Vicky Fasen und Claudia Klüppelberg: Modellieren und Quantifizieren von extremen Risiken

1 Einleitung

Extreme Risiken begleiten unser Leben. Während unsere Vorfahren Gefahren und Risiken als gottgegeben hinnahmen, wird heute die Entstehung von Gefahren auf das Handeln von Menschen zurückgeführt. Damit wird Risiko kalkulierbar, und es werden Verantwortlichkeiten zugewiesen. Auch Naturkatastrophen behandeln wir heute als Risiken, wenn wir Vermeidungsstrategien entwickeln, wie zum Beispiel, wenn wir Dämme bauen oder schlicht eine Versicherung abschließen.

Vor diesem Hintergrund ist es natürlich, von der Mathematik Berechnungsformeln für das Risiko und von der Statistik, basierend auf diesen, Prognosen zu verlangen. Das ist allerdings gar nicht so einfach und mit Standardmethoden nicht zu leisten. Wir erklären das an folgendem Beispiel:

Es geht um den Bau von Deichen in Holland. Diese Deiche sind lebenswichtig als Schutz gegen Sturmfluten. Man möchte Deiche höher bauen als eine Wellenhöhe, wie sie höchstens alle 10.000 Jahre vorkommt. Wie hoch muss der Deich mindestens gebaut werden?

Wie schätzt man nun die Höhe der höchsten Welle in 10.000 Jahren, wenn man doch nur Messungen von einigen hundert Jahren zur Verfügung hat? Wir stehen vor dem Problem, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu schätzen, das extremer ist als jedes bisher geschehene. Dazu benötigt man eine spezielle Methode. Diese liefert die Extremwerttheorie.

Extremwerttheorie ist eine fundamentale Theorie, die in statistische Verfahren mündet. Sie wurde in den letzten 50 Jahren entwickelt und ist nicht unumstritten. Extremwerttheorie erlaubt (unter entsprechenden Voraussetzungen) eine Prognose von seltenen Ereignissen aus beobachteten Daten, die aber in den Daten aufgrund ihrer Seltenheit nicht zu sehen sind (Extrapolation). Natürlich ist es einfach, das zu kritisieren: Extrapolation ist von Natur aus unzuverlässig. Dennoch hat sie eine solide mathematische Basis, und keine glaubwürdigere Alternative wurde bisher vorgeschlagen. Folgendes Zitat geht auf Professor Richard Smith (`http://www.unc.edu/∼rls/`) zurück, der wesentlich zur Entwicklung der Extremwertstatistik beigetragen hat: „There is always going to be an element of doubt, as one is extrapolating into areas one doesn't know about. But what extreme value theory is doing is making the best use of whatever you have about extreme phenomena."

Was auch häufig vergessen wird und worauf wir nicht müde werden hinzuweisen, ist die Tatsache, dass allen mathematischen Berechnungen Modelle zugrunde liegen, die nur eine (häufig inadäquate) Vereinfachung der Realität darstellen. Man muss also bei der Interpretation der Ergebnisse immer Vorsicht walten lassen.

2 Extreme Risiken

2.1 Finanzrisiken

In allen Firmen, insbesondere in Versicherungen und Banken, dienen Kapitalreserven der Absicherung von unvorhersehbaren Risiken. Dies fordert die BAFIN (Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht, `http://www.bafin.de/`) im Rahmen von „Basel II" von Banken (`http://www.bis.org/bcbs/`) und im Rahmen von „Solvency II" von Versicherungen (`http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/`). Für die jeweilige Berechnung der vorgeschriebenen Kapitalreserven und ihre Verwaltung ist das Risikomanagement zuständig, hier ist eine mathematisch-statistische Ausbildung unabdingbar.

Die Idee für die Abschätzung, wie hoch eine solche Risikoreserve sein muss, ist dieselbe wie beim Deichbau: In Basel II verwendet man zur Berechnung der Risikoreserve den sogenannten *Value-at-Risk*, das p-Quantil des Risikos, welches wie folgt definiert ist. Es sei X ein Risiko, das zum Beispiel den Verlust eines Wertpapiers in den nächsten 10 Tagen beschreibt. Mit $\mathbb{P}(X \leq x)$ für ein $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn/Verlust X nur Werte kleiner oder gleich x annehmen wird. Dabei stammt das mathematische Symbol $\mathbb{P}$ von dem englischen Wort „probability" für Wahrscheinlichkeit. Die Verteilungsfunktion ist die Funktion $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ für $x \in \mathbb{R}$, und das p-Quantil von X ist

$$x_p = \inf\{x \in \mathbb{R} : \, F(x) \geq p\} \quad \text{für } p \in (0,1) \tag{2.1}$$

(inf steht für Infimum). Damit ist x_p die kleinste Zahl, für die $F(x_p) \geq p$ gilt. Für alle $x < x_p$ gilt $F(x) < p$. Wenn F streng monoton steigend ist, gilt $x_p = F^{-1}(p)$. Je nach Risikoart ist $p = 95\%$ (0.95) oder $p = 99\%$ (0.99) oder gar $p = 99,9\%$ (0,999).

In Basel II sind das Modell und die Schätzmethode vorgeschrieben: Man setzt voraus, dass F eine Normalverteilungsfunktion ist, welche die Darstellung

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}} \, dy \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

und ein $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ besitzt (kurz $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung), und schätzt die charakteristischen Parameter μ und σ dieser Verteilung (den Mittelwert und die Standardabweichung) aus historischen Beobachtungen von mindestens einem Jahr (220 Handelstage). Diese geschätzten Parameter kann man dann verwenden, um das Quantil x_p zu schätzen. Den geschätzten Wert bezeichnen wir mit $\widehat{x}_p$. Die Kapitalreserve ist dann das 3-fache (für gewisse Banken auch das 4-fache) des geschätzten Quantils $\widehat{x}_p$.

Wir argumentieren jetzt, dass weder das Risikomaß noch das Modell adäquat sind. Zuerst zum Risikomaß. Das Quantil x_p entspricht der Deichhöhe, allerdings ist die Situation hier doch anders als beim Deichbau. Wenn eine Sturmflut mit Wellen höher als der Deich hereinbricht, ist kein Halten mehr. Das dahinterliegende Land verschwindet unter Wasser. Beim Finanzrisiko ist es aber sehr erheblich zu wissen, bis zu welcher Höhe sich die resultierenden Verluste summieren. Hier wurde als alternatives Risikomaß der sogenannte *Expected Shortfall* vorgeschlagen, der im Falle eines Verlusts jenseits des Value-at-Risk den erwarteten Verlust beschreibt. Obwohl ernsthafte Versuche unternommen wurden, den Value-at-Risk als vorgeschriebenes Risikomaß durch den

Expected Shortfall in den regulatorischen Vorschriften verbindlich festzuschreiben, war diese akademische Initiative nicht erfolgreich. Die Lobbyarbeit der Banken hat dies verhindert: Die Kapitalrücklagen wären durch dieses Risikomaß erheblich höher ausgefallen.

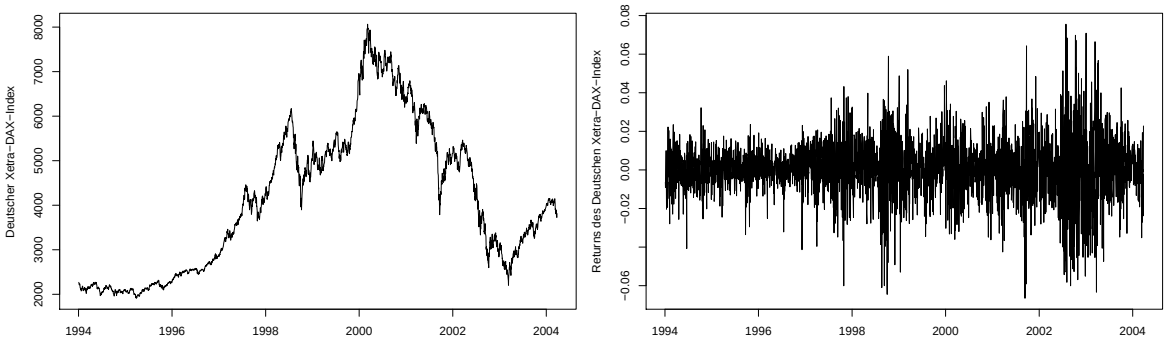

Abbildung 1: *Der Deutsche Xetra-DAX-Index (links) und seine logarithmierten Renditen (rechts) im Zeitraum von 1994-2004.*

Das Modell der Normalverteilung ist völlig inadäquat. Dies wird in Abbildung 2 verdeutlicht. Wenn S_t den Wert des Deutschen Xetra-DAX-Index zum Zeitpunkt t angibt, dann ist $R_t = S_t - S_{t-1}$ die sogenannte *Rendite* und $\log R_t$ die *logarithmierte Rendite*. In Abbildung 2 ist das Histogramm (die empirische Dichte) der logarithmierten Renditen des Deutschen Xetra-DAX-Index und die Dichte einer Normalverteilung, dessen Mittelwert und Standardabweichung aus den historischen Daten geschätzt wurden, gezeichnet. Das Histogramm zeigt deutlich, dass die Verteilung der logarithmierten Renditen des Deutschen Xetra-DAX-Index mehr Masse in den Rändern besitzt als die Normalverteilung, das heißt, im Bereich ± 0.04 und größer/kleiner weist das Histogramm höhere Werte auf als die Normalverteilung, was zu einer Unterschätzung der Kapitalreserve führt. Die Tatsache, dass die empirischen Werte um 0 deutlich höher sind als es die Normalverteilung erlaubt, ist für das Risikomanagement unerheblich.

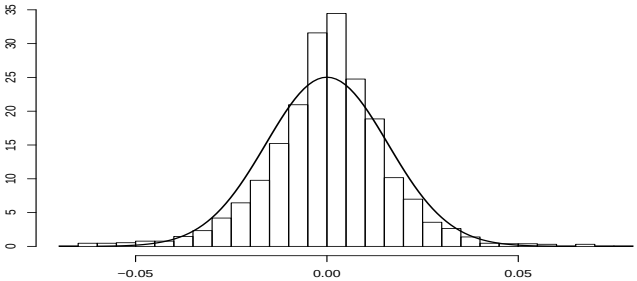

Abbildung 2: *Histogramm der logarithmierten Renditen des Deutschen Xetra-DAX-Index im Vergleich zur Dichte einer Normalverteilung.*

Aufgrund der Erkenntnisse und Erfahrungen der im Jahr 2007 begonnenen Wirtschaftskrise ist der Baseler Ausschuss für Banken bemüht, Basel II zu reformieren, was unter dem Begriff Basel III geschieht.

Die Schätzung eines kleinen Quantils ist im Allgemeinen ein schwieriges Unterfangen, da Aussagen über das extreme Verhalten nötig sind, über das nur wenige Daten vorliegen. Die

statistische Behandlung seltener Ereignisse gelingt nur mit speziellen Verfahren, die wahrscheinlichkeitstheoretische Ergebnisse der Extremwerttheorie in die Schätzung einfließen lassen und damit das Problem der spärlichen Datenlage wettmachen.

2.2 Versicherungsrisiken

Versicherungssgesellschaften übernehmen die Risiken ihrer Kunden. Typische Risiken, gegen die sich Menschen absichern, sind Krankheit, Todesfall, Unfall, Einbruch und Feuer. Durch den Kauf einer Versicherung übertragen Kunden ihr Risiko auf ein Versicherungsunternehmen, das für auftretende Schäden finanziell haftet. Auch das Versicherungsunternehmen kennt das Risiko für das Auftreten eines Schadens seines Kunden nicht, aber durch den Verkauf einer großen Menge von Versicherungsverträgen, die *Policen* genannt werden, fasst es Kunden mit ähnlichen Risiken in einem sogenannten *Portfolio* zusammen und nutzt dabei aus, dass in einem großen Portfolio mit ähnlichen und unabhängigen Risiken der Gesamtschaden im Mittel konstant ist. In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird das bewiesen und als *Gesetz der großen Zahlen* bezeichnet. Es macht für Versicherungsunternehmen gleichartige und unabhängige Risiken kalkulierbarer. Fluktuationen im Portfolio werden durch Reserven abgesichert. In diesem Kontext haben Versicherungsmathematiker die Aufgabe, die Qualität und die Quantität von Risiken zu beurteilen. Dazu müssen sie unter anderem Risikomodelle aufstellen und die Modellparameter schätzen, das Modell statistisch analysieren und unter extremen Bedingungen testen, aber auch die Höhe der Prämien und Reserven bestimmen. Das alles funktioniert sehr gut, solange keine abnormal großen Schäden im Spiel sind.

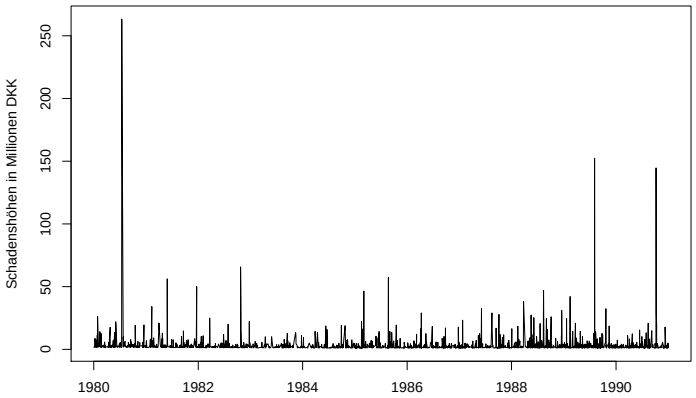

Abbildung 3: *Schadenshöhen einer dänischen Feuerversicherung im Zeitraum von 1980-1990 in Millionen Dänische Kronen (DKK).*

Großschäden sind seltene Ereignisse, die mit sehr hohen Zahlungsforderungen an das Versicherungsunternehmen verbunden sind. Naturkatastrophen wie Erdbeben, Feuer, Wind oder Flut sind typische Bereiche, bei denen Großschäden auftreten, aber auch sogenannte *man-made Schäden*, wie sie vor allem bei Industrieanlagen vorkommen. Im Jahr 2010 fallen unter die Großschäden sicherlich das Erdbeben in Chile und der Untergang der Bohrinsel „Deepwater Horizon". Üblicherweise versichert sich ein normales, sogenanntes *Erstversicherungsunternehmen* selbst

wieder bei einer Rückversicherung gegen Großschäden ab. Für Versicherungen dürfte das Erdbeben in Chile eines der kostspieligsten in der Geschichte werden: Analysen schätzen die Forderungen aus Versicherungsschäden auf bis zu 8 Milliarden US-Dollar. Bisher hat Wirbelsturm Katrina im Jahr 2005 mit etwa 34.4 Milliarden US-Dollar den größten Schaden in der Geschichte verursacht, gefolgt von Hurrikan Andrew im Jahr 1992 mit etwa 21.5 Milliarden US-Dollar und dem Anschlag auf das World Trade Center im Jahr 2001 mit circa 20 Milliarden US-Dollar.

Den Großschäden ist gemeinsam, dass sie sehr selten vorkommen und deshalb sehr wenige Daten vorliegen, um statistische Prognosen zu ermöglichen. Dennoch ist ein Versicherungsunternehmen daran interessiert, wie häufig die Schäden eines Portfolios eine bestimmte (hohe) Gesamthöhe u überschreiten. Dies entspricht der Häufigkeit von Wellen, die Deichhöhe u zu übersteigen. Wir bezeichnen im Folgenden mit $X_1, X_2, \ldots$ die Schadenszahlungen eines Versicherungsunternehmens pro Jahr (X_k sind die Schadenszahlungen im k-ten Jahr) und nehmen an, dass diese jährlichen Schäden unabhängig sind und die gleiche Verteilungsfunktion F haben. Wir nehmen weiter an, dass $F(0) = 0$ (ein Schaden kann nur positive Werte annehmen) und $F(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (es kann beliebig große Schäden geben, was ja auch der Realität entspricht). Mit $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ für $x \geq 0$ bezeichnen wir den sogenannten *Tail* von F. Wir möchten nun das Jahr bestimmen, in dem der Jahresschaden zum ersten Mal eine feste Reserve u überschreitet. Dieser Zeitpunkt wird durch

$$Z(u) = \min\{k \in \mathbb{N} : \, X_k > u\}$$

beschrieben (min steht für Minimum). Wenn wir

$$q := \mathbb{P}(X > u) = \overline{F}(u) \tag{2.3}$$

setzen, dann ist $Z(u)$ geometrisch verteilt mit Parameter q, das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass $Z(u)$ den Wert k annimmt, ist

$$\mathbb{P}(Z(u) = k) = (1-q)^{k-1} q \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

(in $k-1$ Jahren keine Überschreitung, aber dann im Jahr k die Überschreitung). Als *Wiederkehrperiode* bezeichnet man nun die mittlere Wartezeit, bis ein Jahresschaden die Schranke u überschreitet (abgekürzt $\mathbb{E}(Z(u))$, wobei $\mathbb{E}$ das mathematische Symbol für Erwartungswert/Mittelwert ist, das seine Wurzeln in dem englischen Begriff „expectation" hat). Der Erwartungswert ist dann

$$\mathbb{E}(Z(u)) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(Z(u) = k) = q \sum_{k=1}^{\infty} k(1-q)^{k-1} = \frac{1}{q} = \frac{1}{\mathbb{P}(X > u)} = \frac{1}{\overline{F}(u)}. \tag{2.4}$$

Die dritte Umformung in (2.4) überprüft man zum Beispiel, indem man durch Ausmultiplizieren nachrechnet, dass $(1-\overline{q}) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k\overline{q}^{k-1} = 1$ gilt, und dann $\overline{q} = 1 - q$ einsetzt.

Dies zeigt uns nun einen Trick, um den Erwartungswert zu schätzen. Normalerweise benutzt man das arithmetische Mittel (die Summe aller Beobachtungen geteilt durch die Anzahl aller Beobachtungen) zum Schätzen von Erwartungswerten. Dazu bräuchte man aber sehr viele Jahre, in denen Überschreitungen stattfinden. Da man aber an seltenen Ereignissen interessiert ist, kann man dieses klassische statistische Verfahren aus Datenmangel nicht anwenden.

Allerdings ist auch der Weg (2.4) nicht einfach, da die Schwierigkeit nun in der Schätzung von $\overline{F}(u)$ liegt. Auch hierfür hat man nur wenige Daten zur Verfügung. Allerdings kann man nun die wenigen Daten durch geschickte Methoden der Extremwerttheorie ausgleichen, worauf wir in Abschnitt 3 und 4 näher eingehen werden.

Aber auch das umgekehrte Problem ist von großem Interesse. Das Versicherungsunternehmen möchte die Prämien und die Reserven so bestimmen, dass ein Jahresschaden größer als u maximal mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 öfter als alle 50 Jahre vorkommt, das heißt, $\mathbb{P}(Z(u) \leq 50) \leq 0.1$. Da wegen $(1-\overline{q})\sum_{i=1}^{50}\overline{q}^{i-1} = 1-\overline{q}^{50}$ mit $\overline{q} = 1-q$

$$\mathbb{P}(Z(u) \leq 50) = q\sum_{i=1}^{50}(1-q)^{i-1} = 1-(1-q)^{50}$$

gilt, muss $1-(1-q)^{50} = 0.1$ gelten. Daraus folgt $q = 0.02105$. Damit ist die Wiederkehrperiode in diesem Beispiel $1/q = 475$ Jahre. Für die Kalkulation von Prämien und Reserven benötigt man nun aber auch die Schwelle u, wofür man das Quantil der Verteilungsfunktion F bestimmen muss. Mit Definition (2.1) folgert man wegen (2.3), dass $u = x_{1-q}$ ist. Wir kommen in Abschnitt 4 darauf zurück.

3 Grundlagen der Extremwerttheorie

Wir präsentieren im Folgenden die wichtigsten Konzepte, um Extremrisiken wirklichkeitsnah zu modellieren und zu quantifizieren. In (2.1) und (2.4) haben wir schon gesehen, dass es wichtig ist, den Tail einer Verteilung adäquat schätzen zu können. In den Büchern [2, 3, 6] findet man sowohl den präzisen mathematischen Hintergrund als auch viele Anwendungsbeispiele.

Nach wie vor wird besonders in Banken die Normalverteilung zur Modellierung von Risiken verwendet. Das lässt sich allerdings nur dadurch erklären, dass jeder, der mit Statistik in Berührung kommt, die Normalverteilung kennenlernt. Außerdem sind Summen von normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt, und die Parameter lassen sich leicht berechnen.

Selbstverständlich ist die Normalverteilung eine sehr wichtige Verteilung in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik: Sie ist eine Grenzverteilung für Summen. Wenn wir eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ haben, dann gilt unter gewissen Voraussetzungen, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}(X_k)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

wobei auf der rechten Seite eine normalverteilte Zufallsvariable mit einer Verteilungsfunktion wie in (2.2) steht. Dies ist der sogenannte *Zentrale Grenzwertsatz*. Aus diesem Grund ist die Normalverteilung ein ausgezeichnetes Modell für zufällige Größen, die als Summen von vielen kleinen zufälligen Einflüssen auftreten. Der große deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hat sie in seinem Buch [5] hergeleitet.

Es ist seit langem bekannt, dass die Normalverteilung für Risikobetrachtungen unrealistisch ist. Aber welches Modell ist denn nun ein gutes Modell für extreme Ereignisse? Die Antwort auf diese Frage wurde von dem französischen Mathematiker Siméon Poisson [8] (1781-1840) gegeben, die wir heute folgendermaßen formulieren:

Satz 3.1. *Ein statistisches Experiment mit möglichem Ereignis E wird n-mal unabhängig wiederholt. Die Wahrscheinlichkeit, dass E in einem Versuch eintritt, ist $\mathbb{P}(E) = p_n$. Wenn $\lim_{n\to\infty} np_n = \tau$ ist für ein $0 < \tau < \infty$, dann gilt*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\,(\text{in genau } m \text{ der } n \text{ Versuche tritt das Ereignis } E \text{ auf}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{m} p_n^m (1-p_n)^{n-m} = \mathrm{e}^{-\tau}\frac{\tau^m}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ mit $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$ für $k \in \mathbb{N}$ ist.

Poisson zu Ehren heißt die Verteilung auf der rechten Seite Poisson-Verteilung mit Parameter τ, kurz $\mathrm{Poi}(\tau)$. Viele Leser werden die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n, p_n)$ im Limes auf der linken Seite kennen, die sich für großes n und kleines p_n der Poisson-Verteilung nähert. Man beachte

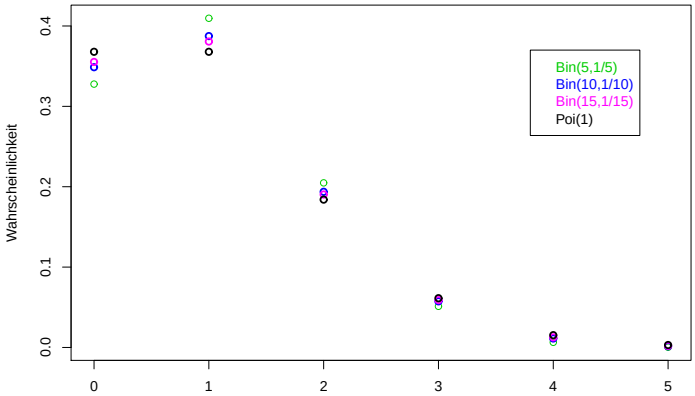

Abbildung 4: *Zähldichte von Bin$(5, 1/5)$-, Bin$(10, 1/10)$-, Bin$(15, 1/15)$-Verteilungen und die Poi(1)-Verteilung. Man beachte, dass für alle Parameter der Binomalverteilung $np = 1$ gilt.*

nämlich, dass aus $\lim_{n\to\infty} np_n = \tau$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Damit tritt das Ereignis E mit verschwindend kleiner Wahrscheinlichkeit ein, wenn die Anzahl der Versuche n groß wird. Man nennt deshalb die Poisson-Verteilung auch die Verteilung der seltenen Ereignisse.

Wir wollen hier etwas mehr zur statistischen Anwendung der Poisson-Verteilung sagen, die zu zwei wesentlichen statistischen Konzepten der Extremwerttheorie führt. Das erste statistische Verfahren heißt *Blockmethode* (blocks method) und das zweite *Schwellenwertmethode* (peaks over thresholds (POT) method). Welches Verfahren man verwendet, hängt meist von der Fragestellung und der Datenlage ab. Auf beide Methoden kommen wir in Abschnitt 4 zurück.

Im Folgenden stellen wir die notwendigen mathematischen Resultate bereit. Es seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen, man stelle sich jährliche Schadenszahlungen einer Versicherung oder relative Verluste einer Aktie vor. Wir nehmen an, dass $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind und alle die gleiche Verteilungsfunktion wie eine Zufallsvariable X haben; wir bezeichnen sie wieder mit $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann nennen wir $X_1, \dots, X_n$ eine *Stichprobe*.

Wir zeigen zuerst, wie man den Satz von Poisson 3.1 für die Beschreibung des Verhaltens des Maximums einer Stichprobe verwendet, und betrachten in einem ersten Schritt die sogenannten *partiellen Maxima*

$$M_n = \max(X_1, \dots, X_n) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

(max steht für Maximum). Wie im wirklichen Leben gehen wir davon aus, dass immer wieder Risiken auftreten können, die größer sind als alles, was bisher beobachtet wurde. Mathematisch formuliert man das dadurch, dass man $\mathbb{P}(M_n \leq u_n)$ betrachtet, wobei die u_n mit n (also mit M_n) steigen. Dann gilt folgendes fundamentale Resultat (wie man mit Hilfe des Satzes von Poisson 3.1 zeigt):

$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X_1 > u_n) = \tau \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n) = \mathrm{e}^{-\tau}\,. \tag{3.2}$$

Wir wollen diese Aussage motivieren:

Betrachte ein seltenes Ereignis E, zum Beispiel das Ereignis, dass der relative Verlust einer Aktie an einem bestimmten Tag größer als eine Schranke u ist, wobei u groß ist. Die täglichen relativen Verluste einer Aktie bilden wieder eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$. Dann ist

$$p = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(X > u)\,.$$

Nutzt man das gleiche Argument wie Poisson, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb der Stichprobe m-mal das Ereignis E eintritt, gegeben durch

$$\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \quad \text{für } m = 0, \ldots, n\,;$$

es ist also $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilt. Nun machen wir u abhängig von n in dem Sinn, dass u_n wächst, wenn die Stichprobengröße n wächst. Dann wird aus p ein p_n, welches gegen 0 konvergiert. Wenn u_n so gewählt wird, dass

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > u_n) = \tau \in (0,\infty)\,,$$

dann gilt mit dem Satz von Poisson 3.1

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{m} p_n^m (1-p_n)^{n-m} = \mathrm{e}^{-\tau}\frac{\tau^m}{m!} \quad \text{für } m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Insbesondere ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E \text{ tritt niemals ein}) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{0} p_n^0 (1-p_n)^n = \mathrm{e}^{-\tau}\,.$$

Damit haben wir gezeigt, wie man mit Hilfe des Satzes von Poisson 3.1 aus der linken Seite von (3.2) die rechte Seite folgern kann. Auf den Beweis der Umkehrung möchten wir hier verzichten.

Ergänzend zu diesem Ergebnis ist das folgende bedeutende Resultat der Extremwerttheorie von Fisher und Tippett [4] aus dem Jahre 1928 zu nennen, das die möglichen Grenzverteilungen von partiellen Maxima genau beschreibt und ein wesentliches Hilfsmittel zur Schätzung von Tails und Quantilen ist. Es ist das Pendant zum Zentralen Grenzwertsatz für Summen, deren Grenzverteilung die Normalverteilung ist. Für die Extremwerttheorie ist der Satz von Fisher und Tippett von ebenso fundamentaler Bedeutung. Wir werden ihn für die Blockmethode verwenden.

Satz 3.2. *Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe, und $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ seien geeignete Konstanten. Weiter soll gelten:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq a_n x + b_n) = G(x) \quad \textit{für } x \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

für eine Verteilungsfunktion G. Dann gehört G zu der Menge $\{G_{\gamma,\sigma,\mu} : \gamma, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$, wobei

$$G_{\gamma,\sigma,\mu}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{e}^{-\left(1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}}, & \textit{wenn } \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}, & \textit{wenn } \gamma = 0, \end{array} \right\} \textit{ für } \left\{ \begin{array}{ll} 1+\gamma\frac{x-\mu}{\sigma} > 0, & \textit{wenn } \gamma \neq 0, \\ x \in \mathbb{R}, & \textit{wenn } \gamma = 0. \end{array} \right.$$

Die Klasse der Verteilungen $\{G_{\gamma,\sigma,\mu} : \gamma, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$ nennt man *verallgemeinerte Extremwertverteilungen.* Satz 3.2 besagt also, dass die Grenzverteilungen von Maxima nur verallgemeinerte Extremwertverteilungen sein können (wozu die Normalverteilung selbstverständlich nicht gehört).

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2 gilt noch viel mehr. Wir bezeichnen die Klasse von Verteilungen $\{H_{\gamma,\sigma} : \gamma \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$ als *verallgemeinerte Pareto-Verteilungen*, die gegeben sind durch

$$H_{\gamma,\sigma}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1-\left(1+\gamma\frac{x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}, & \text{wenn } \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 1-\exp(-x/\sigma), & \text{wenn } \gamma = 0 \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{ll} x \geq 0, & \text{wenn } \gamma \geq 0, \\ 0 \leq x < -\sigma/\gamma, & \text{wenn } \gamma < 0. \end{array} \right.$$

Dann gilt der folgende Satz, der unabhängig von Pickands [7] und von Balkema und de Haan [1] bewiesen wurde. Wir werden ihn für die POT-Methode verwenden.

Satz 3.3. *Wir nehmen an, dass die Voraussetzungen von Satz 3.2 gelten und F die Verteilungsfunktion aller $X_1, \ldots, X_n$ ist, so dass $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dann existiert eine Funktion $\sigma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass, gegeben $X > u$, gilt:*

$$\lim_{u\to\infty} \mathbb{P}\Big(X > u + \sigma(u)x \,\Big|\, X > u\Big) = \lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}(u+\sigma(u)x)}{\overline{F}(u)} = \overline{H}_{\gamma,1}(x) \quad \textit{für } x \in \mathbb{R}.$$

Der Parameter γ ist hier der gleiche wie im Satz von Fisher und Tippett. Wesentlich für die POT-Methode ist nun, dass für großes u folgende Näherung gilt, wobei man $y = \sigma(u)x$ setzt und ausnützt, dass $\overline{H}_{\gamma,1}(y/\sigma(u)) = \overline{H}_{\gamma,\sigma(u)}(y)$:

$$\frac{\overline{F}(u+y)}{\overline{F}(u)} \approx \overline{H}_{\gamma,\sigma(u)}(y) \quad \text{für } y \geq 0. \tag{3.4}$$

4 Grundlagen der Extremwertstatistik

4.1 Die Blockmethode

Wie der Name dieser Methode schon suggeriert, teilen wir die Daten $X_1, X_2, \ldots, X_{nm}$ in m gleich große Blöcke der Länge n auf und bilden die Blockmaxima, das heißt, wir definieren $M_{n,j} = \max(X_{(j-1)n+1}, \ldots, X_{jn})$ für $j = 1, \ldots, m$. Wenn die Daten $X_1, X_2, \ldots, X_{nm}$ zum Beispiel die täglichen Verluste einer Feuerversicherung über m Monate sind (das heißt, X_k ist der Verlust am k-ten Tag), dann schätzen wir den maximalen Verlust in einem Monat. Die Blockgrößen sind ungefähr gleich groß, nämlich n ist zwischen 28 und 31 Tagen, und $M_{n,j}$ ist der maximale Verlust im j-ten Monat. Als ersten Ansatz nutzen wir nach Satz 3.2 aus, dass die Verteilung von $M_{n,j}$ durch eine verallgemeinerte Extremwertverteilung approximiert werden kann, so dass gilt

$$\mathbb{P}(M_{n,j} \leq u) \approx G_{\gamma,\theta,\vartheta}(u) \quad \text{für großes } u,$$

wobei $\gamma, \theta, \vartheta$ Parameter sind, die geschätzt werden müssen, und die Konstanten a_n und b_n in θ und ϑ integriert sind. Es gibt verschiedene statistische Verfahren, um $\gamma, \theta, \vartheta$ zu schätzen, und wir bezeichnen mit $\widehat{\gamma}, \widehat{\theta}, \widehat{\vartheta}$ entsprechende Schätzwerte. Damit approximieren wir

$$\mathbb{P}(M_{n,j} \leq u) \approx G_{\widehat{\gamma},\widehat{\theta},\widehat{\vartheta}}(u) \quad \text{für großes } u.$$

Das Niveau der 10-Jahres-Wiederkehrschranke, des größten monatlichen Schadens, der im Mittel nur alle 10 Jahre passiert, kann mit Hilfe von (2.4) geschätzt werden. Da also $q = 1/(10 \cdot 12)$ gilt, erhalten wir

$$\widehat{u} = \widehat{x}_{1-q} = G^{-1}_{\widehat{\gamma},\widehat{\theta},\widehat{\vartheta}}(1 - (10 \cdot 12)^{-1}). \tag{4.1}$$

Für die dänischen Feuerdaten aus Abbildung 3 erhalten wir 195.7 Millionen Dänische Kronen als Niveau für extreme monatliche Schäden, die im Mittel alle 10 Jahre vorkommen (siehe Abbildung 5).

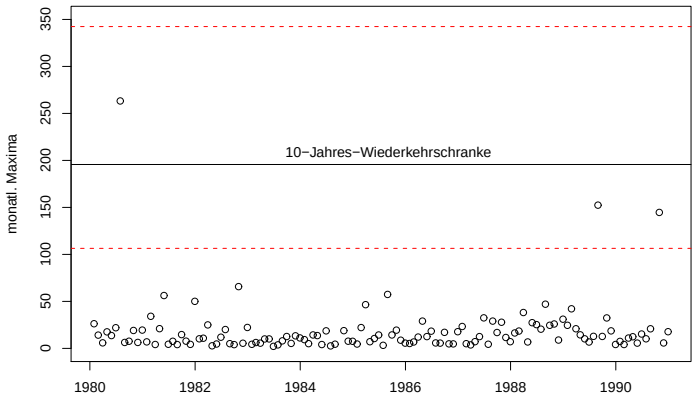

Abbildung 5: *Die größten Schäden einer dänischen Feuerversicherung pro Monat. Die schwarze Linie ist die 10-Jahres-Wiederkehrschranke, und die gestrichelten roten Linien geben das 95%-Konfindenzintervall an.*

4.2 Die POT-Methode

Der folgende Abschnitt beschreibt die POT-Methode für eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$, wobei wir wieder für deren Verteilungsfunktion F annehmen, dass $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) < 1$ für $x > 0$. Weiter sei

$$\overline{F}_u(y) := \mathbb{P}(X - u > y \mid X > u) = \frac{\overline{F}(u+y)}{\overline{F}(u)} \qquad \text{für } y \geq 0\,.$$

Folglich gilt

$$\overline{F}(u+y) = \overline{F}(u)\overline{F}_u(y) \qquad \text{für } y \geq 0\,. \tag{4.2}$$

Wie kann man diese Identität nun nutzen, um Tails und Quantile zu schätzen?

Eine Beobachtung größer als $u + y$ erhält man nur dann, wenn erst einmal die Beobachtung größer als u ist; das heißt, man braucht einen sogenannten *Exzedenten* (eine Überschreitung) von u. Eine solche Beobachtung muss dann aber auch noch einen sogenannten *Exzess* (das ist ein

Überschuss) über u hinaus haben, der größer als y ist. Wenn nun N_u die Anzahl aller $k \in \mathbb{N}$ angibt mit $X_k > u$, dann bezeichnen wir mit $Y_1, \ldots, Y_{N_u}$ die Exzesse von $X_1, \ldots, X_n$, das heißt, die Höhe der Überschreitungen von u (vergleiche Abbildung 6).

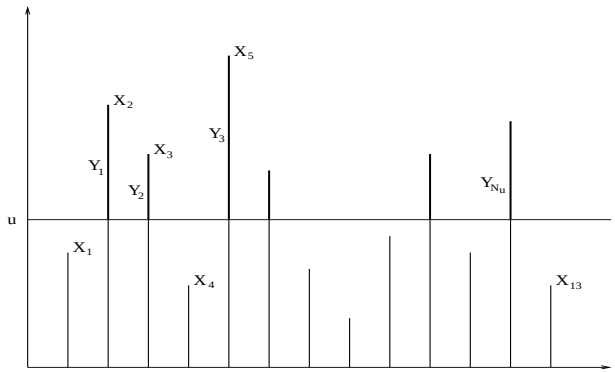

Abbildung 6: *Die Daten $X_1, \ldots, X_{13}$ mit zugehörigen Exzessen $Y_1, \ldots, Y_{N_u}$.*

Einen Schätzer für den Tail (für Werte größer als u) erhält man, indem man beide Tails auf der rechten Seite von Gleichung (4.2) schätzt. Man schätzt $\overline{F}(u)$ durch die relative Häufigkeit

$$\widehat{\overline{F}(u)} = \frac{N_u}{n} \tag{4.3}$$

und approximiert $\overline{F}_u(y)$ durch die verallgemeinerte Pareto-Verteilung aus (3.4), wobei man die Skalenfunktion $\sigma(u)$ berücksichtigen muss. Sie wird als Parameter σ in die Grenzverteilung integriert, so dass

$$\overline{F}_u(y) \approx \left(1 + \gamma \frac{y}{\sigma}\right)^{-1/\gamma} \quad \text{für } y \geq 0\,, \tag{4.4}$$

wobei γ und σ (durch $\widehat{\gamma}$ und $\widehat{\sigma}$) geschätzt werden müssen. Aus (4.2)-(4.4) ergibt sich ein Tailschätzer der Form

$$\widehat{\overline{F}(u+y)} = \frac{N_u}{n}\left(1 + \widehat{\gamma}\,\frac{y}{\widehat{\sigma}}\right)^{-1/\widehat{\gamma}} \quad \text{für } y \geq 0\,. \tag{4.5}$$

Für gegebenes $p \in (0,1)$ erhält man einen Schätzer $\widehat{x}_p$ für das p-Quantil x_p aus (2.1), indem man die Gleichung

$$1 - p = \frac{N_u}{n}\left(1 + \widehat{\gamma}\,\frac{\widehat{x}_p - u}{\widehat{\sigma}}\right)^{-1/\widehat{\gamma}}$$

nach $\widehat{x}_p$ auflöst. Dies ergibt

$$\widehat{x}_p = u + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\gamma}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-p)\right)^{-\widehat{\gamma}} - 1\right). \tag{4.6}$$

Beispiel 4.1. In Abbildung 7 sehen wir den mit der POT-Methode geschätzten Tail der Schäden der dänischen Feuerversicherung in einer logarithmischen Skalierung. Dieser wird mit der durchgezogenen Linie veranschaulicht. Die Kreise markieren die Daten. Sehr schön sieht man, wie der Tail über die Daten hinaus mit der POT-Methode extrapoliert wurde. Der geschätzte 99% Expected Shortfall liegt mit 58.24 mehr als doppelt so hoch wie der geschätzte 99% Value-at-Risk bei 27.29. Aufgrund der Definition der beiden Risikomaße kann der Value-at-Risk grundsätzlich keine höheren Werte annehmen als der Expected Shortfall. In der Realität haben diese Schätzer mehrere Millionen Dänische Kronen als Einheit.

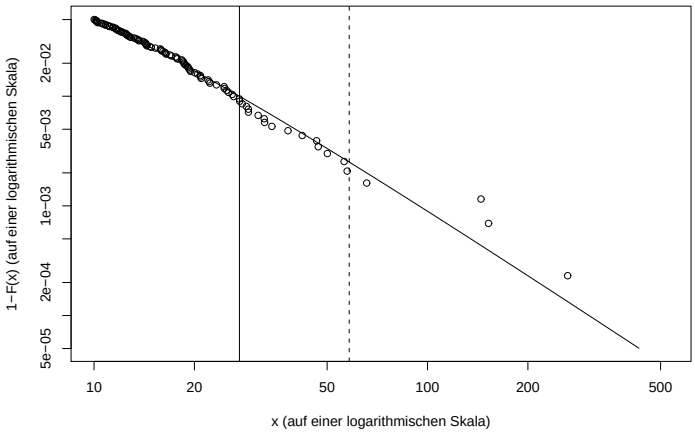

Abbildung 7: *Der geschätzte Tail* (4.5) *der Schadenshöhenverteilung der dänischen Feuerdaten mit der POT-Methode und* $\widehat{\gamma} = 0.49$ *in logarithmischer Skalierung. Der mit dieser Methode geschätzte* 99% *Value-at-Risk* (4.6) *beträgt* 27.29 *(durchgezogene vertikale Linie) und der Expected Shortfall ist mit* 58.24 *(gestrichelte vertikale Linie) mehr als doppelt so hoch.*

Beispiel 4.2. Für den Deutschen Xetra-DAX-Index wurde der 99% Value-at-Risk sowohl mittels der in Banken üblichen Normalverteilung geschätzt als auch mit Hilfe der POT-Methode. Abbildung 8 zeigt beide Tailschätzer in logarithmischer Skalierung.

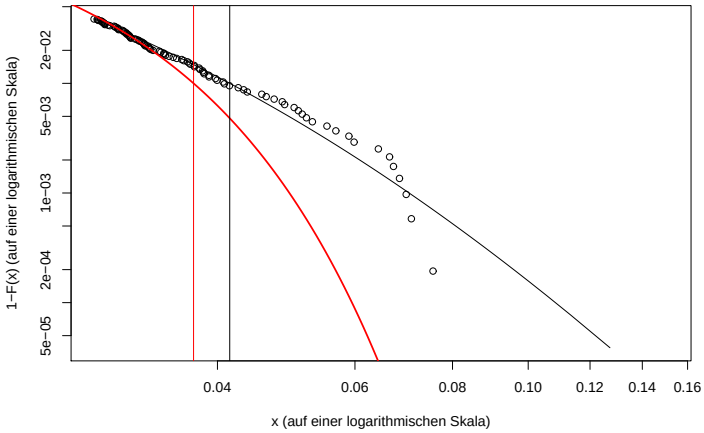

Abbildung 8: *Der geschätzte Tail der relativen Verluste des Deutschen Xetra-DAX-Index. Die durchgezogene schwarze Linie zeigt den geschätzten Tail mit der POT-Methode und die rote Linie unter der Annahme einer Normalverteilung. Die vertikalen Linien reflektieren das Niveau des* 99% *Value-at-Risk in Höhe von 0.041, geschätzt mit der POT-Methode (schwarz) und mit der Normalverteilung in Höhe von 0.037 (rot).*

Man sieht hier, dass die Normalverteilung völlig ungeeignet ist, den Tail zu schätzen. Mit der POT-Methode erhalten wir einen Value-at-Risk von 0.041 und mit der Normalverteilung von 0.037. Für Quantile zu einem höheren Niveau als 97.7% führt die Normalverteilung zu keiner den Daten angepassten Schätzung. Verwendet man sie, so unterschätzt man das Risiko beträchtlich und legt ein völlig inadäquates Risikokapital fest.

Die beiden Methoden der Block- und der POT-Methode, wie wir sie in ihrer einfachsten Form hier vorgestellt haben, besitzen ihre Grenzen. Wir haben die häufig unrealistische Annahme verwendet, dass die Daten unabhängig sind und der gleichen Verteilung folgen. Finanzzeitreihen

wie der Deutsche Xetra-DAX-Index zeigen im Allgemeinen eine sehr komplexe Abhängigkeitsstruktur (die Varianz – im Bankenjargon Volatilität genannt – verändert sich mit der Zeit). Viele Daten, auch Versicherungsschäden, können jahreszeitlichen Saisoneffekten unterworfen sein oder einen Trend aufweisen. Solche Effekte können die Schätzung entscheidend beeinflussen. Außerdem ist dieser eindimensionale Fall ebenfalls eher unrealistisch. Portfolios setzen sich aus vielen Komponenten (oft mehrere hundert) zusammen. Solche Probleme sind momentan heiße Forschungsthemen und erfordern noch viel theoretische und praktische Arbeit.

Literatur

[1] Balkema, A. A. und de Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *Ann. Probab.* **2**, 792–804.

[2] Coles, S. G. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer, Berlin.

[3] Embrechts, P., Klüppelberg, C., und Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.

[4] Fisher, R. A. und Tippett, L. H. C. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **24**, 180–190.

[5] Gauss, C. F. (1809). *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solum Ambientium*. Hamburgi Sumptibus Frid. Perthes et I.H. Besser, Hamburg.

[6] McNeil, A. J., Frey, R., und Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. Princton University Press, Princeton.

[7] Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Ann. Statist.* **3**, 119–131.

[8] Poisson, S. (1837). *Recherches sur la Probabilité des Jugements en Matière Criminelle et en Matière Civile Précédées des Règles Générales du Calcul des Probabilités*. Bachelier, Imprimeur-Libraire, Paris.