

Dämpfung der Motorvibrationen im Kfz mittels Filtered-x-LMS-Algorithmus: Implementierung am Prüfstand und Konvergenzanalyse

Jörg Paschedag*

Lehrstuhl für Regelungstechnik, Technische Universität München
Boltzmannstr. 15, D-85748 Garching, Germany

Abstract

Der vorliegende Beitrag liefert einen Erfahrungsbericht von der Implementierung einer adaptiven Störgrößenaufschaltung, des so genannten Filtered-x-LMS-Algorithmus, an einem Prüfstand zur Untersuchung der Motoraufhängung im Kfz. Betrachteter Anwendungsfall ist die Isolation der Motorvibrationen gegenüber dem Chassis. Im ersten Teil der Arbeit werden die grundsätzlich erforderlichen Erweiterungen des Algorithmus sowie relevante besondere Eigenschaften vorgestellt und ausführlich diskutiert. Insbesondere wird auf die Anforderungen an Streckentotzeiten und die mindestens notwendige Koeffizientenanzahl des verwendeten adaptiven Filters eingegangen. Die Implementierung einer Oversampling-Technik wird beschrieben, mit deren Hilfe die Anforderungen an die analogen Hardwarefilter zur Signalaufbereitung gering gehalten werden können.

Den zweiten Teil des Berichts bildet eine theoretische Analyse zum Konvergenzverhalten des Algorithmus, speziell für die vorliegende Schmalbandanregung. Als Ergebnis der Untersuchung wird, unter bestimmten Voraussetzungen, eine vollständige Beschreibung des zeitlich gemittelten Verlaufs der Schwingungsunterdrückung erreicht.

Stichworte: Aktive Vibrationsdämpfung; Filtered-x-LMS; Schwingungsisolierung; Motorvibrationen; periodische Anregung; Konvergenzanalyse; Oversampling

*Tel: +49 89 289 15664, Fax: +49 89 289 15653, email: paschedag@tum.de

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Verwendeter Prüfstand	4
3	Funktions- und Einsatzweise des FxLMS-Algorithmus	5
3.1	Störgrößenaufschaltung und FxLMS-Algorithmus	5
3.2	Modifikationen der FxLMS-Berechnungsformel	8
3.3	Kompensation von Rückkopplungseffekten	9
4	Besonderheiten der Implementierung	10
4.1	Anwendung der Oversampling-Technik	10
4.2	Identifikation der Strecken $S(z)$ und $R(z)$	11
5	Auswirkung der Periodizität des Störsignals	12
5.1	Totzeitanforderungen	12
5.2	Koeffizientenzahl des adaptiven Filters W	14
6	Messergebnisse und Analyse	15
6.1	Ergebnisse der Schwingungsdämpfung	15
6.2	Hintergründe zur mathematischen Analyse	16
6.3	Filterkonvergenz für Anregung mit nur einer Frequenz	18
6.4	Filterkonvergenz für Anregung bei mehreren Frequenzen	21
6.5	Konvergenz des Fehlersignals $e(n)$	24
6.6	Beschreibung im allgemeinen Fall	26
6.7	Simulationsergebnisse zur Konvergenzanalyse	28
7	Zusammenfassung	32

1 Einleitung

Starke Vibrationen und dadurch entstehender Körperschall innerhalb von Kraftfahrzeugen werden von den Insassen als unangenehm und belastend empfunden. Aus diesem Grund bemühen sich die Hersteller um eine Minderung solcher störender Schwingungen. Schon seit Langem werden hierzu passive Techniken wie z.B. Feder-Dämpfer-Systeme oder einfaches Dämmmaterial eingesetzt, deren Wirkung jedoch im Wesentlichen auf höhere Frequenzbänder beschränkt ist. Für die Reduktion von Schwingungen niedriger Frequenz (wenige hundert Hz und darunter) sind neben halbaktiven Techniken insbesondere die aktiven Techniken gut geeignet [1]. Diese sind zunehmend Gegenstand von Forschung und Entwicklung (z. B. [2, 3]), da die notwendigen Mikrocomputer hoher Rechenleistung verfügbar werden [4]. Grundsätzliches Prinzip der aktiven Vibrationsdämpfung (engl.: Active Vibration Control, kurz AVC) [1, 5, 6, 7, 8] ist die Auslöschung der unerwünschten Vibrationen durch Überlagerung eines um 180° phasenverschobenen Gegensignals gleicher Amplitude.

Eine wichtige Anwendung des AVC am Kraftfahrzeug ist die Vermeidung der Übertragung der vom Verbrennungsmotor erzeugten Vibrationen auf den Innenraum. Ein praktikabler Ansatz hierzu ist es, die Vibrationen bereits an der Aufhängung des Motors zu kompensieren. Eine weitere Übertragung auf die Karosserie wird so unterbunden und eine Isolation der Vibrationsquelle (des Motors) erreicht („Vibration Isolation“ [8]).

Speziell im Rahmen dieser Arbeit wird ein entsprechendes System zur Vibrationsdämpfung mithilfe des Filtered-x-LMS-Algorithmus (FxLMS) [1, 9, 10, 11] eingerichtet. Dieser adaptive Algorithmus stammt aus der digitalen Signalverarbeitung und stellt eine Erweiterung des bekannten LMS-Algorithmus [10, 12] dar. Er entspricht seiner Struktur nach aus regelungstechnischer Sicht einer Störgrößenaufschaltung (engl. feed-forward). Der Algorithmus wird auf die gegebene Anwendung angepasst, und seine besonderen Eigenarten, bezogen speziell auf die vorliegenden Verhältnisse, werden untersucht. Um ein tieferes Verständnis des Zeitverhaltens der eingerichteten Schwingungsdämpfung zu erhalten, wird schließlich eine Konvergenzanalyse des Algorithmus durchgeführt. Dabei wird, für stationäre Anregung, eine möglichst genaue Beschreibung des Abklingvorgangs der unerwünschten Vibration angestrebt. Die Implementierung erfolgt auf einem Schwingungsprüfstand, der eine Motoraufhängung im Kfz nachbildet.

Im folgenden Abschnitt wird kurz der verwendete Prüfstand samt eingesetztem Echtzeitsystem für die digitale Datenverarbeitung beschrieben. Anschließend wird in Abschnitt 3 das grundsätzliche Funktionsprinzip des FxLMS-Algorithmus sowie die Modifikationen, die hier für einen erfolgreichen Einsatz notwendig sind, vorgestellt. Im darauf folgenden vierten Abschnitt werden zwei spezielle Bestandteile der Implementierung beschrieben: Der Einsatz der Oversampling Technik sowie die Vorgehensweise bei der Identifikation von benötigten Streckenmodellen. Abschnitt 5 beschäftigt sich mit den besonderen (vorteilhaften) Eigenschaften, die sich für den FxLMS-Algorithmus aufgrund der periodischen Störanregung ergeben.

Im sechsten Abschnitt wird die in Messungen festgestellte Güte der eingerichteten Vibrationsdämpfung für stationäre Anregung festgehalten. Das Konvergenzverhalten des Algorithmus wird frequenz- und zeitbezogen visualisiert. Eine ausführliche theoretische Analyse wird durchgeführt, und die festgestellten modalen Verhältnisse werden für verschiedene typische Fälle mit Simulationsergebnissen illustriert. Den letzten Abschnitt bildet eine kurze Zusammenfassung der Arbeit.

2 Verwendeter Prüfstand

Die experimentellen Untersuchungen zur Umsetzung der Vibrationsdämpfung werden an der im Bild 1 dargestellten Motoraufhängung durchgeführt. Gezeigt ist ein Hilfsrahmen, auf dem im realen Fahrzeug der Motor montiert ist. Der Hilfsrahmen selbst ist an vier Stellen über Aluminiumpfosten an einem Metalltisch befestigt, der das Chassis repräsentiert. Im Versuchsaufbau

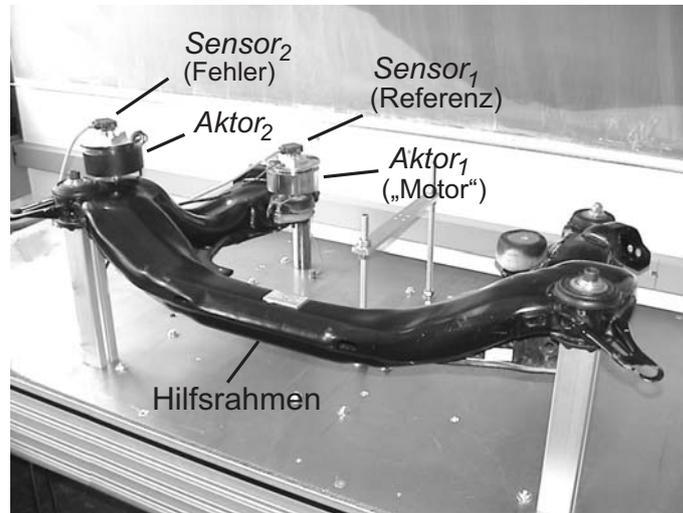


Bild 1: Der Prüfstand

sind zwei schwingungsgebende Aktoren angebracht. *Aktor₁* bringt die störenden Vibrationen in den Aufbau ein und repräsentiert somit den Motor. *Aktor₂* hingegen wird zur Erzeugung der Gegenschwingungen verwendet, mit denen die „Motorvibrationen“ kompensiert werden. Die Beschleunigungssensoren (Referenzsensor und Fehlersensor) im Prüfstand dienen zur Erfassung der Vibrationsstärke.

Den prinzipiellen Aufbau des betrachteten Prüfstands zeigt Bild 2, wobei hier lediglich derjenige Teil des Hilfsrahmens abgebildet ist, auf dem die Bauteile für die Schwingungserzeugung und -unterdrückung angebracht sind. *Aktor₂* und der Fehlersensor zur Messung der Restvibration sind an einer Aufhängungsstelle des Hilfsrahmens platziert, sodass an dieser die größte Vibrationsminderung erreicht wird und die Schwingungsübertragung auf die Fahrzeugkarosserie

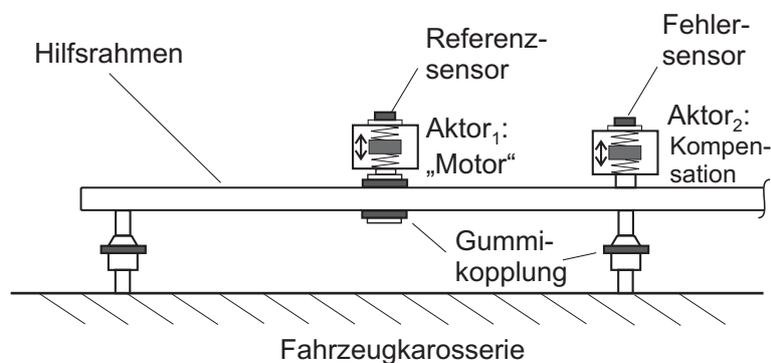


Bild 2: Prinzip des mechanischen Aufbaus

minimiert wird. Für den Einsatz im Fahrzeug ist an jedem der vier Aufhängepunkte ein Aktor zur Vibrationsdämpfung notwendig.

Die Implementierung der Schwingungsunterdrückung im Labor erfolgte in Form eines Simulinkmodells, das auf ein Controller Board der Firma dSPACE heruntergeladen wird. Auf diesem kann der eingesetzte Algorithmus in Echtzeit ausgeführt werden, bei gleichzeitigem Signalaus-tausch mit dem Prüfstand. In Bild 3 ist der Aufbau des erstellten Gesamtsystems schematisch dargestellt.

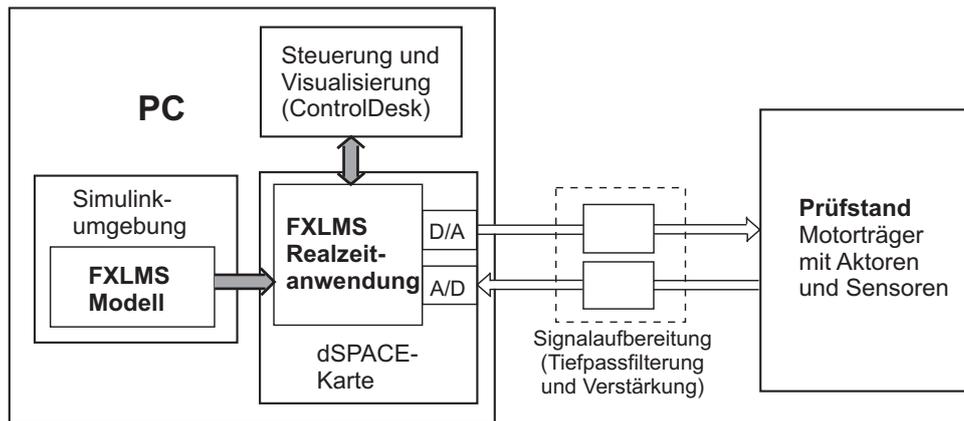


Bild 3: Verwendetes Gesamtsystem

3 Funktions- und Einsatzweise des FxLMS-Algorithmus

3.1 Störgrößenaufschaltung und FxLMS-Algorithmus

Die Vibrationsdämpfung wird hier nach Art einer Störgrößenaufschaltung realisiert. Bild 4 illustriert das Prinzip der verwendeten Struktur: Die störende Vibration $x(n)$ überträgt sich von ihrer Quelle (Motorblock) über eine linear angenommene Übertragungsstrecke $P(z)$ auf den zu beruhigenden Ort (Aufhängungsstelle des Hilfsrahmens) und erzeugt dort das Signal $d(n)$. Um $d(n)$ zu minimieren, wird durch den Aktor₂, dessen Übertragungsfunktion in der sekundären Strecke $S(z)$ enthalten ist, eine „Gegenvibration“ $y_f(n)$ aufgebracht, so dass idealerweise $e(n) = d(n) - y_f(n) = 0$ wird. Das ansteuernde Signal $y(n)$ wird dabei durch Filterung des gemessenen Referenzsignals $x(n)$ mit dem Filter $W(z)$ gewonnen. Offensichtlich tritt eine vollständige Unterdrückung der Vibration sicher dann auf, wenn Filter $W(z)$ und Aktor $S(z)$ zusammen die Übertragungsfunktion $P(z)$ besitzen, d. h. $W(z)S(z) = P(z)$ oder ¹

$$W(z) = P(z)S^{-1}(z) \quad . \quad (1)$$

Die in Bild 4 gezeigte Struktur kann als Störgrößenaufschaltung aufgefasst werden weil die Störung an der Quelle gemessen und hinter der primären Strecke aufgeschaltet wird. Es entsteht somit kein geschlossener Wirkungskreislauf (feedback), wie er bei ausschließlicher Messung und Rückführung von $e(n)$ entstünde, sondern eine *offene Wirkungskette* (feedforward [1, 8, 13]) mit

¹Im Abschnitt 5 wird sich zeigen, dass - speziell bei Vorliegen eines periodischen Anregungssignals - eine vollständige Auslöschung des Fehlersignals auch ohne die Einhaltung von (1) möglich ist.

Vorteilen hinsichtlich der wirksamen Bandbreite und der Stabilitätseigenschaften ².

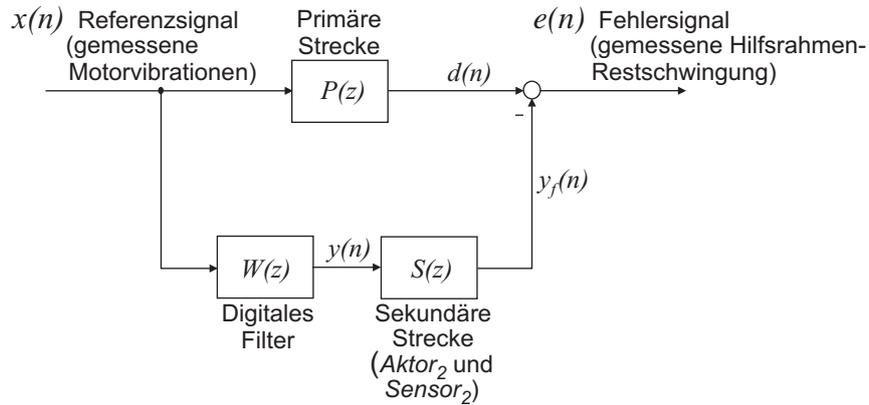


Bild 4: Struktur der Störgrößenaufschaltung

Es sei hier darauf hingewiesen, dass, anstelle des Messsignals des Referenzsensors, auch ein Tachometersignal des Fahrzeugs als Referenz $x(n)$ verwendet werden kann. Die dabei angewandte Vorgehensweise wird jedoch an anderen Stellen diskutiert (z.B. [1, 14, 15, 16]).

Da die primäre Übertragungsstrecke $P(z)$ in Bild 4 langsam zeitvariant ist, kann auf eine ständige Adaption des Filters $W(z)$ nicht verzichtet werden. Hierzu ist der FxLMS-Algorithmus sehr gut geeignet. Er stellt die Parameter eines nichtrekursiven Filters $W(z)$ in der Anordnung nach Bild 5 ein. Es wird hier eine ähnliche Notation verwendet wie von Kuo und Morgan in [1]. Kernstück

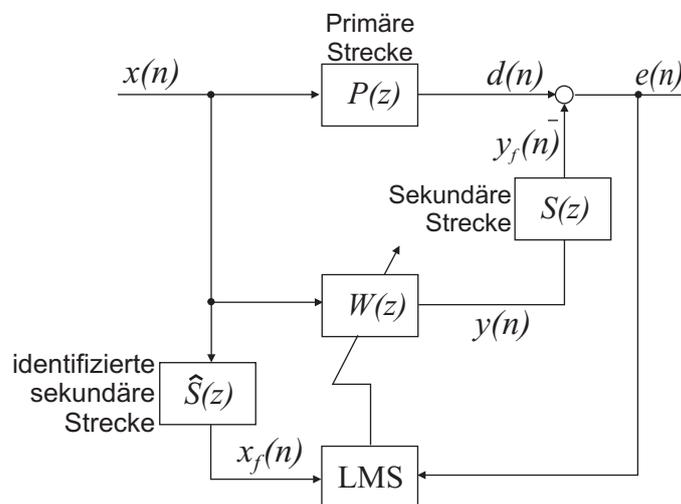


Bild 5: Vibrationsdämpfung mit FxLMS-Algorithmus

des FxLMS-Algorithmus ist der Least-Mean-Square (LMS)-Algorithmus. Seine Erweiterung zum FxLMS-Algorithmus ist bei der vorliegenden Anwendung aufgrund der Wirkung der sekundären Strecke $S(z)$ notwendig. Zur Kompensation dieser Wirkung muss das Referenzsignal $x(n)$ mit

²Diese idealisierte Vorstellung der offenen Wirkungskette kann allerdings nicht durchgängig aufrecht erhalten werden, s. Abschnitt 3.3.

einem identifizierten Modell $\hat{S}(z)$ der sekundären Strecke gefiltert werden. Dieser Filterung verdankt der FxLMS-Algorithmus seinen Namen.

Der FxLMS-Algorithmus geht in die Struktur des LMS-Algorithmus über, wenn in Bild 5 die sekundäre Strecke $S(z)$ sowie die identifizierte Strecke $\hat{S}(z)$ im Signalfluss „nach vorne“ verschoben werden. Die Verschiebung ist zulässig unter den Annahmen, dass die identifizierte Strecke $\hat{S}(z)$ exakt der Strecke $S(z)$ entspricht und dass außerdem das Filter $W(z)$ sich nur so langsam ändert, dass es als zeitinvariant angenommen werden kann. Anhand des in Bild 6 gezeigten Ergebnisses der Umformung kann das Funktionsprinzip des Algorithmus erläutert werden:

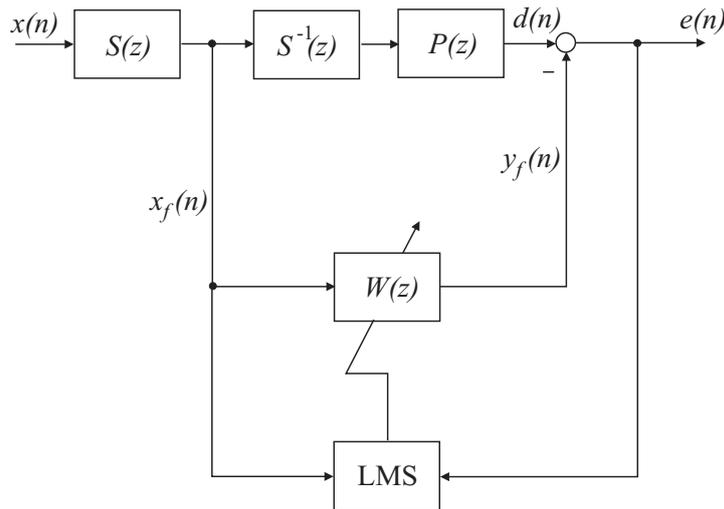


Bild 6: Vibrationsdämpfung mit FxLMS nach Verschieben von $S(z)$ und $\hat{S}(z)$

Das adaptive FIR-Filter $W(z)$ wirkt gemäß

$$y_f(n) = w(n) * x_f(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}_f(n) . \quad (2)$$

Hierbei entspricht der Vektor $\mathbf{w}(n)$ den L Koeffizienten des Filters $W(z)$ für den aktuellen Abtastschritt n

$$\mathbf{w}^T(n) = [w_0 \dots w_{L-1}] \quad (3)$$

und $\mathbf{x}_f(n)$ enthält die jeweils L letzten Abtastwerte des gefilterten Referenzsignals $x_f(n)$ in umgekehrter Reihenfolge ihres zeitlichen Auftretens, also

$$\mathbf{x}_f(n) = [x_f(n) \ x_f(n-1) \ \dots \ x_f(n-L+1)]^T . \quad (4)$$

Der FxLMS-Algorithmus passt die Koeffizienten w_i so an, dass der aus dem Fehler

$$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}_f(n) \quad (5)$$

gebildete quadratische Fehler $e^2(n) = J(n)$ abnimmt. Dazu wird der Vektor \mathbf{w}^T in jedem Schritt in Richtung des aktuell steilsten Abstiegs des Gütemaßes $J(n)$ verbessert ³,

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \frac{\mu}{2} \nabla J(n) \quad (6)$$

³Die wiederholte Verwendung des jeweils „aktuell“ steilsten Abstiegs führt (im zeitlichen Mittel) zu einer Optimallösung [10]

mit

$$\nabla J = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial e^2}{\partial \mathbf{w}} \stackrel{\text{(mit (5))}}{=} 2e \left(\frac{\partial e}{\partial \mathbf{w}} \right) = -2e \mathbf{x}_f . \quad (7)$$

Damit resultiert endgültig die Rekursion

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \mathbf{x}_f(n) e(n) . \quad (8)$$

Die Bedeutung und Auswahl von μ wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

3.2 Modifikationen der FxLMS-Berechnungsformel

Wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, wird für die Anpassung des Filters $W(z)$ die rekursive Berechnungsformel (8) verwendet. Darin hat der Faktor μ die Wirkung einer Schrittweite, die vorgibt, mit welcher Geschwindigkeit der Algorithmus konvergiert. Je größer μ gewählt wird, desto schneller wird die Anpassung des Filters $W(z)$ ausgeführt. Dabei ist allerdings zu beachten, dass zu große Werte der Schrittweite zu instabilem Verhalten des Algorithmus führen. Gemäß [10] kann für den LMS-Algorithmus eine allgemeine Obergrenze bezüglich der Stabilität angegeben werden:

$$0 < \mu < \frac{\alpha_{max}}{LP_{x_f}} \quad (9)$$

Der Maximalwert der Schrittweite ist somit abhängig von der Anzahl L der Filterkoeffizienten und der Leistung P_{x_f} des Signals $x_f(n)$. Der theoretische Wert für die im Zähler der Obergrenze stehende Konstante ist $\alpha_{max} = 2$. In der Anwendung fällt dieser Wert allerdings schon auf Grund der spektralen Leistungsverteilung von $x_f(n)$ in der Regel deutlich kleiner aus. Außerdem muss nach [17] speziell für den Einsatz im FxLMS-Algorithmus die Formel (9) noch etwas erweitert werden

$$0 < \mu < \frac{\alpha_{max}}{(L + T_S)P_{x_f}} , \quad (10)$$

wobei T_S die Totzeit der Sekundären Strecke bezeichnet. Speziell im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde in Simulationen ein negativer Einfluss der Sekundären Strecke auf die zulässige Schrittweite festgestellt, der sogar noch weit über den in (10) gegebenen hinaus geht. Bei Berücksichtigung eines deutlich abgesenkten α_{max} konnte aber trotzdem, ausgehend von (9), entsprechend [10] eine praktikable und zuverlässige Schrittweitenanpassung eingerichtet werden. Hierzu wurde die Signalleistung P_{x_f} näherungsweise durch $\frac{1}{L} \mathbf{x}_f^T(n) \mathbf{x}_f(n)$ beschrieben. Es ergibt sich dann aus (8), unter Berücksichtigung von (9), die erweiterte Rekursionsformel

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \underbrace{\frac{\alpha}{\mathbf{x}_f^T(n) \mathbf{x}_f(n)}}_{=\mu} \mathbf{x}_f(n) e(n) \quad (11)$$

mit normierter Schrittweite. Die Konstante α ist etwas kleiner zu wählen als der maximal mögliche Wert α_{max} . Im vorliegenden Fall wurde mit $\alpha \approx 0.03$ ein zuverlässig stabiler Betrieb des Algorithmus erreicht.

Für die praktische Anwendung ist es weiterhin wichtig, bei der Berechnung der Schrittweite eine untere Grenze $P_{x_f, min}$ für die eingerechnete Signalleistung festzulegen (s. Bild 7). Tut man dies nicht, so wird die Schrittweite gegen unendlich hohe Werte streben, wenn ein verschwindendes Eingangssignal vorliegt.

Eine weitere, für den praktischen Einsatz notwendige Modifizierung des FxLMS-Algorithmus ist die Einführung des so genannten Leckfaktors ν [10]. Dieser soll ein unerwünschtes Driften der Koeffizienten des adaptiven Filters W vermeiden. Bei der Drift handelt es sich im vorliegenden Fall hauptsächlich um einen anwachsenden Offset aller Filterkoeffizienten. Er entsteht dadurch, dass sowohl die Messung des Fehlersignals $e(n)$, als auch die des gefilterten Referenzsignals $x_f(n)$ einen Offsetfehler besitzen. Da von der sekundären Strecke keine konstanten Signalanteile übertragen werden können, ergibt sich keine Auswirkung der Koeffizientendrift auf das Fehlersignal und eine Korrektur durch den LMS-Algorithmus findet nicht statt.

Der Leckfaktor ν wirkt diesem Effekt entgegen, indem er gemäß der Formel

$$\mathbf{w}(n+1) = \nu \mathbf{w}(n) + \frac{\alpha}{\mathbf{x}_f^T(n) \mathbf{x}_f(n)} \mathbf{x}_f(n) e(n) \quad (12)$$

auf die für die Rekursion zwischengespeicherten Werte der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ Einfluss nimmt. Es muss gelten $0 \leq \nu \leq 1$, wobei für die Anwendung normalerweise ein Wert für ν gewählt wird, der sehr nahe bei Eins liegt (z. B. $\nu = 0.9999$). Man erzeugt so fortlaufend eine künstliche Verkleinerung der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$. Ein nachteiliger Effekt des Leckfaktors ist die Verminderung der erreichbaren Güte der Schwingungsdämpfung. Die Unterdrückung wird umso schwächer ausfallen, je kleiner der Wert von ν gewählt wird. In der Literatur werden Verfahren vorgeschlagen, mit denen die auftretende Performance-Verschlechterung minimiert werden kann (z. B. [18, 19]).

Es sei hier nebenbei erwähnt, dass sich der Leckfaktor durch seine Wirkung auf die Unterdrückungsgüte sehr gut als Mittel zum Ein- und Ausschalten der Vibrationsdämpfung eignet. Hierzu wird er entweder auf den gewünschten Betriebswert oder zu Null gesetzt. Bei dieser Vorgehensweise besteht keine Gefahr, dass aufgrund der Schaltvorgänge Instabilitäten auftreten.

Mit den in diesem Abschnitt beschriebenen Modifizierungen ergibt sich das in Bild 7 dargestellte Strukturbild des FxLMS-Algorithmus.

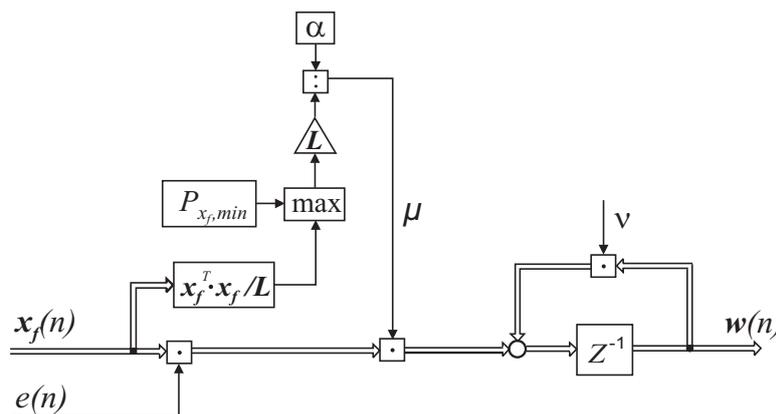


Bild 7: Struktur des modifizierten FxLMS-Algorithmus

3.3 Kompensation von Rückkopplungseffekten

Beim Einsatz des FxLMS-Algorithmus am realen Prüfstand tritt eine unerwünschte Signalarückkopplung auf, die im Strukturbild 5 noch nicht eingetragen ist. Sie entsteht dadurch, dass

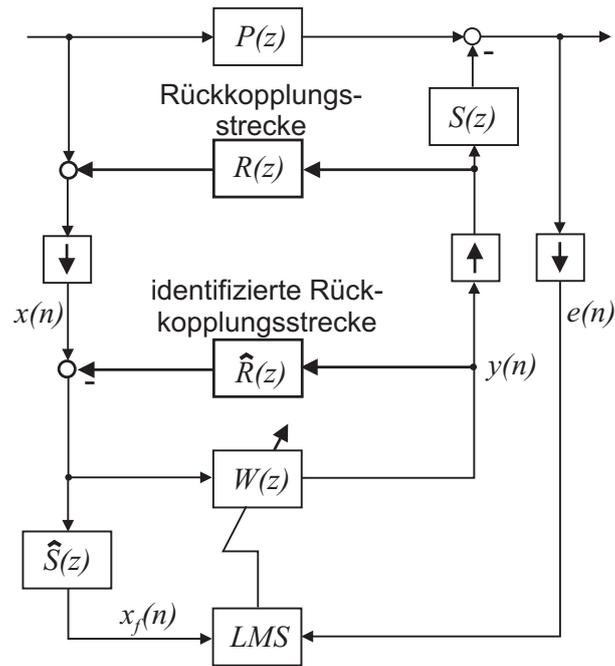


Bild 8: FxLMS-Algorithmus mit Rückkopplungskompensation

der zur Störkompensation eingesetzte *Aktor*₂ nicht nur auf die Auslöschungsstelle am Fehlersensor wirkt, sondern auch auf die Messung des Referenzsensors. Die Lage der hierbei wirkenden Rückkopplungsstrecke $R(z)$ ist im Bild 8 eingezeichnet. Bei den am Hilfsrahmen durchgeführten Untersuchungen kam es aufgrund der Signalarückwirkung zu einer deutlichen Verschlechterung der Performance der Schwingungsunterdrückung bis hin zur Instabilität der Filteradaptation. Abhilfe konnte geschaffen werden durch den Einsatz des gemäß [1] softwareseitig implementierten Filters $\hat{R}(z)$, das als Modell der Strecke $R(z)$ identifiziert wurde (s. Abschnitt 4.2). Das Ausgangssignal des Filters $\hat{R}(z)$ wurde vom verfälschten Referenzsignal abgezogen und der durch die Rückkopplung beigetragene Anteil eliminiert. Auf diese Weise konnten die negativen Auswirkungen der Rückkopplung nahezu vollständig beseitigt werden. Für die Anwendung am realen Kfz bleibt allerdings zu prüfen, wie stark sich die Rückkopplung dort tatsächlich auswirkt. Aufgrund der hohen Masse des Motorblocks wird der Effekt der durch *Aktor*₂ eingebrachten Vibration voraussichtlich geringer sein als am Prüfstand.

4 Besonderheiten der Implementierung

4.1 Anwendung der Oversampling-Technik

Wie in Bild 8 angedeutet, sind an den Signalübergängen zwischen Hardwareaufbau und softwareseitig implementiertem Algorithmus Elemente zur Umsetzung der Abtastfrequenz eingefügt. Der Pfeil nach oben kennzeichnet hierbei eine Erhöhung und der Pfeil nach unten eine Absenkung der Abtastrate. Mit diesen Umsetzungen wurde eine so genannte Oversampling-Technik [20] realisiert. Sie erlaubt eine Ausführung des Algorithmus mit niedriger Abtastfrequenz bei gleichzeitiger Signaleingabe und -ausgabe über die A/D- und D/A-Wandler mit hoher Abtastrate.

Durch die niederfrequente Abarbeitung des Algorithmus steht softwareseitig viel Rechenzeit je Abtastschritt zur Verfügung. Außerdem kann die Anzahl der Koeffizienten der im Algorithmus eingesetzten Filter $W(z)$, $\hat{S}(z)$ und $\hat{R}(z)$ gering gewählt werden, da die erforderliche Ordnung der Filter mit abnehmender Abtastrate sinkt. Durch die hohe Taktrate bei der Signaleingabe und -ausgabe werden die Anforderungen an den Roll-Off der Anti-Aliasing- und Rekonstruktionsfilter im Hardwareaufbau niedrig gehalten. Im vorliegenden Fall konnten einfache passive Tiefpässe erster Ordnung verwendet werden.

Für die softwareseitige Abarbeitung des Algorithmus wurde eine Taktrate von $f_A = 1500$ Hz gewählt und für die Signaleingabe und -ausgabe eine Abtastfrequenz von $f_A^h = 6000$ Hz. Die Implementierung der Frequenzumsetzungen erfolgte, wie in Bild 9 zu sehen, unter Verwendung von digitalen Tiefpässen. Diese wurden als Butterworth-Filter sechster Ordnung eingerichtet.

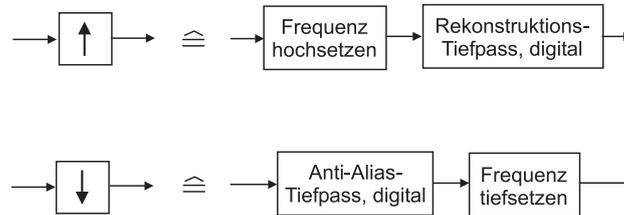


Bild 9: Umsetzung der Abtastfrequenz

4.2 Identifikation der Strecken $S(z)$ und $R(z)$

Wie bereits beschrieben, werden für die Implementierung des FxLMS-Algorithmus die beiden Filter $\hat{S}(z)$ und $\hat{R}(z)$ als identifizierte Modelle der Strecken $S(z)$ und $R(z)$ benötigt. Die demzufolge erforderliche Identifikation wurde am Prüfstand durch eine direkte Anwendung des LMS-Algorithmus entsprechend [10] realisiert. Die hierbei eingesetzte Struktur (s. Bild 10) kann, zusammen mit dem FxLMS-Algorithmus, als Echtzeitanwendung auf der dSPACE-Karte

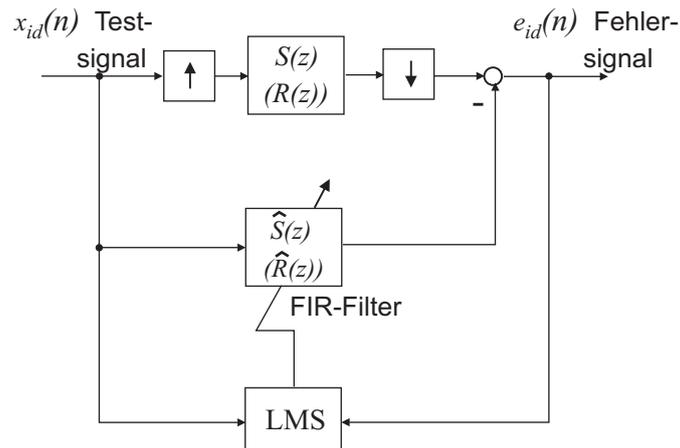


Bild 10: Offline-Identifikation der Strecken $S(z)$ und $R(z)$

ausgeführt werden. Auf diese Weise ist es möglich, jeweils vor dem Einschalten der Vibrationsdämpfung eine Offline-Identifikation der Strecken $S(z)$ und $R(z)$ vorzunehmen, so dass starke, langfristig wirkende Zeitvarianzen der Strecken nicht zu einer Performanceverschlechterung

der Vibrationsdämpfung führen können.

5 Auswirkung der Periodizität des Störsignals

Durch den Motor im Kraftfahrzeug wird ein periodisches Störsignal erzeugt. Dieses setzt sich zusammen aus einer Grundschwingung, deren Frequenz unmittelbar mit der Drehzahl des Motors zusammenhängt und aus den zugehörigen Oberschwingungen bei ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz. Aus der Periodizität des Störsignals folgt, Linearität der vorliegenden Übertragungsglieder vorausgesetzt, dass auch alle anderen bei der Schwingungsunterdrückung auftretenden Signale, wie $x_f(n)$, $d(n)$, $y_f(n)$ und $e(n)$, periodisch sind mit der Periodendauer des Störsignals.

Für die experimentelle Untersuchung des FxLMS-Algorithmus am Prüfstand wurde das Motor-Störsignal durch ein Multisinus-Signal nachgebildet. Das Verhalten des Algorithmus wurde für Grundfrequenzen zwischen 30 Hz und 300 Hz erprobt.

Die Periodizität des Störsignals hat auf entscheidende Weise Einfluss auf die Anforderungen bei der Realisierung des FxLMS-Algorithmus. Zwei Punkte hierzu werden im Folgenden näher erläutert.

5.1 Totzeitanforderungen

Gemäß Abschnitt 1, Gleichung (1) kommt es zu einer Auslöschung des Fehlersignals $e(n)$, wenn das adaptive Filter $W(z)$ das Produkt aus primärer Strecke $P(z)$ und invertierter sekundärer Strecke $S^{-1}(z)$ nachbildet. Ein derartiges Filter $W(z)$ ist im Allgemeinen nur realisierbar (d.h. kausal), wenn der Totzeitanteil der Strecke $P(z)$ mindestens genauso groß ist wie der der Strecke $S(z)$. Am vorliegenden Aufbau wurde für die primäre Strecke, die die Übertragung der Vibrationen von der Referenzmessung bis zur Fehlermessung beschreibt, wegen der hohen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen im Stahlträger (ca. 5000 ms^{-1}) und nur kurzen Übertragungswegen in der elastischen Aufhängung eine relativ kurze Totzeit von ungefähr $5 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$ ermittelt. Bei einer Abtastperiode von $T_A = f_A^{-1} = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ sec}$ beträgt sie also nicht ganz einen Abtastschritt. Da die Totzeit der Sekundäre Strecke prinzipbedingt mindestens eine Abtastperiode beträgt und insgesamt am betrachteten Prüfstand sogar noch deutlich größer ist (ca. $6 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$), kann die oben stehende Realisierbarkeitsanforderung nicht erfüllt werden.

Liegt jedoch ein *periodisches* Störsignal vor, so ist trotzdem eine wirksame Vibrationsdämpfung möglich, da dann die Generierung des Gegensignals $y_f(n)$ um eine oder auch mehrere Perioden des Störsignals verzögert stattfinden kann. Dies kann durch die folgenden Überlegungen plausibel gemacht werden:

Für eine Auslöschung des Signals $e(n)$ gemäß Bild 5 muss gelten $d(n) = y_f(n)$, bzw.

$$P(z)X(z) = S(z)W(z)X(z) . \quad (13)$$

Um eine Betrachtung beliebiger Periodendauern (und nicht nur ganzzahliger Vielfacher der Abtastperiode T_A) möglich zu machen, soll dieser zeitdiskrete Zusammenhang im Folgenden vorübergehend als kontinuierlich angenommen werden. Hierbei werden die entsprechenden Systeme und Signale mit dem Index c versehen:

$$P_c(s)X_c(s) = S_c(s)W_c(s)X_c(s) \quad (14)$$

Ist $x_c(t)$ ein periodisches Signal, so wiederholt es sich mit der Periodendauer T_x :

$$x_c(t) = x_c(t + kT_x), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Beschreibt man die Zeitverschiebung um kT_x durch den Faktor e^{skT_x} , so erhält man aus (14) die Beziehung

$$P_c(s)X_c(s) = S_c(s)W_c(s)X_c(s)e^{skT_x}, \quad (16)$$

aus der $X_c(s)$ herausgekürzt werden kann. Es ergibt sich

$$P_c(s) = S_c(s)W_c(s)e^{skT_x}. \quad (17)$$

Trennt man die Systeme $P_c(s)$, $S_c(s)$ und $W_c(s)$ in (17) in einen Totzeitanteil und eine totzeitfreie Übertragungsfunktion auf, also

$$\begin{aligned} P_c(s) &= e^{-sT_P} P_{c0}(s) \\ S_c(s) &= e^{-sT_S} S_{c0}(s) \\ W_c(s) &= e^{-sT_W} W_{c0}(s), \end{aligned} \quad (18)$$

so erhält man weiterhin

$$e^{-sT_P} P_{c0}(s) = e^{-sT_S} S_{c0}(s) e^{-sT_W} W_{c0}(s) e^{kT_x}. \quad (19)$$

Damit diese Gleichung für alle s erfüllt sein kann, muss gelten

$$T_W = T_P - T_S + kT_x. \quad (20)$$

Diese Bilanzgleichung gibt an, wie sich die Totzeiten der Strecken $P_c(s)$ und $S_c(s)$ sowie die aufgrund der Periodizität des Signals $x_f(t)$ konstruierbare zusätzliche Totzeit kT_x auf die Totzeit T_W des adaptiven Filters $W_c(s)$ auswirken.

Wie oben bereits erwähnt, muss T_W größer oder gleich Null sein, da $W_c(s)$ sonst nicht kausal wäre. Dies wird mit (20) immer erfüllt werden können, da $k \in \mathbb{Z}$ - zumindest theoretisch - nicht begrenzt ist. Es wird immer ein k geben, für das kT_x größer oder gleich dem endlichen Wert von $T_S - T_P$ ist.

Die Rückkehr zur zeitdiskreten Betrachtung ist möglich unter der Annahme, dass die Impulsantwort des Filters $W_c(s)$ nach der endlichen Zeit LT_A verschwindende Werte annimmt. Diese Voraussetzung kann gemäß dem nachfolgenden Abschnitt 5.2 für periodische Anregung bei geeigneter Wahl von L immer erfüllt werden. Außerdem seien in der Impulsantwort von $W_c(s)$ nur Signalanteile bei Frequenzen unterhalb der Nyquistfrequenz $1/(2T_A)$ enthalten. Auch diese Annahme kann als erfüllt vorausgesetzt werden, da sie bei Bedarf durch eine Bandbegrenzung der Impulsantwort herbeigeführt werden kann.

Es ergeben sich dann, aufgrund der Impulsinvarianz, die Filterkoeffizienten \mathbf{w} des diskreten Filters $W(z)$ durch Abtastung der Impulsantwort von $W_c(s)$. Das Filter $W_c(s)$ kann also nachgebildet und die ursprüngliche Forderung (13) erfüllt werden, unabhängig von den Streckentotzeiten T_S und T_P .

5.2 Koeffizientenzahl des adaptiven Filters W

Auch auf die minimal notwendige Anzahl L_{min} der Koeffizienten des Filters $W(z)$ hat die Periodizität des Störsignals vorteilhaften Einfluss. Für die Unterdrückung nichtperiodischer Signale müsste L_{min} so hoch gewählt werden, dass die Impulsantwort von $W(z)$ ausreichend lang wird um die Impulsantwort des Filters $P(z)S^{-1}(z)$ für den relevanten Frequenzbereich nachzubilden. Die zeitdiskrete Impulsantwort des nichtrekursiven Filters $W(z)$ entspricht hierbei genau seiner Koeffizientenfolge w_i . Bei der Anwendung an der Motoraufhängung stellte sich heraus, dass erst für etwa $L \geq 300$ gute Ergebnisse der Schwingungsunterdrückung von nichtperiodischen Signalen hätten erreicht werden können.

Bei der hier vorliegenden periodischen Anregung hingegen ist eine effektive Schwingungsunterdrückung bereits sicher möglich, wenn die zeitliche Länge der Impulsantwort von $W(z)$ mindestens genauso groß ist, wie die Grundperiodendauer T_{Grund} des Referenzsignals $x(n)$. L muss also der Forderung

$$L \geq T_{Grund} f_A \quad (21)$$

genügen. Für die hier verwendete Abtastrate $f_A = 1500$ Hz und bei Annahme einer Grundfrequenz der Störschwingungen von 30 Hz ergibt sich eine minimale Koeffizientenzahl $L_{min} = 50$. In Bild 11 ist zu sehen, dass die im Experiment am Prüfstand erreichte Schwingungsunterdrückung bei diesem Grenzwert von einem mäßigen Grad zu dem bestmöglichen übergeht. Der theoretischen

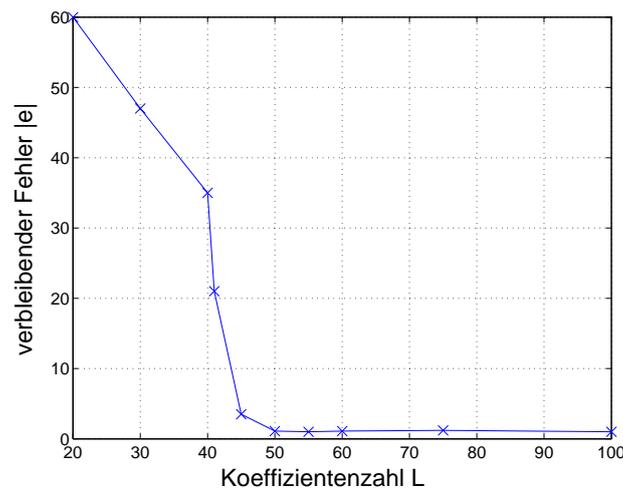


Bild 11: Restschwingung in %, in Abhängigkeit von der Koeffizientenzahl L des Filters $W(z)$

sche Hintergrund dieser Verhältnisse kann wiederum, zumindest für Periodendauern T_{Grund} , die ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit T_A betragen, durch einfache prinzipielle Überlegungen anschaulich gemacht werden.

Ausgangspunkt ist, wie bereits im vorhergehenden Abschnitt, dass für eine effektive Schwingungsunterdrückung die Gleichung (13) erfüllt sein muss. Aus dieser folgt

$$W(z)X(z) = P(z)S^{-1}(z)X(z) . \quad (22)$$

Überträgt man dies als Forderung unter Berücksichtigung der vorliegenden Gegebenheiten in

den Zeitbereich, so ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{L-1} w_i x(n-i) \stackrel{!}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i x(n-i). \quad (23)$$

Auf der linken Seite von (23) steht die diskrete Faltung des Referenzsignals $x(n)$ mit dem nichtrekursiven Filter $W(z)$. Die rechte Seite gibt die Faltung von $x(n)$ mit einem ebenfalls nichtrekursiven Filter $F(z)$ an, das beliebig viele Koeffizienten f_i besitzt und ein mathematisches Modell der Prüfstandstrecke $P(z)S^{-1}(z)$ darstellt. Es gelte also $F(z) = P(z)S^{-1}(z)$. Durch Zerlegung in Teilsummen kann die rechte Seite überführt werden in die Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{N-1} f_{kN+j} x(n - kN - j). \quad (24)$$

Ist $x(n)$ ein N -periodisches Signal, so gilt

$$x(n - kN - j) = x(n - j), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (25)$$

und (24) kann nach Vertauschen der beiden Summenzeichen dargestellt werden als

$$\sum_{j=0}^{N-1} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{kN+j} \right] x(n - j). \quad (26)$$

Die innere Summe liefert die N Koeffizienten eines Filters \tilde{F} :

$$\tilde{f}_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{kN+j} \quad (27)$$

Hiermit kann (26) umgeschrieben werden zu

$$\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}_j x(n - j). \quad (28)$$

Es liegt also eine Faltung des Signals $x(n)$ mit dem Filter $\tilde{F}(z)$ vor. Die Wirkung des auf der rechten Seite von (23) eingesetzten Filters $F(z)$ mit unendlich vielen Koeffizienten entspricht somit - bei periodischem Anregungssignal - der Wirkung eben dieses Filters $\tilde{F}(z)$ mit N Koeffizienten. Dies hat entscheidende Bedeutung für die Erfüllbarkeit von (23). Ist nämlich die Anzahl L der Koeffizienten des adaptiven Filters $W(z)$ größer oder gleich dem Wert von N , so kann $\tilde{F}(z)$ durch $W(z)$ nachgebildet werden. Weiterhin kann dann auch die Wirkung des Filters $F(z) = P(z)S^{-1}(z)$ nachgebildet werden und die Erfüllung von (23) ist möglich. Durch den FxLMS-Algorithmus wird demzufolge gemäß Abschnitt 3.1 eine Optimallösung für $W(z)$ gefunden werden, die zu einer Auslöschung des Fehlersignals $e(n)$ führt.

6 Messergebnisse und Analyse

6.1 Ergebnisse der Schwingungsdämpfung

Ein typisches Ergebnis der mit der Realzeitanwendung am Prüfstand erreichten Vibrationsdämpfung ist in Bild 12 dargestellt. Die hier vorliegende Gesamtdämpfung beträgt etwa 39 dB. Dabei

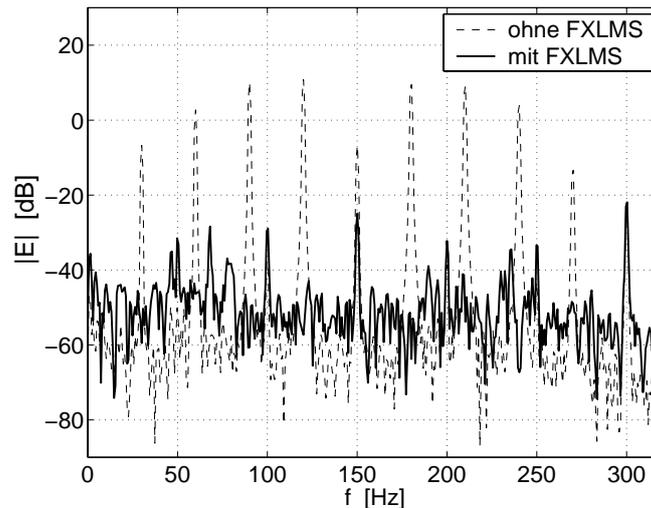


Bild 12: Erreichte Dämpfung im Frequenzbereich

ist natürlich zu beachten, dass dieses Ergebnis unter Laborbedingungen erhalten wurde. Insbesondere wurde für die gezeigte Messung der in Abschnitt 3.2 eingeführte Leckfaktor ν zu Eins gesetzt, was bei einem länger dauernden Einsatz im Fahrzeug voraussichtlich nicht ohne weiteres möglich wäre.

Bild 12 zeigt, dass sich eine unterschiedlich starke Unterdrückung der Vibrationen für die verschiedenen angeregten Frequenzen, also 30, 60, ..., 300 Hz, eingestellt hat. Bei $f = 120$ Hz liegt beispielsweise eine Dämpfung von ca. 60 dB vor, wohingegen bei $f = 300$ Hz als Extremfall überhaupt keine Minderung erkennbar ist.

Ein Anhaltspunkt zur Erklärung dieser Unterschiede kann mithilfe der in Bild 13 gezeigten Grafik gefunden werden, die das zeitliche Verhalten der Schwingungsunterdrückung nach dem Einschalten des FxLMS-Algorithmus wiedergibt. Es ist dort zu sehen, dass das Fehlersignal $e(n)$ für die verschiedenen angeregten Frequenzen unterschiedlich schnell konvergiert. Unabhängig davon würde bei idealen Verhältnissen im stationären Zustand, also nach dem Abklingen der Einschwingvorgänge, der Fehler $e(n)$ für alle Frequenzen einen Wert von nahezu gleich Null annehmen. Ein solcher stationärer Zustand kann sich aber beim vorliegenden realen System schon aufgrund von Zeitvarianzen der Strecken im Prüfstand nicht einstellen. Es kommt zu einer fortlaufenden Auslenkung des Signals $e(n)$, die je nach Konvergenzgeschwindigkeit des Algorithmus für die jeweils betrachteten Frequenzen unterschiedlich effektiv kompensiert wird. Die mathematische Beschreibung des Abklingverhaltens des FxLMS-Algorithmus ist Inhalt der nachfolgenden Abschnitte.

6.2 Hintergründe zur mathematischen Analyse

In diesem Abschnitt werden kurz einige Grundlagen zur nachfolgenden Konvergenzanalyse des FxLMS-Algorithmus zusammengestellt, wie sie ähnlicher Form auch z.B. in [1, 9, 10] zu finden sind.

Für eine mathematische Analyse des Konvergenzverhaltens ist eine nähere Betrachtung des

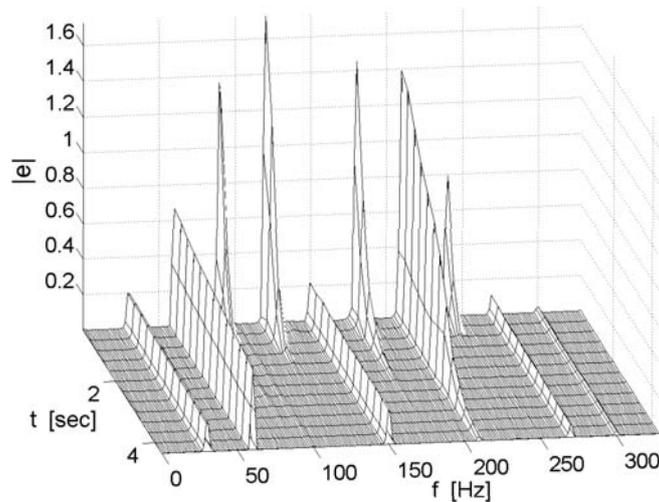


Bild 13: Unterdrückung der angeregten Frequenzen

Fehlersignals $e(n)$ notwendig, das sich über die Formel

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}_f(n) \quad (29)$$

berechnet. Dieser Zusammenhang vereinfacht sich, wenn anstelle der Filterkoeffizienten $\mathbf{w}(n)$ ihre Abweichung vom optimalen Wert \mathbf{w}_{opt} , also

$$\mathbf{u}(n) = \mathbf{w}(n) - \mathbf{w}_{opt} \quad (30)$$

betrachtet wird. Es gilt dann

$$e(n) = d(n) - (\mathbf{u}^T(n) + \mathbf{w}_{opt}^T)\mathbf{x}_f(n) . \quad (31)$$

Unter der Annahme, dass das Störsignal $d(n)$ durch die Wirkung des optimalen Filters \mathbf{w}_{opt} vollständig kompensiert wird, ergibt sich hieraus

$$e(n) = -\mathbf{u}^T(n)\mathbf{x}_f(n) . \quad (32)$$

Das Zeitverhalten des Fehlersignals $e(n)$ ist also wesentlich durch das Konvergenzverhalten der Filterabweichung $\mathbf{u}(n)$ bestimmt. Dieses kann im zeitlichen Mittel, unter Annahme langsamer Konvergenz, in guter Näherung durch die Differenzgleichung

$$\langle \mathbf{u}(n+1) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}) \langle \mathbf{u}(n) \rangle \quad (33)$$

beschrieben werden [10]. Dabei bezeichnen die spitzen Klammern $\langle \rangle$ die zeitliche Mittelwertbildung, und \mathbf{R} ist die Autokorrelationsmatrix des Signals $\mathbf{x}_f(n)$. Sie kann über

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}_f(n)\mathbf{x}_f^T(n)\} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_f(k)\mathbf{x}_f^T(k) \quad (34)$$

berechnet werden, sofern stationäre Anregung vorliegt. Der Vektor $\mathbf{x}_f(n)$ ist entsprechend (4) definiert. Der Anfangswert von $\mathbf{u}(n)$ ist

$$\mathbf{u}(0) = -\mathbf{w}_{opt} , \quad (35)$$

wobei das optimale Filter \mathbf{w}_{opt} aus

$$\mathbf{R}\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{p} \quad (36)$$

bestimmt werden kann [9]. Der Vektor \mathbf{p} ist der Kreuzkorrelationsvektor

$$\mathbf{p} = E\{d(n)\mathbf{x}_f(n)\} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(k)\mathbf{x}_f(k) . \quad (37)$$

Für eine anschauliche Analyse ist das System (33) auf Diagonalform zu transformieren mit

$$\mathbf{z}(n) = \mathbf{V}^T \mathbf{u}(n) . \quad (38)$$

Dabei kann angenommen werden

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I} , \quad (39)$$

da \mathbf{R} symmetrisch ist. Es ergibt sich das transformierte System

$$\langle \mathbf{z}(n+1) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}) \langle \mathbf{z}(n) \rangle . \quad (40)$$

Die Matrix \mathbf{V} enthält in Spalten die Eigenvektoren \mathbf{v}_i , $i = 1, \dots, L$ von $(\mathbf{I} - \mu \mathbf{R})$ bzw. \mathbf{R} . Es ist dann

$$\mathbf{\Lambda}_R = \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} \quad (41)$$

eine Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonalen die L Eigenwerte λ_{Ri} von \mathbf{R} stehen.

Aus der rekursiven Formel (40) kann direkt die Gleichung zur Berechnung von $\mathbf{z}(n)$ für den aktuellen Abtastschritt abgeleitet werden:

$$\langle \mathbf{z}(n) \rangle = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_R)^n \mathbf{z}(0) \quad (42)$$

Einsetzen des entkoppelten Gleichungssystems (42) in die Transformation (38) führt schließlich auf die Beschreibung des gemittelten Zeitverhaltens der Filterabweichung $\mathbf{u}(n)$:

$$\langle \mathbf{u}(n) \rangle = \mathbf{V} (\mathbf{I} - \mu \mathbf{\Lambda}_R)^n \mathbf{z}(0) \quad (43)$$

Das Konvergenzverhalten der Filterabweichung ist in (43) durch die Eigenwertmatrix $\mathbf{\Lambda}_R$, die Modalmatrix \mathbf{V} und den Anfangszustand $\mathbf{z}(0)$ des diagonalisierten Systems festgelegt. Die Werte dieser Größen sollen im Folgenden bestimmt werden.

6.3 Filterkonvergenz für Anregung mit nur einer Frequenz

Die Ermittlung der Größen, die das Konvergenzverhalten bestimmen, wird sehr übersichtlich, wenn zunächst nur der Fall der harmonischen Anregung bei nur einer Frequenz ω betrachtet wird. Für das gefilterte Referenzsignal gelte daher

$$x_f(n) = \hat{x}_f \sin(\omega n T_A + \varphi_{x_f}) . \quad (44)$$

Der entsprechend (4) aufgestellte Vektor $\mathbf{x}_f(n)$ ist dann

$$\mathbf{x}_f(n) = \begin{bmatrix} \hat{x}_f \sin(\omega n T_A + \varphi_{x_f}) \\ \hat{x}_f \sin(\omega(n-1)T_A + \varphi_{x_f}) \\ \dots \\ \hat{x}_f \sin(\omega(n-L+1)T_A + \varphi_{x_f}) \end{bmatrix} . \quad (45)$$

Er kann für alle diskreten Zeitpunkte n durch eine Linearkombination zweier Vektoren dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f(n) = & \underbrace{\hat{x}_f \cos(\omega n T_A + \varphi_{x_f} - \varphi)}_{\tilde{\alpha}(n)} \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(\omega 0 T_A + \varphi_{x_f} + \varphi) \\ \sin(\omega(-1)T_A + \varphi_{x_f} + \varphi) \\ \dots \\ \sin(\omega(-L+1)T_A + \varphi_{x_f} + \varphi). \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{v}}_1} \\ & + \underbrace{\hat{x}_f \sin(\omega n T_A + \varphi_{x_f} - \varphi)}_{\tilde{\beta}(n)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\omega 0 T_A + \varphi_{x_f} + \varphi) \\ \cos(\omega(-1)T_A + \varphi_{x_f} + \varphi) \\ \dots \\ \cos(\omega(-L+1)T_A + \varphi_{x_f} + \varphi). \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{v}}_2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Durch Normierung der Vektoren $\tilde{\mathbf{v}}_1$ und $\tilde{\mathbf{v}}_2$ auf ihre Beträge

$$|\tilde{\mathbf{v}}_1| = \sqrt{\tilde{\mathbf{v}}_1^T \tilde{\mathbf{v}}_1}, \quad |\tilde{\mathbf{v}}_2| = \sqrt{\tilde{\mathbf{v}}_2^T \tilde{\mathbf{v}}_2} \quad (47)$$

ergibt sich aus (46)

$$\mathbf{x}_f(n) = \underbrace{|\tilde{\mathbf{v}}_1| \tilde{\alpha}(n)}_{\alpha(n)} \underbrace{\frac{\tilde{\mathbf{v}}_1}{|\tilde{\mathbf{v}}_1|}}_{\mathbf{v}_1} + \underbrace{|\tilde{\mathbf{v}}_2| \tilde{\beta}(n)}_{\beta(n)} \underbrace{\frac{\tilde{\mathbf{v}}_2}{|\tilde{\mathbf{v}}_2|}}_{\mathbf{v}_2}. \quad (48)$$

Der Winkel φ in (46) sei so, dass gilt $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = 0$. Es liege also Orthogonalität von \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 vor. Hierzu muss gelten

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{L-1} \sin(-\omega i T_A + \varphi_{x_f} + \varphi) \cos(-\omega i T_A + \varphi_{x_f} + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} \sin(2(-\omega i T_A + \varphi_{x_f} + \varphi)) = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Dies ist gegeben, wenn eine Nullstelle der in der zweiten Zeile von (49) aufsummierten Sinusfunktion bei $i = \frac{L-1}{2}$ liegt, also wenn gilt

$$2 \left(-\omega \frac{L-1}{2} T_A + \varphi_{x_f} + \varphi \right) = k\pi, \quad (50)$$

bzw.

$$\varphi_{x_f} + \varphi = \omega \frac{(L-1)}{2} T_A + \frac{k\pi}{2}, \quad (51)$$

wobei k eine ganze Zahl ist. Eine Ausnahme liegt vor, wenn die Zeitdauer LT_A (Anzahl L der Elemente der Vektoren \mathbf{v}_1 bzw. \mathbf{v}_2 multipliziert mit der Abtastperiode T_A) einem ganzzahligen Vielfachen der halben Signalperiode $\frac{\pi}{\omega}$ entspricht. In diesem Fall ist (49) immer erfüllt und beliebige Winkel φ sind möglich.

Unter der Annahme, dass die Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 Eigenvektoren der Matrix \mathbf{R} sind, kann die Modalmatrix \mathbf{V} aufgestellt werden:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \star] \quad (52)$$

Hierbei sei \star beliebig, jedoch so, dass \mathbf{V} quadratisch und orthogonal wird. Letzteres ist zulässig, da \mathbf{R} symmetrisch ist [21]. Einsetzen von (34) in (41) führt auf

$$\mathbf{\Lambda}_R = \mathbf{V}^T \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_f(k) \mathbf{x}_f^T(k) \mathbf{V} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{V}^T \mathbf{x}_f(k) \mathbf{x}_f^T(k) \mathbf{V}. \quad (53)$$

Hierin ist, mit (52) und (48)

$$\mathbf{V}^T \mathbf{x}_f(k) = (\mathbf{x}_f^T(k) \mathbf{V})^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \star^T \end{bmatrix} (\alpha(k) \mathbf{v}_1 + \beta(k) \mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} \alpha(k) \\ \beta(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Das einfache Ergebnis in (54) ergibt sich aufgrund der Orthogonalität von \mathbf{V} . Man erhält somit aus (53)

$$\mathbf{\Lambda}_R = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} \alpha^2(k) & \alpha(k)\beta(k) & \dots & 0 \\ \alpha(k)\beta(k) & \beta^2(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Da die gemischten Ausdrücke in der Matrix auch bei Summenbildung bis zu unendlich hohem K endlich bleiben, ergibt sich aufgrund der Division durch K

$$\mathbf{\Lambda}_R = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \begin{bmatrix} \alpha^2(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta^2(k) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{R_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{R_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Aus (56) können direkt Gleichungen zu Bestimmung der Eigenwerte λ_{R_1} und λ_{R_2} abgelesen werden. Einsetzen der in (48) festgelegten Konstanten $\alpha(n)$ und $\beta(n)$ führt auf

$$\begin{aligned} \lambda_{R_1} &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |\tilde{\mathbf{v}}_1|^2 \hat{x}_f^2 \cos^2(\omega k T_A + \varphi_{x_f} - \varphi) \\ &= \hat{x}_f^2 |\tilde{\mathbf{v}}_1|^2 \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega k T_A + 2\varphi_{x_f} - 2\varphi) \right), \end{aligned} \quad (57)$$

also

$$\lambda_{R_1} = \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}_1|^2 \hat{x}_f^2 \quad (58)$$

und entsprechend

$$\lambda_{R_2} = \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}_2|^2 \hat{x}_f^2. \quad (59)$$

Die einzige noch unbekannte Größe in (43) ist nun der Anfangszustand $\mathbf{z}(0)$ des diagonalisierten Systems. Er kann mit (35) und (38) über die Anfangsbedingung (36) der Filterabweichung $\mathbf{u}(n)$ ermittelt werden:

$$\mathbf{R} \mathbf{V} \mathbf{z}(0) = \mathbf{R} \mathbf{u}(0) = -\mathbf{R} \mathbf{w}_{opt} = -\mathbf{p}. \quad (60)$$

Wird diese Gleichung von links mit \mathbf{V}^T multipliziert, so ergibt sich

$$\mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} \mathbf{z}(0) = \mathbf{\Lambda}_R \mathbf{z}(0) = -\mathbf{V}^T \mathbf{p} . \quad (61)$$

Für den Kreuzkorrelationsvektor \mathbf{p} kann mit (37) und (48) geschrieben werden

$$\mathbf{p} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(k) \mathbf{x}_f(k) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(k) (\alpha(k) \mathbf{v}_1 + \beta(k) \mathbf{v}_2) . \quad (62)$$

Hierin sei

$$d(k) = \hat{d} \sin(\omega k T_A + \varphi_d) . \quad (63)$$

Durch Einsetzen von (62) mit (63) in (61) berechnet sich, wiederum aufgrund der Orthogonalität der Vektoren $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_L$ sowie der Normierung von \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 , der Anfangswert der ersten Zustandsvariablen zu

$$\begin{aligned} z_1(0) &= \frac{-1}{\lambda_{R_1}} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d(k) \alpha(k) \\ &= \frac{-1}{\lambda_{R_1}} \hat{d} \hat{x}_f | \tilde{\mathbf{v}}_1 | \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sin(\omega k T_A + \varphi_d) \cos(\omega k T_A + \varphi_{x_f} - \varphi) \\ &= \frac{-1}{\lambda_{R_1}} \hat{d} \hat{x}_f | \tilde{\mathbf{v}}_1 | \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{2} \sin(2\omega k T_A + \varphi_d + \varphi_{x_f} - \varphi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin(\varphi_{x_f} - \varphi - \varphi_d) \right) \\ &= \frac{-1}{2\lambda_{R_1}} \hat{d} \hat{x}_f | \tilde{\mathbf{v}}_1 | \sin(-\varphi_{x_f} + \varphi + \varphi_d) . \end{aligned} \quad (64)$$

Der Anfangswert der zweiten Zustandsvariablen ist entsprechend

$$z_2(0) = \frac{-1}{2\lambda_{R_2}} \hat{d} \hat{x}_f | \tilde{\mathbf{v}}_2 | \cos(-\varphi_{x_f} + \varphi + \varphi_d) . \quad (65)$$

Mit (58) und (59) wird daraus

$$z_1(0) = \frac{-\hat{d}}{|\tilde{\mathbf{v}}_1| \hat{x}_f} \sin(-\varphi_{x_f} + \varphi + \varphi_d) \quad (66)$$

sowie

$$z_2(0) = \frac{-\hat{d}}{|\tilde{\mathbf{v}}_2| \hat{x}_f} \cos(-\varphi_{x_f} + \varphi + \varphi_d) . \quad (67)$$

Die Anfangswerte aller weiteren Zustandsvariablen $z_3(0) \dots z_L(0)$ sind nicht definiert, da für die zugehörigen Eigenwerte gilt $\lambda_{R_i} = 0$. Allerdings sind die betroffenen Zustandsvariablen ohne Einfluss auf das Fehlersignal, wie sich in Abschnitt (6.5) zeigen wird.

6.4 Filterkonvergenz für Anregung bei mehreren Frequenzen

Es liege nun eine Anregung mit nicht nur einer, sondern insgesamt M verschiedenen Frequenzen vor

$$x_f(n) = \sum_{m=1}^M x_{f_m}(n) = \sum_{m=1}^M \hat{x}_{f_m} \sin(m\omega n T_A + \varphi_{x_{f_m}}) . \quad (68)$$

Die maximal mögliche Anzahl M von überlagerten Schwingungen liegt aufgrund des Shannon-Theorems und der Anforderung an die minimale Länge des Filters W gemäß (21) bei $\frac{L}{2} - 1$ (bzw. $\frac{L-1}{2}$ für ungerade L).

Die Autokorrelationsmatrix \mathbf{R} ergibt sich nun gemäß (34) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E \left\{ \sum_{m=1}^M \mathbf{x}_{fm}(n) \sum_{m=1}^M \mathbf{x}_{fm}^T(n) \right\} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{m=1}^M \mathbf{x}_{fm}(k) \sum_{m=1}^M \mathbf{x}_{fm}^T(k) \right) \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\mathbf{x}_{f1}(k) \mathbf{x}_{f1}^T(k) + \mathbf{x}_{f2}(k) \mathbf{x}_{f2}^T(k) + \dots + \mathbf{x}_{fM}(k) \mathbf{x}_{fM}^T(k) \\ &\quad + \mathbf{x}_{f1}(k) \mathbf{x}_{f2}^T(k) + \mathbf{x}_{f1}(k) \mathbf{x}_{f3}^T(k) + \dots) . \end{aligned} \quad (69)$$

Da die gemischten Terme, die in der letzten Zeile von (69) stehen, auch für eine Summenbildung bis zu unendlich hohen k endlich bleiben, verschwinden Sie im Gesamtausdruck, wieder aufgrund der Division durch K . Demzufolge führt die Überlagerung der Anregungsfrequenzen zu einer Überlagerung der zugehörigen Autokorrelationsmatrizen

$$\mathbf{R} = \sum_{m=1}^M \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}_{fm}(k) \mathbf{x}_{fm}^T(k) . \quad (70)$$

Einsetzen in (41) liefert die Formel zur Berechnung der Eigenwertmatrix :

$$\mathbf{\Lambda}_R = \sum_{m=1}^M \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{V}^T \mathbf{x}_{fm}(k) \mathbf{x}_{fm}^T(k) \mathbf{V} \quad (71)$$

Um $\mathbf{\Lambda}_R$ zu bestimmen, können die Vektoren $\mathbf{x}_{fm}(n)$ ähnlich wie in (46) und (48) zerlegt werden in

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{fm}(n) &= \underbrace{\hat{x}_{fm} \cos(m\omega n T_A + \varphi_{x_{fm}} - \varphi_m)}_{\alpha_m(n)} \frac{1}{|\tilde{\mathbf{v}}_{2m-1}|} \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(m\omega 0 T_A + \varphi_{x_{fm}} + \varphi_m) \\ \sin(m\omega (-1) T_A + \varphi_{x_{fm}} + \varphi_m) \\ \vdots \\ \sin(m\omega (-L+1) T_A + \varphi_{x_{fm}} + \varphi_m) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{v}}_{2m-1}} \\ &\quad + \underbrace{\hat{x}_{fm} \sin(m\omega n T_A + \varphi_{x_{fm}} - \varphi_m)}_{\beta_m(n)} \frac{1}{|\tilde{\mathbf{v}}_{2m}|} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(m\omega 0 T_A + \varphi_{x_{fm}} + \varphi_m) \\ \cos(m\omega (-1) T_A + \varphi_{x_{fm}} + \varphi_m) \\ \vdots \\ \cos(m\omega (-L+1) T_A + \varphi_{x_{fm}} + \varphi_m) \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{v}}_{2m}} . \end{aligned} \quad (72)$$

Hierbei sind die Vektoren \mathbf{v}_{2m-1} sicher orthogonal zu den Vektoren \mathbf{v}_{2m} unter der Voraussetzung, dass

$$\varphi_{x_{fm}} + \varphi_m = m\omega \frac{(L-1)}{2} T_A + \frac{k\pi}{2} , \quad (73)$$

wobei k wieder eine ganze Zahl sei (vgl. (51)).

Die Anfangswerte der Zustandsvariablen des gemäß (38) diagonalisierten Systems werden hier

$$z_{2m-1}(0) = \frac{-\hat{d}_m}{\hat{x}_{fm}|\tilde{\mathbf{v}}_{2m-1}|} \sin(-\varphi_{x_{fm}} + \varphi_m + \varphi_{dm}) \quad (80)$$

$$z_{2m}(0) = \frac{-\hat{d}_m}{\hat{x}_{fm}|\tilde{\mathbf{v}}_{2m}|} \cos(-\varphi_{x_{fm}} + \varphi_m + \varphi_{dm}) . \quad (81)$$

Die Anfangswerte aller weiteren Zustandsvariablen sind unbestimmt und ohne Einfluss auf das Fehlersignal (s. nächster Abschnitt).

6.5 Konvergenz des Fehlersignals $e(n)$

Mit den somit erhaltenen Größen ist die Beschreibung des Zeitverhaltens des Fehlersignals $e(n)$ möglich. Hierzu ist zunächst (42) mit (38) in (32) einzusetzen:

$$\begin{aligned} \bar{e}(n) &= -(\mathbf{V}\langle \mathbf{z}(n) \rangle)^T \mathbf{x}_f(n) = -\mathbf{z}^T(0)(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_R)^n \mathbf{V}^T \mathbf{x}_f(n) \\ &= -\mathbf{z}^T(0)(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_R)^n \mathbf{V}^T \sum_{m=1}^M \mathbf{x}_{fm}(n) \end{aligned} \quad (82)$$

Der Überstrich der Größe $\bar{e}(n)$ kennzeichnet die zeitliche Mittelwertbildung der Konvergenz. Die Vektoren $\mathbf{x}_{fm}(n)$ in (82) können wieder wie in (72) zerlegt werden

$$\bar{e}(n) = -\mathbf{z}^T(0)(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_R)^n \mathbf{V}^T \sum_{m=1}^M (\alpha_m(n)\mathbf{v}_{2m-1} + \beta_m(n)\mathbf{v}_{2m}) . \quad (83)$$

Die Multiplikation mit der Modalmatrix \mathbf{V} liefert dann bei Orthogonalität der Vektoren \mathbf{v}_i ($i = 1, \dots, L$):

$$\begin{aligned} \bar{e}(n) &= -\mathbf{z}^T(0)(\mathbf{I} - \mu\mathbf{\Lambda}_R)^n \begin{bmatrix} \alpha_1(n) \\ \beta_1(n) \\ \vdots \\ \alpha_M(n) \\ \beta_M(n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{m=1}^M (1 - \mu\lambda_{R,2m-1})^n z_{2m-1}(0)\alpha_m(n) - \sum_{m=1}^M (1 - \mu\lambda_{R,2m})^n z_{2m}(0)\beta_m(n) . \end{aligned} \quad (84)$$

Aus (84) wird mit (80) und (81)

$$\begin{aligned} \bar{e}(n) &= \sum_{m=1}^M (1 - \mu\lambda_{R,2m-1})^n \frac{\hat{d}_m \sin(-\varphi_{x_{fm}} + \varphi_m + \varphi_{dm})}{\hat{x}_{fm}|\tilde{\mathbf{v}}_{2m-1}|} \alpha_m(n) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M (1 - \mu\lambda_{R,2m})^n \frac{\hat{d}_m \cos(-\varphi_{x_{fm}} + \varphi_m + \varphi_{dm})}{\hat{x}_{fm}|\tilde{\mathbf{v}}_{2m}|} \beta_m(n) . \end{aligned} \quad (85)$$

Werden weiterhin die Koeffizienten $\alpha_m(n)$ und $\beta_m(n)$ aus (72) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{e}(n) &= \sum_{m=1}^M (1 - \mu\lambda_{R,2m-1})^n \hat{d}_m \cos(m\omega n T_A + \varphi_{x_{fm}} - \varphi_m) \sin(-\varphi_{x_{fm}} + \varphi_m + \varphi_{dm}) \\ &\quad + \sum_{m=1}^M (1 - \mu\lambda_{R,2m})^n \hat{d}_m \sin(m\omega n T_A + \varphi_{x_{fm}} - \varphi_m) \cos(-\varphi_{x_{fm}} + \varphi_m + \varphi_{dm}) . \end{aligned} \quad (86)$$

Gleichung (86) kann deutlich vereinfacht werden unter der Annahme, dass die Eigenwerte $\lambda_{R,2m-1}$ und $\lambda_{R,2m}$ jeweils für gleiches m gleich groß sind, also

$$\lambda_{R,2m-1} = \lambda_{R,2m} =: \bar{\lambda}_{Rm} . \quad (87)$$

Diese Annahme wird im Allgemeinen auch in guter Näherung erfüllt sein. Insbesondere, wenn die Anforderungen für die Orthogonalität der gemäß (72) gegebenen Vektoren \mathbf{v}_i ($i = 1, \dots, 2M$) erfüllt sind, da in diesem Falle gilt $|\tilde{\mathbf{v}}_{2m-1}| = |\tilde{\mathbf{v}}_{2m}|$.

Die gemeinsamen Eigenwerte $\bar{\lambda}_{Rm}$ können unter Zuhilfenahme von (78), (79) und (72) als arithmetische Mittelwerte der ursprünglichen Eigenwertpaare ermittelt werden, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{Rm} &= \frac{\lambda_{R,2m-1} + \lambda_{R,2m}}{2} \\ &= \frac{\hat{x}_{fm}^2}{4} (|\tilde{\mathbf{v}}_{2m-1}|^2 + |\tilde{\mathbf{v}}_{2m}|^2) \\ &= \frac{\hat{x}_{fm}^2}{4} \left(\sum_{i=0}^{L-1} \sin^2(-m\omega i T_A + \varphi_{x_{fm}} + \varphi_m) + \sum_{i=0}^{L-1} \cos^2(-m\omega i T_A + \varphi_{x_{fm}} + \varphi_m) \right) \end{aligned} \quad (88)$$

und folglich ergibt sich

$$\bar{\lambda}_{Rm} = \frac{L}{4} \hat{x}_{fm}^2 . \quad (89)$$

Mit (89) wird aus (86) schließlich die gewünschte einfache Beschreibung der Konvergenz des Fehlersignals

$$\bar{e}(n) = \sum_{m=1}^M \hat{d}_m (1 - \mu\bar{\lambda}_{Rm})^n \sin(m\omega n T_A + \varphi_{dm}) . \quad (90)$$

Die Gleichung (90) ergibt sich mit einer Taylorreihenentwicklung von $e^{-\mu\bar{\lambda}_{Rm}}$ um $\mu\bar{\lambda}_{Rm} = 0$ aus der Gleichung

$$\bar{e}(n) = \sum_{m=1}^M \hat{d}_m e^{-\mu\bar{\lambda}_{Rm} n} \sin(m\omega n T_A + \varphi_{dm}) . \quad (91)$$

Für langsame Konvergenz und somit kleine Werte von $\mu\bar{\lambda}_{Rm}$ wird $\bar{e}(n)$ also in guter Näherung durch (91) beschrieben. Hierin sind

$$T_m = \frac{T_A}{\mu\bar{\lambda}_{Rm}} \quad (92)$$

Zeitkonstanten, die die Konvergenzgeschwindigkeit des Fehlersignals für die einzelnen Anregungsfrequenzen angeben. Sie können mit den Formeln (11) und (89) sowie unter Berücksichtigung des Zusammenhangs $P_{x_f,m} = \hat{x}_{fm}^2/2$ umgeschrieben werden zu

$$T_m = \frac{2T_A}{\alpha} \frac{P_{x_f}}{P_{x_f,m}} . \quad (93)$$

Dabei ist $P_{x_f,m}$ die Leistung des gefilterten Referenzsignals $x_f(n)$ für die m -te Frequenz und P_{x_f} nach wie vor die Gesamtleistung von $x_f(n)$. Je stärker also ein Signalanteil bei einer bestimmten Frequenz in $x_f(n)$ gewichtet ist, desto schneller wird das Fehlersignal $e(n)$ bei der jeweiligen Frequenz abklingen.

Es ist festzuhalten, dass die Beschreibung in Gleichung (90) exakt gültig ist für den Fall, dass die Zeitdauer LT_A (L : Anzahl der Koeffizienten des adaptiven Filters $W(z)$) einem ganzzahligen Vielfachen der Grundperiode $T_{Grund} = \frac{2\pi}{\omega}$ der Störanregung entspricht. Ist dies nicht der Fall, so bleibt die Beschreibung trotzdem in guter Näherung gültig, wenn die Grundperiode T_{Grund} klein ist verglichen mit der Zeitspanne LT_A .

Ein Sonderfall, der hier nicht näher behandelt wurde, ist das Vorliegen von gleich starken Signalamplituden \hat{x}_{fm} für verschiedene Frequenzen, also $\hat{x}_{fi} = \hat{x}_{fj}$ für $i \neq j$. In diesem Fall ergeben sich, falls LT_A/T_{Grund} ganzzahlig ist, entsprechend viele gleich große Eigenwerte von \mathbf{R} . Orthogonalität der zugehörigen Eigenvektoren ist dann nicht mehr zwingend erforderlich, und andere Formen als die mit (72) und (73) angenommenen sind möglich. Untersuchungen von Mess- und Simulationsdaten haben belegt, dass sich dann Linearkombinationen der zugehörigen Vektoren \mathbf{v}_m einstellen. Im Ergebnis bleibt die hier durchgeführte Konvergenzanalyse aber auch für diesen Fall richtig, da für symmetrische Matrizen die Annahme orthogonaler Eigenvektoren zwar bei gleich großen Eigenwerten nicht zwingend erforderlich, aber trotzdem zulässig ist [21].

6.6 Beschreibung im allgemeinen Fall

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Konvergenz der Filterabweichung $\mathbf{u}(n)$ und des Fehlersignals $e(n)$ für den Spezialfall geeigneter Verhältnisse des Zeitintervalls LT_A zur Grundperiode T_B der Störanregung untersucht. Hierbei wurden einfache und anschauliche Beschreibungen gefunden. Mit einer ähnlichen Herleitung kann das Konvergenzverhalten auch für den allgemeinen Fall bestimmt werden, wobei sich der Aufwand allerdings deutlich erhöht. Die Vorgehensweise hierzu wird im Folgenden zumindest in den Grundzügen beschrieben.

Es kann gezeigt werden, dass die relevanten Eigenvektoren der Autokorrelationsmatrix \mathbf{R} sich allgemein als Linearkombinationen der gemäß (72) und (73) definierten Vektoren $\tilde{\mathbf{v}}_{2m-1}$ und $\tilde{\mathbf{v}}_{2m}$ ergeben. In Matrixschreibweise kann dies ausgedrückt werden durch

$$\mathbf{V}_a = [\tilde{\mathbf{v}}_1 \ \tilde{\mathbf{v}}_3 \ \dots \ \tilde{\mathbf{v}}_{2M-1}] \mathbf{C}_a \quad \text{und} \quad \mathbf{V}_b = [\tilde{\mathbf{v}}_2 \ \tilde{\mathbf{v}}_4 \ \dots \ \tilde{\mathbf{v}}_{2M}] \mathbf{C}_b , \quad (94)$$

wobei die Koeffizientenmatrizen \mathbf{C}_a und \mathbf{C}_b quadratisch sind. Es ergeben sich $2M$ Eigenvektoren. Die restlichen $L - 2M$ Eigenvektoren sind Eigenwerten vom Wert Null zugeordnet. Sie müssen, ähnlich wie in (74), nicht näher bestimmt werden. Werden nun noch die Koeffizienten $\alpha_m(n)$ und $\beta_m(n)$ aus (72) in Vektoren zusammengefasst

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \begin{bmatrix} \alpha_1(n) \\ \vdots \\ \alpha_M(n) \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{\beta}(n) = \begin{bmatrix} \beta_1(n) \\ \vdots \\ \beta_M(n) \end{bmatrix} , \quad (95)$$

so kann das Anregungssignal beschrieben werden durch

$$\mathbf{x}_f(n) = \mathbf{V}_a \mathbf{C}_a^{-1} \boldsymbol{\alpha}(n) + \mathbf{V}_b \mathbf{C}_b^{-1} \boldsymbol{\beta}(n) . \quad (96)$$

Die Autokorrelationsmatrix \mathbf{R} wird nach (70) zu

$$\mathbf{R} = E \{ \mathbf{V}_a \mathbf{C}_a^{-1} \boldsymbol{\alpha}(n) \boldsymbol{\alpha}^T(n) (\mathbf{C}_a^{-1})^T \mathbf{V}_a^T + \mathbf{V}_b \mathbf{C}_b^{-1} \boldsymbol{\beta}(n) \boldsymbol{\beta}^T(n) (\mathbf{C}_b^{-1})^T \mathbf{V}_b^T \} \quad (97)$$

und die Eigenwertmatrix $\boldsymbol{\Lambda}_R$ ergibt sich als

$$\boldsymbol{\Lambda}_R = E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a^{-1} E \{ \boldsymbol{\alpha}(n) \boldsymbol{\alpha}^T(n) \} (\mathbf{C}_a^{-1})^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^{-1} E \{ \boldsymbol{\beta}(n) \boldsymbol{\beta}^T(n) \} (\mathbf{C}_b^{-1})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} . \quad (98)$$

Eine Beschreibung für den Anfangszustand $\mathbf{z}(0)$ kann auf ähnliche Weise wie im Abschnitt 6.3 ermittelt werden.

Die Bestimmung der Koeffizientenmatrizen \mathbf{C}_a und \mathbf{C}_b für das Aufstellen der orthogonalen Eigenvektoren in \mathbf{V}_a und \mathbf{V}_b ist nach Einschätzung des Autors nicht trivial durchführbar. Demzufolge ist die Ermittlung des exakten Konvergenzverhaltens für den allgemeinen Fall nicht ohne weiteres möglich. Es kann aber - zumindest in Annäherung - eine vollständig bestimmte Beschreibung ermittelt werden. Hierzu muss allerdings die exakt diagonale Form der Fehlerbeschreibung (82) aufgegeben werden. Für das resultierende, nahezu diagonale System können dann Abschätzungen von Eigenvektoren und Eigenwerten z. B. mithilfe des Rayleigh-Quotienten und des normierten Defekts [22, 23, 24] gefunden werden. Zahlenwerte für die verbleibenden Unsicherheiten der genäherten Darstellung werden so ebenfalls erhalten. Die genauere Untersuchung und Beschreibung dieser Zusammenhänge ist Inhalt der aktuellen Forschungsarbeit des Autors.

6.7 Simulationsergebnisse zur Konvergenzanalyse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Konvergenzanalyse mit Auswertungen von beispielhaften Simulationsdaten belegt. Um eine anschauliche Darstellung möglich zu machen, wird ein erweiterter Frequenzbereich der Anregung von 25 Hz bis ca. 410 Hz berücksichtigt. Damit die effektive Arbeitsweise des Algorithmus auch für die untere Frequenzgrenze sichergestellt bleibt, wird die Anzahl der Koeffizienten des Filters W entsprechend Abschnitt 5.2 auf $L = 60$ gesetzt. Die verwendete Abtastrate liegt bei $f_A = 1500$ Hz.

1. Fall : *Anregung mit einer Grundschwingung bei 25 Hz sowie vier zugehörigen Oberschwingungen.* Es ergeben sich genau 10 Eigenwerte ungleich Null, deren Beträge jeweils paarweise gemäß (89) proportional zu den quadrierten Amplituden des Referenzsignals sind. Der Zeitintervall $LT_A = 0.04$ entspricht hier genau einem ganzzahligen Vielfachen der Grundperiode T_{Grund} des Anregungssignals. Die den Eigenwerten ungleich Null zugeordneten Eigenvektoren sind daher exakt sinusförmig entsprechend (72) und (73).

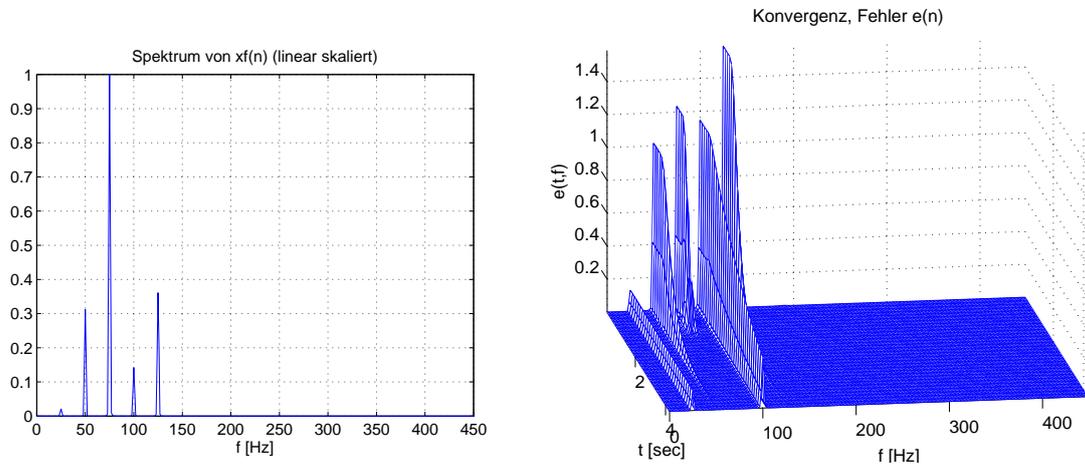


Bild 14: Anregungssignal $x_f(n)$ und resultierende Konvergenz des Fehlersignals $e(n)$ (Fall 1)

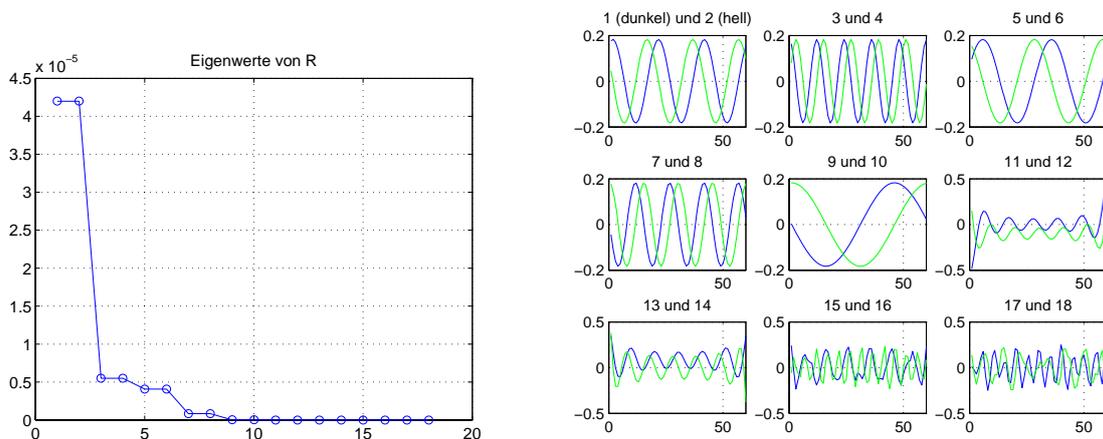


Bild 15: Die größten 18 Eigenwerte von R (geordnet nach absteigender Größe) und die zugehörigen Eigenvektoren (Fall 1)

2. Fall : Anregung mit einer Grundschwingung bei 81 Hz sowie vier zugehörigen Oberschwingungen. Die Zeitspanne LT_A ist hier zwar *kein* ganzzahliges Vielfaches der Grundperiode T_{Grund} , zumindest aber deutlich größer als diese. Dementprechend ergeben sich nach Abschnitt 6.4 annähernd sinusförmige und orthogonale Eigenvektoren für die Eigenwerte ungleich Null.

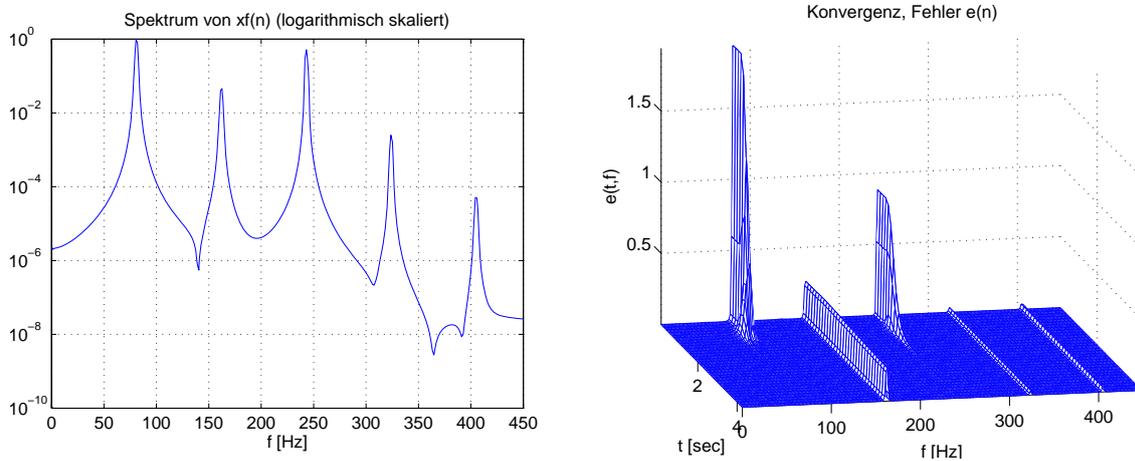


Bild 16: Anregungssignal $x_f(n)$ und resultierende Konvergenz des Fehlersignals $e(n)$ (Fall 2)

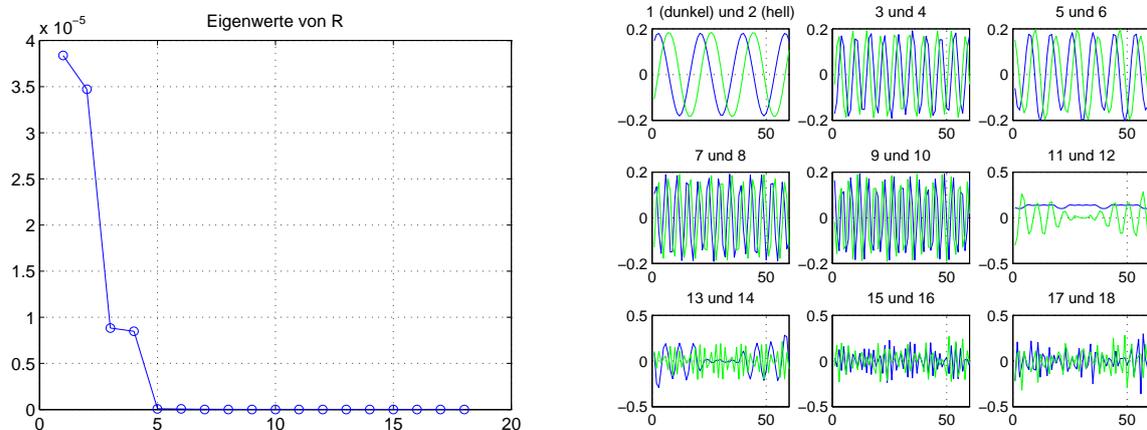


Bild 17: Die größten 18 Eigenwerte von R (geordnet nach absteigender Größe) und die zugehörigen Eigenvektoren (Fall 2)

3. Fall : Anregung mit einer Grundschwingung bei 31 Hz sowie vier zugehörigen Oberschwingungen. Der Zeitintervall LT_A ist hier kein ganzzahliges Vielfaches der Grundperiode T_{Grund} und auch nicht wesentlich größer als diese. Die sich ergebenden Eigenvektoren weichen entsprechend deutlich von einfachen Sinusformen ab.

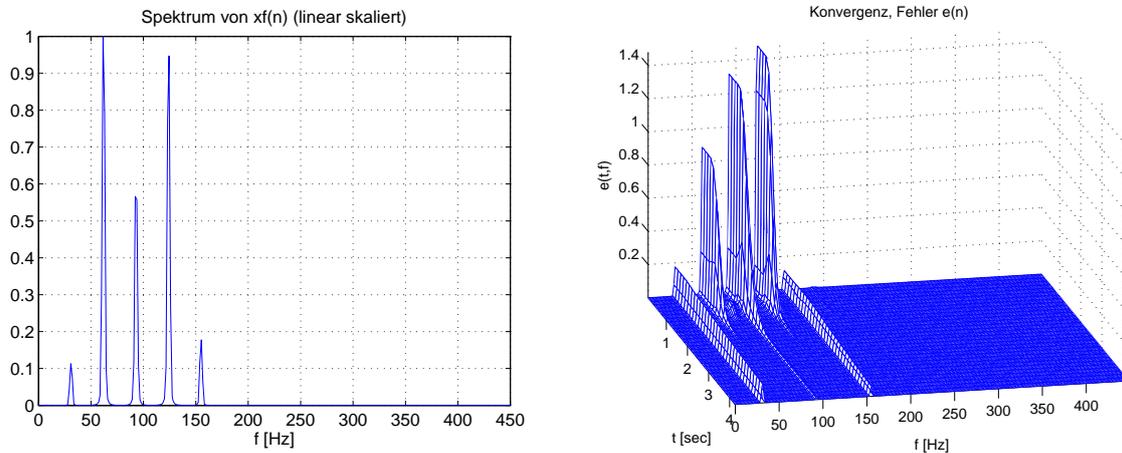


Bild 18: Anregungssignal $x_f(n)$ und resultierende Konvergenz des Fehlersignals $e(n)$ (Fall 3)

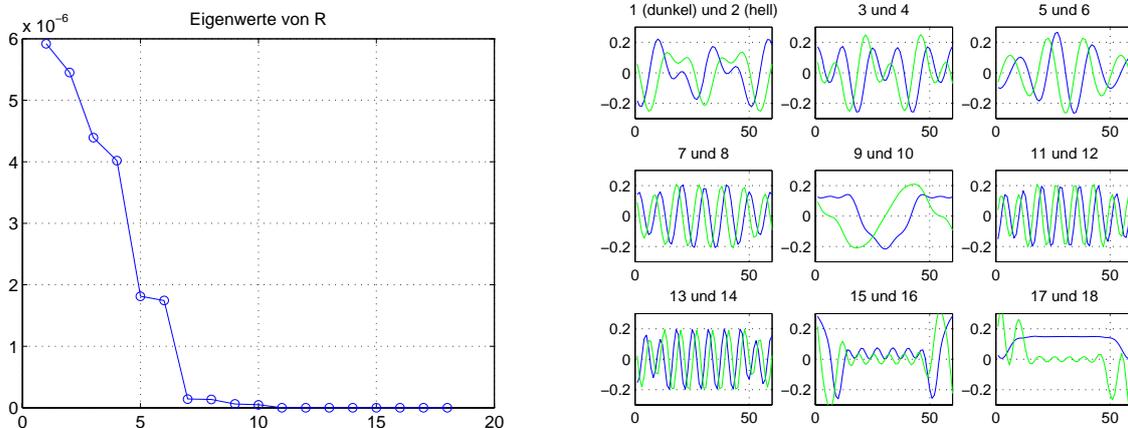


Bild 19: Die größten 18 Eigenwerte von R (geordnet nach absteigender Größe) und die zugehörigen Eigenvektoren (Fall 3)

4. Fall : Wie beim 1. Fall wird mit einer Grundschiwingung bei 25 Hz angeregt. Es werden diesmal allerdings 9 Oberschwingungen überlagert, von denen einmal zwei und einmal drei eine exakt gleiche Amplitude haben. Es stellt sich für die betreffenden Frequenzen die im Abschnitt 6.5 beschriebene Überlagerung der Eigenvektoren ein. Um die hier notwendige gezielte Vorgabe der Amplituden \hat{x}_{fm} möglich zu machen, wurde die sekundäre Strecke $S(z)$ konstant zu Eins gesetzt.

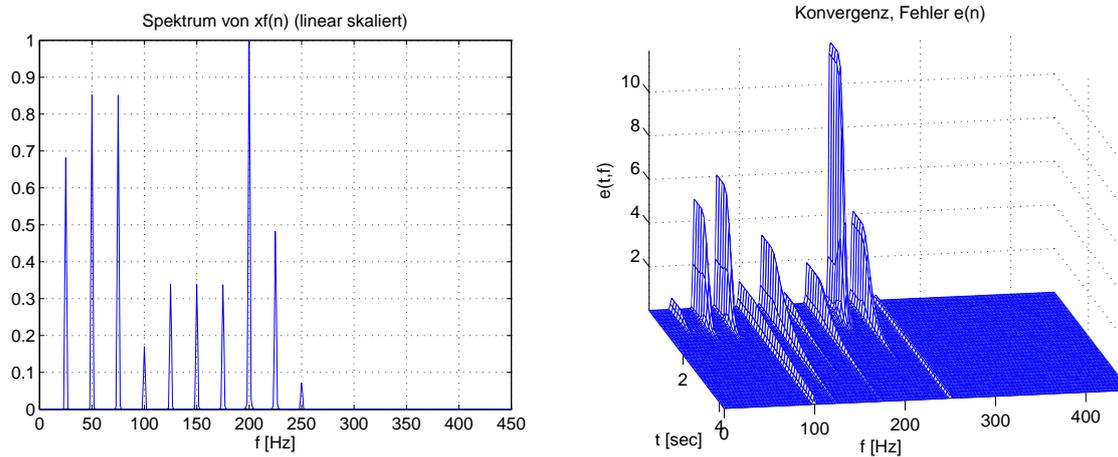


Bild 20: Anregungssignal $x_f(n)$ und resultierende Konvergenz des Fehlersignals $e(n)$ (Fall 4)

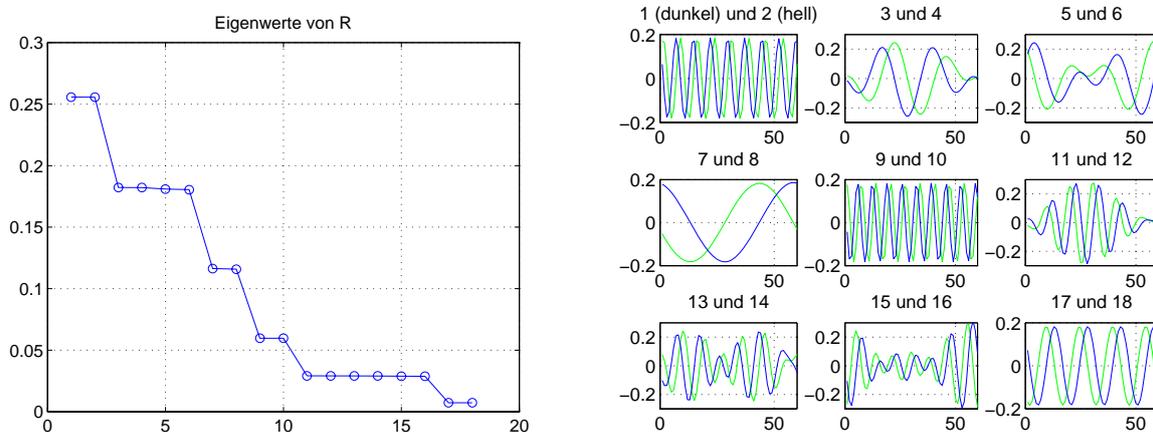


Bild 21: Die größten 18 Eigenwerte von R (geordnet nach absteigender Größe) und die zugehörigen Eigenvektoren (Fall 4)

7 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Umsetzung des FxLMS-Algorithmus zur effektiven Dämpfung von Kfz-Motorvibrationen an einem experimentellen Prüfstand beschrieben. Es wurden vorteilhafte, zum Teil unverzichtbare Ergänzungen des Algorithmus zusammengetragen und Hinweise zur Implementierung gegeben. Neben den notwendigen Modifikationen und Erweiterungen des Algorithmus selbst gehört hierzu eine effektive Methode zur Vermeidung von negativen Effekten durch Signalrückkopplungen im Versuchsaufbau sowie eine Anwendung der Oversampling-Technik. Letztere ermöglicht eine deutliche Verringerung der Anforderung an die Tiefpassfilter zur Signalaufbereitung im Hardwareaufbau.

Es wurde weiterhin gezeigt, dass durch die Periodizität der zu kompensierenden Motorschwingungen die Realisierung der Schwingungsdämpfung deutlich vereinfacht wird. Anders als bei der Unterdrückung von nicht-periodischen Signalen müssen keine strengen Totzeitanforderungen beachtet werden. Außerdem kann die Anzahl der Koeffizienten des adaptiven Filters $W(z)$ gering gehalten werden.

Mit Messergebnissen wurde die insgesamt hohe Wirksamkeit des FxLMS-Algorithmus belegt. Die dabei festgestellte Frequenzabhängigkeit der Performance wurde dokumentiert und eine detaillierte Analyse der theoretischen Hintergründe durchgeführt. Als Ergebnis wurde eine formelmäßige Beschreibung gefunden, die das zeitlich gemittelte Verhalten der Vibrationsdämpfung für verschiedene häufig auftretende Fälle vollständig erfasst.

Danksagung: Der Autor bedankt sich bei Herrn N. Nedeljković und Herrn Prof. Dr. B. Lohmann für die fruchtbaren Diskussionen, die zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen haben.

Literatur

- [1] S.M. Kuo and D.R. Morgan. *Active Noise Control Systems*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [2] B. Riley and M. Bodie. An adaptive strategy for vehicle vibration and noise cancellation. In *Proceedings of the IEEE National Aerospace and Electronics Conference NAECON*, volume 2, pages 836–843, May 1996.
- [3] Suematsu Y. Yang, J. and Z. Kang. Two-degree-of-freedom controller to reduce the vibration of vehicle engine-body system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 9(2):295–304, 2001.
- [4] F. Svaricek, C. Bohn, H.-J Karkosch, and V. Härtel. Automotive applications of active vibration control: A control engineering point of view. *at-Automatisierungstechnik*, 49(06):249–259, 2001.
- [5] P. Lueg. Process of silencing sound oscillations. *U.S. Patent 2,043,416*, June 9.
- [6] P.A. Nelson and S.J. Elliott. *Active Control of Sound*. Academic Press, London, 1994.
- [7] Elliott S.J. Fuller, C.R. and P.A. Nelson. *Active Control of Vibration*. Academic Press Limited, London, 1996.

-
- [8] C. H. Hansen and S. D. Snyder. *Active Control of Noise and Vibration*. E & FN Spon, London, 1997.
- [9] D.R. Morgan. An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 28:454–467, August.
- [10] B. Widrow and S. D. Stearns. *Adaptive Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1985.
- [11] J. Paschedag. *Implementierung einer Störgrößenaufschaltung zur aktiven Schwingungsdämpfung*. Diplomarbeit - Universität Bremen, Institut für Automatisierungstechnik, Bremen, 2003.
- [12] B. Widrow and M.E. Hoff. Adaptive switching circuits. In *1960 IRE WESCON Convention Record, New York IRE*, pages 96–104, 1960.
- [13] S. J. Elliott and T. J. Sutton. Feedforward and feedback methods for active control. In *Proceedings of the Institute of Acoustics*, volume 16, pages 255–276, 1994.
- [14] J. R. Glover. Adaptive noise canceling applied to sinusoidal interferences. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-25(6):484–491, Dec. 1977.
- [15] S. J. Elliott and P. Darlington. Adaptive cancellation of periodic, synchronously sampled interference. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(3):715–717, June 1985.
- [16] J. Paschedag and J. L. R. Schwarz. Application of feedforward structures for isolation of car engine vibration. In *The Thirteenth International Congress on Sound and Vibration*, Vienna, July 2006.
- [17] S. J. Elliott and P. A. Nelson. Active noise control. *IEEE Signal Processing Magazin*.
- [18] V. H. Nascimento and A. H. Sayed. An unbiased and cost-effective leaky-lms filter. In *Proceedings of the Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pages 1078–1082, October 1996.
- [19] V. H. Nascimento and A. H. Sayed. Unbiased and stable leakage-based adaptive filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(12):3261–3276, 1999.
- [20] K. D. Kammeyer and K. Kroschel. *Digitale Signalverarbeitung*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
- [21] O. Föllinger. *Regelungstechnik*. Hüthig, Heidelberg, 1994.
- [22] R. Zurmühl and S. Falk. *Matrizen und ihre Anwendungen, Teil 2*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [23] B. N. Parlett. *The Symmetric Eigenvalue Problem*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
- [24] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.