Approximationen erster Ordnung für operationelle Risiken unter Abhängigkeiten[1]

Klaus Böcker[2] und Claudia Klüppelberg [3]

1. Oktober 2008

Zusammenfassung

Wir untersuchen das Problem der Modellierung und Quantifizierung des multivariaten operationellen Risikos. Basierend auf dem weit verbreiteten eindimensionalen Verlustverteilungs-Ansatz, entwickeln wir zunächst ein "Invarianzprinzip", dem jedes multivariate Modell genügen sollte. Unser Ansatz basiert auf dem neuen Konzept der Pareto-Lévy-Copula und erlaubt für das operationelle Risiko eine dynamische Betrachtungsweise zu jedem beliebigen zukünftigen Zeitpunkt. Dabei nutzen wir die Tatsache, dass operationelle Verlustdaten üblicherweise langschwänzig ("heavy tailed") sind und deshalb hervorragend durch das Konzept der multivariaten regulären Variation beschrieben werden können. Schließlich leiten wir für wichtige Beispiele der Pareto-Lévy-Copula und der

---

[1] Dieser Artikel ist die deutsche, gekürzte Fassung von "First Order Approximations to Operational Risk − Dependence and Consequences", erschienen in "Operational Risk Towards Basel III − Best Practices and Issues in Modeling, Management, and Regulation", Gregoriou, Greg N (Hrgs.). Wir danken dem Verlag Wiley, New York, für die Genehmigung zum Abdruck.

[2] Risk Integration & Reporting - Head of Risk Analytics and Methods - UniCredit Group, Munich Branch, c/o: HypoVereinsbank AG, Arabellastrasse 12, 81925 München, Germany,
e-mail: klaus.boecker@unicreditgroup.de,

[3] Zentrum Mathematik und Institute for Advanced Study, Technische Universität München, 85747 Garching, Germany, e-mail: cklu@ma.tum.de, url: http://www-m4.ma.tum.de

Verlusthöhenverteilung analytische Approximationen für den operationellen Value-at-Risk her.

1. Einleitung

Vor drei Jahren, in Böcker and Klüppelberg (2005), bezeichneten wir das operationelle Risiko als "long-term killer". Damals war das wohl spektakulärste Beispiel einer Bankenpleite, die durch operationelle Verluste verursacht wurde, der Fall der Barings Bank: der Händler Nick Leeson hatte verlustbehaftete Geschäfte mit Finanzderivaten absichtlich verborgen und die Bank musste Gläubigerschutz beantragen. Mittlerweile haben weitere Banken zweifelhaften Ruhm erlangt, wie zum Beispiel die Société Générale mit einem Verlust von 4,9 Milliarden Euro als Folge eines unlauteren Händlers, oder Bear Stearns, die, nachdem sie nicht in der Lage war, den Wert ihres mit Hypothekendarlehen abgesicherten Portfolios zu ermitteln, zu einem Schleuderpreis an JP Morgan Chase verkauft wurde. Diese Beispiele zeigen deutlich, wie wichtig ein gründliches und solides Management der operationellen Risiken ist, bestehend aus Risikoidentifikation, Überwachung und Berichterstattung, Risikovermeidung, Risiko Controlling und nicht zuletzt Risikomessung. Natürlich lassen sich die oben erwähnten katastrophalen Verluste der Banken nicht allein durch eine Quantifizierung des operationellen Value-at-Risk (OpVaR) verhindern; stattdessen basiert erfolgreiche Risikovermeidung in erster Linie auf effektiven Management- und Kontrollprozessen. Beispielsweise stellt sich im Fall der Société Générale die Frage, wie es Jerome Kerviel allein durch Buchung fiktiver Gegengeschäfte im Handelssystem gelang, seine massiven spekulativen Positionen im Dow Jones Eurostoxx 50 zu verbergen.

Es stellt sich also die Frage, welche Bedeutung die Modellierung und Messung des operationellen Risikos eigentlich besitzt. Die einfachste Antwort darauf ist ein Hinweis auf die

aufsichtsrechtliche Notwendigkeit, da mit Inkrafttreten der neuen Eigenkapitalvorschriften (Basel II) alle internationalen Banken ihre operationellen Risiken messen müssen. Zu diesem Zweck dürfen Banken auch fortgeschrittene, institutseigene Risikomodelle (advanced measurement approaches, AMA) implementieren, um so den aus dem operationellen Risiko resultierenden Kapitalbedarf möglichst genau berechnen zu können.

Ein anderer Grund, warum mathematische Modelle häufig zur Beschreibung einer (komplexeren) Realität herangezogen werden, ist die Tatsache, dass oft erst durch sie tiefere Einblicke in die zugrunde liegenden Zusammenhänge offenbart werden, was ein Verstehen letztlich erst ermöglicht. Genau dies ist eine unserer Hauptabsichten, die wir mit diesem Beitrag zur Modellierung des multivariaten operationellen Risikos verfolgen. Wir stellen ein relativ einfaches Modell mit nur wenigen Parametern vor, das uns jedoch wertvolle Erkenntnisse hinsichtlich des allgemeinen Problems des mehrdimensionalen OpVaR liefert. Außerdem ist unser Ansatz unter rein modelltheoretischen Betrachtungen interessant, da es sich, wie wir später ausführlich zeigen werden, um eine natürliche Erweiterung des bekannten eindimensionalen Verlustverteilungs-Ansatzes (loss distribution approach, LDA) handelt. Der Standard-LDA basiert auf der Annahme, dass der Gesamtverlust innerhalb einer bestimmten Zeitperiode in eine Komponente, die die Anzahl der Verluste beschreibt, und eine Komponente, die die Verlusthöhe eines einzelnen Schadens widerspiegelt, aufgeteilt werden kann. Dazu nehmen wir an, dass der operationelle Gesamtverlust einer Bank durch den folgenden zusammengesetzten Poisson-Prozess $(X_t^+)_{t\geq 0}$ beschrieben wird:

$$X_t^+ = \sum_{i=1}^{N_t^+} \Delta X_i^+, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Des Weiteren bezeichnen wir die Verteilungsfunktion von X_t^+ mit $G_t^+(\cdot) = P(X_t^+ \leq \cdot)$ und verwenden als Risikomaß den totalen OpVaR mit Zeithorizont t und Konfidenzniveau κ, definiert als das Quantil

$$\mathrm{OpVaR}_t^+(\kappa) = G_t^{+\leftarrow}(\kappa) = \inf\left\{z \in \mathbb{R} : G_t^+(z) \geq \kappa\right\}, \quad \kappa \in (0,1). \qquad (1.2)$$

Dabei ist κ nahe 1; zum Beispiel 0,999 für regulatorische Zwecke oder noch höher, etwa 0,9995, in Zusammenhang mit Berechnungen des Risikokapitals (Economic Capital).

Von Experten wird die Langschwänzigkeit operationeller Verlustdaten nicht mehr bezweifelt. Eine statistische Bestätigung dafür findet man z.B. in Moscadelli (2004), so dass wir uns im Folgenden auf Pareto-verteilte Verlusthöhenverteilungen konzentrieren werden. Ganz allgemein bezeichnet man eine Verteilungsfunktion F als regulär variierend mit Index $-\alpha$ für $\alpha > 0 (F \in \mathbb{R}_{-\alpha})$, wenn

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F}(xt)}{\overline{F}(t)} = x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Für solche langschwänzigen Verluste − und tatsächlich auch jene, die der größeren Klasse der subexponentiellen Verteilungen angehören − ist es allgemein bekannt und eine Folgerung von Theorem 1.3.9 in Embrechts et. al (1997) (siehe auch Böcker und Klüppelberg (2005) sowie Böcker und Sprittulla (2006)), dass OpVaR zu einem hohen Konfidenzniveau durch die geschlossene Formel

$$\mathrm{OpVaR}_t^+(\kappa) := G_t^{+\leftarrow}(\kappa) \sim F^{+\leftarrow}\left(1 - \frac{1-\kappa}{\lambda^+ t}\right), \quad \kappa \uparrow 1 \qquad (1.3)$$

approximiert werden kann, wobei $\lambda^+ = E\left[N_1^+\right]$ die erwartete Verlustanzahl in $[0,1]$ ist.

Normalerweise wird das gesamte operationelle Risiko einer Bank nicht direkt durch (1.1) modelliert, sondern es werden operationelle Risiken zunächst verschiedenen Verlustarten und Geschäftsbereichen zugeordnet. So unterscheidet man nach Basel II sieben Verlustarten und acht Geschäftsbereiche, woraus eine Matrix mit 56 Zellen resultiert. Innerhalb einer jeden Zelle $i = 1,\ldots,d$ wird dann der operationelle Verlust durch ein zusammengesetztes Poisson-Modell $(X_t^i)_{t\geq 0}$ beschrieben und der operationelle Gesamtverlust ist die Summe

$$X_t^+ = X_t^1 + X_t^2 + \cdots + X_t^d, \qquad t \geq 0 \ .$$

Das Kernproblem bei der Modellierung des multivariaten operationellen Risikos ist dabei, wie die Abhängigkeitsstruktur zwischen den verschiedenen Randprozessen erfasst werden kann. Diesbezüglich wurden mehrere Vorschläge gemacht, zum Beispiel Frachot et al. (2004), Powojowski et al. (2002) oder Chavez-Demoulin et al. (2005), um nur einige zu nennen. Diese Ansätze führen jedoch im Allgemeinen zu einem aggregierten Gesamtprozess $(X_t^+)_{t\geq 0}$, der kein zusammengesetzter Poisson-Prozess mehr ist und deshalb nicht mehr ins allgemeine Konzept (1.1) passt. Etwas allgemeiner sollte man fordern, dass $(X_t^+)_{t\geq 0}$ nicht von der Struktur der Schadensklassen/Geschäftsbereichs-Matrix abhängen soll; das heißt, ob eine Bank eine Matrix aus 56 oder 20 Zellen definiert, darf die grundsätzliche Messung des operationellen Risikos und damit des Gesamtbank-OpVaRs nicht beeinflussen (von statistischen Schwankungen abgesehen). Mit anderen Worten, eine naheliegende Bedingung, die jedes multivariate operationelle Risikomodell erfüllen sollte, ist die, dass es bezüglich einer Umstrukturierung der Schadensklassen/Geschäftsbereichs-Matrix invariant ist und damit auch hinsichtlich möglicher Neustrukturierungen der Geschäftsbereiche. Daher fordern wir, dass jedes Messmodell zur Klasse der zusammengesetzten Poisson-Prozesse gehört, d.h., jeder

Zusammenschluss verschiedener Matrixzellen muss wieder zu einem zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Verlusthöhenverteilung $F_{i+j}(\cdot)$ und Verlusthäufigkeitsparameter λ_{i+j} für $i \neq j$ führen:

$$X_t^i + X_t^j =: X_t^{i+j} \quad \in \text{ zusammengesetzte Poisson-Prozesse.} \qquad (1.4)$$

Das Invarianzprinzip von Gleichung (1.4) ist immer dann erfüllt, wenn der Vektor aller marginalen Prozesse $(X_t^1,...,X_t^d)_{t\geq 0}$ einen d-dimensionalen zusammengesetzten Poisson-Prozess darstellt. Die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Randprozessen wird dann durch eine sogenannte Lévy-Copula modelliert oder, wie in diesem Beitrag, durch eine Pareto-Lévy-Copula.

2. Von der Pareto-Copula zur Pareto-Lévy-Copula

Transformationen von Randverteilungen sind bisher in verschiedenen Bereichen angewendet worden. Eine der bekanntesten ist die Transformation der Randverteilungen auf gleichverteilte Zufallsvariable. Die daraus resultierende Copula hat in der Finanzmathematik einen einzigartigen Siegeszug hingelegt. Nun ist es sicherlich bequem, bestimmte Prozeduren wie die Transformation auf gleichverteilte Randverteilungen zu automatisieren, jedoch muss diese Normierung nicht immer die beste Wahl zur Lösung eines gegebenen Problems darstellen.

So wurde von Klüppelberg und Resnick (2008) gezeigt, dass beim Vorhandensein langschwänziger Daten für die Herleitung von Grenzverteilungen eine Transformation der Randverteilungen auf eine Standard-Pareto-Verteilung viel natürlicher ist als eine Transformation auf Gleichverteilung, wie es bei Copulas für Verteilungsfunktionen der Fall ist. Dieselbe Idee, nun allerdings angewandt auf das Lévy-Maß, wird sich als äußerst nützlich für unsere Zwecke — also der Erforschung des multivariaten operationellen Risikos — erweisen.

In diesem Beitrag werden wir jedoch Copulas für Verteilungsfunktionen nicht direkt zur Modellierung der Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen aggregierten Verlustprozessen $(X_t^i)_{t\geq 0}$ der Schadensklassen/Geschäftsbereichs-Matrix verwenden. Ein Grund dafür ist, dass wir, wie in der Einleitung schon erwähnt, eine natürliche Verallgemeinerung des univariaten LDA-Modells anstreben, d.h. wir fordern, dass $(X_t^+)_{t\geq 0}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess ist. Dies kann man unter Ausnutzung der Tatsache erreichen, dass zusammengesetzte Poisson-Prozesse spezielle Lévy-Prozesse sind, deren gut erforschte Eigenschaften sehr nützlich für die Herleitung des operationellen Risikos sein werden. Unser Vorgehen ähnelt dem in Böcker und Klüppelberg (2006, 2008), wo analytische Näherungen für den OpVaR unter Verwendung von Standard-Lévy-Copulas hergeleitet wurden. Im Gegensatz dazu verwenden wir hier eine Transformation, die uns zum Konzept der *Pareto-Lévy-Copulas* führt.

Das Sprungverhalten eines Lévy-Prozesses wird durch das sogenannte Lévy-Maß Π beschrieben, das eine sehr intuitive Interpretation besitzt, insbesondere in Zusammenhang mit dem operationellen Risiko. Das Lévy-Maß eines univariaten LDA-Modells parametrisiert die erwartete Anzahl der Verlustereignisse pro Zeiteinheit, die eine Verlusthöhe in einem vorgegebenen Intervall besitzen. Darüber hinaus wird im Fall des zusammengesetzten Poisson-Prozesses das Lévy-Maß Π_i eines Zellprozesses X^i innerhalb der Schadensklassen/Geschäftsbereichs-Matrix vollständig durch den Häufigkeitsparameter $\lambda_i > 0$ und der Verlusthöhenverteilungen dieser Zelle beschrieben, es gilt nämlich $\Pi_i\left([0,x]\right) := \lambda_i P(\Delta X^i \leq x) = \lambda_i F_i(x)$ für $x \in (0,\infty)$. Da wir ausschließlich Verluste modellieren, sind alle Lévy-Maße Π_i konzentriert auf $\left(0,\infty\right)$; solche Lévy-Maße heißen *spektral positiv*. Da wir außerdem an hohen operationellen Verlusten interessiert sind, ist es

angebracht, das Konzept des *Tail-Maßes*, das manchmal auch als *Tail-Integral* bezeichnet wird, einzuführen. Das eindimensionale Tail-Maß gibt die erwartete Anzahl von Verluste an, deren Verlusthöhe über einer gegebenen Schwelle liegen. Für den zusammengesetzten Poisson-Prozess ist diese Größe durch

$$\overline{\Pi}_i(x) := \Pi_i\left(\left[x,\infty\right)\right) = \lambda_i P(\Delta X^i > x) = \lambda_i \overline{F}_i(x), \qquad x \in \left[0,\infty\right), \tag{2.1}$$

gegeben. Insbesondere kann es nur eine endliche Anzahl von Sprüngen (d.h. Verlusten) pro Zeiteinheit geben. Es gilt nämlich $\lim_{x\downarrow 0} \overline{\Pi}_i(x) = \lambda_i$.

In gleicher Weise kontrolliert das multivariate Lévy-Maß das Sprungverhalten (pro Zeiteinheit) aller eindimensionalen Komponenten eines multivariaten Lévy-Prozesses und enthält zudem sämtliche Informationen bezüglich der Abhängigkeitsstruktur zwischen ihnen. Daher wird in diesem Modell die Modellierung der Abhängigkeit zwischen verschiedenen Zellen der Schadensklassen/Geschäftsbereichs-Matrix auf die Auswahl eines geeigneten Lévy-Maßes reduziert. Da Sprünge durch die als positiv definierten Verlustereignisse erzeugt werden, ist das Lévy-Maß Π auf den punktierten, positiven Kegel $\mathbb{E} := \left[\mathbf{0},\infty\right] \setminus \left\{\mathbf{0}\right\}$ in $\mathbb{R}^d$ konzentriert. Der Wert $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$ ist dabei herausgenommen, da Lévy-Maße dort eine Singularität haben können.

Genau wie multivariate Verteilungen aus eindimensionalen Randverteilungen mittels einer Verteilungs-(Pareto)-Copula konstruiert werden können, lässt sich das multivariate Tail-Maß (siehe auch Böcker und Klüppelberg (2006), Definition 2.1)

$$\overline{\Pi}(\boldsymbol{x}) = \overline{\Pi}(x_1,\ldots,x_d) = \Pi\left(\left[x_1,\infty\right)\times\ldots\times\left[x_d,\infty\right)\right), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}, \tag{2.2}$$

durch eindimensionale marginale Tail-Maße (2.1) und einer Pareto-Lévy-Copula konstruieren. Ähnlich wie bei Verteilungsfunktionen, lassen sich hier auch die marginalen Tail-Maße aus dem multivariaten Tail-Maß (2.2) ableiten, nämlich als

$$\overline{\Pi}_i(x) = \overline{\Pi}(0,...,x_i,...,0), \qquad x \in [0,\infty).$$

Wir transformieren nun die marginalen Lévy-Maße eines Lévy-Prozesses auf 1-stabile marginale Lévy-Prozesse mit Tail-Maßen $\overline{\Gamma}_i(x) = x^{-1}$ für $x > 0$. Es ist zu beachten, dass die transformierten, 1-stabilen Lévy-Prozesse nicht mehr zusammengesetzt-Poisson sind, auch wenn sie dies vielleicht vor der Transformation waren. Stattdessen haben sie eine unendliche Variation und besitzen unendlich viele kleine Sprünge pro Einheitszeit, was sich durch $\lim_{x\downarrow 0} \overline{\Gamma}_{\mathrm{i}}(x) = \infty$ zeigt. Weitere Definitionen und Referenzen rund um Lévy-Prozesse sind in Cont und Tankov (2004) zu finden.

Definition 2.1. Es sei $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess mit Lévy-Maß Γ und standard-1-stabilen, eindimensionalen Randprozessen. Dann heißt Γ das Pareto-Lévy-Maß und das zugehörige Tail-Maß

$$\overline{\Gamma}(\boldsymbol{x}) = \Gamma\left([x_1,\infty)\times...\times[x_d,\infty)\right) =: \hat{C}(x_1,...,x_d), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{E},$$

wird als Pareto-Lévy-Copula $\hat{C}$ bezeichnet.

Lemma 2.2. Es sei $(\boldsymbol{X}_t)_{t\geq 0}$ ein spektral-positiver Lévy-Prozess (d.h. ein Lévy-Prozess, der nur positive Sprünge aufweist) mit Lévy-Maß Π auf $\mathbb{E}$ und stetigen marginalen Tail-Maßen $\overline{\Pi}_1,...,\overline{\Pi}_d$. Dann gilt

$$\overline{\Pi}(\boldsymbol{x}) = \Pi\left(\left[x_1,\infty\right]\times\cdots\times\left[x_d,\infty\right]\right) = \hat{C}\left(\frac{1}{\overline{\Pi}_1(x_1)},\ldots,\frac{1}{\overline{\Pi}_d(x_d)}\right), \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{E},$$

und $\hat{C}$ ist eine Pareto-Lévy-Copula.

Theorem 2.3 (Sklars Theorem für Pareto-Lévy-Copulas)

Es sei $\overline{\Pi}$ ein Tail-Maß eines d-dimensionalen spektral-positiven Lévy-Prozesses mit marginalen Tail-Maßen $\overline{\Pi}_1,\ldots,\overline{\Pi}_d$. Dann existiert eine Pareto-Lévy-Copula $\hat{C}:\mathbb{E}\to\left[0,\infty\right]$, so dass für alle $x_1,\ldots,x_d\in\mathbb{E}$ gilt

$$\overline{\Pi}(x_1,\ldots,x_d) = \hat{C}\left(\frac{1}{\overline{\Pi}_1(x_1)},\ldots,\frac{1}{\overline{\Pi}_d(x_d)}\right). \tag{2.3}$$

Wenn die marginalen Tail-Maße stetig auf $\left[0,\infty\right]$ sind, dann ist $\hat{C}$ eindeutig, ansonsten ist $\hat{C}$ eindeutig auf $\operatorname{Ran}\left(\frac{1}{\overline{\Pi}_1}\right)\times\cdots\times\operatorname{Ran}\left(\frac{1}{\overline{\Pi}_d}\right)$. Umgekehrt gilt, wenn $\hat{C}$ eine Pareto-Lévy-Copula und $\overline{\Pi}_1,\ldots,\overline{\Pi}_d$ marginale Tail-Maße sind, dass $\overline{\Pi}$ in (2.3) ein mehrdimensionales Tail-Maß mit marginalen Tail-Maßen $\overline{\Pi}_1,\ldots,\overline{\Pi}_d$ ist.

Beispiel 2.4. [Clayton-Pareto-Lévy-Copula].

Die archimedische Pareto-Lévy-Copula

$$\hat{C}_\theta(\boldsymbol{x}) = (x_1^\theta+\ldots+x_d^\theta)^{-1/\theta}$$

wird Clayton-Pareto-Lévy-Copula genannt. Beachte, dass $\lim_{\theta\to\infty}\hat{C}_\theta(\boldsymbol{x}) = \hat{C}_{\|}(\boldsymbol{x})$ und $\lim_{\theta\to 0}\hat{C}_\theta(\boldsymbol{x}) = \hat{C}_{\perp}(\boldsymbol{x})$ gilt, wobei $\hat{C}_{\|}(\boldsymbol{x})$ und $\hat{C}_{\perp}(\boldsymbol{x})$ die vollständige abhängige und die

unabhängige Pareto-Lévy-Copulas bezeichnen, d.h. dieses Modell deckt den gesamten Bereich möglicher Abhängigkeiten ab.

3. Über die Abhängigkeitsstruktur bei Lévy-Copulas

Erinnern wir uns an unser Modell zur Modellierung des multivariaten operationellen Risikos, in dem der aggregierte Gesamtverlust durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess mit Darstellung (1.1) beschrieben wird, worin $(N_t^+)_{t\geq 0}$ den Poisson-Prozess darstellt, der die totale Anzahl von Verlusten zählt und $\Delta X_1^+,...,\Delta X_{N_t^+}^+$ die Verlusthöhen innerhalb des Zeitintervalls $(0,t]$ bezeichnet. In diesem Modell können Verluste entweder nur in einem einzigen der marginalen Prozesse oder aber durch das simultane Auftreten von Verlustfällen in verschiedenen Komponenten des Gesamtprozesses auftreten. Ist letzteres der Fall, dann beschreibt ΔX_i^+ die Summe all dieser Verluste, die zur gleichen Zeit stattfinden.

Basierend auf einer Zerlegung des marginalen Lévy-Maßes kann man zeigen (siehe z.B. Böcker und Klüppelberg (2008), Abschnitt 3), dass sich die Randprozesse immer in einen zusammengesetzten Poisson-Prozess für einzelne Sprünge und einen für simultane Sprünge zerlegen lassen. Im Fall von $d=2$ haben die einzelnen Randprozesse die folgende Darstellung (der Zeitparameter t wurde der Übersichtlichkeit halber weggelassen):

$$\begin{aligned} X^1 &= X_\perp^1 + X_{||}^1 = \sum_{k=1}^{N_\perp^1} \Delta X_{\perp k}^1 + \sum_{l=1}^{N_{||}} \Delta X_{||l}^1 \\ X^2 &= X_\perp^2 + X_{||}^1 = \sum_{m=1}^{N_\perp^2} \Delta X_{\perp m}^2 + \sum_{l=1}^{N_{||}} \Delta X_{||l}^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei $X_{||1}$ und $X_{||2}$ die aggregierten Verluste der Zellen 1 und 2 beschreiben, die durch gemeinsame "Schocks" hervorgerufen wurden, und $X_\perp^1$ und $X_\perp^2$ Verluste in nur einer

Komponente darstellen. Beachte, dass abgesehen von $X_{\|1}$ and $X_{\|2}$ sämtliche zusammengesetzte Poisson-Prozesse auf der rechten Seite von (3.1) paarweise unabhängig sind.

Vergleicht man die linke und rechte Seite von (3.1), kann man die Parameter der Prozesse auf der rechten Seite identifizieren. Auf der linken Seite haben wir $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ für die Verlustfrequenzen der Poisson-Prozesse, die die Anzahl der Verluste zählen, und F_1, F_2 für die Verlusthöhenverteilungen; für weitere Details verweisen wir auf Böcker und Klüppelberg (2008).

Die Häufigkeit simultaner Verluste kann aus dem bivariaten Tail-Maß $\overline{\Pi}(x_1, x_2)$ als Grenzwert für beliebig kleine, gleichzeitige Verluste berechnet werden, also

$$\lim_{x_1, x_2 \downarrow 0} \overline{\Pi}(x_1, x_2) = \hat{C}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}) = \lim_{x \downarrow 0} \overline{\Pi}_{\|2}(x) = \lim_{x \downarrow 0} \overline{\Pi}_{\|1}(x) = \lambda_{\|} \in [0, \min(\lambda_1, \lambda_2)].$$

Folglich ergibt sich für die Häufigkeit der voneinander unabhängigen Verluste

$$\lambda_{\perp 1} = \lim_{x \downarrow 0} \overline{\Pi}_{\perp 1}(x) = \lambda_1 - \lambda_{\|} \qquad \text{and} \quad \lambda_{\perp 2} = \lambda_2 - \lambda_{\|}.$$

Des Weiteren kann man durch einen Vergleich der Lévy-Maße die Verteilungsfunktionen für die Verlusthöhen der unabhängigen Verluste bestimmen, man erhält

$$\begin{aligned} \overline{F}_{\perp 1}(x_1) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_{1\perp}} \overline{F}_1(x_1) - \frac{1}{\lambda_{1\perp}} \hat{C}\left(\left(\lambda_1 \overline{F}_1(x_1)\right)^{-1}, \lambda_2^{-1} \right), \\ \overline{F}_{\perp 2}(x_2) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_{2\perp}} \overline{F}_2(x_2) - \frac{1}{\lambda_{2\perp}} \hat{C}\left(\lambda_1^{-1}, \left(\lambda_2 \overline{F}_2(x_2)\right)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Schließlich ergeben sich für die gemeinsame Verlusthöhenverteilungen der gleichzeitigen Verluste sowie für deren Randverteilungen

$$\bar{F}_{\|}(x_1,x_2) \;=\; P(X_{\|}^1 > x_1, X_{\|}^2 > x_2) \;=\; \frac{1}{\lambda_{\|}}\hat{C}\left(\left(\lambda_1\bar{F}_1(x_1)\right)^{-1},\left(\lambda_2\bar{F}_2(x_2)\right)^{-1}\right) \qquad (3.2)$$

$$\bar{F}_{\|1}(x_1) \;=\; \lim_{x_2\downarrow 0}\bar{F}_{\|}(x_1,x_2) \;=\; \frac{1}{\lambda_{\|}}\hat{C}\left(\left(\lambda_1\bar{F}_1(x_1)\right)^{-1},\lambda_2^{-1}\right)$$

$$\bar{F}_{\|2}(x_2) \;=\; \lim_{x_1\downarrow 0}\bar{F}_{\|}(x_1,x_2) \;=\; \frac{1}{\lambda_{\|}}\hat{C}\left(\lambda_1^{-1},\left(\lambda_2\bar{F}_2(x_2)\right)^{-1}\right).$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Ansatz mit Pareto-Lévy-Copulas identisch ist mit einer Aufspaltung der zusammengesetzten Poisson-Prozesse einer jeden Matrixzelle in einen abhängigen Anteil und unabhängige Anteile. Alle Parameter dieser Teilprozesse können aus der Pareto-Lévy-Copula abgeleitet werden, was wir hier für die Verteilungsfunktionen und Verlusthäufigkeiten der simultanen und der Einzelverluste gezeigt haben. Darüber hinaus möchten wir erwähnen, dass die beiden Verlustverteilungen $F_{\|1}(\cdot)$ and $F_{\|2}(\cdot)$ für die simultanen Verlusthöhen nicht unabhängig voneinander sind; vielmehr kann ihre Abhängigkeit durch eine Copula beschrieben werden, die aus (3.2) abgeleitet werden kann, siehe wiederum Böcker und Klüppelberg (2008).

4. Approximationen für den totalen OpVaR

In unserem Modell wird der totale OpVaR, der alle Matrixzellen umfasst, durch (1.2) beschrieben, was für κ nahe 1 durch (1.3) approximiert werden kann. Es ist klar, dass die Parameter $\bar{F}^+$ und λ^+, die den totalen OpVaR der Bank auf aggregiertem Niveau beschreiben, von der Abhängigkeitsstruktur zwischen den verschiedenen Zellen der Schadensklassen/Geschäftsbereichs-Matrix und damit von der Pareto-Lévy-Copula abhängen. Wir werden nun verschiedene Abhängigkeitsszenarien untersuchen und für diese Näherungen

erster Ordnung ähnlich wie (1.3) angeben. Unsere Ergebnisse liefern nützliche Einblicke in das multivariate operationelle Risiko.

Der Fall einer dominierenden Zelle

Obwohl dieses erste Szenario durch die Annahme, dass alle extremen Verluste hauptsächlich in einer einzigen Zelle auftreten, ziemlich einfach ist, hat es oft große praktische Bedeutung. Da keine bestimmte Abhängigkeitsstruktur vorausgesetzt wird, bedeutet es, dass grundsätzlich alle Zellen mit moderaten Verlusten gestrichen werden können. Man kann damit die Dimension des Problems in einfacher Weise reduzieren und sich auf Zellen mit großen Verlusthöhen konzentrieren.

Theorem 4.1 (Böcker und Klüppelberg (2006), Theorem 3.4, Korollar 3.5)

Für festes $t > 0$ habe X_t^i für alle $i = 1,...,d$ zusammengesetzte Poisson-Verteilungen. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) $\overline{F}_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ für $\alpha > 0$. Angenommen, es gibt ein $\rho > \alpha$, so dass $E\left[(\Delta X^i)^\rho\right] < \infty$ für $i = 2,...,d$ gilt. Dann gilt unabhängig von der Abhängigkeitsstruktur zwischen $X_t^1,...,X_t^d$,

$$P(X_t^+ > x) \quad \sim \quad EN_t^1 P(\Delta X^1 > x), \quad x \to \infty,$$

$$\mathrm{VaR}_t^+(\kappa) \quad \sim \quad F_1^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-\kappa}{EN_t^1}\right) = \mathrm{OpVaR}_t^1(\kappa), \quad \kappa \uparrow 1.$$

Dieses Ergebnis besagt, dass das totale operationelle Risiko bei einem hohen Konfidenzniveau allein durch den stand-alone OpVaR der Zelle dominiert wird, in der die Pareto-verteilten Verluste tendenziell größer als die in den anderen Zellen sind. Man beachte, dass die Voraussetzungen für dieses Resultat auch dann gegeben sind, wenn die Verlusthöhe

tatsächlich eine Mischverteilung ist, die nur in ihrem äußeren rechten Bereich (hohe Verluste) durch eine Pareto-Verteilung parametrisiert wird und in ihrem Zentrum hingegen einen beliebigen anderen Verlauf hat. In Böcker und Klüppelberg (2008), Abschnitt 5, wird dieser Gedanke weiter ausgeführt.

Multivariate zusammengesetzte Poisson-Modelle mit vollständig abhängigen Zellen

Vollständige Abhängigkeit für Lévy-Prozesse bedeutet, dass alle Zellprozesse gleichzeitig springen und deshalb Verluste in allen Zellen gemeinsam auftreten. Dies impliziert folgendes Resultat:

Theorem 4.2 (Böcker und Klüppelberg (2006), Theorem 3.6)

Betrachte einen multivariaten zusammengesetzten Poisson-Prozess $\boldsymbol{X}_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d), t \geq 0$, mit vollständig abhängigen Zellprozessen und streng wachsenden und stetigen Verlusthöhenverteilungen F_i. Dann ist $(X_t^+)_{t \geq 0}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Parametern

$$\lambda^+ = \lambda \quad \text{and} \quad \overline{F}^+(z) = \overline{F}_1\left(H^{-1}(z)\right), \qquad z > 0,$$

wobei $H(z) := z + \sum_{i=2}^d F_i^{-1}\left(F_1(z)\right)$ ist. Wenn $F^+ \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ für $\alpha \in (0, \infty)$ ist, dann gilt

$$\mathrm{OpVaR}_t^+(\kappa) \sim \sum_{i=1}^d \mathrm{OpVaR}_t^i(\kappa), \qquad \kappa \uparrow 1,$$

wobei $\mathrm{OpVaR}_t^i(\cdot)$ für den stand-alone OpVaR von Zelle i steht.

Man beachte die Ähnlichkeit zwischen dem Ergebnis aus Theorem 4.2 und den Vorschlägen des Basel-Komitees für Bankenaufsicht (2006), gemäß denen die Eigenkapitalunterlegung für das totale operationelle Risiko einer Bank (gemessen als OpVaR

zu einem Konfidenzniveau von 99,9 %) gewöhnlich die Summe über alle Kapitalzahlen ist, die für die einzelnen Matrixzellen isoliert berechnet wurden. Entsprechend unserem Modell lässt sich daher sagen, dass Regulatoren implizit als Worst-Case unterstellen, dass Verluste aus verschiedenen Geschäftsbereichen oder Schadensklassen stets gleichzeitig eintreten.

Multivariate zusammengesetzte Poisson-Modelle mit unabhängigen Zellen

Als weiteren extremen Fall wollen wir nun Unabhängigkeit zwischen verschiedenen Zellen unterstellen. Für einen allgemeinen Lévy-Prozess bedeutet Unabhängigkeit, dass zwei Randprozesse nie gleichzeitig springen. Folglich konzentriert sich die gesamte Masse des Lévy-Maßes auf die Achsen, woraus folgt

$$\overline{\Pi}^{+}(z) = \overline{\Pi}_1(z_1) + \cdots + \overline{\Pi}_d(z_d) \qquad z \geq 0.$$

Theorem 4.3. Wir nehmen an, $\boldsymbol{X}_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d), t \geq 0$, habe unabhängige Zellprozesse. Dann ist $(X_t^+)_{t\geq 0}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Parametern

$$\lambda^+ = \lambda_1 + \cdots + \lambda_d \quad \text{and} \quad \overline{F}^{+}(z) = \frac{1}{\lambda^+}\left[\lambda_1 \overline{F}_1(z) + \cdots + \lambda_d \overline{F}_d(z)\right], \quad z \geq 0.$$

Falls $F_1 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ für $\alpha \in (0,\infty)$ und für alle $i = 2, \ldots, d$ gilt, dass $\lim_{x\to\infty} \overline{F}_i(x)/\overline{F}_1(x) = c_i \in [0,\infty)$,

dann ist

$$\mathrm{OpVaR}_t^{+}(\kappa) \sim F_1^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-\kappa}{(\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_d\lambda_d)\,t}\right), \qquad \kappa \uparrow 1. \qquad (4.1)$$

Wenn man nun (4.1) mit der Formel für den OpVaR einer einzelnen Zelle (1.3) vergleicht, erkennt man, dass der multivariate OpVaR für unabhängige Zellen durch den stand-alone OpVaR der ersten Zelle bei angepasstem Häufigkeitsparameter

$\lambda := \lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_d\lambda_d$ dargestellt werden kann. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist dies für viel allgemeinere Abhängigkeitsstrukturen möglich, nämlich für all jene, die zur Klasse der multivariaten regulären Variation gehören.

Lévy-Maße mit multivariater reguläre Variation

Multivariate reguläre Variation ist ein geeignetes mathematisches Werkzeug, um statistische Phänomene mit langschwänzigem Verteilungsverhalten, wie zum Beispiel beim operationellen Risiko, zu untersuchen.

Definition 4.4. [Multivariate reguläre Variation für spektral-positive Lévy-Prozesse]

Es sei Π ein Lévy-Maß eines spektral-positiven Lévy-Prozesses. Des Weiteren existiere eine Funktion $b:(0,\infty)\to(0,\infty)$ mit $b(t)\to\infty$ für $t\to\infty$ und ein Radon-Maß ν auf $\mathbb{E}$, so dass

$$\lim_{t\to\infty} t\Pi\left(\left[\mathbf{0}, b(t)\boldsymbol{x}\right]^c\right) = \nu\left(\left[\mathbf{0}, \boldsymbol{x}\right]^c\right) \tag{4.2}$$

für alle $\boldsymbol{x}\in\mathbb{E}$ gilt, die Stetigkeitsstellen der Funktion $\nu\left(\left[\mathbf{0},\cdot\right]^c\right)$ sind. Dann besitzt ν die Homogenitätseigenschaft

$$\nu\left(\left[\mathbf{0}, s\boldsymbol{x}\right]^c\right) = s^{-\alpha}\nu\left(\left[\mathbf{0}, \boldsymbol{x}\right]^c\right), \quad s>0$$

für ein $\alpha>0$ und das Lévy-Maß Π wird als multivariat regulär variierend mit Index $-\alpha$ bezeichnet $(\Pi\in\mathcal{R}_{-\alpha})$.

Wir untersuchen nun, wann das resultierende multivariate Tail-Maß $\overline{\Gamma}$ eines solchen standard 1-stabilen Lévy-Prozesses mit multivariater regulärer Variation des Lévy-Maßes Γ einhergeht (automatisch mit Index -1).

Beispiel 4.5. [Pareto-Lévy-Copula und multivariate reguläre Variation].

Es sei $\boldsymbol{X}_t = (X_t^1, X_t^2), t \geq 0$, ein spektral-positiver Lévy-Prozess mit Lévy-Maß Π auf $\mathbb{E}$. Transformation der marginalen Lévy-Maße durch $(1/\overline{\Pi}_i)^{\leftarrow}(x)$ ergibt die Pareto-Lévy-Copula $\hat{C}(x_1, x_2) = \Gamma\big([x_1, \infty) \times [x_2, \infty)\big)$ von $(\boldsymbol{X}_t)_{t \geq 0}$.

Wegen der 1-stabilen Ränder ist eine eventuelle reguläre Variation von Γ immer vom Index -1 ist, womit wir $b(t) = t$ setzen können. Für $b(t) = t$ sind wir aber im Standardfall und alle marginalen Tail-Maße sind standard 1-stabil, also $\alpha = 1$. Damit folgt wegen

$$\Pi\left(\left[\mathbf{0}, (x_1, x_2)^\top\right]^c\right) = \overline{\Pi}_1(x_1) + \overline{\Pi}_2(x_2) - \overline{\Pi}(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{E}, \qquad (4.3)$$

sofort für die linke Seite von (4.2) für das transformierte Lévy-Maß Γ

$$t\Gamma\left(\left[\mathbf{0}, (tx_1, tx_2)^\top\right]^c\right) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - t\,\hat{C}(tx_1, tx_2).$$

Für bivariate reguläre Variation mit Index -1 muss die rechte Seite des obigen Ausdrucks für $t \to \infty$ zu einem Radon-Maß ν auf $\mathbb{E}$ konvergieren, genauer gesagt,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - t\hat{C}(tx_1, tx_2) \to \nu\left(\left[\mathbf{0}, (x_1, x_2)^\top\right]^c\right)$$

mit

$$\nu\left(\left[\mathbf{0}, (sx_1, sx_2)^\top\right]^c\right) = s^{-1}\nu\left(\left[\mathbf{0}, (x_1, x_2)^\top\right]^c\right), \quad s > 0.$$

Dies ist natürlich immer der Fall, falls die Lévy-Pareto-Copula $\hat{C}$ homogen vom Grad -1 ist oder allgemeiner ein Radon-Maß μ existiert, so dass

$$\lim_{t \to \infty} t\hat{C}(tx_1, tx_2) = \mu\left(\left[\mathbf{0}, (x_1, x_2)^\top\right]^c\right), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{E}.$$

Eine allgemeinere Verknüpfung zwischen multivariater regulärer Variation und dem Abhängigkeitskonzept der Pareto-Lévy-Copula ist durch folgendes Theorem gegeben.

Theorem 4.6 (Böcker und Klüppelberg (2006), Theorem 3.16)

Es sei $\overline{\Pi}$ ein multivariates Tail-Maß eines spektral-positiven Lévy-Prozesses, dessen marginale Tail-Maße $\overline{\Pi}_i$ mit Index $-\alpha$ für $\alpha > 0$ regulär variieren. Dann gilt:

(1) Das Lévy-Maß Π ist genau dann multivariat regulär variierend mit Index $-\alpha$ wenn das standardisierte Lévy-Maß Γ regulär variierend mit Index -1 ist.

(2) Wenn die Pareto-Lévy-Copula $\hat{C}$ homogen vom Grade -1 und $0 < \alpha < 2$ ist, dann ist $\hat{C}$ das Lévy-Maß eines multivariaten standard α-stabilen Prozesses.

Beispiel 4.7 [Visualisierung der Clayton-Pareto-Lévy-Copula].

Für das standardisierte Lévy-Maß gilt

$$\Gamma\left(\left[\mathbf{0}, \boldsymbol{x}\right]^{c}\right) = \overline{\Gamma}_1(x_1) + \overline{\Gamma}_2(x_2) - \hat{C}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \left(\left(\frac{1}{x_1}\right)^{-\theta} + \left(\frac{1}{x_2}\right)^{-\theta}\right)^{-1/\theta}.$$

Dessen Homogenität lässt sich gut zur Visualisierung der Abhängigkeitsstruktur verwenden, so wie es in Abbildung 1 gezeigt ist.

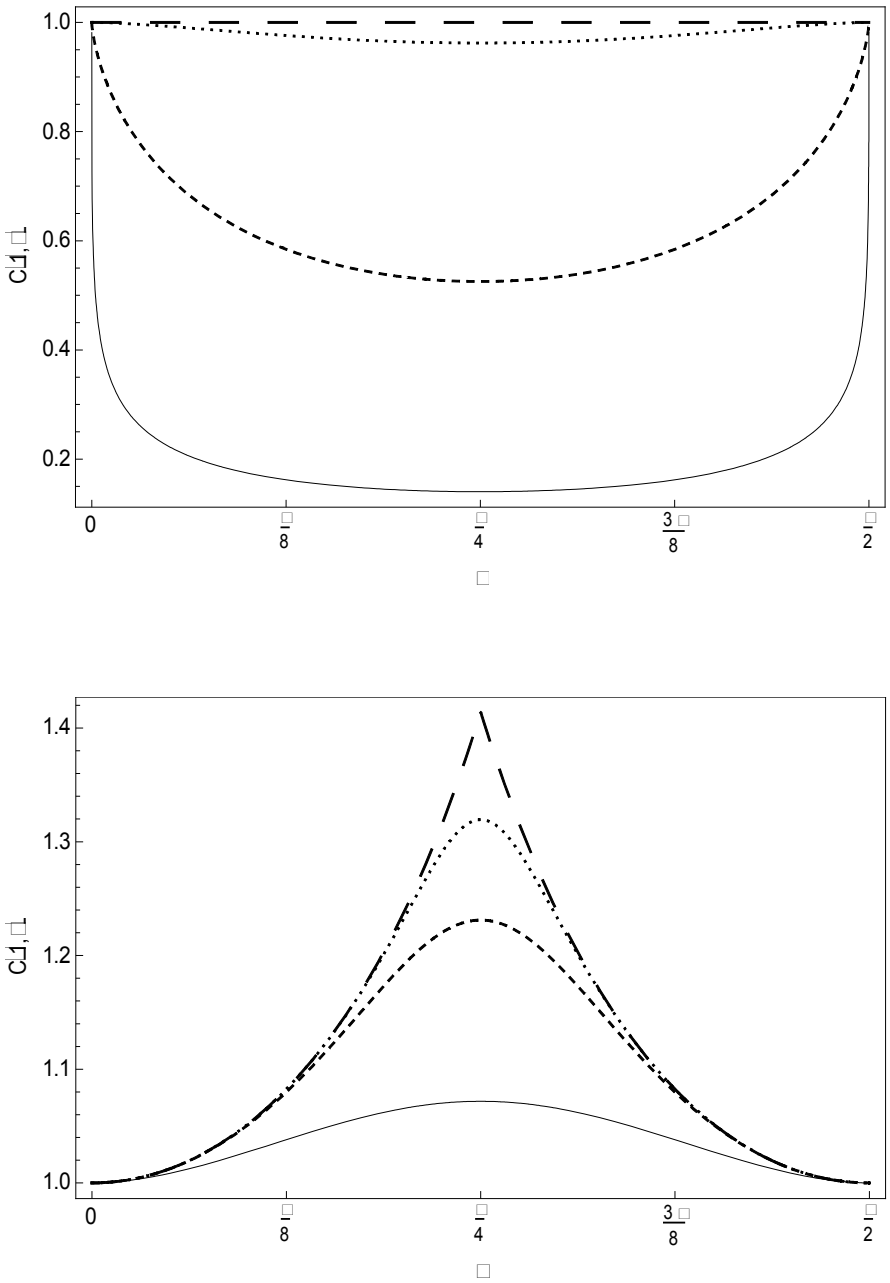

Abbildung 1: Illustration der Clayton-Pareto-Lévy-Copula in Polarkoordinaten $\hat{C}(r,\varphi) = \overline{\Gamma}(r,\varphi)$ als Funktion des Winkels $\varphi \in (0,\pi/2)$ für r=1 und mit verschiedenen Werten für den Abhängigkeitsparameter θ.

Oberes Bild: $\theta = 1,8$ (gepunktete Linie), $\theta = 0,7$ (gestrichelte Linie), $\theta = 0,3$ (durchgezogene Linie).

Unteres Bild: $\theta = 2,5$ (durchgezogene Linie), $\theta = 5$ (gestrichelte Linie), $\theta = 10$ (gepunktete Linie) und $\theta = \infty$ (vollständig positive Abhängigkeit, lang-gestrichelte Linie).

Alles was wir bisher über mulivariate reguläre Variation von Lévy-Maßen gesagt haben gilt für allgemeine spektral-positive Lévy-Prozesse. Nun kehren wir jedoch wieder zur Berechnung des totalen OpVaRs zurück und konzentrieren uns auf einen multivariaten zusammengesetzten Poission-Prozess, dessen Lévy-Maß Π gemäß (4.2) multivariat regulär variiert.

Theorem 4.8 (Böcker und Klüppelberg (2006), Theorem 3.18).

Betrachte ein multivariates zusammengesetztes Poisson-Modell $\boldsymbol{X}_t = (X_t^1,...,X_t^d), t \geq 0$, mit multivariat regulär variierendem Lévy-Maß Π mit Index $-\alpha$ und Grenzmaß ν gemäß (4.2). Außerdem seien die Verlustverteilungen F_{i} für $i = 1,\ldots,d$ streng monoton wachsend und stetig. Dann ist $(X_t^+)_{t\geq 0}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess, dessen Parameter für $z \to \infty$ die Bedingung

$$\lambda^+ \overline{F}^+(z) \sim \nu^+(1,\infty] \lambda_1 \overline{F}_1(z) \in \mathcal{R}_{-\alpha} \ , \tag{4.4}$$

erfüllen, wobei $\nu^+(1,\infty] = \nu\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{E} : \sum_{i=1}^{d} x_i > 1 \right\}$ ist. Des Weiteren kann der totale OpVaR asymptotisch durch

$$\mathrm{OpVaR}_t(\kappa) \sim F_1^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1-\kappa}{t\lambda_1 \nu^+(1,\infty]} \right), \quad \kappa \uparrow 1 \ , \tag{4.5}$$

angenähert werden.

Man erkennt, dass für die große Klasse der regulär variierenden Verteilungen der totale OpVaR durch die Verlusthöhenverteilung der ersten Zelle ausgedrückt werden kann. Insbesondere kann die rechte Seite von (4.5) als der asymptotische stand-alone OpVaR der ersten Zelle mit angepasstem Häufigkeitsparameter $\lambda_1 \nu^+(1,\infty]$ interpretiert werden. In folgenden Beispielen lässt sich $\nu^+(1,\infty]$ analytisch oder numerisch ausrechnen und so der Einfluss der verschiedenen Parameter auf den OpVaR besser verstehen.

Zwei explizite Lösungen im Fall der Clayton Pareto-Lévy-Copula

Wir betrachten nun ein zweidimensionales Beispiel, in dem die marginalen Lévy-Maße nicht unabhängig sind und daher $\nu^+(z,\infty]$ nicht einfach durch die Summe der marginalen Maße gegeben ist, so wie es bei Unabhängigkeit der Fall ist. Stattdessen muss bei der Berechnung von $\nu^+(z,\infty]$ auch die Masse im Quadranten zwischen den positiven Achsen berücksichtigt werden. Am einfachsten geschieht dies, indem man $\nu^+(z,\infty]$ als Integral über eine Dichte ausdrückt.

Unter der Voraussetzung, dass $\overline{F}_i(x) \sim c_t \overline{F}_1(x)$ für $x \to \infty$ gilt, setzt man $\tilde{c}_i = c_i \lambda_i / \lambda_1$ und erhält mit (4.3) für eine Pareto-Lévy-Copula für $(x_1, x_2) \in \mathbb{E}$

$$\nu\left(\left[\mathbf{0},(x_1,x_2)^\top\right]^c\right) = x_1^{-\alpha} + \tilde{c}_2\, x_2^{-\alpha} - (x_1^{\alpha\theta} + \tilde{c}_2^{-\theta} x_2^{\alpha\theta})^{-1/\theta}$$

$$= 1 + \tilde{c}_2^{1/\alpha} E\left[(\tilde{c}_2^{1/\alpha} + Y_\theta^{-1/\alpha})^{\alpha-1}\right] \quad , \qquad (4.6)$$

wobei Y_θ eine positive Zufallsvariable mit Dichte $g(s) = (1+s^\theta)^{-1/\theta-1}$, $s > 0$ ist, die nur vom Abhängigkeitsparameter der Pareto-Lévy-Copula θ abhängt. Folgende Situationen erlauben explizite Ausdrücke:

(a) Für $\alpha = 1$ erhält man $\nu^{+}\left(1,\infty\right] = 1 + \tilde{c}_2$, was bedeutet, dass, unabhängig vom Abhängigkeitsparameter θ, der totale OpVaR für alle $0 < \theta < \infty$ asymptotisch identisch mit dem OpVaR für unabhängige Zellen ist.

(b) Für $\alpha\theta = 1$ ergibt sich für $\tilde{c}_2 = (\lambda_2 / \lambda_1)c_2$

$$\nu^{+}\left(1,\infty\right] = \frac{\tilde{c}_2^{1+1/\alpha} - 1}{\tilde{c}_2^{1/\alpha} - 1}.$$

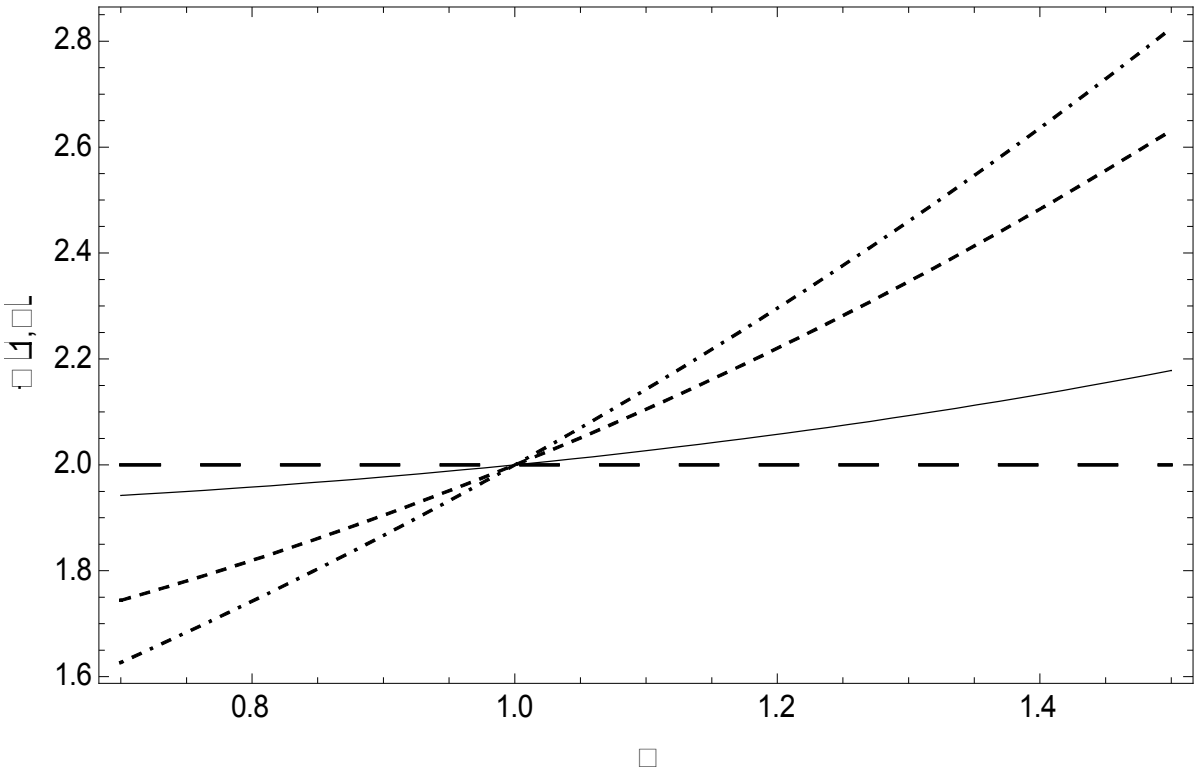

Abbildung 2: Veranschaulichung des Tail-Maßes $\nu^{+}\left(1,\infty\right]$ als Funktion von α für verschiedene Werte von θ. Es ist $\theta = 0.3$ (schwache Abhängigkeit, durchgezogene Linie), $\theta = 1$ (mittlere Abhängigkeit, gestrichelte Linie), und $\theta = 10$ (starke Abhängigkeit, Punkt-Strich Linie). Die lang-gestrichelte Linie stellt den Fall unabhängiger Zellen dar.

Abbildung 2 illustriert das Tail-Maß $\nu^{+}(1,\infty]$ aus (4.6) für verschiedene Werte von θ und α. Beachte, dass gemäß (4.5) der OpVaR bei steigendem $\nu^{+}(1,\infty]$ zunimmt. Daher zeigt Abbildung 2, dass im Fall von $\alpha > 1$ eine stärkere Abhängigkeit (d.h. eine größere Anzahl simultaner Verlustereignisse) zu einem größeren OpVaR führt, wohingegen es für $\alpha < 1$ genau anders herum ist: eine schwächere Abhängigkeit (d.h. eine geringere Anzahl simultaner Verlustereignisse) führt zu einem höheren OpVaR. Dies zeigt wieder einmal, wie im Fall von extrem langschwänzigen Verteilungen, als Folge der fehlenden Konvexität des OpVaR für $\alpha < 1$ Diversifikation nicht einfach nur nicht vorhanden, sondern sogar ein gegenteiliger Effekt zu beobachten ist. Hier bleibt nur die Reduktion möglicher Gefahren durch ein aktives Management des operationellen Risikos. Schließlich sei bemerkt, dass für $\theta \to \infty$ unabhängige Zellen modelliert werden und $\nu^{+}(1,\infty] = 1 + \tilde{c}_2$ konstant ist, so wie es der waagrechten lang-gestrichelten Linie in Abbildung 2 zu entnehmen ist.

Literatur

(1) Basel Committee on Banking Supervision. "Observed range of practice in key elements of Advanced Measurement Approaches (AMA)", (2006). Basel.

(2) Böcker, K. "Operational Risk: Analytical results when high severity losses follow a generalized Pareto distribution (GPD) − A Note." *The Journal of Risk* Vol. 8, No. 4, (2006), pp. 117-120.

(3) Böcker, K. and Klüppelberg, C. "Operational VAR: a Closed-Form Approximation." *RISK Magazine*, December, (2005), pp. 90-93.

(4) Böcker, K. and Klüppelberg, C. “Multivariate Models for Operational Risk.” *Working Paper,* Technische Universität München. (2006). Available at www.ma.tum.de/stat/.

(5) Böcker, K. and Klüppelberg, C. „Modelling and Measuring Multivariate Operational Risk with Lévy Copulas.” *Journal of Operational Risk*, Vol. 3, No. 2 (2008).

(6) Chavez-Demoulin, V., Embrechts, P. and Nešlehová, J. “Quantitative Models for Operational Risk: Extremes, Dependence and Aggregation.” *Journal of Banking and Finance,* Vol 30, No. 10 (2005), pp. 2635-2658.

(7) Cont, R. and Tankov, P. *Financial Modelling With Jump Processes* (2004). Chapman & Hall/CRC: Boca Raton.

(8) Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance* (1997). Springer: Berlin.

(9) Frachot, A., Roncalli, T. and Salomon, E. “Correlation and Diversification Effects in Operational Risk Modeling”, *Operation Risk: Practical Approaches to Implementation.* (2005), edited by Ellen Davis, London: Risk Books.

(10) Klüppelberg, C. and Resnick, S.I. “The Pareto Copula, Aggregation of Risks and the Emperor's Socks.” *Journal of Applied Probability*. Vol. 45, No. 1 (2008), pp. 67-84.

(11) Moscadelli, M. “The Modelling of Operational Risk: Experience with the Analysis of the Data Collected by the Basel Committee.” Preprint, *Banca D'Italia, Termini di discussione.* No. 517 (2004).

(12) Powojowski, M.R., Reynolds, D. and Tuenter, J.H. “Dependent Events and Operational Risk.” *Algo Research Quaterly.* Vol. 5, No. 2 (2002), pp. 65-73.

(13) Resnick, S.I. *Heavy-Tail Phenomena* (2007). Springer: New-York.