

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Lehrstuhl für Regelungstechnik

**Trajektorienfolge­regelung einer Klasse von  
verteilt-parametrischen Systemen mit verteiltem  
Stelleingriff und mitgeführter Sensorik**

Franz Josef Winkler

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der  
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Doktor-Ingenieurs  
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dirk Weuster-Botz  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann  
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski,  
Technische Universität Darmstadt

Die Dissertation wurde am 11.11.2010 bei der Technischen Universität München  
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 23.02.2011 angenommen.



*Für meine Eltern.*



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während der Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Regelungstechnik der Technischen Universität München. In diesem Zusammenhang danke ich der Studienstiftung des deutschen Volkes e. V. herzlich für die finanzielle Unterstützung, die die Durchführung der Arbeit ermöglichte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann für die ausgezeichneten Anregungen und die engagierte Unterstützung bei der Durchführung meiner Arbeit. Ihm gilt auch mein aufrichtiger Dank für die mir eingeräumten fachlichen Freiräume sowie der stetigen Förderung meiner Arbeit.

Sehr gefreut habe ich mich über die Übernahme des Korreferats durch Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski. Ihm danke ich für sein Interesse an meinem Thema sowie seine konstruktiven Hinweise.

Bei den Kolleginnen und Kollegen am Institut möchte ich mich ganz herzlich für ihre stets hilfsbereite Art und für das hervorragende Arbeitsklima bedanken. Besonders danke ich Herrn Dr.-Ing. Michael Buhl und Herrn Dr. rer. nat. Klaus-Dieter Reinsch für die wertvollen Diskussionen und Anregungen. Darüber hinaus möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ing. Stephan Studener, Herrn Dipl.-Ing. Klaus Diepold und Herrn Dipl.-Ing. Peter Philipp für die anregenden und kritischen Diskussionen und bei Herrn Huber für die Unterstützung bei meinem experimentellen Aufbau bedanken.

Schließlich danke ich meinen Eltern für ihre stetige Unterstützung und Geduld.

München, im März 2011

Franz Winkler



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
1.1. Stand der Technik . . . . .	3
1.2. Ziel . . . . .	7
1.3. Aufbau der Arbeit . . . . .	9
<b>2. Transportprozesse</b>	<b>11</b>
2.1. Anwendungsbeispiele . . . . .	11
2.1.1. Durchlaufofen . . . . .	12
2.1.2. Trocknungsprozess . . . . .	26
2.1.3. Rohrreaktor . . . . .	27
2.2. Allgemeine Systembeschreibung . . . . .	28
2.3. Schlussfolgerung . . . . .	30
<b>3. Analyse der Transportprozesse</b>	<b>31</b>
3.1. Klassifikation . . . . .	31
3.2. Eigenschaften des Differentialoperators . . . . .	32
3.3. Methode der Charakteristiken . . . . .	37
3.4. Resultierende Systembeschreibung . . . . .	39
3.5. Parameteridentifikation entlang der charakteristischen Kurve . . . . .	43
3.6. Schlussfolgerung . . . . .	47
<b>4. Flachheitsbasierter Steuerungsentwurf</b>	<b>49</b>
4.1. Flachheit . . . . .	50
4.2. Flachheitsbasierte Analyse der Transportprozesse . . . . .	54
4.3. Steuerungsentwurf für Transportprozesse . . . . .	56
4.4. Realisierung des Steuerungsentwurfs . . . . .	57
4.4.1. Aktoren mit kontinuierlicher Ortsfunktion . . . . .	57
4.4.2. Aktoren mit örtlich beschränkter Wirkung . . . . .	59
4.5. Flachheitsbasierter Steuerungsentwurf am Beispiel des Trocknungsprozesses	60
4.5.1. Arbeitspunktwechsel des Feuchtegehalts am Prozessausgang . . . . .	62
4.5.2. Zeitvariante Transportgeschwindigkeit . . . . .	64

4.6.	Flachheitsbasierte Analyse als Design-Werkzeug . . . . .	66
4.6.1.	Bestimmung zulässiger Referenzprofile . . . . .	67
4.6.2.	Ableitung von Konstruktionshinweisen für den Prozess . . . . .	67
4.6.3.	Strukturierter Steuerungsentwurf für einen Rohrreaktor . . . . .	72
4.6.4.	Strukturierter Steuerungsentwurf für einen Trocknungsprozess . . . . .	79
4.7.	Schlussfolgerung . . . . .	83
<b>5.</b>	<b>Beobachterentwurf</b>	<b>85</b>
5.1.	Zustandsschätzung verteilt-parametrischer Systeme . . . . .	85
5.2.	Zustandsschätzung nichtlinearer und zeitvarianter Systeme . . . . .	89
5.2.1.	Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme . . . . .	89
5.2.2.	Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme . . . . .	96
5.3.	Beobachterentwurf für Transportprozesse . . . . .	101
5.3.1.	Zustandsschätzung entlang der charakteristischen Kurve . . . . .	101
5.3.2.	Entwurf für gemischt konzentriert-, verteilt-parametrische Systeme . . . . .	105
5.3.3.	Ausblick: Schätzung der verteilten Zustandsvektorfunktion . . . . .	112
5.4.	Schlussfolgerungen . . . . .	116
<b>6.</b>	<b>Regelungsentwurf</b>	<b>117</b>
6.1.	Problemstellung . . . . .	117
6.2.	Zwei-Freiheitsgrade-Struktur . . . . .	119
6.3.	Trajektorienfolgeregulation . . . . .	119
6.4.	Transportprozesse mit örtlich beschränkter Wirkung der Aktorik . . . . .	121
6.4.1.	Sättigende strukturvariable Regelung . . . . .	123
6.4.2.	Regelungsstrategie . . . . .	125
6.4.3.	Anwendung auf einen Durchlaufofen . . . . .	127
6.5.	Transportprozesse mit kontinuierlicher Ortsfunktion der Aktorik . . . . .	130
6.5.1.	Periodischer Mehrgrößenregler . . . . .	131
6.5.2.	Entkoppelnder Regelungsentwurf . . . . .	136
6.6.	Schlussfolgerungen . . . . .	151
<b>7.</b>	<b>Zusammenfassung und abschließende Bewertung</b>	<b>153</b>
<b>A.</b>	<b>Parameterwerte der Anwendungsbeispiele</b>	<b>157</b>
A.1.	Kenndaten des Durchlaufofens . . . . .	157
A.2.	Kenndaten des Trocknungsprozesses . . . . .	158
A.3.	Kenndaten des Rohrreaktors . . . . .	159
<b>B.</b>	<b>Approximation durch modale Analyse</b>	<b>161</b>

---

<b>C. Definitionen</b>	<b>165</b>
C.1. Vektorieller relativer Grad . . . . .	165
C.2. Diffeomorphismus . . . . .	166
C.3. Beobachtbarkeitsmatrix . . . . .	166
C.4. Steuerbarkeitsmatrix . . . . .	168
<b>Bibliography</b>	<b>169</b>

# 1. Einleitung und Motivation

Die rasante Entwicklung moderner Kommunikationsmittel und deren Anwendung für die Sensortechnik bietet ein großes Potential, bisher nicht erfassbare Systeminformationen bereit stellen zu können. Ein besonderer Anwendungsschwerpunkt drahtloser Sensorik wird in der chemischen Verfahrenstechnik gesehen und genießt in der Wissenschaft großes Interesse [ASSC02, ABG<sup>+</sup>09]. Die Anwendung derartiger Sensoren ist dabei besonders für Fließprozesse interessant, um sehr effizient wertvolle Informationen über die Prozesse zu erhalten, die sonst nicht zugänglich sind. Diese Sonden können beispielsweise in Pipelines zur Erfassung von Schäden und zur Kontrolle des Durchflusses eingesetzt werden. Mit derartigen Sensoren ergeben sich somit neue Möglichkeiten der Prozessüberwachung ohne dabei den Prozess konstruktiv verändern zu müssen. Zukunftsweisende Beispiele sind automatische Produktionsanlagen, bei denen funkbasierte Sensoren mit den Produkten durch die Fertigung transportiert werden bzw. bei Fließprozessen mit schwimmen und damit die Regelungen mit zusätzlichen Informationen versorgen. Ein Überblick zur Anwendung drahtloser Netzwerke in der Regelungstechnik wird beispielsweise in [HNX07, Zam08] gegeben. Die mit den Sensoren gewonnenen zusätzlichen Informationen bieten auch die Möglichkeit der Entwicklung effizienter Ansätze der Zustandsschätzung. Damit stellt sich nun die Frage, welcher Mehrwert durch die Anwendung dieses Sensorkonzeptes zu erreichen ist.

Die Anwendung derartiger Sensoren als zusätzliches Element im Regelkreis erfordert geeignete Regelungsstrategien, um den damit erreichbaren Nutzen zu maximieren. Ein Anwendungsbereich liegt dabei in der gezielten Beeinflussung einer Zustandsvariablen des transportierten Mediums entlang des Prozesses, wie es etwa zur Vermeidung von kalten Lötstellen in automatischen Lötstraßen sowie bei komplexen Trocknungsprozessen, beispielsweise in Fixierstationen von Hochleistungsdruckern, von großer Bedeutung ist. Ebenso wird in der chemischen Verfahrenstechnik, der Kunststofftechnik beim Thermoformen, der Metallurgie und der Elektrobranche, zum Beispiel bei der Herstellung von Dünnschichtsolarzellen, idealerweise für die gewünschte Systemgröße die Einhaltung einer definierten Trajektorie entlang des Prozesses gefordert. Durchlauföfen finden auch in der Lebensmittelindustrie Anwendung und stellen dabei einen hohen Anspruch an den Verlauf der Erwärmung der Lebensmittel entlang des Prozesses. Temperaturschwankungen wirken sich beispielsweise bei Backprozessen sofort auf das Ergebnis aus. Aus diesem Grund setzt bereits eine ganze

Reihe von Herstellern auf Kombinationen unterschiedlicher Heizsysteme für Keksöfen. Um diese Regelziele zu erreichen, wird ein so genannter *verteilter Stelleingriff* herangezogen, welcher im Allgemeinen durch eine Reihe von entlang des Prozesses angeordneter Aktoren mit spezifischer ortsabhängiger Charakteristik realisiert wird. Abhängig von der Ortscharakteristik tritt eine Überlappung der Wirkbereiche der einzelnen Aktoren auf und führt somit zu einer Verkopplung des Systems.

Die beschriebenen Prozesse haben den Transport eines Mediums gemeinsam, welches im Verlauf der Transportstrecke beeinflusst wird. Derartige Prozesse werden als *Transportprozesse* bezeichnet und im Allgemeinen durch partielle Differentialgleichungen (PDGLn) modelliert. Eine Vielzahl dieser Transportprozesse können durch hyperbolische PDGLn erster Ordnung mit gleicher charakteristischer Richtung und Geschwindigkeit beschrieben werden. Die Ausführungen in dieser Arbeit beschränken sich auf diese Klasse von PDGLn, welche die Eigenschaft aufweist, dass sich sämtliche Zustandsvariablen in die gleiche Richtung mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreiten. Die PDGLn beschreiben die Änderung der Zustandsvariablen der durch den Prozess transportierten differentiellen Volumenelemente. Diese Tatsache motiviert auch die Anwendung von drahtloser Sensorik, welche mit dem Medium durch den Prozess transportiert wird. Zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist aus der Mathematik die Methode der Charakteristiken bekannt, welche die Zustandsänderung von differentiellen Volumenelementen entlang des Prozesses beschreibt. Diese Methode in Kombination mit einer Sensorik, welche mit dem Medium durch den Prozess transportiert wird, bietet somit ein großes Potential für derartige Prozesse effiziente Regelungsstrategien, vor allem in Hinblick auf eine Trajektorienfolge, entwickeln zu können und damit die Regelgüte zu verbessern. In vielen Systemen können nicht alle für die Regelung erforderlichen Systemgrößen gemessen werden, weshalb der Einsatz eines Zustandsbeobachters erforderlich wird. Die mitgeführte Sensorik eröffnet auch zur Realisierung dieses Schätzproblems neue Möglichkeiten.

Die mit dem Medium mitgeführte Sensorik lässt eine relativ einfache Erfassung der Trajektorie der Regelgröße zu und bietet somit das Potential, möglichst einfache Regelungsansätze bei gleichzeitiger Erhöhung der Güte der Regelungsergebnisse umsetzen zu können. Stehen im Gegensatz dazu nur Sensoren am Ende des Prozesses zur Verfügung, kommt oft eine in der Industrie verbreitete Methode zum Einsatz, welche das Modell des Prozesses prädiziert und die Steuerung zyklisch durch Auswerten der Messergebnisse anpasst. Damit können Störungen am Rand erst nach der Verweilzeit des Volumenelements erfasst und darauf reagiert werden. In diesem Lernvorgang wird das Ergebnis von Produkt zu Produkt verbessert. Ein Eingriff unmittelbar während des Prozesses kann damit nicht realisiert werden, wodurch möglicherweise gestellte Qualitätsanforderungen erst spät erfüllt werden können. Die funkbasierten Komponenten eröffnen damit neue Möglichkeiten und Potentiale, die

es durch die Analyse des resultierenden Systems und Entwicklung neuer Strategien zur Regelung und Beobachtung optimal zu nutzen gilt.

## 1.1. Stand der Technik

In einer vollständigen Produktionsanlage muss das zu fertigende Produkt im Allgemeinen mehrere Prozessschritte durchlaufen. Um einen kontinuierlichen Produktionsprozess zu gewährleisten, ist eine Beeinflussung des transportierten Mediums ohne Zwischenhalte erwünscht. Zur Verbesserung der Qualität bzw. zum Schutz des Produktes wird dabei meist die Einhaltung einer definierten Trajektorie angestrebt. Sensorinformationen aus dem Prozess mittels ortsfester Sensorik sind aus konstruktiven Gründen oft zu aufwendig oder mit zu vielen Störungen verbunden. Ein Beispiel dafür repräsentiert die Temperaturmessung durch Infrarotsensoren in einem Durchlaufofen, deren Signale durch den Einfluss der Strahler gestört werden. Aus diesem Grund ist im Allgemeinen lediglich am Ende des Prozesses eine Messung vorgesehen. Das Regelungsziel wird dabei meist durch die Einhaltung einer Sollgröße am Ende der Transportstrecke definiert.

Bei Systemen mit verteilten Parametern (SVPs) wird nach der Art des Stelleingriffs unterschieden. Erfolgt der Eingriff über die Randbedingungen, wird von Systemen mit Randeingriff gesprochen. Systeme bei denen die Stellgröße jedoch über die PDGL, also entlang des Prozesses, auf das transportierte Medium einwirkt, werden als Systeme mit verteiltem Stelleingriff bezeichnet. In diesem Fall kann der Einfluss der Randbedingungen als Störung interpretiert werden.

Neuere Forschungsergebnisse zur Trajektorienfolgeregelung von SVPs basieren auf der Erweiterung des Konzepts der Flachheit auf SVPs [FMR98, KS07, KS06, Rud03]. In diesem Zusammenhang werden vorzugsweise parabolische Systeme betrachtet und durch Anwendung von Potenzreihenansätzen approximiert. In [KS07, WR03] wird ein flachheitsbasierter Regelungsentwurf, basierend auf diesen Potenzreihen, für hyperbolische Systeme durchgeführt. Wie bei den meisten Regelungsansätzen für SVPs wird dabei der Fall eines Randeingriffs mit einer örtlich festen Regelgröße (meist am Ende des Prozesses) betrachtet. Im Fall eines verteilten Stelleingriffs repräsentiert die ortsfeste Ausgangsvariable im Allgemeinen keinen flachen Ausgang. In diesem Zusammenhang wird in [KS07] eine Methode zur Regelung eines Prozesses mit verteiltem Stelleingriff vorgestellt, welche den Prozess in ein System mit Randeingriff transformiert. Dennoch kann im Allgemeinen keine Parametrisierung des verteilten Stelleingriffs mit einem flachen Ausgang erreicht werden und die vorgestellte Methode ist bislang auf linear SVPs beschränkt. Ein Ansatz zur Regelung dieser Klasse von Systemen mit verteiltem Stelleingriff wird zudem in [Chr98, CD96] vorgestellt, welcher allerdings auf ein unendlich-dimensionales Regelgesetz führt.

Weitere Ansätze zur Regelung von SVPs basieren auf der Approximation des Systems durch Anwendung der Methode von Galerkin, vorzugsweise durch modale Analyse [Fra87, Gil73, DH08, MZ06]. Demetriou stellt auf Basis dieser Approximationsverfahren in [Dem08] einen Regelungsentwurf für parabolische SVP basierend auf bewegten kollokierten Aktoren und Sensoren vor.

In anwendungsbezogeneren Veröffentlichungen wird das Verhalten des nichtlinearen Systems oft durch lineare Übertragungsfunktionen approximiert. Auf diese Beschreibungsform greifen beispielsweise [ADF03, Fra87, LH91] zur Modellierung des Verhaltens von Durchlauföfen zurück und entwerfen darauf aufbauend lineare Regelungen für eine örtlich feste Regelgröße am Ende des Prozesses. In [FVB00] wird ein lineares, mit Unsicherheiten behaftetes Modell hoher Ordnung zur Beschreibung von Prozessen zur Folien- und Filmproduktion herangezogen. Zur Regelung des Prozessausgangs wird dabei die robuste und modellprädiktive Regelung eingesetzt. In [BK09, YUU94] werden diese approximierten Modelle zur Implementierung von iterativ lernenden Regelungsansätzen herangezogen.

Die Anwendung der Methode von Galerkin zur Beschreibung des Verhaltens von Transportprozessen, welche durch ein System von hyperbolischen PDGLn erster Ordnung beschrieben werden, stellt eine Verbindung zu benachbarten Volumenelementen des transportierten Mediums her. Damit wird dem System ein Verhalten aufgezwungen, welches bei diesen Prozessen nicht vorliegt. Die Lösung von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung weist im Gegensatz zu endlich-dimensionalen Systemen eine endliche Abklingzeit auf [CZ95, EN00]. Zudem sind bei Transportprozessen sprunghafte Änderungen der Randbedingungen erlaubt, welche durch den Prozess transportiert werden [Whi74]. Dieses Phänomen ist aufgrund der Differenzierbarkeitsanforderungen durch eine endlich-dimensionale Approximation nicht darstellbar. Dennoch existieren mittlerweile zur Lösung und Simulation von PDGLn erster Ordnung numerische Verfahren, welche auf einem finiten Differenzenverfahren basieren, wie beispielsweise High-Resolution TVD-Verfahren, und sehr genaue Lösungen für Systeme von nichtlinearen hyperbolischen PDGLn liefern. Diese Methoden erlauben auch die Behandlung von so genannten Schockwellen inklusive ihrer Geschwindigkeit. Für detaillierte Ausführungen zu numerischen Methoden für hyperbolische PDGLn wird auf weiterführende Literatur, wie beispielsweise [Tor99], verwiesen.

Die Behandlung von hyperbolischen PDGLn durch finite Differenzenverfahren ist aufgrund der erforderlichen hohen Ordnung der Systeme und den damit verbundenen hohen Rechenzeiten für den Beobachter- und Regelungsentwurf nur bedingt geeignet. Zudem erfordert die Nachbildung der gemessenen Werte eines durch den Prozess transportierten Sensors eine hohe örtliche Auflösung und unter Umständen die Anwendung von Interpolationsverfahren. Zu diesem Zweck eignet sich vielmehr die Methode der Charakteristiken, welche die hyperbolische PDGLn erster Ordnung exakt löst [Deb05, Whi74]. Mit diesem Verfahren wird

die Lösung der PDGLn auf die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen reduziert, welche das Systemverhalten entlang des Prozesses exakt beschreiben. Die Lösungsfläche der PDGL wird dabei durch so genannte charakteristische Kurven beschrieben. Physikalisch gesehen entsprechen diesen Charakteristiken Wellen, welche sich mit ihrer charakteristischen Geschwindigkeit durch den Prozess bewegen. Die Methode der Charakteristiken ist ein wertvolles Instrument zur Analyse von PDGLn erster Ordnung und wird oft für Wellengleichungen, beispielsweise in der Shallow Water Theorie, herangezogen [Whi74]. Die Projektionen der charakteristischen Kurven auf die Ebene der unabhängigen Variablen, meist Ort und Zeit, werden als Grundcharakteristiken bezeichnet. Schneiden sich die Grundcharakteristiken aufgrund unterschiedlicher charakteristischer Richtungen der Zustandsvariablen, wie bei Gegenstromwärmetauschern, ist zur Bestimmung der Lösung eine schrittweise Integration der Differentialgleichungen erforderlich [Deb05, Whi74]. Dieser Lösungsansatz wird in [SFG04] für den Entwurf einer modellprädiktiven Regelung der Temperatur am Ende der Transportstrecke eines Gegenstromwärmetauschers eingesetzt. Die Anwendung von Optimierungsverfahren zur Regelung von Transportprozessen wurde in [Loh79] diskutiert, wobei sich die Regelgröße ebenso am Ende des Prozesses befindet. In dieser Arbeit werden ausschließlich Systeme behandelt, welche durch hyperbolische PDGLn erster Ordnung mit derselben charakteristischen Richtung und Geschwindigkeit beschrieben werden können. Entsprechend den zuvor getätigten Ausführungen ist für diese Systeme die Methode der Charakteristiken zur Entwicklung und Implementierung von Regelungsstrategien vorzuziehen. In diesem Zusammenhang präsentiert Sira-Ramirez in [SR89] einen Regelungsentwurf basierend auf der Kombination der Methode der Charakteristiken und Sliding-Mode-Techniken für einen Prozess mit Randeingriff, welcher durch eine quasilineare hyperbolische PDGL modelliert wird. Um die endliche Dynamik der Aktoren zu berücksichtigen, wird in [HP95] eine Erweiterung dieses Ansatzes durch die Hinzunahme von Tuning-Parametern präsentiert. Die Methode der Charakteristiken wird zudem in [SFG05] zum Entwurf einer robusten Regelung und in [SFG04] zur Realisierung einer modellprädiktiven Regelung herangezogen. In [MZS10] wird ein Vorsteuerungsentwurf für eine lineare PDGL erster Ordnung mit verteiltem Stelleingriff basierend auf ihrer analytischen Lösung bezüglich der Ausgangsgröße des Prozesses vorgestellt und an einem Glasvorherd angewendet.

Der Großteil der modellbasierten Regelungsmethoden benötigt den gesamten Zustandsvektor, welcher gegebenenfalls durch einen Beobachter zu bestimmen ist. In [Köh77] wird der Begriff der Beobachtbarkeit auf verteilt-parametrische Systeme erweitert. Der Beobachterentwurf zielt dabei immer auf die Schätzung des gesamten, über den Ort verteilten Zustands mit Hilfe ortsfester Sensoren ab und basiert auf einer endlich-dimensionalen Approximation [BZ02, JA88, Köh77]. Ein endlich-dimensionaler Beobachterentwurf für lineare Transport-

prozesse wird in [Nol88] vorgestellt, welcher allerdings nicht den verteilten Zustandsvektor sondern ein lineares Funktional der Zustandsvektorfunktion schätzt. In [Dem10] werden bewegte Sensoren zur Zustandsschätzung von parabolischen SVPs herangezogen, welche entlang einer online bestimmten Trajektorie über das Medium bewegt werden. Bewegte drahtlose Sensoren finden auch zur besseren Handhabung von Prozessen in der chemischen Industrie Anwendung [TSH10]. Auf diese Weise können wesentlich mehr Informationen über die im Prozess verteilten Zustandsvariablen gewonnen werden. Speziell bei Transportprozessen, wie beispielsweise bei Stückgutprozessen, ist nicht immer der gesamte über den Ort verteilte Zustand des Prozesses interessant. Aus diesem Grund kann durch das Mitführen einer geeignet platzierten Sensorik bereits ausreichend viel Information für die Regelung bereit gestellt werden.

Wie in [WL09] erläutert wird, erfasst ein mitgeführter Sensor Systemgrößen, deren zeitliche Änderung unter Anwendung der Methode der Charakteristiken durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden kann. Die betrachteten PDGLn erster Ordnung resultieren damit im Allgemeinen in nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Aus diesem Grund basieren die in dieser Arbeit zum Steuerungs-, Beobachter- und Regelungsentwurf vorgestellten Ansätze auf konzentriert-parametrischen Methoden, über die im Folgenden ein kurzer Überblick gegeben wird.

Zum Steuerungsentwurf nichtlinearer Systeme hat sich das Konzept der Flachheit, welches 1992 von Michael Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin und Pierre Rouchon [FLMR92] formuliert wurde, etabliert. Mit den flachheitsbasierten Methoden ist auch eine relativ einfache Lösung des Trajektorienfolgeproblems durch den Entwurf eines so genannten Trajektorienfolgereglers [Rot97, RRZ97] möglich. Ebenso die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, welche im Grunde auch in der flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregulation enthalten ist, findet für Trajektorienfolgeprobleme aufgrund ihres getrennten Entwurfs des Führungs- und Störverhaltens große Anwendung [Kre99, Rop09]. Zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems kommen in der Literatur neben den bereits genannten Methoden noch die optimale Zustandsrückführung sowie die modellprädiktive Regelung zum Einsatz [Kir98, DP04]. Der Entwurf sowie die Wahl der Gütefunktionale dieser Regelstrategien ist eine nicht triviale Aufgabe und erlaubt nur einen beschränkten Rückschluss der Regelungsergebnisse auf die Wahl der Gewichtsmatrizen im Gütefunktional. Die flachheitsbasierten Methoden sowie die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur ermöglichen im Gegensatz dazu einen sehr strukturierten Entwurf und eine durchgängige Analyse der Ergebnisse, wie in den folgenden Kapiteln verdeutlicht wird. In diesem Fall muss jedoch die geforderte Trajektorie auch erreichbar sein. Diese könnte mit einem optimierungsbasierten Ansatz zumindest angenähert werden.

Beobachteransätze für nichtlineare Systeme werden beispielsweise in [Ada09, Isi95, SZ95]

vorgestellt, welche im Allgemeinen jedoch keine gesicherte Aussage über ihre Konvergenz zulassen. In [SZ95] wird ein Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme vorgestellt, bei welchen die Nichtlinearität nur von erfassbaren Größen abhängt. Damit resultiert eine lineare Fehlerdynamik für welche Stabilität gesichert werden kann. In [Rot97, RRZ97] wird ein so genannter Folgebeobachter vorgestellt, der für den geschlossenen Folgeregelkreis entworfen wird und somit ein Abklingen des Schätzfehlers gewährleistet. Dies setzt allerdings voraus, dass die Anfangswerte nahe genug an den realen Werten liegen. Der Entwurf erfolgt dabei anhand des um die Referenztrajektorie linearisierten Systems. Der in [Rot97, RRZ97] vorgeschlagene Beobachter kompensiert das resultierende zeitvariante Verhalten des Systems. Dies ist allerdings mit einem hohen analytischen Rechenaufwand verbunden. Alternativ kann dazu auch ein Kalman- oder  $H_\infty$ -Beobachter herangezogen werden [Sim06].

## 1.2. Ziel

Das Ziel dieser Arbeit ist die Analyse der Potentiale drahtloser, mit dem Medium transportierter, Sensorik sowie die Entwicklung neuer Ansätze zur Regelung und Beobachtung von Transportprozessen durch dessen Anwendung. Der Schwerpunkt wird dabei auf die Lösung des Trajektorienfolgeproblems entlang des Prozesses gelegt, welche das Potential der drahtlosen Sensorik besonders hervorhebt. In diesem Zusammenhang gilt es effiziente, einfache und möglichst auf konzentriert-parametrischen Methoden basierende Ansätze zu entwickeln, um das vorliegende unendlich-dimensionale System entsprechend den Anforderungen zu beeinflussen. Zudem sind die Grenzen der erreichbaren Regelungsaufgaben zu identifizieren bzw. Anforderungen und Konstruktionshinweise aus der Systemanalyse zu gewinnen. Zur Systemanalyse haben sich die flachheitsbasierte Methoden etabliert, welche auch einen strukturierten Steuerungs- und Regelungsentwurf erlauben. Das Konzept der Flachheit eignet sich zudem zur Behandlung von Trajektorienfolgeproblemen. Erste Erfolge zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems können bereits mit einer Steuerung erzielt werden, welche anschließend entsprechend der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur um eine unterlagerte Regelung erweitert werden kann. Damit können die Fragestellungen dieser Arbeit in den folgenden Punkten zusammengefasst werden:

- Wie wird die mit dem Medium mitgeführte Sensorik geeignet in die Modellierung eingebunden und welche Auswirkungen hat diese auf das systemtheoretische Verhalten des Prozesses?
  - Dazu wird in der Arbeit dargelegt, welche Klasse von Systemen die Prozesse beschreibt und welche Approximationsverfahren zulässig bzw. erforderlich sind.
  - Es wird untersucht inwieweit mit den in der Literatur gängigen Approximati-

- onsverfahren die mit dem Medium mitgeführte Sensorik berücksichtigt werden kann.
- Aus den in der Literatur bekannten Lösungsverfahren wird die für Transportprozesse in Bezug auf die mitgeführte Sensorik geeignetste Methode ausgewählt.
  - Es wird aufgezeigt, welche systemtheoretischen Eigenschaften die betrachteten Transportprozesse aufweisen und inwieweit diese durch die Anwendung mitgeführter Sensorik beeinflusst werden.
- Inwieweit können flachheitsbasierte Methoden zur Systemanalyse und zum Steuerungs- und Regelungsentwurf in Kombination mit einer mitgeführten Sensorik herangezogen werden?
    - Zu diesem Zweck wird geklärt, unter welchen Voraussetzungen bei Transportprozessen mit mitgeführter Sensorik von flachen Systemen gesprochen werden kann.
    - Es wird untersucht, ob mit der Methode der Flachheit die Realisierbarkeit von Regelungszielen beurteilt werden kann.
    - Die Anwendbarkeit der flachheitsbasierten Methoden zum Steuerungsentwurf für Transportprozesse wird geklärt.
    - Inwieweit aus der Systemanalyse Konstruktionshinweise für die Prozesse sowie Anforderungen an beispielsweise die Aktorik gewonnen und formuliert werden können, wird dargelegt.
    - Es wird der Frage nachgegangen, welche Auswirkungen die Ausprägungen der Aktoren auf den Steuerungsentwurf haben.
  - Welches Potential bietet die Anwendung von mitgeführter Sensorik für die Zustandsschätzung von Transportprozessen?
    - Die Vorteile resultierend aus der Anwendung von mitgeführten Sensoren zur Zustandsschätzung in Hinblick auf die angestrebte Trajektorienfolgeregelung im Gegensatz zu ortsfesten Sensoren werden aufgezeigt.
    - Es wird analysiert, ob in Kombination mit der Methode der Charakteristiken konzentriert-parametrische Ansätze zur Realisierung von Beobachterstrukturen herangezogen werden können.
    - Die aus der Anwendung von mitgeführten Sensoren resultierenden Möglichkeiten zur Schätzung verteilt- sowie konzentriert-parametrischer Zustandsvariablen werden dargelegt.
  - Welches Potential bietet die Anwendung von mitgeführter Sensorik für die Lösung des Trajektorienfolgeproblems von Transportprozessen?
    - Zu diesem Zweck wird untersucht, inwieweit unter Anwendung mitgeführter

Sensorik konzentriert-parametrische Regelungsansätze zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems herangezogen werden können.

- Der Frage der Anwendbarkeit der flachheitsbasierten Ansätze zur Regelung wird nachgegangen.
- Es wird geprüft welche Auswirkungen die Ausprägungen der Aktoren auf die Regelungsansätze haben.
- Die Art und Weise wie sich der Transport der Regelgröße aus dem Prozess auf den Regelungsentwurf auswirkt wird betrachtet.
- Es wird aufgezeigt, wie mit der Verkopplung der Wirkung der Aktoren geeignet umgegangen werden kann.

### 1.3. Aufbau der Arbeit

Die Gliederung der Arbeit orientiert sich im Wesentlichen an den im letzten Abschnitt formulierten Fragestellungen. Zu Beginn werden in Kapitel 2 einige in der Arbeit verwendete Anwendungsbeispiele vorgestellt und diskutiert. Der Schwerpunkt liegt dabei auf einem Durchlaufofen, auf welchem eine Vielzahl von Transportprozessen basieren und welcher auch als Versuchsstand aufgebaut wurde. Aus diesem Grund wird auf die Modellierung dieses Prozesses besonders Wert gelegt. Aus den aufgeführten Anwendungsbeispielen wird abschließend auf die in dieser Arbeit betrachtete Systemklasse geschlossen.

Kapitel 3 widmet sich der Klassifikation und Analyse der Eigenschaften von Transportprozessen. Zudem werden Methoden zur Lösung der zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungen diskutiert. In Hinblick auf die Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik wird eine für den Beobachter- und Regelungsentwurf sinnvolle Systemdarstellung vorgestellt. Außerdem werden die Anwendbarkeit und die Vorteile der mitgeführten Sensorik zur Parameteridentifikation am Beispiel des Versuchsträgers diskutiert.

Der Anwendbarkeit der flachheitsbasierten Methoden zum Steuerungsentwurf und zur Analyse von Transportprozessen widmet sich Kapitel 4. Dabei wird nach einer allgemeinen Diskussion des Konzepts der Flachheit der Vorteil des darauf basierenden strukturierten Steuerungsentwurfs aufgezeigt. Die Frage der Auswirkung der örtlichen Charakteristik der entlang des Prozesses angeordneten Aktoren auf den Steuerungsentwurf wird ebenso behandelt. Der auf der Methode der Flachheit basierende strukturierte Steuerungsentwurf bietet auch die Möglichkeit der Analyse der Realisierbarkeit der geforderten Ziele und der Ableitung daraus resultierender Anforderungen und Konstruktionshinweise an die Prozesse. Basierend auf dieser Eigenschaft der Flachheit wird abschließend eine strukturierte Vorgehensweise zum Entwurf abgeleitet.

Die Frage der Beobachtbarkeit der betrachteten Systemklasse unter Anwendung mitge-

fürher Sensorik wird in Kapitel 5 behandelt. Dabei wird unter anderem auch der Beobachterentwurf für gemischt verteilt- und konzentriert-parametrische Systemkomponenten diskutiert und geeignete Ansätze zur Zustandsschätzung in Hinblick auf die angestrebte Trajektorienfolge geregelt vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einem Ausblick auf die Möglichkeiten der Schätzung des gesamten verteilten Zustandsraums des Prozesses ab.

Der Lösung des Trajektorienfolgeproblems für Transportprozesse unter Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik widmet sich Kapitel 6. Nachdem die Problemstellung erläutert wurde, werden zwei in der Literatur übliche Methoden der Trajektorienfolge geregelt, die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur und die flachheitsbasierte Trajektorienfolge geregelt, vorgestellt. Die Ausprägung des verteilten Stelleingriffs hat einen großen Einfluss auf die erforderlichen Regelungsstrategien. Dabei wird zwischen den beiden Extremfällen von örtlich getrennter Wirkung der Aktoren und Aktoren mit einer kontinuierlichen Ortsfunktion, welche sich über den gesamten Prozess erstreckt, unterschieden. Im letzteren Fall tritt eine Verkopplung der Wirkung der Aktoren auf.

Am Ende jedes Kapitels werden die wesentlichen Erkenntnisse zusammengefasst. Eine Zusammenfassung und Bewertung der gesamten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wird in Kapitel 7 gegeben.

Anhang A beinhaltet die Kenndaten der Anwendungsbeispiele und Anhang B gibt die Anwendung der modalen Analyse auf einen Glasvorherd unter Berücksichtigung der Wärmeleitung wieder. Anhang C enthält eine Sammlung für die Arbeit relevanter Definitionen sowie die Steuer- und Beobachtbarkeitsmatrix der entlang einer Trajektorie linearisierten Transportprozesse.

## 2. Transportprozesse

Eine Vielzahl dynamischer Prozesse, beispielsweise in der Verfahrens-, Verkehrs-, Energie- und Lebensmitteltechnik, repräsentieren Systeme, deren Zustandsraum örtlich ausgedehnt ist und somit durch ein System von PDGLn beschrieben wird [Fra87, Gil73]. Speziell Transportprozesse werden durch ein System von PDGLn erster Ordnung beschrieben. Diese Systembeschreibung resultiert in vielen Fällen durch Reduktion der Ordnung der PDGL aufgrund der Vernachlässigung des diffusiven Anteils und bezeichnet somit so genannte konvektionsdominante Systeme. Als Beispiele dafür seien Löt-, Lackier-, Back-, Druck-, Formprozesse sowie Wärmetauscher und Rohrreaktoren genannt. Die in dieser Arbeit behandelten Prozesse weisen dabei einen so genannten verteilten Stelleingriff auf. Transportprozesse ohne verteilte Stellgrößeneinwirkung, wie sie beispielsweise in der Postautomatisierung vorkommen, repräsentieren reine Totzeitsysteme und werden im Folgenden nicht behandelt. Die betrachteten Systeme lassen sich entsprechend der Ausprägung des verteilten Stelleingriffs unterteilen. In dieser Arbeit werden dabei Aktoren mit örtlich beschränkter Wirkung und Aktoren mit einer entlang des Prozesses kontinuierlichen Ortsfunktion untersucht. Zudem kann noch der Fall eines näherungsweise verteilten Eingriffs betrachtet werden, welcher durch eine Vielzahl an Aktoren realisiert wird. Im Folgenden werden drei Anwendungsbeispiele vorgestellt und anschließend die Systemklasse, welcher die betrachteten Transportprozesse angehören, diskutiert.

### 2.1. Anwendungsbeispiele

In dieser Arbeit werden drei unterschiedliche Anwendungsbeispiele betrachtet. Das Hauptaugenmerk wird auf einen Durchlaufofen gelegt, der in seinen Eigenschaften einer Vielzahl der eingangs genannten Transportprozesse ähnelt und als Versuchsträger im Labor aufgebaut wurde. Aus diesem Grund stellt dieser Prozess ein geeignetes System zur Analyse dar und wird in den folgenden Ausführungen auch als primäres Anwendungsbeispiel dienen. Zur Behandlung von Systemen mit mehreren Zustandsfunktionen werden ein Trocknungsprozess für Papier und der in der Literatur häufig verwendete Rohrreaktor betrachtet.

### 2.1.1. Durchlaufofen

Ein Durchlaufofen ist bei einer Vielzahl von industriellen Prozessen in den Ablauf integriert, um eine thermische Behandlung, beispielsweise Trocknung des transportierten Mediums, zu ermöglichen. In diesem Abschnitt wird lediglich die Erwärmung eines transportierten Mediums betrachtet. Abb. 2.1 zeigt den schematischen Aufbau eines Durchlaufofens der Länge  $L$ . Ein kontinuierliches Medium wird mit der Geschwindigkeit  $v(t)$  durch den Prozess transportiert und mit dem verteilten Stelleingriff  $\bar{u}(z, t)$  beeinflusst.

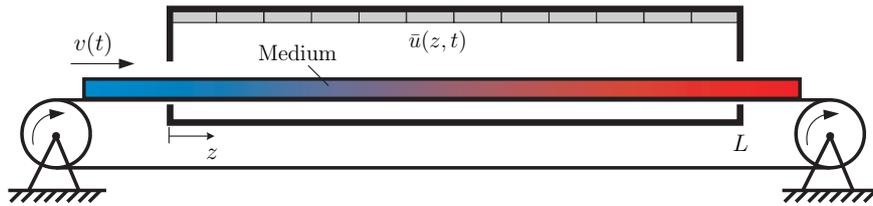


Abbildung 2.1.: Schematischer Aufbau eines Durchlaufofens.

Im nächsten Abschnitt wird die physikalische Modellierung des in Abb. 2.1 dargestellten Durchlaufofens durchgeführt. Darauf aufbauend wird anschließend der im Rahmen dieser Arbeit entstandene praktische Aufbau eines Durchlaufofens vorgestellt.

#### 2.1.1.1. Modellierung

Zur Modellierung des in Abb. 2.1 dargestellten Prozesses werden die folgenden in der Literatur üblichen Annahmen getroffen [PK05, Kha07]:

- Die kinetische Energie und die Beiträge der Spannungs- und Volumenkräfte können gegenüber der spezifischen inneren Energie  $u_E$  vernachlässigt werden.
- Der Prozess verfügt über keine inneren Wärmequellen.
- Die mechanischen und physikalischen Eigenschaften des Mediums (Dichte, Viskosität, ...) sind in dem betrachteten Temperaturbereich näherungsweise konstant. Für inkompressible Stoffe mit konstanter Dichte  $\rho$  sind die isochore und isobare spezifische Wärmekapazität gleich, also gilt  $c_v = c_p = c$ .
- Die spezifische Wärmekapazität  $c$ , die Dichte  $\rho$  und die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  seien unabhängig von Ort und Zeit.
- Die Druckänderung sei unerheblich, womit in guter Näherung die Änderung der spezifischen inneren Energie  $u_E$  der Änderung der Enthalpie  $h$  entspricht und somit der Zusammenhang  $du_E = dh = c dT$  gilt. Dabei bezeichnet  $T$  die Temperatur des Mediums.
- Die spezifischen Wärmekapazitäten werden als temperaturunabhängig angenommen.
- Die Transportgeschwindigkeit  $v$  sei unabhängig vom Ort.

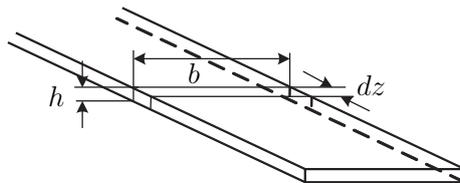
In der Regel wird das Medium nur entlang einer Ortskoordinate, welche im Folgenden mit  $z$  bezeichnet wird, transportiert. Wird zudem angenommen, dass der Prozess in Transportrichtung  $z$  eine gegenüber den restlichen Koordinaten deutlich größere Ausdehnung aufweist und die Eigenschaften des verteilten Eingriffs quer zur Transportrichtung gleichmäßig sei, kann der Prozess als örtlich eindimensional betrachtet werden. Unter den angeführten Annahmen resultiert aus der Energiebilanz des Wärme- und Stoffübertragungsprozesses nach [PK05] entlang der Transportrichtung  $z$  für ein infinitesimales Element  $dz$  unter Berücksichtigung der Geometrie (Breite  $b$  und Höhe  $h$ ) des transportierten Mediums entsprechend Abb. 2.2 der Zusammenhang:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{c \rho T(z, t)}_{u_E} b h dz + v \rho c \underbrace{\frac{\partial T(z, t)}{\partial z}}_{\dot{q}_K} b h dz - \lambda \underbrace{\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}}_{\dot{q}_D} b h dz = 2(b+h) \dot{q}_\alpha dz + b \dot{q}_{str} dz \quad (2.1)$$

Die Bilanzgleichung (2.1) kann derart interpretiert werden, dass eine zeitliche Änderung der im Volumen  $b h dz$  gespeicherten inneren Energie  $dU_E = u_E b h dz$  durch die Zu- oder Abfuhr von thermischer Energie bedingt ist. Dies erfolgt einerseits durch den konvektiven Transport von Enthalpie  $\dot{q}_K$  und andererseits durch den Wärmetransport aufgrund von Konduktion (volumetrische Wärmestromdichte  $\dot{q}_D$ ). Der konvektive Transport von Enthalpie ist durch die Strömung des Mediums bedingt und wird auch als Advektion bezeichnet. Diese beiden Transportphänomene beschreiben somit die durch ein betrachtetes Kontrollvolumen transportierte Wärmemenge. Des Weiteren wird Energie über den Rand durch Wärmeaustausch mit der Umgebung  $\dot{q}_\alpha$  und Wärmestrahlung  $\dot{q}_{str}$  ausgetauscht, welche aufgrund der eindimensionalen Betrachtung in die Bilanzgleichung integriert werden. Aus der Betrachtung eines infinitesimalen Bilanzraums resultiert für die Modellgleichung des Durchlaufofens

$$c \rho \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + c \rho v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - \lambda \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} = \frac{2(b+h)}{b h} \dot{q}_\alpha + \frac{1}{h} \dot{q}_{str}, \quad z \in (0, L], \quad t > 0, \quad (2.2)$$

mit der Anfangsbedingung  $T(z, 0) = T_0(z)$  sowie den Randbedingungen  $T(0, t) = T_{z_0}(t)$  und  $\left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=L} = 0$ . Der Wärmeaustausch mit der Umgebung und die Wärmestrahlung werden im Folgenden näher betrachtet.



**Abbildung 2.2.:** Geometrische Verhältnisse des transportierten Mediums.

### Wärmeaustausch mit der Umgebung

Der Wärmeaustausch des Mediums mit der Umgebung erfolgt durch Konvektion des umströmten Mediums, wobei zwischen freier und erzwungener Konvektion unterschieden werden muss. Bei einer freien Konvektion wird die Strömung durch den Dichteunterschied aufgrund des Temperaturgradienten und bei erzwungener Konvektion durch die Bewegung des Mediums bzw. durch ein Gebläse erzeugt. Diese Unterscheidung ist bei der Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten von Bedeutung. Speziell im Fall des betrachteten Durchlaufofens wird aufgrund der geringen Transportgeschwindigkeit die freie Konvektion überwiegen. Letztendlich zählt jedoch der größere Wert [PK05]. Die pro Flächen- und Zeiteinheit über den Rand  $\Gamma$  zugeführte Wärmestromdichte  $\dot{q}_\alpha$  lautet allgemein

$$\dot{q}_\alpha = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_\Gamma, \quad (2.3)$$

wobei die Koordinatenrichtung  $x$  normal zur Oberfläche des Mediums ist. In Abb. 2.3 ist der Zusammenhang dargestellt, wobei  $\dot{q}_\alpha = \dot{q}_x|_{x=0_+}$  gilt. Entsprechend der Vorzeichenkonvention in Abb. 2.3 gilt nach dem Newton'schen Gesetz für den konvektiven Wärmeübergang am Rand außerhalb des Körpers mit der Umgebungstemperatur  $T_\Gamma$ :

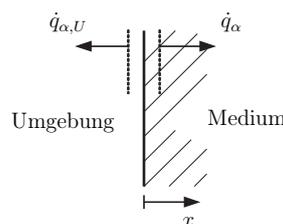
$$\dot{q}_{\alpha,U} = \alpha (T_\Gamma - T) = -\dot{q}_x|_{x=0_-} \quad (2.4)$$

Für die betrachteten Anwendungsfälle treten Effekte wie Schmelzen, Erstarren, Kondensation und chemische Oberflächenreaktionen nicht auf. Damit kann angenommen werden, dass an der Grenzfläche keine Wärme entzogen oder freigesetzt wird und somit aus der Bilanz über die Grenzfläche des Körpers die Beziehung

$$\dot{q}_x|_{x=0_+} - \dot{q}_x|_{x=0_-} = 0 \quad (2.5)$$

resultiert. Dies gilt für jede Grenzfläche des betrachteten Kontrollvolumens. Aufgrund der eindimensionalen Betrachtung werden die Wärmeübergänge quer zur Transportrichtung als homogen angenommen, womit für die Wärmestromdichte  $\dot{q}_\alpha$  aus Gl. (2.1) der Zusammenhang

$$\dot{q}_\alpha(z, t) = \alpha (T_\Gamma(z, t) - T(z, t)) \quad (2.6)$$



**Abbildung 2.3.:** Konvektiver Wärmeübergang an einer Grenzfläche.

resultiert. In der Mathematik wird diese Gleichung als Randbedingung 3. Art bezeichnet.

### Wärmestrahlung

Der reflexionsfreie Strahlungsaustausch zwischen schwarzen Körpern wird nach [PK05] durch

$$\dot{q}_{Str \leftrightarrow M} = \dot{q}_{Str \rightarrow M} - \dot{q}_{M \rightarrow Str} = \sigma_B F_{Str, M} (T_{Str}^4 - T^4) \quad (2.7)$$

beschrieben. Dabei bezeichnet  $\dot{q}_{Str \leftrightarrow M}$  die Wärmestromdichte,  $\sigma_B$  die Stefan-Boltzmann-Konstante,  $F_{Str, M}$  den Sichtfaktor zwischen dem Strahler und dem Medium sowie  $T_{Str}$  die Temperatur des Strahlers. In der gegebenen Anordnung werden jedoch graue Strahler angenommen, weshalb die Reflexion zu berücksichtigen ist. Damit sind die tatsächlichen Emissions- und Absorptionskoeffizienten zu ermitteln, welche die Absorptions- und Reflexionseigenschaften der Strahler und des Mediums berücksichtigen. Zu diesem Zweck wird ein Gedankenexperiment durchgeführt: Ein Teil der Strahlungsenergie wird absorbiert und der Rest reflektiert. Der reflektierte Teil wird ebenfalls wieder zum Teil absorbiert und reflektiert. Durch Weiterführen dieses Gedankenexperiments ergibt sich eine unendliche geometrische Reihe [PK05]

$$\epsilon_{Str} \epsilon_M \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \epsilon_{Str})^k (1 - \epsilon_M)^k = \frac{\epsilon_{Str} \epsilon_M}{1 - (1 - \epsilon_{Str})(1 - \epsilon_M)}, \quad (2.8)$$

mit dem Emissionskoeffizienten des Strahlers  $\epsilon_{Str}$  und des Mediums  $\epsilon_M$ . Damit folgt für das Strahlungsgesetz (2.7) der Zusammenhang

$$\dot{q}_{Str \leftrightarrow M} = \epsilon \sigma_B F_{Str, M} (T_{Str}^4 - T^4), \quad (2.9)$$

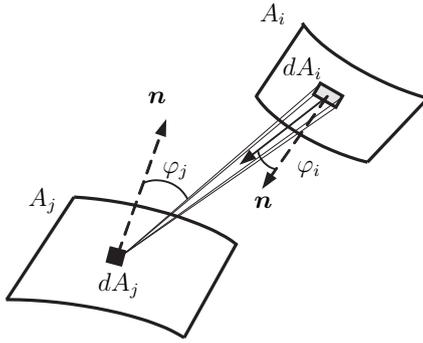
mit dem Emissionskoeffizienten

$$\epsilon = \frac{\epsilon_{Str} \epsilon_M}{1 - (1 - \epsilon_{Str})(1 - \epsilon_M)}. \quad (2.10)$$

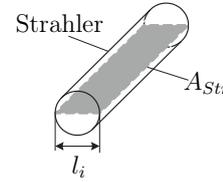
In dem Strahlungsgesetz (2.9) taucht nun noch der Sichtfaktor als unbestimmte Größe auf. Der Sichtfaktor zwischen zwei strahlenden Oberflächen wird nach [PK05] durch

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \varphi_i \cos \varphi_j}{\pi r_{ij}^2} dA_i dA_j \quad (2.11)$$

definiert, wobei  $\varphi_i$  und  $\varphi_j$  die Orientierung der Flächen zueinander und  $r_{ij}$  den Abstand der Flächen beschreiben. Der Zusammenhang wird in Abb. 2.4 verdeutlicht. In einer Vielzahl von realen Durchlauföfen werden plattenförmige bzw. röhrenförmige Strahler verwendet. Röhrenförmige Strahler weisen an der Oberseite oft eine reflektierende Schicht auf, um die Strahlungsleistung zu erhöhen. Aus diesem Grund wird diesen Strahlern zur Ermittlung des Sichtfaktors ebenso eine ebene Strahlerfläche zugrunde gelegt, wie in Abb. 2.5 veranschaulicht wird. Der Sichtfaktor ist entsprechend Gl. (2.11) ausschließlich von der



**Abbildung 2.4.:** Strahlungsaustausch zwischen emittierendem flächenelement  $dA_i$  und bestrahltem flächenelement  $dA_j$  mit ihren normalenvektoren  $\mathbf{n}$ .

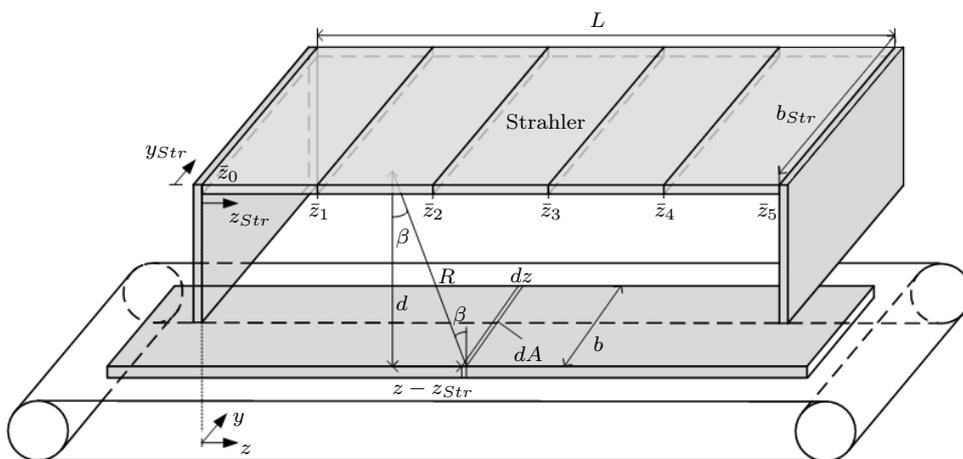


**Abbildung 2.5.:** Röhrenförmiger infra-rotstrahler mit dem durchmesser  $l_i$ .

geometrischen anordnung des prozesses abhängig. In der regel werden die strahler in einer ebene parallel zum transportband angeordnet, weshalb die in Abb. 2.6 dargestellte anordnung der bestimmung des sichtfaktors zugrundegelegt wird. Die auswirkungen der ofenaußenwände werden bei der modellierung nicht berücksichtigt, sondern als störung des systems interpretiert.

Nachdem die strahler und das medium parallel zueinander angeordnet sind, sind die einstrahlwinkel  $\varphi_i$  und  $\varphi_j$  gleich ( $\varphi_i = \varphi_j = \beta$ ). Für den abstand  $r_{ij} = R$  und den einstrahlwinkel  $\beta$  gelten folgende zusammenhänge:

$$R^2 = d^2 + (z - z_{Str})^2 + (y - y_{Str})^2 \quad \text{und} \quad \cos \beta = \frac{d}{R} \quad (2.12)$$

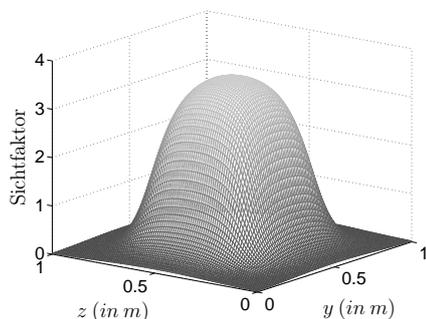


**Abbildung 2.6.:** Schematische darstellung der geometrischen anordnung des betrachteten durchlaufofens.

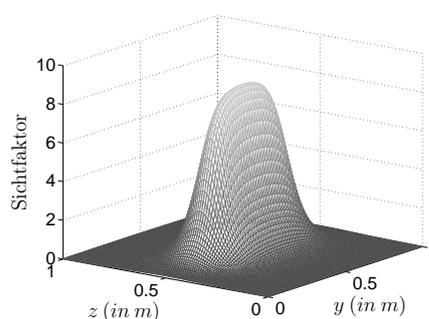
Der Sichtfaktor  $F_{Str,M}$  kann nun wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned}
 F_{Str,M} &= \frac{1}{A_{Str}} \int_{A_{Str}} \int_A \frac{\cos^2 \beta}{\pi R^2} dA dA_{Str} \\
 &= \frac{1}{A_{Str}} \int_{A_{Str}} \int_A \frac{d^2}{\pi (d^2 + (z - z_{Str})^2 + (y - y_{Str})^2)^2} dA dA_{Str}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

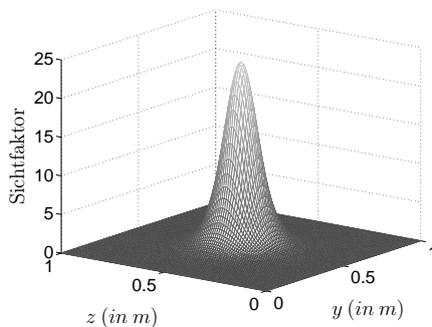
Die Strahlerfläche wird dabei mit  $A_{Str}$  und die Fläche des Mediums mit  $A$  bezeichnet. Abb. 2.7 zeigt die Sichtfaktoren für unterschiedlich ausgedehnte Plattenstrahler. Das Medium hat eine Ausdehnung von  $1 \times 1$  m und die Strahler sind mit einem Abstand von  $d = 0.2$  m um das Zentrum des Gutes angeordnet. Abb. 2.7(a) zeigt das Ergebnis bei einem quadratischen Strahler der Ausdehnung  $y_{Str} = 0.5$  m und  $z_{Str} = 0.5$  m, Abb. 2.7(b) bei einem rechteckförmigen Strahler der Ausdehnung  $y_{Str} = 0.5$  m und  $z_{Str} = 0.1$  m und Abb. 2.7(c) bei einem punktförmigen Strahler der Ausdehnung  $y_{Str} = 0.1$  m und  $z_{Str} = 0.1$  m. Die Amplitude des Sichtfaktors ist etwas trügerisch, da auf die Strahlerfläche normiert wurde. Zur Bestimmung der übertragenen Wärmemenge ist mit der Strahlerfläche zu multiplizieren, womit der punktförmige Strahler einen wesentlich geringeren Energieeintrag aufweist.



(a) Quadratischer Strahler mit  $0.25 \text{ m}^2$



(b) Rechteckförmiger Strahler mit  $0.05 \text{ m}^2$



(c) Punktförmiger Strahler mit  $0.01 \text{ m}^2$

**Abbildung 2.7.:** Sichtfaktoren für unterschiedlich ausgedehnte plattenförmige Strahler.

Die Erwärmung des durch den betrachteten Prozess transportierten Mediums wird in  $y$ -Richtung als gleichmäßig angenommen, weshalb nur der Verlauf des Sichtfaktors in Transportrichtung von Interesse ist. Aus diesem Grund wird im Folgenden nur ein Linienelement betrachtet:

$$dF_{Str,M}(z) = \frac{1}{A_{Str}} \int_{A_{Str}} \int_{y_0}^{y_b} \frac{d^2}{\pi(d^2 + (z - z_{Str})^2 + (y - y_{Str})^2)^2} dy dA_{Str} dz \quad (2.14)$$

Entsprechend der Anordnung und Lage der Strahler ergeben sich unterschiedliche Sichtfaktoren  $dF_{Str_j,M}$ , welche nach Gl. (2.14) wie folgt bestimmt werden:

$$dF_{Str_j,M}(z) = \frac{1}{A_{Str}} \int_0^{b_{Str}} \int_{\bar{z}_{j-1}}^{\bar{z}_j} \int_{y_0}^{y_b} \frac{d^2}{\pi(d^2 + (z - z_{Str})^2 + (y - y_{Str})^2)^2} dy dz_{Str} dy_{Str} dz \quad (2.15)$$

Eine analytische Lösung von Gl. (2.14) bzw. (2.15) ist nicht möglich. Der Integrand kann lediglich einmal analytisch integriert werden:

$$\begin{aligned} dF_{Str_j,M}(z) &= \frac{1}{A_{Str}} \int_0^{b_{Str}} \int_{y_0}^{y_b} \int_{\bar{z}_{j-1}}^{\bar{z}_j} \frac{d^2}{\pi \underbrace{(d^2 + (y - y_{Str})^2 + (z - z_{Str})^2)}_{\eta^2}} dz_{Str} dy dy_{Str} dz \\ &= \frac{1}{A_{Str} \pi} \int_0^{b_{Str}} \int_{y_0}^{y_b} \left( \frac{d^2 (\bar{z}_j - z)}{2\eta^2 (\eta^2 + (z - \bar{z}_j)^2)} + \frac{d^2 (z - \bar{z}_{j-1})}{2\eta^2 (\eta^2 + (z - \bar{z}_{j-1})^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 \arctan(\frac{\bar{z}_j - z}{\eta})}{2\eta^3} - \frac{d^2 \arctan(\frac{\bar{z}_{j-1} - z}{\eta})}{2\eta^3} \right) dy dy_{Str} dz \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die beiden verbleibenden Integrale sind numerisch zu lösen. In Abb. 2.8 ist das Ergebnis für den Fall von fünf plattenförmigen Strahlern der Länge  $L/5$  sowie den geometrischen Daten  $L = 1$  m,  $d = 0.11$  m,  $b_{Str} = 0.28$  m,  $y_0 = 0.115$  m,  $y_b = 0.165$  m dargestellt.

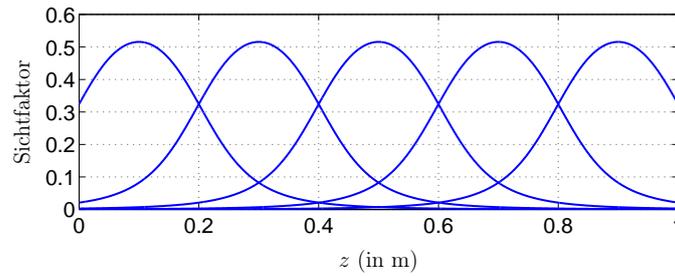
## Gesamtmodell

Mit der Integration der in den beiden letzten Abschnitten gewonnenen Ergebnisse in Gl. (2.2) folgt für die Modellgleichung des Prozesses der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - \frac{\lambda}{c \rho} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} &= \frac{\alpha \kappa_\alpha}{c \rho} (T_\Gamma(z, t) - T(z, t)) + \\ &+ \frac{\kappa_{Str} \epsilon \sigma_B}{c \rho} \sum_{j=1}^m dF_{Str_j,M}(z) (T_{Str_j}^4(t) - T^4(z, t)), \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit den Geometriefaktoren  $\kappa_\alpha = \frac{2(b+h)}{bh}$  und  $\kappa_{Str} = \frac{1}{h}$ . Bei Transportprozessen kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass der Wärmeleitungsvorgang aufgrund der relativ hohen Transportgeschwindigkeit erheblich langsamer als die Konvektion ist. Dies wird durch eine hohe Péclet-Zahl

$$Pe = \frac{c \rho v L}{\lambda} \gg 1 \quad (2.18)$$



**Abbildung 2.8.:** Sichtfaktoren der Anordnung aus Abb. 2.6.

ausgedrückt, welche das Verhältnis von konvektivem zu leitendem Wärmefluss wiedergibt. Aus diesem Grund kann der Diffusionsanteil in Gl. (2.17) vernachlässigt werden. Damit wird der Prozess durch die PDGL 1. Ordnung

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = c_\alpha (T_\Gamma(z, t) - T(z, t)) + c_{Str} \sum_{j=1}^m dF_{Str_j, M}(z) (T_{Str_j}^4(t) - T^4(z, t)), \quad (2.19)$$

beschrieben, mit den Koeffizienten  $c_\alpha = \frac{\alpha \kappa_\alpha}{c \rho}$  und  $c_{Str} = \frac{\kappa_{Str} \epsilon \sigma_B}{c \rho}$  sowie der eindimensionalen Anfangs- und Randbedingung

$$T(z, 0) = T_0(z), \quad T(0, t) = T_{z_0}(t). \quad (2.20)$$

Der Term  $v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z}$  repräsentiert die so genannte Advektion, also den Transport des Mediums durch ein festes Kontrollvolumen. Dieser Vorgang entspricht der Betrachtung eines vorbei bewegten Mediums durch eine Lupe und somit keinem Wärmeübergang. Der Wärmeübergang wird durch den Term  $c_\alpha (T_\Gamma - T)$  beschrieben.

### Mögliche Realisierungen des Durchlaufofens

Wie die bisherigen Ausführungen verdeutlicht haben, wird der verteilte Stelleingriff des betrachteten Prozesses durch die Anordnung einzelner Aktoren entlang des Prozesses realisiert. Die Wirkung der Aktoren auf das System wird mit den Sichtfaktoren beschrieben. Aus diesem Grund kann abhängig von der Anzahl der Aktoren im Wesentlichen zwischen drei Systemanordnungen unterschieden werden ( $\Omega = (0, L] \subseteq \mathbb{R}$ ):

1. Kontinuierliche Ortsfunktionen mit  $dF_{Str_j, M}(z) \in C^s(\Omega)$ ,  $j = 1 \dots m$ ,  $s \geq 1$ .
2. Örtlich beschränkte Wirkung der Aktoren mit  $dF_{Str_j, M}(z) \in L_2(\Omega)$ ,  $j = 1 \dots m$ .
3. Näherungsweise unendlich-dimensionale Stellgröße  $\bar{u}(z, t)$ .

Dabei bezeichnet  $L_2(\Omega)$  den Raum der im Gebiet  $\Omega$  quadratisch integrierbaren Funktionen. Der Fall kontinuierlicher Ortsfunktionen wurde bereits ausführlich behandelt. Der zweite Fall von örtlich beschränkter Wirkung der Aktoren entspricht der Unterteilung des Prozesses in einzelne Zonen, wodurch keine Überlagerung der Wirkung der einzelnen Aktoren auftritt. Damit können die einzelnen Zonen für die Regelung als entkoppelt betrachtet werden. Dies ist beispielsweise bei dem in [Kha07] diskutierten Glasvorherd sowie bei den in

[CD98] behandelten Prozessen, vorwiegend Rohrreaktoren, der Fall. Der verteilte Stelleingriff wird dabei durch

$$\bar{T}_{Str}(z, t) = (H(z) - H(z - \bar{z}_1)) T_{Str_1}(t) + \dots + (H(z - \bar{z}_{m-1}) - H(z - \bar{z}_m)) T_{Str_m}(t), \quad (2.21)$$

mit der Heaviside-Funktion  $H(z)$  beschrieben. Für die Modellgleichung eines Durchlaufofens folgt damit entsprechend Gl. (2.19)

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = c_\alpha (T_\Gamma(z, t) - T(z, t)) + \bar{c}_{Str} (\bar{T}_{Str}^4(z, t) - T^4(z, t)), \quad (2.22)$$

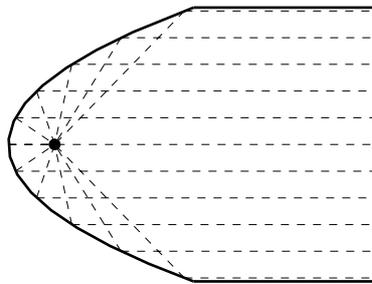
mit den Koeffizienten  $c_\alpha = \frac{\alpha \kappa_\alpha}{c \rho}$  und  $\bar{c}_{Str} = \frac{\kappa_{Str} \epsilon \sigma_B F}{c \rho}$  sowie der eindimensionalen Anfangs- und Randbedingung

$$T(z, 0) = T_0(z), \quad T(0, t) = T_{z_0}(t). \quad (2.23)$$

Der Faktor  $F$  bezeichnet den gleichförmigen Sichtfaktor innerhalb einer Zone. Zur Behandlung dieser Form des verteilten Eingriffs wird in dieser Arbeit unter anderem auch ein Durchlaufofen mit röhrenförmigen Heizstrahlern betrachtet. Die Strahler werden zu diesem Zweck durch Bleche voneinander getrennt. Die Bleche sind entsprechend einem Parabolspiegel geformt, um eine möglichst gleichförmige Strahlungsverteilung zu erreichen. Dazu wird der Strahler im Brennpunkt angebracht und eine möglichst große Ausdehnung der Trennflächen angestrebt, um eine ungleichförmige Strahlungsverteilung durch Streuungen und Reflexionen möglichst auszugleichen. Die Anordnung ist in Abb. 2.9 dargestellt. Damit ist die Annahme eines gleichförmigen Sichtfaktors durchaus gerechtfertigt.

Der dritte Fall einer näherungsweise unendlich-dimensionalen Stellgröße kann durch eine entsprechend große Anzahl an Aktoren, mit sowohl kontinuierlicher als auch beschränkter Ortsfunktion, erzeugt werden.

Im nächsten Abschnitt wird die praktische Umsetzung des modellierten Durchlaufofens vorgestellt.



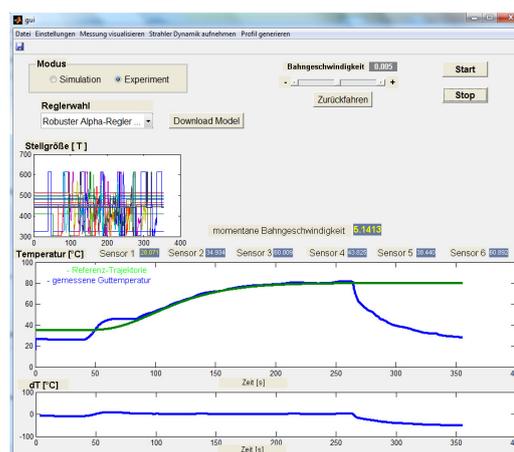
**Abbildung 2.9.:** Schematische Abbildung der Anordnung der Strahler im Brennpunkt der Reflektorbleche.

### 2.1.1.2. Versuchsaufbau

Im Rahmen dieser Arbeit entstand der in Abb. 2.10(a) dargestellte Versuchsaufbau, welcher einen Durchlaufofen repräsentiert. Der Prozess besteht aus 15 Halogen-Linienstrahlern, die gleichmäßig über eine Länge von  $L = 1.05\text{ m}$  angeordnet sind. Die Infrarotstrahler haben eine Leistung von  $1\text{ kW}$  und weisen an der Oberseite eine Reflexionsschicht auf, um die nutzbare Strahlungsleistung zu steigern. Die Strahler werden über eine Phasenanschnittsteuerung stufenlos gesteuert. Der Durchlaufofen kann mit Reflektorblechen ergänzt werden, um getrennte Heizzonen zu realisieren. Die Bleche sind näherungsweise als Parabolreflektoren geformt, womit eine gleichmäßige Energieverteilung in einer Heizzone erzielt werden soll (vgl. Abb. 2.9). Der Versuchsaufbau wird im Folgenden zur gezielten Erwärmung von Stückgütern verwendet, die mit einem Drahtgeflechtband durch den Prozess transportiert werden. Die in dieser Arbeit betrachtete mit dem Medium mitgeführte drahtlose Sensorik wird aus Gründen der einfacheren technischen Umsetzung über kabelgebundene Thermoelemente vom Typ J realisiert, welche in einer Energiekette geführt werden. Der Fokus der Arbeit liegt nicht bei der funkbasierten Sensorik selbst, sondern bei den damit resultierenden regelungstechnischen Möglichkeiten. Der gesamte Prozess wird über einen echtzeitfähigen Industrierechner betrieben und kann mit der in Abb. 2.10(b) dargestellten Bedienoberfläche gesteuert werden [Bau10]. Einlaufende Stückgüter werden durch eine Lichtschranke, welche sich unmittelbar vor dem Durchlaufofen befindet, erfasst. Im Folgenden wird kurz auf die einzelnen Komponenten und deren Übertragungsverhalten eingegangen.



(a) Versuchsaufbau



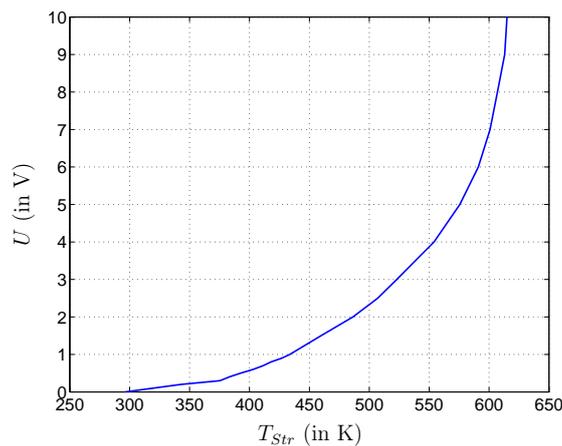
(b) Bedienoberfläche

**Abbildung 2.10.:** Darstellung der Versuchsanlage mit Bedienoberfläche.

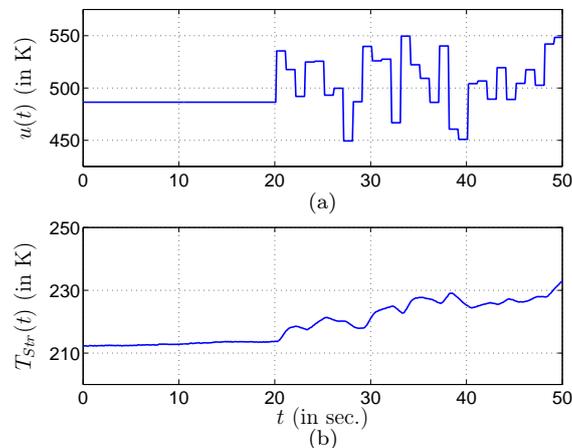
### Aktorik

Die Infrarotstrahler können unabhängig voneinander über eine Leistungselektronik, welche den Eingangsspannungsbereich von 0 bis 10 V aufweist, angesteuert werden. Der Zusammenhang zwischen Steuerspannung und Strahlertemperatur wird durch eine nichtlineare Kennlinie beschrieben, wie das Messergebnis in Abb. 2.11 zeigt. Der Leistungselektronik wird die inverse Kennlinie vorgeschaltet, um einen näherungsweise linearen Zusammenhang zwischen der Stellgröße  $u(t)$  und der Strahlertemperatur  $T_{Str}(t)$  zu erreichen. Abb. 2.12 zeigt die zur Identifikation der Aktordynamik verwendete Testsequenz und die daraus resultierende Strahlertemperatur. Die Testsequenz wurde dabei über die ermittelte nichtlineare Kennlinie aufgeschaltet und die Strahlertemperatur mit einem Infrarotsensor erfasst. In Abb. 2.13 ist die Wirkkette als Strukturbild dargestellt. Zur Bewertung des Modells wird das Gütemaß

$$J_{Str} = \left( 1 - \sqrt{\frac{\int_0^{t_{mess}} (T_{Str}(t) - \hat{T}_{Str}(t))^2 dt}{\int_0^{t_{mess}} T_{Str}^2(t) dt}} \right) \cdot 100\% \quad (2.24)$$



**Abbildung 2.11.:** Gemessene statische Kennlinie zwischen Steuerspannung  $U$  und Strahlertemperatur  $T_{Str}$ .



**Abbildung 2.12.:** Testsequenz des Eingangssignals (a) und die Signalantwort des Aktors (b).

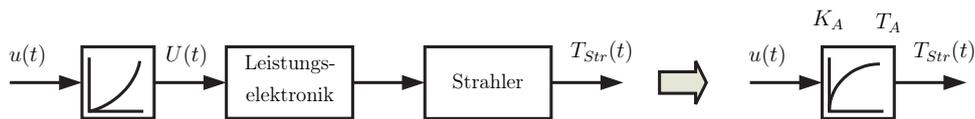


Abbildung 2.13.: Strukturbild der gesamten Wirkkette des Aktors.

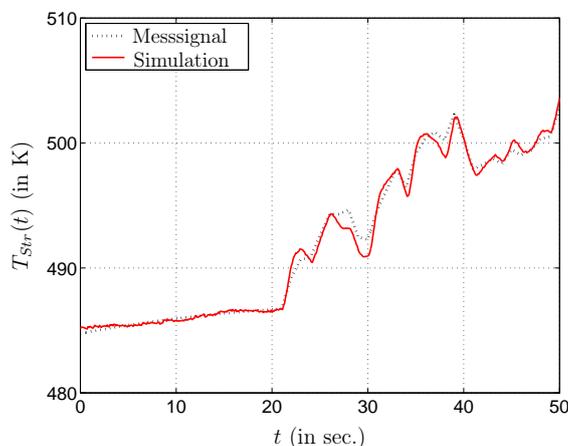


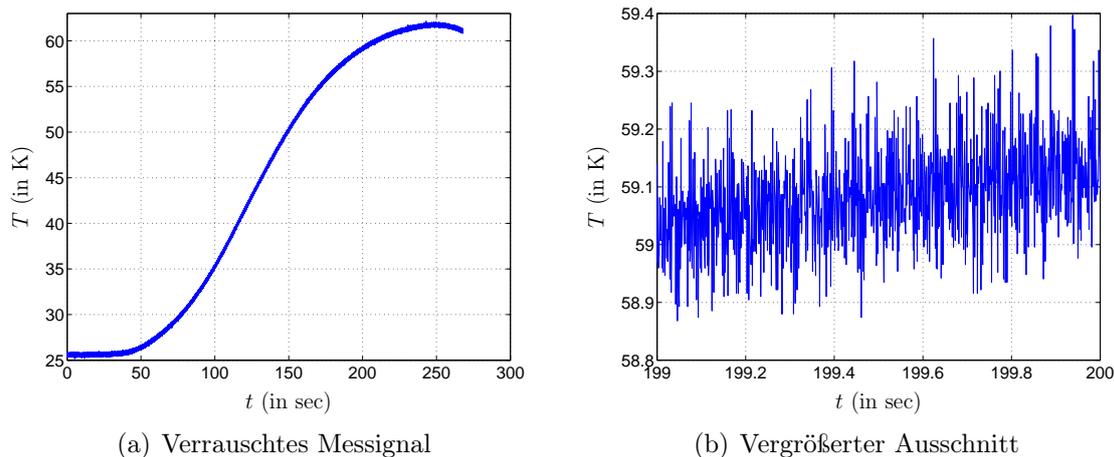
Abbildung 2.14.: Übereinstimmung von Messung und Modell der Aktordynamik.

herangezogen, wobei  $\hat{T}_{Str}(t)$  die geschätzte Strahlertemperatur des ermittelten Modells und  $t_{mess}$  den betrachteten Zeithorizont bezeichnet. Das Übertragungsverhalten kann mit einer Genauigkeit von  $J_{Str} = 92.4\%$  durch ein  $PT_1$ -Glied mit der Zeitkonstante  $T_A = 19.7$  sec und aufgrund der inversen Kennlinie mit der Proportionalverstärkung  $K_A = 1$  approximiert werden. Abb. 2.14 zeigt das Identifikationsergebnis. Die Messung der Strahlertemperatur während dem Betrieb ist allerdings nicht möglich.

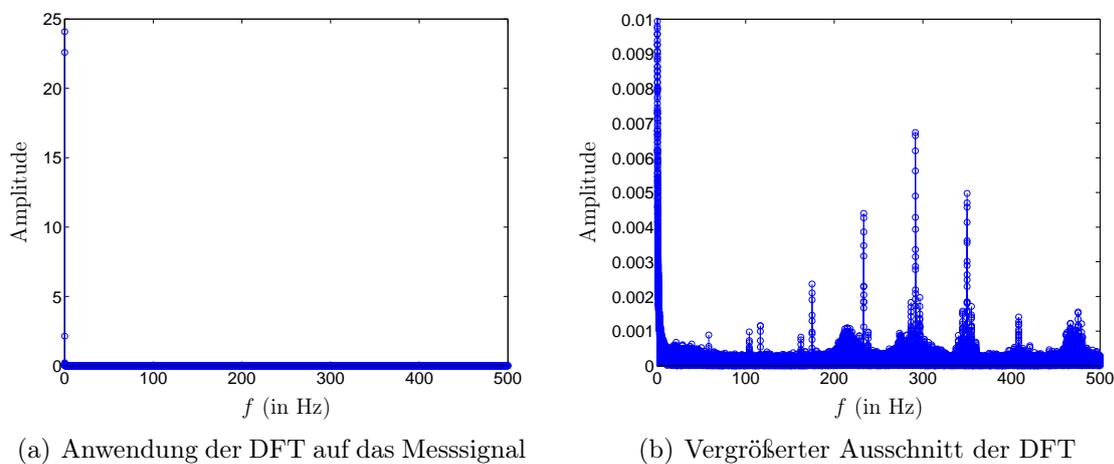
### Sensorik

Die mit dem Gut mitgeführte Sensorik wird durch Thermoelemente vom Typ J realisiert, welche nach Herstellerangaben eine Zeitkonstante von 0.7 sec aufweisen. Die Messsignale der Sensoren werden über Eingangsmodule aufbereitet und verstärkt. Die Vorgehensweise zur Kalibrierung der Sensoren kann in [Che09] nachgelesen werden. Abb. 2.15(a) zeigt ein Messergebnis, welches mit einer Abtastfrequenz von  $f_s = 1$  kHz aufgenommen wurde. Einen vergrößerten Ausschnitt gibt Abb. 2.15(b) wieder. Zur Signalanalyse wird die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) des Messsignals herangezogen, welche in Abb. 2.16(a) dargestellt ist. Abb. 2.16(b) zeigt einen vergrößerten Ausschnitt der niedrigen Amplitudenteile. Aus den beiden Abbildungen ist deutlich erkennbar, dass der Signalanteil deutlich unter 3 Hz liegt und ein merkbarer Rauschanteil erst ab ca. 150 Hz auftritt.

Diese deutliche Trennung von Nutz- und Rauschanteil ermöglicht die Anwendung eines frequenzselektiven Filters. Damit kann der noch vorhandene Rauschanteil bei minimaler Phasenverschiebung ausgeblendet werden. Zu diesem Zweck wird ein einfacher Butterworth-

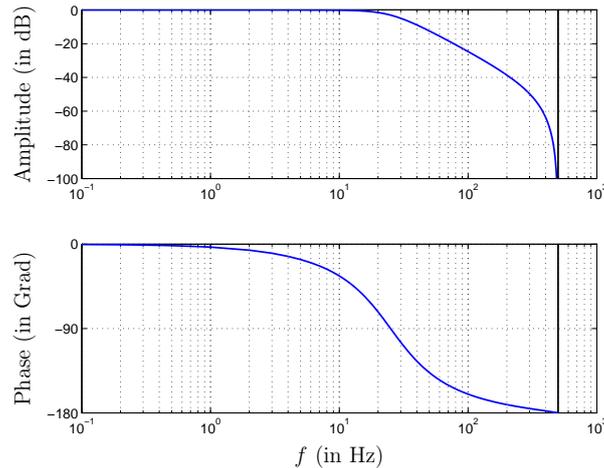


**Abbildung 2.15.:** Unbearbeitetes Messsignal eines Thermoelementes vom Typ J.

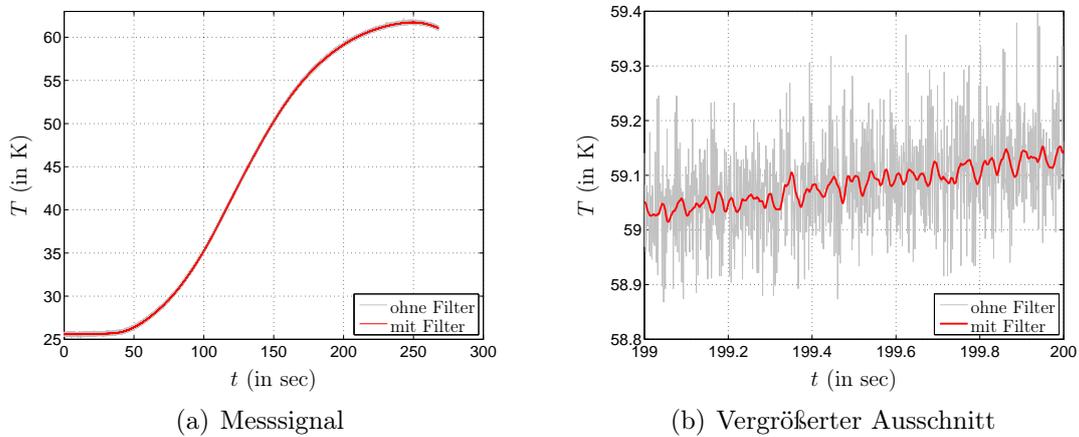


**Abbildung 2.16.:** Diskretes Fourier-Spektrum des Messsignals aus Abb. 2.15(a), sowie ein vergrößerter Ausschnitt zur Darstellung der dominanten Rauschteile des Signals.

Filter herangezogen. Im Folgenden wird lediglich der resultierende Filter angegeben. Für detailliertere Ausführungen zum Entwurf frequenzselektiver Filter wird auf weiterführende Literatur, beispielsweise [KJ08], verwiesen. Die Sperrfrequenz wird zu  $f_{sp} = 50$  Hz und die Ordnung des Butterworth-Filter zu  $n = 2$  gewählt, um die resultierende Phasenverschiebung möglichst gering zu halten. Das Bode-Diagramm des resultierenden zeitdiskreten Filters ist in Abb. 2.17 dargestellt. Wie Abb. 2.18 zeigt, kann der Rauschteil bei vernachlässigbarer Phasenverschiebung in dem relevanten Frequenzbereich ( $f < 3$  Hz) deutlich reduziert werden.



**Abbildung 2.17.:** Bode-Diagramm des diskreten Butterworth-Filters zweiter Ordnung, mit der Sperrfrequenz  $f_{sp} = 50$  Hz und der Abtastfrequenz  $f_s = 1$  kHz.



**Abbildung 2.18.:** Ergebnis bei Anwendung des entworfenen Butterworth-Filters.

### Prozessmodell

Der vorliegende Prozess repräsentiert den in Kap. 2.1.1.1 modellierten Durchlaufofen und wird bei der Ausführung ohne Reflektorbleche entsprechend Gl. (2.19) durch

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = c_\alpha (T_\Gamma(z, t) - T(z, t)) + c_{Str} \sum_{j=1}^m dF_{Str_j, M}(z) (T_{Str_j}^4(t) - T^4(z, t)) \quad (2.25)$$

und bei der Ausführung mit den Reflektorblechen entsprechend Gl. (2.22) durch

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = c_\alpha (T_\Gamma(z, t) - T(z, t)) + \bar{c}_{Str} (\bar{T}_{Str}^4(z, t) - T^4(z, t)), \quad (2.26)$$

mit der Anfangsbedingung  $T(z, 0) = T_0(z)$  und der Randbedingung  $T(0, t) = T_{z_0}(t)$ , beschrieben. Als Güter werden exemplarisch PVC-Plättchen mit der Ausdehnung  $b = 0.05$  m und  $h = 0.005$  m betrachtet. Für PVC liegen aus der Physik Kenndaten vor [VDI06], womit eine erste Abschätzung der Koeffizienten  $c_\alpha$ ,  $c_{Str}$  und  $\bar{c}_{Str}$  möglich ist. Die betreffenden Kenndaten können Anhang A.1 entnommen werden. Die resultierenden Werte für

die Parameter lauten damit

$$c_\alpha = 1.7 \cdot 10^{-3} 1/\text{sec}, \quad c_{Str} = 4 \cdot 10^{-12} 1/\text{K}^3 \text{sec} \quad \text{und} \quad \bar{c}_{Str} = 8 \cdot 10^{-12} 1/\text{K}^3 \text{sec}. \quad (2.27)$$

Der Faktor  $F$  im Fall von getrennten Zonen wurde dabei aufgrund der Bündelung der Strahlung durch die Reflektoren zu  $F = 2$  angenommen.

Die Identifikation der realen Prozessparameter stellt bei verteilt-parametrischen Systemen ein nicht triviales Problem dar. Unter Anwendung einer mit den Gütern mitgeführten Sensorik in Kombination mit der Methode der Charakteristiken, welche in Abschnitt 3.3 vorgestellt wird, kann dieses Problem relativ einfach gelöst werden. Nachdem zu diesem Zweck die Methode der Charakteristiken erforderlich ist, wird die Parameteridentifikation erst in Abschnitt 3.5 erläutert.

### 2.1.2. Trocknungsprozess

Als weiteres Anwendungsbeispiel wird ein Trocknungsprozess betrachtet, welcher auch einen Druck- bzw. Lackierprozess abbildet. Im Gegensatz zu einem Durchlaufofen weisen diese Prozesse neben der Temperatur des Mediums noch dessen Feuchtegehalt  $X_{H_2O}(z, t)$  als Zustandsfunktion auf. Der in Abschnitt 2.1.1 vorgestellte Durchlaufofen soll nun beispielsweise zur Trocknung von bedrucktem Papier herangezogen werden. Dazu wird das Modell eines industriellen Trocknungsprozesses [MKS05, SL09] zugrunde gelegt und an den Durchlaufofen angepasst. Damit folgt für die Modellgleichungen ( $0 < z \leq L$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_P(z, t)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial T_P(z, t)}{\partial z} &= c_\alpha (T_\Gamma(z, t) - T_P(z, t)) + c_{Str} (\bar{u}_{Str}(z, t) - \bar{F}(z) T_P^4(z, t)) \\ &- c_V (X_{H_2O}(z, t) - X_{H_2O,ref} e^{-A_{H_2O}(T_P(z, t) - T_{ref})}) \end{aligned} \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial X_{H_2O}(z, t)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial X_{H_2O}(z, t)}{\partial z} = -c_{H_2O} (X_{H_2O}(z, t) - X_{H_2O,ref} e^{-A_{H_2O}(T_P(z, t) - T_{ref})}), \quad (2.28b)$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} T_P(z, 0) &= T_{P,0}(z), & T_P(0, t) &= T_{P,\bar{z}_0}(t), \\ X_{H_2O}(z, 0) &= X_{H_2O,0}(z), & X_{H_2O}(0, t) &= X_{H_2O,\bar{z}_0}(t), \end{aligned} \quad (2.29)$$

und den Koeffizienten  $c_\alpha = \frac{2\alpha}{\rho_P c_P}$ ,  $c_{Str} = \frac{2\sigma_B \epsilon}{\rho_P c_P d_P}$ ,  $c_V = \frac{2\beta_{H_2O} \Delta H_{H_2O}}{d_P c_P}$ ,  $c_{H_2O} = \frac{2\beta_{H_2O}}{d_P}$ ,  $\bar{F}(z) = \sum_{j=1}^m dF_{Str_j, M}(z)$  und  $\bar{u}_{Str}(z, t) = \sum_{j=1}^m dF_{Str_j, M}(z) T_{Str_j}^4(t)$ .  $T_P$  bezeichnet die Temperatur des Mediums,  $X_{H_2O}(z, t)$  den Feuchtegehalt als Quotient des Gewichts des Wassers zum Gewicht des Mediums,  $\beta_{H_2O}$  den effektiven Stoffübergangskoeffizient des Wassers,  $\Delta H_{H_2O}$  die Verdampfungsenthalpie des Wassers,  $A_{H_2O}$  die Konstante der Gleichgewichtslinie,  $\rho_P$  die Dichte,  $c_P$  den spezifischen Wärmeübergangskoeffizienten und  $d_P$  die Dicke des Mediums.

Die verbleibenden Größen wurden bereits in Abschnitt 2.1.1 definiert. Die Papierbahn bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 0.1 m/sec durch den Prozess. Die Werte der einzelnen physikalischen Konstanten sind Anhang A.2 zu entnehmen.

### 2.1.3. Rohrreaktor

Das dritte Anwendungsbeispiel betrifft einen Rohrreaktor mit der Länge  $L$  und dem Innendurchmesser  $d$ , welcher schematisch in Abb. 2.19 dargestellt wird. Der Mantel des Rohrreaktors besteht aus  $m$  Heizzonen. Der Stoff  $A$  mit der Konzentration  $C_A$  fließt mit der Geschwindigkeit  $v(t)$  durch den Rohrreaktor und reagiert dabei mit dem vorhandenen Katalysator. Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Rohrreaktor dominiert die Konvektion gegenüber der Diffusion. Damit kann der Reaktor durch ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden. Nach [Gil66] wird ein derartiger Prozess mit der Konzentration  $C_A(z, t)$  und der Temperatur  $T(z, t)$  als Zustandsfunktionen durch ( $z \in (0, L]$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_A(z, t)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial C_A(z, t)}{\partial z} &= -C_A(z, t) k_0 e^{-\frac{E_A}{RT(z, t)}} \\ \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} &= C_A(z, t) k_0 \underbrace{\frac{\Delta H_R}{\rho c_p}}_{c_1} e^{-\frac{E_A}{RT(z, t)}} - \underbrace{\frac{4k_w}{\rho c_p d}}_{c_2} (T(z, t) - \bar{T}_w(z, t)) \\ C_A(z, 0) &= C_{A,0}(z) & T(z, 0) &= T_0(z) \\ C_A(0, t) &= C_{A,\bar{z}_0}(t) & T(0, t) &= T_{\bar{z}_0}(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

modelliert. Für die Wandtemperatur gilt dabei

$$\bar{T}_w(z, t) = (H(z) - H(z - \bar{z}_1)) T_{w_1}(t) + \dots + (H(z - \bar{z}_{m-1}) - H(z - \bar{z}_m)) T_{w_m}(t), \quad (2.31)$$

wobei  $H(z)$  die Heaviside-Funktion bezeichnet. Die Konstante  $c_1$  fasst die Reaktionsenthalpie  $\Delta H_R$  die Dichte  $\rho$  und den spezifischen Wärmekoeffizient  $c_p$  zusammen. In der Konstanten  $c_2$  sind neben  $\rho$  und  $c_p$  noch der Wärmeübergangskoeffizient  $k_w$  und der Reaktorinnendurchmesser  $d$  enthalten. Die verbleibenden Konstanten bezeichnen die Aktivierungsenergie für Stoff  $A$  mit  $E_A$ , die allgemeine Gaskonstante mit  $R$  und den Stoßfaktor

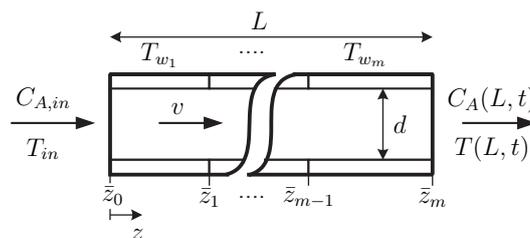


Abbildung 2.19.: Schematischer Aufbau des Rohrreaktors.

mit  $k_0$ . Im Anhang A.3 sind die Systemparameter mit den aus [SDI02] entnommenen Werten zusammengefasst.

## 2.2. Allgemeine Systembeschreibung

Die in dieser Arbeit betrachteten Transportprozesse repräsentieren konvektionsdominante Prozesse. Aus diesem Grund können, wie bereits im letzten Abschnitt erläutert wurde, langsame Vorgänge wie Wärmeleitung und Diffusion vernachlässigt werden. Diese Tatsache erlaubt die Reduktion des Problems auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Zudem werden nur Prozesse betrachtet, deren Zustandsvariablen die gleiche charakteristische Geschwindigkeit und Richtung aufweisen. Im Folgenden wird angenommen, dass die Zustandsvariablen quadratisch integrierbar, also  $L_2$ -Funktionen, sind und dem Zustandsraum  $X(\Omega)$  angehören, welcher demnach einen Funktionenraum beschreibt. Das Skalarprodukt und die Norm einer  $L_2$ -Funktion  $\mathbf{w}(z, t)$  sei definiert durch

$$(\mathbf{w}_1(z, \cdot), \mathbf{w}_2(z, \cdot)) = \int_{\Omega} \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_2 d\Omega, \quad \|\mathbf{w}(z, \cdot)\|_{L_2}^2 = (\mathbf{w}(z, \cdot), \mathbf{w}(z, \cdot)). \quad (2.32)$$

Damit repräsentiert der Zustandsraum  $X(\Omega)$  einen Hilbertraum. Sei nun  $\Omega = (0, L] \subseteq \mathbb{R}$  ein Gebiet,  $z \in \Omega$  und  $t \in \mathbb{R}^+$  die unabhängigen Variablen und  $\mathbf{w}(z, t) \in X(\Omega) = L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  die abhängigen Variablen, so können die betrachteten Prozesse allgemein durch das folgende System von PDGLn erster Ordnung beschrieben werden:

$$\frac{\partial \mathbf{w}(z, t)}{\partial t} + v(t) \frac{\partial \mathbf{w}(z, t)}{\partial z} - \mathbf{f}(\mathbf{w}(z, t), \bar{u}(z, t), z) = \mathbf{0}, \quad (2.33)$$

mit  $v(t) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{f} : L_2(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L_2(\Omega, \mathbb{R}) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dem verteilten Stelleingriff  $\bar{u}(z, t) \in L_2(\Omega, \mathbb{R})$ , der Randbedingung  $\mathbf{w}(0, t) = \mathbf{w}_{z_0}(t) \in \mathbb{R}^n$  und der Anfangsbedingung  $\mathbf{w}(z, 0) = \mathbf{w}_0(z)$ ,  $\mathbf{w}_0 \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Weist der Prozess einen diffusiven Anteil auf, wird eine Geschwindigkeit vorausgesetzt die groß genug ist, um die Bedingung  $Pe \gg 1$  zu erfüllen (vgl. Abschnitt 2.1.1).

Die Variable  $v(t)$  ist in allen PDGLn von Gl. (2.33) identisch und beschreibt die charakteristische Geschwindigkeit, mit welcher die Zustandsvariablen durch den Prozess transportiert werden. Derartige Systeme werden als PDGLn mit gleichem Hauptteil bezeichnet [CH68]. Der Analyse und Lösung dieser Systemklasse widmet sich das nächste Kapitel.

Für den Regelungsentwurf werden nur einzelne Volumenelemente des Mediums, welche mit einem Sensor ausgestattet sind, betrachtet. Um mehrere Punkte in der Regelung zu berücksichtigen, kann beispielsweise der Mittelwert der Regelgrößen einzelner Volumenelemente als Regelgröße herangezogen werden. Die Anzahl der Regelgrößen, die sich gleichzeitig im Prozess befinden, sei zunächst nicht festgelegt. Die Messgröße  $y_{M,i}(t)$  von Volumenelement

$i$  ist, unter Anwendung der Dirac'schen Delta-Funktion  $\delta(z)$ , durch

$$y_{M,i}(t) = \int_0^L \delta(z - vt + \Delta z_i) \mathbf{c}_M^T \mathbf{w}(z, t) dz, \quad \mathbf{c}_M \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{Z} \quad (2.34)$$

definiert. Der Abstand zwischen den Sensoren wird dabei durch  $\Delta z_i$  beschrieben. Wie bereits erläutert wurde, wird eine Trajektorienfolgeregelung bezüglich der Regelgröße der Volumenelemente  $i$  betrachtet. Damit entspricht die Regelgröße  $y_{C,i}(t)$  von Volumenelement  $i$  einer Zustandsvariablen bzw. einer Kombination der Zustandsvariablen entlang des Prozesses und wird entsprechend Gl. (2.34) durch

$$y_{C,i}(t) = \int_0^L \delta(z - vt + \Delta z_i) \mathbf{c}_C^T \mathbf{w}(z, t) dz, \quad \mathbf{c}_C \in \mathbb{R}^n, i \in \mathbb{Z} \quad (2.35)$$

definiert. Die behandelten Prozesse werden demnach durch ein System von PDGLn 1. Ordnung mit zeitvarianter Ausgangsgleichung beschrieben. Der verteilte Stelleingriff  $\bar{u}(z, t)$  sei als getrennte Funktion von Ort und Zeit darstellbar

$$\bar{u}(z, t) := \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{d}_{\bar{u}}(t), \quad \text{mit } \mathbf{d}_{\bar{u}}^T(t) := \left( d(\tilde{u}_1(t)) \quad \cdots \quad d(\tilde{u}_m(t)) \right), \quad (2.36)$$

wobei die Vektorfunktion  $\tilde{\mathbf{b}}(z)$  die örtliche Wirkung der Aktoren und  $d(\tilde{u}_j(t))$  eine allgemeine nichtlineare Funktion der Größen  $\tilde{u}_j(t)$  beschreibt. Die Vektorfunktion  $\tilde{\mathbf{b}}(z)$  klassifiziert den verteilten Eingriff und beschreibt im Wesentlichen die Verkopplung des Systemeingriffs der Aktoren. Dementsprechend wird die Vektorfunktion  $\tilde{\mathbf{b}}(z)$  im Fall von getrennten Wirkzonen durch Heaviside-Funktionen  $H(z)$  beschrieben

$$\tilde{b}_j(z) = H(z - \bar{z}_{j-1}) - H(z - \bar{z}_j), \quad j = 1 \dots m, \quad (2.37)$$

womit, im Gegensatz zum Fall einer kontinuierlicher Ortsfunktion  $\tilde{b}_j(z) \in C^s(\Omega)$ ,  $s \geq 1$ , keine Verkopplung vorliegt. Zusätzlich zu den beiden Eingriffen kann noch ein nahezu unendlich-dimensionaler Eingriff durch entsprechend viele Aktoren realisiert werden.

Der Vektor  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  repräsentiert den Ausgang eines konzentrierten und linearen dynamischen Systems, welches durch die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_u(t) &= \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) \\ \tilde{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u(t), \end{aligned} \quad (2.38)$$

mit  $\mathbf{A}_u \in \mathbb{R}^{qm \times qm}$  und  $\mathbf{C}_u \in \mathbb{R}^{m \times qm}$  beschrieben wird. Im Folgenden wird angenommen, dass jeder Aktor unabhängig ansteuerbar ist. Damit weisen der Eingangsvektor  $\mathbf{u}(t)$  die Dimension  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  und die Eingangsmatrix die Dimension  $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{qm \times m}$  auf. Das System (2.38) besteht entsprechend der räumlichen Trennung der Aktoren aus entkoppelten Teilsystemen, weshalb  $\mathbf{A}_u$  eine Blockdiagonalmatrix repräsentiert. Die einzelnen Teilsysteme beschreiben dabei die Dynamik der Aktoren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann

angenommen werden, dass die Dynamik der Aktoren in Regelungsnormform darstellbar ist:

$$\mathbf{x}_{u,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathbf{0} & & 0 & 1 \\ -a_{0,j} & -a_{1,j} & \cdots & -a_{q-1,j} \end{pmatrix} \mathbf{x}_{u,j} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_j \quad (2.39)$$

$$\tilde{u}_j = \begin{pmatrix} c_{u_0,j} & \cdots & c_{u_{q-1},j} \end{pmatrix} \mathbf{x}_{u,j}, \quad j = 1 \dots m.$$

Insgesamt kann nun ein allgemeines Gesamtmodell durch

$$\begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{w}(z, t) \\ \dot{\mathbf{x}}_u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v(t) \partial_z \mathbf{w}(z, t) + \mathbf{f}(\mathbf{w}, \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u, z) \\ \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_u \end{pmatrix} \mathbf{u}(t), \quad (2.40)$$

mit den Ausgangsgleichungen (2.34) und (2.35) formuliert werden. Das System (2.40) liegt in einer Dreiecksstruktur vor, welche bei der Linearisierung um ein stationäres Profil  $\mathbf{w}_S(z)$  und den damit resultierenden stationären Zustandsvariablen  $\mathbf{x}_{u,S}$  und Stellgrößen  $\mathbf{u}_S$  deutlicher erkennbar wird ( $\Delta \mathbf{w} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_S$ ,  $\Delta \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_{u,S}$ ,  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_S$ )

$$\begin{pmatrix} \partial_t \Delta \mathbf{w}(z, t) \\ \Delta \dot{\mathbf{x}}_u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{w}(z, t) \\ \Delta \mathbf{x}_u(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_u \end{pmatrix} \Delta \mathbf{u}(t). \quad (2.41)$$

Für die linearen Operatoren gilt  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{w}}|_{\mathbf{w}_S, \mathbf{x}_{u,S}} \in \mathcal{L}(X)$  und  $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}_u}|_{\mathbf{w}_S, \mathbf{x}_{u,S}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, X)$  mit  $\mathbf{a} = -v(t) \partial_z \mathbf{w}(z, t) + \mathbf{f}(\cdot)$ . Dabei bezeichnet  $\mathcal{L}(X)$  den Raum aller begrenzten linearen Operatoren vom Hilbertraum  $X$  in den Hilbertraum  $X$ .

## 2.3. Schlussfolgerung

Die dargestellten Anwendungsbeispiele haben verdeutlicht, dass eine Vielzahl von Transportprozessen durch partielle Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden können (vgl. Gl. (2.33)). Die Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik resultiert dabei in zeitvarianten Ausgangsgleichungen (Gl. (2.34) und Gl. (2.35)). Die somit vorliegende Systembeschreibung und die damit verbundenen Systemeigenschaften erfordern eine ausführliche Analyse, um geeignete Ansätze zum Regelungs- und Beobachterentwurf basierend auf diesen Sensoren entwickeln zu können. Dieser Aufgabe widmet sich das nächste Kapitel.

# 3. Analyse der Transportprozesse

Die in dieser Arbeit betrachteten Prozesse werden durch ein System von PDGLn erster Ordnung beschrieben. In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften sowie Lösungsmethoden dieser Klasse von partiellen Differentialgleichungen diskutiert. Dabei wird vorerst nur der Hauptteil des Systems der PDGLn ( $\mathbf{f}(\cdot) = \mathbf{0}$ ) betrachtet. Aus den damit gewonnenen Erkenntnissen werden in Bezug auf die Anwendung einer mitgeführten Sensorik Rückschlüsse auf den Steuerungs-, Beobachter- und Regelungsentwurf sowie auf die Parameteridentifikation gezogen.

## 3.1. Klassifikation

Zur Klassifikation der mit Gl. (2.33) beschriebenen Systeme wird die folgende allgemeine Definition herangezogen [Whi74]:

**Definition 3.1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r$  ein Gebiet,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{z} \in \Omega$  die unabhängigen Variablen und  $\mathbf{w}(\mathbf{z}, t) \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  die abhängigen Variablen, so kann ein System von homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wie folgt beschrieben werden

$$\frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{z}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{h}_i(\mathbf{w}) = \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{z}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{z}, t)}{\partial z_i} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

mit den kontinuierlich differenzierbaren im Allgemeinen nichtlinearen Funktionen  $\mathbf{h}_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $i = 1 \dots r$ . Für jede Funktion  $\mathbf{h}_i(\mathbf{w})$  wird eine Matrix  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definiert:

$$\mathbf{A}_i := \begin{pmatrix} \frac{\partial h_{1,i}}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial h_{1,i}}{\partial w_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{n,i}}{\partial w_1} & \dots & \frac{\partial h_{n,i}}{\partial w_n} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

System (3.1) wird als hyperbolisch bezeichnet, wenn die Matrix  $\mathbf{A} := \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{A}_r$ ,  $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$  nur reelle Eigenwerte aufweist und diagonalisierbar ist. Sind die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  reell und paarweise verschieden, so ist die Matrix diagonalisierbar und das System (3.1) wird als strikt hyperbolisch bezeichnet.

Aus der Definition 3.1 ist erkennbar, dass strikt hyperbolische Systeme unterschiedliche charakteristische Geschwindigkeiten und Richtungen aufweisen [Whi74].

Die mit Gl. (2.33) beschriebene Systemklasse beschränkt sich auf eine örtliche Dimension, weshalb sie den Spezialfall mit  $r = 1$  darstellt. Die Anwendung von Definition 3.1 auf den Hauptteil von Gl. (2.33) führt zu der Folgerung:

*Folgerung 3.1.* System (2.33) ist hyperbolisch, jedoch nicht strikt hyperbolisch.

*Beweis:* Für  $\mathbf{A}$  folgt nach Gl. (3.2)

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} v & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & v \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  liegt bereits in Diagonalform vor und enthält ausschließlich reelle Diagonalelemente. Nach Definition 3.1 ist das System somit hyperbolisch. Nachdem alle Eigenwerte gleich sind, ist das System jedoch nicht strikt hyperbolisch.  $\square$

Aus Gl. (3.3) ist ersichtlich, dass der Hauptteil von Gl. (2.33) aus  $n$  entkoppelten PDGLn erster Ordnung besteht. Zudem wird aus der Diagonalstruktur der Matrix  $\mathbf{A}$  deutlich, dass sämtliche Zustandsvariablen die gleiche charakteristische Geschwindigkeit und Richtung, also den gleichen Hauptteil, aufweisen.

Bei partiellen Differentialgleichungen wird zusätzlich zu der von den gewöhnlichen Differentialgleichungen bekannten Unterscheidung von linearen und nichtlinearen Differentialgleichungen noch zwischen semilinearen und quasilinearen Differentialgleichungen unterschieden. Nachdem in Gl. (2.33) die Koeffizientenfunktionen vor den höchsten partiellen Ableitungen der Zustandsvektorfunktion  $\mathbf{w}(z, t)$  nicht von  $\mathbf{w}(z, t)$  abhängen, beschreibt Gl. (2.33) ein System von semilinearen PDGLn bzw. bei linearer Funktion  $\mathbf{f}(\cdot)$  ein System von linearen PDGLn.

Im Folgenden werden nun einige Eigenschaften des Differentialoperators diskutiert.

## 3.2. Eigenschaften des Differentialoperators

Eine grundlegende Eigenschaft des Differentialoperators erster Ordnung kann bereits anhand eines einfachen Beispiels abgeleitet werden. Zum besseren Verständnis wird deshalb vor der formalen Analyse des Differentialoperators diese Eigenschaft anhand der Lösung der homogenen Form von Gl. (2.33) mit homogenen Randbedingungen diskutiert. Das System wird durch  $n$  entkoppelte PDGLn erster Ordnung ( $\mathbf{w}(z, t) \in L_2((0, L], \mathbb{R}^n)$ )

$$\frac{\partial w_i(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial w_i(z, t)}{\partial z} = 0, \quad i = 1 \dots n \quad (3.4)$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$w_i(z, 0) = w_{0,i}(z), \quad i = 1 \dots n \quad (3.5)$$

$$\mathbf{w}(0, t) = \mathbf{0}, \quad (3.6)$$

beschrieben. Aus der physikalischen Anschauung ist klar, dass die Anfangsbedingung aus dem Prozess transportiert wird. Damit scheint

$$w_i(z, t) = \begin{cases} w_{0,i}(z - vt) & \text{für } vt \leq z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7)$$

ein geeigneter Lösungsansatz zu sein. Einsetzen des Lösungsansatzes in Gl. (3.4) resultiert in

$$\frac{\partial w_{0,i}(z - vt)}{\partial t} + v \frac{\partial w_{0,i}(z - vt)}{\partial z} = -v \frac{\partial w_{0,i}(z - vt)}{\partial z} + v \frac{\partial w_{0,i}(z - vt)}{\partial z} = 0 \quad \text{für } vt \leq z \\ 0 \quad \text{sonst} \quad (3.8)$$

und erfüllt damit die partiellen Differentialgleichungen sowie die Anfangsbedingungen. Die Lösung (3.7) beschreibt den Transport der Anfangsbedingung mit der charakteristischen Geschwindigkeit  $v$  aus dem Prozess und repräsentiert eine grundlegende Eigenschaft des Differentialoperators erster Ordnung. Die Anfangsbedingung ist demnach nach der so genannten Verweilzeit  $T_V = L/v$ , mit der Prozesslänge  $L$ , vollständig abgeklungen. Diese Eigenschaft unterscheidet den Differentialoperator erster Ordnung deutlich von homogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche ein exponentielles Abklingen der Anfangsbedingung aufweisen. Die Lösung (3.7) wird durch einen so genannten Schiebeoperator gebildet, welcher durch

$$(\mathbf{T}_\tau(t)\mathbf{w}_0)(\tau) = \begin{cases} \mathbf{f}(\tau - t) & \text{für } \tau - t \geq 0 \\ \mathbf{0} & \text{für } \tau - t < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

definiert ist. Der Differentialoperator erster Ordnung erzeugt demnach einen Verschiebeoperator. Der Zusammenhang der gewonnenen Lösung mit der PDGL kann unter Anwendung der Halbgruppentheorie gezeigt werden. Zu diesem Zweck wird zunächst die Definition der stark stetigen (oder  $C_0$ -) Halbgruppe  $\mathbf{T}(t)$  auf dem Hilbertraum  $X$  definiert, welche den  $\mathbb{R}_+$  auf  $\mathcal{L}(X)$  abbildet.

**Definition 3.2** ( $C_0$ -Halbgruppe [EN06]). *Eine Funktion  $\mathbf{T}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$  heißt stark stetige ( $C_0$ -) Halbgruppe, falls gilt*

$$(i) \quad \mathbf{T}(\tau + t) = \mathbf{T}(\tau)\mathbf{T}(t) \quad \forall \tau, t \geq 0,$$

$$(ii) \quad \mathbf{T}(0) = \mathbf{I},$$

(iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{T}(t)\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_0 \quad \forall \mathbf{w}_0 \in X$ .

Dabei bezeichnet  $\mathbf{I}$  den Identitätsoperator auf  $X$ . Der Schiebeoperator (3.9) erfüllt die Bedingungen einer  $C_0$ -Halbgruppe [CZ95] und wird auch als (rechte) Translationshalbgruppe bezeichnet. Die Eigenschaften der  $C_0$ -Halbgruppe direkt anhand ihrer Definition abzulesen ist oft schwierig. Aus diesem Grund wird der  $C_0$ -Halbgruppe ein charakteristisches und einfacheres Objekt zugeordnet, der so genannte *Erzeuger*. Zudem ist aus der physikalischen Modellierung im Allgemeinen der Erzeuger der  $C_0$ -Halbgruppe durch die PDGL und nur selten die  $C_0$ -Halbgruppe selbst gegeben. Der Zusammenhang der Lösung (3.7) mit den PDGLn (3.4) wird also durch den Erzeuger der  $C_0$ -Halbgruppe hergestellt, welcher Allgemein definiert ist durch

**Definition 3.3** (Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe [CZ95]). *Der infinitesimale Erzeuger  $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  einer stark stetigen Halbgruppe  $\mathbf{T}(t)$  auf dem Hilbert-Raum  $X$  ist definiert als der Operator*

$$\mathcal{A}\mathbf{w}_0 := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{T}(t)\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0}{t}, \quad \forall \mathbf{w}_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad (3.10)$$

mit dem Gebiet

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \left\{ \mathbf{w}_0 \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{T}(t)\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_0}{t} \text{ existiert} \right\}. \quad (3.11)$$

Die Anwendung der Definition des Erzeugers auf die Translationshalbgruppe (3.9) mit  $\mathbf{w}_0 \in X$  und  $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\mathbf{T}(t)\mathbf{w}_0)(z) - \mathbf{w}_0(z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{w}_0(z - vt) - \mathbf{w}_0(z)}{t} = -v \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{w}_0(z - vt) - \mathbf{w}_0(z)}{-vt}, \quad (3.12)$$

resultiert gerade in der mit  $-v$  gewichteten rechtsseitigen Ableitung von  $\mathbf{w}_0$  in  $z$ :  $-v \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial z}$ . Der mit der Geschwindigkeit  $v$  gewichtete partielle Differentialoperator erster Ordnung ist demnach der infinitesimale Erzeuger der (rechten) Translationshalbgruppe, wie auch in [EN06] gezeigt wird. Damit stellt der intuitiv gefundene Ansatz (3.7) die Lösung der PDGL (3.4) dar. Bei genauerer Betrachtung des Schiebeoperators ist erkennbar, dass auch nicht differenzierbare  $L_2$ -Vektorfunktionen durch den Prozess transportiert werden können. Die Lösung lässt demnach mehr Funktionen zu als die PDGL selbst [CZ95, Whi74]. Dies stellt eine weitere grundlegende Eigenschaft dieser Systemklasse dar.

Zur Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung ist demnach aus dem Erzeuger  $\mathcal{A}$  die dazugehörige  $C_0$ -Halbgruppe  $\mathbf{T}(t)$  zu ermitteln. Die Existenz einer  $C_0$ -Halbgruppe zu einem gegebenem Erzeuger  $\mathcal{A}$  wird in einer Reihe von Theoremen diskutiert [EN00, EN06]. Eine Möglichkeit, die  $C_0$ -Halbgruppe aus seinem Erzeuger zu bestimmen, besteht aus der Berechnung der inversen Laplace-Transformation der Resolventen des Systemoperators  $\mathcal{A}$ . Zur Definition der Resolventen des Erzeugers  $\mathcal{A}$  wird die Laplace-Transformation des ho-

mogenen Cauchy-Problems

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{w}(z, t)}{\partial t} &= \mathcal{A}\mathbf{w}(z, t), \quad t \geq 0, z \in (0, L] \\ \mathbf{w}(0, z) &= \mathbf{w}_0(z) \\ \mathbf{w}(t, 0) &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{3.13}$$

in dem Gebiet im Hilbertraum  $X = L_2((0, L])$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \left\{ \mathbf{w} \in X, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \in X \text{ und } \mathbf{w}(t, 0) = \mathbf{0} \right\}\tag{3.14}$$

betrachtet:

$$s\hat{\mathbf{w}}(s, z) = \mathcal{A}\hat{\mathbf{w}}(s, z) + \mathbf{w}_0(z)\tag{3.15}$$

Damit folgt mit dem Identitätsoperator  $\mathbf{I}$  auf  $X$  für die Lösung im Laplace-Bereich

$$\hat{\mathbf{w}}(s, z) = (s\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}\mathbf{w}_0(z).\tag{3.16}$$

Die Resolvente des Operators  $\mathcal{A}$  wird nun definiert als

$$\mathcal{R}(s, \mathcal{A}) = (s\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(X).\tag{3.17}$$

Die Laplace-Rücktransformation der Verknüpfung der Resolventen mit der Anfangsbedingung ist äquivalent zu der gesuchten  $C_0$ -Halbgruppe [CZ95, EN00, EN06]:

$$\hat{\mathcal{L}}^{-1}\{\mathcal{R}(s, \mathcal{A})\mathbf{w}_0(z)\} = (\mathbf{T}(t)\mathbf{w}_0)(z)\tag{3.18}$$

Die Resolvente liefert damit eine Möglichkeit die  $C_0$ -Halbgruppe explizit zu bestimmen. Die Inverse in Gl. (3.17) existiert für nahezu alle  $s \in \mathbb{C}$ . Die Werte von  $s$ , für die die Inverse nicht existiert, gehören zu dem Spektrum  $\sigma(\mathcal{A})$  von  $\mathcal{A}$ , wie die folgende Definition besagt.

**Definition 3.4** (Spektrum von  $\mathcal{A}$  [BHW04]). *Sei  $\mathcal{A}$  ein linearer Operator im Hilbert-Raum  $X$ ,  $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ . Dann heißt  $s$  Spektralpunkt von  $\mathcal{A}$ , wenn die Inverse von  $s\mathbf{I} - \mathcal{A}$  unbegrenzt ist. Andernfalls gehört  $s$  zur Resolventenmenge von  $\mathcal{A}$ . Die Menge aller Spektralpunkte bilden das Spektrum  $\sigma(\mathcal{A})$  von  $\mathcal{A}$ .*

Die Definition des Spektrums von  $\mathcal{A}$  entspricht im endlich-dimensionalen Raum der Definition der Eigenwerte. Dementsprechend kann als Alternative zur Definition 3.4 das Spektrum von  $\mathcal{A}$  durch lösen des Eigenwertproblems bezüglich des linearen Operators  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$

$$\mathcal{A}\varphi(z) = s\varphi(z), \quad \varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\tag{3.19}$$

mit den Randbedingungen aus dem in Gl. (3.14) definierten Gebiet  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , der Eigenvektorfunktion  $\varphi(z)$  und dem dazugehörigen Eigenwert  $s$  bestimmt werden. Mit dieser Erkenntnis

kann nun das Spektrum des Erzeugers der Translationshalbgruppe ermittelt werden. Der Erzeuger wird entsprechend den zuvor getätigten Ausführungen durch

$$\mathcal{A}\mathbf{x}(z, t) = -v \frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial z} \quad (3.20)$$

definiert. Das dazu gehörige Eigenwertproblem mit der Randbedingung  $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{0}$  lautet

$$-v \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(z)}{\partial z} = s\boldsymbol{\varphi}(z) \quad (3.21)$$

und führt zu

$$\boldsymbol{\varphi}(z) = \mathbf{c} e^{-\frac{s}{v}z}. \quad (3.22)$$

Aus der nicht trivialen Lösung (3.22) ist ersichtlich, dass die Inverse  $(s\mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1}$  nur für  $s_i = -\infty$  unbegrenzt ist [Bal76].

Die Lösung von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung weist demnach eine endliche Abklingzeit auf. Wie bereits in dem einleitenden Beispiel gezeigt wurde, ist die Anfangsbedingung nach der Verweilzeit  $T_V = L/v$  vollständig abgeklungen. Dieses Ergebnis lässt deutlich den Unterschied zu endlich-dimensionalen Systemen erkennen, welche keine endliche Abklingzeit der Anfangsbedingung aufweisen. Aus diesem Grund können partielle Differentialgleichungen erster Ordnung nicht zufriedenstellend durch eine endlich-dimensionale Approximation mit einer der Methoden von Galerkin dargestellt werden [CD98, Fle84]. Dieses Verhalten kann auch bei konvektionsdominanten partiellen Differentialgleichungen beobachtet werden. Die Forderung der Methode von Galerkin nach einem adäquaten Abfall der Energie der höheren Moden des partiellen Differentialoperators kann nicht mehr ausreichend erfüllt werden, wie in Anhang B an einem Beispiel verdeutlicht wird. Deswegen sind im Grunde unendlich viele Moden erforderlich, um das dynamische Verhalten ausreichend beschreiben zu können. Zudem stellen Approximationsverfahren, wie die Methode von Galerkin, Verbindungen zwischen benachbarten durch den Prozess transportierten Volumenelementen her. Somit wird dem System ein Verhalten aufgezwungen, welches bei PDGL 1. Ordnung nicht vorliegt. Transportprozesse lassen auch eine sprunghafte Änderung der Randbedingung zu, welche durch den Prozess transportiert wird [Str04]. Dies ist durch eine modale Beschreibung nicht exakt abbildbar. Zudem stellt die Beschreibung der Messgröße des durch den Prozess transportierten Sensors mit diesen Methoden ein nicht triviales Problem dar. Bei der Anwendung von finiten Differenzen wird dabei abhängig von der Diskretisierung der Einsatz von Interpolationsmethoden erforderlich.

Die mit der Halbgruppentheorie diskutierten Eigenschaften linearer PDGLn erster Ordnung lassen auch eine geometrische Interpretation der Lösung zu. Zu diesem Zweck kann die so genannte Methode der Charakteristiken herangezogen werden, welche diese Eigenschaft zur Lösung der PDGLn erster Ordnung nutzt und problemlos auf quasilineare PDGLn erster Ordnung erweitert werden kann. Diese Methode eignet sich sehr gut zur Simulation, zum

Steuerungs-, Beobachter- und Regelungsentwurf der betrachteten Systemklasse. Wie im Folgenden gezeigt wird, trifft dies besonders dann zu, wenn eine Sensorik mit dem Medium mitgeführt wird. Aus diesem Grund wird die Methode im nächsten Abschnitt ausführlich diskutiert.

### 3.3. Methode der Charakteristiken

Die Methode der Charakteristiken repräsentiert die geometrische Interpretation der Lösung von quasilinearen PDGLn erster Ordnung, mit welcher die exakte Lösung der PDGLn gefunden werden kann [Deb05]. Zur besseren Verdeutlichung der Methode wird im Folgenden die quasilineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen  $z$  und  $t$  und einer abhängigen Variablen  $w(z, t) \in L_2(\Omega)$  in einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}$  mit der Randbedingung  $w(z, t) = g(z, t)$  auf  $\Gamma \subset \Omega$  betrachtet:

$$a(z, t, w) \frac{\partial w}{\partial z} + b(z, t, w) \frac{\partial w}{\partial t} - c(z, t, w) = 0 \quad (3.23)$$

Gleichung (3.23) kann auch als Skalarprodukt formuliert werden:

$$(a, b, c) \left( \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}, -1 \right)^T = 0 \quad (3.24)$$

Nun wird angenommen, dass  $w = w(z, t)$  die Lösung von Gl. (3.23) darstellt oder in impliziter Form

$$F(z, t, w) \equiv w(z, t) - w = 0 \quad (3.25)$$

eine mögliche Lösungsfläche im  $(z, t, w)$ -Raum repräsentiert. Die Funktion  $F(z, t, w) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet die Integralfläche von Gleichung (3.23). Der Gradient der Integralfläche wird durch  $\nabla F = \left( \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial t}, -1 \right)^T$  beschrieben und steht normal zur Integralfläche. Damit folgt aus Gleichung (3.24), dass das Vektorfeld  $(a, b, c)$  in der Tangentialebene von  $F(z, t, w) = 0$  liegen muss. Eine charakteristische Kurve wird nun dadurch definiert, dass ihre Tangente in jedem Punkt  $(z, t, w)$  mit dem Vektorfeld  $(a, b, c)$  zusammenfällt. Werden die charakteristischen Kurven durch folgende mit der Variablen  $\mu$  parametrisierten Gleichungen beschrieben

$$z = \xi_1(\mu) \quad , \quad t = \xi_2(\mu) \quad , \quad w(\boldsymbol{\xi}(\mu)) = x(\mu) \quad , \quad (3.26)$$

so gilt für den Tangentialvektor dieser Kurven  $\left( \frac{d\xi_1}{d\mu}, \frac{d\xi_2}{d\mu}, \frac{dx}{d\mu} \right)$ , welcher per Definition gleich dem Vektor  $(a, b, c)$  sein muss. Damit folgt für die charakteristischen Kurven ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen bezüglich der Variablen  $\mu$ :

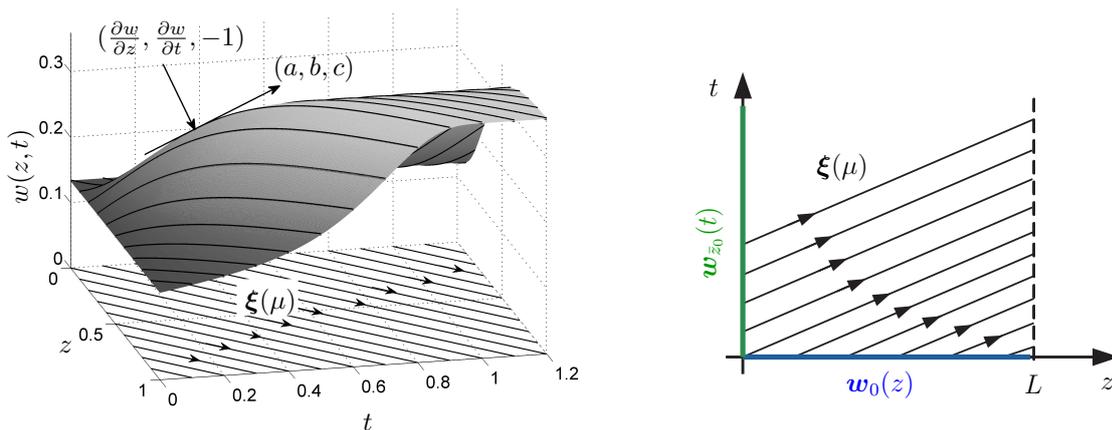
$$\frac{d\xi_1}{d\mu} = a(\xi_1, \xi_2, x), \quad \frac{d\xi_2}{d\mu} = b(\xi_1, \xi_2, x), \quad \frac{dx}{d\mu} = c(\xi_1, \xi_2, x). \quad (3.27)$$

Diese Differentialgleichungen werden als *charakteristische Differentialgleichungen* der quasilinearen PDGL (3.23) bezeichnet. Gilt  $c = 0$ , so ist aus Gleichung (3.27) ersichtlich, dass die Lösung  $w(\xi(\mu)) = x(\mu)$  entlang der charakteristischen Kurve konstant bleibt. Das bedeutet aus physikalischer Sicht, dass der Zustandsfunktion  $w$  weder Energie zu- noch abgeführt und somit lediglich die Anfangsbedingung durch den Prozess transportiert wird. Dieses Verhalten wird auch durch den in Abschnitt 3.2 definierten Verschiebeoperator beschrieben. In diesem Fall entspricht der Prozess demnach einem Totzeit-System. Die Projektion der charakteristischen Kurven auf die  $(z, t)$ -Ebene werden als *Grundcharakteristiken* der quasilinearen PDGL (3.23) bezeichnet. Abb. 3.1 veranschaulicht die Zusammenhänge. Die Steigung der Grundcharakteristiken der quasilineare PDGL wird durch den folgenden Zusammenhang ausgedrückt:

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{b(\xi_1, \xi_2, x)}{a(\xi_1, \xi_2, x)}. \quad (3.28)$$

Die Anfangsbedingungen der Zustandsvariablen entlang der Grundcharakteristiken resultieren, abhängig von der Zeit  $t$ , entweder aus der Anfangsbedingung  $\mathbf{w}(z, 0) = \mathbf{w}_0(z)$  für  $t = 0$  oder aus der Randbedingung  $\mathbf{w}(0, t) = \mathbf{w}_{z_0}(t)$  für  $t > 0$ , wie in Abb. 3.2 dargestellt ist.

Die Verallgemeinerung der geometrischen Interpretation auf hyperbolische PDGL-Systeme erster Ordnung mit gleichem Hauptteil führt auf die besondere Eigenschaft, dass die charakteristischen Kurven die gleichen Grundcharakteristiken besitzen [CH68].



**Abbildung 3.2.:** Grundcharakteristiken mit den Anfangs- und Randbedingungen.

**Abbildung 3.1.:** Tangential und Normalenvektor der Lösungsfläche im Punkt  $(z, t, w)$ .

### 3.4. Resultierende Systembeschreibung

Die Anwendung der Methode der Charakteristiken auf die allgemeine Modellgleichung (2.33) eines Transportprozesses führt auf die charakteristischen Differentialgleichungen

$$\xi_1'(\mu) = v(\xi_2(\mu)) \quad (3.29)$$

$$\xi_2'(\mu) = 1 \quad (3.30)$$

$$\mathbf{x}'(\mu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \bar{u}(\boldsymbol{\xi}(\mu)), \xi_1(\mu)), \quad (3.31)$$

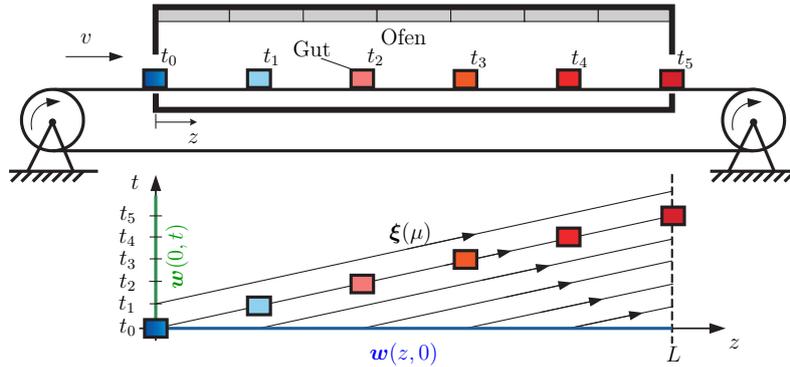
mit  $\bar{u}(\boldsymbol{\xi}(\mu)) = \tilde{\mathbf{b}}(\xi_1(\mu))^T \tilde{\mathbf{u}}(\xi_2(\mu))$  und den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}(0)) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\xi}(0) = \begin{cases} (z_0 \ 0)^T & \text{für } t = 0, \ z_0 \in [0, L] \\ (0 \ t_0)^T & \text{für } t > 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Gl. (3.29) und Gl. (3.30) beschreiben den Verlauf der Grundcharakteristiken und gemeinsam mit Gl. (3.31) den Verlauf der charakteristischen Kurven durch die Lösungsflächen der PDGLn (2.33). Der Verlauf der Grundcharakteristiken beschreibt den Transport der einzelnen differentiellen Volumenelemente, welche Energie oder Masse speichern, durch den Prozess. Die Änderung der Zustandsvariablen eines dieser Volumenelemente wird hingegen durch das DGL-System (3.31) beschrieben. Wie aus Gl. (3.30) ersichtlich ist, entspricht der Parameter  $\mu$  bis auf den Anfangszeitpunkt  $t_0$  der Zeit  $t$ , weshalb im Folgenden sämtliche Größen entlang der charakteristischen Kurve mit der Zeit  $t$  parametrisiert werden. Wird die Methode der Charakteristiken auf die Ausgangsgleichung (2.34) für einen mitgeführten Sensor angewendet, resultiert der Zusammenhang

$$y_M(t) = \mathbf{c}_M^T \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}(\mu)) = \mathbf{c}_M^T \mathbf{x}(t). \quad (3.33)$$

Somit misst der mitgeführte Sensor ein Element bzw. eine Linearkombination der Elemente des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t)$ . Entspricht die Messgröße nicht der Regelgröße, kann diese durch den Einsatz eines Beobachter bestimmt werden, wie in Abschnitt 5 erläutert wird. Der Regelungsentwurf für ein differentielles Volumenelement an der Stelle  $z(t)$  kann somit entlang der charakteristischen Kurve anhand von Gl. (3.31) erfolgen, womit das Problem auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen reduziert wird. Zu diesem Zweck ist jede Funktion auf die charakteristische Kurve abzubilden ( $\tilde{\mathbf{b}}(z) \mapsto \tilde{\mathbf{b}}(t)$ ). Die Beziehung zwischen dem Transport der Güter und den Grundcharakteristiken wird in Abb. 3.3 am Beispiel eines Durchlaufofen veranschaulicht. Der Prozess wird durch eine semi-lineare hyperbolische PDGL erster Ordnung beschrieben, mit der Zeit  $t$  und dem Ort  $z$  als unabhängige Variablen. Die Abbildung zeigt Momentaufnahmen des Transportes eines punktförmigen Gutes durch den Prozess und verdeutlicht, dass die Grundcharakteristik die Bewegung des punktförmigen Gutes durch den Prozess beschreibt.



**Abbildung 3.3.:** Grundcharakteristiken für Transportprozesse mit konstanter Transportgeschwindigkeit  $v$  am Beispiel eines Durchlaufofens, sowie die Aufenthaltsorte eines Stückgutes zu verschiedenen Zeiten  $t_i$ .

Befinden sich mehrere mitgeführte Sensoren in dem Prozess, ist die Systembeschreibung um zusätzliche Zustandsvektoren  $\mathbf{x}_i(t)$ , welche Gl. (3.31) erfüllen, zu erweitern. Dabei beschreiben die resultierenden DGL-Systeme die zeitliche Entwicklung jedes Zustandsvektors  $\mathbf{x}_i(t)$  entlang unterschiedlicher Grundcharakteristiken und dementsprechend an unterschiedlichen Positionen  $z_i(t) = z_i(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$  innerhalb des Prozesses. Damit folgt für die Systembeschreibung im Fall von  $p$  betrachteten Volumenelementen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t), \tilde{\mathbf{b}}_1(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \mathbf{f}_p(\mathbf{x}_p(t), \tilde{\mathbf{b}}_p(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), t). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Aus Gl. (3.34) ist ersichtlich, dass die einzelnen Differentialgleichungssysteme abhängig von den Funktionen  $\tilde{\mathbf{b}}_i(t)$  über die Aktoren verkoppelt sind. Wird das System noch um die Dynamik der Aktoren erweitert, folgt für die gesamte Systembeschreibung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_p(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_u(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_G(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t), \tilde{\mathbf{b}}_1(t), \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u(t), t) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_p(\mathbf{x}_p(t), \tilde{\mathbf{b}}_p(t), \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u(t), t) \\ \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x}_G(t), \tilde{\mathbf{b}}_1(t), \dots, \tilde{\mathbf{b}}_p(t), t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_u \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \mathbf{u}(t) \quad (3.35)$$

mit  $\mathbf{x}_G \in \mathbb{R}^{p n + q m}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{p n + q m}$ ,  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(p n + q m) \times m}$  sowie den Mess- und Regelgrößen

ßen ( $\mathbf{y}_M \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{y}_C \in \mathbb{R}^p$ )

$$\mathbf{y}_M(t) = \left( \begin{array}{ccc|c} (c_{M_1} \cdots c_{M_n}) & & \mathbf{0} & \\ & \ddots & & \\ & & & \mathbf{0} \end{array} \right) \mathbf{x}_G(t) = \underbrace{\left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{c}_M^T & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_M^T & \end{array} \right)}_{\mathbf{C}_M \in \mathbb{R}^{p \times (p+n+m)}} \mathbf{x}_G(t),$$

$$\mathbf{y}_C(t) = \underbrace{\left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{c}_C^T & \mathbf{0} & \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_C^T & \end{array} \right)}_{\mathbf{C}_C \in \mathbb{R}^{p \times (p+n+m)}} \mathbf{x}_G(t).$$
(3.36)

Das gesamte System liegt demnach in eingangsaffiner Form vor:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_G(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_G(t), t) + \mathbf{G} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_M(t) &= \mathbf{C}_M \mathbf{x}_G(t), \quad \mathbf{y}_C(t) = \mathbf{C}_C \mathbf{x}_G(t) \end{aligned}$$
(3.37)

Wird die Vektorfunktion  $\tilde{\mathbf{b}}(z)$  des verteilten Stelleingriffs entsprechend Gl. (2.37) beschrieben, so kann der Prozess in einzelne Zonen mit jeweils einem Aktor aufgeteilt werden (vgl. Abb. 3.4). Die örtliche Wirkung des Aktors innerhalb einer Zone wird entsprechend Gl. (2.37) als gleichmäßig verteilt angenommen ( $\tilde{b}_j(z) = 1$ ,  $z \in (\bar{z}_{j-1}, \bar{z}_j]$ ,  $j = 1 \dots m$ ). Befindet sich zu jedem Zeitpunkt nur eine Regelgröße in einer dieser Zonen, resultiert für die Systembeschreibung einer Zone

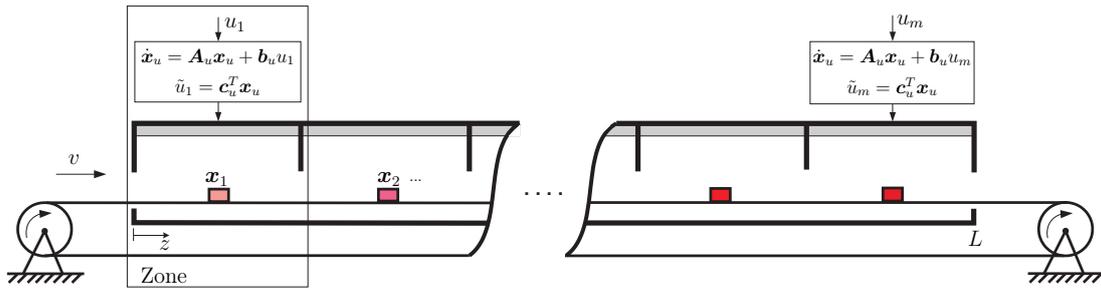
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_{u,j}(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_{G,j}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{c}_{u,j}^T \mathbf{x}_{u,j}(t), t) \\ \mathbf{A}_{u,j} \mathbf{x}_{u,j}(t) \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t), t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{u,j} \end{pmatrix}}_{\mathbf{g}} u_j(t)$$
(3.38)

mit  $\bar{\mathbf{x}}_G \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $u_j \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{n+m}$ ,  $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{(n+m)}$ , sowie den Mess- und Regelgrößen ( $y_M \in \mathbb{R}$ ,  $y_C \in \mathbb{R}$ )

$$y_{M,j}(t) = (\mathbf{c}_M^T \ \mathbf{0}^T) \bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t), \quad y_{C,j}(t) = (\mathbf{c}_C^T \ \mathbf{0}^T) \bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t).$$
(3.39)

Aufgrund der Aufteilung des Systems in einzelne Zonen, wird die Kopplung der Differentialgleichungen (3.35) aufgehoben, wie Gl. (3.38) verdeutlicht.

*Bemerkung 3.1.* Mit der Methode der Charakteristiken wird deutlich, dass der Prozess, bei Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik, bezogen auf die Ausgangsgrößen durch eine PDGL 1. Ordnung (2.33) mit zeitvarianter Ausgangsgleichung ((2.34) bzw. (2.35)) oder äquivalent durch zeitvariante gewöhnliche Differentialgleichungen (3.35) mit konstanter Ausgangsgleichung (3.36) entlang der charakteristischen Kurve beschrieben werden kann.



**Abbildung 3.4.:** Schematischer Aufbau eines Transportprozesses mit getrennten Zonen am Beispiel eines Durchlaufofens.

Die auf diese Weise gewonnene Systembeschreibung weist die Eigenschaft auf, dass die Zustandsvariablen  $\mathbf{x}_i(t)$  den Prozess und damit den definierten Funktionenraum verlassen. Zu diesen Zeitpunkten wird dieser Zustandsvektor inaktiv und fällt aus der Betrachtung heraus. Wird kein neues Volumenelement in die Darstellung aufgenommen, reduziert sich die Dimension der Zustandsraumdarstellung (3.35). Wird hingegen ein neues zu betrachtendes Volumenelement in den Prozess transportiert bevor ein Volumenelement den Prozess verlässt, erhöht sich die Dimension von Gl. (3.35). Aufgrund dieser Tatsache ist der Kontrollhorizont wie folgt zu definieren:

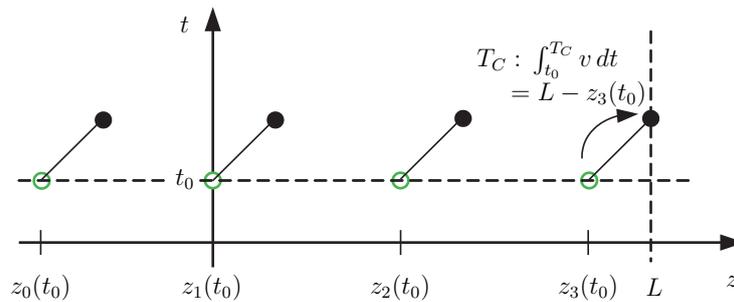
**Definition 3.5** (Kontrollhorizont  $T_C$ ). *Der Kontrollhorizont  $T_C$  eines Transportprozesses der Länge  $L$  mit einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik sei definiert durch*

$$T_C : \min_{T_C} \left\{ \int_{t_0}^{T_C} v dt = L - z_p(t_0), \int_{t_0}^{T_C} v dt = -z_0(t_0) \right\}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.40)$$

wobei  $z_p(t_0)$  die Position des betrachteten Volumenelements am Ende des Prozesses und  $z_0(t_0)$  die Position des betrachteten Volumenelements unmittelbar vor dem Prozess zum Zeitpunkt  $t_0$  beschreibt.

Verlässt eines der betrachteten Volumenelemente den Prozess bzw. läuft ein neues zu betrachtendes Volumenelement in den Prozess ein, wird das System neu initialisiert und der Kontrollhorizont demnach neu bestimmt. Dies spiegelt auch die Eigenschaft (i) einer  $C_0$ -Halbgruppe aus Definition 3.2 wider, dass sich die Lösung zwischen zwei Zeitpunkten aus Lösungen zwischen diesen Zeitpunkten zusammensetzen lässt. Anhand dieser Überlegung ist eine Art schaltendes und strukturvariables Verhalten des resultierenden Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen erkennbar. Abb. 3.5 veranschaulicht den Kontrollhorizont für eine beliebige Konstellation.

Auf die gleiche Weise kann der Beobachtungshorizont definiert werden, da die betrachteten Volumenelemente mit einem Sensor ausgestattet sind. Damit werden sie ebenso aus dem Prozess und somit dem Betrachtungsgebiet transportiert und stehen für eine Zustandsschätzung nicht mehr zur Verfügung. Mit den neu in den Prozess transportierten Sensoren



**Abbildung 3.5.:** Darstellung des Kontrollhorizont eines Transportprozesses bezüglich der zu beeinflussenden Volumenelemente ( $p = 3$ ) anhand der Grundcharakteristiken.

stehen weitere Informationen zur Verfügung, welche in die Zustandsschätzung integriert werden können.

*Bemerkung 3.2.* Bisher wurde der Fall betrachtet, dass die Aktoren ortsfest sind und das Medium transportiert wird. Der verteilte Stelleingriff und das Medium führen zueinander eine Relativbewegung aus. Aus diesem Grund ist auch die umgekehrte Betrachtung eines ruhenden Mediums und einer transportierten Aktorik denkbar. In diesem Fall bewegt sich die Aktorik sowie das betrachtete Gebiet, welches durch die Ausdehnung der Aktorik ( $\Omega = [0, L]$ ) definiert wird, mit der Geschwindigkeit  $v(t)$  in die gegengesetzte Richtung. Die Bilanzgleichung für den resultierenden Prozess führt auf die gleiche formale Systembeschreibung wie in Kapitel 2. Damit sind die gleichen Methoden zur Beobachtung und Regelung heranzuziehen, weshalb diese Betrachtung keine Vorteile mit sich bringt und im Folgenden nicht weiter verfolgt wird. Wird jedoch das Gebiet  $\Omega$  durch ein ruhendes endlich ausgedehntes Medium definiert und die Aktorik über dem Medium hin- und herbewegt, weist ein zuvor vernachlässigbarer diffusiver Anteil wieder einen dominanten Einfluss auf. Damit ändert sich die Systembeschreibung grundlegend und gehört nicht mehr zur Klasse der Transportprozesse. Der Fall wird in dieser Arbeit jedoch nicht betrachtet. Die Behandlung derartiger Prozesse wird beispielsweise in [Dem08] diskutiert.

Die in Bemerkung 3.1 angesprochene Eigenschaft kann sehr effizient zur Identifikation der Parameter des Prozessmodells herangezogen werden. Dies wird im Folgenden am Beispiel des Versuchsaufbaus aus Kap. 2.1.1.2 verdeutlicht.

## 3.5. Parameteridentifikation entlang der charakteristischen Kurve

Die im letzten Abschnitt vorgestellte Methode zur Behandlung von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung weist in Kombination mit einer mit dem Medium mitgeführten

Sensorik eine Reihe vorteilhafter Eigenschaften auf. Ein Vorteil wird bei der für verteilt-parametrische Systeme oft sehr schwierigen Parameteridentifikation deutlich [RW07], welche durch die Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen erheblich vereinfacht wird. Dies wird nun am Beispiel des in Kap. 2.1.1.2 vorgestellten Versuchsaufbaus demonstriert. Unter Anwendung der Methode der Charakteristiken folgt für die charakteristischen Differentialgleichungen der PDGL (2.25)

$$\xi_1'(\mu) = v \quad (3.41)$$

$$\xi_2'(\mu) = 1 \quad (3.42)$$

$$x'(\mu) = c_\alpha (u_O(\boldsymbol{\xi}(\mu)) - x(\mu)) + c_{Str} \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j(\xi_1(\mu)) (\tilde{u}_j^4(\xi_2(\mu)) - x^4(\mu)) \quad (3.43)$$

und für die PDGL (2.26)

$$\xi_1'(\mu) = v \quad (3.44)$$

$$\xi_2'(\mu) = 1 \quad (3.45)$$

$$x'(\mu) = c_\alpha (u_O(\boldsymbol{\xi}(\mu)) - x(\mu)) + \bar{c}_{Str} (\bar{u}_{Str}^4(\boldsymbol{\xi}(\mu)) - x^4(\mu)), \quad (3.46)$$

mit  $x(\mu) = T(z, t)$ ,  $u_O(\boldsymbol{\xi}(\mu)) = T_\Gamma(z, t)$ ,  $\tilde{b}_j(\xi_1(\mu)) = dF_{Str_j, M}(z)$ ,  $\tilde{u}_j(\xi_2(\mu)) = T_{Str_j}(t)$ ,  $\bar{u}_{Str}(\boldsymbol{\xi}(\mu)) = \bar{T}_{Str}(z, t)$  und der Anfangsbedingung

$$x(0) = \begin{cases} T_0(z_0) & \text{für } t = 0, z_0 \in [0, L] \\ T_{\bar{z}_0}(t) & \text{für } t > 0. \end{cases} \quad (3.47)$$

Die Zustandsvariable  $x(\mu)$  beschreibt im vorliegenden Prozess die Temperaturänderung eines Volumenelements entlang des Prozesses, welche von dem mitgeführten Sensor direkt erfasst wird. Die gesuchten Parameter  $c_\alpha$  und  $c_{Str}$  bzw.  $\bar{c}_{Str}$  bleiben durch die Anwendung der Methode der Charakteristiken unverändert erhalten, wodurch die Parameteridentifikation entlang der charakteristischen Kurve erfolgen kann. Nachdem die Geschwindigkeit  $v$  bekannt ist, kann vorab durch Lösen der DGLn (3.41) und (3.42) bzw. (3.44) und (3.45) der Verlauf der Grundcharakteristiken bestimmt und alle von  $\boldsymbol{\xi}(\mu)$  abhängigen Funktionen in Gl. (3.43) bzw. (3.46) auf die charakteristischen Kurven abgebildet werden. Die beiden Differentialgleichungen beinhalten somit nur mehr Größen entlang der charakteristischen Kurve. Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.3 entspricht der Parameter  $\mu$  der Zeit  $t$ , womit für die Differentialgleichung entlang der Grundcharakteristiken der Zusammenhang

$$\dot{x}(t) = c_\alpha (u_O(t) - x(t)) + c_{Str} \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j(t) (\tilde{u}_j^4(t) - x^4(t)), \quad (3.48)$$

bzw. für den Fall mit getrennten Heizzonen

$$\dot{x}(t) = c_\alpha (u_O(t) - x(t)) + \bar{c}_{Str} (\bar{u}_{Str}^4(t) - x^4(t)), \quad (3.49)$$

mit

$$\bar{u}_{Str}(t) = (H(t) - H(t - t_1)) \tilde{u}_1(t) + \dots + (H(t - t_{m-1}) - H(t - t_m)) \tilde{u}_m(t) \quad (3.50)$$

folgt. Die Strahlertemperatur kann wie bereits erläutert nicht direkt gemessen werden. Aus diesem Grund erfolgt die Identifikation im stationären Betrieb des Durchlaufofens. Die zur Identifikation erforderliche zeitliche Änderung der Eingangsgröße wird durch den Transport des Gutes erreicht. Die Umgebungstemperatur  $T_\Gamma(z, t)$  wurde in einem Versuch ohne Güter identifiziert und kann somit als näherungsweise bekannt angenommen werden. Diese Näherung ist ausreichend, da deren Beitrag zur Guttemperaturontwicklung im Vergleich zur Strahlung relativ gering ist und sich der daraus resultierende Fehler unwesentlich auf das Ergebnis auswirkt. Bei den meisten Parameterschätzverfahren wird eine zeitdiskrete Systembeschreibung vorausgesetzt. Aus diesem Grund wird das System (3.48) bzw. (3.49) diskretisiert. Die erwartete Dynamik des Systems ist sehr gering, weshalb die Euler-Diskretisierung, selbst bei einer relativ großen Abtastzeit  $\Delta t_S$ , das System ausreichend genau beschreibt. Damit folgt für Gl. (3.48) die Differenzgleichung

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t_S \left( c_\alpha (u_{O,k} - x_k) + c_{Str} \sum_{j=1}^m \tilde{b}_{j,k} (\tilde{u}_{j,k}^4 - x_k^4) \right). \quad (3.51)$$

Die gesuchten Parameter gehen linear in die Differenzgleichung ein, womit Gl. (3.51) auch in der Form

$$q_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} & a_{2,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_{Str} \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

mit  $q_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_S}$ ,  $a_{1,k} = T_{\Gamma,k} - x_k$  und  $a_{2,k} = \sum_{j=1}^m \tilde{b}_{j,k} (\tilde{u}_{j,k}^4 - x_k^4)$ , dargestellt werden kann. Die sukzessive Erweiterung von Gl. (3.52) um weitere Messwerte resultiert in dem folgenden Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,0} & a_{2,0} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1,N} & a_{2,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ c_{Str} \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Ein sehr ähnliches Ergebnis resultiert im Fall von getrennten Heizzonen. Die zugehörige Differenzgleichung in Vektorform lautet

$$q_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} & \bar{a}_{2,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ \bar{c}_{Str} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,0} & \bar{a}_{2,0} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1,N} & \bar{a}_{2,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\alpha \\ \bar{c}_{Str} \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

mit  $q_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t_S}$ ,  $a_{1,k} = T_{\Gamma,k} - x_k$  und  $\bar{a}_{2,k} = (\bar{u}_{Str,k}^4 - x_k^4)$ . Gln. (3.53) und (3.54) repräsentieren klassische Least Squares (LS) Probleme. Die Dimension des Gleichungssystems

und damit der Rechenaufwand zur Lösung des LS-Problems steigen mit jedem zusätzlichen Messwert an. Zudem erfordert die Lösung des LS-Problems eine Matrix-Inversion. Aus diesen Gründen kommt in der Regel das *Recursive Least Squares* (RLS)-Verfahren zum Einsatz. Der RLS-Algorithmus wird in zahlreichen Werken ausführlich behandelt (beispielsweise [Hay96, Pap91]). Aus diesem Grund wird an dieser Stelle auf dessen Herleitung verzichtet und nur das Ergebnis präsentiert.

Das RLS-Verfahren löst in Bezug auf System (3.52) bzw. (3.54) das Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{\theta}_k} \|\mathbf{q}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\theta}_k\|_2^2, \quad (3.55)$$

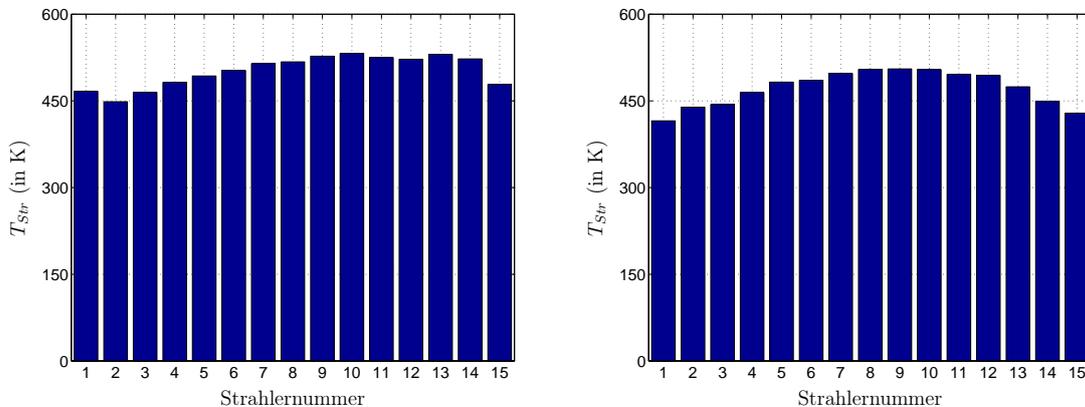
mit  $\boldsymbol{\psi}_k^T = (a_{1,k} \ a_{2,k})$  und  $\boldsymbol{\theta}_k^T = (c_{\alpha,k} \ c_{Str,k})$  bzw.  $\boldsymbol{\psi}_k^T = (a_{1,k} \ \bar{a}_{2,k})$  und  $\boldsymbol{\theta}_k^T = (c_{\alpha,k} \ \bar{c}_{Str,k})$ . Der RLS-Algorithmus liefert in jedem Abtastschritt eine neue Schätzung des Parametervektors  $\boldsymbol{\theta}$  durch Auswertung der rekursiven Gleichungen

$$\mathbf{L}_k = \frac{\mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k}{\lambda_k + \boldsymbol{\psi}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k} \quad (3.56)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + \mathbf{L}_k \left[ \mathbf{q}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \right] \quad (3.57)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\lambda_k} \left[ \mathbf{P}_{k-1} - \frac{\mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k \boldsymbol{\psi}_k^T \mathbf{P}_{k-1}}{\lambda_k + \boldsymbol{\psi}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k} \right]. \quad (3.58)$$

In der Literatur wird empfohlen die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}$  als Diagonalmatrix oder Dreiecksmatrix mit relativ hohen Einträgen zu initialisieren. Der Vergessenheitsfaktor  $\lambda$  sollte in dem Bereich von [0.95 0.99] gewählt werden und beschreibt die Kopplung zwischen der aktuellen und der zurückliegenden Schätzung. Ein geringer Vergessenheitsfaktor reduziert dabei den Einfluss zeitlich vergangener Schätzergebnisse. Dies ist vor allem bei sich zeitlich ändernden Parametern relevant. Der Rechenaufwand bleibt beim RLS-Algorithmus im Gegensatz zum LS-Verfahren in jedem Zeitschritt konstant.

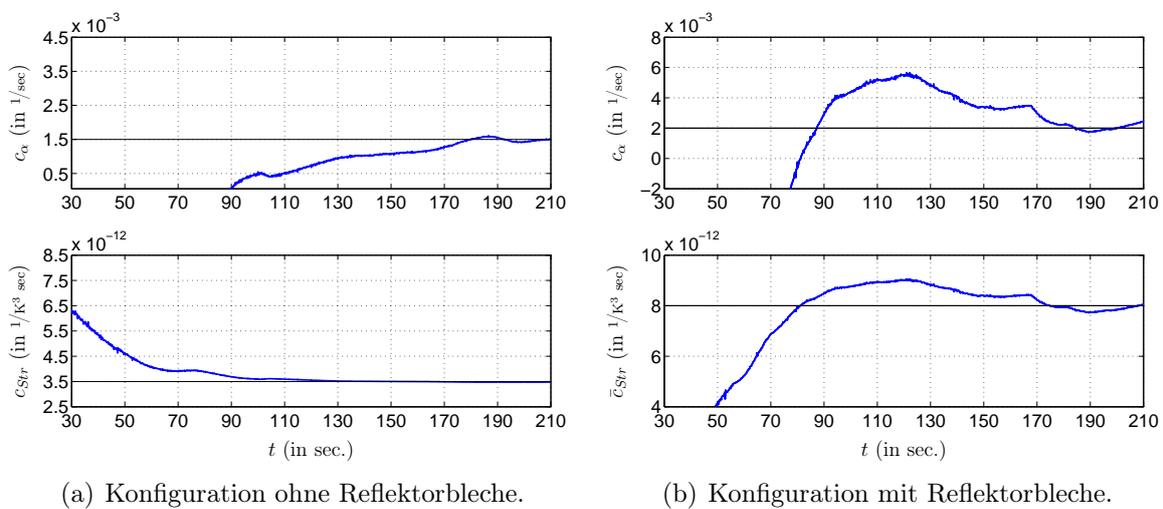


(a) Konfiguration ohne Reflektorbleche.

(b) Konfiguration mit Reflektorbleche.

**Abbildung 3.6.:** Wahl der Stellgrößenwerte der 15 Strahler zur Parameterschätzung.

Das RLS-Verfahren wird nun zur Schätzung der Parameter des Modells mit und ohne den Reflektorblechen herangezogen. Die dazu gewählten Stellgrößenwerte der 15 Strahler sind in Abb. 3.6 in Form von Balkendiagrammen dargestellt. Die Ergebnisse der Parameterschätzung für den Fall ohne Reflektorbleche sind Abb. 3.7(a) zu entnehmen. Der Parameter  $c_\alpha$  konvergiert im Vergleich zu  $c_{Str}$  wesentlich träger zu einem festen Wert, was auf die geringe Änderung des Terms  $T_\Gamma - T$  zurückzuführen ist. Ein ähnliches Verhalten zeigt das Schätzergebnis im Fall von getrennten Heizzonen, welches in Abb. 3.7(b) dargestellt wird. Die identifizierten Werte der Parameter für beide Fälle sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Die Parameterwerte liegen in einem physikalisch sinnvollen Bereich und stimmen mit den berechneten Werten aus Gl. (2.27) sehr gut überein.



**Abbildung 3.7.:** Ergebnis der Parameterschätzung unter Anwendung des RLS-Verfahrens.

**Tabelle 3.1.:** Identifizierte Parameter des Versuchsaufbaus

ohne Reflektorbleche	mit Reflektorbleche
$c_\alpha = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ 1/sec}$	$c_\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/sec}$
$c_{Str} = 3.5 \cdot 10^{-12} \text{ 1/K}^3\text{sec}$	$\bar{c}_{Str} = 8 \cdot 10^{-12} \text{ 1/K}^3\text{sec}$

## 3.6. Schlussfolgerung

Die Analyse der in Abschnitt 2.2 definierten Systemklasse hat gezeigt, dass die Prozesse durch semilineare hyperbolische PDGLn erster Ordnung beschrieben werden. Zudem wurde gezeigt, dass der Differentialoperator erster Ordnung den Transport von Volumenelementen beschreibt. Der Operator unterscheidet sich demnach wesentlich vom Verhalten

gewöhnlicher Differentialgleichungen, womit eine Approximation durch etwa die Methode von Galerkin insbesondere in Hinblick auf die in dieser Arbeit verwendete Sensorik zum Regelungsentwurf nicht sinnvoll ist. Zur Behandlung dieser Systemklasse eignet sich vielmehr die Methode der Charakteristiken, welche die PDGL in gewöhnliche Differentialgleichungen überführt (Gl. (3.31)). Vor allem in Kombination mit einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik zeigt diese Methode großes Potential zum Beobachter- und Regelungsentwurf. Ebenso die Identifikation der Systemparameter wird damit wesentlich vereinfacht. Die Systembeschreibung geht dabei von PDGLn mit zeitvarianter Ausgangsgleichung in ein im Allgemeinen nichtlineares und zeitvariantes System mit konstantem Ausgangsvektor über (vgl. Bemerkung 3.1 und Gl. (3.34)). Die Methode der Charakteristiken ermöglicht auch einen relativ einfachen flachheitsbasierten Entwurf einer Steuerung, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

## 4. Flachheitsbasierter Steuerungsentwurf

Der Steuerungsentwurf für Transportprozesse stellt aufgrund des verteilt-parametrischen Charakters eine besondere Herausforderung dar. Das Steuerungsziel wird in dieser Arbeit durch die Realisierung eines gewünschten Profils der Regelgröße entlang des Prozesses definiert. Das gewünschte Referenzprofil kann durch eine reine Steuerung allerdings nur im störungsfreien Fall bei exaktem Systemmodell erreicht werden. Dennoch kann durch einen geeigneten Steuerungsentwurf bereits ein brauchbares Ergebnis erzielt werden, womit ein möglicherweise eingesetzter unterlagerter Regler mit einer wesentlich geringeren Aufgabe konfrontiert wird. Ein Steuerungsentwurf kann allerdings nur dann erfolgreich sein, wenn die Strecke auch steuerbar ist, also der gewünschte Zustand erreichbar ist. Für verteilt-parametrische Systeme ist der Begriff der Steuerbarkeit weitreichender zu fassen, da es nicht wie im konzentriert-parametrischen Fall einen Punkt im Zustandsraum zu erreichen gilt, sondern eine Funktion im Funktionenraum. In realen Prozessen wird der verteilte Stelleingriff durch eine definierte Anzahl von Aktoren realisiert (vgl. Kap. 2.1). Damit ist anschaulich klar, dass die Anzahl der erreichbaren Profile deutlich eingeschränkt wird. Für verteilt-parametrische Systeme wurde aus diesem Grund auch der Begriff der *näherungsweise Steuerbarkeit* eingeführt. Nach [CZ95] gilt ein System als näherungsweise steuerbar, wenn die Abweichung des realisierbaren Profils vom Referenzprofil in der  $L_2$ -Norm kleiner einer Konstante  $\epsilon > 0$  ist. Für eine genaue Definition und eine detailliertere Beschreibung sei zum Beispiel auf [CZ95] (Def. 4.1.3) verwiesen.

Die mit der näherungsweise Steuerbarkeit verbundene Definition näherungsweise erreichbarer Trajektorien legt die Formulierung eines Optimierungsproblems nahe. Dieser Ansatz zum Steuerungsentwurf von SVPs wird beispielsweise in [Trö09] aufgegriffen und untersucht. Ähnlich dem Entwurf der optimalen Steuerung für endlich-dimensionale Systeme gilt es zu diesem Zweck, die Zustandsgleichungen und die adjungierten Gleichungen zu lösen. Im Fall von SVPs werden diese Gleichungen durch partielle Differentialgleichungen repräsentiert. Dies hat einen sehr hohen Rechenaufwand zur Folge und lässt wenig Raum zur Interpretation und Analyse der Ergebnisse. Sind zudem noch weitere Optimierungsziele zu erfüllen, wie zum Beispiel die Werte gewisser Zustandsfunktionen am Ende des Prozes-

ses, so stellt sich die in vielen Fällen nicht triviale Aufgabe, ein geeignetes Gütefunktional zu formulieren. Dieses Problem zeigt sich bereits beim Entwurf von stationären Steuerungen, wie etwa in [SDI02] am Beispiel eines Rohrreaktors erkennbar wird. Die optimale Wahl der Gewichtsmatrizen erweist sich in der Anwendung ebenso als nicht triviale Aufgabe.

In diesem Kaptiel wird eine alternative Entwurfsmethode vorgestellt, welche aus der Betrachtung der Methode der Charakteristiken hervorgeht. Für den Steuerungsentwurf wird zunächst angenommen, dass der verteilte Stelleingriff exakt vorgeben werden kann. Dadurch ist es möglich, flachheitsbasierte Methoden anzuwenden, welche den Entwurf erheblich erleichtern, eine einfache Aussage über Steuerbarkeit zulassen und eine Vielzahl von Analysemöglichkeiten bereit stellen. Anschließend wird der ermittelte Stelleingriff durch die realen Aktoren nachgebildet. In den meisten Anwendungsfällen kann der Entwurf anhand der stationären PDGL erfolgen, wodurch die Methode jedoch unberührt bleibt.

Im folgenden Abschnitt wird der Begriff der Flachheit definiert und einige daraus resultierende Eigenschaften diskutiert. Darauf aufbauend wird in Abschnitt 4.2 die Flachheit von Transportprozessen analysiert. Anschließend wird in Abschnitt 4.3 der flachheitsbasierte Steuerungsentwurf für Transportprozesse vorgestellt. Abschnitt 4.4 widmet sich der angesprochenen Approximation des ermittelten Stelleingriffs, bevor die Entwurfsmethode auf einen Trocknungsprozess angewendet wird. Der vorgeschlagene Ansatz kann auch zum Design und zur Analyse von Transportprozessen herangezogen werden, wie in Abschnitt 4.6 gezeigt wird.

## 4.1. Flachheit

Das Konzept der Flachheit wurde 1992 von Michael Fliess, Jean Lévine, Philippe Martin und Pierre Rouchon [FLMR92] formuliert und hat sich seither als wertvolles Instrument zum Steuerungs- und Regelungsentwurf, sowie zum Beobachterentwurf und zur Trajektorienplanung bewährt. Bei dem Entwurf können dabei auf einfache Weise Eingangs- und Zustandsbeschränkungen berücksichtigt werden (vgl. Kap. 4.6). Ist ein System flach, können alle Systemgrößen durch einen so genannten flachen Ausgang und endlich viele Ableitungen des flachen Ausgangs parametrisiert werden. Damit können die Trajektorien aller Systemgrößen ohne die Integration einer Differentialgleichung bestimmt werden. Daraus resultiert auch die Eigenschaft, dass die exakte Zustandslinearisierung von flachen Systemen durch eine quasi-statische Zustandsrückführung erreicht werden kann. Bei diesen Rückführungen müssen im Gegensatz zur dynamischen Rückführung keine Differentialgleichungen realisiert werden (integrallose Transformation [FLMR95]), sofern in der Rückführung verallgemeinerte Zustände zugelassen werden. Verallgemeinerte Zustände können auch von den Eingängen und deren Zeitableitungen abhängen. Damit treten in der Zustandsrück-

führung nur Zustandsvariablen auf, welche allein durch Differentiation und algebraische Umformung aus den Systemvariablen (Zustands- und Eingangsgrößen) berechnet werden können.

Die Zustandslinearisierbarkeit erklärt auch den Begriff *flach*, da der Zustandsraum eines linearen Systems durch ein Koordinatensystem ohne Krümmung, d.h. ein „flaches“ Koordinatensystem, beschrieben werden kann. Dabei geht die Bedeutung der Flachheit über die der exakten Zustandslinearisierung hinaus, da mit diesem Konzept vor allem auch eine Trajektorienplanung sowie die Bestimmung der Verläufe der Eingangsgrößen für die Steuerung und Regelung bis hin zum Entwurf einer Zustandsschätzung ermöglicht wird. Die Anwendung einer Zustandsschätzung lässt den Einsatz einer dynamischen Ausgangsregelung zur Realisierung einer Zustandsrückführung zu [FR96, RAR00]. Beobachtbare flache Systeme ermöglichen dabei einen einfachen und systematischen Beobachterentwurf. Aus der Parametrierung durch den flachen Ausgang folgt direkt die vollständige Beobachtbarkeit eines Systems, sofern der flache Ausgang gemessen wird.

Im Folgenden wird der Begriff der Flachheit für nichtlineare Systeme definiert, ohne dabei Begriffe der Differentialalgebra bzw. Differentialgeometrie zu bemühen. Die formale mathematische Definition der Flachheit für nichtlineare Systeme ist in [FLMR92, FLMR95] zu finden.

**Definition 4.1.** *Ein nichtlineares dynamisches System*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \quad \text{Rang} \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) = m \quad (4.1)$$

heißt *differentiell<sup>1</sup> flach*, wenn ein fiktiver Ausgang  $\mathbf{y}_f(t) = (y_{f_1}(t), \dots, y_{f_m}(t))$  existiert, welcher die folgenden Bedingungen erfüllt.

(i) Die Größen  $y_{f_j}(t)$ ,  $j = 1 \dots m$ , lassen sich als Funktionen der Systemgrößen  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $u_j(t)$ ,  $j = 1 \dots m$ , und einer endlichen Anzahl von Zeitableitungen  $u_j^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, \dots, \alpha_j$ , ausdrücken. Für das nichtlineare System (4.1) bedeutet dies, dass sich der fiktive Ausgang  $\mathbf{y}_f(t)$  in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_f &= \phi \left( \mathbf{x}, u_1, \dots, u_1^{(\alpha_1)}, \dots, u_m, \dots, u_m^{(\alpha_m)} \right) \\ &= \phi \left( \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

darstellen lässt.

(ii) Die Systemgrößen  $x_i(t)$ ,  $i = 1 \dots n$ , bzw.  $u_j(t)$ ,  $j = 1 \dots m$ , lassen sich als Funktionen der  $y_{f_j}(t)$ ,  $j = 1 \dots m$  und einer endlichen Anzahl von deren Zeitableitungen

---

<sup>1</sup>Der Begriff *differentiell* beschreibt die Eigenschaft, dass sämtliche Systemgrößen durch Differentiation und nicht durch Integration bestimmt werden können.

$y_{f_j}^{(k)}(t)$ ,  $k = 1 \dots \beta_j + 1$  darstellen, d.h.

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}_1 \left( y_{f_1}, \dots, y_{f_1}^{(\beta_1)}, \dots, y_{f_m}, \dots, y_{f_m}^{(\beta_m)} \right) = \boldsymbol{\psi}_1 \left( \mathbf{y}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta)} \right) \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi}_2 \left( y_{f_1}, \dots, y_{f_1}^{(\beta_1+1)}, \dots, y_{f_m}, \dots, y_{f_m}^{(\beta_m+1)} \right) = \boldsymbol{\psi}_2 \left( \mathbf{y}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta+1)} \right). \quad (4.3b)$$

Sind diese Bedingungen zumindest lokal erfüllt, so heißt der fiktive Ausgang (4.2) flacher Ausgang, und das System (4.1) heißt flach.

In der Literatur ist oft noch eine weitere Bedingung angeführt, welche besagt, dass die Komponenten des flachen Ausgangs keine Differentialgleichung der Form  $\boldsymbol{\varphi} \left( \mathbf{y}_f(t), \dots, \mathbf{y}_f^{(\gamma)}(t) \right) = \mathbf{0}$  erfüllen dürfen. Diese Bedingung ist äquivalent zu der Forderung, dass der flache Ausgang dieselbe Dimension wie der Eingangsvektor  $\mathbf{u}(t)$  aufweisen muss. Diese Forderung ist in Definition 4.1 bereits implizit enthalten und stellt sicher, dass die Komponenten des flachen Ausgangs unabhängig voneinander frei vorgegeben werden können und damit differentiell unabhängig sind.

Aus der Definition des flachen Ausgangs folgt direkt, dass sämtliche dynamischen Eigenschaften des Systems durch den flachen Ausgang und einer endlichen Zahl dessen Zeitableitungen beschrieben werden können. Dies entspricht einer endlichen Parametrierung des Systems durch den flachen Ausgang.

Der Eingang  $\mathbf{u}(t)$  hängt entsprechend Gl. (4.3b) im Vergleich zum Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  vom flachen Ausgang bis zur Ableitung  $\beta + 1$  ab, da dieser über Gl. (4.1) mit dem Zustandsvektor verknüpft ist und somit von der Ableitung des Zustandsvektors abhängt. Beschreibt die Regelgröße  $\mathbf{y}(t)$  einen nicht flachen Ausgang, so kann die Trajektorie des flachen Ausgangs mit dem Zusammenhang

$$\mathbf{y}(t) = \varsigma(\mathbf{y}_f(t), \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta)}(t)) \quad (4.4)$$

ermittelt werden. Die DGL (4.4) beschreibt dabei die interne Dynamik von System 4.1. Diese DGL repräsentiert eine weitere Einschränkung der realisierbaren Trajektorien. Für einen Regelungsentwurf wird die Stabilität der internen Dynamik vorausgesetzt, um ein unbegrenztes anwachsen der Zustandsgrößen und damit eine mögliche Zerstörung des technischen Systems zu verhindern. Bei einem reinen Steuerungsentwurf kann diese Forderung etwas aufgeweicht werden. In diesem Fall kann eine Beschränktheit der internen Dynamik ausreichend sein, um sicherzustellen, dass sämtliche Systemgrößen endlich und in ihren vorgegebenen Schranken bleiben [Sva06]. Die Ordnung von Gl. (4.4) ergibt sich im SISO-Fall als die Differenz der Systemordnung  $n$  und dem relativen Grad des Ausgangs.

Aus der Definition 4.1 der Flachheit können noch eine Reihe weiterer Eigenschaften abgeleitet werden [Rot97]:

- **Nichteindeutigkeit des flachen Ausgangs:** Ein flaches System weist beliebig viele flache Ausgänge auf, womit ein flacher Ausgang nicht eindeutig ist. Die unterschied-

lichen flachen Ausgänge können ineinander umgerechnet werden:

Die Bedingung (ii) aus Definition 4.1 führt auf die Eigenschaft

$$\phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}(t)) = \theta(\mathbf{y}_f(t), \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta+\alpha+1)}(t)). \quad (4.5)$$

Entsprechend Bedingung (i) muss sich jeder flache Ausgang und damit auch  $\bar{\mathbf{y}}_f(t)$  in der Form  $\bar{\mathbf{y}}_f(t) = \phi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \dots, \mathbf{u}^{(\alpha)}(t))$  darstellen lassen. Zusammen mit Gl. (4.5) folgt schließlich

$$\bar{\mathbf{y}}_f(t) = \theta(\mathbf{y}_f(t), \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta+\alpha+1)}(t)) \iff \mathbf{y}_f(t) = \bar{\theta}(\bar{\mathbf{y}}_f(t), \dots, \bar{\mathbf{y}}_f^{(\beta+\alpha+1)}(t)) \quad (4.6)$$

- **Ungesteuerte Systeme:** Ein ungesteuertes System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \theta(\mathbf{x}(t)) \quad (4.7)$$

kann nicht flach sein, da kein differentiell unabhängiger Ausgang gefunden werden kann.

*Beweis:* System (4.7) sei flach, mit dem flachen Ausgang  $\mathbf{y}_f(t)$ . Dann existiert nach Definition die Beziehung  $\mathbf{x}(t) = \psi_1(\mathbf{y}_f(t), \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta)}(t))$ . Wird diese Beziehung in Gl. (4.7) eingesetzt, folgt direkt eine differentielle Abhängigkeit des flachen Ausgangs, womit  $\mathbf{y}_f(t)$  kein flacher Ausgang sein kann und somit System (4.7) nicht flach ist.  $\square$

- **Defekt nicht flacher Systeme:** Bei einem nicht flachen System sind zur Darstellung aller Systemgrößen  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{u}(t)$  mehr Funktionen als die Anzahl der unabhängigen Eingänge  $m$  erforderlich. Die dazu notwendige minimale Anzahl an Funktionen  $y$  wird mit  $M$  bezeichnet. Der Defekt  $\delta$  des nicht flachen Ausgangs wird nun als Differenz  $\delta = M - m$  definiert. Für lineare System beschreibt der Defekt  $\delta$  die Dimension des nicht steuerbaren Unterraums.
- **Globale Beobachtbarkeit:** Ein flaches System ist immer dann global beobachtbar, wenn der flache Ausgang gemessen wird. In diesem Fall ist das System in die nichtlineare Beobachternormalform transformierbar (vgl. Abschnitt 5.2.1).

### Analyse der Flachheit eines Systems:

Ein lineares System ist genau dann flach, wenn es steuerbar ist. Diese Aussage ist auch auf lineare zeitvariante Systeme erweiterbar. Liegt ein System in Regelungsnormalform vor, so entspricht im SISO-Fall das erste Element des Zustandsvektors dem flachen Ausgang. Ebenso im Mehrgrößenfall ist der flache Ausgang direkt erkennbar. [Rot97] spricht dabei von strukturell flachen Systemen. Daraus kann direkt abgeleitet werden, dass ein System flach ist, wenn es in Regelungsnormalform transformiert werden kann. Damit können die Bedingungen zur Transformation in Regelungsnormalform zur Analyse der Flachheit

herangezogen werden. Aus diesen hinreichenden Bedingungen lassen sich auch die Bestimmungsgleichungen für flache Ausgänge herleiten. Aufgrund seiner physikalischen Bedeutung kann ein flacher Ausgang allerdings oft auch aus dem Verständnis des zu untersuchenden Systems abgeleitet werden.

## 4.2. Flachheitsbasierte Analyse der Transportprozesse

Zur Analyse der Flachheit der in Abschnitt 3.4 vorgestellten Transportprozesse wird die Systembeschreibung aus Gl. (3.35) in Teilsysteme zerlegt, wie Abb. 4.1 veranschaulicht. Zunächst wird die Aktordynamik außer Acht gelassen und das System somit durch Gl. (3.34) beschrieben. Für die folgende Untersuchung wird vorausgesetzt, dass die in Gl. (3.34) dargestellten Teilsysteme der Form

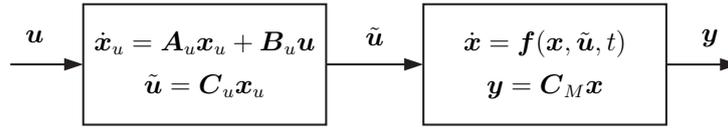
$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t), \bar{u}_i(t), t), \quad i = 1 \dots p, \quad (4.8)$$

bezüglich dem verteilten Stelleingriff  $\bar{u}_i(t)$  flach sind. Damit können die Systeme (4.8) jeweils in der nichtlinearen SISO-Regelungsnormalform dargestellt werden

$$\dot{\zeta}_i(t) = \begin{pmatrix} \zeta_{2,i}(t) \\ \vdots \\ \zeta_{n,i}(t) \\ \alpha_i(\zeta_i(t), \bar{u}_i(t), t) \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots p, \quad (4.9)$$

wobei die Zustandsvariable  $\zeta_{1,i}(t)$  den flachen Ausgang von System  $i$  repräsentiert. Der verteilte Eingriff  $\bar{u}_i(t)$  ist durch die Beziehung  $\bar{u}_i(t) = \tilde{\mathbf{b}}_i^T(t) \mathbf{d}_{\bar{u}}(t)$  mit dem realen Eingangsvektor  $\tilde{\mathbf{u}}(t) \in \mathbb{R}^m$  verbunden, woraus eine Verkopplung der einzelnen Teilsysteme (4.9) resultiert. Nun stellt sich die Frage, welche Auswirkung dies auf die Eigenschaft der Flachheit des gesamten Systems hat. Aufgrund der vorliegenden Struktur können dabei abhängig von der Dimension  $m$  des Eingangsraums drei Fälle unterschieden werden, wobei angenommen wird, dass die nichtlineare Funktion  $\mathbf{d}_{\bar{u}}(t)$  für den definierten Stellgrößenbereich eindeutig umkehrbar ist:

- (i)  $p = m$ : Aus der Flachheit der entkoppelten Systeme folgt direkt die Flachheit des gesamten Systems, wobei sich ein möglicher flacher Ausgang des gesamten Systems aus den flachen Ausgängen der Teilsysteme zusammensetzt:  $\mathbf{y}_f(t) = (\zeta_{1,1}(t) \cdots \zeta_{1,p}(t))^T$ .
- (ii)  $p < m$ : In diesem Fall verfügt das System über zusätzliche Freiheitsgrade in der Stellgröße und der flache Ausgang im Fall (i) kann einfach um beliebige Elemente des Eingangsvektors ergänzt werden, so dass  $\dim(\mathbf{y}_f) = \dim(\tilde{\mathbf{u}})$  gilt. Nachdem auf diese Weise ein flacher Ausgang gefunden wurde, ist das gesamte System flach.



**Abbildung 4.1.:** Getrennte Darstellung der Systembeschreibungen der Aktorik und der betrachteten Prozessdynamik.

- (iii)  $p > m$ : Aufgrund der geringeren Anzahl an Stellglieder repräsentieren die  $p$  flachen Ausgänge der Teilsysteme nicht den flachen Ausgang des gesamten Systems, weshalb die Trajektorien für die  $p$  Regelgrößen nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden können. In diesem Fall kann nicht unmittelbar von der Flachheit der Teilsysteme auf die Flachheit des gesamten Systems geschlossen werden, wodurch eine getrennte Analyse der Flachheit des gesamten Systems durchzuführen ist.

Wird nun die Aktordynamik berücksichtigt, resultiert für das gesamte System die Beschreibung nach Gl. (3.35). Wie in Abschnitt 2.2 erläutert wurde, kann die Aktordynamik in Regelungsnormalform dargestellt werden und repräsentiert damit ein flaches System mit dem flachen Ausgang  $y_{f,u_j}(t) = x_{u_j,1}(t)$ . Damit können die in das System einwirkenden Größen  $\tilde{u}_j(t)$  durch

$$\tilde{u}_j(t) = \mathbf{c}_u^T \mathbf{x}_{u_j}(t) = \varsigma_j(y_{f,u_j}(t), \dots, y_{f,u_j}^{(q-r_{u_j})}(t)) \quad (4.10)$$

beschrieben werden, wobei  $r_{u_j}$  den relativen Grad der Aktordynamik bezüglich  $\tilde{u}_j(t)$  bezeichnet. Die Hinzunahme dieser Systembeschreibung zum gesamten System erfordert eine neue Analyse der Flachheit des erweiterten Systems. Weist die Systembeschreibung der Aktoren jedoch vollen relativen Grad auf, kann für die Fälle (i) und (ii) direkt auf die Flachheit des gesamten Systems geschlossen werden. Bei vollem relativen Grad kann der Aktor durch  $\tilde{u}_j(t)$  parametrisiert werden und die in den Fällen (i) und (ii) für die Systeme ohne Aktordynamik gefundenen flachen Ausgänge repräsentiert jeweils auch einen flachen Ausgang des gesamten Systems (3.35).

Das Ergebnis der flachheitsbasierten Analyse gilt auch für den Fall eines Prozesses mit getrennten Zonen. Die Analyse beschränkt sich dabei aufgrund der entkoppelnden Wirkung allerdings auf eine Zone und die sich darin befindlichen Regelgrößen.

Ein flachheitsbasierter Regelungsentwurf wird allerdings, aufgrund des Ein- und Austritts der transportierten Regelgrößen und dem damit verbundenen schaltenden Verhalten von System (3.35) sowie der möglicherweise variierenden Anzahl an Regelgrößen erheblich erschwert. Ein Ansatz zur Lösung dieser Problematik wird in Kap. 6.5.2 vorgestellt.

### 4.3. Steuerungsentwurf für Transportprozesse

Zum Steuerungsentwurf haben sich flachheitsbasierte Methoden bereits vielfach bewährt, da sämtliche Systemgrößen, unter anderem auch die Stellgröße, durch den flachen Ausgang und einer endlichen Zahl dessen Ableitungen parametrisiert werden können. Somit kann direkt der zur Realisierung einer gewünschten Trajektorie erforderliche Stellgrößenverlauf bestimmt werden. Diese Eigenschaft wird nun in Kombination mit der Methode der Charakteristiken zum Entwurf einer Steuerung für Transportprozesse ausgenutzt. Die charakteristischen Differentialgleichungen für Transportprozesse lauten entsprechend dem Abschnitt 3.4 allgemein

$$\xi_1'(\mu) = v(\xi_2(\mu)) \quad (4.11)$$

$$\xi_2'(\mu) = 1 \quad (4.12)$$

$$\mathbf{x}'(\mu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \bar{u}(\boldsymbol{\xi}(\mu)), \xi_1(\mu)), \quad (4.13)$$

mit  $\mathbf{x}(\mu) = \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}(\mu))$ . Dabei wird vorerst die Aktordynamik nicht berücksichtigt. Die Transportgeschwindigkeit  $v(\xi_2(\mu))$  stellt keine Stellgröße dar und ihr Verlauf sei a priori bekannt. Damit kann vorab durch Lösen der DGLn (4.11) und (4.12) der Verlauf der Grundcharakteristiken bestimmt und alle von  $\boldsymbol{\xi}(\mu)$  abhängigen Funktionen in Gl. (4.13) auf die charakteristischen Kurven abgebildet werden. Gl. (4.13) beinhaltet somit nur mehr Größen entlang der charakteristischen Kurve und vereinfacht sich zu

$$\mathbf{x}'(\mu) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mu), \bar{u}(\mu), \mu). \quad (4.14)$$

Der Steuerungsentwurf kann nun anhand von Gl. (4.14) erfolgen. Ist das System (4.14) flach, können die Stellgröße und alle Zustandsvariablen mit dem flachen Ausgang und dessen Ableitungen parametrisiert werden. Somit ist auf relativ einfache Weise der Entwurf einer Profilsteuerung der Regelgröße  $y_C(\mu)$  möglich [FLMR95, KS07]:

$$\bar{u}(\mu) = \eta(y_f(\mu), y_f'(\mu), \dots, y_f^{(n)}(\mu), \mu) \quad (4.15)$$

Entspricht der flache Ausgang nicht der Regelgröße, so kann die gewünschte Trajektorie des flachen Ausgangs aus der Beziehung

$$y_C(\mu) = \varsigma(y_f(\mu), y_f'(\mu), \dots, y_f^{(n-r)}(\mu), \mu) \quad (4.16)$$

bestimmt werden, wobei  $r$  den relativen Grad von System (4.14) bezüglich dem Ausgang  $y_C(\mu)$  bezeichnet. Gl. (4.16) beschreibt die interne Dynamik von System (4.14), dessen Auswirkungen bereits in Abschnitt 4.1 diskutiert wurden. In der Regel werden die Trajektorien der Zustandsvariablen der durch den Prozess transportierten Volumenelemente von Interesse sein, womit die Referenztrajektorie bereits in der charakteristischen Koordinate

$\mu$  gegeben ist. Liegt das Referenzprofil dennoch in den Koordinaten  $(z \ t)$  vor, muss es mit der Beziehung  $(z \ t)^T = \boldsymbol{\xi}(\mu)$ , mit  $\boldsymbol{\xi}(\mu)$  aus Gl. (4.11) und (4.12), auf die charakteristischen Kurven abgebildet werden. Der mit dem Steuerungsentwurf ermittelte Stellgrößenverlauf ist anschließend mit Hilfe der inversen Abbildung wieder auf die ursprünglichen Koordinaten  $(z \ t)$  abzubilden.

Der Steuerungsentwurf kann somit wie folgt zusammengefasst werden:

1. Bestimmung des Verlaufs der Grundcharakteristiken.
2. Abbildung aller in den Koordinaten  $(z \ t)$  vorliegenden Systemgrößen auf die charakteristischen Kurven.
3. Entwurf einer flachheitsbasierten Steuerung entlang der charakteristischen Kurven:  

$$\bar{u}(\mu) = \eta(y_f(\mu), y_f'(\mu), \dots, y_f^{(n)}(\mu), \mu).$$
4. Abbildung der Stellgröße entlang der charakteristischen Kurven auf die Koordinaten  $(z \ t)$ :  $\bar{u}(\mu) \mapsto \bar{u}(z, t)$ .

Die auf diese Weise ermittelte Steuerungsfläche ist anschließend durch die realen Stellglieder zu approximieren. Das vorgestellte Verfahren stellt einen systematischen Weg zur Ermittlung einer Profilsteuerung dar, mit welchem trotz der erforderlichen Approximation sehr gute Ergebnisse erzielt werden können, wie in Abschnitt 4.5 demonstriert wird. Zuvor wird jedoch noch die Approximation der ermittelten Stellgröße durch die realen Aktoren diskutiert.

## 4.4. Realisierung des Steuerungsentwurfs

Der aus dem flachheitsbasierten Steuerungsentwurf resultierende Stellgrößenverlauf repräsentiert den verteilten Stelleingriff. In realen Systemen wird dieser Eingriff durch eine bestimmte Anzahl an Aktoren realisiert, welche sich durch die Ausprägung ihrer örtlichen Wirkung auf den Prozess charakterisieren. Der ermittelte Stellgrößenverlauf ist nun mit den realen Aktoren derart zu approximieren, dass das Steuerungsziel möglichst gut erreicht wird. Zu diesem Zweck werden im Folgenden geeignete Methoden vorgestellt, wobei zwischen Aktoren mit kontinuierlicher Ortsfunktion und Aktoren mit örtlich beschränkter Wirkung unterschieden wird.

### 4.4.1. Aktoren mit kontinuierlicher Ortsfunktion

Die Wirkung der Stellglieder auf den Prozess können entsprechend Gl. (2.36) als Überlagerung getrennter Funktionen in Ort und Zeit dargestellt werden

$$\bar{u}_{real}(z, t) = \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j(z) d(\tilde{u}_j(t)) = \tilde{\mathbf{b}}^T(z) \mathbf{d}_{\tilde{u}}(t). \quad (4.17)$$

Die Stellgrößenanforderung aus dem Steuerungsentwurf  $\bar{u}_{opt}(z, t)$  entlang des Prozesses für einen festen Zeitpunkt  $t_k$  hängt von der Anzahl der betrachteten Regelungs- bzw. Steuerungsgrößen ab. Diese kann sich von wenigen punktförmigen Stellgrößenanforderungen bei Stückgutprozessen bis zu einem vollständigen Stellgrößenprofil bei einem kontinuierlichen Medium erstrecken. Die Stellgrößenanforderung muss zu jedem Zeitpunkt  $t_k$  durch die realen Stellglieder erfüllt werden, womit das folgende Gleichungssystem formuliert werden kann:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}(z_1(t_k)) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) &\stackrel{!}{=} \bar{u}_{opt}(z_1(t_k), t_k) \\ &\vdots \\ \tilde{\mathbf{b}}(z_p(t_k)) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) &\stackrel{!}{=} \bar{u}_{opt}(z_p(t_k), t_k) \end{aligned} \quad (4.18)$$

bzw. in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{b}_1(z_1(t_k)) & \cdots & \tilde{b}_m(z_1(t_k)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_1(z_p(t_k)) & \cdots & \tilde{b}_m(z_p(t_k)) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{z}(t_k))} \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) \stackrel{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{u}_{opt}(z_1(t_k), t_k) \\ \vdots \\ \bar{u}_{opt}(z_p(t_k), t_k) \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}_{opt}(\mathbf{z}(t_k), t_k)} \quad (4.19)$$

Die Variablen  $z_i(t_k)$  beschreiben dabei die Positionen der betrachteten Volumenelemente zum Zeitpunkt  $t_k$  und sind mit Gl. (4.11) durch  $z_i(t_k) = z_i(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} v(\tau) d\tau$ ,  $i = 1 \dots p$ , definiert. Die Positionen werden in dem Vektor  $\mathbf{z}(t_k) = (z_1(t_k) \cdots z_p(t_k))^T$  zusammengefasst. Die Stellgrößen unterliegen in praktisch sinnvollen Systemen gewissen Beschränkungen. Zusammenfassend kann nun das folgende quadratische Optimierungsproblem mit linearen Ungleichungsnebenbedingungen formuliert werden:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k)} \frac{1}{2} \left\| \bar{\mathbf{u}}_{opt}(\mathbf{z}(t_k), t_k) - \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{z}(t_k)) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) \right\|_2^2, \\ \text{u. B. v.: } \tilde{u}_{min} \leq \tilde{u}_j \leq \tilde{u}_{max}, \quad j = 1 \dots m \end{aligned} \quad (4.20)$$

Die Lösbarkeit des Optimierungsproblems hängt stark von den Grenzen  $\tilde{u}_{min}$  und  $\tilde{u}_{max}$  sowie der Komplexität der Steuerungsaufgabe ab. Aus diesem Grund ist es wichtig, die Stellgrößenbeschränkungen in der Optimierung zu berücksichtigen. Handelt es sich bei Gl. (4.19) um ein unterbestimmtes Gleichungssystem, kann selbst unter Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzungen eine große Anzahl an Lösungen existieren. Nun stellt sich die Frage, welche der möglichen Lösungen die geeignetste Lösung darstellt. Aus systemtheoretischen Gesichtspunkten ist eine möglichst geringe Stellgrößenänderung wünschenswert, um keine unnötige Unruhe in das System zu bringen. Eine unterbestimmte Problemstellung stellt die notwendigen Freiheitsgrade zur Verfügung, um diese zusätzliche Entwurfsvorgabe zu realisieren. Dazu wird das Gütefunktional aus Gl. (4.20) wie folgt erweitert:

$$\min_{\mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k)} \frac{1}{2} \left\| \bar{\mathbf{u}}_{opt}(t_k) - \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{z}(t_k)) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \left\| \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) - \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_{k-1}) \right\|_2^2 \quad (4.21)$$

Die Kosten für die Stellgrößenänderung werden dabei mit dem Parameter  $\lambda > 0$  gewichtet. Das Optimierungsproblem (4.20) lässt sich somit für unterbestimmte Systeme formulieren zu

$$\min_{\mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k)} \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{opt}(\mathbf{z}(t_k), t_k) \\ \lambda \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_{k-1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{z}(t_k)) \\ \lambda \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) \right\|_2^2 \quad (4.22)$$

u. B. v.:  $\tilde{u}_{min} \leq \tilde{u}_j \leq \tilde{u}_{max}, j = 1 \dots m.$

Zur Lösung der beiden Optimierungsprobleme mit quadratischem Gütemaß und linearen Ungleichungsnebenbedingungen existieren eine Reihe etablierter Algorithmen. Für einen detaillierten Einblick wird auf weiterführende Literatur, wie beispielsweise [Pap91] verwiesen.

Ist der Steuerungsentwurf nicht bezüglich einzelner durch den Prozess transportierter Volumenelemente, sondern für das gesamte Medium durchzuführen, ist die Approximation eines vollständigen Profils des verteilten Stelleingriffs in Ort und Zeit erforderlich. In diesem Fall geht das Optimierungsproblem (4.20) in das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t)} \int_0^{T_{St}} \int_0^L \frac{1}{2} \left( \bar{u}_{opt}(z, t) - \tilde{\mathbf{b}}^T(z) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t) \right)^2 dz dt, \quad (4.23)$$

u. B. v.:  $\tilde{u}_{min} \leq \tilde{u}_j \leq \tilde{u}_{max}, j = 1 \dots m,$

mit dem Steuerungshorizont  $T_{St}$  über. Im Gegensatz zum Entwurf einer optimalen Steuerung bezüglich der PDGL (2.33), reduziert sich das Optimierungsproblem auf die Approximation einer Fläche.

#### 4.4.2. Aktoren mit örtlich beschränkter Wirkung

Eine Reihe von Prozessen beinhalten Aktoren mit örtlich beschränkter Wirkung, welche in der Regel durch die Funktion

$$\bar{u}_{real}(z, t) = \underbrace{(H(z) - H(z - \bar{z}_1))}_{\tilde{b}_1(z)} d(\tilde{u}_1(t)) + \dots + \underbrace{(H(z - \bar{z}_{m-1}) - H(z - \bar{z}_m))}_{\tilde{b}_m(z)} d(\tilde{u}_m(t)), \quad (4.24)$$

mit der Heaviside-Funktion  $H(z)$  dargestellt werden. Der Prozess wird somit in einzelne Zonen aufgeteilt. In diesem Fall kann entlang des Prozesses nur eine Stufenfunktion realisiert werden, durch welche der aus dem Steuerungsentwurf resultierende verteilte Eingriff approximiert werden muss. Tritt in einer Zone zu jedem Abtastzeitpunkt  $t_k$  nur maximal eine Stellgrößenanforderung  $\bar{u}_{opt}(z(t_k), t_k)$  auf, kann die Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{z}(t_k))$  aus Gl. (4.19) mit  $\tilde{b}_j(z) = H(z - \bar{z}_{j-1}) - H(z - \bar{z}_j)$  durch einfaches Vertauschen der Zeilen und Spalten in eine Einheitsmatrix überführt werden. Damit hat das Gleichungssystem (4.19) eine eindeutige Lösung. Die Realisierung mehrerer unterschiedlicher Stellgrößenanforderungen in einer

Zone bzw. einer kontinuierlichen Stellgrößenfläche  $\bar{u}_{opt}(z, t)$  ist dagegen unter Umständen mit großen Fehlern verbunden. Bei Aktoren mit kontinuierlichen Ortsfunktionen besteht hingegen die Möglichkeit, abhängig von der Form der Funktion  $\tilde{\mathbf{b}}(z)$ , diese hohe Anforderung aufgrund ihrer Überlappungen besser zu erfüllen. Die Approximation eines entlang des Prozesses kontinuierlichen Stellgrößenverlaufs ist mit einem verteilten Stelleingriff nach Gl. (4.24) umso exakter möglich, je näher sich der gewünschte Verlauf einer Stufenfunktion annähert. Dies kann beim Entwurf der Referenztrajektorie berücksichtigt werden. Dennoch können auch bei beliebigen Stellgrößenverläufen abhängig von der Anzahl der Stellglieder brauchbare Ergebnisse erzielt werden, wie in Abschnitt 4.6 gezeigt wird. Bei Anwendung des Entwurfs einer optimalen Steuerung nach [Trö09] können die flachheitsbasierten Methoden ebenso zur Analyse des Steuerungsproblems herangezogen werden.

Im nächsten Abschnitt wird die vorgestellte Methode zum Entwurf einer Steuerung für Transportprozesse auf den in Abschnitt 2.1.2 eingeführten Trocknungsprozess angewendet.

## 4.5. Flachheitsbasierter Steuerungsentwurf am Beispiel des Trocknungsprozesses

In diesem Abschnitt werden nun die in den letzten Abschnitten theoretisch erläuterten Entwurfsschritte am Beispiel des in Kap. 2.1.2 vorgestellten Trocknungsprozesses angewendet. Die Regelgröße wird dabei durch den Feuchtegehalt  $X_{H_2O}(z, t)$  repräsentiert. Der Prozess verfügt über acht plattenförmige Strahler der Länge  $L/8$ , welche eine bezüglich der Ortsvariablen kontinuierliche Charakteristik aufweisen. Die einzelnen Strahler werden mit einer PI-Reglung betrieben. Mit dieser Maßnahme wird die Dynamik des Aktors soweit reduziert, dass sie im Vergleich zur Prozessdynamik vernachlässigt werden und der Steuerungsentwurf basierend auf der PDGL (2.28) erfolgen kann. Die Anwendung der Methode der Charakteristiken führt mit  $\boldsymbol{\xi}(\mu) = (z \ t)^T$ ,  $\mathbf{x}(\mu) = (T(\boldsymbol{\xi}(\mu)) \ X_{H_2O}(\boldsymbol{\xi}(\mu)))^T$ ,  $u_O(\boldsymbol{\xi}(\mu)) = T_\Gamma(z, t)$  und  $\bar{b}(\xi_1(\mu)) = \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j(\xi_1(\mu))$  mit  $\tilde{b}_j(\xi_1(\mu)) = dF_{Str_j, M}(z)$  zu den charakteristischen Differentialgleichungen

$$\xi_1'(\mu) = v(\xi_2(\mu)) \quad (4.25)$$

$$\xi_2'(\mu) = 1 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} x_1'(\mu) = & c_\alpha(u_O(\boldsymbol{\xi}(\mu)) - x_1(\mu)) + c_{Str}(\bar{u}(\boldsymbol{\xi}(\mu)) - \bar{b}(\xi_1(\mu))x_1^4(\mu)) \\ & - c_V(x_2(\mu) - x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(x_1(\mu) - x_{1,ref})}) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$x_2'(\mu) = -c_{H_2O}(x_2(\mu) - x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(x_1(\mu) - x_{1,ref})}),$$

mit der Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(0) = (T(\boldsymbol{\xi}(0)) \ X_{H_2O}(\boldsymbol{\xi}(0)))^T$ . Als Stellgröße entlang der charakteristischen Kurve wird die Überlagerung der Temperaturverteilung der einzelnen Hei-

zelemente betrachtet:

$$\bar{u}(\boldsymbol{\xi}(\mu)) = \sum_{j=1}^m \tilde{b}_j(\xi_1(\mu)) T_{Str_j}^4(\xi_2(\mu)) \quad (4.28)$$

Aus Gl. (4.27) ist ersichtlich, dass entsprechend dem vorgestellten Entwurfsverfahren die Funktion  $\bar{b}(\xi_1(\mu))$ , die als erfassbar angenommene Störgröße  $u_O(\boldsymbol{\xi}(\mu))$  und im Allgemeinen auch das Referenzprofil  $y^*(\boldsymbol{\xi}(\mu))$ , mit  $\boldsymbol{\xi}(\mu)$  aus Gl. (4.25) und (4.26), auf die charakteristischen Kurven abzubilden sind. Das damit resultierende System

$$\begin{aligned} x_1'(\mu) &= c_\alpha(u_O(\mu) - x_1(\mu)) + c_{Str}(\bar{u}(\mu) - \bar{b}(\mu)x_1^4(\mu)) - c_V(x_2(\mu) - x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(x_1(\mu) - x_{1,ref})}) \\ x_2'(\mu) &= -c_{H_2O}(x_2(\mu) - x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(x_1(\mu) - x_{1,ref})}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

ist flach, mit dem flachen Ausgang  $y_f(\mu) = x_2(\mu)$ . Der flache Ausgang  $y_f(\mu)$  entspricht der zu steuernden Ausgangsgröße, weshalb für die Stellgröße  $\bar{u}(\mu)$  mit

$$\begin{aligned} y_f(\mu) &= x_2(\mu) \\ x_1(\mu) &= x_{1,ref} - \frac{1}{A_{H_2O}} \ln \left( \frac{y_f'(\mu) + c_{H_2O} y_f(\mu)}{c_{H_2O} x_{2,ref}} \right) = \varsigma \left( y_f(\mu), y_f'(\mu) \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mu) &= \bar{b}(\mu)x_1^4(\mu) + \frac{1}{c_{Str}} \left( -\frac{1}{A_{H_2O}} \frac{y_f''(\mu) + c_{H_2O} y_f'(\mu)}{y_f'(\mu) + c_{H_2O} y_f(\mu)} - c_\alpha(u_O(\mu) - x_1(\mu)) - \frac{c_V}{c_{H_2O}} y_f'(\mu) \right) \\ &= \eta \left( y_f(\mu), y_f'(\mu), y_f''(\mu) \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

folgt.

*Bemerkung 4.1.* Die Systemgröße  $u_O(\mu)$  könnte auf den ersten Blick als zweite Eingangsgröße interpretiert werden. Die Auswertung der Rangbedingung der partiellen Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}$  entsprechend Gl. (4.1) zeigt jedoch, dass das System (4.29) nur  $m = 1$  unabhängige Eingangsgrößen aufweist. Folglich besteht der flache Ausgang aus nur einer Komponente. Dies ist auch bei genauerer Betrachtung von Gl. (4.29) ersichtlich. Durch die Umformung von Gl. (4.29) in

$$c_\alpha u_O(\mu) + c_{Str} \bar{u}(\mu) = x_1'(\mu) + c_\alpha x_1(\mu) + c_{Str} \bar{b}(\mu) x_1^4(\mu) + c_V (x_2(\mu) - x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(x_1(\mu) - x_{1,ref})}) \quad (4.32)$$

ist erkennbar, dass  $u_O(\mu)$  direkt auf die Systemgröße  $\bar{u}(\mu)$  einwirkt. Der tatsächliche Systemeingang setzt sich demnach aus der gewichteten Summe von  $\bar{u}(\mu)$  und  $u_O(\mu)$  zusammen, also aus der Überlagerung von der Wärmestrahlung und dem Wärmeübergang. Dies entspricht auch der physikalischen Gegebenheit. Aus der physikalischen Anschauung ist klar, dass die Funktion  $u_O(\mu)$  nicht frei vorgegeben werden kann. Aus diesem Grund wird sie im

Folgenden als Störgröße interpretiert. Die Steuertrajektorie ist demnach für den Summeneingang zu bestimmen, welcher nur mehr von dem flachen Ausgang und dessen Ableitungen abhängt. Bei bekannter Störgröße  $u_O(\mu)$  kann daraus anschließend der gesuchte Verlauf für die Stellgröße  $\bar{u}(\mu)$  bestimmt werden. Dieser Berechnungsschritt ist in Gl. (4.31) bereits integriert.

Der ermittelte Stellgrößenverlauf  $\bar{u}(\mu)$  liegt entlang der Grundcharakteristik vor und muss somit noch auf die Orts- und Zeitvariablen abgebildet werden, bevor mit Gl. (4.28) die Stellgrößenverläufe der einzelnen Heizelemente ermittelt werden können. Dafür wird erneut die Abbildungsvorschrift, welche aus Gl. (4.25) und (4.26) resultiert, herangezogen. Der Zusammenhang aus Gl. (4.28) zur Bestimmung der Verläufe der einzelnen Strahlertemperaturen führt wie in Abschnitt 4.4.1 erläutert auf ein Optimierungsproblem.

Mit dem vorgestellten Steuerungsentwurf können unterschiedliche, unter Umständen sehr komplexe Steuerungsaufgaben strukturiert und übersichtlich gelöst werden. Beispielhaft werden dazu im Folgenden zwei Steuerungsaufgaben betrachtet. Zuerst soll ein fließender Arbeitspunktwechsel des Feuchtegehalts am Ausgang des Prozesses  $X_{H_2O}(L, t)$  durchgeführt werden, ohne dabei die grundlegende Form der Trajektorie entlang des Prozesses zu verändern. Anschließend wird der Fall einer zeitlich veränderlichen Transportgeschwindigkeit betrachtet. In beiden Fällen sei der Verlauf der Geschwindigkeit  $v(t)$  bekannt.

#### 4.5.1. Arbeitspunktwechsel des Feuchtegehalts am Prozessausgang

Die vorgestellte Entwurfsmethode wird nun zur Realisierung eines Arbeitspunktwechsels des Ausgangs  $X_{out}(t) := X_{H_2O}(L, t)$  eines Trocknungsprozesses entlang einer definierten Trajektorie herangezogen. Das Medium wird dabei mit konstanter Geschwindigkeit durch den Prozess transportiert und soll einer cosinus-förmigen Referenztrajektorie folgen. Dieses Profil soll während des Arbeitspunktwechsels möglichst beibehalten werden. Der Feuchtegehalt am Ende des Prozesses soll sich ebenso cosinus-förmig verringern. Damit ist die Referenztrajektorie entlang der Grundcharakteristik zu definieren. Diese entspricht im eingeschwungenen Zustand der Trajektorie entlang der Ortskoordinate  $z$  und hat vor dem Arbeitspunktwechsel ( $t < t_1$ ) die Bedingungen

$$x_2^*(0) = x_{2_0}, \quad x_2^*(T_V) = X_{out_1} = 0.02, \quad x_2^{*'}(0) = x_2^{*'}(T_V) = 0, \quad t < t_1 \quad (4.33)$$

mit der Verweilzeit  $T_V$ , zu erfüllen. Für die Verweilzeit gilt bei konstanter Geschwindigkeit  $T_V = L/v$ . Damit folgt für die Referenztrajektorie:

$$x_2^*(\mu) = \frac{x_{2_0} - X_{out_1}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{T_V} \mu\right) + \frac{x_{2_0} + X_{out_1}}{2} \quad t < t_1 \quad (4.34)$$

Der Arbeitspunktwechsel soll von  $X_{H_2O}^*(L, t_1) = X_{out_1} = 0.02$  zu  $X_{H_2O}^*(L, t_2) = X_{out_2} = 0.003$  in  $T_{AP} = t_2 - t_1 = 5$  sec abgeschlossen sein. Wird erneut ein verschwindender Gradient

zu Beginn und am Ende der Trajektorie gefordert, kann der Verlauf durch

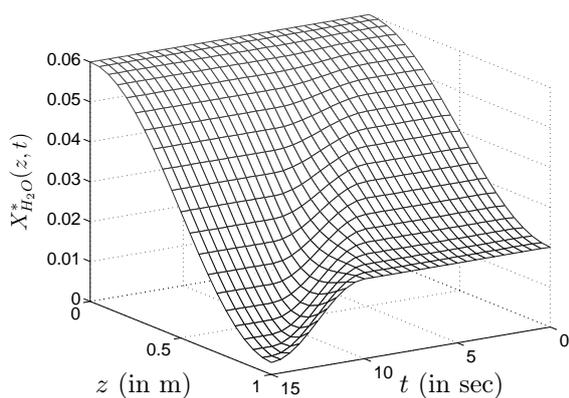
$$X_{H_2O}^*(L, t) = \frac{X_{out1} - X_{out2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{T_{AP}} t\right) + \frac{X_{out1} + X_{out2}}{2} \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (4.35)$$

beschrieben werden. Abb. 4.2(a) zeigt das damit definierte Referenzprofil. An dem Verlauf des Profils ist die Verweilzeit  $T_V$ , bis die Anfangsbedingung aus dem Prozess transportiert wird, deutlich erkennbar. Die ermittelte Stellgrößenfläche ist mit den acht plattenförmigen Strahlern zu approximieren. Abb. 4.2(b) zeigt als Simulationsergebnis die Abweichung des erzielten Profils des Feuchtegehaltes vom Referenzprofil  $X_{H_2O}^*(z, t)$  aus Abb. 4.2(a). In Abb. 4.3 ist der durch die Steuerung realisierte Verlauf des Feuchtegehaltes am Ende des Prozesses dargestellt. Diese weicht nur wenig von dem gewünschten Verlauf ab. Die verbleibenden Abweichungen sind auf die Approximation des verteilten Stelleingriffs zurückzuführen.

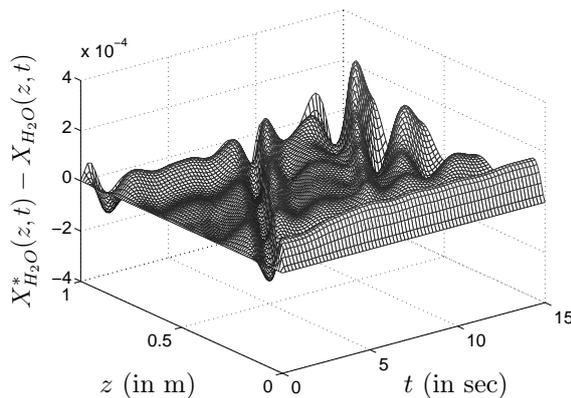
Ist der Einfluss der Aktordynamik nicht vernachlässigbar, so kann ihre Wirkung durch geeignete Modifikation des aus dem Steuerungsentwurf ermittelten Verlaufs kompensiert werden. Die dafür erforderliche Stellgröße wird durch Inversion der Aktordynamik ermittelt. In dem konkreten Anwendungsbeispiel wird die Aktordynamik durch ein  $PT_1$ -Verhalten approximiert. Damit wird der Zusammenhang zwischen der tatsächlichen Stellgröße  $u_j(t)$  und der aus dem flachheitsbasierten Steuerungsentwurf ermittelten Stellgröße  $\tilde{u}_j(t)$  für den Aktor  $j$  durch

$$T_A \dot{\tilde{u}}_j(t) + \tilde{u}_j(t) = K_A u_j(t) \quad (4.36)$$

beschrieben. Aus Gl. (4.36) kann nun der Verlauf der Stellgröße  $u_j(t)$  bestimmt werden. Wird demnach zusätzlich die Ableitung der ermittelten Größe  $\tilde{u}_j(t)$  herangezogen, kann der

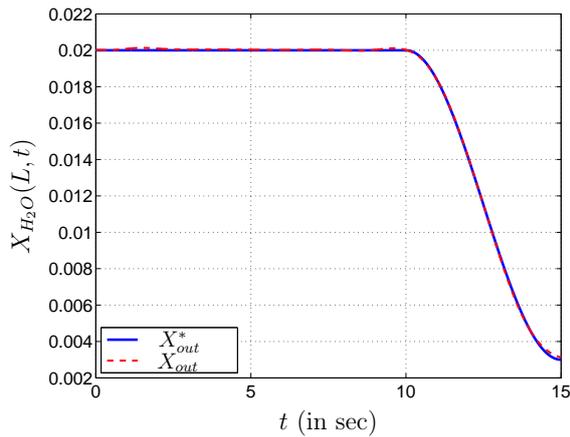


(a) Referenzprofil des Feuchtegehaltes

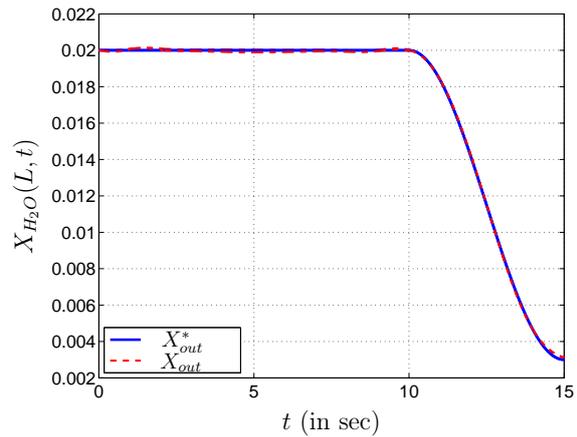


(b) Abweichung des erzielten Verlaufs vom Referenzprofil aus Abb. 4.2(a)

**Abbildung 4.2.:** Referenzprofil und Ergebnis des Steuerungsentwurfs für einen Arbeitspunktwechsel des Feuchtegehaltes von Papier am Ende des Trocknungsprozess mit acht plattenförmigen Strahlereinheiten.



**Abbildung 4.3.:** Simulationsergebnis der Prozessauslaufgröße  $X_{out} = X_{H_2O}(L, t)$  bei flachheitsbasierter Steuerung des Trocknungsprozesses mit acht plattenförmigen Strahlereinheiten.



**Abbildung 4.4.:** Simulationsergebnis der Prozessauslaufgröße  $X_{out} = X_{H_2O}(L, t)$  bei flachheitsbasierter Steuerung des Trocknungsprozesses mit acht plattenförmigen Strahlereinheiten und einer nicht vernachlässigbaren Aktordynamik ( $T_A = 15 \text{ sec}$ ).

Einfluss der Aktordynamik kompensiert werden. Die Ableitung  $\dot{\tilde{u}}_j(t)$  kann problemlos auch numerisch erfolgen, da sich aufgrund der glatten Referenztrajektorien auch glatte Verläufe für  $\tilde{u}_j(t)$  ergeben. Abb. 4.4 zeigt das Ergebnis für die zuvor formulierte Steuerungsaufgabe für den Trocknungsprozess mit einer Zeitkonstante der Aktoren von  $T_A = 15 \text{ sec}$ . Der Einfluss der Aktordynamik konnte mit dieser Maßnahme sehr gut unterdrückt werden. Die Abweichung von der Referenztrajektorie resultiert erneut aus der Approximation der geforderten Stellgrößenfläche

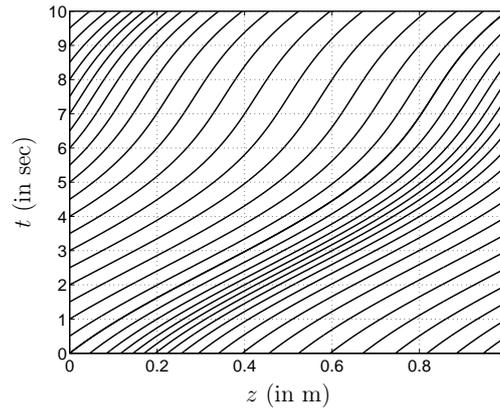
### 4.5.2. Zeitvariante Transportgeschwindigkeit

Das vorgestellte Entwurfsverfahren stellt auch bei zeitvarianter Transportgeschwindigkeit eine strukturierte Methode zum Steuerungsentwurf dar. Wie schon erläutert wurde, bleibt zwar der flachheitsbasierte Steuerungsentwurf entlang der charakteristischen Kurve von der Form des Geschwindigkeitsverlaufs unberührt, jedoch nicht die Abbildungsvorschrift  $\xi(\mu)$ . Die Transportgeschwindigkeit soll nun den folgenden Verlauf aufweisen:

$$v(t) = 0.1 \text{ m/sec} + 0.05 \text{ m/sec} \sin(2\pi \cdot 0.1 \text{ 1/sec} t) \quad (4.37)$$

Für die Grundcharakteristiken gilt damit

$$\begin{aligned} z &= \xi_1(\mu) = \int_0^\mu v(\eta + t_0) d\eta \\ t &= \xi_2(\mu) = \mu + \xi_2(0) = \mu + t_0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

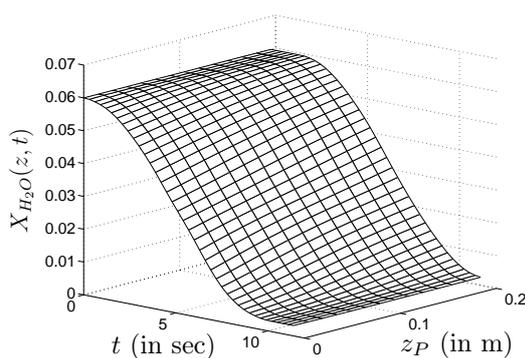


**Abbildung 4.5.:** Ausschnitt der Grundcharakteristiken des Trocknungsprozesses bei zeitvarianter Transportgeschwindigkeit entsprechend Gl. (4.37).

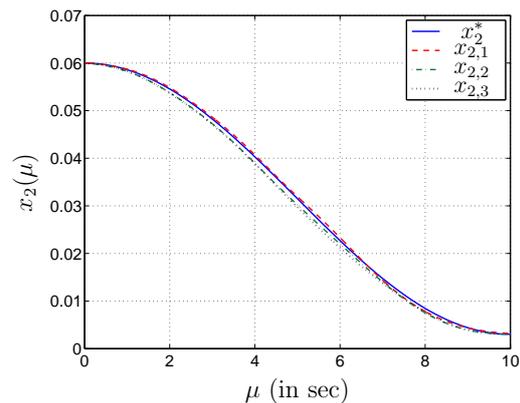
wobei  $t_0$  den Einlaufzeitpunkt eines differentiellen Volumenelements bezeichnet. Abb. 4.5 zeigt einen Ausschnitt der Grundcharakteristiken für den betrachteten Prozess. Wie aus Abb. 4.5 erkennbar ist, weisen die einzelnen differentiellen Volumenelemente nun nicht mehr den gleichen Orts-Zeit-Verlauf  $\xi(\mu)$  auf. Der Feuchtegehalt jedes einlaufenden Volumenelements soll gleichmäßig entsprechend dem in Gl. (4.34) definierten Referenzprofil abnehmen. Damit liegt das Referenzprofil, mit dem Anfangswert  $x_{2_0} = 0.06$  und dem Endwert  $X_{out} = 0.003$ , bereits entlang der charakteristischen Kurve vor:

$$x_2^*(\mu) = \frac{x_{2_0} - X_{out}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{T_V} \mu\right) + \frac{x_{2_0} + X_{out}}{2} \quad (4.39)$$

Damit ist nur der Verlauf des Sichtfaktors sowie die Störgröße  $u_O(z, t)$  auf die charakte-



**Abbildung 4.6.:** Ergebnis des flachheitsbasierten Steuerungsentwurfs für einen Ausschnitt des transportierten Papiers der Länge  $L_P = 0.2$  m bei variabler Transportgeschwindigkeit.



**Abbildung 4.7.:** Vergleich von drei ausgewählten Volumenelementen des betrachteten Ausschnitts mit dem Referenzverlauf ( $x_{2,1} = X_{H_2O}|_{z_P=0\text{ m}}$ ,  $x_{2,2} = X_{H_2O}|_{z_P=0.1\text{ m}}$ ,  $x_{2,3} = X_{H_2O}|_{z_P=0.2\text{ m}}$ ) bei variabler Transportgeschwindigkeit.

ristische Kurve abzubilden. Dies ist, aufgrund des unterschiedlichen Verlaufs der Grundcharakteristiken, für jedes Volumenelement erforderlich. Abb. 4.6 zeigt das Ergebnis des Steuerungsentwurfs für einen Ausschnitt des transportierten Papiers der Länge  $L_P = 0.2$  m. In Abb. 4.7 werden drei ausgewählte Punkte ( $z_P = [0, 0.1, 0.2]$  m) des Ausschnitts mit dem Referenzverlauf verglichen. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, wird der gewünschte Verlauf sehr gut erreicht. Der Parameter  $\mu$  entspricht dabei nach Gl. (4.38) bis auf den Anfangswert  $t_0$  der Zeit  $t$ .

Die Anwendung von flachheitsbasierten Methoden erlaubt auch eine strukturelle Analyse des Prozesses, wie im folgenden Abschnitt diskutiert wird.

## 4.6. Flachheitsbasierte Analyse als Design-Werkzeug

Das Konzept der Flachheit stellt ein brauchbares Instrument zur Trajektorienplanung unter Berücksichtigung möglicher Beschränkungen der Systemgrößen dar. Aufgrund der Parametrierung durch den flachen Ausgang können alle Trajektorien der Systemgrößen bestimmt werden, womit sich Bedingungen an die geplante Trajektorie ableiten lassen und sicher gestellt wird, dass sie sämtliche Systemgleichungen erfüllt. Zudem ist zu gewährleisten, dass sämtliche Randbedingungen und Beschränkungen eingehalten werden. Dies ist durch die Parametrierung der Systemgrößen mit dem flachen Ausgang relativ einfach möglich, wie am Beispiel eines Rohrreaktors gezeigt werden wird. Auf diese Weise können für einen bereits bestehenden Prozess zulässige Referenztrajektorien ermittelt und somit das Potential sowie die Grenzen des Prozesses analysiert werden. Zudem ist es möglich, mit den flachheitsbasierten Methoden Entwurfshinweise und Konstruktionsvorschriften für einen in Planung befindenden Prozess zu formulieren.

Die Anwendung eines Optimierungsverfahrens zum Systemdesign und zur Systemanalyse weist dagegen eine Reihe von Nachteilen auf, welche bereits in der Einleitung von Kap. 4 diskutiert wurden. Der Entwurf einer optimalen Steuerung lässt bezüglich der Analyse zulässiger Referenzverläufe relativ wenig Interpretation zu, insbesondere wenn der Optimierungsalgorithmus keine Lösung findet. Im Gegensatz dazu liefert das Konzept der Flachheit ein Instrument zur strukturierten Analyse des Prozesses sowie der Abhängigkeiten der Trajektorien. Damit können, aufgrund die Parametrierung der Systemgrößen mit dem flachen Ausgang, direkt Aussagen über zulässige Referenzprofile getroffen und der Entwurf bereits zu Beginn auf theoretisch mögliche Referenzprofile beschränkt werden. Zudem können Rückschlüsse auf die Gründe eines nicht zulässigen Profils getroffen und damit Hinweise auf die erforderlichen Systemänderungen gegeben werden. Diese umfassenden Möglichkeiten der Analyse können ebenso bei der Planung eines Prozesses sehr hilfreich sein, wie im Folgenden noch verdeutlicht wird.

### 4.6.1. Bestimmung zulässiger Referenzprofile

Für ein System entsprechend Gl. (4.14) können unter Anwendung flachheitsbasierter Methoden die folgenden allgemeinen Bedingungen an die Referenztrajektorie formuliert werden:

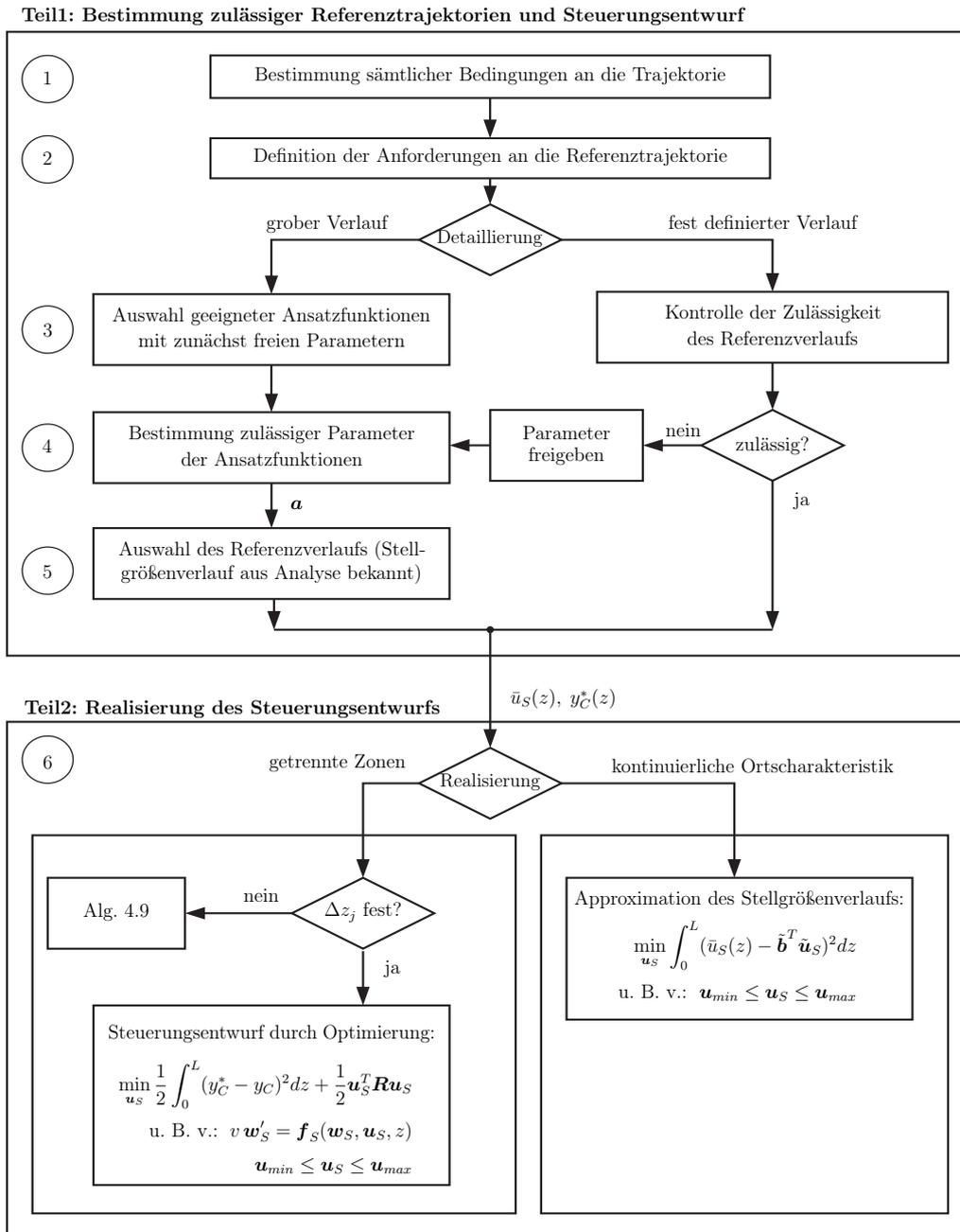
1. Anfangsbedingungen:  $\mathbf{x}(0) \stackrel{!}{=} \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{y}_f(0), \dots, \mathbf{y}_f^{(\beta)}(0))$ .
2. Die Referenztrajektorie muss die Differentialgleichungen erfüllen  $\rightarrow$  Bedingungen für Ableitungen des flachen Ausgangs sowie Glattheitsanforderungen an die Trajektorie
3. Stellgrößen- und Zustandsbeschränkungen:  $\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{max}$  und  $\mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max}$ .
4. Bedingungen an die Zustandsvariablen am Ende des Prozesses:  $\mathbf{x}(T) \stackrel{!}{=} \mathbf{r}$ .

Bedingungen 1 und 2 spiegeln die Tatsache wider, dass die Referenztrajektorie mit dem DGL-System entlang der charakteristischen Kurve konsistent sein und mit den Anfangsbedingungen übereinstimmen muss. Die im System vorhanden Beschränkungen werden mit Bedingung 3 berücksichtigt. Diese drei Bedingungen müssen in jedem Fall erfüllt werden, um die Realisierbarkeit des Referenzprofils zu gewährleisten. Nachdem der betrachtete Prozess in der Regel nur einen Teil der gesamten Prozesskette darstellt, wird oft gefordert, dass die Zustandsvariablen des Mediums am Ende des Prozesses einen bestimmten Wert aufweisen bzw. in einem definierten Wertebereich liegen. Diese Forderung wird durch Bedingung 4 berücksichtigt. Die angeführten Bedingungen können problemlos um weitere prozessspezifische Forderungen erweitert werden. Wird eine Funktion mit ausreichend vielen freien Parameter für den Verlauf einer oder mehrere Zustandsvariablen vorgegeben, so kann aus den genannten Bedingungen ein im Allgemeinen nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung zulässiger Parameterwerte für das Referenzprofil formuliert werden. Auf diese Weise wird ein strukturierter und gut nachvollziehbarer Entwurfsprozess ermöglicht.

Aus dieser Analyse wurde das in Abb. 4.8 dargestellte Ablaufdiagramm zum strukturierten Entwurf einer Steuerung für Transportprozesse gewonnen. Dabei wird der Entwurf einer stationären Steuerung betrachtet, welcher in der Praxis auch der häufigste Fall ist. Das dargestellte Schema umfasst im Wesentlichen zwei Teile: Die Bestimmung zulässiger Trajektorien und die Realisierung der Steuerung mit den realen Aktoren. Das Ablaufdiagramm wird im Folgenden anhand von zwei Beispielprozessen näher erläutert. Zuvor wird noch eine Methode zur Ableitung von Anforderungen an den betrachteten Prozess vorgestellt, um den ermittelten verteilten Stelleingriff  $\bar{u}_S(z)$  bestmöglich approximieren zu können.

### 4.6.2. Ableitung von Konstruktionshinweisen für den Prozess

In diesem Abschnitt wird der zweite Teil des Ablaufdiagramm in Abb. 4.8 also die Realisierung des Steuerungsentwurf eingehend diskutiert. Aufgrund der stationären Betrachtung



**Abbildung 4.8.:** Vorgehensweise zum strukturierten stationären Steuerungsentwurf für Transportprozesse, wobei  $\Delta z_j$  die Ausdehnung der Zone  $j$  und  $\mathbf{a}$  den Parametervektor der Referenztrajektorie bezeichnet.

tung erfolgt der Steuerungsentwurf bezüglich einer kontinuierlichen Trajektorie entlang der Ortskoordinate  $z$ . Aus der Anwendung der flachheitsbasierten Methoden resultiert für die ausgewählte Trajektorie unmittelbar der Verlauf des verteilten Stelleingriffs  $\bar{u}(z)$ . Dieser Verlauf muss mit den realen Aktoren realisiert werden, um das Steuerungsproblem erfolgreich zu lösen. Dieser Problematik widmete sich bereits der Abschnitt 4.4, dessen Ausführungen problemlos auf den stationären Fall übertragen werden können. Die Güte des Steuerungsergebnisses und die Strategie zur Realisierung des erfolgten Steuerungsentwurfs

hängt dabei wesentlich von der Form der Ortsfunktionen  $\tilde{\mathbf{b}}(z)$  ab, während die Aktordynamik im stationären Fall keine Rolle spielt. Dabei wird im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass im stationären Fall  $\tilde{\mathbf{u}}_S = \mathbf{u}_S$  gilt. Das Problem kann

1. mit dem für den stationären Fall resultierenden Entwurf einer optimalen Steuerung bezüglich der Referenztrajektorie  $y_S^*(z)$  ([Trö09])

$$\min_{\mathbf{u}_S} \frac{1}{2} \|y_S^*(z) - y_S(z)\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_S\|_{\mathbf{R}}^2 = \min_{\mathbf{u}_S} \frac{1}{2} \int_0^L (y_S^*(z) - y_S(z))^2 dz + \frac{1}{2} \mathbf{u}_S^T \mathbf{R} \mathbf{u}_S$$

$$\text{u. B. v.: } v \mathbf{w}'_S(z) - \mathbf{f}_S(\mathbf{w}_S(z), \mathbf{u}_S, z) = 0$$

$$\mathbf{w}_S(0) = \mathbf{w}_0$$

$$y_S(z) = \mathbf{c}_C^T \mathbf{w}_S(z)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_S \leq \mathbf{u}_{max}$$

$$\mathbf{R} > \mathbf{0}$$

(4.40)

2. sowie durch Approximation des kontinuierlichen Stellgrößenverlaufs mit

$$\min_{\mathbf{u}_S} \int_0^L (\bar{u}(z) - \tilde{\mathbf{b}}^T(z) \mathbf{d}_{\mathbf{u}_S})^2 dz$$

(4.41)

$$\text{u. B. v.: } \mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}_S \leq \mathbf{u}_{max}$$

gelöst werden. Die zweite Methode kann auch als Startlösung für das Optimierungsproblem (4.40) herangezogen werden. Dies ist besonders im Fall von Aktoren mit örtlich getrennter Wirkung relevant, sofern der Stellgrößenverlauf nicht einer Stufenfunktion ähnelt (vgl. Abschnitt 4.4). Damit würden die flachheitsbasierten Methoden lediglich zur Ermittlung der Referenztrajektorie herangezogen werden. Im Fall von Aktoren mit kontinuierlicher Ortsfunktionen  $\tilde{b}_j(z)$  kann bei einem glatten Verlauf des verteilten Stelleingriff der Steuerungsentwurf sehr gut durch Lösen des Optimierungsproblems (4.41) realisiert werden. Damit wird das eigentliche Optimierungsproblem (4.40) erneut auf die Approximation einer Kurve reduziert.

Im Gegensatz zu Abschnitt 4.3 wird an dieser Stelle der Fokus auf den Fall gelegt, dass die Anzahl  $m$  und die Ausdehnung  $\Delta z_j$  der einzelnen Aktoren bzw. die Position der Aktoren in gewissen Grenzen frei wählbar ist. Dies ist beispielsweise in der Planungsphase eines Prozesses oder auch nur zu Analysezwecken interessant. Damit kann der Entwurfsprozess von Transportprozessen gewinnbringend unterstützt werden. Die Bestimmung der Position der Aktoren ist nur für den Fall relevant, dass die Aktoren nicht nahtlos ineinander übergehen, wie beispielsweise bei röhrenförmigen Strahlern in Durchlauföfen (vgl. Abschnitt 2.1.1.2). Im Folgenden wird vorgestellt, wie der aus der flachheitsbasierten Analyse gewonnene verteilte Eingriff  $\bar{u}_S(z)$  zur Gewinnung von Konstruktionshinweisen herangezogen

werden kann. Damit kann ein Prozess optimal auf ein gewünschtes Referenzprofil hin entworfen werden. Zu diesem Zweck wird ein Verfahren zur Ermittlung der erforderlichen Anzahl und Ausdehnung bzw. Position der Aktoren präsentiert. Dabei wird erneut zwischen Aktoren mit örtlich getrennter Wirkung und Aktoren mit einer kontinuierlichen Ortsfunktion unterschieden.

### Aktoren mit örtlich getrennter Wirkung

Eine sinnvolle Ausprägung der mit diesen Aktoren realisierbaren Stufenfunktion zur Approximation des idealen Stellgrößenverlaufs  $\bar{u}_S(z)$  kann oft schon aus der Betrachtung des Verlaufs von  $\bar{u}_S(z)$  bestimmt werden. Mit der daraus resultierenden Ausdehnung  $\Delta z_j$  der Stellglieder können bereits sehr gute Ergebnisse erzielt werden, wie an dem Anwendungsbeispiel eines Rohrreaktors in Abschnitt 4.6.3 gezeigt wird. Die Stellgrößenwerte der einzelnen Aktoren können dabei durch einfache Mittelwertbildung des verteilten Eingriffs  $\bar{u}_S(z)$  in dem zugehörigen Bereich

$$\tilde{u}_{j,S} = \frac{1}{\bar{z}_j - \bar{z}_{j-1}} \int_{\bar{z}_{j-1}}^{\bar{z}_j} \bar{u}_S(z) dz \quad j = 1 \dots m \quad (4.42)$$

oder durch Lösung des Optimierungsproblems (4.40) bestimmt werden. Diese Herangehensweise zur Bestimmung der Ausdehnung der Zonen motiviert den in Abb. 4.9 dargestellten Algorithmus. Dabei werden die einzelnen Charakteristika, wie Maxima und Minima, des Stellgrößenverlaufs  $\bar{u}_S(z)$  durch die Bestimmung der Nullstellen eines aufbereiteten Verlaufs  $f(z)$  der Stellgröße  $\bar{u}_S(z)$  identifiziert. Eine Eigenschaft der gesuchten Charakteristika liegt darin, dass sie den Mittelwert des Signalverlaufs schneiden. Um auch Maxima bzw. Minima mit geringer Ausprägung zu erfassen wird zusätzlich eine zu definierende Schwelle  $\epsilon \geq 0$  eingeführt, welche damit eine Eingriffsmöglichkeit in den Algorithmus repräsentiert. Die zu bildende Funktion  $f(z)$  ist durch

$$f(z) = \bar{u}_S(z) - \frac{1}{L} \int_0^L \bar{u}_S(z) dz - \epsilon \quad (4.43)$$

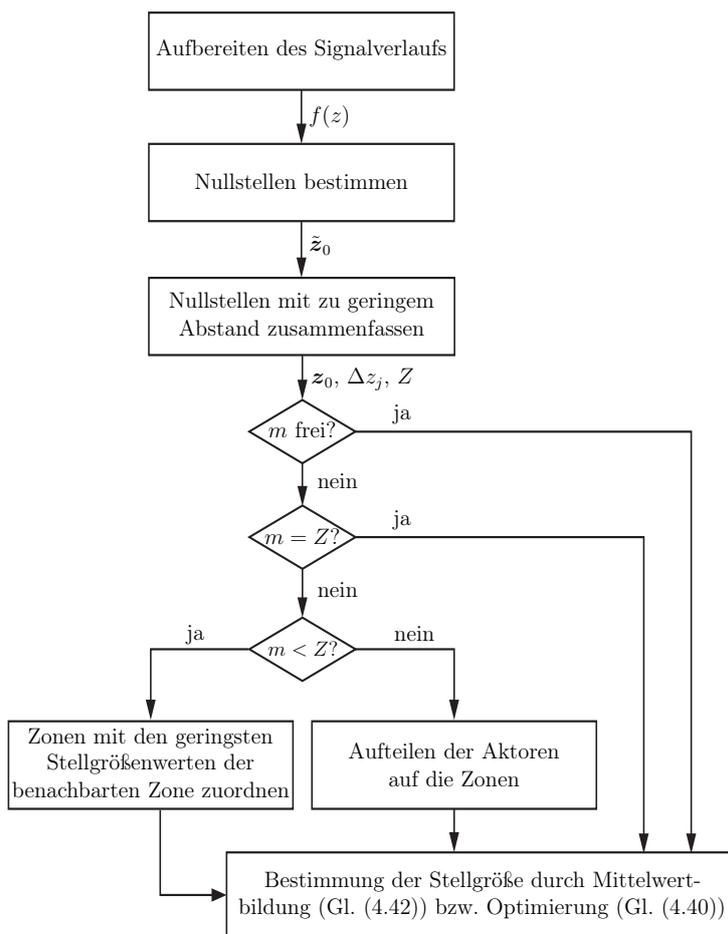
definiert. Die Nullstellen  $z_0$  der Funktion  $f(z)$  legen die Anzahl  $Z$  und Ausdehnung  $\Delta z_j$  der Zonen fest. Ist die vom Anwender vorgegebene Anzahl  $m$  der Aktoren kleiner als die Anzahl der ermittelten Zonen, so werden die Zonen mit den kleinsten Signalwerten der Funktion  $f(z)$  der benachbarten Zone zugeordnet. Anderenfalls, sind die zur Verfügung stehenden Aktoren entsprechend dem Verlauf von  $f(z)$  und der ermittelten Ausdehnungen  $\Delta z_j$  aufzuteilen. Anschließend werden die Stellgrößenwerte als Mittelwert von  $\bar{u}_S(z)$  bzw. durch Optimierung entsprechend Gl. (4.40) bestimmt.

### Aktoren mit einer kontinuierlicher Ortsfunktion

Im Fall von kontinuierlichen Ortsfunktionen  $\tilde{b}_j(z)$  kann das Optimierungsproblem (4.41) noch um die Positionierung der Aktoren entlang des Prozesses erweitert werden. Eine

Anwendung des Algorithmus in Abb. 4.9 zur Bestimmung von sinnvollen Positionen der Aktoren wäre ebenso möglich. Die Einbeziehung der Position ermöglicht eine exaktere Realisierung der Referenztrajektorie bei geringerer Stellenergie, da die Ortsfunktionen ihr Maximum an der Position der Aktoren aufweisen. Die zu erwartenden verteilten Stelleingriffe  $\bar{u}_S(z)$  repräsentieren aufgrund der in dieser Arbeit betrachteten glatten Referenztrajektorien ebenfalls glatte Verläufe. Aus diesem Grund sind bei den Aktoren mit einer über den gesamten Prozess kontinuierlichen Ortsfunktionen  $\tilde{b}_j(z)$  durch diese Optimierung nur geringfügige Verbesserungen zu erwarten, weshalb dieser Fall nicht näher vertieft wird.

Die vorgeschlagene Vorgehensweise wird im Folgenden zum strukturierten Entwurf einer stationären Steuerung für den in Abschnitt 2.1.3 vorgestellten Rohrreaktor und dem Trocknungsprozess aus Abschnitt 2.1.2 angewendet. Dabei wird das Potential der flachheitsbasierten Methoden für Transportprozesse verdeutlicht.



**Abbildung 4.9.:** Algorithmus zur Bestimmung der Ausdehnung  $\Delta z_j$  der Zone  $j$  und der Anzahl  $Z$  der erforderlichen Zonen zur Realisierung des Verlaufs eines vorgegebenen stationären verteilten Stelleingriffs, sowie der Ermittlung der notwendigen Stellgrößen  $u_S$ .

### 4.6.3. Strukturierter Steuerungsentwurf für einen Rohrreaktor

In diesem Abschnitt wird beispielhaft ein strukturierter Steuerungsentwurf für den in Abschnitt 2.1.3 vorgestellten Rohrreaktor durchgeführt. Das Steuerungsziel wird durch die Realisierung eines stationären Profils für die Abnahme der Konzentration von Stoff A definiert. Zu diesem Zweck sind zunächst zulässige Referenzprofile zu bestimmen, um eine definierte Abnahme der Konzentration von Stoff A sicher zu stellen. Der Reaktor wird mit konstanter Geschwindigkeit betrieben. Für den Entwurf werden die Einlaufkonzentration  $C_{A,\bar{z}_0}(t)$  und Einlauftemperatur  $T_{\bar{z}_0}(t)$  als konstant angenommen. Der Steuerungsentwurf kann somit anhand der stationären Differentialgleichung ( $\partial \mathbf{w}_S(z)/\partial t = \mathbf{0}$ ) erfolgen ( $\mathbf{x}(z) := \mathbf{w}_S(z)$ ):

$$x_1'(z) = -x_1(z) \frac{k_0}{v} e^{-\frac{E_A}{R x_2(z)}} \quad (4.44a)$$

$$x_2'(z) = x_1(z) \frac{k_0}{v} c_1 e^{-\frac{E_A}{R x_2(z)}} - \frac{c_2}{v} (x_2(z) - \bar{u}_S(z)) \quad (4.44b)$$

$$y_S(z) = x_1(z), \quad (4.44c)$$

mit  $(\cdot)' := d/dz$ , den konstanten Randbedingungen  $x_1(0) = x_{1,\bar{z}_0} = C_{A,\bar{z}_0}$  und  $x_2(0) = x_{2,\bar{z}_0} = T_{\bar{z}_0}$  sowie dem stationären über den Ort  $z$  verteilten Stelleingriff  $\bar{u}_S(z) = \bar{T}_{w,S}(z)$ . Zu diesem Zweck wird für den Steuerungsentwurf zunächst angenommen, dass die Stellgröße kontinuierlich über den Ort vorgegeben werden kann. Die damit ermittelte Stellgröße  $\bar{u}_S(z)$  wird anschließend durch die realen Aktoren approximiert. Im Zuge der Analyse wird der Fall betrachtet, dass die Anzahl  $m$  und die örtliche Ausdehnung der Aktoren  $\Delta z_j$  freie Parameter darstellen. Damit können für einen gewünschten Verlauf der Konzentrationsabnahme, unter Berücksichtigung der Reaktorauslauftemperatur, Konstruktionshinweise geben werden.

Das System (4.44) ist flach mit dem flachen Ausgang  $y_f(z) = x_1(z)$ . Der zu steuernde Ausgang stellt also den flachen Ausgang dar und parametrisiert somit direkt die Stellgröße, wodurch der Steuerungsentwurf wesentlich vereinfacht wird. Aus Gl. (4.44b) folgt für die Stellgröße

$$\begin{aligned} \bar{u}_S(z) &= \frac{1}{c_2} \left( v x_2'(z) - c_1 \underbrace{k_0 x_1(z) e^{-\frac{E_A}{R x_2(z)}}}_{-v y_f'(z)} + c_2 x_2(z) \right) = \frac{1}{c_2} \left( v x_2'(z) + c_1 v y_f'(z) + c_2 x_2(z) \right) \\ &= \eta(y_f(z), y_f'(z), y_f''(z)), \end{aligned} \quad (4.45)$$

mit

$$x_2(z) = -\frac{E_A}{R} \frac{1}{\ln \left( -\frac{v y_f'(z)}{y_f(z) k_0} \right)} \quad \text{und} \quad x_2'(z) = -\frac{E_A}{R} \left( \frac{y_f'(z)}{y_f(z)} - \frac{y_f''(z)}{y_f'(z)} \right) \frac{1}{\ln \left( -\frac{v y_f'(z)}{y_f(z) k_0} \right)^2}. \quad (4.46)$$

Das Ziel des Steuerungsentwurfs kann einerseits in der Realisierung eines gewünschten Verlaufs der Konzentrationsabnahme und andererseits lediglich in der Erzielung einer bestimmten Konzentration am Ende des Rohrreaktors liegen. Mit dem vorgestellten Steuerungsentwurf können beide Ziele auf einfache und strukturierte Weise erreicht werden, wie im Folgenden gezeigt wird. Die Referenztrajektorie muss jedoch einige Bedingungen erfüllen, welche im Folgenden diskutiert werden. Für die Analyse des Prozesses ist das Verhalten entlang der charakteristischen Kurve relevant. Dies entspricht im stationären Fall dem Verhalten entlang der Ortskoordinate. Zur Bestimmung einer zulässigen Trajektorie wird nun das in Abb. 4.8 dargestellte Schema angewendet:

### a) Schritt 1 & 2: Prozessbedingte Randbedingungen

Bei dem vorliegenden Prozess kann nicht jede beliebige Trajektorie für die Konzentrationsabnahme erreicht werden. Zusammen mit den Zielgrößen muss das Referenzprofil eine Reihe von prozessbedingten Randbedingungen erfüllen:

1.  $y_f^*(0) \stackrel{!}{=} x_{1,in}$
2.  $x_2(0) \stackrel{!}{=} x_{2,in} \implies \left. \frac{dy_f^*(z)}{dz} \right|_{z=0} \stackrel{!}{=} \left. \frac{dx_1(z)}{dz} \right|_{z=0} = -\frac{k_0}{v} x_{1,in} e^{-\frac{E_A}{R x_{2,in}}}$
3.  $y_f'(z) = -y_f^*(z) \frac{k_0}{v} e^{-\frac{E_A}{R x_2(z)}} \implies y_f'(z) \stackrel{!}{\leq} 0 \quad \forall z \in [0, L]$
4.  $u_{min} \leq \bar{u}_S(z) \leq u_{max}$
5.  $x_2(L) = x_{2,out} : \begin{cases} x_{2,out} \stackrel{!}{=} x_{2,d} \iff \left. \frac{dy_f^*(z)}{dz} \right|_{z=L} = -y_f^*(L) \frac{k_0}{v} e^{-\frac{E_A}{R x_{2,out}}} \\ |x_{2,out} - x_{2,d}| \stackrel{!}{\leq} \Delta \iff \left| -\frac{E_A}{R} \frac{1}{\ln\left(-\frac{y_f^*(L)v}{y_f(L)k_0}\right)} - x_{2,d} \right| \stackrel{!}{\leq} \Delta \end{cases}$
6.  $x_1(L) = r$

Bedingungen 1 bis 3 spiegeln die Tatsache wider, dass die Referenztrajektorie mit dem DGL-System (4.44) konsistent sein und mit den Anfangsbedingungen übereinstimmen muss. Die Begrenzung der Stellgröße wird mit Bedingung 4 berücksichtigt. Diese vier Bedingungen müssen in jedem Fall erfüllt werden, um die Realisierbarkeit des Referenzprofils zu gewährleisten. Nachdem der Rohrreaktor in der Regel nur einen Teil der gesamten Prozesskette darstellt, soll das Medium am Ende des Rohrreaktors eine bestimmte Temperatur  $x_{2,d}$  aufweisen. Diese Forderung wird durch Bedingung 5 berücksichtigt, wobei zum einen eine exakte Auslauftemperatur gefordert und zum anderen ein definierter Bereich der Auslauftemperatur zugelassen wird. Die letzte Bedingung drückt den Wunsch aus, unabhängig von dem Referenzprofil eine gewisse Konzentration  $r$  am Ende des Reaktors zu erreichen. Mit diesen Bedingungen können nun mögliche Referenzprofile ermittelt bzw. ein vorliegender Verlauf auf Zulässigkeit geprüft werden. Die rechte Spalte des Ablaufdiagramms in Abb. 4.8 betrachtet den Fall einer fest vorgegebenen Trajektorie. Erfüllt diese die Bedingungen kann direkt zur Realisierung des resultierenden verteilten Stelleingriffs übergegangen wer-

den. Ist dies nicht der Fall können die Parameter der Trajektorie in definierten Grenzen freigegeben werden, um die Bestimmung eines zulässigen Profils zu ermöglichen.

Liegt der prinzipielle Verlauf des Referenzprofils als analytischer Ausdruck mit dem freien Parametervektor  $\mathbf{a}$  vor, so ergeben sich abhängig von Bedingung 5 folgende im Allgemeinen nichtlineare Gleichungssysteme:

Für $x_{2,out} \stackrel{!}{=} x_{2,d}$ :  $\mathbf{F}_1(\mathbf{a}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$  u. B. v.: $y_f^{*'}(z) \leq 0$ $u_{min} \leq \bar{u}(z) \leq u_{max}$	Für $ x_{2,out} - x_{2,d}  \stackrel{!}{\leq} \Delta$ :  $\mathbf{F}_2(\mathbf{a}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$  u. B. v.: $y_f^{*'}(z) \leq 0$ $u_{min} \leq \bar{u}(z) \leq u_{max}$ $ x_{2,out} - x_{2,d}  \leq \Delta$
--	---

(4.47)

Ein geeigneter Ansatz für ein Referenzprofil muss demnach genügend Freiheitsgrade aufweisen, um alle Bedingungen erfüllen zu können. Die Gleichungssysteme werden bei einer ausreichenden Zahl von Parametern  $a_i$  mindestens eine, häufig sogar mehrere, zulässige Lösungen aufweisen. Daraus resultiert eine bzw. eine Schar an möglichen Referenztrajektorien, aus welcher dann das geeignetste Profil auszuwählen ist. Im Folgenden wird der Entwurfsprozess anhand von zwei Referenzprofilen verdeutlicht.

### b) Schritt 3: Ansätze für die Referenztrajektorien

Als Referenzprofil werden ein s-förmiger Verlauf entsprechend

$$y_f^*(z) = a_0 + a_1 e^{-\frac{z}{a_4}} + a_2 z e^{-\frac{z}{a_4}} + a_3 \frac{z^2}{2} e^{-\frac{z}{a_4}}$$

und ein Polynom 4. Grades

$$y_f^*(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$$

angesetzt. Beide Ansätze weisen eine ausreichende Anzahl an freien Parametern auf, um die Gleichungssysteme (4.47) zu erfüllen.

### c) Schritt 4: Bestimmung zulässiger Parameter der Trajektorien

Erfüllen die Referenzprofile die gestellten Bedingungen, so werden sie als zulässig bezeichnet. Vorerst sollen zulässige Profile für die Bedingung  $x_{2,out} = x_{2,d} = x_{2,in}$  ermittelt werden. Die Auswertung der vorgestellten Bedingungen führt entsprechend Gl. (4.47) auf die folgenden Gleichungssysteme für die beiden Referenzverläufe ( $k_{out} = \frac{k_0}{v} e^{-\frac{EA}{R x_{2,out}}}$ ,  $k_{in} = \frac{k_0}{v} e^{-\frac{EA}{R x_{2,in}}}$ ):

s-förmiger Verlauf:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_4} & 1 & 0 \\ e^{\frac{L}{a_4}} & k_{out} - \frac{1}{a_4} & 1 + L k_{out} - \frac{L}{a_4} & L + \frac{L^2}{2} k_{out} - \frac{L^2}{2 a_4} \\ 1 & e^{-\frac{L}{a_4}} & L e^{-\frac{L}{a_4}} & \frac{L^2}{2} e^{-\frac{L}{a_4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,in} \\ -k_{in} x_{1,in} \\ 0 \\ r \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

mit den Tuning-Parametern  $r$  und  $a_4$ .

**Polynom 4. Grades:**

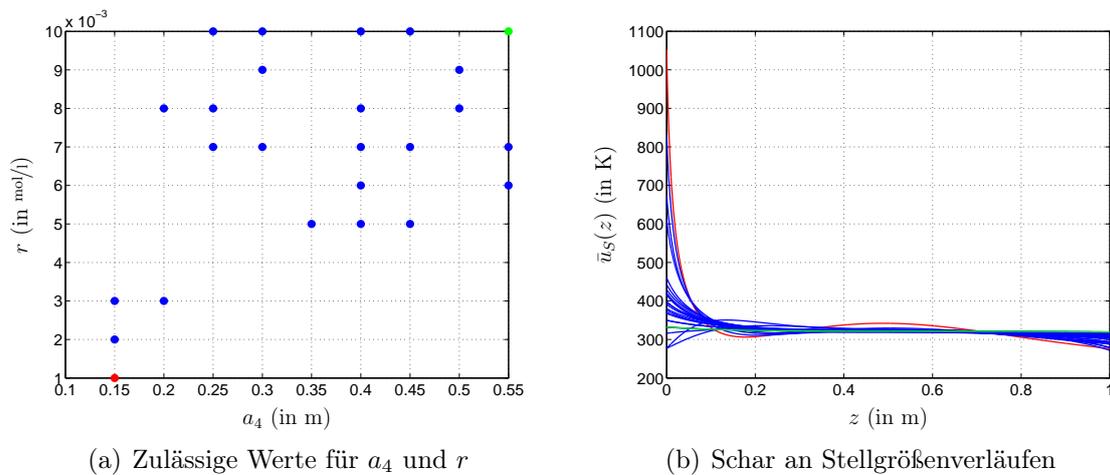
$$\begin{pmatrix} L^2 & L^3 & L^4 \\ 2L + L^2 k_{out} & 3L^2 + L^3 k_{out} & 4L^3 + L^4 k_{out} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + x_{1,in}(k_{in}L - 1) \\ x_{1,in}(k_{in}(1 + Lk_{out}) - k_{out}) \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

mit  $a_0 = x_{1,in}$ ,  $a_1 = -k_{in}$  und den Tuning-Parametern  $r$  und  $a_4$ .

Die Tuning-Parameter stellen die notwendigen Freiheitsgrade dar, um die verbleibenden Nebenbedingungen

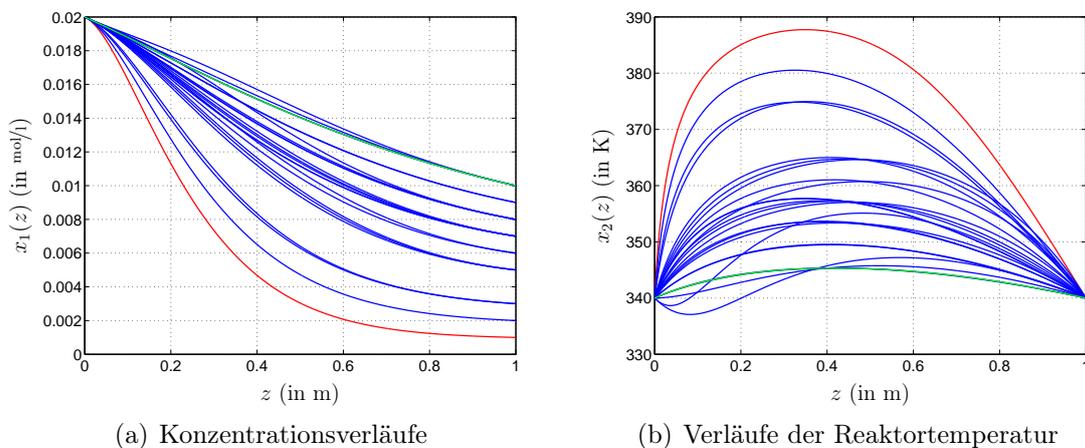
$$\begin{aligned} y_f^*(z) &\leq 0 \\ u_{min} &\leq \bar{u}_S(z) \leq u_{max} \end{aligned} \quad (4.50)$$

erfüllen zu können. Durch Variation der Tuning-Parameter in einem definierten für den Prozess sinnvollen Bereich kann eine Schar von zulässigen Referenzverläufen bestimmt werden. Abb. 4.10 zeigt zulässige Kombinationen der Tuning-Parameter und die dazugehörigen Stellgrößenverläufe für den s-förmigen Verlauf bei dem gewählten Parameterraum von  $a_4 \in [0.05, 0.7]m$  und  $r \in [0, 0.01]mol/l$ . Die Stellgröße wird auf einen Bereich

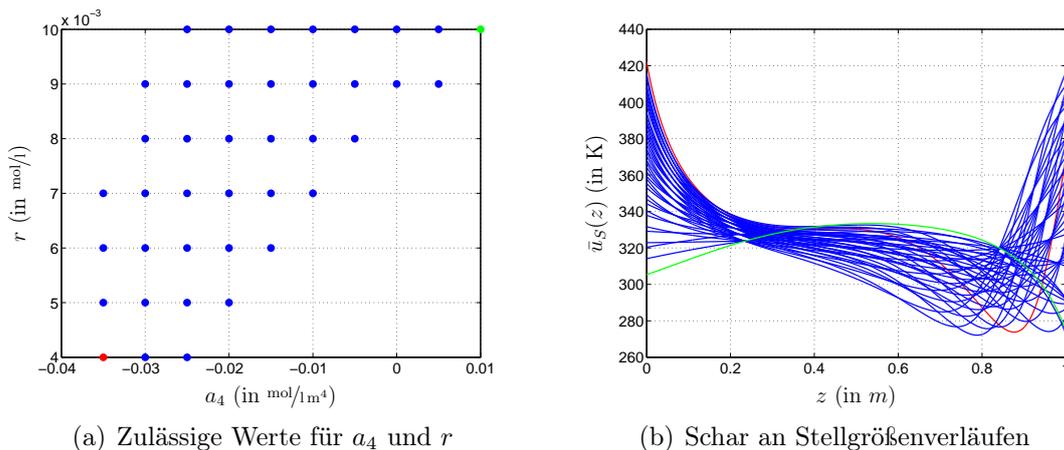


**Abbildung 4.10.:** Zulässige Werte der Tuning-Parameter und die dazugehörigen Stellgrößenverläufe zur Erzielung einer s-förmigen Konzentrationsabnahme unter Einhaltung der Bedingung  $x_{2,out} = x_{2,in}$ .

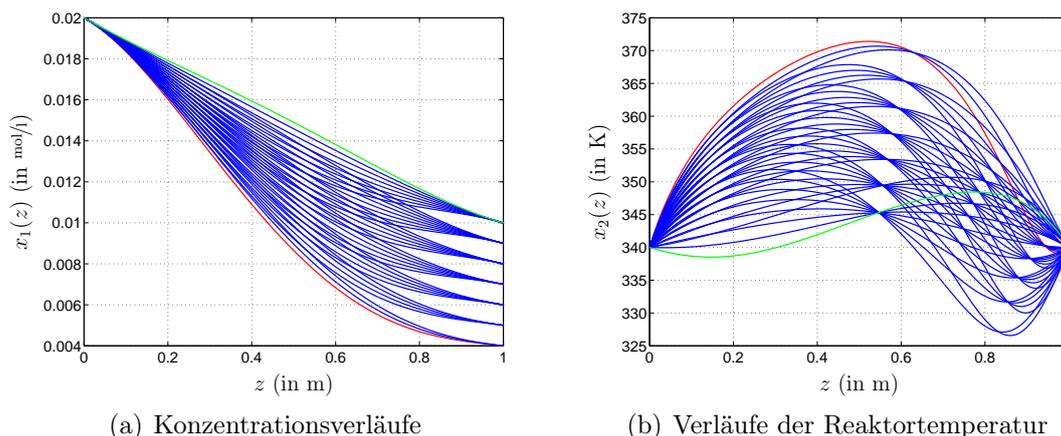
von  $270\text{ K} \leq \bar{u} \leq 1100\text{ K}$  begrenzt. Dieser überschreitet den real möglichen Bereich, um zu verhindern das einzelne Stellgrößenspitzen zulässige Referenzprofile ausblenden. Der ermittelte theoretische Stellgrößenverlauf wird anschließend durch die realen Stellglieder approximiert, wodurch in diesem Schritt die Spitzenwerte wieder ausgeblendet werden. In Abb. 4.11 sind die mit den Stellgrößenverläufen aus Abb. 4.10(b) erzeugten Verläufe der Stoffkonzentration  $x_1(z)$  und der Reaktortemperatur  $x_2(z)$  dargestellt. Die Ergebnisse für das Polynom 4. Grades zeigen Abb. 4.12 und 4.13. Die Parameterbereiche wurden zu  $a_4 \in [-0.5, 0.5]\text{ mol/lm}^4$  und  $r \in [0, 0.01]\text{ mol/l}$  gewählt. Für den Fall eines zulässigen Bereichs der Reaktorausgangstemperatur von  $x_{2,out} \in [330, 350]\text{ K}$  ist in Abb. 4.14 eine Auswahl der möglichen polynomialen Referenzprofile 4. Grades dargestellt.



**Abbildung 4.11.:** Schar an Verläufen für die Konzentration und Reaktortemperatur entsprechend den zulässigen Parameterkombinationen aus Abb. 4.10(a).



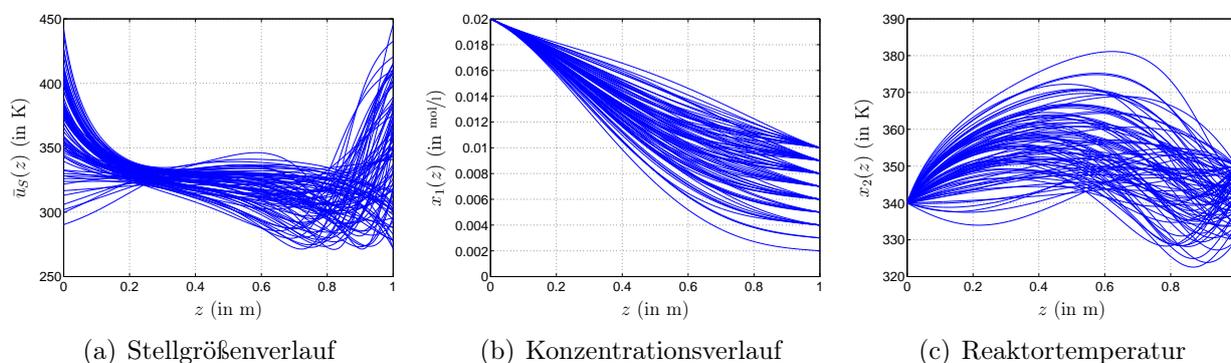
**Abbildung 4.12.:** Zulässige Werte der Tuning-Parameter und die dazugehörigen Stellgrößenverläufe zur Erzielung einer polynomialen Konzentrationsabnahme unter Einhaltung der Bedingung  $x_{2,out} = x_{2,in}$ .



(a) Konzentrationsverläufe

(b) Verläufe der Reaktortemperatur

**Abbildung 4.13.:** Schar an Verläufen für die Konzentration und Reaktortemperatur entsprechend den zulässigen Parameterkombinationen aus Abb. 4.12(a).



(a) Stellgrößenverlauf

(b) Konzentrationsverlauf

(c) Reaktortemperatur

**Abbildung 4.14.:** Verläufe für die Stellgröße, Konzentration und Reaktortemperatur als Ergebnis des Entwurfs einer polynomialen Konzentrationsabnahme unter Begrenzung der Ausgangstemperatur auf den Bereich  $|x_{2,out} - x_{2,in}| \leq 10$  K.

Das Vorgehen zur Bestimmung zulässiger Parameterwerte der angesetzten Trajektorien kann somit wie folgt zusammengefasst werden:

1. Identifikation möglicher Tuning-Parameter.
2. Aufstellen des Gleichungssystems zur Bestimmung der Parameter des Referenzprofils.
3. Festlegung sinnvoller Bereiche der Tuning-Parameter.
4. Lösen des Gleichungssystems unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen für die definierten Parameterbereiche.

Die auf diese Weise ermittelte Stellgröße kann allerdings durch die realen Stellglieder nicht exakt realisiert werden. Aus diesem Grund ist der Stellgrößenverlauf geeignet zu approximieren. Bevor jedoch die Realisierung der ermittelten Steuerung diskutiert wird, ist noch ein Referenzprofil für den Rohrreaktor auszuwählen.

#### d) Schritt 5: Auswahl eines Referenzprofils

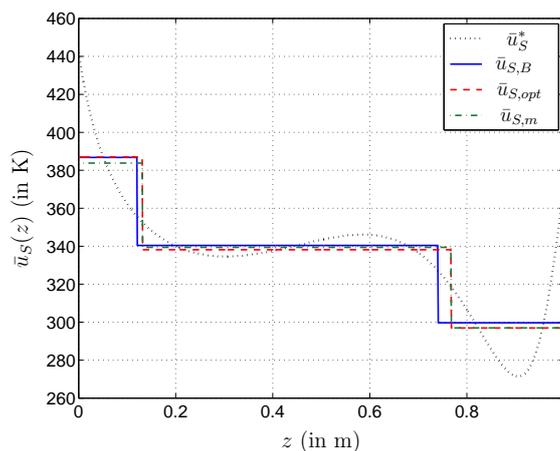
In diesem Schritt ist nun unter Berücksichtigung der ermittelten Verläufe des verteilten Eingriffs, der Konzentration und der Reaktortemperatur eine aus der Sicht des Anwenders für den Prozess geeignete Referenztrajektorie auszuwählen. Für das weitere Vorgehen wird nun als Referenztrajektorie ein Polynom 4. Grades für den Fall  $|x_{2,out} - x_{2,in}| \leq 10 \text{ K}$  und  $r = 0.002 \text{ mol/l}$  mit den Parameterwerten  $a_0 = 0.02 \text{ mol/l}$ ,  $a_1 = -0.012 \text{ mol/lm}$ ,  $a_2 = -0.069 \text{ mol/lm}^2$ ,  $a_3 = 0.102 \text{ mol/lm}^3$  und  $a_4 = -0.04 \text{ mol/lm}^4$  herangezogen. Der zur Referenztrajektorie gehörige verteilte Stelleingriff  $\bar{u}(z)$  ist aus der Analyse in Schritt 4 bereits bekannt. Damit kann nun mit dem zweiten Teil des Ablaufdiagramms in Abb. 4.8, der Realisierung des Steuerungsentwurfs, begonnen werden.

#### e) Schritt 6: Realisierung des Steuerungsentwurfs

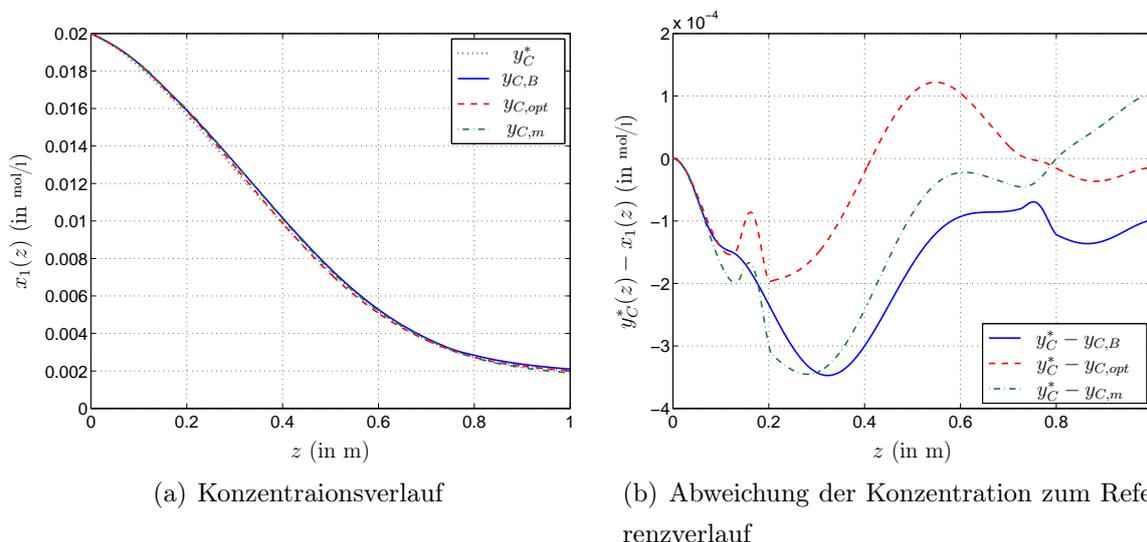
In den letzten Schritten wurden für das betrachtete Systeme auf systematische Weise Referenztrajektorien unter Berücksichtigung aus dem Prozess resultierender Bedingungen und Beschränkungen bestimmt und ein geeigneter Verlauf ausgewählt. Der aus dem Entwurf gewonnene verteilte Eingriff  $\bar{u}_S^*(z)$  ist nun zur Realisierung des Steuerungsentwurfs mit den realen Aktoren zu approximieren. Der Rohrreaktor aus Abschnitt 2.1.3 verfügt über getrennte Heizzonen, womit der verteilte Stelleingriff entsprechend Gl. (2.31) durch

$$\bar{u}_S(z) = (H(z) - H(z - \bar{z}_1)) u_{1,S} + \dots + (H(z - \bar{z}_{m-1}) - H(z - \bar{z}_m)) u_{m,S} \quad (4.51)$$

beschrieben wird. Die Anzahl und Ausdehnung der einzelnen Heizzonen sei zunächst noch unbestimmt, jedoch ist eine möglichst geringe Anzahl an Heizzonen anzustreben. Die minimale Breite einer Heizzone soll  $\Delta z_{min} = 0.1 \text{ m}$  betragen. Abb. 4.15 zeigt das Ergebnis bei Anwendung des in Abb. 4.9 beschriebenen Algorithmus. Dabei wurden die Stellgrößenwerte zum einen durch Optimierung ( $\bar{u}_{S,opt}(z)$ ) und zum anderen durch Mittelwertbildung des verteilten Stelleingriffs  $\bar{u}_S^*(z)$  in dem zugehörigen Bereich entsprechend Gl. (4.42) ( $\bar{u}_{S,m}(z)$ ) bestimmt. Eine sinnvolle Anzahl und Ausdehnung  $\Delta z_j$  der Stellglieder kann in diesem Fall auch durch Betrachtung dessen Verlaufs bestimmt werden ( $\bar{u}_{S,B}(z)$ ), wie in Abb. 4.15 erkennbar ist. Der auf diese Weise ermittelte Verlauf liegt sehr nahe an der optimierten Aufteilung. Die Stellgrößenwerte der einzelnen Aktoren wurden dabei durch einfache Mittelwertbildung der verteilten Stellgrößen  $\bar{u}_S^*(z)$  entsprechend Gl. (4.42) bestimmt. Die damit resultierenden Verläufe der Konzentration  $x_1(z)$  sowie die Abweichung zur Referenztrajektorie sind in Abb. 4.16 dargestellt. Die Reaktorauslauftemperatur liegt in allen drei Fällen in dem geforderten Temperaturbereich. Die durch die Analyse des Verlaufs von  $\bar{u}_S^*(z)$  ermittelte Anzahl und Ausdehnung der Heizzonen erfüllt das Steuerungsziel sehr gut. Eine Erhöhung der Anzahl der Aktoren ist bei dem erzielten Ergebnis aufgrund des bereits sehr geringen Fehlers nicht sinnvoll.



**Abbildung 4.15.:** Approximation des gewünschten verteilten Stelleingriffs  $\bar{u}_S^*(z)$  durch getrennte Heizzonen, wobei die Aufteilung der Zonen durch Betrachtung des Verlaufs ( $\bar{u}_{S,B}$ ) und mit dem Algorithmus aus Abb. 4.9 ( $\bar{u}_{S,opt}$ ,  $\bar{u}_{S,m}$ ) ermittelt wurde.



**Abbildung 4.16.:** Simulationsergebnisse bei Approximation der Stellgröße durch die Stufenfunktion aus Abb. 4.15 zur Erzielung des Referenzprofils  $y_C^*(z)$ .

### 4.6.4. Strukturierter Steuerungsentwurf für einen Trocknungsprozess

In diesem Abschnitt wird die zuvor vorgestellte Vorgehensweise zum stationären Steuerungsentwurf auf den in Abschnitt 2.1.2 vorgestellten Trocknungsprozess angewendet. Entsprechend dem Ablaufdiagramm in Abb. 4.8 wird zunächst eine geeignete Trajektorie ausgewählt und anschließend der resultierende Stellgrößenverlauf approximiert. In diesem Beispiel wird dabei der Fall von getrennten Zonen dem Fall von Aktoren mit kontinuierlicher Ortsfunktion gegenüber gestellt.

#### 4.6.4.1. Profilauswahl und Steuerungsentwurf

Der vorgestellte strukturierte Entwurf einer stationären Vorsteuerung erfolgt bezüglich des stationären verteilten Stelleingriffs  $\bar{u}_S(z)$  und ist damit zunächst unabhängig von der Ausprägung der entlang des Prozesses angeordneten Stellglieder. Der Entwurf für den in Abschnitt 2.1.2 eingeführten Trocknungsprozess erfolgt anhand der stationären Form der PDGLn (2.28) bei konstanter Geschwindigkeit  $v$ :

$$x_1'(z) = \left( \frac{c_\alpha}{v} (T_{\Gamma,S}(z) - x_1(z)) + \frac{c_{Str}}{v} (\bar{u}_S(z) - \bar{F}(z) x_1^4(z)) - \frac{c_V}{v} (x_2(z) - x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(x_1(z) - x_{1,ref})}) \right) \quad (4.52a)$$

$$x_2'(z) = -\frac{c_{H_2O}}{v} (x_2(z) - x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(x_1(z) - x_{1,ref})}), \quad (4.52b)$$

mit  $x_1(z) = T_{P,S}(z)$ ,  $x_2(z) = X_{H_2O,S}(z)$  und  $\bar{u}_S(z) = \bar{u}_{Str,S}(z)$ . System (4.52) ist flach mit dem flachen Ausgang  $y_f(z) = x_2(z)$ , welcher der Regelgröße entspricht. Damit kann mit

$$x_1(z) = x_{1,ref} - \frac{1}{A_{H_2O}} \ln \left( \frac{v y_f'(z) + c_{H_2O} y_f(z)}{c_{H_2O} x_{2,ref}} \right) = \varsigma \left( y_f(z), y_f'(z) \right) \quad (4.53)$$

direkt auf die Stellgröße

$$\begin{aligned} \bar{u}_S(z) = \bar{F}(z) x_1^4(z) + \frac{1}{c_{Str}} \left( -\frac{v}{A_{H_2O}} \frac{v y_f''(z) + c_{H_2O} y_f'(z)}{v y_f'(z) + c_{H_2O} y_f(z)} \right. \\ \left. - c_\alpha (T_{\Gamma,S}(z) - x_1(z)) + \frac{c_V v}{c_{H_2O}} y_f'(z) \right) = \eta \left( y_f(z), y_f'(z), y_f''(z) \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

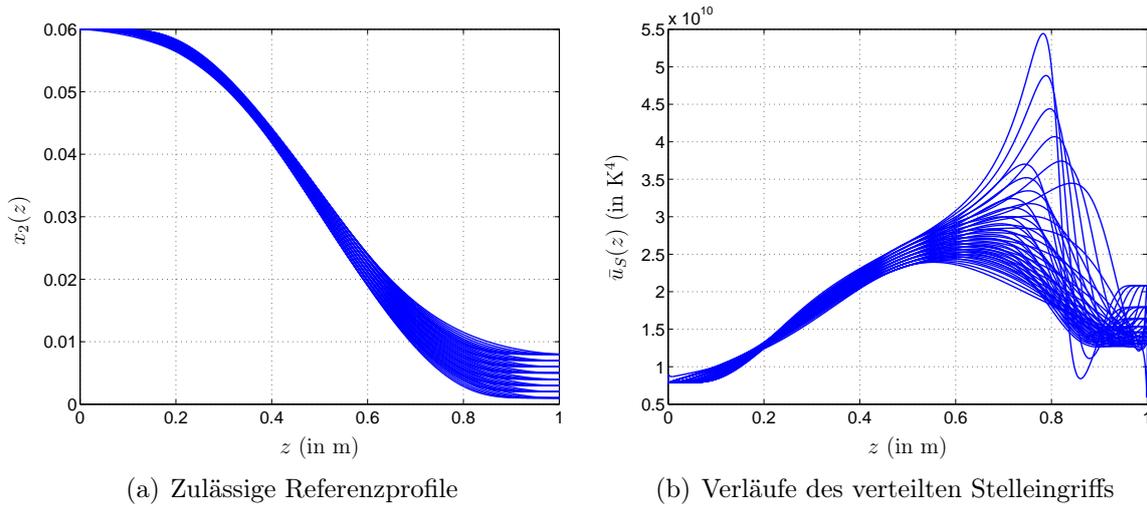
geschlossen werden. Als Ansatzfunktionen für die Referenztrajektorie wird die in [KS07] definierte Funktion

$$y_f^*(z) = A \Phi_{\gamma,L}(z) + B, \quad (4.55)$$

mit

$$\Phi_{\gamma,L}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{2(2\frac{z}{L}-1)}{(4\frac{z}{L}(1-\frac{z}{L}))^\gamma} \right) & z \in [0, L] \\ 1 & z > L \end{cases} \quad (4.56)$$

herangezogen. Der Parameter  $B$  wird durch die als konstant angenommene Randbedingung  $B = x_2(0) = X_{H_2O,\bar{z}_0}$  festgelegt. Als Tuning-Parameter werden der Feuchtegehalt am Ende des Prozesses und der Parameter  $\gamma$  herangezogen. Entsprechend dem Vorgehen in Abschnitt 4.6.3 können abhängig von den Prozessbedingungen unterschiedliche zulässige Referenzprofile bestimmt werden. Abb. 4.17 zeigt einige Ergebnisse für die Referenztrajektorien und die resultierenden Stellgrößen, aus denen nun die gewünschte Trajektorie ausgewählt werden kann. Beispielhaft wird eine Trajektorie mit den Parametern  $A = -0.057$ ,  $B = 0.06$  und  $\gamma = 0.5$  gewählt, wodurch das Papier den Prozess mit einem Feuchtegehalt von 0.003 verlässt. Im Folgenden wird nun die Realisierung des Steuerungsentwurfs für unterschiedliche Ausprägungen der Stellglieder betrachtet.



**Abbildung 4.17.:** Zulässige Trajektorien entsprechend Gl. (4.55) sowie die resultierenden Verläufe des verteilten Stelleingriffs.

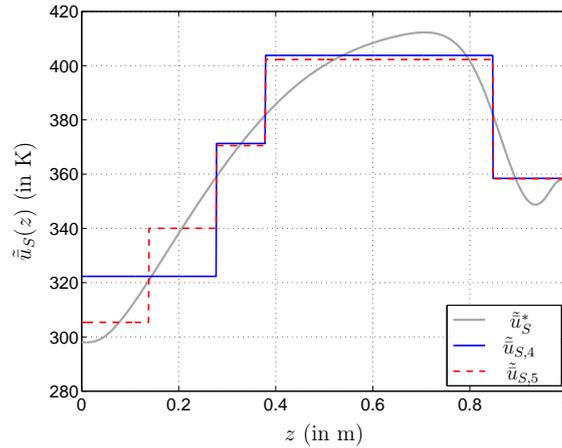
#### 4.6.4.2. Realisierung des Steuerungsentwurfs

Der im letzten Abschnitt bestimmte verteilte Stelleingriff  $\bar{u}_S^*(z)$  ist nun zur Realisierung des Steuerungsentwurfs durch die realen Aktoren nachzubilden. Der Trocknungsprozess soll zunächst über getrennte Heizzonen verfügen, deren Anzahl und Ausdehnung allerdings noch unbestimmt sei. Ein Ziel des Entwurfs liegt nun in einer geeigneten Festlegung dieser Größen. Zu diesem Zweck wird der in Abb. 4.9 dargestellte Algorithmus herangezogen. Die Ausdehnungen  $\Delta z_j$  der Zonen wird vom Algorithmus bestimmt, wobei die minimale Breite einer Zone zu  $\Delta z_{min} = 0.1$  m festgelegt wurde. Der verteilte Stelleingriff  $\bar{u}_S(z)$  wird durch

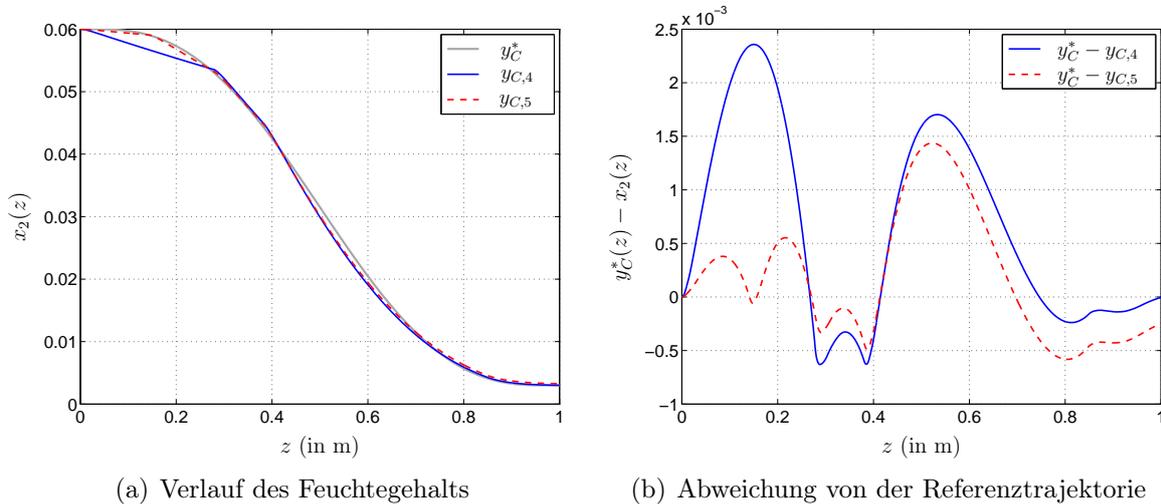
$$\bar{u}_S(z) = (H(z) - H(z - \bar{z}_1)) u_{S,1}^4 + \dots + (H(z - \bar{z}_{m-1}) - H(z - \bar{z}_m)) u_{S,m}^4 \quad (4.57)$$

beschrieben. Aufgrund der Ausblendeigenschaft der Funktionen  $(H(z - \bar{z}_{j-1}) - H(z - \bar{z}_j))$  kann direkt der Verlauf  $\tilde{u}_S(z) = \bar{u}_S^{1/4}(z)$  mit den realen Aktoren approximiert werden. Das Ergebnis ist Abb. 4.18 zu entnehmen. Die Amplituden der Stellgrößen  $u_{S,j}$  wurden dabei durch Lösen des Optimierungsproblems aus Gl. (4.40) bestimmt. Die ermittelten Werte weichen jedoch, wie bereits zuvor beim Rohrreaktor, nur minimal von den durch die Mittelwertbildung bestimmten Werten ab. Dies zeigt, dass die Anwendung einer Optimierung nicht immer zwingend erforderlich ist.

Das Steuerungsziel kann bereits mit vier Heizzonen erreicht werden ( $\tilde{u}_{S,4}$ ), wie Abb. 4.19(a) zeigt. Im Vergleich dazu ist noch das Ergebnis mit fünf Heizzonen ( $\tilde{u}_{S,5}$ ) dargestellt. Abb. 4.19(b) zeigt die auftretenden Fehler entlang des Prozesses. Die von dem Algorithmus bestimmte Verteilung der Heizzonen liefert ein ausreichend gutes Ergebnis bei einer minimalen Anzahl an Heizzonen. Ist ein besseres Ergebnis erforderlich, kann die minimale Realisierung zumindest als ein brauchbarer Startwert für weitere Optimierungen dienen.



**Abbildung 4.18.:** Approximation des gewünschten verteilten Stelleingriffs  $\tilde{u}_S^*$  durch vier ( $\tilde{u}_{S,4}$ ) und fünf ( $\tilde{u}_{S,5}$ ) getrennte Heizzonen.

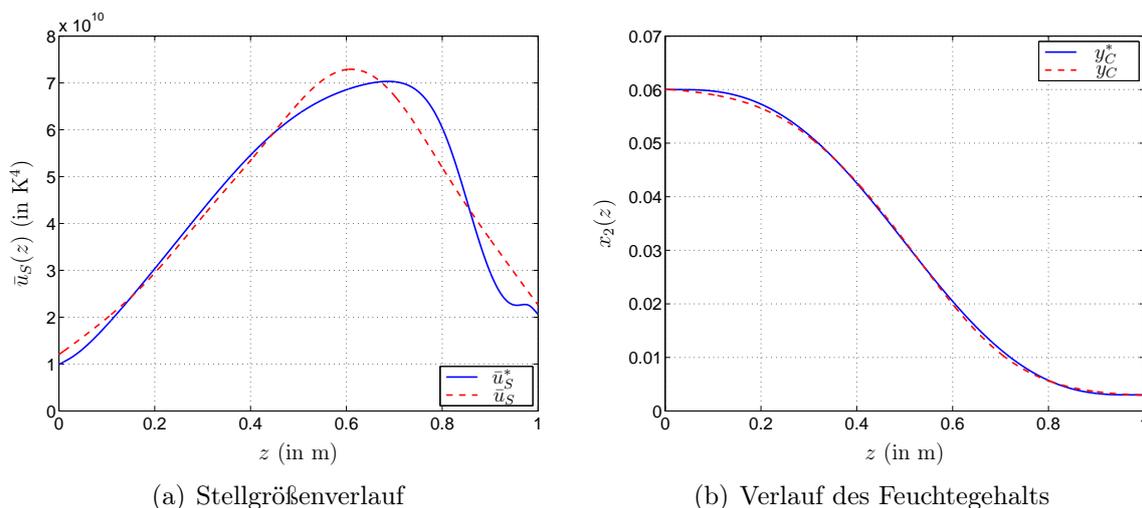


(a) Verlauf des Feuchtegehalts

(b) Abweichung von der Referenztrajektorie

**Abbildung 4.19.:** Simulationsergebnisse bei Approximation der Stellgröße durch eine Stufenfunktion bestehend aus vier ( $y_{C,4}$ ) bzw. fünf ( $y_{C,5}$ ) Zonen zur Realisierung einer Trajektorie entsprechend Gl. (4.55) für den Feuchtegehalt.

Zum Vergleich wird nun der Fall von Stellgliedern mit kontinuierlichen Ortsfunktionen  $\tilde{\mathbf{b}}(z)$  entsprechend Abschnitt 2.1.2 betrachtet, für welchen die gleiche Referenztrajektorie realisiert werden soll. Für den verteilten Stelleingriff gilt nun  $\bar{u}_S(z) = \tilde{\mathbf{b}}^T(z) \mathbf{d}_{u_S}$ , mit  $\mathbf{d}_{u_S}^T = (u_{S,1}^4 \cdots u_{S,m}^4)$ . In diesem Fall kann der bereits ermittelte Verlauf des verteilten Stelleingriffs durch Lösen des Optimierungsproblems (4.41) approximiert werden. Der betrachtete Prozess weist dabei vier plattenförmige Heizstrahler der Länge  $L/4$  auf. Das Ergebnis ist Abb. 4.20 zu entnehmen. Wie zu erwarten war, kann das Steuerungsziel aufgrund des glatten Verlaufs des verteilten Eingriffs bei gleicher Anzahl an Stellgliedern besser erreicht werden.



**Abbildung 4.20.:** Simulationsergebnisse bei Approximation des verteilten Stelleingriffs durch vier Aktoren mit den kontinuierlichen Ortsfunktionen  $\tilde{\mathbf{b}}(z)$  aus Abschnitt 2.1.2 zur Realisierung einer Trajektorie entsprechend Gl. (4.55) für den Feuchtegehalt.

## 4.7. Schlussfolgerung

Die Anwendung der Methode der Charakteristiken erlaubt eine Systembeschreibung anhand von gewöhnlichen Differentialgleichungen und ermöglicht auf diese Weise auch bei einer zeitlichen Änderung der Transportgeschwindigkeit die Anwendung flachheitsbasierter Analyse- und Entwurfsmethoden. Darauf basierend konnte eine strukturierte Vorgehensweise zum stationären Steuerungsentwurf (Abb. 4.8) formuliert werden, welche auch den Designprozess des betrachteten Systems unterstützen kann. Zudem wird damit eine einfache Prüfung der gewünschten Trajektorie auf ihre Zulässigkeit ermöglicht, woraus gegebenenfalls erforderliche Änderungen systematisch und transparent gewonnen werden können. Des Weiteren wurde eine Methode zur Handhabung der oft schwierigen Frage der optimalen bzw. erforderlichen Anzahl und Ausprägung der Stellglieder vorgestellt (Abb. 4.9). Bevor nun darauf aufbauend der Regelungsentwurf untersucht wird, wird im folgenden Abschnitt die Anwendung der Methode der Charakteristiken in Kombination mit einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik zum Beobachterentwurf diskutiert.



## 5. Beobachterentwurf

Wird zur Regelung eines Prozesses auf eine Zustandsrückführung zurückgegriffen, müssen sämtliche Zustandsgrößen erfasst werden. Aus Kosten- und Konstruktionsgründen wird nur in wenigen Fällen der gesamte Zustand messtechnisch erfassbar sein. Aus diesem Grund sind die nicht messbaren Zustandsvariablen mit den vorhandenen Messgrößen zu schätzen und somit auf die Anwendung von Zustandsbeobachtern zurückzugreifen. Die in dieser Arbeit betrachteten Prozesse weisen zusätzlich zu dem verteilt-parametrischen Charakter des zu beeinflussenden Mediums eine Reihe von konzentriert-parametrischen dynamischen Elementen, zum Beispiel die Aktoren, auf. Ist deren Dynamik gegenüber der Systemdynamik nicht vernachlässigbar und sind die Zustandsvariablen messtechnisch nicht erfassbar, müssen sie für eine vollständige Zustandsrückführung ebenso geschätzt werden. Aus diesem Grund sind Ansätze erforderlich, welche sowohl die verteilt-parametrischen Zustandsvariablen des transportierten Mediums, als auch die konzentriert-parametrischen Zustandsvariablen schätzen können. Dieses Problem wird etwas abgeschwächt, da für die angestrebte Trajektorienfolgeregelung die Zustandsvektorfunktion  $\mathbf{w}(z, t)$  nicht für alle Orte und Zeiten innerhalb des Prozesses benötigt wird. Wie im Folgenden gezeigt wird, kann die Beobachtungsaufgabe dabei sehr effizient durch den Einsatz einer mit dem Medium durch den Prozess transportierten Sensorik gelöst werden.

Im nächsten Abschnitt wird zunächst das Schätzproblem für verteilt-parametrische Systeme vorgestellt und dabei die Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik diskutiert. Darauf aufbauend wird anschließend in Abschnitt 5.2 die Beobachtbarkeit und der Beobachterentwurf für nichtlineare und zeitvariante Systeme erläutert. Der letzte Abschnitt befasst sich mit dem Beobachterentwurf von Transportprozessen unter Anwendung der mitgeführten Sensorik.

### 5.1. Zustandsschätzung verteilt-parametrischer Systeme

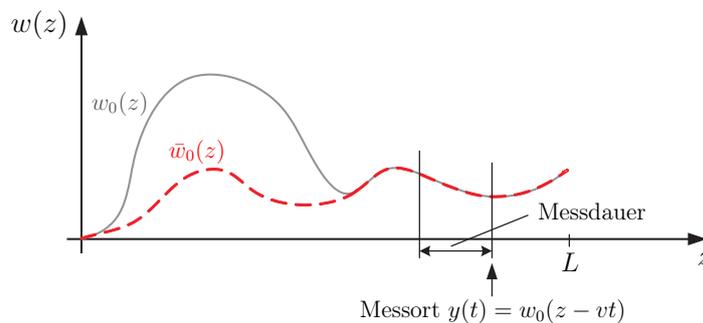
Die Zustandsschätzung verteilt-parametrischer Systeme stellt aufgrund ihres unendlich dimensionalen Charakters eine große Herausforderung an die zu entwickelnden Ansätze. Die Zustandsschätzung verteilt-parametrischer Systeme wurde bereits in frühen Jahren aufge-

griffen und beschrieben (vgl. beispielsweise [Köh77]). Wie bei konzentriert-parametrischen Systemen wird auch bei verteilt-parametrischen Systemen zwischen Rekonstruierbarkeit und Beobachtbarkeit unterschieden. Für die Beobachtbarkeit werden Messungen aus bezüglich  $t_0$  zukünftigen Zeiten  $t \in [t_0, t_0 + T]$  und für die Rekonstruierbarkeit aus bezüglich  $t_0$  vergangenen Zeiten  $t \in [t_0 - T, t_0]$  zur Bestimmung der Zustandsvektorfunktion  $w(z, t_0)$  herangezogen. In [Köh77] werden die Definitionen der Rekonstruierbarkeit und der Beobachtbarkeit aus [KFA69, KS72] auf verteilt-parametrische Systeme erweitert. Ein System gilt nach [Köh77] als rekonstruierbar, wenn ausgeschlossen ist, dass verschiedene Anfangszustände die gleiche Systemantwort hervorrufen. Dabei ist zu beachten, dass die Rekonstruierbarkeit und die Beobachtbarkeit von dem Betrachtungszeitraum abhängen. Diese Definition kann relativ einfach auf einen Transportprozess angewendet werden. Dazu wird beispielsweise ein Strömungssystem der Länge  $L$  betrachtet, welches durch

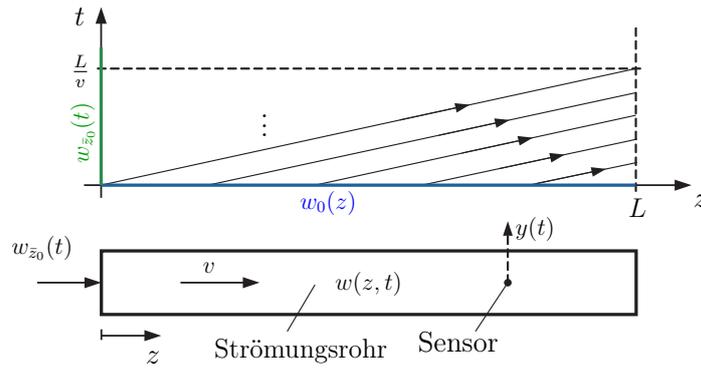
$$\begin{aligned} \frac{\partial w(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} &= u(z, t), \quad z \in (0, L], \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) &= w(z_m, t), \quad z_m \in [0, 1] \\ w(0, t) &= w_{z_0}(t), \quad w(z, 0) = w_0(z) \end{aligned} \quad (5.1)$$

beschrieben wird. Bei ungeschickter Platzierung des ortsfesten Sensors und zu geringer Messdauer, können durchaus unterschiedliche Anfangsbedingungen zur gleichen Systemantwort  $y(t)$  führen, wie Abb. 5.1 verdeutlicht.

Abb. 5.2 veranschaulicht den Prozess mit den dazugehörigen Grundcharakteristiken. Aus der Abbildung ist leicht ersichtlich, dass der Messort bei  $z_m = L$  liegen und die Messdauer mindestens der Verweilzeit  $T_V = L/v$  entsprechen muss, damit das System rekonstruierbar ist. Nur in diesem Fall kann sichergestellt werden, dass mit den Anfangsbedingungen  $w_0(z)$



**Abbildung 5.1.:** Verdeutlichung der Auswirkung der Wahl des Messorts des Sensors und der Messdauer zur Bestimmung der Anfangsverteilung aus der Systemantwort  $y(t)$ . Die dargestellte Wahl liefert für unterschiedliche Anfangsverteilungen die gleiche Systemantwort.



**Abbildung 5.2.:** Verdeutlichung des Beobachterproblems für Transportprozesse am Beispiel eines Strömungsrohrs.

und  $\bar{w}_0(z)$  die Beziehung

$$y(t; w_0(z)) - y(t; \bar{w}_0(z)) = w_0(z_m - vt) - \bar{w}_0(z_m - vt) = 0 \quad (5.2)$$

nur für  $w_0(z) = \bar{w}_0(z)$  erfüllt wird. Wie in [Köh77] erläutert wird, kann die Messdauer durch den Einsatz einer beweglichen Messsonde verkürzt werden. Dennoch muss abhängig vom Prozess und der Bewegung  $z(t)$  des Sensors relativ viel Zeit vergehen, bis die Zustandsschätzung ermöglicht wird. Die für dieses Beispiel gewonnenen Bedingungen für die Beobachtbarkeit beschreiben Existenzbedingungen der Lösung von Gl. (5.1), wenn statt der Anfangsbedingung  $w(z, 0)$  die gemessene Ausgangsgröße  $y(t)$  vorliegt. Diese Tatsache nutzen auch [GK70] zur Definition der Beobachtbarkeit verteilt-parametrischer Systeme, die wie folgt lautet:

**Definition 5.1** (Beobachtbarkeit verteilt-parametrischer Systeme). *Ein (nichtlineares) System mit verteilten Parametern wird genau dann beobachtbar im Gebiet  $\Pi_B(z, t) \subseteq \Omega$  genannt, wenn eine eindeutige Lösung  $\mathbf{w}(z, t)$  in  $\Pi_B$  durch die Randbedingungen und die gemessenen Ausgangsgrößen bestimmt ist.*

Der Nachweis der Beobachtbarkeit verteilt-parametrischer Systeme und vor allem die Schätzung der verteilten Zustandsvariablen stellt demnach ein nicht triviales Problem dar und wird in [CZ95] und speziell für hyperbolische partielle Differentialgleichungen in [YS71, TP74] diskutiert. Der Beobachterentwurf selbst erfordert einen Entwurf basierend auf der PDGL des Systems, wie Abb. 5.3(a) schematisch veranschaulicht und wird damit erheblich erschwert. Zudem ist zur Bestimmung der Zustandsvariablen mindestens die Verweilzeit  $T_V$  abzuwarten, wodurch das bereits im Prozess befindliche Medium regelungstechnisch nicht mehr behandelt werden kann. Diese Zeit kann unter Umständen zwar durch eine bewegte Sonde verkürzt werden, dies ist aber aus Gründen der technischen Realisierbarkeit auf bestimmte Anwendungsfälle beschränkt. Im Fall nicht messbarer konzentriert-parametrischer



## 5.2. Zustandsschätzung nichtlinearer und zeitvarianter Systeme

Die Anwendung der Methode der Charakteristiken in Verbindung mit einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik erlaubt einen Beobachterentwurf für im Allgemeinen nichtlineare Differentialgleichungen. Aus diesem Grund sind zur Zustandsschätzung nichtlineare Beobachteransätze erforderlich. Bevor jedoch der Entwurf einer Zustandsschätzung erfolgen kann, ist sicher zu stellen, dass das System beobachtbar ist. Zu diesem Zweck wird im Folgenden die Beobachtbarkeit für nichtlineare Systeme definiert und dabei zwischen globaler und lokaler Beobachtbarkeit unterschieden. Nachdem in dieser Arbeit ein Trajektorienfolgeproblem behandelt wird, ist auch eine Linearisierung des nichtlinearen Systems um die Trajektorie als Grundlage zum Beobachterentwurf denkbar. Für die resultierende zeitvariante Systembeschreibung, wird in Abschnitt 5.2.1.3 die Beobachtbarkeit definiert. Anschließend werden einige Beobachterentwürfe für nichtlineare Systeme allgemein vorgestellt.

### 5.2.1. Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme

Im Folgenden werden lediglich die Definitionen und die Kriterien (ohne Herleitung) zur Prüfung globaler und lokaler Beobachtbarkeit für nichtlineare Systeme vorgestellt. Für eine detailliertere Beschreibung und Diskussion wird auf weiterführende Literatur verwiesen (zum Beispiel [Ada09]). Die Kriterien beziehen sich dabei entsprechend Gl. (3.37) auf Systeme in eingangsaffiner Zustandsdarstellung<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x})u_j = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{5.3}$$

mit  $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}} \subseteq C^{n-2}$  und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ . Dabei bezeichnet  $D_{\mathbf{x}}$  den Zustandsraum und  $C_{\mathbf{u}}$  den Eingangsraum. Bei nichtlinearen Systemen kann die Beobachtbarkeit im Gegensatz zu linearen Systemen vom Eingangsvektor  $\mathbf{u}$  abhängen, weshalb dieser in den Kriterien berücksichtigt wird.

#### 5.2.1.1. Globale Beobachtbarkeit

Die globale Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme wird nach [Ada09] wie folgt definiert.

---

<sup>1</sup>Die in diesem Abschnitt behandelten Zusammenhänge beziehen sich auf konzentriert-parametrische Systeme, welche mit der Zeit  $t$  parametrisiert werden. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf das Argument  $t$  verzichtet.

**Definition 5.2** (Globale Beobachtbarkeit). *Ein System*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),\end{aligned}\tag{5.4}$$

sei für  $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \bar{C}_{\mathbf{u}} \subseteq C^{n-1}$  definiert und es sei  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ . Sind dann alle Anfangsvektoren  $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{x}}$  von System (5.4) aus der Kenntnis von  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  in einem Zeitintervall  $[t_0, t_1 < \infty]$  für alle  $\mathbf{u} \in \bar{C}_{\mathbf{u}}$  eindeutig bestimmbar, so heißt das System global beobachtbar.

Aus Definition 5.2 kann für eingangsaffine Systeme der Form (5.3) der folgende Satz gewonnen werden:

**Satz 5.1** (vgl. Satz 27 in [Ada09]). *System (5.3) ist global beobachtbar, wenn die Abbildung*

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)})$$

für alle  $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}$  und  $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}$  eindeutig nach  $\mathbf{x}$  auflösbar ist.

Die nichtlineare Abbildung  $\mathbf{q}(\cdot)$  ist definiert als

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)}) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\rho_1-2)}) \\ \vdots \\ \mathbf{q}_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\rho_p-2)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\psi}_p \end{pmatrix} = \boldsymbol{\psi},\tag{5.5}$$

mit

$$\boldsymbol{\psi}_i = \begin{pmatrix} y_i \\ \dot{y}_i \\ \vdots \\ y_i^{(\rho_i-1)} \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots p,\tag{5.6}$$

wobei  $\rho_i$  die Beobachtbarkeitsindizes bezeichnen, welche der Bedingung  $\sum_{i=1}^p \rho_i = n$  genügen. Die Vektoren  $\boldsymbol{\psi}_i$  beinhalten die sukzessive zeitliche Ableitung des Ausgangs  $y_i$ , für welche unter Berücksichtigung von Gl. (5.3) und Nutzung der Lie-Derivierten

$$L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad L_{\mathbf{g}_j} h_i(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}_j(\mathbf{x}), \quad i = 1 \dots p, \quad j = 1 \dots m\tag{5.7}$$

sowie der mehrfachen Lie-Derivierten und deren Mischformen

$$L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}}^{k-1} h_i(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{k-1} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}_j(\mathbf{x})\tag{5.8}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
y_i &= h_i(\mathbf{x}) \\
\dot{y}_i &= L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \cdots + L_{\mathbf{g}_m} h_i(\mathbf{x}) u_m \\
\ddot{y}_i &= L_{\mathbf{f}}^2 h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \cdots + L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x}) u_m + L_{\mathbf{g}_1}^2 h_i(\mathbf{x}) u_1^2 + \cdots \\
&\quad + L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{g}_1} h_i(\mathbf{x}) u_1 u_m + L_{\mathbf{g}_1} h_i(\mathbf{x}) \dot{u}_1 + \cdots + L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}_m} h_i(\mathbf{x}) u_m + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{g}_m} h_i(\mathbf{x}) u_1 u_m \\
&\quad + \cdots + L_{\mathbf{g}_m}^2 h_i(\mathbf{x}) u_m^2 + L_{\mathbf{g}_m} h_i(\mathbf{x}) \dot{u}_m \\
&\quad \vdots \\
y_i^{(\rho_i-1)} &= L_{\mathbf{f}}^{\rho_i-1} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{\rho_i-2} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \cdots + L_{\mathbf{g}_m}^{\rho_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_m^{\rho_i-1} + L_{\mathbf{g}_m} h_i(\mathbf{x}) u_m^{(\rho_i-2)}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Damit resultiert für die Elemente der nichtlineare Beobachtbarkeitsabbildung  $\mathbf{q}(\cdot)$

$$\mathbf{q}_i(\cdot) = \begin{pmatrix} h_i(\mathbf{x}) \\ L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x}) + L_{\mathbf{g}_1} h_i(\mathbf{x}) u_1 + \cdots + L_{\mathbf{g}_m} h_i(\mathbf{x}) \dot{u}_m \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{\rho_i-1} h_i(\mathbf{x}) + \cdots + L_{\mathbf{g}_m} h_i(\mathbf{x}) u_m^{(\rho_i-2)} \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Weist ein mehrdimensionales nichtlineares System der Form (5.3) entsprechend der Definition C.1 einen vektoriellen relativen Grad  $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_p\}$  im Zustandspunkt  $\mathbf{x}^0$  auf, hat dies zur Folge, dass

$$L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad 0 \leq k \leq r_i - 2, \quad j = 1 \dots m, \quad i = 1 \dots p, \quad \forall |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \epsilon, \tag{5.11}$$

in einer Umgebung  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  gilt. Damit ist die Beobachtbarkeitsabbildung genau dann von der Stellgröße  $\mathbf{u}$  unabhängig, wenn gilt

$$r = \sum_{i=1}^p r_i = n \quad \text{und} \quad \rho_i \leq r_i, \quad i = 1 \dots p. \tag{5.12}$$

Die Größe der Beobachtbarkeitsindizes wird dadurch festgelegt, dass  $y_i^{(\rho_i)}$  die erste linear abhängige Zeile beschreibt. Für die Beobachtbarkeitsabbildung  $\mathbf{q}(\cdot)$  werden  $n$  linear unabhängige Zeilen benötigt, wobei die Abbildung nicht den maximalen Grad  $\rho_i$  der sukzessiven Zeitableitungen für die einzelnen Ausgänge  $y_i$  vorschreibt. Lediglich die Summe der Beobachtbarkeitsindizes ist mit  $n$  vorgegeben. Aus diesem Grund können unter Umständen mehrere so genannte *Auswahlabbildungen*  $\mathbf{q}_A(\cdot)$  existieren, welche sich durch die Ordnung  $\rho_i$  der Einzelabbildungen  $\mathbf{q}_i$  unterscheiden. Die Beobachtbarkeitsabbildung kann damit auch derart interpretiert werden, dass das System (5.3) in  $p$  Teilsysteme der Ordnung  $\rho_i$  aufgeteilt wird. Der Beobachtbarkeitsindex und somit die Ordnung der resultierenden Teilsysteme sinkt mit steigender Anzahl an Sensoren. Damit ist anschaulich klar, dass das

Schätzergebnis robuster gegenüber Messrauschen und Messfehler wird. Aus diesem Grund ist auch eine möglichst gleichmäßige Aufteilung der Ordnung  $n$  auf die Indizes  $\rho_i$  anzustreben. Mit der Wahl der Beobachtbarkeitsindizes kann aber auch die Zuverlässigkeit und die Genauigkeit der Messsignale untereinander gewichtet werden. Die Existenz mehrerer Auswahlabbildungen korrespondiert somit auch mit einer gewissen Redundanz der Messgrößen.

Können die Abbildung  $\mathbf{q}(\cdot)$  und die inverse Abbildung  $\mathbf{q}^{-1}(\cdot)$  ermittelt werden und ist  $\mathbf{q}(\cdot)$  diffeomorph (Anhang C.2), so ist es möglich, das allgemeine nichtlineare System (5.4) in die *nichtlineare Beobachternormalform*

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \begin{pmatrix} \psi_{2,1} \\ \vdots \\ \psi_{\rho_1,1} \\ \phi_1(\boldsymbol{\psi}_1, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\rho_1)}) \\ \vdots \\ \psi_{2,p} \\ \vdots \\ \psi_{\rho_p,p} \\ \phi_p(\boldsymbol{\psi}_p, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(\rho_p)}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \psi_{1,1} \\ \vdots \\ \psi_{1,p} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

mit  $\phi_i = y_i^{(\rho_i)}$  zu transformieren. Mit der dafür notwendigen Annahme bezüglich  $\mathbf{q}(\cdot)$  folgt aus Satz 5.1 (bzw. aus Satz 27 in [Ada09]) unmittelbar, dass ein System in Beobachternormalform immer global beobachtbar ist. Gilt zudem  $\sum_{i=1}^p r_i = n$  und  $p = m$  ist aus der Darstellung in Gl. (5.13) ersichtlich, dass es sich um ein flaches System mit der Messgröße  $\mathbf{y}$  als flachen Ausgang handelt. Daraus folgt die Eigenschaft, dass ein flaches System bei dem der flache Ausgang gemessen wird immer global beobachtbar ist. Für eingangsaффine Systeme (5.3) geht die nichtlineare Beobachternormalform (5.13) mit der Eigenschaft (5.11) in die Form

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\psi}_{1,i} = \psi_{2,i} \\ \vdots \\ \dot{\psi}_{r_i-1,i} = \psi_{r_i,i} \\ \dot{\psi}_{r_i,i} = L_{\mathbf{f}}^{r_i} h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}) u_j, \quad i = 1 \dots p \end{array} \right\} \text{externe Dynamik} \quad (5.14a)$$

$$\left. \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{p}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) + \sum_{j=1}^m \boldsymbol{\phi}_j(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) u_j = \mathbf{p}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\eta}) \mathbf{u}, \right\} \text{interne Dynamik} \quad (5.14b)$$

mit  $y_i = \psi_{1,i}$ ,  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n-r}$ ,  $r = \sum_{i=1}^p r_i$  über. Diese Darstellung beinhaltet den Fall, dass das System bezüglich der Messgrößen keinen vollen relativen Grad aufweist. Dabei wird erneut vorausgesetzt, dass die Abbildungen  $\mathbf{q}(\cdot)$  und  $\mathbf{q}^{-1}(\cdot)$  bekannt sind und  $\mathbf{q}(\cdot)$  diffeomorph ist. Die Normalform in Gl. (5.14) wird als Ein-/Ausgangs-Normalform von Byrnes/Isidori bezeichnet. Gl. (5.14b) beschreibt die interne Dynamik für den Fall  $r < n$ .

Die Bestimmung der Umkehrfunktion  $\mathbf{q}^{-1}(\cdot)$  ist bei vielen nichtlinearen Systemen nicht oder nur unter sehr großem Aufwand möglich. Aus diesem Grund wird häufig eine lokale Analyse der Beobachtbarkeitsabbildung in einer Umgebung eines Zustandspunktes durchgeführt. Die Analyse dieser so genannten *lokalen Beobachtbarkeit* wird im Folgenden vorgestellt.

### 5.2.1.2. Lokale Beobachtbarkeit

Für die lokale Beobachtbarkeit wird nur die Umgebung eines Punktes  $\mathbf{x}_P \in D_{\mathbf{x}}$  betrachtet. Die lokale Beobachtbarkeit ist nach [Ada09] wie folgt definiert:

**Definition 5.3** (Lokale Beobachtbarkeit). *Ein System*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),\end{aligned}\tag{5.15}$$

sei für  $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \bar{C}_{\mathbf{u}} \subseteq C^{n-1}$  definiert und es sei  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ . Sind dann alle Anfangsvektoren  $\mathbf{x}_0 \in D_{\mathbf{x}}$  von System (5.15) in einer Umgebung

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_P\| < \epsilon\}$$

eines Punktes  $\mathbf{x}_P \in D_{\mathbf{x}}$  aus der Kenntnis von  $\mathbf{u}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  in einem Zeitintervall  $[t_0, t_1 < \infty]$  für alle  $\mathbf{u} \in \bar{C}_{\mathbf{u}}$  eindeutig bestimmbar, so heißt das System lokal beobachtbar, wenn dies für alle  $\mathbf{x}_P \in D_{\mathbf{x}}$  möglich ist.

Aus Definition 5.3 kann für eingangsaflin Systemen der folgende Satz gewonnen werden:

**Satz 5.2** (vgl. Satz 28 in [Ada09]). *System (5.3) ist lokal beobachtbar, wenn für alle  $\mathbf{x} \in D_{\mathbf{x}}$  und  $\mathbf{u} \in C_{\mathbf{u}}$  die Bedingung*

$$\text{rang} \left( \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)})}{\partial \mathbf{x}} \right) = \text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)})}{\partial \mathbf{x}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{q}_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)})}{\partial \mathbf{x}} \end{pmatrix} = n, \tag{5.16}$$

mit

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial L_{\mathbf{f}} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial L_{\mathbf{g}_1} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} u_1 + \dots + \frac{\partial L_{\mathbf{g}_m} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{u}_m \\ \vdots \\ \frac{\partial L_{\mathbf{f}}^{\rho_i-1} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \dots + \frac{\partial L_{\mathbf{g}_m} h_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} u_m^{(\rho_i-2)} \end{pmatrix},$$

erfüllt ist.

Mit Satz 5.2 kann zumindest punktuell auf einfache Weise eine Aussage über die Beobachtbarkeit des nichtlinearen Systems gemacht werden, indem der Rang der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_B(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)}) = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)})}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.17)$$

an vorgegebenen Stützstellen  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-2)})$  ausgewertet wird. Diese Bedingung für die Beobachtbarkeit ist allerdings nur hinreichend. D.h. wenn ein System die Forderung (5.16) nicht erfüllt, kann daraus nicht geschlossen werden, dass das System nicht beobachtbar ist. Wird für das System eine Trajektorienfolgeregelung implementiert, ist es naheliegend, das System für den Beobachterentwurf entlang der Trajektorie zu linearisieren. In diesem Fall ist die lokale Beobachtbarkeit entlang einer Trajektorie  $\mathbf{x}^*(t)$  zu untersuchen und die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_B$  aus Gl. (5.17) geht in die Beobachtbarkeitsmatrix für zeitvariante Systeme über, die nach [Fre71] definiert wird als

$$\mathbf{Q}_{B,\rho}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_A^0 \mathbf{c}_1^T \\ \vdots \\ \mathcal{L}_A^{(\rho_1-1)} \mathbf{c}_1^T \\ \vdots \\ \mathcal{L}_A^0 \mathbf{c}_p^T \\ \vdots \\ \mathcal{L}_A^{(\rho_p-1)} \mathbf{c}_p^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (5.18)$$

mit der Matrix  $\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und dem Vektor  $\mathbf{c}_i(t) = \left. \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1 \dots p$ . Die Beobachtbarkeitsmatrix (5.18) ist bereits nach den Messgrößen geordnet dargestellt, wobei  $\sum_{i=1}^p \rho_i = n$  gilt. Der Operator  $\mathcal{L}_A$  ist wie folgt definiert

$$\mathcal{L}_A^0(t) \mathbf{c}_i^T(t) = \mathbf{c}_i^T(t), \quad i = 1 \dots p \quad (5.19)$$

$$\mathcal{L}_A^k(t) \mathbf{c}_i^T(t) = [\mathcal{L}_A^{k-1}(t) \mathbf{c}_i^T(t)] \mathbf{A}(t) + \frac{d}{dt} [\mathcal{L}_A^{k-1}(t) \mathbf{c}_i^T(t)], \quad k = 1 \dots (\rho_i - 1), \quad (5.20)$$

Im Folgenden wird die Beobachtbarkeit von zeitvarianten Systemen kurz diskutiert. Für detaillierte Ausführungen wird auf weiterführende Literatur, wie zum Beispiel [Fre71] verwiesen.

### 5.2.1.3. Beobachtbarkeit zeitvarianter Systeme

Die Beobachtbarkeit eines zeitvarianten Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (5.21)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) \quad (5.22)$$

kann ähnlich dem zeitinvarianten Fall durch Betrachtung der Beobachtbarkeitsmatrix untersucht werden. Die Elemente der Matrizen  $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  seien dabei absolut beschränkt [Fre71]. Resultiert das zeitvariante System (5.22), wie in dieser Arbeit der Fall, aus der Linearisierung um Referenztrajektorien, so kann die Beschränktheit durch geeignete Wahl der Trajektorien sichergestellt werden.

Die Beobachtbarkeitsmatrix ist nach [Fre71] durch Gl. (5.18) bzw. durch

$$\mathbf{Q}_B(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(t) \\ \mathcal{L}_A(t)\mathbf{C}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_A^{n-1}(t)\mathbf{C}(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_A^0(t)\mathbf{C}(t) &= \mathbf{C}(t), \\ \mathcal{L}_A^k(t)\mathbf{C}(t) &= [\mathcal{L}_A^{k-1}(t)\mathbf{C}(t)]\mathbf{A}(t) + \frac{d}{dt} [\mathcal{L}_A^{k-1}(t)\mathbf{C}(t)], \end{aligned} \quad (5.23)$$

$k = 1 \dots (n - 1)$ , definiert. Im Gegensatz zum zeitinvarianten Fall werden mehrere Stufen der Beobachtbarkeit unterschieden. Dabei geben die Kriterien an, ob und wie schnell der Zustandsvektor aus dem Ausgangsvektor bestimmt werden kann. In [Fre71] wird dabei zwischen den folgenden Stufen unterschieden:

**Definition 5.4 (Vollständige Beobachtbarkeit (completely observable)).** *Das System (5.22) wird vollständig beobachtbar in dem Intervall  $[t_0, t_1]$  genannt, wenn ein beliebiger Zustand  $\mathbf{x}_0$  zur Zeit  $t_0$  aus der Kenntnis des Systemausgangs  $\mathbf{y}(t)$  im Intervall  $[t_0, t_1]$  bestimmt werden kann.*

**Definition 5.5 (Totale Beobachtbarkeit (totally observable)).** *Das System (5.22) wird total beobachtbar in dem Intervall  $[t_0, t_1]$  genannt, wenn es in jedem Unterintervall von  $[t_0, t_1]$  vollständig beobachtbar ist.*

**Definition 5.6 (Gleichmäßige Beobachtbarkeit (uniformly observable)).** *Das System (5.22) wird gleichmäßig beobachtbar in dem Intervall  $[t_0, t_1]$  genannt, wenn  $\mathbf{Q}_B(t)$  für alle Zeiten  $t$  innerhalb des Intervalls  $[t_0, t_1]$  den Rang  $n$  hat.*

Aus den Definitionen 5.4 und 5.5 können folgende Sätze zur Bewertung der Beobachtbarkeit gewonnen werden.

**Satz 5.3** (Satz 2.3 in [Fre71]). *Das System (5.22) ist dann vollständig beobachtbar, wenn die Matrix  $\mathbf{Q}_B(t)$  für einen Zeitpunkt  $t$  innerhalb  $[t_0, t_1]$  den Rang  $n$  aufweist.*

**Satz 5.4** (Satz 2.4 in [Fre71]). *Das System (5.22) ist dann und nur dann total beobachtbar in dem Intervall  $[t_0, t_1]$ , wenn die Matrix  $\mathbf{Q}_B(t)$  in keinem Unterintervall von  $[t_0, t_1]$  einen kleineren Rang als  $n$  aufweist.*

Anschaulich bedeutet die vollständige Beobachtbarkeit, dass der Zustandsvektor in einer endlichen Zeit aus den Messgrößen bestimmt werden kann. Die totale Beobachtbarkeit erlaubt dies in einem gewünschten Zeitintervall. Bei gleichmäßiger Beobachtbarkeit hingegen

ist es möglich, den Zustand des Systems zu irgendeinem Zeitpunkt momentan aus dem Systemausgang zu bestimmen. Die in dieser Arbeit betrachteten Systeme weisen diese Eigenschaft auf, wie im Folgenden noch diskutiert wird. In dem nächsten Abschnitt wird nun der Entwurf von Beobachtern für nichtlineare Systeme vorgestellt und diskutiert.

## 5.2.2. Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme

Der Entwurf von Zustandsbeobachter für nichtlineare Systeme basiert in der Regel auf der Linearisierung des Systems um einen Arbeitspunkt bzw. eine Trajektorie, weshalb im Allgemeinen keine gesicherte Konvergenz der Zustandsschätzung garantiert werden kann. Der High-Gain-Beobachter wird ohne Linearisierung des Systems entworfen, setzt dabei allerdings die Transformation in die nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform voraus. Durch die Wahl einer sehr großen Rückführverstärkung wird der Einfluss der nichtlinearen Anteile unterdrückt. Der High-Gain-Beobachter benötigt die inverse Abbildungsvorschrift  $\mathbf{q}^{-1}(\cdot)$  bzw. die Inverse der Jacobi-Matrix  $\partial\mathbf{q}/\partial\mathbf{x}$ . Beide Funktionen sind im Allgemeinen sehr schwer zu bestimmen. Zudem sind für den Beobachter im Allgemeinen neben der Messgröße  $\mathbf{y}$  und der Stellgröße  $\mathbf{u}$  noch zusätzlich Ableitungen der Stellgröße erforderlich. Bei eingangsaффinen Systemen ist dies der Fall, wenn der relative Grad geringer als die Systemordnung ist. Aus diesen Gründen wird der High-Gain-Beobachter im Folgenden nicht weiter betrachtet. Kann das System in der verallgemeinerten Beobachternormalform dargestellt werden, ist der Entwurf eines so genannten Normalform-Beobachters möglich. In dieser Normalform ist die Nichtlinearität ausschließlich eine Funktion von messbaren Systemgrößen. Bei dieser speziellen Struktur des Systems führt der Entwurf auf eine lineare Fehlerdifferentialgleichung, womit die Konvergenz gesichert werden kann. Dieser Beobachterentwurf wird im Folgenden kurz vorgestellt. Anschließend wird der Entwurf basierend auf der Linearisierung des Systems um eine Trajektorie diskutiert. Dabei beschränken sich die Ansätze auf die in dieser Arbeit erforderlichen Entwürfe. Für eine detaillierte Einsicht in die Theorie der nichtlinearen Beobachter wird auf weiterführende Literatur verwiesen [Ada09, Isi95, SZ95].

### 5.2.2.1. Normalform-Beobachter

Ist die Nichtlinearität ausschließlich von messbaren Systemgrößen abhängig, kann das System in der so genannten *verallgemeinerten Beobachternormalform* [SZ95] dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{5.24}$$

Für Systeme der Form (5.24) kann ein so genannter Normalform-Beobachter, mit dem geschätzten Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$ , entworfen werden

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{a}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{K} (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t),\end{aligned}\tag{5.25}$$

dessen Entwurf keine Linearisierung erfordert und damit einen exakten Entwurf repräsentiert. Dieser Ansatz führt zu einer linearen Fehlerdifferentialgleichung

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K} \mathbf{C}) \mathbf{e}(t),\tag{5.26}$$

mit  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ , dessen asymptotische Konvergenz durch die Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$  sichergestellt werden kann.

### 5.2.2.2. Allgemeiner nichtlinearer Beobachterentwurf

Liegt keine derart günstige Systemstruktur wie in Gl. (5.24) vor, wird von zahlreichen Autoren [Ada09, Isi95, SZ95] dennoch an der Grundidee des Luenberger-Beobachters festgehalten. Dementsprechend wird für System (5.4) ohne Durchgriff ein Beobachter der Form

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{K} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t))) \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0\tag{5.27}$$

angesetzt. Zur Bestimmung der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$  wird erneut die Differentialgleichung für den Beobachterfehler  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$  betrachtet:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{K} (\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t)))\tag{5.28}$$

Die Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$  ist nun so zu wählen, dass der Beobachterfehler  $\mathbf{e}(t)$  abklingt und somit  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$  eine asymptotisch stabile Ruhelage darstellt. Eine in [Ada09, Isi95] vorgeschlagene Vorgehensweise zur Bestimmung von  $\mathbf{K}$  besteht in der Linearisierung der Fehlerdifferentialgleichung (5.28) um einen Arbeitspunkt  $\mathbf{x}_P$ . Alternativ wird von den Autoren die Linearisierung um den geschätzten Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  empfohlen, da auf diese Weise bessere und weitreichendere Ergebnisse erzielt werden können. Zu diesem Zweck wird eine Taylorentwicklung der nichtlinearen Funktionen  $\mathbf{f}(\cdot)$  und  $\mathbf{h}(\cdot)$  um  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  vorgenommen und nach dem ersten Glied abgebrochen:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \underbrace{\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u})} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \underbrace{+ \dots}_{\rightarrow 0}\tag{5.29}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}})} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \underbrace{+ \dots}_{\rightarrow 0}\tag{5.30}$$

Der Eingangsvektor  $\mathbf{u}(t)$  wird dabei als Systemparameter aufgefasst. Einsetzen der Taylorentwicklungen in die Fehlerdifferentialgleichung (5.28) führt zu

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \underbrace{(\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{K}\mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}}(t)))}_{\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))} \mathbf{e}(t). \quad (5.31)$$

Wird stattdessen um einen festen Arbeitspunkt linearisiert, repräsentiert Gl. (5.31) eine lineare Fehlerdifferentialgleichung, welche jedoch nur in einer mehr oder weniger großen Umgebung des Linearisierungspunktes gilt. Aus diesem Grund halten viele Autoren an dem Ansatz fest, um den geschätzten Zustand  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  zu linearisieren. Das Ziel bleibt jedoch weiterhin eine lineare Fehlerdifferentialgleichung zu erhalten ( $\mathbf{F} = \text{konst.}$ ). Zu diesem Zweck wird die Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}$  als Funktion von  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  und  $\mathbf{u}(t)$  angesetzt, um die Forderung

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) - \mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F} = \text{konst.} \quad (5.32)$$

erfüllen zu können. Nachdem die Matrix  $\mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}}(t))$  im Allgemeinen nicht quadratisch ist, kann Gl. (5.32) nicht einfach durch Inversion von  $\mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}}(t))$  nach  $\mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))$  analytisch aufgelöst werden. Stattdessen wird das charakteristische Polynom von  $\mathbf{F}$  herangezogen und gefordert, dass es einem Wunschpolynom mit den Eigenwerten  $\beta_i$  entspricht:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F}) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{C}(\hat{\mathbf{x}}(t))) \stackrel{!}{=} \prod_{i=1}^n (\lambda + \beta_i) \quad (5.33)$$

Aus Gl. (5.33) folgt ein unter Umständen nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung von  $\mathbf{K}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t))$ . Die Lösung dieses Gleichungssystems gewährleistet zwar, dass die Eigenwerte von  $\mathbf{F}$  konstant sind, jedoch nicht die ursprüngliche Forderung nach einer konstanten Systemmatrix  $\mathbf{F}$  der Fehlerdifferentialgleichung. Diese Forderung muss noch zusätzlich überprüft werden. Wird die Forderung nicht erfüllt, kann der Beobachter dennoch verwendet werden, sofern die Elemente von  $\mathbf{F}$  nicht stark variieren. In diesem Fall ist allerdings eine Überprüfung der Funktionsweise durch Simulation unumgänglich [Ada09].

Folgt das System einer bekannten Trajektorie, wie etwa bei einer Trajektorienfolgeregelung, kann für den Entwurf auch auf die Linearisierung des Systems um diese Trajektorie zurückgegriffen werden. Der Beobachterentwurf erfolgt dementsprechend anhand eines linearen zeitvarianten Systems, welcher im Folgenden näher behandelt wird.

### 5.2.2.3. Folgebeobachter

Ist die zeitliche Veränderung der Zustandsvariablen bekannt, so kann das System für den Entwurf eines Beobachters auch um diese Trajektorien linearisiert werden. Bei einem flachheitsbasierten Entwurf einer Trajektorienfolgeregelung liegen die Referenztrajektorien der Zustandsvariablen  $\mathbf{x}^*(t)$  sowie der Stellgrößen  $\mathbf{u}^*(t)$  vor, wodurch eine Linearisierung um

diese Trajektorien ermöglicht wird. Mit der Trajektorienfolgeregelung resultiert ein asymptotisches Abklingen des Trajektorienfolgefehlers, weshalb die Abweichung zwischen der Referenztrajektorie  $y_C^*(t)$  und der tatsächlichen Trajektorie  $y_C(t)$  hinreichend klein wird. Aus diesem Grund sind auch die Abweichungen der Zustandsvariablen und Stellgrößen von ihren Solltrajektorien gering. Dies setzt allerdings hinreichend gute Schätzergebnisse des Beobachters voraus. Die Linearisierung und damit der darauf basierende Beobachterentwurf ist nur dann zulässig, wenn die Anfangsabweichungen  $\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*$  und  $\Delta \hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}^*$  sowie die auf das System einwirkenden Störungen hinreichend klein sind [Rot97]. Sind diese Bedingungen erfüllt gilt für den Beobachterentwurf des, aus der flachheitsbasierten Folgeregelung mit Zustandsrückführung resultierenden, linearen zeitvarianten Systems das Separationstheorem. Damit kann also die Dynamik des Trajektorienfolgefehlers unabhängig von der Dynamik des Schätzfehlers vorgegeben werden [Rot97]. Diese Eigenschaft resultiert aus der Tatsache, dass der Beobachter im Gegensatz zum klassischen Beobachterentwurf bezüglich dem geschlossenen Regelkreis entworfen wird. Ein auf diesem Entwurfsprinzip basierender Beobachter wird in der Literatur als *Folgebeobachter* bezeichnet [FR96, Rot97]. Der Ansatz für den Beobachter lautet entsprechend Gl. (5.27)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{K}(t) (\mathbf{y}(t) - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t))), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0. \quad (5.34)$$

Damit resultiert für die linearisierte Fehlerdifferentialgleichung mit dem Schätzfehler  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$

$$\Delta \dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{C}(t)) \Delta \mathbf{e}(t), \quad \Delta \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*(0) - (\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}^*(0)) = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0, \quad (5.35)$$

mit  $\mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)}$  und  $\mathbf{C}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*(t)}$ . Die Linearisierung resultiert demnach in einer zeitvarianten Systembeschreibung und folglich einer zeitvarianten Fehlerdifferentialgleichung. Nachdem die Regelung dafür sorgt, dass die Zustandsvariablen in der Nähe der Trajektorien bleiben, können die Analyse der Beobachtbarkeit sowie der Beobachterentwurf anhand des zeitvarianten Systems erfolgen. Das ursprünglich nichtlineare Problem reduziert sich somit auf ein zeitvariantes Problem.

Die Analyse der Beobachtbarkeit zeitvarianter Systeme wurde in Abschnitt 5.2.1.3 erläutert. Zum Entwurf eines Beobachters für zeitvariante Systeme existiert eine Reihe von Ansätzen. In [Kha07, Rot97] wird ein Beobachterentwurf basierend auf der Theorie der Flachheit vorgestellt. Dabei wird die Zeitvarianz des Systems, ähnlich der Ein-/Ausganglinearisierung nichtlinearer Systeme, im Beobachterentwurf kompensiert. Dieser Ansatz erfordert einen relativ großen analytischen Entwurfsaufwand und berücksichtigt zudem kein Mess- und Systemrauschen. Zur Berücksichtigung dieser Störungen werden für zeitinvariante Systeme vorzugsweise die Kalman- und  $H_\infty$ -Entwürfe herangezogen, welche problemlos auf zeitvariante Systeme erweitert werden können [Sim06]. Der  $H_\infty$ -Beobachter hat im Ver-

gleich zum Kalman-Filter eine Reihe von Vorteilen, wie im Folgenden noch diskutiert wird. Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit der  $H_\infty$ -Beobachterentwurf herangezogen.

### $H_\infty$ -Beobachter

Der  $H_\infty$ -Filterentwurf basiert im Wesentlichen auf der Annahme, dass die Umwelt aktiv versucht, die Zustandsschätzung so stark als möglich zu stören, den Schätzfehler also maximiert. Der Kalman-Filterentwurf geht im Gegensatz dazu von einer neutralen Umwelt aus. Im Folgenden werden lediglich die Ergebnisse des  $H_\infty$ -Filterentwurf vorgestellt und einige Eigenschaften diskutiert. Für detaillierte Ausführungen, sowie die Herleitung der Ergebnisse wird auf weiterführende Literatur, beispielsweise [Sim06], verwiesen. Dazu wird das lineare zeitvariante System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{H} \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{5.36}$$

betrachtet, wobei die Matrix  $\mathbf{H}$  frei wählbar ist und die direkte Schätzung von Linearkombinationen der Zustandsvariablen  $x_i(t)$  ermöglicht. Der Vektor  $\mathbf{z}(t)$  stellt damit die zu schätzende Variable dar. Die geschätzten Größen werden im Folgenden mit  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  und  $\hat{\mathbf{z}}(t)$  bezeichnet. Der  $H_\infty$ -Filterentwurf basiert auf einem spieltheoretischen Ansatz, wozu die Kostenfunktion

$$J = \frac{\int_0^T \|\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)\|_{\mathbf{S}}^2 dt}{\|\mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)\|_{\mathbf{P}_0}^2 + \int_0^T \left( \|\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{Q}^{-1}}^2 + \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{R}^{-1}}^2 \right) dt}\tag{5.37}$$

definiert wird. Die Matrizen  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{S}$  seien positiv definit. Im Gegensatz zum Kalman-Filter beeinflusst die Matrix  $\mathbf{S}$  die Filterverstärkung. Besteht der Wunsch, ein Element des Vektors  $\mathbf{z}(t)$  besonders gut zu schätzen, so ist der Wert des entsprechenden Diagonalelements von  $\mathbf{S}$  im Vergleich zu den restlichen Einträgen hoch zu wählen.

Das Ziel besteht nun darin, einen Beobachter zu finden, sodass die Kostenfunktion  $J$  die Bedingung

$$J < \frac{1}{\gamma}\tag{5.38}$$

erfüllt. Dieses Problem kann nach [Sim06] durch einen  $H_\infty$ -Beobachter gelöst werden, dessen Verstärkungsmatrix  $\mathbf{K}(t)$  durch folgendes matrixwertiges Differentialgleichungssystem bestimmt wird:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(0) &= \mathbf{P}_0 \\ \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{Q} - \mathbf{K}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{P}(t) + \gamma\mathbf{P}(t)\mathbf{H}^T\mathbf{S}\mathbf{H}\mathbf{P}(t) \\ \mathbf{K}(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}\end{aligned}\tag{5.39}$$

Der  $H_\infty$ -Beobachter (5.39) löst das  $H_\infty$ -Schätzproblem nur dann, wenn die Matrix  $\mathbf{P}(t)$  positiv definit bleibt für alle  $t \in [0, T]$ . Für  $\gamma = 0$  sind die Gln. (5.39) mit den Kalman-Filtergleichungen identisch. Diese Tatsache lässt eine interessante Interpretation des Kalman-Filters zu. Der Kalman-Filter ist demnach ein Minmax-Filter für den Fall, dass die Performanzgrenze auf  $\infty$  gesetzt wird. Damit wird beim Kalman-Filter keine Beschränkung des „Worst-Case“ Schätzfehlers garantiert. Der  $H_\infty$ -Filter ist hingegen ein „Worst-Case“-Filter, da angenommen wird, dass  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  und  $\mathbf{x}_0$  von sich aus die Kostenfunktion maximieren und ist damit bereits durch den Entwurf ein robuster Filter. Dies ist auch anhand der Lösung (5.39) erkennbar. Der zusätzliche Term für  $\gamma > 0$  führt zu einer Vergrößerung von  $\mathbf{P}(t)$  und somit zu einer größeren Beobacherverstärkung  $\mathbf{K}(t)$ . Auf diese Weise reagiert der  $H_\infty$ -Beobachter im Vergleich zum Kalman-Filter schneller auf Messungen, wodurch eine gewisse Robustheit des Filters gegen Unsicherheiten im Systemmodell entsteht. Der  $H_\infty$ -Beobachter kann somit als robuste Version des Kalman-Filters betrachtet werden. Im Folgenden werden nun die unterschiedlichen Ansätze zur Beobachtung von Transportprozessen bei der Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik vorgestellt.

## 5.3. Beobachterentwurf für Transportprozesse

Das Beobachtungsproblem für Transportprozesse wurde bereits in Abschnitt 5.1 erläutert. Die Anwendung einer mit dem Medium durch Prozess transportierten Sensorik ermöglicht den Einsatz von Beobachteransätzen für konzentriert-parametrische Systeme. Die Zustandsschätzung verteilt-parametrischer Systeme lässt dabei eine Unterscheidung verschiedener Schätzprobleme zu. In Abschnitt 5.3.1 wird zunächst der Fall betrachtet, dass nur die Zustandsvariablen der zu regelnden Volumenelemente, welche mit einem Sensor ausgestattet sind, geschätzt werden sollen. Anschließend wird die Zustandsschätzung um die im Prozess vorhanden konzentrierten Zustandsvariablen erweitert. Abschnitt 5.3.3 gibt einen Ausblick zur Schätzung der Zustandsvariablen von Volumenelementen in der Nähe der Sensoren und realisiert somit eine Profilschätzung des Prozesses.

### 5.3.1. Zustandsschätzung entlang der charakteristischen Kurve

Sind zur Realisierung einer Trajektorienfolgeregelung lediglich die Zustandsvariablen an den Positionen der mit dem Medium mitgeführten Sensorik erforderlich, so kann der Beobachterentwurf entlang der charakteristischen Kurve erfolgen. Dies ist zum Beispiel bei Stückgütern geringer Ausdehnung der Fall. Wird die charakteristische Kurve mit der Zeit

$t$  parametrisiert, so beschreibt das System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t), \tilde{\mathbf{b}}_1(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), t), \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \mathbf{f}_p(\mathbf{x}_p(t), \tilde{\mathbf{b}}_p(t), \tilde{\mathbf{u}}(t), t), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{0,i}, \quad i = 1 \dots p \end{aligned} \quad (5.40)$$

entsprechend Abschnitt 3.4, die Zustandsänderung von  $p$  Volumenelementen entlang unterschiedlicher Grundcharakteristiken. Wird angenommen, dass die Aktordynamik vernachlässigt werden kann bzw. die Systemgröße  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  messbar ist, kann für den Beobachterentwurf der verteilte Stelleingriff  $\bar{\mathbf{u}}(z, t) = \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{d}_{\bar{\mathbf{u}}}(t)$  als Eingangsgröße herangezogen werden. Diese Betrachtung führt zu einer Entkopplung der DGL-Systeme aus Gl. (3.34), wodurch der Beobachterentwurf für jedes Volumenelement getrennt durchgeführt werden kann. Damit vereinfacht sich zudem der Nachweis der Beobachtbarkeit erheblich. Mit der Messgröße entsprechend Gl. (3.33)

$$y_{M,i}(t) = \mathbf{c}_M^T \mathbf{w}(z_i(t), t) = \mathbf{c}_M^T \mathbf{x}_i(t), \quad i = 1 \dots p, \quad (5.41)$$

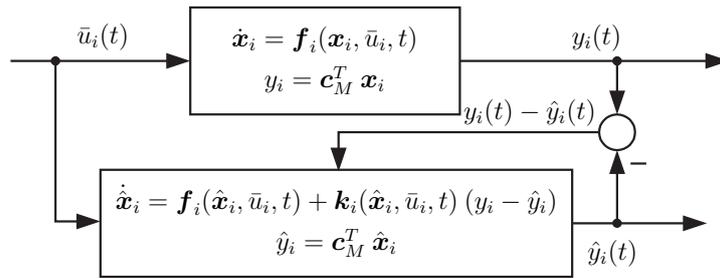
kann das System für den Beobachterentwurf mit der auf die charakteristische Kurve abgebildeten Eingangsgröße  $\bar{u}_i(t) = \tilde{\mathbf{b}}_i(t)^T \mathbf{d}_{\bar{\mathbf{u}}}(t)$  durch das nichtlineare SISO-System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t), \bar{u}_i(t), t), \quad \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_{0,i} \\ y_i(t) &= y_{M,i}(t) = \mathbf{c}_M^T \mathbf{x}_i(t) \end{aligned} \quad (5.42)$$

beschrieben werden. Die Funktion  $z_i(t)$  beschreibt dabei die Bewegung des Gutes, also den Verlauf der Grundcharakteristik (vgl. Abschnitt 3.4). Daraus ist ersichtlich, dass der Beobachterentwurf unabhängig von dem Verlauf der Transportgeschwindigkeit ist. Entsprechend dem Verlauf von  $v(t)$  ändern sich gegebenenfalls lediglich die Verläufe der auf die charakteristische Kurve abgebildeten Systemparameter, welche jedoch bekannt sind (vgl. Abschnitt 4.5). Der Ausgang  $y_i(t)$  entlang der charakteristischen Kurve wird durch den mitgeführten Sensor erfasst. Damit können die restlichen Zustandsvariablen unter Anwendung der in Abschnitt 5.2.2 vorgestellten Beobachteransätze bestimmt werden. Die grundsätzliche Beobachterstruktur wird in Abb. 5.4 dargestellt. Ein allgemeiner Ansatz für Gl. (5.42) lautet

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}_i(t) &= \mathbf{f}_i(\hat{\mathbf{x}}_i(t), \bar{u}_i(t), t) + \mathbf{k}_i(\hat{\mathbf{x}}_i(t), \bar{u}_i(t), t) (y_i(t) - \hat{y}_i(t)), \quad i = 1 \dots p \\ \hat{y}_i(t) &= \mathbf{c}_M^T \hat{\mathbf{x}}_i(t). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Wie in Abschnitt 3.4 erläutert wurde, wird angenommen, dass das System (5.42) flach ist. Entspricht der flache Ausgang der Messgröße, ist das System global beobachtbar. Ansonsten enthält das System eine nichtbeobachtbare innere Dynamik. Ist die interne Dynamik stabil, muss sie beim Regelungs- und Beobachterentwurf nicht berücksichtigt werden [Ada09]. Die innere Dynamik ist jedoch auf Stabilität zu prüfen. Der vorgestellte Ansatz wird nun beispielhaft an einem Trocknungsprozess angewendet.



**Abbildung 5.4.:** Beobachterstruktur zur Schätzung der Zustandsvariablen entlang der charakteristischen Kurve.

### Beispiel: Feuchtebeobachtung in einem Trocknungsprozess

Bei Trocknungs-, aber auch Lackierprozessen, wird der Feuchtegehalt als Regelgröße interpretiert. Diese Systemgröße kann jedoch, im Gegensatz zur Temperatur, messtechnisch nur sehr schwer erfasst werden. Aus diesem Grund soll der Feuchtegehalt durch Messung der Objekttemperatur geschätzt werden. Zur Verdeutlichung des Beobachterentwurfs wird beispielhaft der in Abschnitt 2.1.2 vorgestellte industrielle Trocknungsprozesses für Papier herangezogen. Die Papierbahn bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von  $0.1 \text{ m/sec}$  durch den Prozess. Entsprechend der zuvor getätigten Ausführungen erfolgt der Entwurf für jedes betrachtete Volumenelement äquivalent, weshalb im Folgenden nur ein Volumenelement betrachtet wird. Die Anwendung der Methode der Charakteristiken auf das System (2.28) - (2.29) führt entsprechend Gl. (4.29) auf die folgenden Differentialgleichungen entlang der Grundcharakteristik ( $\mathbf{x} = (T_P \ X_{H_2O})^T$ ,  $u_O = T_\Gamma$  und  $\bar{u} = \bar{u}_{Str}$ ):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= c_\alpha (u_O(t) - x_1(t)) + c_{Str} (\bar{u}(t) - \bar{b}(t) x_1^4(t)) - c_V (x_2(t) - x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(x_1(t) - x_{1,ref})}) \\ \dot{x}_2(t) &= -c_{H_2O} (x_2(t) - x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(x_1(t) - x_{1,ref})}). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Die Umgebungstemperatur  $u_O(t)$  wird dabei als bekannter Parameter interpretiert. Mit der Messgröße

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) = x_1(t) \quad (5.45)$$

kann die Systemgleichung (5.44) in verallgemeinerter Beobachternormalform dargestellt werden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(y(t), \bar{u}(t)), \quad (5.46)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -c_\alpha & -c_V \\ 0 & -c_{H_2O} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}(y(t), \bar{u}(t)) = \begin{pmatrix} c_\alpha u_O(t) + c_{Str} (\bar{u}(t) - \bar{b}(t) y^A(t)) + c_V x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(y(t)-x_{1,ref})} \\ c_{H_2O} x_{2,ref} e^{-A_{H_2O}(y(t)-x_{1,ref})} \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

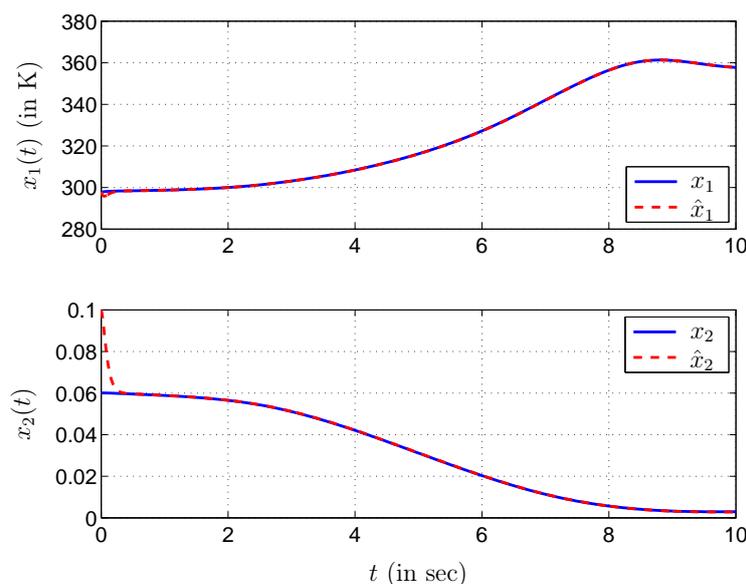
Das System ist flach mit dem flachen Ausgang  $y_f(t) = x_1(t)$  (vgl. Abschnitt 4.5). Nachdem der flache Ausgang der Messgröße entspricht, ist das System (5.44) global beobachtbar. Aufgrund der Systemstruktur kann ein Normalform-Beobachter entworfen werden. Dazu wird der Ansatz

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{a}(y(t), \bar{u}(t)) + \mathbf{k} (y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (5.48)$$

zum Entwurf herangezogen, welcher auf die lineare Fehlerdifferentialgleichung ( $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ )

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}^T) \mathbf{e}(t) \quad (5.49)$$

führt. In Bild 5.5 werden die Simulationsergebnisse mit dem vorgestellten Beobachterentwurf dargestellt. Der Trocknungsprozess wurde dabei mit einer stationären Steuerung entsprechend Abschnitt 4.6.4 betrieben und die Beobachtereigenwerte  $\lambda(\mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}^T)$  zu  $\lambda_1 = \lambda_2 = -20$  gewählt. Der Anfangswert der Papierfeuchte ist in diesem Fall die einzige



**Abbildung 5.5.:** Simulationsergebnisse bei Anwendung eines Normalform-Beobachters zur Schätzung des Feuchtegehalts von Papier entlang der charakteristischen Kurve.

Unbekannte, da die Temperatur als Messgröße vorliegt. Die Anfangswerte des Systems und die geschätzten Anfangswerte wurden zu

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 298 \text{ K} \\ 0.06 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} 298 \text{ K} \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

gewählt. Wie dem Simulationsergebnis in Bild 5.5 zu entnehmen ist, konvergiert der geschätzte Verlauf der Papierfeuchte rasch zu dem tatsächlichen Verlauf.

### 5.3.2. Entwurf für gemischt konzentriert-, verteilt-parametrische Systeme

Die Berücksichtigung konzentriert-parametrischer Systemteile erhöht die Komplexität des Beobachtungsproblems erheblich, wie im folgenden Abschnitt erläutert wird. Dabei wird insbesondere das Problem der ein- und auslaufenden Sensoren diskutiert. Anschließend wird in Abschnitt 5.3.2.2 die Beobachtbarkeit des resultierenden Systems analysiert und abschließend der Beobachterentwurf an einem Durchlaufofen demonstriert.

#### 5.3.2.1. Problembeschreibung und Konvergenzbetrachtungen

Verteilt-parametrische Systeme beinhalten oft auch konzentriert-parametrische Teilsysteme, wie beispielsweise die Dynamik der Aktoren. Bei Transportprozessen mit verteiltem Stelleingriff sind diese Aktoren entlang des Prozesses angeordnet. Diese Systemteile sind im Gegensatz zum Medium ortsfest und verfügen aus Kostengründen selten über einen zusätzlichen Sensor zur Erfassung der Zustandsvariablen. Zur Realisierung einer Zustandsregelung wird jedoch die Kenntnis der Zustandsvariablen der Aktoren vorausgesetzt. Aus diesem Grund sind die Zustandsvariablen des Aktors mit Hilfe der Messgrößen im Medium durch einen Beobachter zu schätzen. Der Prozess wird erneut durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben, weshalb für den Beobachterentwurf auf Verfahren für konzentriert-parametrische Systeme zurückgegriffen werden kann. Die charakteristischen Differentialgleichungen der einzelnen Volumenelemente sind über die Aktoren miteinander verkoppelt, wie aus Gl. (3.35) ersichtlich ist. Aufgrund der Betrachtung eines Trajektorienfolgeproblems, kann der Beobachterentwurf auch anhand der linearisierten zeitvarianten Zustandsgleichungen erfolgen (vgl. Abschnitt 5.2.2).

Aufgrund des Transportvorganges der Volumenelemente werden laufend Sensoren in und aus den Prozess bewegt. Damit kann sich auch die Anzahl der zur Verfügung stehenden Messsignale ändern. Der Beobachtungshorizont definiert sich, entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.4, demnach durch die Zeitspanne, bis ein Sensor den Prozess verlässt. Zu diesen Zeitpunkten muss bei einer sich ändernden Anzahl von Sensorsignalen zwischen unterschiedlichen Beobachtern umgeschaltet werden. Das Schalten zwischen den Beobachtern

bedarf einer getrennten Stabilitätsanalyse, auch wenn die neuen Anfangswerte aufgrund der zurückliegenden Schätzung sehr nahe an den realen Werten liegen. Dies wurde beispielsweise in [Lun00] an einem linearen Beispiel diskutiert, bei dem der Schaltvorgang abhängig vom Wert des Schätzfehlers ausgelöst wird. Das damit resultierende Gesamtsystem führt auf eine hybride Systembeschreibung.

Die Untersuchung dieses komplexen Zusammenhangs geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, weshalb der Beobachterentwurf auf die in Kapitel 6 erforderlichen Konfigurationen beschränkt wird. Dabei wird für den Beobachterentwurf im Folgenden angenommen, dass sich zu jedem Zeitpunkt  $p$  Sensoren in dem Prozess befinden, die den gleichen Abstand zueinander aufweisen. Zudem folgen alle Regelgrößen der gleichen Trajektorie und die Aktoren wirken über kontinuierliche Ortsfunktionen  $\tilde{b}_j(z)$ ,  $j = 1 \dots m$ , auf den Prozess ein. Der gesamte Prozess wird somit durch Gl. (3.35) und (3.36) beschrieben. Mit diesen Annahmen ändert sich die Dimension des Systems zu keinem Zeitpunkt und das linearisierte System weist ein periodisches Verhalten mit der Periodendauer  $T_{period} = \frac{L}{pv}$  auf, wie in Abschnitt 6.5.1 gezeigt wird. Aus diesem Grund kann der Beobachterentwurf auf eine Periode beschränkt und die Zustandsschätzung mit jeder Periode neu gestartet werden. Damit wird nicht zwischen unterschiedlichen Beobachtern umgeschaltet, sondern der selbe Beobachter neu initialisiert. Zudem beginnt die Zustandsschätzung immer zu festen und definierten Zeitpunkten. Dennoch liegt ein schaltendes Systemverhalten vor, welches es näher zu untersuchen gilt:

Nach [Wul05] gilt ein schaltendes System als stabil, wenn sichergestellt wird, dass die Norm des Zustands (beim Beobachter der Fehlervektor) am Ende einer Phase geringer als zu Beginn der Phase ist und die Norm des Zustands nach oben beschränkt ist. Der Zustand verlässt also eine definierte Umgebung um den Ursprung nicht. Ist die Norm des Zustands am Anfang einer neuen Phase stets geringer als am Ende der vorhergehenden Phase, kann asymptotische Stabilität gewährleistet werden.

Für die sich im Prozess befindlichen Zustandsvariablen liegen aufgrund der zurückliegenden Schätzung sehr gute Anfangswerte für die neue Periode vor, welche sehr nahe an den realen Werten liegen. Werden zudem die Zustandsvariablen des in den Prozess transportierten Volumenelements am Ort  $z = 0$  messtechnisch erfasst, liegen für diese neu verteilt-parametrischen Zustandsvariablen exakte Anfangswerte vor. Dies trifft auf den im Folgenden betrachteten Durchlaufofen zu. Ist dies nicht der Fall werden allerdings begrenzte und hinreichend geringe Abweichungen vorausgesetzt, wie bereits bei dem in Abschnitt 5.2.2.3 vorgestellten Folgebeobachter gefordert wurde. Damit wird die zuvor geforderte Beschränktheit des Schätzfehlers zu Beginn der Periode gewährleistet.

Zum Entwurf eines Beobachters kann nun aufbauend auf der geführten Diskussion die Konvergenzeigenschaft des Regelungsentwurfs aus Abschnitt 6.5.1 ausgenutzt werden, indem

die duale Systembeschreibung herangezogen wird. Damit wird der Beobachterentwurf auf den Entwurf einer Zustandsrückführung überführt und beschreibt somit ein so genanntes *duales Entwurfsproblem*. Dieser Entwurf garantiert einen Abfall der Norm des Schätzfehlers innerhalb einer Periode. Dieser Entwurf berücksichtigt, ähnlich den in Abschnitt 5.2.2.3 genannten Beobachteransätzen, kein Mess- und Systemrauschen. In experimentellen Untersuchungen hat sich dieses fehlende robuste Verhalten bestätigt und dabei aufgezeigt, dass der in Abschnitt 5.2.2.3 vorgestellte  $H_\infty$ -Beobachter deutlich bessere und zuverlässigere Ergebnisse liefert. Dieser gewährleistet bei positiv definiten Lösung des matrixwertigen DGL-Systems (5.39) ebenso die Lösung des Schätzproblems. Aus diesem Grund wird dieser Beobachter im Folgenden herangezogen.

Bevor der Beobachterentwurf an dem Versuchsaufbau aus Abschnitt 2.1.1 vorgestellt wird, ist noch die Beobachtbarkeit von System (3.35) zu untersuchen.

### 5.3.2.2. Beobachtbarkeit

Die Beobachtbarkeit von System (3.35) kann entsprechend Abschnitt 5.2.1 anhand der nichtlinearen Abbildung erfolgen, um globale Beobachtbarkeit nachzuweisen. Aufgrund der in der Arbeit betrachteten Trajektorienfolge und den Ausführungen in Abschnitt 5.2.2.3 ist jedoch auch eine lokale Analyse der Beobachtbarkeit entlang der Referenztrajektorie ausreichend, welche wesentlich einfacher durchführbar ist. Im Folgenden wird angenommen, dass sämtliche Regelgrößen der gleichen Trajektorie folgen und zu jedem Zeitpunkt die gleiche Anzahl an Messgrößen zur Verfügung stehen. Damit wird das System zu jedem Zeitpunkt durch Gl. (3.35) beschrieben.

Die Linearisierung von System (3.35) entlang der Referenztrajektorie  $y_C^*(t)$  sowie der resultierenden Trajektorien für den Zustandsvektor  $\mathbf{x}_G^*(t)$  und die Stellgrößen  $\mathbf{u}_S$  entsprechend<sup>2</sup>

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}_G(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_G} \right|_{\mathbf{x}_G^*, \mathbf{u}_S} \Delta \mathbf{x}_G(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_G^*, \mathbf{u}_S} \mathbf{u}_C(t), \quad (5.51)$$

mit  $\Delta \mathbf{x}_G(t) = \mathbf{x}_G(t) - \mathbf{x}_G^*(t)$ ,  $\mathbf{u}_C(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_S$ , führt auf das lineare zeitvariable System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \Delta \dot{\mathbf{x}}_p \\ \Delta \dot{\mathbf{x}}_{u,1} \\ \vdots \\ \Delta \dot{\mathbf{x}}_{u,m} \end{pmatrix}}_{\Delta \dot{\mathbf{x}}_G} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(t) & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{1,1}(t) & \cdots & \mathbf{H}_{1,m}(t) \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_p(t) & \mathbf{H}_{p,1}(t) & \cdots & \mathbf{H}_{p,m}(t) \\ & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{u,1} & & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ & & & & \mathbf{A}_{u,m} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_p \\ \Delta \mathbf{x}_{u,1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{x}_{u,m} \end{pmatrix}}_{\Delta \mathbf{x}_G} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_u \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}_C \quad (5.52)$$

$$\Delta \mathbf{y}_M = \mathbf{C}_M \Delta \mathbf{x}_G, \quad \Delta \mathbf{y}_C = \mathbf{C}_C \Delta \mathbf{x}_G,$$

<sup>2</sup>Die Gültigkeit der Linearisierung setzt im zeitvarianten Fall von System (3.35) die uniforme Konvergenz des aus der Linearisierung resultierenden Restterms gegen Null voraus.

mit  $\mathbf{A}_i(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \right|_{\mathbf{x}_G^*, \mathbf{u}_S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{H}_{i,j}(t) = \left( \left. \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_{u,j}} \right|_{\mathbf{x}_G^*, \mathbf{u}_S} \mathbf{C}_{u,j} \right) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $\mathbf{A}_{u,j} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $i = 1 \dots p$ ,  $j = 1 \dots m$ ,  $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{m q \times m}$ ,  $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{(np+qm) \times (np+qm)}$  und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(np+qm) \times m}$ . Die einzelnen Zustandsvariablen  $\mathbf{x}_i(t)$  befinden sich an unterschiedlichen Orten innerhalb des Prozesses und wurden entlang der gleichen Trajektorie  $\mathbf{x}_G^*(t)$  und  $\mathbf{u}_S$  linearisiert. Die betrachteten Volumenelemente durchlaufen somit zeitversetzt die gleiche zeitliche Änderung der Parameter in  $\mathbf{A}(t)$ . Aus diesem Grund besteht zwischen den Elemente von  $\mathbf{A}_i(t)$  und  $\mathbf{H}_{i,j}(t)$  der Systemmatrix  $\mathbf{A}(t)$  der Zusammenhang  $\mathbf{A}_{i+1}(t) = \mathbf{A}_i(t - \Delta t_i)$  und  $\mathbf{H}_{i+1,j}(t) = \mathbf{H}_{i,j}(t - \Delta t_i)$ ,  $i = 1 \dots (p-1)$ ,  $j = 1 \dots m$  mit  $\Delta t_i = \Delta z_i/v$ . Der Abstand zwischen den nachfolgenden Sensoren wird dabei mit  $\Delta z_i$  bezeichnet. Wie bereits erläutert wurde haben die Sensoren den gleichen Abstand  $\Delta z_i$  zueinander. Damit weisen die Elemente  $\mathbf{A}_i(t)$  und  $\mathbf{H}_{i,j}(t)$  die gleiche zeitliche Verschiebung  $\Delta t_1 = \dots = \Delta t_{p-1} = \Delta t$  auf. Die Dimension von System (5.52) bleibt somit zu jedem Zeitpunkt konstant. Diese Aufteilung wird auch oft durch vor- bzw. nachgelagerte Prozesse gefordert, womit die Annahme durchaus gerechtfertigt ist.

Wie in Abschnitt 6.5.1.2 ausführlich diskutiert wird, weist damit das System (5.52) ein periodisches Verhalten mit der Periodendauer  $T_{period} = \frac{L}{v}$  auf. Aus diesem Grund wird die Analyse der Beobachtbarkeit nur für eine Periode durchgeführt. Zu diesem Zweck wird die Beobachtbarkeitsmatrix (5.18) herangezogen, welche für System (5.52) in Gl. (C.2) übergeht. Aus der speziellen Struktur der Beobachtbarkeitsmatrix können folgende Bedingungen für die gleichmäßige Beobachtbarkeit von System (5.52) gewonnen werden (vgl. Anhang C.3).

**Satz 5.5.** *Sei*

$$\tilde{\mathbf{H}}(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,1}(t) & \dots & \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,m}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,1}(t) & \dots & \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,m}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m q},$$

dann ist das System (5.52) in dem betrachteten Intervall  $\Delta t$  gleichmäßig beobachtbar, wenn

1. die Teilsysteme  $(\mathbf{A}_i(t), \mathbf{c}_M^T)$ ,  $i = 1 \dots p$ , gleichmäßig beobachtbar sind und
2. die Matrix

$$\tilde{\mathbf{Q}}_B(t) := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(t) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{H}}^{((np+qm)-2)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(np+qm-1)p \times m q}$$

für alle  $t \in [0, \Delta t]$  den Rang  $(m q)$  aufweist. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung

$$\det(\tilde{\mathbf{Q}}_B^T \tilde{\mathbf{Q}}_B) \neq 0 \quad \forall t \in [0, \Delta t].$$

*Bemerkung 5.1.* Für den Fall  $p = n = 1$  geht die Determinante der zweiten Bedingung in Satz 5.5 in die Wronski-Determinante über, welche zur Prüfung der linearen Unabhängig-

keit skalarer Funktionen bekannt ist und insbesondere zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen herangezogen wird [Heu09].

Die Bedingungen in Satz 5.5 resultieren aus der Forderung des vollen Spaltenrangs der Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_B(t)$ . Aus der Struktur der Matrix  $\mathbf{Q}_B(t)$  ist direkt erkennbar, dass die ersten Spalten, welche die Teilsysteme  $(\mathbf{A}_i(t), \mathbf{c}_M^T)$  enthalten, linear unabhängig von den restlichen Spalten sind (vgl. Gl. (C.2) im Anhang C.3). Das Intervall  $\Delta t$  bezeichnet dabei den Zeithorizont, bis ein Sensor den Prozess verlässt.

Die Beobachtbarkeitsindizes sind entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 5.2.1 im Allgemeinen nicht eindeutig. Damit kann die Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_B(t)$  möglicherweise unabhängig von der Anzahl der Messsignale zu jedem Zeitpunkt vollen Rang aufweisen und es existieren mehrere Auswahlabbildungen (vgl. Abschnitt 5.2.1). Die Hinzunahme möglichst vieler Messsignale erhöht dann im Wesentlichen die Robustheit der Schätzergebnisse gegenüber Messrauschen und Messfehler.

Ist das System (5.52) beobachtbar, kann beispielsweise der Beobachterentwurf aus Abschnitt 5.2.2.3 herangezogen werden. Im Folgenden wird der Beobachterentwurf an dem in Abschnitt 2.1.1 eingeführten Durchlaufofen zur Schätzung der Zustandsvariablen der Aktoren angewendet.

*Bemerkung 5.2.* Im Fall von getrennten Zonen kann das Beobachtungsproblem auf eine Zone reduziert werden und Gl. (3.38) zur Analyse der Beobachtbarkeit und zum Beobachterentwurf herangezogen werden. Die Zustandsschätzung beginnt dabei bei Eintritt des Sensors in eine Zone.

### 5.3.2.3. Anwendung auf den Durchlaufofen

Der in Abschnitt 2.1.1 eingeführte Durchlaufofen mit  $p$  Regelgrößen wird unter Anwendung der Methode der Charakteristiken entsprechend Gl. (3.43) durch das nichtlineare DGL-System

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= c_\alpha (u_O(t) - x_i(t)) + c_{Str} \sum_{j=1}^m \tilde{b}_{i,j}(t) (\tilde{u}_j^A(t) - x_i^A(t)), \\ \dot{\mathbf{x}}_u(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{T_A} & & \\ & \ddots & \\ & & -\frac{1}{T_A} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_u} \mathbf{x}_u(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{K_A}{T_A} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{K_A}{T_A} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_u} \mathbf{u}(t) \\ \tilde{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{x}_u(t), \quad y_i(t) = x_i(t), \quad i = 1 \dots p, \end{aligned} \quad (5.53)$$

beschrieben. Die Ortsfunktion der Aktoren wurde dabei auf die charakteristischen Kurven abgebildet ( $dF_{Str_j, M}(z_i(t)) \mapsto \tilde{b}_{i,j}(t)$ ), wobei  $z_i(t)$  den Verlauf von Volumenelement  $i$  durch

den Prozess beschreibt. Der Beobachterentwurf wird zur Realisierung einer Trajektorienfolgeregelung herangezogen, weshalb entsprechend den Ausführungen im letzten Abschnitt die Beobachtbarkeit anhand der Linearisierung des Systems entlang der Referenztrajektorie und den resultierenden Trajektorien der Zustandsvariablen und Stellgrößen erfolgt. Die Linearisierung von Gl. (5.53) ( $y_f^*(z) \mapsto y_f^*(t) = x^*(t)$ ) resultiert in

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \Delta \dot{x}_p \\ \Delta \dot{x}_u \end{pmatrix}}_{\Delta \dot{x}_G} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1(t) & 0 & h_{1,1}(t) & \cdots & h_{1,m}(t) \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_p(t) & h_{p,1}(t) & \cdots & h_{p,m}(t) \\ \mathbf{0} & & \mathbf{A}_u & & \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_p \\ \Delta x_u \end{pmatrix}}_{\Delta x_G} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \\ \mathbf{B}_u \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}_C, \quad (5.54)$$

$$\Delta y_i(t) = \Delta x_i(t), \quad i = 1 \dots p,$$

mit

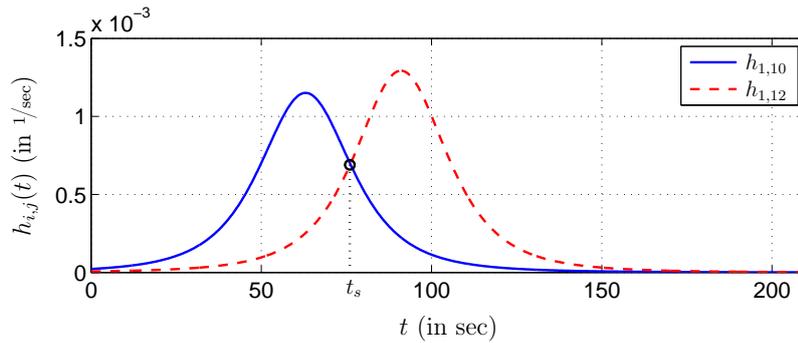
$$a_i(t) = -\left(c_\alpha + 4c_{Str} x_i^3(t) \sum_{j=1}^m \tilde{b}_{i,j}(t)\right) \Big|_{x^*(t), \mathbf{u}_S} \quad (5.55)$$

$$h_{i,j}(t) = \left(4c_{Str} \tilde{b}_{i,j}(t) \tilde{u}_j^3(t)\right) \Big|_{x^*(t), \mathbf{u}_S}, \quad i = 1 \dots p, \quad j = 1 \dots m. \quad (5.56)$$

Die Güter sollen im Folgenden einem gauß-förmigen Verlauf der Form

$$y_C^*(z) = A e^{-\frac{(z-L)^2}{2\sigma^2}} + B \quad (5.57)$$

mit  $A = 63.6 \text{ K}$ ,  $B = 294.4 \text{ K}$  und  $\sigma = L/2$  folgen. In diesem Anwendungsbeispiel sind die Zustandsvariablen  $x_1(t), \dots, x_p(t)$  skalare Größen welche direkt gemessen werden. Zusammen mit der konstanten Vorsteuerung liegen somit sehr gute Anfangswerte für die Zustandsschätzung vor und die Forderung für die Anwendbarkeit des Folgebeobachters wird erfüllt. Mit der messtechnischen Erfassung der Zustandsvariablen  $x_i(t)$  wird die Bedingung 1 in Satz 5.5 erfüllt und die Beobachtbarkeit des gesamten Systems hängt nur noch von den Elementen  $h_{i,j}(t)$  ab, welche im Wesentlichen die Sichtfaktoren der Aktoren beschreiben. Aufgrund der räumlichen Trennung der Aktoren weisen die Elemente  $h_{i,j}(t)$  unterschiedliche Verläufe auf. An den wenigen Schnittpunkten dieser Verläufe sind war die Funktionswerte gleich, jedoch ihre Ableitungen sind unterschiedlich. Abb. 5.6 veranschaulicht dies an den Verläufen zweier Funktionen, welche sich zum Zeitpunkt  $t_s = 76 \text{ sec}$  schneiden. Mit Satz 5.5 kann darauf aufbauend gezeigt werden, dass das System selbst bei nur einem Messsignal beobachtbar ist, wie an dem Ergebnis in Abb. 5.7(a) erkennbar ist. Die Beobachtbarkeitsmatrix weist für den gesamten Durchlauf des Sensors durch den Prozess vollen Rang auf, womit das System gleichmäßig beobachtbar ist. Die Periodendauer entspricht in diesem Fall der Verweilzeit  $T_{Period} = T_V = L/v = 210 \text{ sec}$ . Das Beobachtungsproblem wurde entsprechend Abschnitt 5.2.2.3 durch einen  $H_\infty$ -Beobachter gelöst. Die Zustände der Aktoren repräsentieren dabei die unbekanntenen Zustandsvariablen.

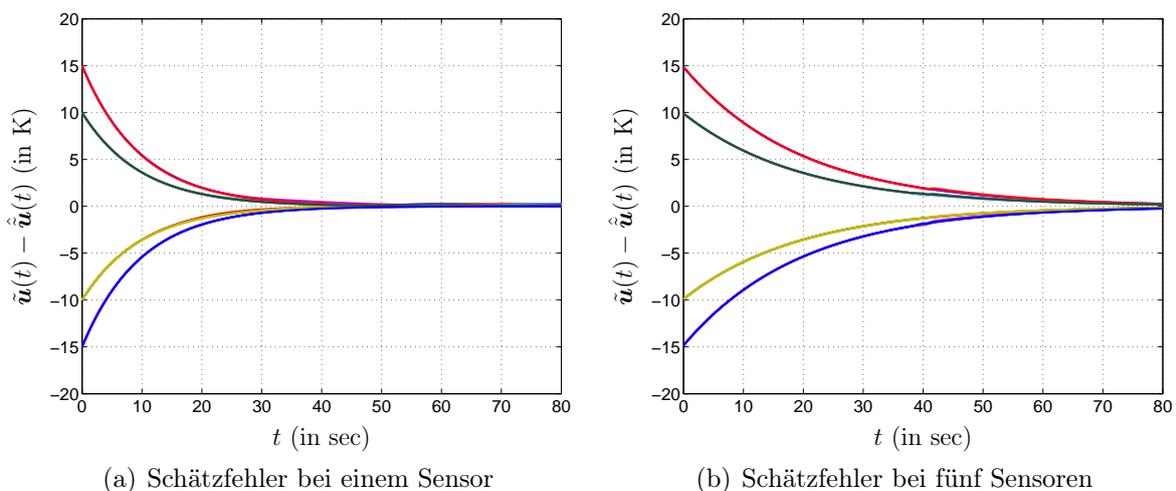


**Abbildung 5.6.:** Veranschaulichung der unterschiedlichen Steigungen zweier ausgewählter Verläufe  $h_{i,j}(t)$  an ihrem Schnittpunkt.

Wird wie in Abschnitt 6.5.1 angenommen, dass sich zu jedem Zeitpunkt fünf Sensoren in dem Prozess befinden, resultiert die Periodendauer zu  $T_{Period} = 42$  sec. Der Entwurf wird wie zuvor erläutert für eine Periode durchgeführt. Der Schätzvorgang wird dann mit jeder Periode neu gestartet, wobei für die Anfangswerte der Zustandsvariablen die zuletzt geschätzten Werte herangezogen werden. Die Anfangswerte für die Guttemperaturen werden den Sensorsignalen entnommen. Damit liegen optimale Startwerte für die Zustandsschätzung vor und die Zustandsschätzung kann nahtlos fortgesetzt werden. Das Ergebnis ist Abb. 5.7(b) zu entnehmen. Die Gewichtsmatrizen wurden in beiden Fällen zu

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{p \times p} \\ 2\mathbf{I}_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = 0.1\mathbf{I}, \quad \mathbf{R} = 0.1\mathbf{I} \quad (5.58)$$

und der Parameter  $\gamma$  zu  $\gamma = 0.01$  gewählt. Das System wurde mit einer konstanten Vorsteuerung betrieben, um eine Aussage über die Konvergenz der geschätzten Zustandsvariablen zu den realen Werten treffen zu können. Der Prozess ermöglicht keine Messung der



(a) Schätzfehler bei einem Sensor

(b) Schätzfehler bei fünf Sensoren

**Abbildung 5.7.:** Verläufe der Schätzfehler der Zustandsvariablen der Aktoren des Versuchsstands bei Anwendung eines  $H_\infty$ -Beobachters mit einer und fünf Messgrößen.

Strahlertemperaturen. Die Anfangswerte der Zustandsvariablen der Strahler wurden dabei zufällig mit einem Fehler von  $\pm 10$  K bzw.  $\pm 15$  K festgelegt. Im Vergleich zu dem Ergebnis mit nur einem Sensor in Abb. 5.7(a) konvergieren sämtliche geschätzten Zustandsvariablen der Aktoren gleichmäßig gegen ihren realen Wert, was durch die Verteilung der Sensoren zu erklären ist. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist zwar anfangs in dem Fall mit nur einem Sensor höher, jedoch bleiben die Schätzfehler lediglich in der Umgebung der Null. Bei Anwendung von fünf Sensoren konvergiert der Schätzfehler hingegen exakt gegen Null. Daraus ist die in Abschnitt 5.2.1 diskutierte Erhöhung der Schätzungsgüte und Zuverlässigkeit bei geringeren Beobachtbarkeitsindizes erkennbar. Die Darstellung ist aufgrund der begrenzten Anzahl an Sensoren auf die dargestellte Länge beschränkt.

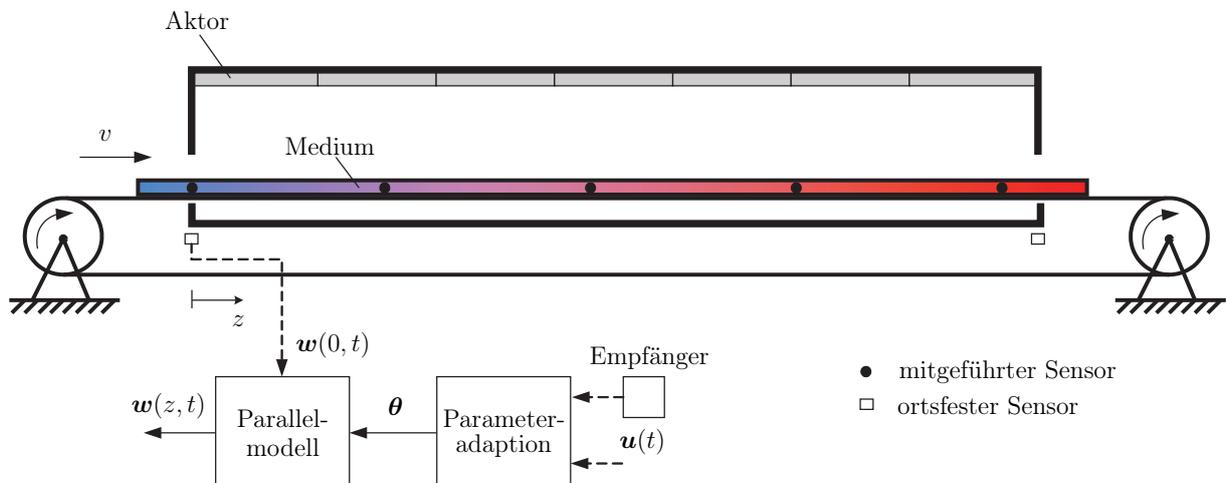
### 5.3.3. Ausblick: Schätzung der verteilten Zustandsvektorfunktion

Die Problematik der Zustandsschätzung verteilt-parametrischer Systeme unter Anwendung von ortsfesten Sensoren wurde bereits in Abschnitt 5.1 erläutert. In diesem Abschnitt wird ein Ausblick gegeben, wie durch die Anwendung der mit dem Medium mitgeführten Sensorik eine Schätzung des verteilten Zustands  $\mathbf{w}(z, t)$  ermöglicht werden kann, ohne dabei einen Beobachter basierend auf der PDGL des Systems heranzuziehen. Dabei wird im Folgenden zwischen einem kontinuierlichem Medium und dem Transport von Stückgütern unterschieden.

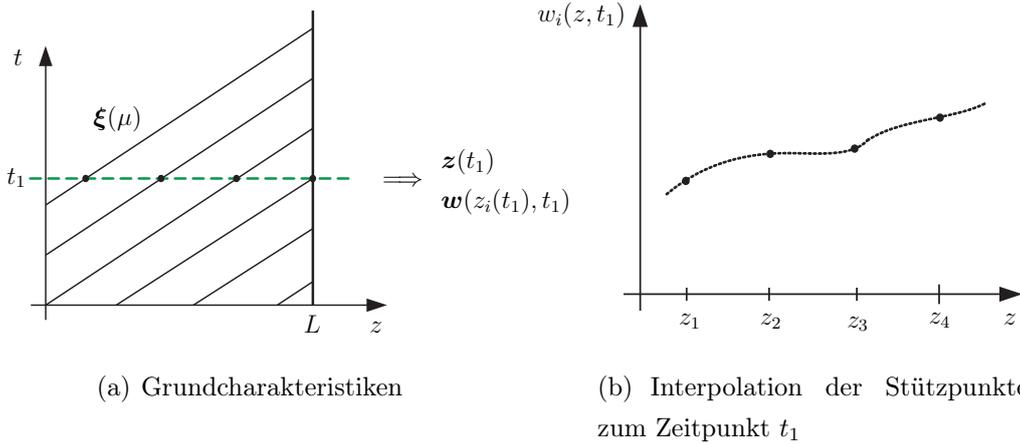
Kann der vollständige Zustandsvektor am Ort  $z = 0$  gemessen werden, ist der Anfangswert der Differentialgleichungen entlang der charakteristischen Kurven für  $t > 0$  bekannt. Der verteilte Zustand  $\mathbf{w}(z, t)$  kann somit nach der Verweilzeit, also sobald die Anfangsbedingung  $\mathbf{w}_0(z)$  aus dem Prozess transportiert wurde, unter Anwendung eines Parallelmodells geschätzt werden. Die Güte des Schätzergebnisses hängt dabei von der Güte des Modells ab, da keinerlei Korrekturmöglichkeit etwa durch die Anwendung eines Kalman-Filters für konzentriert-parametrische Systeme möglich ist. In praktischen Anwendungen werden die identifizierten Parameter entlang des Prozesses einer gewissen Schwankung und der Prozess selbst Störungen unterliegen, weshalb das Schätzergebnis verfälscht wird. Dieses Problem kann durch Anwendung der mitgeführten Sensorik zur Parameter- und Störgrößenschätzung gemindert werden, welche erneut auf der Basis einer gewöhnlichen Differentialgleichung erfolgt (vgl. Abschnitt 3.5). Unter der durchaus gerechtfertigten Annahme, dass sich die Parameter in der Nähe des Sensors nicht nennenswert von den geschätzten Parameterwerten unterscheiden, können mit dieser Methode auch brauchbare Schätzergebnisse für die Zustandsvariablen der benachbarten Volumenelemente erreicht werden. Dies ist besonders dann interessant, wenn für die Regelungsaufgabe nur Zustandsvariablen in unmittelbarer Nähe des Sensors relevant sind, wie beispielsweise bei Stückgütern geringer Ausdehnung. Dabei ist abhängig vom Parameterschätzverfahren vorauszusetzen, dass sich die Parameter

nur langsam ändern. Ist dies der Fall, ist auch ein gelegentlicher Update der Parameter ausreichend, um so die Rechenzeitanforderungen möglichst gering zu halten. Abb. 5.8 verdeutlicht die vorgeschlagene Beobachterstruktur am Beispiel eines Trocknungsprozesses.

Transportprozesse, welche ein entlang des Prozesses kontinuierlich ausgedehntes Medium transportieren, wie zum Beispiel Rohrreaktoren und Endlosdruckprozesse, weisen eine über den gesamten Prozess verteilte Zustandsvektorfunktion  $\mathbf{w}(z, t)$  auf. Konvektionsdominante Prozesse besitzen einen, wenn auch nur geringen, Diffusionsanteil. Deshalb kann durchaus angenommen werden, dass die Zustandsvariablen glatte Verläufe aufweisen. Bei diesen Prozessen sind zudem keine sprunghaften Änderungen der Randbedingung zu erwarten. Damit ist auch die Anwendung einer Interpolation zwischen den gemessenen Zustandsgrößen denkbar, um zumindest eine Näherung des aktuellen Profils der Zustandsvariablen zu erhalten. Die Genauigkeit der Interpolation hängt letztendlich von der Anzahl der Sensoren und der Glattheit des zu schätzenden Profils ab. Die Anwendung ortsfester Sensoren innerhalb des Prozesses ist aus technischen Gründen oft nicht möglich bzw. zu kostspielig. Wie Untersuchungen in [Gab09] am Beispiel eines Durchlaufofens gezeigt haben, sind zudem mit den mitgeführten Sensoren im Vergleich zu ortsfesten Sensoren bessere Ergebnisse erreichbar. Dies trifft vor allem dann zu, wenn zusätzlich noch die Messwerte von Sensoren die den Prozess unmittelbar verlassen haben bzw. sich unmittelbar vor dem Eintritt des Prozesses befinden hinzugenommen werden. Die Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik ermöglicht zudem die Schätzung des Zustandsvektors entlang der charakteristischen Kurve  $\mathbf{w}(z(t), t)$  (vgl. Abschnitt 5.3.1) und damit, in Kombination mit der Interpolation, näherungsweise die Rekonstruktion der verteilten Zustandsvektorfunktion  $\mathbf{w}(z, t)$  bei einem sehr geringen Rechenaufwand. In [BZ00] wird dieses Prinzip zur Schätzung des Beobachterfehlers angewendet. Abb. 5.9 veranschaulicht das Vorgehen. Zu



**Abbildung 5.8.:** Schematischer Aufbau der Profilschätzung unter Anwendung der Parameterschätzung mit mitgeführten Sensoren.



**Abbildung 5.9.:** Prinzip zur Schätzung der verteilten Zustandsvektorfunktion  $\mathbf{w}(z, t)$ , veranschaulicht an einem beliebigen Zeitpunkt  $t_1$ .

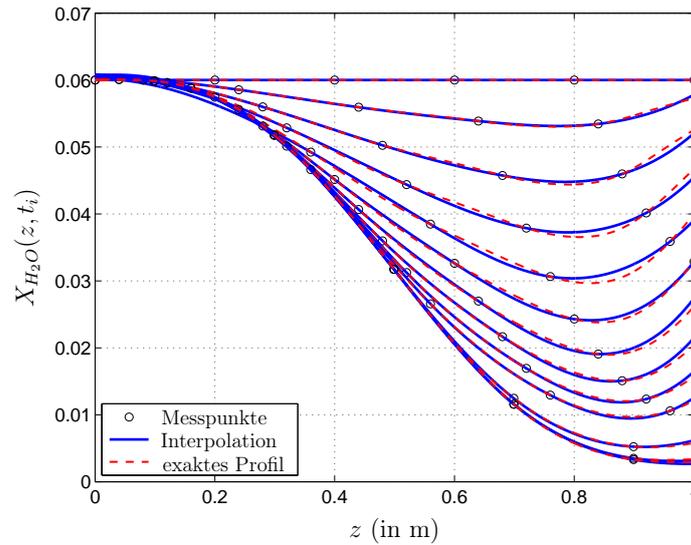
jedem Zeitpunkt werden die Messpunkte und im Falle von bewegten Sensoren die aktuellen Positionen als Stützpunkte für die Interpolation herangezogen. Zur Interpolation bieten sich kubische Splines an, da bei dieser Methode keine Information über die Ableitungen bezüglich der Ortsvariablen an den Messpunkten vorliegen muss. Bei der Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik könnte die Ortsableitung der Funktion allerdings mit Messwerten zu vergangenen Zeitpunkten relativ gut angenähert werden. Abb. 5.10 zeigt das Interpolationsergebnis für den Feuchtegehalt  $X_{H_2O}(z, t)$  zu unterschiedlichen Zeitpunkten mit fünf mitgeführten Temperatursensoren am Beispiel des Trocknungsprozesses aus Abschnitt 2.1.2. Der Feuchtegehalt entlang der charakteristischen Kurve wird dabei durch den in Abschnitt 5.3.1 vorgestellten Beobachter geschätzt. Die Abbildung veranschaulicht, wie das kontinuierliche Gut das gewünschte stationäre Profil annimmt. Dabei ist auch erkennbar wie die Anfangsbedingung aus dem Prozess transportiert wird. Die Abb. 5.11 zeigt die Abweichung der geschätzten Temperatur  $\hat{T}(z, t)$  und des geschätzten Feuchtegehalts  $\hat{X}_{H_2O}(z, t)$  von ihren tatsächlichen Verläufen. Der betragsmäßig größte relative Fehler beider Verläufe beträgt

$$e_{max, X_{H_2O}} = \max \left( \frac{|X_{H_2O}(z, t) - \hat{X}_{H_2O}(z, t)|}{|X_{H_2O}(z, t)|} \right) = 0.19 \quad \text{und} \quad (5.59)$$

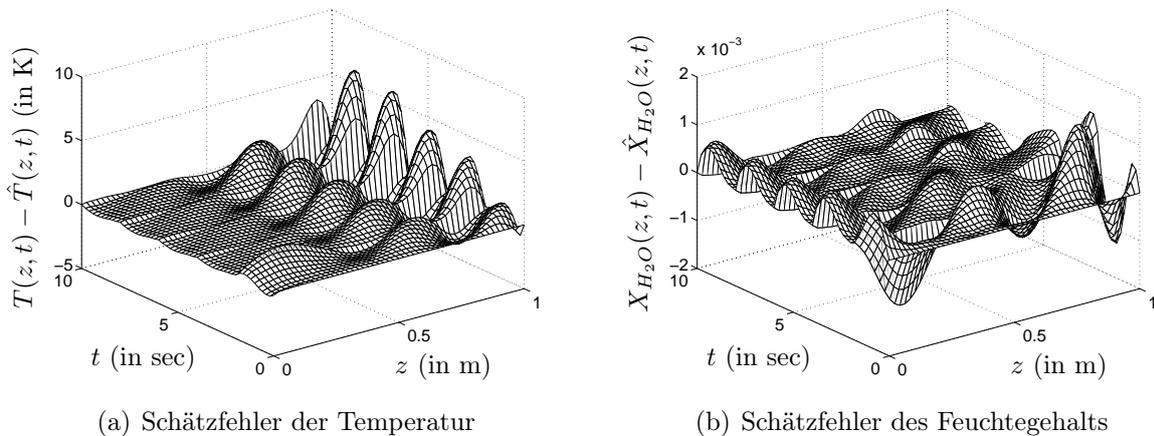
$$e_{max, T} = \max \left( \frac{|T(z, t) - \hat{T}(z, t)|}{|T(z, t)|} \right) = 0.017. \quad (5.60)$$

Wird als Gütemaß noch der mittlere quadratische Fehler herangezogen,

$$e_{MSE, X_{H_2O}} = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{T} \int_0^{T_M} (X_{H_2O}(z, t) - \hat{X}_{H_2O}(z, t))^2 dt dz} = 2.9 \cdot 10^{-4}, \quad e_{MSE, T} = 1.0 \text{ K}, \quad (5.61)$$



**Abbildung 5.10.:** Ergebnis der Spline-Interpolation in Kombination mit einem Normalform-Beobachter zur Schätzung des Profils des Feuchtegehalts eines Trocknungsprozesses zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_i$  unter Einsatz von fünf mitgeführten Temperatursensoren.



**Abbildung 5.11.:** Schätzfehler der Zustandsfunktionen für Temperatur und Feuchtegehalt bei Anwendung der Spline-Interpolation in Kombination mit einem Normalform-Beobachter basierend auf den Messsignalen von fünf mit dem Medium mitgeführten Temperatursensoren.

ist erkennbar, dass die Interpolation durchaus brauchbare Ergebnisse liefert. Dabei bezeichnen  $T_M$  den betrachteten Interpolationszeitraum ( $T_M = 10$  sec).

Die Schätzergebnisse durch Interpolation können, abhängig von der Dynamik des Prozesses, noch durch die Hinzunahme von Messungen der letzten Abtast Schritte verbessert werden, um beispielsweise den Gradienten bestimmen zu können. Selbst wenn die damit erzielten Ergebnisse für eine Regelung nicht ausreichen, können damit dennoch wichtige

Informationen über die im Prozess vorhandenen verteilten Zustandsfunktionen gewonnen werden. Diese Ergebnisse können beispielsweise dazu verwendet werden, eine vorhandene Vorsteuerung oder Störgrößenaufschaltung zu justieren. Ein Vorteil der durch den Prozess transportierten Sensoren liegt auch darin, dass regelmäßig der gesamte Ortsbereich durchlaufen wird und somit Informationen über mögliche Defekte und Störungen im Prozess erfasst werden können. [Dem08] verwendet ein ähnliches Prinzip zur Schätzung des verteilten Zustands von parabolischen SVPs, indem Sensoren gezielt über das zu regelnde Medium hin und her bewegt werden.

## 5.4. Schlussfolgerungen

Die Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik in Kombination mit der Methode der Charakteristiken erlaubt einen sehr effizienten Entwurf eines Beobachters basierend auf gewöhnlichen Differentialgleichungen und ermöglicht auch die Schätzung der konzentriert-parametrischen Zustandsvariablen der Aktoren. Zudem wird die Bewertung der Beobachtbarkeit deutlich erleichtert (Satz 5.5). Besonders im Fall einer Trajektorienfolgeregelung entlang der Grundcharakteristik bietet diese Sensorik eine effiziente Möglichkeit die für die Regelung erforderlichen und nicht messbaren Zustandsvariablen des Mediums zu schätzen (vgl. Gl. (5.34)). Damit wird die Grundlage für die im Folgenden betrachteten Ansätze zur Zustandsregelung von Transportprozessen geschaffen.

# 6. Regelungsentwurf

Das in dieser Arbeit verfolgte Regelungsziel für Transportprozesse wird durch die Lösung des Trajektorienfolgeproblems für das durch den Prozess transportierte Medium definiert. Dabei soll die Regelung zudem auftretende Störungen, wie Schwankungen der Regelgröße am Eintrittspunkt des Prozesses, Parameterschwankungen sowie den Einfluss von Störgrößen kompensieren. Diese Einflüsse können im Fall einer reinen Steuerung zu großen Abweichungen führen. Zur Erfassung der Regelgrößen wird eine Sensorik mit den Gütern mitgeführt, mit welcher auch nicht messbare Systemgrößen unter Anwendung eines Beobachters entsprechend Kap. 5 geschätzt werden können. Die Stabilität bleibt dabei durch Anwendung eines Folgebeobachters erhalten (vgl. Abschnitt 5.2.2.3). Für den Regelungsentwurf kann damit angenommen werden, dass alle relevanten Größen erfassbar sind.

Dieses Kapitel ist wie folgt untergliedert: Zuerst wird die regelungstechnische Problemstellung formuliert und mögliche Regelungsstrategien diskutiert. Anschließend wird in Abschnitt 6.2 die zur Lösung eines Trajektorienfolgeproblems oft angewendete Zweifreiheitsgrade-Struktur vorgestellt. In Abschnitt 6.3 wird als Alternative die flachheitsbasierte Trajektorienfolgeregelung präsentiert, welche allerdings im Grunde die Zweifreiheitsgrade-Struktur beinhaltet. Kapitel 6.4 behandelt die Regelung von Prozessen, welche über Aktoren mit örtlich getrennter Wirkung verfügen. Der regelungstechnisch aufwendigere Fall von örtlich über den gesamten Prozess wirkenden Stellgliedern wird in Kap. 6.5 betrachtet.

## 6.1. Problemstellung

Die zu lösende Regelungsaufgabe bezieht sich in dieser Arbeit auf Transportprozesse mit der gleichen charakteristischen Richtung und Geschwindigkeit. Die interessierenden Systemgrößen des transportierten Mediums sollen dabei eine definierte Trajektorie durchlaufen. Das mit dem Transportvorgang verbundene Ein- und Auslaufen der Volumenelemente und damit der Regelgrößen führt zu einem schaltenden Verhalten des gesamten Systems. Zudem ist in Verbindung mit dem Transport eine veränderliche Anzahl der Regelgrößen möglich. In Abschnitt 6.5.2 wird eine Regelungsstrategie vorgestellt, welche mit einer variablen Anzahl an Regelgrößen umgehen kann.

Das transportierte Medium wird im Allgemeinen mehrere getrennte Prozessschritte durch-

laufen. Deshalb ist speziell bei Stückgutprozessen die Annahme durchaus gerechtfertigt, dass die Güter den Prozess in konstanten Abständen durchlaufen. Im Fall eines kontinuierlichen Mediums werden die Regelgrößen vereinzelt Positionen entlang dem Medium zugeordnet. In diesem Fall können ebenso durch die entsprechende Platzierung der Sensoren konstante Abstände zwischen den Regelgrößen erreicht werden. Auf diese Weise kann die Anzahl an Regelgrößen innerhalb des Prozesses und damit die Systemordnung konstant gehalten werden.

Der Prozess kann Aktoren mit einer örtlich beschränkten und Aktoren mit einer über den gesamten Prozess verteilten Wirkung beinhalten. Die Systembeschreibung ändert sich abhängig vom Aktor zwar nur gering, jedoch sind damit unterschiedliche Regelungsstrategien möglich und sinnvoll. Aus diesem Grund werden im Folgenden diese beiden Aktortypen getrennt behandelt. Im Fall von Aktoren mit einer örtlich getrennten Wirkung wird das angesprochene Problem einer variablen Anzahl an Regelgrößen entschärft, wie in Abschnitt 6.4 gezeigt wird.

In dieser Arbeit werden die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur und die flachheitsbasierte Trajektorienfolgeregelung eingesetzt, welche in den folgenden Abschnitten näher erläutert werden. Eine weitere sehr aussichtsreiche Methode stellt die modellprädiktive Regelung dar, welche den Vorteil hat, Stellgrößenbeschränkungen direkt berücksichtigen zu können. Allerdings muss dazu in jedem Abtastschritt ein unter Umständen sehr komplexes Optimierungsproblem gelöst werden. Zudem stellt das schaltende Verhalten und die damit verbundenen sprunghaften Änderungen der Zustandsvariablen ein Problem für die Prädiktion dar. Die Lösung dieses Problems erfordert einen großen Entwurfsaufwand, wie in [Gra10] gezeigt wird. Des Weiteren gestaltet sich ein Stabilitätsnachweis äußerst schwierig, welcher bislang nur für spezielle lineare Probleme geführt werden kann. Aus diesen Gründen wird der modellprädiktive Ansatz im Folgenden nicht näher behandelt.

Weist die Regelgröße nicht den vollen relativen Grad auf, so liegt eine interne Dynamik vor. Auch wenn die Wirkung der internen Dynamik am Systemausgang nicht sichtbar ist, muss zur Realisierung einer technisch sinnvollen Regelung die Stabilität oder zumindest die Beschränktheit der internen Dynamik vorausgesetzt werden. Eine instabile interne Dynamik würde zum unbeschränkten Anwachsen der Zustandsvariablen und damit zur Zerstörung des Systems führen. Auch wenn die Beschränktheit der internen Dynamik die Zerstörung des Systems verhindert, ist dies zur erfolgreichen Lösung der Regelungsaufgabe nicht ausreichend [Sva06]. Aus diesem Grund muss die Stabilität der internen Dynamik stets überprüft werden. Zur Überprüfung der Stabilität der internen Dynamik ist es hinreichend, dass die Nulldynamik asymptotisch stabil ist [Isi89]. Im Folgenden wird die Stabilität der internen Dynamik der behandelten allgemein formulierten Systeme vorausgesetzt.

## 6.2. Zwei-Freiheitsgrade-Struktur

Die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur ist eine weit verbreitete Methode zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems. Abb. 6.1 veranschaulicht diese Regelungsstruktur, welche aus einer Vorsteuerung und einer unterlagerten Regelung besteht. Die Vorsteuerung realisiert dabei eine Systeminversion, weshalb diese auch den weitaus größeren Anteil zur Stellgröße beiträgt. Die unterlagerte Regelung dient lediglich zur Kompensation von auftretenden Störungen. Die Steuerung alleine erfüllt bei der Abwesenheit von Störungen bereits das Regelziel, wodurch angenommen werden kann, dass die Regelgröße selbst unter Einwirkung von (beschränkten) Störungen in der Nähe der Referenztrajektorie bleiben wird. Dominante Störgrößen werden bereits im Steuerungsentwurf bzw. durch eine Störgrößen-aufschaltung berücksichtigt. Zudem sind aufgrund der Trägheit der Systeme abrupte große Abweichungen der Regelgröße nicht zu erwarten. Aus diesem Grund ist eine Linearisierung des Systems entlang der Trajektorie für den Regelungsentwurf durchaus zulässig. Dies stellt eine übliche Methode zur Realisierung einer Trajektorienfolgeregelung für nichtlineare Systeme dar. Das nichtlineare System geht dann in ein lineares zeitvariantes System über, für welches in vielen Fällen ein deutlich einfacherer Regelungsentwurf möglich ist. Dabei besteht auch die Möglichkeit, bei geringer zeitlicher Veränderung der resultierenden Systemparameter, die zeitliche Änderung als Unsicherheit aufzufassen und einen linearen zeitinvarianten robusten Regelungsentwurf durchzuführen. Zur Realisierung der Vorsteuerung bieten sich vor allem bei nichtlinearen Systemen die flachheitsbasierten Methoden an, wie in Abschnitt 4 verdeutlicht wurde.

Der flachheitsbasierte Ansatz kann auch direkt zur Trajektorienfolgeregelung herangezogen werden, wie im nächsten Abschnitt diskutiert wird.

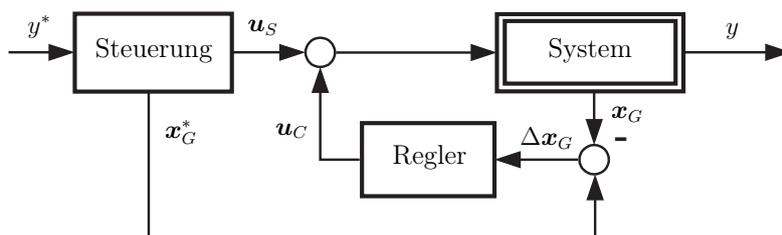


Abbildung 6.1.: Zwei-Freiheitsgrade-Struktur.

## 6.3. Trajektorienfolgeregelung

Die Trajektorienfolgeregelung resultiert aus der Eigenschaft von flachen Systemen, dass sämtliche Systemgrößen und damit auch die Eingangsgröße durch den flachen Ausgang

und einer endlichen Anzahl von Ableitung des flachen Ausgangs beschrieben werden können. Damit kann ein Regelgesetz formuliert werden, welches in einer linearen Systembeschreibung resultiert. Aus dieser Eigenschaft ist auch der Zusammenhang mit der exakten Ein-/Ausganglinearisierung erkennbar. Zur Bestimmung einer Trajektorienfolgeregelung wird das nichtlineare flache System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t) \quad (6.1a)$$

$$y(t) = h(\mathbf{x}(t)), \quad (6.1b)$$

mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  und dem flachen Ausgang  $y_f(t)$  betrachtet. Die Eingangsgröße  $u(t)$  kann damit durch

$$u(t) = \eta \left( y_f(t), \dot{y}_f(t), \dots, y_f^{(n)}(t), t \right) \quad (6.2)$$

beschrieben werden. Wird nun ein neuer Eingang

$$\nu(t) = y_f^{(n)}(t) \quad (6.3)$$

definiert, so folgt für die Gl. (6.2) das linearisierende Regelgesetz

$$u(t) = \eta \left( \nu(t), y_f(t), \dot{y}_f(t), \dots, y_f^{(n-1)}(t), t \right). \quad (6.4)$$

Gl. (6.3) beschreibt ein lineares System bestehend aus einer Integratorkette. Für dieses lineare System kann das Trajektorienfolgeproblem bezüglich der Referenztrajektorie  $y_f^*(t)$  mit dem Regelgesetz ( $e_y(t) = y_f^*(t) - y_f(t)$ )

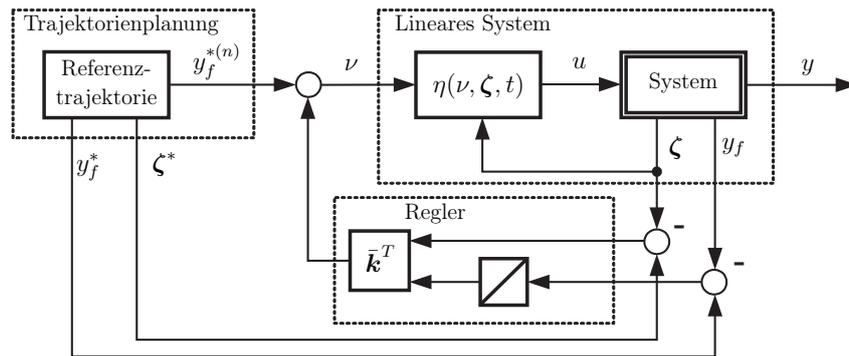
$$\nu(t) = y_f^{*(n)}(t) + k_{n-1} e_y^{(n-1)}(t) + \dots + k_0 e_y(t) + k_I \int e_y(t) dt \quad (6.5)$$

gelöst werden. Das Regelgesetz (6.5) wurde bereits um einen Integralanteil erweitert, um konstante Abweichungen ausgleichen zu können. Bei genauerer Betrachtung der Gln. (6.4) und (6.5) ist bezüglich des linearisierten Systems die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur erkennbar. In diesem Fall wird das lineare Regelgesetz allerdings nicht basierend auf einer Linearisierung um einen Arbeitspunkt bzw. eine Trajektorie gebildet. Verschwindet der Regelfehler ( $e_y = \dots = e_y^{(n-1)} = 0$ ), gilt also  $y_f^{(\delta)} = y_f^{*(\delta)}$ ,  $\delta = 0 \dots (n-1)$ , so beschreibt Gl. (6.4) einen flachheitsbasierten Vorsteuerungsentwurf (vgl. Gl. (4.15)). Abb. 6.2 veranschaulicht die Struktur der Regelung.

Entspricht der flache Ausgang nicht der Messgröße  $y(t)$ , so kann die Referenztrajektorie mit

$$y^*(t) = \phi \left( y_f^*(t), \dot{y}_f^*(t), \dots, y_f^{*(n-r)}(t), t \right), \quad (6.6)$$

bestimmt werden, wobei  $r$  den relativen Grad des Ausgangs  $y(t)$  von System (6.1) beschreibt. Dazu wird vorausgesetzt, dass die durch Gl. (6.6) beschriebene interne Dynamik stabil ist. Die Stabilität des gesamten Systems und damit die erfolgreiche Lösung der Regelungsaufgabe setzt eine stabile interne Dynamik voraus, wie in Abschnitt 6.1 erläutert wurde.



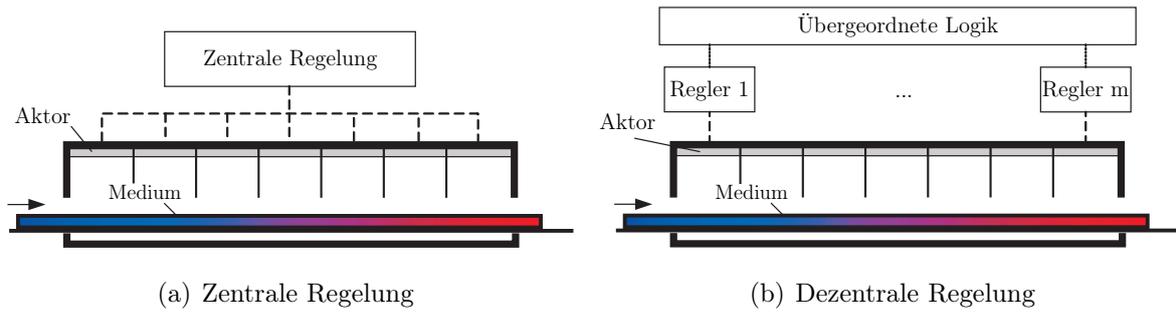
**Abbildung 6.2.:** Flachheitsbasierter Trajektorienfolgeregler mit  $\zeta^T = (y_f, \dots, y_f^{(n-1)})$  und  $\bar{k}^T = (k_0, \dots, k_{n-1}, k_I)$ .

## 6.4. Transportprozesse mit örtlich beschränkter Wirkung der Aktorik

Eine Reihe von Transportprozessen verfügen über Aktoren, deren örtliche Wirkung auf den Prozess im Wesentlichen auf ihre geometrische Ausdehnung beschränkt ist. Zum Teil besteht bei Transportprozessen auch die konstruktive Freiheit, getrennte Zonen zu etablieren. Dies hat einen großen Einfluss auf den Regelungsentwurf und die Wahl der Regelungsstrategie. Ein System mit getrennten Zonen wird durch Gl. (3.38) beschrieben. Dabei wird angenommen, dass sich zu jedem Zeitpunkt nur eine Regelgröße in einer Zone befindet. Dies stellt auch eine notwendige Bedingung dar, um für die Regelgrößen unabhängig voneinander eine Trajektorie vorgeben zu können (vgl. Abschnitt 4.2). Zur Realisierung einer Trajektorienfolgeregelung kann im Wesentlichen zwischen zwei unterschiedlichen Strategien unterschieden werden:

- **Zentrale Regelung:** Der Regelungsentwurf erfolgt bezüglich der gesamten Transportstrecke unter Einbeziehung aller Regelgrößen, womit die von dem Regler ermittelten Stellgrößen den Zonen zugeordnet werden (Abb. 6.3(a)). → Mehrgrößenregelung
- **Dezentrale Regelung:** Jeder Zone wird ein eigener Regler zugeordnet, welcher unabhängig von den restlichen Zonen betrieben wird. Die Abstimmung der Regelungsziele der einzelnen dezentralen Regler kann durch eine übergeordnete Logik erfolgen (Abb. 6.3(b)). → Eingrößenregelungen

Bei einer zentralen Regelung werden die Regelgrößen entlang des gesamten Prozesses betrachtet. Dieser Ansatz weist eine Reihe von Nachteilen auf und stellt höhere Anforderungen an den Regelungsentwurf. Erfolgt dabei der Regelungsentwurf anhand der Systembeschreibung für eine Zone nach Gl. (3.38), muss bedingt durch den Transport der Regelgrößen zwischen den Aktoren umgeschaltet werden. Daraus resultiert eine sprunghafte Ände-



**Abbildung 6.3.:** Unterschiedliche Regelungsstrategien für Transportprozesse mit getrennten Zonen.

zung der Zustandsvariablen des Aktors in der Systembeschreibung. Die Sprünge könnten unter Umständen zwar von der zentralen Regelung durch die Abstimmung mit der nachfolgenden Zone verhindert bzw. gemindert werden, allerdings ist diese Strategie von der Anzahl und Aufteilung der Regelgrößen abhängig. Der Entwurf einer Mehrgrößenregelung steht für dieses System vor dem Problem der nicht differenzierbaren Ortsfunktionen  $\tilde{\mathbf{b}}(z)$  der Stellglieder. Zudem besteht in diesem Fall auch das Problem einer möglicherweise variablen Anzahl an Regelgrößen.

Die Anwendung von dezentralen Reglern hingegen nutzt die entkoppelnde Systemeigenschaft aus, wodurch das Regelungsproblem auf eine Zone reduziert wird. Befindet sich zu jedem Zeitpunkt nur eine Regelgröße in einer Zone, wird das Problem auf den Entwurf eines Eingrößenreglers reduziert, da nur eindimensionale Regelgrößen betrachtet werden. Zudem wird in diesem Fall die Problematik einer variablen Anzahl an Regelgrößen automatisch aufgelöst, da eine Veränderung der Anzahl der sich im Prozess befindlichen Regelgrößen für die dezentralen Regler nicht sichtbar ist. Der angesprochene Vorteil einer zentralen Regelung, die einzelnen Zonen aufeinander abstimmen zu können, kann auch bei der dezentralen Regelung durch die Hinzunahme einer übergeordneten Steuerungslogik realisiert werden. Diese Prädiktion hat den Vorteil, dass die Zustandsvariablen der Aktoren bereits in einen für die Regelung günstigen Bereich im Zustandsraum geführt werden können, wodurch eine Art Inversion der Dynamik der Aktoren erreicht wird. Der Regelungsvorgang der dezentralen Regler beginnt bei Eintritt einer Regelgröße in die Zone.

Erfolgt der Regelungsentwurf für ein nichtlineares System anhand der Linearisierung um eine Trajektorie, wie beispielsweise bei der Zwei-Freiheitsgrade-Struktur, unterliegen die resultierenden Parameter einer zeitlichen Änderung. Diese ist innerhalb einer Zone im Vergleich zum gesamten Prozess im Allgemeinen wesentlich geringer, wodurch die zeitliche Änderung der Parameter innerhalb einer Zone als Parameterunsicherheit interpretiert werden kann. Damit kann für jede Zone ein robuster, linearer und zeitinvarianter Regelungsentwurf durchgeführt werden.

Aus den genannten Gründen wird im Folgenden die dezentrale Regelungsstrategie heran-

gezogen, womit der Regelungsentwurf basierend auf der Systembeschreibung in Gl. (3.38) mit den Mess- und Regelgrößen entsprechend Gl. (3.39) erfolgt.

Die resultierende relativ einfache Systemstruktur erlaubt die Anwendung einer sättigenden strukturvariablen Regelung [Buh08], mit welcher die Stellgrößenbegrenzung bei gesicherter Stabilität berücksichtigt werden kann. Diese Methode wurde in [WCL10] auf zeitvariante Systeme erweitert, wobei zur Bestimmung der mit dem Einzugsbereich abgestimmten Regelverstärkung eine numerische Optimierung erforderlich ist. Im zeitinvarianten Fall kann das Optimierungsproblem analytisch gelöst werden. In [Buh08] wird zudem ein robuster Entwurf der sättigenden strukturvariablen Regelung vorgestellt, für den ebenso eine analytische Lösung des Optimierungsproblems gefunden werden kann. Aus diesem Grund wird dieses Regelungskonzept im Folgenden zur Regelung eines Durchlaufofens herangezogen. Zuvor wird jedoch die sättigende strukturvariable Regelung kurz vorgestellt.

### 6.4.1. Sättigende strukturvariable Regelung

Die Idee der von [Buh08] entwickelten sättigenden strukturvariablen Regelung geht von der Systemdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \text{sat}(u(t)) \quad \text{sat}(u(t)) = \begin{cases} -u_{max} & \text{für } u(t) \leq -u_{max} \\ u(t) & \text{für } -u_{max} < u(t) < u_{max} \\ -u_{max} & \text{für } u(t) \geq u_{max} \end{cases} \quad (6.7)$$

aus. Der Ansatz wird von der Problematik motiviert, für einen gegebenen geschlossenen Regelkreis eine geeignete Lyapunov-Funktion  $V(\mathbf{x})$  zum Nachweis der Stabilität zu finden. Anstatt diesen oft aufwendigen und schwierigen Weg zu gehen, verfolgt der in [Buh08] vorgeschlagene Ansatz einen Regelungsentwurf in der Art, dass eine günstige Lyapunov-Funktion zur Abschätzung des Einzugsbereichs gefunden werden kann. Dazu wird die Tatsache ausgenutzt, dass der exakte Einzugsbereich  $\mathbb{S}$  durch den Rand  $\partial\mathbb{S}$  beschrieben wird, welcher die Bereiche mit  $\dot{V} > 0$  und  $\dot{V} < 0$  trennt. Der Ansatz

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\alpha V(\mathbf{x}), \quad \alpha > 0 \quad (6.8)$$

kommt dabei für  $\alpha \searrow 0$  der gewünschten Situation sehr nahe. Die Aufgabe besteht nun darin, eine Zustandsrückführung zu entwerfen, welche eine Lyapunov-Funktion zulässt, die die Gl. (6.8) erfüllt. Zu diesem Zweck wird der quadratische Ansatz

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (6.9)$$

mit  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$  herangezogen. Die zeitliche Ableitung von  $V(\mathbf{x})$  resultiert mit Hilfe der Zustandsdifferentialgleichung (6.7) in

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(t)(\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A})\mathbf{x}(t) + 2 \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{b} \text{sat}(u(t)) = -\alpha \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t). \quad (6.10)$$

Bedingung (6.10) ist nur für den Bereich im Zustandsraum erfüllbar, in dem das System lineares Verhalten aufweist, also für  $|u| \leq u_{max}$ . Wird dies in Gl. (6.10) berücksichtigt und das Regelgesetz  $u(t) = -\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$  angesetzt, resultiert die algebraische Riccati-Gleichung

$$\left(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\mathbf{A} + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}\right) - 2\mathbf{P} \mathbf{b} \mathbf{b}^T \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (6.11)$$

zur Bestimmung der Matrix  $\mathbf{P}$ . In dem gesättigten Bereich  $|u| > u_{max}$  reduziert sich der Betrag von  $\dot{V}(\mathbf{x})$ , wodurch dort gilt  $\dot{V}(\mathbf{x}) \geq -\alpha V(\mathbf{x})$ . Durch entsprechend kleine Wahl von  $\alpha$  kann jedoch ein beliebig schmales Band  $-\alpha V(\mathbf{x}) \leq \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  erreicht werden, womit in  $\mathbb{S}$  weiterhin  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  sichergestellt wird und eine weniger konservative Abschätzung des Einzugsbereichs im Vergleich zu konventionellen Methoden zu erwarten ist.

Der vorgestellte Ansatz weist die Eigenschaft auf, dass die Realteile der Eigenwerte des Systems, die in der komplexen Ebene rechts von  $-\frac{\alpha}{2}$  liegen, auf  $-\frac{\alpha}{2}$  verschoben werden. Die Eigenwerte deren Realteil links von  $-\frac{\alpha}{2}$  liegt werden durch die Zustandsrückführung hingegen nicht verschoben. Eine weitere Eigenschaft des  $\alpha$ -Reglers liegt in der Möglichkeit der analytischen Abschätzung des Einzugsbereichs. Dieser kann durch Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \eta &= \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \\ \text{u. B. v.: } \dot{V}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}, \mathcal{N}(\mathbf{P})\}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

mit dem Nullraum  $\mathcal{N}(\mathbf{P})$  abgeschätzt werden. Die Lösung des Optimierungsproblems lautet

$$\eta = \frac{4\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b}}{(2\mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{b} - \alpha)^2} u_{max}^2. \quad (6.13)$$

Wie in [Buh08] gezeigt wird, werden die Einzugsbereiche  $\mathbb{S}(\alpha) = \mathbb{S}(\mathbf{P}(\alpha), \eta(\alpha))$  mit wachsendem  $\alpha$  kleiner und liegen ineinander. Die Regelung hingegen wird mit steigendem  $\alpha$  immer schneller. Die Verminderung des damit entstehenden Zielkonflikts wird durch Variation des Parameters  $\alpha$  erreicht. Aus diesem Grund wird auch von einer strukturvariablen Regelung gesprochen. Im Folgenden wird der damit resultierende Regler entsprechend [Buh08] als  $\alpha$ -Regler bezeichnet. Für die Wahl von  $\alpha$  wird die Strategie verfolgt, den größtmöglichen Wert aus dem definierten Intervall  $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$  heranzuziehen für welchen  $\mathbf{x}(t)$  in  $\mathbb{S}(\alpha)$  liegt. Zur Umsetzung der Strategie werden in [Buh08] eine kontinuierliche Variation und eine diskrete Variation vorgeschlagen. Die diskrete Variation hat den Vorteil, dass vorab offline für eine definierte Anzahl an Werten von  $\alpha$  die Matrix  $\mathbf{P}(\alpha)$  sowie der Einzugsbereich  $\eta(\alpha)$  bestimmt und abgespeichert werden kann. Diese Variante ist vor allem bei mangelnder Rechenleistung von großem Vorteil. Der aktuell geeignete Wert für  $\alpha$  wird dabei durch Anwendung des Bisektionsalgorithmus [PTVF07] bestimmt. Für detailliertere Ausführungen, auch zur Bestimmung der Intervallgrenzen von  $\alpha$ , wird auf [Buh08] verwiesen.

Der Ansatz wurde in [Buh08] auch auf Systeme mit Unsicherheiten erweitert. Diese Erweiterung wird im Folgenden zur Regelung herangezogen, weshalb der Entwurf kurz skizziert wird. An dieser Stelle wird für detaillierte Ausführungen ebenso auf [Buh08] verwiesen.

### Modifikation für Systeme mit Unsicherheiten

Lassen sich die Unsicherheiten über den nominellen Eingangsvektor  $\mathbf{b}_0$  darstellen wird von *matched uncertainties* gesprochen. In diesem Fall ist ein sehr eleganter robuster Entwurf möglich. Diese Bedingung stellt jedoch eine große Einschränkung dar, weshalb im Folgenden der allgemeine Fall für beliebige Unsicherheiten in  $\mathbf{A}$  vorgestellt wird. Dabei wird von Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{D} \mathbf{L}(t) \mathbf{E}) \mathbf{x} + \mathbf{b} \text{sat}(u) \quad (6.14)$$

ausgegangen. Die unsicheren Parameter von  $\mathbf{A}$  werden durch die Matrix  $\mathbf{L}(t) \in \mathbb{R}^{r \times s}$  ausgedrückt. Die Amplituden der Unsicherheiten werden auf die Matrizen  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  und  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{s \times n}$  aufgeteilt, so dass die Bedingung  $\mathbf{L}^T \mathbf{L} \leq \mathbf{I}$  erfüllt wird. Für die maximal verfügbare Stellgröße  $u_{max}$  und den Eingangsvektor  $\mathbf{b}$  können sehr einfach multiplikative Unsicherheiten zugelassen werden, da der vorgestellte  $\alpha$ -Regler immer zu einem Regler mit unendlicher Verstärkungsreserve führt [Buh08]. Damit wird angenommen, dass der Eingangsvektor durch  $\mathbf{b} = \zeta(t) \mathbf{b}_0$  mit  $\zeta(t) \geq 1$  und dem nominellen Eingangsvektor  $\mathbf{b}_0$  sowie  $u_{max}$  durch  $u_{max} = \nu(t) u_{max,0}$  mit  $\nu(t) \geq 1$  und der nominellen Stellgrößenbegrenzung  $u_{max,0}$  dargestellt werden kann. Unter diesen Voraussetzungen kann das System (6.14) mit dem Regelgesetz

$$u(t) = -\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (6.15)$$

stabilisiert werden, falls ein  $\epsilon > 0$  gefunden werden kann, so dass eine positiv-semidefinite Lösung  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$  der Riccati-Gleichung

$$\left(\mathbf{A}_0 + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}\right)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \left(\mathbf{A}_0 + \frac{\alpha}{2} \mathbf{I}\right) - 2\mathbf{P} \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_0^T \mathbf{P} + \epsilon \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{D}^T \mathbf{P} = -\frac{1}{\epsilon} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \quad (6.16)$$

existiert. In diesem Fall ist ebenso eine Abschätzung des Einzugsbereichs  $\mathcal{S}(\mathbf{P}, \eta)$  möglich:

$$\eta = \frac{4\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{b}_0}{(2\mathbf{b}_0^T \mathbf{P} \mathbf{b}_0 - \alpha)^2} u_{max,0}^2 \quad (6.17)$$

Dieser Ansatz wird nun im Folgenden für die Lösung der Regelungsaufgabe für Transportprozesse mit örtlich beschränkter Wirkung der Aktorik herangezogen.

#### 6.4.2. Regelungsstrategie

Zur Regelung von Transportprozessen mit getrennter Wirkung der Aktoren wird im Folgenden die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur herangezogen, wobei jeder Aktor und damit jede

einzelne Zone mit einem eigenen unterlagerten Regler betrieben wird. Dabei wird angenommen, dass sich jeweils nur eine Regelgröße innerhalb einer Zone befindet. Aus diesem Grund kann jede Zone als eigenständiges System interpretiert werden, welches durch Gl. (3.38) beschrieben wird. Abb. 6.3(b) veranschaulicht die Struktur am Beispiel eines Durchlauf-ofens. Sämtliche Regelgrößen sollen der gleichen Trajektorie folgen. Der Steuerungsentwurf, wie auch der Regelungsentwurf, erfolgt entlang der charakteristischen Kurve und wird entsprechend Kapitel 4.3 unter Anwendung der flachheitsbasierten Methoden mit dem flachen Ausgang  $y_f(t)$  durchgeführt:

$$\bar{u}_S(t) = \eta(y_f(t), \dots, y_f^{(n)}(t), t), \quad (6.18)$$

wobei die Vorsteuerung mit  $\bar{u}_S(t)$  bezeichnet wird. Liegt die Trajektorie bezüglich der Ortsvariablen  $z$  vor, ist diese entsprechend Abschnitt 4.3 auf die charakteristische Kurve abzubilden. Die Referenztrajektorie  $y_C^*(t)$  sowie die resultierenden Trajektorien der Zustandsvariablen  $\bar{\mathbf{x}}_G^*(t)$  und die Vorsteuerung  $\bar{u}_S(t)$  werden für den Regelungsentwurf den einzelnen Zonen entsprechend ihrer Anordnung im Prozess zugeordnet. Damit weist jede Zone unterschiedliche Teile der Verläufe der Trajektorien auf, welche im Folgenden durch den Index  $j$ , entsprechend der jeweiligen Zone, gekennzeichnet werden ( $y_{C,j}(t)$ ,  $\bar{u}_{S,j}(t)$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t)$ ). Der Regelungsentwurf erfolgt basierend auf der Linearisierung des Systems um die Referenztrajektorie  $y_{C,j}^*(t)$  und den resultierenden Trajektorien der Zustandsvariablen  $\bar{\mathbf{x}}_{G,j}^*(t)$  ( $\Delta\bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t) = \bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t) - \bar{\mathbf{x}}_{G,j}^*(t)$ ,  $u_{C,j}(t) = u_j(t) - \bar{u}_{S,j}(t)$ ,  $j = 1 \dots m$ ) mit

$$\Delta\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{G,j}(t) = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_j}{\partial \bar{\mathbf{x}}_{G,j}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_{G,j}^*, \bar{u}_{S,j}} \Delta\bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial u} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_{G,j}^*, \bar{u}_{S,j}} u_{C,j}(t). \quad (6.19)$$

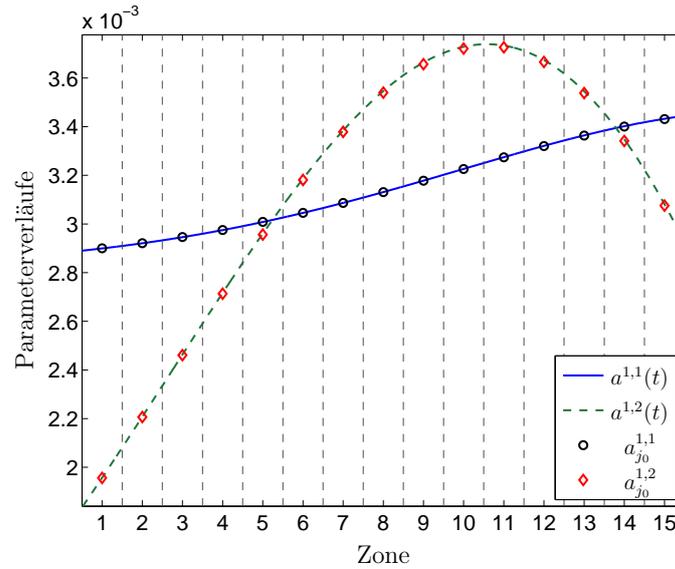
Damit resultiert ein lineares zeitvariantes System, welches durch die Zustandsraumdarstellung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta\dot{\mathbf{x}}_j(t) \\ \Delta\dot{\mathbf{x}}_{u,j}(t) \end{pmatrix}}_{\Delta\dot{\bar{\mathbf{x}}}_{G,j}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_j(t) & \mathbf{H}_j(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{u_j} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{G,j}(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta\mathbf{x}_j(t) \\ \Delta\mathbf{x}_{u,j}(t) \end{pmatrix}}_{\Delta\bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{u,j} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_j} u_{C,j}(t) \quad (6.20)$$

$$\Delta y_{M,j}(t) = \mathbf{c}_{M,j}^T \Delta\bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t), \quad \Delta y_{C,j}(t) = \mathbf{c}_{C,j}^T \Delta\bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t), \quad (6.21)$$

mit  $\mathbf{A}_j(t) = \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_j}{\partial \bar{\mathbf{x}}_j} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_{G,j}^*, \bar{u}_{S,j}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{H}_j(t) = \left( \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_j}{\partial \mathbf{x}_{u,j}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}_{G,j}^*, \bar{u}_{S,j}} \mathbf{c}_{u,j}^T \right) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $\mathbf{A}_{G,j}(t) \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$  und  $\mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^{(n+q)}$  beschrieben wird.

Aus der Zustandsraumdarstellung (6.20) ist ersichtlich, dass nur die Systemmatrix  $\mathbf{A}_{G,j}(t)$  zeitveränderliche Parameter beinhaltet. Die zeitliche Änderung der Systemparameter innerhalb einer Zone ist abhängig von der Anzahl der Zonen sowie der Referenztrajektorie. Diese Änderung wird im Folgenden als relativ gering angenommen. Aus diesem Grund



**Abbildung 6.4.:** Darstellung möglicher Parameterverläufe nach der Linearisierung und die ermittelten nominellen Parameterwerte am Beispiel eines Durchlaufofens.

wird die Änderung der Parameter als Unsicherheit interpretiert und zum Entwurf der robuste Ansatz des  $\alpha$ -Reglers herangezogen. Als nominelle Parameterwerte werden jeweils die Mittelwerte der Parameterbereiche herangezogen

$$a_{j_0}^{l,k} = \frac{a_{j_0,max}^{l,k} + a_{j_0,min}^{l,k}}{2}, \quad l, k \in [1, n + q], \quad (6.22)$$

wobei die Indizes  $l$  und  $k$  die Zuordnung innerhalb der Matrix  $\mathbf{A}_{G,j}(t)$  beschreiben. Die Variablen  $a_{j_0,max}^{l,k}$  und  $a_{j_0,min}^{l,k}$  bezeichnen den maximalen bzw. minimalen Wert des Parameters  $a_j^{l,k}(t)$ . Abb. 6.4 veranschaulicht dies am Beispiel eines Durchlaufofens, welcher zwei veränderliche Parameter beinhaltet.

Im Folgenden wird der vorgestellte Ansatz zur Regelung des in Abschnitt 2.1.1 vorgestellten Durchlaufofens herangezogen.

### 6.4.3. Anwendung auf einen Durchlaufofen

Der im letzten Abschnitt vorgestellte Regelungsentwurf wird nun auf den in Abschnitt 2.1.1.2 vorgestellten Durchlaufofen angewendet. Das entlang der Grundcharakteristiken vorliegende nichtlineare System wird für den Regelungsentwurf entlang der Referenztrajektorie  $y_C^*(t)$  und den daraus resultierenden Trajektorien der Zustandsvariablen linearisiert. Damit kann für jede Heizzone ein zeitvariantes lineares System gewonnen werden, welches durch die Zustandsraumdarstellung

$$\Delta \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{G,j}(t) = \begin{pmatrix} a_j(t) & h_j(t) \\ 0 & -\frac{1}{T_A} \end{pmatrix} \Delta \bar{\mathbf{x}}_{G,j}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_A}{T_A} \end{pmatrix} u_{C,j}(t), \quad (6.23)$$

repräsentiert wird. Für die zeitvarianten Parameter  $a_j(t)$  und  $h_j(t)$  gilt mit der Vorsteuerung  $\bar{u}_S(t)$

$$a_j(t) = -\left(c_\alpha + 4\bar{c}_{Str}x^3(t)\right)\Big|_{x^*(t),\bar{u}_S(t)} \quad (6.24)$$

$$h_j(t) = \left(4\bar{c}_{Str}\tilde{u}_j^3(t)\right)\Big|_{x^*(t),\bar{u}_S(t)}, \quad \forall t \in \left[\frac{\bar{z}_{j-1}}{v}, \frac{\bar{z}_j}{v}\right], \quad j = 1 \dots m. \quad (6.25)$$

Die Änderung der Parameter in den einzelnen Heizzonen wird nun als Parameterunsicherheit interpretiert und entsprechend Abschnitt 6.4.1 ein robuster Entwurf des  $\alpha$ -Reglers durchgeführt. Die nominellen Parameter werden entsprechend Gl. (6.22) als Mittelwert der Verläufe der Parameter innerhalb einer Zone definiert. Abb. 6.4 verdeutlicht das Vorgehen an den beiden Verläufen der Parameter  $a^{1,1}(t) = a_j(t)$  und  $a^{1,2}(t) = h_j(t)$  für eine Referenztrajektorie entsprechend Gl. (5.57). Damit resultiert für die nominelle Systemmatrix  $\mathbf{A}_{G,j_0}$  der Zone  $j$

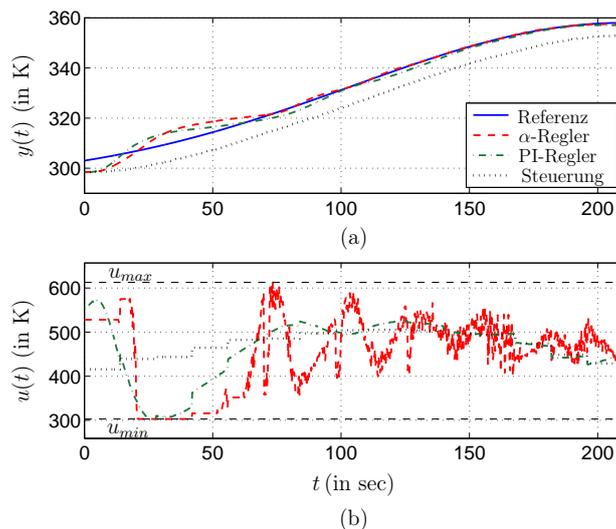
$$\mathbf{A}_{G,j_0} = \begin{pmatrix} a_{j_0} & h_{j_0} \\ 0 & -\frac{1}{T_A} \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots m. \quad (6.26)$$

mit den nominellen Parametern  $a_{j_0} = \frac{a_{j_0,max} + a_{j_0,min}}{2}$  und  $h_{j_0} = \frac{h_{j_0,max} + h_{j_0,min}}{2}$ . Aus der Struktur des Systems folgt für die Matrizen  $\mathbf{E}_j$  und  $\mathbf{D}_j$

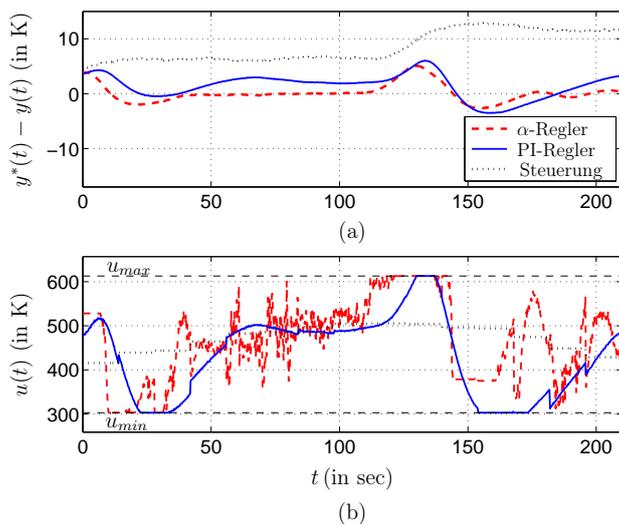
$$\mathbf{E}_j = \begin{pmatrix} \Delta_{a_j} & 0 \\ 0 & \Delta_{h_j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots m. \quad (6.27)$$

Die Bestimmung des minimalen Wertes von  $\alpha_j$  der Heizzone  $j$  erfolgt entsprechend den Ausführungen in [Buh08] und resultiert zu  $\alpha_{j,min} = -2 \sum_{i=1}^2 \lambda_i(\mathbf{A}_{G,j_0})$ . Als Maximalwert von  $\alpha_j$  hat sich, abgestimmt mit dem Bisektionsalgorithmus, ein Wert von  $\alpha_{j,max} = 1.05^N \alpha_{j,min}$ , mit  $N = 2^5 + 1$ , bewährt.

Im Folgenden wird als Referenztrajektorie der gauß-förmige Verlauf aus Gl. (5.57) angesetzt. Abbildung 6.5(a) zeigt das Ergebnis der Anwendung der  $\alpha$ -Regelung am Versuchsaufbau im Vergleich zu den in der Industrie häufig verwendeten PI-Reglern, welche anhand der nominellen Systeme entworfenen wurden. Die Verstärkungsfaktoren der PI-Regler wurden so gewählt, dass der erlaubte Stellgrößenbereich nicht verlassen wird, womit eine Dämpfung der Regelkreise von 0.3 resultiert. Durch diese Optimierung der Regelungsparameter des PI-Reglers kann ein durchaus akzeptables Ergebnis erzielt werden, auch wenn die Trajektorienfolge durch den  $\alpha$ -Regler besser realisiert wird. Die Stellgrößenverläufe der einzelnen Heizzonen, in denen sich das betrachtete Volumenelement befindet, sind in Abb. 6.5(b) dargestellt. Abb. 6.6(a) zeigt die Abweichung der Guttemperatur von der Referenztrajektorie für den Fall, dass der neunte Strahler ausgefallen ist. Ein Strahlerausfall wurde im Regelungsentwurf nicht explizit berücksichtigt, weshalb die daraus resultierende Abweichung von den nachfolgenden Strahlern ausgeglichen werden muss.



**Abbildung 6.5.:** Regelungsergebnisse (a) und Stellgrößenverläufe (b) bei Anwendung der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung mit flachheitsbasierter Vorsteuerung und unterlagertem robusten  $\alpha$ -Regler bzw. PI-Regler zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems für einen Durchlaufofen mit getrennten Heizzonen.



**Abbildung 6.6.:** Regelungsergebnisse (a) und Stellgrößenverläufe (b) bei Anwendung der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung mit flachheitsbasierter Vorsteuerung und unterlagertem robusten  $\alpha$ -Regler bzw. PI-Regler zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems für einen Durchlaufofen mit getrennten Heizzonen bei einem Ausfall des neunten Strahlers.

Die Stellgrößenverläufe der beiden Regelungen sind in Abb. 6.6(b) dargestellt. Aus beiden Ergebnissen ist erkennbar, dass der  $\alpha$ -Regler überlegen ist und zusätzlich Stabilität unter Berücksichtigung der Stellgrößenbegrenzung garantiert. Zusätzlich ist in den Abbildungen noch das Ergebnis bei reiner Steuerung des Systems dargestellt. Zur Verdeutlichung der Ergebnisse wird die mittlere quadratische Abweichung von der Referenztrajektorie als Gütemaß herangezogen:

$$J = \frac{1}{T_V} \int_0^{T_V} (y_C^*(t) - y_C(t))^2 dt, \quad T_V = \frac{L}{v} \quad (6.28)$$

**Tabelle 6.1.:** Gütemaße der Regelungsergebnisse

	kein Strahlerausfall		Ausfall des neunten Strahlers	
	$J$	$J_{rel}$	$J$	$J_{rel}$
$\alpha$ -Regler	$4.9 K^2$	9	$2.7 K^2$	28.6
PI-Regler	$4.9 K^2$	9	$6.8 K^2$	11.6
Steuerung	$44.9 K^2$	1	$79.7 K^2$	1

Die resultierenden Werte der Gütemaße sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst, welche noch um ein Maß für die Verbesserung der Güte der Regelung im Vergleich zur reinen Vorsteuerung erweitert wurde ( $J_{rel} = \frac{J_{steu}}{J_{reg}}$ ). Die Werte der Gütemaße unterstreichen nochmal die Qualität des vorgestellten Regelungsentwurfs. Mit diesem Ansatz kann somit der Ausfall einer Zone kompensiert werden. Damit wird ein lückenloser Betrieb sichergestellt und der defekte Aktor kann zu einem passenden Zeitpunkt ersetzt werden. In vielen Prozessen ist ein abrupter Stopp der Produktion nicht oder nur unter großen finanziellen Verlusten möglich.

## 6.5. Transportprozesse mit kontinuierlicher Ortsfunktion der Aktorik

In vielen Prozessen ist aus konstruktiven oder ähnlichen Gründen die Trennung des Prozesses in einzelne Zonen nicht möglich bzw. nicht gewollt. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt Transportprozesse betrachtet, deren Aktoren über den gesamten Prozess wirken. Mit dieser Art von Aktoren können kontinuierliche glatte Stellgrößenverläufe wesentlich exakter nachgebildet werden, wie in Abschnitt 4.6 gezeigt wurde. Damit geht allerdings auch eine Verkopplung der Regelgrößen einher, wodurch die Regelgrößen im Gegensatz zum letzten Abschnitt ohne weitere Maßnahmen nicht mehr unabhängig voneinander beeinflusst werden können. Die Systembeschreibung für  $p$  Regelgrößen wurde in Abschnitt 3.4 hergeleitet. Das System wird demnach durch Gl. (3.35) beschrieben, aus welcher direkt die angesprochene Verkopplung erkennbar ist.

In Abschnitt 6.5.2 wird ein Ansatz zur Entkopplung des Mehrgrößensystems vorgestellt, der mit einer variablen Anzahl an Regelgrößen umgehen kann. Dabei wird zudem erreicht, dass der Regelungsentwurf bezüglich SISO-Systemen erfolgen kann. Zuvor wird jedoch ein Mehrgrößenregler vorgestellt, welcher eine feste Anordnung der Regelgrößen im Prozess voraussetzt.

### 6.5.1. Periodischer Mehrgrößenregler

In diesem Abschnitt wird angenommen, dass die Prozesslänge  $L$  dem ganzzahligen Vielfachen des Abstandes der Regelgrößen  $\Delta z = L/p$  entspricht. Damit befindet sich zu jedem Zeitpunkt die gleiche Anzahl  $p$  an Regelgrößen in dem Prozess und das zu regelnde System wird zu jedem Zeitpunkt durch Gl. (3.35) beschrieben. Im Folgenden wird zudem angenommen, dass sämtliche Regelgrößen derselben Trajektorie folgen sollen. Zur Trajektorienfolgeregelung bietet sich erneut die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur an, wobei der unterlagerte Regler anhand des um die Referenztrajektorie linearisierten Systems (5.52) erfolgt. Jeder Vektor  $\Delta \mathbf{x}_i$  repräsentiert die Zustandsgrößen eines zu regelnden Volumenelements in dem Prozess. Wie im Folgenden noch erläutert wird, ist die folgende Zuordnung der Zustandsvektoren zu den konkreten Volumenelementen sinnvoll:

Sobald eines der betrachteten Volumenelemente den Prozess verlässt wird eine neue Regelgröße in den Prozess transportiert. Zu diesem Zeitpunkt wird  $\Delta \mathbf{x}_1$  dem neuen Volumenelement zugeordnet und die restlichen Zustandsvektoren werden den Zustandsvektoren mit dem höheren Index zugeordnet ( $\Delta \mathbf{x}_i \rightarrow \Delta \mathbf{x}_{i+1}$ ). Damit wird der Prozess in  $p$  Zonen unterteilt, wobei jede Zone einem Zustandsvektor  $\Delta \mathbf{x}_i$  zugeordnet wird.

Eine feste Zuordnung eines Zustandsvektors zu einem Volumenelement über die gesamte Verweilzeit ist nicht erforderlich, da aufgrund der Linearisierung das Regelziel darin besteht, sämtliche Zustandsvariablen  $\Delta \mathbf{x}_i$  zu Null zu bringen. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 6.5.1.3 an einem Beispiel verdeutlicht. Die gewählte Zuordnung stellt sich in dem betrachteten Fall als besonders vorteilhaft heraus, da sich der zeitliche Verlauf der Elemente  $\mathbf{A}_i(t)$  und  $\mathbf{H}_{i,j}(t)$  in Gl. (5.52) mit jedem Schaltvorgang wiederholt. Mit der periodischen Änderung der Zuordnung der Zustandsvariablen resultiert somit ein periodisches Verhalten des Systems (5.52) mit der Periodendauer

$$T_{period} = \frac{L}{pv}. \quad (6.29)$$

Damit kann der Regelungsentwurf auf eine Periode reduziert werden. Bevor nun der Regelungsentwurf vorgestellt wird, wird noch die Steuerbarkeit von System (5.52) diskutiert.

#### 6.5.1.1. Steuerbarkeit

Dual zur Beobachtbarkeit zeitvarianter Systeme existiert auch die Unterscheidung von *vollständig*, *total* und *gleichmäßig* steuerbar. Für die Definitionen und detaillierte Ausführungen sei beispielsweise auf [Fre71] verwiesen. Die Steuerbarkeit wird entsprechend der Periodizität von System (5.52) nur für eine Periode untersucht. Zu diesem Zweck wird die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_C(t) \in \mathbb{R}^{(np+qm) \times (np+qm)}$

$$\mathbf{Q}_C(t) = \left( \mathcal{L}_A^0 \mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathcal{L}_A^{(\rho_1-1)} \mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathcal{L}_A^0 \mathbf{b}_m \quad \dots \quad \mathcal{L}_A^{(\rho_m-1)} \mathbf{b}_m \right), \quad (6.30)$$

betrachtet, wobei  $\rho_j$ ,  $j = 1 \dots m$ , die Steuerbarkeitsindizes bezeichnen, die Vektoren  $\mathbf{b}_j$  die Spalten der Matrix  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_m)$  repräsentieren und der Operator  $\mathcal{L}_A$  durch

$$\mathcal{L}_A^k \mathbf{b} = \mathbf{A} \mathcal{L}_A^{k-1} \mathbf{b} - \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_A^{k-1} \mathbf{b}), \quad \mathcal{L}_A^0 \mathbf{b} = \mathbf{b} \quad (6.31)$$

definiert ist. Die Steuerbarkeitsindizes genügen der Bedingung  $\sum_{j=1}^m \rho_j = np + qm$ . Das System  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  wird entsprechend Gl. (6.30) in  $m$  Teilsysteme der Ordnung  $\rho_j$  unterteilt. Der Steuerbarkeitsindex und damit auch die Ordnung der resultierenden Teilsysteme sinkt mit einer steigenden Anzahl an Aktoren.

Entsprechend der Analyse der Beobachtbarkeit in Abschnitt 5.3.2 können aus der Betrachtung der Struktur der Steuerbarkeitsmatrix (C.5) Aussagen über die gleichmäßige Steuerbarkeit gewonnen werden. Daraus resultiert die durchaus einsichtige Forderung nach der vollständigen Steuerbarkeit der Aktordynamiken. Ähnlich dem Beobachtbarkeitsnachweis in Abschnitt 5.3.2.2 kann mit dieser Erkenntnis die weitere Analyse anhand einer reduzierten Steuerbarkeitsmatrix erfolgen (vgl. Anhang C.4).

### 6.5.1.2. Regelungsentwurf

Die Regelung des zeitvarianten MIMO-Systems stützt sich auf den von [Buh09] eingeführten  $\alpha$ -Regler, mit welchem ein exponentieller Abfall der Lyapunov-Funktion  $V(\mathbf{x})$  erreicht wird. Der Regelungsentwurf wird aufgrund des periodischen Verhaltens des Systems nur für eine Periode der Dauer  $T_{period}$  durchgeführt und die resultierende zeitvariante Regelungsmatrix  $\mathbf{K}(t)$  dementsprechend periodisch wiederholt. Der Schaltvorgang am Ende jeder Periode erfordert einen gesonderten Stabilitätsnachweis, welcher anschließend in Form einer Konvergenzanalyse erbracht wird.

Für den Entwurf der Regelung wird die Lyapunov-Funktion  $V(\Delta \mathbf{x}_G)$  der Form

$$V(\Delta \mathbf{x}_G) = \Delta \mathbf{x}_G^T(t) \mathbf{P}(t) \Delta \mathbf{x}_G(t), \quad (6.32)$$

mit der symmetrischen und positiv definiten Matrix  $\mathbf{P}(t)$ , betrachtet. Die zeitliche Änderung der Lyapunov-Funktion hat der Forderung

$$\dot{V}(\Delta \mathbf{x}_G) = -\alpha V(\Delta \mathbf{x}_G) \quad (6.33)$$

zu genügen, wobei die Variable  $\alpha > 0$  die Konvergenzgeschwindigkeit beschreibt. Mit Gl. (5.52) und (6.32) folgt für die zeitliche Ableitung der Lyapunov-Funktion

$$\begin{aligned} \dot{V}(\Delta \mathbf{x}_G) &= \Delta \mathbf{x}_G^T(t) \left( \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \right) \Delta \mathbf{x}_G(t) + 2 \Delta \mathbf{x}_G^T(t) \mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ &= -\alpha \Delta \mathbf{x}_G^T(t) \mathbf{P}(t) \Delta \mathbf{x}_G(t). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Mit dem Regelgesetz

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\Delta\mathbf{x}_G(t) = -\mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \Delta\mathbf{x}_G(t), \quad (6.35)$$

resultiert Gl. (6.34) in die Riccati-Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= -\left(\mathbf{A}(t) + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}\right)^T \mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\left(\mathbf{A}(t) + \frac{\alpha}{2}\mathbf{I}\right) + 2\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P}(t) \\ \mathbf{P}(T_{period}) &= \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

zur Bestimmung der Matrix  $\mathbf{P}(t)$ . Anstatt einer Anfangsbedingung wurde jedoch eine Bedingung am Ende des betrachteten Zeithorizonts  $t = T_{period}$  gestellt, um damit die Form der Lyapunov-Funktion zum Zeitpunkt  $t = T_{period}$  beeinflussen zu können. Gl. (6.36) kommt damit dem Ergebnis eines optimalen linearen quadratischen Riccati-Regelungsentwurfs sehr nahe. Die Matrix  $\mathbf{S}$  gewichtet den Endwert der Zustandsvariablen und wird im Folgenden als Diagonalmatrix gewählt, um eine bessere Interpretierbarkeit der Ergebnisse zu erreichen. Mit der Wahl der Diagonalelemente von  $\mathbf{S}$  kann die Relevanz der Zustandsvariablen zueinander gewichtet werden. Zustandsvariablen von höherer Bedeutung erhalten einen in Relation zu den restlichen Einträgen höheren Eintrag in der Matrix  $\mathbf{S}$ . Wird die Matrix  $\mathbf{S}$  allerdings zu  $\mathbf{S} = \beta \mathbf{I}$ ,  $\beta > 0$  gewählt, so führt dies zu einer kugelförmigen Lyapunov-Funktion zum Zeitpunkt  $t = T_{period}$ .

Die Riccati-Differentialgleichung (6.36) in Kombination mit dem Regelgesetz (6.35) resultiert also in einen geschlossenen Regelkreis, für welchen eine Lyapunov-Funktion mit exponentieller Konvergenzrate existiert. Dies gilt aufgrund der Linearisierung jedoch nur in der Nähe der aus dem Steuerungsentwurf resultierenden Trajektorie. Demnach müssen die auftretenden Störungen klein genug bleiben. Dominante Störungen sind demnach im Steuerungsentwurf bzw. durch eine Störgrößenaufschaltung zu berücksichtigen. Zur Sicherstellung der Stabilität des gesamten Systems sind noch die Schaltvorgänge näher zu untersuchen. Die in den Prozess einlaufenden Regelgrößen weichen im Allgemeinen von der Referenztrajektorie ab. Der betrachtete Prozess beschreibt demnach ein periodisch gestörtes System. Aus diesem Grund wird die Stabilität im Folgenden anhand einer Konvergenzanalyse diskutiert und das Verhalten des Systems zu den Schaltzeitpunkten am Ende jeder Periode untersucht.

### Konvergenzanalyse:

Sei der Anfangszustand  $\Delta\mathbf{x}_G(0)$  in dem Gebiet  $\mathbb{S}(\mathbf{P}(0), \eta_0)$  im  $\mathbb{R}^{n+p+qm}$ , welches durch

$$\mathbb{S}(\mathbf{P}, \eta) : \{\mathbf{x} | \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} < \eta\}, \quad (6.37)$$

definiert ist, dann erfüllt der Anfangszustand  $\Delta\mathbf{x}_G(0)$  die Bedingung

$$\Delta\mathbf{x}_G^T(0)\mathbf{P}(0)\Delta\mathbf{x}_G(0) < \eta_0. \quad (6.38)$$

Damit gilt basierend auf der Gl. (6.33) für den Zustandsvektor  $\Delta \mathbf{x}_G(t)$  für  $t > 0$

$$\Delta \mathbf{x}_G^T(t) \mathbf{P}(t) \Delta \mathbf{x}_G(t) < e^{-\alpha t} \eta_0 \quad (6.39)$$

und zum Schaltzeitpunkt  $t = T_{period}$

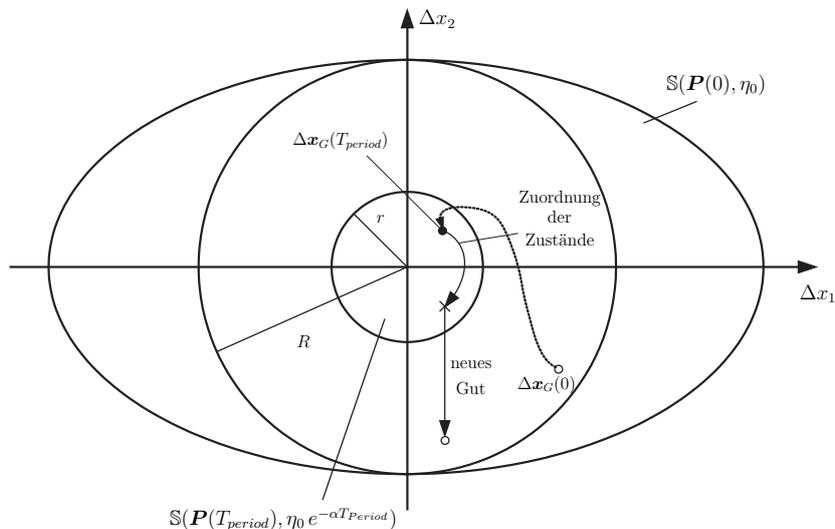
$$\Delta \mathbf{x}_G^T(T_{period}) \mathbf{P}(T_{period}) \Delta \mathbf{x}_G(T_{period}) < e^{-\alpha T_{period}} \eta_0. \quad (6.40)$$

Der Zustandsvektor  $\Delta \mathbf{x}_G(T_{period})$  befindet sich also entsprechend Gl. (6.40) in einer Hyperkugel um den Ursprung mit dem Radius

$$r = \sqrt{e^{-\alpha T_{period}} \frac{\eta_0}{\lambda_{min}(\mathbf{P}(T_{period}))}} \quad (6.41)$$

und stellt damit eine konservative Abschätzung dar. Der Zustandsvektor bleibt auch nach der sprungförmigen Änderung der Zustandsvariablen zum Zeitpunkt  $t = T_{period}$  innerhalb der kleinen Hyperkugel mit dem Radius  $r$ , sofern der in den Prozess einlaufende Fehler verschwindet oder ausreichend klein bleibt. Verschwindet der einlaufende Fehler vollständig, verringert sich der Radius der Hyperkugel kontinuierlich und der Zustand  $\Delta \mathbf{x}_G(t)$  konvergiert gegen den Ursprung, was ein asymptotisch stabiles Verhalten beschreibt. Im Allgemeinen ist jedoch der einlaufende Fehler größer als der Fehler der Zustandsvariablen am Ende der Periode. Aus der Analyse resultiert die Forderung, dass der einlaufenden Fehler durch  $R - r$  beschränkt bleibt. Diese Bedingung stellt sicher, dass der Anfangszustand einer neuen Periode innerhalb der Hyperkugel mit dem Radius  $R$  liegt, womit sich die durchgeführte Analyse wiederholt. Die Zusammenhänge sind in Abb. 6.7 für  $\Delta \mathbf{x}_G(t) \in \mathbb{R}^2$  dargestellt. Die Abbildung veranschaulicht auch den Schaltvorgang am Ende einer Periode. Der Wert für  $\eta_0$  wird durch

$$\eta_0 = R^2 \lambda_{max}(\mathbf{P}(0)) \quad (6.42)$$



**Abbildung 6.7.:** Darstellung der unterschiedlichen Einzugsbereiche für die Konvergenzanalyse des periodisch gestörten Systems für  $\Delta \mathbf{x}_G(t) \in \mathbb{R}^2$ .

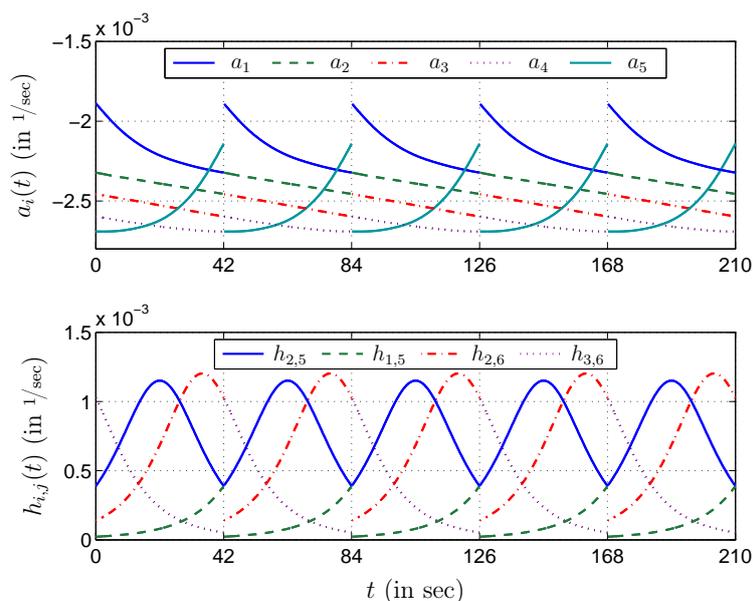
beschrieben. Damit folgt für den Radius  $r$  zum Zeitpunkt  $T_{period}$

$$r(T_{period}) = R \sqrt{e^{-\alpha T_{period}} \frac{\lambda_{max}(\mathbf{P}(0))}{\lambda_{min}(\mathbf{P}(T_{period}))}}. \quad (6.43)$$

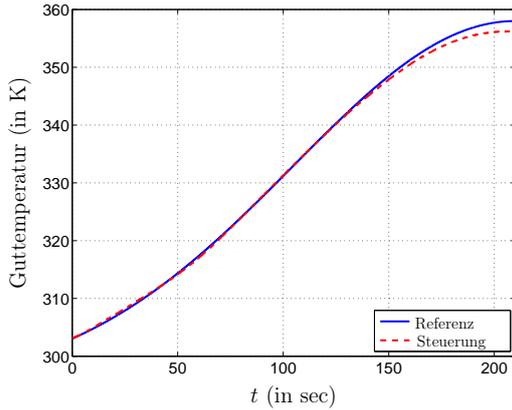
Als Ergebnis der Analyse kann festgehalten werden, dass beim Regelungsentwurf durch geeignete Wahl von  $\alpha$  und  $\mathbf{S}$  sicherzustellen ist, dass der Zustand  $\Delta \mathbf{x}_G(t)$  innerhalb einer Periode in ein kleines Gebiet mit dem Radius  $r(T_{period}) < R$  konvergiert. Der Abfall der Norm von  $\Delta \mathbf{x}_G(t)$  wird durch Gl. (6.43) beschrieben.

### 6.5.1.3. Anwendungsbeispiel: Durchlaufofen

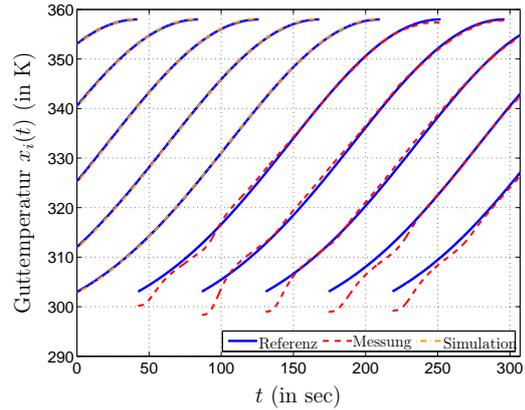
Der im letzten Abschnitt vorgestellte Regelungsentwurf soll nun an dem in Abschnitt 2.1.1.2 vorgestellten Durchlaufofen angewendet werden. Der Prozess beinhaltet zu jedem Zeitpunkt fünf Regelgrößen. Die Systembeschreibung ist nach Anwendung der Methode der Charakteristiken durch Gl. (5.53) und das um die Referenztrajektorie  $y_f^*(t) = x^*(t)$  sowie den resultierenden Verlauf für die Stellgröße linearisierte System durch Gl. (5.54) gegeben. Als Referenztrajektorie wird der gauß-förmige Verlauf nach Gl. (5.57) herangezogen. Abb. 6.9(a) zeigt das experimentelle Ergebnis bei Implementierung einer reinen Vorsteuerung. Der resultierende Verlauf der Guttemperatur folgt der Referenztrajektorie bei korrekt angenommener Einlauftemperatur relativ gut, womit die Korrektheit des angesetzten Modells sowie der identifizierten Parameter bestätigt wird. Die aus der Linearisierung resultierenden Verläufe der Elemente  $a_i(t)$  ( $i = 1 \dots 5$ ), sowie ausgewählte Verläufe der Elemente  $h_{i,j}(t)$  sind in Abb. 6.8 dargestellt. Aus den Verläufen kann direkt die Periodizität von



**Abbildung 6.8.:** Verlauf der Elemente  $a_i(t)$  sowie einiger ausgewählter Elemente  $h_{i,j}(t)$ , welche eine Periodendauer von 40 sec aufweisen.



(a) Ergebnis bei reiner Vorsteuerung



(b) Regelungsergebnis bei Anwendung der Zweifreiheitsgrade-Struktur

**Abbildung 6.9.:** Ergebnisse bei Anwendung der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung mit flachheitsbasierter Vorsteuerung und unterlagertem periodischen Mehrgrößenregler zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems für einen Durchlaufofen mit fünf Gütern und Aktoren mit kontinuierlichen Ortsfunktionen.

$T_{period} = \frac{L}{pv} = 42 \text{ sec}$  abgelesen werden. Die mit der in Abschnitt 6.5.1.2 beschriebenen Mehrgrößenregelung erzielten Ergebnisse am Versuchsaufbau sind in Abb. 6.9(b) dargestellt. Die Parameter wurden zu  $\alpha = 0.11$  und  $\mathbf{S} = 2000 \mathbf{I}$  gewählt. Die Zustände der Aktoren wurden unter Anwendung des in Abschnitt 5.3.2.3 beschriebenen Beobachters geschätzt. Der Regelungsansatz geht von einem voll besetzten Prozess aus. Aufgrund der beschränkten Anzahl an Sensoren wurden die ersten Güter online simuliert. Die damit erzeugten Verläufe sind in der Abb. 6.9(b) gekennzeichnet. Wie aus den Verläufen erkennbar ist, wird der einlaufende Temperaturfehler relativ schnell ausgeglichen und das Regelziel sehr gut erreicht. Dies wird auch durch das Gütemaß aus Gl. (6.28) bestätigt, welches im Mittel zu  $J = 0.9 \text{ K}$  resultiert.

Der vorgestellte Mehrgrößenregler setzt einen definierten Abstand der Regelgrößen voraus. Im nächsten Abschnitt wird ein Ansatz präsentiert, mit welchem diese Restriktion aufgehoben werden kann.

### 6.5.2. Entkoppelter Regelungsentwurf

Die über den Prozess ausgedehnte Wirkung der entlang des Prozesses angeordneten Aktoren resultiert in eine Verkopplung des gesamten Systems. Die Verkopplung erschwert den Regelungsentwurf erheblich, wie im letzten Abschnitt verdeutlicht wurde. Aus diesem Grund ist eine Entkopplung des System anzustreben und zwar derart, dass sich die Anzahl der im Prozess befindlichen Regelgrößen in einem gewissen Rahmen ändern darf, ohne dabei den Regelungsentwurf zu beeinflussen.

Beim Steuerungsentwurf in Abschnitt 4.3 wurde angenommen, dass der verteilte Stelleingriff als Eingangsgröße vorgegeben werden kann. Die aus dem Entwurf resultierende Stellgrößenanforderung wurde anschließend unter Anwendung eines Optimierungsverfahrens mit den real vorhandenen Aktoren approximiert. Dieser Ansatz wird nun auch zum Regelungsentwurf herangezogen. Zu diesem Zweck wird zunächst vereinfacht angenommen, dass die Aktordynamik gegenüber der Systemdynamik vernachlässigbar ist. Anschließend wird eine Methode vorgeschlagen, mit deren Hilfe die Aktordynamik in den Regelungsentwurf integriert werden kann.

### 6.5.2.1. Regelungsstrategie

Wird nun entsprechend dem in Abschnitt 4.3 vorgestelltem Steuerungsentwurf angenommen, dass der verteilte Stelleingriff  $\bar{u}(z, t)$  über den gesamten Prozess  $z \in [0, L]$  unabhängig einstellbar ist, folgt für Gl. (3.35) bei vernachlässigbarer Aktordynamik

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t), \bar{u}_{opt_1}(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \mathbf{f}_p(\mathbf{x}_p(t), \bar{u}_{opt_p}(t), t)\end{aligned}\tag{6.44}$$

mit  $\bar{u}_{opt_i}(t) = \bar{u}(z_i(t), t)$ ,  $i = 1 \dots p$ . Im Folgenden wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass bei vernachlässigbarer Aktordynamik die Beziehung  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$  gilt. Nachdem nur eindimensionale Regelgrößen für die einzelnen Volumenelemente betrachtet werden, wird das gesamte System somit in  $p$  entkoppelte SISO-Systeme aufgeteilt. Aus diesem Grund kann der Regelungsentwurf für jedes System getrennt durchgeführt werden und die Anzahl  $p$  der zu regelnden Systeme ist vorerst beliebig. Die einzelnen Regelungen erzeugen zu jedem Zeitschritt  $t_k$ ,  $p$  unabhängige Stellgrößenanforderungen  $\bar{u}_{opt_i}(t_k)$  an unterschiedlichen Orten  $z_i(t_k)$  ( $i = 1 \dots p$ ) in dem Prozess. Die Stellgrößen müssen durch die realen Stellglieder mit ihrer Ortsfunktion  $\tilde{b}_j(z)$  ( $j = 1 \dots m$ ) realisiert werden. Dieser Zusammenhang kann entsprechend Abschnitt 4.4.1 wie folgt formuliert werden:

$$\bar{\mathbf{u}}_{opt}(t_k) = \tilde{\mathbf{B}}(t_k) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k),\tag{6.45}$$

mit  $\mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) = (d(\tilde{u}_1(t_k)), \dots, d(\tilde{u}_m(t_k)))$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_{opt}(t_k) = (\bar{u}_{opt_1}(t_k), \dots, \bar{u}_{opt_p}(t_k))^T$  und

$$\tilde{\mathbf{B}}(t_k) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1(z_1(t_k)) & \cdots & \tilde{b}_m(z_1(t_k)) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{b}_1(z_p(t_k)) & \cdots & \tilde{b}_m(z_p(t_k)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times m}.\tag{6.46}$$

Die Entkopplung des Systems wird demnach durch Lösen des Optimierungsproblems der Form

$$\min_{\mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k)} \frac{1}{2} \left\| \bar{\mathbf{u}}_{opt}(t_k) - \tilde{\mathbf{B}}(t_k) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) \right\|_2^2,\tag{6.47}$$

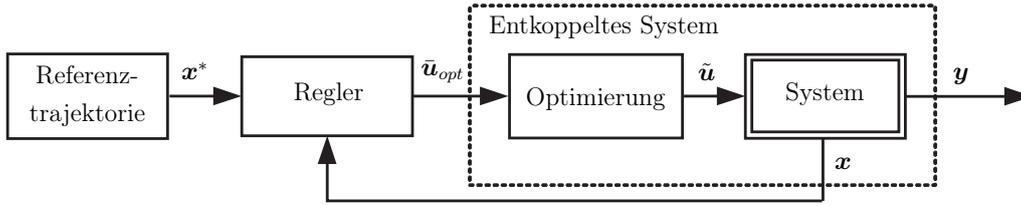


Abbildung 6.10.: Entkoppelnde Regulationsstruktur.

erreicht. Dieses Optimierungsproblem ist in jedem Zeitschritt  $t_k$  zu lösen. Die eigentliche Stellgröße  $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$  wird anschließend durch Inversion der Funktion  $d(\cdot)$  bestimmt, deren eindeutige Invertierbarkeit in dem relevanten Stellgrößenbereich vorausgesetzt wird. Die prinzipielle Regulationsstruktur ist in Abb. 6.10 dargestellt. Die verteilte Charakteristik der Aktoren ermöglicht die Realisierung der unterschiedlichsten Stellgrößenanforderungen entlang des Prozesses. Die nachfolgenden Ausführungen stützen sich auf der folgenden Annahme:

*Annahme 6.1.* Die der Regelungsaufgabe zugrunde liegenden Referenztrajektorien repräsentieren bezüglich dem System zulässige Verläufe (vgl. Abschnitt 4.6). Diese können, unter Einhaltung eventuell vorliegender Stellgrößenbeschränkungen, mit den vorliegenden Funktionen  $\tilde{b}_j(z)$  realisiert werden. Dabei bleibt ausreichend Stellgrößenreserve um auftretende Störungen ausgleichen zu können. Zudem sei die Anzahl der Stellgrößen höher als die Anzahl der Regelgrößen.

Aufgrund von Annahme 6.1 repräsentiert Gl. (6.45) ein unterbestimmtes Gleichungssystem, für welches unendlich viele Lösungen existieren. Aus diesem Grund kann angenommen werden, dass die geforderten Stellgrößen stets realisiert werden können. Die Definition und Bestimmung zulässiger Referenzverläufe war bereits für den Steuerungsentwurf von großer Bedeutung und wurde ausführlich in Abschnitt 4.6 diskutiert. Auch die Anzahl der zur Erreichung des Regelziels erforderlichen Aktoren kann mit dem flachheitsbasierten Steuerungsentwurf abgeschätzt werden (vgl. Abschnitt 4.6).

Das Optimierungsproblem (6.47) repräsentiert ein Least-Squares-Problem, für welches die optimale Lösung hinreichend bekannt ist [Pap91]:

$$\mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t_k) = \tilde{\mathbf{B}}^T(t_k) (\tilde{\mathbf{B}}(t_k) \tilde{\mathbf{B}}^T(t_k))^{-1} \tilde{\mathbf{u}}_{opt}(t_k) \quad (6.48)$$

Zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems bietet sich die in Abschnitt 6.3 vorgestellte flachheitsbasierte Trajektorienfolgeregelung an. Entsprechend Abschnitt 6.3 wird vorausgesetzt, dass die Systeme

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_i(t), \bar{u}_{opt_i}(t), t) \quad (6.49)$$

flach sind, mit dem flachen Ausgang  $y_{f_i}(t)$ . Damit können die folgenden Regelgesetze zur

Lösung des Trajektorienfolgeproblems formuliert werden ( $e_{y_i}(t) = y_{f_i}^*(t) - y_{f_i}(t)$ )

$$u_{opt_i}(t) = \eta_i \left( \nu_i(t), y_{f_i}(t), \dot{y}_{f_i}(t), \dots, y_{f_i}^{(n-1)}(t), t \right) \quad (6.50a)$$

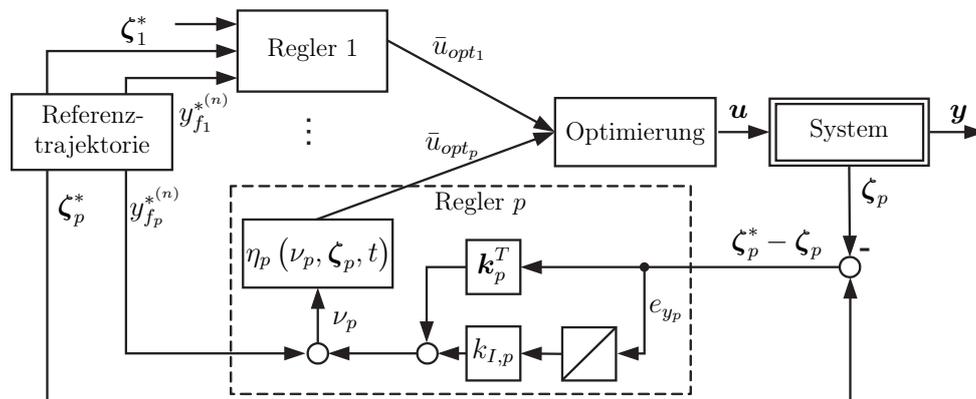
$$\nu_i(t) = y_{f_i}^{*(n)}(t) + k_{n-1,i} e_{y_i}^{(n-1)}(t) + \dots + k_{0,i} e_{y_i}(t) + k_{I,i} \int e_{y_i}(t) dt, \quad i = 1 \dots p. \quad (6.50b)$$

Die resultierende Dynamik der einzelnen entkoppelten Regelkreise wird dementsprechend durch

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_{I,i}(t) \\ \dot{\zeta}_{1,i}(t) \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{n,i}(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\zeta}_i(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mathbf{0} & 1 \\ -k_{I,i} & -k_{0,i} & \dots & -k_{n-1,i} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_{I,i}(t) - \zeta_{I,i}^*(t) \\ \zeta_{1,i}(t) - \zeta_{1,i}^*(t) \\ \vdots \\ \zeta_{n,i}(t) - \zeta_{n,i}^*(t) \end{pmatrix}}_{\bar{\zeta}_i(t) - \bar{\zeta}_i^*(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_{I,i}^*(t) \\ \dot{\zeta}_{1,i}^*(t) \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{n,i}^*(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\zeta}_i^*(t)}, \quad (6.51)$$

mit  $\zeta_{1,i}(t) = y_{f_i}(t)$  und  $\dot{\zeta}_{I,i}(t) = \dot{\zeta}_{1,i}(t)$ , beschrieben. Die Dynamik des Regelfehlers kann durch Wahl der Koeffizienten  $k_{I,i}, \dots, k_{n-1,i}$  vorgegeben werden. Die Abb. 6.11 gibt zusammenfassend die resultierende Regelungsstruktur für  $p$  Regelgrößen wieder.

*Bemerkung 6.1.* Soll auch der Fall betrachtet werden, dass Stellgrößen nicht zu jedem Zeitpunkt exakt erfüllt werden können, so kann die Abweichung als Unsicherheit im Aktor interpretiert werden. Zur Analyse der Stabilität kann dann beispielsweise auf die Methoden der robusten Regelung zurückgegriffen werden. Damit können auch Trajektorien angenähert werden, welche aufgrund der Stellgrößenbegrenzung nicht exakt realisierbar sind. Dazu ist im Optimierungsproblem (6.47) die Stellgrößenbegrenzung zu berücksichtigen.

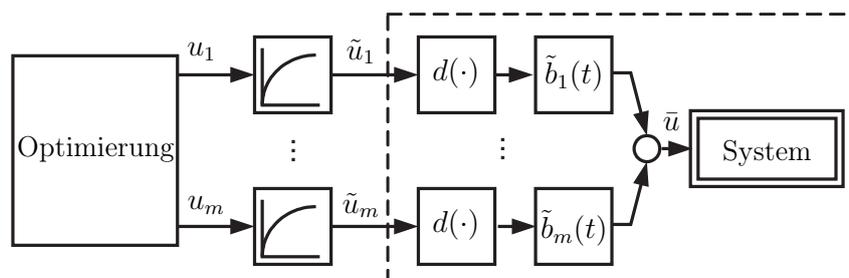


**Abbildung 6.11.:** Regelungsstruktur bei Anwendung der flachheitsbasierten Trajektorienfolge-regelung für  $p$  Regelgrößen mit  $\zeta_i^T = (y_{f_i}, \dots, y_{f_i}^{(n-1)})$  und  $\mathbf{k}_i^T = (k_{0,i}, \dots, k_{n-1,i})$ ,  $i = 1 \dots p$ .

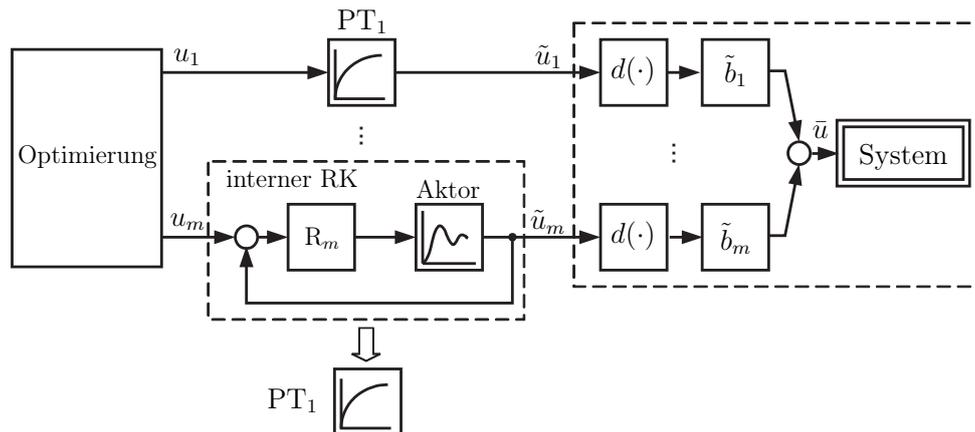
### 6.5.2.2. Berücksichtigung der Aktordynamik

Im Allgemeinen weisen die Aktoren ein gegenüber der Systemdynamik nicht vernachlässigbares dynamisches Verhalten auf, weshalb sie im Regelungsentwurf berücksichtigt werden müssen. Die in der Strategie zur Entkopplung des Systems integrierte Optimierung löst den im Allgemeinen nichtlinearen und zeitvarianten Zusammenhang zwischen der verteilten Stellgröße und den entlang des Prozesses angeordneten Aktoren. Dieser Zusammenhang wird entsprechend Gl. (6.45) für  $p$  Regelgrößen durch  $\bar{\mathbf{u}}_{opt}(t) = \tilde{\mathbf{B}}(t) \mathbf{d}_{\bar{\mathbf{u}}}(t)$  beschrieben. Abb. 6.12 veranschaulicht die Systemstruktur. Aufgrund des zeitvarianten und nichtlinearen Zusammenhangs kann die Dynamik der Aktoren nicht vorgezogen werden, selbst wenn sie alle das gleiche Verhalten aufweisen. Demnach kann die Aktordynamik nicht dem System zugeordnet und im Regelungsentwurf direkt berücksichtigt werden. Zur Lösung dieses Problems bestehen nun eine Reihe von Ansätzen, von denen im Folgenden einige erläutert werden:

- (i) **Systeminversion:** Die Aktordynamik kann theoretisch durch Vorschalten ihrer inversen Dynamik kompensiert werden. Aus Gesichtspunkten der Realisierung ist jedoch eine künstliche Verzögerung vorzusehen, die allerdings so gering gewählt werden kann, dass sie im Vergleich zur Systemdynamik vernachlässigbar ist.
- (ii) **Kaskadenregelung:** Eine weitere Lösungsmöglichkeit stellt die Anwendung einer Kaskadenregelung dar, wobei jeder Aktor innerhalb des äußeren Regelkreises durch einen eigenen Regler geregelt wird. Damit kann die Zeitkonstante ebenfalls reduziert werden, so dass sie möglicherweise gegenüber der Systemdynamik vernachlässigbar wird. Die Struktur ist in Abb. 6.13 dargestellt.
- (iii) **Backstepping:** Bei diesem Ansatz bleibt der ursprüngliche Regelungsentwurf erhalten und die Aktordynamik wird anschließend exakt in die Regelung integriert, ohne dabei Systemanteile vernachlässigen zu müssen. Die ursprüngliche Stabilität des Regelungsentwurfs ohne Aktordynamik bleibt dabei ebenfalls gesichert erhalten.



**Abbildung 6.12.:** Wirkkette zwischen der Optimierung und dem System inklusive der Dynamik der Aktoren.



**Abbildung 6.13.:** Anwendung einer Kaskadenregelung mit den Reglern  $R_j$ ,  $j = 1 \dots m$ , für die Aktoren zur Realisierung der entkoppelnden Regelung aus Abschnitt 6.5.2.1.

Die Methode des Backstepping stellt die elegantere Lösung bei gesicherter Stabilität zur Behandlung der Aktordynamiken dar. Aus diesem Grund wird diese Methode herangezogen und im Folgenden näher erläutert.

#### a) Backstepping

Backstepping erlaubt beim Regelungsentwurf die Trennung der linearen von den nichtlinearen Systemanteilen. Dazu wird vorausgesetzt, dass der Zustandsvektor des linearen Systemanteils linear in die Dynamik des nichtlinearen Systemanteils eingeht und die Dynamik des linearen Systemanteils durch den Eingang beliebig vorgegeben werden kann. Mit dieser Methode verlagert sich der eigentliche Entwurf allein auf den nichtlinearen Systemteil. Zum besseren Verständnis wird die Methode des Backstepping zuerst an dem Spezialfall

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \chi(t) \quad (6.52a)$$

$$\dot{\chi}(t) = u(t), \quad (6.52b)$$

mit dem Systemzustand  $(\mathbf{x}^T, \chi)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  und der skalaren Stellgröße  $u(t) \in \mathbb{R}$  vorgestellt. Dieser Spezialfall wird auch als *Integrator-Backstepping* bezeichnet [Kha00]. Die Funktionen  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien glatt in dem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^n$ , welches den Ursprung enthält. Nun wird angenommen, dass die Ruhelage  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  von System (6.52a) mit der virtuellen Zustandsrückführung  $\chi(t) = \phi(\mathbf{x})$  ( $\phi(\mathbf{0}) = 0$ ) asymptotisch stabilisiert werden kann. Existiert zum Nachweis der Stabilität eine glatte und positiv definite Lyapunov-Funktion  $V_0(\mathbf{x})$ , welche die Bedingung

$$\dot{V}_0(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})) \leq -W(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad W(\mathbf{x}) > 0 \quad (6.53)$$

erfüllt, so stellt die Funktion

$$V_1(\mathbf{x}, \chi) = V_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\chi(t) - \phi(\mathbf{x}))^2 \quad (6.54)$$

eine Lyapunov Funktion für das System (6.52) dar. Wird nun Gl. (6.52a) durch Addition und Subtraktion von  $\mathbf{g}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})$  zu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})(\chi(t) - \phi(\mathbf{x})) \quad (6.55)$$

erweitert, folgt für die zeitliche Ableitung der Lyapunov  $V_1(\mathbf{x}, \chi)$  zur Analyse der Stabilität

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \left( \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})) + \left( \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}(\mathbf{x})(\chi(t) - \phi(\mathbf{x})) + (\chi(t) - \phi(\mathbf{x}))(u(t) - \dot{\phi}(\mathbf{x})) \\ &\leq -W(\mathbf{x}) + \left( \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}(\mathbf{x})(\chi - \phi(\mathbf{x})) + (\chi - \phi(\mathbf{x}))(u - \dot{\phi}). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Aus Gl. (6.56) ist ersichtlich, dass durch Wahl des Regelgesetz zu

$$u(t) = \left( \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\chi(t)) - \left( \frac{\partial V_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \beta (\chi(t) - \phi(\mathbf{x})), \quad \beta > 0, \quad (6.57)$$

mit

$$\dot{\phi}(t) = \left( \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\chi(t)) \quad (6.58)$$

für die Ableitung der Lyapunov-Funktion

$$\dot{V}_1(\mathbf{x}, \chi) \leq -W(\mathbf{x}) - \beta (\chi(t) - \phi(\mathbf{x}))^2 \quad (6.59)$$

gilt und der Ursprung ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \chi = 0$ ) mit  $\phi(\mathbf{0}) = 0$  somit asymptotisch stabil ist. Der Ursprung ist global asymptotisch stabil, sofern die Annahmen auch global gültig sind und die Lyapunov-Funktion radial unbegrenzt ist. Die Ausführungen können in dem folgenden Lemma zusammengefasst werden.

**Lemma 6.1** (Lemma 13.2 in [Kha00]). *Sei  $\phi(\mathbf{x})$  eine stabilisierende Zustandsrückführung für (6.52a) mit  $\phi(\mathbf{0}) = 0$  und  $V_0(\mathbf{x})$  eine Lyapunov-Funktion, welche Gl. (6.53) mit einer positiv definiten Funktion  $W(\mathbf{x})$  erfüllt. Dann stabilisiert die Zustandsrückführung (6.57) den Ursprung von System (6.52) mit der Lyapunov-Funktion  $V_1(\mathbf{x}, \chi) = V_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\chi(t) - \phi(\mathbf{x}))^2$ . Gelten zudem alle Annahmen global und ist  $V_0(\mathbf{x})$  radial unbegrenzt, dann ist der Ursprung global asymptotisch stabil.*

Mit diesen Ausführungen kann nun leicht auf etwas allgemeinere Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \chi(t) \quad (6.60a)$$

$$\dot{\chi}(t) = f_a(\mathbf{x}, \chi) + g_a(\mathbf{x}, \chi) u(t), \quad (6.60b)$$

mit den glatten Funktionen  $f_a(\cdot)$  und  $g_a(\cdot)$ , geschlossen werden. Sofern die Bedingung  $g_a(\mathbf{x}, \chi) \neq 0$  in dem interessierenden Gebiet im Zustandsraum erfüllt wird, kann mit der Eingangstransformation

$$u(t) = \frac{1}{g_a(\mathbf{x}, \chi)} (u_a - f_a(\mathbf{x}, \chi)) \quad (6.61)$$

die Integratorform  $\dot{\chi}(t) = u_a(t)$  für Gl.(6.60b) erzielt werden. Existiert nun eine stabilisierende Zustandsrückführung  $\phi(\mathbf{x})$  und eine Lyapunov-Funktion  $V_0(\mathbf{x})$  entsprechend Lemma 6.1, folgt mit Gl. (6.61) für die stabilisierende Zustandsrückführung ( $\beta > 0$ )

$$u(t) = \frac{1}{g_a(\mathbf{x}, \chi)} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\chi(t)) - \left( \frac{\partial V_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \beta (\chi(t) - \phi(\mathbf{x})) - f_a(\mathbf{x}, \chi) \right], \quad (6.62)$$

und für die Lyapunov-Funktion des gesamten Systems (6.60)

$$V_1(\mathbf{x}, \chi) = V_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\chi(t) - \phi(\mathbf{x}))^2. \quad (6.63)$$

Die Methode des Backstepping kann rekursiv angewendet werden, womit auch so genannte *strict feedback*<sup>1</sup> Systeme der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \chi_1(t) \\ \dot{\chi}_1(t) &= f_1(\mathbf{x}, \chi_1) + g_1(\mathbf{x}, \chi_1) \chi_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{\chi}_{k-1}(t) &= f_{k-1}(\mathbf{x}, \chi_1, \dots, \chi_{k-1}) + g_{k-1}(\mathbf{x}, \chi_1, \dots, \chi_{k-1}) \chi_k(t) \\ \dot{\chi}_k(t) &= f_k(\mathbf{x}, \chi_1, \dots, \chi_k) + g_k(\mathbf{x}, \chi_1, \dots, \chi_k) u(t), \end{aligned} \quad (6.64)$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , den skalaren Funktionen  $\chi_1(t), \dots, \chi_k(t)$  und den im Ursprung verschwindenden Funktionen  $\mathbf{f}_0, f_1, \dots, f_k$ , stabilisiert werden können. Wird nun angenommen, dass die Bedingung  $g_i(\mathbf{x}, \chi_1, \dots, \chi_i) \neq 0$ ,  $i = 1 \dots k$ , im gesamten interessierenden Zustandsraum erfüllt wird, kann das Backstepping systematisch rekursiv angewendet werden. Dabei wird mit dem System  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_0(\mathbf{x})\chi_1(t)$  begonnen [Kha00].

## b) Anwendung auf Transportprozesse

Zur Erweiterung des entkoppelnden Regelungsentwurfs für Transportprozesse um die Dynamik der Aktoren wird angenommen, dass der Transportprozess nach Anwendung der Methode der Charakteristiken in der eingangsaффinen Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, t) \bar{u}_{opt_1}(t) \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_p(t) &= \mathbf{f}_p(\mathbf{x}_p, t) + \mathbf{g}_p(\mathbf{x}_p, t) \bar{u}_{opt_p}(t), \end{aligned} \quad (6.65)$$

<sup>1</sup>Die Bezeichnung *strict feedback* geht dadurch hervor, dass die Nichtlinearitäten  $f_i(\cdot)$  und  $g_i(\cdot)$  ( $i = 1 \dots k$ ) aus Gl. (6.64) nur von den Variablen  $\mathbf{x}, \chi_1, \dots, \chi_i$  abhängen.

für  $p$  Regelgrößen, den Zustandsvektoren  $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^n$  und den Eingangsgrößen  $\bar{u}_{opt_i} = \tilde{\mathbf{b}}_i^T(t) \mathbf{d}_{\bar{u}}(t)$ ,  $i = 1 \dots p$ , dargestellt werden kann. Die Vektorfunktion  $\mathbf{d}_{\bar{u}}(t)$  wird in Gl. (2.36) definiert. Wie bereits in Abschnitt 6.5.2.1 wird für den Regelungsentwurf angenommen, dass die Systeme in Gl. (6.65) flach sind, mit dem flachen Ausgang  $y_{f_i}(t)$ ,  $i = 1 \dots p$ . Damit sind die Systeme in der sogenannten Brunovsky-Normalform darstellbar ( $y_{f_i}(t) = \zeta_{1,i}(t)$ )

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\zeta}_{1,i}(t) = \zeta_{2,i}(t) \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{n-1,i}(t) = \zeta_{n,i}(t) \\ \dot{\zeta}_{n,i}(t) = \alpha_i(\boldsymbol{\zeta}_i, t) + \beta_i(\boldsymbol{\zeta}_i, t) \bar{u}_{opt_i}(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t) = \mathbf{f}_{\alpha_i}(\boldsymbol{\zeta}_i, t) + \mathbf{g}_{\beta_i}(\boldsymbol{\zeta}_i, t) \bar{u}_{opt_i}(t), \quad i = 1 \dots p. \quad (6.66)$$

Zur Berücksichtigung der Dynamik der Aktoren wird nun die Methode des Backstepping angewendet. Die Dynamiken der Aktoren werden durch Gl. (2.39) beschrieben. Im Folgenden wird angenommen, dass alle Aktoren den gleichen relativen Grad  $\delta_u$  aufweisen und die vorhandene interne Dynamik stabil ist. Entsprechend der Ordnung  $\delta_u$  werden für jedes betrachtete Volumenelement  $\delta_u$  fiktive Zustandsgrößen  $\chi_{l,i}(t)$ ,  $l = 1 \dots \delta_u$  und eine fiktive Eingangsgröße  $u_{v,i}(t)$  eingeführt. Damit resultiert die Systembeschreibung (6.66) für Volumenelement  $i$  mit  $\chi_{1,i}(t) = \bar{u}_{opt_i}(t)$  zu

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t) = \mathbf{f}_{\alpha_i}(\boldsymbol{\zeta}_i, t) + \mathbf{g}_{\beta_i}(\boldsymbol{\zeta}_i, t) \chi_{1,i}(t) \quad (6.67a)$$

$$\begin{array}{l} \dot{\chi}_{1,i}(t) = \chi_{2,i}(t) \\ \vdots \end{array} \quad (6.67b)$$

$$\dot{\chi}_{\delta_u,i}(t) = u_{v,i}(t).$$

Die Gl. (6.67) repräsentiert ein strict feedback System (vgl. Gl. (6.64)). Entsprechend der Methode des Backstepping erfolgt der Regelungsentwurf bezüglich dem System (6.67a) mit der virtuellen Rückführung  $\chi_{1,i}(t) = \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)$ . Die Systemdarstellung in Gl. (6.66) erlaubt den in Abschnitt 6.5.2 vorgestellten flachheitsbasierten Trajektorienfolgeregelungsentwurf, für welchen auch relativ einfach eine Lyapunov-Funktion formuliert werden kann, wie im Folgenden gezeigt wird. Dazu werden die Systeme zuvor noch um einen Integralanteil erweitert (vgl. Abschnitt 6.5.2.1):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_{1,i}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}}_i(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\bar{\boldsymbol{\zeta}}}_i(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_{1,i} \\ \mathbf{f}_{\alpha_i}(\boldsymbol{\zeta}_i, t) \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{f}}_{\alpha_i}(\bar{\boldsymbol{\zeta}}_i, t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{g}_{\beta_i}(\boldsymbol{\zeta}_i, t) \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{g}}_{\beta_i}(\bar{\boldsymbol{\zeta}}_i, t)} \chi_{1,i}(t), \quad i = 1 \dots p \quad (6.68)$$

Damit lautet das Regelgesetz entsprechend Gl. (6.4) und (6.5) mit dem flachen Ausgang  $\bar{\zeta}_{1,i}(t)$  und  $\mathbf{e}_{1,i}(t) = (\bar{\zeta}_{1,i}(t) - \bar{\zeta}_{1,i}^*(t))$ :

$$\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t) = \frac{1}{\beta_i(\boldsymbol{\zeta}_i, t)} (\nu_i(t) - \alpha_i(\boldsymbol{\zeta}_i, t)) \quad (6.69a)$$

$$\nu_i(t) = \dot{\bar{\zeta}}_{n+1,i}(t) = \bar{\zeta}_{1,i}^{*(n+1)}(t) - k_{n-1,i} e_{1,i}^{(n)}(t) - \dots - k_{0,i} \dot{e}_{1,i}(t) - k_{I,i} e_{1,i}(t), \quad i = 1 \dots p \quad (6.69b)$$

Die Dynamik des Regelfehlers resultiert entsprechend Gl. (6.51) in

$$\dot{\bar{\zeta}}_i(t) = \dot{\bar{\zeta}}_i^*(t) + \mathbf{K}_{M,i}(\bar{\zeta}_i(t) - \bar{\zeta}_i^*(t)), \quad (6.70)$$

mit

$$\mathbf{K}_{M,i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 0 & 1 \\ -k_{I,i} & -k_{0,i} & \dots & -k_{n-1,i} \end{pmatrix}. \quad (6.71)$$

Für das resultierende System wird nun die Lyapunov-Funktion

$$V_{0,i}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i(t) \quad (6.72)$$

mit  $\mathbf{e}_i(t) = \bar{\zeta}_i(t) - \bar{\zeta}_i^*(t)$ ,  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T > \mathbf{0}$  angesetzt, womit  $V_{0,i}(\mathbf{e}_i) > 0$ ,  $\forall \mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$  gilt. Die zeitliche Änderung der Lyapunov-Funktion wird durch

$$\dot{V}_{0,i}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i^T(t) (\mathbf{P}_i \mathbf{K}_{M,i} + \mathbf{K}_{M,i}^T \mathbf{P}_i) \mathbf{e}_i(t) \quad (6.73)$$

beschrieben. Mit der Forderung  $\dot{V}_{0,i}(\mathbf{e}_i) = -\mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i(t)$  und mit  $\mathbf{Q}_i > \mathbf{0}$  folgt schließlich die Lyapunov-Gleichung

$$\mathbf{P}_i \mathbf{K}_{M,i} + \mathbf{K}_{M,i}^T \mathbf{P}_i = -\mathbf{Q}_i, \quad (6.74)$$

mit dessen Lösung asymptotische Stabilität gesichert wird [Kha00].

Nun ist ein Regelgesetz für die virtuelle Rückführung  $\chi_{2,i}(t) = \phi_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}, t)$  zu bestimmen, so dass weiterhin Stabilität gewährleistet werden kann. Zu diesem Zweck wird die Lyapunov-Funktion aus Gl. (6.72) wie folgt erweitert:

$$V_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}) = V_{0,i}(\mathbf{e}_i) + \frac{1}{2} (\chi_{1,i}(t) - \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t))^2 \quad (6.75)$$

Damit wird die Forderung  $V_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}) > 0$ ,  $\forall \mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$  und  $\chi_{1,i}(t) \neq \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)$  erfüllt. Für die zeitliche Ableitung der Lyapunov-Funktion folgt

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}) = & \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P}_i \left( \underbrace{\bar{\mathbf{f}}_{\alpha_i}(\bar{\zeta}_i, t) + \bar{\mathbf{g}}_{\beta_i}(\bar{\zeta}_i, t) \chi_{1,i}(t)}_{\dot{\bar{\zeta}}_i(t)} - \dot{\bar{\zeta}}_i^*(t) \right) + \left( \bar{\mathbf{f}}_{\alpha_i}(\bar{\zeta}_i, t) + \bar{\mathbf{g}}_{\beta_i}(\bar{\zeta}_i, t) \chi_{1,i}(t) \right. \\ & \left. - \dot{\bar{\zeta}}_i^*(t) \right)^T \mathbf{P}_i \mathbf{e}_i(t) + \left( \underbrace{\dot{\chi}_{1,i}(t)}_{\chi_{2,i}(t)} - \frac{d\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)}{dt} \right) (\chi_{1,i}(t) - \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Wird  $\chi_{1,i}(t)$  in den beiden ersten Summanden von Gl. (6.76) um  $\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t) - \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)$  erweitert und das Ergebnis geordnet, resultiert der Zusammenhang

$$\dot{V}_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}) = -\mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i + \left( 2 \mathbf{e}_i^T \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{g}}_{\beta_i}(\bar{\zeta}_i, t) + \chi_{2,i}(t) - \frac{d\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)}{dt} \right) (\chi_{1,i}(t) - \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)). \quad (6.77)$$

Mit der Forderung

$$2 \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{g}}_{\beta_i}(\bar{\boldsymbol{\zeta}}_i, t) + \chi_{2,i}(t) - \frac{d\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)}{dt} \stackrel{!}{=} -q_{u_{1,i}} (\chi_{1,i}(t) - \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)), \quad q_{u_{1,i}} > 0, \quad (6.78)$$

resultiert das Regelgesetz für die Rückführung  $\chi_{2,i}(t) = \phi_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}, t)$  schließlich zu

$$\phi_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}, t) = \frac{d\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)}{dt} - 2 \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{g}}_{\beta_i}(\bar{\boldsymbol{\zeta}}_i, t) - q_{u_{1,i}} (\chi_{1,i}(t) - \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)), \quad i = 1 \dots p. \quad (6.79)$$

Für die Ableitung der Lyapunov-Funktion  $V_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i})$  gilt demnach

$$\dot{V}_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}) = -\mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{e}_i(t) - q_{u_{1,i}} (\chi_{1,i}(t) - \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t))^2, \quad (6.80)$$

womit das betrachtete System asymptotisch stabil ist. Im nächsten Schritt wird die virtuelle Zustandsgröße  $\chi_{3,i}(t)$  als neue Eingangsgröße betrachtet und die Methode des Backstepping wiederholt. Mit dem Ansatz

$$V_{2,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}, \chi_{2,i}) = V_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}) + \frac{1}{2} (\chi_{2,i}(t) - \phi_{1,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}, t))^2 \quad (6.81)$$

resultiert entsprechend das Regelgesetz  $\chi_{3,i}(t) = \phi_{2,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}, \chi_{2,i}, t)$ . Die rekursive Anwendung der Methode des Backstepping führt letztendlich auf die Lyapunov-Funktion  $V_{\delta_u,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}, \dots, \chi_{\delta_u,i})$  und zu dem Regelgesetz

$$u_{v,i}(t) = \phi_{\delta_u,i}(\mathbf{e}_i, \chi_{1,i}, \dots, \chi_{\delta_u,i}, t), \quad (6.82)$$

welches das gesamte mit einem Integralanteil erweiterte System (6.67) stabilisiert.

Die Verbindung der virtuellen Zustandsvariablen  $\chi_{l,i}(t)$ ,  $l = 1 \dots \delta_u$ , für jedes Volumenelement  $i$ ,  $i = 1 \dots p$ , mit den realen Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  wird über die Funktionen  $\tilde{\mathbf{b}}_i(t)$  hergestellt. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  gilt der Zusammenhang ( $\bar{u}_{opt_i}(t) = \chi_{1,i}(t)$ )

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \chi_{1,1}(t) \\ \vdots \\ \chi_{1,p}(t) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\chi}_1(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_1^T(t) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{b}}_p^T(t) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}(t)} \mathbf{d}_{\bar{\mathbf{u}}}(t). \quad (6.83)$$

Wird Gl. (6.83) sukzessive nach der Zeit differenziert und die Systembeschreibung der Dynamik der Aktoren aus Gl. (2.38) mit dem relativen Grad  $\delta_u$  herangezogen, resultiert die Beziehung ( $\dot{\boldsymbol{\chi}}_l(t) = \boldsymbol{\chi}_{l+1}(t)$ )

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_1(t) = \dot{\tilde{\mathbf{B}}}(t) \mathbf{d}_{\bar{\mathbf{u}}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\bar{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \left( \mathbf{C}_u \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u(t) + \underbrace{\mathbf{C}_u \mathbf{B}_u}_{=0} \mathbf{u}(t) \right) \quad (6.84a)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_{\delta_u}(t) = \tilde{\mathbf{B}}^{(\delta_u)}(t) \mathbf{d}_{\bar{\mathbf{u}}}(t) + \dots + \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\bar{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \left( \mathbf{C}_u \mathbf{A}_u^{\delta_u} \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{C}_u \mathbf{A}_u^{\delta_u-1} \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) \right), \quad (6.84b)$$

wobei der Zusammenhang  $\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{C}_u(\mathbf{A}_u \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t))$  ausgenutzt wurde. Gl. (6.84b) stellt mit  $\dot{\mathbf{x}}_{\delta_u}(t) = \mathbf{u}_v(t)$  den Zusammenhang zwischen dem Regelgesetz (6.82) für die einzelnen Volumenelemente und den realen Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  des Systems her. Durch Umformung von Gl. (6.84b) resultiert die Beziehung

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{C}_u \mathbf{A}_u^{\delta_u-1} \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t)}_{=: \tilde{\mathbf{B}}_g(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}} = \mathbf{u}_v(t) - \tilde{\mathbf{B}}^{(\delta_u)}(t) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t) - \dots - \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{C}_u \mathbf{A}_u^{\delta_u} \mathbf{x}_u(t), \quad (6.85)$$

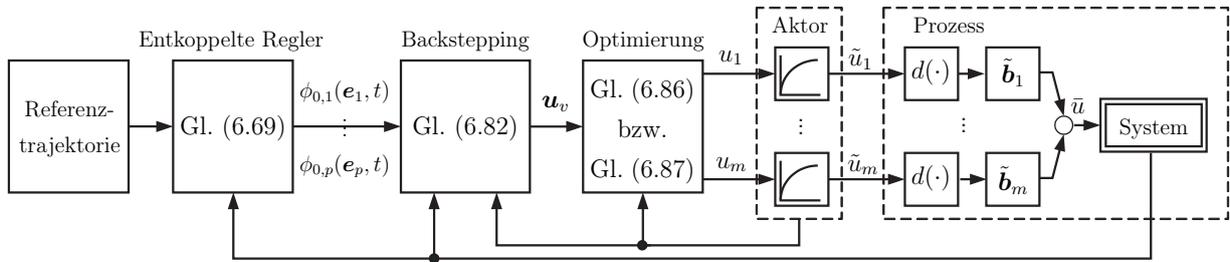
welche auf ein Optimierungsproblem entsprechend Gl. (6.47) zur Bestimmung der Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  führt. Die Lösung des Optimierungsproblems lautet nach Gl. (6.48)

$$\mathbf{u}(t) = \underbrace{\tilde{\mathbf{B}}_g^T(t) \left( \tilde{\mathbf{B}}_g(t) \tilde{\mathbf{B}}_g^T(t) \right)^{-1}}_{\tilde{\mathbf{B}}_g^+(t) \in \mathbb{R}^{m \times p}} \underbrace{\left( \mathbf{u}_v(t) - \tilde{\mathbf{B}}^{(\delta_u)}(t) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t) - \dots - \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{C}_u \mathbf{A}_u^{\delta_u} \mathbf{x}_u(t) \right)}_{\mathbf{q}(t)}, \quad (6.86)$$

mit der Pseudoinversen  $\tilde{\mathbf{B}}_g^+(t)$ . Im Fall  $p = m$  ist die Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}_g(t)$  quadratisch und die Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}_g^+(t)$  geht in die Inverse  $\tilde{\mathbf{B}}_g^{-1}(t)$  über. Damit resultiert eine eindeutige Lösung für die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$ . Übersteigt die Anzahl der Aktoren  $m$  die Anzahl der Regelgrößen  $p$  existieren im Allgemeinen unendlich viele Lösungen des Optimierungsproblems. Diese Eigenschaft kann ausgenutzt werden, um die Stellgrößen  $\mathbf{u}(t)$  in einem gewünschten Bereich zu halten. Dies ist in Hinblick auf die Stellgrößenbeschränkungen von großem Interesse. Zu diesem Zweck wird Gl. (6.86) wie folgt erweitert:

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{B}}_g^+(t) \mathbf{q}(t) + \left( \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}}_g^+(t) \tilde{\mathbf{B}}_g(t) \right) \mathbf{u}_{soll} \quad (6.87)$$

Damit repräsentiert  $\mathbf{u}(t)$  nun die Lösung, die von dem Vektor  $\mathbf{u}_{soll}$  den kleinsten Abstand bezüglich der euklidischen Norm aufweist. Eine sinnvolle Wahl des Vektors  $\mathbf{u}_{soll}$  stellt beispielsweise die stationäre Vorsteuerung  $\mathbf{u}_S$  entsprechend Kapitel 4 dar, sofern sämtliche Regelgrößen der gleichen Trajektorie folgen sollen. Die gesamte Regelungsstruktur ist in Abb. 6.14 zusammengefasst.



**Abbildung 6.14.:** Strukturbild der entkoppelnden Regelung unter Berücksichtigung der Aktordynamiken durch Backstepping.

*Bemerkung 6.2.* Bei dem Mehrgrößenregler aus Abschnitt 6.5.1 wird eine globale Lyapunov-Funktion betrachtet, welche keine Aussage über die Konvergenz der einzelnen Regelfehler zulässt. Im Gegensatz dazu wird bei dem vorgestellten Regelungsansatz jeder Regelgröße eine eigene Lyapunov-Funktion zugewiesen, die asymptotische Stabilität gewährleistet. Die Zuordnung der ermittelten Stellgröße zu den realen Eingangsgrößen erfolgt unabhängig von dem Regelungsentwurf durch Lösen eines Optimierungsproblems, womit die Anzahl der Regelgrößen variieren darf, solange das Optimierungsproblem exakt lösbar bleibt.

In praktischen Anwendungen wird die Dynamik der Aktoren meist durch ein  $PT_1$ -Glied approximiert. Dies ist in vielen Anwendungsfällen auch durchaus ausreichend. Aus diesem Grund werden im Folgenden für diesen Fall die Ergebnisse aus der allgemeinen Formulierung kurz zusammengefasst.

### Aktoren mit einer Dynamik erster Ordnung

Werden die Aktoren durch ein lineares System erster Ordnung beschrieben, vereinfacht sich die Anwendung der Methode des Backstepping erheblich. Das System (6.66) ist demnach nur durch die Beziehung  $u_{v_i}(t) := \dot{\bar{u}}_{opt_i}(t)$  mit dem virtuellen Eingang  $u_{v_i}(t)$  zu erweitern<sup>2</sup>. Wird zudem der Integralanteil entsprechend Gl. (6.68) hinzugefügt, resultiert die folgende Systembeschreibung:

$$\dot{\bar{\zeta}}_i(t) = \mathbf{f}_{\alpha_i}(\bar{\zeta}_i, t) + \mathbf{g}_{\beta_i}(\bar{\zeta}_i, t) \bar{u}_{opt_i}(t) \quad (6.88a)$$

$$\dot{\bar{u}}_{opt_i}(t) = u_{v_i}(t) \quad (6.88b)$$

Die Gl. (6.88) repräsentiert somit ein klassisches Integrator-Backstepping Problem (vgl. Gl. (6.52)). Der Regelungsentwurf erfolgt zunächst für das System (6.88a) mit der Eingangsgröße  $\bar{u}_{opt_i}(t)$ . Der Entwurf ist dem ersten Entwurfsschritt für das System (6.67) äquivalent. Damit folgt für das stabilisierende Regelgesetz, entsprechend Gl. (6.79), für System (6.88) die Beziehung

$$u_{v_i}(t) = \frac{d\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)}{dt} - 2 \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{g}}_{\beta_i}(\bar{\zeta}_i, t) - q_{u,i} (\bar{u}_{opt_i}(t) - \phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)), \quad i = 1 \dots p, \quad (6.89)$$

mit  $\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)$  nach Gl. (6.69a) und  $q_{u,i} > 0$ . Die Systemgröße  $\bar{u}_{opt_i}(t)$  kann aus der Beziehung  $\bar{u}_{opt_i}(t) = \tilde{\mathbf{b}}_i^T(t) \mathbf{d}_{\bar{u}}(t)$  bestimmt werden. Der Term  $\frac{d\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)}{dt}$  wird durch Differentiation von Gl. (6.69a) ermittelt:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{0,i}(\mathbf{e}_i, t)}{dt} = & \frac{1}{\beta_i(\bar{\zeta}_i, t)} \left[ \dot{\nu}_i(t) - \frac{\partial \alpha_i(\bar{\zeta}_i, t)}{\partial \bar{\zeta}_i} \bar{\zeta}_i(t) - \frac{\partial \alpha_i(\bar{\zeta}_i, t)}{\partial t} \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial \beta_i(\bar{\zeta}_i, t)}{\partial \bar{\zeta}_i} \bar{\zeta}_i(t) + \frac{\partial \beta_i(\bar{\zeta}_i, t)}{\partial t} \right) \bar{u}_{opt_i}(t) \right] \end{aligned} \quad (6.90)$$

<sup>2</sup>Nachdem nur eine weitere Zustandsvariable erforderlich ist, wird auf die Bezeichnung von  $\dot{\bar{u}}_{opt_i}(t)$  mit der Variable  $\chi_i(t)$  verzichtet.

Die Größe  $\dot{\nu}_i(t)$  resultiert aus der zeitlichen Ableitung von Gl. (6.69b), wobei  $\dot{\zeta}_{n+1,i}(t)$  durch  $\nu_i(t)$  ersetzt wird [RRZ97]. Die Verbindung der virtuellen Eingangsgrößen für jedes Volumenelement  $u_{v_i}(t)$ ,  $i = 1 \dots p$ , mit den realen Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  wird entsprechend Gl. (6.84) durch den Zusammenhang

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{opt}(t) &= \mathbf{u}_v(t) = \dot{\tilde{\mathbf{B}}}(t) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t) \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{B}}}(t) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} (\mathbf{C}_u \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u(t) + \mathbf{C}_u \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t)),\end{aligned}$$

beschrieben. Die zuvor eingeführte Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}_g(t)$  wird nun durch  $\tilde{\mathbf{B}}_g(t) = \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{C}_u \mathbf{B}_u$  definiert. Das Regelgesetz für die realen Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  resultiert unter Anwendung der Pseudoinversen  $\tilde{\mathbf{B}}_g^+(t) = \tilde{\mathbf{B}}_g^T(t) (\tilde{\mathbf{B}}_g(t) \tilde{\mathbf{B}}_g^T(t))^{-1}$  schließlich zu

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{B}}_g^+(t) \left( \mathbf{u}_v(t) - \dot{\tilde{\mathbf{B}}}(t) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t) - \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{C}_u \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u(t) \right) + \left( \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}}_g^+(t) \tilde{\mathbf{B}}_g(t) \right) \mathbf{u}_{soll}. \quad (6.91)$$

Im Folgenden wird die vorgestellte Entwurfsmethode zur Trajektorienfolgeregelung eines Durchlaufofens angewendet.

### 6.5.2.3. Anwendung auf einen Durchlaufofen

Der entkoppelnde Regelungsentwurf wird nun auf den Durchlaufofen aus Abschnitt 2.1.1 angewendet. In dem Prozess befinden sich zu jedem Zeitpunkt fünf Güter, die einer gaußförmigen Referenztrajektorie entsprechend Gl. (5.57) folgen sollen. Die Systembeschreibung aus Gl. (5.53) kann in der Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \underbrace{c_\alpha (u_O(t) - x_1(t)) - c_{Str} \bar{b}_1(t) x_1^4(t)}_{f_{\alpha_1}(x_1, t)} + \underbrace{c_{Str}^{g\beta_1} \sum_{j=1}^m \tilde{b}_{1,j}(t) \tilde{u}_j^A(t)}_{\tilde{u}_{opt_1}(t)} \\ &\vdots \\ \dot{x}_5(t) &= \underbrace{c_\alpha (u_O(t) - x_5(t)) - c_{Str} \bar{b}_5(t) x_5^4(t)}_{f_{\alpha_5}(x_5, t)} + \underbrace{c_{Str}^{g\beta_5} \sum_{j=1}^m \tilde{b}_{5,j}(t) \tilde{u}_j^A(t)}_{\tilde{u}_{opt_5}(t)}\end{aligned} \quad (6.92)$$

dargestellt werden. Die Ofenraumtemperatur  $u_O(t)$  wird als Störgröße betrachtet, welche in Form eines konstanten Parameters mit  $u_O = 330$  K im Entwurf berücksichtigt wird. Die einzelnen DGLn sind über die Stellgröße  $\tilde{\mathbf{u}}(t)$  miteinander verkoppelt. Wird nun der durch  $\tilde{u}_{opt_i}(t) = \tilde{\mathbf{b}}_i(t) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t)$  repräsentierte verteilte Stelleingriff als Systemeingang definiert, kann ein entkoppelter Regelungsentwurf erfolgen. Die entkoppelten Systeme sind flach mit dem flachen Ausgang  $y_{f_i}(t) = x_i(t)$ . Die um einen Integrator erweiterte Systembeschreibung in

Brunovsky-Normalform lautet mit  $\zeta_{1,i}(t) = x_i(t)$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\zeta}_{I,i}(t) \\ \dot{\zeta}_{1,i}(t) \end{pmatrix}}_{\dot{\zeta}_i(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_{1,i}(t) \\ c_\alpha (u_O - \zeta_{1,i}(t)) - c_{Str} \bar{b}_i(t) \zeta_{1,i}^4(t) \end{pmatrix}}_{\bar{f}_{\alpha_1}(\bar{\zeta}_i,t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c_{Str} \end{pmatrix}}_{\bar{g}_{\beta_1}} \bar{u}_{opt_i}(t) \quad (6.93)$$

Zur Berücksichtigung der Aktordynamik wird Gl. (6.92) um den virtuellen Eingang  $u_{v_i}(t) = \dot{u}_{opt_i}(t)$  erweitert. Damit resultiert eine Systembeschreibung entsprechend Gl. (6.88). Die Regelungsaufgabe wird nun durch Anwendung des Integrator-Backstepping gelöst. Zu diesem Zweck werden die Trajektorienfolgeregler

$$\phi(\mathbf{e}_i, t) = \frac{\nu_i(t) - c_\alpha (u_O - \zeta_{1,i}(t)) + c_{Str} \bar{b}_i(t) \zeta_{1,i}^4(t)}{c_{Str}} \quad (6.94)$$

$$\dot{\zeta}_{1,i}(t) = \nu_i(t) = \dot{\zeta}_{1,i}^*(t) - k_{0,i} (\zeta_{1,i}(t) - \zeta_{1,i}^*(t)) - k_{I,i} (\zeta_{I,i}(t) - \zeta_{I,i}^*(t)), \quad i = 1 \dots 5$$

für die Systeme in Gl. (6.93) herangezogen, womit die resultierenden Systemdynamiken der Regelkreise durch

$$\dot{\zeta}_i = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k_{I,i} & -k_{0,i} \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_{M,i}} \underbrace{(\bar{\zeta}_i - \bar{\zeta}_i^*)}_{\mathbf{e}_i} + \dot{\zeta}_i^* \quad (6.95)$$

beschrieben werden. Der virtuelle Eingang  $u_{v_i}(t)$  wird entsprechend Gl. (6.89) bestimmt. Wie aus der Systembeschreibung der Aktordynamik nach Gl. (5.53) ersichtlich ist, repräsentiert die Matrix  $\mathbf{C}_u$  eine Einheitsmatrix. Damit vereinfacht sich Gl. (6.91) zu

$$\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{B}}_g^+(t) \left( \mathbf{u}_v(t) - \dot{\tilde{\mathbf{B}}}(t) \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}(t) - \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u \right) + \left( \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{B}}_g^+(t) \tilde{\mathbf{B}}_g(t) \right) \mathbf{u}_S, \quad (6.96)$$

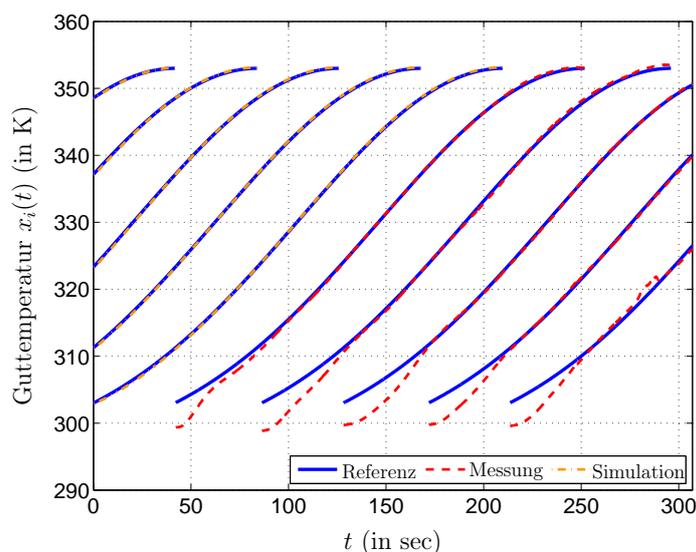
mit

$$\tilde{\mathbf{B}}_g^+(t) = \tilde{\mathbf{B}}_g^T(t) \left( \tilde{\mathbf{B}}_g(t) \tilde{\mathbf{B}}_g^T(t) \right)^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{B}}_g(t) = \tilde{\mathbf{B}}(t) \frac{\partial \mathbf{d}_{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{B}_u. \quad (6.97)$$

Die Variable  $\mathbf{u}_{soll}$  wurde dabei durch die stationäre Vorsteuerung  $\mathbf{u}_S$  ersetzt, welche entsprechend Abschnitt 4 ermittelt wird. Abb. 6.15 zeigt die Messergebnisse, wobei die Design-Parameter zu

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix}, \quad q_{u,i} = 0.1, \quad k_{0,i} = 0.08, \quad k_{I,i} = 0.0016, \quad i = 1 \dots 5, \quad (6.98)$$

gewählt wurden. Die Zustandsvariablen der Aktoren wurden dabei durch Anwendung des in Abschnitt 5.3.2.3 vorgestellten Beobachters geschätzt. Wie die Abbildung zeigt, kann das Regelziel sehr gut erreicht werden. Das Gütemaß nach Gl. (6.28) resultiert für diesen Regler zu  $J = 0.9 \text{ K}$ . Entsprechend Abschnitt 6.5.1 wurde auch für dieses Experiment ein vollbesetzter Prozess angenommen, welcher durch online simulierte Güter realisiert wird. Die dazugehörigen Verläufe sind in Abb. 6.15 gekennzeichnet.



**Abbildung 6.15.:** Ergebnis bei Anwendung der Entkopplungsregelung in Kombination mit der Methode des Backstepping zur Trajektorienfolgeregelung des Versuchstandes mit kontinuierlichen Ortsfunktionen.

## 6.6. Schlussfolgerungen

Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 4 vorgestellten Steuerungsentwurf spielt die Ausprägung der örtlichen Wirkung der Aktoren eine wesentliche Rolle bei der Wahl geeigneter Regelungsstrategien. Während bei einem verteilten Stelleingriff nach Gl. (2.37) der Prozess in einzelne Zonen eingeteilt wird, die getrennt voneinander geregelt werden können, resultiert bei einer kontinuierlichen Ortsfunktion der Aktoren ein verkoppeltes Mehrgrößensystem. Mit der vorgestellten dezentralen  $\alpha$ -Regelung für die getrennten Zonen sowie dem entkoppelnden Regelungsansatz werden Eingrößenregelungen realisiert. Bei dem entkoppelnden Regelungsansatz existiert für jede Regelgröße eine eigene Lyapunov-Funktion, mit welcher ein asymptotisches Abklingen der einzelnen Regelfehler gewährleistet werden kann (vgl. beispielsweise Gl. (6.80)). Zudem erlaubt dieser Ansatz in gewissen Grenzen eine Variation der Anzahl der im Prozess befindlichen Regelgrößen. Bei dem periodischen Mehrgrößenregler hingegen wird eine feste Konstellation der Regelgrößen vorausgesetzt und eine gemeinsame Lyapunov-Funktion für das gesamte System definiert (vgl. Gl. (6.32)). Somit ist keine Aussage mehr über die Konvergenz der einzelnen Regelfehler möglich, sondern lediglich bezüglich der Norm des gesamten Fehlervektors aller betrachteten Volumenelemente.



# 7. Zusammenfassung und abschließende Bewertung

Die regelungstechnische Behandlung von Systemen mit verteilten Parametern hat in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen und erfordert aufgrund des unendlich-dimensionalen Charakters dieser Systeme große Anforderungen an die Methoden zur Steuerung, Beobachtung und Regelung. Transportprozesse mit einem verteilten Stelleingriff, welche durch hyperbolische partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit gleicher charakteristischer Geschwindigkeit und Richtung modelliert werden, repräsentieren eine spezielle Klasse dieser Systeme. Diese Systemgleichungen beschreiben den Transport eines Mediums, welches durch den entlang des Prozesses angeordneten verteilten Stelleingriff beeinflusst wird. Neue Entwicklungen in der Kommunikationstechnik erlauben den Transport von drahtlosen Sensoren mit dem zu beeinflussenden Medium und eröffnen damit neue Ansätze, diese komplexen Systeme regelungstechnisch zu behandeln.

In dieser Arbeit wurden Methoden zum Steuerungs-, Beobachter- und Regelungsentwurf von Transportprozessen mit verteiltem Stelleingriff zur Lösung eines Trajektorienfolgeproblems unter der Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik vorgestellt. Die Systembeschreibung der Transportprozesse durch hyperbolische partielle Differentialgleichungen erster Ordnung resultiert in vielen Fällen aus der Vernachlässigung des diffusiven Anteils. Damit repräsentieren Transportprozesse oft konvektionsdominante Systeme. Diese Systeme weisen die Eigenschaft auf, dass sich benachbarte Volumenelemente nicht beeinflussen. Aus diesem Grund zieht eine endlich-dimensionale Approximation, beispielsweise durch die Methode von Galerkin, eine Reihe von Nachteilen mit sich. Zur Lösung dieser Systemklasse ist aus der Mathematik die Methode der Charakteristiken bekannt, welche die partielle Differentialgleichung geometrisch deutet und die Änderung der Zustandsvariablen der einzelnen Volumenelemente durch den Prozess in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreibt. Mit dieser Methode wird die Entkopplung zu den benachbarten Volumenelementen deutlich. Basierend auf dieser Methode wurden die durch die Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik resultierenden Systemeigenschaften analysiert. Die Systembeschreibung der Prozesse mit derartigen Sensoren geht unter Anwendung der Methode der Charakteristiken von semilinearen partiellen Differentialgleichungen erster

Ordnung mit zeitvarianten Ausgangsgleichungen in zeitvariante und nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Ausgangsgleichungen über.

Der Steuerungsentwurf für Transportprozesse mit verteiltem Stelleingriff wurde unter Anwendung flachheitsbasierter Methoden durchgeführt, welche einen strukturierten Entwurf ermöglichen. Der verteilte Stelleingriff wird in realen Prozessen durch eine definierte Anzahl an Aktoren realisiert, deren Wirkung auf das transportierte Medium durch eine ortsabhängige Funktion beschrieben wird. Damit wird der Steuerungsentwurf erheblich komplexer. In dieser Arbeit wurde deswegen vorgeschlagen, den flachheitsbasierten Steuerungsentwurf bezüglich des verteilten Stelleingriffs durchzuführen und den ermittelten Stellgrößenverlauf anschließend zu approximieren. Dies stellt im Vergleich zur Anwendung einer Optimierung einen wesentlich transparenteren Entwurf dar und ist damit direkt einer Analyse zugänglich. Im Zuge dessen wurde die Frage nach der Ermittlung und Analyse zulässiger Referenzprofile behandelt sowie die strukturierte Hinzunahme weiterer Randbedingungen in den Entwurfsprozess. Unter Anwendung der flachheitsbasierten Methoden wurde darauf aufbauend ein strukturiertes Vorgehen zum Steuerungsentwurf für Transportprozesse formuliert, welches auch zur Unterstützung der Konstruktionsplanung von Transportprozessen herangezogen werden kann. Dabei wurde ein Ansatz vorgestellt, die zur Erreichung des Steuerungsziels erforderliche Anzahl und Ausdehnung der Aktoren festzulegen.

Die Anwendung einer mit dem Medium mitgeführten Sensorik erweist sich zur Schätzung nicht messbarer verteilt-parametrischer Zustandsvariablen als besonders hilfreich, wie in dieser Arbeit gezeigt wurde. Das mit der Methode der Charakteristiken gewonnene System von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreibt die Zustandsänderung eines durch den Prozess transportierten Volumenelements. Damit erfasst der mitgeführte Sensor eine dieser Zustandsvariablen bzw. eine Linearkombination der Zustandsvariablen. Aus diesem Grund kann der Beobachterentwurf entlang der charakteristischen Kurve anhand von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfolgen. Auch die Schätzung konzentriert-parametrischer Zustandsvariablen, wie etwa die Zustandsvariablen der Aktoren, wird unter Anwendung konzentriert-parametrischer Beobachteransätze ermöglicht, wie am Beispiel eines Durchlaufofens gezeigt wurde. Zudem wurde ein Ausblick auf die Möglichkeiten der Schätzung der gesamten verteilten Zustandsvektorfunktion unter Anwendung mitgeführter Sensoren gegeben.

Die Methode der Charakteristiken in Kombination mit der mit dem Medium mitgeführten Sensorik konnte sehr vorteilhaft zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems ausgenutzt werden. Dabei wurden nur einzelne Volumenelemente, welche mit einem Sensor versehen sind bzw. bei Stückgutprozessen die einzelnen Güter betrachtet. Zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems wurde dabei auf die Zwei-Freiheitsgrade-Struktur und die flachheits-

basierte Trajektorienfolgeregelung zurückgegriffen. Die Ausprägung der örtlichen Wirkung der entlang des Prozesses angeordneten Aktoren beeinflusst den Regelungsentwurf unter Umständen erheblich. Zur Entwicklung geeigneter Regelungsstrategien wurde zwischen den beiden Extremfällen von örtlich vollständig getrennter Wirkung der Aktoren und Aktoren mit einer entlang des gesamten Prozesses kontinuierlichen Ortsfunktion unterschieden.

Der erste Fall repräsentiert eine Aufteilung des Prozesses in einzelne entkoppelte Zonen für welche jeweils eine eigene Regelung vorgesehen wurde. Zur Lösung des Trajektorienfolgeproblems wurde die Zweifreiheitsgrade-Struktur mit einem robusten  $\alpha$ -Regler herangezogen. Mit diesem Ansatz kann die vorhandene Stellgrößenbeschränkung bei garantierter Stabilität berücksichtigt werden.

Aktoren mit einer kontinuierlichen Ortsfunktion führen zu einer Verkopplung des gesamten Systems. Zur regelungstechnischen Behandlung dieser Systeme wurde der Entwurf einer Mehrgrößenregelung vorgestellt. Der Entwurf setzt dabei voraus, dass die Regelgrößen in gleichen Abständen zueinander transportiert werden und die Prozesslänge einem ganzzahligen Vielfachen dieses Abstandes entspricht. Zudem liegt sämtlichen Regelgrößen die gleiche Referenztrajektorie zugrunde. Unter diesen Voraussetzungen resultiert die Linearisierung bei geschickter Systembeschreibung in ein periodisches zeitvariantes System. Die erzielte Periodizität geht mit einem periodischen Schalten des Systems einher. Dieser Spezialfall wurde durch Anwendung eines Lyapunov-basierten Reglers mit exponentieller Abnahme der Lyapunov-Funktion gelöst. Dieser Entwurf erlaubt eine Konvergenzanalyse des Systems unter Berücksichtigung des Schaltvorganges, um Stabilität sicher zu stellen. Aufgrund der gemeinsamen Lyapunov-Funktion für das gesamte System ist allerdings keine Aussage über die Dynamik der einzelnen Regelfehler möglich. Dieser Spezialfall verdeutlicht die schaltende Eigenschaft des Systems aufgrund der einlaufenden und auslaufenden Regelgrößen. Zudem wurde eine entkoppelnde Regelungsstruktur vorgestellt, welche beim Entwurf die Regelgröße von den Aktoren trennt. Die Verbindung wird anschließend unter Anwendung eines Optimierungsverfahrens wieder hergestellt. Für den Regelungsentwurf wird der verteilte Stelleingriff idealisiert betrachtet und angenommen, dass der verteilte Stelleingriff an jeder Position im Prozess frei vorgegeben werden kann. Damit kann der Regelungsentwurf für jede Regelgröße entkoppelt durchgeführt werden. Der auf diese Weise realisierte Entwurf von Eingrößenreglern stellt, ähnlich dem dezentralen Regler im Fall von getrennten Zonen, die asymptotische Stabilität der einzelnen Regelfehler sicher. Die resultierenden entlang des Prozesses verteilten Stellgrößenanforderungen werden unter Anwendung eines Optimierungsverfahrens durch die realen Aktoren realisiert. Die entkoppelten Trajektorienfolgeprobleme wurden durch eine flachheitsbasierte Folgeregelung gelöst und eine nicht vernachlässigbare Aktordynamik unter Anwendung der Methode des Backstepping berücksichtigt. Sämtliche vorgestellten Regelungsansätze wurden an einem Versuchsaufbau

verifiziert.

Die Ergebnisse haben gezeigt, dass durch Anwendung einer mit dem Medium transportierten Sensorik effiziente Ansätze zur Regelung und Beobachtung von Transportprozessen mit verteiltem Stelleingriff basierend auf konzentriert-parametrischen Methoden ermöglicht werden. Diese Tatsache erleichtert den Entwurf deutlich und stellt wesentlich geringere Rechenzeitanforderungen, da keine partiellen Differentialgleichungen gelöst werden müssen. Damit kann auch die Echtzeitfähigkeit der Ansätze erreicht werden.

Die vorgestellten Ansätze konnten erfolgreich zur Regelung und Beobachtung einzelner durch den Prozess transportierter Volumenelemente eingesetzt werden. Eine interessante Fragestellung ist nun die Erweiterung der Methoden zur Regelung und Beobachtung des gesamten durch den Prozess transportierten Mediums. Ein Ausblick zur Schätzung der gesamten Zustandsvektorfunktion unter Anwendung der mitgeführten Sensorik wurde bereits in Abschnitt 5.3 gegeben. Erste Ansätze und Ergebnisse zur Erweiterung der Regelgröße auf ausgedehnte Bereiche des Mediums etwa durch Betrachtung des Mittelwerts der Regelgrößen wurden in [WL10, WCL10] vorgestellt. Diese vielversprechenden Ergebnisse bieten eine gute Ausgangslage zur Entwicklung weiterer Methoden.

# A. Parameterwerte der Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt sind die für die Simulationen erforderlichen System- und Kenngrößen der betrachteten Anwendungsbeispiele aus Kapitel 2.1 zusammengestellt.

## A.1. Kenndaten des Durchlaufofens

Die folgende Tabelle gibt die Systemgrößen und Parameter des in Abschnitt 2.1.1 modellierten Durchlaufofens wieder. Die physikalischen Konstanten wurden [PK05] und [VDI06] entnommen.

Parameter	Bezeichnung	Wert	Einheit
Geschwindigkeit	$v$	$5 \cdot 10^{-3}$	m/sec
Wärmeübergangskoeffizient	$\alpha$	4.78	W/m <sup>2</sup> K
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma_B$	$5.67 \cdot 10^{-8}$	W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup>
Spezifische Wärmekapazität	$c$	1530	J/kg K
Wärmeleitfähigkeit	$\lambda$	0.16	W/m K
Dichte	$\rho$	1350	kg/m <sup>3</sup>
Emissionskoeffizient von PVC	$\epsilon_M$	0.9	-
Emissionskoeffizient der Strahler	$\epsilon_{Str}$	0.79	-
Höhe des Gutes	$h$	$5 \cdot 10^{-3}$	m
Breite des Gutes	$b$	$5 \cdot 10^{-2}$	m
Prozesslänge	$L$	1.05	m
Abstand vom Strahler zum Gut	$d$	0.11	m
Breite der Strahler	$b_{Str}$	0.28	m
Durchmesser der Strahler ( $i = 1 \dots 15$ )	$l_i$	$5 \cdot 10^{-3}$	m

**Tabelle A.1.:** Systemgrößen des Durchlaufofens und Parameterwerte für die Stückgüter aus PVC.

## A.2. Kenndaten des Trocknungsprozesses

Die folgende Tabelle gibt die Systemgrößen und Parameter des in Abschnitt 2.1.2 vorgestellten Trocknungsprozesses wieder. Die physikalischen Konstanten wurden [SL09] entnommen.

Parameter	Bezeichnung	Wert	Einheit
Prozessgeschwindigkeit	$v$	0.1	m/sec
Wärmeübergangskoeffizient	$\alpha$	1.2	W/m <sup>2</sup> K
Dichte vom Papier	$\rho_P$	800	kg/m <sup>3</sup>
Spezifische Wärmekapazität des Papiers	$c_P$	1200	J/kg K
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma_B$	$5.67 \cdot 10^{-8}$	W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup>
Emissionskoeffizient des Papiers	$\epsilon_P$	0.8	1
Emissionskoeffizient der Strahler	$\epsilon_{Str}$	0.8	1
Papierdicke	$d_P$	$1 \cdot 10^{-4}$	m
Breite der Papierbahn	$b$	0.5	m
Effektiver Stoffübergangskoeffizient des Wassers	$\beta_{H_2O}$	$8 \cdot 10^{-5}$	m/sec
Verdampfungsenthalpie des Wassers	$\Delta H_{H_2O}$	2260000	J/kg K
Konstante der Gleichgewichtslinie	$A_{H_2O}$	0.05	1/K
Länge des Prozesses	$L$	1	m
Abstand vom Strahler zum Medium	$d$	0.2	m
Breite der Strahler	$b_{Str}$	0.6	m

**Tabelle A.2.:** Systemgrößen und Systemparameter eines Trocknungsprozesses für Papier.

### A.3. Kenndaten des Rohrreaktors

Die Systemgrößen und Parameterwerte des in Abschnitt 2.1.3 dargestellten Rohrreaktors sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Parameter	Bezeichnung	Wert	Einheit
Prozessgeschwindigkeit	$v$	0.1	m/sec
Stoßfaktor	$k_0$	$10^6$	1/sec
Aktivierungsenergie für Stoff A	$E_A$	11250	cal/mol
Allgemeine Gaskonstante	$R$	1.986	cal/molK
Länge des Rohrreaktors	$L$	1	m
-	$c_1 = \frac{\Delta H_R}{\rho c_p}$	4250	K l/mol
-	$c_2 = \frac{4 k_w}{\rho c_p d}$	0.2	1/sec

**Tabelle A.3.:** Systemgrößen und Systemparameter des Rohrreaktors nach [SDI02].



## B. Approximation durch modale Analyse

In diesem Abschnitt wird die bei der Modellierung der Anwendungsbeispiele in Kapitel 2 durchgeführte Vernachlässigung der Diffusion aufgrund der hohen Péclet-Zahl wieder aufgehoben und somit die exakte Systembeschreibung betrachtet. Das resultierende System wird durch PDGLn zweiter Ordnung beschrieben und ist einer modalen Analyse zugänglich. Die modale Analyse resultiert in einer endlich-dimensionalen Darstellung des Systems, dessen erforderliche Ordnung von der Energie der höheren Eigenmoden abhängt. Eine angemessene Beschreibung setzt ein adäquates Abfallen der Energie der höheren Eigenmoden des partiellen Differentialoperators voraus. Zur Analyse der erforderlichen Ordnung der endlich-dimensionalen Beschreibung sowie des daraus resultierenden Verhaltens der in dieser Arbeit betrachteten Systemklasse wird im Folgenden beispielhaft die Modellgleichung eines Glasvorherds herangezogen [Kha07]. Der Prozess wird durch die lineare PDGL zweiter Ordnung

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} - \frac{\lambda}{c \rho} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} + v \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + k T(z, t) = u_\Omega(t), \quad z \in (0, L], \quad t > 0 \quad (\text{B.1})$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$T(z, 0) = T_0(z) \quad (\text{B.2})$$

$$T(0, t) = T_{\bar{z}_0}(t) \quad (\text{B.3})$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (\text{B.4})$$

beschrieben. Dabei bezeichnet  $k$  die Wärmeübergangszahl. Die restlichen Parameter wurden bereits in Abschnitt 2.1 eingeführt. Wird Gl. (B.1) bezüglich der Orts- und Zeitvariable normiert, folgt mit der Fourier-Zahl  $\tau = \frac{t \lambda}{c \rho L^2}$ , der Péclet-Zahl  $Pe = \frac{c \rho v L}{\lambda}$  und  $\tilde{z} = z/L$

$$\frac{\partial T(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 T(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}^2} + Pe \frac{\partial T(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}} + \underbrace{\frac{k c \rho L^2}{\lambda}}_{c_1} T(\tilde{z}, \tau) = \underbrace{\frac{c \rho L^2}{\lambda}}_{c_2} u_\Omega(\tau). \quad (\text{B.5})$$

Mit der Transformation

$$x(\tilde{z}, \tau) = T(\tilde{z}, \tau) e^{-\frac{Pe}{2} \tilde{z}} \quad (\text{B.6})$$

kann die erste Ableitung der Zustandsvariable nach dem Ort eliminiert werden. Damit folgt schließlich für Gl. (B.5)

$$\frac{\partial x(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 x(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}^2} + \left( \frac{Pe^2}{4} + c_1 \right) x(\tilde{z}, \tau) = c_2 e^{-\frac{Pe}{2}\tilde{z}} u_\Omega(\tau), \quad \tilde{z} \in (0, 1], \quad t > 0. \quad (\text{B.7})$$

mit den Randbedingungen

$$x(0, \tau) = T(0, \tau) = T_{\tilde{z}_0}(\tau) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial x(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}} + x(\tilde{z}, \tau) \frac{Pe}{2} \Big|_{\tilde{z}=1} = 0 \quad (\text{B.9})$$

und der Anfangsbedingung  $x(\tilde{z}, 0) = T(\tilde{z}, 0)e^{-\frac{Pe}{2}\tilde{z}} = T_0(\tilde{z})e^{-\frac{Pe}{2}\tilde{z}}$ . Die Lösung wird nun als Superposition eines homogenen und inhomogenen Anteils angesetzt:

$$x(\tilde{z}, \tau) = x_H(\tilde{z}, \tau) + x_I(\tilde{z}, \tau) \quad (\text{B.10})$$

$$x_H(0, \tau) = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial x_H(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}} + x_H(\tilde{z}, \tau) \frac{Pe}{2} \Big|_{\tilde{z}=1} = 0 \quad (\text{B.12})$$

Der inhomogene Anteil muss den inhomogenen Randbedingungen genügen. Mit dem Ansatz  $x_I(\tilde{z}, \tau) = a e^{-\frac{Pe}{2}\tilde{z}}$  folgt für die inhomogene Lösung

$$x_I(\tilde{z}, \tau) = T_{\tilde{z}_0}(\tau) e^{-\frac{Pe}{2}\tilde{z}}. \quad (\text{B.13})$$

Der homogene Anteil  $x_H(\tilde{z}, \tau)$  muss somit dem folgenden Randwertproblem mit homogenen Randbedingungen genügen

$$\frac{\partial x_H(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 x_H(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}^2} - \left( \frac{Pe^2}{4} + c_1 \right) x_H(\tilde{z}, \tau) + c_2 e^{-\frac{Pe}{2}\tilde{z}} u_\Omega(\tau) \quad (\text{B.14})$$

$$x_H(0, \tau) = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial x_H(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}} + x_H(\tilde{z}, \tau) \frac{Pe}{2} \Big|_{\tilde{z}=1} = 0 \quad (\text{B.16})$$

$$x_H(\tilde{z}, 0) = (T_0(\tilde{z}) - T_{\tilde{z}_0}(0)) e^{-\frac{Pe}{2}\tilde{z}}. \quad (\text{B.17})$$

Die Lösung des homogenen Randwertproblems (B.14) wird im Folgenden durch Anwendung der modalen Analyse bestimmt.

### Modale Analyse

Zur Lösung der PDGL (B.14) wird der Ansatz

$$x_H(\tilde{z}, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\tilde{z}) a_k(\tau) = \boldsymbol{\phi}^T(\tilde{z}) \mathbf{a}(\tau). \quad (\text{B.18})$$

herangezogen. An dieser Stelle ist der Vorteil der Formulierung eines homogenen RWP erkennbar, da somit für die Eigenfunktionen die Bedingung  $\phi(0) = \mathbf{0}$  folgt. Die Eigenfunktionen werden aus der Eigenwertaufgabe

$$\mathcal{A} \phi_k(\tilde{z}) = \lambda \phi_k(\tilde{z}) \quad (\text{B.19})$$

$$\phi_k(0) = 0 \quad (\text{B.20})$$

bestimmt. Mit dem Differentialoperator  $\mathcal{A} = (-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} (\frac{Pe^2}{4} + c_1))$  folgt:

$$-\frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \phi_k(\tilde{z}) + (\frac{Pe^2}{4} + c_1) \phi_k(\tilde{z}) = \lambda \phi_k(\tilde{z}) \quad (\text{B.21})$$

$$\phi_k(0) = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\left. \frac{\partial \phi_k(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}} + \phi_k(\tilde{z}) \frac{Pe}{2} \right|_{\tilde{z}=1} = 0 \quad (\text{B.23})$$

Der Lösungsansatz  $\phi_k(\tilde{z}) = C_{1,k} \sin(\nu_k \tilde{z}) + C_{2,k} \cos(\nu_k \tilde{z})$  führt unter Berücksichtigung der Randbedingung (B.22) zu den Eigenfunktionen

$$\phi_k(\tilde{z}) = C_{1,k} \sin(\nu_k \tilde{z}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.24})$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_k = \nu_k^2 + (\frac{Pe^2}{4} + c_1), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.25})$$

Die Variable  $\nu_k$  resultiert unter Anwendung von Gl. (B.23) aus dem Zusammenhang

$$\tan(\nu_k) + \frac{2\nu_k}{Pe} = 0. \quad (\text{B.26})$$

Die Konstante  $C_{1,k}$  ist frei wählbar und wird zur Normierung der Eigenfunktionen herangezogen:

$$\int_0^1 \phi_k(\tilde{z}) \phi_k(\tilde{z}) d\tilde{z} = 1 \quad (\text{B.27})$$

Wird der Ansatz (B.18) in das RWP (B.14) eingesetzt und entsprechend der Methode von Galerkin [Gil73] mit dem Eigenfunktionsvektor multipliziert und entlang der Ortskoordinate  $\tilde{z}$  integriert folgt der Zusammenhang

$$\int_0^1 \phi(\tilde{z}) \phi^T(\tilde{z}) d\tilde{z} \frac{\partial \mathbf{a}(\tau)}{\partial \tau} = \int_0^1 \phi(\tilde{z}) \left( \frac{\partial^2 \phi(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}^2} - \left( \frac{Pe^2}{4} + c_1 \right) \phi(\tilde{z}) \right)^T d\tilde{z} \mathbf{a}(\tau) \quad (\text{B.28})$$

$$+ c_2 \int_0^1 \phi(\tilde{z}) e^{-\frac{Pe}{2}\tilde{z}} d\tilde{z} u_\Omega(\tau).$$

Mit der Matrix

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\nu_1^2 & & \\ & -\nu_2^2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

resultiert der Zusammenhang  $\frac{\partial^2 \phi(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}^2} = \Lambda \phi(\tilde{z})$ . Wird noch die Eigenschaft  $\int_0^1 \phi(\tilde{z}) \phi^T(\tilde{z}) d\tilde{z} = \mathbf{I}$  berücksichtigt folgt schließlich für Gl. (B.28) die Beziehung

$$\frac{\partial \mathbf{a}(\tau)}{\partial \tau} = \underbrace{\left( \Lambda - \left( \frac{Pe^2}{4} + c_1 \right) \mathbf{I} \right)}_{\mathbf{A}} \mathbf{a}(\tau) + \underbrace{\int_0^1 \phi(\tilde{z}) e^{-\frac{Pe}{2}\tilde{z}} d\tilde{z}}_{\mathbf{b}} u_\Omega(\tau). \quad (\text{B.30})$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  beschreibt somit eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten  $s_k = -\lambda_k$ . Konvektionsdominante Prozesse weisen eine sehr hohe Péclet-Zahl ( $Pe \gg 1$ ) auf, wie in Kap. 2.1 erläutert wurde. Wird nun Gl. (B.30) für diesen Fall näher betrachtet folgt für die Eigenwerte in der Matrix  $\mathbf{A}$  und die Elemente des Vektors  $\mathbf{b}$ :

$$s_k \cong -\frac{Pe^4}{4} \quad (\text{B.31})$$

$$b_k \cong \frac{1}{Pe^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.32})$$

Ziel der Methode von Galerkin wäre nun eine Reduktion der Ordnung des Problems. Der Einkoppelvektor  $\mathbf{b}$ , sowie die Eigenwerte der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  weisen jeweils näherungsweise gleiche Werte auf. Aus Sicht der Ordnungsreduktion sind noch die Elemente des Auskoppelvektors entscheidend, um eine Aussage über eine mögliche Ordnungsreduktion treffen zu können. Als Ausgang des Systems (B.30) kann der gesuchte Zustand  $x_H(\tilde{z}, \tau)$  angesehen werden. Damit entspricht der Auskoppelvektor dem Vektor der Eigenfunktionen. Jedes Element des Vektors ist nur an diskreten Punkten gleich Null und erreicht auch nur an diskreten Punkten ihren dominanten Maximalwert. Damit wird klar, dass eine Reduktion der Ordnung nicht zulässig ist, um das dynamische Verhalten ausreichend zu beschreiben. Dies ist auch einsichtig, wenn bedacht wird, dass die Zustandsvariablen  $a_k(\tau)$  der Differentialgleichung (B.30) näherungsweise gleiche Lösungen aufweisen. Diese Tatsache bestätigt die Aussage von Christofides et.al. [CD98], dass bei konvektionsdominanten Prozessen die Energie der Eigenmoden näherungsweise gleich ist.

# C. Definitionen

## C.1. Vektorieller relativer Grad

**Definition C.1** ([Isi95]). *Ein nichtlineares Mehrgrößensystem der Form*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x})u_j = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{C.1}$$

wobei  $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{g}_m(\mathbf{x})$  glatte Vektorfunktionen und  $h_1(\mathbf{x}), \dots, h_m(\mathbf{x})$  auf einem offenen Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  definierte glatte Vektorfunktionen beschreiben, hat den vektoriellen relativen Grad  $\mathbf{r} = \{r_1, \dots, r_m\}$  in einem Punkt  $\mathbf{x}^0$ , wenn

(i)

$$L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^k h_i(\mathbf{x}) = 0$$

für alle  $j = 1 \dots m$ ,  $k < r_i - 1$ ,  $i = 1 \dots m$  und für alle  $\mathbf{x}$  in einer Umgebung  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \epsilon$  von  $\mathbf{x}^0$ ,

(ii)

$$L_{\mathbf{g}_j} L_{\mathbf{f}}^{r_i-1} h_i(\mathbf{x}^0) \neq 0, \quad i = 1 \dots m$$

für mindestens ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  und

(iii) die  $m \times m$ -dimensionale Matrix

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathbf{g}_1} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathbf{g}_m} L_{\mathbf{f}}^{r_m-1} h_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

für  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$  nicht singularär ist.

## C.2. Diffeomorphismus

**Definition C.2** (Diffeomorphismus [Isi95]). *Eine nichtlineare Koordinatentransformation  $\mathbf{z} = \mathbf{q}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt lokaler (globaler) Diffeomorphismus, falls die nachstehenden Bedingungen in einer Umgebung von  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  (für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ) gelten:*

(i)  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  ist invertierbar, d. h. es gibt eine inverse Transformation  $\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})$ , so dass

$$\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{q}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}.$$

(ii)  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{q}^{-1}(\mathbf{z})$  sind beliebig oft differenzierbar.

Es wird in den meisten Fällen angenommen, dass der Arbeitspunkt invariant bezüglich der Transformation ist, d. h.  $\mathbf{q}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

**Satz C.1** (vgl. [Kha00]).  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  ist ein lokaler Diffeomorphismus, wenn  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{q}(\mathbf{0})$  regulär ist.  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  ist ein globaler Diffeomorphismus genau dann, wenn  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{q}(\mathbf{x})$  regulär für alle  $\mathbf{x}$  und  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}(\mathbf{x})\| = \infty$ .

## C.3. Beobachtbarkeitsmatrix

Die lokale zeitvariante Beobachtbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_B(t)$  von System (5.52) lautet:

$$\mathbf{Q}_{B,\rho}(t) = \left( \begin{array}{ccc|cccc} \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0 \mathbf{c}_M^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & & & & & & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0 \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^{(\rho_1-1)} \mathbf{c}_M^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^{(\rho_1-2)} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,1} + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_{u,1}}^{(\rho_1-2)} (\mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0 \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,1}) + \dots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_{u,1}}^1 (\mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^{(\rho_1-3)} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,1}) & & & & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \ddots & \mathbf{0}^T & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0}^T & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0 \mathbf{c}_M^T & & & & & & \mathbf{0}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0 \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^{(\rho_p-1)} \mathbf{c}_M^T & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^{(\rho_p-2)} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,1} + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_{u,p}}^{(\rho_p-2)} (\mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0 \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,1}) + \dots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_{u,p}}^1 (\mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^{(\rho_p-3)} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,1}) & & & & & \vdots \\ \dots & & & \mathbf{0}^T & & & & & \vdots \\ \dots & & & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0 \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,m} & & & & & \vdots \\ \dots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ \dots & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^{(\rho_1-2)} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,m} + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_{u,1}}^{(\rho_1-2)} (\mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0 \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,m}) + \dots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_{u,1}}^1 (\mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^{(\rho_1-3)} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,m}) & & & & & & & \vdots \\ \dots & & & \mathbf{0}^T & & & & & \vdots \\ \dots & & & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0 \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,m} & & & & & \vdots \\ \dots & & & \vdots & & & & & \vdots \\ \dots & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^{(\rho_p-2)} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,m} + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_{u,p}}^{(\rho_p-2)} (\mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0 \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,m}) + \dots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_{u,p}}^1 (\mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^{(\rho_p-3)} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,m}) & & & & & & & \vdots \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(p n + q m) \times (p n + q m)} \quad (\text{C.2})$$

Aus der Struktur der Matrix  $\mathbf{Q}_B$  ist direkt erkennbar, dass die Beobachtbarkeit der  $p$  Teilsysteme  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{c}_M^T)$  eine notwendige Bedingung für den vollen Rang der Matrix darstellt.

Zur weiteren Untersuchung wird die Beobachtbarkeitsmatrix entsprechend Gl. (5.23) ge-

bildet:

$$\mathbf{Q}_B(t) = \left( \begin{array}{ccc|c} \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0 \mathbf{c}_M^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \vdots & \mathbf{0}^T & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0 \mathbf{c}_M^T & \mathbf{0}^T \\ \hline \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^1 \mathbf{c}_M^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \\ \mathbf{0}^T & \vdots & \mathbf{0}^T & \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^1 \mathbf{c}_M^T & \tilde{\mathbf{Q}}_B \\ \vdots & & & \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{p(pn+qm) \times (pn+qm)} \quad (\text{C.3})$$

Die Matrix  $\tilde{\mathbf{Q}}_B$  enthält die im Vergleich zu Gl. (C.2) noch fehlenden Zeilen und Spalten. Aufgrund der speziellen Struktur und Beziehung zwischen den Zeilen der Matrix  $\tilde{\mathbf{Q}}_B$ , welche auch in Gl. (C.2) erkennbar ist, kann die Matrix  $\tilde{\mathbf{Q}}_B \in \mathbb{R}^{p(np+qm-1) \times mq}$  in die Form

$$\tilde{\mathbf{Q}}_B(t) := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \\ \tilde{\mathbf{H}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{H}}^{((np+qm)-2)} \end{pmatrix}, \text{ mit } \tilde{\mathbf{H}} := \begin{pmatrix} \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,1} & \cdots & \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,1} & \cdots & \mathbf{c}_M^T \mathbf{H}_{p,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{1,1} & \cdots & \tilde{h}_{1,mq} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{h}_{1,p} & \cdots & \tilde{h}_{p,mq} \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{p \times mq}$ , gebracht werden. Die gleichmäßige Beobachtbarkeit des gesamten Systems setzt somit neben der Beobachtbarkeit der  $p$  Teilsysteme  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{c}_M^T)$  voraus, dass die Matrix  $\tilde{\mathbf{Q}}_B$  zu jedem Zeitpunkt vollen Rang aufweist. Die daraus resultierenden Bedingungen sind in Satz 5.5 festgehalten.

## C.4. Steuerbarkeitsmatrix

Die lokale zeitvariante Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_{C,\rho}(t)$  von System (5.52) lautet:

$$\mathbf{Q}_{C,\rho}(t) = \begin{pmatrix}
 \mathbf{0} & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0(\mathbf{H}_{1,1} \mathbf{b}_{u,1}) & \cdots & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^{\rho_1-2}(\mathbf{H}_{1,1} \mathbf{b}_{u,1}) + \cdots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0(\mathbf{H}_{1,1} \mathbf{A}_{u,1}^{\rho_1-2} \mathbf{b}_{u,1}) & \mathbf{0} & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0(\mathbf{H}_{1,2} \mathbf{b}_{u,2}) & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \mathbf{0} & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0(\mathbf{H}_{p,1} \mathbf{b}_{u,1}) & \cdots & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^{\rho_1-2}(\mathbf{H}_{p,1} \mathbf{b}_{u,1}) + \cdots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0(\mathbf{H}_{p,1} \mathbf{A}_{u,1}^{\rho_1-2} \mathbf{b}_{u,1}) & \mathbf{0} & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0(\mathbf{H}_{p,2} \mathbf{b}_{u,2}) & \cdots \\
 \mathbf{b}_{u,1} & \mathbf{A}_{u,1} \mathbf{b}_{u,1} & \cdots & \mathbf{A}_{u,1}^{\rho_1-1} \mathbf{b}_{u,1} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots \\
 \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{b}_{u,2} & \mathbf{A}_{u,2} \mathbf{b}_{u,2} & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\
 \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\
 \cdots & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^{\rho_2-2}(\mathbf{H}_{1,2} \mathbf{b}_{u,2}) + \cdots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0(\mathbf{H}_{1,2} \mathbf{A}_{u,2}^{\rho_2-2} \mathbf{b}_{u,2}) & \mathbf{0} & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0(\mathbf{H}_{1,m} \mathbf{b}_{u,m}) & \cdots & & \\
 \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & \\
 \cdots & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^{\rho_2-2}(\mathbf{H}_{p,2} \mathbf{b}_{u,2}) + \cdots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0(\mathbf{H}_{p,2} \mathbf{A}_{u,2}^{\rho_2-2} \mathbf{b}_{u,2}) & \mathbf{0} & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0(\mathbf{H}_{p,m} \mathbf{b}_{u,m}) & \cdots & & \\
 \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & & \\
 \cdots & \mathbf{A}_{u,2}^{\rho_2-1} \mathbf{b}_{u,2} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & & \\
 \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \cdots & & \\
 \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{0} & \cdots & \\
 \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_{u,m} & \cdots & \cdots & \\
 \cdots & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^{\rho_m-2}(\mathbf{H}_{1,m} \mathbf{b}_{u,m}) + \cdots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_1}^0(\mathbf{H}_{1,m} \mathbf{A}_{u,m}^{\rho_m-2} \mathbf{b}_{u,m}) & \vdots & & & & \\
 \cdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 \cdots & \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^{\rho_m-2}(\mathbf{H}_{p,m} \mathbf{b}_{u,m}) + \cdots + \mathcal{L}_{\mathbf{A}_p}^0(\mathbf{H}_{p,m} \mathbf{A}_{u,m}^{\rho_m-2} \mathbf{b}_{u,m}) & \vdots & & & & \\
 \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & \\
 \cdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 \cdots & \vdots & \vdots & & & & \\
 \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & \\
 \cdots & \mathbf{A}_{u,m}^{\rho_m-1} \mathbf{b}_{u,m} & \mathbf{0} & & & & 
 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(p \ n+q \ m) \times (p \ n+q \ m)} \tag{C.5}$$

Aus der Struktur der Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_{C,\rho}(t)$  ist die anschaulich eingängige Forderung erkennbar, dass die einzelnen Dynamiken der Aktoren vollständig steuerbar sein müssen, damit die Matrix  $\mathbf{Q}_{C,\rho}(t)$  vollen Rang aufweisen kann. Dementsprechend reduziert sich der Steuerbarkeitsnachweis auf die verbleibenden Zeilen oberhalb der in Gl. (C.5) eingezeichneten Linie.

# Literaturverzeichnis

- [ABG<sup>+</sup>09] ANTONIOU, A. ; BOON, M. C. ; GREEN, P.N. ; GREEN, P. R. ; YORK, T. A.: Wireless sensor networks for industrial processes. In: *IEEE Sensors Applications Symp., USA*, 2009
- [Ada09] ADAMY, Jürgen: *Nichtlineare Regelungen*. Springer Berlin Heidelberg, 2009
- [ADF03] ABUKHAIFEH, H. ; DHIB, R. ; FAYED, M.: Model predictive control of an infrared-dryer. In: *Proc. of the Int. Conf. on Physics and Control*, 2003, S. 340–344
- [ASSC02] AKYILDIZ, I. F. ; SU, W. ; SANKARASUBRAMANIAM, Y. ; CAYIRCI, E.: Wireless sensor networks: a survey. In: *Comput. Netw.* 38 (2002), S. 393–422
- [Bal76] BALAKRISHNAN, A. V.: *Applied Functional Analysis*. Springer-Verlag New York Berlin London, 1976
- [Bau10] BAUER, U.: *Automatisierung, Analyse und Beobachterentwurf eines experimentellen Durchlaufofens*. Semesterarbeit, 2010
- [BHW04] BURG, K. ; HAF, H. ; WILLE, F.: *Partielle Differentialgleichungen*. B. G. Teubner Verlag Wiesbaden, 2004
- [BK09] BITSCHNAU, L. ; KOZEK, M.: Modeling and control of an industrial continuous furnace. In: *Proc. of the Int. Conf. on Computational Intelligence, Modelling and Simulation*, 2009, S. 231–236
- [Buh08] BUHL, M.: *Sättigende strukturvariable Regelungen*, Technische Universität München, Diss., 2008
- [Buh09] BUHL, M.: Control with exponentially decaying Lyapunov functions and its use for systems with input saturation. In: *Proc. of the European Control Conference*, 2009, S. 3148–3153
- [BZ00] BITZER, M. ; ZEITZ, F. M.: State profile estimation for a nonisothermal adsorption process by a nonlinear distributed parameter observer. In: *IFAC Advanced Control of Chemical Processes 1* (2000), S. 287–292
- [BZ02] BITZER, M. ; ZEITZ, M.: Design of a nonlinear distributed parameter observer for a pressure swing adsorption plant. In: *Journal of Process Control* 12 (2002), S. 533–543

- [CD96] CHRISTOFIDES, P. D. ; DAOUTIDIS, P.: Feedback control of hyperbolic PDE systems. In: *AIChE Journal* 42 (1996), Nr. 11, S. 3063–3086
- [CD98] CHRISTOFIDES, P.s D. ; DAOUTIDIS, P.: Robust control of hyperbolic PDE systems. In: *Chemical Engineering Science* 53 (1998), Nr. 1, S. 85–105
- [CH68] COURANT, R. ; HILBERT, D.: *Methoden der mathematischen Physik II*. Springer-Verlag New York London Berlin, 1968
- [Che09] CHEN, K.: *Entwurf und Implementierung von flachheitsbasierten Regelungsstrategien an einem Durchlaufofen*, Technische Universität München, Diplomarbeit, 2009
- [Chr98] CHRISTOFIDES, P. D.: Robust control of parabolic PDE systems. In: *Chemical Engineering Science* 53 (1998), S. 2949–2965
- [CZ95] CURTAIN, R. F. ; ZWART, H. J.: *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer-Verlag New York Berlin London, 1995
- [Deb05] DEBNATH, L.: *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser Boston, 2005
- [Dem08] DEMETRIOU, M. A.: Guidance of a moving collocated actuator/sensor for improved control of distributed parameter systems. In: *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2008, S. 215–220
- [Dem10] DEMETRIOU, M. A.: Design of spatially distributed filters for distributed parameter systems using mobile sensor networks. In: *American Control Conference (ACC)*, 2010, S. 4101–4108
- [DH08] DEUTSCHER, J. ; HARKORT, C.: Vollständige Modale Synthese eines Wärmeleiters. In: *at - Automatisierungstechnik* 56 (2008), S. 539–548
- [DP04] DITTMAR, R. ; PFEIFFER, B.-M.: *Modellbasierte prädiktive Regelung: Eine Einführung für Ingenieure*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag München, 2004
- [EN00] ENGEL, K.-J. ; NAGEL, R. ; RIBET, S. Axler F. W. Gehring K. A. (Hrsg.): *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Springer-Verlag New York Berlin London, 2000
- [EN06] ENGEL, K.-J. ; NAGEL, R. ; AXLER, S. (Hrsg.) ; RIBERT, K. A. (Hrsg.): *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer-Verlag New York Berlin London, 2006
- [Fle84] FLETCHER, C. A. J.: *Computational Galerkin Methods*. Springer-Verlag New York Berlin London, 1984
- [FLMR92] FLIESS, M. ; LÉVINE, J. ; MARTIN, P. ; ROUCHON, P.: On differentially flat nonlinear systems. In: FLIESS, M. (Hrsg.): *Nonlinear Control Systems Design*. Pergamon Press, 1992, S. 408–412

- [FLMR95] FLIESS, M. ; LÉVINE, J. ; MARTIN, P. ; ROUCHON, P.: Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples. In: *International Journal of Control* 61 (1995), S. 1327–1361
- [FMRR98] FLIESS, M. ; MOUNIER, H. ; ROUCHON, P. ; RUDOLPH, J.: A distributed parameter approach to the control of a tubular reactor: a multivariable case. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control CDC*, 1998, S. 439–442
- [FR96] FLIESS, M. ; RUDOLPH, J.: Local "tracking observers" for flat systems. In: *Proc. of the Symposium on Control, Optimization and Supervision "Computational Engineering in Systems Applications" IMACS*, 1996, S. 213–217
- [Fra87] FRANKE, D.: *Systeme mit örtlich verteilten Parametern - Eine Einführung in die Modellbildung, Analyse und Regelung*. Springer-Verlag New York London Berlin, 1987
- [Fre71] FREUND, E. ; BECKMANN, M. (Hrsg.): *Zeitvariable Mehrgrößensysteme*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1971
- [FVB00] FEATHERSTONE, A. P. ; VANANTWERP, J. G. ; BRAATZ, R. D.: *Identifikation and Control of Sheet and Film Processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg London, 2000
- [Gab09] GABRYS, A.: *Profilschätzung auf Basis eines Beobachterentwurfs für Transportprozesse*. Semesterarbeit, 2009
- [Gil66] GILLES, E. D.: Dynamik und Regelung chemischer Rohrreaktoren. In: *Messen Steuern Regeln* 9 (1966), S. 158–166
- [Gil73] GILLES, E. D.: *Systeme mit verteilten Parametern - Einführung in die Regelungstheorie*. Oldenbourg Verlag, 1973
- [GK70] GOODSON, R. E. ; KLEIN, R. E.: A definition and some results for distributed system observability. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 15 (1970), S. 165–173
- [Gra10] GRAFENSTEIN, A. von: *Entwurf und Implementierung einer modelprädiktiven Regelung für Transportprozesse unter Einbeziehung der Transportgeschwindigkeit als Stellgröße*, Technische Universität München, Diplomarbeit, 2010
- [Hay96] HAYES, M. H.: *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*. Wiley-Interscience New York Weinheim Toronto, 1996
- [Heu09] HEUSER, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Teubner Verlag Wiesbaden, 2009
- [HNX07] HESPANHA, J. P. ; NAGHSHTABRIZI, P. ; XU, Y.: A survey of recent results in networked control systems. In: *Proceedings of the IEEE* Bd. 95, 2007, S. 138–162

- [HP95] HANCZYC, E. M. ; PALAZOGLU, A.: Sliding Mode Control of Nonlinear Distributed Parameter Chemical Processes. In: *Industrial and Engineering Chemistry Research* 34 (1995), S. 557–566
- [Isi89] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Springer-Verlag New York London Berlin, 1989
- [Isi95] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag New York London Berlin, 1995
- [JA88] JAI, A. E. ; AMOUROUX, M.: Sensors and observers in distributed parameter systems. In: *International Journal of Control* 47 (1988), S. 333–347
- [KFA69] KALMAN, R. E. ; FLAB, P. L. ; ARBIB, M. A.: *Topics in Mathematical System Theory*. McGraw-Hill, 1969
- [Köh77] KÖHNE, M.: *Zustandsbeobachter für Systeme mit verteilten Parametern - Theorie und Anwendung*. VDI-Verlag, 1977
- [Kha00] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall London Sydney Toronto, 2000
- [Kha07] KHARITONOV, A.: *Flachheitsbasierte Steuerungs- und Regelungsstrategien für Systeme mit verteilten Parametern bei Wärme- und Stoffübertragungsprozessen*, Universität Stuttgart, Diss., 2007
- [Kir98] KIRK, D. E.: *Optimal Control Theory - An Introduction*. Dover Publications Inc. Mineola New York, 1998
- [KJ08] KIENCKE, U. ; JÄKEL, H.: *Signale und Systeme*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag München, 2008
- [Kre99] KREISSELMEIER, G.: Struktur mit zwei Freiheitsgraden. In: *at - Automatisierungstechnik* 47 (1999), Nr. 6, S. 266–269
- [KS72] KWAKERNAAK, H. ; SIVAN, R.: *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience New York Weinheim Toronto, 1972
- [KS06] KHARITONOV, A. ; SAWODNY, O.: Flatness-based disturbance decoupling for heat and mass transfer processes with distributed control. In: *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Control Applications*, 2006, S. 674–679
- [KS07] KHARITONOV, A. ; SAWODNY, O.: Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung für parabolische Systeme mit verteilten Parametern und gleichverteiltem Eingriff. In: *Automatisierungstechnik* 55 (2007), Nr. 12, S. 615–623
- [LH91] LEI, X. ; HARTLEY, T. T.: Temperature control in continuous furnace by structural diagram method. In: *Proc. of the 10th American Control Conference*, 1991, S. 1056–1058
- [Loh79] LOHSE, K.: *Steuerung und Regelung von Transportprozessen unter Verwendung*

- von Beobachtern*, Hochschule der Bundeswehr Hamburg, Diss., 1979
- [Lun00] LUNZE, J.: Ein Beispiel für den Entwurf schaltender Beobachter. In: *at - Automatisierungstechnik* 48 (2000), Nr. 11, S. 556–562
- [MKS05] MERSMANN, A. ; KIND, M. ; STICHLMAIR, J.: *Thermische Verfahrenstechnik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005
- [MZ06] MEURER, T. ; ZEITZ, M.: Flatness-based tracking control for parabolic distributed-parameter systems with boundary input. In: *at - Automatisierungstechnik* 54 (2006), Nr. 8, S. 372–384
- [MZS10] MALCHOW, F. ; ZEITZ, M. ; SAWODNY, O.: Ein Ansatz zum Vorsteuerungs-Entwurf für Transportprozesse mit örtlich verteiltem Stelleingriff. In: *at - Automatisierungstechnik* 58 (2010), Nr. 3, S. 151–160
- [Nol88] NOLDUS, E.: Finite-dimensional approximate observers for a class of transportation systems. In: *International Journal of Control* 47 (1988), Nr. 5, S. 1407–1418
- [Pap91] PAPAGEORGIOU, M.: *Optimierung - Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. Oldenbourg Verlag München, 1991
- [PK05] POLIFKE, W. ; KOITZ, J.: *Wärmeübertragung - Grundlagen, analytische und numerische Methoden*. Person Studium München, 2005
- [PTVF07] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 2007
- [RAR00] ROTHFUSS, R. ; ALFONS, A. ; REUSS, M.: Flachheitsbasierte Regelung und Zustandsschätzung für einen Fedbatch-Bioprocess. In: *Automatisierungstechnik* 48 (2000), Nr. 5, S. 224–234
- [Rop09] ROPPENECKER, G.: Zustandsregelung linearer Systeme - Eine Neubetrachtung. In: *at - Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 10, S. 491–498
- [Rot97] ROTHFUSS, R.: *Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*, Universität Stuttgart, Diss., 1997
- [RRZ97] ROTHFUSS, R. ; RUDOLPH, J. ; ZEITZ, M.: Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. In: *at - Automatisierungstechnik* 45 (1997), Nr. 11, S. 517–525
- [Rud03] RUDOLPH, J.: *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems*. Shaker Verlag Aachen, 2003
- [RW07] RUDOLPH, J. ; WOITTENNEK, F.: Ein algebraischer Zugang zur Parameteridentifikation in linearen unendlichdimensionalen Systemen. In: *Automatisierungstechnik* 55 (2007), S. 457–467
- [SDI02] SMETS, I.Y. ; DOCHAIN, D. ; IMPE, J.F. V.: Optimal temperature control of

- a steady-state exothermic plug-flow reactor. In: *AIChE Journal* 48 (2002), Nr. 2, S. 279–286
- [SFG04] SHANG, H. ; FORBES, J.F. ; GUAY, M.: Model predictive control for quasilinear hyperbolic distributed parameter systems. In: *Ind. Eng. Chem. Res.* (2004), S. 2140–2149
- [SFG05] SHANG, H. ; FORBES, J. F. ; GUAY, M.: Feedback control of hyperbolic distributed parameter systems. In: *Chemical Engineering Science* 60 (2005), S. 969–980
- [Sim06] SIMON, D.: *Optimal State Estimation: Kalman,  $H_\infty$  and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience, 2006
- [SL09] STUDENER, S. ; LOHMANN, B.: Spatiotemporal dynamics and simulation of the thermal fusing process in electrophotographic printing. In: *6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD)*, 2009, S. 1619–1627
- [SR89] SIRA-RAMIREZ, H.: Distributed sliding mode control in systems described by quasilinear partial differential equations. In: *Systems & Control Letters* 13 (1989), S. 177–181
- [Str04] STRIKWERDA, J. C.: *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, 2004
- [Sva06] SVARICEK, F.: Nulldynamik linearer und nichtlinearer Systeme: Definitionen, Eigenschaften und Anwendungen. In: *at - Automatisierungstechnik* 7 (2006), S. 310–322
- [SZ95] SCHAFFNER, J. ; ZEITZ, M.: Entwurf nichtlinearer Beobachter. In: ENGELL, S. (Hrsg.): *Entwurf nichtlinearer Regelungen*. Oldenbourg Verlag, 1995, S. 53–76
- [Tor99] TORO, E. F.: *Riemann Solvers and numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer-Verlag New York Berlin London, 1999
- [TP74] THOWSEN, A. ; PERKINS, W. R.: Observability conditions for two classes of linear flow processes. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 19 (1974), S. 603–604
- [Trö09] TRÖLTZSCH, F.: *Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen - Theorie, Verfahren und Anwendung*. Vieweg + Teubner Verlag Wiesbaden, 2009
- [TSH10] THIELE, S. ; SILVA, M. J. D. ; HAMPEL, U.: Autonomous sensor particle for parameter tracking in large vessels. In: *Measurement Science and Technology* 21 (2010), S. 1–8
- [VDI06] VDI (Hrsg.): *VDI-Wärmeatlas*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006
- [WCL10] WINKLER, F. J. ; CHEN, K. ; LOHMANN, B.: Control design of a continuous

- furnace with separated heating zones. In: *8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Bologna, Italien., 2010*
- [Whi74] WHITHAM, G. B. ; BERS, L. (Hrsg.) ; HILTON, P. (Hrsg.) ; HOCHSTADT, H. (Hrsg.): *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience New York Weinheim Toronto, 1974
- [WL09] WINKLER, F. J. ; LOHMANN, B.: Flachheitsbasierte Steuerung und Beobachtung von Transportprozessen mit verteiltem Eingriff. In: *at - Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 11, S. 552–563
- [WL10] WINKLER, F. J. ; LOHMANN, B.: Design of a decoupling controller structure for first order hyperbolic PDEs with distributed control action. In: *American Control Conference (ACC), Baltimore, USA, 2010*, S. 2563–2568
- [WR03] WOITTENNEK, F. ; RUDOLPH, J.: Motion planning for a class of boundary controlled linear hyperbolic PDE's involving finite distributed delays. In: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 9 (2003), S. 419–435
- [Wul05] WULFF, K.: *Quadratic and Non-Quadratic Stability Criteria for Switched Linear Systems*, Hamilton Institute, NUI Maynooth, Ireland, Diss., 2005
- [YS71] YU, T. K. ; SEINFELD, J. H.: Observability of a Class of Hyperbolic Distributed Parameter Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 16 (1971), S. 495–496
- [YUU94] YOSHITANI, N. ; UHEYAMA, T. ; USUI, M.: Optimal slab heating control with temperature trajectory optimization. In: *Proc. of the 20th Int. Conf. on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*, 1994, S. 1567–1572
- [Zam08] ZAMPIERI, S.: Trends in networked control systems. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008, S. 2886–2894