Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Lévy-Prozesse in der Risikotheorie

Diplomarbeit

von

Irmingard Eder

Themenstellerin: Prof. Dr. Claudia Klüppelberg
Betreuerin: Dr. Vicky Fasen
Abgabetermin: 01. Juli 2005

Hiermit erkläre ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Garching, den 01. Juli 2005

Danksagung

Ich möchte mich bei Frau Dr. Vicky Fasen für die hervorragende Betreuung bedanken. Desweiteren möchte ich mich bei Frau Prof. Dr. Claudia Klüppelberg für das interessante Thema und ihre Vorlesungen bedanken, die mich überhaupt zur Stochastik gebracht haben. Ebenfalls möchte ich an dieser Stelle Dr. Andreas E. Kyprianou danken, dass er mir sein noch nicht veröffentlichtes Buch zu kommen ließ, das eine wesentliche Grundlage für diese Arbeit war.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Einführung in die Lévy-Theorie **4**
2.1 Stochastische Grundlagen 4
2.2 Unendlich oft teilbare Verteilungen 9
2.3 Lévy-Prozesse 11
2.3.1 Definition eines Lévy-Prozesses 11
2.3.2 Der Zusammenhang zwischen unendlicher Teilbarkeit und Lévy-Prozessen 11
2.3.3 Beispiele für Lévy-Prozesse 13
2.3.4 p-stabile Prozesse 16
2.4 Die Klasse der faltungsäquivalenten Verteilungen 17
2.4.1 Definition von $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ und $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ 17
2.4.2 Eigenschaften von $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ und $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ 19
2.4.3 Die Klasse $\mathcal{S}$ und die Teilklasse $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ 22

3 Erneuerungs- und Fluktuationstheorie für Lévy-Prozesse **23**
3.1 Die Markov-Eigenschaft der Lévy-Prozesse 23
3.2 Spezielle Maße für Lévy-Prozesse 25
3.3 Rekurrenz, Transienz und Regularität der 0 26
3.4 Potentialtheorie für Lévy-Prozesse 27
3.4.1 Dualität und Zeitumkehr 27
3.4.2 Kapazität 28
3.5 Subordinatoren 29
3.5.1 Definition eines Subordinators 29
3.5.2 Die Erneuerungsfunktion 30
3.6 Fluktuationstheorie für Lévy-Prozesse 33
3.6.1 Lokalzeit 33
3.6.2 Der Leiterprozess 36
3.6.3 Fluktuationstheorie für spektral einseitige Lévy-Prozesse 39
3.6.4 Wiener-Hopf Faktorisierung 42

4 Die klassische Versicherungsrisikotheorie **47**
4.1 Das Versicherungsrisikomodell 47
4.2 Das klassische Versicherungsrisikomodell 48

4.3 Ruintheorie im klassischen Modell 56
4.3.1 Die Verteilung der Ruinzeit $\tau(u)$, des Überschusses $X_{\tau(u)} - u$ und weiterer Ruingrößen 56
4.3.2 Der Cramér-Fall 63
4.3.3 Der Nicht-Cramér Fall 69

5 Lévy-Prozesse in der Risikotheorie 79
5.1 Das allgemeine Versicherungsrisikomodell 79
5.1.1 Die Grundlagen 79
5.1.2 Der spektral negative Fall 82
5.1.3 Die Beziehung zwischen Π_X und $\Pi_{\mathcal{H}}$ 82
5.2 Die Verteilungen der Ruingrößen 88
5.2.1 Die Verteilungen von $X_{\tau(u)} - u$, $\tau(u)$, $L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}}$ und $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}}}$ 88
5.2.2 Die Quintupel-Verteilung für Über- und Unterschuss 93
5.3 Der Cramér-Fall im allgemeinen Modell 98
5.4 Der Nicht-Cramér Fall im allgemeinen Modell 100
5.4.1 Asymptotik der Ruinzeit $\tau(u)$ 102
5.4.2 Asymptotik des Überschusses $X_{\tau(u)} - u$, der Lokalzeit beim Ruin $L_{\tau(u)}$ und der letzten Leiterhöhe vor dem Ruin $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}}}$ 106
5.4.3 Asymptotik der Über-und Unterschüsse 113
5.4.4 Spezielle Resultate für den subexponentiellen Fall 116
5.4.5 Spektral positive Lévy-Prozesse 121

A 128
A.1 Spezielle Funktionen 128
A.2 Poisson-Punktprozesse 128
A.3 Hilfsresultate 130

B Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole 132

Kapitel 1

Einleitung

In der Versicherungsrisikotheorie stellt das kollektive Modell von Filip Lundberg und Harald Cramér seit ca. 1930 den klassischen Ansatz dar, um die zeitliche Entwicklung der finanziellen Lage eines Versichungsunternehmens zu beschreiben. In diesem Modell hat ein Versicherungsunternehmen ein Portfolio aus Versicherungsverträgen und erhält für die Übernahme der Risiken Prämien. Diesen Einnahmen stehen dabei die Ausgaben gegenüber, die aus den Kosten für die tatsächlich eingetretenen Schäden der Versicherungskunden bestehen. Während jedoch die Prämien bekannt sind, sind sowohl die Anzahl der Schäden im Portfolio als auch deren Höhe zufällig. Die Kapitalreserve des Versicherungsunternehmens setzt sich damit aus der Anfangsrisikoreserve und den bisherigen Prämieneinnahmen abzüglich der bisherigen Ausgaben zusammen. Falls die Kosten für einen Schaden die Risikoreserve übersteigen, dann bedeutet das den Ruin der Versicherung. Die Ruinzeit und auch die Größe des Defizits beim Ruin sind hierbei zufällige Größen und deren Verteilungen stellen zentrale Themen der Versicherungsrisikotheorie dar. Insbesondere ist das Verhalten dieser Verteilungen von Interesse, wenn die Anfangsrisikoreserve wächst. Die zeitliche Entwicklung der Risikoreserve und des Verhältnisses

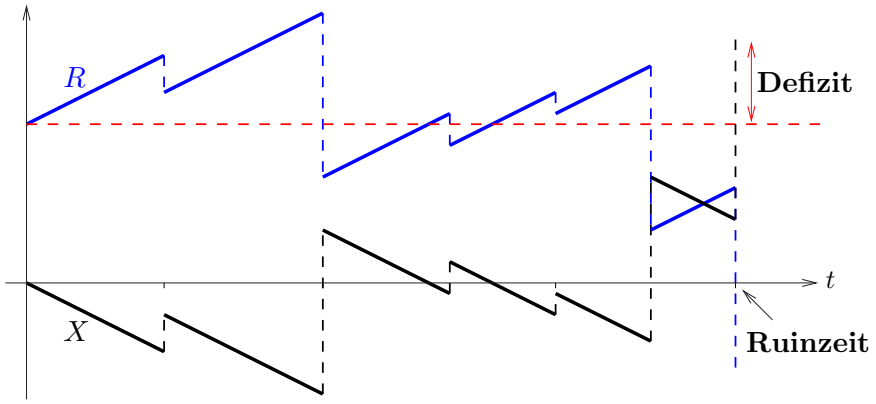

Abbildung 1.1: Klassisches Modell für den Risikoreserveprozess R eines Versicherungsunternehmens und den dazugehörigen Verlustprozess X.

zwischen Ausgaben und Einnahmen wird im Modell durch eindimensionale stochastische Prozesse R und X beschrieben. Abbildung 1.1 zeigt einen Pfad des klassischen Modells für R und den dazu korrespondierenden Pfad von X, die in einen Ruin führen. Unter weiteren Modellannahmen, die in Kapitel 4 näher beschrieben werden, ist der Prozess X ein Lévy-Prozess.
Dieses Modell kann man dadurch verallgemeinern, dass man X als allgemeinen Lévy-Prozess mit stetiger Lokalzeit voraussetzt. Dabei muss X aber die ökonomisch begründeten Eigenschaften des klassischen Risikomodells erfüllen. Abbildung 1.2 zeigt ein Beispiel für einen verallgemeinerten Prozess X.

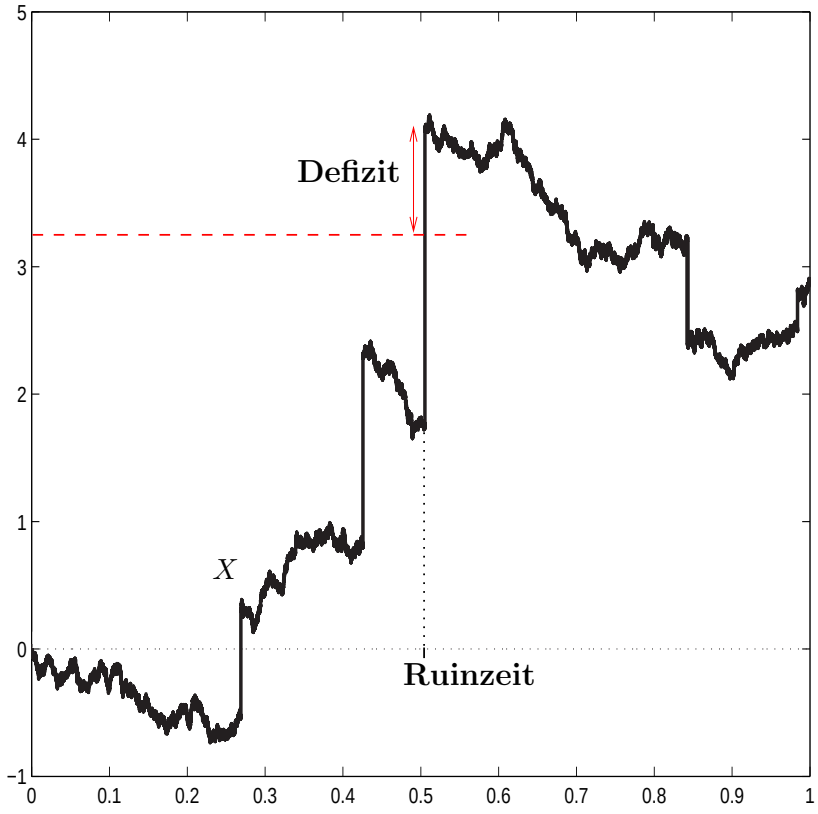

Abbildung 1.2: Verallgemeinertes Modell für den Verlustprozess X.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Ergebnisse für das klassische Risikomodell und neuere Resulate für dessen Verallgemeinerung zusammenzufassen und die Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede aufzuzeigen.
Die weitere Arbeit ist dazu folgendermaßen gegliedert. In Kapitel 2 wird zunächst eine Einführung in die Theorie der eindimensionalen Lévy-Prozesse gegeben, indem die grundlegenden Begriffe "Unendliche Teilbarkeit" und "Lévy-Prozess" definiert werden und deren Zusammenhang erläutert wird. Da das asymptotische Verhalten der Schadenhöhenverteilung über die Existenz und die Art einer Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit

entscheidet, stehen Verteilungen aus $\mathcal{L}^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$, und $\mathcal{S}^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$, im Vordergrund, die ebenfalls in Kapitel 2 vorgestellt werden.
In Kapitel 3 werden die Erneuerungs- und die Fluktuationstheorie für eindimensionale Lévy-Prozesse zusammengefasst, die in den Risikomodellen benötigt werden. Dabei wird speziell auf Subordinatoren und andere spektral einseitige Lévy-Prozesse eingegangen.
In Kapitel 4 wird das klassische Versicherungsrisikomodell von Cramér und Lundberg vorgestellt und explizite Formeln für die Verteilung der Ruinzeit und weiterer Ruingrößen bewiesen. Abhängig vom asymptotischen Verhalten der Schadenhöhenverteilung wird dann im Cramér-Fall bzw. dem Nicht-Cramér Fall die asymptotische Verteilung der Ruinwahrscheinlichkeit und das asymptotische Verhalten des Prozesses X abgeschätzt, wenn die Anfangsrisikoreserve gegen ∞ konvergiert.
In Kapitel 5 wird im allgemeinen Modell der Prozess X durch einen allgemeinen Lévy-Prozess mit stetiger Lokalzeit ersetzt und die zum klassischen Fall analogen Beziehungen zwischen den Ruingrößen beschrieben. Für dieses Modell werden ebenfalls explizite Formeln für die Verteilung der Ruinzeit, des Defizits und weiterer Ruingrößen gezeigt, die mit den Ergebnissen im klassischen Fall verglichen werden. Für den Cramér- und den Nicht-Cramér Fall werden die asymptotischen Verteilungen bestimmt und den klassischen Resultaten gegenübergestellt. Abschließend werden die Ergebnisse im Nicht-Cramér Fall für spektral positive Lévy-Prozesse konkretisiert und anhand von zwei Beispielen veranschaulicht.

Kapitel 2

Einführung in die Lévy-Theorie

In diesem Kapitel werden die zentralen theoretischen Begriffe dieser Arbeit vorgestellt und eine Einführung in die Lévy-Theorie gegeben. Zunächst werden in Abschnitt 2.1 einige grundlegende Begriffe definiert, die später gebraucht werden. In Abschnitt 2.2 wird unendliche Teilbarkeit definiert und deren Charakterisierung mit der Lévy-Khintchine Formel gezeigt, was den zentralen Ansatzpunkt der weiteren Lévy-Theorie darstellt. In Abschnitt 2.3 werden Lévy-Prozesse und deren Zusammenhang mit unendlich oft teilbaren Verteilungen beschrieben und anhand einiger Beispiele veranschaulicht. Dabei wird speziell auf die Teilklasse der p-stabilen Prozesse eingegangen, die sich wegen ihrer Eigenschaften gut als Beispiel eignen. Da im Rahmen der Risikotheorie auch die Asymptotik der Verteilungen ein wichtiger Aspekt ist, werden in Abschnitt 2.4 die Klasse der faltungsäquivalenten Verteilungen und ihre Eigenschaften insbesondere hinsichtlich unendlicher Teilbarkeit vorgestellt.

2.1 Stochastische Grundlagen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (Wraum).

Definition 2.1.1 *(Faltung: Applebaum [1], S.20)*
Die Faltung *von zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen (Wmaßen)* $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *ist definiert als*

$$(\mu_1 * \mu_2)(A) := \int_{\mathbb{R}} \mu_1(A - x)\ \mu_2(dx),\ \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ *definiert man die* nte Faltung *von* $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *als*

$$\mu^{n*} := \underbrace{\mu * \cdots * \mu}_{n-mal}.$$

Der Vollständigkeit halber definiert man $\mu^{0*} := \delta_0$*, wobei* δ_0 *das Dirac-Maß bezeichnet. Man sagt,* μ *hat eine* nte Faltungswurzel*, wenn ein Wmaß* $\mu^{1/n} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *existiert mit* $(\mu^{1/n})^{n*} = \mu$*. Eine Familie von Wmaßen* $(\mu_t)_{t\geq 0}$ *mit* $\mu_0 = \delta_0$ *heißt* Faltungshalbgruppe*, wenn* $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t,\ \forall s, t \geq 0$*. Für Verteilungsfunktionen (VFen)* F_1 *und* F_2 *ist die*

Faltung analog definiert. Falls F_1 und F_2 absolut stetig sind mit den Dichten f_1, f_2, dann ist die Faltung der Dichten f_1 und f_2

$$f_1 \otimes f_2(x) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) f_2(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}} f_2(x-y) f_1(y)\ dy,\ x \in \mathbb{R},$$

die Dichte von $F_1 * F_2$.

Bemerkung 2.1.2

- $* : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, d.h. * ist ein binärer Operator auf $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
- Die Faltung ist kommutativ, assoziativ und hat als neutrales Element das Dirac-Maß δ_0. Daher ist $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ eine Abelsche Halbgruppe unter *.
- Wenn $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid Zufallsvariablen (ZVen) mit VF F sind, dann hat $\sum_{i=1}^n Y_i$ die VF $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i \leq x\right) = F^{n*}(x)$.

Definition 2.1.3 *(Schwache Konvergenz von Wmaßen: Applebaum [1], S.14)*
Eine Folge von Wmaßen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert schwach *gegen eine Wmaß μ, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mu_t(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mu(dx),\ \forall f \in C_b(\mathbb{R}),$$

wobei $C_b(\mathbb{R})$ den Raum aller beschränkten, Borel-messbaren und stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bezeichnet.
Man schreibt: $\mu_t \xrightarrow{w} \mu$.

Ein Wmaß kann schwach nur gegen ein Wmaß konvergieren.

Definition 2.1.4 *(Vage Konvergenz von Wmaßen: Applebaum [1], S.62)*
Eine Folge von Wmaßen $(\mu_t)_{t\geq 0}$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert vage *gegen eine Maß μ, wenn*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(y)\ \mu_t(dy) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\ \mu(dy),\ \forall f \in C_c(\mathbb{R}),$$

wobei $C_c(\mathbb{R})$ den Raum aller beschränkten, Borel-messbaren und stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger bezeichnet.
Man schreibt: $\mu_t \xrightarrow{v} \mu$.

Ein Wmaß kann vage auch gegen ein Maß, das kein Wmaß ist, konvergieren und aus schwacher Konvergenz folgt vage Konvergenz.

Definition 2.1.5 *(Charakteristische Funktion: Sato [30], Definition 2.1)*
Für $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ ist die charakteristische Funktion *$\phi_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert als*

$$\phi_\mu(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iuy}\ \mu(dy),\ u \in \mathbb{R}.$$

Für eine ZV X auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und Verteilung $\mu_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ ist die charakteristische Funktion *$\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert als*

$$\phi_X(u) := \mathbb{E}\left[e^{iuX}\right] = \int_\Omega e^{iuX}\ \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuy}\ \mu_X(dy) = \phi_{\mu_X}(u),\ u \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 2.1.6

- Die charakteristische Funktion von X ist die inverse Fourier-Transformierte der Verteilung μ_X, siehe Definition A.1.1.
- Ein Wmaß ist eindeutig durch seine charakteristische Funktion bestimmt.
- Elementare Eigenschaften von ϕ_X:
  (i) $\phi_X(0) = 1$.
  (ii) $\forall u \in \mathbb{R} : |\phi_X(u)| \leq 1$. ($\Rightarrow \phi$ existiert immer !)
  (iii) $\phi_X(-u) = \overline{\phi_X(u)}$.
  (iv) Sofern Momente existieren, d.h. $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ oder $X \in L^n(\Omega, \mathbb{P})$,
  gilt: $\mathbb{E}[X^n] = i^{-n} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \phi_X(u) \Big|_{u=0}$.
  (v) Für Verteilungen μ_1 und μ_2 auf $[0, \infty)$ gilt: $\phi_{\mu_1 * \mu_2}(u) = \phi_{\mu_1}(u)\phi_{\mu_2}(u),\ u \in \mathbb{R}$. (Faltungssatz)

Definition 2.1.7 *(Momentenerzeugende Funktion: Sato [30], S.10)*
Für ein endliches Maß μ auf $\mathbb{R}$ ist

$$M_\mu(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{uy}\ \mu(dy),\ u \in \mathbb{R},$$

unter Umständen nur in einer Umgebung von 0 definiert und die Abbildung $M_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt momentenerzeugende Funktion *(MEF) von μ. Für eine ZV X auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $[0, \infty)$ und Verteilung $\mu_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ ist die* Laplace-(Stieltjes) Transformierte *$\mathcal{L}_X : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definiert als*

$$\mathcal{L}_X(u) := M_{\mu_X}(-u) = \int_0^\infty e^{-uy}\ \mu_X(dy),\ u \in [0, \infty).$$

Wenn für eine ZV X die MEF $M_{\mu_X} = M_X$ existiert, dann heißt

$$K_X(u) = \ln\{M_X(u)\} = \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{uX}\right]\right\},\ u \in \{x : M_X(x) > 0\}$$

die kumulantenerzeugende Funktion *(KEF) von X.*

Bemerkung 2.1.8

- Weil die Laplace-Transformierte von X die Laplace-Transformierte der Verteilung μ_X ist, siehe Definition A.1.2, schreibt man oft $\mathcal{L}_{\mu_X}$ statt $\mathcal{L}_X$.
- Für jedes endliche Maß μ auf $\mathbb{R}$ gilt: $M_\mu(0) < \infty$.
- Wenn M_X zumindest in einer Umgebung von $u = 0$ existiert, dann existieren alle Momente der ZV X.
- Die MEF ist streng monoton wachsend.

Proposition 2.1.9 *(Sato [30], Proposition 2.6)*
Seien μ_1 und μ_2 Verteilungen auf $[0,\infty)$.

(a) Wenn $\mathcal{L}_{\mu_1}(u) = \mathcal{L}_{\mu_2}(u),\ \forall u \geq 0$ ist, dann gilt: $\mu_1 = \mu_2$.

(b) Es gilt: $\mathcal{L}_{\mu_1 * \mu_2}(u) = \mathcal{L}_{\mu_1}(u)\mathcal{L}_{\mu_2}(u),\ u \geq 0$. (Faltungssatz)

Definition 2.1.10 *(Tail)*

(a) Für eine VF F auf $[0,\infty)$ heißt $\overline{F}(x) := 1 - F(x),\ x \geq 0$, der Tail *oder der* Schwanz *von F.*

(b) Für ein endliches Maß μ auf $\mathbb{R}$ heißt $\overline{\mu}^+(x) := \mu((x,\infty)),\ x \geq 0$, der positive Tail *von μ und $\overline{\mu}^-(x) := \mu((-\infty,-x)),\ x \geq 0$, der* negative Tail *von μ. $\overline{\mu}(x) := \overline{\mu}^+(x) + \overline{\mu}^-(x),\ x \geq 0$, heißt der* kombinierte Tail *von μ.*

Definition 2.1.11 *(Schwache asymptotische Äquivalenz)*
Zwei Funktionen f und g heißen schwach asymptotisch äquivalent*, wenn*

$$0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty.$$

Man schreibt: $f \asymp g$.

Definition 2.1.12 *(Tailäquivalenz, schwache Tailäquivalenz)*
Zwei VFen F und G heißen tailäquivalent*, wenn gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = k \in (0,\infty).$$

Man schreibt: $\overline{F}(x) \sim k\overline{G}(x),\ x \to \infty$.
Zwei VFen F und G heißen schwach tailäquivalent*, wenn ein $m \in (0,\infty)$ und ein $M \in (0,\infty)$ existieren, so dass gilt:*

$$m \leq \frac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} \leq M,\ \forall x \in (0,\infty).$$

Man schreibt: $\overline{F}(x) \overset{w}{\sim} \overline{G}(x)$.

Da es oft einfacher ist, die logarithmierten Tails zu betrachten, definiert man die Ausfallfunktion.

Definition 2.1.13 *(Ausfallfunktion, Ausfallrate)*
Sei F eine VF auf $[0,\infty)$. Die Funktion $Q_F := -\ln\left\{\overline{F}\right\}$ heißt Ausfallfunktion *von F. Wenn Q_F absolut stetig mit Dichte q_F ist, dann heißt q_F* Ausfallrate *von F.*

Bemerkung 2.1.14

- Q ist wachsend mit $Q_F(0) = -\ln\left\{\overline{F}(0)\right\} = -\ln\{1\} = 0$ und $Q_F(\infty) = \infty$.

- Wenn F absolut stetig ist mit Dichte f, dann gilt: $q_F = f/\overline{F}$.

Lemma 2.1.15 *(Klüppelberg [25], Lemma 1)*
Sei F eine absolut stetige VF auf $[0,\infty)$ mit Ausfallrate q_F. Wenn $\lim_{x\to\infty} q_F(x) = \alpha$ ist, dann hat die MEF M_F ihren singulären Punkt in α.

Definition 2.1.16 *(Integrierte Tailverteilung)*
Sei F eine VF auf $[0,\infty)$ mit endlichen Erwartungswert μ. Dann definiert man die integrierte Tailverteilung *F_I als*

$$F_I(x) := \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)\ dy,\ \ x \geq 0.$$

Bemerkung 2.1.17

- F_I ist absolut stetig mit Dichte $1/\mu\overline{F}$ und hat die Ausfallrate

$$q_{F_I}(x) = \frac{1/\mu\overline{F}(x)}{\overline{F_I}(x)} = \frac{\overline{F}(x)}{\int_x^\infty \overline{F}(y)\ dy}.$$

- Wenn $\lim_{x\to\infty} q_F(x) = \alpha \in [0,\infty]$, dann folgt mit l'Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} q_{F_I}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{\int_x^\infty \overline{F}(y)\ dy} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{-f(x)}{-\overline{F}(x)}}_{=q_F(x)} = \alpha.$$

  Nach Lemma 2.1.15 ist daher für absolut stetige VF F die Singularität von M_{F_I} gleich der Singularität von M_F.

Definition 2.1.18 *(Schwerer Tail, leichter Tail)*
Sei F eine VF auf $[0,\infty)$ und g eine Funktion mit $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.
Der Tail $\overline{F}$ heißt leichter *als g, wenn er schneller als g gegen 0 fällt, d.h.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{g(x)} = 0.$$

Der Tail $\overline{F}$ heißt schwerer *als g, wenn er langsamer als g gegen 0 fällt, d.h.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x)}{g(x)} = \infty.$$

F hat einen polynomiellen *Tail $\overline{F}$, wenn ein $\alpha > 0$ existiert, so dass $\overline{F}(x) \sim x^{-\alpha}$ für $x \to \infty$ gilt.*

2.2 Unendlich oft teilbare Verteilungen

Definition 2.2.1 *(Unendlich oft teilbar: Bertoin [6], S.2)*
Eine ZV X oder ihre Verteilung μ_X ist unendlich oft teilbar*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ ZVen $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ existieren, so dass gilt:*

$$X \stackrel{d}{=} Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)},$$

wobei $\stackrel{d}{=}$ Gleichheit in Verteilung bedeutet.

Äquivalent dazu ist eine der folgenden Eigenschaften:

- Die Verteilung μ_X hat für alle $n \in \mathbb{N}$ eine nte Faltungswurzel, die selbst wiederum die Verteilung einer ZV ist, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \mu_n^{n*} = \mu_X$.
- Die charakteristische Funktion $\phi_X = \phi_{\mu_X}$ hat für alle $n \in \mathbb{N}$ eine nte Wurzel, die selbst wiederum die charakteristische Funktion einer ZV ist, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : (\phi_{\mu_n})^n = \phi_{\mu_X} = \phi_X$.

Definition 2.2.2 *(Charakteristischer Exponent: Bertoin [6], S.2)*
Sei X eine unendlich oft teilbare ZV auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in $\mathbb{R}$ und Verteilung $\mu_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$. Die eindeutige stetige Funktion $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\phi_X(u) = \phi_{\mu_X}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX}\right] = e^{-\Psi(u)}, \ \forall u \in \mathbb{R},$$

heißt der charakteristische Exponent*, der* Lévy-Exponent *oder das* Lévy-Symbol *von X oder von μ_X.*

Der charakteristische Exponent $\Psi(u) := -\ln\{\mathbb{E}\left[e^{iuX}\right]\}$ ist wohldefiniert, da die charakteristische Funktion ϕ_X einer unendlich oft teilbaren ZV X keine Nullstelle hat, siehe Sato [30], Lemma 7.5.
Unendlich oft teilbare ZVen bzw. Wmaße werden durch die Gestalt ihres charakteristischen Exponenten charakterisiert, wobei eine Abschneidefunktion benötigt wird.

Definition 2.2.3 *(Abschneidefunktion)*
Eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Abschneidefunktion *auf $\mathbb{R}$, falls gilt:*

(1) h beschränkt.

(2) $h(x) = 1$ in einer Umgebung von x.

(3) $h(x) = 0$ außerhalb einer kompakten Menge.

Theorem 2.2.4 *(Lévy-Khintchine Formel: Bertoin [6], S.3)*
Eine Funktion $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist genau dann der charakteristische Exponent eines unendlich oft teilbaren Wmaßes μ auf $\mathbb{R}$, wenn

- *ein $a \in \mathbb{R}$,*

- *ein* $\sigma^2 \geq 0$ *und*
- *ein Maß* Π *auf* $\mathbb{R}$ *mit* $\Pi(\{0\}) = 0$ *und* $\int_{\mathbb{R}} (|x|^2 \wedge 1)\ \Pi(dx) < \infty$

existieren, so dass gilt:

$$-\ln\{\phi_\mu(u)\} = \Psi(u) = -iau + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux} + iuxh(x))\ \Pi(dx),\ u \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

wobei $h(x)$ *eine Abschneidefunktion ist.*
Das heißt, dass jede charakteristische Funktion ϕ_μ *eines unendlich oft teilbaren Wmaßes* μ *die Gestalt hat:*

$$\phi_\mu(u) = \exp\left\{iau - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iuxh(x))\ \Pi(dx)\right\},\ u \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

σ^2 heißt *Gauß-Koeffizient* und Π *Lévy-Maß*. (a, σ^2, Π) heißt *erzeugendes Tripel*, *Charakteristiken* oder *charakteristisches Tripel* und bestimmt Ψ eindeutig. Jedes endliche Maß auf $\mathbb{R}$ ist ein Lévy-Maß und jede Restriktion eines Lévy-Maßes ist ein Lévy-Maß.
Unter zusätzlichen Bedingungen ist die Abbildung $u \to \int_{\mathbb{R}} uxh(x)\ \Pi(dx)$ eine wohldefinierte Funktion und (2.2) kann umformuliert werden.

Definition 2.2.5 *(Drift, Zentrum: Sato [30], S.39)*
Sei μ *ein unendlich oft teilbares Wmaß mit charakteristischem Tripel* (a, σ^2, Π).
Wenn $\int_{\mathbb{R}} (|x| \wedge 1)\ \Pi(dx) < \infty$ *gilt, dann heißt*

$$D_\mu := a - \int_{\mathbb{R}} xh(x)\ \Pi(dx) \tag{2.3}$$

der Drift *von* μ.
Wenn $\int_{|x|>1} |x|\ \Pi(dx) < \infty$ *gilt, dann heißt*

$$Z_\mu := a + \int_{\mathbb{R}} x(1 - h(x))\ \Pi(dx) \tag{2.4}$$

das Zentrum *von* μ.

Weil $\int_{|x|>1} |x|\ \Pi(dx) < \infty$ äquivalent zu $\int_{\mathbb{R}} |x|\ \mu(dx) < \infty$ ist, ist $Z_\mu = \int_{\mathbb{R}} x\ \mu(dx)$ der Erwartungswert von μ, siehe Sato [30], Beispiel 25.12. Wenn μ das Wmaß einer ZV X ist, dann definiert man: $D_X := D_\mu$.
Die Abschneidefunktion h wird häufig als $h(x) = 1_{\{|x|<1\}}$ angenommen, siehe Applebaum [1], Theorem 1.2.14 und Bertoin [6], S.3. Stattdessen können in der Lévy-Khintchine Formel auch andere Abschneidefunktionen verwendet werden, z.B. $1_{\{|x|\leq 1\}}(x)$, $\frac{1}{1+|x|^2}$, siehe Sato [30], Theorem 8.1, Bertoin [6], S.3 und Applebaum [1], S.27. Wenn man von einer Abschneidefunktion $h(x)$ zu einer Abschneidefunktion $h'(x)$ wechselt, dann ändern sich das Lévy-Maß und der Gauß-Koeffizient nicht, aber der Parameter a wird zu:

$$a' = a + \int_{\mathbb{R}} x\,(h'(x) - h(x))\,\Pi(dx).$$

Im Folgenden wird immer $h(x) = 1_{\{|x|<1\}}$ **für die Abschneidefunktion gewählt.**

2.3 Lévy-Prozesse

2.3.1 Definition eines Lévy-Prozesses

Definition 2.3.1 *(Lévy-Prozess: Bertoin [6], S.11, Sato [30], Definition 1.6)*
Ein $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist ein Lévy-Prozess*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$*-fast sicher.*

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_0 < t_1 \cdots < t_n$ sind die ZVen $X_{t_0},\ X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängig (unabhängige Zuwächse).

(3) Die Verteilung von $X_{s+t} - X_s$ hängt nicht von s ab (zeitliche Homogenität oder stationäre Zuwächse).

(4) X_t ist stochastisch stetig, d.h. $\forall t \geq 0$ und $\epsilon > 0$: $\lim_{s\to t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) = 0$.

(5) X besitzt eine càdlàg Version, d.h. $\exists\ \Omega_0 \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass für alle $\omega \in \Omega_0$ gilt: $X_t(\omega)$ ist rechtsstetig in $t \geq 0$ und hat linksseitige Grenzwerte in $t > 0$ (càdlàg Eigenschaft = continu à droite et limites à gauche).

Bemerkung 2.3.2

- Wenn X nur die Eigenschaften 2.3.1(1)-(4) erfüllt, dann ist X ein *Lévy-Prozess in Verteilung*, siehe Sato [30], S.3.
- Eine Irrfahrt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erfüllt für die Zeitskala $n \in \mathbb{N}_0$ statt $t \geq 0$ die Eigenschaften von Definition 2.3.1 und deshalb kann man einen Lévy-Prozess als Irrfahrt in stetiger Zeit interpretieren. Viele Eigenschaften lassen sich von Irrfahrten auf Lévy-Prozesse übertragen, indem man einen Lévy-Prozess mit einem diskreten Skelett approximiert und dann die Zeitabstände gegen 0 konvergieren läßt.

2.3.2 Der Zusammenhang zwischen unendlicher Teilbarkeit und Lévy-Prozessen

Unendlich oft teilbares Wmaß → Lévy-Prozess

Wenn μ ein unendlich oft teilbares Wmaß mit charakteristischem Exponenten Ψ ist, dann definiert man für $t \geq 0$ durch $e^{-t\Psi(u)}$ die charakteristische Funktion eines unendlich oft teilbaren Wmaßes μ_t. $(\mu_t)_{t\geq 0}$ ist eine schwach stetige Faltungshalbgruppe, d.h. $\mu_t \xrightarrow{\text{w}} \delta_0$ für $t \downarrow 0$, mit der man einen kanonischen Lévy-Prozess in Verteilung $\tilde{X}$ konstruieren kann. Die càdlàg Modifikation von $\tilde{X}$ ist ein Lévy-Prozess X mit charakteristischer Funktion $\phi_{X_t}(u) = e^{-t\Psi(u)} = \phi_\mu^t(u)$, siehe Bertoin [6], Theorem I.1 und Applebaum [1], Korollar 1.4.6, Theorem 2.1.7.

Lévy-Prozess → unendlich oft teilbare ZV

Wenn X ein Lévy-Prozess ist, dann folgt für $t > 0$ mit der Eigenschaft der unabhängigen statonären Zuwächse aus der Zerlegung

$$X_t = X_{t/n} + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \cdots + (X_{nt/n} - X_{(n-1)t/n}),\ n \in \mathbb{N},$$

dass X_t nach Definition 2.2.1 unendlich oft teilbar ist mit dem charakteristischen Exponenten Ψ_t. Für $n, m \in \mathbb{N}$ folgt aus der obigen Zerlegung: $\phi_{X_1}(u)^m = \phi_{X_m}(u) = \phi_{X_{m/n}}(u)^n$ bzw. $m\Psi_1 = \Psi_m = n\Psi_{m/n}$ und daher gilt: $\Psi_t = t\Psi_1,\ \forall t \in \mathbb{Q}$. Wegen der fast sicheren Rechtsstetigkeit von X ist die charakteristische Funktion von X_t rechtsstetig und, wenn man für ein $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ eine rationale Folge $(t_n)_{n\geq 1}$ mit $t_n \downarrow t$ für $n \to \infty$ wählt, sieht man, dass $\mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] = e^{-t\Psi(u)},\ \forall t \geq 0$, gilt. Daher ist der charakteristische Exponent von X_t linear in t und $\Psi = \Psi_1$ wird auch als der charakteristische Exponent von X bezeichnet. Da eine charakteristische Funktion die dazugehörige Verteilung eindeutig festlegt, bestimmt Ψ die eindimensionalen Verteilungen von X. Wegen der Unabhängigkeit und Homogenität der Zuwächse sind auch die endlich-dimensionalen Verteilungen und somit die gesamte Verteilung von X auf Ω durch Ψ charakterisiert, siehe Applebaum [1], Proposition 1.3.1 und Bertoin [6], S.11.
Aus diesem Zusammenhang folgt, dass man von den analytischen Eigenschaften von Ψ auf das stochastische Verhalten von X schließen kann.

Theorem 2.3.3 *(Sato [30], Theorem 21.1, 21.3, 21.9, Beispiel 25.12, Bertoin [6], S.15) Sei X ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel (a, σ^2, Π_X) und eindimensionalen Verteilungen $(\mu_t)_{t\geq 0}$.*

(a) X hat genau dann fast sicher stetige Pfade, wenn $\Pi_X = 0$ ist.

(b) X hat genau dann nur endlich viele Sprünge auf $[0, t]$ für $t > 0$, wenn $\Pi_X(\mathbb{R}) < \infty$. Die erste Sprungzeit T ist dann exponential verteilt mit Erwartungswert $1/\Pi_X(\mathbb{R})$.

(c) X hat genau dann fast sicher endliche Variation auf jedem kompakten Zeitintervall, wenn $\sigma^2 = 0$ und $\int_{\mathbb{R}}(1 \wedge |x|)\ \Pi_X(dx) < \infty$ ist.

(d) X_t hat genau dann einen endlichen Erwartungswert für $t > 0$, wenn $\int_{|x|>1} |x|\ \Pi_X(dx) < \infty$ ist. Unter dieser Voraussetzung gilt:

$$\mathbb{E}[X_t] = t \cdot \left(a + \int_{|x|\geq 1} x\ \Pi_X(dx)\right) = Z_{\mu_t}. \tag{2.5}$$

(e) $\mathbb{E}[|X_t|^2] < \infty$ gilt genau dann für $t > 0$, wenn $\int_{|x|>1} |x|^2\ \Pi_X(dx) < \infty$ ist. Unter dieser Voraussetzung gilt für die Varianz von X_t:

$$Var[X_t] = t \cdot \left(\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} x^2\ \Pi_X(dx)\right). \tag{2.6}$$

(Der Unterschied zu Sato "$\geq$" statt "$>$" kommt daher, dass Sato die Abschneidefunktion $h(x) = 1_{\{|x|\leq 1\}}$ benutzt und wir $h(x) = 1_{\{|x|<1\}}$ haben.)
Man beachte, dass das für einen Lévy-Prozess X der Drift D_{X_1} der ZV X_1 aus Definition (2.3) im allgemeinen nicht gleich dem Erwartungswert $\mathbb{E}[X_1]$ ist, der auch als Drift der Prozesses X bezeichnet wird. Für einen Lévy-Prozess bezeichnet D_X im Folgenden den Drift D_{X_1}.

Definition 2.3.4 *(Spektral positiv, spektral negativ)*
Ein Lévy-Prozess X mit Lévy-Maß Π heißt spektral positiv*, wenn $\Pi((-\infty, 0)) = 0$ ist, und* spektral negativ*, wenn $\Pi((0, \infty)) = 0$ ist.*

2.3.3 Beispiele für Lévy-Prozesse

(a) **Deterministische Bewegung:**
Ein Lévy-Prozess X mit dem charakteristischen Tripel $(a, 0, 0)$ hat die charakteristische Funktion

$$\phi_{X_t}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right] = e^{iuat},\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0,$$

und ist daher eine lineare Funktion $X_t = at,\ t \geq 0$.

(b) **Brownsche Bewegung:**
Wenn ein Lévy-Prozess X das charakteristische Tripel $(a, \sigma^2, 0)$ hat, dann ist die charakteristische Funktion

$$\phi_{X_t}(u) = e^{-t\Psi(u)} = \exp\left\{iuat - \frac{1}{2}t\sigma^2u^2\right\},\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Das ist die charakteristische Funktion der Normalverteilung $\mathcal{N}(at, \sigma^2 t),\ \forall t \geq 0$, und daher ist $X_t \sim \mathcal{N}(at, \sigma^2 t),\ \forall t \geq 0$, d.h. X ist eine *Brownsche Bewegung mit Drift at* und Varianz $\sigma^2 t$. Wenn $a = 0$ ist, dann bezeichnet man X als *Brownsche Bewegung* oder *Wiener-Prozess*. Wenn $a = 0$ und $\sigma^2 = 1$ ist, dann heißt X *Standard Brownsche Bewegung* und hat die Eigenschaften:

(i) $\mathbb{E}[X_t] = 0,\ \forall t \geq 0$.

(ii) $\mathrm{Var}[X_t] = t,\ \forall t \geq 0$.

(iii) $\mathrm{Cov}[X_s, X_t] = s \wedge t,\ \forall s, t \geq 0$.

(iv) $\mathbb{P}(X_t \in dx) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}\ dx,\ \forall t \geq 0$.

(v) $\Psi(u) = \frac{1}{2}|u|^2,\ \forall u \in \mathbb{R}$.

Da das Lévy-Maß 0 ist, hat die Brownsche Bewegung mit Drift keine Sprünge und ist nach Theorem 2.3.3(a) der einzige Lévy-Prozess mit stetigen Pfaden, siehe Abbildung 2.1. Außerdem ist nur in diesem Fall der Erwartungswert $\mathbb{E}[X_1]$ gleich dem Drift $D_X = D_{X_1}$.

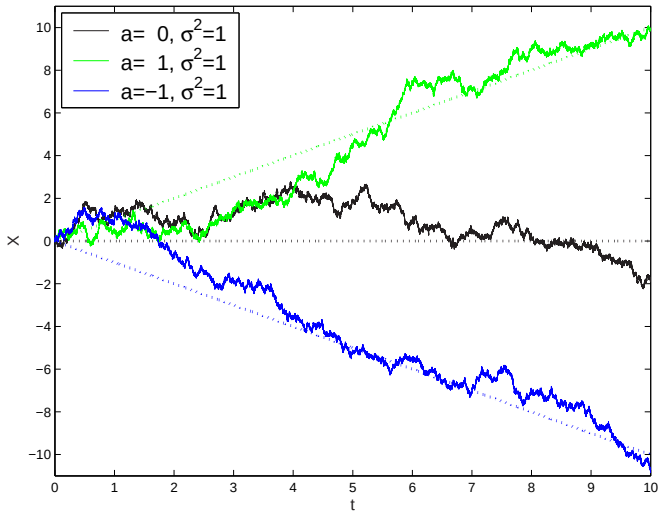

Abbildung 2.1: Realisierungen einer Brownschen Bewegung mit Erwartungswert a und Varianz σ^2.

(c) **Poisson-Prozess:**
Sei $0 < \lambda < \infty$. Ein Lévy-Prozess X mit dem charakteristischen Tripel $(0, 0, \lambda\delta_1)$ hat den beschränkten charakteristischen Exponenten

$$\Psi(u) = \lambda(1 - e^{iu}),\ u \in \mathbb{R},$$

und die charakteristische Funktion

$$\phi_{X_t}(u) = e^{\lambda t(e^{iu}-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

Das ist die charakteristische Funktion der Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda t > 0$ und daher gilt: $X_t \sim \pi(\lambda t),\ \forall t \geq 0$. X ist ein Poisson-Prozess mit Intensität λ und nimmt Werte $n \in \mathbb{N}_0$ an mit WS

$$\mathbb{P}(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},\ t \geq 0.$$

Die Poisson-Verteilung hat für alle $\lambda > 0$ den Drift $D_{\pi(\lambda)} = 0$ und das Zentrum $Z_{\pi(\lambda)} = \mathbb{E}[X_1] = \lambda$ und deshalb hat der Prozess X nach Theorem 2.3.3 den Drift λt. Dies gilt auch, wenn man eine andere Abschneidefunktion als $1_{\{|x|<1\}}$ mit $h(1) \neq 0$ verwendet, weil sich dann der Parameter a zu $a' = \lambda$ verändert. Einen Poisson-Prozess kann man folgendermaßen konstruieren:

Theorem 2.3.5 *(Sato [30], Theorem 3.2)*
Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{R}$, so dass $W_n := T_n - T_{n-1}$ exponential verteilt sind mit Erwartungswert $\mathbb{E}[W_1] = 1/\lambda > 0$. Definiere

$$N_t := n \ \Leftrightarrow\ T_n \leq t < T_{n+1}.$$

Dann ist $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

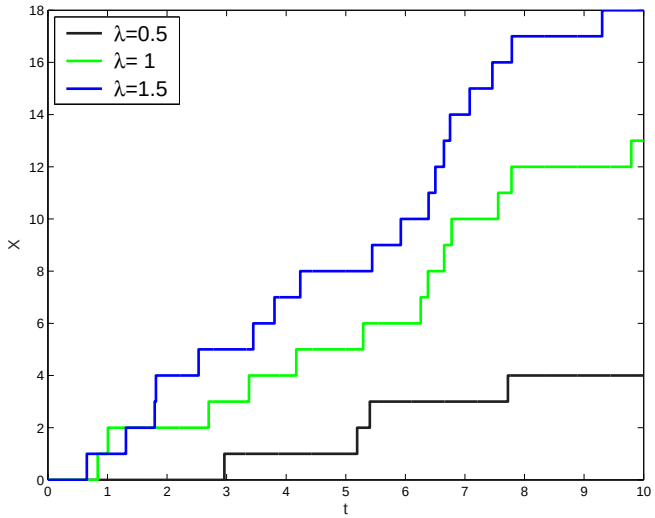

Abbildung 2.2: Realisierungen eines Poisson-Prozesses mit unterschiedlichen Intensitäten.

(d) **Zusammengesetzter Poisson-Prozess:**
Sei $0 < \lambda < \infty$ und μ ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ mit $\mu\{0\} = 0$. Mit iid ZVen $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit der gemeinsamen VF $F(x) = \mu(-\infty, x)/\mu(\mathbb{R})$ und einem davon unabhängigen Poisson-Prozess N mit Intensität λ definiert man den *zusammengesetzten Poisson-Prozess* X durch $X_t := \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$. X ist ein Lévy-Prozess auf $\mathbb{R}$ mit dem charakteristischen Tripel $(\int_{|x|<1} x\lambda\ F(dx), 0, \lambda F)$ und hat den charakteristischen Exponenten

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iux})\lambda\ F(dx),\ u \in \mathbb{R},$$

und die charakteristische Funktion

$$\phi_{X_t}(u) = \exp\left\{\lambda t \int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1)\ F(dy)\right\} = e^{\lambda t(\phi_F(u)-1)},\ u \in \mathbb{R},\ t \geq 0,$$

Die ZVen X_t haben die zusammengesetzte Poisson-Verteilung

$$\mathbb{P}(X_t \in dx) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(dx)$$

und man schreibt: $X_t \sim \pi(\lambda, F),\ \forall t \geq 0$. Weil der Gauß-Koeffizient $\sigma^2 = 0$ ist und $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|)\ \lambda F(dx) < \infty$ gilt, hat der zusammengesetzte Poisson-Prozess nach Theorem 2.3.3(c) endliche Variation und ist der einzige Lévy-Prozess mit beschränktem Ψ, siehe Bertoin [6], Korollar I.3. Außerdem sind nur in diesem Fall die Pfade fast sicher stückweise konstant, siehe Sato [30], Theorem 21.2. Für alle $\lambda > 0$ und VFen F ist der Drift der zusammengesetzten Poisson-Verteilung $D_{\pi(\lambda,F)} = 0$ und das Zentrum $Z_{\pi(\lambda,F)} = \int_{\mathbb{R}} x\lambda\ F(dx)$. Daher hat der zusammengsetzte Poisson-Prozess nach Theorem 2.3.3(d) den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_t] = t \int_{\mathbb{R}} x\lambda\ F(dx)$. Der Poisson-Prozess ist ein Spezialfall mit $\mu = \delta_1$.

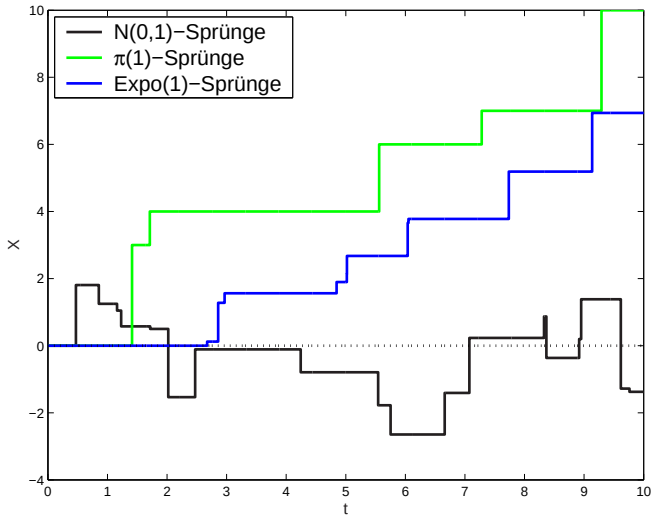

Abbildung 2.3: Realisierungen eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses mit Intensität 1 und unterschiedlichen SprungVFen.

Bemerkung 2.3.6

- Die Menge aller unendlich oft teilbaren Wmaße auf $\mathbb{R}$ ist der schwache Abschluss der Menge aller zusammengesetzten Poisson-Verteilungen auf $\mathbb{R}$, d.h. jedes unendlich oft teilbare Wmaß kann man als schwachen Grenzwert einer Folge von zusammengesetzten Poisson-Verteilungen erhalten, siehe Applebaum [1], Theorem 1.2.18, Korollar 1.2.19.

- Seien $(X^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ Lévy-Prozesse mit charakteristischem Tripel $(a_i, \sigma_i^2, \Pi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wenn für $n \in \mathbb{N}$ alle $X^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$, voneinander unabhängig sind, dann ist $\sum_{i=1}^n X^{(i)}$ ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel $(\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \sum_{i=1}^n \Pi_i)$, siehe Sato [30], Lemma 7.4.

- Man kann einen allgemeinen Lévy-Prozess als Brownsche Bewegung mit Drift interpretieren, der durch Sprünge beliebiger Größe unterbrochen wird, siehe Applebaum [1], S.xvii. D.h. jeder Lévy-Prozess ist eine Mischung der beiden Grenzfälle, Brownsche Bewegung und zusammengesetzter Poisson-Prozess.

2.3.4 p-stabile Prozesse

p-stabile Prozesse bilden eine Unterklasse der Lévy-Prozesse, die in Abschnitt 5.4.5 verwendet werden.

Definition 2.3.7 *(Stabile ZVen: Applebaum [1], S.31)*
Eine ZV X bzw. ihre Verteilung heißt stabil, *wenn es reellwertige Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n > 0$ gibt, so dass gilt:*

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n,$$

wobei X_i unabhängige Kopien von X sind.
Eine ZV X bzw. ihre Verteilung heißt strikt stabil, *wenn $d_n = 0$.*

Bemerkung 2.3.8
Nach Feller [19], S.170, können die Normierungskonstanten c_n nur die Form $n^{1/p}$ mit $p \in (0, 2]$ haben. Die Konstante p heißt der *Index* der stabilen ZV X oder der stabilen VF μ_X.

Definition 2.3.9 *(p-stabiler Prozess: Bertoin [6], S.13)*
Ein stabiler Lévy-Prozess ist ein Lévy-Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$, für den X_t eine stabile ZV ist.

Bemerkung 2.3.10

- Für jedes $p \in (0, 2]$ ist ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Exponent Ψ genau dann ein *stabiler Lévy-Prozess mit Index p* oder ein *p-stabiler Lévy-Prozess*, wenn

  $$\Psi(ku) = k^p \Psi(u), \ \forall k > 0, \ u \in \mathbb{R}.$$

  Daher erfüllt ein p-stabiler Lévy-Prozess X die Skalierungseigenschaft:

  $$(X_{kt})_{t\geq 0} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (k^{1/p} X_t)_{t\geq 0}$$

  und ist *selbst-ähnlich* mit dem Hurst-Index $1/p$.

- Das Lévy-Maß Π_X eines Lévy-Prozesses X ist

  $$\Pi_X(dx) = \frac{p(p-1)}{\Gamma(2-p)u^{1+p}} \, dx, \tag{2.7}$$

  siehe Zolotarev [34]. Dabei bezeichnet Γ die Gamma-Funktion, siehe Definition A.1.3.

2.4 Die Klasse der faltungsäquivalenten Verteilungen

In dieser Arbeit werden besonders VFen aus den Klassen $\mathcal{L}^{(\alpha)}, \ \alpha \geq 0$, und $\mathcal{S}^{(\alpha)}, \ \alpha \geq 0$, betrachtet.

2.4.1 Definition von $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ und $\mathcal{S}^{(\alpha)}$

Definition 2.4.1 *(Klasse $\mathcal{L}^{(\alpha)}$)*
Sei $\alpha \geq 0$. Eine VF F auf $[0, \infty)$ mit Tail $\overline{F}$ gehört zur Klasse $\mathcal{L}^{(\alpha)}$, wenn $\overline{F}(x) > 0, \ \forall x \geq 0$, gilt und

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}(u-x)}{\overline{F}(u)} = e^{\alpha x}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \textit{wenn } F \textit{ nicht auf einem Gitter konzentriert ist}; \tag{2.8}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}(n-1)}{\overline{F}(n)} = e^{\alpha}, \text{ wenn } F \text{ auf einem Gitter mit Spannweite 1 konzentriert ist.} \tag{2.9}$$

Man schreibt: $F \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$ *oder* $\overline{F} \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$.
Für $\alpha > 0$ *heißt die Klasse* $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ *die* Klasse der VFen mit exponentiellen Tails mit Rate α. *Die Klasse* $\mathcal{L} := \mathcal{L}^{(0)}$ *wird als die* Klasse der heavy-tailed *oder auch* long-tailed VFen *bezeichnet.*

Definition 2.4.2 *(Klasse* $\mathcal{S}^{(\alpha)}$*)*
Sei $\alpha \geq 0$. *Eine VF* F *gehört zur Klasse* $\mathcal{S}^{(\alpha)}$, *wenn*

(1) $F \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$,

(2) es ein $M < \infty$ *gibt, so dass gilt:*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F^{2*}}(u)}{\overline{F}(u)} = 2M. \tag{2.10}$$

Man schreibt: $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$.
Für $\alpha \geq 0$ *heißt die Klasse* $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ *die* Klasse der faltungsäquivalenten VFen. *Insbesondere heißt die Klasse* $\mathcal{S} := \mathcal{S}^{(0)}$ *die* Klasse der subexponentiellen VFen.

Bemerkung 2.4.3

- Für $\alpha > 0$ ist eine Unterscheidung zwischen dem gitterartigen und dem nicht-gitterartigen Fall nötig, aber für $\alpha = 0$ nicht.
- Die Grenzbeziehung (2.8) aus Definition 2.4.1 gilt für $\alpha \geq 0$ gleichmäßig auf kompakten Intervallen.

Definition 2.4.4 *(*$\mathcal{S}d^{(\alpha)}$, $\mathcal{L}d^{(\alpha)}$*)*
Sei $\alpha \geq 0$. *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, *so dass für ein* $A \in \mathbb{R}_+$ $f(x) > 0$ *auf* $[A, \infty)$ *ist, gehört zur Klasse* $\mathcal{L}d^{(\alpha)}$, *wenn gilt:*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(u-x)}{f(u)} = e^{\alpha x}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Man schreibt: $f \in \mathcal{L}d^{(\alpha)}$.
Sei $\alpha \geq 0$. *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *gehört zur Klasse* $\mathcal{S}d^{(\alpha)}$, *wenn*

(1) $f \in \mathcal{L}d^{(\alpha)}$,

(2) es ein $M < \infty$ *gibt, so dass* $\lim_{u\to\infty} \frac{f^{2*}(u)}{f(u)} = 2M$.

Man schreibt: $f \in \mathcal{S}d^{(\alpha)}$.
Die Klasse $\mathcal{S}d := \mathcal{S}d^{(0)}$ *heißt die Klasse der* subexponentiellen Dichten.

Zwischen $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ und $\mathcal{S}d^{(\alpha)}$ bestehen folgende Zusammenhänge.

Theorem 2.4.5 *(Klüppelberg [24], Theorem 1.1, Korollar 2.2 und [22], Theorem 5.3.13)*

(a) Für $f \in \mathcal{S}d^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$, definiert man eine VF konzentriert auf $[0, \infty)$ durch

$$F(x) := \frac{\int_0^x f(y)\ dy}{\int_0^\infty f(y)\ dy},\ x > 0.$$

Dann ist $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$.

(b) Wenn $\alpha > 0$ ist und die VF F eine Dichte $f \in \mathcal{L}d^{(\alpha)}$ hat, dann gilt:

$$F \in \mathcal{S}^{(\alpha)} \Leftrightarrow \overline{F} \in \mathcal{S}d^{(\alpha)} \Leftrightarrow f \in \mathcal{S}d^{(\alpha)}.$$

(c) Für $\alpha = 0$ gilt: $\overline{F} \in \mathcal{S}d \Rightarrow F \in \mathcal{S}$.

Ein Spezialfall der Faltungsäquivalenz ist die reguläre Variation.

Definition 2.4.6 *(Reguläre Variation: Bertoin [6], S.9)*
Eine Lebesgue-messbare Funktion $U : (0, \infty) \to (0, \infty)$ ist regulär variierend *in ∞ mit Index $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn gilt:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{U(tx)}{U(x)} = t^\alpha,\ \forall t > 0.$$

Man schreibt: $U \in \mathcal{R}_\alpha$.
Wenn $\alpha = 0$ ist, dann ist U langsam variierend *in ∞.*
Man schreibt: $U \in \mathcal{R}_0$.

2.4.2 Eigenschaften von $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ und $\mathcal{S}^{(\alpha)}$

Für $F \in \mathcal{L}^{(\alpha)},\ \alpha > 0$, fällt der Tail $\overline{F}$ asymptotisch wie der Tail der ExponentialVF $e^{-\alpha x}$ und damit ist $\overline{F}$ schwerer als der Tail einer ExponentialVF $e^{-\gamma x},\ \forall \gamma > \alpha$. Je größer α ist, desto weniger VFen sind in der Klasse $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ und desto leichter werden die Tails. Die größte Klasse $\mathcal{L}$ hat die schwersten Tails von allen Klassen $\mathcal{L}^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$, und für $F \in \mathcal{L}$ fällt der Tail $\overline{F}$ asymptotisch sogar langsamer als der Tail jeder ExponentialVF, siehe Klüppelberg [22], Korollar 5.3.11, weshalb die VFen der Teilklasse $\mathcal{S}$ als *subexponentiell* bezeichnet werden. Für jede VF $F \in \mathcal{L}^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$, hat die MEF M_F deshalb folgende Eigenschaften.

Theorem 2.4.7 *(Embrechts und Goldie [16], Chover et al. [10], Cline [12], Theorem 2.9)*

(a) Für $F \in \mathcal{L}^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$, hat M_F eine rechte Singularität in α, d.h. $M_F(\alpha + \epsilon) = \infty,\ \forall \epsilon > 0$.

(b) Für $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$, gilt: $M = M_F(\alpha) < \infty$.

(c) Für $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ mit endlichem Erwartungswert μ gilt: $M_F(\alpha) = 1 + \alpha\mu M_{F_I}(\alpha)$.

Beweis von (c):
Weil für $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ $M_F(\alpha) < \infty$ ist, fällt $\overline{F}$ schneller als $e^{-\alpha x}$ gegen 0 für $x \to \infty$, d.h. $\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x}\overline{F}(x) = 0$. Damit folgt:

$$M_F(\alpha) = \int_0^\infty e^{\alpha x}\ F(dx) = \left[-e^{\alpha x}\overline{F}(x)\right]_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{\alpha x}\overline{F}(x)\ dx = 1 + \alpha\mu M_{F_I}(\alpha).$$

□

Für Tailäquivalenz $\sim$ und Faltung $*$ in den Klassen $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ und $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ gelten folgende Eigenschaften.

Theorem 2.4.8 *(Embrechts et al. [17], Lemma A3.15, Lemma A3.23, Cline [12], Korollar 2.10)*
Sei $\alpha \geq 0$.

(a) $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ und $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ sind bzgl. Tailäquivalenz abgeschlossen, d.h. wenn $F \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$ (bzw. $\mathcal{S}^{(\alpha)}$) und $\overline{F}(x) \sim \overline{G}(x),\ x \to \infty$, dann gilt: $G \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$ (bzw. $\mathcal{S}^{(\alpha)}$).

(b) $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ ist bzgl. Faltung abgeschlossen, d.h. wenn $F,\ G \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$, dann gilt: $F * G \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$.

(c) $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist abgschlossen bzgl. der Faltungswurzelbildung, d.h. wenn $F^{n*} \in \mathcal{S}^{(\alpha)},\ n \in \mathbb{N}$, dann gilt: $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$.

(d) Wenn $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ und $\overline{G}(x) = o(\overline{F}(x)),\ x \to \infty$ ist, dann gilt: $F * G \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$.

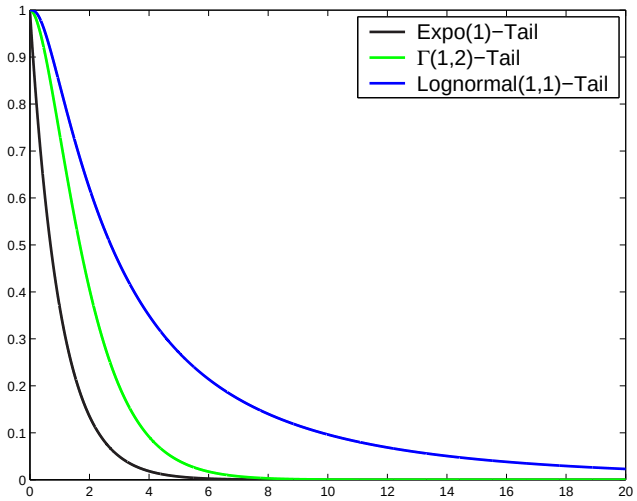

Abbildung 2.4: Die Tails der nicht faltungsäquivalenten Expo(1)- und $\Gamma(1,2)$-Verteilung im Vergleich zum Tail der subexponentiellen Lognormal(1,1)-Verteilung.

Beispiele 2.4.9 (Exponentialverteilung, Gamma-Verteilung)
Die Exponentialverteilung expo(α), $\alpha > 0$, ist in $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ und für $n \geq 2$ ist nach Theorem 2.4.8(b) auch ihre nte Faltung, die *Erlang-Verteilung* oder *Gammaverteilung* $\Gamma(\alpha, n)$, in

$\mathcal{L}^{(\alpha)}$. Bei beiden Verteilungen ist der Tail leichter als der Tail ihrer Faltung und daher sind die expo(α)-und die $\Gamma(\alpha, n)$-Verteilung nicht faltungsäquivalent, siehe Abbildung 2.4. Trotzdem bezeichnete Bingham (1987) die VFen der Klasse $\mathcal{S}^{(\alpha)}, \alpha > 0$, als *nahe am Exponentiellen*, weil ihre Tails nur leicht modifiziert exponentiell fallen. Die leichte Modifikation resultiert in einer MEF, die endlich ist in α, siehe Theorem 2.4.7(b). Für expo(α)-und $\Gamma(\alpha, n)$-Verteilung gilt hingegen: $M_F(\alpha) = \infty$.

Theorem 2.4.10 *(Darstellung von $\mathcal{L}^{(\alpha)}$, $\alpha \geq 0$: Klüppelberg [24], S.260)*
Jede VF $F \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$, $\alpha \geq 0$, hat die Darstellung

$$\overline{F}(x) = c(x) \exp\left\{ -\int_0^x b(y)\ dy \right\}, x \geq 0,$$

wobei $c : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} c(x) = c > 0$ hat und $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} b(x) = \alpha$ hat und $1/b$ absolut stetig ist.

Theorem 2.4.10 folgt aus dem Darstellungstheorem für regulär variierende Funktionen, siehe Embrechts et al. [17], Theorem A3.3, und dem Zusammenhang von $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ und $\mathcal{R}_{-\alpha}$:

$$F \in \mathcal{L}^{(\alpha)} \Leftrightarrow \overline{F} \circ \ln \in \mathcal{R}_{-\alpha}. \tag{2.11}$$

Bemerkung 2.4.11

- Das Darstellungstellungstheorem 2.4.10 und die Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ bzgl. der Tailäquivalenz, siehe Theorem 2.4.8, garantieren, dass für jedes $F \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$ eine tailäquivalente VF $G \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$ existiert, so dass G absolut stetig ist und die Ausfallrate q_G die Eigenschaft: $\lim_{x\to\infty} q_G(x) = \alpha$ erfüllt. Daher kann die Klasse $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ im Folgenden immer als absolut stetig angenommen werden, siehe [24], S.261.

- Weil wir $F \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$, $\alpha \geq 0$, immer als absolut stetig annehmen können, gilt nach Lemma 2.1.15: $\lim_{x\to\infty} q_F(x) = \alpha$.

- Weil wir deshalb $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$, $\alpha \geq 0$, immer als absolut stetig annehmen können, ist nach Bemerkung 2.1.17 die Singularität von M_{F_I} gleich der von M_F, d.h. $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)} \Rightarrow F_I \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ für $\alpha \geq 0$, wenn F einen endlichen Erwartungswert hat. Für $\alpha > 0$ gilt nach Theorem 2.4.5(b) sogar: $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)} \Leftrightarrow F_I \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$, wenn F einen endlichen Erwartungswert hat.

Lemma 2.4.12 *(Pakes [28], Lemma 5.2, Lemma 5.3)*
Sei $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$, $\alpha \geq 0$.

(a) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F^{k*}}(u)}{\overline{F}(u)} = kM_F(\alpha)^{k-1}.$$

(b) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es eine Konstante $K(\epsilon)$, so dass gleichmäßig in $u \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{\overline{F^{k*}}(u)}{\overline{F}(u)} \leq \begin{cases} K(\epsilon) & \text{, wenn } M_F(\alpha) < 1, \\ K(\epsilon)(M_F(\alpha) + \epsilon)^k & \text{, wenn } M_F(\alpha) \geq 1. \end{cases}$$

Aussage (a) ist eine Erweiterung der Bedingung (2.10) der Definition 2.4.2. Eine wichtige Eigenschaft von $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ steht in Verbindung mit den unendlich oft teilbaren VFen.

Proposition 2.4.13 *(Pakes [28], Theorem 3.1)*
Wenn eine VF F auf $[0,\infty)$ unendlich oft teilbar ist mit Lévy-Maß $\Pi_F(\cdot) \neq 0$ und positivem Tail $\overline{\Pi}_F^+(u), u > 0$, dann sind für $\alpha \geq 0$ folgende Aussagen äquivalent:

(a) $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$.

(b) $\overline{\Pi}_F^+ \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$.

(c) $\overline{F}(u) \sim M_F(\alpha)\overline{\Pi}_F^+(u),\ u \to \infty$ *und* $\Pi_F \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$.

Daraus folgt, dass für einen Lévy-Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ entweder ein $\alpha \geq 0$ existiert, so dass die VF von X_t in $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist für alle $t > 0$, oder keine der eindimensionalen VFen ist faltungsäquivalent.

2.4.3 Die Klasse $\mathcal{S}$ und die Teilklasse $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$

Da VFen in $\mathcal{S}$ sehr schwere Tails haben, gilt folgende Proposition.

Proposition 2.4.14
Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ iid mit VF F und Maximum $M_n := \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Außerdem sei $S_n := \sum_{i=1}^n Y_i$. Dann gilt:

$$F \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(M_n > x)} = 1,\ \forall n.$$

Diese Eigenschaft bedeutet, dass der Tail der VF von S durch den Tail der VF des Maximums bestimmt wird, d.h. für große x bestimmt das Maximum die Summe.
In $\mathcal{S}$ gibt es einerseits Verteilungen F, die im Anziehungsbereich der Gumbel-Verteilung (MDA(Λ)) liegen, d.h. es gibt Normierungskonstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$:

$$F^n(a_n \cdot x + b_n) \xrightarrow{\text{w}} \Lambda(x),\ x \to \infty.$$

Andererseits existieren auch subexponentielle Verteilungen im Anziehungsbereich der Fréchet-Verteilung (MDA(Φ_α), $\alpha > 0$), zu denen z.B. die Verteilungen mit regulär variierendem Tail gehören, d.h. $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.

Definition 2.4.15 *($\mathcal{S}^*$: Klüppelberg [23], S.133 und [25], S.281)*
Eine VF F mit endlichem Erwartungswert μ gehört zu $\mathcal{S}^*$, wenn gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} \overline{F}(y)\ dy = 2\mu.$$

Wenn $F \in \mathcal{S}^*$ ist, dann folgt aus der Definition 2.4.15, dass $\overline{F} \in \mathcal{S}d$ ist. Nach Theorem 2.4.5(c) ist dann $F \in \mathcal{S}$ und mit Bemerkung 2.4.11 folgt: $F_I \in \mathcal{S}$. Wenn umgekehrt $F_I \in \mathcal{S}$ ist, dann ist der Erwartungswert μ endlich und mit (2.10) ist $F \in \mathcal{S}^*$. Außerdem ist $\mathcal{S}^*$ bzgl. schwacher Tailäquivalenz abgeschlossen, siehe Klüppelberg [23], Theorem 2.1.

Kapitel 3

Erneuerungs- und Fluktuationstheorie für Lévy-Prozesse

Nach der Einführung in die Theorie der Lévy-Prozesse werden in diesem Kapitel die Erneuerungs- und Fluktuationstheorie für Lévy-Prozesse und deren wesentlichen Eigenschaften thematisiert. In Abschnitt 3.1 zeigt die starke Markov-Eigenschaft die Gedächtnislosigkeit eines Lévy-Prozesses und in Abschnitt 3.2 werden die q-Potentialmaße definiert, die die Erneuerungsfunktion für Irrfahrten verallgemeinern. Das Lang- bzw. Kurzzeitverhalten wird in Abschnitt 3.3 durch Rekurrenz und Transienz bzw. durch Regularität des Punktes 0 charakterisiert. Wie sich eine Spiegelung an der x-Achse bzw. eine Zeitumkehr eines Lévy-Prozesses auf dessen Verteilung auswirkt, wird in Abschnitt 3.4 mit dem Begriff der Dualität beschrieben und bei dem Konzept der Kapazität, geht es um die Frage, ob ein Lévy-Prozess von jedem Punkt jemals eine Menge erreicht. In Abschnitt 3.5 wird die Klasse der Subordinatoren und ihre Erneuerungsfunktion definiert. Um das Wachsen bzw. Fallen eines Lévy-Prozesses zu charakterisieren, werden in Abschnitt 3.6 die Begriffe der Lokalzeit und der Leiterzeit vorgestellt, die durch das Kurzzeitverhalten des Prozesses beeinflusst werden. Dabei wird in Abschnitt 3.6.3 speziell auf spektral einseitige Lévy-Prozesse eingegangen. Als wesentliches Ergebnis der Fluktuationstheorie beschließt die Wiener-Hopf Faktorisierung in Abschnitt 3.6.4 die Zusammenfassung der Lévy-Theorie.

3.1 Die Markov-Eigenschaft der Lévy-Prozesse

Um die Markov-Eigenschaft beschreiben zu können, müssen zuerst einige Begriffe definiert werden.

Definition 3.1.1 *(Filtration)*
Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω. Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$ heißt Filtration*, wenn*

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \text{ für } s \leq t.$$

Ein Wraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, den man mit einer Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *versieht, heißt* filtrierter Wraum.
Ein stochastischer Prozess X *auf* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *heißt* adaptiert *bzgl.* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, wenn* X_t $\mathcal{F}_t$*-messbar ist für alle* $t \geq 0$*.*
Eine σ*-Algebra heißt* $\mathbb{P}$-vollständig*, wenn sie alle* $\mathbb{P}$*-Nullmegen enthält.*
Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *heißt* vollständig*, wenn*

- $\mathcal{F}_t$ *eine* $\mathbb{P}$*-vollständige* σ*-Algebra ist für alle* $t \geq 0$*,*
- $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$ *die* $\mathbb{P}$*-Vervollständigung von* $\mathcal{F}$ *ist.*

Sei X *ein stochastischer Prozess auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, dann heißt für* $t \geq 0$ *die von* $(X_s)_{s\leq t}$ *erzeugte* σ*-Algebra*

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$$

natürliche *oder* kanonische Filtration.

Bemerkung 3.1.2

- Jede Filtration kann man vervollständigen.
- $\mathcal{F}_t^X$ ist die kleinste σ-Algebra, bzgl. der X_s für alle $0 \leq s \leq t$ messbar ist.
- Für einen Lévy-Prozess X ist die Filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ rechtsstetig, d.h.

  $$\mathcal{F}_t^X = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^X, \ \forall t \geq 0,$$

  siehe Bertoin [6], S.18, Proposition I.4.

Im Folgenden bezeichnet $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *die* $\mathbb{P}$*-vollständige, kanonische Filtration.*

Definition 3.1.3 *(Stoppzeit)*
Eine ZV $T : \Omega \to [0, \infty]$ *heißt* Stoppzeit *bzgl. einer Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*, wenn für alle* $t \geq 0$ *das Ereignis* $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *ist.*

Definition 3.1.4 *(Eintrittszeit, Eintreffzeit, Überschreitungszeit)*
Sei X *ein stochastischer Prozess mit Werten in* $\mathbb{R}$*. Für* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *heißt*

$$T_A := \inf\{t \geq 0 : \ X_t \in A\}$$

die Eintrittszeit *von* X *in* A *und*

$$T'_A := \inf\{t > 0 : \ X_t \in A\}$$

die Eintreffzeit *von* X *in* A*.*
Für $x \geq 0$ *heißt*

$$T(x) := \inf\{t \geq 0 : X_t > x\} = T_{(x,\infty)}$$

die Überschreitungszeit *von* X *über die Schranke* x*.*

T_A und T'_A sind Stoppzeiten, siehe Applebaum [1], S.79.

Theorem 3.1.5 *(Starke Markov-Eigenschaft: Bertoin [6], Proposition I.6)*
Wenn X ein Lévy-Prozess ist und T eine Stoppzeit, dann gilt bedingt auf $\{T < \infty\}$:

(a) $X^{(T)} := (X_{T+t} - X_T)_{t\geq 0}$ ist ein Lévy-Prozess und unabhängig von $\mathcal{F}_T$.

(b) Für alle $t \geq 0$ hat die ZV $X_t^{(T)}$ die gleiche Verteilung wie die ZV X_t.

(c) $X^{(T)}$ hat càdlàg Pfade und ist $(\mathcal{F}_{T+t})_{t\geq 0}$-adaptiert.

Diese Eigenschaft wird oft als Gedächtnislosigkeit (No-memory-property) bezeichnet und bedeutet, dass sich ein Lévy-Prozess X nach einer Stoppzeit unabhängig von seiner Vergangenheit wiederholt, was ein Ergebnis seiner unabhängigen und stationären Zuwächse ist.

3.2 Spezielle Maße für Lévy-Prozesse

Definition 3.2.1 *(q-Potentialmaße: Sato [30], Definition 30.9, Bertoin [6], S.23, S.31)*
*Sei X ein Lévy-Prozess und $q \geq 0$. Das q-*Potentialmaß *U^q ist definiert als*

$$U^q(A) := \int_0^\infty e^{-qt}\ \mathbb{P}(X_t \in A)\ dt = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-qt} 1_{\{X_t \in A\}}\ dt\right],\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Das 0-Potentialmaß $U := U^0$ wird als Potentialmaß *bezeichnet und kann unendlich sein. Dabei heißt $\int_0^\infty 1_{\{X_t \in B\}}\ dt$* Verweilzeit *oder* sojourn time*. Desweiteren definiert man die q-*PotentialVF *V^q als*

$$V^q(x) := U^q((-\infty, x]) = \int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{P}(X_t \leq x)\ dt = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-qt} 1_{\{X_t \leq x\}}\ dt\right],$$

wobei $qV^q(\mathbb{R}) = 1$ gilt, wenn U^q ein endliches Maß ist.

Das q-Potentialmaß eines Lévy-Prozesses X ist die Laplace-Transformierte seiner eindimensionalen VFen $\mu_{X_t}(\cdot) = \mu^t_{X_1}(\cdot)$ bzgl. t. Für $q > 0$ schreibt man oft $V^q(dy),\ y \geq 0$, statt $U^q(dy),\ y \geq 0$.

Definition 3.2.2 *(Gekillter Lévy-Prozess, gestörter Lévy-Prozess)*
Sei X ein Lévy-Prozess und e_q eine unabhängige exponential verteilte ZV mit Parameter $q > 0$. Der Prozess $X^{(q)}$, definiert durch

$$X^{(q)} := \begin{cases} X_t & \text{, wenn } t \in [0, e_q), \\ \infty & \text{, wenn } t \in [e_q, \infty) \end{cases},$$

nimmt Werte in $[0, \infty]$ an und heißt mit Rate q gekillter Lévy-Prozess.
Ein Lévy-Prozess X heißt gestört*, wenn es eine unabhängige exponential verteilte ZV e_q mit Parameter $q > 0$ gibt, so dass gilt:*

$$X_t = X_{e_q},\ \forall t \geq e_q \text{ fast sicher.}$$

Ansonsten heißt X ungestört.

Bemerkung 3.2.3

- Für $q > 0$ hat das q-Potentialmaß U^q die Gesamtmasse $1/q$ und daher ist qU^q ein Wmaß.
- Sei X ein Lévy-Prozess und $e_q \sim \text{expo}(q)$ eine unabhängige ZV mit Parameter $q > 0$. Dann ist qU^q das Wmaß von X_{e_q}, siehe Bertoin [6], S.22.
- Es gilt: $\int_0^s 1_{\{X_t \in A\}} dt = 0, \ \forall s \leq T_A$. Wenn A offen oder abgeschlossen ist, dann gilt:

$$U(A) = \mathbb{E}\left[\int_{T_A}^{\infty} 1_{\{X_t \in A\}} \, dt\right],$$

  siehe Bertoin [6], S.31.
- Wenn ein q-Potentialmaß U^q absolut stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes ist, dann sind alle $U^q, \ q > 0$, absolut stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes, siehe Bertoin [6], Proposition I.10, und mit der Dichte $U^{q'}$ gilt: $U^q(dy) = U^{q'}(y) \, dy$.

3.3 Rekurrenz, Transienz und Regularität der 0

Definition 3.3.1 *(Rekurrenz, Transienz: Applebaum [1], S.64)*
Ein Lévy-Prozess X ist rekurrent*, wenn* $\liminf_{t\to\infty} |X_t| = 0$ *fast sicher gilt.*
Ein Lévy-Prozess X ist transient*, wenn* $\lim_{t\to\infty} |X_t| = \infty$ *fast sicher gilt.*

Ein Lévy-Prozess ist entweder rekurrent oder transient.

Bemerkung 3.3.2
Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ist rekurrent bei $x \in \mathbb{R}$, wenn jede Nachbarschaft von x unendlich oft besucht wird, und transient, wenn X nur endlich viele Besuche macht. Wenn X ein Lévy-Prozess ist, dann ist er rekurrent (transient) bei $x \in \mathbb{R}$, wenn er in jedem $x \in \mathbb{R}$ rekurrent (transient) ist. Daher betrachtet man nur die Rekurrenz bzw. Transienz bzgl. des Ursprungs.

Proposition 3.3.3 *(Bertoin [6], S.32, Theorem I.19, S.33)*

(a) Wenn ein Lévy-Prozess X transient ist, dann ist sein Potentialmaß U ein Radon-Maß, d.h. $U(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(b) Sei $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Dann ist X genau dann rekurrent, wenn $\mathbb{E}[X_1] = 0$ ist.

Neben dem Langzeitverhalten ist für einen Lévy-Prozess auch sein Verhalten zu beliebig kleinen Zeitpunkten ein entscheidendes Kriterium, was mit Hilfe der *Regularität der 0* charakterisiert wird.

Definition 3.3.4 *(Regularität der 0: Bertoin [6], S.104, Kyprianou [27], S. 139)*
Für einen Markov-Prozess X mit $X_0 = 0$ heißt der Punkt 0 regulär *(bzw.* irregulär*) für eine offene oder abgeschlossene Menge A, wenn*

$$\mathbb{P}(T'_A = 0) = 1 \ (\textit{bzw. } 0) \ \textit{ist.}$$

Wenn 0 regulär für $\{0\}$ ist, dann heißt der Punkt 0 Haltepunkt *(bzw.* unmittelbarer Punkt*), wenn 0 irregulär (bzw. regulär) für $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist.*

Nach Blumenthals $0-1$-Gesetz ist der Punkt 0 entweder regulär oder irregulär. Wenn der Punkt 0 regulär für eine Menge A ist, dann bedeutet das anschaulich, dass X fast sicher nach beliebig kurzer Zeit vom Startpunkt 0 in die Menge A eintrifft. Wenn 0 insbesondere ein Haltepunkt ist, dann kehrt X zwar fast sicher nach beliebig kurzer Zeit zu 0 zurück, aber vom Startpunkt 0 erreicht X fast sicher nicht in beliebig kurzer Zeit $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wenn 0 hingegen ein unmittelbarer Punkt ist, dann erreicht X fast sicher in beliebig kurzer Zeit sowohl $\{0\}$ als auch $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wenn der Punkt 0 für eine Menge A irregulär ist, dann bedeutet das, dass X fast sicher eine echt positive Zeit braucht, um vom Startpunkt 0 in die Menge A einzutreffen.

3.4 Potentialtheorie für Lévy-Prozesse

3.4.1 Dualität und Zeitumkehr

Definition 3.4.1 *(Dualer Prozess: Bertoin [6], S.43)*
Sei X ein Lévy-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $\hat{X} := -X$ heißt zu X dualer Prozess *und ist auch ein Lévy-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. X heißt* symmetrisch*, wenn $X_t \stackrel{d}{=} \hat{X}_t, \ \forall t \geq 0$.*

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{P}_x$ die Verteilung von $X + x$ unter $\mathbb{P}$ für $x \in \mathbb{R}$, d.h. $\mathbb{P}_x(X_t \in dy) = \mathbb{P}(X_t + x \in dy), \ t \geq 0$, und $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}$, und $\mathbb{E}_x[\cdot]$ ist der Erwartungswert bzgl. $\mathbb{P}_x$. Mit dem Präfix "Co-" oder dem Zeichen "$\hat{}$" werden die Begriffe versehen, die sich auf $\hat{X}$ beziehen. $\hat{\mathbb{P}}$ ist die VF von $\hat{X}$, d.h. $\hat{\mathbb{P}}(X_t \in dy) = \mathbb{P}(\hat{X}_t \in dy), \ t \geq 0$ und $\hat{\mathbb{E}}$ bezeichnet den Erwartungswert von X bzgl. $\hat{\mathbb{P}}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbb{P}}_x\left(X_t \in dy\right) &= \hat{\mathbb{P}}\left(X_t + x \in dy\right) = \mathbb{P}(\hat{X}_t - x \in dx) \\
&= \mathbb{P}_{-x}\left(\hat{X} \in dy\right), \ y \in \mathbb{R}, \ t \geq 0, && (3.1)\\
\mathbb{E}_{-x}\left[f\left(\hat{X}_t\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \ \mathbb{P}\left(\hat{X}_t - x \in dy\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y+x) \ \mathbb{P}\left(\hat{X}_t \in dy\right) = \mathbb{E}[\hat{X}_t + x] && (3.2)\\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \ \hat{\mathbb{P}}\left(X_t + x \in dy\right) \\
&= \hat{\mathbb{E}}_x\left[f\left(X_t\right)\right], \ t \geq 0, && (3.3)
\end{aligned}$$

wobei f eine messbare Funktion ist. $(\hat{U}^q)_{q\geq 0}$ ist die Familie der q-Potentialmaße von $\hat{X}$, d.h.

$$\hat{U}^q(A) = \int_0^\infty e^{-qt} \ \mathbb{P}\left(\hat{X}_t \in A\right) \ dt = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-qt} 1_{\left\{\hat{X}_t \in A\right\}} \ dt\right], \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \qquad (3.4)$$

Für die charakteristischen Exponenten $\hat{\Psi}$ von $\hat{X}$ und Ψ von X gilt:

$$\hat{\Psi}(u) = \overline{\Psi(u)} = \Psi(-u), \ u \in \mathbb{R}.$$

Wenn X symmetrisch ist, dann ist Ψ reellwertig.
Im Folgenden gilt die Konvention $\lim_{t\uparrow 0} X_t = X_{0^-} := X_0$.

Lemma 3.4.2 *(Dualitätslemma: Bertoin [6], Lemma II.2)*
Für jedes feste $t > 0$ haben der revertierte Prozess $(X_{(t-s)^-} - X_t)_{0\leq s\leq t}$ und der duale Prozess $(\hat{X}_s)_{0\leq s\leq t}$ die gleiche Verteilung.

Bemerkung 3.4.3
Die Beziehung der Dualität gilt auch für Lévy-Prozesse und ihre dualen Prozesse, die beim ersten Eintritt in eine offene oder abgeschlossene Menge A gekillt werden, siehe Bertoin [6], Proposition II.4.

3.4.2 Kapazität

Definition 3.4.4 *(q-Kapazität: Bertoin [6], S.53)*
A sei entweder eine offene oder eine abgeschlossene Menge. Für $q > 0$ ist die q-Kapazität *von A definiert als*

$$C^q(A) := q \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_x \left[e^{-qT_A} \right] \ dx.$$

Wenn X transient ist und A eine kompakte Menge, dann definiert man die 0-Kapazität *von A als*

$$C(A) := C^0(A) = \lim_{q\downarrow 0} C^q(A).$$

Man kann in dieser Definition T_A durch T'_A austauschen, siehe Bertoin [6], S.49.

Definition 3.4.5 *(Polare und essentiell polare Mengen: Bertoin [6], S.53)*
Eine abgeschlossene Menge A heißt polar*, wenn*

$$\mathbb{P}_x(X_t \in A \textit{ für ein } t > 0) = 0, \ \textit{für alle } x \in \mathbb{R},$$

und essentiell polar*, wenn*

$$\mathbb{P}_x(X_t \in A \textit{ für ein } t > 0) = 0 \textit{ für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 3.4.6
Essentiell polare Mengen sind genau dann gleich polaren Mengen, wenn ein q-Potentialmaß U^q absolut stetig ist, siehe Bertoin [6], S.53.

Proposition 3.4.7 *(Bertoin [6], Proposition II.10)*
Sei X ein transienter Lévy-Prozess und die Menge A entweder offen oder abgeschlossen. A ist genau dann essentiell polar, wenn $C^q(A) = 0$ für ein $q \geq 0$ (und damit für alle $q \geq 0$) gilt.

Wenn X transient ist und die Menge A die q-Kapazität $C^q(A) = 0$ hat, dann erreicht X für fast alle Startpunkt $x \in \mathbb{R}$ die Menge A fast sicher nie.
Für $A = \{0\}$ bezeichnet im Folgenden $C^q := C^q(\{0\})$ die q-Kapazität für alle $q > 0$ ($q \geq 0$ im transienten Fall).

Theorem 3.4.8 *(Bertoin [6], Theorem II.16, Korollar II.17, Korollar II.18)*
Wenn X ein Lévy-Prozess ist, dann sind für $q > 0$ ($q \geq 0$ im transienten Fall) folgende Aussagen äquivalent:

(a) Einzelne Punkte sind nicht essentiell polar, d.h. $C^q > 0$.

(b) Das q-Potentialmaß $V^q(dx)$ ist absolut stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes und hat beschränkte Dichte $V^{q'}$.

Wenn eine dieser Aussagen gilt, dann gilt für die Eintreffzeit $T' := T_{\{0\}}$ und die q-Potentialmaßdichte $V^{q'}$:

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-qT'}\right] = C^q V^{q'}(-x),\ \forall q > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Im transienten Fall gilt:

$$\mathbb{P}_x(T' < \infty) = CV'(-x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

3.5 Subordinatoren

3.5.1 Definition eines Subordinators

Subordinatoren bilden eine wichtige Teilklasse der Lévy-Prozesse, die ein Analogon zu den Irrfahrten auf $[0, \infty)$ darstellen.

Definition 3.5.1 *(Subordinator: Bertoin [6], S.71)*
Ein Subordinator $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ist ein Lévy-Prozess, der fast sicher nicht fällt, d.h.

$$X_{t_1} \leq X_{t_2} \text{ fast sicher, wenn } t_1 \leq t_2.$$

Im Folgenden wird der triviale Prozess $X \equiv 0$ ausgeschlossen.

Definition 3.5.2 *(Laplace-Exponent: Bertoin [6], S.72)*
Sei X ein Subordinator auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Die eindeutige konkave Funktion $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit der Eigenschaft:

$$\mathbb{E}\left[e^{-uX_t}\right] = e^{-t\Phi(u)},\ u \geq 0,$$

heißt der Laplace-Exponent *oder der* Kumulant *von X.*

Der Laplace-Exponent ist wohldefiniert, da für einen Subordinator X mit $X_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{E}\left[e^{-uX_t}\right] < \infty,\ \forall u \geq 0,\ \forall t \geq 0.$$

Bemerkung 3.5.3 (Bertoin [6], S.73, Applebaum [1], S.50)

- Wenn man bei einem Lévy-Prozess Y mit einem unabhängigen Subordinator X einen Zeitwechsel macht, dann ist $Z := Y \circ X$ ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Exponenten $\Psi_Z = -\Phi_X \circ \Psi_Y$, siehe Applebaum [1], Theorem 1.3.25 und Proposition 1.3.27. Diese Transformation wurde von Bochner eingeführt und als Subordination bezeichnet.

- Ein Lévy-Prozess X ist genau dann ein Subordinator, wenn $\sigma^2 = 0, \Pi_X((-\infty, 0)) = 0$ und $D_X \geq 0$ ist, siehe Sato [30], Theorem 21.5. Mit diesen Eigenschaften erfüllt ein Subordinator die Zusatzbedingung:

$$\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x)\ \Pi_X(dx) < \infty$$

  und hat beschränkte Variation. Der charakteristische Exponent hat in diesem Fall die Gestalt:

$$\Psi_X(u) = -iD_X u + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{iux})\ \Pi_X(dx),\ u \in \mathbb{R}$$

  Umgekehrt ist jede Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ mit der oberen Form der Lévy-Exponent eines Subordinators, siehe Applebaum [1], Theorem 1.3.1, und (D_X, Π_X) heißen die *Charakteristiken* des Subordinators.

- Da für einen Subordinator X gilt: $\mathbb{E}\left[e^{-uX_1}\right] < \infty,\ \forall u \geq 0$, kann man die charakteristische Funktion $\phi_X(u)$ bzw. den charakteristischen Exponenten $\Psi_X(u)$ analytisch auf der komplexen oberen Halbebene $\{\Im(u) \geq 0\}$ durch

$$\phi_{X_t}(iu) := \mathbb{E}\left[e^{-uX_t}\right] \text{ und } \Psi_X(iu) := \Phi(u) = -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{-uX_1}\right]\right\},\ \Re(u) \geq 0, \quad (3.7)$$

  fortsetzen. Mit Theorem 2.2.4 folgt die Lévy-Khintchine Formel für Subordinatoren:

$$\Phi_X(u) = \Psi_X(iu) = D_X u + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-ux})\ \Pi_X(dx),\ u > 0. \quad (3.8)$$

- Für einen Subordinator gilt: $\lim_{t\to\infty} X_t = \infty$ fast sicher, d.h. ein Subordinator ist ein transienter Lévy-Prozess, siehe Definition 3.3.1.

3.5.2 Die Erneuerungsfunktion

Aus Proposition 3.3.3(a) folgt, dass das Potentialmaß U von Subordinatoren ein Radon-Maß ist. Deshalb ist $U([0, x]) < \infty,\ \forall x \geq 0$, und die PotentialVF V ist endlich.

Definition 3.5.4 *(Erneuerungsfunktion: Bertoin [6], S.74, 171)*
Sei X ein gestörter oder ungestörter Subordinator. Das Potentialmaß

$$U(A) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in A)\ dt = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{X_t \in A\}}\ dt\right]\ ,\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

heißt Erneuerungsmaß *oder* Greensche Funktion *von X. Die PotentialVF V von U ist gegeben durch*

$$V(x) := U((-\infty, x]) = U([0,x]) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \leq x)\ dt = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{X_t \leq x\}}\ dt\right],\ x \geq 0,$$

und heißt Erneuerungsfunktion *des Subordinators X.*

Statt $U(dy),\ y \geq 0$, schreibt man oft $V(dy),\ y \geq 0$. Falls $V(dy)$ absolut stetig mit Dichte $V'(y)$ ist, dann gilt: $V(dy) = V'(y)\ dy$.

Proposition 3.5.5 *(Eigenschaften der Erneuerungsfunktion: Bertoin [6], S.74, S.171) Sei X ein Subordinator mit Erneuerungsfunktion V_X, Laplace-Exponent Φ_X und Überschreitungszeit T.*

(a) Wenn $V_X(0) = 0$ ist, dann gilt für die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_{V_X}$ bzw. die MEF M_{V_X} von V_X:

$$\mathcal{L}_{V_X}(u) = M_{V_X}(-u) = \frac{1}{\Phi_X(u)},\ u \geq 0.$$

(b) Es gilt: $V_X(u) = \mathbb{E}[T(u)],\ u \geq 0$.

(c) Wenn X ungestört ist und $q > 0$, dann gilt für den mit Rate q gekillten Subordinator $X^{(q)}$:

$$V_{X^{(q)}}(u) = V_X^q(u) \text{ und } \Phi_{X^{(q)}} = \Phi_X + q.$$

(d) Zwischen Φ_X und V_X bzw. Π_X besteht folgende asymptotische Beziehung:

$$V_X(u) \asymp \frac{1}{\Phi_X(1/u)} \quad \text{und} \quad \frac{\Phi_X(u)}{x} \asymp \int_0^{1/u} \overline{\Pi_X}(t)\ dt + D_X.$$

Beweis:
(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{V_X}(u) &\overset{\text{Def 2.1.7}}{=} \int_0^\infty e^{-uy}\ V_X(dy) = \left[e^{-uy}V_X(y)\right]_0^\infty + u\int_0^\infty e^{-uy}V_X(y)\ dy \\
&\overset{\text{Def 3.5.4}}{=} u\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{X_s \leq y\}}\ ds\right] e^{-uy}\ dy \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty u\int_0^\infty 1_{\{X_s \leq u\}} e^{-uy}\ dy\ ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty u\int_{X_s}^\infty e^{-uy}\ dy\ ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-uX_s}\ ds\right] \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \mathbb{E}\left[e^{-uX_s}\right]\ ds = \int_0^\infty e^{-s\Phi_X(u)}\ ds = \frac{1}{\Phi_X(u)},\ u \geq 0.
\end{aligned}$$

Dabei kann man den Satz von Fubini anwenden, weil $X_s \geq 0$ für $s \geq 0$ gilt.
(b)

$$\begin{aligned} V_X(u) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \leq u)\ dt \overset{\text{Def 3.1.4}}{=} \int_0^\infty \mathbb{P}(T(u) > t)\ dt \\ &= \int_0^\infty \overline{\mathbb{P}(T(u) \leq t)}\ dt = \mathbb{E}[T(u)]. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} V_{X^{(q)}}(u) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t^{(q)} \leq u)\ dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \leq u, t < e_q)\ dt \\ &= \int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{P}(X_t \leq u)\ dt = V_X^q(u), \end{aligned}$$

wobei e_q eine von X unabhängige exponential verteilte ZV mit Parameter $q > 0$ ist. Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} e^{-t\Phi_{X^{(q)}}(u)} &= \mathbb{E}\left[e^{-uX_t^{(q)}}\right] = \int_0^\infty e^{-ux}\ \mathbb{P}(X_t^{(q)} \in dx) \\ &= \int_0^\infty e^{-ux}e^{-qt}\ \mathbb{P}(X_t \in dx) = e^{-t(\Phi_X(u)+q)}. \end{aligned}$$

□

Beispiele 3.5.6

(a) **Lineare Funktionen:**
Sei $a > 0$. Die Erneuerungsfunktion von $X_t := at,\ \forall t \geq 0$ ist

$$V(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(at \leq x)\ dt = \frac{x}{a},\ x \geq 0,$$

und das Erneuerungsmaß ist $V(dx) = \frac{1}{a}dx$ für $x \geq 0$.

(b) **Poisson-Prozess:**
Sei X ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, siehe Abschnitt 2.3.3(c). Die Erneuerungsfunktion ist

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^\infty \underbrace{\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}}_{\mathbb{P}(X_t \leq \lfloor x \rfloor)}\ dt = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k}{k!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^k\ dt \\ &\overset{[9],S.65}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\lambda^{k+1}} \overset{[9],S.65}{=} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k}{k!}\frac{k!}{\lambda^{k+1}} \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\lambda},\ x \geq 0, \end{aligned}$$

und das Erneuerungsmaß ist

$$V(dx) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in dx)\ dt = \frac{1}{\lambda}dx,\ x \in \mathbb{N}_0.$$

(c) **Irrfahrt auf $[0,\infty)$:**
Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\sum_{i=1}^n Y_i)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf $[0,\infty)$ mit $\mathbb{P}(Y_0 = 0) = 1$ und VF F von Y_1. Die Erneuerungsfunktion ist

$$V(x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(S_t \le x)\ dt = \sum_{n=0}^\infty F^{n*}(x),\ x \ge 0,$$

wobei nach Definition 2.1.1 $F^{0*} = 1_{[0,\infty)}$ ist.

(d) **Spektral positiver zusammengesetzter Poisson-Prozess:**
Sei X ein spektral positiver zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ und Lévy-Maß λF, siehe Abschnitt 2.3.3(d). Die Erneuerungsfunktion ist

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \le x)\ dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x)\ dt \\ &\overset{(\star)}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} F^{n*}(x)\lambda^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n\ dt \\ &\overset{[9],S.65}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} F^{n*}(x)\lambda^n \frac{n!}{\lambda^{n+1}} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^\infty F^{n*}(x),\ x \ge 0, \end{aligned}$$

wobei $(\star)$ mit dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt. Das Erneuerungsmaß ist

$$V(dx) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^\infty F^{n*}(dx),\ x \ge 0.$$

3.6 Fluktuationstheorie für Lévy-Prozesse

3.6.1 Lokalzeit

Für einen Lévy-Prozess X sind die relativen Maxima bzw. Minima und die Struktur ihrer zeitlichen Abstände gute Kriterien, um das Wachsen und Abfallen von X zu untersuchen. Dazu definiert man den *Supremumsprozess* $\overline{X}$ und den *Infimumsprozess* $\underline{X}$ von X als

$$\overline{X} = (\overline{X}_t)_{t\ge 0} := \left(\sup_{s\in[0,t]} X_s\right)_{t\ge 0} \text{ und } \underline{X} = (\underline{X}_t)_{t\ge 0} := \left(\inf_{s\in[0,t]} X_s\right)_{t\ge 0}.$$

Desweiteren ist $\overline{X} - X$ der *am Supremum reflektierte* Prozess und der dazu duale Prozess $X - \underline{X}$ ist der *am Infimum reflektierte* Prozess, siehe Bertoin [6], S.156. Da die Zeitpunkte relativer Maxima von X die Zeitpunkte sind, zu denen $\overline{X} - X$ zum Punkt 0 zurückkehrt, verwendet man zur Beschreibung der zeitlichen Abstände der relativen Maxima einen Prozess $(L_t)_{t\ge 0}$, der wächst, wenn $\overline{X}_t - X_t = 0$ gilt, und konstant bleibt, wenn $\overline{X}_t - X_t \ne 0$ gilt.

Definition 3.6.1 *(Lokalzeit: Kyprianou [27], Definition 6.1)*
Sei X ein Lévy-Prozess. Ein rechtsstetiger, nicht fallender, $[0,\infty)$-wertiger und $\mathcal{F}$-adaptierter Prozess $L = (L_t)_{t\geq 0}$ heißt Lokalzeit beim Maximum *oder nur* Lokalzeit*, wenn folgende Eigenschaften gelten:*

(1) Der Prozess L wächst auf einer Teilmenge von $\overline{\{t \geq 0 : \overline{X}_t = X_t\}}$ und ist fast sicher endlich für jedes $t \geq 0$.

(2) Für jede $\mathcal{F}$-Stoppzeit T, für die $\overline{X}_T = X_T$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ gilt, ist der geshiftete Prozess

$$\left(X_{T+t} - X_T, \overline{X}_{T+t} - X_T, L_{T+t} - L_T\right)_{t\geq 0}$$

unabhängig von $\mathcal{F}_T$ auf $\{T < \infty\}$ und hat die gleiche Verteilung wie $(X, \overline{X} - X, L)$ unter $\mathbb{P}$.

Die Lokalzeit beim Maximum des dualen Prozesses $\hat{X}$ heißt die Lokalzeit beim Minimum *und wird mit $\hat{L}$ bezeichnet.*

Für einen Lévy-Prozess X existiert immer eine Lokalzeit beim Maximum L, da X und $\overline{X} - X$ die starke Markov-Eigenschaft haben, siehe Theorem 3.1.5 und Bertoin [6], Proposition VI.1, und der Supremumsprozess $\overline{X}$ stets eine Version von L ist. Wenn für $\overline{X} - X$ der Punkt 0 ein unmittelbarer Punkt ist, siehe Definition 3.3.4, d.h. $\overline{X} - X$ trifft fast sicher in beliebig kurzer Zeit vom Startpunkt 0 in $[0,\infty)$ ein, dann kann man eine Lokalzeit L sogar konstruieren, da $\overline{X} - X$ ein Markov-Prozess ist und die natürliche Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rechtsstetig ist, siehe Bertoin [6], Kapitel IV. Auch die dualen Prozesse $\hat{X}$ und $X - \underline{X}$ haben die starke Markov-Eigenschaft und damit ist $\overline{\hat{X}} = \overline{-X} = -\underline{X}$ immer eine mögliche Lokalzeit beim Minimum. Abhängig vom Kurzzeitverhalten des Markov-Prozesses $\overline{X} - X$, das durch die Regularität des Punktes 0 für $\overline{X} - X$ charakterisiert wird, siehe Abschnitt 3.1, können auch stetige Versionen der Lokalzeit existieren. Dabei gilt die Äquivalenz, dass für den Prozess $\overline{X} - X$ der Punkt 0 genau dann regulär für $\{0\}$ ist, d.h. $\overline{X} - X$ kehrt fast sicher nach beliebig kurzer Zeit zu 0 zurück, wenn für den Prozess X der Punkt 0 regulär für $[0,\infty)$ ist, siehe Kyprianou [27], S.151 und Bertoin [6], S.167. Daher kann man sich auf die Regularität des Prozesses X beschränken und im Folgenden ist mit Regularität immer die Regularität für den Prozess X gemeint. (Bertoins Regularitätsbegriff bezieht sich auf $\overline{X} - X$.)

Theorem 3.6.2 *(Kyprianou [27], Theorem 6.7, Theorem 6.8, Bertoin [6], Korollar IV.6)*
Sei X ein Lévy-Prozess.

(a) Es gibt genau dann eine stetige Version der Lokalzeit L, die bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig ist, wenn 0 regulär für $[0,\infty)$ ist.

(b) Sei 0 regulär für $[0,\infty)$ und L eine stetige Version der Lokalzeit. Die Konstante $D_L \geq 0$, die die Beziehung

$$\int_0^t 1_{\{\overline{X}_s = X_s\}}\, ds = D_L \cdot L_t$$

erfüllt, ist genau dann positiv, wenn X beschränkte Variation hat.

(c) Wenn 0 irregulär für $[0,\infty)$ ist, dann ist

$$L_t = \sum_{i=0}^{n_t} e_1^{(i)}$$

eine Lokalzeit, wobei $\left(e_1^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige und exponential verteilte ZVen mit Parameter 1 sind und der Zählprozess $(n_t)_{t\geq 0}$ definiert ist als

$$n_t := \operatorname{card}\{0 < s \leq t : \overline{X}_s = X_s\},\ t \geq 0.$$

Statt $(e_1^{(i)})_{i\in\mathbb{N}_0}$ kann man in Theorem 3.6.2(c) auch unabhängige, exponential verteilte ZVen $(e_\lambda^{(i)})_{i\in\mathbb{N}_0}$ mit Parameter $\lambda > 0$ verwenden. Wegen $\lambda e_\lambda^{(i)} \stackrel{\mathrm{d}}{=} e_1^{(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}_0$, gilt für $L'_t := \sum_{i=0}^{n_t} e_\lambda^{(i)}$: $\lambda L'_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} L_t$, $\forall t \geq 0$, und damit ist auch L' eine Lokalzeit.
Wenn 0 ein regulärer Punkt für $(0,\infty)$ ist, dann folgt mit $0 \leq T'_{[0,\infty)} \leq T'_{(0,\infty)}$ und der Definition der Regularität 3.3.4, dass 0 regulär für $[0,\infty)$ ist. Das folgende Resultat zeigt, dass die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt und gibt Kriterien für die Regularität der 0 für $(0,\infty)$.

Theorem 3.6.3 *(Rogozins Kriterium: Bertoin [6], Proposition VI.11, Kyprianou [27], Theorem 6.5, Korollar 6.6)*
Sei X ein Lévy-Prozess.

(a) 0 ist genau dann regulär für $(0,\infty)$, wenn gilt:

$$\int_0^1 \frac{\mathbb{P}(X_t \geq 0)}{t}\, dt = \infty. \tag{3.9}$$

(b) (3.9) gilt genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) X hat unbeschränkte Variation.

(ii) X hat beschränkte Variation und Drift $D_X > 0$.

(iii) X hat beschränkte Variation, Drift $D_X = 0$ und es gilt:

$$\int_{(0,1)} \frac{x\ \Pi_X(dx)}{\int_0^x \overline{\Pi}_X^-(y)\ dy} = \infty.$$

(c) Nur für den zusammengesetzten (driftlosen) Poisson-Prozess ist 0 regulär für $[0,\infty)$, aber nicht für $(0,\infty)$.

Da uns je nach Regularität der 0 mehrere mögliche Versionen für die Lokalzeit zur Verfügung stehen, wird im Folgenden festgelegt, welche Version der Lokalzeit in dieser Arbeit je nach Prozesstyp gewählt wird.

Wahl der Lokalzeit in dieser Arbeit (Bertoin [6], S.122, Kyprianou [27], S.144)

(a) Lévy-Prozesse mit beschränkter Variation, für die 0 irregulär für $[0,\infty)$ ist, treffen fast sicher nicht nach beliebig kurzer Zeit in $[0,\infty)$ ein. Neue Maxima können folglich nur durch Sprünge erreicht werden und die Menge der relativen Maxima ist diskret. Nach Theorem 3.6.2 existiert in diesem Fall keine stetige Version von L und die Lokalzeit dieser Lévy-Prozesse wird durch

$$L_t := \sum_{i=0}^{n_t} e_1^{(i)},\ n_t := \operatorname{card}\{0 < s \leq t : \overline{X}_s = X_s\}, \tag{3.10}$$

definiert. Nach Theorem 3.6.3(b) gehören Lévy-Prozesse mit beschränkter Variation und Drift $D_X < 0$ zu diesem Prozesstyp, die in der klassischen Risikotheorie eine zentrale Rolle spielen.

(b) Für Lévy-Prozesse mit beschränkter Variation, für die 0 regulär für $[0,\infty)$ ist, definieren wir die Lokalzeit L durch ihre stetige Version

$$L_t := \frac{1}{D_L} \cdot \int_0^t 1_{\{\overline{X}_s = X_s\}}\, ds, \tag{3.11}$$

für eine Konstante $D_L > 0$. Nach Theorem 3.6.2(b) ist diese Definition wohldefiniert. Für $D_L = 1$ kann man L als die Zeit interpretieren, die X im Intervall $[0,t]$ beim Maximum verbracht hat. Wenn X zusätzlich spektral negativ und $D_X > 0$ ist, dann ist L bis auf eine multiplikative Konstante gleich $\overline{X}$ und wir verwenden den stetigen Supremumsprozess $\overline{X}$ als Lokalzeit.

(c) Für Lévy-Prozesse mit unbeschränkter Variation ist nach Theorem 3.6.3(b) 0 regulär für $[0,\infty)$. In diesem Fall verwenden wir für L eine stetige Version der Lokalzeit, die nach Theorem 3.6.2 zwar existiert, aber im Allgemeinen nicht explizit angegeben werden kann. Wenn X spektral negativ ist, dann definieren wir die Lokalzeit wiederum durch den stetigen Supremumsprozess $\overline{X}$.

3.6.2 Der Leiterprozess

Mit der jeweils festgelegten Lokalzeit beim Maximum $(L_t)_{t\geq 0}$ bzw. beim Minimum $(\hat{L}_t)_{t\geq 0}$ definiert man nun den aufsteigenden bzw. absteigenden Leiterprozess von X.

Definition 3.6.4 *(Leiterzeit, Leiterhöhe: Bertoin [6], S.157)*
Sei X ein Lévy-Prozess, $L = (L_t)_{t\geq 0}$ die Lokalzeit von X beim Maximum und $\hat{L}$ die Lokalzeit von X beim Minimum. Dann ist die rechtsstetige Inverse $L^{-1} = (L_t^{-1})_{t\geq 0}$ definiert als

$$L_t^{-1} := \begin{cases} \inf\{s \geq 0 : L_s > t\} & \text{, wenn } t < L_\infty, \\ \infty & \text{, sonst,} \end{cases}$$

und heißt der aufsteigende Leiterzeitprozess*, wobei die Konvention* $\inf \emptyset := \infty$ *gilt. Desweiteren definiert man die verallgemeinerte linksstetige Inverse als*

$$L_{t^-}^{-1} := \begin{cases} \inf\{s \geq 0 : L_s \geq t\} = \lim_{s\uparrow t} L_s^{-1} & \text{, wenn } t \leq L_\infty, \\ \infty & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Wenn man mit L^{-1} bei X einen Zeitwechsel macht, dann bezeichnet man mit

$$H_t := \begin{cases} X_{L_t^{-1}} & \text{, wenn } t < L_\infty, \\ \infty & \text{, sonst,} \end{cases}$$

den aufsteigenden Leiterhöhenprozess *und das Paar* (L^{-1}, H) *heißt* bivariater Leiterprozess. *Analog ist die Inverse* $\hat{L}^{-1} = (\hat{L}_t^{-1})_{t\geq 0}$ *definiert als*

$$\hat{L}^{-1} := \begin{cases} \inf\{s \geq 0 : \hat{L}_s > t\} & \text{, wenn } t < \hat{L}_\infty, \\ \infty & \text{, sonst ,} \end{cases}$$

und heißt der absteigende Leiterzeitprozess. *Damit definiert man den Prozess*

$$\hat{H}_t := \begin{cases} X_{\hat{L}_t^{-1}} & \text{, wenn } t < \hat{L}_\infty, \\ -\infty & \text{, sonst,} \end{cases}$$

und $(\hat{H}_t)_{t\geq 0}$ *heißt der* absteigender Leiterhöhenprozess.

Da die Lokalzeit L nur zu Zeitpunkten wächst, in denen X ein neues Maximum erreicht, korrespondiert auf $\{t < L_\infty\}$ die aufsteigende Leiterzeit $(L_t^{-1})_{t\geq 0}$ mit den Zeitpunkten der Realzeit $t \geq 0$, zu denen neue Maxima auftreten. D.h. L_t^{-1} ist für $0 \leq t < L_\infty$ gleich den Zeitpunkten der neuen Maxima, siehe Abbildung 4.3. Wenn 0 ein unmittelbarer Punkt ist, dann gelten folgende Eigenschaften.

Proposition 3.6.5 *(Bertoin [6], Proposition IV.7)*
Wenn der Punkt 0 ein unmittelbarer Punkt ist, dann gilt für $t > 0$ fast sicher:

(a) $L_{L_t}^{-1} = \inf\{s > t : \overline{X}_s = X_s\}$.

(b) $L_{L_t^-}^{-1} = \lim_{s\uparrow L_t} L_s^{-1} = \sup\{s < t : \overline{X}_s = X_s\}$.

Wenn 0 regulär für $[0, \infty)$ ist, dann bedeutet die Indexierung mit $(L_t^{-1})_{t\geq 0}$ anschaulich, dass man aus dem Pfad von $(X_t)_{t\geq 0}$ die Abschnitte herausschneidet, in denen X kein neues Maximum erreicht, und die übrigen Pfade um den Normierungsfaktor der Lokalzeit staucht. Deshalb ist $(H_t)_{t\geq 0}$ auf $\{t < L_\infty\}$ gleich dem Prozess der neuen Maxima von X, der mit der Lokalzeit beim Maximum indiziert ist. Analog entspricht $(\hat{H}_t)_{\geq 0}$ auf $\{t < \hat{L}_\infty\}$ dem Prozess, der neuen Infima von X, der mit der Lokalzeit beim Minimum indiziert wird, und hat negative Werte. Wenn $(\tilde{L}^{-1}, \tilde{H})$ den aufsteigenden Leiterprozess von $\hat{X}$ bezeichnet, dann sind die Leiterzeiten $\hat{L}^{-1}$ und $\tilde{L}^{-1}$ identisch, da nach Definition 3.6.1 $\hat{L}$ gleich $\tilde{L}$ ist. Für den absteigenden Leiterhöhenprozess $(\hat{H}_t)_{t\geq 0}$ von X und den aufsteigenden Leiterhöhenprozess $(\tilde{H}_t)_{t\geq 0}$ von $\hat{X}$ gilt hingegen der Zusammenhang:

$$\tilde{H}_t = \hat{X}_{\tilde{L}_t^{-1}} \stackrel{\mathrm{d}}{=} -X_{\hat{L}_t^{-1}} = -\hat{H}_t, \ \forall t \geq 0. \tag{3.12}$$

Das folgende Theorem fasst Eigenschaften der aufsteigenden Leiterzeit L^{-1} und der Verteilung von $(L_t^{-1}, H_t)_{t\geq 0}$ zusammen.

Theorem 3.6.6 *(Eigenschaften der Leiterzeit L^{-1}: Bertoin [6], Proposition IV.7, Theorem IV.8, Lemma VI.2, Kyprianou [27], Lemma 6.9, Theorem 6.10, Korollar 6.11)*
Sei X ein Lévy-Prozess

(a) Für alle $t \geq 0$ sind L_t^{-1} und L_{t-}^{-1} Stoppzeiten bzgl. der natürlichen Filtration von X.

(b) L^{-1} ist ein Subordinator mit Lévy-Maß Π_L, Driftkoeffizient D_L aus Theorem 3.6.2(b) und mit Rate $\overline{\Pi}_L(\infty)$ gekillt. Der Laplace-Exponent ist

$$\Phi_{L^{-1}}(u) = uD_L + u\int_0^\infty e^{-ur}\overline{\Pi}_L(r)\ dr,\ u > 0.$$

(Das Levy-Maß Π_L ist in Bertoin [6], S.106 definiert.)

(c) Wenn $\overline{X} - X$ rekurrent ist, d.h. $\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} X_t = \infty\right) = 1$, dann ist $\overline{\Pi}_L(\infty) = 0$ und der Leiterprozess (L^{-1}, H) ist ein ungestörter Subordinator.

(d) Wenn $\overline{X} - X$ transient ist, d.h. $\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} X_t < \infty\right) = 1$, dann ist $\overline{\Pi}_L(\infty) > 0$ und es gibt eine exponential verteilte ZV e_q mit Parameter $q > 0$, so dass $L_\infty \overset{d}{=} e_q$ ist. (L^{-1}, H) ist ein mit Rate q gekillter Subordinator und es gibt einen von e_q unabhängigen Subordinator $(\mathcal{L}^{-1}, \mathcal{H})$, für den gilt:

$$\{(L_t^{-1}, H_t) : t < L_\infty\} \overset{d}{=} \{(\mathcal{L}_t^{-1}, \mathcal{H}_t) : t < e_q\} =: (\mathcal{L}^{-1}, \mathcal{H}).$$

Wenn 0 regulär für $[0, \infty)$ ist, dann kann der aufsteigende Leiterhöhenprozess H jedes Maximum von X fast sicher nur einmal annehmen, siehe Kyprianou [27], S.145. Für einen (driftlosen) zusammengesetzten Poisson-Prozess kann H zu unterschiedlichen Leiterzeiten gleich sein, was bedeutet, dass das Lévy-Maß von H ein Atom bei 0 hat, siehe Kyprianou [27] S.150. Genau genommen, widerspricht das zwar der Definition eines Subordinators, aber H ist in diesem Fall ebenfalls ein zusammengesetzter Poisson-Subordinator und trotz des Atoms bei 0 pfadweise wohldefiniert.
Wenn X fast sicher gegen $-\infty$ konvergiert, d.h. $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty)$, dann ist $(L_t^{-1}, H_t)_{t\geq 0}$ nach Theorem 3.6.6 ein gestörter Subordinator und es gilt fast sicher: $L_\infty < \infty$. Wenn $(\mathcal{L}^{-1}, \mathcal{H})$ mit $\mathcal{L}_\infty \overset{\text{f.s.}}{=} \infty$ den ungestörten Subordinator aus Theorem 3.6.6(d) bezeichnet, dann gilt nach Proposition 3.5.5(c) für die Erneuerungsfunktionen:

$$V_H(y) = \int_0^\infty e^{-qt}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \leq y)\ dt = V_{\mathcal{H}}^q(y),\ y \geq 0,$$

und für die Laplace-Exponenten: $\Phi_H(u) = \Phi_{\mathcal{H}}(u) + q,\ u \geq 0$. In diesem Fall ist der aufsteigenden Leiterhöhenprozess $(\tilde{H}_t)_{t\geq 0}$ von $\hat{X}$ ein ungestörter Subordinator und mit (3.12) kann man für den absteigenden Leiterhöhenprozess $\hat{H} = -\tilde{H}$ von X die Erneuerungsfunktion von $\hat{H}$ definieren als

$$V_{\hat{H}}(y) := V_{\tilde{H}}(-y) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\tilde{H}_t \leq -y)\ dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(\hat{H}_t \geq y)\ dt,\ y \leq 0. \tag{3.13}$$

Damit ist $V_{\hat{H}}$ positiv und wächst nicht auf $(-\infty, 0)$. Außerdem ist in diesem Fall fast sicher $\overline{X}_\infty < \infty$ und man kann die Verteilung von $\overline{X}_\infty$ mit Hilfe der Überschreitungszeit T von X und der Erneuerungsfunktion V_H von H angeben.

Proposition 3.6.7 *(Bertoin [6], Proposition VI.17)*
Wenn X gegen $-\infty$ driftet, dann gibt es ein $q > 0$, so dass gilt:

$$\mathbb{P}(\overline{X}_\infty \leq x) = \mathbb{P}(T(x) = \infty) = qV_H(x),\ \forall x \geq 0,$$

oder äquivalent

$$\mathbb{P}(T(x) < \infty) = q\overline{V}_H(x),\ \forall x \geq 0.$$

Beweis:
$\overline{X}_\infty$ ist das letzte Maximum von X und die letzte Leiterhöhe, bevor H gekillt wird. Daher gilt: $(\star)$ $\overline{X}_\infty \overset{\mathrm{d}}{=} H_{L_\infty^-}$. Nach Theorem 3.6.6(d) ist L_∞ exponential verteilt mit Parameter $q > 0$ und es gibt einen ungestörten Subordinator $\mathcal{H}$, der unabhängig von L_∞ ist und für den gilt: $(\star\star)$ $H_t \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{H}_t,\ \forall t < L_\infty$. Daher ist

$$\mathbb{P}(H_t \leq x) = \mathbb{P}(H_t \leq x, t < L_\infty) = \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \leq x)\mathbb{P}(t < L_\infty) = e^{-qt}\mathbb{P}(\mathcal{H}_t \leq x),\ \forall t \geq 0,\ \forall x \geq 0,$$

und, weil $\mathcal{H}$ bei L_∞ fast sicher stetig ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{X}_\infty \leq x) &\overset{(\star)}{=} \mathbb{P}(H_{L_\infty^-} \leq x) \overset{(\star\star)}{=} \mathbb{P}(\mathcal{H}_{L_\infty} \leq x) \\
&= \int_0^\infty qe^{-qt}\mathbb{P}(\mathcal{H}_t \leq x)\ dt = q\int_0^\infty \mathbb{P}(H_t \leq x)\ dt \\
&= qV_H(x).
\end{aligned}$$

Weil der Subordinator H mit Rate q gekillt ist, ist qV_H eine VF, d.h. $qV_H(\infty) = 1$, und mit $q\overline{V}_H(x) := 1 - qV_H(x)$ folgt die äquivalente Aussage. □

Um im Folgenden zu unterscheiden, wie eine Schranke überquert wird, definiert man die Begriffe *Kriechen* und *Springen*.

Definition 3.6.8 *(Kriechen, Springen)*
Sei X ein Lévy-Prozess mit Überschreitungszeit T.
X kriecht aufwärts, *wenn für eine Schranke $u > 0$ (und damit für alle Schranken $u > 0$) gilt:*

$$\mathbb{P}(X_{T(u)} = u, T(u) < \infty) > 0.$$

X kriecht abwärts, *wenn $\hat{X}$ aufwärts kriecht.*
X *springt aufwärts, wenn für eine Schranke $u > 0$ (und damit für alle Schranken $u > 0$) gilt:*

$$\mathbb{P}(X_{T(u)} = u, T(u) < \infty) = 0.$$

X springt abwärts, *wenn $\hat{X}$ aufwärts springt.*

3.6.3 Fluktuationstheorie für spektral einseitige Lévy-Prozesse

Fluktuationstheorie für Subordinatoren

Da Subordinatoren beschränkte Variation und nur positive Sprünge haben, vereinfacht sich die Fluktuationstheorie und die Verteilung eines Sprunges beim Überschreitungszeitpunkt einer festen Schranke kann bestimmt werden.

Proposition 3.6.9 *(Bertoin [6], Proposition III.2, Theorem III.4, Theorem III.5)*
Sei X ein Subordinator mit Lévy-Maß Π_X, Drifkoeffizienten D_X und Erneuerungsfunktion V_X.

(a) Für jedes feste $x \geq 0$ und $0 \leq y \leq x < z$ gilt:

$$\mathbb{P}(X_{T(x)^-} \in dy, X_{T(x)} \in dz) = V_X(dy)\Pi_X(dz - y).$$

(b) Für jedes $x > 0$ gilt: $\mathbb{P}(X_{T(x)^-} < x = X_{T(x)}) = 0$.

(c) Wenn der Driftkoeffizient $D_X = 0$ ist, dann gilt: $\mathbb{P}(X_{T(x)} > x) = 1, \ \forall x > 0$.

(d) Sei $V_X' : (-\infty, \infty) \to [0, \infty)$ die Erneuerungsmaßdichte. Wenn der Driftkoeffizient $D_X > 0$ ist, dann ist V_X' stetig und positiv auf $(0, \infty)$. Es gilt: $V_X'(0+) = 1/D_X$ und $\mathbb{P}(X_{T(x)} = x) = D_X V_X'(x)$.

Beweis:
(a) Sei $x \geq 0$ fest und f und g seien nicht-negative, Borel-messbare Funktionen mit $g(x) = 0$. Weil X ein Subordinator ist, ist der Sprungprozess $(\Delta X_t)_{t\geq 0} = (X_t - X_{t^-})_{t\geq 0}$ ein nicht negativer Poisson-Punkt Prozess mit Intensitiätsmaß Π_X, siehe Abschnitt A.2. Wenn man auf ΔX die Kompensationsformel A.2.2 anwendet, erhält man:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[f(X_{T(x)^-})g(X_{T(x)})\right] \\
&= \quad \mathbb{E}\left[\sum_{0\leq t<\infty} f(X_{t^-})g(X_{t^-} + \Delta X_t)1_{\{X_{t^-}\leq x, \Delta X_t > x - X_{t^-}\}}\right] \\
&\overset{\text{Th } A.2.2}{=} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \int_0^\infty f(X_{t^-})g(X_{t^-} + s)1_{\{X_{t^-}\leq x, s > x - X_{t^-}\}}\ \Pi_X(ds)\ dt\right] \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \quad \int_0^\infty \mathbb{E}\left[f(X_{t^-})1_{\{X_{t^-}\leq x\}}\left(\int_0^\infty g(X_{t^-} + s)1_{\{s > x - X_{t^-}\}}\ \Pi_X(ds)\right)\right]\ dt.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_{0\leq y\leq x<z} f(y)g(z)\mathbb{P}(X_{T(x)^-} \in dy, X_{T(x)} \in dz) \\
&= \quad \mathbb{E}\left[f(X_{T(x)^-})g(X_{T(x)})\right] \\
&= \quad \int_0^\infty \mathbb{E}\left[f(X_{t^-})1_{\{X_{t^-}\leq x\}}\left(\int_0^\infty g(X_{t^-} + s)1_{\{s > x - X_{t^-}\}}\ \Pi_X(ds)\right)\right]\ dt \\
&= \quad \int_0^\infty \int_0^\infty f(y)1_{\{y\leq x\}}\left(\int_0^\infty g(y + s)1_{\{s > x - y\}}\ \Pi_X(ds)\right)\ \mathbb{P}(X_t \in dy)\ dt \\
&= \quad \int_0^x f(y) \int_{x-y}^\infty g(y + s)\ \Pi_X(ds) \int_0^\infty \ \mathbb{P}(X_t \in dy)\ dt \\
&= \quad \int_{0\leq y\leq x<z} f(y)g(z)\ V_X(dy)\ \Pi_X(dz - y),
\end{aligned}$$

was Aussage (a) beweist. □

Dieser Beweis ist von besonderem Interesse, da die Beweisidee in Theorem 5.2.1 und in Theorem 5.2.3 aufgegriffen wird. Proposition 3.6.9(b) besagt, dass ein Subordinator fast sicher nicht auf eine Schranke springt, wenn er sie durch einen Sprung überquert, d.h. bei der Überschreitung einer Schranke durch einen Sprung wird die Schranke nicht angenommen. Wenn $D_X = 0$ gilt, dann nimmt ein Subordinator nach Proposition 3.6.9(c) eine Schranke fast sicher nie bei ihrer Überschreitung an.

Fluktuationstheorie für spektral negative Lévy-Prozesse

Da ein spektral negativer Lévy-Prozess X nur nach unten springen kann, gilt auf $\{T_{(x,\infty)} < \infty\}$ fast sicher: $X_{T_{(x,\infty)}} = x$, d.h. dass jede obere Schranke nur durch Kriechen überquert werden kann. Gemäß Abschnitt 3.6.1 verwenden wir in diesem Fall die stetige Lokalzeit $L_t := \overline{X}_t,\ t \geq 0$, mit der aufsteigenden Leiterzeit

$$L_t^{-1} = \begin{cases} \inf\{s \geq 0 : \overline{X}_s > t\} = \inf\{s \geq 0 : X_s > t\} = T_{(t,\infty)} = T(t) & \text{, wenn } t < L_\infty, \\ \infty & \text{, sonst,} \end{cases}$$

und dem aufsteigenden Leiterhöhenprozess

$$H_t = \begin{cases} X_{L_t^{-1}} = X_{T(t)} = t & \text{, wenn } t < L_\infty = \overline{X}_\infty, \\ \infty & \text{, sonst.} \end{cases} \tag{3.14}$$

Wenn H ein ungestörter Subordinator ist, dann gilt: $H_t = t,\ \forall t \geq 0$, und H hat den Laplace-Exponenten $\Phi_H(u) = u,\ u \geq 0$, und nach Beispiel (a) aus Abschnitt 3.5.2 die Erneuerungsfunktion $V_H(x) = x,\ x \geq 0$. Wenn H mit Rate q gekillt wird, ist der ungestörte Subordinator aus Theorem 3.6.6(d) fast sicher: $\mathcal{H}_t = t,\ \forall t \geq 0$, und nach Proposition 3.5.5(c) gilt: $\Phi_H(u) = q + \Phi_{\mathcal{H}}(u) = q + u,\ u \geq 0$, und $V_H(x) = V_{\mathcal{H}}^q(x) = q^{-1}(1 - e^{-qx}),\ x \geq 0$, siehe Bertoin [6], Theorem VII.1, S.191.
Für einen spektral negativen Lévy-Prozess X gilt:

$$\mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right] < \infty,\ \forall u > 0,$$

siehe Bertoin [6], S.188. Daher kann man die charakteristische Funktion ϕ_X analytisch auf der unteren komplexen Halbebene $\{\Im(u) \leq 0\}$ durch

$$\phi_{X_t}(-iu) := \mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{(\Re(u)+i\Im(u))X_t}\right],\ \Re(u) \geq 0, \tag{3.15}$$

fortsetzen. Damit definiert man durch

$$\Xi_X(u) := -\Psi_X(-iu) = \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right]\right\},\ \Re(u) \geq 0, \tag{3.16}$$

den *Laplace-Exponenten* für den spektral negativen Lévy-Prozess X, siehe Kyprianou [27], S.69. $\Xi_X : [0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ ist unendlich oft differenzierbar, strikt konvex und es gilt: $\Xi_X(0) = 0$ und $\mathbb{E}[X_1] = \Xi_X'(0)$. Die Rechtsinverse von Ξ_X ist definiert als

$$\overleftarrow{\Xi}_X(s) := \sup\{\theta \geq 0 : \Xi_X(\theta) = s\},\ s \geq 0, \tag{3.17}$$

siehe Kyprianou [27], S.71, und hat folgende Eigenschaft.

Theorem 3.6.10 *(Kyprianou [27], Theorem 3.12, Bertoin [6], Theorem VII.1)*
Für einen spektral negativen Lévy-Prozess X mit der Überschreitungszeit T gilt:

$$\mathbb{E}\left[e^{-uT(x)}|T(x)<\infty\right] = e^{-x\overleftarrow{\Xi}_X(u)},\ \forall u \geq 0, x \geq 0.$$

Das Theorem besagt, dass für spektral negative Lévy-Prozesse auf $\{t < L_\infty\}$ der Laplace-Exponent $\Phi_{L^{-1}}$ des Subordinators L^{-1} gleich der Rechtsinversen $\overleftarrow{\Xi}_X$ aus (3.17) ist. Mit den Ergebnissen für H folgt:

$$\mathbb{E}\left[e^{-\alpha L_t^{-1}-\beta H_t}1_{\{t<L_\infty\}}\right] = e^{-\overleftarrow{\Xi}(\alpha)t-\beta t},\ \alpha,\beta \geq 0. \tag{3.18}$$

Der absteigende Leiterhöhenprozess $\hat{H}$ von X ist nach Definition 3.6.4 ein spektral negativer Prozess und hat mit dem aufsteigenden Leiterhöhenprozess $\tilde{H}$ von $\hat{X}$ die Verbindung (3.12). $\tilde{H}$ ist nach Theorem 3.6.6 ein Subordinator und für den Laplace-Exponenten $\Xi_{\hat{H}}$ von $\hat{H}$ und den Laplace-Exponenten $\Phi_{\tilde{H}}$ von $\tilde{H}$ gilt für $u \geq 0$:

$$\Phi_{\tilde{H}}(u) \overset{\text{Def 3.5.2}}{=} -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{-u\tilde{H}_1}\right]\right\} \overset{(3.12)}{=} -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{u\hat{H}_1}\right]\right\} \overset{(3.16)}{=} -\Xi_{\hat{H}}(u). \tag{3.19}$$

3.6.4 Wiener-Hopf Faktorisierung

Die Verteilung des aufsteigenden Leiterprozesses (L^{-1}, H) von X bzw. des aufsteigenden Leiterhöhenprozesses $(\tilde{L}^{-1}, \tilde{H})$ von $\hat{X}$ ist durch den bivariaten Laplace-Exponenten $\kappa(\alpha,\beta)$ bzw. $\tilde{\kappa}(\alpha,\beta)$ charakterisiert, die definiert sind als

$$e^{-\kappa(\alpha,\beta)} := \mathbb{E}\left[e^{-\alpha L_1^{-1}-\beta H_1}1_{\{1<L_\infty\}}\right],\ \alpha,\beta \geq 0, \tag{3.20}$$

$$e^{-\tilde{\kappa}(\alpha,\beta)} := \mathbb{E}\left[e^{-\alpha \tilde{L}_1^{-1}-\beta \tilde{H}_1}1_{\{1<\tilde{L}_\infty\}}\right],\ \alpha,\beta \geq 0, \tag{3.21}$$

siehe Bertoin [6], S.158 und Kyprianou [27], S.154. Dabei kann man κ und $\tilde{\kappa}$ in beiden Variablen analytisch auf die rechte komplexe Halbebene $\{\Re(u) \geq 0\}$ fortsetzten. Für $u \geq 0$ ist $\kappa(-iu,0) = \Psi_{L^{-1}}(u)$ der Lévy-Exponent von L^{-1}, $\kappa(0,-iu) = \Psi_H(u)$ der Lévy-Exponent von H, $\tilde{\kappa}(-iu,0) = \Psi_{\tilde{L}^{-1}}(u)$ der Lévy-Exponent von $\tilde{L}^{-1}$ und $\tilde{\kappa}(0,-iu) = \Psi_{\tilde{H}}(u)$ der Lévy-Exponent von $\tilde{H}$. Desweiteren definieren wir den Zeitpunkt des letzten Maximums bis einschließlich t durch

$$\overline{G}_t := \sup\{s \leq t : X_s = \overline{X}_s \text{ oder } X_{s^-} = \overline{X}_s\}. \tag{3.22}$$

$\overline{G}_s$ ist die letzte Null des reflektierten Prozesses $\overline{X} - X$ vor s und, wenn X kein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, dann ist $\overline{G}_s$ der eindeutige Zeitpunkt $t \in [0,s]$, so dass $X_t = \overline{X}_s$ und $X_{t^-} = \overline{X}_s$ gilt, siehe Abbildung 3.1.

Theorem 3.6.11 *(Bertoin [6], Theorem VI.5, Lemma VI.8, Lemma VI.9, Korollar VI.10)*
Sei $e_q \overset{d}{=} expo(q)$ unabhängig vom Lévy-Prozess X.

(a) Die Paare $(\overline{G}_{e_q}, \overline{X}_{e_q})$ und $(e_q - \overline{G}_{e_q}, \overline{X}_{e_q} - X_{e_q})$ sind unabhängig und unendlich oft teilbar.

(b) *Für alle $\alpha, \beta > 0$ gilt:*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\alpha\overline{G}_{e_q} - \beta\overline{X}_{e_q}\right\}\right] = \exp\left(\int_0^\infty \int_{[0,\infty)} \frac{e^{-\alpha t - \beta x} - 1}{t} e^{-qt}\ \mathbb{P}(X_t \in dx)\ dt\right)$$

und

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\alpha(e_q - \overline{G}_{e_q}) - \beta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})\right\}\right]\\ &\quad = \exp\left(\int_0^\infty \int_{(-\infty,0)} \frac{e^{-\alpha t + \beta x} - 1}{t} e^{-qt}\ \mathbb{P}(X_t \in dx)\ dt\right).\end{aligned}$$

(c) *Es gibt eine Konstante $k > 0$ (abhängig von der Normierung der Lokalzeit L), so dass gilt:*

$$\kappa(\alpha, \beta) = k \exp\left\{\int_0^\infty \int_{[0,\infty)} \frac{e^{-t} - e^{-\alpha t - \beta x}}{t}\ \mathbb{P}(X_t \in dx)\ dt\right\}.$$

Theorem 3.6.12 *(Wiener-Hopf Faktorisierung: Bertoin [6], S.165/166, Sato [30], Theorem 45.2, Theorem 45.7)*
Sei X ein Lévy-Prozess mit charakteristischem Exponenten Ψ_X und e_q eine unabhängige exponential verteilte ZV mit Parameter $q > 0$. κ und $\tilde{\kappa}$ seien die Laplace-Exponenten aus (3.20) und (3.21).

(a) *Es gilt die eindeutige* Wiener-Hopf-Faktorisierung*:*

$$\begin{aligned}\phi_{X_{e_q}}(u) &= \frac{q}{q + \Psi_X(u)} = \phi_{\overline{X}_{e_q}}(u) \cdot \phi_{X_{e_q} - \overline{X}_{e_q}}(u),\ u \in \mathbb{R} \qquad (3.23)\\ &= \phi_q^+(u) \cdot \phi_q^-(u) = \phi_{X_{e_q} - \underline{X}_{e_q}} \cdot \phi_{\underline{X}_{e_q}}(u).\end{aligned}$$

Dabei heißt $\phi_{\overline{X}_{e_q}} = \phi_{X_{e_q} - \underline{X}_{e_q}} = \phi_q^+(u)$ bzw. $\phi_{X_{e_q} - \overline{X}_{e_q}} = \phi_{\underline{X}_{e_q}}(u) = \phi_q^-(u)$ rechter *bzw.* linker Wiener-Hopf Faktor*.*

(b) *Wenn X kein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, dann gibt es eine Konstante $k' > 0$, so dass für $u \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned}k'\Psi_X(u) &= \kappa(0, -iu) \cdot \tilde{\kappa}(0, iu) = \Psi_H(u) \cdot \Psi_{\hat{H}}(u) \qquad (3.24)\\ &\Leftrightarrow\\ -k' \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{iuX_1}\right]\right\} &= \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{iuH_1} 1_{\{1 < L_\infty\}}\right]\right\} \cdot \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{iu\hat{H}_1} 1_{\{1 < \hat{L}_\infty\}}\right]\right\}. \qquad (3.25)\end{aligned}$$

Die Konstante k' hängt von der Normierung der Lokalzeiten L und $\tilde{L}$ ab.

Beweis:
(a) Die charakteristische Funktion von X_{e_q} ist:

$$\begin{aligned}\phi_{X_{e_q}}(u) &= \int_\Omega e^{iuX_{e_q}}\ \mathbb{P}(d\omega) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} e^{iuy}\ \mu_{X_t}(dy)\ \mu_{e_q}(dt)\\ &= \int_0^\infty e^{-t\Psi(u)} q e^{qt}\ dt\\ &= \frac{q}{q + \Psi(u)}.\end{aligned}$$

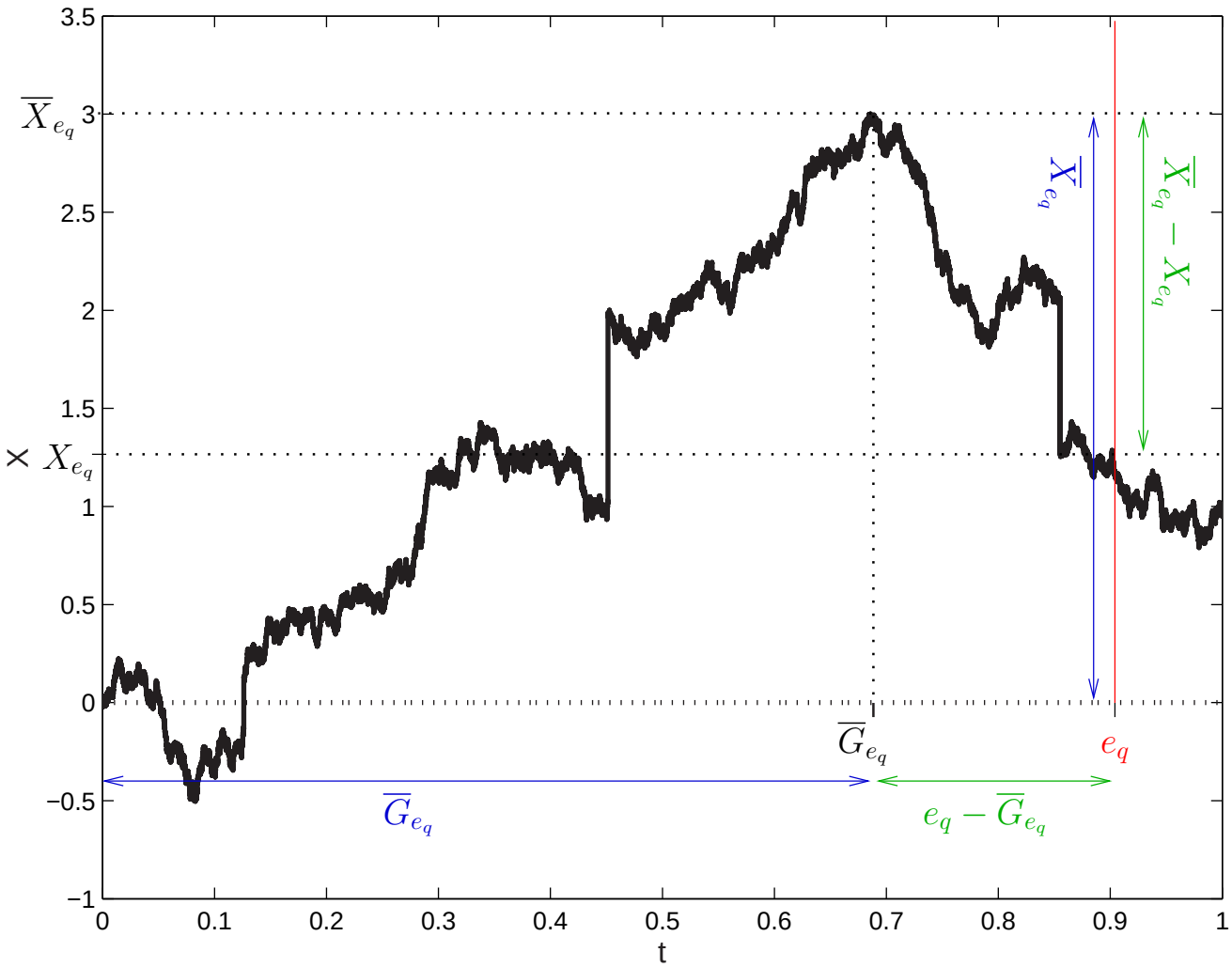

Abbildung 3.1: Wenn e_q eine von X unabhängige exponential verteilte ZV mit Parameter $q > 0$ ist, dann sind nach Theorem 3.6.11(a) $(\overline{X}_{e_q}, \overline{G}_{e_q})$ und $(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q}, e_q - \overline{G}_{e_q})$ voneinander unabhängig und unendlich oft teilbar.

Nach Theorem 3.6.11(a) kann man X_{e_q} in die unabhängigen ZVen $\overline{X}_{e_q}$ und $X_{e_q} - \overline{X}_{e_q}$ zerlegen. Für die charakteristischen Funktionen folgt daher, dass $\phi_{X_{e_q}}$ das Produkt von $\phi_{\overline{X}_{e_q}}$ und $\phi_{X_{e_q}-\overline{X}_{e_q}}$ ist.
(b) L^{-1} hat nach Theorem 3.6.6(b) den Driftkoeffizienten D_L, wobei D_L von der Normierung der Lokalzeit L abhängt. Aus Theorem 3.6.11(c) folgt, dass ein $\tilde{k}$ existiert, so dass gilt:

$$\tilde{\kappa}(\alpha,\beta) = \tilde{k} \exp\left\{ \int_0^\infty \int_{(-\infty,0]} \left(e^{-t} - e^{-\alpha t+\beta x}\right) t^{-1} \, \mathbb{P}(X_t \in dx) \, dt \right\}.$$

Im Speziellen gilt für die Laplace-Exponenten von L^{-1} und $\tilde{L}^{-1}$ für $u > 0$:

$$\Phi_{L^{-1}}(u) = \kappa(u,0) = k \exp\left\{ \int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-ut}\right) t^{-1} \, \mathbb{P}(X_t \geq 0) \, dt \right\}$$

und

$$\Phi_{\tilde{L}^{-1}}(u) = \tilde{\kappa}(u,0) = \tilde{k} \exp\left\{ \int_0^\infty \left(e^{-t} - e^{-ut}\right) t^{-1} \, \mathbb{P}(X_t \leq 0) \, dt \right\}.$$

Mit einer Identität aus dem Beweis von Theorem 3.6.11:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\alpha \overline{G}_{e_q} - \beta \overline{X}_{e_q}\right\}\right] = \frac{\kappa(q,0)}{\kappa(\alpha+q,\beta)}$$

folgt für die charakteristischen Funktionen von $\overline{X}_{e_q}$ und $X_{e_q} - \overline{X}_{e_q}$:

$$\phi_{\overline{X}_{e_q}}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iu\overline{X}_{e_q}}\right] = \frac{\kappa(q,0)}{\kappa(q,-iu)} \text{ und } \phi_{X_{e_q}-\overline{X}_{e_q}}(u) = \frac{\tilde{\kappa}(q,0)}{\tilde{\kappa}(q,iu)}, \; u \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Wenn X kein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist, dann gilt: $\mathbb{P}(X_t = 0) = 0, \forall t \geq 0$, und mit der Frullani Identität, siehe Bertoin [6], S.73, folgt, dass ein $k' > 0$ existiert mit:

$$\kappa(u,0)\tilde{\kappa}(u,0) = k'u, \; u > 0, \tag{3.27}$$

wobei $k' = k \cdot \tilde{k}$ gilt. Damit wird (3.23) mit $q > 0$ zu:

$$\frac{q}{q+\Psi_X(u)} \overset{(3.26)}{=} \frac{\kappa(q,0)}{\kappa(q,-iu)} \cdot \frac{\tilde{\kappa}(q,0)}{\tilde{\kappa}(q,iu)} = \frac{k'q}{\kappa(q,-iu)\cdot\tilde{\kappa}(q,iu)},$$

und mit $q \downarrow 0$ folgt (3.24). Außerdem gilt mit (3.20) und (3.21):

$$\kappa(0,-iu) = -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{iuH_1} 1_{\{1<L_\infty\}}\right]\right\} = \Psi_H(u),$$

und

$$\tilde{\kappa}(0,iu) = -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{-iu\tilde{H}_1} 1_{\{1<\tilde{L}_\infty\}}\right]\right\} = \Psi_{-\tilde{H}}(u) \overset{(3.12)}{=} \Psi_{\hat{H}}(u).$$

□

Wenn X fast sicher gegen $-\infty$ konvergiert, dann ist H ein mit Rate q gekillter Subordinator, $\hat{H}$ ein ungestörter spektral negativer Lévy-Prozess mit beschränkter Variation,

$\tilde{H}$ ein ungestörter Subordinator und $\mathcal{H}$ ist ein ungestörter Subordinator mit $H_t \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{H}_t$ für $t < L_\infty$. Für $u > 0$ gilt:

$$\Psi_H(iu) \overset{(3.7)}{=} \Phi_H(u) \overset{\text{Prop 3.5.5}}{=} \Phi_{\mathcal{H}}(u) + q \overset{(3.8)}{=} uD_{\mathcal{H}} + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-uy})\, \Pi_{\mathcal{H}}(dy) + q, \quad (3.28)$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_{\hat{H}}(-iu) &= -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{u\hat{H}_1}\right]\right\} = -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{-u(-\hat{H}_1)}\right]\right\} \\ &\overset{(3.8)}{=} uD_{-\hat{H}} + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-ux})\, \Pi_{-\hat{H}}(dx) \\ &= uD_{-\hat{H}} + \int_{(-\infty,0)} (1 - e^{uy})\, \Pi_{\hat{H}}(dy). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Desweiteren gilt für $u > 0$:

$$q \overset{\text{Prop 3.5.5}}{=} \Phi_H(u) - \Phi_{\mathcal{H}}(u) \overset{(3.7)}{=} \Psi_H(iu) + \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{-u\mathcal{H}_1}\right]\right\} \overset{(3.24)}{=} k' \cdot \frac{\Psi_X(iu)}{\Psi_{\hat{H}}(iu)} + \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{-u\mathcal{H}_1}\right]\right\}$$

und daraus folgt:

$$q = k' \cdot \lim_{u \downarrow 0} \frac{\Psi_X(iu)}{\Psi_{\hat{H}}(iu)}. \quad (3.30)$$

Abschließend kommt ein Theorem, das Proposition 3.6.9 ergänzt.

Theorem 3.6.13 *(Bertoin [6], Theorem VI.19)*
Sei X ein Lévy-Prozess, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\mathbb{P}(X_{T(x)} = x, T(x) < \infty) > 0$ *für ein (und damit für alle)* $x > 0$.

(b) Der Leiterhöhenprozess H hat einen positiven Driftkoeffizienten D_H.

(c) Das Erneuerungsmaß $V_H(dy)$ ist absolut stetig bzgl. des Lebesgue-Maßes auf $[0, \infty)$ und hat eine beschränkte Dichte V_H'.

Wenn diese Aussagen zutreffen, dann gibt es eine Dichte V_H' des Erneuerungsmaßes $V_H(dy)$, die stetig und positiv auf $(0, \infty)$ ist, und es gilt: $\lim_{x \downarrow 0} V_H'(x) = V_H'(0+) > 0$ *und* $\mathbb{P}(X$ *kriecht über* $x) = V_H'(x)/V_H'(0+),\ \forall x > 0$.

Kapitel 4

Die klassische Versicherungsrisikotheorie

Die Theorie, die in den letzten beiden Kapitel zusammengefasst wurde, wird in diesem Kapitel nun auf die Versicherungsrisikotheorie angewendet. In Abschnitt 4.1 wird zunächst allgemein das Versicherungsrisikomodell beschrieben und in Abschnitt 4.2 auf das klassische Modell der Risikotheorie konkretisiert. Für dieses Modell werden in Abschnitt 4.3.1 explizite Formeln für die Verteilung der Ruinzeit, des Überschusses und weiterer Ruingrößen bewiesen. In Abschnitt 4.3.2 und 4.3.3 werden in Abhängigkeit vom asymptotischen Verhalten der Schadenhöhenverteilung die asymptotische Verteilung der Ruinwahrscheinlichkeit und das asymptotische Verhalten des Risikoprozesses beschrieben. Im Nicht-Cramér Fall werden abschließend auch Ergebnisse für die zeitdiskrete Version des Verlustprozesses X betrachtet.

4.1 Das Versicherungsrisikomodell

Ein Versicherungsunternehmen übernimmt die Risiken seiner Kunden und hat dadurch einerseits Ausgaben für die eingetretenen Schäden und andererseits Prämieneinnahmen. Ein Modell für die zeitliche Entwicklung der daraus resultierenden finanziellen Lage des Versicherungsunternehmens ist der *Risikoreserveprozess*

$$R_t := u + P_t - S_t,\ t \geq 0, \tag{4.1}$$

der von der *Anfangsrisikoreserve* $u \geq 0$, dem *Prämienprozess* $P = (P_t)_{t\geq 0}$ und dem *Gesamtschadenprozess* $S = (S_t)_{t\geq 0}$ abhängt. Im Folgenden wird immer angenommen, dass P und S Lévy-Prozesse sind. Das Verhältnis zwischen Ausgaben und Einnahmen des Versicherungsunternehmens beschreibt der *Verlustprozess*

$$X_t := S_t - P_t,\ t \geq 0, \tag{4.2}$$

wobei $X_t < 0$ Gewinn und $X_t > 0$ Verlust für das Versicherungsunternehmen bedeutet. Ein Verlust, der kleiner als die Anfangsrisikoreserve u ist, schadet zwar dem Versicherungsunternehmen, aber solange $R_t \geq 0$ ist, bleibt das Versicherungsunternehmen liquid. Wenn jedoch ein Verlust die Anfangsrisikoreserve u übersteigt, d.h. $X_t > u$ für ein $t \geq 0$, dann entspricht $R_t < 0$ dem Ruin der Versicherung.

Definition 4.1.1 *(Ruin)*
Für eine Anfangsrisikoreserve u ist die Ruinwahrscheinlichkeit (RuinWS) in endlicher Zeit *(oder* mit endlichem Horizont*) definiert als*

$$\psi(u, t_*) := \mathbb{P}(R_t < 0 \text{ für ein } t \leq t_*),\ 0 < t_* < \infty,\ u \geq 0.$$

Die Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit *(oder* mit unendlichem Horizont*) ist definiert als*

$$\psi(u) := \psi(u, \infty),\ u \geq 0.$$

Die Gegenwahrscheinlichkeit

$$\eta(u) := 1 - \psi(u) = \mathbb{P}(R_t \geq 0,\ \forall t > 0)$$

heißt Überlebenswahrscheinlichkeit (ÜberlebensWS).
Die Ruinzeit *ist definiert als*

$$\tau(u, t_*) := \inf\{t : 0 \leq t \leq t_*, R_t < 0\},\ 0 < t_* \leq \infty,$$

wobei gemäß Konvention $\inf \emptyset := \infty$ *ist. Für die Ruinzeit mit unendlichem Horizont schreibt man* $\tau(u) := \tau(u, \infty)$.

Da X ein Lévy-Prozess ist, ist die Ruinzeit $\tau(u)$ die Überschreitungszeit von X über die Schranke u, siehe Definition 3.1.4. Das Defizit beim Ruin entspricht dabei dem Überschuss $X_{\tau(u)} - u$ von X über die Schranke u und wird daher auch als *Überschuss* bezeichnet.

4.2 Das klassische Versicherungsrisikomodell

Das klassische Versicherungsrisikomodell ist das kollektive Modell von Cramér und Lundberg, das in diesem Abschnitt vorgestellt wird.
Im Cramér-Lundberg Modell sind die *Schäden* $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fast sicher positive iid ZVen mit nicht-gitterartiger VF F, endlichem Erwartungswert $\mathbb{E}[Y_1] = \mu > 0$ und Varianz $\mathrm{Var}[Y_1] = \sigma^2 < \infty$. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $T_0 := 0$ bezeichnen die zufälligen *Schadenzeiten*, wobei die *Zwischenschadenzeiten*

$$W_1 = T_1,\ W_k = T_k - T_{k-1},\ k = 2, 3, \ldots,$$

iid exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ und unabhängig von $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind. Der *Schadenzahlprozess* $N = (N_t)_{t\geq 0}$ ist definiert als der Erneuerungsprozess zu $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$N_t := \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\} = \mathrm{card}\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{T_n \leq t\}},\ t \geq 0,$$

und ist nach Theorem 2.3.5 ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ und unabhängig von $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Damit ist der Gesamtschadenprozess S des zugrunde liegenden Portfolios der spektral positive zusammengesetzte Poisson-Prozess

$$S_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \geq 0, \tag{4.3}$$

mit charakteristischem Tripel $(\int_{(-1,1)} x\lambda\ F(dx), 0, \lambda F)$ und hat die Verteilung

$$G_t(x) = \mathbb{P}(S_t \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^{n*}(x),\ x \geq 0,\ t \geq 0, \tag{4.4}$$

siehe Beispiel 2.3.3(d). Außerdem wird im Folgenden angenommen, dass P mit konstanter Prämienrate $\gamma > 0$ wächst, d.h. $P_t = \gamma t,\ \forall t \geq 0$. Der Risikoreserveprozess $(R_t)_{t\geq 0}$ im Cramér-Lundberg Modell ist daher

$$R_t := u + \gamma t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \geq 0, \tag{4.5}$$

und wird als *klassischer Risikoprozess* oder *Poisson-Modell* bezeichnet, siehe Abbildung 4.1. Der korrespondierende Verlustprozess

$$X_t := \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma t,\ t \geq 0, \tag{4.6}$$

ist ein spektral positiver Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel $(\int_{(-1,1)} x\lambda\ F(dx) - \gamma, 0, \lambda F)$ und hat beschränkte Variation.

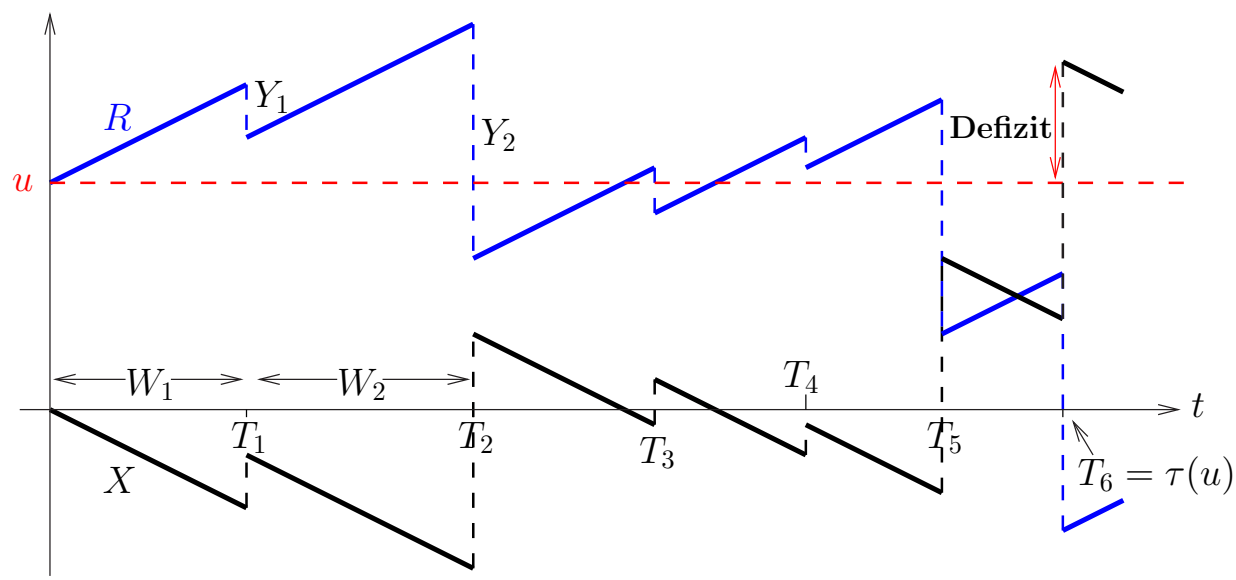

Abbildung 4.1: Klassischer Risikoreserveprozess $R_t = u + \gamma t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \geq 0$, mit Anfangsrisikoreserve u, Prämienrate γ, Schäden $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, Schadenzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, Zwischenschadenzeiten $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$, Schadenzahlprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ und dem dazugehörigen Verlustprozess $X = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma t,\ t \geq 0$.

Mit dem Drift

$$D_X = \int_{(-1,1)} x\lambda\ F(dx) - \gamma - \int_{(-1,1)} x\lambda\ F(dx) = -\gamma < 0$$

folgt aus Theorem 3.6.3(b), dass für X der Punkt 0 irregulär für $[0,\infty)$ ist. Folglich kann ein Ruin nur durch einen Sprung von X über die Schranke u eintreten. Gemäß Abschnitt 3.6.1 ist die Lokalzeit L beim Maximum definiert durch (3.10), d.h.

$$L_t := \sum_{i=0}^{n_t} e_1^{(i)},\ t \geq 0,$$

wobei $n_t := \text{card}\{0 < s \leq t : \overline{X}_s = X_s\}$ die Anzahl der neuen Maxima bis einschließlich des Zeitpunktes t bezeichnet und $(e_1^{(i)})_{i\in\mathbb{N}_0}$ unabhängige exponential verteilte ZVen mit Parameter 1 sind, siehe Abbildung 4.2. Die Menge der relativen Maxima von X ist diskret und die Zeitpunkte der neuen Maxima definieren wir rekurrsiv durch

$$\begin{aligned} \tau_0 &:= 0, \\ \tau_{k+1} &:= \inf\{s \geq \tau_k : X_s > X_{\tau_k}\}, \text{wenn } \tau_k < L_\infty,\ k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Nach Theorem 2.3.3 hat X den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X_t] = t\left(\int_{\mathbb{R}} x\lambda\ F(dx) - \gamma\right) = t(\lambda\mu - \gamma)$$

und, damit für alle Anfangsrisikoreserven der Ruin nicht fast sicher eintreten, d.h. $\psi(u) < 1,\ \forall u \geq 0$, wird im Folgenden zusätzlich vorausgesetzt, dass

Annahme 4.2.1 *(Nettoprofitbedingung)*

$$r := \frac{\gamma}{\lambda\mu} - 1 > 0 \textit{ oder äquivalent dazu } \rho := \frac{\lambda\mu}{\gamma} < 1$$

erfüllt ist. Die Konstante r heißt *relativer Sicherheitszuschlag* (safety loading) und kann als Risikoprämienrate interpretiert werden. Unter der Voraussetzung 4.2.1 driftet X fast sicher gegen $-\infty$, siehe Asmussen [3], Proposition II.1.2, und somit wird fast sicher ein Gewinn realisiert, d.h. $\mathbb{E}[X_t] < 0,\ \forall t \geq 0$. Die Anzahl aller relativen Maxima n_∞ ist daher fast sicher endlich und nach Theorem 3.6.6(d) gibt es eine exponential verteilte ZV e_q mit Parameter $q > 0$, so dass $L_\infty \overset{\text{d}}{=} e_q$ gilt und der aufsteigende Leiterprozess (L^{-1}, H) mit Rate q gekillt ist. Der aufsteigende Leiterzeitprozess

$$L_t^{-1} = \inf\{s \geq 0 : L_s > t\} = \inf\left\{s \geq 0 : \sum_{i=0}^{n_s} e_1^{(i)} > t\right\},\ t \geq 0,$$

ist in diesem Fall gegeben durch:

$$L_t^{-1} = \begin{cases} \tau_k & ,\ \sum_{i=0}^{k-1} e_1^{(i)} \leq t < \sum_{i=0}^{k} e_1^{(i)},\ t < L_\infty,\ k \in \mathbb{N}_0, \\ \infty & ,\ \text{sonst}, \end{cases} \tag{4.8}$$

wobei nach Konvention $\sum_{i=0}^{-1} := 0$ ist, siehe Abbildung 4.3. Mit dem Poisson-Prozess

$$\tilde{N}_t := \sum_{s=0}^{\infty} 1_{\left\{\sum_{j=0}^{s} e_1^{(j)} \leq t\right\}},\ t \geq 0, \tag{4.9}$$

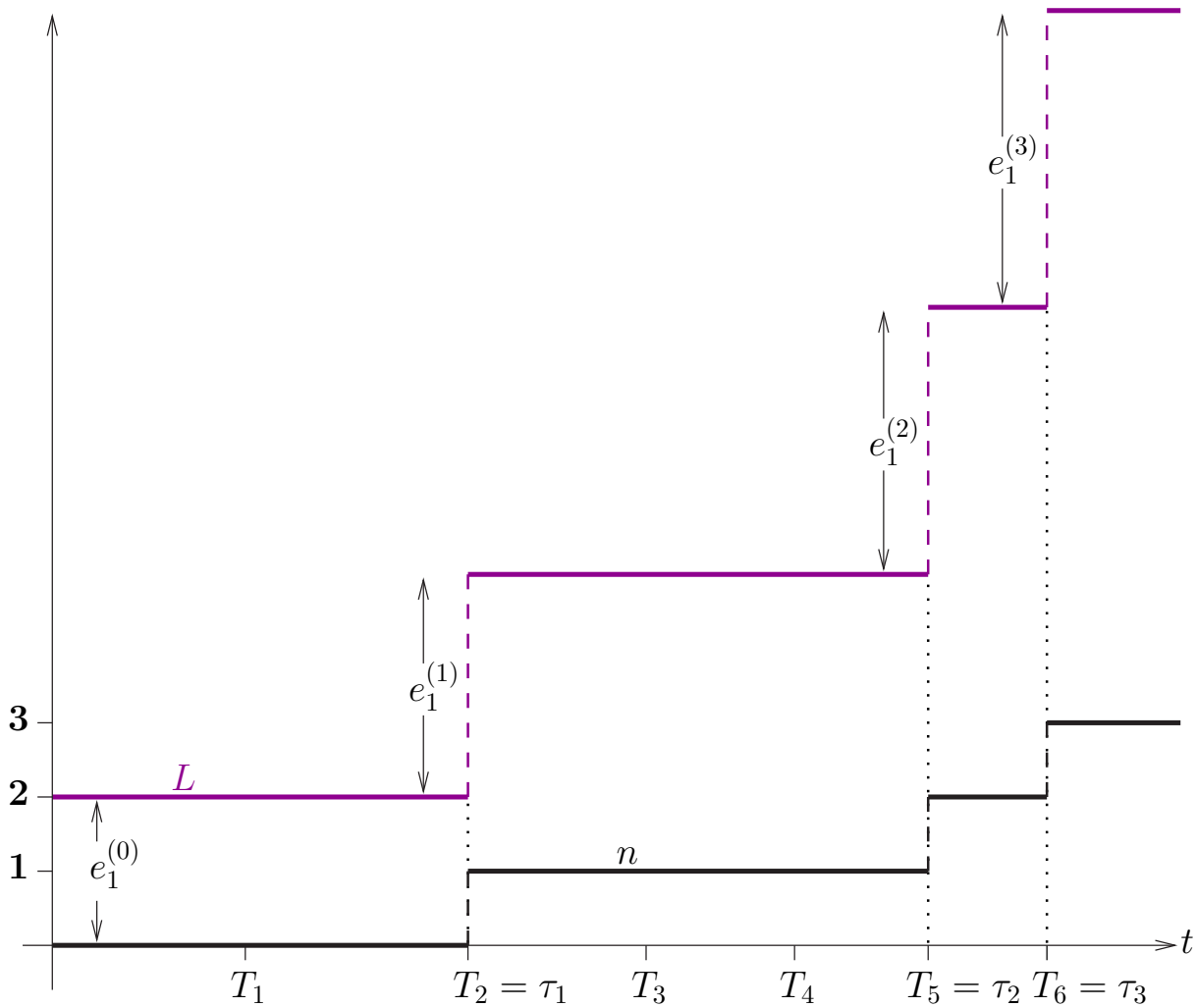

Abbildung 4.2: Lokalzeit $L_t = \sum_{i=0}^{n_t} e_1^{(i)},\ t \geq 0$, mit Zählprozess der Maxima $n_t = \text{card}\{0 < s \leq t : \overline{X}_s = X_s\}$ und den iid ZVen $e_1^{(i)} \overset{\text{d}}{=} \text{expo}(1),\ \forall i \in \mathbb{N}_0$, und die Zeitpunkte der Maxima $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, die sich auf den Verlustprozess X aus Abbildung 4.1 beziehen.

folgt aus der Äquivalenz

$$\sum_{i=0}^{k-1} e_1^{(i)} \leq t < \sum_{i=0}^{k} e_1^{(i)} \Leftrightarrow \tilde{N}_t = k,\ k \in \mathbb{N}_0,$$

die Darstellung

$$L_t^{-1} = \tau_{\tilde{N}_t} \text{ für } \ 0 \leq t < L_\infty.$$

Für den aufsteigenden Leiterhöhenprozess H, siehe Abbildung 4.5, ergibt sich daraus

$$H_t = \begin{cases} X_{L_t^{-1}} = X_{\tau_{\tilde{N}_t}} & ,\ 0 \leq t < L_\infty, \\ \infty & ,\ \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.10}$$

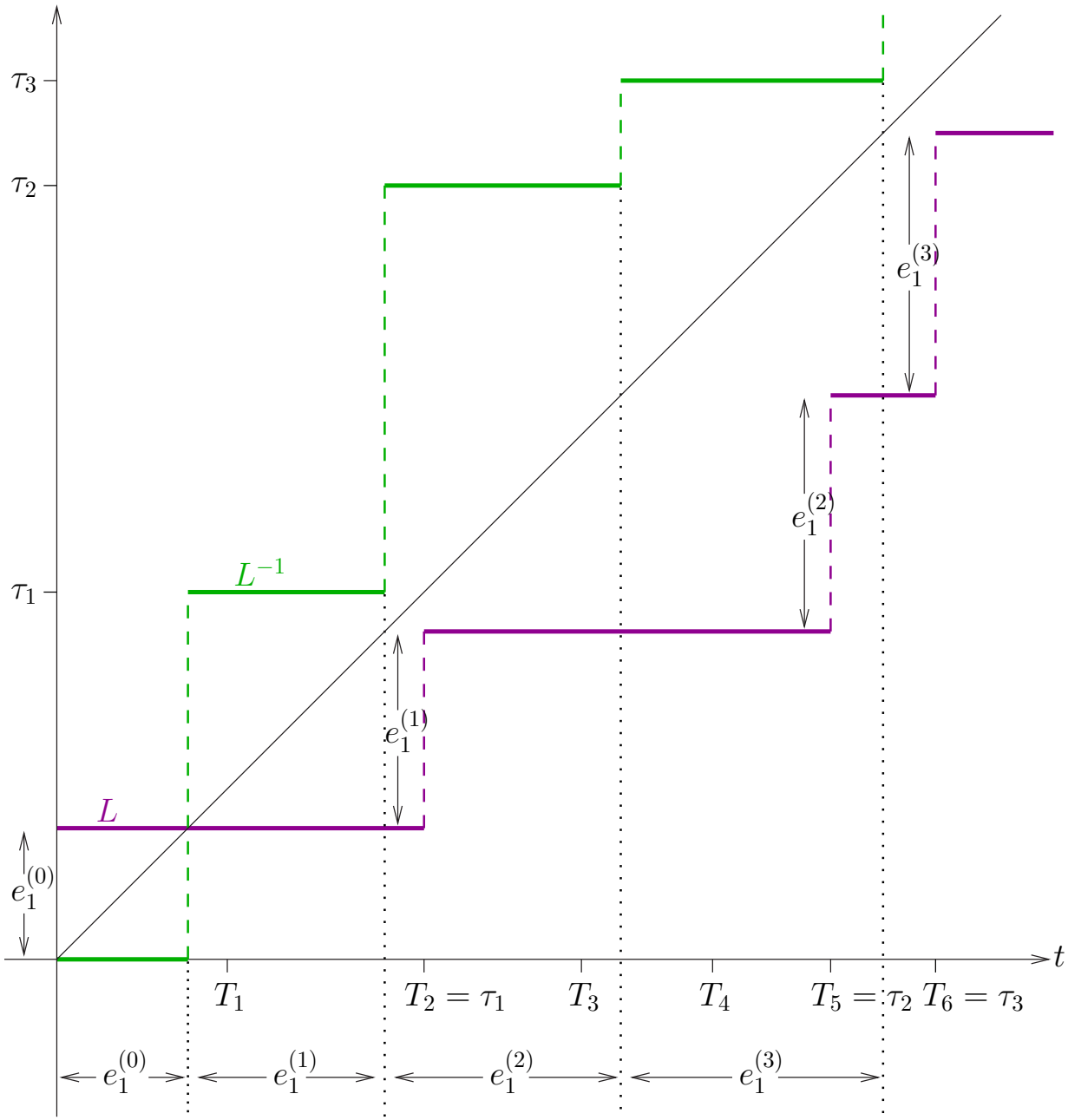

Abbildung 4.3: Lokalzeit L und aufsteigende Leiterzeit $L_t^{-1} = \inf\{s \geq 0 : L_s > t\},\ t \geq 0$, die sich auf den Verlustprozess X aus Abbildung 4.1 beziehen.

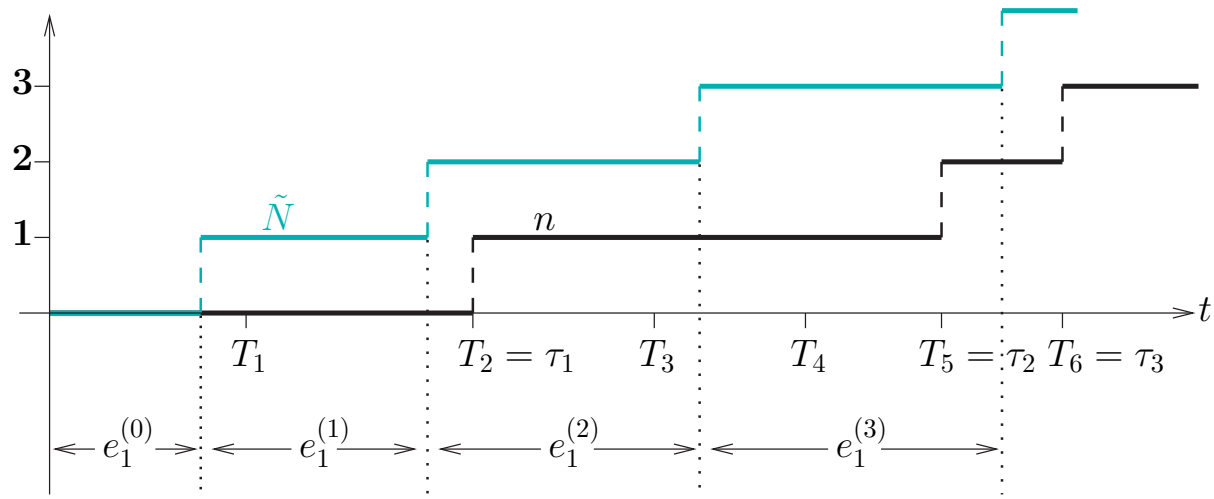

Abbildung 4.4: Zählprozess der Maxima $n_t := \text{card}\{0 < s \leq t : \overline{X}_s = X_s\}$, $t \geq 0$, und der Poisson-Prozess $\tilde{N}_t := \sum_{s=0}^{\infty} 1_{\left\{\sum_{j=0}^{s} e_1^{(j)} \leq t\right\}}$, $t \geq 0$, die sich auf den Verlustprozess X aus Abbildung 4.1 beziehen.

Da L^{-1} auf $\{t < L_\infty\} = \{n_t < n_\infty\}$ ein ungestörter Lévy-Prozess mit iid Zuwächsen ist, sind die Zuwächse $(\tau_{k+1} - \tau_k)_{k<n_\infty}$ unabhängig und haben die gleiche Verteilung wie τ_1. Desweiteren sind $(\tau_k)_{k \leq n_\infty}$ Stoppzeiten und mit der starken Markov-Eigenschaft, siehe Theorem 3.1.5, und der Unabhängigkeit und der Stationarität der Zuwächse von X folgt, dass $X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}$ für $k < n_\infty$ unabhängig von $\mathcal{F}_{\tau_k}$ ist und die gleiche Verteilung wie X_{τ_1} hat. Dabei bezeichnet $\mathcal{F}_{\tau_k}$ die $\mathbb{P}$-vollständige, natürliche Filtration zum Zeitpunkt τ_k. Weil also $(\tau_{k+1} - \tau_k, X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k})_{k<n_\infty}$ von $\mathcal{F}_{\tau_k}$ unabhängig ist und die gleiche Verteilung wie (τ_1, X_{τ_1}) hat und außerdem die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Sprüngen von L^{-1} bzw. H in Verteilung gleich $e_1^{(0)}$ ist, sind L^{-1} und H spektral positive zusammengesetzte Poisson-Prozesse, die mit Rate q gekillt werden. Mit $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ folgt:

$$L_t^{-1} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} A_i & , \text{ wenn } t < L_\infty, \\ \infty & , \text{ sonst,} \end{cases} \tag{4.11}$$

wobei A_i iid ZVen mit der Verteilung $\mathbb{P}(A_i \leq x) = \mathbb{P}(\tau_1 \leq x)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, sind. Für H und den ungestörten Prozess $\mathcal{H}$ erhält man damit:

$$H_t = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} Z_i & , \text{ wenn } t < L_\infty, \\ \infty & , \text{ sonst,} \end{cases} \tag{4.12}$$

und

$$\mathcal{H}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} Z_i, \ t \geq 0, \tag{4.13}$$

wobei $\mathbb{P}(Z_i \leq x) = \mathbb{P}(X_{\tau_1} \leq x | \tau_1 < \infty)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, ist.

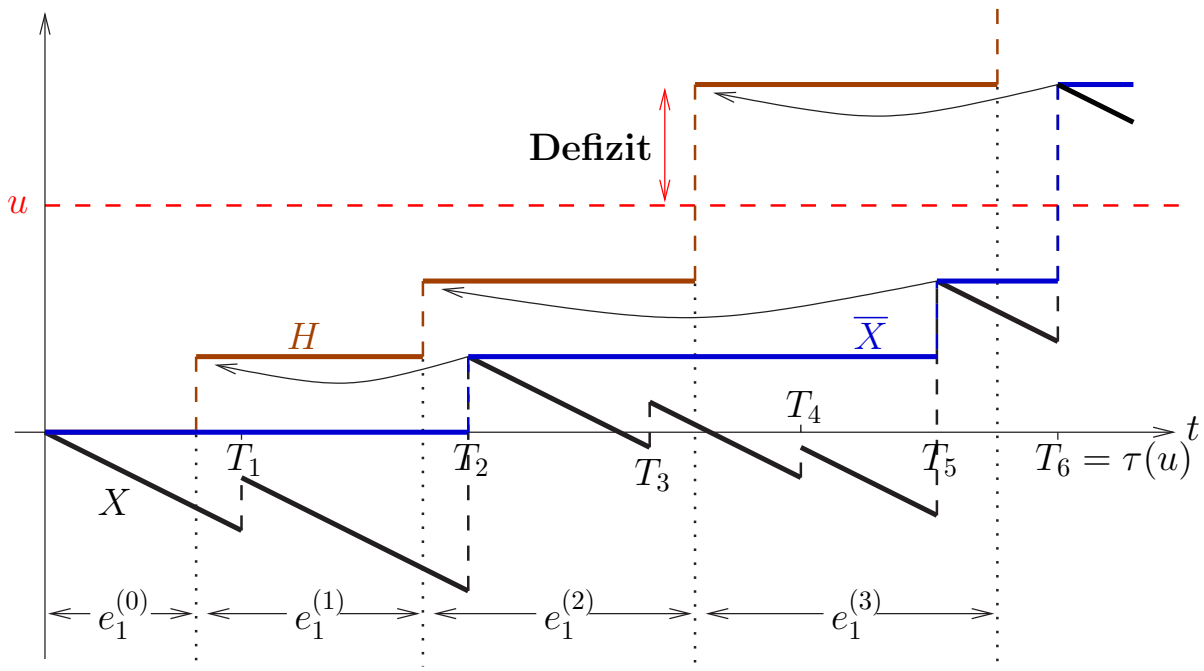

Abbildung 4.5: Aufsteigender Leiterhöhenprozess H und der Supremumsprozess $\overline{X}$, die sich auf den Verlustprozess X aus Abbildung 4.1 beziehen.

Der duale Verlustprozess

$$\hat{X}_t = \gamma t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \ t \geq 0, \tag{4.14}$$

ist hingegen ein spektral negativer Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel $(\gamma - \int_{(-1,1)} x\lambda \ F(dx), 0, -\lambda F)$ und hat beschränkte Variation. Da der Drift $D_{\hat{X}} = \gamma > 0$ ist, ist nach Theorem 3.6.3(b) für $\hat{X}$ der Punkt 0 regulär für $[0, \infty)$ und gemäß Abschnitt 3.6.1 definieren wir die Lokalzeit beim Maximum $\tilde{L}$ von $\hat{X}$ als

$$\tilde{L}_t := \overline{\hat{X}}_t = \overline{-X}_t = -\underline{X}_t, \ t \geq 0.$$

Mit der Voraussetzung 4.2.1 hat $\hat{X}$ den positiven Erwartungswert $\mathbb{E}[\hat{X}_t] = t(\gamma - \lambda\mu)$ und der aufsteigende Leiterprozess $(\tilde{L}^{-1}, \tilde{H})$ von $\hat{X}$ ist nach Theorem 3.6.6 ein ungestörter Subordinator. Entsprechend den Abschnitten 3.6.2 und 3.6.3 ist die absteigende Leiterzeit von X gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{L}_t^{-1} &= \tilde{L}_t^{-1} = \inf\{s \geq 0 : \tilde{L}_s > t\} = \inf\{s \geq 0 : -\underline{X}_s > t\} = \inf\{s \geq 0 : \underline{X}_s < -t\} \\ &= \inf\{s \geq 0 : X_s < -t\} = T_{(-t,\infty)}, \end{aligned}$$

und speziell mit (3.12) und (3.14) ist der absteigende Leiterhöhenprozess $\hat{H}$ von X gleich

$$\hat{H}_t = -\tilde{H}_t = -t, \ \forall t \geq 0, \tag{4.15}$$

siehe Abbildung 4.6.

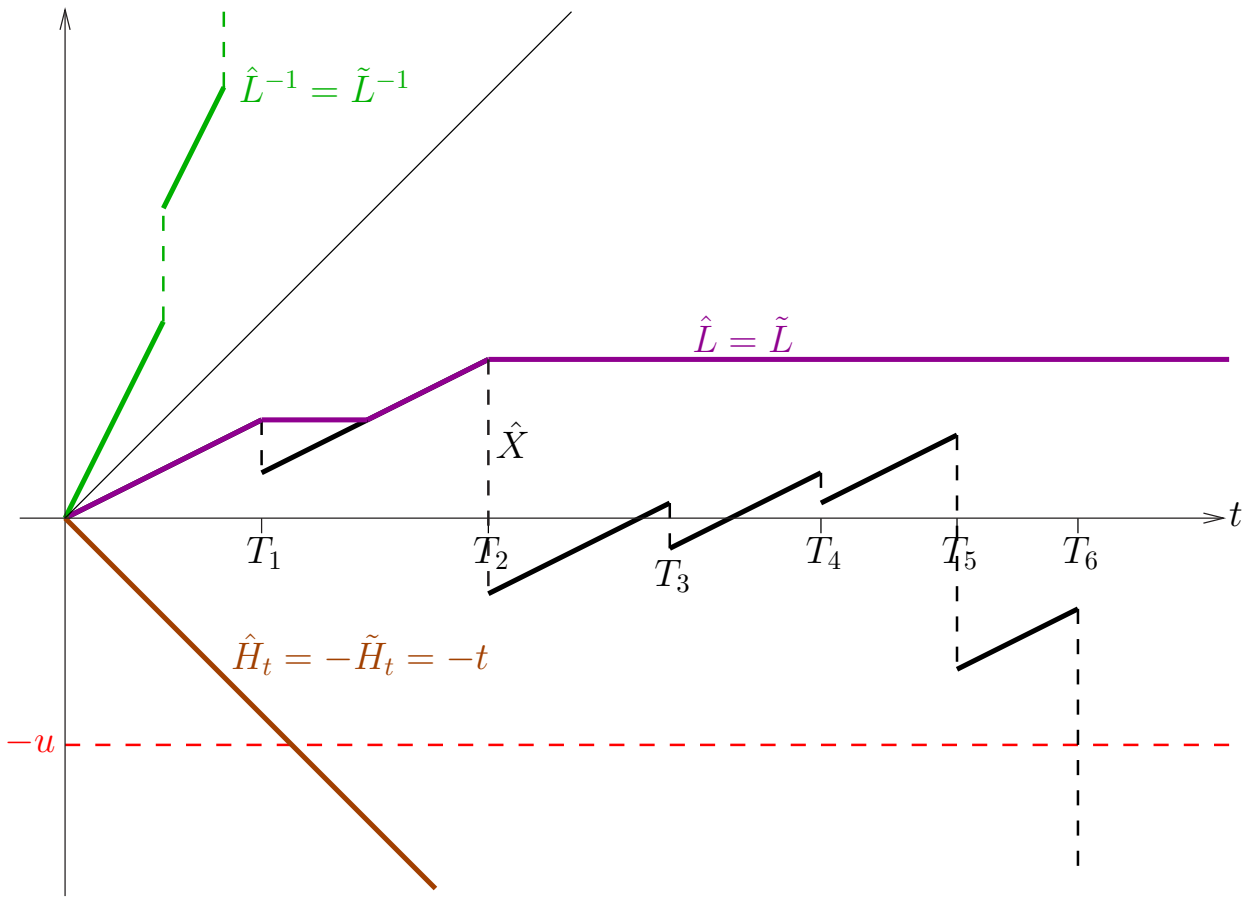

Abbildung 4.6: Dualer Verlustprozess $\hat{X} = \gamma t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \geq 0$, Lokalzeit beim Minimum $\hat{L}$, aufsteigender Leiterprozess $(\tilde{L}^{-1}, \tilde{H})$ von $\hat{X}$ und der absteigende Leiterprozess $(\hat{L}^{-1}, \hat{H})$ zu X, die sich auf den Verlustprozess X aus Abbildung 4.1 beziehen.

4.3 Ruintheorie im klassischen Modell

Die wesentlichen Fragen in diesem Modell sind "Wann passiert Ruin ?" und "Wie passiert Ruin ?".

4.3.1 Die Verteilung der Ruinzeit $\tau(u)$, des Überschusses $X_{\tau(u)}-u$ und weiterer Ruingrößen

Mit Hilfe von H und $\hat{H}$ kann man die ÜberlebensWS η und die Verteilung des Überschusses $X_{\tau(u)} - u$ in Abhängigkeit von F und ρ darstellen.

Theorem 4.3.1 *(Pollaczek-Khintchine Formel: Asmussen [3], Theorem II.6.1, Theorem III.2.1)*
Im klassischen Risikomodell (4.6) gilt für $u \geq 0$:

$$\eta(u) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n F_I^{n*}(u) = (1-\rho)\left(1_{[0,\infty)}(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n F_I^{n*}(u)\right) \tag{4.16}$$

und

$$\psi(u) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \overline{F_I^{n*}}(u). \tag{4.17}$$

Außerdem gilt: $\eta(0) = 1-\rho$ und $\psi(0) = \rho$.

Beweis:
Um die ÜberlebensWS

$$\eta(u) = \mathbb{P}\left(\overline{X}_\infty \leq u\right) = \mathbb{P}\left(H_t \leq u,\ \forall\ 0 \leq t < L_\infty\right),\ u \geq 0,$$

zu bestimmen, wird das globale Maximum $\overline{X}_\infty$ in die einzelnen Sprünge des aufsteigenden Leiterhöhenprozesses H vor dem Zeitpunkt L_∞ zerlegt, die nach (4.12) iid sind. In Schritt 1 wird die Verteilung $\mathbb{P}(X_{\tau_1} \leq x, \tau_1 < \infty) = \mathbb{P}(X_{\tau_1} \leq x)$ berechnet, aus der in Schritt 2 (4.16) gefolgert wird.
Schritt 1:
Bezeichne

$$K(A) := \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau(0)} 1_{\{X_t \in A\}}\ dt\right] \tag{4.18}$$

die erwartete Verweilzeit von X in der Borel-Menge $A \in \mathcal{B}((-\infty, 0))$.
Schritt 1a:
Als erstes wird gezeigt, dass $K(A) = 1/\gamma \cdot \lambda(A)$ gilt, wobei $\lambda(A)$ das Lebesgue-Maß von A ist. Gemäß dem Dualitätslemma 3.4.2 haben für festes t der revertierte Prozess $(\tilde{X}_s)_{0\leq s\leq t} := (X_t - X_{(t-s)^-})_{0\leq s\leq t}$ und $(X_s)_{0\leq s\leq t}$ die gleiche Verteilung. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t \in A, t < \tau(0)) &= \mathbb{P}(X_t \in A, X_s \leq 0, s \leq t) \\
&= \mathbb{P}(\tilde{X}_t \in A, \tilde{X}_s \leq 0, s \leq t) \\
&\overset{(\star)}{=} \mathbb{P}(X_t \in A, X_t \leq X_s, s \leq t),
\end{aligned}$$

wobei $(\star)$ mit $X_t = \tilde{X}_t$ gilt. Damit ergibt sich in (4.18) durch Vertauschung von Erwartungswert und Integral:

$$\begin{aligned} K(A) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in A, t < \tau(0))\ dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in A, X_t \leq X_s, s \leq t)\ dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_t \in A, X_t = \underline{X}_t)\ dt. \end{aligned}$$

Weil $\hat{X}$ spektral negativ ist, gilt für die Lokalzeit $\hat{L}$ beim Minimum:

$$\hat{L}_t = \overline{-X}_t = \gamma \cdot \int_0^t 1_{\{\overline{-X}_s = \hat{X}_s\}}\ ds = \gamma \cdot \int_0^t 1_{\{\underline{X}_s = X_s\}}\ ds,\ t \geq 0,$$

siehe Kyprianou [27], S.88, und man kann (4.18) schreiben als

$$K(A) = \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{X_t \in A\}}\ d\hat{L}_t\right].$$

Mit der Leiterzeit $\hat{L}^{-1}$ erhält man daraus:

$$K(A) = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \mathbb{P}\left(X_{\hat{L}_s^{-1}} \in A\right)\ ds.$$

Nach Definition 3.6.4 ist $X_{\hat{L}_s^{-1}} = \hat{H}_s$ und mit $\hat{H}_t = -t,\ t \geq 0$, folgt:

$$K(A) = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \mathbb{P}(-s \in A)\ ds = \frac{1}{\gamma}\int_A\ ds = \frac{1}{\gamma}\lambda(A),$$

wobei $A \in \mathcal{B}((-\infty, 0))$ ist.
Schritt 1b:
Um nun $\mathbb{P}(X_{\tau_1} \leq x, \tau_1 < \infty)$ zu bestimmen, muss man beachten, dass X die Schranke 0 durch einen Sprung überschreitet, der wegen des Schadenzahlprozesses N mit Rate λ eintritt und dessen Größe die VF F hat. Für $z > 0$ gilt daher:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{\tau(0)} \in dz, \tau(0) < \infty) &= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[F(dz - X_{t^-})1_{\{t<\tau(0)\}}\right]\lambda\ dt \\ &= \lambda\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^0 1_{\{t<\tau(0)\}}F(dz-y)\ \mathbb{P}(X_{t^-} \in dy)\right]\ dt \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \lambda\int_{-\infty}^0 F(dz-y)\mathbb{E}\left[\int_0^\infty 1_{\{t<\tau(0)\}}1_{\{X_{t^-}\in dy\}}\ dt\right] \\ &= \lambda\int_{-\infty}^0 F(dz-y)\ K(dy) = \lambda F * K(dz) = \lambda K * F(dz), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung mit Bemerkung 2.1.2 gilt. Mit $K(dy) = dy/\gamma,\ y \leq 0$, aus Schritt 1a erhält man schließlich für $z > 0$:

$$\lambda K * F(dz) = \lambda\int_0^\infty K(dz-x)\ F(dx) = \frac{\lambda}{\gamma}\int_z^\infty\ F(dx)\ dz = \frac{\lambda}{\gamma}\overline{F}(z)\ dz$$

und damit

$$\mathbb{P}(X_{\tau(0)} \leq x, \tau(0) < \infty) = \frac{\lambda}{\gamma} \int_0^x \overline{F}(z)\ dz = \rho F_I(x).$$

Insbesondere gilt:

$$\mathbb{P}(\tau(0) = \infty) = 1 - \mathbb{P}(\tau(0) < \infty) = 1 - \frac{\lambda}{\gamma} \int_0^\infty \overline{F}(x)\ dx = 1 - \rho.$$

Schritt 2:
Das Ereignis $\left\{\overline{X}_\infty \leq u\right\}$ besteht aus den einzelnen Ereignissen, dass H nach k Sprüngen das globale Maximum $\overline{X}_\infty \leq u$ erreicht hat und danach nicht mehr wächst, d.h. $\tau_k < \infty$ und $\tau_{k+1} = \infty$. Mit (4.8), (4.11), (4.10),(4.12) und der dazugehörigen Argumentation erhält man:

$$\begin{aligned}
\eta(u) &= \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(X_{\tau_k} \leq u, \tau_k < \infty, \tau_{k+1} = \infty) \\
&= \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}}) \leq u, \sum_{i=1}^k (\tau_i - \tau_{i-1}) < \infty, \tau_{k+1} - \tau_k = \infty\right) \\
&= \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(X_{\tau(0)} \leq u, \tau(0) < \infty)^{k*} \cdot \mathbb{P}(\tau(0) = \infty) \\
&\overset{\text{Schritt 1}}{=} (1-\rho) \sum_{k=0}^\infty \rho^k F_I^{k*}(u).
\end{aligned}$$

Mit $\psi(u) = 1 - \eta(u)$ folgt (4.17) und speziell für $u = 0$ gilt:

$$\eta(0) = (1-\rho)\left(1_{[0,\infty)}(0) + \sum_{n=1}^\infty \rho^n F_I^{n*}(0)\right) = 1 - \rho$$

und damit $\psi(0) = 1 - \eta(0) = \rho$. □

Alternativer Beweis:
Theorem 4.3.1 kann man auch mit Hilfe der Proposition 3.6.7 beweisen, wozu man die Erneuerungsfunktion V_H und die Killingrate q berechnen muss. Dieser Ansatz ist allgemeiner und spielt in Kapitel 5 beim verallgemeinerten Modell eine zentrale Rolle. Das Lévy-Maß $\Pi_{\mathcal{H}} = \Pi_H$ kann man dabei mit der Wiener-Hopf Faktorisierung berechnen. Mit

(4.15) gilt: $\Psi_{\hat{H}}(u) = iu$ und mit der Wiener-Hopf Faktorisierung (3.24) folgt für $u \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\Phi_H(u) &\overset{(3.7)}{=} \Psi_H(iu) = k' \cdot \frac{\Psi_X(iu)}{\Psi_{\hat{H}}(iu)} \\
&= k' \frac{1}{-u} \left(u \left(\int_{(-1,1)} x\lambda \; F(dx) - \gamma \right) + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{-ux} - ux1_{\{|x|<1\}}\right) \lambda \; F(dx) \right) \\
&= k' \cdot \left(\gamma + \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) \frac{\lambda}{u} \; \overline{F}(dx) \right) \\
&= k' \cdot \left(\gamma + \lambda \left[\frac{1 - e^{-ux}}{u} \overline{F}(x) \right]_0^\infty - \lambda \int_0^\infty e^{-ux} \overline{F}(x) \; dx \right) \\
&= k' \cdot \left(\gamma - \lambda\mu + \lambda \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) \overline{F}(x) \; dx \right) \\
&= k' \cdot (\gamma - \lambda\mu) + k' \cdot \lambda\mu \int_0^\infty (1 - e^{-ux}) \; F_I(dx). \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

An (4.19) kann man ablesen, dass das Lévy-Maß $\Pi_H(dx) = \Pi_{\mathcal{H}}(dx) = k'\lambda\mu\mathbb{P}(X_{\tau_1} \in dx | \tau_1 < \infty)$ gleich $k'\lambda\mu F_I(dx)$ ist, und, da die Intensität von $\tilde{N}$ gleich 1 ist, ist der Faktor $k' = 1/(\lambda\mu)$. Mit der Killingrate $q = \Phi_H(0) = k'(\gamma - \lambda\mu) = (1-\rho)/\rho$ berechnet man die Erneuerungsfunktion von H:

$$\begin{aligned}
V_H(x) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(H_t \leq x) \; dt = \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \leq x) \; dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt} \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \leq x | \tilde{N}_t = k) \mathbb{P}(\tilde{N}_t = k) \; dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(1-\rho)/\rho \cdot t} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^m e^{-t} \frac{t^k}{k!} F_I^{k*}(x) \; dt \\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} F_I^{k*}(x) \int_0^\infty e^{-1/\rho \cdot t} t^k \; dt \\
&\overset{[9],S.65}{=} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} F_I^{k*}(x) k! \rho^{k+1} = \sum_{k=0}^\infty F_I^{k*}(x) \rho^{k+1}.
\end{aligned}$$

Dabei gilt $(\star)$ mit dem Satz von der monotonen Konvergenz von Beppo-Lévy. Mit Proposition 3.6.7 folgt:

$$\eta(u) = \mathbb{P}(\tau(u) = \infty) = \frac{1-\rho}{\rho} V_H(u) = (1-\rho) \sum_{n=0}^\infty \rho^n F_I^{n*}(u), \; u \geq 0,$$

und

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = 1 - \frac{1-\rho}{\rho} V_H(u) = (1-\rho) \sum_{n=1}^\infty \rho^n \overline{F_I^{n*}}(u), \; u \geq 0.$$

Speziell für $u = 0$ gilt:

$$\eta(0) = \frac{1-\rho}{\rho} V_H(0) = 1 - \rho \;\text{ und }\; \psi(0) = 1 - \eta(0) = \rho. \qquad \square$$

Desweiteren kann man Theorem 4.3.1 auf erneuerungstheoretische Weise beweisen, indem man zeigt, dass die ÜberlebensWS η die Erneuerungsgleichung

$$\eta(u) = \eta(0) + \rho F_I * \eta(u), \ u > 0, \tag{4.20}$$

erfüllt, aus der man konstruktiv (4.16) ableiten kann, siehe Grandell [20], S.4 und 5.
Weil F_I^{n*} für alle $n \in \mathbb{N}$ absolut stetig ist mit Dichte $1/\mu^n \overline{F}^{n\otimes}$, folgt aus (4.17), dass ψ absolut stetig ist mit Dichte

$$\psi'(u) = -(1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^n \overline{F}^{n\otimes}(u). \tag{4.21}$$

In den Beweisen von Theorem 4.3.1 wurde für $x > 0$ gezeigt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{\tau(0)} \leq x) &= \mathbb{P}(X_{\tau(0)} \leq x, \tau(0) < \infty) = \rho F_I(x), && (4.22) \\ \mathbb{P}(X_{\tau(0)} \leq x | \tau(0) < \infty) &= F_I(x) = \Pi_{\mathcal{H}}(x). && (4.23) \end{aligned}$$

Das heißt, dass die Verteilung des Überschusses über die Schranke 0 mit dem Faktor ρ gestört ist, aber auf $\{\tau(0) < \infty\}$ ungestört ist. Das folgende Theorem zeigt, dass der Unterschuss $-X_{\tau(0)^-}$ die gleiche Verteilung wie $X_{\tau(0)}$ hat.

Theorem 4.3.2 *(Asmussen [3], Theorem III.2.2)*
Im klassischen Risikomodell (4.6) gelten folgende Aussagen.

(a) Die gemeinsame Verteilung von $(-X_{\tau(0)^-}, X_{\tau(0)})$ ist

$$\mathbb{P}(-X_{\tau(0)^-} > x, X_{\tau(0)} > y, \tau(0) < \infty) = \frac{\lambda}{\gamma} \int_{x+y}^{\infty} \overline{F}(z) \ dz.$$

(b) Für $u \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u \leq x | \tau(u) < \infty, -X_{\tau(u)^-} = z) = F^{(u+z)}(x),$$

wobei

$$F^{(u+z)}(x) = \frac{F(u+z+x) - F(u+z)}{\overline{F}(u+z)} = 1 - \frac{\overline{F}(u+z+x)}{\overline{F}(u+z)}, \ x \geq 0.$$

$F^{(u+z)}$ ist die Überschussverteilung eines Schadens über $u+z$.

Beweis
Für einen Beweis von (a) siehe Asmussen, [3], S.106-107.
(b) Sei Y der Schaden, mit dem X die Schranke u überschreitet. Für $u \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u \leq x | \tau(u) < \infty, -X_{\tau(u)^-} = z) &= \frac{\mathbb{P}(u+z < Y \leq u+z+x)}{\mathbb{P}(Y > u+z)} \\ &= \frac{F(u+z+x) - F(u+z)}{\overline{F}(u+z)}. \qquad \square \end{aligned}$$

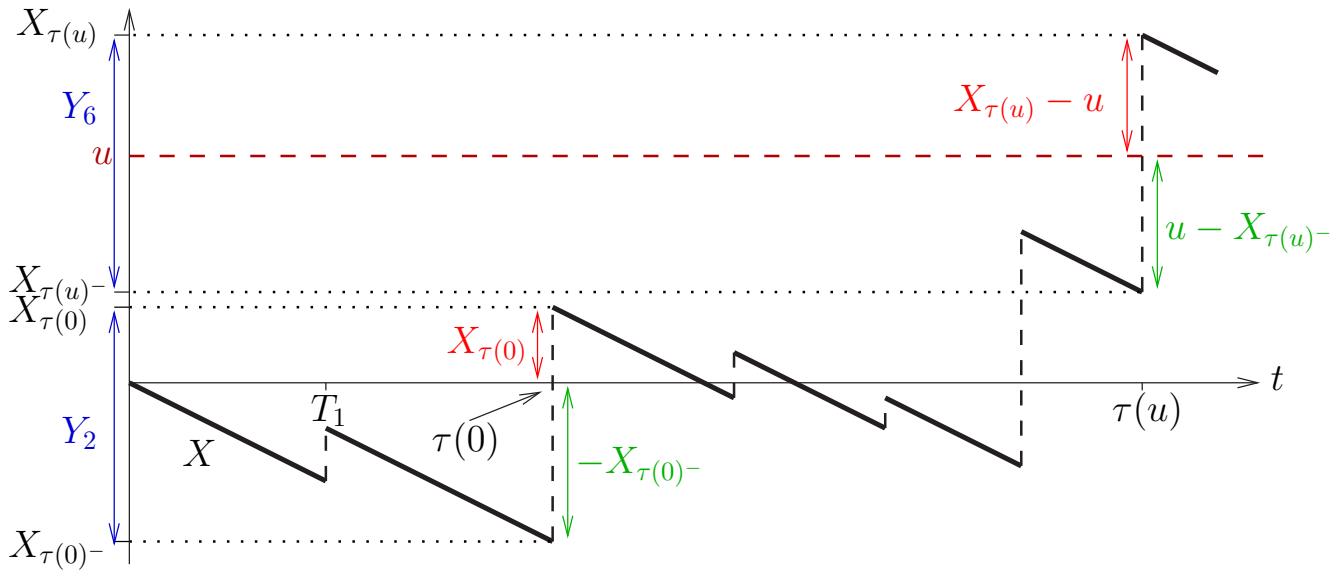

Abbildung 4.7: Der Überschuss $X_{\tau(u)} - u$ und der Unterschuss $u - X_{\tau(u)^-}$, die sich auf den Verlustprozess X aus Abbildung 4.1 beziehen; in diesem Beispiel wird die Schranke 0 durch den Schaden Y_2 überschritten und der Schaden Y_6 verursacht den Ruin.

Im Zusammenhang mit dem Überschreiten einer Schranke u sind neben dem Überschuss noch weitere Größen von Interesse. Um deren gemeinsame Verteilung mit dem Überschuss zu beschreiben, müssen zunächst einige Begriffe definiert werden.
Für den gestörten Subordinator (L^{-1}, H) definieren wir die bivariate Erneuerungsfunktion durch

$$V_{(H,L^{-1})}(dx, ds) := \int_0^\infty \mathbb{P}\left(H_t \in dx, L_t^{-1} \in ds\right)\ dt \tag{4.24}$$

und für den ungestörten Subordinator $(\tilde{L}^{-1}, \tilde{H})$ durch

$$V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dx, ds) := \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\tilde{H}_t \in dx, \tilde{L}_t^{-1} \in ds\right)\ dt. \tag{4.25}$$

Die Randverteilungen $V_{(H,L^{-1})}(dx, [0,\infty))$ und $V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dx, [0,\infty))$ sind gleich den Erneuerungsfunktionen $V_H(dx)$ bzw. $V_{\tilde{H}}(dx)$. $\overline{G}_t$ ist nach Definition (3.22) der Zeitpunkt des letzten Maximums bis einschließlich t und analog definieren wir den Zeitpunkt des letzten Minimums bis einschließlich t durch

$$\underline{G}_t := \{s \le t : X_s = \underline{X}_s \text{ oder } X_{s^-} = \underline{X}_s\}. \tag{4.26}$$

Damit ist $\overline{G}_{\tau(u)^-}$ der Zeitpunkt des letzten Maximums vor der Ruinzeit $\tau(u)$, $\tau(u) - \overline{G}_{\tau(u)^-}$ ist die Zeitspanne zwischen dem letzten Maximum vor dem Ruin und der Ruinzeit, $X_{\tau(u)} - u$ ist der Überschuss über die Schranke u, $u - X_{\tau(u)^-}$ ist der Unterschuss unter die Schranke u und $u - \overline{X}_{\tau(u)^-}$ ist der Abstand zwischen dem letzten Maximum vor dem Ruin und der Schranke u, siehe Abbildung 4.8. Diese 5 Größen haben folgende gemeinsame Verteilung.

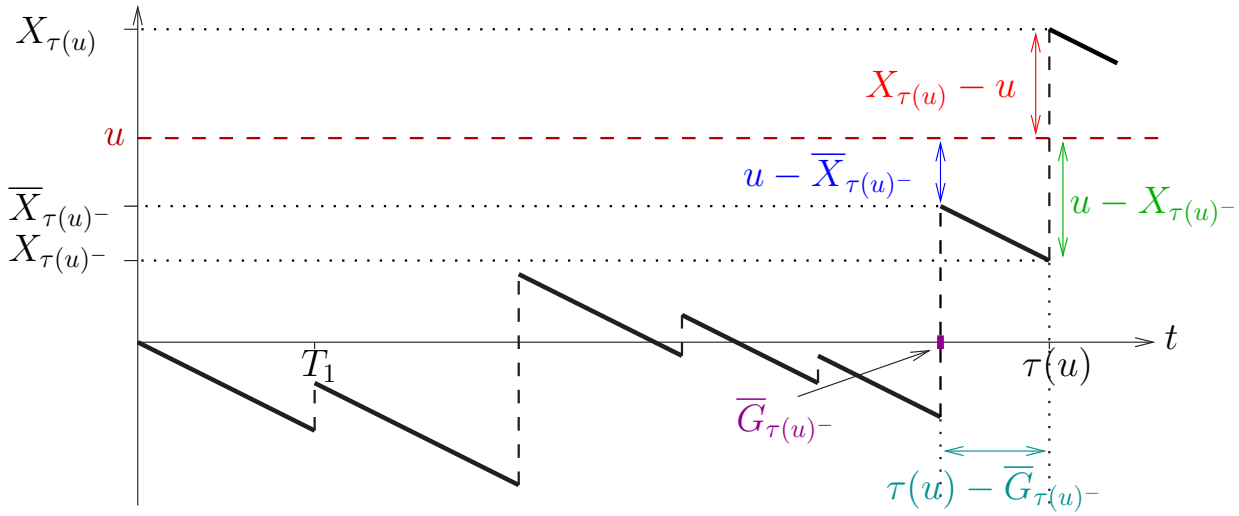

Abbildung 4.8: $\overline{G}_{\tau(u)^-}$ ist der Zeitpunkt des letzten Maximums vor der Ruinzeit $\tau(u)$, $\tau(u) - \overline{G}_{\tau(u)^-}$ ist die Zeitspanne zwischen dem letzten Maximum vor dem Ruin und der Ruinzeit, $X_{\tau(u)} - u$ ist der Überschuss über die Schranke u, $u - X_{\tau(u)^-}$ ist der Unterschuss unter die Schranke u und $u - \overline{X}_{\tau(u)^-}$ ist der Abstand zwischen dem letzten Maximum vor dem Ruin und der Schranke u, wobei sich diese Größen auf den Verlustprozess X aus Abbildung 4.1 beziehen.

Theorem 4.3.3 *(Quintupel-Verteilung: Doney und Kyprianou [13], Theorem 4)*
Im klassischen Risikomodell (4.6) gilt für jedes $u > 0$ auf $x > 0$, $v \geq y$, $y \in [0, u]$, $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\tau(u) - \overline{G}_{\tau(u)^-}\ dt, \overline{G}_{\tau(u)^-} \in ds, X_{\tau(u)} - u \in dx, u - X_{\tau(u)^-} \in dv, u - \overline{X}_{\tau(u)^-} \in dy\right)\\ = -V_{(H,L^{-1})}(u - dy, ds) V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dv - y, dt) \Pi_X(dx + v). \qquad (4.27)\end{aligned}$$

Beweis:
Sei zum Zeitpunkt s das letzte relative Maximum bei der Position $u - y$, bevor nach einer Zeit t der Prozess X von der Position $u - v$ die Schranke u mit dem Überschuss x überquert. Um (4.27) zu beweisen, zerlegen wir den Pfad in 3 unabhängige Teile, siehe Abbildung 4.9. Die WS, dass in $(u - y, s)$ ein relatives Maximum ist, ist gleich $-V_{(H,L^{-1})}(u - dy, s)$, unabhängig vom weiteren Pfad, der in den Ruin führt. Wenn man die Zeit revertiert, dann beginnt der Pfad mit einem Sprung der Höhe $x + v$. Gemäß dem Dualitätslemma 3.4.2 hat dieser Sprung die WS $\Pi_X(v + dx)$. Davon unabhängig nimmt der revertierte Pfad nach der Zeit t ein relatives Minimum mit der Distanz $v - y$ relativ zur Position des ersten Sprunges an und trifft das letzte Maximum von X vor dem Ruin in der Position $u - y$. Gemäß Dualität hat dieses Ereignis die WS $V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dv - y, t)$. □

Da die Erneuerungsfunktionen im klassischen Risikomodell $V_H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_I^{k*}(x)\rho^{k+1}$, $x \geq 0$ und $V_{\tilde{H}}(x) = x$, $x \geq 0$, sind, folgt mit $\Pi_X = \lambda F$ aus Theorem 5.2.3 für $u > 0$ auf

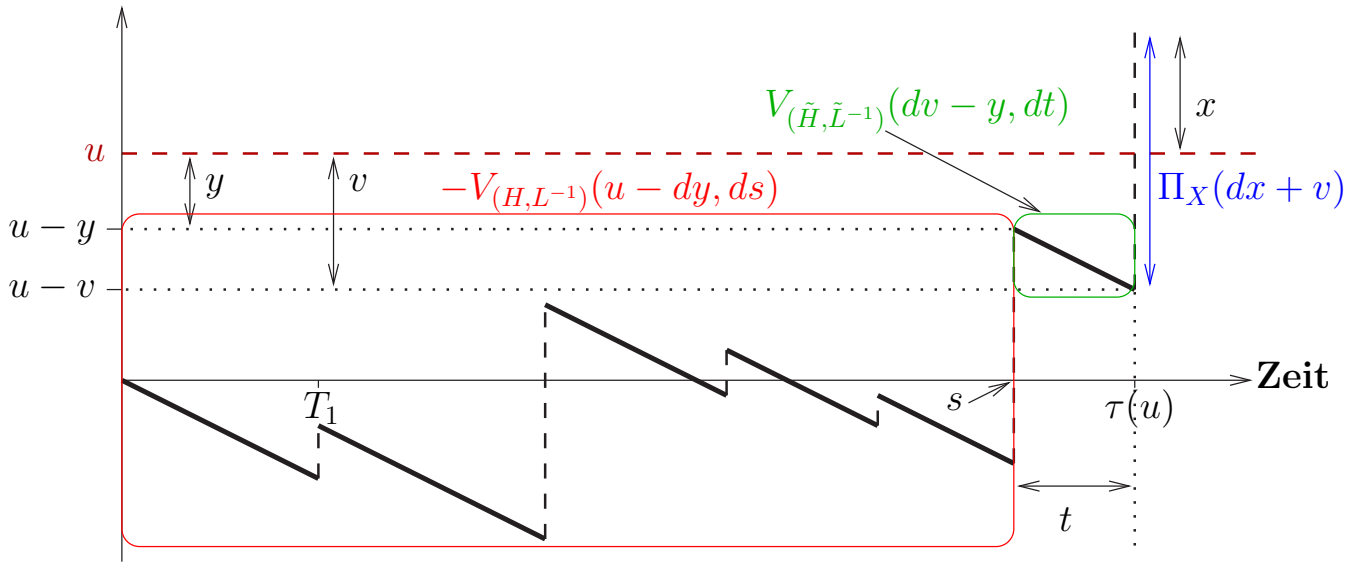

Abbildung 4.9: Die Beweisidee der Quintupel-Verteilung im klassischen Risikomodell besteht darin, den Pfad, der in den Ruin führt, in 3 unabhängige Teile zu zerlegen. Die ersten zwei Abschnitte sind mit einem roten bzw. grünen Kasten umrahmt. Der letzte Teil, der mit einem blauen Pfeil gekennzeichnet ist, ist der Sprung, der den Ruin verursacht.

$x > 0, v \geq y, y \in [0,u]$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} - u \leq x, u - X_{\tau(u)^-} \leq v, u - \overline{X}_{\tau(u)^-} \leq y\right) \\
&\quad = V_H(u-y)V_{\tilde{H}}(v-y)\Pi_X((0,x+v)) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} F_I^{k*}(u-y)\rho^{k+1}(v-y)\lambda F(x+v).
\end{aligned}$$

4.3.2 Der Cramér-Fall

In diesem Abschnitt geht es um die asymptotische Verteilung von $\tau(u)$ und das asymptotische Verhalten des Prozesses X entlang von Pfaden, die zum Ruin führen.
Da ρF_I eine gestörte VF mit $\rho F_I(\infty) < 1$ ist, kann man das Smith Erneuerungslemma, siehe Resnick [29], Theorem 3.10.1(ii), nicht anwenden, um das asymptotische Verhalten von ψ zu bestimmen. Unter der *Cramér-Lundberg Bedingung* (4.28) kann man das asymptotische Verhalten von ψ dennoch mit der *Cramér-Lundberg Approximation* schätzen.

Theorem 4.3.4 *(Cramér-Lundberg Theorem: Asmussen [3], Theorem III.5.2,III.5.3,III.6.3) Sei angenommen, dass ein $\kappa_L > 0$ existiert, so dass gilt:*

$$M_{F_I}(\kappa_L) = \int_0^\infty e^{\kappa_L x}\ F_I(dx) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{\kappa_L x}\overline{F}(x)\ dx = \frac{\gamma}{\lambda\mu} = 1 + r = \frac{1}{\rho}. \tag{4.28}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(a) *Falls*

$$\mu^* := \frac{\lambda}{\gamma}\int_0^\infty x e^{\kappa_L x}\overline{F}(x)\ dx < \infty \text{ ist,}$$

dann gilt:

$$\psi(u) \sim \frac{1-\rho}{\kappa_L \mu^*} e^{-\kappa_L u},\ u \to \infty. \tag{4.29}$$

Falls $\mu^* = \infty$ ist, dann gilt:

$$\psi(u) = o(e^{-\kappa_L}),\ u \to \infty, \tag{4.30}$$

d.h. $\lim_{u\to\infty} e^{\kappa_L u}\psi(u) = 0$.

(b) *Für alle $u \geq 0$ gilt die* Lundberg-Ungleichung*:*

$$\psi(u) \leq e^{-\kappa_L u}. \tag{4.31}$$

(c) *Es gilt sogar die* verschärfte Lundberg-Ungleichung*:*

$$C_- e^{-\kappa_L u} \leq \psi(u) \leq C_+ e^{-\kappa_L u},$$

wobei

$$C_- = \inf_{x\geq 0} \frac{\overline{F}(x)}{\int_x^\infty e^{\kappa_L(y-x)}\ F(dy)} \text{ und } C_+ = \sup_{x\geq 0} \frac{\overline{F}(x)}{\int_x^\infty e^{\kappa_L(y-x)}\ F(dy)} \text{ ist.}$$

Beweis:
(a) Wenn die Cramér-Lundberg Bedingung (4.28) erfüllt ist, dann ist die Esscher-Transfomierte F_I^* von F_I zum Parameter κ_L

$$F_I^*(x) = \frac{1}{M_{F_I(\kappa_L)}}\int_0^x e^{\kappa_L y}\ F_I(dy) = \rho\int_0^x e^{\kappa_L y}\ F_I(dy),\ x \geq 0,$$

eine ungestörte VF mit Gesamtmasse 1 und Erwartungswert μ^*. Die Erneuerungsgleichung (4.20) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}\psi(u) &= 1-\eta(u) = \rho(1 - F_I * \eta(u)) = \rho(1 + F_I * \psi(u) - F_I(u)) \\ &= \rho\overline{F}_I(u) + \rho\psi * F_I(u),\ u \geq 0,\end{aligned}$$

und durch Transformation erhält man:

$$\begin{aligned}e^{\kappa_L u}\psi(u) &= \rho e^{\kappa_L u}\overline{F}_I(u) + \rho\int_0^u e^{\kappa_L(u-y)}\psi(u-y)e^{\kappa_L y}\ F_I(dy) \\ &= \rho e^{\kappa_L u}\overline{F}_I(u) + \int_0^u e^{\kappa_L(u-y)}\psi(u-y)\ F_I^*(dy),\ u \geq 0.\end{aligned} \tag{4.32}$$

Mit $\psi^*(u) := e^{\kappa_L u}\psi(u)$ und $k^*(u) := \rho e^{\kappa_L u}\overline{F}_I(u)$ ergibt sich daraus die Erneuerungsgleichung

$$\psi^*(u) = k^*(u) + \psi^* * F_I^*(u),\ u \geq 0,$$

auf die man das Smith Erneuerungslemma, siehe Resnick [29], Theorem 3.10.1(ii), anwenden kann. Falls

$$\mu^* = \int_0^\infty x \; F_I^*(dx) = \frac{\lambda}{\gamma} \int_0^\infty x e^{\kappa_L x} \overline{F}(x) \; dx < \infty,$$

ist, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \psi^*(u) &= \lim_{u\to\infty} e^{\kappa_L u} \psi(u) = \frac{1}{\mu^*} \int_0^\infty \rho e^{\kappa_L x} \; \overline{F}_I(x) \; dx \\
&= \frac{\rho}{\mu^*} \left(\left[\frac{1}{\kappa_L} e^{\kappa_L x} \overline{F}_I(x) \right]_0^\infty + \frac{1}{\kappa_L \mu} \int_0^\infty e^{\kappa_L x} \overline{F}(x) \; dx \right) \\
&\overset{(4.28)}{=} \frac{\rho}{\mu^* \kappa_L} \left(0 - 1 + \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1-\rho}{\mu^* \kappa_L}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt (4.29) und für $\mu^* = \infty$ folgt (4.30).
(b) Diese Aussage erhält man mit einem Martingalansatz, siehe Grandell [20], S.10-11.
Einen Beweis zu (c) findet man in Asmussen [3], Theorem III.6.3. Die dazugehörige Theorie des exponentiellen Maßwechsels und des assoziierten Prozesses wird im Folgenden kurz erläutert. □

Die Konstante $\kappa_L > 0$ heißt *Lundberg-Koeffizient* oder *Anpassungskoeffizient* von R und ist durch die Cramér-Lundberg Bedingung (4.28) eindeutig bestimmt, wenn sie existiert. Für X gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{uX_t}\right] &= e^{-\gamma u t} \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}\left[e^{u(Y_1+\cdots+Y_k)}\right] \mathbb{P}(N_t = k) \\
&= e^{-\gamma u t} \sum_{k=0}^\infty M_F(u)^k \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\gamma u t - \lambda t + M_F(u)\lambda t} = e^{t K_X(u)}
\end{aligned}$$

und daher hat X die KEF

$$K_X(x) = \lambda(M_F(x) - 1) - \gamma x.$$

Mit Theorem 2.4.7(c) erhält man damit folgende äquivalente Formulierungen der Cramér-Lundberg Bedingung (4.28):

$$M_{\rho F_I}(\kappa_L) = 1 \Leftrightarrow \lambda(M_F(\kappa_L) - 1) - \gamma \kappa_L = 0 \Leftrightarrow K_X(\kappa_L) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[e^{\kappa_L X_1}\right] = 1. \tag{4.33}$$

Wenn (4.28) bzw. (4.33) erfüllt ist, dann gibt es einen Verlustprozess X^{κ_L} mit der KEF

$$K_{\kappa_L}(x) = K_X(x + \kappa_L),$$

d.h. X^{κ_L} hat die Poisson-Rate $\lambda_{\kappa_L} := \lambda M_F(\kappa_L)$ und die Sprungverteilung $F_{\kappa_L}(dx) := e^{\kappa_L x}/M_F(\kappa_L) \; F(dx)$, siehe Amussen [3], Theorem II.4.8 und Beispiel II.4.10, und heißt *der zu X assoziierte Prozess*. Dabei ist die Sprungverteilung F_{κ_L} die Esscher-Transformierte der Sprungverteilung F von X zum Parameter κ_L. Das Wmaß von X^{κ_L} wird im Folgenden mit $\mathbb{P}^{\kappa_L}$ bezeichnet und der Übergang von $\mathbb{P}$ zu $\mathbb{P}^{\kappa_L}$, die sogenannte *Lundberg Konjugation*,

ist ein exponentieller Maßwechsel, bei dem X zu X^{κ_L} wird. X^{κ_L} bzw. X bzgl. $\mathbb{P}^{\kappa_L}$ hat den Erwartungswert

$$\mathbb{E}\left[X_1^{\kappa_L}\right] = \mathbb{E}_{\kappa_L}\left[X_1\right] = K'_X(\kappa_L) = K'_{\kappa_L}(0) > 0, \tag{4.34}$$

wobei $\mathbb{E}_{\kappa_L}$ den Erwartungswert bzgl. des Wmaßes $\mathbb{P}^{\kappa_L}$ bezeichnet. X^{κ_L} kann man als Version von X interpretieren, die darauf bedingt ist, gegen ∞ zu driften. Wenn man den Beweis zu Theorem 4.3.4(a) unter diesem Aspekt betrachtet, dann erkennt man, dass die Esscher-Transformierte von F_I zum Parameter κ_L nichts anderes ist, als das Lévy-Maß des ungestörten aufsteigenden Leiterhöhenprozesses, der zum assoziierten Prozess X^{κ_L} gehört. Auf dieser Theorie des exponentiellen Maßwechsels und des assoziierten Prozesses beruht der Beweis von Theorem 4.3.4(c) und man kann damit ebenso die Aussagen 4.3.4(a) und (b) beweisen, da gilt:

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = \mathbb{E}_{\kappa_L}\left[\exp\{-\kappa_L X_{\tau(u)}\}, \tau(u) < \infty\right],$$

siehe Asmussen [3], Theorem III. Theorem 5.2 und Theorem III.5.3. Diese Beweisidee wird im allgemeinen Fall in Abschnitt 5.3 verwendet.

Beispiel 4.3.5 (Exponential verteilte Schäden: Asmussen [3], Beispiel III.5.1)
Wenn die Schäden im klassischen Risikomodell (4.6) exponential verteilt sind, d.h. $Y_i \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathrm{expo}(1/\mu),\ \forall i \in \mathbb{N}$, dann fällt der Tail $\overline{F}$ exponentiell schnell mit Rate $1/\mu$ und es gibt ein $\kappa_L > 0$, das (4.28) erfüllt. Die Cramér-Lundberg Bedingung hat in diesem Fall die Gestalt:

$$M_{F_I}(\kappa_L) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{\kappa_L x}\overline{F}(x)\ dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-(1/\mu-\kappa_L)x}\ dx = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu}-\kappa_L\right)^{-1} = \frac{1}{1-\mu\kappa_L} = \frac{1}{\rho}$$

und daraus erhält man $\kappa_L = (1-\rho)/\mu$. Damit folgt:

$$\mu^* = \frac{\lambda}{\gamma}\int_0^\infty x e^{-(1/\mu-\kappa_L)x}\ dx \overset{[9],\ \mathrm{S.65}}{=} \frac{\lambda}{\gamma}\left(\frac{1}{\mu}-\kappa_L\right)^{-2} = \frac{\lambda}{\gamma}\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{-2} = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\gamma}{\lambda}.$$

Die Cramér-Schätzung ist somit:

$$\psi(u) \sim \frac{1-\rho}{(\gamma/\lambda)\kappa_L}\exp\left\{-\frac{1-\rho}{\mu}\right\} = \rho\exp\left\{-\frac{1-\rho}{\mu}u\right\},\ u \to \infty. \tag{4.35}$$

Mit

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x e^{-(1/\mu)t}\ dt = 1 - e^{-1/\mu x},\ x \geq 0,$$

gilt nach Theorem 4.3.1:

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\overline{F_I^{n*}}(u) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\overline{\Gamma(1/\mu,n)} \\
&= (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\rho^n e^{-\frac{1}{\mu}x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1/\mu x)^k}{k!}\right) \\
&= (1-\rho)e^{-\frac{1}{\mu}x}\rho\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\frac{1}{\mu}\rho x)^k}{k!}\rho^{n-k} \\
&\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} (1-\rho)e^{-\frac{1}{\mu}x}\rho\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{\mu}\rho x)^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right) = \rho e^{(\rho-1)/\mu x},
\end{aligned}$$

und das bedeutet, dass die Cramér-Schätzung (4.35) exakt ist. Aus (4.35) folgt, dass die RuinWS umso größer ist, je größer ρ ist, was man auch an der Abbildung 4.10 erkennt. Für die Anfangsrisikoreserve $u = 10$ ist für $\rho = 1/2$ die RuinWS sehr gering, was auch die zugehörige Realisierung von X zeigt. Für $\rho = 3/4$ ist $\psi(10)$ größer als 0.3 und die zugehörige Realisierung überschreitet die Schranke $u = 10$ sogar mehrfach. Für die Lundberg-Konjugation gilt in diesem Fall: $M_F(\kappa_L) = 1/(1-\mu\kappa_L) = 1/\rho$ und der assoziierte Prozess X^{κ_L} hat daher die Poisson-Rate $\lambda_{\kappa_L} = \lambda/\rho = \gamma/\mu$ und die Sprungverteilung

$$F_{\kappa_L}(dx) = \frac{e^{\kappa_L x}}{M_F(\kappa_L)}F(dx) = \rho e^{(1-\rho)/\mu x}e^{-(1/\mu)x}\,dx = \rho e^{-(\lambda/\gamma)x}\,dx.$$

Die Verteilung der Ruinzeit bzw. des Prozesses X ist inbesondere in dem Fall von Interesse, in dem Ruin eintritt, wobei für eine große Anfangsrisikoreserve u die Bedingung $\{\tau(u) < \infty\}$ ein seltenes Ereignis ist. Das folgende Theorem beschreibt für großes u das Verhalten der Ruinzeit auf $\{\tau(u) < \infty\}$ und das Pfadverhalten des Prozesses entlang der Pfade, die zum Ruin führen. Für den Schadenzahlprozess N ist dabei $N_{\tau(u)}$ der Index des Schadens, der den Ruin verursacht.

Theorem 4.3.6 *(Asmussen [3], Theorem IV.4.1, Korollar IV.7.3)*
Unter der Cramér-Lundberg Bedingung gelten folgende Aussagen.

(a) Für alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\tau(u)}{u} - \frac{1}{\kappa_L\mu^*}\right| > \epsilon \,\middle|\, \tau(u) < \infty\right) \to 0,\ u \to \infty. \tag{4.36}$$

Für die RuinWS in endlicher Zeit gilt:

$$\frac{\psi(u,mu)}{\psi(u)} \to \begin{cases} 0 & ,\ \text{wenn } m < 1/(\kappa_L\mu^*), \\ 1 & ,\ \text{wenn } m > 1/(\kappa_L\mu^*), \end{cases} \quad u \to \infty. \tag{4.37}$$

(b) Sei λ_{κ_L} die Poisson-Rate und F_{κ_L} die Sprungverteilung des assoziierten Prozesses X^{κ_L}. Für $x > 0$ und für alle $\epsilon > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N_{\tau(u)}}\sum_{k=1}^{N_{\tau(u)}} 1_{\{W_k \le x\}} - \left(1 - e^{-\lambda_{\kappa_L}x}\right)\right| > \epsilon \,\middle|\, \tau(u) < \infty\right) \to 0,\ u \to \infty, \tag{4.38}$$

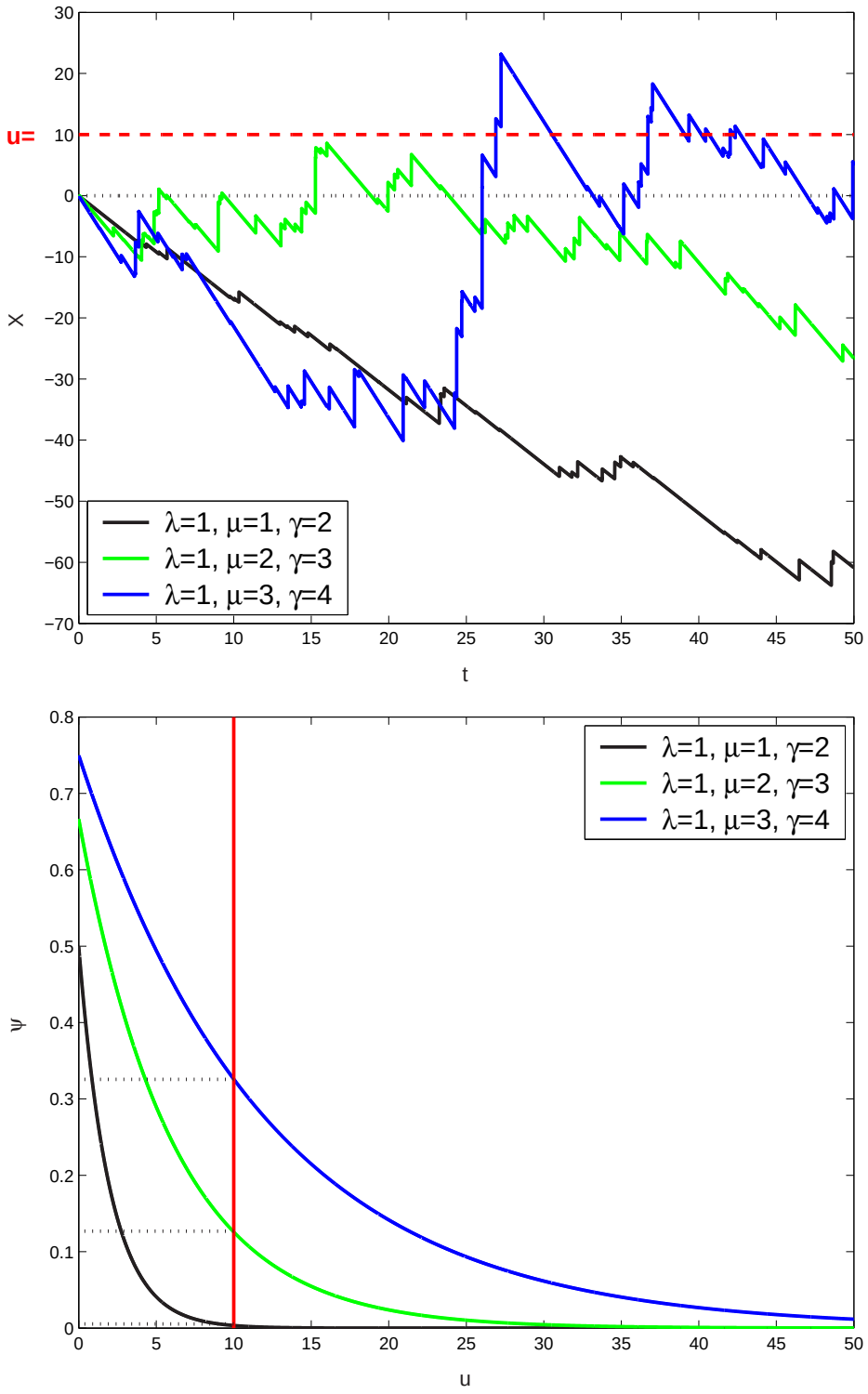

Abbildung 4.10: Das obere Bild zeigt Realisierungen des klassischen Verlustprozesses $X = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma t,\ t \geq 0$, für exponential verteilte Schäden mit unterschiedlichen Erwartungswerten und Prämienraten. Das untere Bild zeigt die dazugehörigen RuinWSen. Man erkennt, dass die RuinWS umso größer ist, je größer ρ ist.

und

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N_{\tau(u)}}\sum_{k=1}^{N_{\tau(u)}} 1_{\{Y_k\le x\}} - F_{\kappa_L}(x)\right| > \epsilon \middle| \tau(u)<\infty\right) \to 0,\ u\to\infty. \tag{4.39}$$

Theorem 4.3.6 beweist man ebenfalls mit einem exponentiellen Maßwechsel, siehe Asmussen [3], Theorem IV.4.1 und Korollar IV.7.3.
$1/(\kappa_L\mu^*)$ kann man nach (4.36) als den Zeitpunkt interpretieren, zu dem der Ruin "am wahrscheinlichsten" geschieht, wenn für eine große Anfangsrisikoreserve u der Ruin eintritt. (4.38) bedeutet, dass die Exponentialverteilung der Zwischenschadenzeiten eher den Parameter λ_{κ_L} als λ hat, wenn für eine große Anfangsrisikoreserve u der Ruin eintritt. Analog zeigt (4.39), dass für eine große Anfangsrisikoreserve u die Verteilung der Schäden, die zum Ruin führen, eher F_{κ_L} als F entspricht. Daher bedeutet Theorem 4.3.6, dass sich der Prozess $(X_t)_{0\le t<\tau(u)}$ auf $\{\tau(u)<\infty\}$ für große u wie der assoziierte Prozess X^{κ_L} verhält, d.h. die Verteilung auf $\{\tau(u)<\infty\}$ eines Pfades, der zum Ruin führt, konvergiert im Sinne der endlich-dimensionalen Verteilungen gegen die unbedingte Verteilung von X^{κ_L}.
Damit ein Lundberg-Koeffizient κ_L überhaupt existieren kann, muss der Tail $\overline{F}$ exponentiell beschränkt sein. Das bedeutet, dass große Schäden sehr unwahrscheinlich auftreten, und daher wird die Cramér-Lundberg Bedingung (4.28) auch als *Small Claim-Bedingung* bezeichnet. Für F aus $\mathcal{L}^{(\alpha)},\ \alpha\ge 0$, hat M_{F_I} nach Theorem 2.4.7 eine rechte Singularität in α. Der Lundberg-Koeffizient κ_L existiert in solchen Fällen nur dann, wenn gilt:

$$M_{F_I}(\alpha)\ge 1+r=\gamma/\lambda\mu=1/\rho \overset{\text{Th 2.4.7(c)}}{\Leftrightarrow} M_F(\alpha)\ge 1+\alpha\gamma/\lambda.$$

Für $\alpha=0$ ist M_{F_I} auf $(0,\infty)$ nicht definiert und (4.28) kann nicht erfüllt werden. Wenn $\alpha>0$ ist, kann hingegen ein Lundberg-Koeffizient existieren. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von κ_L ist, dass ein $x_0\ge 0$ existiert, so dass $q_F(x)\le\alpha,\ \forall x\ge x_0$, ist und $M_F(\alpha)=\infty$ gilt, siehe Klüppelberg [25], Lemma 5.

4.3.3 Der Nicht-Cramér Fall

Für SchadenhöhenVFen F aus $\mathcal{S}^{(\alpha)},\ \alpha\ge 0$, die die *Nicht-Cramer Bedingung*

$$M_{F_I}(\alpha)<\frac{1}{\rho}\ \Leftrightarrow\ M_F(\alpha)<1+\alpha\gamma/\lambda, \tag{4.40}$$

erfüllen, ist keine Cramér-Lundberg Approximation möglich, aber man kann ebenfalls Aussagen über die Asymptotik der RuinWS machen.

Der Fall: $\alpha=0$

Theorem 4.3.7 *(Embrechts et al. [17], Theorem 1.3.6, Theorem 1.3.8, Korollar 1.4.5, Klüppelberg [25], Korollar)*
Wenn $F\in\mathcal{S}^*$ ist, dann gilt:

$$\psi(u)\sim\frac{1}{r}\overline{F}_I(u)=\frac{\mu}{\gamma/\lambda-\mu}\overline{F}_I(u)=\frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}_I(u)=\frac{1}{\gamma/\lambda-\mu}\int_u^\infty\overline{F}(y)\ dy,\ u\to\infty. \tag{4.41}$$

Beweis:
Wenn $F \in \mathcal{S}^*$ ist, dann gilt: $F_I \in \mathcal{S}$ und $\overline{F} \in \mathcal{S}d$, siehe Abschnitt 2.4.3.
Schritt 1:
Zunächst wird eine Tailäquivalenz zwischen $\overline{F}$ und η gezeigt.

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{\eta'(u)}{\overline{F}(u)} &= \lim_{u\to\infty} (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^n \frac{\overline{F^{n\otimes}}(u)}{\overline{F}(u)} \\
&\overset{(\star)}{=} (1-\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\mu}\right)^n n\mu^{n-1} = (1-\rho)\frac{\rho}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} \\
&= (1-\rho)\frac{\rho}{\mu}\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\gamma/\lambda - \mu},
\end{aligned}$$

wobei $(\star)$ mit Lemma 2.4.12 und dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue folgt. Es gilt sogar die Äquivalenz:

$$F \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \eta'(u) \sim \frac{\overline{F}(u)}{\gamma/\lambda - \mu},\ u \to \infty,$$

wenn $\lim_{x\to\infty} q_F(x) = 0$ gilt, siehe Klüppelberg [25], Theorem 4.
Schritt 2:
Mit der Regel von l'Hospital gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\int_u^\infty \eta'(y)\ dy}{\int_u^\infty \overline{F}(y)\ dy} = \lim_{u\to\infty} \frac{\eta'(u)}{\overline{F}(u)} = \frac{1}{\gamma/\lambda - \mu}$$

und damit erhält man:

$$\psi(u) = \int_u^\infty \eta'(y)\ dy \sim \frac{1}{\gamma/\lambda - \mu} \int_u^\infty \overline{F}(y)\ dy,\ u \to \infty.$$

□

(4.41) erhält man auch aus dem allgemeineren Ergebnis von Veraverbeke über das asymptotische Verhalten der Wiener-Hopf Faktoren, siehe Veraverbeke [31], Theorem 2B. In Theorem 5.4.3 wird eine Tailäquivalenz analog zu (4.41) für das allgemeine Modell und $\alpha \geq 0$ bewiesen. Mit Proposition 2.4.13 sind in diesem Fall folgende Aussagen äquivalent:

(a) $F_I \in \mathcal{S}$,

(b) $1 - \psi(u) \in \mathcal{S}$,

(c) $\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F}_I(u)} = \frac{1}{r} = \frac{\lambda\mu}{\gamma-\lambda\mu} = \frac{\rho}{1-\rho}$,

was auch aus den Ergebnissen von Embrechts und Veraverbeke über die Asymptotik der RuinWS im Andersen Modell folgt, siehe [18], Korollar 6.1. (4.41) hat nicht die exponentielle Struktur der Cramér-Lundberg Approximation (4.29) und, weil ψ asymptotisch äquivalent zum subexponentiellen Tail $\overline{F}_I$ ist, fällt ψ damit langsamer als im Cramér-Fall.

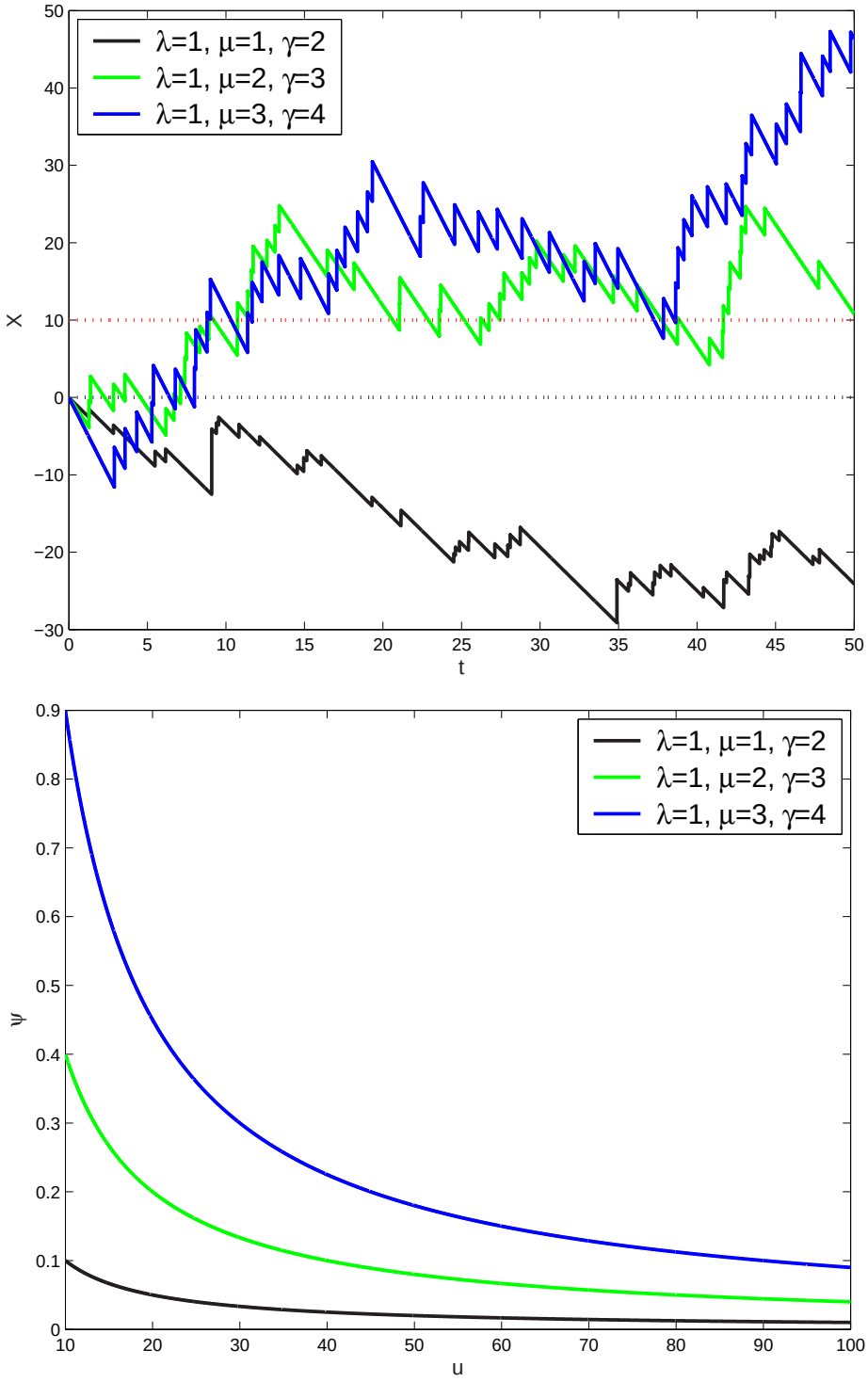

Abbildung 4.11: Das obere Bild zeigt Realisierungen des klassischen Verlustprozesses $X = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma t,\ t \geq 0$, für Pareto-verteilte Schäden mit unterschiedlichen Erwartungswerten und Prämienraten. Das untere Bild zeigt die Abschätzungen der dazugehörigen RuinWSen. Man erkennt, dass die RuinWS umso größer ist, je größer ρ ist.

Beispiel 4.3.8 (Pareto-verteilte Schäden: Embrechts und Veraverbeke [18])
Seien die Schäden Pareto-verteilt mit Paramter $a > 0$ und $b > 1$, dann ist

$$F'(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{a}{x}\right)^{b+1} 1_{[a,\infty)}(x)$$

und der Tail

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^{b} 1_{[a,\infty)}(x).$$

Der Parameter a bestimmt dabei den linken Endpunkt der Pareto-Dichte und der Parameter b die Form der Pareto-Dichte. Mit dem Erwartungswert $\mu = a/(b-1)$ folgt in diesem Fall aus Theorem 4.3.7:

$$\begin{aligned}
\psi(u) &\sim \frac{1}{\gamma/\lambda - a/(b-1)} \int_u^\infty \left(\frac{a}{t}\right)^b 1_{[a,\infty)}(t)\ dt \\
&= \frac{1}{\gamma/\lambda - a/(b-1)} \cdot a^b \frac{1}{u^{b-1}(b-1)} \\
&= \frac{a}{(b-1)(\gamma/\lambda - a)} \left(\frac{a}{u}\right)^{b-1},\ u \to \infty. \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

Abbildung 4.11 zeigt diese Abschätzung der RuinWS für $a = 1, b = 2, \lambda = 1, \gamma = 2$, $a = 2, b = 2, \lambda = 1, \gamma = 3$ und $a = 3, b = 2, \lambda = 1, \gamma = 4$. Aus (4.3.7) folgt, dass die RuinWS umso größer ist, je größer ρ ist, was man in Abbildung 4.11 erkennt. Für exponential verteilte Schäden ist die RuinWS ebenfalls umso größer, je größer ρ ist, siehe Beispiel 4.3.5. Für die jeweiligen Parameterkonstellationen zeigt das obere Bild in Abbildung 4.11 Realisierungen des klassischen Verlustprozesses X. Am Vergleich der Abbildungen 4.10 und 4.11 sieht man auch, dass die RuinWS für Pareto-verteilte Schäden wesentlich langsamer fällt als für exponential verteilte Schäden, weil die Pareto-Verteilung heavy-tailed ist. Daher sind sehr große Schäden wahrscheinlicher, was in sehr großen Sprüngen von X resultiert. Diese Heavy-Tailedness der Pareto-Verteilung erkennt man auch in Abbildung 4.12, die jeweils 15 Realisierungen des klassischen Risikomodells für exponential verteilte und Pareto-verteilte Schäden für $\lambda = 1$, $\mu = 1$ und $\gamma = 2$ gegenüberstellt. Während für exponential verteilte Schäden ein Ruin fast unmöglich erscheint, ist er für Pareto-verteilte Schäden auch für große Anfangsrisikoreserven wahrscheinlich.

Um die Asymptotik der Verteilung von $\tau(u)$ und $X_{\tau(u)} - u$ auf $\{\tau(u) < \infty\}$ im subexponentiellen Fall zu beschreiben, benötigt man im Folgenden eine ZV V_α, die die verallgemeinerte Pareto-Verteilung hat, d.h.

$$\overline{G}_\alpha(x) = \mathbb{P}(V_\alpha > x) = \begin{cases} (1 + x/\alpha)^{-\alpha} & , \text{ wenn } \alpha < \infty, \\ e^{-x} & , \text{ wenn } \alpha = \infty, \end{cases} \quad x > 0,$$

und eine ZV T_α auf dem gleichen Wraum, so dass $\mathbb{P}(V_\alpha > x, T_\alpha > y) = \overline{G}_\alpha(x+y)$ gilt. Desweiteren bezeichne $||\cdot||_{\mathrm{TV}}$ die totale Variationsdistanz zweier Wmaße und

$$\delta(z) := \sup\{t > 0 : X_t = -z\}$$

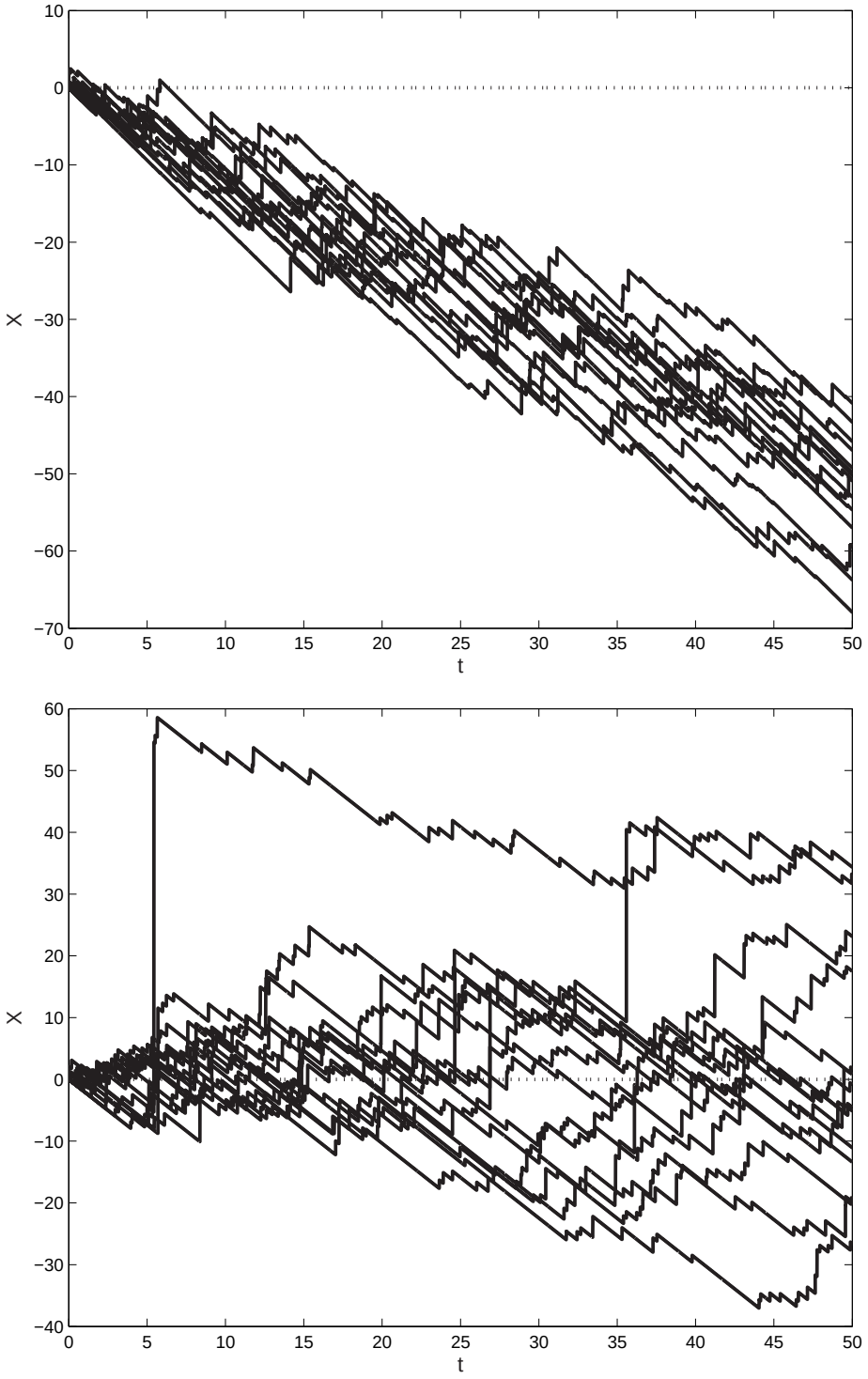

Abbildung 4.12: Das obere Bild zeigt 15 Realisierungen des klassischen Risikomodells für exponential verteilte Schäden für die Parameter $\lambda = 1, \mu = 1$ und $\gamma = 2$. Das untere Bild zeigt 15 Realisierungen des klassischen Risikomodells für Pareto-verteilte Schäden für die Parameter $a = 1, b = 2, \lambda = 1$ und $\gamma = 2$.

sei der letzte Zeitpunkt, zu dem X das Niveau $-z$ unterschreitet. Man beachte im Folgenden, dass Verteilungen von $\mathcal{S}$ in den Anziehungsbereichen von zwei unterschiedlichen Verteilungen liegen können, siehe Abschnitt 2.4.3, und daher Fallunterscheidungen in der Asymptotik nötig sind.

Theorem 4.3.9 *(Asmussen und Klüppelberg [4], Theorem 1.1, Theorem 1.3, Korollar 1.5, Korollar 1.6)*

(a) Wenn $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ für $\alpha \in (0,\infty)$ ist oder wenn $F \in MDA(\Lambda)$ und $F_I \in \mathcal{S}$ ist, dann gilt für alle $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\tau(u)}{a(u)} - \frac{V_\alpha}{1-\rho}\right| > \epsilon \middle| \tau(u) < \infty\right) \quad \to 0 \quad , \ u \to \infty,$$
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_{\tau(u)} - u}{a(u)} - T_\alpha\right| > \epsilon \middle| \tau(u) < \infty\right) \quad \to 0 \quad , \ u \to \infty,$$

wobei $a(u) \sim \mu\overline{F}_I(u)/\overline{F}(u),\ u \to \infty$, ist.

(b) Wenn $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ ist für $\alpha \in (0,\infty)$, dann gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u, ut_*)}{\psi(u)} = 1 - (1 + (1-\rho)t_*)^{-\alpha}.$$

Wenn $F \in MDA(\Lambda)$ und $F_I \in \mathcal{S}$ ist, dann gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u, a(u)t_*)}{\psi(u)} = 1 - e^{-(1-\rho)t_*},$$

wobei $a(u) \sim \mu\overline{F}_I(u)/\overline{F}(u)$ ist.

(c) Wenn $F_I \in \mathcal{S}$ ist, dann gilt für alle $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(|g(u,Z)| > \epsilon \middle| \tau(u) < \infty\right) \to 0,\ u \to \infty,$$

wobei $g(u,z) = \left|\left|\mathbb{P}\left(X_{[0,\tau(u))} \in \cdot \middle| \tau(u) < \infty, -X_{\tau(u)^-} = z\right) - \mathbb{P}\left(X_{[0,\delta(z))} \in \cdot\right)\right|\right|_{TV}$ und Z eine ZV mit der Verteilung von $-X_{\tau(u)^-}$ auf $\{\tau(u) < \infty\}$ ist.

(d) Wenn $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ für ein $\alpha \in (0,\infty)$, dann gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau(u)} - X_{\tau(u)^-}}{u} > x \middle| \tau(u) < \infty\right) = \left(1 + \alpha(1 - x^{-1})\right) x^{-\alpha},$$

wobei $X_{\tau(u)} - X_{\tau(u)^-}$ die Größe des Schadens ist, der den Ruin verursacht. Wenn $F \in MDA\ (\Lambda)$ und $F_I \in \mathcal{S}$ ist, dann gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{\tau(u)} - X_{\tau(u)^-} - u}{a(u)} > x \middle| \tau(u) < \infty\right) = (1+x)e^{-x},$$

wobei $a(u) \sim \mu\overline{F}_I(u)/\overline{F}(u)$ ist.

Man beachte, dass für $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ mit Karamatas Theorem A.3.1 gilt: $a(u) \sim u/\alpha$. Nach Aussage 4.3.9(a) konvergiert im Nicht-Cramér Fall $\tau(u)/a(u)$ auf $\{\tau(u) < \infty\}$ fast sicher gegen eine ZV, was sich qualitativ vom Cramér-Fall unterscheidet, in dem $\tau(u)/u$ auf $\{\tau(u) < \infty\}$ fast sicher gegen den festen Wert $1/(\kappa_L \mu^*)$ konvergiert, siehe Theorem4.3.6(a). Diesen Unterschied erkennt man auch beim Vergleich der RuinWS in endlicher Zeit, da $\psi(u, ut_*)/\psi(u)$ im Cramér-Fall nur gegen 0 oder 1 konvergieren kann für $u \to \infty$, siehe Theorem 4.3.6(a), und im Nicht-Cramér Fall gegen $1-(1+(1-\rho)t_*)^{-\alpha}$ bzw. $1 - e^{-(1-\rho)t_*}$. Aussage 4.3.9 (c) bedeutet, dass die Verteilung von $(X_t)_{0 \le t < \tau(u)}$ unter der Bedingung $\{\tau(u) < \infty, -X_{\tau(u)^-} = Z\}$ gegen die unbedingte Verteilung von $(X_t)_{0 \le t < \delta(u)}$ konvergiert für $u \to \infty$, d.h. für großes u verhalten sich die Pfade, die zum Ruin führen, wie der Prozess X bis zur letzten Unterschreitung des Niveaus $-X_{\tau(u)^-}$. Das unterscheidet sich ebenfalls qualitativ vom Cramér-Fall, in dem sich die Verteilung von $(X_t)_{0 \le t < \tau(u)}$ auf $\{\tau(u) < \infty\}$ der Verteilung des assoziierten Prozesses X^{κ_L} annähert.
Das folgende Theorem beschreibt die asymptotische Verteilung des größten Schadens vor dem Ruin $Y_{\max}(u) := \max_{1 \le i < N_{\tau(u)}} Y_i$.

Theorem 4.3.10 *(Asmussen und Klüppelberg [4], Theorem 3.7)*

(a) Wenn $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha-1}$ ist für $\alpha \in (0, \infty)$, dann gilt:

$$\lim_{u \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_{\max}(u)}{u^{1/\alpha}} \le x \middle| \tau(u) < \infty \right) = \int_0^\infty \exp\left\{ -\frac{\lambda}{(\alpha-1)(1-\rho)} x^{-\alpha} z \right\} \left(1 + \frac{z}{\alpha}\right)^{-\alpha-1} dz, \ x \ge 0.$$

(b) Wenn $F \in MDA(\Lambda)$ und $F_I \in \mathcal{S}$ ist, dann gilt:

$$\lim_{u \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_{\max}(u) - d(a(u))}{c(a(u))} \le x \middle| \tau(u) < \infty \right) = \left(1 + \frac{\lambda}{1-\rho} e^{-x}\right)^{-1}, \ x \in \mathbb{R},$$

wobei c und d Funktionen sind, die die Normierungskonstanten von Y_i interpolieren, siehe Abschnitt 2.4.3.

Diese Verteilung in Theorem 4.3.10 ist kleiner als die verallgemeinerte Pareto-Verteilung und daran erkennt man, dass das Maximum der Schäden vor dem Ruin für eine große Anfangsrisikoreserve u kleiner ist als der Schaden, der den Ruin verursacht. Das bestärkt die allgemeine Vermutung, dass das seltene Ereignis "Ruin für großes u" als Folge eines großen Schadens eintritt.

Der Fall: $\alpha > 0$

Theorem 4.3.11 *(Klüppelberg [24], Theorem 4.1, Korollar 3.2)*
Wenn $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist und die Nicht-Cramér Bedingung (4.40) gilt, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$.

(b) $\eta'(x) \sim \frac{\lambda(1-\rho)}{\gamma} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha\gamma}(M_F(\alpha) - 1)\right)^{-2} \overline{F}(x), x \to \infty$, was $\eta \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ impliziert.

(c)

$$\psi(x) \sim \frac{\rho(1-\rho)}{\alpha\mu\left(1-\rho M_{F_I}(\alpha)\right)^2}\overline{F}(x),\ x \to \infty. \tag{4.43}$$

Beweis:
Das Theorem folgt aus allgemeineren Ergebnissen über Dichten von Zufallssummen, siehe Klüppelberg [24], Theorem 3.2 und Korollar 3.3. □

Beispiel 4.3.12 (Schäden mit der verallgemeinerten inversen Gaußverteilung: Klüppelberg [25], S.284, Embrechts [15])
Wenn die Schäden die verallgemeinerte inverse Gaußverteilung haben, dann ist der Tail

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^{d/2} (2K_d(\sqrt{ab}))^{-1} \int_x^\infty y^{d-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{y} + by\right)\right\}\ dy,$$

wobei K_d die modifizierte Besselfunktion der dritten Gattung mit Index d ist. Die möglichen Parametermengen sind

$$\Theta_d = \begin{cases} \{(a,b) : a \geq 0, b > 0\} & ,\ \textit{für } d \geq 0, \\ \{(a,b) : a > 0, b > 0\} & ,\ \textit{für } d = 0, \\ \{(a,b) : a > 0, b \geq 0\} & ,\ \textit{für } d > 0, \end{cases}$$

und für $a = 0$ bzw. $b = 0$ interpretiert man die Normierungskonstanten als Grenzwerte. Es gilt: $M_F(b/2) = \infty,\ \forall d \geq 0$, und $F \in \mathcal{S}^{(b/2)},\ \forall d < 0$, siehe Embrechts [15], Theorem und Klüppelberg [24], Korollar 2.2. Für $d > 0$ folgt daher mit Theorem 4.3.11:

$$\psi(u) \sim Cu^{d-1} \exp\left\{-\frac{b}{2}u\right\},$$

wobei man die Konstante C berechnen kann, siehe Embrechts [15], S.543.

Im Folgenden betrachten wir die Irrfahrt

$$X_n^D := \sum_{i=1}^n (Y_i - \gamma W_i),\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.44}$$

mit $\mathbb{P}(X_0^D = 0) = 1$. X^D ist die zeitdiskrete Version des Verlustprozesses (4.6) und hat die Sprungverteilung F^D, d.h. $F^D(x) = \mathbb{P}(Y_1 - \gamma W_1 \leq x)$, siehe Abbildung 4.13. Die Lokalzeit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert man in diesem Fall als die Anzahl, wie oft nach n Schritten ein neues Maximum angenommen wird. Die aufsteigende Leiterzeit $(L_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert als

$$L_n^{-1} = \inf\{k \geq 1 : L_k = n\},\ n \in \mathbb{N},$$

und gibt die Anzahl der Schritte an, die man benötigt, um n neue Maxima zu erreichen, siehe Abbildung 4.14. Der aufsteigende Leiterhöhenprozess $(H_n^D)_{n\in\mathbb{N}}$ ist das nte neue Maxmimum von X^D und analog zum stetigen Modell bestehen zwischen F^D und dem Sprung-Maß F_{H^D} von H^D folgende asymptotische Beziehungen. Dabei ist $(\hat{H}_n^D)_{n\in\mathbb{N}}$ der absteigende Leiterhöhenprozess von X^D und $\hat{H}_n^D$ ist das nte neue Minimum von X^D.

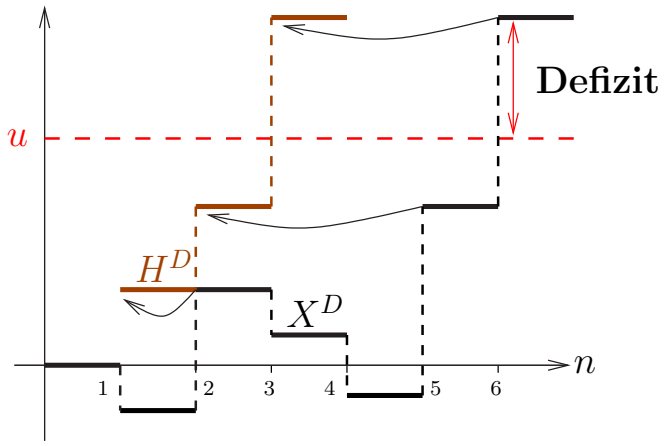

Abbildung 4.13: Die Irrahrt $(X_n^D)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\sum_{i=1}^n (Y_i - \gamma W_i))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die zeitdiskrete Version des klassische Verlustprozesses X aus (4.6) und H^D ist die Irrfahrt der neuen Maxima von X^D.

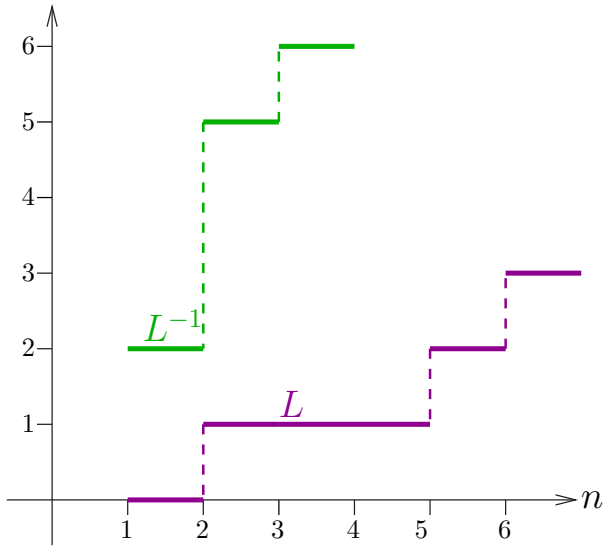

Abbildung 4.14: Lokalzeit L und aufsteigende Leiterzeit L^{-1}, die sich auf die Irrfahrt X^D aus Abbildung 4.13 beziehen.

Lemma 4.3.13 *(Bertoin und Doney [7], Lemma 1)*
Für $\alpha > 0$ gilt:

$$F^D \in \mathcal{L}^{(\alpha)} \Leftrightarrow F_{H^D} \in \mathcal{L}^{(\alpha)}. \tag{4.45}$$

Wenn (4.45) erfüllt ist, dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^D}(x)}{\overline{F}_{H^D}(x)} = 1 - \mathbb{E}\left[e^{\alpha \hat{H}^D}\right].$$

(4.45) wird in Kapitel 4 durch die Proposition 5.1.3 verallgemeinert und der Beweis von 4.3.13 ist analog zum Beweis von Proposition 5.1.3. Mit dem folgenden Theorem erhält man wie in den Theoremen 4.3.7 und 4.3.11 auch im zeitdiskreten Modell eine asymptotische Beziehung zwischen F_{H^D} und ψ.

Theorem 4.3.14 *(Bertoin und Doney [7], Theorem 1)*
Sei $0 < \alpha < \infty$, $\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_1^D}\right] < 1$ und $B := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n^D > 0)/n < \infty$. Wenn $F^D \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist, dann ist $\mathbb{P}(\overline{X^D}_\infty \in dx) \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ und es gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\overline{X}_\infty > u)}{\overline{F^D}(u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{\overline{F^D}(u)} = \frac{e^{-B}}{(1 - \mathbb{E}\left[e^{\alpha X_1^D}\right])(1 - \mathbb{E}\left[e^{\alpha H_1^D}\right])}.$$

Im Folgenden bezeichnet X^* die zu X^D asoziierte Irrfahrt mit SprungVF $F^*(dx) = e^{\alpha x}\, F^D(dx)$.

Proposition 4.3.15 *(Bertoin und Doney [7], Proposition 1)*
Sei $k \in \mathbb{N}$ und $g = g(x_1, \ldots, x_k)$ eine Borel beschränkte Funktion mit kompakten Träger. Setze $G := g(X_1^D, \ldots, X_k^D)$ und $G^* := g(X_1^*, \ldots, X_k^*)$ mit der Konvention, dass $G^* = 0$ ist, wenn X^* nach weniger als k Schritten gekillt wird. Wenn $\mathbb{P}(\overline{X^D} \in \cdot) \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$ ist, dann gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{E}\left[G | \overline{X^D}_\infty > u\right] = \mathbb{E}^*[G^*].$$

Diese Proposition zeigt, dass X^* auf $\{\overline{X^D}_\infty > u\}$ der Grenzwert von X ist im Sinne der vagen Konvergenz der endlich-dimensionalen Verteilungen. Dieses Verhalten entspricht im zeitstetigen Modell (4.6) dem Verhalten im Cramér-Fall, siehe Theorem 4.3.6(b).

Kapitel 5

Lévy-Prozesse in der Risikotheorie

In diesem Kapitel wird das Versicherungsrisikomodell aus Abschnitt 4.1 im Kontext allgemeiner Lévy-Prozesse untersucht, für die der Punkt 0 für $[0,\infty)$ regulär ist. In Abschnitt 5.1 werden zunächst die Grundlagen in diesem Fall zusammengefasst und der einfachste Fall in diesem Modell behandelt, wenn X spektral negativ ist. Desweiteren wird in 5.1.3 der Zusammenhang zwischen dem Lévy-Maß Π_X von X und dem Lévy-Maß $\Pi_{\mathcal{H}}$ von $\mathcal{H}$ beschrieben. In Abschnitt 5.2 werden gemeinsame Verteilungen von Ruingrößen behandelt, wobei in Abschnitt 5.2.1 die gemeinsame Verteilung von $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}$, $X_{\tau(u)}$ und $L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}$ und in Abschnitt 5.2.2 die Verteilung der 5 Ruingrößen aus Theorem 4.3.3 bestimmt wird. In Abschnitt 5.3 wird analog zu Abschnitt 4.3.2 die asymptotische RuinWS für den allgemeinen Verlustprozess X abgeschätzt, wenn X die Cramér-Bedingung erfüllt. Das Hauptinteresse dieses Kapitels gilt jedoch dem Nicht-Cramér Fall im allgemeinen Modell in Abschnitt 5.4, wenn $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{S}^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$, ist. Zunächst wird in Abschnitt 5.4.1 die asymptotische Beziehung zwischen $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}$ und ψ und die Asymptotik der Ruinzeit $\tau(u)$ beschrieben. In den Abschnitten 5.4.2 und 5.4.3 wird das asymptotische Verhalten von X auf $\{\tau(u) < \infty\}$ behandelt, wobei für den subexponentiellen Fall in Abschnitt 5.4.4 sogar schärfere Resultate gezeigt werden. In Abschnitt 5.4.5 werden die Resultate für spektral positive Lévy-Prozesse konkretisiert und anhand von zwei Beispielen veranschaulicht.

5.1 Das allgemeine Versicherungsrisikomodell

5.1.1 Die Grundlagen

Der Verlustprozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ aus (4.2) ist nicht mehr ein spektral positiver Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel $(\int_{(-1,1)} x\lambda\ F(dx) - \gamma, 0, \lambda F)$ wie in (4.6), sondern ein allgemeiner Lévy-Prozess mit charakteristischem Tripel (a, σ^2, Π_X), d.h.

$$\Psi_X(u) = -iau + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - e^{iux} + iux 1_{\{|x|<1\}}\right)\ \Pi_X(dx), \tag{5.1}$$

wobei der Gauß-Koeffizient $\sigma^2 \geq 0$ ist. Desweiteren setzten wir voraus:

$$\text{Für } X \text{ ist der Punkt 0 regulär für } [0,\infty). \tag{5.2}$$

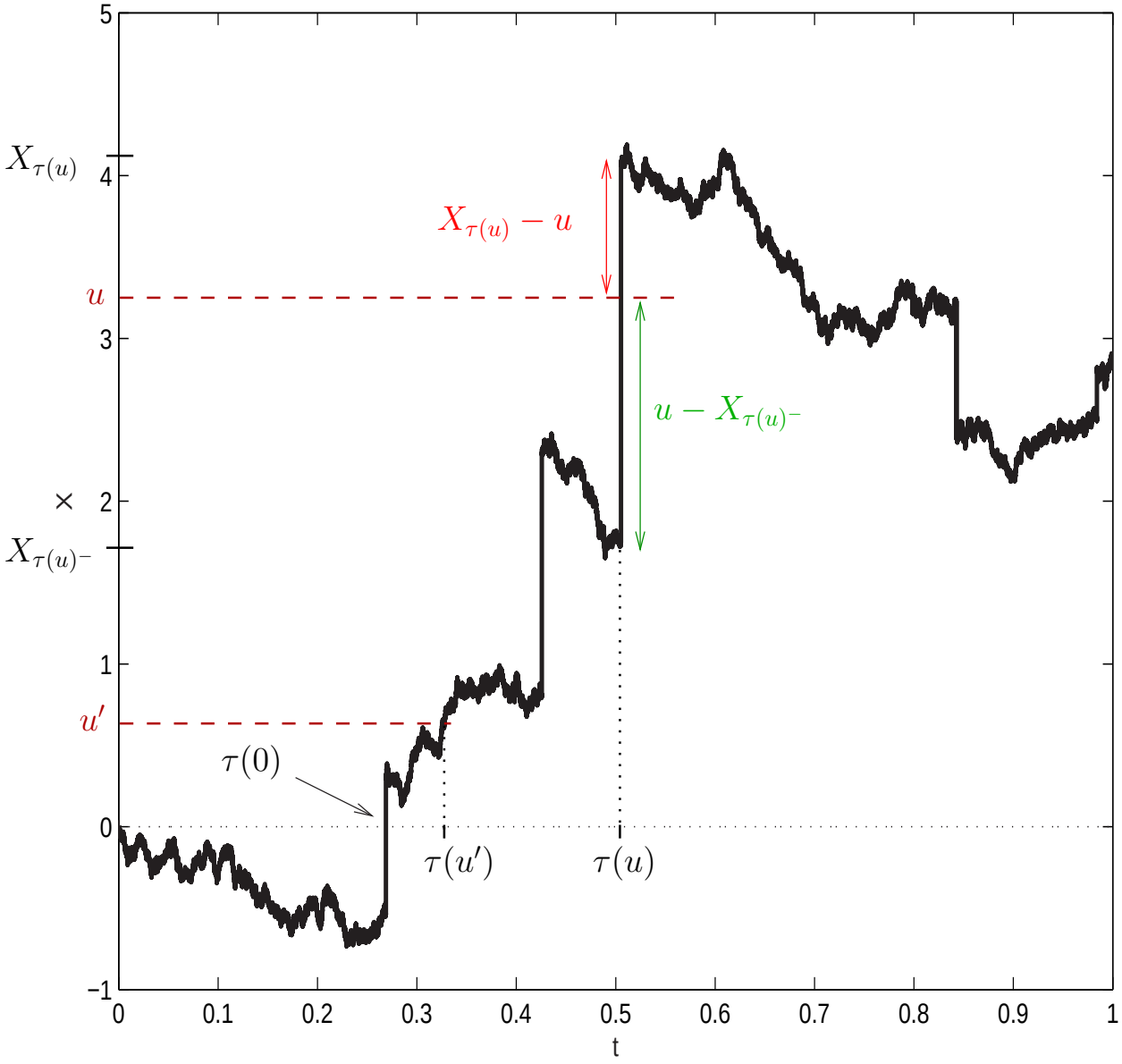

Abbildung 5.1: Der allgemeine Verlustprozess X kann sowohl kriechen als auch springen. Die Schranken 0 und u überquert er durch einen Sprung und über die Schranke u' kriecht er.

Das gilt nach Theorem 3.6.3 genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- X hat unbeschränkte Variation.
- X hat beschränkte Variation und Drift $D_X > 0$.
- X hat beschränkte Variation, Drift $D_X = 0$ und es gilt:

$$\int_{(0,1)} \frac{x\ \Pi_X(dx)}{\int_0^x \overline{\Pi}_X^-(y)\ dy} = \infty.$$

Damit ist in diesem Kapitel das klassische Modell ausgeschlossen, wenn X aus einem Subordinator und einem negativen Drift $-\gamma t$ besteht. Nach Theorem 3.6.2 existiert eine stetige Version der Lokalzeit und wir wählen die Lokalzeit gemäß Abschnitt 3.6.1. Außerdem wählen wir die Lokalzeit beim Maximum L und die Lokalzeit beim Minimum $\hat{L}$ in diesem Kapitel so, dass die Konstante k' in der Wiener-Hopf Faktorisierung (3.24) gleich 1 ist. Man beachte dabei, dass eine andere Lokalzeit L zu einer anderen Leiterzeit L^{-1} und damit zu einem anderen Leiterhöhenprozess H führt. Alle Ergebnisse in diesem Kapitel beziehen sich auf Lokalzeiten L und $\hat{L}$, für die $k' = 1$ ist, und müßten folglich bei einer anderen Normierung der Lokalzeit entsprechend angepaßt werden. Im Gegensatz zum klassischen Modell kann der Ruin jetzt auch dadurch eintreten, dass X über die Schranke u kriecht, wie Abbildung 5.1 zeigt. Im Folgenden wird angenommen, dass X analog zum klassischen Fall (4.6) fast sicher gegen $-\infty$ driftet, was der Nettoprofitbedingung 4.2.1 entspricht, d.h. die Prämien überwiegen die Schäden. Unter dieser Annahme ist nach Theorem 3.6.6(d) der bivariate Leiterprozess (L^{-1}, H) des Verlustprozesses X ein gestörter Subordinator, der mit Rate $q > 0$ gekillt wird, und das Erneuerungsmaß von H ist

$$V_H(dy) = \int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy)\ dt,\ y \geq 0, \tag{5.3}$$

wobei $\mathcal{H}$ ein ungestörter Subordinator ist. Im Gegensatz zum klassischen Fall ist wegen Voraussetzung (5.2) L fast sicher stetig und damit ist L^{-1} fast sicher streng monoton wachsend. Daher ist auch H fast sicher streng monoton wachsend und es gilt:

$$V_H(0) = \int_0^\infty \mathbb{P}(H_t \leq 0)\ dt = 0.$$

Der absteigende Leiterprozess $\hat{H}$ von X ist ungestört und hat nach (3.13) die Erneuerungsfunktion

$$V_{\hat{H}}(dy) := V_{-\hat{H}}(-dy) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\hat{H}_t \in dy)\ dt,\ y \leq 0.$$

Da X gegen $-\infty$ driftet, kann X kein Subordinator sein und es gilt: $\hat{H} \neq 0, V_{\hat{H}} \neq 0$ und $\Psi_{\hat{H}} \neq 0$. X kann jedoch spektral positiv sein und dieser Fall wird speziell in Abschnitt 5.4.5 behandelt und anhand von Beispielen veranschaulicht. Andererseits kann X im allgemeinen Modell auch spektral negativ sein, was den einfachsten Fall des Modell darstellt, der im Folgenden mit der Theorie aus Kapitel 3 vorab behandelt wird.

5.1.2 Der spektral negative Fall

Wenn X spektral negativ ist, dann gilt gemäß Abschnitt 3.6.3 fast sicher: $X_{\tau(u)} = u$ auf $\{\tau(u) < \infty\}$ für alle $u > 0$. Der Überschuss $X_{\tau(u)} - u$ ist damit fast sicher gleich 0 für alle Schranken $u \geq 0$ und die Überschussverteilung ist auf 0 konzentriert. Nach Abschnitt 3.6.1 ist die Lokalzeit $L_t := \overline{X}_t,\ t \geq 0$, und der gestörte Leiterprozess $(L_t^{-1}, H_t)_{t\geq 0}$ ist auf $\{t < L_\infty\}$ gleich $(\tau(t), t)_{t\geq 0}$. Der Leiterhöhenprozess H hat folglich den Laplace-Exponenten $\Phi_H(\lambda) = q + \lambda,\ \lambda \geq 0$, und die Erneuerungsfunktion $V_H(x) = 1/q \cdot (1 - e^{-qx}),\ x \geq 0$. Nach Theorem 3.6.10 gilt mit dem Laplace-Exponenten $\Xi_X(\lambda) := -\Psi_X(-i\lambda), \lambda \geq 0$, und dessen Rechtsinversen $\overleftarrow{\Xi}_X$ aus (3.17) für die Laplace-Transformierte von $L_u^{-1} = \tau(u)$ auf $\{\tau(u) < \infty\}$:

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau(u)} | \tau(u) < \infty\right] = e^{-u\overleftarrow{\Xi}_X(\lambda)},\ \lambda \geq 0. \tag{5.4}$$

Für $\overleftarrow{\Xi}_X$ gilt: $\Xi_X \circ \overleftarrow{\Xi}_X(\lambda) = \lambda,\ \lambda \geq 0$, und daher folgt aus (5.4) für $\lambda = 0$:

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = e^{-au},$$

wobei $a > 0$ die Gleichung $\Psi_X(-ia) = 0$ erfüllt.
Damit kann der spektral negative Fall im Weiteren ausgeschlossen werden und die Annahme

$$\lim_{t\to\infty} X_t \overset{\text{f.s.}}{=} -\infty \text{ und } \Pi_X((0,\infty)) > 0, \tag{5.5}$$

soll gelten.

5.1.3 Die Beziehung zwischen Π_X und $\Pi_{\mathcal{H}}$

Im klassischen Fall gilt nach (4.23):

$$\Pi_{\mathcal{H}}(u) = F_I(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u \overline{F}(x)\ dx = \frac{1}{\mu\lambda}\int_0^u \overline{\Pi}_X(x)\ dx,\ u \geq 0. \tag{5.6}$$

Dieser Zusammenhang wird unter Einbeziehung der Erneuerungsfunktion $V_{\hat{H}}$ durch folgende Faltungsidentität verallgemeinert.

Theorem 5.1.1 *(Vigon [32], Proposition 3.3)*
Für $u \in (0,\infty)$ gilt:

(a) $\overline{\Pi}_X^+(u) = \int_{(0,\infty)} \overline{\Pi}_{\hat{H}}(u-y)\ \Pi_{\mathcal{H}}(dy) + D_{-\hat{H}} \cdot \Pi'_{\mathcal{H}}(u)$, *wobei $\Pi'_{\mathcal{H}}$ die Dichte von $\Pi_{\mathcal{H}}$ ist. Diese Dichte existiert genau dann, wenn der Driftkoeffizient $D_{-\hat{H}} = D_{\tilde{H}}$ des Subordinators $-\hat{H} = \tilde{H}$ positiv ist.*

(b) $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = -\int_{(-\infty,0)} \overline{\Pi}_X^+(u-y)\ V_{\hat{H}}(dy)$.

Bemerkung 5.1.2
Wenn X spektral positiv ist, dann ist der duale Prozess $\hat{X}$ spektral negativ und nach Abschnitt 3.6.3 und (3.12) gilt, dass $\hat{H}_t = -t$ auf $\{\tau(t) < \infty\},\ t \geq 0$, ist und $V_{\hat{H}}(y) = -y, y \leq 0$. Damit vereinfacht sich Theorem 5.1.1 zu $\overline{\Pi}_X^+(u) = \Pi'_{\mathcal{H}}(u)$ und

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = \int_u^\infty \overline{\Pi}_X^+(y)\ dy < \infty,\ \forall u > 0. \tag{5.7}$$

(5.7) und (5.6) unterscheiden sich nur deshalb durch den Faktor $1/(\lambda\mu)$, da für das Resultat (5.6) in Kapitel 4 Lokalzeiten L und $\hat{L}$ verwendet wurden, die in der Wiener-Hopf Faktorisierung zu einer Konstante $k' = 1/(\lambda\mu)$ führen, siehe alternativer Beweis zu Theorem 4.3.1. Theorem 5.1.1 basiert hingegen auf Lokalzeiten, die so normiert sind, dass $k' = 1$ gilt, siehe Vigon [32], S.245.

Zwischen den Lévy-Maßen Π_X und $\Pi_{\mathcal{H}}$ gilt eine weitere Beziehung, die Lemma 4.3.13 für Lévy-Prozesse verallgemeinert. Dabei ist $\overline{\Pi}_X^+(x) = \Pi_X^+((x,\infty))$ und $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(x) = \Pi_{\mathcal{H}}((x,\infty))$ für $x > 0$.

Proposition 5.1.3 *(Klüppelberg et al. [26], Proposition 5.3)*
Sei $\alpha > 0$ fest und es gelte die Annahme (5.5). Dann gilt:

$$\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{L}^{(\alpha)} \;\Leftrightarrow\; \overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}^{(\alpha)}. \tag{5.8}$$

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, dann gilt:

$$\overline{\Pi}_X^+(u) \sim \Psi_{\hat{H}}(-i\alpha)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = \Psi_{\tilde{H}}(i\alpha)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = \Phi_{\tilde{H}}(\alpha)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u),\; u \to \infty. \tag{5.9}$$

Beweis:
$\Rightarrow$ Sei $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$. Mit Theorem 5.1.1(b) und partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mathcal{H}}((u,u+h)) &= \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) - \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+h) \\
&= -\int_{(-\infty,0)} \overline{\Pi}_X^+(u-y)\; dV_{\hat{H}}(y) + \int_{(-\infty,0)} \overline{\Pi}_X^+(u+h-y)\; dV_{\hat{H}}(y) \\
&= \int_{(-\infty,0)} \Pi_X((u-y,u+h-y))\; dV_{\hat{H}}(y) \\
&= \int_{(-\infty,0)} \Pi_X(u+h-y)\; dV_{\hat{H}}(y) - \int_{(-\infty,0)} \Pi_X(u-y)\; dV_{\hat{H}}(y) \\
&= [\Pi_X(u+h-y)V_{\hat{H}}(y)]_{-\infty}^0 + \int_{(-\infty,0)} V_{\hat{H}}(y)\; \Pi_X(u+h-dy) \\
&\quad - [\Pi_X(u-y)V_{\hat{H}}(y)]_{-\infty}^0 - \int_{(-\infty,0)} V_{\hat{H}}(y)\; \Pi_X(u-dy) \\
&= \int_{(0,\infty)} V_{\hat{H}}(-s)\; \Pi_X(u+h+ds) - \int_{(0,\infty)} V_{\hat{H}}(-s)\; \Pi_X(u+ds).
\end{aligned}$$

Weil $V_{\tilde{H}}(ds) = V_{\hat{H}}(-ds)$ ein Erneuerungsmaß ist, sind die Integranden auf der rechten Seite gleichmäßig beschränkt und mit der Eigenschaft (2.8) konvergiert $\Pi_X(u+ds)/\overline{\Pi}_X^+(u)$ schwach gegen die Exponentialverteilung mit Parameter α für $u \to \infty$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{\Pi_{\mathcal{H}}((u,u+h))}{\overline{\Pi}_X^+(u)} &= \int_{(0,\infty)} V_{\hat{H}}(-s)\alpha e^{-\alpha(h+s)}\; ds - \int_{(0,\infty)} V_{\hat{H}}(-s)\alpha e^{-\alpha s}\; ds \\
&= \alpha(e^{-\alpha h} - 1)\left(\int_0^\infty V_{\hat{H}}(-s)e^{-\alpha s}\; ds\right),\; h > 0.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite wegen (3.13) positiv ist, gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}((u,u+h))}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}((u,u+1))} = \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}((u,u+h))}{\overline{\Pi}_X^+(u)} \frac{\overline{\Pi}_X^+(u)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}((u,u+1))} = \frac{1-e^{-\alpha h}}{1-e^{-\alpha}}.$$

Das ist nach Lemma A.3.3 äquivalent zu $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$.
$\Leftarrow$ Sei umgekehrt $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$. Mit Theorem 5.1.1(a) gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_X^+(u) &= \int_{(u,\infty)} \overline{\Pi}_{\hat{H}}(u-y)\ \Pi_{\mathcal{H}}(dy) + D_{-\hat{H}} \cdot \Pi'_{\mathcal{H}}(u) \\
&= \int_{(u,\infty)} \overline{\Pi}_{\hat{H}}(u-y)\ d\left(\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) - \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(y)\right) + D_{-\hat{H}} \cdot \Pi'_{\mathcal{H}}(u) \qquad (5.10) \\
&\overset{\text{part. Integ.}}{=} \left[\ \overline{\Pi}_{\hat{H}}(u-y)(\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) - \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(y))\right]_{y=u}^{\infty} - \int_{(u,\infty)} \left(\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) - \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(y)\right)\ \overline{\Pi}_{\hat{H}}(u-dy) \\
&\quad + D_{-\hat{H}} \cdot \Pi'_{\mathcal{H}}(u) \\
&= \int_{(u,\infty)} \Pi_{\mathcal{H}}((u,y))\ \Pi_{\hat{H}}(u-dy) + D_{-\hat{H}} \cdot \Pi'_{\mathcal{H}}(u) \\
&= \int_{(-\infty,0)} \Pi_{\mathcal{H}}((u,u-y))\ \Pi_{\hat{H}}(dy) + D_{-\hat{H}} \cdot \Pi'_{\mathcal{H}}(u),\ u>0. \qquad (5.11)
\end{aligned}$$

Wenn man für $0 < h_1 < h_2$ beide Seite von (5.11) integriert, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_{u+h_1}^{u+h_2} \overline{\Pi}_X^+(z)\ dz &= \int_{u+h_1}^{u+h_2} \left(\int_{(-\infty,0)} \Pi_{\mathcal{H}}((z,z-y))\ \Pi_{\hat{H}}(dy) + D_{-\hat{H}} \cdot \Pi'_{\mathcal{H}}(z)\right)\ dz \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(-\infty,0)} \left(\int_{u+h_1}^{u+h_2} \Pi_{\mathcal{H}}((z,z-y))\ dz\right)\ \Pi_{\hat{H}}(dy) \\
&\quad + D_{-\hat{H}} \cdot (\Pi_{\mathcal{H}}(u+h_2) - \Pi_{\mathcal{H}}(u+h_1)) \\
&= \int_{(-\infty,0)} \left(\int_{h_1}^{h_2} \Pi_{\mathcal{H}}((u+z,u+z-y))\ dz\right)\ \Pi_{\hat{H}}(dy) \\
&\quad + D_{-\hat{H}} \cdot \left(\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+h_1) - \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+h_2)\right). \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

Aus der Annahme (5.54) folgt mit der Eigenschaft (2.8):

$$\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+z)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \le 2e^{-\alpha z},\ \forall u \ge u_0(z),$$

für ein hinreichend großes $u_0(z)$. Mit dem Satz von Lebesgue erhält man:

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \int_{h_1}^{h_2} \left(\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+z) - \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+z-y)\right)\ dz \\
&\overset{(2.8)}{=} \int_{h_1}^{h_2} \left(e^{-\alpha z} - e^{-\alpha(z-y)}\right)\ dz = (1-e^{\alpha y}) \int_{h_1}^{h_2} e^{-\alpha z}\ dz \\
&= \frac{1}{\alpha}\,(1-e^{\alpha y})\left(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}\right),
\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig in $y \leq 0$ ist. Wenn man (5.12) durch $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)$ teilt und den Grenzwert für $u \to \infty$ bildet, dann erhält man mit dem Satz von Lebesgue:

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty} \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{\overline{\Pi}_X^+(u+z)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \right) dz \\
&= \int_{(-\infty,0)} \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{\alpha y}\right) \left(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}\right) \Pi_{\hat{H}}(dy) + D_{-\hat{H}} \cdot \left(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha} \left(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}\right) \left(\int_{(-\infty,0)} \left(1 - e^{\alpha y}\right) \Pi_{\hat{H}}(dy) + D_{-\hat{H}} \cdot \alpha \right) \\
&\overset{(3.29)}{=} \frac{1}{\alpha} \left(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}\right) \Psi_{\hat{H}}(-i\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}\right) \Psi_{\tilde{H}}(i\alpha) \\
&\overset{(3.7)}{=} \frac{1}{\alpha} \left(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}\right) \Phi_{\tilde{H}}(\alpha). \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Abschließend nehmen wir eine beliebige Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ mit $u_n \to \infty,\ n \to \infty$, und eine Teilfolge $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{R}}$ mit $\tilde{u}_n \to \infty,\ n \to \infty$. Mit dem Satz von Helly, siehe Bauer [5], S.248, existiert der Grenzwert:

$$\lim_{\tilde{u}_n\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_X^+(\tilde{u}_n + z)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(\tilde{u}_n)} =: p(z) \geq 0,\ z \geq 0.$$

Mit Fatous Lemma, siehe Jacod [21], Theorem 9.1(e), gilt in (5.13):

$$\int_{h_1}^{h_2} p(z)\ dz \leq \lim_{\tilde{u}_n\to\infty} \int_{h_1}^{h_2} \frac{\overline{\Pi}_X^+(\tilde{u}_n + z)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(\tilde{u}_n)}\ dz = \frac{1}{\alpha} \left(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}\right) \Psi_{\hat{H}}(-i\alpha) < \infty,$$

und daran sieht man, dass die nicht wachsende Funktion $p(z)$ für $z > 0$ endlich ist. Mit der dominierten Konvergenz gilt in (5.13):

$$\int_{h_1}^{h_2} p(z)\ dz = \frac{1}{\alpha} \left(e^{-\alpha h_1} - e^{-\alpha h_2}\right) \Psi_{\hat{H}}(-i\alpha),$$

und mit Differentiation ergibt sich: $p(z) = e^{-\alpha z}\Psi_{\hat{H}}(-i\alpha),\ \forall z > 0$. Diese Gleichheit gilt auch für alle Teilfolgen $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{R}}$ und daher erhält man:

$$\overline{\Pi}_X^+(u+z) \sim e^{-\alpha z}\Psi_{\hat{H}}(-i\alpha)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u),\ u \to \infty.$$

Da $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ bzgl. Tailäquivalenz abgeschlossen ist, siehe Theorem 2.4.8(a), ist $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$ und (5.9) gilt. □

Auch für $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{L}$ gibt es eine Beziehung zu $\Pi_{\mathcal{H}}$. Dafür definieren wir

$$A_-(x) := \overline{\Pi}_X^-(1) + \int_1^x \overline{\Pi}_X^-(y)dy,\ x \geq 1,$$

wobei $\overline{\Pi}_X^-(x) = \Pi_X((-\infty, -x)),\ x \geq 0$, ist und "$\asymp$" die asymptotische Äquivalenz bezeichnet, siehe Definition 2.1.11.

Proposition 5.1.4 *(Klüppelberg et al. [26], Proposition 5.4)*
Es gelte die Annahme (5.5) und $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{L}$.

(a) Wenn $\int_1^\infty \overline{\Pi}_X^-(y)\ dy = \infty$ *ist, dann gilt:*

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \asymp \int_{(1,\infty)} \left(\frac{y}{A_-(y)}\right)\ \Pi_X(u+dy),\ u \to \infty. \tag{5.14}$$

(b) Wenn $\int_1^\infty \overline{\Pi}_X^-(y)\ dy < \infty$ *ist, dann gilt:*

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \asymp \int_{(u,\infty)} \overline{\Pi}_X^+(y)\ dy,\ u \to \infty. \tag{5.15}$$

Beweis:
Gemäß der Definition 2.1.10(b) gilt:

$$\overline{\Pi}_{\hat{H}}(x) = \overline{\Pi}_{\hat{H}}^-(x) = \Pi_{\hat{H}}((-\infty,-x)) = \Pi_{-\hat{H}}((x,\infty)) = \overline{\Pi}_{-\hat{H}}^+(x) = \overline{\Pi}_{-\hat{H}}(x),\ x > 0,$$

und, weil $\overline{\Pi}_{\hat{H}}(x) > 0$ für alle $x > 0$ gilt, ist

$$\hat{A}(x) := \int_0^x \overline{\Pi}_{\hat{H}}(y)\ dy = \int_0^x \overline{\Pi}_{-\hat{H}}(y)\ dy$$

für alle $x > 0$ positiv. Aus Theorem 5.1.1(b) erhält man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) &= -\int_{(-\infty,0)} \overline{\Pi}_X^+(u-y)\ V_{\hat{H}}(dy) \\
&= -\left[\overline{\Pi}_X^+(u-y)V_{\hat{H}}(y)\right]_{-\infty}^0 - \int_{(-\infty,0)} V_{\hat{H}}(y)\ \overline{\Pi}_X^+(u-dy) \\
&= \int_{(u,\infty)} V_{\hat{H}}(-(s-u))\ \Pi_X(ds),\ u > 0.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Mit Proposition 3.5.5(d) folgt für alle $y \geq 0$:

$$\begin{aligned}
V_{\hat{H}}(-y) &= V_{-\hat{H}}(y) \asymp \frac{1}{\Phi_{-\hat{H}}(1/y)} = \frac{y}{\Phi_{-\hat{H}}(1/y)\cdot y} \\
&\asymp \frac{y}{\int_0^y \overline{\Pi}_{-\hat{H}}(t)\ dt + D_{-\hat{H}}} = \frac{y}{\hat{A}(y) + D_{-\hat{H}}} \asymp \frac{y}{\hat{A}(y)},
\end{aligned} \tag{5.17}$$

wobei sich die dritte asymptotische Äquivalenz aus der Betrachtung der Fälle $\hat{A}(\infty) = \infty$ oder $\hat{A}(\infty) < \infty$ ergibt. Aus (5.16) und (5.17) erhält man:

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \asymp \int_{(u,\infty)} \left(\frac{y-u}{\hat{A}(y-u)}\right)\ \Pi_X(dy),\ u > 0. \tag{5.18}$$

Die Funktion

$$\frac{\hat{A}(x)}{x} = \int_0^x \frac{\overline{\Pi}_{\hat{H}}(y)}{x}\ dy = \int_0^1 \overline{\Pi}_{\hat{H}}(xs)\ ds$$

wächst nicht in x und konvergiert gegen 0 für $x \to \infty$. Für $x \downarrow 0$ hat sie einen positiven (möglicherweise unendlichen) Grenzwert und der Kehrwert $a_0 := \lim_{x\downarrow 0}\left(x/\hat{A}(x)\right)$ ist endlich (möglicherweise 0). Symmetrisch zu (5.16) gilt gemäß Vigon [32], Proposition 3.3:

$$\overline{\Pi}_{\hat{H}}(u) = \int_{(u,\infty)} V_H(y-u)\ |\overline{\Pi}_X^-(dy)|,\ u > 0. \tag{5.19}$$

Mit $V_H(y) \leq V_H(\infty) = 1/q$ ergibt sich aus (5.19) die Abschätzung:

$$\overline{\Pi}_{\hat{H}}(u) \leq \frac{1}{q}\overline{\Pi}_X^-(u)$$

und damit erhält man schließlich

$$\hat{A}(x) \leq \hat{A}(1) + \frac{1}{q}\int_1^x \overline{\Pi}_X^-(y)\ dy,\ x \geq 0. \tag{5.20}$$

1. Fall: $\int_1^x \overline{\Pi}_X^-(y)\ dy = \infty$
In diesem Fall ist die rechte Seite von (5.20) asymptotisch äquivalent zu $(1/q)\int_1^x \overline{\Pi}_X^-(y)\ dy$ für $x \to \infty$. Für eine umgekehrte Ungleichung wählen wir ein $x_0 \geq 1$ so, dass $V_H(x_0) \geq 1/(2q)$ gilt. Dann ergibt sich für $x > x_0$:

$$\begin{aligned}
\hat{A}(x) &= \hat{A}(1) + \int_1^x \overline{\Pi}_{\hat{H}}(z)\ dz \overset{(5.19)}{=} \hat{A}(1) + \int_1^x \int_{(z,\infty)} V_H(y-z)\ |\overline{\Pi}_X^-(dy)|\ dz \\
&\geq \hat{A}(1) + \int_{x_0}^x \int_{(2z,\infty)} V_H(x_0)\ |\overline{\Pi}_X^-(dy)|\ dz \\
&\geq \hat{A}(1) + \frac{1}{2q}\int_{x_0}^x \overline{\Pi}_X^-(2z)\ dz \asymp \int_1^x \overline{\Pi}_X^-(z)\ dz,\ x \to \infty.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Aus (5.20) und (5.21) bekommt man:

$$\hat{A}(x) \asymp \int_1^x \overline{\Pi}_X^-(y)\ dy \asymp A_-(x),\ x \to \infty, \tag{5.22}$$

und daher gilt: $k^- \cdot A_-(x) \leq \hat{A}(x) \leq k^+ \cdot A_-(x)$ für $0 < k^- \leq k^+ < \infty$, wenn $x \geq x_0 > 1$ ist. Mit partieller Integration in (5.18) folgt:

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \asymp a_0\overline{\Pi}_X^+(u) + \int_0^\infty \overline{\Pi}_X^+(u+y)\ d\left(\frac{y}{\hat{A}(y)}\right),\ u \geq 0. \tag{5.23}$$

Sei $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{L}$. Mit Fatous Lemma erhält man in (5.23) die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)}{\overline{\Pi}_X^+(u)} &\asymp a_0 + \lim_{u\to\infty}\int_0^\infty \frac{\overline{\Pi}_X^+(u+y)}{\overline{\Pi}_X^+(u)}\ d\left(\frac{y}{\hat{A}(y)}\right) \\
&\geq a_0 + \int_0^\infty\ d\left(\frac{y}{\hat{A}(y)}\right) = \lim_{y\to\infty}\frac{y}{\hat{A}(y)} = \infty,
\end{aligned}$$

und daraus folgt, dass der positive Tail $\overline{\Pi}_X^+(u)$ schneller gegen 0 geht als der Tail $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)$ für $u \to \infty$. Damit kann man weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}\int_{(u,u+x_0)} \left(\frac{y-u}{\hat{A}(y-u)}\right) \Pi_X(dy) &\leq \left(\frac{x_0}{\hat{A}(x_0)}\right) \Pi_X((u,u+x_0)) \\ &\leq \left(\frac{x_0}{\hat{A}(x_0)}\right) \overline{\Pi}_X^+(u) = o(\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)),\ u \to \infty. \quad (5.24)\end{aligned}$$

Für $u \to \infty$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) &\overset{(5.18),(5.24)}{\asymp} \int_{(u+x_0,\infty)} \left(\frac{y-u}{\hat{A}(y-u)}\right) \Pi_X(dy) \\ &\overset{(5.22)}{\asymp} \int_{(u+x_0,\infty)} \left(\frac{y-u}{A_-(y-u)}\right) \Pi_X(dy) \\ &\asymp \int_{(u+1,\infty)} \left(\frac{y-u}{A_-(y-u)}\right) \Pi_X(dy),\end{aligned}$$

was (5.14) beweist.
2. Fall: $\int_1^\infty \overline{\Pi}_X^-(y)\, dy < \infty$
(5.20) ergibt $\hat{A}(\infty) < \infty$ und damit folgt (5.15) aus (5.18). □

Bemerkung 5.1.5
Nach einem Ergebnis von Doney und Maller [14] ist das Integral auf der rechten Seite von (5.14) unter Annahme (5.5) endlich.

5.2 Die Verteilungen der Ruingrößen

5.2.1 Die Verteilungen von $X_{\tau(u)} - u$, $\tau(u)$, $L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}$ und $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}$

$X_{\tau(u)}$ bezeichnet den Wert von X beim Ruinzeitpunkt $\tau(u)$, $L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}$ ist ein Zeitpunktes, der mit der Leiterzeit kurz vor dem Ruin korrespondiert, und $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}$ ist die Position des Leiterhöhenprozesses zu diesem Zeitpunkt. Sei $T_H(u) := \inf\{t \geq 0 : H_t > u\}$ die Überschreitungszeit von H. Weil X genau dann u zum ersten Mal zum Zeitpunkt $\tau(u)$ überschreitet, wenn H das erste Mal u zum Zeitpunkt $T_H(u)$ überschreitet, gilt: $X_{\tau(u)} = H_{T_H(u)}$, $T_H(u) = \inf\{t \geq L_{\tau(u)} : X_{L_t^{-1}} > u\} = L_{\tau(u)}$ und $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} = H_{L_{\tau(u)-}} = H_{T_H(u)-}$. Da $H_t = X_{L_t^{-1}}$ auf $\{t < L_\infty\}$ ein Subordinator ist, ist die gemeinsame Verteilung von $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} = H_{T_H(u)-}$ und $X_{\tau(u)} = H_{T_H(u)}$ nach Proposition 3.6.9(a):

$$\mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \in dy, X_{\tau(u)} \in dz\right) = V_H(dy)\Pi_{\mathcal{H}}(dz-y).$$

Um die Verteilung aller 3 Größen zu bestimmen, muss man Proposition 3.6.9 erweitern, indem man analog zu seinem Beweis vorgeht. Dafür braucht man eine Identität, die analog ist zu

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}\right) g\left(X_{\tau(u)}\right)\right] = \int_0^u f(y) \int_{u-y}^{\infty} g(z+y)\ \Pi_{\mathcal{H}}(dz)\ V_{\mathcal{H}}(dy),$$

wobei f und g nicht-negative, messbare Funktionen sind mit $g(u) = 0$.

Theorem 5.2.1 *(Klüppelberg et al. [26], Theorem 2.4)*
Sei $u > 0$ fest. f, g und h seien beschränkte, positive und messbare Funktionen, so dass $g(u) = 0$ ist. Definiere

$$V^h(dy) := \int_0^{\infty} e^{-qt} \int_{[0,\infty)} h(\phi)\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_{t^-} \in dy, \mathcal{L}_t^{-1} \in d\phi)\ dt,\ \ y \geq 0.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[f\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}\right) g\left(X_{\tau(u)}\right) h\left(L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}\right),\ \tau(u) < \infty\right] \\
&\quad = \int_{(0,u]} f(y) \int_{(u-y,\infty)} g(y+s)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds)\ V^h(dy). \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

Beweis:
Auf $\{t < L_\infty\}$ ist H ein Subordinator und $L_\infty \overset{d}{=} e^q \sim \text{expo}(q),\ q > 0$. Mit $T_H(u) = L_{\tau(u)}$ gilt: $\{\tau(u) < \infty\} \overset{\text{f.s.}}{=} \{T_H(u) < L_\infty\}$. Wir beginnen mit der linken Seite von (5.25) und zerlegen das Ereignis $\{T_H(u) < L_\infty\}$ in die Teilereignisse $\{T_H(u) = t\}$ für $0 < t < L_\infty$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[f\left(X_{L^{-1}_{T_H(u)-}}\right) g\left(H_{T_H(u)}\right) h\left(L^{-1}_{T(u)^-}\right), T_H(u) < L_\infty\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\sum_{0<t<L_\infty} f(H_{t^-}) g(H_{t^-} + \Delta H_t) h(L^{-1}_{t^-}) 1_{\left\{H_{t^-} \leq u < H_{t^-} + \Delta H_t\right\}}\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} q e^{-qy} \sum_{0<t<y} f(\mathcal{H}_{t^-}) g(\mathcal{H}_{t^-} + \Delta\mathcal{H}_t) h(\mathcal{L}^{-1}_{t^-}) 1_{\{\mathcal{H}_{t^-} \leq u < \mathcal{H}_{t^-} + \Delta\mathcal{H}_t\}}\ dy\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\sum_{t>0} e^{-qt} f(\mathcal{H}_{t^-}) g(\mathcal{H}_{t^-} + \Delta\mathcal{H}_t) h(\mathcal{L}^{-1}_{t^-}) 1_{\left\{\mathcal{H}_{t^-} \leq u < \mathcal{H}_{t^-} + \Delta\mathcal{H}_t\right\}}\right].
\end{aligned}$$

Der Sprungprozess $(\Delta\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ ist ein Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß $\Pi_{\mathcal{H}}$ und mit der Kompensationsformel A.2.2 und Fubini folgt, dass der letzte Ausdruck identisch ist

zu

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}\left[f(\mathcal{H}_{t^-})h(\mathcal{L}_{t^-}^{-1})1_{\{\mathcal{H}_{t^-}\le u\}}\int_{(0,\infty)} g(\mathcal{H}_{t^-}+s)1_{\{\mathcal{H}_{t^-}+s>u\}}\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds)\right]\ dt \\
&= \int_0^\infty e^{-qt}\left(\int_{(0,u]}\int_{[0,\infty)} f(y)h(\phi)\int_{(u-y,\infty)} g(y+s)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds)\ \mathbb{P}\left(\mathcal{H}_{t^-}\in dy, \mathcal{L}_{t^-}^{-1}\ d\phi\right)\right)\ dt \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(0,u]} f(y)\left(\int_{(u-y,\infty)} g(y+s)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds)\right) \\
&\qquad\qquad \cdot\left(\int_0^\infty e^{-qt}\int_{[0,\infty)} h(\phi)\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_{t^-}\in dy, \mathcal{L}_{t^-}^{-1}\in d\phi)\ dt\right) \\
&= \int_{(0,u]} f(y)\int_{(u-y,\infty)} g(y+s)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds)\ V^h(dy).
\end{aligned}
$$

□

Mit der Bedingung $g(u)=0$ wurde im Beweis von Theorem 5.2.1 der Fall ausgeschlossen, dass die Verteilung von $X_{\tau(u)}$ ein Atom bei u hat. Dieser Fall kann nur dann eintreten, wenn X aufwärts kriecht, d.h.

$$\mathbb{P}(X_{\tau(u)}=u, \tau(u)<\infty)>0,\ \forall u>0,$$

was nach Theorem 3.6.13 dazu äquivalent ist, dass H bzw. $\mathcal{H}$ einen positiven Driftkoeffizienten $D_{\mathcal{H}}=D_H$ hat. Wenn $D_H>0$ ist, dann gilt mit $\tilde{T}_H(u):=\inf\{t\ge 0: H_t=u\}=T^H_{[u,\infty)}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{\tau(u)}=u,\tau(u)<\infty) &= \mathbb{P}(H_{\tilde{T}_H(u)}=u, L^{-1}_{\tilde{T}_H(u)}<\infty)=\mathbb{P}(\tilde{T}_H(u)<L_\infty) \\
&= \int_0^\infty\int_t^\infty qe^{-qs}\ ds\ \mathbb{P}(\tilde{T}_H(u)\in dt)=\mathbb{E}\left[e^{-q\tilde{T}_H(u)}\right],\ u>0.
\end{aligned}
$$

Desweiteren hat das Erneuerungsmaß $V_H(dy)$ für $D_H>0$ nach Proposition 3.6.9 und Theorem 3.6.13 eine stetige, positive und beschränkte Dichte V_H' auf $(0,\infty)$, für die gilt: $V_H'(0+)=1/D_H$ und

$$\mathbb{P}(X_{\tau(u)}=u,\tau(u)<\infty)=\mathbb{P}(H_{T^H_{(u,\infty)}}=u)=D_H\cdot V_H'(u),\ u>0. \tag{5.26}$$

Mit Theorem 3.4.8 folgt:

$$\mathbb{P}(X_{\tau(u)}=u,\tau(u)<\infty)=\mathbb{P}_{-u}(\tau(0)<\infty)\overset{(3.6)}{=}C_H\cdot V_H'(u),\ u>0, \tag{5.27}$$

wobei $C_H>0$ die Kapazität eines einzelnen Punktes bezeichnet. Aus (5.26) und (5.27) folgt, dass C_H gleich dem Drift D_H ist. Unter der Voraussetzung $D_H>0$ sind auf $\{\tau(u)<\infty\}$ einzelne Punkt also nicht essentiell polar für H, siehe Definition 3.4.5, d.h. für jeden einzelnen Punkt gibt es eine Nichtnullmenge aus Startpunkten, von denen aus H den einzelnen Punkt erreichen kann.
Aus Theorem 5.2.1 kann man nun die Verteilung des Überschusses $X_{\tau(u)}-u$, der Ruinzeit $\tau(u)$ und weiterer Ruingrößen ableiten. Dabei wird nochmals gezeigt, dass $D_H=C_H$ ist.

Korollar 5.2.2 *(Klüppelberg et al. [26], Korollar 2.9)*
Mit der Konvention $D_H \cdot V_H'(u) = 0$, wenn $D_H = 0$ ist, gelten folgende 4 Faltungsidentitäten für $u > 0$:

(a) $\mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u > x, \tau(u) < \infty) = \int_{(0,u]} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u + x - y)\ V_H(dy)$.

(b) $\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = \int_{(0,u)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u - y)\ V_H(dy) + D_H \cdot V_H'(u)$ *und* $D_H = C_H$ *(in (5.27)).*

(c) $\mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} > u, L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}} > \psi, \tau(u) < \infty\right) = \int_{(0,u)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u - y)\ V_H(dy; \psi)$,
wobei $V_H(dy;\psi) = \int_0^\infty e^{-qt}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy, \mathcal{L}_t^{-1} > \psi)\ dt$ *ist.*

(d) $\mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}}} > \phi, \tau(u) < \infty\right) = \int_{(\phi,u]} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u - y)\ V_H(dy) + D_H \cdot V_H'(u),\ \phi \in [0, u)$.

Beweis:
(a) Wenn man $f = h = 1$ und $g = 1_{\{\cdot > x+u\}}$ in Theorem 5.2.1 wählt, dann gilt:

$$V^1(dy) = \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}(\mathcal{H}_{t^-} \in dy)\ dt = V_H(dy),\ y \geq 0,$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u > x, \tau(u) < \infty) &= \mathbb{E}\left[1_{\{X_{\tau(u)} > x+u\}}, \tau(u) < \infty\right] \\
&= \int_{(0,u]} \int_{(u-y,\infty)} 1_{\{y+s > x+u\}}\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds)\ V_H(dy) \\
&= \int_{(0,u]} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u + x - y)\ V_H(dy),\ x \geq 0.
\end{aligned}$$

(b) Wenn man beide Seiten von Korollar 5.2.2(b) mit $e^{-\nu u},\ \nu > 0$, multipliziert und über $u \in [0, \infty)$ integriert, erhält man:

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\nu u} \mathbb{P}(\tau(u) < \infty)\ du = \int_{[0,\infty)} e^{-\nu u} \left(\int_{(0,u)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u - y)\ V_H(dy) + D_H \cdot V_H'(u) \right)\ du.$$

Mit Proposition 3.6.7 und Proposition 3.5.5(a) folgt für die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} e^{-\nu u} \mathbb{P}(\tau(u) < \infty)\ du &= \int_{[0,\infty)} e^{-\nu u} q \overline{V}_H(u)\ du \\
&= \int_{[0,\infty)} e^{-\nu u}\ du - q \int_{[0,\infty)} e^{-\nu u} V_H(u)\ du \\
&= \frac{1}{\nu} - \frac{q}{\nu \Phi_H(\nu)} = \frac{\Phi_{\mathcal{H}}(\nu)}{\nu \Phi_H(\nu)}. \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\infty)}\int_{(0,u)} e^{-\nu u}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy)\ du + \int_{[0,\infty)} e^{-\nu u} D_H \cdot V_H'(u)\ du \\
&\overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \left(\int_{[0,\infty)} e^{-\nu u}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)\ du\right)\cdot\left(\int_{[0,\infty)} e^{-\nu u} V_H'(u)\ du\right) + \nu D_H \int_{[0,\infty)} e^{-\nu u} V_H(u)\ du \\
&= \left(\int_{[0,\infty)} e^{-\nu u}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)\ du\right)\cdot\frac{\nu}{\nu\Phi_H(\nu)} + \frac{\nu\cdot D_H}{\nu\Phi_H(\nu)} \\
&= \frac{\nu\int_{[0,\infty)} e^{-\nu y}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(y)\ dy + \nu\cdot D_H}{\nu\Phi_H(\nu)} = \frac{\int_{[0,\infty)}(1-e^{-\nu y})\ \Pi_{\mathcal{H}}(dy) + \nu\cdot D_H}{\nu\Phi_H(\nu)} \\
&\overset{(3.8)}{=} \frac{\Phi_{\mathcal{H}}(\nu)}{\nu\Phi_H(\nu)}. \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Da (5.28) und (5.29) identisch sind, folgt die Gleichung in (b). Wenn man den Grenzwert von (a) für $x \to 0$ in (b) einsetzt, erhält man:

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = \mathbb{P}(X_{\tau(u)} > u, \tau(u) < \infty) + D_H \cdot V_H'(u).$$

Daraus folgt:

$$\mathbb{P}(X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty) = D_H \cdot V_H'(u), \qquad (5.30)$$

und aus dem Vergleich mit (5.27) ergibt sich $C_H = D_H$.
(c) Wenn man $f = 1$, $g = 1_{\{\cdot > x+u\}}$ und $h = 1_{\{\cdot > \psi\}}$ in Theorem 5.2.1 wählt, dann gilt:

$$V_H(dy;\psi) := V^{1_{\{\cdot>\psi\}}}(dy) = \int_0^\infty e^{-qt}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_{t^-} \in dy, \mathcal{L}_t^{-1} > \psi)\ dt,\ y \geq 0,$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} > u+x, L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}} > \psi, \tau(u) < \infty\right) &= \mathbb{E}\left[1_{\left\{X_{\tau(u)>x+u}\right\}} 1_{\left\{L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}} > \psi\right\}},\ \tau(u) < \infty\right] \\
&= \int_{(0,u]}\int_{(u-y,\infty)} 1_{\{y+s>x+u\}}\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds)\ V_H(dy;\psi).
\end{aligned}$$

Mit $x \to 0$ folgt die Behauptung.
(d) Wenn man $f = 1_{\{\cdot>\phi\}}$, $g = 1_{\{\cdot>x+u\}}$ und $h = 1$ in Theorem 5.2.1 wählt und den Grenzwert $x \to 0$ bildet, dann gilt für $\phi \in [0,u)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}}} > \phi, X_{\tau(u)} > u, \tau(u) < \infty\right) &= \int_{(0,u]} 1_{\{y>\phi\}}\int_{(u-y,\infty)} 1_{\{y+s>u\}}\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds)\ V_H(dy) \\
&= \int_{(\phi,u]} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy). \qquad (5.31)
\end{aligned}$$

Weil auf $\left\{X_{\tau(u)} = u\right\}$ fast sicher $\left\{X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}}} = u\right\}$ gilt, folgt für $\phi \in [0,u)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}}} > \phi, X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty\right) &= \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty\right) \\
&\overset{(5.30)}{=} D_H \cdot V_H'(u) \qquad (5.32)
\end{aligned}$$

und aus (5.31) und (5.32) ergibt sich (d). □

Vergleich mit den Ergebnissen im klassischen Fall
Die Aussage 5.2.2 (b) hat zwar Ähnlichkeit mit der Pollaczek-Khintchine Formel (4.17) im klassischen Fall, aber man kann (4.17) nicht daraus ableiten. Das liegt daran, dass man im Beweis von 5.2.2(b) "$V_H(0) = 0$" benutzt hat. Im klassischen Fall gilt hingegen $V_H(0) = \rho > 0$. In Kapitel 4 ist nämlich für X der Punkt 0 irregulär für $\{0\}$ und es gilt nach Proposition 3.5.5(b):

$$0 < \rho = V_H(0) = \mathbb{E}[\inf\{t \geq 0 : H_t > 0\}].$$

5.2.2 Die Quintupel-Verteilung für Über- und Unterschuss

Theorem 5.2.1 wird in diesem Abschnitt erweitert und die gemeinsame Verteilung der 5 Größen aus Theorem 4.3.3 bestimmt, die beim Überschreiten einer Schranke u auftreten. Wie in Abschnitt 3.6.4 sind $\kappa(\alpha, \beta)$ bzw. $\tilde{\kappa}(\alpha, \beta)$ für $\alpha, \beta \geq 0$ die bivariaten Laplace-Exponenten des aufsteigenden Leiterprozesses $(L_t^{-1}, H_t)_{t\geq 0}$ von X und des aufsteigenden Leiterprozess $(\tilde{L}_t^{-1}, \tilde{H}_t)_{t\geq 0}$ von $\hat{X}$, siehe (3.20) und (3.21). Für den gestörten Subordinator (L^{-1}, H) und den ungestörten Subordinator $(\tilde{L}^{-1}, \tilde{H})$ bezeichnen $V_{(H,L^{-1})}(dx, ds)$ bzw. $V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dx, ds)$ die bivariaten Erneuerungsfunktionen, siehe (4.24) und (4.25). Analog zu Proposition 3.5.5(a) gilt für die doppelte Laplace-Transformation:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\beta x - \alpha s}\, V_{(H,L^{-1})}(dx, ds) &= \frac{1}{\kappa(\alpha, \beta)}, \ \alpha, \beta \geq 0, \\ \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\beta x - \alpha s}\, V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dx, ds) &= \frac{1}{\tilde{\kappa}(\alpha, \beta)}, \ \alpha, \beta \geq 0. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Desweiteren ist $\overline{G}_t$ der Zeitpunkt des letzten Maxmimus bis einschließlich t und $\underline{G}_t$ der Zeitpunkt des letzten Minimums bis einschließlich t, siehe (3.22) und (4.26). Damit ist $\overline{G}_{\tau(u)^-}$ der Zeitpunkt des letzten Maximums vor der Ruinzeit $\tau(u)$, $\tau(u) - \overline{G}_{\tau(u)^-}$ ist die Zeitspanne zwischen dem letzten Maximum vor dem Ruin und der Ruinzeit, $X_{\tau(u)} - u$ ist der Überschuss über die Schranke u, $u - X_{\tau(u)^-}$ ist der Unterschuss unter die Schranke u und $u - \overline{X}_{\tau(u)^-}$ ist der Abstand zwischen dem letzten Maximum vor dem Ruin und der Schranke u, siehe Abbildung 5.2. Desweiteren definieren wir die Unterschreitungszeit

$$T^-(x) := \inf\{t > 0 : X_t < x\}, \ x \in \mathbb{R},$$

die eine Stoppzeit ist. Die gemeinsame Verteilung dieser 5 Größen ist wie im klassischen Fall und das folgende Theorem verallgemeinert Theorem 4.3.3.

Theorem 5.2.3 *(Quintupel-Verteilung: Doney und Kyprianou [13], Theorem 3)*
Für jedes $u > 0$ gilt auf $x > 0$, $v \geq y$, $y \in [0, u]$, $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\tau(u) - \overline{G}_{\tau(u)^-} \in dt, \overline{G}_{\tau(u)^-} \in ds, X_{\tau(u)} - u \in dx, u - X_{\tau(u)^-} \in dv, u - \overline{X}_{\tau(u)^-} \in dy\right) \\ &\qquad = -V_{(H,L^{-1})}(u - dy, ds) V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dv - y, dt) \Pi_X(dx + v). \end{aligned} \tag{5.34}$$

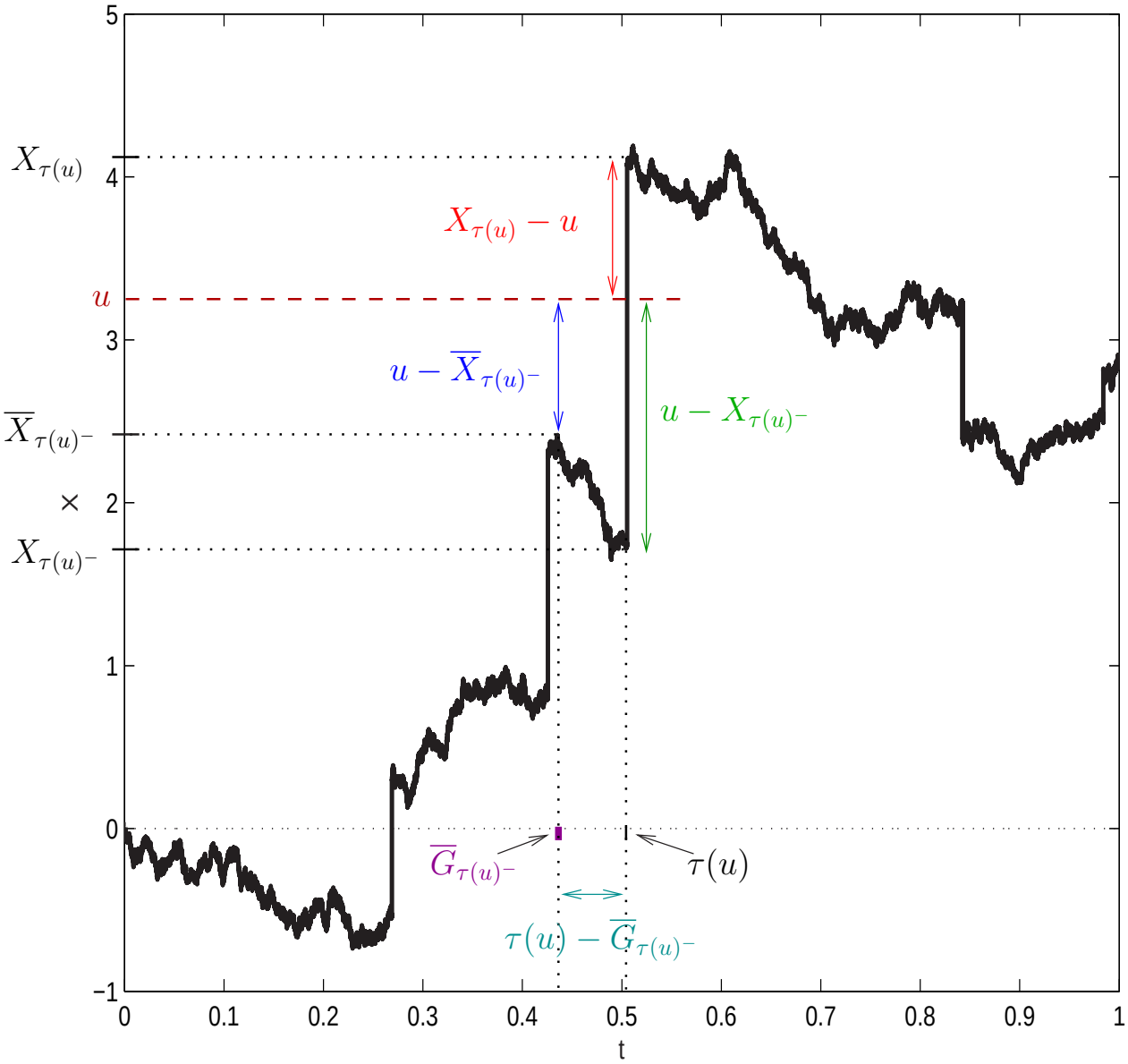

Abbildung 5.2: $\overline{G}_{\tau(u)^-}$ ist der Zeitpunkt des letzten Maximums vor der Ruinzeit $\tau(u)$, $\tau(u) - \overline{G}_{\tau(u)^-}$ ist die Zeitspanne zwischen dem letzten Maximum vor dem Ruin und der Ruinzeit, $X_{\tau(u)} - u$ ist der Überschuss über die Schranke u, $u - X_{\tau(u)^-}$ ist der Unterschuss unter die Schranke u und $u - \overline{X}_{\tau(u)^-}$ ist der Abstand zwischen dem letzten Maximum vor dem Ruin und der Schranke u, wobei sich diese Größen auf den Verlustprozess X aus Abbildung 5.1 beziehen.

Beweis:
Dieser Beweis ist eine Erweiterung der Beweise von Proposition 3.6.9(a) und Theorem 5.2.1 und die Vorgehensweise ist analog.
Schritt 1:
Seien m, k, f, g und h positive, beschränkte und messbare Funktionen mit kompakten Träger und der Eigenschaft $f(0) = g(0) = h(0) = 0$. In diesem Schritt wird gezeigt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[m\left(\tau(u) - \overline{G}_{\tau(u)^-}\right) k\left(\overline{G}_{\tau(u)^-}\right) f\left(X_{\tau(u)} - u\right) g\left(u - X_{\tau(u)^-}\right) h\left(u - \overline{X}_{\tau(u)^-}\right)\right] \\ = \hat{\mathbb{E}}_u\left[\int_0^{T^-(0)} m\left(t - \underline{G}_t\right) k\left(\underline{G}_t\right) h\left(\underline{X}_t\right) w\left(X_t\right)\ dt\right], \quad (5.35)\end{aligned}$$

wobei $w(z) = g(z) \int_{(z,\infty)} f(x-z)\, \Pi_X(dx)$ ist und $\hat{\mathbb{E}}_x$ den Erwartungswert bzgl. des Wmaßes $\hat{\mathbb{P}}_x$ bezeichnet, siehe Abschnitt 3.4.1. Wie im Beweis zu Proposition 3.6.9(a) wird das Ereignis $\{\tau(u) < \infty\}$ in die Teilereignisse $\{\tau(u) = t\}$ für alle $0 \le t < \infty$ zerlegt und man erhält für die linke Seite von (5.35):

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[m\left(\tau(u) - \overline{G}_{\tau(u)^-}\right) k\left(\overline{G}_{\tau(u)^-}\right) f\left(X_{\tau(u)} - u\right) g\left(u - X_{\tau(u)^-}\right) h\left(u - \overline{X}_{\tau(u)^-}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{0\le t<\infty} m\left(t - \overline{G}_{t^-}\right) k\left(\overline{G}_{t^-}\right) g\left(u - X_{t^-}\right) h\left(u - \overline{X}_{t^-}\right) 1_{\left\{u - \overline{X}_{t^-} > 0\right\}} \\ &\qquad \cdot f\left(X_{t^-} + \Delta X_t - u\right) 1_{\left\{\Delta X_t > u - X_{t^-}\right\}}\Bigg]. \quad (5.36)\end{aligned}$$

$(\Delta X_t)_{t\ge 0}$ ist ein Poisson-Punktprozess mit Intensitätsmaß Π_X und daher wird (5.36) mit der Kompensationsformel, siehe Theorem A.2.2, zu:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Bigg[\int_0^\infty m\left(t - \overline{G}_{t^-}\right) k\left(\overline{G}_{t^-}\right) g\left(u - X_{t^-}\right) h\left(u - \overline{X}_{t^-}\right) 1_{\left\{u - \overline{X}_{t^-} > 0\right\}} \\ &\qquad \cdot \int_{u - X_{t^-}}^\infty f\left(X_{t^-} + \epsilon - u\right)\ \Pi_X(d\epsilon)\ dt\Bigg] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty m\left(t - \overline{G}_{t^-}\right) k\left(\overline{G}_{t^-}\right) h\left(u - \overline{X}_{t^-}\right) 1_{\left\{u - \overline{X}_{t^-} > 0\right\}} w\left(u - X_{t^-}\right)\ dt\right] \\ &\overset{(3.2)}{=} \mathbb{E}_{-u}\left[\int_0^\infty m\left(t - \overline{G}_{t^-}\right) k\left(\overline{G}_{t^-}\right) h\left(-\overline{X}_{t^-}\right) 1_{\left\{-\overline{X}_{t^-} > 0\right\}} w\left(-X_{t^-}\right)\ dt\right]. \quad (5.37)\end{aligned}$$

Für den dualen Prozess $\hat{X} = -X$ gilt: $-\overline{X}_t = \underline{\hat{X}}_t$ und mit (3.3) ist (5.37) gleich:

$$\hat{\mathbb{E}}_u\left[\int_0^\infty 1_{\{t<T^-(0)\}} m\left(t - \underline{G}_t\right) k\left(\underline{G}_t\right) h\left(\underline{X}_t\right) w\left(X_t\right)\ dt\right],$$

was der rechten Seite von (5.35) entspricht. Mit der Annahme $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ wurde bei der Rechnung der Fall ausgeschlossen, dass X die Schranke u durch Kriechen überschreitet.
Schritt 2:

Als nächstes zeigen wir die Identität:

$$\mathbb{E}_u\left[\int_0^{T^-(0)} m\left(t-\underline{G}_t\right)k\left(\underline{G}_t\right)h\left(\underline{X}_t\right)w\left(X_t\right)\ dt\right]$$
$$=\int_{t\in[0,\infty)}\int_{\phi\in[0,\infty)}\int_{s\in[0,\infty)}\int_{\theta[0,u]} m(t)k(s)h(u-\theta)w(u+\phi-\theta)\ V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(d\theta,ds)\ V_{(H,L^{-1})}(d\phi,dt), \quad (5.38)$$

die eine Verallgemeinerung von Theorem VI.20 in Bertoin [6] ist. Für $q>0$ und eine von X unabhängige ZV $e_q \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{expo}(q)$ gilt:

$$\mathbb{E}_u\left[\int_0^{T^-(0)} m\left(t-\underline{G}_t\right)k\left(\underline{G}_t\right)h\left(\underline{X}_t\right)w\left(X_t\right)e^{-qt}\right]$$
$$=\ \frac{1}{q}\mathbb{E}_u\left[m\left(e_q-\underline{G}_{e_q}\right)k\left(\underline{G}_{e_q}\right)h\left(\underline{X}_{e_q}\right)w\left(X_{e_q}-\underline{X}_{e_q}+\underline{X}_{e_q}\right)1_{\{e_q<T^-(0)\}}\right]. \quad (5.39)$$

Nach Theorem 3.6.11(a) sind $(\underline{G}_{e_q},\underline{X}_{e_q})$ und $(e_q-\underline{G}_{e_q},X_{e_q}-\underline{X}_{e_q})$ unabhängig und damit ist (5.39) gleich:

$$\frac{1}{q}\int_{t\in[0,\infty)}\int_{\phi\in[0,\infty)}\int_{s\in[0,\infty)}\int_{\theta\in[0,u]} m(t)k(s)h(u-\theta)w(u+\phi-\theta)\ \mathbb{P}\left(-\underline{X}_{e_q}\in d\theta,\underline{G}_{e_q}\in ds\right)$$
$$\cdot\mathbb{P}\left(X_{e_q}-\underline{X}_{e_q}\in d\phi,e_q-\underline{G}_{e_q}\in dt\right). \quad (5.40)$$

Nach der Wiener-Hopf Faktorisierung (3.23) haben $X_{e_q}-\underline{X}_{e_q}$ und $\overline{X}_{e_q}$ die gleiche Verteilung unter $\mathbb{P}$ und damit wird (5.40) zu:

$$\frac{1}{q}\int_{[0,\infty)}\int_{[0,\infty)}\int_{[0,\infty)}\int_{[0,u]} m(t)k(s)h(u-\theta)w(u+\phi-\theta)\ \mathbb{P}\left(-\underline{X}_{e_q}\in d\theta,\underline{G}_{e_q}\in ds\right)$$
$$\cdot\mathbb{P}\left(\overline{X}_{e_q}\in d\phi,\overline{G}_{e_q}\in dt\right). \quad (5.41)$$

Da in diesem Kapitel Lokalzeiten verwendet werden, so dass in der Wiener-Hopf Faktorisierung (3.24) $k'=1$ gilt, folgt mit (3.27):

$$q=\kappa(q,0)\tilde{\kappa}(q,0),\ \ q>0.$$

Desweiteren wird im Beweis der Wiener-Hopf Faktorisierung die Identität

$$\mathbb{E}\left[e^{-\alpha\overline{G}_{e_q}-\beta\overline{X}_{e_q}}\right]=\frac{\kappa(q,0)}{\kappa(\alpha+q,\beta)}$$

benutzt, aus der mit (5.33) folgt:

$$\lim_{q\downarrow 0}\frac{1}{\kappa(q,0)}\mathbb{P}\left(\overline{X}_{e_q}\in d\phi,\overline{G}_{e_q}\in dt\right)=V_{(H,L^{-1})}(d\phi,dt), \quad (5.42)$$

wobei die Konvergenz vage ist. Für $\mathbb{P}\left(-\underline{X}_{e_q}\in d\theta,\underline{G}_{e_q}\in ds\right)/\tilde{\kappa}(q,0)$ gilt analog:

$$\lim_{q\downarrow 0}\frac{1}{\tilde{\kappa}(q,0)}\mathbb{P}\left(-\underline{X}_{e_q}\in d\theta,\underline{G}_{e_q}\in ds\right)=V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(d\theta,ds), \quad (5.43)$$

Aus (5.41) erhält man für $q \downarrow 0$ mit (5.42) und (5.43) die Identität (5.38).
Schritt 3:
Wenn man die Ergebnisse (5.35) und (5.38) der ersten beiden Schritte kombiniert, dann erhält man:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[m\left(\tau(u)-\overline{G}_{\tau(u)^-}\right)k\left(\overline{G}_{\tau(u)^-}\right)f\left(X_{\tau(u)}-u\right)g\left(u-X_{\tau(u)^-}\right)h\left(u-\overline{X}_{\tau(u)^-}\right)\right]\\
&\quad=\int_{u>0,y\in[0,u],0<y\le v,s\ge 0,t\ge 0} m(t)k(s)f(x)g(v)h(y)\\
&\qquad\mathbb{P}\left(\tau(u)-\overline{G}_{\tau(u)^-}\in dt,\overline{G}_{\tau(u)^-}\in ds,X_{\tau(u)}-u\in dx,u-X_{\tau(u)^-}\in dv,u-\overline{X}_{\tau(u)^-}\in dy\right)\\
&\quad=\int_{[0,\infty)}\int_{[0,\infty)}\int_{[0,\infty)}\int_{[0,u]} m(t)k(s)h(u-\theta)g(u+\phi-\theta)\\
&\qquad\cdot\int_{(u+\phi-\theta,\infty)} f(\eta-(u+\phi-\theta))\ \Pi_X(d\eta)\ V_{(H,L^{-1})}(d\theta,ds)\ V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(d\phi,dt). \qquad (5.44)
\end{aligned}$$

Wenn man in (5.44) $y=u-\theta$ und dann $y+\phi=v$ substitutiert, erhält man:

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\infty)}\int_{[y,\infty)}\int_{[0,\infty)}\int_{[0,u]} m(t)k(s)h(y)g(v)\\
&\qquad\cdot\int_{(0,\infty)} f(\eta-v)\ \Pi_X(d\eta)(-1)\ V_{(H,L^{-1})}(u-dy,ds)\ V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dv-y,dt).
\end{aligned}$$

Wenn man schließlich $\eta=v+x$ substituiert, dann folgt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[m\left(\tau(u)-\overline{G}_{\tau(u)^-}\right)k\left(\overline{G}_{\tau(u)^-}\right)f\left(X_{\tau(u)}-u\right)g\left(u-X_{\tau(u)^-}\right)h\left(u-\overline{X}_{\tau(u)^-}\right)\right]\\
&\quad=\int_{[0,\infty)}\int_{[y,\infty)}\int_{[0,\infty)}\int_{[0,u]} m(t)k(s)h(y)g(v)\\
&\qquad\cdot\int_{(0,\infty)} f(x)\ \Pi_X(dx+v)(-1)\ V_{(H,L^{-1})}(u-dy,ds)\ V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dv-y,dt)
\end{aligned}$$

und damit folgt (5.34). □

Aus dieser Identität kann man Theorem 5.1.1(b) ableiten, wobei auch Proposition 3.6.9(a) gezeigt wird.

Korollar 5.2.4 *(Doney und Kyprianou [13], Korollar 6)*
Für alle $u>0$ gilt:

$$\overline{\Pi}_H(u)=\int_{[0,\infty)}\overline{\Pi}_X^+(u+y)\ V_{\tilde{H}}(dy)=-\int_{(-\infty,0)}\overline{\Pi}_X^+(u-y)\ V_{\hat{H}}(dy),$$

wobei $V_{\hat{H}}$ die Erneuerungsfunktion von $\hat{H}$ gemäß (3.13) ist und $V_{\tilde{H}}$ die Erneuerungsfunktion von $\tilde{H}$.

Beweis:
Wenn man die Quintupel-Verteilung auf den aufsteigenden Leiterhöhenprozess $\tilde{H}$ von $\hat{X}$ anwendet, dann ergibt sich für die Randverteilung für $x>0$ und $y\in[0,u]$:

$$\mathbb{P}\left(X_{\tau(u)}-u\in dx,u-\overline{X}_{\tau(u)^-}\in dy\right)=V_H(u-dy)\Pi_H(dx+y), \qquad (5.45)$$

was der Aussage von Proposition 3.6.9(a) entspricht. Wenn man die Quintupel-Verteilung auf X anwendet, dann muss die rechte Seite von (5.45) übereinstimmen mit:

$$V_H(u-dy)\int_{[y,\infty)}\Pi_X(dx+v)\ V_{\tilde{H}}(dv-y).$$

Daher gilt:

$$\Pi_H(dx+y)=\int_{[y,\infty)}\Pi_X(dx+v)\ V_{\tilde{H}}(dv-y) \tag{5.46}$$

und durch Integration über $x\in(0,\infty)$ folgt die Behauptung. □

Um die Asymptotik dieser Verteilungen zu beschreiben, unterscheidet man wie in Kapitel 4 in den Cramér-Fall und den Nicht-Cramér Fall.

5.3 Der Cramér-Fall im allgemeinen Modell

Wenn ein $\kappa_L\in(0,\infty)$ existiert, so dass die *Cramér-Bedingung*

$$\mathbb{E}\left[e^{\kappa_L X_1}\right]=1 \tag{5.47}$$

erfüllt ist, dann folgt bereits daraus, dass X einen endlichen negativen Erwartungswert hat, weil $\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right]\right\}$ auf $[0,\infty)$ strikt konvex ist und mit

$$\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{0X_1}\right]\right\}=0=\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\kappa_L X_1}\right]\right\}$$

folgt $\mathbb{E}[X_1]=\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{uX_1}\right]\right\}'|_{u=0}<0$. Wie im Cramér-Fall des klassischen Modells, siehe Abschnitt 4.3.2, existiert ein zu X assoziierter Lévy-Prozess X^{κ_L} mit KEF

$$K^{\kappa_L}(\lambda)=\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_1^{\kappa_L}}\right]\right\}=\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{(\lambda+\kappa_L)X_1}\right]\right\}=\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_1}e^{\kappa_L X_1}\right]\right\} \tag{5.48}$$

und positivem Erwartungswert. Analog zu Theorem 4.3.4 bestimmt der aufsteigende Leiterhöhenprozess H^{κ_L} von X^{κ_L} die Cramér-Schätzung der RuinWS ψ.

Theorem 5.3.1 *(Cramér-Schätzung: Bertoin und Doney [8] Theorem)*
Sei angenommen, dass ein $\kappa_L>0$ existiert, das die Cramér-Bedingung (5.47) erfüllt. Dann gilt die Cramér-Schätzung*:*

$$\psi(u)=\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)\sim Ce^{-\kappa_L u},\ u\to\infty, \tag{5.49}$$

wobei

$$C=\frac{\Phi_H(0)}{\kappa_L\mathbb{E}\left[H_1^{\kappa_L}\right]}>0$$

ist, wenn $\mathbb{E}\left[X_1^{\kappa_L}\right]<\infty$ gilt, und sonst $C=0$.

Beweis:
Unter der Bedingung (5.47) kann man den charakteristische Exponenten von X wie in (3.15) auf den komplexen Streifen $\{\Im(\lambda) \in [-\kappa_L, 0]\}$ fortsetzen und mit (5.48) hat der zu X assoziierte Prozess X^{κ_L} den charakteristische Exponenten

$$\Psi^{\kappa_L}(\lambda) = -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_1^{\kappa_L}}\right]\right\} = -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{i\lambda X_1} e^{\kappa_L X_1}\right]\right\} = \Psi_X(\lambda - i\kappa_L),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für die Laplace-Exponenten Φ_H des gestörten aufsteigenden Leiterhöhenprozess H von X und Φ^{κ_L} des ungestörten aufsteigenden Leiterhöhenprozess H^{κ_L} von X^{κ_L} folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi^{\kappa_L}(\lambda) &= -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{-\lambda H_1^{\kappa_L}}\right]\right\} = -\ln\left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x}\ \mathbb{P}\left(H_1^{\kappa_L} \in dx\right)\right\} \\
&= -\ln\left\{\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x} e^{\kappa_L x}\ \mathbb{P}\left(H_1 \in dx\right)\right\} = -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{-\lambda H_1} e^{\kappa_L H_1}\right]\right\} \\
&= \Phi_H(\lambda - \kappa_L).
\end{aligned}$$

Mit Proposition 3.6.7 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{X}_\infty \in dx\right) &= qV_H(dx) = q\int_0^\infty \mathbb{P}(H_t \in dx)\ dt \\
&= q\int_0^\infty e^{-\kappa_L x}\mathbb{P}(H_t^{\kappa_L} \in dx)\ dt \\
&= \Phi_H(0)e^{-\kappa_L x}V_{H^{\kappa_L}}(dx),\ x \geq 0.
\end{aligned}$$

Die Verteilung von H^{κ_L} ist nur dann auf ein Gitter konzentriert, wenn X ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist. Dieser Fall wird mit Annahme (5.2) ausgeschlossen und daher können wir die Verteilung von H^{κ_L} als nicht-gitterartig voraussetzen. Da X^{κ_L} nach (4.34) einen positiven Erwartungswert hat, ist H^{κ_L} ein ungestörter Subordinator, und unter der Bedingung $\mathbb{E}[X_1^{\kappa_L}] < \infty$ folgt mit dem Erneuerungstheorem von Blackwell, siehe Resnick [29], Theorem 3.10.1(i), für jedes $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+a} e^{\kappa_L y}\mathbb{P}(\overline{X}_\infty \in dy) &= e^{\kappa_L x}\int_0^a e^{\kappa_L y}\ \mathbb{P}(\overline{X}_\infty \in x + dy) \\
&= \Phi_H(0)V_{H^{\kappa_L}}((x, x+a]) \to \frac{a\Phi_H(0)}{\mathbb{E}\left[H_1^{\kappa_L}\right]},\ x \to \infty.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Maße

$$D_x(A) := \frac{\mathbb{E}\left[H_1^{\kappa_L}\right]}{\Phi_H(0)} e^{\kappa_L x}\int_{y\in A} e^{\kappa_L y}\ \mathbb{P}(\overline{X}_\infty \in x + dy),\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ x \geq 0,$$

für $x \to \infty$ schwach gegen das Lebesgue-Maß konvergieren. Mit

$$\mathbb{P}(\overline{X}_\infty > x) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\overline{X}_\infty \in x + dy) = \frac{\Phi_H(0)}{\mathbb{E}\left[H_1^{\kappa_L}\right]} e^{-\kappa_L x}\int_0^\infty e^{-\kappa_L y}\ D_x(dy)$$

folgt:

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}(\overline{X}_\infty > u) = \frac{\Phi_H(0)}{\mathbb{E}\left[H_1^{\kappa_L}\right]} e^{-\kappa_L u}\int_0^\infty e^{-\kappa_L y}\ dy = \frac{\Phi_H(0)}{\kappa_L \mathbb{E}\left[H_1^{\kappa_L}\right]} e^{-\kappa_L u}. \qquad \square$$

Vergleich mit dem Ergebnis im klassischen Fall
Die Aussage (5.49) ist gänzlich analog zu (4.29). Im klassischen Fall ist die Konstante C für $\mathbb{E}\left[X_1^{\kappa_L}\right] < \infty$ jedoch:

$$C = \frac{1-\rho}{\kappa_L \cdot \mu^*} \overset{(4.19)}{=} \frac{\Phi_H(0)\cdot\rho}{\kappa_L \cdot \mathbb{E}\left[H_1^{\kappa_L}\right]},$$

da eine andere Lokalzeit verwendet wird, die zu einem anderen Leiterhöhenprozess H bzw. H^{κ_L} führt.

5.4 Der Nicht-Cramér Fall im allgemeinen Modell

Wegen (5.5) hat X_1 einen negativen Erwartungswert, und daher ist die Cramér-Bedingung (5.47) genau dann nicht erfüllt, wenn gilt:

$$\mathbb{E}\left[e^{\nu X_1}\right] < 1, \text{ für alle } \nu \in (0,\infty). \tag{5.50}$$

Mit den Beziehungen zwischen Π_X und $\Pi_{\mathcal{H}}$ aus Abschnitt 5.1.3 erhält man analog zu (4.40) äquivalente Formulierungen für die *Nicht-Cramér Bedingung* (5.50), wobei $M_{\mathcal{H}}(\alpha) = M_{\mathcal{H}_1}(\alpha)$ ist.

Proposition 5.4.1 *(Klüppelberg et al. [26], Proposition 5.1)*
Sei $\alpha > 0$ und es gelte Annahme (5.5). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_1}\right] < 1.$

(b) $e^{-q} M_{\mathcal{H}}(\alpha) < 1.$

(c) $M_{V_H}(\alpha) < \infty.$

(d) $\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\} = \alpha \cdot D_{\mathcal{H}} + \int_{[0,\infty)} (e^{\alpha y} - 1)\ \Pi_{\mathcal{H}}(dy) < q.$

(e) $-a\alpha - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\alpha x} - 1 - \alpha x 1_{\{|x|<1\}}\right)\ \Pi_X(dx) > 0.$

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, dann gilt:

$$\frac{1}{M_{V_H}(\alpha)} = q - \ln\{(M_{\mathcal{H}}(\alpha))\} = \frac{-\ln\left\{\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}]\right\}}{-\ln\left\{\mathbb{E}[e^{\alpha \hat{H}_1}]\right\}}. \tag{5.51}$$

Beweis:
Sei $\alpha > 0$ fest und es gelte Annahme (5.5).
(a)$\Leftrightarrow$(b):
Die Lokalzeit beim Maximum bzw. Minimum ist so gewählt, dass die Konstante k' in (3.25) gleich 1 ist, und daher erhalten für $u = -i\alpha$:

$$\begin{aligned} -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_1}\right]\right\} &= \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\alpha H_1} 1_{\{1<L_\infty\}}\right]\right\} \cdot \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\alpha \hat{H}_1} 1_{\{1<\hat{L}_\infty\}}\right]\right\} \\ &\Leftrightarrow \\ -\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_1}\right]\right\} &= \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\alpha \mathcal{H}_1}\right] e^{-q}\right\} \cdot \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\alpha \hat{H}_1}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} X_t = -\infty\right) = 1$ gilt fast sicher: $\hat{H}_1 < 0$, und $\mathbb{E}\left[e^{\alpha \hat{H}_1}\right] < 1$. Daher ist genau dann $\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_1}\right] < 1$, wenn $e^{-q}\mathbb{E}\left[e^{\alpha \mathcal{H}_1}\right] < 1$ ist.
(b)$\Leftrightarrow$(c):
Diese Äquivalenz folgt aus

$$\begin{aligned} M_{V_H}(\alpha) &= \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y}\, V_H(dy) \overset{(5.3)}{=} \int_{[0,\infty)} e^{\alpha y} \int_0^\infty e^{-qt}\, \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy)\, dt \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty e^{-qt} M_{\mathcal{H}_t}(\alpha)\, dt = \int_0^\infty e^{-qt} M_{\mathcal{H}}^t(\alpha)\, dt. \end{aligned} \tag{5.52}$$

(c)$\Leftrightarrow$(d):
Für den Subordinator $\mathcal{H}$ gilt für $\alpha > 0$:

$$\Psi_{\mathcal{H}}(\alpha) = -iD_{\mathcal{H}}\alpha + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{i\alpha y})\, \Pi_{\mathcal{H}}(dy),$$

und daraus folgt, wenn $M_{\mathcal{H}}(\alpha) < \infty$ ist:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{H}}(\alpha) &= \mathbb{E}\left[e^{\alpha \mathcal{H}_1}\right] = e^{-\Psi_{\mathcal{H}}(-i\alpha)} = \exp\left\{-\left(-D_{\mathcal{H}} \cdot \alpha + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{\alpha y})\, \Pi_{\mathcal{H}}(dy)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{D_{\mathcal{H}} \cdot \alpha + \int_{(0,\infty)} (e^{\alpha y} - 1)\, \Pi_{\mathcal{H}}(dy)\right\}. \end{aligned}$$

Mit der vorherigen Äquivalenz $M_{V_H}(\alpha) < \infty \Leftrightarrow M_{\mathcal{H}}(\alpha) < e^q$ folgt die Behauptung.
(d)$\Leftrightarrow$(e):
Mit der Lévy-Khintchine Formel (5.1) und

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_1}\right] = e^{-\Psi_X(-i\alpha)} < 1 \\ &\quad \Leftrightarrow \Psi_X(-i\alpha) = -a\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 - \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\alpha x} - 1 - \alpha x 1_{\{|x|<1\}}(x)\right)\, \Pi_X(dx) > 0 \end{aligned}$$

folgt die Behauptung.
(5.51):
Die erste Gleichung folgt aus (5.52) mit der Rechnung

$$M_{V_H}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-qt} M_{\mathcal{H}}^t(\alpha)\, dt = \left[\frac{e^{-qt} M_{\mathcal{H}}^t(\alpha)}{-q + \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}}\right]_0^\infty = \frac{1}{q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}}$$

und die zweite Gleichung ergibt sich aus der Wiener-Hopf Faktorisierung im Beweis von (a)$\Leftrightarrow$(b). $\square$

Aus Annahme (5.5) folgt $q > 0$ und damit gilt für $\alpha = 0$ immer $e^{-q} M_{\mathcal{H}}(\alpha) = e^{-q} < 1$. Daher kann man die Nicht-Cramér Bedingung (5.50) nach Proposition 5.4.1 äquivalent formulieren als

$$e^{-q} M_{\mathcal{H}}(\alpha) < 1, \text{ für alle } \alpha \geq 0. \tag{5.53}$$

Im klassischen Fall entspricht (5.53) der Annahme: $M_{F_I}(\alpha) < 1/\rho,\ \forall \alpha \geq 0$. Im Folgenden betrachten wir ebenfalls die Klasse der faltungsäquivalenten Verteilungen und nehmen an:

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{S}^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0. \tag{5.54}$$

Nach Proposition 2.4.13(b) ist (5.54) äquivalent zu $\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 \leq u) \in \mathcal{S}^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$.

5.4.1 Asymptotik der Ruinzeit $\tau(u)$

Wie in den Theoremen 4.3.7 und 4.3.11 für das klassische Modell gibt es auch im allgemeinen Modell eine asymptotische Beziehung zwischen $\Pi_{\mathcal{H}}$ und der RuinWS ψ.

Lemma 5.4.2 *(Klüppelberg et al. [26], Lemma 3.5)*
Sei $\alpha \geq 0$ und es gelte Annahme (5.54).

(a) Dann gilt für alle $t > 0$:

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u) \sim t M_{\mathcal{H}}^t(\alpha)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \sim t M_{\mathcal{H}}^{t-1}(\alpha)\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u),\ u \to \infty, \tag{5.55}$$

und daher ist $\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u) \in \mathcal{S}^{(\alpha)},\ \forall t > 0$.

(b) Wenn zusätzlich die Nicht-Cramér Bedingung (5.53) erfüllt ist, dann gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} = \frac{q}{(q - \log M_{\mathcal{H}}(\alpha))^2} = q M_{V_H}(\alpha)^2. \tag{5.56}$$

Beweis:
(a) Aus der Linearität des charakteristischen Exponenten in t folgt, dass die unendlich oft teilbaren ZVen $\mathcal{H}_t,\ t > 0$, das Lévy-Maß $\Pi_{\mathcal{H}_t}(\cdot) = t\Pi_{\mathcal{H}}(\cdot)$ haben und mit dem Faltungssatz 2.1.9 für die MEF gilt:

$$M_{\mathcal{H}_t}(\alpha) = \int_0^\infty e^{\alpha x}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dx) = \int_0^\infty e^{\alpha x}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_1 \in dx)^t = M_{\mathcal{H}}^t(\alpha).$$

Mit Proposition 2.4.13(c) gilt für $t > 0$:

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u) \sim M_{\mathcal{H}_t}(\alpha)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}_t}(u) = t M_{\mathcal{H}}^t(\alpha)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u),\ u \to \infty.$$

Dabei gilt, dass $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}^+ = \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}$, weil $\mathcal{H}$ ein Subordinator ist. Wenn man auf $M_{\mathcal{H}}(\alpha)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)$ wieder die Äquivalenz 2.4.13(c) anwendet, dann erhält man mit der Abgeschlossenheit von $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ bzgl. der Tailäquivalenz Theorem 2.4.8(a) die Aussage (a).
(b) Weil $\mathcal{H}$ fast sicher nicht fällt, ist $\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)$ nicht fallend in t für festes $u > 0$. Mit der oberen Schranke aus Lemma 2.4.12(b) folgt, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine Konstante $K(\epsilon)$ existiert, so dass $\forall t > 0$ und $u > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u) \leq \mathbb{P}(\mathcal{H}_{\lfloor t\rfloor+1} > u) \leq K(\epsilon)(M_{\mathcal{H}}(\alpha) + \epsilon)^{\lfloor t\rfloor+1}\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u). \tag{5.57}$$

Mit Proposition 3.6.7 und dominierter Konvergenz gilt:

$$\frac{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} = \frac{q\overline{V}(u)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} = \frac{q}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \int_0^\infty e^{-qt}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt,\ u > 0.$$

Aus der oberen Schranke (5.57) und (5.55) folgt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} e^{-qt}\frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} &\leq \frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)}{\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u)}\frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \\ &\leq K(\epsilon)\,(M_{\mathcal{H}}(\alpha) + \epsilon)^{\lfloor t\rfloor+1}\,2M_{\mathcal{H}}(\alpha),\ \forall u > u_0,\ t \geq 0, \end{aligned}$$

für ein hinreichend großes u_0, wobei die rechte Seite intergierbar ist. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue, siehe Jacod [21], Theroem 9.1(d), und der Voraussetzung $e^{-q}M_{\mathcal{H}}(\alpha) < 1$ folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} &= \lim_{u\to\infty} q \int_0^\infty e^{-qt} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)}\, dt \\
&\overset{\text{Lebesgue}}{=} q \int_0^\infty \lim_{u\to\infty} e^{-qt} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)}\, dt \\
&\overset{\text{(a)}}{=} q \int_0^\infty e^{-qt} t M_{\mathcal{H}}^t(\alpha)\, dt \\
&\overset{[9],S.61}{=} q \left[\frac{(e^{-q}M_{\mathcal{H}}(\alpha))^t}{(-q + \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2} \left(-qt + t\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\} - 1\right) \right]_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{q}{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}.
\end{aligned}$$

Wenn $e^{-q}M_{\mathcal{H}}(\alpha) < 1$ ist, dann folgt mit Proposition 3.5.5(a):

$$\begin{aligned}
\frac{q}{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2} &= \frac{q}{(q + \Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha))^2} \\
&= \frac{q}{\Phi_H(-\alpha)^2} = qM_{V_H}^2(\alpha). \qquad (5.58)
\end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis wird durch das folgende Theorem 5.4.3 noch erweitert.

Theorem 5.4.3 *(Klüppelberg et al. [26], Theorem 4.1)*
Sei $\alpha \geq 0$ fest und die Annahmen (5.5),(5.53) und (5.54) sollen gelten. Dann gilt für $u \to \infty$:

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{q}{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \sim \frac{q}{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2 M_{\mathcal{H}}(\alpha)} \mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u), \quad (5.59)$$

und daraus folgt: $\overline{C}(u) := \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ für $u > 0$.
Wenn umgekehrt Annahme (5.5) und $\overline{C}(\cdot) \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ gelten, dann gelten die Annahmen (5.53) und (5.54) und die Grenzaussage (5.59).

Beweis:
$\Rightarrow$ Sei $\alpha \geq 0$ fest und die Annahmen (5.5),(5.53) und (5.54) sollen gelten. Nach Proposition 2.4.13 ist die Annahme (5.54) äquivalent zu $\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u) \sim M_{\mathcal{H}}(\alpha)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)$ und mit (5.56) folgt:

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{q}{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \sim \frac{q}{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2 M_{\mathcal{H}}(\alpha)} \mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u),\ u \to \infty.$$

$\Leftarrow$ Für die umgekehrte Richtung gelte Annahme (5.5) und $\overline{C}$ sei definiert durch $\overline{C}(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = q\overline{V}_H(u),\ u > 0$. Desweiteren sei angenommen, dass $C \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist, und gemäß Theorem 2.4.7(b) gilt deshalb $\infty > M_C(\alpha) = qM_{V_H}(\alpha)$. Damit ergibt sich aus

(5.52), dass $e^{-q}M_{\mathcal{H}}(\alpha) < 1$ ist, und somit gilt (5.53). Nach Theorem 3.6.6(d) gibt es eine von $\mathcal{H}$ unabhängige exponential verteilte ZV e_q mit Parameter $q > 0$, so dass $L_\infty \overset{\mathrm{d}}{=} e_q$ ist, und der Tail $\overline{C}$ erfüllt die Eigenschaft

$$\overline{C}_q(u) := \overline{C}(u) = q\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt = \mathbb{P}(\mathcal{H}_{e_q} > u),\ u > 0.$$

Mit der Voraussetzung $C_q \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ erhält man aus Lemma 2.4.12(a), dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{C_q^{k*}}(u)}{\overline{C}_q(u)} = kM_{C_q}^{k-1}(\alpha). \tag{5.60}$$

Weil $\mathcal{H}$ stationäre und unabhängige Zuwächse hat, gilt

$$\overline{C_q^{k*}}(u) = \mathbb{P}^{k*}(\mathcal{H}_{e_q} > u) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \mathcal{H}^{(i)} > u\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{H}_{\sum_{i=1}^k e^{(i)}} > u\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{H}_{e_q^k} > u\right),$$

wobei $(\mathcal{H}^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ und $(e^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige Kopien von $\mathcal{H}_{e_q}$ bzw. e_q sind. e_q^k ist die Summe von k unabhängigen exponential verteilten ZVen mit Parameter q und ist daher $\Gamma(q,k)$ verteilt. Damit gilt:

$$\overline{C_q^{k*}}(u) = \frac{q^k}{(k-1)!}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-qt}\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt,\ u > 0,$$

und mit (5.60) folgt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{C_q^{k*}}(u)}{\overline{C}_q(u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{q^k}{(k-1)!\overline{C}_q(u)}\int_0^\infty t^{k-1}e^{-qt}\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt = kM_{C_q}^{k-1}(\alpha). \tag{5.61}$$

Schritt 1:
Sei $\lambda \in (q(1-1/M_{C_q}(\alpha)), q(1+1/M_{C_q}(\alpha)))$, d.h. $|1-\lambda/q| < 1/M_{C_q}(\alpha)$. Wenn man beide Seiten von (5.61) mit $(1-\lambda/q)^{k-1}$ multipliziert und über $k \in \mathbb{N}$ summiert, dann erhält man für die linke Seite von (5.61):

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\overline{C}_q(u)}\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \frac{(1-\lambda/q)^{k-1}t^{k-1}q^k}{(k-1)!}e^{-qt}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt \\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{1}{\overline{C}_q(u)}\int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty \frac{(1-\lambda/q)^{k-1}t^{k-1}q^k}{(k-1)!}e^{-qt}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{1}{\overline{C}_q(u)}\int_0^\infty qe^{qt-\lambda t}e^{-qt}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{q}{\overline{C}_q(u)}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt,
\end{aligned} \tag{5.62}$$

wobei $(\star)$ wegen gleichmäßiger Konvergenz gilt. Für die rechte Seite folgt mit $M_{C_q}(\alpha) = qM_{V_H}(\alpha) \overset{(5.56)}{=} q/(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})$:

$$\sum_{k=1}^\infty (1-\lambda/q)^{k-1}kM_{C_q}^{k-1}(\alpha) = \frac{1}{\big(1-(1-\lambda/q)M_{C_q}(\alpha)\big)^2} = \frac{(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{(\lambda-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}. \tag{5.63}$$

Insgesamt ergibt sich aus (5.61),(5.62) und (5.63) die Beziehung

$$\lim_{u\to\infty} \frac{1}{\overline{C}_q(u)} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt = \frac{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{q\,(\lambda - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2},\ u \to \infty, \tag{5.64}$$

die für $\lambda \in (q(1 - 1/M_{C_q}(\alpha)), q(1 + 1/M_{C_q}(\alpha)))$ gilt. Nach (5.64) gilt:

$$\begin{aligned} \overline{C}_\lambda(u) &= \mathbb{P}(\mathcal{H}_{e_\lambda} > u) \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)\ dt \sim \overline{C}_q(u) \frac{\lambda \cdot (q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{q\,(\lambda - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}. \end{aligned}$$

Mit Theorem 2.4.8(a) ist daher C_λ für $\lambda \in (q(1 - 1/M_{C_q}(\alpha)), q(1 + 1/M_{C_q}(\alpha)))$ in $\mathcal{S}^{(\alpha)}$.
Schritt 2:
Für $\lambda_0 \in \big(q, q(1 + 1/M_{C_q}(\alpha))\big)$ gilt: $M_{C_{\lambda_0}}(\alpha) < \lambda_0 M_{V_H}(\alpha) = \lambda_0/q \cdot M_{C_q}(\alpha)$ und

$$\lambda_0 \left(1 + \frac{1}{M_{C_{\lambda_0}}(\alpha)}\right) > q(1 + 1/M_{C_q}(\alpha)).$$

Wenn man die Argumentation aus Schritt 1 für λ_0 statt für q wiederholt, dann kann man die obere Grenze des Anwendungsbereiches von (5.64) erweitern. Wenn man auf diese Weise fortfährt, dann erhält man, dass (5.64) für alle $\lambda > q(1 - 1/M_{C_q}(\alpha))$ gilt. Für große λ kann man daher schreiben:

$$\begin{aligned} \lim_{u\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)}{\overline{C}_q(u)}\ dt &= \frac{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{q\,(\lambda - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2} \\ &\overset{[9]\ \text{S.65}}{=} \frac{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{q} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t M_{\mathcal{H}}^t(\alpha)\ dt. \end{aligned}$$

Mit dem Stetigkeitssatz für die Laplace-Transformation (Feller [19], S.433) folgt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)}{\overline{C}_q(u)} = \frac{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{q} t M_{\mathcal{H}}^t(\alpha).$$

Weil $C_q \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist, gilt mit der Abgeschlossenheit von $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ bzgl. Tailäquivalenz, siehe Theorem 2.4.8(a): $\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u) \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$. □

Vergleich mit den Ergebnissen im klassischen Fall

(a) Für $\alpha = 0$ ist (5.59) gleich:

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{1}{q}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \sim \frac{1}{q}\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u),\ u \to \infty.$$

Im klassischen Fall gilt nach (4.41):

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}_I(u),\ u \to \infty,$$

wobei $\Pi_{\mathcal{H}} = F_I$ und $q = (1 - \rho)/\rho$ ist. Die große Ähnlichkeit der beiden Resultate legt die Vermutung nahe, dass sich das Verhalten eines klassischen Verlustprozesses (4.6) kaum ändert, wenn man ihn nur geringfügig verändert, so dass (5.2) gilt. Dieses Verhalten werden wir bei den Beispielen in Abschnitt 5.4.5 beobachten.

(b) Für $\alpha > 0$ gilt hingegen im allgemeinen Modell nach (5.59):

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{q}{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u), \ u \to \infty,$$

und im klassischen Modell nach (4.43):

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{\rho(1-\rho)}{\alpha\mu\,(1 - \rho M_{F_I}(\alpha))^2} \overline{F}(u), \ u \to \infty.$$

Da in diesem Fall die Ähnlichkeit der Resultate geringer ist als für $\alpha = 0$, scheint sich eine Veränderung des klassischen Risikomodells (4.6), so dass (5.2) gilt, für $\alpha > 0$ stärker auf die RuinWS auszuwirken als für $\alpha = 0$. Diese Vermutung werden wir in Abschnitt 5.4.5 anhand eines Beispiels bestätigen.

(c) Mit der Beziehung (5.9) ist (5.59) für $\alpha > 0$ äquivalent zu:

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{q}{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2 \cdot \Psi_{\hat{H}}(-i\alpha)} \overline{\Pi}_X^+(u), \ u \to \infty,$$

was mit Theorem 4.3.14 in klassischen Fall korrespondiert.

5.4.2 Asymptotik des Überschusses $X_{\tau(u)} - u$, der Lokalzeit beim Ruin $L_{\tau(u)}$ und der letzten Leiterhöhe vor dem Ruin $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}$

Nach der asymptotischen Verteilung des Ruinzeitpunktes $\tau(u)$ geht es in diesem Abschnitt nun um die asymptotische Verteilung des Überschusses $X_{\tau(u)} - u$ beim Ruin über die Schranke u, der Lokalzeit $L_{\tau(u)}$ beim Ruin und der letzten Leiterhöhe $X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}$ vor dem Ruin.

Theorem 5.4.4 *(Klüppelberg et al. [26], Theorem 4.2)*
Sei $\alpha \geq 0$ fest und die Annahmen (5.5),(5.53) und (5.54) sollen gelten.

(a) Für alle $x \geq 0$ gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} - u > x | \tau(u) < \infty\right) = \overline{G}(x), \tag{5.65}$$

wobei

$$\overline{G}(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{q}\left(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\} + \int_{(x,\infty)} (e^{\alpha y} - e^{\alpha x})\ \Pi_{\mathcal{H}}(dy)\right), \ x \geq 0, \tag{5.66}$$

der Tail einer VF ist.

(b) Für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty} &\mathbb{P}\left(L_{\tau(u)} > t | \tau(u) < \infty\right) \\ &= e^{-(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})t}\left(1 + t(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})\frac{\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}}{q}\right).\end{aligned} \tag{5.67}$$

(c) Für alle $\phi \geq 0$ gilt:

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \leq \phi | \tau(u) < \infty \right) = \frac{(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{q} \left(\int_{(0,\phi]} e^{\alpha y} \; V_H(dy) \right). \tag{5.68}$$

Beweis:
Sei $\alpha \geq 0$ fest und die Annahmen (5.5),(5.53) und (5.54) sollen gelten.
(a) Für $x > 0$, $a > 0$ und $u > 2a$ gilt mit Korollar 5.2.2(a)

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u > x, \tau(u) < \infty) \\ &\quad = \underbrace{\int_{(0,a]} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u + x - y) \; V_H(dy)}_{=:A_u} + \underbrace{\int_{(a,u]} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u + x - y) \; V_H(dy)}_{=:B_u} \end{aligned} \tag{5.69}$$

und damit kann man die asymptotische Verteilung des Überschusses zerlegen in

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u > x | \tau(u) < \infty) = \lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \frac{A_u}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} + \lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \frac{B_u}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)}.$$

Schritt 1:
Aus Annahme (5.54) folgt mit der Eigenschaft (2.8) der Klasse $\mathcal{L}^{(\alpha)}$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u - y)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} = e^{\alpha y}, \; \forall y \in \mathbb{R}.$$

In A_u ist $x > 0$ und $y \leq a$ und deshalb ist der Integrand in A_u beschränkt durch

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u + x - y) \leq \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u - a) \leq 2e^{\alpha a} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u), \; \forall u \geq u_0(a),$$

für ein hinreichend großes $u_0(a)$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue folgt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{A_u}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} = \int_{(0,a]} \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u + x - y)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \; V_H(dy) = \int_{(0,a]} e^{\alpha(y-x)} \; V_H(dy),$$

und, weil $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}$ eine monotone Funktion ist, konvergiert der Ausdruck gleichmäßig in $x \geq 0$. Mit dem Ergebnis (5.56) aus Lemma 5.4.2 erhält man:

$$\begin{aligned} \lim_{u\to\infty} \frac{A_u}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} &= \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \cdot A_u}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \cdot \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \\ &\overset{(5.56)}{=} \frac{1}{qM^2_{V_H}(\alpha)} \int_{(0,a]} e^{\alpha(y-x)} \; V_H(dy) \\ &= \frac{e^{-\alpha x}}{qM^2_{V_H}(\alpha)} \left(M_{V_H}(\alpha) - \int_{(a,\infty)} e^{\alpha y} \; V_H(dy) \right). \end{aligned}$$

Im Beweis von Theorem 5.4.3 wurde gezeigt, dass $M_{V_H}(\alpha) < \infty$ gilt, und daraus folgt, dass das Integral im oberen Ausdruck gegen 0 konvergiert für $a \to \infty$. Mit der Voraussetzung (5.53) kann man Lemma 5.4.2(b) anwenden und erhält:

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty}\frac{A_u}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)} = \frac{e^{-\alpha x}}{qM_{V_H}(\alpha)} = \frac{e^{-\alpha x}}{q}\left(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}\right). \tag{5.70}$$

Schritt 2:
Als nächstes wird B_u aus (5.69) betrachtet. Durch partielle Integration erhält man:

$$\begin{aligned}
B_u &= -\int_{(a,u]} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-y)\ \overline{V}_H(dy) \\
&= \left[-\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-y)\overline{V}_H(y)\right]_{y=a}^{u} - \int_{(a,u]} \overline{V}_H(y)\ \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-dy) \\
&= \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-a)\overline{V}_H(a) - \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(x)\overline{V}_H(u) - \int_{[x,u+x-a)} \overline{V}_H(u+x-s)\ \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(ds) \\
&= \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-a)\left(\overline{V}_H(a) - \overline{V}_H(u)\right) + \int_{[x,u+x-a)} \overline{V}_H(u)\ \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(ds) \\
&\quad - \int_{[x,u+x-a)} \overline{V}_H(u+x-s)\ \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(ds) \\
&= \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-a)\left(\overline{V}_H(a) - \overline{V}_H(u)\right) + \int_{[x,u+x-a)} \left(\overline{V}_H(u+x-s) - \overline{V}_H(u)\right)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds) \\
&=: \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-a)\left(\overline{V}_H(a) - \overline{V}_H(u)\right) + C_u. \qquad (5.71)
\end{aligned}$$

Nach Theorem 5.4.3 gibt es eine positive Konstante K, so dass $\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim K \cdot \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)$ für $u \to \infty$ gilt, und damit läßt sich der Grenzwert des ersten Summanden nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-a)\left(\overline{V}_H(a) - \overline{V}_H(u)\right)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)} &\le \lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-a)\overline{V}_H(a)}{K\cdot\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \\
&\overset{(2.8)}{=} \frac{1}{K}\cdot\lim_{a\to\infty} e^{\alpha a}\overline{V}_H(a) \overset{(\star)}{=} 0. \qquad (5.72)
\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichung ($\star$), weil nach dem Beweis von Theorem 5.4.3 $M_{V_H}(\alpha) < \infty$ ist. Für $0 < x < a$ und $u + x > a$ kann man den zweiten Summanden in (5.71) wiederum zerlegen in:

$$\begin{aligned}
&\frac{C_u}{\overline{V}_H(u)} \\
&\quad = \int_{[x,a]} \left(\frac{\overline{V}_H(u+x-s)}{\overline{V}_H(u)} - 1\right)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds) + \int_{(a,u+x-a)} \left(\frac{\overline{V}_H(u+x-s)}{\overline{V}_H(u)} - 1\right)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds) \\
&\quad =: \frac{D_u}{\overline{V}_H(u)} + \frac{E_u}{\overline{V}_H(u)}. \qquad (5.73)
\end{aligned}$$

Im ersten Summanden von (5.73) ist $s < a$ und mit $q\overline{V}_H \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ man kann den Integranden nach oben abschätzen:

$$\frac{\overline{V}_H(u+x-s)}{\overline{V}_H(u)} - 1 \leq \frac{\overline{V}_H(u-a)}{\overline{V}_H(u)} \leq 2e^{\alpha a},\ u \geq u_1(a),$$

für ein hinreichend großes $u_1(a)$. Eine Konstante ist bzgl. $\Pi_{\mathcal{H}}(ds)$ über $s \in (x, \infty)$, $x > 0$, integrierbar und damit hat man eine integrierbare Majorante für den Integranden des ersten Intergals gefunden. Mit Proposition 3.6.7 und dem Satz von Lebesgue folgt für alle $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \frac{D_u}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} &= \lim_{u\to\infty} \frac{\int_{[x,a]} \left(\overline{V}_H(u+x-s) - \overline{V}_H(u)\right)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds)}{q\overline{V}_H(u)} \\
&\overset{\text{Lebesgue}}{=} \frac{1}{q}\int_{[x,a]} \lim_{u\to\infty} \left(\frac{\overline{V}_H(u+x-s)}{\overline{V}_H(u)} - 1\right)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds) \\
&= \frac{1}{q}\int_{[x,a]} \left(e^{\alpha(s-x)} - 1\right)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds). \qquad (5.74)
\end{aligned}$$

Diese Konvergenz monotoner Funktionen ist gleichmäßig in $x \in [\eta, \infty)$ für alle $\eta > 0$. Im zweiten Summanden in (5.73) gilt wegen $x < a < s$: $\overline{V}_H(u+x-s) \geq \overline{V}_H(u)$, und daher ist E_u nicht negativ. Nach Theorem 5.4.3 gibt es eine positive Konstante $K' > 0$, so dass $\overline{V}_H(u) \sim K' \cdot \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)$ für $u \to \infty$ gilt, und folglich gibt es ein $c_0 > 0$, so dass $\overline{V}_H(u) \leq c_0 \cdot \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)$ für $u \geq u_2$ ist, wobei u_2 hinreichend groß gewählt wird. Damit gilt:

$$\overline{V}_H(u+x-s) - \overline{V}_H(u) \leq \overline{V}_H(u+x-s) \leq c_0 \cdot \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-s),\ \text{für } u+x-s \geq u_2,$$

und E_u ist nach oben beschränkt durch ein Vielfaches von

$$\int_{(a,u+x-a)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-s)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds),\ \text{für } u+x-s \geq u_2. \qquad (5.75)$$

Die Bedingung $u+x-s \geq u_2$ ist erfüllt, wenn man $a > u_2$ wählt und $s < u+x-a$ ist. Weil $\Pi_{\mathcal{H}}(\cdot) \neq 0$ ist, kann man $z_0 > 0$ wählen, dass $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(z_0) > 0$ ist und $a > z_0$ gilt. Dann definieren wir die VF

$$\nu(z) := \left(1 - \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(z)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(z_0)}\right) \cdot 1_{\{z \geq z_0\}},$$

die eine ungestörte VF auf $[0, \infty)$ ist und den Tail $\overline{\nu}(z) = \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(z)/\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(z_0)$, $z \geq z_0$, hat. Für das Integral in (5.75) folgt:

$$\int_{(a,u+x-a)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-s)\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds) = \overline{\Pi}(z_0)^2 \cdot \int_{(a,u+x-a)} \overline{\nu}(u+x-s)\ \nu(dy). \qquad (5.76)$$

Aus der Abschätzung (5.75) und (5.76) folgt mit Lemma A.3.2:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty} \frac{E_u}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} &\leq \lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty} c_0 \cdot \int_{(a,u+x-a)} \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x-s)}{K \cdot \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)}\ \Pi_{\mathcal{H}}(ds) \\
&= \tilde{K} \cdot \lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty} \int_{(a,u+x-a)} \frac{\overline{\nu}(u+x-s)}{\overline{\nu}(z)}\ \nu(dy) = 0. \qquad (5.77)
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich aus (5.71), (5.72), (5.73), (5.74) und (5.77):

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty}\frac{B_u}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)} = \lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty}\frac{D_u}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)} = \frac{e^{-\alpha x}}{q}\int_{[x,\infty)}\left(e^{\alpha y}-e^{-\alpha x}\right)\,\Pi_{\mathcal{H}}(dy). \tag{5.78}$$

Insgesamt folgt aus (5.70) und (5.78) die Aussage (5.66).
(b) Sei $t \geq 0$ fest. Nach Theorem 3.6.6(a) ist L_t^{-1} eine Stoppzeit und mit der starken Markov-Eigenschaft, siehe Theorem 3.1.5, gilt auf $\{L_t^{-1}<\infty\} = \{t < L_\infty\}$:

(i) $X^{L_t^{-1}} := \left(X_{L_t^{-1}+s} - X_{L_t^{-1}}\right)_{s\geq 0}$ und $\tilde{X}^{L_t^{-1}} := \left(X_{L_{t+s}^{-1}} - X_{L_t^{-1}}\right)_{s\geq 0} = (H_{t+s}-H_s)_{s\geq 0}$ sind Lévy-Prozesse und unabhängig von $\mathcal{F}_{L_t^{-1}}$.

(ii) Für alle $s \geq 0$ haben $X_s^{L_t^{-1}}$ und X_s bzw. $\tilde{X}_s^{L_t^{-1}}$ und H_s die gleiche Verteilung.

(iii) $X^{L_t^{-1}}$ hat càdlàg-Pfade und ist $(\mathcal{F}_{L_t^{-1}+s})_{s\geq 0}$-adaptiert.

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_{\tau(u)} > t, \tau(u)<\infty) &= \mathbb{P}(L_t^{-1} < \tau(u), \tau(u)<\infty) = \mathbb{P}(X_{L_t^{-1}} < u, \tau(u)<\infty)\\
&= \mathbb{P}(H_t < u, \tau(u)<\infty) = \mathbb{E}\left[1_{\{H_t<u,\tau(u)<\infty\}}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\{H_t<u,\tau(u)<\infty\}}|\mathcal{F}_{L_t^{-1}}\right]\right] \overset{\text{(i)}}{=} \mathbb{E}\left[1_{\{H_t<u\}}\mathbb{E}\left[1_{\{\tau(u)<\infty\}}|\mathcal{F}_{L_t^{-1}}\right]\right]\\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{H_t<u\}}\mathbb{P}\left(\tau(u)<\infty|\mathcal{F}_{L_t^{-1}}\right)\right]\\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \mathbb{E}\left[1_{\{H_t<u\}}\mathbb{P}_{H_t}(\tau(u)<\infty)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{H_t<u\}}\mathbb{P}(\tau(u-H_t)<\infty)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[1_{\{H_t<u\}}\mathbb{P}(\tau(u-H_t)<\infty), t<L_\infty\right]\\
&\overset{\text{Th 3.6.6}}{=} e^{-qt}\mathbb{E}\left[1_{\{\mathcal{H}_t<u\}}\mathbb{P}(\tau(u-\mathcal{H}_t)<\infty)\right]\\
&= e^{-qt}\int_{\mathbb{R}} 1_{\{y<u\}}\mathbb{P}(\tau(u-y)<\infty)\;\mathbb{P}(\mathcal{H}_t\in dy)\\
&\overset{\text{Prop 3.6.7}}{=} e^{-qt}\int_{(0,u)} q\overline{V}_H(u-y)\;\mathbb{P}(\mathcal{H}_t\in dy).
\end{aligned}$$

Den letzten Ausdruck kann man in drei Teilintergale zerlegen:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(L_{\tau(u)} > t, \tau(u)<\infty)\\
&\quad = qe^{-qt}\left(\int_{(0,a]} + \int_{(a,u-a]} + \int_{(u-a,u)}\right)\overline{V}_H(u-y)\;\mathbb{P}(\mathcal{H}_t\in dy)\\
&\quad =: F_1 + F_2 + F_3,
\end{aligned} \tag{5.79}$$

wobei $0 < 2a < u$ ist. Analog zu Abschnitt (a) wird die Berechnung der asymptotischen Verteilung von $L_{\tau(u)}$ in 3 Schritte aufgeteilt.
Schritt 1:

Wenn man (5.79) durch $\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = q\overline{V}_H(u)$ teilt, dann kann man den Integranden des ersten Integrals mit $q\overline{V}_H \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ nach oben abschätzen mit

$$\frac{\overline{V}_H(u-y)}{\overline{V}_H(u)} \leq \frac{\overline{V}_H(u-a)}{\overline{V}_H(u)} \leq 2e^{\alpha a}, \ u \geq u_3,$$

für ein hinreichend großes u_3. Mit dem Satz von Lebesgue erhält man:

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty} e^{-qt} \int_{(0,a]} \frac{\overline{V}_H(u-y)}{\overline{V}_H(u)} \ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy) \\
&\quad = e^{-qt} \int_{(0,a]} e^{\alpha y} \ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy) = e^{-qt} \left(M_{\mathcal{H}_t}(\alpha) - \int_{(a,\infty)} e^{\alpha y} \ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy) \right).
\end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie in Abschnitt (a) konvergiert das Integral im letzten Ausdruck gegen 0 für $a \to \infty$ und es folgt:

$$\lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \frac{F_1}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} = e^{-qt} M^t_{\mathcal{H}}(\alpha). \tag{5.80}$$

Schritt 2:
Nach Lemma 5.4.2 kann man a so wählen, dass

$$\overline{V}_H(y) \leq c_1 \cdot \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(y) \leq c_1 \cdot \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > y)$$

für $y \geq a$ und eine Kontstante $c_1 > 0$ gilt. Damit und mit der Tatsache, dass gemäß Theorem 5.4.3 eine positive Konstante K existiert, so dass $\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim K \cdot \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)$ für $u \to \infty$ ist, läßt sich der Grenzwert des zweiten Integrals aus (5.79) folgendermaßen nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \frac{F_2}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} &= \lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} qe^{-qt} \int_{(a,u-a]} \frac{\overline{V}_H(u-y)}{K \cdot \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)} \ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy) \\
&\leq \lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \tilde{c} \int_{(a,u-a]} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u-y)}{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)} \ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy) \\
&\overset{\text{Lem A.3.2}}{=} 0,
\end{aligned} \tag{5.81}$$

wobei $\tilde{c}$ eine positive Konstante ist.
Schritt 3:
Mit partieller Integration erhält man für das dritte Integral in (5.79):

$$\begin{aligned}
&qe^{-qt} \int_{(u-a,u)} \overline{V}_H(u-y) \ \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy) \\
&\quad = qe^{-qt}\overline{V}_H(a)\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u-a) - qe^{-qt}\overline{V}_H(0)\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u) \\
&\qquad -qe^{-qt} \int_{(u-a,u)} \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > y) \ \overline{V}_H(u-dy) \\
&\quad = qe^{-qt}\overline{V}_H(a)\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u-a) - qe^{-qt}\overline{V}_H(0)\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u) \\
&\qquad +qe^{-qt} \int_{(0,a)} \mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u-s) \ V_H(ds).
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Mit (5.55) und (5.59) gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u-s)}{\overline{V}_H(u)} &= \lim_{u\to\infty}\frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u-s)}{\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u-s)}\frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u-s)}{\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u)}\frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_1 > u)}{\overline{V}_H(u)} \\
&= tM_{\mathcal{H}}^{t-1}(\alpha)e^{\alpha s}\left(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}\right)^2 M_{\mathcal{H}}(\alpha) \\
&=: m(t)\cdot e^{\alpha s}
\end{aligned}$$

und

$$\frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u-s)}{\overline{V}_H(u)} \le \frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)}{\overline{V}_H(u)} \le K'',\ u \ge u_4,$$

wobei K'' eine positive Konstante ist und u_4 hinreichend groß gewählt wird. Mit (5.82) folgt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty}\frac{F_3}{q\overline{V}_H(u)} \\
&= e^{-qt}\lim_{a\to\infty}\lim_{u\to\infty}\left(\frac{\overline{V}_H(a)\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u-a)}{\overline{V}_H(u)} - \frac{\overline{V}_H(0)\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u)}{\overline{V}_H(u)}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \int_{(0,a)}\frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_t > u-s)}{\overline{V}_H(u)}\ V_H(ds)\right) \\
&\overset{\text{Lebesgue}}{=} e^{-qt}\lim_{a\to\infty}\left(\overline{V}_H(a)m(t)e^{\alpha a} - \overline{V}_H(0)m(t) + \int_{(0,a)} m(t)e^{\alpha s}\ V_H(ds)\right) \\
&\overset{(\star)}{=} e^{-qt}\left(0 - \frac{1}{q}m(t) + m(t)M_{V_H}(\alpha)\right) = e^{-qt}m(t)\left(M_{V_H}(\alpha) - \frac{1}{q}\right) \\
&\overset{(5.56)}{=} e^{-qt}m(t)\frac{\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}}{q(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})} \\
&= e^{-qt}tM_{\mathcal{H}}^{t}(\alpha)(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})\frac{\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}}{q}. \qquad (5.83)
\end{aligned}$$

Die Gleichheit $(\star)$ folgt daraus, $M_{V_H}(\alpha) < \infty$ gilt und V_H eine gestörte Erneuerungsfunktion mit Killingrate q ist, d.h. $\overline{V}_H(x) = 1/q - V_H(x),\ x \ge 0$.
Insgesamt folgt aus (5.80), (5.81) und (5.83) die Aussage (5.67).
(c) Sei $\phi \ge 0$ fest. Mit Theorem 5.2.1 gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \le \phi, \tau(u) < \infty\right) &= \int_{(0,u]} 1_{\{y\le\phi\}}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy) \\
&= \int_{(0,\phi]} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy). \qquad (5.84)
\end{aligned}$$

und aus (5.59) folgt die Grenzbeziehung:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} &= \lim_{u\to\infty}\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)}\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} \\
&= e^{\alpha y}\frac{(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{q}. \qquad (5.85)
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man aus (5.84) und (5.85)

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}\leq\phi|\tau(u)<\infty\right) &= \lim_{u\to\infty}\int_{(0,\phi]}\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)}\ V_H(dy)\\ &\overset{\text{Lebesgue}}{=} \frac{(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{q}\int_{(0,\phi]}e^{\alpha y}\ V_H(dy),\end{aligned}$$

wobei man den Satz von Lebesgue wegen $M_{V_H}(\alpha)<\infty$ anwenden kann. □

5.4.3 Asymptotik der Über-und Unterschüsse

In diesem Abschnitt wird die asymptotische Verteilung der Über-und Unterschüsse mit Hilfe der Quintupel-Verteilung (5.34) untersucht.
Im folgenden Theorem wird der Unterschuss im Fall (a) wie in Theorem 5.2.3 von der Schranke u ab rückwärts gemessen und im Fall (b) vom Ursprung ab aufwärts gemessen.

Theorem 5.4.5 *(Doney und Kyprianou [13], Theorem 10)*
Sei $\alpha>0$ und die Annahmen (5.5), (5.53) und (5.54) sollen gelten.

(a) Für $t\geq 0$, $y\geq 0$, $v\geq y$ und $x>0$ gilt:

$$\begin{aligned}&\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(\tau(u)-\overline{G}_{\tau(u)^-}\in dt, X_{\tau(u)}-u\in dx, u-X_{\tau(u)^-}\in dv, u-\overline{X}_{\tau(u)^-}\in dy\middle|\tau(u)<\infty\right)\\ &\quad=\frac{\alpha}{q}e^{\alpha y}\ dy\ V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dv-y,dt)\ \Pi_X(dx+v).\end{aligned}$$

(b) Für $x>0$ gilt:

$$\begin{aligned}&\int_{v\in(0,\infty)}\int_{y\in(0,v)}\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(X_{\tau(u)}-u\in dx, u-X_{\tau(u)^-}\in dv, u-\overline{X}_{\tau(u)^-}\in dy\middle|\tau(u)<\infty\right)\\ &\quad=\frac{\alpha}{q}\int_0^\infty\Pi_H(dx+y)\ e^{\alpha y}\ dy.\end{aligned}$$

Beweis:
(a) Wenn man in (5.34) die Randverteilung über $\overline{G}_{\tau(u)^-}$ bildet, dann gilt mit Proposition 3.6.7:

$$\begin{aligned}&\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(\tau(u)-\overline{G}_{\tau(u)^-}\in dt, X_{\tau(u)}-u\in dx, u-X_{\tau(u)^-}\in dv, u-\overline{X}_{\tau(u)^-}\in dy\middle|\tau(u)<\infty\right)\\ &=\lim_{u\to\infty}\frac{-V_H(u-dy)}{q\overline{V}_H(u)}\ V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dv-y,dt)\ \Pi_X(dx+v).\end{aligned}$$

Weil qV_H wegen Annahme (5.54) in $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist, ist der letzte Ausdruck mit der Eigenschaft (2.8) gleich:

$$\frac{\alpha}{q}e^{\alpha y}\ dy\ V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(dv-y,dt)\ \Pi_X(dx+v).$$

Mit der schwachen Konvergenz folgt die Behauptung.
(b) Mit der Grenzverteilung aus (a) gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{v\in(0,\infty)}\int_{y\in(0,v)}\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(X_{\tau(u)}-u\in dx, u-X_{\tau(u)^-}\in dv, u-\overline{X}_{\tau(u)^-}\in dy\middle|\tau(u)<\infty\right)\\
&= \int_{v\in(0,\infty)}\int_{y\in(0,v)}\frac{\alpha}{q}e^{\alpha y}\ dy\ V_{\tilde{H}}(dv-y)\ \Pi_X(dx+v)\\
&= \frac{\alpha}{q}\int_{y\in(0,\infty)}e^{\alpha y}\left(\int_{v\in[y,\infty)}V_{\tilde{H}}(dv-y)\ \Pi_X(dx+v)\right)\ dy\\
&\overset{(5.46)}{=} \frac{\alpha}{q}\int_{y\in(0,\infty)}e^{\alpha y}\ \Pi_H(dx+y)\ dy.
\end{aligned}$$

□

Theorem 5.4.6 *(Doney und Kyprianou [13], Theorem 11)*
Sei $\alpha>0$ und die Annahmen (5.5), (5.53) und (5.54) sollen gelten.

(a) Für $s,t\geq 0$, $x>0$, $\theta\geq 0$ und $\phi\leq\theta$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\Big(\tau(u)-\overline{G}_{\tau(u)^-}\in dt, \overline{G}_{\tau(u)^-}\in ds, X_{\tau(u)}-u\in dx,\\
&\qquad\qquad X_{\tau(u)^-}\in d\phi, \overline{X}_{\tau(u)^-}\in d\theta\Big|\tau(u)<\infty\Big)\\
&= V_{(H,L^{-1})}(d\theta,ds)\ V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(\theta-d\phi,dt)\ \frac{\alpha(q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha))^2\Phi_{\tilde{H}}(\alpha)}{q}e^{-\alpha(u-\phi)}\ dx.
\end{aligned}$$

(b) Für $x>0$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\phi\in(0,\infty)}\int_{\theta\in(\phi,\infty)}\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(X_{\tau(u)}-u\in dx, X_{\tau(u)^-}\in d\phi, \overline{X}_{\tau(u)^-}\in d\theta\middle|\tau(u)<\infty\right)\\
&= \frac{q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha)}{q}\alpha e^{-\alpha x}\ dx.
\end{aligned}$$

Beweis:
(a) Wenn man in der Quintupel-Verteilung die Variablen tauscht, dann erhält man:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\tau(u)-\overline{G}_{\tau(u)^-}\in dt, \overline{G}_{\tau(u)^-}\in ds, X_{\tau(u)}-u\in dx, X_{\tau(u)^-}\in d\phi, \overline{X}_{\tau(u)^-}\in d\theta\middle|\tau(u)<\infty\right)\\
&= V_{(H,L^{-1})}(d\theta,ds)\ V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(\theta-d\phi,dt)\ \frac{\Pi_X(dx+u-\phi)}{q\overline{V}_H(u)}.
\end{aligned}$$

Mit Theorem 5.4.3, $-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}=\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha)$ und Proposition 5.1.3 gilt:

$$\overline{V}_H(u)\sim\frac{1}{(q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha))^2}\overline{\Pi}_H(u)\sim\frac{1}{(q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha))^2\Phi_{\tilde{H}}(\alpha)}\overline{\Pi}_X^+(u),\ u\to\infty,$$

und daraus folgt:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Pi_X(dx+u-\phi)}{q\overline{V}_H(u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{(q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha))^2\Phi_{\tilde{H}}(\alpha)\overline{\Pi}_X^+(u-(\phi-dx))}{q\overline{\Pi}_X^+(u)}. \quad (5.86)$$

Mit Annahme (5.54) und der Beziehung (5.9) ist auch $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{S}^{\alpha)}$ und mit der Eigenschaft (2.8) ist (5.86) gleich:

$$\frac{(q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha))^2\Phi_{\tilde{H}}(\alpha)}{q}\alpha e^{-\alpha(x-\phi)}\ dx,$$

woraus sich die Behauptung ergibt.
(b) Mit der Grenzverteilung aus (a) erhält man:

$$\begin{aligned}
&\int_{\phi\in(0,\infty)}\int_{\theta\in(\phi,\infty)} \lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)}-u\in dx, X_{\tau(u)^-}\in d\phi, \overline{X}_{\tau(u)^-}\in d\theta \middle| \tau(u)<\infty\right)\\
&\quad= \int_{\phi\in(0,\infty)}\int_{\theta\in(\phi,\infty)} \frac{(q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha))^2\Phi_{\tilde{H}}(\alpha)}{q}\alpha e^{-\alpha(x-\phi)}\ dx\ V_H(d\theta)\ V_{\tilde{H}}(\theta-d\phi).
\end{aligned}$$

Mit der Identität

$$\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}V_{\tilde{H}}(x)\ dx = \frac{1}{\Phi_{\tilde{H}}(\alpha)}$$

aus dem Beweis von Proposition 3.5.5 folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\phi\in(0,\infty)}\int_{\theta\in(\phi,\infty)} \lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)}-u\in dx, X_{\tau(u)^-}\in d\phi, \overline{X}_{\tau(u)^-}\in d\theta \middle| \tau(u)<\infty\right)\\
&\quad= \frac{(q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha))^2\Phi_{\tilde{H}}(\alpha)}{q}\alpha e^{-\alpha x}\ dx \int_{\phi\in(0,\infty)}\int_{\theta\in(\phi,\infty)} e^{\alpha\phi}\ V_{\tilde{H}}(\theta-d\phi)\ V_H(d\theta)\\
&\quad= \frac{q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha)}{q}\alpha e^{-\alpha x}\ dx.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.4.7

- In Theorem 5.4.6(a) erkennt man eine asymptotische Unabhängigkeit zwischen der Verteilung des Überschusses $X_{\tau(u)}-u$ und der gemeinsamen Verteilung der Unterschüsse $u-X_{\tau(u)^-}$ und $u-\overline{X}_{\tau(u)^-}$.
- Mit den Theoremen 5.4.5 und 5.4.6 kann man die Grenzverteilung (5.66) folgendermaßen interpretieren. Aus der Identität in Theorem 5.4.5(b) folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_{v\in(0,\infty)}\int_{y\in(0,v)} \lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)}-u>x, u-X_{\tau(u)^-}\in dv, u-\overline{X}_{\tau(u)^-}\in dy \middle| \tau(u)<\infty\right)\\
&\quad= \frac{\alpha}{q}\int_{z\in(x,\infty)}\int_{y\in(0,z-x)} e^{\alpha y}\ dy\ \Pi_H(dz)\\
&\quad= \frac{e^{-\alpha x}}{q}\left(\int_{z\in(x,\infty)}(e^{\alpha z}-e^{\alpha x})\ \Pi_H(dz)\right). \qquad (5.87)
\end{aligned}$$

Für Theorem 5.4.6(b) erhält man entsprechend:

$$\begin{aligned}
&\int_{\phi\in(0,\infty)}\int_{\theta\in(\phi,\infty)} \lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)}-u>x, X_{\tau(u)^-}\in d\phi, \overline{X}_{\tau(u)^-}\in d\theta | \tau(u)<\infty\right)\\
&\quad = \frac{q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha)}{q}\int_{(x,\infty)} \alpha e^{-\alpha s}\, ds\\
&\quad = \frac{e^{-\alpha x}}{q}\left(q+\Phi_{\mathcal{H}}(-\alpha)\right). \qquad (5.88)
\end{aligned}$$

Daher liegt die Vermutung nahe, dass sich die asymptotische Überschussverteilung (5.66) aus diesen beiden Überschussverteilungen zusammensetzt und der asymptotische Überschuss daher durch eine der beiden Sprungarten verursacht wird.

5.4.4 Spezielle Resultate für den subexponentiellen Fall

Für den Fall $\alpha = 0$ kann man die Aussage (5.66) sogar verschärfen, wobei die Annahme (5.53) wegen $e^{-q}M_{\mathcal{H}}(0) = e^{-q} < 1$ automatisch erfüllt ist.

Theorem 5.4.8 *(Klüppelberg et al. [26], Theorem 4.4)*
Sei $\alpha = 0$ und es gelten die Annahmen (5.5) und (5.54). Dann gilt $\forall x > 0$:

$$\lim_{u\to\infty}\left|\mathbb{P}(X_{\tau(u)}-u>x|\tau(u)<\infty) - \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)}\right| = 0 \qquad (5.89)$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig auf $[\eta,\infty)$ und jedes $\eta > 0$.

Beweis:
Sei $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{S}$. Für $a = 0$ folgt aus (5.69) und (5.71):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{\tau(u)}-u>x, \tau(u)<\infty)\\
&\quad = \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x)(\overline{V}_H(0)-\overline{V}_H(u)) + \int_{[x,u+x)} (\overline{V}_H(u+x-y)-\overline{V}_H(u))\,\Pi_{\mathcal{H}}(dy),\ u>0,
\end{aligned}$$

und damit gilt für $u > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{P}(X_{\tau(u)}-u>x|\tau(u)<\infty) - \frac{\overline{V}_H(0)\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)}\right|\\
&\quad = \left|-\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x)\overline{V}_H(u)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)} + \int_{[x,u+x)} \frac{\overline{V}_H(u+x-y)-\overline{V}_H(u)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)}\,\Pi_{\mathcal{H}}(dy)\right|\\
&\quad \le \underbrace{\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x)\overline{V}_H(u)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)}}_{=:G_1(u)} + \underbrace{\int_{[x,u+x)} \frac{\overline{V}_H(u+x-y)-\overline{V}_H(u)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)}\,\Pi_{\mathcal{H}}(dy)}_{=:G_2(u)}. \qquad (5.90)
\end{aligned}$$

Für $\alpha = 0$ gilt nach Theorem 5.4.3: $\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim 1/q\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u),\ u \to \infty$, und mit $\overline{V}_H(0) = 1/q$ ist eine hinreichende Bedingung für (5.89), wenn (5.90) gegen 0 konvergiert

für $u \to \infty$. Um (5.89) zu beweisen, muss man also zeigen, dass $G_1(u)$ und $G_2(u)$ für $u \to \infty$ gleichmäßig in $x \in [\eta, \infty)$, $\forall \eta > 0$, gegen 0 konvergieren.
Schritt 1:
Mit Proposition 3.6.7 gilt:

$$\lim_{u\to\infty} G_1(u) = \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x)}{q} = 0,$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig in $x \geq 0$ ist.
Schritt 2:
Für $a > 0$ und $u > a$ zerlegt man $G_2(u)$ in:

$$\int_{[x,u+x-a)} \frac{\overline{V}_H(u+x-y) - \overline{V}_H(u)}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} \, \Pi_{\mathcal{H}}(dy) + \int_{[u+x-a,u+x)} \frac{\overline{V}_H(u+x-y) - \overline{V}_H(u)}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} \, \Pi_{\mathcal{H}}(dy).$$

Das erste Integral ist gleich $C_u/\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)$, wobei C_u das Integral aus (5.71) ist. In Schritt 2 des Beweises zu Theorem 5.4.4 wurde gezeigt, dass

$$\lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \frac{C_u}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} = \frac{e^{-\alpha x}}{q} \int_{[x,\infty)} (e^{\alpha y} - e^{\alpha x}) \, \Pi_{\mathcal{H}}(dy)$$

gilt, wobei die Konvergenz gleichmäßig in $x \in [\eta, \infty)$, $\forall \eta > 0$ ist. Daraus folgt in diesem Fall für $\alpha = 0$:

$$\lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \int_{[x,u+x-a)} \frac{\overline{V}_H(u+x-y) - \overline{V}_H(u)}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} \, \Pi_{\mathcal{H}}(dy) = \lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \frac{C_u}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} = 0,$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig in $x \in [\eta, \infty)$, $\forall \eta > 0$ ist. Im zweiten Integral gilt wegen $u + x - a \leq y < u + x$: $\overline{V}_H(u+x-y) \leq \overline{V}_H(0)$ und man erhält:

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \int_{[u+x-a,u+x)} \frac{\overline{V}_H(u+x-y) - \overline{V}_H(u)}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} \, \Pi_{\mathcal{H}}(dy) \\
&\leq \lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \overline{V}_H(0) \left(\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}((u+x-a)-) - \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x)}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} \right) \\
&\overset{(5.59)}{=} \lim_{a\to\infty} \lim_{u\to\infty} \overline{V}_H(0) q \left(\frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}((u+x-a)-) - \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u+x)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \right) \\
&\overset{(2.8)}{=} \lim_{a\to\infty} \left(e^{0(a-x)} - e^{0x} \right) = 0,
\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz gleichmäßig in $x \geq 0$ ist. □

Die nächste Proposition zeigt, dass die letzte Leiterzeit vor dem Ruin auf $\{\tau(u) < \infty\}$ fast sicher gegen einen festen Wert konvergiert

Proposition 5.4.9 *(Klüppelberg et al. [26], Proposition 4.5)*
Sei $\alpha = 0$ und die Annahmen (5.5) und (5.54) sollen gelten. Dann gilt:

$$\lim_{\phi\to\infty} \limsup_{u\to\infty} \mathbb{P}(L^{-1}_{L_{\tau(u)^-}} > \phi | \tau(u) < \infty) = 0.$$

Beweis:
Mit Korollar 5.2.2(c) und (5.30) gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > \phi, \tau(u) < \infty\right) \\
&\quad = \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} > u, L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > \phi, \tau(u) < \infty\right) + \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} = u, L^{-1}_{L_{\tau(u)-}} > \phi, \tau(u) < \infty\right) \\
&\quad \leq \int_{(0,u)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy;\phi) + \mathbb{P}(X_{\tau(u)} = u, \tau(u) < \infty) \\
&\quad = \int_{(0,u)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy;\phi) + D_H \cdot V_H'(u) \\
&\quad = \int_{(0,a)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy;\phi) + \int_{[a,u)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy;\phi) + D_H \cdot V_H'(u), \qquad (5.91)
\end{aligned}$$

wobei $0 < 2a < u$ ist.
Schritt 1:
Für $\alpha = 0$ gilt nach Theorem 5.4.3: $\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim 1/q\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u),\ u \to \infty$, und, weil $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)$ in $y \in (0,\infty)$ nicht fällt, gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty} \int_{(0,a)} \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)}\ V_H(dy;\phi) \quad &\leq \quad \lim_{u\to\infty} \frac{q\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-a)}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} V_H(a;\phi) \\
&\overset{(2.8)}{=} \quad q e^{\alpha a} V_H(a;\phi) \overset{\alpha=0}{=} q V_H(a;\phi).
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\phi\to\infty} V_H(a;\phi) \quad &= \quad \lim_{\phi\to\infty} \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}\left(\mathcal{H}_t \leq a, \mathcal{L}_t^{-1} > \phi\right)\ dt \\
&\leq \quad \lim_{\phi\to\infty} \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}\left(\mathcal{L}_t^{-1} > \phi\right)\ dt = \lim_{\phi\to\infty} \frac{1}{q} \mathbb{P}\left(\mathcal{L}_{e_q}^{-1} > \phi\right) = 0,
\end{aligned}$$

weil für den ungestörten Subordinator $\mathcal{L}^{-1}$ fast sicher gilt: $\mathcal{L}_{e_q}^{-1} < \infty$. Damit erhält man:

$$\lim_{a\to\infty} \lim_{\phi\to\infty} \lim_{u\to\infty} \frac{\int_{(0,a)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy;\phi)}{\mathbb{P}(\tau(u) < \infty)} = \lim_{a\to\infty} \lim_{\phi\to\infty} q V_H(a;\phi) = 0. \qquad (5.92)$$

Schritt 2:
Mit der Abschätzung

$$V_H(dy;\phi) = \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}\left(\mathcal{H}_t \in dy, \mathcal{L}_t^{-1} > \phi\right)\ dt \leq \int_0^\infty e^{-qt} \mathbb{P}(\mathcal{H}_t \in dy)\ dt = V_H(dy),\ y \geq 0,$$

und Korollar 5.2.2(d) gilt für den zweiten Teil:

$$\begin{aligned}
\int_{[a,u)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy;\phi) + D_H V_H'(u) \quad &\leq \quad \int_{[a,u)} \overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy) + D_H V_H'(u) \\
&= \quad \mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}} \geq a, \tau(u) < \infty\right).
\end{aligned}$$

Mit (5.68) und $V_H(\infty) = 1/q$ folgt daraus:

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty}\lim_{\phi\to\infty}\limsup_{u\to\infty}\frac{\int_{[a,u)}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy;\phi)+D_H V_H'(u)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)}\\
&\quad\le \lim_{a\to\infty}\lim_{\phi\to\infty}\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}\ge a|\tau(u)<\infty\right)\\
&\quad= \lim_{a\to\infty}(1-qV_H(a))=0. \qquad (5.93)
\end{aligned}$$

Mit (5.91), (5.92) und (5.93) erhält man insgesamt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\phi\to\infty}\limsup_{u\to\infty}\mathbb{P}(L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}>\phi|\tau(u)<\infty)\\
&\quad\le \lim_{a\to\infty}\lim_{\phi\to\infty}\lim_{u\to\infty}\frac{\int_{(0,a)}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy;\phi)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)}\\
&\qquad+\lim_{a\to\infty}\lim_{\phi\to\infty}\limsup_{u\to\infty}\frac{\int_{[a,u)}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u-y)\ V_H(dy;\phi)+cV_H'(u)}{\mathbb{P}(\tau(u)<\infty)}=0.
\end{aligned}$$

□

Vergleich mit den Ergebnissen im klassischen Fall

(a) Die Grenzverteilung (5.68) der letzten Leiterhöhe vor dem Ruin ist für $\alpha = 0$:

$$\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}\le\phi|\tau(u)<\infty\right)=qV_H(\phi),\ \forall\phi\ge 0.$$

Da H ein gestörter Subordinator mit $V_H(\infty) = 1/q$ ist, hat die asymptotische Verteilung die Gesamtmasse 1. Wenn jedoch $\alpha > 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\phi\to\infty}\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(X_{L^{-1}_{L_{\tau(u)-}}}>\phi|\tau(u)<\infty\right) &= 1-M_{V_H}(\alpha)\frac{(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})^2}{q}\\
&\overset{(5.56)}{=} 1-\frac{1}{qM_{V_H}(\alpha)}\overset{(\star)}{>}0,
\end{aligned}$$

wobei $(\star)$ wegen $qV_H \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ und $M_{V_H}(\alpha) > 1$ für $\alpha > 0$ gilt. Die Verteilung hat folglich Masse bei ∞ und ist degeneriert.

(b) (5.67) ist für $\alpha = 0$ gleich:

$$\lim_{u\to\infty}\mathbb{P}\left(L_{\tau(u)}>t|\tau(u)<\infty\right)=e^{-qt},\ \forall t\ge 0.$$

Mit $\lim_{t\to\infty} e^{-qt} = 0$ und $\lim_{t\downarrow 0} e^{-qt} = 1$ ist diese Verteilung nicht degeneriert. Mit der Nicht-Cramér Bedingung (5.50) erhält man für $\alpha > 0$:

$$\lim_{t\to\infty}e^{-(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})t}\left(1+t(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})\frac{\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}}{q}\right)=0$$

und

$$\lim_{t\downarrow 0}e^{-(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})t}\left(1+t(q-\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\})\frac{\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}}{q}\right)=1.$$

Damit ist diese Grenzverteilung für alle $\alpha \ge 0$ nicht degeneriert.

(c) Für $\alpha = 0$ wird die Grenzverteilung des Überschusses (5.65) zu:

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u > x | \tau(u) < \infty) = \overline{G}(x) = \frac{1}{q} q = 1, \ \forall x \geq 0,$$

und daraus folgt:

$$G(x) = \lim_{u\to\infty} \mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u \leq x | \tau(u) < \infty) = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } x \in [0,\infty), \\ 1 & \text{, wenn } x = \infty. \end{cases}$$

Die VF G ist in diesem Fall degeneriert und, weil der Überschuss immer ∞ ist, kann der Ruin asymptotisch nur durch einen unendlich großen Sprung eintreten.
Für $\alpha > 0$ gilt hingegen $\lim_{x\to\infty} \overline{G}(x) = 0$ und

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 0} \overline{G}(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{e^{-\alpha x}}{q} \left(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\} + e^{\alpha x} \int_{(x,\infty)} (e^{\alpha(y-x)} - 1) \ \Pi_{\mathcal{H}}(dy) \right) \\ &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{e^{-\alpha x}}{q} \left(q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\} + e^{\alpha x} \int_{(0,\infty)} (e^{\alpha z} - 1) \ \Pi_{\mathcal{H}}(dz) \right) \\ &= 1 - \frac{\ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\}}{q} + \frac{1}{q} \int_{(0,\infty)} (e^{\alpha z} - 1) \ \Pi_{\mathcal{H}}(dz) \\ &\overset{\text{Prop 5.4.1}}{=} 1 - \frac{\alpha D_H}{q}. \end{aligned}$$

Folglich ist für $\alpha > 0$ die asymptotische bedingte WS, dass X über die Schranke u kriecht, für $u \to \infty$ gleich $\alpha D_H / q > 0$. Im allgemeinen Modell kann daher für $\alpha > 0$ ein Ruin für große u sowohl durch Kriechen als auch durch Springen eintreten, wo hingegen im klassischen Fall ein Ruin immer nur durch einen Sprung verursacht wird.

(d) Die Theoreme 5.4.3, 5.4.4 und 5.4.8 korrespondieren mit den Resultaten in Theorem 4.3.9(a), wo die Grenzverteilung G für $u \to \infty$ eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung ist.

(e) Unter der Voraussetzung $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{L}$ wurde im Beweis von Proposition 5.1.4 gezeigt, dass $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)/\overline{\Pi}_X^+(u)$ gegen ∞ konvergiert für $u \to \infty$, und daher kann man die Voraussetzung $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{S}$ in Theorem 5.4.8 durch $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{S}$ ersetzen.

(f) Aus der gleichmäßigen Konvergenz in (5.89) erhält man mit den asymptotischen Äquivalenzen (5.14) und (5.15) folgende Abschätzung der Überschussverteilung.
Man definiert die Funktion $\overline{B}_0$ als

$$\overline{B}_0(u) := \begin{cases} \int_{(1,\infty)} \left(\frac{y}{A_-(y)} \right) \ \Pi_X(u + dy) & \text{, wenn } \int_1^\infty \overline{\Pi}_X^-(y) \ dy = \infty, \\ \int_{(u,\infty)} \overline{\Pi}_X^+(y) \ dy & \text{, wenn } \int_1^\infty \overline{\Pi}_X^-(y) \ dy < \infty, \end{cases}$$

die nach Propositon 5.1.4 und Bemerkung 5.1.5 endlich und nicht wachsend auf $(0,\infty)$ ist. Sei angenommen, dass zwei Funktionen $a(u)$ und $b(x)$ mit der asymptotischen Eigenschaft: $a(u) \to \infty$ für $u \to \infty$ bzw. $b(x) \to 0$ für $x \to \infty$, existieren, so

dass für alle $x > 0$ gilt:

$$\frac{\overline{B}_0(u + xa(u))}{\overline{B}_0(u)} \asymp b(x), \ u \to \infty. \tag{5.94}$$

Damit sind $a(u)$ und $b(u)$ in Abhängigkeit des Lévy-Maßes Π_X definiert. Desweiteren sei angenommen, dass $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{L}$ ist. Mit der gleichmäßigen Konvergenz in (5.89) erhält man aus (5.89) und (5.14) bzw. (5.15) folgende asymptotische Äquivalenz für alle $x > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u > xa(u) | \tau(u) < \infty) &\asymp \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u + xa(u))}{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)} \\ &\asymp \frac{\overline{B}_0(u + xa(u))}{\overline{B}_0(u)} \asymp b(x), \ u \to \infty. \end{aligned} \tag{5.95}$$

Damit kann man die asymptotischen Überschussverteilung abschätzen. Außerdem zeigt (5.95), dass unter der Bedingung "$\tau(u) < \infty$" der normierte Überschuss $(X_{\tau(u)} - u)/a(u)$ für $u \to \infty$ gegen einen festen Wert konvergiert, was mit Theorem 4.3.9(a) korrespondiert.

5.4.5 Spektral positive Lévy-Prozesse

In diesem Abschnitt soll zusätzlich zu den Annahmen (5.2), (5.5) und (5.53) noch spektrale Positivität von X gelten, d.h. $\overline{\Pi}_X^-(0) = \Pi_X((-\infty, 0)) = 0$. Nach der Bemerkung 5.1.2 gilt (5.7), d.h.

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = \int_u^\infty \overline{\Pi}_X^+(y) \ dy < \infty, \ \forall u > 0.$$

Außerdem soll in diesem Abschnit für $\overline{\Pi}_X^+$ folgende weitere Annahme gelten.

Annahme 5.4.10

(a) Wenn $\alpha > 0$ ist, dann ist $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$.

(b) Wenn $\alpha = 0$ ist, dann ist $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{S}$.

Für $\alpha > 0$ folgt mit Proposition 5.1.3 und Theorem 2.4.8(a), dass $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist, und damit ist Annahme 5.4.10 äquivalent zur Annahme (5.54). Der zu X duale Prozess $\hat{X}$ ist in diesem Fall spektral negativ und hat nach Abschnitt 3.6.3 den Laplace-Exponenten

$$\begin{aligned} \Xi(u) &= -\Psi_{\hat{X}}(-iu) = -\Psi_X(iu)) = \ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{-uX_1}\right]\right\} \\ &= -au + \frac{\sigma^2 u^2}{2} - \int_{(0,\infty)} \left(1 - e^{-ux} - ux1_{[0,1)}(x)\right) \ \Pi_X(dx), \ u \geq 0. \end{aligned}$$

Wegen $\overline{\Pi}_X^+ \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist Ξ auf $[-\alpha, \infty)$ wohldefiniert. Da in diesem Kapitel die Lokalzeit so gewählt wurde, dass die Konstante k' in der Wiener-Hopf Faktorisierung gleich 1 ist, folgt mit (3.30) und $\hat{H}_t = -t$ für die Killingrate q:

$$q = \lim_{u \downarrow 0} \frac{\Psi_X(iu)}{\Psi_{\hat{H}}(iu)} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{-\Xi(u)}{-u} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{\Xi(u)}{u} \tag{5.96}$$

und mit $\Xi(0) = 0$ ist $q = \Xi'(0+)$. Für ein $\alpha > 0$ gilt mit (5.51):

$$q - \ln\{M_{\mathcal{H}}(\alpha)\} = \frac{-\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{aX_1}\right]\right\}}{-\ln\left\{\mathbb{E}\left[e^{\alpha\hat{H}_1}\right]\right\}} = \frac{-\Xi(-\alpha)}{\alpha},$$

und die Nicht-Cramér Bedingung $e^{-q}M_{\mathcal{H}}(\alpha) < 1$ ist äquivalent zu $\Xi(-\alpha) < 0$. Für $\alpha = 0$ ist die Nicht-Cramér Bedingung automatisch erfüllt. Aus (5.7) und den Theoremen 5.4.3 und 5.4.4 erhält man für spektral positive Lévy-Prozesse schließlich folgende Resultate.

Theorem 5.4.11 *(Klüppelberg et al. [26], Theorem 6.2)*
Sei angenommen, dass X spektral positiv ist, fast sicher gegen $-\infty$ konvergiert, die Annahme 5.4.10 erfüllt und für den Laplace-Exponent Ξ von $\hat{X}$ gilt: $\Xi(-\alpha) < 0$ für $\alpha > 0$. Mit der Konvention $-\Xi(-\alpha)/\alpha = \Xi'(0+)$ für $\alpha = 0$, gelten folgende Aussagen:

(a) $\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \Xi'(0+)\left(\frac{\alpha}{\Xi(-\alpha)}\right)^2 \int_u^\infty \overline{\Pi}_X^+(y)dy,\ u \to \infty.$

(b) $\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}(X_{\tau(u)} - u > x|\tau(u) < \infty) = \overline{G}(x)$, *wobei*

$$\overline{G}(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{\Xi(0+)}\left(\frac{-\Xi(-\alpha)}{\alpha} + \int_{(x,\infty)} (e^{\alpha y} - e^{\alpha x})\overline{\Pi}_X^+(y)dy\right).$$

(c) $\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}(L_{\tau(u)} > t|\tau(u) < \infty) = e^{\Xi(-\alpha)t/\alpha}\left(1 - \frac{t\Xi(-\alpha)}{\alpha}\left(1 + \frac{\Xi(-\alpha)}{\alpha\Xi'(0+)}\right)\right).$

Da $V_{\tilde{H}}(dy) = dy$ und $q = \Xi'(0+)$ ist, folgt außerdem mit den Theoremen 5.4.5 und 5.4.6 für $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} - u \in dx, u - X_{\tau(u)^-} \in dv, u - \overline{X}_{\tau(u)^-} \in dy|\tau(u) < \infty\right) \\
&\qquad = \frac{\alpha}{q}e^{\alpha y}\ dyV_{\tilde{H}}(dv - y)\ \Pi_X(dx + v) \\
&\qquad = \frac{\alpha}{q}e^{\alpha y}\ dy\ dv\ \Pi_X(dx + v). \qquad (5.97)
\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse werden nun an zwei spektral positiven Modellen veranschaulicht.

Sprungdiffusionsprozess

Wenn man den klassischen Verlustprozess (4.6) mit einer Standard Brownschen Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$, siehe Beispiel 2.3.3(b), stört, dann hat $(X_t)_{t\geq 0}$ die Form

$$X_t = \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma t,\ t \geq 0, \qquad (5.98)$$

wobei $\sigma > 0$ eine Konstante ist und alle Prozesse als voneinander unabhängig vorausgesetzt werden. Nach Annahme (5.5) driftet X gegen $-\infty$ und daher X den Erwartungswert

$\mathbb{E}[X_1] = \lambda\mu - \gamma < 0$, was äquivalent zu $\rho = (\lambda\mu)/\gamma < 1$ ist. X hat in diesem Fall den charakteristischen Exponenten

$$\Psi_X(u) = iu\gamma + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \lambda \int_{[0,\infty)} \left(1 - e^{iux}\right) \; F(dx)$$

und damit hat $\hat{X}$ den Laplace-Exponenten

$$\Xi(u) = -\Psi_X(iu) = u\gamma + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \lambda \int_{[0,\infty)} \left(e^{-ux} - 1\right) \; F(dx) \tag{5.99}$$

wobei F die Schadenhöhenverteilung mit endlichen Erwartungswert $\mu > 0$ ist. Nach Annahme 5.4.10 ist Ξ für $u \geq -\alpha$ endlich. Mit $\overline{\Pi}_X^+(u) = \lambda \overline{F}(u), \; u \geq 0$ gilt gemäß (5.7):

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = \int_u^\infty \lambda \overline{F}(y) \; dy = \lambda\mu \int_u^\infty \frac{1}{\mu} \overline{F}(y) \; dy = \lambda\mu \overline{F}_I(u), \; u \geq 0. \tag{5.100}$$

In Kapitel 4 galt: $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = \overline{F}_I(u), \; u \geq 0$, da Lokalzeiten L und $\hat{L}$ verwendet wurden, für die die Konstante k' in der Wiener-Hopf Faktorisierung gleich $1/(\lambda\mu)$ ist.

1. Fall: $\alpha > 0$

Die Voraussetzung $F \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ ist nach Bemerkung 2.4.11 äquivalent zu $\overline{F}_I \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ und nach Theorem 2.4.7(c) gilt: $M_{F_I}(\alpha) = (M_F(\alpha) - 1)/(\mu\alpha) < \infty$. Mit Bemerkung 2.1.17 gilt insbesondere: $(\star)\overline{F}(u) \sim \alpha\mu\overline{F}_I(u), \; u \to \infty$. Aus (5.99) folgt:

$$\begin{aligned} -\Xi(-\alpha) &= \alpha\gamma - \frac{\alpha^2 \cdot \sigma^2}{2} - \lambda \int_{[0,\infty)} (e^{\alpha x} - 1) \; F(dx) \\ &= \alpha\gamma - \frac{\alpha^2 \cdot \sigma^2}{2} - \lambda \left(M_F(\alpha) - 1\right) \\ &= \alpha\gamma - \frac{\alpha^2 \cdot \sigma^2}{2} - \lambda\mu\alpha M_{F_I}(\alpha). \end{aligned} \tag{5.101}$$

(5.101) ist genau dann positiv, wenn gilt:

$$\rho M_{F_I}(\alpha) + \frac{\sigma^2 \alpha}{2\gamma} < 1.$$

Wir nehmen an, dass diese Bedingung erfüllt ist und $\Xi(-\alpha) < 0$ gilt, womit die Nicht-Cramér Bedingung $e^{-q} M_{\mathcal{H}}(\alpha) < 1$ erfüllt ist. Durch Differentiation erhält man:

$$q = \Xi'(0+) = \gamma - \lambda\mu = \gamma(1 - \rho).$$

Insgesamt folgt aus Theorem 5.4.11 (a) mit (5.100) und (5.101):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) &\sim \frac{\gamma(1-\rho)\alpha^2}{\left(\alpha\gamma - \frac{\alpha^2 \cdot \sigma^2}{2} - \lambda\mu\alpha M_{F_I}(\alpha)\right)^2} \cdot \lambda\mu\overline{F}_I(u) \\ &= \frac{\rho(1-\rho)}{\left(1 - \frac{\alpha \cdot \sigma^2}{2\gamma} - \rho M_{F_I}(\alpha)\right)^2} \cdot \overline{F}_I(u) \\ &\overset{(\star)}{\sim} \frac{\rho(1-\rho)}{\mu\alpha \left(1 - \frac{\alpha \cdot \sigma^2}{2\gamma} - \rho M_{F_I}(\alpha)\right)^2} \cdot \overline{F}(u), \; u \to \infty. \end{aligned} \tag{5.102}$$

(5.102) ist eine Verallgemeinerung des klassischen Ergebnisses (4.43), in dem $\sigma = 0$ ist. Die Störung durch den Prozess σB_t bewirkt den neuen Faktor $\sigma^2\alpha/(2\gamma)$ und, da in (5.98) $\sigma^2 > 0$ ist, gilt: $\sigma^2\alpha/(2\gamma) > 0$. Daher ändert sich für $\alpha > 0$ die Abschätzung der RuinWS, wenn man einen klassischen Verlustprozess mit einer Brownschen Bewegung stört. Wenn die MEF $M_{\overline{\Pi}^+}(\alpha)$ berechenbar ist, dann kann man die Grenzverteilung in Theorem 5.4.11 ebenfalls explizit angeben.
Außerdem gilt mit (5.97):

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} - u \in dx, u - X_{\tau(u)^-} \in dv, u - \overline{X}_{\tau(u)^-} \in dy | \tau(u) < \infty\right) \\ = \frac{\alpha}{\gamma - \lambda\mu} e^{\alpha y}\ dy\ dv\ \lambda F(dx + v).\end{aligned}$$

2. Fall: $\alpha = 0$
Sei $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = \lambda \int_u^\infty \overline{F}(y)\ dy = \lambda\mu\overline{F}_I(u)$ in $\mathcal{S}$. Mit $\Xi'(0+) = \gamma - \lambda\mu = \gamma(1-\rho)$ folgt aus Theorem 5.4.11(a):

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{1}{\gamma(1-\rho)}\lambda\mu\overline{F}_I(u) = \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}_I(u),\ u \to \infty. \tag{5.103}$$

Da (5.103) und das entsprechende Ergebnis für den klassischen Fall (4.41) identisch sind, hat die Störung durch σB_t für $\alpha = 0$ keinen Einfluss auf die RuinWS. Das zeigt für $\alpha = 0$, dass (4.41) für das klassische Modell (4.6) in dem Sinne robust ist, dass man sich in gewisser Weise vom klassischen Risikomodell (4.6) entfernen kann, ohne dass sich die Asymptotik der RuinWS ändert. Den geringen Einfluß der Brownschen Bewegung auf das asymptotische Verhalten von (5.98) für $\alpha = 0$ erkennt man auch in Abbildung 5.3, die Realisierungen des klassischen Verlustprozesses (4.6) und des Prozesses (5.98) für $\sigma = 1$ und Pareto-verteilte Schäden mit Parametern $a = 1$ und $b = 2$ zeigt, wobei $\lambda = 1$ und $\gamma = 2$ ist.
Desweiteren ist nach Theorem 5.4.4(a) die asymptotische Überschussverteilung $\overline{G}(x) = 1,\ x \geq 0$, und daraus folgt, dass der Überschuss über die Schranke u gegen ∞ konvergiert für $u \to \infty$ und der Ruin für eine große Anfangsrisikoreserve u durch einen sehr großen Sprung eintritt. Mit Theorem 5.4.8 erhält man auch:

$$\lim_{u\to\infty} \left| \mathbb{P}\left(X_{\tau(u)} - u > x | \tau(u) < \infty\right) - \frac{\overline{F_I}(u+x)}{\overline{F_I}(u)} \right| = 0.$$

Stabiler Prozess mit Sprüngen und Drift

In diesem Beispiel wird der klassische Verlustprozess X (4.6) durch einen p-stabilen Lévy-Prozess $(S_t^{(p)})_{t\geq 0}$ mit Index $p \in (1,2)$ gestört und hat die Form

$$X_t = S_t^{(p)} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma t,\ t \geq 0. \tag{5.104}$$

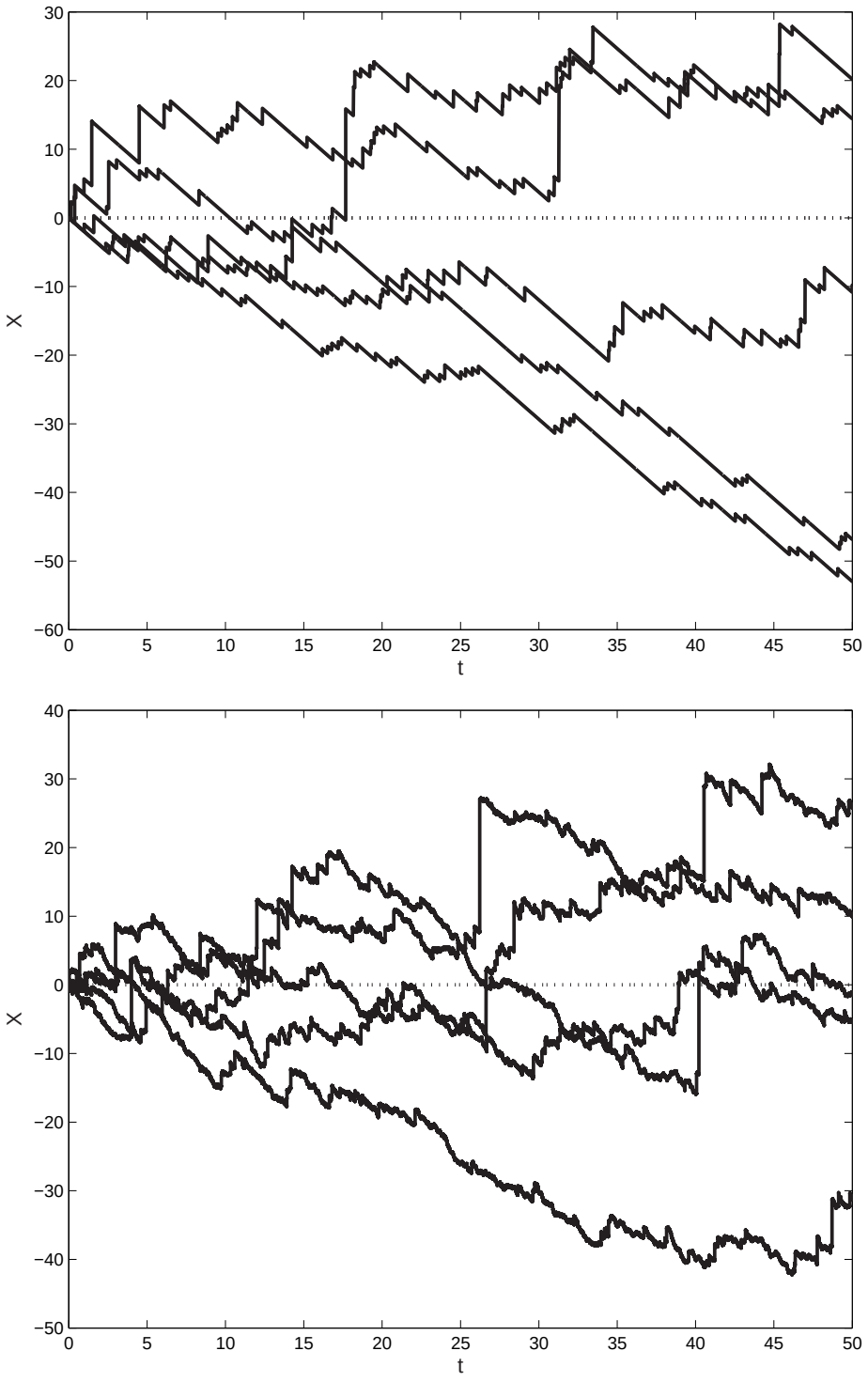

Abbildung 5.3: Das obere Bild zeigt 5 Realisierungen des klassischen Verlustprozesses $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma t,\ t \geq 0$ für Pareto-verteilte Schäden mit Parametern $a = 1, b = 2, \lambda = 1$ und $\gamma = 2$. Das untere Bild zeigt 5 Realisierungen des Prozesses $X_t = B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - \gamma t,\ t \geq 0$, mit Parametern $a = 1, b = 2, \lambda = 1$ und $\gamma = 2$.

Nach (2.7) ist der Laplace-Exponent von $\hat{X}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\Xi(u) &= u\gamma + \int_{[0,\infty)} \left(e^{-ux} - 1 + ux1_{\{x<1\}}\right) \frac{p(p-1)}{\Gamma(2-p)x^{1+p}}\, dx + \lambda \int_{[0,\infty)} \left(e^{-ux} - 1\right)\, F(dx) \\ &= u\gamma + u^p + \lambda \int_{[0,\infty)} \left(e^{-ux} - 1\right)\, F(dx),\ u \geq 0. \end{aligned} \tag{5.105}$$

Da $p \in (1,2)$ ist, gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|)\, \frac{p(p-1)}{\Gamma(2-p)x^{1+p}}\, dx = \infty.$$

Daher hat $S^{(p)}$ und damit auch X unbeschränkte Variation und die Annahme (5.2) ist nach Theorem 3.6.3 erfüllt. Außerdem hat $S^{(p)}$ für $p \in (1,2)$ einen endlichen Erwartungswert und ist rekurrent, siehe Bertoin [6], S.34. Daher hat $S^{(p)}$ nach Proposition 3.3.3(b) den Erwartungswert 0. Da $\Xi(u)$ in diesem Fall nur für $u \geq 0$ endlich ist, kann man nur den subexponentiellen Fall $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{S}$ behandeln. Mit der Nettoprofitbedingung gilt $\rho = \lambda\mu/\gamma < 1$ und durch Differentiation erhält man:

$$q = \Xi'(0+) = \gamma - \lambda\mu.$$

An (5.105) erkennt man, dass das Lévy-Maß von X gegeben ist durch

$$\overline{\Pi}_X^+(x) = \frac{p-1}{\Gamma(2-p)} x^{-p} + \lambda \overline{F}(x) \text{ und } \overline{\Pi}_X^-(x) = 0,\ x > 0, \tag{5.106}$$

und mit (5.7) ergibt sich:

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) = \int_u^\infty \overline{\Pi}_X^+(x)\, dx = \frac{u^{-(p-1)}}{\Gamma(2-p)} + \lambda \int_u^\infty \overline{F}(x)\, dx,\ u > 0. \tag{5.107}$$

Nach (5.106) hängt $\overline{\Pi}_X^+$ und damit $\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}$ sowohl vom Tail des Störprozesses als auch vom Tail der Schadenhöhenverteilung F ab. Je nachdem welcher dieser Tails schwerer ist, unterscheidet man folgende 3 Fälle.

1.Fall:

Wenn der Tail $\overline{F}$ der Schadenhöhenverteilung leichter als der Tail des Störprozesses $S^{(p)}$ ist, dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} x^p \overline{F}(x) = 0.$$

Mit l'Hospital erhält man:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u)}{\frac{u^{-(p-1)}}{\Gamma(2-p)}} &\overset{(5.107)}{=} 1 + \lim_{u\to\infty} \frac{\lambda \int_u^\infty \overline{F}(x)\, dx}{u^{-(p-1)}} \cdot \Gamma(2-p) \\ &= 1 + \lim_{u\to\infty} \frac{\lambda \overline{F}(u)}{(p-1)u^{-p}} \cdot \Gamma(2-p) = 1,\end{aligned}$$

d.h.

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \sim \frac{u^{-(p-1)}}{\Gamma(2-p)},\ u \to \infty.$$

Mit Theorem 5.4.11(a) folgt daraus:

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{1}{\gamma - \lambda\mu}\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \asymp \frac{1}{\gamma - \lambda\mu}\frac{u^{-(p-1)}}{\Gamma(2-p)},\ u \to \infty.$$

2.Fall:
Wenn beide Tails gleich schwer sind, dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} x^p \overline{F}(x) = c \in (0, \infty).$$

Analog zum 1.Fall erhält man mit l'Hospital:

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \sim \left(\frac{1}{\Gamma(2-p)} + \frac{\lambda c}{p-1}\right) u^{-(p-1)},\ u \to \infty.$$

Mit Theorem 5.4.11(a) folgt:

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{1}{\gamma - \lambda\mu}\left(\frac{1}{\Gamma(2-p)} + \frac{\lambda c}{p-1}\right) u^{-(p-1)},\ u \to \infty.$$

3.Fall:
Wenn der Tail $\overline{F}$ schwerer als der Tail des Störprozesses $S^{(p)}$ ist, dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} x^p \overline{F}(x) = \infty.$$

Mit l'Hospital folgt:

$$\overline{\Pi}_{\mathcal{H}}(u) \sim \lambda\mu\overline{F}_I(u),\ u \to \infty,$$

und mit Theorem 5.4.11(a) gilt:

$$\mathbb{P}(\tau(u) < \infty) \sim \frac{1}{\gamma - \lambda\mu}\lambda\mu\overline{F}_I(u) \sim \frac{\rho}{1-\rho}\overline{F}_I(u),\ u \to \infty.$$

Für eine subexponentielle Schadenhöhenverteilung mit endlichem Erwartungswert μ erhalten wir im Modell (5.104) folglich die gleiche Abschätzung der RuinWS wie im klassischen Risikomodell (4.6). Die p-stabile Störkomponente $S^{(p)}$ hat für subexponentielle Schäden keinen Einfluß auf die Asymptotik der RuinWS, was wie im vorherigen Beispiel die Robustheit der Abschätzung (4.41) zeigt.

Anhang A

A.1 Spezielle Funktionen

Definition A.1.1 *(Fourier-Transformation: Werner [33], Definition V.2.1, Definition V.2.3, Satz V.2.8)*
Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ setzt man

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx,\ \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $\mathcal{F}f$ heißt Fourier-Transformierte *von f und die Abbildung $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ heißt* Fourier-Transformation.
$\mathcal{F}$ ist eine Bijektion auf dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Der inverse Operator ist durch

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, d\xi,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

gegeben und heißt inverse Fourier-Transformation.

Definition A.1.2 *(Laplace-Transformation: Bertoin [6], S.9, Bronstein [9], S.634)*
Für eine Funktion $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ setzt man

$$\mathcal{L}f(t) := \int_0^\infty f(x) e^{-tx}\, dx \in [0,\infty],\ t \geq 0.$$

Die Funktion $\mathcal{L}f$ heißt Laplace-Transformierte *von f und die Abbildung $\mathcal{L}$ heißt* Laplace-Transformation.

Definition A.1.3 *(Gamma-Funktion: Bronstein [9], S.331)*
Die Gamma-Funktion *ist definiert als*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt,\ x > 0.$$

A.2 Poisson-Punktprozesse

Definition A.2.1 *(Poisson-Zufallsmaß, Poisson-Punktprozess: Applebaum [1], S.89,90)*
Seien $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wraum. Ein Zufallsmaß *M auf $(S, \mathcal{A})$ ist eine Kollektion von Zufallsvariablen $(M(B), B \in \mathcal{A})$, so dass gilt:*

(1) $M(\emptyset) = 0$.

(2) $M\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} M(A_n)$ *fast sicher für paarweise disjunkte Mengen* $(A_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{A}$ *(σ-Additivität).*

Ein Zufallsmaß M heißt Poisson-Zufallsmaß*, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:*

(3) Für jede Borel-Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $M(B) < \infty$ gilt: $M(B)$ ist Poisson-verteilt.

(4) Für jede disjunkte Familie $(B_1, \ldots, B_n) \in \mathcal{A}$ sind die ZVen $M(B_1), \ldots, M(B_n)$ unabhängig.

Das σ-endliche Maß $\mathbb{E}[M(\cdot)]$ heißt Intensitätsmaß.
Sei $S = \mathbb{R}^+ \times U$, U messbarer Raum mit σ-Algebra $\mathcal{C}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{C}$. Sei $p = (p_t)_{t\geq 0}$ ein Prozess mit Werten in U, so dass

$$M([0,t] \times A) = \mathrm{card}\{0 \leq s < t, p_s \in A\}$$

ein Poisson-Zufallsmaß auf S ist, dann heißt p Poisson-Punktprozess *mit assoziiertem Poisson-Zufallsmaß M.*

Beispiel für einen Poisson-Punktprozesse:
Sei $U = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{C}$ und X ein Lévy-Prozess mit Lévy-Maß Π. Der Sprungprozess ΔX ist definiert durch

$$\Delta X_t := X_t - X_{t-}, \ \forall t \geq 0$$

und für $0 \leq t < \infty$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ definiert man

$$N(t, A) := \mathrm{card}\{0 \leq s \leq t; \Delta X_s \in A\} = \sum_{0\leq s\leq t} 1_A(\Delta X_s).$$

Für ein festes $t > 0$ ist die Mengenfunktion $A \to N(t, A)(\omega)$ ein Zählmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ und $\mathbb{E}[N(t, A)] = \int N(t, A)(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$ ist ein Borel-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. ΔX ist ein Poisson-Punktprozess mit assoziiertem Poisson-Zufallsmaß N und Intensitätsmaß Π.

Theorem A.2.2 *(Kompensationsformel: Bertoin [6], S.7)*
Sei $H = (H_t)_{t\geq 0}$ ein vorhersagbarer Prozess mit Werten im Raum nicht-negativer messbarer Funktionen auf $E \cup \{\Upsilon\}$, so dass $H_t(\Upsilon) = 0$, $\forall t \geq 0$. Dann gilt für einen Poisson-Punktprozess $(e_t)_{t\geq 0}$:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{0\leq t<\infty} H_t(e_t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \int_E H_t(s)\ \nu(ds)\ dt\right],$$

wobei ν das Intensitätsmaß von $(e_t)_{t\geq 0}$ ist.

A.3 Hilfsresultate

Theorem A.3.1 *(Karamatas Theorem: EKM [17], Theorem A3.6)*
Sei $h \in \mathcal{R}_\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und lokal beschränkt auf $[x_0, \infty)$ für ein $x_0 \geq 0$. Dann gilt

(a) für $\alpha > -1$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_{x_0}^x h(t)\ dt}{xh(x)} = \frac{1}{\alpha+1},$$

(b) für $\alpha < -1$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty h(t)\ dt}{xh(x)} = -\frac{1}{\alpha+1}.$$

Lemma A.3.2 *(Klüppelberg et al. [26], Lemma 7.1)*
Sei $\alpha \geq 0$ und die VF $\nu(\cdot) \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$. Dann gilt für jedes $x \geq 0$:

$$\lim_{a\to\infty} \limsup_{u\to\infty} \int_{(a,u+x-a]} \frac{\overline{\nu}(u+x-y)}{\overline{\nu}(u)}\ \nu(dy) = 0. \tag{A.1}$$

Außerdem ist die Konvergenz in (A.1) gleichmäßig in $x \geq 0$.

Beweis:
Den Tail der Faltung von ν mit sich selbst kann man schreiben als

$$\begin{aligned}
\overline{\nu^{2*}}(z) &= 1 - \nu^{2*}(z) = \overline{\nu}(z) + \nu(z) - \int_{(0,z]} \nu(z-y)\ \nu(dy) \\
&= \overline{\nu}(z) + \int_{(0,z]} (1 - \nu(z-y))\ \nu(dy) = \overline{\nu}(z) + \int_{(0,z]} \overline{\nu}(z-y)\ \nu(dy),\ z \geq 0.
\end{aligned}$$

Für $a > 0$ und $z > 2a$ spaltet man das Faltungsintegral in drei Teilintegrale über $(0, a]$, $(a, z-a)$ und $[z-a, z)$ auf und erhält mit partieller Integration für das letzte Teilintegral

$$\begin{aligned}
\int_{[z-a,z)} \overline{\nu}(z-y)\ \nu(dy) &= -\int_{[z-a,z)} \overline{\nu}(z-y)\ \overline{\nu}(dy) \\
&= -\left[\overline{\nu}(z-y)\overline{\nu}(y)\right]_{y=z-a}^{z} - \int_{[z-a,z)} \overline{\nu}(y)\ \overline{\nu}(z-dy) \\
&= -\overline{\nu}(z) + \overline{\nu}(a)\overline{\nu}(z-a) + \int_{(0,a]} \overline{\nu}(z-s)\ \nu(ds).
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die obere Darstellung ergibt sich die Identität

$$\overline{\nu^{2*}}(z) = 2\int_{(0,a]} \overline{\nu}(z-y)\ \nu(dy) + \int_{(a,z-a]} \overline{\nu}(z-y)\ \nu(dy) + \overline{\nu}(a)\overline{\nu}(z-a). \tag{A.2}$$

Löst man diese Gleichung nach dem Integral auf und setzt $z = u + x$, so folgt

$$\int_{(a,u+x-a)} \overline{\nu}(u+x-y)\ \nu(dy) = \overline{\nu^{2*}}(u+x) - 2\int_{(0,a]} \overline{\nu}(u+x-y)\ \nu(dy) - \overline{\nu}(a)\overline{\nu}(u+x-a). \tag{A.3}$$

Wegen der Voraussetzung $\nu(\cdot) \in \mathcal{S}^{(\alpha)}$ gelten gemäß Definition 2.4.2 die Grenzbeziehungen:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\nu}(u-z)}{\overline{\nu}(u)} = e^{\alpha z} \text{ und } \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\nu^{2*}}(u)}{\overline{\nu}(u)} = 2M_\nu(\alpha).$$

Daraus folgt

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\nu}(u+x-y)}{\overline{\nu}(u)} = e^{\alpha(y-x)}.$$

Wenn man in (A.3) den Grenzwert für $u \to \infty$ bildet, dann darf man beim Integral über $(0,a]$ Grenzwertbildung und Integration vertauschen, da nach Bemerkung 2.4.3 das Wmaß ν gleichmäßig auf Kompakta konvergiert. Wenn man (A.3) durch $\overline{\nu}(u)$ teilt, dann erhält man als Grenzwert der rechten Seite für $u \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\nu^{2*}}(u+x) - 2\int_{(0,a]} \overline{\nu}(u+x-y)\ \nu(dy) - \overline{\nu}(a)\overline{\nu}(u+x-a)}{\overline{\nu}(u)} \\
&= \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{\nu}(u+x)}{\overline{\nu}(u)} \frac{\overline{\nu^{2*}}(u+x)}{\overline{\nu}(u+x)} - 2\int_{(0,a]} e^{\alpha(y-x)}\ \nu(dy) - \overline{\nu}(a)e^{\alpha(a-x)} \\
&= e^{-\alpha x} 2M_\nu(\alpha) - 2\int_{(0,a]} e^{\alpha(y-x)}\ \nu(dy) - \overline{\nu}(a)e^{\alpha(a-x)} \\
&= 2e^{-\alpha x}\int_{(a,\infty)} e^{\alpha y}\ \nu(dy) - e^{-\alpha x}e^{a\alpha}\overline{\nu}(a).
\end{aligned}$$

$M_\nu(\alpha) < \infty$ impliziert $\lim_{a\to\infty} e^{\alpha a}\overline{\nu}(a) = 0$ und $\lim_{a\to\infty} \int_{(a,\infty)} e^{\alpha y}\ \nu(dy) = 0$ und der letzte Ausdruck konvergiert gegen 0 für $a \to \infty$.
Damit bleibt nur noch die gleichmäßige Konvergenz von (A.1) zu zeigen. Für $x = 0$ gibt es in (A.1) $\forall \epsilon > 0$ ein $a_0(\epsilon)$ und ein $u_0(\epsilon)$, so dass $\int_{(a,u-a)} \overline{\nu}(u-y)\ \nu(dy) \le \epsilon\overline{\nu}(u)$ gilt. Das gilt, wenn $x \ge 0$ und $u_x = u + x$, $\int_{(a,u_x-a]} \overline{\nu}(u_x - y)\ \nu(dy) \le \epsilon\overline{\nu}(u)$, wenn $a \ge a_0(\epsilon)$ und $u_x \ge u_0(a)$, und bestimmt wenn $a \ge a_0(\epsilon)$ und $u \ge u_0(a)$. □

Lemma A.3.3 *(Bertoin und Doney [7], S.211)*
Für $\alpha > 0$ ist $G \in \mathcal{L}^{(\alpha)}$ äquivalent zu

$$\lim_{u\to\infty} \frac{G(u,u+h)}{G(u,u+1)} = \frac{1-e^{-\alpha h}}{1-e^{-\alpha}},$$

wobei der Grenzwert für nicht-gitterartige VFen für $u \in \mathbb{R}$ und für alle $h > 0$ gebildet wird und für gitterartige VFen für $u \in \mathbb{N}$ und für alle $h \in \mathbb{N}$. Diese Aussage ist äquivalent dazu, dass $G(u+dy)/\overline{G}(u)$ schwach gegen die Exponentialverteilung mit Parameter α konvergiert im nicht-gitterartigen Fall bzw. gegen die geometerische Verteilung mit Parameter $e^{-\alpha}$ im gitterartigen Fall.

Anhang B

Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole

a	Parameter in der Lévy-Khintchine Formel
$\mathcal{B}(\cdot)$	Borel-σ-Algebra
$C^q(\cdot),\ q \geq 0$	q-Kapazität
C^q	$C^q(\{0\})$
$D_X = D_{\mu_X}$	Drift des Lévy-Prozesses X mit Verteilung μ_X
$\Delta X = (\Delta X_t)_{t\geq 0}$	Sprungprozess von X
$\mathbb{E}[\cdot]$	Erwartungwert
e_q	unabhängige exponential verteilte ZV mit Parameter $q > 0$
$\text{expo}(q)$	Exponentialverteilung mit Parameter $q > 0$
$\eta(\cdot)$	Überlebenswahrscheinlichkeit
F	SchadenhöhenVF im klassischen Risikomodell
$\mathcal{F}$	σ-Algebra
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	$\mathbb{P}$-vollständige kanonische Filtration
$\mathcal{F}f(\cdot)$	Fourier-Transformierte der Funktion f
$\mathcal{F}^{-1}f(\cdot)$	inverse Fourier-Transformierte der Funktion f
$F_I(\cdot)$	integrierte Tailverteilung der VF F
f.s.	fast sicher
$\overline{G}_t$	Zeitpunkt des letzten Maximums bis einschließlich t
$\underline{G}_t$	Zeitpunkt des letzten Minimums bis einschließlich t
$\Gamma(\cdot)$	Gamma-Funktion
$\Gamma(\alpha, n)$	Gamma-Verteilung mit den Parametern α und n
γ	Prämienrate im klassischen Risikomodell
$H = (H_t)_{t\geq 0}$	aufsteigender Leiterhöhenprozess von X
$\hat{H} = (\hat{H}_t)_{t\geq 0}$	absteigender Leiterhöhenprozess von X
$\tilde{H} = (\tilde{H}_t)_{t\geq}$	aufsteigender Leiterhöhenprozess von $-X$
$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$	ungestörter Leiterhöhenprozess
iid	independent, identically distributed
$\Im(z)$	Imaginärteil der Zahl z
KEF	kumulantenerzeugende Funktion
$K_X(\cdot)$	kumulantenerzeugende Funktion einer ZV X

κ_L	Lundberg-Koeffizienten, Anpassungkoeffizient
$L = (L_t)_{t\geq 0}$	Lokalzeit von X (beim Maximum)
$\hat{L} = (\hat{L}_t)_{t\geq 0}$	Lokalzeit von X beim Minimum
$\tilde{L} = (\tilde{L}_t)_{t\geq 0}$	Lokalzeit von $\hat{X}$ beim Maximum
$L^{-1} = (L_t^{-1})_{t\geq 0}$	aufsteigende Leiterzeit von X
$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_t)_{t\geq 0}$	ungestörte Lokalzeit
$\mathcal{L}^{-1} = (\mathcal{L}_t^{-1})_{t\geq 0}$	ungestörte Leiterzeit
$\mathcal{L}f$	Laplace-Transformierte der Funktion f
$\mathcal{L}_X(\cdot) = \mathcal{L}_{\mu_X}(\cdot)$	Laplace-(Stieltjes) Transformierte der ZV X bzw. des Maßes μ_X
$\mathcal{L}^{(\alpha)},\ \alpha > 0$	Klasse von VFen mit exponentiellen Tails mit Rate α
$\mathcal{L}$	Klasse der heavy-tailed oder long-tailed VFen
$\mathcal{L}d^{(\alpha)},\ \alpha > 0$	Klasse von Dichten mit exponentiellen Tails mit Rate α
$\mathcal{L}d$	Klasse der heavy-tailed oder long-tailed Dichten
λ	Intensität des Schadenzahlprozesses N im klassischen Risikomodell
$\lambda(\cdot)$	Lebesgue-Maß
MEF	momentenerzeugende Funktion
$M(\cdot)$	momentenerzeugende Funktion eines endlichen Maßes bzw. der dazugehörigen VF
$\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$	Menge aller Borel-Wmaße auf $\mathbb{R}$ mit Masse 1
μ	EW der SchadenhöhenVF im klassischen Risikomodell
$\mathbb{N}(\mathbb{N}_0)$	Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0)
$N = (N_t)_{t\geq 0}$	Schadenzahlprozess im Risikomodell
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum
$P = (P_t)_{t\geq 0}$	Prämienprozess im Risikomodell
$\mathbb{P}$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$\mathbb{P}_x$	Verteilung von $X + x$ unter $\mathbb{P}$
$\psi(\cdot,\cdot)$	Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit oder mit endlichem Horizont
$\psi(\cdot) = \psi(\cdot,\infty)$	Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit oder mit unendlichem Horizont
Φ	Laplace-Exponent, Kumulant eines Subordinators
$\phi_X(\cdot) = \phi_{\mu_X}(\cdot)$	Charakteristische Funktion der ZV X bzw. des Maßes μ_X
$\pi(\lambda)$	Poisson-Verteilung mit Parameter λ
$\pi(\lambda, \mu)$	zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Parameter λ und Lévy-Maß μ
Π	Lévy-Maß einer ZV bzw. eines Lévy-Prozesses
$\overline{\Pi}^+$	positiver Tail eines endlichen Maßes Π
$\overline{\Pi}^-$	negativer Tail eines endlichen Maßes Π
$\overline{\Pi}$	kombinierter Tail eines endlichen Maßes Π bzw. Tail einer VF Π
Ψ	charakteristischer Exponent, Lévy-Exponent, Lévy-Symbol einer unendlich oft teilbaren ZV bzw. eines Lévy-Prozesses

$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
Q_F	Ausfallfunktion der VF F
q_F	Ausfallrate der VF F
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$R = (R_t)_{t\geq 0}$	klassischer Risikoreserveprozess
r	relativer Sicherheitszuschlag im klassischen Risikomodell
$\Re(z)$	Realteil der Zahl z
$\mathcal{R}_{(\alpha)},\ \alpha \in \mathbb{R}$	Klasse der regulär variierenden Funktionen mit Index α
$\mathcal{R}_0$	Klasse der langsam variierenden Funktionen
ρ	$(\lambda\mu)/\gamma$ im klassischen Risikomodell
$S = (S_t)_{t\geq 0}$	Gesamtschadenprozess im Risikomodell
$\mathcal{S}^{(\alpha)}, \alpha \geq 0$	Klasse der faltunsäquivalenten VFen
$\mathcal{S}$	Klasse der subexponentiellen VFen
$\mathcal{S}^*$	Unterklasse von $\mathcal{S}$
$\mathcal{S}d^{(\alpha)},\ \alpha \geq 0$	Klasse der faltungsäquivalenten Dichten
$\mathcal{S}d$	Klasse der subexponentiellen Dichten
σ^2	Gauß-Koeffizient des Lévy-Prozesses X
T_A	Eintrittszeit in die Menge A
T'_A	Eintreffzeit in die Menge A
$T(x)$	Überschreitungszeit der Schranke x
$(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$	Schadenzeiten im klassischen Risikomodell
$\tau(\cdot,\cdot)$	Ruinzeit mit endlichem Horizont
$\tau(\cdot)$	Ruinzeit mit unendlichem Horizont
$(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$	Zeitpunkte der neuen Maxima im klassischen Risikomodell
u	Anfangsrisikoreserve im Risikomodell
$U^q(dy) = V^q(dy),\ y \in \mathbb{R}$	q-Potentialmaß
$U(dy) = V(dy),\ y \in \mathbb{R}$	Erneuerungsfunktion, 0-Potentialmaß, Greensche Funktion
V^q	q-PotentialVF
$V^{q'}$	Dichte des q-Potentialmaßes
$V(\cdot)$	Erneuerungsfunktion eines Subordinators
$V_{(H,L^{-1})}(\cdot,\cdot)$	bivariate Erneuerungsfunktion des Subordinators (L^{-1}, H)
$V_{(\tilde{H},\tilde{L}^{-1})}(\cdot,\cdot)$	bivariate Erneuerungsfunktion des Subordinators $(\tilde{L}^{-1}, \tilde{H})$
$\mathrm{Var}[\cdot]$	Varianz
VF	Verteilungsfunktion
$(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$	Zwischenschadenzeiten im klassischen Risikomodell
Wmaß	Wahrscheinlichkeitsmaß
Wraum	Wahrscheinlichkeitsraum
WS	Wahrscheinlichkeit
$\underline{X} = (X_t)_{t\geq 0}$	Verlustprozess im Risikomodell
$\overline{X} = \left(\overline{X}_t\right)_{t\geq 0}$	Supremumsprozess von X
$\underline{X} = (\underline{X}_t)_{t\geq 0}$	Infimumsprozess von X
$\hat{X} = (\hat{X}_t)_{t\geq 0}$	zu X dualer Prozess
X_{t^-}	linker Grenzwert von X zur Zeit t

$X^{(q)} = \left(X_t^{(q)}\right)_{t\geq 0}$	der Prozess X mit Rate $q > 0$ gekillt
Ξ	Laplace-Exponenten eines spektral negativen Lévy-Prozesses
$\overleftarrow{\Xi}$	Rechtsinverse des Laplace-Exponenten Ξ für spektral negative Lévy-Prozesse
$(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$	Schäden im klassischen Risikomodell
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$Z_X = Z_{\mu_X}$	Zentrum des Lévy-Prozesses X mit Verteilung μ_X
ZV	Zufallsvariable
$\hat{}$	Dualität
$*$	Faltung von Wmaßen bzw. VFen
$\otimes$	Faltung von Dichten
$\circ$	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$\sim$	asymptotische Äquivalenz
$\overset{\mathrm{w}}{\sim}$	schwache asymptotische Äquivalenz
$\overset{v}{\longrightarrow}$	vage Konvergenz
$\overset{w}{\longrightarrow}$	schwache Konvergenz

Literaturverzeichnis

[1] Applebaum, D. (2004): *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press.

[2] Asmussen, S. (1982): Conditioned limit theorems relating a random walk to its associate, with applications torisk reserve processes and the *GI/G/1* queue. *Adv. Appl. Prob.* **14**, 143-170.

[3] Asmussen, S. (2001): *Ruin Probabilities*. World Scientific, Singapore.

[4] Asmussen, S., Klüppelberg, C. (1996): Large deviations results for subexponential tails, with applications to insurance risk. *Stoch. Proc. Appl.* **64**, 143-170.

[5] Bauer, H. (1992): *Maß- und Integrationstheorie*. De Gruyter Verlag.

[6] Bertoin, J. (1996): *Lévy Processes*. Cambridge University Press.

[7] Bertoin, J., Doney, R. (1996): Some asymptotic results for transient random walks. *Adv. Appl. Prob.* **28**, 207-226.

[8] Bertoin, J., Doney,R. (1994): Cramér's estimate for Lévy processes. *Statist. Prob. Letters*. **21**, 363-365.

[9] Bronstein, I., Semendjajew, K. (1991): *Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft.

[10] Chover, J., Ney, P., Wainger, S. (1973): Degeneracy properties of subcritical branching processes. *Ann. Probab.* **1**, 663-673.

[11] Cline, D. (1986): Convolution tails, product tails and domains of attraction. *Probab. Th. Rel. Fields.* **72**, 529-557.

[12] Cline, D. (1987): Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails. *J. Austral. Math. Soc.* A **43**, 347-365.

[13] Doney, R. A., Kyprianou, A. E. (2004): Overshoots and undershoots of Lévy processes.

[14] Doney, R., Maller, R. (2002): Stability and attraction to normality for Lévy processes at zero and infinity. *J.Theoretical Probab.* **15**, 751-792.

[15] Embrechts, P. (1983): A property of the generalized inverse Gaussian distribution with some applications. *J. Appl. Prob.* **20**, 537-544.

[16] Embrechts, P., Goldie, C. (1982): On convolution tails. *Stoch. Proc. Appl. 13*, 263-278.

[17] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997): *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer Verlag.

[18] Embrechts, P., Veraverbeke, N. (1982): Estimates of the probability of ruin with special emphasis on th possibility of large claims. *Insurance: Math. and Econom.* **1**, 55-72.

[19] Feller, W. (1971): *An Introduction to Probability Theory and Its Applications II.* Willey, New York.

[20] Grandell, J. (1991): *Aspects of Risk Theory*. Springer Verlag.

[21] Jacod, J., Protter, P. (2004): *Probability Essentials*. Springer Verlag.

[22] Klüppelberg, C. (2004): Skript zur Vorlesung Risikotheorie.

[23] Klüppelberg, C. (1988): Subexponential distributions and integrated tails. *J. Appl. Prob.* **25**, 132-141.

[24] Klüppelberg, C. (1989): Subexponential distributions and characterizations of related classes. *Probab. Th. Rel. Fields* **82**, 259-269.

[25] Klüppelberg, C. (1989): Estimation of ruin probabilities by means of hazard rates. *Insurance: Mathematics and Economics* **8**, 279-285.

[26] Klüppelberg, C., Kyprianou, A. E., Maller R. A. (2004): Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes. *Ann. Appl. Probab.* **14**, 1766-1801.

[27] Kyprianou, A. E. (noch nicht veröffentlicht): *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Springer Verlag.

[28] Pakes, A. (2004): Convolution equivalence and infinite divisibility. *J. Appl. prob.* **41**, 407-424.

[29] Resnick, S. (1992): *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser Boston.

[30] Sato, K. (1999): *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge Universitiy Press.

[31] Veraverbeke, N. (1977): Asymptotic behaviour of Wiener-Hopf factors of a random walk. *Stoch. Proc. Appl.* **5**, 27-37.

[32] Vigon, V. (2002): Votre Lévy ramp-t-il ? *J. London Math. Soc.* **65**, 243-256.

[33] Werner, D. (2002): *Funktionalanalysis*. Springer Verlag.

[34] Zolotarev, M.V. (1986): *One Dimensional Stable Distributions.* Amer. Math. Soc., Providence RI.