

Lehrstuhl für Computation in Engineering  
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen  
Technische Universität München

## Anwendung der Finite Element Methode auf die Trittschallberechnung

Andreas Rabold

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der  
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Stefan Winter

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.rer.nat. E. Rank
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. G. H. Müller

Die Dissertation wurde am 25.02.2010 bei der Technischen Universität München eingereicht  
und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 27.05.2010 angenommen.



# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen eines Forschungsprojekts des Lehrstuhls für Computation in Engineering an der Technischen Universität München in Kooperation mit dem Fraunhofer Institut für Bauphysik, Stuttgart und dem ift Schallschutzzentrum, Rosenheim. Die primäre Zielsetzung des Forschungsprojekts lag in der Entwicklung konstruktiver Maßnahmen zur Verbesserung der tieffrequenten Trittschalldämmung von Holzdecken. Zur Entwicklung dieser Maßnahmen war zunächst durch die Klärung der akustischen Wechselwirkungen zwischen Deckenauflage und Rohdecke ein besseres Verständnis für das Schwingungsverhalten der Deckenaufbauten zu erarbeiten. Um den erheblichen Aufwand einer rein empirischen (messtechnischen) Untersuchung dieser Wechselwirkungen zu reduzieren, wurde die Entwicklung und Bereitstellung leistungsfähiger Berechnungsmodelle angestrebt. Im Teilprojekt der Technischen Universität München wurde hierzu ein Berechnungsmodell auf Basis der Finiten Elemente Methode erarbeitet, dessen Validierung anhand von Messergebnissen aus der Datenbank des ift Schallschutzzentrums, Rosenheim erfolgte. Zur Visualisierung der Ergebnisse und einer rationellen Modellerstellung wurde eine graphische Nutzeroberfläche entwickelt. Anhand der numerischen Berechnungen des validierten Modells wurden die Wechselwirkungen der Deckenkomponenten untersucht und optimierte Konstruktionen erarbeitet. Nach der messtechnischen Überprüfung der optimierten Konstruktionen im ift Schallschutzzentrum konnten die Ergebnisse in Form von Konstruktionshilfen für optimierte Aufbauten zusammengestellt werden.

## Abstract

The presented thesis is based on a research project carried out at the chair for Computation in Engineering, Technische Universität München in cooperation with the Fraunhofer Institute for Building Physics, Stuttgart and the ift Centre for Acoustics, Rosenheim. The primary objective of the research project was to develop construction details for improving the low-frequency impact sound insulation of timber floors. For the development of these details it was, first of all, necessary to gain a better understanding of the vibration characteristics of floor construction elements by clarifying the acoustic interactions between the floor structure and the floating floor. In order to reduce the considerable expense of a purely empirical study of these interactions, the development of high-performance calculation models were aimed. In the project section covered by the Technischen Universität München, a calculation model was developed on the basis of the finite element method. The validation of this calculation model was carried out using measured results from the database of the ift Centre for Acoustics, Rosenheim. For the purpose of visualising the results and an efficient model construction, a graphic user interface was developed. On the basis of the numerical calculations of the validated model it was possible to study the interactions of the floor elements and work on the improvement of construction details. Once these improved construction details had been tested in the ift Centre for Acoustics it was possible to compile the results in the form of construction rules for improved lightweight floors.





# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2006 - 2010 während meiner berufsbegleitenden Forschungstätigkeit am Lehrstuhl für Computation in Engineering an der Technischen Universität München.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Prof. Ernst Rank. Neben seinem beeindruckenden Überblick über die verschiedensten Anwendungsbereiche der Finite Elemente Methode - woraus viele wertvolle Ratschläge für die Ausrichtung meiner Arbeit resultierten - hat mich vor allem seine persönliche Aufgeschlossenheit und positive Vorgehensweise begeistert und nachhaltig motiviert.

Prof. Gerhard Müller danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferats und die vielen konstruktiven Beiträge zum Gelingen dieser Arbeit.

Prof. Alexander Düster danke ich für die Leitung unserer Arbeitsgruppe in seiner Zeit am Lehrstuhl für Computation in Engineering. Durch sein tiefes Verständnis für die Grundlagen der Finite Elemente Methode und seinen unermüdlichen Einsatz war es ihm möglich die unterschiedlichen Arbeiten in unserer Gruppe hervorragend zu betreuen.

Meinen Kollegen am Lehrstuhl danke ich für die schöne gemeinsame Zeit und die freundschaftliche Atmosphäre, die sowohl konzentriertes Arbeiten als auch gemeinsamen Aktionen - wie dem wöchentlichen miteinander/füreinander Kochen und den Skiseminaren - Raum ließen.

Bei Prof. Ulrich Schanda und Dr. Joachim Hessinger sowie bei meinen Kollegen an der Hochschule Rosenheim und im ift Schallschutzzentrum möchte ich mich für die vielen anregenden Diskussionen rund um meine Arbeit bedanken.

Meiner Familie, meinen Eltern Friedrich und Ingrid Rabold, meiner Frau Veronika und meinen Kindern Johannes, Daniel, Clara und Matthias danke ich für ihre große Geduld und ihren geistlichen Beistand in diesen Jahren.

Andreas Rabold  
Juli 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
1.1	Motivation . . . . .	9
1.2	Zielsetzung . . . . .	10
1.3	Übersicht der Arbeit . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>13</b>
2.1	Differenzialgleichungen der Dynamik . . . . .	13
2.1.1	Differenzialgleichung der Struktur . . . . .	14
2.1.2	Differenzialgleichung des Fluids . . . . .	18
2.1.3	Rand- und Kopplungsbedingungen . . . . .	21
2.2	Grundlagen zur FEM Berechnung der Struktur . . . . .	22
2.2.1	Übersicht der Methode . . . . .	22
2.2.2	Ansatzfunktionen der Verschiebung . . . . .	26
2.2.3	Aufbau der Elementmatrizen . . . . .	31
2.2.4	Aufbau und Lösung des Gleichungssystems . . . . .	34
2.3	Grundlagen zur Berechnung der Körperschallschnelle . . . . .	39
2.3.1	Modal- und Spektralanalyse . . . . .	39
2.3.2	Modelle zur punktförmigen Anregung . . . . .	41
2.3.3	Dämpfungsmodelle in der Strukturodynamik . . . . .	48
2.4	Grundlagen zur Schallpegelberechnung im Fluid . . . . .	52
2.4.1	Übersicht der Methoden . . . . .	52
2.4.2	Modale Methoden zur Schalldruckberechnung . . . . .	54
2.4.3	Integrale Methoden zur Schallabstrahlung . . . . .	57
2.5	Grundlagen zur Verifizierung und Validierung . . . . .	60
2.5.1	Verifizierung der numerischen Simulation . . . . .	61
2.5.2	Validierung des Berechnungsmodells . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Berechnungsverfahren der Trittschallübertragung</b>	<b>69</b>
3.1	Modellierung der Anregung . . . . .	69
3.1.1	Modellierung der Anregungskraft im Zeitbereich . . . . .	70
3.1.2	Modellierung der Anregungskraft im Frequenzbereich . . . . .	74
3.1.3	Berechnungsbeispiel für Zeit- und Frequenzbereich . . . . .	79
3.1.4	Vergleich mit Messergebnissen . . . . .	81
3.1.5	Berechnung für eine Holzbalkendecke . . . . .	82
3.2	Modellierung der Struktur . . . . .	84

3.2.1	Modellierung der Element-Verbindung . . . . .	85
3.2.2	Modellierung der Materialgesetze . . . . .	86
3.3	Modellierung der Dämpfung . . . . .	87
3.3.1	Verlustfaktoren . . . . .	87
3.3.2	Vergleich mit Messwerten . . . . .	91
3.4	Modellierung der Abstrahlung . . . . .	93
3.4.1	Gegenüberstellung der Modelle . . . . .	93
3.4.2	Umsetzung der Modelle . . . . .	94
3.5	Validierung des Verfahrens . . . . .	96
3.5.1	Vorgehensweise zur Validierung . . . . .	96
3.5.2	Validierung anhand der Einzahlwerte $L_{n,w}$ . . . . .	97
3.5.3	Validierung mit frequenzabhängigen Ergebnissen . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Visualisierung</b>	<b>101</b>
4.1	Anforderungsprofil der graphischen Oberfläche . . . . .	102
4.2	Umsetzung des Anforderungsprofils . . . . .	102
4.3	Erzeugung der Datenstruktur (Pre-processor) . . . . .	103
4.4	Visualisierung der Ergebnisse (Post-processor) . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>105</b>
5.1	Subjektives Empfinden der Trittschallübertragung . . . . .	105
5.1.1	Korrelation zwischen Messergebnis und subjektivem Empfinden . . . . .	106
5.1.2	Zielwerte für die Bauteilentwicklung . . . . .	107
5.2	Numerische Untersuchung der Wechselwirkungen . . . . .	108
5.2.1	Einfluss der Materialparameter . . . . .	108
5.2.2	Wechselwirkung zwischen Zementestrich und Rohdecke . . . . .	110
5.2.3	Wechselwirkung zwischen Trockenestrich und Rohdecke . . . . .	111
5.3	Bauteiloptimierung durch Parametervariation . . . . .	113
5.3.1	Dicke des Estrichs . . . . .	114
5.3.2	Dynamische Steifigkeit der Trittschalldämmplatten . . . . .	115
5.3.3	Flächenbezogene Masse der Rohdeckenbeschwerung . . . . .	115
5.3.4	Dicke der Rohdecke . . . . .	116
5.3.5	Ergebnis der Parametervariation . . . . .	118
5.4	Zusammenstellung optimierter Deckenaufbauten . . . . .	119
5.4.1	Massivholzdecke mit Rohdeckenbeschwerung . . . . .	119
5.4.2	Leichte Holzbalkendecke . . . . .	120
5.4.3	Holz-Beton-Verbunddecke . . . . .	122
5.4.4	Konstruktionshilfen für optimierte Deckenaufbauten . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Berechnungen zur Validierung</b>	<b>139</b>
<b>B</b>	<b>Differenzterme der Abbildungsfunktion</b>	<b>167</b>
<b>C</b>	<b>Verzeichnis der Bezeichnungen</b>	<b>171</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die Forschung und Entwicklung im Bereich der Bauakustik erfolgt bislang schwerpunktmäßig durch umfangreiche messtechnische Parameterstudien. Durch den daraus resultierenden hohen Messaufwand ist die Forschung und Entwicklung langwierig und teuer. Eine wesentliche Reduzierung dieser Kosten kann dadurch erreicht werden, dass die aufwändigen Bauteil-Parameterstudien nicht mehr durch Messungen erfolgen, sondern anhand von geeigneten Berechnungsmodellen durchgeführt werden.

Die gängigen Modelle zur Berechnung der Schalldämmung von Bauteilen basieren auf den Messwerten einzelner Bauteilkomponenten oder -schichten [1, 2, 3]. Diese Modelle sind für die Beurteilung und den Nachweis bekannter Bauteile oder Kombinationen von bekannten Bauteilschichten in den verschiedenen Bausituationen gut geeignet und bewährt [4, 5, 6, 7]. Da sie aber auf den Messwerten der einzelnen Bauteilschichten basieren, sind sie für die Neuentwicklung oder Optimierung eines Bauteils anhand von Parameterstudien schon vom Ansatz her ungeeignet.

Für eine gezielte Bauteiloptimierung ist die Kenntnis des Schwingungsverhaltens im interessierenden Frequenzbereich unerlässlich. Eine gute Möglichkeit bietet hierzu die in der Baudynamik (z.B. Brückenbau) und dem Maschinenbau geläufige Modalanalyse. Die anhand der Modalanalyse ermittelten Schwingungsformen des Bauteils in den verschiedenen Frequenzbereichen geben direkte Hinweise auf mögliche Verbesserungsansätze durch Material- oder Konstruktionsänderungen. Die Modalanalyse ist typischerweise im tieffrequenten Bereich bei einer geringen Eigenmodendichte sinnvoll. Dies deckt sich mit dem aktuellen Entwicklungsbedarf von Holzbaukonstruktionen, da in der Praxis, insbesondere bei tiefen Frequenzen unter 100 Hz, akustische Defizite bestehen [8, 9, 10].

Die Eigenmoden des zu optimierenden Bauteils lassen sich entweder durch umfangreiche Körperschallmessungen (experimentelle Modalanalyse) oder durch geeignete Berechnungsmodelle ermitteln. Für die Berechnung und Bauteiloptimierung kommen analytische Modelle oder numerische Verfahren wie die Finite Elemente Methode (FEM) in Betracht.

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen eines Forschungsprojekts des Lehrstuhls für Computation in Engineering an der Technischen Universität München in Kooperation mit dem Fraunhofer Institut für Bauphysik, Stuttgart und dem ift Schallschutzzentrum, Rosenheim. Die analytischen Berechnungen und Modellversuche zur Optimierung der Deckenkonstruktion wurden am Fraunhofer Institut durchgeführt. FEM-Berechnungen zur Trittschallübertragung erfolgten am Lehrstuhl für Computation in Engineering der Technischen Universität München mit dem lehrstuhleigenen FEM-Programm *AdhoC* [11]. Die messtechnische Überprüfung der auf diesem Wege optimierten Deckenkonstruktionen wurde im ift Schallschutzzentrum durchgeführt [12, 13].

## 1.2 Zielsetzung

Aus der vorangestellten Motivation ergibt sich somit die *Zielsetzung* der Arbeit in der Bereitstellung leistungsfähiger Berechnungsmodelle zur Bauteiloptimierung. Anhand der zu entwickelnden Modelle auf Basis der FEM soll die Durchführung von Parameterstudien und die Prognose des schalltechnischen Verhaltens neuer Deckenkonstruktionen ermöglicht werden.

## 1.3 Übersicht der Arbeit

Zur Umsetzung der Zielsetzung werden in **Kapitel 2** zunächst die erforderlichen *Grundlagen* zur Berechnung der Körperschallschwingung und der Schallabstrahlung zusammengestellt.

Auf diesen Grundlagen aufbauend wird in **Kapitel 3** ein *Berechnungsverfahren der Trittschallübertragung* bei Anregung durch ein Norm-Hammerwerk vorgestellt. Hierzu erfolgt zunächst die Modellierung der Wechselwirkungen zwischen dem anregenden Hammerwerk und der schwingenden Deckenstruktur. Die Diskretisierung der Deckenstruktur erfolgt durchgängig mit Hexaeder-Elementen höherer Ordnung (p-FEM), die auch bei großen Seitenverhältnissen ein robustes Verhalten zeigen. Somit können sowohl schlanke, plattenartige als auch gedrungene Bauteile mit einem Elementtyp modelliert werden. Die anhand der FEM berechneten Eigenmoden der Struktur dienen zur Berechnung der resultierenden Schwingungsschnelle. Hierbei wird die Strukturdämpfung frequenzabhängig über modale Dämpfungsanteile berücksichtigt. Der abgestrahlte Trittschallpegel wird schließlich mit zwei unterschiedlichen Ansätzen berechnet und anhand von Messergebnissen validiert.

Die *Visualisierung* dieser Berechnungsergebnisse sowie die Unterstützung einer rationellen Modellerstellung durch eine graphische Nutzeroberfläche wird in **Kapitel 4** beschrieben. Die *Ergebnisse* der durchgeführten Parameterstudien zur Optimierung der Trittschalldämmung von Holzdecken werden in **Kapitel 5** dargestellt. Die abschließende *Zusammenfassung* erfolgt in **Kapitel 6**.

Zur Einführung in die Thematik wird in Abbildung 1.1 ein Flussbild des Berechnungsverfahrens der Trittschallübertragung gezeigt. Praxisübliche Deckenkonstruktionen, deren vielschichtiger Aufbau durch das Berechnungsmodell zu erfassen sind, werden in Abbildung 1.2 gezeigt. Abbildung 1.3 zeigt den Deckenprüfstand am ift Schallschutzzentrum, in dem die Messungen des Norm-Trittschallpegels zur Verifizierung der Berechnungsergebnisse durchgeführt wurden.

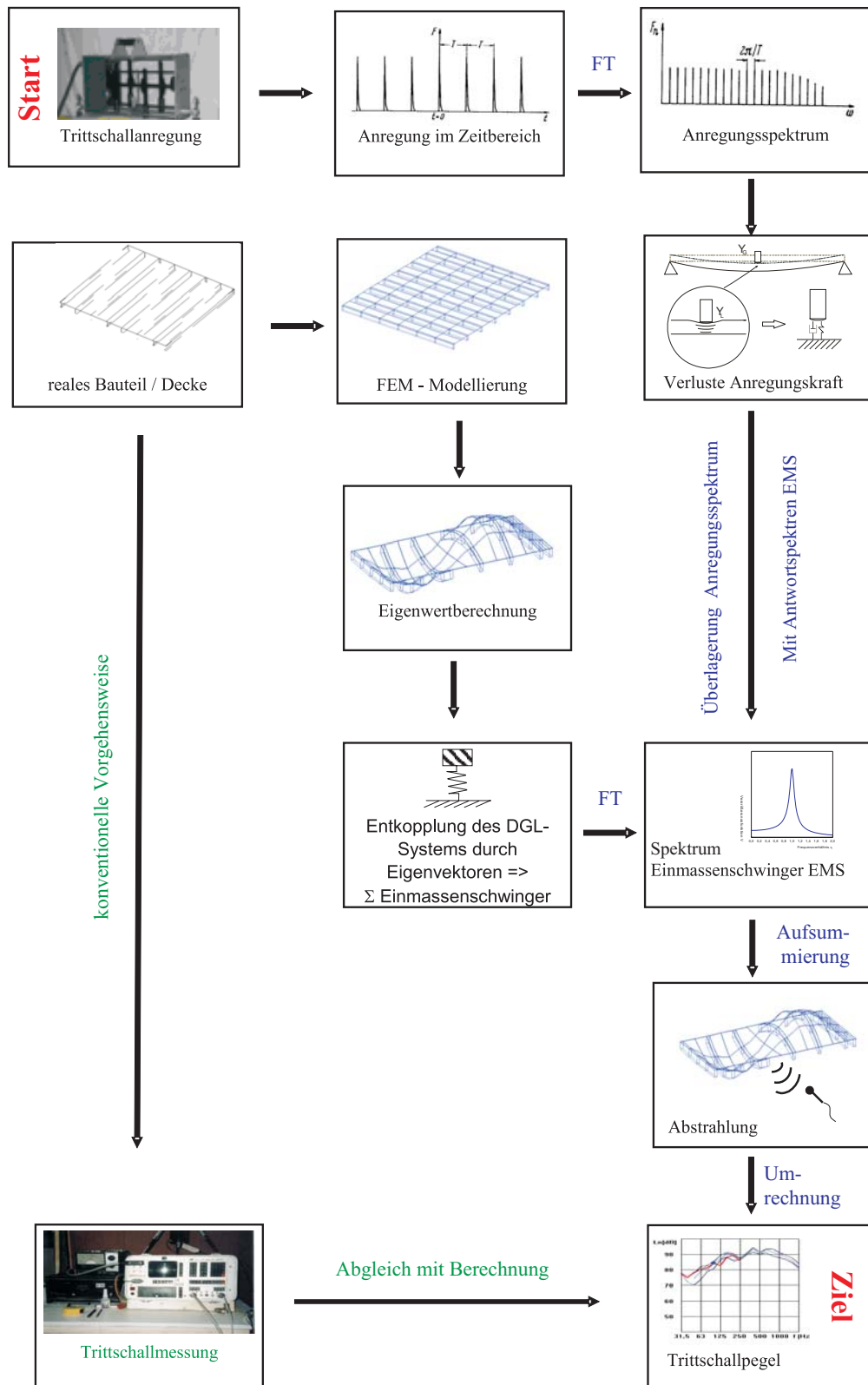


Abbildung 1.1: Flussbild des Berechnungsverfahrens


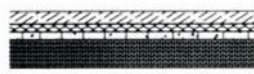
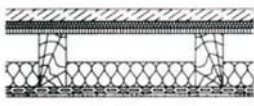
Schnitt	Konstruktion
	50 mm Zementestrich ( $m' = 115 \text{ kg/m}^2$ ) 35/30 mm MF-Trittschalldämmplatten <sup>②</sup> ( $s' \leq 5 \text{ MN/m}^2$ ; Typ T) 30 mm trockene Schüttung <sup>②</sup> ( $m' = 45 \text{ kg/m}^2$ ) 12 mm Sperrholz 28 mm Sichtschalung, Nut und Feder 220 mm Balken <sup>①</sup>
	50 mm Zementestrich ( $m' = 115 \text{ kg/m}^2$ ) 35/30 mm MF-Trittschalldämmplatten <sup>②</sup> ( $s' \leq 5 \text{ MN/m}^2$ ; Typ T) 30 mm trockene Schüttung <sup>②</sup> ( $m' = 45 \text{ kg/m}^2$ ) Rieselschutzpapier 120 mm Brettstapeldecke, genagelt
	50 mm Zementestrich ( $m' = 115 \text{ kg/m}^2$ ) 35/30 mm MF-Trittschalldämmplatten <sup>②</sup> ( $s' \leq 5 \text{ MN/m}^2$ ; Typ T) 22 mm Verlegespanplatte 220 mm Balken <sup>①</sup> 100 mm Hohlraumdämmung <sup>②</sup> 27 mm Federschiene <sup>④</sup> 12,5 mm Gipskartonplatte <sup>③</sup>

Abbildung 1.2: Beispiele praxisüblicher Deckenkonstruktionen im Holzbau [3]



Abbildung 1.3: Deckenprüfstand des ift Schallschutzzentrums, Rosenheim



# Kapitel 2

## Grundlagen

Als notwendige Grundlage der akustischen Berechnung wird zunächst die dynamische Differenzialgleichung für die Struktur und das Fluid hergeleitet (Abschnitt 2.1). Darauf aufbauend kann die Berechnung der Struktur-Eigenwerte mit der FEM erfolgen (Abschnitt 2.2). Die Eigenwerte dienen dann in der Spektralanalyse zur Berechnung der Körperschallschnelle unter Berücksichtigung der Anregung und der Strukturdämpfung (Abschnitt 2.3). Für die Berücksichtigung der Körperschallabstrahlung in das Fluid stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, die in Abschnitt 2.4 gegenübergestellt werden. Die Grundlagen für die Verifizierung und Validierung der Berechnungsergebnisse werden in Abschnitt 2.5 wiedergegeben.

### 2.1 Differenzialgleichungen der Dynamik

Schallereignisse in Festkörpern (Strukturen) und ruhenden Gasen oder Flüssigkeiten (Fluiden) bewirken zeitlich und örtlich verteilte Veränderungen der Ruhegrößen (Lage, Dichte, Spannung bzw. Druck). Da diese Änderungen gegenüber den Ruhegrößen sehr kleine Amplituden aufweisen, kann in der Regel ein lineares Stoffgesetz angenommen werden, das eine Voraussetzung für die Anwendung des Superpositionsprinzips in der Luft- und Körperschallberechnung darstellt [14]. Die Berechnung des Luft- und Körperschalls basiert auf den Differenzialgleichungen der Struktur (Abschnitt 2.1.1) und des Fluids (Abschnitt 2.1.2). Die Körperschallabstrahlung der Struktur ins Fluid sowie die Körperschallanregung der Struktur durch den Schalldruck im Fluid erfolgt über Randbedingungen der Kopplung zwischen Fluid und Struktur (Abschnitt 2.1.3).

Für weitergehende Details zur Herleitung der Differenzialgleichungen und der Kopplungsbedingungen sei auf [14, 15, 16, 17, 18, 19] verwiesen, die auch als Grundlage für die nachfolgenden Darstellungen dienen.

### 2.1.1 Differenzialgleichung der Struktur

Die Struktur-Differenzialgleichung bildet die Ausgangssituation für die Formulierung der Finiten Elemente in Abschnitt 2.2. Die Herleitung erfolgt im allgemeinen Fall für das Kontinuum aus dem *Gleichgewicht* am Elementarteilchen, den Zusammenhängen der *Kinematik* und dem *Stoffgesetz* (siehe auch [14, 17]).

Das *Gleichgewicht* wird an einem differentiellen Element (Elementarteilchen) der Struktur gebildet. Abbildung 2.1 zeigt hierzu für ein differentielles Element mit den Abmessungen  $dV = dx \times dy \times dz$  die Komponenten des Spannungstensors in kartesischen Koordinaten und der Verschiebung.

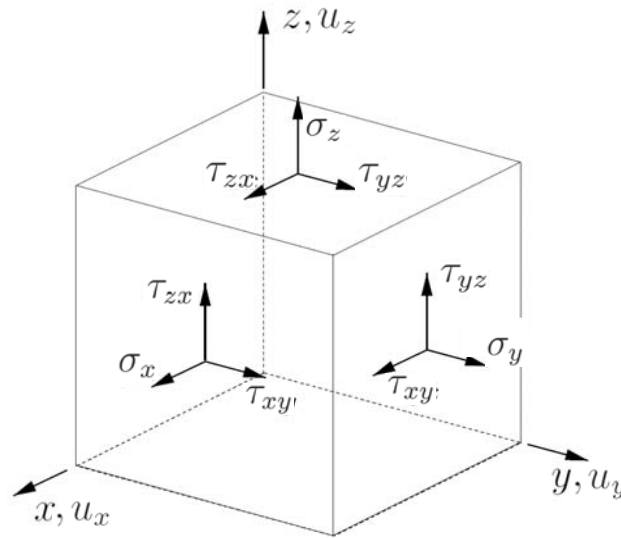


Abbildung 2.1: Komponenten des Spannungszustands und der Verschiebung am differentiellen Element

Die Spannungen am Element setzen sich aus den Normalspannungen  $\sigma$  und den Schubspannungen  $\tau$  zusammen. Sie sind ortsabhängig und erfahren über den Elementabmessungen infolge der Volumenkräfte  $b$  eine Veränderung gegenüber dem Zustand im Ursprung  $(x_0, y_0, z_0)$ . So ergibt sich beispielsweise für die Spannungskomponenten in Richtung der x-Koordinate an der Stelle  $x = x_0 + dx, y = y_0 + dy, z = z_0 + dz$ :

$$\sigma_x = \sigma_x(x_0) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(y_0) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}(z_0) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz$$

Unter Berücksichtigung des Newtonschen Trägheitsgesetzes ergibt sich aus den Spannungsänderungen und den Volumenkräften  $b$  im Gebiet  $V_s$  das Gleichgewicht zu:

$$\begin{aligned} \int_{V_s} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x - \rho_s \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \right) dV &= 0 \\ \int_{V_s} \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y - \rho_s \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \right) dV &= 0 \\ \int_{V_s} \left( \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + b_z - \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \right) dV &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für das Gleichgewicht am differentiellen Element:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x - \rho_s \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y - \rho_s \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + b_z - \rho_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

In matrizieller Schreibweise führt dies zu:

$$[D]^T \{\sigma\} + \{b\} - \rho_s \frac{d^2}{dt^2} \{u\} = 0 \quad (2.1)$$

Hierzu wurden die Spannungen in der *Voigtschen Notation* unter Ausnutzung der Symmetrie im Spannungsvektor  $\{\sigma\}$  zusammengefasst und die partiellen Ableitungen durch die Differentialoperatormatrix  $[D]$  ausgedrückt:

$$\{\sigma\}^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}] \quad (2.2)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Für die Beschreibung der *Kinematik* in matrizieller Schreibweise werden die Verschiebungen im Verschiebungsvektor  $\{u\}$  und die Verzerrungen wiederum in Voigtscher Notation im Verzerrungsvektor  $\{\epsilon\}$  zusammengefasst:

$$\{u\}^T = [u_x(x, y, z) \quad u_y(x, y, z) \quad u_z(x, y, z) ] \quad (2.4)$$

$$\{\epsilon\}^T = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} ] \quad (2.5)$$

Für kleine Verschiebungen im Sinne der linearen Elastizitätstheorie besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Verzerrungen:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dieser Zusammenhang kann wiederum durch die Differentialoperatormatrix  $[D]$  ausgedrückt werden:

$$\{\epsilon\} = [D] \{u\}; \quad (2.7)$$

Das *Stoffgesetz* liefert schließlich den linearen Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung durch das Hook'sche Gesetz:

$$\{\sigma\} = [A] \{\epsilon\} \quad (2.8)$$

Die Matrix  $[A]$  enthält hierbei die Materialeigenschaften. Für isotrope Materialien ergibt sich  $[A]$  zu:

$$[A] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} A_{11} & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & A_{22} & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

mit:

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = A_{33} = (1 - \nu) \\ A_{44} &= A_{55} = A_{66} = (1 - 2\nu)/2 \end{aligned}$$

Für orthotrope Materialien ergibt sich  $[A]$  nach [17] zu:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

mit:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_x}{D_0} \left(1 - \nu_{yz}^2 \frac{E_z}{E_y}\right), & A_{12} &= A_{21} = \frac{E_y}{D_0} (\nu_{xy} + \nu_{yz} \nu_{zx} \frac{E_z}{E_y}), & A_{13} &= A_{31} = \frac{E_z}{D_0} (\nu_{xy} \nu_{yz} + \nu_{zx}) \\ A_{22} &= \frac{E_y}{D_0} \left(1 - \nu_{zx}^2 \frac{E_z}{E_x}\right), & A_{23} &= A_{32} = \frac{E_z}{D_0} (\nu_{yz} + \nu_{xy} \nu_{zx} \frac{E_y}{E_x}), & A_{33} &= \frac{E_z}{D_0} \left(1 - \nu_{xy}^2 \frac{E_y}{E_x}\right) \end{aligned}$$

und:

$$D_0 = 1 - \nu_{yz}^2 \frac{E_z}{E_y} - \nu_{xy}^2 \frac{E_y}{E_x} - 2\nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx} \frac{E_z}{E_x} - \nu_{zx}^2 \frac{E_z}{E_x}$$

Werden nun die kinematischen Beziehungen (2.7) und die Beziehungen des Stoffgesetzes (2.8) in die Bewegungsgleichung (2.1) eingesetzt, erhält man die Differenzialgleichung des Kontinuums in matrizieller Schreibweise:

$$[D]^T ([A] ([D] \{u\})) + \{b\} = \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad (2.11)$$

Für isotrope Materialien ergibt sich unter Vernachlässigung der Volumenkräfte aus (2.11) die *Lamésche* Differenzialgleichung (siehe z.B. [14]):

$$G \left( \Delta \{u\} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div} \{u\} \right) = \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u\} \quad (2.12)$$

## 2.1.2 Differenzialgleichung des Fluids

Die Differenzialgleichung des Fluids kann nach CREMER und MÜLLER [15] in Analogie zur Struktur-Differenzialgleichung aus der *Bewegungsgleichung*, den *kinematischen Beziehungen* und dem *Stoffgesetz* hergeleitet werden. Ausgangspunkt der Herleitung ist ein ruhendes differenzielles Volumenelement des Fluids mit dem Ausgangsvolumen  $V_0 = dx \times dy \times dz$ , dem Luftdruck  $P_0$  und der Dichte  $\rho_0$ .

Die *Bewegungsgleichung* erhält man durch die Betrachtung der aus einem Schallereignis resultierenden Druckverteilung  $P(x, y, z, t)$  im Fluidelement. Der daraus resultierende Schalldruck  $p(x, y, z, t)$  wird dem statischen Luftdruck  $P_0$  überlagert ( $P(x, y, z, t) = P_0 + p(x, y, z, t)$ ). Wie Abbildung 2.2 für die x-Koordinatenrichtung illustriert, ergibt sich aus der Schalldruckänderung des Elements eine resultierende Kraft auf die Fluidteilchen (Luftmoleküle), der die Newtonschen Trägheitskraft entgegenwirkt.

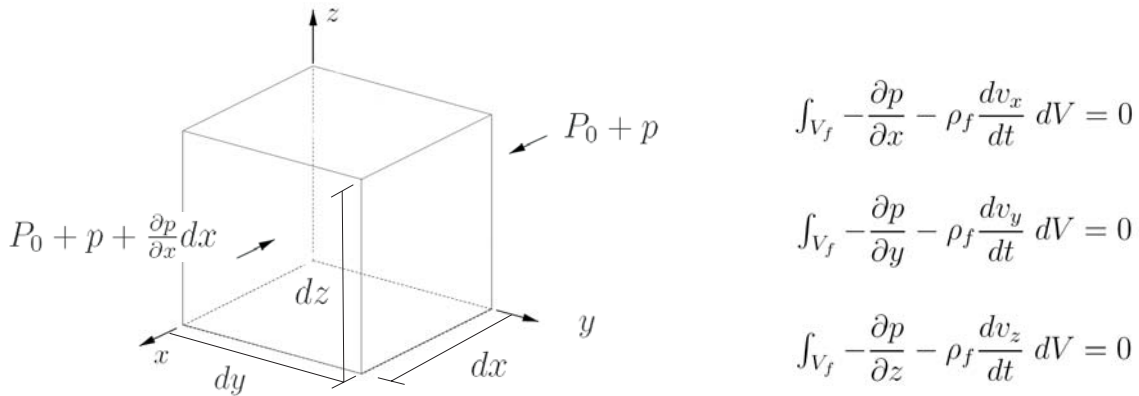


Abbildung 2.2: Differenzielles Fluidelement unter Einwirkung des Schalldrucks  $p$

Die Dichte  $\rho_f$  ist im kompressiblen Fluid ebenso zeit- und ortsabhängig wie der Druck. Sie resultiert aus der statischen Dichte  $\rho_0$  des Fluids, dem die Dichteschwankungen aus dem Schallfeld  $\Delta\rho(x, y, z, t)$  überlagert werden. Da dieser Anteil sehr klein ist im Vergleich zur statischen Dichte, kann von einer konstanten Dichte ausgegangen werden ( $\rho_f = \rho_0 + \Delta\rho(x, y, z, t) \approx \rho_0$ ).

Die in Abbildung 2.2 auftretenden Schnellen ( $v_x, v_y, v_z$ ) bezeichnet die Komponenten der vektoriellen Teilchengeschwindigkeit bzw. Schallschnelle  $\{v\}$  in den Koordinatenrichtungen. Da die Teilchengeschwindigkeit eine zeit- und ortsabhängige Funktion darstellt, berücksichtigt ihre zeitliche Ableitung sowohl die zeitliche Änderung der Schnelle ohne Ortswechsel des Fluidelements (durch eine oszillierende Teilchenbewegung), als auch die Veränderung der Teilchengeschwindigkeit durch einen Ortswechsel im differentiellen Zeitschritt  $dt$  [15]. Damit ergibt sich für die Teilchengeschwindigkeit in x-Richtung  $\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_{0,x} \frac{\partial v_x}{\partial x}$ .

In der Raumakustik, die von einem ruhenden Fluid ausgeht, spielt der erste Anteil, der durch die partielle Ableitung  $\partial v_x / \partial t$  dargestellt wird, die dominante Rolle. In einer stationären Strömung mit der Strömungsgeschwindigkeit  $v_0$  überwiegt hingegen der zweite, nichtlineare

Anteil. Unter Vernachlässigung der nichtlinearen Anteile ergibt sich aus dem Gleichgewicht die Eulersche Bewegungsgleichung für das Fluid:

$$\text{grad } p + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \{v\} = 0 \quad \text{mit :} \quad \text{grad } p = \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{\partial p}{\partial y} \quad \frac{\partial p}{\partial z} \right\}^T \quad (2.13)$$

Die *kinematischen Beziehungen* des Fluids können aus der Betrachtung eines Fluidelements zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten gewonnen werden. Hierbei wird von einer konstanten Teilchenanzahl (Luftmoleküle) im Element ausgegangen<sup>1</sup>. Auf Grund der unterschiedlichen Teilchengeschwindigkeiten und -richtungen ändert das Fluidelement im Zeitraum  $dt$  sein Volumen. So erhält man zum Zeitpunkt  $T + dt$  für die Länge des Elements in x-Richtung:  $dx + \partial v_x / \partial x dx dt$  also eine Längenänderung um  $\partial v_x / \partial x dx dt$  gegenüber dem Ausgangszustand.

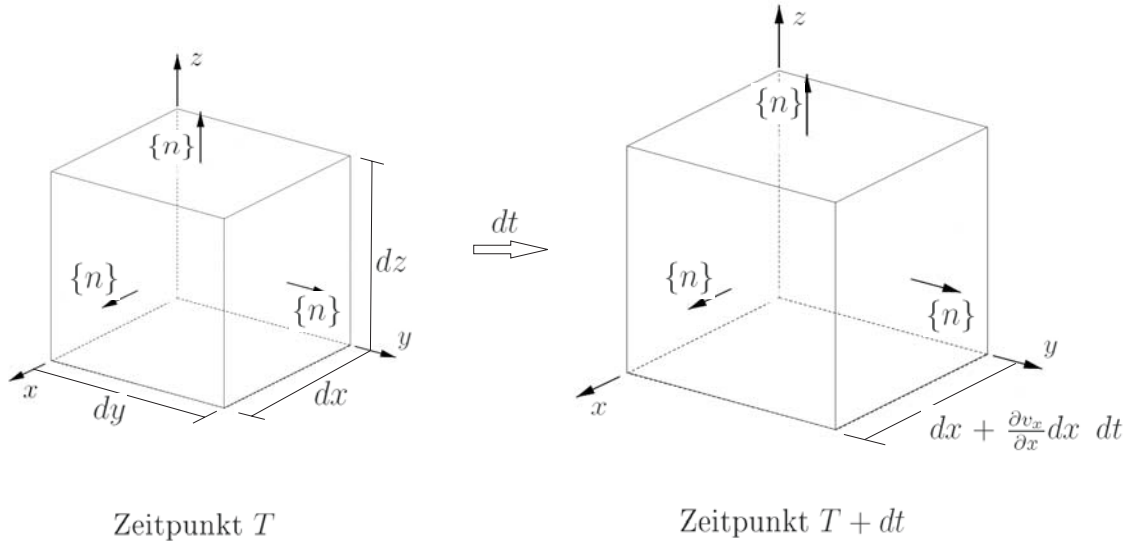


Abbildung 2.3: Volumenelement des Fluids zum Zeitpunkt  $T$  und zum Zeitpunkt  $T + dt$

Die Division der Längenänderung durch die ursprüngliche Länge  $dx$  und durch  $dt$  ergibt die zeitliche Änderung der Dehnung des Elements in x-Richtung  $\frac{d\epsilon_x}{dt} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt}{dx dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ . Für die Volumendehnung des Fluidelements  $\epsilon_f = \Delta V / V_0$  ist in Analogie die dreidimensionale Längenänderung des Elements zu berücksichtigen:

$$\frac{d\epsilon_f}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.14)$$

Gleichung (2.14) enthält somit sowohl auf der linken Seite (durch die zeitliche Ableitung der Volumendehnung  $d\epsilon_f/dt$ ) als auch auf der rechten Seite nichtlineare Anteile.

<sup>1</sup>Eine alternative Vorgehensweise stellt die Voraussetzung eines konstanten Volumenelementes und die Betrachtung des durch die Volumenoberfläche tretenden Masseflusses dar. Dies führt unter der Bedingung der Masseerhaltung auf die gleichen Ergebnisse (siehe z.B. [18])

Werden diese Anteile unter der Voraussetzung des ruhenden Fluids und kleiner Amplituden der Teilchenschnelle vernachlässigt<sup>2</sup> so erhält man die linearisierte Form der kinematischen Beziehung:

$$\frac{\partial \epsilon_f}{\partial t} = \operatorname{div} \{v\}; \quad \text{mit: } \operatorname{div} \{v\} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.15)$$

Der noch benötigte Zusammenhang zwischen Schalldruck  $p$  und Volumendehnung  $\epsilon_f$  wird in Analogie zur Festkörpermechanik für kleine Amplituden durch ein *lineares Stoffgesetz* gegeben:

$$p = -K \epsilon_f \quad (2.16)$$

Das Kompressionsmodul  $K$  wird in der Thermodynamik aus der Boyle-Mariottischen Gleichung und der Annahme adiabatischer Zustandsänderungen gewonnen ( $K_{Luft} = \chi P_0 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  siehe z.B. [15, 14]).

Um den Raum durch die *Wellengleichung* beschreiben zu können wird zunächst die Divergenz der Bewegungsgleichung (2.13) gebildet und danach die kinematische Beziehung (2.15) eingesetzt.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p + \rho_0 \frac{\partial^2 \epsilon_f}{\partial t^2} = 0 \quad (2.17)$$

Nach dem Einsetzen des Stoffgesetzes (2.16) in (2.17) und der Darstellung der Operation *div grad* durch den Laplace Operator  $\Delta$  ergibt sich die Wellengleichung zu:

$$\Delta p - \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

Der Faktor  $\rho_0/K$  ist ein Maß für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle im Fluid und wird durch die Schallgeschwindigkeit  $c_0 = \sqrt{K/\rho_0}$  beschrieben.<sup>3</sup>

Wird eine zeitharmonische Wellenbewegung vorausgesetzt,

$$p(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(x, y, z) e^{-j\omega_n t}$$

so erhält man die als Helmholtzgleichung bezeichnete Darstellung der Wellengleichung:

$$\Delta p_n + \frac{\omega_n^2}{c_0^2} p_n = 0 \quad \text{bzw:} \quad \Delta p + \frac{\omega^2}{c_0^2} p = 0 \quad (2.19)$$

<sup>2</sup>Die nichtlinearen Anteile spielen erst bei Schalldruckamplituden jenseits der Schmerzgrenze eine Rolle [14]

<sup>3</sup>Ist das Fluid in einem porösen Dämmstoff abzubilden, so können effektive Werte für das Kompressionsmodul und die Dichte gebildet werden [20]



### 2.1.3 Rand- und Kopplungsbedingungen

Zur Berechnung der Trittschallübertragung ist zunächst die Einkopplung der Anregungskraft in die Struktur zu berücksichtigen und im zweiten Schritt die Kopplung zwischen der schwingenden Struktur und dem Fluid. Beide Kopplungen werden über die Randbedingungen an der Strukturgrenzschicht abgebildet.

Bei der Anregung der Struktur mit dem Norm-Hammerwerk erfolgt eine Wechselwirkung zwischen dem aufprallenden Hammer (Stahlzylinder) und der schwingenden Struktur, die durch eine Kraft- und eine Verschiebungsrandbedingung während des Kontakts zwischen Hammer und Struktur beschrieben werden (siehe Abbildung 2.4).

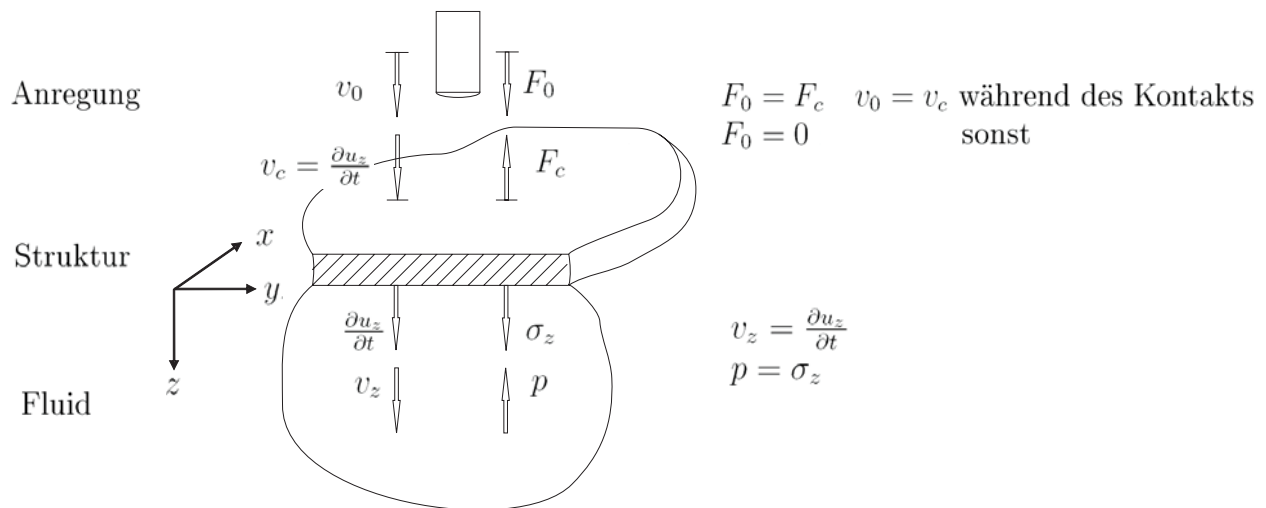


Abbildung 2.4: Kopplung bei der Anregung und der Abstrahlung von Körperschall

Die Anregung des Fluids durch die schwingende Struktur erfolgt durch die Verschiebungsrandbedingung an der Grenzschicht ( $v_z = \partial u_z / \partial t$ ), die Rückwirkung auf die Struktur durch die Kraft-Randbedingung ( $\sigma_z = p$ ).

Bei einer *schwachen Kopplung* wird für die Anregung des Fluids nur die Verschiebungsrandbedingung berücksichtigt. Dies ermöglicht eine getrennte Berechnung der Struktur und des Fluids. Spielt die Rückwirkung des Fluids auf die Struktur eine nicht zu vernachlässigende Rolle, so ist eine *vollständige Kopplung* zu berücksichtigen. Ein Entscheidungskriterium für die Wahl der Kopplung stellt das Impedanzverhältnis von Fluid und Struktur dar.<sup>4</sup> Nach [19] ist ein geringer Einfluss der Rückwirkung gegeben, wenn das Impedanzverhältnis zwischen Fluid ( $I = \rho_f c_0$ ) und Struktur ( $\rho_s d_s \omega = m' \omega$ ) kleiner 1 ist:

$$\frac{\rho_f c_0}{m' \omega} < 1 \quad (2.20)$$

<sup>4</sup>Die Impedanz ( $I = F/v$ ) beschreibt die erforderliche Kraft  $F$ , um eine bestimmte Schnelle  $v$  der Struktur bzw. des Fluids zu bewirken.

## 2.2 Grundlagen zur FEM Berechnung der Struktur

Die in Abschnitt 2.1 hergeleiteten Differenzialgleichungen beschreiben an einem differentiellen Element das Verhalten der Struktur und des Fluids bei einer dynamischen Anregung. Die Lösung der Differenzialgleichungen stellt die Funktion der gesuchten Größe der Struktur-Verformung  $\{u\}$  oder des Schalldrucks  $p$  im untersuchten Gebiet und auf dem Rand dar. Als Lösungsverfahren stehen hierzu analytische und numerische Verfahren zur Verfügung.

Die analytischen Verfahren sind auf einfache Bauteile und Randbedingungen beschränkt, für die ein Ansatz der gesuchten Funktion existiert, der die Differenzialgleichung im Gebiet und auf dem Rand erfüllt. Bei bauüblichen Konstruktionen, die aus mehreren Elementen oder Schichten zusammengesetzt sind und komplexe Randbedingungen aufweisen, ist es nicht mehr ohne weiteres möglich einen Ansatz zu finden, der allen Anforderungen gerecht wird. Zur Berechnung komplexer Bauteile wurden deshalb bereits Anfang des 20. Jahrhunderts numerische Methoden erarbeitet, aus denen sich schrittweise die FEM entwickelt hat (siehe [21]).

Die numerischen Methoden ermöglichen eine Lösung der Aufgabenstellung indem sie einen Näherungsansatz für die Funktion der unbekanntenen Größe verwenden. Dieser Ansatz besteht in der Regel aus vorgegebenen Formfunktionen und freien Koeffizienten, die es zu bestimmen gilt. Der Ansatz der gesuchten Funktion wird in der Regel in die "schwache Form der Differenzialgleichung" eingesetzt, die über die Forderung nach dem Energieminimum aus dem Funktional gewonnen werden kann. So wird bei der *Ritz-Methode* [22] für die Struktur-Verschiebung ein Minimum der potentiellen und kinetischen Energie gefordert (siehe auch [23]). Für Aufgabenstellungen die nicht über ein Energieminimum erschließbar sind kann die allgemeinere *Galerkin-Methode* [24] angewendet werden, bei der nach Einsetzen der Ansatzfunktionen in die Differenzialgleichung ein Minimum des verbleibenden Residuums über dem Gebiet gefordert wird (siehe [25]).

Der wesentliche Unterschied der aus diesen Methoden entwickelten FEM besteht darin, dass die Ansatzfunktionen in der FEM nicht auf dem gesamten Gebiet, sondern auf Teilstücken (Finiten Elementen) definiert sind, wodurch eine allgemeinere Anwendbarkeit der Methode ermöglicht wird. Nachfolgend wird die prinzipielle Funktionsweise der FEM-Berechnung bei statischen und dynamischen, elastomechanischen Aufgabenstellungen beschrieben und auf die entsprechenden Literaturquellen verwiesen, an denen sich die Darstellungen orientieren. Weitergehende Details können z.B. [21, 23, 25, 26, 27, 28] entnommen werden.

### 2.2.1 Übersicht der Methode

Die in Abbildung 2.5 dargestellten fünf Berechnungsschritte der FEM, ausgehend von der realen Struktur bis zum verifizierten und validierten Ergebnis, werden im FEM Programm, auf Basis der hierzu erforderlichen physikalischen und mathematischen Grundlagen, in den drei Programmabschnitten der Vorlaufrechnung (Pre-processing), der Lösungsphase (Solution) und der Nachlaufrechnung (Post-processing) umgesetzt. Der Ablauf dieser Programmabschnitte wird vom Anwender über die Programmeingaben gesteuert.

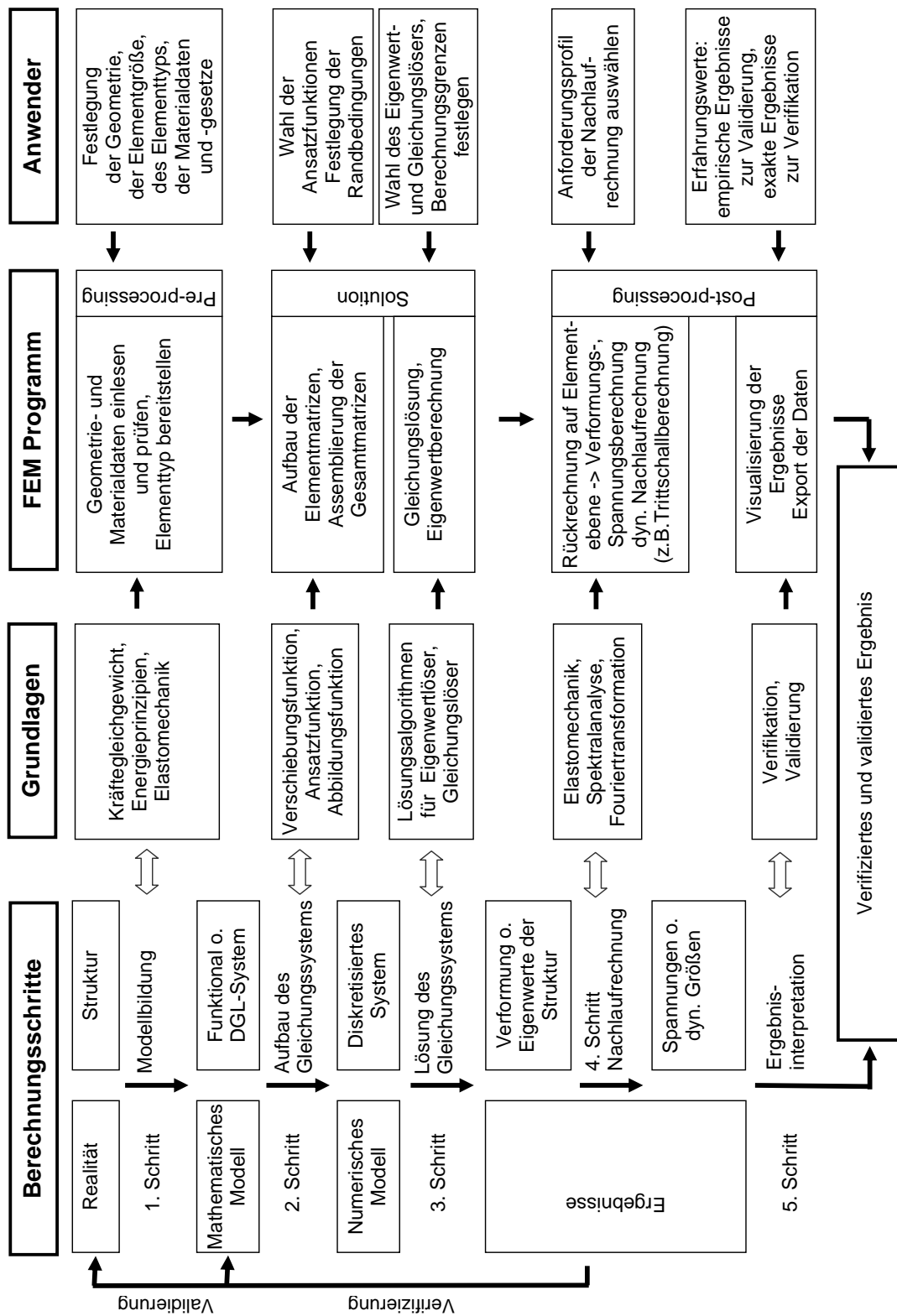


Abbildung 2.5: Übersicht der FEM für statische und dynamische Struktur-Berechnungen

### 1.Schritt: Modellbildung

In der Modellbildung erfolgt durch den Anwender zunächst eine *Idealisierung* der Aufgabenstellung und eine *Diskretisierung* der zu untersuchenden Struktur. Die *Idealisierung* der Aufgabenstellung beinhaltet die Einführung vereinfachender Annahmen, wie z.B. die Annahme einer linearen Kinematik oder eines homogenen und isotropen Materials. Die *Diskretisierung* der Struktur erfolgt durch die Unterteilung des gegebenen Gebietes in einzelne Teilgebiete, die sogenannten Elemente. Für die in Abbildung 2.6 gezeigte Holzbalkendecke bietet es sich beispielsweise an, die Balkenlage und die Beplankung in einzelne Elemente zu unterteilen. Bei der Auswahl des Elementtyps erfolgt häufig eine weitere Idealisierung durch die Verwendung dimensionsreduzierter Platten-, Schalen- oder Balkenelemente. So können die Balken in Abbildung 2.6 - alternativ zur dargestellten Modellierung mit dreidimensionalen Hexaederelementen - eindimensional durch Balkenelemente oder zweidimensional durch Schalenelemente modelliert werden.

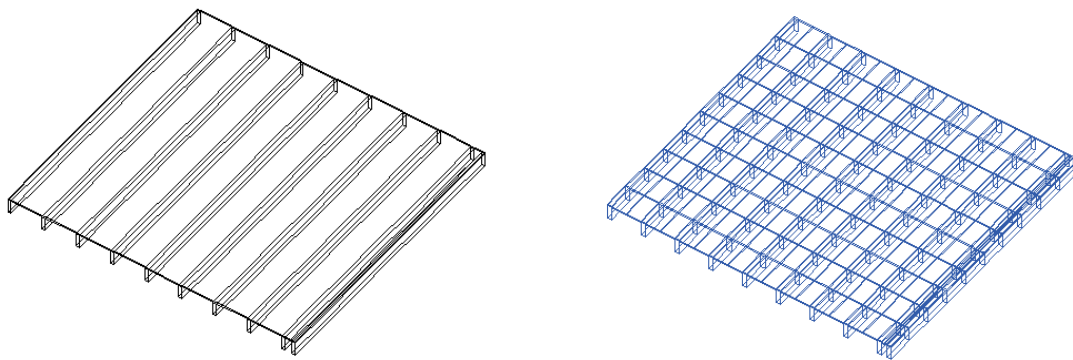


Abbildung 2.6: Beispiel einer Holzbalkendecke aus Balkenlage und Beplankung mit Diskretisierung in Hexaederelementen

### 2.Schritt: Aufbau des Gleichungssystems

Für das aus der Idealisierung und Diskretisierung resultierende Element wird nun ein problemgerechter Ansatz für die gesuchte Funktion formuliert. Bei dem hier gewählten Struktur-Beispiel kann die gesuchte Funktion durch eine reine Verschiebungsformulierung<sup>5</sup> ausgedrückt werden. Die möglichen Verformungen des Elements werden durch Verschiebungsfunktionen angenähert, die sich aus Formfunktionen und ihren Koeffizienten zusammensetzen. Die Formfunktionen müssen bestimmte Kriterien erfüllen, um sowohl die Berechnung von Starrkörperverschiebungen als auch die Stetigkeit der Verformungs- und Biegelinien gewährleisten zu können. Die zu erwartende Genauigkeit der Berechnung ist abhängig von der Güte der gewählten Formfunktionen und der Diskretisierung (Elementgröße).

<sup>5</sup>Eine analoge Anwendung auf den Schalldruck im Fluid wird in Abschnitt 2.4.2 gezeigt

Um die Genauigkeit zu erhöhen können entweder die Polynomgrade der verwendeten Formfunktionen schrittweise erhöht werden (p-Version der FEM), oder die Elementgröße bei unverändertem Polynomgrad verringert werden (h-Version der FEM). Das Einsetzen der Verschiebungsfunktionen (Abschnitt 2.2.2) in die schwache Form der Differenzialgleichung bewirkt die Diskretisierung der Problemstellung (Abschnitt 2.2.3) und ermöglicht dadurch eine numerische Lösung. Hierzu werden zunächst die Elementmatrizen (Massen- und Steifigkeitsmatrix) gebildet und dann das Gesamt-Gleichungssystem unter Berücksichtigung der Randbedingungen aufgebaut.

### *3.Schritt: Lösung des Gleichungssystems*

Bei (linearen) statischen Aufgabenstellungen kann das Gleichungssystem direkt gelöst werden. Bei dynamischen Aufgabenstellungen ist die Lösung im Zeitbereich (Zeitschrittverfahren) oder im Frequenzbereich möglich. Für die Lösung im Frequenzbereich ist die Berechnung für jede interessierende Frequenz separat durchzuführen. Alternativ können zunächst die Eigenwerte des unbelasteten Systems aus der Massen- und der Steifigkeitsmatrix berechnet werden (Abschnitt 2.2.4). Die Ermittlung des Schwingungsverhaltens bei einer gegebenen Belastung erfolgt dann in der Nachlaufrechnung anhand der modalen Superposition.

### *4.Schritt: Nachlaufrechnung*

In der Nachlaufrechnung (Post-processing) erfolgt zunächst die Rückrechnung der ermittelten Verschiebungsgrößen auf Elementebene, sowie die Bereitstellung der Eigenfrequenzen und Eigenmoden bei dynamischen Berechnungen. Diese werden nun verwendet, um die Schwingungsanfälligkeit eines Systems zu beurteilen, oder das Antwortspektrum der Struktur auf eine gegebene Anregung anhand der modalen Superposition (Spektralanalyse) zu ermitteln. Die Grundlagen der Spektralanalyse werden in Abschnitt 2.3 umrissen. Ihre Anwendung bei der Trittschallberechnung wird in Kapitel 3 gezeigt. Die Ergebnisse werden zur nachfolgenden Interpretation durch den Benutzer im Post-processing in der Regel visualisiert und zur weiteren Verarbeitung in anderen Programmen zur Verfügung gestellt. Die Visualisierung der Trittschallergebnisse wird in Kapitel 4 beschrieben.

### *5.Schritt: Ergebnisinterpretation*

Ein entscheidender Schritt der FEM Berechnung ist die Ergebnisinterpretation und -kontrolle. Die Komplexität des Berechnungsvorgangs und der berechenbaren Modelle birgt für den Anwender die Gefahr, FEM Programme als "black box" ohne kritische Ergebniskontrolle zu verwenden. Die im ersten Schritt beschriebene Modellierung birgt jedoch ein umfangreiches Fehlerpotential, das zu kontrollieren ist. Zur Kontrolle der Ergebnisse stehen die Verifizierung und die Validierung zur Verfügung, deren Grundlagen in Abschnitt 2.5 beschrieben werden.

### 2.2.2 Ansatzfunktionen der Verschiebung

Die Aufgabe der Ansatzfunktionen besteht darin, die gesuchte Funktion der charakteristischen Größe einer Problemstellung näherungsweise zu beschreiben. Bei der Strukturanalyse wird die charakteristische Größe in der *Laméschen* Differenzialgleichung (2.12) durch die Verschiebung  $\{u\}$  dargestellt. Durch die Ansatzfunktionen ist somit der Verschiebungsvektor  $\{u\}$  an einem beliebigen Punkt  $(x, y, z)$  des Elementes auszudrücken. Hierzu wird ein Verschiebungsansatz gemacht, der sich multiplikativ aus den Formfunktionen  $N$  und den Koeffizienten  $\tilde{u}$  zusammensetzt [25]:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{x,1}N_1(x, y, z) + \tilde{u}_{x,2}N_2(x, y, z) + \dots + \tilde{u}_{x,n}N_n(x, y, z) \\ \tilde{u}_{y,1}N_1(x, y, z) + \tilde{u}_{y,2}N_2(x, y, z) + \dots + \tilde{u}_{y,n}N_n(x, y, z) \\ \tilde{u}_{z,1}N_1(x, y, z) + \tilde{u}_{z,2}N_2(x, y, z) + \dots + \tilde{u}_{z,n}N_n(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

In matrizieller Schreibweise ergibt sich:

$$\{u\} \approx [N]_s \{\tilde{u}\} \quad (2.21)$$

mit den Formfunktionen  $[N]_s$  für die Struktur:

$$[N]_s = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

und den Koeffizienten  $\tilde{u}$ :

$$\{\tilde{u}\}^T = [\tilde{u}_{x,1} \ \tilde{u}_{y,1} \ \tilde{u}_{z,1} \ \dots \ \tilde{u}_{x,n} \ \tilde{u}_{y,n} \ \tilde{u}_{z,n}] \quad (2.23)$$

Die Anzahl  $n$  der benötigten Formfunktionen wird durch die betrachteten Freiheitsgrade des Elements bestimmt. Für jeden Freiheitsgrad des Elements wird eine Formfunktion verwendet. Im einfachsten Fall eines linearen Ansatzes für die Verschiebungen  $(u_x, u_y, u_z)$  ergeben sich beispielsweise für die 8 Eck-Knoten eines Hexaederelements 24 Freiheitsgrade. Es sind somit  $3 \times 8$  Formfunktionen für die Verschiebungen in den drei Koordinatenrichtungen zu wählen.

Die Wahl der Formfunktionen hat einen wesentlichen Einfluss auf die Genauigkeit und Effizienz der Berechnung. In der h- und der p-Version der FEM werden unterschiedliche Vorgehensweisen bei der Auswahl der Formfunktionen verfolgt.

In der h-Version der FEM werden als Formfunktionen häufig Lagrange Polynome mit Polynomgraden zwischen  $p = 1, \dots, 3$  eingesetzt. Für  $p > 1$  werden zusätzliche Knoten eingeführt, die zwischen den Eck-Knoten des Elements liegen. Die Formfunktion, die dem jeweiligen Knoten zugeordnet ist, nimmt dort den Wert 1 und an allen anderen Knoten den Wert 0 an. Die Koeffizienten stellen hier also die Knotenverschiebungen dar und werden deshalb häufig als Knotenvariablen bezeichnet. Der komplette Satz der Formfunktionen ist für jeden Polynomgrad neu aufzustellen [21, 23, 25, 29, 30].

Im Gegensatz hierzu werden in der p-Version der FEM hauptsächlich hierarchische Funktionen eingesetzt, die aus orthogonalen Legendre Polynomen gebildet werden. Der Satz der Formfunktionen höherer Polynomgrade beinhaltet die Formfunktionen niedrigerer Polynomgrade [26, 31, 27, 32, 33]. Abbildung 2.7 illustriert diesen grundsätzlichen Unterschied am Beispiel eines eindimensionalen Elements.

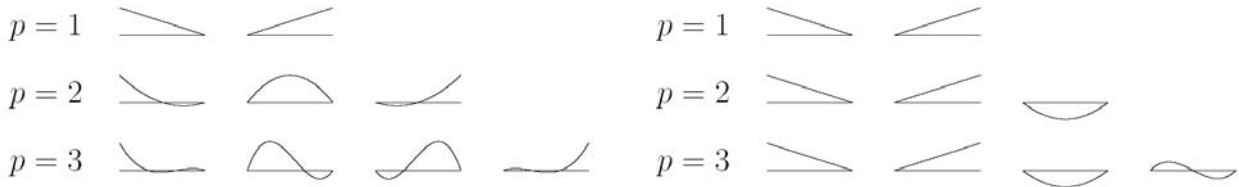


Abbildung 2.7: Eindimensionale Formfunktionen. Links nicht-hierarchisch, rechts hierarchisch aufgebaut [28].

Die hierarchischen Formfunktionen ergeben sich nach SZABÓ und BABUŠKA [26] zu:

$$N_1(\xi) = 1/2(1 - \xi), \quad N_2(\xi) = 1/2(1 + \xi), \quad N_i(\xi) = \Phi_{i-1}(\xi), \quad i = 3, 4, \dots, p+1 \quad (2.24)$$

mit:

$$\Phi_j(\xi) = \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} L_{j-1}(x) dx, \quad j = 2, 3, \dots, p \quad (2.25)$$

die Legendre-Polynome  $L_k$  sind gegeben durch:

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad x \in (-1, 1), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Der Index  $i$  gibt in (2.24) die laufende Nummer der Formfunktion an, der Index  $j$  in (2.25) den Polynomgrad  $p$  der Formfunktion. Bei mehrdimensionalen Elementen können die Polynomgrade in der aktuellen Implementierung von *AdhoC* sowohl für die unterschiedlichen Koordinatenrichtungen des Elements als auch für die jeweilige Variable individuell festgelegt werden. Für ein dreidimensionales Element erfolgt die Vorgabe der Polynomgrade im Pre-processing über folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & u_x & u_y & u_z \\
 & \xi & p_{\xi, u_x} & p_{\xi, u_y} & p_{\xi, u_z} \\
 p = & \eta & p_{\eta, u_x} & p_{\eta, u_y} & p_{\eta, u_z} \\
 & \zeta & p_{\zeta, u_x} & p_{\zeta, u_y} & p_{\zeta, u_z}
 \end{array} \quad (2.27)$$

So wird für die Verschiebung  $u_x$  in der lokalen Koordinatenrichtung  $\xi$  nach (2.27) der maximale Polynomgrad des Ansatzraums mit  $p_{\xi, u_x}$  festgelegt. In AdhoC können drei verschiedene Ansatzräume für die Polynomgrade der Formfunktionen gewählt werden. Neben dem vollen Ansatzraum sind auch reduzierte Ansatzräume für die Flächen- und inneren Moden oder anisotrope Ansatzräume möglich (siehe [11]).



Für ein Hexaederelement werden die hierarchischen Formfunktionen in 4 Gruppen eingeteilt. Die Zuordnung der Knoten, Kanten und Flächen ist in Abbildung 2.8 gegeben.

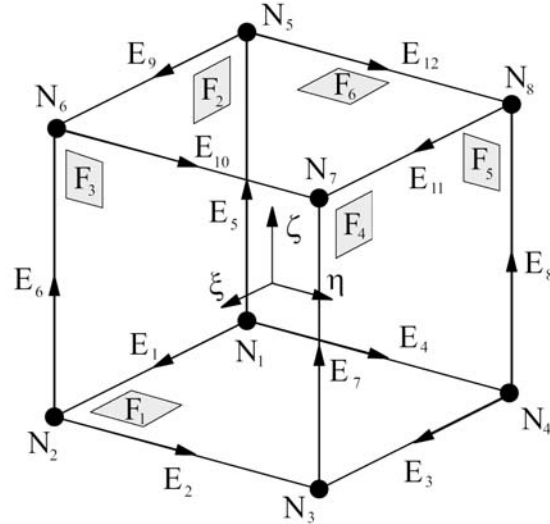


Abbildung 2.8: Standard Hexaederelement: Definition der Knoten, Kanten und Flächen [28]

1. Knoten-Moden: Die Knoten-Moden sind die üblichen trilinearen Formfunktionen mit den lokalen Koordinaten  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  des  $i$ -ten Knotens.

$$N_{1,1,1}^{N_i}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)(1 + \zeta_i\zeta), \quad i = 1, \dots, 8 \quad (2.28)$$

2. Kanten-Moden: Die Formfunktionen der Kanten-Moden nehmen in den sie berandenden Knoten den Wert 0 an und werden auf den angrenzenden Flächen bis zur gegenüberliegenden Kante linear auf den Wert 0 reduziert. Für die lokale Kante  $E_1$  ergibt sich die Formfunktion zu:

$$N_{i,1,1}^{E_1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \zeta)\Phi_i(\xi), \quad i = 2, 3, \dots \quad (2.29)$$

3. Flächen-Moden: Die Formfunktionen der Flächen-Moden nehmen in den sie berandenden Kanten den Wert 0 an und werden linear bis zu ihrer im Element gegenüberliegenden Fläche auf den Wert 0 reduziert. Für die lokale Fläche  $F_1$  ergibt sich die Formfunktion zu:

$$N_{i,j,1}^{F_1}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta)\Phi_i(\xi)\Phi_j(\eta), \quad i, j = 2, 3, \dots \quad (2.30)$$

4. Innere Moden: Die Formfunktionen der Inneren Moden sind rein lokal und verschwinden an den Rändern des Elements.

$$N_{i,j,k}^{int}(\xi, \eta, \zeta) = \Phi_i(\xi)\Phi_j(\eta)\Phi_k(\zeta), \quad i, j, k = 2, 3, \dots \quad (2.31)$$



Die Formfunktionen des Hexaederelements werden in folgender Matrix zusammengefasst:

$$[N]_s = \begin{bmatrix} [N]^N & [N]^E & [N]^F & [N]^{int} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

- Die Untermatrix der Knoten-Moden  $[N]^N$  enthält die Formfunktionen nach (2.28):

$$[N]^N = \begin{bmatrix} N_{1,1,1}^{N_1} & 0 & 0 & \cdots & N_{1,1,1}^{N_8} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,1,1}^{N_1} & 0 & \cdots & 0 & N_{1,1,1}^{N_8} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,1,1}^{N_1} & \cdots & 0 & 0 & N_{1,1,1}^{N_8} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

- Die Untermatrix der Kanten-Moden  $[N]^E$  wird für jede Kante in eine weitere Untermatrix aufgegliedert,

$$[N]^E = \begin{bmatrix} [N]^{E_1} & [N]^{E_2} & \dots & [N]^{E_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

die wiederum die Formfunktionen nach (2.29) enthält. So ergibt sich z.B. für die Kante  $E_1$  die in  $\xi$ -Richtung orientiert ist:

$$[N]^{E_1} = \begin{bmatrix} N_{2,1,1}^{E_1} & 0 & 0 & \cdots & N_{p\xi, u_x, 1, 1}^{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{2,1,1}^{E_1} & 0 & \cdots & 0 & N_{p\xi, u_y, 1, 1}^{E_1} & 0 \\ 0 & 0 & N_{2,1,1}^{E_1} & \cdots & 0 & 0 & N_{p\xi, u_z, 1, 1}^{E_1} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

- In gleicher Weise wird die Untermatrix der Flächenmoden  $[N]^F$  in 6 Untermatrizen mit den Formfunktionen nach (2.30) aufgegliedert.

$$[N]^F = \begin{bmatrix} [N]^{F_1} & [N]^{F_2} & \dots & [N]^{F_6} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$[N]^{F_1} = \begin{bmatrix} N_{2,2,1}^{F_1} & 0 & 0 & \cdots & N_{p\xi, u_x, p\eta, u_x, 1}^{F_1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{2,2,1}^{F_1} & 0 & \cdots & 0 & N_{p\xi, u_y, p\eta, u_y, 1}^{F_1} & 0 \\ 0 & 0 & N_{2,2,1}^{F_1} & \cdots & 0 & 0 & N_{p\xi, u_z, p\eta, u_z, 1}^{F_1} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

- Die Matrix der inneren Moden enthält schließlich die Formfunktionen nach (2.31):

$$[N]^{int} = \begin{bmatrix} N_{2,2,2}^{int} & 0 & 0 & \cdots & N_{p\xi, u_x, p\eta, u_x, p\zeta, u_x}^{int} & 0 & 0 \\ 0 & N_{2,2,2}^{int} & 0 & \cdots & 0 & N_{p\xi, u_y, p\eta, u_y, p\zeta, u_y}^{int} & 0 \\ 0 & 0 & N_{2,2,2}^{int} & \cdots & 0 & 0 & N_{p\xi, u_z, p\eta, u_z, p\zeta, u_z}^{int} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Die gezeigten Formfunktionen  $[N]$  sind auf einem rechtwinkligen Standardelement mit (lokalen) Einheitskoordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  und einem Wertebereich  $[-1, +1] \times [-1, +1] \times [-1, +1]$  definiert. Um eine reale Struktur abbilden zu können, ist die Form dieser Einheitselemente nun anhand einer Abbildungsfunktion  $Q^{(e)}(\xi, \eta, \zeta)$  an die reale Geometrie mit ggf. gekrümmten Oberflächen anzugleichen und auf das globale Koordinatensystem  $x, y, z$  zu transformieren [34, 35, 36, 37, 27].

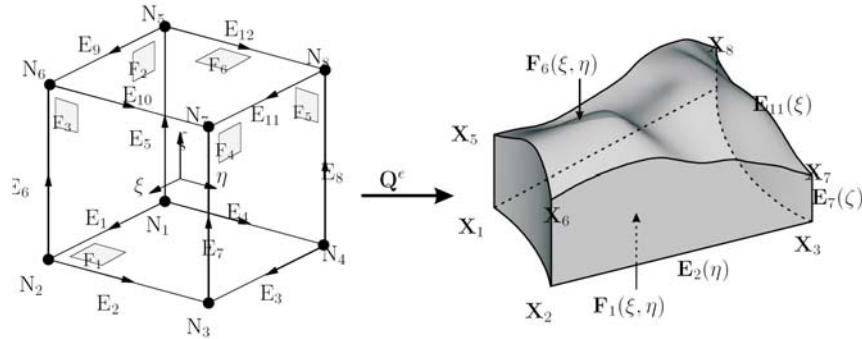


Abbildung 2.9: Transformation eines Einheitselements auf eine reale Struktur mit der Abbildungsfunktion  $Q^e$  [28].

Die globalen Knotenkoordinaten des Hexaederelements im Ausgangszustand der FEM-Berechnung werden in Abbildung 2.9 mit  $\mathbf{X}_i = [X, Y, Z]^T, i = 1, \dots, 8$  bezeichnet. Der Verlauf der Kanten  $\mathbf{E}_i = [E_{i,x}, E_{i,y}, E_{i,z}]^T, i = 1, \dots, 12$  und der Flächen  $\mathbf{F}_i = [F_{i,x}, F_{i,y}, F_{i,z}]^T, i = 1, \dots, 6$  ist als Funktion in Abhängigkeit der lokalen Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  gegeben. Die Abbildungsfunktion  $Q^{(e)}$  von den lokalen Koordinaten  $(\xi, \eta, \zeta)$  auf die globalen Koordinaten  $(x, y, z)$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} x &= Q_x^{(e)}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_{1,1,1}^{N_i}(\xi, \eta, \zeta) X_i + \sum_{i=1}^6 f_{i,x}(\xi, \eta, \zeta) - \sum_{i=1}^{12} e_{i,x}(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= Q_y^{(e)}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_{1,1,1}^{N_i}(\xi, \eta, \zeta) Y_i + \sum_{i=1}^6 f_{i,y}(\xi, \eta, \zeta) - \sum_{i=1}^{12} e_{i,y}(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= Q_z^{(e)}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 N_{1,1,1}^{N_i}(\xi, \eta, \zeta) Z_i + \sum_{i=1}^6 f_{i,z}(\xi, \eta, \zeta) - \sum_{i=1}^{12} e_{i,z}(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Der erste Term in (2.39) entspricht der Standard-Abbildung eines isoparametrischen Hexaederelements mit acht Knoten. Der zweite und der dritte Term beschreibt die Differenz der gekrümmten Flächen  $\mathbf{F}_i$  und der gekrümmten Kanten  $\mathbf{E}_i$  gegenüber der ebenen Fläche bzw. der Verbindungslinie zwischen den Knoten. Diese Differenzterme setzen sich aus den geometrischen Beschreibungen von  $\mathbf{F}_i$  und  $\mathbf{E}_i$  und den Ausblendfunktionen zusammen (siehe Anlage B). Für die geometrische Beschreibung kann ihre analytische Funktion, eine Näherung mit Lagrange-Polynomen [36, 38], oder ein isoparametrischer Ansatz verwendet [39] werden.  $\mathbf{f}_i$  wird zu der gegenüberliegenden Fläche,  $\mathbf{e}_i$  zu den angrenzenden Kanten linear ausgeblendet [27].

Werden - wie in der vorliegenden Arbeit - ausschließlich rechtwinklige Elemente mit geraden Kanten und ebenen Flächen für die Modellierung der Struktur verwendet, so entfallen die Differenzterme.

### 2.2.3 Aufbau der Elementmatrizen

Zum Aufbau der Elementmatrizen erfolgt zunächst die Diskretisierung der Problemstellung durch das Einsetzen der Ansatzfunktionen in die schwache Form der Differentialgleichung. Die dadurch entstandenen Integrale können numerisch integriert werden, nachdem die partiellen Ableitungen der lokalen Formfunktionen gebildet und auf das globale Koordinatensystem transformiert wurden.

Die schwache Form der Differentialgleichung lässt sich in der Strukturanalyse sowohl mit den Energieprinzipien über die Variation eines Funktionals ermitteln, als auch in allgemeiner Form mit der Methode der gewichteten Residuen nach Galerkin. Das Residuum entsteht beim Einsetzen der Ansatzfunktion in die Differentialgleichung, da diese durch die Ansatzfunktion nicht exakt erfüllt wird. In der Methode der gewichteten Residuen wird dieser "Rest" nun mit einer Wichtungsfunktion multipliziert und gefordert, dass er im Mittel über dem betrachteten Gebiet ein Minimum annimmt. In der Methode nach Galerkin wird für die Wichtungsfunktion der gleiche Ansatz wie für die Formfunktionen gewählt (siehe z.B. [25]).

Für die Anwendung der Methode nach Galerkin in der FEM wird zunächst die Differentialgleichung (2.1) mit der Wichtungsfunktion  $\{\bar{w}\}^T = \{\bar{w}_x, \bar{w}_y, \bar{w}_z\}$  multipliziert und über dem Gebiet  $\Omega$  integriert:

$$\int_{\Omega} \{\bar{w}\}^T \left( [D]^T \{\sigma\} + \{b\} - \rho_s \frac{d^2}{dt^2} \{u\} \right) dV = 0 \quad (2.40)$$

Die partielle Integration des ersten Terms in (2.40) führt mit dem Greenschen Satz auf:

$$\int_{\Omega} \{\bar{w}\}^T \rho_s \frac{d^2}{dt^2} \{u\} dV + \int_{\Omega} ([D] \{\bar{w}\})^T \{\sigma\} dV - \int_{\partial\Omega} \{\bar{w}\}^T \{t\} dS - \int_{\Omega} \{\bar{w}\}^T \{b\} dV = 0 \quad (2.41)$$

Der durch die partielle Integration entstandene Vektor  $\{t\}$  resultiert aus der Multiplikation der Spannungen mit dem Normalenvektor der Volumenoberflächen und repräsentiert die Spannungen auf der Elementoberfläche infolge äußerer Lasten. Nach Einsetzen der kinematischen Beziehungen (2.7) und des Materialgesetzes (2.8) ergibt sich schließlich die schwache Form zu:

$$\int_{\Omega} \{\bar{w}\}^T \rho_s \frac{d^2}{dt^2} \{u\} dV + \int_{\Omega} ([D] \{\bar{w}\})^T [A] [D] \{u\} dV = \int_{\partial\Omega} \{\bar{w}\}^T \{t\} dS + \int_{\Omega} \{\bar{w}\}^T \{b\} dV \quad (2.42)$$

Nun wird die Ansatzfunktion in (2.21) für die Verschiebung  $\{u\}$  und die Wichtungsfunktion  $\{\bar{w}\}$  verwendet:

$$\{u\} \approx [N]_s \{\tilde{u}\}, \quad \frac{d^2}{dt^2} \{u\} \approx [N]_s \{\ddot{\tilde{u}}\}, \quad \{\bar{w}\} \approx [N]_s \{\tilde{w}\} \quad (2.43)$$

Durch das Einsetzen von (2.43) in die schwache Form (2.42) erfolgt die Diskretisierung der Problemstellung. Für das Element mit dem Volumen  $V_{(e)}$  und der Oberfläche  $S_{(e)}$  erhält man damit das Gleichungssystem in matrizieller Schreibweise:

$$[M]_s^{(e)} \{\ddot{u}\} + [K]_s^{(e)} \{\tilde{u}\} = \{F\}^{(e)} \quad (2.44)$$

mit:

$$[K]_s^{(e)} = \int_{V_{(e)}} ([D] [N]_s)^T [A] [D] [N]_s dV \quad (2.45)$$

$$[M]_s^{(e)} = \int_{V_{(e)}} [N]_s^T \rho_s [N]_s dV \quad (2.46)$$

$$\{F\}^{(e)} = \int_{S_{(e)}} [N]_s^T \{t\} dS + \int_{V_{(e)}} [N]_s^T \{b\} dV \quad (2.47)$$

Der Element-Lastvektor  $\{F\}^{(e)}$  setzt sich aus den Anteilen der inneren und der äußeren Kräfte zusammen. Die äußeren Kräfte resultieren aus den Randbedingungen, die in Abschnitt 2.2.4 behandelt werden.

In (2.45) werden die partiellen Ableitungen der Formfunktionen im globalen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  benötigt. Hierzu werden zunächst die partiellen Ableitungen im lokalen und im globalen Koordinatensystem mit der Kettenregel verknüpft.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Wird nun die Jakobimatrix  $[J]$  invertiert, können die partiellen Ableitungen der Formfunktionen im globalen Koordinatensystem direkt berechnet werden.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Für die Integration ist nun ebenso eine Koordinatentransformation auf das globale Koordinatensystem  $x, y, z$  erforderlich. Nach der Definition des Transformationssatzes folgt für die Funktion  $f(\xi, \eta, \zeta)$  :

$$\int_{V^{(e)}} f(\xi, \eta, \zeta) dV = \int \int \int_{V^{(e)}} f(\xi, \eta, \zeta) dx dy dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) \det [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (2.50)$$

Nun wird die Integration der Elementmatrizen durch eine numerische Integration ersetzt. Mit der Gauß'schen Integrationsformel ergibt sich für die numerische Integration der oben gezeigten Funktion  $f(\xi, \eta, \zeta)$  an den  $n_i \times n_j \times n_l$  Intergrationsstützpunkten  $\xi_i, \eta_j, \zeta_l$  mit den Integrationsgewichten  $w_i, w_j, w_l$ :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) \det [J] d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{l=1}^{n_l} w_i w_j w_l f(\xi_i, \eta_j, \zeta_l) \det [J] \quad (2.51)$$

In gleicher Weise wird die Steifigkeits- und die Massenmatrix  $[K]_s^{(e)}$  und  $[M]_s^{(e)}$  des Elements gebildet:

$$[K]_s^{(e)} \approx \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{l=1}^{n_l} w_i w_j w_l ([D] [N]_s)^T [A] [D] [N]_s \det [J] \quad (2.52)$$

$$[M]_s^{(e)} \approx \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{l=1}^{n_l} w_i w_j w_l [N]_s^T \rho_s [N]_s \det [J] \quad (2.53)$$

Ebenso wird der Element-Lastvektor gebildet  $\{F\}^{(e)}$ , dessen Oberflächenintegral in 6 Summen zu unterteilen ist:

$$\begin{aligned} \{F\}^{(e)} \approx & \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{l=1}^{n_l} w_i w_j w_l [N]_s^T \{b\} \det [J] + \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{l=1}^{n_l} w_j w_l [N]_s^T \{t\}_m \det [J]_{\eta, \zeta} \\ & + \sum_{m=3}^4 \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} w_i w_j [N]_s^T \{t\}_m \det [J]_{\xi, \eta} + \sum_{m=5}^6 \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_l} w_i w_l [N]_s^T \{t\}_m \det [J]_{\xi, \zeta} \end{aligned} \quad (2.54)$$

## 2.2.4 Aufbau und Lösung des Gleichungssystems

Der Aufbau des Gesamt-Gleichungssystems beginnt mit der *Assemblierung* der globalen Massenmatrix  $[M]_s$  und der globalen Steifigkeitsmatrix  $[K]_s$  aus den jeweiligen Elementmatrizen  $[M]_s^{(e)}$ ,  $[K]_s^{(e)}$ . Danach werden die *Randbedingungen* in den globalen Matrizen berücksichtigt, der Lastvektor gebildet und das Gleichungssystem dem *Lösungsalgorithmus* übergeben.

In der *Assemblierung* werden die Einträge in den Elementmatrizen den globalen Freiheitsgraden zugeordnet. Abbildung 2.10 illustriert dies an einem Balken, der aus drei Hexaederelementen modelliert wurde, für den einfachsten Fall eines linearen Verschiebungsansatzes ( $p = 1$ ).

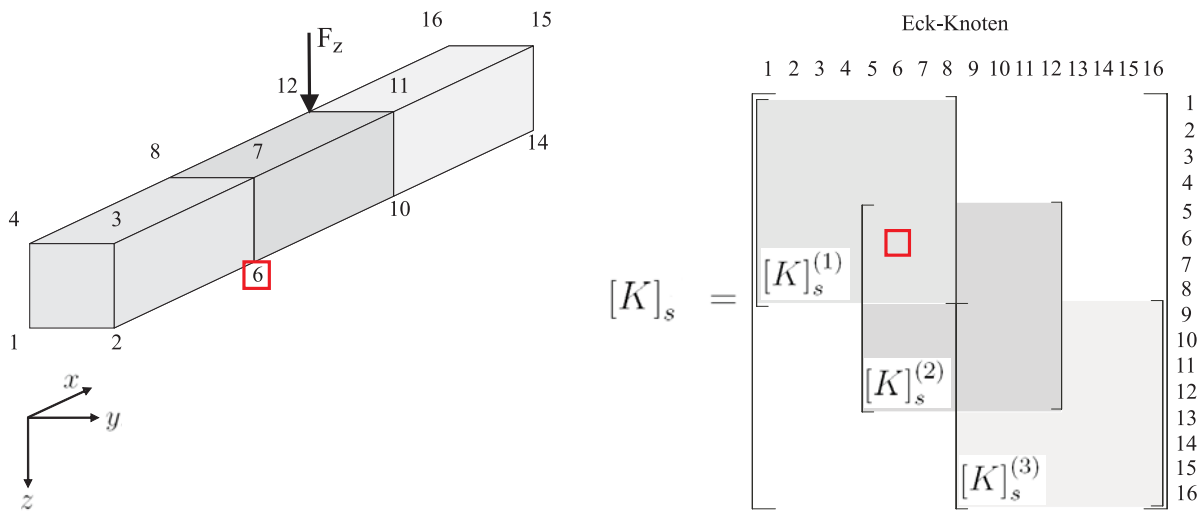


Abbildung 2.10: Nummerierung am Beispiel eines Balkens und Aufbau der globalen Matrizen

Für die lokalen Elementmatrizen folgt nach (2.53) und (2.52) mit  $p = 1$ :

$$[M]_s^{(e)} = \begin{bmatrix} M_{1,1}^{(e)} & \cdots & M_{1,24}^{(e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{24,1}^{(e)} & \cdots & M_{24,24}^{(e)} \end{bmatrix} \quad [K]_s^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{1,1}^{(e)} & \cdots & K_{1,24}^{(e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{24,1}^{(e)} & \cdots & K_{24,24}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Da jeder Eck-Knoten des Hexaederelements 3 Freiheitsgrade besitzt, ergeben sich für das Element 24 Freiheitsgrade. Bei der Assemblierung der globalen Matrizen werden die Einträge der gemeinsamen Freiheitsgrade addiert. So werden z.B. für den in Abbildung 2.10 markierten Knoten 6 die Einträge in den Elementmatrizen 1 und 2 für die Freiheitsgrade  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  addiert. Die Einträge in der globalen Steifigkeitsmatrix  $[K]_s$  lauten somit:

$$\begin{array}{ccc} & (u_{x,6}) & (u_{y,6}) & (u_{z,6}) \\ (u_{x,6}) & K_{16,16}^{(1)} + K_{4,4}^{(2)} & K_{16,17}^{(1)} + K_{4,5}^{(2)} & K_{16,18}^{(1)} + K_{4,6}^{(2)} \\ (u_{y,6}) & K_{17,16}^{(1)} + K_{5,4}^{(2)} & K_{17,17}^{(1)} + K_{5,5}^{(2)} & K_{17,18}^{(1)} + K_{5,6}^{(2)} \\ (u_{z,6}) & K_{18,16}^{(1)} + K_{6,4}^{(2)} & K_{18,17}^{(1)} + K_{6,5}^{(2)} & K_{18,18}^{(1)} + K_{6,6}^{(2)} \end{array} \quad (2.56)$$

Die Einträge in der globalen Massenmatrix  $[M]_s$  erfolgen in analoger Weise.

Ab einem Polynomgrad  $p \geq 2$  treten auch auf den Kanten und Flächen des Elements Freiheitsgrade auf, die bei benachbarten Elementen besonders zu berücksichtigen sind. So müssen die Formfunktionen gemeinsamer Kanten und Flächen den gleichen Polynomgrad und die gleiche Orientierung aufweisen, um die erforderliche  $C^0$  Kontinuität gewährleisten zu können. Abbildung 2.11 links zeigt am Beispiel eines zweidimensionalen Elements die Auswirkung einer falsch orientierten Formfunktion [28].

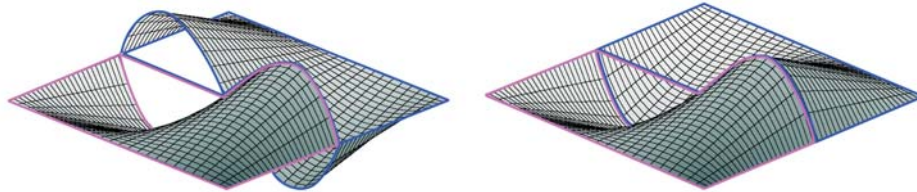


Abbildung 2.11: Falsche und richtige Orientierung einer Kanten-Mode bei  $p = 3$  [28]

Ist die Assemblierung aller Elementmatrizen zu den globalen Massen- und Steifigkeitsmatrizen abgeschlossen,

$$[M]_s = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} [M]_s^{(e)} \quad [K]_s = \mathbf{A}_{e=1}^{n_{el}} [K]_s^{(e)}$$

so können die Randbedingungen berücksichtigt und der Lastvektor aufgebaut werden.

Bei den *Randbedingungen* wird zwischen den Neumann-Randbedingungen und den Dirichlet-Randbedingungen unterschieden. Neumann-Randbedingungen entsprechen in der Strukturanalyse den Kraft-Randbedingungen. Sie werden über den Lastvektor erfasst. Typische Kraft-Randbedingungen in der Strukturanalyse sind Punkt-, Linien- und Flächenlasten. Flächen- und Linienlasten werden nach (2.54) auf der betroffenen Oberfläche numerisch integriert. Punktlasten, die an einem Elementknoten angreifen (wie in Abbildung 2.10 dargestellt), könnten direkt dem jeweiligen Freiheitsgrad des Lastvektors zugeordnet werden. So ergibt sich im gezeigten Fall für eine Kraft  $F_z$  auf dem Knoten 12 im Lastvektor ausschließlich ein Eintrag in Zeile 36:

$$\{F\}^T = [0 \ \dots \ 0 \ F_z \ 0 \ \dots \ 0] \quad (2.57)$$

Zu beachten ist dabei allerdings, dass diese Last keine Punktlast im Sinne der Kontinuumsmechanik ist, sondern einer durch die Ansatzfunktionen über die an den Knoten angrenzenden Elemente verteilte Last darstellt. Die Behandlung von zeitabhängigen Punktlasten in der modalen Superposition erfolgt in Abschnitt 2.3.1.

Das Gleichungssystem ist somit für *statische* Aufgabenstellungen

$$[K]_s \{\tilde{u}\} = \{F\} \quad (2.58)$$

und für *dynamische* Aufgabenstellungen

$$[M]_s \{\ddot{u}\} + [K]_s \{\tilde{u}\} = \{F\} \quad (2.59)$$

vollständig aufgebaut.

Nun sind die Dirichlet-Randbedingungen zu berücksichtigen, die in der Strukturanalyse den Verschiebungs-Randbedingungen entsprechen. Sie geben einen Funktionswert für die Verschiebung vor, wodurch sich die Anzahl der unbekanntenen Freiheitsgrade reduziert. Ist dieser Verschiebungswert auf Grund einer Festhaltung gleich Null, so handelt es sich um eine homogene Randbedingung. Zur Berücksichtigung der Verschiebungs-Randbedingungen wird in *AdhoC* die Penalty-Methode verwendet, bei der ein sogenannter Penalty-Wert  $P$  sowohl auf das Diagonalelement des festzuhaltenden Freiheitsgrades in der Steifigkeitsmatrix als auch - multipliziert mit der vorgegebenen Verschiebung  $\hat{u}$  - auf das entsprechende Element des Kraftvektors aufsummiert wird.

Für die entsprechende  $i$ -te Zeile des (statischen) Gleichungssystems erfolgt dadurch:

$$\sum_{j=1}^n (K_{i,j} + \delta_{i,j}P)\tilde{u}_j = F_i + \hat{u}P \quad \text{mit: } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.60)$$

Wird der Penalty-Wert viel größer gewählt als  $K_{i,j}$  und  $F_i$ , so ist  $P\tilde{u}_j \approx \hat{u}P$  und somit  $\tilde{u}_j \approx \hat{u}$ , wodurch die vorgegebene Verschiebungs-Randbedingung eingehalten ist.

Bei dynamischen Aufgabenstellungen, die in ein Eigenwertproblem überführt werden sollen, sind ausschließlich homogene Randbedingungen (Festhaltungen) zu berücksichtigen. Die dem festgehaltenen Freiheitsgrad entsprechenden Zeilen und Spalten des Gleichungssystems können gestrichen werden, oder bis auf ihr Diagonalelement zu Null gesetzt werden. Die Streichung der Zeilen und Spalten führt zu einer Dimensionsreduzierung des Gleichungssystems, wodurch die Berechnung vereinfacht wird. Andererseits ist die Dimensionsreduzierung der Matrizen sehr aufwendig.

Werden lediglich die entsprechenden Einträge bis auf die Diagonalelemente zu Null gesetzt und damit der Eigenwert komplett entkoppelt, so ist darauf zu achten, dass der aus dieser Methode resultierende und physikalisch nicht mehr sinnvolle Eigenwert  $\omega_i^2 = K_{ii}/M_{ii}$  die gesuchten Eigenwerte nicht durch Interferenzen stört, oder das Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte ungünstig beeinflusst [25].

In der aktuellen Implementierung von *AdhoC* wird beim Aufbau des Eigenwertproblems aus den bereits assemblierten Steifigkeits- und Massenmatrizen der eingetragene Penalty-Wert in der Steifigkeitsmatrix erkannt. Die restlichen Einträge der zugehörigen Zeile und Spalte



von  $[K]$  und  $[M]$  werden dann zu Null und das Diagonalelement von  $[M] = 1$  gesetzt. Der Freiheitsgrad ist somit voll entkoppelt und der Eigenwert  $\omega_i^2 = K_{ii}/M_{ii}$  genügend groß, um die interessierenden Eigenwerte nicht zu stören.

Das Gleichungssystem wird nun dem *Lösungsalgorithmus* übergeben. Statische (lineare) Problemstellungen können unmittelbar gelöst werden. Hierfür steht eine umfangreiche Auswahl an direkten und iterativen Methoden zur Verfügung. Direkte Methoden beruhen auf der sukzessiven Elimination der Unbekannten nach dem Grundprinzip des Gauß'schen Eliminationsverfahrens. Iterative Methoden bestimmen die gesuchte Lösung als Grenzwert einer Folge von Näherungen, wie z.B. die in AdhoC implementierte Methode des konjugierten Gradienten.

Die Wahl der geeigneten Methode hängt von der Art der Problemstellung ab. Problemstellungen mit einer moderaten Anzahl von Freiheitsgraden und mehreren rechten Seiten (Lastfällen) sind für direkte Methoden gut geeignet, da die numerisch aufwändige Zerlegung der linken Seite in Dreiecksmatrizen nur einmal durchgeführt werden muss. Problemstellungen, die zu einer sehr großen Anzahl von Unbekannten führen, sind für iterative Methoden besser geeignet, da diese für den Lösungsvorgang nur die von Null verschiedenen Matrixelemente benötigen und somit einen reduzierten Speicherbedarf ermöglichen [25].

Dynamische Problemstellungen können entweder direkt im Zeitbereich gelöst werden, oder zunächst in den Frequenzbereich transformiert und die dort ermittelte Lösung ggf. zurücktransformiert werden. Eine typische Lösungsmethode im Zeitbereich, mit zeitlicher Diskretisierung der gesuchten Größe und nachfolgender Lösung für jeden Zeitschritt, stellt das Newmark-Verfahren dar, dessen Anwendung in *AdhoC* von Scholz gezeigt wird [40].

Für die Lösung im Frequenzbereich kann für  $\{\tilde{u}\}$  und  $\{F\}$  ein Ansatz gemacht werden, der die zeitliche und örtliche Komponente, unter der Voraussetzung der Superposition harmonischer Schwingungen, durch eine Fourier-Reihe separiert:

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x, y, z) e^{j\omega_n t}; \quad F(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(x, y, z) e^{j\omega_n t}; \quad (2.61)$$

Wird (2.61) in (2.59) eingesetzt, erhält man für eine Anregungskraft  $F(x, y, z, t)$ , die sich in  $n$  verschiedene, harmonisch oszillierende Kräfte  $F_n$  zerlegen lässt,  $n$  zu lösende lineare Gleichungssysteme der Form:

$$\left( [K]_s - \omega_n^2 [M]_s \right) \{u\}_n = \{F\}_n \quad (2.62)$$

$u_n$  stellt hierbei die Amplitude der erzwungenen Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega_n$  dar. Für die Berechnung ist noch die bisher vernachlässigte Dämpfung zu berücksichtigen. Hierzu wird bei dieser Vorgehensweise ein komplexer E-Modul ( $E(1 \pm j\eta)$ ) eingesetzt, das durch den (frequenzunabhängigen) Verlustfaktor  $\eta$  die Materialdämpfung berücksichtigt. Die

zu lösenden Gleichungssysteme werden dadurch komplex (Details siehe z.B [41, 42, 43, 44, 45]).

Eine alternative Vorgehensweise im Frequenzbereich stellt die Umformung von (2.59) in ein Eigenwertproblem dar, das Aufschluss über das Schwingungsverhalten der *unbelasteten* Struktur gibt. Die aus dem Eigenwertproblem berechneten Eigenformen und Eigenfrequenzen können anschließend mit unterschiedlichen Anregungskräften überlagert werden. So kann das Schwingungsverhalten der Struktur bei unterschiedlichen Anregungen - ohne erneute Lösung des Gleichungssystems - berechnet werden. Zur Formulierung des Eigenwertproblems wird ein ähnlicher Separationsansatz wie in (2.61) verwendet, jedoch wird die Amplitude  $u_n$  durch die zu ermittelnden ortsabhängigen Eigenformen der Struktur  $\varphi_i$  und einen Skalierungsfaktor  $q_{i,n}$  ausgedrückt:

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^{n_{dof}} \varphi_i(x, y, z) q_{i,n} e^{j\omega_i t}; \quad (2.63)$$

Wird (2.63) in die *unbelastete* Differentialgleichung (2.59) eingesetzt, erhält man die Formulierung des Eigenwertproblems:

$$([K]_s - \omega_i^2 [M]_s) \{\varphi\}_i = \{0\} \quad (2.64)$$

Es kann für jeden Freiheitsgrad des Systems ( $n_{dof}$ ) eine Eigenform  $\varphi_i$  und die zugehörige Eigenkreisfrequenz  $\omega_i$  gefunden werden. In der Praxis interessieren jedoch meist nur die unteren  $n_{eigen}$  Eigenfrequenzen, da die höheren Eigenfrequenzen, in Abhängigkeit von der gewählten Diskretisierung, mit einem zunehmenden Fehler behaftet sind. Die Modalanalyse ist somit vorrangig dann von Interesse, wenn die hochfrequenten Anteile der Schwingung nicht relevant sind.

Ebenso wie für die Lösung linearer Gleichungssysteme steht auch für die Lösung von Eigenwertproblemen eine Vielzahl von Algorithmen zur Verfügung. Zur Eigenwertberechnung in *AdhoC* wird das Lanczos Verfahren verwendet, in dem das Eigenwertproblem auf einen stark dimensionreduzierten und effizient lösbaren Unterraum projiziert wird. Die Funktionsweise des Eigenwertlösers und dessen Implementierung in *AdhoC* kann [46] entnommen werden.

Zur Steigerung der Effizienz wurde in dieser Arbeit als Variante ein Block-Lanczos-Löser verwendet [47], der simultan mehrere Unterräume aufspannt und dadurch auch in der Lage ist mehrfache Eigenwerte zu finden. Da in jedem Schritt des Lanczos-Algorithmus ein stark dimensionsreduziertes, lineares Gleichungssystem mit unveränderter linker Seite zu lösen ist, wurde der hierzu verwendete direkte Löser [48] entsprechend modifiziert, um durch eine Zwischenspeicherung der linken Seite eine erneute Aufstellung einzusparen.

## 2.3 Grundlagen zur Berechnung der Körperschallschnelle

Sind die Eigenformen und -frequenzen der Struktur bestimmt, so kann ihr Schwingungsspektrum für eine gegebene Anregungskraft anhand der modalen Superposition in der Spektralanalyse berechnet werden. Die Grundlagen hierzu werden in Abschnitt 2.3.1 behandelt. Für die Spektralanalyse werden neben den Eigenwerten der Struktur auch Eingangswerte der Anregungskraft und der Dämpfung benötigt. Eine Übersicht der verschiedenen Modelle zur punktförmigen Anregung durch ein Norm-Hammerwerk wird in Abschnitt 2.3.2 gegeben. Abschnitt 2.3.3 zeigt eine Übersicht möglicher Modellierungen der Dämpfung. Die Darstellungen in diesem Abschnitt orientieren sich an [16, 49, 23], auf die für weiterführende Details verwiesen sei.

### 2.3.1 Modal- und Spektralanalyse

Der Grundgedanke der Modal- und der Spektralanalyse besteht darin, dass sich jede zeitabhängige Schwingungsform eines Bauteils durch die lineare Kombination seiner orthogonalen - und dadurch linear unabhängigen - Eigenformen darstellen lässt. Die Eigenformen des Bauteils sind bereits aus der Lösung des Eigenwertproblems in Abschnitt 2.2.4 bekannt. Zu ermitteln ist nun der Anteil der jeweiligen Eigenform an der Gesamtschwingung. Hierzu wird üblicherweise wiederum der Separationsansatz nach (2.61) in leicht abgewandelter Form verwendet:

$$\tilde{u}(x, y, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x, y, z) e^{j\omega_n t} \approx \sum_{i=1}^{n_{eigen}} \varphi_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{i,n} e^{j\omega_n t} = \sum_{i=1}^{n_{eigen}} \varphi_i q_i(t) \quad (2.65)$$

Werden die Eigenformen  $\{\varphi\}_i$  spaltenweise in der Matrix  $[\Phi]$  zusammengefasst, ergibt sich mit dem zeitabhängigen Vektor  $\{q\}$  der gesuchten Auslenkung:

$$\{\tilde{u}\} = [\Phi] \{q\} \quad (2.66)$$

Dieser Ansatz wird nun in das gekoppelte Differentialgleichungssystem (2.59) eingesetzt, das hier bereits um die noch unbekannte Dämpfungsmatrix  $[C]_s$  erweitert wurde:

$$[M]_s [\Phi] \{\ddot{q}\} + [C]_s [\Phi] \{\dot{q}\} + [K]_s [\Phi] \{q\} = \{F(t)\} \quad (2.67)$$

Für die weitere Berechnung ist es sinnvoll, das Differentialgleichungssystem durch eine zusätzliche Multiplikation von links mit der Matrix der Eigenformen  $[\Phi]$  zu entkoppeln:

$$[\Phi]^T [M]_s [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [C]_s [\Phi] \{\dot{q}\} + [\Phi]^T [K]_s [\Phi] \{q\} = [\Phi]^T \{F(t)\} \quad (2.68)$$

Aufgrund der Orthogonalität der Eigenformen werden die im allgemeinen vollbesetzten Matrizen in (2.68) durch die beidseitige Multiplikation mit den Eigenformen in Diagonalmatrizen umgewandelt. Das gekoppelte Differentialgleichungssystem zerfällt dadurch in einzelne Differentialgleichungen mit der Form eines Ein-Masse-Schwingers, die in der Darstellung mit äquivalenten Massen  $\bar{M}_i$ , Dämpfungen  $\bar{C}_i$  und Steifigkeiten  $\bar{K}_i$  für die  $i$ -te Eigenform bzw. die  $i$ -te Zeile in (2.68) folgende Form annehmen<sup>6</sup>:

$$\bar{M}_i \ddot{q}_i + \bar{C}_i \dot{q}_i + \bar{K}_i q_i = \bar{F}_i(t) \quad (2.69)$$

mit:

$$\bar{M}_i = \{\varphi_i\}^T [M]_s \{\varphi_i\}, \quad \bar{C}_i = \{\varphi_i\}^T [C]_s \{\varphi_i\}, \quad \bar{K}_i = \{\varphi_i\}^T [K]_s \{\varphi_i\}, \quad \bar{F}_i(t) = \{\varphi_i\}^T \{F(t)\}$$

Für die Anwendungen in der Bauakustik ist es sinnvoll, die weitere Analyse im Frequenzbereich durchzuführen. Hierzu lassen sich  $q_i(t)$  und  $\bar{F}_i(t)$  wiederum durch Fourier-Reihen ausdrücken:

$$q_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{i,n} e^{j\omega_n t}, \quad \bar{F}_i(t) = \{\varphi_i\}^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{F_n\} e^{j\omega_n t}; \quad (2.70)$$

Besteht die Anregungskraft aus einer punktförmigen Einzelkraft an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$ , so vereinfacht sich ihre Berechnung zu:

$$\bar{F}_i(t) = \varphi_i(x_0, y_0, z_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega_n t}; \quad (2.71)$$

Wird (2.70) bzw. (2.71) in (2.69) eingesetzt, so ergibt sich für die  $n$ -te Kreisfrequenz  $\omega_n$ :

$$-\omega_n^2 \bar{M}_i q_{i,n} + j\omega_n \bar{C}_i q_{i,n} + \bar{K}_i q_{i,n} = \varphi_i(x_0, y_0, z_0) F_n \quad (2.72)$$

und aufgelöst nach  $q_{i,n}(\omega_n)$ :

$$q_{i,n} = \frac{1}{-\omega_n^2 \bar{M}_i + j\omega_n \bar{C}_i + \bar{K}_i} \varphi_i(x_0, y_0, z_0) F_n \quad (2.73)$$

Da die Eigenformen  $\{\varphi_i\}$  nur in ihrer Form, nicht aber im Wert ihrer Auslenkung festgelegt sind, kann über die Normierung der Eigenformen gefordert werden, dass  $\{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\} = 1$  ergibt, und somit  $\bar{M} = 1$  ist. Mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_i$  und dem Lehrschen Dämpfungsmaß  $D_i$  ergibt sich  $q_{i,n}(\omega_n)$  zu:

$$q_{i,n} = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_n^2 + j\omega_n 2\omega_i D_i} \varphi_i(x_0, y_0, z_0) F_n \quad (2.74)$$

mit:

$$\bar{M}_i = 1, \quad \bar{K}_i = \omega_i^2 \bar{M}_i, \quad \bar{C}_i = 2\bar{M}_i \omega_i D_i$$

<sup>6</sup>Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Dämpfungsmatrix  $[C]_s$  diagonalisierbar ist (siehe auch Abschnitt 2.3.3).

Eine weitere Vereinfachung der Darstellung lässt sich durch die Einführung des Frequenzverhältnisses  $\eta_{i,n} = \omega_n/\omega_i$  erreichen:

$$q_{i,n} = \frac{1}{\omega_i^2(1 - \eta_{i,n}^2 + j2\eta_{i,n}D_i)} \varphi_i(x_0, y_0, z_0) F_n \quad (2.75)$$

Die spektrale Auslenkung  $q_{i,n}(\omega_n)$  der  $i$ -ten Eigenform bei der Kreisfrequenz  $\omega_n$  setzt sich somit aus der spektralen Anregungskraft  $F_n$  und einem komplexen Faktor zusammen, der als Übertragungsfunktion  $H$  bezeichnet wird.

Die Amplitude  $u_n$  folgt nun aus (2.65):

$$u_n = \sum_{i=1}^{n_{eigen}} \varphi_i q_{i,n} \quad (2.76)$$

Für die in Abschnitt 3 verwendete spektrale Schnelle  $v_n$  an einer Stelle  $(x_l, y_l, z_l)$  in Folge einer punktuellen Anregungskraft  $F_n$  an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_n(x_l, y_l, z_l) &= j\omega_n u_n(x_l, y_l, z_l) \\ &= \sum_{i=1}^{n_{eigen}} \varphi_i(x_l, y_l, z_l) j\omega_n q_{i,n} \\ &= \sum_{i=1}^{n_{eigen}} \varphi_i(x_l, y_l, z_l) Y_{i,n} \varphi_i(x_0, y_0, z_0) F_n \end{aligned} \quad (2.77)$$

Wobei sich die Admitanz  $Y$  ergibt zu:

$$Y_{i,n}(\omega_n) = j\omega_n H_{i,n} = \frac{j\omega_n}{\omega_i^2(1 - \eta_{i,n}^2 + j2\eta_{i,n}D_i)} \quad (2.78)$$

Für die Berechnung der spektralen Schnelle wird somit noch die spektrale Anregungskraft  $F_n$  und die modale Dämpfung  $D_i$  für die  $i$ -te Eigenform benötigt.

### 2.3.2 Modelle zur punktförmigen Anregung

Bei einer Trittschallmessung wird die Decke durch ein Norm-Hammerwerk nach ISO 140-6 [50] angeregt. Das Hammerwerk besteht aus 5 Stahlzylindern (Hämmer), die aus einer Höhe von 4 cm mit einer (Gesamt-) Schlagfrequenz  $f_s = 1/T = 10Hz$  auf das Bauteil fallen. Die Aufprallgeschwindigkeit des Hammers ergibt sich aus dem freien Fall zu  $\hat{v}_0 = \sqrt{2gh} = 0,886m/s$ . Der aus dem Aufprall des Hammers resultierende Impuls regt die Decke zum Schwingen an und führt dadurch zur Trittschallübertragung in der Decke. Zur Modellierung der während dieser Anregung auftretenden Interaktion zwischen aufprallendem Hammer und schwingender Decke wurden bereits verschiedene Ansätze veröffentlicht. Nachfolgend wird eine Literaturübersicht zur Modellierung der Anregung durch ein Hammerwerk gegeben. Ein darauf aufbauendes aktuelles Modell der Anregungskraft wird in Abschnitt 3.1 vorgestellt.

### Modell nach Cremer

Abbildung 2.12 zeigt ein Norm-Hammerwerk sowie den Zeitverlauf und das Spektrum der Anregungskraft nach CREMER [16].

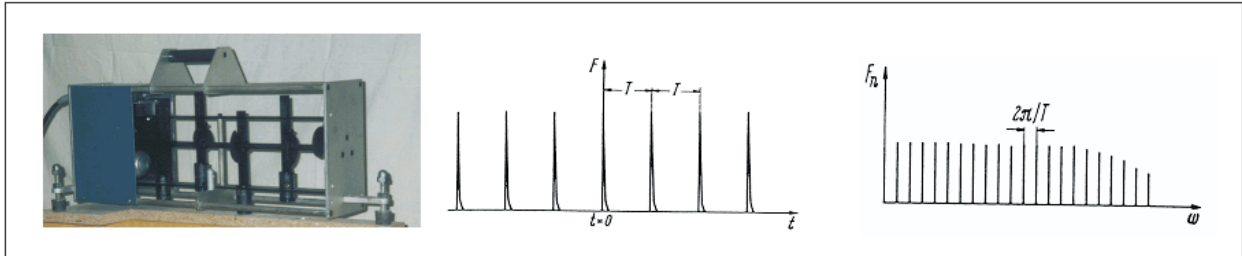


Abbildung 2.12: Anregungskraft im Zeit- und Frequenzbereich nach [16]

Der zeitliche Verlauf der Anregungskraft  $F(t)$  wird durch eine Fourierreihe (2.79) entwickelt. Hierbei wird der Zeitpunkt  $t = 0$  so gewählt, dass gerade dort der erste Stoß des Hammers erfolgt und die Anregungskraft  $F(t)$  ihr Maximum erreicht. Die verwendete Fourierreihe lässt sich unter der Annahme eines symmetrischen Zeitverlaufs auf ihre Cosinus-Komponenten reduzieren.<sup>7</sup>

$$F(t) = \Re \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega_n t} \right\} = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n \cos(\omega_n t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(\omega_n t) + F_0 \quad (2.79)$$

Die Kreisfrequenz  $\omega_n$  ergibt sich hierbei zu  $\omega_n = n2\pi/T$ . Die Fourier-Koeffizienten  $F_n$  werden nach (2.80) ermittelt:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \cos(\omega_n t) dt \quad (2.80)$$

Ist die Kontaktzeit des Hammers mit dem Bauteil sehr kurz gegenüber der Zeitdauer bis zum nächsten Schlag, so ist  $F(t)$  bereits abgeklungen bevor sich  $\cos(\omega_n t)$  wesentlich von +1 unterscheidet. Dadurch lassen sich die Fourier-Koeffizienten durch den Impuls  $I$  des Stahlzylinders ausdrücken.

$$F_n \approx \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{I}{T} \quad (2.81)$$

Die Amplitude der Anregungskraft  $F_n$  ist somit über der Frequenz konstant. Diese Näherung ist nach [16] nur bis zur Frequenz  $f \approx 1/T_c$  anwendbar, wobei  $T_c$  für die Kontaktzeit des

<sup>7</sup>Der Faktor 2 in Gleichung 2.79, der aus der Rückführung der zweiseitigen Summe ( $-\infty < n < \infty$ ) auf eine einseitige Summe ( $0 < n < \infty$ ) resultiert, wurde in [16] in die Berechnung der Fourier-Koeffizienten gezogen (siehe Gleichung 2.80).

Hammers mit dem Bauteil steht. Der Impuls des Stahlzylinders ergibt sich aus seiner Masse  $M_0$  und der Aufprallgeschwindigkeit  $\hat{v}_0$ . Die untere Grenze des Impulses ( $I = M_0\hat{v}_0$ ) gilt für ideal plastische Stöße, die obere Grenze ( $I = 2M_0\hat{v}_0$ ) für ideal elastische Stöße.

Die dargestellte Näherung nach [16] eignet sich gut für Bauteile mit einer geringen Admittanz (Mobilität) und harten Oberflächen, da dort geringe Rückwirkungen des Bauteils auf den Kraftstoß des Hammers zu erwarten sind.

Eine umfassende Beschreibung des Stoßvorgangs im Zeitbereich, ohne die zuvor genannten Einschränkungen, erfolgte ebenfalls in [16] für den Aufprall einer Kugel auf eine Platte. Sie bildet die Basis des später beschriebenen aktuellen Modells im Zeitbereich (3.1). Die Berechnung der Fourierkoeffizienten des Kraftspektrums ist hierbei nicht auf einen bestimmten Stoßvorgang beschränkt, sondern kann für eine nahezu beliebige Anregung erfolgen, sofern ihr Verlauf im Zeitbereich bekannt ist. Tabelle 2.1 zeigt beispielhaft den Zeit- und Frequenzverlauf der Anregungskraft für verschiedene Anregungen.

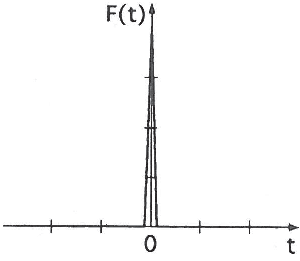
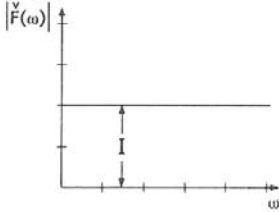
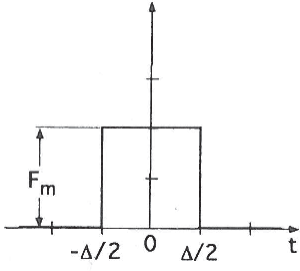
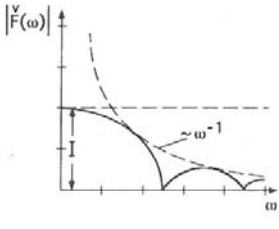
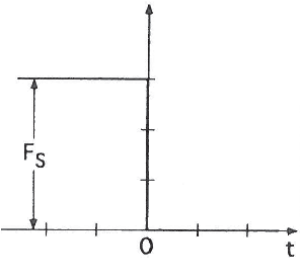
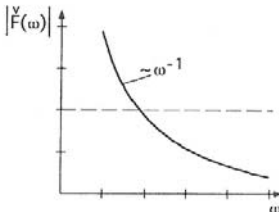
Type	Zeitverlauf	Impuls	Spektrum	Spektrum
Nadelimpuls		$I = \int F(t)dt$		$\check{F}(\omega) = I$
Rechteckimpuls		$I = \int F(t)dt = F_m\Delta t$		$\check{F}(\omega) = I \frac{\sin^2(\omega\Delta/4)}{\omega\Delta/2}$
idealer Sprung (Entlastung)				$ \check{F}(\omega)  = \frac{F_s}{\omega}$

Tabelle 2.1: Kraftverlauf im Zeit- und Frequenzbereich für verschiedene Anregungen nach [16]

Modell nach VÉR

Eine Lösung für elastische Bauteiloberflächen mit der Kontaktsteifigkeit  $K_c$  wurde von VÉR [51] vorgeschlagen, der den Kraft-Zeit-Verlauf des Stoßes aus dem als bekannt vorausgesetzten Geschwindigkeits-Verlauf  $v_0(t)$  des aufprallenden Hammers ableitete (2.82).

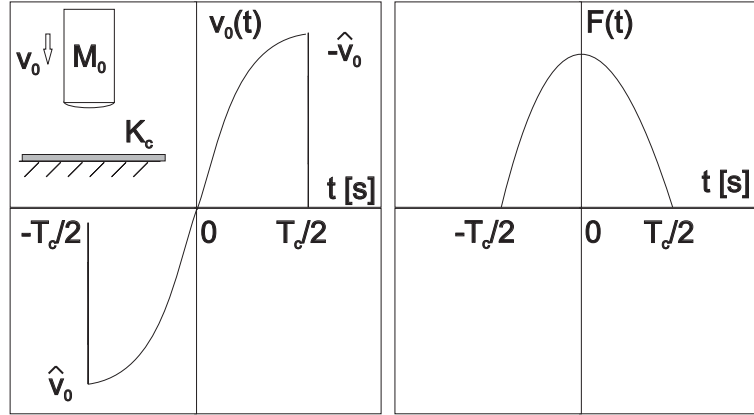


Abbildung 2.13: Ableitung der Anregungskraft  $F(t)$  vom Geschwindigkeits-Verlauf  $v_0(t)$  des aufprallenden Hammers

Der Hammer trifft auf die Bauteiloberfläche mit der Fallgeschwindigkeit  $\hat{v}_0$ , bleibt während des Kraftstoßes  $F(t)$  für eine halbe Schwingungsperiode mit der Bauteiloberfläche in Kontakt und verlässt sie danach mit dem gleichen Betrag der Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung. Die Kontaktzeit  $T_c$  ergibt sich nach (2.83) aus der Kontaktsteife  $K_c$  der Bauteiloberfläche und der Masse des Hammers  $M_0$ . Nach der Kontaktzeit ( $t > T_c/2$ ) ist  $F(t) = 0$ .

$$F(t) = M_0 \hat{v}_0 \omega_c \cos(\omega_c t) \quad (2.82)$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K_c}{M_0}}; \quad T_c = \frac{\pi}{\omega_c} \quad (2.83)$$

Durch Einsetzen von (2.82) in (2.80) ergibt sich mit der Kontaktzeit als Integralgrenzen:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} M_0 \hat{v}_0 \omega_c \cos(\omega_c t) \cos(\omega_n t) dt \quad (2.84)$$

Die baupraktische Anwendung des Modells ist - ebenso wie die zuerst genannte Näherung nach CREMER - auf Decken mit geringen Admittanzen beschränkt, da diese im Modell unberücksichtigt bleiben. Die nachfolgenden Modelle arbeiten zur Berücksichtigung dieser Deckenadmittanzen mit entsprechenden Anschlussimpedanzen.



*Modell nach Scholl und Maysenhölder*

Eine Anwendung der zuvor genannten Modelle auf leichte Decken mit größeren Admittanzen erfolgte durch SCHOLL und MAYSENHÖLDER [52]. Die Decke wird durch ihre Masse  $M_1$  in der Berechnung der Eigenkreisfrequenz nach (2.85) berücksichtigt. Zusätzlich zur Kontaktsteifigkeit der Bauteiloberfläche  $K_c$  wird die Steifigkeit der Anregung  $K_0$  mit einbezogen, um neben dem Hammerwerk auch andere Anregungen (Gummiball, menschlicher Fuß) berechnen zu können.

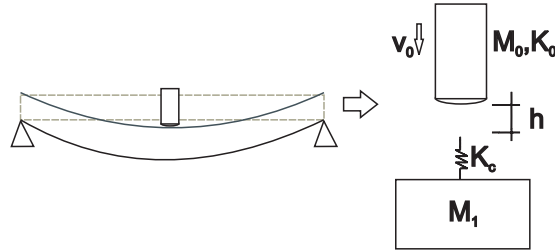


Abbildung 2.14: Modell für die Anregung von leichten Decken nach [52]

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K}{M}}; \quad K = \frac{1}{\frac{1}{K_c} + \frac{1}{K_0}}; \quad M = \frac{1}{\frac{1}{M_0} + \frac{1}{M_1}} \quad (2.85)$$

Die Kontaktsteifigkeit  $K_c$  der Bauteiloberfläche wird nach [16] aus dem Schubmodul  $G$  und der Querkontraktionszahl  $\mu$  der Bauteiloberfläche, sowie dem Hammerradius  $r$  ermittelt:

$$K_c \approx a \frac{Gr}{1 - \mu}; \quad a = \pi, \dots, 4 \quad (2.86)$$

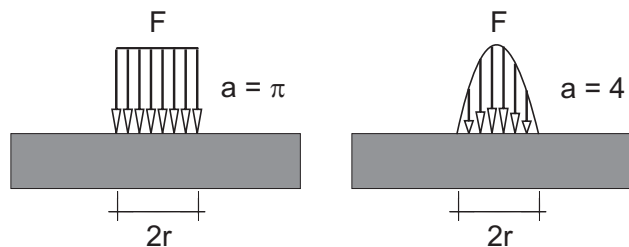


Abbildung 2.15: Formfaktor zur Berechnung der Kontaktsteifigkeit in Abhängigkeit der Kraftverteilung bei der Anregung

Der Fokus des Modells liegt auf der Beschreibung der Kontaktsteifigkeit der Deckenoberfläche und unterschiedlicher Anregungen, wodurch der Vergleich zwischen Norm-Hammerwerk und einer gehenden Person als Anregungsquelle der Decke ermöglicht wurde. Die Decke selbst wird durch die Berücksichtigung ihrer Gesamt-Masse nur unzureichend beschrieben, da die an den einzelnen Eigenformen beteiligte Masse der Decke variiert. Die Steifigkeit und Dämpfung der Decke werden nicht berücksichtigt.

*Modell nach Brunskog und Hammer*

BRUNSKOG und HAMMER [53] entwickelten ein Modell für das Anregungsspektrum, das die Admittanz der Decke vollständig berücksichtigt. Die Anregungskraft wird aus dem Kräftegleichgewicht beim Kontakt des Hammers mit dem Bauteil gewonnen (Abbildung 2.16 a - c). Um eine zeitinvariante Beschreibung zu erhalten, wird im Übergang von Bild b) auf Bild c) die Hammermasse ( $M_0$ ) als fest mit dem Baukörper verbunden betrachtet und mit dem noch unbekanntem Kraftstoß  $F_0$  angeregt. Die Admittanz  $Y$  des Systems setzt sich hierbei aus einem lokalen und einem globalen Anteil zusammen.

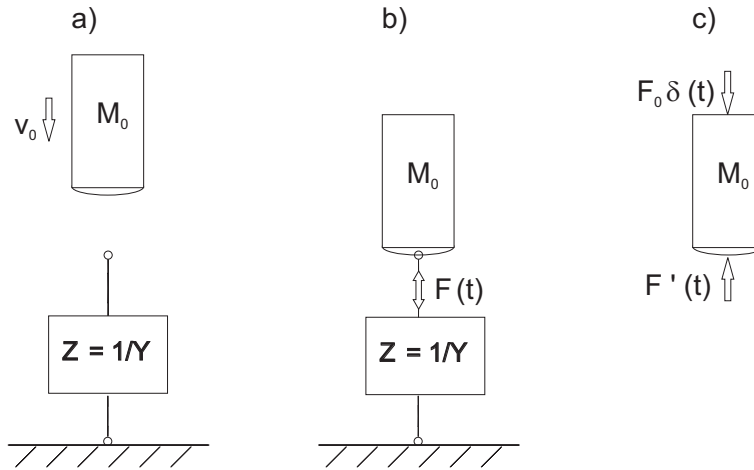


Abbildung 2.16: Modell für die Anregung der Decke durch das Hammerwerk nach [53]

Wird die Kontaktkraft  $F'(t)$  durch ihre Fourierkoeffizienten ausgedrückt,

$$F'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F'_n e^{j\omega_n t} \quad (2.87)$$

so ergibt sich im Frequenzbereich aus dem Gleichgewicht an der Kontaktstelle und der Trägheitskraft  $M_0 j\omega_n v_n$  des Hammers:

$$F_{0,n} - F'_n = j\omega_n M_0 v_n \quad (2.88)$$

Mit  $v_n = F'_n Y_n$  ergibt sich für  $F'_n$ :

$$F'_n = \frac{F_{0,n}}{1 + j\omega_n M_0 Y_n} \quad (2.89)$$

Die Größe von  $F_0$  ergibt sich aus der Forderung, dass sich  $M_0$  unmittelbar nach dem Dirac-Impuls mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v(0) = \hat{v}_0$  also der Fallgeschwindigkeit des Hammers unmittelbar vor dem Stoß bewegt. Da der (infinitesimal kurze) Impuls nur zur Hälfte im

betrachteten Zeitraum ( $t > 0$ ) liegt, wird in [53] für die Berechnung angenommen, dass die tatsächliche Anfangsgeschwindigkeit  $v(0) = \hat{v}_0/2$  beträgt:

$$v(t = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\omega) d\omega = \hat{v}_0/2 \quad (2.90)$$

Um die Zeitabhängigkeit des Anregungsvorgangs berücksichtigen zu können wird  $F'_n$  nun in den Zeitbereich zurück transformiert und ihr Kraft-Zeitverlauf beim ersten Nulldurchgang der Kraft - der dem Abheben des Hammers vom Bauteil entspricht - abgeschnitten. Der Anteil bis zum ersten Nulldurchgang wird nun wiederum in den Frequenzbereich transformiert und ergibt  $F_n$ .

Die Anwendung dieses Modells ist somit für alle Deckentypen und Beläge möglich, da neben der globalen Admittanz der Decke auch die lokale Admittanz der Deckenoberfläche berücksichtigt wird. Eine Übersicht möglicher Anwendungen für die bisher beschriebenen Anregungsmodelle ist in Tabelle 2.2 gegeben.

Anwendung auf:	Modell nach:			
	Cremer [16]	Vér [51]	Scholl et al. [52]	Brunskog et al. [53]
Decke mit geringer Admittanz ( $Y_G \rightarrow 0$ ) und harter Oberfläche ( $T_c \rightarrow 0$ )	X	X	X	X
Decke mit geringer Admittanz ( $Y_G \rightarrow 0$ ) und weichfederndem Belag ( $T_c \gg 0$ )		X	X	X
Anregung mit unterschiedlicher Kontaktsteifigkeit $K_c$ (Hammer - Fuß)			X	X
Decke mit zu berücksichtigender Admittanz ( $Y_G \gg 0$ )				X

Tabelle 2.2: Übersicht der möglichen Anwendungen für die beschriebenen Anregungsmodelle

Die nach BRUNSKOG und HAMMER berechneten Anregungsspektren des Hammerwerks auf leichten Holzbalkendecken zeigen jedoch nicht die erwartete Übereinstimmung mit Messwerten. Die berechneten Spektren liegen sehr nahe an den Grenzwerten für den ideal plastischen Stoß (siehe [53]). Dies deckt sich nicht mit Messwerten auf Holzbalkendecken [54], die deutlich höhere Werte für das Anregungsspektrum ergeben. Als mögliche Ursachen für die zu geringen Werte im Anregungsspektrum ist neben der Annahme der Anfangsgeschwindigkeit mit  $v(0) = \hat{v}_0/2$  die Voraussetzung einer ruhenden Bauteiloberfläche vor dem Stoß zu nennen. Die Messung der Trittschallübertragung erfolgt im eingeschwungenen Zustand der Decke. Es ist somit eine Relativgeschwindigkeit zwischen dem aufprallenden Hammer und der aufgrund vorausgegangener Hammerschläge schwingenden Decke zu erwarten. Dieser Einfluss soll in Abschnitt 3.1 genauer untersucht werden.

### 2.3.3 Dämpfungsmodelle in der Strukturdynamik

Wie Abschnitt 2.3.1 gezeigt hat, stellt die Dämpfung den maßgeblichen Beitrag zur Begrenzung der Schwingungsamplitude in den Resonanzen der Struktur dar. Die Genauigkeit des Berechnungsergebnisses hängt somit in starkem Maße von der richtigen Wahl bzw. Berechnung der Eingangsparameter für die Dämpfung ab. Eine physikalisch korrekte Berechnung der Dämpfung aus Materialparametern ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, da die meisten Vorgänge ein nichtlineares Dämpfungsverhalten aufweisen [55].

In der Strukturdynamik werden deshalb stark vereinfachte, meist lineare Modelle für die Dämpfung benutzt, deren Entwicklung eher vor dem Hintergrund einer mathematisch einfachen Lösung des Gleichungssystems, als einer korrekten Beschreibung der physikalischen Vorgänge erfolgte [23].

Die drei geläufigsten Modelle der Dämpfung in der Strukturdynamik werden nachfolgend kurz erläutert.

Ein in der FEM häufig verwendetes Modell für die viskose (geschwindigkeitsabhängige) Dämpfung stellt die sogenannte RAYLEIGH-Dämpfung [56] dar. Das ihr zugrundeliegende Modell beruht auf einer Darstellung der Dämpfungsmatrix in proportionaler Abhängigkeit zur Massen- und Steifigkeitsmatrix:

$$[C]_s = \alpha [M]_s + \beta [K]_s \quad (2.91)$$

Dadurch ist die Besetzung der Dämpfungsmatrix gleich der Besetzung in  $[K]$  und  $[M]$  und somit  $[\Phi]^T [C] [\Phi]$  nach (2.68) eine Diagonalmatrix mit den Elementen:

$$\bar{C}_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (2.92)$$

Das Lehrsche Dämpfungsmaß  $D_i$  ergibt sich zu:

$$D_i = \frac{\bar{C}_i}{2\omega_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \quad (2.93)$$

$\alpha$  und  $\beta$  sind aus Messwerten der Dämpfung bei mindestens 2 verschiedenen (Eigen-) Frequenzen zu bestimmen. Bei dem in Abbildung 2.17 dargestellten Beispiel einer einfachen Holzbalkendecke wurden die Messwerte zur Berechnung von  $\alpha$  und  $\beta$  nach (2.93)  $D_1$  und  $D_2$  bei 125 Hz und 2 kHz abgegriffen. Es ist nun sowohl eine direkte Lösung durch die Berechnung der Dämpfungsmatrix nach (2.92) möglich, als auch die Berechnung anhand der modalen Superposition und einem Lehrschen Dämpfungsmaß nach (2.93). Die berechneten Werte für die  $D_i$  zeigen jedoch keine ausreichende Übereinstimmung mit den Messwerten<sup>8</sup>, was jedoch nicht weiter verwundert, da die Motivation dieses Ansatzes darin besteht eine Entkopplung des Gleichungssystems durch die beidseitige Multiplikation mit seinen Eigenvektoren zu gewährleisten und somit rein mathematischer Natur ist. Auch die Wahl der Frequenzen

<sup>8</sup>Zum Vergleich mit den Messwerten des Gesamt-Verlustfaktors wurde  $D_i$  umgerechnet  $\eta \approx 2D_i$

bei denen  $\alpha$  und  $\beta$  ermittelt werden, hat einen starken Einfluss auf den Frequenzgang der berechneten Dämpfung. Des weiteren ist zu berücksichtigen, dass im Regelfall zum Zeitpunkt der Berechnung keine Messwerte für  $\alpha$  und  $\beta$  an der kompletten Struktur vorliegen. So müssen statt dessen Messwerte der Materialdämpfung oder Schätzwerte angesetzt werden.

Die in Abbildung 2.17 gezeigte Messung der Körperschallnachhallzeit zur Ermittlung des Gesamt-Verlustfaktors einer Holzbalkendecke dient zum Vergleich der Dämpfungsmodelle. Die Messung wurde im Deckenprüfstand des ift Schallschutzzentrums nach den Messvorschriften der Physikalisch Technischen Bundesanstalt für den Verlustfaktor [57] durchgeführt. Der Verlustfaktor wurde aus einer arithmetischen Mittelung der Körperschallnachhallzeit an 3 Anrege- mit je 4 Aufnehmerpositionen ermittelt. Zur Unterdrückung der Nebenwege bei der Trittschallmessung liegt die Decke nicht auf den flankierenden Wänden auf sondern auf einer außenliegenden Tragkonstruktion. Es handelt sich somit um eine linienförmige Lagerung an den Stirnseiten der Decke (siehe Abbildung 2.17, oben rechts).

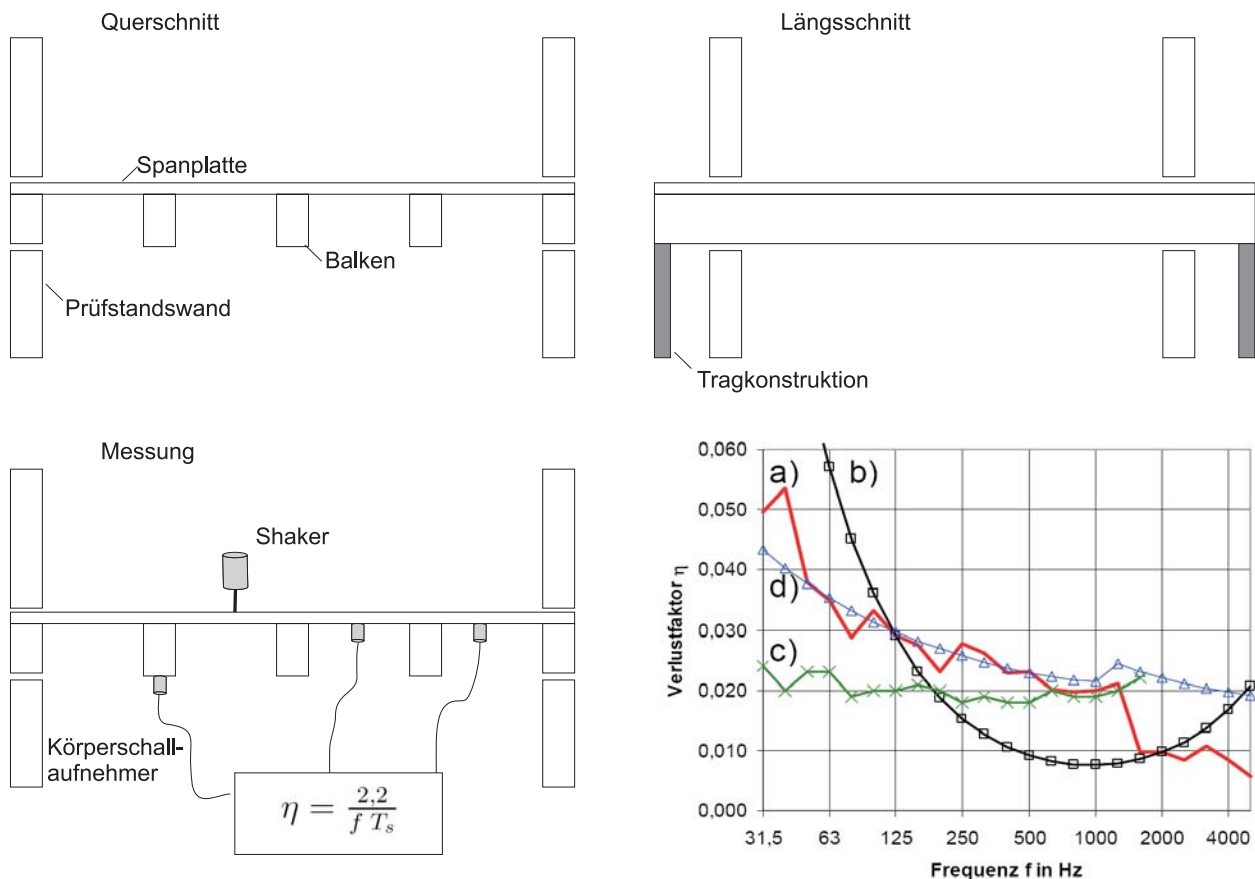


Abbildung 2.17: Verlustfaktoren einer Holzbalkendecke: a) Messwerte des Gesamt-Verlustfaktors im ift-Deckenprüfstand nach [57], b) berechnete Rayleigh Dämpfung nach (2.93) mit  $\eta \approx 2D_i$ , c) Materialverlustfaktor, Messwerte einer Spanplatte nach [58], d) Berechneter Strukturverlustfaktor nach (2.98)

Ein zweites Modell stellt die Berücksichtigung der viskosen Dämpfung durch die Einführung einer *Material- oder Strukturdämpfung* dar. Dieser Ansatz geht davon aus, dass die dissipierte Energie zwar proportional zum Quadrat der Verschiebungsamplitude, aber unabhängig von der Frequenz ist. Um eine mathematisch einfache Lösbarkeit des Differenzialgleichungssystems (2.62) gewährleisten zu können, wird die Repräsentation der Dämpfung in folgender Form angestrebt:

$$\left([K + iH]_s - \omega_n^2 [M]_s\right) \{u\}_n = \{F\}_n \quad (2.94)$$

Dies wird durch die Einführung eines komplexen E-Moduls  $E(1 \pm j\eta)$  erreicht. Der imaginäre Anteil des E-Moduls enthält den Verlustfaktor  $\eta$ , der das Verhältnis der während einer Schwingungsperiode umgewandelten (verlorenen) Energie  $E_V$  zur noch wiedergewinnbaren (reversiblen) Energie  $E_R$  darstellt.

$$\eta = \frac{E_V}{2\pi E_R} \quad (2.95)$$

Die Dämpfungsmatrix auf Elementebene erfolgt damit zu:

$$[C]_s^{(e)} = \frac{1}{\omega_n} [H]^{(e)} = \frac{\eta^{(e)}}{\omega_n} [K]^{(e)} \quad (2.96)$$

Die Diagonalisierbarkeit der globalen Dämpfungsmatrix  $[C]_s$  ist somit nur bei einem einheitlichen Verlustfaktor  $\eta$  über alle Materialien gegeben. Das Lehrsche Dämpfungsmaß ergibt sich für diesen Fall zu:

$$D_i = \frac{\bar{C}_i}{2\omega_i} = \frac{\bar{H}_i}{2\omega_i\omega_n} = \frac{\eta\omega_i^2}{2\omega_i\omega_n} = \frac{\eta}{2} \quad \text{mit : } \omega_i = \omega_n \quad (2.97)$$

Die Methode ist prädestiniert für die direkte Berechnung nach (2.94). Für den Verlustfaktor  $\eta$  werden in der Regel Messwerte der Materialdämpfung angesetzt, wobei häufig ein näherungsweise konstanter Verlauf über der Frequenz angenommen wird. Abbildung 2.17, Kurve c) zeigt Messwerte des Material-Verlustfaktors einer Spanplatte, die von NUSSER an der HS-Rosenheim ermittelt wurden [58]. Die Voraussetzung eines konstanten Frequenzgangs ist für dieses Material erfüllt<sup>9</sup>. Ein Vergleich dieses Material-Verlustfaktors mit den Messwerten des kompletten Deckenaufbaus zeigt, dass neben der Materialdämpfung weitere nicht zu vernachlässigende Effekte in den Verlustfaktor einfließen.

<sup>9</sup>Bei anderen Plattenmaterialien zeigte sich allerdings eine stärker ausgeprägte Frequenzabhängigkeit

Die *modale Dämpfung* stellt das dritte gebräuchliche Dämpfungsmodell dar. Sie geht davon aus, dass die Dämpfungsmatrix  $[C]_s$  durch die Eigenformen  $[\Phi]$  diagonalisierbar ist und somit jeder Eigenform eine unabhängige, nicht interferierende modale Dämpfung in Form eines Lehr'schen Dämpfungsmaßes zugeordnet werden kann. Die Festlegung dieser modalen Dämpfung bleibt dem Anwender überlassen. Da eine messtechnische Ermittlung im Voraus nicht möglich ist, werden häufig Messwerte vergleichbarer Konstruktionen herangezogen, von denen die modale Dämpfung meist nur für die erste Eigenform vorliegt (siehe z.B. [59]).

In der vorliegenden Arbeit wurde das modale Dämpfungsmodell verwendet, die Lehr'schen Dämpfungsmaße jedoch aus dem Strukturverlustfaktor ermittelt ( $D_i \approx \eta_{structure}/2$ ). Der Strukturverlustfaktor  $\eta_{structure}$  enthält hierbei die verschiedenen Anteile des Gesamtverlustfaktors nach (2.95) und Abbildung 2.18

$$\eta_{structure} = \sum_{l=1}^5 \eta_l \quad (2.98)$$

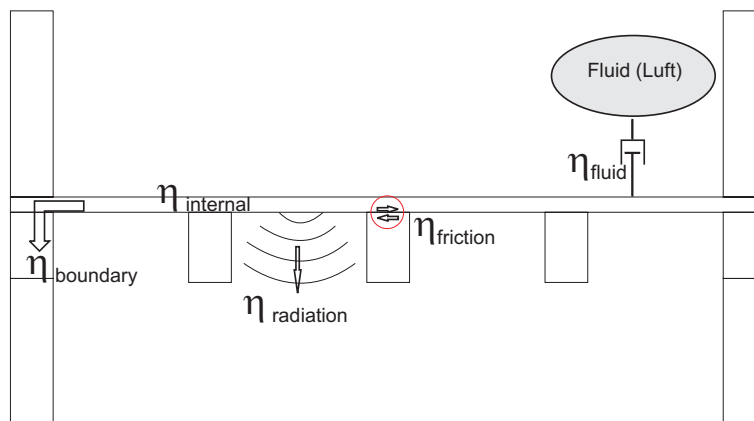


Abbildung 2.18: Anteile des Verlustfaktors zur Beschreibung der Strukturdämpfung

Die Strukturdämpfung setzt sich somit aus:

- den internen Energieverlusten durch die Material-Dämpfung  $\eta_{internal}$
- den Verlusten durch die Energieableitung im Deckenaufleger  $\eta_{boundary}$
- den Energieverlusten durch die Schallabstrahlung  $\eta_{radiation}$
- den Reibungsverlusten in den Elementstößen  $\eta_{friction}$
- und den Energieverlusten durch die Dämpfung des umgebenden Fluids  $\eta_{fluid}$

zusammen (Vergleiche auch [49, 16, 60]). Die Ermittlung dieser Teil-Verlustfaktoren wird in Abschnitt 3.3.1 beschrieben.

## 2.4 Grundlagen zur Schallpegelberechnung im Fluid

Für die Berechnung der Fluidanregung durch die Körperschallschwingung der Struktur (Schallabstrahlung) stehen in der Literatur verschiedene Methoden zur Verfügung. Als Ausgangspunkt für die Herleitung dieser Methoden dient die Wellengleichung bzw. die Helmholtzgleichung (Abschnitt 2.1.2). Eine Übersicht der Berechnungsmethoden wird in Abschnitt 2.4.1 gegeben. Sie können in modale Methoden (Abschnitt 2.4.2) und integrale Methoden (Abschnitt 2.4.3) unterteilt werden.

### 2.4.1 Übersicht der Methoden

Ausgehend von der Wellen- bzw. der Helmholtzgleichung lassen sich die Modelle zur Schallabstrahlung in zwei Gruppen einteilen; die *modalen Methoden* und die *integralen Methoden*.

Bei den *modalen Methoden* wird aus der Wellengleichung (2.18) und der Differentialgleichung der Struktur in der schwachen Form, über die Berücksichtigung der Randbedingungen an der Grenzschicht zwischen Struktur und Fluid, ein vollständig gekoppeltes Differentialgleichungssystem gewonnen, das den direkten Zusammenhang zwischen der anregenden Kraft auf der Struktur und dem resultierenden Schalldruckpegel im Raum beschreibt. Anhand der Diskretisierung mit der FEM lässt sich dieses Gleichungssystem entweder direkt (schrittweise für jede interessierende Frequenz) oder in Form eines Eigenwertproblems lösen. Anwendungen siehe [61, 62, 63, 64, 44, 65].

Vereinfachend kann für das System eine schwache Kopplung zwischen Fluid und Struktur angenommen werden, bei der die Anregung des Fluids durch die Struktur berücksichtigt wird, aber der Einfluss des Fluids auf das Schwingungsverhalten der Struktur vernachlässigt wird. Dies ermöglicht eine getrennte Berechnung von Fluid und Struktur, wodurch der Berechnungsvorgang wesentlich vereinfacht und beschleunigt wird. Vergleiche zwischen vollständig und schwach gekoppelten Systemen siehe z.B. [66].

Stellt das Fluid einen Rechteckraum mit schallharter Berandung dar, so können seine Eigenwerte auf analytischem Weg direkt aus der Raumgeometrie berechnet werden. Die Ermittlung des gesuchten Schalldruckpegels im Raum erfolgt dann durch eine modale Superposition dieser Eigenwerte und der Schwingungsschnelle der Struktur [67].

Für die *integralen Methoden* wird zunächst aus der Fundamentallösung der Helmholtzgleichung und dem Gauß'schen Integralsatz die Helmholtz'sche Randintegralgleichung gebildet. Diese Gleichung bildet die Grundlage zur Lösung der akustischen Problemstellung mit der Boundary Element Methode (BEM). Auch bei den integralen Methoden sind Berechnungen gekoppelter Struktur-Fluid-Systeme (FEM-BEM) möglich [68, 69, 70, 45]. Häufig wird jedoch auch hier eine schwache Kopplung angenommen und eine getrennte Berechnung der Struktur mit der FEM und des Fluids mit der BEM durchgeführt [71, 72]. Ein Vergleich zwischen vollständiger Kopplung und schwacher Kopplung wird in [73] gezeigt.

Kann die abstrahlende Fläche als eine ebene Platte innerhalb einer unendlichen, ebenen und



starrten Fläche beschrieben werden, so lässt sich die Helmholtz'sche Randintegralgleichung auf das in direkter Weise numerisch lösbare Rayleigh-Integral reduzieren [74]. Die Berechnung der Schallabstrahlung wird dadurch auf eine Nachlaufrechnung verkürzt, die sehr effizient durchführbar ist. Anwendungen siehe [75, 76]. Interessiert die von der Oberfläche abgestrahlte Schall-Leistung, so kann das Rayleigh-Integral in eine verwandte Methode überführt werden, die den Schall-Leistungspegel der diskretisierten Oberflächenelemente berechnet (DFEM nach [77, 78]).

Weitere Umformungen des Rayleigh-Integrals führen auf die Beschreibung des Verhältnisses zwischen Körperschallschnelle und resultierendem Schalldruckpegel durch den Abstrahlgrad  $\sigma$  [79, 80, 81, 82, 83], der in den praxisnahen Anwendungen der Bauakustik eine erhebliche Rolle spielt.

Eine Übersicht der Methoden wird in Abbildung 2.19 gezeigt. Eine detaillierte Beschreibung der verwendeten Methoden erfolgt in den Abschnitten 2.4.2 und 2.4.3. Die Umsetzung und der Vergleich mit Messergebnissen wird in Abschnitt 3.4 beschrieben.

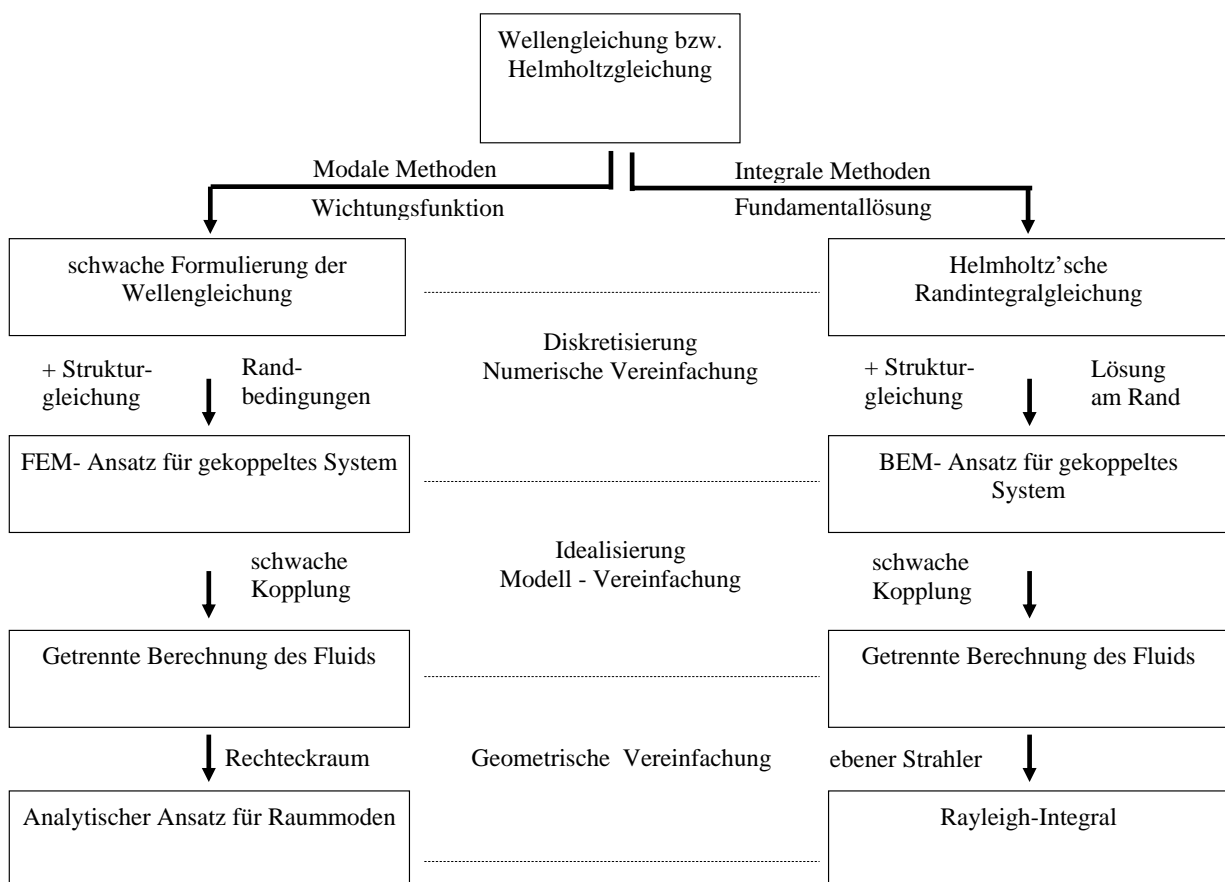


Abbildung 2.19: Übersicht der Abstrahlmodelle

## 2.4.2 Modale Methoden zur Schalldruckberechnung

Die Ausgangssituation der modalen Methoden bildet die Wellengleichung (2.18) für den Schalldruck  $p$  im Fluid. Die Einbindung in das FE-Modell erfolgt in gleicher Weise wie bei der Struktur über die schwache Formulierung der Wellengleichung mit der Wichtungsfunktion  $\bar{w}$  nach Galerkin und der Integration über dem Fluidgebiet  $\Omega$  mit anschließender partieller Integration des ersten Terms anhand des Greenschen Satzes:

$$\int_{\Omega} \bar{w} \left( \Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) dV = \int_{\Omega} \left( -\nabla \bar{w} \nabla p - \frac{1}{c_0^2} \bar{w} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) dV + \int_{\Gamma} \bar{w} \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0 \quad (2.99)$$

Das Integral über der Berandung  $\Gamma = \partial\Omega$  beschreibt die Beschaffenheit der Gebietsgrenzen. Für die Anwendung auf die hier zu untersuchende Modellierung eines Raumes (siehe Abbildung 2.20) wird zwischen drei verschiedenen Berandungsabschnitten ( $\Gamma_i$ ) unterschieden.  $\Gamma_1$  entspricht einer flexibel schwingenden Berandung, die das Fluid mit der Schnelle  $v_z$  anregt.  $\Gamma_2$  entspricht einer starren Berandung und  $\Gamma_3$  einer schallabsorbierenden Berandung mit der akustischen Impedanz  $Z$ :

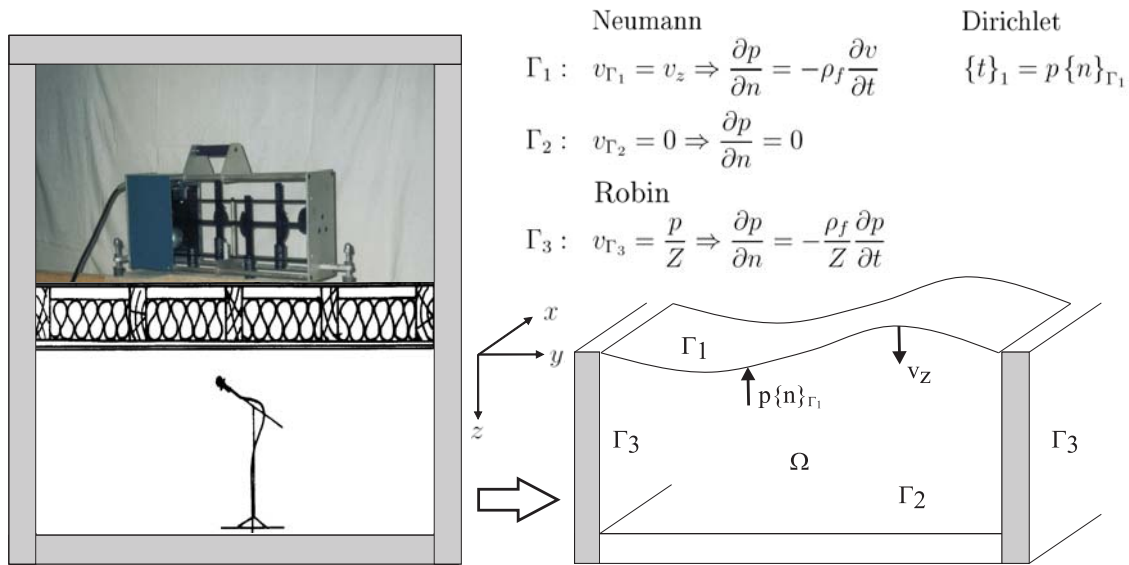


Abbildung 2.20: Modellierung des Raumes durch das Fluid  $\Omega$  und die Berandungen  $\Gamma_i$  mit den jeweiligen Neumann-, Robin- und Dirichlet-Randbedingungen

Durch die Berücksichtigung der Neumann- und der Robin-Randbedingungen ergibt sich aus (2.99):

$$\int_{\Omega} \frac{1}{c_0^2} \bar{w} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV + \int_{\Gamma_3} \bar{w} \frac{\rho_f}{Z} \frac{\partial p}{\partial t} dS + \int_{\Omega} \nabla \bar{w} \nabla p dV = - \int_{\Gamma_1} \bar{w} \rho_f \frac{\partial v_z}{\partial t} dS \quad (2.100)$$

Aus den Dirichlet-Randbedingungen ergibt sich mit dem Normalenvektor  $\{n\}_{\Gamma_1}$  nach Abbildung 2.20 die rückwirkende Kraft  $\{F\}_{fs}$  auf die Struktur:

$$\{F\}_{fs} = \int_{\Gamma_1} [N]_s^T \{n\}_{\Gamma_1} p dS \quad \text{mit:} \quad \{n\}_{\Gamma_1}^T = [0 \ 0 \ 1] \quad (2.101)$$

Die Diskretisierung des Schalldrucks  $p$  und der Wichtungsfunktion  $\bar{w}$  erfolgt in gleicher Weise wie bei der Struktur durch die Ansatzfunktionen. Da der Schalldruck aber im Gegensatz zur Verschiebung eine skalare Größe darstellt, können die Formfunktionen  $N_i$  in einem Vektor zusammengefasst werden:

$$p = \{N\}_f \{\tilde{p}\}, \quad \bar{w} = \{N\}_f \{\tilde{w}\} \quad \text{mit:} \quad \{N\}_f = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n] \quad (2.102)$$

Die Diskretisierung der Struktur-Schnelle  $v_z$  erfolgt hingegen mit den Formfunktionen  $[N]_s$  nach (2.32) und dem Normalenvektor  $\{n\}_{\Gamma_1}$  nach Abbildung 2.20:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \{n\}_{\Gamma_1} [N]_s \{\ddot{u}\} \quad \text{mit:} \quad \{n\}_{\Gamma_1}^T = [0 \ 0 \ 1] \quad (2.103)$$

Durch Einsetzen der Ansatzfunktionen in (2.100) erhält man in Matritzenschreibweise:

$$[M]_f \{\ddot{p}\} + [C]_f \{\dot{p}\} + [K]_f \{p\} = \{F\}_{sf} \quad (2.104)$$

Die Kompressibilitätsmatrix  $[K]_f$  und die Massenmatrix  $[M]_f$  des Fluids werden hierbei gegeben durch:

$$[K]_f = \int_{\Omega} \nabla \{N\}_f^T \nabla \{N\}_f \, d\Omega, \quad [M]_f = \frac{1}{c_0^2} \int_{\Omega} \{N\}_f^T \{N\}_f \, d\Omega \quad (2.105)$$

Die Dämpfungsmatrix  $[C]_f$  repräsentiert die schallabsorbierende Berandung  $\Gamma_3$ , die Lastseite  $\{F\}_{sf}$  die Berandung  $\Gamma_1$ :

$$[C]_f = \frac{\rho_f}{Z} \int_{\Gamma_3} \{N\}_f^T \{N\}_f \, dS, \quad \{F\}_{sf} = -\rho_f \int_{\Gamma_1} \{N\}_f^T \{n\}_{\Gamma_1}^T [N]_s \, dS \{\ddot{u}\} \quad (2.106)$$

Zur Kopplung mit der Struktur werden die Lastseiten  $\{F\}_{sf}$  und  $\{F\}_{fs}$  in Kopplungsterme umgeformt:

$$\{F\}_{sf} = -\rho_f [Q]_{sf} \{\ddot{u}\} \quad \text{mit:} \quad [Q]_{sf} = \int_{\Gamma_1} \{N\}_f^T \{n\}_{\Gamma_1}^T [N]_s \, dS \quad (2.107)$$

$$\{F\}_{fs} = [Q]_{fs} \{\tilde{p}\} \quad \text{mit:} \quad [Q]_{fs} = \int_{\Gamma_1} [N]_s^T \{n\}_{\Gamma_1} \{N\}_f^T \, dS \quad (2.108)$$

Das gekoppelte System der Struktur und des Fluids lautet nun:

$$[M]_s \{\ddot{u}\} + [C]_s \{\dot{u}\} + [K]_s \{u\} - [Q]_{fs} \{\tilde{p}\} = \{F\} \quad (2.109)$$

$$[M]_f \{\ddot{p}\} + [C]_f \{\dot{p}\} + [K]_f \{p\} + \rho_f [Q]_{sf} \{\ddot{u}\} = \{0\} \quad (2.110)$$

Für die Berechnung im Frequenzbereich wird das gekoppelte System durch die Separation der zeitlichen und der örtlichen Komponenten der Verschiebung und des Schalldrucks transformiert (siehe Abschnitt 2.2.4). Die Dämpfung in der Strukturgleichung wird hierbei üblicherweise durch ein komplexes E-Modul nach Abschnitt 2.3.3, die Dämpfung im Fluid durch Einbau der Impedanzen in der Kompressionsmatrix  $[K]_f$  berücksichtigt (siehe [84, 44]).

$$\begin{bmatrix} [K]_s - \omega^2 [M]_s & -[Q]_{fs} \\ -\omega^2 \rho_f [Q]_{sf} & [K]_f - \omega^2 [M]_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{p\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

Die zunächst unsymmetrische Matrix in (2.111) kann durch verschiedene Ansätze symmetrisch gestaltet werden, um eine direkte Lösung oder eine Eigenwertberechnung zu ermöglichen (siehe z.B. [61, 69, 63, 44]).

Hat die Rückwirkung des Schalldrucks im Fluid auf das Schwingungsverhalten der Struktur einen vernachlässigbaren Einfluss, so kann die direkte Berechnung und die Eigenwertberechnung getrennt erfolgen. Für die Eigenwertaufgabe des Fluids ergibt sich:

$$([K]_f - \omega_i^2 [M]_f) \{\varphi\}_i = \{0\} \quad (2.112)$$

Eine weitere Vereinfachung der Vorgehensweise lässt sich erzielen, wenn die Berechnung auf quaderförmige Räume mit schallharten Berandungen reduziert wird. Für diesen Sonderfall existiert eine analytische Lösung für die Eigenfrequenzen und Eigenformen des Raumes mit den Dimensionen  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$ :

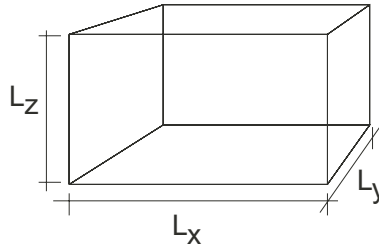


Abbildung 2.21: Dimensionen des Rechteckraums

$$\omega_{i,j,k} = c_0 \pi \sqrt{\left(\frac{i}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{j}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{k}{L_z}\right)^2} \quad (2.113)$$

$$\varphi_{i,j,k} = \cos\left(\frac{i\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{j\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{k\pi z}{L_z}\right) \quad (2.114)$$

Die Formulierung der Berechnung anhand der analytischen Lösung des Raumes und einer schwachen Kopplung zur Struktur wird in Abschnitt 3.4 beschrieben.

### 2.4.3 Integrale Methoden zur Schallabstrahlung

Für die Herleitung der Helmholtzsche Randintegralgleichung zur Beschreibung der Schallabstrahlung wird üblicherweise ein mit der Schnelle  $v_n(x, y, z)$  schwingender Körper  $B$  betrachtet, der innerhalb des Fluidgebietes  $\Omega$  mit dem Rand  $\Gamma$  liegt [49].

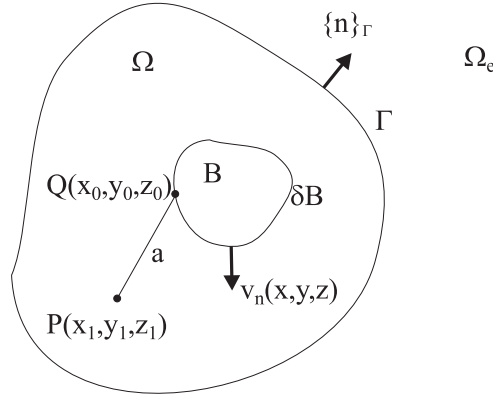


Abbildung 2.22: Gebietsdefinition für das Abstrahlproblem

[85] Die Helmholtzsche Randintegralgleichung lässt sich nun mit Hilfe der Methode nach Galerkin und der Fundamentallösung des Fluids entwickeln. Hierzu wird wie bei den modalen Methoden die schwache Formulierung mit der Wichtungsfunktion  $\bar{w}$  nach Galerkin und der Integration über dem endlichen Fluidgebiet  $\Omega$  erreicht.

$$\int_{\Omega} \bar{w} \left( \Delta p_n + \frac{\omega^2}{c_0^2} p_n \right) dV = 0 \quad (2.115)$$

Nach zweifacher partieller Integration des ersten Terms in (2.115) ergibt sich:

$$\int_{\Omega} \left( \Delta \bar{w} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \bar{w} \right) p_n dV + \int_{\Gamma} \bar{w} \nabla p_n dS - \int_{\Gamma} \nabla \bar{w} p_n dS = 0 \quad (2.116)$$

Für die Wichtungsfunktion  $\bar{w}$  wird nun die Fundamentallösung  $G$  der inhomogenen Helmholtzgleichung (2.117) eingesetzt [85, 49].

$$\Delta G(a) + \frac{\omega^2}{c_0^2} G(a) = \delta(x_0, y_0, z_0, a) \quad (2.117)$$

$$G(a) = \frac{1}{4\pi r} e^{j \frac{\omega}{c_0} a} \quad (2.118)$$

$G(a)$  beschreibt die Auswirkung einer Einheitsquelle am Quellpunkt  $Q(x_0, y_0, z_0)$  auf den Aufpunkt  $P(x_1, y_1, z_1)$  mit dem Abstand  $a$  zum Quellpunkt.  $\delta(x_0, y_0, z_0, a)$  stellt eine  $n$ -dimensionale Delta-Funktion dar, die im Abstand  $a$  zum Quellpunkt  $Q(x_0, y_0, z_0)$  (also bei  $P$ ) den Wert 1 annimmt und sonst gleich Null ist. Mit (2.117) und (2.118) folgt für (2.116):

$$\int_{\Omega} \delta(x_0, y_0, z_0, a) p_n dV = \int_{\Gamma} \nabla G(a) p_n - G(a) \nabla p_n dS \quad (2.119)$$

Da die Delta-Funktion nur an der Stelle  $x_1, y_1, z_1$  ungleich Null ist ergibt sich für (2.119) [85]:

$$p_n(x_1, y_1, z_1) = \int_{\Gamma} \nabla G(a) p_n - G(a) \nabla p_n dS \quad (2.120)$$

Nach Berücksichtigung der Randbedingungen berechnet sich der Schalldruck  $p_n$  innerhalb des Gebietes  $\Omega$  infolge der Intergration über der Berandung  $\partial B$  des schwingenden Körpers  $B$  zu [49]:

$$p_n(x_1, y_1, z_1) = \alpha \int_{\partial B} (\nabla G(a) p_n(x_0, y_0, z_0) - j\omega_n v_n(x_0, y_0, z_0) \rho_f G(a)) dS_0 \quad (2.121)$$

Liegt  $P$  auf dem Rand  $\partial B$ , so ist auf Grund des Druckstaus (Reflektion)  $\alpha = 2$ . Für alle anderen Punkte im Gebiet  $\Omega$  ist  $\alpha = 1$ . Neben dem gesuchten Schalldruck im Raum ist in (2.121) zusätzlich der Schalldruck  $p_n(x_0, y_0, z_0)$  auf der Oberfläche des Strahlers unbekannt, so dass sich das Schallfeld nicht direkt berechnen lässt.

Für die numerische Umsetzung mit Hilfe der *Boundary Elemente Methode* wird üblicherweise folgendes Vorgehen gewählt [16]:

- a) Diskretisierung der Raumbegrenzungsfläche (Strahleroberfläche, flankierende Wände und Boden) in  $N$  Teilflächen  $\delta S$  mit einer maximalen Abmessung  $\leq 1/6$  der Körperschallwellenlänge
- b) Aufstellung von  $N$  Gleichungen für die  $N$  unbekanntenen Schalldruckpegel auf der Raumbegrenzungsfläche
- c) Lösung des Gleichungssystems
- d) Berechnung des gesuchten Schalldruckpegels im Raum anhand des nun bekannten Schalldrucks auf der Oberfläche

Für ebene Flächen - innerhalb einer unendlichen, ebenen und starren Fläche - kann gezeigt werden, dass  $\nabla G(a)$  bei geeigneter Wahl von  $G$  auf der abstrahlenden Oberfläche verschwindet, wodurch sich 2.121 als Rayleigh-Integral darstellen lässt [74]:

$$p_n(x_1, y_1, z_1) = \int_{\partial B} j\omega_n v_n(x_0, y_0, z_0) \rho_f \bar{G}(a) dS_0 \quad \text{mit:} \quad \bar{G}(a) = \frac{1}{2\pi r} e^{-j\frac{\omega}{c_0} a} \quad (2.122)$$

Das Rayleigh-Integral lässt sich in seiner diskretisierten Form auch sehr anschaulich aus der Lösung von einzelnen Punkt-Schallquellen zusammensetzen, denen jeweils ein Flächenelement der abstrahlenden Oberfläche zugeordnet wird [16, 14].

Eine sehr ähnliche Methode wurde von HÜBNER et al. [77] entwickelt und "Direkte Finite Elemente Methode (DFEM)" benannt. Sie berechnet die vom Bauteil abgestrahlte

Schalleistung  $P_n$  direkt aus der flächennormalen Schnelleverteilung  $v_n(x, y)$  der Körperschallschwingungen auf der Bauteiloberfläche. Die Bauteiloberfläche wird hierzu in  $N$  Finite Elemente (endliche Teilflächen  $\Delta S_i$ ) mit einer flächennormalen Schwingungs-Schnelle  $v_{n,i}$  unterteilt. Die erste Summe in (2.123) repräsentiert den Schallfluss dieser  $N$  verschiedenen 'Monopol Ersatzquellen'. Der zweite Summand stellt die Summe der Wechselwirkungen zwischen zwei Monopolquellen mit dem Abstand  $d_{il}$  dar. Die Wellenzahl  $k_n$  ist durch  $k_n = \omega_n/c_0$  gegeben.

$$P_n = \rho_f c_0 \frac{k^2}{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{v_{n,i}^2}{2} \Delta S_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1, l \neq i}^N \frac{v_{n,i} v_{n,l}}{2} \Delta S_i \Delta S_l \frac{\sin(k_n d_{il})}{k_n d_{il}} \right\} \quad (2.123)$$

(2.123) lässt sich in das Rayleigh-Integral überführen [78].

Durch weitere Vereinfachungen können semi-analytische Lösungen für das Abstrahlproblem erarbeitet werden. Die in EN 12354-1 [60] zusammengestellten Berechnungsformeln für den Abstrahlgrad  $\sigma$  basieren auf analytischen Ansätzen von SEWELL [86] und MAIDANIC [82] für ebene, endliche und homogene Platten, eingebaut in einer unendlich ausgedehnten Schallwand. Die Berechnung erfolgt allein in Abhängigkeit der Plattenabmessungen  $l_1, l_2$  und der Koinzidenz-Grenzfrequenz  $f_c$  der Platte.

Der Abstrahlgrad  $\sigma$  beschreibt hierbei das Verhältnis der vom untersuchten Bauteil abgestrahlten Schalleistung  $P$  zur Schalleistung einer ebenen (starren), kohphas schwingenden Platte mit der gleichen effektiven, mittleren Schnelle  $\bar{v}$  und Fläche  $S$ .

$$\sigma = \frac{P}{\rho c S \bar{v}^2} \quad (2.124)$$

Die Berechnung aus den Bauteileigenschaften erfolgt nach [60] für drei Bereiche:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f_c}{f_n}}}; \quad \sigma_2 = 4 l_1 l_2 \left( \frac{f_n}{c_0} \right)^2; \quad \sigma_3 = \sqrt{\frac{2\pi f_n (l_1 + l_2)}{16c_0}} \quad (2.125)$$

Die Bereichsunterscheidung erfolgt anhand der Koinzidenz-Grenzfrequenz  $f_c$ . Für  $f_n \ll f_c$  ist  $\sigma$  sehr klein. Für  $f_n = f_c$  erreicht  $\sigma$  sein Maximum. Für  $f_n \gg f_c$  geht  $\sigma$  gegen 1 (siehe [60]).

## 2.5 Grundlagen zur Verifizierung und Validierung

Jede numerische Simulation einer physikalischen Problemstellung ist fehlerbehaftet. Eine Fehlerkontrolle ist somit unumgänglich, um belastbare Simulationsergebnisse zu erhalten. Bei dieser Fehlerkontrolle ist zunächst zwischen den verschiedenen Fehlerquellen zu unterscheiden, um sie dann anhand geeigneter Werkzeuge kontrollieren zu können. Eine detaillierte Beschreibung geeigneter Werkzeuge zur Fehlerkontrolle, die auch als Grundlage für die nachfolgenden Darstellungen dient, kann [87] entnommen werden. Für weitergehende Details sei auf [88, 89] verwiesen.

Bei der Anwendung der FEM können im Wesentlichen folgende Fehlerquellen unterschieden werden:

- *Modellierungsfehler*

Der Modellierungsfehler resultiert aus der Idealisierung der physikalischen Problemstellung. Der Fehler wird durch Vereinfachungen, wie z.B. der Dimensionsreduzierung in der Elementwahl, der Annahme einer linearen Kinematik oder der Annahme eines isotropen Materialgesetzes verursacht.

- *Diskretisierungsfehler*

Der Diskretisierungsfehler resultiert aus dem Übergang vom kontinuierlichen mathematischen Modell zum diskreten System. Er betrifft sowohl die Güte der geometrischen Beschreibung des zu untersuchenden Gebiets durch die Elemente, als auch die Beschreibung der (dynamischen) Strukturverformungen durch die Ansatzfunktionen. Bei dynamischen Berechnungen im Zeitbereich kommt noch der Fehler durch die zeitliche Diskretisierung hinzu. Bei der Berechnung im Frequenzbereich hat die Anzahl der berücksichtigten Eigenmoden einen Einfluss auf den Diskretisierungsfehler.

- *Numerischer Fehler*

Der numerische Fehler beschreibt im Wesentlichen den aus numerischen Berechnungen resultierenden Rundungsfehler.

- *Parameterfehler*

Durch den Parameterfehler werden die Unsicherheiten der Eingabeparameter (Material- und Geometrieparameter) berücksichtigt.

Zur Kontrolle der Berechnungsergebnisse und damit der genannten Fehlerquellen steht die *Verifizierung* und die *Validierung* zur Verfügung. Die *Verifizierung* überprüft die korrekte Wiedergabe des mathematischen Modells durch das numerische Modell. Die *Validierung* untersucht, wie präzise das gewählte mathematische Modell die reale (physikalische) Problemstellung repräsentiert [87].

Die Verifizierung ist somit ein geeignetes Mittel, um den Diskretisierungsfehler und den numerischen Fehler zu kontrollieren. Dies erfolgt durch den Vergleich der Berechnungsergebnisse mit der exakten Lösung für analytisch lösbare Problemstellungen.

Die Validierung wird verwendet, um den Modellierungs- und den Parameterfehler zu kontrollieren. Hierzu werden die Berechnungsergebnisse mit experimentell ermittelten Ergebnissen verglichen. Bei diesem Vergleich ist es wichtig zu berücksichtigen, dass auch das



experimentelle Ergebnis fehlerbehaftet ist. Ein Vergleich ist somit nur dann sinnvoll, wenn der experimentelle Fehler abgeschätzt werden kann.

Die Verifizierung und die Validierung werden in den nachfolgenden Abschnitten mit dem Aspekt der erforderlichen Diskretisierung der Struktur bei der gegebenen Problemstellung angewendet.

Neben den bisher behandelten Fehlerquellen, die durch Verifizierung und Validierung kontrolliert werden können, sind als zusätzliche mögliche Fehlerquellen der Programmierfehler und der Interpretationsfehler zu nennen. Der Programmierfehler beschreibt Fehler bei der Quellcode-Eingabe und kann direkt bei der Erstellung des Programms und den nachfolgenden Verifizierungstests kontrolliert werden. Der Interpretationsfehler beschreibt die möglichen Fehler bei der Ergebnisinterpretation. Gerade bei komplexen Problemstellungen kann das gleiche Ergebnis zu sehr unterschiedlichen Interpretationen führen. Zur richtigen Interpretation der Ergebnisse ist neben Erfahrungswerten mit der gegebenen Problemstellung die Kenntnis der aus den zuvor genannten Fehlerquellen resultierenden Ergebnis-Unsicherheit erforderlich.

### 2.5.1 Verifizierung der numerischen Simulation

Als erstes Beispiel für die *Verifizierung* werden in Abbildung 2.23 für die Eigenfrequenzen eines längsbelasteten und beidseitig gehaltenen Stabes die analytischen Lösungen mit FEM Berechnungen verglichen. Die analytische Lösung für die Eigenkreisfrequenzen des Stabes ergeben sich mit Einheitsgrößen ( $E = \rho = L = 1$ ) zu:

$$\omega_{i,A} = i\pi \quad (2.126)$$

Bei den FEM Berechnungen werden in Abbildung 2.23 die Ergebnisse unterschiedlicher Vorgehensweisen zur Erhöhung der Genauigkeit gezeigt. Zum einen die konventionelle Vorgehensweise einer schrittweisen Netzverfeinerung (h-Version der FEM). Zum anderen die schrittweise Erhöhung der Polynomgrade in den Ansatzfunktionen bei konstantem Netz (p-Version der FEM). Die Berechnung erfolgte mit 3-D Hexaederelementen, die auch für die Modellierung der in dieser Arbeit untersuchten Deckenelemente verwendet werden. Die Querdehnung des Stabes wurde für die Berechnung unterdrückt ( $\nu = 0$ ), um der für die analytische Lösung getroffenen Idealisierung (1-D Stab) möglichst gut zu entsprechen.

Die Berechnung mit der h-Version wurde für 3, 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320 und 640 Hexaederelemente mit linearem Verschiebungsansatz ( $p = 1$ ) durchgeführt, wodurch die Diskretisierung für die Verschiebung in der Längsrichtung  $x$  des Stabes verfeinert wurde. Die anderen Freiheitsgrade ( $u_y, u_z$ ) wurden festgehalten. Bei der p-Version erfolgte die Berechnung mit schrittweiser Erhöhung des Polynomgrades für die Verschiebung in der Längsrichtung  $x$  des Stabes ( $p = 3 \ 1 \ 1; 5 \ 1 \ 1; 7 \ 1 \ 1; 9 \ 1 \ 1; 11 \ 1 \ 1; 13 \ 1 \ 1; 15 \ 1 \ 1$ )<sup>10</sup> und mit konstanter Elementanzahl ( $n_{El} = 1$ ).

<sup>10</sup>Der Polynomgrad  $p = p_{u_x} \ p_{u_y} \ p_{u_z}$  gibt hier in seiner verkürzten Schreibweise die unterschiedlichen Polynomgrade für die jeweiligen Verschiebungen ( $u_x, u_y, u_z$ ) an, ohne zwischen den lokalen Koordinaten zu unterscheiden (Details siehe Abschnitt 2.2.2).

Die Abbildung der Konvergenz der berechneten Eigenfrequenzen gegenüber der exakten Lösung des 1-D Stabes erfolgt in der doppel-logarithmischer Darstellung. Wie aus der Literatur für glatte Problemstellungen bekannt, ergibt sich für die p-Version eine exponentielle Konvergenz und für die h-Version eine algebraische Konvergenz [26, 27].

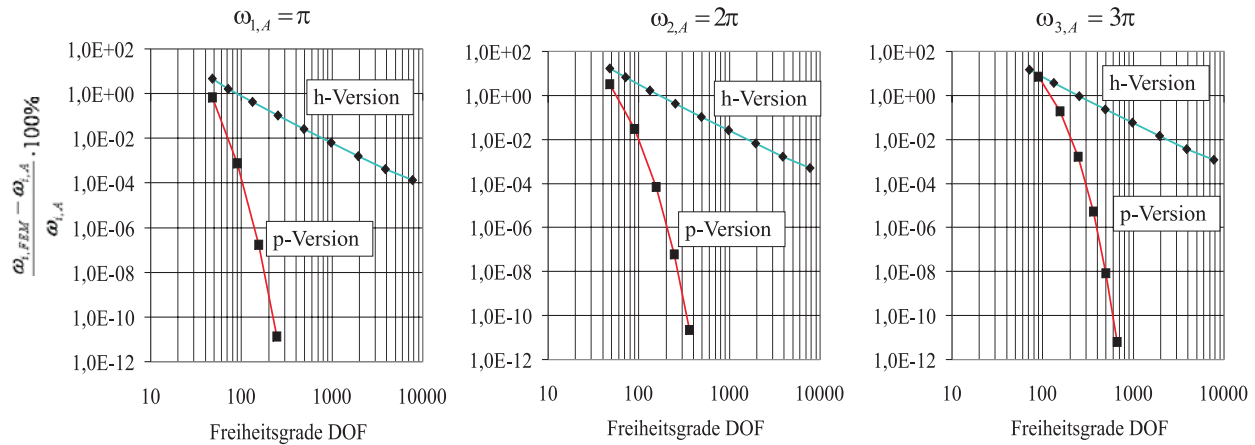


Abbildung 2.23: Konvergenz der ersten drei Eigenkreisfrequenzen eines Stabes gegenüber der analytischen Lösung in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade DOF

Im nächsten Beispiel wird die Biegeschwingung eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens behandelt. Die analytische Lösung geht von einem schubstarrten Balken (Euler-Bernoulli Balken) aus. Die Eigenkreisfrequenzen des Balkens ergeben sich mit Einheitsgrößen zu:

$$\omega_{i,A} = (i\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = (i\pi)^2 \quad \text{mit : } \frac{EI}{\rho AL^4} = 1 \quad (2.127)$$

Die FEM Berechnung erfolgte wiederum mit 3-D Hexaederelementen für die h- und die p-Version. Als dritte Variante wird in Abbildung 2.24 eine Kombination von Netzverfeinerung und Erhöhung des Polynomgrades gezeigt (hp-Version der FEM). Für die Modellierung des Balkens mit der h-Version wurde die Anzahl der linearen Elemente wie bei dem zuvor gezeigten Stab ausschließlich in Längsrichtung des Balkens erhöht. Quer zur Balkenlängsachse ist ein Element ausreichend, da die Voraussetzung eines schubstarrten Balkens in einem linearen Verlauf der Elementverformung über der Balkenhöhe resultiert. Für die p- und die hp-Version wurde der Polynomgrad für die Verschiebung in Richtung der Balkenlängsachse und der Balkenhöhe variiert, da diese Elemente im Gegensatz zu den linearen Elementen auch eine Biegeverformung erfahren. Die Wahl günstiger Polynomgrade und Elemententeilungen erfolgte für dieses einfache Beispiel 'von Hand'. Für größere Problemstellungen können bei der p-Version adaptive Methoden für die optimale Wahl der Polynomgrade verwendet werden (siehe z.B. [40]).

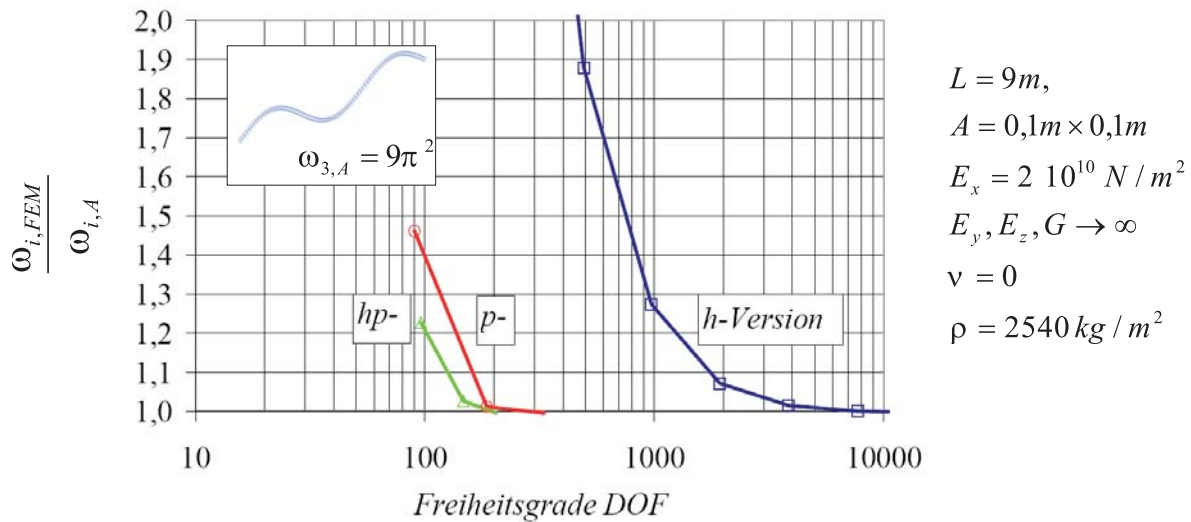


Abbildung 2.24: Konvergenz der dritten Eigenkreisfrequenz eines Balkens gegenüber der analytischen Lösung in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade DOF

<i>h-Version (p=1)</i>			<i>p-Version (n<sub>EL</sub>=1)</i>			<i>hp-Version</i>			
<i>DOF</i>	<i>n<sub>EL</sub></i>	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,A}$	<i>DOF</i>	<i>p</i>	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,A}$	<i>DOF</i>	<i>n<sub>EL</sub></i>	<i>p</i>	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,A}$
132	10	5,481	90	3 1 4	1,461	96	2	2 1 3	1,227
252	20	3,378	186	5 1 6	1,012	147	2	3 1 4	1,027
492	40	1,880	330	7 1 8	0,996	204	3	3 1 4	0,996
972	80	1,274							
1932	160	1,072							
3852	320	1,015							
7692	640	1,001							
15372	1280	0,997							

Tabelle 2.3: Berechnungsdaten zu Abbildung 2.24

Die FEM Berechnung konvergiert in diesem Beispiel auch bei schubstarrer Modellierung ( $G \rightarrow \infty$ ) nicht exakt gegen die analytische Lösung, sondern unterschreitet diese geringfügig. Ursache hierfür sind die Auflagerbedingungen, die sich bei der ein- und der dreidimensionalen Modellierung unterschiedlich auswirken.

## 2.5.2 Validierung des Berechnungsmodells

Ist die Verifizierung des mathematischen Modells und der numerischen Umsetzung erfolgt, kann in der *Validierung* die Repräsentation des physikalischen Modells durch das mathematische Modell untersucht werden. Hierzu werden die Berechnungsergebnisse mit Messergebnissen verglichen. Im Gegensatz zur Verifizierung ist bei der Validierung zusätzlich der Messfehler zu berücksichtigen. Auch wenn eine exakte Modellierung der physikalischen Problemstellung und exakte Materialparameter gegeben wären, ist bei der Validierung keine strenge Konvergenz der Berechnungsergebnisse gegenüber den (fehlerbehafteten) Messwerten zu erwarten. Die Aufgabe der Validierung liegt vielmehr darin, den aus der Modellierung und den verwendeten Materialparametern resultierenden Fehler zu bestimmen und ihn mit dem Messfehler zu vergleichen. Aus der Validierung kann der erforderliche Grad der Diskretisierung bestimmt werden, der einen ausreichend kleinen Diskretisierungsfehler gegenüber dem Modellierungs- und dem Parameterfehler gewährleistet. Hierdurch kann die effiziente Durchführung von Berechnungsreihen ermöglicht werden, wie sie beispielsweise in dieser Arbeit für die Bauteiloptimierung anhand von Parameterstudien erforderlich war.

Als Beispiel für die Validierung wird in Abbildung 2.25 zunächst die Konvergenz der Eigenkreisfrequenzen einer beidseitig gelenkig gelagerten Brettstapeldecke gegenüber den Messwerten gezeigt. Die Modellierung der Brettstapeldecke erfolgte mit unterschiedlicher Diskretisierung ( $6 \times 6$  und  $10 \times 10$  Hexaeder-Elemente) und variablen Polynomgraden ( $p = 1, \dots, 7$ ).

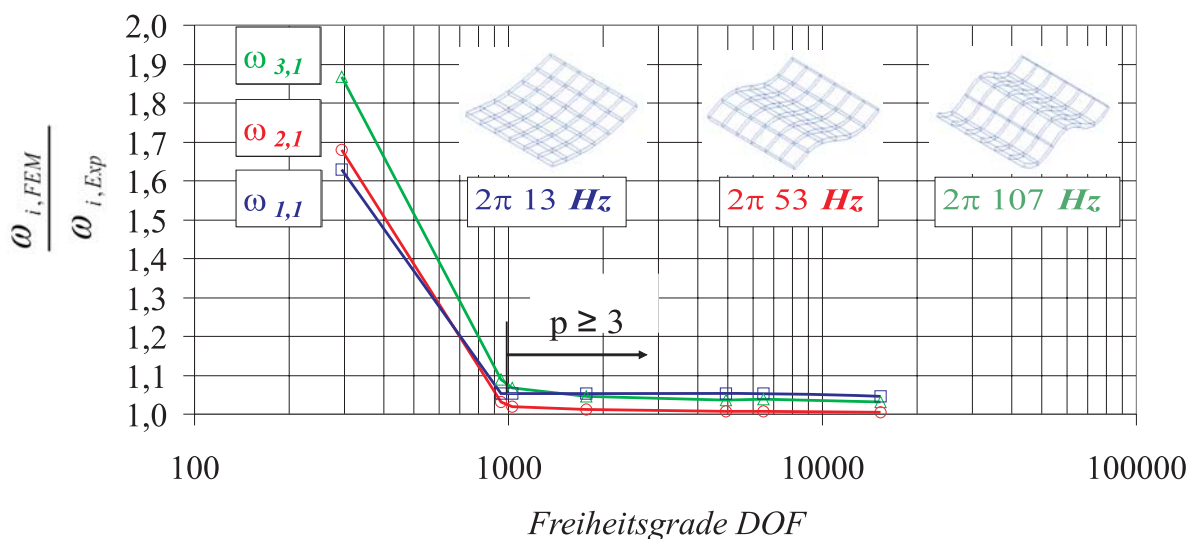


Abbildung 2.25: Konvergenz der berechneten Eigenkreisfrequenzen einer Brettstapeldecke gegenüber den Messwerten in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade DOF

			$\omega_{1,Exp} = 82,9$		$\omega_{2,Exp} = 331,1$		$\omega_{3,Exp} = 675,1$	
DOF	$n_{EL}$	$p$	$\omega_{i,FEM}$	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,Exp}$	$\omega_{i,FEM}$	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,Exp}$	$\omega_{i,FEM}$	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,Exp}$
294	6x6	111	135,1	1,629	556,1	1,679	1260,4	1,867
945	6x6	222	87,3	1,053	341,2	1,030	735,8	1,090
1029	6x6	223	87,3	1,053	337,4	1,019	720,1	1,067
1764	6x6	335	87,3	1,053	334,9	1,011	706,2	1,046
4926	6x6	557	87,3	1,053	333,6	1,008	699,3	1,036
6474	10x10	335	87,3	1,053	333,6	1,008	701,8	1,040
15300	10x10	557	86,7	1,045	333,0	1,006	696,2	1,031

Tabelle 2.4: Berechnungsdaten zu Abbildung 2.25

Die Messungen der Eigenfrequenzen erfolgten mit Beschleunigungsaufnehmern (Norsonik, Typ 1270) und einem Echtzeitanalysator (Norsonik RTA 830) mit integrierter FFT. Die Anregung erfolgte mit dem Norm-Hammerwerk. Für die Abschätzung der zu erwartenden Schwankungsbreite der Messergebnisse bei der Bestimmung von Eigenfrequenzen eines Bauteils wurden Messergebnisse verwendet, die im Zeitraum von 6 Monaten 4 mal an einem Balken unter nominell gleichen Randbedingungen ermittelt wurden [46].

Abbildung 2.25 belegt die schnelle Konvergenz der berechneten Eigenfrequenzen. Bei der verwendeten Diskretisierung mit Elementgrößen von  $0,83m \times 0,87m \times 0,15m$  bzw.  $0,50m \times 0,52m \times 0,15m$  wird mit  $p \geq 3$  für die Verschiebung in  $z$ -Richtung bereits ein ausreichend kleiner Fehler gegenüber der zu erwartenden Standardabweichung der Messwerte ( $2\sigma_m \leq 10\%$ ) erreicht. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die in Abbildung 2.25 berücksichtigten Eigenfrequenzen noch nicht das gesamte interessierende Spektrum ( $f \leq 250Hz$ ) abdecken und die Eigenfrequenzen der Brettstapeldecke erst ein Zwischenergebnis für die angestrebte Trittschallberechnung darstellen.

Die Wahl der Diskretisierung sollte deshalb in Abhängigkeit der Konvergenz der in dieser Arbeit im Fokus stehenden Norm-Trittschallpegel im Bereich  $f \leq 250Hz$  getroffen werden. Hierzu wurden bei einem weiteren Beispiel die Norm-Trittschallpegel einer Massivholzdecke mit Estrichaufbau für unterschiedliche Diskretisierungen ( $2 \times 2 \times 3$  bis  $6 \times 6 \times 3$  Hexaederelemente) und variable Polynomgrade ( $p = 1...7$ ) berechnet. Der Deckenaufbau und seine Modellierung ist in Abbildung 2.26 dargestellt. Die verwendeten Materialparameter sind im Anhang, Tabelle A aufgelistet. Diese Materialparameter wurden einheitlich für die gesamte Validierung und danach für die Optimierung der Deckenkonstruktionen verwendet.

Die Konvergenz der berechneten Norm-Trittschallpegel gegenüber den Messwerten wird in Abbildung 2.27 dargestellt. Die Messung der Norm-Trittschallpegel erfolgte in einem Deckenprüfstand ohne Nebenwege nach DIN EN ISO 140-6 [50].

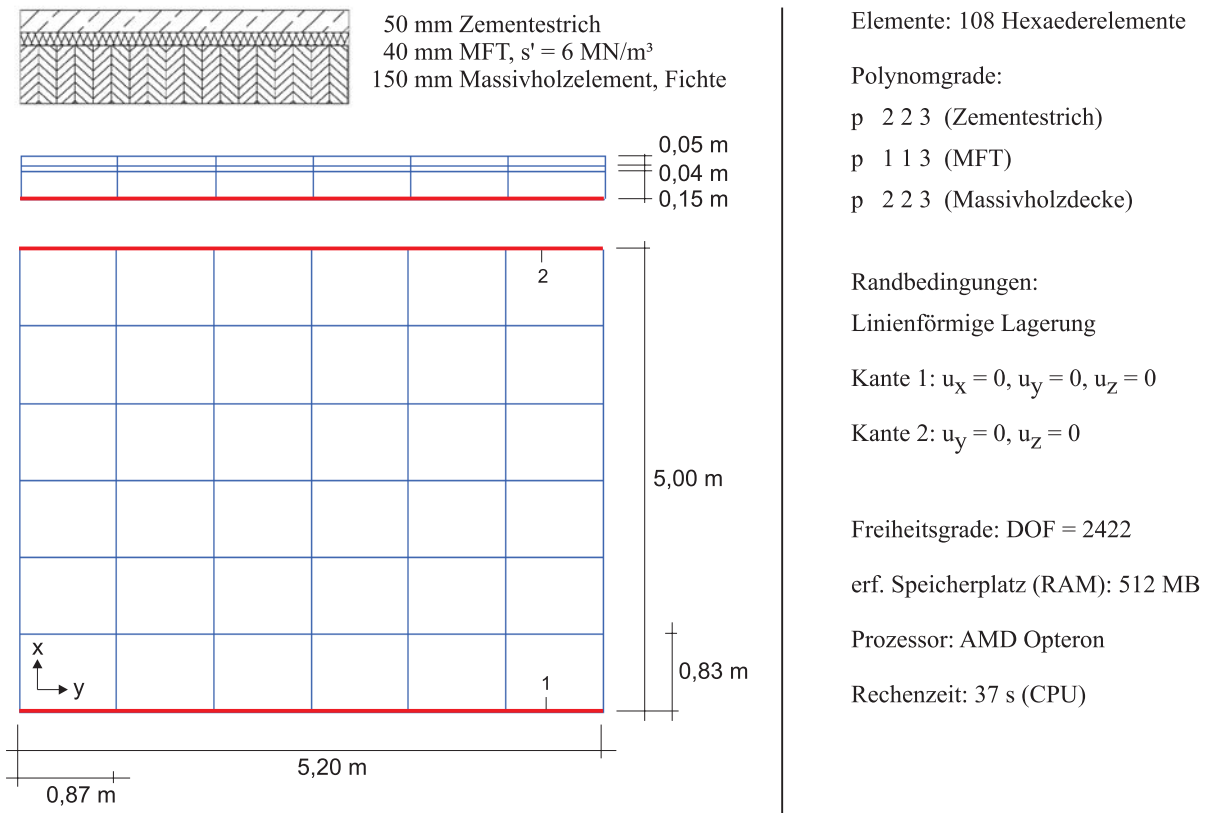


Abbildung 2.26: Aufbau und Modellierung des Berechnungsbeispiels (für  $6 \times 6 \times 3$  Hexaederelemente)

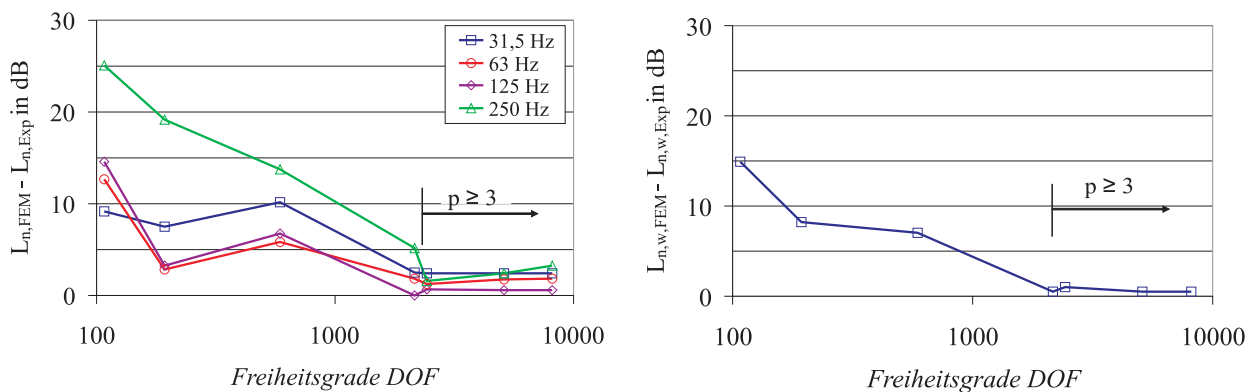


Abbildung 2.27: Konvergenz der berechneten Norm-Trittschallpegel (links  $L_n$  für 31,5 bis 250 Hz, rechts bewerteter Norm-Trittschallpegel  $L_{n,w}$ ) gegenüber den Messwerten in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade DOF

Die in Abbildung 2.27 dargestellte Konvergenz der Norm-Trittschallpegel zeigt in analoger Weise zu den Eigenfrequenzen die schnelle Konvergenz bereits bei grober Diskretisierung und niedrigen Polynomgraden ( $p \geq 3$  für die Verschiebung in  $z$ -Richtung).

Die Untersuchungen zur Konvergenz in den Abbildungen 2.25 und 2.27 zeigen somit, dass der Diskretisierungsfehler bei dieser Anwendung unproblematisch ist und bereits bei geringem numerischem Aufwand im Bereich des Messfehlers liegt. Der dominante Einfluss auf den Gesamtfehler der Berechnung ist im Modellierungsfehler und im Parameterfehler zu erwarten. Zur Abschätzung dieser Fehler wird in Abschnitt 3.5 die Validierung der Berechnung anhand von 25 verschiedenen Deckenaufbauten gezeigt.

Neben den in dieser Arbeit verwendeten hierarchischen Formfunktionen auf Basis von Legendre Polynomen stehen in der Literatur eine Vielzahl von weiteren möglichen Ansatzfunktionen zur Verfügung, die bei speziellen Anwendungen Vorteile gegenüber konventionellen Ansätzen bieten können. So konnten COTTRELL und HUGHES in [90] zeigen, dass Ansatzfunktionen auf Basis von gewichteten B-Splines ("NURBS") bei vollständig zu lösenden dynamischen Problemstellungen eine höhere Genauigkeit bei den hohen Eigenfrequenzen ergeben <sup>11</sup>. Da bei praxisnahen Problemstellungen in aller Regel jedoch nur die unteren Eigenfrequenzen ( $n_{Eigen} \ll DOF/2$ ) von Interesse sind, die Vorteile der in [90] vorgestellten Ansatzfunktionen aber erst bei hohen Eigenfrequenzen ( $n_{Eigen} > DOF/2$ ) zur Geltung kommen, sind sie für diese Arbeit nicht relevant.

---

<sup>11</sup>Der Vorteil dieser Formfunktionen resultiert aus einer höheren Stetigkeit im Elementübergang, wodurch bei sehr glatten Problemstellungen höhere Genauigkeiten erzielt werden können





# Kapitel 3

## Berechnungsverfahren der Trittschallübertragung

Auf Basis der Grundlagen in Kapitel 2 wird nachfolgend die Modellierung der Trittschallübertragung von Holzdecken beschrieben. Hierzu wird zunächst eine Weiterentwicklung des Modells zur Anregung durch ein Norm-Hammerwerk vorgestellt (Abschnitt 3.1). Danach wird die Modellierung der dreidimensionalen Deckenstruktur und des Materials beschrieben (Abschnitt 3.2). Die Beiträge zur Dämpfung werden in Abschnitt 3.3 dargestellt. Die Modellbildung zur Abstrahlung des Körperschalls erfolgt in Abschnitt 3.4. Eine Validierung des Berechnungsmodells wird in Abschnitt 3.5 gezeigt.

### 3.1 Modellierung der Anregung

In Abschnitt 2.3.2 wurde anhand einer Zusammenstellung und Auswertung der in der Literatur verfügbaren Modelle gezeigt, dass bei der Modellierung der Trittschallanregung durch ein Norm-Hammerwerk noch Bedarf an einer genaueren Betrachtung des Anregungsvorgangs besteht. Insbesondere die Wechselwirkungen zwischen dem aufprallenden Hammer und der schwingenden Decke sollen nachfolgend im Zeitbereich genauer untersucht werden (Abschnitt 3.1.1), um daraus ein zuverlässiges Modell im Frequenzbereich ableiten zu können (Abschnitt 3.1.2). Die Überprüfung des Modells erfolgt durch den Abgleich mit Messergebnissen (Abschnitt 3.1.4).

### 3.1.1 Modellierung der Anregungskraft im Zeitbereich

Um die Interaktion zwischen Decke und aufprallendem Hammer besser verstehen zu können, wird der Stoß nachfolgend zunächst im Zeitbereich betrachtet. Aufbauend auf den Ergebnissen im Zeitbereich wird dann die Berechnung im Frequenzbereich um den Effekt der Relativgeschwindigkeit zwischen Decke und Hammer erweitert.

Für die Modellierung des Stoßes im Zeitbereich kann im Wesentlichen ein Modell von CREMER und HECKL [16] verwendet werden, das den Aufprall einer Kugel auf eine Platte mit elastischer Auflage beschreibt. Eine Übertragung auf die Anregung einer leichten Decke mit dem Hammerwerk (mit zusätzlicher Berücksichtigung der Dämpfung an der Kontaktstelle) ist in Abbildung 3.1 wiedergegeben.

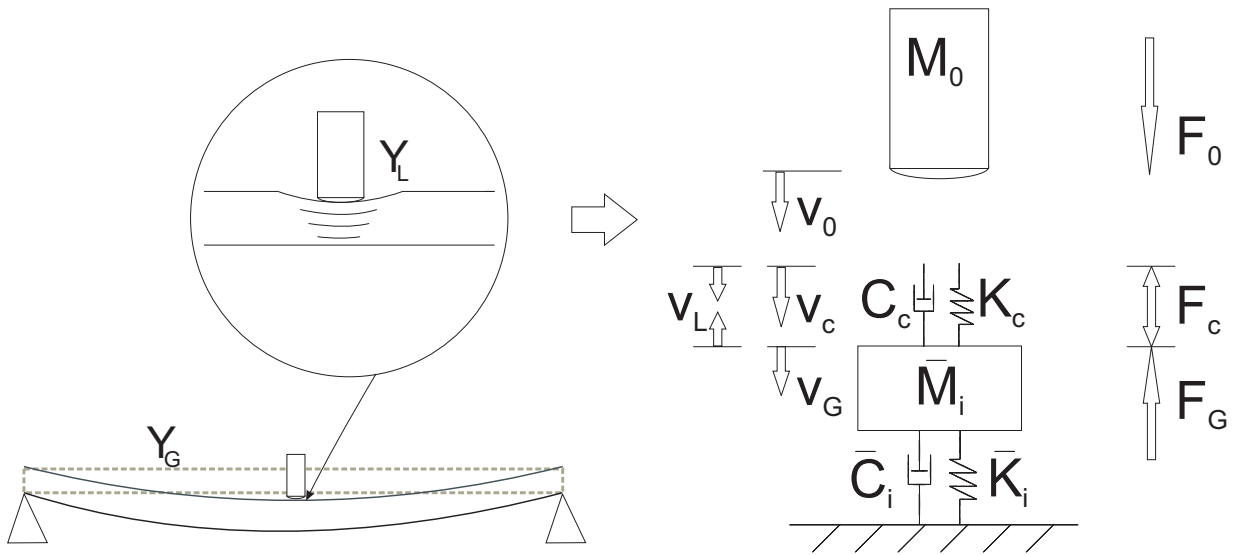


Abbildung 3.1: Verwendetes Modell für die Anregung der  $i$  verschiedenen Deckenmoden ( $i = 1, \dots, N_{eigen}$ ) durch das Hammerwerk

Das Schwingungsverhalten der Decke wird durch einen globalen Anteil (Admittanz  $Y_G$  der Decke) und den Verformungsanteil an der Stoßstelle (lokale Admittanz  $Y_L$ ) beschrieben. Die lokale Admittanz wird durch die aufprallende Masse des Hammers  $M_0$ , sowie der Dämpfung  $C_c$  und der Steifigkeit  $K_c$  an der Kontaktstelle gebildet. Die globale Admittanz resultiert aus der Summe der modalen Massen  $\bar{M}_i$ , Dämpfungen  $\bar{C}_i$  und Steifigkeiten  $\bar{K}_i$ .

Aus dem Kräftegleichgewicht zwischen aufprallendem Hammer  $F_0(t)$  und entgegenwirkender Kontaktkraft der Decke  $F_c(t)$  folgt für die zeitabhängige Geschwindigkeit des Hammers  $v_0(t)$  nach Integration über der Zeit:

$$F_c(t) = F_0(t) = M_0 g - M_0 \frac{dv_0}{dt} \Rightarrow v_0(t) = gt - \frac{1}{M_0} \int_0^t F_c(t_q) dt_q + C_{int} \quad (3.1)$$

Die Integrationskonstante  $C_{int}$  kann aus den Anfangsbedingungen gewonnen werden. Da das Hammerwerk auf der schwingenden Decke steht, bewegt sich der Hammer - bevor er

sich zum freien Fall aus der Mechanik löst - zunächst mit der gleichen Geschwindigkeit wie die Decke ( $v_G(t)$ ). Somit ergibt sich für die Integrationskonstante  $C_{int} = v_{0,t_0}$  mit  $v_{0,t_0} = v_G(t = 0 + (m - 1)T)$ . Für den ersten Hammerschlag ( $m = 1$ ) ist  $v_{0,t_0} = 0$ .

Im nächsten Schritt ist die Geschwindigkeit der Deckenoberfläche zu ermitteln. Da sich die Deckenoberfläche an der Kontaktstelle während des Stoßes mit der gleichen Geschwindigkeit  $v_c(t)$  wie der Hammer bewegt, folgt:

$$v_0(t) = v_c(t) \quad \text{bzw.} \quad v_0(t) = v_L(t) + v_G(t) \quad (3.2)$$

Die Geschwindigkeit der Deckenoberfläche setzt sich hierbei aus dem lokalen Verformungsanteil an der Kontaktstelle  $v_L(t)$  und dem globalen Anteil  $v_G(t)$  der Deckenschwingung zusammen. Der lokale Anteil ergibt sich aus der Kontaktkraft  $F_c(t)$ :

$$F_c(t) = K_c \int_0^t v_L(t_q) dt_q + C_c v_L \quad (3.3)$$

Der globale Anteil der Deckenschwingung wird aus der Modalanalyse gewonnen. Im Zeitbereich lässt sich die Gesamtschwingung aus der Superposition der Impulsantworten für jede Eigenmode  $\varphi_i$  der Decke gewinnen. Der reale Stoß an der Anregungsstelle  $x_0, y_0$  wird hierzu im Duhamel-Integral aus idealen Einzelimpulsen zusammengesetzt.

$$v_G(t) = \int_0^t F_c(t_q) \sum_{i=1}^{\infty} \dot{h}_i(t - t_q) dt_q \quad (3.4)$$

$$h_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_i} e^{-D_i \omega_i t} \sin(\omega_i t); \quad M_i = \frac{\bar{M}_i}{\varphi_i^2(x_0, y_0)} \quad (3.5)$$

$$\dot{h}_i(t) = \frac{1}{M_i} e^{-D_i \omega_i t} [\cos(\omega_i t) - D_i \sin(\omega_i t)] \quad (3.6)$$

Die Problemstellung ist somit numerisch lösbar für  $\mu$  Zeitschritte und  $N_{eigen}$  Eigenmoden  $\varphi_i$  der Decke. Durch Gleichsetzen der Geschwindigkeiten des Hammers und der Deckenoberfläche während des Stoßes ergibt sich für den  $\mu$ -ten Zeitschritt  $\Delta t$ :

$$v_0(\mu \Delta t) = v_c(\mu \Delta t) \quad \text{bzw.} \quad v_0(\mu \Delta t) = v_L(\mu \Delta t) + v_G(\mu \Delta t) \quad (3.7)$$

Nach Einsetzen von (3.1),(3.3) und (3.4) in (3.7) und Darstellung in diskreten Zeitschritten folgt:

$$g\mu\Delta t - \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{F_{c,\nu}}{M_0}\Delta t - \frac{F_{c,\mu}}{M_0}\Delta t + v_{0,t_0} = \left[ \frac{F_{c,\mu} - K_c \sum_{\nu=1}^{\mu-1} v_{L,\nu}\Delta t}{C_c + K_c\Delta t} + \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \left\{ F_{c,\nu}\Delta t \sum_{i=1}^{N_{eigen}} \dot{h}_i((\mu - \nu)\Delta t) \right\} \right] \quad (3.8)$$

und nach Umstellen:

$$F_{c,\mu}\Delta t = M_0 \left[ g\mu\Delta t - \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{F_{c,\nu}}{M_0}\Delta t + v_{0,t_0} \right] - M_0 \left[ \frac{F_{c,\mu} - K_c \sum_{\nu=1}^{\mu-1} v_{L,\nu}\Delta t}{C_c + K_c\Delta t} + \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \left\{ F_{c,\nu}\Delta t \sum_{i=1}^{N_{eigen}} \dot{h}_i((\mu - \nu)\Delta t) \right\} \right] \quad (3.9)$$

Es wird somit in (3.9) für jeden Zeitschritt der Teil-Impuls ( $\Delta I = F_{c,\mu}\Delta t$ ) berechnet. Die Zeitschrittgröße  $\Delta t$  ist hierbei so zu wählen, dass der Teil-Impuls einem Dirac-Impuls entspricht. D.h. die Impulsdauer muss so kurz sein, dass die aus dem Impuls resultierende Geschwindigkeitsänderung der Deckenschwingung während der Impulsdauer vernachlässigbar ist ( $\Delta v_G(\Delta t) \rightarrow 0$ ).<sup>1</sup>

Anhand der zeitabhängigen Darstellung des Stoßes lassen sich nun die Vereinfachungen der vorausgegangenen Modelle gut veranschaulichen. Wird bei der Berechnung nach (3.9) die Kontaktsteifigkeit sehr groß gewählt ( $K_c \rightarrow \infty$ ) und die Admittanz der Decke als sehr klein angenommen ( $1/M_i \rightarrow 0$ ), erhält man die gleichen Ergebnisse wie mit dem ursprünglichen Modell nach CREMER, das der Reduzierung des kompletten Stoßvorgangs auf einen Dirac-Impuls (Abbildung 3.2a) entspricht. Wird eine reale Kontaktsteifigkeit in der Berechnung berücksichtigt, gleichen die Ergebnisse der Modellierung nach VÉR (Abbildung 3.2b). Die Änderung der Schwingungsschnelle der Decke  $v_G$  während des Stoßes bleibt aufgrund der geringen Deckenadmittanz vernachlässigbar. Die zusätzliche Berücksichtigung der Decken - Admittanz (für leichte Decken) führt auf das Modell nach BRUNSKOG und HAMMER (Abbildung 3.2c). Berücksichtigt man des Weiteren die Relativgeschwindigkeit zwischen Decke und Hammer, die aus den vorausgegangenen Stößen resultiert, wird Abbildung 3.2d) erreicht.

<sup>1</sup>In [16] wird dies im Gegensatz zur hier gewählten Vorgehensweise durch die Annahme eines "halben" Impulses für den aktuellen Zeitschritt berücksichtigt.

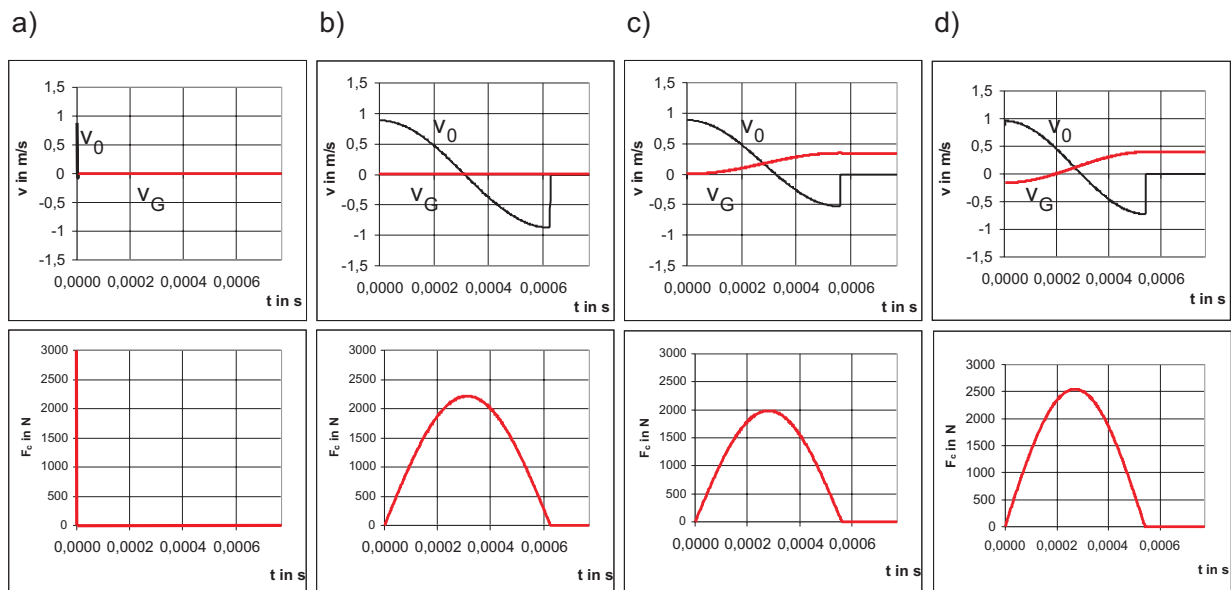


Abbildung 3.2: Modellierung der Anregung mit den verschiedenen Vereinfachungen, Berechnung nach (3.9): a)  $K_c \rightarrow \infty$ ,  $1/M_i \rightarrow 0$ ,  $v_G(t = 0) = 0$  b)  $1/M_i \rightarrow 0$ ,  $v_G(t = 0) = 0$  c)  $v_G(t = 0) = 0$

Wie Abbildung 3.2d) zeigt, kann die Anregungskraft - je nach Phasenlage der Geschwindigkeiten von Hammer und Decke - deutlich größer oder deutlich kleiner sein als mit den bisherigen Modellen berechnet. Für die weitere Umsetzung stellt sich die Frage, in welcher Weise sich die Relativgeschwindigkeit bei den unterschiedlichen Deckentypen bemerkbar macht. Tabelle 3.1 zeigt hierzu die beispielhafte Berechnung der Schwingungsschnelle an der Anregungsstelle für zwei Eigenformen und Deckentypen mit unterschiedlicher Admittanz.

	$\omega_i = 2\pi \ 30Hz$	$\omega_i = 2\pi \ 200Hz$
geringe Admittanz		
große Admittanz		

Tabelle 3.1: Einfluss der Relativgeschwindigkeit bei verschiedenen Admittanzen und Frequenzen

Die Relativgeschwindigkeit zwischen Decke und Hammer ist somit dann relevant, wenn die aus dem vorausgegangenem Hammerschlag resultierende Schwingung zum Zeitpunkt des

nächsten Stoßes noch nicht abgeklungen ist. Dies ist vorrangig bei leichten Decken (große Admittanz) und tieffrequenten Schwingungen (lange Ausschwingdauer) gegeben.

Zur Berücksichtigung der Relativgeschwindigkeit ist nun prinzipiell eine vollständige Berechnung im Zeitbereich für einen definierten "Messzeitraum" mit nachfolgender Rücktransformation in den Frequenzbereich möglich. Diese Vorgehensweise bedeutet aber einen erheblichen numerischen Aufwand und stellt hohe Ansprüche an die Genauigkeit der Eigenfrequenzen, um die Relativgeschwindigkeit zwischen Decke und Hammer korrekt zu erfassen. Nachfolgend wird deshalb alternativ eine vereinfachte Berechnung im Frequenzraum vorgeschlagen.

### 3.1.2 Modellierung der Anregungskraft im Frequenzbereich

Die im Zeitbereich dargestellte Interaktion zwischen Hammer und Decke kann im Frequenzbereich näherungsweise durch eine iterative Vorgehensweise beschrieben werden. Hierzu wird zunächst für das in Abbildung 3.1 dargestellte Modell eine zeitinvariante Beschreibung im Frequenzraum gewählt. Dies erfolgt in gleicher Weise wie in [16] und [53] durch die Einführung eines Kraftstoßes  $F_{0,n}$  auf den mit der Struktur fest verbundenen Hammer ( $M_0$ ):

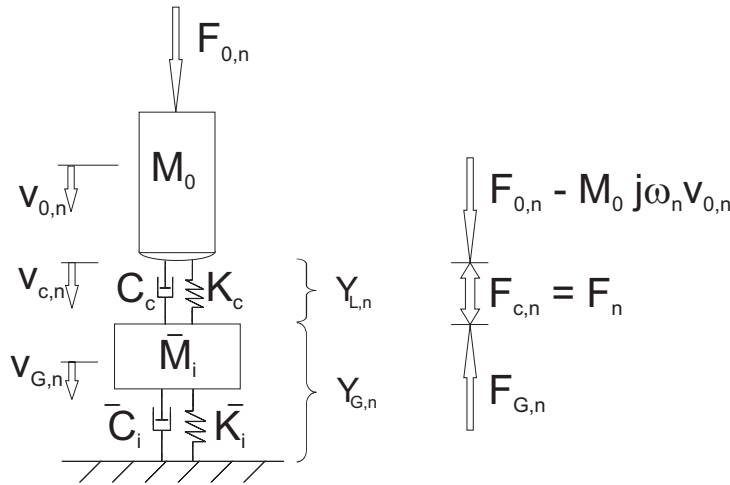


Abbildung 3.3: Modell für die Anregungskraft im Frequenzraum

Aus Abbildung 3.3 folgt:

$$F_n = F_{0,n} - M_0 j\omega_n v_{0,n}; \quad v_{0,n} = v_{c,n}; \quad v_{c,n} = v_{G,n} + F_n Y_{L,n}; \quad v_{G,n} = F_n Y_{G,n} \quad (3.10)$$

Nach Einsetzen und Umordnen ergibt sich während des Kontakts:

$$F_n = \underbrace{F_{0,n} - F_n Y_{L,n} M_0 j\omega_n}_{F_{n,L}} - \underbrace{F_n Y_{G,n} M_0 j\omega_n}_{F_{n,G}} \quad (3.11)$$

Die Kontaktkraft  $F_n$  kann in einen lokalen Anteil  $F_{n,L}$  und einen globalen Anteil  $F_{n,G}$  aufgeteilt werden.  $F_n$  berechnet sich somit aus der Kraft  $F_{0,n}$ , die in Abhängigkeit der lokalen Admittanz  $Y_{L,n}$  und der globalen Admittanz  $Y_{G,n}$  reduziert wird. Geht die lokale und die globale Admittanz der Decke gegen Null, so ist  $F_n = F_{0,n}$ , woraus sich  $F_{0,n}$  zum Spektrum eines ideal elastischen Stoßes ergibt, wie im vereinfachten frequenzabhängigen Modell nach CREMER [16] gezeigt. Geht nur die globale Admittanz gegen Null, so entspricht  $F_n = F_{n,L}$  und kann mit dem Modell nach VÉR [51] berechnet werden, das die in (3.11) vernachlässigte Zeitvarianz berücksichtigt.

Für den hier interessierenden Fall, dass beide Admittanzen relevant sind, erfolgt die Berechnung zunächst für den lokalen Anteil  $F_{n,L}$  mit einem modifizierten Modell nach Vér und dann iterativ für die Gesamtkraft  $F_n$  im eingeschwungenen Zustand.

Die Modifikation des Modells für den lokalen Anteil  $F_{n,L}$  besteht in der Berücksichtigung der im vorausgegangenen Abschnitt beschriebenen Relativgeschwindigkeit  $v_R$  zwischen dem aufprallenden Hammer und der schwingenden Decke sowie in der Berücksichtigung der lokalen Dämpfung  $D_c$ .

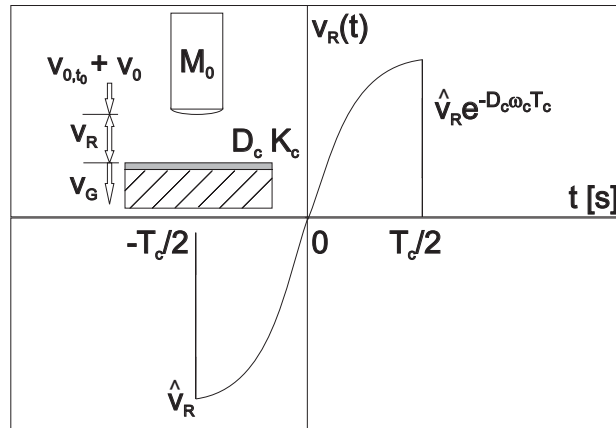


Abbildung 3.4: Verlauf der Relativgeschwindigkeit  $v_R(t)$

Der Scheitelwert der Relativgeschwindigkeit  $\hat{v}_R$  zwischen Decke und aufprallendem Hammer setzt sich nach Abbildung 3.4 aus der Geschwindigkeit am Ende des freien Falls  $\hat{v}_0$ , zuzüglich der Anfangsgeschwindigkeit des Hammers beim Lösen aus der Mechanik  $v_{0,t_0}$  und der bereits vorhandenen Schwinggeschwindigkeit der Decke  $v_{G,m}$  zusammen:

$$\hat{v}_R = \hat{v}_0 + v_{0,t_0} - v_{G,m} \quad (3.12)$$

Für den zeitlichen Verlauf der Relativgeschwindigkeit  $v_R(t)$  folgt daraus:

$$v_R(t) = \hat{v}_R e^{-D_c \omega_c t} \sin(\omega_c t) \quad (3.13)$$

Woraus sich der lokale Anteil  $F_{n,L,m}$  für den m-ten Hammerschlag ergibt zu:

$$F_{n,L,m} = \frac{1}{T_n} \int_{-T_n/2}^{T_n/2} F_L(t) e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T_n} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} M_0 \dot{v}_R(t) e^{-j\omega_n t} dt \quad (3.14)$$

In (3.13) und (3.14) wurde die Annahme getroffen, dass die Kontaktzeit  $T_c = \pi/\omega_c$  durch die globale Admittanz der Decke nicht maßgeblich beeinflusst wird.  $F_{n,L,m}$  wird zunächst für einen einzelnen Stoß ermittelt. Hierzu ist  $T_n$  so zu wählen, dass die Schwingung der betrachteten Struktur am Ende von  $T_n$  bereits abgeklungen ist. Für die in diesem Beitrag betrachteten Strukturen war dies für  $T_n = 0,5s$ , also der Schlagwiederholdauer eines (einzelnen) Hammers gegeben. Hieraus ergibt sich die n-te Kreisfrequenz zu  $\omega_n = n2\pi/T_n = n4\pi$ .

Für den ersten Schlag ( $m = 1$ ) ist  $\hat{v}_R = \hat{v}_0$ . Um eine erneute Fouriertransformation bei den nachfolgenden Berechnungsschritten zu umgehen, kann  $F_{n,L,m}$  für die weiteren Stöße aus dem Ergebnis des ersten Stoßes berechnet werden.

$$F_{n,L,m} = \frac{\hat{v}_R}{\hat{v}_0} F_{n,L,1} \quad (3.15)$$

Der globale Anteil der Anregungskraft errechnet sich für eine Struktur mit  $n_{eigen}$  Freiheitsgraden aus der globalen Admittanz  $Y_{G,n,i}$  und der Auslenkung der Struktur-Eigenformen  $\varphi_i$  an der Anregungsstelle  $(x_0, y_0)$ :

$$F_{n,G} = M_0 F_n j\omega_n \sum_{i=1}^{n_{eigen}} Y_{G,n,i} \varphi_i^2(x_0, y_0) \quad (3.16)$$

Für den ersten Schlag des Hammers auf die noch ruhende Struktur ergibt sich somit nach Einsetzen von (3.16) in (3.11):

$$F_{n,1} = \frac{F_{n,L,1}}{1 + M_0 j\omega_n \sum_{i=1}^{n_{eigen}} Y_{G,n,i} \varphi_i^2(x_0, y_0)} \quad (3.17)$$

Ab dem zweiten bis zum m-ten Schlag des Hammerwerks auf die Struktur ist die Relativgeschwindigkeit zwischen der nun schwingenden Struktur und dem aufprallenden Hammer zu berücksichtigen:

$$F_{n,m} = \frac{\frac{\hat{v}_R}{\hat{v}_0} F_{n,L,1}}{1 + M_0 j\omega_n \sum_{i=1}^{n_{eigen}} Y_{G,n,i} \varphi_i^2(x_0, y_0)} \quad (3.18)$$

Die Berechnung der Relativgeschwindigkeit  $\hat{v}_R$  erfolgt nach (3.12) aus der Geschwindigkeit des Hammers am Ende des freien Falls  $\hat{v}_0$ , zuzüglich der Anfangsgeschwindigkeit des Hammers beim Lösen aus der Mechanik  $v_{0,t_0}$  und der bereits vorhandenen Schwinggeschwindigkeit der Decke  $v_{G,m}$ . Die Schwinggeschwindigkeit  $v_{G,m}$  der Decke zum Zeitpunkt des Aufpralls wird



aus den Anteilen der einzelnen Eigenformen aufsummiert. Die Anteile der einzelnen Eigenformen werden aus der Geschwindigkeit  $v_{G,m-1,i}$  unmittelbar nach dem letzten Schlag unter Berücksichtigung der Dämpfung  $D_i$  während der freien Schwingung zwischen den Schlägen berechnet.

$$v_{G,m} = \sum_{i=1}^{n_{eigen}} \hat{v}_{G,m-1,i} e^{-D_i \omega_i T} \cos(\omega_i T + \alpha_{G,m-1,i}) \quad (3.19)$$

Hierbei stellt  $\hat{v}_{G,m-1,i}$  die Amplitude und  $\alpha_{G,m-1,i}$  die Phase von  $v_{G,m-1,i}$  dar.  $v_{G,m-1,i}$  berechnet sich für den Zeitpunkt  $T_c$  unmittelbar nach dem letzten Stoß (m-1) aus den spektralen Anteilen zu:

$$v_{G,m-1,i} = 2 \sum_{n=1}^{n_{max}} v_{G,m-1,i,n} e^{j\omega_n T_c} \quad (3.20)$$

Die spektrale Schwingungsschnelle  $v_{G,m-1,i,n}$  berechnet sich aus der noch vorhandenen Schwingungsschnelle  $v_{G,m-2,i,n}$  weiter zurückliegender Schläge (ab  $m > 2$ ) und aus der Anregungskraft  $F_{n,m-1}$  des unmittelbar vorausgegangenen Hammerschlags.

$$v_{G,m-1,i,n} = v_{G,m-2,i,n} e^{-D_i \omega_i T} e^{j\omega_i T} + F_{n,m-1} Y_{G,n,i} \varphi_i^2(x_0, y_0) \quad (3.21)$$

Die Anfangsgeschwindigkeit des Hammers beim Lösen aus der Mechanik  $v_{0,t_0}$  wird auf die gleiche Weise für den Zeitpunkt des Auslösens ( $T - T_{Fall}$ ) berechnet:

$$v_{0,t_0} = \sum_{i=1}^{n_{eigen}} \hat{v}_{G,m-1,i} e^{-D_i \omega_i (T - T_{Fall})} \cos(\omega_i (T - T_{Fall}) + \alpha_{G,m-1,i}) \quad (3.22)$$

Die Zeitspanne des freien Falls zwischen dem Lösen aus der Mechanik und dem Aufprall berechnet sich für den ersten Stoß zu  $T_{Fall} = \sqrt{2s_0/g} \approx 0,09s$ .  $T_{Fall}$  wird auch für die weiteren Stöße vereinfachend als konstant angenommen.

Die Berechnung des in (3.14) bis (3.22) beschriebenen Einschwingvorgangs erfolgt so lange bis die Schwingung stationär wird. Eine Übersicht des Iterationsschemas zur Berechnung wird in Abbildung 3.5 gegeben.

Die für die Spektralanalyse erforderliche Amplitude der Schwingungsschnelle  $v_n(x_l, y_l)$  an einem beliebigen Punkt  $(x_l, y_l)$  kann nun direkt aus der (ausiterierten) Schwingungsschnelle an der Anregungsstelle  $v_{G,i,n}(x_0, y_0)$  nach (3.20) und der Auslenkung der Eigenmode  $\varphi_i$  an Punkt  $(x_l, y_l)$  berechnet werden:

$$v_n(x_l, y_l) = \sum_{i=1}^{n_{eigen}} \frac{v_{G,i,n}(x_0, y_0)}{\varphi_i(x_0, y_0)} \varphi_i(x_l, y_l) \quad (3.23)$$

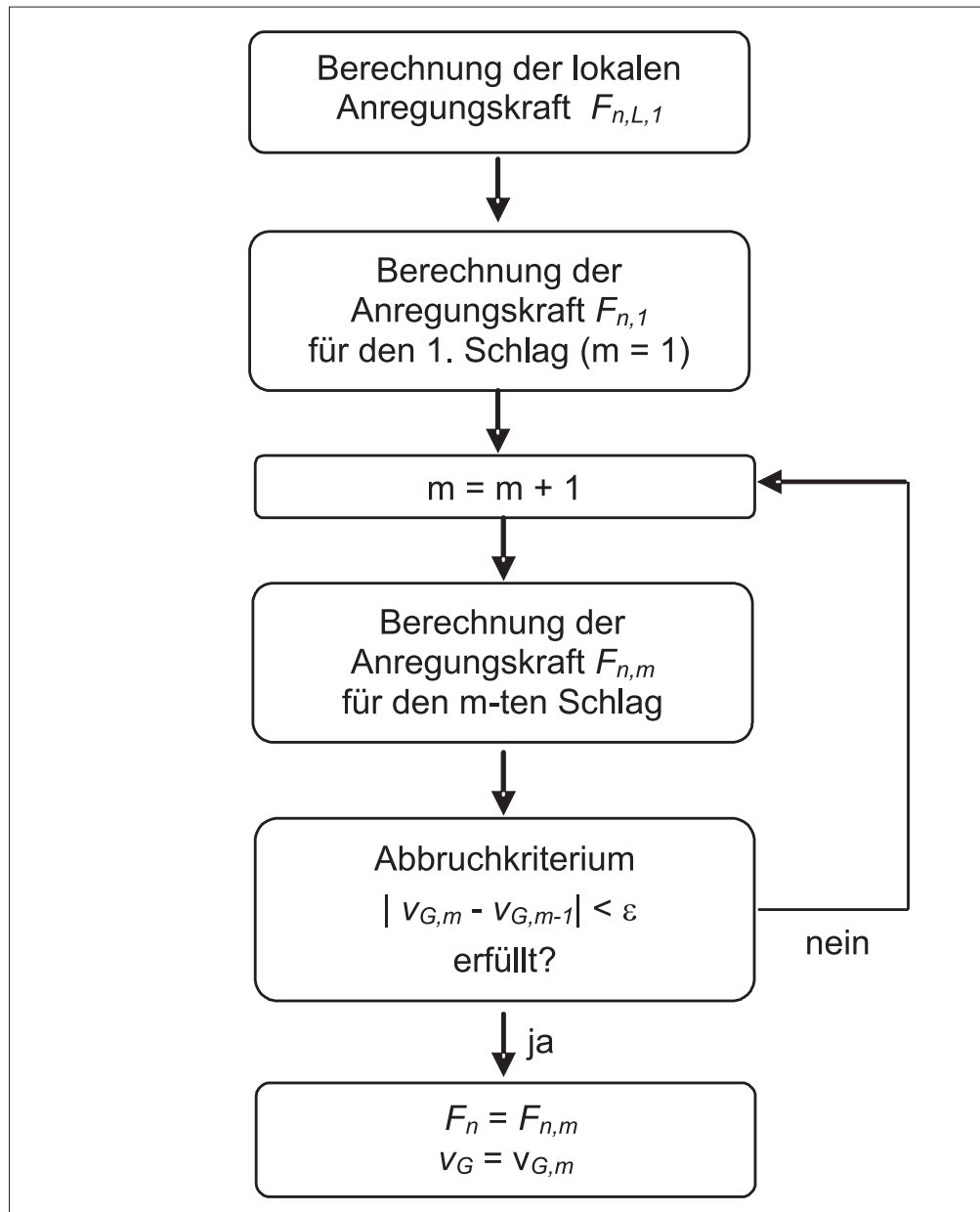


Abbildung 3.5: Iterationsschema zur Berechnung des Anregungsspektrums

### 3.1.3 Berechnungsbeispiel für Zeit- und Frequenzbereich

Nachfolgend wird ein Vergleich für die Berechnung der Anregungskraft im Zeit- und Frequenzbereich am Beispiel eines Einmasseschwingers mit elastischer Auflage gezeigt. Die Darstellung des Systems und der dazugehörigen Eingangsdaten für die Berechnung erfolgt in Tabelle 3.2.

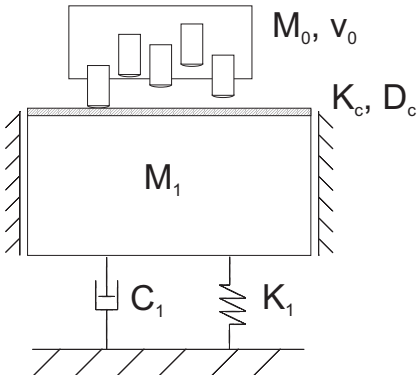
	$T = 0,1s, T_n = 0,5s$ $M_0 = 0,5kg$ $\hat{v}_0 = 0,886m/s$ $K_c = 9,4 \cdot 10^6 N/m$ $D_c = 0,015$ $M_1 = 1,49kg$ $\omega_1 = \sqrt{K_1/M_1} = 2\pi 76Hz$ $\varphi_1 = \sqrt{1/M_1} = 0,82$ $D_1 = C_1/2M_1\omega_1 = 0,019$ $n_{max} = 2500$ $n_{eigen} = 1$
---	---

Tabelle 3.2: Modell und Eingangsdaten für die Berechnung

Die Berechnung im Zeitbereich erfolgte nach Gleichung (3.9) für die ersten 10 Schläge des Hammerwerks. Abbildung 3.6, Kurve a) zeigt die Berechnungsergebnisse für den ersten und zweiten Schlag, sowie die Veränderung der maximalen Anregungskraft  $\Delta F_{c,max}$  während des Einschwingvorgangs (Schlag m von 1 bis 10).

Die Berechnung im Frequenzbereich erfolgte nach Gleichung (3.14) bis (3.22). Die Berechnung der Kontaktzeit  $T_c$  und der Eigenkreisfrequenz  $\omega_c$  erfolgte näherungsweise nach (2.83).

Um die Ergebnisse vergleichen zu können, wurde eine Rücktransformation in den Zeitbereich durchgeführt. Die rücktransformierte Anregungskraft (Kurve b) zeigt deutliche Abweichungen gegenüber der direkten Berechnung im Zeitbereich (Kurve a). Die Ursache dieser Abweichungen liegt in der zur Vereinfachung getroffenen Annahme, dass die globale Admittanz die Kontaktzeit nicht wesentlich beeinflusst (siehe (3.13) und (3.14)). Erfolgt die Berechnung hingegen mit der tatsächlichen Kontaktzeit (Kurve c), so ergibt sich eine gute Übereinstimmung.

Vergleicht man die Berechnungen jedoch im Frequenzbereich (Kurven b und c in Abbildung 3.6, unten), so wird deutlich, dass sich die aus der Vereinfachung resultierenden Abweichungen erst oberhalb des für dieses Projekt relevanten Frequenzbereichs bemerkbar machen. Für den unteren Frequenzbereich stellt die vereinfachte Vorgehensweise somit eine gute Näherung dar. Die Darstellung des Einschwingvorgangs (Abbildung 3.6, rechts) illustriert den Einfluss der Relativgeschwindigkeit zwischen Bauteil und Hammer. Bei dem gewählten Beispiel beträgt die Differenz der maximalen Anregungskraft ( $\Delta F_{c,max}$ ) zwischen dem 1. Stoß ( $M_1$  in Ruhe)

und dem 10. Stoß ( $M_1$  eingeschwungen) ca. 250 N, das entspricht ca. 15% der Anregungskraft.

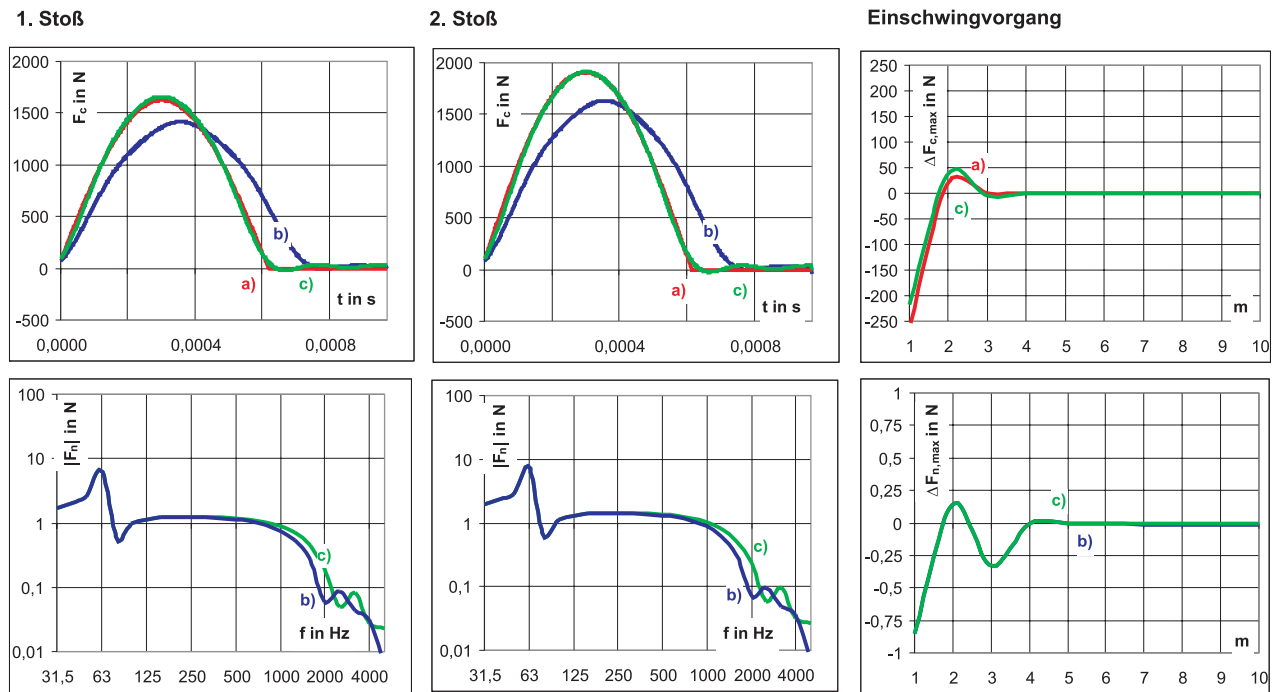


Abbildung 3.6: Einschwingvorgang der Anregung. Vergleich der Berechnung im Zeitbereich (oben) mit der Berechnung im Frequenzbereich (unten) für die Anregungskraft eines Hammers. Links und Mitte Berechnung für den 1. und 2. Stoß. Rechts die Veränderung der maximalen Anregungskraft  $\Delta F_{max}$  während des Einschwingvorgangs. Die Berechnung erfolgte:

a) im Zeitbereich nach (3.9)

b) im Frequenzbereich nach (3.14) bis (3.22), z.T. mit anschließender Rücktransformation

c) wie in b jedoch mit korrigierter Kontaktzeit

### 3.1.4 Vergleich mit Messergebnissen

Die Berechnung des Anregungsspektrums wird nachfolgend mit Messergebnissen verglichen. Die Messungen wurden im ift Schallschutzzentrum mit einem Echtzeitanalysator (Typ: Norsonic 830) und einem Kraftaufnehmer (Typ: B&K 8230-003) durchgeführt, der unter einem Hammer des Hammerwerks angeordnet war. Die Fallhöhe wurde auf 0,04 m eingestellt. Die restlichen 4 Hämmer hatten keinen Kontakt zum Prüfkörper. Für die Messung ergab sich somit eine Anregungsfrequenz von  $2\text{Hz}$ , bzw.  $T_n = T = 0,5\text{s}$ .

Abbildung 3.7 (links) zeigt den Vergleich des berechneten Anregungsspektrums mit Messwerten für einen nahezu ideal elastischen Stoß. Für die Messung wurde hierzu ein Kraftaufnehmer auf einem ausreichend schweren und steifen Betonblock montiert und direkt angeregt. Die rechte Seite der Abbildung zeigt den Vergleich für den Fall einer lokalen Admittanz. Hierzu wurden verschiedene Spanplattenproben (Dicke 19 - 25 mm) auf dem Kraftaufnehmer montiert. Die Anregung erfolgte nun auf den Spanplattenproben. Die Berechnung wurde nach Gleichung (3.14) mit folgenden Eingangswerten durchgeführt:

	Anregung auf Kraftaufnehmer	Anregung auf Spanplatte
Hammer-Masse $M_0$	0,5 kg	0,5 kg
Hammer-Radius $r$	0,015 m	0,015 m
Schlag-Wiederholdauer $T_n = T$	0,5 s	0,5 s
Schubmodul $G$	$8,75 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	$1,40 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$
Querkontraktionszahl $\nu$	0,2	0,3
Kontakt-Dämpfung $D_c$	0,006	0,015

Tabelle 3.3: Eingangsdaten für die Berechnung

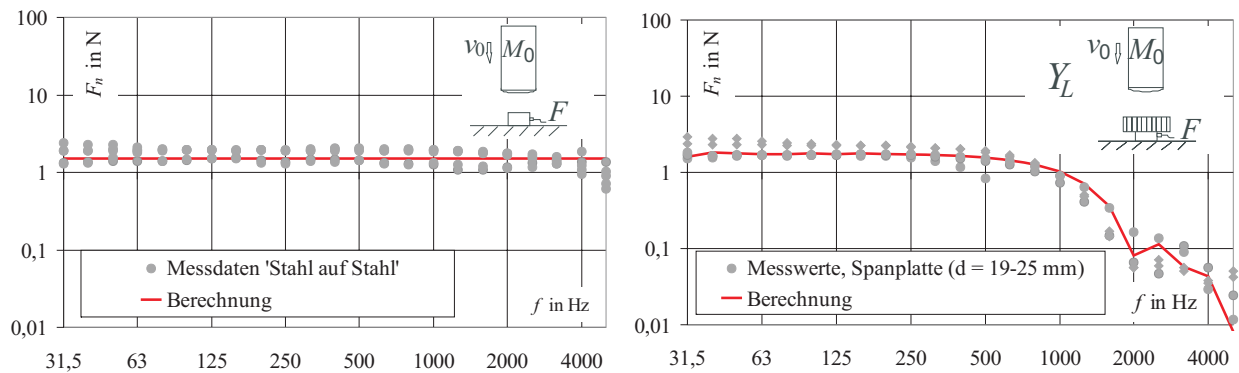


Abbildung 3.7: Vergleich der Berechnung mit Messwerten des Anregungsspektrums. Links für den nahezu ideal elastischen Stoß, rechts bei Berücksichtigung einer lokalen Admittanz

Abbildung 3.8 zeigt den Vergleich für den Fall einer globalen Admittanz. Der Kraftaufnehmer wurde hierzu auf eine Holzbalkendecke montiert und direkt angeregt ( $Y_L \rightarrow 0$ ). Links sind die Messwerte für verschiedene Positionen des Norm-Hammerwerks dargestellt, rechts der Vergleich zwischen Messung und Berechnung für die erste Eigenmode der Rohdeckenbeplankung. Die Berechnung erfolgte nach den Gleichungen (3.14) bis (3.22) mit folgenden Eingangswerten:

	Anregung auf Kraftaufnehmer
Hammer-Masse $M_0$	0,5 kg
Hammer-Radius $r$	0,015 m
Schlag-Wiederholdauer $T_n = T$	0,5 s
Schubmodul $G$	$8,75 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
Querkontraktionszahl $\mu$	0,2
Kontakt-Dämpfung $D_c$	0,006
Modale Dämpfung $D_i$	0,04
Eigenfrequenz $f_0$	80 Hz
Auslenkung Eigenmode $\varphi(x_0, y_0)$	0,82
Anzahl der Schläge $m$	10

Tabelle 3.4: Eingangsdaten für die Berechnung

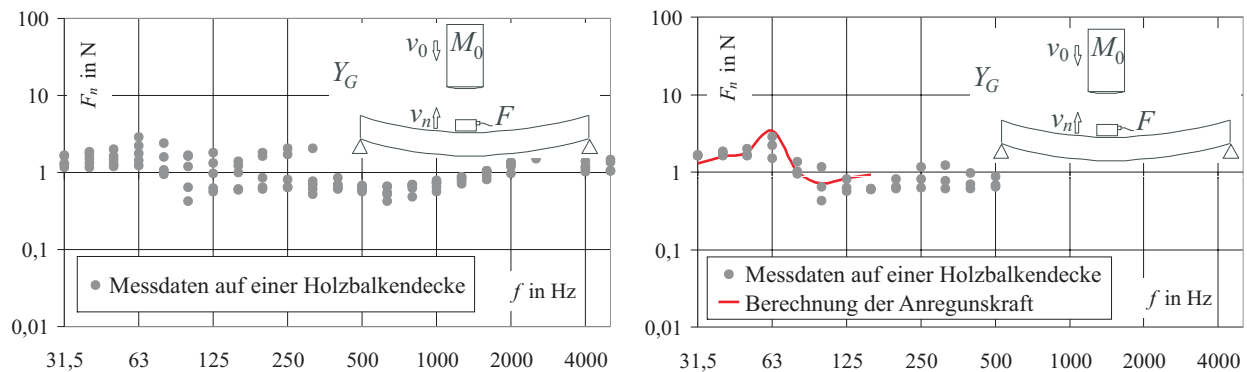


Abbildung 3.8: Vergleich der Berechnung mit Messwerten des Anregungsspektrums auf einer Holzbalkendecke. Links für Messdaten für unterschiedliche Anregungspositionen, rechts Vergleich zwischen Messung und Berechnung für die erste Eigenmode der Rohdeckenbeplankung aus Fichtendielen.

### 3.1.5 Berechnung für eine Holzbalkendecke

Im letzten Beispiel wird die Berechnung der Anregungskraft für eine Holzbalken-Rohdecke, bestehend aus einer Balkenlage und einer Beplankung aus 22 mm Spanplatten, durchgeführt. Hierzu wurde die räumliche Verteilung der Hammerwerkspositionen auf der Decke und die unterschiedlichen Anregungspunkte der einzelnen Stahlzylinder des Hammerwerks berücksichtigt. Die Berechnung erfolgte nach den Gleichungen (3.14) bis (3.22) mit folgenden Eingangswerten:

	Anregung auf Spanplatte
Hammer-Masse $M_0$	0,5 kg
Hammer-Radius $r$	0,015 m
Schlag-Wiederholdauer $T_n$	0,5 s
(Gesamt-) Schlagfrequenz $f_s = 1/T$	10 Hz
Schubmodul $G$	$1,40 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$
Querkontraktionszahl $\mu$	0,3
Kontakt-Dämpfung $D_c$	0,015
Anzahl der Schläge $m$	5

Tabelle 3.5: Eingangsdaten in die Berechnung

In (3.20) ist zu berücksichtigen, dass die Schnelle für den Kontaktpunkt des nächsten Schlages zu berechnen ist. Die Berechnung wurde für 250 Eigenwerte (Eigenformen und Eigenfrequenzen) der Decke und für vier Hammerwerkspositionen mit jeweils fünf Anregungsstellen durchgeführt. Die modale Dämpfung wurde nach Abschnitt 3.3 ermittelt. Abbildung 3.9 zeigt die vier Hammerwerkspositionen auf der Holzbalkendecke und die berechneten Anregungsspektren (Minimum und Maximum).

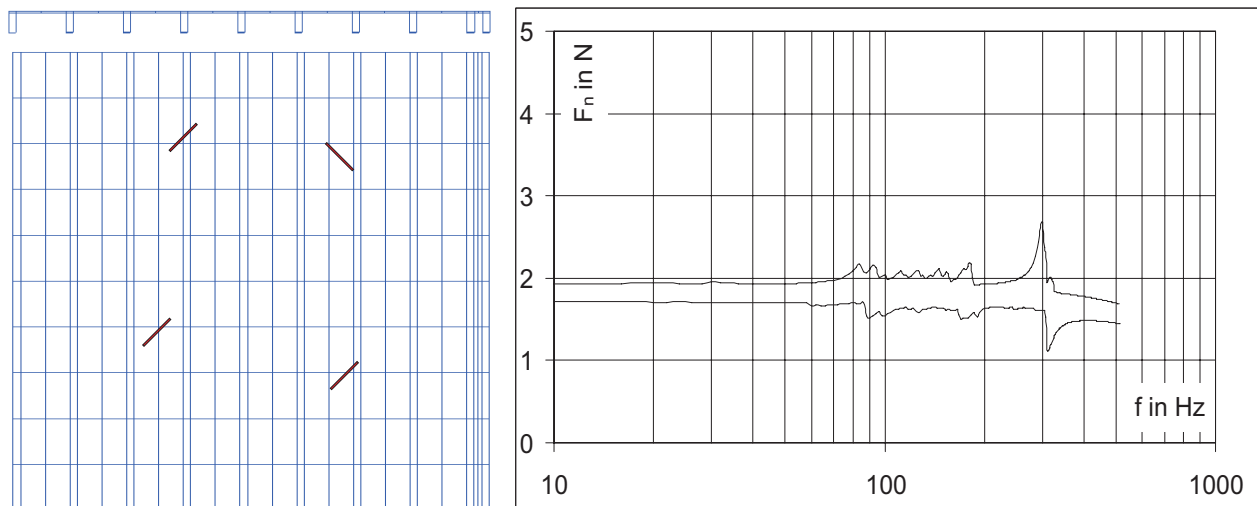


Abbildung 3.9: Berechnung des Anregungsspektrums auf einer Holzbalkendecke. Links die verschiedenen Hammerwerkspositionen auf der Decke, rechts das berechnete Spektrum eines Hammers (Minimum und Maximum).

Die Berücksichtigung der globalen Admittanz und der Relativgeschwindigkeit erhöht bzw. reduziert die Anregungskraft bei diesem Berechnungsbeispiel je nach betrachteter Anregungsstelle und Eigenmode um max. 50%. Effekte dieser Größenordnung sind nur bei sehr leichten Decken, wie der hier gezeigten Rohdecke, zu beobachten. Bei praxisnahen Deckenkonstruktionen mit Estrichaufbau spielt der gezeigte Effekt aufgrund der wesentlich geringeren Admittanz eine untergeordnetere Rolle.

## 3.2 Modellierung der Struktur

Bauübliche Deckenkonstruktionen weisen einen vielschichtigen Aufbau mit vielseitigen Konstruktionsvarianten auf. Abbildung 3.10 illustriert den Aufbau einer Holzbalkendecke mit Estrichaufbau und Unterdecke. Das akustische Verhalten des Modells eines solch komplexen Bauteils wird entscheidend dadurch bestimmt, wie die Einzelbauteile (Balken, Platten) im dreidimensionalen Raum modelliert und zusammengefügt sind.

Die dreidimensionale Modellierung einer aus dünnen Platten und gestreckten Balken zusammengesetzten Struktur ist in konventionellen FEM-Programmen nur im Zusammenhang mit einer Dimensionsreduzierung der Bauteile auf ein- und zweidimensionale Modelle effizient. Eine Modellierung mit dreidimensionalen Hexaederelementen würde auf Grund der geforderten geringen Unterschiede in den Abmessungen eines Elementes zu sehr vielen Elementen und damit zu unverhältnismäßig großen Gleichungssystemen führen. Andererseits ist mit dem durch die Dimensionsreduzierung in Kauf genommenen Fehler (z.B. Vernachlässigung der Schubbeeinflüsse) eine praxisnahe Modellierung der Verbindungen zwischen den Einzelbauteilen schwierig.

Um balkenartige bzw. dünnwandige Strukturen praxisnah und effizient dreidimensional modellieren zu können, werden in *AdhoC* [11] deshalb Hexaederelemente mit hohen Polynomgraden (p-Version der FEM) verwendet, die große Seitenverhältnisse erlauben [32]. Somit ist es möglich, plattenartige Strukturen mit wenigen 3D-Elementen zu modellieren, die zwar eine geringe Dicke, aber große Abmessungen in Längen- und Breitenrichtung besitzen [27]. Eine effiziente Berechnung ist dadurch möglich, dass die Polynomgrade in die verschiedenen lokalen Richtungen der Elemente unabhängig gewählt werden können. Also kann z.B. in der Längen- und Breitenrichtung ein hoher, dagegen in der Dickenrichtung ein niedriger Polynomgrad angesetzt werden.

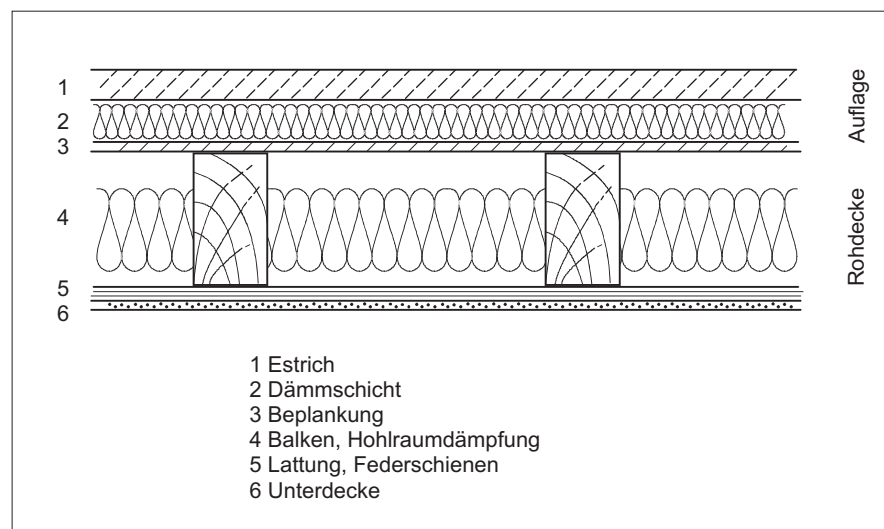


Abbildung 3.10: Konstruktion einer bauüblichen Holzdecke mit Estrichaufbau und Unterdecke



### 3.2.1 Modellierung der Element-Verbindung

Für das Schwingungsverhalten der Rohdeckenbeplankung und der Unterdecke ist die Ausführung der Verbindung zum Balken von maßgeblichem Einfluss. Diese Verbindung wird bei analytischen Berechnungsmodellen (z.B. [91, 92, 93]) meist als linienförmige Lagerung modelliert, da die daraus resultierenden harmonischen Schwingungsformen zu einfachen Lösungen des Differential-Gleichungs-Systems führen. Die bauübliche mechanische Montage der Rohdeckenbeplankung mit Nägeln oder Schrauben kann aber durchaus zu einer Teileinspannung führen. BRUNSKOG und HAMMER [91] vermuten in dieser Modellierungunschärfe die Ursache für die Abweichung ihrer Berechnungsergebnisse von den Messergebnissen.

Um die Einflüsse der Verbindung untersuchen zu können, ist es deshalb sinnvoll für Parameterstudien die Lagerbedingungen des Plattenrandes auf dem Balken frei wählen zu können. Die dreidimensionale Modellierung in *AdhoC* erlaubt die Simulation unterschiedlicher Einspanngrade des Plattenrandes auf einfache Weise, indem die Dimension und die Steifigkeit des mit dem Balken verbundenen Elements ("Verbindungselement") variiert wird (siehe Abbildung 3.11).

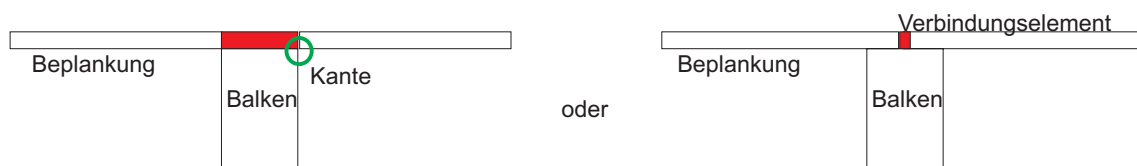


Abbildung 3.11: Modellierung unterschiedlicher Einspanngrade

Wird dieses Verbindungselement mit der gleichen Steifigkeit modelliert wie der Rest der Beplankung, so ergibt sich eine Einspannung des Plattenrandes. Wird die Steifigkeit des Elementes stark herabgesetzt, so verhält sich die Verbindung wie eine gelenkige Lagerung. Die geometrische Größe der Einspannung lässt sich über die Breite des "Verbindungselementes" variieren. Ein Vergleich der Berechnung bei unterschiedlicher Einspannung des Plattenrandes mit Messwerten an einer Holzbalkendecke wird in Abbildung 3.12 gezeigt.

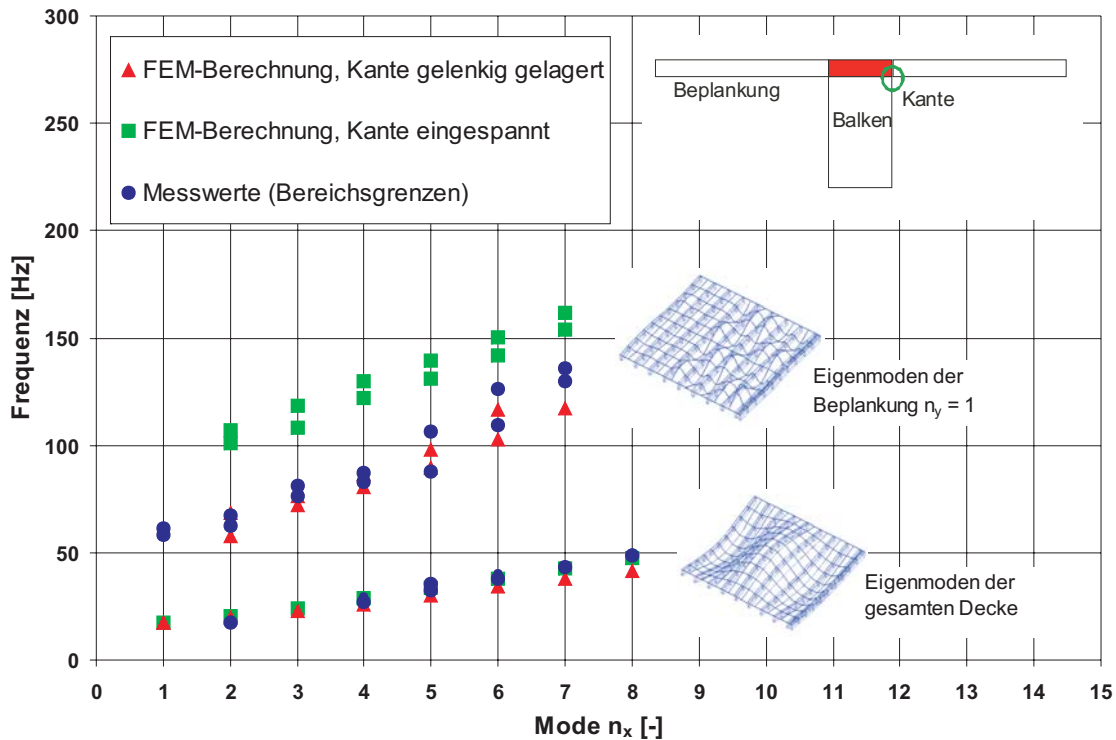


Abbildung 3.12: Vergleich der gemessenen Eigenfrequenzen einer Holzbalkendecke mit berechneten Werten für die Modellierung unterschiedlicher Einspanngrade

Wie Abbildung 3.12 zeigt liegen die gemessenen Eigenfrequenzen der Holzbalkendecke erwartungsgemäß zwischen den Berechnungsergebnissen für die unterschiedlichen Verbindungsarten. Die Modellierung mit gelenkig gelagerter Kante der Beplankung zeigt jedoch bei höheren Eigenfrequenzen eine bessere Übereinstimmung mit den Messergebnissen. Eine starre Modellierung der Verbindung überschätzt die Steifigkeit der Verschraubung deutlich. Für die weiteren Berechnungen wurden Verschraubungen deshalb als gelenkige Lagerungen modelliert. Leimfugen hingegen als starre Verbindungen

### 3.2.2 Modellierung der Materialgesetze

Ein weiterer wesentlicher Vorteil der dreidimensionalen Modellierung der Struktur ist die genauere Abbildung der Materialgesetze. Da sowohl die Holzwerkstoffplatten, als auch die Massivholzelemente in den unterschiedlichen Orientierungsrichtungen stark unterschiedliche Elastizitätsmodule aufweisen, ist ein orthotropes Materialgesetz erforderlich. Die Formulierung der orthotropen Steifigkeitsmatrix kann [17] entnommen werden. Materialkenndaten für Massivholz werden in DIN EN 338 [94] angegeben.

Auch die im Estrichaufbau zum Einsatz kommenden Trittschalldämmplatten werden aus Hexaederelementen modelliert. Als maßgebliche Materialkenngröße wird die dynamische Steifigkeit der Trittschalldämmplatten in einen dynamischen E-Modul umgerechnet.

Die für die Berechnung verwendeten Materialdaten sind im Anhang tabellarisch aufgelistet.

### 3.3 Modellierung der Dämpfung

Die Berücksichtigung der Dämpfung in der FEM kann, wie in Abschnitt 2.3.3 gezeigt, entweder durch die (zeitaufwändigere) direkte Berechnung des gedämpften Systems erfolgen, oder durch das Einsetzen einer modalen Dämpfung in der Nachlaufrechnung. Bei der in dieser Arbeit favorisierten modalen Dämpfung wird jeder Eigenform der Struktur ein Lehr'sches Dämpfungsmaß  $D_i$  zugeordnet. Diese modale Strukturdämpfung wird nachfolgend durch den Verlustfaktor  $\eta_{structure} \approx 2D_i$  beschrieben, der sich aus verschiedenen Teil-Verlustfaktoren zusammensetzt. Die Ermittlung dieser modalen Dämpfung aus einzelnen Teil-Verlustfaktoren wird in Abschnitt 3.3.1 gezeigt. Ein Abgleich mit Messergebnissen erfolgt in Abschnitt 3.3.2.

#### 3.3.1 Verlustfaktoren

Die Strukturdämpfung setzt sich aus verschiedenen Faktoren zusammen. Abbildung 3.13 illustriert die einzelnen Anteile der Strukturdämpfung am Beispiel einer Holzbalken-Rohdecke.

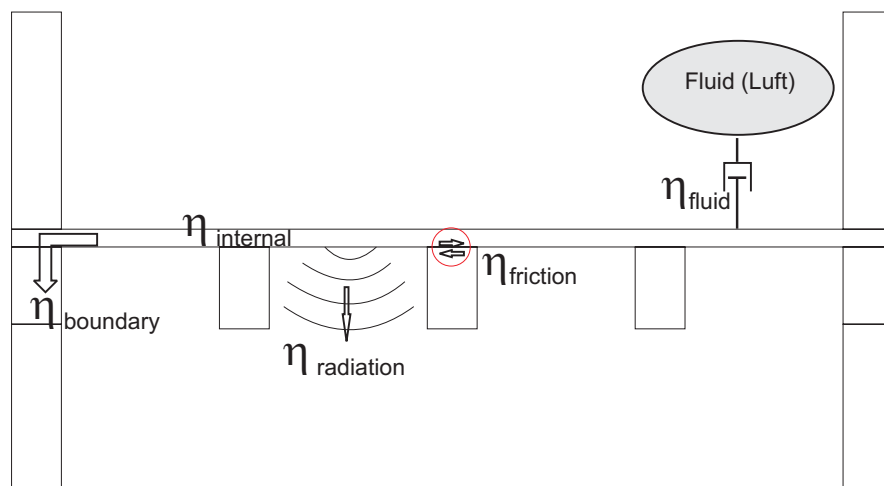


Abbildung 3.13: Anteile des Verlustfaktors zur Beschreibung der Strukturdämpfung

$\eta_{internal}$  innere Verluste (Materialdämpfung)

Die inneren Verluste können als Materialparameter messtechnisch ermittelt werden. Bei Bauteilen, die aus unterschiedlichen Materialien zusammengesetzt sind - wie die aus Vollholzbalken und Holzwerkstoffplatten bestehende Rohdecke in Abbildung 3.13 - ist ein Gesamtwert aus den einzelnen Materialdämpfungen zu bilden. Hierzu gibt es in der Literatur unterschiedliche Ansätze. KOLLMANN [49] beschreibt ein empirisches Verfahren für die Maschinenakustik, bei dem die materialspezifischen inneren Verluste ins Verhältnis zum Volumenanteil des jeweiligen Materials in der Gesamtstruktur gesetzt werden. Eine Anwendung erscheint allerdings nur dann sinnvoll, wenn die eingesetzten Materialien relativ ähnliche Materialparameter besitzen. UNGAR und KERWIN [95] erarbeiteten den Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Dehnungsenergie  $E_{pot,ges}$  im Gesamt-Bauteil und dem Verlustfaktor  $\eta_l$  sowie der Deh-

nungsenergie  $E_{pot,l}$  eines Bedämpfungsmaterials.

$$\eta_{internal,ges} = \eta_{internal,1} \frac{E_{pot,1}}{E_{pot,ges}} \quad (3.24)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass nur das Bedämpfungsmaterial wesentlich zum Gesamtverlustfaktor beiträgt. Eine Anwendung in der FEM erfolgte durch JOHNSON und KIENHOLZ [42]. EVERSTINE [43] erweiterte (3.24) für eine beliebige Anzahl an Materialien ( $n_{Mat}$ ).

$$\eta_{internal,ges} = \sum_{l=1}^{n_{Mat}} \eta_{internal,l} \frac{E_{pot,l}}{E_{pot,ges}} \quad (3.25)$$

Für die Anwendung in der FEM lässt sich (3.25) für die Dämpfung der  $i$ -ten Eigenmode umformen zu:

$$\eta_{internal,ges,i} = \sum_{l=1}^{n_{El}} \eta_{internal,l,i} \frac{E_{pot,l,i}}{E_{pot,ges,i}} = \sum_{l=1}^{n_{El}} \eta_{internal,l,i} \frac{1/2 \varphi_{l,i}^T k_l \varphi_{l,i}}{1/2 \varphi_i^T K \varphi_i} \quad (3.26)$$

Beziehungsweise:

$$\eta_{internal,ges,i} = \frac{1}{\omega_i^2} \sum_{l=1}^{n_{El}} \eta_{internal,l,i} \varphi_{l,i}^T k_l \varphi_{l,i} \quad (3.27)$$

wobei hier ausgenutzt wird, dass die beidseitige Multiplikation der globalen Steifigkeitsmatrix ( $K = A_{l=1}^{n_{el}} k_l$ ) mit dem  $i$ -ten Eigenvektor  $\varphi_i$  den bereits bekannten  $i$ -ten Eigenwert  $\omega_i^2$  ergibt. Die Matrizenmultiplikation muss somit nur noch für die jeweilige Elementsteifigkeitsmatrix  $k_l$  mit der Eigenmode auf Elementebene  $\varphi_{l,i}$  durchgeführt werden und mit dem internen Verlustfaktor des  $l$ -ten Elementes  $\eta_{internal,l,i}$  multipliziert werden.

$\eta_{boundary}$  *Randverluste (Energieableitung in das Bauteilaufleger)*

Der in das Bauteilaufleger abgeleitete Anteil der Schwingungsenergie kann nach DIN EN 12354 [60] für homogene Bauteile in Abhängigkeit der Frequenz  $f$  berechnet werden. Hierzu wird die Körperschallabsorption  $a_k$  für Biegewellen am Rand der Länge  $l_k$  sowie die Fläche  $S$  und die Grenzfrequenz  $f_c$  des Bauteils berücksichtigt. Für schwere Bauteile in Prüfständen wird eine mittlere Körperschallabsorption  $a_k = 0,15$  angegeben.

$$\eta_{boundary} = \frac{c_0}{\pi^2 S \sqrt{f f_c}} \sum_{k=1}^4 l_k a_k \quad (3.28)$$

Nach weiteren Vereinfachungen folgt [60]:

$$\eta_{boundary} = \frac{m'}{485 \sqrt{f}} \quad (3.29)$$

Für die in diesem Projekt zu untersuchenden Leichtbaudecken in einem Leichtbauprüfstand ergeben (3.28) und (3.29) unbefriedigende Übereinstimmungen mit Messergebnissen. Vergleichende Messungen des Gesamtverlustfaktors an unterschiedlichen Decken ergaben für diesen Prüfstand als gute Näherung:

$$\eta_{boundary} \approx \frac{0,3}{2\sqrt{f}} \quad (3.30)$$

Für andere Auflagersituationen kann die Berechnung nach (3.31) erfolgen. Die Energieverluste  $E_V$  werden hierzu nach (3.32) aus der im Bauteilauflager bzw. der flankierenden Wand gespeicherten potentiellen Energie  $E_{pot}$  berechnet. Die reversible Energie  $E_R$  wird nach (3.33) aus  $E_{pot}$  der Decke berechnet.

$$\eta_{boundary} = \frac{E_V}{2\pi E_R} = \frac{E_{pot,j}}{2\pi E_{pot,i}} \quad (3.31)$$

$$E_V = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{El,j}} \varphi_j^T k_{El,n} \varphi_j \quad (3.32)$$

$$E_R = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{El,i}} \varphi_i^T k_{El,n} \varphi_i \quad (3.33)$$

$\eta_{radiation}$  *Abstrahlverluste (Energieableitung durch Schallabstrahlung)*

Die in Form von Luftschall abgestrahlte Energie wird nach [60] in Abhängigkeit des Abstrahlgrades  $\sigma$  und der flächenbezogenen Masse  $m'$  der abstrahlenden Fläche angegeben:

$$\eta_{radiation} = \frac{2\rho_0 c_0 \sigma}{2\pi f m'} \quad (3.34)$$

Der Abstrahlgrad  $\sigma$  ist hierzu frequenzabhängig nach Abschnitt 3.4 zu berechnen.

$\eta_{fluid}$  *Fluiddämpfung (Dämpfung durch das die Struktur umgebende Fluid)*

Der Anteil der Strukturdämpfung durch die umgebende Luft wird von KOLLMANN [49, 96] in Abhängigkeit der flächenbezogenen Masse  $m'$  der abstrahlenden Fläche näherungsweise angegeben mit:

$$\eta_{fluid} \approx \frac{0,00273}{m' \sqrt{f}} \quad (3.35)$$

$\eta_{friction}$  Fügestellen Verluste (Reibungsdämpfung)

Für die Berücksichtigung der Reibungsdämpfung in den Fügestellen - in Abbildung 3.13 also die Reibung zwischen Balken und Beplankung - wurden zunächst grundlegende Messungen durchgeführt, um den Anteil der Reibung an der Strukturdämpfung abschätzen zu können (siehe Abbildung 3.14). Hierzu wurde im ersten Schritt der Verlustfaktor eines Balkens mit aufgeschraubtem Spanplattenstreifen messtechnisch bestimmt. In einer zweiten Messung wurde der Spanplattenstreifen mit dem Balken verleimt, um die Reibung zwischen Spanplatte und Balken zu verhindern. Die Differenz der Verlustfaktoren erlaubt eine Aussage über den Einfluss der Reibungsdämpfung.

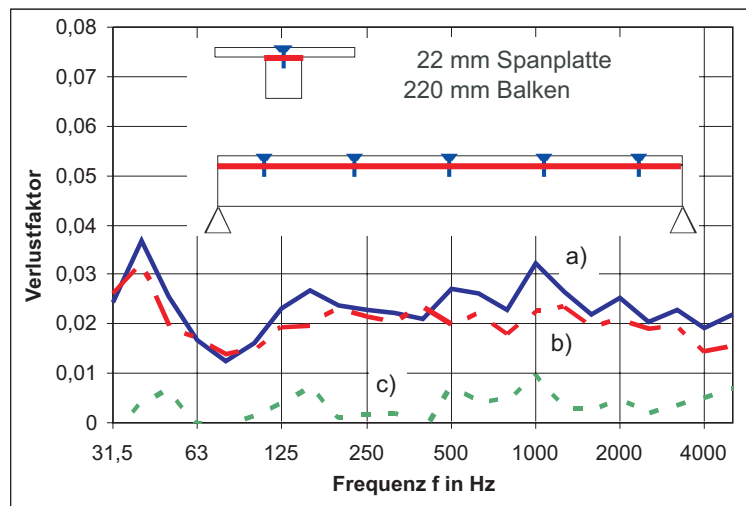


Abbildung 3.14: Messtechnische Bestimmung der Reibungsverluste eines Balkens mit aufgeschraubtem Plattenstreifen: a) Messung mit verschraubtem Plattenstreifen b) Messung mit zusätzlich verleimtem Plattenstreifen c) Reibungsanteil aus der Differenz der Messwerte

Bei der hier gewählten Konstruktion spielen die Reibungsverluste mit  $\eta_{friction} \approx 0,005$  eine eher untergeordnete Rolle. Zur Berücksichtigung der Reibung im Strukturverlustfaktor wurde deshalb ein vereinfachtes Modell gewählt, das die Reibungsverluste anhand der Relativbewegung zwischen Beplankung und Balken, sowie der Reibungskraft  $F_N \mu$  beschreibt.

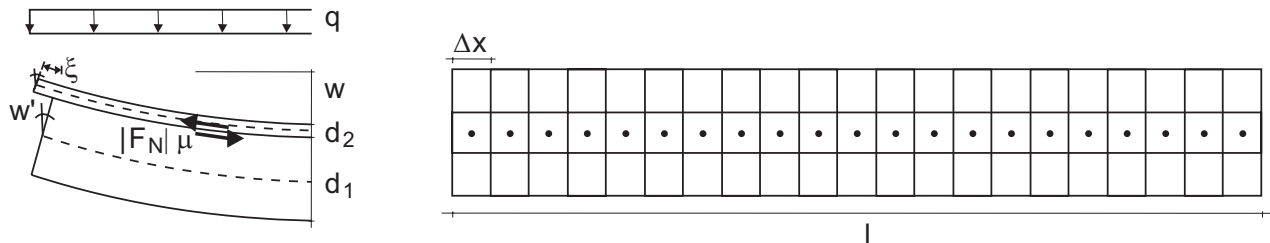


Abbildung 3.15: Modell zur Beschreibung der Reibungsenergieverluste in Abhängigkeit der Relativbewegung zwischen Beplankung und Balken sowie der Reibungskraft  $F_N \mu$

$$E_V = \int F_N \mu \xi' dx \approx \sum_{i=1}^{n_{el}} F_{N,i} \mu \xi_i = \sum_{i=1}^{n_{el}} F_{N,i} \mu \frac{d_1 + d_2}{2} |w'_i| \quad (3.36)$$

$$E_R = \frac{1}{2} \int EI |w''_i|^2 dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{el}} EI |w''_i|^2 \Delta x \quad (3.37)$$

Abbildung 3.16 zeigt den Vergleich der gemessenen Reibungsverluste mit den nach (2.95), (3.36) und (3.37) berechneten Werten. Die Relativverschiebung  $\xi$  wurde hierzu aus dem Biegewinkel  $w'_i$  und dem Abstand der Reibungsfuge zur neutralen Faser ermittelt. Die Normalkraft  $F_N$  wurde aus der Linienlast  $q$  ermittelt ( $F_N = q \Delta x$ ). Für den Reibungsbeiwert wurde  $\mu = 0,25$  angesetzt. Der Winkel  $w'_i$  und die Krümmung  $w''_i$  wurden aus der bekannten Biegelinie eines Balkens berechnet. Die Steifigkeit und der Anpressdruck der Verschraubung, die der Relativbewegung entgegenwirkt, wurden hierbei vernachlässigt. Dies führt zu einer (geringen) Überschätzung der Relativbewegung und somit der Reibungsverluste.

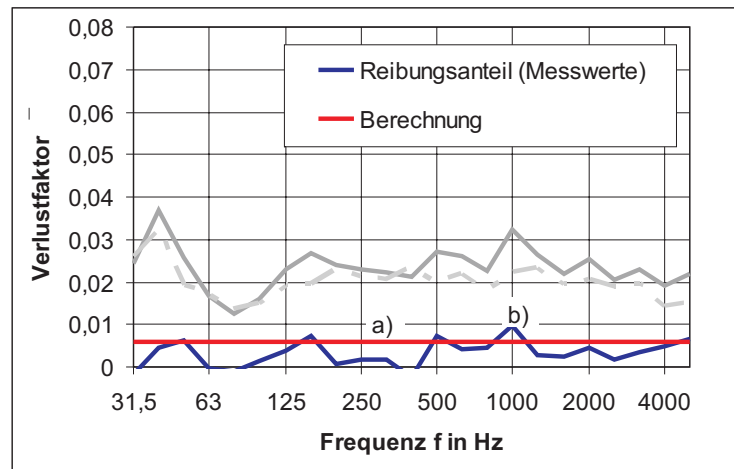


Abbildung 3.16: Vergleich zwischen Messwerten des Verlustfaktors und berechneten Werten: a) Berechnung mit  $\mu = 0,25$  b) Messwerte, ermittelt aus den Körperschallnachhallzeiten der verschraubten und der verleimten Konstruktion.

Der Reibungsverlustfaktor ist in diesem Modell unabhängig von der (zeitabhängigen) Linienlast und somit auch unabhängig von der Schwingungsamplitude. Neben dem Reibungsbeiwert wird der Verlustfaktor vor allem durch die Lage der Reibungsfuge gegenüber der neutralen Faser bestimmt. Die Einflüsse der Steifigkeit und des Anpressdrucks der Verschraubung sind noch zu berücksichtigen.

### 3.3.2 Vergleich mit Messwerten

In Abbildung 3.17 werden für 3 verschiedene Deckenkonstruktionen die berechneten Verlustfaktoren mit Messwerten verglichen. Die Berechnung des Strukturverlustfaktors erfolgte aus der Summe der zuvor beschriebenen Anteile.

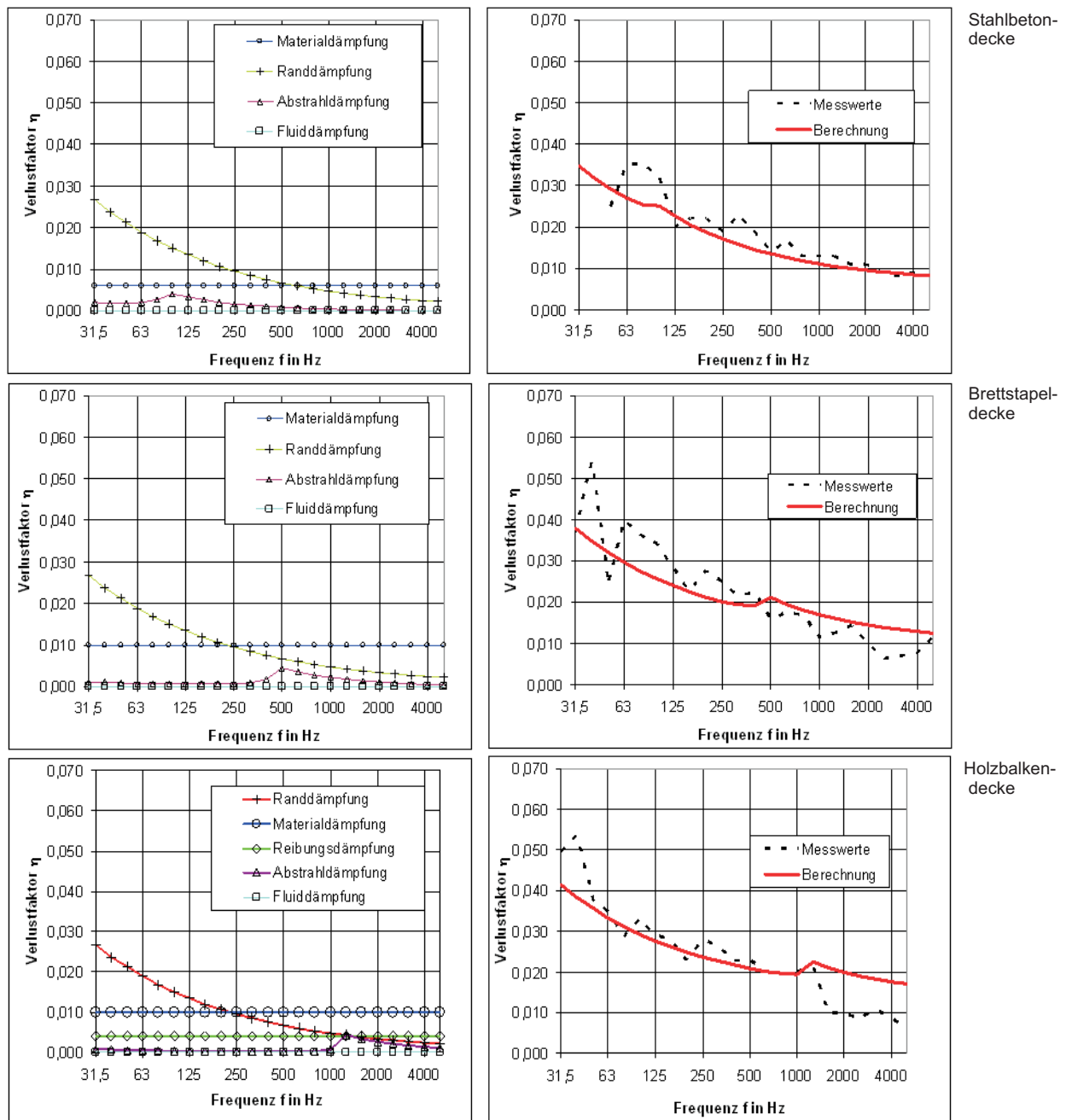


Abbildung 3.17: Verlustfaktoren verschiedener Decken: Stahlbetondecke, Brettstapeldecke, Holzbalkendecke (von oben nach unten). Links die berechneten Verlustfaktoren für die Dämpfungsanteile. Rechts der Vergleich der Messwerte mit den berechneten Verlustfaktoren für die gesamte Strukturdämpfung



## 3.4 Modellierung der Abstrahlung

Die vorausgegangenen Abschnitte haben sich auf die Ermittlung der Bauteilschwingungen konzentriert. Um aus diesen Körperschallschwingungen den Trittschallpegel im Raum berechnen zu können, ist die Abstrahlung der Bauteilschwingung in den Raum und der daraus resultierende Schalldruck zu ermitteln.

Die Grundlagen zur Modellierung des Raumes (des Fluids) und der Methoden zur Schalldruckberechnung wurden in Kapitel 2 zusammengestellt. Eine Gegenüberstellung der Methoden zur Anwendung für die Trittschallberechnung erfolgt in Abschnitt 3.4.1. Die Umsetzung der ausgewählten Methoden wird in Abschnitt 3.4.2 beschrieben.

### 3.4.1 Gegenüberstellung der Modelle

Für die Berechnung des Abstrahlgrades bzw. des in den Raum abgestrahlten Schallanteils gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten. Einige der für dieses Projekt interessanten Berechnungsvarianten, deren Grundlagen in Kapitel 2 erläutert wurden, sind in Tabelle 3.6 mit ihren jeweiligen Vor- und Nachteilen zusammengestellt.

Methoden	semi-analytische Methoden	integrale Methoden	modale Methoden
Typ	analytische Lösung	DFEM BEM	Analytische Raummoden FEM
Vorgehen	analytisch	numerisch	numerisch
Vorteile	+ einfach + direkt + schnell	+ realitätsnah + FSI kann berücksichtigt werden (BEM) + direkt (DFEM)	+ realitätsnah + FSI kann berücksichtigt werden (FEM) + Raummoden werden berücksichtigt
Nachteile	- für komplexe Bauteile nur grobe Näherung	- nur ebene Flächen (DFEM) - Raummoden nicht berücksichtigt (DFEM) - redundante Berechnung (BEM)	- redundante Berechnung - hoher Berechnungsaufwand (FEM)

Tabelle 3.6: Gegenüberstellung der Berechnungsvarianten für die Abstrahlung

Die semi-analytischen Methoden zur direkten Berechnung des Abstrahlgrades aus den Bauteilabmessungen und der Koinzidenz-Grenzfrequenz bieten den Vorteil, dass der Abstrahlgrad ohne die Kenntnis der Schwingungsschnelle des Bauteils ermittelt werden kann und somit der für die Schnelleberechnung erforderliche Abstrahlungs-Verlustfaktor  $\eta_{rad}$  nach (3.34) vorab berechnet werden kann. Die Anwendung auf nicht monolithische, komplexe Bauteilstrukturen ist allerdings nur näherungsweise möglich.

Bei den integralen- und den modalen Methoden können auch komplexe Bauteilstrukturen berücksichtigt werden. Die DFEM ist jedoch auf ebene Bauteiloberflächen beschränkt; bietet aber den Vorteil einer direkten Berechnung des Norm-Trittschallpegels aus der abgestrahlten Schalleistung der Bauteiloberfläche ohne den redundanten und zeitaufwändigen Berechnungs-Zwischenschritt der Schalldruckpegelverteilung im Raum.

Für die Boundary- und die Finite-Elemente-Methode werden hingegen keine Einschränkungen bezüglich der Geometrie des abstrahlenden Bauteils und des Raumes gemacht. Vom Ansatz ist die BEM besser für die Abstrahlung in den unendlichen Raum geeignet, die FEM für abgeschlossene Räume<sup>2</sup>. Beide Methoden erlauben auch eine gekoppelte Berechnung von Fluid und Struktur (FSI), wodurch jedoch der Berechnungsaufwand für die dadurch entstehenden großen Systeme stark ansteigt.

Alternativ kann eine getrennte Modal- und Spektralanalyse für Struktur und Fluid mit einseitiger Kopplung über den Lastterm in (2.104) erfolgen, der die Schwingungsschnelle  $v$  der Struktur in ein Anregungsspektrum für das Fluid umwandelt. Die getrennte Analyse von Fluid und Struktur bietet den Vorteil kleinerer Differentialgleichungssysteme, die effizienter zu berechnen sind. Für die in diesem Projekt durchzuführenden Parameterstudien am Bauteil ist die Modalanalyse für das unverändert bleibende Fluid zudem nur einmal durchzuführen, wodurch sich der Gesamtrechnaufwand weiter reduziert.

Die Voraussetzung für die Anwendbarkeit einer einseitigen Kopplung ist dann gegeben, wenn die Rückwirkungskräfte des Fluids auf die Struktur zu vernachlässigen sind. Eine Überprüfung dieser Voraussetzung ist nach [19] möglich durch:

$$\frac{\rho_0 c_0}{m' \omega} < 1 \quad (3.38)$$

Bei einer Dichte  $\rho_0$  der Luft von  $1,2 \text{ kg/m}^3$  einer Schallgeschwindigkeit  $c_0 = 343 \text{ m/s}$  und einer Frequenz  $f > 10 \text{ Hz}$  ist diese Bedingung erfüllt, sobald die flächenbezogene Masse  $m'$  der abstrahlenden Fläche größer als  $6,5 \text{ kg/m}^2$  ist. Dies trifft für alle hier zu untersuchenden Deckentypen zu.

### 3.4.2 Umsetzung der Modelle

Zur Umsetzung der modalen Methoden wird der Separationsansatz  $\{\tilde{p}\} = [\Phi] \{q\}$  in Analogie zur Modal- und Spektralanalyse der Struktur verwendet (siehe Abschnitt 2.3.1).  $[\Phi]$  enthält spaltenweise die analytischen Eigenformen des Rechteckraums nach (2.114). Im Frequenzbereich kann der Schalldruck  $p_n$  an der Stelle  $(x_l, y_l, z_l)$  somit berechnet werden aus:

$$p_n(x_l, y_l, z_l) = \sum_{i=1}^{n_{eigen}} \varphi_i(x_l, y_l, z_l) q_{i,n}; \quad q_{i,n} = \frac{1}{\omega_i^2 (1 - \eta_{i,n}^2 + j2\eta_{i,n} D_i)} \bar{F}_n \quad (3.39)$$

<sup>2</sup>Beide Methoden sind jedoch universell einsetzbar. Eine Übersicht der Anwendung der FEM mit infiniten Elementen für die Abstrahlung ins Unendliche und der BEM im Innenraum ist in [49] und [85] zusammengestellt.

Hierbei ist zu beachten, dass die Anregung des Fluids im Gegensatz zur Strukturanregung nicht punktförmig, sondern durch die gesamte Deckenfläche erfolgt. Die Anregungskraft  $\bar{F}_n$  ergibt sich nach der Diskretisierung der abstrahlenden Fläche in  $k$  Teilflächen  $S_k$  zu:

$$\bar{F}_n = \sum_{k=1}^{n_{area}} \varphi_i(x_k, y_k, z_k) v_n(x_k, y_k, z_k) q_{i,n} j \omega_n \rho_f S_k \quad (3.40)$$

Die Eigenfrequenzen  $\omega_i$  werden nach (2.113) ermittelt.

Die modale Dämpfung könnte aus der Dämpfungsmatrix  $C_f$  in (2.106) ermittelt werden. Da der Norm-Trittschallpegel jedoch auf eine Bezugsdämpfung des Raumes - ausgedrückt durch eine Bezugs-Absorptionsfläche  $A_0 = 10m^2$  - zu normieren ist, kann diese Normierung direkt über die Festlegung der modalen Dämpfung mit dem Lehr'schen Dämpfungsmaß  $D$  nach (3.41) erfolgen.

$$D = \frac{\eta}{2} = \frac{\ln 10^6}{2\omega T}; \quad T = 0,163 \frac{V}{A_0} \quad (3.41)$$

Hierzu wird die SABINE'sche Formel für die Nachhallzeit  $T$  des Raumes mit dem Volumen  $V$  in die Messgleichung des Verlustfaktors  $\eta$  nach [16] eingesetzt.

Ist der Schalldruck im Raum bekannt, kann der Norm-Trittschallpegel  $L_n$  anhand der räumlichen Mittelung der Effektivwerte  $\tilde{p}_{n,i} = p_{n,i}/\sqrt{2}$  an den  $k$  Messpunkten im Raum ermittelt werden:

$$L_n = 10 \log \left( \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\tilde{p}_{n,i}^2}{k p_0^2} \right) \quad \text{mit : } p_0 = 20 \mu Pa \quad (3.42)$$

Zur Umsetzung der integralen Methoden wurde die DFEM nach HÜBNER [77] angewendet (Berechnung siehe Abschnitt 2.4.3). Die Ermittlung des Norm-Trittschallpegels kann direkt aus der nach (2.123) bestimmten Schalleistung  $P_n$  der abstrahlenden Deckenfläche erfolgen [16]:

$$L_n = 10 \log \left( \frac{P_n}{P_0} \right) - 4,1 \text{ dB} \quad \text{mit : } P_0 = 10^{-12} \text{ Watt} \quad (3.43)$$

Wurde der Abstrahlgrad  $\sigma_n$  nach EN 12354-1 berechnet, so ergibt sich der Norm-Trittschallpegel aus der Schwingungsschnelle  $v_n$  an  $k$  verschiedenen Punkten der abstrahlenden Deckenoberfläche  $S$  zu:

$$L_n = 10 \log \left( \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\tilde{v}_{n,i}^2}{k v_0^2} \right) + 10 \log \frac{4 S \sigma_n}{A_0} \quad \text{mit : } v_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m/s} \quad (3.44)$$

## 3.5 Validierung des Verfahrens

Das in den vorausgegangenen Abschnitten beschriebene Berechnungsmodell wird nachfolgend durch den Vergleich der Berechnungsergebnisse mit Messergebnissen verschiedener Deckenaufbauten validiert. Pre- und Postprocessing der Berechnung wurden in der graphischen Nutzeroberfläche (GUI) nach Abschnitt 4.3 durchgeführt.

### 3.5.1 Vorgehensweise zur Validierung

Die FE-Berechnung sowie die Modal- und Spektralanalyse erfolgte in ADHOC [11]. Die Berechnungen wurden nach folgendem Schema durchgeführt:

- Ermittlung der Geometrie- und Materialdaten. Die Geometriedaten konnten den Aufbaubeschreibungen der geprüften Deckenaufbauten entnommen werden. Für die Materialdaten waren z.T. zusätzliche Messungen im ift Schallschutzzentrum notwendig.
- Erstellung des Deckenmodells anhand der graphischen Nutzeroberfläche durch Abfrage der Geometrie- und Materialdaten.
- Makrobasierte Vernetzung des Deckenmodells. Elementtyp und Modellierung der Verbindungen nach Abschnitt 3.2.
- Übergabe des Deckenmodells aus der GUI an ADHOC in Form von Textdateien.
- Eigenwertberechnung der Deckenkonstruktion.
- Berechnung des Anregungsspektrums nach Abschnitt 3.1.
- Berechnung des Körperschallspektrums in der Spektralanalyse unter Berücksichtigung der Dämpfung nach Abschnitt 3.3.
- Berücksichtigung der Abstrahlung nach zwei unterschiedlichen Methoden aus Abschnitt 3.4. Bei der integralen Methode (DFEM) wurde der Schallleistungspegel für 100 Teilflächen ermittelt und in den Norm-Trittschallpegel umgerechnet. Bei der modalen Methode (analytische Eigenformen) wurde für 40 Punkte im Raum der Schalldruckpegel berechnet und daraus der Norm-Trittschallpegel gebildet.
- Übergabe der Berechnungsergebnisse von ADHOC an die GUI.
- Visualisierung der Berechnungsergebnisse in der GUI zur Interpretation durch den Benutzer.

Die nach diesem Schema ermittelten Berechnungsergebnisse wurden mit Messergebnissen von 25 verschiedenen Deckenaufbauten aus der Datenbank des ift Schallschutzzentrums verglichen. Die Messungen erfolgten im Deckenprüfstand des ift Schallschutzzentrums nach DIN EN ISO 140. Die Deckenaufbauten waren im Prüfstand einachsig gespannt und linienförmig gelagert. Spannweite  $L = 5,00$  m, Deckenbreite  $B = 5,25$  m. Die Abmessungen und Randbedingungen wurden für die Berechnung übernommen.

Die Validierung wurde für folgende Deckentypen durchgeführt:

- 4 Holzbalkendecken
- 10 Massivholzdecken (Brettstapel-, Brettschichtholz-, oder Brettsperrholzdecken)
- 9 Hohlkastendecken
- 2 Stahlbetondecken

Es wurden Trocken- und Zementestriche in der Berechnung berücksichtigt. Bei den Dämmplatten der Trockenestrichaufbauten wurden einheitliche Verlustfaktoren und Elastizitätsmodule für die Berechnung verwendet, die im Modell bisher noch nicht berücksichtigte Ausbreitungsdämpfungen im Trockenestrich simulieren (Details siehe Abschnitt 5.2). Die detaillierte Aufbaubeschreibung der Deckenkonstruktionen, sowie die in der Berechnung verwendeten Materialdaten, können dem Anhang entnommen werden. Ebenso die Berechnungsergebnisse der einzelnen Deckenaufbauten.

Für die Validierung wurden die Differenzen zwischen Messung und Berechnung sowohl frequenzabhängig als auch für den Einzahlwert bestimmt. Lagen für einen Deckenaufbau mehrere Messergebnisse vor, so wurde der Mittelwert berücksichtigt. Bei der Berechnung wurden beide Modelle der Abstrahlung berücksichtigt, indem die Ergebnisse der Berechnung mit der modalen und der integralen Methode gemittelt wurden.

Um für die Berechnung einen Einzahlwert bilden zu können, wurde die Definition des Spektrumanpassungswerts  $C_{I,50-2500}$  nach DIN EN 717-2 [97] benutzt:

$$C_{I,50-2500} = 10 \log(\sum 10^{0,1L_{n,i}}) - L_{n,w} - 15 \text{dB} \quad (3.45)$$

Für die Summe  $L_{n,w} + C_{I,50-2500}$  ergibt sich daraus:

$$L_{n,w} + C_{I,50-2500} = 10 \log(\sum 10^{0,1L_{n,i}}) - 15 \text{dB} \quad (3.46)$$

Die Berechnung von  $L_{n,w} + C_{I,50-2500}$  kann somit direkt erfolgen, ohne zuvor den  $L_{n,w}$  berechnet zu haben. Da die Berechnung nur bis 250 Hz durchgeführt wurde, ist sicherzustellen, dass die Trittschallübertragungen unterhalb von 250 Hz dominant sind und somit der Beitrag für  $f > 250 \text{ Hz}$  für den Einzahlwert vernachlässigt werden kann. Dies konnte für die frequenzabhängigen Messwerte der 25 Deckenaufbauten auf einfache Weise gezeigt werden, indem die Berechnung nach (3.46) zuerst für den Bereich 50-2500 Hz durchgeführt wurde und danach für den Bereich 50-250 Hz. Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen lagen in allen Fällen zwischen 0 und 1,0 dB.

### 3.5.2 Validierung anhand der Einzahlwerte $L_{n,w}$

Abbildung 3.18 zeigt für die untersuchten Deckenaufbauten die Differenzen der nach (3.46) ermittelten Einzahlwerte (Berechnung - Messung). Die Standardabweichung  $\sigma$  beträgt 1,5 dB,

die mittlere Abweichung 0 dB. Zur Beurteilung der Differenzen wurde zusätzlich der Vertrauensbereich  $R$  für Messwerte angegeben, der nach ISO 140-2 [98] für Messungen unter Laborbedingungen 1-3 dB beträgt.<sup>3</sup> Die zur Validierung gebildeten Differenzen der Einzahlwerte liegen alle innerhalb des Vertrauensbereichs für Messwerte. Für die Optimierungs-Berechnungen wurde in gleicher Weise ein Erwartungsbereich festgelegt ( $2,8\sigma$ ). Die bisherigen Messergebnisse der zuvor rechnerisch optimierten Deckenaufbauten weisen gegenüber der Berechnung Abweichungen auf, die in diesem Erwartungsbereich liegen.

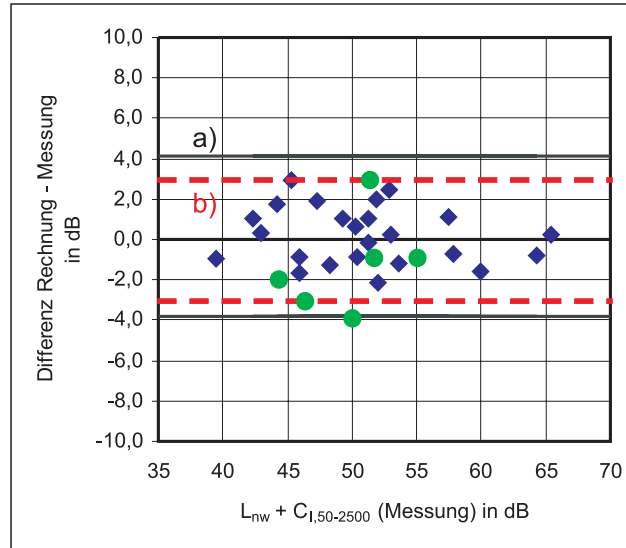


Abbildung 3.18: Differenz von Messung und Berechnung. Rauten: Differenz der Einzahlwerte der 25 zur Validierung verwendeten Deckenaufbauten. Die Berechnung erfolgte nach der Messung. Kreise: Differenz der Einzahlwerte für 6 Deckenaufbauten, die zuerst berechnet und dann gemessen wurden. a) Intervall der zu erwartenden Differenzen zwischen Messung und Berechnung b) Vertrauensbereich nach [98] für Trittschallmessungen unter Laborbedingungen (1-3 dB)

### 3.5.3 Validierung mit frequenzabhängigen Ergebnissen

Abbildung 3.19 zeigt die frequenzabhängigen Differenzen zwischen Messung und Berechnung für die untersuchten Deckenaufbauten. Zur Beurteilung der Differenzen wird hier der frequenzabhängige Vertrauensbereich nach [98] für Messungen an einer Holzbalkendecke angegeben. Da die Werte nach [98] bei 100 Hz enden, wurde in Abbildung 3.19 zusätzlich der Vertrauensbereich für Messungen aus der Datenbank des ift Schallschutzzentrums gezeigt. Hierzu wurden Deckenaufbauten ausgewählt, von denen mehrere Messergebnisse aus unterschiedlichen Prüfständen vorlagen. Aus diesen Messergebnissen wurde jeweils der Vertrauensbereich ermittelt und anschließend der Mittelwert gebildet.

<sup>3</sup>Der Vertrauensbereich nach [98] gibt das Intervall an, in dem 95% der Abweichungen zwischen zwei Messergebnissen des selben Deckenaufbaus in unterschiedlichen Instituten zu erwarten sind ( $R = 2,8\sigma$ ).

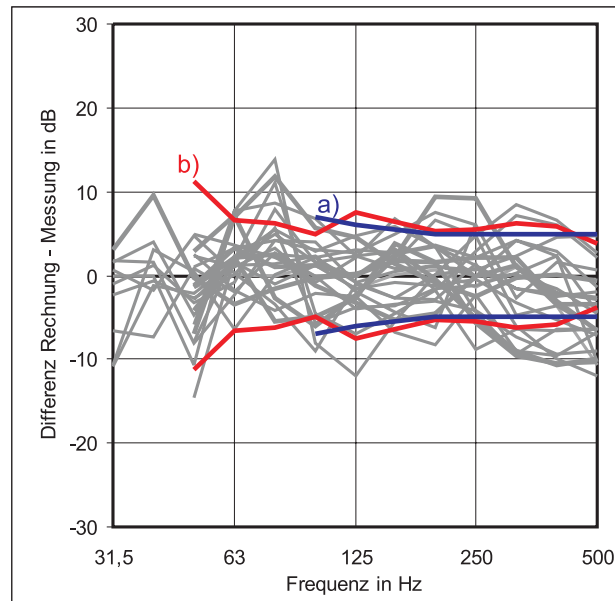


Abbildung 3.19: Frequenzabhängige Differenz zwischen Messung und Berechnung für 25 Deckenaufbauten. a) Vertrauensbereich nach DIN EN ISO 140-2 für Holzbalkendecken b) Vertrauensbereich für den erweiterten Frequenzbereich bis 50 Hz, berechnet aus Messungen des ift Schallschutzzentrums

Wie Abbildung 3.19 zeigt beträgt das Intervall der zu erwartenden Differenzen zwischen Berechnung und Messung ca.  $\pm 10\text{dB}$ , und liegt somit geringfügig über dem Intervall der zu erwartenden Messgenauigkeit (Kurve b in Abbildung 3.19). Die Genauigkeit des Berechnungsverfahrens wurde auf Basis dieser Validierung als ausreichend eingestuft, um eine numerische Optimierung von Holzdecken durchführen zu können. Für den Nachweis der Eignung der optimierten Konstruktionen wurde eine zusätzliche messtechnische Überprüfung vorgesehen.





# Kapitel 4

## Visualisierung

Für die Nutzerfreundlichkeit eines Programmes ist die Ausführung der graphischen Oberfläche als Schnittstelle zwischen Mensch und Maschine von entscheidender Bedeutung. Die Nutzer-Oberfläche hat während des Programmablaufs ganz unterschiedliche Aufgaben. Der Programmablauf von *AdhoC* kann in die für die FEM-Berechnung typischen drei Blöcke unterteilt werden:

- Pre-processing
- Lösung (Solution)
- Post-processing

Im "Pre-processing" werden von der Nutzeroberfläche die Eingangsdaten für die FEM-Berechnung erfasst. Dies kann entweder durch die Übernahme der Geometriedaten aus einem CAD-Modell oder durch die parametrische Beschreibung des zu berechnenden Körpers direkt in der Nutzeroberfläche erfolgen. Die Geometrie ist im nächsten Schritt zu vernetzen - also in Finite Elemente zu unterteilen - deren Daten (Knoten, Kanten, Flächen etc.) an den FEM-Kern zu übergeben sind. Die Vernetzung kann entweder durch freie Netzgeneratoren oder makrobasiert erfolgen. Neben den Geometriedaten sind Angaben zur Problemstellung (Elementtyp, Randbedingungen, Art der Lösungsmethode, Ergebnisdarstellung) erforderlich.

Während der eigentlichen FEM-Berechnung, der Lösungsphase, hat die graphische Nutzeroberfläche keine maßgebliche Bedeutung. In konventionellen Programmen informiert sie zum Teil über den Berechnungsfortschritt.

Im "Post-processing" ist die Visualisierung der Ergebnisse für deren Interpretation durch den Nutzer unerlässlich. Die Nutzer-Oberfläche muss hierbei die Möglichkeit bieten, die unterschiedlichen Aspekte der Ergebnisse möglichst unkompliziert miteinander vergleichen zu können und die Visualisierung zur weiteren Verwendung exportieren zu können. Im vorliegenden Anwendungsfall soll durch die Visualisierung das mechanische Verständnis der Zusammenhänge zwischen den berechneten Eigenmoden der Decke und dem Norm-Trittschallpegel ermöglicht werden.

## 4.1 Anforderungsprofil der graphischen Oberfläche

Aus der vorausgegangenen Aufgabenbeschreibung der graphischen Oberfläche ergibt sich aus Sicht des Benutzers folgendes Anforderungsprofil:

- *Benutzerfreundlichkeit*
  - + Datenaustausch mit CAD Programmen
  - + automatische Netzgenerierung
  - + Materialzuweisung einfach und eindeutig
  - + automatische Überprüfung der Bauteileingabe
  
- *Übersichtlichkeit*
  - + hochwertige und aussagekräftige Ergebnisvisualisierung
  - + übersichtliche Darstellung
  - + Animation der Visualisierung
  - + Export der Ergebnisdarstellung
  
- *Performance*
  - + zeitsparende Eingabe von Geometrie- und Materialdaten
  - + schnelle Vernetzung
  - + schnelle Ergebnisaufbereitung
  
- *Interaktivität*
  - + einfacher Eingriff in den Rechenprozess
  - + automatisierte Parameterstudien
  - + individuell konfigurierbar

## 4.2 Umsetzung des Anforderungsprofils

Für die Umsetzung der Aufgabenstellung in diesem Projekt wurde die Realisierung einer graphischen Nutzeroberfläche gewählt. Durch eine makrobasierte Eingabe des Bauteils können auch komplexere Strukturen schnell eingegeben und vernetzt werden. Zur schnellen Eingabe der Materialdaten wurden diese in einer Materialdatenbank hinterlegt. Die Ergebnisausgabe erfolgt an dieselbe Nutzeroberfläche, wodurch sich eine einfachere Handhabung für den Anwender ergibt.

Diese Vorgehensweise eignet sich besonders gut für die hier geplanten Parameterstudien, die zahlreiche Berechnungsläufe mit jeweils geringfügigen Änderungen der Struktur erfordern. Die Parametrisierung kann hier auf einfache Weise automatisiert erfolgen.

Als Nachteil der makrobasierten Vernetzung ist der höhere Aufwand in der Umsetzung bei neuen Strukturelementen zu nennen, für die noch kein Makro zur Vernetzung existiert.

### 4.3 Erzeugung der Datenstruktur (Pre-processor)

Im ersten Schritt des Pre-processors werden die Geometrie- und Materialdaten vom Benutzer abgefragt. Das aus den abgefragten Daten generierte Deckenmodell wird durch eine graphische Ausgabe der visuellen Kontrolle des Benutzers übergeben. Abbildung 4.1 zeigt eine Dialog-Box zur Abfrage der Geometrie- und Materialdaten einer offenen Holzbalkendecke mit anschließender Visualisierung der eingegebenen Geometrie.

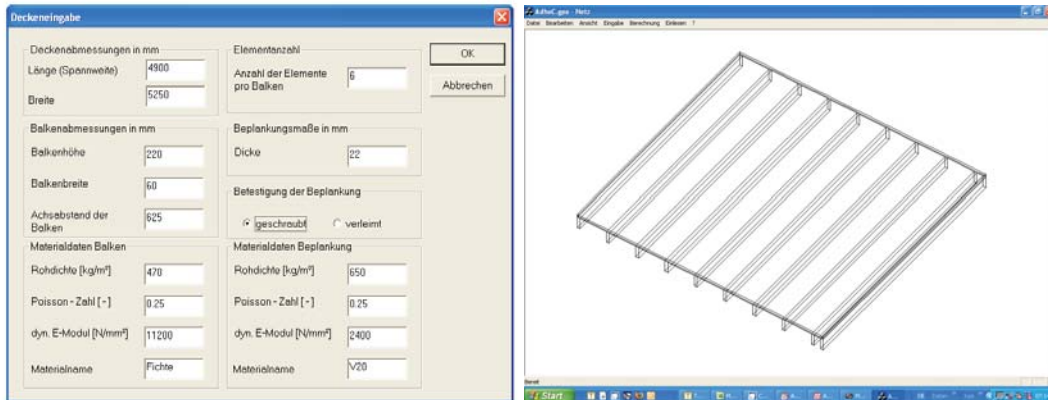


Abbildung 4.1: Abfrage zur Generierung eines Deckenmodells und graphische Ausgabe des Modells zur optischen Kontrolle

Der automatisierte Aufruf der Dialog - Boxen für den Rohdeckentyp und die Deckenaufbauten wird über eine Baumstruktur gesteuert. Abbildung 4.2 zeigt die Baumstruktur der derzeit möglichen Deckenkonstruktionen.

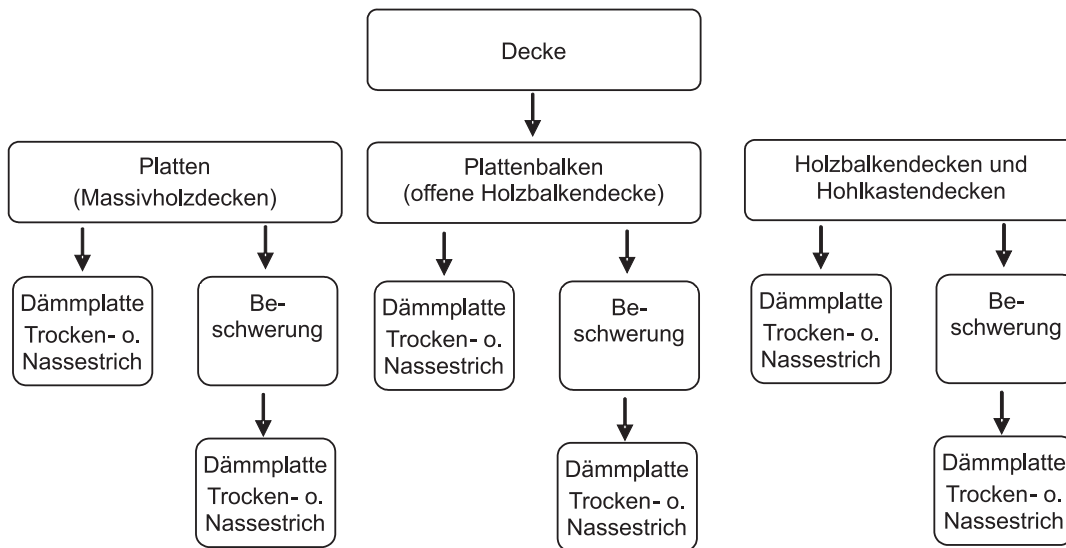


Abbildung 4.2: Baumstruktur der derzeit möglichen Deckenkonstruktionen

## 4.4 Visualisierung der Ergebnisse (Post-processor)

Im Anschluss an die FEM-Berechnung mit der akustischen Nachlaufrechnung erfolgt die Visualisierung der Ergebnisse durch die graphische Nutzer-Oberfläche. Abbildung 4.3 zeigt dies beispielhaft für die Trittschallberechnung einer offenen Holzbalkendecke. Die dargestellten Eigenmoden können in der Visualisierung animiert werden und vermitteln so einen realistischen Eindruck der Schwingungsform. Im eingeblendeten Diagramm wird der berechnete Trittschallpegel mit den Messwerten verglichen. Die Frequenz der aktuell dargestellten Eigenmode wird durch einen hervorgehobenen Punkt auf der Trittschallkurve visualisiert. Dies erleichtert die Zuordnung einzelner Moden zu Überhöhungen der Trittschallkurve. Der Benutzer wird dadurch in die Lage versetzt Schwachstellen in der Trittschalldämmung mit der zugehörigen Schwingungsform der Decke in Verbindung zu bringen und durch gezielte Änderungen in der Konstruktion auf das Schwingungsverhalten der Decke und ihre Trittschalldämmung einzuwirken.

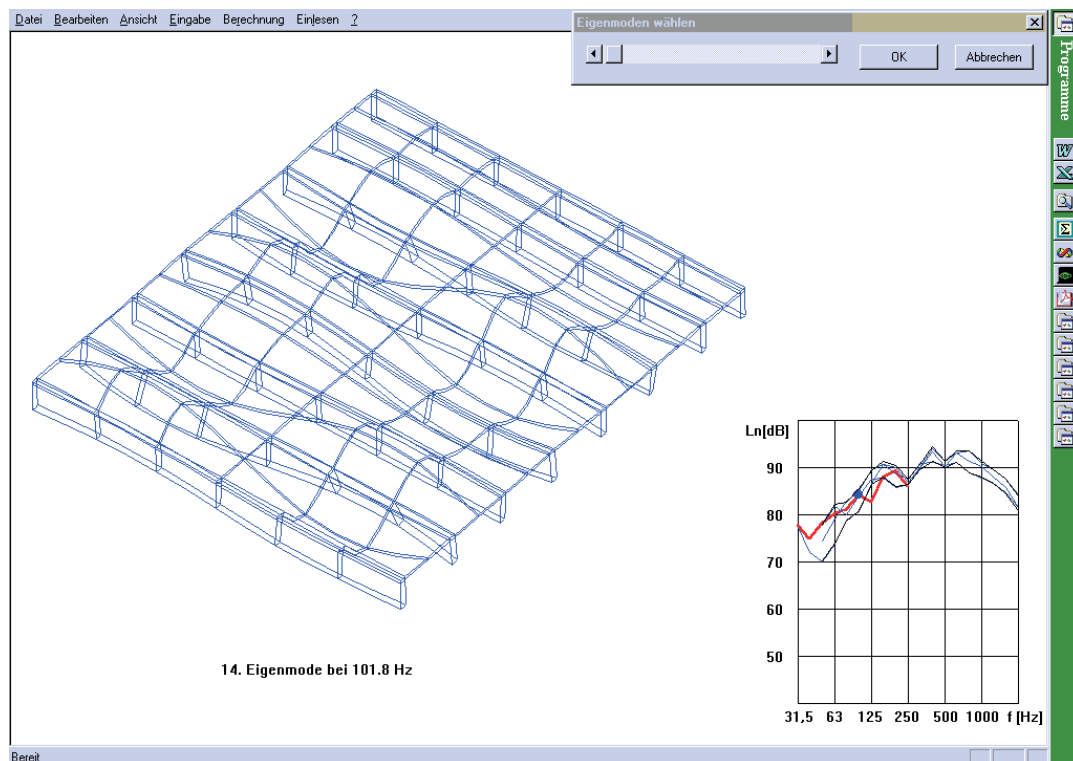


Abbildung 4.3: Visualisierung der Berechnungsergebnisse in der graphischen Nutzer-Oberfläche

# Kapitel 5

## Ergebnisse

Die übergeordnete Zielsetzung des Projektes liegt in der Entwicklung konstruktiver Maßnahmen zur Verbesserung der Trittschalldämmung von Holzdecken. Diese Zielsetzung erfordert die Berücksichtigung des subjektiven Empfindens der Trittschallübertragung durch den Bewohner und der daraus folgenden Zielwerte für die Bauteilentwicklung (siehe hierzu Abschnitt 5.1). Um die Bauteilentwicklung zu ermöglichen, ist zunächst ein besseres Verständnis des Schwingungsverhaltens der (Roh-)Decke und der Wechselwirkungen zwischen Estrichaufbau und Rohdecke durch numerische Simulationen zu erarbeiten (Abschnitt 5.2). Anschließend können die gewonnenen Erkenntnisse verwendet werden, um anhand einer numerischen Variation der sensitiven Parameter die Deckenaufbauten zu optimieren (Abschnitt 5.3).

In Abschnitt 5.4 werden schließlich aus den auf diese Weise optimierten und im ift Schallschutzzentrum messtechnisch untersuchten Decken "Demonstratoren" zusammengestellt. Auf Basis dieser Konstruktionen und einer Auswertung der Bauteildatenbank werden Konstruktionshilfen gezeigt, die dem Praktiker die Umsetzung der Erkenntnisse in optimierte Deckenaufbauten ermöglichen.

### 5.1 Subjektives Empfinden der Trittschallübertragung

Die Trittschallübertragung aus fremden Wohnbereichen wird bei Umfragen meist als die störendste Geräuschquelle genannt [99]. Zum Schutz gegen unzumutbare Belästigungen aus diesen Übertragungen werden in DIN 4109 [100] Anforderungen an die Trittschalldämmung von Trenndecken gestellt, deren Einhaltung nachzuweisen ist. Da der messtechnische Nachweis für diese Anforderungen mit einem Norm-Hammerwerk als Anregungsquelle durchgeführt wird, ist zunächst die Korrelation zwischen dem Ergebnis dieser Messung (dem bewerteten Norm-Trittschallpegel  $L_{n,w}$ ) und dem subjektiven Empfinden des Bewohners bei der üblichen Anregung durch Begehen der Decke zu hinterfragen.

Diese Korrelation wurde bereits in diversen Projekten untersucht [9, 101, 102, 99, 67, 103, 104, 105]. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen zeigen relativ einheitlich, dass eine brauchbare Korrelation zwischen dem subjektiven Empfinden des Bewohners und dem bewerteten Norm-Trittschallpegel nur dann existiert, wenn der Spektrumanpassungswert im erweiterten Frequenzbereich mit berücksichtigt wird ( $L_{n,w} + C_{I,50-2500}$ ). Ohne Spektrumanpassungswert ist kein ausreichender Zusammenhang gegeben, wie die nachfolgenden Darstellungen zeigen.

### 5.1.1 Korrelation zwischen Messergebnis und subjektivem Empfinden

Abbildung 5.1 illustriert zunächst die geringe Korrelation zwischen dem subjektiven Empfinden des Bewohners und dem  $L_{n,w}$  ohne Spektrumanpassungswert. Gezeigt werden Messungen des A-bewerteten Trittschallpegels<sup>1</sup>  $L_{AFmax,n}$  beim Begehen der Decke und dem  $L_{n,w}$  für Messungen an Holz- und Stahlbetondecken. Die Ergebnisse für Stahlbetondecken konnten Untersuchungen von WEEBER [106] entnommen werden, die bei Baumesungen durchgeführt wurden. Die Messungen an Holzdecken wurden im Deckenprüfstand des ift Schallschutzzentrums durchgeführt [13].

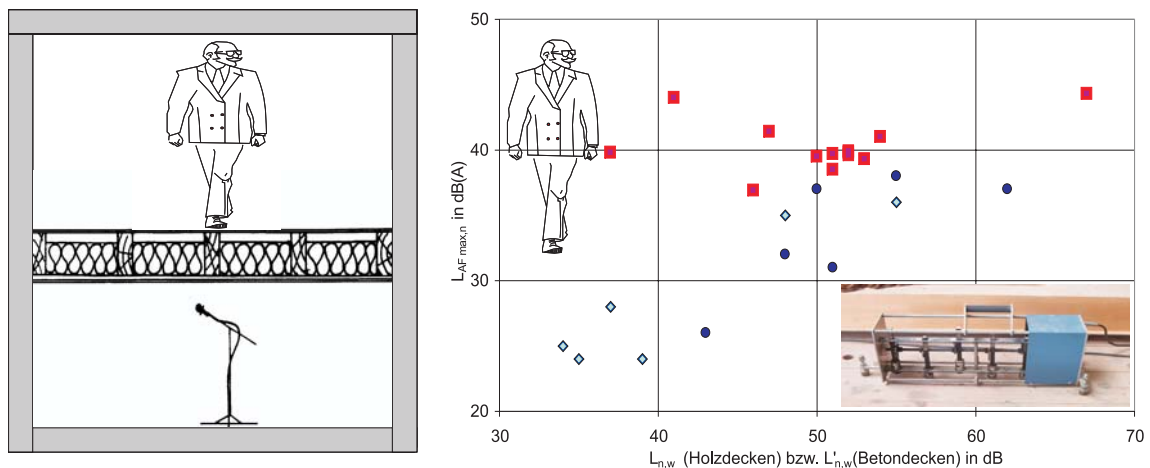


Abbildung 5.1: Trittschallübertragung einer Decke beim Begehen. Links: Darstellung der Messung. Rechts: Zusammenhang zwischen dem A-bewerteten Trittschallpegel  $L_{AFmax,n}$  beim Begehen der Decke und dem Ergebnis der Messung mit dem Norm-Hammerwerk. Blaue Rauten und Kreise:  $L'_{n,w}$  von Stahlbetondecken nach [106]. Rote Quadrate:  $L_{n,w}$  von Holzdecken [13].

Die Ursache der geringen Korrelation wird in Abbildung 5.2 (links) anhand von Messergebnissen der Trittschallübertragung beim Begehen einer Holzdecke illustriert. Aus den frequenzabhängigen Pegeln ist deutlich zu ersehen, dass nahezu die gesamte Übertragung unterhalb von 100 Hz erfolgt.

Im Gegensatz hierzu wird bei der Messung des Norm-Trittschallpegels, der mit dem Norm-Hammerwerk erzeugt wird, ausschließlich der Frequenzbereich von 100 - 3150 Hz für den Einzahlwert ( $L_{n,w}$ ) verwendet. Der  $L_{n,w}$  kann somit den für das subjektive Empfinden relevanten Bereich unter 100 Hz gar nicht beurteilen. Erst durch den  $C_{I,50-2500}$  werden die kritischen Frequenzen unterhalb 100 Hz zumindest zum Teil mit berücksichtigt.

Abbildung 5.2 (rechts) zeigt die deutlich bessere Korrelation zwischen dem subjektiven Empfinden und der Messung mit dem Norm-Hammerwerk, wenn bei der Auswertung der

<sup>1</sup>Der durch die Decke übertragene (frequenzabhängige) Trittschallpegel wird durch die A-Bewertung (mit anschließender energetischer Aufsummierung) in einen Einzahlwert überführt, der dem subjektiven Empfinden des menschlichen Gehörs bei niedrigen Lautstärken (20-40 phon) näherungsweise entspricht.

Holzdecken zusätzlich der Spektrumanpassungswert berücksichtigt wird ( $L_{n,w} + C_{I,50-2500}$ ).

### 5.1.2 Zielwerte für die Bauteilentwicklung

Aus diesen Darstellungen lassen sich die Zielwerte für die Bauteilentwicklung ablesen. Die in einigen Europäischen Länder bereits umgesetzte Anforderung an den  $L_{n,w} + C_{I,50-2500} \leq 53$  dB [105] entspricht in Abbildung 5.2 in etwa einem  $L_{AFmax,n} \leq 35$  dB(A). Erfahrungsgemäß ist oberhalb dieser Grenze mit störenden Trittschallübertragungen zu rechnen [99]. Für einen  $L_{n,w} + C_{I,50-2500} \leq 46$  dB beträgt der A-bewertete Trittschallpegel in etwa  $L_{AFmax,n} \leq 30$  dB(A) und ist, je nach Umgebungsgeräusch, kaum noch wahrnehmbar.

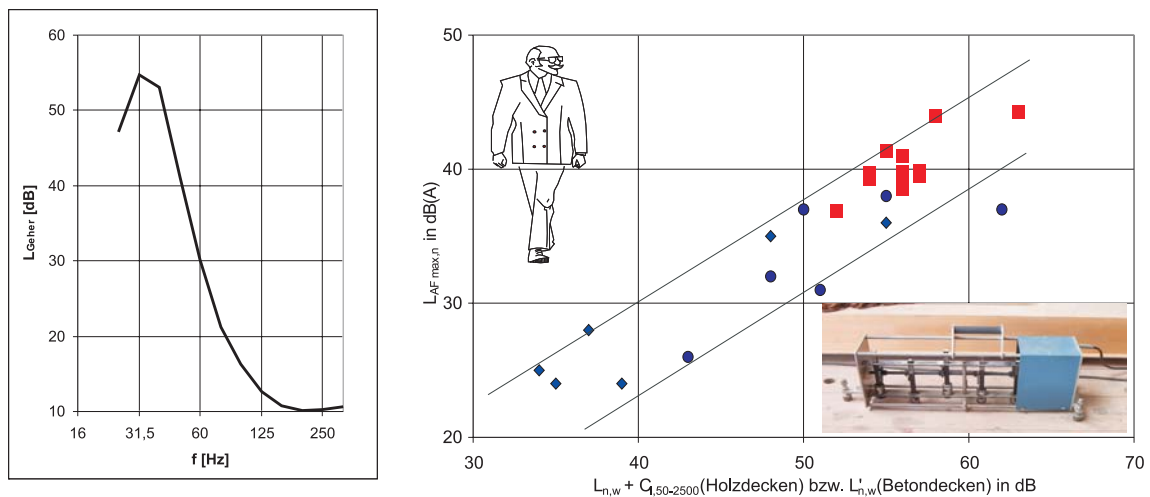


Abbildung 5.2: Trittschallübertragung einer Holzdecke beim Begehen. Links: Gemessene Trittschallpegel im Raum unterhalb der Decke. Rechts: Zusammenhang zwischen dem A-bewerteten Trittschallpegel  $L_{AFmax,n}$  beim Begehen der Decke und dem Ergebnis der Messung mit dem Norm-Hammerwerk. Blaue Rauten und Kreise:  $L'_{n,w}$  von Stahlbetondecken nach [106]. Rote Quadrate:  $L_{n,w} + C_{I,50-2500}$  von Holzdecken [13].



## 5.2 Numerische Untersuchung der Wechselwirkungen

Die numerische Simulation des Schwingungsverhaltens eines Deckenaufbaus mit der anschließenden Visualisierung der Schwingungsformen in der graphischen Nutzeroberfläche stellt ein gut geeignetes Instrument dar, um die Ursachen der tieffrequenten Trittschallübertragung besser verstehen zu können und daraus Rückschlüsse für die Bauteilentwicklung zu ziehen. In den nachfolgend dargestellten numerischen Untersuchungen werden folgende Aspekte behandelt:

- Sensibilität der Berechnungsergebnisse gegenüber Materialparametern
- Wechselwirkung zwischen Estrichaufbau und Rohdecke

### 5.2.1 Einfluss der Materialparameter

Zunächst war die Fragestellung zu behandeln, wie stark die praxisüblichen Schwankungen der Materialparameter die Trittschallübertragung einer Decke beeinflussen. Hierzu wurde eine möglichst einfache Deckenkonstruktion gewählt, zu der genügend messtechnische Erfahrungswerte vorlagen. Abbildung 5.3 zeigt die gemessenen Norm- Trittschallpegel von 8 Brettschichtholzdecken unterschiedlicher Hersteller. Die Stärke der Decken lag zwischen 140 und 160 mm. Die Festigkeitsklassen des verwendeten Schnittholzes waren nicht bekannt. Die Berechnung erfolgte für eine 150 mm starke orthotrope Platte mit unterschiedlichen Materialparametern, die den Festigkeitsklassen C22 bis C35 nach EN 338:2003 [94] entnommen wurden. Die Schwankungsbreite der in Abbildung 5.3 dargestellten Berechnungsergebnisse ist ausschließlich auf die unterschiedlichen Materialparameter nach Tabelle 5.1 zurückzuführen. Alle weiteren Einflussgrößen (Geometrie, Randbedingungen, Anregung etc.) blieben unverändert. Da die Schwankungsbreite der Berechnung in einem ähnlichen Bereich wie die Schwankungsbreite der Messergebnisse liegt, kann einerseits die Schlussfolgerung gezogen werden, dass ein erheblicher Anteil der Abweichungen zwischen den Messergebnissen zweier nominell gleichen Decken auf die Schwankung der Materialparameter zurückzuführen ist. Andererseits ist sie bei der Prognose einer Decke als Unsicherheit in der Ergebnisbewertung zu berücksichtigen.

Festigkeitsklasse	Charakteristische Werte			
	C22	C24	C27	C35
E-Modul in Faserrichtung $E_{0,mean}$ in $MN/m^2$	10000	11000	11500	13000
E-Modul senkrecht zur Faserrichtung $E_{90,mean}$ in $MN/m^2$	330	370	380	430
Mittelwert des Schubmoduls $G_{mean}$ in $MN/m^2$	630	690	720	810
Mittlere Rohdichte $\rho_{mean}$ in $kg/m^3$	410	420	450	480
weitere Materialwerte				
Verlustfaktor $\eta$	0,01	0,01	0,01	0,01
Querkontraktionszahl $\nu$	0,25	0,25	0,25	0,25

Tabelle 5.1: Eingangparameter nach [94] für die FEM Berechnung



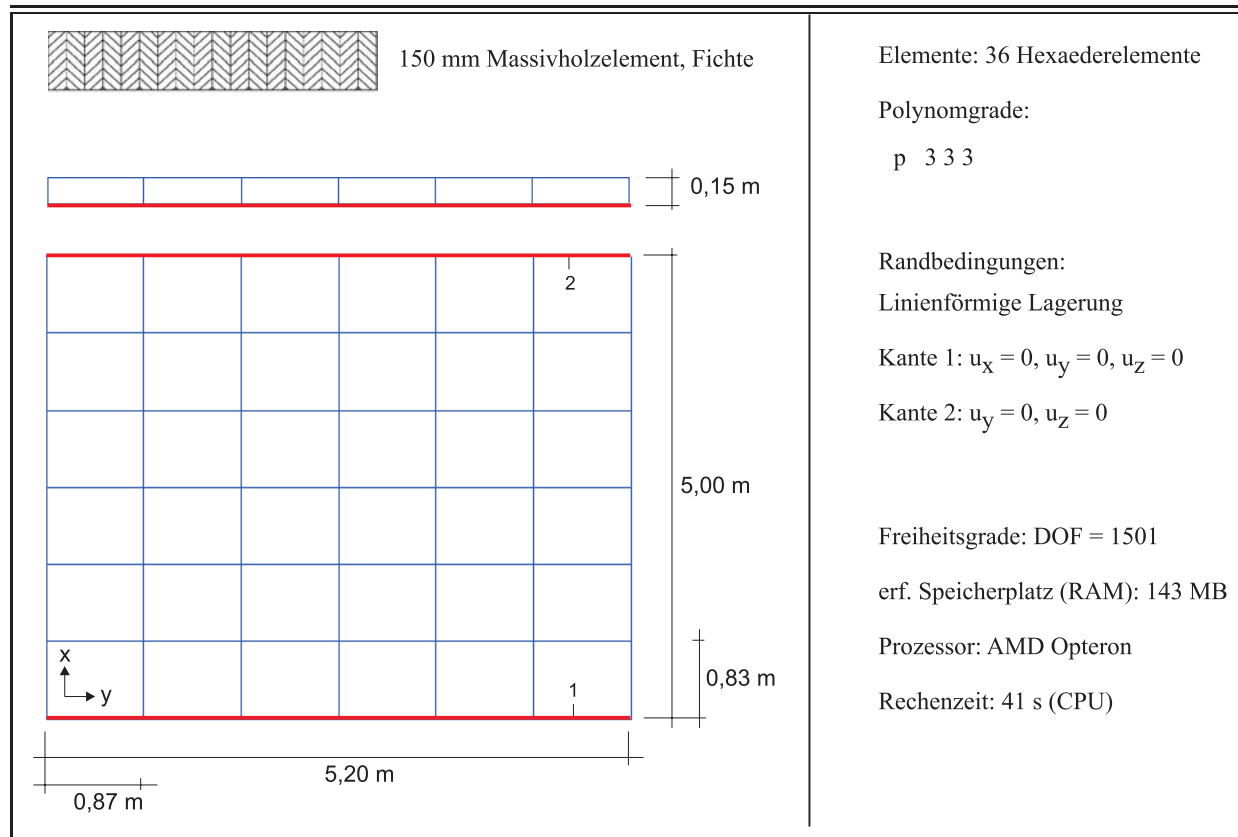
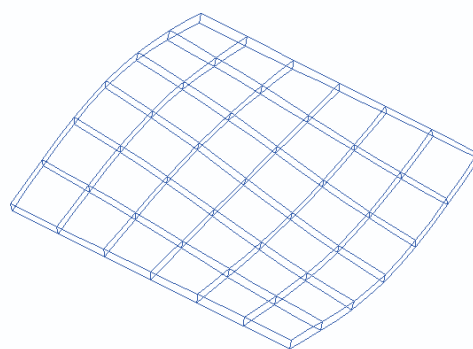


Tabelle 5.2: Aufbau und Modellierung der Brettschichtholzdecke



150 mm Brettschichtholzdecke

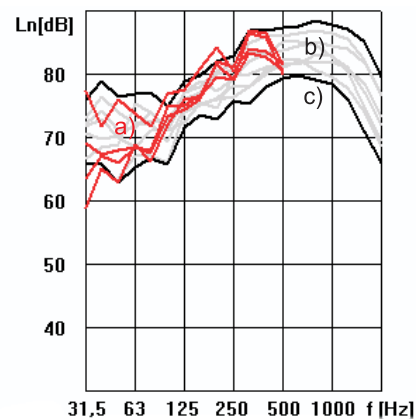


Abbildung 5.3: Messwerte von Brettschichtholzdecken im Vergleich zur Berechnung mit unterschiedlichen Materialparametern: a) Berechnung mit Materialparametern nach Tabelle 5.1, b) Messwerte der Brettschichtholzdecken, c) Mittelwert der Messergebnisse  $\pm 2\sigma$

## 5.2.2 Wechselwirkung zwischen Zementestrich und Rohdecke

Einen entscheidenden Einfluss auf die Trittschallübertragung bei tiefen Frequenzen hat die Lage der Resonanzfrequenz zwischen Estrich und Rohdecke. Hierunter versteht man den Frequenzbereich, bei dem eine gegenphasige Schwingung von Estrichaufbau und Rohdecke auftritt. Die in Abbildung 5.4 am Beispiel eines Zementestrichs auf einer Brettstapeldecke gezeigte Resonanzüberhöhung ( $f_r$ ) weist die höchsten Trittschallpegel des Spektrums auf und liegt in dem für das subjektive Empfinden des Bewohners kritischen Frequenzbereich ( $f < 100\text{Hz}$ ). Die Prognose dieser Resonanzfrequenz wird in der Praxis üblicherweise anhand eines Masse-Feder-Masse Modells durchgeführt, dessen Ergebnis aber häufig um 1-2 Terzen von der gemessenen Resonanzüberhöhung abweicht. Die Ursache dieser Unsicherheiten kann anhand der FEM Berechnung und der Visualisierung in der graphischen Nutzeroberfläche des Postprozessors veranschaulicht werden.

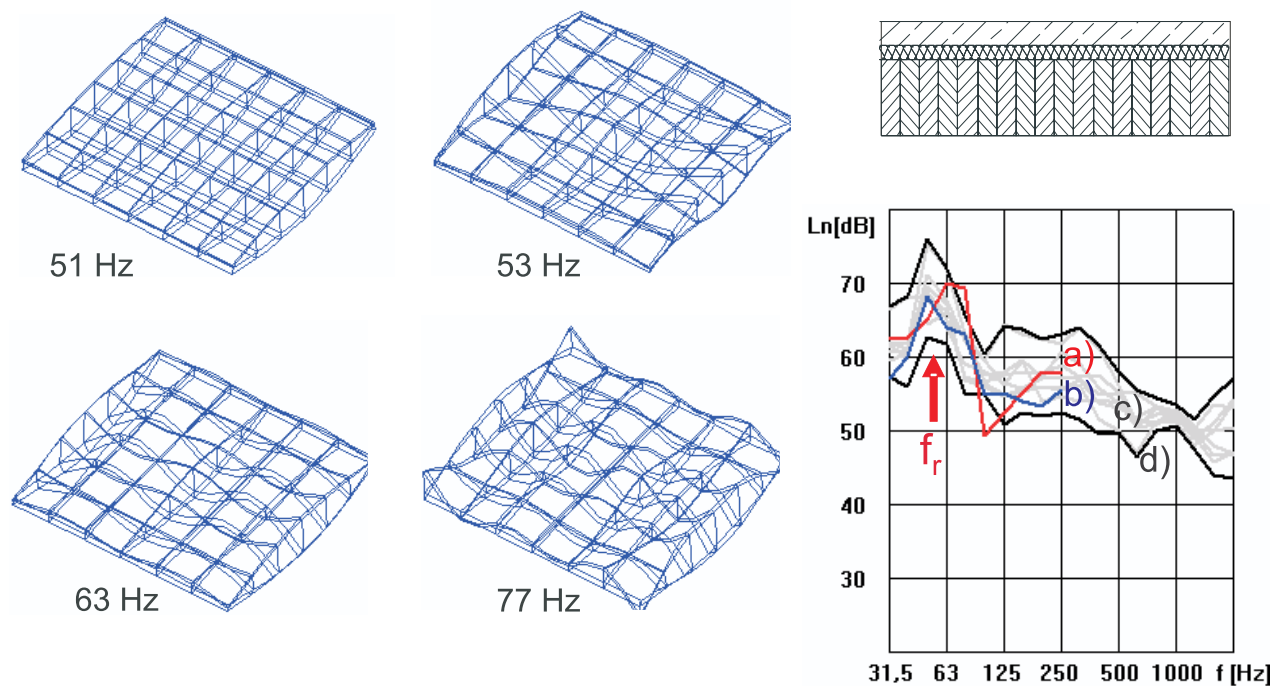


Abbildung 5.4: Darstellung der Estrichresonanzen am Beispiel eines Zementestrichs ( $m' = 120\text{kg}/\text{m}^2$ ) auf einer Brettschichtholzdecke ( $m' = 63\text{kg}/\text{m}^2$ ) und einer Mineralfaser Trittschalldämmplatte ( $s' = 5\text{MN}/\text{m}^3$ ). Links die verschiedenen Formen der Resonanz ( $f_r$ ). Rechts die berechneten und gemessenen Norm-Trittschallpegel: a) Berechnung mit Berücksichtigung der Abstrahlung nach modaler Methode, b) Berechnung mit Berücksichtigung der Abstrahlung nach integraler Methode, c) Messwerte ähnlicher Decken, d) Mittelwert der Messergebnisse  $+/- 2\sigma$

Abbildung 5.4, links zeigt für den untersuchten Deckenaufbau vier Eigenmoden im Resonanzbereich des Estrichaufbaus. Neben der erwarteten ersten Resonanz bei 51 Hz bilden sich noch weitere Resonanzen bei 53, 63 und 77 Hz ab, die je nach Anregung und Überlagerung mit den Eigenmoden des Raumes bei der Abstrahlung zur Resonanzüberhöhung des Trittschallpegels

beitragen können. Der relevante Resonanzbereich, in dem die Resonanzüberhöhung des Trittschallpegels auftreten kann, erstreckt sich somit bei diesem Beispiel über drei Terzen. Hierdurch lässt sich die in der Praxis häufig auftretende Abweichung gegenüber den Prognosen mit dem stark vereinfachenden Masse-Feder-Masse Modell erklären. Die Trittschallberechnung mit der FEM bietet anhand der Modalanalyse somit die Möglichkeit, das Verhalten der Deckenkonstruktionen im Resonanzbereich genauer zu untersuchen und die Wechselwirkungen zwischen Rohdecke und Estrichaufbau besser zu verstehen.

### 5.2.3 Wechselwirkung zwischen Trockenestrich und Rohdecke

Neben dem zuvor besprochenen mineralisch gebundenen Estrich (Zement- oder Anhydrit-estrich), der nass eingebracht wird und entsprechende Trocknungszeiten benötigt, wird in der Baupraxis auch der sogenannte Trockenestrich verwendet, der auf der Baustelle aus vorgefertigten Elementen auf Gips- oder Holzwerkstoffbasis zusammengesetzt wird. Neben der kürzeren Bauzeit können bei diesem Estrichtyp die geringere flächenbezogene Masse und die geringere Aufbauhöhe von Vorteil sein.

Prinzipiell wäre bei einem Trockenestrichaufbau ein ähnliches schalltechnisches Verhalten wie bei den zuvor gezeigten Ergebnissen der Zementestrichaufbauten zu erwarten. Wie die beispielhaft dargestellten Messergebnisse von Trockenestrichaufbauten in Abbildung 5.5 jedoch zeigen, ist das schalltechnische Verhalten des Trockenestrichs ein völlig Anderes. Die beim Zementestrichaufbau deutlich ausgeprägte Resonanzüberhöhung ist beim Trockenestrichaufbau in der Regel kaum zu erkennen. Dies lässt sich nicht allein durch die höhere Materialdämpfung des Trockenestrichs und der verwendeten Dämmplatten erklären. Berechnungen mit diesen Materialparametern ergeben immer noch eine Resonanzüberhöhung, die stark von den Messwerten abweicht.

Eine Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung konnte zwar durch die Berechnung mit einer fiktiven dynamischen Steifigkeit der Trittschalldämmplatte erzwungen werden (siehe Berechnungswerte Abbildung 5.5, rechts), wodurch die Berechnung der Trockenestrichaufbauten in der Validierung und Optimierung ermöglicht wurde. Diese Vorgehensweise stellt aber für das Verständnis des Schwingungsverhaltens eine eher unbefriedigende Lösung dar.

Ein Erklärungsansatz für das abweichende Verhalten des Trockenestrichaufbaus, der hier zunächst nur als Hypothese formuliert werden kann, könnte in der sehr geringen Steifigkeit der Trockenestrichelemente und ihrer Elementstöße zu finden sein. Das in der Modalanalyse vorausgesetzte modale Schwingungsverhalten der Estrichplatte ist bei dieser Ausführung vermutlich nicht ausreichend gegeben. Vielmehr ist zu erwarten, dass die Estrichelemente oberhalb der ersten Grundschwingungen elementweise Eigenmoden ausbilden, wie dies in ähnlicher Art bei der Rohdeckenbeplankung von Holzbalkendecken festgestellt wurde [107]. Dadurch ist nicht mehr gewährleistet, dass der Trockenestrichaufbau großflächig die Rohdecke anregt, sondern der Trockenestrichaufbau wird in Teilbereichen durch die wesentlich steifere Rohdecke angeregt, wodurch er in seiner Resonanzfrequenz dämpfend wirkt. Hierdurch entsteht eine Ausbreitungsdämpfung in der Decke, wie sie in ähnlicher Weise von K. GÖSELE

bei Holzständerwänden festgestellt wurde [108].

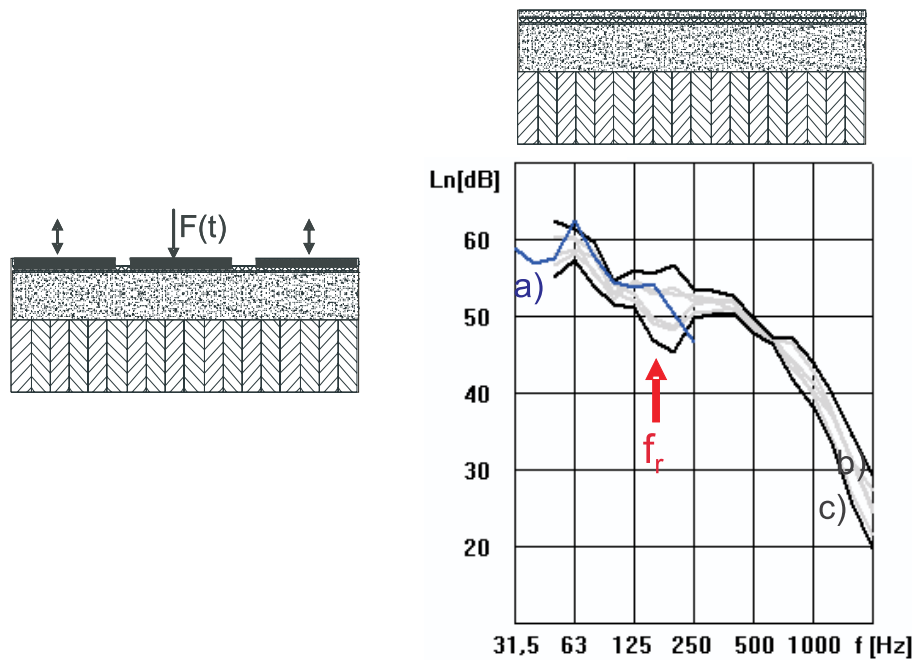


Abbildung 5.5: Wirkungsweise eines Trockenstrichs ( $m' = 29\text{kg}/\text{m}^2$ ) auf einer Brettschicht-Holzdecke mit Beschwerung ( $m'_{res} = 243\text{kg}/\text{m}^2$ ) und einer Mineralfaser Trittschalldämmplatte ( $s'_{res} = 20\text{MN}/\text{m}^3$ ). Links die Illustration der Hypothese zur Ausbreitungsdämpfung. Rechts die Berechnungs- und Messergebnisse: a) Berechnung mit fiktiver dynamischer Steifigkeit b) Messwerte ähnlicher Decken, c) Mittelwert der Messergebnisse  $\pm 2\sigma$

Abbildung 5.5, links illustriert dieses Modell durch die Darstellung des Trockenstrichs aus einzelnen, entkoppelten Elementen, die im Resonanzbereich, mit Ausnahme des krafterregten Elementes, die Decke bedämpfen. Die Wirkungsweise entspricht der eines Tilgers, also eines fußpunkterregten Ein-Masse-Schwingers, der in seiner Resonanzfrequenz die Deckenschwingung bedämpft.

Die Hypothese ist zunächst durch eine empirische Bestimmung der Ausbreitungsdämpfung an einem Trockenstrichaufbau zu überprüfen und dann ggf. in das in Abschnitt 3.3 beschriebene Dämpfungsmodell einzubauen.

## 5.3 Bauteiloptimierung durch Parametervariation

Die Möglichkeiten der numerischen Simulation zur Bauteiloptimierung werden nachfolgend am einfachen Beispiel einer Massivholzdecke mit Estrichaufbau und Rohdeckenbeschwerung gezeigt. Hierzu wird der Einfluss der schalltechnisch relevanten Konstruktionsparameter auf die Wechselwirkung zwischen Estrichaufbau und Rohdecke genutzt. Folgende Parameter wurden variiert:

- Dicke des Estrichs
- Dynamische Steifigkeit der Trittschalldämmplatten
- Flächenbezogene Masse der Rohdeckenbeschwerung
- Dicke der Rohdecke.

Die Zielwerte der Optimierung können Abschnitt 5.1 entnommen werden ( $L_{n,w} + C_{I,50-2500} \leq 53 \text{ dB}$  bzw.  $\leq 46 \text{ dB}$ ). Um einen frequenzabhängigen Vergleich zu ermöglichen, werden zusätzlich die Norm-Trittschallpegel von zwei bauüblichen Stahlbetondecken herangezogen, die im Bereich dieser Zielwerte liegen. Abbildung 5.6 zeigt die Konstruktion und die gemessenen Norm-Trittschallpegel der für diesen Zweck gewählten Deckenkonstruktionen.

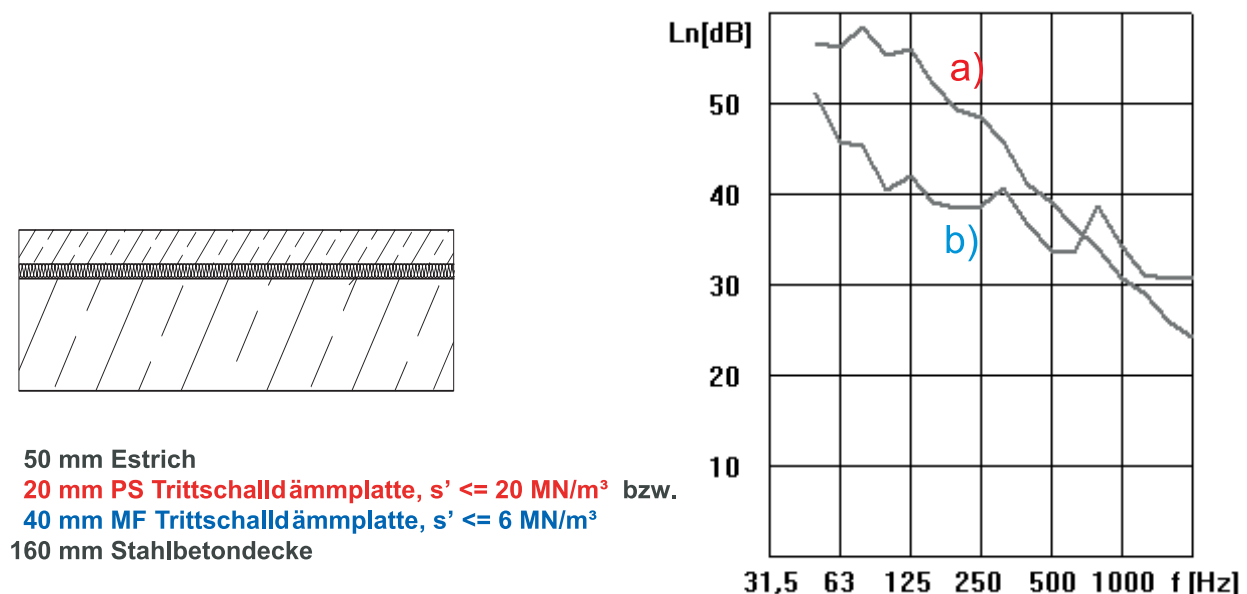


Abbildung 5.6: Konstruktion und Norm-Trittschallpegel (Messwerte) der zum Vergleich verwendeten Stahlbetondecken: a) Zementestrich auf Polystyrol-Trittschalldämmplatten mit einer dynamischen Steifigkeit von  $20 \text{ MN/m}^3$ ,  $L_{n,w} + C_{I,50-2500} = 50 \text{ dB}$  b) Zementestrich auf Mineralfaser-Trittschalldämmplatten mit einer dynamischen Steifigkeit von  $6 \text{ MN/m}^3$ ,  $L_{n,w} + C_{I,50-2500} = 40 \text{ dB}$

### 5.3.1 Dicke des Estrichs

Als erster Konstruktionsparameter wird die Dicke des Estrichaufbaus betrachtet. Die Dicke der in der Praxis verwendeten Estrichaufbauten variiert je nach Estrichtyp und Einsatzzweck. Trockenestriche werden in Stärken von 18 bis 25 mm ausgeführt. Zement- und Anhydritestriche in Stärken bis zu 80 mm. Nachfolgend wird der Einfluss der Estrichstärke auf die Trittschallübertragung des Deckenaufbaus gezeigt. Hierzu wurde die Trittschallübertragung für die gewählte Massivholzdecke mit 50, 80 und 120 mm Zementestrich berechnet. Die untere Grenze von 50 mm wird in der Praxis am häufigsten eingesetzt und aus Stabilitätsgründen nur selten unterschritten. Heizestriche werden gerne in Stärken von 65 - 80 mm ausgeführt. Die obere Grenze von 120 mm wird in der Praxis aus Kosten- und Effizienzgründen nicht erreicht.

Die in Abbildung 5.7 dargestellten Berechnungsergebnisse zeigen eine deutliche Reduzierung der Trittschallübertragung durch die Erhöhung der Estrichstärke von 50 auf 80 mm. Ursache ist die Verschiebung der in Abschnitt 5.2 beschriebenen Estrichresonanz. Der Einfluss fällt bei dem gewählten Beispiel so deutlich aus, da der 50 mm Zementestrich mit einer flächenbezogenen Masse  $m' \approx 120 \text{ kg/m}^2$  wesentlich leichter ist als die Rohdecke inklusive Beschwerung ( $m' \approx 210 \text{ kg/m}^2$ ) und somit die Erhöhung der Estrichmasse auf  $m' \approx 190 \text{ kg/m}^2$  eine deutliche Verschiebung der Resonanzfrequenz bewirkt. Durch die weitere Erhöhung der Estrichstärke auf 120 mm ( $m' \approx 290 \text{ kg/m}^2$ ) wird die Estrichmasse dominant und die Verbesserung fällt geringer aus.

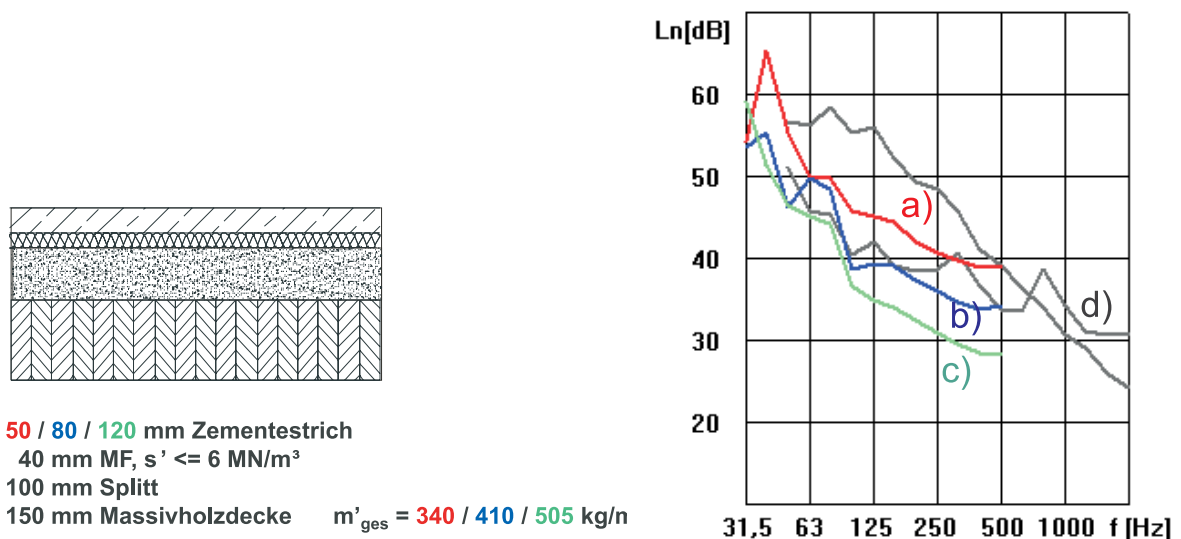


Abbildung 5.7: Vergleich unterschiedlicher Estrichstärken: a) Berechnung mit 50 mm Zementestrich b) Berechnung mit 80 mm Zementestrich c) Berechnung mit 120 mm Zementestrich d) Messwerte für Zementestrichaufbau auf einer 160 mm Stahlbetondecke

Für die praktische Anwendung zeigt das Berechnungsbeispiel, dass bei entsprechend schweren Rohdecken und stärkeren Estrichaufbauten eine Verbesserung gegenüber den vorhandenen

Planungswerten mit 50 mm Zementestrich zu erwarten ist. Eine Erhöhung über die bei Heizestrichen verwendete Stärke erscheint bei dieser Deckenkonstruktion jedoch nicht sinnvoll.

### 5.3.2 Dynamische Steifigkeit der Trittschalldämmplatten

Neben der flächenbezogenen Masse des Estrichs ist die Federsteifigkeit der Dämmplatte, die mit der dynamischen Steifigkeit  $s'$  bezeichnet wird, die zweite Einflussgröße auf die Estrichresonanz. Je nach Dämmplattenmaterial und Anwendung liegt  $s'$  zwischen  $6 \text{ MN/m}^3$  und  $\approx 100 \text{ MN/m}^3$ . Abbildung 5.8 zeigt für den zuvor beschriebenen Deckenaufbau die berechneten Norm-Trittschallpegel bei unterschiedlichen dynamischen Steifigkeiten der Trittschalldämmplatten.

Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass aus schalltechnischer Sicht eine möglichst niedrige dynamische Steifigkeit zu wählen ist, um eine geringe Trittschallübertragung zu erreichen. In der Praxis wird die Wahl der Trittschalldämmplatte und damit der dynamischen Steifigkeit durch den Estrichtyp und die vorhandene Verkehrslast eingeschränkt.

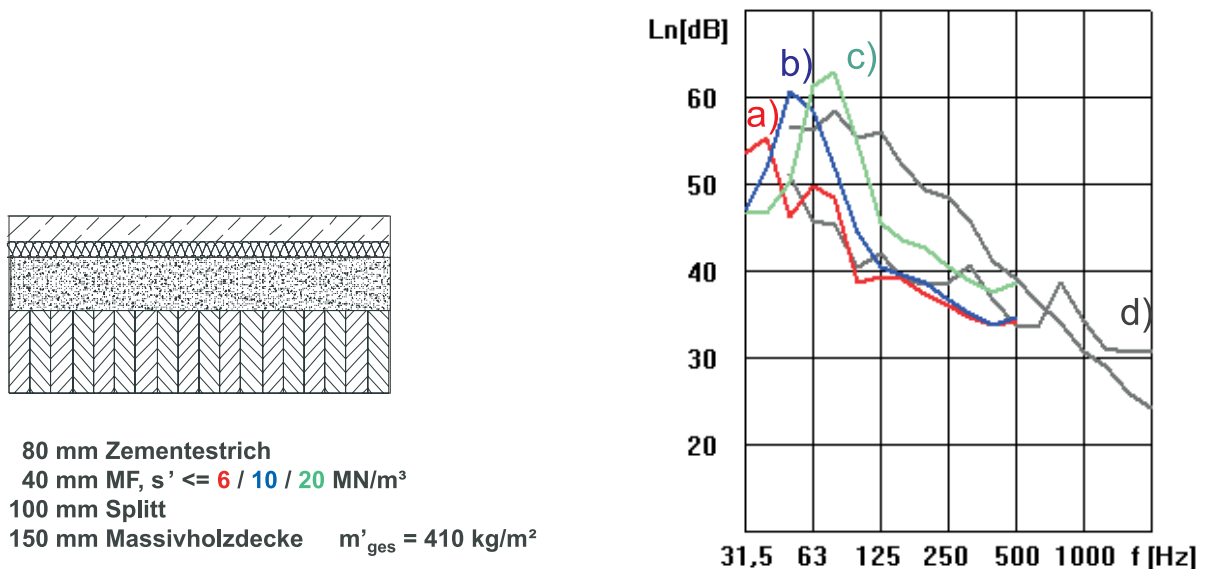


Abbildung 5.8: Vergleich von Trittschalldämmplatten mit unterschiedlicher dynamischer Steifigkeit  $s'$ : a) Berechnung mit  $s' = 6 \text{ MN/m}^3$  b) Berechnung mit  $s' = 10 \text{ MN/m}^3$  c) Berechnung mit  $s' = 20 \text{ MN/m}^3$  d) Messwerte für Zementestrichaufbau auf einer 160 mm Stahlbetondecke

### 5.3.3 Flächenbezogene Masse der Rohdeckenbeschwerung

Die Rohdeckenbeschwerung wird üblicher Weise als trockene Schüttung (Kalksplitt, Kies, oder Quarzsand) oder in Form von Betonplatten auf die Rohdecke aufgebracht. Neben der Trittschallminderung durch die Erhöhung der Rohdeckenmasse bewirkt die Beschwerung auch



eine Verschiebung der Estrichresonanz (Masse-Feder-Masse Resonanz). Wird sie als Schüttung ausgeführt, so wird zusätzlich eine Bedämpfung der Deckenkonstruktion durch ihren hohen inneren Verlustfaktor erreicht.

Abbildung 5.9 zeigt die Berechnung des Norm-Trittschallpegels der Massivholzdecke mit einer Kalksplittschüttung ( $\rho \approx 1500 \text{ kg/m}^3$ ) in unterschiedlichen Dicken (60, 100 und 150 mm). Bei diesem Beispiel wirkt sich eine Schütthöhe von 100 mm am günstigsten auf die Trittschallübertragung im tieffrequenten Bereich aus.

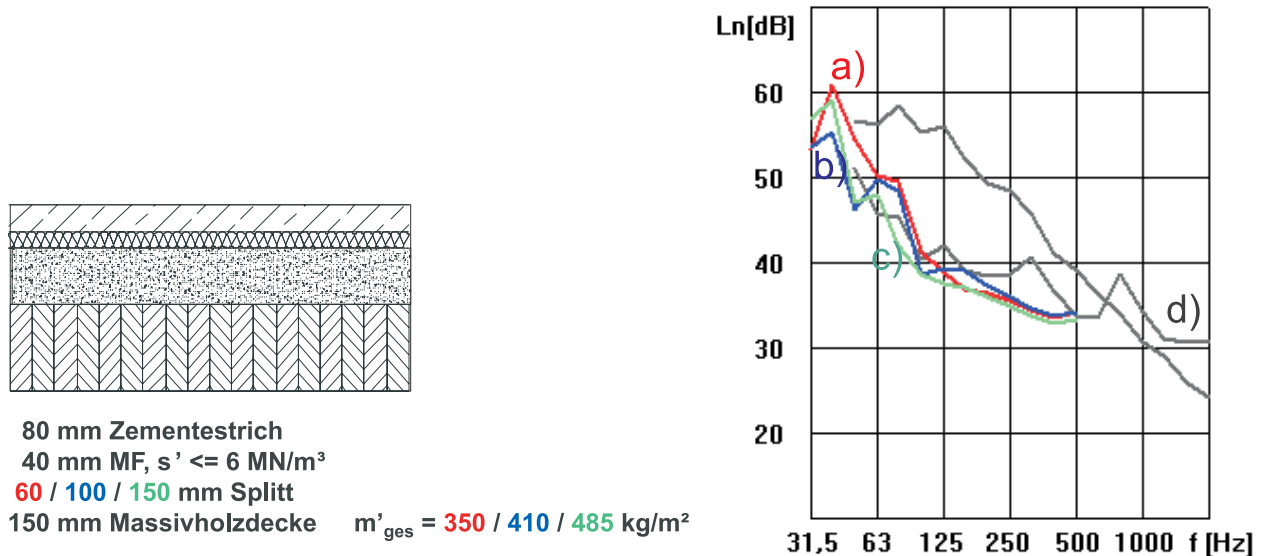


Abbildung 5.9: Vergleich unterschiedlicher Beschwerungsmassen: a) Berechnung mit 60 mm Kalksplitt b) Berechnung mit 100 mm Kalksplitt c) Berechnung mit 150 mm Kalksplitt d) Messwerte für Zementestrichaufbau auf einer 160 mm Stahlbetondecke

### 5.3.4 Dicke der Rohdecke

Die Dicke der Massivholzdecke bestimmt maßgeblich die Steifigkeit der Deckenkonstruktion. In der praktischen Anwendung wird die erforderliche Steifigkeit der Decke durch den statischen Nachweis der Tragfähigkeit und der Gebrauchstauglichkeit vorgegeben. Für die Bauteiloptimierung war zu untersuchen, ob sich die Steifigkeit auch positiv auf die Trittschallübertragung bei tiefen Frequenzen auswirkt. Hierzu wurden Berechnungen des Norm-Trittschallpegels mit drei unterschiedlichen Rohdeckenstärken (150, 200 und 250 mm) und 5 m Spannweite der Decke durchgeführt.

Wie Abbildung 5.10 zeigt, kann kein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Steifigkeit der Rohdecke und einer Reduzierung der Trittschallübertragung hergestellt werden. Die zunehmende Steifigkeit verschiebt die Eigenmoden der Rohdecke zu höheren Frequenzen. Dies führt zu starken Unterschieden der Trittschallübertragung bei tiefen Frequenzen, reduziert sie aber nicht maßgeblich. Eine steifere Ausführung der Rohdecke wirkt sich somit nicht automatisch günstig auf die Trittschallübertragung aus, sondern muss im Zusammenspiel der Rohdecken-Eigenfrequenzen und der Estrichresonanzen gesehen werden.



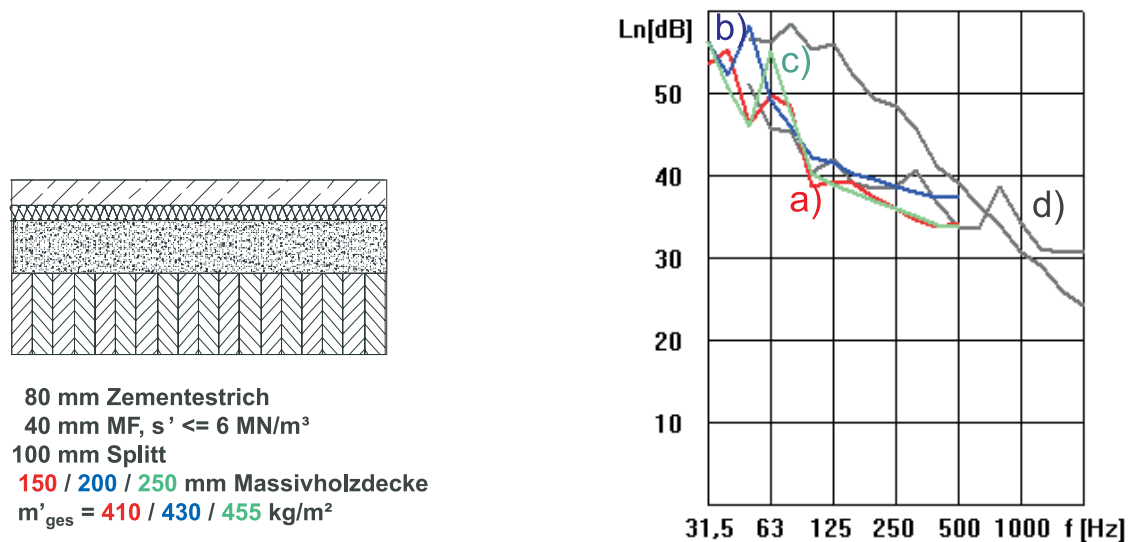


Abbildung 5.10: Vergleich unterschiedlicher Rohdeckenstärken: a) Berechnung mit 150 mm Brettschichtholzelement b) Berechnung mit 200 mm Brettschichtholzelement c) Berechnung mit 250 mm Brettschichtholzelement d) Messwerte Zementestrichaufbau auf einer 160 mm Stahlbetondecke

Die in Abbildung 5.10 zu erkennende Resonanzüberhöhung des Norm-Trittschallpegels resultiert aus der zuvor beschriebenen Resonanz zwischen Estrich und Rohdecke. Die Verschiebung dieser Resonanzüberhöhung bei den unterschiedlichen Deckenstärken ist auf die aus der höheren Steifigkeit resultierende Verschiebung der Rohdeckeneigenmoden zurückzuführen. Tabelle 5.3 zeigt die aus der Analyse im Postprocessing entnommenen Resonanzfrequenzen, der bei diesem Deckenaufbau dominanten Eigenmode der Estrichresonanz.

Dominante Eigenform der Estrichresonanz	Dicke	Resonanzfrequenz
	150mm	43Hz
	200mm	50Hz
	250mm	59Hz

Tabelle 5.3: Dominante Eigenmode der Estrichresonanz in Abhängigkeit der Deckendicke

Ein ähnlicher Effekt ist bei konstanter Deckenstärke und unterschiedlichen Spannweiten der Deckenelemente zu erwarten.

### 5.3.5 Ergebnis der Parametervariation

Die vorausgegangenen Parametervariationen zeigen den Einfluss der Bauteilkomponenten auf die Trittschallübertragung. Der Vergleich der berechneten Norm-Trittschallpegel mit den frequenzabhängigen Messwerten bei Stahlbetondecken zeigt, dass mit der Massivholzdecke bereits mit deutlich leichteren Deckenkonstruktionen vergleichbare Trittschallpegel erreicht werden können.

Auf Basis dieser numerischen Untersuchungen können, unter Berücksichtigung der praktischen Ausführbarkeit, Deckenaufbauten empfohlen werden, um die Zielwerte nach Abschnitt 5.1 zu erreichen.

Tabelle 5.4 zeigt, für das in diesem Abschnitt gewählte Beispiel einer Massivholzdecke mit Zementestrichaufbau, die entsprechenden Konstruktionsparameter in Abhängigkeit der Zielwerte und der vorhandenen Verkehrslast auf der Decke.<sup>2</sup> Eine umfassendere und messtechnisch geprüfte Zusammenstellung dieser Konstruktionsparameter für verschiedene Rohdecken und Estrichaufbauten erfolgt in Abschnitt 5.4.

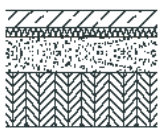
Konstruktionshilfen	Zielwert:		
	$L_{nw} + C_{1,50-2500} \leq 53 \text{ dB}$		$L_{nw} + C_{1,50-2500} \leq 46 \text{ dB}$
	Verkehrslast		Verkehrslast
	$p < 2,5 \text{ kN/m}^2$	$p < 5 \text{ kN/m}^2$	$p < 2,5 \text{ kN/m}^2$
	$\geq 50 \text{ mm ZE, } m' \geq 120$ $\geq 40 \text{ mm TSD, } SD \leq 6$ $\geq 60 \text{ mm Splitt, } m' \geq 90$ $\geq 150 \text{ mm MHD, } m' \geq 60$ $m_{ges}' \geq 270 \text{ kg/m}^2$	$\geq 80 \text{ mm ZE, } m' \geq 190$ $\geq 20 \text{ mm TSD, } SD \leq 20$ $\geq 120 \text{ mm Splitt, } m' \geq 180$ $\geq 150 \text{ mm MHD, } m' \geq 60$ $m_{ges}' \geq 430 \text{ kg/m}^2$	$\geq 50 \text{ mm ZE, } m' \geq 120$ $\geq 40 \text{ mm TSD, } SD \leq 6$ $\geq 120 \text{ mm Splitt, } m' \geq 180$ $\geq 150 \text{ mm MHD, } m' \geq 60$ $m_{ges}' \geq 360 \text{ kg/m}^2$

Tabelle 5.4: Konstruktionshilfen für optimierte Massivholzdecken

<sup>2</sup>Die vorhandene Verkehrslast schränkt die Auswahl der möglichen Trittschalldämmplatten ein.

## 5.4 Zusammenstellung optimierter Deckenaufbauten

Die übergeordnete Aufgabenstellung des Projekts lag in der Erarbeitung konstruktiver Maßnahmen zur Verbesserung der tieffrequenten Trittschalldämmung von Holzdecken. Hierzu wurden zunächst vom ift Schallschutzzentrum in Zusammenarbeit mit den beteiligten Firmen der Arbeitsgruppe die relevanten Deckentypen zusammengestellt und die Zielsetzungen festgelegt.

Neben den in Abschnitt 5.3 gezeigten Massivholzdecken wurden zwei weitere Deckentypen behandelt. Hierbei wurden neben der Reduzierung der Trittschallübertragung folgende Zielsetzungen berücksichtigt:

- Optimierung einer leichten Holzbalkendecke, deren Fertigung keinen Mehraufwand gegenüber konventionellen Fertigbaudecken darstellt.
- Optimierung einer Holz-Beton-Verbunddecke, die im Werk vorfertigbar ist und große Spannweiten ermöglicht.

Zur Optimierung der Deckentypen wurden dann zunächst numerische Parameterstudien durchgeführt, wie in Abschnitt 5.3 für die Massivholzdecke geschildert. Aus den Ergebnissen der numerischen Untersuchungen und der Auswertung der Bauteildatenbank wurden "Demonstratoren" zusammengestellt, die den Zielwerten nach Abschnitt 5.1 entsprechen. Sofern noch keine Prüfwerte dieser Konstruktionen vorlagen, wurden diese im ift Schallschutzzentrum ermittelt. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden nachfolgend dargestellt. Anschließend werden Konstruktionshilfen für optimierte Deckenaufbauten in Form einer tabellarischen Zusammenstellung der erforderlichen Konstruktionsparameter gegeben.

### 5.4.1 Massivholzdecke mit Rohdeckenbeschwerung

Vergleichende Messwerte zur numerischen Optimierung von Massivholzdecken konnten der Bauteildatenbank entnommen werden. Sie entstammen den ergänzenden Messungen zur Bauteildatenbank im ersten Projektabschnitt und Messungen im Industriauftrag<sup>3</sup>. Abbildung 5.11 zeigt den Vergleich der Messergebnisse mit den Norm-Trittschallpegeln konventioneller Stahlbetondecken nach Abbildung 5.6.

---

<sup>3</sup>Messung der Luft- und Trittschalldämmung von Binder Brettsperrholzelementen, Projektnummer 16836058

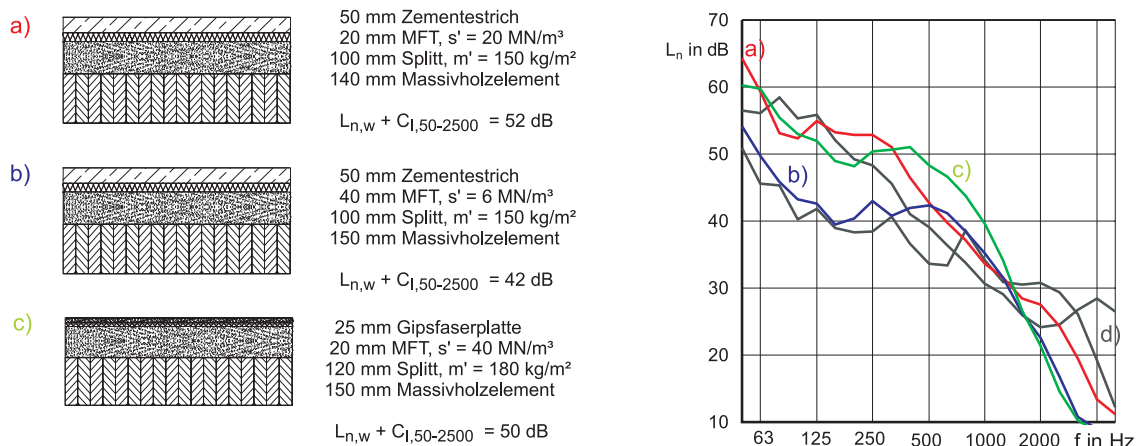


Abbildung 5.11: Messwerte der optimierten Massivholzdecken im Vergleich mit konventionellen Stahlbetondecken (d)

### 5.4.2 Leichte Holzbalkendecke

Das zuvor behandelte Beispiel einer Massivholzdecke zeigt deutlich den positiven Einfluss einer Beschwerung der Rohdecke. Der Einsatz hoher Zusatzmassen ist jedoch nicht für alle Holzbauweisen sinnvoll. Für den Fertighausbau, der üblicherweise mit sehr leichten Deckenelementen arbeitet, wurde ein alternativer Rohdeckentyp entwickelt, der mit möglichst geringen Zusatzmassen auskommt. In den numerischen Untersuchungen wurden bei diesem Deckentyp folgende Parameter untersucht:

- Lage der Rohdeckenbeplankung
- Flächenbezogene Masse der Unterdecke
- Dicke des Zementestrichs

Abbildung 5.12 zeigt die Schnittzeichnung und die Konstruktionsbeschreibung des entwickelten Deckenaufbaus.

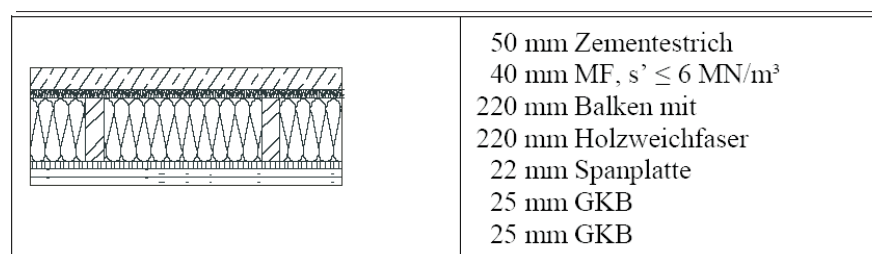


Abbildung 5.12: Konstruktion der optimierten Holzbalkendecke

Um einen möglichst großen Schalenabstand zwischen den schalltechnisch wirksamen Massen realisieren zu können, wurde bei diesem Deckentyp die aussteifende Rohdeckenbeplankung auf der Unterseite angeordnet. Die Beschwerung der abstrahlenden Ebene wurde durch eine doppelte Beplankung mit 25 mm Gipsbauplatten erreicht. Der Hohlraum zwischen den Balken wurde mit druckfesten Holzweichfaserplatten ausgefüllt.

Der Estrichaufbau kann dadurch ohne weitere Rohdeckenbeplankungen ausgeführt werden. Die Vor- und Nachteile dieser Konstruktion gegenüber konventionellen Lösungen werden in Tabelle 5.5 zusammengefasst.

Vorteile	Nachteile
+ komplett im Werk vorfertigbar	- statischer Nachweis aufwändiger
+ geringe Masse	- zum Begehen der Decke am Bau zusätzliche Dielen erforderlich
+ rationelle Fertigung	
+ Leitungen und Kabel im Hohlraum anordenbar	

Tabelle 5.5: Vor- und Nachteile der optimierten Holzbalkendecke

Für den statischen Nachweis der Holzbalkendecke ist die, durch die indirekte Lastabtragung auf Zug belastete Verschraubung der Rohdeckenbeplankung zu überprüfen. Alternativ kann eine zusätzliche Verleimung der Beplankung realisiert werden. Des Weiteren ist das Setzungsverhalten der druckfesten Holzweichfaserdämmung zu prüfen.

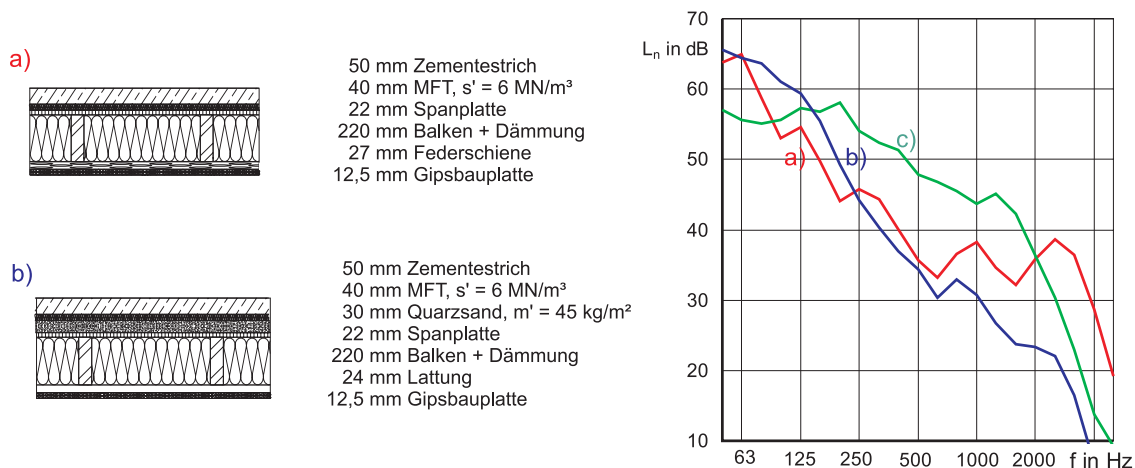


Abbildung 5.13: Messwerte der optimierten Holzbalkendecke im Vergleich zu konventionellen Holzbalkendecken: a) Holzbalkendecke mit Unterdecke an Federschiene b) Holzbalkendecke mit Rohdeckenbeschwerung c) optimierte Holzbalkendecke nach Abb. 5.12

Die schalltechnischen Vorteile der Deckenkonstruktion gegenüber konventioneller Deckentypen im Fertighausbau werden in Abbildung 5.13 gezeigt, die deutlich die Reduzierung der

Trittschallübertragung im kritischen Frequenzbereich unter 100 Hz illustriert.

Der Deckentyp ist sowohl als Trenndecke zwischen fremden Wohneinheiten, als auch in Einfamilienhäusern einsetzbar, bei denen der Bauherr Wert auf einen ausreichenden Schallschutz legt. Darüber hinausgehende Wünsche von Seiten des Bauherrn können - auf Kosten der leichten Deckenkonstruktion - durch eine zusätzliche Beschwerung der Unterdecke und einen stärkeren Zementestrich erreicht werden. Abbildung 5.14 zeigt die Messwerte beider Deckentypen im Vergleich zu den Stahlbetondecken nach Abbildung 5.6.

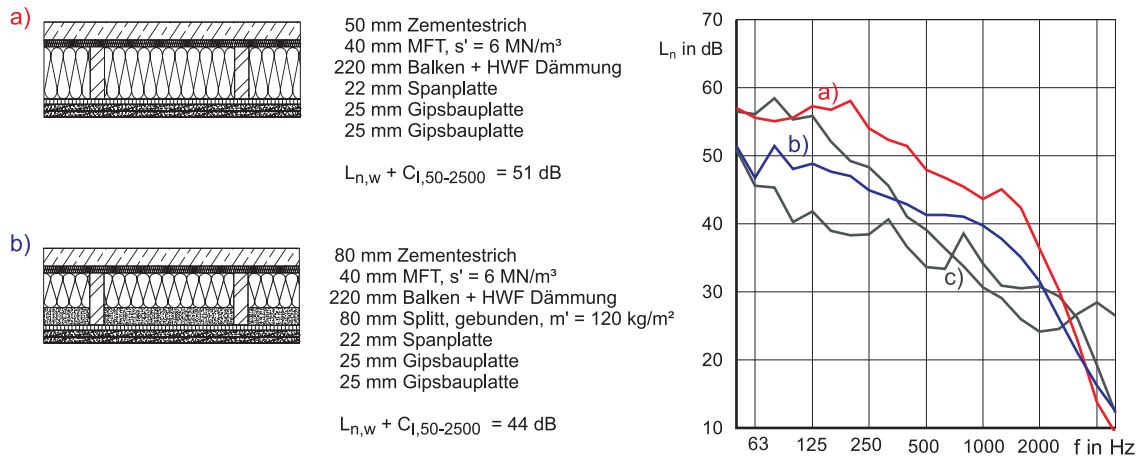


Abbildung 5.14: Messwerte der optimierten Holzbalkendecken im Vergleich mit konventionellen Stahlbetondecken (c)

Die Einzahlwerte ( $L_{n,w} + C_{I,50-2500}$ ) der optimierten Holzbalkendecken liegen im Bereich der in Abschnitt 5.3 definierten Zielwerte und entsprechen in etwa den Werten der Stahlbetondecken. Auch die frequenzabhängigen Norm-Trittschallpegel sind im kritischen tieffrequenten Bereich den Messwerten von Stahlbetondecken sehr ähnlich.

### 5.4.3 Holz-Beton-Verbunddecke

Beim Einsatz in öffentlichen Gebäuden wie Schul-, Verwaltungs- sowie in Bürogebäuden werden häufig große Spannweiten realisiert. Werden in diesen Gebäudetypen Deckenelemente in Holzbauweise eingesetzt, so sind entweder die Querschnitte entsprechend zu erhöhen, oder es sind günstige Materialkombinationen zu wählen.

Nachfolgend wird hierzu eine Ausführung als Holz-Beton-Verbunddecke gezeigt, bei der das Holzelement die Zugkräfte aufnimmt und die Betonschicht die Druckkräfte. Die Schubkräfte zwischen Betonschicht und Holzelement werden durch aufgeleimte Holzklötze übertragen. Die Betonschicht wirkt durch ihre hohe Masse gleichzeitig als Beschwerung der Deckenkonstruktion.

Die statischen Untersuchungen und Auslegungen dieses Deckentyps wurden in einem Projekt der Universität Stuttgart [104] durchgeführt. Für die schalltechnische Optimierung war zu untersuchen, welche Betonstärke ausreichend ist, um die Zielwerte für die tieffrequente Trittschallübertragung zu erreichen. Abbildung 5.15 zeigt hierzu die Messergebnisse der optimierten Deckenkonstruktionen im Vergleich zu konventionellen Stahlbetondecken.

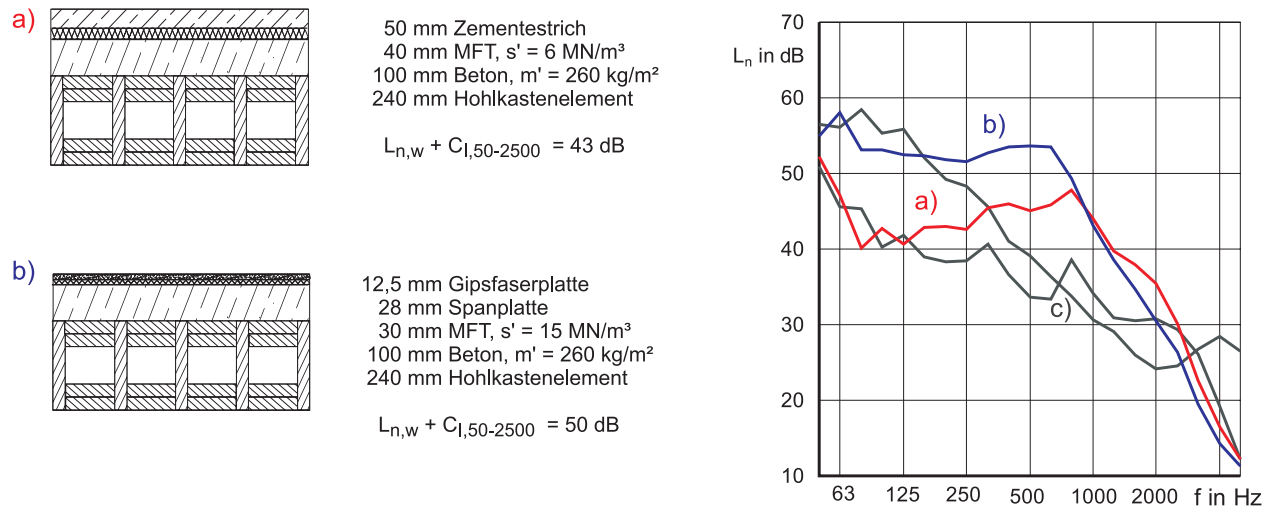


Abbildung 5.15: Messwerte der optimierten Holz-Beton-Verbunddecken im Vergleich mit konventionellen Stahlbetondecken: a) Holz-Beton-Verbunddecken mit Zementestrichaufbau b) Holz-Beton-Verbunddecken mit Trockenestrichaufbau c) Stahlbetondecken nach Abbildung 5.6

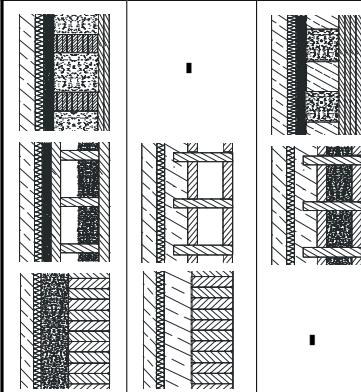
### 5.4.4 Konstruktionshilfen für optimierte Deckenaufbauten

Konstruktionshilfen	Zielwert:	
	$L_{nw} + C_{l,50-2500} \leq 53$ dB Verkehrslast $p < 2,5$ kN/m <sup>2</sup>	$L_{nw} + C_{l,50-2500} \leq 46$ dB Verkehrslast $p < 2,5$ kN/m <sup>2</sup>
	$p < 2,5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 50 mm ZE, m' ≥ 120 ≥ 40 mm TSD, s' ≤ 7 ≥ 60 mm Splitt, m' ≥ 90 oder ≥ 40 mm Betonpl., m' ≥ 100 ≥ 13 mm V20, m' ≥ 7 ≥ 24 mm Dielen, m' ≥ 11 ≥ 200 mm Balken	$p < 5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 80 mm ZE, m' ≥ 190 ≥ 20 mm TSD, s' ≤ 20 ≥ 100 mm Splitt, m' ≥ 150 ≥ 13 mm V20, m' ≥ 7 ≥ 24 mm Dielen, m' ≥ 11 ≥ 200 mm Balken
	$p < 2,5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 25 mm TE, m' ≥ 25 ≥ 12 mm TSD, s' ≤ 40 ≥ 120 mm Splitt, m' ≥ 180 ≥ 13 mm V20, m' ≥ 7 ≥ 24 mm Dielen, m' ≥ 11 ≥ 200 mm Balken	$p < 5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 80 mm ZE, m' ≥ 190 ≥ 20 mm TSD, s' ≤ 20 ≥ 100 mm Splitt, m' ≥ 150 ≥ 13 mm V20, m' ≥ 7 ≥ 24 mm Dielen, m' ≥ 11 ≥ 200 mm Balken
	$p < 2,5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 50 mm ZE, m' ≥ 120 ≥ 40 mm TSD, s' ≤ 7 ≥ 60 mm Splitt, m' ≥ 90 oder ≥ 50 mm Betonpl., m' ≥ 120 ≥ 22 mm V20, m' ≥ 14 ≥ 220 mm Balken + Däm. ≥ 24 mm Lattung ≥ 12,5 mm GKB, m' ≥ 10 ≥ 12,5 mm GKB, m' ≥ 10	$p < 5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 50 mm ZE, m' ≥ 120 ≥ 40 mm TSD, s' ≤ 7 ≥ 60 mm Splitt, m' ≥ 90 ≥ 22 mm V20, m' ≥ 14 ≥ 220 mm Balken + Däm. ≥ 100 mm Abh. + Däm. ≥ 12,5 mm GF, m' ≥ 13 ≥ 12,5 mm GF, m' ≥ 13
	$p < 2,5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 25 mm TE, m' ≥ 25 ≥ 12 mm TSD, s' ≤ 40 ≥ 30 mm Splitt, m' ≥ 45 oder ≥ 50 mm Betonpl., m' ≥ 120 ≥ 22 mm V20, m' ≥ 14 ≥ 220 mm Balken + Däm. ≥ 100 mm Abh. + Däm. ≥ 12,5 mm GF, m' ≥ 13 ≥ 12,5 mm GF, m' ≥ 13	$p < 5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 50 mm ZE, m' ≥ 120 ≥ 20 mm TSD, s' ≤ 20 ≥ 60 mm Splitt, m' ≥ 90 ≥ 22 mm V20, m' ≥ 14 ≥ 220 mm Balken + Däm. ≥ 100 mm Abh. + Däm. ≥ 12,5 mm GF, m' ≥ 13 ≥ 12,5 mm GF, m' ≥ 13
	$p < 2,5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 50 mm ZE, m' ≥ 120 ≥ 40 mm TSD, s' ≤ 7 ≥ 220 mm Balken mit ≥ 220 mm HWF, druckfest ≥ 22 mm V20, m' ≥ 14 ≥ 25 mm GKB, m' ≥ 20 ≥ 25 mm GKB, m' ≥ 20	$p < 5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 80 mm ZE, m' ≥ 120 ≥ 40 mm TSD, s' ≤ 7 ≥ 220 mm Balken mit ≥ 140 mm HWF, druckfest ≥ 80 mm Splitt, geb. ≥ 22 mm V20, m' ≥ 14 ≥ 25 mm GKB, m' ≥ 20 ≥ 25 mm GKB, m' ≥ 20
	$p < 2,5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 50 mm ZE, m' ≥ 120 ≥ 40 mm TSD, s' ≤ 7 ≥ 220 mm Balken mit ≥ 220 mm HWF, druckfest ≥ 22 mm V20, m' ≥ 14 ≥ 25 mm GKB, m' ≥ 20 ≥ 25 mm GKB, m' ≥ 20	$p < 5$ kN/m <sup>2</sup> ≥ 80 mm ZE, m' ≥ 120 ≥ 40 mm TSD, s' ≤ 7 ≥ 220 mm Balken mit ≥ 140 mm HWF, druckfest ≥ 80 mm Splitt, geb. ≥ 22 mm V20, m' ≥ 14 ≥ 25 mm GKB, m' ≥ 20 ≥ 25 mm GKB, m' ≥ 20

ZE: Zement-, Anhydrit-, oder Flieseestrich mit der angegebenen flächenbezogenen Masse m' in kg/m<sup>2</sup>  
 TE: Gipsfaser Trockenestrichelemente, mit der angegebenen flächenbezogenen Masse m' in kg/m<sup>2</sup>  
 TSD: Verlegespanplatten und Massivholzdielen mit der angegebenen flächenbezogenen Masse m' in kg/m<sup>2</sup>  
 V20: Mineralfaser- oder Holzweichfaser Trittschalldämmplatte mit der angegebenen dynamischen Steifigkeit s' in MN/m<sup>3</sup>  
 Splitt: Kalksplitt in Pappwaben, oder gebundener Splitt mit Latexmilch oder Zementemulsion, mit der angegebenen flächenbezogenen Masse m' in kg/m<sup>2</sup>  
 Betonpl.: Betonplatten, auf der Rohdecke verklebt oder im Sandbett verlegt, Kantenhöhe ≤ 0,30 m, mit der angegebenen flächenbezogenen Masse m' in kg/m<sup>2</sup>  
 Balken, Däm.: Balkenlage nach Statik mit Hohlraumdämmung aus Faserdämmstoff, d ≥ 100 mm  
 HWF: Druckfest Holzweichfaser Dämmplatte, Rohdichte ρ ≈ 140 kg/m<sup>3</sup>  
 Lattung: Massivholzlatzen, 24 x 48 mm, geschraubt, geklammert oder genagelt, Achsabstand 417 mm  
 Abh.: Federschielen und Abhänger mit Entkopplung durch Styolmer und Hohlraumdämmung aus Faserdämmstoff, d ≥ 100 mm  
 GF, GKB: Gipsfaserplatten und Gipskartonplatten mit der angegebenen flächenbezogenen Masse m' in kg/m<sup>2</sup>

Abbildung 5.16: Konstruktionsparameter für Holzbalkendecken



Konstruktionshilfen	Zielwert:			
	$L_{nw} + C_{i,150-2500} \leq 53$ dB		$L_{nw} + C_{i,150-2500} \leq 46$ dB	
	Verkehrslast $p < 2,5$ kN/m <sup>2</sup>		Verkehrslast $p < 5$ kN/m <sup>2</sup>	
	$\geq 50$ mm ZE, $m' \geq 120$ $\geq 40$ mm TSD, $s' \leq 7$ $\geq 60$ mm Splitt, $m' \geq 90$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	$\geq 25$ mm TE, $m' \geq 25$ $\geq 12$ mm TSD, $s' \leq 40$ $\geq 120$ mm Splitt, $m' \geq 180$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	$\geq 80$ mm ZE, $m' \geq 190$ $\geq 20$ mm TSD, $s' \leq 20$ $\geq 120$ mm Splitt, $m' \geq 180$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	$\geq 50$ mm ZE, $m' \geq 120$ $\geq 40$ mm TSD, $s' \leq 7$ $\geq 120$ mm Beton, $m' \geq 180$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$
	$\geq 50$ mm ZE, $m' \geq 120$ $\geq 40$ mm TSD, $s' \leq 7$ $\geq 70$ mm Beton, $m' \geq 170$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	$\geq 12$ mm TE, $m' \geq 13$ $\geq 28$ mm V20, $m' \geq 16$ $\geq 30$ mm TSD, $s' \leq 15$ $\geq 120$ mm Beton, $m' \geq 290$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	$\geq 80$ mm ZE, $m' \geq 190$ $\geq 30$ mm TSD, $s' \leq 15$ $\geq 120$ mm Beton, $m' \geq 290$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	$\geq 50$ mm ZE, $m' \geq 120$ $\geq 40$ mm TSD, $s' \leq 7$ $\geq 120$ mm Beton, $m' \geq 290$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$
$\geq 50$ mm ZE, $m' \geq 120$ $\geq 40$ mm TSD, $s' \leq 7$ $\geq 70$ mm Beton, $m' \geq 170$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	$\geq 25$ mm TE, $m' \geq 25$ $\geq 12$ mm TSD, $s' \leq 40$ $\geq 70$ mm Beton, $m' \geq 170$ $\geq 100$ mm Splitt, $m' \geq 150$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	$\geq 50$ mm ZE, $m' \geq 120$ $\geq 20$ mm TSD, $s' \leq 20$ $\geq 70$ mm Beton, $m' \geq 170$ $\geq 100$ mm Splitt, $m' \geq 150$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	$\geq 50$ mm ZE, $m' \geq 120$ $\geq 40$ mm TSD, $s' \leq 7$ $\geq 70$ mm Beton, $m' \geq 170$ $\geq 100$ mm Splitt, $m' \geq 150$ $\geq 150$ mm MHD, $m' \geq 50$	

ZE: Zement-, Anhydrit-, oder Fliesenstrich mit der angegebenen flächenbezogenen Masse  $m'$  in kg/m<sup>2</sup>  
 TE: Gipsfaser Trockenstrichelemente, mit der angegebenen flächenbezogenen Masse  $m'$  in kg/m<sup>2</sup>  
 V20: Verlegespanplatten, mit der angegebenen flächenbezogenen Masse  $m'$  in kg/m<sup>2</sup>  
 TSD: Mineralfaser- oder Holzweichfaser Trittschalldämmplatte mit der angegebenen dynamischen Steifigkeit  $s'$  in MN/m<sup>3</sup>  
 Splitt: Kalksplitt in Pappwaben, oder gebundener Splitt mit Latexmilch, oder Zementemulsion, mit der angegebenen flächenbezogenen Masse  $m'$  in kg/m<sup>2</sup>  
 Beton: Holzbetonverbund, mit der angegebenen flächenbezogenen Masse  $m'$  in kg/m<sup>2</sup>  
 MHD: Brettstapel-, Brettschichtholz-, Brettsperrholz-, Hohlkasten- oder Leimprofilholzdecken, mit der angegebenen flächenbezogenen Masse  $m'$  in kg/m<sup>2</sup>, Elementhöhe nach Statik

Abbildung 5.17: Konstruktionsparameter für Massivholzdecken und Hohlkastendecken



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Die primäre Zielsetzung des Forschungsprojekts lag in der *Entwicklung konstruktiver Maßnahmen zur Verbesserung der tieffrequenten Trittschalldämmung* von Holzdecken. Zur Entwicklung dieser Maßnahmen war zunächst durch die *Klärung der akustischen Wechselwirkungen zwischen Deckenauflage und Rohdecke* ein besseres Verständnis für das Schwingungsverhalten der Deckenaufbauten zu erarbeiten. Um den erheblichen Aufwand einer rein empirischen (messtechnischen) Untersuchung dieser Wechselwirkungen zu reduzieren, wurde die *Bereitstellung leistungsfähiger Berechnungsmodelle* angestrebt.

Im Teilprojekt der Technischen Universität München wurde hierzu ein *Berechnungsmodell* auf Basis der Finiten Elemente Methode erarbeitet. Die *Validierung* des Berechnungsmodells erfolgte anhand von Messergebnissen aus der Datenbank des ift Schallschutzzentrums, Rosenheim. Zur *Visualisierung* der Ergebnisse und einer rationellen Modellerstellung wurde eine graphische Nutzeroberfläche entwickelt.

Anhand der numerischen Berechnungen des validierten Modells wurden die *Wechselwirkungen* der Deckenkomponenten untersucht und *optimierte Konstruktionen* erarbeitet. Nach der messtechnischen Überprüfung der optimierten Konstruktionen im ift Schallschutzzentrum konnten die Ergebnisse in Form von Konstruktionshilfen für optimierte Aufbauten zusammengestellt werden.

Nachfolgend werden die Ergebnisse der zuvor genannten Arbeitsschwerpunkte zusammengefasst und mit einem *Ausblick* auf mögliche, weiterführende Untersuchungsschwerpunkte abgeschlossen.

### *Berechnungsmodell*

Für das Berechnungsmodell wurde zunächst die Anregung der Decke durch das Norm-Hammerwerk modelliert. Hierzu war die Interaktion zwischen der leichten Decke und den aufprallenden Stahlzylindern des Hammerwerks zu berücksichtigen. Verschiedene Modelle für die Anregung im Zeit- und Frequenzbereich wurden der Literatur entnommen und weiterentwickelt. Die für die Spektralanalyse benötigte Schwingungsschnelle der Decke konnte mit dem erarbeiteten Modell direkt aus der Anregungskraft und der resultierenden

Schwingungsschnelle an der Anregungsstelle ermittelt werden. Die berechnete Anregungskraft des Hammerwerks wurde mit Messergebnissen verglichen.

Für die Modellierung der Struktur wurden dreidimensionale Hexaederelemente verwendet, die eine realitätsnahe Abbildung der in der Baupraxis üblichen Deckenkonstruktionen erlauben. Hierdurch war es möglich, die Verbindung zwischen den einzelnen Bauteilen, wie z.B. die Verschraubung der Rohdeckenbeplankung auf der Balkenlage, in unterschiedlicher Weise zu modellieren und durch den Vergleich der berechneten Eigenwerte mit Messwerten die geeignetste Modellierung auszuwählen. Für die Berechnung der Eigenwerte wurde das Lehrstuhleigene FEM-Programm *AdhoC* verwendet, das durch variable Polynomgrade der Ansatzfunktionen (p-Version der FEM) eine effiziente Berechnung dünnwandiger Strukturen erlaubt. Die Anisotropie der Materialkennwerte wurde durch ein orthotropes Materialgesetz berücksichtigt.

Die Modellierung der Dämpfung erfolgte durch die Aufspaltung der Strukturdämpfung in ihre einzelnen Anteile. Diese Anteile der Dämpfung konnten in Form von Verlustfaktoren anhand von Berechnungsmodellen aus der Literatur ermittelt werden. Die Modelle wurden z.T. erweitert und an die gegebene Situation angepasst. Eine Überprüfung des Gesamtmodells der Dämpfung erfolgte wiederum durch den Abgleich der Berechnungsergebnisse mit Messergebnissen des Gesamtverlustfaktors unterschiedlicher Holzdecken.

Die Abstrahlung der Körperschallschwingungen in den darunter liegenden Raum wurde durch ein modales und ein integrales Modell berücksichtigt. Beide Modelle beinhalten eine sogenannte schwache Kopplung zwischen dem Bauteil und dem anschließenden Raum. Die Rückkopplung des Raumes an die Decke konnte bei der gegebenen Anwendung vernachlässigt werden.

### *Validierung*

Zur Validierung des Berechnungsmodells wurden 25 verschiedene Deckenaufbauten aus der Datenbank des ift Schallschutzzentrums ausgewählt und die berechneten Norm-Trittschallpegel den Messwerten der Deckenaufbauten gegenübergestellt. Der Vergleich erfolgte sowohl frequenzabhängig als auch für den Einzahlwert. Die Abweichung zwischen Messung und Berechnung (Mittelwerte) liegen geringfügig über den für die Messung zu erwartenden Unsicherheiten. Die Standardabweichung für den Einzahlwert betrug 1,5 dB bei einer mittleren Abweichung von 0 dB.

### *Visualisierung*

Zur Visualisierung der Berechnungsergebnisse im Post-processing und einer nutzerfreundlichen Modelleingabe im Pre-processing standen zwei alternative Möglichkeiten zur Verfügung. Entweder die direkte Übernahme der Geometriedaten aus einem CAD Modell, oder die parametrische Eingabe der Struktur in eine graphische Nutzeroberfläche mit anschließender Visualisierung der Ergebnisse im selben Programm. Für die Umsetzung der Aufgabenstellung wurde die Realisierung einer graphischen Nutzeroberfläche gewählt, die eine einfache

---

Parametervariation für die Optimierung erlaubt.

### *Numerische Untersuchung der Wechselwirkung*

Bei den numerischen Untersuchungen wurde zunächst der Einfluss bauüblicher Schwankungen der Materialparameter auf die Trittschallübertragung am Beispiel einer Massivholzdecke untersucht. Die darauffolgenden numerischen Untersuchungen der Wechselwirkung zwischen Rohdecke und Estrichaufbau ergaben Erkenntnisse, die für die anschließende Optimierung der Deckenaufbauten verwendet werden konnten. Bei der Simulation von Trockenestrichaufbauten zeigte sich im Vergleich zu Messergebnissen ein bisher nicht berücksichtigtes Dämpfungsverhalten, das in weiterführenden Arbeiten in das Berechnungsmodell eingearbeitet - und ggf. für die weitere Optimierung von Deckenkonstruktionen mit Trockenestrichaufbauten genutzt werden kann.

### *Optimierung*

Auf Basis der numerischen Untersuchungen wurden durch Parametervariationen Demonstratoren für optimierte Deckenaufbauten entwickelt, die den zuvor definierten Zielwerten für eine reduzierte Trittschallübertragung bei tiefen Frequenzen entsprechen. Diese Aufbauten wurden messtechnisch überprüft und mit den Trittschallpegeln konventioneller Stahlbetondecken verglichen. Die optimierten Konstruktionen wurden zusammen mit den Ergebnissen einer Datenbankauswertung am ift Schallschutzzentrum zu Konstruktionshilfen für die praktische Ausführung zusammengefasst.

### *Ausblick*

Bei der Durchführung des Projektes haben sich für weiterführende Arbeiten folgende mögliche Arbeitsschwerpunkte herausgebildet:

- Nähere Untersuchung der Ausbreitungsdämpfung bei Trockenestrichen und ggf. Berücksichtigung im Berechnungsmodell und der Optimierung
- Modellierung der Anregungskraft einer gehenden Person und direkte Berechnung der daraus resultierenden Trittschallübertragung
- Umsetzung des Berechnungsmodells und der graphischen Nutzeroberfläche in ein selbständiges Optimierungsprogramm
- Nutzung des Berechnungsmodells für den Schwingungsnachweis.



# Literaturverzeichnis

- [1] GÖSELE, K.: Verfahren zur Vorausbestimmung des Trittschallschutzes von Holzbalkendecken. In: *Holz als Roh- und Werkstoff* 37 (1979), S. 213 – 220
- [2] HOLTZ, F. ; RABOLD, A. ; BUSCHBACHER, H. P. ; HESSINGER, J.: Optimierung der Trittschalleigenschaften von Holzbalkendecken zum Einsatz im mehrgeschossigen Holzhausbau. In: *DGfH-Forschungsbericht des Labor für Schall- und Wärmemesstechnik, Stephanskirchen* (1999)
- [3] HOLTZ, F. ; HESSINGER, J. ; BUSCHBACHER, H.-P. ; RABOLD, A.: Informationsdienst Holz - Schalldämmende Holzbalken- und Brettstapeldecken. In: *Holzbau Handbuch* Reihe 3, Teil 3, Folge 3 (1999)
- [4] HOLTZ, F. ; RABOLD, A. ; BUSCHBACHER, H.P. ; HESSINGER, J.: Entwicklung eines anwenderbezogenen Berechnungsverfahrens zur Prognose der Schalldämmung von Holzdecken am Bau. In: *DGfH-Forschungsbericht des Labor für Schall- und Wärmemesstechnik, Stephanskirchen* (2004)
- [5] HOLTZ, F. ; RABOLD, A. ; BUSCHBACHER, H.P. ; HESSINGER, J.: Verringerung der Schallabstrahlung von Holzständerwänden bei Trittschallanregung im mehrgeschossigen Holz-Wohnungsbau. In: *DGfH-Forschungsbericht des Labor für Schall- und Wärmemesstechnik, Stephanskirchen* (2003)
- [6] RABOLD, A.: Schallschutz – Theorie und Praxis am Beispiel MFH Ottostraße, D – Ottobrunn. In: *Tagungsband, Internationales Holzbau-Forum Garmisch Partenkirchen* (2005)
- [7] HOLTZ, F. ; RABOLD, A.: DIN 4109 Schallschutz im Hochbau– Teilartikel: Bauteilkatalog für Holzdecken. In: *Mikado plus* 4 (2005)
- [8] BLAZIER, W. E. J. ; DUPREE, R. B.: Investigation of low-frequency footfall noise in wood-frame, multifamily building construction. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 96 (1994), S. 1521 – 1532
- [9] HVEEM, S. et a.: Low-frequency footfall noise in multi-storey timber frame buildings / Nordic Committee and Work Reports. 1996. – Forschungsbericht
- [10] HOLTZ, F. ; RABOLD, A. ; BUSCHBACHER, H.P. ; HESSINGER, J.: Schalltechnische Optimierung des Holzbaus durch Verbesserung der Wandkonstruktionen. In: *DGfH-Forschungsbericht des Labor für Schall- und Wärmemesstechnik, Stephanskirchen* (2004)

- [11] DÜSTER, A. ; BRÖKER, H. ; HEIDKAMP, H. ; HEISSERER, U. ; KOLLMANNBERGER, S. ; KRAUSE, R. ; MUTHLER, A. ; NIGGL, A. ; NÜBEL, V. ; RÜCKER, M. ; SCHOLZ, D.: *AdhoC<sup>4</sup> – User’s Guide*. Lehrstuhl für Bauinformatik, Technische Universität München, 2004
- [12] RABOLD, A. ; RANK, E.: Anwendung der Finiten Elemente Methode auf die Trittschallberechnung, Teilbericht zum Forschungsvorhaben: Untersuchung der akustischen Wechselwirkungen von Holzdecken und Deckenauflage zur Entwicklung neuartiger Schallschutzmaßnahmen / Lehrstuhl für Computation in Engineering , TU München. 2009. – Forschungsbericht
- [13] RABOLD, A. ; HESSINGER, J. ; BACHER, S.: Untersuchung der akustischen Wechselwirkungen von Holzdecke und Deckenauflage zur Entwicklung neuartiger Schallschutzmaßnahmen. In: *Teilbericht ift Schallschutzzentrum* (2009)
- [14] MÜLLER, G. ; MÖSER, M.: *Kapitel Grundlagen in: Taschenbuch der Technischen Akustik*. Springer Verlag, 2004
- [15] CREMER, L. ; MÜLLER, H.A.: *Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik, Band II, Teil 4: Wellentheoretische Raumakustik*. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1976
- [16] CREMER, L. ; HECKL, M.: *Körperschall: Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996
- [17] RAND, O. ; ROVENSKY, V.: *Analytical Methods in Anisotropic Elasticity*. Birkhäuser, 2006
- [18] IHLENBURG, F.: *Finite elemente analysis of acoustic scattering*. Springer Verlag, 1998
- [19] ATALLA, N. ; BERNHARD, R.J.: Review of numerical solutions for low-frequency structural-acoustic problems. In: *Applied Acoustics* 43 (1994), S. 271 – 294
- [20] CHAMPOUX, Y. ; ALLARD, J.-F.: Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. In: *Journal of Applied Physics* 70 (1991), S. 1975–1979
- [21] ZIENKIEWICZ, O. C.: *Methode der finiten Elemente*. Hanser, München, Wien, 1984
- [22] RITZ, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. In: *J. Reine Angew. Math.* 135 (1909), S. 1–61
- [23] PETYT, M.: *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press, 1990
- [24] GALERKIN, B. G.: Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates (Russian). In: *Vestn. Inzh. Tech.* 19 (1915), S. 897–908
- [25] SCHWARZ, H.R.: *Methode der finiten Elemente*. Stuttgart: Teubner, 1991
- [26] SZABÓ, B.A. ; BABUŠKA, I.: *Finite element analysis*. John Wiley & Sons, 1991



- [27] DÜSTER, A. ; BRÖKER, H. ; RANK, E.: The p-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52 (2001), S. 673–703
- [28] DÜSTER, A.: High order FEM. In: *Lecture notes, Lehrstuhl für Bauinformatik, Technische Universität München, Germany* (2005)
- [29] HUGHES, T.J.R.: *The finite element method*. Dover Publications, 2000. – ISBN 0–486–41181–8
- [30] BATHE, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, 2002. – ISBN 3–540–66806–3
- [31] RANK, E. ; BRÖKER, H. ; DÜSTER, A. ; KRAUSE, R. ; RÜCKER, M.: The p-version of the finite element method for structural problems. In: STEIN, E. (Hrsg.): *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, 2002, Kapitel 8, S. 263–307
- [32] SZABÓ, B.A. ; DÜSTER, A. ; RANK, E.: *The p-version of the finite element method*. In E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes, editors: *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, 2003
- [33] RANK, E. ; DÜSTER, A. ; NÜBEL, V. ; PREUSCH, K. ; BRUHNS, O.T.: High order finite elements for shells. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), S. 2494–2512
- [34] GORDON, W.J. ; HALL, Ch.A.: Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7 (1973), S. 461–477
- [35] GORDON, W.J. ; HALL, Ch.A.: Transfinite element methods: Blending function interpolation over arbitrary curved element domains. In: *Numerische Mathematik* 21 (1973), S. 109–129
- [36] KIRÁLYFALVI, G. ; SZABÓ, B.A.: Quasi-regional mapping for the p-version of the finite element method. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 27 (1997), S. 85–97
- [37] BRÖKER, H.: *Integration von geometrischer Modellierung und Berechnung nach der p-Version der FEM*, Lehrstuhl für Bauinformatik, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Technische Universität München, Diss., 2001
- [38] CHEN, Q. ; BABUŠKA, I.: Approximate optimal points for polynomial interpolation of real functions in an interval and in a triangle. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 128 (1995), S. 405–417
- [39] DEMKOWICZ, L.: *Finite Element Methods for Maxwell Equations*. In E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes, editors: *Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, 2004

- [40] SCHOLZ, D.: *An anisotropic p-adaptive method for linear elastostatic and elastodynamic analysis of thin walled and massive structures*, Lehrstuhl für Bauinformatik, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Technische Universität München, Diss., 2006
- [41] LU, P. Y. ; EVERSTINE, C. G.: More on Finite Element Modelling of Damped Composite Systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 69 (1980), S. 199–205
- [42] JOHNSON, C.D. ; KIENHOLZ, D.A.: Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers. In: *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 20 (1982), S. 1284–1290
- [43] EVERSTINE, C. G.: Dynamic Response Prediction for Structures with Frequency Depend Damping Treatments. In: *22nd Annual Meeting, Society of Engineering Science*, 1985
- [44] ACKERMANN, L.: *Simulation der Schalltransmission durch Wände*, Institut für angewandte Mechanik, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2002
- [45] LANGER, S.: *Schalltransmission durch Isolierverglasung*, Dissertation, Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr.41, Diss., 2001
- [46] RABOLD, A.: *Vorbereitende Arbeiten zur Berechnung der Trittschalldämmung von Holzbalkendecken anhand der Finiten Elemente Methode*. Technische Universität München, Lehrstuhl für Bauinformatik, 2004
- [47] MARQUES, Osni: *BLZPACK user's guide, a standard Fortran 77 implementation of the block Lanczos algorithm*. <http://crd.lbl.gov/osni/>
- [48] ASHCRAFT, C. ; GRIMES, R. ; LIU, J. ; PATTERSON, J. ; PIERCE, D. ; Y., Pierce ; SCHATZ, P. ; SCHULZE, J. ; TANG, P. W. ; WAH, D. ; WU, J.: *The reference manual for SPOOLES, release 2.2: An object oriented software library for solving sparse linear systems of equations*. Mathematics and Engineering Analysis Unit of Boeing Phantom Works, <http://www.netlib.org/linalg/spooles/spooles.2.2.html>
- [49] KOLLMANN, G. F.: *Maschinenakustik, Grundlagen, Messtechnik, Berechnung, Beeinflussung*. Springer Verlag Berlin, 2000
- [50] *DIN EN ISO 140-6 Akustik - Messung der Schalldämmung in Gebäuden und von Bauteilen - Teil 6: Messung der Trittschalldämmung von Decken in Prüfständen (ISO 140-6:1998); Deutsche Fassung EN ISO 140-6:1998*. 1998-12
- [51] VÉR, L. I.: Impact Noise Isolation of Composite Floors. In: *The journal of the Acoustic Society of America* 50 (1971), S. 1043–1050
- [52] SCHOLL, W. ; MAYSENHÖLDER, W.: Impact sound insulation of timber floors: Interaction between source, floor coverings and bearing floor. In: *Journal of Building Acoustics* 6 (1999), S. 43–61
- [53] BRUNSKOG, J. ; HAMMER, P.: The interaction between the ISO tapping machine and lightweight floors. In: *Acta Acustica - Acustica* 89 (2003), S. 296 – 308

- [54] RABOLD, A. ; DÜSTER, A. ; RANK, E.: Anwendung der Finiten Elemente Methode auf die Trittschallberechnung von Holzdecken. In: *Tagungsband DAGA*, 2007
- [55] IRRETIER, H.: *Grundlagen der Schwingungstechnik*. Vieweg und Sohn, 2001
- [56] RAYLEIGH, Lord: *The Theorie of Sound, vol. I*. New York:Dover, 1945
- [57] SCHMITZ, A. ; MEIER, A.: *Messanleitung zur Bestimmung des Verlustfaktors*. Physikalisch Technische Bundesanstalt, 10 1998
- [58] NUSSER, B. ; MEISTRING, P. ; SCHANDA, U.: Innere Verlustfaktoren ausgewählter Leichtbauwerkstoffe und ihre Ermittlung. In: *Tagungsband DAGA'07, Stuttgart*, 2007
- [59] WALLER, H. ; SCHMIDT, R.: *Schwingungslehre für Ingenieure*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989
- [60] *DIN EN 12354-1 Berechnung der akustischen Eigenschaften von Gebäuden aus den Bauteileigenschaften, Teil 1: Luftschalldämmung zwischen Räumen, Deutsche Fassung EN 12354-1:2000*. 2000
- [61] PETYT, M. ; LIM, S. P.: Finite element analysis of the noise inside a mechanically excited cylinder. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 13 (1978), S. 109–122
- [62] GÖRANSSON, P.: Acoustic Finite Element Formulation of a flexible porous material - a correction for inertial effects. In: *Journal of Sound and Vibration* 185 (1995), S. 559–580
- [63] DHAINAUT, M.: *Finite element procedures for fluid-structure interactions in acoustics*, University of Science and Technology Trondheim, Diss., 1996
- [64] MALUSKI, S. ; GIBBS, B.M.: Application of a finite-element model to low-frequency sound insulation in dwellings. In: *Journal of the Acoustic Society of America* 108 (2000), S. 1741–1751
- [65] DAVIDSSON, P.: *Structure-acoustic analysis; finite element modelling and reduction methods*, Division of Structural Mechanics, Lund University, Sweden, Diss., 2004
- [66] SANDBERG, G. ; GÖRANSSON, P.: A symmetric finite element formulation for fluid-structure interaction analysis. In: *Journal of Sound and Vibration* 123 (1988), S. 507–515
- [67] JEON, Y. J. ; JEONG, J. H.: Objective and Subjective Evaluation of Floor Impact Noise. In: *Journal of Temporal Design in Architecture and the Environment* 2 (2002), S. 20–28
- [68] EVERSTINE, C. G.: Coupled finite element / boundary approach for fluid-structure interaction. In: *The journal of the Acoustical Society of America* 87 (1990), S. 1938–1947
- [69] EVERSTINE, C. G.: Finite Element Formulations of Structural Acoustic Problems. In: *Computers and Structures* 65 (1997), S. 307 – 321

- [70] MC CULLOCH, C. ; ESTORFF, O.V.: Zur effektiven numerischen Modellierung des Schalldurchgangs durch Strukturen. In: *Fortschritte der Akustik, DAGA 2000* (2000), S. 718–719
- [71] COYETTE, J.P.: The use of finite-element and boundary-element models for predicting the vibro-acoustic behaviour of layered structures. In: *Advances in Engineering Software* 30 (1999), S. 133–139
- [72] BRECK, E.: *Numerische Simulation der Strukturschwingungen und der Schallabstrahlung von Radmodellen*, Technischen Fachhochschule Berlin, Diplomarbeit, 2002
- [73] WU, T.W. ; DANDAPANI, A.: A boundary element solution for sound transmission through thin panels. In: *Journal of Sound and Vibration* 171 (1994), S. 145–157
- [74] JUNGER, M.C. ; FEIT, D.: *Sound, structures and their interaction*. MIT Press, Cambridge, 1972
- [75] PANNETON, R. ; ATALLA, N.: Numerical prediction of sound transmission through finite multilayer systems with poroelastic materials. In: *Journal of the Acoustic Society of America* 100 (1996), S. 346–354
- [76] PEIFFER, A.: Zeitoptimierte Berechnung des Schalldurchgangs durch Wandstrukturen mittels FEM. In: *Tagungsband DAGA 2005* (2005), S. 135–136
- [77] HÜBNER, G. ; MESSNER, J. ; MEYNERTS, E.: Schallabstrahlungsberechnung mit der direkten Finite Elemente Methode. In: *Forschungsbericht der Universität Stuttgart Bericht Nr. 479* (1986)
- [78] HÜBNER, G. ; GERLACH, A.: Zusammenhang der DFEM-Schalleistungsbeschreibung mit der Rayleighschen Schallfelddarstellung ebener Strahler. In: *Tagungsband DAGA '98* (1998), S. 682–683
- [79] GÖSELE, K.: Schallabstrahlung von Platten, die zu Biegeschwingungen angeregt werden. In: *Acustica* 3 (1953), S. 243–248
- [80] HECKL, M.: Schallabstrahlung von Platten bei punktförmiger Anregung. In: *Mitteilung aus dem Institut für Technische Akustik der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg* (1959)
- [81] HECKL, M.: Untersuchungen an orthotropen Platten. In: *Mitteilung aus dem Institut für Technische Akustik der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg* (1960)
- [82] MAIDANIK, G.: Response of ribbed panels to reverberant acoustic fields. In: *The journal of the Acoustical Society of America* 34 (1962), S. 809–826
- [83] TIMMEL, R.: Der Abstrahlgrad rechteckiger, dünner, homogener Platten in der unendlich großen Schallwand. In: *Acustica* 73 (1991), S. 3–11
- [84] CEDERFELDT, L.: On the use of finite element method on some acoustical problems. In: *Swedish Council for Building Research, Stockholm* (1979)

- [85] GAUL, M. & Wagner M. L. & Kögl K. L. & Kögl: *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Spriner-Verlag, 2003
- [86] SEWELL, E.C.: Transmission of reverberant sound through a single-leaf partition surrounded by an infinite rigid baffle. In: *Journal of Sound and Vibration* 12 (1970), S. 21–32
- [87] *Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics, The American Society of Mechanical Engineers*. 2006
- [88] BABUŠKA, I. ; ODEN, T.: V & V in computational engineering and science. Part I: Basic Concepts. In: *ICES Report 03-52, Institute for Computational Engineering and Sciences (ICES), The University of Texas at Austin* (2003)
- [89] HEISSERER, U.: *High order finite elements for material and geometric nonlinear finite strain problems*, Technische Universität München, Diss., 2007
- [90] COTTRELL, J.A. ; REALI, A. ; BAZILEVS, Y. ; HUGHES, T.: Isogeometric analysis of structural vibrations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 5257–5296
- [91] BRUNSKOG, J. ; HAMMER, P.: Prediction model for the impact sound level of lightweight floors. In: *Acta Acustica - Acustica* 89 (2003), S. 309 – 322
- [92] WANG, J. ; LU, T. J. ; WOODHOUSE, J. ; LANGLEY, R. S. ; EVANS, J.: Sound transmission through lightweight double-leaf partitions: theoretical modelling. In: *Journal of Sound and Vibration* 286 (2005), S. 817–847
- [93] FOX, C. ; CHUNG, H. ; EMMS, G. ; MCGUNNIGLE, K.: Calibrated modelling of low-frequency vibration in light weight timber floors,. In: *Proc. Internoise* (2006)
- [94] *DIN EN 338, Bauholz für tragende Zwecke, Festigkeitsklassen*. 2003
- [95] UNGAR, E.E. ; KERWIN, E.M.: Loss Factors of Viscoelastic Systems in Terms of Energy Concepts. In: *Journal of Acoustic Society of America* 34 (1962), S. 954–957
- [96] MÜLLER, H.W. ; LANGER, W. ; RICHTER, H.P. ; STORM, R.: Praxisreport Maschinenakustik, Forschungskuratorium Maschinenbau e.V., Frankfurt am Main. In: *FKM Forschungsheft* 102 (1983)
- [97] *DIN EN ISO 717-2 , Akustik - Bewertung der Schalldämmung in Gebäuden und von Bauteilen - Teil 2: Trittschalldämmung (ISO 717-2:1996 + AM1:2006); Deutsche Fassung EN ISO 717-2:1996 + A1:2006*. 2006
- [98] *DIN EN 20140-2, Akustik; Messung der Schalldämmung in Gebäuden und von Bauteilen; Teil 2: Angaben von Genauigkeitsanforderungen (ISO 140-2:1991); Deutsche Fassung EN 20140-2:1993*. 1993
- [99] BURKHART, C.: Tieffrequenter Trittschall – Messergebnisse, mögliche Ursachen. In: *Tagungsband DAGA* (2002)

- 
- [100] DIN 4109, *Schallschutz im Hochbau, Anforderungen und Nachweise, Ausgabe November 1989*
- [101] WARNOCK, A.C.C.: Low-frequency impact sound transmission through floor systems. In: *InterNoise* (2000)
- [102] SCHOLL, W.: Das Normhammerwerk muss laufen lernen. In: *Tagungsband DAGA* (2001)
- [103] RASMUSSEN, B. ; RINDEL, J. H.: Sound insulation of dwellings – Legal requirements in Europe and subjective evaluation of acoustical comfort. In: *Proceedings of DAGA* (2003), S. 118–121
- [104] KÜHN, B. ; BLICKLE, R.: Trittschalldämmung und Gehgeräusche-Immission von Geschossdecken aus Holz. In: *WKSB* 52 (2004)
- [105] LANG, J.: Schallschutz im Wohnungsbau. In: *Forschungsbericht ifip TU Wien* (2006)
- [106] WEEBER, R. et a.: Schallschutz in Mehrfamilienhäusern aus der Sicht der Bewohner. In: *F 2049, IRB Verlag, Stuttgart* (1986)
- [107] SCHOLL, W. ; KRAISS, S.: Wie Holzbalkendecken schwingen. In: *Fraunhofer Institut für Bauphysik, IBP Mitteilung* 282 (1995)
- [108] GÖSELE, K.: Verbesserung des Schallschutzes von Holzbauteilen durch Schwingungstilger („akustische Bluteigel“). In: *Bauphysik* 24 (2002), S. 93–101

# Anhang A

## Berechnungen zur Validierung

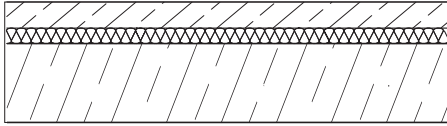


## A.1 Materialdaten

Materialbezeichnung	Kürzel	Elastizitätsmodul			Schubmodul			Querkontraktionszahl $\mu$	Dichte $\rho$ in $\text{kg/m}^3$	Materialverlustfaktor $\eta$
		$E_x$ in $\text{MN/m}^2$	$E_y$ in $\text{MN/m}^2$	$E_z$ in $\text{MN/m}^2$	$G_x$ in $\text{MN/m}^2$	$G_y$ in $\text{MN/m}^2$	$G_z$ in $\text{MN/m}^2$			
Fichte	FI	12 000	400	400	500	500	500	0,25	450	0,010
Kerto Furnierschichtholz	Kerto	10 000	1 000	1 000	500	500	500	0,25	480	0,010
Verlegespanplatte	V20	3 600	3 600	3 600	1 000	140	140	0,30	680	0,010
Zementestrich	ZE	20 000	20 000	15 000	8 300	8 300	8 300	0,20	2 400	0,006
Stahlbeton	Stahlbeton	20 000	20 000	20 000	12 300	12 300	12 300	0,20	2 500	0,006
Gipskartonplatte	GKB	2 400	2 400	2 400	900	900	900	0,30	800	0,010
Gipsfaserplatte	GF	3 300	3 300	3 300	1 300	1 300	1 300	0,30	1 150	0,010
MF-Trittschalldämmplatte	40MFT_SD6	0,15	0,15	0,15	0,06	0,06	0,06	0,20	50	0,080
MF-Trittschalldämmplatte	35MFT_SD7	0,15	0,15	0,15	0,06	0,06	0,06	0,20	50	0,080
MF-Trittschalldämmplatte	35MFT_SD10	0,35	0,35	0,35	0,15	0,15	0,15	0,20	50	0,080
MF-Trittschalldämmplatte	30MFT_SD15	0,45	0,45	0,45	0,19	0,19	0,19	0,20	50	0,100
MF-Trittschalldämmplatte	20MFT_SD20	0,40	0,40	0,40	0,16	0,16	0,16	0,20	50	0,100
MF-Trittschalldämmplatte	20MFT_SD40	0,80	0,80	0,80	0,33	0,33	0,33	0,20	50	0,100
HWF- Trittschalldämmplatte	20HFT_SD30	0,60	0,60	0,60	0,25	0,25	0,25	0,20	140	0,100
PS-Trittschalldämmplatte	20PST_SD20	0,44	0,44	0,44	0,16	0,16	0,16	0,20	30	0,080
Polyurethan Lager	Sylomer TSSA	0,85	0,85	0,85	0,35	0,35	0,35	0,20	400	0,200
Kalksplittschüttung	Splitt	10	10	10	0,06	0,06	0,06	0,20	1 500	0,080
Hohlraumdämmung	Daemmung	0,1	0,1	0,1	0,04	0,04	0,04	0,25	10	0,100
HWF Hohlraumdämmung	HWF	2,40	2,40	2,40	1,00	1,00	1,00	0,20	160	0,080



## A.2 Aufbauten und Ergebnisse



50 mm Zementestrich  
40 mm MFT,  $s' = 6 \text{ MN/m}^3$   
160 mm Stahlbeton

Frequenz f in Hz	Berechnung $L_n$ in dB	Messung $L_n$ in dB
31,5	50,9	
40	59,3	
50	49,6	50,9
63	45,7	45,6
80	45,3	45,3
100	41,6	40,3
125	40,2	41,8
160	38,9	38,9
200	39,0	38,3
250	37,1	38,5
315		40,6
400		36,6
500		33,7
630		33,4
800		38,6
1000		34,1
1250		30,9
1600		30,5
2000		30,8
2500		29,4
3150		26,1
4000		19,2
5000		12,2

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 38,2 \text{ dB}$   
Messung:  $L_{n,w} + C_{l,50-2500} = 39,4 \text{ dB}$

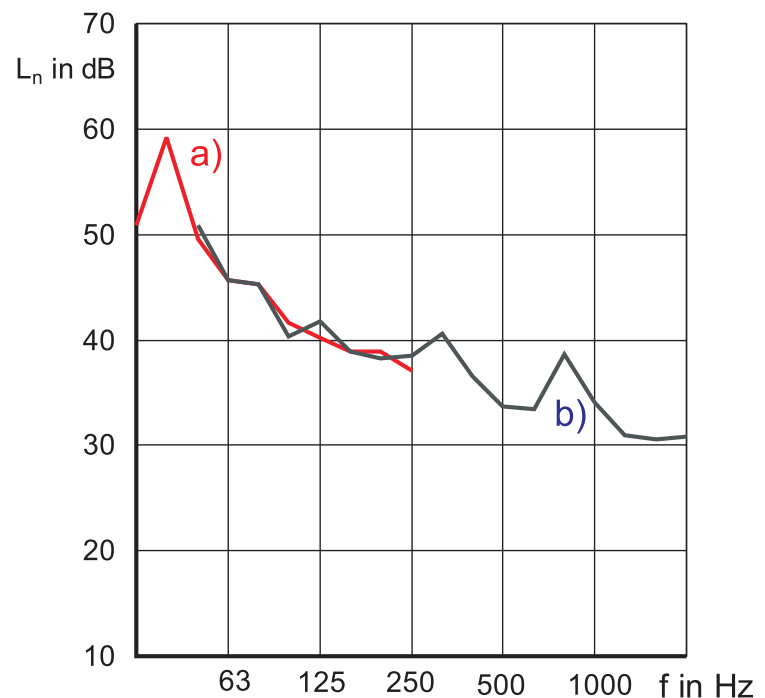
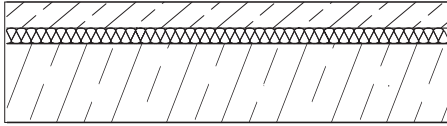


Abbildung A.1: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung<sup>1)</sup> b) Messwerte

<sup>1)</sup> Bei der Berechnung wurden beide Modelle der Abstrahlung berücksichtigt, indem die Ergebnisse der Berechnung mit der modalen und der integralen Methode gemittelt wurden (siehe auch Abschnitt 3.5.1).



50 mm Zementestrich  
 20 mm PST,  $s' = 20 \text{ MN/m}^3$   
 160 mm Stahlbeton

Frequenz f in Hz	Berechnung $L_n$ in dB	Messung $L_n$ in dB
31,5	66,1	
40	56,0	
50	48,7	56,5
63	58,5	56,1
80	60,9	58,4
100	57,5	55,3
125	55,1	55,8
160	52,5	52,1
200	50,4	49,2
250	48,2	48,3
315		45,6
400		41,1
500		39,1
630		36,3
800		33,8
1000		30,6
1250		29,1
1600		26,0
2000		24,2
2500		24,5
3150		26,8
4000		28,5
5000		26,5

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 50,1 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{l, 50-2500} = 49,2 \text{ dB}$

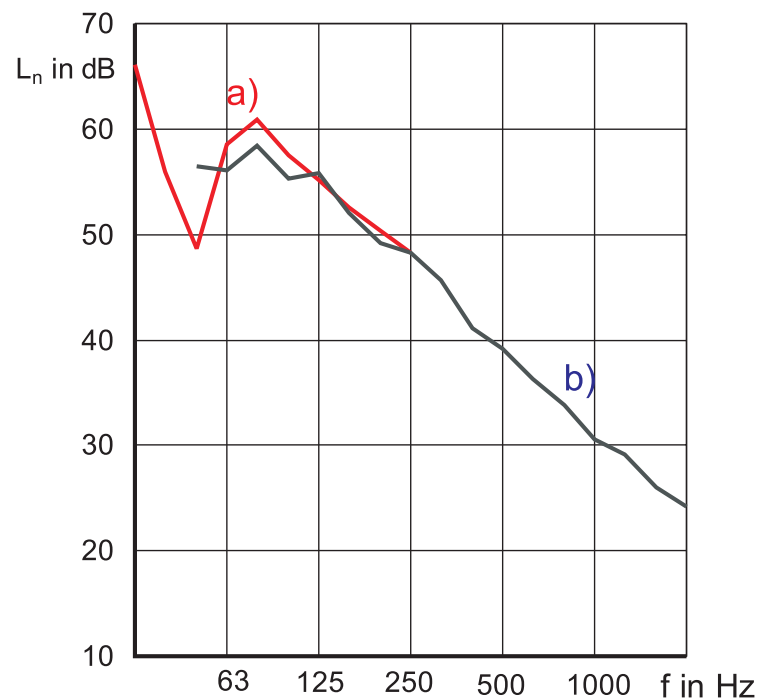
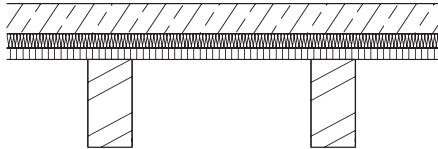


Abbildung A.2: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 40 mm MFT,  $s' = 6 \text{ MN/m}^3$   
 22 mm Verlegespanplatte  
 220 mm Balken, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	62,5	60,8
40	62,5	58,5
50	59,4	64,2
63	68,5	67,2
80	69,0	68,1
100	69,0	66,8
125	71,1	73,0
160	68,4	72,8
200	63,7	69,9
250	72,0	65,8
315		64,9
400		65,6
500		61,4
630		59,2
800		60,8
1000		60,8
1250		58,7
1600		56,0
2000		55,2
2500		51,5
3150		46,8
4000		40,6
5000		33,3

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 63,0 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 64,3 \text{ dB}$

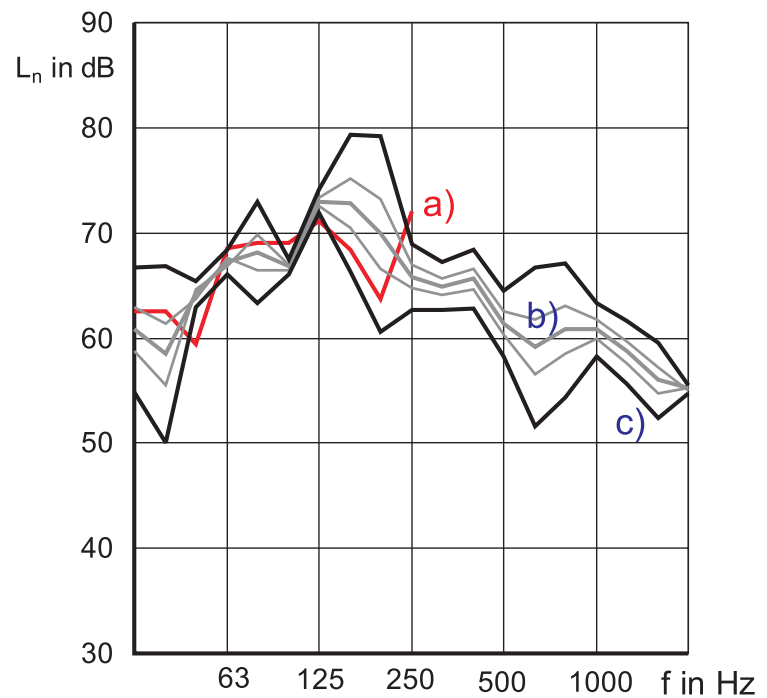
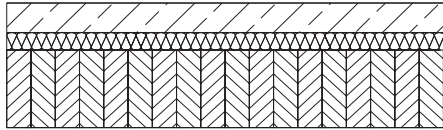


Abbildung A.3: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte vergleichbarer Decken c) Mittelwert der Messergebnisse  $\pm 2\sigma$



50 mm Zementestrich  
 40 mm MFT,  $s' = 6 \text{ MN/m}^3$   
 150 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	59,7	62,0
40	61,3	62,0
50	66,5	69,3
63	66,9	66,7
80	66,1	60,4
100	52,0	57,6
125	53,7	57,4
160	54,5	58,0
200	55,6	57,1
250	56,6	57,7
315		57,7
400		55,4
500		53,8
630		50,9
800		52,1
1000		51,9
1250		49,5
1600		49,2
2000		50,2
2500		48,6
3150		46,2
4000		42,5
5000		36,8

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 56,7 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 57,8 \text{ dB}$

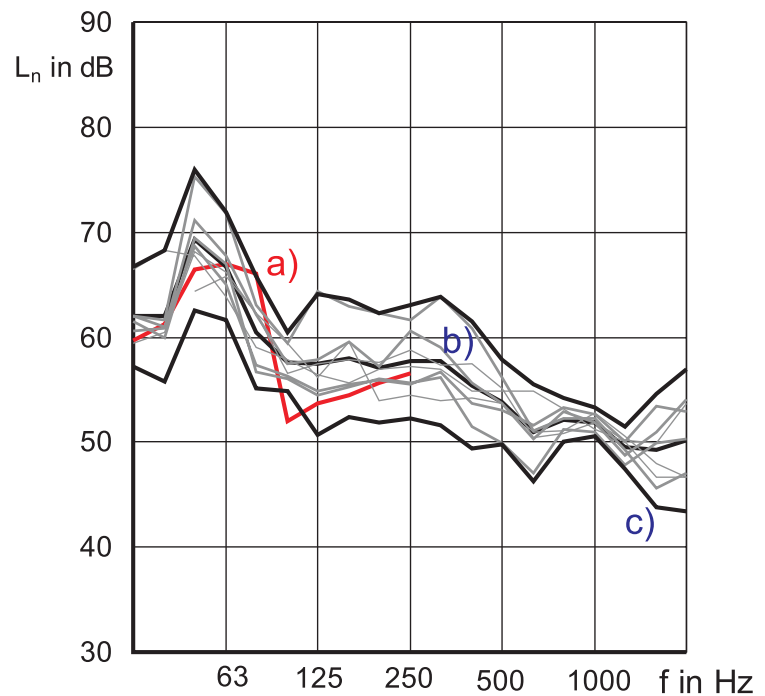
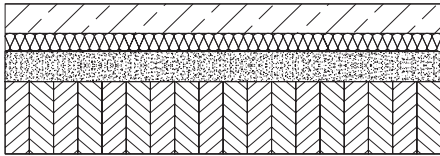


Abbildung A.4: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte vergleichbarer Decken c) Mittelwert der Messergebnisse  $\pm 2\sigma$



50 mm Zementestrich  
 40 mm MFT,  $s' = 6 \text{ MN/m}^3$   
 60 mm Splitt,  $m' = 90 \text{ kg/m}^2$   
 140 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	54,9	
40	62,5	
50	62,2	59,9
63	55,9	54,9
80	54,0	50,7
100	46,8	47,6
125	49,9	47,8
160	49,1	42,3
200	47,0	43,5
250	45,2	43,9
315		44,4
400		44,8
500		42,9
630		39,7
800		38,7
1000		36,1
1250		33,3
1600		27,9
2000		22,2
2500		18,5
3150		16,5
4000		10,5
5000		9,2

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 49,1 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 47,3 \text{ dB}$

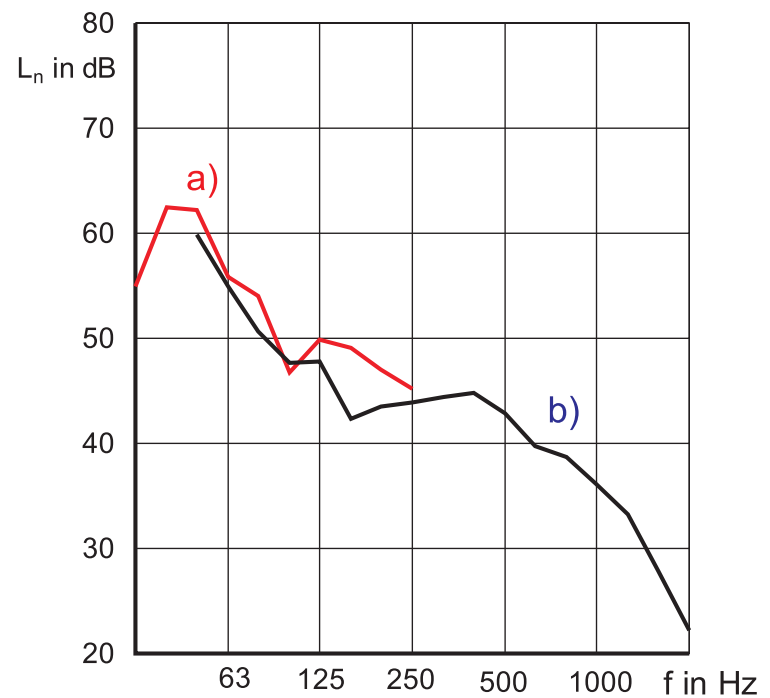
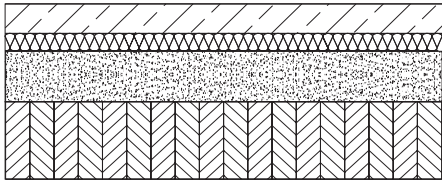


Abbildung A.5: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 40 mm MFT,  $s' = 6 \text{ MN/m}^3$   
 100 mm Splitt,  $m' = 150 \text{ kg/m}^2$   
 150 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	55,1	
40	65,3	
50	52,9	54,1
63	51,8	49,7
80	51,4	45,9
100	46,2	43,3
125	47,3	42,6
160	45,3	39,5
200	43,8	40,4
250	42,9	43,0
315		40,8
400		42,0
500		42,4
630		41,2
800		38,5
1000		35,2
1250		31,6
1600		26,2
2000		22,6
2500		16,8
3150		10,8
4000		9,0
5000		8,8

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 43,1 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 42,3 \text{ dB}$

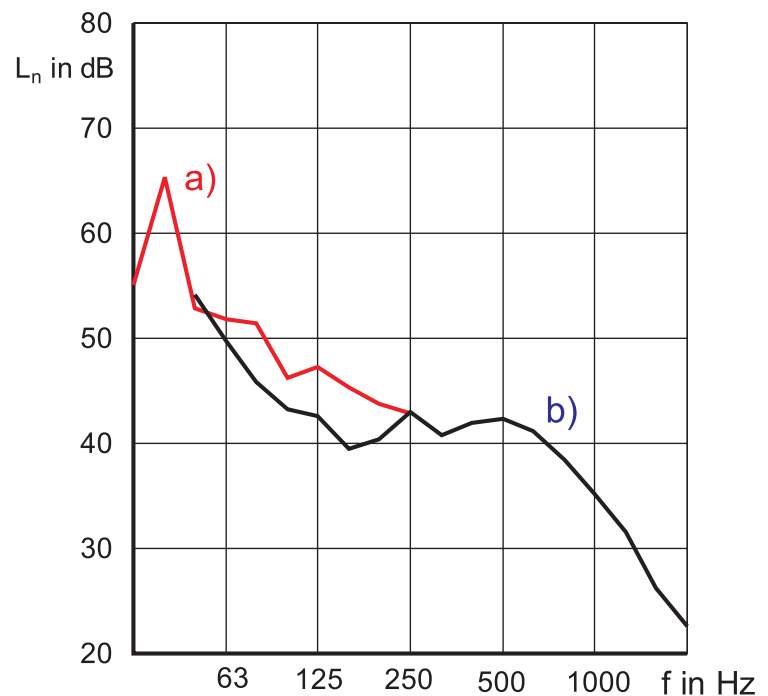
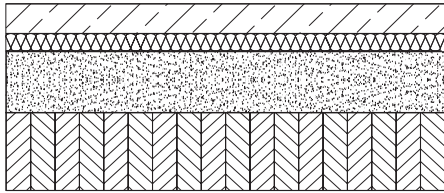


Abbildung A.6: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 35 mm MFT,  $s' = 7 \text{ MN/m}^3$   
 120 mm Splitt,  $m' = 180 \text{ kg/m}^2$   
 140 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	54,8	
40	65,2	
50	52,3	55,1
63	50,5	48,7
80	50,0	45,0
100	46,2	44,6
125	48,7	46,3
160	46,3	45,5
200	46,1	45,1
250	45,3	44,7
315		41,6
400		38,9
500		36,0
630		31,2
800		28,0
1000		25,7
1250		21,7
1600		15,4
2000		11,9
2500		9,2
3150		7,6
4000		5,1
5000		6,5

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 42,9 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{l, 50-2500} = 43,0 \text{ dB}$

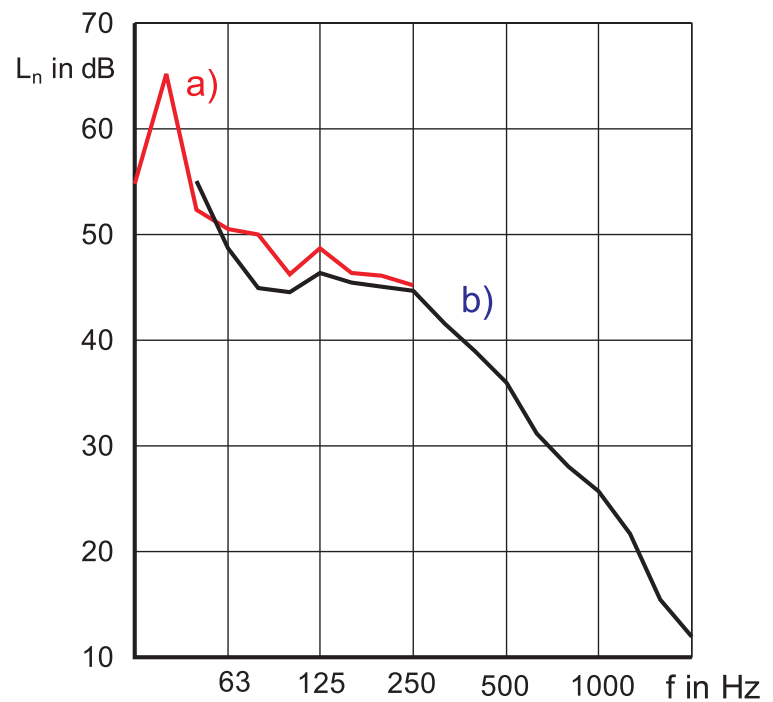
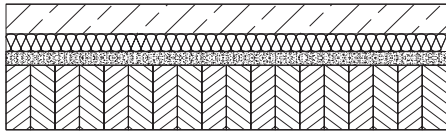


Abbildung A.7: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 35 mm MFT,  $s' = 7 \text{ MN/m}^3$   
 27 mm Barytsand,  $m' = 60 \text{ kg/m}^2$   
 120 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz f in Hz	Berechnung $L_n$ in dB	Messung $L_n$ in dB
31,5	55,7	55,1
40	61,7	63,3
50	65,8	61,0
63	58,6	58,3
80	55,2	58,6
100	49,8	58,9
125	51,6	52,6
160	48,8	51,4
200	49,5	49,4
250	49,0	48,1
315		48,6
400		49,3
500		46,1
630		42,4
800		44,1
1000		47,5
1250		46,3
1600		40,2
2000		37,0
2500		33,4
3150		29,4
4000		23,9
5000		16,3

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 52,2 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{l,50-2500} = 51,3 \text{ dB}$

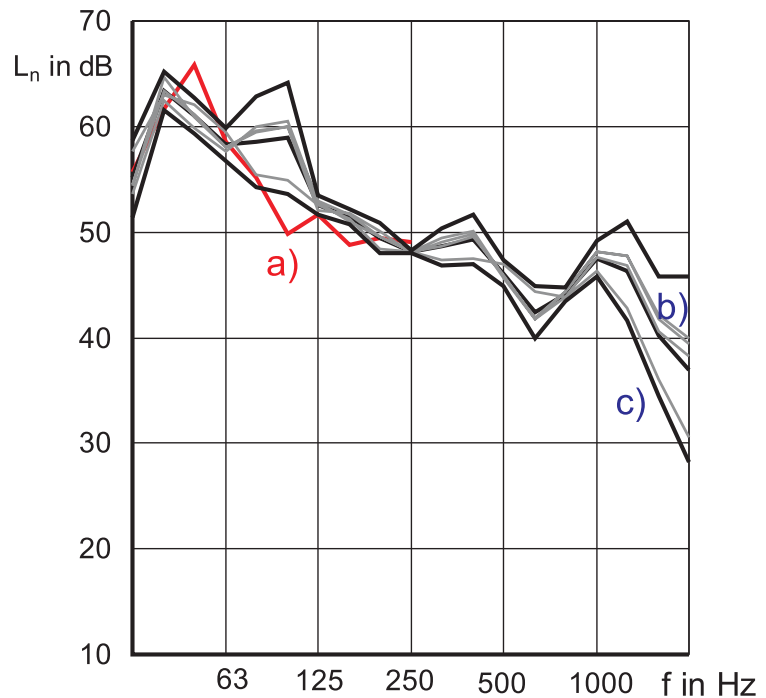
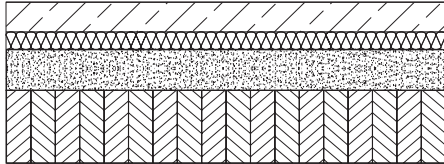


Abbildung A.8: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte vergleichbarer Decken c) Mittelwert der Messergebnisse  $\pm 2\sigma$





50 mm Zementestrich  
 35 mm MFT,  $s' = 7 \text{ MN/m}^3$   
 80 mm Splitt,  $m' = 120 \text{ kg/m}^2$   
 140 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz f in Hz	Berechnung $L_n$ in dB	Messung $L_n$ in dB
31,5	53,0	63,6
40	61,5	58,4
50	56,9	56,4
63	49,9	56,4
80	48,8	48,6
100	48,2	46,1
125	49,1	46,1
160	46,7	43,9
200	47,6	44,0
250	46,3	44,1
315		41,0
400		41,5
500		43,4
630		44,5
800		45,2
1000		43,7
1250		40,5
1600		35,9
2000		32,4
2500		27,8
3150		22,2
4000		17,4
5000		11,4

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 44,8 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{l,50-2500} = 46,0 \text{ dB}$

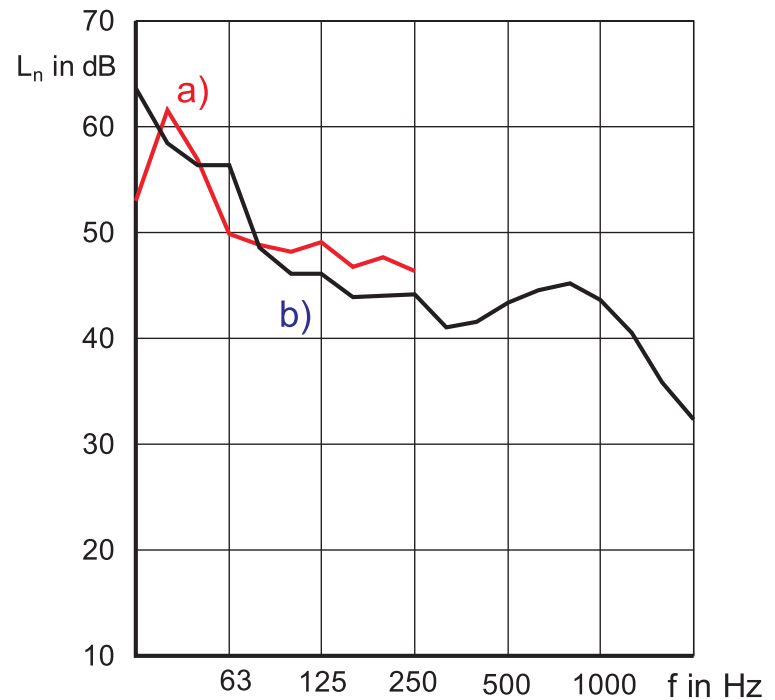
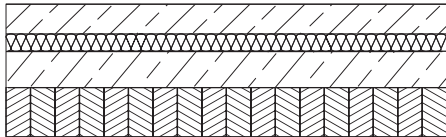


Abbildung A.9: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 40 mm MFT,  $s' = 6 \text{ MN/m}^3$   
 70 mm Beton  
 95 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	56,8	
40	64,2	
50	60,0	57,4
63	52,6	54,4
80	49,1	53,3
100	46,4	48,5
125	47,3	49,9
160	45,9	52,6
200	44,7	52,9
250	50,6	52,8
315		52,7
400		50,1
500		45,9
630		39,7
800		38,7
1000		37,8
1250		35,7
1600		34,7
2000		35,6
2500		34,5
3150		31,5
4000		26,2
5000		19,0

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 46,9 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n, w} + C_{l, 50-2500} = 48,3 \text{ dB}$

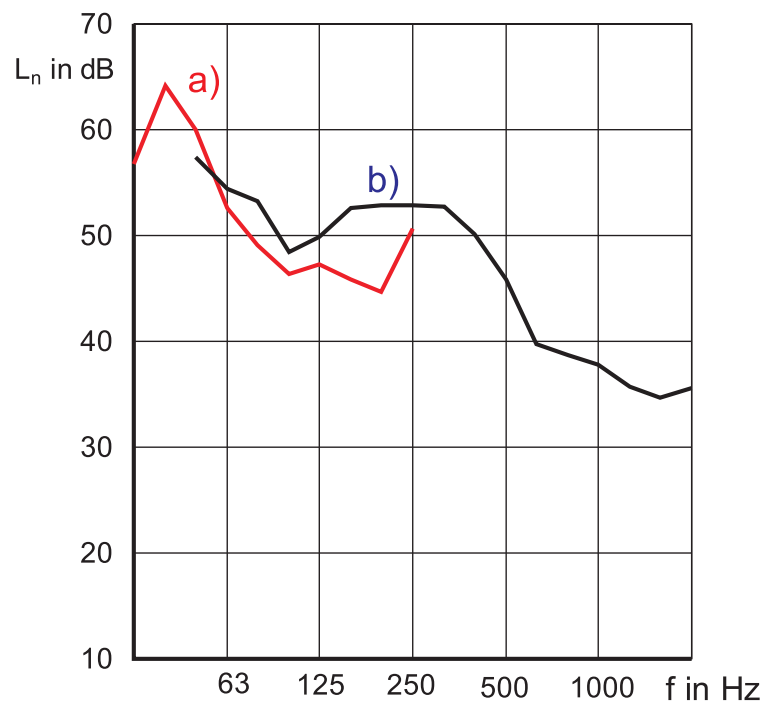
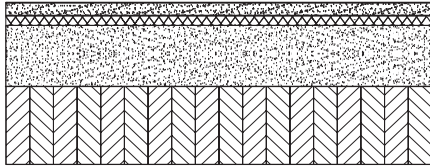


Abbildung A.10: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



25 mm Gipsfaser Trockenestrich  
 20 mm MFT,  $s' = 40 \text{ MN/m}^3$   
 120 mm Splitt,  $m' = 180 \text{ kg/m}^2$   
 150 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	58,7	
40	56,8	
50	57,4	58,7
63	62,4	59,2
80	57,8	56,8
100	54,3	53,1
125	53,7	53,9
160	54,2	51,1
200	50,4	50,8
250	46,5	51,6
315		51,7
400		51,4
500		48,7
630		46,8
800		44,3
1000		41,0
1250		36,6
1600		29,9
2000		24,5
2500		18,2
3150		13,1
4000		10,4
5000		9,7

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 50,8 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 50,2 \text{ dB}$

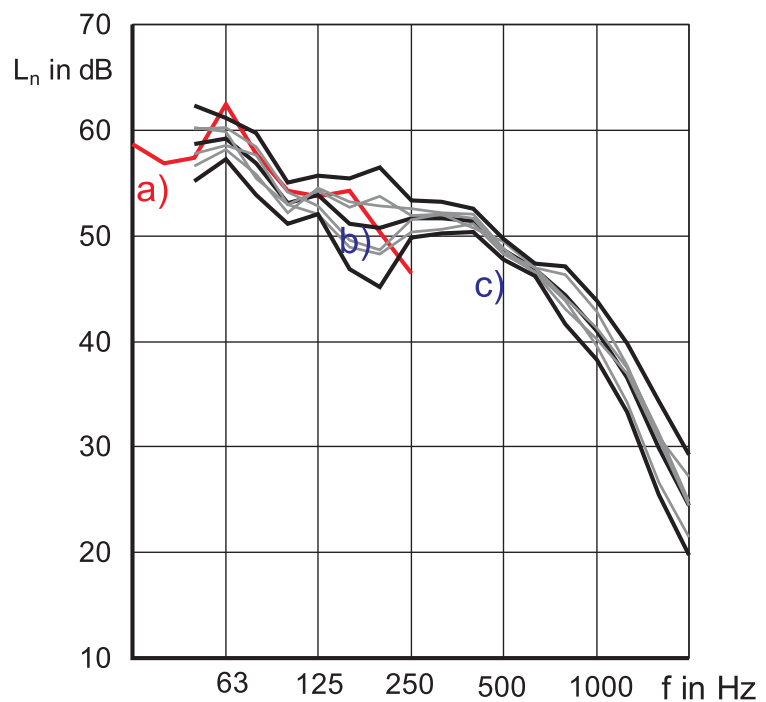
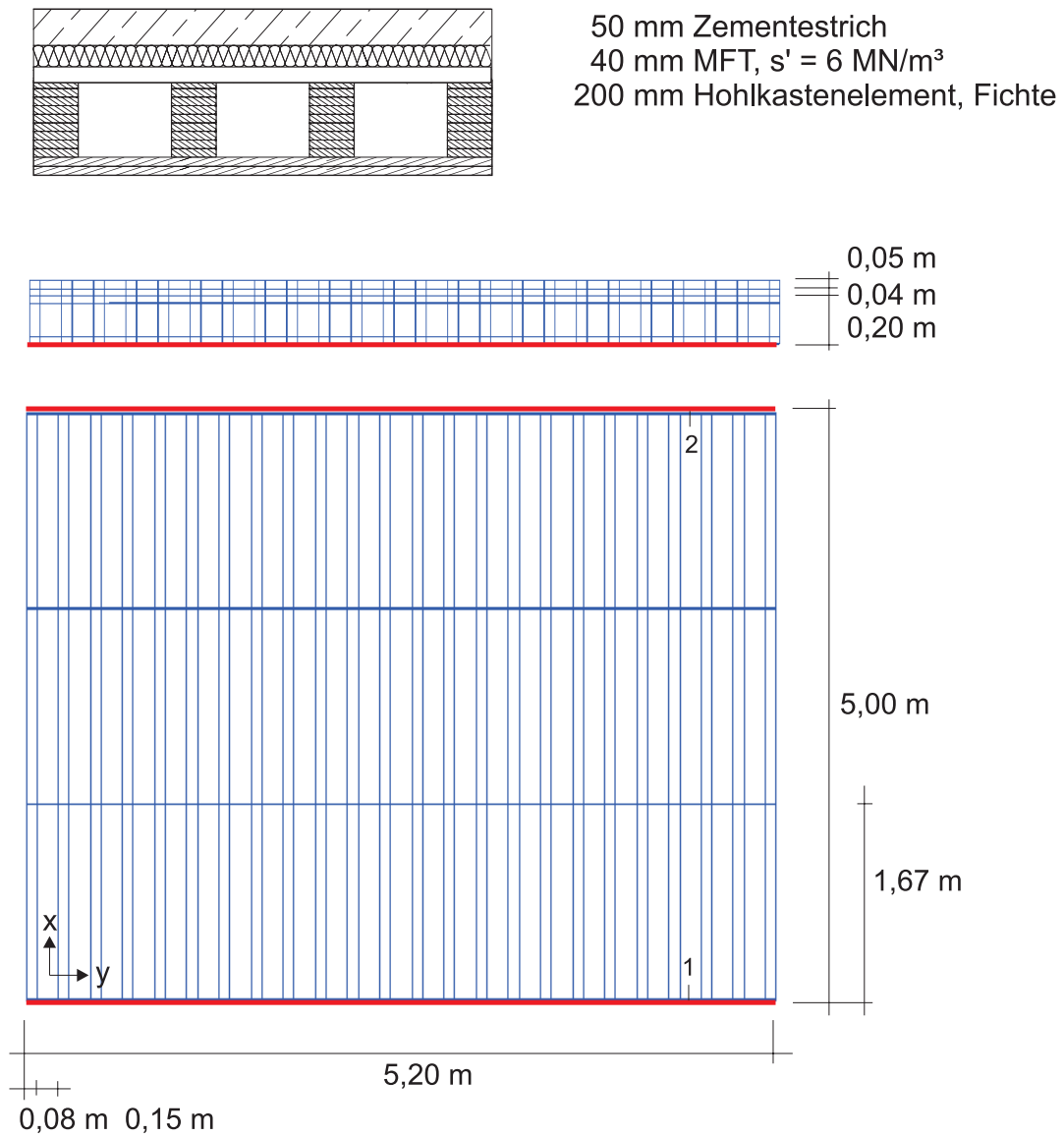


Abbildung A.11: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte vergleichbarer Decken c) Mittelwert der Messergebnisse  $\pm 2\sigma$



Elemente: 702 Hexaederelemente

Polynomgrade:

p 2 2 3 (Zementestrich)

p 1 1 3 (MFT)

p 2 2 3 (Massivholzdecke)

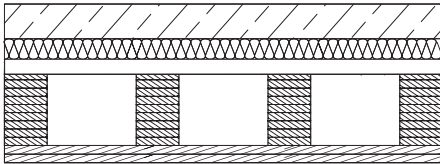
Randbedingungen:

Linienförmige Lagerung

Kante 1:  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$ ,  $u_z = 0$

Kante 2:  $u_y = 0$ ,  $u_z = 0$

Abbildung A.12: Modellierung und Randbedingungen



50 mm Zementestrich  
 40 mm MFT,  $s' = 6 \text{ MN/m}^3$   
 200 mm Hohlkastenelement, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	59,6	57,9
40	58,8	57,3
50	59,9	68,0
63	69,5	71,7
80	68,7	64,4
100	62,7	58,7
125	59,3	60,0
160	56,5	59,2
200	55,8	58,7
250	60,5	59,1
315		58,2
400		58,4
500		57,8
630		54,6
800		53,7
1000		55,7
1250		53,4
1600		52,1
2000		53,1
2500		49,8
3150		44,7
4000		39,2
5000		31,8

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 58,4 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n, w} + C_{1, 50-2500} = 60,0 \text{ dB}$

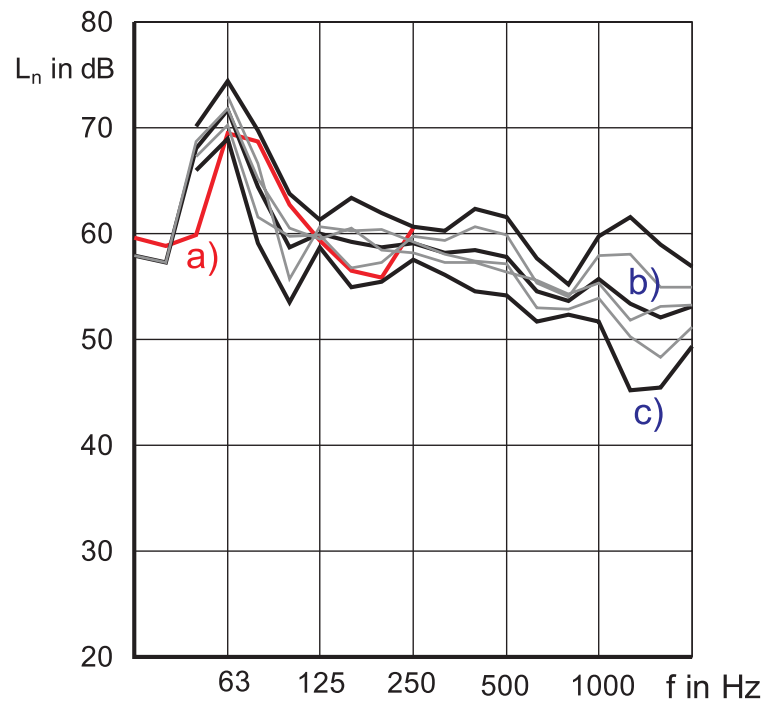
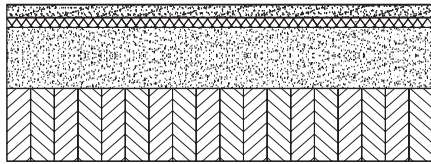


Abbildung A.13: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte vergleichbarer Decken c) Mittelwert der Messergebnisse  $\pm 2\sigma$



25 mm Gipsfaser Trockenestrich  
 20 mm HFT,  $s' = 30 \text{ MN/m}^3$   
 120 mm Splitt,  $m' = 180 \text{ kg/m}^2$   
 140 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	54,3	
40	56,2	
50	58,7	60,1
63	62,3	60,2
80	58,0	55,6
100	53,9	55,2
125	53,0	56,4
160	50,5	55,8
200	50,0	54,5
250	52,6	52,7
315		49,1
400		47,0
500		44,2
630		40,3
800		34,9
1000		28,9
1250		22,3
1600		16,4
2000		10,2
2500		9,1
3150		2,3
4000		5,1
5000		6,7

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 51,0 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 51,3 \text{ dB}$

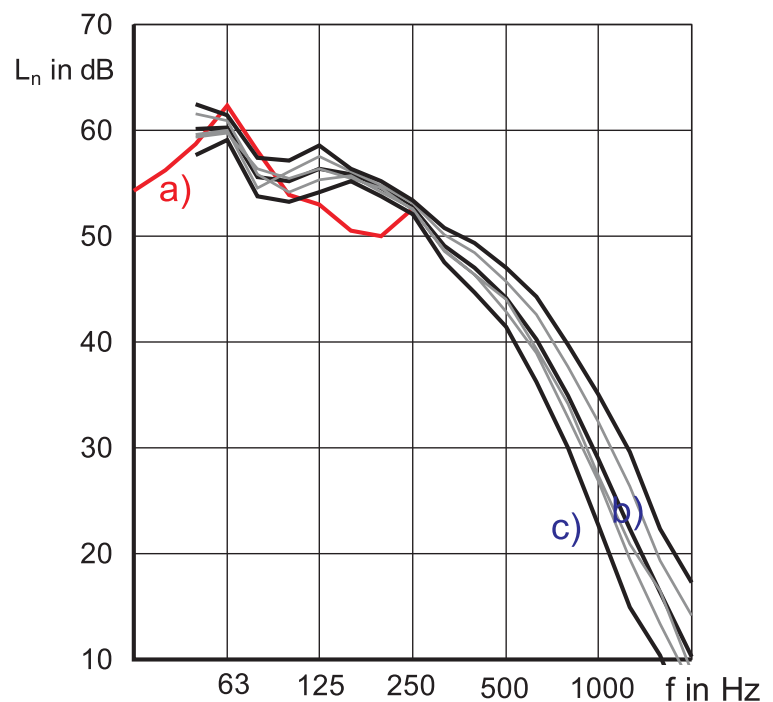
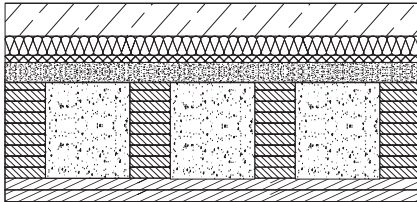


Abbildung A.14: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells: a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte vergleichbarer Decken c) Mittelwert der Messergebnisse  $\pm 2\sigma$



50 mm Zementestrich  
 40 mm MFT,  $s' = 6 \text{ MN/m}^3$   
 15 mm Holzweichfaserplatte  
 262 mm Hohlkastenelement, Fichte  
 mit Splitt gefüllt

Frequenz f in Hz	Berechnung $L_n$ in dB	Messung $L_n$ in dB
31,5	58,9	
40	63,7	
50	58,6	57,5
63	50,8	47,5
80	49,5	45,3
100	49,0	45,9
125	48,2	45,5
160	45,7	40,8
200	45,3	37,7
250	44,8	38,8
315		45,5
400		41,5
500		39,3
630		34,4
800		34,0
1000		32,3
1250		29,7
1600		29,0
2000		25,1
2500		20,5
3150		12,5
4000		9,8
5000		8,9

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 45,7 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 44,1 \text{ dB}$

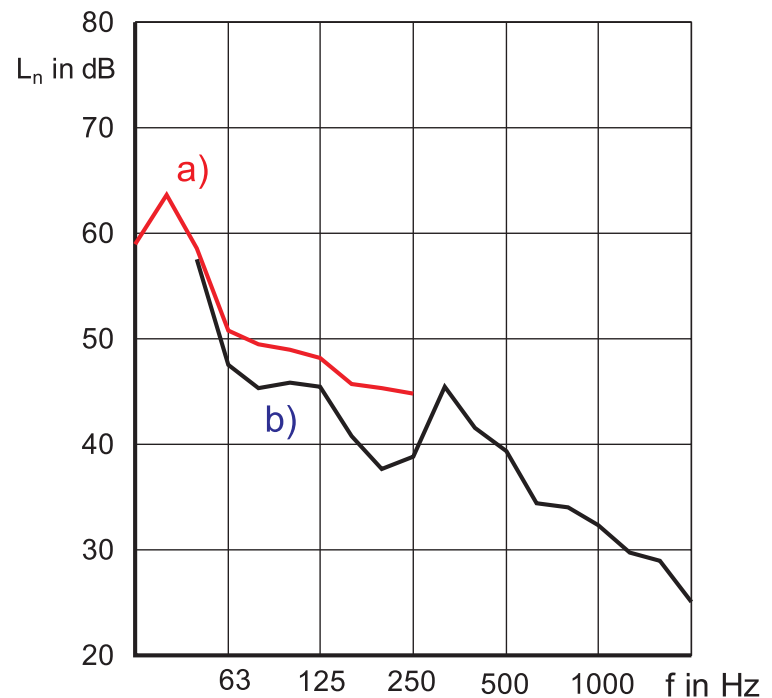
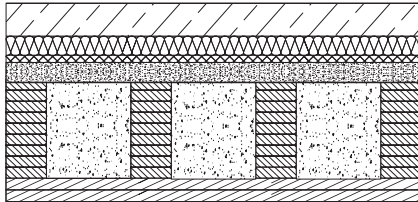


Abbildung A.15: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 35 mm MFT,  $s' = 7 \text{ MN/m}^3$   
 15 mm Holzweichfaserplatte  
 262 mm Hohlkastenelement, Fichte  
 mit Splitt gefüllt

Frequenz f in Hz	Berechnung $L_n$ in dB	Messung $L_n$ in dB
31,5	58,1	
40	63,0	
50	61,4	56,4
63	53,9	50,3
80	51,4	49,3
100	49,7	49,8
125	48,8	48,4
160	46,4	44,7
200	45,9	39,3
250	45,5	40,8
315		48,2
400		47,5
500		47,2
630		43,1
800		38,4
1000		37,7
1250		37,0
1600		34,2
2000		30,8
2500		27,7
3150		19,7
4000		15,7
5000		12,2

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 48,1 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 45,3 \text{ dB}$

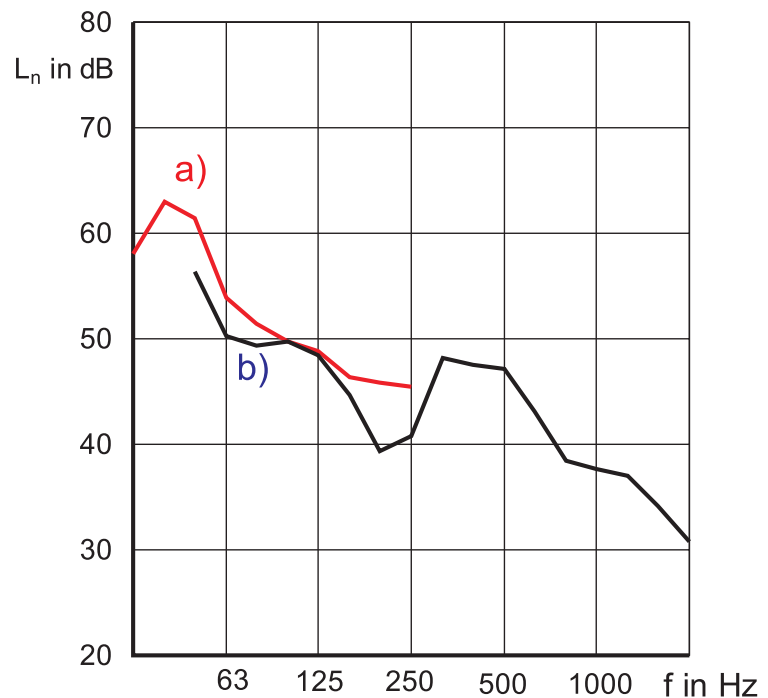
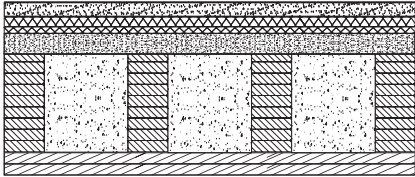


Abbildung A.16: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte





25 mm Trockenestrich, Gipsfaser  
 20 mm HFT,  $s' = 30 \text{ MN/m}^3$   
 15 mm Holzweichfaserplatte  
 262 mm Hohlkastenelement, Fichte  
 mit Splitt gefüllt

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	54,3	
40	57,3	
50	56,6	60,7
63	61,4	59,2
80	54,1	59,6
100	52,6	57,6
125	54,1	56,9
160	55,0	51,2
200	49,8	48,2
250	44,8	50,5
315		53,4
400		52,4
500		50,9
630		48,4
800		46,3
1000		44,1
1250		41,8
1600		38,6
2000		31,6
2500		23,8
3150		14,6
4000		12,1
5000		12,0

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 49,7 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 52,0 \text{ dB}$

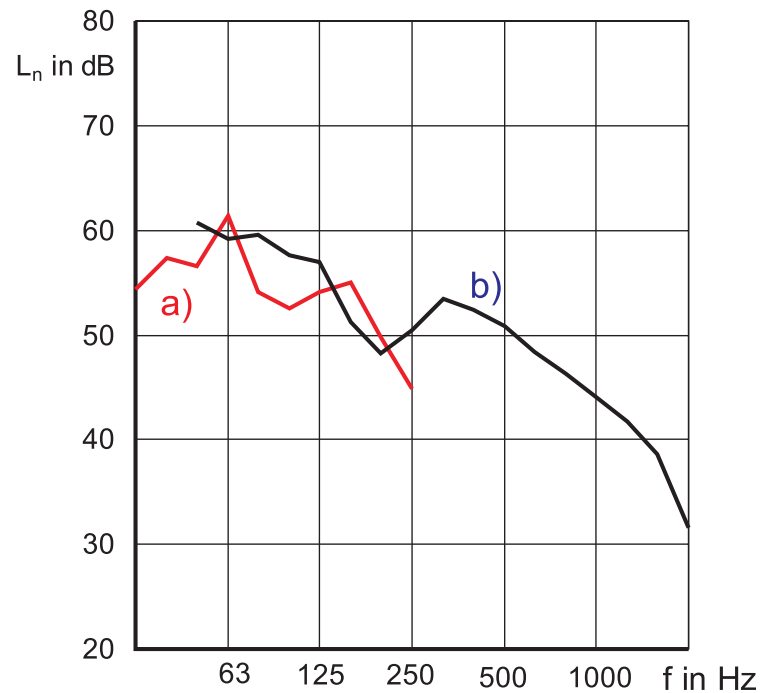
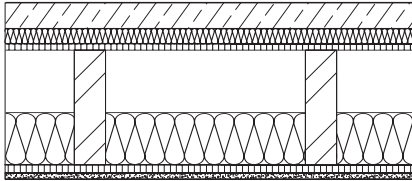


Abbildung A.17: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 35 mm MFT,  $s' = 7 \text{ MN/m}^3$   
 22 mm Spanplatte  
 220 mm Balken, Fichte + 100 mm MF  
 16 mm Spanplatte  
 12,5 mm GKB

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	62,0	63,0
40	62,3	61,1
50	62,4	65,6
63	66,6	67,4
80	69,6	61,8
100	61,5	59,8
125	63,9	64,0
160	62,5	59,9
200	60,8	57,4
250	53,9	58,3
315		56,9
400		54,1
500		51,7
630		46,9
800		49,1
1000		49,2
1250		47,2
1600		44,3
2000		44,6
2500		41,5
3150		38,8
4000		31,4
5000		21,4

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 58,5 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-250} = 57,4 \text{ dB}$

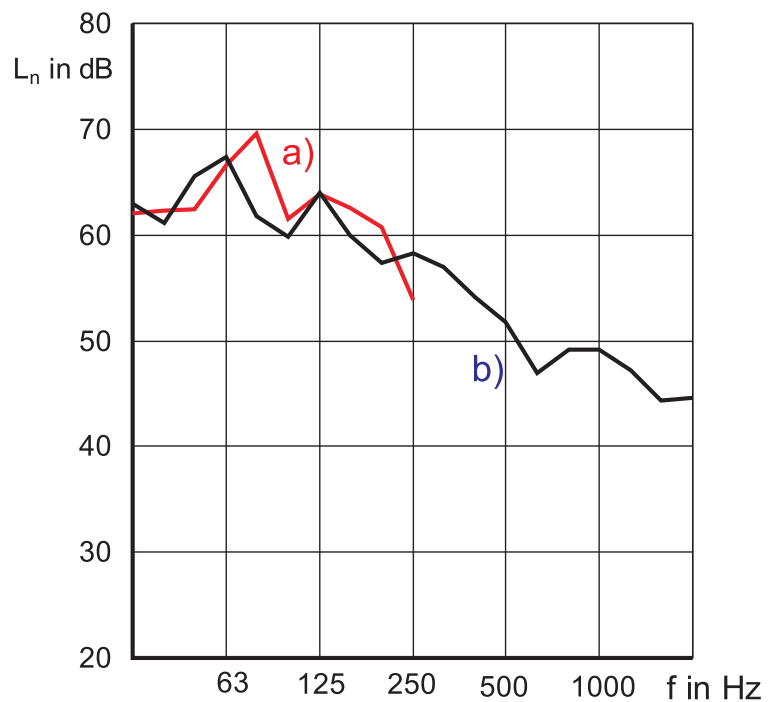
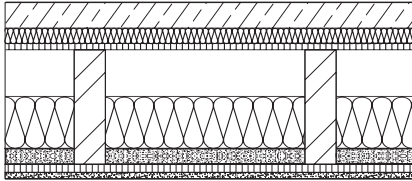


Abbildung A.18: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 35 mm MFT,  $s' = 7 \text{ MN/m}^3$   
 22 mm Spanplatte  
 220 mm Balken, Fichte + 100 mm MF + 30 mm Splitt  
 16 mm Spanplatte  
 12,5 mm GKB

Frequenz f in Hz	Berechnung $L_n$ in dB	Messung $L_n$ in dB
31,5	56,3	62,9
40	61,3	68,5
50	61,9	61,1
63	57,0	59,0
80	55,8	53,0
100	48,8	48,8
125	49,3	53,2
160	48,4	51,9
200	50,1	53,2
250	47,6	51,9
315		49,4
400		49,5
500		47,2
630		43,4
800		46,4
1000		47,1
1250		44,7
1600		41,3
2000		40,7
2500		37,1
3150		33,9
4000		26,7
5000		16,4

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 49,5 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{l, 50-2500} = 50,4 \text{ dB}$

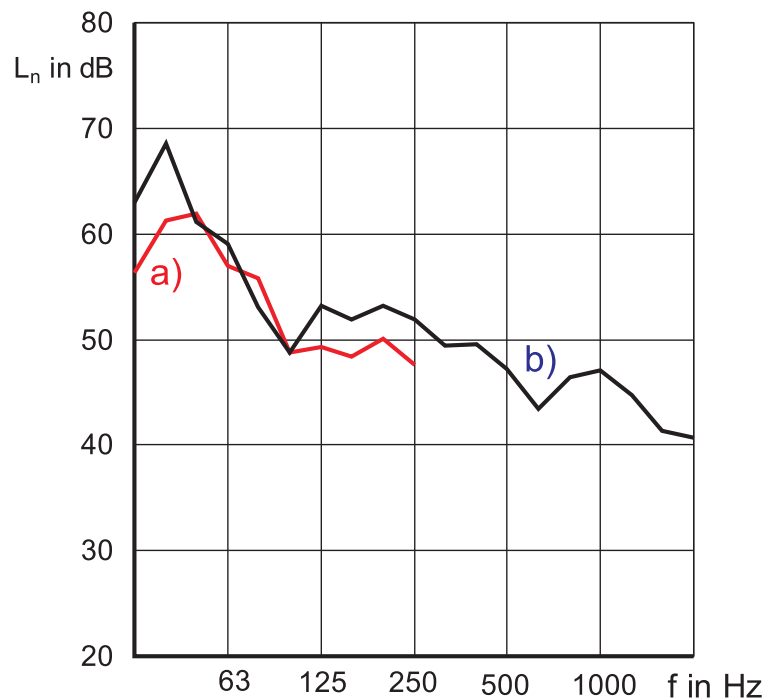
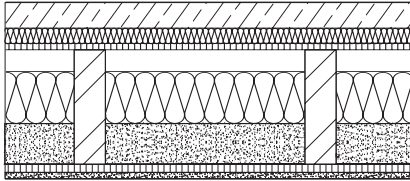


Abbildung A.19: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 35 mm MFT,  $s' = 7 \text{ MN/m}^3$   
 22 mm Spanplatte  
 220 mm Balken, Fichte + 100 mm MF + 80 mm Splitt  
 16 mm Spanplatte  
 12,5 mm GKB

Frequenz f in Hz	Berechnung $L_n$ in dB	Messung $L_n$ in dB
31,5	54,0	64,9
40	63,6	64,8
50	52,8	55,0
63	51,7	50,2
80	49,6	50,6
100	47,3	46,1
125	48,0	49,5
160	51,9	52,7
200	48,7	49,9
250	44,2	44,6
315		45,3
400		47,3
500		45,8
630		44,0
800		45,5
1000		44,2
1250		41,3
1600		37,1
2000		38,3
2500		36,1
3150		33,1
4000		25,9
5000		16,9

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 44,0 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{l, 50-2500} = 45,9 \text{ dB}$

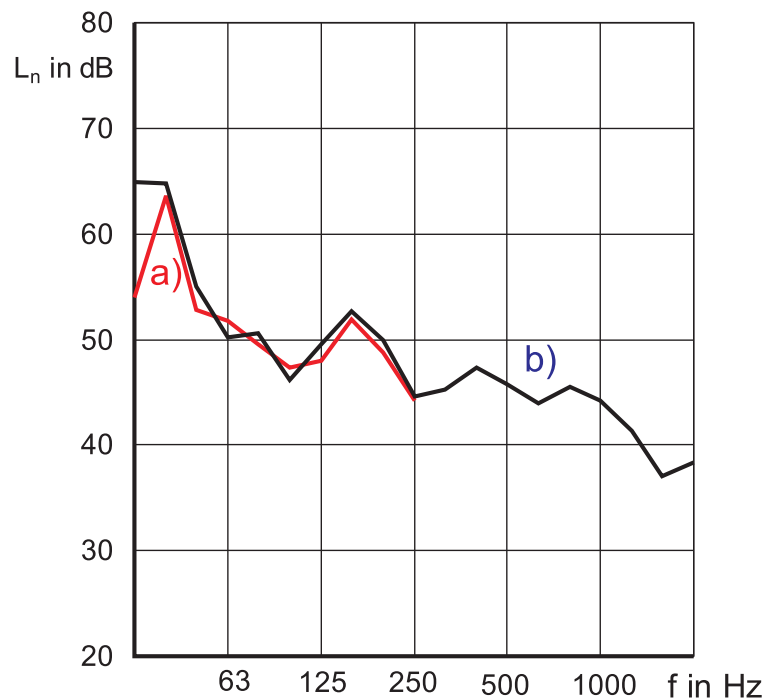
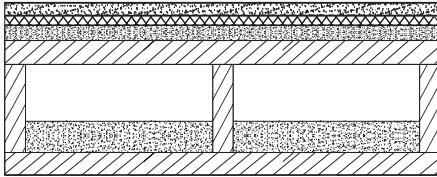


Abbildung A.20: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



25 mm Trockenestrich, Gipsfaser  
 20 mm MFT,  $s' = 40 \text{ MN/m}^3$   
 30 mm Splitt  
 275 mm Hohlkastendecke + 65 mm Splitt

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	58,9	
40	62,1	
50	58,9	65,9
63	67,6	60,7
80	64,1	52,3
100	58,3	52,6
125	56,2	51,6
160	54,0	52,5
200	48,8	49,7
250	46,6	49,2
315		46,0
400		44,3
500		43,6
630		42,4
800		42,8
1000		40,7
1250		33,6
1600		31,5
2000		26,6
2500		22,4
3150		14,5
4000		10,7
5000		10,4

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 55,3 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{1,50-2500} = 52,8 \text{ dB}$

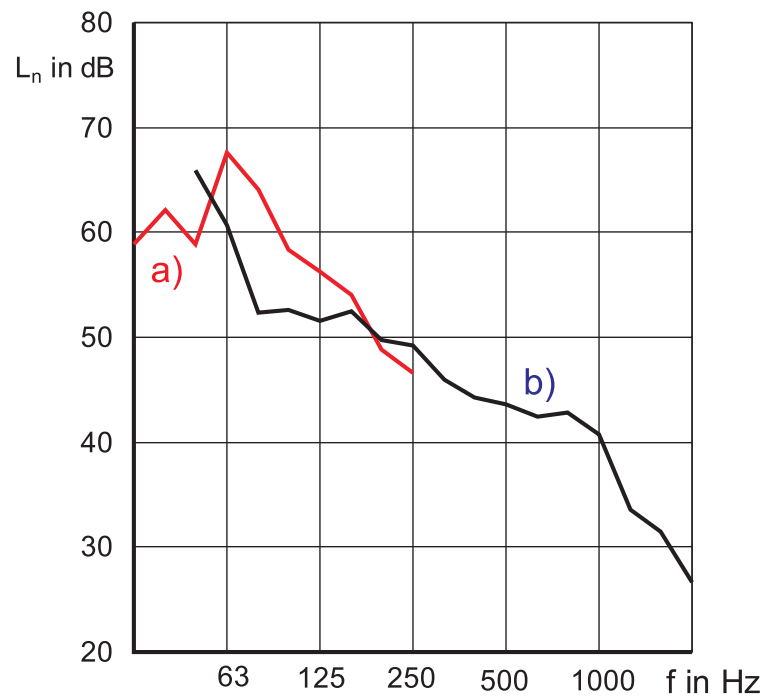
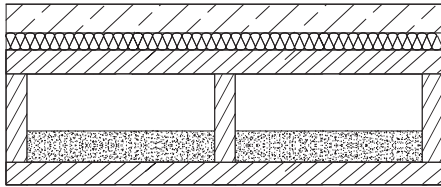


Abbildung A.21: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 20 mm MFT,  $s' = 11 \text{ MN/m}^3$   
 275 mm Hohlkastendecke + 65 mm Splitt

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	58,5	
40	58,1	
50	59,5	65,4
63	65,8	58,1
80	58,1	49,5
100	56,8	50,1
125	53,7	51,3
160	54,9	52,0
200	52,6	54,3
250	47,3	56,1
315		51,8
400		52,4
500		49,4
630		47,0
800		49,1
1000		47,1
1250		46,3
1600		50,4
2000		51,0
2500		48,1
3150		42,8
4000		41,1
5000		38,2

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 53,2 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n, w} + C_{l, 50-2500} = 52,9 \text{ dB}$

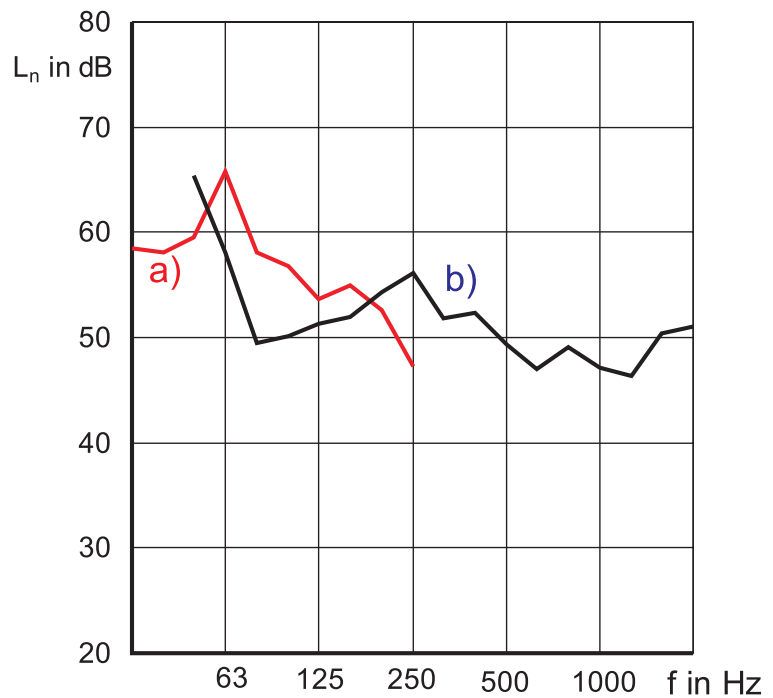
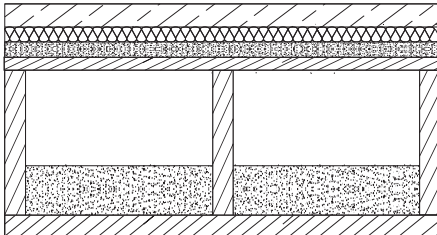


Abbildung A.22: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 30 mm MFT,  $s' = 15 \text{ MN/m}^3$   
 30 mm Splitt  
 350 mm Hohlkastendecke + 100 mm Splitt

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	57,2	
40	57,0	
50	51,7	66,2
63	63,6	61,7
80	64,2	53,1
100	54,6	59,1
125	49,6	56,6
160	42,5	47
200	42,0	43,8
250	43,0	40,2
315		35,9
400		36
500		39,1
630		40,7
800		39,9
1000		39,5
1250		40,3
1600		39,1
2000		36,2
2500		33,3
3150		27,9
4000		22,1
5000		12,2

Berechnung:  $L_{n,\text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 52,4 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n,w} + C_{l,50-2500} = 53,6 \text{ dB}$

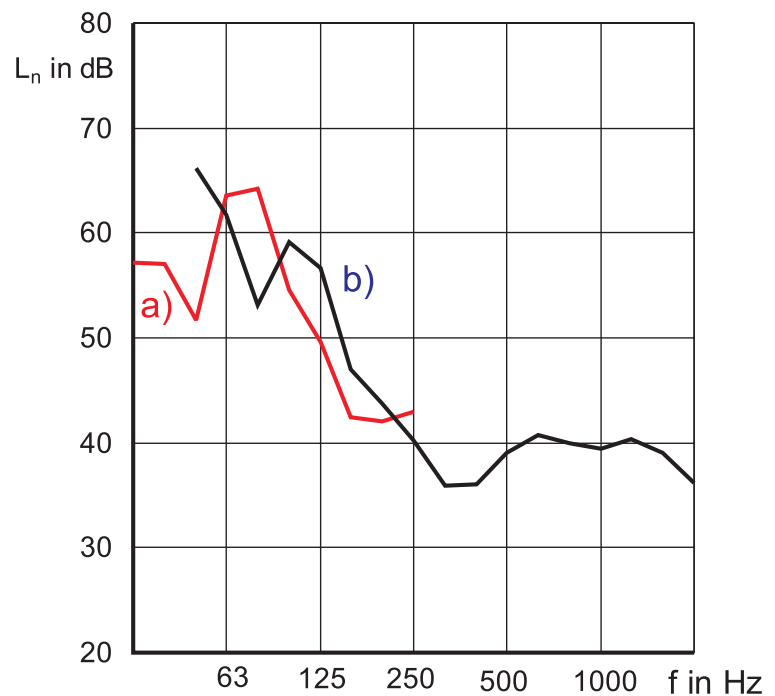
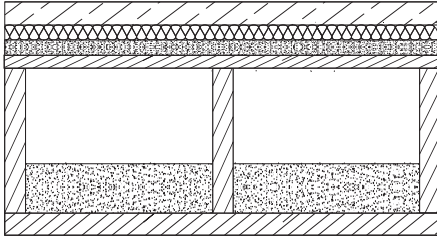


Abbildung A.23: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



50 mm Zementestrich  
 30 mm MFT,  $s' = 11 \text{ MN/m}^3$   
 30 mm Splitt  
 350 mm Hohlkastendecke + 100 mm Splitt

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	61,7	
40	58,1	
50	54,0	64,7
63	66,4	58,6
80	64,6	50,7
100	50,0	58,1
125	43,4	55,3
160	40,5	45,9
200	42,7	42,6
250	43,0	38,3
315		34,2
400		34,9
500		37,5
630		40,2
800		39,7
1000		38,2
1250		38,6
1600		36,9
2000		34,6
2500		31,7
3150		26,0
4000		17,5
5000		9,5

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 53,7 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n, w} + C_{l, 50-2500} = 51,9 \text{ dB}$

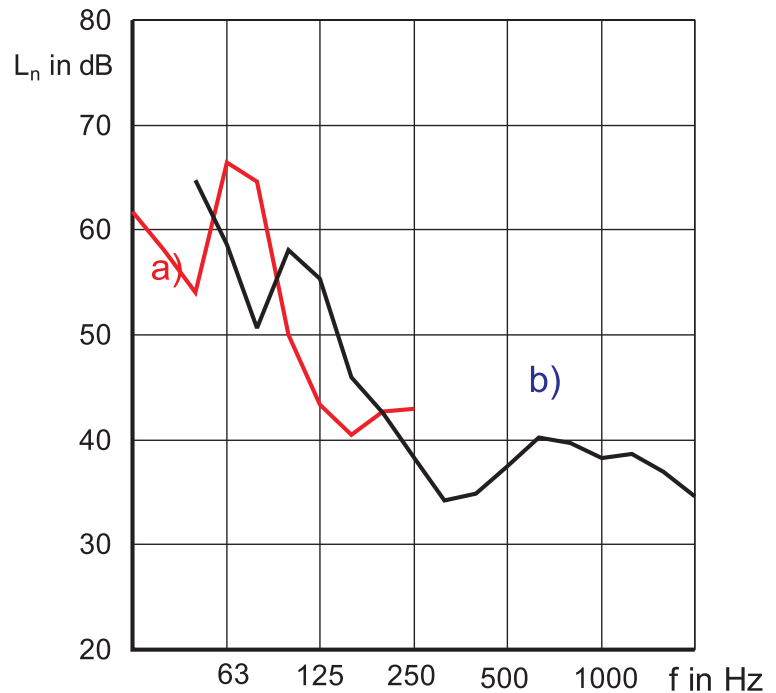
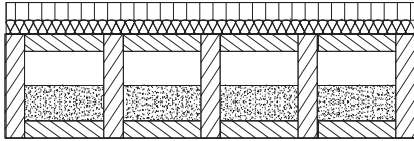


Abbildung A.24: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte





28 mm Spanplatte  
 30 mm MFT,  $s' = 15 \text{ MN/m}^3$   
 200 mm Hohlkastendecke + 70 mm Splitt

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	60,9	
40	75,9	
50	67,1	64,2
63	69,0	61,9
80	63,7	66,4
100	58,4	64,5
125	58,0	60,4
160	57,4	55,2
200	58,7	49,3
250	55,9	46,7
315		46,8
400		50,2
500		48,7
630		45,9
800		39,4
1000		32,5
1250		27,8
1600		23,7
2000		18,9
2500		15,2
3150		11,7
4000		9,6
5000		9,3

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 57,7 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n, w} + C_{l, 50-2500} = 56,2 \text{ dB}$

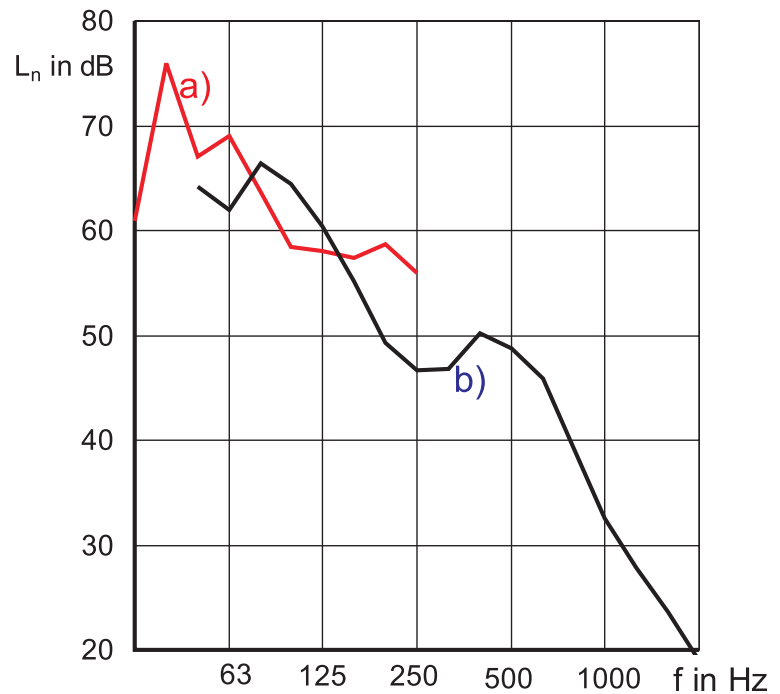
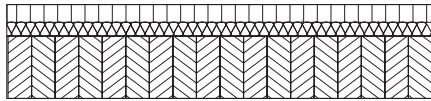


Abbildung A.25: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



22 mm Spanplatte  
 30 mm HFT,  $s' = 50 \text{ MN/m}^3$   
 120 mm Massivholzdecke, Fichte

Frequenz	Berechnung	Messung
f in Hz	$L_n$ in dB	$L_n$ in dB
31,5	66,2	63,2
40	70,0	60,4
50	63,2	63,5
63	66,4	69,8
80	65,9	67,4
100	68,2	68,4
125	70,7	70,6
160	72,9	71,1
200	74,3	72,7
250	72,6	70,4
315		69,7
400		69,7
500		68,5
630		64,6
800		61,6
1000		58,1
1250		53,5
1600		47,7
2000		41,4
2500		36,0
3150		29,8
4000		23,9
5000		21,1

Berechnung:  $L_{n, \text{Sum}, 50-250} - 15 \text{ dB} = 64,7 \text{ dB}$   
 Messung:  $L_{n, w} + C_{1, 50-2500} = 65,4 \text{ dB}$

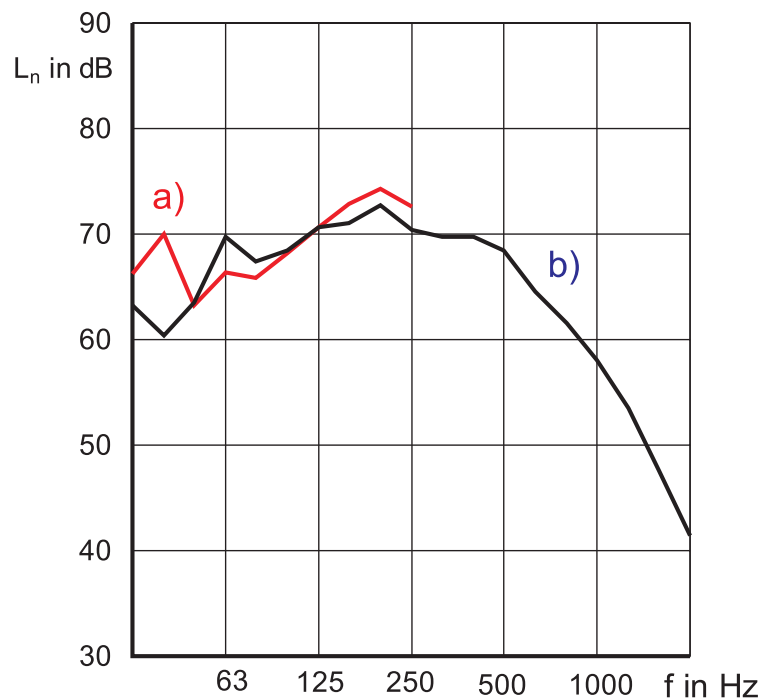


Abbildung A.26: Vergleich Messung - Berechnung zur Validierung des Berechnungsmodells:  
 a) Mittelwerte Berechnung b) Messwerte



## Anhang B

# Differenzterme der Abbildungsfunktion

Differenzterme für die Kanten nach [36]

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_1(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_1 + (1+\xi)\mathbf{X}_2}{2} \right] \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_2(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_2(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_2 + (1+\eta)\mathbf{X}_3}{2} \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_3(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_3(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_4 + (1+\xi)\mathbf{X}_3}{2} \right] \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_4(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_4(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_1 + (1+\eta)\mathbf{X}_4}{2} \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_5(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_5(\zeta) - \frac{(1-\zeta)\mathbf{X}_1 + (1+\zeta)\mathbf{X}_5}{2} \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_6(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_6(\zeta) - \frac{(1-\zeta)\mathbf{X}_2 + (1+\zeta)\mathbf{X}_6}{2} \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_7(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_7(\zeta) - \frac{(1-\zeta)\mathbf{X}_3 + (1+\zeta)\mathbf{X}_7}{2} \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_8(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_8(\zeta) - \frac{(1-\zeta)\mathbf{X}_4 + (1+\zeta)\mathbf{X}_8}{2} \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \\
\mathbf{e}_9(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{E}_9(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_5 + (1+\xi)\mathbf{X}_6}{2} \right] \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \left( \frac{1+\zeta}{2} \right)
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\mathbf{e}_{10}(\xi, \eta, \zeta) = \left[ \mathbf{E}_{10}(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_6 + (1+\eta)\mathbf{X}_7}{2} \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \left( \frac{1+\zeta}{2} \right)$$

$$\mathbf{e}_{11}(\xi, \eta, \zeta) = \left[ \mathbf{E}_{11}(\xi) - \frac{(1-\xi)\mathbf{X}_8 + (1+\xi)\mathbf{X}_7}{2} \right] \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \left( \frac{1+\zeta}{2} \right)$$

$$\mathbf{e}_{12}(\xi, \eta, \zeta) = \left[ \mathbf{E}_{12}(\eta) - \frac{(1-\eta)\mathbf{X}_5 + (1+\eta)\mathbf{X}_8}{2} \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \left( \frac{1+\zeta}{2} \right)$$

### Differenzterme für die Flächen nach [36]

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_1(\xi, \eta) - \frac{1}{4} \left[ (1-\xi)(1-\eta)\mathbf{X}_1 + (1+\xi)(1-\eta)\mathbf{X}_2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (1+\xi)(1+\eta)\mathbf{X}_3 + (1-\xi)(1+\eta)\mathbf{X}_4 \right] \right] \left( \frac{1-\zeta}{2} \right) \\ \mathbf{f}_2(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_2(\xi, \zeta) - \frac{1}{4} \left[ (1-\xi)(1-\zeta)\mathbf{X}_1 + (1+\xi)(1-\zeta)\mathbf{X}_2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (1+\xi)(1+\zeta)\mathbf{X}_6 + (1-\xi)(1+\zeta)\mathbf{X}_5 \right] \right] \left( \frac{1-\eta}{2} \right) \\ \mathbf{f}_3(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_3(\eta, \zeta) - \frac{1}{4} \left[ (1-\eta)(1-\zeta)\mathbf{X}_2 + (1+\eta)(1-\zeta)\mathbf{X}_3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (1+\eta)(1+\zeta)\mathbf{X}_7 + (1-\eta)(1+\zeta)\mathbf{X}_6 \right] \right] \left( \frac{1+\xi}{2} \right) \\ \mathbf{f}_4(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_4(\xi, \zeta) - \frac{1}{4} \left[ (1-\xi)(1-\zeta)\mathbf{X}_4 + (1+\xi)(1-\zeta)\mathbf{X}_3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (1+\xi)(1+\zeta)\mathbf{X}_7 + (1-\xi)(1+\zeta)\mathbf{X}_8 \right] \right] \left( \frac{1+\eta}{2} \right) \\ \mathbf{f}_5(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_5(\eta, \zeta) - \frac{1}{4} \left[ (1-\eta)(1-\zeta)\mathbf{X}_1 + (1+\eta)(1-\zeta)\mathbf{X}_4 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (1+\eta)(1+\zeta)\mathbf{X}_8 + (1-\eta)(1+\zeta)\mathbf{X}_5 \right] \right] \left( \frac{1-\xi}{2} \right) \\ \mathbf{f}_6(\xi, \eta, \zeta) &= \left[ \mathbf{F}_6(\xi, \eta) - \frac{1}{4} \left[ (1-\xi)(1-\eta)\mathbf{X}_5 + (1+\xi)(1-\eta)\mathbf{X}_6 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (1+\xi)(1+\eta)\mathbf{X}_7 + (1-\xi)(1+\eta)\mathbf{X}_8 \right] \right] \left( \frac{1+\zeta}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$



# Anhang C

## Verzeichnis der Bezeichnungen

### C.1 Vektoren und Matrizen

$\{b\}$	Vektor der Volumenkräfte
$\{F\}$	Lastvektor
$\{N\}_f$	Formfunktionen für das Fluid
$\{u\}$	Verschiebungsvektor
$\{\tilde{u}\}$	Koeffizientenvektor der Formfunktionen
$\{\epsilon\}$	Verzerrungsvektor in Voigtscher Notation
$\{\sigma\}$	Spannungsvektor in Voigtscher Notation
$\{v\}$	Vektor der Schallschnelle
$[A]$	Matrix der Materialeigenschaften im Hook'schen Gesetz
$[C]_s$	Dämpfungsmatrix der Struktur
$[C]_f$	Dämpfungsmatrix des Fluids
$[D]$	Differentialoperatormatrix
$[J]$	Jakobimatrix
$[K]_s$	Steifigkeitsmatrix der Struktur
$[K]_f$	Kompressibilitätsmatrix des Fluids
$[M]_s$	Massematrix der Struktur
$[M]_f$	Massematrix des Fluids
$[N]_s$	Formfunktionen für die Struktur
$[\Phi]$	Matrix der Eigenformen (spaltenweise Anordnung)

### C.2 Funktionen

$G$	Fundamentallösung
$N$	Formfunktionen
$L_k$	Legendre-Polynome
$Q$	Abbildungsfunktion
$\bar{w}$	Wichtungsfunktion

### C.3 Skalare

$A_0$	Bezugs-Absorptionsfläche $A_0 = 10m^2$
$c_0$	Schallgeschwindigkeit
$C_{I,50-2500}$	Spektrumanpassungswert
$C_c$	Dämpfung an der Kontaktstelle
$\bar{C}_i$	Äquivalente Dämpfung für die i-te Eigenform
$D_i$	Lehrschen Dämpfungsmaß für die i-te Eigenform
$D_c$	Lehrschen Dämpfungsmaß für die Kontaktstelle, lokale Dämpfung
$E$	E-Modul
$E_{pot,ges}$	Potentielle Energie, hier Dehnungsenergie
$E_R$	Wiedergewinnbare (reversible) Energie
$E_V$	Während einer Schwingungsperiode umgewandelte (verlorene) Energie
$f$	Frequenz
$f_r$	Resonanzfrequenz, Resonanzüberhöhung
$f_c$	Koinzidenz-Grenzfrequenz
$f_s$	Schlagfrequenz des Norm-Hammerwerks
$F(t), F_n$	Kraft im Zeit- und Frequenzbereich (Fourierkoeffizienten)
$F_{n,G}, F_{n,L}$	Globaler und lokaler Anteil der Kontaktkraft (Fourierkoeffizienten)
$F_{n,L,m}$	Lokaler Anteil der Kontaktkraft für den m-ten Hammerschlag (Fourierkoeffizienten)
$F_0, F_{0,n}$	Kraftstoß des Hammers
$F_c(t)$	Kontaktkraft
$G$	Schubmodul
$H$	Komplexe Übertragungsfunktion
$I$	Impedanz
$I$	Impuls
$K$	Kompressionsmodul
$K_c$	Kontaktsteifigkeit
$\bar{K}_i$	Äquivalente Steifigkeit für die i-te Eigenform
$k_n$	Wellenzahl
$L_{AFmax,n}$	A-bewerteter Trittschallpegel beim Begehen der Decke
$L_n, L_{n,w}$	Norm-Trittschallpegel, bewerteter Norm-Trittschallpegel
$L'_{n,w}$	Bewerteter Norm-Trittschallpegel inklusive Flankenübertragung
$L_x, L_y, L_z$	Abmessungen eines Raumes
$\bar{M}_i$	Äquivalente Masse für die i-te Eigenform
$M_0$	Masse des Hammers
$m'$	Flächenbezogenen Masse
$n$	Anzahl
$n_{dof}$	Anzahl der Freiheitsgrade des Systems
$n_{eigen}$	Anzahl der (berücksichtigten) Eigenwerte
$p(t), p_n$	Schalldruck im Zeit- und Frequenzbereich (Fourierkoeffizienten)
$p$	Polynomgrad
$P$	Penalty-Wert
$P_n$	Schalleistung
$P(x_1, y_1, z_1)$	Aufpunkt



---

$P_0$	Luftdruck im Ausgangszustand
$q_i(t), q_{i,n}$	Skalierungsfaktor der i-ten Eigenform im Zeit- und Frequenzbereich (Fourierkoeffizienten)
$Q(x_0, y_0, z_0)$	Quellpunkt
$r$	Hammerradius
$R$	Vertrauensbereich
$s'$	Dynamischen Steifigkeit
$\Delta t$	Zeitschritt
$T$	Nachhallzeit
$T$	Zeitpunkt
$T$	Zeitspanne zwischen zwei Schlägen des Hammerwerks
$T_c$	Kontaktzeit des Hammers
$\hat{u}$	vorgegebenen Verschiebung
$u(t), u_n$	Verschiebung im Zeit- und Frequenzbereich (Fourierkoeffizienten)
$v(t), v_n$	Geschwindigkeit im Zeit- und Frequenzbereich (Fourierkoeffizienten)
$v_c(t)$	Geschwindigkeit an der Kontaktstelle
$v_G(t)$	Globaler Anteil der Geschwindigkeit
$v_L(t)$	Lokaler Anteil der Geschwindigkeit
$v_R$	Relativgeschwindigkeit zwischen Hammer und Deckenoberfläche
$\hat{v}_R$	Scheitelwert der Relativgeschwindigkeit
$v_0(t)$	Geschwindigkeits-Verlauf des aufprallenden Hammers
$v_{0,t_0}$	Anfangsgeschwindigkeit des Hammers beim Lösen aus der Mechanik
$\hat{v}_0$	Aufprallgeschwindigkeit des Hammers
$V_{(e)}$	Volumen eines Elements
$S_{(e)}$	Oberfläche eines Elements
$dt$	differentieller Zeitschritt
$dV$	differentielles Volumenelement
$Y, Y_G, Y_L$	Admitanz, globaler und lokaler Anteil
$Z$	Impedanz
$\alpha, \beta$	Koeffizienten der Rayleigh-Dämpfung
$\eta$	Verlustfaktor
$\eta_{i,n}$	Frequenzverhältnis
$\eta_{structure}$	Verlustfaktor der Struktur
$\eta_{internal}$	Verlustfaktor für die inneren Verluste (Materialdämpfung)
$\eta_{boundary}$	Randverluste (Energieableitung in das Bauteilaufleger)
$\eta_{radiation}$	Abstrahlverluste (Energieableitung durch Schallabstrahlung)
$\eta_{fluid}$	Fluiddämpfung (Dämpfung durch das die Struktur umgebende Fluid)
$\eta_{friction}$	Fügestellen Verluste (Reibungsdämpfung)
$\epsilon_f$	Volumendehnung
$\Gamma$	Berandung des Gebiets $\Omega$
$\mu$	Querkontraktionszahl

$\varphi_i$	i-te Eigenform der Struktur
$\rho_0$	Dichte des Fluids im Ausgangszustand
$\rho_f$	Dichte des Fluids
$\rho_s$	Dichte der Struktur
$\sigma$	Normalspannung
$\sigma$	Abstrahlgrad
$\sigma$	Standardabweichung
$\xi, \eta, \zeta$	lokales Koordinatensystem
$x, y, z$	globales Koordinatensystem
$\Omega$	Gebiet
$\omega_i^2$	i-ter Eigenwert
$\omega_n$	n-te Kreisfrequenz