left[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0 \right], \quad (5.61)$$

wobei \tilde{X}, \tilde{Y} unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung wie X bzw. Y sind.

Es gilt:

$$\tau(X, Y) = 1 \iff X = T_+(Y), \quad (5.62)$$

wenn T_+ streng monoton steigt, bzw.

$$\tau(X, Y) = -1 \iff X = T_-(Y), \quad (5.63)$$

wenn T_- streng monoton fällt.

Die Randverteilungen von X und Y beeinflussen τ nicht, denn τ ist eine Eigenschaft der Copula C , die die gemeinsame Verteilung von X und Y festlegt. Kendall's Tau ist eine Rangkorrelation und daher invariant gegenüber streng monoton steigenden Transformationen, d.h. $\tau(X, Y) = \tau(T(X), T(Y))$ für alle streng monoton steigenden T . Näheres zu diesem Abhängigkeitsmaß findet man in Lindskog et. al. [15].

5.2.4 Extremal Coefficient

In diesem Abschnitt wird der Extremal Coefficient als Maß für die Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen, die gemeinsam einer Extremwertverteilung folgen, vorgestellt. Dabei wird ein Ansatz von Schlather & Tawn [18] zusammengefasst.

Sei \mathbf{X} ein m -dimensionaler Zufallsvektor, der einer multivariaten Extremwertverteilung G folgt und der identische univariate Randverteilungsfunktionen $F_1 = F_2 = \dots = F_m$ hat. Sind die F_i , $i = 1, \dots, m$, unabhängig, so gilt:

$$\mathbf{P} \left(\max_{i=1, \dots, m} \{X_i\} \leq z \right) = \mathbf{P}(X_1 \leq z)^m, \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (5.64)$$

Sind die F_1, \dots, F_m *nicht* unabhängig, so existiert $\kappa \in \mathbb{R}$ mit dem gilt:

$$\mathbf{P} \left(\max_{i=1, \dots, m} \{X_i\} \leq z \right) = \mathbf{P}(X_1 \leq z)^\kappa, \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (5.65)$$

Definition 5.23 (Extremal Coefficient) *Der Exponent κ heißt Extremal Coefficient von X_1, \dots, X_m .*

Bemerkung 5.24

- (i) Es gilt $1 \leq \kappa \leq m$.
- (ii) Der Extremal Coefficient κ entspricht der „effektiven“ Anzahl unabhängiger Zufallsvariablen in X_1, \dots, X_m ; κ ist nicht zwingend ganzzahlig. Sind die X_i , $i = 1, \dots, m$, perfekt abhängig, so ist $\kappa = 1$, sind sie perfekt unabhängig, so gilt $\kappa = m$.
- (iii) Den Extremal Coefficient kann man für beliebige Teilmengen $A \in 2^{\{1, \dots, m\}} \setminus \emptyset$ der Potenzmenge von $\{1, \dots, m\}$, ohne die leere Menge, entsprechend (5.65) definieren. Dann schreibt man κ_A für den Extremal Coefficient von $\{X_i, i \in A\}$.
- (iv) Der Extremal Coefficient ist eine Eigenschaft der Extremcopula. Die Gleichung (5.65) ist invariant gegenüber der Wahl der Verteilung F_1 der X_i , $i = 1, \dots, m$. Daher werden die X_i , $i = 1, \dots, m$, als Standard Fréchet verteilt angenommen.

Eine zweite Definition gründet auf folgenden Überlegungen: Seien $\mathcal{P}_m := 2^{\{1, \dots, m\}} \setminus \emptyset$ die Potenzmenge von $\{1, \dots, m\}$ ohne die leere Menge und $M_{i,n}$, $i = 1, \dots, m$, die komponentenweisen Maxima einer Stichprobe von n Realisierungen des Zufallsvektors \mathbf{X} (vgl. Abschnitt 5.1).

Es wird die multivariate Extremwertverteilung G^* eines Zufallsvektors \mathbf{X} mit Einheits Fréchet Randverteilungen für X_i , $i = 1, \dots, m$, betrachtet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{M_{1,n}}{n} < x_1, \dots, \frac{M_{m,n}}{n} < x_m \right) = G^*(x_1, \dots, x_m). \quad (5.66)$$

Die Klasse dieser Funktionen ist entsprechend Satz 5.12 (ii) charakterisiert durch:

$$\mu^*(x_1, \dots, x_m) = -\ln(G^*(x_1, \dots, x_m)) = \int_{\mathcal{S}_m(1)} \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{v_i}{x_i} \right\} S(d\mathbf{v}). \quad (5.67)$$

Wie in Satz 5.12 hat das nichtnegative Maß S auf dem Rand den Erwartungswert 1:

$$\int_{\mathcal{S}_m(1)} v_i S(d\mathbf{v}) = 1, \text{ für } i = 1, \dots, m. \quad (5.68)$$

Schlather und Tawm [18] schließen hier den Extremal Coefficient an:

Definition 5.25 (Extremal Coefficient) *Seien X_1, \dots, X_m Einheits Fréchet verteilte Zufallsvariable, die gemeinsam einer Extremwertverteilung folgen. Dann existiert für jede Menge $A \subseteq \mathcal{P}_m$ eine reelle Zahl κ_A , $1 \leq \kappa_A \leq m$, so dass gilt:*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\max_{i \in A} \max_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{X_j^i}{n} \right\} < z \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\max_{j=1, \dots, n} \left\{ \frac{X_j^1}{n} \right\} < z \right)^{\kappa_A} \\ &= 1 - \exp \left(-\frac{\kappa_A}{z} \right). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Bemerkung 5.26 Ist $|A| = 1$, so ist wegen (5.68) $\kappa_A = 1$.

Aus der Kombination von (5.69) und (5.67) ergibt sich der Extremal Coefficient zu

$$\kappa_A = \int_{\mathcal{S}_m(1)} \max_{i \in A} v_i S(d\mathbf{v}), \quad A \subseteq \mathcal{P}_m. \quad (5.70)$$

Aus (5.70) folgt, dass für einen Zufallsvektor \mathbf{X} zwischen den κ_{A_i} zu verschiedenen $A_i \subseteq \mathcal{P}_m$, $i \in \mathbb{N}$, starke Beziehungen bestehen müssen.

Aus Gleichung (5.65) ist bekannt, dass für identisch mit der Extremwertverteilungsfunktion F verteilte X_i, X_j und alle $z > \bar{z}_F = \min \{z : F(z) > 0\}$ gilt:

$$\kappa_{ij} = \frac{\ln \mathbf{P}(X_i < z, X_j < z)}{\ln \mathbf{P}(X_i < z)}. \quad (5.71)$$

Daraus folgt:

$$\kappa_{ij} = \frac{\ln \mathbf{P}(F(X_i) < F(z), F(X_j) < F(z))}{\ln \mathbf{P}(F(X_i) < F(z))}. \quad (5.72)$$

Wird $F(z) = u \in (0, 1]$ gesetzt und die Copula von X_i, X_j mit C bezeichnet, dann kann gemäß Kapitel 4 geschrieben werden:

$$\kappa_{ij} = \frac{\ln C(u, u)}{\ln u}. \quad (5.73)$$

5.2.5 Tail Dependence

Die Tail Dependence ist ein Maß für die Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen kurz vor dem rechten (oder linken) Endpunkt \mathbf{x}_F der Verteilung F ; es kann auch gelten $x_F = \pm\infty$.

Im Folgenden bezeichnet F_i^{\leftarrow} , wie in Kapitel 2.3, die verallgemeinerte Inverse der Randverteilungsfunktion F_i .

Definition 5.27 (Tail Dependence) Seien X, Y zwei stetig verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F_1 bzw. F_2 . Wenn

$$\lambda_U := \lim_{u \nearrow 1} \mathbf{P}(X > F_1^{\leftarrow}(u) | Y > F_2^{\leftarrow}(u)) \quad (5.74)$$

existiert und $\lambda_U > 0$ oder $\lambda_U = 0$ ist, heißen X, Y asymptotisch abhängig bzw. unabhängig im oberen Tail. Wenn

$$\lambda_L := \lim_{u \searrow 0} \mathbf{P}(X < F_1^{\leftarrow}(u) | Y < F_2^{\leftarrow}(u)) \quad (5.75)$$

existiert und $\lambda_L > 0$ oder $\lambda_L = 0$ ist, heißen X, Y asymptotisch abhängig bzw. unabhängig im unteren Tail.

λ_U, λ_L heißen Koeffizienten der upper bzw. lower Tail Dependence.

Die Tail Dependence kann mit Hilfe der Copula geschrieben werden, wenn man die bedingten Wahrscheinlichkeiten umformt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X > F_1^{\leftarrow}(u) | Y > F_2^{\leftarrow}(u)) \quad (5.76) \\ = & \frac{1 - \mathbf{P}(X \leq F_1^{\leftarrow}(u)) - \mathbf{P}(Y \leq F_2^{\leftarrow}(u)) + \mathbf{P}(X \leq F_1^{\leftarrow}(u), Y \leq F_2^{\leftarrow}(u))}{1 - \mathbf{P}(Y \leq F_2^{\leftarrow}(u))}. \end{aligned}$$

Dies läßt sich mit Hilfe einer Copula zusammenfassen:

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (5.77)$$

bzw.

$$\lambda_L = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u}. \quad (5.78)$$

Bemerkung 5.28 Nach (5.77) und (5.78) ist die Tail Dependence allein durch die Copula bestimmt und hängt nicht von den Randverteilungen ab.

Die Tail Dependence misst die Abhängigkeit kurz vor dem rechten Endpunkt der Verteilung. Beim Schätzen werden jedoch Quantile $u < 1$ benutzt. In diesem Bereich können die betrachteten Zufallsvariablen jedoch abhängig sein, obwohl $\lambda_U = \lambda_L = 0$, wie man am Beispiel der Normalverteilung mit Korrelation $\rho = 0.9$ im Bild 5.3 leicht erkennt.

Soll nun die Tail Dependence geschätzt werden, so interessiert es zunächst, ob die Daten eventuell asymptotisch unabhängig in den Tails sind. Die Funktion $\overline{\lambda}_U(u)$ mißt die (Un-)Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen X, Y mit Verteilungen F_X, F_Y vor dem rechten Endpunkt ihrer Verteilung:

$$\overline{\lambda}_U(u) = \frac{2 \ln(\mathbf{P}(F_X(X) > u))}{\ln(\mathbf{P}(F_X(X) > u, F_Y(Y) > u))} - 1 = \frac{2 \ln(1 - u)}{\ln(\overline{C}(u, u))} - 1, \quad u \in [0, 1]. \quad (5.79)$$

Es gilt $\overline{\lambda}_U(u) \in (-1, 1]$ für alle $u \in [0, 1]$. Entsprechend der Tail Dependence definiert man

$$\overline{\lambda}_U := \lim_{u \nearrow 1} \overline{\lambda}_U(u). \quad (5.80)$$

Sind zwei Zufallsvariablen Tail dependent, so ist $\overline{\lambda}_U = 1$, sind sie asymptotisch unabhängig in den Tails, so ist $\overline{\lambda}_U(u) < 1$ für alle u und auch $\overline{\lambda}_U = 0$. (Für die 2-dimensionale Normalverteilung mit Korrelation $\rho \neq 0$ erhält man $\overline{\lambda}_U = \rho$.)

Schätzer für die Tail Dependence

Die hier vorgestellten Schätzer sind der Arbeit von Kuhn [14] entnommen.

Die Tail Dependence zweier Zufallsvariablen ist eine Eigenschaft der Copula ihrer gemeinsamen Verteilung, also von den Randverteilungen unabhängig (vgl. Bemerkung 5.28).

Um den Schätzer zu konstruieren, werden die zwei Zufallsvariablen X, Y zunächst auf Einheits Fréchet Zufallsvariablen transformiert:

$$S := \frac{-1}{\ln(F_X(X))}, \quad T := \frac{-1}{\ln(F_Y(Y))}. \quad (5.81)$$

Mit F_X, F_Y werden die Verteilungen von X bzw. Y bezeichnet. (Die weiteren Überlegungen gelten für Y entsprechend.)

Aus Kapitel 3 ist bekannt, dass bei einer Zufallsvariablen Z mit Fréchet-Tails der Tail oberhalb einer hohen Schwelle u approximiert werden kann durch

$$\mathbf{P}(Z > z) = \mathcal{L}(z)z^{-\frac{1}{\xi}}, \quad z > u, \quad \mathcal{L} \in \mathcal{R}_0. \quad (5.82)$$

Also gilt für Einheits Fréchet Zufallsvariablen:

$$\mathbf{P}(S > s) = \mathbf{P}(T > s) \sim s^{-1}, \quad s \rightarrow \infty. \quad (5.83)$$

Aus Gleichung (5.77) kann gefolgert werden:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{\mathbf{P}(S \leq s, T \leq s) - 1}{-\mathbf{P}(S > s)} &\sim 2 - \frac{\ln \mathbf{P}(S \leq s, T \leq s)}{\ln \mathbf{P}(S \leq s)} \\ &= 2 - \frac{\ln \mathbf{P}^\kappa(S \leq s)}{\ln \mathbf{P}(S \leq s)} = 2 - \kappa. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Hier ist κ der Extremal Coefficient von (S, T) ; vgl. Abschnitt 5.2.4.

Es gilt $\kappa \in [1, 2]$, $\kappa = 2$ bedeutet Unabhängigkeit von (S, T) . Sind S und T unabhängig, so gilt $\mathbf{P}(S > s, T > s) \sim s^{-2}$. Sei nun $Z = \min\{S, T\}$, dann gilt

$$\mathbf{P}(Z > z) \sim z^{-1}(2 - \kappa) \quad , \quad \kappa < 2, \quad (5.85)$$

$$\mathbf{P}(Z > z) \sim z^{-2} \quad , \quad \kappa = 2. \quad (5.86)$$

Dies kann nach Ledford & Tawn zusammengefasst werden:

$$\mathbf{P}(S > s, T > s) \sim \mathcal{L}(s) s^{\frac{-1}{\eta}}, \quad s \rightarrow \infty, \quad (5.87)$$

wo $\eta \in [\frac{1}{2}, 1]$ eine Konstante, $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$. Der Fall $\eta = 1$ entspricht dem Fall asymptotischer Abhängigkeit. Sind S und T Tail dependent, so gilt $\mathcal{L}(s) \rightarrow \lambda_U$.

Da die Tail Dependence eine Eigenschaft der Copula ist und Copulae invariant gegenüber streng monoton steigenden Funktionen, also z.B. $\frac{-1}{\ln(F(\cdot))}$ sind, ist bekannt, dass (S, T) die gleiche Copula, also insbesondere die gleiche Tail Dependence wie (X, Y) hat.

Zunächst wird für (S, T) aus den Gleichungen (5.83) und (5.87) ein Schätzer $\overline{\lambda}_U$ ermittelt:

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_U &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 \ln(\mathbf{P}(S > s))}{\ln(\mathbf{P}(S > s, T > s))} - 1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-2 \ln s}{\ln(\mathcal{L}(s)) - \frac{1}{\eta} \ln s} - 1 \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} 2\eta \frac{\ln s}{\ln s - \eta \ln(\mathcal{L}(s))} - 1 \quad (5.88) \\ &= 2\eta - 1. \end{aligned}$$

Wenn die Zufallsvariablen S, T Tail dependent sind, dann ist $\overline{\lambda}_U = 1$, also $\eta = 1$, und es gilt:

$$\lambda_U = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{P}(T > s | S > s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(S > s, T > s)}{\mathbf{P}(S > s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(s). \quad (5.89)$$

Um $\overline{\lambda}_U$ und λ_U zu schätzen, braucht man Schätzer für η und $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(s)$.

Mit $Z = \min\{S, T\}$ gilt

$$\mathbf{P}(Z > z) = \mathbf{P}(S > z, T > z) = \mathcal{L}(z) z^{\frac{-1}{\eta}} \sim c z^{\frac{-1}{\eta}}, \quad z > u, \quad (5.90)$$

wobei u wieder eine hohe Schwelle ist und $\mathcal{L} \in \mathcal{R}_0$ oberhalb dieser Schwelle als konstant, $\mathcal{L} \equiv c$, angenommen wird; diese Annahme ist im Fall von Tail Dependence erfüllt. Der Tail Index der Zufallsvariablen Z ist η und kann ebenso wie c mit dem Hill Schätzer (siehe Abschnitt 3.4.2) geschätzt werden:

$$\hat{\eta} = \frac{1}{n_u} \sum_{j=1}^{n_u} \ln \frac{z^{(j)}}{u}, \quad (5.91)$$

$$\hat{c} = \frac{n_u}{n} u^{1/\hat{\eta}}, \quad (5.92)$$

wobei $z_{(1)} < \dots < z_{(n_u)}$ die n_u Beobachtungen von $Z > u$ sind. Wenn die Beobachtungen $z_{(j)}$ der Zufallsvariablen Z als unabhängig angenommen werden, ergibt sich als Schätzer:

$$\widehat{\lambda_U} = \frac{2}{n_u} \sum_{j=1}^{n_u} \ln \left(\frac{z_{(j)}}{u} \right) - 1. \quad (5.93)$$

Auf Grund der asymptotischen Normalität des Hill Schätzers, siehe Satz 3.20, gilt

$$\text{var} \left(\widehat{\lambda_U} \right) = \frac{1}{n_u} \left(\widehat{\lambda_U} + 1 \right)^2. \quad (5.94)$$

Liegt 1 nicht im Konfidenzintervall, z.B. $\left[\widehat{\lambda_U} - 1.96 \sqrt{\text{var} \left(\widehat{\lambda_U} \right)}, \widehat{\lambda_U} + 1.96 \sqrt{\text{var} \left(\widehat{\lambda_U} \right)} \right]$, so nimmt man an, dass $\overline{\lambda_U} < 1$ ist und S und T werden als asymptotisch unabhängig angesehen. Es wird also $\lambda_U = 0$ gesetzt. Kann die Hypothese $\overline{\lambda_U} < 1$ verworfen werden, liegt also 1 im Konfidenzintervall um $\widehat{\lambda}$, so setzt man $\overline{\lambda_U} = 1 = \eta$, und als Schätzer von λ_U ergibt sich (mit \widehat{c}):

$$\widehat{\lambda} = \frac{u n_u}{n}, \quad (5.95)$$

$$\text{var} \left(\widehat{\lambda_U} \right) = \frac{u^2 n_u (n - n_u)}{n^3}. \quad (5.96)$$

Allgemein benutzt man für die lower Tail Dependence λ_L die gleichen Schätzer, ersetzt nur (S, T) durch $(-S, -T)$.

Zur Diskussion der Qualität der Schätzer siehe Kuhn, 2001.

Die Tabelle 5.1 gibt die geschätzten Werte $\widehat{\lambda}_{ij}$ der paarweisen Tail Dependence der betrachteten Tagesdifferenzen der Credit Spreads an.

Bemerkung 5.29 Aus den Gleichungen (5.73) und (5.77) folgt, dass ein einfacher Zusammenhang zwischen Tail Dependence λ_{ij} und Extremal Coefficient κ_{ij} besteht:

$$\lambda_{ij} = 2 - \kappa_{ij}. \quad (5.97)$$

5.2.6 Selbstkonsistenz von Abhängigkeitsmaßen

Definition 5.30 Für m -dimensionale Zufallsvektoren heißt eine Menge M_m von Werten eines Abhängigkeitsmaßes m_{A_i} zu Teilmengen $A_i \subseteq \mathcal{P}_m$, $M_m = \{m_{A_1}, \dots, m_{A_n}\}$, $A_i \neq A_j$, $\forall i \neq j$, genau dann *selbstkonsistent*, wenn es einen Vektor \mathbf{X} gibt, der die durch M_m festgelegte Abhängigkeitsstruktur besitzt.

Die Werte des Abhängigkeitsmaßes kann man für hochdimensionale Daten oft schätzen. Damit ist allerdings noch nicht klar, dass es eine Verteilung gibt, die diese Abhängigkeitsstruktur besitzt. Zum Beispiel mißt der Extremal Coefficient κ_A die Anzahl unabhängiger

1.000	0.512	0.524	0.492	0.589	0.474	0.521	0.486	0.512	0.507	0.526	0.510	0.477	0.509	0.460	0.417	0.513	0.496	0.454	0.460	0.446	0.462	0.501	0.434	0.462	0.482	0.468	0.477	0.500	0.480
0.512	1.000	0.512	0.499	0.507	0.476	0.523	0.454	0.506	0.492	0.528	0.492	0.457	0.475	0.455	0.430	0.558	0.503	0.449	0.503	0.448	0.497	0.466	0.427	0.438	0.461	0.456	0.465	0.533	0.510
0.524	0.512	1.000	0.467	0.527	0.460	0.612	0.473	0.574	0.541	0.524	0.538	0.448	0.503	0.448	0.450	0.435	0.404	0.491	0.450	0.484	0.441	0.444	0.451	0.421	0.424	0.442	0.447	0.458	0.519
0.492	0.499	0.467	1.000	0.498	0.498	0.472	0.460	0.464	0.472	0.495	0.452	0.456	0.450	0.435	0.404	0.510	0.491	0.450	0.484	0.441	0.444	0.451	0.421	0.424	0.442	0.447	0.458	0.493	0.517
0.589	0.507	0.527	0.498	1.000	0.488	0.524	0.477	0.512	0.510	0.469	0.493	0.441	0.467	0.441	0.413	0.530	0.493	0.472	0.528	0.445	0.469	0.473	0.425	0.434	0.443	0.425	0.448	0.513	0.490
0.474	0.376	0.460	0.498	0.488	1.000	0.470	0.467	0.446	0.487	0.513	0.453	0.471	0.453	0.447	0.402	0.533	0.480	0.464	0.508	0.449	0.489	0.432	0.439	0.472	0.478	0.470	0.456	0.496	0.488
0.521	0.523	0.612	0.472	0.524	0.470	1.000	0.470	0.571	0.505	0.511	0.535	0.422	0.483	0.443	0.406	0.532	0.469	0.471	0.495	0.433	0.480	0.510	0.409	0.439	0.456	0.445	0.430	0.508	0.485
0.486	0.454	0.473	0.460	0.477	1.000	0.480	0.477	0.480	0.477	0.503	0.457	0.488	0.476	0.441	0.419	0.471	0.463	0.525	0.437	0.497	0.468	0.470	0.453	0.458	0.466	0.463	0.458	0.471	0.488
0.512	0.506	0.574	0.464	0.512	0.446	0.571	0.480	1.000	0.514	0.510	0.524	0.462	0.524	0.431	0.420	0.519	0.503	0.453	0.444	0.449	0.507	0.538	0.437	0.460	0.484	0.456	0.447	0.478	0.534
0.477	0.492	0.541	0.472	0.510	0.487	0.505	0.477	0.514	1.000	0.490	0.490	0.471	0.506	0.476	0.409	0.548	0.543	0.440	0.500	0.443	0.497	0.493	0.474	0.465	0.500	0.490	0.471	0.515	0.567
0.526	0.528	0.524	0.495	0.469	0.513	0.511	0.503	0.510	0.510	1.000	0.505	0.482	0.490	0.504	0.409	0.566	0.508	0.459	0.475	0.462	0.493	0.476	0.470	0.475	0.512	0.499	0.509	0.519	0.545
0.510	0.492	0.538	0.452	0.493	0.453	0.535	0.457	0.524	0.490	0.505	1.000	0.452	0.504	0.453	0.413	0.484	0.492	0.451	0.459	0.424	0.475	0.495	0.432	0.439	0.481	0.472	0.435	0.484	0.504
0.477	0.457	0.448	0.456	0.441	0.471	0.422	0.488	0.462	0.471	0.482	0.452	1.000	0.559	0.493	0.436	0.475	0.451	0.447	0.431	0.451	0.509	0.488	0.498	0.483	0.516	0.488	0.560	0.444	0.478
0.509	0.475	0.503	0.450	0.467	0.453	0.483	0.476	0.524	0.506	0.490	0.504	0.559	1.000	0.498	0.451	0.506	0.492	0.430	0.454	0.451	0.512	0.515	0.442	0.492	0.566	0.497	0.528	0.477	0.511
0.460	0.455	0.459	0.435	0.441	0.447	0.443	0.441	0.431	0.476	0.504	0.453	0.493	0.498	1.000	0.385	0.478	0.468	0.429	0.434	0.455	0.454	0.468	0.456	0.449	0.511	0.466	0.469	0.456	0.457
0.417	0.430	0.406	0.404	0.413	0.402	0.406	0.419	0.420	0.409	0.409	0.413	0.436	0.451	0.385	1.000	0.409	0.402	0.404	0.410	0.444	0.445	0.413	0.397	0.399	0.401	0.385	0.431	0.402	0.426
0.513	0.558	0.560	0.510	0.530	0.533	0.532	0.471	0.519	0.548	0.566	0.484	0.475	0.506	0.478	0.400	1.000	0.532	0.461	0.529	0.443	0.485	0.492	0.457	0.489	0.505	0.477	0.476	0.591	0.594
0.496	0.503	0.487	0.491	0.493	0.480	0.469	0.463	0.503	0.543	0.508	0.492	0.451	0.492	0.468	0.402	0.532	1.000	0.445	0.472	0.443	0.464	0.464	0.442	0.461	0.488	0.469	0.450	0.502	0.552
0.454	0.449	0.462	0.450	0.472	0.464	0.471	0.525	0.453	0.440	0.459	0.451	0.447	0.430	0.429	0.404	0.461	0.445	1.000	0.332	0.476	0.463	0.445	0.419	0.436	0.436	0.443	0.415	0.439	0.489
0.460	0.503	0.488	0.484	0.528	0.508	0.495	0.437	0.444	0.500	0.475	0.459	0.431	0.454	0.434	0.410	0.529	0.472	0.332	1.000	0.440	0.458	0.454	0.425	0.446	0.465	0.439	0.435	0.574	0.473
0.446	0.448	0.438	0.441	0.445	0.449	0.433	0.497	0.449	0.443	0.462	0.424	0.481	0.451	0.455	0.444	0.443	0.476	0.440	1.000	0.500	0.450	0.445	0.462	0.473	0.463	0.461	0.453	0.445	0.445
0.487	0.497	0.472	0.444	0.469	0.489	0.480	0.468	0.507	0.497	0.493	0.475	0.509	0.512	0.454	0.445	0.485	0.464	0.463	0.458	0.500	1.000	0.489	0.481	0.493	0.522	0.481	0.529	0.465	0.490
0.501	0.466	0.540	0.451	0.473	0.432	0.510	0.470	0.538	0.493	0.476	0.495	0.488	0.515	0.468	0.413	0.492	0.464	0.445	0.454	0.450	0.489	1.000	0.458	0.487	0.522	0.485	0.489	0.499	0.491
0.434	0.427	0.439	0.421	0.425	0.439	0.409	0.453	0.437	0.474	0.470	0.432	0.498	0.442	0.456	0.397	0.457	0.442	0.419	0.425	0.445	0.481	0.458	1.000	0.523	0.517	0.556	0.516	0.463	0.469
0.462	0.438	0.472	0.424	0.434	0.472	0.439	0.458	0.460	0.465	0.475	0.439	0.483	0.492	0.449	0.399	0.489	0.481	0.436	0.446	0.462	0.493	0.487	0.523	1.000	0.574	0.537	0.507	0.485	0.484
0.482	0.461	0.493	0.442	0.443	0.456	0.466	0.484	0.500	0.512	0.481	0.516	0.566	0.481	0.401	0.505	0.488	0.436	0.465	0.473	0.522	0.522	0.517	0.574	1.000	0.582	0.539	0.504	0.491	0.491
0.468	0.456	0.467	0.447	0.425	0.470	0.445	0.463	0.456	0.490	0.499	0.472	0.488	0.497	0.466	0.385	0.477	0.469	0.443	0.439	0.463	0.481	0.485	0.556	0.537	0.582	1.000	0.519	0.489	0.471
0.477	0.465	0.448	0.448	0.456	0.430	0.458	0.447	0.471	0.509	0.435	0.560	0.528	0.469	0.431	0.476	0.450	0.415	0.435	0.461	0.529	0.489	0.516	0.507	0.539	0.519	1.000	0.459	0.473	0.473
0.500	0.533	0.519	0.493	0.513	0.496	0.508	0.471	0.478	0.515	0.519	0.484	0.444	0.477	0.456	0.402	0.591	0.502	0.439	0.574	0.453	0.465	0.499	0.463	0.485	0.504	0.489	0.459	1.000	0.522
0.480	0.510	0.519	0.517	0.490	0.488	0.485	0.488	0.534	0.567	0.545	0.504	0.478	0.511	0.457	0.426	0.594	0.552	0.489	0.473	0.445	0.490	0.491	0.469	0.484	0.491	0.471	0.473	0.522	1.000

Tabelle 5.1: Werte $\hat{\lambda}_{ij}$ der paarweisen Tail Dependence der Tagesdifferenzen

Zufallsvariabler unter $|A|$ Zufallsvariablen. Für drei Zufallsvariablen X, Y, Z kann es nicht sein, dass $\kappa_{X,Y} = \kappa_{X,Z} = 1$ während $\kappa_{Y,Z} = 2$. Für die Korrelation ist bekannt, dass die Korrelationsmatrix symmetrisch und positiv semi-definit sein muß, alle Werte außerhalb der Hauptdiagonalen zwischen -1 und 1 liegen und die Elemente der Hauptdiagonalen alle gleich 1 sein müssen, damit ein Zufallsvektor mit dieser Korrelationsstruktur existiert.

Beispiel 5.31 (Korrelation für multivariate Normalverteilungen) Für eine m -dimensionale Normalverteilung wird die gesamte Abhängigkeitsstruktur durch die Korrelationsmatrix $(\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ beschrieben. Notwendig und hinreichend dafür, dass zu einer gegebenen Korrelationsmatrix eine m -dimensionale Normalverteilung mit entsprechender Korrelation existiert, ist die positive Semi-Definitheit der Korrelationsmatrix. Im Fall $m \geq 3$ ist es schwierig, die positive Semi-Definitheit einer Matrix analytisch zu zeigen, allerdings lässt sie sich leicht numerisch feststellen.

Die Selbstkonsistenz des Extremal Coefficients und damit auch die der Tail Dependence untersuchen Schlather und Tawn in [18]. Mit Gleichung (5.70) zeigen sie die Selbstkonsistenz einer Menge von Extremal Coefficients:

Korollar 5.32 *Eine Menge von Extremal Coefficients $\{\kappa_{A_1}, \dots, \kappa_{A_n}\}$, $A_i \neq A_j, \forall i \neq j$, ist selbstkonsistent, wenn für ein nicht negatives endliches Maß S über der Einheitskugel $\mathcal{S}_m(1)$ im m -dimensionalen Raum gilt:*

$$\kappa_{A_i} = \int_{\mathcal{S}_m(1)} \max_{j \in A_i} v_j S(dv), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.98)$$

Die Menge \mathcal{P}_m hat $2^m - 1$ Elemente. Daher nennt man eine Menge von Extremal Coefficients $K_m = \{\kappa_{A_1}, \dots, \kappa_{A_n}\}$, $A_i \neq A_j, \forall i \neq j$, vollständig, wenn gilt $|K_m| = 2^m - 1$.

Es ist allgemein schwierig festzustellen, ob eine Menge von Extremal Coefficients $K_m = \{\kappa_{A_1}, \dots, \kappa_{A_n}\}$, $A_i \neq A_j, \forall i \neq j$, nach (5.98) selbstkonsistent ist. Eine einfacher zu handhabende Bedingung liefert folgender Satz von Schlather und Tawn (2002) [18]:

Satz 5.33 *Seien X_1, \dots, X_m Einheits Fréchet verteilte Zufallsvariable, die gemeinsam einer Extremwertverteilung folgen. Die Menge der Extremal Coefficients der X_1, \dots, X_m sei $K_m = \{\kappa_A, A \in \mathcal{P}_m\}$; es gilt $|K_m| = 2^m - 1$. Dann gibt es zu jeder der $(2^m - 1)$ Teilmengen $B \in \mathcal{P}_m$ eine unabhängige Einheits Fréchet Zufallsvariable T_B und eine Konstante $\tau_B \geq 0$, mit $\sum_{\{B: B \ni i\}} \tau_B = 1, i = 1, \dots, m$, so dass die Zufallsvariablen (Z_1, \dots, Z_m) definiert durch*

$$Z_i = \max_{\{B: B \ni i\}} \tau_B T_B, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.99)$$

für beliebige Ordnungen die dieselben Extremal Coefficients haben wie X_1, \dots, X_m . Weiterhin gilt

$$\kappa_A = \sum_{\{B \in \mathcal{P}_m, B \cap A \neq \emptyset\}} \tau_B, \quad \text{für } A \in \mathcal{P}_m. \quad (5.100)$$

Die τ_B sind eindeutig bestimmt durch

$$\tau_B = \sum_{\{A \in \mathcal{P}_m, \{1, \dots, m\} \setminus B \subseteq A\}} (-1)^{|A \cap B|+1} \kappa_A. \quad (5.101)$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man in Schlather und Tawn (2002) [19]. Wenn mit Satz 5.33 überprüft werden soll, ob eine Menge von m Zufallsvariablen selbstkonsistent ist, müssen $2^m - 1$ Bedingungen der Form (5.101) überprüft werden. Die dieser Arbeit zu Grunde liegenden Daten haben die Dimension $m=30$, es müßten also $2^{30} - 1$ Bedingungen überprüft werden. Der Rechenaufwand ist für große Portfolios also praktisch nicht bewältigbar.

In Kapitel 7 wird daher nur die Selbstkonsistenz über die paarweisen Extremal Coefficients untersucht. Der folgende Satz von Schlather & Tawn [18] liefert einfache Bedingungen für die Selbstkonsistenz der paarweisen Extremal Coefficients:

Satz 5.34 *Notwendig für die Selbstkonsistenz der paarweisen Extremal Coefficients ist, dass die Matrix*

$$(2 - \kappa_{ij})_{i,j=1,\dots,m} \quad (5.102)$$

positiv semidefinit ist. Hinreichend ist, dass die Matrix

$$(1 - 2(\kappa_{ij} - 1)^2)_{i,j=1,\dots,m} \quad (5.103)$$

positiv definit ist.

Bemerkung 5.35 *Nach (5.97) gilt*

$$\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=1,\dots,m} = (2 - \kappa_{ij})_{i,j=1,\dots,m}. \quad (5.104)$$

Somit ist die positive Semi-Definitheit der Matrix Λ der paarweisen Tail Dependence notwendig für die Selbstkonsistenz einer Tail Dependence Struktur.

Ein wichtiger Aspekt ist die Selbstkonsistenz von Schätzern. Es sollen Daten simuliert werden, die eine bestimmte Abhängigkeitsstruktur haben. Dafür ist es natürlich wesentlich, dass die Abhängigkeitsstruktur zulässig ist.

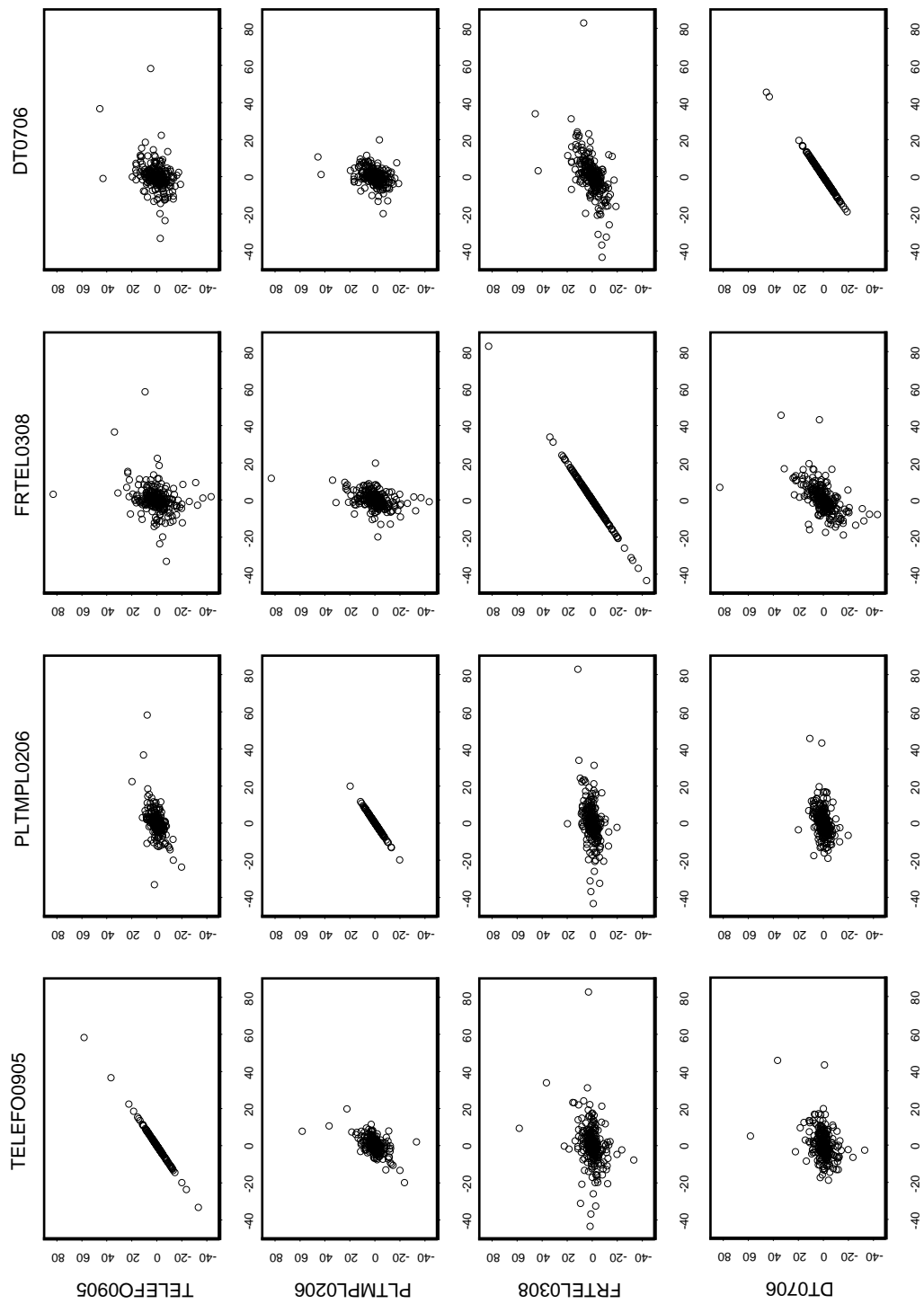


Abbildung 5.1: Gemeinsame Stichprobe der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von 4 Telekommunikationsanleihen

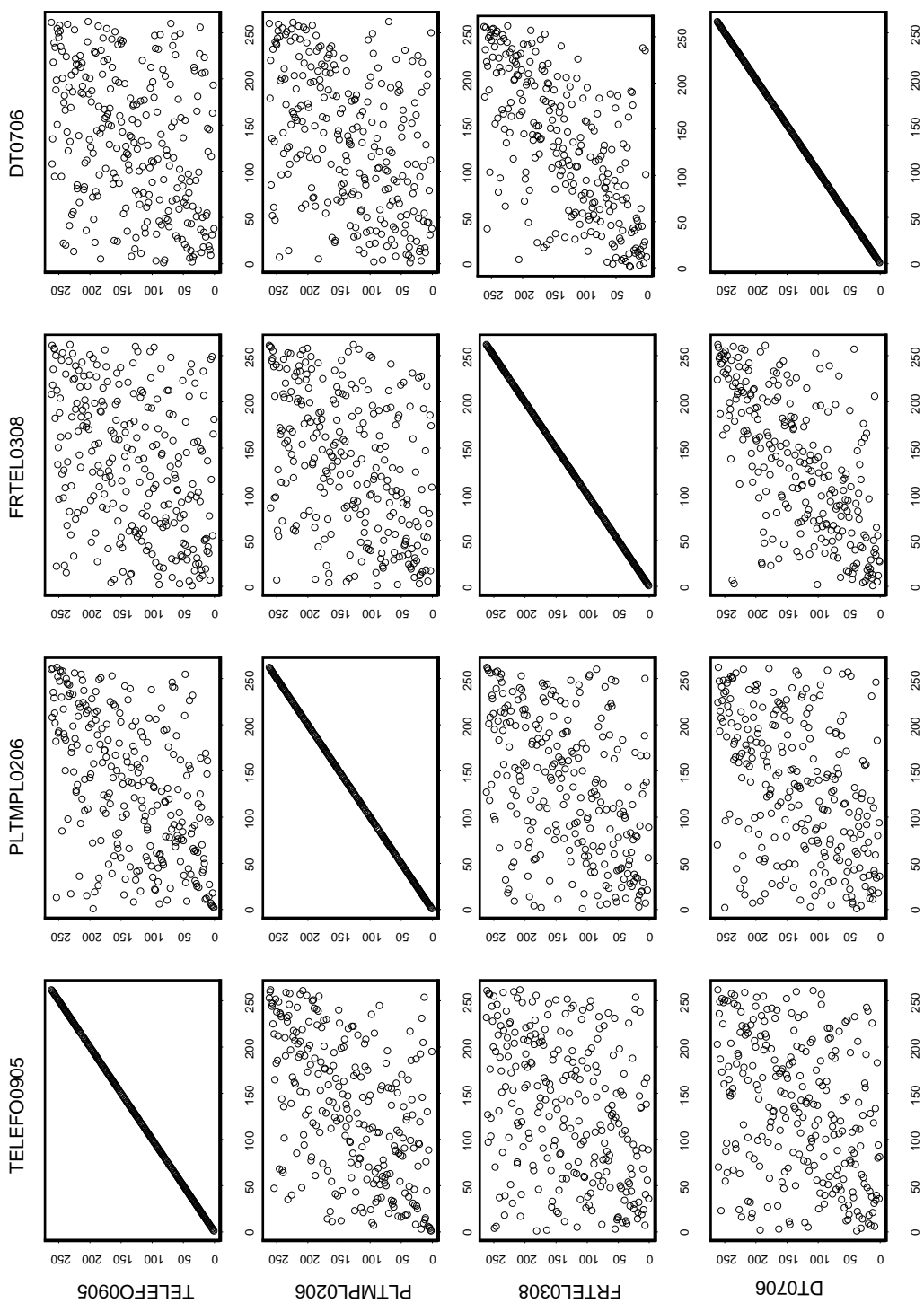


Abbildung 5.2: Gemeinsame Stichprobe der Ränge der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von 4 Telekommunikationsanleihen

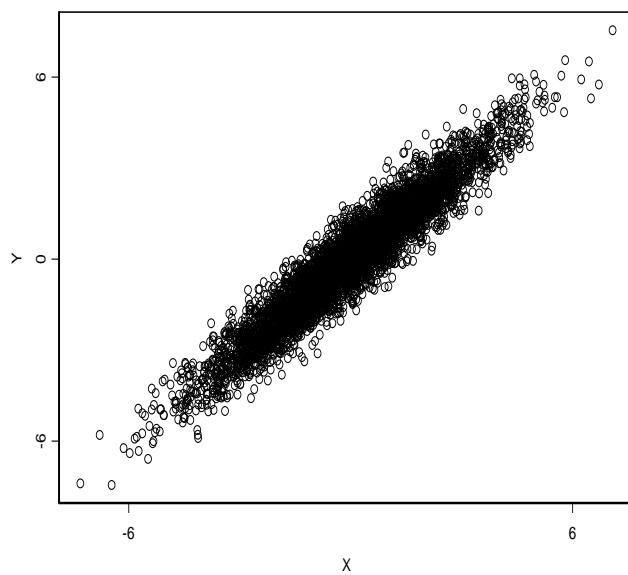
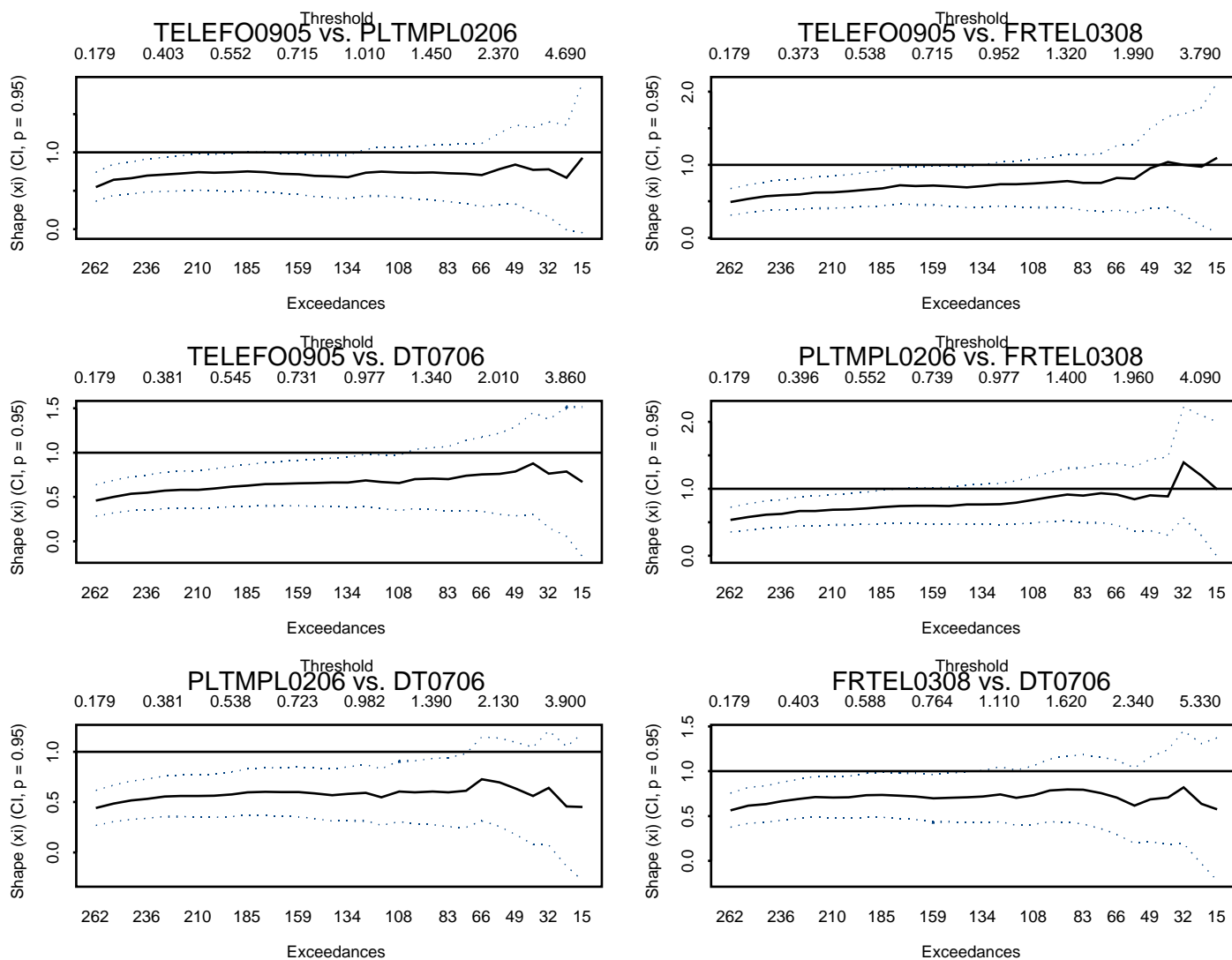
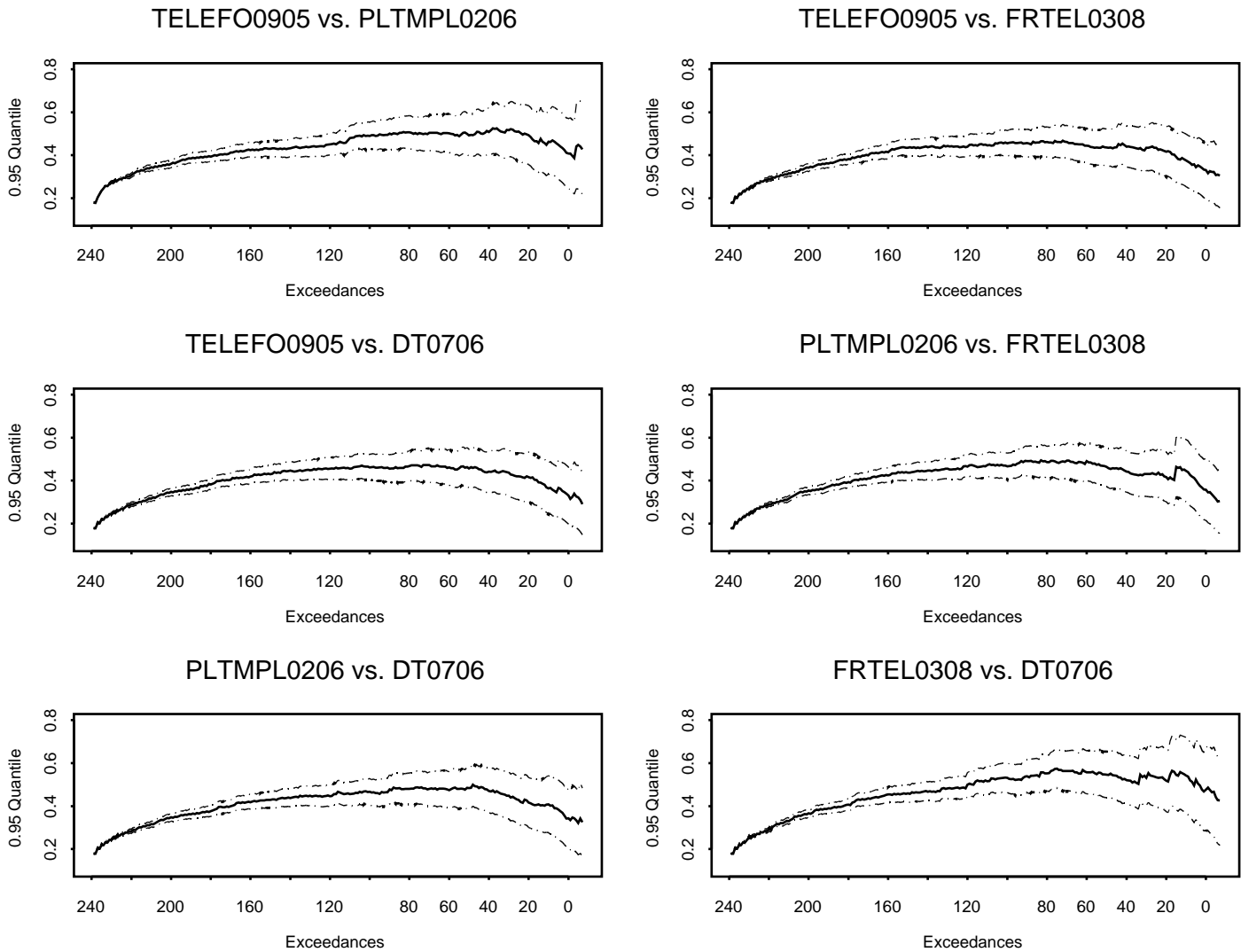


Abbildung 5.3: 2-dimensionale Normalverteilung mit Korrelation 0.9, Varianz jeweils 4

Abbildung 5.4: Schätzer für $\eta = 2 - \bar{\lambda}$ zwischen 4 Telekommunikationsanleihen

Abbildung 5.5: Schätzer für λ_U zwischen 4 Telekommunikationsanleihen

Kapitel 6

Sphärische und Elliptische Verteilungen

In Kapitel 7 wird ein Simulationsverfahren entwickelt, welches Zufallsvariablen erzeugt, die eine bestimmte, vorgegebene (paarweise) Tail Dependence haben. Dazu werden die Copulae elliptischer Verteilungen benutzt, da diese leicht zu erzeugen sind. Die benötigte Theorie über elliptische Verteilungen wird hier vorgestellt.

Zunächst werden die sphärischen Verteilungen vorgestellt. Die für sphärische Verteilungen dargelegten Überlegungen und Ergebnisse werden anschließend formal auf elliptische Verteilungen übertragen.

Von den verschiedenen Abhängigkeitsmaßen wird die Tail Dependence sowohl für sphärische als auch für elliptische Verteilungen dargelegt. Zu den elliptischen Verteilungen werden auch die Korrelation und Kendall's Tau angeschrieben.

Im Weiteren bezeichnet $|\cdot|$, wie in Kapitel 5, die Euklidische Norm auf den reellwertigen Vektorräumen. Die charakteristische Funktion $\phi_X(\mathbf{s}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ einer m -dimensionalen Zufallsvariablen \mathbf{X} ist definiert als:

$$\phi_X(\mathbf{s}) = \mathbf{E}[\exp(i\mathbf{s}^T \mathbf{X})]. \quad (6.1)$$

6.1 Sphärische Verteilungen

Im m -dimensionalen Raum \mathbb{R}^m ist die Sphäre mit Radius r und Mittelpunkt $\boldsymbol{\mu}$ definiert durch:

$$\mathcal{S}_m(r, \boldsymbol{\mu}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : |\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}| = r\}. \quad (6.2)$$

Ist $r = 1$ und $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, so heißt $\mathcal{S}_m(1, \mathbf{0})$ Einheitssphäre (um den Ursprung $\mathbf{0}$). Der Radius r kann als Scharparameter aufgefasst werden.

Als sphärische Verteilung bezeichnet man eine Verteilung, deren Dichte auf einer beliebigen Sphäre der Schar jeweils konstant ist. Man charakterisiert daher sphärisch verteilte Zufallsvektoren durch ihre Invarianz gegenüber Drehungen des Koordinatensystems.

Definition 6.1 (Sphärische Verteilung) Ein m -dimensionaler Zufallsvektor \mathbf{X} heißt sphärisch verteilt, wenn für jede orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gilt:

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} O\mathbf{X} \quad (6.3)$$

Bemerkung 6.2 Diese Definition stammt aus Schmidt [17]. Sie enthält nicht den Fall eines sphärisch um $\boldsymbol{\mu}$ verteilten Zufallsvektors \mathbf{Y} . Dieser Fall lässt sich mittels der Transformation

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \boldsymbol{\mu} \quad (6.4)$$

leicht auf sphärisch um $\mathbf{0}$ verteilte Zufallsvektoren \mathbf{X} umschreiben.

Die Unterscheidung von $\mathcal{S}_m(r, \boldsymbol{\mu})$ und $\mathcal{S}_m(r, \mathbf{0})$ ist also nicht wesentlich, daher wird o.B.d.A. $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ angenommen; es gelte:

$$\mathcal{S}_m(r) := \mathcal{S}_m(r, \mathbf{0}). \quad (6.5)$$

Schmidt zeigt, dass der Zufallsvektor \mathbf{X} genau dann sphärisch verteilt ist, wenn seine charakteristische Funktion $\phi(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$ die Form

$$\phi(\mathbf{s}) = \Phi(\mathbf{s}^T \mathbf{s}), \quad \Phi: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad (6.6)$$

hat.

Definition 6.3 (Charakteristischer Generator) Die Funktion Φ heißt charakteristischer Generator von \mathbf{X} . Die Menge aller m -dimensionalen sphärischen Verteilungen, die von Φ induziert werden wird mit $\mathcal{S}_m^G(\Phi)$ bezeichnet.

Man kann sphärische Verteilungen auf eine zweite Art charakterisieren. Dazu geht man von der speziellen Form (6.6) der charakteristische Funktion aus und betrachtet zunächst die Menge der charakteristischer Generatoren m -dimensionaler sphärischer Verteilungen

$$\Omega_m := \{\Phi(\cdot) : \Phi(\mathbf{s}^T \mathbf{s}) \text{ ist eine } m\text{-dimensionale charakteristische Funktion}\}. \quad (6.7)$$

Satz 6.4 Mit einer Verteilungsfunktion $F^m: [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ gilt folgende Relation:

$$\Phi \in \Omega \iff \Phi(\mathbf{s}^T \mathbf{s}) = \int_0^\infty \psi_m(\mathbf{s}^T \mathbf{s} r^2) dF^m(r). \quad (6.8)$$

Die Funktion ψ_m ist gegeben durch

$$\psi_m(\mathbf{s}^T \mathbf{s}) = \int_{\mathcal{S}_m(1)} \exp(i\mathbf{s}^T \mathbf{v}) \frac{dS_m(\mathbf{v})}{S_m}, \quad (6.9)$$

wobei S_m die Fläche der Einheitsphäre $\mathcal{S}_m(1)$ im m -dimensionalen ist, und $S_m(\cdot)$ das durch die Uniformverteilung auf dieser Sphäre definierte Maß bezeichnet.

Bemerkung 6.5

- (i) Die Funktion $\psi_m(\mathbf{s}^T \mathbf{s})$ ist die charakteristische Funktion einer uniform auf $\mathcal{S}_m(1)$ verteilten Zufallsvariable $\mathbf{U}^{(m)}$.
- (ii) In Gleichung (6.9) ist ψ_m vom Radius der Sphäre unabhängig. Daher wird $r = 1$ gewählt.

Satz 6.6 Wenn \mathbf{X} sphärisch verteilt ist mit dem charakteristischen Generator $\Phi \in \Omega_m$, dann gilt:

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R_m \mathbf{U}^{(m)}, \quad (6.10)$$

wobei $\mathbf{U}^{(m)}$ uniform auf $\mathcal{S}_m(1)$ verteilt ist und $R_m \in \mathbb{R}_0^+$ eine Zufallsvariable unabhängig von $\mathbf{U}^{(m)}$ ist.

Definition 6.7 (Erzeugende Zufallsvariable) Für $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ heißt R_m die erzeugende Zufallsvariable von \mathbf{X} . Die Verteilung F_{R_m} von R_m heißt erzeugende Verteilung von \mathbf{X} .

Die univariaten Randverteilungen von $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ werden mit F_i , $i = 1, \dots, m$, bezeichnet.

Lemma 6.8 Sei $1 \leq l < m$ und $(\mathbf{X}^{(l)}, \mathbf{X}^{(m-l)})$ eine Partition von $\mathbf{X} = R_m \mathbf{U}^{(m)} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ mit $\mathbf{X}^{(l)} \in \mathbb{R}^l$ und $\mathbf{X}^{(m-l)} \in \mathbb{R}^{m-l}$. Dann entstehen die Elemente der Partition als von Φ auf $\mathcal{S}_l^G(\Phi)$ bzw. $\mathcal{S}_{m-l}^G(\Phi)$ induzierte Zufallsvektoren

$$\mathbf{X}^{(l)} \in \mathcal{S}_l^G(\Phi) \quad \text{und} \quad \mathbf{X}^{(m-l)} \in \mathcal{S}_{m-l}^G(\Phi), \quad (6.11)$$

die wie folgt aufgebaut sind:

$$(\mathbf{X}^{(l)}, \mathbf{X}^{(m-l)})^T \stackrel{d}{=} (R_m D_1 \mathbf{U}^{(l)}, R_m D_2 \mathbf{U}^{(m-l)})^T, \quad (6.12)$$

wobei $(D_1)^2 \sim \text{Beta}(\frac{l}{2}, \frac{m-l}{2})$ und $(D_2)^2 = 1 - (D_1)^2$. Weiter sind $\mathbf{U}^{(l)}$, $\mathbf{U}^{(m-l)}$ und $((D_1)^2, (D_2)^2)^T$ paarweise unabhängige Zufallsvektoren.

Mit $\text{Beta}(\frac{l}{2}, \frac{m-l}{2})$ wird hier und im Weiteren die Beta Verteilung mit den Parametern $\frac{l}{2}$ und $\frac{m-l}{2}$ bezeichnet. Die Dichte einer Verteilung $\text{Beta}(a, b)$ mit Parametern $a, b > 0$ lautet

$$f_\beta(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1. \quad (6.13)$$

Die Zufallsvektoren $\mathbf{X}^{(l)}$ und $\mathbf{X}^{(m-l)}$ einer Partition heißen für $1 \leq l < m$ Komponentenvektoren. Einen Beweis von Lemma 6.8 zeigen Fang, Kotz und Ng[11].

Bemerkung 6.9 Aus dem ersten Teil des Lemmas und aus der Symmetrie der charakteristischen Generatoren sphärischer Zufallsvariabler folgt, dass l -dimensionale Randverteilungen, $1 \leq l < m$, des m -dimensionalen Zufallsvektors \mathbf{X} sphärisch verteilt sind mit demselben charakteristischen Generator.

Aus dem zweiten Teil folgt, dass sich alle Randverteilungen gleicher Dimension entsprechen. Für die eindimensionalen Randverteilungen gilt also

$$F_1(x) = F_i(x), \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.14)$$

Nun wird ein Zufallsvektor $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ und sein Komponenten-Vektor $\mathbf{X}^{(l)} \in \mathcal{S}_l^G(\Phi)$ betrachtet. Dann hat die erzeugende Zufallsvariable $R_l \geq 0$ von $\mathbf{X}^{(l)}$ nach Lemma 6.8 mit $B_l := D_1$ die Form $R_l = |R_l \mathbf{U}^{(l)}| \stackrel{d}{=} |R_m B_l \mathbf{U}^{(l)}| = R_m B_l$. Zusammengefaßt:

Lemma 6.10 *Haben $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ und $\mathbf{X}^{(l)} \in \mathcal{S}_l^G(\Phi)$, sein Komponenten-Vektor, die erzeugenden Zufallsvariablen R_m bzw. R_l , dann gilt*

$$R_l = R_m B_l. \quad (6.15)$$

Die Zufallsvariable B_l ist unabhängig von R_m , $0 \leq B_l \leq 1$. Für $1 \leq l < m$ gilt $B_l^2 \sim \text{Beta}(\frac{l}{2}, \frac{m-l}{2})$; ist $l = m$, gilt $B_l \equiv 1$.

Die Abbildungen 6.1 - 6.3 zeigen die Dichten dreier 2-dimensionalen sphärischer Zufallsvektoren.

Bemerkung 6.11 Satz 6.6 ist sehr hilfreich, wenn man elliptisch verteilte Zufallsvektoren simulieren möchte. Allerdings ist es nur in einzelnen Fällen möglich, die sphärische Verteilungsfunktion von \mathbf{X} und ihre Randverteilungen explizit als Formel anzuschreiben. Die zu berechnenden Integrale können meist nur numerisch gelöst werden, was im Allgemeinen sehr aufwändig sein kann. Beispiele für Dichten finden sich z.B. in Schmidt [17].

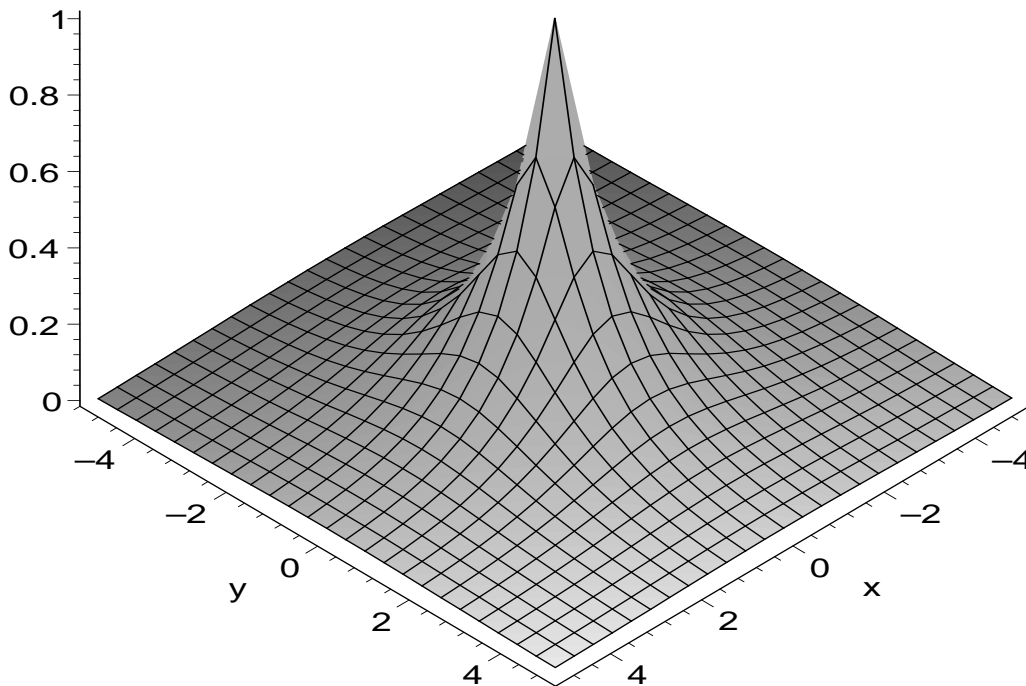


Abbildung 6.1: Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable gemäß $\text{GPD}(0.1)$ verteilt ist

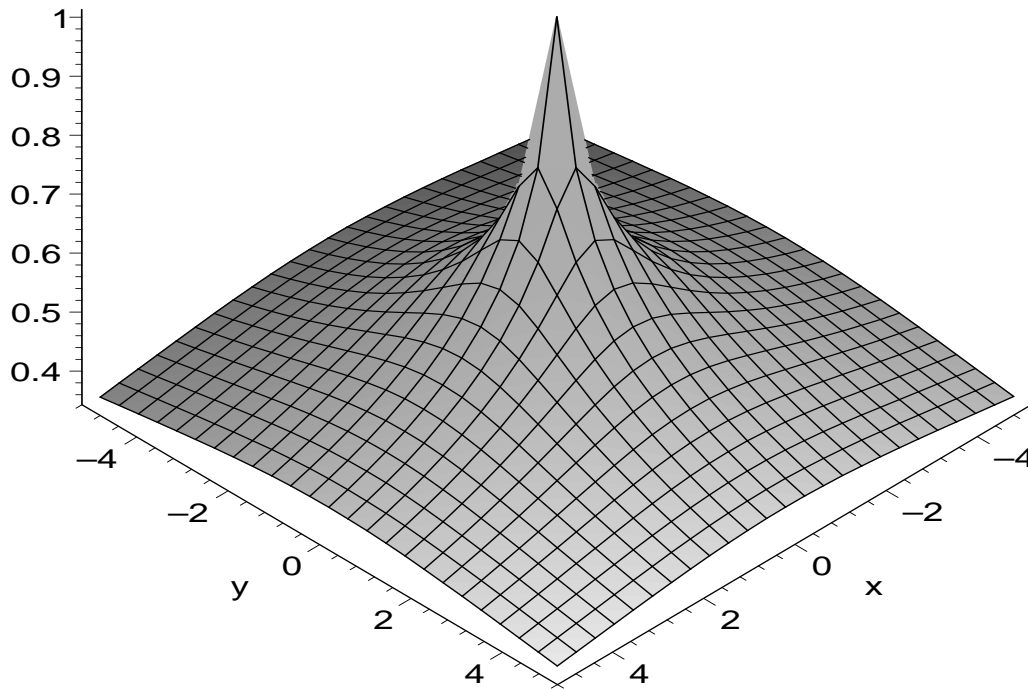


Abbildung 6.2: Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable gemäß GPD(3) verteilt ist

6.1.1 Sphärische Copulae

Definition 6.12 (Sphärische Copula) Die Copula einer sphärischen Verteilung wird sphärische Copula genannt.

Nach Bemerkung 6.11 lassen sich die (Rand-)Verteilungsfunktionen sphärisch verteilter Zufallsvariablen im Allgemeinen nicht explizit angeben. Daher kann man auch nicht nach dem Satz von Sklar eine geschlossene Form für die Copula analytisch ermitteln.

Man könnte die Copula numerisch berechnen, dies ist allerdings sehr aufwändig.

Eine vernünftige Alternative besteht darin, eine Stichprobe von gemeinsam mit der Copula verteilten Zufallsvariablen zu erzeugen, die uniforme Randverteilungen auf $[0, 1]$ haben: man simuliert sphärisch verteilte Zufallsvariablen und kehrt die Randverteilungen mit Hilfe der empirischen Verteilungsfunktion um.

Die Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigen Histogramme von je 1 000 000 Realisierungen zweier uniform auf $[0, 1]$ verteilter Zufallsvariablen $(U, V) \sim C$ mit sphärischer Copula C deren erzeugende Zufallsvariable R_2 mit GPD(1) bzw. exponential(1) verteilt ist.

Die hohe Anzahl von Ereignissen in der Nähe der Ecken von $[0, 1]^2$ ist auf die Projektion der Zufallsvariablen auf das Einheitsquadrat zurückzuführen. Die Copula wird durch die erzeugende Funktion der sphärischen Zufallsvariablen $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ festgelegt; sie ist daher invariant unter beliebigen Drehungen der Koordinatenachsen X_1, X_2 .

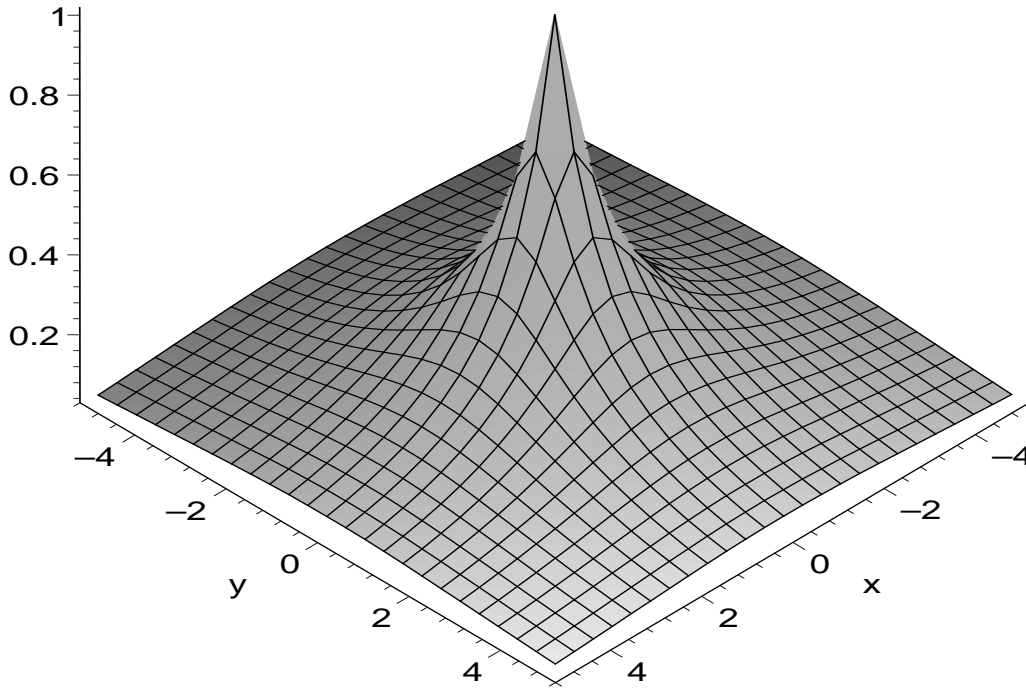


Abbildung 6.3: Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable gemäß $\text{GPD}(0.5)$ verteilt ist

6.1.2 Tail Dependence für sphärische Verteilungen

Bei sphärischen Zufallsvariablen hängen Tail Dependence und reguläre Variation zusammen. Aus Lemma 6.10 folgt unmittelbar, dass reguläre Variation des Tails der erzeugenden Zufallsvariablen R_m die reguläre Variation der Tails aller R_l , $1 \leq l < m$, der m -dimensionalen Randverteilungen bedingt:

Satz 6.13 Für die Verteilungsfunktionen F_{R_m} und F_{R_l} der erzeugenden Variablen R_m bzw. R_l des Zufallsvektors $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ und eines Komponenten-Vektors $\mathbf{X}^{(l)} \in \mathcal{S}_l^G(\Phi)$ von \mathbf{X} folgt aus $\bar{F}_{R_m} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha > 0$ auch $\bar{F}_{R_l} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

Mit $\mathcal{R}_{-\alpha}$ wurde in Definition 3.8 die Menge der regulär variierenden Funktionen mit Index $-\alpha$ bezeichnet. Den Beweis von Satz 6.13 findet man in Schmidt (2001) [17].

Bemerkung 6.14 Entsprechend Satz 6.13 zeigt Schmidt, dass die Dichtefunktion f_{R_l} , $1 \leq l < m$, von F_{R_l} regulär variiert mit Index $-\alpha - 1$, $\alpha > 0$, wenn die Dichte von R_m $f_{R_m} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$.

Definition 6.15 (Taubersche Bedingung) Man sagt, eine meßbare Funktion $h : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ erfüllt die Taubersche Bedingung, wenn gilt

$$\lim_{\eta \rightarrow 1^+} \liminf_{x \rightarrow \infty} \inf_{t \in [1, \eta]} (h(tx) - h(x)) \geq 0. \quad (6.16)$$

Bemerkung 6.16 Die Funktion $h(x) = x^\alpha \bar{F}_{R_m}(x)$ erfüllt die Taubersche Bedingung genau dann, wenn \bar{F}_{R_m} eine hinreichend langsam fallende Funktion ist. Die von uns betrachteten verallgemeinerten Pareto Verteilungen erfüllen alle die Taubersche Bedingung.

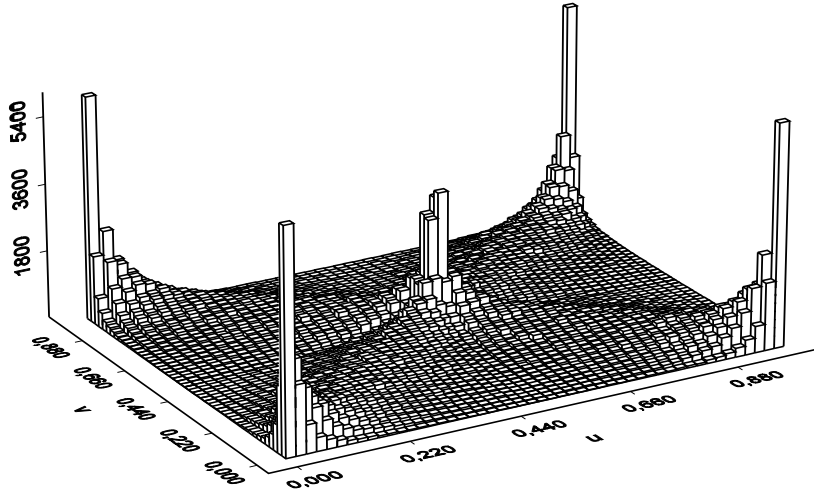


Abbildung 6.4: Histogramm einer 2-dimensionalen sphärischen Copula mit GPD(1) verteilter erzeugender Zufallsvariabler

Mit der Tauberschen Bedingung lässt sich die Aussage von Satz 6.13 verschärfen und umkehren:

Satz 6.17 *Von den Verteilungsfunktionen F_{R_m} und F_{R_l} der erzeugenden Variablen R_m bzw. R_l der Zufallsvariablen $X \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ und eines Komponenten-Vektors $X^{(l)} \in \mathcal{S}_l^G(\Phi)$ von X erfülle $x^\alpha \bar{F}_{R_m}(x)$ die Taubersche Bedingung. Dann folgt aus der Existenz von $l \in \{1, \dots, m\}$ mit $\bar{F}_{R_l} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, dass $\bar{F}_m \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.*

Bemerkung 6.18 Es ist bisher nicht bekannt, ob die Taubersche Bedingung in Satz 6.17 notwendig ist (vgl. Hinweis bei Schmidt [17]). Die Bedingung ist jedoch relativ schwach, sie wird von vielen Funktionen, insbesondere von den stetig differenzierbaren Verteilungsfunktionen erfüllt.

Satz 6.19 *Wenn $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R_m \mathbf{U}^{(m)} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$, und wenn für die Überlebensfunktion \bar{F}_{R_m} von R_m die Bedingung $\bar{F}_{R_m} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, erfüllt ist, dann gilt für die Verteilungsfunktion $F_1 = F_i$, $\forall i = 1, \dots, m$, der univariaten Randverteilungen von X :*

$$\bar{F}_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha}. \quad (6.17)$$

Wenn $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ eine Dichte besitzt, dann hat diese nach der Definition der sphärischen Verteilungen 6.1 die Form

$$g(\mathbf{x}^T \mathbf{x}), \quad g: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \text{ meßbar.} \quad (6.18)$$

Definition 6.20 (Dichtegenerator) *Wenn $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ eine Dichte $g(\mathbf{x}^T \mathbf{x})$ besitzt, dann heißt g der Dichtegenerator von \mathbf{X} ; es kann geschrieben werden $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_m^G(g)$.*

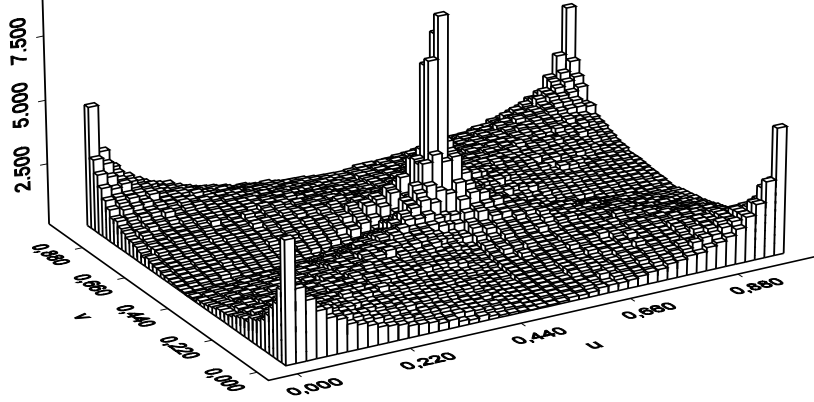


Abbildung 6.5: Histogramm einer 2-dimensionalen sphärischen Copula mit exponential(1) verteilter erzeugender Zufallsvariabler

Lemma 6.21 *Der Zufallsvektor $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R_m \mathbf{U}^{(m)} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ besitzt einen Dichtegenerator genau dann, wenn R_m eine Dichte f_{R_m} hat. Es gilt:*

$$f_{R_m}(r) = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} r^{m-1} g(r^2), \quad r \geq 0. \quad (6.19)$$

Hieraus folgt unmittelbar:

Satz 6.22 *Der Zufallsvektor $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R_m \mathbf{U}^{(m)} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$ hat einen regulär variierenden Dichtegenerator $g \in \mathcal{R}_{(-\alpha-m)/2}$, $\alpha > 0$, genau dann, wenn R_m eine regulär variierende Dichte $f_m \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$, $\alpha > 0$, besitzt.*

Definition 6.23 (Null-regulär variierend) *Eine positive Lebesgue-messbare Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ heißt null-regulär variierend bei ∞ , wenn gilt:*

$$0 < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} < \infty, \quad \forall t > 1. \quad (6.20)$$

Sei \mathcal{OR} die Menge aller null-regulär variierenden Funktionen, dann gilt $h \in \mathcal{OR}$. Statt null-regulär variierend sagt man kurz null-variierend.

Für eine null-variierende Überlebensfunktionen folgt aus Lemma 6.10:

Satz 6.24 *Angenommen, die erzeugende Zufallsvariable R_{l_0} , $1 \leq l_0 \leq m$, der Randverteilung F_{l_0} von $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_{l_0}^G(\Phi)$ erfüllt $\bar{F}_{l_0} \in \mathcal{OR}$, dann gilt für die Verteilungsfunktionen F_l der erzeugenden Zufallsvariablen aller l -dimensionalen Randverteilungen, $1 \leq l \leq m$, $F_l \in \mathcal{OR}$.*

Satz 6.25 Sei $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R_m \mathbf{U}^{(m)} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$, $m \geq 2$. Dann gelten

- (i) Wenn die Verteilungsfunktion F_m von R_m einen regulär variierenden Tail hat, dann sind alle zweidimensionalen Randverteilungen Tail dependent.
- (ii) Wenn eine zweidimensionale Randverteilung von \mathbf{X} Tail dependent ist, dann variiert \bar{F}_i , die Randüberlebensfunktion, null-regulär.
- (iii) Wenn eine zweidimensionale Randverteilung von \mathbf{X} Tail dependent ist, dann variiert \bar{F}_{R_m} , die Überlebensfunktion von R_m , null-regulär.

Korollar 6.26 Sei $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R_m \mathbf{U}^{(m)} \in \mathcal{S}_m^G(\Phi)$, $m \geq 2$. Wenn die univariate Überlebensfunktion $\bar{F}_i \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, und wenn $x^\alpha \bar{F}_{R_m}(x)$ die Taubersche Bedingung erfüllt, dann sind alle bivariaten Randverteilungen Tail dependent.

Für die Tail Dependence läßt sich nach ihrer Definition 5.27 mit Lemma 6.8 eine Formel herleiten. (Die Rechnung findet sich bei Satz 6.44.)

Satz 6.27 Der Index λ der Tail Dependence lautet für sphärische Verteilungen:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{1/\sqrt{2}} \bar{F}_{R_2}\left(\frac{x}{u}\right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du}{\int_0^1 \bar{F}_{R_2}\left(\frac{x}{u}\right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du} = \frac{\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{u^{-\alpha}}{\sqrt{1-u^2}} du}{\int_0^1 \frac{u^{-\alpha}}{\sqrt{1-u^2}} du} \in (0, 1], \quad (6.21)$$

darin ist \bar{F}_{R_2} die Überlebensfunktion von R_2 und $-\alpha$ der Index der regulären Variation von R_2 .

Bemerkung 6.28 Auf Grund der Symmetrie der sphärischen Verteilungen ist die Tail Dependence einer sphärischen Verteilung invariant gegenüber Koordinatendrehungen.

6.2 Elliptische Verteilungen

Im m -dimensionalen Raum \mathbb{R}^m ist ein Ellipsoid mit Radius r um den Mittelpunkt $\boldsymbol{\mu}$ definiert durch:

$$\mathcal{E}_m(\Sigma, r, \boldsymbol{\mu}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \sqrt{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})} = r\}, \quad (6.22)$$

$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist positiv definit. Der Mittelpunkt $\boldsymbol{\mu}$ ist der Schnittpunkt der Hauptachsen.

Bemerkung 6.29 Jede positiv definite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ induziert mittels $\|\mathbf{x}\|_\Sigma := \sqrt{\mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}}$ eine Norm auf \mathbb{R}^m . Bezüglich einer durch Σ gegebenen Koordinatentransformation gehen die Ellipsoide in Sphären über. Daher nennt man den Scharparameter r Radius des Ellipsoids.

Statt von Ellipsoid-Schalen wird kurz von Ellipsen gesprochen. Entsprechend Abschnitt 6.1 definiert man für gegebenes Σ die Einheits Ellipse: $\mathcal{E}_m(\Sigma, 1, \mathbf{0})$.

Bemerkung 6.30 Häufig wird nur gefordert, dass Σ positiv semi-definit ist. Hat Σ einen Rang $m - k < m$, ist also nicht (streng) positiv definit, dann kann man von Σ zu einer positiv-definiten Matrix $\Sigma^* \in \mathbb{R}^{(m-k) \times (m-k)}$ übergehen.

Hier wird Σ positiv definit angenommen.

Gewählt werde eine Matrix A mit $A^T A = \Sigma$. Dann kann man die nach (6.22) durch Σ gegebene Ellipsenschar definieren durch

$$\mathcal{E}_m(\Sigma, r, \boldsymbol{\mu}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} = \boldsymbol{\mu} + A^T \mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathcal{S}_m(r)\}. \quad (6.23)$$

Wie in Abschnitt 6.1 ist der Lagevektor $\boldsymbol{\mu}$ nicht wesentlich; daher wird im Anschluß an Definition 6.31 o.B.d.A. $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ gesetzt und $\mathcal{E}_m(\Sigma, r)$ geschrieben.

Als elliptische Verteilung bezeichnet man eine Verteilung, deren Dichte jeweils auf den Schalen einer Schar $\mathcal{E}_m(\Sigma, r)$ konstant ist.

Die folgende Definition stammt von Hult und Lindskog (2001) [12].

Definition 6.31 (Elliptische Verteilung) *Man sagt, ein m -dimensionaler Zufallsvektor \mathbf{X} ist elliptisch verteilt mit den Parametern $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$, wenn gilt:*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + A^T \mathbf{Y}. \quad (6.24)$$

Hier ist $\mathbf{Y} \in \mathcal{S}_p^G(\Phi)$, $p \geq m$ ein p -dimensionaler sphärisch verteilter Zufallsvektor, $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ mit $A^T A = \Sigma$, Σ ist positiv definit. Mit $\mathcal{E}_m^G(\Sigma, \Phi, \boldsymbol{\mu})$ bzw. $\mathcal{E}_m^G(\Sigma, \Phi)$ wird die Familie der elliptisch verteilten Zufallsvariablen mit den Parametern $\Sigma, \boldsymbol{\mu}$ zum charakteristischen Generator Φ bezeichnet.

Aus der Definition 6.31 folgt für $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ mit der Darstellung von sphärischen Verteilungen aus Satz 6.6:

Satz 6.32 *Wenn $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^G(\Sigma, \Phi)$ liegt, dann gilt:*

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R_m A^T \mathbf{U}^{(p)}, \quad (6.25)$$

wobei $A^T A = \Sigma$ symmetrisch und positiv definit ist. Die erzeugende Zufallsvariable $R_m \geq 0$ ist unabhängig von $\mathbf{U}^{(p)}$, und $\mathbf{U}^{(p)}$ ist uniform auf der Einheitssphäre $\mathcal{S}_p(1)$ verteilt.

Bemerkung 6.33 Die Zufallsvariable $A^T \mathbf{U}^{(p)}$, $\mathbf{U} \sim$ uniform auf $\mathcal{S}_p(1)$ ist i.A. nicht uniform auf der durch Σ definierten Ellipse verteilt.

Analog zu Satz 6.32 kann man die charakteristische Funktion der sphärischen auf die elliptischen Verteilungen übertragen. Man erhält:

Lemma 6.34 (Charakteristische Funktion elliptischer Verteilungen) *Ein m -dimensionaler Zufallsvektor \mathbf{X} ist genau dann elliptisch verteilt, wenn seine charakteristische Funktion*

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{s}) = \mathbf{E}[\exp(i\mathbf{s}^T \mathbf{X})], \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^m \quad (6.26)$$

in der Form

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{s}) = \Phi(\mathbf{s}^T \Sigma \mathbf{s}) \quad (6.27)$$

dargestellt werden kann. Die symmetrische und positiv definite Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ legt Größenordnung und Korrelation der X_i , $i = 1, \dots, m$, fest.

Die Funktion $\Phi(\cdot) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, bestimmt die Familie der Verteilungen und heißt, wie bei den sphärischen Verteilungen, charakteristischer Generator von \mathbf{X} .

Bemerkung 6.35 Es gilt

$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{s}) = \mathbf{E}[\exp(i\mathbf{s}^T \mathbf{X})] = \mathbf{E}[\exp(i\mathbf{s}^T A^T \mathbf{Y})] = \phi_{\mathbf{Y}}(A\mathbf{s}). \quad (6.28)$$

Wegen der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion kann man unmittelbar folgern, dass die spezielle Wahl von A keine Rolle spielt. Es können beliebige Matrizen A ausgewählt werden, die $A^T A = \Sigma$ erfüllen. Im Weiteren wird daher $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gewählt.

Bemerkung 6.36 Elliptische Verteilungen mit verschiedenen Parametern können identisch sein. Falls $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^G(\Sigma, \Phi)$, dann ist $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^G(c^2 \Sigma, \Phi_c)$ für alle $c > 0$, wo $\Phi_c(s^T s) := \Phi(s^T s/c^2)$.

Aus

$$\text{cov}(\mathbf{X}) = \text{cov}(R_m A^T \mathbf{U}^{(m)}) = A^T \mathbf{E}[R_m^2] \text{cov}(\mathbf{U}^{(m)}) A \quad (6.29)$$

folgt mit

$$\text{cov}(\mathbf{U}^{(m)}) = \frac{\text{diag}(1, \dots, 1)}{m} \quad (6.30)$$

für die Kovarianz von \mathbf{X}

$$\text{cov}(\mathbf{X}) = A^T A \mathbf{E}[R_m^2]/m. \quad (6.31)$$

Daher kann man schließen:

Korollar 6.37 Wenn ein elliptisch verteilter Zufallsvektor $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^G(\Sigma, \Phi)$ endliche zweite Momente besitzt, dann existiert immer eine Darstellung

$$\text{cov}(\mathbf{X}) = \Sigma. \quad (6.32)$$

Mit Bemerkung 6.35 folgt $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^G\left(\text{cov}(\mathbf{X}), \Phi(\mathbf{s}^T \mathbf{s} \frac{m^2}{\mathbf{E}[R_m^2]^2})\right) = \mathcal{E}_m^G(\Sigma, \Phi)$.

Beispiel 6.38 Jede multivariate Normalverteilung hat einen charakteristischen Generator der Form

$$\Phi_N(\mathbf{s}^T \mathbf{s}) = c_n (\mathbf{s}^T \mathbf{s})^{N-1} \exp(-r(\mathbf{s}^T \mathbf{s})^t); \quad r, t > 0, 2N + n > 2. \quad (6.33)$$

Darin ist c_n eine normalisierende Konstante. (Der Generator (6.33) ist der Generator der symmetrischen Kotz verteilten Zufallsverteilungen, zu denen die Normalverteilung gehört, die Standardnormalverteilung ergibt sich mit $N = 1 = t = 2r$.)

Beispiel 6.39 Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^G(\Sigma, g)$ heißt *symmetrisch Pearson Typ VII verteilt*, wenn sein Dichtegenerator (siehe Def. 6.20) die Form

$$g(u) = c_n \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-N}, \quad N > \frac{n}{2}, m > 0, u \geq 0, \quad (6.34)$$

hat. Offenbar variiert \mathbf{X} regulär mit Index $-N$. Die verallgemeinerten Pareto Verteilungen und die t -Verteilungen gehören zur Klasse der Pearson Typ VII Verteilungen.

Die Abbildungen 6.6 und 6.7 zeigen die Dichten 2-dimensionaler elliptischer Zufallsvariablen. Die erzeugende Zufallsvariable ist beide Male GPD(1) verteilt, die Varianzen sind gleich, die Korrelationen unterscheiden sich: $\rho = 0.7$ bzw. $\rho = 0.9$.

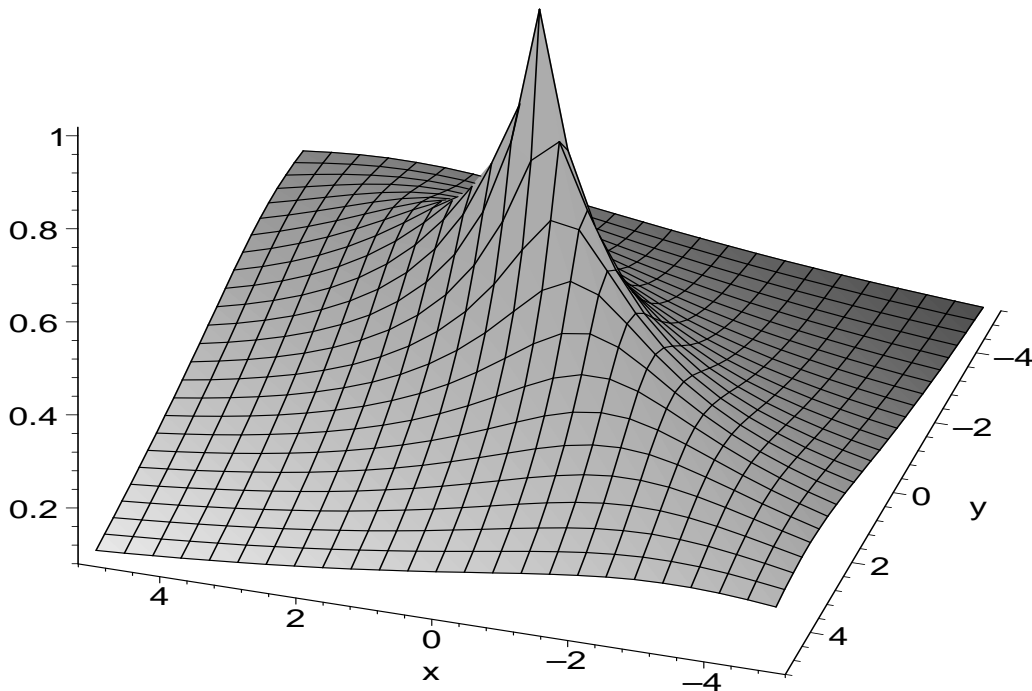


Abbildung 6.6: Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung (GPD(1), $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0.7$)

6.2.1 Elliptische Copulae

Definition 6.40 (Elliptische Copula) Die Copula einer elliptischen Verteilung wird elliptische Copula genannt.

Ebenso wie sphärische Copulae können elliptische Copulae nur selten explizit berechnet werden, man behilft sich wieder mit Simulationen.

Die Abbildungen 6.8 und 6.9 zeigen Histogramme von je 1 000 000 Realisierungen zweier uniform auf $[0, 1]$ verteilter Zufallsvariablen $(U, V) \sim C$ mit elliptischer Copula C , deren

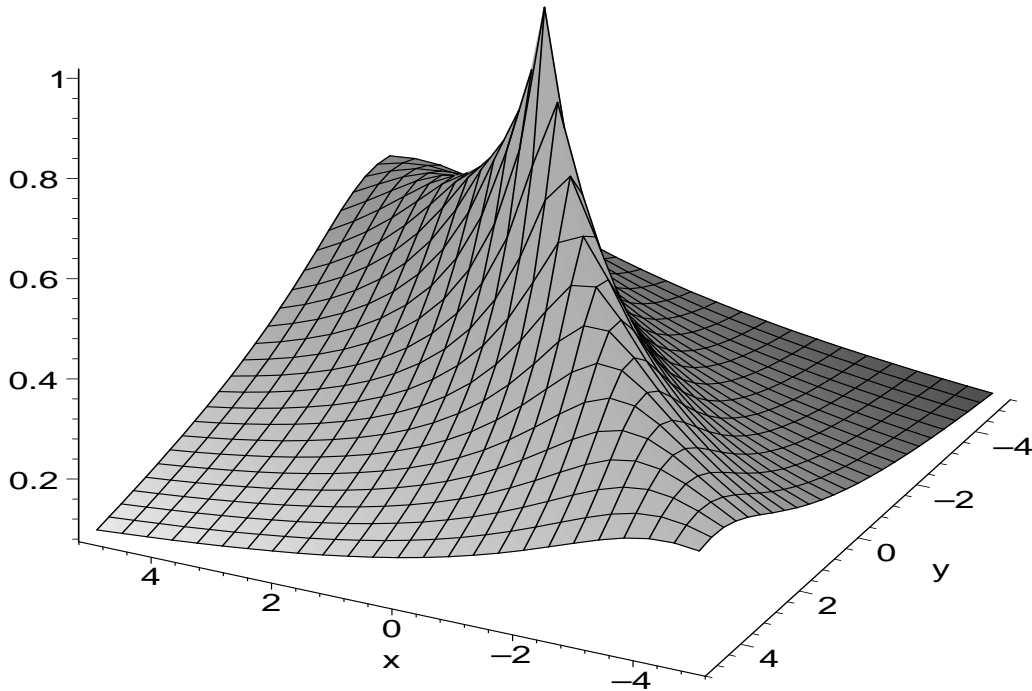


Abbildung 6.7: Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung (GPD(1), $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0.9$)

erzeugende Zufallsvariable R_2 mit GPD(1) verteilt ist; die Varianzen sind gleich, die Korrelationen unterscheiden sich: $\rho = 0.3$ bzw. $\rho = 0,85$.

Die hohe Anzahl von Ereignissen in der Nähe der Ecken von $[0, 1]^2$ ist wiederum auf die Projektion der Verteilungen auf das Einheitsquadrat zurückzuführen.

6.2.2 Korrelation für elliptische Verteilungen

Es ist bekannt, dass die Momente einer Verteilungsfunktion, wenn sie existieren, aus ihrer charakteristischen Funktion berechnet werden können. Für das 2-te Moment gilt:

$$E [XX^T] = - \left(\frac{\partial \partial}{\partial t_i \partial t_j} \phi_X(\mathbf{0}) \right)_{i,j=1,\dots,m}. \quad (6.35)$$

Daraus folgt, dass die Kovarianz (das 2.Moment) eines elliptisch verteilten Zufallsvektors \mathbf{X} vom charakteristischen Generator Φ_X bestimmt wird.

Wie bekannt, lässt sich die Kovarianz-Matrix zerlegen:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1d} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{d1} & \cdots & \cdots & \sigma_{dd} \end{bmatrix} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d) \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_{d1} & \cdots & \rho_{dd} \end{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d) \\ &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d) \Sigma_\rho \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d), \end{aligned} \quad (6.36)$$

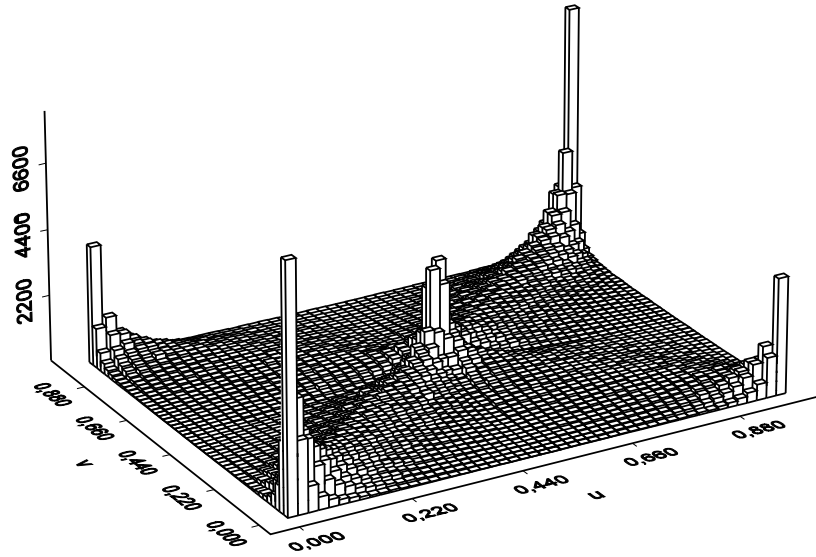


Abbildung 6.8: Histogramm einer 2-dimensionalen elliptischen Copula (GPD(1), $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0.3$)

Die Diagonalmatrix mit Einträgen $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ bezeichnet man mit $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$, und es gilt

$$\sigma_i := \sqrt{\sigma_{ii}}, i = 1, \dots, d. \quad (6.37)$$

Die paarweisen Korrelationskoeffizienten ergeben sich als

$$\rho_{ij} := \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, i, j = 1, \dots, d. \quad (6.38)$$

Die Abhängigkeit der Korrelation vom charakteristischen Generator wird später wichtig, wenn der Zusammenhang von Korrelation und Tail Dependence für elliptische Zufallsvariable untersucht wird.

6.2.3 Kendall's Tau für Elliptische Verteilungen

Kendall's Tau wurde in Abschnitt 5.2.3 vorgestellt. Das folgende Resultat stammt von Lindskog, McNeil und Schmock [15].

Satz 6.41 (Lindskog, McNeil und Schmock, 2001) Sei $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^G(\Sigma, \Phi)$ elliptisch verteilt. Für je zwei Komponenten X_i, X_j lautet Kendall's τ

$$\tau(X_i, X_j) = \tau_{ij} = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}. \quad (6.39)$$

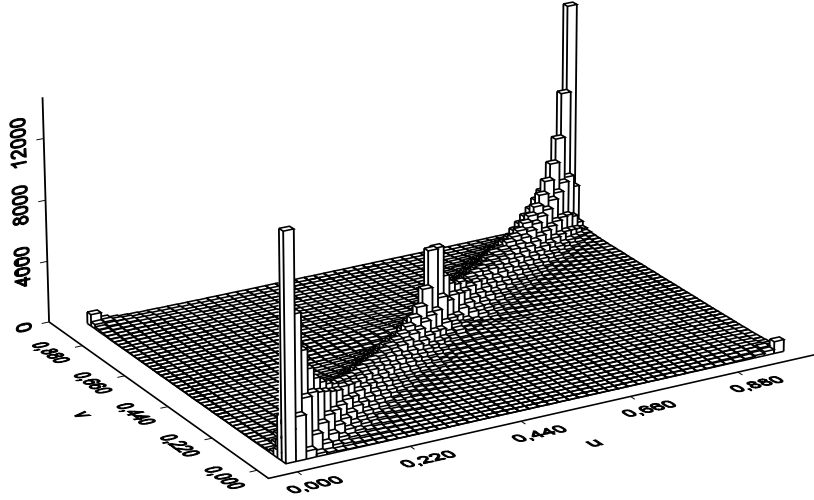


Abbildung 6.9: Histogramm einer 2-dimensionalen elliptischen Copula (GPD(1), $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0.85$)

Kendall's τ_{ij} hängt für elliptische Verteilungen also nur von der Korrelation ρ_{ij} ab. Weder der charakteristische Generator, noch die Form der Verteilung beeinflusst die Rangkorrelation.

6.2.4 Tail Dependence für elliptische Zufallsvariablen

Da die elliptischen Verteilungen aus den sphärischen durch eine Koordinatentransformation hervorgehen, erwartet man hier für die Tail Dependence ähnliche Resultate. Man kann wie in Abschnitt 6.1.2 vorgehen, daher wird zunächst Lemma 6.10 auf elliptische Verteilungen verallgemeinert:

Lemma 6.42 Wenn $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^G(\Sigma, \Phi, \boldsymbol{\mu})$ mit Darstellung $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu}_* + R_{m_*} A_*^T \mathbf{U}^{(m_*)}$, und $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu}_{**} + R_{m_{**}} A_{**}^T \mathbf{U}^{(m_{**})}$, mit $m \geq m_* \geq m_{**}$, dann existiert ein konstantes c , so dass:

$$\boldsymbol{\mu}_* = \boldsymbol{\mu}_{**}, \quad (6.40)$$

$$A_{**}^T A_{**} = c A_*^T A_*, \quad (6.41)$$

$$R_{m_{**}} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{c}} B_{m_{**}} R_{m_*}. \quad (6.42)$$

Dabei sind $A_*^T A_* = A_{**}^T A_{**} = \Sigma$, R_{m_*} unabhängig von $B_{m_{**}}$ und $B_{m_{**}}^2 \sim \text{Beta}\left(\frac{m_{**}}{2}, \frac{m_* - m_{**}}{2}\right)$, wenn $m_* > m_{**}$, und $B_{m_{**}} \equiv 1$ falls $m_* = m_{**}$.

Satz 6.43 Sei $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} A^T \mathbf{Y} \stackrel{d}{=} R_m A^T \mathbf{U}^{(m)} \in \mathcal{E}(\Sigma, \Phi)$, $m \geq 2$, $A^T A = \Sigma$. Es gelten:

- (i) Wenn \mathbf{X} eine Tail dependent bivariate Randverteilung hat, dann ist die Überlebensfunktion \bar{F}_{R_m} von R_m 0-regulär variierend.
- (ii) Wenn \mathbf{X} eine Tail dependent bivariate Randverteilung hat, dann sind die Überlebensfunktionen \bar{F}_i der univariaten Randverteilungen von \mathbf{X} null-regulär variierend.
- (iii) Wenn für die Überlebensfunktion \bar{F}_{R_m} von R_m gilt: $\bar{F}_{R_m} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha < 0$, dann sind alle bivariaten Randverteilungen von \mathbf{X} Tail dependent.
- (iv) Wenn für die Überlebensfunktion \bar{F}_1 der univariaten Randverteilungen von \mathbf{X} gilt: $\bar{F}_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$, $\alpha > 0$, und wenn $x^\alpha \bar{F}_{R_m}(x)$ die Taubersche Bedingung erfüllt, dann sind alle bivariaten Randverteilungen Tail dependent.

Elliptische Verteilungen sind symmetrisch, daher ist der Index $-\alpha$ der regulären Variation des oberen Tails \bar{F}_i gleich dem des unteren Tails F_i . Bei verallgemeinerten Pareto Verteilungen mit Parameter $\xi > 0$, die hier benutzt werden, entspricht der Index der regulären Variation dem inversen Parameter, also $\alpha = \frac{1}{\xi}$ (vgl. Kapitel 3).

Satz 6.44 Sei $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_m^G(\Sigma, \Phi)$ ein elliptisch verteilter Zufallsvektor mit regulär variierenden Tails mit Index $-\alpha$. Für zwei Komponenten X_i, X_j lautet der Koeffizient der Tail Dependence

$$\lambda(\alpha, \rho_{ij}) = \frac{\int_0^{f(\rho_{ij})} \frac{u^\alpha}{\sqrt{1-u^2}} du}{\int_0^1 \frac{u^\alpha}{\sqrt{1-u^2}} du}, \quad \alpha > 0, \quad f(\rho_{ij}) = \sqrt{\frac{1 + \rho_{ij}}{2}}. \quad (6.43)$$

Beweis: Sei $\mathbf{X} \in \mathcal{E}_2^G(\Sigma, \Phi)$ ein 2-dimensionaler elliptisch verteilter Zufallsvektor mit der Darstellung

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} A^T \mathbf{Y} \stackrel{d}{=} R_2 A^T \mathbf{U}^{(2)}. \quad (6.44)$$

Die erzeugende Zufallsvariable R_2 habe eine positive Dichte für alle $x \geq 0$. Nach Bemerkung 6.35 kann

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & \sigma_{12}/\sqrt{\sigma_{11}} \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

als Cholesky Zerlegung der positiv definiten Matrix $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ gewählt werden; $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$. Für die verallgemeinerten Inversen $F_1^{\leftarrow}, F_2^{\leftarrow}$ der Randverteilungen von X_1, X_2 gilt $\sqrt{\sigma_{22}}F_1^{\leftarrow}(u) = \sqrt{\sigma_{11}}F_2^{\leftarrow}(u)$. Für die Tail Dependence ergibt sich mit Lemma 6.42

$$\begin{aligned} & \lim_{u \nearrow 1} \mathbf{P}(X_1 > F_1^{\leftarrow}(u) | X_2 > F_2^{\leftarrow}(u)) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_1 > \sqrt{\sigma_{11}}x | X_2 > \sqrt{\sigma_{22}}x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\left(Y_1 > x, \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}}Y_1 + \sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{1-\rho^2}Y_2 > \sqrt{\sigma_{22}}x\right)}{\mathbf{P}(Y_1 > x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\left(R_2 B_2 > x, R_2 B_2 \left(\rho + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\frac{1-B_2^2}{B_2^2}}U_2^{(1)}\right) > x\right)}{\mathbf{P}(R_2 B_2 > x)}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

wobei benutzt wurde, dass $U_1^{(1)}$, $U_2^{(1)}$, R_2 und B_2 unabhängig voneinander sind und dass $U_1^{(1)}$ und $U_2^{(1)}$ Bernoulli verteilt sind. Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \lim_{u \nearrow 1} \mathbf{P}(X_1 > F_1^{\leftarrow}(u) | X_2 > F_2^{\leftarrow}(u)) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{P}\left(R_2 B_2 > x, R_2 B_2 \left(\rho + \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\frac{1 - B_2^2}{B_2^2}}\right) > x\right)}{\mathbf{P}(R_2 B_2 > x)} \right. \\
&+ \left. \frac{\mathbf{P}\left(R_2 B_2 > x, R_2 B_2 \left(\rho - \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\frac{1 - B_2^2}{B_2^2}}\right) > x\right)}{\mathbf{P}(R_2 B_2 > x)} \right) \tag{6.47} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^{h(\rho)} \mathbf{P}\left(R_2 > \frac{x}{u}\right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du}{\int_0^1 \mathbf{P}\left(R_2 > \frac{x}{u}\right) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du},
\end{aligned}$$

mit $h(\rho) := \left(1 + \frac{(1-\rho)^2}{1-\rho^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{1+\rho_{ij}}{2}}$. Die letzte Gleichung folgt aus $B_2^2 \sim \text{Beta}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und unabhängig von R_2 . Der Grenzübergang ist offensichtlich, wenn man bedenkt, dass R_2 regulär variiert mit Index $-\alpha$, daher folgt (6.43). (Der Beweis nach Schmidt [17] und Frahm [10].) \square

Bemerkung 6.45 Der Index der regulären Variation $-\alpha$ ist eine Eigenschaft der Familie der elliptischen Verteilungen, aus der die Copula stammt. Die Tail Dependence ist eine Eigenschaft der Copula. Nach dem Satz von Sklar 4.6 ist es möglich, mittels einer gegebenen Copula neue multivariate Verteilungen mit beliebigen Randverteilungen zu konstruieren. In diesem Fall ist α nicht nur der Tail Index der Randverteilungen, sondern auch ein Copula Parameter.

In Gleichung (6.43) kann man $u = \cos v$ setzen und erhält für den Koeffizienten der Tail Dependence die Form:

$$\lambda(\alpha, \rho_{ij}) = \frac{\int_{g(\rho_{ij})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha v \, dv}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha v \, dv}, \quad g(\rho_{ij}) = \arccos \sqrt{\frac{1 + \rho_{ij}}{2}}. \tag{6.48}$$

Es gilt nach Satz 6.41:

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}. \tag{6.49}$$

Mit $\rho_{ij} = \sin(\tau_{ij} \frac{\pi}{2})$ folgt dann:

$$\lambda(\alpha, \tau_{ij}) = \frac{\int_{h(\tau_{ij})}^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha v \, dv}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha v \, dv}, \quad h(\tau_{ij}) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 - \tau_{ij}}{2}\right). \tag{6.50}$$

Für den Fall $\alpha \rightarrow 0$ ist die Tail Dependence also eine einfache Funktion von Kendall's τ :

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \lambda(\alpha, \tau_{ij}) = \frac{1 + \tau_{ij}}{2}. \tag{6.51}$$

Es wird abgekürzt $\lambda_{ij} = \lambda(\alpha, \tau_{ij}) = \lambda(\alpha, \rho_{ij})$; die Matrix Λ der paarweisen Tail Dependence lautet

$$\Lambda := (\lambda_{ij})_{i,j=1,\dots,m}. \quad (6.52)$$

Bemerkung 6.46 Jede Zufallsvariable X_1, \dots, X_m hat denselben Tail Index α , der durch die erzeugende Zufallsvariable R_m gegeben ist. Die Tail Dependence λ_{ij} von (X_i, X_j) wird bei gegebenem α durch $\tau_{ij} = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}$ eindeutig bestimmt.

6.3 Selbstkonsistente elliptische Verteilungen

In Kapitel 7 werden Zufallsvariable mit einer bestimmten Abhängigkeitsstruktur simuliert. Daher interessiert man sich dafür, welche Anforderungen sich aus der Selbstkonsistenz eines Abhängigkeitsmaßes für die Selbstkonsistenz eines anderen ergeben.

Wie oben gezeigt, hängen Korrelation, Extremal Coefficient und Tail Dependence für elliptische Verteilungen zusammen. Aus Abschnitt 5.2.6 ist bekannt, dass die Korrelationsmatrix Σ_ρ und die Tail Dependence-Matrix Λ positiv semi-definit sein müssen, damit ein Zufallsvektor mit dieser Abhängigkeitsstruktur existiert.

Hier werden nur die Korrelationen ρ_{ij} und die Tail Dependence λ_{ij} betrachtet. Für die Extremal Coefficients κ_{ij} gilt $2 - \kappa_{ij} = \lambda_{ij}$; für Kendall's Tau gilt $\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}$.

Bemerkung 6.47 Der Index $-\alpha$ der regulären Variation der Randverteilungen ist im Allgemeinen kein Copula-Parameter. Bei elliptischen Verteilungen wird er jedoch durch den charakteristischen Generator bestimmt. Er geht sowohl in die Copula als auch in die Randverteilungen ein.

Auswerten von Gleichung (6.48)

Einfach auswerten läßt sich Gleichung (6.48) für $\alpha = 1$. Man erhält

$$\lambda_{ij} = \lambda(1, \rho_{ij}) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1 + \rho_{ij}}{2}}. \quad (6.53)$$

Auflösen nach ρ_{ij} liefert

$$\Sigma_\rho = (\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = (1 - 2(1 - \lambda_{ij})^2)_{i,j=1,\dots,m} \quad (6.54)$$

Diese Korrelationsmatrix muß nach Abschnitt 5.2.6 positiv semidefinit sein, damit sie selbstkonsistent ist. Da diese Bedingung nach Schlather und Tawn [18] auch für die Selbstkonsistenz von Λ hinreicht, ist eine elliptische Verteilung mit regulärer Variation $-\alpha = -1$ genau dann selbstkonsistent, wenn Σ_ρ positiv semidefinit ist.

Für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ kann eine geschlossene Form für λ_{ij} angegeben werden:

$$\lambda_{ij} = \lambda(\alpha, \rho_{ij}) = \frac{-\frac{1}{\alpha} \sin^{\alpha-1} v \cos v \Big|_{g(\rho_{ij})}^{\pi/2} + \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_{g(\rho_{ij})}^{\pi/2} \cos^{\alpha-2} v dv}{-\frac{1}{\alpha} \sin^{\alpha-1} v \cos v + \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-2} v dv}$$

$$= \begin{cases} \frac{-\frac{1}{\alpha} \sin^{\alpha-1} v \cos v \Big|_{g(\rho_{ij})}^{\pi/2} + \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_{g(\rho_{ij})}^{\pi/2} \cos^{\alpha-2} v dv}{\frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (\alpha-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \alpha}} & , \text{ für } \alpha = 1, 3, 5, \dots , \\ \frac{-\frac{1}{\alpha} \sin^{\alpha-1} v \cos v \Big|_{g(\rho_{ij})}^{\pi/2} + \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_{g(\rho_{ij})}^{\pi/2} \cos^{\alpha-2} v dv}{\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (\alpha-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot \alpha}} & , \text{ für } \alpha = 2, 4, 6, \dots . \end{cases} \quad (6.55)$$

Diese Darstellung ist praktisch, da man sie relativ leicht implementieren kann. Wenn eine Tail Dependence gegeben ist, dann ist ein α so zu wählen, dass die resultierende Matrix Σ_ρ positiv definit ist. Der Zusammenhang zwischen λ_{ij} , ρ_{ij} und α ist für jeweils große Werte sehr stark, in dem Sinne, dass nach Gleichung (6.48) durch eine kleine Änderungen zweier Parameter eine starke Änderung des dritten erzwungen wird. Daher wird es häufig sinnvoll sein, reelle Zahlen für α anzunehmen. Meist wird (6.48) numerisch gelöst werden, so dass die Existenz einer geschlossenen Form irrelevant ist. Den Zusammenhang zwischen α , ρ_{ij} und λ_{ij} zeigt Abbildung 6.10.

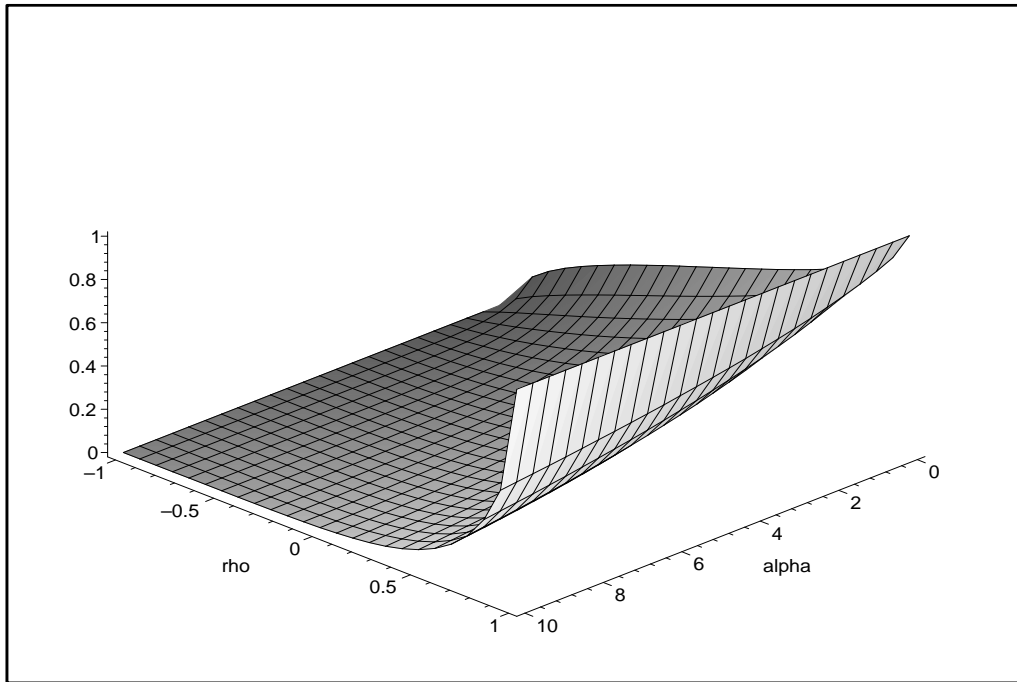


Abbildung 6.10: λ in Abhängigkeit von α und ρ

Kapitel 7

Verfahren zur Value at Risk Schätzung

Aus der vorn vorgestellten Theorie wird ein Verfahren zur Value at Risk (VaR) Schätzung für Portfolios von Unternehmensanleihen entwickelt. Als einzige Ursache für Preisänderungen und damit als einzige Risikoquelle werden Änderungen der Credit Spreads angesehen.

In dieser Arbeit werden lineare Portfolios von Unternehmensanleihen betrachtet: der Preis eines Porfolios ist das Skalarprodukt aus dem Vektor der Portfoliokomponenten und dem Vektor der Anleihepreise.

7.1 Nachteile gängiger Verfahren

Verfahren zur VaR Schätzung arbeiten häufig mit der Annahme, dass das Kursänderungsrisiko von Wertpapieren (Aktien, Anleihen, Derivate) von einer Risikoquelle ausgeht, die normalverteilte Preisänderungen erzeugt. Bei den Preisänderungen braucht es sich nicht um Preise im engeren Sinne (in Geldeinheiten) zu handeln, es können auch Renditen o.ä. sein; man spricht von der *treibenden Größe*, kurz vom *Treiber* der Preisänderungen. Üblicherweise nimmt man bei Aktien an, dass ihr Kurs einer *geometrischen Brownschen Bewegung* folgt. Als Treiber sieht man ihre logarithmierten Tagesrenditen $L_t^i := \ln \frac{S_{t+1}^i}{S_t^i}$ an,

$$L_t^i \sim \mathbf{N}(\mu, \sigma), \quad (7.1)$$

oder, wenn es sich um Gruppen $\mathbf{S}_t = (S_t^1, \dots, S_t^m)$ von m Aktien handelt,

$$\mathbf{L}_t = \begin{pmatrix} L_t^1 \\ \vdots \\ L_t^m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \ln \frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} \\ \vdots \\ \ln \frac{S_{t+1}^m}{S_t^m} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma). \quad (7.2)$$

Die logarithmierten Tagesrenditen folgen also einer gemeinsamen Normalverteilung mit Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianz Σ . Im einfachsten Fall nimmt man $\boldsymbol{\mu}$ und Σ als konstant an. Da die Normalverteilung durch ihre ersten beiden Momente vollständig charakterisiert

ist, folgt mit Schätzern für μ und Σ ein einfaches Modell für die gemeinsame Preisentwicklung der Aktien. Dabei kann man den VaR als q -Quantil ausrechnen. Dies ist für große m sehr aufwändig. Deshalb behilft man sich meistens mit (Monte-Carlo-) Simulationsverfahren: man erzeugt viele treibende Zufallsvariablen zu angenommener Verteilung und errechnet daraus Preisänderungen. Nach den Gesetzen der großen Zahlen (nach dem Satz von Glivenko-Cantelli) kann die wahre Verteilung der Preisänderungen durch die empirische Verteilung einer Stichprobe vom Umfang n beliebig genau approximiert werden, wenn man n hinreichend groß wählt. (Mehr über Simulationsverfahren findet man z.B. in Jäckel [13].)

Dieses Verfahren wird - als Beispiel - auf eine Auswahl der vorliegenden Credit Spreads angewandt. Als Treiber der Änderung werden die Tagesrenditen gewählt. Sie werden als lognormalverteilt angenommen. In Abschnitt 7.3 wird so der VaR eines Portfolios von Unternehmensanleihen geschätzt.

Große Nachteile der Verfahren mit Normalverteilungen ergeben sich daraus, dass die Wahl einer bestimmten Verteilung die Möglichkeit, den Treiber zutreffend zu simulieren, stark einschränkt. Zum Beispiel scheinen die Dichten der Treiber von Finanzdaten in Wirklichkeit oft deutlich schwerere (d.h. langsamer fallende) Tails als die Normalverteilungen zu haben. Einen weiteren großen Mangel der Verfahren erkennt man beim Untersuchen der Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Wertpapieren derselben Gattung. Zum Beispiel treten häufig große Änderungen im Credit Spread einer Anleihe gemeinsam mit großen Änderungen bei anderen auf. Moderate Änderungen scheinen in der Regel nicht so stark voneinander abzuhängen. Diese heterogene Abhängigkeit lässt sich mit den Kovarianzen der Normalverteilung nicht erfassen.

Ein geeignetes Maß für die Abhängigkeit zwischen extremen (besonders großen, besonders kleinen) Ereignissen ist die in Abschnitt 5.2.5 vorgestellte *Tail Dependence*. Modelle auf der Grundlage der Normalverteilung berücksichtigen die Tail Dependence nicht.

In Abschnitt 7.4 wird ein Simulationsverfahren entwickelt, das sich auf die Tail Dependence der Treiber anstatt auf deren Korrelation als Abhängigkeitsstruktur stützt. Dieses Verfahren wird mit Hilfe der in den Kapiteln 2 - 6 vorgestellten Theorie aufgebaut.

Verfahren mit Normalverteilung berücksichtigen zwar keine Tail Dependence, das heißt jedoch nicht, dass sie den VaR eines Portfolios zwangsläufig unterschätzen. In der Regel überschätzen sie das Risiko moderater Änderungen im Portfoliowert, sie unterschätzen dagegen das Risiko großer Änderungen.

7.2 Preise von Unternehmensanleihen und Value at Risk

Ausgehend vom Zusammenhang zwischen dem Preis einer Unternehmensanleihe aus Abschnitt 1.2 werden einige Begriffe eingeführt, die das weitere Vorgehen erleichtern; der

VaR wird formal definiert.

Zum Zeitpunkt t hängt der Preis $\tilde{B}(t)$ einer Unternehmensanleihe von der Restlaufzeit $T - t$, dem entsprechenden risikofreien Zins z_{T-t} (auf Jahresbasis), dem Zinscoupon C und dem Credit Spread S_t ab.

Der Preis $\tilde{B}_0^T(t)$ einer Nullkupon-Anleihe, einer Anleihe mit $C = 0$, die eine Rückzahlung 1 zum Zeitpunkt T verspricht, berechnet sich gemäß:

$$\tilde{B}_0^T(t) = \frac{1}{(1 + z_{T-t} + S_t)^{(T-t)}}. \quad (7.3)$$

Der Preis $\tilde{B}_C^T(t)$ einer Unternehmensanleihe mit Couponzahlungen $C > 0$ zu Zeitpunkten T_1, \dots, T_l (es gilt $T_i - t \geq 0$, $i = 1, \dots, l$) lässt sich als Kombination von Nullcouponanleihen verschiedener Restlaufzeiten $T_i - t$, $i = 1, \dots, l$, anschreiben:

$$\tilde{B}_C^T(t) = \sum_{i=1}^l \frac{C}{(1 + z_{T_i-t} + S_t)^{(T_i-t)}} + \frac{1}{(1 + z_{T-t} + S_t)^{(T-t)}}. \quad (7.4)$$

Da C und T für die Anleihen bekannt sind, wird $\tilde{B}_t = \tilde{B}_C^T(t)$ geschrieben. Der Value at Risk ergibt sich nicht aus dem absoluten Preis der Anleihe, sondern aus der (täglichen) Preisänderung B_t . In dieser Arbeit wird angenommen, dass sich nur der Credit Spread um $X_t := S_t - S_{t-1}$ ändert; die übrigen Größen werden konstant gehalten:

$$\begin{aligned} B_t &:= \tilde{B}_t - \tilde{B}_{t-1} \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{C}{(1 + z_{T_i-t} + S_t)^{(T_i-t)}} + \frac{1}{(1 + z_{T-t} + S_t)^{(T-t)}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^l \frac{C}{(1 + z_{T_i-t+1} + S_{t-1})^{(T_i-t+1)}} + \frac{1}{(1 + z_{T-t+1} + S_{t-1})^{(T-t+1)}} \\ &= \sum_{i=1}^l \frac{C}{(1 + z_{T_i-t} + S_{t-1} + X_t)^{(T_i-t)}} + \frac{1}{(1 + z_{T-t} + S_{t-1} + X_t)^{(T-t)}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^l \frac{C}{(1 + z_{T_i-t+1} + S_{t-1})^{(T_i-t+1)}} + \frac{1}{(1 + z_{T-t+1} + S_{t-1})^{(T-t+1)}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Bemerkung 7.1 Mit Gleichung (7.4) wird der Credit Spread implizit durch den am Markt gebotenen Preis \tilde{B}_t einer Unternehmensanleihe definiert. Hier wird die Beziehung zwischen Credit Spread und Anleihepreis jedoch umgekehrt: der Preis wird aus dem vorgegebenen Credit Spread errechnet. Der risikofreie Zins z_{T_i-t} wird von einer Zinskurve („Zero-Curve“, siehe z.B. Anhang B) abgelesen. Meistens gilt $T_l = T$. Wenn man annimmt, dass sich die z_{T_i-t+1} von den z_{T_i-t} nicht stark unterscheiden, gilt die folgende Relation: Steigt (fällt) der Preis einer Unternehmensanleihe, so fällt (steigt) ihr Credit Spread.

Am *Anleihemarkt* werden m verschiedene Anleihen zu Preisen \tilde{B}_t^i , $i = 1, \dots, m$, angeboten; der *Marktvektor* ist definiert durch

$$\tilde{\mathbf{B}}_t = \left(\tilde{B}_t^1, \dots, \tilde{B}_t^m \right)^T. \quad (7.6)$$

Entsprechend definiert man den (Markt-)Preisänderungsvektor

$$\mathbf{B}_t = \left(B_t^1, \dots, B_t^m \right)^T := \tilde{\mathbf{B}}_t - \tilde{\mathbf{B}}_{t-1}. \quad (7.7)$$

Ein *Portfolio* ist eine Auswahl von Anleihen aus dem Markt und ist charakterisiert durch den Portfoliovektor

$$\mathbf{p}_t = \left(p_t^1, \dots, p_t^m \right)^T, \quad (7.8)$$

wobei die Komponente p_t^i angibt, wieviele Einheiten von der Anleihe i zum Zeitpunkt t im Portfolio enthalten sind. Negative Werte für p_t^i sind zulässig.

Der Wert eines (linearen) Portfolios \mathbf{p}_t zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$W_t := \mathbf{p}_t^T \tilde{\mathbf{B}}_t. \quad (7.9)$$

Die Änderung des Portfoliowertes zwischen $t - 1$ und t lautet

$$V_t := \mathbf{p}_{t-1}^T \tilde{\mathbf{B}}_t - \mathbf{p}_{t-1}^T \tilde{\mathbf{B}}_{t-1} = \mathbf{p}_{t-1}^T \mathbf{B}_t. \quad (7.10)$$

Hier werden ausschließlich konstante Portfolios $\mathbf{p}_{t-1} = \mathbf{p}_t = \mathbf{p}$ betrachtet.

Der Value at Risk

Handelsportfolios von Banken werden mit Fremdkapital finanziert, d.h. Wertpapiere werden auf Kredit gekauft. Verluste, die im Handelsgeschäft entstehen, sind also Verluste von Fremdkapital. Als Sicherheit für ihre Gläubiger muß eine Bank daher Eigenkapital bereithalten, um eventuelle Verluste des Handelsportfolios zu kompensieren. Die Höhe des bereitgehaltenen Eigenkapitals sollte natürlich für ein riskanteres Portfolio, z.B. eines aus Hochzinsanleihen, höher sein als für ein risikoarmes Portfolio, z.B. eines aus europäischen Staatsanleihen.

Um das Kapital verschiedenen Portfolios zuzuordnen und damit die Handelsaktivität zu steuern, wird das Risiko verschiedener Portfolios mit dem VaR gemessen. Es wird ein Zeithorizont gewählt, nach dem jeweils die Höhe des bereitgehaltenen Kapitals überprüft wird. Bei Handelsportfolios erfolgt dies üblicherweise täglich. Man setzt eine Obergrenze für einen Verlust, den VaR, den man an einem normalen Handelstag hinzunehmen bereit ist. Anschließend bestimmt man aus der (angepassten) Verteilung der Portfoliopreisänderungen das zu dieser Obergrenze gehörige Quantil. Dieses Quantil gibt die mittlere Häufigkeit (bzw. die Wahrscheinlichkeit) an, mit der ein der Grenze entsprechender oder höherer Tagesverlust erlitten wird. Erscheint dieses Quantil als zu hoch, wird das

Portfolio verkleinert.

In der Praxis geht man umgekehrt vor: Portfolios dürfen einen vorgegebenen VaR zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit q nicht überschreiten. (Es gibt gesetzliche Vorschriften für die VaR Schätzung und die Höhe des bereitzuhaltenden Kapitals, festgelegt durch die Basler Abkommen. Stichwort: Basel II.)

Definition 7.2 (Value at Risk) *Der Value at Risk, $VaR_q^{\Delta t}(\mathbf{p}_t)$, eines Portfolios \mathbf{p}_t zu einer Wahrscheinlichkeit q und einem Zeithorizont Δt erfüllt die Gleichung*

$$\mathbf{P}(-V_t \geq VaR_q^{\Delta t}(\mathbf{p}_t)) = q. \quad (7.11)$$

Dabei bezeichnet V_t die Wertänderung des Portfolios nach (7.10). Später werden $\Delta t = 1$ Tag und $q = 1\%$ gewählt. Unten werden die Indizes weggelassen, es wird VaR bzw. $VaR(\mathbf{p})$ geschrieben.

Für die Beispiele benutzte Abkürzungen

Es liegen die Zeitreihen der Credit Spreads \mathbf{S}_t , $t = 1, \dots, 263$, vor; $\mathbf{S}_t \in \mathbb{R}^{30}$. Ziel ist es, die Wertänderungen V_t für ein Portfolio \mathbf{p} vom 31.10.2002 zum 01.11.2002 zu simulieren. Der 31.10.2002 ist der letzte Tag für den \mathbf{S}_t vorliegt. Da sich die Änderung des Portfoliowerts V_t gemäß Gleichung (7.10), $V_t = \mathbf{p}^T \mathbf{B}_t$, und die des Preisänderungsvektors \mathbf{B}_t gemäß Gleichung (7.7), $\mathbf{B}_t = \tilde{\mathbf{B}}_t - \tilde{\mathbf{B}}_{t-1}$, verhalten, läuft das Verfahren auf eine Simulation von $\tilde{\mathbf{B}}_{01.11.2002}$, abhängig von der simulierten Tagesdifferenz $\mathbf{X}_{01.11.2002}$ der Credit Spreads, hinaus. Unten werden abgekürzt:

$$\mathbf{S}_{31.10.2002} = \mathbf{S}_*, \quad (7.12)$$

$$\mathbf{S}_{01.11.2002} = \mathbf{S}, \quad (7.13)$$

$$\mathbf{X}_{01.11.2002} = \mathbf{X}, \quad (7.14)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{31.10.2002} = \tilde{\mathbf{B}}_*, \quad (7.15)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{01.11.2002} = \tilde{\mathbf{B}}, \quad (7.16)$$

$$\mathbf{B}_{01.11.2002} = \mathbf{B}, \quad (7.17)$$

$$V_{01.11.2002} = V. \quad (7.18)$$

Die simulierten Zufallsvariablen mit der Verteilung von \mathbf{X} werden mit \mathbf{Z} bezeichnet. Die Komponenten der Vektoren werden entsprechend behandelt.

7.3 Value at Risk bei Lognormalverteilung

Als Beispiel werden die 9 Anleihen der Telekommunikationsunternehmen, TELEFO0905, PLTMPL0206, TELDAN0406, FRTEL0308, KPN0406, TIIM0406, DT0706, BRITEL0206, TELECO0611 gewählt.

Auf einfache Weise schätzt man den Value at Risk eines Portfolios in Abhängigkeit von den Credit Spreads, indem man als Treiber der Preisänderung die Tagesrenditen $\frac{S^i}{S_*^i}$ der

Credit Spreads ansieht und diese als gemeinsam lognormalverteilt mit Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianz $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_9) \Sigma_\rho \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_9)$ annimmt und simuliert.

Um den VaR durch Simulation zu schätzen, erzeugt man

$$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} L_j^1 \\ \vdots \\ L_j^9 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \ln \frac{S_j^1}{S_*^1} \\ \vdots \\ \ln \frac{S_j^9}{S_*^9} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.19)$$

Die Parameter Σ und $\boldsymbol{\mu}$ erhält man aus den Daten mit den üblichen Schätzern (siehe Abschnitt 2.1):

$$\widehat{\Sigma}_\rho = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.4881 & 0.3779 & 0.3039 & 0.3472 & 0.4515 & 0.3054 & 0.4984 & 0.3653 \\ 0.4881 & 1.0000 & 0.4439 & 0.4161 & 0.3995 & 0.5015 & 0.3384 & 0.5510 & 0.5190 \\ 0.3779 & 0.4439 & 1.0000 & 0.3082 & 0.4641 & 0.7756 & 0.5437 & 0.5608 & 0.5234 \\ 0.3039 & 0.4161 & 0.3082 & 1.0000 & 0.5213 & 0.5027 & 0.5359 & 0.4241 & 0.4776 \\ 0.3472 & 0.3995 & 0.4641 & 0.5213 & 1.0000 & 0.6283 & 0.5114 & 0.4574 & 0.4184 \\ 0.4515 & 0.5015 & 0.7756 & 0.5027 & 0.6283 & 1.0000 & 0.6453 & 0.5820 & 0.5975 \\ 0.3054 & 0.3384 & 0.5437 & 0.5359 & 0.5114 & 0.6453 & 1.0000 & 0.4964 & 0.4934 \\ 0.4984 & 0.5510 & 0.5608 & 0.4241 & 0.4574 & 0.5820 & 0.4964 & 1.0000 & 0.5144 \\ 0.3653 & 0.5190 & 0.5234 & 0.4776 & 0.4184 & 0.5975 & 0.4934 & 0.5144 & 1.0000 \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}^T = 10^{-4} (8, 0, 2, 18, -43, -14, 21, -5, -15) \quad (7.21)$$

und

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^T = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9) = 10^{-4} (703, 442, 417, 383, 393, 400, 465, 410, 347). \quad (7.22)$$

Zum Simulieren der Zufallsvektoren $\mathbf{L}_j, j = 1, \dots, n$, erzeugt man 9-dimensionale standard-normalverteilte Zufallsvektoren, multipliziert sie mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$, die $A^T A = \widehat{\Sigma}$ erfüllt, und addiert $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$.

Mit den L_j^i werden nach Gleichung (7.19) mit S_*^i die

$$S_j^i = S_*^i \exp L_j^i, \quad i = 1, \dots, 9, \quad (7.23)$$

errechnet. Damit ergeben sich nach (7.4) die Zufallsvektoren der Preise $\widetilde{\mathbf{B}}_j = \widetilde{\mathbf{B}}(\mathbf{S}_j)$ und gemäß (7.7) die der Preisänderungen \mathbf{B}_j .

Der VaR eines Portfolios \mathbf{p} wird durch die empirischen Quantile von $V_j = \mathbf{p}^T \mathbf{B}_j$ geschätzt; entsprechende Werte werden aus dem Histogramm abgelesen.

Für das gekaufte Markt-Portfolio $\mathbf{p} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ erhält man mit diesem Verfahren einen (1%-Tages-) VaR von 0.034: bei Besitz dieses Portfolios erleidet man mit Wahrscheinlichkeit 1% einen Verlust von mehr als 0.034 Geldeinheiten. Für das verkaufte Portfolio $(-\mathbf{p})$ ergibt sich ein VaR von 0.035.

7.4 VaR Schätzung mit Hilfe elliptischer Copulae

Beobachten vorgegebener Portfolios zeigt, dass große Wertverluste häufig dann auftreten, wenn viele Credit Spreads gleichzeitig eine große positive Tagesdifferenz aufweisen. In diesem Abschnitt wird die Abhängigkeit zwischen großen Änderungen der Portfoliokomponenten mit der Tail Dependence beschrieben.

Die (upper) Tail Dependence als Abhängigkeitsstruktur zu verwenden ist nur dann sinnvoll, wenn große Portfolioverluste (überwiegend) durch große (positive) Änderungen der Treiber verursacht werden. Haben die Änderungen der Treiber, die zu großen Verlusten führen, verschiedene Vorzeichen, so bietet es sich an, sie so anzupassen, dass die relevanten Änderungen positiv werden. Dann kann stets die upper Tail Dependence betrachtet werden.

Für Portfolios der vorliegenden Daten muß also stets die geeignete Tail Dependence herangezogen werden. Dies ist für das Vorgehen nicht wesentlich. Daher werden als Beispiele ausschließlich Portfolios gewählt, für die die upper Tail Dependence maßgebend ist.

7.4.1 Die Methode

Der VaR eines Portfolios soll an Hand der vorliegenden Zeitreihen \mathbf{S}_t der Credit Spreads geschätzt werden. Dabei ist die (paarweise) Tail Dependence der Tagesdifferenzen \mathbf{X}_t der Credit Spreads zu berücksichtigen.

Für diese Aufgabe wird ein einfaches Verfahren entwickelt, welches ausgehend von der (geschätzten) Tail Dependence der Tagesdifferenzen \mathbf{X}_t und den (an die \mathbf{X}_t angepassten) Randverteilungen Zufallsvariablen simuliert, aus denen die Preisänderung \mathbf{B} berechnet wird.

Die Tail Dependence ist eine Eigenschaft der Copula. Für das Verfahren muß also eine Copula erzeugt werden, die die aus den Daten geschätzte Tail Dependence aufweist. Das Anpassen einer Copula an die vorliegenden Tagesdifferenzen ist sehr aufwändig, die verfügbaren Modelle haben sehr viele Parameter und sind deshalb nicht praktikabel.

In Kapitel 6 wurde gezeigt, dass für elliptische Verteilungen bei gegebener regulärer Variation die Korrelation durch die Tail Dependence bestimmt ist. Außerdem wurde dort deutlich, dass elliptische Verteilungen mit gegebener Korrelation und regulärer Variation einfach zu erzeugen sind. Daher lassen sich auf einfache Weise elliptisch verteilte Zufallsvariablen zu vorgegebener Tail Dependence Struktur simulieren.

Das Verfahren beruht auf der folgenden Idee: elliptische Verteilungen können zu vorgegebener Tail Dependence erzeugt werden. Nach dem Satz von Sklar werden damit (elliptische) Copulae gewonnen, die diese Tail Dependence haben. Wiederum nach dem Satz von Sklar können mit dieser Copula Zufallsvariable mit beliebigen Randverteilungen - nämlich den vorher an die Daten angepassten - generiert werden.

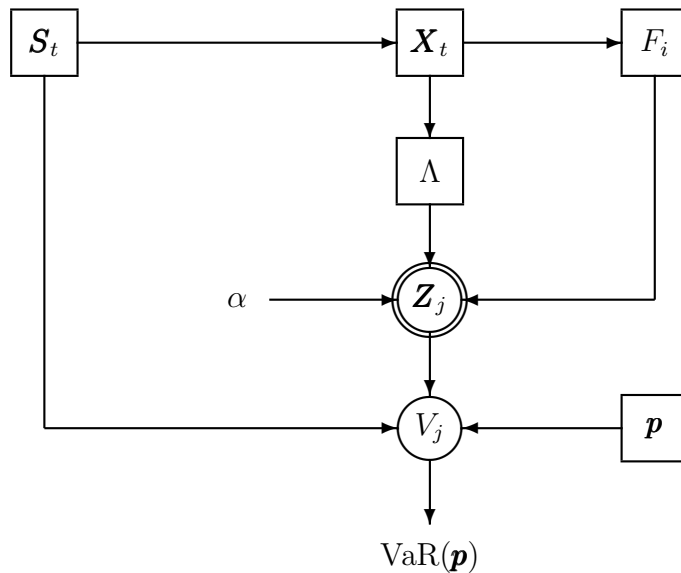


Abbildung 7.1: Überblick über das Vorgehen (von oben links nach unten)

Hier ein Überblick über das Verfahren (vgl. Abbildung 7.1; ausführlich wird das Vorgehen im nächsten Abschnitt dargelegt):

Aus den Credit Spreads \mathbf{S}_t werden die Tagesdifferenzen \mathbf{X}_t berechnet und daraus die Tail Dependence Matrix Λ und die Randverteilungen F_i geschätzt. Mit der Tail Dependence Matrix Λ wird nach Wahl der regulären Variation $-\alpha$ eine Korrelationsmatrix Σ_ρ bestimmt. Diese wird als Kovarianzmatrix aufgefasst. Mit einer Matrix $A = \sqrt{\Sigma_\rho}$ werden elliptisch verteilte Zufallsvektoren und ihre Copula erzeugt. Diese haben die Tail Dependence Λ , und ihre erzeugende Zufallsvariable variiert regulär mit Index $-\alpha$.

Aus diesen Zufallsvariablen entstehen mit den Randverteilungen F_i , $i = 1, \dots, m$, durch Transformation nach dem Satz von Sklar Zufallsvektoren \mathbf{Z}_j , $j = 1, \dots, n$, für die Tagesdifferenz zum 01.11.2002.

Mit den \mathbf{Z}_j und \mathbf{S}_* werden Preisänderungen \mathbf{B}_j berechnet. Der VaR eines Portfolios \mathbf{p} wird aus dem Histogramm von $V_j = \mathbf{p}^T \mathbf{B}_j$ abgelesen.

Bemerkung 7.3 Die erzeugten Zufallsvariablen \mathbf{Z}_j sind im Allgemeinen *nicht* elliptisch verteilt. Sie folgen jedoch einer elliptische Copula.

7.4.2 Das Vorgehen im Einzelnen

Wie am Ende von Abschnitt 7.2 gesagt, soll ausgehend von den Credit Spreads \mathbf{S}_t , $t = 1, \dots, 263$, $\mathbf{S}_t \in \mathbb{R}^{30}$, die Wertänderung V eines Portfolios \mathbf{p} vom 31.10.2002 zum 01.11.2002 simuliert werden. (Abbildung 7.2 veranschaulicht das Vorgehen.)

Nummer	Kürzel	$\tilde{\mathbf{B}}_*$
1	UU1107	1.133
2	ELEPOR0311	1.048
3	ULVR0606	1.057
4	C1010	1.071
5	SNSBNK1007	1.073
6	AXASA0613	1.051
7	BACR0606	1.053
8	PG0905	1.058
9	AVEFP0406	1.060
10	AHOLD0508	1.013
11	PHG0508	1.054
12	NGGLN0806	1.032
13	GMAC0206	1.005
14	DCX0306	1.075
15	FIAT0506	0.929
16	ENEL0604	1.044
17	SIEM0711	1.058
18	EAUG0608	1.043
19	CRDSUI1005	1.038
20	RBOS0513	1.085
21	TELEFO0905	1.048
22	PLTMPL0206	1.075
23	TELDAN0406	1.066
24	FRTEL0308	1.059
25	KPN0406	1.115
26	TIIM0406	1.071
27	DT0706	1.032
28	BRITEL0206	1.093
29	TELECO0611	1.095
30	LAFCP1108	1.073

Tabelle 7.1: Preise $\tilde{\mathbf{B}}_*$ der Anleihen am 31.10.2002

Zunächst werden die Größen ermittelt, die direkt aus den Credit Spreads \mathbf{S}_t gewonnen werden können: die Tagesdifferenzen \mathbf{X}_t , die Preise $\tilde{\mathbf{B}}_*$ der Anleihen, die Randverteilungen F_i der Tagesdifferenzen, deren verallgemeinerte Inversen F_i^{\leftarrow} sowie die Tail Dependence Matrix Λ der Tagesdifferenzen.

Die Tagesdifferenzen \mathbf{X}_t der Credit Spreads werden aus den \mathbf{S}_t nach Gleichung (1.6) berechnet.

Die Preise $\tilde{\mathbf{B}}_*$ der Anleihen am 31.10.2002 werden nach Gleichung (7.4) mit einer Zinskurve (Anhang B) und den Angaben aus der Tabelle in Anhang A ermittelt; die Ergebnisse zeigt Tabelle 7.1. (In der Praxis liegen die Preise vom Markt gegeben vor.)

Die Randverteilungen F_i , $i = 1, \dots, 30$, werden mit Hilfe von QQ-Plots gemäß Abschnitt 2.3 an die Tagesdifferenzen angepasst, ihre verallgemeinerten Inversen F_i^{\leftarrow} bestimmt.

Die Matrix Λ der paarweisen Tail Dependence wird nach Abschnitt 5.2.5 aus den \mathbf{X}_t geschätzt. Nach Abschnitt 5.2.6 ist es für die Selbstkonsistenz der Tail Dependence notwendig, dass Λ positiv semidefinit ist. Die hier aus den Tagesdifferenzen geschätzten Tail Dependence Matrizen waren alle positiv definit.

Nach diesen vorbereitenden Schritten wird zu Λ eine elliptische Copula erzeugt. Dies geschieht wie in Abschnitt 6.2.1 durch Simulation elliptisch verteilter Zufallsvariabler.

Um eine elliptische Verteilung zu erzeugen, die die Tail Dependence Λ hat, wird ein Index der regulären Variation $-\alpha$, $\alpha > 0$, so gewählt, dass nach Gleichung (6.48) mit Λ eine Korrelationsmatrix $\Sigma_\rho = (\rho_{ij})_{i,j=1,\dots,30}$ entsteht (ihre Selbstkonsistenz folgt aus der positiven Definitheit). Für die vorliegenden Daten ist diese Bedingung z.B. mit $\alpha = 1$ erfüllt. Daher gilt

$$\Sigma_\rho = (1 - 2(1 - \lambda_{ij})^2)_{i,j=1,\dots,30}. \quad (7.24)$$

Für die Rand-Varianzen der zu erzeugenden Zufallsvariablen wird $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)^T = (1, \dots, 1)^T$ gewählt. Daher gilt für die Kovarianzmatrix $\Sigma = \Sigma_\rho$.

Zum Erzeugen der elliptisch verteilten Zufallsvektoren \mathbf{Q}_j nach Gleichung (6.25) werden $R_j \sim \text{GPD}(1/\alpha)$ und $\mathbf{U}_j \sim \text{uniform auf } \mathcal{S}_{30}(1)$, siehe Anhang C, generiert. Mit einer Matrix A , $A^T A = \Sigma$, wird

$$\mathbf{Q}_j = R_j A^T \mathbf{U}_j \quad (7.25)$$

berechnet. (Hier wurden $n = 10\,000$ Zufallsvariablen \mathbf{Q}_j erzeugt.)

Die Randverteilungen G_i , $i = 1, \dots, 30$, der \mathbf{Q}_j sind schwierig zu ermitteln- Daher werden sie und ihre Inversen G_i^{\leftarrow} mit Hilfe einer *hinreichend großen* Stichprobe $\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n$ durch die empirischen Verteilungsfunktionen

$$G_{i,n}^{emp}(q) := \frac{\text{card}\{j : Q_j^i < q, j = 1, \dots, n\}}{n + 1}, \quad i = 1, \dots, 30, \quad (7.26)$$

angenähert. (Nach dem Satz von Glivenko-Cantelli wird diese Approximation für hinreichend großes n beliebig genau.) Die transformierten Zufallsvariablen $G_{i,n}^{emp}(Q_j^i)$, $j = 1, \dots, n$, sind (näherungsweise) uniform auf $[0, 1]$ verteilt und ihre gemeinsame Verteilung ist nach dem Satz von Sklar (Satz 4.6) gleich der Copula C .

Die $G_i^{emp}(Q_j^i)$ werden mit den F_i^{\leftarrow} transformiert zu

$$\mathbf{Z}_j = (Z_j^i)_{i=1,\dots,30} = (F_i^{\leftarrow}(G_i^{emp}(Q_j^i)))_{i=1,\dots,30}. \quad (7.27)$$

Nach dem Satz von Sklar haben die Komponenten Z_j^i , $i = 1, \dots, 30$, die gewünschten Verteilungen F_i , sie folgen gemeinsam der Copula C und haben (wegen der Invarianz von

Copulae gegenüber streng monotonen Transformationen ihrer Argumente) die verlangte Tail Dependence Λ .

Damit ist das Simulationsverfahren abgeschlossen: es liegt eine Stichprobe \mathbf{Z}_j , $j = 1, \dots, n$, der Tagesdifferenz zum 01.11.2002 vor, die (für hinreichend großes n näherungsweise) die gleiche Tail Dependence und die gleichen Randverteilungen wie die Zeitreihe \mathbf{X}_t hat.

Die zufälligen Preise $\tilde{\mathbf{B}}_j$ zum 01.11.2002 erhält man durch Einsetzen von $\mathbf{S}_* + \mathbf{Z}_j$ in Gleichung (7.4); der Einfachheit halber wurde hier mit festen risikofreien Zinssätzen z_{T_k-t} gerechnet.

Die Preisänderung \mathbf{B}_j folgen mit $\tilde{\mathbf{B}}_j$ und $\tilde{\mathbf{B}}_*$ aus Gleichung (7.7).

Der VaR des Portfolios \mathbf{p} wird aus dem Histogramm der Portfoliowertänderung $V_j = \mathbf{p}^T \mathbf{B}_j$ abgelesen.

Anwenden auf Beispielportfolios

Das Verfahren wird für die 9 Anleihen TELEFO0905, PLTMPL0206, TELDAN0406, FRTEL0308, KPN0406, TIIM0406, DT0706, BRITEL0206, TELECO0611 wie in Abschnitt 7.3 umgesetzt.

Die Credit Spreads der Anleihen am 31.10.2002 lauten (in Basispunkten)

$$\mathbf{S}_* = (105.67, 95.75, 105.67, 286.25, 199.70, 122.94, 225.82, 112.61, 72.97). \quad (7.28)$$

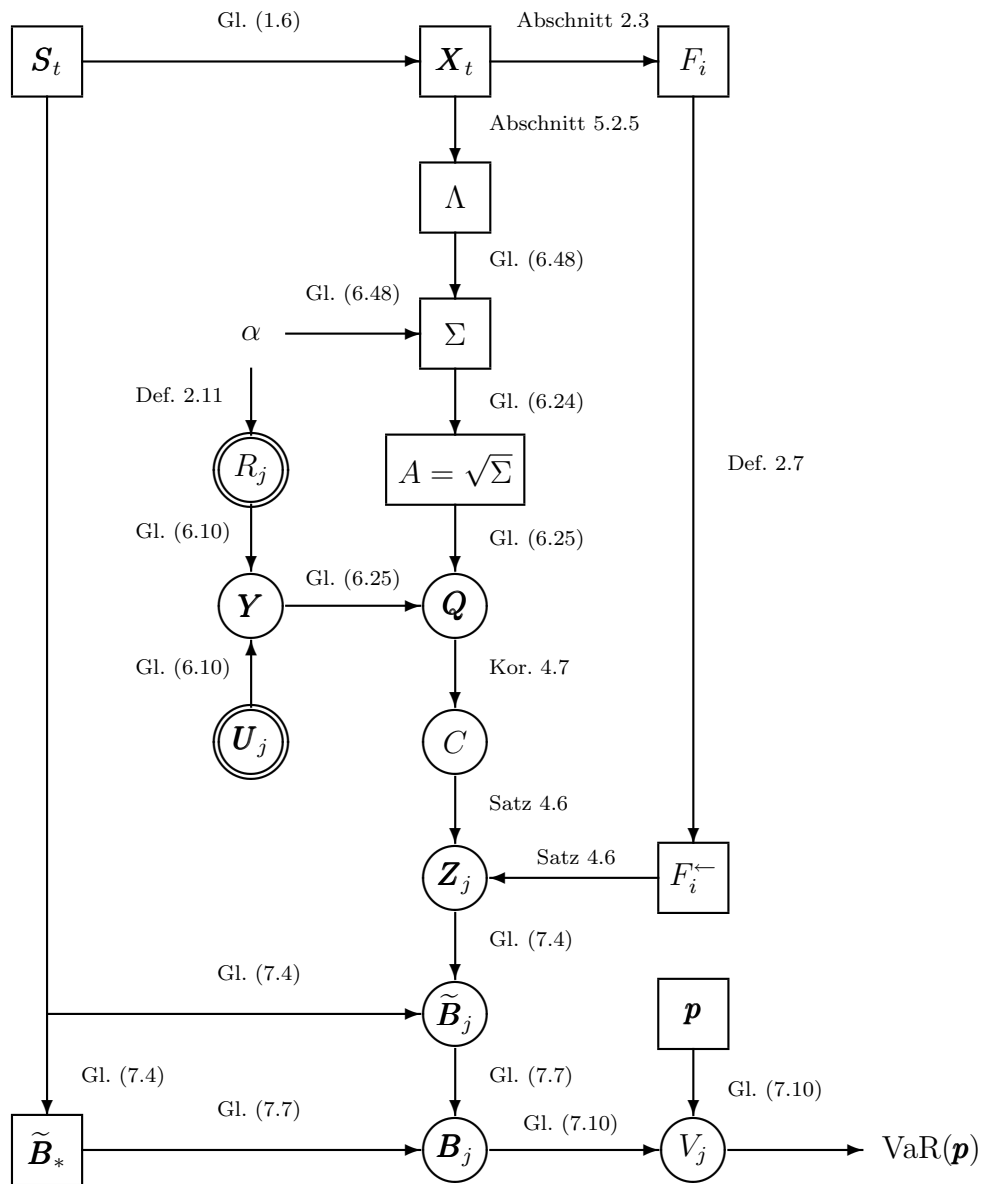
Die Preise der Anleihen werden aus Tabelle 7.1 abgelesen.

Die geschätzte Tail Dependence beträgt

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.500 & 0.450 & 0.445 & 0.462 & 0.473 & 0.463 & 0.461 & 0.453 \\ 0.500 & 1.000 & 0.489 & 0.481 & 0.493 & 0.522 & 0.481 & 0.529 & 0.465 \\ 0.450 & 0.489 & 1.000 & 0.458 & 0.487 & 0.522 & 0.485 & 0.489 & 0.499 \\ 0.445 & 0.481 & 0.458 & 1.000 & 0.523 & 0.517 & 0.556 & 0.516 & 0.463 \\ 0.462 & 0.493 & 0.487 & 0.523 & 1.000 & 0.574 & 0.537 & 0.507 & 0.485 \\ 0.473 & 0.522 & 0.522 & 0.517 & 0.574 & 1.000 & 0.582 & 0.539 & 0.504 \\ 0.463 & 0.481 & 0.485 & 0.556 & 0.537 & 0.582 & 1.000 & 0.519 & 0.489 \\ 0.461 & 0.529 & 0.489 & 0.516 & 0.507 & 0.539 & 0.519 & 1.000 & 0.459 \\ 0.453 & 0.465 & 0.499 & 0.463 & 0.485 & 0.504 & 0.489 & 0.459 & 1.000 \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

Mit $\alpha = 1$ ergibt sich nach Gleichung (6.48) die folgende positiv definite Kovarianzmatrix:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.500 & 0.395 & 0.384 & 0.421 & 0.444 & 0.423 & 0.420 & 0.402 \\ 0.500 & 1.000 & 0.477 & 0.461 & 0.485 & 0.543 & 0.461 & 0.556 & 0.427 \\ 0.395 & 0.477 & 1.000 & 0.412 & 0.474 & 0.544 & 0.470 & 0.477 & 0.497 \\ 0.384 & 0.461 & 0.412 & 1.000 & 0.545 & 0.534 & 0.606 & 0.532 & 0.423 \\ 0.421 & 0.485 & 0.474 & 0.545 & 1.000 & 0.636 & 0.571 & 0.514 & 0.470 \\ 0.444 & 0.543 & 0.544 & 0.534 & 0.636 & 1.000 & 0.650 & 0.575 & 0.508 \\ 0.423 & 0.461 & 0.470 & 0.606 & 0.571 & 0.650 & 1.000 & 0.538 & 0.479 \\ 0.420 & 0.556 & 0.477 & 0.532 & 0.514 & 0.575 & 0.538 & 1.000 & 0.414 \\ 0.402 & 0.427 & 0.497 & 0.423 & 0.470 & 0.508 & 0.479 & 0.414 & 1.000 \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$



Die Symbole haben die folgende Bedeutung:

- \square Stichprobe oder daraus abgeleitete Größe
- \odot simuliert die Zufallsvariablen $R_j \sim \text{GPD}(1/\alpha)$
- \odot simuliert die Zufallsvariablen $U_j \sim \text{uniform auf } \mathcal{S}_m(1)$
- \circ simulierte Größe (unter Annahmen)
- $A \xrightarrow{(\cdot)} B$ Aus A wird B gemäß (\cdot)

Abbildung 7.2: Das Vorgehen (von oben links nach unten rechts)

Für das gekaufte Marktportfolio $\mathbf{p}_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ ergibt sich mit 10'000 Simulationen ein VaR von 0.0384, für das verkaufte beträgt der VaR 0.0399.

Um zu sehen, welchen Einfluß die Größe von α auf die VaR Schätzung hat, wird die Simulation mit $\alpha = 3$ wiederholt. Nach Gleichung (6.48) ergibt sich die positiv definite Kovarianzmatrix:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.759 & 0.702 & 0.696 & 0.717 & 0.729 & 0.717 & 0.716 & 0.706 \\ 0.759 & 1.000 & 0.747 & 0.738 & 0.751 & 0.781 & 0.738 & 0.788 & 0.720 \\ 0.702 & 0.747 & 1.000 & 0.712 & 0.745 & 0.782 & 0.743 & 0.747 & 0.757 \\ 0.696 & 0.738 & 0.712 & 1.000 & 0.782 & 0.777 & 0.814 & 0.776 & 0.718 \\ 0.717 & 0.751 & 0.745 & 0.782 & 1.000 & 0.829 & 0.796 & 0.766 & 0.743 \\ 0.729 & 0.781 & 0.782 & 0.777 & 0.829 & 1.000 & 0.835 & 0.797 & 0.763 \\ 0.717 & 0.738 & 0.743 & 0.814 & 0.796 & 0.835 & 1.000 & 0.778 & 0.748 \\ 0.716 & 0.788 & 0.747 & 0.776 & 0.766 & 0.797 & 0.778 & 1.000 & 0.713 \\ 0.706 & 0.720 & 0.757 & 0.718 & 0.743 & 0.763 & 0.748 & 0.713 & 1.000 \end{pmatrix}. \quad (7.31)$$

Für das gekaufte Marktportfolio \mathbf{p} ergibt sich mit 10 000 Simulationen ein VaR von 0.0426 für das verkaufte beträgt der VaR 0.0443. Die Wahl von α beeinflusst die VaR Schätzung anscheinend stark. Im nächsten Abschnitt wird darauf näher eingegangen.

Das Verfahren wurde mit $\alpha = 1$ auch für die VaR Schätzung des 30-dimensionalen Marktportfolios benutzt. Der VaR betrug für das gekaufte Portfolio 0.102 für das verkaufte 0.103.

Hier war es jedoch nicht einfach möglich den Index α frei zu variieren, da die Selbstkonsistenz schnell verloren ging.

7.4.3 Schwierigkeiten bei der Wahl von α

Mit diesem Verfahren können auf einfache Weise Zufallsvariable \mathbf{Z}_j erzeugt werden, deren Komponenten vorgegebenen Randverteilungen F_i , $i = 1, \dots, m$, folgen und die die Tail Dependence Λ haben.

Das Modell, welches dem vorgestellten Verfahren zu Grunde liegt hat einen freien Parameter: α , bzw. $-\alpha$, den Index der regulären Variation der erzeugenden Zufallsvariable der elliptischen Copula. Oben wurde gesagt, dieser Parameter solle so gewählt werden, dass die aus Λ resultierende Korrelationsmatrix Σ_ρ positiv definit ist. Mit dieser Bedingung ist α jedoch wenig eingeschränkt und nicht festgelegt:

Der durch Gleichung (6.48) beschriebene Zusammenhang zwischen Λ , Σ_ρ , α ist stetig in jeder der drei Variablen, so dass aus positiver Definitheit von $\Sigma_\rho(\Lambda_0, \alpha_0)$ immer auch positive Definitheit in Umgebungen von (Λ_0, α_0) folgt. Diese Umgebungen können i.A. sehr groß sein, so dass α aus einem großen Intervall gewählt werden kann.

Das folgende Beispiel verdeutlicht die Schwierigkeiten bei der Wahl von α :

Nach Gleichung (6.48) ergeben sich zur Tail Dependence Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

mit $\alpha_1 = 1$ die Korrelationsmatrix

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.33)$$

mit $\alpha_2 = 3$ die Korrelationsmatrix

$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.76 \\ 0.76 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.34)$$

Beide Matrizen sind positiv definit. Bei *elliptischen* Zufallsvariablen gilt zwischen Korrelation ρ und Kendall's Tau τ (siehe 5.2.3 und 6.2.3) der Zusammenhang

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho. \quad (7.35)$$

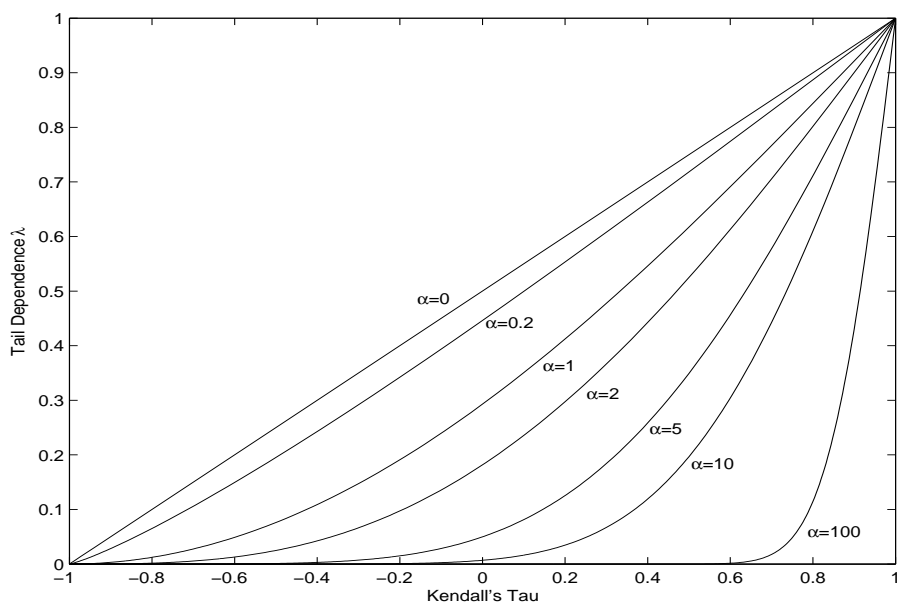
Im obigen Beispiel folgt für $\alpha_1 = 1$ also $\tau_1 = 0.33$, im zweiten Fall mit $\alpha_2 = 3$ gilt $\tau_2 = 0.55$. Kendall's Tau der erzeugten Zufallsvariablen \mathbf{Z}_j ist im Gegensatz zur Korrelation allein durch die Copula festgelegt. Die im Simulationsverfahren erzeugten Zufallsvariablen \mathbf{Z}_j haben also nicht nur die vorgegebene Tail Dependence Λ , sondern auch die Kendall's Tau Struktur $\tau(\Lambda, \alpha)$ der elliptischen Verteilung.

Die VaR Schätzung wird im Allgemeinen nicht unabhängig von $\tau(\Lambda, \alpha)$ sein. Für das Portfolio \mathbf{p}_2 ist der mit $\alpha = 1$ geschätzte VaR um ca. 50% höher als der zu $\alpha = 3$. Abbildung 7.3 zeigt die Tail Dependence λ in Abhängigkeit von Kendall's Tau für verschiedene α . Man sieht, dass im Intervall $0 < \lambda < 1$ für verschiedene α die Werte von Kendall's Tau deutlich unterscheiden können. Mit Gleichung (6.51) gilt

$$\tau_{ij} \in [2\lambda_{ij} - 1, 1], \quad (7.36)$$

wobei die linke Intervallgrenze dem Fall $\alpha = 0$ und die rechte $\alpha \rightarrow \infty$ entspricht. Bei elliptischen Copulae wird das Intervall, in dem τ_{ij} liegen kann, mit steigendem λ_{ij} kleiner.

Wie gezeigt, bestehen für elliptische Copulae Abhängigkeiten zwischen $\tau(\Lambda, \alpha)$ und Λ . Man könnte nun entsprechend dem Vorgehen im vorgeschlagenen Verfahren auch $\tau(\Lambda, \alpha)$ aus den Tagesdifferenzen \mathbf{X}_t schätzen und dann versuchen, mit Gleichung (6.50) ein α so zu wählen, dass die (geschätzte) Kendall's Tau Struktur der zu Grunde liegenden Daten näherungsweise erreicht wird. Für die vorliegenden $m = 30$ Credit Spreads sind dazu 435 ($= m(m-1)/2$) Gleichungen vom Typ (6.50) mit τ_{ij} und λ_{ij} zu lösen. Wenn die \mathbf{X}_t mit einer elliptischen Copula verteilt sind, dann ergibt sich ein eindeutiges α . Da der Zusammenhang in Gleichung (6.50) stetig ist, könnte man an Hand der Streuung der Werte für α die Zulässigkeit der Annahme des Vorliegens einer elliptischen Copula prüfen.

Abbildung 7.3: λ in Abhängigkeit von Kendall's Tau für verschiedene α

Beispielhaft wird dieses Vorgehen für 4 Anleihen durchgeführt:

Für die 4 Anleihen TELEFO0905, PLTMPL0206, FRTEL0308, DT0706 errechnen sich mit

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.445 & 0.463 \\ 0.5 & 1 & 0.481 & 0.481 \\ 0.445 & 0.481 & 1 & 0.556 \\ 0.463 & 0.481 & 0.556 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

und der geschätzten Kendall's Tau Matrix

$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0.517 & 0.344 & 0.360 \\ 0.517 & 1 & 0.429 & 0.420 \\ 0.344 & 0.429 & 1 & 0.655 \\ 0.360 & 0.420 & 0.655 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

die Indizes α :

	TELEFO0905	PLTMPL0206	FRTEL0308	DT0706
TELEFO0905	-	2.55	1.53	1.48
PLTMPL0206	2.55	-	2.46	1.75
FRTEL0308	1.53	2.46	-	4.11
DT0706	1.48	1.75	4.11	-

Die Werte für α unterscheiden sich deutlich.

Man könnte für α z.B. ein geeignetes Mittel der berechneten Werte wählen. Streuen die Werte sehr stark, so könnte man die Anleihen an Hand der für α ermittelten Werte gruppieren und das Verfahren dann gruppenweise anwenden. Die Gruppierung der Daten wird in der Praxis jedoch nach Wirtschaftssektoren und Bonitäten erfolgen, woraus nicht zwangsläufig folgt, dass sich die ermittelten α (näherungsweise) entsprechen. Eine andere Möglichkeit wäre es, historische Zeitreihen „typischer“ Portfolios von Unternehmensanleihen zu betrachten und den Parameter α auf Grund dieser Erfahrungswerte zu bestimmen.

In Abbildung 7.4 sind simulierte Zufallsvariablen mit den angepassten Randverteilungen der Tagesdifferenzen mit Copulae zu $\alpha = 4.11$ und $\alpha = 1.48$ im Vergleich zu den beobachteten Daten aufgetragen. Die Copula zu $\alpha = 4.11$ scheint besser für FRTEL0308 und DT0706 zu passen, während die Copula zu $\alpha = 1.48$ besser zu TELEFO0905 und DT0706 passt. Die mit elliptischen Copulae simulierten Daten weisen häufig eine „kreuzförmige“ Dichte auf, am deutlichsten erkennt man dies in Abbildung 7.4 unten rechts. Diese Form der Dichte kommt durch die elliptische Copula und die Transformationen der Randverteilungen zu Stande, vgl. Abbildungen 6.8 und 6.9. Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel angesprochen, ist das vorgeschlagene Verfahren durch die upper Tail Dependence auf die VaR Schätzung für Portfolios ausgerichtet, deren Verluste durch große positive Änderungen der Credit Spreads entstehen. Daher interessiert die rechte obere Ecke der Bilder und nicht die Form der Punktwolke als Ganzes.

In Abbildung 7.5 wird der mit mit 10 000 simulierten Zufallsvariablen zu $\alpha = 4.11$ und $\alpha = 1.48$ geschätzte VaR des Marktportfolios dem empirischen VaR gegenüber gestellt. Die Schätzungen unterscheiden sich kaum voneinander und schätzen den 1%-VaR (die 3. Beobachtung) sehr gut.

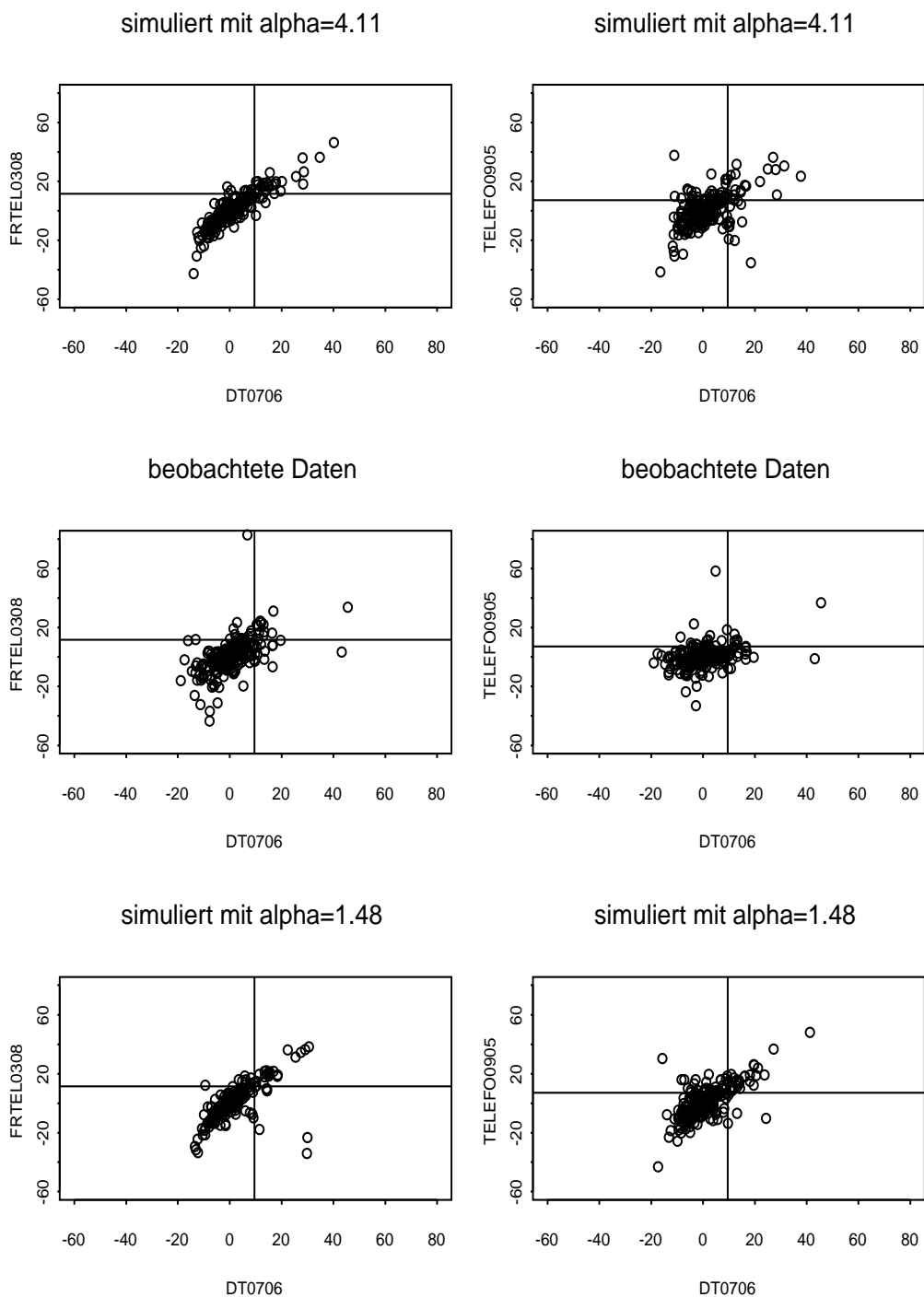


Abbildung 7.4: Simulierte Zufallsvariablen mit den Randverteilungen von FRTEL0308 und TELEFO0905 gegen DT0706. Die Tail Dependence wurde aus (7.37) gewählt. In der mittleren Zeile die beobachteten Tagesdifferenzen. Es sind jeweils die empirischen 5%-Quantile der Randverteilungen eingezeichnet.

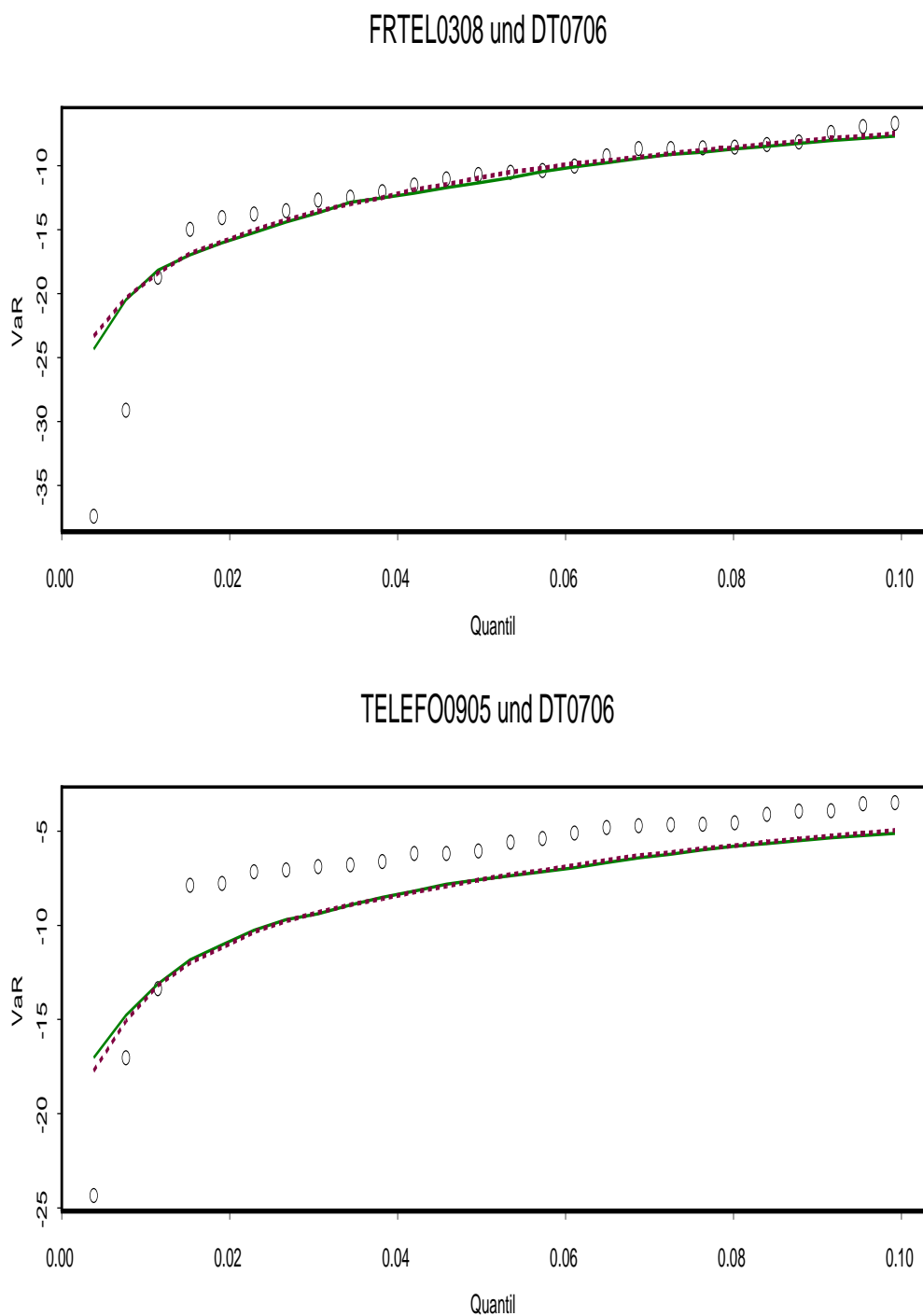


Abbildung 7.5: Der VaR eines Marktportfolios $\mathbf{p} = (1000, 1000)^T$. Punkte: empirischer VaR, durchgezogene Linie: Copula mit GPD(0.243), gestrichelte Linie: Copula mit GPD(0.676).

Kapitel 8

Zusammenfassung

In der Praxis schätzen viele Banken den VaR mit Verfahren, die auf Normalverteilungen beruhen. Als entscheidender Vorteil dieser Verfahren wird angeführt, dass sie sehr einfach umzusetzen sind, da lediglich Erwartungswerte und Kovarianzen zu schätzen sind und die notwendigen Berechnungen schnell und günstig vom Computer durchgeführt werden können. Die Probleme, die durch die schnell fallenden Tails der Verteilungen und durch ausschließliches Berücksichtigen der Kovarianzmatrix auftreten, wurden in der Einleitung und in Kapitel 7 besprochen. Diese Probleme hat man in der Praxis im Griff: man verfügt über große Erfahrungen mit diesen Verfahren und weiß Unzulänglichkeiten durch „Risikozuschläge“ auszugleichen.

Auch aus Sicht der Banken ist es wünschenswert, ein Verfahren zu haben, welches die wahre Verteilung der Daten möglichst genau approximiert. In den letzten Jahren wurde vorgeschlagen, Verfahren zu benutzen, die auf das Anpassen einer Copula an vorgegebene Daten und Randverteilungen hinauslaufen (siehe dazu z.B. Embrechts, Lindskog, McNeil [7]). Diese Verfahren sind bisher jedoch zu aufwändig, um sie für große Portfolios zu implementieren.

Das in dieser Arbeit vorgeschlagene Verfahren stellt einen Kompromiß zwischen den Verfahren mit Normalverteilung und dem Anpassen allgemeiner Copulae dar: es wird ein spezieller Typ von Copula, eine elliptische, vorausgesetzt. Damit löst man sich von der Annahme der Normalverteilung, doch ist die Klasse der elliptischen Copulae klein im Vergleich zur Klasse aller Copulae.

Die Klasse der elliptischen Copulae umfasst die der Normalcopulae. Da keine Einschränkungen für die Wahl der Randverteilungen getroffen wurden, umfasst das vorgeschlagene Vorgehen also das Anpassen einer Normalverteilung an die Daten. Will man nun eine unter bestimmten Gesichtspunkten optimale Verteilung mit einem Verfahren an die Daten anpassen, so umfasst der größere Zulässigkeitsbereich des vorgeschlagenen Verfahrens den entsprechender Verfahren mit Normalverteilung. Daher kann die mit dem vorgeschlagenen Verfahren gefundene Verteilung die wahre Verteilung der Daten nicht schlechter approximieren als eine angepasste Normalverteilung in Abhängigkeit von einem Parameter α .

Das vorgeschlagene Verfahren ist sehr einfach und nur wenig umständlicher zu implementieren als die bisher benutzten Verfahren. Es stört wenig, dass die benutzte Copula nicht explizit als Formel vorliegt. Die Methode ermöglicht dafür jedoch das Erfassen von Tail Dependence Strukturen.

Die zutreffende Wahl von α als freier Parameter kann in der Praxis - wie bei anderen Verfahren - erst nach Ausprobieren und Überprüfen („Backtesting“) erfolgen. Ist das Verfahren einmal eingesetzt, können Erfahrungswerte gewonnen werden, die helfen, α für neue Gruppen von Anleihen zu wählen.

Ich sehe für die vorliegenden Zeitreihen der Credit Spreads eher Probleme bei der Wahl der Tail Dependence als *einziges* Abhängigkeitsmaß. Während man mit der Korrelation und Kendall's Tau den Zusammenhang (linearen bzw. monotonen) über *das ganze Intervall* beschreibt, und damit andere Abhängigkeitsarten nicht erfassen kann, mißt die Tail Dependence nur die Abhängigkeit an bzw. *kurz vor den Endpunkten* der Randverteilungen. Man könnte also sagen, die Korrelationen berücksichtigt ein *zu großes* Intervall, während die Tail Dependence ein *zu kleines* erfasst.

Werden große Wertverluste eines Portfolios durch gemeinsame große Änderungen ihrer Treiber verursacht, so ist die Tail Dependence die maßgebende Abhängigkeitsstruktur. Wird eine hohe Tail Dependence nicht berücksichtigt, kann der VaR deutlich unterschätzt werden.

Entsprechend dem vorgeschlagenen Vorgehen kann man ähnlich ein Verfahren entwickeln, das die Daten mit Hilfe einer elliptischen Copula zu vorgegebener Kendall's Tau Struktur (die aus den Tagesdifferenzen geschätzte) simuliert. Statt Gleichung (6.48) wird Gleichung (6.39) benutzt. Dann wird jedoch die Tail Dependence Struktur des Portfolios im Allgemeinen nicht korrekt berücksichtigt. Die sich ergebenden Probleme entsprechen den in Abschnitt 7.4.3 diskutierten.

Ich denke, dass es in dieser Arbeit gelungen ist, ein einfaches Verfahren zu entwickeln, mit dem Daten unter Berücksichtigung einer Tail Dependence Struktur simuliert werden können. Für eine Value at Risk Schätzung sollte man nicht nur die Korrelation oder Tail Dependence allein heranziehen, besser wäre es, mehrere Abhängigkeitsmaße zu berücksichtigen.

Anhang A

Liste und Stammdaten der Anleihen

Nr.	Kürzel	Name der Emittentin	Branche	Nominalzins	Laufzeitende
1	UU1107	United Utilities Plc.	Energy/Utilities	6.625	08.11.07
2	ELEPOR0311	Electricidad de Portugal	Energy/Utilities	5.875	28.03.11
3	ULVR0606	Unilever NV	Consumer NCY	5.125	07.06.06
4	C1010	Citigroup Inc.	Financials/Bank	6.125	01.10.10
6	SNSBNK1007	SNS Bank Nederland	Financials/Bank	6.0	16.10.07
6	AXASA0613	AXA	Financials/Bank	6.0	18.06.13
7	BACR0606	Barclays Bank Plc.	Financials/Bank	4.875	26.06.06
8	PG0905	Procter & Gamble Corp.	Consumer NCY	5.75	26.09.05
9	AVEFP0406	Aventis SA	Chemicals	5.0	18.04.06
10	AHOLD0508	Koninklijke Ahold NV	Consumer NCY	5.875	09.05.08
11	PHG0508	Koninklijke Philips Elec.	Electronics	5.75	16.05.08
12	NGGLN0806	NGG Finance & Trade	Financials	5.25	23.08.06
13	GMAC0206	General Motors Accept Corp.	Automotive	5.75	14.02.06
14	DCX0306	Daimler Chrysler Int. Finance	Automotive	6.125	21.03.06
15	FIAT0506	Fiat Finance & Trade	Automotive	5.75	25.05.06
16	ENEL0604	Enel Investment Holding BV	Electricity/Utilities	5.0	07.06.04
17	SIEM0711	Siemens Financieringsmat.	Technology/Electronics	5.75	04.07.11
19	EAUG0608	Vivendi Environnement	Media/Utilities	5.875	27.06.08
19	CRDSUI1005	Credit Suisse Group Fin.	Financials/Bank	5.75	05.10.05
20	RBOS0513	Royal Bank of Scotland Plc.	Financials/Bank	6.0	10.05.13
21	TELEFO0905	Telefonica Europe BV	Telecommunication	6.125	21.09.05
22	PLTMPL0206	Portugal Telecom Int. Fin.	Telecommunication	5.75	21.02.06
23	TELDAN0406	TDC AS	Telecommunication	5.875	24.04.06
24	FRTEL0308	France Telecom	Telecommunication	7.25	14.03.08
25	KPN0406	Koninklijke KPN NV	Telecommunication	8.0	12.04.06
26	TIIM0406	Sogerim	Telecommunication	6.125	20.04.06
27	DT0706	Deutsche Telekom Int. Fin.	Telecommunication	6.375	11.07.06
28	BRITEL0206	British Telecom Plc.	Telecommunication	6.375	15.02.06
29	TELECO0611	Telstra Corp. Ltd.	Telecommunication	6.375	29.06.11
30	LAFCP1108	Lafrage	Construction	5.875	06.11.08

Anhang B

Daten einer Zinskurve am 31.10.2002

Die folgende Tabelle zeigt die Zinssätze z_T die am 31.10.2002 für eine risikofreie Geldanlage bis zum Datum T gezahlt wurden.

Datum T	z_T	Datum T	z_T	Datum T	z_T	Datum T	z_T	Datum T	z_T
1.11.2002	3.411	7.12.2003	3.059	30.9.2005	3.557	31.3.2010	4.538	31.7.2018	5.226
2.11.2002	3.411	14.12.2003	3.059	31.10.2005	3.584	30.4.2010	4.551	31.10.2018	5.238
7.11.2002	3.413	21.12.2003	3.061	30.11.2005	3.607	31.5.2010	4.564	31.1.2019	5.244
14.11.2002	3.413	31.12.2003	3.065	31.12.2005	3.630	30.6.2010	4.576	30.4.2019	5.250
21.11.2002	3.407	7.1.2004	3.068	31.1.2006	3.652	31.7.2010	4.589	31.7.2019	5.256
30.11.2002	3.400	14.1.2004	3.071	28.2.2006	3.673	31.8.2010	4.602	31.10.2019	5.262
7.12.2002	3.395	21.1.2004	3.074	31.3.2006	3.696	30.9.2010	4.615	31.1.2020	5.270
14.12.2002	3.389	31.1.2004	3.078	30.4.2006	3.718	31.10.2010	4.628	30.4.2020	5.278
21.12.2002	3.384	7.2.2004	3.081	31.5.2006	3.741	30.11.2010	4.638	31.7.2020	5.287
31.12.2002	3.376	14.2.2004	3.084	30.6.2006	3.763	31.12.2010	4.649	31.10.2020	5.295
7.1.2003	3.370	21.2.2004	3.087	31.7.2006	3.785	31.1.2011	4.659	31.1.2021	5.304
14.1.2003	3.365	29.2.2004	3.091	31.8.2006	3.808	28.2.2011	4.669	30.4.2021	5.312
21.1.2003	3.359	7.3.2004	3.094	30.9.2006	3.830	31.3.2011	4.679	31.7.2021	5.321
31.1.2003	3.351	14.3.2004	3.097	31.10.2006	3.853	30.4.2011	4.690	31.10.2021	5.330
7.2.2003	3.329	21.3.2004	3.101	30.11.2006	3.873	31.5.2011	4.700	31.1.2022	5.338
14.2.2003	3.283	31.3.2004	3.107	31.12.2006	3.893	30.6.2011	4.710	30.4.2022	5.345
21.2.2003	3.242	7.4.2004	3.111	31.1.2007	3.913	31.7.2011	4.721	31.7.2022	5.352
28.2.2003	3.228	14.4.2004	3.116	28.2.2007	3.931	31.8.2011	4.731	31.10.2022	5.359
7.3.2003	3.215	21.4.2004	3.120	31.3.2007	3.951	30.9.2011	4.742	31.1.2023	5.360
14.3.2003	3.201	30.4.2004	3.126	30.4.2007	3.970	31.10.2011	4.752	30.4.2023	5.361
21.3.2003	3.189	7.5.2004	3.130	31.5.2007	3.990	30.11.2011	4.760	31.7.2023	5.361
31.3.2003	3.179	14.5.2004	3.135	30.6.2007	4.010	31.12.2011	4.768	31.10.2023	5.362
7.4.2003	3.172	21.5.2004	3.139	31.7.2007	4.030	31.1.2012	4.776	31.10.2024	5.365
14.4.2003	3.164	31.5.2004	3.145	31.8.2007	4.050	29.2.2012	4.784	31.10.2025	5.370
21.4.2003	3.157	7.6.2004	3.150	30.9.2007	4.069	31.3.2012	4.792	31.10.2026	5.370
30.4.2003	3.148	14.6.2004	3.154	31.10.2007	4.089	30.4.2012	4.799	31.10.2027	5.383
7.5.2003	3.140	21.6.2004	3.159	30.11.2007	4.106	31.5.2012	4.807	31.10.2028	5.373
14.5.2003	3.133	30.6.2004	3.166	31.12.2007	4.124	30.6.2012	4.815	31.10.2029	5.351
21.5.2003	3.126	7.7.2004	3.172	31.1.2008	4.141	31.7.2012	4.823	31.10.2030	5.336
31.5.2003	3.115	14.7.2004	3.177	29.2.2008	4.158	31.8.2012	4.831	31.10.2031	5.321
7.6.2003	3.108	21.7.2004	3.183	31.3.2008	4.175	30.9.2012	4.839	31.10.2032	5.306
14.6.2003	3.100	31.7.2004	3.190	30.4.2008	4.192	31.10.2012	4.847	31.10.2033	5.288
21.6.2003	3.094	7.8.2004	3.196	31.5.2008	4.210	31.1.2013	4.868	31.10.2034	5.270
30.6.2003	3.090	14.8.2004	3.201	30.6.2008	4.227	30.4.2013	4.888	31.10.2035	5.252
7.7.2003	3.087	21.8.2004	3.207	31.7.2008	4.244	31.7.2013	4.908	31.10.2036	5.234
14.7.2003	3.084	31.8.2004	3.215	31.8.2008	4.262	31.10.2013	4.929	31.10.2037	5.216
21.7.2003	3.081	7.9.2004	3.220	30.9.2008	4.279	31.1.2014	4.949	31.10.2038	5.198
31.7.2003	3.077	14.9.2004	3.225	31.10.2008	4.297	30.4.2014	4.968	31.10.2039	5.180
7.8.2003	3.074	21.9.2004	3.231	30.11.2008	4.311	31.7.2014	4.987	31.10.2040	5.162
14.8.2003	3.071	30.9.2004	3.239	31.12.2008	4.327	31.10.2014	5.007	31.10.2041	5.145
21.8.2003	3.068	7.10.2004	3.244	31.1.2009	4.342	31.1.2015	5.024	31.10.2042	5.127
31.8.2003	3.063	14.10.2004	3.250	28.2.2009	4.355	30.4.2015	5.040	31.10.2043	5.111
7.9.2003	3.060	21.10.2004	3.256	31.3.2009	4.371	31.7.2015	5.057	31.10.2044	5.095
14.9.2003	3.057	31.10.2004	3.264	30.4.2009	4.385	31.10.2015	5.074	31.10.2045	5.079
21.9.2003	3.056	30.11.2004	3.289	31.5.2009	4.400	31.1.2016	5.089	31.10.2046	5.063
30.9.2003	3.056	31.12.2004	3.316	30.6.2009	4.415	30.4.2016	5.104	31.10.2047	5.047
7.10.2003	3.056	31.1.2005	3.343	31.7.2009	4.430	31.7.2016	5.119	31.10.2048	5.030
14.10.2003	3.057	28.2.2005	3.368	31.8.2009	4.445	31.10.2016	5.135	31.10.2049	5.013
21.10.2003	3.057	31.3.2005	3.395	30.9.2009	4.460	31.1.2017	5.149	31.10.2050	4.995
31.10.2003	3.057	30.4.2005	3.421	31.10.2009	4.475	30.4.2017	5.163	31.10.2051	4.978
7.11.2003	3.057	31.5.2005	3.449	30.11.2009	4.488	31.7.2017	5.177	31.10.2052	4.961
14.11.2003	3.058	30.6.2005	3.475	31.12.2009	4.501	31.10.2017	5.191		
21.11.2003	3.058	31.7.2005	3.503	31.1.2010	4.514	31.1.2018	5.203		
30.11.2003	3.058	31.8.2005	3.530	28.2.2010	4.525	30.4.2018	5.214		

Anhang C

Uniform auf Einheitssphären verteilte Zufallsvariablen

Die wahrscheinlich einfachste Methode, um gleichförmig auf der Einheitssphäre im \mathbb{R}^m verteilte Punkte zu erzeugen, stammt von Marsaglia (1972):

Es werden Zufallsvariablen $X_i \sim \text{uniform}(-1, 1)$, $i = 1, \dots, m$, erzeugt und alle m -Tupel von Realisierungen (x_1, \dots, x_m) verworfen, für die $x_1^2 + \dots + x_m^2 \geq 1$ gilt. Normiert man die verbleibenden Tupel mit ihrem Betrag, so sind die

$$\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{C.1})$$

uniform auf der Einheitssphäre erzeugt. Nachteil dieser Methode ist, dass für grosse n zunehmend viele Tupel verworfen werden.

Eine vielleicht elegantere, hier verwendete Methode (Muller 1959, Marsaglia 1972) ist es, m normalverteilte Zufallsvariablen Y_i gleicher Varianz zu wählen. Man betrachtet den Vektor

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_m^2}} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Alle Realisierungen von \mathbf{X} liegen mit Wahrscheinlichkeit 1 auf der Einheitssphäre. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Realisierung auf einem bestimmten Ausschnitt der Sphäre liegt, ist auf Grund der Tatsache, dass die Dichte der Normalverteilung nur vom Abstand zum Ursprung abhängt, für beliebige, gleich grosse Ausschnitte gleich. Daraus folgt, dass \mathbf{X} uniform auf der Einheitssphäre verteilt ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999) *Coherent Measures of Risk*, Math. Finance 9, No. 3, 203-228
- [2] Ancona-Navarrete, M.A. Tawn, J.A. (2000) *A Comparison of Methods for Estimating the Extremal Index*, Extremes 3:1, 5-38
- [3] Brockwell, P., Davis, R.A. (2002) *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer, New York
- [4] Brockwell, P., Davis, R.A. (1996) *Time Series: Theory and Methods*, Springer, New York
- [5] Dekkers, A.L.M., de Haan, L. (1989) *On the Estimation of the Extreme Value Index and Large Quantile Estimation*, Ann. Stat. 17, 1795-1832
- [6] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, New York
- [7] Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A. (2001) *Modelling Dependence With Copulas*, <http://www.math.ethz.ch/~baltes/ftp/papers.html>
- [8] Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. (1999) *Correlation and Dependence in Risk management: Properties and Pitfalls*, Risk Management: VaR and Beyond, Cambridge Univ. Press, 176-223
- [9] Feller, W. (1966) *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume II*, J. Wiley & Sons, London
- [10] Frahm, G., Junker, M., Szimayer, A. (2002) *Elliptical Copulas: Applicability and Limitations* <http://www.caesar.de/english/index/preprints.html>
- [11] Fang, K.T., Kotz, S., Ng, K.W. (1990) *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Monographs of Statistics and Applied Probability 36, Chapman & Hall, London
- [12] Hult, H., Lindskog, F. (2001) *Multivariate Extremes, Aggregation and Dependence in Elliptical Distributions*, <http://www.risklab.ch/Papers.html>
- [13] Jäckel, P. (2002) *Monte Carlo Methods in Finance*, J. Wiley & Sons, Chichester

- [14] Kuhn, G. (2001) *Multivariate Value at Risk Schätzung von Zins Swap Sätzen*, Diplomarbeit am Zentrum Mathematik der TU München
- [15] Lindskog, F., McNeil, A., Schmock, U. (2001) *Kendall's Tau for Elliptical Distributions*, <http://www.math.ethz.ch/~mcneil>
- [16] Resnick, S.I. (1987) *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Springer, New York
- [17] Schmidt, R. (2002) *Tail Dependence for Elliptically Contoured Distributions*, Mathematical Methods of Operations Research 55: 301-327
- [18] Schlather, M., Tawn, J.A. (2003) *A Dependence Measure for Multivariate and Spatial Extreme Values: Properties and Inference*, Biometrika 90 (1), 139-156
- [19] Schlather, M., Tawn, J.A. (2002) *Inequalities for the Extremal Coefficients for Multivariate Extreme Value Distributions*, Extremes 5 (1), 87-102
- [20] Wilson, R.S., Fabozzi, F.J. (1996) *Corporate Bonds: Structure & Analysis*, F.J.Fabozzi & Assoc., New Hope, Pennsylvania

Abbildungsverzeichnis

1.1	Verläufe der Credit Spreads über die Zeit	8
1.2	Verläufe der Credit Spreads über die Zeit	9
2.1	Tagesdifferenzen der Credit Spreads	24
2.2	Tagesdifferenzen der Credit Spreads	25
2.3	Autokorrelation der Tagesdifferenzen der Credit Spreads (1.Zeile), ihrer Beträge (2.Zeile) und ihrer Quadrate (3.Zeile)	26
2.4	Beispiele für QQ-Plots: die Ordnungsstatistik simulierter Zufallsvariabler gegen die Quantile der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 1$, jeweils ungefähr 140 Werte	27
2.5	Beispiele für QQ-Plots: die Ordnungsstatistik simulierter Zufallsvariabler gegen die Quantile der verallgemeinerten Pareto Verteilung mit Parameter $\xi = 0.1$, jeweils ungefähr 140 Werte	28
2.6	Die Ordnungsstatistik der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von TELEFO0905 im Vergleich zu den Quantilen der angepassten GPD und der Exponentialverteilung	29
2.7	Die Ordnungsstatistik der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von PLTMPL0206 im Vergleich zu den Quantilen der angepassten GPD und der Exponentialverteilung	30
2.8	Die Ordnungsstatistik der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von FRTEL0308 im Vergleich zu den Quantilen der angepassten GPD und der Exponentialverteilung	31
2.9	Die Ordnungsstatistik der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von DT0706 im Vergleich zu den Quantilen der angepassten GPD und der Exponentialverteilung	32
3.1	Dichten der drei Extremwertverteilungen	35
3.2	Beispiele für Hill-Plots von simulierten Zufallsvariablen mit $\text{exponential}(1)$, $\text{GPD}(1.0)$, $\text{GPD}(0.1)$ und $\text{GPD}(-0.2)$, auf der Ordinate: $\alpha = 1/\xi$, auf der Abszisse oben: die Schwelle u , unten: die Anzahl der Überschreitungen n_u von u	49
3.3	Beispiele für Plots der Maximum Likelihood Schätzer von Zufallsvariablen mit $\text{exponential}(1)$, $\text{GPD}(1.0)$, $\text{GPD}(0.1)$ und $\text{GPD}(-0.2)$. Auf der Ordinate: ξ , auf der Abszisse oben: die Schwelle u , unten: die Anzahl der Überschreitungen n_u von u	50

3.4	Beispiele für Plots der Hill Schätzer für die positiven (oben) und negativen (unten) Tagesdifferenzen. Auf der Ordinate: $\alpha = 1/\xi$, auf der Abszisse oben: die Schwelle u , unten: die Anzahl der Überschreitungen n_u von u . . .	51
3.5	Beispiele für Plots der Maximum Likelihood Schätzer für die positiven (oben) und negativen (unten) Tagesdifferenzen. Auf der Ordinate: ξ , auf der Abszisse oben: die Schwelle u , unten: die Anzahl der Überschreitungen n_u von u	52
4.1	Gumbelcopula für $\delta = 3$	56
4.2	Dichte der Gumbelcopula für $\delta = 3$; die Zacken sind durch den groben Bildraster bedingt	57
5.1	Gemeinsame Stichprobe der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von 4 Telekommunikationsanleihen	80
5.2	Gemeinsame Stichprobe der Ränge der Tagesdifferenzen der Credit Spreads von 4 Telekommunikationsanleihen	81
5.3	2-dimensionale Normalverteilung mit Korrelation 0.9, Varianz jeweils 4 . .	82
5.4	Schätzer für $\eta = 2 - \bar{\lambda}$ zwischen 4 Telekommunikationsanleihen	83
5.5	Schätzer für λ_U zwischen 4 Telekommunikationsanleihen	84
6.1	Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable gemäß GPD(0.1) verteilt ist	88
6.2	Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable gemäß GPD(3) verteilt ist	89
6.3	Dichte einer 2-dimensionalen sphärischen Verteilung, deren erzeugende Zufallsvariable gemäß GPD(0.5) verteilt ist	90
6.4	Histogramm einer 2-dimensionalen sphärischen Copula mit GPD(1) verteilter erzeugender Zufallsvariabler	91
6.5	Histogramm einer 2-dimensionalen sphärischen Copula mit exponential(1) verteilter erzeugender Zufallsvariabler	92
6.6	Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung (GPD(1), $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0.7$)	96
6.7	Dichte einer 2-dimensionalen elliptischen Verteilung (GPD(1), $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0.9$)	97
6.8	Histogramm einer 2-dimensionalen elliptischen Copula (GPD(1), $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0.3$)	98
6.9	Histogramm einer 2-dimensionalen elliptischen Copula (GPD(1), $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\rho = 0.85$)	99
6.10	λ in Abhängigkeit von α und ρ	103
7.1	Überlick über das Vorgehen (von oben links nach unten)	112
7.2	Das Vorgehen (von oben links nach unten rechts)	116
7.3	λ in Abhängigkeit von Kendall's Tau für verschiedene α	119

-
- 7.4 Simulierte Zufallsvariablen mit den Randverteilungen von FRTEL0308 und TELEFO0905 gegen DT0706. Die Tail Dependence wurde aus (7.37) gewählt. In der mittleren Zeile die beobachteten Tagesdifferenzen. Es sind jeweils die empirischen 5%-Quantile der Randverteilungen eingezeichnet. 121
- 7.5 Der VaR eines Marktportfolios $\mathbf{p} = (1000, 1000)^T$. Punkte: empirischer VaR, durchgezogene Linie: Copula mit GPD(0.243), gestrichelte Linie: Copula mit GPD(0.676). 122

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter zu verallgemeinerten Pareto Verteilungen für die Tagesdifferenzen	20
2.2	Parameter zu Exponentialverteilungen für die Tagesdifferenzen	21
2.3	Die nach Gleichungen (2.41) und (2.43) berechneten positiven und negativen 1%-Quantile und die empirischen 1-%Quantile (der 3. bzw. der 260. Wert der Ordnungsstatistik)	23
5.1	Werte $\hat{\lambda}_{ij}$ der paarweisen Tail Dependence der Tagesdifferenzen	77
7.1	Preise $\tilde{\mathbf{B}}_*$ der Anleihen am 31.10.2002	113