

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Lehrstuhl für Baumechanik

Überlagerung von Grumlösungen in der Elastodynamik zur Behandlung der dynamischen Tunnel-Boden-Bauwerk-Interaktion

Georg Frühe

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. O. Fischer

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. G. H. Müller
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. St. A. Savidis,
Technische Universität Berlin

Die Dissertation wurde am 30.09.2010 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 03.02.2011 angenommen.

Kurzfassung

Für die dynamische Berechnung einer Tunnel-Boden-Bauwerk-Interaktion wird in dieser Arbeit die Finite-Elemente-Methode (FEM) mit der Integraltransformationemethode (ITM) gekoppelt. Durch die Überlagerung von Fundamentallösungen der ITM (Halbraum, Vollraum mit zylindrischem Hohlraum, Vollraum mit sphärischem Hohlraum) wird eine semi-analytische Lösung im Wellenzahl-Frequenzraum für einen Halbraum mit zylindrischen und kugelförmigen Hohlräumen, länglichen Gräben und örtlich begrenzten Gruben entwickelt. Daraus resultieren die wellenzahlabhängigen Nachgiebigkeiten an den Oberflächen. Indem diese Nachgiebigkeiten mit der FEM gekoppelt werden, können beliebige und komplexe Strukturen des Tunnels bzw. des Grabens und der Gebäude modelliert werden. Dies ermöglicht es nun, am vollständigen Emissions-Transmissions-Immissions-System Erschütterungsprognosen durchzuführen.

Abstract

For the dynamic calculation of a tunnel-soil-structure-interaction in this paper the Finite Element Method (FEM) is coupled with the Integral Transform Method (ITM). By superposing fundamental solutions of the ITM (half-space, full space with cylindrical cavity, full space with spherical cavity), a semi-analytical solution in the frequency-wave number domain for a half-space with cylindrical and spherical cavities, longitudinal trenches and localized excavations is derived, which results in wave number flexibilities obtained at the boundaries. By coupling these flexibilities with the FEM arbitrary and complex structures of the tunnel respectively trench and the building can be modelled. Thus it is now possible to carry out predictions of vibrations for the complete Emission-Transmission-Immission-System.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2004 bis 2010 während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. G. Müller für die fachliche Betreuung, sowie für das freundliche und menschliche Miteinander, welches das Arbeitsklima am Lehrstuhl für Baumechanik bestimmt.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. St. A. Savidis danke ich für die Übernahme des Korreferates und Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. O. Fischer für die Übernahme des Vorsitzes des Verfahrens.

Bei meinen Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl möchte ich mich für die kollegiale, angenehme und familiäre Arbeitsatmosphäre, sowie für ihre Hilfe und Gesprächsbereitschaft herzlich bedanken. Insbesondere danke ich Herrn Dipl.-Ing. S. Seipelt für die vielen und interessanten fachlichen Diskussionen, die meine Arbeit sehr bereichert haben.

Meinem Bruder Thomas danke ich für seine Anregungen und seine Hilfsbereitschaft.

Bei meiner Freundin Sanne bedanke ich mich für ihr Verständnis und ihre Unterstützung. Ein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern, für die Förderung meiner Ausbildung, ihre stete Unterstützung und den starken Rückhalt, den sie mir immer gewähren.

München, im Februar 2011

Georg Frühe

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	IX
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Vorgehen	1
1.2 Überblick	2
1.3 Gliederung	5
2 Grundgleichungen der linearen räumlichen Elastizitätstheorie	7
2.1 Vorbemerkungen	7
2.2 Lamésche Gleichung	7
2.3 Satz von Helmholtz	9
3 Der Halbraum unter dynamischer Belastung	11
3.1 Lösung der Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten	11
3.2 Verschiebungen und Spannungen in kartesischen Koordinaten	13
3.3 Lösung für den homogenen Halbraum	16
3.4 Lösung für den geschichteten Halbraum	17
3.5 Bewegte Lasten	19
4 Der Vollraum mit zylindrischem Hohlraum unter dynamischer Belastung	20
4.1 Lösung der Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten	20
4.1.1 Allgemeine Grundlagen	20
4.1.2 Lösung der Wellengleichung - Variante 1	23
4.1.3 Lösung der Wellengleichung - Variante 2	28
4.2 Verschiebungen und Spannungen in Zylinderkoordinaten	33

4.3	Lösung für den homogenen Vollraum mit zylindrischem Hohlraum	36
5	Der Vollraum mit sphärischem Hohlraum unter dynamischer Belastung	38
5.1	Vorbemerkungen	38
5.2	Lösung der Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten	39
5.2.1	Allgemeine Grundlagen	39
5.2.2	Lösung der Wellengleichung	41
5.3	Verschiebungen und Spannungen in Kugelkoordinaten	47
5.4	Lösung für den homogenen Vollraum mit sphärischem Hohlraum	50
5.5	Berechnungsbeispiele	54
6	Superposition der Grundlösungen der Fundamentalsysteme	57
6.1	Vorbemerkungen	57
6.2	Transformationsbeziehungen zwischen den Koordinatensystemen	59
6.3	Superposition der Lösung des Halbraums und des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum	60
6.3.1	Tunnel im Halbraum unter dynamischer Belastung	60
6.3.2	Graben an der Halbraumoberfläche unter dynamischer Belastung	65
6.3.3	Tunnel in einer Schichtgrenze unter dynamischer Belastung	67
6.4	Superposition der Lösung des Halbraums und des Vollraums mit sphärischem Hohlraum	69
6.5	Weitere Überlagerungsmöglichkeiten	70
6.6	Numerische Umsetzung	74
6.6.1	Numerische Fourierreihenentwicklung	74
6.6.2	Numerische sphärische Fourierreihenentwicklung	76
6.7	Berücksichtigung der Effekte von Fern- und Nahfeldern	78
6.8	Einfluss der Tunneltiefe	82
6.9	Vergleichsberechnungen	86
7	Finite-Elemente-Methode im fouriertransformierten Raum	91
7.1	Vorbemerkungen	91
7.2	Grundlegende Beziehungen des linearen Dreieckelementes	91
7.3	Herleitung der dynamischen Elementsteifigkeitsmatrix	95

7.4	Dynamische Gesamtsteifigkeitsmatrix des FE-Systems	99
8	Kopplung der FEM mit der Integraltransformationmethode	100
8.1	Vorbemerkungen	100
8.2	Transformation der Freiheitsgrade des FE-Systems	101
8.3	Kopplung	104
9	Zusammenfassung	109
A	Anhang	111
A.1	Mathematische Funktionen	112
A.1.1	Bessel-Funktionen	112
A.1.2	Sphärische Bessel-Funktionen	114
A.1.3	Legendre-Funktionen	115
A.1.4	Assoziierte Legendre-Funktionen	118
A.1.5	Normierte assoziierte Legendre-Funktionen	121
A.2	Fouriertransformation	123
A.2.1	Definition	123
A.2.2	Rechenvorschriften	123
A.3	Bestimmungsmatrizen für Zylinderkoordinaten	126
A.3.1	Matrix $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{z}}$ zur Ermittlung der Verschiebungen	126
A.3.2	Matrix $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{z}}$ zur Ermittlung der Spannungen	128
A.4	Bestimmungsmatrizen für Kugelkoordinaten	131
A.4.1	Matrix $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{s}}$ zur Ermittlung der Verschiebungen	131
A.4.2	Matrix $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{s}}$ zur Ermittlung der Spannungen	133
A.5	Spannungstransformationsmatrizen	139
A.6	Steifigkeits- und Massenmatrix eines Dreieckselementes	140
	Abbildungsverzeichnis	143
	Literaturverzeichnis	147

Symbolverzeichnis

Griechische Buchstaben

α_n	Koeffizient des n -ten Reihengliedes einer Fourierreihe
β_i^{j0}	Matrix für eine Transformation von kartesischen in krummlinige Koordinaten
β_i^{j0}	Matrix für eine Transformation von kartesischen in normierte krumml. Koordinaten
$\beta_i^{j'}$	Matrix für eine Transformation von krumml. in normierte krumml. Koordinaten
δW	virtuelle Arbeit des Gesamtsystems
δW_a	äußere virtuelle Arbeit
δW_i	innere virtuelle Arbeit
δW_T	virtuelle Arbeit infolge von Trägheit
ϵ	Abbruchkonstante
ϵ^{ij}	Koeffizienten des Verzerrungstensors
ϵ^{ijk}	Permutationssymbol
$\epsilon_{\mathbf{k}}$	Vektor der Verzerrungen ($\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \epsilon_{xy} \ \epsilon_{zy} \ \epsilon_{zx}$) in kartesischen Koordinaten
$\epsilon_{\mathbf{s}}$	Vektor der Verzerrungen ($\epsilon_{RR} \ \epsilon_{\vartheta\vartheta} \ \epsilon_{\varphi\varphi} \ \epsilon_{R\vartheta} \ \epsilon_{R\varphi} \ \epsilon_{\vartheta\varphi}$) in Kugelkoordinaten
$\epsilon_{\mathbf{z}}$	Vektor der Verzerrungen ($\epsilon_{xx} \ \epsilon_{rr} \ \epsilon_{\varphi\varphi} \ \epsilon_{rx} \ \epsilon_{r\varphi} \ \epsilon_{x\varphi}$) in Zylinderkoordinaten
ϵ_{Δ}	Vektor der Verzerrungen ($\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{zz} \ \tau_{xy} \ \tau_{zy} \ \tau_{zx}$) im Dreieckselement
ζ	Verlustfaktor
η_i	Flächenkoordinaten des Dreieckelementes
θ_i	Koordinaten eines normierten krummlinigen Koordinatensystems
θ_i'	Koordinaten eines krummlinigen Koordinatensystems
ϑ_i	zugehöriger Winkel der Stützstellen der Gauß-Legendre-Quadratur
λ_1, λ_2	Koeffizienten zur Bestimmung der Potentiale in kartesischen Koordinaten

λ_p	Kompressionswellenlänge
λ_s	Scherwellenlänge
λ	Lamésche Konstante
μ	Lamésche Konstante
ν	Poissonzahl (Querdehnzahl)
ρ	Dichte des Materials
σ^{ij}	Koeffizienten des Spannungstensors
$\sigma_{zi,s}$	Einheitsspannungszustand an Halbraumboberfläche
$\sigma_{zi,s}^{(rj,n)}$	resultierende Spannung an fiktiver Halbraumboberfläche infolge $\sigma_{rj,n}$
$\sigma_{zi,so}^{(Rk,lm)}$	resultierende Spannung an fiktiver Halbraumboberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
$\sigma_{rj,n}$	Einheitsspannungszustand an zylindrischer Hohlraumoberfläche
$\sigma_{rj,n}^{(zi,s)}$	resultierende Spannung an fiktiver zylindrischer Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{zi,s}$
$\sigma_{rj,no}^{(Rk,lm)}$	resultierende Spannung an fiktiver zylindrischer Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
$\sigma_{Rk,lm}$	Einheitsspannungszustand an kugelförmiger Hohlraumoberfläche
$\sigma_{Rk,lm}^{(zi,so)}$	resultierende Spannung an fiktiver kugelförmiger Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{zi,so}$
$\sigma_{Rk,lm}^{(rj,no)}$	resultierende Spannung an fiktiver kugelförmiger Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{rj,no}$
$\sigma_{\mathbf{k}}$	Vektor der Spannungen ($\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{zy} \ \sigma_{zx}$) in kartesischen Koordinaten
$\sigma_{\mathbf{s}}$	Vektor der Spannungen ($\sigma_{RR} \ \sigma_{\vartheta\vartheta} \ \sigma_{\varphi\varphi} \ \sigma_{R\vartheta} \ \sigma_{R\varphi} \ \sigma_{\vartheta\varphi}$) in Kugelkoordinaten
$\sigma_{\mathbf{z}}$	Vektor der Spannungen ($\sigma_{xx} \ \sigma_{rr} \ \sigma_{\varphi\varphi} \ \sigma_{rx} \ \sigma_{r\varphi} \ \sigma_{x\varphi}$) in Zylinderkoordinaten
φ	Umfangswinkel in Zylinderkoordinaten
φ, ϑ	Breitenkreis- und Längenkreiswinkel in Kugelkoordinaten
ψ, χ	Skalarfunktionen
ω	Eigenkreisfrequenz
Γ_α	Oberfläche des Halbraums
Γ_β	Oberfläche des zylindrischen Hohlraums
Γ_γ	Oberfläche des kugelförmigen Hohlraums
Γ_δ	Schichtgrenze
$\Pi_{\mathbf{k}}$	Vektor der Potentiale ($\Phi \ \Psi_x \ \Psi_y$) in kartesischen Koordinaten
$\Pi_{\mathbf{s}}$	Vektor der Skalarfunktionen ($\Phi \ \psi \ \chi$) in Kugelkoordinaten
$\Pi_{\mathbf{z}}$	Vektor der Skalarfunktionen ($\Phi \ \psi \ \chi$) in Zylinderkoordinaten

Φ	skalares Potential
Ψ_i	vektorielle Potentiale

Lateinische Buchstaben

a_i	Hilfsgrößen im Dreieckselement
$a_l(\vartheta_i)$	Funktionswert an der Stützstelle ϑ_i für l -tes Reihenglied bezüglich φ
$a_{l,m}$	Koeffizienten der Reihe von Kugelflächenfunktionen
b_y	Breite der Last in y -Richtung
c_i	Unbekannte zur Bestimmung der Verschiebungen im Dreieckselement
c_p	Wellengeschwindigkeit der Kompressionswelle
c_s	Wellengeschwindigkeit der Scherwelle
c_R	Wellengeschwindigkeit der Rayleighwelle
\mathbf{c}_Δ	Vektor der Unbekannten (c_1 - c_9)
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems
f	Frequenz
f_E	Tiefe der kugelförmigen Einsenkung
f_G	Tiefe des Grabens
$\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$	Basisvektoren eines normierten krummlinigen Koordinatensystems
$\mathbf{g}_1', \mathbf{g}_2', \mathbf{g}_3'$	Basisvektoren eines krummlinigen Koordinatensystems
g^{ij}	Metrikoeffizienten
h_s	Schichtdicke im geschichteten Halbraum
h	Überdeckung des Tunnels
i	Index für kartesische Koordinaten x, y, z
j	Index für Zylinderkoordinaten x, r, φ
k	Index für Kugelkoordinaten R, ϑ, φ
k_p	Wellenzahl der Kompressionswelle
k_r	radiale Wellenzahl
k_s	Wellenzahl der Scherwelle
k_L	Wellenzahl der angreifenden Last
k_R	Wellenzahl der Rayleighwelle

k_x, k_y	Wellenzahlen in kartesischen Koordinaten
$\Delta k_x, \Delta k_y$	Grundwellenzahlen in kartesischen Koordinaten
k_α, k_β	Koeffizienten zur Bestimmung der Potentiale in Zylinderkoordinaten
\tilde{k}_p, \tilde{k}_s	Koeffizienten zur Bestimmung der Potentiale in Kugelkoordinaten
l, m	Reihenglied der Kugelflächenfunktion
n	Reihenglied in Umfangsrichtung in Zylinderkoordinaten
o	Reihenglied in x -Richtung in kartesischen und Zylinderkoordinaten
p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}	Belastung an der Halbraumoberfläche
$p_{rx}, p_{rr}, p_{r\varphi}$	Belastung an der zylindrischen Hohlraumoberfläche
$p_{RR}, p_{R\vartheta}, p_{R\varphi}$	Belastung an der kugelförmigen Hohlraumoberfläche
r	radiale Koordinate in Zylinderkoordinaten
r_0	Radius des zylindrischen Hohlraums
r_p	Radius der Lastfläche
s	Reihenglied in y -Richtung in kartesischen Koordinaten
s	Schichtnummer im geschichteten Halbraum
t	Zeit
u, v, w	Verschiebung im Dreieckselement in x -, y - und z -Richtung
u_x, u_y, u_z	Verschiebungen in kartesischen Koordinaten
u_x, u_r, u_φ	Verschiebungen in Zylinderkoordinaten
$u_R, u_\vartheta, u_\varphi$	Verschiebungen in Kugelkoordinaten
u_{R,K_i}	Verschiebungen der Knoten des FE-Systems
$u_{zi,s}^{(zi,s)}$	resultierende Verschiebung an Halbraumoberfläche infolge $\sigma_{zi,s}$
$u_{zi,s}^{(rj,n)}$	resultierende Verschiebung an Halbraumoberfläche infolge $\sigma_{rj,n}$
$u_{zi,so}^{(Rk,lm)}$	resultierende Verschiebung an Halbraumoberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
$u_{rj,n}^{(zi,s)}$	result. Verschiebung an zylindrischer Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{zi,s}$
$u_{rj,n}^{(rj,n)}$	result. Verschiebung an zylindrischer Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{rj,n}$
$u_{rj,no}^{(Rk,lm)}$	result. Verschiebung an zylindrischer Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
$u_{Rk,lm}^{(zi,so)}$	result. Verschiebung an kugelförmiger Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{zi,so}$
$u_{Rk,lm}^{(rj,no)}$	result. Verschiebung an kugelförmiger Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{rj,no}$
$u_{Rk,lm}^{(Rk,lm)}$	result. Verschiebung an kugelförmiger Hohlraumoberfläche infolge $\sigma_{Rk,lm}$
\mathbf{u}_k	Vektor der Verschiebungen ($u_x \ u_y \ u_z$) in kartesischen Koordinaten

\mathbf{u}_s	Vektor der Verschiebungen $(u_R \ u_\vartheta \ u_\varphi)$ in Kugelkoordinaten
\mathbf{u}_z	Vektor der Verschiebungen $(u_x \ u_r \ u_\varphi)$ in Zylinderkoordinaten
\mathbf{u}_{FE}	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade des FE-Systems
\mathbf{u}_{ITM}	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade des ITM-Systems
$\mathbf{u}_{\Omega_{FE}}$	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade innerhalb des FE-Gebietes
$\mathbf{u}_{\Gamma_{FE}}$	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade am Kopplungsrand des FE-Systems
$\mathbf{u}_{\Gamma_{ITM}}$	Vektor der transformierten Verschiebungsfreiheitsgrade des FE-Systems
$\mathbf{u}_{\Gamma_\alpha}$	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade an der Halbraumoberfläche
$\mathbf{u}_{\Gamma_\beta}$	Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade an der zylindr. Hohlraumoberfläche
\mathbf{u}_Δ	Vektor der Verschiebungen $(u \ v \ w)$ im Dreieckselement
$\mathbf{u}_{\Delta\mathbf{k}}$	Vektor der Verschiebungen der Knotenpunkte des Dreieckselementes
v	Geschwindigkeit
v_t	Spurgeschwindigkeit
w_i	Wichtungswerte für Gauß-Legendre-Quadratur
x	Längskoordinate in Zylinderkoordinaten
x, y, z	kartesische Koordinaten
A	Admittanz
A_D	Dreiecksfläche
\mathbf{A}_k	Matrix zur Berechnung der Potentiale $\mathbf{\Pi}_k$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_k
\mathbf{A}_s	Matrix zur Berechnung der Potentiale $\mathbf{\Pi}_s$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_s
\mathbf{A}_z	Matrix zur Berechnung der Potentiale $\mathbf{\Pi}_z$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_z
\mathbf{A}_Δ	Matrix zur Berechnung der Knotenverschiebungen $\mathbf{u}_{\Delta\mathbf{k}}$ aus Unbekannten \mathbf{C}_Δ
A_1, A_2	Maß für Amplitude der Kompressionswelle in kartesischen Koordinaten
B_{i1}, B_{i2}	Maß für Amplitude der Scherwelle in kartesischen Koordinaten
B_x	Wiederholungslänge in x -Richtung
B_y	Wiederholungslänge in y -Richtung
\mathbf{B}_Δ	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_\Delta$ aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\Delta\mathbf{k}}$
C_{in}	Maß für Amplitude der Kompressions- und Scherwellen in Zylinderkoordinaten
C_{ilm}	Maß für Amplitude der Kompressions- und Scherwellen in Kugelkoordinaten
$C_{zi,s}$	Amplituden der Einheitslastfälle an der Halbraumoberfläche

$C_{rj,n}$	Amplituden der Einheitslastfälle an der zylindrischen Hohlraumoberfläche
$C_{Rk,lm}$	Amplituden der Einheitslastfälle an der kugelförmigen Hohlraumoberfläche
\mathbf{C}	Vektor der Lastamplituden des überlagerten ITM-Systems
\mathbf{C}_k	Vektor der Unbekannten $(A_1 \ A_2 \ B_{x1} \ B_{x2} \ B_{y1} \ B_{y2})$ in kartes. Koordinaten
\mathbf{C}_s	Vektor der Unbekannten $(C_{1lm}-C_{6lm})$ in Kugelkoordinaten
\mathbf{C}_z	Vektor der Unbekannten $(C_{1n}-C_{6n})$ in Zylinderkoordinaten
\mathbf{C}_{sch}	Vektor der Unbekannten $(\bar{A}_{1,s} \ A_{2,s} \ \bar{B}_{x1,s} \ B_{x2,s} \ \bar{B}_{y1,s} \ B_{y2,s})$ einer Schicht
\mathbf{C}_{HR}	Vektor der Unbekannten $(C_{1lm} \ C_{2lm} \ C_{3lm})$ für die Last \mathbf{P}_{HR}
\mathbf{C}_{LR}	Vektor der Unbekannten $(C_{1n} \ C_{2n} \ C_{3n})$ für die Last \mathbf{P}_{LR}
\mathbf{C}_{OF}	Vektor der Unbekannten $(A_2 \ B_{x2} \ B_{y2})$ für die Last \mathbf{P}_{OF}
D	Lehrsches Dämpfungsmaß
\mathbf{D}_k	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen \mathbf{u}_k aus den Potentialen $\mathbf{\Pi}_k$
\mathbf{D}_s	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen \mathbf{u}_s aus den Potentialen $\mathbf{\Pi}_s$
\mathbf{D}_z	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen \mathbf{u}_z aus den Potentialen $\mathbf{\Pi}_z$
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{E}_k	Matrix zur Berechnung der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_k$ aus den Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_k$
\mathbf{E}_s	Matrix zur Berechnung der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_s$ aus den Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_s$
\mathbf{E}_z	Matrix zur Berechnung der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_z$ aus den Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_z$
\mathbf{E}_Δ	Matrix zur Berechnung der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_\Delta$ aus den Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_\Delta$
F, G	Hilfsgrößen für Schubspannungen in Kugelkoordinaten
G	Schubmodul
\mathbf{H}_k	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen \mathbf{u}_k aus den den Unbekannten \mathbf{C}_k
\mathbf{H}_s	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen \mathbf{u}_s aus den den Unbekannten \mathbf{C}_s
\mathbf{H}_z	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen \mathbf{u}_z aus den den Unbekannten \mathbf{C}_z
\mathbf{H}_Δ	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen \mathbf{u}_Δ aus den den Unbekannten \mathbf{C}_Δ
\mathbf{K}_k	Matrix zur Berechnung der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_k$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_k
\mathbf{K}_s	Matrix zur Berechnung der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_s$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_s
\mathbf{K}_z	Matrix zur Berechnung der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_z$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_z
\mathbf{K}_{HR}	Matrix zur Berechnung der Last \mathbf{P}_{HR} aus den Unbekannten \mathbf{C}_{HR}
\mathbf{K}_{LR}	Matrix zur Berechnung der Last \mathbf{P}_{LR} aus den Unbekannten \mathbf{C}_{LR}
\mathbf{K}_{OF}	Matrix zur Berechnung der Last \mathbf{P}_{OF} aus den Unbekannten \mathbf{C}_{OF}

\mathbf{K}_{dyn}	dynamische Steifigkeitsmatrix des FE-Systems
\mathbf{K}_{ITM}	dynamische Steifigkeitsmatrix des gesamten überlagerten ITM-Systems
$\mathbf{K}_{\alpha\alpha}, \mathbf{K}_{\alpha\beta},$ $\mathbf{K}_{\beta\alpha}, \mathbf{K}_{\beta\beta}$	Elemente der dynamischen Steifigkeitsmatrix des ITM-Systems
$\mathbf{K}_{\Gamma\Gamma}, \mathbf{K}_{\Gamma\Omega},$ $\mathbf{K}_{\Omega\Gamma}, \mathbf{K}_{\Omega\Omega}$	Elemente der dynamischen Steifigkeitsmatrix des FE-Systems
$\mathbf{K}_{\Gamma\beta}$	dynamische Steifigkeitsmatrix der zylindrischen Hohlraumoberfläche
\mathbf{K}_{Δ}	Steifigkeitsmatrix des Dreieckelementes
$\mathbf{L}_{\mathbf{k}}$	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}$ aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$
$\mathbf{L}_{\mathbf{s}}$	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{s}}$ aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\mathbf{s}}$
$\mathbf{L}_{\mathbf{z}}$	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{z}}$ aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\mathbf{z}}$
\mathbf{L}_{Δ}	Matrix zur Berechnung der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}_{\Delta}$ aus den Verschiebungen \mathbf{u}_{Δ}
M	größte Ordnung der berücksichtigten Kugelflächenfunktionen
M_1, M_2	Skalarfunktionen
\mathbf{M}_{Δ}	Massenmatrix des Dreieckelementes
N	maximale Anzahl an Reihenglieder in Umfangsrichtung φ
N_i	Ansatzfunktionen zur Berechnung der Verschiebungen im Dreieckselement
\mathbf{N}_{ITM}	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix des gesamten überlagerten ITM-Systems
$\mathbf{N}_{\beta\beta}$	dynamische Nachgiebigkeitsmatrix der zylindrischen Hohlraumoberfläche
\mathbf{N}_{Δ}	Matrix zur Berechnung der Verschiebungen \mathbf{u}_{Δ} aus den Verschiebungen $\mathbf{u}_{\Delta\mathbf{k}}$
O	maximale Anzahl an Reihenglieder in x -Richtung
P	eingetragene Leistung
\mathbf{P}_1	Matrix der l -ten assoziierten Legendre-Funktionen P_m^l an den Stützstellen ϑ_i
\mathbf{P}_{kop}	Kräfte an der Kopplungsfläche
\mathbf{P}_{HR}	Lastvektor $(-p_{RR} - F_p - G_p)$ an der Oberfläche des kugelförmigen Hohlraums
\mathbf{P}_{LR}	Lastvektor $(-p_{rx} - p_{rr} - p_{r\varphi})$ an der Oberfläche des zylindrischen Hohlraums
\mathbf{P}_{OF}	Lastvektor $(p_{zx} \ p_{zy} \ p_{zz})$ an der Oberfläche des Halbraums
\mathbf{P}_{ITM}	Lastvektor des überlagerten ITM-Systems
$\mathbf{P}_{\Gamma\alpha}$	Vektor der Lasten an der Halbraumoberfläche
$\mathbf{P}_{\Gamma\beta}$	Vektor der Lasten an der zylindrischen Hohlraumoberfläche
\mathbf{P}_{Δ}	Vektor der Lasten am Dreieckselement

$\mathbf{P}_{\Delta k}$	Vektor der äquivalenten Knotenlasten am Dreieckselement
$\mathbf{P}_{\Gamma_{FE}}$	Vektor der Lasten am Kopplungsrand des FE-Systems
$\mathbf{P}_{\Omega_{FE}}$	Vektor der Lasten innerhalb des FE-Gebietes
Q^i	Koeffizienten der Volumenkraft
R	radiale Koordinate in Kugelkoordinaten
R_0	Radius des kugelförmigen Hohlraums
\mathbf{R}	Ortsvektor
S	maximale Anzahl an Reihenglieder in y -Richtung
\mathbf{S}_{ITM}	Spannungsmatrix des überlagerten ITM-Systems
$\mathbf{T}, \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\gamma$	Matrizen zur Transformation der Freiheitsgrade des FE-Systems
\mathbf{T}_{k-z}	Matrix zur Transformation der Spannungen von kartes. in Zylinderkoordinaten
\mathbf{T}_{k-s}	Matrix zur Transformation der Spannungen von kartes. in Kugelkoordinaten
\mathbf{V}_{ITM}	Matrix der Verschiebungen des überlagerten ITM-Systems
\mathbf{W}	Wichtungsmatrix für Gauß-Legendre-Quadratur

Mathematische Symbole

$\circ \longrightarrow$	Fourierhintransformation
$\bullet \longleftarrow \circ$	Fourierrücktransformation
$\Re(\)$	Realteil einer komplexen Größe
$\Im(\)$	Imaginärteil einer komplexen Größe
i	imaginäre Zahl
sign	Signum-Funktion
$\hat{(\)}$	Kennzeichnung für fouriertransformierte Größe
$\frac{\partial(\)}{\partial \theta}$	Partielle Ableitung einer Größe nach der Variablen θ
$(\)'$	Ableitung einer Größe nach der Koordinate x
$\dot{(\)}$	Ableitung einer Größe nach der Zeit
$(\) _i$	kovariante Ableitung einer Größe nach der Koordinate i
$(\)^T$	transponierte Matrix
$(\)^{-1}$	inverse Matrix
$\det(\)$	Determinante einer Matrix

I	Einheitsmatrix
Γ_{ij}^k	Christoffelsymbole
$J_n(z)$	Bessel-Funktion
$Y_n(z)$	Neumann-Funktion
$H_n^{(1)}(z)$	Hankel-Funktionen erster Art
$H_n^{(2)}(z)$	Hankel-Funktionen zweiter Art
$j_m(z)$	sphärische Bessel-Funktion
$y_m(z)$	sphärische Neumann-Funktion
$h_m^{(1)}(z)$	sphärische Hankel-Funktionen erster Art
$h_m^{(2)}(z)$	sphärische Hankel-Funktionen zweiter Art
$Y_m^l(\vartheta, \varphi)$	Kugelflächenfunktion
$P_m(\cos \vartheta)$	Legendre-Funktion
$P_m^l(\cos \vartheta)$	assoziierte Legendre-Funktion
$\bar{P}_m^l(\cos \vartheta)$	normierte assoziierte Legendre-Funktion

1 Einleitung

1.1 Motivation und Vorgehen

Die Beurteilung der Erschütterungen und des sekundären Luftschalls in Gebäuden infolge von in Tunnel oder an der Oberfläche verkehrenden Zügen haben in letzter Zeit, vor allem in dicht besiedelten Gebieten, an Bedeutung gewonnen. Die Prognose der Erschütterungen ist oft notwendig, da diese zu einer deutlichen Beeinträchtigung der Gebrauchstauglichkeit von Gebäuden führen können.

Die Erschütterungsproblematik kann in drei Teilsysteme aufgeteilt werden: das Emissionssystem, das Transmissionssystem und das Immissionssystem. Im Emissionssystem entstehen die Erschütterungen zum Beispiel durch ein sich im Tunnel bewegendes Fahrzeug. Das Transmissionssystem, der Boden, leitet diese Erschütterungen zum Immissionssystem, dem Bauwerk, weiter. Dort erhält man die Antwort infolge von für den Menschen spürbaren Erschütterungen (ca. 1 - 80 Hz) und hörbaren sekundären Luftschall (ab ca. 20 Hz).

Für die dynamische Berechnung solcher Systeme gibt es mehrere Verfahren wie die Finite-Elemente-Methode (FEM), die Randelementmethode (Boundary Element Method, BEM) oder die Integraltransformationsmethode (ITM). Die ITM hat den Vorteil, dass mit ihr die unendliche Ausdehnung des Bodens und die dreidimensionale Wellenausbreitung gut berücksichtigt werden können. Zudem treten keine Wellenreflexionen auf. Da sie aber nur für sehr einfache geometrische Formen anwendbar ist, können keine komplexen und detaillierten Strukturen des Tunnels und der Gebäude modelliert werden. Mit der FEM ist eine solche Modellierung möglich. Bei ihrer Anwendung treten jedoch Probleme mit Wellenreflexionen und der unendlichen Ausdehnung des Bodens auf.

Die in dieser Arbeit entwickelte hybride Berechnungsmethode koppelt die FEM mit der ITM und nutzt jeweils die Vorteile der einzelnen Verfahren. So werden die komplexen und detaillierten Strukturen des Emissions- und des Immissionssystems mit Finiten Elementen modelliert. Für die Wellenausbreitung im unendlich ausgedehnten Halbraum werden die Lösungen der ITM verwendet und an das FEM-System geknüpft. Da in der ITM nur einfache

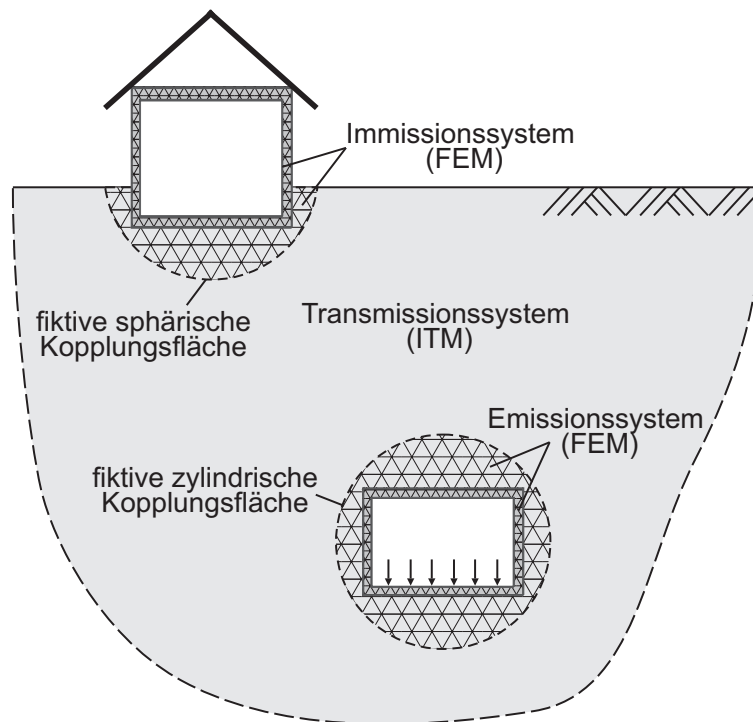


Abbildung 1.1: Gekoppeltes FEM-ITM System

geometrische Flächen (Ebene, Zylinder, Kugel) abgebildet werden können, erfolgt die Kopplung an fiktiven Flächen. So wird um den unendlich langen Tunnel eine fiktive Zylinderfläche und um das lokal begrenzte Gebäude eine fiktive Kugelfläche eingeführt. Alles was innerhalb dieser Flächen liegt - das bedeutet die jeweilige Struktur und der diese Struktur umgebende Boden - werden mit Finiten Elementen modelliert (siehe [Abbildung 1.1](#)).

Die Kopplung erfolgt mit Hilfe der Substrukturtechnik. Diese ermöglicht eine geschlossene Berechnung des vollständigen Emissions-Transmissions-Immissions-Systems im fouriertransformierten Wellenzahl-Frequenzraum. Das Verfahren kann insbesondere zur Untersuchung der Erschütterungsausbreitung bei mit konstanter Geschwindigkeit bewegten dynamischen Lasten in oberflächennahen oder tiefliegenden Tunneln bzw. an der Halbraumoberfläche herangezogen werden.

1.2 Überblick

Die von an der Oberfläche oder in Tunnel verkehrenden Zügen verursachten Erschütterungen können die Gebrauchstauglichkeit der Gebäude in der näheren Umgebung der Bahnlinien teilweise deutlich beeinträchtigen. Die Erschütterungseinleitung wird heutzutage meistens messtechnisch erfasst [[Müller u. Möser 2008](#)].

Andererseits gibt es zunehmend auch theoretische Arbeiten, die die Boden-Bauwerk-Interaktion analytisch beschreiben. Einen detaillierten Überblick über die entwickelten Methoden gibt [Müller 2007]. Am einfachsten sind Verfahren zur Ermittlung von Erschütterungen infolge bewegter Lasten. [Frýba 1972] stellt dazu grundlegende Untersuchungen an. Das Problem des unendlichen Halbraums lösen [Bettess u. Bettess 1984] unter Zuhilfenahme von infiniten Elementen. Um bei einem zweidimensionalen FEM-Modell Wellenreflexionen an den Rändern zu verhindern, verwenden [Rücker u. Said 1994] absorbierende Randbedingungen. [Krylov 1995] ermittelt eine analytische Lösung für in Tunnel fahrende Züge, welche jedoch nur im niedrigen Frequenzbereich anwendbar ist, da sie den Einfluss des Tunneldurchmessers vernachlässigt. [Lin u. Krylov 2000] erweitern diese daher für höhere Frequenzen. [Szczesniak 1996] erstellt zur Berechnung der Boden-Struktur-Interaktion die Komplementärmethode mit der die dynamische Steifigkeitsmatrix des Halbraums mit einer Vertiefung bestimmt werden kann. [Metrikine u. Vrouwenvelder 2000] untersuchen ein einfaches zweidimensionales Modell, bei welchem der Boden mit einer elastischen Ebene und der Tunnel mit einem Euler-Bernoulli-Balken modelliert werden. Um unendliche Ausdehnungen berücksichtigen zu können entwickeln [Wolf u. Song 1996] und [Wolf 2003] die Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM). In dieser semi-analytischen Methode wird das dreidimensionale System mit einer radialen Koordinate und zwei lokalen Koordinaten in Umfangsrichtung beschrieben. Zur Lösung werden in radialer Richtung analytische Lösungsansätze und in Umfangsrichtung FE-Ansätze verwendet. [Ekevid u. Wiberg 2002] und [Ekevid u. a. 2006] koppeln dieses Verfahren mit der FEM und bestimmen so die Antwort des Fahrweg-Boden-Systems. [Gardien u. Stuit 2003] ermitteln die Erschütterungsausbreitung von Tunneln mit Hilfe eines dreidimensionalen FEM-Modells, was jedoch einen sehr großen Berechnungsaufwand erfordert. [Andersen u. Nielsen 2003] verwenden dagegen ein dreidimensionales BEM-Modell um die Erschütterungen infolge einer bewegten Last auf dem Halbraum zu bestimmen. [Bonnet 1999] entwickelt eine BEM mit regularisierten Ansätzen und unter Verwendung von erweiterten Grundlösungen und löst so das Problem des Halbraums. Eine schnelle Randelementmethode ist die Fast Multipole Boundary Element Method, bei welcher die Randintegraloperatoren in einen Nahfeld- und einen Fernfeldanteil aufgespalten werden. [Fischer 2004], [Of 2006] und [Schanz u. Steinbach 2007] berechnen mit dieser Methode die unendliche akustische Wellenausbreitung in elastischen Medien und Fluiden.

Der Boden mit seiner unendlichen Ausdehnung wird am besten mit der BEM oder ITM beschrieben. Die Strukturen des Emissionssystems und Immissionssystems dagegen werden vorzugsweise mit Finiten Elementen modelliert, da sie so möglichst genau und flexibel abgebildet werden können. Um die Vorteile des jeweiligen Verfahrens auszunutzen, wurden einige hybride Verfahren erstellt. So verbinden [von Estorff u. a. 1991] die BEM mit der FEM und

berechnen dynamisch einen Tunnel im zweidimensionalen Raum für den ebenen Dehnungszustand. Auch [Jones u. a. 2000b] und [Jones u. a. 2002] verwenden ein zweidimensionales FEM-BEM-Modell zur Ermittlung der Erschütterungen infolge von in Tunneln verkehrenden Zügen. [Andersen u. Jones 2002] erweitern dieses auf die dritte Dimension. Eine Gegenüberstellung des zwei- und des dreidimensionalen Modells ist in [Andersen u. Jones 2006] zu finden. [Bode 2000] und [Savidis u. Bode 2002] verwenden ein dreidimensionales FEM-BEM-Modell im Zeitbereich unter Zuhilfenahme der Fundamentallösung für den geschichteten Halbraum. [Savidis u. Bergmann 2005] validieren dieses Verfahren durch den Vergleich mit Felduntersuchungen. [Schepers u. Savidis 2009] ermitteln mit einem FEM-BEM-Modell im Frequenzbereich den Erschütterungsschutz infolge von aufgeschütteten Erddämmen.

[Sheng u. a. 1999a] erarbeiten eine Methode, in der sie ein unendliches geschichtetes Balkenmodell für den Fahrweg mit einem geschichteten Halbraum koppeln. Dies geschieht unter Verwendung der Haskell-Thomson-Übertragungsmatrizen für den Fall stationärer sowie bewegter dynamischer Lasten ([Sheng u. a. 1999b], [Jones u. a. 2000a]). Auch Rad- und Schienenunebenheiten können modelliert werden [Sheng u. a. 2003]. [Triepaischajonsak u. a. 2010] validieren das von Sheng erarbeitete Verfahren indem sie ihre Berechnungen mit Messergebnissen vergleichen. In ihrer Diskreten-Wellenzahl-FEM-BEM-Methode machen sich [Sheng u. a. 2005] und [Sheng u. a. 2006] die invariante Geometrie des Tunnels und des Bodens in Längsrichtung zunutze, was zu einer deutlichen Reduzierung der Rechenzeiten führt.

[Lombaert u. a. 2000] verknüpfen ein analytisches Balkenmodell mit der BEM um die Erschütterungen zu bestimmen, die ein Fahrzeug auf einem unebenen Fahrweg erzeugt. [Clouteau u. a. 2000] verwenden dagegen einen periodischen FEM-BEM-Ansatz, bei welchem die Periodizität des Systems in Längsrichtung durch Anwendung der Floquet-Transformation ausgenutzt wird. Dadurch kann die erforderliche Diskretisierung auf eine einzelne begrenzte Referenzzelle beschränkt werden. In letzter Zeit sind mehrere Arbeiten entstanden, die diese Methode nutzen, um Erschütterungen infolge von dynamischer Lasten an der Oberfläche und in Tunnel zu berechnen ([Clouteau u. a. 2005], [Degrande u. a. 2006a], [Lombaert u. a. 2006], [Lombaert u. Degrande 2009], [Gupta u. a. 2009b], [Gupta u. Degrande 2010], [Fiala u. a. 2010] und [Verbraken u. a. 2010]). Die von [Degrande u. a. 2006b] und [Gupta u. a. 2009a] durchgeführten Messungen während der Passage von Zügen werden zur Validierung des Modells verwendet.

[Hussein u. Hunt 2003],[Forrest u. Hunt 2006a] und [Forrest u. Hunt 2006b] entwickeln ein halbanalytisches Pipe-in-Pipe-Modell (PiP) auf Basis der Schalentheorie. Hierbei wird der Tunnel als unendlich lange kreisförmige Schale modelliert, die von einer unendlich dicken Boden-Zylinderschale umgeben wird. Die Kalkulationen erfolgen im Wellenzahl-Frequenzbe-

reich, wobei das Gesamtsystem als invariant in Längsrichtung angesehen wird. Einen guten Überblick über Arbeiten die diese Methode verwenden findet man bei [Hunt u. a. 2010]. So erweitert [Hussein u. a. 2006] das Modell und führt eine Halbraumoberfläche ein. Der Einfluss der Oberfläche auf den Tunnel wird hierbei aber vernachlässigt. [Hussein u. Hunt 2009] untersuchen die Auswirkungen von diskontinuierlichen Fahrwegen auf die entstehenden Erschütterung. Auch der Einfluss von inhomogenen Böden [Jones u. Hunt 2009], schrägen Schichten [Jones u. Hunt 2010b], Hohlräumen außerhalb der Tunnelschale [Jones u. Hunt 2010a], einer zweiten parallelen Tunnelröhre [Hunt u. a. 2010] sowie von Pfahlgruppen [Coulier u. a. 2010] kann mit diesem Verfahren ermittelt werden. [Gupta u. a. 2007] führen Vergleichsberechnungen zwischen den beiden numerischen Methoden von Hunt u. a. und Degrande u. a. durch.

Die ITM ist ebenfalls ein geeignetes Verfahren um die unendliche Ausdehnung des Bodens zu modellieren. Bereits [Lamb 1904] bestimmte die Antwort des homogenen Halbraums auf eine harmonische Einzellast analytisch unter Verwendung von Integraltransformationen. Eine Übersicht über die Anwendungsbereiche gibt [Grundmann 1999]. Bewegte dynamische Lasten können in dieser Methode einfach implementiert werden, was in der Berechnung zu einer Verschiebung im Frequenzbereich führt ([Konrad 1985], [Müller 1989]). [Zirwas 1996] und [Rastandi 2003] koppeln die ITM mit der FEM und ermitteln damit die dynamischen Bauwerk-Boden-Interaktionen.

Die Überlagerungen von Fundamentalsystemen der ITM zu komplexeren ITM-Systemen und deren anschließende Kopplung mit der FEM stellt einen vielversprechenden Ansatz in der Tunnel-Boden-Bauwerk-Interaktion dar, wie [Müller u. a. 2008] am Beispiel eines Tunnels im Halbraum zeigen. Die Überlagerung erfolgt dabei analog zu [Buchs Schmid 2002], der das zweidimensionale Problem einer Halbscheibe mit Loch unter Überlagerung geeigneter analytischer Grundlösungen behandelt.

1.3 Gliederung

Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Der Einleitung folgend werden im 2. Kapitel die Grundgleichungen für das verwendete kontinuumsmechanische Bodenmodell dargestellt.

Anschließend werden in den Kapiteln 3 bis 5 mit Hilfe der Integraltransformationemethode (ITM) die Lösungen für die Fundamentalsysteme des homogenen und des geschichteten Halbraums, des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum und des Vollraums mit sphärischem Hohlraum unter dynamischer Belastung hergeleitet. Für den zylindrischen Hohlraum setzt sich

diese entlang des Umfangs aus einer Fourierreihe zusammen. In radialer Richtung beschreiben Bessel-Funktionen die Ausbreitung ins Kontinuum. Für das System eines sphärischen Hohlraums werden alle Größen entlang der Kugelfläche in eine Reihe von Kugelflächenfunktionen zerlegt. Diese setzen sich ihrerseits aus dem Produkt einer komplexen Exponentialfunktion und einer assoziierten Legendre-Funktion zusammen. In radialer Richtung finden sphärische Bessel-Funktionen eine Anwendung.

Die Ergebnisse der Fundamentalsysteme werden in Kapitel 6 so überlagert, dass die Koeffizienten der Fourierreihenentwicklung der Spannungen und der Verschiebungen an den Oberflächen die Randbedingungen (Dirichlet-, Neumann- bzw. Robin-Randbedingungen) erfüllen. Somit kann eine geschlossene Lösung für das System eines Halbraums mit zylindrischen und kugelförmigen Hohlräumen, länglichen Gräben und örtlich begrenzten Gruben ermittelt werden. Es wird auch gezeigt, wie mit der Überlagerungstechnik parallele und schräge Schichten oberhalb, unterhalb und auf Höhe des Hohlraums eingeführt werden können. Die Lösungscharakteristik der Fundamentalsysteme kann in schnell abklingende Nahfelder und Fernfelder mit großer Eindringtiefe aufgespalten werden. Die Berücksichtigung dieser Effekte führt für viele Systeme zu einer deutlichen Reduktion des Rechenaufwands. Schließlich wird erörtert, wie unter Zuhilfenahme der Admittanzen an den Oberflächen der Einfluss der Tunneltiefe bewertet werden kann.

In der Finite-Elemente-Methode (FEM) steigt für große dreidimensionale Strukturen der Berechnungsaufwand stark an. In Kapitel 7 wird daher gezeigt, wie für sehr lange Strukturen mit konstantem Querschnitt (Tunnel, Graben) das System durch eine Fouriertransformation bezüglich der Längsrichtung $x \circ \bullet k_x$ auf ein quasi ebenes Problem zurückgeführt werden kann. Mit der FEM im fouriertransformierten k_x -Raum kann der Rechenaufwand deutlich reduziert werden, da das System nun lediglich für eine Serie von voneinander unabhängigen zweidimensionalen Problemen in der (y, z) -Ebene gelöst werden muss.

Die Ergebnisse aus den beiden vorhergehenden Kapiteln werden in Kapitel 8 unter Verwendung der Substrukturtechnik miteinander verbunden. Dazu werden zuerst die Nachgiebigkeiten an den fiktiven Kopplungsrändern mit der ITM berechnet. Zudem werden die Freiheitsgrade der FEM entlang der Ränder in Fourierreihen bzw. in eine Reihe von Kugelflächenfunktionen entsprechend des ITM-Systems transformiert. Nun kann die Inverse der Nachgiebigkeitsmatrix in die Steifigkeitsmatrix des FEM-Systems eingebaut werden.

Eine kurze Zusammenfassung mit Ausblick in Kapitel 9 schließen die Arbeit ab.

2 Grundgleichungen der linearen räumlichen Elastizitätstheorie

2.1 Vorbemerkungen

In einem dynamisch beanspruchten Kontinuum breiten sich Spannungs- und Verformungszustände in Form von Wellen aus. Die Ausbreitung im Boden hängt von den Materialeigenschaften sowie ihre Verteilung innerhalb des Kontinuums ab.

Die folgenden Betrachtungen erfolgen unter Verwendung eines linear elastischen Bodenmodells. Es wird homogenes Material mit isotropem Materialverhalten vorausgesetzt. Dieses Bodenmodell beschreibt das eigentlich nichtlineare Verhalten des Bodens in sehr guter Näherung, da bei der Erschütterungsausbreitung im Untergrund nur sehr kleine Formänderungen auftreten [Haupt 1986].

2.2 Lamésche Gleichung

Die Gleichgewichtsbedingung für das Kontinuum lautet:

$$\sigma^{ij}|_j + Q^i - \rho \ddot{u}^i = 0 \quad (2.1)$$

Dabei sind σ^{ij} der Cauchysche Spannungstensor, Q^i die Volumenkräfte und $\rho \ddot{u}^i$ die d'Alembert'schen Trägheitskräfte.

Der kinematische Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und Verzerrungen wird im Falle kleiner Verformungen mit dem linearisierten Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor beschrieben:

$$\epsilon^{ij} = \frac{1}{2}(u^j|_i + u^i|_j) \quad (2.2)$$

Die Beziehung zwischen den Spannungen und Verzerrungen ergibt sich für linear elastisches, homogenes und isotropes Material zu:

$$\sigma^{ij} = 2\mu\epsilon^{ij} + \lambda\epsilon_m^m g^{ij} \quad (2.3)$$

Hierin sind λ und μ die Laméschen Konstanten. Sie stehen mit den gebräuchlichen elastischen Konstanten wie dem Schubmodul G , dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν in folgendem Zusammenhang:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.4)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.5)$$

Zur Berücksichtigung der Materialdämpfung gibt es mehrere Dämpfungsmodelle. Die häufig verwendete viskose Dämpfung besitzt den Nachteil, dass der Energieverlust pro Zyklus für eine bestimmte Amplitude frequenzabhängig ist. Messergebnisse zeigen jedoch, dass die Materialdämpfung hinreichend genau durch eine frequenzunabhängige Hysterese beschrieben werden kann ([Hardin 1965],[Hardin u. Drnevich 1972]). Durch die Einführung eines komplexen Elastizitätsmodul kann auf einfache Weise hysteretische Dämpfung im System eingebracht werden (2.6). Dieses Korrespondenzprinzip wird u.a. in [Wolf 1985] und [Clough u. Penzien 1993] beschrieben.

$$\hat{E} = E (1 + i \operatorname{sign}(\omega) 2D) = E (1 + i \operatorname{sign}(\omega) \zeta) \quad (2.6)$$

Hierbei ist ω die Frequenz und D das Lehrsches Dämpfungsmaß bzw. ζ die hysteretische Dämpfungszahl. Die Laméschen Konstanten λ und μ werden somit ebenfalls zu komplexen Größen.

Einsetzen von Gleichung (2.2) in Gleichung (2.3) liefert einen Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Spannungen:

$$\sigma^{ij} = \mu(u^j|_i + u^i|_j) + \lambda u^m|_m g^{ij} \quad (2.7)$$

Setzt man nun Gleichung (2.7) in Gleichung (2.1) ein, so erhält man die Lamésche Differentialgleichung (2.8). Unter der Voraussetzung, dass die Belastung immer an den Rändern angreift, können im Folgenden die Volumenkräfte Q^i vernachlässigt werden.

$$\mu u^i|_j + (\lambda + \mu) u^j|_i - \rho \ddot{u}^i = 0 \quad (2.8)$$

2.3 Satz von Helmholtz

Die Lamésche Gleichung (2.8) stellt ein System von 3 gekoppelten partiellen Differentialgleichungen dar, das mit Hilfe des Helmholtzschen Satzes entkoppelt werden kann. So zerlegt [Lamé 1852] das Vektorfeld der Verschiebungen u_i in ein rotationsfreies Feld und ein quellenfreies Feld. Das rotationsfreie Feld wird über den Gradienten eines Skalarfeldes Φ , der rotationsfrei ist (siehe Gleichung 2.10), und das quellenfreie Feld über die Rotation eines Vektorfeldes Ψ_i , die quellenfrei ist (siehe Gleichung 2.11), dargestellt. So ergibt sich eine mögliche Zerlegung des Verschiebungsfeldes zu:

$$u^i = \Phi|{}^i + \Psi_l|{}_k \epsilon^{ikl} \quad (2.9)$$

mit

$$(\Phi|{}_i)|{}_k \epsilon^{jki} = 0 \quad (2.10)$$

$$(\Psi_l|{}_k \epsilon^{ikl})|{}_i = 0 \quad (2.11)$$

Das Einsetzen des Verschiebungsansatzes (2.9) in die Lamésche Gleichung (2.8) liefert:

$$\begin{aligned} & \mu \Phi|{}_j^{ij} + (\lambda + \mu) \Phi|{}_j^{ji} - \rho \ddot{\Phi}|{}^i + \mu (\Psi_l|{}_k \epsilon^{ikl})|{}_j^j + (\lambda + \mu) \underbrace{(\Psi_l|{}_k \epsilon^{jkl})|{}_j^i}_{=0 \text{ (s. Gl. (2.11))}} - \rho \ddot{\Psi}_l|{}_k \epsilon^{ikl} = \\ & = \left[(\lambda + 2\mu) \Phi|{}_j^j - \rho \ddot{\Phi} \right]|{}^i + \left[\mu \Psi_l|{}_j^j - \rho \ddot{\Psi}_l \right]|{}_k \epsilon^{ikl} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Da diese Gleichung insbesondere dann erfüllt ist, wenn beide Ausdrücke in den eckigen Klammern gleich Null sind, erhält man die Differentialgleichungen

$$\Phi|{}_j^j - \frac{1}{c_p^2} \ddot{\Phi} = 0 \quad (2.13a)$$

$$\Psi_i|{}_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i = 0 \quad (2.13b)$$

mit den Wellengeschwindigkeiten

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{und} \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.14)$$

Die Gleichung für das skalare Potential Φ (2.13a) entspricht der Wellengleichung für eine Kompressionswelle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_p , welche eine reine Volumenänderung bewirkt. Die Gleichungen für die vektoriellen Potentiale Ψ_i (2.13b) entsprechen den Wellengleichungen von Scherwellen mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_s , welche reine Gestaltsänderungen hervorrufen.

Gleichung (2.9) stellt den drei Verschiebungskomponenten u^i vier neue Variablen Φ und Ψ_i gegenüber. Daher muss eine zusätzliche Bedingung eingeführt werden.

[Long 1967] zeigt, dass eine Komponente des Vektorfeldes beliebig gewählt werden kann, ohne die Vollständigkeit der Lösung zu beeinträchtigen. Daher ist es möglich eine Komponente des Vektorfeldes Ψ_i zu Null zu setzen. Dieser Ansatz des Vektorfeldes wird in Abschnitt 3.1 und Abschnitt 4.1 verwendet.

Da dieser Ansatz aber für bestimmte Randbedingungen nicht vollständig ist, wird in Abschnitt 4.1.3 und Abschnitt 5.2.2 eine alternative Zusatzbedingung verwendet. [Morse u. Feshbach 1953], [Sternberg 1960] und [Eringen u. Suhubi 1975] nehmen an, dass das Vektorfeld Ψ_i quellenfrei ist und somit gilt:

$$\Psi_i|{}^i = 0 \quad (2.15)$$

Durch diese zusätzliche Gleichung sind nur zwei der drei Komponenten Ψ_i voneinander unabhängig und die Lösung für das Vektorfeld Ψ kann somit nur zwei unabhängige Funktionen enthalten.

3 Der Halbraum unter dynamischer Belastung

3.1 Lösung der Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten

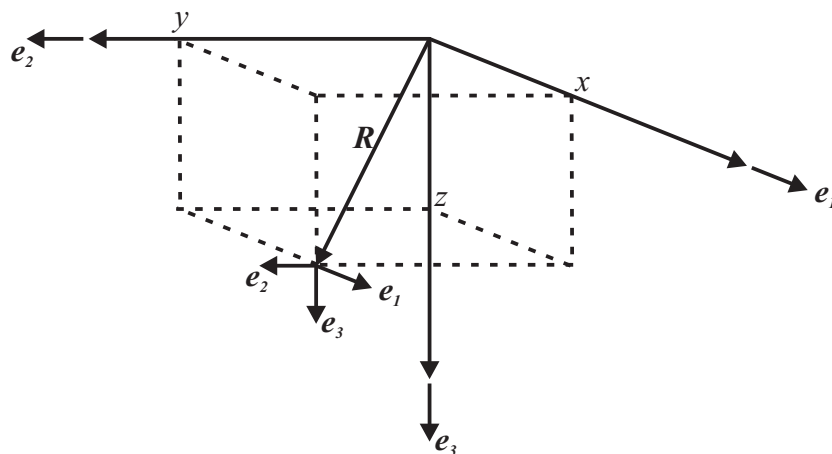


Abbildung 3.1: Kartesische Koordinaten

In kartesischen Koordinaten (Abbildung 3.1) ergeben die Bedingungsgleichungen (2.13) für die Skalarfunktion Φ und das Vektorfeld Ψ ein System entkoppelter partieller Differentialgleichungen:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi(x, y, z, t) = 0 \quad (3.1a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Psi_i(x, y, z, t) = 0 \quad (3.1b)$$

Mit der Fouriertransformation wird ein Differentialoperator im Originalraum in einen algebraischen Operator im transformierten Raum überführt (siehe Anhang A.2, [Brigham 1987])

und [Bracewell 1999]). Durch eine dreifache Fouriertransformation bezüglich der zwei Ortskoordinaten $x \circ \bullet k_x$, $y \circ \bullet k_y$ vom Orts- in den Wellenzahlbereich sowie der Zeit $t \circ \bullet \omega$ vom Zeit- in den Frequenzbereich lässt sich das System partieller Differentialgleichungen (3.1) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen (3.2). Die Ortskoordinate z bleibt hierbei untransformiert.

Alle fouriertransformierten Größen werden im Folgenden mit einem Dach ($\hat{}$) gekennzeichnet.

$$\left[-k_x^2 - k_y^2 + k_p^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \hat{\Phi}(k_x, k_y, z, \omega) = 0 \quad (3.2a)$$

$$\left[-k_x^2 - k_y^2 + k_s^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \hat{\Psi}_i(k_x, k_y, z, \omega) = 0 \quad (3.2b)$$

mit der Kompressionswellenzahl k_p und der Scherwellenzahl k_s

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad \text{und} \quad k_s = \frac{\omega}{c_s} \quad (3.3)$$

Für die Differentialgleichungen (3.2) kann ein analytischer Lösungsansatz gefunden werden:

$$\hat{\Phi} = A_1 e^{\lambda_1 z} + A_2 e^{-\lambda_1 z} \quad (3.4a)$$

$$\hat{\Psi}_i = B_{i1} e^{\lambda_2 z} + B_{i2} e^{-\lambda_2 z} \quad (3.4b)$$

mit

$$\lambda_1 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_p^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_s^2}. \quad (3.5)$$

Für die Sonderfälle mit λ_1 bzw. λ_2 gleich Null ($k_x^2 + k_y^2 = k_p^2$ bzw. $k_x^2 + k_y^2 = k_s^2$) ergeben sich die Differentialgleichungen (3.2) für die Skalarfunktion $\hat{\Phi}$ und das Vektorfeld $\hat{\Psi}$ zu:

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_i}{\partial z^2} = 0 \quad (3.6)$$

Die Lösung lautet in diesem Fall:

$$\hat{\Phi} = A_1 z + A_2 \quad \text{bzw.} \quad \hat{\Psi}_i = B_{i1} z + B_{i2} \quad (3.7)$$

Da diese Sonderfälle nur bei einem ungedämpften Boden auftreten können, werden sie im Folgenden nicht mehr berücksichtigt.

3.2 Verschiebungen und Spannungen in kartesischen Koordinaten

Wie in Abschnitt 2.3 dargestellt, kann nach [Long 1967] eine Komponente des vektoriellen Potentials Ψ_i frei gewählt werden. Nach Einführung der Zusatzbedingung $\Psi_z = 0$ vereinfacht sich im kartesischen Koordinatensystem der Potentialansatz für die Verschiebungen (Gleichung 2.9):

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$\mathbf{u}_k \qquad \qquad \mathbf{D}_k \qquad \qquad \mathbf{\Pi}_k$

Der Index k steht für kartesische Koordinaten.

Die in den Wellenzahlen-Frequenzraum (k_x, k_y, z, ω) transformierten Verschiebungsgrößen ergeben sich daraus zu:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} \\ ik_y & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & -ik_y & ik_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Phi} \\ \hat{\Psi}_x \\ \hat{\Psi}_y \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$\hat{\mathbf{u}}_k \qquad \qquad \hat{\mathbf{D}}_k \qquad \qquad \hat{\mathbf{\Pi}}_k$

Schreibt man die Gleichungen (3.4) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \hat{\Phi} \\ \hat{\Psi}_x \\ \hat{\Psi}_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 z} & e^{-\lambda_1 z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 z} & e^{-\lambda_2 z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 z} & e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_{x1} \\ B_{x2} \\ B_{y1} \\ B_{y2} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$\hat{\mathbf{\Pi}}_k \qquad \qquad \hat{\mathbf{A}}_k \qquad \qquad \mathbf{C}_k$

so lassen sich die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_k$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_k ermitteln:

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \hat{\mathbf{D}}_k \cdot \hat{\mathbf{A}}_k \cdot \mathbf{C}_k = \hat{\mathbf{H}}_k \cdot \mathbf{C}_k$$

beziehungsweise

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} \mathbf{C}_{\mathbf{k}} \quad (3.11)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x e^{\lambda_1 z} & ik_x e^{-\lambda_1 z} & 0 & 0 & -\lambda_2 e^{\lambda_2 z} & \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ ik_y e^{\lambda_1 z} & ik_y e^{-\lambda_1 z} & \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 z} & -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & -ik_y e^{\lambda_2 z} & -ik_y e^{-\lambda_2 z} & ik_x e^{\lambda_2 z} & ik_x e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_{x1} \\ B_{x2} \\ B_{y1} \\ B_{y2} \end{pmatrix}$$

$\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{k}} \qquad \mathbf{C}_{\mathbf{k}}$

In kartesischen Koordinaten lautet die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehung nach Gleichung (2.2)

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}} = \mathbf{L}_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}} \qquad \mathbf{L}_{\mathbf{k}} \qquad \mathbf{u}_{\mathbf{k}}$

und die Spannungs-Verzerrungsbeziehung nach Gleichung (2.3):

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}} = \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}} \quad (3.13)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{zx} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}} \qquad \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \qquad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}}$

Eine Transformation der Gleichungen (3.12) und (3.13) in den Wellenzahlen-Frequenzraum

(k_x, k_y, z, ω) liefert:

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{xx} \\ \hat{\epsilon}_{yy} \\ \hat{\epsilon}_{zz} \\ \hat{\epsilon}_{xy} \\ \hat{\epsilon}_{zy} \\ \hat{\epsilon}_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & 0 \\ 0 & ik_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2}ik_y & \frac{1}{2}ik_x & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2}ik_y \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2}ik_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{yy} \\ \hat{\sigma}_{zz} \\ \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{zy} \\ \hat{\sigma}_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{xx} \\ \hat{\epsilon}_{yy} \\ \hat{\epsilon}_{zz} \\ \hat{\epsilon}_{xy} \\ \hat{\epsilon}_{zy} \\ \hat{\epsilon}_{zx} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$\hat{\sigma}_{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \qquad \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}$

Die transformierten Spannungen $\hat{\sigma}_{\mathbf{k}}$ ergeben sich somit aus den Unbekannten $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}$ zu:

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{k}} \quad (3.16)$$

mit

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{k}=\mu} = \begin{bmatrix} -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu}k_p^2) e^{\lambda_1 z} & -(2k_x^2 + \frac{\lambda}{\mu}k_p^2) e^{-\lambda_1 z} & 0 & 0 & -2ik_x \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & 2ik_x \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu}k_p^2) e^{\lambda_1 z} & -(2k_y^2 + \frac{\lambda}{\mu}k_p^2) e^{-\lambda_1 z} & 2ik_y \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & -2ik_y \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 & 0 \\ (2k_r^2 - k_s^2) e^{\lambda_1 z} & (2k_r^2 - k_s^2) e^{-\lambda_1 z} & -2ik_y \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & 2ik_y \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 2ik_x \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & -2ik_x \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ -2k_x k_y e^{\lambda_1 z} & -2k_x k_y e^{-\lambda_1 z} & ik_x \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & -ik_x \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & -ik_y \lambda_2 e^{\lambda_2 z} & ik_y \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ 2ik_y \lambda_1 e^{\lambda_1 z} & -2ik_y \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{\lambda_2 z} & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{-\lambda_2 z} & -k_x k_y e^{\lambda_2 z} & -k_x k_y e^{-\lambda_2 z} \\ 2ik_x \lambda_1 e^{\lambda_1 z} & -2ik_x \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & k_x k_y e^{\lambda_2 z} & k_x k_y e^{-\lambda_2 z} & -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{\lambda_2 z} & -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

und

$$k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.18)$$

3.3 Lösung für den homogenen Halbraum

Die sechs unbekanntenen Koeffizienten A_1 , A_2 , B_{x1} , B_{x2} , B_{y1} und B_{y2} werden unter Zuhilfenahme der Randbedingungen berechnet. Drei Koeffizienten können aus den nicht lokalen Randbedingungen im Unendlichen unter Verwendung der Sommerfeldschen Abstrahlbedingung ermittelt werden. Diese fordert, dass die Amplituden der Wellen mit zunehmender Tiefe abklingen bzw. nicht aufklingen und dass die Wellenausbreitung nur in positiver z -Richtung, das heißt von der Halbraumoberfläche weg, fortschreitet.

Die auftretenden Wellen können in zwei Typen unterteilt werden, den Oberflächenwellen und den Raumwellen, welche mit Hilfe der Werte von λ_1 bzw. λ_2 in Gleichung (3.5) für einen ungedämpften Boden gegeneinander abgegrenzt werden können. Für reelle Werte von λ_1 bzw. λ_2 ($k_x^2 + k_y^2 > k_p^2$ bzw. $k_x^2 + k_y^2 > k_s^2$) liegen Oberflächenwellen vor, die mit zunehmender Tiefe z exponentiell auf- oder abklingen. Für imaginäre Werte von λ_1 bzw. λ_2 ($k_x^2 + k_y^2 < k_p^2$ bzw. $k_x^2 + k_y^2 < k_s^2$) liegen Raumwellen vor, die sich in positiver oder negativer z -Richtung bewegen.

[Müller 1989] zeigt, dass für negative Frequenzen ω die Koeffizienten A_1 und B_{i1} je nach Wellentyp einer in positiver z -Richtung exponentiell zunehmenden Oberflächenwelle, bzw. einer sich in negativer z -Richtung bewegenden Raumwelle zuzuordnen sind. Da diese Wellen im ungeschichteten Halbraum nicht auftreten, können diese Koeffizienten zu Null gesetzt werden. Für positive Frequenzen verschwinden je nach Wellentyp entweder die Koeffizienten A_1 und B_{i1} (bei Oberflächenwellen) oder A_2 und B_{i2} (bei Raumwellen). Um diese zusätzliche Fallunterscheidung zu vermeiden, wird im Folgenden immer ein negatives ω vorausgesetzt.

Da die Zustandsgröße $Z(x, y, z, t)$ als physikalische Größe rein reell ist, muss die transformierte Größe $\hat{Z}(x, y, z, \omega)$ eine konjugiert komplexe Funktion sein [Brigham 1987]. Somit können die Werte von $\hat{Z}(x, y, z, \omega)$ im Orts-Frequenzraum für positiven Frequenzen ω aus den Ergebnissen für negative Frequenzen nach einer zweifachen Fourier-Rücktransformation vom Wellenzahlen- in den Ortsbereich ($k_x \bullet \longleftrightarrow x$, $k_y \bullet \longleftrightarrow y$) mittels Symmetrieüberlegungen bestimmt werden.

Nachdem die Koeffizienten A_1 , B_{x1} und B_{y1} infolge der Randbedingungen im Unendlichen zu Null gesetzt wurden, können die restlichen drei Unbekannten A_2 , B_{x2} und B_{y2} mit Hilfe der lokalen Randbedingungen an der Halbraumoberfläche bestimmt werden. Die Spannungen an der Oberfläche (OF, $z = 0$) müssen mit den dort angreifenden Belastungen (p_{zx} , p_{zy} und p_{zz}) im Gleichgewicht stehen. Eine Transformation der drei Belastungen in den Wellenzahlen-Frequenzraum $p_{zi}(x, y, z, t) \bullet \longleftrightarrow \hat{p}_{zi}(k_x, k_y, z, \omega)$ und das Aufstellen des Gleichgewichts liefert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2ik_x\lambda_1\mu & k_xk_y\mu & -(\lambda_2^2 + k_x^2)\mu \\ -2ik_y\lambda_1\mu & (\lambda_2^2 + k_y^2)\mu & -k_xk_y\mu \\ (2k_r^2 - k_s^2)\mu & 2ik_y\lambda_2\mu & -2ik_x\lambda_2\mu \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}_{\text{OF}}} \underbrace{\begin{pmatrix} A_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_{\text{OF}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\hat{p}_{zx} \\ -\hat{p}_{zy} \\ -\hat{p}_{zz} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{P}}_{\text{OF}}} \quad (3.19)$$

Die Unbekannten A_2 , B_{x2} und B_{y2} ergeben sich aus der Gleichung:

$$\mathbf{C}_{\text{OF}} = \hat{\mathbf{K}}_{\text{OF}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\text{OF}} \quad (3.20)$$

Nun kann der Verlauf der transformierten Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{k}}$ und der transformierten Spannungen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{k}}$ mit den Gleichungen (3.11) und (3.16) ermittelt werden. Die Verschiebungen und Spannungen im Originalraum (x, y, z, t) erhält man schließlich über eine mehrfache Fourier-Rücktransformation.

Das hergeleitete Ergebnis gilt allerdings nur unter der Voraussetzung einer dynamischen Belastung ($\omega \neq 0$), da für eine statische Last mit $\omega = 0$ die Ansätze (3.4) nicht vollständig sind. Für diesen Fall wird auf die Arbeit [Lenz 2003] verwiesen.

3.4 Lösung für den geschichteten Halbraum

Der geschichtete Halbraum kann analog zum homogenen Halbraums berechnet werden. Der gewählte Ansatz (3.4) erlaubt es horizontale Schichtbegrenzungen ($z = \textit{konst}$) einzuführen, da die Tiefenkoordinate z untransformiert bleibt. Für jede Schicht s müssen die Wellengleichungen (3.2) erfüllt werden. Daher ergeben sich für jede zusätzliche eingeführte Schicht sechs neue Unbekannte $A_{j,s}$ und $B_{ij,s}$, aber auch sechs zusätzliche Übergangsbedingungen der Verschiebungen und Spannungen an den Schichtgrenzen.

Um bei Schichten das Auftreten von numerischen Problemen, die sich für große positive Argumente der Exponentialfunktion ergeben, zu verhindern, werden die Gleichungssysteme in Abschnitt 3.2 umgeformt [Grundmann u. Müller 1988]:

$$A_1 e^{\lambda_1 z} = (A_{11} e^{\lambda_1 h_s}) e^{-\lambda_1 h_s} e^{\lambda_1 z} = \bar{A}_1 e^{\lambda_1(z-h_s)} \quad (3.21a)$$

$$B_{i1} e^{\lambda_1 z} = (B_{i11} e^{\lambda_1 h_s}) e^{-\lambda_1 h_s} e^{\lambda_1 z} = \bar{B}_{i1} e^{\lambda_1(z-h_s)} \quad (3.21b)$$

mit $h_s \geq z$

Die Größe h_s entspricht hier der Dicke der jeweiligen Bodenschicht s .

Mit den neuen Unbekannten lautet Gleichung (3.11) für die transformierten Verschiebungen:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x e^{\lambda_1(z-h_s)} & ik_x e^{-\lambda_1 z} & 0 & 0 & -\lambda_2 e^{\lambda_2(z-h_s)} & \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ ik_y e^{\lambda_1(z-h_s)} & ik_y e^{-\lambda_1 z} & \lambda_2 e^{\lambda_2(z-h_s)} & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1(z-h_s)} & -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & -ik_y e^{\lambda_2(z-h_s)} & -ik_y e^{-\lambda_2 z} & ik_x e^{\lambda_2(z-h_s)} & ik_x e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{\text{sch}} \quad (3.22)$$

mit

$$\mathbf{C}_{\text{sch}} = \left(\bar{A}_{1,s} \quad A_{2,s} \quad \bar{B}_{x1,s} \quad B_{x2,s} \quad \bar{B}_{y1,s} \quad B_{y2,s} \right)^T \quad (3.23)$$

Die transformierten Spannungen ergeben sich analog aus Gleichung (3.16) und (3.17).

Zur Lösung des Systems können die $m = 6 \cdot s + 3$ Unbekannten über die 3 Randbedingungen an der Halbraumoberfläche und die $6 \cdot s$ Übergangsbedingungen an den s Schichtgrenzen ermittelt werden. Die Verschiebungen und Spannungen an diesen Grenzen können mittels der Gleichungen (3.24) bis (3.27) bestimmt werden.

Verschiebungen an der Schichtoberfläche ($z = 0$):

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x e^{-\lambda_1 h_s} & ik_x & 0 & 0 & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 h_s} & \lambda_2 \\ ik_y e^{-\lambda_1 h_s} & ik_y & \lambda_2 e^{-\lambda_2 h_s} & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 h_s} & -\lambda_1 & -ik_y e^{-\lambda_2 h_s} & -ik_y & ik_x e^{-\lambda_2 h_s} & ik_x \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{\text{sch}} \quad (3.24)$$

Verschiebungen an der Schichtunterfläche ($z = h_s$):

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & ik_x e^{-\lambda_1 h_s} & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 e^{-\lambda_2 h_s} \\ ik_y & ik_y e^{-\lambda_1 h_s} & \lambda_2 & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 h_s} & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 e^{-\lambda_1 h_s} & -ik_y & -ik_y e^{-\lambda_2 h_s} & ik_x & ik_x e^{-\lambda_2 h_s} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{\text{sch}} \quad (3.25)$$

Spannungen an der Schichtoberfläche ($z = 0$):

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{zx} \\ \hat{\sigma}_{zy} \\ \hat{\sigma}_{zz} \end{pmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2ik_x \lambda_1 e^{-\lambda_1 h_s} & -2ik_x \lambda_1 & k_x k_y e^{-\lambda_2 h_s} & k_x k_y & -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{-\lambda_2 h_s} & -(\lambda_2^2 + k_x^2) \\ 2ik_y \lambda_1 e^{-\lambda_1 h_s} & -2ik_y \lambda_1 & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{-\lambda_2 h_s} & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y e^{-\lambda_2 h_s} & -k_x k_y \\ (2k_r^2 - k_s^2) e^{-\lambda_1 h_s} & 2k_r^2 - k_s^2 & -2ik_y \lambda_2 e^{-\lambda_2 h_s} & 2ik_y \lambda_2 & 2ik_x \lambda_2 e^{-\lambda_2 h_s} & -2ik_x \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{\text{sch}} \quad (3.26)$$

Spannungen an der Schichtunterfläche ($z = h_s$):

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{zx} \\ \hat{\sigma}_{zy} \\ \hat{\sigma}_{zz} \end{pmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 2ik_x\lambda_1 & -2ik_x\lambda_1 e^{-\lambda_1 h_s} & k_x k_y & k_x k_y e^{-\lambda_2 h_s} & -(\lambda_2^2 + k_x^2) & -(\lambda_2^2 + k_x^2) e^{-\lambda_2 h_s} \\ 2ik_y\lambda_1 & -2ik_y\lambda_1 e^{-\lambda_1 h_s} & \lambda_2^2 + k_y^2 & (\lambda_2^2 + k_y^2) e^{-\lambda_2 h_s} & -k_x k_y & -k_x k_y e^{-\lambda_2 h_s} \\ 2k_r^2 - k_s^2 & (2k_r^2 - k_s^2) e^{-\lambda_1 h_s} & -2ik_y\lambda_2 & 2ik_y\lambda_2 e^{-\lambda_2 h_s} & 2ik_x\lambda_2 & -2ik_x\lambda_2 e^{-\lambda_2 h_s} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}_{\text{sch}} \quad (3.27)$$

3.5 Bewegte Lasten

Dynamische Lasten, die sich auf dem Halbraum mit einer konstanten Geschwindigkeit geradlinig bewegen, können im fouriertransformierten Raum einfach berücksichtigt werden [Müller 1989]. Die Belastungsfunktion einer sich in x -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v bewegenden Last $p(x, y)$, die sich bezüglich der Zeit mit der Funktion $f(t)$ verändert, lautet:

$$p(x, y, t) = p_0(x - vt, y) \cdot f(t) \quad (3.28)$$

Nach einer zweifachen Fouriertransformation vom Orts- in den Wellenzahlbereich ($x \circ \bullet k_x$, $y \circ \bullet k_y$) erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{p}(k_x, k_y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(x - vt, k_y) f(t) e^{-ik_x x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_0(x - vt, k_y) e^{-i(x-vt)k_x} dx e^{-ivtk_x} \cdot f(t) = \\ &= \hat{p}_0(k_x, k_y) e^{-ivtk_x} \cdot f(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Eine weitere Fouriertransformation in den Frequenzbereich ($t \circ \bullet \omega$) liefert:

$$\begin{aligned} \hat{p}(k_x, k_y, \omega) &= \hat{p}_0(k_x, k_y) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ivtk_x} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \hat{p}_0(k_x, k_y) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega + vk_x)t} dt = \\ &= \hat{p}_0(k_x, k_y) \cdot \hat{f}(\omega + vk_x) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die Fouriertransformierte einer mit der Geschwindigkeit v bewegten und mit der Frequenz ω harmonisch schwingenden Last ergibt sich somit aus der Fouriertransformierten der unbewegten Last mit einer von k_x abhängigen Frequenz $\bar{\omega} = \omega + vk_x$

4 Der Vollraum mit zylindrischem Hohlraum unter dynamischer Belastung

4.1 Lösung der Bewegungsgleichung in Zylinderkoordinaten

4.1.1 Allgemeine Grundlagen

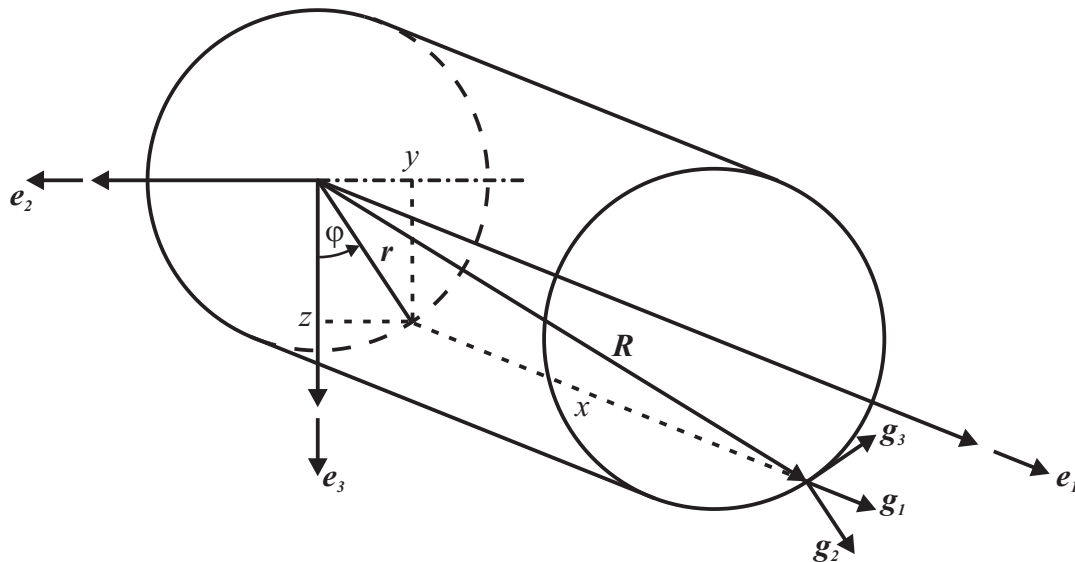


Abbildung 4.1: Zylinderkoordinaten

Das Problem eines Vollraums mit einem zylindrischen, unendlichen Hohlraum wird am besten in Zylinderkoordinaten (Abbildung 4.1) beschrieben.

Der Ortsvektor \mathbf{R} eines Punktes im Raum kann sowohl in kartesischen Koordinaten ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$) als auch in Zylinderkoordinaten ($\theta^{1'} = x$, $\theta^{2'} = r$, $\theta^{3'} = \varphi$) dargestellt werden.

Zwischen den kartesischen Koordinaten und den Zylinderkoordinaten besteht der Zusammenhang:

$$x = x, \quad y = -r \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \varphi \quad (4.1)$$

Die Basisvektoren $\mathbf{g}_{i'}$ des krummlinigen Koordinatensystems ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{1'} &= 1 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{g}_{2'} &= -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_2 + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{g}_{3'} &= -r \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_2 - r \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Transformationsbeziehungen für die Basisvektoren und die Koordinaten lauten somit:

$$\mathbf{g}_{i'} = \beta_{i'}^{j^0} \mathbf{e}_j \quad \text{und} \quad x^{i'} = x^{j^0} \beta_{j^0}^{i'} \quad (4.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \left[\beta_{i'}^{j^0} \right] &= \left[\frac{\partial x^{j^0}}{\partial \theta^{i'}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -r \cos \varphi & -r \sin \varphi \end{bmatrix} \\ \left[\beta_{j^0}^{i'} \right] &= \left[\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial x^{j^0}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & -\frac{1}{r} \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Da im Folgenden physikalische Verschiebungen und Spannungen berechnet werden müssen, wird auf ein Koordinatensystem mit normierten Basisvektoren \mathbf{g}_i übergegangen.

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_{1'}, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_{2'}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{1}{r} \mathbf{g}_{3'} \quad (4.5)$$

Zwischen dem normierten und dem nicht normierten Koordinatensystem kann folgendermaßen transformiert werden:

$$\mathbf{g}_i = \beta_i^{j'} \mathbf{g}_{j'} \quad \text{und} \quad x^i = x^{j'} \beta_{j'}^i \quad (4.6)$$

mit

$$\left[\beta_i^{j'} \right] = \left[\frac{\partial \theta^{j'}}{\partial \theta^i} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \left[\beta_{j'}^i \right] = \left[\frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^{j'}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Die Transformationsmatrizen zwischen dem normierten Koordinatensystem und dem kartesischen Koordinatensystem lauten schließlich:

$$\left[\beta_i^{j_0} \right] = \left[\beta_i^{j'} \right] \cdot \left[\beta_{j'}^{j_0} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\left[\beta_{j_0}^i \right] = \left[\beta_{j_0}^{j'} \right] \cdot \left[\beta_{j'}^i \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix}$$

Für die normierte Basis \mathbf{g}_i ergeben sich die Metriktensoren g_{ij} und g^{ij} zu

$$\left[g_{ij} \right] = \left[g^{ij} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

und die Permutationssymbole ϵ_{ijk} und ϵ^{ijk} zu:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, & \quad \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1, & \quad \text{restliche } \epsilon_{ijk} = 0 \\ \epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = 1, & \quad \epsilon^{321} = \epsilon^{213} = \epsilon^{132} = -1, & \quad \text{restliche } \epsilon^{ijk} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die kovarianten Ableitungen im normierten und nicht normierten Koordinatensystem stehen in dem Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial \theta^{j'}} \frac{\partial \theta^{j'}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial \theta^{j'}} \beta_i^{j'} \quad (4.11)$$

und berechnen sich somit wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \theta^1} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta^3} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (4.12)$$

Die Christoffelsymbole ergeben sich zu:

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{r}, \quad \text{restliche } \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (4.13)$$

4.1.2 Lösung der Wellengleichung - Variante 1

Mit Hilfe der Umformung

$$\begin{aligned} \Phi|_j^j &= \Phi_{,j}^j + \Gamma_{kj}^j \Phi^{,k} = \\ &= \Phi_{,11} + \Phi_{,22} + \Phi_{,33} + \Gamma_{23}^3 \Phi_{,2} = \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] \Phi \end{aligned} \quad (4.14)$$

lautet die Bedingungsgleichungen (2.13) im zylindrischen Koordinatensystem für die Skalarfunktion Φ :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (4.15)$$

In Zylinderkoordinaten sind die Differentialgleichungen für die vektoriellen Potentiale Ψ_i (2.13b) nicht entkoppelt, da die Basis \mathbf{g}_i nicht stationär ist. [Konrad 1985] löst diese Problem, indem er die Komponenten des zylindrischen Koordinatensystems Ψ_i durch die Komponenten des kartesischen Koordinatensystems Ψ_{i^0} ausdrückt. Diese liefern für die Vektorpotentiale ein System entkoppelter partieller Differentialgleichungen, da im kartesischen Koordinatensystem die Christoffelsymbole verschwinden:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Psi_{i^0}(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (4.16)$$

Das Verschiebungsfeld u^i (Gleichung 2.9) ergibt sich nach einer Koordinatentransformation in Abhängigkeit der Skalarfunktion Φ und der kartesischen Koordinaten des vektoriellen Feldes Ψ_{i^0} zu:

$$\begin{aligned} u^i &= \Phi|_i^i + \Psi_l|_k \epsilon^{ikl} = \\ &= \Phi_{,i} + \Psi_{i^0,k} \beta_l^{i^0} \epsilon^{ikl} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Hieraus können die physikalischen Komponenten des Verschiebungsvektors ($u_x = u^1$,

$u_r = u^2$, $u_\varphi = u^3$) berechnet werden:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Psi_{i^0,k} \beta_l^{i^0} \epsilon^{1kl} = \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Psi_{i^0,2} \beta_3^{i^0} - \Psi_{i^0,3} \beta_2^{i^0} = \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_y}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \varphi} \cos \varphi
\end{aligned} \tag{4.18a}$$

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Psi_{i^0,k} \beta_l^{i^0} \epsilon^{2kl} = \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \Psi_{i^0,3} \beta_1^{i^0} - \Psi_{i^0,1} \beta_3^{i^0} = \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \sin \varphi
\end{aligned} \tag{4.18b}$$

$$\begin{aligned}
u_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \Psi_{i^0,k} \beta_l^{i^0} \epsilon^{3kl} = \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \Psi_{i^0,1} \beta_2^{i^0} - \Psi_{i^0,2} \beta_1^{i^0} = \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial \Psi_x}{\partial r}
\end{aligned} \tag{4.18c}$$

Ersetzt man die trigonometrischen Funktionen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ durch komplexe Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned}
\sin \varphi &= \frac{1}{2} i (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) \\
\cos \varphi &= \frac{1}{2} (e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})
\end{aligned} \tag{4.19}$$

und zieht die Funktionen $e^{i\varphi}$ und $e^{-i\varphi}$ unter den Differentialoperator

$$e^{\pm i\varphi} \frac{\partial \Psi_{i^0}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (e^{\pm i\varphi} \Psi_{i^0}) \mp i (e^{\pm i\varphi} \Psi_{i^0}) \tag{4.20}$$

so ergeben sich die physikalischen Verschiebungen zu:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \left[\frac{1}{2} e^{i\varphi} (\Psi_z + i\Psi_y) \right] \left[i \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \\
&+ \left[\frac{1}{2} e^{-i\varphi} (\Psi_z - i\Psi_y) \right] \left[-i \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]
\end{aligned} \tag{4.21a}$$

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - i \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} e^{i\varphi} (\Psi_z + i\Psi_y) \right] + i \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} e^{-i\varphi} (\Psi_z - i\Psi_y) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \varphi} \quad (4.21b)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} e^{i\varphi} (\Psi_z + i\Psi_y) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} e^{-i\varphi} (\Psi_z - i\Psi_y) \right] - \frac{\partial \Psi_x}{\partial r} \quad (4.21c)$$

Für die Ausdrücke in den eckigen Klammern werden die Skalarfunktionen M_1 und M_2 eingeführt.

$$M_1 = \frac{1}{2} e^{i\varphi} (\Psi_z + i\Psi_y) \quad (4.22a)$$

$$M_2 = \frac{1}{2} e^{-i\varphi} (\Psi_z - i\Psi_y) \quad (4.22b)$$

Setzt man als Zusatzbedingung nach [Long 1967] (siehe Abschnitt 2.3) die Koordinate Ψ_x des Vektorpotentials gleich Null, dann vereinfachen sich die Gleichungen (4.21):

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) [M_1 - M_2] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} [M_1 + M_2] \quad (4.23a)$$

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - i \frac{\partial}{\partial x} [M_1 - M_2] \quad (4.23b)$$

$$u_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x} [M_1 + M_2] \quad (4.23c)$$

Aus der Kombinationen der Bedingungsgleichungen (4.16) für die kartesischen Komponenten Ψ_y und Ψ_z des vektoriellen Feldes ergeben sich die Bedingungsgleichungen für die beiden Skalarfunktionen M_1 und M_2 :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2i \frac{\partial}{\partial \varphi} - 1 \right) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] M_1(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (4.24a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2i \frac{\partial}{\partial \varphi} - 1 \right) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] M_2(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (4.24b)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichungen erfolgt analog zu Abschnitt 3.1 im Bildraum. Dazu werden die Ansatzfunktionen Φ , M_1 und M_2 zunächst in eine Fourierreihe bezüglich des

Umfangs entwickelt.

$$\Phi(x, r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{\Phi}(x, r, n, t) e^{in\varphi} \quad (4.25a)$$

$$M_1(x, r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{M}_1(x, r, n, t) e^{in\varphi} \quad (4.25b)$$

$$M_2(x, r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{M}_2(x, r, n, t) e^{in\varphi} \quad (4.25c)$$

Das Einsetzen der Fourierreihen (4.25) in die Gleichungen (4.15) und (4.24), sowie ein anschließender Koeffizientenvergleich, liefert die Bedingungsgleichungen für die einzelnen Koeffizienten der Fourierreihe:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tilde{\Phi}(x, r, n, t) = 0 \quad (4.26a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(n-1)^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tilde{M}_1(x, r, n, t) = 0 \quad (4.26b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(n+1)^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tilde{M}_2(x, r, n, t) = 0 \quad (4.26c)$$

Durch eine zweifache Fouriertransformation bezüglich der Ortskoordinate $x \circ \bullet k_x$ vom Orts- in den Wellenzahlbereich, sowie der Zeit $t \circ \bullet \omega$ vom Zeit- in den Frequenzbereich lassen sich die Gleichungen (4.26) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen. Die Ortskoordinate r bleibt hierbei untransformiert:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \hat{\Phi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (4.27a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_\beta^2 - \frac{(n-1)^2}{r^2} \right) \right] \hat{M}_1(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (4.27b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_\beta^2 - \frac{(n+1)^2}{r^2} \right) \right] \hat{M}_2(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (4.27c)$$

mit

$$k_\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_p^2} - k_x^2} = \sqrt{k_p^2 - k_x^2} \quad \text{und} \quad k_\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - k_x^2} = \sqrt{k_s^2 - k_x^2} \quad (4.28)$$

Die Bedingungsgleichungen (4.27) sind alle gewöhnliche Differentialgleichungen vom Besselschen Typ. Lösungsansätze für diesen Gleichungstyp sind im Anhang A.1.1 sowie in [Abramowitz u. Stegun 1965], [Jahnke 1966] und [Råde u. Westergren 2000] zu finden. Die allgemeine Lösung für Φ , M_1 und M_2 lautet:

$$\hat{\Phi}(k_x, r, n, \omega) = C_{1n} J_n(k_\alpha r) + C_{4n} Y_n(k_\alpha r) \quad (4.29a)$$

$$\hat{M}_1(k_x, r, n, \omega) = C_{2n} J_{n-1}(k_\beta r) + C_{5n} Y_{n-1}(k_\beta r) \quad (4.29b)$$

$$\hat{M}_2(k_x, r, n, \omega) = C_{3n} J_{n+1}(k_\beta r) + C_{6n} Y_{n+1}(k_\beta r) \quad (4.29c)$$

Als Argument der Bessel-Funktionen J_n und der Neumann-Funktionen Y_n tritt $k_\alpha r$ bzw. $k_\beta r$ auf. Alternativ kann auch ein Ansatz mit Hankel-Funktionen erster Art $H_n^{(1)}$ und zweiter Art $H_n^{(2)}$ gefunden werden:

$$\hat{\Phi}(k_x, r, n, \omega) = C_{1n} H_n^{(1)}(k_\alpha r) + C_{4n} H_n^{(2)}(k_\alpha r) \quad (4.30a)$$

$$\hat{M}_1(k_x, r, n, \omega) = C_{2n} H_{n-1}^{(1)}(k_\beta r) + C_{5n} H_{n-1}^{(2)}(k_\beta r) \quad (4.30b)$$

$$\hat{M}_2(k_x, r, n, \omega) = C_{3n} H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r) + C_{6n} H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r) \quad (4.30c)$$

mit

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + i Y_n(z) \quad \text{und} \quad H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - i Y_n(z) \quad (4.31)$$

Die in diesem Abschnitt hergeleitete Lösung der Wellengleichungen gilt nur unter der Bedingung $k_x \neq 0$. Für einen in x -Richtung sich nicht verändernden Zustand ($k_x = 0$) breiten sich die Wellen senkrecht zur x -Achse, das heißt in der y, z -Ebene aus. Die Scherwellen können daher nicht mit den kartesischen Komponenten Ψ_y und Ψ_z des vektoriellen Feldes (Ψ_x wurde nach [Long 1967] gleich Null gesetzt) beschrieben werden.

Dies kann anschaulich wie folgt gezeigt werden: Während die Skalarfunktion Φ eine Druckwelle und somit Verschiebungen senkrecht zur Wellenfront beschreibt, stellen die Komponenten des Vektorpotentials Ψ_i Scherwellen dar, die in Verschiebungen parallel zur Ausbreitungsebene resultieren. Für die Größe und Richtung der Schubverformungen sind dabei nur die Anteile $\Psi_{i\parallel}$ von Bedeutung, die parallel zur Wellenfront liegen (Abbildung 4.2). Die resultierenden Verformungen $u_p(\Psi_i)$ im Punkt P sind jeweils senkrecht zur Komponente $\Psi_{i\parallel}$. Der Anteil $\Psi_{i\perp}$ senkrecht zur Wellenfront bildet dagegen keine Schubverformungen ab, da dieser in Richtung der Wellenausbreitung zeigt und somit in Gleichung (2.9) der Verschiebungsanteil des Vektorpotentials zu Null wird ($\Psi_k|_k \epsilon^{kkl} = 0$).

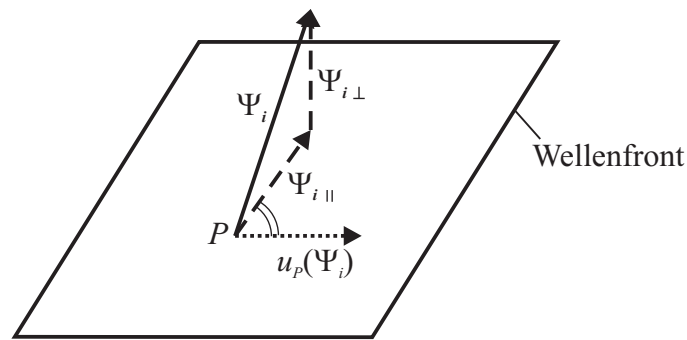


Abbildung 4.2: Schubverformungen infolge Ψ_i

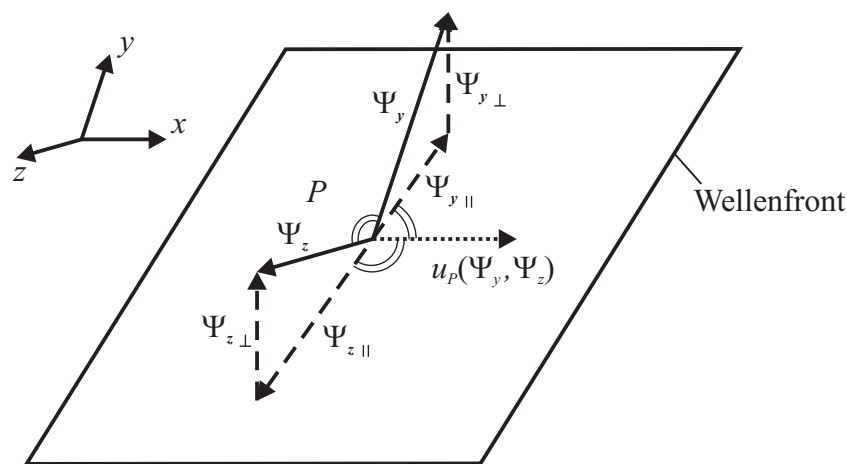


Abbildung 4.3: Schubverformungen infolge Ψ_y und Ψ_z

Ist nun die Wellenfront parallel zur x -Achse, wie das bei $k_x = 0$ der Fall ist, so liegen die beiden Komponenten $\Psi_{y||}$ und $\Psi_{z||}$ auf einer Geraden. Somit können über die beiden Komponenten Ψ_y und Ψ_z des Vektorpotentials nur Schubverformungen parallel zur x -Achse aber keine senkrecht dazu beschrieben werden (Abbildung 4.3). Ψ_x darf in diesem Fall folglich nicht zu Null gesetzt werden.

Im nächsten Abschnitt wird ein alternativer Ansatz für das Vektorpotential verwendet, der auch für den Fall $k_x = 0$ Ergebnisse liefert.

4.1.3 Lösung der Wellengleichung - Variante 2

Anstelle das vektorielle Potential wie in Abschnitt 4.1.2 mit nur zwei Komponenten $\Psi_{i,0}$ darzustellen und die dritte Komponente zu Null zu setzen, kann das Vektorfeld Ψ auch mit zwei beliebigen voneinander unabhängigen Skalarfunktionen beschrieben werden, die die Zusatzbedingung $|\Psi_i|^i = 0$ (2.15) erfüllen (siehe Abschnitt 2.3).

So kann für das vektorielle Potential analog zu [Eringen u. Suhubi 1975] und [Kausel 2006] ein Ansatz mit zwei Skalarfunktionen ψ und χ gewählt werden:

$$\mathbf{\Psi} = \underbrace{\psi \mathbf{g}^1}_{\Psi_I(\psi)} + \underbrace{\chi|^j \epsilon_{ij1} \mathbf{g}^i}_{\Psi_{II}(\chi)} \quad (4.32)$$

Die Skalarfunktion ψ enthält den Koeffizienten des vektoriellen Potentials $\mathbf{\Psi}$ in x -Richtung. Mit der Skalarfunktion χ wird die Komponente des vektoriellen Potentials senkrecht dazu beschrieben. Die Richtung dieser Komponente hängt von der Rotation des Vektorfeldes $\chi \mathbf{g}_1$ ab und kann somit in jede beliebige Richtung senkrecht zur x -Achse zeigen. Daher ist es mit diesem Ansatz möglich für jede Wellenausbreitungsrichtung die Schubverformungen abzubilden.

Da ψ und χ voneinander unabhängige Funktionen sind, müssen sowohl $\Psi_I(\psi)$ als auch $\Psi_{II}(\chi)$ divergenzfrei sein (2.15) und der Wellengleichung (2.13b)

$$\Psi_i|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i = 0 \quad (4.33)$$

genügen. Setzt man $\Psi_I(\psi)$ in Gleichung (4.33) ein, so erhält man die Bedingungsgleichung für die Skalarfunktion ψ :

$$\psi|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\psi} = 0 \quad (4.34)$$

Die Zusatzbedingung für $\Psi_I(\psi)$ liefert:

$$\psi|^1 = 0 \quad (4.35)$$

Da $\Psi_{II}(\chi)$ die Rotation des Vektorfeldes $\chi \mathbf{g}_1$ darstellt, muss $\Psi_{II}(\chi)$ analog zu Gleichung (2.11) ohne Einschränkung von χ divergenzfrei sein:

$$(\chi|^j \epsilon_{ij1})|^i = 0 \quad (4.36)$$

Mit Hilfe der mathematischen Umformung für ein Vektorfeld \mathbf{A}

$$\text{div grad } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}$$

bzw.

$$A_i|_j^j = (A_j|^j)|_i - (A_m|_l \epsilon^{klm})|^j \epsilon_{ijk} \quad (4.37)$$

ergibt sich die Bedingungsgleichung (4.33) für das vektorielle Potential zu:

$$\begin{aligned}\Psi_i|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i &= \underbrace{(\Psi_j|_j^j)}_{=0}|_i - (\Psi_m|_l \epsilon^{klm})|_j^j \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i = \\ &= -(\Psi_m|_l \epsilon^{klm})|_j^j \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}\quad (4.38)$$

In Zylinderkoordinaten gilt für eine skalare Funktion a :

$$\begin{aligned}(a|^l \epsilon_{kl1})|_j \epsilon^{ijk} \mathbf{g}_i &= (a|^l \epsilon_{kl1})_{,j} \epsilon^{ijk} \mathbf{g}_i - a|^l \epsilon_{ml1} \Gamma_{kj}^m \epsilon^{ijk} \mathbf{g}_i = \\ &= a_{,j}^3 \epsilon^{ij2} \mathbf{g}_i - a_{,j}^2 \epsilon^{ij3} \mathbf{g}_i - a|^2 \Gamma_{23}^3 \mathbf{g}_1 = \\ &= a_{,31} \mathbf{g}_3 - a_{,33} \mathbf{g}_1 - a_{,22} \mathbf{g}_1 + a_{,21} \mathbf{g}_2 - \frac{1}{r} a_{,2} \mathbf{g}_1 + [a_{,11} \mathbf{g}_1 - a_{,11} \mathbf{g}_1] = \\ &= (-a|_j^j \epsilon^{i23} + a|^i) \mathbf{g}_i\end{aligned}\quad (4.39)$$

da

$$\begin{aligned}a|_j^j &= a_{,jj} + \Gamma_{kj}^j a^{,k} = \\ &= a_{,jj} + \Gamma_{23}^3 a_{,2} = \\ &= a_{,11} + a_{,22} + a_{,33} + \frac{1}{r} a_{,2}\end{aligned}\quad (4.40)$$

und

$$a|^i \mathbf{g}_i = a_{,11} \mathbf{g}_1 + a_{,21} \mathbf{g}_2 + a_{,31} \mathbf{g}_3\quad (4.41)$$

$\Psi_{II}(\psi)$ in Gleichung (4.38) eingesetzt liefert unter Zuhilfenahme von Gleichung (4.39)

$$\begin{aligned}&- [(\chi|^n \epsilon_{mn1})|_l \epsilon^{klm}]|_j^j \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi}|^j \epsilon_{ij1} = \\ &= - [-\chi|_l^l \epsilon^{k23} + \chi|^k]_j^j \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi}|^j \epsilon_{ij1} = \\ &= \chi|_l^l \epsilon_{ij1} - \underbrace{\chi|^k}_{=0} \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi}|^j \epsilon_{ij1} = \\ &= \left(\chi|_l^l - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi} \right)|_j^j \epsilon_{ij1} \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}\quad (4.42)$$

und somit die Bedingungsgleichung für die Skalarfunktion χ :

$$\chi|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi} = 0 \quad (4.43)$$

Mit Hilfe von Gleichung (4.14) lauten die Bedingungsgleichungen für das skalare Potential Φ (2.13a) und die Skalarfunktionen ψ (4.34) und χ (4.43) in Zylinderkoordinaten:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (4.44a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (4.44b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi(x, r, \varphi, t) = 0 \quad (4.44c)$$

Zur Lösung der Bewegungsgleichungen werden die Ansatzfunktionen Φ , ψ und χ zunächst wieder in eine Fourierreihe bezüglich des Umfangs entwickelt.

$$\Phi(x, r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{\Phi}(x, r, n, t) e^{in\varphi} \quad (4.45a)$$

$$\psi(x, r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{\psi}(x, r, n, t) e^{in\varphi} \quad (4.45b)$$

$$\chi(x, r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \tilde{\chi}(x, r, n, t) e^{in\varphi} \quad (4.45c)$$

Das Einsetzen der Fourierreihen (4.45) in die Gleichungen (4.44), sowie ein anschließender Koeffizientenvergleich, liefert die Bedingungsgleichungen für die einzelnen Koeffizienten der Fourierreihe:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tilde{\Phi}(x, r, n, t) = 0 \quad (4.46a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tilde{\psi}(x, r, n, t) = 0 \quad (4.46b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tilde{\chi}(x, r, n, t) = 0 \quad (4.46c)$$

Durch eine zweifache Fouriertransformation bezüglich der Ortskoordinate $x \circ \bullet k_x$ vom Orts- in den Wellenzahlbereich, sowie der Zeit $t \circ \bullet \omega$ vom Zeit- in den Frequenzbereich lassen sich die Gleichungen (4.26) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen. Die Ortskoordinate r bleibt hierbei untransformiert:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \hat{\Phi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (4.47a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_\beta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \hat{\psi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (4.47b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_\beta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] \hat{\chi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (4.47c)$$

mit

$$k_\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_p^2} - k_x^2} = \sqrt{k_p^2 - k_x^2} \quad \text{und} \quad k_\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - k_x^2} = \sqrt{k_s^2 - k_x^2} \quad (4.48)$$

Die allgemeine Lösung für die drei transformierten Funktionen $\hat{\Phi}$, $\hat{\psi}$ und $\hat{\chi}$ ergibt sich analog zu Gleichung (4.29) zu:

$$\hat{\Phi}(k_x, r, n, \omega) = C_{1n} J_n(k_\alpha r) + C_{4n} Y_n(k_\alpha r) \quad (4.49a)$$

$$\hat{\psi}(k_x, r, n, \omega) = C_{2n} J_n(k_\beta r) + C_{5n} Y_n(k_\beta r) \quad (4.49b)$$

$$\hat{\chi}(k_x, r, n, \omega) = C_{3n} J_n(k_\beta r) + C_{6n} Y_n(k_\beta r) \quad (4.49c)$$

bzw.

$$\hat{\Phi}(k_x, r, n, \omega) = C_{1n} H_n^{(1)}(k_\alpha r) + C_{4n} H_n^{(2)}(k_\alpha r) \quad (4.50a)$$

$$\hat{\psi}(k_x, r, n, \omega) = C_{2n} H_n^{(1)}(k_\beta r) + C_{5n} H_n^{(2)}(k_\beta r) \quad (4.50b)$$

$$\hat{\chi}(k_x, r, n, \omega) = C_{3n} H_n^{(1)}(k_\beta r) + C_{6n} H_n^{(2)}(k_\beta r) \quad (4.50c)$$

Aufgrund der für dieses Problem günstigeren Lösungscharakteristik (siehe Abschnitt 4.3) wird in dieser Arbeit der Ansatz mit Hankel-Funktionen (4.50) verwendet.

Für die Sonderfälle k_α bzw. k_β gleich Null ($k_x^2 = k_p^2$ bzw. $k_x^2 = k_s^2$) lauten die Differential-

gleichungen (4.47) für das skalare Potential $\hat{\Phi}$ und die Skalarfunktionen $\hat{\psi}$ und $\hat{\chi}$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \right] \hat{\Phi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (4.51a)$$

bzw.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \right] \hat{\psi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (4.51b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \right] \hat{\chi}(k_x, r, n, \omega) = 0 \quad (4.51c)$$

Die Lösung ergibt sich in diesem Fall zu:

$$\hat{\Phi} = C_{1n} r^n + C_{2n} r^{-n} \quad (4.52a)$$

bzw.

$$\hat{\psi} = C_{3n} r^n + C_{4n} r^{-n} \quad (4.52b)$$

$$\hat{\chi} = C_{5n} r^n + C_{6n} r^{-n} \quad (4.52c)$$

Da diese Sonderfälle nur bei einem ungedämpften Boden auftreten können, werden sie nachstehend nicht mehr berücksichtigt.

Der in diesem Kapitel verwendete Potentialansatz ist im Gegensatz zur Lösung in Abschnitt 4.1.2 auch für einen sich in x -Richtung nicht verändernden Zustand ($k_x = 0$) gültig. Daher wird im Folgenden dieser alternative Ansatz (4.32) des Vektorfeldes verwendet.

4.2 Verschiebungen und Spannungen in Zylinderkoordinaten

Die Komponenten u^i des Verschiebungsvektors in Zylinderkoordinaten werden mittels Gleichung (2.9) ermittelt. Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (4.39) und (4.43) ergibt sich:

$$\begin{aligned} u^i &= \Phi|{}^i + \Psi_l|_k \epsilon^{ikl} = \\ &= \Phi_{,i} + \psi|_k \epsilon^{ik1} + (\chi|{}^j \epsilon_{lj1})|_k \epsilon^{ikl} = \\ &= \Phi_{,i} + \psi|_k \epsilon^{ik1} - \chi|{}^j \epsilon^{i23} + \chi|{}^{1i} = \\ &= \Phi_{,i} + \psi|_k \epsilon^{ik1} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi} \epsilon^{i23} + \chi|{}^{1i} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Hieraus werden die physikalischen Komponenten des Verschiebungsvektors ($u_x = u^1$, $u_r = u^2$, $u_\varphi = u^3$) berechnet:

$$u_x = \Phi_{,1} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi} + \chi|^{11} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \quad (4.54a)$$

$$u_r = \Phi_{,2} + \psi|_3 + \chi|^{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial r} \quad (4.54b)$$

$$u_\varphi = \Phi_{,3} - \psi|_2 + \chi|^{13} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial \varphi} \quad (4.54c)$$

Die Gleichungen für die Verschiebungen (4.54) können in Matrixform zusammengefasst werden:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_r \\ u_\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & -\frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

$\mathbf{u}_z \qquad \qquad \mathbf{D}_z \qquad \qquad \mathbf{\Pi}_z$

Der Index z steht für Zylinderkoordinaten.

Die Verschiebungsgrößen im Bildraum (k_x , r , n , ω) ergeben sich daraus zu:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_r \\ \hat{u}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & k_\beta^2 \\ \frac{\partial}{\partial r} & i \frac{n}{r} & i k_x \frac{\partial}{\partial r} \\ i \frac{n}{r} & -\frac{\partial}{\partial r} & -\frac{n}{r} k_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Phi} \\ \hat{\psi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

$\hat{\mathbf{u}}_z \qquad \qquad \hat{\mathbf{D}}_z \qquad \qquad \hat{\mathbf{\Pi}}_z$

Schreibt man den Ansatz (4.50) für die Skalarfunktionen $\hat{\Phi}$, $\hat{\psi}$ und $\hat{\chi}$ in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \hat{\Phi} \\ \hat{\psi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} H_n^{(1)}(k_\alpha r) & 0 & 0 & H_n^{(2)}(k_\alpha r) & 0 & 0 \\ 0 & H_n^{(1)}(k_\beta r) & 0 & 0 & H_n^{(1)}(k_\beta r) & 0 \\ 0 & 0 & H_n^{(1)}(k_\beta r) & 0 & 0 & H_n^{(1)}(k_\beta r) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \\ C_{4n} \\ C_{5n} \\ C_{6n} \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

$\hat{\mathbf{\Pi}}_z \qquad \qquad \hat{\mathbf{A}}_z \qquad \qquad \mathbf{C}_z$

so lassen sich die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}$ aus den Unbekannten $\mathbf{C}_{\mathbf{z}}$ ermitteln:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{D}}_{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{z}} \quad (4.58)$$

Die Elemente der Matrix $\hat{\mathbf{H}}_{\mathbf{z}}$ sind im Anhang A.3.1 angegeben.

In Zylinderkoordinaten lautet die Beziehung zwischen den physikalischen Verschiebungen und den physikalischen Verzerrungen nach Gleichung (2.2)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\varphi\varphi} \\ \epsilon_{rx} \\ \epsilon_{r\varphi} \\ \epsilon_{x\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \\ \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_r \\ u_\varphi \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

$$\begin{matrix} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{z}} & & \mathbf{L}_{\mathbf{z}} & & \mathbf{u}_{\mathbf{z}} \end{matrix}$$

Eine Transformation der Gleichung (4.59) in den Bildraum (k_x, r, n, ω) liefert:

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{xx} \\ \hat{\epsilon}_{rr} \\ \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi} \\ \hat{\epsilon}_{rx} \\ \hat{\epsilon}_{r\varphi} \\ \hat{\epsilon}_{x\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & i \frac{n}{r} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{2} ik_x & 0 \\ 0 & i \frac{n}{2r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \\ i \frac{n}{2r} & 0 & \frac{1}{2} ik_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_r \\ \hat{u}_\varphi \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

$$\begin{matrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{z}} & & \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{z}} & & \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}} \end{matrix}$$

Die physikalische Spannungs-Verzerrungsbeziehung nach Gleichung (2.3) ergibt sich zu:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{z}} \quad (4.61)$$

mit

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{z}} = \left(\hat{\sigma}_{xx} \quad \hat{\sigma}_{rr} \quad \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} \quad \hat{\sigma}_{rx} \quad \hat{\sigma}_{r\varphi} \quad \hat{\sigma}_{x\varphi} \right)^T \quad (4.62)$$

Die Elastizitätsmatrix $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{z}}$ ist identisch mit der Elastizitätsmatrix des kartesischen Koordinatensystems $\hat{\mathbf{E}}_{\mathbf{k}}$ aus Gleichung (3.15), da es sich hier ebenfalls um ein orthonormales

Koordinatensystem handelt.

Die transformierten Spannungen $\hat{\sigma}_z$ ergeben sich somit aus den Unbekannten C_z mit

$$\hat{\sigma}_z = \hat{E}_z \cdot \hat{L}_z \cdot \hat{D}_z \cdot \hat{A}_z \cdot C_z = \hat{K}_z \cdot C_z \quad (4.63)$$

Die Elemente der Matrix \hat{K}_z sind im Anhang A.3.2 angegeben.

4.3 Lösung für den homogenen Vollraum mit zylindrischem Hohlraum

Die sechs unbekanntten Koeffizienten $C_{1n} - C_{6n}$ werden mit Hilfe der Randbedingungen berechnet. Drei Koeffizienten können wie in Abschnitt 3.3 aus den nicht lokalen Randbedingungen im Unendlichen ermittelt werden. So müssen die abgebildeten Wellen mit zunehmender Entfernung vom Lasteinleitungsort abklingen und dürfen nur vom Ort der Lasteinleitung fortlaufen. [Müller 2007] zeigt, dass für negative Frequenzen ω die Hankel-Funktionen erster Art $H_n^{(1)}$ Wellen mit solchen Eigenschaften beschreiben. Die Hankel-Funktionen zweiter Art $H_n^{(2)}$ stehen dagegen für Wellen, die mit zunehmender Entfernung vom Lasteinleitungsort aufklingen bzw. auf den Lasteinleitungsort zurücklaufen. Da diese Wellen im homogenen Vollraum mit zylindrischem Hohlraum nicht auftreten, können die zugehörigen Koeffizienten $C_{4n} - C_{6n}$ zu Null gesetzt werden. Für positive Frequenzen beschreiben je nach Wellentyp entweder die Hankel-Funktionen zweiter Art $H_n^{(2)}$ Wellen die mit zunehmender Entfernung vom Lasteinleitungsort aufklingen oder die Hankel-Funktionen erster Art $H_n^{(1)}$ Wellen die auf den Lasteinleitungsort zurücklaufen. Somit verschwinden je nach Wellentyp entweder die zugehörigen Koeffizienten $C_{4n} - C_{6n}$ oder $C_{1n} - C_{3n}$.

Um die Berechnung zu vereinfachen und eine Fallunterscheidung zu vermeiden, wird im Folgenden als Lösungsansatz ein Fundamentalsystem aus Hankel-Funktionen (4.50) verwendet und ein negatives ω vorausgesetzt. Die Werte der Zustandsgrößen $\hat{Z}(\omega)$ für positive Frequenzen ω werden anschließend wie in Abschnitt 3.3 aus den Ergebnissen für negative Frequenzen bestimmt.

Ähnlich wie für den Halbraum, wo zwischen Oberflächen- und Raumwellen unterschieden wird, können die Lösungen für den Vollraum mit zylindrischen Hohlraum in Nahfeld- und Fernfeldlösungen unterteilt werden. Die Wellentypen können mit Hilfe der Werte von k_α bzw. k_β in Gleichung (4.48) für einen ungedämpften Boden gegeneinander abgegrenzt werden. Für imaginäre Werte von k_α bzw. k_β ($k_x^2 > k_p^2$ bzw. $k_x^2 > k_s^2$) liegen Nahfeldlösungen

vor, welche vom Ort der Lasteinleitung monoton abklingen. Für reelle Werte von k_α bzw. k_β ($k_x^2 < k_p^2$ bzw. $k_x^2 < k_s^2$) liegen Fernfeldlösungen vor, die als sich vom zylindrischen Hohlraum wegbewegende Wellen interpretiert werden können.

Nachdem die Koeffizienten $C_{4n} - C_{6n}$ infolge der Randbedingungen im Unendlichen zu Null gesetzt wurden, können die restlichen drei Unbekannten $C_{1n} - C_{3n}$ unter Zuhilfenahme der lokalen Randbedingungen an der Oberfläche des Lochrandes berechnet werden. Die Spannungen am Lochrand (LR, $r = r_0$) müssen mit den dort angreifenden Belastungen (p_{rx} , p_{rr} und $p_{r\varphi}$) im Gleichgewicht stehen. Eine Transformation der drei Belastungen in den Bildraum $p_{ri}(x, y, z, t) \circ \bullet \hat{p}_{ri}(k_x, r, n, \omega)$ und ein Aufstellen des Gleichgewichts liefert:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} K_{z,41} & K_{z,42} & K_{z,43} \\ K_{z,21} & K_{z,22} & K_{z,23} \\ K_{z,51} & K_{z,52} & K_{z,53} \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \\ C_{3n} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -\hat{p}_{rx} \\ -\hat{p}_{rr} \\ -\hat{p}_{r\varphi} \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\text{LR}} & \mathbf{C}_{\text{LR}} & & \hat{\mathbf{P}}_{\text{LR}} \end{array} \quad (4.64)$$

Die Elemente $K_{z,ij}$ der Matrix $\hat{\mathbf{K}}_{\text{LR}}$ sind dem Anhang A.3.2 zu entnehmen.

Die Unbekannten $C_{1n} - C_{3n}$ ergeben sich aus der Gleichung:

$$\mathbf{C}_{\text{LR}} = \hat{\mathbf{K}}_{\text{LR}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\text{LR}} \quad (4.65)$$

Nun kann der Verlauf der transformierten Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}$ und der transformierten Spannungen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{z}}$ mit den Gleichungen (4.58) und (4.63) ermittelt werden. Die Verschiebungen und Spannungen im Originalraum (x, r, φ, t) erhält man schließlich über eine mehrfache Fourier-Rücktransformation.

Das in diesem Kapitel hergeleitete Ergebnis gilt allerdings nur unter der Voraussetzung einer dynamischen Belastung ($\omega \neq 0$), da für eine statische Last mit $\omega = 0$ die verwendeten Ansätze nicht vollständig sind. Für diesen Fall wird auf die Arbeit von [Konrad 1985] verwiesen, der bei einer statischen Belastung auf den Ansatz von [Papkovich 1932] und [Neuber 1934] zurückgreift.

Sich in Tunnellängsrichtung mit konstanter Geschwindigkeit bewegende Lasten, können analog zu Abschnitt 3.5 berücksichtigt werden.

5 Der Vollraum mit sphärischem Hohlraum unter dynamischer Belastung

5.1 Vorbemerkungen

Zur Lösung des Problems Vollraum mit sphärischem Hohlraum unter dynamischer Belastung wird im Folgenden analog zu Abschnitt 4 vorgegangen. Zunächst werden in Abschnitt 5.2.1 als Grundlage die Transformationsmatrizen für das normierte sphärische Koordinatensystem, sowie die zugehörigen Ableitungen und Christoffelsymbole bestimmt.

Für die Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten wird in Abschnitt 5.2.2 ein ähnlicher Ansatz wie in Abschnitt 4.1.3 gewählt. So wird das vektorielle Potential Ψ mit zwei beliebigen voneinander unabhängigen Skalarfunktionen beschrieben, die die Zusatzbedingung $\Psi_i|_i = 0$ erfüllen. Anschließend wird gezeigt, dass die beiden Skalarfunktionen der gleichen Wellengleichung wie das skalare Potential Φ genügen müssen.

Im Gegensatz zu Abschnitt 4.1.3, in welchem die Potentiale in eine Fourierreihe entlang des Zylinderumfangs entwickelt werden, werden nun die Potentiale in eine zweidimensionale sphärische Fourierreihe über die Kugeloberfläche zerlegt. Im fouriertransformierten Bildraum kann schließlich für jedes Reihenglied eine analytische Lösung gefunden werden.

In Abschnitt 5.3 werden analog zu Abschnitt 4.2 die Verschiebungen im Original- und transformierten Bildraum mit Hilfe der Differentialoperatormatrix \mathbf{L}_s berechnet. Daraus können anschließend die Spannungen durch Multiplikation mit der Elastizitätsmatrix \mathbf{E}_s ermittelt werden.

Schließlich wird in Abschnitt 5.4 die Lösung für den dynamisch belasteten Vollraum mit sphärischem Hohlraum mit Hilfe der Randbedingungen an der Oberfläche des Hohlraums ermittelt.

5.2 Lösung der Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten

5.2.1 Allgemeine Grundlagen

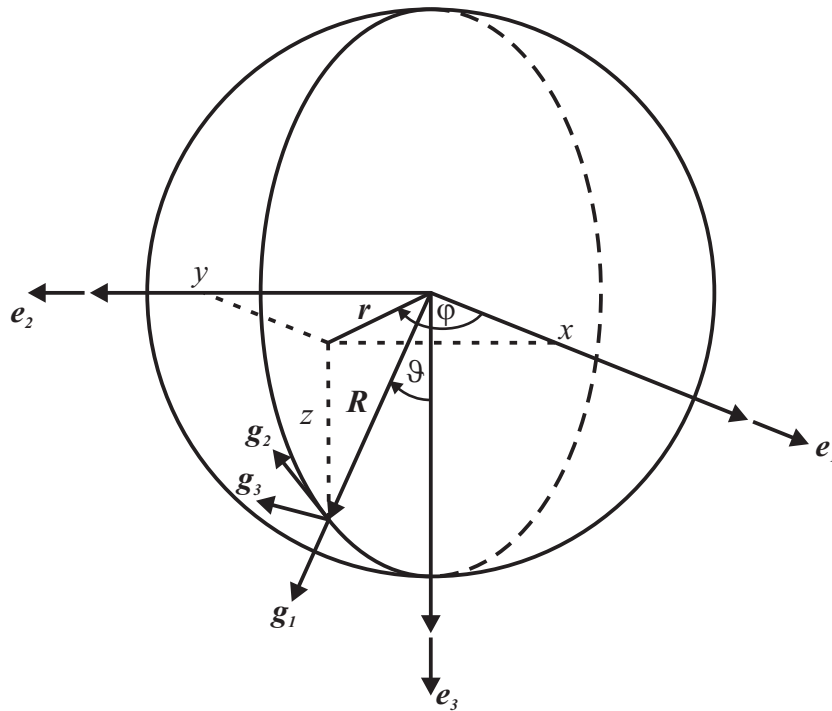


Abbildung 5.1: Sphärische Koordinaten

Das Problem eines Vollraums mit einem kugelförmigen Hohlraum wird sinnvoller Weise in sphärischen Koordinaten (Abbildung 5.1) beschrieben.

Der Ortsvektor \mathbf{R} eines Punktes im Raum kann sowohl in kartesischen Koordinaten ($x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$), als auch in sphärischen Koordinaten ($\theta^{1'} = R$, $\theta^{2'} = \vartheta$, $\theta^{3'} = \varphi$) dargestellt werden.

Zwischen den kartesischen Koordinaten und den Kugelkoordinaten besteht der Zusammenhang:

$$x = R \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = R \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = R \cdot \cos \vartheta \quad (5.1)$$

Die Transformationsbeziehungen für die Basisvektoren und die Koordinaten lauten:

$$\mathbf{g}_{i'} = \beta_{i'}^{j^0} \mathbf{e}_j \quad \text{und} \quad x^{i'} = x^{j^0} \beta_{j^0}^{i'} \quad (5.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \left[\beta_{i'}^{j^0} \right] &= \left[\frac{\partial x^{j^0}}{\partial \theta^{i'}} \right] = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ R \cos \vartheta \cos \varphi & R \cos \vartheta \sin \varphi & -R \sin \vartheta \\ -R \sin \vartheta \sin \varphi & R \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \\ \left[\beta_{j^0}^{i'} \right] &= \left[\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial x^{j^0}} \right] = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \frac{1}{R} \cos \vartheta \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{R \sin \vartheta} \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \frac{1}{R} \cos \vartheta \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{R \sin \vartheta} \\ \cos \vartheta & -\frac{1}{R} \sin \vartheta & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Da im Folgenden physikalische Verschiebungen und Spannungen berechnet werden müssen, wird auf ein Koordinatensystem mit normierten Basisvektoren \mathbf{g}_i übergegangen.

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_{1'} \quad , \quad \mathbf{g}_2 = \frac{1}{R} \mathbf{g}_{2'} \quad , \quad \mathbf{g}_3 = \frac{1}{R \sin \vartheta} \mathbf{g}_{3'} \quad (5.4)$$

Zwischen dem normierten und dem nicht normierten Koordinatensystem kann folgendermaßen transformiert werden:

$$\mathbf{g}_i = \beta_i^{j'} \mathbf{g}_{j'} \quad \text{und} \quad x^i = x^{j'} \beta_{j'}^i \quad (5.5)$$

mit

$$\left[\beta_i^{j'} \right] = \left[\frac{\partial \theta^{j'}}{\partial \theta^i} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R \sin \vartheta} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \left[\beta_{j'}^i \right] = \left[\frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^{j'}} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \sin \vartheta \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Die Transformationsmatrizen zwischen dem normierten Koordinatensystem und dem kartesischen Koordinatensystem lauten schließlich:

$$\begin{aligned} \left[\beta_i^{j^0} \right] &= \left[\beta_i^{j'} \right] \cdot \left[\beta_{j'}^{j^0} \right] = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \\ \left[\beta_{j^0}^i \right] &= \left[\beta_{j^0}^{j'} \right] \cdot \left[\beta_{j'}^i \right] = \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Für die normierte Basis \mathbf{g}_i ergeben sich die Metriktensoren g_{ij} und g^{ij} zu

$$[g_{ij}] = [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

und die Permutationssymbole ϵ_{ijk} und ϵ^{ijk} zu:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, & \quad \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1, & \quad \text{restliche } \epsilon_{ijk} = 0 \\ \epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = 1, & \quad \epsilon^{321} = \epsilon^{213} = \epsilon^{132} = -1, & \quad \text{restliche } \epsilon^{ijk} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Die kovarianten Ableitungen im normierten und nicht normierten Koordinatensystem stehen in dem Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial \theta^{j'}} \frac{\partial \theta^{j'}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial \theta^{j'}} \beta_i^{j'} \quad (5.10)$$

und berechnen sich somit wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \theta^1} = \frac{\partial}{\partial R}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta^3} = \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (5.11)$$

Da die Basis \mathbf{g}_i nicht stationär ist existieren die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k :

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{R}, & \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{R}, & \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{R} \\ \Gamma_{33}^2 = -\frac{\cos \vartheta}{R \sin \vartheta}, & \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{R}, & \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \vartheta}{R \sin \vartheta}, & \quad \text{restliche } \Gamma_{ij}^k = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.2.2 Lösung der Wellengleichung

Das vektorielle Potential Ψ aus Gleichung (2.9) kann wie in Abschnitt 4.1.3 mit zwei beliebigen voneinander unabhängigen Skalarfunktionen beschrieben, die die Zusatzbedingung $\Psi_{,i}|^i = 0$ (2.15) erfüllen. Analog zu [Eringen u. Suhubi 1975] und [Kausel 2006] wird ein Ansatz mit den zwei Skalarfunktionen ψ und χ gewählt (5.13):

$$\Psi = \underbrace{R\psi}_{\Psi_I(\psi)} \mathbf{g}^1 + \underbrace{(R\chi)^j}_{\Psi_{II}(\chi)} \epsilon_{ij1} \mathbf{g}^i \quad (5.13)$$

Die Skalarfunktion ψ enthält den Koeffizienten des vektorielle Potentials Ψ in radialer Richtung. Mit der Skalarfunktion χ wird die Komponente des vektorielle Potentials senkrecht dazu beschrieben. Die Richtung dieser Komponente hängt von der Rotation des Vektorfeldes $R\chi\mathbf{g}_1$ ab und kann somit in jede beliebige Richtung auf der Kugeloberfläche zeigen. Daher ist es mit diesem Ansatz möglich für jede Wellenausbreitungsrichtung die Schubverformungen abzubilden.

Da ψ und χ voneinander unabhängige Funktionen sind, müssen sowohl $\Psi_I(\psi)$ als auch $\Psi_{II}(\chi)$ divergenzfrei sein (2.15) und der Wellengleichung (2.13b)

$$\Psi_i|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i = 0 \quad (5.14)$$

genügen.

Die Zusatzbedingung für $\Psi_I(\psi)$ liefert:

$$(R\psi)|^1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.15)$$

Da $\Psi_{II}(\chi)$ die Rotation des Vektorfeldes $R\chi\mathbf{g}_1$ darstellt, muss $\Psi_{II}(\chi)$ analog zu Gleichung (2.11) ohne Einschränkung von χ divergenzfrei sein:

$$((R\chi)|^j \epsilon_{ij1})|^i = 0 \quad (5.16)$$

Mit Hilfe der mathematischen Umformung für ein Vektorfeld \mathbf{A}

$$\text{div grad } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}$$

bzw.

$$A_i|_j^j = (A_j|_i^j) - (A_m|_l \epsilon^{klm})|^j \epsilon_{ijk} \quad (5.17)$$

ergibt sich die Bedingungsgleichung (5.14) für das vektorielle Potential zu:

$$\begin{aligned} \Psi_i|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i &= \underbrace{(\Psi_j|_i^j)}_{=0} - (\Psi_m|_l \epsilon^{klm})|^j \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i = \\ &= -(\Psi_m|_l \epsilon^{klm})|^j \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\Psi}_i \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Da ψ und χ voneinander unabhängige Funktionen sind, müssen sowohl $\Psi_I(\psi)$ als auch $\Psi_{II}(\chi)$ dieser Bedingung genügen.

In Kugelkoordinaten gilt für eine skalare Funktion a :

$$\begin{aligned}
& ((Ra)|^l \epsilon_{kl1})|_j \epsilon^{ijk} \mathbf{g}_i = \\
& = ((Ra)^l \epsilon_{kl1})_{,j} \epsilon^{ijk} \mathbf{g}_i - (Ra)^l \epsilon_{ml1} \Gamma_{kj}^m \epsilon^{ijk} \mathbf{g}_i = \\
& = (R a^{,3})_{,j} \epsilon^{ij2} \mathbf{g}_i - (R a^{,2})_{,j} \epsilon^{ij3} \mathbf{g}_i - R a^{,2} \Gamma_{23}^3 \mathbf{g}_1 + R a^{,2} \Gamma_{13}^3 \mathbf{g}_2 + R a^{,3} \Gamma_{12}^2 \mathbf{g}_3 = \\
& = R a_{,31} \mathbf{g}_3 - R a_{,33} \mathbf{g}_1 - R a_{,22} \mathbf{g}_1 + R a_{,21} \mathbf{g}_2 - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} a_{,2} \mathbf{g}_1 + a_{,2} \mathbf{g}_2 + a_{,3} \mathbf{g}_3 = \\
& = -R a_{,33} \mathbf{g}_1 - R a_{,22} \mathbf{g}_1 - \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} a_{,2} \mathbf{g}_1 - [2 a_{,1} \mathbf{g}_1 + R a_{,11} \mathbf{g}_1] + \\
& \quad + R a_{,31} \mathbf{g}_3 + R a_{,21} \mathbf{g}_2 + a_{,2} \mathbf{g}_2 + a_{,3} \mathbf{g}_3 + [2 a_{,1} \mathbf{g}_1 + R a_{,11} \mathbf{g}_1] = \\
& = (-R a|_j^j \epsilon^{i23} + (Ra)|^{1i}) \mathbf{g}_i \tag{5.19}
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
a|_j^j &= a_{,j}^j + \Gamma_{kj}^j a^{,k} = \\
&= a_{,jj} + \Gamma_{12}^2 a_{,1} + \Gamma_{23}^3 a_{,2} + \Gamma_{13}^3 a_{,1} = \\
&= a_{,11} + a_{,22} + a_{,33} + \frac{1}{R} a_{,1} + \frac{\cos \vartheta}{R \sin \vartheta} a_{,2} + \frac{1}{R} a_{,1}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

und

$$\begin{aligned}
(Ra)|^{1i} \mathbf{g}_i &= a^{,i} \mathbf{g}_i + (R a^{,1})|_i \mathbf{g}_i = \\
&= a_{,1} \mathbf{g}_1 + a_{,2} \mathbf{g}_2 + a_{,3} \mathbf{g}_3 + a_{,1} \mathbf{g}_1 + R a_{,11} \mathbf{g}_1 + R a_{,12} \mathbf{g}_2 + R a_{,13} \mathbf{g}_3
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Entsprechend gilt:

$$((Ra)|_l \epsilon^{kl1})|_j \epsilon_{ijk} \mathbf{g}^i = (-R a|_j^j \epsilon_{i23} + (Ra)|_i^1) \mathbf{g}^i \tag{5.22}$$

Setzt man $\Psi_I(\psi)$ in Gleichung (5.18) ein, so erhält man unter Verwendung von Gleichung (5.15) und (5.22):

$$\begin{aligned}
& - ((R\psi)|_l \epsilon^{kl1})|_j \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} R \ddot{\psi} \epsilon_{i23} = \\
& = R \psi|_j^j \epsilon_{i23} - \underbrace{(R\psi)|_i^1}_{=0} - \frac{1}{c_s^2} R \ddot{\psi} \epsilon_{i23} = \\
& = \left(\psi|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\psi} \right) R \epsilon_{i23} \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Aus Gleichung (5.23) erhält man somit die Bedingungsgleichung für die Skalarfunktion ψ :

$$\psi|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\psi} = 0 \quad (5.24)$$

$\Psi_{II}(\psi)$ in Gleichung (5.14) eingesetzt liefert mit Hilfe von Gleichung (5.19)

$$\begin{aligned} & - [((R\chi)|^n \epsilon_{mn1})|_l \epsilon^{klm}]^j \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} (R \ddot{\chi})^j \epsilon_{j1i} = \\ & = - [-R \chi|_l^l \epsilon^{k23} + (R\chi)|^{1k}]^j \epsilon_{ijk} - \frac{1}{c_s^2} (R \ddot{\chi})^j \epsilon_{j1i} = \\ & = (R \chi|_l^l)^j \epsilon_{ij1} + \underbrace{(R\chi)|^{1kj} \epsilon_{ijk}}_{=0} - \frac{1}{c_s^2} (R \ddot{\chi})^j \epsilon_{ij1} = \\ & = \left[R \left(\chi|_l^l - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi} \right) \right]^j \epsilon_{ij1} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

und somit die Bedingungsgleichung für die Skalarfunktion χ :

$$\chi|_j^j - \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi} = 0 \quad (5.26)$$

Unter Zuhilfenahme der Umformung

$$\begin{aligned} \Phi|_j^j &= \Phi_{,j}^j + \Phi^{,k} \Gamma_{kj}^j = \\ &= \Phi_{,11} + \Phi_{,22} + \Phi_{,33} + \Phi_{,1} \Gamma_{12}^2 + \Phi_{,1} \Gamma_{13}^3 + \Phi_{,2} \Gamma_{23}^3 = \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cos \vartheta}{R^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] \Phi \end{aligned} \quad (5.27)$$

lauten im Kugelkoordinatensystem die Bedingungsgleichungen für das skalare Potential Φ (2.13a) und die Skalarfunktionen ψ (5.24) und χ (5.26):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi(R, \vartheta, \varphi, t) = 0 \quad (5.28a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi(R, \vartheta, \varphi, t) = 0 \quad (5.28b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi(R, \vartheta, \varphi, t) = 0 \quad (5.28c)$$

Der in runden Klammern stehende Teil wird als Winkelanteil des Laplace-Operators bezeichnet. Zu dessen Lösung werden Kugelflächenfunktionen $Y_m^l(\vartheta, \varphi)$ verwendet, die einen vollständigen und orthonormalen Satz von Eigenfunktionen bilden, welche die Eigenwertgleichung (5.29) erfüllen ([Heine 1861], [Hobson 1931] und [Müller 1966]).

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_m^l(\vartheta, \varphi) = -m(m+1) Y_m^l(\vartheta, \varphi) \quad (5.29)$$

Die Kugelflächenfunktionen setzen sich aus dem Produkt von trigonometrischen Funktionen - hier dargestellt durch eine komplexe Exponentialfunktion - und assoziierten Legendre-Funktionen $P_m^l(\cos \vartheta)$ zusammen (Abbildung 5.2):

$$Y_m^l(\vartheta, \varphi) = P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \quad (5.30)$$

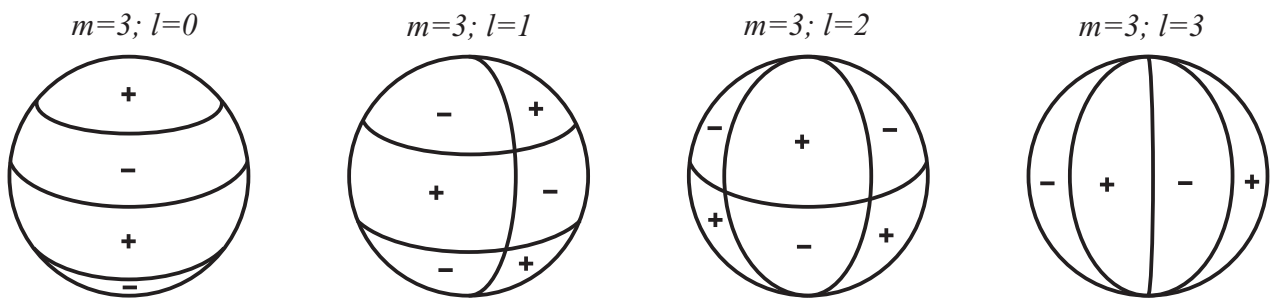


Abbildung 5.2: Kugelflächenfunktionen $Y_m^l(\vartheta, \varphi)$ für $m = 3$

Die assoziierten Legendre-Funktionen $P_m^l(\cos \vartheta)$, im Folgenden mit P_m^l abgekürzt, liefern nur Werte für $|l| \leq m$ und genügen der Differentialgleichung (siehe Anhang A.1.4, [Abramowitz u. Stegun 1965] und [Jahnke 1966]):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{l^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P_m^l = -m(m+1) P_m^l \quad (5.31)$$

Entwickelt man nun die Ansatzfunktionen Φ , ψ und χ jeweils in eine Reihe von Kugelflächenfunktionen

$$\Phi(R, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{l=-m}^{l=m} \tilde{\Phi}(R, m, l, t) P_m^l e^{il\varphi} \quad (5.32a)$$

$$\psi(R, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{l=-m}^{l=m} \tilde{\psi}(R, m, l, t) P_m^l e^{il\varphi} \quad (5.32b)$$

$$\chi(R, \vartheta, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{l=-m}^{l=m} \tilde{\chi}(R, m, l, t) P_m^l e^{il\varphi} \quad (5.32c)$$

und setzt die Reihen (5.32) dann in die Gleichungen (5.28) ein, so führt ein anschließender Koeffizientenvergleich mit Hilfe von Gleichung (5.29) zu den Bedingungsgleichungen für die einzelnen Koeffizienten der Reihe der Kugelflächenfunktionen:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{m(m+1)}{R^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tilde{\Phi}(R, m, l, t) = 0 \quad (5.33a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{m(m+1)}{R^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tilde{\psi}(R, m, l, t) = 0 \quad (5.33b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{m(m+1)}{R^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \tilde{\chi}(R, m, l, t) = 0 \quad (5.33c)$$

Durch eine Fouriertransformation bezüglich der Zeit $t \rightarrow \omega$ vom Zeit- in den Frequenzbereich lassen sich die Gleichungen (5.33) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \left(k_p^2 - \frac{m(m+1)}{R^2} \right) \right] \hat{\Phi}(R, m, l, \omega) = 0 \quad (5.34a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \left(k_s^2 - \frac{m(m+1)}{R^2} \right) \right] \hat{\psi}(R, m, l, \omega) = 0 \quad (5.34b)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \left(k_s^2 - \frac{m(m+1)}{R^2} \right) \right] \hat{\chi}(R, m, l, \omega) = 0 \quad (5.34c)$$

Lösungsansätze für diesen Gleichungstyp bilden sphärische Bessel-Funktionen die im Anhang A.1.2 sowie in [Abramowitz u. Stegun 1965], [Jahnke 1966] und [Råde u. Westergren 2000] zu finden sind. Die allgemeine Lösung für $\hat{\Phi}$, $\hat{\psi}$ und $\hat{\chi}$ lautet:

$$\hat{\Phi}(R, m, l, \omega) = C_{1lm} j_m(\tilde{k}_p R) + C_{4lm} y_m(\tilde{k}_p R) \quad (5.35a)$$

$$\hat{\psi}(R, m, l, \omega) = C_{2lm} j_m(\tilde{k}_s R) + C_{5lm} y_m(\tilde{k}_s R) \quad (5.35b)$$

$$\hat{\chi}(R, m, l, \omega) = C_{3lm} j_m(\tilde{k}_s R) + C_{6lm} y_m(\tilde{k}_s R) \quad (5.35c)$$

mit

$$\tilde{k}_p = \sqrt{k_p^2} \quad \text{und} \quad \tilde{k}_s = \sqrt{k_s^2} \quad (5.36)$$

Als Argument der sphärischen Bessel-Funktionen j_m und y_m tritt $\tilde{k}_p R$ bzw. $\tilde{k}_s R$ auf. Alternativ kann auch ein Ansatz mit sphärischen Hankel-Funktionen erster Art $h_m^{(1)}$ und zweiter Art $h_m^{(2)}$ gefunden werden:

$$\hat{\Phi}(R, m, l, \omega) = C_{1lm} h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) + C_{4lm} h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R) \quad (5.37a)$$

$$\hat{\psi}(R, m, l, \omega) = C_{2lm} h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + C_{5lm} h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) \quad (5.37b)$$

$$\hat{\chi}(R, m, l, \omega) = C_{3lm} h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + C_{6lm} h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) \quad (5.37c)$$

mit

$$h_m^{(1)}(z) = j_m(z) + i y_m(z) \quad \text{und} \quad h_m^{(2)}(z) = j_m(z) - i y_m(z) \quad (5.38)$$

Aufgrund der für dieses Problem günstigeren Lösungscharakteristik (siehe Abschnitt 5.4) wird in dieser Arbeit der Ansatz mit sphärischen Hankel-Funktionen (5.37) verwendet.

5.3 Verschiebungen und Spannungen in Kugelkoordinaten

Die Komponenten u^i des Verschiebungsvektors in Kugelkoordinaten werden mittels Gleichung (2.9) ermittelt. Unter Zuhilfenahme der Gleichungen (5.19) und (5.26) ergibt sich:

$$\begin{aligned} u^i &= \Phi|_i + \Psi_l|_k \epsilon^{ikl} = \\ &= \Phi_{,i} + (R\psi)|_k \epsilon^{ik1} + ((R\chi)|^j \epsilon_{lj1})|_k \epsilon^{ikl} = \\ &= \Phi_{,i} + (R\psi)|_k \epsilon^{ik1} - R \chi|_j^j \epsilon^{i23} + (R\chi)|^{1i} = \\ &= \Phi_{,i} + (R\psi)|_k \epsilon^{ik1} - R \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi} \epsilon^{i23} + (R\chi)|^{1i} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Hieraus werden die physikalischen Komponenten des Verschiebungsvektors ($u_R = u^1$, $u_\vartheta = u^2$, $u_\varphi = u^3$) berechnet:

$$\begin{aligned} u_R &= \Phi_{,1} - R \frac{1}{c_s^2} \ddot{\chi} + (R\chi)|^{11} = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial R} - R \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (R\chi)}{\partial R^2} = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial R} + R \frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} + 2 \frac{\partial \chi}{\partial R} - R \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.40a)$$

$$\begin{aligned}
u_{\vartheta} &= \Phi_{,2} + (R\psi)|_3 + (R\chi)|^{12} = \\
&= \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 (R\chi)}{\partial R \partial \vartheta} = \\
&= \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial R \partial \vartheta}
\end{aligned} \tag{5.40b}$$

$$\begin{aligned}
u_{\varphi} &= \Phi_{,3} - (R\psi)|_2 + (R\chi)|^{13} = \\
&= \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial^2 (R\chi)}{\partial R \partial \varphi} = \\
&= \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial R \partial \varphi}
\end{aligned} \tag{5.40c}$$

Die Gleichungen für die Verschiebungen (5.40) können in Matrixform zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_R \\ u_{\vartheta} \\ u_{\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & 0 & R \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial}{\partial R} \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & -\frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial}{\partial R} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix} \\
\mathbf{u}_s & \qquad \qquad \mathbf{D}_s \qquad \qquad \mathbf{\Pi}_s
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Der Index s steht für sphärische Koordinaten.

Die Verschiebungsgrößen für das Reihenglied (m, l) ergeben sich somit im $(R, \vartheta, \varphi, \omega)$ -Raum zu:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{u}_R(m, l) \\ \hat{u}_{\vartheta}(m, l) \\ \hat{u}_{\varphi}(m, l) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial R} P_m^l e^{il\varphi} & 0 & \frac{m(m+1)}{R} P_m^l e^{il\varphi} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial P_m^l}{\partial \vartheta} e^{il\varphi} & i \frac{l}{\sin \vartheta} P_m^l e^{il\varphi} & \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial}{\partial R} \right) \frac{\partial P_m^l}{\partial \vartheta} e^{il\varphi} \\ i \frac{l}{R \sin \vartheta} P_m^l e^{il\varphi} & -\frac{\partial P_m^l}{\partial \vartheta} e^{il\varphi} & i \frac{l}{\sin \vartheta} \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial}{\partial R} \right) P_m^l e^{il\varphi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Phi} \\ \hat{\psi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} \\
\hat{\mathbf{u}}_s & \qquad \qquad \hat{\mathbf{D}}_s \qquad \qquad \hat{\mathbf{\Pi}}_s
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Schreibt man den Ansatz (5.37) für die Skalarfunktionen $\hat{\Phi}$, $\hat{\psi}$ und $\hat{\chi}$ in Matrixform

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \hat{\Phi} \\ \hat{\psi} \\ \hat{\chi} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) & 0 & 0 & h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R) & 0 & 0 \\ 0 & h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) & 0 & 0 & h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) & 0 \\ 0 & 0 & h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) & 0 & 0 & h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_{1lm} \\ C_{2lm} \\ C_{3lm} \\ C_{4lm} \\ C_{5lm} \\ C_{6lm} \end{pmatrix} \\
\hat{\mathbf{\Pi}}_s & \qquad \qquad \hat{\mathbf{A}}_s \qquad \qquad \mathbf{C}_s
\end{aligned} \tag{5.43}$$

so lassen sich die Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_s$ aus den Unbekannten \mathbf{C}_s ermitteln:

$$\hat{\mathbf{u}}_s = \hat{\mathbf{D}}_s \cdot \hat{\mathbf{A}}_s \cdot \mathbf{C}_s = \hat{\mathbf{H}}_s \cdot \mathbf{C}_s \quad (5.44)$$

Die Elemente der Matrix $\hat{\mathbf{H}}_s$ sind im Anhang A.4.1 angegeben.

In Zylinderkoordinaten gilt die Beziehung zwischen den physikalischen Verschiebungen und den physikalischen Verzerrungen nach Gleichung (2.2):

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{RR} \\ \epsilon_{\vartheta\vartheta} \\ \epsilon_{\varphi\varphi} \\ \epsilon_{R\vartheta} \\ \epsilon_{R\varphi} \\ \epsilon_{\vartheta\varphi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{\cos \vartheta}{R \sin \vartheta} & \frac{1}{R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{2R} & 0 \\ \frac{1}{2R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{2R} \\ 0 & \frac{1}{2R \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\cos \vartheta}{2R \sin \vartheta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ u_\vartheta \\ u_\varphi \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = \mathbf{L}_s \mathbf{u}_s$$

Für das Reihenglied (m, l) lautet die Gleichungen (5.45) im $(R, \vartheta, \varphi, \omega)$ -Raum:

$$\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{RR}(m, l) \\ \hat{\epsilon}_{\vartheta\vartheta}(m, l) \\ \hat{\epsilon}_{\varphi\varphi}(m, l) \\ \hat{\epsilon}_{R\vartheta}(m, l) \\ \hat{\epsilon}_{R\varphi}(m, l) \\ \hat{\epsilon}_{\vartheta\varphi}(m, l) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{\cos \vartheta}{R \sin \vartheta} & i \frac{l}{R \sin \vartheta} \\ \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{2R} & 0 \\ i \frac{l}{2R \sin \vartheta} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{2R} \\ 0 & i \frac{l}{2R \sin \vartheta} & \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\cos \vartheta}{2R \sin \vartheta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_R(m, l) \\ \hat{u}_\vartheta(m, l) \\ \hat{u}_\varphi(m, l) \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s = \hat{\mathbf{L}}_s \hat{\mathbf{u}}_s$$

Die physikalische Spannungs-Verzerrungsbeziehung nach Gleichung (2.3) ergibt sich zu:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s = \hat{\mathbf{E}}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s \quad (5.47)$$

mit

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s = \left(\hat{\sigma}_{RR}(m, l) \quad \hat{\sigma}_{\vartheta\vartheta}(m, l) \quad \hat{\sigma}_{\varphi\varphi}(m, l) \quad \hat{\sigma}_{R\vartheta}(m, l) \quad \hat{\sigma}_{R\varphi}(m, l) \quad \hat{\sigma}_{\vartheta\varphi}(m, l) \right)^T \quad (5.48)$$

Die Elastizitätsmatrix $\hat{\mathbf{E}}_s$ ist identisch mit der Elastizitätsmatrix des kartesischen Koordinatensystems $\hat{\mathbf{E}}_k$ aus Gleichung (3.15), da es sich hier ebenfalls um ein orthonormales Koordinatensystem handelt.

Die transformierten Spannungen $\hat{\sigma}_s$ können somit aus den Unbekannten C_s berechnet werden:

$$\hat{\sigma}_s = \hat{\mathbf{E}}_s \cdot \hat{\mathbf{L}}_s \cdot \hat{\mathbf{D}}_s \cdot \hat{\mathbf{A}}_s \cdot C_s = \hat{\mathbf{K}}_s \cdot C_s \quad (5.49)$$

Die Elemente der Matrix $\hat{\mathbf{K}}_s$ sind im Anhang A.4.2 angegeben.

5.4 Lösung für den homogenen Vollraum mit sphärischem Hohlraum

Die sechs unbekannt Koeffizienten $C_{1lm} - C_{6lm}$ werden mit Hilfe der Randbedingungen berechnet. Drei Koeffizienten können wiederum aus den nicht lokalen Randbedingungen im Unendlichen ermittelt werden.

Die sphärischen Hankel-Funktionen stehen mit den halbzahligen Hankel-Funktionen in folgender Beziehung [Abramowitz u. Stegun 1965]:

$$h_m^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{m+1/2}^{(1)}(z) \quad (5.50a)$$

$$h_m^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_{m+1/2}^{(2)}(z) \quad (5.50b)$$

Für negative Frequenzen ω beschreiben daher die Lösungen mit sphärischen Hankel-Funktionen erster Art $h_m^{(1)}$ analog zu Abschnitt 4.3 Wellen, die mit zunehmender Entfernung vom Lasteinleitungsort abklingen und vom Ort der Lasteinleitung fortlaufen. Die sphärischen Hankel-Funktionen zweiter Art $h_m^{(2)}$ stehen dagegen für Wellen, die mit zunehmender Entfernung vom Lasteinleitungsort aufklingen bzw. auf den Lasteinleitungsort zurücklaufen. Da diese Wellen im homogenen Vollraum mit sphärischem Hohlraum nicht auftreten, können die zugehörigen Koeffizienten $C_{4lm} - C_{6lm}$ zu Null gesetzt werden. Für positive Frequenzen beschreiben die sphärischen Hankel-Funktionen erster Art $h_m^{(1)}$ Wellen die mit zunehmender Entfernung vom Lasteinleitungsort aufklingen bzw. auf den Lasteinleitungsort zurücklaufen und somit verschwinden in diesem Fall die zugehörigen Koeffizienten $C_{1lm} - C_{3lm}$.

Um die Berechnung zu vereinfachen und eine Fallunterscheidung zu vermeiden, wird im Folgenden als Ansatz ein Fundamentalsystem aus sphärischen Hankel-Funktionen (5.37) verwendet und ein negatives ω vorausgesetzt. Die Werte der Zustandsgrößen $\hat{Z}(\omega)$ für positive Frequenzen ω werden anschließend wie in Abschnitt 3.3 aus den Ergebnissen für negative Frequenzen bestimmt.

Da die Argumente der sphärischen Hankel-Funktionen $\tilde{k}_p R$ und $\tilde{k}_s R$ für einen ungedämpften Vollraum nur reelle Werte annehmen, stellen die Ergebnisse für den Vollraum mit kugelförmigen Hohlraum nur Fernfeldlösungen dar. Anders als im Fall eines zylindrischen Hohlraum existieren hier keine Nahfelder.

Nachdem die Koeffizienten $C_{4lm} - C_{6lm}$ infolge der Randbedingungen im Unendlichen zu Null gesetzt wurden, können die restlichen drei Unbekannten $C_{1lm} - C_{3lm}$ unter Verwendung der lokalen Randbedingungen an der Oberfläche des kugelförmigen Hohlraums berechnet werden. Die Spannungen am Hohlraumrand (HR, $R = R_0$) müssen mit den dort angreifenden Belastungen (p_{RR} , $p_{R\vartheta}$ und $p_{R\varphi}$) im Gleichgewicht stehen.

Die transformierten Spannungen für das Reihenglied (m, l) ergeben sich nach Gleichung (5.49) und Anhang A.4.2 zu:

$$\hat{\sigma}_{RR} = A_1 P_m^l \quad (5.51a)$$

$$\hat{\sigma}_{R\vartheta} = m \cot \vartheta A_2 P_m^l - \frac{m+l}{\sin \vartheta} A_2 P_{m-1}^l + i \frac{l}{\sin \vartheta} A_3 P_m^l \quad (5.51b)$$

$$\hat{\sigma}_{R\varphi} = i \frac{l}{\sin \vartheta} A_2 P_m^l - m \cot \vartheta A_3 P_m^l + \frac{m+l}{\sin \vartheta} A_3 P_{m-1}^l \quad (5.51c)$$

mit

$$\begin{aligned} A_1 &= C_{1lm} \left(\left(\frac{m^2 - m}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) + \frac{2}{R} \tilde{k}_p 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R) \right) e^{il\varphi} + \\ &+ C_{3lm} \left(\frac{m^3 - m}{R^2} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) - \frac{m^2 + m}{R} \tilde{k}_s 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R) \right) e^{il\varphi} \\ A_2 &= C_{1lm} \left(\frac{m-1}{R^2} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) - \frac{1}{R} \tilde{k}_p 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R) \right) e^{il\varphi} + \\ &+ C_{3lm} \left(\left(\frac{m^2 - 1}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + \frac{1}{R} \tilde{k}_s 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R) \right) e^{il\varphi} \\ A_3 &= C_{2lm} \left(\frac{m-1}{2R} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) - \frac{1}{2} \tilde{k}_s 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R) \right) e^{il\varphi} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Die Spannungen $\hat{\sigma}_{R\vartheta}$ und $\hat{\sigma}_{R\varphi}$ haben für das Reihenglied (m, l) sowohl einen Anteil mit der assoziierten Legendre-Funktion P_m^l als auch mit der assoziierten Legendre-Funktion P_{m-1}^l . Eine Darstellung der Spannungen in einer Legendre-Reihe ist somit nicht möglich. Daher führen [Eringen 1957] bzw. [Eringen u. Suhubi 1975] die beiden Hilfsgrößen \hat{F} und \hat{G} ein,

die nur noch von einer Legendre-Funktion abhängen.

$$\hat{F} = - \left(\frac{\partial(\hat{\sigma}_{R\vartheta} \sin\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\hat{\sigma}_{R\varphi}}{\partial\varphi} \right) \frac{1}{\sin\vartheta} \quad (5.53a)$$

$$\hat{G} = - \left(\frac{\partial\hat{\sigma}_{R\vartheta}}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\hat{\sigma}_{R\varphi} \sin\vartheta)}{\partial\vartheta} \right) \frac{1}{\sin\vartheta} \quad (5.53b)$$

Mit der Rekursionsbeziehungen

$$\frac{\partial P_m^l}{\partial\vartheta} = m \cot\vartheta P_m^l - \frac{m+l}{\sin\vartheta} P_{m-1}^l \quad (5.54a)$$

$$\frac{\partial P_m^l}{\partial\vartheta} = \frac{m-l+1}{\sin\vartheta} P_{m+1}^l - (m+1) \cot\vartheta P_m^l \quad (5.54b)$$

erhält man nach Einsetzen der transformierten Spannungen (5.51) in Gleichung (5.53a) die Bestimmungsgleichung für die Hilfsgröße \hat{F} :

$$\begin{aligned} \hat{F} &= - \left[m A_2 \frac{\partial(\cos\vartheta P_m^l)}{\partial\vartheta} - (m+l) A_2 \frac{\partial P_{m-1}^l}{\partial\vartheta} + i l A_3 \frac{\partial P_m^l}{\partial\vartheta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(i \frac{l}{\sin\vartheta} A_2 P_m^l \right) - \frac{\partial}{\partial\varphi} (m \cot\vartheta A_3 P_m^l) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{m+l}{\sin\vartheta} A_3 P_{m-1}^l \right) \right] \frac{1}{\sin\vartheta} = \\ &= - \left[- A_2 m \sin\vartheta P_m^l + A_2 m \cos\vartheta \left(m \cot\vartheta P_m^l - \frac{m+l}{\sin\vartheta} P_{m-1}^l \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_2 (m+l) \left(\frac{(m-1) - m+1}{\sin\vartheta} P_m^l - ((m-1)+1) \cot\vartheta P_{m-1}^l \right) + \right. \\ &\quad \left. + i A_3 l \left(m \cot\vartheta P_m^l - \frac{m+l}{\sin\vartheta} P_{m-1}^l \right) - \right. \\ &\quad \left. - A_2 \frac{l^2}{\sin\vartheta} P_m^l - i A_3 l m \cot\vartheta P_m^l + i A_3 l \frac{m+l}{\sin\vartheta} P_{m-1}^l \right] \frac{1}{\sin\vartheta} = \\ &= A_2 m P_m^l - A_2 m^2 \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} P_m^l + A_2 m^2 \frac{1}{\sin^2\vartheta} P_m^l = \\ &= A_2 m(m+1) P_m^l \end{aligned} \quad (5.55)$$

Analog liefert das Einsetzen von (5.51) in (5.53b) die Bestimmungsgleichung für \hat{G} :

$$\hat{G} = A_3 m(m+1) P_m^l \quad (5.56)$$

Die beiden Größen \hat{F} und \hat{G} hängen nur von der Legendre-Funktion P_m^l ab und können somit in einer Reihe dargestellt werden. Mit ihrer Hilfe können nun die Unbekannten $C_{1lm} - C_{3lm}$ ermittelt werden.

Für jedes Reihenglied m, l müssen die Größen $\hat{\sigma}_{RR}$, \hat{F} und \hat{G} die Randbedingungen erfüllen. Eine Transformation der Belastung p_{RR} , sowie der Größen F_p und G_p , die aus den Belastungen $p_{R\theta}$ und $p_{R\varphi}$ nach Gleichung (5.53) berechnet werden, in den Bildraum (R, m, l, ω) und anschließendes Aufstellen des Gleichgewichts liefert:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} C_{1lm} \\ C_{2lm} \\ C_{3lm} \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -\hat{p}_{RR} \\ -\hat{F}_p \\ -\hat{G}_p \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\text{HR}} & \mathbf{C}_{\text{HR}} & \hat{\mathbf{P}}_{\text{HR}} \end{array} \quad (5.57)$$

mit

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{m^2 - m}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) + \frac{2}{R} \tilde{k}_p 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R) \\ K_2 &= 0 \\ K_3 &= \frac{m^3 - m}{R^2} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) - \frac{m^2 + m}{R} \tilde{k}_s 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R) \\ F_1 &= m(m+1) \left(\frac{m-1}{R^2} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) - \frac{1}{R} \tilde{k}_p 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R) \right) \\ F_2 &= 0 \\ F_3 &= m(m+1) \left(\left(\frac{m^2 - 1}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + \frac{1}{R} \tilde{k}_s 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R) \right) \\ G_1 &= 0 \\ G_2 &= m(m+1) \left(\frac{m-1}{2R} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) - \frac{1}{2} \tilde{k}_s 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R) \right) \\ G_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Die Unbekannten $C_{1lm} - C_{3lm}$ ergeben sich aus der Gleichung:

$$\mathbf{C}_{\text{HR}} = \hat{\mathbf{K}}_{\text{HR}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\text{HR}} \quad (5.59)$$

Nun kann der Verlauf der transformierten Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_s$ und der transformierten Spannungen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_s$ mit den Gleichungen (5.44) und (5.49) errechnet werden. Die Verschiebungen und Spannungen im Originalraum $(R, \vartheta, \varphi, t)$ erhält man schließlich über eine Rücktransformation.

Die in diesem Kapitel hergeleitete Lösung gilt nur unter der Voraussetzung einer dynamischen Belastung ($\omega \neq 0$), da für eine statische Last mit $\omega = 0$ die verwendeten Ansätze nicht vollständig sind.

5.5 Berechnungsbeispiele

Anhand der im vorhergehenden Abschnitt ermittelten Ergebnisse werden nun exemplarisch Berechnungen durchgeführt.

Wird ein sphärischen Hohlraum im Vollraum an seiner Hohlraumoberfläche mit einem harmonischen örtlich konstanten Innendruck \hat{p}_{RR} belastet (Abbildung 5.3), so treten keine Schubspannungen auf. Die beiden Größen \hat{F} und \hat{G} aus Gleichung (5.53) werden zu Null. Aufgrund der über die gesamte Hohlraumoberfläche konstanten Verhältnisse enthält die Lösung nur die assoziierte Legendre-Funktion P_m^l mit $m = 0$ und $l = 0$.

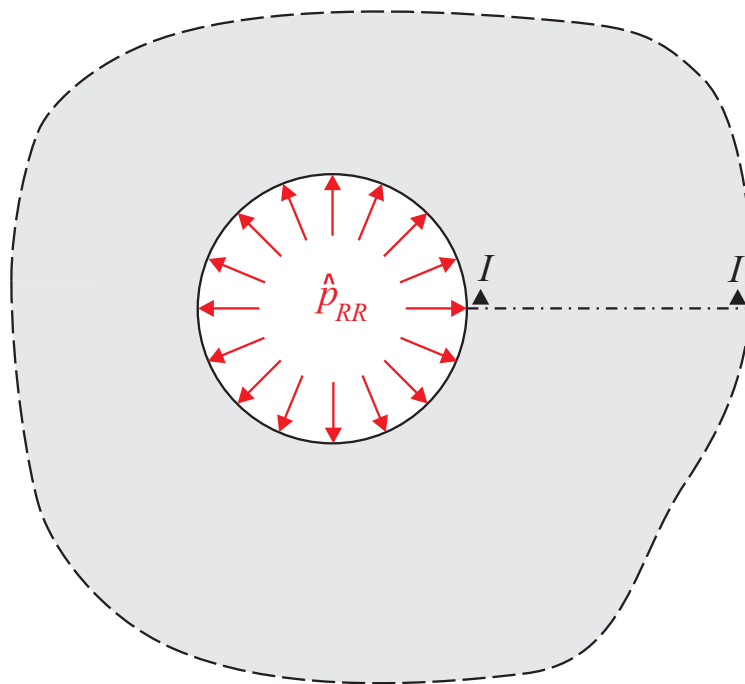


Abbildung 5.3: Sphärischer Hohlraum unter konstanter Druckbelastung p_{RR}

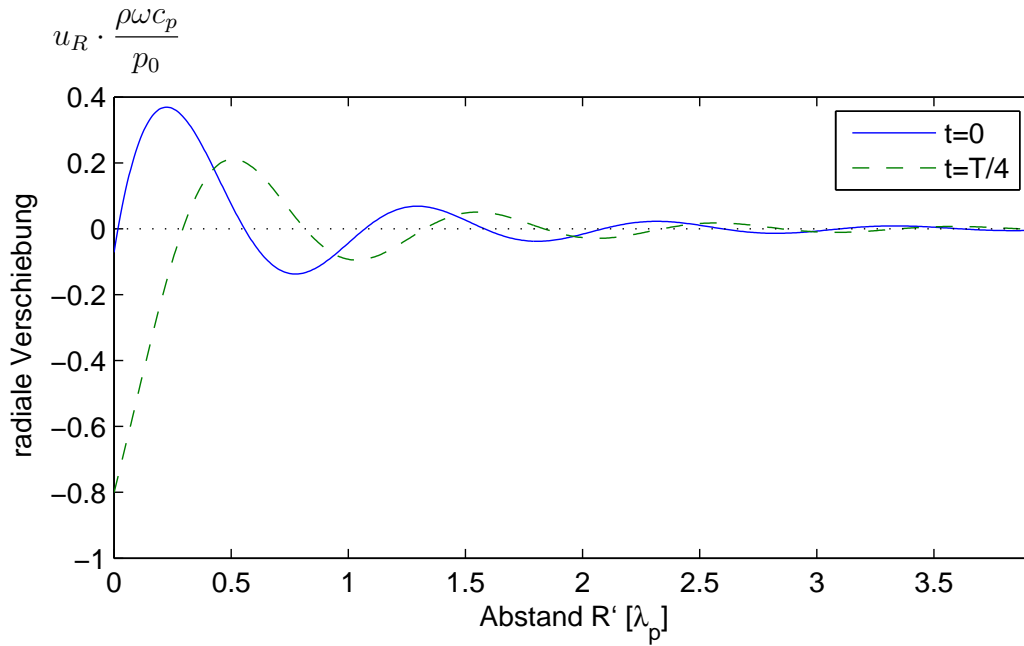


Abbildung 5.4: Radiale Verschiebung u_R zum Zeitpunkt $t=0$ und $t=T/4$ entlang des Schnittes $I-I$ infolge einer konstanten harmonischen Druckbelastung ($p_{RR}=p_0 \cos(\omega t)$) an der Hohlraumoberfläche

$$\hat{u}_R(R) = \frac{\tilde{k}_p h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R)}{\tilde{k}_s^2 \mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R_0) - \frac{4}{R} \tilde{k}_p \mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R_0)} \cdot \hat{p}_{RR} \quad (5.60a)$$

$$\hat{\sigma}_{RR}(R) = \frac{\tilde{k}_s^2 h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) + \frac{4}{R} \tilde{k}_p h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R)}{\tilde{k}_s^2 h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R_0) - \frac{4}{R} \tilde{k}_p h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R_0)} \cdot \hat{p}_{RR} \quad (5.60b)$$

In Abbildung 5.4 sind die Verschiebungen u_R infolge der Last $p_{RR}=p_0 \cos(\omega t)$ entlang des radialen Schnittes $I-I$ zum Zeitpunkt $t=0$ und $t=T/4$ dargestellt. Es ergibt sich eine abklingende Welle mit der Wellenlänge der Kompressionswelle λ_p .

Als weiterer Lastfall wird ein sphärischer Hohlraum unter einer konstanten Schubbelastung $p_{R\varphi}$ betrachtet (Abbildung 5.5).

Auch hier lassen sich alle resultierenden Verschiebungen und Spannungen unter Verwendung der Gleichungen (5.44), (5.49) und (5.59) bestimmen. Es ergeben sich jedoch nicht so einfache mathematische Ausdrücke wie für das Beispiel mit konstantem Innendruck, da alle assoziierten Legendre-Polynome P_m^l einen Beitrag zur Lösung leisten.

In Abbildung 5.6 sind die tangentialen Verschiebungen u_φ infolge der Last $p_{R\varphi}=p_0 \cos(\omega t)$ entlang des radialen Schnittes $I-I$ zum Zeitpunkt $t=0$ und $t=T/4$ dargestellt. Diese bilden eine abklingende Welle mit der kleineren Wellenlänge der Scherwelle λ_s .

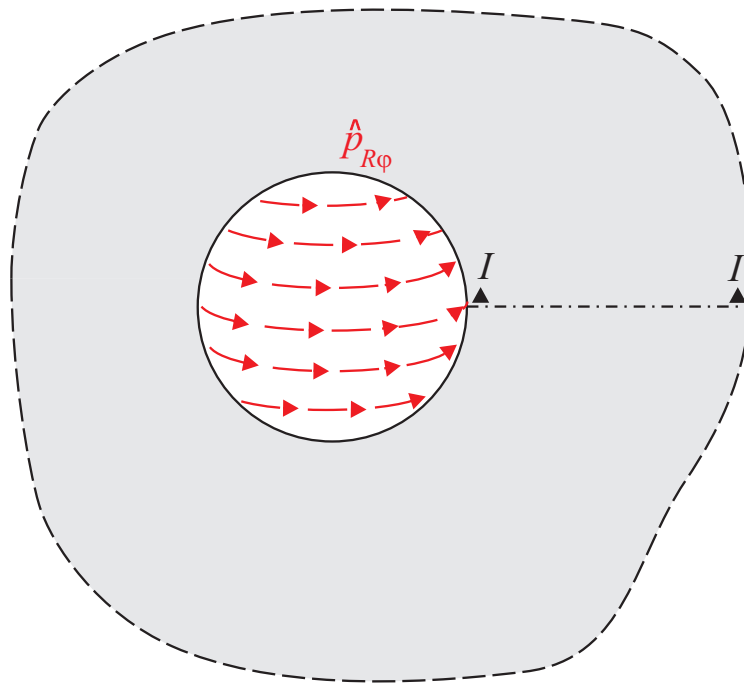


Abbildung 5.5: Sphärischer Hohlraum unter konstanter Schubbelastung $p_{R\varphi}$

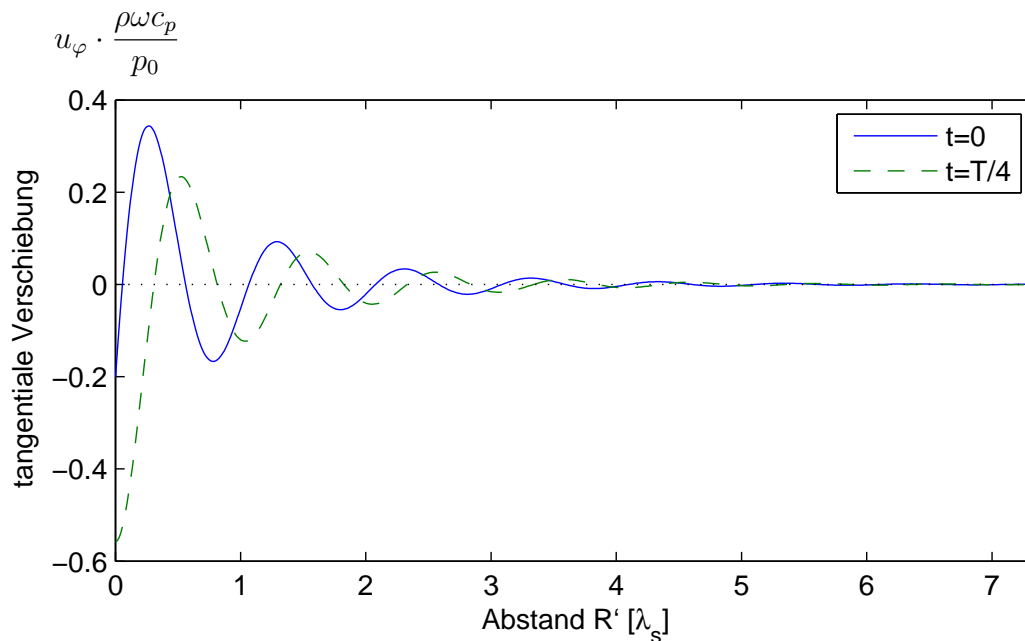


Abbildung 5.6: Tangentielle Verschiebung u_φ zum Zeitpunkt $t=0$ und $t=T/4$ entlang des Schnittes $I-I$ infolge einer konstanten harmonischen Schubbelastung ($p_{R\varphi} = p_0 \cos(\omega t)$) an der Hohlraumoberfläche

6 Superposition der Grundlösungen der Fundamentalsysteme

6.1 Vorbemerkungen

In den vorstehenden Kapiteln wurden die Lösung für die Fundamentalsysteme Halbraum (Abschnitt 3), Vollraum mit zylindrischem Hohlraum (Abschnitt 4) und Vollraum mit sphärischem Hohlraum (Abschnitt 5) hergeleitet. Für das System eines Halbraums mit zylindrischem oder sphärischem Hohlraum liegt keine einfache Lösung vor. Diese kann aber mit Hilfe einer Superposition aus den bekannten drei Lösungen der Fundamentalsysteme ermittelt werden.

Obwohl die Fundamentalsysteme geometrisch völlig unterschiedlich sind, können sie dennoch miteinander überlagert werden, da sie alle eine Teillösung einer Vollraumlösung darstellen. Dies kann am System des Halbraums gezeigt werden.

Ein Vollraum, der in einer Ebene mit beliebigen Lasten \hat{p}_{zx} , \hat{p}_{zy} und \hat{p}_{zz} beaufschlagt wird, kann analog zu [Müller 1993] mittels zwei aufeinanderliegenden Halbräumen berechnet werden (Abbildung 6.1).

Die Übergangsbedingungen im Bildraum ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 -\hat{u}_{x_o}(k_{x_o}, -k_{y_o}, z_o = 0, \omega) + \hat{u}_{x_u}(k_{x_u}, k_{y_u}, z_u = 0, \omega) &= 0 \\
 \hat{u}_{y_o}(k_{x_o}, -k_{y_o}, z_o = 0, \omega) + \hat{u}_{y_u}(k_{x_u}, k_{y_u}, z_u = 0, \omega) &= 0 \\
 \hat{u}_{z_o}(k_{x_o}, -k_{y_o}, z_o = 0, \omega) + \hat{u}_{z_u}(k_{x_u}, k_{y_u}, z_u = 0, \omega) &= 0 \\
 -\hat{\sigma}_{zx_o}(k_{x_o}, -k_{y_o}, z_o = 0, \omega) - \hat{\sigma}_{zx_u}(k_{x_u}, k_{y_u}, z_u = 0, \omega) &= \hat{p}_{zx} \\
 \hat{\sigma}_{zy_o}(k_{x_o}, -k_{y_o}, z_o = 0, \omega) - \hat{\sigma}_{zy_u}(k_{x_u}, k_{y_u}, z_u = 0, \omega) &= \hat{p}_{zy} \\
 \hat{\sigma}_{zz_o}(k_{x_o}, -k_{y_o}, z_o = 0, \omega) - \hat{\sigma}_{zz_u}(k_{x_u}, k_{y_u}, z_u = 0, \omega) &= \hat{p}_{zz}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

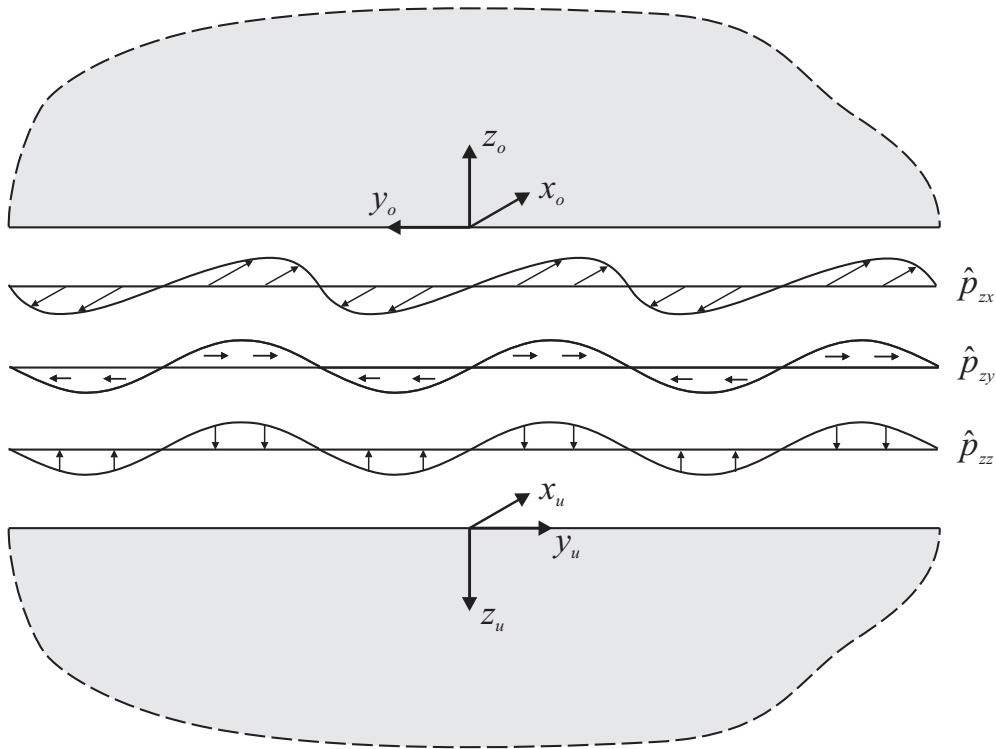


Abbildung 6.1: Aus zwei Halbräumen zusammengesetzter Vollraum

Die Übergangsbedingungen können unter Verwendung der Gleichungen (3.11) und (3.16) in Matrixschreibweise geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_o & \hat{\mathbf{H}}_u \\ \hat{\mathbf{K}}_o & \hat{\mathbf{K}}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_o \\ \mathbf{C}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

mit

$\mathbf{C}_o = (A_{2_o} \ B_{x2_o} \ B_{y2_o})^T$, den Unbekannten des oberen Halbraums,

$\mathbf{C}_u = (A_{2_u} \ B_{x2_u} \ B_{y2_u})^T$, den Unbekannten des unteren Halbraums und

$\hat{\mathbf{P}} = (\hat{p}_{zx} \ \hat{p}_{zy} \ \hat{p}_{zz})^T$, der einwirkende Last.

Nun kann der Lastfall $\hat{\mathbf{P}}$ ermittelt werden, bei welchem das Verhalten des unteren Halbraums dem eines Halbraums entspricht, welcher an seiner freien Oberfläche belastet wird. Das bedeutet die Unbekannten \mathbf{C}_u entsprechen in diesem Fall den Koeffizienten der jeweiligen Halbraumlösung und sind somit bekannt.

Mathematische Umformungen liefern die Bestimmungsgleichungen (6.3) für den zugehörigen

Lastfall $\hat{\mathbf{P}}$ im Vollraum.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_o \\ \hat{\mathbf{K}}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_u \\ \hat{\mathbf{K}}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{H}}_o \\ \mathbf{I} & -\hat{\mathbf{K}}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} \\ \mathbf{C}_o \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_u \\ \hat{\mathbf{K}}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}} \\ \mathbf{C}_o \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{H}}_o \\ \mathbf{I} & -\hat{\mathbf{K}}_o \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}}_u \\ \hat{\mathbf{K}}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.3)$$

In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass die Lösungen des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum und des Vollraums mit sphärischem Hohlraum Teillösungen für einen speziellen Lastfall im Vollraum darstellen. Eine Superposition der einzelnen Fundamentalsysteme ist somit möglich.

6.2 Transformationsbeziehungen zwischen den Koordinatensystemen

Um eine Überlagerung der einzelnen Fundamentalsysteme zu ermöglichen, müssen die Verschiebungen und Spannungen zwischen den unterschiedlichen Koordinatensystemen (kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten) umgeformt werden. Dies erfolgt für die Verschiebungen mit den Transformationsmatrizen $\beta_i^{j^0}$ aus Gleichung (4.8) bzw. (5.7).

$$\hat{\mathbf{u}}_z = \left[\beta_i^{j^0} \right]_{\mathbf{k}-z} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k \quad (6.4a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_s = \left[\beta_i^{j^0} \right]_{\mathbf{k}-s} \cdot \hat{\mathbf{u}}_k \quad (6.4b)$$

Da die Spannung $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ einen Tensor 2ter Ordnung darstellt, müssen die Koeffizienten zur Transformation zweimal mit der Matrix $\beta_i^{j^0}$ multipliziert werden.

$$[\hat{\sigma}_{ij}] = \left[\beta_i^{i^0} \right] [\hat{\sigma}_{i^0 j^0}] \left[\beta_j^{j^0} \right]^T \quad (6.5)$$

Somit ergibt sich für die Beziehungen der Spannungen:

$$\hat{\sigma}_z = \mathbf{T}_{k-z} \cdot \hat{\sigma}_k \quad (6.6a)$$

$$\hat{\sigma}_s = \mathbf{T}_{k-s} \cdot \hat{\sigma}_k \quad (6.6b)$$

Die Matrizen \mathbf{T}_{k-z} und \mathbf{T}_{k-s} sind im Anhang A.5 angegeben.

Die Umformung der Spannungen von Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten erfolgt mit der Inversen der Transformationsmatrizen:

$$\hat{\sigma}_k = \mathbf{T}_{k-z}^{-1} \cdot \hat{\sigma}_z \quad (6.7a)$$

$$\hat{\sigma}_k = \mathbf{T}_{k-s}^{-1} \cdot \hat{\sigma}_s \quad (6.7b)$$

Um eine Transformation der Spannungen zwischen zwei krummlinigen Koordinatensystemen durchzuführen, werden die Spannungen zuerst in kartesische Koordinaten transformiert und anschließend in das neue Koordinatensystem überführt:

$$\hat{\sigma}_z = \mathbf{T}_{k-z} \cdot \hat{\sigma}_k = \mathbf{T}_{k-z} \cdot \mathbf{T}_{k-s}^{-1} \cdot \hat{\sigma}_s \quad (6.8a)$$

$$\hat{\sigma}_s = \mathbf{T}_{k-s} \cdot \hat{\sigma}_k = \mathbf{T}_{k-s} \cdot \mathbf{T}_{k-z}^{-1} \cdot \hat{\sigma}_z \quad (6.8b)$$

6.3 Superposition der Lösung des Halbraums und des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum

6.3.1 Tunnel im Halbraum unter dynamischer Belastung

Für die geometrische Situation eines Halbraums mit zylindrischem Tunnel existiert keine Fundamentallösung. Eine Lösung kann aber aus der Überlagerung der beiden Fundamentalsysteme Halbraum ohne Hohlraum und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum hergeleitet werden. Dazu wird im Halbraum eine fiktive Tunneloberfläche und im Vollraum eine fiktive Halbraumoberfläche eingeführt (Abbildung 6.2).

Durch eine zweifache Fouriertransformation bezüglich der Zeit $t \circ \bullet \omega$ vom Zeit- in den Frequenzbereich, sowie der Ortskoordinate $x \circ \bullet k_x$ vom Orts- in den Wellenzahlbereich lässt

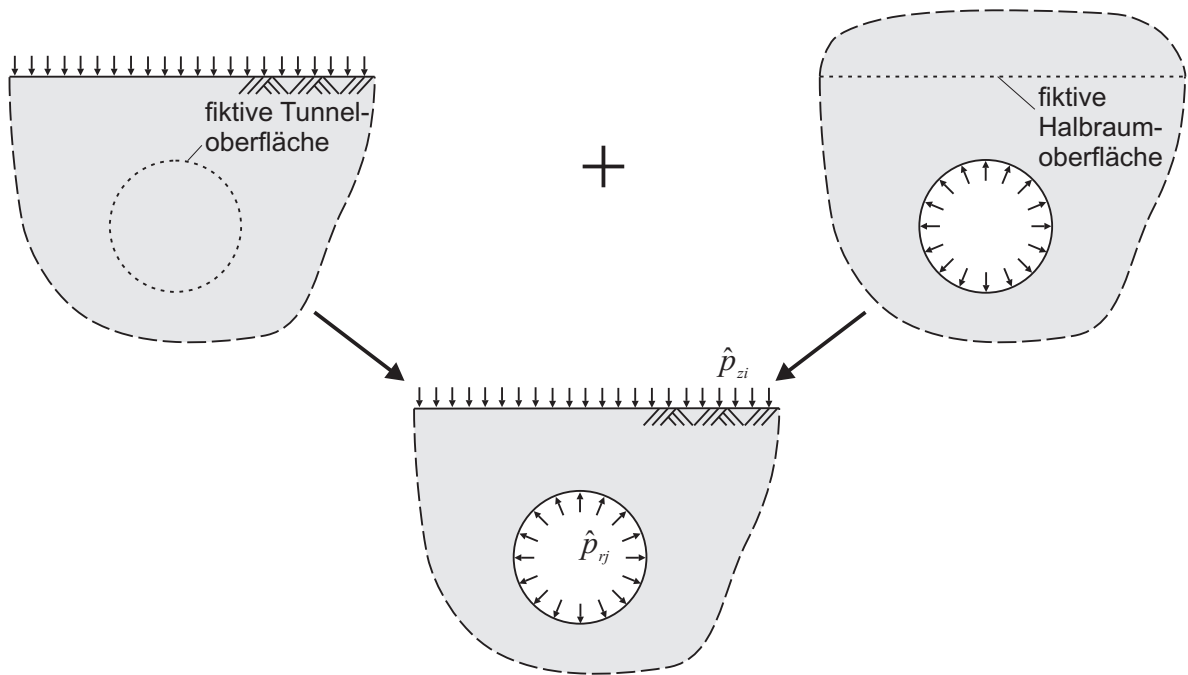


Abbildung 6.2: Superposition des Halbraums (links) und des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum (rechts) zu dem System eines Halbraums mit zylindrischem Tunnel (unten)

sich das Problem in quasi statische und zweidimensionale Aufgabenstellungen in der y, z -Ebene überführen, welche für jede Kombination aus ω und k_x einzeln gelöst werden kann. Des Weiteren werden alle Größen an der Oberfläche des Halbraums ($z = 0$) in eine Fourierreihe bezüglich der Koordinate $y \rightarrow s \cdot \Delta k_y$, sowie sämtliche Größen an der Tunneloberfläche ($r = r_0$) in eine Fourierreihe entlang des Umfangs $\varphi \rightarrow n$ zerlegt.

Mit den Ergebnisse aus Abschnitt 3 ist es möglich, sämtliche kartesischen Spannungen entlang der fiktiven Tunneloberfläche infolge eines dynamischen Lastzustands an der Oberfläche des Halbraums zu berechnen. Diese werden anschließend mit Gleichung (6.6a) in Zylinderkoordinaten transformiert und in eine Fourierreihe entlang des Umfanges entwickelt.

Somit können für jeden kartesischen Einheitsspannungszustand $\hat{\sigma}_{zi,s}$, der an der Oberfläche des Halbraums (Γ_α) wirkt, alle resultierenden zylindrischen Spannungen $\hat{\sigma}_{rj,n}^{(zi,s)}$ an der fiktiven Tunneloberfläche (Γ_β) bestimmt werden (Abbildung 6.3, mit: $i = x, y, z$; $j = x, r, \varphi$; s und n bezeichnen das Fourierreihenglied in y - bzw. φ -Richtung).

In ähnlicher Weise ist es möglich mit den Resultaten aus Abschnitt 4 die Spannungen an der fiktiven Halbraumoberfläche zu ermitteln, die aus einem dynamischen Lastzustand an der Hohlraumoberfläche im Vollraum resultieren. Nach einer Koordinatentransformation in kartesische Koordinaten (Gleichung 6.7a) werden diese Spannungen in eine Fourierreihe entlang

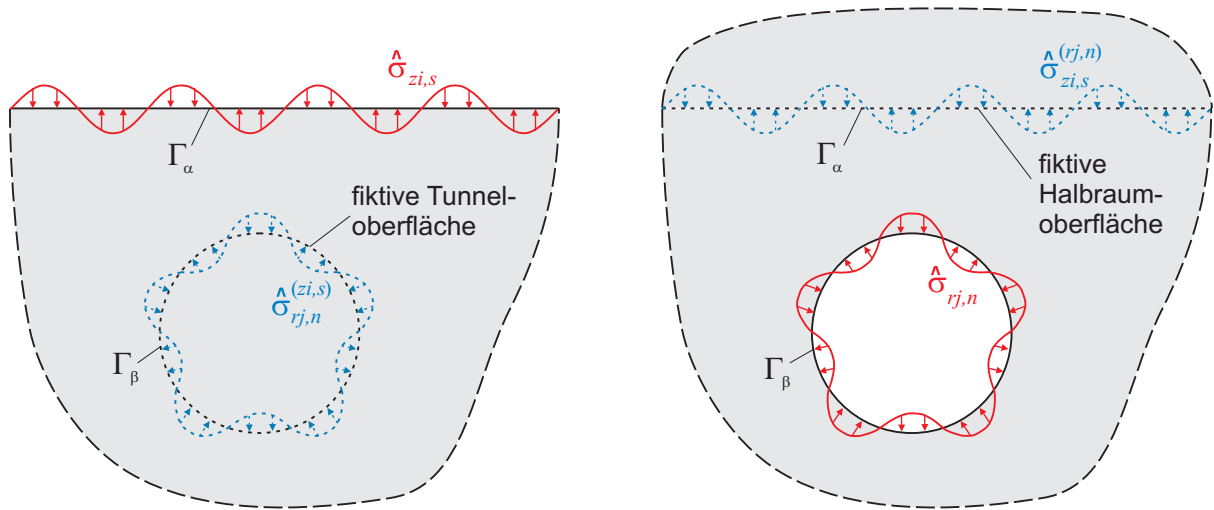


Abbildung 6.3: Spannungszustände in den Subsystemen Halbraum (links) und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum (rechts)

der Koordinate y entwickelt. Als Ergebnis erhält man für jeden zylindrischen Einheitsspannungszustand $\hat{\sigma}_{rj,n}$, der an der Oberfläche des Hohlraums (Γ_β) angreift, alle resultierenden kartesischen Spannungen $\hat{\sigma}_{zi,s}^{(rj,n)}$ an der fiktiven Halbraumoberfläche (Γ_α).

Um die Lösung des gekoppelten Systems zu finden werden nun $3 \cdot S$ unbekannte Spannungszustände $C_{zi,s} \cdot \hat{\sigma}_{zi,s}$ an der Halbraumoberfläche und $3 \cdot N$ unbekannte Spannungszustände $C_{rj,n} \cdot \hat{\sigma}_{rj,n}$ an der Oberfläche des zylindrischen Hohlraums aufgebracht. $C_{zi,s}$ und $C_{rj,n}$ sind hierbei die unbekannten Amplituden der einzelnen Lastfälle, S und N stehen für die frei wählbare Anzahl der jeweils verwendeten Fourierreihenglieder. Da die Lösung im mehrfach fouriertransformierten Bildraum erfolgt und somit nicht zwangsläufig konjugiert komplexen Zustandsgrößen vorliegen, müssen sowohl positive als auch negative Reihenglieder berücksichtigt werden. Numerisch erfolgt die Reihenzerlegung vorteilhafterweise mit der Fast Fourier Transform (FFT, siehe Abschnitt 6.6.1), bei welcher die Anzahl der Reihenglieder auf eine Zweierpotenz 2^x eingeschränkt ist. Daher bietet es sich an, numerisch folgende Reihenglieder zu berücksichtigen: $n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1$ und $s = -\frac{S}{2}, \dots, \frac{S}{2} - 1$.

Für jedes Fourierreihenglied s an der Halbraumoberfläche (Γ_α) müssen die dort aufgebrachten Spannungen $\hat{\sigma}_{zi,s}$ und die Spannungen $\hat{\sigma}_{zi,s}^{(rj,n)}$, die an der fiktiven Halbraumoberfläche infolge von Spannungszuständen am zylindrischen Hohlraum entstehen, die Gleichgewichtsbedingungen mit den dort wirkenden äußeren Kräften $\hat{p}_{zi,s}$ erfüllen. Somit erhält man $3 \cdot S$ Bestimmungsgleichungen (6.9a). Die Randbedingungen an der zylindrischen Hohlraumoberfläche (Γ_β) liefern weitere $3 \cdot N$ Gleichungen (6.9b). Dort müssen die Spannungen $\hat{\sigma}_{rj,n}$ und $\hat{\sigma}_{rj,n}^{(zi,s)}$ den äußeren Lasten $\hat{p}_{rj,n}$ entsprechen.

$$C_{zi,s} \cdot \hat{\sigma}_{zi,s} + \sum_N \sum_J C_{rj,n} \cdot \hat{\sigma}_{zi,s}^{(rj,n)} = -\hat{p}_{zi,s} \quad \text{für alle } i, s \quad (6.9a)$$

$$\sum_S \sum_I C_{zi,s} \cdot \hat{\sigma}_{rj,n}^{(zi,s)} + C_{rj,n} \cdot \hat{\sigma}_{rj,n} = -\hat{p}_{rj,n} \quad \text{für alle } j, n \quad (6.9b)$$

Das Gleichungssystem (6.9) kann in Matrixschreibweise dargestellt werden:

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}} \cdot \mathbf{C} = -\hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} \quad (6.10)$$

mit

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{zx,s_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{\sigma}_{zx,s_1}^{(rx,n_1)} & \hat{\sigma}_{zx,s_1}^{(rr,n_1)} & \hat{\sigma}_{zx,s_1}^{(r\varphi,n_1)} & \hat{\sigma}_{zx,s_1}^{(rx,n_2)} & \dots \\ 0 & \hat{\sigma}_{zy,s_1} & 0 & 0 & \dots & \hat{\sigma}_{zy,s_1}^{(rx,n_1)} & \hat{\sigma}_{zy,s_1}^{(rr,n_1)} & \hat{\sigma}_{zy,s_1}^{(r\varphi,n_1)} & \hat{\sigma}_{zy,s_1}^{(rx,n_2)} & \dots \\ 0 & 0 & \hat{\sigma}_{zz,s_1} & 0 & \dots & \hat{\sigma}_{zz,s_1}^{(rx,n_1)} & \hat{\sigma}_{zz,s_1}^{(rr,n_1)} & \hat{\sigma}_{zz,s_1}^{(r\varphi,n_1)} & \hat{\sigma}_{zz,s_1}^{(rx,n_2)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_{zx,s_2} & \dots & \hat{\sigma}_{zx,s_2}^{(rx,n_1)} & \hat{\sigma}_{zx,s_2}^{(rr,n_1)} & \hat{\sigma}_{zx,s_2}^{(r\varphi,n_1)} & \hat{\sigma}_{zx,s_2}^{(rx,n_2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hat{\sigma}_{rx,n_1}^{(zx,s_1)} & \hat{\sigma}_{rx,n_1}^{(zy,s_1)} & \hat{\sigma}_{rx,n_1}^{(zz,s_1)} & \hat{\sigma}_{rx,n_1}^{(zx,s_2)} & \dots & \hat{\sigma}_{rx,n_1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hat{\sigma}_{rr,n_1}^{(zx,s_1)} & \hat{\sigma}_{rr,n_1}^{(zy,s_1)} & \hat{\sigma}_{rr,n_1}^{(zz,s_1)} & \hat{\sigma}_{rr,n_1}^{(zx,s_2)} & \dots & 0 & \hat{\sigma}_{rr,n_1} & 0 & 0 & \dots \\ \hat{\sigma}_{r\varphi,n_1}^{(zx,s_1)} & \hat{\sigma}_{r\varphi,n_1}^{(zy,s_1)} & \hat{\sigma}_{r\varphi,n_1}^{(zz,s_1)} & \hat{\sigma}_{r\varphi,n_1}^{(zx,s_2)} & \dots & 0 & 0 & \hat{\sigma}_{r\varphi,n_1} & 0 & \dots \\ \hat{\sigma}_{rx,n_2}^{(zx,s_1)} & \hat{\sigma}_{rx,n_2}^{(zy,s_1)} & \hat{\sigma}_{rx,n_2}^{(zz,s_1)} & \hat{\sigma}_{rx,n_2}^{(zx,s_2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_{rx,n_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.11a)$$

$$\mathbf{C} = \left(C_{zx,s_1} \quad C_{zy,s_1} \quad C_{zz,s_1} \quad C_{zx,s_2} \quad \dots \quad C_{rx,n_1} \quad C_{rr,n_1} \quad C_{r\varphi,n_1} \quad C_{rx,n_2} \quad \dots \right)^T \quad (6.11b)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} = \left(\hat{p}_{zx,s_1} \quad \hat{p}_{zy,s_1} \quad \hat{p}_{zz,s_1} \quad \hat{p}_{zx,s_2} \quad \dots \quad \hat{p}_{rx,n_1} \quad \hat{p}_{rr,n_1} \quad \hat{p}_{r\varphi,n_1} \quad \hat{p}_{rx,n_2} \quad \dots \right)^T \quad (6.11c)$$

Somit können die Unbekannten $C_{zi,s}$ und $C_{rj,n}$ für beliebige Lasten $\hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}}$, die an der Oberfläche des Halbraums und des Hohlraums angreifen, bestimmt werden:

$$\mathbf{C} = -\hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} \quad (6.12)$$

Um die aus dem Lastfall $\hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}}$ resultierenden Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}}$ an den Oberflächen zu berechnen, müssen zuerst die Verschiebungen infolge sämtlicher Einheitslastfälle ermittelt werden. Dies erfolgt analog zu den Spannungen mit den Gleichungen aus Abschnitt 3 und 4. Infolge der Einheitslastfälle $\hat{\sigma}_{zi,s}$ an der Halbraumoberfläche erhält man somit die Verschiebungen $\hat{u}_{zi,s}^{(zi,s)}$ an der Halbraumoberfläche und $\hat{u}_{rj,n}^{(zi,s)}$ an der Hohlraumoberfläche. Aus den Einheitslastfällen $\hat{\sigma}_{rj,n}$ an der Hohlraumoberfläche ergeben sich die Verschiebungen $\hat{u}_{rj,n}^{(rj,n)}$ an der Hohlraumoberfläche und $\hat{u}_{zi,s}^{(rj,n)}$ an der Halbraumoberfläche. Diese Verschiebungen werden mit den in Gleichung (6.12) ermittelten Amplituden der Lastfälle multipliziert und aufaddiert.

$$\hat{u}_{zi,s} = C_{zi,s} \cdot \hat{u}_{zi,s}^{(zi,s)} + \sum_N \sum_J C_{rj,n} \cdot \hat{u}_{zi,s}^{(rj,n)} \quad \text{für alle } i, s \quad (6.13a)$$

$$\hat{u}_{rj,n} = \sum_S \sum_I C_{zi,s} \cdot \hat{u}_{rj,n}^{(zi,s)} + C_{rj,n} \cdot \hat{u}_{rj,n}^{(rj,n)} \quad \text{für alle } j, n \quad (6.13b)$$

Analog zu den Spannungen wird das Gleichungssystem (6.13) in Matrixform geschrieben:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}} = \hat{\mathbf{V}}_{\text{ITM}} \cdot \mathbf{C} \quad (6.14)$$

mit

$$\hat{\mathbf{V}}_{\text{ITM}} = \begin{bmatrix} \hat{u}_{zx,s_1}^{(zx,s_1)} & 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{u}_{zx,s_1}^{(rx,n_1)} & \hat{u}_{zx,s_1}^{(rr,n_1)} & \hat{u}_{zx,s_1}^{(r\varphi,n_1)} & \hat{u}_{zx,s_1}^{(rx,n_2)} & \dots \\ 0 & \hat{u}_{zy,s_1}^{(zy,s_1)} & 0 & 0 & \dots & \hat{u}_{zy,s_1}^{(rx,n_1)} & \hat{u}_{zy,s_1}^{(rr,n_1)} & \hat{u}_{zy,s_1}^{(r\varphi,n_1)} & \hat{u}_{zy,s_1}^{(rx,n_2)} & \dots \\ 0 & 0 & \hat{u}_{zz,s_1}^{(zz,s_1)} & 0 & \dots & \hat{u}_{zz,s_1}^{(rx,n_1)} & \hat{u}_{zz,s_1}^{(rr,n_1)} & \hat{u}_{zz,s_1}^{(r\varphi,n_1)} & \hat{u}_{zz,s_1}^{(rx,n_2)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \hat{u}_{zx,s_2}^{(zx,s_2)} & \dots & \hat{u}_{zx,s_2}^{(rx,n_1)} & \hat{u}_{zx,s_2}^{(rr,n_1)} & \hat{u}_{zx,s_2}^{(r\varphi,n_1)} & \hat{u}_{zx,s_2}^{(rx,n_2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \hat{u}_{rx,n_1}^{(zx,s_1)} & \hat{u}_{rx,n_1}^{(zy,s_1)} & \hat{u}_{rx,n_1}^{(zz,s_1)} & \hat{u}_{rx,n_1}^{(zx,s_2)} & \dots & \hat{u}_{rx,n_1}^{(rx,n_1)} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hat{u}_{rr,n_1}^{(zx,s_1)} & \hat{u}_{rr,n_1}^{(zy,s_1)} & \hat{u}_{rr,n_1}^{(zz,s_1)} & \hat{u}_{rr,n_1}^{(zx,s_2)} & \dots & 0 & \hat{u}_{rr,n_1}^{(rr,n_1)} & 0 & 0 & \dots \\ \hat{u}_{r\varphi,n_1}^{(zx,s_1)} & \hat{u}_{r\varphi,n_1}^{(zy,s_1)} & \hat{u}_{r\varphi,n_1}^{(zz,s_1)} & \hat{u}_{r\varphi,n_1}^{(zx,s_2)} & \dots & 0 & 0 & \hat{u}_{r\varphi,n_1}^{(r\varphi,n_1)} & 0 & \dots \\ \hat{u}_{rx,n_2}^{(zx,s_1)} & \hat{u}_{rx,n_2}^{(zy,s_1)} & \hat{u}_{rx,n_2}^{(zz,s_1)} & \hat{u}_{rx,n_2}^{(zx,s_2)} & \dots & 0 & 0 & 0 & \hat{u}_{rx,n_2}^{(rx,n_2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (6.15a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}} = \left(\hat{u}_{zx,s_1} \quad \hat{u}_{zy,s_1} \quad \hat{u}_{zz,s_1} \quad \hat{u}_{zx,s_2} \quad \dots \quad \hat{u}_{rx,n_1} \quad \hat{u}_{rr,n_1} \quad \hat{u}_{r\varphi,n_1} \quad \hat{u}_{rx,n_2} \quad \dots \right)^T \quad (6.15b)$$

Einsetzen von Gleichung (6.12) in Gleichung (6.14) liefert schließlich die Kraft-Verformungs-Beziehung an den Oberflächen des Halbraums und des Tunnels

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}} = -\hat{\mathbf{V}}_{\text{ITM}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} = \hat{\mathbf{N}}_{\text{ITM}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} \quad (6.16)$$

mit der dynamischen Nachgiebigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{N}}_{\text{ITM}} = -\hat{\mathbf{V}}_{\text{ITM}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}}^{-1} \quad (6.17)$$

6.3.2 Graben an der Halbraumoberfläche unter dynamischer Belastung

Für die Problemstellung eines kreisförmigen Grabens, der an der Oberfläche eines Halbraums liegt, werden ebenfalls die Lösungen der beiden Fundamentalsysteme Halbraum ohne Hohlraum und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum überlagert (Abbildung 6.4). Im System des Halbraums wird eine fiktive Hohlraumoberfläche eingeführt die teilweise unterhalb ($\Gamma_{\beta 1}$) und teilweise oberhalb ($\Gamma_{\beta 2}$) der Halbraumoberfläche liegt. Ebenso befindet sich die fiktive

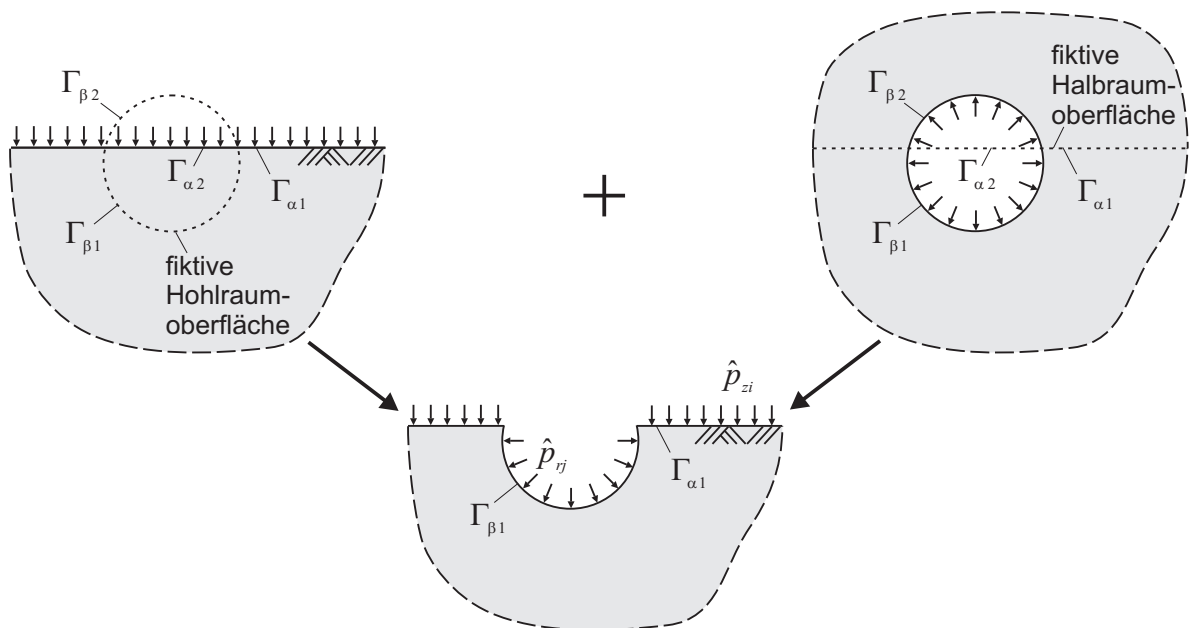


Abbildung 6.4: Superposition des Halbraums (links) und des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum (rechts) zu dem System eines Halbraums mit zylindrischem Graben (unten)

Halbraumoberfläche im Vollraum zum Teil außerhalb ($\Gamma_{\alpha 1}$) und zum Teil innerhalb ($\Gamma_{\alpha 2}$) des Hohlraums.

Für einen Einheitslastfall $\hat{\sigma}_{zi,s}$, der auf der Oberfläche des Halbraums wirkt, können nun die resultierenden Spannungen entlang der fiktiven Grabenoberfläche $\Gamma_{\beta 1}$ berechnet werden. Betrachtet man den Halbraum als Teillösung des Vollraums (siehe Abschnitt 6.1), so könnten für den entsprechenden Lastfall (Gleichung 6.3) ebenfalls die Spannungen an der fiktiven Hohlraumoberfläche bestimmt werden, die oberhalb des Halbraums liegt ($\Gamma_{\beta 2}$). Dies ist aber in der weiteren Berechnung nicht erforderlich, da die Gleichgewichtsbedingungen nur am Rand $\Gamma_{\beta 1}$ erfüllt werden müssen.

Ebenso werden die Spannungen an der fiktiven Halbraumoberfläche $\Gamma_{\alpha 1}$ die außerhalb des Hohlraums liegt infolge einer am Hohlraumrand angreifenden Last $\hat{\sigma}_{rj,n}$ berechnet. Die Spannungen entlang des Randes innerhalb des Hohlraums $\Gamma_{\alpha 2}$ müssen wiederum nicht ermittelt werden, da die Gleichgewichtsbedingungen nur am Rand $\Gamma_{\alpha 1}$ eingehalten werden müssen.

Eine abschließende Fourierreihenzerlegung der Spannungen entlang des Umfanges und der Koordinate y liefert wiederum die Reihenglieder $\hat{\sigma}_{rj,n}^{(zi,s)}$ und $\hat{\sigma}_{zi,s}^{(rj,n)}$ der resultierenden Spannungen (Abbildung 6.5).

Nun können analog zu dem System eines Halbraums mit einem Tunnel (Abschnitt 6.3.1) die Einheitslastzustände überlagert und unter Verwendung der Gleichungen (6.9) - (6.17) die dynamische Nachgiebigkeitsmatrix \hat{N}_{ITM} für einen Graben an der Halbraumoberfläche ermittelt werden.

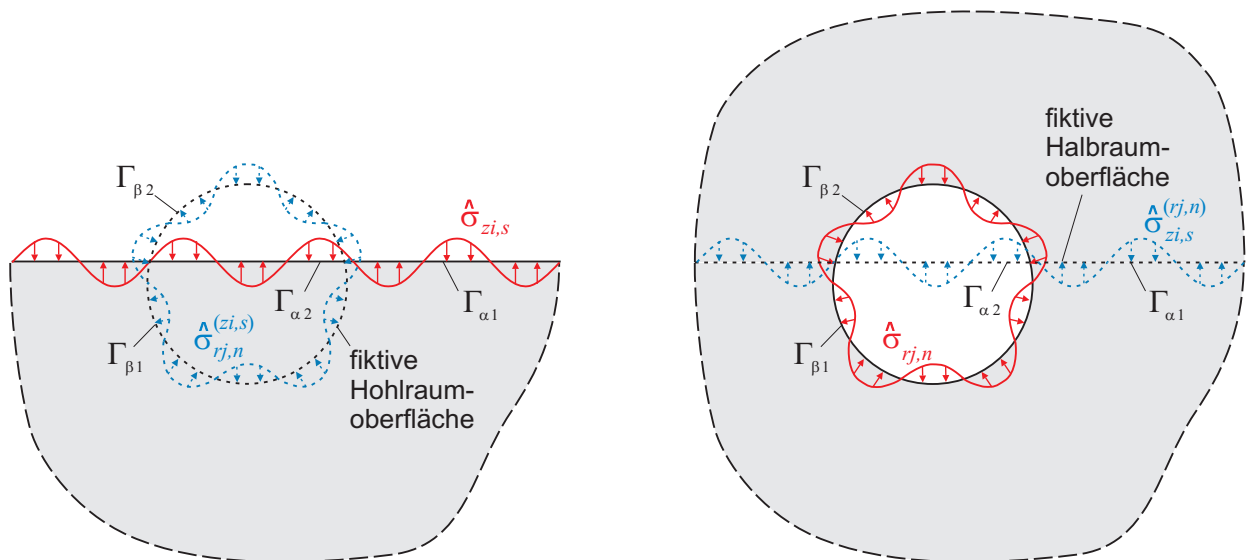


Abbildung 6.5: Spannungszustände in den Subsystemen Halbraum (links) und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum (rechts)

6.3.3 Tunnel in einer Schichtgrenze unter dynamischer Belastung

Mit der im vorherigen Abschnitt 6.3.2 hergeleiteten Lösung ist es möglich, das System eines Tunnel zu berechnen, der in einer Schichtgrenze liegt. So kann dieses System aus zwei aufeinanderliegenden Halbräumen mit je einem Graben zusammengesetzt werden (Abbildung 6.6).

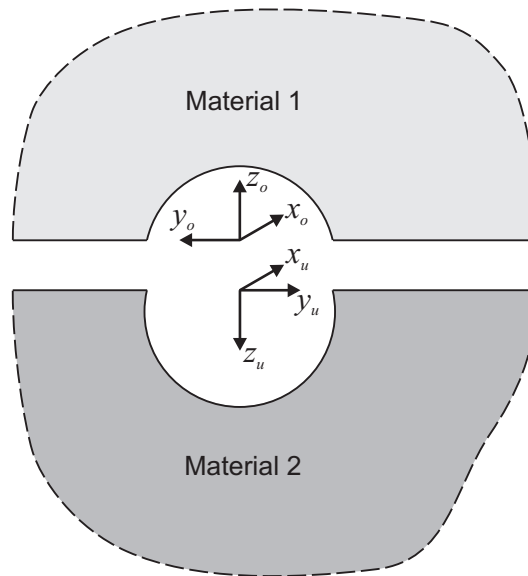


Abbildung 6.6: Tunnel in Schichtgrenze, zusammengesetzt aus zwei Halbräumen mit je einem Graben

Zur Ermittlung werden unbekannte Einheitsspannungszustände an der oberen Halbraumoberfläche ($\hat{\sigma}_{zi,s-o}$) und an der unteren Halbraumoberfläche ($\hat{\sigma}_{zi,s-u}$) aufgebracht. Zudem werden für das obere Teilsystem die unbekannten Spannungszustände $\hat{\sigma}_{rj,n-o}$ an einem Hohlraum angesetzt, der in einem Vollraum mit den Materialeigenschaften der oberen Schicht liegt. Analog dazu wird für das untere Teilsystem ein Vollraum mit den Materialeigenschaften der unteren Schicht verwendet ($\hat{\sigma}_{rj,n-u}$). Die Zahl der unbekannten Spannungszustände ist somit doppelt so groß wie bei dem System eines Halbraums mit einem Graben.

Zur Bestimmung der unbekannt Amplituden der Einheitslastfälle können die Randbedingungen am Tunnelrand herangezogen werden. Dort müssen sowohl die in eine Fourierreihe zerlegten äußeren Lasten des oberen Teilsystems $\hat{p}_{rj,n-o}$ als auch die des unteren Teilsystems $\hat{p}_{rj,n-u}$ jeweils mit den Spannungen $\hat{\sigma}_{rj,n-o}$ und $\hat{\sigma}_{rj,n-o}^{(zi,s-o)}$ bzw. $\hat{\sigma}_{rj,n-u}$ und $\hat{\sigma}_{rj,n-u}^{(zi,s-u)}$ im Gleichgewicht stehen (Gleichung 6.18a bzw. 6.18b).

Als weitere Bestimmungsgleichungen können die Übergangsbedingungen an der Schichtgrenze analog zu Gleichung (6.1) verwendet werden. So müssen die Spannungen (Gleichung 6.18c)

und Verschiebungen (Gleichung 6.18d) an der oberen Halbraumboberfläche denen an der unteren Halbraumboberfläche entsprechen.

Hierbei ist zu beachten, dass die beiden y -Achsen des oberen und des unteren Halbraums in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Daher müssen die positiven Wellenzahlen k_y des oberen Halbraums mit den negativen Wellenzahlen $-k_y$ des unteren Halbraums gekoppelt werden und umgekehrt.

$$\sum_S \sum_I C_{zi,s_o} \cdot \hat{\sigma}_{rj,n_o}^{(zi,s_o)} + C_{rj,n_o} \cdot \hat{\sigma}_{rj,n_o} = -\hat{p}_{rj,n_o} \quad \text{für alle } j, n \quad (6.18a)$$

$$\sum_S \sum_I C_{zi,s_u} \cdot \hat{\sigma}_{rj,n_u}^{(zi,s_u)} + C_{rj,n_u} \cdot \hat{\sigma}_{rj,n_u} = -\hat{p}_{rj,n_u} \quad \text{für alle } j, n \quad (6.18b)$$

$$C_{zi,-s_o} \cdot \hat{\sigma}_{zi,-s_o} + \sum_N \sum_J C_{rj,n_o} \cdot \hat{\sigma}_{zi,-s_o}^{(rj,n_o)} - C_{zi,s_u} \cdot \hat{\sigma}_{zi,s_u} - \sum_N \sum_J C_{rj,n_u} \cdot \hat{\sigma}_{zi,s_u}^{(rj,n_u)} = 0$$

für alle i, s (6.18c)

$$C_{zi,-s_o} \cdot \hat{u}_{zi,-s_o} + \sum_N \sum_J C_{rj,n_o} \cdot \hat{u}_{zi,-s_o}^{(rj,n_o)} - C_{zi,s_u} \cdot \hat{u}_{zi,s_u} - \sum_N \sum_J C_{rj,n_u} \cdot \hat{u}_{zi,s_u}^{(rj,n_u)} = 0$$

für alle i, s (6.18d)

Gleichung (6.18) kann auch in Matrixform geschrieben werden.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left[\hat{\sigma}_{rj,n_o}^{(zi,s_o)} \right] & \left[\hat{\sigma}_{rj,n_o} \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[\hat{\sigma}_{rj,n_u}^{(zi,s_u)} \right] & \left[\hat{\sigma}_{rj,n_u} \right] \\ \left[\hat{\sigma}_{zi,-s_o}^{(zi,s_o)} \right] & \left[\hat{\sigma}_{zi,-s_o}^{(rj,n_o)} \right] & \left[-\hat{\sigma}_{zi,s_u}^{(zi,s_u)} \right] & \left[-\hat{\sigma}_{zi,s_u}^{(rj,n_u)} \right] \\ \left[\hat{u}_{zi,-s_o}^{(zi,s_o)} \right] & \left[\hat{u}_{zi,-s_o}^{(rj,n_o)} \right] & \left[-\hat{u}_{zi,s_u}^{(zi,s_u)} \right] & \left[-\hat{u}_{zi,s_u}^{(rj,n_u)} \right] \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{S}}_{\text{ITM}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \left[C_{zi,s_o} \right] \\ \left[C_{rj,n_o} \right] \\ \left[C_{zi,s_u} \right] \\ \left[C_{rj,n_u} \right] \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} = - \underbrace{\begin{pmatrix} \left[\hat{p}_{rj,n_o} \right] \\ \left[\hat{p}_{rj,n_u} \right] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}}} \quad (6.19)$$

Mit dem so erhaltenen Gleichungssystem können für jede beliebige Last $\hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}}$, die an der Oberfläche des Hohlraums angreift, erneut alle unbekanntes Lastamplituden \mathbf{C} berechnet werden.

Die dynamische Nachgiebigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{N}}_{\text{ITM}}$ an der Oberfläche des Tunnels kann analog zu Abschnitt 6.3.1 ermittelt werden.

6.4 Superposition der Lösung des Halbraums und des Vollraums mit sphärischem Hohlraum

Das Vorgehen zur Ermittlung der Lösung für das System eines Halbraums mit kugelförmigen Hohlraum oder eines Halbraums mit einer kugelförmigen Grube an der Halbraumoberfläche ist den in Abschnitt 6.3.1 bzw. 6.3.2 beschriebenen Verfahren sehr ähnlich. In diesem Fall wird das Fundamentalsystem des Halbraums mit dem Fundamentalsystem des Vollraums mit sphärischem Hohlraum überlagert (Abbildung 6.7).

Durch eine Fouriertransformation bezüglich der Zeit $t \rightarrow \omega$ vom Zeit- in den Frequenzbereich lässt sich das Problem in eine quasi statische Aufgabenstellung überführen. Eine weitere Vereinfachung auf ein zweidimensionales Problem wie in Abschnitt 6.3 ist nicht möglich, da im Gegensatz zu dem System eines unendlich langen Tunnels bezüglich der x -Achse keine konstanten Verhältnisse bestehen. Das vorliegende Problem muss somit im dreidimensionalen Raum gelöst werden [Frühe u. Müller 2010c], was einen höheren Rechenaufwand zur Folge hat.

Alle Größen an der Oberfläche des Halbraums ($z = 0$) werden in Fourierreihen bezüglich

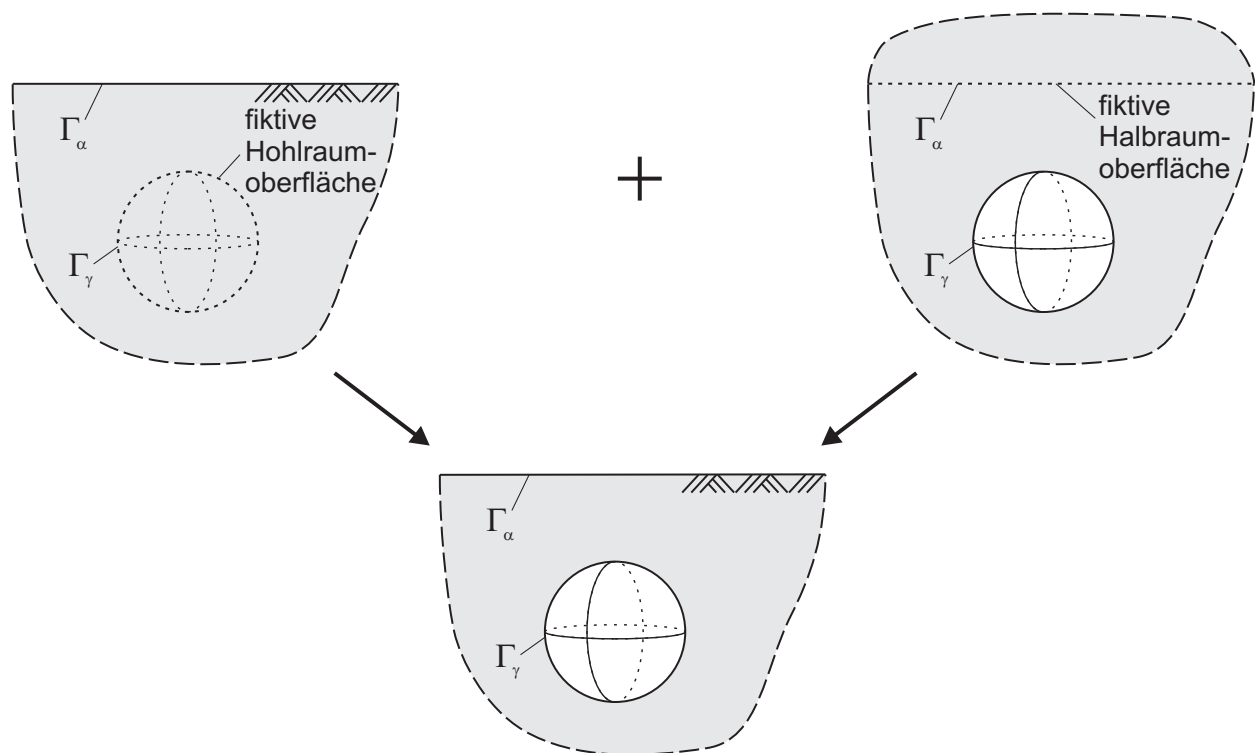


Abbildung 6.7: Superposition des Halbraums (links) und des Vollraums mit kugelförmigen Hohlraum (rechts) zu dem System eines Halbraums mit kugelförmigen Hohlraum (unten)

der Koordinaten $x \rightarrow o \cdot \Delta k_x$ und $y \rightarrow s \cdot \Delta k_y$ zerlegt. Sämtliche Größen an der Hohlraumoberfläche ($R = R_0$) werden in eine Reihe von Kugelflächenfunktionen ($\vartheta, \varphi \rightarrow m, l$) entwickelt.

Nun werden an der Oberfläche Γ_α des Halbraums $3 \cdot O \cdot S$ unbekannte Spannungszustände $C_{zi,so} \cdot \hat{\sigma}_{zi,so}$ sowie an der Oberfläche Γ_γ des kugelförmigen Hohlraums $3 \cdot (M+1)^2$ unbekannte Spannungszustände $C_{Rk,lm} \cdot \hat{\sigma}_{Rk,lm}$ aufgebracht (mit: $i = x, y, z$; $k = R, \vartheta, \varphi$; o und s bezeichnen das Fourierreihenglied in x - und y -Richtung; $m = 0, \dots, M$ und $l = -m, \dots, m$ stehen für das Reihenglied der Kugelflächenfunktion; O, S sind die Anzahl der verwendeten Fourierreihenglieder, M ist die größte Ordnung der berücksichtigten Kugelflächenfunktionen). Für die numerische Umsetzung empfiehlt es sich analog zu Abschnitt 6.3.1 die Reihenglieder mit $o = -\frac{O}{2}, \dots, (\frac{O}{2} - 1)$ und $s = -\frac{S}{2}, \dots, (\frac{S}{2} - 1)$ zu wählen.

Mit Hilfe der Randbedingungen können die Unbekannten wieder ermittelt werden. So müssen die Spannungen $\hat{\sigma}_{zi,so}$ die an der Halbraumoberfläche aufgebracht werden und die Spannungen $\hat{\sigma}_{zi,so}^{(Rk,lm)}$ die an der fiktiven Halbraumoberfläche infolge eines Lastzustands im Hohlraum entstehen mit den dort wirkenden äußeren Spannungen $\hat{p}_{zi,so}$ für jedes Reihenglied im Gleichgewicht stehen (Gleichung 6.20a). Außerdem müssen an der kugelförmigen Hohlraumoberfläche die dort aufgebrachten Spannungen $\hat{\sigma}_{Rk,lm}$ und die aus einer Belastung an der Halbraumoberfläche resultierenden Spannungen $\hat{\sigma}_{Rk,lm}^{(zi,so)}$ den Randbedingungen ($\hat{p}_{Rk,lm}$) genügen (Gleichung 6.20b).

$$C_{zi,so} \cdot \hat{\sigma}_{zi,so} + \sum_M \sum_L \sum_K C_{Rk,lm} \cdot \hat{\sigma}_{zi,so}^{(Rk,lm)} = -\hat{p}_{zi,so} \quad (6.20a)$$

$$\sum_O \sum_S \sum_I C_{zi,so} \cdot \hat{\sigma}_{Rk,lm}^{(zi,so)} + C_{Rk,lm} \cdot \hat{\sigma}_{Rk,lm} = -\hat{p}_{Rk,lm} \quad (6.20b)$$

Das Gleichungssystem (6.20) ermöglicht es alle Unbekannten $C_{zi,so}$ und $C_{Rk,lm}$ zu bestimmen. Die Ermittlung der dynamischen Nachgiebigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{N}}_{\text{ITM}}$ an den Oberfläche des Systems erfolgt wieder analog zu Abschnitt 6.3.1.

6.5 Weitere Überlagerungsmöglichkeiten

Unter Verwendung der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Technik der Superposition können beliebig viele Fundamentalsysteme miteinander gekoppelt werden. Im Folgenden sollen einige Anwendungsmöglichkeiten dargestellt werden.

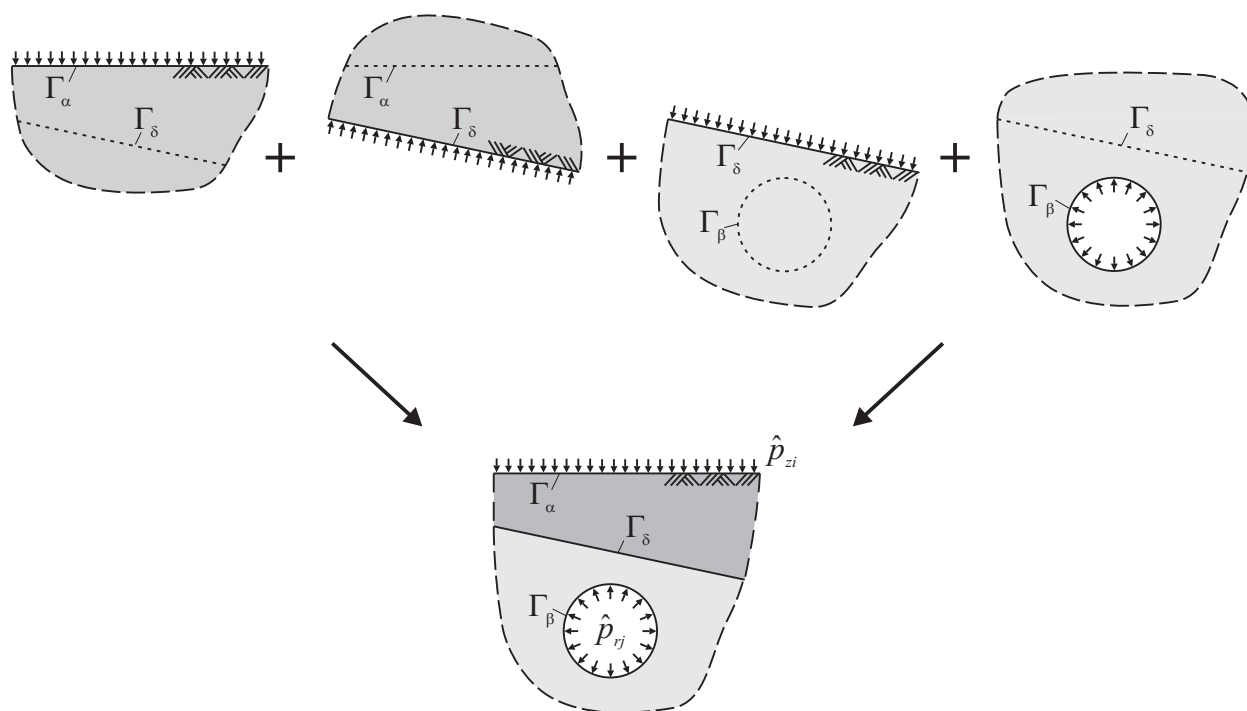


Abbildung 6.8: Halbraum mit zylindrischem Tunnel und schräger Schichtgrenze

So können zum Beispiel auch schräge Schichtgrenzen berücksichtigt werden. Das System eines Halbraums mit zylindrischem Tunnel und schräger Schichtgrenze wird aus drei Halbraum-Systemen und dem Fundamentalsystem eines Vollraums mit zylindrischem Hohlraum gebildet (Abbildung 6.8).

An der Halbraumoberfläche (Γ_α) und an der Hohlraumoberfläche (Γ_β) muss die Summe der Spannungen aus allen unbekanntem Lastfällen den äußeren Kräften entsprechen. Zudem müssen alle Spannungen und Verschiebungen an der Schichtgrenze (Γ_δ) die Übergangsbedingungen erfüllen.

Für den Fall eines Systems mit mehreren parallelen Schichten wird vorteilhafterweise das Fundamentalsystem des geschichteten Halbraums aus Abschnitt 3.4 verwendet. Dieses stellt eine geschlossene Lösung für beliebig viele parallele Schichten zur Verfügung und muss somit nur an der untersten Schichtgrenze (Γ_δ) mit weiteren Fundamentalsystemen gekoppelt werden (Abbildung 6.9).

Als Bestimmungsgleichungen stehen wiederum die Spannungsrandbedingungen an der Halbraumoberfläche (Γ_α) und an der Hohlraumoberfläche (Γ_β), sowie die Übergangsbedingungen der Verschiebungen und Spannungen an der untersten Schichtgrenze (Γ_δ) zur Verfügung.

Auch für das System eines Halbraums mit zylindrischem Tunnel und kugelförmiger Grube

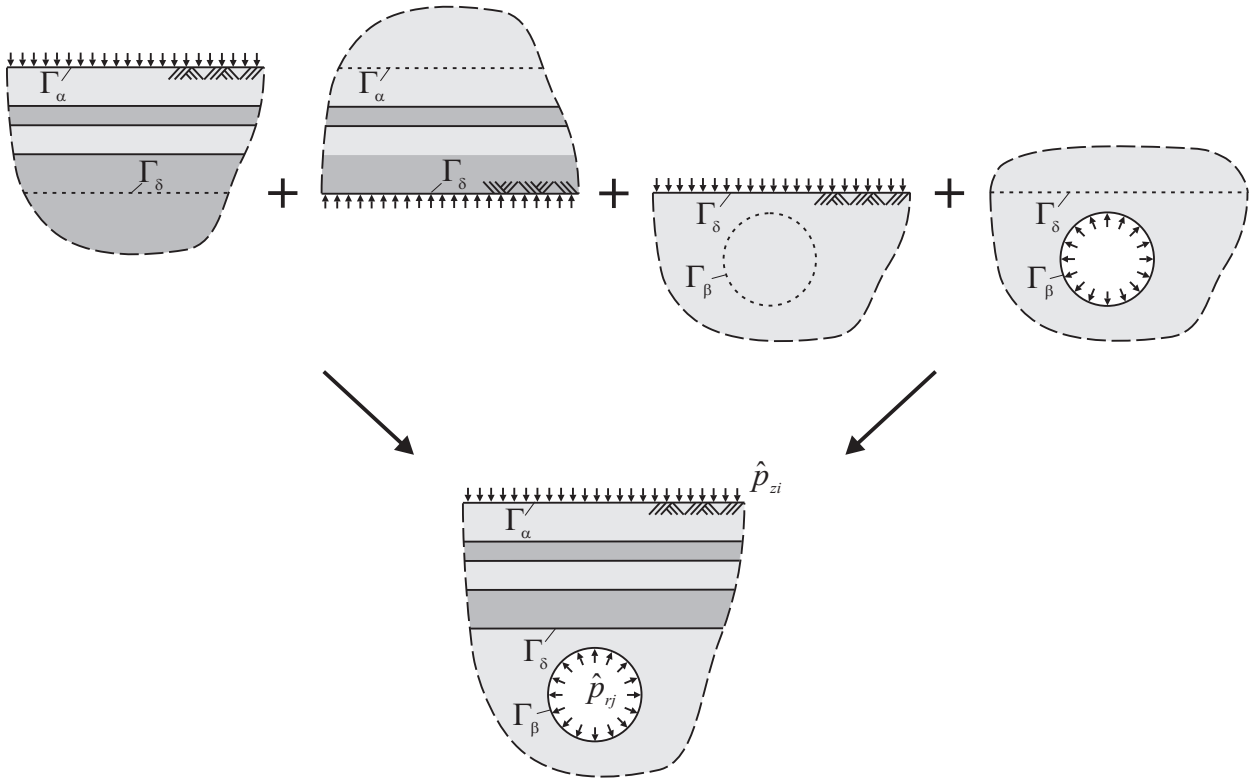


Abbildung 6.9: Halbraum mit zylindrischem Tunnel und mehreren parallelen Schichten

an der Halbraumoberfläche, welches für Berechnungen des in Abschnitt 1.1 beschriebenen Problems benötigt wird, kann eine geschlossene Lösung gefunden werden. Dazu müssen die drei Fundamentalsysteme Halbraum, Vollraum mit zylindrischem Hohlraum und Vollraum mit sphärischem Hohlraum überlagert werden (Abbildung 6.10).

Nach Aufbringen der unbekanntenen Spannungszustände an den Oberflächen und Ermittlung der resultierenden Spannungen an den jeweiligen fiktiven Oberflächen kann mit Hilfe der Randbedingungen an der Halbraumoberfläche (Γ_α , Gleichung 6.21a), an der zylindrischen Hohlraumoberfläche (Γ_β , Gleichung 6.21b) und an der kugelförmigen Hohlraumoberfläche (Γ_γ , Gleichung 6.21c) eine geschlossene Lösung für das System gefunden werden.

$$C_{zi,so} \cdot \hat{\sigma}_{zi,so} + \sum_O \sum_N \sum_J C_{rj,no} \cdot \hat{\sigma}_{zi,so}^{(rj,no)} + \sum_M \sum_L \sum_K C_{Rk,lm} \cdot \hat{\sigma}_{zi,so}^{(Rk,lm)} = -\hat{p}_{zi,so} \quad (6.21a)$$

$$\sum_O \sum_S \sum_I C_{zi,so} \cdot \hat{\sigma}_{rj,no}^{(zi,so)} + C_{rj,no} \cdot \hat{\sigma}_{rj,no} + \sum_M \sum_L \sum_K C_{Rk,lm} \cdot \hat{\sigma}_{rj,no}^{(Rk,lm)} = -\hat{p}_{rj,no} \quad (6.21b)$$

$$\sum_O \sum_S \sum_I C_{zi,so} \cdot \hat{\sigma}_{Rk,lm}^{(zi,so)} + \sum_O \sum_N \sum_J C_{rj,no} \cdot \hat{\sigma}_{Rk,lm}^{(rj,no)} + C_{Rk,lm} \cdot \hat{\sigma}_{Rk,lm} = -\hat{p}_{Rk,lm} \quad (6.21c)$$

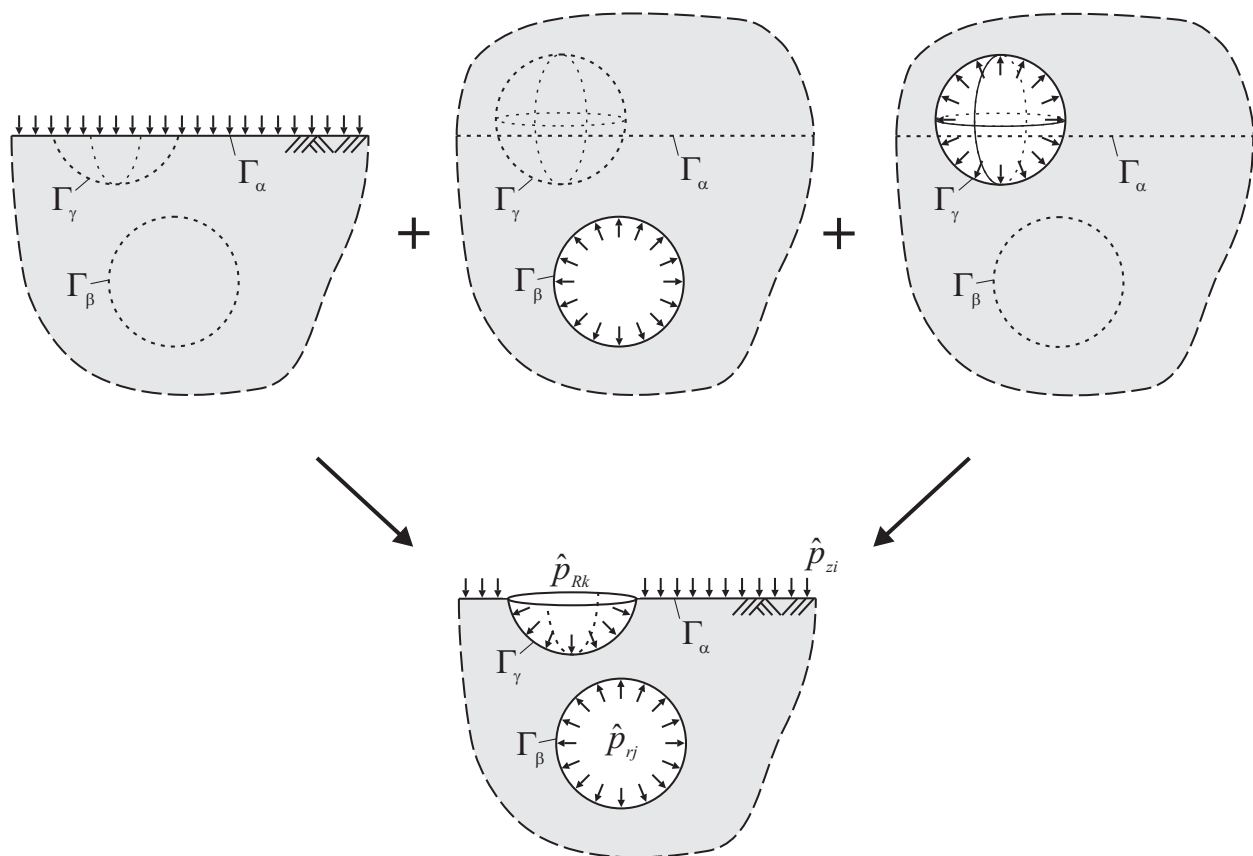


Abbildung 6.10: Halbraum mit zylindrischem Tunnel und kugelförmiger Grube an der Halbraumboberfläche

Auf ähnliche Weise kann ein System mit zwei parallel verlaufenden Tunnelröhren modelliert werden, indem ein Halbraum zweimal mit dem Fundamentalsystem eines Vollraums mit zylindrischem Hohlraum überlagert wird.

Theoretisch ist es auch möglich einen Halbraum mit einem rechteckigen Tunnel zu modellieren. An jeder der vier Tunneloberflächen wird dazu ein zusätzlicher Halbraum eingeführt. Somit werden insgesamt fünf Halbraum-Fundamentalsysteme miteinander überlagert (siehe Abbildung 6.11). Darüber hinaus müssen in diesem Fall die resultierenden Spannungen an den fiktiven Kopplungsflächen berechnet werden, die außerhalb des jeweiligen Halbraums liegen. Dies ist möglich, indem der Halbraum als Teillösung des Vollraums analog zu Abschnitt 6.1 betrachtet wird.

Da der Berechnungsaufwand für dieses System deutlich höher wäre als für das System des Halbraums mit zylindrischen Tunnel, bei welchem nur zwei Fundamentalsysteme miteinander überlagert werden, wird im Folgenden die Berechnungsmethode mit zylindrischem Tunnel bevorzugt.

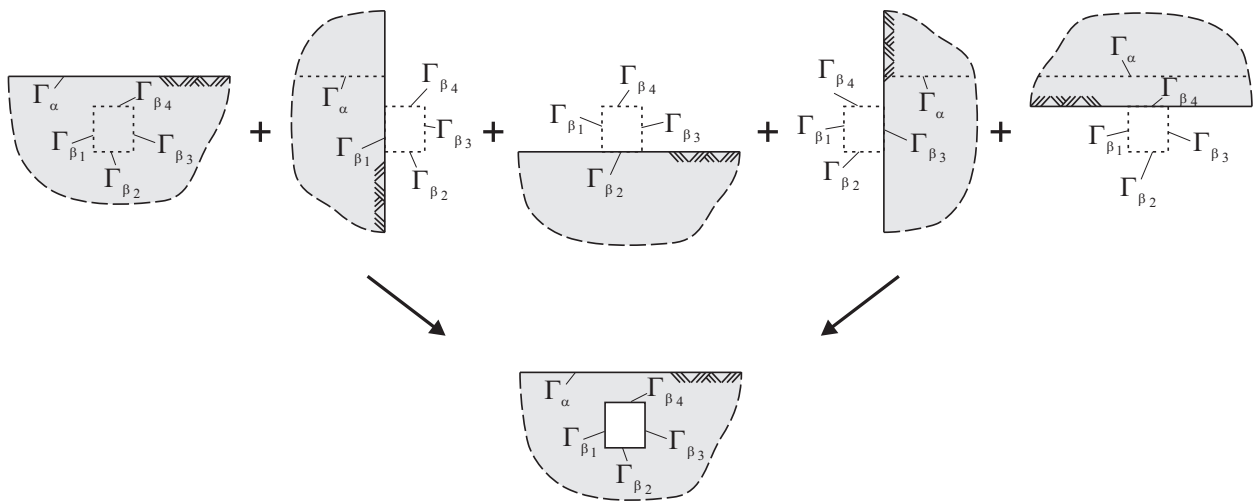


Abbildung 6.11: Halbraum mit rechteckigem Tunnel

6.6 Numerische Umsetzung

Für die Überlagerung der Fundamentalsysteme müssen die Größen an den ebenen und zylindrischen Oberflächen in Fourierreihen und an den kugelförmigen Oberflächen in Reihen von Kugelflächenfunktionen entwickelt werden.

Die im Folgenden beschriebene numerische Umsetzung der Reihenentwicklungen erfolgt mit dem kommerziellen Programmpaket MATLAB.

6.6.1 Numerische Fourierreihenentwicklung

Die Funktion $f(x)$ kann in einer Fourierreihe dargestellt werden.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{i2\pi \frac{n}{B_x} x} \quad (6.22)$$

mit der Wiederholungslänge bzw. Periode B_x .

Die komplexen Amplituden der einzelnen Fourierreihenglieder α_n ergeben sich zu:

$$\alpha_n = \frac{1}{B_x} \int_{-\frac{B_x}{2}}^{\frac{B_x}{2}} f(x) e^{-i2\pi \frac{n}{B_x} x} dx \quad (6.23)$$

Für die numerische Umsetzung dieses Integrals kann nach [Brigham 1987] die Diskrete Fourier Transformation (DFT) bzw. die Fast Fourier Transformation (FFT) verwendet werden.

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{N} H(N+n) & n = -\frac{N}{2}, \dots, -1 \\ \frac{1}{N} H(n) & n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{cases} \quad (6.24)$$

Die FFT-Beziehung

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{-i2\pi\frac{nk}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.25)$$

mit

$$h(k) = \begin{cases} f(k \cdot dx) & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ f((-N+k) \cdot dx) & k = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \end{cases} \quad (6.26)$$

berechnet aus N äquidistanten Abtastwerten einer Orts- bzw. Zeit-Funktion $h(k)$ die N äquidistanten Abtastwerte der fouriertransformierten Wellenzahl- bzw. Frequenz-Funktion $H(n)$.

Die Auswertung der Fourierreihe (Gleichung 6.22) kann ebenfalls diskret mit der Inversen Fast Fourier Transform (IFFT) erfolgen:

$$f(k \cdot dx) = \begin{cases} N \cdot h(N+k) & k = -\frac{N}{2}, \dots, -1 \\ N \cdot h(k) & k = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{cases} \quad (6.27)$$

mit

$$h(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) e^{i2\pi\frac{nk}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.28)$$

und

$$H(n) = \begin{cases} \alpha_n & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ \alpha_{(-N+n)} & n = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \end{cases} \quad (6.29)$$

6.6.2 Numerische sphärische Fourierreihenentwicklung

Die sphärische Fouriertransformation findet unter anderem Anwendung in der Tomografie, Geophysik, Seismologie und Meteorologie. [Driscoll u. Healy 1994], [Mohlenkamp 1999], [Spotz u. Swarztrauber 2001] und [Potts 2003] haben Algorithmen für eine schnelle diskrete sphärische Fouriertransformation erstellt. Im Folgenden soll eine einfache numerische Umsetzung der sphärische Fourierreihenentwicklung gezeigt werden.

Die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ kann auf einer Kugelfläche in eine Reihe von Kugelflächenfunktionen zerlegt werden

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^M \sum_{l=-m}^m a_{l,m} Y_m^l = \sum_{m=0}^M \sum_{l=-m}^m a_{l,m} \bar{P}_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \quad (6.30)$$

mit den normierten assoziierten Legendre-Funktionen $\bar{P}_m^l(\cos \vartheta)$ (siehe Anhang A.1.5).

Die Berechnung der Koeffizienten $a_{l,m}$ geschieht in zwei Schritten.

Zunächst wird die Funktion entlang der Breitenkreise in eine Fourierreihe entwickelt.

$$a_l(\vartheta) = \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \varphi) e^{-il\varphi} d\varphi \quad (6.31)$$

Gefolgt von einer assoziierten Legendre-Transformation entlang des Längenkreeses.

$$a_{l,m} = \int_0^\pi a_l(\vartheta) \bar{P}_m^l(\cos \vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta \quad (6.32)$$

Für die numerische Berechnung der Funktionen $a_l(\vartheta)$ (Gleichung 6.31) wird analog zu Abschnitt 6.6.1 die FFT verwendet. Dazu wird die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ entlang der Breitenkreise an L äquidistante Stellen diskretisiert.

Für die numerische Ermittlung des Integrals von Gleichung (6.32) wird in dieser Arbeit die Gauß-Legendre-Quadratur verwendet ([Abramowitz u. Stegun 1965], [Jahnke 1966]). Somit muss die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ entlang des Längenkreeses an M_s Stützstellen $x_i = \cos(\vartheta_i)$ mit $x_i \in [-1, 1]$ bzw. $\vartheta_i = \arccos(x_i)$ mit $\vartheta_i \in [0, \pi]$ ausgewertet werden. Unter Zuhilfenahme der Gewichte w_i der Gauß-Legendre-Integration ergibt sich die Bestimmungsgleichung:

$$a_{l,m} = \sum_{i=1}^{M_s} a_l(\vartheta_i) \bar{P}_m^l(\cos \vartheta_i) w_i \quad (6.33)$$

In Matrixschreibweise lautet Gleichung (6.33) für jedes Reihenglied l :

$$\mathbf{a}_{l,m} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}_l \quad (6.34)$$

mit

$$\mathbf{a}_{l,m} = \left(a_{l,l} \quad a_{l,(l+1)} \quad \dots \quad a_{l,M} \right)^T \quad (6.35a)$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \bar{P}_l^l(\cos \vartheta_1) & \bar{P}_l^l(\cos \vartheta_2) & \dots & \bar{P}_l^l(\cos \vartheta_{M_s}) \\ \bar{P}_{(l+1)}^l(\cos \vartheta_1) & \bar{P}_{(l+1)}^l(\cos \vartheta_2) & \dots & \bar{P}_{(l+1)}^l(\cos \vartheta_{M_s}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{P}_M^l(\cos \vartheta_1) & \bar{P}_M^l(\cos \vartheta_2) & \dots & \bar{P}_M^l(\cos \vartheta_{M_s}) \end{bmatrix} \quad (6.35b)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{M_s} \end{bmatrix} \quad (6.35c)$$

$$\mathbf{a}_l = \left(a_l(\vartheta_1) \quad a_l(\vartheta_2) \quad \dots \quad a_l(\vartheta_{M_s}) \right)^T \quad (6.35d)$$

Die maximale Anzahl der zu ermittelnden Reihenglieder hängt von der Anzahl der diskreten Stützstellen (L und M_s) ab. Die höchste berechenbare Ordnung M der Kugelflächenfunktion Y_M^l beträgt demnach $M = \min(L/2, M_s) - 1$ [Spotz u. Swarztrauber 2001].

Die Rücktransformation bzw. die Auswertung der sphärischen Fourierreihe (Gleichung 6.30) erfolgt ebenfalls in zwei Schritten.

Zuerst werden die Funktionen $a_l(\vartheta)$ aus den Koeffizienten $a_{l,m}$ berechnet.

$$a_l(\vartheta) = \sum_{m=l}^M a_{l,m} \bar{P}_m^l(\cos \vartheta) \quad (6.36)$$

Anschließend kann die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ bestimmt werden.

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^M a_l(\vartheta) e^{il\varphi} \quad (6.37)$$

Die diskrete Berechnung von Gleichung (6.36) lautet:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{a}_{1,m} \quad (6.38)$$

Für die numerische Umsetzung von Gleichung (6.37) wird die IFFT aus Abschnitt 6.6.1 verwendet.

6.7 Berücksichtigung der Effekte von Fern- und Nahfeldern

In der in Abschnitt 6.3.1 beschriebenen Methode werden alle berücksichtigten Wellenzahlen an der Oberfläche des Halbraums mit allen berücksichtigten Wellenzahlen an der Oberfläche des Hohlraums gekoppelt. Der Berechnungsaufwand des zu lösenden Gleichungssystems (6.9) steigt somit bei einer zunehmenden Anzahl von Wellenzahlen stark an. Unter Berücksichtigung der Lösungscharakteristik der einzelnen Fundamentalsysteme kann dieser Aufwand jedoch deutlich reduziert werden [Frühe u. Müller 2010b].

Im Folgenden werden die Lösungscharakteristiken von Scherwellen für ein ungedämpftes Material näher untersucht. Das Lösungsverhalten von Kompressionswellen ergibt sich analog.

Für das System des Halbraums hängt das Ausbreitungsverhalten der Wellen senkrecht zur Halbraumoberfläche für negative Frequenzen von der Exponentialfunktion $e^{-\lambda_2 z}$ aus Glei-

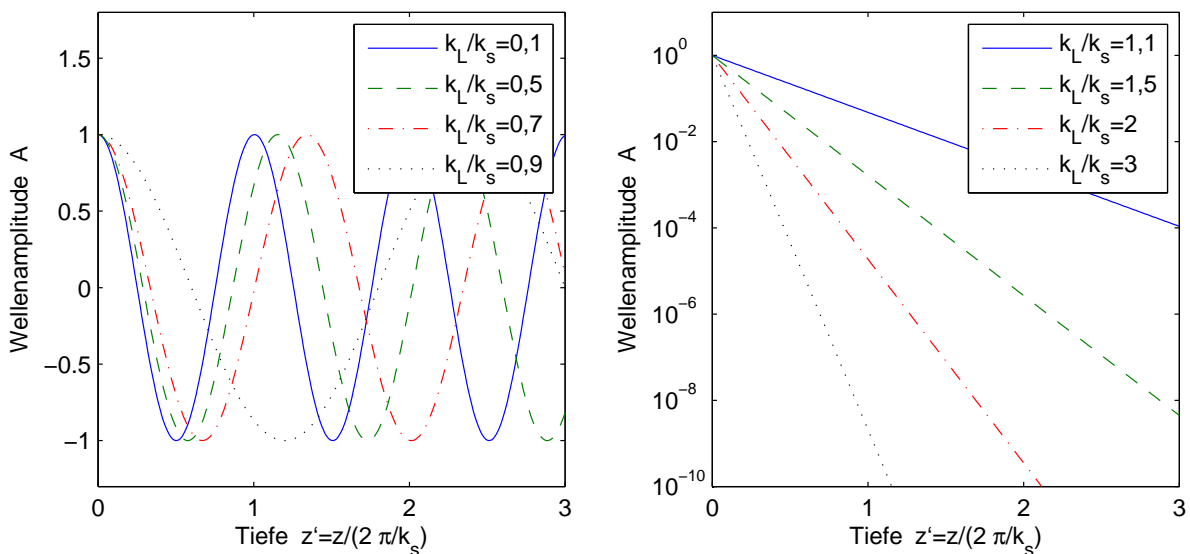


Abbildung 6.12: Lösungsscharakteristik des Halbraums für nicht abklingende Raumwellen (links) und schnell abklingende Oberflächenwellen (rechts)

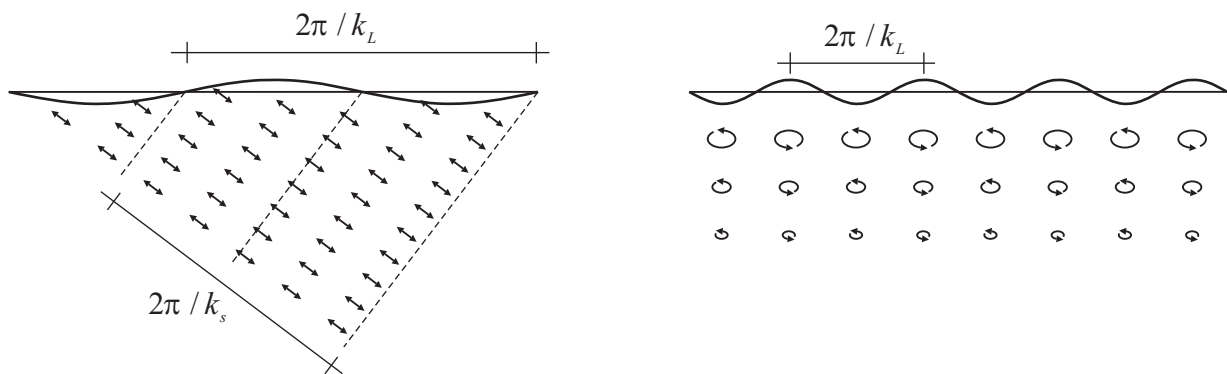


Abbildung 6.13: Schematische Darstellung der Wellenausbreitung im Halbraum für Raumwellen (links) und Oberflächenwellen (rechts)

chung (3.4) ab. Wenn die Wellenzahl der an der Oberfläche angreifenden Last $k_L = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ kleiner als die Scherwellenzahl k_s ist, wird der Exponent $-\lambda_2 z$ imaginär. Als Lösung resultieren in z -Richtung nicht abklingende Raumwellen (siehe Abbildung 6.12).

Wird die Wellenzahl der Last k_L größer als die Scherwellenzahl k_s , so ist der Exponent reell. Das Lösungsverhalten ändert sich und es liegen nun schnell abklingende Oberflächenwellen vor. In Abbildung 6.13 ist das Ausbreitungsverhalten der Raum- und Oberflächenwellen schematisch dargestellt.

Bei der Lösung des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum, welche in radialer Richtung von der Hankelfunktion erster Ordnung $H_n^{(1)}(k_\beta r)$ aus Gleichung (4.50) abhängt, liegt ein ähnli-

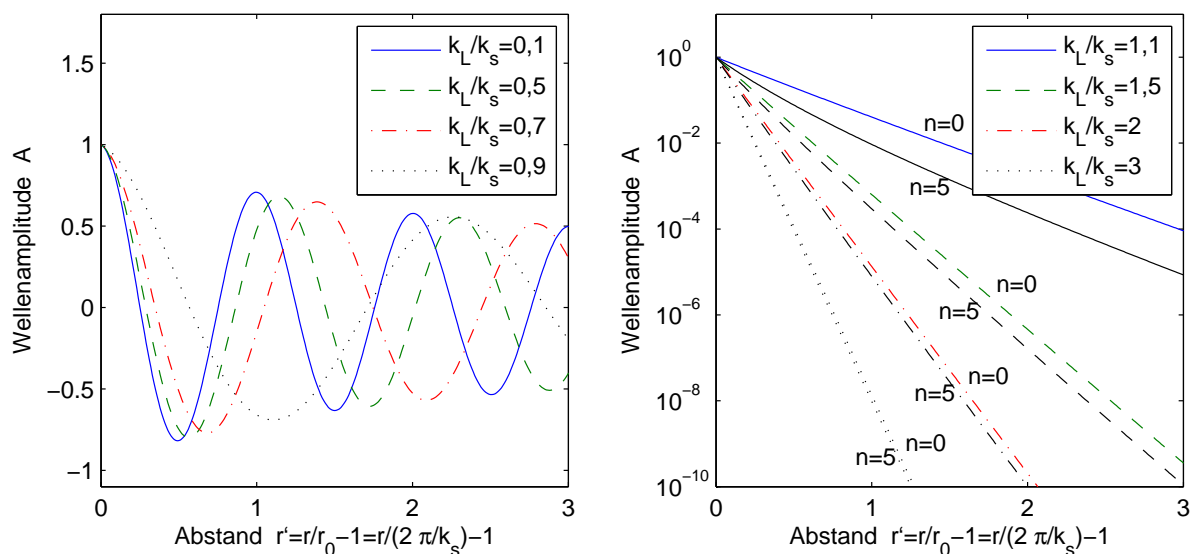


Abbildung 6.14: Lösungscharakteristik des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum für langsam abklingende Raumwellen (links) und schnell abklingende Oberflächenwellen (rechts)

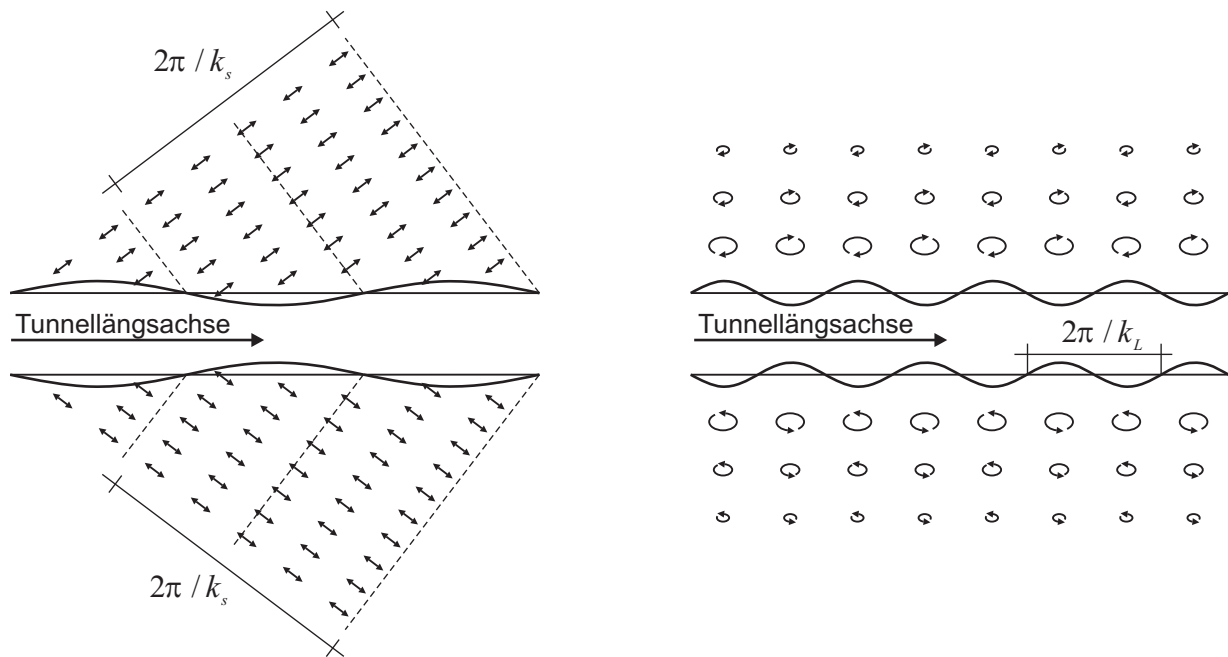


Abbildung 6.15: Schematische Darstellung der Wellenausbreitung im Vollraum mit zylindrischem Hohlraum für Raumwellen (links) und Oberflächenwellen (rechts)

che Charakteristik wie beim Halbraum vor. Ist die Wellenzahl der an der Hohlraumoberfläche angreifenden Last $k_L = k_x$ kleiner als die Scherwellenzahl k_s , so nimmt das Argument der Hankelfunktion $k_\beta r$ reelle Werte an. Es liegen Raumwellen vor, die aufgrund der geometrischen Dämpfung in radialer Richtung nur langsam abklingen (siehe Abbildung 6.14). Für Wellenzahlen $k_L > k_s$ wird das Argument imaginär und es entstehen Oberflächenwellen, die von der Hohlraumoberfläche weg schnell abklingen. In Abbildung 6.15 ist das Ausbreitungsverhalten der Raum- und Oberflächenwellen von der Hohlraumoberfläche schematisch dargestellt.

Bei dem Fundamentalsystem Vollraum mit kugelförmigen Hohlraum treten nur Fernfeldlösungen auf (siehe Abschnitt 5.4). In radialer Richtung breiten sich die Wellen mit der sphärischen Hankelfunktion $h_m^{(1)}(\tilde{k}_s r)$ aus. Aufgrund der größeren geometrischen Dämpfung klingen diese Wellen schneller ab als bei dem System des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum (siehe Abbildung 6.16).

Die Lösungscharakteristiken der einzelnen Fundamentalsysteme können nun dazu verwendet werden um den Berechnungsaufwand bei der Superposition zu reduzieren. So ist es ausreichend bei jedem Fundamentalsystem nur diejenigen Wellenzahlen bei der Kopplung zu berücksichtigen, deren Lösungen nicht schnell abklingen und somit einen Einfluss an der fiktiven Kopplungsfläche haben.

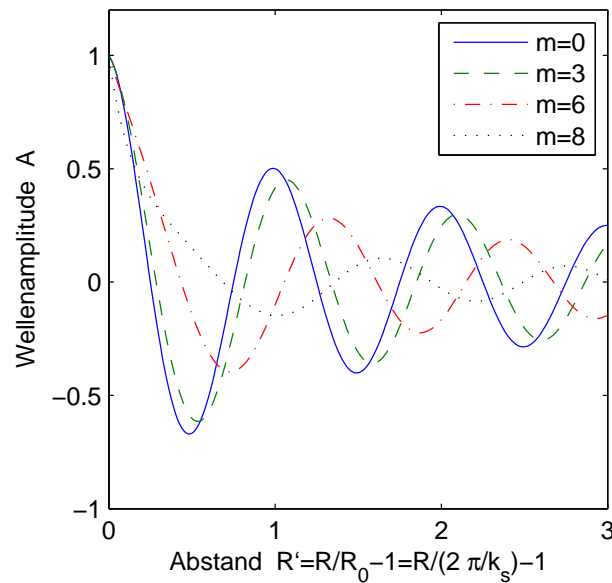


Abbildung 6.16: Lösungscharakteristik des Vollraums mit kugelförmigen Hohlraum (abklingende Raumwellen)

Für das System eines zylindrischen Tunnels im Halbraum mit der Überdeckung h kann dies numerisch mit Hilfe einer frei wählbaren Abbruchkonstante ϵ erfolgen. Für die Überlagerung werden von der Halbraumlösung diejenigen Reihenglieder s nicht berücksichtigt, für welche die Spannung $\hat{\sigma}_{zi}$ in der Tiefe $z = h$ infolge einer Last $\hat{p}_{zi} = 1$ an der Oberfläche mindestens auf die Größe ϵ abgeklungen ist (Gleichung 6.39). Die Spannung $\hat{\sigma}_{zi}$ kann unter Verwendung der Gleichungen (3.16) und (3.20) ermittelt werden.

$$|\hat{\sigma}_{zi}(k_x, s \cdot \Delta k_y, z = h)| < \epsilon \quad (6.39)$$

Die Halbraumlösung weist für Wellenzahlen im Bereich der Rayleighwelle k_R eine Singularität auf. Deshalb muss für Wellenzahlen in diesem Bereich, vor allem bei geringer Dämpfung, beachtet werden, ob die Abbruchbedingung (6.39) erfüllt ist.

Bei dem System des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum können, analog zum Halbraum, ebenfalls einige Reihenglieder n bei der Superposition vernachlässigt werden. Dazu müssen in diesem Fall die Spannung $\hat{\sigma}_{rj}$ im Abstand $r = r_0 + h$ infolge einer Last $\hat{p}_{rj} = 1$ an der Hohlraumoberfläche ($r = r_0$) ermittelt werden. Alle Reihenglieder n , welche die Bedingung

$$|\hat{\sigma}_{rj}(k_x, r = r_0 + h, n)| < \epsilon \quad (6.40)$$

erfüllen, müssen nicht überlagert werden.

Durch die Beschränkung der Kopplung auf die maßgeblichen Wellenzahlen verkleinert sich das Gleichungssystem (6.9) und der Berechnungsaufwand verringert sich deutlich ohne die Genauigkeit des Ergebnisses zu beeinträchtigen.

Auch bei dem System eines kugelförmigen Hohlraums im Halbraum müssen bei der Überlagerung nicht alle Reihenglieder miteinander gekoppelt werden. Analog zum zylindrischen Hohlraum wird das Abklingverhalten der Spannungen $\hat{\sigma}_{Rk}$ im Abstand $R = R_0 + h$ infolge einer Last $\hat{p}_{Rk} = 1$ an der Hohlraumoberfläche ($R = R_0$) betrachtet. Für die Überlagerung werden nur die Reihenglieder l, m verwendet, welche die Gleichung (6.41) nicht erfüllen.

$$|\hat{\sigma}_{Rk}(R = R_0 + h, l, m)| < \epsilon \quad (6.41)$$

6.8 Einfluss der Tunneltiefe

Zur Untersuchung des Einflusses der Tunneltiefe auf die Ergebnisse an der Halbraumoberfläche werden die Admittanzen der Halbraumoberfläche für unterschiedliche Tunneltiefen berechnet und miteinander verglichen [Frühe u. Müller 2010a]. Die von der Frequenz ω und den Wellenzahlen k_x und k_y abhängigen Admittanzen $A(\omega, k_x, k_y)$ werden aus der Last $p(\omega, k_x, k_y)$ und den resultierenden Geschwindigkeiten unter der Last $v(\omega, k_x, k_y)$ ermittelt.

$$A(\omega, k_x, k_y) = \frac{v(\omega, k_x, k_y)}{p(\omega, k_x, k_y)} \quad (6.42)$$

In Abbildung 6.17 ist der Realteil der Admittanz eines Halbraums an seiner Oberfläche für eine in x -Richtung konstante Last ($k_x = 0$) dargestellt. Die Parameter des für die Berechnungen verwendeten typischen Bodens sind in Tabelle 6.1 angegeben.

Obwohl es in diesem Fall möglich wäre die Admittanz in einem zweidimensionalen Graphen darzustellen, wird hier zur besseren Vergleichbarkeit mit späteren Ergebnissen eine dreidimensionale Darstellung bezüglich des Wellenzahlverhältnisses k_y/k_R und der Frequenz $f = \omega/2\pi$ gewählt. Der Bereich mit den hohen Admittanzen resultiert aus einer Anregung mit Wellenzahlen k_y in der Nähe der Rayleigh-Wellenzahl (k_R).

Elastizitätsmodul $E[N/m]$	Querdehnzahl ν	Dichte $\rho[kg/m]$	Verlustfaktor ζ	P-Wellengeschwindigkeit $c_p[m/s]$	S-Wellengeschwindigkeit $c_s[m/s]$
$260 \cdot 10^6$	0.3	2000	0.10	420	225

Tabelle 6.1: Bodenparameter

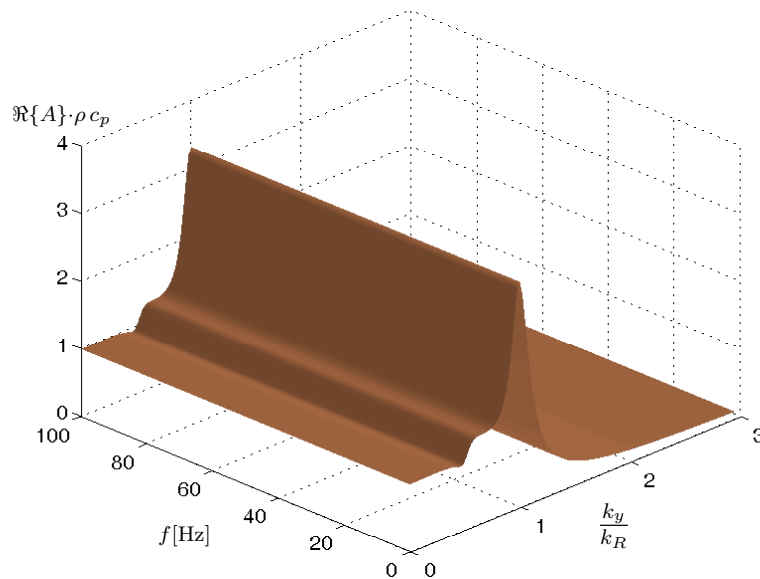


Abbildung 6.17: Admittanz eines Halbraums an seiner Oberfläche ($k_x = 0$)

Die Veränderung der Admittanz an der Halbraumoberfläche infolge eines Tunnels mit Radius $r_0 = 5 \text{ m}$ ist in [Abbildung 6.18](#) für eine Tunnelüberdeckung von 1 m bzw. 5 m dargestellt. Im Frequenzbereich von $f < 20 \text{ Hz}$ gibt es eine deutliche Veränderung der Admittanz, was auf eine resonante Anregung der Tunnelüberdeckung zurückzuführen ist. Für eine Tunnelüberdeckung von 5 m ist der Einfluss des Tunnels im gesamten Frequenzbereich bereits wesentlich kleiner. Zudem ist ersichtlich, dass für Wellenzahlen k_y , die größer als k_R sind, der Einfluss des Tunnels auf die Admittanzen an der Halbraumoberfläche sehr klein wird. Dies kann mit der in [Abschnitt 6.7](#) erläuterten Lösungscharakteristik des Halbraums erklärt werden. Für kleine Spurgeschwindigkeiten $v_t = 2\pi f/k_y$ existieren nur Nahfeldlösungen die schnell ab-

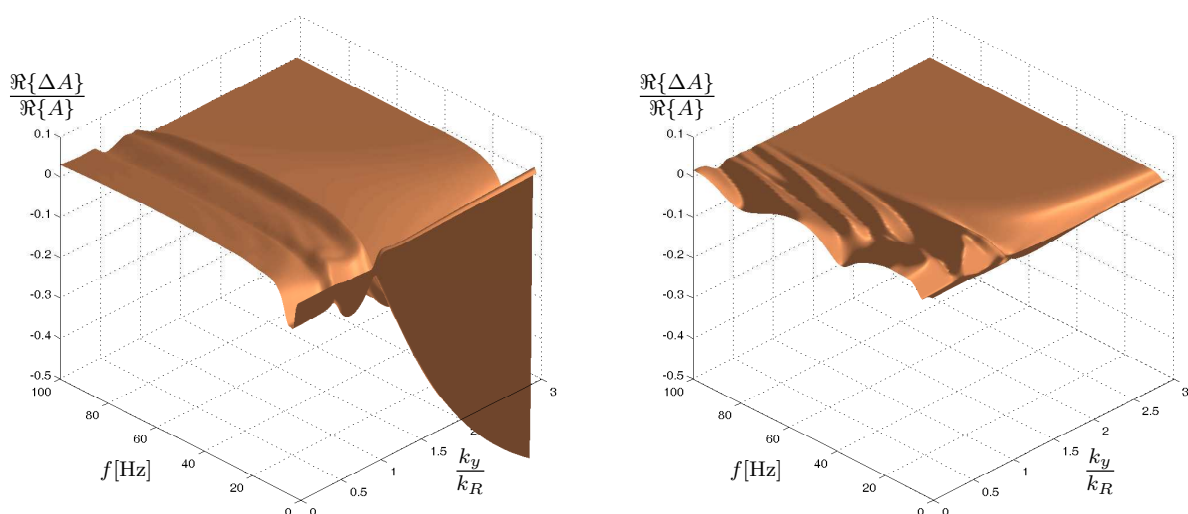


Abbildung 6.18: Veränderung der Admittanz an der Halbraumoberfläche ($k_x = 0$) infolge eines Tunnels in 1 m Tiefe (links) und in 5 m Tiefe (rechts)

klingen. Daher werden die Admittanzen von kleinen Spurgeschwindigkeiten nicht von dem Tunnel beeinflusst.

Analog zu der eben beschriebenen Methode kann der Einfluss der Halbraumoberfläche auf die Admittanzen an der Tunneloberfläche untersucht werden. In Abbildung 6.19 sind die Admittanzen an der Tunneloberfläche infolge einer in Umfangsrichtung konstanten Last ($n = 0$) für einen Tunnel im Vollraum und einen Tunnel im Halbraum mit einer Überdeckung von 1 m dargestellt. Auch hier ist eine resonante Anregung der geringen Tunnelüberdeckung für $f < 20$ Hz zu beobachten. Der Einfluss der Halbraumoberfläche auf die Admittanzen an der Tunneloberfläche verringert sich wiederum schnell für kleinere Spurgeschwindigkeiten

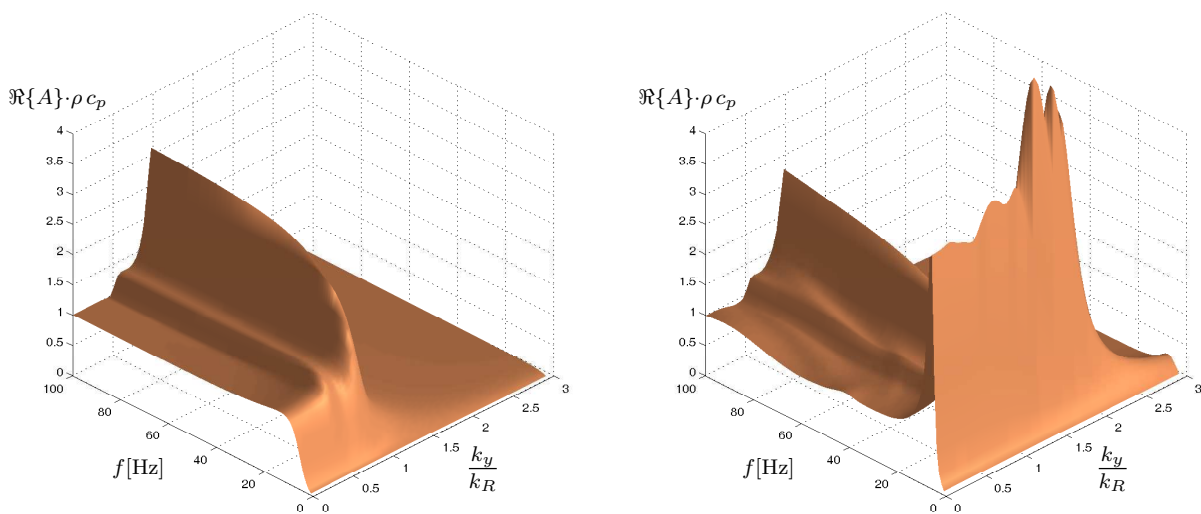


Abbildung 6.19: Admittanz eines Tunnels an seiner Oberfläche ($n = 0$) im Vollraum (links) und im Halbraum mit einer Überdeckung von 1 m (rechts)

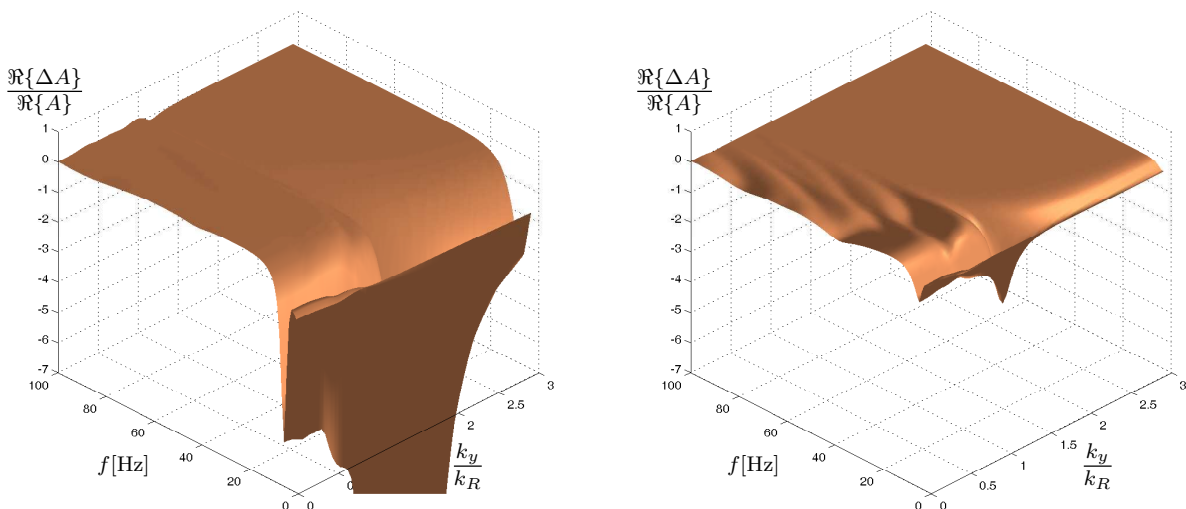


Abbildung 6.20: Veränderung der Admittanz an der Tunneloberfläche ($n = 0$) infolge einer Halbraumoberfläche mit einer Überdeckung von 1 m (links) und 5 m (rechts)

sowie für größere Überdeckungen (siehe Abbildung 6.20).

Unter Zuhilfenahme der Admittanzen kann die durch eine harmonische Last mit der Amplitude F in das System eingetragene Leistung P ermittelt werden [Cremer u. Heckl 1996]:

$$P = \frac{1}{2} |F|^2 \cdot \Re\{A\} \quad (6.43)$$

Die Veränderung des Leistungseintrages in das System durch eine mit der Frequenz ω harmonisch schwingende und direkt über dem Tunnel angreifende konstante Linienlast kann für verschiedene Tunnelüberdeckungen berechnet werden. Da im transformierten Raum eine Linienlast, die entlang der x -Achse wirkt, konstant über k_y ist, muss dazu für jede Frequenz der Realteil der Admittanz über k_y aufintegriert (bzw. numerisch aufaddiert) werden.

$$\Delta P(\omega, k_x = 0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Re\{\Delta A(\omega, k_x = 0, k_y)\} dk_y}{\int_{-\infty}^{\infty} \Re\{A(\omega, k_x = 0, k_y)\} dk_y} \cong \frac{\sum_{(s)} \Re\{\Delta A(\omega, k_x = 0, s \cdot \Delta k_y)\}}{\sum_{(s)} \Re\{A(\omega, k_x = 0, s \cdot \Delta k_y)\}} \quad (6.44)$$

Analog dazu kann die Leistung, die durch eine einzelne Ringlast im Tunnel eingetragen wird, ermittelt werden. In Abbildung 6.21 ist die frequenzabhängige Veränderung des Leistungseintrages ΔP von einer Last an der Halbraumoberfläche infolge eines Tunnels und von einer Last an der Tunneloberfläche infolge einer Halbraumoberfläche jeweils für zwei unterschiedliche Tunnelüberdeckungen dargestellt. Es zeigt sich, dass bei Tunnelüberdeckung die größer als der Radius des Tunnels ($r_0 = 5 \text{ m}$) sind, die gegenseitige Beeinflussung für Frequenzen $f \geq 50 \text{ Hz}$ vernachlässigt werden kann.

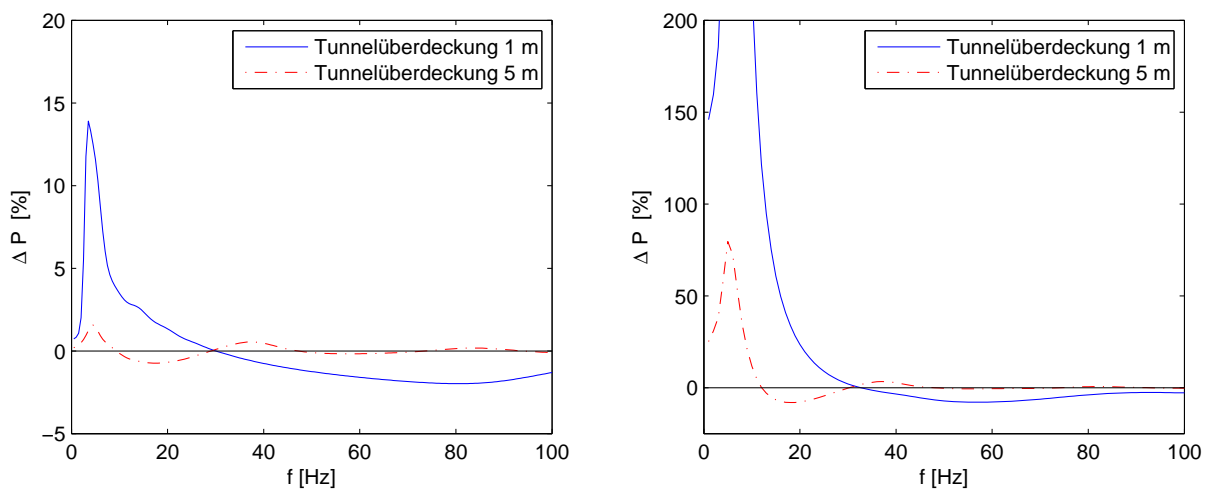


Abbildung 6.21: Veränderung der eingetragenen Leistung ΔP von einer Last an der Halbraumoberfläche infolge eines Tunnels (links) und von einer Last im Tunnel infolge einer Halbraumoberfläche (rechts)

6.9 Vergleichsberechnungen

Zur Validierung der in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Superpositionsmethode werden Vergleichsberechnungen durchgeführt. Dazu wird ein typischer Boden mit den Materialparametern aus Tabelle 6.1 verwendet.

Die Überprüfung der Kopplung der Fundamentalsysteme Halbraum und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum erfolgt an dem System eines Grabens im Halbraum, dessen Lösung in Abschnitt 6.3.2 hergeleitet wurde. In dem Berechnungsbeispiel wird ein sehr flacher Graben ($f_G = 0,4\text{ m}$, $r_0 = 20,0\text{ m}$) an der Grabenoberfläche mit einer harmonisch schwingenden und in x -Richtung konstanten Last p_{rr} ($\omega = 20 \cdot 2\pi \frac{1}{s}$, $k_x = 0$, $b_y = 3,9\text{ m}$) angeregt.

Da dieses System dem System eines Halbraums sehr ähnlich ist, können die Ergebnisse mit denen eines Halbraums ohne Graben verglichen werden, der an seiner Oberfläche mit der gleichen Last p_{zz} belastet wird (siehe Abbildung 6.22).

Für die Fourierreihenentwicklung in y -Richtung wird eine Wiederholungslänge $B_y = 250\text{ m}$ gewählt. Im Überlagerungsverfahren werden $S = 128$ Reihenglieder in y -Richtung und $N = 64$ Reihenglieder entlang des Umfangs miteinander gekoppelt.

In Abbildung 6.23 sind die vertikalen Verschiebungen u_z infolge einer vertikalen Last p_{zz} für

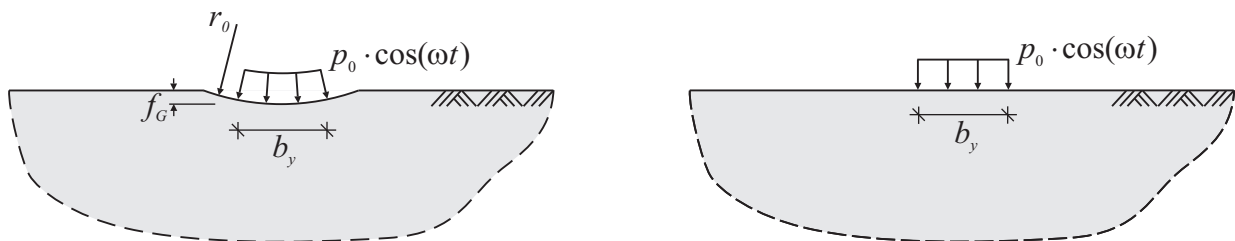


Abbildung 6.22: Halbraum mit flachem Graben (links) und Halbraum ohne Graben (rechts) unter harmonischer Belastung

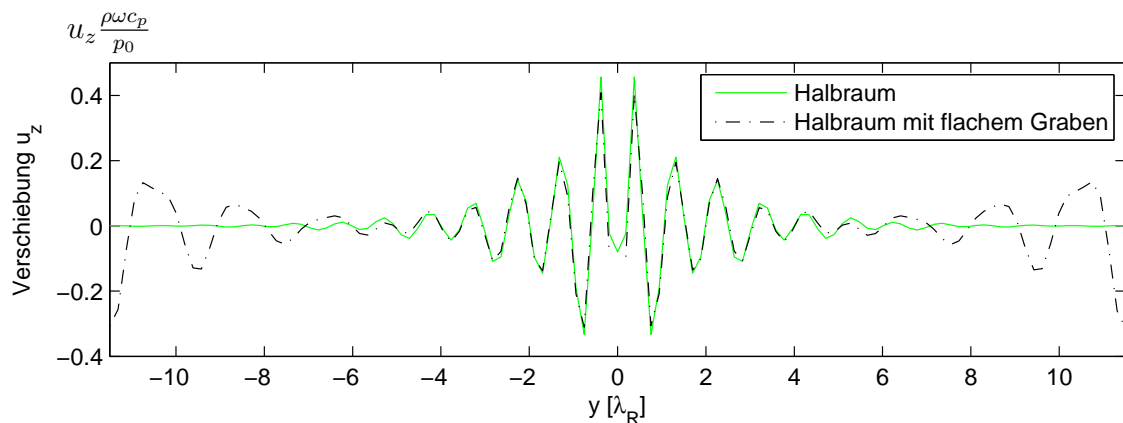


Abbildung 6.23: Vertikale Verschiebung u_z infolge einer vertikalen harmonischen Last p_{zz}

beide Systeme dargestellt. In der Nähe der Last ($-4\lambda_R < y < 4\lambda_R$) stimmen die beiden Berechnungsergebnisse sehr gut miteinander überein. An dem gekoppelten System des Halbraums mit Graben treten jedoch Störungen an den Rändern des Wiederholabschnitts auf. Da bei dem System des Halbraums die Verschiebungen an diesen Rändern aber bereits abgeklungen sind, ist ersichtlich, dass die Wiederholungslänge ausreichend groß gewählt wurde. Die Störungen resultieren aus der fehlenden Berücksichtigung der Wiederholung des Grabens in y -Richtung. Aufgrund der Reihenentwicklung in y -Richtung wiederholt sich die Last an der Oberfläche des Halbraums immer wieder, was bei der Kopplung nicht mit einberechnet wurde. Führt man nun zusätzliche ebenfalls belastete Gräben in den benachbarten Wiederholabschnitten ein (Abbildung 6.24) und berücksichtigt deren Einfluss auf die Oberflächen $\Gamma_{\alpha 1}$ und $\Gamma_{\beta 1}$, so können die Störungen an den Rändern behoben werden. Die Verschiebungen des gekoppelten Systems stimmen nun sehr gut mit der analytischen Lösung des Halbraums überein (siehe Abbildung 6.25).

In den Abbildungen 6.26 bis 6.28 sind die resultierenden Verschiebungen u_x , u_y und u_z infolge der Lasten p_{zx} , p_{zy} und p_{zz} für beide Systeme angegeben. Es zeigt sich, dass auch für die Schubbelastungen eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse vorliegt. Die vorgenommenen Vergleichsberechnungen bestätigen somit die Funktionsfähigkeit und Richtigkeit der entwickelten Superpositionsmethode.

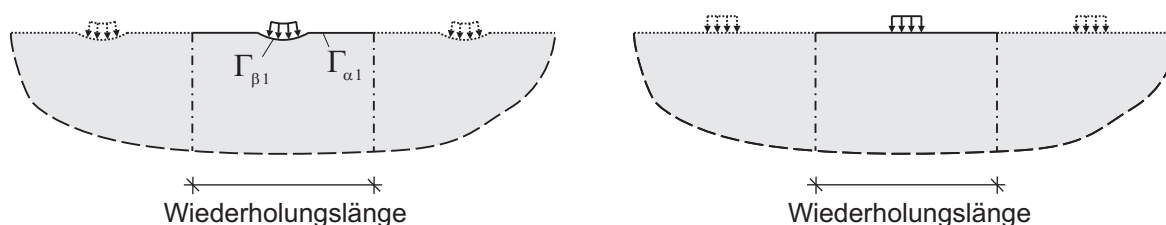


Abbildung 6.24: Halbraum mit flachem Graben (links) und Halbraum ohne Graben (rechts) unter Berücksichtigung der benachbarten Wiederholabschnitte

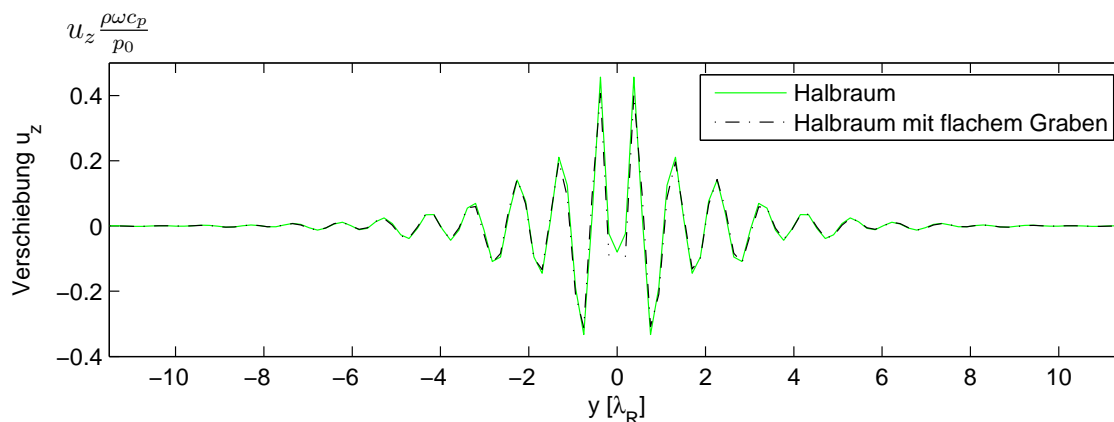


Abbildung 6.25: Vertikale Verschiebung u_z infolge einer vertikalen harmonischen Last p_{zz} unter Berücksichtigung der benachbarten Wiederholabschnitte

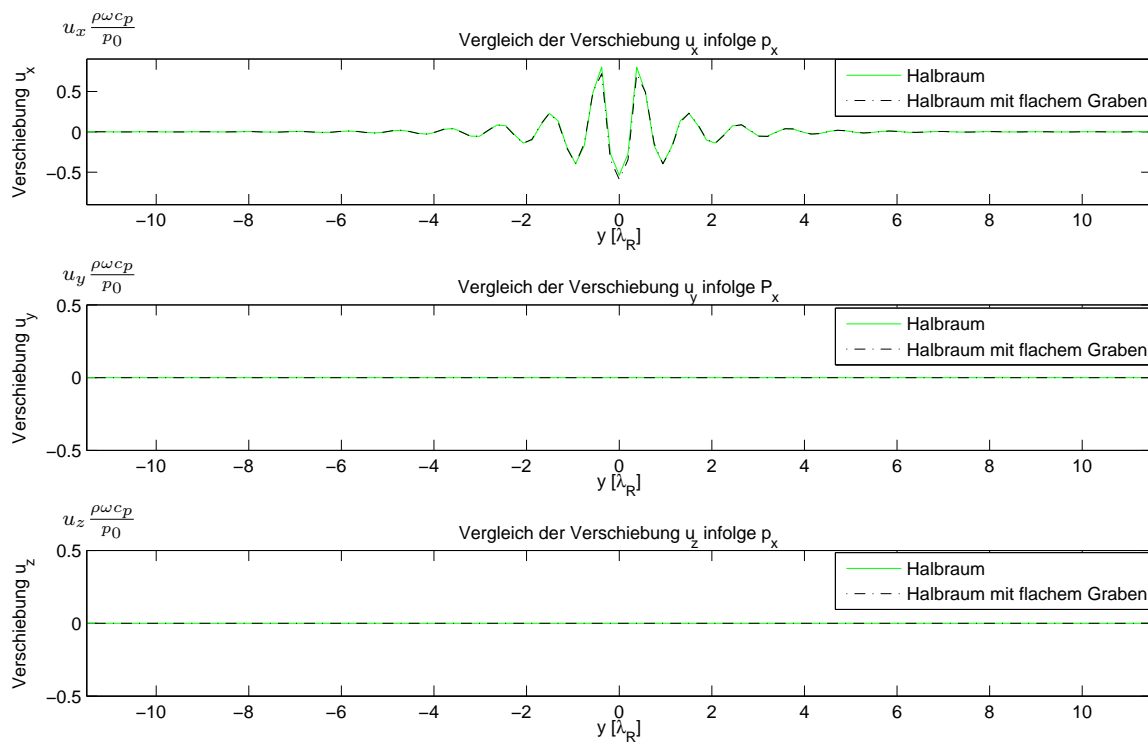


Abbildung 6.26: Verschiebungen u_x , u_y und u_z infolge einer horizontalen harmonischen Last p_{zx}

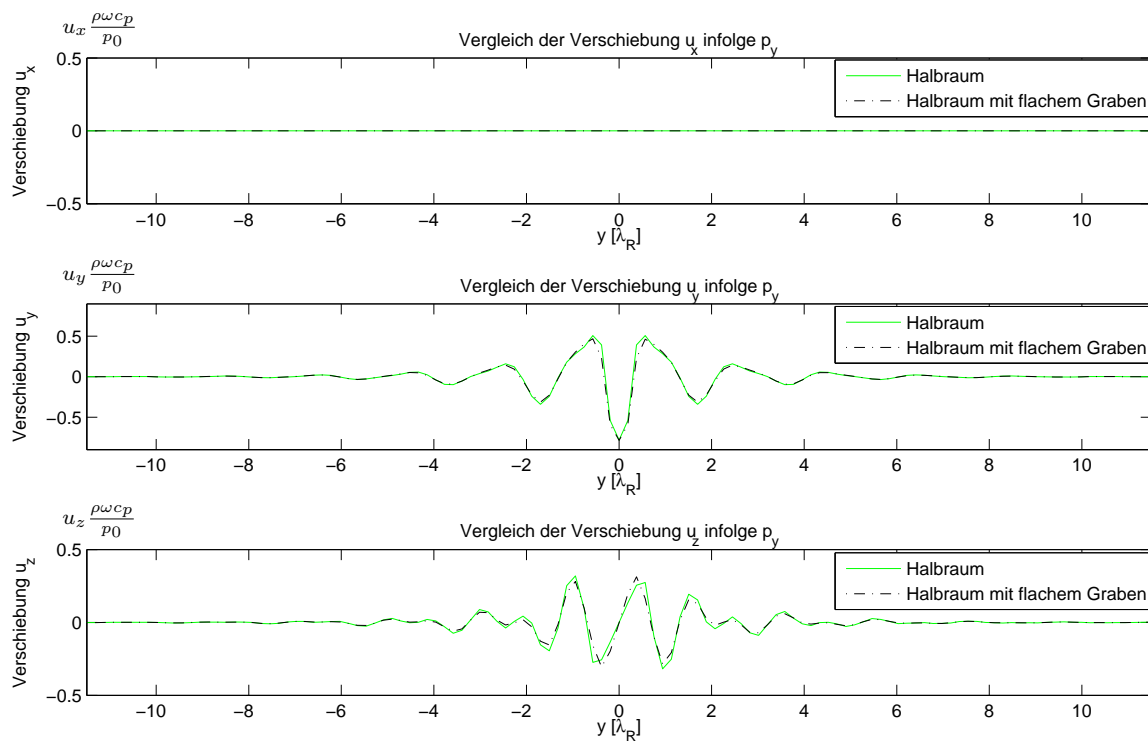


Abbildung 6.27: Verschiebungen u_x , u_y und u_z infolge einer horizontalen harmonischen Last p_{zy}

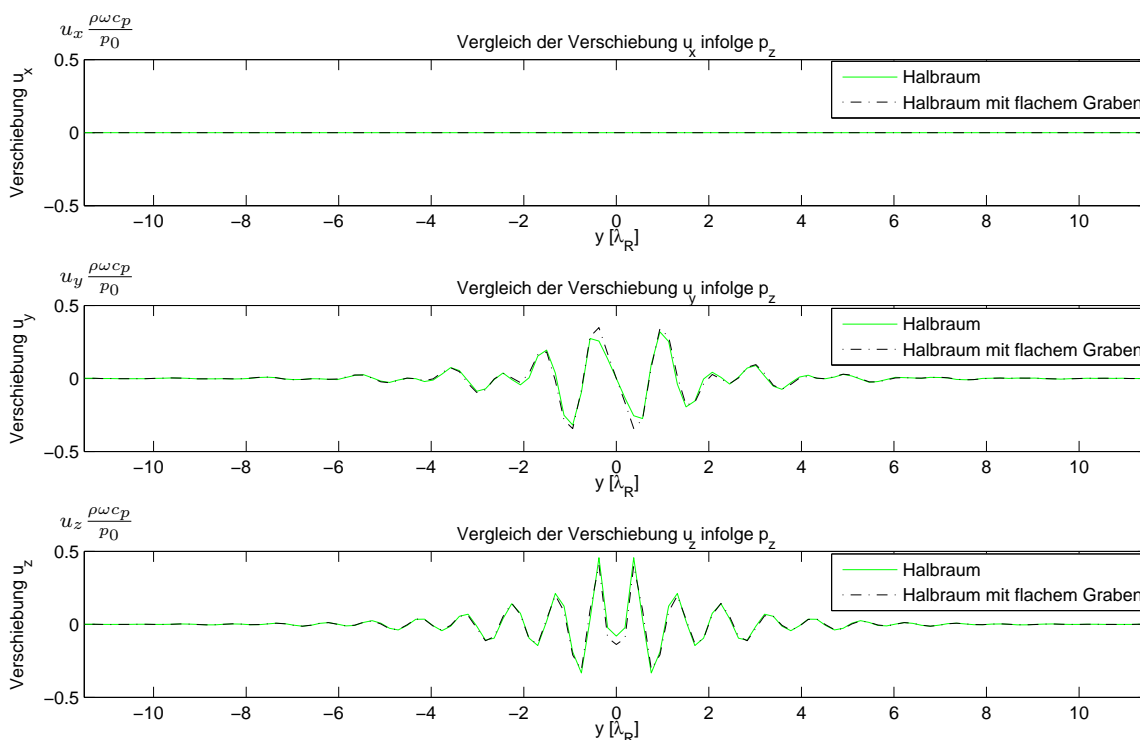


Abbildung 6.28: Verschiebungen u_x , u_y und u_z infolge einer horizontalen harmonischen Last p_{zz}

Mit einer ähnlichen Kontrollrechnung kann auch das Resultat aus der Überlagerung eines Halbraums mit einem Vollraum mit kugelförmigen Hohlraum aus Abschnitt 6.4 überprüft werden. Ein Halbraum mit einer sehr flachen kugelförmigen Einsenkung an seiner Oberfläche ($f_E = 0,1 m$, $R_0 = 6,0 m$) wird dazu mit einer kreisförmigen harmonisch schwingenden Last p_{RR} ($\omega = 30 \cdot 2\pi \frac{1}{s}$, $r_p = 0,9 m$) belastet (Abbildung 6.29). Anschließend werden die Ergebnisse mit der analytischen Halbraumlösung verglichen.

Die Wiederholungslänge in x - und y -Richtung wird zu $B_x = B_y = 64 m$ gewählt. Es werden $O = 64$ Reihenglieder in x -Richtung und $S = 64$ Reihenglieder in y -Richtung mit den Reihenglieder an der kugelförmigen Hohlraumoberfläche bis zur Ordnung $M = 32$ überlagert.

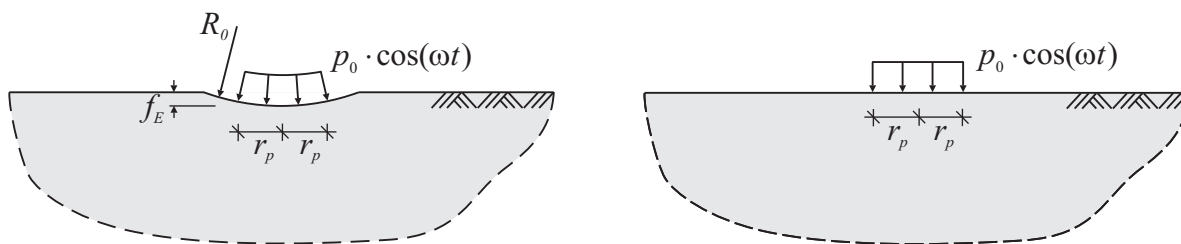


Abbildung 6.29: Halbraum mit flacher kugelförmiger Einsenkung (links) und Halbraum (rechts) unter dynamischer Belastung

Um Störungen an den Rändern zu vermeiden wird auch hier der Einfluss der benachbarten Wiederholabschnitte berücksichtigt (Abbildung 6.30).

Abbildung 6.31 stellt die vertikalen Verschiebungen u_z aufgrund einer vertikalen Last p_{zz} für $x = 0$ an der Halbraumoberfläche für beide Systeme gegenüber. Auch hier zeigt sich, dass das Ergebnis des gekoppelten Systems sehr gut mit der analytischen Lösung des Halbraums übereinstimmt, was das Superpositionsverfahren validiert.

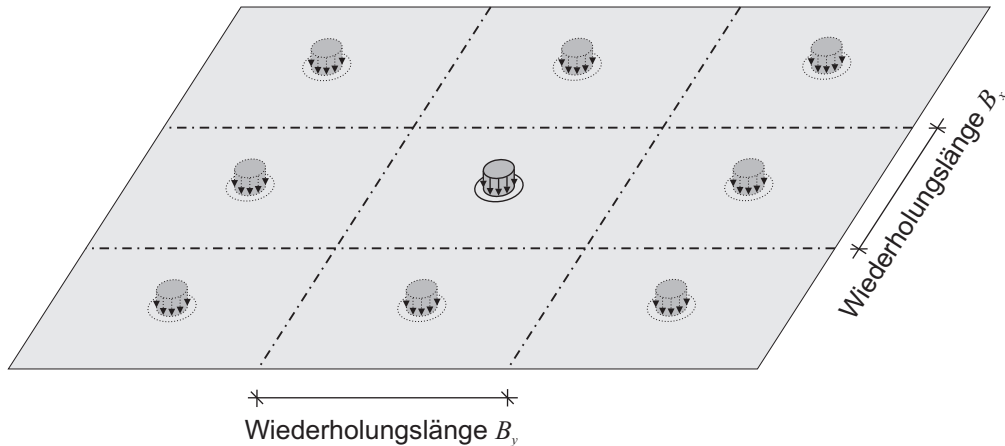


Abbildung 6.30: Belastete Oberfläche des Halbraums mit flacher kugelförmiger Einsenkung unter Berücksichtigung der benachbarten Wiederholabschnitte

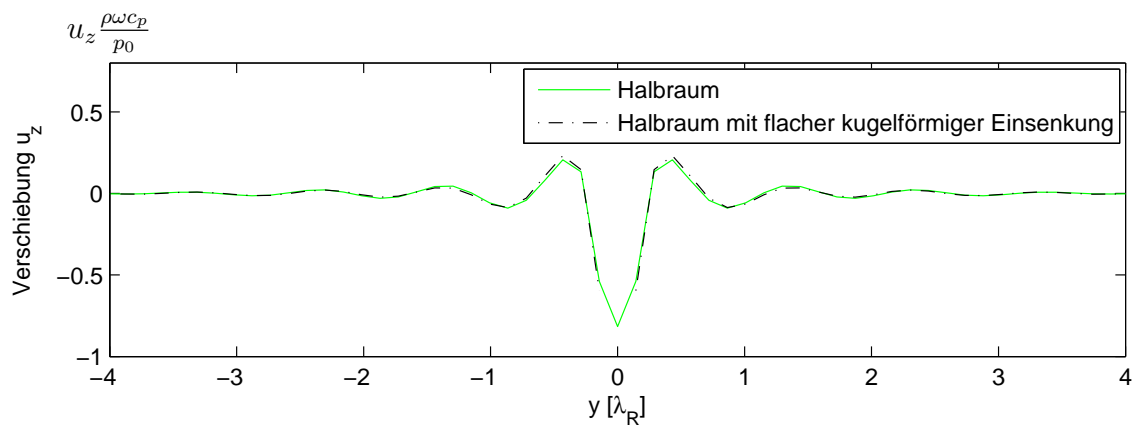


Abbildung 6.31: Vertikale Verschiebung u_z an der Halbraumoberfläche ($z = 0, x = 0$) infolge einer vertikalen harmonischen Last p_{zz}

7 Finite-Elemente-Methode im fouriertransformierten Raum

7.1 Vorbemerkungen

Eine gute Einführung in die Grundlagen der Finite-Elemente-Methode (FEM) geben [Bathe 2002], [Zienkiewicz u. a. 2005], [Klein 2003], [Hughes 2000] und [Kwon u. Hyochoong 2000]. In der FEM steigt für große dreidimensionale Strukturen die Anzahl der Knoten und somit der Berechnungsaufwand stark an. Für eine in x -Richtung unendlich lange Struktur mit in y - und z -Richtung konstantem Querschnitt (z.B. Balken, Tunnel, Graben), kann dieser Aufwand jedoch durch eine Fouriertransformation bezüglich der Richtung $x \rightsquigarrow k_x$ deutlich reduziert werden. Dadurch ist es ausreichend, zugehörig zu den verschiedenen Wellenzahlen k_x ebene Zustände zu betrachten. Eine Diskretisierung im Sinne der Finiten Elemente ist somit nur in der Querschnittsebene (y, z) erforderlich. Dies hat eine signifikante Verringerung der Rechenzeit zur Folge, da jeder Zustand nur für feste Wellenzahlen k_x berechnet werden muss und das dreidimensionale Problem dadurch auf eine Serie von voneinander unabhängigen zweidimensionalen Problemen in der (y, z) -Ebene reduziert wird. [Hackenberg 2010] validiert dieses Verfahren, indem sie das Ergebnis für einen harmonisch belasteten unendlich langen elastisch gebetteten Balken mit der analytischen Lösung vergleicht. Dynamische Aufgabenstellungen werden zudem vorteilhafterweise im Frequenzbereich ω gelöst. Daher wird im Folgenden die dynamische Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\Delta\text{dyn}}$ für ein Dreieckselement im fouriertransformierten Bildraum (k_x, y, z, ω) hergeleitet.

7.2 Grundlegende Beziehungen des linearen Dreieckelementes

Die einfachste Methode, ein ebenes System mit Finiten Elementen zu diskretisieren, ist die Verwendung von linearen Dreieckselementen. In Abbildung 7.1 ist ein in der y - z -Ebene

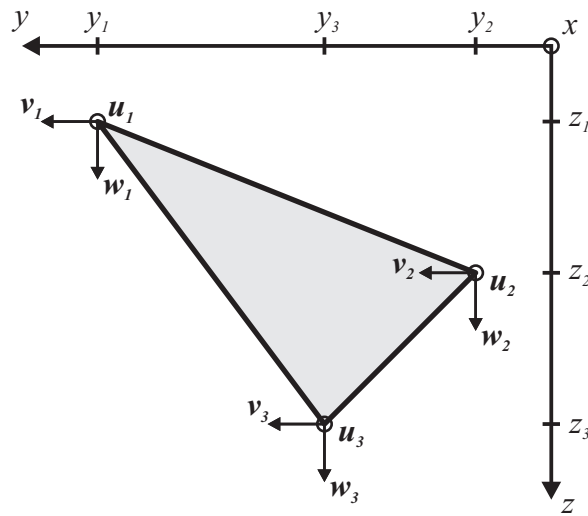


Abbildung 7.1: Ebenes Dreieckselement

liegendes Dreieck dargestellt, das an jedem Knoten je einen Freiheitsgrad in x -, y - und z -Richtung besitzt.

Die Verschiebungen u , v und w eines beliebigen Punktes innerhalb des Dreieckselementes (y, z) können näherungsweise über einen linearen Ansatz beschrieben werden:

$$u(y, z) = c_1 + c_2 \cdot y + c_3 \cdot z \quad (7.1a)$$

$$v(y, z) = c_4 + c_5 \cdot y + c_6 \cdot z \quad (7.1b)$$

$$w(y, z) = c_7 + c_8 \cdot y + c_9 \cdot z \quad (7.1c)$$

oder in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} u(y, z) \\ v(y, z) \\ w(y, z) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

$\mathbf{u}_\Delta \qquad \qquad \mathbf{H}_\Delta \qquad \qquad \mathbf{c}_\Delta$

Der Vektor \mathbf{c}_Δ enthält die neun unbekannte Größen $c_1 - c_9$. Diese können aus den neun bekannten Knotenverformungen berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} u_1(y_1, z_1) \\ v_1(y_1, z_1) \\ w_1(y_1, z_1) \\ u_2(y_2, z_2) \\ v_2(y_2, z_2) \\ w_2(y_2, z_2) \\ u_3(y_3, z_3) \\ v_3(y_3, z_3) \\ w_3(y_3, z_3) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_1 & z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_2 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_3 & z_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

$\mathbf{u}_{\Delta k} \qquad \qquad \mathbf{A}_\Delta \qquad \qquad \mathbf{c}_\Delta$

Die unbekanntenen Größen ergeben sich nun zu

$$\mathbf{c}_\Delta = \mathbf{A}_\Delta^{-1} \cdot \mathbf{u}_{\Delta k} \quad (7.4)$$

mit der Inversen der Matrix \mathbf{A}_Δ

$$\mathbf{A}_\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 \\ a_7 & 0 & 0 & a_8 & 0 & 0 & a_9 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & a_7 & 0 & 0 & a_8 & 0 & 0 & a_9 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & a_7 & 0 & 0 & a_8 & 0 & 0 & a_9 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{y_2 z_3 - y_3 z_2}{2A_D}, & a_2 &= \frac{y_3 z_1 - y_1 z_3}{2A_D}, & a_3 &= \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{2A_D} \\ a_4 &= \frac{z_2 - z_3}{2A_D}, & a_5 &= \frac{z_3 - z_1}{2A_D}, & a_6 &= \frac{z_1 - z_2}{2A_D} \\ a_7 &= \frac{y_3 - y_2}{2A_D}, & a_8 &= \frac{y_1 - y_3}{2A_D}, & a_9 &= \frac{y_2 - y_1}{2A_D} \end{aligned} \quad (7.6)$$

und der Dreiecksfläche

$$A_D = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (y_2 z_3 - y_1 z_3 - y_2 z_1 - y_3 z_2 + y_3 z_1 + y_1 z_2) \quad (7.7)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (7.4) in Gleichung (7.2) können die Verschiebungen innerhalb des Elementes \mathbf{u}_Δ aus den Knotenverschiebungen $\mathbf{u}_{\Delta\mathbf{k}}$ ermittelt werden.

$$\mathbf{u}_\Delta = \mathbf{H}_\Delta \cdot \mathbf{A}_\Delta^{-1} \cdot \mathbf{u}_{\Delta\mathbf{k}} = \mathbf{N}_\Delta \cdot \mathbf{u}_{\Delta\mathbf{k}} \quad (7.8)$$

Die Matrix \mathbf{N}_Δ enthält die Ansatzfunktionen N_i für die Verschiebungen

$$\mathbf{N}_\Delta = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

mit

$$N_1 = a_1 + y \cdot a_4 + z \cdot a_7 \quad (7.10a)$$

$$N_2 = a_2 + y \cdot a_5 + z \cdot a_8 \quad (7.10b)$$

$$N_3 = a_3 + y \cdot a_6 + z \cdot a_9 \quad (7.10c)$$

Im fouriertransformierten Raum (k_x, y, z) lautet die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehung nach Gleichung (2.2):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{xx} \\ \hat{\epsilon}_{yy} \\ \hat{\epsilon}_{zz} \\ \hat{\gamma}_{xy} \\ \hat{\gamma}_{zy} \\ \hat{\gamma}_{zx} \end{pmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\Delta} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_{xx} \\ \hat{\epsilon}_{yy} \\ \hat{\epsilon}_{zz} \\ 2\hat{\epsilon}_{xy} \\ 2\hat{\epsilon}_{zy} \\ 2\hat{\epsilon}_{zx} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{L}}_\Delta} = \begin{bmatrix} ik_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & ik_x & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & ik_x \end{bmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{u}}_\Delta} \quad (7.11)$$

Aus Gleichung (7.8) und Gleichung (7.11) ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Knotenverschiebungen und den Verzerrungen zu:

$$\hat{\epsilon}_{\Delta} = \hat{\mathbf{L}}_{\Delta} \cdot \mathbf{N}_{\Delta} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Delta k} = \hat{\mathbf{B}}_{\Delta} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Delta k} \quad (7.12)$$

mit

$$\hat{\mathbf{B}}_{\Delta} = \begin{bmatrix} ik_x N_1 & 0 & 0 & ik_x N_2 & 0 & 0 & ik_x N_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_7 & 0 & 0 & a_8 & 0 & 0 & a_9 \\ a_4 & ik_x N_1 & 0 & a_5 & ik_x N_2 & 0 & a_6 & ik_x N_3 & 0 \\ 0 & a_7 & a_4 & 0 & a_8 & a_5 & 0 & a_9 & a_6 \\ a_7 & 0 & ik_x N_1 & a_8 & 0 & ik_x N_2 & a_9 & 0 & ik_x N_3 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Die zugehörigen Spannungen berechnen sich aus den Knotenverschiebungen zu:

$$\hat{\sigma}_{\Delta} = \mathbf{E}_{\Delta} \cdot \hat{\epsilon}_{\Delta} = \mathbf{E}_{\Delta} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{\Delta} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Delta k} \quad (7.14)$$

mit

$$\hat{\sigma}_{\Delta} = \left(\hat{\sigma}_{xx} \quad \hat{\sigma}_{yy} \quad \hat{\sigma}_{zz} \quad \hat{\sigma}_{xy} \quad \hat{\sigma}_{zy} \quad \hat{\sigma}_{zx} \right)^T \quad (7.15)$$

und der Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{E}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

7.3 Herleitung der dynamischen Elementsteifigkeitsmatrix

Eine allgemeine Herleitung der dynamischen Steifigkeitsmatrix ist mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten möglich. Demnach muss die gesamte virtuelle Arbeit aller im System vorhandenen Kräfte gleich Null sein.

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_T + \delta W_a = 0 \quad (7.17)$$

mit der virtuellen inneren Arbeit

$$\delta W_i = - \int_{(V)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (7.18a)$$

der virtuellen Arbeit infolge von Trägheit

$$\delta W_T = - \int_{(V)} \delta \mathbf{u}^T \, \rho \, \ddot{\mathbf{u}} \, dV \quad (7.18b)$$

und der äußeren virtuellen Arbeit

$$\delta W_a = \int_{(S)} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{P} \, dS \quad (7.18c)$$

Einsetzen der Gleichungen (7.12) und (7.14) in die Gleichungen (7.18) und eine Aufspaltung der Integrale liefert:

$$\delta W_i = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}^T \cdot \int_{(z)} \int_{(y)} \left(\hat{\mathbf{B}}_{\Delta}^T \cdot \mathbf{E}_{\Delta} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{\Delta} \right) dz dy \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}} \right] dx \quad (7.19a)$$

$$\delta W_T = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}^T \int_{(z)} \int_{(y)} \mathbf{N}_{\Delta}^T \, \rho \, \omega^2 \, \mathbf{N}_{\Delta} \, \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}} \, dz dy \right] dx \quad (7.19b)$$

$$\delta W_a = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}^T \int_{(s)} \mathbf{N}_{\Delta}^T \, \hat{\mathbf{P}}_{\Delta} \, ds \right] dx \quad (7.19c)$$

Die Koordinate s läuft hierbei parallel zum jeweiligen Rand in der (y, z) -Ebene.

Da die zu integrierenden Größen im Wellenzahlbereich k_x angeschrieben sind, ist es vorteilhaft das Integral bezüglich der Längskoordinate x in eine gleichwertige Formulierung im Wellenzahlbereich k_x umzuschreiben. Dies kann, wie in [Priestley 1981] und [Grundmann u. Waubke 1992] gezeigt wird, unter Verwendung des Parsevalschen Satzes erfolgen. Der Parsevalsche Satz besagt, dass für die zwei beliebigen Funktionen $\delta u(x)$ und $t(x)$ der folgende

Zusammenhang gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta u(x) t(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta u(x) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{t}(k_x) e^{ik_x x} dk_x \right] dx = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta u(x) e^{-i(-k_x)x} dx \right] \hat{t}(k_x) dk_x = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \hat{u}(-k_x) \hat{t}(k_x) dk_x
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Durch Anwenden des Parsevalschen Satzes auf die Gleichungen (7.19) erhält man:

$$\delta W_i = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}^T(-k_x) \int \int_{(z)(y)} \left(\hat{\mathbf{B}}_{\Delta}^T(-k_x) \cdot \mathbf{E}_{\Delta} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{\Delta}(k_x) \right) dz dy \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}(k_x) \right] dk_x \tag{7.21a}$$

$$\delta W_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}^T(-k_x) \cdot \omega^2 \rho \int \int_{(z)(y)} \left(\mathbf{N}_{\Delta}^T \cdot \mathbf{N}_{\Delta} \right) dz dy \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}(k_x) \right] dk_x \tag{7.21b}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_a &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}^T(-k_x) \cdot \int_{(s)} \left(\mathbf{N}_{\Delta}^T \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\Delta}(k_x) \right) ds \right] dk_x = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\delta \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}^T(-k_x) \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\Delta \mathbf{k}}(k_x) \right) dk_x
\end{aligned} \tag{7.21c}$$

mit dem Vektor der äquivalenten Knotenlasten $\hat{\mathbf{P}}_{\Delta \mathbf{k}}(k_x)$.

Da die virtuellen Verschiebungen $\delta \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}^T(-k_x)$ beliebig und ungleich Null sind, liefert das Einsetzen der Gleichungen (7.21) in die Arbeitsgleichung (7.17) für jedes k_x :

$$\left[- \int \int_{(z)(y)} \left(\hat{\mathbf{B}}_{\Delta}^T(-k_x) \mathbf{E}_{\Delta} \hat{\mathbf{B}}_{\Delta}(k_x) \right) dz dy + \omega^2 \rho \int \int_{(z)(y)} \left(\mathbf{N}_{\Delta}^T \mathbf{N}_{\Delta} \right) dz dy \right] \hat{\mathbf{u}}_{\Delta \mathbf{k}}(k_x) + \hat{\mathbf{P}}_{\Delta \mathbf{k}}(k_x) = 0 \tag{7.22}$$

Gleichung (7.22) kann auch in der klassischen Finite-Elemente-Formulierung mit der dyna-

mischen Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\Delta\text{dyn}}$ angeschrieben werden:

$$\left[\hat{\mathbf{K}}_{\Delta}(k_x) - \omega^2 \mathbf{M}_{\Delta} \right] \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Delta\mathbf{k}}(k_x) = \hat{\mathbf{P}}_{\Delta\mathbf{k}}(k_x) \quad (7.23a)$$

$$\text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{K}}_{\Delta\text{dyn}}(k_x) \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Delta\mathbf{k}}(k_x) = \hat{\mathbf{P}}_{\Delta\mathbf{k}}(k_x) \quad (7.23b)$$

mit der Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix des Dreieckelementes

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Delta}(k_x) = \int_{(z)} \int_{(y)} \left(\hat{\mathbf{B}}_{\Delta}^T(-k_x, y, z) \cdot \mathbf{E}_{\Delta} \cdot \hat{\mathbf{B}}_{\Delta}(k_x, y, z) \right) dz dy \quad (7.24a)$$

$$\mathbf{M}_{\Delta} = \rho \int_{(z)} \int_{(y)} \left(\mathbf{N}_{\Delta}^T(y, z) \cdot \mathbf{N}_{\Delta}(y, z) \right) dz dy \quad (7.24b)$$

Die Berechnung der Integrale in den Gleichungen (7.24) geschieht nach [Klein 2003] vorteilhafterweise in den Flächenkoordinaten η_1 und η_2 des Dreieckelementes mit $\eta_1 \in [0, 1]$ und $\eta_2 \in [0, 1]$ (siehe Abbildung 7.2).

Die Ansatzfunktionen N_i aus Gleichung (7.10) lauten in den Flächenkoordinaten:

$$N_1 = 1 - \eta_1 - \eta_2 \quad (7.25a)$$

$$N_2 = \eta_1 \quad (7.25b)$$

$$N_3 = \eta_2 \quad (7.25c)$$

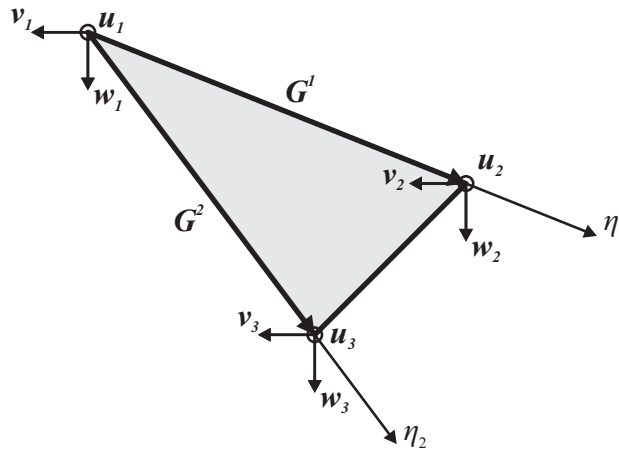


Abbildung 7.2: Ebenes Dreieckselement mit Flächenkoordinaten η_1 und η_2

8 Kopplung der FEM mit der Integraltransformationmethode

8.1 Vorbemerkungen

Für viele Problemstellungen speziell in der dynamischen Tunnel-Boden-Bauwerk-Interaktion ist es vorteilhaft für die verschiedenen Teilstrukturen unterschiedliche Berechnungsmethoden zu verwenden. So wird der Boden mit seiner unendlichen Ausdehnung am besten mit der Integraltransformationmethode (ITM) beschrieben, während für die detaillierten und komplexen Strukturen des Tunnels und der Bauwerke zweckmäßigerweise die Finite-Elemente-Methode (FEM) verwendet wird. Die Kopplung dieser beiden Verfahren erfolgt unter Verwendung der Substrukturtechnik.

In allgemeiner Schreibweise lauten die Gleichgewichtsbedingungen für das mit der FEM beschriebene Gebiet:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{dyn}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\text{FE}} = \hat{\mathbf{P}}_{\text{FE}} \quad (8.1)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{P}}_{\text{FE}}$ enthält alle äquivalenten Knotenlasten $\hat{\mathbf{P}}_{\Delta\mathbf{k}}$ entsprechend Gleichung (7.23). Zur Kopplung werden die Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_{\text{FE}}$ in diejenigen Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{FE}}$, welche sich auf der Kopplungsfläche (Γ) befinden, und in diejenigen Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_{\Omega\text{FE}}$, welche innerhalb des mit Finiten Elementen beschriebenen Gebietes (Ω) liegen, aufgeteilt.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{FE}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{FE}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega\text{FE}} \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

Ebenso wird der Lastvektor $\hat{\mathbf{P}}_{\text{FE}}$ unterteilt in die Lasten $\hat{\mathbf{P}}_{\Gamma\text{FE}}$, die am Kopplungsrand (Γ) angreifen, und die Lasten $\hat{\mathbf{P}}_{\Omega\text{FE}}$, die innerhalb des FEM-Gebietes (Ω) wirken.

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{FE}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma\text{FE}} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Omega\text{FE}} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

Nach entsprechender Aufspaltung der Steifigkeitsmatrix ergibt sich Gleichung (8.1) nun zu:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} & \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{FE}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega\text{FE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma\text{FE}} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Omega\text{FE}} \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

8.2 Transformation der Freiheitsgrade des FE-Systems

Um die FEM mit der ITM zu verbinden, müssen die auf der Kopplungsfläche (Γ) liegenden FE-Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{FE}}$ durch die ITM-Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{ITM}}$ ersetzt werden, für die in Abschnitt 6 das entsprechende Kraft-Verformungsverhalten ermittelt wurde.

Der Vektor $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{FE}}$ enthält die kartesischen Verschiebungen \hat{u}_{x,K_i} , \hat{u}_{y,K_i} und \hat{u}_{z,K_i} aller FE-Knoten (K_i) auf der Kopplungsfläche. Der Vektor $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{ITM}}$ enthält für den Fall einer zylindrischen Kopplungsfläche die polaren Verschiebungen $\hat{u}_{x,n}$, $\hat{u}_{r,n}$ und $\hat{u}_{\varphi,n}$ aller Reihenglieder n entlang des Umfangs.

Eine Auswertung der Fourierreihen $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{ITM}}$ an den FE-Knoten $K_i(\varphi_i)$ liefert die polaren Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{FE},\text{zyl}}$ an den Knotenpunkten.

$$\hat{u}_{x,K_i} = \sum_N \hat{u}_{x,n} \cdot e^{in\varphi_i} \quad (8.5a)$$

$$\hat{u}_{r,K_i} = \sum_N \hat{u}_{r,n} \cdot e^{in\varphi_i} \quad (8.5b)$$

$$\hat{u}_{\varphi,K_i} = \sum_N \hat{u}_{\varphi,n} \cdot e^{in\varphi_i} \quad (8.5c)$$

bzw. in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{x,K_1} \\ \hat{u}_{r,K_1} \\ \hat{u}_{\varphi,K_1} \\ \hat{u}_{x,K_2} \\ \hat{u}_{r,K_2} \\ \hat{u}_{\varphi,K_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{in_1\varphi_1} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{in_1\varphi_1} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_1} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{in_1\varphi_1} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_1} & \dots \\ e^{in_1\varphi_2} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{in_1\varphi_2} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{in_1\varphi_2} & 0 & 0 & e^{in_2\varphi_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{x,n_1} \\ \hat{u}_{r,n_1} \\ \hat{u}_{\varphi,n_1} \\ \hat{u}_{x,n_2} \\ \hat{u}_{r,n_2} \\ \hat{u}_{\varphi,n_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{FE},\text{zyl}} \qquad \mathbf{T}_1 \qquad \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{ITM}}$

Durch eine weitere Transformation von Zylinder- in kartesische Koordinaten unter Zuhilfenahme der Matrix $\beta_{j_0}^i$ aus Gleichung (4.8) erhält man die FE-Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}}$.

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{x,K-1} \\ \hat{u}_{y,K-1} \\ \hat{u}_{z,K-1} \\ \hat{u}_{x,K-2} \\ \hat{u}_{y,K-2} \\ \hat{u}_{z,K-2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{x,K-1} \\ \hat{u}_{r,K-1} \\ \hat{u}_{\varphi,K-1} \\ \hat{u}_{x,K-2} \\ \hat{u}_{r,K-2} \\ \hat{u}_{\varphi,K-2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}} \qquad \mathbf{T}_2 \qquad \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE,zyl}}}$

Die FE-Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}}$ lassen sich somit aus den ITM-Freiheitsgraden $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}}$ berechnen:

$$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} \quad (8.8)$$

mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \quad (8.9)$$

Für eine kugelförmige Kopplungsfläche ergeben sich die Transformationsbeziehungen (8.6) und (8.7) analog zu:

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{R,K-1} \\ \hat{u}_{\vartheta,K-1} \\ \hat{u}_{\varphi,K-1} \\ \hat{u}_{R,K-2} \\ \hat{u}_{\vartheta,K-2} \\ \hat{u}_{\varphi,K-2} \\ \hat{u}_{R,K-3} \\ \hat{u}_{\vartheta,K-3} \\ \hat{u}_{\varphi,K-3} \\ \hat{u}_{R,K-4} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_0^0(\vartheta_1) & 0 & 0 & P_1^{-1}(\vartheta_1) e^{i(-1)\varphi_1} & 0 & \dots \\ 0 & P_0^0(\vartheta_1) & 0 & 0 & P_1^{-1}(\vartheta_1) e^{i(-1)\varphi_1} & \dots \\ 0 & 0 & P_0^0(\vartheta_1) & 0 & 0 & \dots \\ P_0^0(\vartheta_2) & 0 & 0 & P_1^{-1}(\vartheta_2) e^{i(-1)\varphi_2} & 0 & \dots \\ 0 & P_0^0(\vartheta_2) & 0 & 0 & P_1^{-1}(\vartheta_2) e^{i(-1)\varphi_1} & \dots \\ 0 & 0 & P_0^0(\vartheta_2) & 0 & 0 & \dots \\ P_0^0(\vartheta_3) & 0 & 0 & P_1^{-1}(\vartheta_3) e^{i(-1)\varphi_3} & 0 & \dots \\ 0 & P_0^0(\vartheta_3) & 0 & 0 & P_1^{-1}(\vartheta_3) e^{i(-1)\varphi_1} & \dots \\ 0 & 0 & P_0^0(\vartheta_3) & 0 & 0 & \dots \\ P_0^0(\vartheta_4) & 0 & 0 & P_1^{-1}(\vartheta_4) e^{i(-1)\varphi_4} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{R,00} \\ \hat{u}_{\vartheta,00} \\ \hat{u}_{\varphi,00} \\ \hat{u}_{R,-11} \\ \hat{u}_{\vartheta,-11} \\ \hat{u}_{\varphi,-11} \\ \hat{u}_{R,01} \\ \hat{u}_{\vartheta,01} \\ \hat{u}_{\varphi,01} \\ \hat{u}_{R,11} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE,kug}}} \qquad \mathbf{T}_1 \qquad \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}}$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_{x,K_1} \\ \hat{u}_{y,K_1} \\ \hat{u}_{z,K_1} \\ \hat{u}_{x,K_2} \\ \hat{u}_{y,K_2} \\ \hat{u}_{z,K_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 & \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 & \dots \\ \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 & \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 & \dots \\ \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2 & \cos \vartheta_2 \cos \varphi_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2 & \cos \vartheta_2 \sin \varphi_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cos \vartheta_2 & -\sin \vartheta_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{R,K_1} \\ \hat{u}_{\vartheta,K_1} \\ \hat{u}_{\varphi,K_1} \\ \hat{u}_{R,K_2} \\ \hat{u}_{\vartheta,K_2} \\ \hat{u}_{\varphi,K_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}} \quad \mathbf{T}_2 \quad \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE,kug}}} \quad (8.11)$$

Eine Multiplikation mit der Transformationsmatrix $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1$ stellt in diesem Fall eine inverse sphärische Fouriertransformation und eine anschließende Koordinatentransformation von Polar- in kartesische Koordinaten dar.

Die gesamten FE-Freiheitsgrade können aus den für die Kopplung verwendeten Freiheitsgraden ermittelt werden:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

Stellt man basierend auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit analog zu Abschnitt 7.3 die Arbeitsgleichung auf

$$\delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{FE}}^T \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\text{dyn}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\text{FE}} = \delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{FE}}^T \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\text{FE}} \quad (8.13)$$

und setzt für die Freiheitsgrade $\delta \hat{\mathbf{u}}_{\text{FE}}$ und $\hat{\mathbf{u}}_{\text{FE}}$ Gleichung (8.12) ein, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} \\ \delta \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} & \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} \\ \delta \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_{\text{FE}}} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Da die virtuellen Verschiebungen beliebig ungleich Null sind, ergibt sich schließlich das Gleichungssystem in der neuen Basis.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{T} & \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma} \mathbf{T} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_{\text{FE}}} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Die Multiplikation des Lastvektors $\hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_{\text{FE}}}$ mit der transponierten Transformationsmatrix \mathbf{T} entspricht einer Koordinatentransformation gefolgt von einer Fouriertransformation der Last am Kopplungsrand.

8.3 Kopplung

Die in Abschnitt 6 für verschiedene System hergeleitete Gleichung (6.16) beschreibt unter Verwendung der ITM das Kraft-Verformungsverhalten an den jeweiligen Systemrändern.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}} = \hat{\mathbf{N}}_{\text{ITM}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} \quad (8.16)$$

Die Vektoren der Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}}$ und der Lasten $\hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}}$ können entsprechen der Systemränder aufgeteilt werden. Für den Fall eines zylindrischen Tunnels im Halbraum (siehe Abschnitt 6.3) enthalten $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\alpha}$ und $\hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\alpha}$ die Verschiebungen bzw. die Lasten an der Halbraumoberfläche (Γ_α) sowie $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta}$ und $\hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\beta}$ die Verschiebungen bzw. die Lasten an der zylindrischen Hohlraumoberfläche (Γ_β).

$$\hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\alpha} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\alpha} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\beta} \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

Gleichung (8.16) ergibt sich nun zu:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\alpha} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_{\alpha\alpha} & \hat{\mathbf{N}}_{\alpha\beta} \\ \hat{\mathbf{N}}_{\beta\alpha} & \hat{\mathbf{N}}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\alpha} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\beta} \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

Für den Fall, dass keine Lasten an der Halbraumoberfläche wirken ($\hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\alpha} = 0$) lautet das Kraft-Verformungsverhalten an der Hohlraumoberfläche

$$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} = \hat{\mathbf{N}}_{\beta\beta} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\beta} \quad (8.19)$$

bzw.

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Gamma_\beta} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} = \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\beta} \quad (8.20)$$

mit der dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{K}}_{\Gamma_\beta} = \hat{\mathbf{N}}_{\beta\beta}^{-1} \quad (8.21)$$

Bei der Kopplung des ITM-Systems mit dem FEM-System müssen die Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\beta}$ aus Gleichung (8.20) den Freiheitsgraden $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{ITM}}$ aus Gleichung (8.15) entsprechen.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\beta} = \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\text{ITM}} \quad (8.22)$$

Im Folgenden wird für diese Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\beta}$ verwendet.

Wenn keine äußeren Kräfte an der Kopplungsfläche wirken, so müssen bei der Kopplung die Lasten aus Gleichung (8.15) und Gleichung (8.20) die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

$$\mathbf{T}^T \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma\text{FE}} + \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma\beta} = 0 \quad (8.23)$$

Die an der zylindrischen Kopplungsfläche auftretenden Kopplungskräfte $\hat{\mathbf{P}}_{\text{kop}}$ ergeben sich somit zu:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{kop}} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\beta} + \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Omega\text{FE}} \quad (8.24a)$$

$$\text{bzw. } \hat{\mathbf{P}}_{\text{kop}} = -\hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\beta} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\beta} \quad (8.24b)$$

Da die beiden Gleichung (8.15) und (8.20) sich auf die gleiche Basis ($\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\beta}$) beziehen, können diese mit Hilfe der Substrukturtechnik gekoppelt werden. Wenn keine äußeren Lasten an der Kopplungsfläche auftreten, sind nur an den Knotenfreiheitsgraden im Inneren des FEM-Systems Kräfte auf der Lastseite zu berücksichtigen und man erhält das Gleichungssystem für das hybride FEM-ITM-Gesamtsystem.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{T} + \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\beta} & \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma} \mathbf{T} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\beta} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega\text{FE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Omega\text{FE}} \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

Wenn an der Halbraumoberfläche die Kräfte $\hat{\mathbf{P}}_{\Gamma\alpha}$ wirken oder wenn die Verformungen $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma\alpha}$ an der Halbraumoberfläche berechnet werden sollen, dann müssen diese Verformungen als zusätzliche Freiheitsgrade in das Gleichungssystem (8.25) integriert werden. Dazu ermittelt man aus Gleichung (8.16) die dynamische Steifigkeitsmatrix für alle Oberflächen des System Halbraum mit zylindrischem Hohlraum.

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{ITM}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\text{ITM}} = \hat{\mathbf{P}}_{\text{ITM}} \quad (8.26)$$

mit

$$\hat{\mathbf{K}}_{\text{ITM}} = \hat{\mathbf{N}}_{\text{ITM}}^{-1} \quad (8.27)$$

Die dynamische Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\text{ITM}}$ kann wiederum entsprechend den verschiedenen Freiheitsgraden aufgespalten werden.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} & \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\beta} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\beta\alpha} & \hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\alpha} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\alpha} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\beta} \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

Da die transformierten Freiheitsgrade des FE-Systems $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{ITM}}}$ identisch mit den Freiheitsgraden $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta}$ sind, ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\alpha} & \hat{\mathbf{K}}_{\alpha\beta} & 0 \\ \hat{\mathbf{K}}_{\beta\alpha} & \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma} \mathbf{T} + \hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta} & \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega} \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma} \mathbf{T} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\alpha} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\alpha} \\ 0 \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Omega_{\text{FE}}} \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

Mit diesem Gleichungssystem (8.29) können nun auch die Verschiebungen an der Halbrauoberfläche $\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\alpha}$ bestimmt werden.

Abschließend soll für das in Abschnitt 1.1 beschriebene System eines Halbraums mit Tunnel und Gebäude (Abbildung 8.1) das Gleichungssystem der FEM-ITM-Kopplung aufgestellt werden. Dazu werden zuerst sowohl für das Emissionssystem als auch für das Immissionssystem die FE-Steifigkeitsmatrizen $\hat{\mathbf{K}}^{\text{Em}}$ bzw. $\hat{\mathbf{K}}^{\text{Im}}$ bestimmt. Anschließend werden die FE-Freiheitsgrade an der zylindrischen Kopplungsfläche ($\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}}^{\text{Em}}$) in Fourierreihenglieder und die Freiheitsgrade an der sphärischen Kopplungsfläche ($\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}}^{\text{Im}}$) in eine Reihe von Kugelflächenfunktionen transformiert.

$$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}}^{\text{Em}} = \mathbf{T}_\beta \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} \quad (8.30a)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\text{FE}}}^{\text{Im}} = \mathbf{T}_\gamma \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\gamma} \quad (8.30b)$$

In den transformierten Basen lauten die beiden Gleichungssysteme der FE-Systeme:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega}^{\text{Em}} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma}^{\text{Em}} \mathbf{T}_\beta \\ \mathbf{T}_\beta^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega}^{\text{Em}} & \mathbf{T}_\beta^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma}^{\text{Em}} \mathbf{T}_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}}^{\text{Em}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Omega_{\text{FE}}}^{\text{Em}} \\ \mathbf{T}_\beta^T \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_{\text{FE}}}^{\text{Em}} \end{pmatrix} \quad (8.31a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_\gamma^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma}^{\text{Im}} \mathbf{T}_\gamma & \mathbf{T}_\gamma^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega}^{\text{Im}} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma}^{\text{Im}} \mathbf{T}_\gamma & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega}^{\text{Im}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\gamma} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}}^{\text{Im}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_\gamma^T \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_{\text{FE}}}^{\text{Im}} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Omega_{\text{FE}}}^{\text{Im}} \end{pmatrix} \quad (8.31b)$$

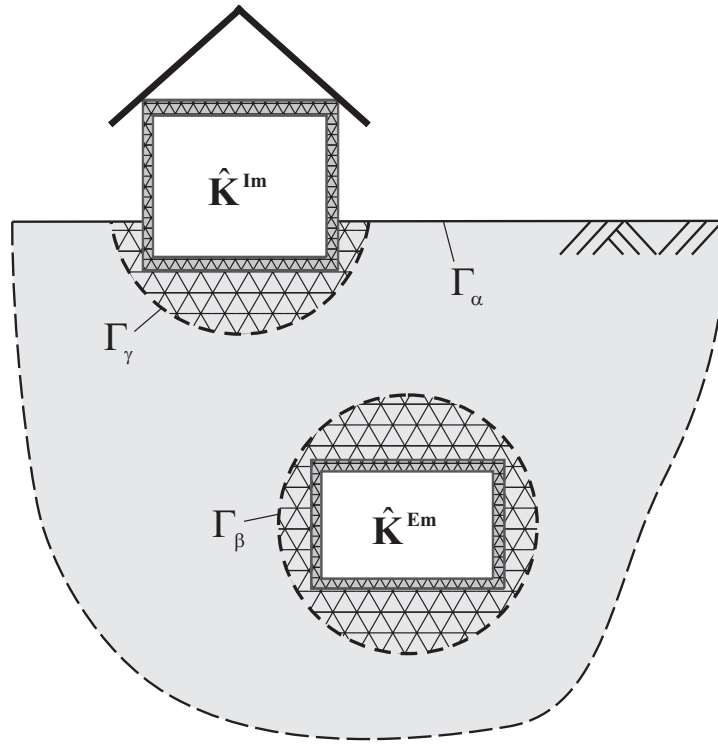


Abbildung 8.1: Gekoppeltes FEM-ITM-System

Für das aus einem Halbraum mit zylindrischem Tunnel und kugelförmiger Grube an der Halbraumoberfläche bestehende Transmissionssystem kann, wie in Abschnitt 6.5 beschrieben, die Nachgiebigkeit an den Kopplungsrändern ermittelt werden.

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\alpha} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\gamma} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_{\alpha\alpha} & \hat{\mathbf{N}}_{\alpha\beta} & \hat{\mathbf{N}}_{\alpha\gamma} \\ \hat{\mathbf{N}}_{\beta\alpha} & \hat{\mathbf{N}}_{\beta\beta} & \hat{\mathbf{N}}_{\beta\gamma} \\ \hat{\mathbf{N}}_{\gamma\alpha} & \hat{\mathbf{N}}_{\gamma\beta} & \hat{\mathbf{N}}_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\alpha} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\beta} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\gamma} \end{pmatrix} \quad (8.32)$$

Wenn keine Lasten an der Halbraumoberfläche wirken ($\hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\alpha} = 0$) ergibt sich das Kraft-Verformungsverhalten an der Hohlraumoberfläche zu

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\gamma} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_{\beta\beta} & \hat{\mathbf{N}}_{\beta\gamma} \\ \hat{\mathbf{N}}_{\gamma\beta} & \hat{\mathbf{N}}_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\beta} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\gamma} \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta} & \hat{\mathbf{K}}_{\beta\gamma} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\gamma\beta} & \hat{\mathbf{K}}_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\beta} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\beta} \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Gamma_\gamma} \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

mit der dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta} & \hat{\mathbf{K}}_{\beta\gamma} \\ \hat{\mathbf{K}}_{\gamma\beta} & \hat{\mathbf{K}}_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_{\beta\beta} & \hat{\mathbf{N}}_{\beta\gamma} \\ \hat{\mathbf{N}}_{\gamma\beta} & \hat{\mathbf{N}}_{\gamma\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \quad (8.35)$$

Mit Hilfe der Substrukturtechnik kann nun aus den Gleichungen (8.31) und Gleichung (8.35) eine geschlossene Lösung für das gesamte Emissions-Transmissions-Immissionssystem gefunden werden. Wenn keine äußeren Lasten an den Kopplungsflächen angreifen ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega}^{\text{Em}} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma}^{\text{Em}} \mathbf{T}_{\beta} & 0 & 0 \\ \mathbf{T}_{\beta}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega}^{\text{Em}} & \mathbf{T}_{\beta}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma}^{\text{Em}} \mathbf{T}_{\beta} + \hat{\mathbf{K}}_{\beta\beta} & \hat{\mathbf{K}}_{\beta\gamma} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\gamma\beta} & \hat{\mathbf{K}}_{\gamma\gamma} + \mathbf{T}_{\gamma}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Gamma}^{\text{Im}} \mathbf{T}_{\gamma} & \mathbf{T}_{\gamma}^T \hat{\mathbf{K}}_{\Gamma\Omega}^{\text{Im}} \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Gamma}^{\text{Im}} \mathbf{T}_{\gamma} & \hat{\mathbf{K}}_{\Omega\Omega}^{\text{Im}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}}^{\text{Em}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\beta}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma_{\gamma}} \\ \hat{\mathbf{u}}_{\Omega_{\text{FE}}}^{\text{Im}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{\Omega_{\text{FE}}}^{\text{Em}} \\ 0 \\ 0 \\ \hat{\mathbf{P}}_{\Omega_{\text{FE}}}^{\text{Im}} \end{pmatrix} \quad (8.36)$$

In diesem Fall liegen wegen des örtlich begrenzten System des Gebäudes keine konstanten Verhältnisse in Längsrichtung vor. Daher kann das gesamte Problem nicht in eine Serie von zweidimensionalen Aufgabenstellungen zerlegt werden. Es muss im dreidimensionalen Raum gelöst werden, was einen größeren Rechenaufwand erfordert.

9 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Berechnung der dynamischen Tunnel-Boden-Bauwerk-Interaktion entwickelt, welches die Finite-Elemente-Methode (FEM) mit der Integraltransformationmethode (ITM) koppelt. Dies ermöglicht die Prognose von Erschütterungen in Gebäuden infolge von sich in Tunnel oder an der Oberfläche bewegendem Zügen. Das Gesamtsystem wird dazu in die drei Teilsysteme Emissionssystem (Tunnel), Transmissionssystem (Boden) und Immissionssystem (Bauwerk) unterteilt. Für die detaillierten und komplexen Strukturen des Tunnels und der Gebäude wird die FEM verwendet. Die unendliche Ausdehnung des Bodens und die dreidimensionale Wellenausbreitung wird mittels der ITM berücksichtigt. Da in der ITM nur geometrische Grundflächen (Ebene, Zylinder, Kugel) abgebildet werden können, wird um den unendlich langen Tunnel eine fiktive Zylinderfläche und um das lokal begrenzte Gebäude eine fiktive Kugelfläche eingeführt. Alles was innerhalb dieser Flächen liegt, das bedeutet die jeweilige Struktur und der diese Struktur umgebende Boden, kann mit Finiten Elementen modelliert werden.

Für das Transmissionssystem werden zunächst die ITM-Grundlösungen für die Fundamentalsysteme Halbraum, Vollraum mit zylindrischem Hohlraum und Vollraum mit sphärischem Hohlraum hergeleitet. Für einen Halbraum mit zylindrischen und kugelförmigen Hohlräumen, Gräben und Gruben liegt dagegen keine Fundamentallösung vor. Durch eine Überlagerung der oben genannten Fundamentalsysteme kann aber eine semi-analytische geschlossene Lösung gefunden werden. Dazu werden an den Oberflächen des Halbraums und der Hohlräume Spannungszustände aufgebracht. Die Charakteristiken der einzelnen Fundamentallösungen (Fern- und Nahfeld) erlauben es, vorab abzuschätzen, welche Spannungszustände relevant sind und miteinander überlagert werden müssen. Dies führt zu einer deutlichen Reduktion des Berechnungsaufwandes. Mit Hilfe der Randbedingungen an den Oberflächen können die unbekannt Amplituden der Spannungszustände im Wellenzahl-Frequenzraum ermittelt werden. Als Ergebnis erhält man die frequenz- und wellenzahlabhängigen dynamischen Nachgiebigkeiten an den fiktiven Oberflächen.

Mittels der Substrukturtechnik können diese Nachgiebigkeiten mit den FE-Modellen des Emissions- und Immissionssystems gekoppelt werden. Dazu werden die FE-Freiheitsgrade

an den Kopplungsrändern in Glieder der Fourierreihe bzw. in Reihenglieder der Kugel­flächenfunktionen entsprechend des ITM-Systems transformiert. Die Grundlagen der FE-Berechnung im fouriertransformierten Raum und die Umsetzung der Substrukturtechnik werden in dieser Arbeit erläutert, Ermittlungen am gesamten Emissions-Transmissions-Immissions­system werden jedoch nicht durchgeführt. Als unmittelbare Weiterführung dieser Arbeit werden daher die Umsetzung und Implementierung des FE-Modells weiterentwickelt. Damit können dann Erschütterungsprognosen am vollständigen Emissions-Transmissions-Immissions-System durchgeführt werden und somit Maßnahmen zum Erschütterungsschutz (Masse-Feder-Systeme, parallel zum Fahrweg verlaufender Schlitz an der Oberfläche, wave impeding blocks) beurteilt werden. Des Weiteren ist eine Anwendung des Verfahrens für die Berechnung von zwei parallel laufenden Tunnelröhren problemlos möglich.

A Anhang

A.1 Mathematische Funktionen

A.1.1 Bessel-Funktionen

Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial y}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) y = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

lautet

$$y = c_1 J_n(z) + c_2 Y_n(z) \quad (\text{A.1.2})$$

mit den beliebigen Konstanten c_1 und c_2 sowie den Bessel-Funktionen erster Art $J_n(z)$ und zweiter Art $Y_n(z)$ (Neumannfunktion) mit dem komplexwertigen Argument $z = kr$.

Bessel-Funktionen erster Art und zweiter Art

Die Bessel-Funktionen erster Art und zweiter Art (Abbildung A.1) können wie folgt dargestellt werden:

$$J_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+n}}{\Gamma(n+s+1)s!} \quad (\text{A.1.3a})$$

$$Y_n(z) = \frac{J_n(z) \cos n\pi - J_{-n}(z)}{\sin n\pi} \quad (\text{A.1.3b})$$

mit der Gamma-Funktion $\Gamma(x)$

Hankel-Funktionen

Alternativ kann die Lösung der Differentialgleichung (A.1.1) mit Bessel-Funktionen dritter Art (Hankel-Funktionen) aufgestellt werden:

$$y = c_1 H_n^{(1)}(z) + c_2 H_n^{(2)}(z) \quad (\text{A.1.4})$$

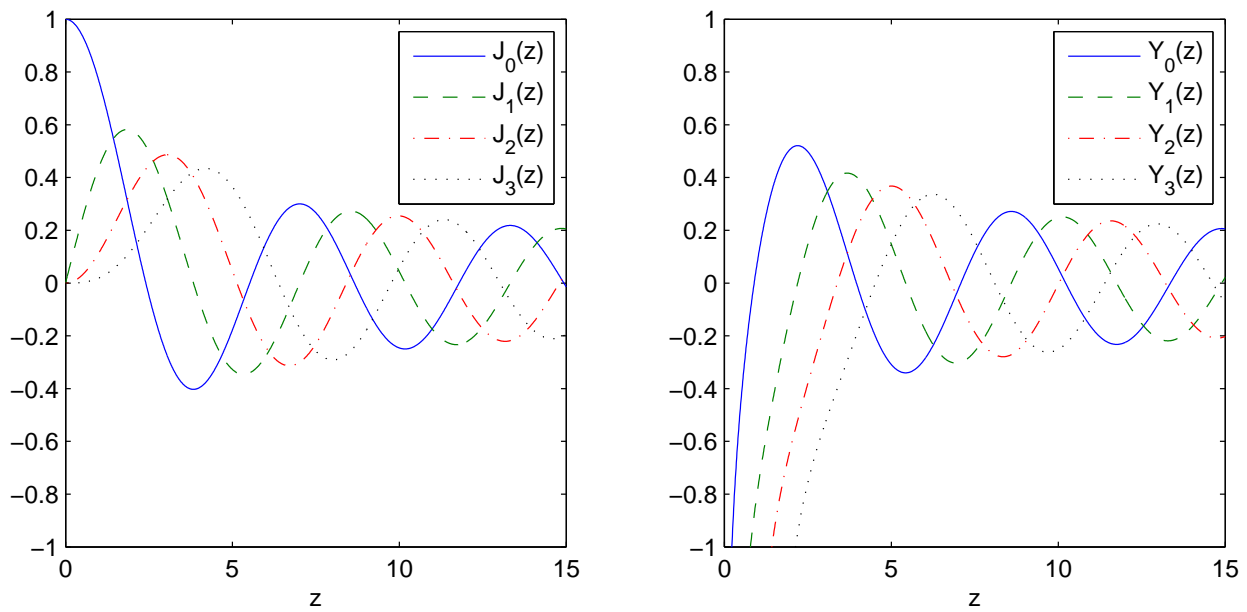


Abbildung A.1: Bessel-Funktionen $J_n(z)$ (links) $Y_n(z)$ (rechts)

Die Hankel-Funktionen erster Art $H_n^{(1)}(z)$ und zweiter Art $H_n^{(2)}(z)$ ergeben sich zu:

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + i Y_n(z) \quad (\text{A.1.5a})$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - i Y_n(z) \quad (\text{A.1.5b})$$

Rekursionsbeziehungen

Im Folgenden steht $C_n(z)$ für eine beliebige der Funktionen $J_n(z)$, $Y_n(z)$, $H_n^{(1)}(z)$, $H_n^{(2)}(z)$ oder eine Linearkombination dieser Funktionen mit konstanten (vom Index n unabhängigen) Koeffizienten. Zwischen den Bessel-Funktionen beliebiger Ordnung und ihren Ableitungen bestehen die Rekursionsbeziehungen:

$$\frac{2n}{z} C_n(z) = C_{n-1}(z) + C_{n+1}(z) \quad (\text{A.1.6a})$$

$$2 \frac{dC_n(z)}{dz} = C_{n-1}(z) - C_{n+1}(z) \quad (\text{A.1.6b})$$

$$\frac{dC_n(z)}{dz} = C_{n-1}(z) - \frac{n}{z} C_n(z) \quad (\text{A.1.6c})$$

$$\frac{dC_n(z)}{dz} = -C_{n+1}(z) + \frac{n}{z} C_n(z) \quad (\text{A.1.6d})$$

A.1.2 Sphärische Bessel-Funktionen

Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial y}{\partial R} + \left(k^2 - \frac{m(m+1)}{R^2} \right) y = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

lautet

$$y = c_1 j_m(z) + c_2 y_m(z) \quad (\text{A.1.8})$$

mit den beliebigen Konstanten c_1 und c_2 sowie den sphärischen Bessel-Funktionen erster Art $j_m(z)$ und zweiter Art $y_m(z)$ mit dem komplexwertigen Argument $z = kR$.

Sphärische Bessel-Funktionen erster Art und zweiter Art

Die sphärischen Bessel-Funktionen (Abbildung A.2) stehen mit den Bessel-Funktionen halbzahligter Ordnung ($n = m + \frac{1}{2}$) in dem Zusammenhang:

$$j_m(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{m+\frac{1}{2}}(z) \quad (\text{A.1.9a})$$

$$y_m(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{m+\frac{1}{2}}(z) \quad (\text{A.1.9b})$$

Sphärische Hankel-Funktionen

Alternativ kann die Lösung der Differentialgleichung (A.1.7) mit sphärischen Bessel-Funktionen dritter Art (sphärischen Hankel-Funktionen) dargestellt werden:

$$y = c_1 h_m^{(1)}(z) + c_2 h_m^{(2)}(z) \quad (\text{A.1.10})$$

Die sphärischen Hankel-Funktionen erster Art $h_m^{(1)}(z)$ und zweiter Art $h_m^{(2)}(z)$ ergeben sich zu:

$$h_m^{(1)}(z) = j_m(z) + i y_m(z) \quad (\text{A.1.11a})$$

$$h_m^{(2)}(z) = j_m(z) - i y_m(z) \quad (\text{A.1.11b})$$

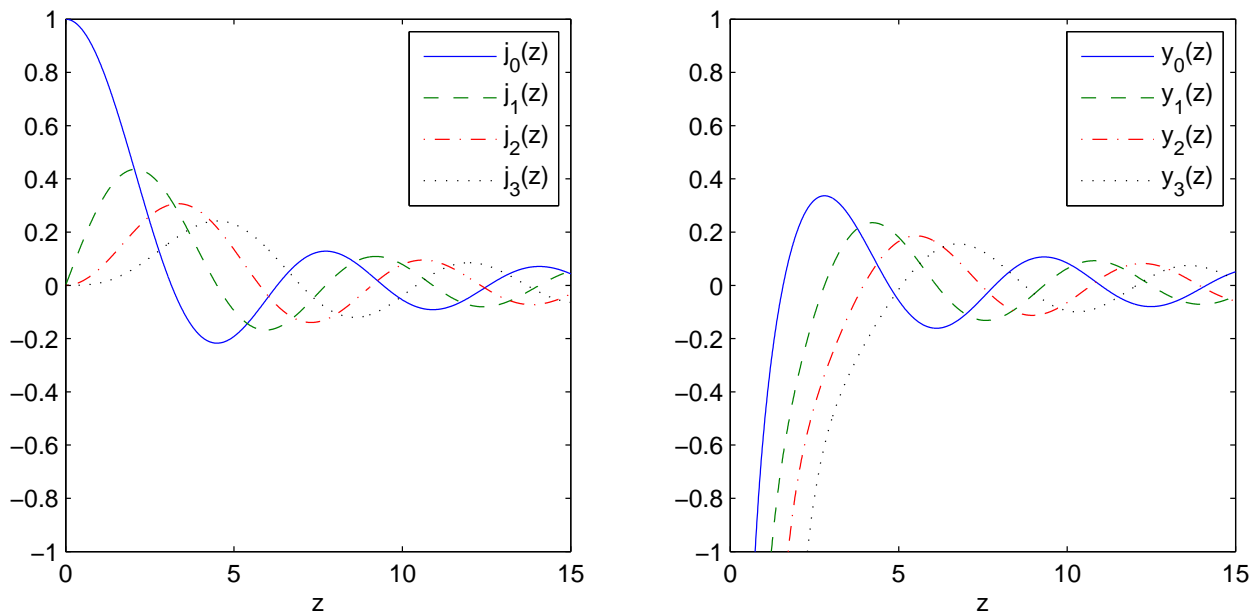


Abbildung A.2: Sphärische Bessel-Funktionen $j_n(z)$ (links) $y_n(z)$ (rechts)

Rekursionsbeziehungen

Im Folgenden steht $s_m(z)$ für eine beliebige der sphärische Bessel-Funktion $j_m(z)$, $y_m(z)$, $h_m^{(1)}(z)$, $h_m^{(2)}(z)$ oder eine Linearkombination dieser Funktionen mit konstanten (vom Index m unabhängigen) Koeffizienten. Zwischen den sphärischen Bessel-Funktionen beliebiger Ordnung und ihren Ableitungen bestehen die Rekursionsbeziehungen:

$$\frac{2m+1}{z} s_m(z) = s_{m-1}(z) + s_{m+1}(z) \quad (\text{A.1.12a})$$

$$(2m+1) \frac{ds_m(z)}{dz} = m s_{m-1}(z) - (m+1) s_{m+1}(z) \quad (\text{A.1.12b})$$

A.1.3 Legendre-Funktionen

Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (Legendre-Gleichung)

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x \frac{dy}{dx} + m(m+1) y = 0 \quad (\text{A.1.13})$$

mit $m = 0, 1, 2, \dots$ und $|x| \leq 1$

lautet

$$y = c_1 P_m(x) + c_2 Q_m(x) \quad (\text{A.1.14})$$

mit den beliebigen Konstanten c_1 und c_2 sowie den Legendre-Funktionen erster Art $P_m(x)$ und zweiter Art $Q_m(x)$ der Ordnung m . Da die Legendre-Funktionen $Q_m(x)$ an den Stellen $x = \pm 1$ singular werden, können diese Funktionen für die Lösung von Problemen am kugelförmigen Hohlraum ausgeschlossen werden.

In den meisten Fällen ist $x = \cos \vartheta$. Die trigonometrische Form der Differentialgleichung (A.1.13) ergibt sich zu:

$$\frac{\partial^2 P_m}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{dP_m}{d\vartheta} + m(m+1) P_m = 0 \quad (\text{A.1.15})$$

Legendre-Funktionen

Die Legendre-Funktionen (Abbildung A.3) können mit Hilfe der Rodrigues-Formel dargestellt werden:

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m (x^2 - 1)^m}{dx^m} \quad (\text{A.1.16})$$

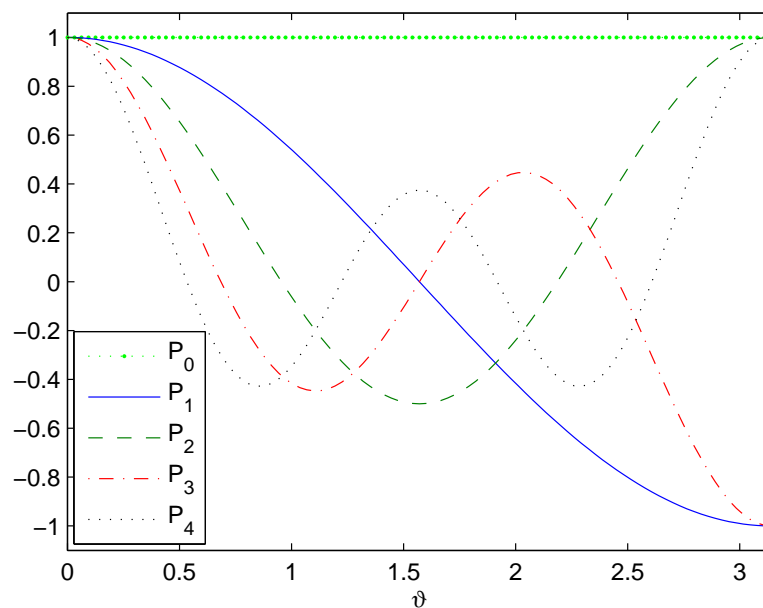


Abbildung A.3: Legendre-Funktionen $P_m(\cos \vartheta)$

Rekursionsbeziehungen

Zwischen den Legendre-Funktionen beliebiger Ordnung und ihren Ableitungen bestehen folgende Rekursionsbeziehungen:

$$(m+1) P_{m+1} = (2m+1)x P_m - m P_{m-1} \quad (\text{A.1.17a})$$

$$(1-x^2) \frac{dP_m}{dx} = m (P_{m-1} - x P_m) = \frac{m(m+1)}{2m+1} (P_{m-1} - P_{m+1}) \quad (\text{A.1.17b})$$

$$\sin \vartheta \frac{dP_m}{d\vartheta} = m (\cos \vartheta P_m - P_{m-1}) = \frac{m(m+1)}{2m+1} (P_{m+1} - P_{m-1}) \quad (\text{A.1.17c})$$

Orthogonalitätsbedingung

Es gilt die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2m+1} \delta_{mn} \quad (\text{A.1.18})$$

bzw. in trigonometrischer Form mit $x = \cos \vartheta$

$$\int_0^\pi P_m(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{2m+1} \delta_{mn} \quad (\text{A.1.19})$$

Legendre-Reihenentwicklung

Jede beliebige Funktion $f(x)$ bzw. $g(\vartheta)$, die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ bzw. $0 \leq \vartheta \leq \pi$ definiert ist und die die Dirichlet-Bedingungen erfüllt, kann in eine Legendre-Reihe entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x) \quad \text{mit} \quad c_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} f(x) P_m(x) dx \quad (\text{A.1.20a})$$

$$g(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m P_m(\cos \vartheta) \quad \text{mit} \quad d_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \int_0^\pi g(\vartheta) P_m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (\text{A.1.20b})$$

Wenn die Reihe bei dem Reihenglied m abgebrochen wird, so bildet das resultierende Polynom m -ter Ordnung die beste Näherung im Sinne der geringsten quadratischen Abweichung.

A.1.4 Assoziierte Legendre-Funktionen

Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (allgemeine Legendre-Gleichung)

$$(1-x^2) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left(m(m+1) - \frac{l^2}{1-x^2} \right) y = 0 \quad (\text{A.1.21})$$

mit $m = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $l \leq m$ und $|x| \leq 1$

lautet

$$y = c_1 P_m^l(x) + c_2 Q_m^l(x) \quad (\text{A.1.22})$$

mit den beliebigen Konstanten c_1 und c_2 sowie den assoziierten Legendre-Funktionen erster Art $P_m^l(x)$ und zweiter Art $Q_m^l(x)$. Da die assoziierten Legendre-Funktionen $Q_m^l(x)$ an den Stellen $x = \pm 1$ singular werden, können diese Funktionen für die Lösung von Problemen am kugelförmigen Hohlraum ausgeschlossen werden.

Assoziierte Legendre-Funktionen

Für $l = 0$ geht die allgemeine Legendre-Gleichung (A.1.21) in die Legendre-Gleichung (A.1.13) über, so dass gilt:

$$P_m^0(x) = P_m(x) \quad (\text{A.1.23})$$

Alle weiteren assoziierten Legendre-Funktionen (Abbildung A.4) lassen sich als Ableitung von gewöhnlichen Legendre-Funktionen definieren:

$$P_m^l(x) = (-1)^l (1-x^2)^{\frac{l}{2}} \frac{d^l P_m(x)}{dx^l} \quad (\text{A.1.24})$$

Da P_m ein Polynom m ter Ordnung ist, hat es maximal m Ableitungen. Daraus folgt wiederum, dass $l \leq m$ sein muss.

In den meisten Fällen ist $x = \cos \vartheta$. Die trigonometrische Form der Differentialgleichung (A.1.21) lautet dann:

$$\frac{\partial^2 P_m^l}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{dP_m^l}{d\vartheta} + \left(m(m+1) - \frac{l^2}{\sin^2 \vartheta} \right) P_m^l = 0 \quad (\text{A.1.25})$$

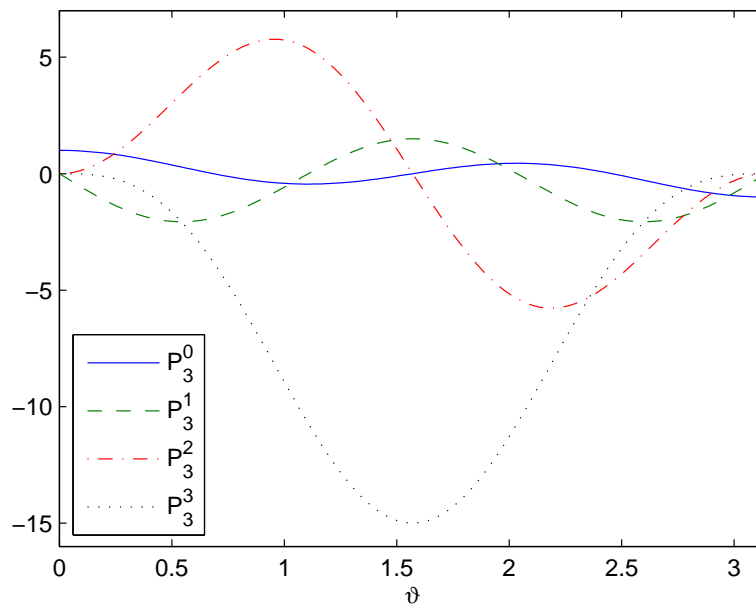


Abbildung A.4: Assoziierte Legendre-Funktionen $P_3^l(\cos \vartheta)$

Rekursionsbeziehungen

Zwischen den assoziierten Legendre-Funktionen und ihren Ableitungen bestehen die Rekursionsbeziehungen:

$$(m - l + 1) P_{m+1}^l = (2m + 1)x P_m^l - (m + l) P_{m-1}^l \quad (\text{A.1.26a})$$

$$(1 - x^2) \frac{dP_m^l}{dx} = (m + l) P_{m-1}^l - m x P_m^l \quad (\text{A.1.26b})$$

$$\frac{dP_m^l}{d\vartheta} = m \cot \vartheta P_m^l - \frac{m + l}{\sin \vartheta} P_{m-1}^l \quad (\text{A.1.26c})$$

$$\frac{dP_m^l}{d\vartheta} = \frac{m - l + 1}{\sin \vartheta} P_{m+1}^l - (m + 1) \cot \vartheta P_m^l \quad (\text{A.1.26d})$$

Assoziierte Legendre-Funktionen mit negativer Ordnung

Assoziierte Legendre-Funktionen mit negativer Ordnung $-l$ können aus denen mit positiver Ordnung l berechnet werden.

$$P_m^{-l} = (-1)^l \frac{(m - l)!}{(m + l)!} P_m^l \quad (\text{A.1.27})$$

Orthogonalitätsbedingung

Es gelten die Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_{-1}^{+1} P_m^l(x) P_n^l(x) dx = \frac{(l+m)!}{(m+\frac{1}{2})(m-l)!} \delta_{mn} \quad (\text{A.1.28a})$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(1-x^2)} P_m^l(x) P_m^n(x) dx = \begin{cases} \frac{(l+m)!}{l(m-l)!} & 0 < l = n \leq m \\ 0 & l \neq n \end{cases} \quad (\text{A.1.28b})$$

bzw. in trigonometrischer Form mit $x = \cos \vartheta$

$$\int_0^\pi P_m^l(\cos \vartheta) P_n^l(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{(l+m)!}{(m+\frac{1}{2})(m-l)!} \delta_{mn} \quad (\text{A.1.29a})$$

$$\int_0^\pi P_m^l(\cos \vartheta) P_m^n(\cos \vartheta) d\vartheta = \begin{cases} \frac{(l+m)!}{l(m-l)!} & 0 < l = n \leq m \\ 0 & l \neq n \end{cases} \quad (\text{A.1.29b})$$

Assoziierte Legendre-Reihenentwicklung

Jede beliebige Funktion $f(x)$ bzw. $g(\vartheta)$, die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ bzw. $0 \leq \vartheta \leq \pi$ definiert ist und die die Dirichlet-Bedingungen erfüllt, kann in eine assoziierte Legendre-Reihe entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m^l(x) \quad \text{mit} \quad c_m = (m+\frac{1}{2}) \frac{(m-l)!}{(m+l)!} \int_{-1}^{+1} f(x) P_m^l(x) dx \quad (\text{A.1.30a})$$

$$g(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m P_m^l(\cos \vartheta) \quad \text{mit} \quad d_m = (m+\frac{1}{2}) \frac{(m-l)!}{(m+l)!} \int_0^\pi g(\vartheta) P_m^l(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (\text{A.1.30b})$$

A.1.5 Normierte assoziierte Legendre-Funktionen

Normierung

Für einige Berechnungen ist es vorteilhaft normierte assoziierte Legendre-Funktionen \bar{P}_m^l zu verwenden.

$$\bar{P}_m^l = \sqrt{\frac{(m + \frac{1}{2})(m - l)!}{(m + l)!}} P_m^l \quad (\text{A.1.31})$$

Rekursionsbeziehungen

Zwischen den normierten assoziierten Legendre-Funktionen und ihren Ableitungen bestehen die Rekursionsbeziehungen:

$$\frac{d\bar{P}_m^l}{d\vartheta} = m \cot \vartheta \bar{P}_m^l - \frac{m + l}{\sin \vartheta} \sqrt{\frac{(2m + 1)(m - l)}{(2m - 1)(m + l)}} \bar{P}_{m-1}^l \quad (\text{A.1.32a})$$

$$\frac{d\bar{P}_m^l}{d\vartheta} = \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\frac{2m + 1}{2m + 3}} (m + l + 1)(m - l + 1) \bar{P}_{m+1}^l - (m + 1) \cot \vartheta \bar{P}_m^l \quad (\text{A.1.32b})$$

Orthogonalitätsbedingung

Es gilt die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{-1}^{+1} \bar{P}_m^l(x) \bar{P}_n^l(x) dx = \delta_{mn} \quad (\text{A.1.33})$$

bzw. in trigonometrischer Form mit $x = \cos \vartheta$

$$\int_0^\pi \bar{P}_m^l(\cos \vartheta) \bar{P}_n^l(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \delta_{mn} \quad (\text{A.1.34})$$

Normierte assoziierte Legendre-Reihenentwicklung

Jede beliebige Funktion $f(x)$ bzw. $g(\vartheta)$, die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ bzw. $0 \leq \vartheta \leq \pi$ definiert ist und die die Dirichlet-Bedingungen erfüllt, kann in eine normierte assoziierte

Legendre-Reihe entwickelt werden:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \bar{P}_m^l(x) \quad \text{mit} \quad c_m = \int_{-1}^{+1} f(x) \bar{P}_m^l(x) dx \quad (\text{A.1.35a})$$

$$g(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \bar{P}_m^l(\cos \vartheta) \quad \text{mit} \quad d_m = \int_0^{\pi} g(\vartheta) \bar{P}_m^l(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad (\text{A.1.35b})$$

A.2 Fouriertransformation

A.2.1 Definition

Fourierhintransformation

Die Fourierhintransformation (meist nur als Fouriertransformation oder kurz FT bezeichnet) wird mit dem Symbol $\circ\text{---}\bullet$ gekennzeichnet und ist definiert durch:

$$\hat{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_x x} dx \quad (\text{A.2.1})$$

Transformierte Größen werden mit einem Dach ($\hat{}$) gekennzeichnet.

Fourierrücktransformation

Die Fourierrücktransformation (kurz als FRT, häufig auch als inverse Fouriertransformation oder kurz IFT bezeichnet) wird mit dem Symbol $\bullet\text{---}\circ$ gekennzeichnet und ist definiert durch:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x) e^{ik_x x} dk_x \quad (\text{A.2.2})$$

A.2.2 Rechenvorschriften

Multiplikation - Faltung

Eine Faltung wird mit dem Symbol $*$ gekennzeichnet und ist definiert durch:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi \quad (\text{A.2.3})$$

Eine Multiplikation zweier Funktionen entspricht einer Faltung ihrer beiden Transformierten im transformierten Raum. Im umgekehrten Fall gilt dieser Zusammenhang in analoger Weise.

$$f(x) \cdot g(x) \circ\text{---}\bullet \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k_x) * \hat{g}(k_x) \quad (\text{A.2.4a})$$

$$f(x) * g(x) \circ\text{---}\bullet \hat{f}(k_x) \cdot \hat{g}(k_x) \quad (\text{A.2.4b})$$

Differentiation

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) \circ \bullet (i k_x)^n \hat{f}(k_x) \quad (\text{A.2.5a})$$

$$\frac{d^n}{dk_x^n} \hat{f}(k_x) \bullet \circ (-i x)^n f(x) \quad (\text{A.2.5b})$$

Streckung oder Stauchung (Dilatation)

$$f(ax) \circ \bullet \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k_x}{a}\right) \quad (\text{A.2.6a})$$

$$\hat{f}(ak_x) \bullet \circ \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A.2.6b})$$

Verschiebung (Translation)

$$f(x - b) \circ \bullet \hat{f}(k_x) e^{-ibk_x} \quad (\text{A.2.7a})$$

$$\hat{f}(k_x - b) \bullet \circ f(x) e^{ibx} \quad (\text{A.2.7b})$$

Kombination aus Dilatation und Translation

$$f(ax - b) = f(a(x - b/a)) \circ \bullet \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k_x}{a}\right) e^{-ibk_x/a} \quad (\text{A.2.8a})$$

$$\hat{f}(ak_x - b) \bullet \circ \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x}{a}\right) e^{ibx/a} \quad (\text{A.2.8b})$$

Ausgewählte Funktionen

Dirac-Distribution

Die Dirac- δ -Distribution ist gewöhnlich definiert durch [Duddeck 1997]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (\text{A.2.9})$$

und nimmt im fouriertransformierten Raum den Wert eins an.

$$\delta(x) \circ\!\!\!\bullet 1 \quad (\text{A.2.10})$$

Rechteckdistribution

Die Rechteckdistribution mit der Amplitude eins sowie der Länge L kann mit Hilfe von zwei entgegengesetzten Heaviside-Distributionen (Einheitssprungfunktionen, bezeichnet mit H) beschrieben werden.

$$H\left(x + \frac{L}{2}\right) - H\left(x - \frac{L}{2}\right) \circ\!\!\!\bullet 2 \frac{\sin\left(\frac{L}{2} k_x\right)}{k_x} \quad (\text{A.2.11})$$

Sinusfunktion

$$\sin(\Omega t) \circ\!\!\!\bullet i \pi (\delta(\omega + \Omega) - \delta(\omega - \Omega)) \quad (\text{A.2.12})$$

Cosinusfunktion

$$\cos(\Omega t) \circ\!\!\!\bullet \pi (\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)) \quad (\text{A.2.13})$$

A.3 Bestimmungsmatrizen für Zylinderkoordinaten

A.3.1 Matrix $\hat{\mathbf{H}}_z$ zur Ermittlung der Verschiebungen

Elemente der $\hat{\mathbf{H}}_z$ Matrix zur Ermittlung der Verschiebungen \hat{u}_x :

$$H_{z,11} = i k_x H_n^{(1)}(k_\alpha r)$$

$$H_{z,12} = 0$$

$$H_{z,13} = k_\beta^2 H_n^{(1)}(k_\beta r)$$

$$H_{z,14} = i k_x H_n^{(2)}(k_\alpha r)$$

$$H_{z,15} = 0$$

$$H_{z,16} = k_\beta^2 H_n^{(2)}(k_\beta r)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{H}}_z$ Matrix zur Ermittlung der Verschiebungen \hat{u}_r :

$$H_{z,21} = \frac{n}{r} H_n^{(1)}(k_\alpha r) - k_\alpha H_{n+1}^{(1)}(k_\alpha r)$$

$$H_{z,22} = i \frac{n}{r} H_n^{(1)}(k_\beta r)$$

$$H_{z,23} = i \frac{n}{r} k_x H_n^{(1)}(k_\beta r) - i k_x k_\beta H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$H_{z,24} = \frac{n}{r} H_n^{(2)}(k_\alpha r) - k_\alpha H_{n+1}^{(2)}(k_\alpha r)$$

$$H_{z,25} = i \frac{n}{r} H_n^{(2)}(k_\beta r)$$

$$H_{z,26} = i \frac{n}{r} k_x H_n^{(2)}(k_\beta r) - i k_x k_\beta H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{H}}_z$ Matrix zur Ermittlung der Verschiebungen \hat{u}_φ :

$$H_{z,31} = i \frac{n}{r} H_n^{(1)}(k_\alpha r)$$

$$H_{z,32} = -\frac{n}{r} H_n^{(1)}(k_\beta r) + k_\beta H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$H_{z,33} = -\frac{n}{r} k_x H_n^{(1)}(k_\beta r)$$

$$H_{z,34} = i \frac{n}{r} H_n^{(2)}(k_\alpha r)$$

$$H_{z,35} = -\frac{n}{r} H_n^{(2)}(k_\beta r) + k_\beta H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

$$H_{z,36} = -\frac{n}{r} k_x H_n^{(2)}(k_\beta r)$$

A.3.2 Matrix $\hat{\mathbf{K}}_z$ zur Ermittlung der Spannungen

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_z$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{xx}$:

$$K_{z,11} = \left(k_\alpha^2 - \frac{1}{2} k_s^2 \right) 2\mu H_n^{(1)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,12} = 0$$

$$K_{z,13} = i k_x k_\beta^2 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,14} = \left(k_\alpha^2 - \frac{1}{2} k_s^2 \right) 2\mu H_n^{(2)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,15} = 0$$

$$K_{z,16} = i k_x k_\beta^2 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_z$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{rr}$:

$$K_{z,21} = \left(\frac{n^2 - n}{r^2} + k_x^2 - \frac{1}{2} k_s^2 \right) 2\mu H_n^{(1)}(k_\alpha r) + \frac{1}{r} k_\alpha 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,22} = i \frac{n^2 - n}{r^2} 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r) - i \frac{n}{r} k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,23} = i \left(\frac{n^2 - n}{r^2} - k_\beta^2 \right) k_x 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r) + i \frac{1}{r} k_x k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,24} = \left(\frac{n^2 - n}{r^2} + k_x^2 - \frac{1}{2} k_s^2 \right) 2\mu H_n^{(2)}(k_\alpha r) + \frac{1}{r} k_\alpha 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,25} = i \frac{n^2 - n}{r^2} 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r) - i \frac{n}{r} k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,26} = i \left(\frac{n^2 - n}{r^2} - k_\beta^2 \right) k_x 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r) + i \frac{1}{r} k_x k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_z$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}$:

$$K_{z,31} = - \left(\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{1}{2} k_s^2 - k_\alpha^2 - k_x^2 \right) 2\mu H_n^{(1)}(k_\alpha r) - \frac{1}{r} k_\alpha 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,32} = -i \frac{n^2 - n}{r^2} 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r) + i \frac{n}{r} k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,33} = -i \frac{n^2 - n}{r^2} k_x 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r) - i \frac{1}{r} k_x k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,34} = - \left(\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{1}{2} k_s^2 - k_\alpha^2 - k_x^2 \right) 2\mu H_n^{(2)}(k_\alpha r) - \frac{1}{r} k_\alpha 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,35} = -i \frac{n^2 - n}{r^2} 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r) + i \frac{n}{r} k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,36} = -i \frac{n^2 - n}{r^2} k_x 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r) - i \frac{1}{r} k_x k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_z$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{rx}$:

$$K_{z,41} = i \frac{n}{r} k_x 2\mu H_n^{(1)}(k_\alpha r) - i k_x k_\alpha 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,42} = -\frac{n}{2r} k_x 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,43} = \frac{n}{2r} (k_\beta^2 - k_x^2) 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r) + \frac{1}{2} (k_x^2 k_\beta - k_\beta^3) 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,44} = i \frac{n}{r} k_x 2\mu H_n^{(2)}(k_\alpha r) - i k_x k_\alpha 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,45} = -\frac{n}{2r} k_x 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,46} = \frac{n}{2r} (k_\beta^2 - k_x^2) 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r) + \frac{1}{2} (k_x^2 k_\beta - k_\beta^3) 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_z$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{r\varphi}$:

$$K_{z,51} = i \frac{n^2 - n}{r^2} 2\mu H_n^{(1)}(k_\alpha r) - i \frac{n}{r} k_\alpha 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,52} = \left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{1}{2} k_\beta^2 \right) 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r) - \frac{1}{r} k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,53} = -\frac{n^2 - n}{r^2} k_x 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r) + \frac{n}{r} k_x k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,54} = i \frac{n^2 - n}{r^2} 2\mu H_n^{(2)}(k_\alpha r) - i \frac{n}{r} k_\alpha 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,55} = \left(-\frac{n^2 - n}{r^2} + \frac{1}{2} k_\beta^2 \right) 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r) - \frac{1}{r} k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,56} = -\frac{n^2 - n}{r^2} k_x 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r) + \frac{n}{r} k_x k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_z$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{x\varphi}$:

$$K_{z,61} = -\frac{n}{r} k_x 2\mu H_n^{(1)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,62} = -i \frac{n}{2r} k_x 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r) + i \frac{1}{2} k_x k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,63} = i \frac{n}{2r} (k_\beta^2 - k_x^2) 2\mu H_n^{(1)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,64} = -\frac{n}{r} k_x 2\mu H_n^{(2)}(k_\alpha r)$$

$$K_{z,65} = -i \frac{n}{2r} k_x 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r) + i \frac{1}{2} k_x k_\beta 2\mu H_{n+1}^{(2)}(k_\beta r)$$

$$K_{z,66} = i \frac{n}{2r} (k_\beta^2 - k_x^2) 2\mu H_n^{(2)}(k_\beta r)$$

A.4 Bestimmungsmatrizen für Kugelkoordinaten

A.4.1 Matrix $\hat{\mathbf{H}}_s$ zur Ermittlung der Verschiebungen

Elemente der $\hat{\mathbf{H}}_s$ Matrix zur Ermittlung der Verschiebungen $\hat{u}_R(m, l)$:

$$H_{s,11} = \frac{m}{R} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) - \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R)$$

$$H_{s,12} = 0$$

$$H_{s,13} = \frac{m^2 + m}{R} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$H_{s,14} = \frac{m}{R} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R) - \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_p R)$$

$$H_{s,15} = 0$$

$$H_{s,16} = \frac{m^2 + m}{R} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{H}}_s$ Matrix zur Ermittlung der Verschiebungen $\hat{u}_\vartheta(m, l)$:

$$H_{s,21} = \left(\frac{m \cot \vartheta}{R} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{m+l}{R \sin \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R)$$

$$H_{s,22} = i \frac{l}{R \sin \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$H_{s,23} = \left(\frac{(m^2 + m) \cot \vartheta}{R} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+1)(m+l)}{R \sin \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + \left(-m \cot \vartheta \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{m+l}{\sin \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$H_{s,24} = \left(\frac{m \cot \vartheta}{R} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{m+l}{R \sin \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R)$$

$$H_{s,25} = i \frac{l}{R \sin \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

$$H_{s,26} = \left(\frac{(m^2 + m) \cot \vartheta}{R} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+1)(m+l)}{R \sin \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) + \left(-m \cot \vartheta \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{m+l}{\sin \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{H}}_s$ Matrix zur Ermittlung der Verschiebungen $\hat{u}_\varphi(m, l)$:

$$H_{s,31} = i \frac{l}{R \sin \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R)$$

$$H_{s,32} = \left(-m \cot \vartheta P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{m+l}{\sin \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$H_{s,33} = i \frac{l(m+1)}{R \sin \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) - i \frac{l}{\sin \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$H_{s,34} = i \frac{l}{R \sin \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R)$$

$$H_{s,35} = \left(-m \cot \vartheta P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{m+l}{\sin \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

$$H_{s,36} = i \frac{l(m+1)}{R \sin \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) - i \frac{l}{\sin \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

A.4.2 Matrix $\hat{\mathbf{K}}_s$ zur Ermittlung der Spannungen

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_s$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{RR}(m, l)$:

$$K_{s,11} = \left(\frac{m^2 - m}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) + \\ + \frac{2}{R} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,12} = 0$$

$$K_{s,13} = \frac{m^3 - m}{R^2} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) - \\ - \frac{m^2 + m}{R} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,14} = \left(\frac{m^2 - m}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R) + \\ + \frac{2}{R} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,15} = 0$$

$$K_{s,16} = \frac{m^3 - m}{R^2} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) - \\ - \frac{m^2 + m}{R} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_s$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{\vartheta\vartheta}(m, l)$:

$$K_{s,21} = \left[\left(-\frac{m^2}{R^2} - \frac{1}{2}\tilde{k}_s^2 + \tilde{k}_p^2 + \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) - \frac{1}{R} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,22} = \left(i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - i \frac{l(l+m)}{R \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,23} = \left[\left(-\frac{m^3 + m^2}{R^2} + \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + \left[\left(\frac{m^2 + m}{R} \tilde{k}_s - \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,24} = \left[\left(-\frac{m^2}{R^2} - \frac{1}{2}\tilde{k}_s^2 + \tilde{k}_p^2 + \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R) - \frac{1}{R} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,25} = \left(i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - i \frac{l(l+m)}{R \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,26} = \left[\left(-\frac{m^3 + m^2}{R^2} + \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) + \left[\left(\frac{m^2 + m}{R} \tilde{k}_s - \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_s$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{\varphi\varphi}(m, l)$:

$$K_{s,31} = \left[\left(\frac{m}{R^2} - \frac{1}{2}\tilde{k}_s^2 + \tilde{k}_p^2 - \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) - \frac{1}{R} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,32} = \left(-i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + i \frac{l(l+m)}{R \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,33} = \left[\left(\frac{m^2 + m}{R^2} - \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + \left(\frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,34} = \left[\left(\frac{m}{R^2} - \frac{1}{2}\tilde{k}_s^2 + \tilde{k}_p^2 - \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R) - \frac{1}{R} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,35} = \left(-i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + i \frac{l(l+m)}{R \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,36} = \left[\left(\frac{m^2 + m}{R^2} - \frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) + \left(\frac{l^2 - m \cos^2 \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_s$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{R\vartheta}(m, l)$:

$$K_{s,41} = \left(\frac{m \cot \vartheta}{R^2} (m-1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \right. \\ \left. - \frac{m+l}{R^2 \sin \vartheta} (m-1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) + \\ + \left(-\frac{m \cot \vartheta}{R} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{m+l}{R \sin \vartheta} \tilde{k}_p P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,42} = i \frac{l}{2R \sin \vartheta} (m-1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) - \\ - i \frac{l}{2 \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,43} = \left[m \cot \vartheta \left(\frac{m^2-1}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \right. \\ \left. - \frac{m+l}{\sin \vartheta} \left(\frac{m^2-1}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + \\ + \left(\frac{m \cot \vartheta}{R} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{m+l}{R \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,44} = \left(\frac{m \cot \vartheta}{R^2} (m-1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \right. \\ \left. - \frac{m+l}{R^2 \sin \vartheta} (m-1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R) + \\ + \left(-\frac{m \cot \vartheta}{R} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \frac{m+l}{R \sin \vartheta} \tilde{k}_p P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,45} = i \frac{l}{2R \sin \vartheta} (m-1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) - \\ - i \frac{l}{2 \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,46} = \left[m \cot \vartheta \left(\frac{m^2-1}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \right. \\ \left. - \frac{m+l}{\sin \vartheta} \left(\frac{m^2-1}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) + \\ + \left(\frac{m \cot \vartheta}{R} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{m+l}{R \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_s$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{R\varphi}(m, l)$:

$$K_{s,51} = i \frac{l}{R^2 \sin \vartheta} (m-1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R) - \\ - i \frac{l}{R \sin \vartheta} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,52} = \left(-\frac{m \cos \vartheta}{2R \sin \vartheta} (m-1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \right. \\ \left. + \frac{m+l}{2R \sin \vartheta} (m-1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + \\ + \left(\frac{m \cos \vartheta}{2 \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{m+l}{2 \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,53} = i \frac{l}{\sin \vartheta} \left(\frac{m^2-1}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + \\ + i \frac{l}{R \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,54} = i \frac{l}{R^2 \sin \vartheta} (m-1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R) - \\ - i \frac{l}{R \sin \vartheta} \tilde{k}_p P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,55} = \left(-\frac{m \cos \vartheta}{2R \sin \vartheta} (m-1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + \right. \\ \left. + \frac{m+l}{2R \sin \vartheta} (m-1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) + \\ + \left(\frac{m \cos \vartheta}{2 \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{m+l}{2 \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,56} = i \frac{l}{\sin \vartheta} \left(\frac{m^2-1}{R^2} - \frac{1}{2} \tilde{k}_s^2 \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) + \\ + i \frac{l}{R \sin \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

Elemente der $\hat{\mathbf{K}}_s$ Matrix zur Ermittlung der Spannungen $\hat{\sigma}_{\vartheta\varphi}(m, l)$:

$$K_{s,61} = \left(i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - i \frac{l(m+l)}{R^2 \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,62} = \left[\left(\frac{m^2 - m}{2R} + \frac{m - l^2}{R \sin^2 \vartheta} \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,63} = \left(i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - i \frac{l(m+l)}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(1)}(\tilde{k}_s R) + \left(-i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + i \frac{l(m+l)}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(1)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,64} = \left(i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - i \frac{l(m+l)}{R^2 \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_p R)$$

$$K_{s,65} = \left[\left(\frac{m^2 - m}{2R} + \frac{m - l^2}{R \sin^2 \vartheta} \right) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - \frac{(m+l) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right] 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

$$K_{s,66} = \left(i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} - i \frac{l(m+l)}{R^2 \sin^2 \vartheta} (m+1) P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_m^{(2)}(\tilde{k}_s R) + \left(-i \frac{l(m-1) \cos \vartheta}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_m^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} + i \frac{l(m+l)}{R \sin^2 \vartheta} \tilde{k}_s P_{m-1}^l(\cos \vartheta) e^{il\varphi} \right) 2\mu h_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}_s R)$$

A.5 Spannungstransformationsmatrizen

Transformationsbeziehung der Spannungen von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten $\boldsymbol{\sigma}_z = \mathbf{T}_{\mathbf{k}-z} \cdot \boldsymbol{\sigma}_k$

mit

$$\boldsymbol{\sigma}_z^T = \left(\sigma_{xx} \quad \sigma_{rr} \quad \sigma_{\varphi\varphi} \quad \sigma_{rx} \quad \sigma_{r\varphi} \quad \sigma_{x\varphi} \right)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^T = \left(\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{zy} \quad \sigma_{zx} \right)$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{k}-z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 0 & -2 \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & 0 & 2 \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & \sin \varphi \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & 0 & \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \end{bmatrix}$$

Transformationsbeziehung der Spannungen von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{T}_{\mathbf{k}-s} \cdot \boldsymbol{\sigma}_k$

mit

$$\boldsymbol{\sigma}_s^T = \left(\sigma_{RR} \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} \quad \sigma_{\varphi\varphi} \quad \sigma_{R\vartheta} \quad \sigma_{R\varphi} \quad \sigma_{\vartheta\varphi} \right)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k^T = \left(\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{zy} \quad \sigma_{zx} \right)$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{k}-s} =$$

$$\begin{bmatrix} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi & \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi & \cos^2 \vartheta & 2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi & 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi & 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi & \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi & \sin^2 \vartheta & 2 \cos^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi & -2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi & -2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 0 & -2 \sin \varphi \cos \varphi & 0 & 0 \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi & \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi & -\sin \vartheta \cos \vartheta & 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi & (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \sin \varphi & (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi & 0 & \sin \vartheta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) & \cos \vartheta \cos \varphi & -\cos \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi & \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi & 0 & \cos \vartheta (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) & -\sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \end{bmatrix}$$

A.6 Steifigkeits- und Massenmatrix eines Dreieckselementes

Spalte 1 und 2 der Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\Delta}(k_x)$:

$$\mathbf{K}_{\Delta}(:, 1 : 2) = A_D \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6}k_x^2(\lambda + 2\mu) + (a_4^2 + a_7^2)\mu & \frac{1}{3}ik_x a_4(-\lambda + \mu) \\ \frac{1}{3}ik_x a_4(\lambda - \mu) & a_4^2(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{6}k_x^2 + a_7^2)\mu \\ \frac{1}{3}ik_x a_7(\lambda - \mu) & a_4 a_7(\lambda + \mu) \\ \frac{1}{12}k_x^2(\lambda + 2\mu) + (a_4 a_5 + a_7 a_8)\mu & \frac{1}{3}ik_x(-a_4 \lambda + a_5 \mu) \\ \frac{1}{3}ik_x(a_5 \lambda - a_4 \mu) & a_4 a_5(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{12}k_x^2 + a_7 a_8)\mu \\ \frac{1}{3}ik_x(a_8 \lambda - a_7 \mu) & a_4 a_8 \lambda + a_7 a_5 \mu \\ \frac{1}{12}k_x^2(\lambda + 2\mu) + (a_4 a_6 + a_7 a_9)\mu & \frac{1}{3}ik_x(-a_4 \lambda + a_6 \mu) \\ \frac{1}{3}ik_x(a_6 \lambda - a_4 \mu) & a_4 a_6(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{12}k_x^2 + a_7 a_9)\mu \\ \frac{1}{3}ik_x(a_9 \lambda - a_7 \mu) & a_4 a_9 \lambda + a_7 a_6 \mu \end{bmatrix}$$

Spalte 3 und 4 der Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\Delta}(k_x)$:

$$\mathbf{K}_{\Delta}(:, 3 : 4) = A_D \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ik_x a_7(-\lambda + \mu) & \frac{1}{12}k_x^2(\lambda + 2\mu) + (a_4 a_5 + a_7 a_8)\mu \\ a_4 a_7(\lambda + \mu) & \frac{1}{3}ik_x(a_4 \lambda - a_5 \mu) \\ a_7^2(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{6}k_x^2 + a_4^2)\mu & \frac{1}{3}ik_x(a_7 \lambda - a_8 \mu) \\ \frac{1}{3}ik_x(-a_7 \lambda + a_8 \mu) & \frac{1}{6}k_x^2(\lambda + 2\mu) + (a_5^2 + a_8^2)\mu \\ a_7 a_5 \lambda + a_4 a_8 \mu & \frac{1}{3}ik_x a_5(\lambda - \mu) \\ a_7 a_8(\lambda + 2\mu) + (a_4 a_5 + \frac{1}{12}k_x^2)\mu & \frac{1}{3}ik_x a_8(\lambda - \mu) \\ \frac{1}{3}ik_x(-a_7 \lambda + a_9 \mu) & \frac{1}{12}k_x^2(\lambda + 2\mu) + (a_5 a_6 + a_8 a_9)\mu \\ a_7 a_6 \lambda + a_4 a_9 \mu & \frac{1}{3}ik_x(a_6 \lambda - a_5 \mu) \\ a_7 a_9(\lambda + 2\mu) + (a_4 a_6 + \frac{1}{12}k_x^2)\mu & \frac{1}{3}ik_x(a_9 \lambda - a_8 \mu) \end{bmatrix}$$

Spalte 5 und 6 der Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\Delta}(k_x)$:

$$\mathbf{K}_{\Delta}(:, 5 : 6) = A_D \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ik_x(-a_5\lambda + a_4\mu) & \frac{1}{3}ik_x(-a_8\lambda + a_7\mu) \\ a_4a_5(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{12}k_x^2 + a_7a_8)\mu & a_4a_8\lambda + a_7a_5\mu \\ a_7a_5\lambda + a_4a_8\mu & a_7a_8(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{12}k_x^2 + a_4a_5)\mu \\ \frac{1}{3}ik_xa_5(-\lambda + \mu) & \frac{1}{3}ik_xa_8(-\lambda + \mu) \\ a_5^2(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{6}k_x^2 + a_8^2)\mu & a_5a_8(\lambda + \mu) \\ a_5a_8(\lambda + \mu) & a_8^2(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{6}k_x^2 + a_5^2)\mu \\ \frac{1}{3}ik_x(-a_5\lambda + a_6\mu) & \frac{1}{3}ik_x(-a_8\lambda + a_9\mu) \\ a_5a_6(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{12}k_x^2 + a_8a_9)\mu & a_8a_6\lambda + a_5a_9\mu \\ a_5a_9\lambda + a_8a_6\mu & a_8a_9(\lambda + 2\mu) + (a_5a_6 + \frac{1}{12}k_x^2)\mu \end{bmatrix}$$

Spalte 7 und 8 der Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\Delta}(k_x)$:

$$\mathbf{K}_{\Delta}(:, 7 : 8) = A_D \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{12}k_x^2(\lambda + 2\mu) + (a_4a_6 + a_7a_9)\mu & \frac{1}{3}ik_x(-a_6\lambda + a_4\mu) \\ \frac{1}{3}ik_x(a_4\lambda - a_6\mu) & a_4a_6(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{12}k_x^2 + a_7a_9)\mu \\ \frac{1}{3}ik_x(a_7\lambda - a_9\mu) & a_7a_6\lambda + a_4a_9\mu \\ \frac{1}{12}k_x^2(\lambda + 2\mu) + (a_5a_6 + a_8a_9)\mu & \frac{1}{3}ik_x(-a_6\lambda + a_5\mu) \\ \frac{1}{3}ik_x(a_5\lambda - a_6\mu) & a_5a_6(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{12}k_x^2 + a_8a_9)\mu \\ \frac{1}{3}ik_x(a_8\lambda - a_9\mu) & a_8a_6\lambda + a_5a_9\mu \\ \frac{1}{6}k_x^2(\lambda + 2\mu) + (a_6^2 + a_9^2)\mu & \frac{1}{3}ik_xa_6(-\lambda + \mu) \\ \frac{1}{3}ik_xa_6(\lambda - \mu) & a_6^2(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{6}k_x^2 + a_9^2)\mu \\ \frac{1}{3}ik_xa_9(\lambda - \mu) & a_6a_9(\lambda + \mu) \end{bmatrix}$$

Spalte 9 der Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{\Delta}(k_x)$:

$$\mathbf{K}_{\Delta}(:, 9) = A_D \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3}ik_x(-a_9\lambda + a_7\mu) \\ a_4a_9\lambda + a_7a_6\mu \\ a_7a_9(\lambda + 2\mu) + (a_4a_6 + \frac{1}{12}k_x^2)\mu \\ \frac{1}{3}ik_x(-a_9\lambda + a_8\mu) \\ a_5a_9\lambda + a_8a_6\mu \\ a_8a_9(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{12}k_x^2 + a_5a_6)\mu \\ \frac{1}{3}ik_xa_9(-\lambda + \mu) \\ a_6a_9(\lambda + \mu) \\ a_9^2(\lambda + 2\mu) + (\frac{1}{6}k_x^2 + a_6^2)\mu \end{bmatrix}$$

Massenmatrix $\hat{\mathbf{M}}_{\Delta}$:

$$\mathbf{M}_{\Delta} = \frac{\rho A_D}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Gekoppeltes FEM-ITM System	2
3.1	Kartesische Koordinaten	11
4.1	Zylinderkoordinaten	20
4.2	Schubverformungen infolge Ψ_i	28
4.3	Schubverformungen infolge Ψ_y und Ψ_z	28
5.1	Sphärische Koordinaten	39
5.2	Kugelflächenfunktionen $Y_m^l(\vartheta, \varphi)$ für $m = 3$	45
5.3	Sphärischer Hohlraum unter konstanter Druckbelastung p_{RR}	54
5.4	Radiale Verschiebung u_R zum Zeitpunkt $t=0$ und $t=T/4$ entlang des Schnittes $I-I$ infolge einer konstanten harmonischen Druckbelastung ($p_{RR}=p_0 \cos(\omega t)$) an der Hohlraumoberfläche	55
5.5	Sphärischer Hohlraum unter konstanter Schubbelastung $p_{R\varphi}$	56
5.6	Tangentiale Verschiebung u_φ zum Zeitpunkt $t=0$ und $t=T/4$ entlang des Schnittes $I-I$ infolge einer konstanten harmonischen Schubbelastung ($p_{R\varphi}=p_0 \cos(\omega t)$) an der Hohlraumoberfläche	56
6.1	Aus zwei Halbräumen zusammengesetzter Vollraum	58
6.2	Superposition des Halbraums (links) und des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum (rechts) zu dem System eines Halbraums mit zylindrischem Tunnel (unten)	61
6.3	Spannungszustände in den Subsystemen Halbraum (links) und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum (rechts)	62

6.4	Superposition des Halbraums (links) und des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum (rechts) zu dem System eines Halbraums mit zylindrischem Graben (unten)	65
6.5	Spannungszustände in den Subsystemen Halbraum (links) und Vollraum mit zylindrischem Hohlraum (rechts)	66
6.6	Tunnel in Schichtgrenze, zusammengesetzt aus zwei Halbräumen mit je einem Graben	67
6.7	Superposition des Halbraums (links) und des Vollraums mit kugelförmigen Hohlraum (rechts) zu dem System eines Halbraums mit kugelförmigen Hohlraum (unten)	69
6.8	Halbraum mit zylindrischem Tunnel und schräger Schichtgrenze	71
6.9	Halbraum mit zylindrischem Tunnel und mehreren parallelen Schichten	72
6.10	Halbraum mit zylindrischem Tunnel und kugelförmiger Grube an der Halbraumoberfläche	73
6.11	Halbraum mit rechteckigem Tunnel	74
6.12	Lösungscharakteristik des Halbraums für nicht abklingende Raumwellen (links) und schnell abklingende Oberflächenwellen (rechts)	78
6.13	Schematische Darstellung der Wellenausbreitung im Halbraum für Raumwellen (links) und Oberflächenwellen (rechts)	79
6.14	Lösungscharakteristik des Vollraums mit zylindrischem Hohlraum für langsam abklingende Raumwellen (links) und schnell abklingende Oberflächenwellen (rechts)	79
6.15	Schematische Darstellung der Wellenausbreitung im Vollraum mit zylindrischem Hohlraum für Raumwellen (links) und Oberflächenwellen (rechts)	80
6.16	Lösungscharakteristik des Vollraums mit kugelförmigen Hohlraum (abklingende Raumwellen)	81
6.17	Admittanz eines Halbraums an seiner Oberfläche ($k_x = 0$)	83
6.18	Veränderung der Admittanz an der Halbraumoberfläche ($k_x = 0$) infolge eines Tunnels in 1 m Tiefe (links) und in 5 m Tiefe (rechts)	83
6.19	Admittanz eines Tunnels an seiner Oberfläche ($n = 0$) im Vollraum (links) und im Halbraum mit einer Überdeckung von 1 m (rechts)	84

6.20	Veränderung der Admittanz an der Tunneloberfläche ($n = 0$) infolge einer Halbraumoberfläche mit einer Überdeckung von 1 m (links) und 5 m (rechts)	84
6.21	Veränderung der eingetragenen Leistung ΔP von einer Last an der Halbraumoberfläche infolge eines Tunnels (links) und von einer Last im Tunnel infolge einer Halbraumoberfläche (rechts)	85
6.22	Halbraum mit flachem Graben (links) und Halbraum ohne Graben (rechts) unter harmonischer Belastung	86
6.23	Vertikale Verschiebung u_z infolge einer vertikalen harmonischen Last p_{zz}	86
6.24	Halbraum mit flachem Graben (links) und Halbraum ohne Graben (rechts) unter Berücksichtigung der benachbarten Wiederholabschnitte	87
6.25	Vertikale Verschiebung u_z infolge einer vertikalen harmonischen Last p_{zz} unter Berücksichtigung der benachbarten Wiederholabschnitte	87
6.26	Verschiebungen u_x , u_y und u_z infolge einer horizontalen harmonischen Last p_{zx}	88
6.27	Verschiebungen u_x , u_y und u_z infolge einer horizontalen harmonischen Last p_{zy}	88
6.28	Verschiebungen u_x , u_y und u_z infolge einer horizontalen harmonischen Last p_{zz}	89
6.29	Halbraum mit flacher kugelförmiger Einsenkung (links) und Halbraum (rechts) unter dynamischer Belastung	89
6.30	Belastete Oberfläche des Halbraums mit flacher kugelförmiger Einsenkung unter Berücksichtigung der benachbarten Wiederholabschnitte	90
6.31	Vertikale Verschiebung u_z an der Halbraumoberfläche ($z = 0, x = 0$) infolge einer vertikalen harmonischen Last p_{zz}	90
7.1	Ebenes Dreieckselement	92
7.2	Ebenes Dreieckselement mit Flächenkoordinaten η_1 und η_2	98
8.1	Gekoppeltes FEM-ITM-System	107
A.1	Bessel-Funktionen $J_n(z)$ (links) $Y_n(z)$ (rechts)	113
A.2	Sphärische Bessel-Funktionen $j_n(z)$ (links) $y_n(z)$ (rechts)	115
A.3	Legendre-Funktionen $P_m(\cos \vartheta)$	116
A.4	Assoziierte Legendre-Funktionen $P_3^l(\cos \vartheta)$	119

Literaturverzeichnis

- [Abramowitz u. Stegun 1965] ABRAMOWITZ, M. ; STEGUN, I.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York, 1965
- [Andersen u. Jones 2002] ANDERSEN, L. ; JONES, C.: Vibration from a railway tunnel predicted by coupled finite element and boundary element analysis in two and three dimensions. In: GRUNDMANN, H. (Hrsg.) ; SCHUËLLER, G. (Hrsg.): *Proceedings of the Fifth European Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2002, München*. Swets & Zeitlinger, Lisse, 2002, S. 1131–1136
- [Andersen u. Jones 2006] ANDERSEN, L. ; JONES, C.J.C.: Coupled boundary and finite element analysis of vibration from railway tunnels – a comparison of two- and three-dimensional models. In: *Journal of Sound and Vibration* 293(3-5) (2006), S. 611–625
- [Andersen u. Nielsen 2003] ANDERSEN, L. ; NIELSEN, S.: Boundary Element Analysis of the Stationary Response from a Moving Force on an Elastic Half-Space. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 27 (2003), S. 23–38
- [Bathe 2002] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Aufl. Springer Verlag, 2002
- [Bettess u. Bettess 1984] BETTESS, P. ; BETTESS, J.A.: Infinite Elements for Static Problems. In: *Engineering Computations* 1 (1984), S. 4–16
- [Bode 2000] BODE, C.: *Numerische Verfahren zur Berechnung von Baugrund-Bauwerk-Interaktionen im Zeitbereich mittels Greenscher Funktionen für den Halbraum*, Veröffentlichungen des Grundbauinstitutes der Technischen Universität Berlin, Heft 28, Diss., 2000
- [Bonnet 1999] BONNET, M.: *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. John Wiley & Sons, New York, 1999

- [Bracewell 1999] BRACEWELL, R.: *The Fourier Transform and its Applications*. 3. Aufl. McGraw Hill, New York, 1999
- [Brigham 1987] BRIGHAM, E.O.: *FFT Schnelle Fourier-Transformation*. 3. Aufl. R. Oldenbourg Verlag, München, 1987
- [Buchs Schmid 2002] BUCHSCHMID, M.: *Geschlossene Lösung des Systems Halbscheibe mit Loch unter Verwendung der Fourierreihenentwicklung*, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München, Diplomarbeit, 2002
- [Clough u. Penzien 1993] CLOUGH, R.W. ; PENZIEN, J.: *Dynamics of structures*. MCGraw-Hill, New York, 1993
- [Clouteau u. a. 2005] CLOUTEAU, D. ; ARNST, M. ; AL-HUSSAINI, T. ; DEGRANDE, G.: Freefield vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium. In: *Journal of Sound and Vibration* 283(1-2) (2005), S. 173–199
- [Clouteau u. a. 2000] CLOUTEAU, D. ; ELHABRE, M. ; AUBRY, D.: Periodic BEM and FEM-BEM coupling: application to seismic behaviour of very long structures. In: *Computational Mechanics* 25(6) (2000), S. 567–577
- [Coulier u. a. 2010] COULIER, P. ; DEGRANDE, G. ; KUO, K.A. ; HUNT, H.E.M.: A comparison of two models for the vibration response of piled foundations to inertial and underground railway-induced loadings. In: *Proceedings of the seventeenth International Congress on Sound and Vibration, Cairo, 2010*
- [Cremer u. Heckl 1996] CREMER, L. ; HECKL, M.: *Körperschall*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996
- [Degrande u. a. 2006a] DEGRANDE, G. ; CLOUTEAU, D. ; OTHMAN, R. ; ARNST, M. ; CHEBLI, H. ; KLEIN, R. ; CHATTERJEE, P. ; JANSSENS, B.: A numerical model for ground-borne vibrations from underground railway traffic based on a periodic finite element – boundary element formulation. In: *Journal of Sound and Vibration* 293(3-5) (2006), S. 645–666
- [Degrande u. a. 2006b] DEGRANDE, G. ; SCHEVENELS, M. ; CHATTERJEE, P. ; VANDELVELDE, W. ; HÖLSCHER, P. ; HOPMAN, V. ; WANG, A. ; DADKAH, N.: Vibrations due to a testtrain

- at variable speeds in a deep bored tunnel embedded in London clay. In: *Journal of Sound and Vibration* 293(3-5) (2006), S. 626–644
- [Driscoll u. Healy 1994] DRISCOLL, J. ; HEALY, D.: Computing Fourier transforms and convolutions on the 2-sphere. In: *Advances in Applied Mathematics* 15 (1994), S. 202–250
- [Duddeck 1997] DUDDECK, F.: *Funktional-Analyse der Kontinuumsmechanik - Fouriertransformation bezüglich Raum und Zeit der Energiemethoden*, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 5/97, TU München, Diss., 1997
- [Ekevid u. a. 2006] EKEVID, T. ; LANE, H. ; WIBERG, N.-E.: Adaptive solid wave propagation - influences of boundary conditions in high-speed train applications. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 236–250
- [Ekevid u. Wiberg 2002] EKEVID, T. ; WIBERG, N.-E.: Wave propagation related to high-speed train. A scaled boundary FE-approach for unbounded domains. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191(36) (2002), S. 3947–3964
- [Eringen 1957] ERINGEN, A.C.: Elasto-dynamic Problem concerning the Spherical Cavity. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 10 (1957), S. 257–270
- [Eringen u. Suhubi 1975] ERINGEN, A.C. ; SUHUBI, E.S.: *Elastodynamics, Vol. I: Finite Motions, Vol. II: Linear Theory*. Academic Press, New York, 1975
- [von Estorff u. a. 1991] ESTORFF, O. von ; STAMOS, A. ; BESKOS, D. ; ANTES, H.: Dynamic interaction effects in underground traffic systems. In: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 8(4) (1991), S. 167–175.
- [Fiala u. a. 2010] FIALA, P. ; VERBRAKEN, H. ; LOMBAERT, G. ; DEGRANDE, G. ; AUGUSTINOVICZ, F.: Comparative study of the efficiency of isolating measures for vibration and noise from underground railway traffic. In: *Noise in the Built Environment, Institute of Acoustics, Ghent*, 2010
- [Fischer 2004] FISCHER, M.: *The fast multipole boundary element method and its application to structure-acoustic field interaction*, Bericht aus dem Institut A für Mechanik 2004/2, Stuttgart, Diss., 2004

- [Forrest u. Hunt 2006a] FORREST, J.A. ; HUNT, H.E.M.: Ground vibration generated by trains in underground tunnels. In: *Journal of Sound and Vibration* 294(4-5) (2006), S. 706–736
- [Forrest u. Hunt 2006b] FORREST, J.A. ; HUNT, H.E.M.: A three-dimensional tunnel model for calculation of train-induced ground vibration. In: *Journal of Sound and Vibration* 294(4-5) (2006), S. 678–705
- [Frühe u. Müller 2010a] FRÜHE, G. ; MÜLLER, G.: Dynamic soil-structure interaction applying a hybrid ITM/FEM approach. In: *ISMA 2010, Leuven, 2010*
- [Frühe u. Müller 2010b] FRÜHE, G. ; MÜLLER, G.: Modelling of the dynamic interaction of tunnel- or longitudinal trench-structures in the halfspace by the application of a set of various fundamental solutions. In: *Noise in the Built Environment, Institute of Acoustics, Ghent, 2010*
- [Frühe u. Müller 2010c] FRÜHE, G. ; MÜLLER, G.: Wave propagation in an elastic half-space with cylindrical and spherical cavities and trenches. In: *RASD 2010, Southampton, 2010*
- [Frýba 1972] FRÝBA, L.: *Vibrations of solids and structures under moving loads*. Nordhoff International Publishing, Groningen, 1972
- [Gardien u. Stuit 2003] GARDIEN, W. ; STUIT, H.: Modelling of soil vibrations from railway tunnels. In: *Journal of Sound and Vibration* 267(3) (2003), S. 605–619
- [Grundmann 1999] GRUNDMANN, H.: Dynamic interaction of structures with the subsoil. In: FRÝBA, L. (Hrsg.) ; NÁPRSTEK, J. (Hrsg.): *Proceedings of the Fourth European Conference on Structural Dynamics, EURO DYN '99, Prag*. Balkema, Rotterdam., 1999
- [Grundmann u. Müller 1988] GRUNDMANN, H. ; MÜLLER, G.: Untergrundbewegungen infolge ortsveränderlicher Lasten an der Oberfläche. In: WUNDERLICH, W. (Hrsg.) ; STEIN, E. (Hrsg.): *Finite Elemente. Anwendungen in der Baupraxis*. Ernst & Sohn, Berlin, 1988, S. 163–176
- [Grundmann u. Waubke 1992] GRUNDMANN, H. ; WAUBKE, H.: Stochastische Finite Elemente zur Ermittlung der Bewegungen eines mehrschichtigen ebenen Kontinuums unter periodischer Belastung. In: *Zum 80. Geburtstag von Herrn Prof. Dr.rer.nat. Dr.-Ing. E.h.*

- Kurt Magnus, Festschrift.* Lehrstuhl B für Mechanik, Technische Universität München, 1992
- [Gupta u. Degrande 2010] GUPTA, S. ; DEGRANDE, G.: Modelling of continuous and discontinuous floating slab tracks in a tunnel using a periodic approach. In: *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), S. 1101–1125
- [Gupta u. a. 2009a] GUPTA, S. ; DEGRANDE, G. ; LOMBAERT, G.: Experimental validation of a numerical model for subway induced vibrations. In: *Journal of Sound and Vibration* 321(3-5) (2009), S. 786–812
- [Gupta u. a. 2007] GUPTA, S. ; HUSSEIN, M.F.M. ; DEGRANDE, G. ; HUNT, H.E.M. ; CLOUTEAU, D.: A comparison of two numerical models for the prediction of vibrations from underground railway traffic. In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 27(7) (2007), S. 608–624
- [Gupta u. a. 2009b] GUPTA, S. ; Y.STANUS ; G.LOMBAERT ; G.DEGRANDE: Influence of tunnel and soil parameters on vibrations from underground railways. In: *Journal of Sound and Vibration* 327 (2009), S. 70–91
- [Hackenberg 2010] HACKENBERG, M.: *Umsetzung der Finiten Elemente Methode im Wellenzahlbereich und Kopplung mit der Intergraltransformationmethode*, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München, Diplomarbeit, 2010
- [Hardin 1965] HARDIN, B.O.: The Nature of Damping in Sands. In: *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 91/1 (1965), S. 63–98
- [Hardin u. Drnevich 1972] HARDIN, B.O. ; DRNEVICH, V.P.: Shear Modulus and Damping in Soils: Measurement and Parameter Effects. In: *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 98/6 (1972), S. 603–624
- [Haupt 1986] HAUPT, W.: *Bodendynamik*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1986
- [Heine 1861] HEINE, E.: *Handbuch der Kugelflächenfunktionen*. Georg Reimer, Berlin, 1861
- [Hobson 1931] HOBSON, E.W.: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge, Univ. Press, 1931

- [Hughes 2000] HUGHES, T.J.R.: *The Finite Element Method: linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications, New York, 2000
- [Hunt u. a. 2010] HUNT, H.E.M. ; HUSSEIN, M.F.M. ; JONES, S. ; KUO, K.A.: Ground-borne vibration from underground railways: some commonly-made modelling assumptions and their associated inaccuracies and uncertainties. In: *Noise in the Built Environment, Institute of Acoustics, Ghent, 2010*
- [Hussein u. a. 2006] HUSSEIN, M.F.M. ; GUPTA, S. ; HUNT, H.E.M. ; DEGRANDE, G. ; TALBOT, J.P.: An efficient model for calculating vibration from a railway tunnel buried in a half-space. In: *Proceedings of the thirteenth International Congress on Sound and Vibration (ICSV13), Vienna, Austria, 2006*
- [Hussein u. Hunt 2003] HUSSEIN, M.F.M. ; HUNT, H.E.M.: An insertion loss model for evaluating the performance of floating slab-track for underground railway tunnels. In: *Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration, Stockholm, Schweden, 2003*
- [Hussein u. Hunt 2009] HUSSEIN, M.F.M. ; HUNT, H.E.M.: A numerical model for calculating vibration due to a harmonic moving load on a floating-slab with discontinuous slabs in an underground railway tunnel. In: *Journal of Sound and Vibration* 321(1-2) (2009), S. 363–374
- [Jahnke 1966] JAHNKE, E.: *Tafeln höherer Funktionen Jahnke-Emde-Lösch*. 7. Aufl. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1966
- [Jones u. a. 2000a] JONES, C.J.C. ; SHENG, X. ; PETYT, M.: Simulations of ground vibrations from a moving harmonic load on a railway track. In: *Journal of Sound and Vibration* 231(3) (2000), S. 739–751
- [Jones u. a. 2000b] JONES, C.J.C. ; THOMPSON, D. ; PETYT, M.: Studies using a combined finite element and boundary element model for vibration propagation from railway tunnels. In: *Seventh Int. Congr. on Sound and Vibration, Int. Inst. of Acoustics and Vibration, 2000*, S. 2703–2710

- [Jones u. a. 2002] JONES, C.J.C. ; THOMPSON, D. ; PETYT, M.: A model for ground vibration from railway tunnels. In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Transport* 153(2) (2002), S. 121–129
- [Jones u. Hunt 2010a] JONES, S. ; HUNT, H.: Voids at the tunnel-soil interface for calculation of ground vibration from underground railways. In: *Journal of Sound and Vibration* (2010)
- [Jones u. Hunt 2009] JONES, S. ; HUNT, H.E.M.: The effect of inclined soil layers on surface vibration from underground railways using a semi-analytical approach. In: *Proceedings of the seventh International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, Cambridge*, 2009
- [Jones u. Hunt 2010b] JONES, S. ; HUNT, H.E.M.: Inhomogeneous soils and their effect on ground vibration due to underground railways. In: *Proceedings of the seventeenth International Congress on Sound and Vibration, Cairo*, 2010
- [Kausel 2006] KAUSEL, E.: *Fundamental Solutions in Elastodynamics*. Cambridge University Press, New York, 2006
- [Klein 2003] KLEIN, B.: *FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode*. 5. Aufl. Vieweg Verlag, Wiesbaden, 2003
- [Konrad 1985] KONRAD, A.: *Der Zylinder, der zylindrische Hohlraum und die dickwandige Kreiszylinderschale unter beliebigen, ruhenden oder bewegten Lasten*, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 17, TU München, Diss., 1985
- [Krylov 1995] KRYLOV, V.V.: Low-Frequency Ground Vibrations from Underground Trains. In: *Journal of Low Frequency Noise and Vibration* 14(1) (1995), S. 55–60
- [Kwon u. Hyochoong 2000] KWON, Y.W. ; HYOCHOONG, B.: *The Finite Element Method using Matlab*. 2. Aufl. CRC Press, Boca Raton, 2000
- [Lamé 1852] LAMÉ, G.: *Lecons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solides*. Bachelier, Paris, 1852
- [Lamb 1904] LAMB, H.: On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 203 (1904), S. 1–42

- [Lenz 2003] LENZ, S.: *Nichtlineare Interaktion zwischen Fahrzeug und Untergrund unter Zuhilfenahme von Integraltransformationen*, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 7/03, TU München, Diss., 2003
- [Lin u. Krylov 2000] LIN, Q. ; KRYLOV, V.V.: Effect of Tunnel Diameter on Ground Vibrations Generated by Underground Trains. In: *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control* 19(1) (2000), S. 17–25
- [Lombaert u. Degrande 2009] LOMBAERT, G. ; DEGRANDE, G.: Ground-borne vibration due to static and dynamic axle loads of InterCity and high speed trains. In: *Journal of Sound and Vibration* 319(3-5) (2009), S. 1036–1066
- [Lombaert u. a. 2000] LOMBAERT, G. ; DEGRANDE, G. ; CLOUTEAU, D.: Numerical modelling of free field traffic-induced vibrations. In: *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 19 (2000), S. 473–488
- [Lombaert u. a. 2006] LOMBAERT, G. ; DEGRANDE, G. ; KOGUT, J. ; FRANÇOIS, S.: The experimental validation of a numerical model for the prediction of railway induced vibrations. In: *Journal of Sound and Vibration* 297(3-5) (2006), S. 512–535
- [Long 1967] LONG, C.F.: On the completeness of the Lamé potentials. In: *Acta Mechanica* 3 (1967), S. 371–375
- [Metrikine u. Vrouwenvelder 2000] METRIKINE, A.V. ; VROUWENVELDER, A.: Surface ground vibration due to a moving train in a tunnel: two-dimensional model. In: *Journal of Sound and Vibration* 234(1) (2000), S. 43–66
- [Müller 1966] MÜLLER, C.: Spherical Harmonics. In: *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 17*. Springer-Verlag, Berlin, 1966
- [Müller 1989] MÜLLER, G.: *Ein Verfahren zur Erfassung der Fundament-Boden Wechselwirkung unter Einwirkung periodischer Lasten*, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 25, TU München, Diss., 1989
- [Müller 1993] MÜLLER, G.: *Ein Verfahren zur Kopplung der Randelementemethode mit analytischen Lösungsansätzen*. Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 2/93, TU München, Habil., 1993

- [Müller u. Möser 2008] MÜLLER, G. ; MÖSER, M.: *Taschenbuch der technischen Akustik*. 3. Aufl. Springer Verlag, 2008
- [Müller 2007] MÜLLER, K.: *Dreidimensionale dynamische Tunnel-Halbraum-Interaktion*, Lehrstuhl für Baumechanik, Schriftenreihe des Lehrstuhls für Baumechanik, Band 3, TU München, Diss., 2007
- [Müller u. a. 2008] MÜLLER, K. ; GRUNDMANN, H. ; LENZ, S.: Nonlinear interaction between a moving vehicle and a plate elastically mounted on a tunnel. In: *Journal of Sound and Vibration* 310 (2008), S. 558–586
- [Mohlenkamp 1999] MOHLENKAMP, M.J.: A fast transform for spherical harmonics. In: *Journal of Fourier Analysis and Applications* 5, Numbers 2-3 (1999), S. 159–184
- [Morse u. Feshbach 1953] MORSE, P.M. ; FESHBACH, H.: *Methods of Theoretical Physics*. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953
- [Neuber 1934] NEUBER, H.: Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. In: *ZAMM* 14 (1934), S. 203–212
- [Of 2006] OF, G.: *BETI-Gebietszerlegungsmethoden mit schnellen Randelementeverfahren und Anwendungen*, Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Stuttgart, Diss., 2006
- [Papkovich 1932] PAPKOVICH, P.F.: Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité exprimée par trois fonctions harmoniques. In: *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* 195 (1932), S. 513–515
- [Potts 2003] POTTS, D.: *Schnelle Fourier-Transformationen für nicht äquidistante Daten und Anwendungen*, Technisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität zu Lübeck, Diss., 2003
- [Priestley 1981] PRIESTLEY, M.B.: *Spectral Analysis and Time Series*. Bd. 1. Academic Press, London, 1981
- [Rastandi 2003] RASTANDI, J.I.: *Modelization of Dynamic Soil-Structure Interaction using Integral Transform - Finite Element Coupling*, Lehrstuhl für Baumechanik, TU München, Diss., 2003

- [Rücker u. Said 1994] RÜCKER, W. ; SAID, S.: *Erschütterungsübertragung zwischen U-Bahn-Tunneln und dicht benachbarten Gebäuden*. Bd. 199 d. Reihe BAM Forschungsberichte. Wirtschaftsverlag NW, Bremerhaven, 1994
- [Råde u. Westergren 2000] RÅDE, L. ; WESTERGREN, B.: *Springers Mathematische Formeln*. Bd. 3. Springer Verlag, 2000
- [Savidis u. Bergmann 2005] SAVIDIS, S.A. ; BERGMANN, S.: Slab track vibration and stress distribution induced by train passage. In: SOIZE, C. (Hrsg.) ; SCHUËLLER, G. (Hrsg.): *Proceedings of the Sixth European Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2005, Paris*. Balkema, Rotterdam, 2005, S. 651–656
- [Savidis u. Bode 2002] SAVIDIS, S.A. ; BODE, C.: Dynamic Soil-Track-Interaction. In: GRUNDMANN, H. (Hrsg.) ; SCHUËLLER, G. (Hrsg.): *Proceedings of the Fifth European Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2002, München*. Swets & Zeitlinger, Lisse, 2002, S. 153–163
- [Schanz u. Steinbach 2007] SCHANZ, M. ; STEINBACH, O.: Boundary Element Analysis: Mathematical Aspects and Applications. In: *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. 29. Aufl. Springer, 2007
- [Schepers u. Savidis 2009] SCHEPERS, W. ; SAVIDIS, S.A.: Kopplung von Finiten Elementen und Randelementen zur Lösung ausgedehnter dynamischer Boden-Bauwerk-Interaktionsprobleme im Frequenzbereich. In: WISSENSFORUM, VDI (Hrsg.): *VDI Berichte Nr. 2063*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2009, S. 371–390
- [Sheng u. a. 1999a] SHENG, X. ; JONES, C.J.C. ; PETYT, M.: Ground vibration generated by a harmonic load acting on a railway track. In: *Journal of Sound and Vibration* 225(1) (1999), S. 3–28
- [Sheng u. a. 1999b] SHENG, X. ; JONES, C.J.C. ; PETYT, M.: Ground vibration generated by a load moving along a railway track. In: *Journal of Sound and Vibration* 228(1) (1999), S. 129–156
- [Sheng u. a. 2003] SHENG, X. ; JONES, C.J.C. ; THOMPSON, D.: A comparison of a theoretical model for quasi-statically and dynamically induced environmental vibration from trains with measurements. In: *Journal of Sound and Vibration* 267(3) (2003), S. 621–635

- [Sheng u. a. 2005] SHENG, X. ; JONES, C.J.C. ; THOMPSON, D.: Modelling ground vibration from railways using wavenumber finite- and boundary-element methods. In: *Proceedings of the Royal Society* 461 (2005), S. 2043–2070
- [Sheng u. a. 2006] SHENG, X. ; JONES, C.J.C. ; THOMPSON, D.: Prediction of ground vibration from trains using the wavenumber finite and boundary element methods. In: *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006), S. 575–586
- [Spotz u. Swarztrauber 2001] SPOTZ, W.F. ; SWARZTRAUBER, P.N.: A Performance Comparison of Associated Legendre Projections. In: *Journal of Computational Physics* 16 (2001), S. 339–355
- [Sternberg 1960] STERNBERG, E.: On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 6 (1960), S. 34–50
- [Szczesniak 1996] SZCZESIAK, T.: *Die Komplementärmethode. Ein neues Verfahren in der dynamischen Boden-Struktur-Interaktion.* Birkhäuser, 1996
- [Triepaischajonsak u. a. 2010] TRIEPAISCHAJONSAK, N. ; THOMPSON, D.J. ; JONES, C.J.C.: The experimental validation of a semi-analytical track/ground model for vibration induced by trains. In: *RASD 2010, Southampton, 2010*
- [Verbraken u. a. 2010] VERBRAKEN, H. ; EYSERMANS, H. ; DECHIEF, E. ; FRANÇOIS, S. ; LOMBAERT, G. ; DEGRANDE, G.: Assessment of an empirical prediction method for railway induced vibrations by numerical simulations. In: *Noise in the Built Environment, Institute of Acoustics, Ghent, 2010*
- [Wolf 1985] WOLF, J.P.: *Dynamic soil-structure interaction.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1985
- [Wolf 2003] WOLF, J.P.: *The Scaled Boundary Finite Element Method.* John Wiley & Sons, Chichester, 2003
- [Wolf u. Song 1996] WOLF, J.P. ; SONG, C.: *Finite-Element Modelling of Unbounded Media.* John Wiley & Sons, Chichester, 1996

- [Zienkiewicz u. a. 2005] ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L. ; ZHU, J.Z.: *The Finite Element Method its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005
- [Zirwas 1996] ZIRWAS, G.: *Ein hybrides Verfahren zur Behandlung der Bauwerk-Bodenwechselwirkung mit analytischen Integraltransformationen und numerischen Ansätzen*, Lehrstuhl für Baumechanik, Mitteilungen a.d. Inst. f. Bauingw. I, Heft 10/96, TU München, Diss., 1996