

# Untersuchungen zu Kraft-Momenten-Sensoren auf Basis von Faser-Bragg-Gittern

Mathias S. Müller  
Lehrstuhl für Messsystem- und Sensortechnik  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Alexander W. Koch  
Technische Universität München



TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
Lehrstuhl für Messsystem- und Sensortechnik

# **Untersuchungen zu Kraft-Momenten-Sensoren auf Basis von Faser-Bragg-Gittern**

Mathias S. Müller

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

## **Doktor-Ingenieurs**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.- Prof. P. Lugli, Ph.D.

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.- Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. A. W. Koch  
2. Univ.- Prof. Dr.-Ing. H. Hanik

Die Dissertation wurde am 19.06.09 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 24.09.2009 angenommen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen und Stand der Technik</b>	<b>7</b>
2.1	Mechanische Grundlagen . . . . .	7
2.1.1	Kontinuumsmechanik . . . . .	8
2.1.2	Tensortransformationen . . . . .	10
2.1.3	Starrkörpermechanik . . . . .	11
2.2	Optische und mechano-optische Grundlagen . . . . .	13
2.2.1	Lichtausbreitung in dielektrischen Wellenleitern . . . . .	13
2.2.2	Störungen des idealisierten Wellenleiters . . . . .	20
2.2.3	Mechanische Einflüsse auf den Wellenleiter . . . . .	23
2.3	Bragg-Gitter in optischen Wellenleitern . . . . .	27
2.3.1	Faser-Bragg-Gitter in Monomodenasern . . . . .	31
2.3.2	Faser-Bragg-Gitter in polarisationserhaltenden Fasern . . . . .	37
2.4	Nichtlineare Optimierung . . . . .	44
2.5	Kenngrößen von Kraft-Momenten-Sensoren . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Untersuchungen zum KMS-relevanten Verhalten von Faser-Bragg-Gittern</b>	<b>51</b>
3.1	Schubverformungen im Faser-Bragg-Gitter . . . . .	51
3.1.1	Modellierung mittels gekoppelter-Moden-Theorie . . . . .	52
3.1.2	Einfluss der Schubverformungen auf die Sensorantwort des Faser-Bragg-Gitters . . . . .	63
3.1.3	Ableitung einer Transfermatrix-Methode für schubverformte Faser-Bragg-Gitter . . . . .	69
3.2	Mechano-optischer Bragg-Gitter-Simulator . . . . .	77
3.3	Mechanische Belastung von Faser-Bragg-Gittern . . . . .	80
3.3.1	Inhomogene Dehnungsfelder . . . . .	80

3.3.2	Strukturanbindung von Faser-Bragg-Gittern . . . . .	83
3.3.3	Querbelastung von Faser-Bragg-Gittern . . . . .	91
3.3.4	Gebogene und tordierte Lichtleitfasern . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Faseroptischer Kraft-Momenten-Sensor mit sechs Freiheitsgraden</b>	<b>99</b>
4.1	Starrkörper-Feder-Modell . . . . .	99
4.2	Designstudie eines Kraft-Momenten-Sensors . . . . .	102
4.2.1	Entwurf . . . . .	103
4.2.2	Implementierung . . . . .	105
4.2.3	Prüfstand . . . . .	106
4.2.4	Messungen und Ergebnisse . . . . .	108
4.3	Numerische Optimierung des Kraft-Momenten-Sensors . . . . .	114
4.3.1	Formulierung des Optimierungsproblems . . . . .	114
4.3.2	Randbedingungen . . . . .	115
4.3.3	Lösung des Optimierungsproblems . . . . .	119
4.4	Ergebnisse . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Eigene Veröffentlichungen</b>	<b>I</b>
<b>B</b>	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>VII</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

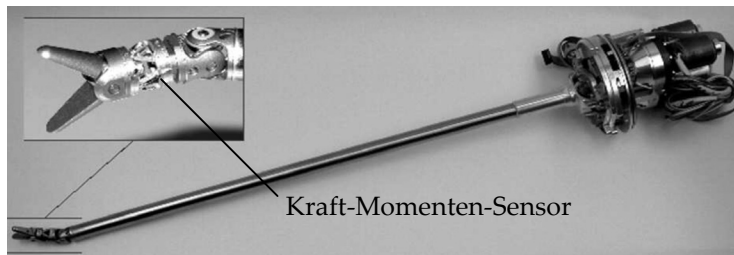
Die Anwendung und Entwicklung von Kraft-Momenten-Sensoren (KMS) ist Gegenstand von Forschungsarbeiten seit den späten 1970er Jahren [1]. Zahlreiche Arbeiten befassen sich dabei mit der Anwendung der KMS im Bereich der Regelung von Robotern, wie Arbeiten zur Regelung von humanoiden Robotern [2][3][4] [5][6][7], Kontaktpunkt- und Kraftbestimmung [8] [9] [10] sowie zur Kompensation von Gelenkreibungseffekten [11].

Neben Grundlagenartikeln zur Modellierung und Entwurfsverfahren [12] [13][14] existieren zahlreiche Arbeiten zu anwendungsangepassten Entwürfen, vergleiche zum Beispiel [15][16]. Ein verwandtes Anwendungsfeld dieser Sensoren ist die robotergestützte minimalinvasive Chirurgie (MIRS - minimally invasive robotic surgery), wie sie derzeit am Institut für Robotik und Mechatronik des deutschen Zentrums für Luft-und Raumfahrt (DLR) erforscht wird [17]. Ortmeier et al. [18] weisen auf die Relevanz dieser Sensoren für das Bereitstellen eines haptischen Feedbacks an den Operateur hin. Puangmali et al. [19] geben einen Überblick über den aktuellen Stand der Technik im Bereich Kraft-Momenten-Sensoren gestützte MIRS.

Für diese Anwendung wurden KMS, basierend auf elektrischen Sensoren entwickelt [20][21] sowie Untersuchungen zu deren Nutzen in dieser Applikation durchgeführt [22]. Von besonderer Bedeutung bei der Entwicklung von Kraft-Momenten-Sensoren für den Einsatz in der minimal-invasiven Chirurgie ist die Miniaturisierung, da der Sensor bei der Anwendung in den Patienten eingeführt wird. Ein vom DLR entwickeltes MIRS-Instrument ist in Abbildung 1.1 gezeigt. Der Kraft-Momenten-Sensor ist auf Basis von Dehnungsmessstreifen aufgebaut.

Mit der Miniaturisierung von KMS beschäftigen sich Arbeiten, die auf Basis





**Abbildung 1.1:** Mit Kraft-Momenten-Sensor instrumentiertes Werkzeug für Anwendungen in der robotergestützten minimal-invasiven Chirurgie. Die Vergrößerung zeigt den an der Spitze sitzenden Kraft-Momenten-Sensor. Quelle: DLR.

von Methoden der Silizium-Mikrobearbeitung KMS mit sechs Freiheitsgraden erzeugen [23][24].

Die genannten Kraft-Momenten-Sensoren sind weitgehend für die speziellen Anforderungen der Anwendung entwickelt. Dies wird notwendig, da die unterschiedlichen Applikationen stark unterschiedliche primäre Anforderungsprofile wie Größe, Empfindlichkeit und Messbereich aufweisen. Sekundäre Anforderungen wie die Möglichkeit der Potentialtrennung des Sensors, die Autoklavierbarkeit, die Möglichkeit des Einsatzes in starken Magnetfeldern sowie die Unempfindlichkeit gegenüber elektromagnetischer Interferenz, wie sie in der Medizintechnik vorkommen, entscheiden jedoch in den meisten Fällen für die Auswahl der Technologie.

Speziell die aufgeführten Anforderungen der medizintechnischen Anwendungen haben die Erforschung von Kraft-Momenten-Sensoren auf Basis von optischen Wirkmechanismen motiviert. Chapuis et al. [25] sowie Tata et al. [26] untersuchen die Möglichkeit, Kraft-Momenten-Sensoren auf Basis der Leistungsmodulation von Licht für Anwendungen im Bereich der Magnetresonanztomographie herzustellen. Dabei stellen die Autoren die Möglichkeit einer faseroptischen Lichtzu- und Lichtableitung vor, die es erlaubt, über weite Strecken das Signal zu übertragen. Dadurch kann zum einen die notwendige Auswerteelektronik in sicherer Entfernung zur Messstelle aufgestellt werden, zum anderen kann eine hohe Potentialdifferenz zwischen Messstelle und Ort der Auswertung bestehen.

Das leistungsorientierte Messprinzip ist allerdings empfindlich gegenüber zeitabhängigen Dämpfungen in der Zuleitungsfaser, die eine scheinbare Veränderung des Messsignals erzeugen. Derartige Dämpfungen können durch Faserstecker, Biegedämpfung, hochenergetische Strahlung etc. erzeugt werden.

Faser-Bragg-Gitter (FBG) bieten hier eine Lösung. Sie stellen ein frequenzmoduliertes Messsignal zur Verfügung, welches nahezu unabhängig von dessen Signalamplitude ausgewertet werden kann. Zudem sind diese Sensoren intrinsisch herstellbar, das heißt innerhalb der chemisch inerten und physikalisch sehr belastbaren Lichtleitfaser. Sie sind mit kleinen Abmessungen im Bereich weniger Millimeter Länge verfügbar und kommerziell erhältlich. Ihr größter Vorteil ergibt sich allerdings aus ihrer seriellen Multiplexierbarkeit. Dadurch können mehrere, typischerweise zehn bis zwanzig FBGs in einer einzelnen Lichtleitfaser im Abstand von wenigen Millimetern bis Kilometern abgefragt und ausgewertet werden. Für Kraft-Momenten-Sensoren, die auf eine Multiparametermessung angewiesen sind, um die bis zu sechs Freiheitsgrade zu erfassen, eröffnen sich hier interessante Möglichkeiten.

Erste Ansätze zum Einsatz von FBGs in der Kraft-Momenten-Sensorik wurden von Fernandez-Fernandez et al. [27] vorgestellt. Dessen auf einer Kreuzstruktur basierender Sensor ermöglicht die Erfassung von einer Kraft und zwei Momenten. Die lateralen Abmessungen des Sensors sind allerdings mit  $150\text{ mm} \times 150\text{ mm}$  sehr groß, die Miniaturisierbarkeit und damit die Anwendbarkeit der Kreuzstruktur beispielsweise in der MIRS ist offen. Dennoch zeigt der Ansatz die Machbarkeit eines Kraft-Momenten-Sensors auf Basis von Faser-Bragg-Gittern und damit die Nutzbarmachung der Vorteile von FBG-Sensoren für die KM-Sensorik.

Diese Arbeit greift die vorgestellten Forschungsansätze auf, mit dem Ziel ein Entwurfsverfahren für Kraft-Momenten-Sensoren auf Basis von Faser-Bragg-Gittern zu entwickeln, welches

- die Rekonstruktion der vollen sechs Freiheitsgrade der angreifenden Last ermöglicht,
- einfach für unterschiedliche Anwendungen skaliert werden kann,
- die Größenrandbedingungen der MIRS erfüllt und
- ein nach gewissen Maßgaben optimales Design automatisiert erzeugt.

Zur Erfüllung dieses Ziels müssen im Rahmen dieser Arbeit zahlreiche Grundlagenuntersuchungen zu Eigenschaften der Faser-Bragg-Gitter durchgeführt werden.

So wird erstmals eine Beschreibung von mechanisch belasteten Faser-Bragg-Gittern vorgestellt, die den vollständigen Satz geführter Moden der Lichtleitfaser berücksichtigt und damit den Einfluss von Schubverformungen beschreiben kann. Hierzu werden eine tensorielle Formulierung der Theorie der gekoppelten Moden verwendet und die fehlenden Koppelkoeffizienten abgeleitet. Zudem wird eine Formulierung des Problems für die Anwendung im Transfermatrix-Formalismus hergeleitet, die die Effizienz der numerischen Integration der gekoppelten Modengleichungen deutlich erhöht. Diese Formulierung beschreibt das mechanische Verhalten der Faser-Bragg-Gitter vollständig und bildet die Grundlage für die weiteren Untersuchungen sowie das Entwurfsverfahren.

Das Entwurfsverfahren wird aus einem linearen Modell eines Faser-Bragg-Gitter basierten KMS entwickelt. Dabei fließen Randbedingungen der Faser, wie beispielsweise das Einhalten minimaler Biegeradien, in das Verfahren ein. Das Verfahren nutzt das entwickelte Modell, um durch ein nichtlineares Optimierungsverfahren die Optimalkonfiguration des FBG-KMS zu errechnen. Als Entwurfsparameter kann beispielsweise das Zielvolumen des KMS vorgegeben werden, das als Randbedingung in die numerische Optimierung einfließt. Das Entwurfsverfahren wird angewendet um einen FBG-KMS mit den Abmessungen  $12 \text{ mm} \times 12 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$  zu entwerfen, der mit FBG-Sensoren instrumentiert ist.

Die Arbeit beginnt mit einer Einführung in die relevanten Grundlagen der Mechanik, Optik, Mechano-Optik sowie der Bragg-Gitter in optischen Wellenleitern in Kapitel 2. Es werden die erforderlichen Definitionen zur nichtlinearen Optimierung sowie die Kenngrößen von Kraft-Momenten-Sensoren erläutert.

Kapitel 3 stellt Untersuchungen zum Verhalten von Faser-Bragg-Gittern mit Relevanz für die Kraft-Momenten-Sensorik vor. Dabei wird ein mechano-optischer Simulator auf Basis der aufgestellten FBG-Schubverformungstheorie vorgestellt, der Ausgangspunkt der Simulation zahlreicher mechano-optischer Problemstellungen dieser Arbeit ist.

Das Entwurfsverfahren zum Entwurf des FBG-KMS und dessen Anwendung werden in Kapitel 4 beschrieben. Es wird eine Designstudie anhand eines Rapid-Prototyping Modells vorgestellt, die die Anwendbarkeit der abgeleiteten Designrichtlinien untersucht. Anschließend werden die Ergebnisse des

Entwurfsverfahrens aufgezeigt. Es wird ein aus dem Verfahren abgeleiteter Entwurf gefertigt und aufgebaut und damit das Entwurfsverfahren überprüft. Eine Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse und ein Ausblick auf weitere Arbeiten wird in Kapitel 5 gegeben.



# Kapitel 2

## Grundlagen und Stand der Technik

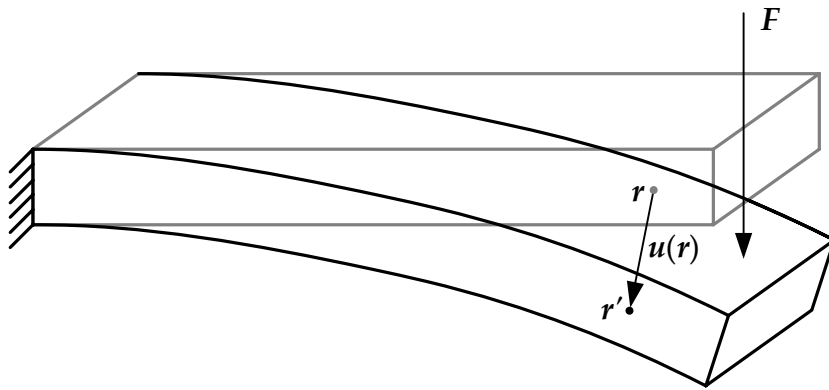
In diesem Kapitel soll eine Einführung in die wesentlichen Methoden dieser Arbeit gegeben werden. Definitionen, die im weiteren Text verwendet werden, werden hier zu großen Teilen eingeführt. Es werden in diesem Abschnitt eigene Ergebnisse dann vorgestellt, wenn dies dem thematischen Zusammenhang eines Abschnitts besonders dienlich ist. Anderenfalls werden eigene Ergebnisse in den späteren Kapiteln vorgestellt.

### 2.1 Mechanische Grundlagen

Die Mechanik bildet eine wichtige Säule dieser Arbeit, sowohl im Hinblick auf die Erweiterung des Verständnisses der mechano-optischen Eigenschaften von Faser-Bragg-Gittern, wie auch beim Entwurf der Struktur des Kraft-Momenten-Sensors. Die mechano-optischen Betrachtungen gehen vom klassischen Verzerrungstensor aus und gehen ins Besondere auf die bisher nicht berücksichtigten Auswirkungen der Schubverformungen auf die FBG-Sensorantwort ein. Die Wahl des Bezugssystems für die mechanische und optische Berechnung hängt dabei eng mit dem Auftreten der Schubverformungen zusammen. Hierfür wird in die Kontinuumsmechanik sowie die in Tensortransformation beim Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen eingeführt. Ein Abriss der Grundlagen der Starrkörpermechanik ist nachstehend gegeben. Diese sind für die Modellierung eines in dieser Arbeit vorgestellten Entwurfs eines faseroptischen Kraft-Momenten-Sensors von Bedeutung.

### 2.1.1 Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik betrachtet Feldgrößen, die Eigenschaften oder Zustände eines Körpers sind. Hierzu zählen skalare, vektorielle und tensorielle Größen. Beispiele für skalare Größen sind Druck und Temperatur, für vektorielle Größen Verschiebung und Geschwindigkeit und für tensorielle Größen Verzerrungen und Spannungen.



**Abbildung 2.1:** Deformation und Verzerrung eines elastischen Balkens bei angreifender Kraft  $F$ . Der Punkt im unverzerrten Zustand  $\mathbf{r}$  wird um den Vektor  $\mathbf{u}$  zum Punkt  $\mathbf{r}'$  verschoben.

Beispielhaft sei als Festkörper ein Kragbalken betrachtet, dessen Volumen durch die Ortskoordinaten  $\mathbf{r}$  beschrieben wird. Greifen verschiedene Lasten an diesem Körper an, so verschieben sich die Punkte im Volumen, die ursprünglich die Ortskoordinaten  $\mathbf{r}$  hatten zu den Koordinaten  $\mathbf{r}'$ . Der Verbindungsvektor, bzw. das Verschiebungsfeld dieser Punkte ist  $\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ . Haben zwei benachbarte Punkte unterschiedliche Verbindungsvektoren so entstehen Verzerrungen im Material. Haben beispielsweise alle Punkte eines Körpers den selben Verbindungsvektor, findet eine Starrkörperbewegung statt und der Körper bleibt unverzerrt. Diese Starrkörperbewegungen, die neben der Translation auch die Rotationen um drei Achsen beinhalten können, seien ausgenommen. Für kleine Verzerrungen können die Verzerrungen durch den *klassischen Verzerrungstensor* modelliert werden [28]. Dabei vernachlässigt man geometrische Nichtlinearitäten und gelangt zum klassischen Verzerrungstensor  $\bar{\mathbf{e}}(\mathbf{r})$ , der aus den Verschiebungen berechnet werden kann und symmetrische Form besitzt. Die Elemente  $e_{ij}$  von  $\bar{\mathbf{e}}$  sind gegeben durch [29]

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right). \quad (2.1)$$

Dabei stellen die  $e_{ii}$  die *Dehnungen* und die  $e_{ij}$ ,  $i \neq j$  die *Schubverformungen* oder *Scherungen* dar. Häufig werden die *Gleitungen*  $\gamma_{ij}$ ,  $i \neq j$  an Stelle der Schubverformungen verwendet, wobei gilt  $\gamma_{ij} = 2e_{ij}$ . Die Dehnungen stellen Dilatationen bzw. Stauchungen dar und können als das Verhältnis von Längenänderung zu Ausgangslänge angesehen werden.

Um von auf den Körper wirkenden Kräften zu den Dehnungen zu gelangen wird zunächst die Spannungsverteilung aufgrund der angreifenden Kräfte berechnet. Diese Spannungsverteilung wird durch den Spannungstensor  $\bar{\sigma}(\mathbf{r})$  dargestellt. Dessen Diagonalelemente werden als Hauptspannungen, die Nebendiagonalelemente als Schub- oder Scherspannungen bezeichnet. Der Spannungstensor ist wie der Dehnungstensor symmetrisch. Nimmt man die entstehenden Verzerrungen als klein an, so kann ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen im Material und den Verzerrungen angegeben werden

$$\bar{\sigma} = \bar{E} \cdot \bar{e} \quad \text{bzw.} \quad \bar{e} = \bar{E}^{-1} \cdot \bar{\sigma}, \quad (2.2)$$

wobei  $\bar{E}$  den *Elastizitätstensor* darstellt, der die Stoffeigenschaften des Körpers repräsentiert. Gleichung (2.2) wird auch das verallgemeinerte Hooksche Gesetz genannt. Als Tensor vierten Ranges besitzt  $\bar{E}$  insgesamt 81 Einträge, die sich für die in dieser Arbeit betrachteten Materialien auf zwei unabhängige Einträge reduzieren lassen [28]. Eine alternative Schreibweise der Tensorabbildung von Gleichung (2.2) kann mit  $\sigma_{ij} = E_{ijkl}e_{kl}$  angegeben werden. Hierbei wird über mehrfach auftretende Indizes summiert. Damit wird die Gleichung elementweise angegeben und erlaubt in vielen Fällen eine kompaktere Notation. Für die einfachere Zuordnung der Indizes zu den kartesischen Koordinaten wird in der Literatur häufig die Notation  $e_{11} = e_{xx}$  gewählt, also die Indizes durch die damit verbundenen Koordinaten ersetzt. Diese Notation wird in dieser Arbeit ebenfalls verwendet wo sie angebracht ist.

Für ein isotropes Material nimmt Gleichung (2.2) die explizite Form [30]

$$e_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \quad (2.3)$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \quad (2.4)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \quad (2.5)$$

$$e_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G}, \quad e_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G}, \quad e_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \quad (2.6)$$



an.  $E$  ist das *Elastizitätsmodul* oder kurz *E-Modul*,  $\nu$  ist die *Poissonzahl* oder auch *Querkontraktionszahl* und  $G$  ist das *Schubmodul* für das gilt  $G = E/(2(1 + \nu))$ .

### 2.1.2 Tensortransformationen

Untersucht man ein statisches mechanisches Problem und findet in einem gewissen Koordinatensystem als Lösung die Dehnungsverteilung  $\bar{\epsilon}(\mathbf{r})$ , so kann das Problem in Sinne des Hookschen Gesetzes als vollständig beschrieben angesehen werden. In dieser Arbeit werden solche Lösungen als Grundlage für die Berechnung der mechano-optischen Wechselwirkung herangezogen. Jedoch wird das optische Problem teilweise von anderer Seite angegangen, die noch zu beschreibenden Lösungen liegen demnach in einem beliebigen anderen Koordinatensystem vor. Um beide Lösungen in ein gemeinsames mathematisches Modell aufnehmen zu können, muss eine Transformation des Koordinatensystems durchgeführt werden. Diese Tatsache wird in der Literatur zu mechano-optischen Wechselwirkungen in Faser-Bragg-Gittern teilweise inkonsistent durchgeführt [31] [32] [33], weswegen sie an dieser Stelle explizit angegeben wird.

Die Transformation von Vektoren und Tensoren geschieht durch eine lineare Abbildung in der Form [34]

$$T'_{i_n} = t_{i_n j_n} t_{j_n i_n} T_{j_n}. \quad (2.7)$$

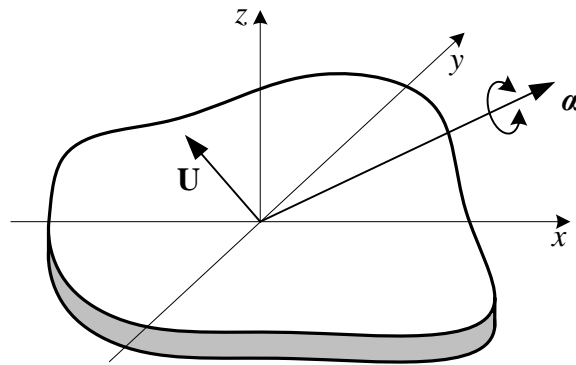
Hierbei stellt  $T'_{i_n}$  den Tensor im neuen Koordinatensystem und  $T_{j_n}$  den Tensor im alten Koordinatensystem dar.  $n$  wird dabei von eins bis zum Rang des Tensors gezählt,  $t_{ij}$  sind Transformationsmatrizen. Diese erfüllen

$$u'_i = t_{ij} u_j, \quad (2.8)$$

wobei  $u'_i$  die Einheitsvektoren im neuen,  $u_i$  die im alten Koordinatensystem sind.

Als Beispiel, welches in dieser Arbeit wieder aufgegriffen wird, sei die Transformation von einem Koordinatensystem in ein um die  $z$ -Achse rotiertes gegeben. Das zu rotierende Objekt sei der Dehnungstensor. Für diese Transformation sind die Transformationsmatrizen durch die bekannten Drehmatrizen  $R$  gegeben und die Transformation für den Tensor zweiten Ranges lautet [35]

$$\bar{\epsilon}' = R \cdot \bar{\epsilon} \cdot R^{-1} \quad \text{bzw.} \quad e'_{ij} = R_{ki} R_{jl} e_{kl}. \quad (2.9)$$



**Abbildung 2.2:** Die Freiheitsgrade des Starrkörpers dargestellt durch den Translationsvektor  $\mathbf{U}$  und den Rotationsvektor  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Es ist leicht zu sehen, dass durch die Transformation eines diagonalen Tensors mit den Drehmatrizen, die im allgemeinen keine diagonale Form besitzen, Nebendiagonalelemente im neuen Koordinatensystem entstehen. Physikalisch gesprochen bedeutet dies, dass ein Dehnungszustand, der beispielsweise eine reine Dehnung entlang der  $x$ -Achse repräsentiert ( $e_{xx} \neq 0$ ,  $e_{ij} = 0$ , sonst), durch die Wahl eines neuen Koordinatensystems zu einem Dehnungszustand mit Schubverformungen wird. Dies wird eine wichtige Rolle bei der Modellierung von querbelasteten Faser-Bragg-Gittern spielen.

### 2.1.3 Starrkörpermechanik

Vernachlässigt man die internen Freiheitsgrade eines Körpers, wie sie durch den ortsabhängigen Verbindungsvektor gegeben sind, so reduzieren sich die Freiheitsgrade des Körpers auf die des *Starrkörpers*. Dieser besitzt als Freiheitsgrade der Bewegung nurmehr die Translation sowie die Rotation und demnach sechs Freiheitsgrade. Das Modell Starrkörper kann erfolgreich eingesetzt werden, wenn die stets auftretenden internen Deformationen eines Körpers für die Anwendung vernachlässigbar sind.

Die Translationen des Starrkörpers werden durch den Translationsvektor  $\mathbf{U}$  dargestellt. Die Rotationen können durch einen Vektor  $\boldsymbol{\alpha}$  parallel zur Rotationsachse beschrieben werden, dessen Länge den Drehwinkel angibt. Die sechs Freiheitsgrade lassen sich in einem Bewegungsvektor  $\mathbf{R} = \{\mathbf{U}^T, \boldsymbol{\alpha}^T\}^T$  zusammenfassen, was später auftauchende Formulierungen übersichtlicher macht. Man gelangt von einem bekannten Bewegungsvektor auf das Verschiebungs-

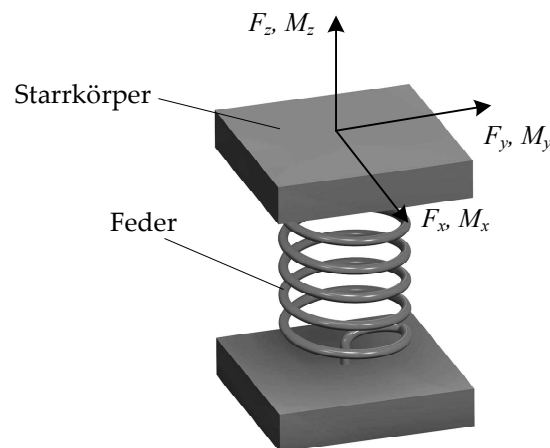
feld im Körper durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{U} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\alpha}. \quad (2.10)$$

Greifen an dem Starrkörper Lasten an, so können diese durch einen Kraftanteil  $\mathbf{F}$  und einen Drehmomentenanteil  $\mathbf{M}$  bezogen auf einen Punkt im Körper dargestellt werden [35]. Diese Kräfte verursachen zunächst eine Beschleunigung des Körpers. Befindet sich der Starrkörper in einem Potential, das durch eine lineare Feder dargestellt werden kann, so stellt sich eine Gleichgewichtslage ein. Diese Gleichgewichtslage kann beschrieben werden durch

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{f}, \quad (2.11)$$

wobei  $\mathbf{f} = \{\mathbf{F}^T, \mathbf{M}^T\}^T$ , den zusammengefassten Lastvektor darstellt. Die Matrix  $\mathbf{K}$  kann als linearer Federterm interpretiert werden und wird als *Steifigkeitsmatrix* bezeichnet. Die Diagonalelemente stellen die Wirkung einer angreifenden Last auf die Wirkrichtung dieser Last dar.



**Abbildung 2.3:** Modell eines Starrkörpers, der an eine allgemeine lineare Feder gekoppelt ist. Durch angreifende Kräfte und Momente verformt sich die Feder und der Starrkörper bewegt sich entsprechend seiner sechs Freiheitsgrade.

So erzeugt eine Kraft  $F_x$  bei einer diagonalen Steifigkeitsmatrix eine reine Translation in  $x$ -Richtung. Entsprechendes gilt für die Drehmomente, die demnach reine Rotationen erzeugen. Im allgemeinen wird die Feder auch Nebendiagonalelemente aufweisen. Diese führen beispielsweise bei einer Kraft  $F_x$  neben der reinen Translation zu einer Rotation. Für den Entwurf eines Kraft-Momenten-Sensors, der teilweise als Starrkörper-Feder-Modell beschrieben werden kann, ist dieses Verhalten von Bedeutung.

## 2.2 Optische und mechano-optische Grundlagen

Dieser Abschnitt führt in die Grundlagen der Optik geführten Lichts ein, soweit es für die Untersuchungen dieser Arbeit notwendig ist. Dazu wird zunächst die Modellierung der Lichtausbreitung in idealisierten Wellenleitern im Rahmen der elektromagnetischen Feldtheorie aufgezeigt. Zur Beschreibung der mechanischen und thermischen Einflüsse, denen die untersuchten Sensoren unterliegen, wird in die Theorie der mechano-optischen Wechselwirkungen eingeführt.

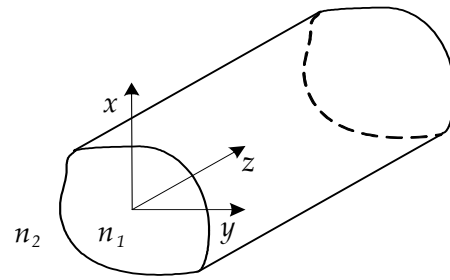
### 2.2.1 Lichtausbreitung in dielektrischen Wellenleitern

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Beschreibung elektromagnetischer Felder in dielektrischen Wellenleitern. Die Feldverteilungen können aus den Maxwellgleichungen abgeleitet werden. Ein Ansatz hierzu ist, eine Wellengleichung aus den Maxwellgleichungen abzuleiten, deren Lösungen unter Berücksichtigung der dielektrischen Randbedingungen die *elektromagnetischen Moden* des Wellenleiters ergeben.

Das Problem des dielektrischen Wellenleiters wird durch den ortsabhängigen Permittivitätstensor zweiten Ranges  $\bar{\epsilon}(\mathbf{r})$  dargestellt. Im allgemeinen können nichtlineare optische Effekte durch Tensoren höheren Ranges beschrieben werden [36]. In dieser Arbeit wird angenommen, dass lediglich linear optische Effekte auftreten, so dass  $\bar{\epsilon}$  als Tensor zweiten Ranges alle Effekte beschreiben kann. Zudem werden ausschließlich als verlustlos beschreibbare Medien betrachtet, so dass  $\bar{\epsilon}$  reel ist. Der Permittivitätstensor ist aus Energieerhaltungsgründen symmetrisch [37] so dass  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ . Eine weitere Annahme über die optischen Materialeigenschaften ist eine relative magnetische Permeabilität  $\bar{\mu}_r \equiv 1$ .

In der Optik ist der Gebrauch der Brechungsindizes weiter verbreitet als der der Permittivität. Der Zusammenhang zwischen den Brechungsindizes  $n_{ij}$  und dem Permittivitätstensor ist gegeben durch  $n_{ij}^2 = \epsilon_{ij}$  [38] [39]. Die Brechungsindizes können zwar formal in einer Matrix geschrieben werden, stellen jedoch keinen Tensor dar. Dies ist bei der Transformation zwischen Koordinatensystemen, wie sie in dieser Arbeit angewendet wird, zu beachten. Daher werden in dieser Arbeit Brechungsindex und Permittivität parallel verwendet.

In der Literatur werden die Feldverteilungen für zahlreiche Typen von di-



**Abbildung 2.4:** Beispiel eines dielektrischen Wellenleiters mit konstanter Permittivität im Bereich eins ( $n_1$ ), der als Kern bezeichnet wird und dem Bereich zwei ( $n_2$ ), der als Mantel bezeichnet wird.

elektrischen Wellenleitern angegeben [40][41][42][43][44]. Dabei wird angenommen, dass die Geometrie des Wellenleiters sich in mindestens einer Raumrichtung nicht ändert. Typischerweise ist diese Richtung die  $z$ -Richtung und stellt die Ausbreitungsrichtung des Lichts dar. Für die Geometrie des Wellenleiters ergibt sich hieraus, dass  $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(x, y)$ . Zudem wird für die Herleitung der elektromagnetischen Moden von einem isotropen optischen Materialverhalten ausgegangen, so dass die Permittivität die Form annimmt:  $\bar{\epsilon} \equiv \epsilon \delta_{ij}$ , wobei  $\delta_{ij}$  das Kroneckersymbol, bzw. die Einträge des Einheitstensors darstellt.

Gesucht sind die Lösungen des elektrischen bzw. magnetischen Feldes  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  bzw.  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Für die gemachten Annahmen und für den Fall sich "wenig" über dem Ort ändernder Permittivität ( $\nabla \cdot \bar{\epsilon} \approx 0$ ) kann hierzu die aus den Maxwellgleichungen abgeleitete Wellengleichung vereinfacht werden. Zudem kann die Zeitabhängigkeit der Felder durch eine Fouriertransformation in der Form  $\exp(-i\omega t)$  ausgedrückt werden, wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz des elektromagnetischen Feldes ist. Die Wellengleichung nimmt dann für das elektrische Feld die Form an [45]

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \epsilon k_0^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.12)$$

wobei  $k_0 = \omega/c_0$  ist und  $c_0$  die Lichtgeschwindigkeit darstellt. Für die  $z$ -Abhängigkeit der Felder ergibt sich durch einen Produktansatz der Term  $\exp(\pm i\beta_m z)$ , wobei  $\beta_m$  als *Ausbreitungskonstante* und  $m$  als *Modenindex* bezeichnet wird [40]. Das Vorzeichen gibt die Ausbreitungsrichtung an.

Für die Abhängigkeit von den transversalen Koordinaten ergibt sich eine Funktion  $\mathbf{E}_m(x, y)$ , die vom Modenindex abhängt und je nach Wellenleitergeometrie eine andere Form annimmt. Die gesamte Feldverteilung kann dann dargestellt werden durch eine Superposition aller möglichen Moden, gewichtet mit zugeordneten Amplitudenkoeffizienten  $A_m$ . Dies ergibt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_m A_m \mathbf{E}_m(x, y) e^{\pm i\beta_m z} + \int_{-\infty}^{\infty} A_\nu \mathbf{E}_\nu(x, y) e^{\pm i\beta_\nu z} d\nu \quad (2.13)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_m A_m \mathbf{H}_m(x, y) e^{\pm i\beta_m z} + \int_{-\infty}^{\infty} A_\nu \mathbf{H}_\nu(x, y) e^{\pm i\beta_\nu z} d\nu. \quad (2.14)$$

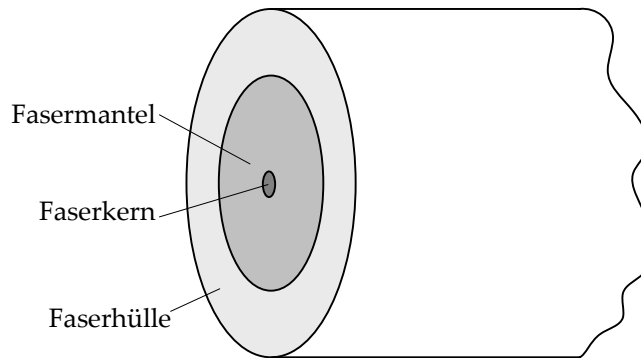
Der Modenindex  $\nu$  ist kontinuierlich und stellt die Strahlungsmoden des Wellenleiters dar. Die Anzahl der diskreten Moden ist beschränkt durch die Wellenleitergeometrie. Mit den Gleichungen (2.13) lässt sich jede beliebige elektromagnetische Feldverteilung darstellen, der Modensatz ist vollständig.

Betrachtet man beispielhaft den Fall des leeren Raumes, so sind die Lösungen der Wellengleichung ebene Wellen. Da die Ausbreitungsrichtung nicht durch die Geometrie festgelegt ist, kann  $\beta$  kontinuierliche Werte annehmen. Eine Eigenschaft von Wellenleitern ist, dass ein Teilspektrum von  $\beta$  diskrete Werte annimmt. In der Literatur zu Fasersensoren ist die Verwendung der *effektiven Brechzahl*  $n_{\text{eff}}$  gebräuchlich. Die effektive Brechzahl eines Modus  $n_{\text{eff},m}$  ist der Faktor, um den sich dieser Modus langsamer als das Licht im Vakuum ausbreitet. Er kann aus der Ausbreitungskonstanten des Modus berechnet werden mittels

$$n_{\text{eff},m} = \frac{\beta_m}{k_0} \quad (2.15)$$

Die Gleichungen (2.13) scheinen zunächst für den praktischen Umgang schwerfällig. Jedoch wird für den praktischen Gebrauch eine Reduktion der Modenzahl durchgeführt. So werden nur die Moden berücksichtigt, die "vermutlich" notwendig für die Darstellung des elektromagnetischen Problems sind. Diese Reduktion ist nicht unkritisch, da hierbei leicht relevante Phänomene übersehen werden können, wie in dieser Arbeit im Falle von schubverformten Faser-Bragg-Gittern deutlich wird. Dabei ist die Beschränkung auf einen einzelnen Modus und dessen rückwärts propagierenden Modus in Monomodenfasern eine zu starke Beschränkung, die Polarisierungseffekte nicht erfassen kann. Diese können erst durch eine Erweiterung des Modensatzes auf insgesamt vier Moden beschrieben werden.

Im folgenden Text werden nun knapp ein paar für diese Arbeit besonders relevante Moden dielektrischer Wellenleiter diskutiert.



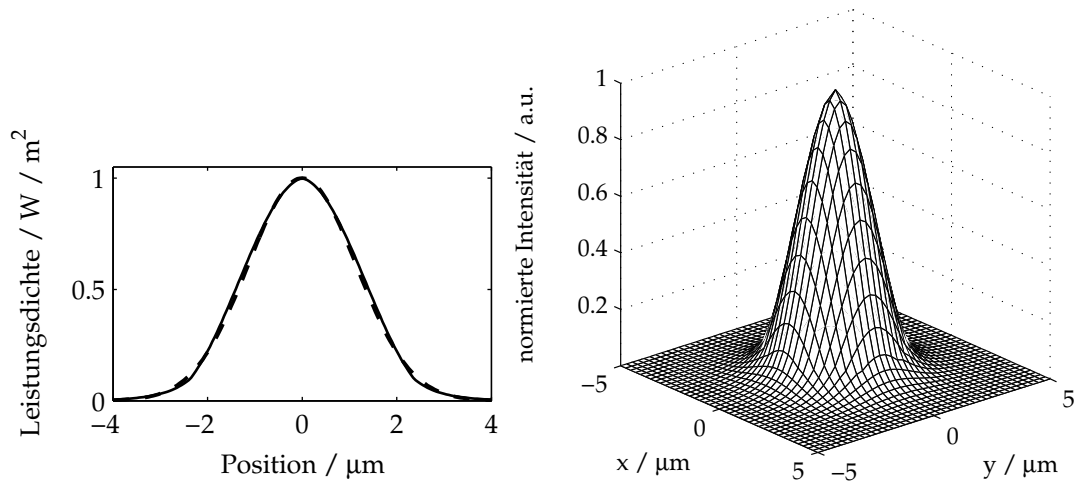
**Abbildung 2.5:** Aufbau einer Monomodenfaser aus dem Faserkern mit einem Durchmesser von ca. 6-10  $\mu\text{m}$ , dem Mantel mit 125  $\mu\text{m}$  und der Faserhülle mit ca. 250  $\mu\text{m}$  Durchmesser.

### Monomodenfasern

Theoretische Untersuchungen zu "dielektrischen Drähten" datieren beinahe 100 Jahre zurück [46]. Optische Monomodenfasern können als solche dielektrischen Drähte angesehen werden und sind ein Spezialfall der dielektrischen Wellenleiter, die rotationssymmetrische Form aufweisen. Der *Kern* mit Radius  $a$  der Faser besitzt einen Brechungsindex  $n_1$ , der einen Wert von etwa 1,46 aufweist und einige Promille über dem des ihn umgebenden *Mantels* liegt [47]. Der Durchmesser des Kerns ist so gestaltet, dass für den spezifizierten Wellenlängenbereich nur ein Typ von Modus ausbreitungsfähig ist. Dieser wird als  $\text{HE}_{11}$  Modus oder  $\text{LP}_{01}$  Modus bezeichnet [40] und besitzt zum einen eine vorwärts und eine rückwärts propagierende Komponente, zum anderen existiert noch ein zweiter *Polarisationsmodus* mit gleicher oder auch entarteter Ausbreitungskonstante, jedoch orthogonaler Polarisation.

Sinkt die Wellenlänge  $\lambda$  des eingekoppelten Lichts unter eine normierte Frequenz  $V = (2\pi a/\lambda)\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  von 2,4 ab, so können sich höhere Moden ausbreiten und der Wellenleiter wird echt multimodig [48]. Eine untere Grenzfrequenz besitzen dielektrische Wellenleiter jedoch nicht, allerdings ändern sich die Leitungseigenschaften (Biegeverluste), wie noch dargestellt wird.

Spätere Betrachtungen der Modenkopplung in gestörten Wellenleitern bedürfen der Kenntnis der genauen Feldverteilung der Moden. Für die Monomodenfasern sind analytische Lösungen der Wellengleichung (2.12) bekannt [44]. Für diese Lösungen existieren wiederum sehr gute Näherungen, die den rechnerischen Umgang mit den Feldern vereinfachen. Eine Näherung, die in dieser Arbeit Anwendung findet, ist die der schwachen Führung. Hierbei wird



**Abbildung 2.6:** Feldverteilung des HE<sub>11</sub> Modus bei  $\lambda = 800$  nm und  $a = 2,5$   $\mu\text{m}$ . Die Approximation mit einer Gauß Funktion ist strichliert dargestellt.

angenommen, dass der Brechzahlunterschied zwischen Kern und Mantel gering ist. Die Felder sind dann nahezu linear polarisiert, so dass sie nurmehr eine Vektorkomponente besitzen [49]. Für die beiden orthogonal polarisierten Grundmoden werden diese als HE<sub>11</sub><sup>x</sup> mit ausschließlich der Komponente  $E_x$  und HE<sub>11</sub><sup>y</sup> mit ausschließlich der Komponente  $E_y$  bezeichnet.

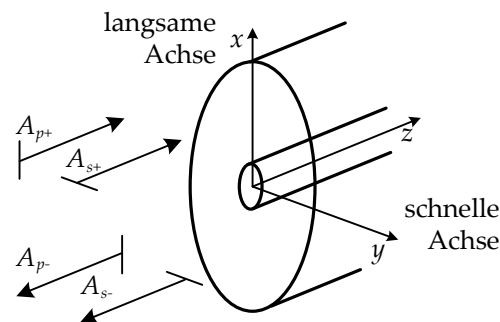
Für beide Polarisationsrichtungen existieren zwei Ausbreitungsrichtungen, so dass sich für die Monomodenfaser vier unabhängige Amplitudenkoeffizienten ergeben. Diese werden für die Berechnungen dieser Arbeit in einem Vektor

$$\mathbf{A} = \{A_{p+}, A_{p-}, A_{s+}, A_{s-}\} \quad (2.16)$$

zusammengefasst. Die Komponente  $A_{p+}$  bezeichnet die Amplitude des parallel zu  $x$ -Achse polarisierten Modus, der sich in positive  $z$ -Richtung ausbreitet,  $A_{s-}$  die Amplitude des senkrecht zur  $x$ -Achse polarisierten Modus der sich in die negative  $z$ -Richtung ausbreitet. Die anderen beiden Amplituden sind sinngemäß definiert, siehe hierzu Abbildung 2.7.

Die räumliche Verteilung der Felder konzentriert sich um den Kern der Faser und folgt in radialer Richtung den Bessel Funktionen erster Art im Kern und den modifizierten Hankelfunktionen [50] im Mantel. Die Feldverteilung für den HE<sub>11</sub> Modus ist in Abbildung 2.6 gezeigt. Es wird klar, dass das elektromagnetische Feld auf einen kleinen Bereich um den Kern konzentriert ist. Dies ist im Hinblick auf den Wirkungsbereich von Störungen im Wellenleiter bedeutsam, da nur Störungen im Bereich des Kerns zu nennenswerten Ein-





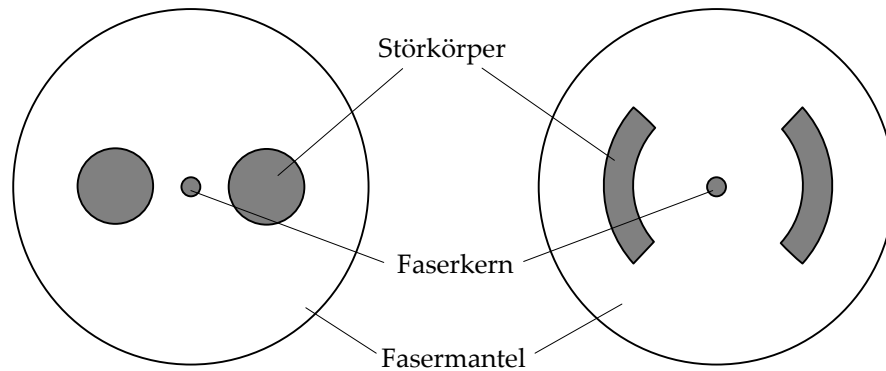
**Abbildung 2.7:** Definition der Amplituden der geführten Moden einer Monomodenfaser und polarisationserhaltenden Faser.

flüssen auf die optischen Eigenschaften der Faser führen. Eine gute Näherung der Feldverteilung ist die in Abbildung 2.6 abgebildete Gaußfunktion [47].

### Polarisationserhaltende Fasern

Wegen der Entartung der Ausbreitungskonstanten der Polarisationsmoden der Monomodenfaser können diese durch leichte Störungen bereits koppeln, wie im nächsten Abschnitt deutlich wird [51]. Diese Kopplung entspricht einer Drehung der Polarisationsrichtung. Der genaue Betrag der Drehung hängt dabei von der Stärke und Art der Störung ab, z.B. der Krümmung der Faser, die oftmals nicht genau bekannt sind [52]. Dadurch ergibt sich eine schwer vorherzusehende Ausgangspolarisation nach Durchlaufen eines Faserstücks. Der Polarisationsmodenkopplung lässt sich entgegenwirken, indem die Entartung der Moden aufgehoben wird. Dies geschieht durch das Einbringen einer Anisotropie in den Wellenleiter. Diese kann entweder geometrisch gestaltet sein, kann also die Form der Faser ändern oder durch die Wahl oder Erzeugung eines anisotropen Materials erfolgen. Die Regel ist eine Kombination aus beidem [53] [54], wobei typischerweise durch die Ausnutzung von noch zu beschreibenden photo-elastischen Effekten die Anisotropie mittels spannungserzeugender Störkörper in der Faser erzielt wird. Ausgestaltungsformen dieser *polarisationserhaltenden* Fasern sind in Abbildung 2.8 gezeigt.

Die Wirkung der Anisotropie schlägt sich im Permittivitätstensor nieder, der im System seiner Hauptwerte ungleiche Diagonaleinträge erhält. In der Optik wird dies mit Doppelbrechung bezeichnet. Das führt zu unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten für die beiden Polarisationsrichtungen im Medium [55] und damit zu zwei unterschiedlichen Ausbreitungskonstanten, bzw.



**Abbildung 2.8:** Typen von polarisationserhaltenden Fasern, wie sie in dieser Arbeit verwendet werden. Links: Bow-Tie Faser, Rechts: Panda Faser. Beide besitzen die dunkel dargestellten spannungserzeugenden Elemente, die zu einem anisotropen Permittivitätstensor führen.

Ausbreitungsgeschwindigkeiten der beiden Polarisationsmoden. Die Achsen werden gemäß ihrer Ausbreitungsgeschwindigkeit als schnelle und langsame Achse bezeichnet. Die Definition der Achsen im Koordinatensystem dieser Arbeit ist in Abbildung 2.7 gegeben. Es wird angenommen, dass die langsame Achse ursprünglich in  $x$ -Richtung ausgerichtet ist. Das Maß der Doppelbrechung wird in der Literatur verschiedenartig angegeben. Am gebräuchlichsten ist die Verwendung der *Beat Length* [56] oder *Polarisations-Schwebungslänge* [50]  $L_B$

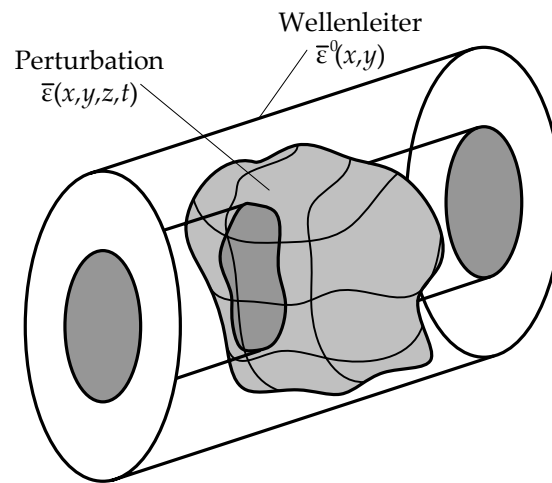
$$L_B = 2\pi / \Delta\beta, \quad (2.17)$$

wobei  $\Delta\beta$  die Differenz der beiden Ausbreitungskonstanten  $\beta_x$  und  $\beta_y$  bezeichnet [54]. Diese gibt die Länge der Faser an, nach deren Durchlauf der  $HE_{11}^x$  und der  $HE_{11}^y$  Modus wieder die gleiche Phasenlage besitzen. Typische in der faseroptischen Sensorik verwendete Werte sind  $L_B \approx 5$  mm.

Zum Unterschied der effektiven Brechungsindizes der beiden Polarisationsmoden gelangt man mit Gleichung (2.15) und erhält

$$\Delta n_{\text{eff}} = \frac{\lambda}{L_B}. \quad (2.18)$$

Die Anisotropie der Faser ändert die transversalen Feldverteilungen der Grundmoden  $\mathbf{E}_m(x, y)$  der Monomodenfaser. Die Änderungen des Permittivitätstensors für die für diese Arbeit relevanten Fälle sind sehr klein. Das prinzipielle, gaußförmige Aussehen geht daher nicht verloren, und die Gaußfunktion stellt nach wie vor eine gute Approximation der Felder dar [49]. In dieser Arbeit werden bei Berechnungen die von den Moden der polarisationserhaltenden



**Abbildung 2.9:** Störung des idealisierten Wellenleiters mit Permittivitätsverteilung  $\bar{\epsilon}^0(x, y)$  durch eine Perturbation, dargestellt durch den Permittivitätstensor  $\bar{\epsilon}(x, y, z, t)$

Faser Gebrauch machen keine Unterscheidungen zwischen den transversalen Feldverteilungen der Polarisationsmoden gemacht.

## 2.2.2 Störungen des idealisierten Wellenleiters

Die im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Wellenleiter waren unendlich und homogen in Ausbreitungsrichtung des Lichts ausgedehnt. Hierfür wurde die zweidimensionale Permittivitätsverteilung  $\bar{\epsilon}(x, y)$  eingeführt. Betrachtet man Störungen im Wellenleiter, die sich in der Form  $\bar{\epsilon}(x, y, z, t)$  äußern, so kann ein Energieaustausch zwischen den Wellenleitermoden auftreten. Die Dynamik dieses Austausches kann im Rahmen der *Theorie der gekoppelten Moden* behandelt werden (CMT - "Coupled Mode Theory"). Die CMT kann rigoros aus den Maxwellgleichungen hergeleitet werden [57] und ist ihnen äquivalent, solange eine vollständige Modenbasis berücksichtigt wird [58][49]. Sie ist dabei die theoretische Methode, die am umfassendsten auf Austauschphänomene in optischen Wellenleitern angewendet wurde [59].

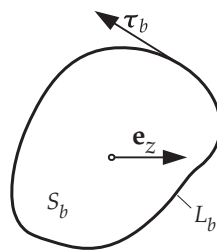
Für die verwendeten Wellenleiter wird im Folgenden der Formalismus der CMT dargestellt. Grundlegende Näherungen werden dabei hier vorgestellt. Die teilweise notwendigen weiteren Näherungen für die Berechnungen in dieser Arbeit werden in den jeweiligen Abschnitten durchgeführt.

Der erste Schritt der Analyse eines elektromagnetischen Problems im Rahmen der Theorie der gekoppelten Moden ist es, die Moden des ungestörten

Wellenleiters zu finden. Wie bereits diskutiert wurde stellen diese Moden einen vollständigen Satz an Funktionen dar, die jede Feldverteilung darstellen können, ins Besondere auch das Feld des gestörten Wellenleiters. Die Idee der CMT ist es nun, die Amplituden der Moden  $A_m$  entlang der Ausbreitungsrichtung  $z$  so zu ändern, dass an jedem Punkt  $z$  die Summe der Moden das elektromagnetische Feld des gestörten Leiters darstellt. Dabei tauschen die Moden untereinander Energie aus, während sie entlang  $z$  propagieren. Das Maß des Energieaustauschs ist bestimmt von einem System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit nichtlinearen Koeffizienten, den *gekoppelten Modengleichungen* (CME - "Coupled Mode Equations"). Im Weiteren werden nurmehr die Moden mit diskreten Ausbreitungskonstanten betrachtet. Dies beschränkt folgende Betrachtungen auf geführte Moden. Die gekoppelten Modengleichungen lauten dann [57]

$$\frac{dA_m}{dz} = \sum_n \gamma_{mn} e^{i(\beta_m - \beta_n)z} \cdot A_n. \quad (2.19)$$

Der Energieaustausch oder genauer das Amplitudenübersprechen zwischen den Moden  $m$  und  $n$  ist durch einen *Koppelkoeffizienten*  $\gamma_{mn}$  bestimmt, der aus der Permittivitätsverteilung des gestörten Wellenleiters berechnet werden kann. Die Ausbreitungskonstanten  $\beta_m$  sind bereits vorab bekannt, so dass die Berechnung der Koppelkoeffizienten bei der Lösung der CME neben der Lösung des Differentialgleichungssystems den größten Aufwand darstellt.



**Abbildung 2.10:** Die Wellenleiterquerschnittsfläche  $S_b$  wird von  $L_b$  umrandet. Der Einheitsvektor  $\mathbf{e}_z$  steht senkrecht auf  $S_b$ .  $\tau_b$  stellt den Tangenteneinheitsvektor zu  $L_b$  dar.

Die Koppelkoeffizienten werden aus der Feldverteilung in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{E}_m(x, y)$  und der Störung des Permittivitätstensors  $\Delta\bar{\epsilon}$  berechnet. Die Störung  $\Delta\bar{\epsilon}$  ist gegeben durch

$$\Delta\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(x, y, z, t) - \bar{\epsilon}^0(x, y), \quad (2.20)$$

wobei  $\bar{\epsilon}(x, y)^0$  den ungestörten Wellenleiter bezeichnet. In dieser Arbeit werden die Auswirkungen von mechanischen Einflüssen auf optische Wellenleiter untersucht, deren zeitliche Änderung im Vergleich zur Ausbreitungsdauer des Lichts durch die relevanten Strukturen gering ist.

Daher wird der quasistatische Fall angenommen, in dem für die Störung  $\bar{\epsilon}(x, y, z, t) = \bar{\epsilon}(x, y, z)$  gilt. Für die Koppelkoeffizienten ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \gamma_{mn} = & -\frac{i\omega\epsilon_0}{N_m} \int_{S_b} \left[ \mathbf{E}_{mt}^* \cdot (\Delta\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_n)_t + \right. \\ & + \frac{\epsilon}{\epsilon + \Delta\epsilon_{zz}} \left( \mathbf{E}_{mz}^* - \mathbf{E}_{mt} \cdot \frac{(\Delta\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{e}_z)_t}{\epsilon} \right) (\Delta\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_n)_z \left. \right] dS - \\ & - \frac{1}{N_m} \int_{L_b} (\mathbf{H}_m^* \cdot \boldsymbol{\tau}_b) \frac{(\Delta\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_n)_z}{\epsilon + \Delta\epsilon_{zz}} dl. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Flächenintegrale erstrecken sich über die Querschnittsfläche  $S_b$  mit der Umrandung  $L_b$ , wie sie in Abbildung 2.10 gezeigt sind. Der Index  $t$  bezeichnet die transversalen Feldkomponenten,  $'^*$  steht für komplexe Konjugation,  $\mathbf{e}_z$  ist der Einheitsvektor in die Ausbreitungsrichtung und  $\boldsymbol{\tau}_b$  ist der Einheitsvektor, der tangential auf der Umrandung  $L_b$  steht. Die skalaren Permittivitäten  $\epsilon$  bezeichnen die Permittivität des als isotrop angenommenen ungestörten Wellenleiters.  $N_m$  ist eine Normalisierungskonstante, die man aus der Feldverteilung des  $m$ -ten Modus erlangt und die für verlustlose Wellenleiter lautet

$$N_m = 2 \Re \left\{ \int_S (\mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_m) \cdot \mathbf{e}_z dS \right\}, \quad (2.22)$$

wobei sich das Oberflächenintegral über die gesamte Querschnittsfläche erstreckt.

Bei bekannter Modenbasis und Permittivitätsstörung kann somit mittels der Theorie der gekoppelten Moden das optische Problem eines mechanisch gestörten Wellenleiters vollständig beschrieben werden. Es bedarf lediglich einer Theorie, die zwischen den bereits beschriebenen mechanischen Lasten und der Änderung des Permittivitätstensors vermittelt.

### 2.2.3 Mechanische Einflüsse auf den Wellenleiter

#### Der photo-elastische Effekt

In dem 1906 erschienenen *Lehrbuch der Kristalloptik* von Friedrich Pockels [60] wird in die Thematik der mechano-optischen und thermo-optischen Wechselwirkungen eingeführt. Der dargestellte Ansatz der Photoelastizität verknüpft die Verzerrungen  $\bar{\epsilon}$ , bzw. die Spannungen  $\bar{\sigma}$  mit den Änderungen des Permittivitätstensors bzw. des Impermeabilitätstensors  $\bar{B}$  auf die allgemeinste lineare Weise durch [38][39]

$$\Delta B_{ij} = p_{ijkl} e_{kl} \quad \Delta B_{ij} = \pi_{ijkl} \sigma_{kl} \quad p_{ijrs} = \pi_{ijkl} E_{klrs}. \quad (2.23)$$

Hierbei sind die  $p_{ijkl}$  die elasto-optischen oder photo-elastischen Koeffizienten, auch Pockelskoeffizienten genannt und  $\pi_{ijkl}$  sind die piezo-optischen Konstanten. Beide Tensoren vierten Ranges stehen über den Elastizitätstensor in Beziehung. Die  $\Delta B_{ij}$  stellen die Änderungen der Koeffizienten des Impermeabilitätstensors dar. Beide Tensoren sind verknüpft über [38]

$$\bar{\epsilon} = (\bar{B})^{-1}. \quad (2.24)$$

Gleichung (2.23) vernachlässigt Effekte höherer Ordnung, wie sie bei sehr starken Verzerrungen auftreten können. Im Rahmen dieser Arbeit werden jedoch nur Dehnungen im Gültigkeitsbereich des Hookschen Gesetzes betrachtet. Somit kann Gleichung (2.23) als gute Näherung betrachtet werden.

Da nur 36 Einträge des photo-elastischen Tensors unabhängig sind und die damit abgebildeten Tensoren zweiten Ranges symmetrisch sind [37], kann die Tensorabbildung vierten Ranges (2.23) als zweidimensionale Matrix dargestellt werden. Hierbei geht jedoch der Tensorcharakter der Abbildung verloren, also die Transformationseigenschaften der Rechengrößen. Diese Notation wird nach Woldemar Voigt auch voigtsche Notation genannt [61]

$$\begin{pmatrix} \Delta B_1 \\ \Delta B_2 \\ \Delta B_3 \\ \Delta B_4 \\ \Delta B_5 \\ \Delta B_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ p_{61} & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Die Indizes  $i = 1, 2, 3$  können mit den Tensoreinträgen zweiten Ranges  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  identifiziert werden, die Indizes  $i = 4, 5, 6$  mit den Einträgen  $a_{23}, a_{13}$  und  $a_{12}$ .

Betrachtet man die photo-elastischen Konstanten von isotropen Materialien, so kann der photo-elastische Tensor stark vereinfacht werden. Die verwendeten Materialien genügen dabei [38]

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(p_{11} - p_{12}) \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Somit sind die photo-elastischen Effekte nurmehr von den Konstanten  $p_{11}$  und  $p_{12}$  abhängig. Diese wurden von Bertholds et al. für Glasfasern bestimmt [62]. Die erforderliche Störung des Permittivitätstensors wird hier explizit für kleine Störungen der Permittivität abgeleitet

$$\Delta\varepsilon_{xx} \approx -(\varepsilon_{xx}^0)^2 (p_{11}e_{xx} + p_{12}(e_{yy} + e_{zz})) \quad (2.27)$$

$$\Delta\varepsilon_{yy} \approx -(\varepsilon_{yy}^0)^2 (p_{11}e_{yy} + p_{12}(e_{xx} + e_{zz})) \quad (2.28)$$

$$\Delta\varepsilon_{zz} \approx -(\varepsilon_{zz}^0)^2 (p_{11}e_{zz} + p_{12}(e_{xx} + e_{yy})) \quad (2.29)$$

$$\Delta\varepsilon_{yz} \approx -\varepsilon_{yy}^0 \varepsilon_{zz}^0 p_{44} e_{yz} \quad (2.30)$$

$$\Delta\varepsilon_{xz} \approx -\varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{zz}^0 p_{44} e_{xz} \quad (2.31)$$

$$\Delta\varepsilon_{xy} \approx -\varepsilon_{xx}^0 \varepsilon_{yy}^0 p_{44} e_{xy}. \quad (2.32)$$

Es zeigt sich, dass in isotropen Materialien die Nebendiagonaleinträge von  $\bar{\varepsilon}$  nur durch Schubverformungen im Material hervorgerufen werden.

In der theoretischen Behandlung der mechanischen Belastung der in dieser Arbeit verwendeten Wellenleiterstrukturen ist die Verwendung der Brechungsindizes anstelle des Permittivitätstensors üblich [32][63][64]. Ein Grund hierfür ist sicher die weite Verbreitung der Verwendung der Brechungsindizes in der Optik allgemein. Der Vollständigkeit halber wird hier der linearisierte Zusammenhang zwischen beiden Darstellungen für die Photoelastizität abgeleitet. Dieser kann aus dem Ansatz  $\bar{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}}^{-1} \equiv n_{ij}^2$  und  $\Delta\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}}^0$  sowie  $\Delta n_{ij} = n_{ij} - n_{ij}^0$  hergeleitet werden.

$$\Delta B_{ij} = B_{ij} - B_{ij}^0 = \frac{1}{n_{ij}^2} - \frac{1}{(n_{ij}^0)^2} = \frac{n_{ij}^2 - (n_{ij}^0)^2}{n_{ij}^2 (n_{ij}^0)^2} \quad (2.33)$$

$$= \frac{(n_{ij}^0)^2 + 2\Delta n_{ij} n_{ij}^0 + \Delta n_{ij}^2 - (n_{ij}^0)^2}{n_{ij}^2 (n_{ij}^0)^2} \approx 2 \frac{\Delta n_{ij}}{(n_{ij}^0)^3}. \quad (2.34)$$

Beziehungsweise für im unbelasteten Zustand isotrope Materialien  $n_{ij}^0 = n_{\text{eff}}^0 \delta_{ij}$  gilt

$$\Delta n_{ij} = \frac{n_{\text{eff}}^3}{2} \Delta B_{ij}. \quad (2.35)$$

### Der thermo-optische Effekt

Die Temperatur stellt eine Umweltgröße dar, die in nahezu alle Sensorbetrachtungen einfließen muss. Sie verändert wie die Verzerrungen den Permittivitätstensor und führt somit zu Veränderungen des optischen Verhaltens von Wellenleitern. Der Einfluss der Temperatur auf den Permittivitätstensor kann dabei nicht allein durch die mechanische Dilatation beschrieben werden [60]. Ein weiterer Effekt besteht, der die Permittivität unabhängig davon verändert. Dieser Effekt, der als thermo-optischer Effekt bezeichnet wird, soll hier phänomenologisch in einem linearen Ansatz beschrieben werden. Für große Temperaturveränderungen  $\Delta T$  müssen allerdings Effekte höherer Ordnung berücksichtigt werden [65]. Für den linearen Ansatz wird die totale Ableitung des Impermeabilitätstensors (2.23) nach der Temperatur gebildet

$$\frac{d(\Delta B_{ij})}{dT} = \frac{dp_{ijkl}}{dT} e_{kl} + p_{ijkl} \frac{de_{kl}}{dT} + \frac{\partial(\Delta B_{ij})}{\partial T}. \quad (2.36)$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Temperaturabhängigkeit der Pockelskoeffizienten. Dieser Effekt wurde für die piezo-optischen Konstanten von Barlow und Payne untersucht [66]. Ihre Resultate zeigen die Relevanz des Effektes für die faseroptische Sensorik und müssen somit beachtet werden. Der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.36) stellt die thermisch-mechanische Wechselwirkung dar. Wird ein Körper erwärmt, so verzerrt er sich entsprechend der Tensorabbildung  $\bar{e} = \bar{\alpha}_T \cdot \Delta T$ , wobei  $\bar{\alpha}_T$  die Wärmeausdehnung beschreibt. Für die isotropen Materialien gilt  $e_{ij} = \alpha_T \delta_{ij} \cdot \Delta T$ . Der Term  $de_{kl}/dT$  ergibt somit gerade  $\alpha_T$  und für den gesamten zweiten Term  $p_{ijkl} \alpha_T$ .

Der letzte Term beschreibt den direkten Einfluss der Temperatur auf den Impermeabilitätstensor und wird als thermo-optischer Koeffizient bezeichnet. Eine Besonderheit bei der Notation dieses Effektes rührt von der Messmethode für seine Bestimmung her. Der thermo-optische Effekt wird experimentell meist durch die Änderung des Brechungsindex ermittelt. Dabei wird häufig die totale Ableitung  $dn/dT$  als thermo-optischer Effekt bezeichnet [67] [68]. In



diesem Koeffizienten befinden sich allerdings noch die Dehnungseffekte, was bei der Berechnung von gekoppelten thermisch-mechanischen Problemen zu Schwierigkeiten führt. Die Beschreibung über die partielle Ableitung  $\partial n_{ij}/\partial T$  wird in [50] als thermo-optischer Effekt bezeichnet und wird hier verwendet.

Über die Impermeabilitätsänderung und die Brechzahländerung wird hier unter Verwendung von  $n_{ij}^2 = \varepsilon_{ij} = 1/B_{ij}$  [38] der Zusammenhang abgeleitet, der lautet

$$\frac{dB_{ij}}{dT} = \frac{d(\Delta B_{ij})}{dT} = \frac{d}{dT} \left( \frac{1}{n_{ij}^2} \right) \approx -2n_{ij} \left( \frac{dn_{ij}}{dT} \right)^{-3}. \quad (2.37)$$

Hieraus kann jetzt die Beziehung abgeleitet werden, die die beiden Definitionen für ein frei gelagertes Probenmaterial, dessen Pockelskoeffizienten konstant sind, verknüpft

$$\frac{\partial \Delta B_{ij}}{\partial T} = -2n_{ij} \left( \frac{dn_{ij}}{dT} \right)^{-3} - p_{ijkl} \alpha_{kl}. \quad (2.38)$$

Für ein isotropes, frei gelagertes Probenmaterial ergibt sich für die Verknüpfung der beiden Definitionen der Brechungsindexänderung

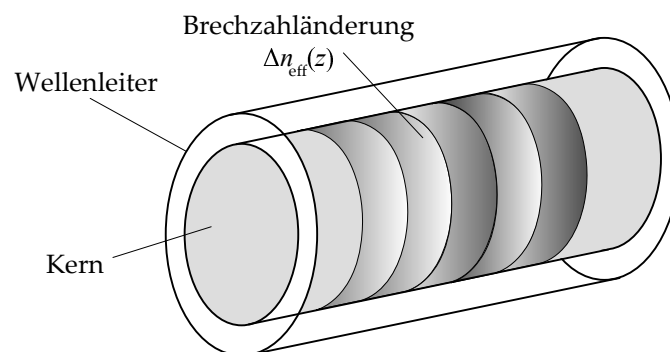
$$\frac{\partial \Delta n_{\text{eff}}}{\partial T} = \frac{dn_{\text{eff}}}{dT} + \frac{n_{\text{eff}}^3}{2} (p_{11} + 2p_{12}) \alpha_T \quad (2.39)$$

Der thermo-optische Koeffizient von  $\text{SiO}_2$  bzw. Monomodenfasern wurde von einer Reihe von Autoren untersucht [67][65][69], wobei Chang et al. für Glasfasern einen Wert von  $9,2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$  für den totalen thermo-optischen Koeffizienten  $dn_{\text{eff}}/dT$  angeben [67]. Daraus ergibt sich für Glasfasern der Wert für den thermo-optischen Koeffizienten  $\partial n_{\text{eff}}/\partial T = 9,68 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

## 2.3 Bragg-Gitter in optischen Wellenleitern

Der Bragg-Effekt liegt den Bragg-Sensoren dieser Arbeit zugrunde und wurde von Sir William Henry Bragg und William Lawrence Bragg am Beispiel der Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen untersucht ("Diffraction of Short Electromagnetic Waves by a Crystal"). Die Ergebnisse dieser Untersuchungen führten zum Nobelpreis von 1915 [70] und stellen die Grundlage für eine Vielzahl optischer Bauelemente dar. Das Beispiel der Faser-Bragg-Gitter oder allgemeiner der Bragg-Gitter in optischen Wellenleitern steht im Zentrum dieser Arbeit. Das Prinzip der Bragg-Gitter in Wellenleitern unterscheidet sich dabei nicht von der von den Braggs untersuchten Röntgenbeugung an Kristallen.

Im folgenden Abschnitt werden der Aufbau, die Modellierung und die Eigenschaften von Bragg-Gittern in optischen Wellenleitern dargestellt. Dabei werden nur die bestehenden Ergebnisse vorgestellt. Die im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Erweiterungen des Kenntnisstands werden in den späteren Kapiteln aufgeführt.



**Abbildung 2.11:** Modulation der Kernbrechzahl eines optischen Wellenleiters entlang der Ausbreitungsrichtung.

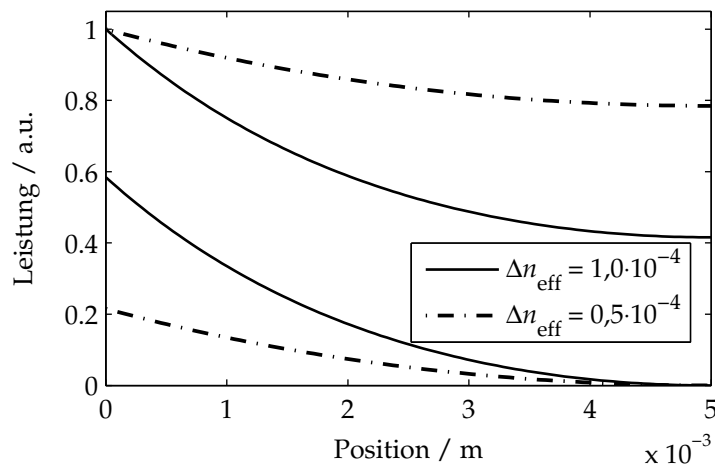
Gemeinsamkeiten aller Bragg-Gitter in optischen Wellenleitern lassen sich in der Struktur ihrer Permittivität bzw. Brechzahl finden. Durch Erzeugen einer periodischen Brechzahländerung  $\Delta n_{\text{eff}}(z)$  entlang der Lichtausbreitungsrichtung des optischen Wellenleiters (siehe Abbildung 2.11) kann ein schmales Reflexionsband bei der *Bragg-Wellenlänge*  $\lambda_B$  erzeugt werden. Diese Wellenlänge wird für eine Vielzahl von Sensorapplikationen als Messgröße verwendet. Übersichten über Anwendungen finden sich in Review-Artikeln [71] sowie in dedizierten Büchern [72][73].

Da ein Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Erweiterung der Modellierung von Faser-Bragg-Gittern liegt, wird hier eine Einführung in den Aufbau und die bestehende Modellierung dieser Sensoren gegeben.

Für die Modellierung einer Großzahl von Bragg-Sensoren wird für den Verlauf der Brechzahländerung im Wellenleiter angenommen [74]

$$\Delta n_{\text{eff}}^G(x, y, z) = \Delta n_{\text{eff}}(z) \left( 1 + v \cos \left( \frac{2\pi}{\Lambda} z + \phi(z) \right) \right). \quad (2.40)$$

Der Brechzahlverlauf  $n_{\text{eff}}^G$  spaltet sich in einen Gleichanteil, der eine niedrige räumliche Frequenz aufweist und mit  $\Delta n_{\text{eff}}(z)$  bezeichnet wird, und einen räumlich hochfrequenten Wechselanteil, der durch den Kosinus-Term modelliert wird. Der Kontrast oder die "Visibility" der hochfrequenten Brechzahlmodulation wird mit  $v$  bezeichnet,  $\Lambda$  stellt die räumliche Periode der Modulation und  $\phi(z)$  deren Phasenlage dar.

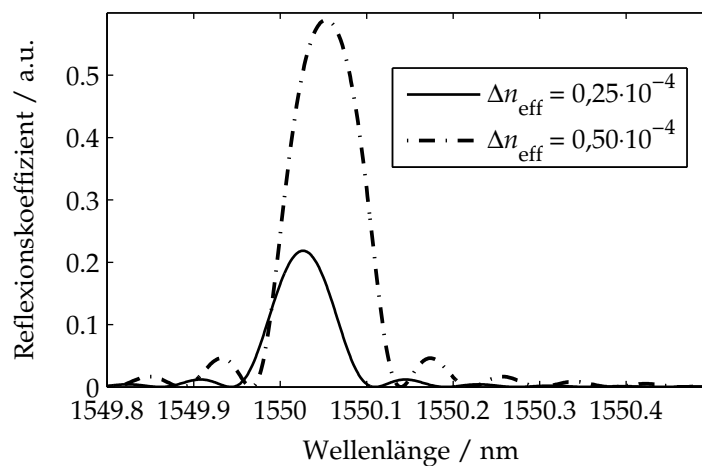


**Abbildung 2.12:** Entwicklung der Leistungen des hin- und rücklaufenden Modus in einem Bragg-Gitter. Für höhere Brechzahlmodulationen  $\Delta n_{\text{eff}}$  findet eine stärkere Reflexion statt.

Mit diesem Modell lassen sich nur isotrope Gitter beschreiben, die eine homogene Struktur in der radialen Richtung besitzen. Dies stellt eine Vereinfachung dar, die nicht immer gerechtfertigt ist. So kann es durch den Herstellungsprozess zu einer Anisotropie kommen [75]. Diese müsste durch ein tensorielles Modell dargestellt werden.

Für das einfachste homogene Gitter ist  $n_{\text{eff}}(z)$  sowie  $\phi(z)$  konstant. Die Koppelkoeffizienten der skalaren Theorie der gekoppelten Moden nach [76] sind

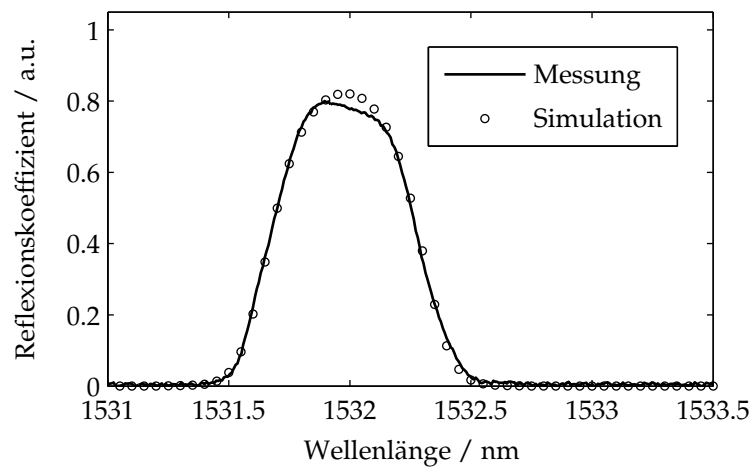
für dieses homogene Gitter beispielsweise in [74] abgeleitet worden. Die analytische Lösung dieser gekoppelten Modengleichungen ist bekannt [77][74]. In Abbildung 2.12 ist der Verlauf des Betragsquadrates der Amplitude des in positive  $z$ -Richtung propagierenden Grundmodus  $|A_1|^2$  und des entgegengesetzt laufenden Modus  $|A_2|^2$  bei einer Wellenlänge  $\lambda = \lambda_B$  dargestellt. Es zeigt sich, dass die Leistung des hinlaufenden Modus zum Ende des Gitters hin abnimmt und die Leistung des rücklaufenden Modus in gleichem Maße zunimmt. In der Summe sind beide Leistungen konstant.



**Abbildung 2.13:** Analytische Lösung der skalaren gekoppelten Modengleichungen für ein homogenes Faser-Bragg-Gitter nach [74] mit verschiedenen Brechzahlmodulationen. Die Länge des Gitters beträgt 5 mm.

Somit entsteht durch die Gitterstruktur eine Stelle des Energieaustauschs zwischen den beiden entgegengesetzt laufenden Moden gleicher Polarisation, die *Bragg-Reflexion*. Im Hinblick auf technische Anwendungen ist die Wellenlängenabhängigkeit dieser Reflexion von besonderem Interesse. Stellt man das Verhältnis der Leistung von hinlaufendem und rücklaufendem Modus am Beginn des Gitters über der Wellenlänge dar  $R(z = 0, \lambda) = |A_1(0, \lambda)|^2 / |A_2(0, \lambda)|^2$ , so erhält man aus der analytischen Lösung den in Abbildung 2.13 gezeigten Verlauf. Es entsteht ein schmales Reflexionsband, dessen maximale Reflexion 100 % betragen kann. Die Breite des Reflexionsbandes hängt von der Länge des Gitters und der Stärke der Brechzahlmodulation ab [78]. Um in Messanwendungen ein gutes Signal- zu Rauschverhältnis zu erhalten sind hohe maximale Reflexionskoeffizienten wünschenswert.

Der Verlauf der mittleren Brechzahlmodulation  $n_{\text{eff}}(z)$  ist ein Freiheitsgrad,



**Abbildung 2.14:** Messung an einem 3 mm langen, apodisierten Faser-Bragg-Gitter und numerische Lösungen der gekoppelten Modengleichungen mit gaußförmig apodisiertem Faser-Bragg-Gitter.

der die spektrale Reflexionscharakteristik beeinflusst. Im Bereich der Bragg-Gitter-Sensorik wird dieser Freiheitsgrad verwendet um die "Sidelobes", also die Nebenmaxima der spektralen Sensorantwort zu unterdrücken. Diese sind für einige Messanwendungen sowie nachrichtentechnische Anwendungen von Nachteil, da sie Artefakte bzw. Kanalübersprechen verursachen können [79][80]. Bei dieser *Apodisierung* genannten Technik wird die Amplitude der Brechzahlmodulation  $\Delta n_{\text{eff}}(z)$  zur Gittermitte hin allmählich erhöht und nach der Gittermitte ebenso nach und nach abgesenkt. Als Apodisierungsfunktion kommt demnach die Gaußfunktion in Frage. Abbildung 2.14 zeigt Messdaten eines 3 mm langen apodisierten Faser-Bragg-Gitters. Die Sidelobes sind stark unterdrückt und in dieser linearen Ansicht nicht zu erkennen. Die Kreise stellen die numerische Lösung der gekoppelten Modengleichungen dar, wie sie im Verlauf dieser Arbeit noch abgeleitet wird. Das simulierte Gitter besitzt einen gauß'sch apodisierten Brechzahlverlauf und folgt der Messkurve in weiten Teilen sehr gut. Im Bereich des Reflexionsmaximums kommt es zu Abweichungen. Diese Abweichungen können durch einen "Chirp", also eine nicht konstante Gitterperiode  $\Lambda$  verursacht sein und sind in diesem speziellen Simulationsmodell nicht enthalten.

Neben der Theorie der gekoppelten Moden existiert ein weiterer Zugang zum Verständnis von Bragg-Gittern. Dieser Zugang leitet sich aus der von Max von Laue entdeckten Röntgenbeugung an Kristallen ab. Die zugrunde lie-

gende Idee, dass sich an so genannten Netzebenen gebeugte Röntgenstrahlen konstruktiv bzw. destruktiv überlagern, führt auf die so genannte Bragg-Bedingung oder Bragg-Gleichung. Angewendet auf Bragg-Gitter in optischen Wellenleitern ergibt sich aus dieser Überlegung für die Mittenwellenlänge des Reflexionsmaximums eines Bragg-Gitters

$$\lambda_B = 2n_{\text{eff}}\Lambda. \quad (2.41)$$

Diese quantitativ exakte Gleichung ermöglicht keine Aussagen über die spektrale Reflexionscharakteristik des Bragg-Gitters. Sie ermöglicht jedoch für eine Vielzahl von Anwendungen die vereinfachte Analyse von Einflüssen auf das Bragg-Gitter. Eine Reihe von wichtigen Fällen werden im Rahmen der Einführung in die Grundlagen mit dieser Beziehung untersucht. Hierzu zählen der Fall eines homogen erwärmten, frei gelagerten Bragg-Gitters und der eines entlang der  $z$ -Achse gedehnten und frei gelagerten Gitters.

### 2.3.1 Faser-Bragg-Gitter in Monomodenfasern

Faser-Bragg-Gitter wurden in ihrer heutigen Form von Meltz et al. [81] erstmalig vorgestellt, nachdem der Effekt der Photosensitivität, auf dem eine Klasse dieser Sensoren basiert von Hill et al. [82] entdeckt wurde. Für die Herstellung von Faser-Bragg-Gittern ist eine Vielzahl von Methoden publiziert [83].

#### Herstellung

Ziel der Herstellungsmethoden ist es, den Brechzahlverlauf, bzw. die Permittivität eines optischen Wellenleiters im lichtführenden Bereich geeignet zu beeinflussen. Für die derzeit am häufigsten als Sensoren eingesetzten Faser-Bragg-Gitter vom so genannten Typ I wird für die Erzeugung einer Brechzahlmodulation der Effekt der Photosensitivität ausgenutzt. Durch Strahlung geeigneter Wellenlänge wird die Brechzahl des Materials permanent verändert. Die periodische Struktur der Gitter wird entweder durch interferometrische bzw. holographische Verfahren erzeugt, die gewisse Anforderungen an die räumliche und zeitliche Kohärenz der verwendeten Lichtquelle stellen [81], oder durch direktes Einschreiben mit einem fokussierten Laserstrahl [84]. Die am häufigsten verwendete Wellenlänge für das "Schreiben" liegt bei 248 nm, da hier die Photosensitivität der verwendeten Glasfasern hoch ist und die Wellenlänge mit relativ guter räumlicher und zeitlicher Kohärenz von einem KrF-

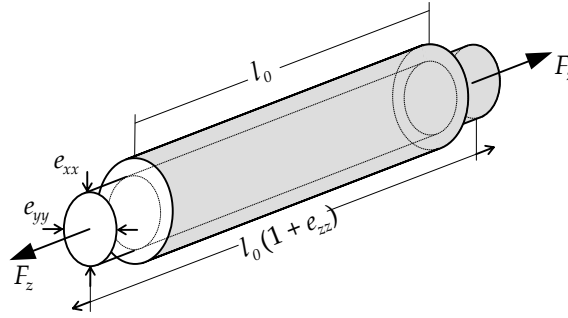
Excimerlaser erzeugt werden kann [83]. Versuche mit nahem UV-Licht im Bereich um 330 nm Gitter zu erzeugen, sind von mehreren Autoren unternommen worden [85][86] [87].

Schwierigkeiten bei der Herstellung im UV-Bereich um 250 nm ergeben sich durch die Faserhülle der Lichtleitfaser. Dieses ist für diese UV-Wellenlänge nicht transparent und muss beim Schreibprozess entfernt werden. Das Entfernen der Faserhülle ist allerdings mit einem erheblichen Festigkeitsverlust der Faser verbunden [88]. Auch wenn die Fasern nach dem Einschreiben "re-coated" werden, also wieder mit einer Faserhülle versehen werden, sind die Beschädigungen durch den Prozess zu hoch, um sie sinnvoll als Sensoren einsetzen zu können. Eine Lösung dieses Problems ist das Einschreiben der Gitter vor dem ersten Aufbringen der Faserhülle, im Faser-Ziehturm, wie es erstmals von Dong et al. demonstriert wurde [89]. Diese so genannten Ziehturm-gitter erreichen die hohen Festigkeitswerte der unbeschriebenen Glasfasern [88] und sind somit gut für Sensoranwendungen geeignet. Ziehturm-gitter sind bereits kommerziell erhältlich, besitzen allerdings einige Einschränkungen bezüglich Parametern wie Abstand der Braggwellenlängen bei gegebenem räumlichen Abstand. Diese Einschränkungen sind dem derzeitigen Herstellungsprozess geschuldet und können prinzipiell überwunden werden.

### **Modellierung als Sensor**

Aus den gekoppelten Modengleichungen lässt sich die spektrale Reflexionscharakteristik der Bragg-Gitter in Monomodensfasern für jeden mechanischen, thermischen oder anders gearteten Einfluss berechnen. Diese Methode kann dazu verwendet werden, um genaue Aussagen über Systemantworten von FBG-Sensoren in Verbindung mit Messsystemen zu treffen. Des Weiteren ist diese Methode für die Untersuchung von neuartigen Effekten unersetzlich.

Für die Auswertung von Einflüssen mittels der CMT ist allerdings immer ein gewisser Rechenaufwand notwendig, der eine Auswertung ohne Rechner unpraktikabel macht. Für eine Vielzahl von Fällen kann eine Aussage über die Auswirkung eines Einflusses durch die Berechnung der Verschiebung der Bragg-Wellenlängen  $\lambda_{B,i}$  gemacht werden. Diese Aussage ist für gewisse Spezialfälle zudem exakt. Einige für diese Arbeit wichtige Spezialfälle sollen hier aufgeführt werden.



**Abbildung 2.15:** Schema eines durch eine Kraft  $F_z$  entlang der Faserachse gedehnten Faserstücks. Aufgrund der Querkontraktion verjüngt sich der Faserquerschnitt. Beide entstehenden Dehnungen tragen zur Änderung der optischen Eigenschaften des Faserstücks bei.

**Die homogene longitudinale Dehnung** beschreibt den Fall einer frei gelagerten und in weiter Entfernung vom FBG-Sensorort mit axialer Kraft  $F_z$  belasteten Faser (siehe Abbildung 2.15). In diesem Fall stellt sich eine mechanische Spannung  $\sigma_{zz}$  ein, die über die Kraft durch  $\sigma_{zz} = F_z/A_F$  berechnet werden kann, wobei  $A_F = 2\pi a$  die Querschnittsfläche der Faser ist. Durch diesen ebenen Spannungszustand wird ein homogenes Dehnungsfeld in der Faser erzeugt, das sich aus den Gleichungen (2.3) bis (2.6) ergibt

$$e_{xx} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \quad (2.42)$$

$$e_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \quad (2.43)$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz} \quad (2.44)$$

$$e_{yz} = e_{xz} = e_{xy} = 0. \quad (2.45)$$

Da das Dehnungsfeld über das FBG homogen ist, wird auch die Brechungsindexänderung, die linear von den Dehnungen abhängt, homogen sein. Es findet also eine homogene Veränderung der Brechungsindizes statt. Der Betrag der Veränderung ist für große Dehnungen von  $e_{zz} = 1000 \mu\text{m}/\text{m}$  typischerweise sehr klein  $\approx 10^{-4}$ . Er beeinflusst die Form der Reflexionscharakteristik des Faser-Bragg-Gitters deswegen nur gering, verschiebt allerdings den Reflexionspeak nennenswert.

Zur Verschiebung der Bragg-Wellenlänge  $\Delta\lambda_B$  gelangt man durch das Bilden der Ableitung mittels der Kettenregel [90] von Gleichung (2.41) nach der



mechanischen Spannung und Anwendung von Gleichung (2.35)

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_{B,\sigma_{zz}} &= \frac{d\lambda_B}{d\sigma_{zz}} = \frac{d2n_{\text{eff}}\Lambda}{d\sigma_{zz}} = 2n_{\text{eff}} \frac{d\Lambda}{d\sigma_{zz}} + 2\Lambda_0 \frac{dn_{\text{eff}}}{d\sigma_{zz}} & (2.46) \\
&= 2 \left( \sum_{i=1}^6 n_{\text{eff}} \frac{\partial\Lambda}{\partial e_i} \frac{de_i}{d\sigma_{zz}} + 2\Lambda_0 \frac{\partial n_{\text{eff}}}{\partial e_i} \frac{de_i}{d\sigma_{zz}} \right) \\
&= 2 \left( n_{\text{eff}}\Lambda_0 \frac{1}{E} - 2\Lambda_0 \frac{n_{\text{eff}}^3}{2} \left( p_{12} \frac{1}{E} - (p_{11} + p_{12}) \frac{\nu}{E} \right) \right) \\
&= 2n_{\text{eff}}\Lambda_0 \left( \frac{1}{E} - \frac{n_{\text{eff}}^2}{2} \left( \frac{1}{E} p_{12} - (p_{11} + p_{12}) \frac{\nu}{E} \right) \right).
\end{aligned}$$

Es wurde angenommen, dass nur die longitudinale Dehnung  $e_{zz}$  die Gitterstruktur  $\Lambda$  verändert, dass  $\Lambda_0$  die unveränderte Gitterkonstante ist und dass der betrachtete elektromagnetische Modus maßgeblich transversale Feldkomponenten hat und somit  $n_{\text{eff}}$  mit  $n_{11}$  oder  $n_{22}$  identisch ist.

Der in der Literatur häufig diskutierte Fall behandelt ein Faser-Bragg-Gitter, welches eine Dehnung  $e_{zz}$  durch eine Verschiebungsrandbedingung erfährt [88][91]. Die Randbedingung wirkt auf einen Punkt in der Faser, der weit vom Sensorort entfernt liegt. Der erzeugte Verzerrungszustand  $\bar{e}(x, y, z)$  ist identisch mit dem oben behandelten. Allerdings wird für die Ableitung der Sensorgleichung direkt die  $z$ -Dehnung  $e_{zz}$  eingesetzt. Betrachtet man die relative Änderung  $\Delta\lambda_{B,e_{zz}}/\lambda_B$  der Wellenlänge, ergibt sich aus dem obigen Fall

$$\frac{\Delta\lambda_{B,e_{zz}}}{\lambda_B} = \left( 1 - \frac{n_{\text{eff}}^2}{2} (p_{12} - \nu(p_{11} + p_{12})) \right) e_{zz} \quad (2.47)$$

$$= (1 - p_{\text{eff}}) \cdot e_{zz}, \quad (2.48)$$

wobei  $p_{\text{eff}}$  effektiver photoelastischer Koeffizient genannt wird. Für Faser-Bragg-Gitter in Glasfasern mit einem  $n_{\text{eff}} \approx 1.46$  und  $p_{11} = 0.113$  sowie  $p_{12} = 0.252$  [62] ergibt sich ein Wert für die longitudinale Dehnungsempfindlichkeit von  $1,2 \text{ pm}/(\mu\text{m}/\text{m})$  bei  $1550 \text{ nm}$  Wellenlänge.

**Um die Temperaturempfindlichkeit** des frei gelagerten Sensors zu ermitteln, kann der obige Ansatz angewendet werden. Dabei wird zunächst die vollständige relative Dehnungsempfindlichkeit des FBG-Sensors nach Gleichung (2.41) abgeleitet, die hier nur angegeben wird

$$\frac{\Delta\lambda_{B,\bar{e}}}{\lambda_B} = -\frac{n_{\text{eff}}^2}{2} (p_{11}e_{xx} + p_{12}e_{yy} + p_{12}e_{zz}) + e_{zz}. \quad (2.49)$$

Es ist dabei auf die Unterscheidung zwischen den transversalen Dehnungskomponenten  $e_{xx}$  und  $e_{yy}$  zu achten. Werden anisotrope Dehnungen mit  $e_{xx} \neq e_{yy}$  angenommen, so muss prinzipiell die Polarisationsrichtung des eingestrahlten Lichts mit berücksichtigt werden. Für die Anwendung der monomodalen FBGs wird in den häufigsten Fällen von homogener transversaler Dehnungsbelastung ausgegangen. Bei FBGs in polarisationserhaltenden Fasern beruhen einige vielversprechende Sensorkonzepte auf der Ausnutzung dieses Sachverhalts. Es wird daher im nächsten Abschnitt darauf eingegangen.

Für die Betrachtung der Temperaturempfindlichkeit bilden wir die Ableitung der Bragg-Wellenlänge nach der Temperatur

$$\frac{d\lambda_B}{dT} = 2\Lambda_0 \frac{dn_{\text{eff}}}{dT} + 2n_{\text{eff}} \frac{d\Lambda}{dT} \quad (2.50)$$

$$= 2\Lambda_0 \left( \sum_{i=1}^6 \frac{\partial n_{\text{eff}}}{\partial e_i} \frac{de_i}{dT} + \frac{\partial n_{\text{eff}}}{\partial T} + 2n_{\text{eff}} \frac{\partial \Lambda}{\partial e_i} \frac{de_i}{dT} \right) \quad (2.51)$$

Die Ableitung des Brechungsindex nach den Dehnungen sind bereits bekannt, die partielle Ableitung des Brechungsindex nach der Temperatur ist die thermo-optische Konstante, die Ableitung der Gitterperiode nach den Dehnungen ist ebenfalls aus obiger Rechnung bekannt und die Ableitungen der Dehnungen nach der Temperatur sind für isotrope Materialien gegeben durch

$$\frac{de_{ij}}{dT} = \frac{d}{dT}(\bar{\alpha}_T \Delta T) = \bar{\alpha}_T \equiv \alpha_T \delta_{ij}. \quad (2.52)$$

Man erhält somit für die Temperaturabhängigkeit bezogen auf die Bragg-Wellenlänge  $\Delta\lambda_{B,T}$

$$\frac{\Delta\lambda_{B,T}}{\lambda_B} = \left( \frac{1}{n_{\text{eff}}} \frac{\partial n_{\text{eff}}}{\partial T} - \frac{n_{\text{eff}}^2}{2} (p_{11} + 2p_{12}) \alpha_T + \alpha_T \right) \Delta T. \quad (2.53)$$

Mit dem thermo-optischen Koeffizienten aus Gleichung (2.39) ergibt sich für die Temperaturempfindlichkeit des freien Faser-Bragg-Gitters ein Wert von 6,8 pm/(K·nm) bei 800 nm Wellenlänge oder 10,5 pm/K bei 1550 nm Wellenlänge. Dieser Wert ist vergleichbar mit dem von Trutzel [88] angegebenen Wert von 11 pm/K bei 1530 nm.

**Eine Temperaturkompensation** wird notwendig, wenn neben reinen zu messenden Dehnungseffekten, beispielweise bei einem oberflächenapplizierten FBG-

Sensor, auch Temperatureinflüsse auftreten können. Wie oben dargestellt beeinflussen beide Größen die FBG-Sensorantwort, nämlich die Bragg-Wellenlänge gleichermaßen. Eine Unterscheidung von Temperatur- und Dehnungseinflüssen ist daher nicht möglich. Vorschläge für eine temperaturkompensierte Dehnungsmessung mittels zweier FBG-Sensoren setzen unterschiedliche Temperatur- oder Dehnungsempfindlichkeiten der beiden Sensoren voraus. Hierfür wurden eine Reihe von Vorschlägen gemacht, die sowohl bei der Herstellung der Sensorfaser ansetzen [92], als auch mechanische Umsetzerstrukturen für den FBG-Sensor vorsehen [93][94][95].

Keiner dieser Kompensationsvorschläge erhält jedoch alle Vorteile des Faser-Bragg-Gitter-Sensors, zu denen die geringen Abmessungen und die hohe Temperaturbeständigkeit gehören.

### **Eigenschaften**

Ein Vorteil von Faser-Bragg-Gitter-Sensoren gegenüber konventionellen Dehnungsmessstreifen ist deren hohe mechanische Dauerfestigkeit [96]. Für die Lebensdauer der geraden, unbelasteten bzw. belasteten Faser wird ein Risswachstumsmodell angenommen, nach dem die Lebenserwartung der Faser statistisch abgeschätzt werden kann [97][98][99]. Es ergibt sich, dass die statische sowie zyklische Belastbarkeit der Ziehturm Faser-Bragg-Gitter äußerst hoch ist [88]. Für die statische Belastbarkeit finden France et al. einen Wert von 4% Dehnung bei Raumtemperatur [99], Hagemann et al. geben eine Bruchspannung von über 4,5 GPa für Faser-Bragg-Gitter an [100], was etwa 7% Dehnung entspricht. Dieser Wert ist dem Wert der unbeschriebenen Faser im Rahmen der Messgenauigkeit gleich. Die Biegefestigkeit von Lichtleitfasern stellt eine gewisse Herausforderung dar, da stark gebogene Fasern degradieren und brechen. Dieses Verhalten wird im Abschnitt 3.3.4 genauer untersucht.

Fernandez-Fernandez et al. untersuchen die Strahlungsfestigkeit von Faser-Bragg-Gittern im Hinblick auf Anwendungen im ITER-Fusionsreaktor [27] und schätzen die Applikation von FBG-Sensoren in stark strahlenverseuchten Umgebungen als machbar ein.

Untersuchungen zur Temperaturfestigkeit von Faser-Bragg-Gittern sind in [101][102] veröffentlicht. Faser-Bragg-Gitter vom Typ I, die derzeit am häufigsten für Sensoren und Filter eingesetzt werden, degradieren bei Temperaturen über ca. 300 °C stark und verlieren dadurch an Reflektivität. Einen Ausweg

bieten Gitter vom Typ II. Die Gittertypen unterscheiden sich im Mechanismus der zur Brechzahlmodulation führt. Gitter vom Typ II nutzen nicht die Photosensitivität, sondern permanente strukturelle Veränderungen in der Faser [92]. Die Erzeugung von Gittern mit definierter spektraler Reflexionscharakteristik ist bei dieser Art von Gittern allerdings noch nicht so weit fortgeschritten wie bei Gittern vom Typ I. Dafür können Temperaturbereiche bis 800 °C erreicht werden [92].

### 2.3.2 Faser-Bragg-Gitter in polarisationserhaltenden Fasern

In Abschnitt 2.2.1 wurden die Eigenschaften von polarisationserhaltenden Fasern (PMF) und der Unterschied zu Monomodenfasern dargestellt. Als wichtigste Merkmale treten der Unterschied in den Ausbreitungskonstanten der orthogonal polarisierten Grundmoden sowie die Polarisationserhaltungseigenschaften hervor. Wie in dieser Arbeit gezeigt wird, ist die theoretische Behandlung von belasteten Faser-Bragg-Gittern in PMF (PMF-FBG) unvollständig. Im Kapitel 3 wird eine erweiterte Theorie abgeleitet.

#### Herstellung

Die prinzipiellen Methoden der Herstellung von PMF-FBG unterscheiden sich nicht von denen der FBGs in Monomodenfaser. Allerdings gibt es derzeit keinen Anbieter von polarisationserhaltenden Fasern mit Bragg-Gittern im Ziehverfahren. Grund hierfür dürfte die derzeit geringe Nachfrage sein. Nach Aussagen des IPHT Jena ist der Prozess derzeit prinzipiell denkbar [103].

Somit verbleibt für die Untersuchung von PMF-FBG nur der Weg des Einschreibens mit anschließendem "Recoating", dem Wiederaufbringen der Faserhülle. Hierdurch wird die Faser gleichermaßen vorgeschädigt, so dass die mechanische Festigkeit stark leidet. Für Monomodenfasern bestehen Varianten mit hoher Photosensitivität, die das direkte Einschreiben von Gittern ermöglichen. Es sind auch polarisationserhaltende Fasern mit hoher Photosensitivität im Wellenlängenbereich von ca. 1 µm kommerziell erhältlich. Der Einsatz dieser Fasern im üblichen Wellenlängenbereich von 1550 nm bereitet allerdings aufgrund der dort hohen Biegeverluste dieser Faser Schwierigkeiten im Hinblick auf Kraft-Momenten-Sensorik. Dieses Problem wird im Abschnitt 3.3.4 genauer untersucht. Als Herstellungsmethode für derzeit erhältliche Fasern bleibt demnach nur das Verfahren des Wasserstoffbeladens. Hierbei wird

die Faser vor dem Einschreibeprozess in Wasserstoff unter hohem Druck und hoher Temperatur eingelegt [104]. Dadurch erhöht sich die Photosensitivität der Faser deutlich und das Einbringen stark reflektierender Gitter in nahezu beliebige Fasern wird möglich. Auf diese Weise wurden die PMF-FBGs am IPHT Jena für diese Arbeit erzeugt. Vorteil dieses Verfahrens ist, dass jede kommerziell erhältliche Faser mit Gittern beschrieben werden kann. Dies erlaubt es die Faserparameter wie Polarisations-Schwebungslänge und Kerndurchmesser unabhängig zu wählen.

### Modellierung als Sensor

Aufgrund der nicht entarteten Polarisationsmoden erzeugt ein PMF-FBG eine Reflexion bei zwei verschiedenen Wellenlängen. Wurde die Bragg-Wellenlänge  $\lambda_B$  für einen einzelnen elektromagnetischen Modus mit  $\lambda_B = 2n_{\text{eff}}\Lambda$  angegeben, so gilt jetzt für die beiden Polarisationsmoden  $\text{HE}_{11}^x$  und  $\text{HE}_{11}^y$  der Faser

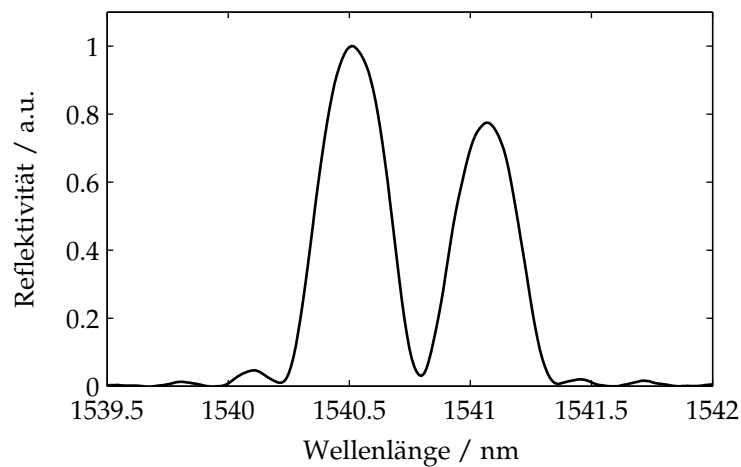
$$\lambda_{B,x} = 2n_{\text{eff},x}\Lambda \quad (2.54)$$

$$\lambda_{B,y} = 2n_{\text{eff},y}\Lambda. \quad (2.55)$$

Da beide Moden unterschiedliche effektive Brechungsindizes aufweisen unterscheiden sich auch die Bragg-Wellenlängen der Polarisationsmoden. Grundsätzlich gelten diese Gleichungen auch für monomodalen-FBGs. Hier fallen jedoch beide Bragg-Wellenlängen zusammen, solange ein transversal isotroper Belastungszustand besteht.

Dieser Effekt wird in einer Reihe von aktuellen Veröffentlichungen im Hinblick auf Multiparametersensorik untersucht [64] [105][32][63][33] [106][107]. Dabei wird ein polarisationsempfindlicher Messaufbau verwendet um die Reflexionen der beiden Polarisationsmoden getrennt aufzuzeichnen. Da verschiedene Belastungen des Bragg-Gitters sich unterschiedlich auf die beiden Polarisationsmoden auswirken, können durch diese Auswertung mehrere Parameter von einem Bragg-Sensor ausgewertet werden.

Nimmt man für die Modulation der Kernbrechzahl den Ansatz von Gleichung (2.40) an, so bleibt die spektrale Form des Reflexionspeaks nahezu unverändert. Lediglich die Schwerpunktwellenlängen der Reflexion werden verschoben. Abbildung 2.16 zeigt Messdaten eines am Institut für Photonische Technologien (IPHT) Jena in einer Nufern PM1550G-80 Faser für diese Arbeit erzeugten PMF-FBGs. Die spektrale Trennung der beiden Reflexionsmaxima



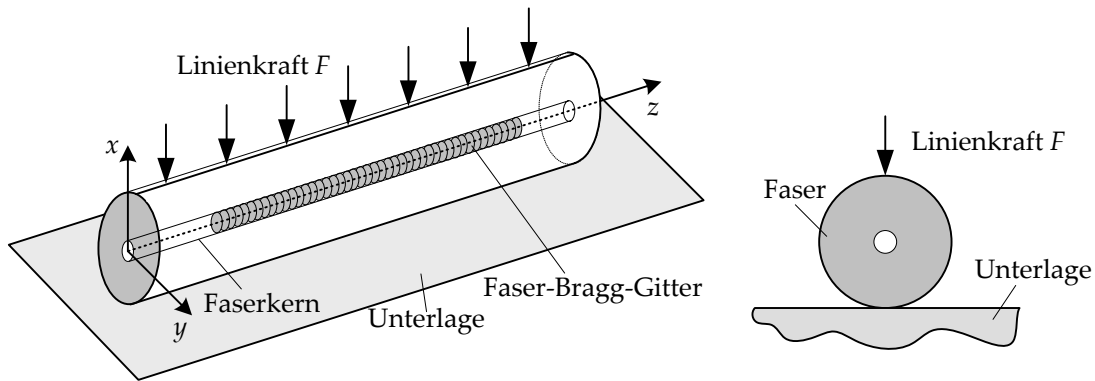
**Abbildung 2.16:** Reflexionsspektrum eines Faser-Bragg-Gitters in polarisationserhaltender Faser. Die unterschiedliche Leistung der Reflexion der beiden Polarisationsrichtungen wird durch die Polarisationsabhängigkeit der beleuchtenden Lichtquelle verursacht.

beträgt etwas über 500 pm. Da die Gitterperiode  $\Lambda$  für beide Polarisationsmoden gleich sind wird diese Trennung ausschließlich von den unterschiedlichen effektiven Brechungsindizes verursacht.

Für die Polarisations-Schwebungslänge dieser Faser werden  $L_B \approx 1$  mm bei einer Wellenlänge von 633 nm angegeben. Zur Doppelbrechung bei der Betriebswellenlänge von 1540 nm gelangt man durch die Annahme, dass die Materialeigenschaften der Faser sich nicht nennenswert in den beiden Wellenlängenbereichen unterscheiden [42]. Damit ergibt sich für  $L_B$  bei 1540 nm ein Wert von ca. 3 mm. Mit Gleichung (2.18) und dem Unterschied beider Braggwellenlängen  $\Delta\lambda_B = 2\Delta n_{\text{eff}}\Lambda$  erhält man  $\Delta\lambda_B \approx 540$  pm, was sehr gut zu den Messdaten aus Abbildung 2.16 passt.

Ein transversal anisotroper Belastungszustand verschiebt, anders als die oben behandelten isotropen Zustände, beide Bragg-Wellenlängen um unterschiedliche Beträge. Hier soll ein in der Literatur häufig verwendeter Testfall einer transversal anisotropen, aber homogenen Last aufgezeigt werden [107][33][108][105][64][32][109]. Dieser Testfall wird in dieser Arbeit in der Erweiterung der PMF-FBG Theorie ebenfalls verwendet.

Abbildung 2.17 zeigt den untersuchten Lastfall. Eine Linienlast  $F$  erzeugt über die Länge der Faser und ins Besondere im Bereich des Bragg-Gitters eine anisotrope transversale Verzerrung der Faser. Um das mechano-optische



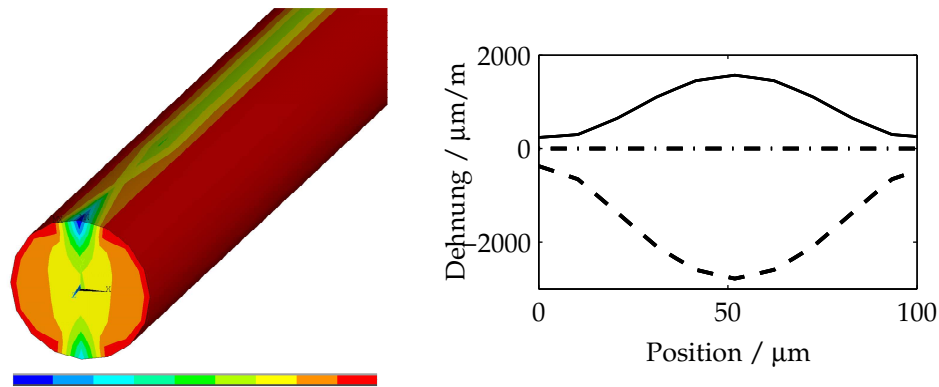
**Abbildung 2.17:** Eine Linienlast  $F$  belastet ein auf ebener Unterlage liegendes Faser-Bragg-Gitter transversal. Links schräge Ansicht, rechts Sicht auf den Faserquerschnitt.

Problem zu analysieren, ist ein Modell für die entstehenden Verzerrungen aufzustellen. Zunächst kann davon ausgegangen werden, dass die Faser entlang ihrer Achse auf der Unterlage fixiert ist, wodurch die laterale Dehnung  $e_{zz}$  vernachlässigt werden kann. Aufgrund der Symmetrie der Belastung kann zudem davon ausgegangen werden, dass im Mittelpunkt der isotropen Faser das Hauptachsensystem der Verzerrung mit dem Koordinatensystem der Last aus Abbildung 2.17 übereinstimmt. Zudem müssen aufgrund der angenommenen Linearität alle Verzerrungstensoreinträge linear mit der Last skalieren. Aus diesen Argumenten kann die Form des Verzerrungstensors im Mittelpunkt der Faser  $\bar{e}(0,0,z)$  angegeben werden als

$$\bar{e}(0,0,z) = \begin{pmatrix} e_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -m \cdot e_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Lediglich das Verhältnis zwischen den beiden transversalen Dehnungen ist unbekannt und wird hier mit  $e_{yy}/e_{xx} = -m$  bezeichnet. Das Verhältnis hängt im Allgemeinen von den genauen Materialparametern der Faser ab. Zudem können Anisotropien im Faseraufbau, wie sie bei polarisationserhaltenden Fasern gegeben sind, Einfluss nehmen.

Daher wird für die genaue Analyse der Querbelastungsexperimente oftmals eine Finite-Elemente Analyse verwendet um den Verzerrungszustand zu bestimmen, vergleiche hierzu Abbildung 2.18 und [33][64], obwohl eine analytische Lösung des Belastungsproblems mit isotropem Material bereits früh von Timoshenko angegeben wurde [30]. Für die in [33] untersuchte Bow-Tie Faser wird ein Wert von  $m = 0,44$  angegeben. Für die Monomodenfaser aus Abbil-



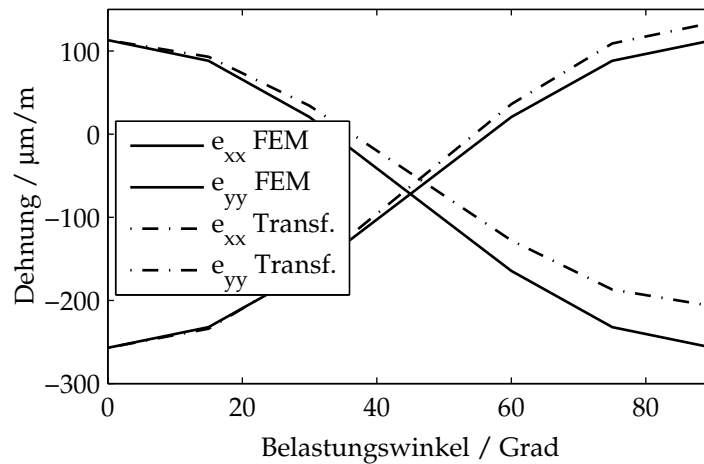
**Abbildung 2.18:** Links: Verlauf der  $\sigma_{xx}$  Spannungskomponente in einer mit Linienlast querbelasteten Faser. Rechts: Verlauf der Dehnungskomponenten über dem durch den Kern gehenden Querschnitt der Faser. Durchgezogen  $e_{yy}$ , Strichliert  $e_{xx}$ , Strichpunkt  $e_{zz}$ .

dung 2.18 ergibt sich ein Wert von 0,56. Abbildung 2.18 zeigt noch eine weitere wichtige Eigenschaft für die Modellierung der Bragg-Sensoren auf. Der Verzerrungszustand besitzt in der Mitte der Faser nur einen geringen Gradienten. Stellt man sich den Kern des Wellenleiters ca. zehn mal kleiner als den gesamten Wellenleiter vor, so wird ersichtlich, dass über diesen Kern die Verzerrungen nahezu konstant sind. Da die mechano-optische Wechselwirkung nahezu ausschließlich über den engen Bereich um den Kern erzeugt wird, weil dort das gesamte Licht geführt wird, kann das Verzerrungsfeld dort als konstant über dem Querschnitt angenommen werden. Diese Näherung wird als *Center-Strain-Approximation* bezeichnet und wurde unter anderem in [64] mittels der Finiten-Elemente-Methode (FEM) untersucht. Die Resultate weisen die Zulässigkeit dieser Näherung aus.

Wird die Faser im Belastungsexperiment um ihre Achse gedreht, so bleibt im Fall der rotationssymmetrischen Monomodenfaser der Belastungszustand im Laborkoordinatensystem erhalten. Im mitgedrehten Faserkoordinatensystem ergibt sich der Belastungszustand mittels der Tensortransformation (2.7). Für den Fall der transversal anisotropen polarisationserhaltenden Faser stellt diese Transformation allerdings nur eine Näherung des Verzerrungszustands im Faserkoordinatensystem dar. Abbildung 2.19 zeigt die Güte dieser Näherung durch Vergleich der beiden Methoden. Die durchgezogenen Linien stellen die FEM Ergebnisse nach [33] dar, die strichlierte den durch eine Tensortransformation erhaltenen Verlauf unter Annahme eines isotropen Fasermaterials. Aus den Daten kann geschlossen werden, dass sich die polarisationserhaltende Fa-



ser näherungsweise wie eine isotrope Faser verhält und der mechanische Einfluss der Störkörper gering ist.



**Abbildung 2.19:** Vergleich der Dehnungen aus der FEM Analyse einer polarisationserhaltenden Glasfaser und der einfachen Tensortransformation unter der Annahme einer transversal isotropen Glasfaser.

Aus den Gleichungen (2.54) und (2.55) kann durch die Kenntnis der Verzerrungen im Kern die Verschiebung der Bragg-Wellenlängen angegeben werden. Für den Querlastfall, ergibt sich eine relative Verschiebung dieser Wellenlängen entsprechend  $\Delta\lambda_{B,x} - \Delta\lambda_{B,y} \neq 0$ . Der longitudinale Lastfall ergibt keine relative, nur eine absolute Verschiebung. Aus dieser Eigenschaft leitet sich die Möglichkeit ab, mit einem einzelnen PMF-FBG mehrere Parameter zu bestimmen.

### Eigenschaften

Die Firma Nufern gibt für ihre PM-Faser PM1550G eine Zugfestigkeit von 700 MPa an, entsprechend einer Dehnungsfestigkeit von ca. 1% [110]. Dieser Wert liegt unter dem Wert der Bruchdehnung für Glasfasern, wobei hier noch eine Sicherheitstoleranz einbezogen wurde. Somit kann die mechanische Festigkeit der PMF als vergleichbar der von Monomodfasern angesehen werden. In einem Übersichtsartikel über PM-Fasern weist Noda et al. [54] auf deren Temperaturabhängigkeit hin. So ändert sich die Doppelbrechung der Faser bei erhöhter Temperatur. Eine Degeneration bei Temperaturen bis 250 °C konnte in dieser Arbeit allerdings nicht beobachtet werden. Es wurden PMF-FBGs

bei diesen Temperaturen verlötet, wobei mehrere Ver- und Entlötzyklen durchlaufen wurden, bei denen die Faser über mehrere Minuten auf Löttemperatur gebracht wurde. Die Ergebnisse werden im Abschnitt 3.3.2 erläutert.

## 2.4 Nichtlineare Optimierung

Eine Variante eines faseroptischen Kraft-Momenten-Sensors, der in dieser Arbeit vorgestellt wird, kann in ein überschaubares mathematisches Modell überführt werden. Daher wird hier ein kurzer Abriss zur Formulierung nichtlinearer Optimierungsprobleme aufgezeigt. Das KMS-Modell verknüpft die Ausrichtung und Position der Fasersensoren in der Struktur des KMS mit der KMS-Sensorantwort unter Last. Das Modell beinhaltet weniger als einhundert freie Parameter. Somit lassen sich aus dem Modell die eingeführten Kenngrößen für eine bestimmte Auslegung dieser Kraft-Momenten-Sensoren ableiten. Die umgekehrte Fragestellung beschäftigt sich damit, wie die Auslegung des KMS aussehen muss um bestimmte Kenngrößen zu erhalten. Zudem stellt sich die Frage, welche Kenngrößen überhaupt erreichbar sind.

Das mathematische Modell verknüpft beispielsweise die Positionen und Ausrichtungen der Faser-Bragg-Gitter-Sensoren im Kraft-Momenten-Sensor mit den Sensorantworten der FBGs unter Last. Die FBG-Positionen der  $N$ -Sensoren  $\mathbf{r}_{S_i}$  und Ausrichtungen entlang der Richtung  $\mathbf{l}_{S_i}$ ,  $i = 1 \dots N$  seien im Positionierungsvektor  $\mathbf{x} = \{\mathbf{r}_{S_1}^T, \mathbf{l}_{S_1}^T, \mathbf{r}_{S_2}^T, \dots, \mathbf{l}_{S_N}^T\}^T$  zusammengefasst. Für jedes FBG hat dieser Vektor drei Einträge für die Position des Sensors so wie drei Einträge für dessen Ausrichtung. Für sechs Sensoren ist demnach  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{36}$ . Die Verknüpfung liefert dann die FBG-Sensorantworten unter der Last  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{y}(\mathbf{F}) = \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{F}). \quad (2.57)$$

Die Kenngrößen des KMS können aus dem Modell abgeleitet werden und stellen ebenfalls Abbildungen bzw. Randbedingungen dar. So ist beispielsweise die Empfindlichkeit  $E$  des KMS eine Kenngröße, die die aufgebrachte Last mit der Sensorantwort - den FBG-Wellenlängenverschiebungen verknüpft. Mathematisch lässt sich dies als

$$E = f(\mathbf{y}(\mathbf{F}), \mathbf{F}) \quad (2.58)$$

darstellen. Eine weitere solche Größe ist die Konditionszahl des KMS, die sich ebenso mathematisch formulieren lässt. Weitere Kenngrößen können als Randbedingungen auftreten. Beispielsweise sind die Abmessungen des KMS eine wichtige Kenngröße. Diese lässt sich als Randbedingung verstehen, da sie das Volumen vorgibt, in dem sich die Faser-Bragg-Gitter befinden müssen. Für den

Positionierungsvektor lassen sich diese Randbedingungen schreiben als

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{36}, \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall j, \quad (2.59)$$

wobei die  $g_j(\mathbf{x})$  die Oberflächen der Ränder des zulässigen Volumens bestimmen. Mittels des mathematischen Modells und der Berechnungsvorschrift der Kenngrößen lässt sich ein *Optimierungsproblem* formulieren wie es in der Literatur zur nichtlinearen Optimierung aufgezeigt wird [111][112][113][114][115]. Dabei wird die *Zielfunktion* durch eine Kenngröße oder mehrere gewichtete Kenngrößen definiert. Diese muss in Abhängigkeit des *Optimierungsvektors*  $\mathbf{x}$  vorliegen. Das optimale Design im Sinne der Kenngrößen und Randbedingungen ergibt sich dann für das Beispiel der Empfindlichkeit durch

$$\max \{f(\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{F}), \mathbf{F}) \mid \mathbf{x} \in G\} \quad (2.60)$$

$$G = \{\mathbf{x}_u \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_o \mid g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall j\}. \quad (2.61)$$

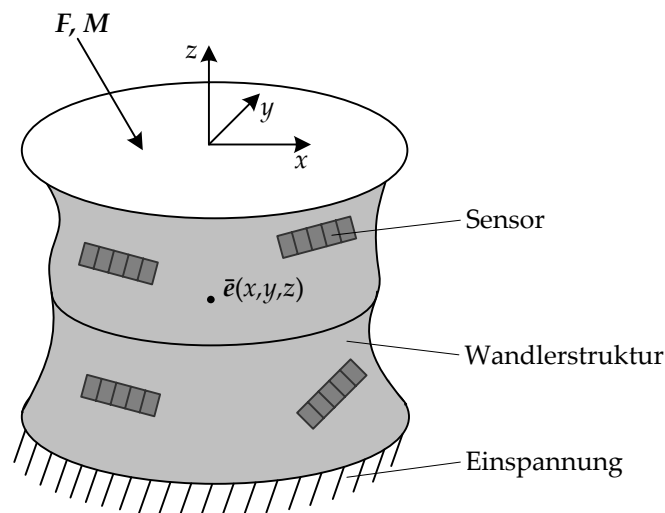
Hierbei stellt  $\mathbf{x}_u$  die untere und  $\mathbf{x}_o$  die obere Begrenzung für  $\mathbf{x}$  dar.

Üblicherweise wird anstelle der Maximierung eine Minimierung durchgeführt, die jedoch durch Vorzeichenvertauschung der Zielfunktion auseinander hervorgehen. Sind die zugrundeliegenden Gleichungen, Zielfunktion und -oder Randbedingungen nichtlinear, so spricht man von einem nichtlinearen Optimierungsproblem [111]. Ein solches liegt vor. Zur Lösung sind eine Reihe von numerischen Methoden bekannt. Diese suchen beispielsweise die Nullstellen  $\nabla f = 0$ , die eine Bedingung für ein Extremum darstellen mittels Algorithmen zur Nullstellensuche wie dem Newtonverfahren [112]. Es wird durch den Algorithmus von einem Anfangspunkt  $\mathbf{x}_0$  ausgehend eine Folge erzeugt, die unter gewissen Voraussetzungen zu einem Extremum konvergiert. Dabei ist eine besondere Schwierigkeit, lokale Maxima von globalen zu unterscheiden. Dieses Problem besitzt keine allgemeine praktische Lösung [114]. So ist eine Möglichkeit der globalen Optimumsbestimmung die Wahl von verschiedenen Anfangspunkten  $\mathbf{x}_{0,p}$  und mehrfache Optimumssuche.

Es ist daher nicht möglich, einer numerische Lösung von Gleichung (2.60) das globale Optimum zuzuschreiben. Lediglich die Aussage, dass eine gefundene Lösung in einer gewissen Umgebung ein Optimum darstellt, ist somit möglich. Konvergieren verschiedene  $\mathbf{x}_0$  aus dem gesamten *zulässigen Bereich* [111] gegen den selben Vektor  $\mathbf{x}_{\text{opt}}$ , so kann lediglich ausgesagt werden, dass die Möglichkeit, dass es sich um ein globales Optimum handelt, wahrscheinlicher ist.

## 2.5 Kenngrößen von Kraft-Momenten-Sensoren

Kraft-Momenten-Sensoren (KMS) können anders als beispielsweise eine Kraftmessdose nicht nur den Betrag einer Kraft, sondern zudem die Richtung dieser Kraft angeben. Ein KMS mit sechs Freiheitsgraden ermöglicht durch die Vermessung der angreifenden Drehmomente die vollständige Rekonstruktion der angreifenden Last. Dazu müssen durch den KMS mindestens so viele Sensorsignale bereitgestellt werden, wie es zu vermessende Freiheitsgrade gibt. Für einen KMS mit sechs Freiheitsgraden ergeben sich so mindestens sechs Sensorsignale.



**Abbildung 2.20:** Allgemeines Modell eines Kraft-Momenten-Sensors. Auf eine mechanische Wandlerstruktur sind Sensoren verteilt. An die Wandlerstruktur angreifende Kräfte verformen diese und erzeugen eine Veränderung der Sensorsignale.

Ein Kraft-Momenten-Sensor ist aufgebaut aus einer *Wandlerstruktur* und den darauf angebrachten Sensoren, wie in Abbildung 2.20 gezeigt. Die Wandlerstruktur dient der Umsetzung der angreifenden Last in mechanische Verzerrungen  $\bar{e}(x, y, z)$ , mechanische Spannungen oder Verschiebungen, die dann mit entsprechenden Sensoren an dafür vorgesehenen Messstellen abgegriffen werden. Bei einem linearen Sensor mit kleinen Verzerrungen können die drei genannten Größen - Verzerrung, Spannung, Verschiebung - leicht ineinander umgerechnet werden, siehe hierzu Abschnitt 2.1.1, und damit äquivalent betrachtet werden.

Nach Bicchi [13] können Kraft-Momenten-Sensoren in zwei Gruppen ein-

geteilt werden. Die erste Gruppe wird als *minimale Sensoren* bezeichnet. Für diese gilt, dass die Anzahl der Freiheitsgrade  $n$  gerade der Sensorsignalanzahl  $m$  entspricht. Die KMS mit mehr Sensoren als Freiheitsgraden werden als *redundante Sensoren* bezeichnet. Der ideale KMS besitzt für jede Lastkomponente, dargestellt durch einen Eintrag  $f_i$  im Lastvektor  $\mathbf{f}$  (vergleiche Abschnitt 2.1.3) eine eigene Empfindlichkeit  $E_i$ . So würde eine Kraft in  $z$ -Richtung eine Sensorantwort im Kanal  $z$  entsprechend der Empfindlichkeit  $E_{fz}$  ergeben. Der reale KMS zeigt zudem noch ein "Übersprechen" zwischen den einzelnen Sensorantworten bei einer einzelnen Last.

Nimmt man den Kraft-Momenten-Sensor als lineares System an, so kann für den Zusammenhang zwischen angreifender Last und Sensorantworten die Beziehung aufgestellt werden

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}. \quad (2.62)$$

Hier stellt  $\mathbf{f}$  den unbekanntem Lastvektor dar,  $\mathbf{C}$  ist die *Compliance-Matrix* [14] und  $\mathbf{v}$  sind die zusammengefassten Sensorsignale des Kraft-Momenten-Sensors. Für einen idealen minimalen Sensor wäre die Compliance-Matrix demnach diagonal mit den Empfindlichkeiten  $E_i$  besetzt.

Um verschiedene Konzepte von Kraft-Momenten-Sensoren leichter vergleichbar zu machen, wird die normalisierte Compliance-Matrix  $\mathbf{C}_N$  eingeführt. Dabei wird zum einen der maximale Messbereich der Sensoren berücksichtigt. Dieser kann im Allgemeinen unterschiedlich sein. Die Maximalwerte werden im Vektor  $\mathbf{v}_M$  zusammengefasst. Zudem erfasst der KMS Größen, die nicht die gleichen Einheiten besitzen (Kraft und Drehmoment) und unterschiedliche Wertebereiche aufweisen können. Des Weiteren kann der KMS für verschiedene Maximallasten in Abhängigkeit der Angriffsrichtung ausgelegt sein. So können beispielsweise größere Maximalkräfte in  $z$ -Richtung zulässig sein, jedoch die maximalen Kräfte in  $x$ - und  $y$ -Richtung dürfen nur geringere Werte annehmen. Somit bietet es sich an, den Lastvektor ebenfalls zu normalisieren. Dazu wird der Vektor der Maximallasten  $\mathbf{f}_M$  eingeführt. Die normalisierte Compliance-Matrix ergibt sich dann zu [14]

$$\mathbf{C}_N = \mathbf{N}_v^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}_f \quad (2.63)$$

$$\mathbf{N}_v = \text{diag}\{\mathbf{v}_M\} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{N}_f = \text{diag}\{\mathbf{f}_M\}, \quad (2.65)$$

wobei  $N_v$  und  $N_f$  die Normalisierungsmatrizen für die Sensoren, bzw. die Last darstellen und  $\text{diag}\{\mathbf{a}\}$  eine Matrix mit Diagonaleinträgen aus dem Vektor  $\mathbf{a}$  bedeutet.

Der reale Sensor besitzt im Allgemeinen Nebendiagonalelemente in der Compliance-Matrix. Zudem sind die einzelnen Einträge bzw. Empfindlichkeiten gegenüber unterschiedlichen Lasten verschieden groß. Die Frage, die sich für den Entwurf eines Kraft-Momenten-Sensors stellt, ist welche Größe im Entwurfsprozess beachtet bzw. optimiert werden soll. Hierzu kann die Beziehung (2.62) herangezogen werden.

Nach Bicchi [13] sind die Sensorsignale durch Unsicherheiten der Form

$$\mathbf{v} = (\mathbf{C} + \Delta\mathbf{C}) \cdot \mathbf{p} + \Delta\mathbf{v} \quad (2.66)$$

beeinflusst. Dabei stellt  $\Delta\mathbf{C}$  die Unsicherheit in der Bestimmung der Compliance-Matrix dar. Diese wird entweder durch ein mechanisches Modell ermittelt oder durch eine Kalibrierungsmessung bestimmt. Beide Verfahren können nicht mit beliebiger Genauigkeit die wahren Werte von  $\mathbf{C}$  bestimmen, da entweder das mechanische Modell nicht genau genug ist, oder weil Messunsicherheiten im Kalibrierungsexperiment auftreten. Die Größe  $\Delta\mathbf{v}$  gibt die Unsicherheiten der in der Wandlerstruktur verbauten Sensoren an. Diese weisen zum Beispiel thermische Driften oder Rauschen auf.

Somit kann als ein Designziel angegeben werden, die Unsicherheiten in der Messung der Last  $\mathbf{f}$  möglichst gering zu halten. Verschiedene Kriterien wurden hierfür als Maß vorgeschlagen, die in [14] und [13] vorgestellt werden. Grundlage dieser Kriterien bildet die Abbildung der Einzelempfindlichkeiten der Sensoren auf ein skalares Maß. Dabei wird versucht, folgendes Problem auf dieses Maß abzubilden: Wird der KMS mit einer orthogonalen Last, also einem Lastvektor  $\mathbf{f}$ , der nur einen Eintrag ungleich Null besitzt, beaufschlagt, so sprechen im Allgemeinen alle Sensoren des KMS an. Greifen alle orthogonalen Lastvektoren nacheinander am KMS an, so muss sich für jede Last ein eindeutiges "Muster" in den Sensorantworten ergeben, das es ermöglicht, auf die Last zurückzurechnen. Weisen zwei solcher Lastzustände dasselbe Muster auf, so können sie nicht voneinander unterschieden werden. Weisen sie ein ähnliches Muster auf, so wird die genaue Rekonstruktion der Last durch das Messrauschen der Sensoren stark erschwert. Je "unterschiedlicher" die Muster sind, desto sicherer wird die Rekonstruktion der angreifenden Last.

Dieser Sachverhalt lässt sich mathematisch zusammenfassen und bildet die Grundlage des Optimierungskonzeptes dieser Arbeit. Nach Svinin et al. [14] und Bayo et al. [116] wird der Fehler der Lastbestimmung durch Minimierung der Konditionszahl

$$c_o = \text{cond}(C_N) \quad (2.67)$$

der Compliance-Matrix minimiert [12]. Die Konditionszahl wird durch die Singulärwertzerlegung der Compliance-Matrix berechnet. Dazu wird das Verhältnis aus dem größten zum kleinsten Singulärwert der Matrix gebildet. Dieser skalare Wert kann somit als Zielfunktion einer Optimierungsroutine für den Kraft-Momenten-Sensor dienen.

Praktisch kann das Kriterium der Konditionszahl leicht verstanden werden. Die Konditionszahl bestimmt beispielsweise bei der numerischen Invertierung einer Matrix, wie stark sich numerische Fehler auf das Ergebnis auswirken. Kleine Konditionszahlen bedeuten dabei, dass sich numerische Fehler nur gering auswirken [90]. Eine Matrixinvertierung ist auch bei der Bestimmung der Lasten aus den Sensorsignalen notwendig. Hier muss die aus der Kalibrierung abgeleitete Compliance-Matrix invertiert werden, um an die Lasten zu gelangen. Ist die Konditionszahl groß, so wirken sich die Messfehler bei der Kalibrierung negativ auf die Rekonstruktion der Last aus.

Zahlreiche Publikationen beschäftigen sich mit der Untersuchung eines bestimmten Entwurfs eines Kraft-Momenten-Sensors, siehe z.B. [5]. Dabei lassen sich Ansätze zusammenfassen, die auf spezielle Anwendungen abzielen, bei denen jedoch Miniaturisierung nicht im Vordergrund steht [117][118][119][6][10]. Zahlreiche Ansätze beschäftigen sich mit der so genannten Stewardplattform [120][121][122][21]. Es bestehen eine Vielzahl von Applikationen, die auf miniaturisierte KMS angewiesen sind, wie minimal invasive, robotergestützte Chirurgie [20]. Ansätze von miniaturisierten Kraft-Momenten-Sensoren finden sich in [24][23][20]. Optische KMS wurden für Bereiche vorgeschlagen, in denen elektrische Messtechnik nicht eingesetzt werden kann, wie in Magnetresonanztomographen. Hierfür wurden Ansätze in [26][25] und [123] angegeben. Erreichte Konditionszahlen sind dabei 1,5 [124] sowie 3,53 [14]. Dabei werden die besonders niedrigen Konditionszahlen nur von KMS erreicht, die deutlich redundant sind, also eine Vielzahl mehr an Sensoren aufweisen als es Freiheitsgrade gibt.





# Kapitel 3

## Untersuchungen zum KMS-relevanten Verhalten von Faser-Bragg-Gittern

Dieser Abschnitt stellt Untersuchungen zum Verhalten von Faser-Bragg-Gittern bei mechanischen Belastungen dar, wie sie in Kraft-Momenten-Sensoren auftreten. Dabei wird für den bisher vernachlässigten optischen Einfluss der Schubverformungen in Faser-Bragg-Gittern eine Beschreibung im Rahmen der gekoppelten-Moden-Theorie abgeleitet. Experimentelle Untersuchungen zum Biegeverhalten sowie zur Strukturapplikation dieser Sensoren werden vorgestellt. Die Ergebnisse stellen die Grundlage für den Entwurf von KMS auf Basis von Faser-Bragg-Gittern dieser Arbeit dar.

### 3.1 Schubverformungen im Faser-Bragg-Gitter

Für den Entwurf von faseroptischen Kraft-Momenten-Sensoren ist die Berechnung der optischen Sensorantworten aufgrund von angreifenden Lasten am KMS notwendige Voraussetzung. Die Lasten am KMS erzeugen Verzerrungen in der KMS-Struktur, die wiederum Verzerrungen in den daran gekoppelten Lichtwellenleiter erzeugen. Im Allgemeinen ist der entstehende Verzerrungstensor  $\bar{\epsilon}$  voll besetzt. Um aus den Verzerrungen die optische Antwort zu berechnen wird in der Literatur mittels der Tensorabbildung des photoelastischen Gesetzes die Störung des Permittivitätstensors berechnet. Für die Berechnung der optischen Antwort der Sensoren werden allerdings in der Literatur die Nebendiagonalelemente des gestörten Permittivitätstensors nicht

berücksichtigt. Diese sind bei isotropen Materialien allerdings direkt verbunden mit den Nebendiagonalelementen des Verzerrungstensors, die ungleich Null sind.

Um den Einfluss dieser Elemente zu untersuchen wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Theorie abgeleitet, die den vollen Verzerrungstensor berücksichtigt und daraus die optische Antwort von Bragg-Gitter-Sensoren berechnen kann. Die Ergebnisse wurden bereits vorab in [125] und [126] veröffentlicht. Sie beinhalten zum einen die Entwicklung der Theorie aus der Theorie der gekoppelten Moden für tensorielle Permittivitätsstörungen sowie die Ableitung einer Transfermatrix-Methode, deren Implementierung und numerische Berechnung deutliche Vorteile gegenüber der direkten Lösung der gekoppelten Modengleichungen aufweist.

### 3.1.1 Modellierung mittels gekoppelter-Moden-Theorie

Die in den Grundlagen eingeführte tensorielle Theorie der gekoppelten Moden soll hier verwendet werden, um den Einfluss eines beliebigen Verzerrungszustandes in der Faser auf die optische Antwort zu bestimmen. Hierzu wird zunächst die allgemeine Theorie nach Barybin [57] für die Fälle der eingeführten Lichtwellenleiter mit entsprechenden Näherungen angepasst. Nach Gleichung (2.21) können die Koppelkoeffizienten aus den elektromagnetischen Feldern und der Perturbation berechnet werden. Wir nehmen zunächst an, dass die Perturbation des Permittivitätstensors  $\Delta\bar{\epsilon}$  klein ist im Vergleich zu den Diagonaleinträgen des ungestörten Tensors  $\Delta\epsilon_{ij} \ll \epsilon_{ii}$ . Diese Näherung ist für die auftretenden Fälle gut erfüllt, da für diese  $\epsilon_{ii} \approx 1$  und  $\Delta\epsilon_{ij} < 10^{-3}$  gilt. Zudem können Produkte der Form  $\Delta\epsilon_{ij} \cdot \Delta\epsilon_{kl}$  damit vernachlässigt werden. Für den ersten Term in Gleichung (2.21) ergeben sich hierdurch keine Vereinfachungen. Für den zweiten Term unter dem Flächenintegral treten solche Produkte auf. Daraus ergibt sich für den zweiten Term

$$\dots \frac{\epsilon}{\epsilon + \Delta\epsilon_{zz}} \left( \mathbf{E}_{mz}^* - \mathbf{E}_{mt}^* \cdot \frac{(\Delta\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{e}_z)_t}{\epsilon} \right) \cdot (\Delta\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_n)_z \dots \quad (3.1)$$

$$\approx \mathbf{E}_{mz}^* \cdot (\Delta\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_n)_z \quad (3.2)$$

Weitet man das Oberflächenintegral auf eine Oberfläche aus, auf deren Rand die elektromagnetischen Felder schon stark abgeklungen sind, so kann der dritte Term in Gleichung (2.21) ganz vernachlässigt werden. Diese Ausweitung

des Integrationsgebiets stellt für einzelne Lichtwellenleiter mit dicker Mantelschicht keine Schwierigkeit dar.

Der verbleibende erste und zweite Term kann dann zusammengefasst werden zu dem überschaubaren Integral

$$\gamma_{mn} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{N_m} \int_{S_b} \left[ \mathbf{E}_{mt}^* \cdot (\Delta\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_n)_t + \right. \quad (3.3)$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_{zz}} \left( \mathbf{E}_{mz}^* - \mathbf{E}_{mt} \cdot \frac{(\Delta\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_z)_t}{\varepsilon} \right) (\Delta\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_n)_z \right] dS \quad (3.4)$$

$$= -\frac{i\omega\varepsilon_0}{N_m} \int_{S_b} \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_n dS \quad (3.5)$$

Als zweiter Schritt werden hier die Normalisierungskonstanten  $N_m$  nach Gleichung (2.22) abgeleitet

$$N_m = 2 \cdot \Re \left\{ \int_{\infty} (\mathbf{E}_m^* \times \mathbf{H}_m) \cdot \mathbf{e}_z dS \right\} \quad (3.6)$$

$$= 2 \cdot \Re \left\{ \int_{\infty} E_{x,p}^* H_{y,p} - H_{x,p} E_{y,p}^* dS \right\}. \quad (3.7)$$

Geht man von Feldern aus, die der Näherung der *schwachen Führung* [50][127] unterliegen, so müssen nur die Transversalkomponenten betrachtet werden. Für den Zusammenhang von magnetischem und elektrischem Feld bei schwacher Führung liefert Snyder [49] die Näherung

$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_{\text{eff}} E_y, \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_{\text{eff}} E_x. \quad (3.8)$$

Für den in  $x$ -Richtung polarisierten, in positive  $z$ -Richtung propagierenden Modus  $p+$  ergibt sich dann

$$N_{p+} \approx 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_{\text{eff}} \cdot \Re \left\{ \int E_{x,p}^* E_{x,p} dS \right\} = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_{\text{eff}} \cdot \int |E_{x,p}|^2 dS. \quad (3.9)$$

Nimmt man hier näherungsweise die effektiven Brechungsindizes aller Moden als gleich an, da sie sich nur um einige Promille unterscheiden, so erhält man für die restlichen, in  $y$ -Richtung polarisierten und in negative  $z$ -Richtung propagierenden Moden

$$N_{p-} = -N_{p+}, \quad N_{s+} \approx N_{p+}, \quad N_{s-} \approx N_{p-}. \quad (3.10)$$

Durch diese Näherung werden die Koppelkoeffizienten nicht nennenswert beeinflusst werden.

Für eine allgemeine Störung der Permittivität  $\Delta\bar{\epsilon}$  können alle Tensoreinträge von Null verschieden sein. Es ist hilfreich Fälle zu unterscheiden, die durch gewisse Formen von  $\Delta\bar{\epsilon}$  gekennzeichnet sind.

### Allgemein belastete Bragg-Gitter in optischen Wellenleitern

Im Folgenden wird die in dieser Arbeit entwickelte Modellierung für Bragg-Gitter, die mit einem bestimmten Verzerrungszustand  $\bar{\epsilon}$  beaufschlagt sind, vorgestellt. Dabei werden die in [125] bereits vorab publizierten Ergebnisse detaillierter dargestellt. Nach den Gleichungen (2.27) bis (2.32) kann aus dem Verzerrungszustand die mechanisch erzeugte Perturbation der Permittivität  $\Delta\bar{\epsilon}_m$  berechnet werden. Im Falle eines Bragg-Gitters wird diese Perturbation überlagert von der permanenten periodischen Störung des Gitters. Diese wird hier durch

$$\Delta\epsilon_{G,ij} = \Delta\epsilon_G \cos(2\beta_G z) \cdot \delta_{ij} \quad (3.11)$$

modelliert. Diese Form der Modellierung erlaubt es, prinzipiell auch anisotrope Gitterstrukturen zu erfassen. Der dargestellte Fall stellt dabei ein isotropes Gitter dar. Die reziproke Gitterkonstante  $\beta_G$  ist gegeben durch

$$\beta_G = \frac{\pi}{\Lambda(1 + e_{zz})} = \frac{2\pi}{\lambda_B}. \quad (3.12)$$

Durch die longitudinale Dehnung  $e_{zz}$  wird die Gitterperiode entsprechend vergrößert bzw. verkleinert. Die gesamte Störung des Permittivitätstensors ergibt sich dann zu

$$\Delta\bar{\epsilon} = \Delta\bar{\epsilon}_G + \Delta\bar{\epsilon}_m. \quad (3.13)$$

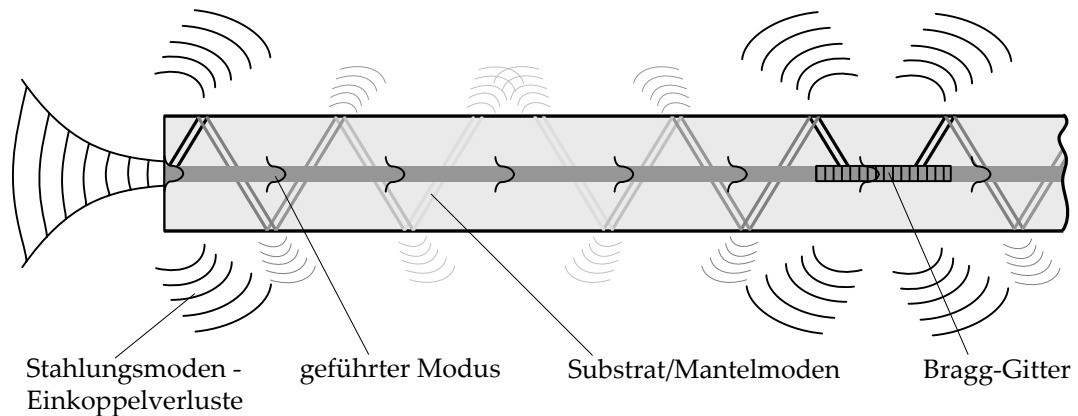
Für eine vereinfachte Darstellung der Gleichungen wird die Koppelmatrix  $C$  mit den Einträgen  $C_{mn}$  definiert. Diese beinhaltet neben den Koppelkoeffizienten auch die Ausbreitungskonstanten der Moden und ist gegeben durch

$$C_{mn} = -\frac{i\omega\epsilon_0}{N_m} e^{i(\beta_m - \beta_n)z} \int_{S_b} \mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_n dS. \quad (3.14)$$

Die gekoppelten Modengleichungen nehmen dann die einfache Form

$$\frac{d\mathbf{A}(z)}{dz} = C \cdot \mathbf{A}(z) \quad (3.15)$$

an. Diese Schreibweise wurde erst hier eingeführt, da sie für die Behandlung dieses Problems besonders übersichtlich ist. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die in den Grundlagen eingeführte Form wieder angewandt.



**Abbildung 3.1:** Auftretende Moden der Monomodenfaser. Das links eingekoppelte Licht wird an Strahlungsmoden, Mantelmoden und geführte Moden gekoppelt und teilweise aus dem Wellenleiter gestreut.

Für die Betrachtung des allgemeinen Falles muss zunächst von einer vollständigen Modenbasis ausgegangen werden, die nicht abzählbar unendliche viele Moden enthält [44]. Betrachten wir das belastete Bragg-Gitter in einiger Entfernung, zur Stelle der Lichteinkopplung und zu anderen gestörten Stellen, so kann davon ausgegangen werden, dass nurmehr die geführten Moden des Wellenleiters nennenswerte Amplituden besitzen. Das Gleiche gilt für die Messung des vom Bragg-Gitter reflektierten, bzw. transmittierten Lichts. An der Stelle des Bragg-Gitters kann durchaus eine Kopplung mit Strahlungsmoden auftreten. Dies ist eine Möglichkeit Bragg-Gitter sichtbar zu machen. Für die Messung nach langer durchlaufener Wellenleiterstrecke kommen allerdings nur wieder die geführten Moden in Frage. Somit kann die Modenanzahl näherungsweise um alle Moden bis auf die geführten Moden reduziert werden. Es bleibt die Frage welche Moden geführt werden. Für die betrachteten monomodigen Wellenleiter sind im Bereich der Betriebswellenlänge vier Moden zu betrachten. Zwei Polarisationsmoden mit orthogonaler Polarisation, davon jeweils zwei Ausbreitungsrichtungen. Diese sind in Gleichung (2.16) in einem Vektor  $\mathbf{A} = \{A_{p+}, A_{p-}, A_{s+}, A_{s-}\}^T$  zusammengefasst worden. Für diese Moden werden im Folgenden die Einträge der Koppelmatrix abgeleitet. Untersuchungen zur Gitter gestützten Kopplung in Wellenleitern mit höheren Moden wurden in [128] unternommen. Gitter gestützte Kopplungen mit Strah-

lungsmoden wurde in [129] untersucht, solche mit Mantelmoden in [130]. Dabei spielen verkippte Bragg-Gitter eine besondere Rolle. Diese sind für Telekommunikationsanwendungen interessant und werden hier nicht weiter betrachtet. Polarisationsmodenkopplung in aus zirkular doppelbrechenden Elementen aufgebauten Bragg-Gittern wurde von Lee untersucht [131]. Die Polarisationsmodenkopplung berücksichtigt allerdings lediglich die auftretende Vorwärts-Vorwärtskopplung, jedoch unter Moden verschiedener Ordnung.

Zur Berechnung der Vorwärts-Vorwärts- sowie Vorwärts-Rückwärtskopplung unter Berücksichtigung aller Moden werden zunächst die Ausbreitungskonstanten  $\beta_m$  der Moden definiert. Beide Moden haben leicht unterschiedliche Ausbreitungskonstanten  $\beta_p$  und  $\beta_s$ , wobei die gegenlaufenden Moden betragsmäßig die selben Ausbreitungskonstanten besitzen. Die Vorzeichen der Ausbreitungskonstanten werden erst beim Einsetzen in die Koppelmatrix berücksichtigt. Hierbei werden die in negative  $z$ -Richtung propagierenden Moden mit negativen Vorzeichen berücksichtigt. Damit die Koppelmatrix später vereinfacht werden kann, werden hier folgende Definitionen angenommen

$$\beta_p = \beta, \quad \beta_s = \beta - \delta\beta \quad (3.16)$$

$$\Delta\beta = \beta - \beta_G. \quad (3.17)$$

Die Differenz der Betriebswellenlänge  $\lambda$  bzw. Ausbreitungskonstante  $\beta$  zur Bragg-Wellenlänge  $\Delta\lambda$  wird als *Verstimmung* oder *Detuning* bezeichnet [74].

Damit ein Eintrag der Permittivitätstensorstörung  $\Delta\varepsilon_{ij}$  zu einer nennenswerten Kopplung der Moden führen kann, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein. Zunächst muss der Phasenterm des Koppelmatrixeintrages  $\exp(i(\beta_m - \beta_n)z)$  langsam mit  $z$  oszillieren. Diese Annahme wird als *Synchronous-Approximation* bezeichnet [74]. Schnell oszillierende Terme rufen eine Kopplung hervor, die sich im Mittel zu Null ergibt. Die zweite Bedingung ist, dass der Integralteil von  $C_{mn}$  ungleich Null ist.

Im Falle zweier orthogonal polarisierten Moden ist der Inhalt des Integrals gleich  $\mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_n$ , wobei  $m$  und  $n$  zu den  $p$ - bzw.  $s$ -Moden gehören. Mit der Näherung der schwachen Führung ergibt sich für  $\mathbf{E}_p$  bzw.  $\mathbf{E}_s$  die Form [49]

$$\mathbf{E}_p = (E_p(x, y), 0, 0)^T \quad (3.18)$$

$$\mathbf{E}_s = (0, E_s(x, y), 0)^T. \quad (3.19)$$

Für den Integrand in (3.14) ergibt sich damit im Beispiel der  $s$ - $p$  Kopplung

$$\mathbf{E}_s^* \cdot \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ E_s \\ 0 \end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{xx} & \Delta \varepsilon_{xy} & \Delta \varepsilon_{xz} \\ \Delta \varepsilon_{xy} & \Delta \varepsilon_{yy} & \Delta \varepsilon_{yz} \\ \Delta \varepsilon_{xz} & \Delta \varepsilon_{yz} & \Delta \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Es wird klar, dass für alle Kombinationen aus  $p$ - und  $s$ -Moden nur drei Einträge des Tensors für die Modenkopplung relevant sind. Diese sind  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  und  $\varepsilon_{xy}$ . Alle anderen Tensoreinträge haben geringen Einfluss, da sie mit Feldkomponenten multipliziert werden, die um Größenordnungen kleiner sind.

Diese Einträge können dennoch eine Rolle spielen. Allerdings sind die in Bragg-Gittern auftretenden Koppelkoeffizienten vergleichsweise groß, daher sind die relativen Effekte vernachlässigbar. Geht man von Bragg-Gittern zu anderen Koppelphänomenen, so spielen auch die verbleibenden Tensoreinträge eine Rolle. Ein Beispiel hierfür ist die Vorwärts-Vorwärts bzw. Polarisationsmodenkopplung in einer tordierten Faser. Hier findet die Kopplung ausschließlich durch die longitudinalen Feldkomponenten mit einer transversalen Komponente statt. Es sind somit gerade alle die Tensoreinträge relevant, die hier keine Rolle spielen. Dieses Problem wurde von [51] behandelt. Die Ergebnisse werden in dieser Arbeit für den Einfluss der Torsion der Faser auf den KM-Sensor verwendet.

Aus den Gleichungen für die mechano-optische Kopplung Gleichung (2.27) bis (2.32) lässt sich für isotrope Materialien leicht ableiten, dass demnach nur die Verzerrungstensoreinträge  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$  und  $e_{xy}$  Einfluss haben. Der longitudinalen Dehnung  $e_{zz}$  kommt dabei eine Sonderrolle zu, da sie direkt die Gitterperiode  $\Lambda$  bzw.  $\beta_G$  beeinflusst. Ein zusätzlicher Effekt, der den Einfluss der  $e_{xz}$  und  $e_{yz}$  Verzerrungstensoreinträge weiter reduziert, ist die schlechte Kopplung dieser Einträge in die Faser. Diese mechanische Kopplung wurde für den Fall von eingebetteten Fasersensoren von Pak theoretisch untersucht [132]. Für einen weiten Bereich an Faserhüllen-Parametern zeigt sich, dass die Schubverformungskopplung bei ca. 10 % liegt.

**Koppelkoeffizienten der Zwei-Moden-Kopplung -** Unter den getroffenen Annahmen werden jetzt die Einträge der Koppelmatrix abgeleitet. Es werden nur drei Einträge, die physikalisch verschiedene Phänomene beschreiben, exemplarisch diskutiert. Der erste Eintrag stellt den "klassischen" Selbstkoppelkoeffizienten dar, wie er in anderer Form von [74] oder [133] angegeben



wird. Die Rechnung wird hier explizit durchgeführt, da die Modellierung anders als in der Literatur über den Permittivitätstensor erfolgt und die Notation sich unterscheidet. Zudem wird an dieser Stelle die wichtige Näherung der Synchronous-Approximation deutlich. Der Koppelmatrixeintrag  $C_{11}$  beschreibt die Kopplung zwischen dem in positive  $z$ -Richtung propagierenden  $p$ -Modus mit sich selbst. Ausgehend von Gleichung (3.14) ergibt sich

$$C_{11} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{N_{p^+}} \int_S (\Delta\varepsilon_{G,xx} \cos(2\beta_G z) + \Delta\varepsilon_{M,xx}) E_{p,x}^* E_{p,x} dS \quad (3.21)$$

Da die Verzerrungen nach der beschriebenen Center-Strain-Approximation als transversal homogen angenommen werden, können diese vor das Integral gezogen werden. Das Bragg-Gitter befindet sich im Falle des Faser-Bragg-Gitters nur im Kern der Faser [74] und wird dort als über dem Querschnitt konstant angenommen. Somit kann das Integral für die Verzerrungen über den gesamten Querschnitt, das für die Gitterperturbation nur über den Kern ausgeführt werden

$$C_{11} = -\frac{i2\pi\varepsilon_0 c_0}{\lambda N_{p^+}} \left\{ \Delta\varepsilon_{G,xx} \cos(2\beta_{BZ}) \int_{\text{Kern}} |E_{p,x}|^2 dS + \right. \quad (3.22)$$

$$\left. + \Delta\varepsilon_{xx,m} \int_{\infty} |E_{p,x}|^2 dS \right\}. \quad (3.23)$$

Setzt man die abgeleitete Gleichung für die Normalisierungskonstante  $N_{p^+}$  ein, so erhält man für das zweite Integral über die elektrischen Felder

$$\frac{1}{N_{p^+}} \int_{\infty} |E_{p,x}|^2 dS = \int_{\infty} |E_{p,x}|^2 dS / 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_{\text{eff}} \cdot \int_{\infty} |E_{x,p}|^2 dS \quad (3.24)$$

$$= \frac{1}{2n_{\text{eff}}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad (3.25)$$

sowie für das erste Integral

$$\frac{1}{N_{p^+}} \int_{\text{Kern}} |E_{p,x}|^2 dS = \int_{\text{Kern}} |E_{p,x}|^2 dS / 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_{\text{eff}} \cdot \int_{\infty} |E_{x,p}|^2 dS \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{2n_{\text{eff}}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \Gamma_p. \quad (3.27)$$

$\Gamma_p$  gibt den *Confinement Factor* des  $p$ -Modus an [43]. Dieser liegt für schwach geführte Moden bei über 90 %. Hiermit ergibt sich für den Koppelmatrixein-

trag mit  $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

$$C_{11} = -\frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}}(\Gamma_p \Delta\varepsilon_{G,xx} \cos(2\beta_G z) + \Delta\varepsilon_{m,xx}). \quad (3.28)$$

Aufgrund der erwähnten Synchronous-Approximation können die schnell oszillierenden Teile des Koppelkoeffizienten ignoriert werden. In diesem Fall sind das die Terme der Bragg-Gitter Perturbation. Somit ergibt sich

$$C_{11} = -\frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}}\Delta\varepsilon_{m,xx}(z). \quad (3.29)$$

Es wird deutlich, dass dieser Selbstkoppelkoeffizient, der beispielsweise einen Phasenversatz des elektromagnetischen Feldes durch eine erhöhte Brechzahl beschreibt, vom Gitterterm unabhängig ist. Dies ist mit der Modellierung konsistent, die für das Bragg-Gitter als Vereinfachung keine Gleichanteilerhöhung der Permittivität annimmt. Die Gleichanteilerhöhung wird ausschließlich über den mechanischen Einfluss erzeugt.

Das Bragg-Gitter erzeugt bekanntermaßen eine starke Vorwärts- Rückwärts- kopplung. Diese wird durch die Koppelkoeffizienten beschrieben, die in positive- und negative  $z$ -Richtung propagierende Moden verknüpft. Beispielhaft dafür wird hier der  $C_{12}$  Eintrag hergeleitet. Dabei wird wieder von der allgemeinen Gleichung für die Koppelmatrix (3.14) ausgegangen

$$C_{12} = -\frac{i\omega}{N_{p+}} \cdot e^{i2\beta z} \int_S \varepsilon_0 (\Delta\varepsilon_{G,xx} \cos(2\beta_G z) + \Delta\varepsilon_{m,xx}) |E_{p,x}|^2 dS \quad (3.30)$$

$$= -\frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}} \cdot e^{i2\beta z} (\Gamma_p \Delta\varepsilon_{G,xx} \cos(2\beta_G z) + \Delta\varepsilon_{m,xx}). \quad (3.31)$$

Um im Rahmen der Synchronous-Approximation die langsam oszillierenden Terme zu identifizieren werden jetzt mittels einer trigonometrischen Umformung die schnell oszillierenden Terme verrechnet

$$C_{12} = -\frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}} (\Gamma_p \Delta\varepsilon_{G,xx} \cos(2\beta_G z) + \Delta\varepsilon_{m,xx}) (\cos(2\beta z) + i \sin(2\beta z)) \quad (3.32)$$

$$= -\frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}} \left( \frac{1}{2} \Gamma_p \Delta\varepsilon_{G,xx} e^{i2(\beta-\beta_G)z} + \Delta\varepsilon_{m,xx} e^{i2\beta z} \right). \quad (3.33)$$

In diesem Term wird der mechanische Perturbationstensoreintrag mit dem schnell oszillierenden Term multipliziert. Liegt die Ausbreitungskonstante des eingestrahlten Lichts  $\beta$  in der Nähe der reziproken Bragg-Gitterkonstante  $\beta_G$ ,

so wird die Frequenz des komplexen Exponentialterms vor der Gratingstörung  $\Delta\varepsilon_{TG,xx}$  klein und er muss berücksichtigt werden. Dies stellt gerade das Charakteristikum des Bragg-Gitters dar. Es folgt

$$C_{12} = -\frac{i\pi}{2\lambda n_{\text{eff}}}\Delta\varepsilon_{G,xx}\Gamma_p e^{i2(\beta-\beta_G)z} = -\frac{i\pi}{2\lambda n_{\text{eff}}}\Delta\varepsilon_{G,xx}\Gamma_p e^{i2\Delta\beta z}. \quad (3.34)$$

Die Stärke des Koppelkoeffizienten hängt erwartungsgemäß von der Gitterstärke ab.

**Koppelkoeffizienten der Vier-Moden-Kopplung** - Soweit wurde die in der Literatur bereits in anderer Form dargestellten Koppelkoeffizienten der Zwei-Moden-Kopplung für die in dieser Arbeit verwendete Modellierung hergeleitet. Jetzt sollen die Koppelkoeffizienten der bisher in der Literatur vernachlässigten Vier-Moden-Kopplung [125] am Beispiel der  $p + /s+$ -Modenkopplung abgeleitet werden. Diese Kopplung wird durch den  $C_{13}$  Koppelmatrixeintrag dargestellt

$$C_{13} = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{N_{p^+}} \int_{\infty} \Delta\varepsilon_{m,xy} E_{p,x}^* E_{s,y} dS \cdot e^{i(\beta_p-\beta_s)z} \quad (3.35)$$

$$= -\frac{i2\pi\varepsilon_0 c_0}{\lambda N_{p^+}} \Delta\varepsilon_{m,xy} \cdot e^{i\delta\beta z} \int_{\infty} E_{p,x}^* E_{s,y} dS. \quad (3.36)$$

Bei dieser Kopplung nimmt aufgrund der elektromagnetischen Feldverteilung das als isotrop modellierte Bragg-Gitter nicht Teil, die Abbildung  $\mathbf{E}_m^* \cdot \Delta\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_n$  liefert lediglich den Eintrag  $\Delta\varepsilon_{m,xy}$ . Dieser wird wieder nach der Center-Strain-Approximation vor das Integral gezogen. Zudem kann die Differenz der Ausbreitungskonstanten im Term  $\delta\beta$  zusammengefasst werden.

Die sich ergebende Schwierigkeit liegt im Integralterm über die  $p$ - und  $s$ -Moden Feldverteilung. Diese können hier nicht exakt über den Confinement Factor vereinfacht werden. Um den Term dennoch vereinfachen zu können, wird angenommen, dass die transversalen Feldverteilungen des  $p$ - und  $s$ -Modus sich nicht nennenswert unterscheiden. Diese Näherung ist für Wellenleiter mit mäßiger Doppelbrechung wie der polarisationserhaltenden Faser sicher zulässig. Damit liefert der Integralterm den selben Beitrag wie der Integralterm in der Normierungskonstanten  $N_{p^+}$  und das Integral kann gekürzt werden. Es folgt für den Koppelmatrixeintrag

$$C_{13} = -\frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}}\Delta\varepsilon_{m,xy} e^{i\delta\beta z}. \quad (3.37)$$

Im Ergebnis wird die Polarisationsmodenkopplung also lediglich vom Neben-diagonalelement  $\Delta\varepsilon_{m,xy}$  und dem Unterschied der Ausbreitungskonstanten der Polarisationsmoden bestimmt. Ersteres ist für isotrope Materialien direkt zurückzuführen auf den Schubverformungseintrag  $e_{xy}$ . Letzteres hängt ausschließlich von der Doppelbrechung des Wellenleiters ab.

Die vollständigen Koppelmatrixeinträge  $C_{mn}$  sind für die Vorwärts-Rückwärtskopplung des  $p$ -Modus

$$C_{11} = -\frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}} \Delta\varepsilon_{m,xx} \quad (3.38)$$

$$C_{12} = -\frac{i\pi}{2\lambda n_{\text{eff}}} \Delta\varepsilon_{G,xx} \Gamma e^{i2\Delta\beta z} \quad (3.39)$$

$$C_{21} = \frac{i\pi}{2\lambda n_{\text{eff}}} \Delta\varepsilon_{G,xx} \Gamma e^{-i2\Delta\beta z} \quad (3.40)$$

$$C_{22} = -C_{11}. \quad (3.41)$$

Dabei wurde die Unterscheidung zwischen den Confinement Faktoren der beiden Polarisationsmoden aufgehoben. Für die Vorwärts-Rückwärtskopplung des  $s$ -Modus ergibt sich

$$C_{33} = -\frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}} \Delta\varepsilon_{m,yy} \quad (3.42)$$

$$C_{34} = -\frac{i\pi}{2\lambda n_{\text{eff}}} \Delta\varepsilon_{G,yy} \Gamma e^{i2(\Delta\beta - \delta\beta)z} \quad (3.43)$$

$$C_{43} = \frac{i\pi}{2\lambda n_{\text{eff}}} \Delta\varepsilon_{G,yy} \Gamma e^{-i2(\Delta\beta - \delta\beta)z} \quad (3.44)$$

$$C_{44} = -C_{33}. \quad (3.45)$$

Die neuen Koppelterme für die Vier-Moden-Kopplung lauten

$$C_{14} = C_{23} = C_{32} = C_{41} = 0 \quad (3.46)$$

$$C_{13} = -C_{42} = -\frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}} \Delta\varepsilon_{m,xy} e^{i\delta\beta z} \quad (3.47)$$

$$C_{24} = -C_{31} = \frac{i\pi}{\lambda n_{\text{eff}}} \Delta\varepsilon_{m,xy} e^{-i\delta\beta z}. \quad (3.48)$$

**Lösen der gekoppelten Modengleichungen** - Die gekoppelten Modengleichungen können ein Anfangswertproblem darstellen, wenn beispielsweise die Kopplung zweier sich in  $z$ -Richtung ausbreitender Moden untersucht wird. Im

Falle des Bragg-Gitters mit Vier-Moden-Kopplung ergibt sich ein Randwertproblem. Die Randwerte sind dabei die auf das Gitter zulaufenden Feldamplituden. Links des Gitters laufen die  $p + /s+$ -Moden auf das Gitter zu und stellen die Beleuchtung dar. Rechtsseitig laufen die  $p - /s-$ -Moden auf das Gitter zu. Diese stammen in einem typischen Messaufbau von Streuungen an Steckern, anderen Gittern oder Ähnlichem. Für Wellenleiter, in denen nach dem Bragg-Gitter mit keiner Reflexion mehr zu rechnen ist, können diese Amplituden zu Null angenommen werden. Es ergeben sich damit beispielsweise die Randbedingungen

$$\mathbf{A}(0) = \{1, A_{p-}(0), 0, A_{s-}(0)\}^T \quad (3.49)$$

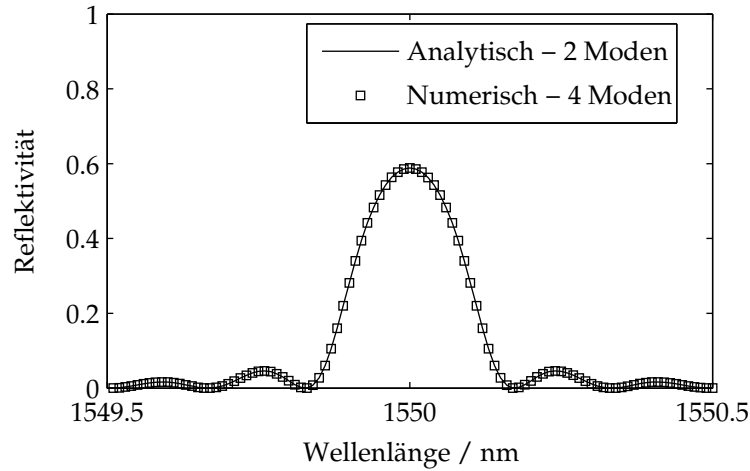
$$\mathbf{A}(L) = \{A_{p+}(L), 0, A_{s+}(L), 0\}^T. \quad (3.50)$$

Dabei wird angenommen, dass das Gitter mit linear polarisiertem Licht der Amplitude 1 V/m beleuchtet wird. Die verbleibenden drei Randbedingungen werden zu Null angenommen. Als Unbekannte ergeben sich die verbleibenden Amplituden am Gitteranfang und am Gitterende bei  $z = L$ .

Die Ansätze die in dieser Arbeit für eine analytische Lösung dieser gekoppelten Modengleichungen gemacht wurden, sollen hier nicht vorgestellt werden. Es ergeben sich umfangreiche Terme, deren Handhabung in der Praxis als zu schwerfällig angesehen werden kann. Die Lösung der Gleichungen gelingt jedoch leicht mittels numerischer Integration in einer überschaubaren Rechenzeit von einigen Sekunden auf einem derzeit üblichen Personalcomputer.

Die Konsistenz bzw. die Richtigkeit der abgeleiteten Theorie sowie der Implementierung im Rechner muss überprüft werden. Dazu wird zunächst ein Vergleich mit der bekannten analytischen Lösung der Zwei-Moden-Kopplung durchgeführt [72][73]. Da die Vier-Moden-Beschreibung diesen Fall beinhalten muss, kann damit die Richtigkeit dieses Teils der Modellierung überprüft werden.

Für den Fall der Vier-Moden-Kopplung, für die keine analytische Lösung vorhanden ist, können physikalische Erwägungen die Konsistenz der Lösung prüfen. So muss das Prinzip der Energieerhaltung bzw. bei zeitlich konstanter Leistung das Prinzip der Leistungserhaltung gelten. Dieses Prinzip kann hier widersprüchlich erscheinen, da ja an einer Störstelle in der Faser auch Verluste auftreten können. In den betrachteten verlustarmen Materialien kommt als Verlustmechanismus lediglich die Kopplung an Mantel- oder Strahlungsmoden in Frage. Diese Kopplung ist in der Theorie allerdings vernachlässigt,



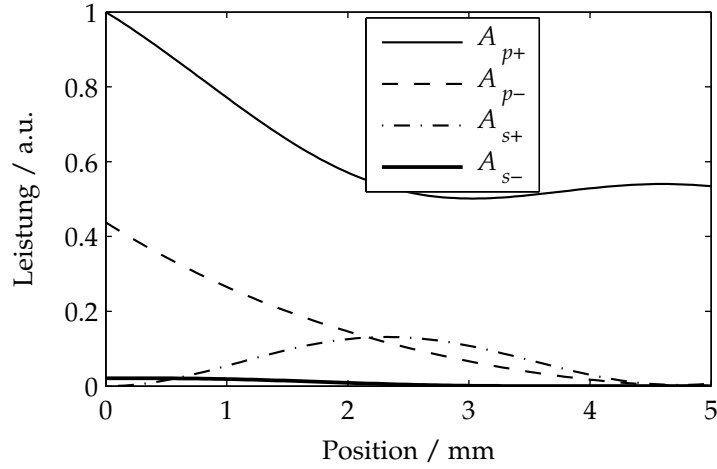
**Abbildung 3.2:** Vergleich der analytischen Lösung der Zwei-Moden-CMT mit der numerischen Lösung der Vier-Moden-CMT dieser Arbeit. Die Vier-Moden-CMT erfasst den isotropen Fall exakt.

da sie praktisch eine sehr geringe Rolle spielt. Das bedeutet allerdings, dass sämtliche Energie bzw. Leistung in den verwendeten Moden enthalten sein muss.

Die Überprüfung der Leistungserhaltung erfolgt durch Aufsummieren der transmittierten und reflektierten Leistungen  $I_m = |A_m|^2$  aller Moden. Diese Summe muss der Summe der Leistungen der eingestrahnten Moden gleich sein. Der im nächsten Abschnitt diskutierte Verlauf der Modenleistungen in Abbildung 3.3 zeigt genau dieses Verhalten. Nur ein Modus bestrahlt das Gitter mit der Leistung 1 W. Summiert man die Leistung der zurücklaufenden Moden  $p-$  und  $s-$  an der Stelle  $z = 0$  und die Leistung der vorwärts laufenden Moden  $p+$  und  $s+$  an der Stelle  $z = L = 5$  mm, so ergibt sich gerade ein Wert von 1 W. Die Überprüfung der Leistungserhaltung ergab für alle numerischen Berechnungen eine relative Abweichung von unter  $10^{-5}$  und kann somit als exakt eingehalten angesehen werden.

### 3.1.2 Einfluss der Schubverformungen auf die Sensorantwort des Faser-Bragg-Gitters

Im Folgenden sollen Aspekte der Lösungen diskutiert werden. Es soll die abgeleitete Theorie auf einen Fall angewendet werden, der von der Zwei-Moden-Theorie nicht erfasst wird. Dazu wird ein Bragg-Gitter betrachtet, das un-



**Abbildung 3.3:** Entwicklung der Leistungen der vier Moden unter dem Einfluss von Schubverformungen. Für die Berechnung wurde  $m = 0,25$ ,  $\gamma = 45^\circ$  und  $e'_{xx} = 1000 \mu\text{m}/\text{m}$  gewählt. Die Polarisations-Schwebungslänge der Faser ist  $L_B = 5 \text{ mm}$ , die Länge des Gitters  $L = 5 \text{ mm}$ . Die Bragg-Wellenlänge ist  $\lambda_B = 1550 \text{ nm}$ , die Wellenlänge des eingestrahlten Lichts ist  $\lambda = 1550,2 \text{ nm}$ .

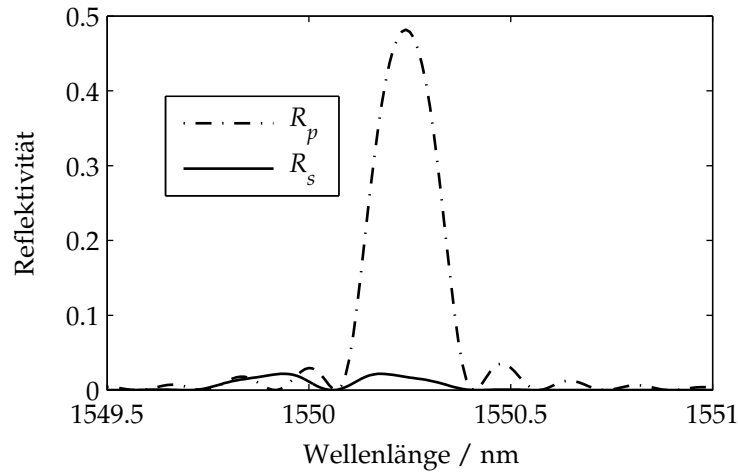
ter Schubverformung gesetzt wird. Der Testfall eines querbelasteten Bragg-Gitters wird verwendet, wie er in Gleichung (2.56) beschrieben wird. Um in diesem Gedankenexperiment Schubverformungen zu erzeugen wird die Faser und mit ihr das Faserkoordinatensystem um die  $z$ -Achse mit Winkel  $\gamma$  rotiert, während die angreifende Last im Laborkoordinatensystem gleich bleibt. Die Verzerrungen im Faserkoordinatensystem  $\bar{e}'$  findet man dann durch die Tensortransformation  $\bar{e}' = R^{-1}(\gamma) \cdot \bar{e} \cdot R(\gamma)$  entsprechend Gleichung (2.7) und erhält beispielhaft für eine Drehung um  $\gamma = 45^\circ$

$$\bar{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e'_{xx}(1-m) & -\frac{1}{2}e'_{xx}(1+m) & 0 \\ -\frac{1}{2}e'_{xx}(1+m) & \frac{1}{2}e'_{xx}(1-m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Allein durch die Drehung der Faser in der Versuchsanordnung werden also nennenswerte Schubverformungen erzeugt, die im Größenordnungsbereich der Diagonalelemente liegen.

### Beleuchtung mit einem Modus

Für die numerische Lösung wurde aus diesem Belastungszustand die Perturbation des Permittivitätstensors berechnet und in die abgeleiteten Gleichungen



**Abbildung 3.4:** Spektrale Antwort eines Faser-Bragg-Gitters unter Schubverformung. Das einfallende Licht ist parallel zur  $x$ -Achse polarisiert. Die mechanische Last und Parameter sind identisch mit denen aus Abbildung 3.3. Die starke Reflexion ist die zu erwartende Bragg-Reflexion, die kleinere Reflexion  $R_s$  ist durch die Polarisationsmodenkopplung verursacht.

eingesetzt. Dies geschieht mittels eines in dieser Arbeit entwickelten Simulators für Vier-Moden-Koppelprobleme, der noch beschrieben wird. Der Verlauf der Leistungen der Moden für die Randbedingungen aus Gleichung (3.49) ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Die Moden  $p+$  und  $p-$  folgen in etwa dem Verlauf des Zwei-Moden-Koppelproblems. Allerdings ist schon für den  $p+$  Modus eine deutliche Abweichung vom dem im Zwei-Moden-Fall monoton abfallenden Verlauf im hinteren Bereich zu erkennen.

Eine wichtiges Merkmal ergibt sich, wenn man den Verlauf des  $s+$  Modus betrachtet. Dieser gewinnt zunächst an Leistung bis zur Gittermitte hin. Erklärt wird diese Kopplung durch die Polarisationsmodenkopplung aufgrund der Nebendiagonalelemente im Permittivitätsstörungstensor  $\Delta\bar{\epsilon}$ , bzw. durch die Schubverformung  $e_{xy}$ . Die Leistung im  $s+$  Modus wird durch resonante Streuung am Bragg-Gitter teilweise in den zurücklaufenden  $s-$  Modus gekoppelt. Zudem findet eine Polarisationsmodenkopplung des Bragg-reflektierten  $p-$  Modus mit dem  $s-$  Modus statt. Alle diese Effekte treten verteilt über den Bereich des Bragg-Gitters auf und sind daher ständig miteinander in Wechselwirkung.

Da Faser-Bragg-Gitter Messsysteme größtenteils auf die Auswertung des reflektierten Spektrums abzielen ist in Abbildung 3.4 der Verlauf über der Wel-



lenlänge dargestellt. Die Reflexionskoeffizienten sind dabei definiert als

$$R_{p/s} = \frac{A_{p/s-}(0)}{A_{p+}(0)}. \quad (3.52)$$

Die starke Reflexion des  $p$ -Modus stellt das gewöhnliche Verhalten des Bragg-Gitters dar. Die Bragg-Wellenlänge wird leicht durch die Störung der Permittivität aufgrund der Dehnungen  $e_{xx}$  und  $e_{yy}$  verschoben. Der orthogonal polarisierte  $s$ -Modus weist zwei Reflexionspeaks von etwa gleicher Leistung auf. Der rechte Peak bei der Reflexionswellenlänge des  $p$ -Modus, wird durch die Polarisationsmodenkopplung des reflektieren  $p$ - Modus mit dem  $s$ - Modus erzeugt. Der zweite Peak kommt folgendermaßen zustande: Zunächst koppelt der  $p+$  Modus mit dem  $s+$  Modus und dessen Leistung steigt an, wie in Abbildung 3.3 gezeigt. Der vorwärts laufende  $s$ -Modus koppelt dann aufgrund des Bragg-Gitters bei der Wellenlänge des  $s$ -Bragg-Peaks, der wegen der Doppelbrechung zu kleineren Wellenlängen verschoben ist, mit dem rücklaufenden Modus. Somit entstehen zwei reflektierte Wellenlängenmaxima.

Ein Effekt zweiter Ordnung kann beobachtet werden, indem man die Nebenmaxima des  $p$ -Peaks auf der linken Seite betrachtet. Durch Polarisationsmodenkopplung mit dem  $s$ - Modus gewinnen diese im Vergleich zu den rechten Nebenmaxima an Gewicht.

### Beleuchtung mit zwei Moden

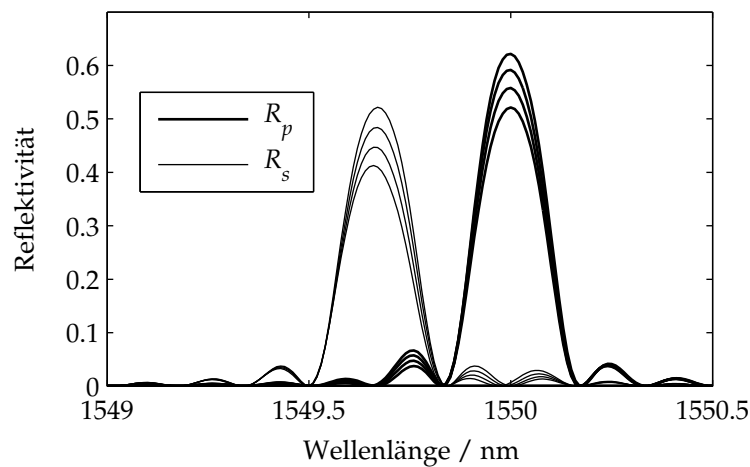
Eine Vielzahl von Bragg-Gitter Messsystemen basiert auf einer Beleuchtung des Sensors mit beiden Polarisationsrichtungen [33][64][107]. Diese Beleuchtung kann im Modell durch die Randbedingungen

$$\mathbf{A}(0) = \{1, A_{p-}(0), 1, A_{s-}(0)\}^T \quad (3.53)$$

$$\mathbf{A}(L) = \{A_{p+}(L), 0, A_{s+}(L), 0\}^T. \quad (3.54)$$

dargestellt werden. Durch die Polarisationsmodenkopplung kann diese Beleuchtung zu Unterschieden im Ergebnis der Reflektivitäten  $R_{p/s}$  führen. Um den reinen Einfluss der Schubverformung darzustellen, wurde in der Simulation ein Bragg-Gitter-Sensor ausschließlich mit Schubverformungen  $\Delta e_{xy}$  belastet. Abbildung 3.5 zeigt das Ergebnis der Reflektivitäten für zunehmende Schubverformung.

Das Ergebnis zeigt die Übertragung der Leistungen des  $p$ -Modus in den  $s$ -Modus. Wichtig für die Anwendung in der Sensorik ist dabei der Einfluss auf



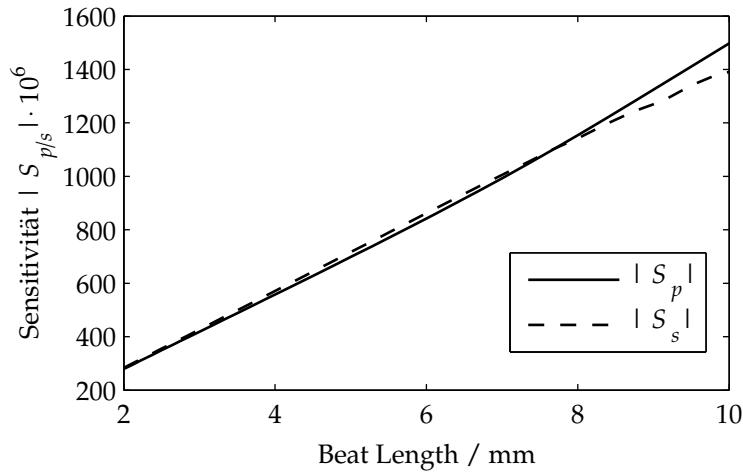
**Abbildung 3.5:** Reflektivität eines Bragg-Gitters unter Schubverformung. Die Polarisation des einfallenden Lichts ist um  $45^\circ$  zu den Hauptachsen des Wellenleiters geneigt. Die Parameter der Faser sind identisch mit denen aus Abbildung 3.3. Die Schubverformung  $\Delta e_{xy}$  wird in vier Schritten von 0 bis  $0,3 \cdot 10^{-3}$  erhöht. Mit wachsender Schubverformung nimmt die Leistung des linken Peaks ab, die des Rechten zu.

die Form des Spektrums, da hieraus die Messgröße abgeleitet wird. Wie sich am linken Nebenmaximum der  $p$ -Reflexion zeigt, verändert sich durch den Energieaustausch auch die Form des Spektrums. Das linke Nebenmaximum erhält hierdurch eine höhere Leistung als das Rechte. Ohne Schubverformung ist die Reflektivität symmetrisch.

### Methoden zur Verringerung der Schubverformungsempfindlichkeit

Der Einfluss der Schubverformungen ist potentiell dazu geeignet, weitere Parameter aus dem Reflexionsspektrum des Bragg-Gitter-Sensors abzuleiten. Diese Möglichkeit wurde in der Publikation zur dargestellten Untersuchung bereits vorgeschlagen [125]. Der Einfluss stellt jedoch für die "konventionelle" Bragg-Gitter Messtechnik [134][135] eine Schwierigkeit dar, die es zunächst zu vermeiden gilt. Es ist daher von Interesse, eine Ausgestaltung des Sensors zu finden, die eine geringe Sensitivität gegenüber Schubverformungen zeigt. Für derartige Untersuchungen ist das entwickelte Modell geeignet, da es die zugrunde liegenden Effekte erfasst.

Ein Parameter der mit der Polarisationserhaltung verknüpft ist, ist die Polarisations-Schwebungslänge  $L_B$ . Um die Abhängigkeit der Schubempfindlichkeit



**Abbildung 3.6:** Sensitivität der Polarisationsmodenkopplung gegenüber Schubverformungen für beide Polarisationsrichtungen.

des Sensors von der Polarisations-Schwebungslänge zu untersuchen werden für einen bestimmten Schubeinfluss die Änderungen der Amplituden der  $s$ - und  $p$ -Bragg-Peaks bestimmt. Diese Amplituden werden durch  $\max\{R_{p/s}(\lambda)\}$  dargestellt. Allerdings tritt bei dieser Betrachtung noch ein überlagerter "Beating"-Effekt auf. Ist das Bragg-Gitter gerade so lang wie die Polarisations-Schwebungslänge der Faser, kommt es zu einem resonanten Effekt. Dieser Effekt überlagert die Bestimmung der Empfindlichkeit gegenüber Schub. Um den Effekt aus der Betrachtung auszunehmen, wird daher die Länge des untersuchten Bragg-Gitters immer gleich der Polarisations-Schwebungslänge gewählt also  $L = L_B$ . Da sich durch die Verkürzung des Gitters die Reflektivität verringert wird auch dieser Effekt noch herausgerechnet, indem auf die maximale Reflektivität des unbelasteten Gitters mittels

$$R_{p/s}^0 = \max\{R_{p/s}\} \Big|_{\Delta e_{xy}=0} \quad (3.55)$$

normiert wird. Die Empfindlichkeit gegenüber Schubverformungseinflüssen ergibt sich dann zu

$$S_{p/s} = \frac{1}{R_{p/s}^0} \left( \frac{d}{d\Delta e_{xy}} \max\{R_{p/s}(\lambda)\} \right) \Big|_{L=L_B} \cdot \quad (3.56)$$

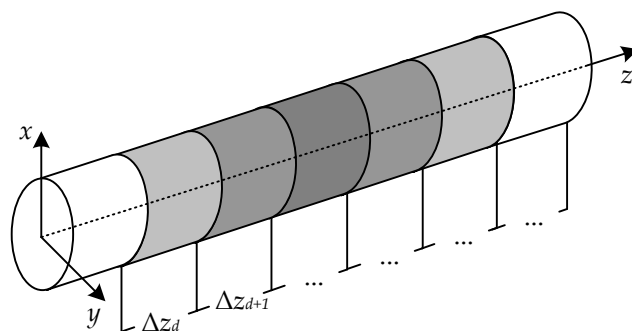
Als Ergebnis dieser Untersuchung zeigt sich der in Abbildung 3.6 dargestellte Verlauf dieser Empfindlichkeit. Es wird deutlich, dass die Polarisations-Schwebungslänge des Wellenleiters nahezu linear mit der Empfindlichkeit des

Bragg-Gittern gegenüber Schubverformungen zusammenhängt. Für Anwendungen, in denen der Effekt unerwünscht ist, ist demnach ein Wellenleiter mit kurzer Polarisations-Schwebungslänge empfehlenswert. Es muss allerdings beachtet werden, dass sich der beschriebene Effekt nicht vollständig eliminieren lässt und bei der Planung der Anwendung berücksichtigt werden sollte.

### 3.1.3 Ableitung einer Transfermatrix-Methode für schubverformte Faser-Bragg-Gitter

Ein großer Anteil an praxisrelevanten Untersuchungen von Bragg-Gitter-Sensoren nutzt an Stelle der Theorie der gekoppelten Moden die *Transfermatrix-Methode* [64][136][137][138] [139][140][141]. Die Matrix-Methode besitzt eine Reihe von Vorteilen gegenüber der Theorie der gekoppelten Moden. Die Implementierung auf einem Rechner ist äußerst einfach, es muss keine Differentialgleichung numerisch integriert werden. Sie ist konzeptionell überschaubarer und demnach leichter zugänglich für Anwender aus optikfernen Fachbereichen. Sie konvergiert zuverlässig gegen die Lösung, ist also numerisch stabil. Zudem kann sie effizienter berechnet werden.

Die bisher auf Bragg-Sensoren angewandten Transfermatrix-Methoden benutzen allerdings lediglich eine Zwei-Moden-Betrachtung des Sensorverhaltens. Diese Modellierung lässt jedoch die Beschreibung von einigen Effekten, wie sie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben wurden, nicht zu. Daher wurde, ausgehend von der in dieser Arbeit abgeleiteten Theorie der gekoppelten Moden mit vier Moden, eine Transfermatrix-Methode abgeleitet, die dieser äquivalent ist. Die Ergebnisse wurden bereits in [126] vorab veröffentlicht.



**Abbildung 3.7:** Der optische Wellenleiter wird in Segmente der Länge  $\Delta z_d$  zerlegt. Die Segmente besitzen jeweils einen konstanten Permittivitätstensor und bilden die Basis für die Entwicklung der Transfermatrix-Methode dieser Arbeit.

### Herleitung der Transfermatrix

Zunächst wird wieder ein optischer Wellenleiter betrachtet, dessen ursprüngliche Form, dargestellt durch den Permittivitätstensor  $\bar{\epsilon}(x, y)$ , durch äußere Lasten gestört ist. Die Differenz wird wieder durch den Permittivitätsstörungstensor  $\Delta\bar{\epsilon}$  dargestellt. Die Lösung im Sinne der Theorie der gekoppelten Moden ergibt sich wie im vorhergehenden Abschnitt dargestellt. Für die Notation der Transfermatrix-Methode ist es übersichtlicher, anstelle der Darstellung über eine Koppelmatrix die Darstellung

$$\frac{dA_m}{dz} = \sum_n \gamma_{mn} e^{i(\beta_m - \beta_n)z} \cdot A_n \quad (3.57)$$

zu verwenden, die die Koppelkoeffizienten und die Ausbreitungskonstanten getrennt zeigt. Die Matrix  $\gamma \equiv \gamma_{mn}$  bezeichnet die Koppelkoeffizientenmatrix. Die Idee hinter der Transfermatrix-Methode ist die Zerlegung des elektromagnetischen Problems in kleine Segmente. Es wird unterstellt, dass diese Segmente klein genug sind, so dass ihre Eigenschaften als konstant angenommen werden können. Abbildung 3.7 zeigt, wie ein Wellenleiter in Segmente zerlegt wird. Jedes Segment hat eine eigene Länge  $\Delta z_d$ , wobei  $d$  die Nummer des Segments darstellt.

Um eine Transfermatrix-Methode aus den gekoppelten Modengleichungen zu gewinnen, werden zunächst die Koppelkoeffizienten für ein Segment hergeleitet. Diese Koppelkoeffizienten unterscheiden sich von den Koppelkoeffizienten des Bragg-Gitters aus dem vorigen Abschnitt. Diese wurden durch die Synchronous-Approximation vereinfacht, um eine numerische Integration der CME erst zu ermöglichen. Diese Synchronous-Approximation kann hier nicht angewendet werden. Die Normalisierungskonstanten  $N_m$  können jedoch direkt übernommen werden.

Das Bragg-Gitter befindet sich im Falle einer Lichtleitfaser im Kern. Somit ist der Perturbationsterm für das Gitter  $\Delta\bar{\epsilon}_G$  nur im Kern ungleich Null. Dem wird Rechnung getragen, indem das transversale Integral des Koppelkoeffizienten nur über den Kern ausgeführt wird. Bei den mechanischen Perturbationen  $\Delta\bar{\epsilon}_m$  wird mit der Center-Strain-Approximation angenommen, dass die transversale Abhängigkeit verschwindet. Das Integral des Koppelkoeffizienten kann sich daher über die gesamte transversale Ebene erstrecken. Beispiel-

haft berechnet sich der Koppelkoeffizient für das Segment  $d$ ,  $\gamma_{11}(d)$  somit zu

$$\gamma_{11}(d) = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{N_1} \left( \Delta\varepsilon_{G,xx}(d) \int_{\text{Kern}} |\mathbf{E}_p|^2 dS + \Delta\varepsilon_{m,xx}(d) \int_{\infty} |\mathbf{E}_p|^2 dS \right) \quad (3.58)$$

$$= \frac{i\pi}{n_{\text{eff}}\lambda} (\Gamma\Delta\varepsilon_{G,xx}(d) + \Delta\varepsilon_{m,xx}(d)). \quad (3.59)$$

Als Werte für das Segment  $d$  werden die Einträge des Perturbationstensors  $\Delta\bar{\varepsilon}(z)$  am Beginn des Segments genommen. Der Beginn  $z_d$  des  $d$ -ten Segments ergibt sich durch

$$z_d = \sum_{i=1}^{d-1} \Delta z_i, \quad (3.60)$$

wobei  $z_1$  die Position des ersten Segments angibt. Die gesamte Koppelkoeffizientenmatrix  $\gamma(d)$  ergibt zu

$$\gamma(d) = \frac{i\pi}{n_{\text{eff}}} \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon'_{xx} & \Delta\varepsilon'_{xx} & \Delta\varepsilon'_{xy} & \Delta\varepsilon'_{xy} \\ -\Delta\varepsilon'_{xx} & -\Delta\varepsilon'_{xx} & -\Delta\varepsilon'_{xy} & -\Delta\varepsilon'_{xy} \\ \Delta\varepsilon'_{xy} & \Delta\varepsilon'_{xy} & \Delta\varepsilon'_{yy} & \Delta\varepsilon'_{yy} \\ -\Delta\varepsilon'_{xy} & -\Delta\varepsilon'_{xy} & -\Delta\varepsilon'_{yy} & -\Delta\varepsilon'_{yy} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

$$\Delta\varepsilon'_{ij}(d) = \Gamma\Delta\varepsilon_{G,ij}(d) + \Delta\varepsilon_{m,ij}(d) \quad (3.62)$$

Nimmt man an, dass die Länge der Segmente  $\Delta z_d$  klein ist, so kann die linke Seite der gekoppelten Modengleichungen (3.57) umgeformt werden

$$\frac{dA_m}{dz} \approx \frac{\Delta A_m}{\Delta z_d} = \frac{A_m(z + \Delta z_d) - A_m(z)}{\Delta z_d}. \quad (3.63)$$

Mit der rechten Seite der CME erhält man dann

$$A_m(z + \Delta z_d) - A_m(z) = \sum_{n=1}^4 \gamma_{mn} e^{i(\beta_m - \beta_n)z_d} A_n(z_d) \cdot \Delta z_d, \quad (3.64)$$

und nach Umformung und mit dem Kronecker Symbol  $A_m = \delta_{mn} A_n$

$$A_m(z + \Delta z_d) = \sum_{n=1}^4 \left( \gamma_{mn} e^{i(\beta_m - \beta_n)z_d} \Delta z_d + \delta_{mn} \right) \cdot A_n(z_d). \quad (3.65)$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist Folgende: Kennt man die Amplituden am Punkt  $z_d$ , gegeben durch  $A_n(z_d)$ , so kann man mittels der Kenntnis der Koppelkoeffizienten und der Ausbreitungskonstanten der Moden die Amplituden

am Anfangspunkt des folgenden Segments durch einfache Multiplikation mit der Matrix

$$\Xi_{mn}(z_d) = \gamma_{mn}(z_d) e^{i(\beta_m - \beta_n)z_d} \Delta z_d + \delta_{mn} \quad (3.66)$$

finden. Diese Eigenschaft zeichnet gerade die gesuchte Transfermatrix aus. Somit ist  $\Xi$  die Transfermatrix für die Vier-Moden-Kopplung. Die Amplituden findet man durch

$$\mathbf{A}(z_d + \Delta z_d) = \Xi(z_d) \mathbf{A}(z_d) \quad (3.67)$$

$$\mathbf{A}(z_d + \Delta z_d + \Delta z_{d+1}) = \Xi(z_d + \Delta z_d) \Xi(z_d) \mathbf{A}(z_d) \quad (3.68)$$

...

und somit

$$\mathbf{A}(L) = \left( \prod_{d=1}^N \Xi(z_d) \right) \mathbf{A}(0) = \Xi_T \mathbf{A}(0). \quad (3.69)$$

$L$  ist die Länge des untersuchten Wellenleiters und  $N$  die Anzahl der Segmente.

Die Form der Transfermatrix  $\Xi$  macht es notwendig, dass mit Anfangsbedingungen der Art  $\mathbf{A}(0) = \{1, 0, 0, 0\}^T$  gearbeitet wird, da ausgehend von einem Punkt bekannter Amplitude der Amplitudenverlauf berechnet wird. Im Falle von Bragg-Gitter-Sensoren sind allerdings Randbedingungen notwendig, entsprechend Gleichung (3.49) bzw. (3.53). Diese spezifizieren die Amplituden am Anfang und Ende des untersuchten Bereichs, die auf den Bereich zulaufen. Um das Problem der Randbedingung zu lösen, muss das Gleichungssystem transformiert werden auf die Form

$$\mathbf{B} = \Theta_T \mathbf{B}_0, \quad (3.70)$$

wobei

$$\mathbf{B} = \{A_{p+}(L), A_{p-}(0), A_{s+}(L), A_{s-}(0)\} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{B}_0 = \{A_{p+}(0), A_{p-}(L), A_{s+}(0), A_{s-}(L)\} \quad (3.72)$$

die Vektoren der Randbedingungen bzw. der Unbekannten sind und  $\Theta_T$  die Matrix ist, die durch das Lösen dieses Gleichungssystems entsteht. Für die Lösung dieser Transformation kann eine lineare Abbildung angegeben werden, die allerdings sehr umfangreich ist und wenig Erkenntnisgewinn liefert. Im Rahmen dieser Arbeit wurde anstelle der linearen Abbildung eine numerische Lösung der Transformation implementiert.

### Existierende Formulierungen

Ein Ansatz, der die Polarisationskopplung berücksichtigt, wurde früh von Yeh angegeben [142]. Die entwickelte Methode nutzt ebenfalls eine 4x4-Matrix zur Bestimmung der Amplitudenentwicklung. Diese wird direkt aus den Maxwellgleichungen im "Impulsraum", also mittels einer räumlichen Fouriertransformation hergeleitet. Dabei wird angenommen, dass das elektromagnetische Feld durch vier ebene Wellen mit Wellenvektor  $\mathbf{k} = \{\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z\}$  dargestellt werden kann. Die Maxwellgleichungen lauten dann

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \omega^2 \mu \bar{\epsilon} \mathbf{E} = 0. \quad (3.73)$$

Hier stellt  $\bar{\epsilon}$  den Permittivitätstensor, nicht die Störung des Permittivitätstensors  $\Delta \bar{\epsilon}$  dar. Für den Fall des "senkrechten Einfalls", also der Ausbreitung des Lichts entlang des Wellenleiters, ist  $\mathbf{k} = \{0, 0, \gamma_z\}$ . Wie in der vorangegangenen Diskussion wird das optische Medium in Segmente entlang der z-Achse unterteilt. Im Unterschied zu dem gezeigten Ansatz werden für jedes Segment die Maxwellgleichungen gelöst. Dieser Ansatz berechnet demnach für jedes Segment die "Eigenmoden", während der gezeigte Ansatz durch den gesamten Bereich den selben Modensatz verwendet.

Ausgehend vom Ansatz der ebenen Wellen kann Gleichung (3.73) in Matrixform ausgeschrieben werden

$$\begin{pmatrix} \omega^2 \mu \epsilon_{xx} - \gamma_z^2 & \omega^2 \mu \epsilon_{xy} & \omega^2 \mu \epsilon_{xz} \\ \omega^2 \mu \epsilon_{yx} & \omega^2 \mu \epsilon_{yy} - \gamma_z^2 & \omega^2 \mu \epsilon_{yz} \\ \omega^2 \mu \epsilon_{zx} & \omega^2 \mu \epsilon_{zy} & \omega^2 \mu \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (3.74)$$

Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss die Determinante der Matrix verschwinden. Für die Determinante ergibt sich eine biquadratische Gleichung, die vier Lösungen  $\gamma_\sigma, \sigma = 1 \dots 4$  besitzt. Diese vier Lösungen entsprechen gerade den vier Ausbreitungskonstanten  $\beta_{p+}, \beta_{p-}, \beta_{s+}$  und  $\beta_{s-}$  des Ansatzes dieser Arbeit.

Für den wichtigen Fall des isotropen Materials sind die vier Lösungen durch  $\gamma_{1,3} = \pm \omega \sqrt{\mu \epsilon_{xx}}$  und  $\gamma_{2,4} = \pm \omega \sqrt{\mu \epsilon_{yy}}$  gegeben. Für jedes Segment werden die Eigenmoden bzw. die Polarisation  $\mathbf{p}_\sigma$  der ebenen Wellen neu berechnet, indem man für Gleichung (3.74) die nicht-trivialen Lösungen berechnet. Nach



[142] sind diese für den isotropen Fall durch

$$\mathbf{p}_\sigma = N_\sigma \begin{pmatrix} \omega^4 \mu^2 \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} - \gamma_\sigma^2 \omega^2 \mu \varepsilon_{zz} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

gegeben.  $N_\sigma$  ist eine Normierungskonstante, die  $\mathbf{p}_\sigma \cdot \mathbf{p}_\sigma = 1$  garantiert. Diese Lösung verlangt, dass sämtliche Eigenmoden die selbe Polarisationsrichtung besitzen, was unphysikalisch ist. Damit ist gezeigt, dass für den senkrechten Einfall in ein Material ohne Nebendiagonalelemente die Methode nach [142] nicht angewendet werden kann. Das ist jedoch beispielsweise für den wichtigen Fall des unbelasteten Faser-Bragg-Gitters relevant.

Andere Ansätze von Vier-Moden-Transfermatrix-Methoden konnten die Limitierung des senkrechten Einfalles aufheben [143]. Jedoch werden für all diese Methoden ebene Wellen verwendet, die die Einbeziehung von transversalen Variationen im Permittivitätstensor nicht zulassen. Diese Variationen können leicht im hier gezeigten Ansatz miteinbezogen werden.

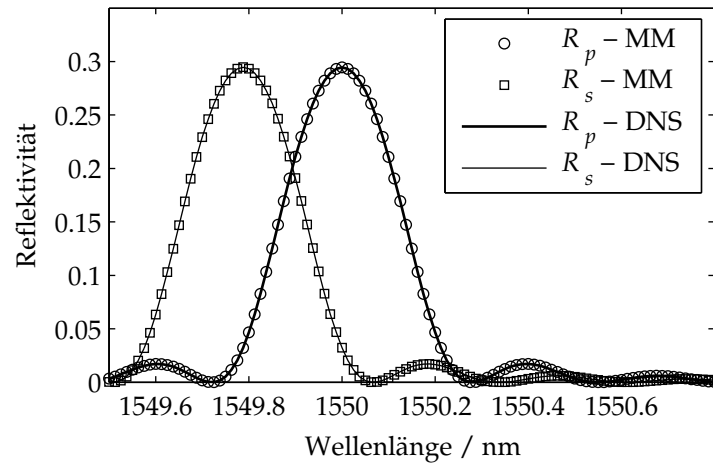
### Vergleich der 4x4-Transfermatrix-Methode mit der CME Lösung

Ziel der Entwicklung der Vier-Moden-Transfermatrix-Methode war es, die Lösungen der numerischen Integration der gekoppelten Modengleichungen zu approximieren. Darüber hinaus lässt sich diese Methode jedoch auf ein breiteres Spektrum von Problemen anwenden, da auf die Synchronous-Approximation verzichtet wurde. Es lassen sich dadurch beliebige, aperiodische Permittivitätstensoren vorgeben und berechnen.

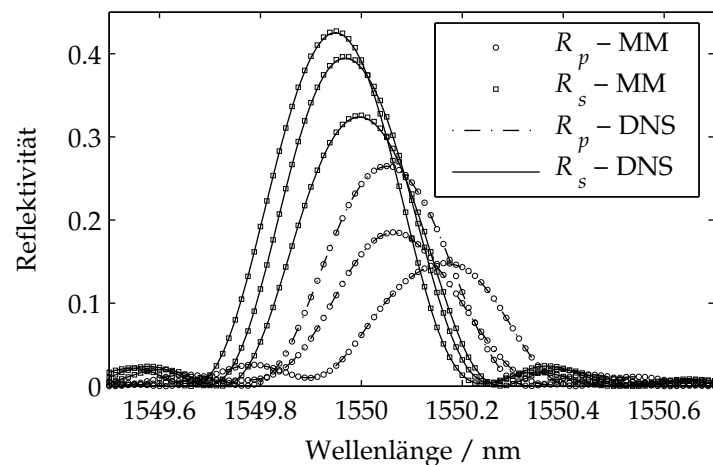
Es muss nun noch gezeigt werden, dass diese Transfermatrix-Methode auch gegen die numerischen Lösungen der gekoppelten Modengleichungen (DNS - direct numerical solution) konvergiert. Zudem soll die Abhängigkeit von der Wahl der Segmentgröße  $\Delta z_d$  untersucht werden. Für ersteres wird zunächst das mit einer analytischen Lösung abgleichbare Zwei-Moden-Koppelproblem untersucht. Abbildung 3.8 zeigt die Ergebnisse eines Bragg-Gitters in einem doppelbrechenden Wellenleiter, zum einen durch numerische Integration der CME, zum anderen durch die Transfermatrix-Methode. Das belastete Gitter, bzw. die Perturbation  $\Delta \varepsilon_{ij}(x, y, z)$  wird durch das Modell nach Gleichung (2.40) bzw. (2.20) beschrieben. Als Amplitudenrandbedingungen wurden

$$\mathbf{A}(0) = \{1, A_{p-}(0), 1, A_{s-}(0)\}^T \quad (3.76)$$

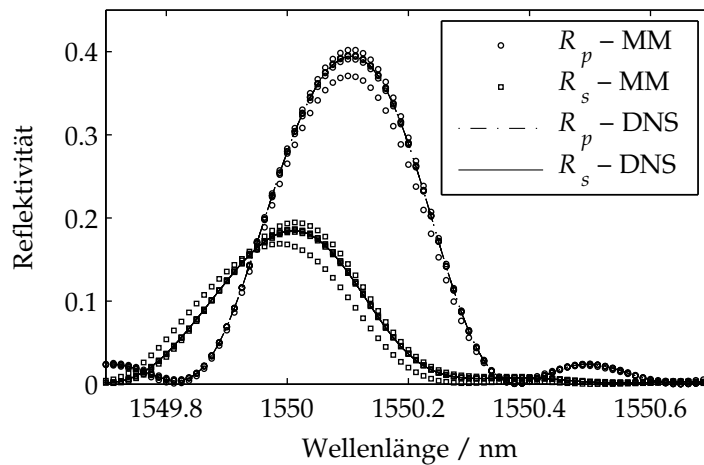
$$\mathbf{A}(L) = \{A_{p+}, 0, A_{s+}, 0\}^T \quad (3.77)$$



**Abbildung 3.8:** Simulation der Reflexion eines Bragg-Gitters zum einen mittels numerischer Integration der Theorie der gekoppelten Moden (DNS), zum anderen mittels der abgeleiteten Transfermatrix-Methode. Das Gitter wird nicht mit einer Last beaufschlagt und besitzt ein isotropes, diagonales  $\Delta\bar{\epsilon}$ .



**Abbildung 3.9:** Simulation einer querbelasteten Faser mit Lastwinkel  $\phi = 10^\circ$ ,  $25^\circ$  und  $40^\circ$ . Das Koppeln der Polarisationsmoden verstärkt sich für die größeren Winkel. Eine Änderung der Form des Spektrums kann ebenfalls beobachtet werden. Beide Methoden liefern, trotz der stark unterschiedlichen mathematischen Modellierung, nahezu identische Ergebnisse.



**Abbildung 3.10:** Berechnung der Reflexion an einem Bragg-Gitter, welches mit beiden Polarisationsrichtungen bestrahlt wird. Durch die Vergrößerung der Segmentgröße der Matrix-Methode ergibt sich eine Verschlechterung der Approximation der direkten numerischen Lösung (DNS). Bis zu einer Segmentgröße von  $5 \mu\text{m}$  weicht die Approximation nur geringfügig ab.

gewählt, so dass beide Polarisationshauptachsen gleichmäßig beleuchtet sind. Das simulierte Bragg-Gitter hat eine Länge von  $L = 3 \text{ mm}$ , eine Polarisations-Schwebungslänge  $L_B = 7,7 \text{ mm}$  und eine Mittenwellenlänge von  $1550 \text{ nm}$ . Als Segmentgröße  $\Delta z_d$  wurden  $\Delta z_d = \Delta z = 100 \text{ nm}$  für jedes Element verwendet. Beide Fälle stimmen im Rahmen eines numerischen Fehlers exakt überein.

Als Testfall für die besonders interessanten Fälle der Vier-Moden-Kopplung soll jetzt das Modell der querbelasteten Faser nach Gleichung (3.51) verwendet werden. Dabei werden solche Belastungswinkel verwendet, die Nebendiagonalelemente im Dehnungstensor im Faserkoordinatensystem hervorrufen und somit zur Polarisationsmodenkopplung führen. Abbildung 3.9 zeigt die Ergebnisse der Berechnung im Vergleich mit der DNS. Für die Lastwinkel  $\phi = 10^\circ, 25^\circ$  und  $40^\circ$  sowie einer Dehnung  $e_{xx} = 500 \mu\text{m}/\text{m}$  zeigt sich die Polarisationsmodenkopplung durch eine Abnahme bzw. Zunahme der Reflektivitäten und Beeinflussung der spektralen Antwort. Beide Lösungen stimmen wieder gut überein, was insofern bemerkenswert ist, als die physikalische Modellierung doch sehr unterschiedlich ist.

Bisher wurden besonders kleine Segmente von  $100 \text{ nm}$  Länge verwendet. Da die Rechenzeit in etwa linear mit der Anzahl der Segmente zunimmt, ist es von Interesse die Segmentlänge möglichst groß zu wählen. Hierfür wurden Unter-

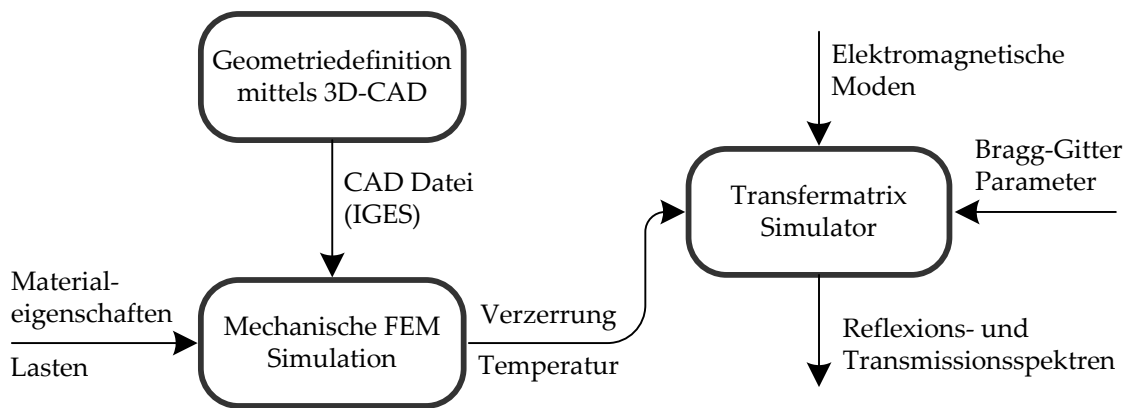
suchungen mit Segmentgrößen von  $\Delta z = 100 \text{ nm}$ ,  $500 \text{ nm}$ ,  $1 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $5 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $10 \text{ }\mu\text{m}$  und  $50 \text{ }\mu\text{m}$  gemacht. Abbildung 3.10 zeigt die Ergebnisse der Berechnung für einen Lastwinkel von  $\phi = -25^\circ$  mit ansonsten identischen Parametern wie in Abbildung 3.9. Es zeigt sich, dass für Segmentgrößen bis ca.  $5 \text{ }\mu\text{m}$  vertretbare Ergebnisse erhalten werden. Die Ergebnisse für  $10 \text{ }\mu\text{m}$  weichen hingegen schon deutlich nach oben ab, während die Ergebnisse für  $50 \text{ }\mu\text{m}$  noch stärker nach unten abweichen.

Insgesamt ergibt sich, dass die entwickelte Transfermatrix-Methode die numerische Integration der gekoppelten Modengleichungen ersetzen kann. Deren Ergebnisse werden bei adäquater Wahl der Segmentgröße exakt approximiert. Es ergeben sich ein geringerer Implementierungsaufwand sowie verkürzte Rechenzeiten. Zudem ist die Methode wegen ihres geringeren Näherungsgrades auf ein weiteres Spektrum von Problemen anwendbar.

## 3.2 Mechano-optischer Bragg-Gitter-Simulator

Die im vorhergehenden Abschnitt vorgestellte Methode zur Simulation der Bragg-Streuung an gestörten Bragg-Gittern wird jetzt zur Grundlage der Entwicklung eines mechano-optischen Simulators verwendet. Dazu muss die rein optische Simulation um eine mechanische Simulation erweitert werden sowie ein Brückenschlag zwischen dem Ergebnis der mechanischen Simulation und der Eingabe der optischen Simulation stattfinden. Als mechanisches Simulationswerkzeug wird das kommerzielle Finite-Elemente-Softwarepaket ANSYS Multiphysics verwendet. Dies erlaubt die Berechnung von Verzerrungszuständen aufgrund von angreifenden Lasten. Dabei können Temperatureffekte ebenso einbezogen werden wie anisotrope Materialien. Zunächst findet eine Definition der Geometrie der mechanischen Struktur statt. Anschließend werden Materialparameter zugewiesen und die Struktur wird für die FE-Berechnung vernetzt. Nach dem Lösen stehen die Verzerrungs- und Temperaturverläufe in der Geometrie zur Verfügung. Die Genauigkeit hängt dabei von der Maschenweite der Vernetzung sowie dem Grad der zur Lösung verwendeten Ansatzfunktionen ab [144][145][146].

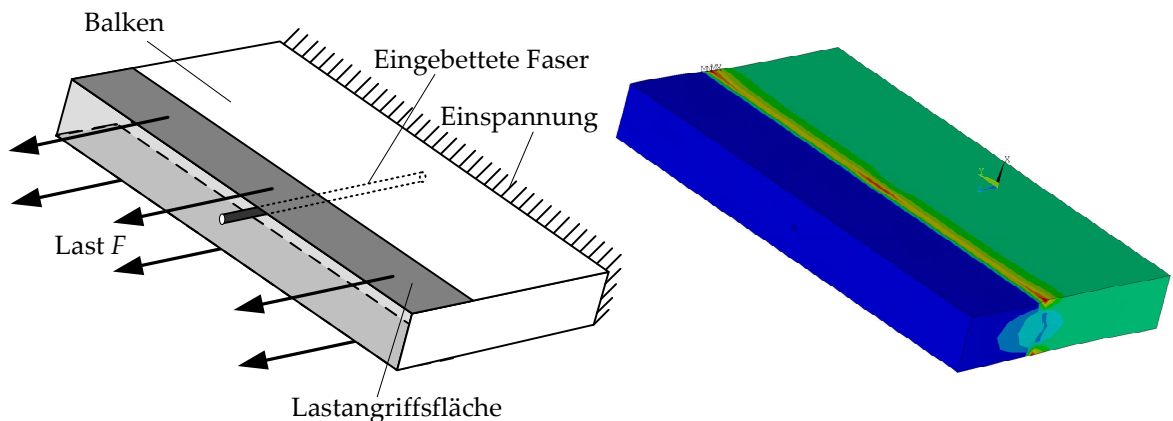
Ist der mechanische Verzerrungszustand  $\bar{\epsilon}(\mathbf{r})$  und der Temperaturverlauf  $T(\mathbf{r})$  ermittelt, so wird dieser entlang des Pfades des Wellenleiterkerns  $\mathbf{r}(s)$  ausgewertet, wobei  $s$  den Streckenparameter darstellt. Abbildung 3.11 gibt



**Abbildung 3.11:** Ablaufdiagramm des mechano-optischen Bragg-Gitter-Simulators dieser Arbeit. Durch Kombination einer mechanischen Finite-Elemente-Simulation mit der optischen Simulation kann eine mechano-optische Wechselwirkung unter Berücksichtigung des vollen Verzerrungstensors simuliert werden.

einen Überblick über diesen Ablauf. Für die optische Simulation müssen die Parameter des Bragg-Gitters angegeben werden. Hierzu zählt die in den Grundlagen eingeführte Apodisierungsfunktion  $\Delta n_{\text{eff}}(z)$  sowie die Länge des Gitters und dessen Periode. Prinzipiell kann hier eine beliebige Gitterfunktion angegeben werden, die sowohl anisotrope, wie auch aperiodische Gitter einschließt. Standardmäßig wird ein in der Sensorik übliches gaußförmig apodisiertes Gitter verwendet, welches eine Länge von 3 mm besitzt. Eine Schnittstelle ermöglicht die Vorgabe anderer Gitter.

Nach Eingabe der Wellenleiterparameter - Doppelbrechung, effektive Brechzahl, photo-elastische und thermo-optische Konstanten - werden als nächster Schritt die mechanischen Parameter Temperatur und Verzerrung berücksichtigt. Dies geschieht mittels vorgegebener thermo-optischer und photo-elastischer Parameter entsprechend Abschnitt 2.2.3. Es wird die Störung des Permittivitätstensors  $\Delta \bar{\epsilon}$  berechnet. Die Gesamtstörung, die sich aus mechanischer und Bragg-Gitter-Störung zusammensetzt wird entsprechend einer vorgegebenen Diskretisierungsstufe entlang der Wellenleiterachse abgetastet. Für die Lösung mittels Transfermatrix-Methode dient diese Abtastung der Bestimmung der Segmente. Nach Definition des Beleuchtungsvektors  $\mathbf{A}(0)$  und  $\mathbf{A}(L)$  sowie der Angabe des zu untersuchenden Wellenlängenbereichs und dessen Auflösung, kann auf dafs so formulierte Problem die Transfermatrix-Methode angewendet werden. Alternativ kann diese Formulierung auch mit der direkten numerischen Lösung der Vier-Moden-CMT behandelt werden. Dies kann dann



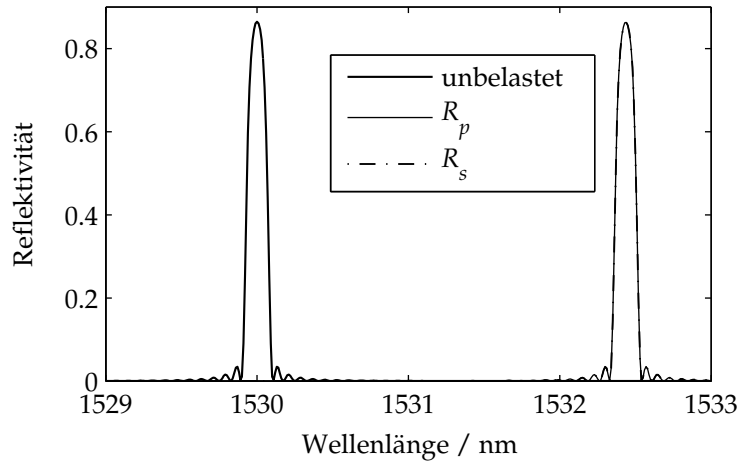
**Abbildung 3.12:** Parameterstudie des INTA Projektes; Modell eines isotropen Balkens in dessen Mitte eine Lichtleitfaser mit Faser-Bragg-Gitter-Sensor eingebettet ist. Links: Einspannung und Kraftangriff, rechts: Ergebnis der FEM-Simulation für die Dehnungskomponente  $e_{zz}$ .

sinnvoll sein, wenn eine unabhängige Überprüfung der Lösung gefragt ist.

Der Lösung des Problems schließt sich das Speichern der komplexen unbekanntenen Amplitudenkoeffizienten in Abhängigkeit der Wellenlänge sowie die Reflexionskoeffizienten der Leistungen  $R_p$  und  $R_s$  an. Zur Erleichterung der Auswertung und Präsentation werden die Ergebnisse automatisch geplottet und in den Formaten PDF, EPS und EMF abgelegt.

Als Beispiel für den Einsatz dieses mechano-optischen Simulators soll hier eine Berechnung aufgezeigt werden, die von dem Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial (INTA), der spanischen Weltraumorganisation, im Rahmen dieser Arbeit in Auftrag gegeben wurde. Es wird ein Faser-Bragg-Gitter betrachtet, welches in ein isotropes Probenmaterial eingebettet ist. Die Probe ist ein 150 mm langer Balken, der auf einer Seite eingespannt ist und auf der anderen Seite durch verschiedene Lasten beaufschlagt wird. In die Mitte des Balkens ist eine Lichtleitfaser eingebettet, die bei der halben Länge des Balkens einen Faser-Bragg-Sensor besitzt. Abbildung 3.12 zeigt eine für die Simulation verkürzte Version der eigentlichen Probe, die jedoch alle relevanten Effekte abbildet. Die mechanische Simulation zeigt, dass lediglich nahe der Kraftangriffsstelle nennenswerte Dehnungsgradienten auftreten. So findet man, dass an der Stelle der Bragg-Sensoren die Dehnungsfelder bereits äußerst homogen sind. Hintergrund der Simulation war eine Parameterstudie des E-Moduls und des Durchmessers der Faserhülle und deren Auswirkung auf das Messergebnis. Die optische Simulation für ein schwach apodisiertes Gitter für eine

Belastung von  $2000 \mu\text{m}/\text{m}$  ist in Abbildung 3.13 gezeigt.



**Abbildung 3.13:** Reflexionsspektrum der Probe mit eingebettetem Faser-Bragg-Gitter, bei einer Dehnung des Balkens von  $e_{zz} = 2000 \mu\text{m}/\text{m}$ , für eine Faserhülle mit  $250 \mu\text{m}$  Durchmesser mit einem E-Modul von  $50 \text{ MPa}$ . Im linken Teil die Reflexion des unbelasteten Gitters, rechts die sich überlappenden belasteten Reflexionsspektren des belasteten Gitters,  $R_p$  und  $R_s$ .

Es zeigt sich, dass die Belastung zum einen die spektrale Reflexionscharakteristik lediglich verschiebt, jedoch nicht verzerrt und zum anderen, dass die Verzerrungen im Material unabhängig von der transversalen Richtung sind. Dies äußert sich im Überlappen der Reflexionsspektren der beiden Polarisationsrichtungen. Das hier beschriebene Vorgehen wird in gleicher Weise auf die folgenden Simulationen dieser Arbeit angewendet.

### 3.3 Mechanische Belastung von Faser-Bragg-Gittern

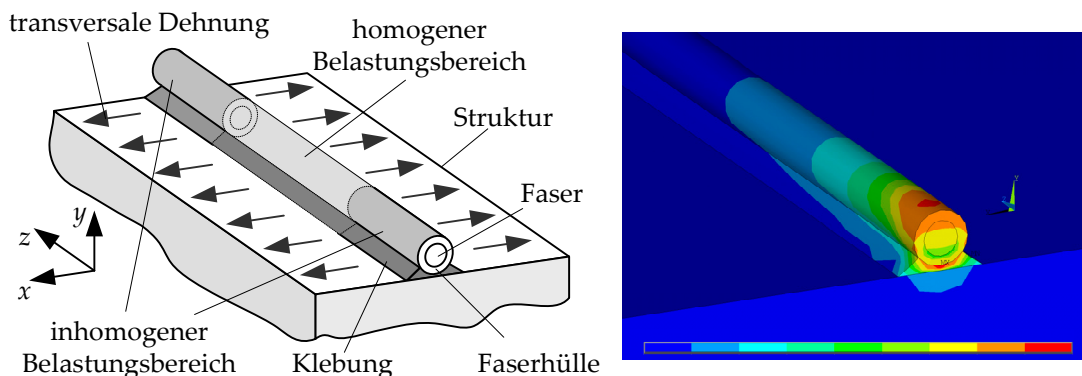
#### 3.3.1 Inhomogene Dehnungsfelder

Bragg-Gitter-Sensoren stellen in der Regel über mehrere Millimeter ausgedehnte Strukturen dar. Die theoretischen Betrachtungen, die eine analytische Lösung für die Reflexionsspektren liefern konnten, nahmen an, dass eine etwaige Belastung der Gitterstruktur, die zu einer Wellenlängenverschiebung führt, homogen über die Struktur selbst verteilt ist. Diese Annahme ist allerdings in einer Vielzahl von Anwendungen nicht gegeben, bzw. ihre Einhaltung muss teilweise aufwendig sichergestellt werden. Im Folgenden sollen Untersuchungen

zum Verhalten von Bragg-Gitter-Sensoren unter inhomogenen Lastzuständen aufgezeigt werden. Die Untersuchungen haben zum Ziel, die Grenzen des als homogen annehmbaren Bereichs der Belastung zu ermitteln.

Die für Faser-Bragg-Gitter-Sensoren derzeit häufigste Anwendung ist die Verwendung als Temperatur- oder Dehnungssensor. Dabei wird das FBG auf der zu vermessenden Oberfläche befestigt. Die Befestigung lehnt sich an die Anwendungen der Dehnungsmessstreifen an [147] und ist größtenteils in Form einer Klebung ausgeführt. Da die Faser auf Grund ihrer relativ großen Dicke deutlich steifer ist als konventionelle Dehnungsmessstreifen, stellt sich die Frage, in wieweit die Klebestelle die Temperatur bzw. Dehnung in den messenden Faserkern überträgt und welche Grenzen hierfür angegeben werden können.

Abbildung 3.14 zeigt den typischen Fall der Oberflächenapplikation des Faser-Bragg-Gitters. Eine schmal ausgeführte Klebestelle, deren genaue Geometrie in verschiedenen Simulationen variiert wurde, verbindet die Faser mit der Strukturoberfläche. Das FE-Modell [148] ermöglicht die Simulation einer Reihe von Belastungsfällen. Als Teil des bereits vorgestellten Bragg-Gitter-Simulators können somit die optischen Antworten für die jeweiligen Lastfälle errechnet werden.

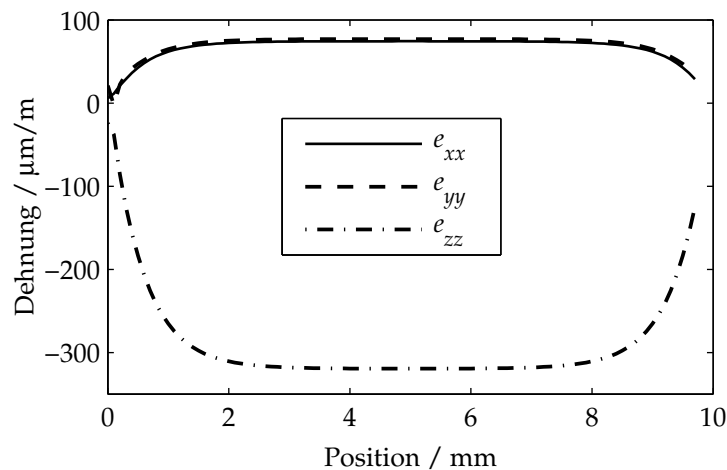


**Abbildung 3.14:** Inhomogenes Dehnungsfeld in einer strukturapplizierten Lichtleitfaser. Gezeigt ist die longitudinale Dehnungsverteilung  $e_{zz}(x, y, z)$  über der Faseroberfläche. Als Klebstoff wurde ein Zweikomponenten-Epoxykleber mit einem E-Modul von  $E_K = 4 \text{ GPa}$  modelliert.

Die Struktur 'S' wird im gezeigten Fall mit einer homogenen Dehnung von  $e_{xx,S} = 1000 \mu\text{m}/\text{m}$  transversal zur Faserachse beaufschlagt, die über die Querkontraktion zu einer Längsdehnung von der Größe der Poissonzahl der Struktur  $\nu_S = 0,32$  führt. Mit dieser Rechnung lässt sich der direkte Einfluss der Querdehnung in das Faser-Bragg-Gitter untersuchen. Zudem gibt sie Aufschluss



über die Länge des inhomogenen Belastungsbereichs in der Faser. Dieser ist für die Miniaturisierung von Kraft-Momenten-Sensoren entscheidend, da er zur Länge des FBG-Sensors hinzukommt und damit die minimalen Abmessungen bestimmt.



**Abbildung 3.15:** Ergebnisse der FEM-Simulation eines oberflächenapplizierten Faser-Bragg-Gitters. Gezeigt sind die Dehnungen im Kern der Faser. Die Struktur wird transversal zur Faserrichtung um  $1000 \mu\text{m}/\text{m}$  gedehnt. Durch Querkontraktion mit  $\nu_S = 0,32$  entsteht eine Dehnung in Faserrichtung von  $320 \mu\text{m}/\text{m}$ .

Die Ergebnisse der FEM-Simulation sind in Abbildung 3.15 als Verlauf der Dehnungen im Kern der Faser gezeigt. Im mittleren Bereich des 10 mm langen Bragg-Gitters entspricht die longitudinale Dehnung in Faserrichtung  $e_{zz,S}$  fast exakt der Querkontraktionszahl der Struktur multipliziert mit der transversalen Dehnung von  $e_{xx,S} = 1000 \mu\text{m}/\text{m} \Rightarrow e_{zz,S} = -320 \mu\text{m}/\text{m}$ . In einer freigelagerten Faser wären die transversalen Dehnungen  $e_{xx,F}$  und  $e_{yy,F}$  im Kern dann ausschließlich durch die Querkontraktionszahl der Faser  $\nu_F = 0,23$  [88] bestimmt. Somit ergäbe sich der für beide gleiche Wert für diese Dehnungen von  $73,6 \mu\text{m}/\text{m}$ . Durch den direkten Einfluss der transversalen Strukturdehnung  $e_{xx,S}$ , die über die Klebestelle wirkt, werden sich die beiden transversalen Dehnungen in der Faser unterscheiden. Wie stark der Unterschied ist, hängt von der Steifigkeit der Klebestelle und der Faserhülle ab. Im gezeigten Fall ist  $E_K = 4 \text{ GPa}$  und  $E_C = 2,5 \text{ GPa}$ . Diese Werte modellieren relativ steife Klebstoffe, bzw. Faserhüllen, deren E-Module eine Größenordnung weniger betragen können.

Der Unterschied in den transversalen Dehnungen ist in Abbildung 3.15 nur schwer zu erkennen. Die ermittelten Werte sind im Bereich der Mitte  $e_{xx} = 74,3 \mu\text{m}/\text{m}$  und  $e_{yy} = 77,0 \mu\text{m}/\text{m}$ , liegen also nur etwa 5 % neben dem Wert einer freien Faser. Die Klebung kann demnach in dem Sinne als anisotrop betrachtet werden, als sie selektiv hauptsächlich die Dehnung in Faserlängsachse in die Faser einkoppelt. Der leichte Unterschied in den transversalen Dehnungen führt nach den Gleichungen (2.54) und (2.55) zu einer Aufspaltung der Polarisationspeaks.

Weist die Faser in der Mitte des Sensors noch einen homogenen Dehnungsbereich auf, so entsteht zu den Enden der Klebestellen ein inhomogener Bereich. Longitudinal inhomogene Dehnungen im Bragg-Gitter führen zu Verzerrungen der spektralen Antwort des Gitters. Dies erschwert die Rekonstruktion des Messsignales des Sensors und macht sie abhängig von der Art des Messsystems. Der inhomogene Bereich verkürzt sich für steifere Klebstoffe und Faserhüllen. Bei den hier untersuchten Materialien handelt es sich allerdings schon um relativ steife Kunststoffverbindungen, die zur Oberflächenapplizierung geeignet sind. Somit kann für diese Materialien das gezeigte Ergebnis als Obergrenze angesehen werden. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird der Einsatz von Metallen als Faserhüllen bzw. Klebstoff theoretisch und experimentell untersucht, um dieses Problem einzugrenzen.

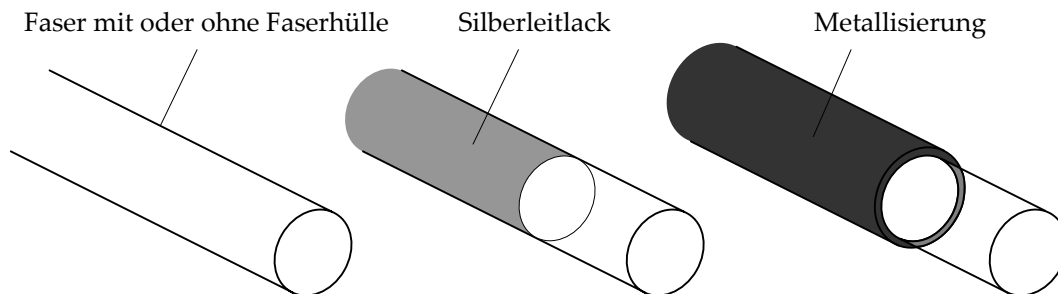
Für die Kunststoffverbindungen muss somit ein Klebungsvorlauf von ca. 2,5 bis 3 mm vor der Sensorstelle eingeplant werden. Bei einer Sensorlänge von 3 mm ergibt sich hierdurch schon eine Mindestlänge von 8 bis 9 mm gerade Faser. Diese Eigenschaft steht zunächst einer Miniaturisierung eines Kraft-Momenten-Sensors entgegen.

### 3.3.2 Strukturanbindung von Faser-Bragg-Gittern

Zur Bestimmung einer Möglichkeit, die Miniaturisierungsbegrenzung durch den minimalen Klebungsvorlauf zu umgehen, wurden Untersuchungen zu Verbindungstechniken mit hohem  $E$ -Modul durchgeführt. Hierzu wurde zunächst ein Verfahren entwickelt, mit dem Lichtleitfasern in situ metallisiert werden können. Die Elastizitätsmodule von Metallen können deutlich höhere Werte erreichen als die verfügbaren Standardfaserhüllen auf Polymerbasis bzw. auf Ormocerbasis. Es ist daher naheliegend, die Miniaturisierung der Klebestelle auf diesem Weg zu untersuchen.

### Metallisieren von Faser-Bragg-Gitter

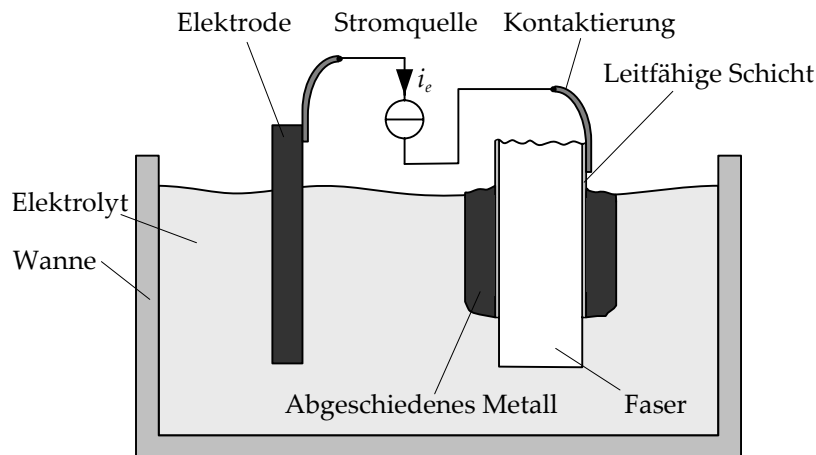
Verfahren zur Metallisierung von Lichtleitfasern sind in der Literatur bereits angegeben und für Applikationen in den Bereichen Tieftemperatursensorik [149][94] sowie thermisch verstimmbare Filter [150][151] verwendet worden. Untersuchungen zu thermisch erzeugten mechanischen Spannungen in metallisierten Lichtleitfasern wurden von Shiue et al. [152] durchgeführt. Die eingesetzten Verfahren zur Metallisierung sind dabei Kathodenerstäubung oder Sputtern zur initialen Abscheidung einer dünnen leitfähigen Schicht sowie das anschließende galvanische Aufwachsen von dickeren Schichten.



**Abbildung 3.16:** Schritte des Metallisierens mittels Leitlackbeschichtung der Faser. Im ersten Schritt wird die Faser gereinigt und optional entcoated. Dann wird eine nur wenige Mikrometer dicke Leitlackschicht aufgebracht. Die Metallschicht wird galvanisch in einem dritten Schritt aufgebracht.

Neben der Technik mittels Sputtern, die im Rahmen eines industriellen Kooperationsprojektes durchgeführt wurde, wurde in dieser Arbeit eine in situ Metallisierung mittels Leitlackbeschichtung untersucht. Diese Technik ermöglicht eine Metallisierung von vorkonfektionierten und verbauten Faserstücken und Fasersensoren, da sie auf eine Sputteranlage verzichten kann. Abbildung 3.16 zeigt die Schritte des Verfahrens. Zunächst wird die Faser gereinigt und bei Bedarf von der Faserhülle befreit. Anschließend wird eine nur wenige Mikrometer dicke Schicht Silberleitlack aufgebracht. Diese bildet einen festen, leitfähigen Überzug.

Die leitfähige Faser kann dann galvanisch mit Metallen überzogen werden. In dieser Arbeit wurden Kupfer sowie Gold als Metallisierung verwendet. Für das Verkupfern wurde zum einen eine Kupfersulfatlösung aus 200 g/l  $\text{CuSO}_4$ , 40 g/l  $\text{H}_2\text{SO}_4$  und 30 mg/l  $\text{NaCl}$  [153] bei Raumtemperatur verwendet. Zum anderen wurde eine kommerzielle Elektrolytlösung auf Basis von Kupfersulfat

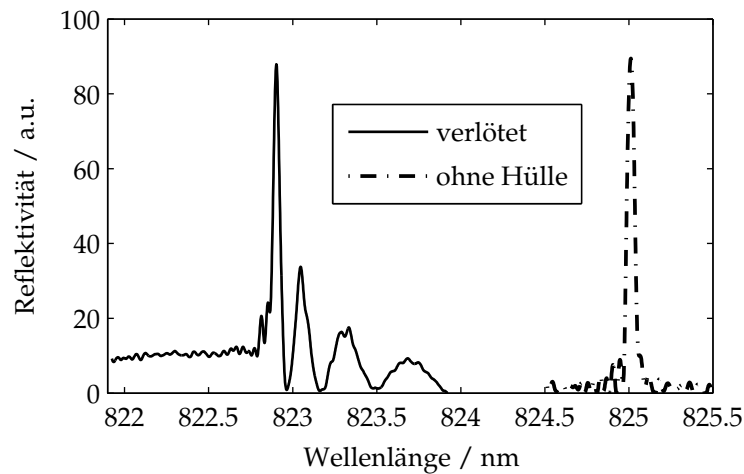


**Abbildung 3.17:** Aufbau zur Galvanisierung der mit Leitlack überzogenen Lichtleitfaser. Die leitfähige Schicht wird mit einer Litze kontaktiert und mit der Stromquelle verbunden. Diese wird entsprechend der Stromdichtenvorgabe von unter  $10 \text{ A/dm}^2$  eingestellt.

(Westfalia) verwendet. Die Goldelektrolytlösung wird vom selben Vertreiber (Westfalia) angeboten.

Abbildung 3.17 zeigt den Aufbau zur Galvanisierung. In einer chemisch beständigen Wanne wird das Elektrolyt eingefüllt. In der Abbildung ist eine senkrechte Galvanisierung dargestellt. Für lange zu metallisierende Faserstücke bietet sich allerdings eine waagrechte, lange Wanne an. Zunächst wird die Leitlackbeschichtung der Faser elektrisch mittels einer Kupferlitze kontaktiert. Um einen gleichmäßig dicken Metallüberzug zu erhalten muss das Potential auf der Oberfläche der Faser beim Galvanisieren homogen sein. Durch die punktförmige Ankontaktierung wird bei fließendem Strom und nennenswertem Widerstand der Leitlackschicht jedoch ein Spannungsabfall über die Faser auftreten. Somit ist es notwendig, dass der Widerstand der Schicht relativ gering im Vergleich zum Strom ist. Da der Widerstand der mit Leitlack beschichteten Faser nur einige Ohm pro Zentimeter aufweist, kann der Spannungsabfall über die Länge für die kleinen verwendeten Ströme vernachlässigt werden.

Der Strom zur Metallisierung ist aus der notwendigen Stromdichte vorgegeben. Somit bleibt als Freiheitsgrad für die Bestimmung der Dicke der Metallfaserhülle die Galvanisierungszeit. Über diese lässt sich die Dicke der Faserhülle auf etwa  $5 \mu\text{m}$  festlegen. Prinzipiell ist die Dicke der Faserhülle nicht beschränkt. Im Rahmen dieser Arbeit wurden minimale Dicken von etwa  $10 \mu\text{m}$  und maximale Dicken von  $300 \mu\text{m}$  hergestellt.



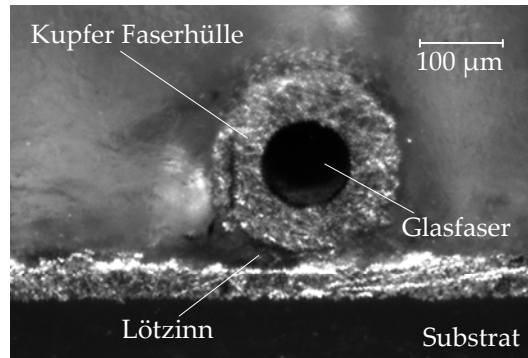
**Abbildung 3.18:** Unerwünschte Verzerrung des Spektrums eines metallisierten Faser-Bragg-Gitters durch thermisch erzeugte mechanische Spannungen beim Verlöten.

### Verlöten von Faser-Bragg-Gittern

Kupfer als Faserhülle erweitert das Spektrum der zugänglichen E-Module auf Werte bis 120 GPa, was in etwa einen Faktor 30 gegenüber der Polymerfaserhülle entspricht. Für die Erhöhung der gesamten Steifigkeit der Verbindung muss zudem noch die Steifigkeit der Klebestelle erhöht werden. Lötzinn, wie es für die mechanische, thermische und elektrische Verbindung von elektronischen Bauteilen auf Leiterplatten verwendet wird, besitzt ein E-Modul von ca. 45 GPa und ist damit eine Größenordnung steifer als die genannten Klebstoffe.

Die verkupferte Faser lässt sich prinzipiell ähnlich einem elektrischen Leiter aus Kupfer verlöten. Allerdings muss darauf geachtet werden, dass beim Abkühlen der Lötstelle keine mechanischen Spannungen im Material entstehen. Diese können zu Verzerrungen der Spektralantwort führen. Eine aufgrund solcher Spannungen verzerrte Spektralantwort ist in Abbildung 3.18 gezeigt. Die Faser wurde auf einen Messingbalken gelötet. Nach dem Abkühlen und Verfestigen des Lötzinns zieht sich der weiter abkühlende Balken zusammen und verschiebt die Wellenlänge des fixierten Bragg-Gitters zu kleineren Wellenlängen hin. Durch die mechanischen Spannungen wird das Reflexionsspektrum verzerrt. Abbildung 3.19 zeigt eine verlötete Faser auf einem FR4 Substrat mit 35  $\mu\text{m}$  dicker Kupferbeschichtung im Querschnitt. Die Kupferfaserhülle liegt formschlüssig an der Quarzfaser an und zeigt eine homogene Dicke

von ca. 70  $\mu\text{m}$ . Ein dünner Lötstreifen am Berührungspunkt der Faser auf dem Substrat stellt die mechanische Verbindung her.

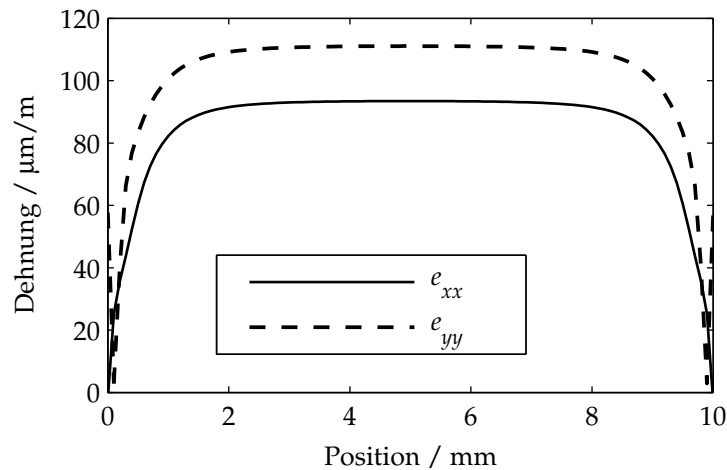


**Abbildung 3.19:** Mikroskopaufnahme des Schliffs einer verlöteten und metallisierten Glasfaser. Die ca. 70  $\mu\text{m}$  dicke Kupferfaserhülle ist am Berührungspunkt mit dem Kupfersubstrat durch eine dünne Lötstelle fixiert.

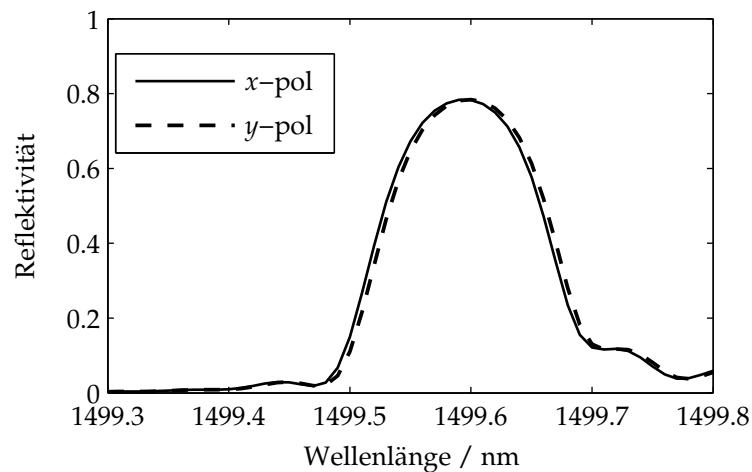
Die so gewonnene steife Verbindung zwischen Fasersensor und Messobjekt überträgt nicht nur die gewünschten longitudinalen Dehnungskomponenten besser. Durch die erhöhte Steifigkeit wird auch das Einkoppeln von Querdehnungen verstärkt. Dieser Effekt ist nicht in allen Anwendungen wünschenswert. So ist es gerade von Vorteil, wenn der Fasersensor ausschließlich die longitudinale Dehnungskomponente erfasst. Durch die Kombination mehrerer, unter unterschiedlichem Winkel angeordneter solcher Sensoren kann somit die vollständige Information über das Dehnungsfeld an der Oberfläche gewonnen werden [154][147].

Um den Einfluss dieser verbesserten Querdehnungskopplung zu untersuchen, wurden experimentelle sowie theoretische Untersuchungen mit Hilfe des vorgestellten Bragg-Gitter-Simulators durchgeführt. Die mechanische Simulation eines entsprechend den Geometrieangaben aus Abbildung 3.19 im Simulator nachgebildeten Faser-Bragg-Gitters zeigt Abbildung 3.20. Dabei wurde das in Abschnitt 3.3.1 beschriebene Belastungsmodell verwendet. Die Ergebnisse zeigen eine Steigerung der Querdehnungseinkopplung, verglichen mit den Ergebnissen aus Abbildung 3.15. Die beiden transversalen Dehnungskomponenten  $e_{xx,F}$  und  $e_{yy,F}$  weisen einen deutlichen Unterschied auf, der auf die direkte Einkopplung der transversalen Dehnung zurückzuführen ist.

Für die messtechnische Anwendung ist entscheidend, in wieweit sich diese ungleiche transversale Dehnung auf das Spektrum des Faser-Bragg-Gitters auswirkt und ob diese Auswirkungen relevant sind. Im nächsten Simulations-



**Abbildung 3.20:** FEM-Simulation der transversalen Dehnungen im Kern einer metallisierten und verlöteten Lichtleitfaser. Die Unterlage wird mit einer Dehnung von 1000 µm/m in Querrichtung zur Faserachse beaufschlagt.



**Abbildung 3.21:** Simuliertes Spektrum des nach Abbildung 3.20 belasteten Faser-Bragg-Gitters. Durch die anisotrope Last weisen die beiden Polarisationsmoden leicht unterschiedliche Reflexionsspektren auf. Da die Eingangspolarisation in einer Messanwendung nicht festgelegt ist, kann dies zu Messfehlern führen.

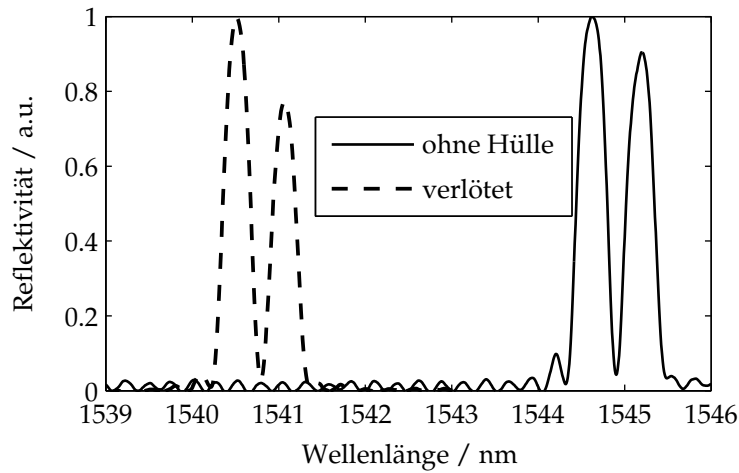
schritt wurden hierzu die spektralen Antworten des FBG-Sensors berechnet. Die Ergebnisse in Abbildung 3.21 zeigen die erwartete relative Verschiebung der beiden Polarisationspeaks. Je nach Eingangspolarisation wird demnach der linkere oder rechte Peak reflektiert. Somit kann das Messsignal zwischen beiden Wellenlängenwerten springen und zu Messfehlern führen. Der Unterschied ist allerdings noch nicht groß genug, um aus dem Effekt Kapital im Sinne eines zweiparametrischen Messprinzips zu schlagen [155].

Um experimentell den Einfluss der Querbelastung zu bestimmen, ist es notwendig, die beiden Reflexionspeaks der Polarisationsmoden separat bestimmen zu können. Dies wird durch Faser-Bragg-Gitter in polarisationserhaltenden Fasern möglich, wie es in Kapitel 2 gezeigt ist. Durch die starke Entartung der Polarisationsmoden treten die Bragg-Reflexionspeaks bei deutlich verschiedenen Wellenlängen auf. Stellt man die Eingangspolarisation derart ein, dass beide Polarisationsmoden in etwa die gleiche Leistung führen, so können beide Reflexionspeaks zeitgleich ausgemessen werden. Als Testfaser wurde die PM1550G-80 von Nufern verwendet. Das Bragg-Gitter wurde vom IPHT Jena nach Wasserstoffbeladung der Faser in einem interferometrischen Aufbau eingeschrieben. Hierzu wurde die Hülle der Faser entfernt. Am Lehrstuhl für Messsystem- und Sensortechnik wurde die Faser darauf mit dem vorher beschriebenen Verfahren mit Kupfer von ca. 70  $\mu\text{m}$  Stärke metallisiert.

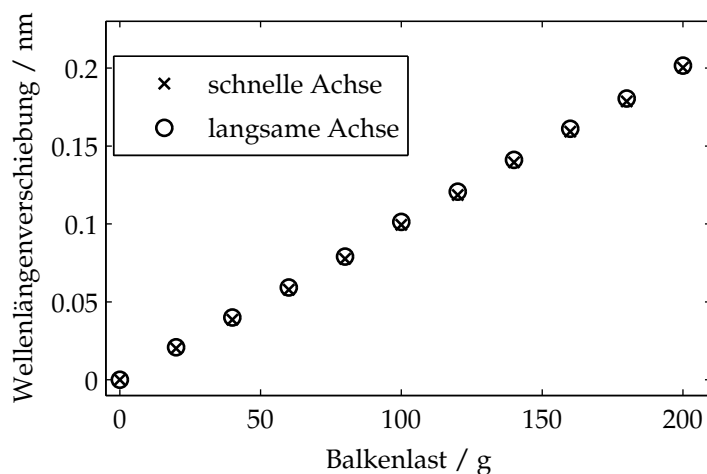
Als Messobjekt, bzw. Substrat für den Fasersensor wurde ein Messingbalken verwendet, der sich mit Lötzinns für die Leiterplattenfertigung mit der verkupferten Faser verbinden lässt. Hierzu wurde der Messingbalken mit einem dünnen Lötpastenstrich an der späteren Lötstelle versehen und die Faser in die Lötpaste mittels hitzebeständigem Kaptonband fixiert. Der Balken wurde daraufhin auf 220 °C aufgeheizt und nach dem Verflüssigen des Lötzinns langsam abgekühlt. Die optische Antwort des Faser-Bragg-Gitters vor und nach dem Lötvorgang ist in Abbildung 3.22 gezeigt. Durch das Zusammenziehen des Messingbalkens nach der Aushärtung des Lötzinns kommt es zu einer starken spektralen Verschiebung. Die Form der Reflexionspeaks wurde durch den Lötvorgang jedoch nicht verzerrt. Dies lässt darauf schließen, dass nur geringe innere thermische Spannungen bestehen.

Der Balken mit verlöteter Faser wird für den Versuch auf der Seite des Bragg-Gitters eingespannt und auf der anderen Seite belastet. Hierdurch ergibt sich an der Stelle der Oberfläche des Balkens, an dem das Bragg-Gitter aufgebracht





**Abbildung 3.22:** Spektrum des polarisationserhaltenden Faser-Bragg-Gitters vor bzw. nach dem Metallisieren mit Kupfer und Verlöten auf dem Messingsubstrat. Die Verschiebung des Spektrums ist auf das Abkühlen des Messingsubstrates zurückzuführen. Es treten keine nennenswerten Verzerrungen des Spektrums auf, was auf geringe innere thermische Spannungen schließen lässt.



**Abbildung 3.23:** Relative Wellenlängenverschiebung der Mittenwellenlängen der Peaks aus obiger Abbildung bei Dehnungsbelastung des Messingsubstrates. Beide Peaks zeigen das erwünschte lineare Verhalten.

ist, eine Dehnung von ca.  $120 \mu\text{m}/\text{m}/\text{N}$  durch die angreifende Kraft. Aus den Reflexionsspektren wurde mittels eines Zentroidalgorithmus [156] die jeweilige Mittenwellenlänge beider Reflexionspeaks ermittelt. Diese Mittenwellenlänge ist in Abhängigkeit von der Last in Abbildung 3.23 gezeigt.

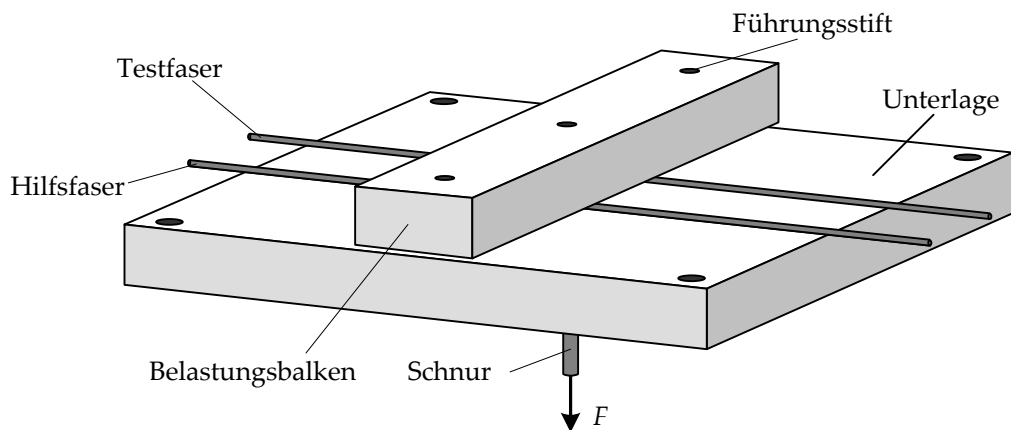
Abgebildet sind die Änderungen der Bragg-Wellenlängen der Polarisationsmoden relativ zu deren unbelasteter Wellenlänge im lastfreien Fall. Es zeigt sich der erwartete lineare Anstieg der Bragg-Wellenlängen bei steigender Last. Ändert man die Eingangspolarisation bei der stärksten Belastung, so verschieben sich die Bragg-Wellenlängen weniger als  $1 \text{ pm}$  relativ zueinander. Dies entspricht in etwa der Messunsicherheit bei dieser Art von Messung und könnte aus diesem Grund vernachlässigbar erscheinen. Jedoch handelt es sich bei der polarisationsabhängigen Wellenlängenverschiebung um einen systematischen Fehler, der so nicht mit der Messunsicherheit verglichen werden kann. Dennoch ist für die meisten Applikationen ein solch geringer systematischer Fehler vernachlässigbar. Für diese Applikationen kommt das Verlöten der Sensoren als Oberflächenapplizierung in Frage.

### 3.3.3 Querbeltung von Faser-Bragg-Gittern

Wird ein Faser-Bragg-Gitter mit einer anisotropen Last beaufschlagt, so ergibt sich im allgemeinen ein Unterschied in der Wellenlängenverschiebung der Bragg-Wellenlängen der Polarisationsmoden  $\Delta\lambda_{B,x}$  und  $\Delta\lambda_{B,y}$ , wie es in Abschnitt 2.3.2 beschrieben wurde. Diese Eigenschaft wird in einer Reihe von Veröffentlichungen im Hinblick auf Multiparametersensorik untersucht [33] [157] [32] [31]. Die Möglichkeit, mit einem einzelnen Bragg-Gitter-Sensor mehr als eine Größe zu erfassen, ist gerade für die Kraft-Momenten-Sensorik besonders interessant, da für einen KMS mit sechs Freiheitsgraden mindestens sechs Messgrößen erfasst werden müssen.

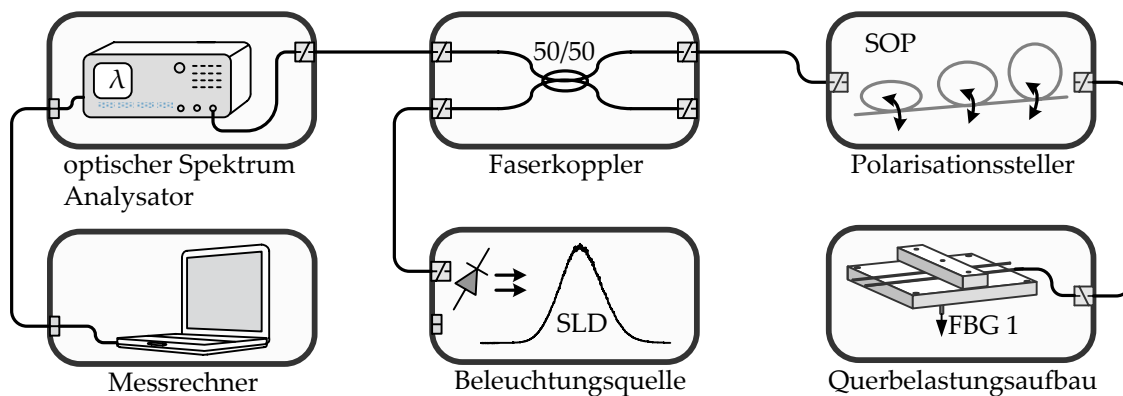
So wurde in dieser Arbeit ein planarer KMS mit 6 Freiheitsgraden vorgeschlagen, der auf dem Prinzip der Querbeltung von Bragg-Gittern beruht [158]. Als Voruntersuchungen hierzu wurden Querbeltungsexperimente an Faser-Bragg-Gittern durchgeführt. Diese verwenden das in Abbildung 2.17 skizzierte Prinzip, das entsprechend Abbildung 3.24 umgesetzt ist.

Durch den Aufbau wird es ermöglicht, longitudinal homogene Lasten auf die Lichtleitfaser aufzubringen. Dadurch wird im Faserinneren ein transversal anisotroper Verzerrungszustand, der durch (2.56) modelliert werden kann,



**Abbildung 3.24:** Aufbau zur Querbelastung einer Lichtleitfaser. Ein Belastungsbalken der mittels einer Hilfsfaser ausgerichtet wird, drückt auf die Testfaser. Belastungsbalken und Unterlage sind aufeinander eingeschliffen, um eine homogene Lasteinleitung zu erzeugen. Über eine Schnur kann die Last mittels Gewichten eingestellt werden.

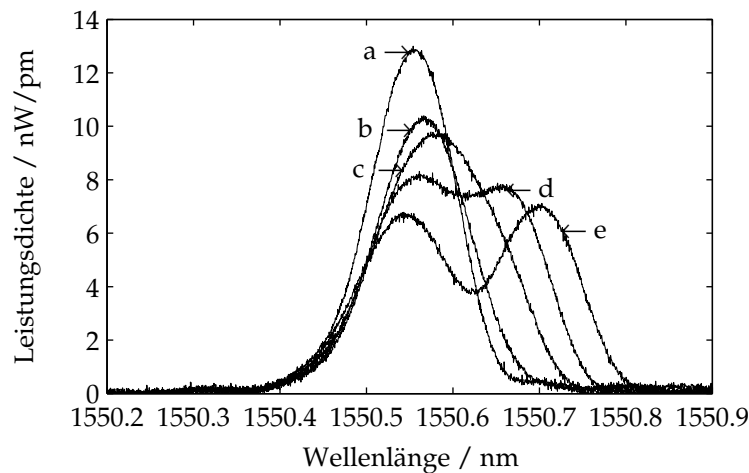
erzeugt. In normalen Monomodenfasern führt diese Belastung zu einem Aufspalten der sich überlagernden Reflexionsspektren der Polarisationsmoden.



**Abbildung 3.25:** Optischer Messaufbau des Querbelastungsexperiments. Eine breitbandige Lichtquelle (SLD) beleuchtet über einen 3 dB Faserkoppler das Bragg-Gitter. Mittels eines mechanischen Faserpolarisationsstellers kann die Polarisationsrichtung der Beleuchtung eingestellt werden. Die Reflexion wird von einem optischen Spektrum-Analysator ausgewertet.

Zur Vermessung der Reflexionsspektren wird der in Abbildung 3.25 gezeigte Aufbau verwendet. Die Bragg-Gitter werden mit einer breitbandigen Lichtquelle (Superlumineszenzdiode - SLD) beleuchtet. Um die Polarisationsrichtung, bzw. die Amplituden der Polarisationsmoden am Bragg-Gitter einstellen zu können, wird eine mechanischer Faserpolarisationssteller verwendet.

Dieser erzeugt über die in den folgenden Abschnitten beschriebenen Effekte mittels Torsion und Biegung der Faser die gewünschte Drehung der Polarisationsrichtung. Die Superlumineszenzdiode besitzt einen Polarisationsgrad von ca. 90 % und kann damit als ausreichend polarisiert angesehen werden. Die Reflexion am FBG wird über einen 3 dB Faserkoppler ausgekoppelt und einem optischen Spektrum-Analysator zugeführt. Dieser kann das Spektrum mit einer Auflösung von ca. 10 pm abtasten. Die Messrate beträgt unter ein Hertz. Die Messdaten werden durch einen Steuerrechner ausgelesen und abgespeichert.



**Abbildung 3.26:** Reflexionsspektren des Querbelastungsexperiments für die Lasten a) 0,02 N/mm, b) 0,74 N/mm, c) 1,47 N/mm, d) 2,21 N/mm, e) 2,94 N/mm. Beide Polarisationsrichtungen werden mit gleichen Leistungen beleuchtet.

Die Ergebnisse des Querlastexperiments sind in Abbildung 3.26 gezeigt. Bei verschwindender Last (a) besitzt das Bragg-Gitter für beide Polarisationsrichtungen identische spektrale Antworten. Wird die Querlast erhöht, so verstärkt sich die Anisotropie der Faser, die Reflexionsspektren spalten auf. Bei gleichmäßiger Beleuchtung beider Polarisationsrichtungen führt dies zu einem ausgeprägten Doppelpeak. Da die Eingangspolarisation im Versuch nicht unbedingt bekannt sein muss, kann dies bei polarisationsinsensitiver Auswertung zu Messfehlern führen, die vermieden werden sollten [159].

### 3.3.4 Gebogene und tordierte Lichtleitfasern

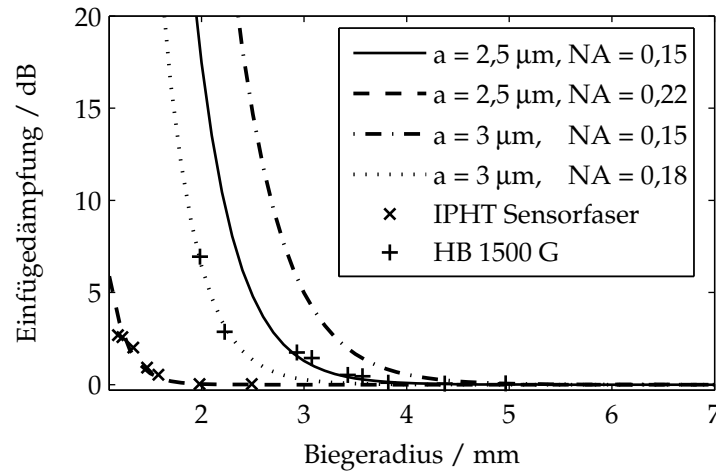
#### Biegung

Ein optischer Fasersensor zeichnet sich durch die Fähigkeit aus, das zum Messen verwendete Licht über die Lichtleitfaser zum Messort zu führen. Zur theoretischen Behandlung der Lichtleitfaser wurde diese als unendlich ausgedehnt und entlang ihrer Ausdehnung als unverändert angenommen. Aus dieser Annahme wurden die elektromagnetischen Moden der Faser abgeleitet. Diese idealen Eigenschaften können in der praktischen Applikation nicht mehr angenommen werden. Die Faser muss im allgemeinen gebogen und verdreht werden, um das Licht zum Sensorort zu transportieren. Die in dieser Arbeit untersuchte Miniaturisierung eines faseroptischen Kraft-Momenten-Sensors stellt zudem die Anforderung, die Faser auf einer sehr kleinen mechanischen Wandlerstruktur zu verlegen. Hierbei weicht die Faser stark von der angenommenen idealen Form ab.

Dabei treten zwei wichtige Effekte zu Tage. Zum Einen werden die optischen Eigenschaften der Faser verändert, speziell die Lichtführungseigenschaft. Diese nimmt bei starken Wellenleiterkrümmungen ab. Des Weiteren werden die mechanischen Eigenschaften, speziell die mechanische Lebensdauer der Faser, verändert. Bei geringen Biegeradien der Faser bricht diese in kurzer Zeit. Beschreibungen beider Effekte sind publiziert und sollen hier zusammen mit eigenen Messungen dargestellt werden.

**Optische Biegeverluste** - Frühe Theorien der Biegeverluste von optischen Lichtleitfasern wurde von Snyder et al. [160] und Marcuse et al. [161] angegeben. Dabei wird ein exponentieller Zusammenhang zwischen dem Biegeradius des Wellenleiters und den Biegeverlusten abgeleitet, der experimentell bestätigt wird [162][163]. Hierbei wird von einem unendlich ausgedehnten Wellenleitermantel ausgegangen. Diese Vereinfachung vernachlässigt dabei die Struktur der Strahlungsmoden, die durch den endlichen Mantel der Lichtleitfaser erzeugt werden. Durch diese Struktur findet noch eine Auswahl der zur Verfügung stehenden Strahlungsmoden statt, so dass die "Feinstruktur" der Verluste nicht erfasst wird.

Ein neueres Dämpfungsmodell wurde von Faustini angegeben [164]. Dieses berücksichtigt den Mantel-Luft-Übergang durch eine dritte Schicht in radialer Richtung der Faser. Die abgeleitete Theorie erklärt die auftretenden Reso-



**Abbildung 3.27:** Biegeverluste von Lichtleitfasern unterschiedlichen Kernradiuses  $a$  und numerischer Apertur  $NA$ , bei einer Länge der Biegung  $L$  von einer Wicklung  $L = 2\pi R_B$  nach [49].

nanzen mit den Cladding- und Strahlungsmoden, ist aber unhandlich in der Anwendung.

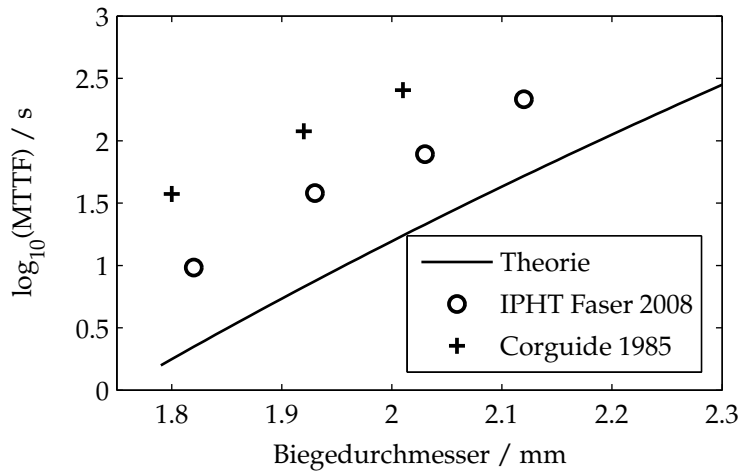
Zum Verständnis der wichtigsten Einflussfaktoren auf die Biegeverluste der Glasfaser sei hier die von Snyder [49] abgeleitete Gleichung angegeben

$$\gamma = k \cdot \sqrt{\frac{\pi V^8}{16 a R_B W^3}} \cdot \exp \left\{ -\frac{4 R_B (n_1^2 - n_2^2)}{3 \cdot 2 n_1^2 a} \right\}. \quad (3.78)$$

Hierbei ist  $k$  eine durch die elektromagnetische Feldverteilung und genaue Fasergeometrie bestimmte Konstante, die für eine Stufenprofilfaser gleich 1 ist,  $a$  ist der Faserkernradius,  $W = r_F (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2}$  der Mantelparameter und  $R_B$  der Biegeradius.

Für Fasern, wie sie für diese Arbeit relevant sind, ist in Abbildung 3.27 der Zusammenhang von Gleichung (3.78) im Vergleich mit Messdaten der Sensorfasern dieser Arbeit dargestellt. Es zeigt sich, dass für technisch vertretbare Einfügedämpfungen von unter 3 dB pro Umwicklung der Biegeradius etwas über 2 bis 2,5 mm liegen sollte.

**Lebensdauerverkürzung durch Biegung** - Es sind bereits früh experimentelle Methoden für die Lebensdauerbestimmung von Lichtleitfasern vorgeschlagen worden, die die Faser durch Biegung belasten [166][167]. Um optische Fasern in kleinen Strukturen zu verlegen ist die Biegefestigkeit entschei-



**Abbildung 3.28:** Biegebelastung einer Glasfaser mit verschiedenen Biegeradien bei einer Umwicklung. Die experimentell ermittelten Daten für eine 22 Jahre alte "Corning Corguide" und eine neue IPHT Sensorfaser weichen leicht von dem Modell nach [165] ab. Das Modell stimmt dem Verlauf nach gut überein.

dend. Annovazzi-Lodi et al. gibt ein Modell für die biegeradiusabhängige Lebensdauer von Glasfasern an [165]. Hierbei wird die mittlere Lebensdauer oder [168] "mean time to failure" (MTTF) als Funktion der Länge der gebogenen Faser, des Biegeradius und experimentell ermittelten Faserparametern für Zeiten bis über ein Jahr angegeben. Die abgeleitete Gleichung für die Überlebenswahrscheinlichkeit  $R(t)$  ist

$$R(t) = \exp \left( -8,44 \cdot 10^{24} \cdot \frac{2L_B}{\pi} \left( \frac{t}{D^{21,1}} \right)^{2,165} \right), \quad (3.79)$$

wobei

$$\text{MTTF} = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (3.80)$$

$D$  ist dabei der Biegedurchmesser in Millimetern und  $L_B$  die Länge der Biegestelle.

Um die Langzeitexperimente in [165] mit Kurzzeitdaten zu unterstützen wurden eigene Experimente durchgeführt. Diese sollten zum einen den angegebenen Zusammenhang stützen, des Weiteren die Anwendbarkeit auf die in dieser Arbeit verwendeten Faser demonstrieren und eine Abhängigkeit vom Alter der Fasern darstellen. Hierfür wurden Untersuchungen an einer Sensorfaser vom IPHT Jena, so wie einer 22 Jahre alten Faser vom Typ "Corguide"

der Firma Corning durchgeführt. Dabei wurde mittels mehreren Messungen der MTTF bei gegebenem Biegeradius abgeschätzt. Abbildung 3.28 zeigt die Ergebnisse im Vergleich mit dem Modell aus [165]. Es zeigt sich, dass der exponentielle Zusammenhang (logarithmisch Geraden) die Ergebnisse sehr gut beschreibt. Die MTTF der untersuchten Fasern liegt dabei höher als die von Annovazzi-Lodi et al., deren Ergebnisse im Folgenden als eine Abschätzung nach unten angesehen werden.

Extrapoliert ergibt sich für einen Biegedurchmesser von 5 mm eine Lebensdauer bzw. MTTF von über 80 Jahren. Verringert man den Biegedurchmesser jedoch auf nur 4 mm so sinkt die Lebensdauer aufgrund der exponentiellen Abhängigkeit auf nurmehr 10 Monate. Durch Verringerung des Faserdurchmessers ergibt sich eine Verbesserung der Lebensdauer bei gegebenem Biegeradius, da die Spannungen auf der Faseroberfläche bei gleichem Biegeradius geringer werden. Die optischen Biegedämpfungen können hierdurch jedoch nicht verringert werden. Zudem muss noch eine Temperaturmarge berücksichtigt werden, da dem Versagen der Faser ein thermisch beeinflusstes Risswachstum zugrunde liegt, das sich bei höheren Temperaturen beschleunigt.

Aus den Anforderungen von Lebensdauer und Einfügedämpfung wird als Designregel für diese Arbeit daher ein minimaler Biegedurchmesser von 5 mm abgeleitet. Für kurze Faserstücke lässt sich dieser Durchmesser unterschreiten, da sowohl die Lebensdauerfunktion wie auch die Einfügedämpfung die Länge der Biegestelle im Exponenten führen. Somit kann eine hohe Lebensdauer bzw. kleine Einfügedämpfung theoretisch auch mit geringeren Radien erzielt werden, wenn die Strecke dieser Biegung nur kurz genug ist. Mathematisch lässt sich hieraus ein Variationsproblem für die genaue Kurve der Faser ableiten, das zum einen die Lebensdauer als wie auch die Biegeverluste berücksichtigt. Dieses Variationsproblem wurde im Rahmen dieser Arbeit abgeleitet. Die Methode der Finiten-Elemente ist für die numerische Lösung eines Variationsproblems geeignet, wurde in dieser Arbeit allerdings nicht implementiert, da es deren Rahmen überstiegen hätte. Die entworfenen Faserkurven orientieren sich daher an der Designregel eines festen minimalen Biegedurchmessers von 5 mm.

Für integriert optische Wellenleiter können andere Designrichtlinien abgeleitet werden. Ein entscheidender Vorteil der integriert optischen Wellenleiter im Hinblick auf Kraft-Momenten-Sensoren ist deren Biegetoleranz. Zum



einen können Biegeverluste durch die Wahl von Materialkombinationen mit hoher Numerischer Apertur verringert werden. Des Weiteren treten durch die mechanisch spannungsarmen Wellenleiterbiegungen auch keine Lebensdauerverkürzungen auf.

### Torsion

Durch Verdrehung oder Torsion einer Lichtleitfaser wird ein Verzerrungszustand erzeugt, der Schubverformungen enthält. Die Einträge des Verzerrungstensors sind  $e_{xz} = -\tau y$  und  $e_{yz} = \tau x$  [51]. Die restlichen Einträge sind für eine frei hängende Faser vernachlässigt. Berechnet man über das photo-elastische Gesetz die Störung des Permittivitätstensors  $\Delta\bar{\epsilon}$ , so besitzt dieser für isotrope Materialien die gleiche Struktur. Das hat zur Folge, dass die Kopplung der Moden nur durch die longitudinalen Feldkomponenten stattfindet. Die Koppelkoeffizienten für die Kopplung der Polarisationsmoden einer Ausbreitungsrichtung  $\gamma_{p+,s+}$  und  $\gamma_{s+,p+}$  wurden von Ulrich [51] abgeleitet. Die sich ergebenden gekoppelten Modengleichungen lauten

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} A_{s+} \\ A_{p+} \end{pmatrix} = \frac{ip_{44}n_{\text{eff}}^2\tau}{2} \begin{pmatrix} 0 & -e^{i(\beta_p-\beta_s)z} \\ e^{i(\beta_s-\beta_p)z} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{s+} \\ A_{p+} \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

wobei  $\tau$  die Torsionsrate  $\phi/L$  bezeichnet, wenn  $\phi$  der Drehwinkel und  $L$  die Länge der gedrehten Faser ist.

Für eine Monomodenfaser ( $\beta_s = \beta_p$ ) mit konstanter Torsionsrate  $\tau(z) = \tau$  ergibt sich durch Ableiten von (3.81) nach  $z$  und Einsetzen der ersten Ableitung die gewöhnliche Drehmatrix  $R(\varphi)$ , mit Drehung um den Winkel  $\varphi$  als Lösung der Gleichungen. Der Drehwinkel ist dabei  $\varphi = n_{\text{eff}}^2 p_{44} \tau z / 2$  bzw.  $\varphi = n_{\text{eff}}^2 p_{44} \phi / 2$ .

# Kapitel 4

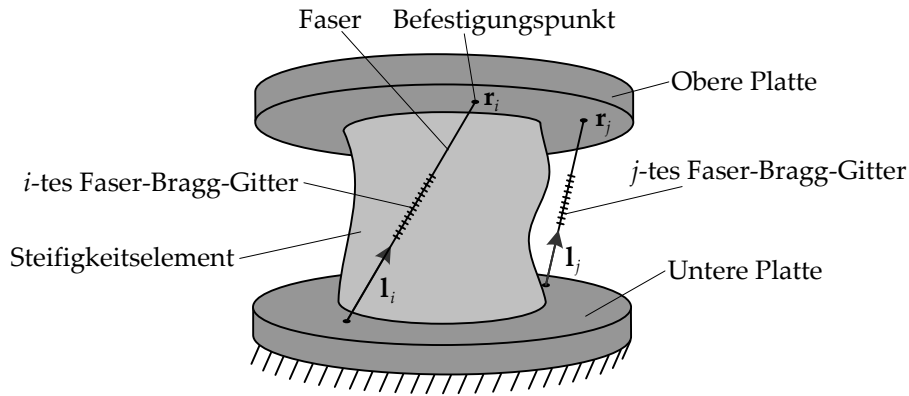
## Faseroptischer Kraft-Momenten-Sensor mit sechs Freiheitsgraden

Die Ergebnisse der vorangegangenen Untersuchungen werden jetzt für die Entwicklung von Kraft-Momenten-Sensoren auf Basis von Faser-Bragg-Gittern verwendet. Zunächst wird ein lineares Sensormodell abgeleitet, auf dessen Grundlage dann ein numerisches Optimierungsverfahren implementiert wird, welches einen automatisierten Entwurf von FBG-KMS erlaubt.

### 4.1 Starrkörper-Feder-Modell

Abgeleitet aus den Untersuchungen zum Verhalten von Faser-Bragg-Gitter-Sensoren in Kombination mit Kraft-Momenten-Sensoren ergibt sich als Modell für den faseroptischen Kraft-Momenten-Sensor der in Abbildung 4.1 gezeigte Aufbau. Eine untere Platte, die zur Montierung des KMS an die untere Aufnahme der Messstelle dient, wird als sehr steif angenommen und als Starrkörper modelliert. Ein elastisches Steifigkeitselement mit zunächst unbestimmten elastischen Eigenschaften verbindet die untere Platte mit einer oberen Platte. Die obere Platte dient der Montierung an die obere Aufnahme der Messstelle. Diese Platte kann wieder sehr steif ausgelegt werden und wird als Starrkörper angenommen. Ein Kraft die durch die obere Aufnahme auf den KMS wirkt verformt demnach lediglich das elastische Steifigkeitselement. Somit bewegt sich die obere Platte mit den Freiheitsgraden eines Starrkörpers wie im Abschnitt 2.1.3 dargestellt. Diese Grundstruktur kann als

Ausgangspunkt für eine Reihe von Kraft-Momenten-Sensoren angesehen werden und wird ins Besondere für die Modellierung der Stewardplattform verwendet [14].



**Abbildung 4.1:** Allgemeines Starrkörper-Feder-Modell eines faseroptischen Kraft-Momenten-Sensors. Die obere und untere Platte werden als Starrkörper angenommen, das Steifigkeitselement als elastisch. Verformt es sich durch an der oberen Platte angreifende Lasten, so dehnen sich die zwischen den Platten eingespannten Fasern.

Erst die Einbringung von Sensoren macht die Wandlerstruktur zum Kraft-Momenten-Sensor. Für deren Anbringung wird Folgendes berücksichtigt: Die Sensoren werden nicht im Bereich der Faser-Bragg-Gitter fixiert, um inhomogene Dehnungsfelder zu vermeiden, die zu Verzerrungen der spektralen Antwort führen. Zudem muss die Faser im Bereich des FBGs möglichst gerade geführt werden, um eine Polarisationsabhängigkeit durch biegeinduzierte Doppelbrechung zu vermeiden. Aus diesen beiden Punkten kann abgeleitet werden, dass die Faser an einem Punkt vor, bzw. nach dem Bragg-Gitter eingespannt werden muss. Hierdurch ergibt sich ein ebener Spannungszustand, der ein homogenes Dehnungsfeld erzeugt.

Es bleibt die Frage offen, wie die FBG-Sensoren am geeignetsten in der Wandlerstruktur ausgerichtet werden, um die Kenngrößen für KMS aus Abschnitt 2.5 zu optimieren. Hierzu soll zunächst ein mathematisches Modell des beschriebenen KMS Sensors abgeleitet werden.

Durch eine an der oberen Platte angreifende Last, dargestellt durch den Lastvektor  $\mathbf{f} = \{F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z\}^T$ , ergibt sich durch die Deformation des Steifigkeitselements die Translation bzw. Rotation der oberen Platte zusammengefasst im Vektor  $\mathbf{U} = \{U_x, U_y, U_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\}^T$  entsprechend  $\mathbf{U} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{f}$ . Die Details hierzu wurden im Abschnitt 2.1.3 eingeführt.

Es soll eine Faser  $i$  betrachtet werden, die fest an der unteren Platte eingespannt ist und deren Ausrichtung im Koordinatensystem der oberen Platte durch den Vektor  $\mathbf{l}_i$  gegeben ist. Zudem ist die Faser in gerader Linie mit der oberen Platte am Punkt  $\mathbf{r}_i$  verbunden. Bewegt sich der Punkt  $\mathbf{r}_i$  auf der oberen Platte, so folgt der obere Einspannungspunkt der Faser dieser Bewegung. Diese Bewegung wird durch den Vektor  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_i)$  dargestellt. Man erhält diesen Vektor wie beschrieben aus der Translation und Rotation der oberen Platte gemäß  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{U} + \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\alpha}$ .

Stellt man sich die Faser als vorgespannt vor, so wird sie der Bewegung der oberen Einspannung in alle Raumrichtungen elastisch folgen, sich also Dehnen oder Stauchen. Nimmt man an, dass die Translationen und Rotationen der oberen Platte klein sind, dass also das Steifigkeitselement eine hohe Steifigkeit aufweist, dann können die Spannungen in der Faser, die durch eine Bewegung senkrecht zur Faserachse entstehen, vernachlässigt werden. Somit ergeben sich als nennenswerte Dehnungen jene in axialer Richtung  $e_{zz,i}$  der Faser. Diese findet man durch Projektion des Richtungsvektors der Faser  $\mathbf{l}_i$  auf die Bewegung des oberen Einspannungspunkts  $\mathbf{u}(\mathbf{r}_i)$  entsprechend

$$e_{zz,i} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{l}_i}{l_i}. \quad (4.1)$$

Dabei ergibt das Skalarprodukt der Vektoren gerade den Versatz des oberen Einspannungspunkts in Richtung der Faser. Teilt man diesen Wert durch die Länge der eingespannten Faser  $l_i$ , so erhält man die longitudinale Dehnung der Faser  $e_{zz,i}$ .

Für den KMS sind mehrere Sensoren notwendig. Um eine vereinfachte Schreibweise zu erhalten werden die Dehnungen aller  $N$  Fasersensoren in einem Dehnungsvektor

$$\mathbf{e}_f = \{e_{zz,1}, e_{zz,2}, \dots, e_{zz,N}\} \quad (4.2)$$

zusammengefasst. Das in dieser Arbeit hergeleitete Modell liefert den Zusammenhang

$$\mathbf{e}_f = \mathbf{g}(\mathbf{f}), \quad (4.3)$$

wobei  $\mathbf{g}$  eine Vektorfunktion ist, die den abgeleiteten Zusammenhang darstellt. Um zu einer linearen Matrixgleichung im Sinne der Compliance-Matrix zu

gelangen, bildet man

$$C_{ij} = \frac{dg_i}{df_j}. \quad (4.4)$$

Somit erhält man nach der Linearisierung die Gleichung

$$\mathbf{e}_f \approx \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}. \quad (4.5)$$

Diese Gleichung entspricht gerade der im Grundlagenabschnitt 2.5 eingeführten Compliance-Matrixgleichung.

Somit ist eine mathematische Verbindung geschaffen zwischen der Ausrichtung der Fasersensoren in der Wandlerstruktur, dem Verhalten der Wandlerstruktur, ausgedrückt durch die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und den eingeführten Kenngrößen eines Kraft-Momenten-Sensors. Im Folgenden soll diese Verbindung genutzt werden, um einen numerischen Entwurf, basierend auf einem numerischen Optimierungsverfahren des KMS durchzuführen. Zunächst muss jedoch praktisch sichergestellt werden, dass die vorgeschlagene theoretische Faseranordnung aus Abbildung 4.1 auch real implementierbar und miniaturisierbar ist.

## 4.2 Designstudie eines Kraft-Momenten-Sensors

Der Implementierung und Miniaturisierung des vorgestellten Modells stehen die optischen und mechanischen Eigenschaften der Lichtleitfaser entgegen. So muss bedacht werden, wohin die Faser abgeführt wird, nachdem sie am oberen Einspannpunkt befestigt ist. Anders als eine elektrische Verdrahtung lässt die Faser sich nicht unter beliebigem Winkel weiterführen, es müssen minimale Biegeradien beachtet werden, wie in den vorangegangenen Untersuchungen aufgezeigt wurde. Zudem kann die Faser nicht an einem "Punkt" befestigt werden, da dieser unendlich steif mit der Faser verbunden sein müsste. In den Simulationen zu oberflächenapplizierten Faser-Bragg-Sensoren zeigte sich, dass ein Klebestellenvorlauf von ca. zwei Millimetern notwendig ist, um die Strukturdehnung in die Faser einzukoppeln. Dies ist dem geringen E-Modul des Klebstoffes und der Faserhülle geschuldet. Eine mögliche Verbesserung wäre die Verwendung von Metallhüllen. Diese lassen sich derzeit allerdings nicht aufbringen, ohne die Faser durch das "Entcoaten", also das

Entfernen der Faserhülle vorzuschädigen [88] und somit die Festigkeit der Faser zu reduzieren, da derzeit keine metallisierten Ziehturmfasern mit Faser-Bragg-Gittern kommerziell erhältlich sind. Als Ausweg bleibt nur die Faser am Befestigungspunkt über mehrere Millimeter mit der Struktur zu verkleben.

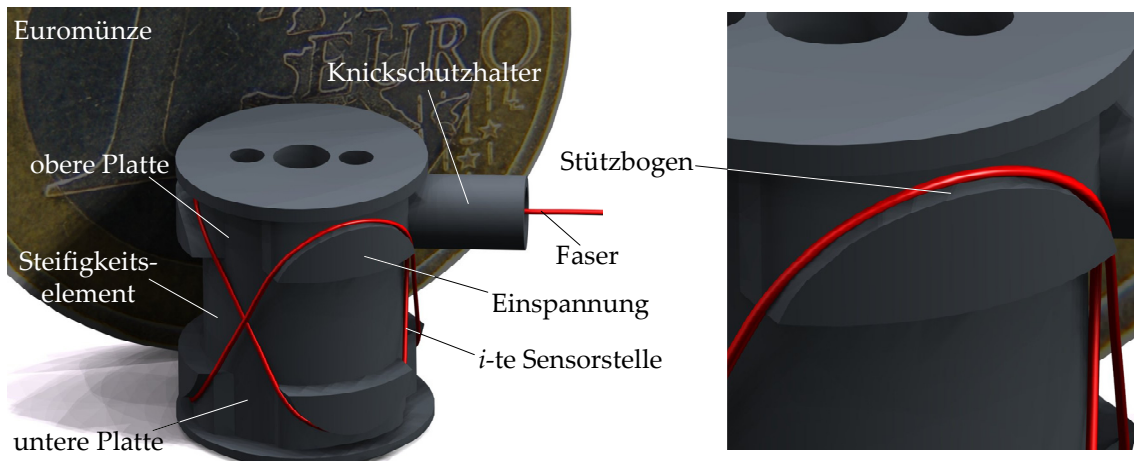
Das Designziel mit nur einer Faser auszukommen und die Wellenlängenmultiplexeigenschaften der FBGs zu nutzen erlaubt auch nicht die Faser nach dem Einspannpunkt enden zu lassen. Diese muss zum nächsten Einspannpunkt auf der oberen Platte geführt werden, um dort den nächsten Fasersensor anzuschließen. Hinzu kommt, dass die Einspannung die Vorspannung der Faser während der Herstellung des KMS erlauben muss. Die Vorspannung ist notwendige Voraussetzung dafür, dass der KMS positive sowie negative Lasten in allen Raumrichtungen vermessen kann.

Aus diesen Erwägungen heraus wurde ein Entwurf für eine Einspannung erstellt. Um diesen Entwurf im Hinblick auf die Verwendbarkeit im KMS zu untersuchen wurde ein kompletter faseroptischer KMS erstellt. Dieser besitzt noch keine Optimalstruktur im Sinne des abgeleiteten Modells. Die Faserorientierung wurde in Anlehnung an die Steward-Plattform bestimmt und mittels eines CAD-Programms entworfen. Zielsetzung dieser Untersuchung war es dabei nachzuweisen, dass die Einspannung die notwendigen Fasereigenschaften nicht wesentlich beeinflusst. Der KMS wurde so entworfen, dass er die Miniaturisierungsanforderung mit einem Volumen von  $10 \times 10 \times 10 \text{ mm}^3$  bereits erfüllt.

### 4.2.1 Entwurf

Der Entwurf der Einspannung sieht vor, die verschiedenen Befestigungspunkte paarweise über einen Faserbogen zu verbinden. Der Faserbogen wird dabei durch einen passend ausgefertigten Stützbogen unterlegt, der sicherstellt, dass der zulässige minimale Biegeradius der Faser nicht unterschritten wird. Auf diesem Stützbogen wird die Faser über mehrere Millimeter verklebt. Das Ende des Stützbogens markiert sinngemäß den Befestigungspunkt in Abbildung 4.1.

Der Aufbau des Sensors folgt neben der Minimierung der Maßgabe, Verbindungsleitungen durch den KMS durchführen zu können. Dies ist interessant, wenn Sensoren oder Aktoren, die hinter dem KMS sitzen, angeschlossen werden sollen. Zu diesem Zweck sollte der KMS eine Durchführung besitzen.



**Abbildung 4.2:** Designstudie zum faseroptischen Kraft-Momenten-Sensor. Links ist die vollständige Ansicht im Vergleich zu einer Euromünze im Hintergrund gezeigt. Rechterhand ist der Ausschnitt der Einspannung mit Stützbögen für die Faser zu sehen. Die Faser ist frei zwischen den Einspannstellen gespannt.

Dadurch muss das Steifigkeitselement des Sensors hohl sein und die obere und untere Platte müssen Bohrungen aufweisen. Prinzipiell stellt dies keine Einschränkung für den Entwurf des KMS dar. Die Durchführung im Inneren kann als Randbedingung für den numerischen Entwurfsprozess aufgefasst werden. Hier wird sie durch die Wahl eines zylinderförmigen Steifigkeitselements berücksichtigt. Abbildung 4.2 zeigt die 3D-CAD Zeichnung der Designstudie. Links zu sehen ist der Größenvergleich mit einer Euromünze. In der Mitte des KMS ist das hohle, zylinderförmige Steifigkeitselement zu erkennen. Die obere und untere Platte werden durch eine im Vergleich zum Zylinder verstärkte Struktur erzeugt. Die obere Platte besitzt eine Dicke von ca. 2,5 mm, die Wandstärke des Zylinders beträgt lediglich 0,7 mm. Somit sind die obere, bzw. untere Platte deutlich steifer als das Steifigkeitselement.

Die Einspannung der Faser wird über die beschriebenen Stützbögen realisiert. Zwischen einem oberen und einem unteren Stützbogen ist die Faser frei gespannt und berührt die Wandlerstruktur nicht. In diesen Zwischenbereichen befinden sich die Faser-Bragg-Gitter-Sensoren. Die Anordnung der FBGs folgt der der Stewardplattform. Allerdings kreuzen sich bei dieser die einzelnen Streben nicht. Diese Kreuzung kann durch die relativ dünnen Fasern allerdings problemlos realisiert werden. Es muss lediglich sichergestellt werden, dass sich die Fasern untereinander nicht berühren. Dies ist in Abbildung 4.2 im rechten Bild am rechten Rand zu erkennen. Die von unten nach oben lau-

fende Faser besitzt einen Abstand von etwa einem Faserdurchmesser zu der Faser die von oben nach unten läuft. Eine Berührung der Fasern würde zu einem zusätzlichen Übersprechen und einer Reibung der Fasern bei Wechsellast führen, die die Fasern zerstören könnte.

Zur Herstellung dieses KMS wird die gesamte Faser von einem Stützbogen zum nächsten "gewickelt", wobei die Faser durchgehend auf der gewünschten Vorspannung gehalten wird. Dabei ist es notwendig auf die genaue Anfangsposition zu achten. Zudem müssen die Positionen der Sensoren in der Faser genau auf den KMS Entwurf abgestimmt sein. Aus dem CAD Modell wurden hierzu die Positionen abgeleitet. Laut CAD Modell sind sämtliche Biegeradien der Faser über 3 mm und stellen somit keine Einschränkung der Lebensdauer oder der optischen Eigenschaften dar.

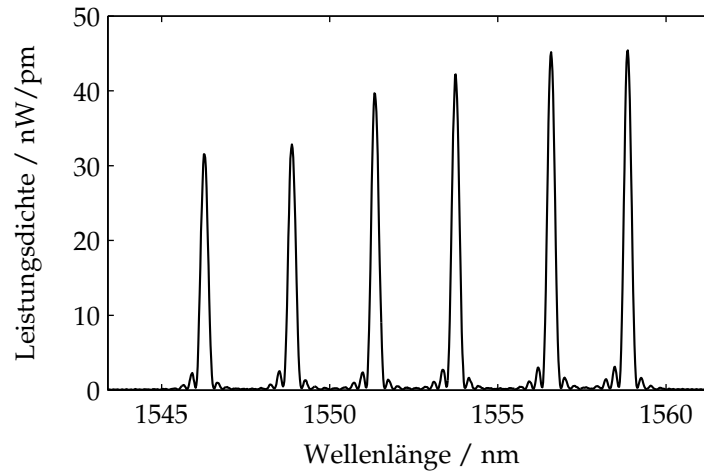
### 4.2.2 Implementierung

Da es sich bei dem Entwurf um eine Designstudie handelt, die noch nicht die Anforderungen an die Linearität des Materials, dessen Wechselfestigkeit und Temperaturbeständigkeit, etc. stellt wurde der CAD-Entwurf mittels eines optischen "Rapid-Prototyping" (RP) Verfahrens hergestellt. Dieses Verfahren hat enorme Kostenvorteile im Vergleich zu einer Fertigung aus Metall. Zudem können spanabhebende Verfahren nicht die gleichen Freiheitsgrade im Entwurf bieten, was eine verfrühte Einschränkung bedeuten würde. Allerdings muss man erhebliche Einschränkungen bei der Festigkeit des Materials (Accura 60) hinnehmen.

Mittels der RP-Strukturen wurden die aus dem CAD Modell abgeleiteten FBG-Sensorpositionen bestätigt und ein FBG-Sensorarray in Ziehurturtechnologie beim IPHT Jena beschafft. Abbildung 4.3 zeigt das Reflexionsspektrum dieses Arrays bei Beleuchtung mit einer Superlumineszenzdiode. Die sechs Sensoren sind im Abstand von 9,5 mm in die Faser eingebracht worden.

Um die Faser mit der gewünschten Vorspannung auf die Wandlerstruktur zu fixieren, wurde ein Verfahren angewandt, bei dem die Faser unter ständiger Zugbelastung durch ein Gewicht gehalten wird. Über die Masse des Gewichts lässt sich die Vorspannung genau einstellen. Zudem kann die Vorspannung durch die FBG-Sensoren bei der Fixierung beobachtet werden, da sich deren Wellenlänge mit der Vorspannung verschiebt. Abbildung 4.4 zeigt das Vorgehen bei der Anbringung der Faser auf der Wandlerstruktur. Die unter Vorspan-





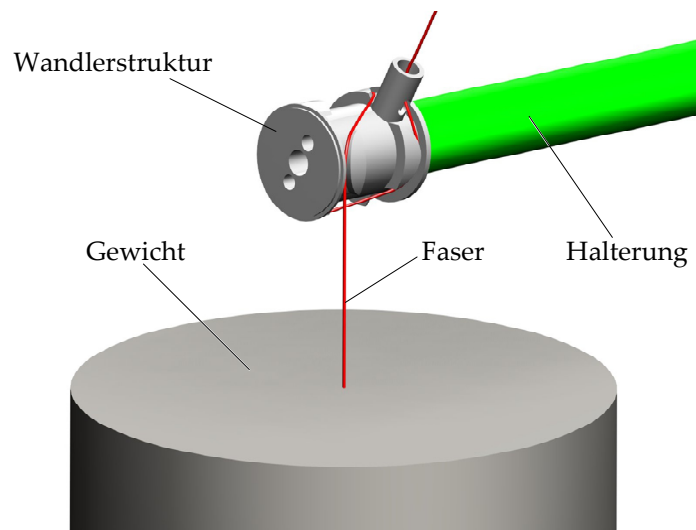
**Abbildung 4.3:** Reflexionsspektrum des Faser-Bragg-Gitter Arrays zur Instrumentierung der Designstudie eines faseroptischen Kraft-Momenten-Sensors. Die Gitter besitzen eine Reflektivität von ca. 20 %.

nung stehende Faser wird an einem Ausgangspunkt fixiert und dann nacheinander über die Einspannstellen im Wechsel oben-unten geführt. Durch die spezielle Form der Wandlerstruktur verbleibt die Faser in der so erhaltenen Position und kann durch Kleben fixiert werden. Danach wird die Vorspannung erzeugende Gewicht abgenommen und eine Knickschutztülle über die dafür vorgesehene Halterung gezogen.

### 4.2.3 Prüfstand

Obwohl die Designstudie aufgrund ihrer Materialeigenschaften nur sehr bedingt als vollwertiger KMS angesehen werden kann, wurden Belastungsversuche daran durchgeführt, um einen ersten Eindruck zu erhalten und Erfahrungen zu sammeln.

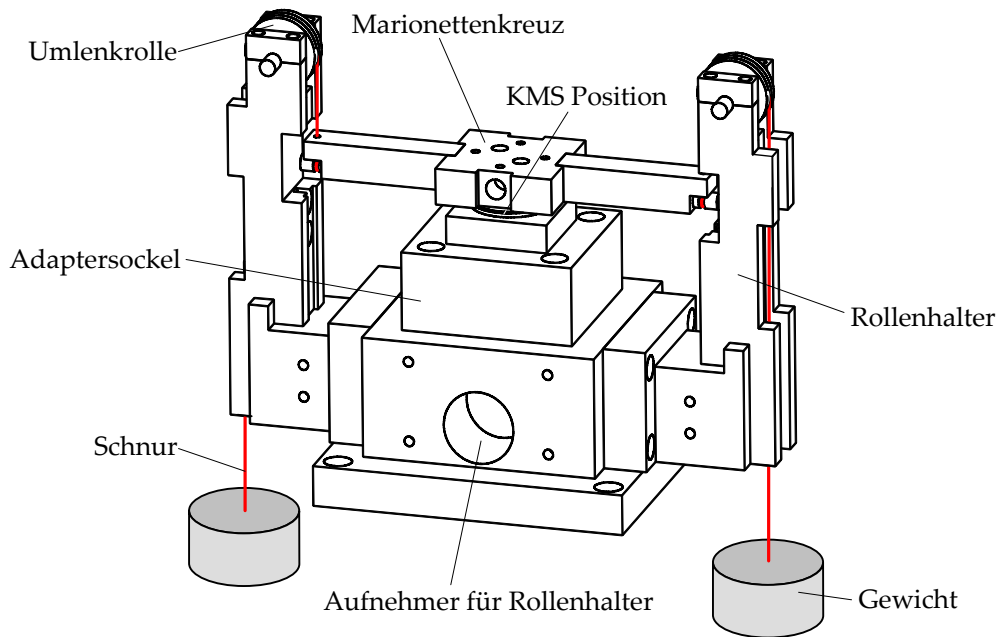
Zu diesem Zweck wurde ein mechanischer Prüfstand aufgebaut [148], der eine gezielte Lasteinleitung mit Einzelkomponenten des Lastvektors  $f$  erlaubt. Die Lasten werden über Gewichte erzeugt. Dies erlaubt eine absolute Kalibrierung auf einer Waage. Um die Gewichtskräfte umzulenken, wurden am Prüfstand kugelgelagerte Rollen angebracht. Über an den Gewichten befestigte Schnüre können über die Rollen Kräfte in beliebige Raumrichtungen erzeugt werden. Abbildung 4.5 zeigt den Aufbau in der Konfiguration für Belastung mit einer Kraft  $F_z$  im Koordinatensystem des Kraft-Momenten-Sensors.



**Abbildung 4.4:** Anbringung der Sensorfaser auf die KMS-Wandlerstruktur. Durch ein Gewicht wird die Faser vorgespannt. Die Wandlerstruktur wird an einer Halterung gedreht und die Faser nach und nach an die Einspannstellen geführt. Durch die Form der Wandlerstruktur verbleibt die Faser bei bestehender Vorspannung in der Position und kann verklebt werden.

Über einen Adaptersockel kann der Prüfstand am KMS mit unterschiedlicher Höhe adaptiert werden. Werden die Rollenhalter umgesteckt, bzw. die zwei nicht in der Abbildung gezeigten Rollenhalter montiert, so können alle sechs Lastenvektoreinträge mit positivem wie negativem Vorzeichen erzeugt werden. Für den Kalibrierungsversuch wird der gesamte Prüfstand auf einen Sockel montiert, um das Auflegen und Abnehmen der hängenden Gewichte zu erleichtern. Kalibrierungsfehler ergeben sich durch das Haltemoment der doppelt kugelgelagerten Umlenkrollen. Um diesen Fehler abzuschätzen wurde in einer Versuchsreihe das Haltemoment aller Rollen bestimmt. Da das Haltemoment im allgemeinen von der radialen Belastung der Rolle abhängen kann, wurden die Versuche zudem für verschiedene radiale Rollenlasten durchgeführt. Der größte Wert des Haltemoments ergab sich bei einer radialen Last von 10 N mit einem Wert von 0,002 N·cm. Am Beispiel der in Abbildung 4.5 gezeigten  $F_z$  Belastung ergibt dies eine maximale Abweichung von ca. 4 mN vom Sollwert. Dieser Wert ist vernachlässigbar klein im Vergleich zu den verwendeten Lasten im 1 N Bereich.

Die Designstudie wurde nach der Herstellung in den Prüfstand eingebracht. Hierzu wurde die obere und untere Platte auf den Adaptersockel bzw. an das Marionettenkreuz geklebt. Abbildung 4.6 zeigt den Zwischenschritt vor der



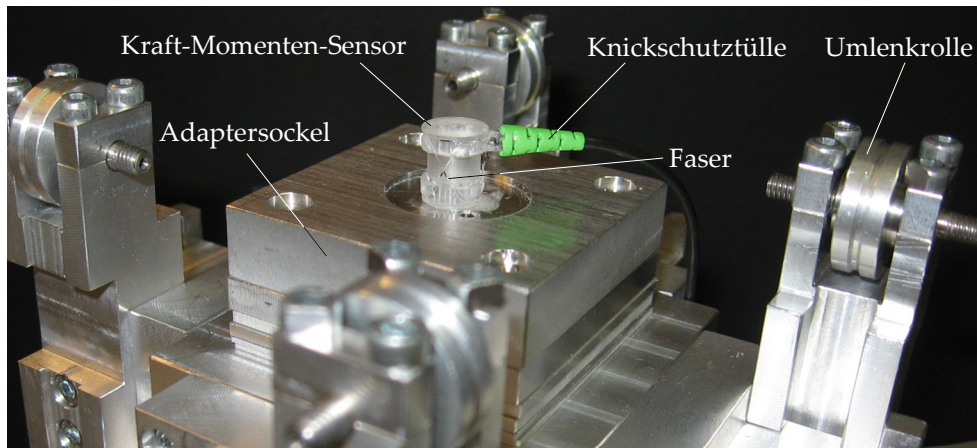
**Abbildung 4.5:** Prüfstand zur Erzeugung von Lasten  $f$  zur Kalibrierung und Charakterisierung verschiedener Kraft-Momenten-Sensoren. Die Kräfte werden über Gewichte erzeugt und an Schnüren durch ausrichtbare Rollen umgelenkt.

Befestigung auf dem Marionettenkreuz. Zur Vorspannung wurde eine Kraft von 1,4 N gewählt. Diese Vorspannung liegt deutlich unter dem Maximalwert von bis zu 10 N [88]. Damit soll sichergestellt werden, dass unbeabsichtigte Unebenheiten in der Wandlerstruktur nicht zu einem Abriss der Faser führen. Im endgültigen Design des KMS sollte der Vorspannungswert allerdings erhöht werden, um die Faser an den Stellen der Faser-Bragg-Gitter möglichst gerade auszurichten.

#### 4.2.4 Messungen und Ergebnisse

Das am einfachsten zu messende Ergebnis ist das Ausbleiben eines Faserbruchs nach über hundert Tagen. Somit kann davon ausgegangen werden, dass die erforderlichen Biegedurchmesser eingehalten werden und das Ziel der Designstudie erfüllt ist.

Die Ergebnisse der Charakterisierung der Designstudie im Prüfstand ist in den Abbildungen 4.7 bis 4.9 gezeigt. Für die Messung wurden die Einträge des Belastungsvektor  $f_i$  nacheinander und einzeln erzeugt und dem Betrag nach

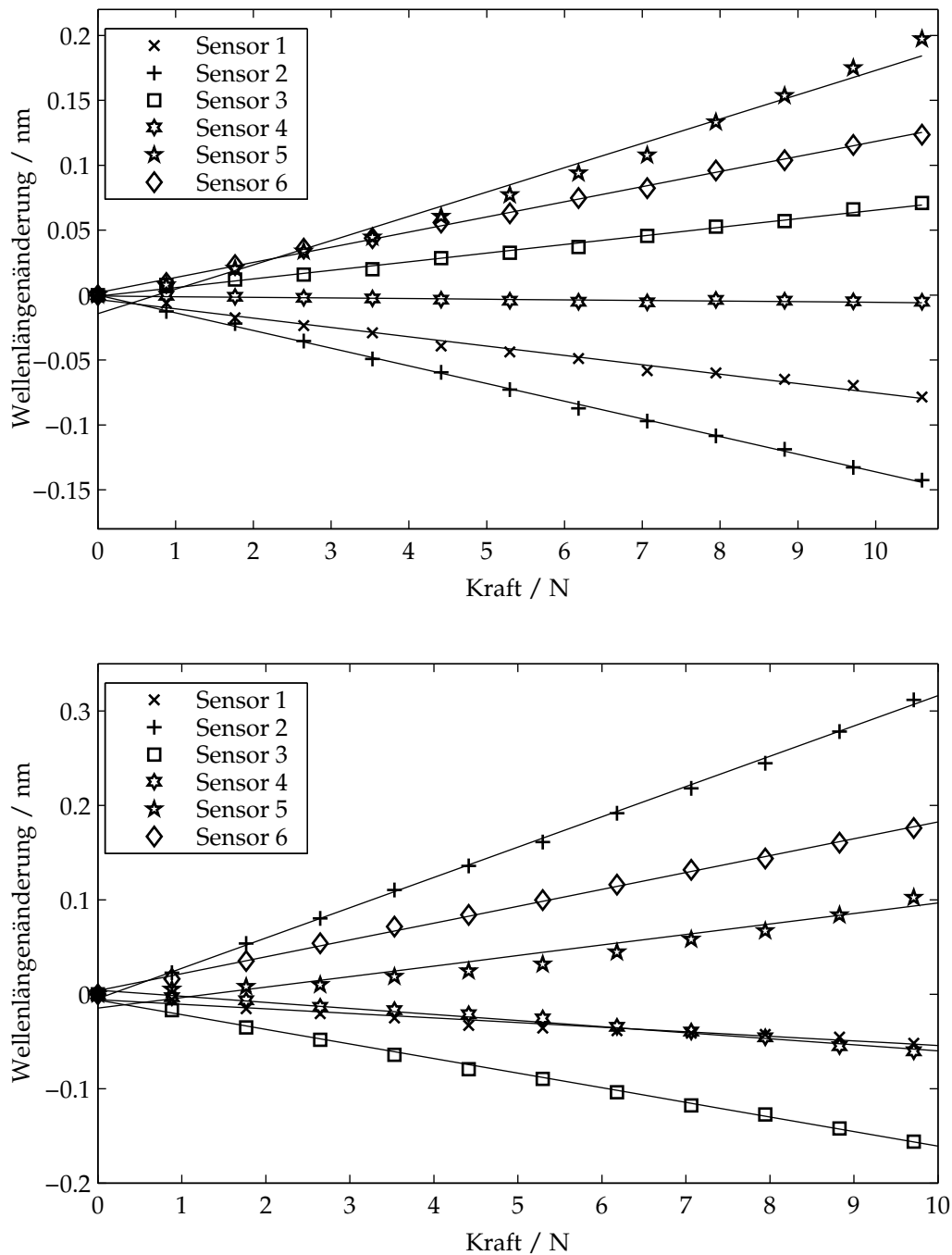


**Abbildung 4.6:** Montage der KMS-Designstudie auf dem Prüfstand. Der KMS wird auf den Adaptersockel geklebt. Das Marionettenkreuz ist in diesem Schritt noch nicht montiert. Die Umlenkrollen sind für eine  $M_z$  Belastung ausgerichtet.

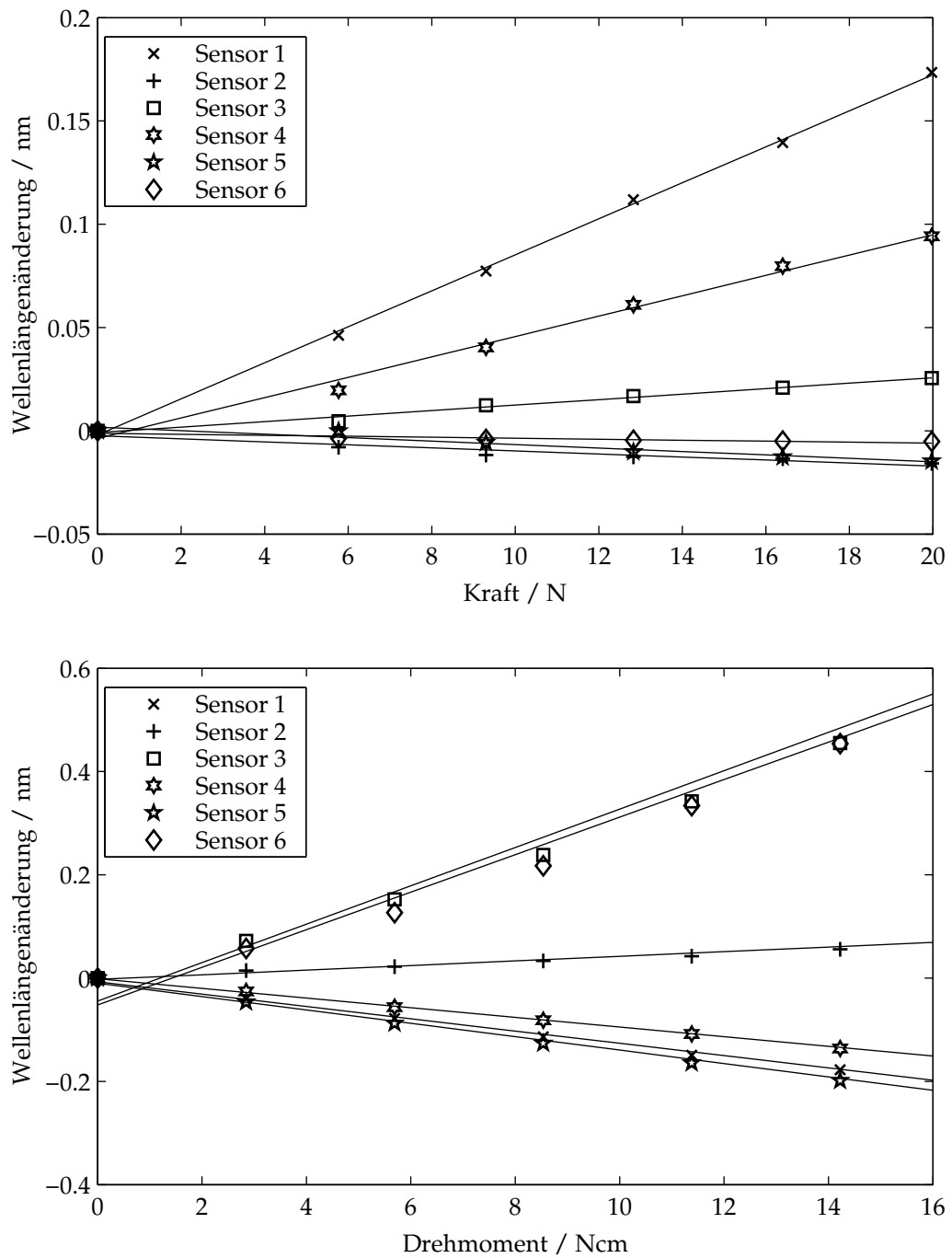
Schritt für Schritt entsprechend  $\mathbf{f} = a_j \mathbf{f}_j$  erhöht. Die Reflexionsspektren des FBG-Array wurde mittels eines optischen Spektrum-Analysators aufgezeichnet. Die Auswertung des Spektrums zur Ermittlung der Bragg-Wellenlängen wird mittels des Zentroidalgorithmus [156] durchgeführt. Die Bragg-Wellenlängen  $\lambda_{B,k}$  werden für jeden Lastvektor aufgezeichnet und bilden die den Ergebnissen zugrunde liegenden Daten  $\lambda_{B,ijk}$ . Zum Vergleich mit dem idealen, linearen Verhalten des KMS werden in die Graphen lineare Interpolationen der Sensoren mit steigender Last eingetragen.

Abbildung 4.7, oben zeigt das Ergebnis dieser Messung für steigende Belastung mit einer Kraft in  $x$ -Richtung. Die Antwort der Bragg-Gitter ist nur annähernd linear. Vergleicht man Abbildung 4.7 oben mit 4.7 unten, so sehen die Graphen der Form nach ähnlich aus. Allerdings unterscheidet sich die Reihenfolge der zugeordneten Sensoren. So ist Sensor Nummer fünf der mit dem steilsten Anstieg in Abbildung 4.7 oben und Sensor Nummer zwei der mit dem steilsten Anstieg in Abbildung 4.7 unten. Diese Eigenschaft ermöglicht die Unterscheidung der Lastfälle, bzw. demonstriert wie die Nichtsingularität der Compliance-Matrix entsteht. Für alle Lastfälle lässt sich eine Abweichung vom idealen, linearen Verlauf feststellen.

Das kann darauf zurückgeführt werden, dass der verwendete Polymer zur Erzeugung der Struktur ein nichtlineares und kriechendes Verhalten aufweist.



**Abbildung 4.7:** Kalibrierungsdaten der KMS-Designstudie auf Basis einer Rapid-Prototyping-Materialien. Die obere Graphik zeigt die Faser-Bragg-Gitter-Sensorantworten bei Belastung mit steigender Kraft  $F_x$ . Die Sensorantworten wurden mittels Schwerpunktalgorithmus aus den reflektierten Spektren ermittelt. Die untere Messung zeigt die Belastung mit einer Kraft  $F_y$ .



**Abbildung 4.8:** Kalibrierungsdaten der KMS-Designstudie für die Lastvektoreinträge  $F_z$  und  $M_x$ .

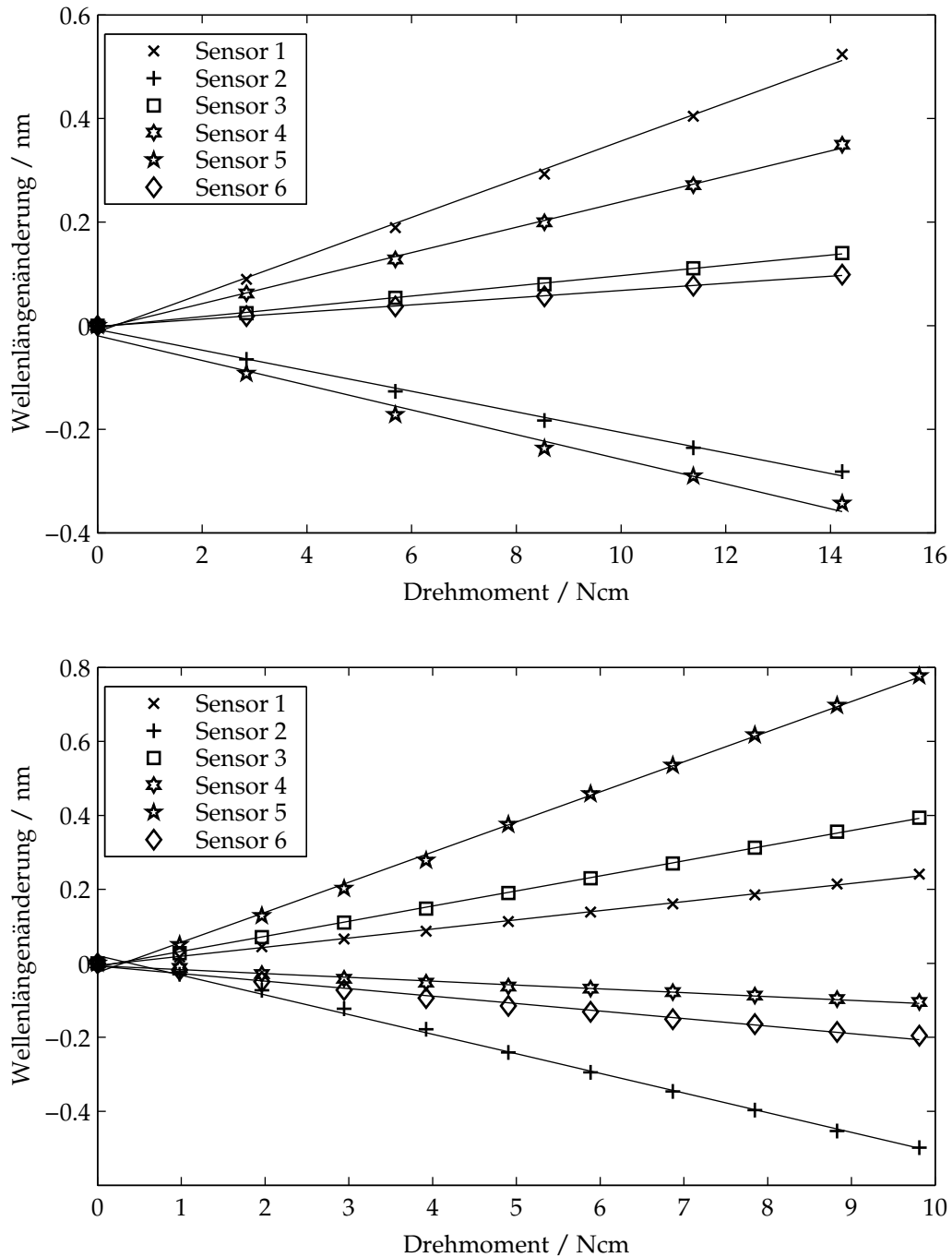


Abbildung 4.9: Kalibrierungsdaten der KMS-Designstudie für die Lastvektoreinträge  $M_y$  und  $M_z$ .

Des Weiteren kann eine Nichtlinearität durch die Geometrie der Faser auf dem KMS zustande kommen. Wird diese während des Verklebens nicht durch die Vorspannung gerade gezogen, so kann aufgrund der Biegung eine weitere

Nichtlinearität entstehen.

Abbildung 4.9, unten zeigt die Belastung des KMS mit einem Drehmoment um die  $z$ -Achse. Für diesen Fall sollten aufgrund der Symmetrie des KMS alle Sensoren mit ungerader Nummer eine positive Steigung sowie alle geraden FBG-Nummern eine negative Steigung aufweisen. Dem folgen die gezeigten Messdaten. Trotz der Symmetrie weisen nicht alle Sensorsignale den selben Betrag der Steigung auf. Diese kann von unterschiedlich stark vorgespannten Fasern herrühren. Hierdurch ist der Verlauf der Faser im frei gespannten Bereich gebogen. Wird eine Last auf den Sensor gegeben, so streckt sich die Faser zunächst und dehnt sich weniger. Ist die Faser stärker gespannt, so wird die Dehnung bei gleicher Last größer.

Um die Compliance-Matrix zu berechnen und daraus die Konditionszahl abzuleiten muss zunächst die Normalisierung durchgeführt werden. Für die Maximalwerte der Sensoren  $e_M$  wird für jeden Sensor der selbe Wert verwendet, da sich die FBGs nicht unterscheiden. Der exakte Wert ist für die Bestimmung der Konditionszahl zudem nicht von Bedeutung, da die Konditionszahl einer Matrix multipliziert mit einem beliebigen Skalar nicht verändert wird. Die Lastnormalisierung ist allein aufgrund der unterschiedlichen Einheiten im Lastvektor notwendig. Als Lastnormalisierungsmatrix wird

$$N_v = \text{diag}\{3 \text{ N}, 3 \text{ N}, 4 \text{ N}, 2 \text{ Ncm}, 2 \text{ Ncm}, 4 \text{ Ncm}\} \quad (4.6)$$

verwendet. Die Sonderstellung der  $z$ -Lasten ergibt sich durch die Rotations-symmetrie um die  $z$ -Achse des KMS. Die Konditionszahl  $c_o = \text{cond}\{C_N\}$  ergibt damit  $c_o = 28,9$ . Dieser Wert ist hoch, wenn er mit den publizierten Werten von elektrischen KMS verglichen wird, die im unteren einstelligen Bereich liegen. Allerdings war ein hoher Wert zu erwarten, da der KMS nicht im Hinblick auf den Einsatz als Sensor, sondern als Designstudie für den Nachweis der Miniaturisierbarkeit konzipiert war.



## 4.3 Numerische Optimierung des Kraft-Momenten-Sensors

Das in Abschnitt 4.1 hergeleitete Modell des faseroptischen Kraft-Momenten-Sensors soll in diesem Abschnitt in ein mathematisches Optimierungsproblem überführt werden. Hierzu müssen neben der Zielfunktion und dem Optimierungsvektor die Randbedingungen mathematisch gefasst werden.

### 4.3.1 Formulierung des Optimierungsproblems

Das Modell des Kraft-Momenten-Sensors verknüpft die Orientierung der Faser-Bragg-Gitter in der KMS Struktur mit den Sensorantworten. Aus den Sensorantworten unter Last lässt sich wie gezeigt, als Gütemaß die Konditionszahl  $c_o$  der Compliance-Matrix ableiten. Dieses Gütemaß wird für die Optimierung als Zielfunktion verwendet. Durch das Modell ist das Optimierungsproblem damit definiert durch

$$\min\{c_o(\mathbf{x})|\mathbf{x} \in R\}, \quad (4.7)$$

wobei  $\mathbf{x}$  den Optimierungsvektor darstellt,  $c_o$  die Konditionszahl und  $R$  die Randbedingungen sind. Der Optimierungsvektor wird definiert als

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{r}_1^T, \mathbf{I}_1^T, \mathbf{r}_2^T, \dots, \mathbf{r}_N^T, \mathbf{I}_N^T\}^T. \quad (4.8)$$

Hier stellt  $N$  die Anzahl der FBGs im Kraft-Momenten-Sensor dar. Der Optimierungsvektor fasst somit die Positionen der  $N$  Faser-Bragg-Gitter  $\mathbf{r}_i$  und deren Ausrichtung  $\mathbf{I}_i$  zusammen. Für einen minimalen KMS mit sechs FBGs ist das Optimierungsproblem damit 36-dimensional. Die Konditionszahl hängt vom Optimierungsvektor über

$$c_o = \text{cond}(C_N(\mathbf{x})) = \text{cond}(N_v^{-1} \cdot C(\mathbf{x}) \cdot N_f) \quad (4.9)$$

ab, wobei die Größen in Abschnitt 2.5 eingeführt wurden. Der Zusammenhang zwischen Optimierungsvektor  $\mathbf{x}$  und Compliance-Matrix  $C(\mathbf{x})$  ist durch das Modell gegeben. Als Steifigkeitselement, dargestellt durch die Steifigkeitsmatrix  $K$  wurde ein Hohlzylinder verwendet. Die Einträge der Steifigkeitsmatrix wurden zum einen mittels eines analytischen Modells, zum anderen mittels Finite-Elemente-Simulation berechnet und in die numerische Optimierung eingefügt. Für die Durchführung einer numerischen Optimierung bedarf es nun nurmehr der Formulierung geeigneter Randbedingungen.

### 4.3.2 Randbedingungen

Unter dem Begriff Randbedingungen werden alle auf den Optimierungsvektor einschränkend wirkenden Bedingungen zusammengefasst. Hierzu zählen zum einen das verallgemeinerte Volumen, in dem sich der Optimierungsvektor befinden muss. Dieses Volumen wird durch weitere Randbedingungen, wie beispielsweise der Maßgabe, dass sich zwei Fasersensoren nicht durchdringen dürfen, zusätzlich eingeschränkt, so dass eine Hyperfläche erlaubter Optimierungsvektoren entsteht, auf der das Optimum gesucht wird. Im Folgenden werden die verwendeten Randbedingungen mit deren mathematischer Formulierung aufgeführt.

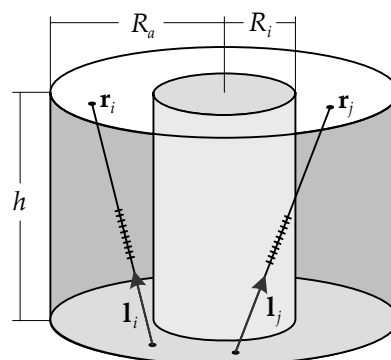
#### Zielvolumen

Das Designziel, einen KMS mit bestimmtem Volumen zu erhalten, erfordert die mathematische Definition dieses Volumens. Nach dem Modell wird das  $i$ -te FBG als eine Linie der Länge  $l_i$  betrachtet. Der Ausgangspunkt dieser Linie an der oberen KMS Platte ist mit

$$\mathbf{r}_{a,i} = \mathbf{r}_i \quad (4.10)$$

gegeben. Aus dem Richtungsvektor  $\mathbf{l}_i$  und der Länge ergibt sich der Endpunkt  $\mathbf{r}_{e,i}$  des FBGs zu

$$\mathbf{r}_{e,i} = l_i \cdot \mathbf{l}_i + \mathbf{r}_i. \quad (4.11)$$



**Abbildung 4.10:** Volumenrandbedingung durch zwei Zylinder mit Aussendurchmesser  $R_a$  und Innendurchmesser  $R_i$ . Die Höhe der Zylinder ist  $h$ . In diesem Volumen müssen sich sowohl der Faserendpunkt als auch der Faseranfangspunkt der FBGs befinden.

Für diesen Entwurf wird ein zylinderförmiges Zielvolumen vorgegeben. Zudem muss für das Steifigkeitselement ein Volumen vorgesehen sein, das von den FBGs nicht durchdrungen wird. Dieses Volumen wird ebenfalls als Zylinder vorgegeben. Somit ergeben sich für das erlaubte Volumen des Optimierungsvektors wie in Abbildung 4.10 gezeigt die Gleichungen für die einzelnen Komponenten der Vektoren  $\mathbf{r}_{a,i}$  und  $\mathbf{r}_{e,i}$

$$R_i \leq |x_{a/e,i}| \leq R_a \quad (4.12)$$

$$R_i \leq |y_{a/e,i}| \leq R_a \quad (4.13)$$

$$z_{a,i} \geq h. \quad (4.14)$$

### Berührung der FBG-Sensoren

Um eine Durchdringung der FBG-Sensoren in der optimierten Struktur zu verhindern, wird der Minimalabstand der Linien die die FBGs darstellen, berechnet. Dieser Abstand muss größer sein als der Durchmesser der FBGs, um eine Berührung zu verhindern. Der Minimalabstand  $d_{ij,\min}$  ergibt sich aus der Bedingung

$$d_{ij,\min} = \min\{|\mathbf{r}_i + l_i \mathbf{l}_i \cdot t_i - (\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_j l_j \cdot t_j)|\}, \quad (4.15)$$

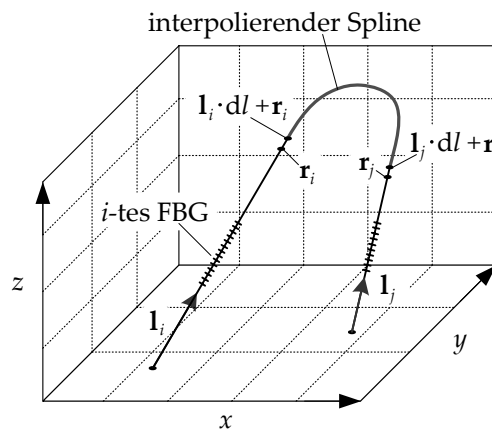
wobei  $t_i$  und  $t_j$  die Kurvenparameter des  $i$ -ten bzw.  $j$ -ten Sensors sind. Da die Fasern einen sehr geringen Durchmesser von typischerweise 200  $\mu\text{m}$  aufweisen, kann diese Bedingung für die Optimierung allerdings auch vernachlässigt werden. Dadurch entsteht im Allgemeinen eine Struktur, in der sich die Fasern berühren. Durch ein nachträgliches Versetzen der Fasern um einen Faserdurchmesser relativ zueinander werden die Eigenschaften des KMS nur unmerklich beeinflusst. Für Fasern mit dickerer Faserhülle oder einem größeren Durchmesser ist diese Randbedingung allerdings unabdingbar.

### Verbindung der einzelnen FBGs

Mit den bisher formulierten Randbedingungen wird eine Struktur erzeugt, die die Notwendigkeit der Verbindung der einzelnen FBGs zu einer einzigen Sensorfaser nicht berücksichtigt. Das kann dazu führen, dass FBG Anfangspunkte  $\mathbf{r}_{i/j}$  so nahe zusammen liegen, dass sie unter Berücksichtigung eines minimalen Biegeradius nicht verbunden werden können. Es muss daher eine Randbedingung aufgenommen werden, die sicherstellt, dass die FBG-Sensoren geeignet untereinander verbunden werden können. Die Verbindung der FBGs

folgt einer Kurve. Es gibt eine nicht abzählbare Anzahl an möglichen Verbindungskurven zweier fest orientierter Faser-Bragg-Gitter, von denen wiederum unendlich viele Kurven die Verbindungsaufgabe gleichwertig erfüllen. Das erschwert die Auswahl einer Kurve im Sinne eines Optimalitätskriteriums. Es ist daher notwendig, die mögliche Anzahl an Kurven einzuschränken.

Die Anforderungen, die die Kurve erfüllen muss, sind die Einhaltung des minimalen Biegeradiuses sowie ein möglichst geringer Volumenbedarf. Als Ansatz wurden daher kubische Splines verwendet. Diese setzen die Ableitungen stetig fort, somit entstehen keine Knickstellen in der Kurve. Zudem folgt der kubische Spline näherungsweise der Biegelinie eines schwach gebogenen Balkens und stellt damit auch eine gewisse Approximation der Biegelinie der Faser dar [169].



**Abbildung 4.11:** Verbindung zweier FBG-Sensoren durch eine interpolierende Splinefunktion. Die Endpunkte eines FBG Paares dienen als Anfangspunkt. Aus zwei Hilfspunkten, die die Richtung der FBGs fortsetzen, wird die notwendige Ableitung als Randbedingung der Splines berechnet.

Um aus der Kurve Randbedingungen zu erzeugen muss das Verfahren zu deren Konstruktion sowie die Randbedingung des minimalen Biegeradius mathematisch formuliert werden. Für die Berechnung der kubischen Splines in drei Raumdimensionen werden der Spline-Interpolationsfunktion die Endpunkte zweier die FBGs repräsentierenden Linien übergeben. Um die Ableitung festzulegen, werden diese Linien jeweils um ein "differentiell" kleines Stück  $dl$  entlang der Faserausrichtung  $l_i$  fortgesetzt, wie in Abbildung 4.11 dargestellt. Da das Faser-Bragg-Gitter nicht gekrümmt sein soll, muss die Faser bereits im Einspannpunkt  $r_i$  gerade verlaufen. Dies gelingt, in dem von der interpolierenden Kurve an der Stelle des FBG Endpunkts die Krümmungsfreiheit gefordert

wird.

Implementieren lässt sich dies leicht durch die Hinzunahme eines dritten Punkts als Fortsetzung der FBG Linie mit Abstand  $2 dl$ . Die zu interpolierenden Punkte  $P$  sind damit

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{r}_i, \mathbf{l}_i \cdot dl + \mathbf{r}_i, \mathbf{l}_i \cdot 2 dl + \mathbf{r}_i, \mathbf{l}_j \cdot 2 dl + \mathbf{r}_j, \mathbf{l}_j \cdot dl + \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j\}. \quad (4.16)$$

Der Streckenparameter  $t$ , über den es zu interpolieren gilt, wird aus dem Abstand des Anfangspunkts des ersten FBGs und dem zweiten FBG

$$0 \leq t \leq |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \quad (4.17)$$

gebildet. Die interpolierende Kurve  $\mathbf{r}_k(t)$  ergibt sich dann Komponentenweise zu

$$x_k(t) = S(P_x(t), t) \quad (4.18)$$

$$y_k(t) = S(P_y(t), t) \quad (4.19)$$

$$z_k(t) = S(P_z(t), t), \quad (4.20)$$

wobei  $S$  die Spline-Interpolationsfunktion darstellt.

Aus dem abgeleiteten Kurvenverlauf muss die Krümmung berechnet werden, um eine Krümmungsrandbedingung zu formulieren. Dazu muss zunächst der Streckenparameter  $s$  bestimmt werden, da der Kurvenparameter  $t$  kein Längenmaß besitzt. Den Streckenparameter gewinnt man aus dem Kurvenparameter und den Kurvenkoordinaten  $x_k(t)$ ,  $y_k(t)$  und  $z_k(t)$  mittels [90]

$$s(t) = \int_0^{t_{\max}} \sqrt{\dot{x}_k^2(t) + \dot{y}_k^2(t) + \dot{z}_k^2(t)} dt. \quad (4.21)$$

Danach ergibt sich für die Krümmung  $K(t)$  der Kurve am Punkt des Kurvenparameters  $t$

$$K(t) = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}_k(t)}{ds^2} \right| \quad (4.22)$$

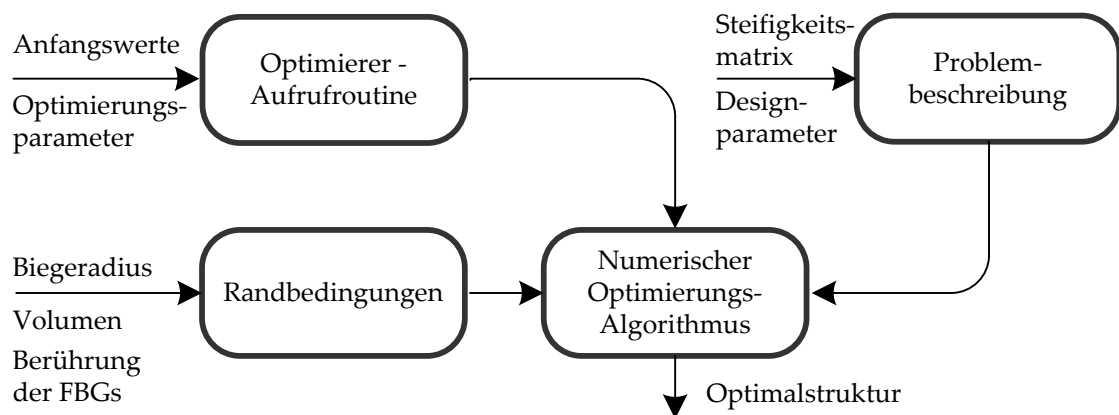
und als Krümmungsrandbedingung

$$d_m \leq 2 \cdot \min \left( \frac{1}{K(t)} \right), \quad (4.23)$$

mit  $d_m$  als minimaler Faserbiegung. Dieses Verfahren kann demnach verwendet werden, um sichzustellen, dass die Enden der Faser-Bragg-Gitter mit einer Kurve verbunden werden können, die den minimalen Biegedurchmesser einhält. Für die numerische Optimierung müssen hierzu lediglich Paare von Endpunkten von FBG-Sensoren definiert werden, die zusammenhängen. Da die FBG-Sensoren zunächst nicht unterscheidbar sind, ergibt sich durch diese Reihenfolge keine zusätzliche Einschränkung.

### 4.3.3 Lösung des Optimierungsproblems

Eine analytische Lösung der Optimierungsaufgabe ist aufgrund der hohen Anzahl an Freiheitsgraden nahezu ausgeschlossen. Für einen numerischen Optimierungsalgorithmus stellen die Anzahl an Freiheitsgraden ein Problem kleineren bis mittleren Grades dar [170] und können daher einfach auf einem Personalcomputer gelöst werden. Dazu muss das Problem in verschiedene Funktionsblöcke zerlegt werden. Die wesentlichen Blöcke sind in Abbildung 4.12 dargestellt. Der Kern der Optimierung ist die Funktion "fmincon", die im Pro-



**Abbildung 4.12:** Schema des Programms zur numerischen Lösung des Optimierungsproblems. Ein numerischer Optimierungsalgorithmus übernimmt die Randbedingungen und die Problembeschreibung und liefert den Optimierungsvektor und damit die Optimalstruktur.

gramm "Matlab" von Mathworks [171] bereit gestellt wird. Diese Funktion implementiert eine numerische Minimumsuche in einer nichtlinearen skalaren Funktion mit Vektoren als Argument und entsprechenden linearen und nichtlinearen Randbedingungen. Der Funktion wird die Problembeschreibung wie in den vorhergehenden Abschnitten beschrieben in Form einer Funktion übergeben. Diese Funktion übernimmt den Optimierungsvektor und liefert als Re-

sultat die zugehörige Konditionszahl. Zudem werden die Randbedingungen in Form von  $n$  Gleichungen bzw. Ungleichungen in einer Randbedingungsfunktion übergeben. Diese übernimmt den Optimierungsvektor und übergibt als Resultat die Lösung der Randbedingungsgleichungen bei diesem Optimierungsvektor.

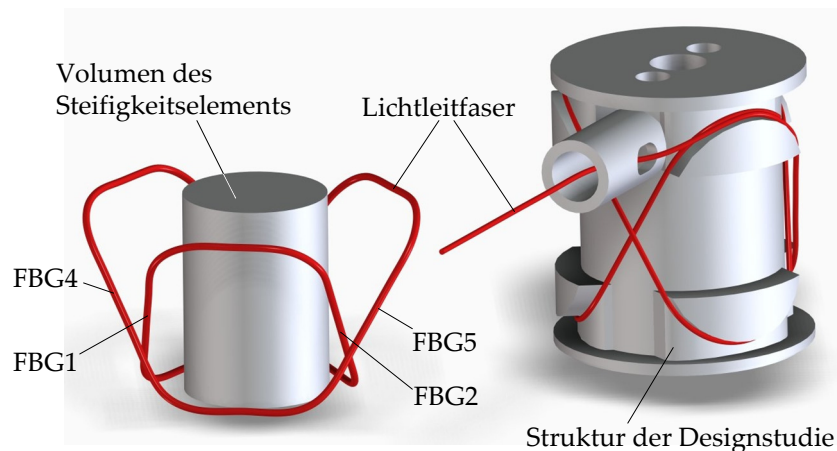
Der Optimierer wird von einer Aufrufroutine gestartet, die geeignete Anfangsbedingungen für die Minimumsuche bereitstellt. Als Anfangsbedingungen werden in dieser Arbeit zufällige Einträge des Optimierungsvektors verwendet, die die Randbedingungen erfüllen. Durch die zufällige Generierung der Anfangswerte ergeben sich bei mehrmaligem Durchlauf des Optimierungsprogramms im Allgemeinen unterschiedliche Lösungen, die beispielsweise lokale Minima darstellen. Läuft die Optimierungsroutine bei vielen zufälligen Anfangsbedingungen gegen die selbe Lösung, so ist die Wahrscheinlichkeit, ein globales Minimum zu erhalten, höher.

## 4.4 Ergebnisse

Das vorgestellte Entwurfsverfahren deckt eine breite Anwendungspalette der Kraft-Momenten-Sensorik ab. So kann das Zielvolumen des Entwurfs derart angepasst werden, dass zum einen sehr steife Sensoren für Anwendungen mit großen Kräften und Drehmomenten möglich sind. Zum anderen kann das Zielvolumen klein gewählt werden, um miniaturisierte KMS zu erstellen. Hierbei tritt jedoch die Limitierung der Faserbiegeradien auf. Für sehr kleine Optimierungsvolumen (z.B. ein Würfel mit Kantenlänge 2 mm) wird die Biegegradenbedingung nurmehr mit sehr hohen Konditionszahlen erfüllt. Praktisch können diese Sensoren nicht für die Rekonstruktion eines Lastzustandes eingesetzt werden.

Als Beispiel der Implementierung eines KMS mittels des vorgestellten numerischen Entwurfsverfahrens wurde ein zylinderförmiges Zielvolumen mit einem Durchmesser von 15 mm und einer Höhe von 10 mm verwendet. Das Steifigkeitselement bildet ein Hohlzylinder. Abhängig vom Verhältnis des Aussen- zu Innendurchmessers bzw. dessen Höhe und dem verwendeten Material kann die Steifigkeitsmatrix in einem relativ weiten Bereich eingestellt werden. Die Steifigkeitsmatrix dieses Hohlzylinders wurde zum einen analytisch untersucht, zum anderen mittels der FE-Methode simuliert. Zur Erhöhung der Emp-

findlichkeit des KMS werden in den Zylinder auf halber Höhe in radialer Richtung Bohrungen angebracht. Diese senken die Steifigkeit und können als Freiheitsgrad für deren Einstellung verwendet werden. Der Entwurf des Steifigkeitselements ist, wie bereits angesprochen, ebenfalls für eine Optimierung zugänglich. Diese kann in den vorgestellten Ansatz nahtlos eingebunden werden. Für die dafür benötigte Strukturoptimierung bestehen zahlreiche Methoden und Ansätze, vergleiche hierzu [172]. Diese wurden in dieser Arbeit jedoch nicht implementiert, da sie deren Rahmen überstiegen hätten.

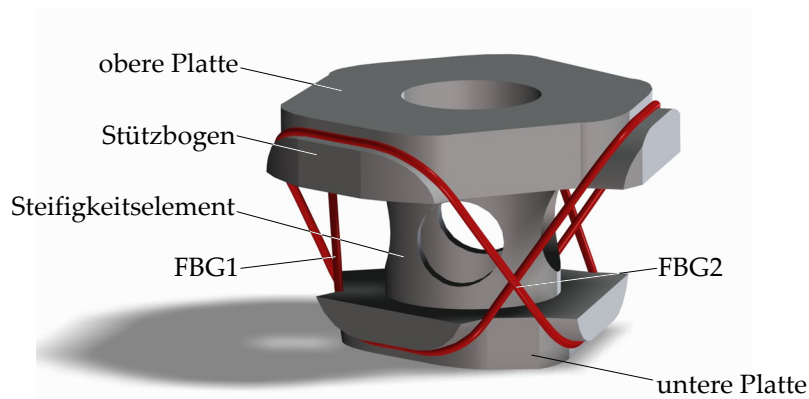


**Abbildung 4.13:** Vergleich des von der vorgestellten Optimierungsroutine ermittelten Faserverlaufes mit dem Verlauf der Designstudie. Es bestehen große Ähnlichkeiten zwischen dem rein intuitiv erstellten, mit dem numerisch berechneten Verlauf der Lichtleitfaser. Im Detail bestehen jedoch Unterschiede, so beispielsweise bei der Neigung der Faser vom Steifigkeitselement radial nach aussen. Eine solche Neigung ist in der Designstudie nicht bedacht worden und wurde erst vom numerischen Verfahren "gefunden".

Das Ergebnis des angegebenen Verfahrens zeigt Abbildung 4.13. Links zu sehen ist die vom Optimierer erzeugte Faserführung, die den Bereich des Steifigkeitselements, im Bild dargestellt durch einen grauen Zylinder, ausspart. Zum Vergleich ist rechts die vorab erzeugte Struktur der Designstudie mit Faserführung dargestellt. Bemerkenswert ist die relative Ähnlichkeit der beiden Faserverläufe. Ins Besondere, wenn man sich bewusst macht, dass dem numerischen Entwurfsverfahren die genaue Geometrie der Faserführung frei zur Ausgestaltung überlassen ist. Im Detail bestehen jedoch noch Unterschiede, die von Bedeutung für das Erreichen kleiner Konditionszahlen sind. Der wichtigste Unterschied beider Strukturen ist das Auftreten einer anteiligen Neigung der FBG-Sensoren, radial vom Steifigkeitselement nach Außen. In



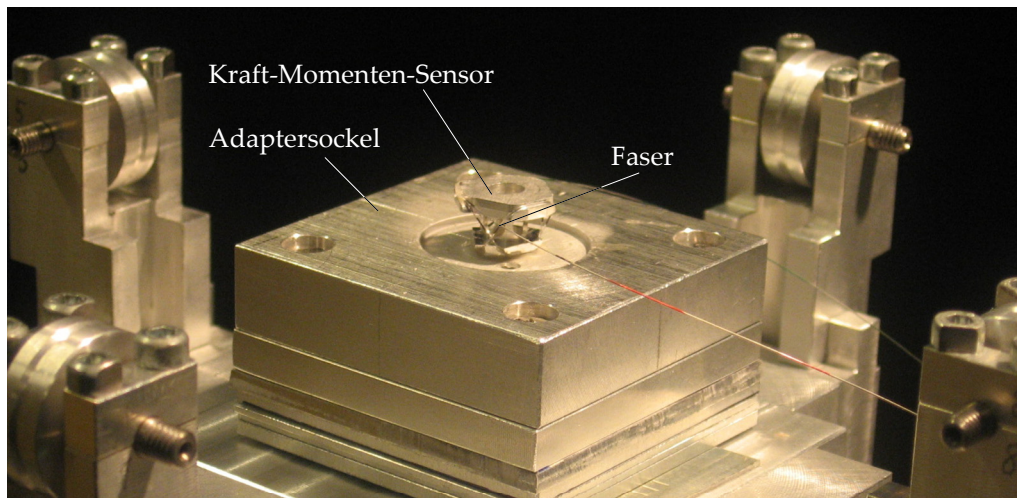
der Designstudie verlaufen die FBG-Sensoren ohne eine derartige Neigung. Ein Freiheitsgrad, der bei der intuitiv angefertigten Designstudie nicht mit berücksichtigt wurde.



**Abbildung 4.14:** Ergebnis des optimierergestützten CAD Entwurfs des Kraft-Momenten-Sensors. Das Designprinzip, bestehend aus einer oberen und einer unteren steifen Platte sowie einem frei gestaltbaren Steifigkeitselement ist geblieben. Das Steifigkeitselement wurde hier als Zylinder mit Bohrungen zur Steigerung der Empfindlichkeit ausgelegt. Die Lichtleitfaser ist rot markiert. Ihr Verlauf ist durch den Optimierungsalgorithmus vorgegeben worden.

Die Ergebnisse der Berechnung des Faserverlaufs werden in ein 3D-CAD Programm importiert und dort zur abschließenden Erstellung der KMS Wandlerstruktur verwendet. Hierzu wird das Steifigkeitselement mit seiner realen Ausgestaltungsform eingefügt und die Stützbögen unter den Faserbiegungen angebracht. Das Resultat ist in Abbildung 4.14 dargestellt. In der Mitte ist das Hohlzylinder-Steifigkeitselement mit Bohrungen zu sehen. An diesen Zylinder sind oben und unten die beiden durch ihre Dicke von 2,5 mm sehr steifen Platten angebracht. Diese Platten sind verbunden mit den Stützbögen, auf der die Lichtleitfaser unter Vorspannung gehalten wird. Frei gespannt zwischen den oberen und unteren Stützbögen befinden sich im geraden Teil der Faser die Faser-Bragg-Gitter-Sensoren. Die Struktur ist nicht vollständig symmetrisch um die Zylinderachse, weist jedoch eine "gewisse" Symmetrie um diese Achse auf. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Fasern sich kreuzen müssen und dadurch der Versatz von einem Faserdurchmesser berücksichtigt werden muss. Diese Abweichung von einer wirklichen Symmetrie ist jedoch gering. Zudem ist die Symmetrie rein für die intuitive Interpretation der Messergebnisse relevant und hat auf den Wert der Konditionszahl keinen direkten

Einfluss.

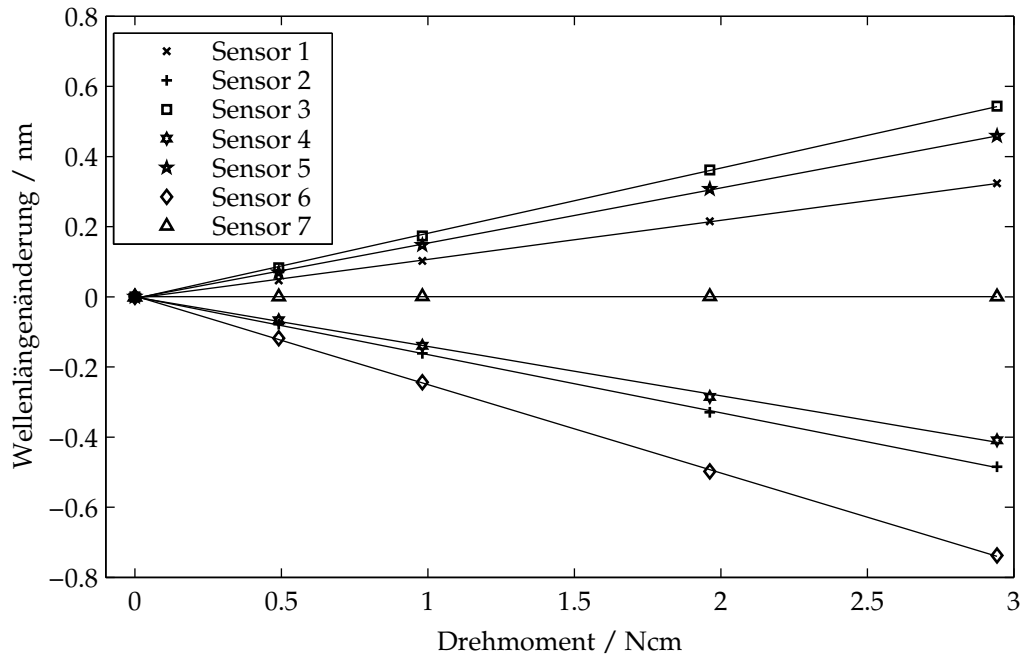


**Abbildung 4.15:** Aufnahme des KMS-Prüfstands mit auf dem Adaptersockel befestigtem, optimiertem Kraft-Momenten-Sensor. Der KMS besitzt sieben FBG-Sensoren, um eine Temperaturkompensation zu ermöglichen.

Die Wandlerstruktur des KMS wurde entsprechend dem in Abbildung 4.14 in Aluminium gefertigt. Zur Bestimmung der Konditionszahl des implementierten Sensors wurden dazu analog zum Vorgehen bei der Designstudie der mit FBG-Sensoren instrumentierte KMS in den Prüfstand eingebracht. Abbildung 4.15 zeigt den optimierten KMS vor der Anbringung des Marionettenkreuzes.

Die Lastgrenzen für die Belastung des KMS ergaben sich aus dem Auftreten eines Überlapps der spektralen Reflexionscharakteristiken der FBG-Sensoren. Die Normalisierungsmatrix der Last ergab sich damit zu  $N_f = \{8 \text{ N}, 8 \text{ N}, 48 \text{ N}, 2 \text{ Ncm}, 2 \text{ Ncm}, 1 \text{ Ncm}\}$ . Aufgrund der "Nahezu"-Symmetrie um die z-Achse des KMS sind die Maximallasten für die Kräfte  $F_x$ ,  $F_y$  sowie  $M_x$  und  $M_y$  gleich. Die Empfindlichkeit in z-Richtung unterscheidet sich bedingt durch die Wahl des Steifigkeitselements. Abbildung 4.16 zeigt beispielhaft die Ergebnisse der Messung für eine steigende Last  $M_z$ . Die durchgezogenen Linien stellen wieder Regressionsgeraden der Messdaten dar. Im Vergleich mit den Geraden fällt die hervorragende Linearität des Sensors auf. Die angepassten Geraden gehen durch den Ursprung. Alle Messdaten liegen sehr gut auf den Geraden.

Dieses Ergebnis bestätigt die Vermutung, dass das nichtlineare Verhalten der Designstudie auf das Rapid-Prototyping Material Accura 60 zurückzuführen



**Abbildung 4.16:** Messergebnisse des optimierten KMS beispielhaft für den Lastfall  $M_z$ . Die FBG Antworten teilen sich in drei Gruppen ein. Die erste Gruppe zeigt eine positive Wellenlängenveränderung, die Zweite eine negative. Die dritte Gruppe, zu der das Temperaturkompensations-FBG gehört, bleibt bei angreifender Last konstant.

ist. Des Weiteren weist die Messung einen siebten FBG-Sensor auf. Dieser siebte Sensor wurde in das FBG-Array mit aufgenommen und sitzt 12,5 mm hinter dem sechsten Sensor. Mechanisch ist dieser jedoch nicht in die Wandlerstruktur eingespannt und somit von den Lasten entkoppelt. Dies ist deutlich am Ausbleiben einer Wellenlängenverschiebung unter Last zu sehen. Durch die Nähe zum KMS erlaubt dieses zusätzliche FBG allerdings die Temperaturkompensation. Erhöht sich die Temperatur des KMS, so dehnt sich die Wandlerstruktur. Des Weiteren wird durch den thermo-optischen Effekt die Brechzahl der FBGs verändert, was ebenso zu einer Wellenlängenverschiebung führt. Diese Einflüsse können durch einen derartigen siebten FBG-Sensor herauskalibriert werden. Betrachtet man die Empfindlichkeit der FBGs, also deren Steigung in Abbildung 4.16, so erkennt man zwei Gruppen (der Temperatursensor - Sensor 7 - sei ausgenommen). Die eine Gruppe mit positiver Steigung besitzt eine ungerade Sensornummer. Die andere Gruppe, mit negativer Steigung, eine gerade Nummer. Die Gruppierung ergibt sich aufgrund der Ausrichtung

der FBGs im KMS. Da das Drehmoment  $M_z$  axial zur Symmetrieachse wirkt und die FBG-Sensoren abwechselnd orientiert zu dieser Achse in den KMS eingebracht sind entstehen diese beiden Gruppen. Es fällt jedoch auf, dass die beiden Gruppen eine abweichende Steigung zeigen. Für diesen Effekt können ähnliche Argumente herangezogen werden, wie sie bereits bei der Erörterung der Designstudie gebraucht wurden. Zum einen konnte während der Einbringung der Faser in die Wandlerstruktur festgestellt werden, dass die Vorspannung aller FBG-Sensoren nicht gleichmäßig ist. Die Vorspannung lässt sich dabei leicht aus der spektralen Antwort der FBGs vor bzw. nach dem Einbringen in die Wandlerstruktur berechnen. Diese fehlende Vorspannung führt zu einer leichten Krümmung der Faser im Bereich der FBGs, die dadurch eine unterschiedliche Empfindlichkeit erhalten.

Ein weiterer Grund liegt im Prüfstand. Werden durch den Prüfstand nicht vollständig orthogonale Lastzustände erzeugt so führt dies zu einem Übersprechen. Die Orthogonalität der erzeugten Lastzustände hängt in entscheidendem Maße von der Montierung des KMS in die Symmetrieachse des Prüfstandes ab. Hierbei kann ein Versatz von einigen hundert Mikrometern durchaus auftreten. All diese genannten Einflüsse haben zur Folge, dass die ermittelte Konditionszahl des KMS künstlich erhöht wird.

Die Konditionszahl, die aus den Messungen gewonnen wurde beträgt 8,5 und liegt in einem Bereich, der eine Anwendung des Sensors sehr wohl zulässt. Aus dem Entwurfsprozess wurde eine theoretische Konditionszahl von 4,5 für diesen Entwurf abgeleitet. Somit besteht zwischen der theoretischen und der experimentell bestimmten Konditionszahl eine gewisse Diskrepanz. Diese lässt sich durch die angeführten Argumente verstehen. Die experimentell ermittelte Konditionszahl liegt deutlich unter der in der Designstudie ermittelten von 28,9 und weist die Vorteile des numerischen Entwurfs aus.



# Kapitel 5

## Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Untersuchungen zu Kraft-Momenten-Sensoren auf Basis von Faser-Bragg-Gittern durchgeführt. Durch die Erkenntnisse der Arbeit konnte ein Entwurfsverfahren angegeben werden, welches es ermöglicht, den Entwurf eines FBG-KMS automatisiert mittels eines numerischen Optimierungsverfahrens zu erzeugen.

Im Zuge der Untersuchung zu Eigenschaften von Faser-Bragg-Gitter-Sensoren im Hinblick auf die Anwendung in Kraft-Momenten-Sensoren konnte die bestehende Zwei-Moden-Betrachtung erweitert werden. Hierzu wurde eine viermoden-Beschreibung der FBG-Sensoren eingeführt, die erstmals die vollständige Behandlung der Reflexions-Transmissionseigenschaften dieser Sensoren unter beliebigen Belastungen ermöglicht. Insbesondere werden durch diese Theorie die Schubverformungseinflüsse auf die spektrale Antwort der FBG-Sensoren beschrieben. Es konnte gezeigt werden, dass diese Schubverformungen zu einer Deformation des Faser-Bragg-Gitter-Spektrums führt, welches das abgeleitete Messsignal dieser Sensoren beeinflusst. Es ist daher notwendig bei der Planung von FBG-Applikationen, wie im Falle des FBG-KMS, die Einflüsse von Schubverformungen zu berücksichtigen, um genaue Vorhersagen über die Sensorantworten zu erhalten.

Zudem konnte für die numerisch effizientere Behandlung dieser Theorie eine Formulierung im Rahmen der Transfermatrix-Methode angegeben werden. Diese kann sehr effizient numerisch implementiert werden und erlaubt es die Simulationszeiten zu verkürzen. Neben den theoretischen Untersuchungen wurden experimentelle Daten zu relevanten Parametern, wie Biegeverlusten der verwendeten Fasertypen sowie der biegeradiusabhängigen Lebensdauer der Fasern durchgeführt.

Hieraus konnten Designrichtlinien für den Entwurf der Kraft-Momenten-Sensoren auf Basis von FBGs abgeleitet werden, die in das numerische Entwurfsverfahren Eingang fanden. Zur Überprüfung der Anwendbarkeit der Designrichtlinien wurde eine Designstudie eines Kraft-Momenten-Sensors auf Basis eines Rapid-Prototyping gefertigten Entwurfs durchgeführt. Es konnte gezeigt werden, dass die Voraussetzungen die das Entwurfsverfahren an die Faser stellt, erfüllbar sind. Zudem wurde die Eignung der Designstudie als KMS in einem Prüfstand untersucht und nachgewiesen, dass eine prinzipielle Eignung besteht. Die Konditionszahl der KMS-Designstudie lag allerdings bei relativ hohen Werten.

Um die Konditionszahl zu senken, wurde eine Design mittels des numerischen Entwurfsverfahrens durchgeführt und mittels zerspanender Herstellungsverfahren in Aluminium gefertigt. Durch die Verwendung eines Metalles im Vergleich zum Rapid-Prototyping-Werkstoff konnte die Linearität des Sensors deutlich erhöht werden. Zudem konnte die Konditionszahl des KMS auf einen akzeptablen Wert gesenkt werden, der eine Anwendung dieses KMS ermöglicht. Zudem gelang durch die Implementierung des numerisch erstellten Entwurfs der Nachweis der Anwendbarkeit des abgeleiteten Entwurfsverfahrens. Die Größenanforderungen der minimalinvasiven robotergestützten Chirurgie konnten durch den Entwurf erfüllt werden. Das Verfahren liefert zudem Entwürfe in Form von numerischen Lösungen für KMS, deren Abmessungen noch deutlich unter denen des implementierten Sensors liegen.

Die abgeleiteten Miniaturisierungsgrenzen, die durch die Reduzierung der Lebensdauer der Fasern bei starker Biegung gegeben sind, sind ebenfalls in dem Modell enthalten. Es kann dadurch ein Entwurfsproblem in Form eines zu erfüllenden Zielvolumens an das Entwurfsverfahren übergeben werden, ohne vorhergehende oder nachgeschaltete Untersuchungen zur Zulässigkeit der erhaltenden Faserführung. Werden Zielvolumen vorgegeben, die zu geringe Abmessungen aufweisen, werden zunächst die möglichen Konditionszahlen des Designs ansteigen. Bei einer weiteren Reduzierung des Zielvolumens wird durch die numerische Optimierungsroutine keine Lösung mehr gefunden. Somit wird dem Entwickler die Beschäftigung mit den Lebensdauereigenschaften der Faser abgenommen.

Durch die breite Anwendbarkeit des Verfahrens auf KMS mit nahezu beliebigen räumlichen Randbedingungen ermöglicht das entwickelte Entwurfs-

verfahren zudem die Behandlung verschiedenartiger Problemstellungen. Zum einen können durch das Verfahren minimale KMS mit einer FBG-Anzahl gleich der Anzahl der Freiheitsgrade entworfen werden. Zum anderen können redundante KMS mit einer größeren Anzahl an FBG-Sensoren als Freiheitsgrade entworfen werden. Somit können die gesteckten Ziele dieser Arbeit als erfüllt angesehen werden.

Eine Fortsetzung der vorgestellten Arbeiten ist in der Applizierung eines durch das Entwurfsverfahren erstellten Sensors in einer Anwendung wie der minimalinvasiven robotergestützten Chirurgie möglich. Hierbei werden Arbeiten zu Themen wie der Autoklavierbarkeit der verwendeten Komponenten (Klebstoffe, Faserstecker, etc.) zu untersuchen sein. Die verwendete Faser selbst sowie die eingebetteten FBG-Sensoren stellen aufgrund ihrer hohen thermischen und mechanischen Festigkeit prinzipiell keine einschränkenden Randbedingungen dar. Die Fertigung der entworfenen KMS ist mit der vorgestellten Technik effizient und wirtschaftlich möglich. Zusammen mit der zunehmenden Kommerzialisierung der FBG-Sensoren und deren stetigem Preisverfall ist somit die Grundlage geschaffen, auch Anwendungsbereiche zu erschließen, die derzeit von Kraft-Momenten-Sensoren auf Basis von "konventioneller" Sensorik besetzt sind.





# Anhang A

## Eigene Veröffentlichungen

### Zeitschriftenbeiträge

1. M. S. Müller, H. J. El-Khozondar, T. C. Buck, A. W. Koch. Analytical Solution of Four-Mode Coupling in Shear Strain Loaded Fiber-Bragg-Grating Sensors. *Optics Letters* 34 (17), 2009, pp. 1-3.
2. M. S. Müller, T. C. Buck, H. J. El-Khozondar, A. W. Koch. Shear-Strain Influence on Fiber Bragg Grating Measurement Systems, *Journal of Lightwave Technology* 27(24), 2009, pp. 1-7.
3. H. J. El-Khozondar, R. J. El-Khozondar, M. S. Müller, M. M. Shabat, A. W. Koch. Sensitivity of TM Nonlinear Magneto-optical integrated optical Sensor, *Sensors and Actuators A*, submitted, 2009.
4. H. J. El-Khozondar, M. S. Müller, R. J. El-Khozondar, A. W. Koch. Polarization Rotation in Twisted Polarization Maintaining Fibers Using a Fixed Reference Frame, *Journal of Lightwave Technology*, submitted, 2009.
5. M. S. Müller, H. J. El-Khozondar, A. Bernardini, A. W. Koch. Transfer Matrix Approach to Four Mode Coupling in Fiber Bragg Gratings. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, accepted for publication, 2009.
6. M. S. Müller, L. Hoffmann, A. Sandmair, A. W. Koch. Full strain tensor treatment of fiber Bragg grating sensors. *IEEE Journal of Quantum Electronics* 45, pp. 547-553, 2009.
7. M. S. Müller, L. Hoffmann, T. Bodendorfer, F. Hirth, F. Petit, M. P. Plattner, T. C. Buck, A. W. Koch. Fiber Bragg Grating Interrogation based on mo-

- nolithic tunable laser diode. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, accepted for publication, 2009.
8. M. S. Müller, L. Hoffmann, T. C. Buck, A. W. Koch. Fiber Bragg Grating Based Force-Torque Sensor with Six Degrees of Freedom. International Journal of Optomechatronics 3(3), 2009, pp. 1-14.
  9. U. C. Müller, T. Zeh, M. S. Müller, A. W. Koch, H. Baier. Vibration and deformation control in optomechanical systems using distributed fiber optic bragg grating sensors. Journal of Vibration and Control, accepted for publication, 2008.
  10. L. Hoffmann, M. S. Müller, M. Somavilla, A. W. Koch. Wälzlagerüberwachung mit faseroptischer Sensorik. tm Technisches Messen 4, pp. 204-210, 2007.
  11. L. Hoffmann, M. S. Müller, S. Krämer, M. Giebel, G. Schwotzer, T. Wieduwilt. Applications of fibre optic temperature measurement. In Proceedings of the Estonian Academy of Sciences / Engineering 56(4), 2007.

#### **Konferenzbeiträge**

12. M. S. Müller, T. C. Buck, A. W. Koch. Polarisationsmodenkopplung in Faser-Bragg-Gitter-Sensoren, XXII. Messtechnisches Symposium des Arbeitskreises der Hochschullehrer für Messtechnik, (AHMT), Bremen, 2009.
13. M. S. Müller, T. C. Buck, A. W. Koch. Fiber Bragg Grating based Acceleration Sensor, International Symposium on Optomechatronic Technologies, Turkey, 2009.
14. T. Bodendorfer, M. S. Müller, A. W. Koch. Validation of different peak detection algorithms with regards to fiber bragg grating interrogation, International Symposium on Optomechatronic Technologies, Turkey, 2009.
15. H. J. El-Khozondar, M. S. Müller, T. C. Buck, A. W. Koch. Experimental Investigation of Polarization Rotation in Twisted Optical Fibers, International Symposium on Optomechatronic Technologies, Turkey, 2009.
16. T. C. Buck, M. S. Müller, M. Plattner, A. W. Koch. Performance analysis of interrogators for fiber-Bragg-grating sensors based on arrayed waveguide gratings, SPIE Conference on Optical Metrology, Munich, 2009.

17. M. S. Müller, T. C. Buck, H. J. El-Khozondar, A. W. Koch. Measurement Errors from Internal Shear Strain within Fiber-Bragg-Grating Sensors SPIE - Optical Metrology Symposium, Munich, 2009.
18. H. J. El-Khozondar, M. S. Müller, R. J. El-Khozondar , M. M. Shabat, A. W. Koch. Sensitivity of TE double-negative metamaterial optical sensor SPIE - Optical Metrology Symposium, Munich, 2009.
19. T. C. Buck, M. S. Müller, M. Plattner, A. W. Koch. Performance analysis of interrogators for Fiber Bragg Grating sensors based on arrayed waveguide gratings, SPIE - Optical Metrology Symposium, Munich, 2009.
20. M. P. Plattner, F. Hirth, M. S. Müller, L. Hoffmann, T. C. Buck, A. W. Koch. Optimizing performance of a fiber optic sensor interrogator by time of flight measurement, OPTO, 2009.
21. M. S. Müller, L. Hoffmann, T. C. Buck, A. W. Koch, Realization of a fiber-optic force-torque sensor with six degrees of freedom, International Symposium on Optomechatronic Technologies, San Diego, 2008.
22. M. P. Plattner, F. Hirth, M. S. Müller, L. Hoffman, T. C. Buck, A. W. Koch. Versatile Scanning Laser Based FBG Measurement System, Conference on Space Optics, 2008.
23. L. Hoffmann, F. Hirth, M. Rössner, R. Matschke, T. Bodendorfer, T. C. Buck, M. S. Müller, A. Reutlinger, A. W. Koch. Fiber-optic measurement system for temperature monitoring of telecommunication satellites ,Conference on Space Optics, 2008.
24. L. Hoffmann, M. S. Müller, A. Reutlinger, F. Hirth, T. Bodendorfer, T. Buck, A. W. Koch. Faseroptisches Temperatur-Monitoring von Telekom-Satelliten. Ludwigsburg: VDI Fachtagung Sensoren und Messsysteme, 2008.
25. L. Hoffmann, M. S. Müller, A. W. Koch. Fiber optic strain measurement for machine monitoring. Proceedings of SPIE, 6616, 2007.
26. M. S. Müller, L. Hoffmann, A. W. Koch. Performance of a fiber optic ring depolarizer in fiber sensing applications. Proceedings of SPIE, 6616, 2007.

27. M. S. Müller, L. Hoffmann, T. Lautenschlager, A. W. Koch. Soldering fiber Bragg grating sensors for strain measurement. OFS - Optical Fibre Sensors Conference 19, 7004, Perth, 2008.
28. U. C. Müller, T. Zeh, M. S. Müller, A. W. Koch, H. Baier. Vibration and deformation control in optomechanical systems using distributed fiber optic Bragg grating sensors. International Conference on Motion and Vibration Control 8, 2006.
29. A. Reutlinger, M. Glier, K. H. Zuknika, L. Hoffmann, M. S. Müller, S. Rapp, C. Kurvin, T. Ernst, I. McKenzie, N. Karafolas. Fiber optic sensing for telecommunication satellites. OFS - Optical Fibre Sensors Conference 19, 7004/224, Perth, 2008.
30. L. Hoffmann, M. S. Müller, U. C. Müller, T. Zeh, A. W. Koch, H. Baier. Hochfrequente spektrale Auswertung von Faser-Bragg-Gitter-Sensorsignalen zur dynamischen Strukturregelung. Jahrestagung der DGaO 107, 2006.
31. L. Hoffmann, M. S. Müller, A.W. Koch. Breitbandige Beleuchtungsquellen für Faser-Bragg-Gitter-Sensoren. Tagungsband zum XX. Messtechnischen Symposium des Arbeitskreises der Hochschullehrer für Messtechnik (AHMT) 20, 75-91, 2006.
32. M. S. Müller, P. de Marne, L. Hoffmann. NI USB 6009 in Research VIP 2006 - National Instruments Anwender- und Technologiekongress, 2006.
33. S. Krämer, B. Wiesent, M. S. Müller, F. Puente León, Y. M. Méndez Hernández. Fusion of a FBG-based health monitoring system for wind turbines with a fiber optic lightning detection system. In Proceedings of the 19th International Conference on Optical Fibre Sensors, SPIE, Perth, 2008.

#### **Patentanmeldungen**

34. M. S. Müller, L. Hoffmann, A. W. Koch, T. Lautenschlager. Kraft Momenten Sensor, European Patent Application, EP 07021502, 2007.
35. M. S. Müller, L. Hoffmann, B. Wiesent, A. W. Koch. Faseroptischer Drehwinkelsensor, DE 10 2008 035 996.3, 2008.

36. M. S. Müller, L. Hoffmann, A. W. Koch. Faseroptische Messvorrichtung und Messverfahren, DE 10 2009 013 795.5, 2009.
37. T. C. Buck, M. S. Müller, A. W. Koch. Vorrichtung zum Umsetzen eines optischen Eingangssignals in ein elektrisches Ausgangssignal und Verfahren zur Herstellung der Vorrichtung, Aktenzeichen nachzutragen, 2009.



# Anhang B

## Abkürzungsverzeichnis

CAD	Computer-Aided-Design
CME	Coupled-Mode-Equations
CMT	Coupled-Mode-Theory
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
DNS	Direct Numerical Solution
EMF	Enhanced Meta Format
EPS	Encapsulated Postscript
FBG	Faser-Bragg-Gitter
FEM	Finite-Elemente-Methode
FWHM	Full-Width Half Maximum
INTA	Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial
IPHT	Institut für Photonische Technologien
KMS	Kraft-Momenten-Sensor
MIRS	Minimalinvasive Robotergestützte Chirurgie
MTTF	Mean Time To Failure
PDF	Portable Document Format
PMF	Polarization Maintaining Fiber
UV	Ultraviolett





# Literaturverzeichnis

- [1] R. Paul, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control: the Computer Control of Robot Manipulators*. MIT Press, Cambridge, 1981.
- [2] G. Kim, H. Shin, and J. Yoon, "Development of 6-axis force/moment sensor for humanoid robot's foot," in *IEEE Sensors Conference*, 2007.
- [3] K. Hirai, M. Hirose, Y. Haikawa, and T. Takenaka, "The development of honda humanoid robot," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1998.
- [4] K. Löffler, M. Gienger, and F. Pfeiffer, "Sensor and control design of a dynamically stable bipod robot," in *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2003.
- [5] G.-S. Kim, "Development of a small 6-axis force/moment sensor for robot's fingers," *Measurement Science and Technology*, vol. 15, pp. 2233–2238, 2004.
- [6] A. Konno, Y. Tanida, K. Abe, and M. Uchiyama, "A platar h-slit force sensor for humanoid robots to detect the reaction forces," in *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005.
- [7] G. Hirzinger, A. Albu-Schäffer, M. Hähle, I. Schaefer, and N. Sporer, "On a new generation of torque controlled light-weight robots," in *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Seoul*, 2001.
- [8] X. Zhou, Q. Shi, and Z. Li, "Contact localization using force/torque measurements," in *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis*, 1996.

- [9] A. Bicchi, J. Salisbury, and D. L. Brock, "Contact sensing from force measurements," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 12, p. 249, 1993.
- [10] G.-S. Kim, "Development of a 6-axis robot's finger force/moment sensor for stable grasping of an unknown object," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, vol. 5, p. 54, 2004.
- [11] G. Morel, K. Iagnemma, and S. Dubowsky, "The precise control of manipulators with high joint-friction using base force/torque sensing," *Automatica*, vol. 36, pp. 931–941, 2000.
- [12] C.-G. Kang, "Maximum structural error propagation of multi-axis force sensors," *JSME International Journal Series C*, vol. 44, p. 676, 2001.
- [13] A. Bicchi, "A criterion for optimal design of multi-axis force sensors," *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, vol. 10, pp. 269–286, 1992.
- [14] M. Svinin and M. Uchiyama, "Optimal geometric structures of force/torque sensors," *International Journal of Robotics Research*, vol. 14, p. 560, 1995.
- [15] S. A. Lui and H. L. Tzo, "A novel six-component force sensor of good measurement isotropy and sensitivities," *Sensors and Actuators*, vol. 100, pp. 223–230, 2002.
- [16] G.-S. Kim, "The design of a six-component force/moment sensor and evaluation of its uncertainty," *Measurement Science and Technology*, vol. 12, pp. 1445–1455, 2001.
- [17] U. Hagn, R. Konietschke, A. Tobergte, M. Nickl, S. Jörg, B. Kuebler, G. Passig, M. Gröger, F. Fröhlich, U. Seibold, L. Le-Tien, A. Albu-Schäffer, A. Nothelfer, F. Hacker, M. Grebenstein, and G. Hirzinger, "Dlr mirosurge - a versatile system for research in endoscopic telesurgery," *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, in press.
- [18] T. Ortmaier, U. Seibold, U. Hagn, D. Bohm, H. Reichenspurner, and G. Hirzinger, "Autonomy and haptic feedback in minimally invasive robotic surgery," in *Proceedings of the International Society for Minimally Invasive Cardiac Surgery*, 2001.

- [19] P. Puangmali, K. Althoefer, L. D. Seneviratne, D. Murphy, and P. Dasgupta, "State-of-the-art in force and tactile sensing for minimally invasive surgery," *IEEE Sensors Journal*, vol. 8, pp. 371–381, 2008.
- [20] U. Seibold, B. Kübler, and G. Hirzinger, "Prototype of instrument for minimally invasive surgery with 6-axis force sensing capability," in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Barcelona*, 2005.
- [21] B. Kuebler, U. Seibold, and G. Hirzinger, "Development of actuated and sensor integrated forceps for minimally invasive robotic surgery," *International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery*, vol. 1, pp. 96–107, 2005.
- [22] C. Wagner, N. Stylopoulos, and R. Howe, "The role of force feedback in surgery: Analysis of blunt dissection," in *Proceedings of the 10th Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environments and Teleoperator Systems*, 2002.
- [23] D. Dao, T. Toriyama, J. Wells, and S. Sugiyama, "Micro force-moment sensor with six-degree of freedom," in *2001 International Symposium on Micromechatronics and Human Science*, 2001.
- [24] W. Jin and C. Mote, "Development of a six-component miniature force sensor using silicon micromachining and conventional machining technologies," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 47, p. 715, 1998.
- [25] D. Chapuis, R. Gassert, L. Sacher, E. Burdet, and H. Bleuler, "Design of a simple mri/fmri compatible force/torque sensor," in *Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Sendai*, 2004.
- [26] M. Tada and T. Kanade, "Design of an mr-compatible three-axis force sensor," in *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005.
- [27] A. Fernandez-Fernandez, F. Berghmans, B. Brichard, P. Borgermans, A. I. Gusarov, M. V. Uffelen, P. Mégret, M. Décréton, M. Blondel, and

- A. Delchambre, "Radiation-Resistant WDM Optical Link for Thermo-nuclear Fusion Reactor Instrumentation," *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 48, p. 1708, 2001.
- [28] J. Betten, *Kontinuumsmechanik*. Springer, 1993.
- [29] H. Hahn, *Elastizitätstheorie*. Teubner, 1985.
- [30] S. Timoshenko and J. Goodier, *Theory of Elasticity*. Engineering Societies Monographs, 1951.
- [31] R. Gafsi and M. El-Sherif, "Analysis of induced-birefringence effects on fiber bragg gratings," *Optical Fiber Technology*, vol. 6, p. 299, 2000.
- [32] C. Lawrence, D. Nelson, E. Udd, and T. Bennett, "A fiber optic sensor for transverse strain measurement," *Experimental Mechanics*, vol. 39, no. 3, p. 202, 1999.
- [33] T. Mawatari and D. Nelson, "A multi-parameter Bragg grating fiber optic sensor and triaxial strain measurement," *Smart Materials and Structures*, vol. 17, p. 19, 2008.
- [34] G. Gerlich, *Vektor- und Tensorrechnung für die Physik*. Vieweg, 1977.
- [35] W. Greiner, *Theoretische Physik Band 2*. Harri Deutsch, 1982.
- [36] S. Popov, Y. Svirko, and N. Zheludev, *Susceptibility Tensors for Nonlinear Optics*. Institute of Physics Publishing, 1995.
- [37] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 2005.
- [38] T. Narasimhamutry, *Photoelastic and Electro-Optic Properties of Crystals*. Plenum Press, 1981.
- [39] J. Nye, *Physical Properties of Crystals*. Oxford University Press, 1969.
- [40] E. Biebl, *Optische Übertragungstechnik*. Fachschaft Elektro- und Informationstechnik e.V., TU München, 2001.
- [41] M. Börner, R. Müller, R. Schiek, and G. Trommer, *Elemente der Integrierten Optik*. Teubner, 1990.

- [42] R. Dyott, *Elliptical Fiber Waveguides*. Artech House, 1995.
- [43] E. Neumann, *Single-Mode Fibers*. Springer, 1988.
- [44] D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. Academic Press, 1991.
- [45] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [46] D. Hondros and P. Debye, "Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten," *Annalen der Physik*, vol. 4, p. 464, 1910.
- [47] A. Ghatak, *Introduction to Fiber Optics*. Cambridge University Press, 1998.
- [48] M. Young, *Optik, Laser, Wellenleiter*. Springer, 1997.
- [49] A. Snyder and J. Love, *Optical waveguide theory*. Chapman and Hall, 1983.
- [50] E. Voges and K. Petermann, *Optische Kommunikationstechnik*. Springer, 2002.
- [51] R. Ulrich and A. Simon, "Polarization optics of twisted single-mode fibers," *Applied Optics*, vol. 18, p. 2241, 1979.
- [52] S. Rashleigh, W. Burns, R. Moeller, and R. Ulrich, "Polarization holding in birefringent single-mode fibers," *Optics Letters*, vol. 7, p. 40, 1982.
- [53] I. Kaminow, "Polarization in optical fibers," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 17, p. 15, 1981.
- [54] J. Noda, "Polarization-maintaining fibers and their applications," *Journal of Lightwave Technology*, vol. LT-4, pp. 1071–1089, 1986.
- [55] E. Hecht, *Optics*, 3rd ed. Oldenbourg, 2001.
- [56] J. Senior, *Optical Fiber Communications - Principles and Practice*, 2nd ed., ser. International Series in optoelectronics. Prentice Hall, 1992.
- [57] A. Barybin and V. Dmitriev, *Modern Electrodynamics and Coupled-Mode Theory*. Rinton Press, 2002.

- [58] H. Haus and W. Huang, "Coupled-mode theory," *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, p. 1505, 1991.
- [59] D. G. Hall, "SPIE milestone series," in *Selected Papers on Coupled-Mode Theory in Guided-Wave Optics*. SPIE Optical Engineering Press, 1993.
- [60] F. Pockels, *Lehrbuch der Kristalloptik*. Teubner, 1906.
- [61] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, 1910.
- [62] A. Bertholds and R. Dänkler, "Determination of the Individual Strain-Optic Coefficients in Single-Mode Optical Fibers," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 6, p. 17, 1988.
- [63] J. Calero, S.-P. Wu, C. Pope, S. Chuang, and J. Murtha, "Theory and experiments on birefringent optical fibers embedded in concrete structures," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 12, p. 1081, 1994.
- [64] M. Prabhugoud and K. Peters, "Finite element model for embedded fiber bragg grating sensor," *Smart Materials and Structures*, vol. 15, p. 550, 2006.
- [65] C. Tan and J. Arndt, "Temperature dependence of refractive index of glassy SiO<sub>2</sub> in the infrared wavelength range," *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, vol. 61, p. 1315, 2000.
- [66] A. Barlow and D. Payne, "The Stress-Optic Effect in Optical Fibers," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 19, p. 834, 1983.
- [67] S. Chang, C. H. T. Huang, W. Chuang, Y. Tsai, J. Shieh, and C. Leung, "Heterodyne Interferometric Measurement of the Thermo-Optic Coefficient of Single Mode Fiber," *Chinese Journal of Physics*, vol. 38, p. 437, 2000.
- [68] D. Gettemy, W. Harker, G. Lindholm, and N. Barnes, "Some Optical Properties of KTP, LiO<sub>3</sub> and LiNbO<sub>3</sub>," *Journal of Quantum Electronics*, vol. 24, p. 2231, 1988.
- [69] N. Lagakos, J. Bucaro, and J. Jarzynski, "Temperature-induced optical phase shifts in fibers," *Applied Optics*, vol. 20, p. 2305, 1981.

- [70] *Nobel Lectures, Physics 1901-1921*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1967.
- [71] K. O. Hill and G. Meltz, "Fiber Bragg Grating Technology Fundamentals and Overview," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, p. 1263, 1997.
- [72] A. Othonos, *Fiber Bragg Gratings*. Artech House Publisher, 1999.
- [73] R. Kashyap, *Fiber Bragg Gratings*. Optics and Photonics, 1999.
- [74] T. Erdogan, "Fiber grating spectra," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, p. 1277, 1997.
- [75] K. Hill, B. Malo, F. Bilodeau, and D. Johnson, "Photosensitivity in optical fibers," *Annu. Rev. Mater. Sci.*, vol. 23, p. 125, 1993.
- [76] H. Kogelnik, *H. Kogelnik*. Springer, 1990.
- [77] A. Yariv, "Coupled-mode theory for guided-wave optics," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 9, p. 919, 1973.
- [78] A. Othonos, "Fiber Bragg gratings," *Review of Scientific Instruments*, vol. 68, p. 4309, 1997.
- [79] B. Malo, S. Theriault, D. Johnson, F. Bilodeau, J. Albert, and K. Hill, "Apodized in-fibre bragg grating reflectors photoimprinted using a phase mask," *Electronics Letters*, vol. 31, p. 223, 1995.
- [80] J. Albert, K. Hill, B. Malo, S. Theriault, F. Bilodeau, D. Johnson, and L. Erickson, "Apodization of the spectral response of fibre bragg gratings using a phase mask with variable diffraction efficiency," *Electronics Letters*, vol. 31, p. 222, 1995.
- [81] G. Meltz, W. Morey, and W. Glenn, "Formation of bragg gratings in optical fibers by a transverse holographic method," *Optics Letters*, vol. 14, p. 823, 1989.
- [82] K. Hill, Y. Fujii, D. Johnson, and B. Kawasaki, "Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication," *Applied Physics Letters*, vol. 32, p. 647, 1978.



- [83] V. Hagemann, "Untersuchungen zum dynamischen Einzelpuls-Einschreiben von Faser-Bragg-Gitter und deren Anwendung," Ph.D. dissertation, Universität Jena, 2001.
- [84] B. Malo, K. Hill, F. Bilodeau, D. Johnson, and J. Albert, "Point-by-point fabrication of micro-bragg gratings in photosensitive fibre using single excimer pulse refractive index modification techniques," *Electronics Letters*, vol. 29, p. 1668, 1993.
- [85] Y. Watanabe, J. Nishii, H. Moriwaki, G. Furuhashi, H. Hosono, and H. Kawazoe, "Permanent refractive-index changes in geO<sub>2</sub> glass slabs induced by irradiation with sub band gap light," *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 239, p. 104, 1998.
- [86] D. Starodubov, V. Grubsky, and J. Feinberg, "Bragg grating fabrication in germanosilicate fibers by use of near-uv light: an new pathway for refractive-index changes," *Optics Letters*, vol. 22, p. 1086, 1997.
- [87] E. Dianov, D. Starodubov, S. Vasiliev, A. Frolov, and O. Medvedkov, "Refractive-index gratings written by near-ultraviolet radiation," *Optics Letters*, vol. 22, p. 221, 1997.
- [88] M. Trutzel, "Dehnungsermittlung mit faseroptischen bragg-gitter-sensoren," Ph.D. dissertation, Technische Universität Berlin, 2001.
- [89] L. Dong, J. Archambault, L. Reekie, P. Russel, and D. Payne, "Single pulse bragg gratings written during fiber drawing," *Electron. Lett.*, vol. 29, p. 1577, 1993.
- [90] I. Bronstein and K. Semenjajew, *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner, 1996.
- [91] T. Zeh, "Optical Fiber Bragg Sensors - Measurement Systems and Signal Processing," Ph.D. dissertation, Technische Universität München, 2005.
- [92] C. Chojetzki, T. Klaiberg, S. Grimm, and H. Bartelt, "Faser-Bragg-Gitter mit anormalem Temperaturverhalten," *DGaO-Proceedings 2004*, 2004.
- [93] G. Yoffe, P. Krug, F. Ouellette, and D. Thorncraft, "Passive temperature-compensating package for optical fiber gratings," *Applied Optics*, vol. 34, p. 6859, 1995.

- [94] G. Lin, L. Wang, C. Yang, M. Shih, and T. Chuang, "Thermal performance of metal-clad fiber bragg grating sensors," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 10, p. 406, 1998.
- [95] J. Prohaska, *Temperature Compensated Fiber Grating Method for Compensating Temperature Variation in Fiber Gratings*. United States Patent No. US 6,240,225 B1, 2001.
- [96] T. Kleckers and B. Günther, "Optische und elektrische dehnungsmessstreifen: Ein vergleich," HBM, Tech. Rep., 2007.
- [97] G. Bubel and M. Matthewson, "Optical fiber reliability implications of uncertainty in the fatigue crack growth model," *Optical Engineering*, vol. 30, p. 737, 1991.
- [98] R. Castilone, "Mechanical reliability: Applied stress design guidelines," Corning, Tech. Rep., 2001.
- [99] P. France, M. Paradine, M. Reeve, and G. Newns, "Liquid nitrogen strengths of coated optical glass fibers," *Journal of Materials Science*, vol. 15, p. 825, 1980.
- [100] V. Hagemann, M. Trutzel, L. Staudigel, M. Rothhardt, H. Müller, and O. Krumpholz, "Mechanical resistance of draw-tower-bragg-grating sensors," *Electronics Letters*, vol. 34, p. 211, 1997.
- [101] S. Baker, H. Rourke, V. Baker, and D. Goodchild, "Thermal decay of fiber bragg gratings written in boron and germanium codoped silica fiber," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, p. 1470, 1997.
- [102] A. Triques, C. Barbosa, R. Cazo, J. de Siqueira Ferreira, and R. Rabelo, "Thermal stability of fiber bragg gratings recorded under different conditions," *Annals of Optics*, vol. 5, p. x, 2003.
- [103] C. Chojetzki, "Persönliche Kommunikation, 2007."
- [104] P. Lemaire, R. Atkins, V. Mizrahi, and W. Reed, "High pressure h<sub>2</sub> loading as a technique for achieving ultrahigh uv photosensitivity and thermal sensitivity in geO<sub>2</sub> doped optical fibers," *Electronics Letters*, vol. 29, p. 1191, 1993.

- [105] Y. Lo, J. Sirkis, and K. Ritchie, "A study of the optomechanical response of a diametrically loaded high birefringent optical fiber," *Smart Materials and Structures*, vol. 4, p. 327, 1995.
- [106] S. James, M. Dockney, and R. Tatam, "Simultaneous independent temperature and strain measurement using in-fibre bragg grating sensors," *Electronics Letters*, vol. 32, p. 1133, 1996.
- [107] E. Udd, "Review of multi-parameter fiber grating sensors," in *Fiber Optic Sensors and Applications V, Proceedings of SPIE*, 2007.
- [108] R. Correira, E. Chehura, S. James, and R. Tatam, "Experimental and theoretical study of locally transverse loaded fibre bragg gratings for pressure sensing applications."
- [109] J. Zhao, X. Zhang, Y. Huang, and X. Ren, "Experimental analysis of birefringence effects on fiber bragg gratings induced by lateral compression," *Optics Communications*, vol. 229, p. 203, 2003.
- [110] "Pm1550g-80 product data sheet," Nufern, Tech. Rep., 2006.
- [111] K.-H. Elster, *Nichtlineare Optimierung*. Harri Deutsch, 1978.
- [112] A. Peressini, F. Sullivan, and J. Uhl, *The mathematics of Nonlinear Programming*. Springer, 1988.
- [113] D. Luenberger, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 1973.
- [114] P. Papalambros and D. Wilde, *Principles of Optimal Design*. Cambridge University Press, 2003.
- [115] S. Jacoby, J. Kwalik, and J. Pizzo, *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*. Prentice-Hall, 1972.
- [116] E. Bayo and J. R. Stubbe, "Six-axis force sensor evaluation and a new type of optimal frame truss design for robotic applications," *Journal of Robotic Systems*, vol. 6, pp. 191–208, 1989.
- [117] G.-S. Kim, D.-I. Kang, and S.-H. Rhee, "Design and fabrication of a six-component force/moment sensor," *Sensors and Actuators*, vol. 77, pp. 209–220, 1999.

- [118] M. Kaneko, "Twin-head six-axis force sensors," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, p. 146, 1996.
- [119] M. Biermann, "Elastic trunnion as three-dimensional force and torque transducer," *Sensors and Actuators*, vol. 9, p. 277, 1986.
- [120] W. Hongrui, G. Feng, and H. Zhen, "Design of 6-axis force/torque sensor based on steward platform related to isotropy," *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, vol. 3, pp. –, 1998.
- [121] C.-G. Kang, "Closed-form force sensing of a 6-axis force transducer based on the steward platform," *Sensors and Actuators*, vol. 90, pp. 31–37, 2000.
- [122] T. Dwarakanath, B. Dasgupta, and T. Mruthyunjaya, "Design and development of a Stewart platform based force-torque sensor," *Mechatronics*, vol. 11, pp. 793–809, 2001.
- [123] J. Clijnen, D. Reynaerts, and H. V. Brussel, "Design of an optical tri-axial force sensor," in *Proc. SPIE, Vol. 4946, 129 (2003), Brugge, Belgium*, 2003.
- [124] Y. Liu, L. Zhang, J. A. R. Williams, , and I. Bennion, "Optical Bend Sensor Based on Measurement of Resonance Mode Splitting of Long-Period Fiber Grating," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 12, p. 531, 2000.
- [125] M. S. Müller, L. Hoffmann, A. Sandmair, and A. W. Koch, "Full strain tensor treatment of fiber Bragg grating sensors," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 45, pp. 547–553., 2009.
- [126] M. S. Müller, H. El-Khozondar, A. Bernardini, and A. W. Koch, "Transfer matrix approach to four mode coupling in fiber Bragg gratings," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, *accepted for publication*, 2009.
- [127] D. Gloge, "Weakly guiding fibers," *Applied Optics*, vol. 10, p. 2252, 1971.
- [128] K. Lee and T. Erdogan, "Fiber mode coupling in transmissive and reflected tilted fiber gratings," *Applied Optics*, vol. 39, p. 1394, 2000.
- [129] T. Erdogan and J. Sipe, "Tilted fiber phase gratings," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 13, p. 296, 1996.

- [130] O. Ivanov and L. Wang, "Wavelength shifts of cladding-mode resonances in corrugated long-period fiber gratings under torsion," *Applied Optics*, vol. 42, p. 2264, 2003.
- [131] K. Lee, "Polarization mode coupling in circularly birefringent gratings," *Applied Optics*, vol. 43, p. 4393, 2004.
- [132] Y. Pak, "Longitudinal shear transfer in fiber optic sensors," *Smart Materials and Structures*, vol. 1, p. 57, 1992.
- [133] M. McCall, "On the application of coupled mode theory for modeling fiber bragg gratings," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 18, p. 236, 2000.
- [134] E. Udd, W. Schulz, J. Seim, and E. Haugse, "Multidimensional strain field measurements using fiber optic grating sensors," in *Proceedings of SPIE*, vol. 3986, pp. 254-262, 2000.
- [135] C.-C. Ye, S. E. Staines, Stephen W James, and R. P. Tatam, "A polarization-maintaining fibre Bragg grating interrogation system for multi-axis strain sensing," *Measurement Science and Technology*, vol. 13, p. 1446, 2002.
- [136] M. Prabhugoud and K. Peters, "Modified transfer matrix formulation of bragg grating strain sensors," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 22, p. 2302, 2004.
- [137] J. Hong, W. Huang, and T. Makino, "On the transfer matrix method for distributed-feedback waveguide devices," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 10, p. 1860, 1992.
- [138] M. Muriel and A. Carballar, "Internal field distributions in fiber bragg gratings," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 9, p. 955, 1997.
- [139] M. Muriel, A. Carballar, and J. Azana, "Field distributions inside fiber bragg gratings," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 35, p. 548, 1999.
- [140] M. Yamada and K. Sakuda, "Analysis of almost-periodic distributed feedback slab waveguides via a fundamental matrix approach," *Applied Optics*, vol. 26, p. 3474, 1987.

- [141] M. Prabhugoud and K. Peters, "Efficient simulation of bragg grating sensors for implementation to damage identification in composites," *Smart Materials and Structures*, vol. 12, p. 914, 2003.
- [142] P. Yeh, "Electromagnetic propagation in birefringent layered media," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 69, p. 742, 1979.
- [143] E. Glytsis and T. Gaylord, "Rigorous three-dimensional coupled wave diffraction analysis of single and cascaded anisotropic gratings," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 4, p. 2061, 1987.
- [144] P. Wriggers, *Nichtlineare Finite Elemente Methoden*. Springer, 2001.
- [145] D. Norrie and G. de Vries, *An Introduction to Finite Element Analysis*. Academic Press, 1978.
- [146] R. Steinbuch, *Finite Elemente - Ein Einstieg*. Springer, 1998.
- [147] K. Hoffmann, *An Introduction to Measurements using Strain Gages*. Hottinger Baldwin Messtechnik, 1989.
- [148] T. Lautenschlager, "Thermo-mechanische simulation von faseroptischen bragg-gitter-sensoren," Master's thesis, Technische Universität München, 2006.
- [149] C. Lupi, F. Felli, L. Ippoliti, M. Caponero, M. Ciotti, V. Nardelli, and A. Paolozzi, "Metal coating for enhancing the sensitivity of fibre bragg grating sensors at cryogenic temperature," *Smart Materials and Structures*, vol. 14, pp. N71–N76, 2005.
- [150] D. Costantini, C. Muller, S. Vasiliev, H. Limberger, and R. Salathe, "Tunable loss filter based on metal-coated long-period fiber grating," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 11, p. 1458, 1999.
- [151] A. Diez, M. Andres, D. Culverhouse, and T. Birks, "Cylindrical metal-coated optical fibre devices for filters and sensors," *Electronics Letters*, vol. 32, p. 1390, 1996.
- [152] S.-T. Shiue and Y.-S. Lin, "Thermal stresses in metal-coated optical fibers," *Journal of Applied Physics*, vol. 83, p. 5719, 1998.

- [153] H. Dettner, *Handbuch der Galvanotechnik*. Hanser, 1963.
- [154] D. Betz, "Application of Optical Fiber Sensors for Structural Health and Usage Monitoring," Ph.D. dissertation, University of Sheffield, 2004.
- [155] M. S. Müller, L. Hoffmann, T. Lautenschlager, and A. W. Koch, "Soldering fiber Bragg grating sensors for strain measurement," *OFS - Optical Fibre Sensors Conference*, vol. 19, p. 7004/183, 2008.
- [156] A. Ezbiri, S. Kanellopoulos, and V. Handerek, "High resolution instrumentation system for fibre-bragg grating aerospace sensors," *Optics Communications*, vol. 150, pp. 43–48, 1998.
- [157] A. Fernandez-Fernandez, H. Ottevaere, C. V. Ierschot, K. Panajatov, F. Berghmans, and H. Thienpont, "Multi-parameter force sensing with fiber bragg grating sensors," in *Proceedings of the Symposium IEEE/LEOS Benelux Chapter, Amsterdam*, 2002.
- [158] M. S. Müller, L. Hoffmann, A. W. Koch, and T. Lautenschlager, "Kraft momenten sensor," in *European Patent Application, EP07021502*, 2007.
- [159] M. S. Müller, L. Hoffmann, and A. W. Koch, "Performance of a fiber optic ring depolarizer in fiber sensing applications," *Proceedings of SPIE*, vol. 6616, pp. –, 2007.
- [160] A. Snyder, I. White, and D. Mitchell, "Radiation from bent optical waveguides," *Electronics Letters*, vol. 11, p. 332, 1975.
- [161] D. Marcuse, "Curvature loss formula for optical fibers," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 66, p. 216, 1976.
- [162] A. Harris and P. Castle, "Bend loss measurements on high numerical aperture single-mode fibers as a function of wavelength and bend radius," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 4, p. 34, 1986.
- [163] A. Sharma, A.-H. Al-Ani, and S. Halme, "Constant-curvature loss in monomode fibers: an experimental investigation," *Applied Optics*, vol. 23, p. 3297, 1984.
- [164] L. Faustini and G. Martini, "Bend Loss in Single-Mode Fibers," *Journal of lightwave technology*, vol. 15, p. 671, 1997.

- [165] V. Annovazzi-Lodi, S. Donati, S. Merlo, and G. Zapelloni, "Statistical analysis of fiber failures under bending-stress fatigue," *Journal of Light-wave Technology*, vol. 15, p. 288, 1997.
- [166] D. Sinclair, "A bending method for measurement of the tensile strength and young's modulus of glass fibers," *Journal of Applied Physics*, vol. 21, p. 380, 1950.
- [167] M. Matthewson, C. Kurkjian, and S. Gulati, "Strength measurement of optical fibers by bending," *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 69, p. 815, 1986.
- [168] K.-W. Gaede, *Zuverlässigkeit - Mathematische Modelle*. Carl Hanser, 1977.
- [169] M. Kerscher, J. Puls, and S. Stintzing, *Numerik für Physiker*. Ludwigs-Maximilians-Universität München, 2006.
- [170] *Mathworks - Matlab 7.6 Manual*.
- [171] [Online]. Available: <http://www.mathworks.de/>
- [172] M. Bendsoe and O. Sigmund, *Topology optimization - theory, methods, and applications*. Springer, 2004.