

Technische Universität München
Institut für Energietechnik

Lehrstuhl für Thermodynamik

Kombinierte Anwendung von Strömungssimulation, Netzwerkmodellierung und Regelungstechnik zur Vorhersage thermoakustischer Instabilitäten

Jan Kopitz

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades
eines

DOKTOR – INGENIEURS

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Horst Baier

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Wolfgang Polifke, Ph.D. (CCNY)
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Rudolf Schilling

Die Dissertation wurde am 23.10.2007 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 10.12.2007 angenommen.

„I love dealines. I love the whooshing sound they make as they fly by.”

Douglas Adams (1952-2001)

„... and you may think that this is hard, but you are harder...”

Sasha, „Goodbye”, 2006

„Heute ist die gute, alte Zeit von morgen.”

Karl Valentin (1882-1948)

„Worüber können Sie sich totlachen?”

„Über Leute, die es in ihrem nächsten Leben so richtig krachen lassen wollen.”

Manowar Bassist Joey DeMaio, Playboy 08/2007

... „I changed the universe!” „You did.” „I’m God!” „You’re an atheist.”

„I don’t exist!” ...

Jonathan Safran Foer, „Extremely Loud & Incredibly Close”, 2005

„Je stärker die Waffe, umso schwächer der Mensch.”

Unbekannte Herkunft

Vorwort/Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent von Prof. Wolfgang Polifke. Ihm gilt mein besonderer Dank für die langjährige Begleitung und Betreuung meiner wissenschaftlichen Arbeit. Der lockere und unkomplizierte Umgangston und die kurzen Wege haben die Erfüllung meiner verschiedenen Aufgaben und das Erreichen der wissenschaftlichen Ziele wesentlich erleichtert. Das mir entgegengebrachte Vertrauen zeigte sich auch in der Übertragung vielfältiger Zusatzaufgaben, die fast immer herausfordernd und interessant waren, zwar zunächst manchmal als Belastung erschienen aber im Nachhinein eine wertvolle Lehrzeit darstellen und vielfach Spass machten. Wo hat man schon die Möglichkeit, gleich zu Beginn seiner Promotionszeit in der Lehre aktiv zu werden und sogar eigenverantwortlich einen Kurs nach seinen eigenen Vorstellungen neu zu gestalten und zu unterrichten? Zudem darf ich, neben der erfolgreichen Promotion, die Mitautorenschaft eines Lehrbuches, sowie vielfältige Erfahrungen auf dem Gebiet der Thermoakustik und CFD mitnehmen.

Eine entscheidende Rolle kommt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer zu, dem Lehrstuhlinhaber, der mir erst den Einstieg am Lehrstuhl für Thermodynamik ermöglichte, indem er unbürokratisch eine Stelle schuf. Für das mir dadurch gezeigte Vertrauen, das sich auch in Form baldiger Übertragung verantwortungsvoller Aufgaben am Lehrstuhl zeigte, gilt ihm mein spezieller Dank.

Unbedingt nennen möchte ich auch Herrn Prof. em. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Franz Mayinger, unter dessen Führung der Lehrstuhl für Thermodynamik noch stand, als ich 1997 als Studentische Hilfskraft dort anfang. Die hohe Anerkennung, die er in der internationalen wissenschaftlichen Gemeinschaft genoss (und noch genießt) und die Begeisterung und Klarheit mit der der durchaus anspruchsvolle Stoff der Thermodynamik den Studenten vermittelt wurde, motivierten mich dazu, mich intensiver mit dem Fachgebiet zu befassen. Die angenehme Atmosphäre bei doch klarer Führung durch Herrn Prof. Mayinger und nicht zuletzt das sehr menschliche Miteinander waren

für mich der Grund mich langfristig am Lehrstuhl zu engagieren.

In diesem Zusammenhang auch mein herzliches Dankeschön an Dr. Christian Poruba, meinen Betreuer während der Studentenzeit am Lehrstuhl, der mich, Geschichte wiederholt sich, 9 Jahre nach meinem dortigen Beginn auch zu meiner jetzigen Position bei BMW vermittelte. Die gemeinsame Arbeit am Lehrstuhl hat einfach unglaublich Spass gemacht und erscheint mir im Rückblick höchst effektiv, trotz, oder wahrscheinlich gerade weil, ich von Dir, Christian, nicht nur die Grundlagen und Feinheiten der numerischen Strömungssimulation sondern unter anderem auch den richtigen Golf-Abschlag lernen durfte. Die richtige Mischung aus harter Arbeit und bewusster Freizeitgestaltung war das Geheimnis und nie wieder habe ich so gerne und mit Vergnügen bis nachts um halb zwölf gearbeitet, wie damals als 25-jähriger Student, mit den Skiern im Büro und dem Tiefschneewochenende vor der Tür.

Eine ganze Reihe von weiteren Freunden, Kollegen, Studenten und Thermodynamik-Gurus haben mir mit Rat und Tat zur Seite gestanden, dazu beigetragen eine kreative Atmosphäre zu schaffen oder einfach dafür gesorgt, mal etwas Abwechslung in den Alltag und Abstand zum Ernst des (wissenschaftlichen) Lebens zu bringen. Ein ganz herzliches Dankeschön geht hier an Dr. Christoph Hirsch, der mit seinem schier unerschöpflichen Wissensschatz stets parat stand und – auch wenn selbst bis oben hin mit Arbeit eingedeckt – immer ansprechbar war und sich mal Zeit für ein ausführliches erläuterndes Gespräch nahm und mal einfach nur ein Wort in den Raum warf, das einem über die eben noch unüberwindlich geglaubte wissenschaftliche Hürde half.

Den messtechnischen und karikaturistischen Daniel Düsentrieb des Lehrstuhls, Udo Glückert, vermisse ich jetzt schon. Meine experimentelle Arbeit wäre ohne sein Fachwissen und seine mit flinker Hand gearbeiteten und frei Haus gelieferten Messeinrichtungen wahrscheinlich nur schwer zu einem erfolgreichen Abschluss zu bringen gewesen. Fast noch wichtiger aber waren Deine, Udo, mit scharfer Zunge feinst gewobenen, hintergründigsten karikaturistischen Beiträge zu einem gesunden Lehrstuhlklima und einer entspannten Sicht auf die Welt – stets mehr oder weniger sarkastisch aber nie

zynisch – einfach nur köstlich.

Vielen Dank an das Sekretariat, speziell in Person von Frau Bassett und Frau Heckler, die stets kompetent, immer schnell und auch mal unbürokratisch ihre Unterstützung zum erfolgreichen Betrieb des Lehrstuhls und auch der Bewältigung der Projekte der einzelnen Mitarbeiter leisteten. Ohne Frau Bassetts großes Engagement wäre meine Promotion erst im Jahr 2008 erfolgt. Gleiches gilt für die mechanische Werkstatt unter Leitung von Herrn Sieber, der mit großem Sachverstand die unmöglichsten Erfindungen der Ingenieure zum Leben erweckte und schon mal das ein oder andere Teil so umkonstruierte, dass es nachher auch funktionierte. Die frühzeitige Einbeziehung seiner mechanischen Werkstatt, um die und deren Qualität uns im Übrigen wohl die meisten Institute beneiden dürften, in die Konstruktion stellte sicher, dass die gewünschte Apparatur am Ende auch Hand und Fuß hatte. Vielen Dank hier auch an Josef Dorrer und Jens Hümmer. Ein weiteres wichtiges Glied der erfolgreichen Arbeit am Lehrstuhl war die elektrische Werkstatt, die, speziell in Person von Herrn Strobl und Herrn Potz, immer ansprechbar war und immer und meist auch unmittelbar kompetente Hilfe leisten konnte.

Höchste Anerkennung haben meiner Meinung nach die Administratoren der Computerinfrastruktur des Lehrstuhls verdient, die ohne Rücksicht auf Feierabend und Wochenende mit viel Verantwortungsbewusstsein, Kompetenz und Engagement das Herz der numerischen Arbeiten sowie der gesamten elektronischen Kommunikation und Datenverarbeitung immer aktuell und am Laufen hielten und stets an Verbesserungen arbeiteten. Mein Respekt geht hier an Volker Kaufmann, Victor Fischer, Stephan Pettinger und René Grottke – ohne Leute wie Euch wären wir in der Wissenschaft ziemlich aufgeschmissen.

Viel Spass hatte ich mit meinen Bürokollegen Frank Kiesewetter und Roland Kaess. Es entstanden neue Sportarten wie der „Ventilatorfußball“. Aber auch die wissenschaftliche Zusammenarbeit mit Euch war nicht nur dort wo unsere Projekte sich überschneiden aufschlussreich, fruchtbar und nicht zuletzt unterhaltsam. Interessante Diskussionen gab es unter anderem auch mit Stephan Föllner und Anatolij Lyubar, für die schnelle und

ausführliche Bereitstellung ihrer wissenschaftlichen Ergebnisse bedanke ich mich bei Andreas Fischer und Urban Neunert. Letzterem auch ein herzlicher Dank für sein Engagement bei der Organisation des Lehrstuhlfußballteams, der Gewinn des Fakultätspokals 2006 war ein unvergessliches Erlebnis und besser als alles andere geeignet den Teamgeist zu fördern. Seine Fähigkeit zur Führung einer Espresso-Bar bewies Thomas Steinhilber, die Abstimmung der Kaffeesorte auf den Geschmack der Lehrstuhlmitarbeiter war schon sehr professionell. Danke fürs Blumen gießen, speziell an Roland Kaess und Elke Wanke!

Eine Reihe von Studenten unterstützte mich maßgeblich bei der Bearbeitung der wissenschaftlichen Arbeiten. Ganz besonders möchte ich hier Ana Šerbanović und Paul Lumens erwähnen, die mit sehr großem und bei weitem nicht selbstverständlichem Engagement zu einem erfolgreichen Einstieg einerseits und Abschluss andererseits der Forschungsarbeiten beitrugen. Paul führte dabei die experimentellen Untersuchungen des Rijke-Rohrs beinahe im Alleingang durch, war dabei – als großer Fußballfan – nichtmal durch die Aussicht auf den Stadion(!)-Besuch des WM-Viertelfinales seiner Holländer abzulenken und sorgte zusätzlich immer für gute Stimmung. Eduard Bröcker half mir mit seiner Diplomarbeit eine neue Methode zur akustischen Wellenidentifikation zu entwickeln, eine gemeinsame Veröffentlichung ist Zeichen der erfolgreichen Zusammenarbeit. Desweiteren geht mein Dank an Alex Friedl, Kaya Anbarci, Florian Bergmann und Matthias Payr. Unbezahlbar (v.a. nicht mit HiWi-Mitteln) war die Leistung von Christian Richter, der mich jahrelang mit großem Engagement, Fachwissen und Selbständigkeit bei meinem Nebenjob als Computeradministrator unterstützte, ja die Aufgaben oftmals im Alleingang bewältigte.

Bedanken möchte ich mich auch beim bayerischen Staat, denn ich hatte noch das Vergnügen meine gesamte Ausbildung und Bildung, nach der Gesundheit wohl die wertvollsten Güter in unserer Gesellschaft, ohne Gebühren vermittelt zu bekommen. Wohin der jetzige Weg führen wird, werden wir erst in einigen Jahren sehen.

Mein ganz persönlicher Dank geht an meine Eltern, die immer Vertrauen in mich hatten und mich immer und ohne zu zögern unterstützt haben,

nicht bedingungslos, aber mit Vertrauen in den von mir gewählten Weg. Und – das Beste kommt zum Schluss – dank Dir, liebe Gitte, dank Deiner liebevollen und unbedingten Unterstützung, gerade während der stressigen Zeit der Doppelbelastung durch neuen Job und Doktorarbeit, konnte ich die Arbeit zu einem erfolgreichen Abschluss führen. Du hast mir immer den Rücken frei gehalten, wie in einem perfekten Team, tausend Küsse dafür.

Es lebe die Liebe – mögen die Erkenntnisse aus dieser Arbeit niemals dazu dienen, irgendwelche Waffen zu bauen,

Jan Kopitz, München im Frühjahr 2008

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Grundlagen | 5 |
| 2.1 | Grundgleichungen der Strömungsmechanik | 5 |
| 2.1.1 | CFD und Turbulenzmodellierung | 6 |
| 2.1.2 | Grundsätzliche Bemerkungen zur Akustik | 10 |
| 2.2 | Thermoakustik | 13 |
| 2.3 | Netzwerkmodellierung | 14 |
| 2.4 | Methoden der Regelungstechnik zur thermoakustischen Sta- bilitätsanalyse | 15 |
| 2.4.1 | Anwendung des Nyquistkriteriums | 15 |
| 2.4.2 | Genaue Bestimmung der komplexen Eigenfrequenzen aus der Ortskurve | 19 |
| 3 | CFD-unterstützte Bestimmung der OLTF | 23 |
| 4 | Validierung der CNN-Methode am Rijke-Rohr | 29 |
| 4.1 | Prinzip des Rijke-Rohrs | 29 |
| 4.2 | Experimentelle Untersuchungen am Rijke-Rohr | 32 |
| 4.2.1 | Experimenteller Aufbau | 32 |
| 4.2.2 | Elektrisches Heizgitter | 39 |
| 4.2.3 | Messeinrichtungen | 41 |
| 4.2.3.1 | Druckmessung | 41 |
| 4.2.3.2 | Relative Mikrofonkalibrierung | 42 |
| 4.2.3.3 | Absolute Mikrofonkalibrierung | 46 |
| 4.2.3.4 | Geschwindigkeitsmessung | 46 |
| 4.2.3.5 | Kalibrierung der Thermistoren | 47 |

| | | |
|---------|--|-----|
| 4.2.3.6 | Temperaturmessung | 52 |
| 4.2.4 | Reflexionsfaktoren | 52 |
| 4.2.5 | Messungen am Rijke-Rohr in Betrieb | 54 |
| 4.2.5.1 | Bestimmung der Eigenfrequenzen | 58 |
| 4.2.5.2 | Amplituden der Eigenfrequenzen | 59 |
| 4.2.5.3 | Bestimmung der Wachstumsraten | 59 |
| 4.2.5.4 | Messung des Temperaturverlaufs | 66 |
| 4.3 | Analytische Netzwerkmodellierung des Rijke-Rohres | 69 |
| 4.3.1 | Offenes Ende, links (Element I) | 69 |
| 4.3.2 | Gerades, isothermes Rohrstück (Element II) | 70 |
| 4.3.3 | Wärmequelle (Element III) | 71 |
| 4.3.4 | Gerades Rohrstück mit Temperaturverlauf (Element IV) | 75 |
| 4.3.5 | Offenes Ende, rechts (Element V) | 77 |
| 4.3.6 | Anwendung der Transfermatrizen für die experimentell betrachtete Konfiguration | 78 |
| 4.3.6.1 | Transfermatrix für ein Rohrstück mit axialem Temperaturgradienten | 80 |
| 4.3.6.2 | Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems | 80 |
| 4.4 | CNN-Modell des Rijke-Rohres | 84 |
| 4.4.1 | Diskretisierung der Geometrie auf einem CFD-Berechnungsgitter | 85 |
| 4.4.2 | Modellierung des Heizgitters | 88 |
| 4.4.3 | Numerischer Löser und Parameter | 91 |
| 4.4.4 | Randbedingungen | 94 |
| 4.4.4.1 | Einlassrandbedingung | 94 |
| 4.4.4.2 | Wandrandbedingung im kalten Teil | 95 |
| 4.4.4.3 | Wandrandbedingung im heißen Teil | 96 |
| 4.4.4.4 | Auslassrandbedingung | 96 |
| 4.4.5 | Durchführung der CFD Simulation | 96 |
| 4.4.5.1 | Stationäre Initiallösung | 96 |
| 4.4.5.2 | Angeregte instationäre Simulation | 98 |
| 4.5 | Diskussion, Ausblick und Zusammenfassung | 104 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.5.1 | Vergleich der Ergebnisse | 104 |
| 4.5.2 | Vorhersage experimentell ermittelter Wachstumsraten | 109 |
| 4.5.3 | Zusammenfassung | 110 |
| 5 | Validierung der CNN-Methode am Rohr mit Flächensprung | 111 |
| 5.1 | Experimentelle Vergleichsergebnisse | 113 |
| 5.1.1 | Bestimmung der Transfermatrizen des Flächensprungs | 114 |
| 5.1.2 | Netzwerkmodell des Rohrs mit Flächensprung | 119 |
| 5.1.3 | Bestimmung der Eigenfrequenzen über die OLTF | 120 |
| 5.2 | CNN-Modell des Flächensprungs | 121 |
| 5.2.1 | Diskretisierung der Geometrie auf einem CFD-Berechnungsgitter | 122 |
| 5.2.2 | Randbedingungen der CFD-Simulation | 122 |
| 5.2.3 | Übrige Solverparameter | 124 |
| 5.2.4 | Quasi-stationäre Initiallösungen | 125 |
| 5.2.5 | Durchführung und Ergebnisse der angeregten Simulation | 128 |
| 5.3 | Vergleich der Methoden am Beispiel des Einflusses des Längenverhältnisses | 135 |
| 6 | Zusammenfassung und Ausblick | 143 |
| A | Herleitung der linearisierten Rankine-Hugoniot-Gleichung für kleine Störungen | 157 |
| B | Umrechnung einer Transfermatrix von p-u- auf f-g-Notation bei nicht konstanter Temperatur | 161 |
| C | Transfermatrixkoeffizienten in f-g-Notation für einen Dichtesprung mit bzw. ohne schwankende Wärmequelle | 163 |
| D | Herleitung der Transfermatrix für eine plötzliche Querschnittsverengung | 165 |
| E | Wachstumsrate einer komplexen Eigenfrequenz | 166 |

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

| | | |
|-----------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| A | [m ²] | Fläche |
| Bi | [-] | Biotzahl |
| c | [m/s] | Schallgeschwindigkeit |
| c | [J/kg K] | Spezifische Wärmekapazität |
| f | [m/s] | Stromab laufende Riemanninvariante |
| F | [-] | Sichtfaktor |
| g | [m/s] | Stromauf laufende Riemanninvariante |
| h | [J/kg] | Spezifische Enthalpie |
| h | [-] | Einheitsimpulsfilter |
| H | [m ² /s ²] | Spezifische Totalenthalpie |
| I | [-] | Turbulenzintensität |
| k | [1/m] | Wellenzahl |
| l | [m] | Länge |
| Ma | [-] | Machzahl |
| p | [Pa] | Druck |
| P | [W] | Leistung |
| q | [J/kg] | Spezifische Wärme |
| \dot{q} | [W/m ³] | Wärmequellendichte |
| \dot{Q} | [W] | Wärmestrom |
| r | [-] | Reflexionsfaktor |
| R | [J/kg K] | spezifische Gaskonstante |
| R | [m] | Radius |
| Re | [-] | Reynoldszahl |
| S | [-] | Strouhalzahl |
| t | [s] | Zeit |
| T | [K] | Temperatur |
| T | Passend | Transfermatrixkoeffizient |
| u | [m/s] | Geschwindigkeit |
| v | [m/s] | Geschwindigkeit |
| V | [m ³] | Volumen |

Griechische Buchstaben

| | | |
|-----------|----------------------|--|
| α | [1/K] | Temperaturabhängigkeitskoeffizient des Widerstands |
| α | [W/m ² K] | Wärmeübergangskoeffizient |
| Γ | [-] | Wachstumsrate |
| κ | [-] | Isentropenexponent |
| λ | [W/m K] | Wärmeleitfähigkeit |
| ρ | [kg/m ³] | Dichte |
| σ | [-] | Relaxparameter |

| | | |
|----------|------------------------|-------------------------|
| τ | [kg/m s ²] | Spannungstensor |
| τ | [s] | Zeitverzug |
| μ | [kg/m s] | Dynamische Viskosität |
| ω | [rad] | Kreisfrequenz |
| ζ | [-] | Druckverlustkoeffizient |

Indices

| | |
|-----------|------------------------|
| <i>c</i> | Kalt („cold“) |
| <i>d</i> | Stromab („downstream“) |
| dyn | dynamisch |
| <i>el</i> | Elektrisch |
| <i>h</i> | Heiss |
| <i>i</i> | Einlass („inlet“) |
| <i>o</i> | Auslass („outlet“) |
| stat | Statisch |
| tot | Total- |
| <i>u</i> | Stromauf („upstream“) |

Hochgestellte Zeichen

| | |
|---------------|-----------------|
| $\hat{\quad}$ | Frequenzbereich |
| $\bar{\quad}$ | Mittelwert |
| \prime | Schwankungswert |

1 Einleitung

Thermoakustische Instabilitäten sind ein in technischen Verbrennungssystemen weitgehend unerwünschtes, jedoch nicht immer leicht vermeidbares Phänomen. Sie werden in erster Linie hervorgerufen durch Wechselwirkung zwischen akustischen Wellen und instationärer Wärmefreisetzung in einem kompressiblen Medium. Besonders die durch gestiegene Anforderungen an die Abgasqualität hervorgerufene Tendenz zu Magerverbrennung in modernen Verbrennungssystemen begünstigt das Entstehen thermoakustischer Instabilitäten [22, 44]. Diese können zu exzessiven Lärm- und Schadstoffemissionen, verkürzter Produktlebenszeit oder sogar strukturellen Schäden führen [17, 25, 30, 41, 66, 75]. Es sei jedoch bemerkt, dass thermoakustische Instabilitäten nicht zwangsläufig ungewollt sein müssen. Sie können auch gezielt beispielsweise für Pulstriebwerke oder Kältemaschinen eingesetzt werden [22, 92]. Die wissenschaftliche Untersuchung und mathematische Beschreibung der Thermoakustik hat eine lange Geschichte [77, 78, 92].

Es ist trotz vieler Fortschritte weiterhin das Ziel umfangreicher Forschungsanstrengungen, verbesserte Methoden zu entwickeln, um in einer frühen Entwicklungsphase auf kostengünstige Weise Instabilitätsmechanismen zu identifizieren, Stabilitätsgrenzen zu bestimmen und die Effektivität von Gegenmaßnahmen untersuchen zu können. Leider liefert die experimentelle Untersuchung von Verbrennungsinstabilitäten in maßstäblichen Versuchsaufbauten nur begrenzte Erkenntnisse bei einem, dem gegenüber stehenden, erheblichen Kostenaufwand. Folglich wurden verschiedene Methoden zur teil-analytischen oder numerischen Analyse thermoakustischer Systeme entwickelt.

Es ist beispielsweise mit numerischer Strömungssimulation („computational fluid dynamics“ – CFD) möglich, die zeitliche Entwicklung eines Störsignals niedriger Amplitude, mit dem eine stationäre Lösung der strömungsmecha-

nischen Gleichungen beaufschlagt wird, zu berechnen. Ist das betrachtete System instabil, so werden die so ins System gebrachten Störungen mit der Zeit anwachsen und sich zu einer stehenden Welle bestimmter Frequenz entwickeln, deren Amplitude anwächst und schließlich in die Sättigung läuft. Auf diese Weise ist es möglich, die thermoakustische Stabilität eines Verbrennungssystems zu bewerten, ohne die Flammentransferfunktion bzw. die Brennertransfermatrix zu kennen [21, 54, 94]. Der große Nachteil dieser Methode sind die immensen Anforderungen an Rechenleistung und -zeit, speziell für Verbrennungssysteme mit komplizierter Geometrie. Ein weiteres Problem ist die Tatsache, dass mit diesem Ansatz nur die dominante Eigenfrequenz zuverlässig identifiziert werden kann. Instabile Moden mit kleinerer Wachstumsrate können dabei übersehen werden und insbesondere stabile Moden kann diese Methode nicht finden. Auch die Formulierung geeigneter Randbedingungen kann unter Umständen Probleme bereiten [65, 74].

Um diese Probleme zu umgehen, wurden in den letzten Jahren Methoden entwickelt, die speziell die Anforderungen der Analyse thermoakustischer Instabilitäten berücksichtigen. Dabei werden effiziente Modelle zur Akustiksimulation mit einem linearisierten Modell der Antwort der Wärmefreisetzungsrates auf akustische Strömungsschwankungen kombiniert. Typischerweise wird letzteres in Form der Frequenzantwort bzw. der Transfermatrix der Wärmequelle des Systems angegeben.

Folgende Ansätze können unterschieden werden:

- Netzwerkmodelle sind weit verbreitet, da sie schnell und sehr flexibel sind. [11, 15, 17, 30, 47, 66, 70]. Ihre Anwendbarkeit bei komplexen Systemen ist jedoch eingeschränkt, da die akustischen Transfermatrizen für sämtliche Teile bekannt sein und per CFD oder experimentell bestimmt werden müssen, sofern sie nicht über einfache physikalische Zusammenhänge hergeleitet werden können. Problematisch ist dies beispielsweise bei Verbrennungssystemen mit über weite Bereiche verteilter Wärmefreisetzung oder komplexen Geometrien.
- Finite-Elemente-Ansätze, die im Zeitbereich operieren, erlauben im Gegensatz dazu zumindest die Darstellung komplexer Geometrien, benöti-

gen aber genauso eine zuvor ermittelte Übertragungsfunktion zwischen Akustik und Wärmefreisetzung [58, 87]. Zudem steigt gegenüber dem Netzwerkmodell wieder die Anforderung an die Rechenleistung, die Implementierung akustischer Randbedingungen kann schwierig sein und die Berücksichtigung einer der Akustik zugrunde liegenden Hauptströmung stellt eine große Herausforderung dar.

- Galerkin- oder „state-space“-Ansätze, welche das akustische Feld durch eine Reihe von Basisfunktionen darstellen, haben sowohl Vor- als auch Nachteile mit den anderen Ansätzen gemeinsam [4, 35, 84].
- Ibrahim et al. [25] haben eine Formulierung über die Erhaltung akustischer Energie als Ansatz für die qualitative Variantenuntersuchung in frühen Designphasen vorgeschlagen. Praktische Anwendungsbeispiele stehen hier jedoch noch aus.

Es muss betont werden, dass keine dieser effizienten Methoden die Flammenantwort (oder allgemein: die Antwort der Wärmequelle) auf akustische Störungen berechnet. Stattdessen ist eine Information über die Flammendynamik ein benötigter Input für diese Modelle, typischerweise in Form der Frequenzantwort der Flamme oder der Transfermatrix des Brenners. Die akkurate und effiziente Bestimmung dieser Größen durch analytische, experimentelle oder numerische Methoden ist eine herausfordernde Aufgabe und Bestandteil fortlaufender Forschung.

In dieser Arbeit wird eine alternative Methode der Stabilitätsanalyse beschrieben, welche weder Transfermatrizen für alle komplexen Geometriedetails, noch eine Transferfunktion für die Wärmefreisetzung voraussetzt, sondern alle dafür relevanten Vorgänge direkt simuliert und gleichzeitig zur Bestimmung der Eigenfrequenzen die Effizienz der Netzwerkmodellierung nutzt: Eine instationäre Strömungssimulation mit breitbandiger externer Anregung wird mit einem Netzwerkmodell verbunden, um die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises („open loop transfer function“ – OLTF) des thermoakustischen Systems zu bestimmen. Die Instabilitätscharakteristik des Systems kann dann aus der Ortskurve der OLTF durch grafische Methoden, angelehnt an das Nyquist-Kriterium der Rege-

lungstechnik, abgeleitet werden [28, 55, 71, 82, 83].

Um die neue Methode zu validieren, wurden umfangreiche Untersuchungen sowohl experimenteller als auch theoretischer Art an einem Rijke-Rohr als klassischem thermoakustischem Resonator [23, 78] sowie einer einfachen Rohrgeometrie mit Flächensprung als geometrisch komplexerem Fall durchgeführt. Die Ergebnisse der neuen Methode werden dabei zum Einen mit experimentell ermittelten Werten und zum Anderen, im Fall des Rijke-Rohrs, mit denen eines analytischen Netzwerkmodells, als Beispiel für eine etablierte numerische Bestimmungsmethode, verglichen.

2 Grundlagen

In dieser Arbeit wird eine neuartige Vorhersagemethode für **thermoakustische** Instabilitäten präsentiert. Diese Vorhersagemethode basiert auf Methoden aus der **Regelungstechnik**, die notwendigen Eingangsdaten für die Stabilitätsuntersuchung werden dabei von **Netzwerkmodellen** und mittels **CFD** erzeugt. Grundlage dafür sind die physikalischen Zusammenhänge der **Strömungsmechanik**, überlagert von **Akustik** und teilweise auch **Turbulenz**. Auf diese Grundbegriffe wird in den folgenden Unterkapiteln ein Blick geworfen.

2.1 Grundgleichungen der Strömungsmechanik

Alle in dieser Arbeit durchgeführten Strömungssimulationen basieren auf den folgenden Erhaltungsgleichungen für kompressible Strömungen [6,57,95] (Summation bei gleichen Indizes entsprechend der Einstein'schen Summenkonvention wird vorausgesetzt, sofern dies nicht anders angegeben ist), welche sind:

- die Zustandsgleichung für ein ideales Gas:

$$p = \rho RT, \quad (2.1)$$

unter Voraussetzung einer konstanten spezifischen Gaskonstante R .

- die Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0. \quad (2.2)$$

- die Impulserhaltung (Navier-Stokes):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (2.3)$$

Der Tensor der viskosen Kräfte (Scherkräfte) τ_{ij} wird beschrieben durch

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (2.4)$$

mit dem so genannten Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \quad (2.5)$$

- die Energieerhaltung:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho H) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k H) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (u_j \tau_{jk}) + \dot{q}, \quad (2.6)$$

mit dem Quellterm \dot{q} . Die spezifische (massenbezogene) Totalenthalpie ist dabei definiert als

$$H = h + \frac{u_j u_j}{2}, \quad (2.7)$$

mit der spezifischen Enthalpie h und der spezifischen kinetischen Energie $u_j u_j / 2$.

2.1.1 CFD und Turbulenzmodellierung

Um anhand dieses Gleichungssystems Strömungsfelder numerisch zu berechnen, muss es auf einem Berechnungsgitter räumlich, sowie zusätzlich zeitlich, diskretisiert werden. Mit gegenwärtigen Rechnersystemen ist es,

für in Ingenieursanwendungen auftretende Geometrien und Reynoldszahlen, nicht möglich, alle dabei auftretenden räumlichen und zeitlichen Skalen aufzulösen, was einer direkten numerischen Simulation (DNS) [95] entspräche. Turbulenz in Form kleinskaliger Strömungsbewegungen muss deshalb modelliert werden. In der vorliegenden Arbeit kommen zwei verschiedene Strömungsmechanik-Löser zum Einsatz und mit diesen auch zwei verschiedene Arten, Turbulenz zu modellieren. Für die Simulation des Rijke-Rohrs (siehe Kapitel 4) wird der kommerzielle Code „Fluent“ [19] verwendet, der eine Vielzahl von Turbulenzmodellen anbietet. Im vorliegenden Fall wurde das bei Ingenieursanwendungen sehr weit verbreitete 2-Gleichungs- k - ϵ -Turbulenzmodell gewählt. Für die Simulation der Flächensprungeometrie (siehe Kapitel 5) wurde der am CERFACS-Institut entwickelte Code „AVBP“ [13] verwendet, der standardmäßig LES (Large-Eddy-Simulation) verwendet, bei der – wie der Name sagt – die großen Wirbel aufgelöst werden, womit komplexe Strömungsstrukturen wesentlich genauer dargestellt werden können.

Die beiden Ansätze der Turbulenzmodellierung unterscheiden sich vornehmlich durch die Annahme, dass bei LES die Gitter- und Zeitschrittweite fein genug sind, um die Energie tragenden turbulenten Strukturen direkt aufzulösen, die für den Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch von entscheidender Bedeutung sind. Ein – dann sehr einfaches – Turbulenzmodell wird nur für die unterhalb der aufgelösten Skalen liegende Turbulenz benötigt (von deren Isotropie ausgegangen werden kann). Die über das Berechnungsgitter gefilterten Erhaltungsgleichungen werden direkt gelöst und die unterhalb der Gitterweite liegenden Schwankungen werden letztendlich in Form einer zusätzlichen Viskosität – im vorliegenden Fall mit dem sehr simplen und in den meisten Ingenieursanwendungen verwendeten Smagorinsky-Subgrid-Scale-Modell berechnet – an die aufgelösten Skalen zurückgegeben. Eine Modellierung findet also nur auf Skalen unterhalb der Gitterweite statt, siehe Abbildungen 2.1 und 2.2. Beim traditionellen k - ϵ -Turbulenzmodell hingegen werden sämtliche turbulenten Skalen modelliert, nur sehr große Skalen werden teilweise dargestellt. Dies hat den Vorteil, dass eine wesentlich gröbere Gitterweite und damit Zeitschrittweite möglich ist, und somit, trotz zweier zusätzlich benötigter Erhaltungsgleichungen für turbulente ki-

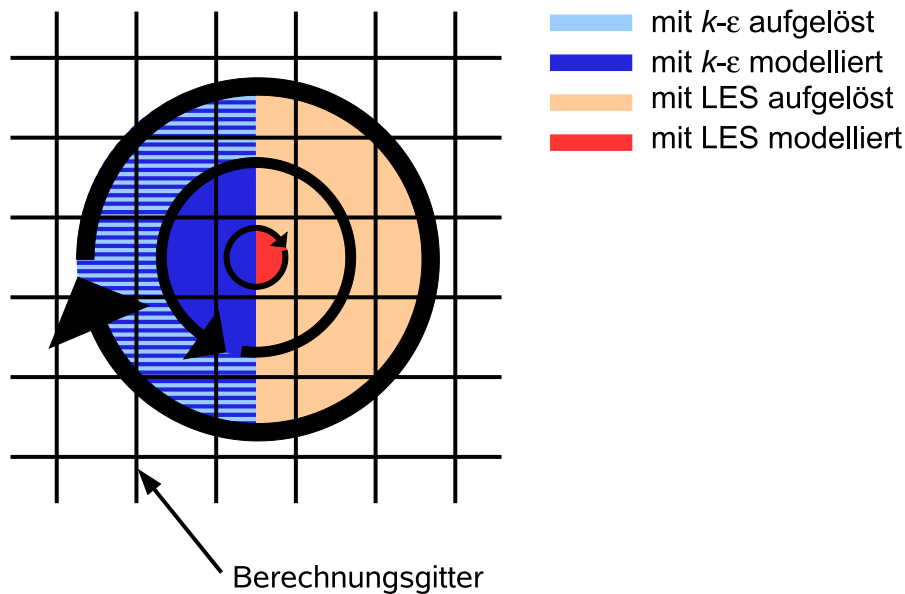


Abbildung 2.1: Modellierungsgrad der Turbulenzmodelle für Wirbel bzw. Turbulenz unterschiedlicher Größenordnung.

netische Energie und deren Dissipationsrate, der Berechnungsaufwand üblicherweise wesentlich niedriger ist. Zudem können, im Gegensatz zu LES, stationäre Simulationen durchgeführt werden. Dieses geht freilich zu Lasten der Genauigkeit hinsichtlich der pseudo-diffusiven, d.h. turbulenzinduzierten Transportprozesse. Es muss deshalb anhand der jeweiligen Aufgabenstellung entschieden werden, welche Art der Turbulenzmodellierung die günstigere ist.

Bezüglich weiterer Details der Turbulenzmodellierung, Diskretisierung der Differentialgleichungen sowie der iterativen Lösungsverfahren sei auf die weiterführende Literatur verwiesen [6,13,19,57,61,95]. Details zu den jeweils eingesetzten Methoden und Algorithmen werden in den Kapiteln 4.4 und 5.2 genannt.

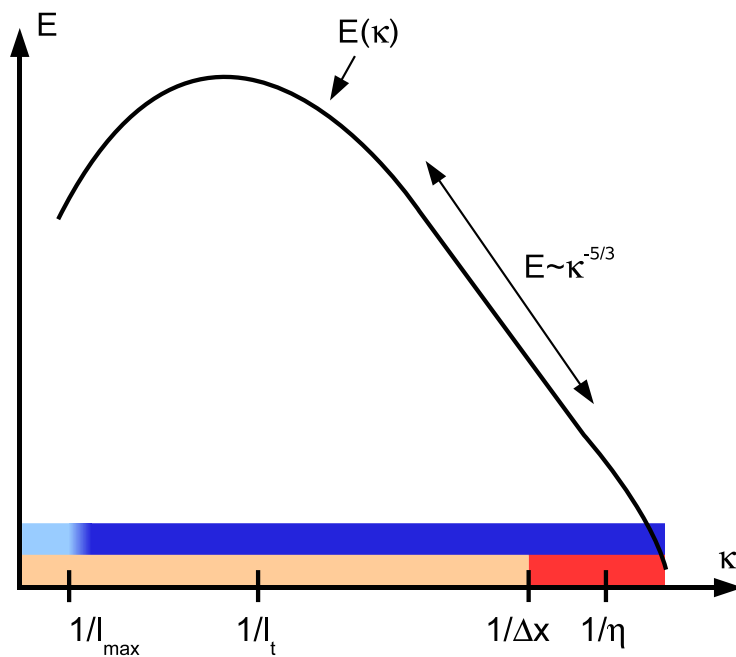


Abbildung 2.2: Modellierungsgrad (gleiche Farbcodierung wie in Abb. 2.1) der Turbulenzmodelle für unterschiedliche Bereiche des turbulenten Energiespektrums. Mit E =turbulente Energie, κ =turbulente Wellenzahl, l_{\max} =größte turbulente Skalen, l_t =integrales turbulentes Längenmaß, Δx =Gitterweite (bzw. Filtergröße) und η =Kolmogorovmaß.

2.1.2 Grundsätzliche Bemerkungen zur Akustik

Schallwellen sind bei freier Ausbreitung kleine Schnelle- und Druckschwankungen und, mit der Kompression einhergehend, geringe Dichte- und Temperaturschwankungen, die sich mit einer charakteristischen Geschwindigkeit (der Schallgeschwindigkeit) ausbreiten. In Hohlräumen (geschlossen oder offen) kann es durch Reflexion an den Enden zu stehenden Wellen kommen, die mit einer der Eigenfrequenzen der jeweiligen Geometrie schwingen und aus der Überlagerung einer Druck- und einer Geschwindigkeitswelle bestehen.

Aus den Erhaltungsgleichungen für Masse (2.2), Impuls (2.3) sowie der Zustandsgleichung (2.1) lässt sich über Linearisierung unter Vernachlässigung der Viskosität die eindimensionale homogene ¹Wellengleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p' - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (2.8)$$

für Druckschwankungen in einem, sich mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} bewegendem, Medium herleiten [73]. Über deren Lösung lassen sich die, einer stationären Strömung überlagerten, akustischen Wellen mit wenig numerischem Aufwand berechnen. Der Apostroph bei p' in Gleichung (2.8) zeigt eine Schwankungsgröße an, in diesem Fall also eine Druckschwankung. Die Schwankung einer Größe ist dabei immer die Differenz zwischen dem momentanen Wert und einem Mittelwert, also in diesem Fall dem mittleren Druck an der Stelle x . Diese Notation wird auch für den gesamten Rest der Arbeit verwendet, mittlere Größen werden dabei durch einen Balken über der Variablen angezeigt, also z.B. \bar{u} . Somit gilt allgemein für eine beliebige Variable Φ :

$$\Phi = \Phi_{\text{mittel}} + \Phi_{\text{Schwankung}} = \bar{\Phi} + \Phi'. \quad (2.9)$$

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung (2.8) lautet

$$\frac{p'(x, t)}{\rho c} = f(x - (c + \bar{u})t, 0) + g(x - (c - \bar{u})t, 0), \quad (2.10)$$

¹Eine Herleitung für die inhomogene Wellengleichung mit Anregung in Form einer Wärmequelle findet sich z.B. bei Hathout [22]

wobei die so genannten Riemann Invarianten f und g Funktionen beliebiger Form sind. Diese haben die interessante Eigenschaft, dass sie sich, ohne ihre Form zu verändern (also invariant), auf den Charakteristiken $x/t = c + u$ bzw. $x/t = -c + u$ durch den von x und t aufgespannten Raum bewegen. Anschaulich gesprochen: sie bewegen sich in einem geraden Rohr, im verlustfreien Fall, ohne ihre Form zu verändern, von links nach rechts (f) bzw. rechts nach links (g) mit Schallgeschwindigkeit plus bzw. minus der mittleren Geschwindigkeit. Aus diesem Grund sollen alle weiteren akustischen Betrachtungen und Berechnungen in dieser Arbeit auf Basis von f und g stattfinden, mit denen sich wesentlich angenehmer arbeiten lässt als mit p' und u' .

Üblicherweise rechnet man in der Akustik stehender Wellen mit f und g als harmonischen Wellen, so dass sich die allgemeine Lösung präzisiert zu

$$\frac{p'(x, t)}{\rho c} = \hat{f}e^{i\omega t - ik_+x} + \hat{g}e^{i\omega t + ik_-x}, \quad (2.11)$$

mit den komplexen Amplituden \hat{f} und \hat{g} , der Kreisfrequenz ω , den Wellenzahlen $k_+ = \omega/(c + \bar{u})$ sowie $k_- = \omega/(c - \bar{u})$ und der zeitabhängigen harmonischen Schwingung $e^{i\omega t + i\phi} = \sin(\omega t + \phi) + i \cos(\omega t + \phi)$ der Kreisfrequenz ω mit Phasenverschiebung ϕ . Theoretisch können im akustischen Feld beliebige Frequenzen enthalten sein, so dass die Lösung im Allgemeinen aus einer Überlagerung rechter Seiten von Gleichung (2.11) besteht.

Aus der linearisierten Impulsgleichung (ohne Viskosität) lässt sich für die Geschwindigkeitsschwankungen analog herleiten:

$$u'(x, t) = \hat{f}e^{i\omega t - ik_+x} - \hat{g}e^{i\omega t + ik_-x}. \quad (2.12)$$

Mit den Gleichungen (2.11) und (2.12) lassen sich umgekehrt die Bestimmungsgleichungen für f und g aus einem Strömungsfeld darstellen:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{p'(x, t)}{\rho c} + u'(x, t) \right) \\ g(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{p'(x, t)}{\rho c} - u'(x, t) \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Wegen des, in beiden Zusammenhängen benutzten, Begriffs „Schwankung“ und der naheliegenden Verwechselbarkeit soll an dieser Stelle eine Klarstellung des Unterschieds zwischen akustischen und turbulenten Schwankungen stehen. Die Schwankungen von Druck und Geschwindigkeit der akustischen Wellen weisen im Normalfall, so auch in allen in dieser Arbeit betrachteten Fällen, wesentlich größere Längenskalen als die turbulenten Schwankungen und im Gegensatz zu diesen eine, sehr hohe, charakteristische Ausbreitungsgeschwindigkeit c auf, so dass sie nicht mit diesen verwechselt werden dürfen. Für die turbulente Strömungssimulation handelt es sich bei der Akustik um Abweichungen des momentanen Zustands von einem mittleren Zustand über einen weiten Bereich, auch wenn diese Abweichungen schnell fluktuieren. Die akustischen Schwankungen dehnen sich über viele Kontrollvolumen des numerischen Diskretisierungsgitters und auch über viele turbulente Längenskalen aus. Nicht zuletzt aufgrund der schwachen Gradienten werden sie nicht von Turbulenzmodellen erfasst. Turbulenz und Akustik sind sowohl in der Simulation, als auch in der realen Physik im linearen Bereich zumeist als getrennte Phänomene zu betrachten, zwischen denen kein nennenswerter Energietransfer stattfindet. Eine Ausnahme stellt die kohärente Wirbelablösung dar [85]. Lärm, der durch turbulente Grenzschichten erzeugt wird [89] („Ohr im Wind“), hat für die in dieser Arbeit betrachtete lineare Rohrakustik – außer als breitbandige Anregungsquelle – keine Bedeutung.

Jedoch kann – auch wenn Turbulenz und Akustik als getrennte Phänomene nebeneinander, oder besser gesagt einander überlagert, existieren – die sauber getrennte Identifikation beider Phänomene eine große Herausforderung darstellen. Denn es sind zwar wie eingangs beschrieben, die Längenmaße und Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Akustik und Turbulenz bei niedrigen Machzahlen von unterschiedlicher Größenordnung, die Frequenzen – also Zeitskalen – und Amplituden von sowohl Druck- als auch Geschwindigkeitsschwankungen sind aber häufig von ähnlicher oder gleicher Größenordnung. Während in einer kompressiblen CFD mit Turbulenzmodell sämtliche Schwankungen der Akustik zugeordnet werden können, muss sowohl im Experiment [59] als auch in der LES [34,86] auf Charakteristiken-basierte Filter zurückgegriffen werden.

2.2 Thermoakustik

Nach Rayleigh [76], kann eine selbsterregte Instabilität in einem thermoakustischen System dann auftreten wenn „... heat be given to the air at the moment of greatest condensation“. Das bedeutet, in dem Moment, in dem während einer akustischen Schwingung die größte Dichte herrscht (also wenn die Druckschwankung ihr Maximum erreicht), muss (mehr) Wärme freigesetzt werden um die akustische Schwingung anzuregen². Diese Bedingung kann mathematisch folgendermaßen formuliert werden:

$$\text{Instabilität kann auftreten, wenn } \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega} \dot{Q}'(t) p'(t) dt > 0, \quad (2.14)$$

wobei $\dot{Q}'(t)$ für Abweichungen, von der mittleren Wärmefreisetzung $\bar{\dot{Q}}$ steht, so dass $\dot{Q}(t) = \bar{\dot{Q}} + \dot{Q}'(t)$ wie in Kapitel 2.1.2 beschrieben. Dieses Rayleigh-Kriterium der Thermoakustik (2.14) besagt, dass durch die Interaktion von instationärer Wärmefreisetzung und akustischen Schwankungen Wärmeenergie in akustische Energie gewandelt wird, wenn die Schwankungen der Wärmefreisetzung und des Drucks zumindest teilweise in Phase sind. Für das Entstehen der Instabilität ist also eine Schwankung der sonst stationären Wärmefreisetzung eines Verbrennungs- oder Heizungssystems nötig [7]. Diese kann verschiedene Ursachen von Fluktuationen in der Brennstoffzufuhr [42,69], periodischer Wirbelablösung [64], Schockwellen [50] oder Entropiewellen [70] haben [25]. Eine direkte Beeinflussung des konvektiven Wärmeübergangs durch kleinste akustische Geschwindigkeitsschwankungen tritt am Rijke-Rohr auf [23,78], dieses wird auch in Kapitel 4 dieser Arbeit eingehend untersucht.

Dieser grundlegende Anregungsmechanismus der Thermoakustik kann, bei entsprechender Wechselwirkung zwischen Randbedingungen, Wärmefreisetzungsmechanismus und möglichen Eigenfrequenzen, zu den einleitend angesprochenen akustischen Schwingungen sehr hoher Amplitude führen. Gängige Vorhersagemethoden wurden ebenfalls bereits in der Einleitung genannt,

²Ähnlich einer Wärmekraftmaschine, die dann Wärme in kinetische Energie umsetzen kann, wenn diese dem Arbeitsmedium bei erhöhtem Druck zugeführt wird

eine ausführliche Zusammenfassung und aktuelle Literaturübersicht über Grundlagen, Anregungs- und Dämpfungsmechanismen sowie Vorhersagemethoden findet sich u.a. bei Ibrahim et al. [25]. Liljenberg [44], Swift [92] oder McManus et al. [50] fassen ebenfalls die grundlegenden Mechanismen und Problemstellungen zusammen. Baade [7] weist auf den Unterschied zwischen Resonanz und selbsterregter Schwingung hin, der eine Stabilitätsanalyse thermoakustischer Systeme nur anhand der Resonanzfrequenzen nicht generell möglich macht.

2.3 Netzwerkmodellierung

Die Definition der Riemann-Invarianten in Kapitel 2.1.2 ermöglicht nun die Stabilitätsanalyse eines zu thermoakustischen Instabilitäten neigenden Systems mittels eines Netzwerkmodells.

Beispielhaft wird hierzu das Verbrennungssystem einer Gasturbine betrachtet, welches aus Luftversorgung, Brenner, Flamme und Brennkammer besteht. Dieses kann als lineares Netzwerkmodell, siehe Abb. 2.3, dargestellt werden, welches aus einer Reihe von Modulen besteht, die über zwei Anschlüsse auf jeder Seite Informationen über rechts- bzw. linkslaufende Wellen mit ihren Nachbarmodulen austauschen. Diese Vierpol genannten Module stellen die einzelnen oben genannten Elemente des Systems dar. Mathematisch gesehen wird jeder Vierpol durch eine so genannte Transfermatrix beschrieben, deren Koeffizienten die akustischen Variablen $(p'/\rho c, u')$ oder, äquivalent dazu, die charakteristischen Wellenamplituden (f, g) an den Schnittstellen der Elemente miteinander verbinden [11, 36]. Hieraus ergibt sich unter Einbeziehung entsprechender Randbedingungen an den Enden des Netzwerks ein homogenes Gleichungssystem

$$\mathbf{S} \vec{x} = 0, \quad (2.15)$$

mit dem Vektor der Unbekannten $\vec{x} = (\hat{f}_1, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_N)$. Ausführliche Beschreibungen und Beispiele finden sich in [11, 16, 30, 66, 82]. Über die Bestimmung der Nullstellen der Determinante der Systemmatrix, $\det(\mathbf{S}) = 0$, lassen sich die Eigenfrequenzen ω_n des Systems bestimmen.

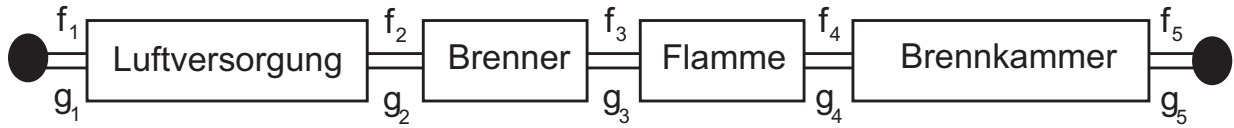


Abbildung 2.3: Netzwerkmodell eines Verbrennungssystems, bestehend aus Luftversorgung („Plenum“), Brenner, Flamme, und Brennkammer. Die Unbekannten des Modells sind die charakteristischen Wellenamplituden f_i und g_i an den „Knoten“ des Netzwerks. Randbedingungen können als Reflexionskoeffizienten $r_i(\omega) = \hat{f}_1/\hat{g}_1$ am Einlass bzw. $r_o(\omega) = \hat{g}_5/\hat{f}_5$ am Auslass dargestellt werden.

Diese Eigenfrequenzen sind im Allgemeinen komplexe Zahlen, deren Imaginärteil die Stabilität bestimmt: Mit der Zeitabhängigkeit $\sim e^{i\omega t}$, bedeutet ein positiver Imaginärteil $\Im(\omega_n)$ ein exponentielles Abklingen der n -ten Eigenmode, d.h. Stabilität. Entsprechend gilt das Gegenteil für einen negativen Imaginärteil. Die Wachstumsrate kann für die Eigenfrequenz bestimmt werden mittels (siehe Anhang E):

$$\Gamma \equiv \exp \left\{ -2\pi \frac{\Im(\omega_n)}{\text{Re}(\omega_n)} \right\} - 1. \quad (2.16)$$

Die Wachstumsrate gibt an, um welchen Bruchteil die Amplitude einer Eigenfrequenz pro Zyklus wächst bzw. schrumpft. So bedeutet z.B. eine Wachstumsrate von $\Gamma = 0.02$ ein Anwachsen von 2% pro Umlauf.

2.4 Methoden der Regelungstechnik zur thermoakustischen Stabilitätsanalyse

2.4.1 Anwendung des Nyquistkriteriums

Über das Nyquistkriterium der Regelungstechnik [24, 28, 52] kann auf grafische Art die Stabilität eines Regelkreises bestimmt werden. Dabei wird die Übertragungsfunktion G des aufgeschnittenen Regelkreises ermittelt und

dessen Ortskurve betrachtet. Anhand der Bestimmungsgleichung

$$G(\omega) + 1 = 0 \quad (2.17)$$

für die Eigenfrequenzen ω_n , lässt sich dann eine Stabilitätsaussage treffen. Polifke et al. [71, 82] haben, in Anlehnung an dieses Verfahren, eine Methode vorgestellt, mit der sich auf effiziente Weise die Eigenfrequenzen thermoakustischer Systeme bestimmen lassen.

Soll die Stabilitätsanalyse an einem Netzwerkmodell durchgeführt werden, so muss, um die Analogie zur Regelungstechnik herzustellen und ein Äquivalent zur Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises zu erhalten, das Netzwerkmodell nun „aufgeschnitten“ werden. Dies kann für Netzwerke beliebigen Aufbaus durch Einsetzen eines so genannten Dummy-Elements erreicht werden [71, 82]. Wie in Abbildung 2.4 dargestellt, werden zwei der vier Verbindungsglieder einfach „kurz geschlossen“, im Beispiel gilt $\hat{g}_d = \hat{g}_u$, während das zweite Paar keine Verbindung hat. Es ist hier zu beachten, dass durch das Einsetzen des Dummy-Elements das homogene Gleichungssystem (2.15) in ein inhomogenes Gleichungssystem $\mathbf{S}' \vec{x}' = b$ verwandelt wird, für dessen rechte Seite gilt $b = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Jetzt kann die OLTF des thermoakustischen Systems mittels des Dummy-Elements definiert werden als:

$$G(\omega) \equiv -\frac{\hat{f}_u}{\hat{f}_d}. \quad (2.18)$$

Das Minuszeichen ist aus Gründen der Konvention zur Wahrung der Analogie zur Regelungstechnik beibehalten worden, so dass sich das im Folgenden beschriebene Verfahren völlig analog auch ohne Minuszeichen herleiten ließe. Hier wird ein großer Vorteil der Riemann Invarianten gegenüber den physikalischen Schwankungsgrößen p' und u' besonders deutlich, denn prinzipiell ließe sich die OLTF auch mit diesen bestimmen. Während dann bei der Wahl des Ortes des Dummy-Elements aber darauf geachtet werden müsste auf keinen Fall in die Nähe eines Druck- bzw. Geschwindigkeitsknotens zu kommen (der ja im vorhinein nicht bekannt ist) um Singularitäten zu vermeiden, so ist die Wahl des Ortes des Dummy-Elements bei f - g -Notation weitgehend beliebig. Bevorzugt sollte dennoch ein Ort in einem geraden Rohr in einiger Entfernung von dessen Enden gewählt werden.

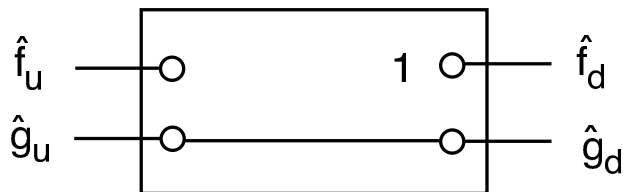


Abbildung 2.4: Dummy-Element.

An dieser Stelle sollen kurz die in der vorliegenden Arbeit benutzten Notationen der akustischen Transfermatrizen erläutert werden, die sich durch die Form der miteinander in Verbindung gesetzten akustischen Variablen unterscheiden. Die eben schon genannte f - g -Notation setzt die rechts und linkslaufenden Wellen zueinander in Relation, wie auch in Abbildung 2.4 dargestellt. Alle in dieser Arbeit beschriebenen Netzwerkmodelle arbeiten mit dieser Formulierung. Sie ist besonders intuitiv und durch die Vermeidung von Singularitäten auch mathematisch gut zu handhaben. Werden direkt die physikalischen Schwankungsgrößen p' und u' in Relation gesetzt, so wird im Folgenden von p - u -Notation gesprochen, oder, wenn die Druckschwankungen über ρc normalisiert sind, also $p'/\rho c$ und u' in Relation gesetzt werden, von p^* - u -Notation. Diese Form der Transfermatrizen ist von Vorteil, wenn ein genauere Blick auf die zugrundeliegende Physik derselben geworfen werden soll. Sämtliche Formulierungen lassen sich mit wenig Aufwand ineinander überführen, siehe Anhang B.

Für eine beliebige, vorgegebene Frequenz ω lassen sich nun die Lösungen $\vec{x}'(\omega)$ des inhomogenen Gleichungssystems mit Dummy-Element berechnen. Dabei werden die Werte zu beiden Seiten der aufgeschnittenen Verbindung im Allgemeinen ungleich sein, d.h. $\hat{f}_d \neq \hat{f}_u$. Für jede Eigenfrequenz ω_n , gilt jedoch $\hat{f}_d = \hat{f}_u$, d.h. die akustischen Variablen zu beiden Seiten des Schnitts gleichen sich und das System verhält sich quasi so, als sei der Schnitt nicht vorhanden, womit Gleichung (2.18) anschaulich erklärt ist. Daraus folgt, dass Gleichung (2.18) eine Abbildungsvorschrift darstellt, die jede Eigenfrequenz des homogenen Systems (2.15) auf den so genannten kritischen Punkt -1 projiziert, d.h. $G(\omega_n) = -1$ für jede Eigenfrequenz ω_n . Dieser wichtigen Eigenschaft der OLTF kommt im Folgenden hohe Bedeutung zu.

Zwar ist das Äquivalent zur OLTF der Regelungstechnik nun definiert, das klassische Nyquistkriterium kann jedoch nicht direkt auf ein thermoakustisches System in der vorliegenden Beschreibungsweise angewendet werden. Die harmonische Zeitabhängigkeit wird hier durch $e^{i\omega t}$ ausgedrückt und der Imaginärteil der Kreisfrequenz ω bestimmt somit das Stabilitätsverhalten. Für ein stabiles System muss deshalb die Bedingung erfüllt sein, dass sich keine Eigenfrequenz ω_n in der unteren Hälfte der komplexen Ebene befindet. Die reelle Achse ist also die Begrenzungslinie zwischen Stabilität und Instabilität und folgerichtig wird nun die reelle Achse der ω -Ebene mittels der OLTF auf die $G(\omega)$ -Ebene abgebildet. Polifke et al. [71, 82] haben weiterhin beschrieben, wie aus der so entstehenden Ortskurve in ähnlicher Weise wie in der Regelungstechnik anhand der Nyquist-Ortskurve das Stabilitätsverhalten eines Systems bestimmt werden kann. Dieses modifizierte Nyquistkriterium ist zwar mathematisch nicht in letzter Konsequenz zu beweisen, wurde jedoch anhand einer Reihe von Beispielfällen, für die die komplexen Eigenfrequenzen mittels des Gleichungssystems (2.15) berechnet werden konnten, erfolgreich validiert [71, 82].

Die Methode fußt maßgeblich auf einer Eigenschaft analytischer Funktionen: Eine analytische Funktion ist lokalkonform, d.h. sie bildet überall dort, wo ihre Ableitung ungleich Null ist, Winkel und Orientierung im lokalen Bereich unverändert ab [29, 52]. Man betrachte nun die OLTF $G(\omega)$ als konforme Abbildung von der ω -Ebene auf die G -Ebene (siehe Abbildung 2.5). Die reelle Achse $\Im(\omega) = 0$ in der ω -Ebene (linker Graph) und ihr Bild in der G -Ebene (rechter Graph) sind durch die fette, gestrichelte Linie mit Pfeilspitze dargestellt. Nach Gleichung (2.18) werden alle Eigenfrequenzen (die Nullstellen der charakteristischen Gleichung (2.17)) ω_n auf den kritischen Punkt -1 abgebildet. Da durch die konforme Abbildung $\omega \rightarrow G(\omega)$ die Orientierung erhalten bleibt, wird der Punkt -1 auf der linken (bzw. rechten) Seite der Ortskurve liegen, wenn sich die entsprechende Eigenfrequenz ω_n über (bzw. unter) der reellen Achse in der komplexen ω -Ebene liegt also einen positiven (bzw. negativen) Imaginärteil hat.

Diese Überlegungen legen das folgende modifizierte Nyquistkriterium nahe: Man betrachte das OLTF-Abbild (die Ortskurve) der positiven Hälfte der

reellen Achse $\omega = 0 \rightarrow \infty$ in der $G(\omega)$ -Ebene, wie in Abbildung 2.5 ausschnittsweise dargestellt. Bewegt man sich nun mit steigender Frequenz ω , beginnend bei 0 entlang der Ortskurve, so trifft man bei jedem Vorbeilauen am kritischen Punkt -1 auf eine Eigenfrequenz ω_n (in Abbildung 2.5 ist nur beispielhaft ein Umlauf dargestellt). Liegt der kritische Punkt rechts der Ortskurve, wobei die Orientierung durch die Richtung des Umlaufs bestimmt wird, der nicht unbedingt, wie dargestellt, immer im Uhrzeigersinn stattfinden muss, was jedoch in allen in dieser Arbeit betrachteten Beispielen nicht vorkommt, so ist die zugehörige Eigenfrequenz instabil, denn sie liegt unterhalb der reellen Achse in der ω -Ebene. Umgekehrt gilt, dass eine stabile Eigenfrequenz vorliegt, wenn der kritische Punkt links der Ortskurve liegt. Läuft die Ortskurve genau durch den kritischen Punkt, so liegt eine grenzstabile Eigenfrequenz ohne Wachstum oder Verlust vor. Der in Abbildung 2.5 dargestellte Fall repräsentiert also eine instabile Eigenfrequenz. Eine äquivalente Beschreibung für regelungstechnische Systeme findet sich bei Merz und Jaschek [52].

Das so modifizierte Kriterium stellt sicherlich eine, im Gegensatz zum klassischen Nyquistkriterium, sehr intuitiv zu verstehende grafische Methode zur Stabilitätsanalyse dar. Wie bereits angemerkt ist es jedoch nicht mathematisch geschlossen beweisbar. Zudem gilt es nicht für eventuell nicht-analytische bzw. nicht-differenzierbare Bereiche aufgrund der dort nicht gegebenen Konformität der Abbildung.

2.4.2 Genaue Bestimmung der komplexen Eigenfrequenzen aus der Ortskurve

Mit der bisher beschriebenen Vorgehensweise ist es möglich, den ungefähren Realteil der Eigenfrequenzen zu bestimmen und das Stabilitätsverhalten qualitativ zu beurteilen. Die direkte Bestimmung des genauen Wertes der komplexen Eigenfrequenzen ist so jedoch noch nicht möglich. Dieser ließe sich über eine iterative Lösung von Gleichung (2.17) ermitteln, was jedoch in keiner Weise numerisch einfacher und stabiler wäre als die iterative Lösung des Gleichungssystems (2.15).

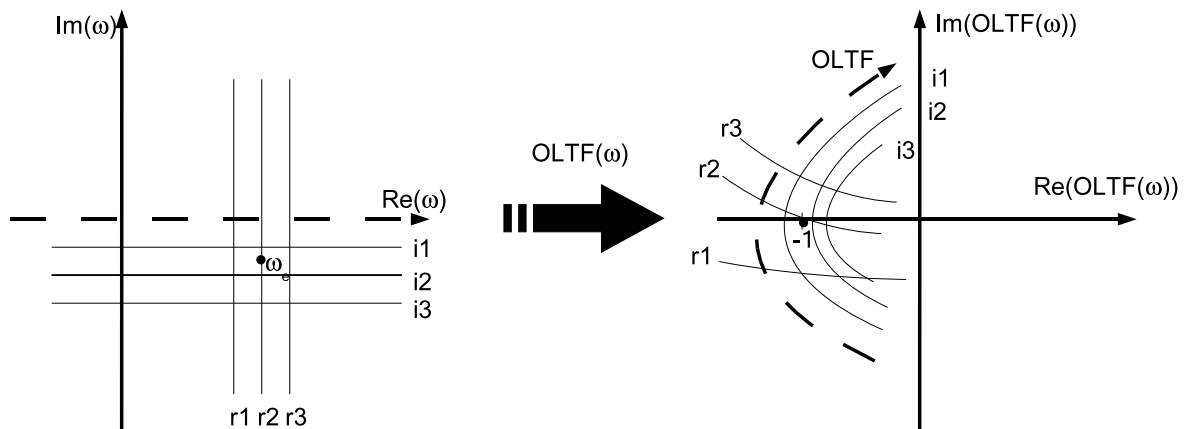


Abbildung 2.5: Konforme Abbildung $\omega \rightarrow G(\omega)$ der reellen Achse mittels der OLTF für eine instabile Eigenfrequenz.

Die im Schrifttum teilweise propagierte Ansicht, dass der Schnittpunkt der Ortskurve mit der reellen Achse direkt die Frequenz und sein Abstand zum kritischen Punkt die Wachstumsrate einer Eigenfrequenz angibt, erscheint zwar auf den ersten Blick als intuitiv einleuchtend und ist zudem sehr einfach umzusetzen, führt jedoch zu verschobenen oder gänzlich falschen Resultaten und ist mathematisch zu widerlegen [46, 47, 82]. Die bei der Interpretation der Ortskurve genutzte Konformität, d.h. die lokale Erhaltung von Orientierung und Winkeln unter der Abbildung $G : z \rightarrow G(z)$, weist jedoch den Weg zu einer möglichen Lösung. Sie legt nahe, dass ein orthogonales Gitter von Linien konstanten Real- oder Imaginärteils auch wieder auf ein orthogonales Gitter in der Bildebene abgebildet wird. Anders ausgedrückt: unter einer konformen Abbildung wird die Umgebung jedes Punktes gedreht, gestreckt oder gestaucht wie in Abbildung 2.5 dargestellt [29].

Diese Interpretation der Konformität legt die Möglichkeit nahe, sowohl die Frequenz als auch die Wachstumsrate einer Eigenfrequenz aus der OLTF bzw. deren Ortskurve zu bestimmen:

1. Der Realteil der Eigenfrequenz entspricht näherungsweise der Frequenz ω für die der Abstand zwischen der Ortskurve und dem kritischen

Punkt -1 pro Umlauf sein Minimum erreicht.

2. Ihr Imaginärteil $\Im(\omega_n)$ entspricht dem jeweiligen Minimalabstand des kritischen Punktes von der Ortskurve geteilt durch den lokalen Skalierungsfaktor der Abbildung.

Der Skalierungsfaktor kann näherungsweise bestimmt werden, indem untersucht wird, wie ein Intervall $(\operatorname{Re}(\omega_n) - \Delta\omega; \operatorname{Re}(\omega_n) + \Delta\omega)$, auf ein Segment $G(\operatorname{Re}(\omega_n) - \Delta\omega) \rightarrow G(\operatorname{Re}(\omega_n) + \Delta\omega)$ der Ortskurve abgebildet wird. Der Skalierungsfaktor entspricht dann dessen Bogenlänge geteilt durch $2\Delta\omega$.

Eine noch genauere Möglichkeit, die komplexe Eigenfrequenz mittels der Ortskurve zu bestimmen, die auf dem Identitätssatz der Analysis fußt, wurde von Polifke und Sattelmayer entwickelt [83]. Aus dem Identitätssatz kann abgeleitet werden, dass ein Näherungspolynom der Ortskurve, welches die Abbildungsvorschrift $G(\omega)$ mit guter Genauigkeit für einen lokalen Bereich rein reeller Frequenzen $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, mit $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ darstellt, auch für komplexwertige Frequenzen $\omega \in \mathbb{C}$ in der Umgebung von ω gilt, also auch deren Abbildung durch die OLTF repräsentiert.

Diese Überlegungen legen die Bestimmung der komplexen Eigenfrequenzen auf folgende Weise nahe: ein Näherungspolynom $P_G(\omega) = g_m\omega^m + \dots + g_0$ an die Ortskurve wird gebildet, welche diese in der Umgebung des kritischen Punktes, d.h. in der Umgebung einer Eigenfrequenz ω_n darstellt. Nun kann über einen numerischen Nullstellensucher diejenige Frequenz ω^* gesucht werden, für die das Näherungspolynom $P_G(\omega^*) = -1$ ist. Wenn die Ortskurve nicht in zu großem Abstand am kritischen Punkt vorbeiläuft, so gilt nun $\omega_n \approx \omega^*$.

Dieses Verfahren ist, obwohl es auch einen Nullstellensucher benötigt, numerisch wesentlich weniger aufwändig und wesentlich stabiler als die direkte iterative Bestimmung der Eigenfrequenzen nach (2.15), da lediglich ein Polynom niedriger Ordnung (meist reicht ein Polynom zweiter Ordnung um die Ortskurve anzunähern) gelöst werden muss. Ein großer Vorteil gegenüber der direkten iterativen Bestimmung ist zudem, dass genau alle im betrachteten Frequenzbereich liegenden Eigenfrequenzen gefunden werden. Bei jedem Vorbeigehen am kritischen Punkt muss eine Eigenfrequenz liegen.

Bei der direkten Lösung des Gleichungssystems ist dies keinesfalls gegeben. Abhängig von der Steifigkeit desselben, dem Vorhandensein lokaler Minima und der Güte des numerischen Nullstellensuchers können zu viele, unphysikalische oder auch zu wenige Eigenfrequenzen gefunden werden. Es ist auch bemerkenswert, dass durch Verwendung der OLTF komplexe Eigenfrequenzen eines akustischen Systems aus der Ortskurve bestimmt werden können, welche für rein reelle Frequenzen $\omega \in \mathbb{R}$ berechnet wurde. Dies ist eine sehr wichtige Eigenschaft der beschriebenen Methode, denn erst dadurch wird die zuverlässige Bestimmung komplexer Eigenfrequenzen für Systeme, die rein für reelle Frequenzen ermittelte Transfermatrizen beinhalten, ermöglicht. Auch die zentrale Methode dieser Arbeit, die als wichtigen Baustein eine CFD-Rechnung beinhaltet, siehe folgendes Kapitel 3, benötigt diese Eigenschaft.

3 CFD-unterstützte Bestimmung der OLTF

Wie in der Einleitung angesprochen, haben die gängigen Methoden zur theoretischen Stabilitätsuntersuchung per Netzwerkmodellierung oder CFD eine Reihe von Nachteilen. Umgekehrt hat aber auch jede Methode ihre speziellen Vorteile.

So lassen sich beim Netzwerkmodell zwar sofort beliebige komplexe Randbedingungen realisieren und die benötigte Rechenleistung ist beinahe vernachlässigbar gering, es müssen aber zunächst die akustischen Übertragungsfunktionen für alle Teilelemente bestimmt werden. Während sich diese für einfache Geometrien – wie gerade Rohre oder Standardrandbedingungen – theoretisch herleiten lassen, müssen sie für komplexere Geometrien und Abschlußbedingungen entweder experimentell oder numerisch bestimmt werden. Eine experimentelle Bestimmung ist gerade für geometrisch komplexe, neu entwickelte Bauteile normalerweise nicht möglich, da die Stabilitätsanalyse per Simulation in einer frühen Designphase stattfindet, um eben das kostenintensive Redesign und häufige Herstellen von Prototypen zu vermeiden. Somit können diese auch nicht vermessen werden. Auch die Bestimmung aus CFD-Simulationen ist nicht immer, oder nur mit erheblichem Aufwand möglich [3, 59, 72].

Die Akustik nicht-kompakter, turbulenter Flammen, das Antwortverhalten von Flammen auf hydrodynamische Instabilitäten und Störungen oder kohärente Wirbelablösung sind nur einige Beispiele für akustische Quellen, die sich nur schwer funktional in einer Transfermatrix darstellen lassen können [50]. Auch gemischte Randbedingungen, z.B. die stromauf eines Brenners liegenden Luft- und Brennstoffzuführungsleitungen, lassen sich in einem Netzwerkmodell nicht darstellen bzw. nur unter Schwierigkeiten mo-

dellieren.

Bei der CFD-Simulation hingegen stellt diese Randbedingung kein Problem dar. Die – normalerweise dünnen – Zuführungsleitungen lassen sich mit wenigen Gitterzellen darstellen. Beliebige komplexe Geometrien lassen sich realisieren, so auch konisch zulaufende Rohre oder solche mit axialem Temperaturgradient, die Teilreflexionen aufweisen. Ganz allgemein gesprochen, lässt sich der Einfluss von turbulenten Strukturen, Wirbelablösungen, Flammen, Entropiewellen und anderer komplexer Vorgänge auf die Akustik bei der CFD-Simulation – im Rahmen der verwendeten Modelle – detailliert darstellen. Je höher die Detailgenauigkeit ist, umso höher ist freilich auch der zu erbringende Rechenaufwand, was direkt zum Hauptnachteil der CFD-Simulation führt: gerade bei detailliert zu untersuchenden Vorgängen, bei denen beispielsweise LES zum Einsatz kommt, ergeben sich oft nicht vertretbare Rechenleistungsanforderungen. Sollen beispielsweise bei einem kompletten Gasturbinenbrenner alle relevanten turbulenten Strukturen räumlich und alle akustischen Wellen zeitlich aufgelöst werden, so ergibt sich leicht ein Rechenzeitbedarf in der Größenordnung von Monaten – selbst auf einem leistungsfähigen modernen Clustersystem. Komplexwertige Randbedingungen für die CFD sind Gegenstand aktueller Forschungen und stellen eine große Herausforderung dar, während sie im Netzwerkmodell problemlos umgesetzt werden können. Ein weiterer Nachteil von reinen CFD-Berechnungen zur Eigenfrequenzbestimmung ist die Unmöglichkeit, gedämpfte Moden zu identifizieren. Zwar stellen diese in der Praxis nicht unmittelbar ein Problem dar, können aber – vorausgesetzt ihre Wachstumsrate ist nur mäßig negativ – durch geringfügige geometrische Änderungen oder Energietransfer von Nachbarmoden schnell instabil werden. Somit sind sie für den Entwickler durchaus von Interesse.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war es deshalb, ein Simulationswerkzeug zu entwickeln, das die Vorteile beider Methoden kombiniert und dabei möglichst alle Nachteile vermeidet. Durch Einbindung des abgewandelten Nyquistkriteriums wird eine neue Methode geschaffen, die die heutigen Anwendungsgrenzen von Simulationswerkzeugen in der Betrachtung thermoakustischer Instabilitäten signifikant erweitert.

Im vorangegangenen Kapitel wurde eine Methode vorgestellt, wie das Stabilitätsverhalten eines akustischen Systems anhand der Ortskurve der Übertragungsfunktion eines aufgeschnittenen Netzwerkmodells bestimmt werden kann. Dies setzt natürlich voraus, dass die Transfermatrizen aller Elemente des Netzwerks bekannt sind. Für Fälle, bei denen dies nicht gegeben ist, wird hier eine Hybridmethode vorgestellt, die über eine Kombination von hochauflösender CFD mit einem, mit wenig numerischem Aufwand zu lösenden, Netzwerkmodell die OLTF berechnet. Im Folgenden wird das Konzept der Methode anhand des Beispiels eines einfachen Verbrennungssystems dargestellt.

Das Beispielmmodell besteht aus einem langen Plenum, einem Brenner und der Brennkammer, wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Die akustische Randbedingung am stromaufseitigen Ende sei durch eine komplexwertige, frequenzabhängige Impedanz $Z(\omega) = \hat{p}(\omega)/\hat{u}(\omega)$ gegeben. Am Brennkammeraustritt auf der stromab gelegenen Seite wird ein offenes Ende mit $p' = 0$ angenommen.

Es sei ferner angenommen, dass die Transfermatrix des Brenners, sowie die Frequenzantwort der Flamme auf akustische Schwankungen nicht bekannt seien. Deshalb sollen Brenner, Flamme und damit auch die Brennkammer mit einer hochauflösenden CFD, unter Berücksichtigung von Turbulenz und turbulenter Verbrennung, durch adäquate Modelle simuliert werden. Am stromabseitigen Ende kann dann eine Standardrandbedingung der CFD in Form konstanten Drucks implementiert werden. Wie in Abbildung 3.1 dargestellt, beginnt das Berechnungsgebiet der CFD am Ort x_C stromauf des Brenners. An dieser Stelle wird eine akustisch nicht-reflektierende Randbedingung als stromabseitiges Ende der CFD gesetzt, die gleichzeitig das Aufprägen einer externen akustischen Anregung $f_d(t)$ ermöglicht, siehe Abbildung 3.1. Wird nun eine zeitabhängige Simulation mit breitbandiger Anregung durchgeführt, so genügt eine simulierte Zeit von wenigen Zyklen der niedrigsten Frequenz, um die akustische Antwort $\hat{g}_d(\omega)$ auf das Anregungssignal $\hat{f}_d(\omega)$ mittels Fast-Fourier-Transformation (FFT) zu bestimmen.

Das Verhältnis $\hat{g}_d(\omega)/\hat{f}_d(\omega)$ kann als Frequenzantwort des Systems, bestehend aus Brenner und Brennkammer (inklusive Flamme), gesehen werden,

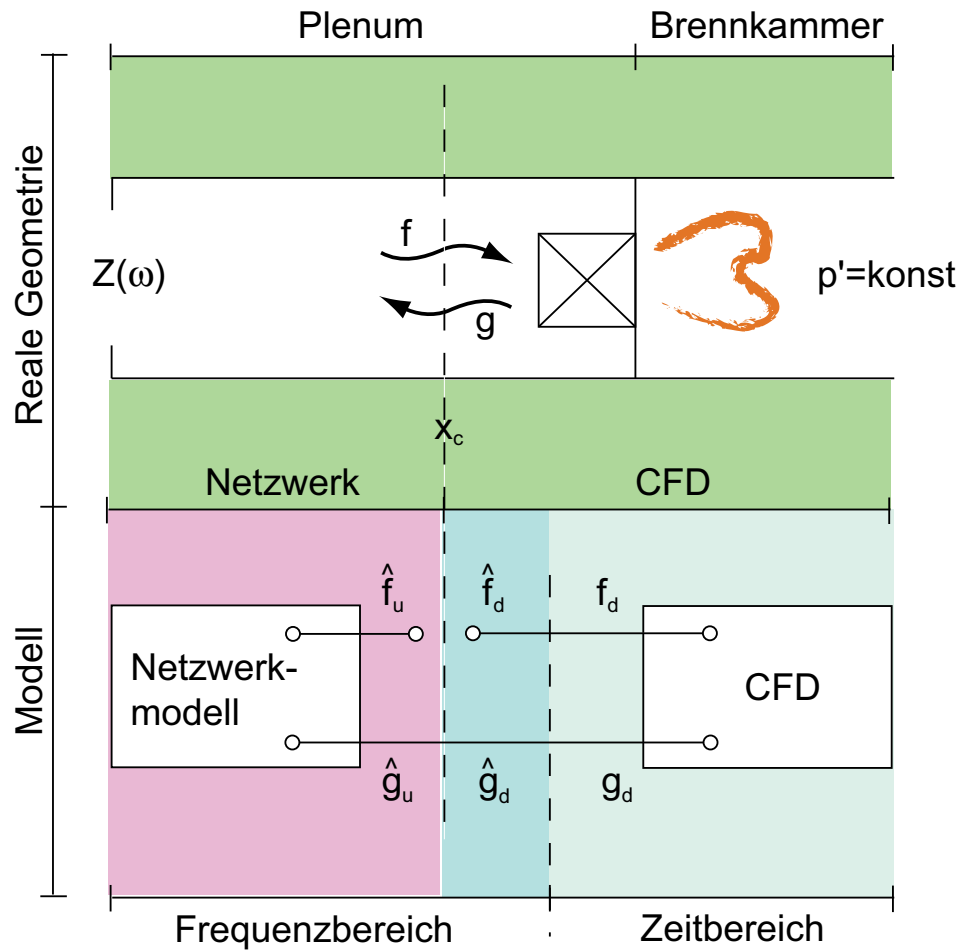


Abbildung 3.1: Der Hybridansatz zur Bestimmung der OLTF. Oben: Verbrennungssystem mit Plenum, Brenner, Flamme, Brennkammer und Brennkammeraustritt. Unten: Systemmodell bestehend aus dem CFD-Modul (rechts) und dem Netzwerkmodell (links). Die OLTF wird bestimmt über $G = -\hat{f}_u / \hat{f}_d$.

aber es stellt noch nicht die OLTF des Systems dar. Das bedeutet, dass die Daten aus der CFD alleine nicht genügen, um das Stabilitätsverhalten des Systems zu bestimmen. Hierzu ist es nötig, die Elemente stromauf von x_C mit einem Netzwerkmodell darzustellen, womit der Pfad von \hat{f}_d zu \hat{f}_u geschlossen wird und letzteres berechnet werden kann. Die Übertragungsfunktion des offenen Systems kann nun als $G(\omega) = -\hat{f}_u(\omega)/\hat{f}_d(\omega)$ bestimmt und die Stabilitätsanalyse sowie die Bestimmung der Eigenfrequenzen, wie in den Abschnitten 2.4.1 und 2.4.2 beschrieben, durchgeführt werden. Ein Flussdiagramm dieser Vorgehensweise ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Wie auch in Abbildung 3.1, ist hier verdeutlicht, welcher Teil der Gesamtprozedur im Zeitbereich und welcher im Frequenzbereich „lebt“.

Ganz offensichtlich geht aus dieser Beschreibung hervor, dass die Schnittstelle zwischen CFD und Netzwerkmodell an der Stelle x_C dem Schnitt im Dummy-Element eines kompletten Netzwerkmodells entspricht, d.h. das System wurde an dieser Stelle „aufgeschnitten“. Ohne diesen Schnitt, und damit die Darstellung auch nur eines kleinen Teils der Gesamtgeometrie mittels eines Netzwerkmodells, ist die Anwendung der vorgeschlagenen Methode nicht möglich. Da die Methode Elemente aus CFD und Netzwerkmodellierung enthält, sowie auf dem Nyquistkriterium basiert, soll sie im Folgenden als CNN bezeichnet werden.

Zusammenfassend gesagt, ist CNN eine neue Methode der Stabilitätsanalyse, welche viele für die Akustik relevante Vorgänge, die in einem Netzwerkmodell nur schwer darstellbar sind, direkt per CFD simuliert. Umgekehrt werden Effekte, die in der CFD schwierig zu simulieren sind vom Netzwerkmodell abgedeckt. Die hohe Effizienz gegenüber anderen Ansätzen ergibt sich aus der letztendlichen Bestimmung der Eigenfrequenzen durch die Koppelung der CFD mit einem Netzwerkmodell und der Vermeidung der experimentellen bzw. numerischen Transfermatrizenbestimmung.

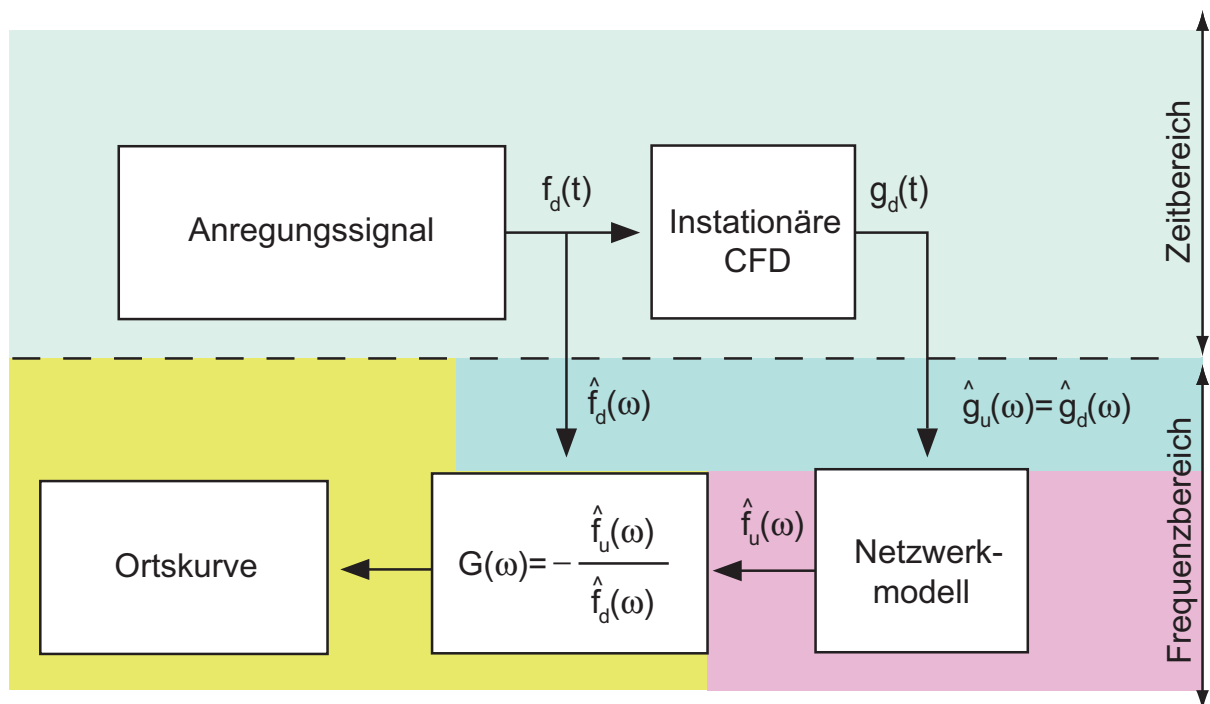


Abbildung 3.2: Flussdiagramm zur CFD-unterstützten Bestimmung der OLTF.

4 Validierung der CNN-Methode am Rijke-Rohr

Um die CNN-Methode zu demonstrieren und zu validieren, wurde als erster Anwendungsfall ein Rijke-Rohr als Beispiel für einen einfachen thermoakustischen Resonator gewählt, da sich hierfür ein analytisches Netzwerkmodell als numerischer Vergleichsfall herleiten lässt. Eine Herleitung für ein vereinfachtes, einem Rijke-Rohr ähnlichen, Modell findet sich beispielsweise bei [50], eine ausführliche analytische Betrachtung eines idealisierten Rijke-Rohres bei [51]. Zusätzlich wurde ein reales Rijke-Rohr als experimentelle Vergleichsbasis aufgebaut.

Das Rijke-Rohr ist das vielleicht einfachste System, das selbsterregte thermoakustische Instabilitäten zeigt. In der Literatur finden sich zahlreich detaillierte Beschreibungen zum Rijke-Rohr [10, 21, 23, 48, 50], deren erste von seinem Namensgeber Rijke [78] bereits aus dem Jahre 1859 stammt, weshalb an dieser Stelle nur eine kurze Zusammenfassung des zugrundeliegenden Mechanismus stehen soll.

4.1 Prinzip des Rijke-Rohrs

Ein Rijke-Rohr in seiner ursprünglichen Form besteht aus einem geraden Rohr, in dessen Inneren sich ein quer zur Längsrichtung orientiertes Drahtgitter befindet. Wird das Drahtgitter aufgeheizt – sei es mittels elektrischen Stroms oder einer direkten Wärmequelle wie einer Flamme – und strömt dann, aufgrund freier oder erzwungener Konvektion, Luft durch das Rohr, so kann es zu einem unter Umständen sehr lauten und deutlich vernehmbaren Ton kommen. Abhängig von der Position des Heizgitters, dessen Wärmeein-

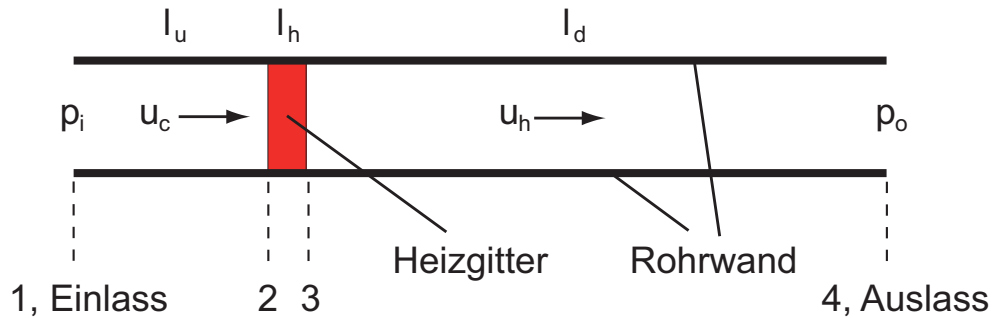


Abbildung 4.1: Rijke-Rohr mit zwei offenen Enden und dem Heizdrahtgitter an der $1/4$ -Position.

trag in die Strömung und den Randbedingungen an den Enden des Rohres, können die akustischen Schwingungen im Inneren des Rohres Amplituden bis zu mehreren 100 Pa erreichen – auch wenn davon außerhalb des Rohres nur ein geringer, an den Rohrenden abgestrahlter, Teil hörbar ist. Die Frequenz des Tons liegt im Allgemeinen sehr nah an einer der „Orgelpfeifen“-Eigenfrequenzen des Rohrs.

Diese thermoakustische Eigenschwingung ist möglich, da im schwingenden Rijke-Rohr das Rayleigh-Kriterium (2.14) erfüllt ist. Dies ist der Fall, weil die Wärmeübertragung vom heißen Draht an die Luft, die durch das Drahtgitter strömt, nicht unmittelbar, sondern mit einem gewissen Zeitverzug τ auf Schwankungen der Strömungsgeschwindigkeit u reagiert [23].

Bei der ersten akustischen Eigenfrequenz in einem durchströmten Rohr mit zwei offenen Enden $p_i = p_o = konst.$ (siehe Abbildung 4.1) folgen die Druckfluktuationen den Geschwindigkeitsfluktuationen mit einem Phasenwinkel von $\pi/2$ in der stromaufseitigen Hälfte des Rohres (siehe Abbildung 4.2) während sie in der stromabseitigen Hälfte den Geschwindigkeitsfluktuationen mit einem Phasenwinkel von $\pi/2$ vorauslaufen. Somit folgen aufgrund des Zeitverzugs sowohl die Wärmefreisetzungsschwankung als auch die Druckschwankung der Geschwindigkeitsschwankung nach, wenn das Heizgitter in der linken (also stromaufseitigen) Hälfte des Rohres platziert wird. In der stromabseitigen Hälfte verhält es sich invers. Bei der zweiten Mode findet dieser Wechsel zwischen Hinterher- und Vorauslaufen nach jedem Viertel der

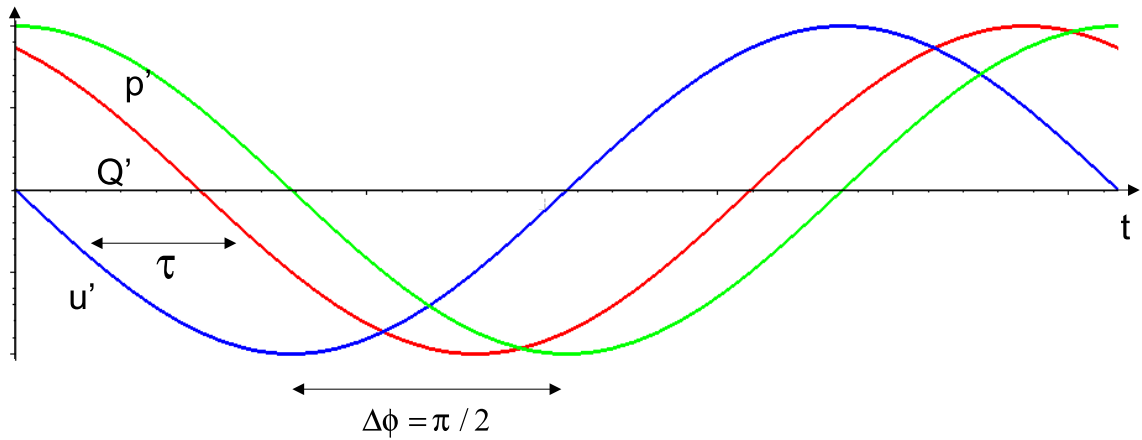


Abbildung 4.2: Druck-, Geschwindigkeits- und Wärmefreisetzungsschwankung als Funktion der Zeit am Ort der Wärmefreisetzung in der stromaufseitigen Hälfte des Rohres.

Rohrlänge statt, bei der dritten Mode nach jedem Sechstel und so weiter.

Bei einem typischen Rijke-Rohr ist der Zeitverzug τ kleiner als ein Viertel einer Schwingungsperiode der ersten Eigenfrequenz $\omega\tau < \pi/2$, somit sind $\dot{Q}'(t)$ und $p'(t)$ nicht genau in Phase. Jedoch gilt, dass solange $0 < \omega\tau < \pi$ ist, die Wärmefreisetzungsschwankung zumindest teilweise mit den Druckschwankungen in Phase und somit das Rayleigh-Integral (2.14) positiv ist. Somit erfolgt eine selbsterregte Schwingung. Deren Amplitude wächst solange, bis nichtlineare Effekte [23] wie die Wärmefreisetzung bei hohen Amplituden und Verluste an den offenen Enden die Anregung kompensieren und der Grenzyklus erreicht wird.

Wird das Heizgitter hingegen in der stromabseitigen Hälfte des Rohres platziert, so zeigt das Rijke-Rohr keine selbsterregten Schwingungen. Hier sind Druckschwankungen und Wärmefreisetzungsschwankung außer Phase und die akustischen Schwingungen werden somit gedämpft.

Für höhere Moden ist die Beschreibung komplizierter, jedoch ist der zugrundeliegende Mechanismus der gleiche: ergänzen sich Wärmefreisetzungsschwankung und Druckschwankung zu einem positiven Rayleigh-Integral (d.h. sie sind

zumindest teilweise in Phase), so kann die zugehörige Frequenz angeregt werden – ist das Rayleigh-Integral negativ, so wird die Frequenz gedämpft.

Dieses Verhalten wurde experimentell, mit einem analytischen Netzwerkmodell und der CNN-Methode untersucht.

4.2 Experimentelle Untersuchungen am Rijke-Rohr

Die CNN-Methode sowie das ebenfalls angewendete Netzwerkmodell sollen die stabilen und instabilen komplexen Eigenfrequenzen eines thermoakustischen Systems vorhersagen. Um die Methoden zu validieren, sollen die Ergebnisse zusätzlich mit experimentellen Daten verglichen werden. Dazu wurde ein Rijke-Rohr-Experiment aufgebaut und vermessen [5,45]. Um eine optimale Vergleichbarkeit der numerischen und experimentellen Ergebnisse zu gewährleisten, ist eine genaue und realitätsnahe Definition der Rahmenbedingungen im numerischen Modell von entscheidender Bedeutung. Dazu gehören: der axiale Temperaturverlauf im Rohr, der die Schallgeschwindigkeit beeinflusst, die tatsächlich an die Luft abgegebene Wärmeleistung des Heizdrahtes, die den Energielieferanten für die Akustik darstellt, die akustischen Reflexionsfaktoren an den Rohrenden sowie die Geschwindigkeit im Rohr, von der gemäß [23, 43] der Zeitverzug zwischen Geschwindigkeitsschwankung und Wärmeabgabeschwankung bestimmt wird. Deshalb sollen zusätzlich zu den akustischen Eigenfrequenzen diese Größen vermessen werden.

Die experimentellen Arbeiten sollten also einerseits Input für die numerischen Modelle liefern und andererseits die Validierung der von diesen gelieferten Ergebnissen ermöglichen. Diese Strategie ist zusammengefasst in Abbildung 4.3 dargestellt.

4.2.1 Experimenteller Aufbau

Das im Experiment verwendete Rijke-Rohr ist in Abbildung 4.4 in Form einer Explosionszeichnung dargestellt. Hier ist auch der modulare, aus vier

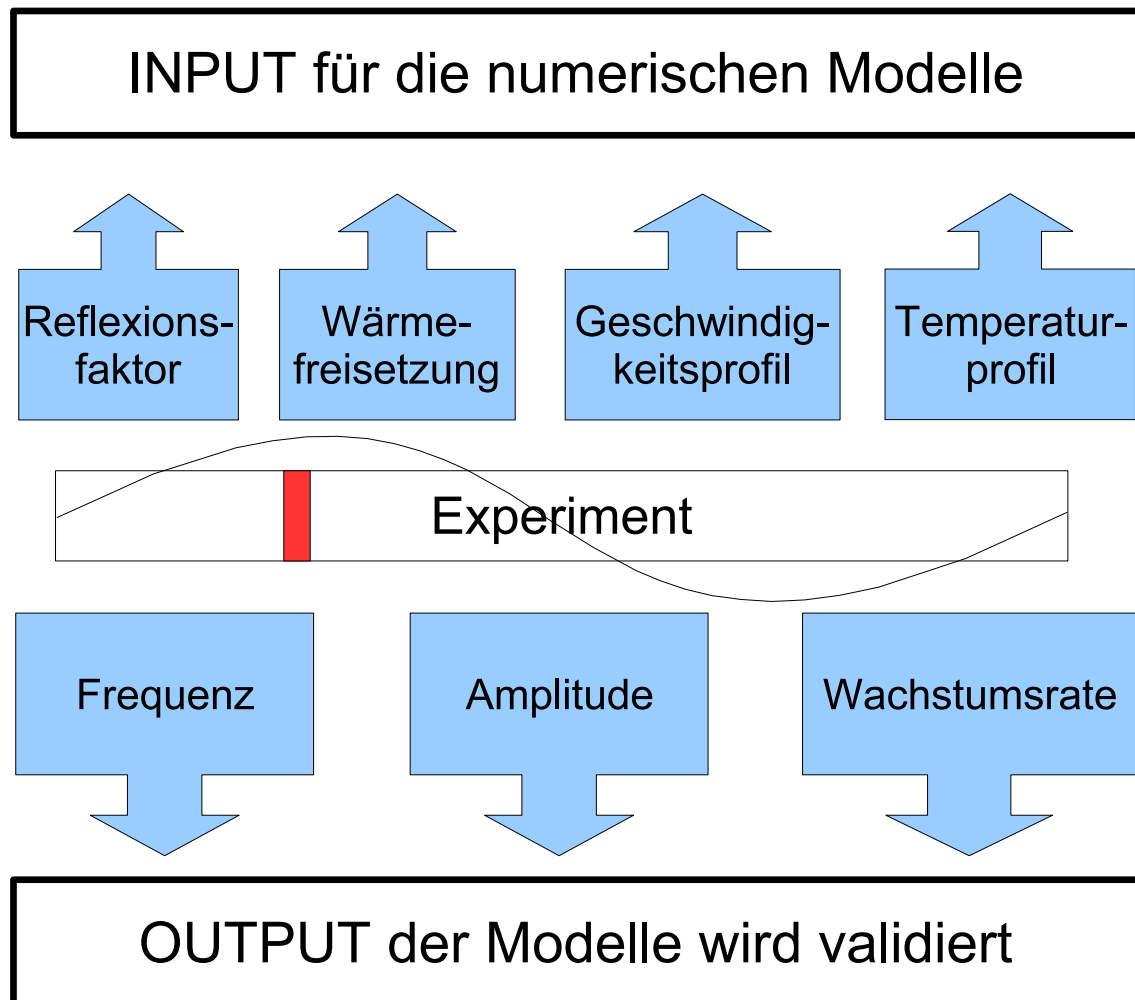


Abbildung 4.3: Verwendung der experimentellen Ergebnisse für Justierung und Validierung der numerischen Modelle

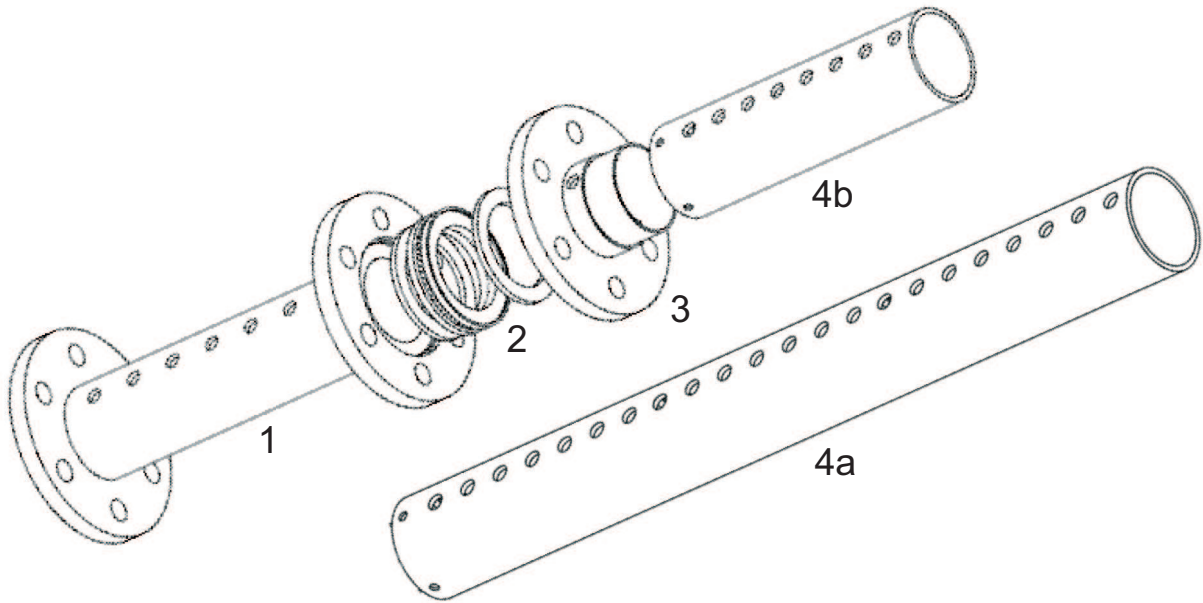


Abbildung 4.4: Explosionszeichnung des Rijke-Rohrs

Teilen bestehende Aufbau erkennbar. In Luftströmungsrichtung gesehen, ist der erste Teil (1) das stromaufseitige (später von kalter Luft durchströmte) Rohrstück von 326 mm Länge. Dieses weist, wie alle anderen Bauteile einen Innendurchmesser von 68 mm auf. Es ist auf beiden Seiten mit einem Flansch ausgestattet, von denen der stromaufseitige die Realisierung einer geschlossenen Randbedingung durch Befestigung einer schalldichten aber strömungsdurchlässigen Platte erlaubt. Der folgende Teil ist ein temperaturfester Keramikring (2) mit einer Längsausdehnung von 22 mm, in den das Heizgitter eingeflochten ist (siehe Abbildung 4.5 und Abschnitt 4.2.2). Auf den Keramikring folgt ein weiterer Flansch (3), der über eine Reihe von Schrauben mit dem stromabseitigen Flansch des stromaufseitigen Rohrstücks verbunden ist und so zur Befestigung des Keramikrings dient. Dieser hat eine Länge von 35 mm. Auf diesen Flansch wird das stromabseitige (also heiß durchströmte) Rohrstück gesteckt. Von diesem gibt es prinzipiell zwei Versionen, eine kürzere (4b, Länge 265 mm) und eine längere (4a, 865 mm). Die kurze Version dient zur Realisierung einer Rijke-Rohr-Konfiguration mit einem akustisch geschlossenen Ende auf der stromauf

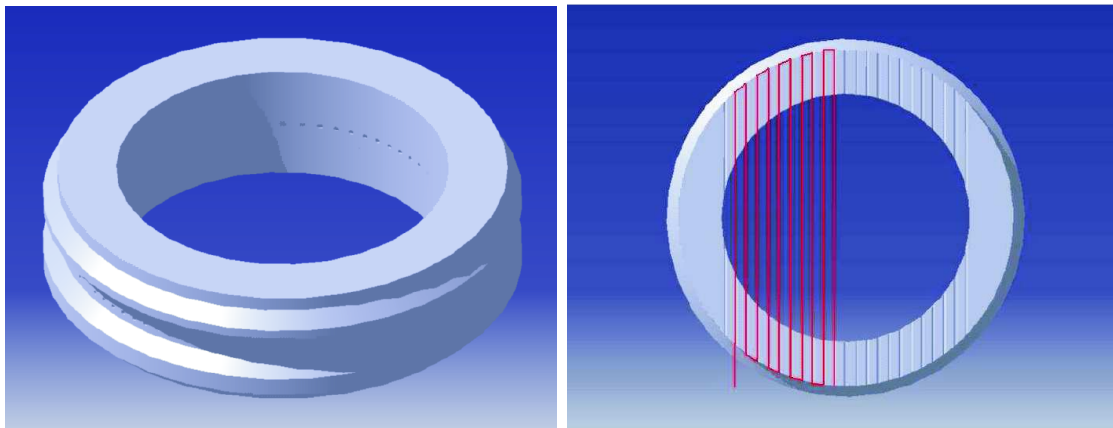


Abbildung 4.5: Elektrisches Heizgitter des Rijke-Rohrs. Links: Keramikring; rechts: Ring mit eingeflochtenem Draht (rot)

gelegenen Seite. Diese Konfiguration wird in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht weiter beschrieben, da sie sich im Experiment aufgrund zu hoher Verluste akustischer Energie am offenen Ende nicht zur Instabilität anregen ließ [45].

In regelmäßigem Abstand sind bei der Version mit dem langen stromabseitigen Rohr insgesamt 26 Messzugänge angebracht, die das Einbringen verschiedener Messfühler bzw. Sensoren erlauben. Im stromaufseitigen Rohr befinden sich bei einem Abstand von 40 mm 8 Stück, im langen stromabseitigen Rohr bei einem Abstand von 50 mm 17 Stück sowie ein weiterer Zugang direkt hinter dem Heizgitter im Zwischenflansch. Ihr Durchmesser von 12 mm und Ihre Länge von 42 mm sind jedoch so dimensioniert, dass Druckmesssonden (siehe Abschnitt 4.2.3) bündig angebracht werden können. Um flexible Messpositionen zu erlauben sind die Zugänge über die gesamte Länge verteilt, jedoch werden gewöhnlich nur wenige benötigt. Die unbenutzten können dann mit speziell angefertigten Verschlüssen luftdicht verschlossen werden, um Verluste akustischer Energie zu vermeiden.

Historisch gesehen [78] wurde die Luftströmung im Rijke-Rohr bei senkrechter Aufstellung desselben durch freie Konvektion über dem Heizgitter erzeugt. Im vorliegenden Experiment zeigte es sich jedoch, dass die dabei entstehende Strömungsgeschwindigkeit zu hoch und damit der Phasenver-

zug, siehe Gleichung (4.11), zu niedrig war. Deshalb wurde das Rijke-Rohr waagrecht betrieben (siehe Abbildung 4.6). Um dennoch sowohl eine Luftströmung als auch wirklich akustisch offene Enden zu realisieren, wurde in einiger Entfernung ein auf den Rohreingang gerichteter Luftstrahl niedriger Geschwindigkeit erzeugt. Durch Probieren ermittelte sich die optimale Konfiguration zu einem Abstand von 150mm und einem sehr dünnen Schlauch von 3 mm Durchmesser. Der resultierende Gesamtaufbau ist systematisch in Abbildung 4.7 dargestellt.

Ein erfolgreicher Betrieb des Rijke-Rohrs setzt zudem absolute Dichtigkeit voraus. Selbst das kleinste Loch oder der kleinste Schlitz kann dazu führen, dass durch Verlust akustischer Energie bzw. Störung der Wandrandbedingung die akustischen Druckfluktuationen im Rohr derart beeinflusst werden, dass keine Instabilität auftritt. Aus diesem Grund wurden alle Kontaktflächen versiegelt. Für die Messzugänge wurde dabei (ebenso wie für die Steckverbindung des stromabseitigen Rohres) Isolierklebeband verwendet, egal ob diese mit einem Verschlussstopfen oder einem Messsensor belegt waren. Die Dichtflächen zwischen dem Keramikring und den Flanschen wurden mit einem speziellen Hochtemperatur-Silikon abgedichtet (siehe Abb. 4.8). Durch Verschließen und Unter-Druck-Setzen des gesamten Aufbaus kann abschließend ein Dichtigkeitstest durchgeführt werden.

Um die Vergleichbarkeit mit späteren CFD-Simulationen zu gewährleisten mussten im Experiment thermische Wandrandbedingungen realisiert werden, wie sie auch in der CFD Standard sind bzw. leicht umgesetzt werden können. Aus diesem Grund wurde versucht, die Rohrwände adiabat zu gestalten. Das stromabseitige Rohr wurde dazu in eine Schicht aus Isolierschaum gehüllt (siehe Abbildungen 4.6 und 4.8). Da stromauf des Heizgitters auf der Innen- und Außenseite des Rohres die gleichen Temperaturen herrschen, tritt kein Wärmestrom durch die Wand auf und dieser Bereich kann somit als adiabat angenommen werden. Es sei jedoch bemerkt, dass diese Adiabasie der Rohrwände einen idealisierten Auslegungsfall darstellt, der in der Praxis – vornehmlich als Folge der Wärmekapazität des Rohres und Wärmeleitung in axialer Richtung – nicht voll erreicht werden kann, siehe Kapitel 4.2.5.4.

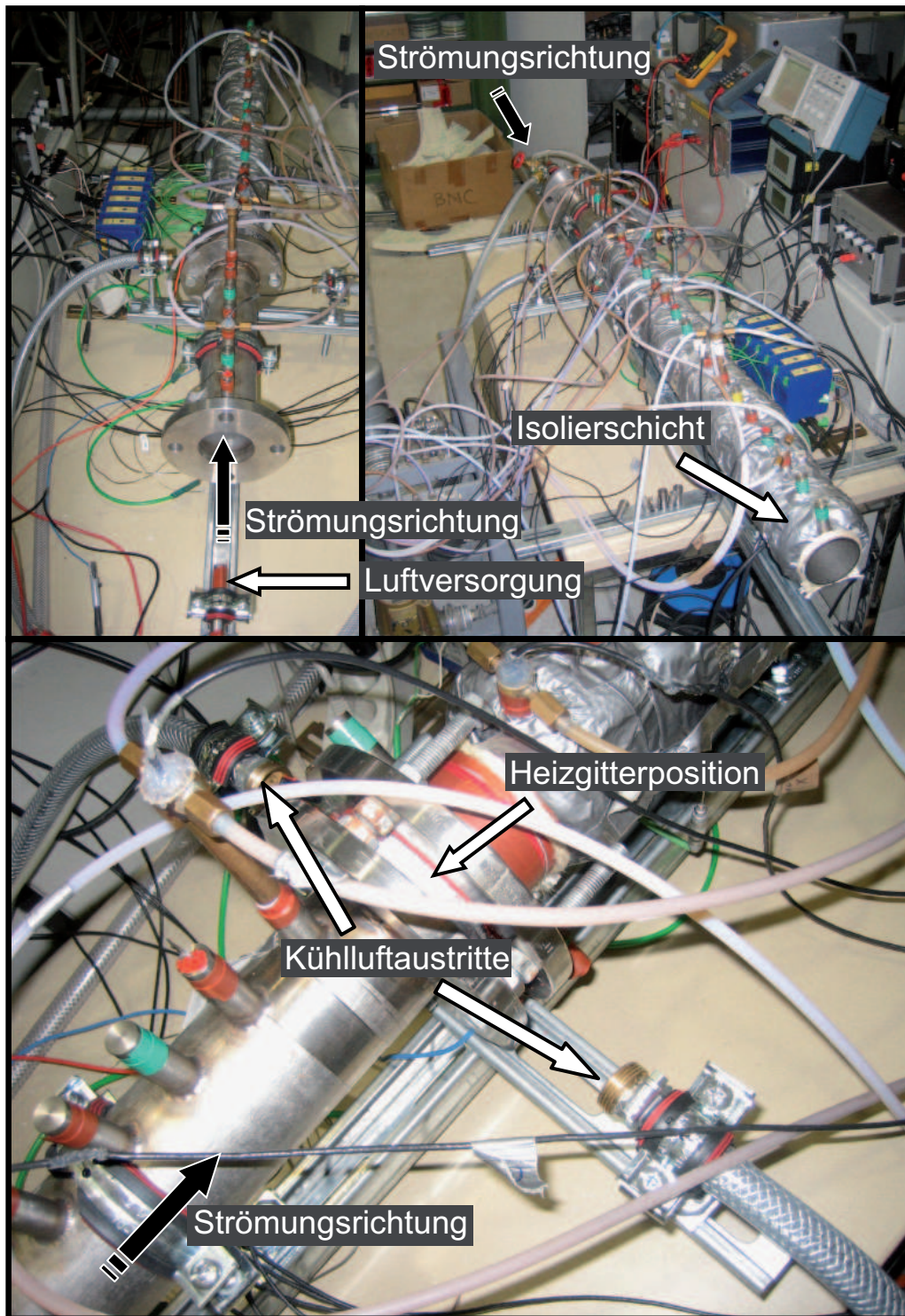


Abbildung 4.6: Gesamter experimenteller Rijke-Rohr-Aufbau inklusive Haltevorrichtung, Luftkühlung und Stromversorgung

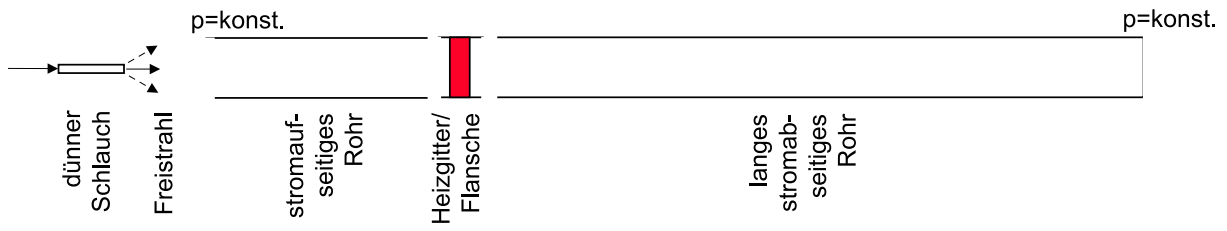


Abbildung 4.7: Funktionale Skizze des gesamten Rijke-Rohr-Aufbaus

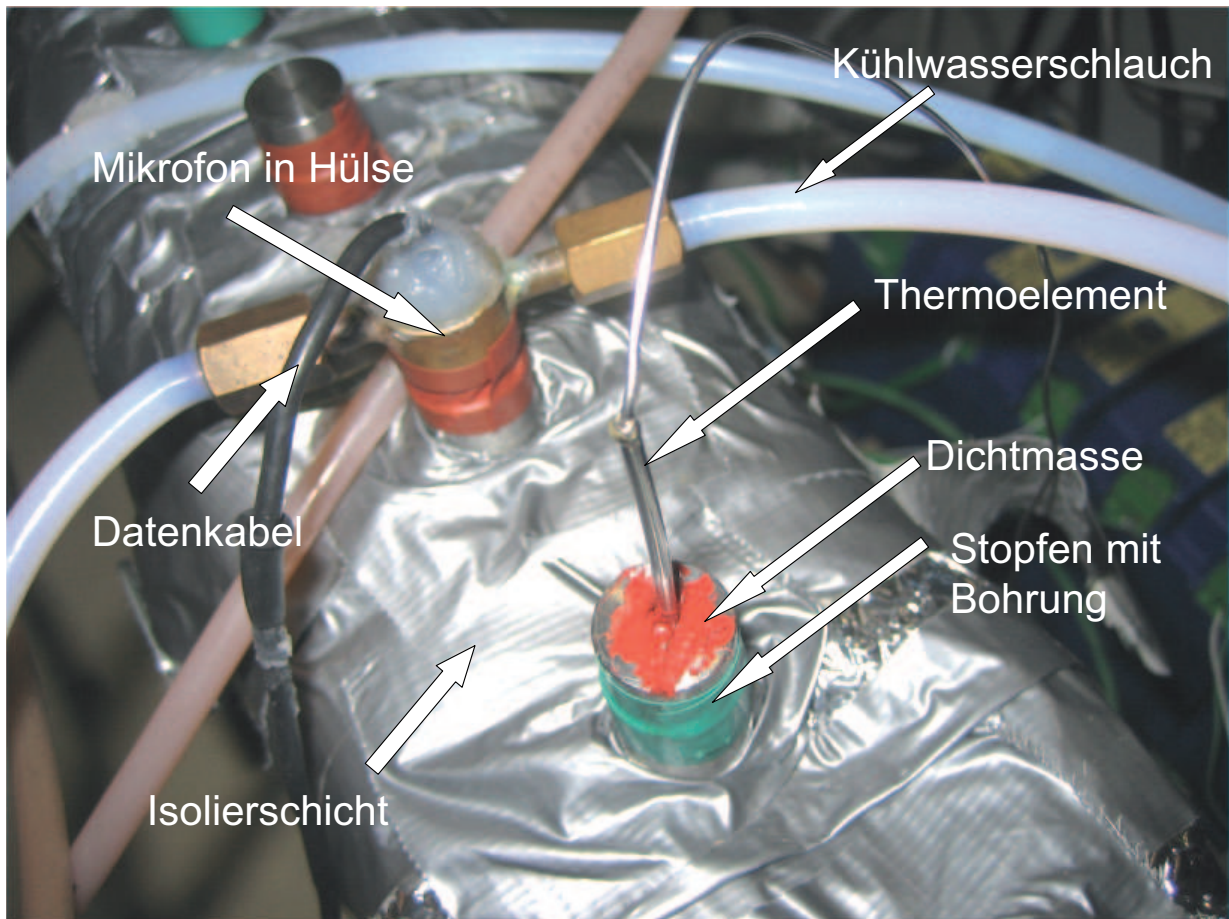


Abbildung 4.8: Detailansicht des stromabseitigen Rohrteils mit Isolierung und Messinstrumenten.

Das im Experiment verwendete Rijke-Rohr wurde somit derart ausgelegt, dass thermoakustische Instabilitäten angeregt werden können, notwendige Messapparatur angebracht werden kann und für eine Modellierung vernünftig umsetzbare Randbedingungen dargestellt sind.

4.2.2 Elektrisches Heizgitter

Die Wärmequelle des Rijke-Rohrs wird über ein von elektrischem Strom durchflossenes Drahtgitter realisiert. Bei genügend hohem Stromfluss wärmt sich der Draht durch Ohm'sches Heizen auf und kann die Wärme wiederum an das ihn umströmende Medium abgeben. Im vorliegenden Experiment wurde Konstantandraht mit einem Durchmesser von 0.5 mm gewählt. Dieser Draht, mit einer Gesamtlänge in der Größenordnung von 1.5 m, wurde in parallelen Schleifen durch einen mit Löchern versehenen, temperaturfesten Keramikring gewunden (siehe Abbildung 4.5 rechte Seite). Ist der Draht durch die Löcher gefädelt, müssen diese ebenfalls abgedichtet werden. Wegen der sehr hohen Temperaturen wird hier eine spezielle selbst-aushärtende Keramikpaste verwendet. Das so entstandene Heizgitter wurde dann, wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, in die Rijke-Rohr-Konfiguration implementiert.

Konstantan wurde als Heizdrahtmaterial gewählt, da es eine vernachlässigbar kleine Abhängigkeit des elektrischen Widerstands von der Drahttemperatur hat. Die relative Abhängigkeit des Widerstands von der Temperatur beträgt $4.6 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$ [37] und liegt damit um ein vielfaches unter der anderer Metalle (zum Vergleich: bei Kupfer liegt der Temperaturabhängigkeitsfaktor α bei $4.0 \times 10^{-3} \text{ 1/K}$). Somit lässt sich über die elektrische Leistung die vom Draht abgegebene Wärmeleistung bestimmen. Denn aufgrund der Tatsache, dass im Konstantandraht überall trotz verschiedener lokaler Temperatur der gleiche elektrische Widerstand herrscht, ist die Wärmeabgabe pro Längeneinheit des Drahtes überall konstant. Auch instationäre Effekte können damit bei Verwendung eines Konstantandrahtes ausgeschlossen werden, denn egal wie hoch die Temperatur der gerade den Draht umströmenden Luft ist, egal wie warm gerade der Keramikring ist mit dem

der Draht in Berührung kommt: die mittlere im Rijke-Rohr abgegebene Wärmeleistung ist in sehr guter Näherung immer direkt proportional dem Anteil der umströmten Drahtlänge zur Gesamtdrahtlänge multipliziert mit der gesamten elektrischen Leistung. „In sehr guter Näherung“ deshalb, weil bei großen Temperaturdifferenzen zwischen Keramikring und Draht ein geringer Wärmestrom in Drahtlängsrichtung in der Nähe des Keramikrings stattfinden kann, dem jedoch hier keine Bewandtnis zugemessen wird. Die direkt vom Draht an die Rohrluft abgegebene Wärmeleistung ist jedoch nicht gleich der gesamten über der freien Drahtlänge abfallenden elektrischen Leistung, da wegen der hohen Drahttemperaturen der Strahlungsanteil nicht vernachlässigt werden kann, siehe Kapitel 4.3.6.

Da ein nicht unerheblicher Teil des Heizdrahtes durch das Innere des Keramikrings geführt wurde, wird hier eine große Wärmemenge freigesetzt, die nicht direkt an die Rohrluft abgegeben, sondern über den Keramikring abgeleitet wird. Dies stellt ein Problem für die spätere Modellierung der Wärmefreisetzung dar. Um deshalb zu verhindern, dass sich dadurch die Rohrwand stromauf und stromab des Heizgitters aufwärmt und schließlich die Wärme über einen weiteren Bereich an die Rohrluft abgibt, was zu einer Abweichung von der Modellvorstellung einer, auf eine Ebene konzentrierten, Wärmefreisetzung führen würde, wurde eine Luftkühlung bestehend aus zwei offenen Druckluftschläuchen installiert, um diese zusätzliche Wärme abzuführen (siehe Abbildung 4.6). Die austretende Druckluft umspült den Heizrahmen im Betrieb mit einem hohen Massenstrom. Um dabei die Druck- und Strömungsverhältnisse an den Rohrenden und damit die empfindliche Rohrakustik nicht zu beeinflussen, wurde deshalb ein Schutzschild integriert (nicht dargestellt), der die durch die aus den Schlauchenden austretende Strömung entstehende Luftbewegung von den Rohrenden fernhielt.



Abbildung 4.9: G.R.A.S. Mikrofon (oben) und in Halte-/Kühlzylinder eingebaut (unten)

4.2.3 Messeinrichtungen

4.2.3.1 Druckmessung

Um die akustischen Eigenschaften des Rijke-Rohrs zu bestimmen, sind zeitlich hochaufgelöste Druckmessungen nötig. Damit können durch Fouriertransformation der aufgenommenen Zeitreihen die auftretenden Frequenzen bestimmt werden. Im vorliegenden Experiment kamen G.R.A.S. Typ 40BP 1/4" Mikrofone (siehe Abbildung 4.9) in Kombination mit einem Typ-26AL Vorverstärker zum Einsatz. Die Mikrofone sind in zylindrische Messinghülsen eingebaut, durch welche Wasser mit einer Temperatur von 60 °C strömt. Dadurch wird gewährleistet, dass die Mikrofontemperatur von der Außentemperatur unabhängig konstant gehalten wird und somit die Kalibrierungscharakteristik nicht verfälscht wird. Die Messinghülsen passen bündig in die längs am Rijke-Rohr angebrachten Messschächte (siehe Abb. 4.8). Die Sensitivität der Mikrofone (Spannungssignal zu Druckänderung)

ist individuell und vom Hersteller vorvermessen. Die Herstellerangabe kann als erster Richtwert gesehen werden, muss aber nochmals nachkalibriert werden (siehe Abschnitt 4.2.3.3). Das vorverstärkte Spannungssignal der Mikrofone wird mit einem Brüel&Kjaer Nexus-Typ-2690-Verstärker auf ein benutzerdefiniertes Spannungssignal-zu-Druckänderungs-Verhältnis verstärkt. Schließlich wird das Spannungssignal mit einem National Instruments 4872 Messaufnehmer A-D-gewandelt und mit dem Softwarepaket „LabView“ weiterverarbeitet.

4.2.3.2 Relative Mikrofonkalibrierung

Um per Multimikrofonmethode [18, 59, 60, 63] die Reflexionsfaktoren zu bestimmen (siehe Abschnitt 4.2.4), ist es, wie zuvor angesprochen, notwendig, die relative Phase und Amplitude der akustischen Fluktuationen exakt und an mehreren Orten gleichzeitig zu messen. Deshalb müssen die Mikrofone relativ zueinander kalibriert werden. In diesem Fall ist mit „Mikrofon“ der gesamte Aufbau aus Mikrofon, Hülse, Kabeln und Verstärkern, also der gesamte Informationspfad von der Druckwelle bis zur Messaufnahme gemeint. Auf dem gesamten Pfad stellen z.B. elektronische Störeinflüsse, Außentemperatureinflüsse und nicht exakt gleiche Maße der Hülsen potentielle Fehlerquellen dar, die bei der Kalibrierung unbedingt mit in Betracht gezogen werden müssen.

Um die Mikrofone relativ zueinander zu kalibrieren, wird eine institutseigene Kalibriervorrichtung (siehe Abbildung 4.10) verwendet. Diese besteht im Wesentlichen aus einem auf einer Seite offenen, massiven Messingrohr mit deutlich größerer Wandstärke als Innendurchmesser, was einerseits Außeneinflüsse minimiert und andererseits ein Mitschwingen der Struktur mit der Akustik verhindert. Am offenen Ende ist bündig ein Lautsprecher angebracht, der im Rohr Schallwellen definierter Frequenz erzeugt. Am anderen Ende sind radial vier Zugangsschächte angebracht, die zum Einbringen der zu kalibrierenden Mikrofone dienen. Das symmetrische Design der Vorrichtung garantiert Schallwellen mit gleicher Amplitude und Phase an allen vier Mikrofonen. Mittels eines Signalgenerators wird nun über den Lautsprecher

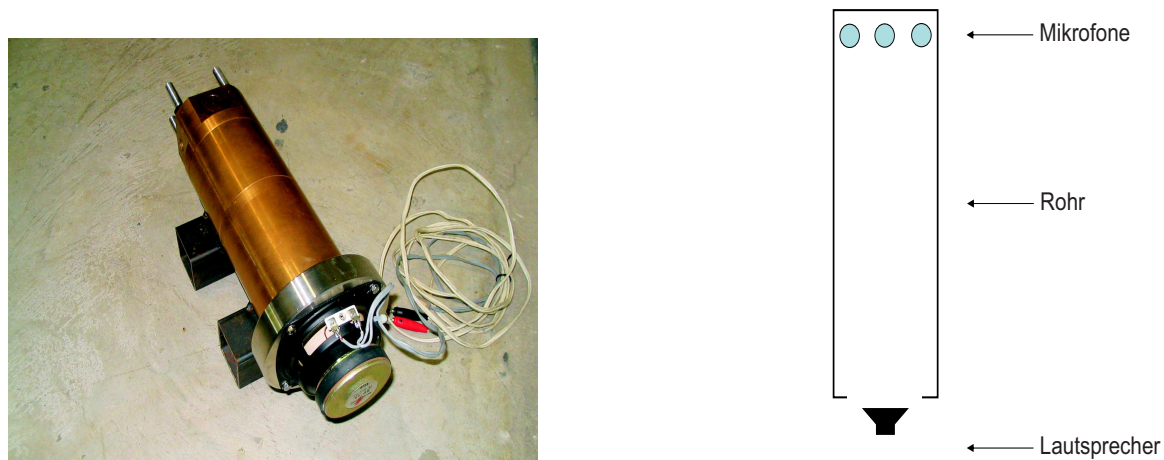


Abbildung 4.10: Vorrichtung zur Mikrofonkalibrierung mit schematischer Draufsicht

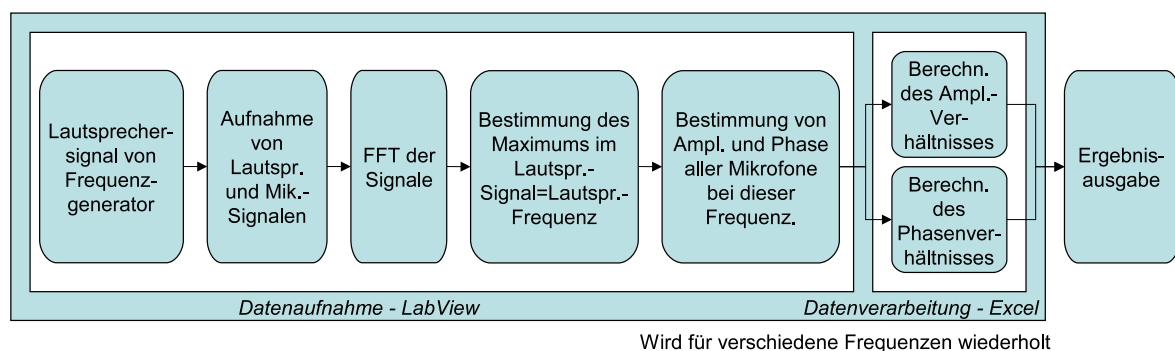


Abbildung 4.11: Flussdiagramm des relativen Mikrofonkalibrierungsprozesses

ein Schallsignal definierter Frequenz erzeugt. Die Messsignale der vier Mikrofone sowie das Eingangssignal des Lautsprechers wurden dann simultan aufgezeichnet. Um diese Daten weiter zu verarbeiten (siehe Abbildung 4.11) wurden sie diskret Fourier-transformiert. Aus dem transformierten Signal des Lautsprechereingangs wurde dann die exakte Anregungsfrequenz ermittelt. Bei dieser Frequenz wurden dann Amplitude und Phase der Mikrofonsignale bestimmt. Ein beliebiges Mikrofon kann als Referenzmikrofon gewählt werden, wodurch die relative Amplitude und Phase der anderen Mikrofone zu diesem (und damit auch zueinander) bei der ermittelten Frequenz

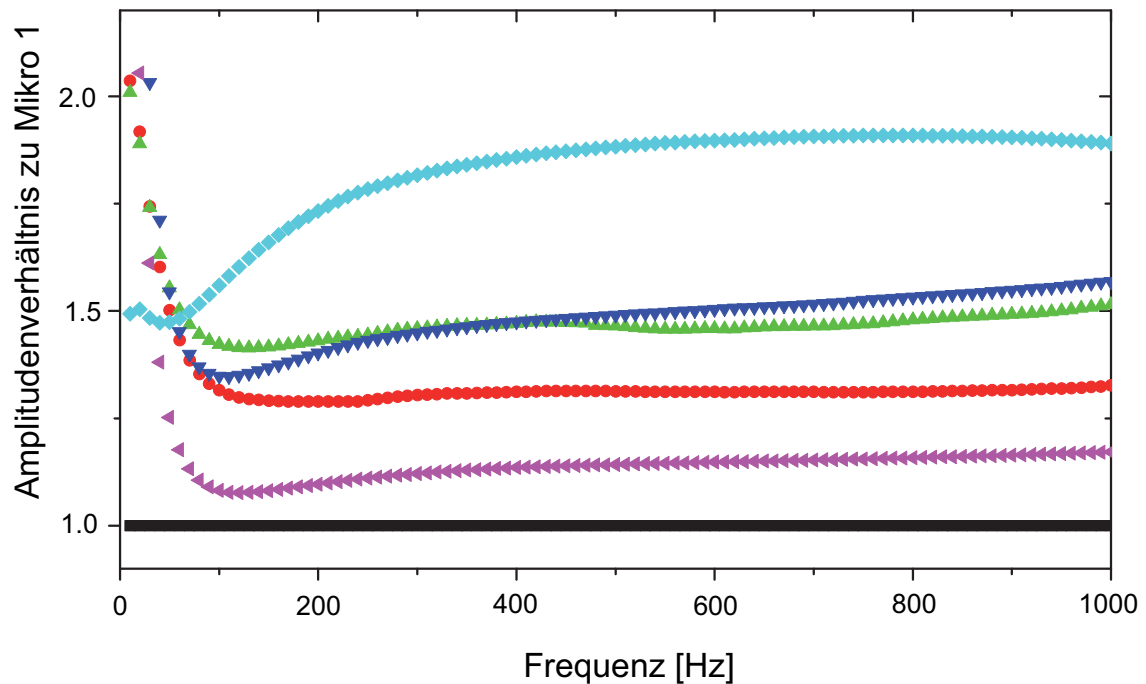


Abbildung 4.12: Relative Kalibrierung von 6 Mikrofonen, Amplitudenverhältnis. Schwarz: Mikrofon 1 (Referenzmikrofon); rot: Mikrofon 2; grün: Mikrofon 3; blau: Mikrofon 4; cyan: Mikrofon 5; violett: Mikrofon 6.

bestimmt werden kann.

Die beschriebene Prozedur wird für den gesamten interessierenden Frequenzbereich wiederholt. Sollen im Experiment mehr als vier Mikrofone verwendet werden, muss die Kalibrierung für die verbleibenden Mikrofone mit dem gleichen Referenzmikrofon wiederholt werden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.12 und 4.13 dargestellt. Die so ermittelten Abweichungen werden anschließend verwendet, um die im Experiment gemessenen Druckwerte zu korrigieren.

In den Abbildungen fällt auf, dass besonders unterhalb von 100 Hz sehr starke Abweichungen auftreten. Dies kann damit erklärt werden, dass die Mikrofone unterhalb dieser Frequenz allgemein nur sehr unzuverlässige Ergebnisse liefern. Dies muss deshalb auch bei allen weiteren Messungen berücksichtigt werden.

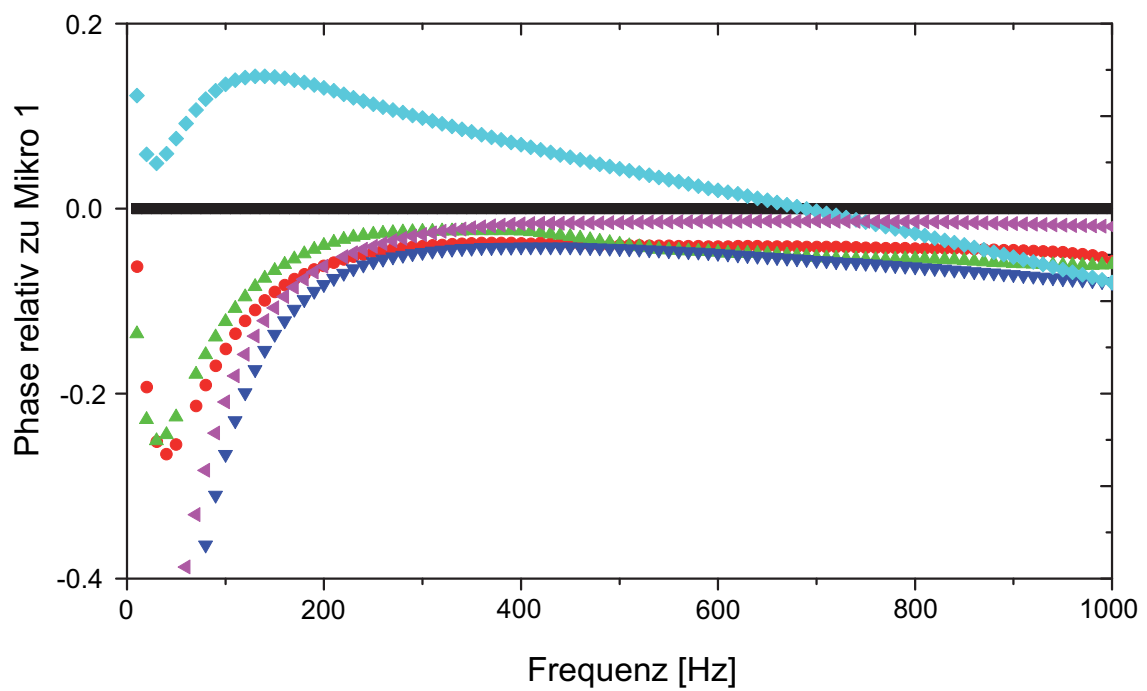


Abbildung 4.13: Relative Kalibrierung von 6 Mikrofonen, Phasenverhältnis

Aufgrund wechselnder Umgebungsluftbedingungen, Veränderung der Mikroföhülsen (z.B. durch versehentliches Herein- oder Herausschrauben bei der Montage, damit einher gehende Änderung der Wegstrecke von der Hülseöffnung bis zum Mikroföhnsensor und damit der Phase des gemessenen Signals), Alterung der Mikrofone, Änderung der Einflüsse auf die Messkabel und -elektronik, etc. ist die Kalibrierungscharakteristik nur temporär gültig und muss vor jedem Experiment neu bestimmt werden.

4.2.3.3 Absolute Mikrofonkalibrierung

Mit der zuvor beschriebenen relativen Kalibrierung ist die Anwendung der Multimikrofonmethode und damit die Reflexionsfaktorenbestimmung möglich, denn hier werden nur relative Werte benötigt. Um aber die absoluten Druckamplituden im Rohr zu messen, muss das Verhältnis zwischen Druckschwankung und Mikrofonsignal ebenfalls kalibriert werden. Dazu wird das oben gewählte Referenzmikrofon mit einer definierten Druckamplitude beaufschlagt. Der so ermittelte Korrekturfaktor kann dann über die relativen Kalibrierungsfaktoren auch auf die übrigen Mikrofone angewendet werden. Zum Einsatz kommt hier ein so genanntes Pistophon, das ein definiertes Schallsignal mit 114 dB Amplitude bei einer Frequenz von 250Hz generiert.

4.2.3.4 Geschwindigkeitsmessung

Die mittlere Geschwindigkeit der Luft im Rohr ließe sich im Prinzip aus dem Massenstrom und der Temperatur bestimmen. Die lokale Lufttemperatur kann über die Thermoelemente, wie in Abschnitt 4.2.3.6 beschrieben, gemessen werden. Der Massenstrom, der durch den dünnen Schlauch fließt und den Luftstrahl erzeugt, der auf die Rohröffnung zielt, wird durch einen Brooks Instrument 5851E Massenstromregler auch exakt festgelegt. Da der Freistrahler aber auf seinem Weg zur Rohröffnung erhebliche Mengen an Umgebungsluft mitreißt [1, 79, 80], ist dieser Massenstrom stark verschieden von demjenigen im Rohr.

Als alternativer Weg wurde deshalb die direkte Bestimmung über Geschwindigkeitsmesssonden, so genannte Thermistoren, gewählt. Thermistoren sind stark temperaturabhängige elektrische Widerstände von sehr kleiner Masse. Diese werden durch einen Konstantstrom (im Experiment mit Hilfe eines Burster Gernsbach Digistant Typ 6426) beheizt und reagieren durch ihre geringe Masse auf Änderungen der Umströmungsgeschwindigkeit eines Mediums niedrigerer Temperatur. Das bedeutet, dass sie bei höherer Geschwindigkeit stärker gekühlt werden und ihre Temperatur sinkt. Der Thermistorwiderstand ist also eine Funktion der Umgebungstemperatur und der Anströmgeschwindigkeit. Diese Funktion muss im vorhinein für relevante Betriebspunkte bestimmt werden (siehe Abschnitt 4.2.3.5). Im vorliegenden Fall wurden Halbleiterthermistoren verwendet, deren Widerstand bei abnehmender Temperatur steigt, so dass der Spannungsabfall über den Thermistor ebenfalls steigt. Dieser Spannungsabfall kann gemessen werden und ist letztendlich ein Maß für die Anströmgeschwindigkeit.

Um mit Thermistoren die mittlere Geschwindigkeit zu bestimmen, muss das radiale Geschwindigkeitsprofil gemessen werden. Dazu wurden drei Thermistoren auf einer dünnen Stange montiert, siehe Abb. 4.14, die über einen Verschlussstopfen bündig in einen der Messschächte eingebracht werden kann. Die einzelnen Thermistoren sind dabei im Abstand von 0, 15 und 29 mm vom Rohrmittelpunkt angebracht. Die Thermistoren sind in Serie geschaltet und werden mit der oben genannten Konstantstromquelle mit Strom versorgt. Der Spannungsabfall kann dann an jedem Thermistor individuell abgegriffen werden, wie in Abbildung 4.15 dargestellt.

4.2.3.5 Kalibrierung der Thermistoren

Wie erwähnt, hängt der Thermistorwiderstand sowohl von der Anströmgeschwindigkeit als auch von der Umgebungstemperatur ab, da bei unterschiedlichen Umgebungstemperaturen die treibende Temperaturdifferenz variiert. Erste Versuche, den Thermistoraufbau für einen weiten Geschwindigkeits- und Umgebungstemperaturbereich (für verschiedene Heizleistungen der Wärmequelle) zu kalibrieren scheiterten, da sich zeig-

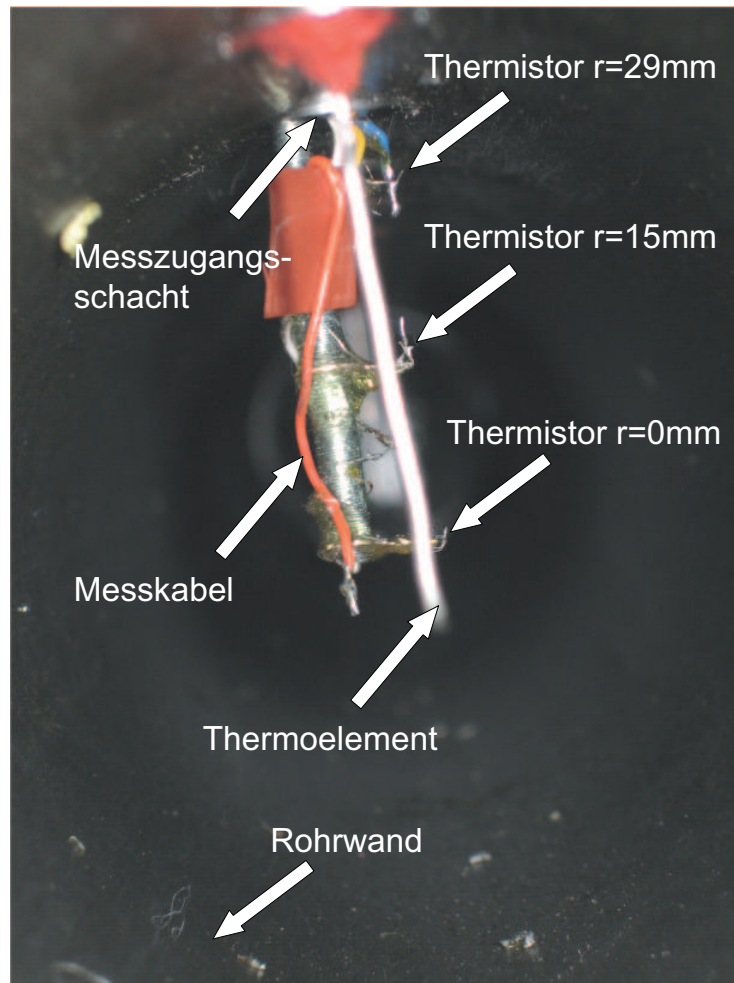


Abbildung 4.14: Thermistoraufbau im Rijke-Rohr.

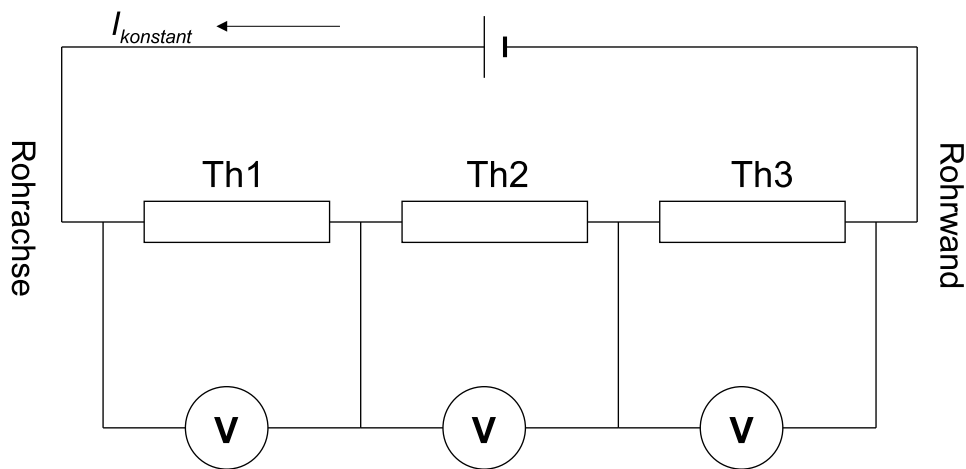


Abbildung 4.15: Schaltkreis des Thermistormessaufbaus

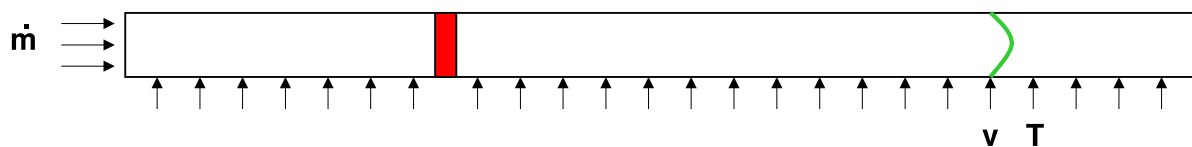


Abbildung 4.16: Aufbau zur Kalibrierung der Thermistorvorrichtung, mit Thermistoren „v“, Thermoelement „T“ und Massenstrom „m“. Unbeschriftete Pfeile symbolisieren unbelegte Messzugänge.

te, dass die Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur wesentlich größer war als diejenige von der Anströmgeschwindigkeit. Für die Vermessung und spätere Modellierung des Rijke-Rohrs ist es jedoch nicht nötig, die Geschwindigkeit der Heißgase zu messen, sondern es ist nur Kenntnis über den Massenstrom (bzw. die mittlere Kaltgasgeschwindigkeit) notwendig. Somit ist es möglich, vor dem eigentlichen Versuch und damit dem Einschalten der elektrischen Heizung, die im Rohr bestehende mittlere Kaltgasgeschwindigkeit zu messen und so Einflüsse der Lufttemperatur im Rohr (bis auf minimale Schwankungen der Raumlufttemperatur) aus der Messung herauszuhalten. Eine Kalibrierung ist dann auch nur noch für Raumlufttemperatur nötig. Die verwendete Vorrichtung ist in Abbildung 4.16 skizziert. Der aus

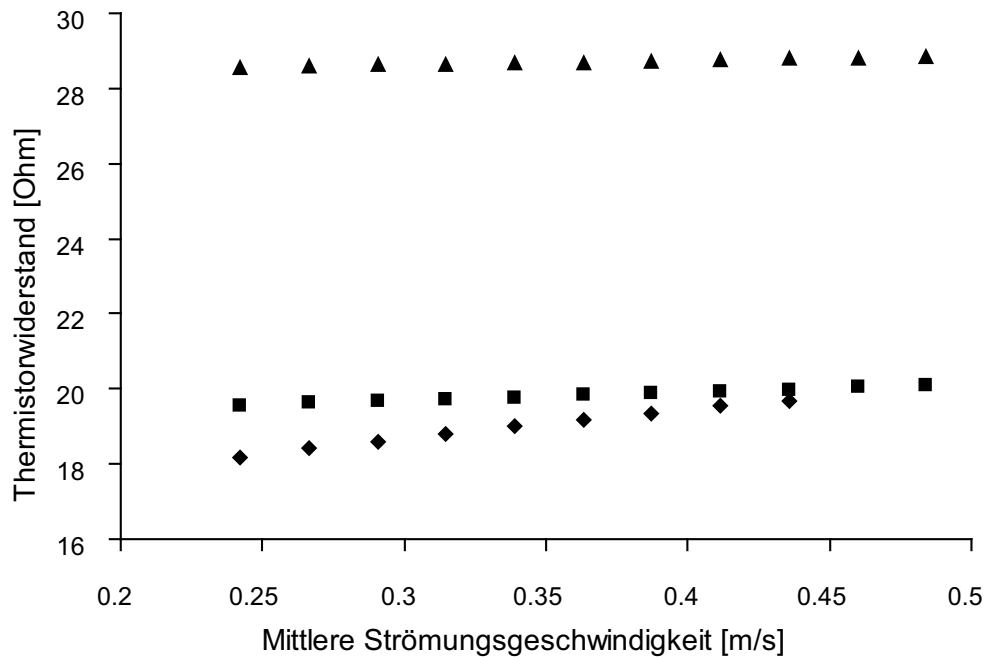


Abbildung 4.17: Resultate der Kalibrierung für den Thermistorenaufbau. Raute: $r = 0$ mm; Quadrat: $r = 15$ mm; Dreieck: $r = 29$ mm.

dem Massenstromregler führende Luftschlauch wird hierzu über ein Plenum luftdicht mit dem Rohreingang verbunden und versorgt das Rohr so mit einem genau definierten Massenstrom. Thermistoraufbau und Thermoelement sind in der Nähe des stromabseitigen Endes angebracht, um möglichst wenig Einfluss der Einströmung zu haben. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.17 dargestellt. Auf der x-Achse wurde hier die sich aus dem jeweiligen Massenstrom ergebende mittlere Rohrströmungsgeschwindigkeit aufgetragen. Die dazugehörige lokale axiale Strömungsgeschwindigkeit lässt sich unter der Annahme einer ausgebildeten laminaren Rohrströmung mit Gleichung (4.26) bestimmen. Die y-Achse zeigt den zugehörigen Widerstand. Aufgrund von Kriechströmen in der Apparatur mussten die Thermistoren einzeln kalibriert werden. Mit diesen Ergebnissen lässt sich nun auch bei offenem stromaufseitigem Rohrende die mittlere (und über Gleichung (4.26) auch die lokale) axiale Strömungsgeschwindigkeit bestimmen.

Da aufgrund der zuvor genannten starken Temperaturempfindlichkeit der

Thermistoren die Wärmequelle während der Kalibrierung nicht eingeschaltet ist (sie dient in der Skizze nur als geometrische Orientierungshilfe) muss bei der späteren Bestimmung des Massenstroms der zusätzliche Druckverlust durch die Wärmezufuhr beachtet werden. Der auf das Kaltgas bezogene Druckverlustkoeffizient über eine kompakte Wärmequelle kann aus den Rankine-Hugoniot-Beziehungen (siehe Anhang A) hergeleitet werden zu

$$\zeta_w = 2 \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right), \quad (4.1)$$

mit den Lufttemperaturen T_c auf der kalten und T_h auf der heißen Seite. Für $T_h = 431.4$ K und $T_c = 297$ K (siehe Abbildung 4.28) ergibt sich so $\zeta_w \approx 0.9$. Die Druckverlustbeiwerte für Einströmung, Rohrwand und Ausströmung betragen [39] $\zeta_e \approx 0.5$, $\zeta_r \approx 0.74$ und $\zeta_a \approx 1.2$. Der Druckverlustbeiwert des Heizgitters lässt sich aus dem Verhältnis der Querschnittsflächen von Heizgitter und Rohr mittels $\zeta_G = A_{\text{Gitter}}/A_{\text{Rohr}} \times c_w$ bestimmen. Für $c_w = 1$ [39] ergibt sich $\zeta_G \approx 0.16$. Es folgt, dass der Druckverlust durch den Wärmeeintrag auch gegenüber der Summe der Druckverluste im kalten Fall nicht vernachlässigt werden kann. Zudem steigt durch die Wärmezufuhr die Geschwindigkeit im stromab des Heizgitters liegenden Rohrteil und somit die dort auftretenden Druckverluste.

Wird deshalb die Kaltgasgeschwindigkeit vor Beginn eines Versuches gemessen, so muss die bei eingeschalteter Heizung dann reduzierte Kaltgasgeschwindigkeit berechnet werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass der auf die Rohröffnung gerichtete Luftstrahl bei gleicher Massenstromreglereinstellung stets den gleichen Gesamtüberdruck Δp_{ges} am Rohranfang bewirkt. Daraus folgt, dass der Gesamtdruckverlust gleich diesem Überdruck sein muss und es gilt

$$\Delta p_{\text{ges}} = \frac{\rho}{2} u_a^2 (\zeta_e + \zeta_r + \zeta_G + \zeta_a) = \frac{\rho}{2} u_e^2 \left(\zeta_e + \zeta_r \frac{u_a}{u_e} + \zeta_G + \zeta_a \frac{T_a}{T_c} + \zeta_w \right), \quad (4.2)$$

mit der Temperatur am Ausgang des Rohres $T_a = 340.4$ K, der mittleren Kaltgasgeschwindigkeit bei ausgeschalteter Heizung u_a und derjenigen bei eingeschalteter Heizung u_e . Alle Druckverlustbeiwerte für Elemente bzw. Effekte die sich im heißen Teil des Rohres befinden müssen bei eingeschalteter

teter Heizung aufgrund der dort herrschenden höheren Geschwindigkeit mit $T(x)/T_c$ skaliert werden. Dies ist jedoch nur beim Rohrausgangsdruckverlustkoeffizienten ζ_a sichtbar, da sich der Faktor durch die Reynoldszahlabhängigkeit beim Rohrdruckverlustkoeffizienten ζ_r herauskürzt. Hier bleibt dadurch aber der Faktor u_a/u_e stehen. Die quadratische Gleichung (4.2) lässt sich nun lösen und es ergibt sich im betrachteten Geschwindigkeitsbereich

$$\frac{u_e}{u_a} \approx 0.88. \quad (4.3)$$

Mit diesem Faktor müssen alle experimentell ermittelten Geschwindigkeiten multipliziert werden.

4.2.3.6 Temperaturmessung

Die lokale Lufttemperatur im Rohr wurde mit Nickel - Chrom/Nickel Typ-K-Thermoelementen [2] gemessen. Typ-K-Thermoelemente ermöglichen eine kostengünstige und gleichzeitig stabile und verlässliche Temperaturmessung im betrachteten Temperaturbereich von 273-400 K. Die Thermoelemente wurden in Kombination mit Omega-ISC-TC-Verstärkern verwendet. Diese Vorverstärker passen das Signal über einen eingebauten Temperatursensor an die momentane Raumtemperatur an. Sie korrigieren zudem für Thermoelemente typische Nichtlinearitäten, so dass die Messergebnisse von hoher Genauigkeit sind. Die verwendete Kombination von Thermoelement und Verstärker liefert Ausgangssignale von 0 bis 10 V, die dann linear dem Temperaturbereich von 273 bis 473 K entsprechen. Die Thermoelemente wurden in speziell angepasste Messzugangsverschlußhülsen eingebracht, um eine problemlose Installation in verschiedene Messschächte zu ermöglichen.

4.2.4 Reflexionsfaktoren

Der Reflexionsfaktor eines Rohrendes ist generell definiert als Verhältnis von reflektierter zu eingehender Welle und ist im Allgemeinen eine komplexwertige Funktion der Frequenz. Die Definition lautet bei einem stromaufseitigen

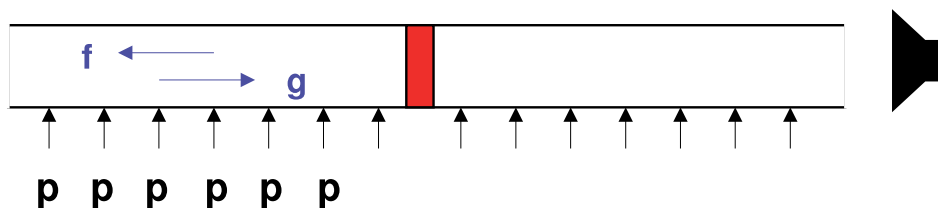


Abbildung 4.18: Aufbau zur Bestimmung der Reflexionsfaktoren der Rohrenden

Ende

$$r(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{\hat{g}(\omega)} \quad (4.4)$$

und bei einem stromabseitigen entsprechend invers. Der Reflexionsfaktor stellt eine wesentliche Randbedingung für die Modellierung dar und muss möglichst genau bestimmt werden.

Um den Reflexionsfaktor für ein Rohrende zu bestimmen müssen somit für den interessierenden Frequenzbereich an einer Stelle in der Nähe des Rohrendes die links- und rechtslaufenden Wellen bestimmt werden. Dies geschieht mit der bereits angesprochenen Multimikrofonmethode. Der entsprechende Aufbau ist in Abbildung 4.18 dargestellt. Ein Lautsprecher wurde in einigen Millimeter Abstand eines Rohrendes angebracht. Durch den Abstand zwischen Lautsprecher und Rohr konnte dieses daran gehindert werden, mechanisch vom Lautsprecher angeregt zu werden. Am anderen Rohrende (dessen Reflexionsfaktor bestimmt werden soll) wurden sechs Mikrofone in den, dem Rohrende nächsten, Messzugängen positioniert. Mithilfe eines Signalgenerators wurde der Lautsprecher mit einem Sinussignal definierter Frequenz beaufschlagt. An allen Mikrofonen wurden dann Zeitreihen aufgenommen und Fourier-transformiert. Dieses Vorgehen wurde für Frequenzen von 10 Hz bis 1000 Hz in Schritten von 10 Hz wiederholt. Amplitude und Phase der Mikrofonensignale wurden somit bei der jeweiligen Anregungsfrequenz bestimmt und mit den zuvor bestimmten Faktoren aus der relativen Mikrofonkalibrierung korrigiert.

Der so bestimmte Messdatensatz beschreibt für jede betrachtete Frequenz

das relative Druckschwankungsfeld im Rohr zu einem beliebigen Zeitpunkt. Dieses Druckschwankungsfeld wird auch von Gleichung (2.11) theoretisch beschrieben, wobei die Zeitabhängigkeit hier keine Rolle spielt. Mithilfe eines Least-Square-Fits lassen sich durch Einsetzen der gemessenen komplexwertigen Druckschwankungen in Gleichung (2.11) für jeden Messpunkt die Riemann Invarianten und mittels Gleichung (4.4) die Reflexionsfaktoren bestimmen.

Die Ergebnisse sind, aufgeteilt nach Amplitude und Phase, in Abbildung 4.19 dargestellt. Die Amplitude ist in sehr guter Übereinstimmung mit der Literatur [23, 40]

$$r(\omega) = -\frac{1 - \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2}, \quad (4.5)$$

für einen Rohrradius R . Gleiches gilt für die Phase, deren theoretischer Wert für ein offenes Ende stets bei π liegt. Aus diesem Grund kann für das analytische Modell Gleichung (4.5) verwendet werden.

4.2.5 Messungen am Rijke-Rohr in Betrieb

Nachdem alle Vorarbeiten und Kalibrierungen durchgeführt worden sind, kann mit dem eigentlichen Ziel der experimentellen Arbeit, der Messung der für die Simulationsmodelle benötigten Daten wie sie in Abbildung 4.3 dargestellt sind, begonnen werden. Die zur Vermessung des im Betrieb befindlichen Rijke-Rohrs verwendete Konfiguration ist in Abbildung 4.20 dargestellt. Der Schlauch zur Erzeugung der Luftströmung im Rohr wurde zentral 150 mm stromauf des Rohreingangs arretiert und generiert einen Freistrahlförmigen Massenstroms. Durch Variation der mittleren Rohrströmungsgeschwindigkeit mittels des Massenstromreglers sowie Variation der elektrischen Heizleistung konnte das Stabilitätsverhalten des Rijke-Rohrs über einen definierten Betriebsbereich quantitativ vermessen und somit eine Stabilitätskarte erstellt werden. Sechs Mikrofone „p“ wurden, wie in der Skizze dargestellt, über die Länge des Rohres verteilt. Um die Mikrofone, wie in Abschnitt 4.2.3.1 beschrieben, auf einer konstanten Temperatur zu halten, werden sie von Wasser mit 333 K umspült, welches aus einem großen Reservoir

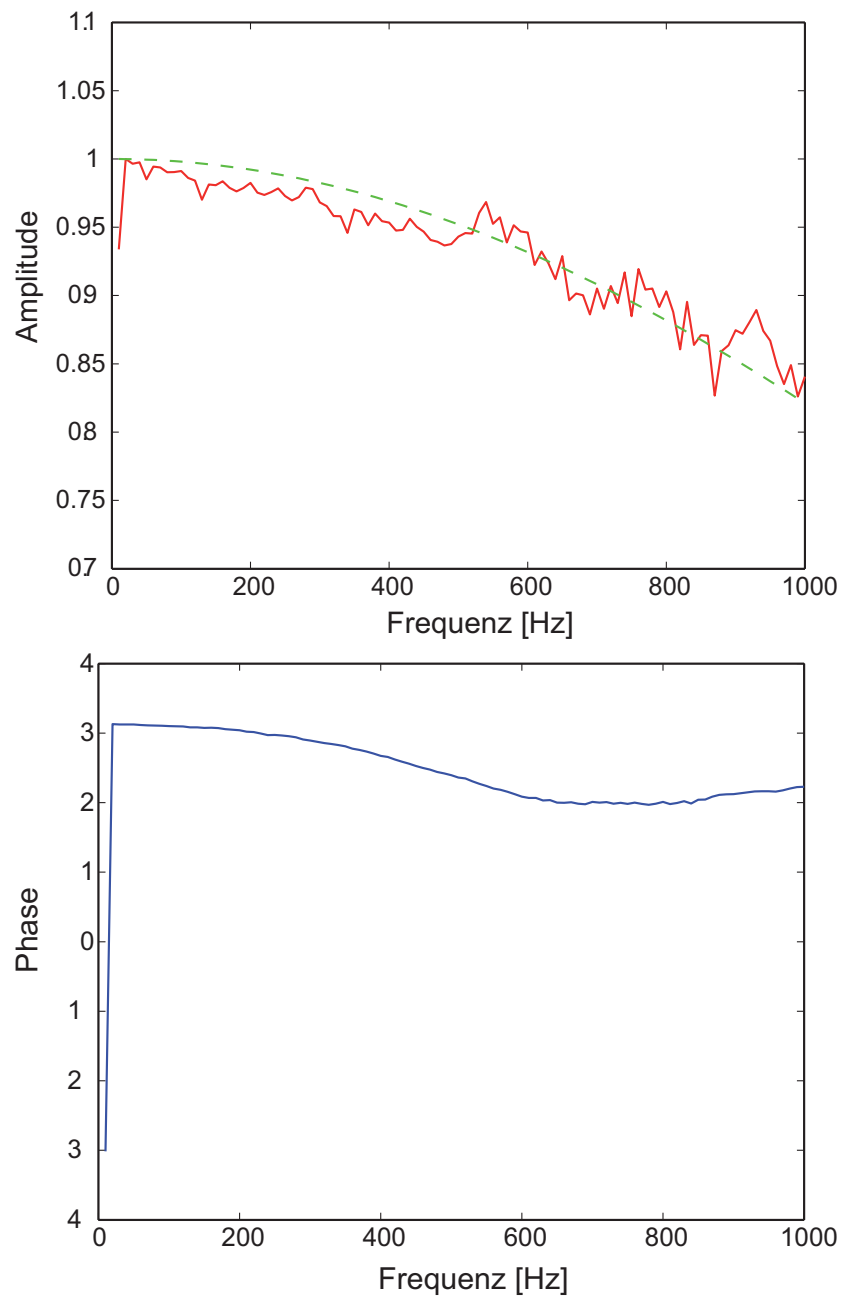


Abbildung 4.19: Reflexionskoeffizienten als Funktion der Frequenz für ein offenes Rohrende. Oben, rot: gemessene Amplitude; oben, grün: theoretische Amplitude nach Gleichung (4.5); unten: gemessene Phase.

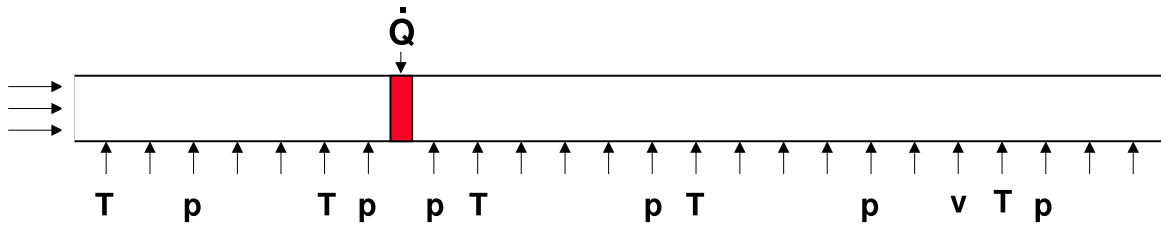


Abbildung 4.20: Schematische Darstellung der Konfiguration zur Vermessung eines im Betrieb befindlichen offen-offenen Rijke-Rohrs.

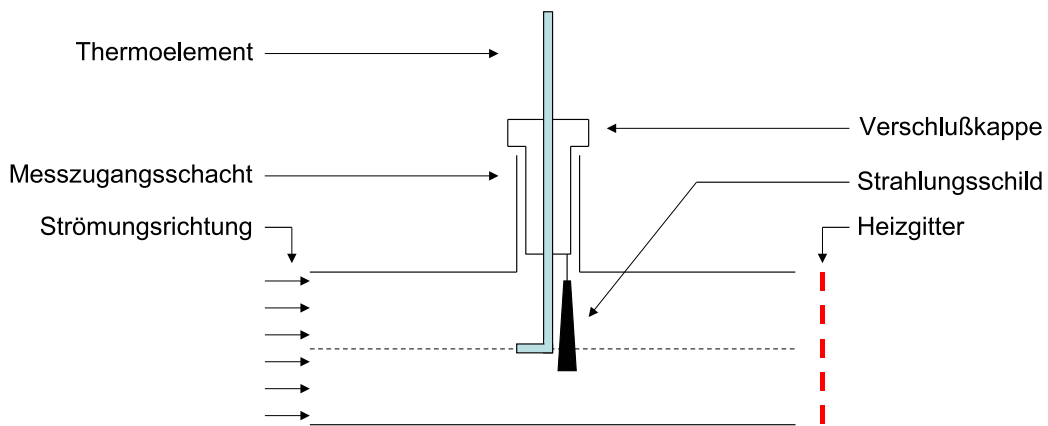


Abbildung 4.21: Schematische Darstellung der Thermoelementkonfiguration.

mit geregelter Temperatur stammt. Zwei Thermoelemente „T“, (Abschnitt 4.2.3.6), wurden stromauf und vier stromab des Heizgitters angebracht, um die jeweilige lokale Lufttemperatur zu messen. Da radiale Temperaturgradienten nicht auszuschließen sind, besteht die Möglichkeit, dass ein senkrecht zur Strömungsrichtung stehendes Thermoelement am Messkopf einen Temperaturgradienten erfahren kann, was zu Messfehlern führen würde. Um dies zu verhindern, wurden die letzten 5 mm der Thermoelemente um 90° geknickt und so mit der Strömungsrichtung ausgerichtet (siehe Abbildung 4.21). Eine weitere mögliche Fehlerquelle bei der Temperaturmessung ist Wärmestrahlung des Heizgitters. Deren Einfluss wurde durch einen, auf der dem Thermoelement zugewandten Seite schwarz gefärbten Schutzschild aus

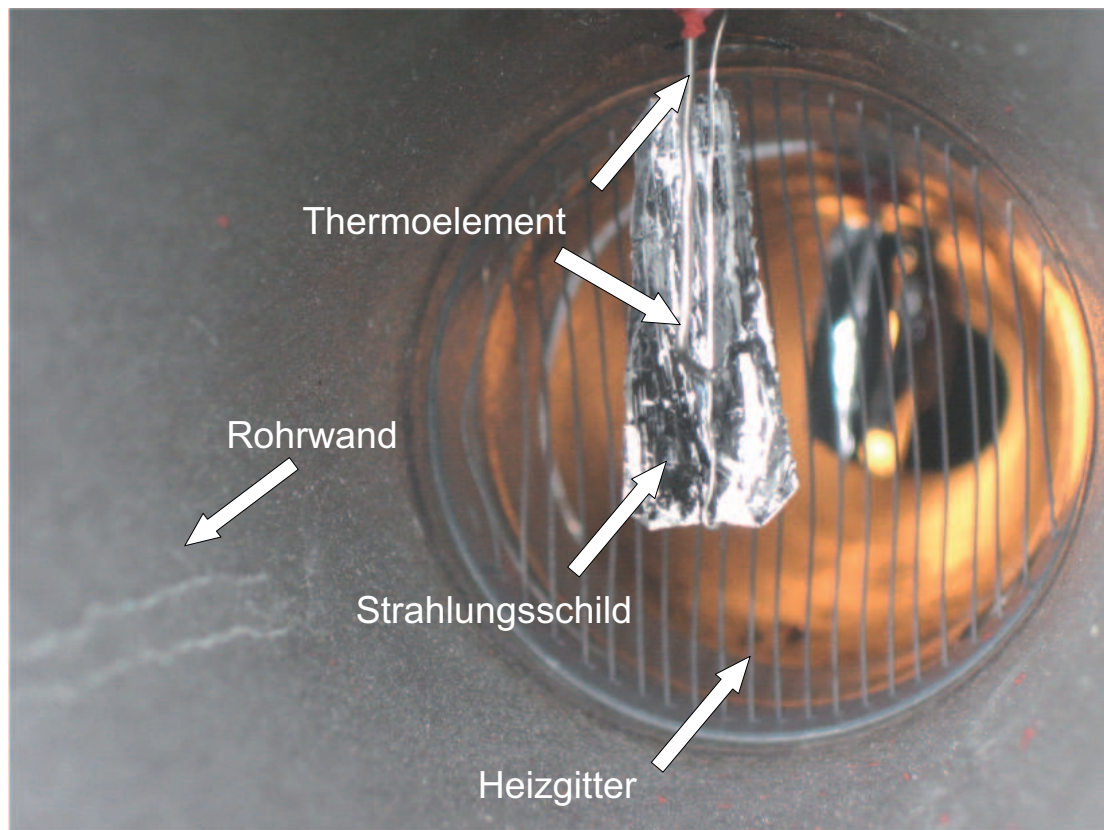


Abbildung 4.22: Thermoelement im Rijke-Rohr mit Strahlungsschutzschild.

Aluminiumfolie, die in ca. 5 mm Abstand vom Thermoelement in Richtung des Heizgitters angebracht wurde, minimiert (siehe Abbildungen 4.21 und 4.22). Die zwei am weitesten stromab liegenden Thermoelemente wurden nicht mit einem solchen Schild versehen, da dieser das Strömungsfeld um die Thermistoren sonst stören würde. Zudem ist der Strahlungseinfluss hier wegen des großen Abstands zum Heizgitter vernachlässigbar. Die Thermistorvorrichtung wurde, wie in Abschnitt 4.2.3.5 beschrieben, in der Nähe des stromabseitigen Endes positioniert. Alle unbenutzten Messzugänge wurden mit einer Verschlusskappe versehen. Benutzte und unbenutzte Messzugänge wurden anschließend mit Isolierklebeband abgedichtet.

Um das Stabilitätsverhalten sowie weitere Eingangsparameter für die Simulationsmodelle zu akquirieren, wurden nun Betriebspunkte für $0.23 \text{ m/s} \leq$

$\overline{u_c} \leq 0.37$ m/s und $266 \text{ W} \leq \dot{Q}_{\text{el}} \leq 398 \text{ W}$ abgefahren. Höhere elektrische Leistungen ließen sich nicht einsetzen, wollte man ein Durchbrennen des Heizdrahtes vermeiden. Neigt ein Betriebspunkt zu thermoakustischer Instabilität, was sich durch lautes Brummen bemerkbar macht, so wird eine Messung von 80 s Dauer gestartet. Nachdem während dieser Messung die Amplitude der Instabilität ihr Maximum erreicht hat, also nicht weiter wächst, wird ein Messschachtverschlussstopfen in der Mitte des Rijke-Rohres entfernt, was zum sofortigen Zusammenbruch der Instabilität führte. Sofort danach wurde der Stopfen wieder eingesetzt und abgedichtet. Die Instabilität begann langsam wieder zu wachsen bis sie erneut ihr Maximum erreichte. Auf diese Weise ließen sich die Wachstumsraten der Eigenfrequenzen im quasi-stationären Zustand und ohne instationäre Störeinflüsse, wie sie z.B. beim Einschalten der elektrischen Heizung entstehen, bestimmen (siehe Kapitel 4.2.5.3). Dies ist eine wichtige Voraussetzung zur Vergleichbarkeit mit den Simulationsmodellen. Dieses Vorgehen wurde im 80 s- Intervall mehrmals wiederholt.

Bei stabilen Betriebspunkten, die kein hörbares Brummen produzierten, wurden negative Wachstumsraten gemessen, wie sie auch Simulationsmodelle vorhersagen, die aber in Realität eigentlich nicht auftreten. Hierzu wurde eine Messreihenaufnahme von 40 s Länge gestartet. Mit einem Lautsprecher wurde anschließend die erste Eigenfrequenz bei 140 Hz angeregt. Da meist nur sehr wenig zusätzliche akustische Energie zur Instabilität fehlt, ließen sich auch auf diese Weise nennenswerte Amplituden anregen. Dann wurde der Lautsprecher abgeschaltet, die Amplitude nahm langsam ab und die negative Wachstumsrate konnte gemessen werden. Dieses Vorgehen wurde ebenfalls mehrmals während einer Messreihenaufnahme wiederholt.

4.2.5.1 Bestimmung der Eigenfrequenzen

Die aufgenommenen Zeitreihen der Druckverläufe wurden per FFT Fouriertransformiert und das globale Maximum bestimmt. Dieses entspricht hier stets der ersten vorhandenen Eigenfrequenz. Dann wurden im Frequenzspektrum die lokalen Maxima in der Nähe von Vielfachen dieser ersten

Eigenfrequenz als höhere Moden bestimmt. Diese Prozedur wurde für alle Mikrofone wiederholt und der Mittelwert gebildet. Nur die ersten sechs Eigenfrequenzen wurden berücksichtigt, da die höheren Moden derart niedrige Amplituden aufwiesen, dass sie vom Hintergrundrauschen nicht mehr unterscheidbar waren. Die so ermittelten Eigenfrequenzen sind in Tabelle 4.2.5.3 als f_1 bis f_6 dargestellt. Es zeigt sich ein nur sehr geringer Einfluss des Betriebspunkts auf die Frequenzen.

4.2.5.2 Amplituden der Eigenfrequenzen

Das Maximum aller Messpunkte des Betrags jeder so identifizierten Eigenfrequenz wurde als Amplitude identifiziert. Da die Drucksensoren nicht notwendigerweise immer genau auf einem Druckbauch sitzen, kann es sein, dass die echten Amplituden teilweise geringfügig höher ausfallen. Aufgrund der Verteilung der Drucksensoren über nahezu die gesamte Rohrlänge dürfte diese Abweichung jedoch gering ausfallen. Die Ergebnisse für den beispielhaft betrachteten Betriebspunkt $\bar{u}_c = 0.33$ m/s, $P_{el} = 384$ W sind in Abbildung 4.23 dargestellt. Offensichtlich dominiert die Amplitude der ersten Eigenfrequenz die anderen deutlich (man beachte die logarithmische Skalierung der Ordinate). Die vierte, fünfte und sechste Eigenfrequenz spielen für eine reale Problemstellung eigentlich keine Rolle. Qualitativ ergibt sich für die anderen instabilen Betriebspunkte das gleiche Bild.

4.2.5.3 Bestimmung der Wachstumsraten

Tritt eine thermoakustische Instabilität auf, so wächst diese zunächst exponentiell an, bis nichtlineare Verlustmechanismen die Anregung kompensieren und Sättigung eintritt. Dieses exponentielle Anwachsen einer akustischen Schwingung wird durch deren Wachstumsrate Γ charakterisiert (siehe Anhang E) und kann dann dargestellt werden mittels

$$A(t - t_0) = A(t_0) (1 + \Gamma)^{f(t-t_0)}, \quad (4.6)$$

mit der Druckamplitude A , der Anfangszeit t_0 und der Frequenz f .

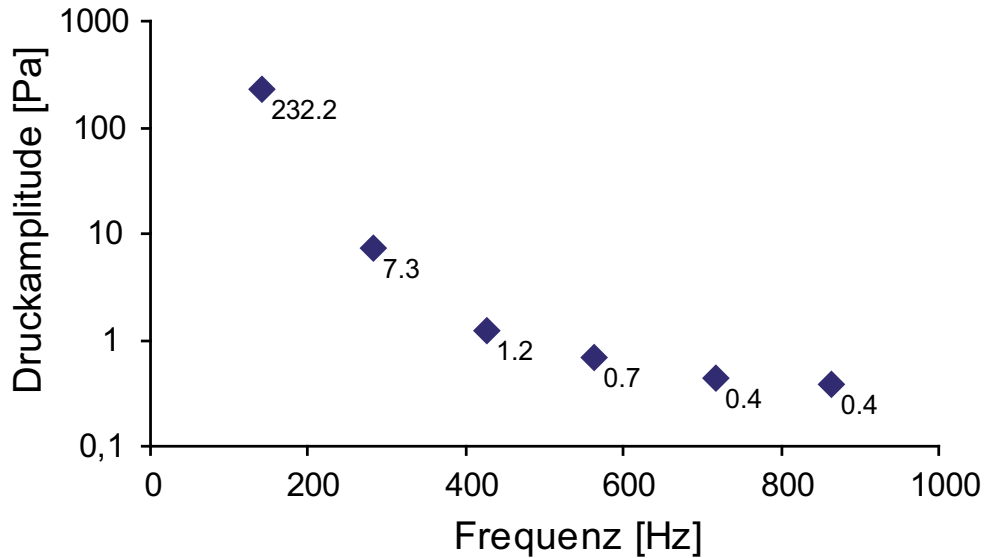


Abbildung 4.23: Gemessenen Amplituden der ersten sechs Eigenfrequenzen für den Betriebspunkt $\bar{u}_c = 0.33$ m/s, $P_{el} = 384$ W, logarithmisch aufgetragen.

Die experimentelle Ermittlung von Wachstumsraten thermoakustischer Instabilitäten stellt eine anspruchsvolle Aufgabe dar und setzt voraus dass diese genügend klein sind, um ausreichend lange Zeitreihen linearen Wachstums zu erhalten. Glücklicherweise konnte dieses Verhalten im vorliegenden Experiment beobachtet werden. Um die Wachstumsraten aller im Rijke-Rohr vorhandenen Eigenfrequenzen separat zu ermitteln, wird dabei das in Abbildung 4.24 dargestellte Vorgehen angewandt: Der Bereich der Druckzeitreihe, in dem ein exponentielles Anwachsen der Amplitude erkennbar ist, wird in kleine Zeitabschnitte Δt unterteilt (im Beispiel der Bereich von $43 \text{ s} \leq t \leq 54 \text{ s}$, siehe Abbildung 4.24 oben). Diese werden anschließend per FFT in den Frequenzbereich transformiert, 4.24 Mitte und die lokalen Maxima als Messgröße für die momentane Amplitude der jeweiligen Frequenz gesucht. Daraus werden schließlich pro Frequenz Zeitreihen erzeugt, die mit Gleichung (4.6) angenähert werden und so die jeweilige Wachstumsrate liefern (siehe Abbildung 4.24 unten). Die so ermittelten Wachstumsraten für die ersten sechs Eigenfrequenzen des beispielhaft betrachteten Betriebspunkts $\bar{u}_c = 0.33$ m/s, $P_{el} = 384$ W sind in Abbildung 4.25 sowie in

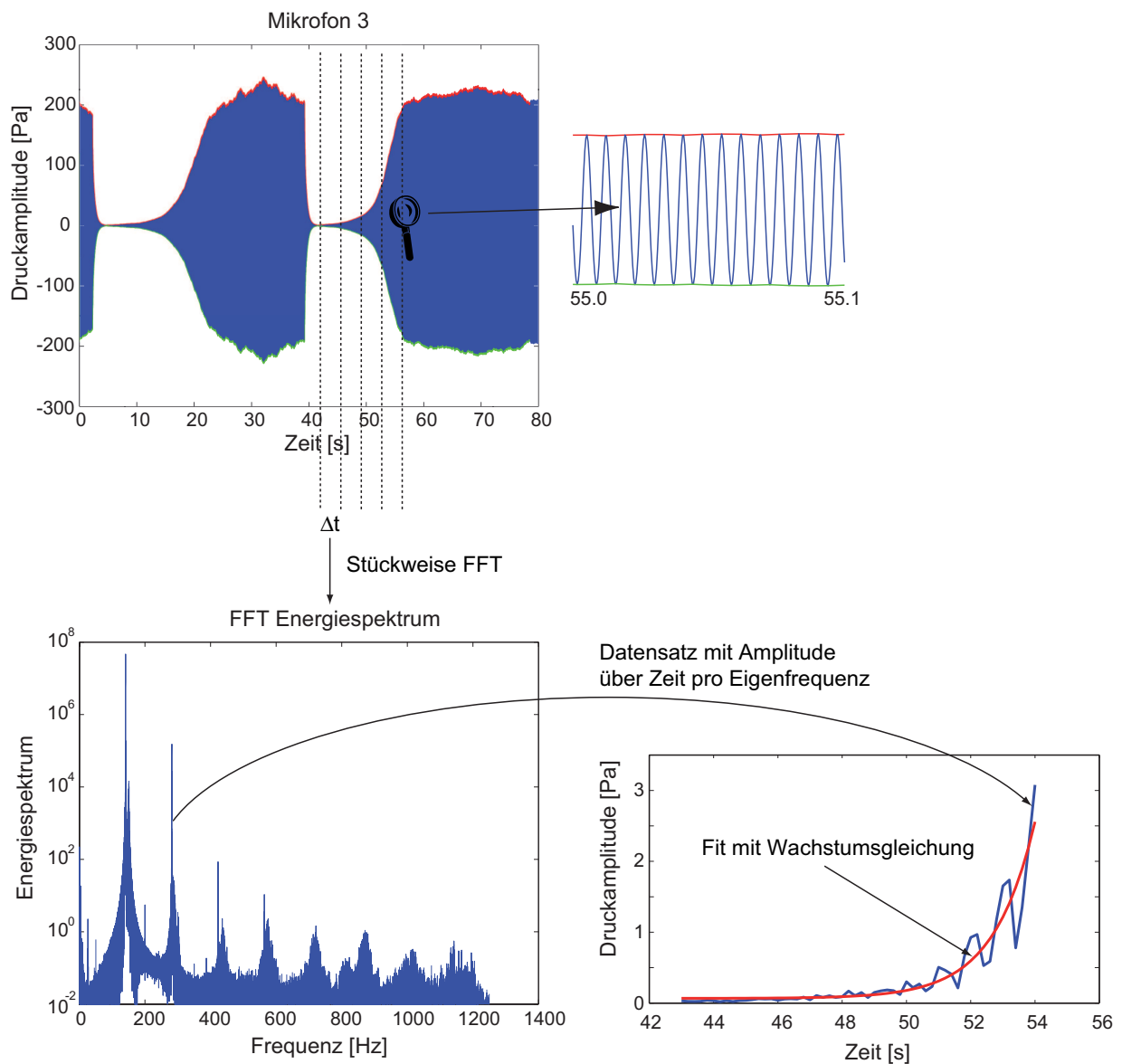


Abbildung 4.24: Wachstumsratenbestimmungsprozess. V.o.n.u.: Zeitreihe der Druckmessung; FFT eines Zeitintervalls; Lokale Maxima der FFT der Zeitintervalle als Funktion der Zeit (blau) und Fit nach Gleichung (4.6) (rot)

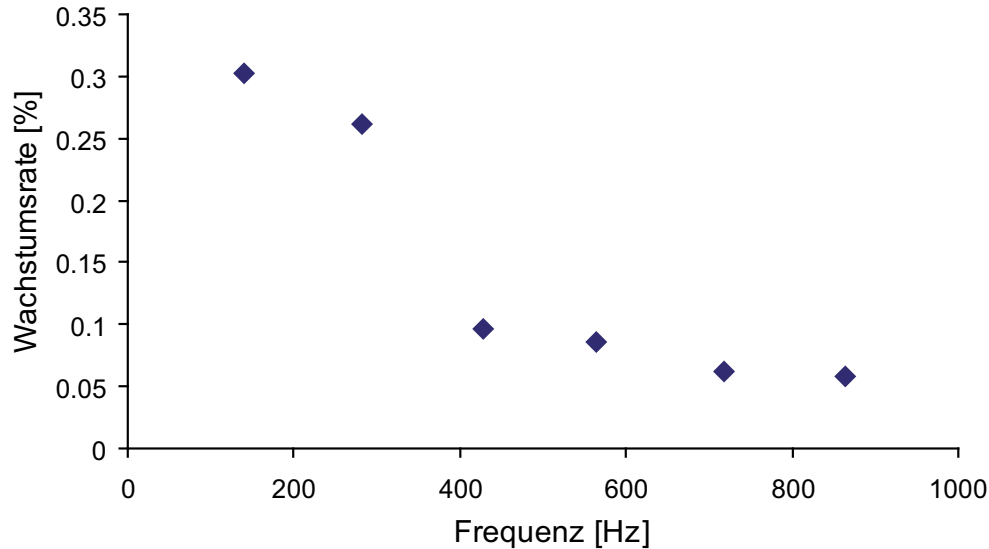


Abbildung 4.25: Wachstumsraten der ersten sechs Eigenfrequenzen des Betriebspunktes $\bar{u}_c = 0.33$ m/s, $P_{el} = 384$ W.

Tabelle 4.2.5.3 als Γ_1 bis Γ_6 dargestellt.

Es muss an dieser Stelle betont werden, dass die so ermittelten Wachstumsraten der höheren Moden nicht zum späteren Vergleich mit Vorhersagen linearer Modell geeignet sind. Wie beim Blick auf Abbildung 4.25 sowie in Tabelle 4.2.5.3 auffällt, sind diese stets positiv, falls die erste Eigenfrequenz instabil ist. Dies kann jedoch nicht durch eine lineare Instabilität der einzelnen Eigenfrequenzen verursacht worden sein, da diese niemals alle – wie sich durch einfache physikalische Betrachtung des Anregungsmechanismus des Rijke-Rohrs (siehe Abschnitt 4.5) beweisen lässt – gleichzeitig, d.h. am gleichen Betriebspunkt der gleichen Konfiguration, instabil sein können. Was im Experiment beobachtet wurde, ist viel mehr der nichtlineare Transfer akustischer Energie von der ersten und dominant instabilen Eigenfrequenz zu den Nebenmoden. Dies ist ein für thermoakustische Systeme typisches Verhalten und kann bereits bei niedrigen Amplituden durch den Wärmefreisetzungsmechanismus der nie perfekt linear ist (im betrachteten Fall proportional zur Wurzel der Geschwindigkeit), sowie jegliche Strömungsablösung, wie sie an den Rohrenden auftritt, verursacht werden. Yoon et al. [96, 97] haben gezeigt, dass auch bei nur leicht-nichtlinearer Wärmefrei-

setzung ein Mitziehen („bootstrapping“) linear stabiler Moden durch instabile Moden bereits bei niedrigen Amplituden auftreten kann. Balasubramanian et al. [8, 9] haben zudem detaillierte Untersuchungen durchgeführt, die zeigen, dass eine ganze Reihe von Effekten dazu führen kann, dass in einem thermoakustischen System Eigenfrequenzen, die eigentlich linear stabil sind, positive Wachstumsraten aufweisen. Sie zeigten, dass thermoakustische Systeme nicht-orthogonale Eigenvektoren aufweisen, die selbst bei linear stabilen Eigenfrequenzen zu einem kurzzeitigen Anwachsen und Energietransfer zwischen Eigenfrequenzen führen, ohne dass notwendigerweise Nichtlinearitäten beteiligt sind.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Wachstumsraten der höheren Moden zwar physikalisch so im Experiment beobachtet wurden, jedoch nicht durch lineare Instabilität der einzelnen Eigenfrequenzen erreicht wurden. Das „Mitziehen“ der höheren Moden wird auch in Abbildung 4.23 durch den Größenordnungsunterschied der ersten Mode zu den weiteren (man beachte den Sprung in der Ordinate) und den exponentiellen Amplitudenabfall hin zu höheren Moden deutlich. Dies darf als Indiz dafür gewertet werden, dass die erste Eigenfrequenz als Energielieferant für die höheren Moden gilt. Somit darf nur die erste Eigenfrequenz als Vergleichsbasis für die numerischen Modelle dienen. Beim Vergleich mit Vorhersagemodellen ist zudem zu beachten, dass die linear unabhängige Wachstumsrate der ersten Eigenmode geringfügig höher ist, als die im Experiment beobachtete, da diese Energie an die höheren Moden abgibt.

Negative Wachstumsraten für stabile Betriebspunkte werden auf die gleiche Art wie positive bestimmt, mit dem Unterschied, dass hier die Amplituden sinken anstatt anzuwachsen. Für alle Betriebspunkte, die ein verwertbares Signal-Rauschverhältnis der jeweiligen Eigenfrequenz zum Hintergrundrauschen aufwiesen, sind die so ermittelten Wachstumsraten in Tabelle 4.2.5.3 dargestellt. Wie gesagt, darf aber nur die Wachstumsrate der jeweils ersten Eigenmode zum Vergleich mit linearen Vorhersagemodellen herangezogen werden – für die Frequenzen gilt dies freilich nicht, so dass hier ein Vergleich sehr wohl möglich ist.

Es zeigte sich, dass bei niedrigerer Geschwindigkeit und höherer Heizleistung

| \bar{u}_c [m/s] | P_{el} [W] | f_1 [Hz] | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | Γ_1 [%] | Γ_2 | Γ_3 | Γ_4 | Γ_5 | Γ_6 |
|----------------------|-----------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0.349 | 273 | 140.0 | 280.0 | 425.4 | 559.7 | 702.4 | 845.5 | -1.1 | -1.1 | -0.4 | | | |
| 0.330 | 274 | 140.0 | 280.0 | 420.0 | 562.3 | 703.5 | 852.4 | -1.0 | -1.1 | -0.5 | | | |
| 0.307 | 266 | 140.0 | 280.0 | 420.0 | 562.3 | 703.9 | 854.1 | -0.9 | -0.9 | -0.3 | | | |
| 0.284 | 267 | 139.5 | 279.7 | 426.5 | 559.9 | 707.8 | 854.9 | -0.8 | -0.9 | -0.1 | | | |
| 0.349 | 327 | 140.0 | 279.9 | 422.1 | 567.9 | 710.3 | 853.6 | -0.6 | -0.6 | -0.2 | | | |
| 0.330 | 330 | 140.0 | 280.0 | 425.1 | 565.9 | 707.6 | 859.9 | -0.4 | -0.4 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 |
| 0.307 | 337 | 140.8 | 281.3 | 432.6 | 570.3 | 715.4 | 861.8 | -0.3 | -0.3 | -0.1 | -0.1 | 0.0 | 0.0 |
| 0.284 | 332 | 140.0 | 280.1 | 432.9 | 569.3 | 713.0 | 862.8 | 0.1 | 0.1 | | | | |
| 0.263 | 332 | 139.7 | 279.5 | 432.6 | 566.6 | 712.0 | 863.1 | 0.1 | 0.1 | | | | |
| 0.235 | 332 | 139.6 | 279.2 | 433.6 | 565.2 | 713.5 | 859.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 | -0.1 |
| 0.349 | 389 | 141.1 | 281.9 | 433.4 | 571.6 | 716.6 | 867.0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.0 | | |
| 0.330 | 384 | 141.0 | 281.9 | 427.4 | 563.8 | 718.2 | 864.2 | 0.3 | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 0.307 | 385 | 140.7 | 281.3 | 426.5 | 563.8 | 716.1 | 864.3 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 0.284 | 398 | 140.6 | 281.1 | 424.3 | 563.3 | 716.8 | 861.3 | 0.3 | 0.3 | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.370 | 396 | 141.2 | 279.7 | 424.7 | 561.3 | 714.2 | 863.6 | -0.4 | -0.5 | -0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Tabelle 4.1: Experimentell ermittelte Eigenfrequenzen und zugehörige Wachstumsraten für unterschiedliche Betriebspunkte. Freie Felder deuten nicht zu bestimmende Wachstumsraten durch zu niedrige Signal-Rauschverhältnisse an. Alle Geschwindigkeiten beinhalten bereits den Faktor 0.88 aus (4.3)

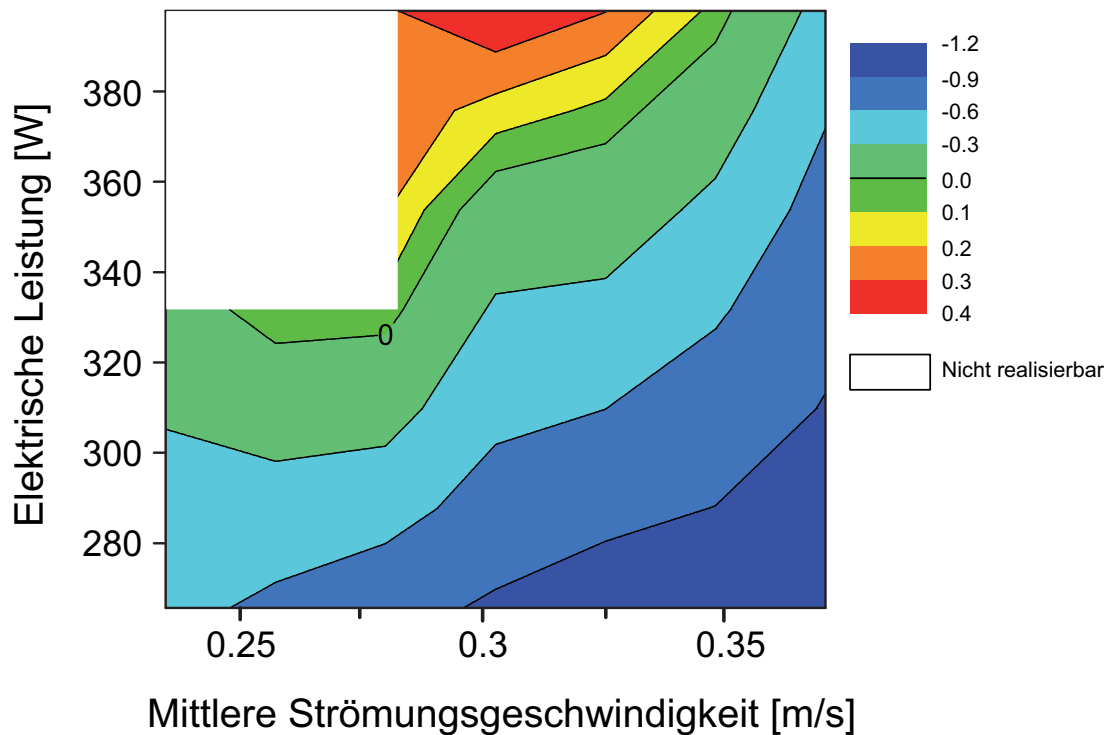


Abbildung 4.26: Stabilitätskarte der ersten Eigenfrequenz für den gemessenen Betriebspunktebereich: Konturplot der Wachstumsrate als Funktion von elektrischer Heizleistung und Strömungsgeschwindigkeit. Ausgesparte Bereiche konnten wegen Überhitzungsgefahr für das Heizgitter nicht vermessen werden.

die Wachstumsraten tendenziell zunehmen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass einerseits höhere Heizleistung generell mehr Energie zur Umsetzung in akustische Energie zur Verfügung stellt (siehe auch Gleichung (4.10)) und andererseits bei niedrigerer Geschwindigkeit das Rayleigh-Kriterium (2.14) besser erfüllt ist indem der Phasenverzug größer wird, siehe Gleichung (4.11). Dieses Verhalten ist grafisch in Abbildung 4.26 dargestellt. Der weiße Bereich musste ausgespart werden, da sonst Gefahr bestand, dass das Heizgitter durchbrennt. Das heißt, es konnte weder die Heizleistung bei höheren Geschwindigkeiten weiter erhöht werden, noch konnten bei zur Anregung der Instabilität mindestens notwendigen Heizleistung niedrigere Geschwindigkeiten realisiert werden – insbesondere nicht solche, wie sie eigentlich zur

Anregung der ersten Mode ideal wären¹.

Betrachtet man die Stabilitätsgrenze (Nulllinie) in Abbildung 4.26, so fällt auf, dass bei der gewählten Konfiguration nur ein sehr kleiner Teil des möglichen Betriebsbereichs zu Instabilität neigt. Für zukünftige Rijke-Rohr-Experimente lassen sich zur Vergrößerung des realisierbaren instabilen Bereichs die folgenden Empfehlungen ableiten: eine Verkleinerung des Rohrradius würde den Reflexionsfaktor an den Rohrenden erhöhen (siehe Gleichung (4.5)), und somit die dort entstehenden Verluste vermindern. Gleiches gilt für die Wahl eines längeren Rohres, da dadurch die Eigenfrequenzen sinken. Durch einen größeren Drahtdurchmesser ließe sich der Phasenverzug erhöhen (siehe Gleichung (4.11)) und somit ein größeres Rayleigh-Integral (2.14) erreichen, was zu stärkerer Anregung führt. Hierbei ist jedoch darauf zu achten, dass eine Vergrößerung des Drahtdurchmessers auch zu einer stärkeren Versperrung und Beeinflussung der Rohrströmung führt, was nicht gewünscht ist. Eine mögliche Alternative ist die Verwendung eines Heizgitterdrahtes mit rechteckigem Querschnitt, mit großer Ausdehnung in Längsrichtung, aber kleiner Ausdehnung in Querrichtung zur Rohrachse, womit sich auch ein größerer Phasenverzug realisieren lassen sollte [38].

4.2.5.4 Messung des Temperaturverlaufs

Zentraler Aspekt der Messung des Temperaturverlaufs war die experimentelle Absicherung, ob von der geplanten Adiabasie ausgegangen werden kann oder ob der Simulation eine andere Randbedingung zugrundegelegt werden muss.

Zu jeder Druckmessreihe wurde deshalb ebenfalls eine Temperaturmessreihe aller Thermoelemente aufgenommen. Da es sich zeigte, dass besonders zu Anfang eines Versuchs noch leichte zeitliche Veränderungen der lokalen Temperaturen auftraten, wurden, wie auch in Abbildung 4.24 dargestellt, die Wachstumsraten stets aus dem späteren Teil der Druckmesszeitreihen bestimmt. Trotz Luftkühlung ließ sich ein völlig konstanter zeitlicher Temperaturverlauf im Rohr jedoch nie erreichen. Ein typischer Zeitverlauf für

¹Bei 0.235 m/s ergibt sich für 140 Hz erst ein Phasenverzug von ca. 0.2π , siehe Gleichung (4.11)

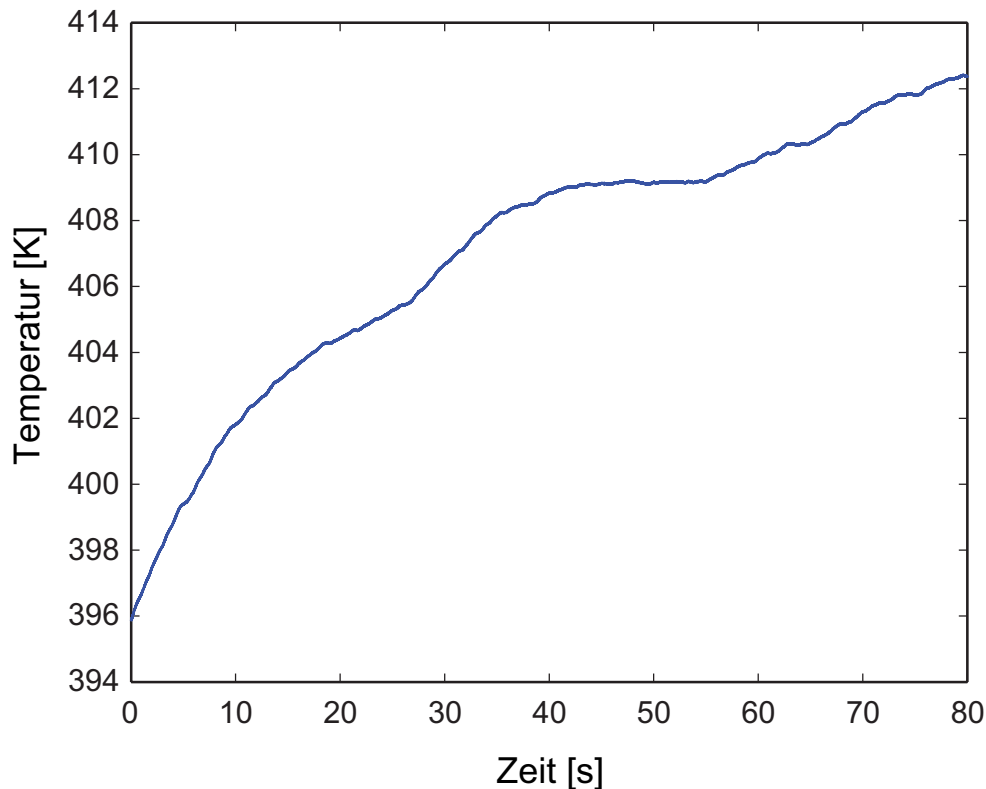


Abbildung 4.27: Typische Temperaturzeitreihe während einer Messaufnahme im heißen Rohrteil.

die Temperatur stromab des Heizgitters während einer Messreihe ist in Abbildung 4.27 dargestellt. Für die Wachstumsratenbestimmung wurde somit ein später Zeitpunkt gewählt, bei dem die Temperaturänderung nur noch sehr gering ist. Als Input für die Simulationen wurde dann die mittlere Temperatur während des Intervalls, das zur Wachstumsratenbestimmung verwendet wurde gewählt. Ein typisches axiales Temperaturprofil für den Betriebspunkt $\bar{u}_c = 0.33$ m/s, $P_{el} = 384$ W ist in Abbildung 4.28 dargestellt. Es fällt auf, dass die Temperatur, wie angenommen, bis zum Heizgitter nahezu auf Umgebungsniveau bleibt, dann durch den Wärmeeintrag des Heizgitters stark ansteigt und dann jedoch – trotz Wärmeisolierung des stromabliegenden Rohrteils – wieder merklich abfällt. Die adiabate Randbedingung konnte also im Experiment nicht vollständig umgesetzt werden, was in den Simulationen berücksichtigt werden muss. Zurückzuführen ist

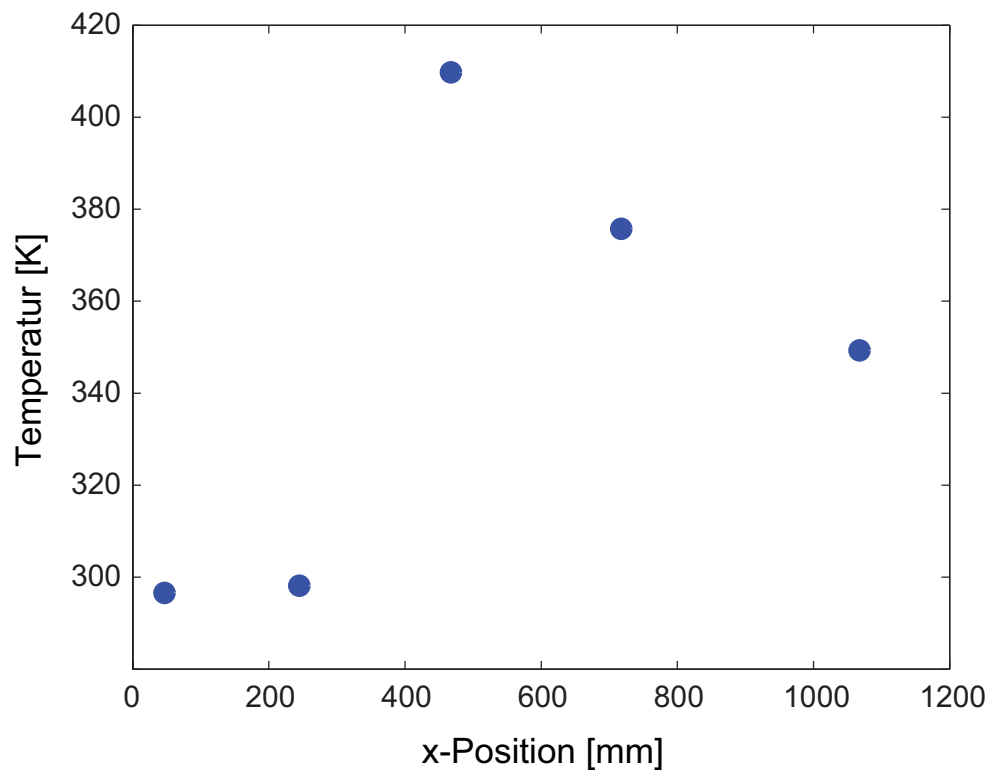


Abbildung 4.28: Axiales Temperaturprofil im Rohr beim Betriebspunkt $\bar{u}_c = 0.33$ m/s, $P_{el} = 384$ W. Position 0 mm stellt das stromaufseitige Ende dar.

dies auch auf die Wärmekapazität des Rohres, das bei einer Wandstärke von 3 mm eine nicht unerhebliche Masse hat und zu Beginn der Messung auf Raumtemperatur ist. Da keine unbegrenzt langen Messungen möglich waren – trotz Luftkühlung breitete sich ausgehend vom Heizrahmen durch Strahlung und Leitung Wärme in der Rohrwand aus, was den Anregungsmechanismus beeinträchtigte – muss deshalb angenommen werden, dass die Rohrwand bis zum Ende der Messung der vorbeiströmenden Luft Wärme entzog.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass mit dem experimentellen Aufbau des Rijke-Rohrs eine breite Datenbasis zur Bewertung der Ergebnisse der im Folgenden beschriebenen numerischen Modelle geschaffen wurde. Um diese Modelle realitätsnah aufzusetzen wurden zudem alle benötigten Rand- und Rahmenbedingungen ermittelt.

4.3 Analytische Netzwerkmodellierung des Rijke-Rohres

Um die CNN-Methode in den Kontext gängiger Simulationsmethoden zu setzen, sollen neben den experimentellen Ergebnissen auch, wie bereits angesprochen, diejenigen eines Netzwerkmodells als Vergleichsbasis dienen, welches sich für das Rijke-Rohr relativ problemlos herleiten lässt. Wie in Kapitel 2.3 dargestellt, muss dazu das akustische System, in diesem Fall das Rijke-Rohr in einzelne Vierpole aufgeteilt und deren Übertragungsverhalten hergeleitet oder anderweitig bestimmt werden. In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, wie das experimentell untersuchte offen-offene Rijke-Rohr in solche Netzwerkelemente aufgeteilt werden kann (siehe Abbildung 4.29).

4.3.1 Offenes Ende, links (Element I)

Die linke bzw. stromaufseitige Randbedingung wird im Experiment durch ein offenes Ende dargestellt. Wie in Abschnitt 4.2.4 gezeigt, entspricht der

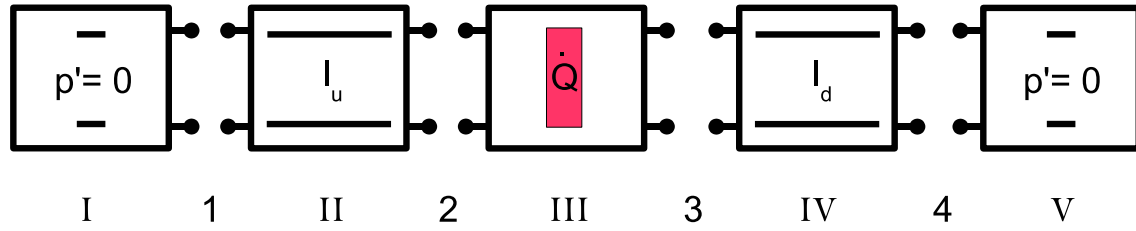


Abbildung 4.29: Aufteilung des Rijke-Rohrs in Netzwerkelemente, arabische Zahlen entsprechen denjenigen aus Abbildung 4.1, römische Zahlen symbolisieren die einzelnen Netzwerkelemente.

experimentell ermittelte Reflexionskoeffizient nicht ganz der, auch in Abbildung 4.29 angedeuteten, idealisierten Bedingung konstanten Drucks, dafür aber sehr genau dem analytischen Modell, wie es z.B. von Heckl [23] beschrieben wurde, so dass dieses hier verwendet werden soll. Lediglich die nichtlinearen Terme aus [23] wurden weggelassen, da diese im betrachteten linearen Fall keine Rolle spielen.

Auf der linken Seite ist f die reflektierte Welle. Somit gilt hier

$$\hat{f}_1 + r(\omega)\hat{g}_1 = 0, \quad (4.7)$$

mit dem frequenzabhängigen Reflexionsfaktor

$$r(\omega) = \frac{1 - \left(\frac{\omega R}{2c_c}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega R}{2c_c}\right)^2}. \quad (4.8)$$

Hier stellen R den Rohrradius und c_c die Schallgeschwindigkeit im kalten Teil des Rohrs dar.

4.3.2 Gerades, isothermes Rohrstück (Element II)

Stromab des Rohreingangs folgt ein gerades Rohr der Länge l_c mit konstantem Querschnitt und konstanter Temperatur. Eine stromab laufende Welle f erfährt eine Phasenänderung von $\exp\{-i\omega l_c/(c_c + \bar{u}_c)\}$, während sie mit

Schallgeschwindigkeit $c_c = \sqrt{\kappa RT_c}$ durch sich mit der Geschwindigkeit \bar{u}_c bewegend kalte Luft vom Einlass zur kalten Seite der Wärmequelle wandert. Für die stromauf laufende Welle g gilt Analoges. Längs des Verlaufs des Rohrs laufen die Wellen f und g durcheinander hindurch ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

Hieraus lässt sich die Transfermatrix des Rohrstücks ableiten:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{g}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik_c^+ l_c} & 0 \\ 0 & e^{ik_c^- l_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{g}_1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

mit den Wellenzahlen $k_c^+ \equiv \omega/(c_c + \bar{u}_c)$ und $k_c^- \equiv \omega/(c_c - \bar{u}_c)$ für ebene Wellen in mittlerer Geschwindigkeit von \bar{u}_c unter Vernachlässigung von Verlusten. Da die Strömungsgeschwindigkeit im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit stets sehr gering ist, darf die Inhomogenität des Strömungsfelds (in Form eines parabolischen Rohrströmungsprofils) hier vernachlässigt werden. Vorausgesetzt wird hier und im weiteren Verlauf lediglich, dass keine extrem hohen Frequenzen auftreten, die über der Grenzfrequenz für das Einsetzen radialer Moden liegen.

4.3.3 Wärmequelle (Element III)

Nach dem geraden Rohrstück folgt der Energielieferant des thermoakustischen Systems Rijke-Rohr, das Heizgitter. Die Ausdehnung der Wärmequelle in Längsrichtung kann gegenüber den akustischen Wellenlängen vernachlässigt werden und es wird angenommen, dass $l_h = 0$. Druck und Geschwindigkeit auf der heißen bzw. kalten Seite der Wärmequelle können dann über die Rankine-Hugoniot-Gleichungen zueinander in Relation gebracht werden. Linearisiert man diese für kleine Schwankungen p' und u' , so ergibt sich (siehe Anhang A für die ausführliche Herleitung):

$$\begin{aligned} p'_3 &= p'_2 - \rho_c \bar{u}_c^2 \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) \left(\frac{u'_2}{\bar{u}_c} + \frac{\dot{Q}'}{\dot{Q}} \right), \\ u'_3 &= u'_2 + \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) \bar{u}_c \left(\frac{\dot{Q}'}{\dot{Q}} - \frac{p'_2}{p_c} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

In der Literatur [23] wird beim Rijke-Rohr oft von einem reinen Zeitverzugsmechanismus gesprochen, der Wärmefreisetzungsschwankung und Druckschwankung (zumindest teilweise) in Phase bringt, wie es auch zuvor in dieser Arbeit zur grundsätzlichen Erläuterung des Anregungsmechanismus geschehen ist. Lighthill [43] hat jedoch gezeigt, dass beim Wärmeübergang von einem heißen Draht an ein umströmendes Medium ein komplexes Übertragungsverhalten mit Phasensprung zu beobachten ist. Dieses ermöglicht aber ganz äquivalent die Erfüllung des Rayleigh-Kriteriums (2.14) und eine Anregung des Rijke-Rohrs. Der Phasenverzug wird durch eine Überlagerung von Grenzschichteffekten (die den Geschwindigkeitsschwankungen vorausschlagen) und thermischen Trägheitseffekten bewirkt und ist eine Funktion von Frequenz, mittlerer Strömungsgeschwindigkeit und Drahtdurchmesser, was sich in Form einer Strouhalzahl zusammenfassen lässt. Lighthill [43] zeigte, dass gilt

$$\frac{\dot{Q}'}{\dot{Q}} = \frac{1}{2} \frac{u_2'}{\bar{u}_c} \frac{1}{1 + c_\tau i S_d}, \quad (4.11)$$

mit der auf den Draht bezogenen Strouhalzahl

$$S_d = \frac{\omega d}{u_c}. \quad (4.12)$$

Somit nimmt auch die Amplitude der Wärmefreisetzungsschwankung mit der Strouhalzahl bzw. Frequenz ab. Da der Phasenverzug direkt die Tendenz zu Stabilität oder Instabilität beeinflusst, indem er direkt das Phasenverhältnis zwischen Wärmefreisetzungs- und Druckschwankungen bestimmt, wurden detaillierte CFD-Untersuchungen mit einem Rechengitter sehr feiner Auflösung in der Größenordnung von 10^{-2} mm für einen weiten Geschwindigkeitsbereich von 0.05 m/s bis 1.0 m/s bei Frequenzen von 100 Hz bis 150 Hz um die erste zu erwartende Eigenfrequenz des Rijke-Rohrs von ca. 140 Hz durchgeführt, um c_τ zu bestimmen. Die Ergebnisse wurden anschließend mit Gleichung (4.11) als Ansatzfunktion angenähert, siehe Abbildung 4.30. Hierbei ergab sich $c_\tau = 0.4$.

Gleichung (4.11) geht von einer konstanten Drahttemperatur aus. Diese Annahme ist nicht unmittelbar einsichtig, da die Drahttemperatur durch abgeführte Wärme schwanken kann. Der Draht kann aufgrund einer Biot-

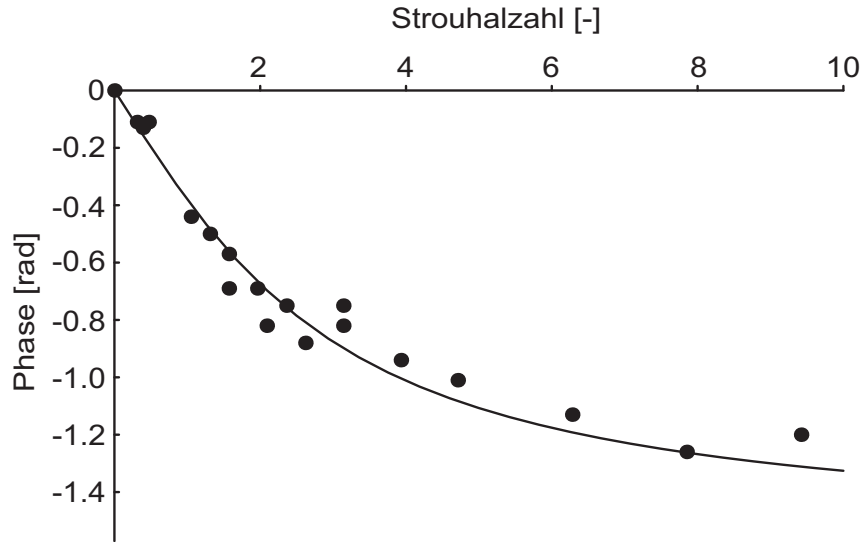


Abbildung 4.30: Per DNS ermittelte (Punkte) und angenäherte (Linie) Phase zwischen Wärmefreisetzungsschwankung und Geschwindigkeitsschwankung am Heizdraht über Drahtstrouhalzahl

Zahl von

$$\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda} \approx 1 \times 10^{-3}, \quad (4.13)$$

bei einem Drahtdurchmesser von 0.5 mm, einem Wärmeübertragungskoeffizienten an die Luft von $\alpha \approx 187 \text{ W/m}^2\text{K}$ (siehe Kapitel 4.3.6) und der Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 49 \text{ W/mK}$ für Konstantan, thermisch als Blockkapazität betrachtet werden [68]. Damit lässt sich über

$$t_Z = \frac{\rho c V}{\alpha A} \quad (4.14)$$

eine charakteristische Zeitkonstante als Maß für die Anpassung der Drahttemperatur an Schwankungen des Wärmeübergangs zur Umgebung ermitteln. Diese ergibt sich für den verwendeten Konstantandraht mit der Dichte $\rho = 8900 \text{ kg/m}^3$ und Wärmekapazität $c = 410 \text{ J/kgK}$ zu $t_Z \approx 2.44 \text{ s}$ und liegt somit um Größenordnungen über den Schwingungsperioden der betrachteten Frequenzen. Somit ist die Annahme konstanter Drahttemperatur gerechtfertigt. Bestätigt wurde dies auch durch die oben angesprochene hochauflösende CFD der Wärmeübertragung vom Draht an die Luft,

wo im betrachteten Frequenzbereich von 100 Hz bis 150 Hz kein Unterschied zwischen Randbedingungen konstanter Drahtoberflächentemperatur und konstanter Wärmefreisetzung im Draht festgestellt werden konnte.

Wird Gleichung (4.11) in die Gleichungen für u' und p' (4.10) eingesetzt, so lässt sich schließlich die Transfermatrix für die Wärmequelle in p - u -Notation aufstellen:

$$\begin{pmatrix} p'_3 \\ u'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1+c_r i \frac{\omega d}{u_c}} \right) \rho_c \bar{u}_c \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) \\ - \frac{\bar{u}_c}{p_c} \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) & 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{1+c_r i \frac{\omega d}{u_c}} \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_2 \\ u'_2 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Diese lässt sich leicht in f - g -Notation umschreiben (siehe Anhang B):

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_3 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{g}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Die Matrixkoeffizienten sind in Anhang C explizit dargestellt.

Da die Phasendifferenz zwischen Geschwindigkeits- und Wärmefreisetzungsschwankungen über die Strouhalzahl von der Anströmgeschwindigkeit abhängt, muss nun berücksichtigt werden, dass sich im Rohr kein homogenes Geschwindigkeitsprofil einstellt. Somit ergibt sich eine Abhängigkeit des Phasenwinkels von der radialen Position im Rohr. Polifke et al. [69] sowie Sattelmayer [81] haben gezeigt, dass bei thermoakustischen Systemen, die auf einem Phasenverzugsmechanismus zwischen Akustik und Wärmefreisetzung basieren, ein deutlicher, normalerweise stabilisierender, Effekt auf die möglichen selbsterregten Schwingungen zu beobachten ist wenn es keinen alleinigen Phasenwinkel sondern eine Überlagerung verschiedener Phasenwinkel gibt. Die radiale Abhängigkeit des Phasenwinkels muss nun so modelliert bzw. umgeformt werden, dass sich das System wieder als eindimensionales Netzwerkmodell formulieren lässt. Die nun vorhandenen zwei Dimensionen müssen sozusagen wieder auf eine reduziert werden, da das Rijke-Rohr an sich auf eindimensionaler Akustik beruht und sich diese auch einfacher mit einem Netzwerkmodell darstellen lässt.

Zu diesem Zweck werden die Koeffizienten der f - g -Transfermatrix über die Querschnittsfläche des Rohres integriert und gemittelt, so dass z.B. für den

ersten Matrixkoeffizienten gilt:

$$\overline{T_{11}} = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^R T_{11} dA = \frac{2}{R^2} \int_0^R T_{11} r dr. \quad (4.17)$$

4.3.4 Gerades Rohrstück mit Temperaturverlauf (Element IV)

Stromab des Heizgitters folgt ein weiteres gerades Rohrstück. Da die Luftströmung durch das Heizgitter nun erwärmt wurde, wird sie im weiteren Verlauf Wärme an die Außenwände des Rohres abgeben, wie in Kapitel 4.2.5.4 beschrieben. Matveev et al. [49] haben gezeigt, dass die korrekte Wiedergabe des Temperaturverlaufs im Rijke-Rohr für die Bestimmung des Stabilitätsverhaltens eine wichtige Rolle spielt. Deshalb kann hier die idealisierte Transfermatrix (4.9) für ein isotherm durchströmtes Rohr nicht unmittelbar zur Anwendung kommen.

Subrahmanyam et al. [91] schlagen vor, ein Rohr mit axialem Temperaturgradienten als eine Aneinanderreihung infinitesimaler Dichte- und Phasensprünge zu betrachten. Weiterhin entwickeln sie eine analytische Beschreibung einer Transfermatrix für solch einen Fall, allerdings gilt diese nur für Temperaturverläufe die durch einen bestimmten funktionalen Zusammenhang darstellbar sind. Aufbauend auf der Idee der Unterteilung in infinitesimale oder sehr kleine Teilstücke soll hier deshalb eine Methode entwickelt werden, mit der sich die Transfermatrix für jedes Rohr mit konstantem Querschnitt, aber veränderlicher Temperatur, numerisch berechnen lässt.

Dazu wird das entsprechende Rohrstück in N kleine Teilabschnitte Δx unterteilt. Anschließend wird die Gesamttransfermatrix nach dem Muster

$$\mathbf{A}_{\text{var}T} = \mathbf{A}(\Delta\rho_1) \cdot \mathbf{A}(\Delta x_1) \cdot \mathbf{A}(\Delta\rho_2) \cdot \dots \cdot \mathbf{A}(\Delta x_N) \cdot \mathbf{A}(\Delta\rho_{N+1}) \quad (4.18)$$

erstellt. Hier sind $\mathbf{A}(\Delta\rho_n)$ die Transfermatrizen für einen Dichtesprung und $\mathbf{A}(\Delta x_1)$ diejenigen für ein Rohrstück mit konstanter Temperatur (siehe Abb. 4.31). In Anlehnung an Gleichung (4.15) ergibt sich die Transfermatrix

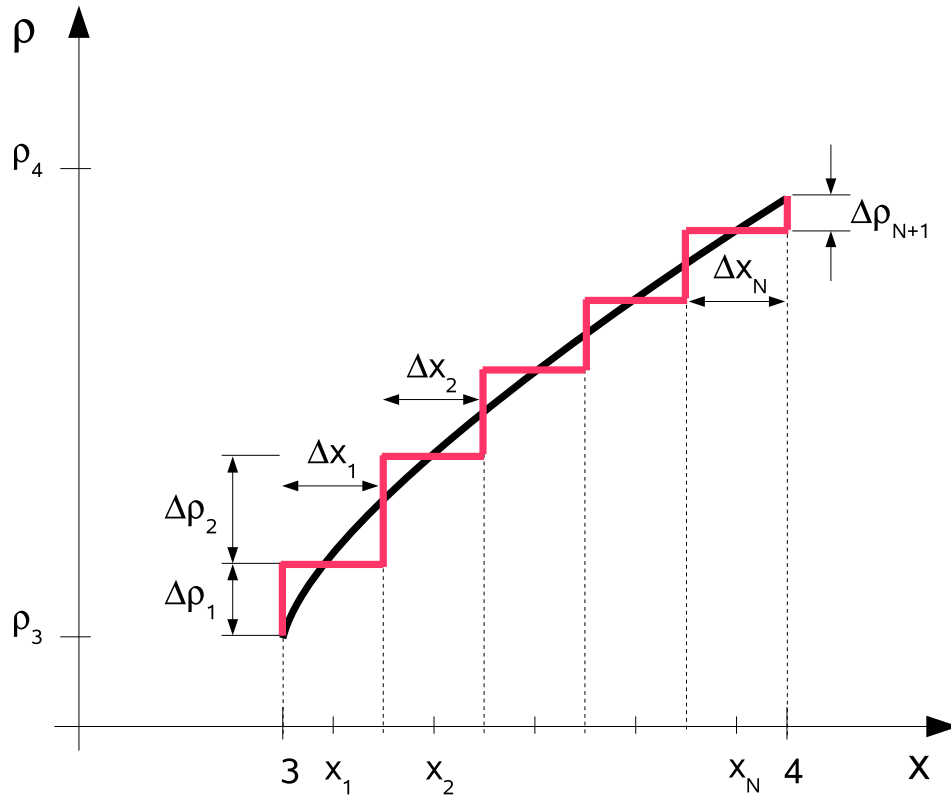


Abbildung 4.31: Konstruktion der akustischen Transfermatrix für ein Rohr mit veränderlicher Dichte (hervorgerufen durch veränderliche Temperatur) als eine Abfolge von infinitesimalen Dichte- und Phasensprüngen. Schwarz: wirklicher Dichteverlauf; Rot: Angenäherter Verlauf

für den Dichtesprung ohne schwankende Wärmequelle in p - u -Notation zu

$$\begin{pmatrix} 1 & -\rho(x) \overline{u(x)} \left(\frac{T(x+\Delta x)}{T(x)} - 1 \right) \\ -\frac{\overline{u(x)}}{p} \left(\frac{T(x+\Delta x)}{T(x)} - 1 \right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'(x + \Delta x) \\ u'(x + \Delta x) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich wiederum in f - g -Notation transformieren,

so dass gilt

$$\mathbf{A}(\Delta\rho_n) = \begin{pmatrix} T_{11,\rho} & T_{12,\rho} \\ T_{21,\rho} & T_{22,\rho} \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Die Matrixkoeffizienten sind explizit in Anhang C dargestellt.

Für ein kurzes isothermes Rohrstück gilt

$$\mathbf{A}(\Delta x) = \begin{pmatrix} e^{-ik_x^+ \Delta x} & 0 \\ 0 & e^{ik_x^- \Delta x} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

mit den Wellenzahlen $k_x^+ \equiv \omega/(c(x) + \bar{u}(x))$ und $k_x^- \equiv \omega/(c(x) - \bar{u}(x))$.

Es gilt also für das Rohrstück mit nicht konstanter Temperatur:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_4 \\ \hat{g}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\text{var}T} \begin{pmatrix} \hat{f}_3 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

mit $\mathbf{A}_{\text{var}T}$ nach Gleichung (4.18) aus (4.20) und (4.21).

4.3.5 Offenes Ende, rechts (Element V)

Um das Gleichungssystem schließen zu können fehlt schließlich noch die stromab gelegene Abschlussbedingung, die \hat{f}_4 und \hat{g}_4 zueinander in Relation setzt. Hier befindet sich ein weiteres offenes Ende, so dass analog zu Gleichung (4.7), mit g als reflektierter Welle, auf der rechten Seite gilt:

$$\hat{g}_4 + r_h(\omega)\hat{f}_4 = 0, \quad (4.23)$$

wobei hier

$$r_h(\omega) = \frac{1 - \left(\frac{\omega R}{2c_e}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega R}{2c_e}\right)^2}, \quad (4.24)$$

mit der Schallgeschwindigkeit c_e am Ausgang des Rohrs.

4.3.6 Anwendung der Transfermatrizen für die experimentell betrachtete Konfiguration

Nachdem alle Transfermatrizen beschrieben wurden, kann nun ein Gleichungssystem aufgestellt und nach Eigenfrequenzen gelöst werden, die sich mit den experimentellen Ergebnissen vergleichen lassen. Dazu wurden beispielhaft Betriebsbedingungen gewählt, die dem experimentellen Betriebspunkt $\bar{u}_c = 0.33$ m/s und $P_{el} = 385$ W entsprechen. Die Werte lauten im Einzelnen:

| | |
|-------------|-------------------------|
| \bar{u}_c | 0.33 m/s |
| l_c | 0.335 m |
| l_h | 0.913 m |
| T_h | 431.4 K |
| T_c | 296.79 K |
| R | 0.034 m |
| c_c | 345.3 m/s |
| c_h | 416.3 m/s |
| ρ_c | 1.190 kg/m ³ |
| ρ_h | 0.818 kg/m ³ |
| p_c | 101325 Pa |
| c_e | 369.9 m/s. |

Der Temperaturverlauf im heißen Teil des Rijke-Rohrs wurde aus den experimentellen Daten mit einem Polynom 2. Ordnung angenähert zu:

$$T(x) = 50.652697 x^2 \text{ K/m}^2 - 179.80133 x \text{ K/m} + 485.94992 \text{ K}. \quad (4.25)$$

Daraus ergeben sich direkt auch die lokale Dichte und Schallgeschwindigkeit und über die Kontinuität auch die lokale mittlere Geschwindigkeit. Im gesamten Rohr wurde ein parabolisches laminares Geschwindigkeitsprofil mit

$$u(r) = 2 \frac{\bar{u}}{R^2} (R^2 - r^2) \quad (4.26)$$

angenommen. Diese Annahme ist vereinfachend, da das Rohr zu kurz ist um ein ausgebildetes laminares Profil zu ermöglichen und muss als Näherung betrachtet werden.

Wie in Kapitel 4.2.2 angesprochen, darf bei der Wärmeabgabe des Heizgitters aufgrund der hohen Temperaturen die Strahlung nicht vernachlässigt werden. Die jeweiligen Anteile der Heizleistung, die auf konvektiven Wärmeübergang bzw. Strahlung entfallen, lassen sich per iterativer Lösung von Gleichung (4.27) bestimmen.

$$\alpha A_d (T_d - T_c) + \sigma \epsilon_d A_d (T_d^4 - T_c^4) (1 - F_{dd}) = \bar{Q}, \quad (4.27)$$

mit dem Wärmeübergangskoeffizienten durch Konvektion α , der freien Drahtoberfläche A_d , der Drahttemperatur T_d , der Kaltgastemperatur T_c , der Stefan-Boltzmann-Konstante σ , dem Emissionskoeffizienten des Drahtes ϵ_d , dem Sichtfaktor von Draht zu Draht F_{dd} sowie dem vom freien Draht abgegebenen mittleren Wärmestrom \bar{Q} .

Der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Heizdraht und umströmender Luft wurde aus der hochauflösenden CFD (Gitterauflösung im Bereich des Wärmeübergangs < 0.01 mm) bestimmt mit der bereits die Konstante c_τ ermittelt wurde, siehe Kapitel 4.3.3. Es ergibt sich ein Wert von $\alpha = 187$ W/m²K. Die Drahtoberfläche lässt sich aus der freien Drahtlänge von 1183 mm und dem Drahtdurchmesser von 0.5 mm bestimmen. Der Emissionskoeffizient des Drahtes wurde aufgrund der stark korrodierten Oberfläche mit 0.7 angenommen. Die mittlere an die Luftströmung abgegebene Wärmeleistung lässt sich über das Verhältnis von freiliegender zur Gesamtdrahtlänge von 1899 mm multipliziert mit der elektrischen Leistung berechnen und ergibt sich zu 239.4 W. Der Sichtfaktor F_{dd} eines Drahtes zu seinen beiden Nachbardrähten lässt sich über den Drahtdurchmesser und -abstand als Sichtfaktor zwischen zwei Zylindern darstellen und berechnet sich für die gegebenen Abmessungen nach [27] zu 0.05. Somit bleibt als einzige unbekannt die Drahttemperatur, die sich iterativ bestimmen lässt und zu 871.16 K ergibt. Damit beträgt der Strahlungsanteil an der Gesamtwärmeabgabe 16.6%. Dies ist von Bedeutung, da dieser Anteil der Wärmeleistung nicht mit der Strömungsgeschwindigkeit schwankt und somit nicht als Treiber für die thermoakustische Instabilität dienen kann. Somit müssen die Wärmefreisetzungsterme in den Gleichungen (4.10) mit 0.834 multipliziert werden.

Während die Transferfunktion für ein offenes Ende bereits in Kapitel 4.2.4 dargestellt wurde, die Transfermatrix für das gerade isotherme Rohrstück eher trivial ist und sich für die Transfermatrix für das Heizgitter durch die Berücksichtigung des Geschwindigkeitsprofils keine nennenswerte Änderung ergab, soll vor der Beschreibung der Lösung des Gleichungssystems an dieser Stelle ein genauerer Blick auf die Transfermatrix für das nicht-isotherme Rohrstück mit Berücksichtigung des Temperaturverlaufs wie in Kapitel 4.3.4 erarbeitet worden werden.

4.3.6.1 Transfermatrix für ein Rohrstück mit axialem Temperaturgradienten

In Abbildung 4.32 ist die Transfermatrix für das heiße Rohrstück dargestellt. Der Einfluss der Berücksichtigung des Temperaturverlaufs (gestrichelte Kurve) zeigt sich hier deutlich. Die Amplitude der Hauptdiagonalen liegt um etwa 6% unter derjenigen für eine konstante Temperatur (es wurde hier die mittlere Temperatur von 378.9 K gewählt), die wiederum konstant den Wert 1 hat, wie eben in der Transfermatrix für ein gerades Rohr (4.9). Im niedrigen Frequenzbereich zeigen sich bei Berücksichtigung des Temperaturverlaufs leichte Reflexionen, manifestiert durch eine leichte Abweichung der Amplitude von 0 auf der Nebendiagonalen, die durch den Dichtegradienten hervorgerufen werden [91]. Bezüglich der Phase ist kein Unterschied feststellbar, diese ist auf der Hauptdiagonalen gleich und für die Nebendiagonale lässt sich keine Aussage treffen, denn hier ist bei mittlerer Temperatur die Amplitude 0, die Phase kann somit nicht angegeben werden. Die gestrichelte Kurve stellt die Transfermatrix bei Aufteilung des Rohrstücks in 100 Abschnitte gemäß Kapitel 4.3.4 dar, eine noch höhere Auflösung brachte keine Veränderung des Ergebnisses mehr mit sich.

4.3.6.2 Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems

Aus den Transferbeziehungen (4.7), (4.9), (4.16), (4.22) und (4.23) kann nun die 8x8 Systemmatrix \mathbf{S} direkt abgeleitet werden. Wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben, soll hier die Bestimmung der Eigenmoden über die OLTF zur Anwendung kommen. Durch Einsetzen des in Kapitel 2.4.1 beschriebenen

4.3 Analytische Netzwerkmodellierung des Rijke-Rohres

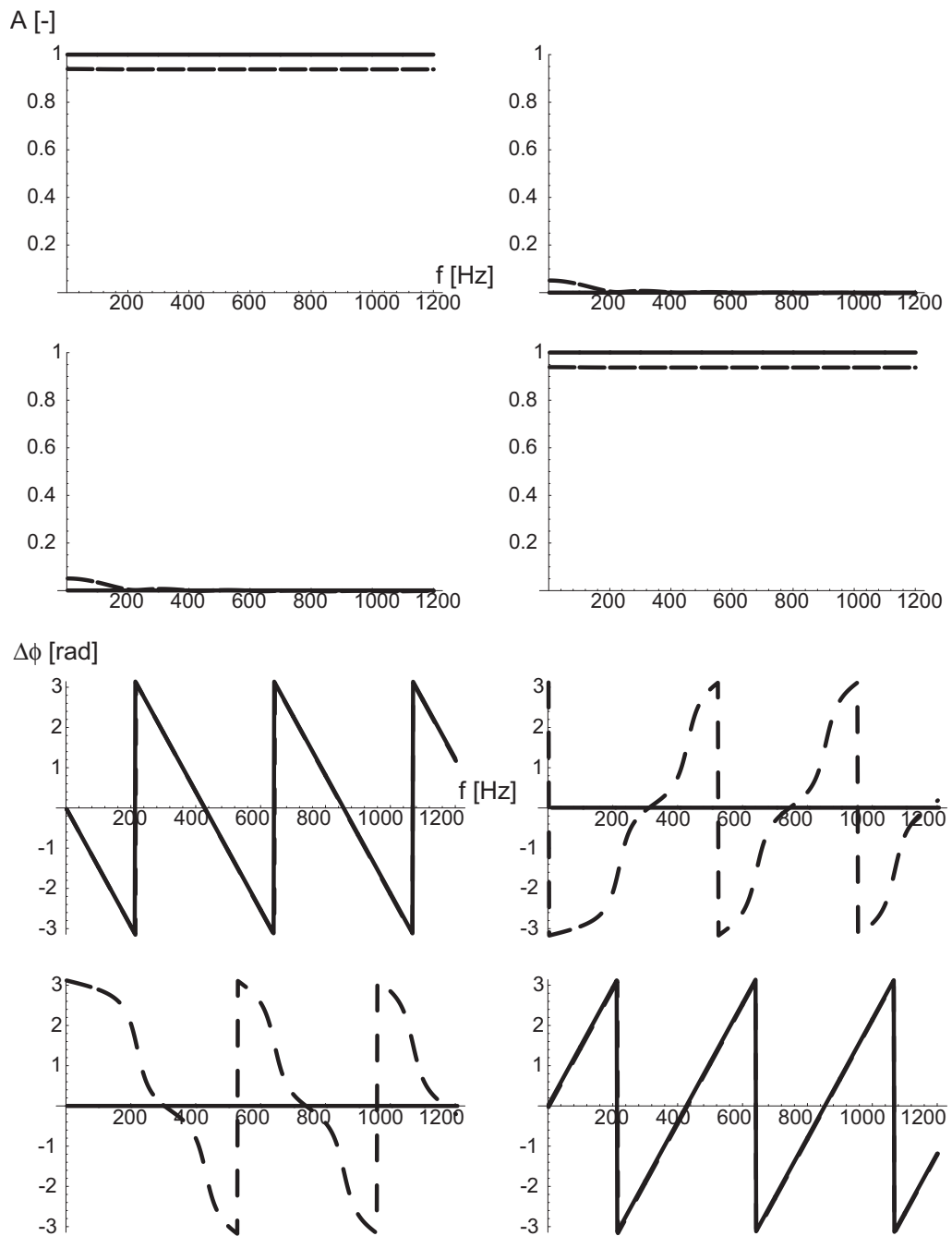


Abbildung 4.32: Amplitude (oben) und Phase (unten) der Transfermatrixelemente, jeweils v.l.o.n.r.u. T_{11} , T_{12} , T_{21} , T_{22} , für ein gerades Rohr mit Temperaturverlauf (gestrichelt). Im Vergleich die Transfermatrix bei mittlerer Temperatur (durchgezogene Linie)

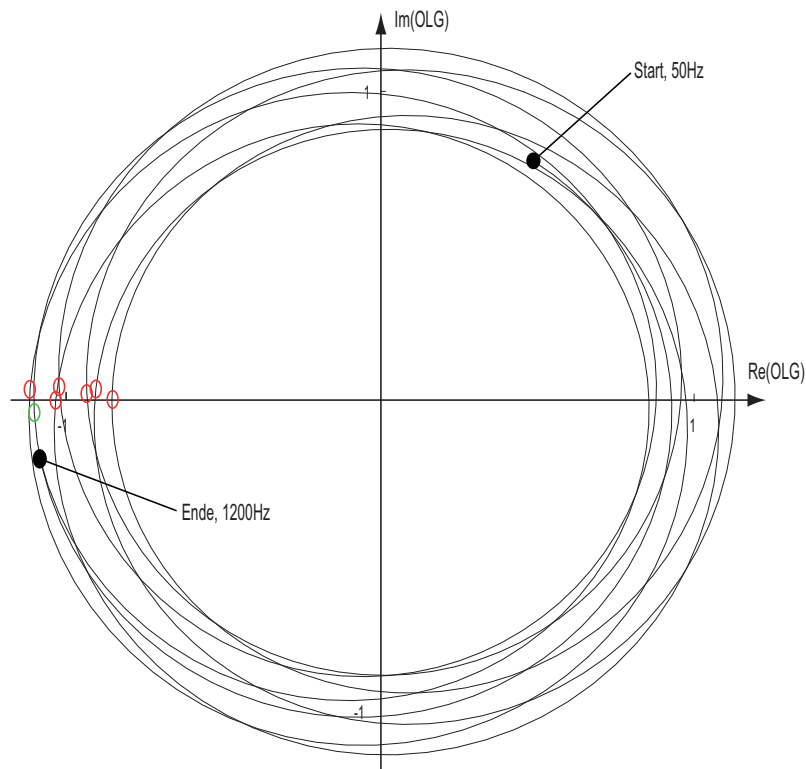


Abbildung 4.33: Mit dem Netzwerkmodell berechnete Ortskurve der OLTF des Rijke-Rohres im Bereich 50-1200 Hz

Dummy-Elements kann somit die Transferfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises berechnet und die Ortskurve erstellt werden. Diese ist in Abbildung 4.33 für den Bereich 50 – 1200 Hz dargestellt. Wie in einem geraden Rohr mit geringer Anregung und relativ glattem Amplitudenverlauf der Transfermatrizen ohne starke Reflexion zu erwarten, ist die Ortskurve nahezu kreisförmig und läuft in geringer Entfernung links (angeregte Moden) oder rechts (gedämpfte Moden) am kritischen Punkt vorbei. Es lassen sich sieben Frequenzen identifizieren bei denen die Ortskurve in der Nähe des kritischen Punktes vorbeiläuft (farbige Kreise) und die somit naheliegende Eigenfrequenzen anzeigen.

Da diese Darstellung noch recht unübersichtlich ist und zudem keine quantitative Aussage über die Eigenfrequenzen zulässt, soll exemplarisch die erste Eigenfrequenz (grüner Kreis) genauer untersucht werden.

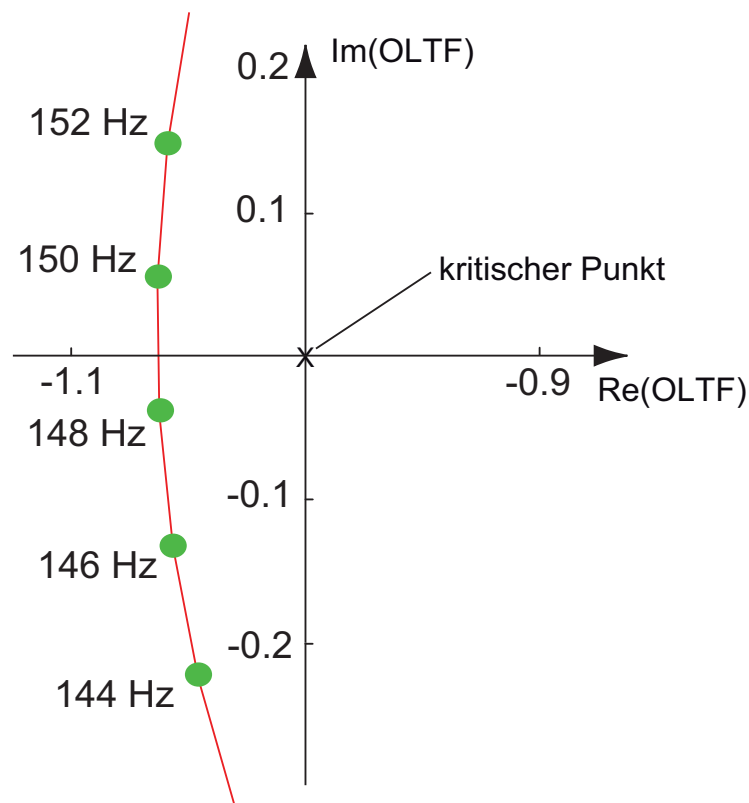


Abbildung 4.34: Detaillierte Betrachtung der Ortskurve der OLTF im Bereich der ersten Eigenfrequenz. Grün: berechnete diskrete Punkte aus dem Netzwerkmodell; rot: durch Polynomfunktion angenäherter Ortskurvenverlauf.

In Abbildung 4.34 sind zunächst die, mit dem Netzwerkmodell berechneten, diskreten Punkte in der Nähe des kritischen Punktes dargestellt (grün). Diese werden nun, wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben, durch ein Polynom angenähert (rote Kurve) und dieses nach -1 aufgelöst. Die sich dabei für dieses, sowie alle weiteren, Vorbeigehen der Ortskurve am kritischen Punkt ergebenden, vom Netzwerkmodell vorausgesagten, Eigenfrequenzen sind in Tabelle 4.2 dargestellt.

Die mittels

$$\Gamma = e^{-2\pi \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}} - 1 \quad (4.28)$$

(siehe Anhang E) berechneten Wachstumsraten sind dort ebenfalls aufge-

| Modennummer | Komplexe Eigenfrequenz | Wachstumsrate |
|-------------|------------------------|---------------|
| 1 | $147.9 - 1.43i$ | 6.3% |
| 2 | $302.6 + 0.85i$ | -1.8% |
| 3 | $454.8 + 1.21i$ | -1.7% |
| 4 | $599.9 - 1.20i$ | 1.3% |
| 5 | $753.2 - 0.14i$ | 0.1% |
| 6 | $909.2 + 1.30i$ | -0.9% |
| 7 | $1054.6 - 0.06i$ | 0.0% |

Tabelle 4.2: Mit dem Netzwerkmodell bestimmte Eigenfrequenzen des Rijke-Rohrs

listet. Die Moden 1, 4 und 5 werden somit vom Modell als instabil vorhergesagt, wobei die erste Eigenfrequenz die anderen, was die Wachstumsrate angeht, weit übertrifft. Eine Diskussion dieser Ergebnisse im Vergleich zu denjenigen des Experiments findet in Kapitel 4.5 statt, nachdem auch die Ergebnisse der CNN-Methode (Kapitel 4.4) vorliegen.

Generell, siehe Tabelle 4.6, lässt sich bereits feststellen, dass das analytische Netzwerkmodell in guter Näherung in der Lage ist, die experimentell ermittelten Eigenfrequenzen vorauszusagen. Ein Vergleich der Wachstumsraten ist nur für die erste Mode möglich da, wie in Kapitel 4.2.5.3 beschrieben, die aus den experimentellen Daten ermittelten Wachstumsraten für die höheren Moden auf die Anregung der Harmonischen durch nichtlinearen Energietransfer im Experiment zurückzuführen ist.

4.4 CNN-Modell des Rijke-Rohres

Das eigentliche Ziel der Arbeit, die in Kapitel 3 beschriebene CNN-Methode, soll nun am Beispiel des Rijke-Rohrs demonstriert und anschließend mit den experimentellen Ergebnissen und denen der Netzwerkmodellierung verglichen werden.

4.4.1 Diskretisierung der Geometrie auf einem CFD-Berechnungsgitter

Zunächst musste ein Teil der Rijke-Rohr-Geometrie mit einem CFD-Berechnungsgitter diskretisiert werden. Folgt man der in Kapitel 3 beschriebenen Vorgehensweise, so sollte der „Schnitt“ sinnvollerweise ein kleines Stück stromauf des Heizgitters liegen, um den Anregungsmechanismus „Heizgitter“ sowie den komplizierteren Rohrteil mit inhomogener Temperaturverteilung in der CFD aufzulösen. Das gerade Rohr stromauf inklusive des offenen Endes mit Reflexionsfaktor nach Gleichung (4.8) kann leicht und effizient durch ein Netzwerkmodell dargestellt werden. Mit nicht-ebenen Wellen oder starker Turbulenz, die eine Wellenidentifizierung, wie sie an der Schnittebene nötig ist, schwierig machen würde [34], ist im Fall des Rijke-Rohres nicht zu rechnen, so dass diese Faktoren die Wahl der Schnittebene nicht beeinflussen.

Prinzipiell ist ein Rijke-Rohr akustisch betrachtet eindimensional, denn es herrschen ebene Wellen vor und die Wärmefreisetzung geschieht in guter Näherung über den ganzen Querschnitt verteilt. Aus Gleichung (4.11) geht jedoch hervor, dass sowohl Amplitude als auch Phase der Wärmefreisetzungsschwankung von der lokalen Geschwindigkeit abhängen. Da im Rohr aufgrund der Wandhaftbedingung ein Strömungsprofil vorliegt, muss dies berücksichtigt werden. Dieses Rohrströmungsprofil ist freilich 2-dimensional, d.h. rotationssymmetrisch, so dass zur Längskoordinate des Rohres der Radius als zusätzliche Koordinatenrichtung hinzukommt. Über diesen aufgelöst soll die Wärmefreisetzung betrachtet werden. Im Netzwerkmodell wurde der Einfluss des Rohrströmungsprofils integral betrachtet (4.17), da das Netzwerkmodell per se nur eindimensional sein kann. Damit ließe sich die Zweidimensionalität des Rohrströmungsprofils berücksichtigen. Kunz [38] hat jedoch beschrieben, dass die in der Wärmefreisetzungsebene lokal stark unterschiedlichen, Temperaturen (und damit Schallgeschwindigkeiten) in der Nähe der Heizdrähte bzw. in den Zwischenräumen zwischen zwei Heizdrähten, einen dämpfenden Einfluss auf die Akustik haben. Dieser Effekt kann im Netzwerkmodell ohne ein entsprechendes komplexes Modell nicht dargestellt werden. Zudem ist es nicht völlig korrekt, die akusti-

sche Anregung als über den Querschnitt kontinuierlich verteilt anzunehmen (selbst wenn diese Verteilung nicht homogen ist), denn die Wärmefreisetzung findet nur an den Heizdrähten und damit lokal und nicht kontinuierlich, sondern diskret verteilt statt. Diese Effekte können nur in der CFD wirklichkeitsnah dargestellt werden und dieser Vorteil der CNN-Methode soll deshalb hier Berücksichtigung finden.

Es wurde somit beschlossen, die CFD-Simulation 2-dimensional und rotationssymmetrisch durchzuführen. Zwar führen die Heizdrähte im realen Experiment linear quer durch das Rohr, jedoch ist eine Anordnung mit konzentrischen Ringen, wie sie in einer rotationssymmetrischen Darstellung nur möglich ist, ebenfalls in der Lage die zuvor beschriebenen Effekte der diskret verteilten und von der lokalen Geschwindigkeit abhängigen Wärmefreisetzung darzustellen, siehe Kapitel 4.4.2. Ziel der CNN-Methode ist es, nur einfache Vorgänge durch ein Netzwerkmodell darzustellen und komplexe Vorgänge möglichst genau zu simulieren. Deshalb wurde beschlossen, auch die Reflexion am Ausgang des Rijke-Rohrs nicht durch ein Modell wie in Gleichung (4.24) darzustellen, sondern die Umgebung des Rohrausgangs in den Berechnungsbereich aufzunehmen. Der verwendete CFD-Löser Fluent hat zudem keine Randbedingung implementiert, die frei definierbare akustische Reflexionsfaktoren ermöglicht, so dass diese eigens hätte entwickelt werden müssen, um Gleichung (4.5) zu realisieren.

Unter Verwendung der gleichen Geometrie wie in Experiment und Netzwerkmodell ergibt sich schließlich die in Abbildung 4.35 dargestellte Konfiguration. Es wurde in der Abbildung aus Gründen der Übersichtlichkeit nur in der Ausschnittvergrößerung das eigentliche Berechnungsgitter dargestellt. Dies ist aufgrund seiner Feinheit mit einer Gitterweite im Rohr bei konstant 1 mm nicht komplett darstellbar. Die Rotationsachse ist in gelb dargestellt, die Rohrwand in blau. Das Berechnungsgebiet endet wie oben beschrieben in Längsrichtung nicht mit dem Rohrende, sondern es wurde noch ein gewisser Bereich des das Rohrende umgebenden Raumes mitberechnet. Hier wurde ein deutlich größeres und unstrukturiertes Gitter mit sehr unterschiedlichen Zellgrößen verwendet (ebenfalls nicht dargestellt). Dadurch lässt sich nicht nur Rechenzeit einsparen, es treten auch an den

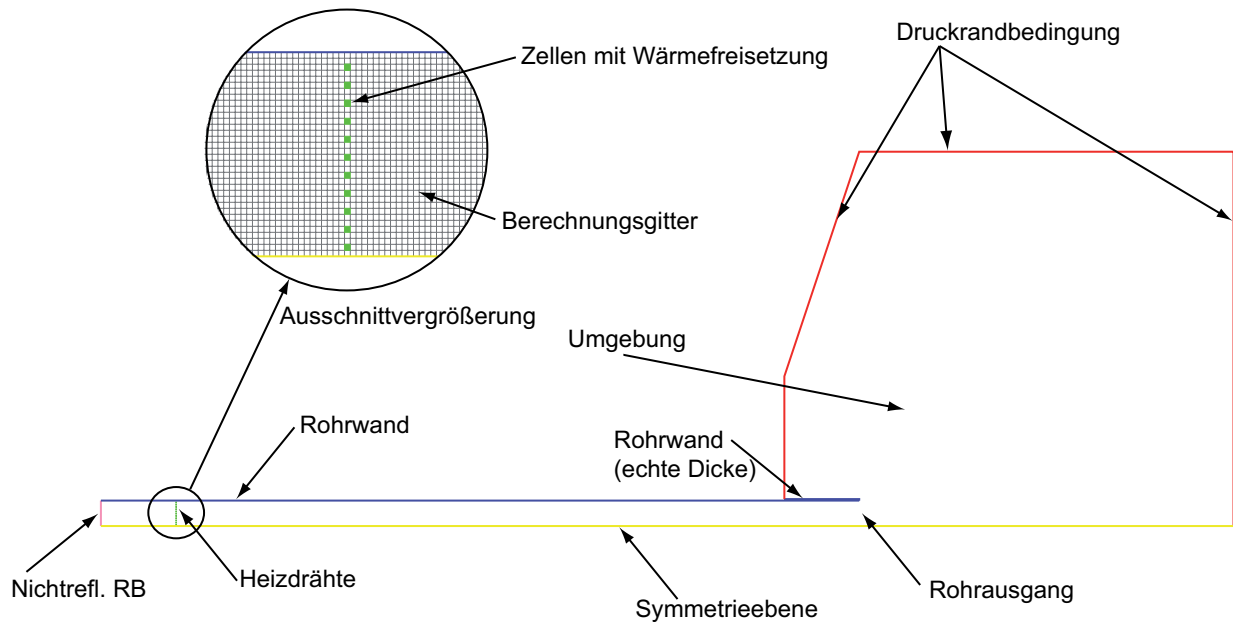


Abbildung 4.35: CFD-Berechnungsgebiet (Gitter nur im Ausschnitt dargestellt)

schrägen Gitterzellenwänden und v.a. durch die unterschiedlichen Gitterzellengrößen diffuse akustische Teilreflexionen auf, die helfen sollen zu vermeiden, dass die mitsimulierte Umgebung als Resonanzraum dient, denn sie wird durch akustisch „harte“ Ränder konstanten Drucks (rot) begrenzt.

Um Raum für eine eventuelle spätere genaue Wellenidentifizierung [34, 86] zu haben, den Ort der Wärmefreisetzung aus dem Einflussbereich der Einlassrandbedingung, die nur sehr schwer exakt eingestellt werden kann, zu nehmen und dem am Einlass gesetzten Rohrströmungsprofil Raum zu geben, sich an die tatsächlichen Verhältnisse im Rohr anzupassen, wurde ein Rohrstück von 100.5 mm stromauf des Heizgitters in den Berechnungsbe-
reich mit aufgenommen.

4.4.2 Modellierung des Heizgitters

Das im Experiment eingesetzte Heizgitter ist wie angesprochen nicht rotationssymmetrisch und muss deshalb in der Simulation angenähert dargestellt werden. Es bieten sich hier punktuelle Wärmefreisetzung an, die in Realität konzentrischen Kreisringen entsprechen. Der Hauptgrund für die Wahl einer nicht-homogenen Wärmefreisetzung, die oben beschriebene dämpfende Wirkung der stark unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten sowie die sehr lokale akustische Anregung, wird auch durch die konzentrische Anordnung berücksichtigt. Bei der Wahl der Anzahl und Orte der Wärmefreisetzung wurde darauf geachtet, die reale Heizgittergesamtlänge so genau wie möglich abzubilden. In den, in der Ausschnittvergrößerung von Abb. 4.35, grün dargestellten Zellen wurde somit ein Energiequellterm definiert. Die gewählten 11 Drahringe an den Positionen 2.5, 5.5, ..., 32.5 mm ergeben eine Gesamtdrahtlänge von 1210 mm, was eine gute Näherung an die 1183 mm des Experiments darstellt.

Allgemein (siehe [31] oder konvektiver Wärmeübergang über Nußelt-Zahl [68]) ist die konvektive Wärmeübertragung vom Draht an die umströmende Luft proportional zur Wurzel der Geschwindigkeit. Somit wurde in Anlehnung an (4.11) in allen Zellen mit Wärmefreisetzung eine Energiequelle mit der Wärmequellendichte nach

$$\hat{q} = \bar{q} \sqrt{\frac{\hat{u}}{\bar{u}}} \frac{1}{1 + c_\tau i S_d} \quad (4.29)$$

gesetzt. Der Wurzel entspricht im linearisierten Fall (4.11) der Faktor $1/2$. Etwas anderes fällt jedoch bei Gleichung 4.29 auf: sie befindet sich im Frequenzbereich. Dies ist mit der im Zeitbereich operierenden CFD zunächst nicht kompatibel. Es lässt sich jedoch im vorliegenden Fall per inverser Z-Transformation [67] ein diskreter Filter \mathbf{h} in Form einer Einheitsimpulsantwort generieren, der das komplexe Übertragungsverhalten im Zeitbereich darstellen kann. Es gilt dann im Zeitbereich

$$\dot{q}(t) = \frac{\bar{q}}{\sqrt{\bar{u}}} \sum_{k=0}^{L-1} h_k \sqrt{u(t - k\Delta t)}. \quad (4.30)$$

Die einzelnen Elemente h_k der Einheitsimpulsantwort werden mittels der inversen Z-Transformation nach

$$h_k = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{+\pi/\Delta t} F(\omega) e^{i\omega\Delta tk} d\omega \quad (4.31)$$

berechnet [67]. $F(\omega)$ ist dabei die zu transformierende Funktion im Frequenzbereich, also im vorliegenden Fall

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + c_\tau i S_d}. \quad (4.32)$$

Die Länge L des Filters sowie dessen Zeitschrittweite Δt (nicht zu verwechseln mit der Zeitschrittweite der CFD) sind im Prinzip beliebige Parameter, die iterativ so angepasst werden müssen, dass der Filter bei möglichst geringer Länge (aus Rechenzeitgründen) ausreichend genau ist, um das gewünschte Übertragungsverhalten darstellen zu können. Im vorliegenden Fall, haben sich Werte von $L = 14$ und $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ als optimal erwiesen. Der Filter ist zusätzlich abhängig von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit, die über die Strouhalzahl in die Übertragungsfunktion eingeht. Für die mittlere Geschwindigkeit 0.33 m/s ergibt sich der in Abbildung 4.36 dargestellte Filter. Wird dieser in den Frequenzbereich zurücktransformiert, so lässt er sich mit der exakten Transferfunktion vergleichen, siehe Abbildung 4.37. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung, leichte Abweichungen treten erst bei höheren Frequenzen auf. Da jedes Drahtelement in der CFD mit einer anderen mittleren Geschwindigkeit angeströmt wird, muss jeweils ein eigener Filter generiert werden.

Für die Modellierung der Wärmequelle ist nun noch die Bestimmung der Wärmequellendichte nötig. Da die Drahringe im CFD-Fall durch die Zellgeometrie bedingt einen quadratischen Querschnitt besitzen, ergibt sich bei einer Seitenlänge der Quadrate von 1 mm mit der Drahtlänge 1210 mm ein Gesamtdrahtvolumen von $V_{\text{Draht}} = 1.21 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. Die mittlere Wärmequellendichte berechnet sich dann bei einer mittleren Wärmefreisetzung von $\dot{Q} = 239.4 \text{ W}$ zu $\bar{q} = \dot{Q}/V_{\text{Draht}} = 1.98 \cdot 10^8 \text{ W/m}^3$.

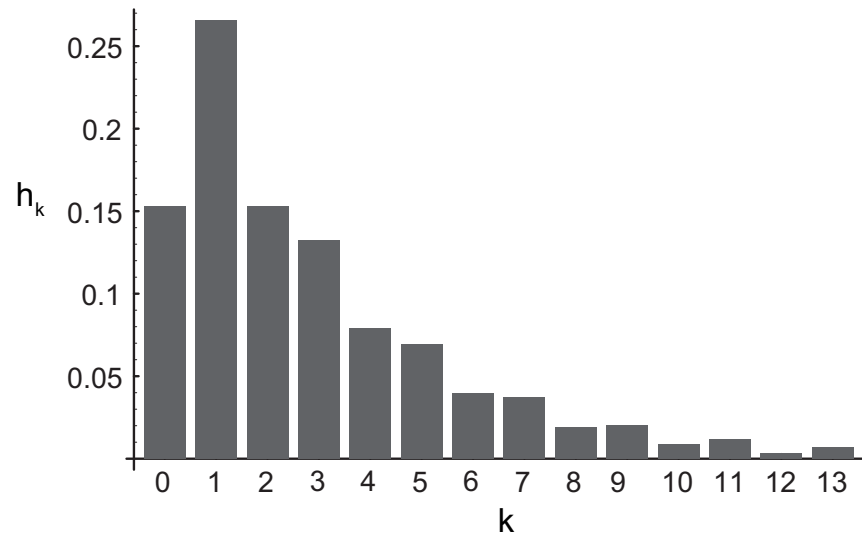


Abbildung 4.36: Einheitsimpulsantwort für die Übertragungsfunktion der Wärmeübertragung am Draht für $\bar{u} = 0.33$ m/s

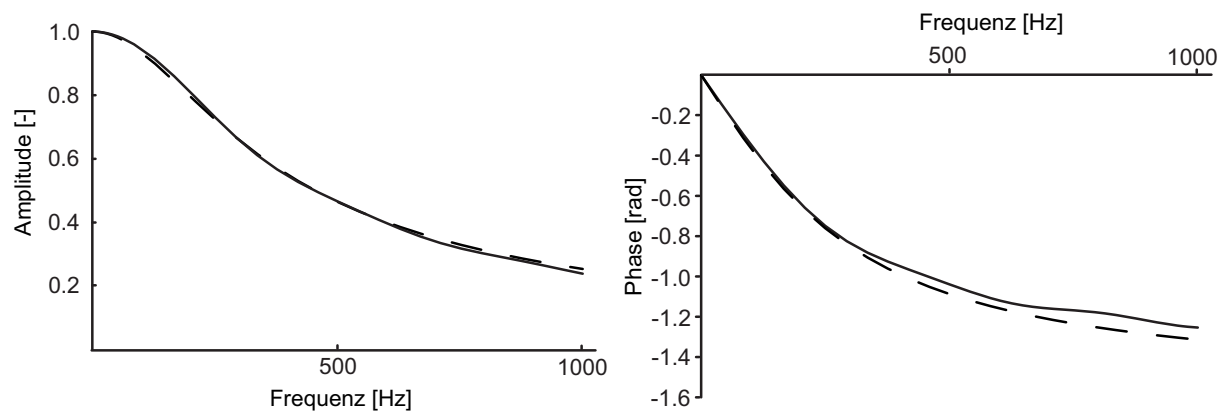


Abbildung 4.37: Vergleich von exakter (gestrichelt) und sich aus der Einheitsimpulsantwort ergebender (durchgezogene Linie) Transferfunktion für $\bar{u} = 0.33$ m/s. Links: Betrag; rechts: Phase.

4.4.3 Numerischer Löser und Parameter

Da die Reynoldszahl sich im Rohr um den für Rohrströmungen kritischen Wert bewegt, wurde mit Turbulenzmodell gerechnet. Aufgrund der relativ geringen, nur leicht turbulenten Reynoldszahl (etwa 2400 im heißen Teil) wurde kein speziell angepasstes Modell verwendet. Zur Erreichung des im Experiment beobachteten, nicht perfekt parabolischen Strömungsprofils und zur Stabilisierung des numerischen Lösungsprozesses ist die leichte turbulente Diffusion, wie sie mit dem k - ϵ -Modell erreicht wird, ausreichend.

Die experimentellen Ergebnisse (Kapitel 4.2) und die des Netzwerkmodells lassen Wachstumsraten der Eigenmoden in der Größenordnung von 1 bis 10 % erwarten. Gängige CFD-Löser, die nicht speziell für Akustiksimulationen entwickelt wurden, weisen jedoch für akustische Wellen recht hohe Dissipation auf. So sind bei Verwendung eines standardmäßigen impliziten Löser mit Fluent über die Lauflänge des Rijke-Rohrs in der Größenordnung 1 m für gängige Frequenzen durchaus Dissipationsraten von mehreren Prozent möglich. Diese Fehler liegen somit teilweise deutlich über den zu untersuchenden Änderungen der Amplitude, eine Stabilitätsanalyse ist mit Standardlösern nicht möglich. Deshalb wurden verschiedene Diskretisierungsverfahren und Solvereinstellungen hinsichtlich der Dissipation akustischer Wellen untersucht (siehe [32]). Der SIMPLE-Algorithmus („segregated Löser“ in Fluent) hat zu viele Fehlerquellen, die die erforderliche Genauigkeit reduzieren. Der gekoppelte, implizite Löser weist extreme Skalenunterschiede in der Lösungsmatrix auf, die ebenfalls die numerische Genauigkeit drastisch reduzieren. Der explizite, gekoppelte Löser ist somit der einzig wirklich geeignete. Für einen typischen Frequenzbereich wurde hier die Dissipation akustischer Energie untersucht, feststellbar über die Änderung des Absolutwerts der FFT an verschiedenen Messpunkten in einem einfachen Rohr. In Abbildung 4.38 ist erkennbar, dass kein Verlust akustischer Energie mehr feststellbar ist. Die Abweichungen von ca. 0.25% nach oben und unten müssen Fehlern durch mangelnde numerische Genauigkeit im Berechnungsprozess zugerechnet werden, da sich kein charakteristischer Abfall des Mittelwerts bei hohen Frequenzen feststellen lässt. Eine Fehlerquelle ist selbst bei bestem Eingangssignal (sehr hohe Abtastrate, nur

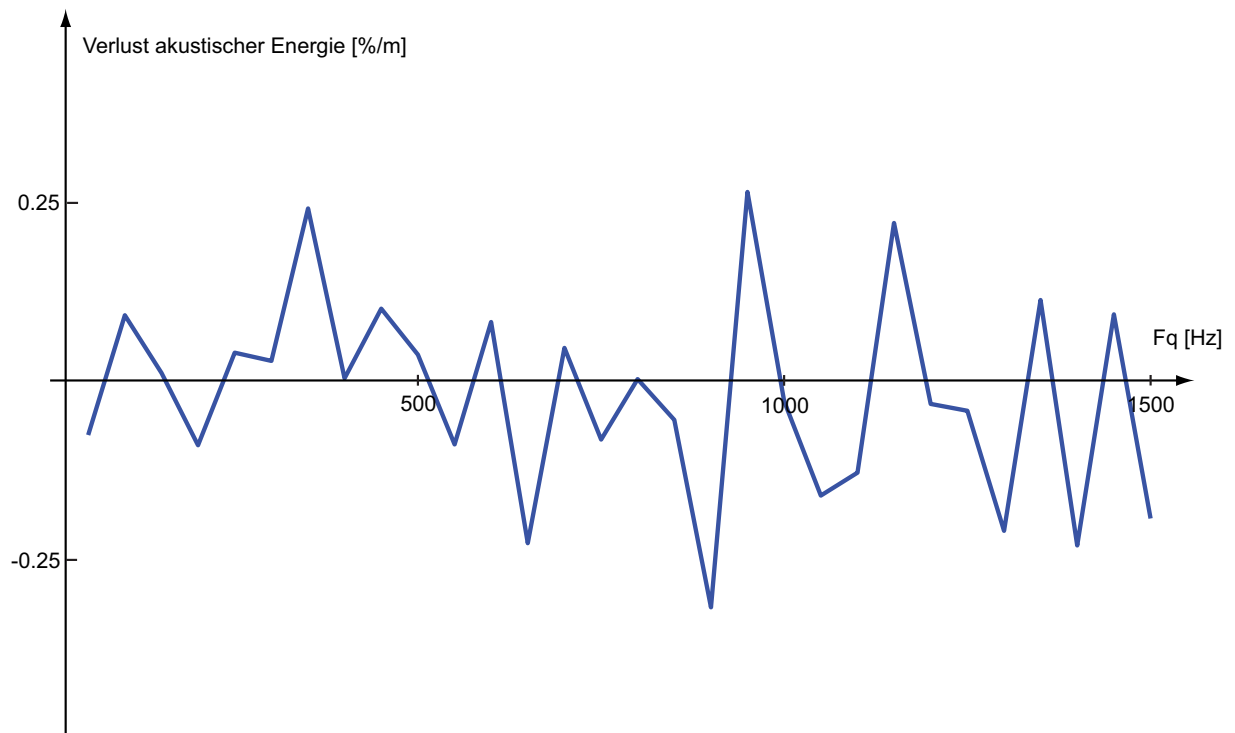


Abbildung 4.38: Verlust akustischer Energie für typische Frequenzen pro Meter Lauflänge

| | |
|---|------------------------|
| Zeitdiskretisierung | Explizit |
| Druck-Geschwindigkeits-Koppelung | Direkt gekoppelt |
| Zeitschrittweite | Courantzahl=1 |
| Turbulenzmodell | Standard k- ϵ |
| räumliche Diskretisierung | UDS, 2. Ordnung |
| Unterrelaxationsfaktoren | |
| k | 0.8 |
| ϵ | 0.8 |

Tabelle 4.3: Solvereinstellungen für den CFD-Teil der CNN-Stabilitätsanalyse des Rijke-Rohrs

ganzzahlige harmonische Sinuswellen) sicherlich die FFT, aber auch die Beschränkung der Datenausgabe von Fluent auf 6 Nachkommastellen reduziert die numerische Genauigkeit merklich und muss bei allen weiteren Ergebnisinterpretationen berücksichtigt werden.

Beim expliziten Löser muss darauf geachtet werden, dass die Courant-Zahl

$$CFL = \frac{v\Delta t}{\Delta x},$$

mit der Zeitschrittweite Δt , der Gitterweite Δx und einer typischen Geschwindigkeit v , im kompressiblen Fall der Schallgeschwindigkeit, den Wert von 1 nicht überschreitet, da der Lösungsprozess ansonsten divergiert. Bei einer Gitterweite von 1 mm und einer Schallgeschwindigkeit von etwa 350 m/s ergibt sich somit ein sehr kleiner maximal möglicher Zeitschritt von etwa $3 \cdot 10^{-6}$ s. Zur Generierung eines, für eine stabile FFT geeigneten, Datensatzes sind somit mehrere 100000 Zeitschritte nötig. Kompensiert wird dies jedoch dadurch, dass der explizite Löser den nächsten Zeitschritt eben nicht iterativ bestimmen muss und sich deshalb akzeptable Gesamtsimulationszeiten in der Größenordnung weniger Tage ergeben - ähnlich, wie mit einem impliziten Löser bei größeren Zeitschritten. Die verwendeten Solvereinstellungen sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

| | |
|---|--|
| Einlassrandbedingung | Rohrströmungsprofil nach Gleichung (4.33) mit mittlerer Geschwindigkeit $\bar{u}_c = 0.33$ m/s, definiert über Machzahl in nicht-reflektierender Far-Field-Randbedingung, Turbulenz definiert über $I = 10\%$ und $l_t = 0.068$ m, Einlass-temperatur $T_c = 296.79$ K |
| Auslassrandbedingung | konstanter Druck, $p = 101325$ Pa |
| Wandrandbedingung, bis zum Heizgitter | Isotherme Wand, Wandhaftbedingung |
| Wandrandbedingung, stromab des Heizgitters | Wand mit Wärmeverlust (Wanddicke=0.002 m, Außentemperatur=296.79 K, $\alpha = 200$ W/m ² K), Wandhaftbedingung |

Tabelle 4.4: Randbedingungen für den CFD-Teil der CNN-Stabilitätsanalyse des Rijke-Rohrs

4.4.4 Randbedingungen

Die verwendeten Randbedingungen sind zusammengefasst in Tabelle 4.4 dargestellt und werden in den folgenden Abschnitten detailliert beschrieben.

4.4.4.1 Einlassrandbedingung

Von entscheidender Bedeutung im CFD-Teil einer CNN-Berechnung ist eine akustisch möglichst gering reflektierende Randbedingung an der Stelle, an der später der Schnitt liegen soll. Je höher der Reflexionsfaktor ist, umso mehr Rechenzeit ist zunächst notwendig, um einen eingeschwungenen, quasi-stationären Zustand zu erreichen. Ist er zu hoch, so können die Ergebnisse durch zu hohe Amplituden und damit ein Hineinrutschen in den nicht-linearen Bereich verfälscht oder die Simulation sogar instabil werden. In Fluent bietet sich deshalb die Verwendung der so genannten Far-Field-Randbedingung [19] an. Leider enthält die Fluent-Dokumentation keine detaillierte Beschreibung der Far-Field-Randbedingung, so dass auf eine mathematische Definition hier verzichtet werden muss. Es sei jedoch angemerkt, dass in Testrechnungen unter Verwendung des gekoppelten expliziten

Lösers keine Reflexion im betrachteten Frequenzbereich feststellbar war.

Die Far-Field-Randbedingung ist eine nicht-reflektierende Geschwindigkeitsrandbedingung, die die Vorgabe der Geschwindigkeit über die Machzahl erlaubt. Das laminare parabolische Rohrströmungsprofil ist allgemein definiert durch

$$2\frac{\bar{u}}{R^2}(R^2 - r^2), \quad (4.33)$$

mit dem Außenradius R . Wie in Experiment und Netzwerkmodell, wurde eine mittlere Geschwindigkeit von 0.33 m/s betrachtet – dies entspricht einer Machzahl von $9.57 \cdot 10^{-4}$. Um ein leicht turbulentes Profil zu erreichen, wurde der Exponent 2 in der vorliegenden Simulation zu 2.5 gesetzt, wodurch der Vorfaktor 2 zu 1.8 gesetzt werden muss, um die gleiche mittlere Geschwindigkeit zu erreichen. Als Turbulenzrandbedingung wurden ein turbulentes Längenmaß von 0.068 m, also dem Durchmesser des Rohres, sowie eine Turbulenzintensität von 10% eingestellt. Diese Werte dienen nur zur Initialisierung und haben keinen nennenswerten Einfluss auf die Simulationsergebnisse. Die Strömung stellt sich sofort von selbst auf die Bedingungen im Rohr ein, zudem erzeugt der Heizdraht einen deutlichen Strömungswiderstand, so dass sich stromauf des Heizgitters ein relativ homogenes Geschwindigkeitsprofil einstellt, womit auch die Form des Eingangsprofils keinen Einfluss hat. Dies ist übrigens eine interessante Erkenntnis, die die Vorteile der CFD-Simulation zeigt, denn im Experiment lässt sich das Strömungsprofil direkt stromauf des Heizdrahtes wegen der starken Hitzeentwicklung und Strahlung nur sehr schwierig unter Verwendung komplizierter und teurer optischer Messtechniken bestimmen.

4.4.4.2 Wandrandbedingung im kalten Teil

Im kalten Teil des Rohres stromauf des Heizgitters hat die Rohrluft noch die Temperatur der Umgebungsluft, so dass hier zur Reduzierung der Rechenzeit Adiabasie angenommen werden darf. Ferner gilt die Wandhaftbedingung. Die turbulente Grenzschicht wird durch die feine Gitterweite von 1 mm ($y^* \approx 3$) aufgelöst, so dass Fluent nur die laminare Unterschicht modelliert [19], dies dürfte aber auf die Akustik ohnehin keinerlei Einfluss

haben.

4.4.4.3 Wandrandbedingung im heißen Teil

Im heißen Teil des Rohres, stromab des Heizgitters wurde im Experiment trotz der Verwendung einer Isolierschicht ein deutlich messbarer Temperaturgradient in Längsrichtung festgestellt. Deshalb wurde hier eine Wandrandbedingung mit Wärmeübergang an die Umgebung verwendet. Der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Rohrwand und Umgebung wurde mit ($\alpha = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$) so gewählt, dass sich in etwa das experimentell ermittelte Temperaturprofil einstellt. Es sei jedoch bemerkt, dass sich ein derart hohes α bei freier Konvektion nach gängiger Theorie [68] nicht einstellen kann. Verantwortlich dürfte hier die bei der Diskussion der experimentellen Ergebnisse angesprochene kapazitive Kühlung durch die anfangs kalte Rohrwand sein.

4.4.4.4 Auslassrandbedingung

Als Abschlussrandbedingung für die mit in die Simulation einbezogene Umgebung wurde eine Randbedingung konstanten Drucks gewählt. So gelangt die Information über den konstanten Umgebungsdruck ins Berechnungsgebiet. Trotzdem werden eventuelle Randverluste am offenen Rohrende durch die Miteinbeziehung der Umgebung in der Simulation berücksichtigt.

4.4.5 Durchführung der CFD Simulation

4.4.5.1 Stationäre Initiallösung

Nachdem der mit CFD zu simulierende Teil der Geometrie, also der Ort des Schnittes, gewählt, die Randbedingungen definiert und die Solvereinstellungen gesetzt wurden, muss eine mit einem Anregungssignal f_d beaufschlagte Simulation durchgeführt werden um das Antwortsignal g_d zu generieren.

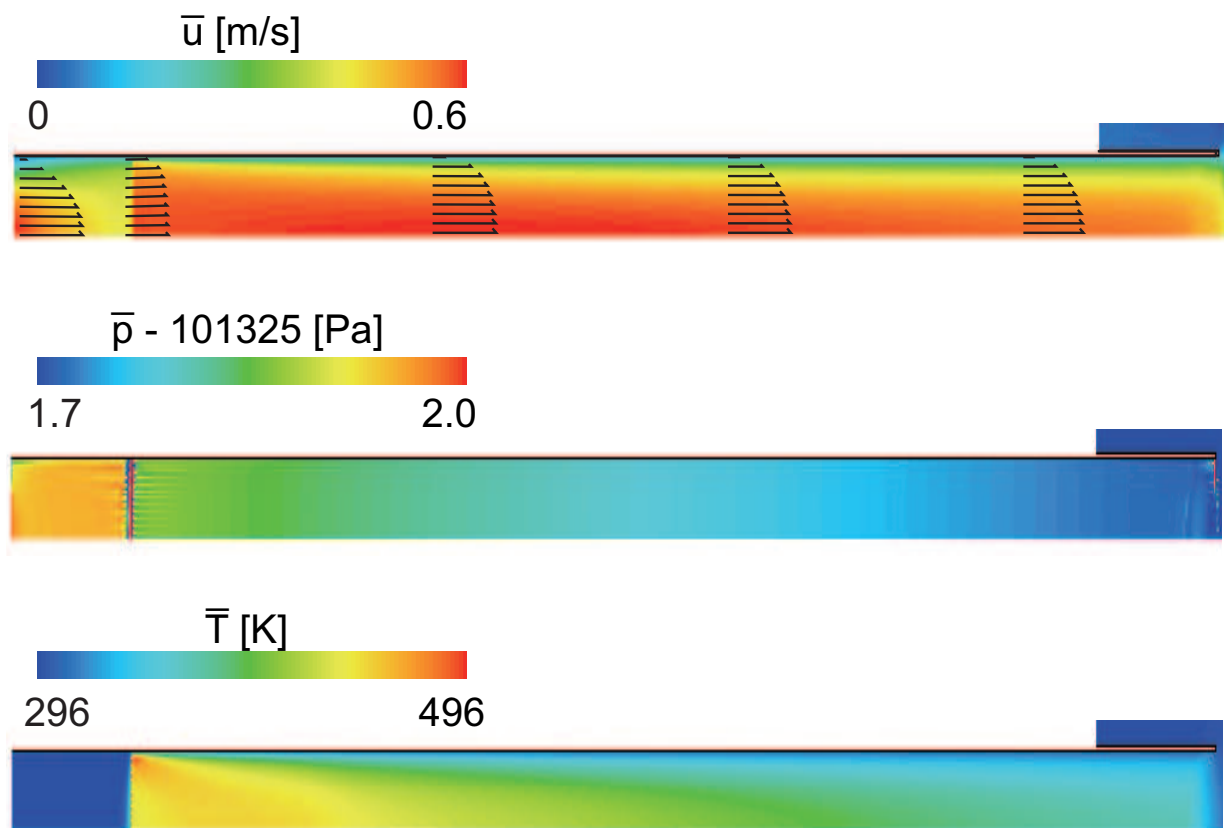


Abbildung 4.39: Konturplots von Axialgeschwindigkeit, relativem Druck und Temperatur sowie Geschwindigkeitsvektoren im stationären Zustand.

Zunächst wird aber eine stationäre Lösung bestimmt. Abbildung 4.39 zeigt Konturwerte für Axialgeschwindigkeit, Druck und Temperatur für die stationäre Lösung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde nur ein kleiner Teil der Umgebung am Rohrende dargestellt. Zudem wurden bei der Axialgeschwindigkeit und beim relativen Druck die Skalen eingeschränkt um die Vorgänge im Rohr besser sichtbar zu machen. So werden bei der Axialgeschwindigkeit nur positive Werte dargestellt, d.h. blau dargestellte Bereiche weisen eine Axialgeschwindigkeit von ≤ 0.0 m/s auf. Für den relativen statischen Druck gelten entsprechend die dargestellte Unter- bzw. Obergrenze von 1.7 bzw. 2.0 Pa. So wird der Druckabfall über das Heizgitter von ca. 0.1 Pa erkennbar, der sich aus Druckverlust und Druckgradient durch Be-

schleunigung der Strömung zusammensetzt. Ebenso zu sehen sind die deutliche Homogenisierung des Strömungsprofils vor dem Heizgitter (siehe auch die eingezeichneten Geschwindigkeitsvektoren) sowie die höhere Geschwindigkeit stromab des Heizgitters durch die von der höheren Temperatur hervorgerufene Volumenvergrößerung der Luft. Direkt stromab des Heizgitters ist das Temperaturprofil relativ inhomogen, dort wo die Strömungsgeschwindigkeit in der Nähe der Wand geringer ist, vom Heizdraht jedoch die gleiche Wärme freigesetzt wird, ist die Temperatur deutlich erhöht. Im weiteren Verlauf homogenisiert sich das Temperaturprofil jedoch, auch der Wärmeverlust über die Rohraußenwand ist deutlich sichtbar.

4.4.5.2 Angeregte instationäre Simulation

Entsprechend des experimentell untersuchten Frequenzbereichs wird nun eine angeregte Simulation durchgeführt. Als Untergrenze wird somit 100 Hz (die kleinste experimentell bestimmte Frequenz war ca. 140 Hz) und als Obergrenze 1000 Hz gewählt. Um eine kontinuierliche OLTF bestimmen zu können böte es sich nun an, mit weißem Rauschen, welches möglichst einem Rechteck im Frequenzbereich entspricht, also sämtliche Frequenzen im gewählten Bereich zu gleichen bzw. sehr ähnlichen Anteilen enthält, anzuregen. Realisieren lässt sich dies beispielsweise durch ein frequenzgefiltertes Zufallssignal. Testrechnungen haben jedoch gezeigt, dass diese Methode zur OLTF-Bestimmung nicht geeignet ist. Die FFT, die per se mit diskreten Werten arbeitet, benötigt auch diskrete Frequenzen, um exakt sein zu können. Diese sind in einem Zufallssignal nicht vorhanden. Deshalb ergeben sich kleine Fehler im per FFT transformierten Signal, bzw. ist dieses mit einem gewissen Rauschen behaftet. Dies führt zu zwei Problemen bei der Eigenfrequenzbestimmung per OLTF: zum einen sind die Fehler in den per FFT aus weißem Rauschen identifizierten Amplituden schnell größer als die zu beobachtenden Wachstumsraten, was es unmöglich macht, diese zu bestimmen, zum anderen weist die Ortskurve einen un stetigen bzw. verrauschten Verlauf auf, was es schwieriger macht, eine für die eigentliche Eigenfrequenzbestimmung notwendige Polynomnäherung abzuleiten.

In der vorliegenden Arbeit kam deshalb ein aus Sinuswellen zusammengesetztes Anregungssignal zum Einsatz. Dieses lässt eine völlig rauschfreie Identifikation per FFT zu, die enthaltenen Frequenzen und Amplituden können exakt gewählt werden und bei genügend feiner Auflösung können auch Zwischenwerte aus der Ortskurve interpoliert werden. Dabei hat sich folgendes Vorgehen bewährt:

- Zunächst wird mit einer relativ groben Frequenzauflösung angeregt. Dies geschieht deshalb, weil die Anregung mit feiner Auflösung im gesamten Frequenzbereich zu einer Aufsummierung sehr vieler Sinussignale führen würde. Erste Berechnungen mit einem solchen Anregungssignal brachten unbefriedigende Ergebnisse, ähnlich der Anregung mit weißem Rauschen. Als Gründe dürften Amplitudenspitzen im Anregungssignal durch die Aufsummierung zu vieler Sinuswellen, zu steile, mit dem CFD-Löser nicht darstellbare Gradienten im Anregungssignal und möglicherweise auch Probleme bei der FFT gelten. Ein Vorteil bei der Anregung mit nur wenigen Frequenzen ist die sehr kurze benötigte Simulationszeit, so sind beispielsweise bei einer Frequenzauflösung von 100 Hz nur 0.01 s nötig um ein kontinuierliches und damit fehlerfrei transformierbares Antwortsignal zu erhalten. Aus diesem wird anschließend die noch sehr grob definierte OLTF berechnet, die jedoch genügt um Frequenzbereiche mit möglichen Eigenfrequenzen zu identifizieren. Als Indikator hierfür wurden Schnittpunkte der Ortskurve mit der negativen reellen Achse gewählt, welche jedoch ausdrücklich nicht direkt den Eigenfrequenzen entsprechen, sondern nur deren ungefährem Ort.
- Anschließend wird eine weitere CFD-Simulation durchgeführt, die mit Frequenzen im Bereich um diese möglichen Eigenfrequenzen angeregt wird, hier jedoch mit wesentlich feinerer Auflösung. Aus der daraus berechneten OLTF lassen sich schließlich mit hoher Genauigkeit die tatsächlichen Eigenfrequenzen bestimmen.

Im vorliegenden Fall wurde zunächst mit Frequenzen von 100 bis 1000 Hz, in Schritten von 20 Hz angeregt. Somit ist eine Zeitreihe von $1/20 = 0.05$ s nötig um ein kontinuierliches Signal zu erhalten. Im realen Fall wurden etwa

0.12 s berechnet, um Diskontinuitäten, wie sie durch das plötzliche Einschalten der Anregung entstehen, die Möglichkeit zu geben, das Berechnungsgebiet zu verlassen. Zudem kann die Simulation so auch einen eingeschwungenen Zustand erreichen, falls die Randbedingung am Schnitt noch leicht reflektierend ist. Dieser ist in Zeitreihen von Druck oder Geschwindigkeit an einer unveränderlichen Amplitude zu erkennen. Als Amplitude für die einzelnen Sinuswellen wird $1/80$ der mittleren Machzahl, also der Machzahl, die der mittleren Geschwindigkeit von 0.33 m/s entspricht, gewählt und die einzelnen Sinuswellen werden per zufälligen Phasenverzugs gegeneinander verschoben, um Amplitudenspitzen zu vermeiden und einen möglichst gleichmäßigen Verlauf der Anregungsamplitude zu erreichen. Die niedrige Amplitude der einzelnen Wellen ist dennoch notwendig, um die maximalen Ausschläge des Anregungssignals im linearen Bereich zu halten. Somit ergibt sich für das Anregungssignal folgende Definition:

$$M'(t) = \sum_{j=0}^{45} \sin(2\pi(t(100+20j) \text{ Hz} + w(j))) \frac{\overline{M}}{80}, \quad (4.34)$$

wobei w ein Vektor ist, der zuvor bestimmte Zufallszahlen zwischen 0 und 1 enthält und Phasenverschiebung bewirkt.

Nun werden über die Querschnittsfläche gemittelte Zeitreihen von Axialgeschwindigkeit und statischem Druck aufgenommen. Sinnvollerweise geschieht dies ein wenig stromab des Einlasses, um eventuelle Beeinflussungen durch die Randbedingung zu vermeiden, im vorliegenden Fall wurde ein Abstand von 7.5 mm gewählt.

Aus den aufgezeichneten Zeitreihen von Druck und Axialgeschwindigkeit werden dann per zeitlicher Mittelung die Schwankungswerte bestimmt:

$$p'_d(t) = p_d(t) - \overline{p_d}$$

$$u'_d(t) = u_d(t) - \overline{u_d}.$$

Aus diesen wiederum können die für die Berechnung der OLTF nötigen akustischen Wellen abgeleitet werden:

$$f_d(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{p'_d(t)}{\rho_c c_c} + u'_d(t) \right)$$

$$g_d(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{p'_d(t)}{\rho_c c_c} - u'_c(t) \right).$$

Diese beiden Signale werden nun per FFT in den Frequenzbereich transformiert, was Amplitude und relative Phase jeder Sinuswelle liefert, aus denen die Signale zusammengesetzt sind.

Nun wird per Netzwerkmodell das Signal \hat{f}_u bestimmt. Nachdem Druck und Geschwindigkeit 93.5 mm stromab der Eingangsrandbedingung aufgezeichnet wurden und diese 100.5 mm stromauf des Heizdrahtes liegt, ergibt sich bei einer Länge des Rohrstücks vor dem Heizgitter von 335 mm noch eine Lauflänge l_a von 241.5 mm für die akustischen Wellen bis zum Eingang des Rijke-Rohres. Entsprechend Gleichung (4.7) werden sie hier reflektiert und wandern schließlich wieder über die Länge l_a stromab bis zum Schnitt um hier als f_u anzukommen. Somit gilt im Frequenzbereich

$$\hat{f}_u(\omega) = r(\omega)\hat{g}_d(\omega)e^{-ik_c 2l_a}, \quad (4.35)$$

mit der Wellenzahl $k_c = \frac{\omega}{c_c}$ und dem Reflexionsfaktor $r(\omega)$ nach Gleichung (4.8). Die konvektive Strömungsgeschwindigkeit wurde hier nicht berücksichtigt, denn die Schallwelle muss zunächst stromauf gegen die Strömung wandern, wird aber anschließend von dieser stromab „geschoben“, so dass sich der Einfluss der Konvektionsströmung herauskürzt.

In der sich somit ergebenden Ortskurve der OLTF sind sechs Schnittpunkte mit der negativen reellen Achse identifizierbar. Die zugehörigen potentiellen Eigenfrequenzen befinden sich in den Frequenzbereichen 140-160 Hz, 280-300 Hz, 440-460 Hz, 580-600 Hz, 720-740 Hz und 880-900 Hz. Aufgrund der groben Frequenzauflösung kann aber noch kein zuverlässiges Näherungspolynom berechnet werden.

In einem zweiten Schritt wird nun eine weitere angeregte Simulation durchgeführt, allerdings beinhaltet das Anregungssignal jetzt nur noch Frequenzen in der Umgebung der potentiellen Eigenfrequenzen, gleichzeitig wurde die Frequenzauflösung deutlich erhöht, um eine genaue Identifikation zu ermöglichen. Die im Anregungssignal beinhalteten Frequenzbänder sind nun 135-155 Hz, 285-305 Hz, 435-455 Hz, 575-595 Hz, 725-745 Hz und 885-905 Hz. Die Schrittweite beträgt nun 5 Hz, so dass in jedem Frequenzband

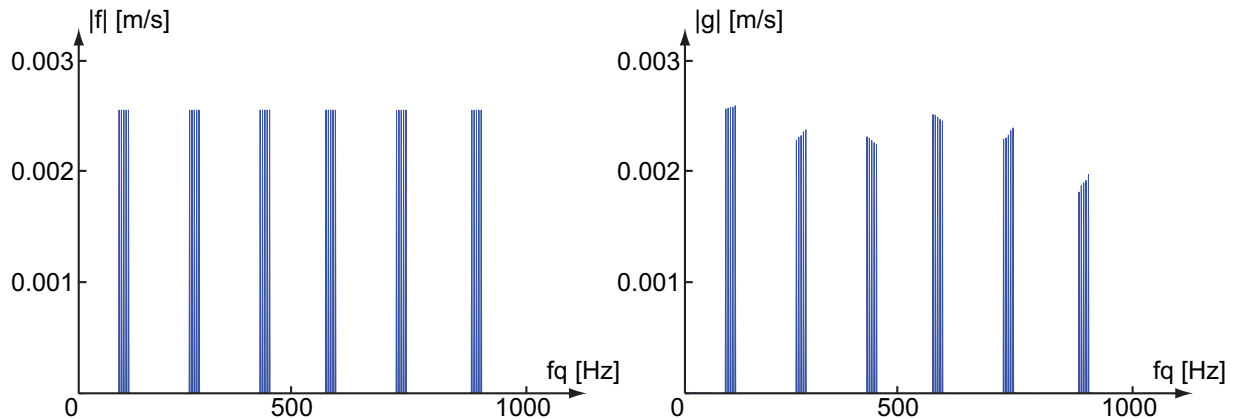


Abbildung 4.40: Absolutwerte der FFTs von \hat{f}_d und \hat{g}_d , fein aufgelöstes Anregungssignal

fünf diskrete Frequenzen enthalten sind. Für die einzelnen Frequenzbänder berechnet sich das Anregungssignal nun zu

$$M'(t) = \sum_{j=0}^4 \sin(2\pi(t(f_{\text{start}} + 5j)\text{Hz} + w(j))) \frac{\bar{M}}{60}, \quad (4.36)$$

mit der jeweiligen Startfrequenz f_{start} , also 135 Hz, 285 Hz und so weiter. Der Normierungsfaktor wurde hier gegenüber Gleichung (4.34) auf $1/60$ erhöht um der geringeren Anzahl an enthaltenen Frequenzen Rechnung zu tragen.

Signal f_d und Antwort g_d der Simulation werden erneut per FFT transformiert, die Ergebnisse sind in Form der Amplitude in Abbildung 4.40 dargestellt. Es ist bereits erkennbar, dass nur die Amplitude der ersten Mode zunimmt und somit nur diese das Potential für eine instabile Eigenfrequenz mitbringt. Mit Hilfe des Netzwerkmodells kann nun wieder \hat{f}_u und damit die OLTF berechnet werden. Die zu den Frequenzbändern gehörigen Ortskurvenstücke sind in Abbildung 4.41 dargestellt. Hier ist deutlich zu erkennen, dass nur die blaue Linie links am kritischen Punkt vorbeiläuft. Wird für die Ortskurvenstücke jeweils ein Näherungspolynom zweiter Ordnung erstellt, ergeben sich schließlich die in Tabelle 4.5 dargestellten Eigenfrequenzen und Wachstumsraten. Eine Diskussion dieser Ergebnisse im Kontext mit den ex-

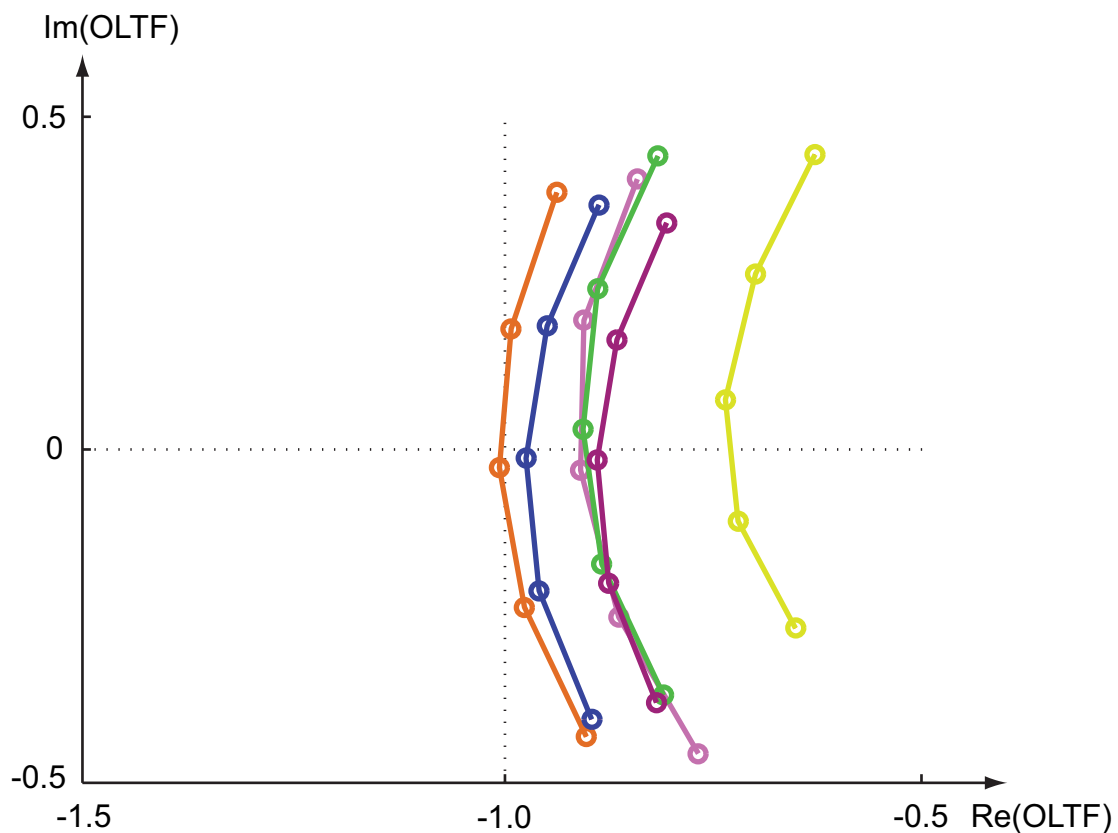


Abbildung 4.41: Mit der CNN-Methode bestimmte Ortskurven. Orange: 1. Eigenfrequenz; grün: 2. Eigenfrequenz; violett: 3. Eigenfrequenz; blau: 4. Eigenfrequenz; pink: 5. Eigenfrequenz; gelb: 6. Eigenfrequenz

| Modennummer | Komplexe Eigenfrequenz | Wachstumsrate |
|-------------|------------------------|---------------|
| 1 | $145.7 - 0.17i$ | 0.7% |
| 2 | $294.4 + 2.16i$ | -4.5% |
| 3 | $445.3 + 2.83i$ | -3.9% |
| 4 | $585.3 + 0.66i$ | -0.7% |
| 5 | $735.8 + 1.85i$ | -1.6% |
| 6 | $893.4 + 5.89i$ | -4.1% |

Tabelle 4.5: Mit der CNN-Methode bestimmte Eigenfrequenzen des Rijke-Rohrs

| | Mode 1 | | Mode 2 | | Mode 3 | |
|--------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|
| | Fq [Hz] | Γ [%] | Fq [Hz] | Γ [%] | Fq [Hz] | Γ [%] |
| Exp | 141.0 | 0.3 | 281.9 | | 427.4 | |
| Netzw. | 147.9 | 6.3 | 302.6 | -1.8 | 454.8 | -1.7 |
| CNN | 145.7 | 0.7 | 294.4 | -4.5 | 445.3 | -3.9 |

| | Mode 4 | | Mode 5 | | Mode 6 | |
|--------|---------|--------------|---------|--------------|---------|--------------|
| | Fq [Hz] | Γ [%] | Fq [Hz] | Γ [%] | Fq [Hz] | Γ [%] |
| Exp | 563.8 | | 718.2 | | 864.2 | |
| Netzw. | 599.9 | 1.3 | 753.2 | 0.1 | 909.2 | -0.9 |
| CNN | 585.3 | -0.7 | 735.8 | -1.6 | 893.4 | -4.1 |

Tabelle 4.6: Vergleich der mit den jeweiligen Methoden bestimmten ersten sechs Eigenmoden. Für die experimentellen Ergebnisse ist nur die Wachstumsrate der ersten Eigenfrequenz dargestellt, da die anderen nicht als selbsterregt betrachtet werden können.

perimentellen Daten sowie den Ergebnissen der Netzwerkmodellierung findet im folgenden Kapitel 4.5 statt.

4.5 Diskussion, Ausblick und Zusammenfassung

4.5.1 Vergleich der Ergebnisse

Ein Vergleich der Ergebnisse der von allen Methoden erfassten ersten sechs Eigenfrequenzen ist in Tabelle 4.6 dargestellt. Es fallen hier mehrere Dinge auf:

1. Während beim Netzwerkmodell ein ausgeprägter Wechsel zwischen stabilen und instabilen Eigenfrequenzen zu erkennen ist, wird beim CNN-Modell nur die erste Eigenfrequenz als instabil vorhergesagt. Die im Experiment stets positiv bestimmten Wachstumsraten können, wie bereits in Kapitel 4.2.5.3 angesprochen und im weiteren Verlauf dieses Kapitels diskutiert nicht durch lineare, unabhängige Anregung hervor-

gerufen werden und sind zum Vergleich mit den numerischen Methoden nicht geeignet. Sie wurden deshalb in der Tabelle nicht dargestellt.

2. Die von den numerischen Modellen berechneten Frequenzen sind in relativ guter Übereinstimmung mit den experimentell bestimmten, wobei das CNN-Modell für alle Moden bessere Ergebnisse liefert.
3. Die vom Netzwerkmodell vorhergesagten Wachstumsraten sind stets größer als diejenigen, die das CNN-Modell liefert, bei den Moden 4 und 5 führt das dazu, dass diese vom Netzwerkmodell als instabil vorhergesagt werden, während sie vom CNN-Modell als stabil vorhergesagt werden.

Im Folgenden sollen die Ergebnisse der verschiedenen Methoden in Kontext zueinander gesetzt werden.

Kunz [38] zeigte, dass die lineare Anregung einer einzelnen Eigenfrequenz durch ein Heizgitter nur an einem Ort stattfinden kann, wo die Druckschwankungen den Geschwindigkeitsschwankungen um $\pi/2$ folgen, was als Ort mit induktivem Verhalten bezeichnet wird, im Gegensatz zu kapazitivem Verhalten, wo die Druckschwankungen den Geschwindigkeitsschwankungen vorauslaufen. Dies lässt sich anschaulich so erklären, dass nur an diesen Orten durch den stets zwischen 0 und $\pi/2$ liegenden Phasenverzug (siehe Abbildung 4.37) Wärmefreisetzungsschwankung und Druckschwankung soweit in Phase sein können, dass das Rayleigh-Integral positiv ist. Induktives Verhalten ist bei dem verwendeten Rijke-Rohr mit zwei offenen Enden jedoch nur für die erste und fünfte Mode am Ort des Heizgitters gegeben, sofern die Temperatur im heißen Teil nicht allzu deutlich über derjenigen im kalten Teil liegt und sich somit die Modenformen im heißen und kalten Teil nicht zu sehr unterscheiden, wovon man im vorliegenden Fall ausgehen darf. Wird konstante Temperatur im Rohr angenommen, so liegt bei der zweiten, vierten und sechsten Mode das Heizgitter gar genau auf einem Geschwindigkeits- bzw. Druckknoten, so dass hier eine Anregung theoretisch ausgeschlossen werden kann. Dieses Verhalten ist in Abbildung 4.42 dargestellt. Die gestrichelten Linien symbolisieren dabei die Position des Heizgitters relativ zur entsprechenden Mode. Bereiche, in denen Druck-

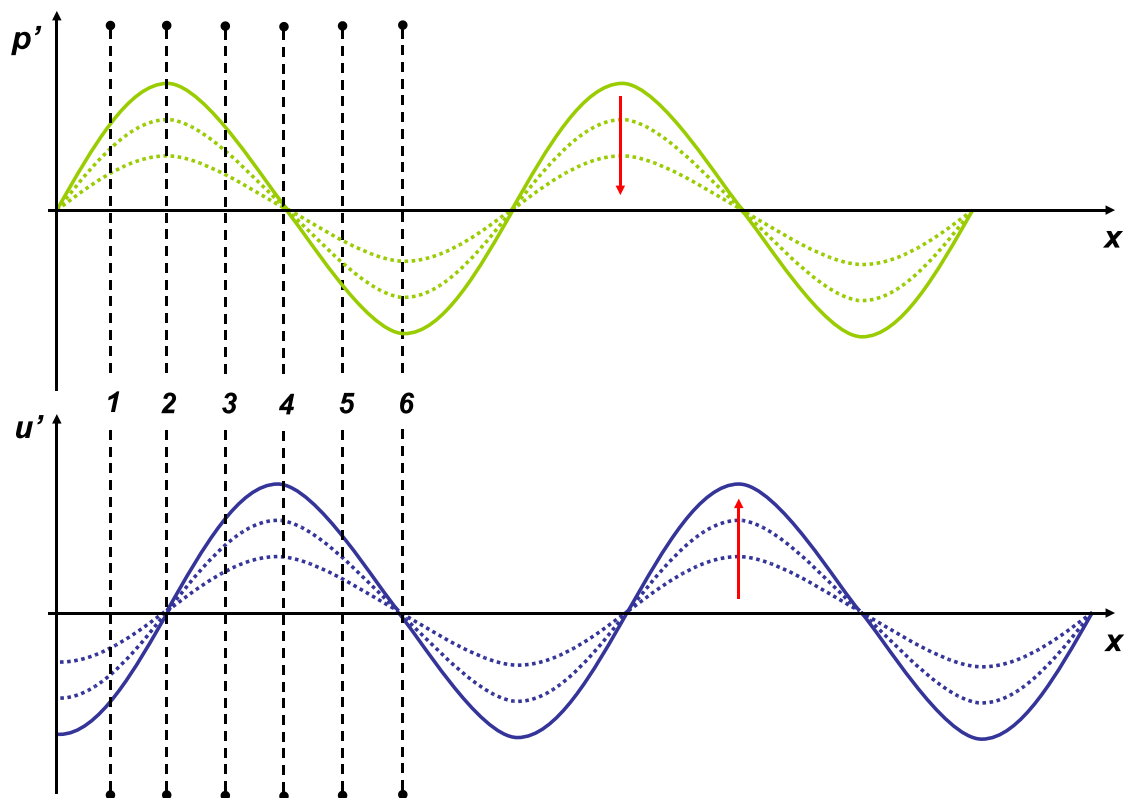


Abbildung 4.42: Positionen des Heizgitters für die ersten sechs Eigenfrequenzen. Modenform von Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen bei Annahme konstanter Temperatur.

und Geschwindigkeitsschwankung das gleiche Vorzeichen haben sind kapazitiv, Bereiche in denen sie entgegengesetztes Vorzeichen haben induktiv. Es ist also nicht möglich, dass alle Moden linear selbsterregt sind, somit können die experimentell beobachteten stets positiven Wachstumsraten nur durch Energietransfer von der bzw. den instabilen Moden hervorgerufen worden sein.

In der Tat erscheint aufgrund dieser einfachen Überlegungen, dass nur die CNN-Methode ein mögliches lineares Stabilitätsverhalten wiedergibt. Im Folgenden wird genauer untersucht, wieso hier jedoch die fünfte Mode als stabil und wieso vom Netzwerkmodell die vierte Mode als instabil vorhergesagt wird. Dazu wird an dieser Stelle etwas weiter differenziert. Zunächst muss gesagt werden, dass sich das Heizgitter nicht ideal bei 25% der Länge, sondern bei 26.8% befand. Zudem ist die Temperatur im Rohr eben nicht konstant, sondern stromab des Heizgitters erhöht. Diese beiden Effekte bewirken unter Berücksichtigung der vernachlässigbaren Phasenänderung über den Ort der Wärmefreisetzung hinweg ein „Verschieben“ des Heizgitters relativ zur jeweiligen Modenform, wie sie in Abbildung 4.42 dargestellt ist, nach rechts. Relativ zur Wellenlänge wird diese Verschiebung mit zunehmender Modennummer proportional größer. Was bedeutet das für eine mögliche Anregung der einzelnen Eigenfrequenzen?

- Für die erste Eigenfrequenz nichts, hier wird weiter induktives Verhalten vorliegen.
- Für die zweite Eigenfrequenz: hier liegt zwar kein Geschwindigkeitsknoten mehr vor, nun aber kapazitives Verhalten. Es ist somit weiterhin keine lineare Anregung möglich.
- Für die dritte Eigenfrequenz: Hier wird weiter kapazitives Verhalten mit Tendenz zum Druckknoten vorliegen – keine Anregung.
- Für die vierte Eigenfrequenz: Es findet eine Verschiebung vom Druckknoten weg, hin zu induktivem Verhalten statt, somit ist eine lineare Anregung möglich.
- Für die fünfte Eigenfrequenz, die im idealen Fall deutlich im indukti-

ven Bereich liegt, ist der Fall komplizierter und lässt sich ohne genauere Berechnung nicht exakt beantworten. Alleine durch die Heizgitterposition bei 26.8% wird jedoch bereits eine Verschiebung von 4.5% einer Wellenlänge erreicht, die durch den Effekt der heißen Stromabseite noch verstärkt wird. Es findet wohl eine starke Annäherung an den Geschwindigkeitsknoten statt, der noch im induktiven Bereich endet, so dass eine sehr kleine Anregung möglich ist.

- Für die sechste Mode findet eine Verschiebung zum kapazitiven Bereich statt, so dass weiterhin keine Anregung möglich ist.

Die beiden numerischen Methoden liefern also plausible Ergebnisse. Dennoch ist ein Unterschied bei der Vorhersage der vierten und fünften Eigenfrequenz zu beobachten, der im Folgenden analysiert wird.

Die CNN-Methode berücksichtigt mehr Verlustfaktoren als das Netzwerkmodell. Diese sind die räumliche Auflösung des Heizgitters mit lokal stark unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten, Temperaturen und Geschwindigkeiten sowie eine auch axiale Temperaturschichtung im heißen Teil. Verluste in der Wandgrenzschicht [25] werden vom Netzwerkmodell ebenfalls nicht berücksichtigt, sind jedoch aufgrund der sehr kleinen Machzahl zu vernachlässigen. Durch die zusätzlich berücksichtigten Verlustfaktoren lassen sich die allgemein niedrigeren Wachstumsraten im CNN-Modell erklären. In Kombination mit dem Amplitudenabfall der Wärmefreisetzungsschwankung bei höheren Frequenzen, siehe Abbildung 4.37, sowie den Verlusten am offenen Ende, siehe Abbildung 4.19, führt dies bei der vierten und fünften Eigenfrequenz, wie bereits unter Punkt 3 bei der Ergebnisbeschreibung gesagt, dazu, dass die leichte Anregung, die am Heizgitter noch stattfinden kann, durch zusätzliche Verluste kompensiert wird. Dies kann auch durch die Annäherung des Phasenverzugs an den Idealwert von $\pi/2$, siehe Abbildung 4.37, bei höheren Frequenzen nicht aufgefangen werden.

4.5.2 Vorhersage experimentell ermittelter Wachstumsraten

Zwar sind die experimentell bestimmten Wachstumsraten der höheren Moden nicht für den Vergleich mit linearen Vorhersagemodellen selbsterregter Moden geeignet, dennoch wäre es interessant, dieses ja in Realität zu beobachtende Verhalten mit einem Simulationswerkzeug darzustellen. Dies gilt sowohl für das Anwachsen der von der ersten Eigenfrequenz mitgezogenen höheren Moden, als auch für die verminderte Wachstumsrate der ersten Eigenfrequenz durch den Energietransfer zu den höheren Moden. Diese akustische Energieübertragung zwischen Eigenfrequenzen hängt jedoch vom Phasenverhältnis derselben zueinander und dem zeitlichen Amplitudenverlauf ab. Deshalb können zwar durch räumliche Auflösung des Gitters und direkte Berechnung des Wärmeübergangs, sowie durch höhere räumliche Auflösung des Rohrendes alle beteiligten Effekte im Rijke-Rohr mit dem CFD-Teil der CNN-Methode dargestellt werden, die durch Nichtnormalität und Nichtlinearität bedingte Energieübertragung zwischen den Moden, kann dennoch nicht erfasst werden.

Dies kann nur durch eine Berechnung der kompletten Geometrie im Zeitbereich und somit der Berücksichtigung des Phasenverhältnisses zwischen den Moden, korrekt wiedergegeben werden, wie es z.B. bei einer klassischen CFD-Simulation der Fall ist. Eine effizientere Methode kann hier eine Abwandlung der CNN-Methode sein, die CFD und Netzwerkmodell im Zeitbereich koppelt [86]. Über eine nicht-reflektierende Randbedingung kann somit der laufenden CFD die Antwort des Netzwerkmodells zurückgegeben werden. Dieses Vorgehen setzt jedoch eine akustisch absolut nicht-reflektierende Randbedingung mit frei definierbarer Anregung voraus. Diese Art von Randbedingung ist Gegenstand intensiver, aktueller Forschungsaktivitäten [33, 34, 74], war jedoch zum Zeitpunkt der Durchführung der in dieser Arbeit beschriebenen Untersuchungen noch nicht verfügbar.

4.5.3 Zusammenfassung

Es lässt sich zusammenfassend feststellen, dass die CNN-Methode ihre grundsätzliche Anwendbarkeit bewiesen hat. Die Frequenzen der CNN-Methode sind durchwegs in besserer Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen, auch die Wachstumsraten erscheinen aufgrund der oben beschriebenen theoretischen Überlegungen eher plausibel als die des Netzwerkmodells. Geht man davon aus, dass die erste Eigenfrequenz beim Rijke-Rohr immer dominant ist, so gilt dies in besonderem Maße, denn hier ist die Übereinstimmung auch bei der Wachstumsrate sehr gut. Unterschiede in der von CNN-Modell ermittelten Frequenz im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen können hauptsächlich auf die nur schwierig exakt zu modellierende Temperaturverteilung im heißen Rohrteil zurückgeführt werden.

Das Stabilitätsverhalten kann, wie bei allen anderen im Frequenzbereich operierenden Vorhersagemethoden, für jede Frequenz unabhängig beurteilt werden. Dadurch lässt sich bei industrieller Anwendungen gewährleisten, dass stets sämtliche instabilen Eigenfrequenzen vermieden werden. Einen weiteren Vorteil neben der Kosten- und Zeitersparnis haben lineare Vorhersagemethoden gegenüber einer experimentellen Untersuchung: es lässt sich eindeutig identifizieren, welche Eigenfrequenz instabil wird ohne dass eventuell andere mitgezogen werden. So kann gezielt an der Unterdrückung dieser Eigenfrequenz gearbeitet werden.

5 Validierung der CNN-Methode am Rohr mit Flächensprung

Als weiterer Validierungsfall für die CNN-Methode neben dem Rijke-Rohr, wurde ein einfaches Rohr mit plötzlicher Querschnittsverengung gewählt, siehe Abbildung 5.1, welches ein Geometrieelement darstellt, das in nahezu jedem Verbrennungssystem anzutreffen ist. Für diese Geometrie stehen zum einen am Lehrstuhl experimentelle Daten zur Verfügung und zum anderen rechtfertigt die, trotz der recht simplen Geometrie, komplexe Strömung mit Wirbelablösungen und Strömungsquerschnittsverengung nach dem Flächen-

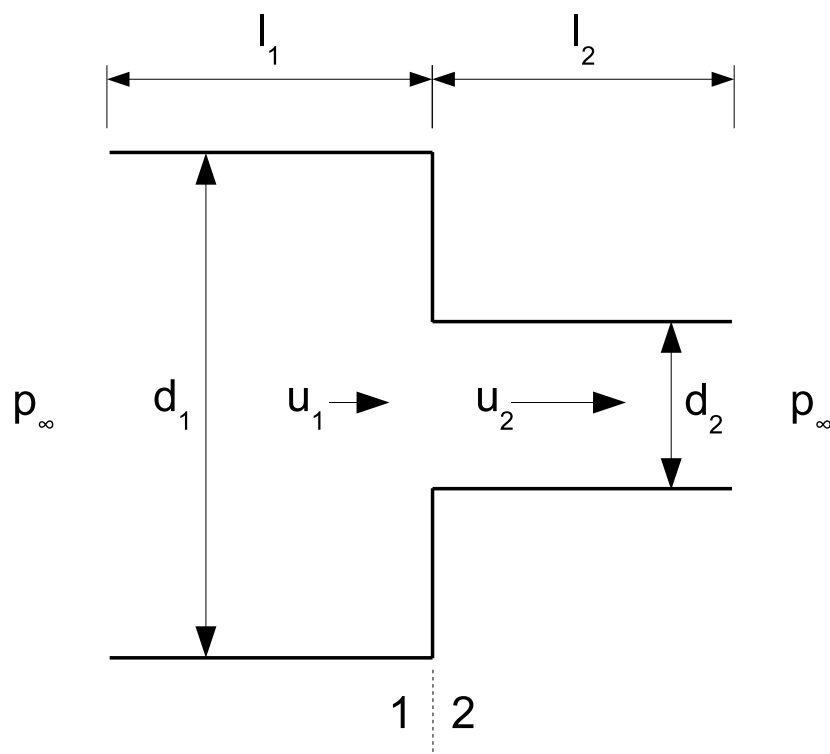


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des Rohrs mit Flächensprung

sprung [14, 26] den Einsatz hochauflösender Strömungssimulationswerkzeuge. Im Gegensatz zum Rijke-Rohr verfügt die Flächensprunggeometrie über keinen Anregungsmechanismus, so dass hier nicht von einer Stabilitätsanalyse gesprochen werden kann. Genau wie beim Rijke-Rohr werden jedoch auch hier Eigenfrequenzen und die zugehörigen Wachstumsraten bestimmt – wobei hier eben mangels Anregungsmechanismus eher von Dämpfungsraten gesprochen werden kann.

Trotz ihrer scheinbaren Einfachheit, weist eine aus zwei konzentrischen Rohren mit unterschiedlichem Querschnitt, besonders für starke Querschnittssprünge, bestehende Geometrie ein recht komplexes akustisches Verhalten auf, das mit demjenigen eines einfachen Rohres gleicher Gesamtlänge – je nach Lage des Querschnittsprungs – keinerlei Gemeinsamkeiten hat. Die beschleunigte Strömung am Ort der Querschnittsverengung in Kombination mit der Wand wirkt für die Akustik fast wie ein geschlossenes Ende und ermöglicht die Ausbildung einer $\lambda/4$ -Welle im stromaufseitigen Teil – umgekehrt wirkt das große Volumen des stromaufseitigen Teils wie eine unendlich ausgedehnte Umgebung und begünstigt die Ausbildung einer $\lambda/2$ -Welle im stromabseitigen Teil. Für Moden, bei denen beide Rohrhälften miteinander kommunizieren, bewirken Beschleunigung, Umlenkung sowie eine Strömungsquerschnittseinschnürung stromab der Verengung Phasensprünge über den Flächensprung. Zusätzlich werden alle Moden in unterschiedlichem Maße durch Umlenk- und Reibungsverluste am Querschnittsprung gedämpft.

Interessant ist bei der Flächensprunggeometrie, dass im Falle des Rijke-Rohrs zusätzlich zwar noch eine komplette CFD-Simulation als weitere Alternative möglich gewesen wäre, dies bei der hier betrachteten Konfiguration aber keinerlei Aufschluss liefern kann, da mangels Anregungsmechanismus und Verlusten am Querschnittsprung nur stabile Eigenfrequenzen auftreten können. Hier kann die CNN-Methode eine Lücke schließen.

5.1 Experimentelle Vergleichsergebnisse

Auch für die Flächensprunggeometrie soll zunächst, wie beim Rijke-Rohr, eine experimentelle Vergleichsbasis geschaffen werden. Wie einleitend gesagt, besitzt die aus zwei Rohren mit Flächensprung bestehende Konfiguration im Gegensatz zum Rijke-Rohr keinen Energielieferanten wie es dort die Wärmequelle war und kann somit keine instabilen Moden aufweisen. Eine experimentelle Messung von Wachstumsraten wie im Fall des Rijke-Rohrs ist deshalb nicht möglich. Es wurden jedoch im Experiment diskrete Werte für die akustischen Transfermatrizen des Flächensprungs bestimmt. Daraus lassen sich die virtuellen Längen l_{eff} und l_{red} sowie der Verlustkoeffizient ζ [66] für eine analytische Beschreibung der Flächensprungtransfermatrix bestimmen:

$$\begin{pmatrix} \frac{p'}{\rho c} \\ u' \end{pmatrix}_d = \begin{pmatrix} 1 & -ikl_{\text{eff}} - \zeta M_u \\ -ikl_{\text{red}} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p'}{\rho c} \\ u' \end{pmatrix}_u, \quad (5.1)$$

mit dem Flächenverhältnis $\alpha = A_u/A_d$ welche die akustischen Schwankungen p' und u' auf der stromaufliegenden u (für „upstream“) und stromabliegenden Seite d (für „downstream“) des Flächensprungs zueinander in Relation setzt. Diese Transfermatrix lässt sich wiederum in ein Netzwerkmodell der Gesamtkonfiguration integrieren und bildet so die Vergleichsbasis für die CNN-Methode.

Die virtuellen Längen repräsentieren Trägheits- und Speichereffekte sowie die Einflüsse nicht-ebener Wellenformen in der Nähe des Flächensprungs [20, 62], der Verlustkoeffizient Umlenk- und Reibungsverluste durch den plötzlichen Querschnittsprung, letzterer lässt sich aus dem strömungsmechanischen Verlustkoeffizienten bestimmen. Morse und Ingard [53] zeigen eine Herleitung für die effektive Länge für eine plötzliche Querschnittserweiterung eines unendlich breiten rechteckigen Kanals, während Boij und Nilsson [12] einen Ansatz zur Umrechnung von einem rechteckigen auf einen runden Querschnitt präsentieren. Auch eine Formulierung für eine graduelle Querschnittsveränderung ist herleitbar [66]. Eine geschlossene Herleitung für die vorliegende Konfiguration eines scharfkantigen, konzentrischen, ver-

engenden Querschnittssprungs ist jedoch nicht bekannt. Hier werden die virtuellen Längen zumeist – wie auch hier zu Validierungszwecken – aus experimentellen Messungen bestimmt. Eine weitere Möglichkeit ist die Bestimmung der Transfermatrix mittels einer angeregten CFD, was Gegenstand laufender Arbeiten am Lehrstuhl für Thermodynamik ist [20].

Für die Konfiguration, wie sie in diesem Kapitel betrachtet wird, ist der Einfluss der Modellparameter in Form einer Sensitivitätsanalyse in den Abbildungen 5.2 (Frequenzabhängigkeit) und 5.3 (Dämpfungsratenabhängigkeit) dargestellt. Auf der Abszisse ist dabei der jeweils variierte Parameter (virtuelle Länge oder Verlustkoeffizient) auf den zur betrachteten Konfiguration gehörenden Wert normiert dargestellt, auf der Ordinate die Eigenfrequenz bzw. Dämpfungsrate (entspricht einer negativen Wachstumsrate gleichen Absolutwertes), ebenfalls auf den zum Modellparameter gehörenden Wert normiert. Die Modellparameter wurden dabei um die Werte $l_{\text{eff}} = 1.25$ m, $l_{\text{red}} = 0.075$ m und $\zeta = 164.1$ variiert, siehe Kapitel 5.1.1. Für die sehr kleinen Machzahlen von maximal 0.01 und das sehr kleine l_{red} ergibt sich dabei ein relativ großer Einfluss der effektiven Länge l_{eff} auf den Phasensprung an der Querschnittsverengung und damit auf die Eigenfrequenz des Gesamtsystems. Einen ebenfalls großen und direkten Einfluss hat der Verlustkoeffizient ζ , der linear in die Dämpfungsrate des Systems eingeht. Der Einfluss von l_{red} ist dagegen sehr gering und im Vergleich zu den anderen Parametern zu vernachlässigen.

5.1.1 Bestimmung der Transfermatrizen des Flächensprungs

Im Gegensatz zum Rijke-Rohr wurden die experimentellen Arbeiten zum Rohr mit Flächensprung nicht im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt, sondern es wird auf laufende Arbeiten am Lehrstuhl [56] zurückgegriffen. In den dort durchgeführten Experimenten wurde eine Konfiguration mit einem stromaufseitigen Durchmesser von $d_1 = 200$ mm, einem stromabseitigen Durchmesser von $d_2 = 64$ mm und Volumenströmen von 225 bzw. 1800 l/min untersucht. Die entsprechenden stromaufseitigen Geschwindigkeiten \bar{u}_1 betragen damit 0.1194 m/s bzw. 0.9549 m/s. Die Lufttemperatur zum

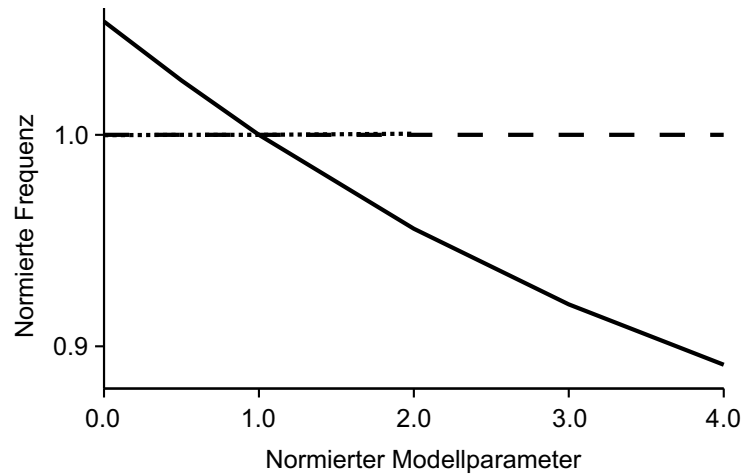


Abbildung 5.2: Normierte Eigenfrequenz der Flächensprungkonfiguration als Funktion des normierten Parameters. Durchgezogene Linie: l_{eff} , gestrichelte Linie: l_{red} , gepunktete Linie: ζ

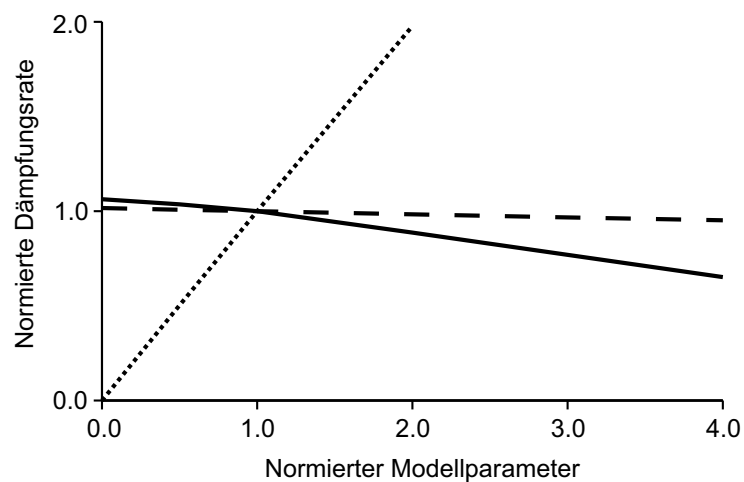


Abbildung 5.3: Abhängigkeit der normierten Dämpfungsrate einer Flächensprungkonfiguration vom normierten Parameter.

Zeitpunkt der Messung betrug $T_\infty = 293.5$ K, womit sich eine Schallgeschwindigkeit von $c_\infty = 343.4$ m/s ergibt.

Die Transfermatrizen für die beiden Einlassgeschwindigkeiten wurden mittels der Multimikrofonmethode im Frequenzbereich von 20-950 Hz bestimmt [18, 59, 60, 63]. Sie sind für die jeweiligen Einlassgeschwindigkeiten grafisch in Abbildung 5.4 bzw. Abbildung 5.5 aufgeteilt nach Betrag und Phase für die jeweils 4 Matrixkoeffizienten in p - u -Notation durch die dicken Punkte dargestellt.

Wie nach Gleichung (5.1) zu erwarten, liegen die Beträge der Hauptdiagonalelemente bei 1 bzw. dem Flächenverhältnis. Die Phasen beider Elemente sind 0. Die Steigungen der Beträge der Nebendiagonalelemente werden durch die virtuellen Längen bestimmt. Die Phasen dieser Elemente bewegen sich erwartungsgemäß um $-\pi/2$, die leichte Abweichung im unteren Frequenzbereich beim rechten oberen Transfermatrixkoeffizienten wird durch den Verlustterm verursacht, der im ganzen Frequenzbereich konstant ist und hier betragsmäßig den Term $-ikl_{\text{eff}}$ dominiert.

Was jedoch auffällt, ist, dass im Bereich unterhalb von 200 Hz teilweise deutliche Abweichungen vom erwarteten Verlauf auftreten. Im oberen Frequenzbereich zeigen sich im Fall der niedrigeren Einlassgeschwindigkeit leichte Abweichungen ab ca. 900 Hz, während beim Volumenstrom von 1800 l/min bereits bei Frequenzen über 600 Hz starkes Rauschen auftritt. Mögliche Ursachen für diese verrauschten Ergebnisse sind turbulenter Lärm, der im Fall der höheren Geschwindigkeit deutlich ausgeprägter ist, sowie ungenaue Ergebnisse der verwendeten Mikrofone im unteren Frequenzbereich. Zur Bestimmung der Modellparameter l_{eff} , l_{red} und ζ werden daher die experimentellen Ergebnisse im Frequenzbereich von 200-600 Hz verwendet.

Mit den Nebendiagonalelementen aus der theoretischen Beschreibung der Transfermatrix für den Flächensprung (5.1) als Ansatzfunktionen, können nun über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate die experimentellen Daten angenähert werden um die virtuellen Längen und den Verlustkoeffizienten zu bestimmen. Da diese per definitionem Geometrieigenschaften und nicht abhängig von der Durchströmgeschwindigkeit sind, geschieht

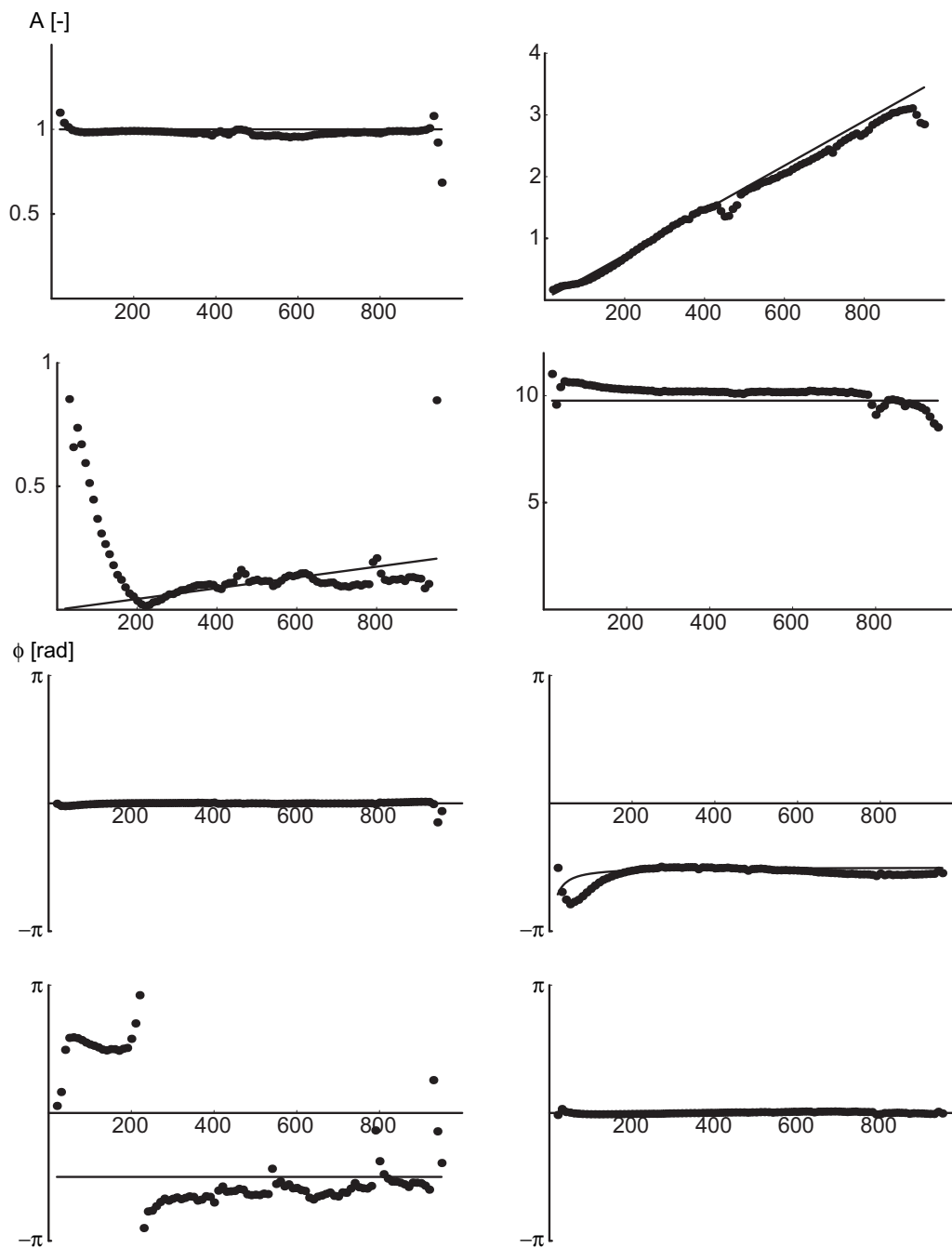


Abbildung 5.4: Experimentell bestimmte (Punkte) und angenäherte (Linie) Transfermatrixkoeffizienten für den Flächensprung bei 225 l/min. Obere Hälfte: Betrag der Koeffizienten T_{11} , T_{11} , T_{11} und T_{11} (v.l.o.n.r.u.); untere Hälfte: Phase der Koeffizienten, gleiche Reihenfolge.

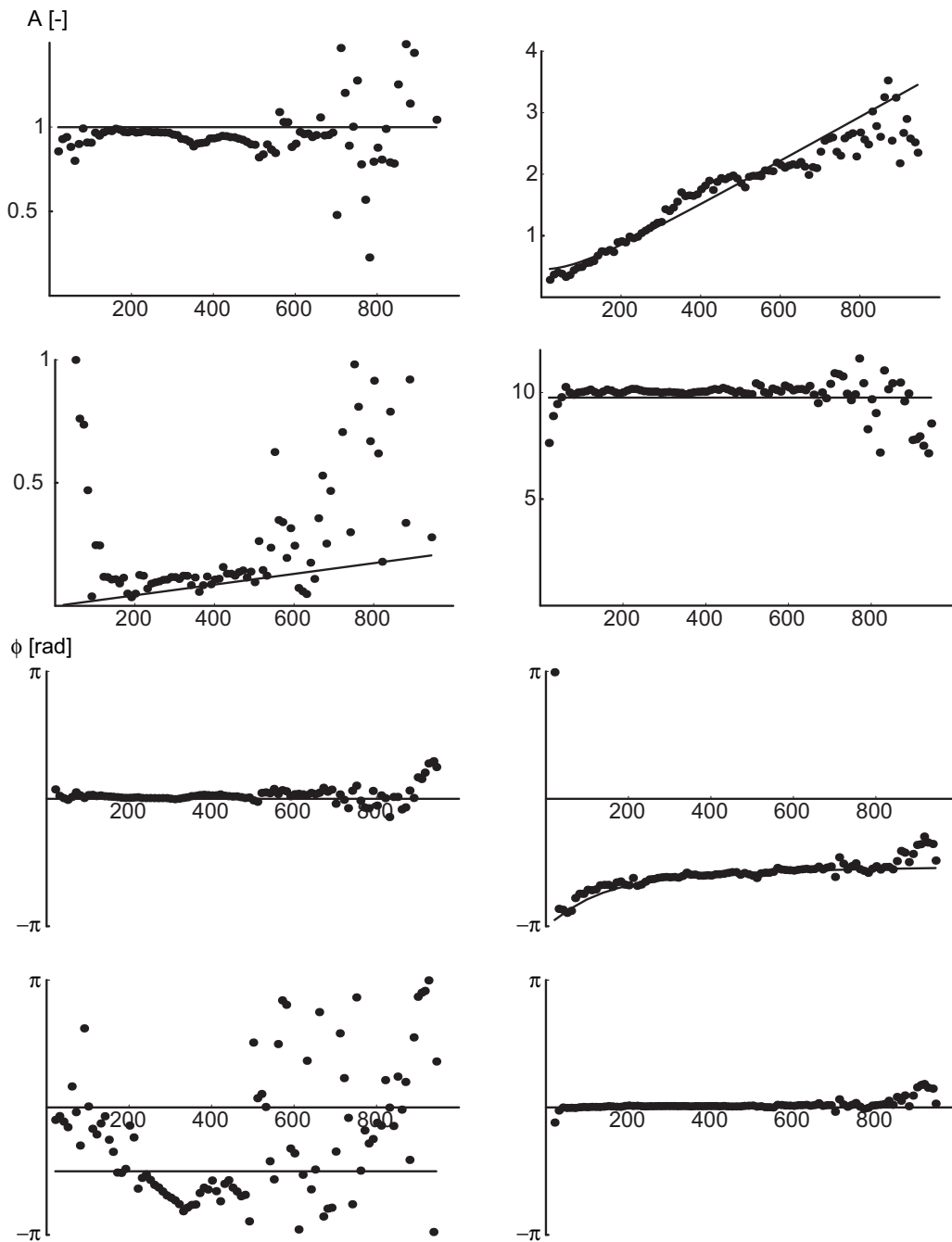


Abbildung 5.5: Experimentell bestimmte (Punkte) und angenäherte (Linie) Transfermatrixkoeffizienten für den Flächensprung bei 1800 l/min. Obere Hälfte: Betrag der Koeffizienten T_{11} , T_{11} , T_{11} und T_{11} (v.l.o.n.r.u.); untere Hälfte: Phase der Koeffizienten, gleiche Reihenfolge.

dies simultan mit den Daten beider Geschwindigkeitsfälle. Es ergeben sich $l_{\text{eff}} = 1.25$ m, $l_{\text{red}} = 0.075$ m und $\zeta = 164.1$. Die sich dann mittels (5.1) ergebenden Verläufe der Transfermatrixkoeffizienten sind als durchgezogene Linien in den Abbildungen 5.4 und 5.5 dargestellt. Abweichungen zu den experimentellen Werten – außer in Bereichen verrauschter Messwerte – fallen hier beim Betrag des unteren rechten Elements auf. Hier liegen die Messwerte leicht über dem theoretischen Wert des Flächenverhältnisses. Dies kann auf eine Einschnürung der Strömung stromab des Flächensprungs am Ort der Messaufnahme zurückzuführen sein. Eine weitere Abweichung ist im unteren Frequenzbereich des rechten oberen Transfermatrixkoeffizienten bei 255 l/min im Phasenverlauf festzustellen. Wie zuvor beschrieben, wird die gekrümmte Abweichung des Verlaufs von $-\pi/2$ im unteren Frequenzbereich durch den Verlustkoeffizienten verursacht. Da dieser über die Machzahl in die Transfermatrix eingeht, ist der Verlauf theoretisch für die beiden Geschwindigkeitsfälle unterschiedlich, wie dies auch anhand der durchgezogenen Linie sichtbar ist. Betrachtet man jedoch die experimentellen Ergebnisse, so erscheint der gekrümmte Verlauf zwischen 0 und 300 Hz in beiden Fällen gleich. Dies ist ein Indiz dafür, dass für die Akustik ein anderer als der geschwindigkeitsabhängige, strömungsmechanische Druckverlust gilt. Mangels anderer Ansätze und aufgrund der doch guten Übereinstimmung, soll im weiteren Verlauf mit den hier bestimmten Modellparametern gerechnet werden.

5.1.2 Netzwerkmodell des Rohrs mit Flächensprung

Zur Validierung der CNN-Methode anhand der experimentellen Ergebnisse, muss nun ein Netzwerkmodell mit den experimentell ermittelten Modellparametern aufgebaut werden. Dieses wird nach der in Abschnitt 4.3 für das Rijke-Rohr beschriebenen Methode konstruiert und repräsentiert die in Abbildung 5.1 dargestellte Konfiguration. Es gelten die Längen $l_1 = 200$ mm und $l_2 = 350$ mm. Damit ergibt sich ein Gleichungssystem mit einer Druckrandbedingung am stromaufseitigen Ende

$$\hat{f}_1 + \hat{g}_1 = 0. \quad (5.2)$$

Hier wurden, im Gegensatz zum Rijke-Rohr, siehe Gleichung (4.7), alle analytisch dargestellten Randbedingungen voll reflektierend gewählt, um erstens die Vergleichbarkeit mit der voll reflektierenden Auslassrandbedingung der CFD (siehe Kapitel 5.2.2) zu gewährleisten und zweitens alleine die Effekte des Flächensprungs auf die Eigenfrequenzen, also ohne Einflüsse der Randbedingungen zu untersuchen.

Auf die Eingangsrandbedingung folgt ein gerades Rohr der Länge l_1

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{g}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik_1^+ l_1} & 0 \\ 0 & e^{ik_1^- l_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{g}_1 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

mit den Wellenzahlen $k_1^+ \equiv \omega/(c_\infty + \bar{u}_1)$ und $k_1^- \equiv \omega/(c_\infty - \bar{u}_1)$ und der stets konstanten Schallgeschwindigkeit von $c_\infty = 343.42$ m/s.

Am stromabseitigen Ende dieses Rohres folgt der Flächensprung

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_3 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{g}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

mit den Transfermatrixkoeffizienten T_{11} bis T_{22} . Diese wurden zunächst in p^* - u -Notation mittels der experimentell ermittelten Parameter nach Gleichung (5.1) berechnet und anschließend nach der in Anhang B beschriebenen Methode in die für das Modell benötigte f - g -Notation transformiert.

Stromab des Flächensprungs folgt ein weiteres gerades Rohrstück der Länge l_2

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_4 \\ \hat{g}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik_2^+ l_2} & 0 \\ 0 & e^{ik_2^- l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_3 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

und schließlich der stromabseitige Abschluss mit ebenfalls konstantem Druck

$$\hat{f}_4 + \hat{g}_4 = 0. \quad (5.6)$$

5.1.3 Bestimmung der Eigenfrequenzen über die OLTF

Durch Einfügen eines Schnitts können wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben aus der Ortskurve der OLTF die Eigenfrequenzen bestimmt werden. Im be-

trachten Frequenzbereich unterhalb der cut-on-Frequenz von 858.6 Hz für nicht-axiale Moden im vorderen Rohrteil lassen sich mit dieser Methode zwei Eigenfrequenzen finden, die in Tabelle 5.3 (Seite 131) für 225 l/min und in Tabelle 5.4 (Seite 132) für 1800 l/min dargestellt sind. Die Eigenfrequenzen für die verschiedenen Geschwindigkeiten unterscheiden sich v.a. im Imaginärteil (also der Dämpfungsrate), was darauf zurückzuführen ist, dass die Verluste am Flächensprung geschwindigkeitsabhängig sind. Aufgrund der in beiden Fällen sehr niedrigen Machzahlen ist zudem kein Geschwindigkeitseinfluss auf den Realteil der Eigenfrequenzen zu erwarten, womit die Ergebnisse plausibel erscheinen.

Es konnte somit eine experimentelle Vergleichsbasis zur Bewertung der Ergebnisse der numerischen Modelle geschaffen werden.

5.2 CNN-Modell des Flächensprungs

In diesem Kapitel wird die CFD-Modellierung der Flächensprungsgeometrie, sowie die Anwendung der CNN-Methode beschrieben. Die Ergebnisse ermöglichen so die Bewertung der CNN-Methode für diesen Anwendungsfall.

Anders als das Rijke-Rohr, das mit dem kommerziellen CFD-Löser Fluent simuliert wurde, kam bei der Flächensprungsgeometrie der LES-Code AVBP [13], entwickelt vom CERFACS-Forschungsinstitut in Toulouse, Frankreich, zum Einsatz. AVBP benutzt standardmäßig einen expliziten Lösungsalgorithmus und ist so sehr gut für Akustiksimulation per CFD geeignet. Es wurde zudem darauf geachtet, einen Löser zu entwickeln, der Dissipation und Dispersion akustischer Wellen in der Simulation zu vermeiden. Benchmarkversuche mit AVBP zeigten in der Tat, dass weder Dispersion noch Dissipation im betrachteten Frequenzbereich feststellbar sind. AVBP ist somit in besonderer Weise als CFD-Werkzeug für Akustiksimulation geeignet, besonders wenn diese zusätzlich turbulente Strömungen beinhalten. AVBP ließ sich beim Rijke-Rohr nicht einsetzen, da die Quellterme zur Wärme-freisetzung, die das Heizgitter darstellen, nur durch direkte Eingriffe in den

Quellcode möglich gewesen wären. AVBP ermöglicht hier im Gegensatz zu Fluent keine User-Subroutines.

5.2.1 Diskretisierung der Geometrie auf einem CFD-Berechnungsgitter

Die in Abbildung 5.1 dargestellte Konfiguration wurde mit $l_1 = 200$ mm und $l_2 = 300$ mm simuliert. Die Rotationssymmetrie der Geometrie wurde ausgenutzt und ein quasi-2-dimensionales Modell verwendet. Es muss an dieser Stelle betont werden, dass somit nicht mehr von einer LES gesprochen werden darf, da eine solche stets 3-dimensional sein muss. Nur so können Schwankungen und Wirbel in allen Koordinatenrichtungen erfasst werden. Im vorliegenden Fall wird jedoch davon ausgegangen, dass Schwankungen in tangentialer Richtung klein sind und v.a. für die Akustik keine Rolle spielen.

Als Gitterauflösung wurde im zweidimensionalen Schnitt in alle Richtungen 1 mm gewählt, das resultierende Berechnungsgitter ist zu fein, um es an dieser Stelle darstellen zu können. Da AVBP nur einen sehr rudimentären eigenen Gittergenerator besitzt, wurde es zunächst mit dem Fluent-Gittergenerator „Gambit“ erzeugt. Es wurde dann mit dem zu AVBP gehörenden Gittergenerator „hip“, dessen Hauptzweck auch – wie dann hier angewendet – die Konvertierung von mit kommerziellen Gittergeneratoren erstellten Netzen in AVBP-Format ist, in ein „Tortenstück“ umgewandelt. Als Öffnungswinkel, dessen Größe im Prinzip beliebig ist, wurde 10° gewählt. D.h. die Geometrie besteht unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie aus einem Sektor.

5.2.2 Randbedingungen der CFD-Simulation

Für den CFD-Teil der CNN-Methode wird wiederum eine akustisch nicht-reflektierende Randbedingung benötigt. AVBP besitzt eine Reihe nicht-reflektierender Randbedingungen. Für diese Randbedingungen sind die Erhaltungsgleichung in Form von Charakteristiken nach Poincot und Lele [65]

formuliert. Dadurch lassen sich nicht-reflektierende Randbedingungen derart realisieren, dass eingehende Wellen einfach zu 0 gesetzt werden. Soll zudem noch eine akustische Welle aufgeprägt werden, so wird die eingehende Welle einfach auf diesen Wert gesetzt. Die Charakteristiken werden anschließend wieder in die Berechnungsgrößen (u, p, T etc.) des Löser übersetzt und an die Randzellen des CFD-Gitters übergeben.

Da dem Löser nun jedoch keine Informationen mehr über die Umgebung vorliegen, was die eigentliche Funktion der Randbedingung ist, und das System somit unterbestimmt ist, kann es passieren, dass der Druck im Simulationsgebiet divergiert. Um dies zu verhindern, wird in der Praxis über einen sogenannten „Relax“-Parameter σ dem Löser wieder Information über die Umgebung gegeben, z.B. gilt bei einer akustisch nicht-reflektierenden Geschwindigkeitsrandbedingung

$$\Delta u = \Delta u_w - 2\sigma \Delta t (u - u_{\text{ref}}). \quad (5.7)$$

Randbedingungen werden in diesem Fall in AVBP über Änderungen gegenüber dem bestehenden Wert, also dem aus dem vorherigen Zeitschritt, einer Variablen aufgeprägt. Hier sind Δu_w die Geschwindigkeitsänderung, die sich für eine rein nicht-reflektierende Randbedingung plus eventuell aufgeprägter Anregungsanteil ergäbe, u_{ref} die Referenzgeschwindigkeit, also die als Randbedingung vorgegebene mittlere Geschwindigkeit, plus eventuell aufgeprägter Anregungsanteil und Δu die schließlich resultierende Geschwindigkeitsänderung, die dem Löser von der Randbedingung zurückgemeldet wird. Da u_{ref} keine auslaufenden Wellen berücksichtigt, also für eine „harte“ Randbedingung steht, ist die resultierende Randbedingung nicht mehr nicht-reflektierend, wenn σ ungleich 0 ist [74, 88]. Im Folgenden soll deshalb von teil-reflektierenden Randbedingungen gesprochen werden.

σ kann auch als Federkonstante einer Feder gesehen werden, die den Randwert immer in Richtung des „harten“ Wertes zieht. Besonders für niedrige Frequenzen $\omega \rightarrow 0$ ergeben sich dabei Reflexionskoeffizienten in der Größenordnung von 1. Dies muss bei Simulationen, die eine nicht-reflektierende Randbedingung voraussetzen, berücksichtigt werden, der eingeschwungene Zustand muss abgewartet werden. Beim im vorliegenden Fall betrachteten Frequenzbereich sind die Reflexionskoeffizienten jedoch sehr niedrig, so dass

| | Enger Querschnitt | Weiter Querschnitt |
|-------------|-----------------------|-----------------------|
| Re_{225} | 1592 | 4972 |
| Ma_{225} | 3.48×10^{-4} | 3.39×10^{-3} |
| Re_{1800} | 12736 | 39777 |
| Ma_{1800} | 2.78×10^{-3} | 2.71×10^{-2} |

Tabelle 5.1: Reynolds- und Machzahlen der Flächensprunggeometrie

dieser Zustand schnell erreicht ist.

Als Eingangsrandbedingung wurde eine Geschwindigkeitsrandbedingung nach Gleichung (5.7) mit einem parabolischen Rohrprofil nach Gleichung 4.26 eingesetzt. Die mittleren Geschwindigkeiten sind $\bar{u} = 0.1194$ m/s für 225 l/min und entsprechend $\bar{u} = 0.9549$ m/s für 1800 l/min. Der Relaxationsparameter σ wurde aus Erfahrung für alle Eingangsgrößen auf 0.12 gesetzt. Damit ergeben sich die in Tabelle 5.1 dargestellten Reynolds- bzw. Machzahlen. Bis auf den weiten Rohrquerschnitt bei 225 l/min befinden sich die Reynoldszahlen stets im Bereich turbulenter Rohrströmung. Die Machzahlen sind durchwegs sehr niedrig, so dass die Vernachlässigung jeglicher Machzahlterme höherer Ordnung stets gerechtfertigt ist.

Die Ausgangsrandbedingung am stromab gelegenen Ende ist, in Übereinstimmung mit dem in Kapitel 5.1 beschriebenen Netzwerkmodell, eine harte, voll reflektierende Druckrandbedingung mit $p = 101325$ Pa. Hier wird die einlaufende Welle als voll reflektierte auslaufende Welle unter Berücksichtigung des vorgegebenen Außendrucks berechnet. Als Wandrandbedingung wurde eine Wand mit Haftbedingung und Adiabasie gewählt.

5.2.3 Übrige Solverparameter

Normalerweise benutzt jeder CFD-Löser als Standard-Fluid Luft, da diese für die bei weitem meisten Anwendungen, wie z.B. in der Aerodynamik, eingesetzt wird. AVBP kennt jedoch nur elementare Gase als Fluide. Eine naheliegende Möglichkeit wäre, ein Gemisch aus Stickstoff und Sauerstoff zu definieren. Dies hat jedoch den Nachteil, dass AVBP dann zwei Spezi-

| Parameter | Wert |
|---------------------------------------|---|
| Subgrid-Modell | Standard Smagorinsky |
| Künstliche Viskosität | Einstellungen für LES, auch für ρu -Terme iavisc=3, smu4=0.01, smu2=0.05 |
| Numerik-Schema | Lax-Wendroff |
| Courant-Zahlen | cfl1=cfl2=0.7 |
| Fourier-Zahl für viskosen Zeitschritt | 0.2 |

Tabelle 5.2: In AVBP verwendete Solverparameter

es berechnen muss, was zu einem Mehraufwand an Berechnungszeit führt. Deshalb wurde das AVBP-Standardfluid Stickstoff gewählt und die Temperatur auf 283.8 K reduziert. Damit ergibt sich ein Fluid mit allen relevanten fluidmechanischen und akustischen Eigenschaften von Luft bei 293.5 K.

Die weiteren Einstellungen, mit denen die Simulation durchgeführt wurde, sind in Tabelle 5.2 angegeben. Auf eine eingehende Diskussion soll an dieser Stelle verzichtet und statt dessen auf das AVBP Benutzerhandbuch verwiesen werden [13]. Es sei jedoch erwähnt, dass Standardeinstellungen verwendet wurden, die in vielen Anwendungen ihre Tauglichkeit bewiesen haben und bei hoher Genauigkeit gleichzeitig einen stabilen Lösungsprozess garantieren.

5.2.4 Quasi-stationäre Initiallösungen

Vorbereitend können nun die quasi-stationären Strömungsfelder ohne Anregung bestimmt werden. „Quasi-stationär“ deshalb, weil ein LES-Löser der, wie in Kapitel 2.1 dargestellt, alle relevanten turbulenten Skalen auflöst, im turbulenten Fall keine stationäre Lösung liefern kann. Die Ergebnisse sind für 225 l/min in Abbildung 5.6 und für 1800 l/min in Abbildung 5.7 dargestellt. Bei 1800 l/min sind im Rohrteil mit dem engen Querschnitt deutliche turbulente Schwankungen zu erkennen. Diese sind bei 225 l/min nicht zu sehen. Es lösen sich beim Fall mit dem höheren Volumenstrom an der Kante des Flächensprungs Wirbel ab, deren Zentren als Orte niedrigeren Drucks erkennbar sind. Diese wandern anschließend mit der Hauptströmung

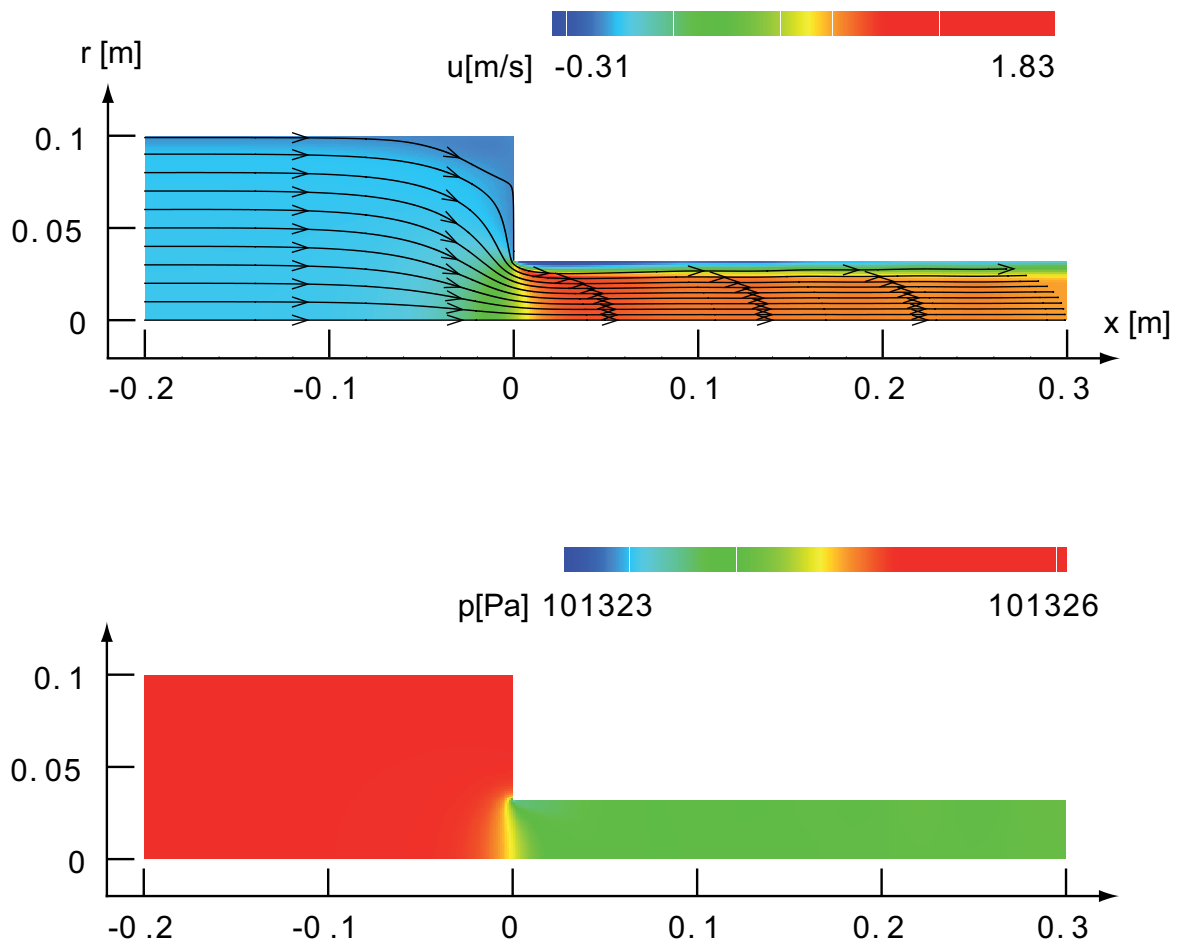


Abbildung 5.6: Konturplot der quasi-stationären Lösung für 225 l/min. Oben: Axialgeschwindigkeit und Stromlinien; unten: statischer Druck

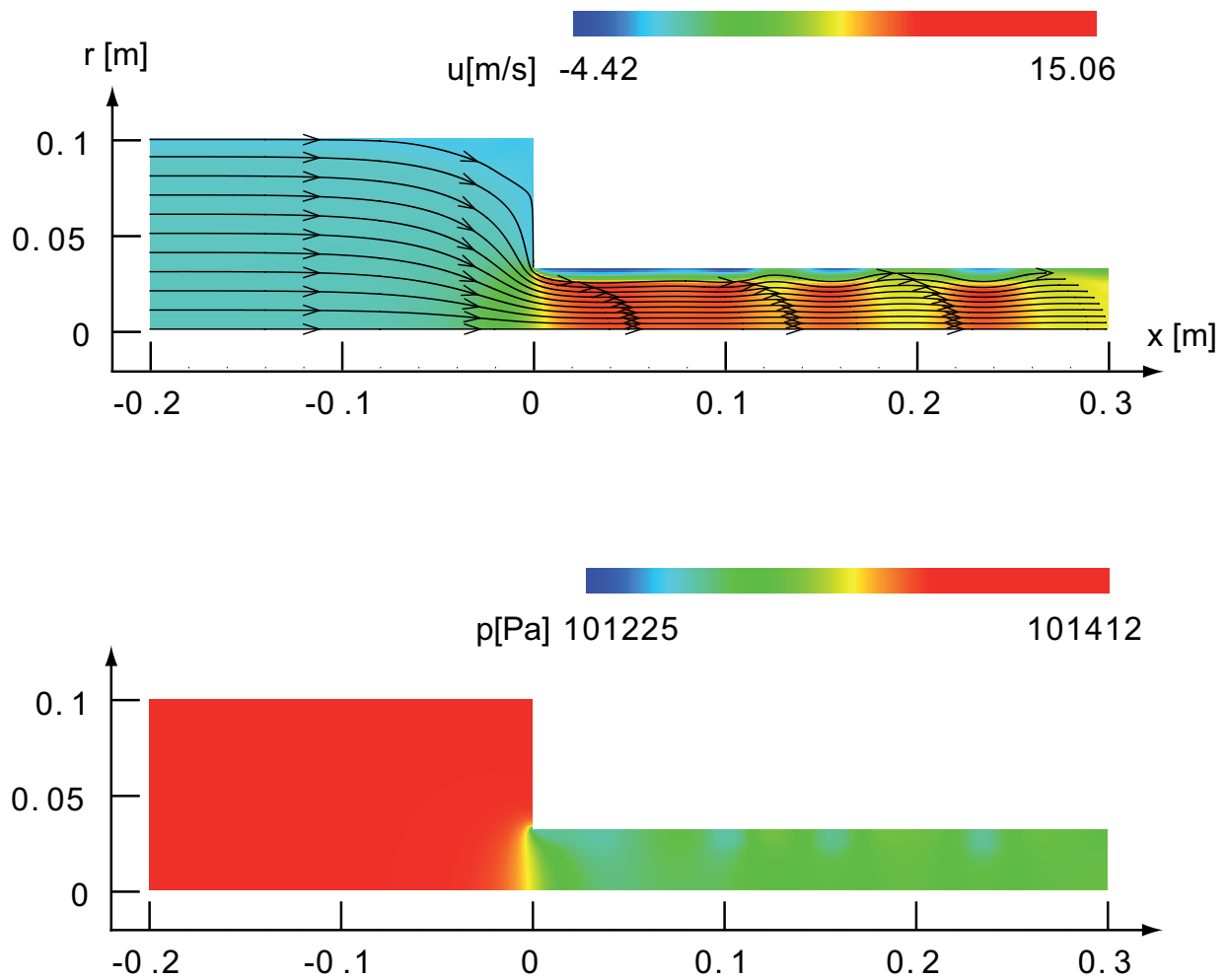


Abbildung 5.7: Konturplot der quasi-stationären Lösung für 1800 l/min. Oben: Axialgeschwindigkeit und Stromlinien; unten: statischer Druck

stromab.

5.2.5 Durchführung und Ergebnisse der angeregten Simulation

Die teil-reflektierende Geschwindigkeitsrandbedingung mit Anregung wie sie in AVBP implementiert ist, erlaubt nur die Aufprägung einer Sinuswelle einer Frequenz. Um AVBP für die Bestimmung der OLTF verwenden zu können, musste diese deshalb so umprogrammiert werden, dass eine Anregung mit einer Summe aus Sinuswellen, wie im Falle des Rijke-Rohrs, möglich war. Eine testweise Anregung mit einem gefilterten Zufallssignal führte, wie bei Fluent, zu unbrauchbaren Ergebnissen. AVBP erlaubt jedoch durch seine hervorragende Handhabung akustischer Wellen anders als Fluent eine sehr feine Staffelung der Frequenzen, so dass schließlich folgendes Anregungssignal implementiert wurde:

$$u'(t) = A \sum_{i=1}^{500} \sin(2\pi(2i + 100)t + \Delta\omega(i)). \quad (5.8)$$

Es entspricht also einer Summe von Sinussignalen von 100 bis 1100 Hertz mit einem Abstand von 2 Hertz. Die Amplitude A wurde zu 0.001 m/s im Fall von 225 l/min und 0.008 m/s im Fall von 1800 l/min gesetzt. Die Phasenverschiebung $\Delta\omega(i)$ wurde so als stark nichtlineare Funktion von i definiert, dass die sich ergebende Zeitreihe keine großen Ausschläge zeigt. Ein exakter Zeitschritt lässt sich nicht definieren, da für die Zeitschrittweite lediglich eine Courantzahl definiert wurde. Für deren Wert von 0.7 ergibt sich ein Zeitschritt von ca. 2×10^{-6} s in der Simulation.

Bei der Frequenzauflösung von 2 Hz ist das Anregungssignal über 0.5 s periodisch, so dass eine Zeitreihe dieser Länge benötigt wird, um die FFT sauber durchzuführen. In Realität ist eine längere Simulationszeit notwendig, denn Anlaufeffekte müssen das Simulationsgebiet verlassen und sich ein quasistationärer Zustand eingestellt haben bevor eine verwertbare Zeitreihe aufgezeichnet werden kann. Deshalb ist eine Gesamtsimulationszeit von ca. 1 s nötig, von der die ersten 0.5 s nicht für die Auswertung verwendet werden können. Die Werte für Druck, Axialgeschwindigkeit, Dichte und

Temperatur werden an sämtlichen bei $x = -0.18$ m (also 0.02 m stromab der stromaufseitigen Randbedingung) liegenden Knoten aufgezeichnet und anschließend entsprechend der lokalen Fläche gewichtet, um flächengemittelte Werte zu erreichen. Aus den so ermittelten Schwankungsgrößen p' und u' lassen sich unter Verwendung der mittleren Schallgeschwindigkeit und Dichte Zeitreihen von f_d und g_d bestimmen. Werden diese per FFT in den Frequenzbereich transformiert, so lässt sich wie zuvor beschrieben wieder die OLTF ermitteln.

In Abbildung 5.8 ist die Ortskurve der OLTF für den gesamten angeregten Frequenzbereich bei einem Volumenstrom von 225 l/min dargestellt. Der Bereich um den kritischen Punkt, und somit der möglichen Eigenmoden, ist in Abbildung 5.9 in Form einer Ausschnittvergrößerung dargestellt. Die Kreise stellen die angeregten Frequenzen dar. Die beim jeweiligen Umlauf dem kritischen Punkt am nächsten kommenden Frequenzen sind beschriftet. In ihrer Nähe befinden sich die gesuchten Eigenmoden, welche sich wieder per Polynomnäherung bestimmen lassen.

Die Ergebnisse für den Fall mit Volumenstrom 225 l/min sind in Tabelle 5.3 dargestellt. Im betrachteten Frequenzbereich zeigen sich wiederum zwei Eigenfrequenzen. Qualitativ und auch quantitativ sind die Ergebnisse in sehr guter Übereinstimmung mit den Resultaten des Netzwerkmodells mit experimentell bestimmten Parametern. Die Wachstumsraten werden für beide Eigenmoden etwas zu hoch vorhergesagt, d.h. die Dämpfungsrate ist zu gering. Bei den Realteilen, also den eigentlichen Schwingungsfrequenzen, liegt die Abweichung jedoch nur zwischen einem halben und einem Prozent.

Die Ergebnisse eines Netzwerkmodells mit rein analytisch hergeleiteter Transfermatrix für den Flächensprung (siehe Anhang D) sind ebenfalls in Tabelle 5.3 dargestellt. Der Term $(1 - \alpha^2 - \zeta_v)$ in Gleichung (D.6) entspricht dabei dem ζ aus Gleichung (5.1) und es ist durchaus eine gute Übereinstimmung zwischen $(1 - \alpha^2 - \zeta_v) = 146$ und dem aus den Messungen am Flächensprung ermittelten $\zeta = 164$ festzustellen, wobei $\zeta_v = 52$ was sich für das betrachtete Flächenverhältnis und die betrachteten Reynoldszahlen aus Standardliteratur [93] ermitteln lässt. Es zeigen sich bei den Ergebnissen des rein analytischen Netzwerkmodells besonders bei der zweiten Mode, die

einen Geschwindigkeitsbauch in der Nähe des Flächensprungs hat, deutliche Abweichungen in der Frequenz. Die CNN-Methode liefert also wesentlich bessere Ergebnisse als das rein analytische Netzwerkmodell, welches den aktuellen Stand der Technik auf diesem Gebiet repräsentiert.

Selbiges lässt sich beim Fall mit der höheren mittleren Geschwindigkeit beobachten, siehe Tabelle 5.4. Die Ortskurve der OLTF für den Gesamtbereich sowie den Ausschnitt um den kritischen Punkt ist hier in Abbildung 5.10 bzw. Abbildung 5.11 dargestellt. Zu beachten ist in diesem Fall, dass die Ortskurve, auch bei Mittelung über mehrere Zeitreihen, wie im gezeigten Beispiel geschehen, keinen glatten Verlauf mehr aufweist, was auf Turbulenz zurückzuführen ist, die im Fall mit der niedrigeren Geschwindigkeit nicht zu beachten war. Im unteren Frequenzbereich, zwischen ca. 100 und 300 Hz, ist der Verlauf sogar sehr verrauscht, ein Polynomfit wäre hier nicht sinnvoll. Aber auch noch im Bereich der ersten Eigenfrequenz bei ca. 400 Hz zeigt sich kein völlig glatter Verlauf, so dass in diesem Fall ein Least-Square-Fit durch insgesamt 7 „Messpunkte“ gelegt wurde.

Eine Möglichkeit, diesen die Wellenidentifikation verfälschenden Turbulenzeinfluss zu vermeiden, wäre ein Charakteristiken-basierter Filter [34,86], der im Gegensatz zur einfachen Flächenmittelung wie im vorliegenden Fall, turbulente und akustische Schwankungen voneinander trennt. Da die größten Schwankungen jedoch unterhalb des interessierenden Frequenzbereichs liegen, wurde hier auf diese aufwändigere Methode verzichtet. Interessant ist jedoch der Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen: hier traten die größten Schwankungen bei Frequenzen oberhalb von 600 Hz auf, während sie in der CFD unterhalb von 300 Hz zu beobachten sind. Aus diesem Grund wäre eine detailliertere Untersuchung der zugrundeliegenden Phänomene eine interessante Fragestellung für weitergehende Untersuchungen. Eine erste Möglichkeit für zukünftige Simulationen ist die Verwendung größerer Anregungsamplituden um das Signal-Rausch-Verhältnis zu verbessern.

Nachdem das generelle Vorgehen bei der Bestimmung der Eigenfrequenzen der Flächensprunggeometrie mit der jeweiligen Methode beschrieben wurde, soll im nächsten Kapitel ein weiterer Vorteil der CNN-Methode gegenüber

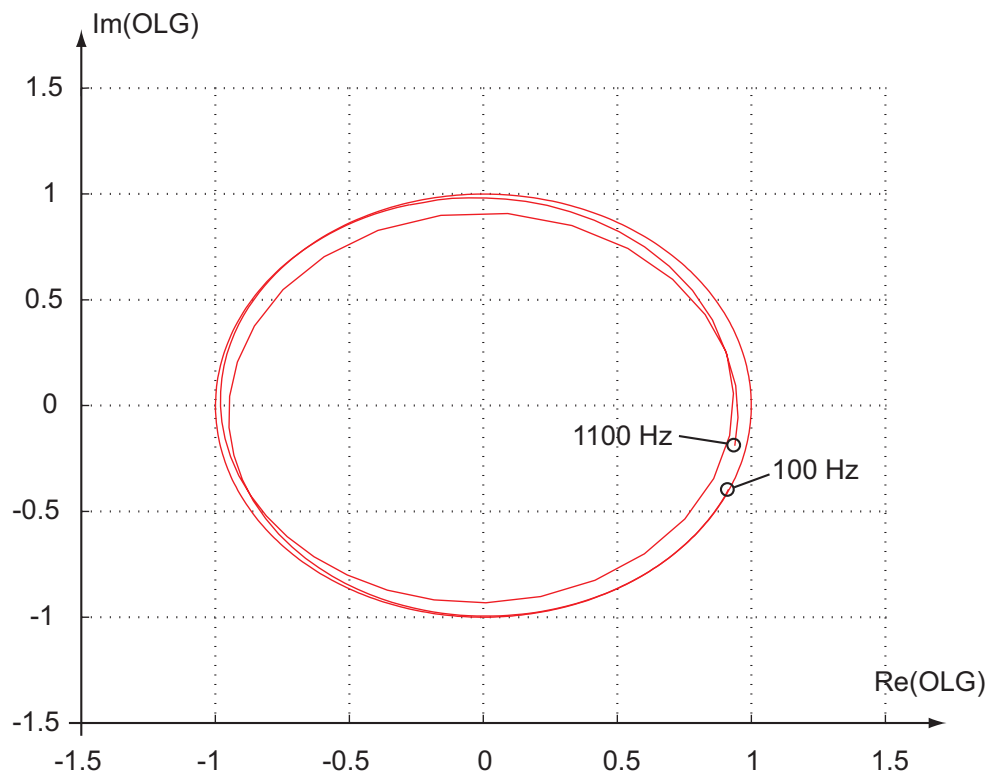


Abbildung 5.8: Ortskurve der OLTF des gesamten angeregten Frequenzbereichs bei 225 l/min

| Modennummer | Methode | Komplexe Eigenfrequenz | Dämpfungsrate |
|-------------|--------------------|------------------------|---------------|
| 1 | Netzwerk+Exp. | $403.1 + 0.10i$ | -0.15% |
| | Analytisches Netz. | $407.4 + 0.07i$ | -0.11% |
| | CNN | $405.6 + 0.08i$ | -0.13% |
| 2 | Netzwerk+Exp. | $567.7 + 0.77i$ | -0.85% |
| | Analytisches Netz. | $598.4 + 0.77i$ | -0.81% |
| | CNN | $573.7 + 0.55i$ | -0.60% |

Tabelle 5.3: Eigenfrequenzen des Rohrs mit Flächensprung, bei 225 l/min. Vereinfachtes analytisches Netzwerkmodell, siehe Anhang D.

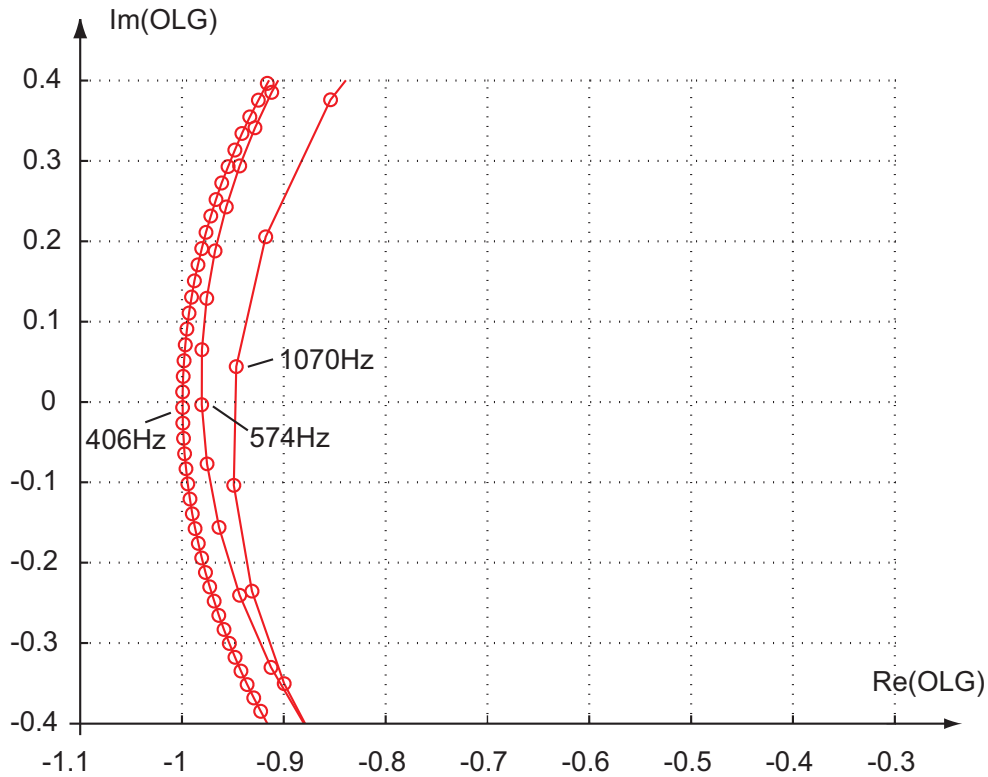


Abbildung 5.9: Ausschnitt der Ortskurve der OLTF um den kritischen Punkt bei 225 l/min

| Modennummer | Methode | Komplexe Eigenfrequenz | Dämpfungsrate |
|-------------|--------------------|------------------------|---------------|
| 1 | Netzwerk+Exp. | $403.0 + 0.78i$ | -1.21% |
| | Analytisches Netz. | $407.3 + 0.57i$ | -0.88% |
| | CNN | $405.6 + 0.69i$ | -1.06% |
| 2 | Netzwerk+Exp. | $567.4 + 6.20i$ | -6.64% |
| | Analytisches Netz. | $598.1 + 6.25i$ | -6.35% |
| | CNN | $573.8 + 4.50i$ | -4.81% |

Tabelle 5.4: Eigenfrequenzen des Rohrs mit Flächensprung, bei 1800 l/min. Vereinfachtes analytisches Netzwerkmodell, siehe Anhang D.

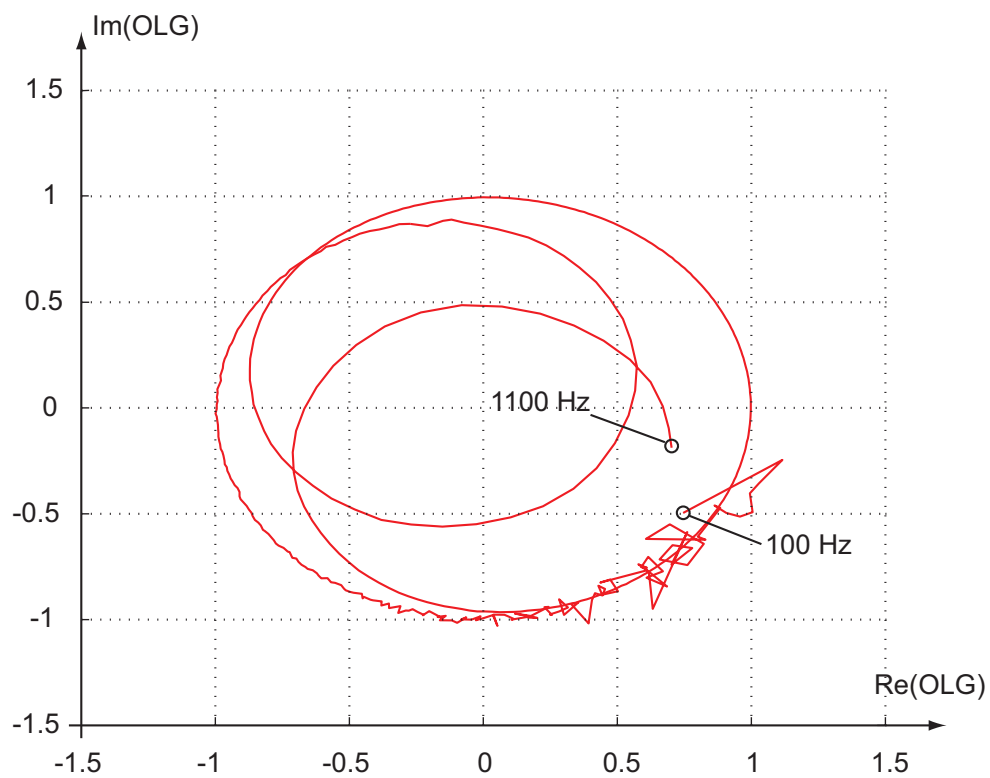


Abbildung 5.10: Ortskurve der OLTF des gesamten angeregten Frequenzbereichs bei 1800 l/min

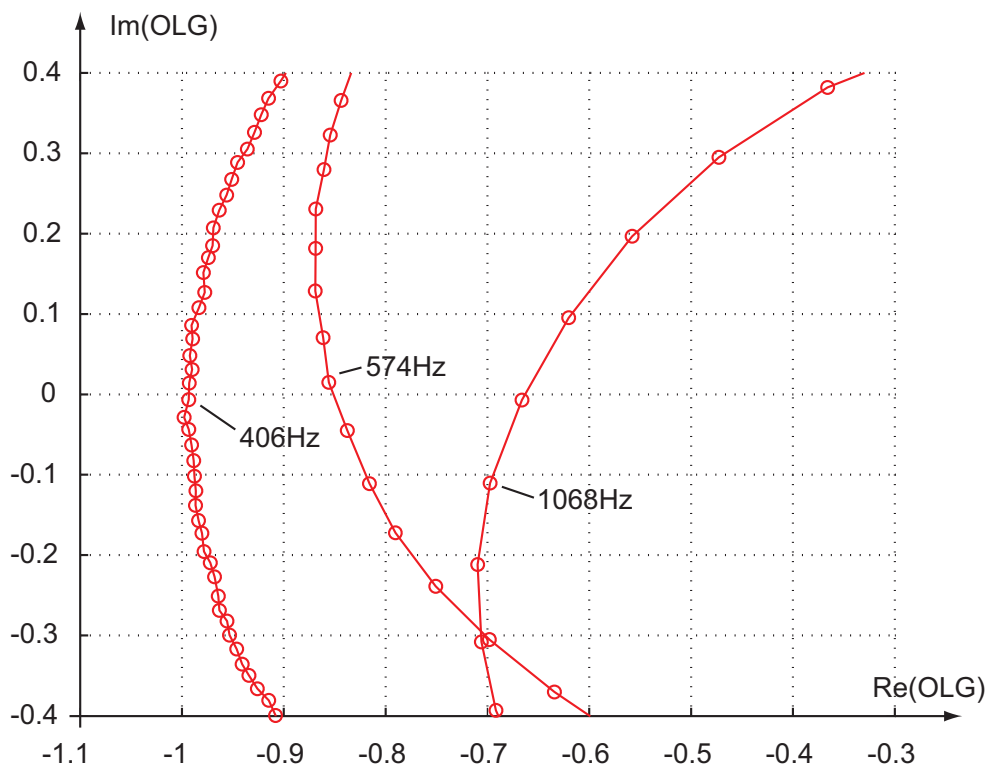


Abbildung 5.11: Ausschnitt der Ortskurve der OLTF um den kritischen Punkt bei 1800 1/min

einer reinen CFD-Simulation demonstriert werden: die Analyse verschiedener Geometrien anhand von Daten, die mit einer einzigen CFD-Simulation generiert wurden. In diesem Kontext werden dort auch die Ergebnisse dieses Kapitels eingehender diskutiert.

Es lässt sich jedoch bereits hier feststellen, dass die CNN-Methode für die Flächensprunggeometrie sehr gute Ergebnisse liefert. Leichte Abweichungen bei der Dämpfungsrates werden im folgenden Kapitel bewertet und mögliche Ursachen besprochen.

5.3 Vergleich der Methoden am Beispiel des Einflusses des Längenverhältnisses

Netzwerkmodelle haben, wie bereits festgestellt, die Eigenschaft, dass sie sich mit sehr wenig Zeitaufwand lösen lassen, sobald das Modell einmal erstellt ist. Diese Eigenschaft erlaubt es mit sehr geringem Aufwand Variantenuntersuchungen durchzuführen, sofern dabei lediglich Parameter des Modells variiert werden. Aber auch Modifikationen an der Struktur des Modells sind ohne großen Aufwand möglich, falls für alle zu implementierenden Elemente bereits Transfermatrizen existieren. So sind Untersuchungen des Einflusses von Dämpfern, geänderten Randbedingungen und v.a. auch – und das mit dem geringsten Aufwand – von Änderungen an der Geometrie leicht möglich. Dies ist ein großer Vorteil der Netzwerkmodellierung gegenüber der CFD, denn bei letzterer muss bei Geometrieänderungen ein neues Berechnungsgitter und in jedem Fall eine neue, sehr zeitaufwändige Simulation durchgeführt werden. Die angesprochenen Nachteile der Netzwerkmodellierung gegenüber der CFD bleiben jedoch bestehen. Die CNN-Methode kann hier wiederum die Lücke schließen: befindet sich die zu ändernde Geometrie im Netzwerkteil, so ist mit einer einzigen, hochauflösenden CFD-Simulation die Untersuchung beliebiger Varianten bei hoher Detailgenauigkeit möglich. Dies soll anhand der Flächensprunggeometrie demonstriert werden.

Im vorliegenden Fall lässt sich die Länge des Rohrstücks stromauf des Schnittes variieren, da sie im Netzwerkteil dargestellt wird, also außerhalb

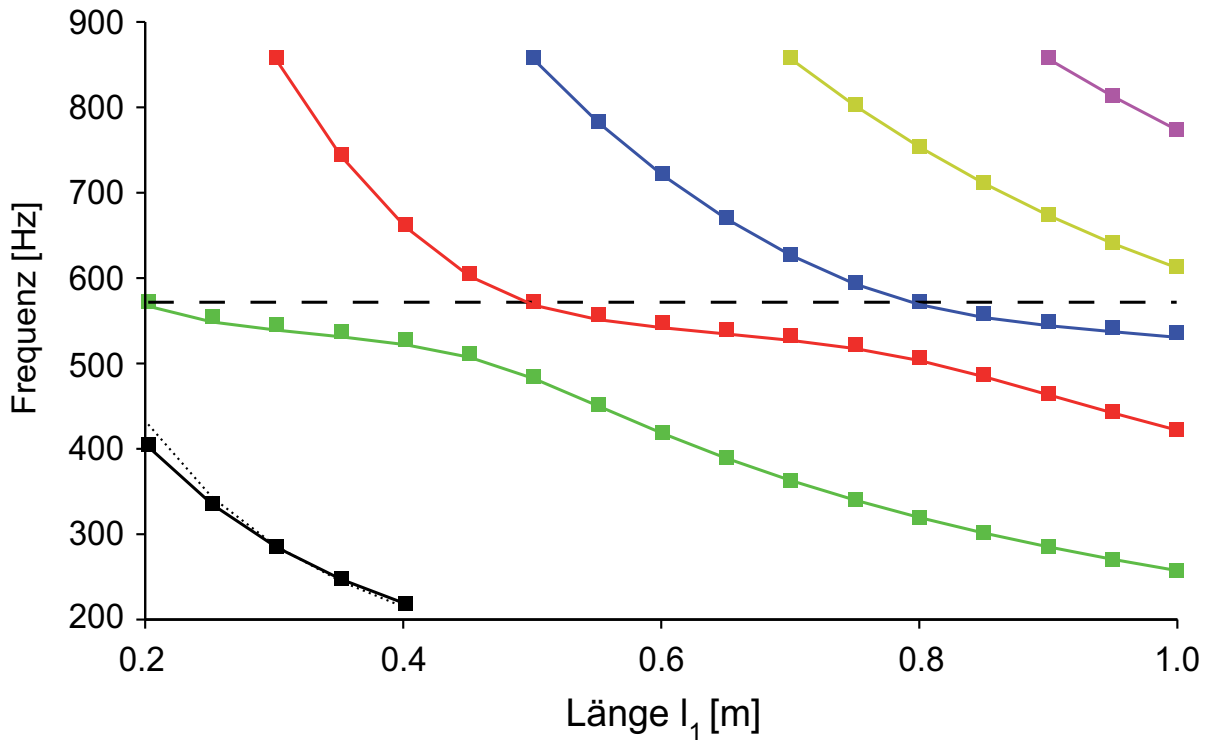


Abbildung 5.12: Eigenfrequenzen (Realteil) für verschiedene Längen l_1 des Flächensprungs bei 225 l/min. Gepunktete Linie: $\lambda/4$ -Welle im weiten Rohrteil; gestrichelte Linie: $\lambda/2$ -Welle im engen Rohrteil; Schwarz: 1. Eigenfrequenz; grün: 2. Eigenfrequenz; rot: 3. Eigenfrequenz; blau: 4. Eigenfrequenz; gelb: 5. Eigenfrequenz; violett: 6. Eigenfrequenz; Linien: Netzwerkmodell mit experimentell ermittelten Parametern; Quadrate: Resultate der CNN-Methode.

des mit CFD simulierten Bereichs liegt. Genau so wie beim Netzwerkmodell mit experimentell ermittelter Transfermatrix für den Flächensprung wird dabei lediglich die Länge l_1 in Gleichung (5.3) variiert. Dieses Vorgehen wurde für beide Methoden umgesetzt. Die Ergebnisse werden im Folgenden präsentiert und besprochen.

Abbildung 5.12 zeigt den Verlauf der Eigenfrequenzen (Realteil) für Längen l_1 von 0.2 bis 1.0 m. Als untere und obere Grenze für die dabei betrachte-

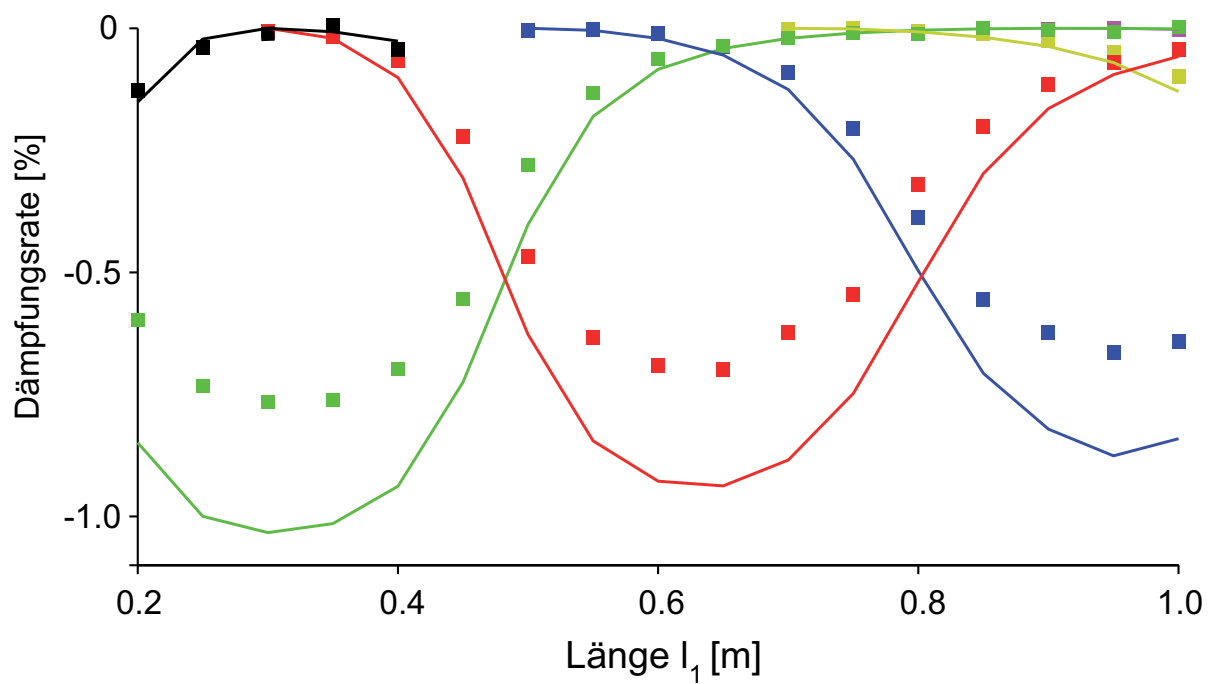


Abbildung 5.13: Dämpfungsrates (Imaginärteil) für verschiedene Längen l_1 des Flächensprungs bei 225 l/min.

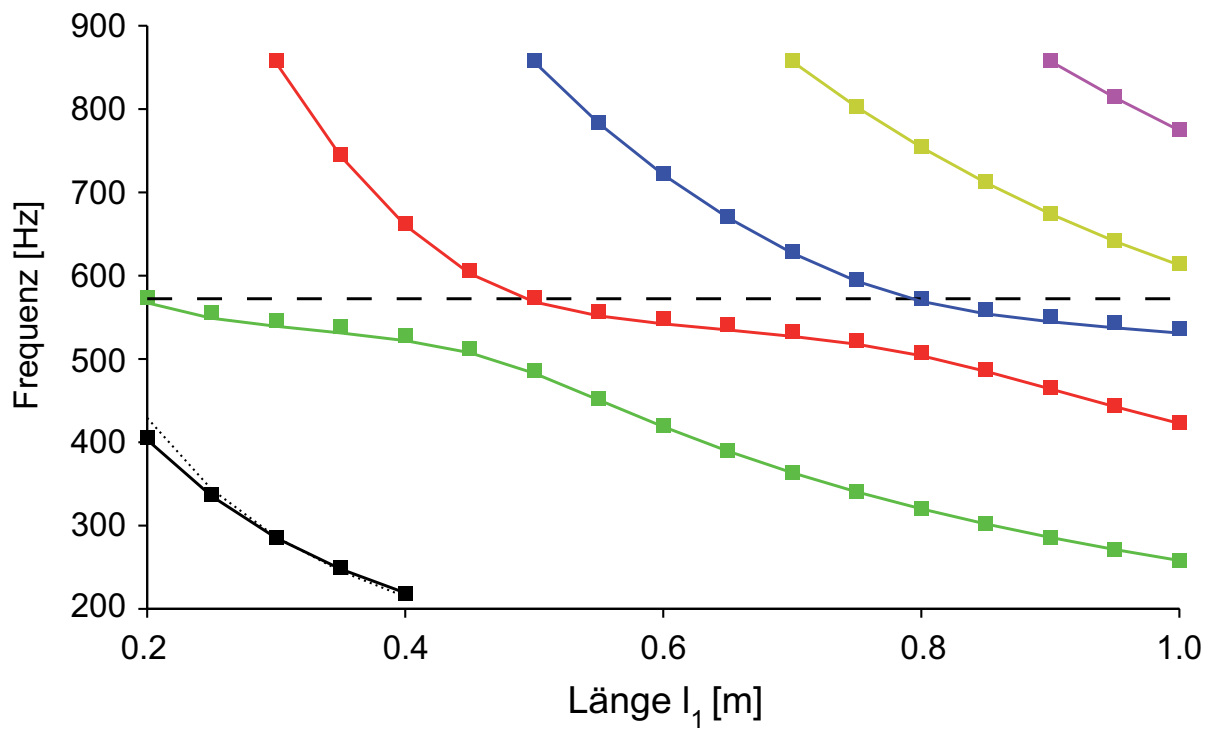


Abbildung 5.14: Eigenfrequenzen (Realteil) für verschiedene Längen l_1 des Flächensprungs bei 1800 l/min. Gepunktete Linie: $\lambda/4$ -Welle im weiten Rohrteil; gestrichelte Linie: $\lambda/2$ -Welle im engen Rohrteil; Schwarz: 1. Eigenfrequenz; grün: 2. Eigenfrequenz; rot: 3. Eigenfrequenz; blau: 4. Eigenfrequenz; gelb: 5. Eigenfrequenz; violett: 6. Eigenfrequenz; Linien: Netzwerkmodell mit experimentell ermittelten Parametern; Quadrate: Resultate der CNN-Methode.

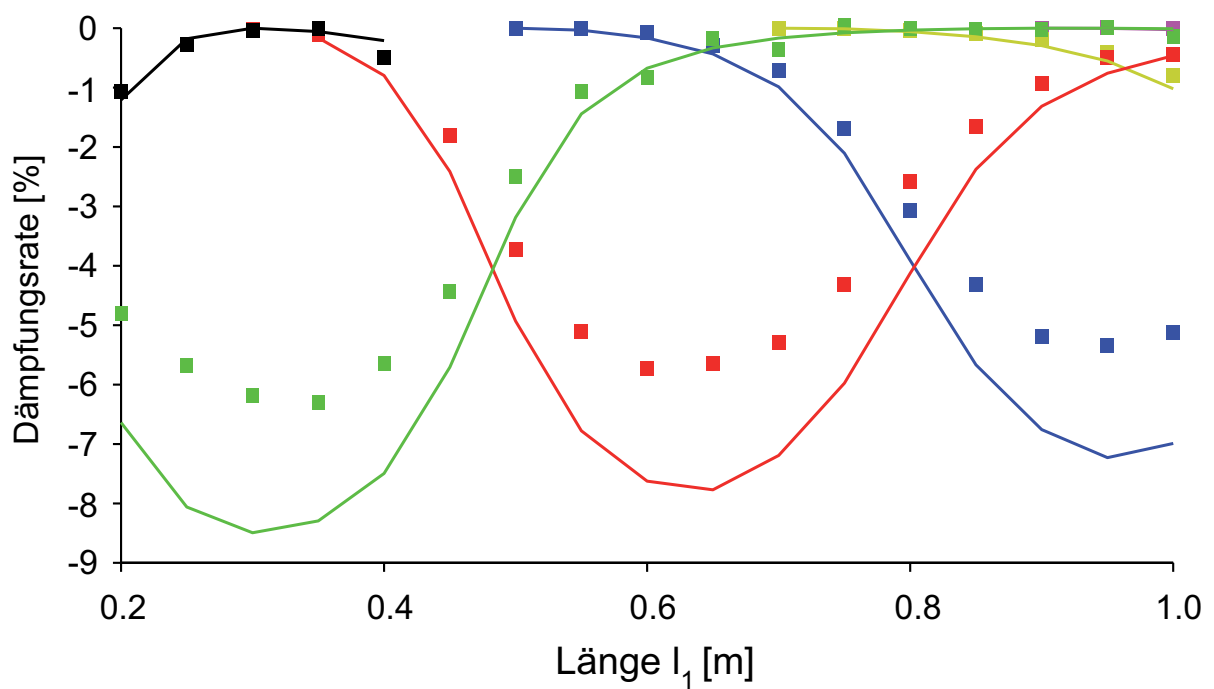


Abbildung 5.15: Dämpfungsrates (Imaginärteil) für verschiedene Längen l_1 des Flächensprungs bei 1800 l/min.

ten Frequenzen wurden 200 und die cut-on-Frequenz nicht-ebener Moden im stromaufliegenden Rohrteil von 859 Hz gewählt. Frequenzen unter 200 Hz wurden nicht betrachtet, da beim Fall mit der höheren Geschwindigkeit mit der verwendeten einfachen Methode der Wellenidentifikation über eine Ebenenmittelung aus der CFD keine sinnvollen Ergebnisse gewonnen werden konnten. Über den gesamten Bereich ist quasi keine Abweichung zwischen den Ergebnissen beider Methoden festzustellen. Die größten Abweichungen liegen wie bereits bei $l_1 = 0.2$ m beobachtet bei ca. 1 %. Das gleiche Bild bietet sich für den Fall mit 1800 l/h, siehe Abbildung 5.14. Im Kontext üblicherweise mit Simulationsmodellen zu erreichender Genauigkeit, darf dieses Ergebnis als außerordentlich gut betrachtet werden. Im vorliegenden Fall ergeben sich die Eigenfrequenzen nicht lediglich aus der korrekten Wiedergabe der Schallgeschwindigkeit, sondern es treten komplexe akustische Phänomene am Ort des Flächensprungs auf.

Sehr gut sichtbar ist in beiden Abbildungen auch die bereits angesprochene Bevorzugung der Eigenfrequenzen für zwei Moden der einzelnen Rohrstücke: so ist die erste Eigenfrequenz der Flächensprungsgeometrie unabhängig vom Längenverhältnis immer nahezu identisch mit der Viertelwelle im stromaufseitigen Rohrstück. Dies ist, wie bereits angesprochen, damit zu begründen, dass die Wand am Flächensprung mit nur kleiner Öffnung in der zudem noch eine starke Beschleunigung der Strömung stattfindet wie eine Geschwindigkeitsrandbedingung wirkt, so dass sich zusammen mit der Druckrandbedingung auf der linken Seite eine stehende Viertelwelle ausbilden kann. Für die zweite und dritte Mode zeigt sich eine Koppelung mit der halben Welle im stromabliegenden, engeren Rohrstück immer dann, wenn die Eigenmode des Gesamtsystems in die Nähe von deren Frequenz kommt. Diese Koppelung ist nicht ganz so stark und offensichtlich, wie die der ersten Mode mit der Viertelwelle, aber durchaus am flacheren Frequenzverlauf der zweiten Mode zwischen 0.2 und 0.4 m und der dritten Mode zwischen 0.5 und 0.7 m erkennbar. Wie einleitend gesagt, kann hier das im Vergleich zum engeren stromabseitigen Rohrstück sehr große Volumen des stromaufseitigen Rohrstücks wie eine Umgebung konstanten Drucks wirken, so dass sich wiederum mit der konstanten stromabseitigen Druckrandbedingung eine halbe Welle ausbilden kann.

Ein Blick auf die Dämpfungsraten in den Abbildungen 5.13 und 5.15 zeigt für den gesamten Bereich die Tendenz, die bereits für $l_1 = 0.2$ m in Tabelle 5.3 und 5.4 dargestellt ist: die Dämpfung wird vom CNN-Modell zwar qualitativ und größenordnungsmäßig korrekt, jedoch quantitativ zu gering vorhergesagt, die maximale Abweichung liegt hier bei der zweiten Eigenmode bei etwa 25 %. Der charakteristische, wellenförmige Verlauf ist jedoch der gleiche wie beim Netzwerkmodell mit experimentell bestimmten Parametern. Die größte Dämpfung tritt dort auf, wo sich eine Halbwelle im engeren Rohrabschnitt ausbilden kann, d.h. es befindet sich ein Geschwindigkeitsbauch am Ort des Flächensprungs. Dadurch kann hier viel akustische Energie dissipiert werden. Bei der Viertelwelle, die für die erste Gesamtsystemeigenmode relevant ist, ist dieses Verhalten nicht festzustellen.

Wieso die Dämpfung vom CNN-Modell zu gering vorhergesagt wurde, soll nun versucht werden zu klären. Es gibt hierfür mehrere mögliche Ursachen. Zunächst kann überprüft werden, ob der Druckverlust über den Flächensprung in der CFD allgemein zu gering vorhergesagt wird. Dieser lässt sich aus den Druck-Konturplots in Abbildung 5.6 und 5.7 abschätzen. Der Abfall des statischen Drucks über den Flächensprung beträgt bei 225 l/min 1.36 Pa und bei 1800 l/min 87 Pa. Bestimmt wurde dieser aus der Differenz aus Plenumsdruck und Druck an der hinteren Randbedingung, so dass noch der Reibungsdruckverlust im engen Rohr berücksichtigt werden muss. Es lässt sich mittels

$$\Delta p_{\text{tot}} = \Delta p_{\text{stat}} + \Delta p_{\text{dyn}} \quad (5.9)$$

sowie

$$\Delta p_{\text{dyn}} = \frac{\rho}{2} u_1^2 (1 - \alpha) \quad (5.10)$$

mit dem Flächenverhältnis $\alpha = 9.76$ der Totaldruckverlust berechnen, der sich bei 225 l/min zu 1.28 Pa und bei 1800 l/min zu 85.2 Pa ergibt. Über

$$\Delta p_{\text{tot}} = \zeta_{\text{ges}} \frac{\rho}{2} u_1^2, \quad (5.11)$$

[93] lässt sich so der Gesamtdruckverlustkoeffizient der CFD, bezogen auf die stromaufseitige Geschwindigkeit, berechnen. Dieser ergibt sich für 225 l/min zu 149 und für 1800 l/min zu 155. Davon abgezogen werden muss

noch der auf u_1 bezogene Rohrreibungsdruckverlustkoeffizient für den engen Rohrteil. Dieser hat bei 225 l/min den Wert 17 und bei 1800 l/min den Wert 10 [39]. Somit resultieren schließlich die Druckverlustkoeffizienten für den Flächensprung bei 225 l/min zu 132 und bei 1800 l/min zu 145. In der Standardliteratur [93] findet sich für die vorliegende Konfiguration ein wesentlich niedrigerer Wert von $\zeta_p = 52$ und auch der aus dem experimentell ermittelten Druckverlustkoeffizienten für die Akustik von 164 über Gleichung (D.6) zurückgerechnete Wert von $\zeta_p = 70$ liegt deutlich unterhalb. Somit kann die Abweichung von 20 % bei den berechneten Dämpfungsraten der Eigenmoden nicht mit einem zu geringen strömungsmechanischen Totaldruckverlust erklärt werden.

Ein möglicher Einflussfaktor auf Verluste am Flächensprung konnte in der CFD aufgrund des verwendeten Löser nicht berücksichtigt werden: die Turbulenz an der stromaufseitigen Randbedingung des Berechnungsgebiets. Im Falle von 1800 l/min herrscht selbst im großen Querschnitt eine Reynoldszahl von ca. 12700 und damit auf jeden Fall turbulente Strömung vor, die in der CFD jedoch erst mit dem Flächensprung und damit stromab davon erzeugt wird. Gegen diese These spricht jedoch, dass auch bei 225 l/min ($Re = 1600$) zu niedrige Verluste berechnet werden. Eine nicht- oder teilreflektierende Randbedingung, die Aufprägung von Turbulenz und akustische Anregung gleichzeitig ermöglicht kann hier Aufschluss geben.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die CNN-Methode geeignet ist auch, oder gerade, das akustische Verhalten von Geometrien mit komplexen Strömungsvorgängen vorherzusagen. Das Dämpfungsverhalten wird qualitativ korrekt wiedergegeben, auch wenn quantitativ leichte Abweichungen festzustellen sind. Zukünftige dreidimensionale Simulationen sowie der Vergleich mit umfangreicheren experimentellen Daten sowie denen anderer Geometrien können hier weiteren Aufschluss geben. Die mit der experimentellen Transfermatrix bestimmten Frequenzen wurden im gesamten Frequenzbereich hervorragend wiedergegeben.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung, Implementierung und Validierung einer neuartigen, effizienten und genauen hybriden Vorhersagemethode für selbsterregte akustische Eigenmoden thermoakustischer Instabilitäten. Diese soll in frühen Designphasen auf kostengünstige Weise eine Stabilitätsanalyse auch für komplexe thermoakustische Systeme ermöglichen.

Es kamen dabei Elemente aus Netzwerkmodellierung, CFD und klassischer Regelungstechnik zur Anwendung. Ein Teil des Gesamtsystems, der komplexe, schwierig zu modellierende Vorgänge beinhaltet, wird mit kompressibler CFD simuliert die mit einer akustischen Anregung beaufschlagt wird. Die Antwort auf die Anregung wird aufgezeichnet und als Eingangssignal für ein Netzwerkmodell verwendet, das den Rest des Systems darstellt, welcher leicht zu modellieren ist. Die Antwort des Netzwerkmodells in Relation zum ursprünglichen Anregungssignal lässt schließlich die Berechnung der Übertragungsfunktion des als aufgeschnittener Regelkreis betrachteten Gesamtsystems zu. Aus der Ortskurve dieser Übertragungsfunktion werden über eine an das Nyquist-Kriterium der Regelungstechnik angelehnte Methode die Eigenfrequenzen des Systems berechnet.

Ein allgemeiner Vorteil der Bestimmung von Eigenfrequenzen über die OLTF gegenüber der direkten iterativen Bestimmung ist, dass alle im betrachteten Frequenzbereich liegenden Eigenfrequenzen gefunden werden. Bei jedem Vorbeigehen am kritischen Punkt muss eine Eigenfrequenz liegen. Bei der direkten Lösung des Gleichungssystems (2.15) eines akustischen Netzwerks mittels numerischer Nullstellensucher ist dies keinesfalls gegeben. Abhängig von der Steifigkeit des Gleichungssystems, dem Vorhandensein lokaler Minima und der Güte des Nullstellensuchers können hier zu viele, unsinnige oder auch zu wenige Eigenfrequenzen gefunden werden [25].

Die Validierung der Methode erfolgte anhand eines klassischen thermoakustischen Resonators, des so genannten Rijke-Rohrs, sowie einer Flächensprunggeometrie, die zwar geometrisch einfach ist, jedoch komplexes aeroakustisches Verhalten aufweist. Den mit dem CNN-Modell bestimmten Ergebnissen wurden dabei umfangreiche experimentell ermittelte Daten, sowie die eines einfachen klassischen Netzwerkmodells gegenübergestellt. Im Falle des Rijke-Rohrs wurde dazu ein experimentelles Versuchsmodell aufgebaut und vermessen, während im Falle des Flächensprungs auf am Lehrstuhl vorhandene Daten zurückgegriffen werden konnte.

Die experimentell ermittelten Eigenfrequenzen konnten mit beiden numerischen Modellansätzen beim Rijke-Rohr gut und bei der Flächensprunggeometrie sehr gut wiedergegeben werden, wobei das CNN-Modell besonders bei den Realteilen, also den eigentlichen Schwingungsfrequenzen, stets sehr gute Ergebnisse liefert. Lediglich die Dämpfungsrate wurden bei der Flächensprunggeometrie mit dem CNN-Modell stets etwas unterschätzt, beim Rijke-Rohr war auch bei den Schwingungsfrequenzen bei den höheren Moden eine nennenswerte Abweichung feststellbar. Relativiert werden müssen diese Abweichungen jedoch mit den Ergebnissen eines analytischen Netzwerkmodells, das generell dem CNN-Modell unterlegen ist. Es muss aus der Erfahrung des Autors auch festgestellt werden, dass die Ergebnisse des CNN-Modells im Kontext aller gängigen Vorhersagemethoden bei vertretbarem Berechnungsaufwand außerordentlich gut sind.

Interessant ist, dass die CNN-Methode nicht nur auf die Anwendung bei thermoakustischen Systemen beschränkt ist, sondern zur Bestimmung von Eigenfrequenzen und Wachstumsraten jedweden akustischen Resonators einsetzbar ist. Sie ist besonders geeignet für Anwendungsfälle, wo Transfermatrizen wichtiger Elemente einer Geometrie nicht bestimmt werden können oder wo die Netzwerkmodellierung aufgrund komplexer Geometrie nicht anwendbar ist. Die höchstmögliche Effizienz ist denkbar bei Systemen, die aus ausgedehnten Rohrsystemen auf der einen Seite und einer akustischen Quelle oder einem Resonator komplexer Geometrie oder Strömungsphysik auf der anderen Seite bestehen wie z.B. einem Brenner mit einem langen Kamin. Die Methode ist universell einsetzbar, da, besonders un-

ter Verwendung fortschrittlicher CFD-Methoden wie LES, alle entscheidenden Vorgänge, wie Flammen-Akustik-Interaktion, kohärente Wirbelstrukturen, Entropiewellen und hochkomplexe Strömungsfelder abgebildet werden können.

Fälle mit nicht-trivialen Randbedingungen, im Allgemeinen einer frequenzabhängigen, komplexwertigen Impedanz, wie sie nur schwer in CFD realisiert werden kann, können auch von der Methode profitieren, wenn sich diese Randbedingung im Netzwerkteil des Systemmodells befindet. Im Extremfall wäre es denkbar, den Netzwerkteil eines CNN-Modells rein auf die nicht-triviale Randbedingung zu reduzieren, während dennoch die gesamte Geometrie per CFD simuliert wird. Dieser Anwendungsfall ist besonders interessant, denn er kann jegliche Gesamtsystem-Simulation per traditioneller CFD ersetzen. Die komplette Geometrie wird dabei mit CFD simuliert, mit der einzigen Besonderheit, dass sich auf einer Seite eine teilreflektierende, angeregte Randbedingung befindet. Auf diese Weise lassen sich Größenordnungen an Rechenzeit einsparen, da nur noch wenige Zyklen der niedrigsten Frequenz berechnet werden. Einher geht diese Rechenzeiteinsparung noch mit einem Informationsgewinn, da auch abklingende Eigenfrequenzen identifiziert werden.

Auch beim, in dieser Arbeit betrachteten, Rijke-Rohr sind weitere Anwendungsmöglichkeiten der CNN-Methode denkbar. So ließe sich, unter der Voraussetzung geeigneter CFD-Löser, die Simulation des Rijke-Rohrs derart verbessern, dass der Wärmeübergang am Draht nicht mehr simuliert sondern voll mitgerechnet wird. Dadurch würde der Phasenverzugsmechanismus nicht mehr modelliert werden müssen, sondern die zugrundeliegende Physik könnte direkt dargestellt werden. Diese Tendenz zu möglichst wenig Modellierung ist eines der Ziele von CNN. Durch Berücksichtigung realer Wärmeübertragungsmechanismen, mit bei höheren Amplituden auch Nichtlinearität, ist es sogar denkbar, durch schrittweises Erhöhen der Anregungsamplitude Grenzzyklen zu bestimmen. Stow et al. [90] haben dazu eine Methode vorgestellt, die aus einem Netzwerkmodell mit nichtlinearer Wärmefreisetzungstransfermatrix besteht. Wirklichkeitsgetreue Transfermatrizen für nichtlineares Wärmefreisetzungsverhalten zu bestimmen,

stellt eine große Herausforderung dar, der CFD-Teil eines CNN-Modells kann diese Aufgabe jedoch ohne Schwierigkeit bewältigen.

Es kann somit zusammenfassend festgestellt werden, dass die Anwendbarkeit und Aussagekraft der CNN-Methode erfolgreich demonstriert wurde und Anwendungsgebiete identifiziert wurden. Es traten keine gravierenden unerwarteten Schwächen zu Tage, ganz im Gegenteil birgt die CNN-Methode noch Potenzial, das mit den untersuchten einfachen Geometrien noch nicht voll ausgeschöpft wurde. Der nächste konsequente Schritt ist die Anwendung auf kompliziertere Strömungsvorgänge wie Brennersysteme mit verdrallter Flamme.

Literaturverzeichnis

- [1] Freistrahle. <http://de.wikipedia.org/wiki/Freistrahle>, 2007.
- [2] Thermoelement. <http://de.wikipedia.org/wiki/Thermoelement>, 2007.
- [3] M. Åbom and H. Bodén. Modelling of fluid machines as sources of sound in duct and pipe systems. *Acta Acustica* 3, 6:549–560, 1995.
- [4] N. Ananthakrishnan, S. Deo, and F. E. C. Culick. Reduced-order modeling and dynamics of nonlinear acoustic waves in a combustion chamber. *Combust. Sci. and Tech.*, 177:221–247, 2005.
- [5] K. Anbarci and F. Bergmann. Auslegung, konstruktion, inbetriebnahme und experimentelle untersuchung eines rijke-rohres. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Thermodynamik, TU München, 2006.
- [6] J.D. Anderson Jr. *COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS, The Basics with Applications*. McGraw-Hill, Inc., 1995.
- [7] P.K. Baade. Selbsterregte schwingungen in gasbrennern. *Kälte, Klima, Ingenieur*, 6:167–176, 1974.
- [8] K. Balasubramanian and R.I. Sujith. Non-normality and nonlinearity in combustion-acoustic interactions in diffusion flames. Number AIAA 2007-567 in 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada, 2007.
- [9] K. Balasubramanian and R.I. Sujith. Thermoacoustic instability in a rijke tube: Non-normality and nonlinearity. Number AIAA 2007-3428 in 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 2007.

- [10] G. Bisio and G. Rubatto. Sondhauss and rijke oscillations – thermodynamic analysis, possible applications and analogies. *Energy*, 24:117–131, 1999.
- [11] D Bohn and E Deuker. An acoustical model to predict combustion driven oscillations. 20th International Congress on Combustion Engines, 1993.
- [12] S. Boij and B. Nilsson. Reflection of sound at area expansions in a flow duct. *J. of Sound and Vibration*, 260:477–498, 2003.
- [13] CERFACS, 42, Avenue Gaspard Coriolis F-31057 Toulouse Cedex 1 France. *The AVBP HandBook*, April 2005.
- [14] T.P. Chiang, T.W.H. Sheu, and R.R. Hwang. Numerical studies of a three-dimensional flow in suddenly contracted channels. *Physics of Fluids*, 14(5):1601–1616, 2002.
- [15] L. Cremer. The second annual fairey lecture : The treatment of fans as black boxes. *J. of Sound and Vibration*, 16(1):1–15, 1971.
- [16] A. P. Dowling. The calculation of thermoacoustic oscillations. *J. of Sound and Vibration*, 180(4):557–581, 1995.
- [17] A. P. Dowling. Thermoacoustic instability. 6th Int. Congress on Sound and Vibration, page 16, Copenhagen, Denmark, July 5-8 1999.
- [18] A. Fischer. *Hybride, thermoakustische Charakterisierung von Drallbrennern*. PhD thesis, Technische Universität München, München, Germany, April 2004.
- [19] Fluent Inc. *FLUENT 6.2 User’s Guide*, 2005.
- [20] A. Gentemann, A. Fischer, S. Evesque, and W. Polifke. Acoustic transfer matrix reconstruction and analysis for ducts with sudden change of area. Number AIAA-2003-3142 in 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, page 11, Hilton Head, SC, USA, May 12-14 2003. AIAA. GenteFischEvesq03.

- [21] C. C. Hantschk and D. Vortmeyer. Numerical simulation of self-excited thermoacoustic instabilities in a rijke tube. *J. of Sound and Vibration*, 277(3):511–522, 1999.
- [22] J.-P. Hathout. *Thermoacoustic Instability*. Reacting Gas Dynamics Computational Lab., Department of Mechanical Engineering, MIT, Cambridge, U.S.A., 1999.
- [23] M. A. Heckl. Non-linear acoustic effects in the rijke tube. *Acustica*, 72:63–71, 1990.
- [24] M. Horn and N. Dourdoumas. *Regelungstechnik*. PEARSON Studium, 2004.
- [25] Z. M. Ibrahim, F.A. Williams, and S.G. Buckley. A review of previous studies of oscillatory combustion in gas turbines:. Technical report, University of California, San Diego, 2005.
- [26] I.E. Idelchik. *Handbook of HYDRAULIC RESISTANCE*. Begell House, 3rd edition, 1996.
- [27] F.P. Incropera and D. P. DeWitt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, 4 edition, 2000.
- [28] O.L.R Jacobs. *Introduction to control theory*. Oxford University Press, 1993.
- [29] K. Jänich. *Analysis für Physiker und Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983. 23–31.
- [30] J. J. Keller. The critical cross-section of a vortex. *Z. angew. Math. Mech*, 46, 1995.
- [31] L. V. King. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A214:373–432, 1914.
- [32] J. Kopitz. Comparison of different solver settings in fluent6 for the use with acoustics. Interner report, Lst. f. Thermodynamik, TU München, 2003.

- [33] J. Kopitz. Modification of the partly-reflecting outlet boundary condition in avbp and results. Lehrstuhl für Thermodynamik, TU München, Interner Report, 2004.
- [34] J. Kopitz, E. Bröcker, and W. Polifke. Characteristics-based filter for identification of planar acoustic waves in numerical simulation of turbulent compressible flow. 12th Int. Congress on Sound and Vibration, Lisbon, July 11-14 2005.
- [35] W. Krebs, G. Walz, and S. Hoffmann. Thermoacoustic analysis of annular combustor. Number AIAA 99-1971, page 01/Nov. AIAA Inst. of Aeron. & Acoust., 1999.
- [36] U. Krüger, J. Hüren, S. Hoffmann, W. Krebs, P. Flohr, and D. Bohn. Prediction of thermoacoustic instabilities with focus on the dynamic flame behaviour for the 3a-series gas turbine of siemens kwu. Number 99-GT-111 in Int. Gas Turbine & Aeroengine Congr. & Exh., page 11, Indianapolis, Indiana, June 7-10 1999. ASME.
- [37] H. Kuchling. *PHYSIK Formeln und Gesetze*. Buch- und Zeit-Verlagsgesellschaft mbH Köln, 1988.
- [38] W. Kunz. *Untersuchungen zum Anregungsmechanismus thermoakustischer Schwingungen am Beispiel des Rijke-Phänomens*. PhD thesis, Technische Universität München, 1981.
- [39] B. Laschka. *Strömungsmechanik I, Vorlesungsbegleitendes Manuskript*. Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1997.
- [40] H. Levine and J. Schwinger. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. *Phys. Rev.*, 73:383–406, 1948.
- [41] T. Lieuwen and V. Yang, editors. *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines: Operational Experience, Fundamental Mechanisms, and Modeling*. Number ISBN 156347669X in Progress in Astronautics and Aeronautics. AIAA, 2006.

- [42] T.C. Lieuwen and J.H. Cho. Modeling the response of premixed flames to mixture ratio perturbations. Number GT-2003-38089 in ASME Turbo Expo 2003, Atlanta, Georgia, U.S.A., 2003.
- [43] M. J. Lighthill. The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. *Proc. Royal Soc. London, Series a*, 224:1–23, 1954.
- [44] S. Liljenberg. Modeling and stability analysis of thermoacoustic instabilities in gas turbine combustor sections. Master thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2000.
- [45] P.G.E. Lumens. The rijke tube: a validating journey. Technical report, Lehrstuhl für Thermodynamik, TU München, 2006.
- [46] K. H. Lundberg. Barkhausen stability criterion. <http://web.mit.edu/klund/www/weblatex/node4.html>, 2002.
- [47] A.G.J. MacFarlane. The development of frequency-response methods in automatic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(2):250–265, 1979.
- [48] K. I. Matveev. Energy consideration of the nonlinear effects in a rijke tube. *J. of Fluids and Structures*, 18:783–794, 2003.
- [49] K. I. Matveev and F. E. C. Culick. A study of the transition to the instability in a rijke tube with axial temperature gradient. *J. of Sound and Vibration*, 264:689–706, 2003.
- [50] K. R. McManus, T. Poinsot, and S. M. Candel. A review of active control of combustion instabilities. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 19:1–29, 1993. vorhanden.
- [51] H. J. Merk. Analysis of heat-driven oscillations of gas flows. *Appl. Sci. Res.*, 6:402–420, 1958. vorhanden.
- [52] L. Merz and H. Jaschek. *Grundkurs der Regelungstechnik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 14. auflage edition, 2003.

- [53] Philip M. Morse and K. Uno Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1968. None.
- [54] T. Murota and M. Ohtsuka. Large-eddy simulation of combustion oscillation in premixed combustor. *Int'l Gas Turbine and Aeroengine Congress & Exposition*, ASME /bf 99-GT-274, Indianapolis, 1999.
- [55] E.-G. Neumann. An impedance condition for avoiding acoustic oscillations generated by gas flames. *Acustica*, (vol. 30), 1974. vorhanden.
- [56] U. Neunert, J. Kopitz, T. Sattelmayer, and W. Polifke. Numerical eigen-mode analysis of an acoustic duct system by cfd-olg and comparison against experiment. Number No. GA/CTS4837/12-4550 in 6th International Conference of Industrial and Applied Mathematics,, Zürich, Schweiz, 2007.
- [57] B. Noll. *Numerische Strömungsmechanik: Grundlagen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [58] C. Pankiewitz and T. Sattelmayer. Time domain simulation of combustion instabilities in annular combustors. *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, (125):677–685, June 2003.
- [59] C. O. Paschereit and W. Polifke. Investigation of the thermoacoustic characteristics of a lean premixed gas turbine burner. Number 98-GT-582 in Int. Gas Turbine & Aeroengine Congr. & Exh., Stockholm, Sweden, June 2-5 1998.
- [60] C. O. Paschereit, B. Schuermans, W. Polifke, and O. Mattson. Measurement of transfer matrices and source terms of premixed flames. Number 99-GT-133 in Int. Gas Turbine & Aeroengine Congr. & Exh., Indianapolis, Indiana, 1999. ASME.
- [61] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.

- [62] K.S. Peat. The acoustical impedance at discontinuities of ducts in the presence of a mean flow. *J. of Sound and Vibration*, 127(1):123–132, 1988.
- [63] M.C.A.M. Peters, A. Hirschberg, A.J. Reijnen, and A.P.J. Wijnands. Damping and reflection coefficient measurements for an open pipe at low mach and low helmholtz numbers. *J. Fluid Mech.*, 256:499–534, 1993.
- [64] T. Poinso, A. Trouve, D. Veynante, S. Candel, and E. Esposito. Vortex-driven acoustically coupled combustion instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, (vol. 177), 1987. vorhanden.
- [65] T.J. Poinso and S.K. Lele. Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101:104–129, 1992.
- [66] W. Polifke. *Combustion Instabilities*. Von Karman Institute. in: Advances in Aeroacoustics and Applications, Brussels, BE, 2004. Polif04b.
- [67] W. Polifke and A. Gentemann. Order and realisability of impulse response filters for accurate identification of acoustical multi-ports from transient cfd. *Int. J. of Acoustics and Vibration*, 9(3):139–148, 2004.
- [68] W. Polifke and J. Kopitz. *Wärmeübertragung*. Pearson Studium, 2005.
- [69] W. Polifke, J. Kopitz, and A. Serbanovic. Impact of the fuel time lag distribution in elliptical premix nozzles on combustion stability. Number AIAA 2001-2104 in AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, Maastricht, NL, May 28-30 2001. AIAA.
- [70] W. Polifke, C. O. Paschereit, and K. Döbbling. Constructive and destructive interference of acoustic and entropy waves in a premixed combustor with a choked exit. *Int. J. of Acoustics and Vibration*, 6(3):1–12, 2001.
- [71] W. Polifke, C. O. Paschereit, and T. Sattelmayer. A universally applicable stability criterion for complex thermo-acoustic systems.

18. Deutsch-Niederländischer Flammentag, VDI Bericht 1313, August 1997.
- [72] W. Polifke, A. Poncet, C. O. Paschereit, and K. Döbbling. Reconstruction of acoustic transfer matrices by instationary computational fluid dynamics. *J. of Sound and Vibration*, 245(3):483–510, 2001.
- [73] W. Polifke, J. van der Hoek, and B. Verhaar. Everything you always wanted to know about f and g., 1997.
- [74] W. Polifke and C. Wall. Partially reflecting and non-reflecting boundary conditions for simulation of compressible viscous flow. *Journal of Computational Physics*, 213:437 – 449, 2006.
- [75] AA Putnam. *Combustion driven oscillations in industry*. Number Putnam71. Elsevier, New York, 1971.
- [76] J. W. S. Rayleigh. The explanation of certain acoustical phenomena. *Nature*, 18:319–321, 1878.
- [77] Lord Rayleigh. *The theory of sound*. Number Rayleigh. Macmillan, 1896.
- [78] P.L. Rijke. Notiz über eine neue art, die in einer an beiden enden offenen röhre enthaltene luft in schwingungen zu versetzen. *Annalen der Physik*, 183:339–343, 1859. vorhanden.
- [79] P. Rinaldi. über das verhalten turbulenter freistrahlen in begrenzten räumen. <http://www.hy.bv.tum.de/mitteilungen/mitteilungen/freistrah.pdf>, 2003.
- [80] K. Rüter, G. Fast, and D. Kuhn. Zeitaufgelöste messung der zweidimensionalen geschwindigkeitsverteilung in einem instationären gasfreistrah. Technical Report FZKA 7266, Institut für Kern- und Energietechnik, Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, 2006.

- [81] T. Sattelmayer. Influence of the combustor aerodynamics on combustion instabilities from equivalence ratio fluctuations. Number 2000-GT-0082 in Proc. ASME Turbo Expo 2000, Munich, Germany, May 8-11 2000. ASME.
- [82] T. Sattelmayer and W. Polifke. Assessments of methods for the computation of the linear stability of combustors. *Combustion Science and Technology*, 175:453 – 476, 2003.
- [83] T. Sattelmayer and W. Polifke. A novel method for the computation of the linear stability of combustors. *Combustion Science and Technology*, 175:477 – 497, 2003.
- [84] B. Schuermans. *Modelling and Control of Thermoacoustic Instabilities*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Federale De Lausanne, 2003.
- [85] B. Schuermans, V. Bellucci, G. Felix, F. Meili, P. Flohr, and C. O. Paschereit. A detailed analysis of thermoacoustic interaction mechanisms in a turbulent premixed flame. Number GT2004-53831 in Proc. of ASME Turbo Expo 2004 Power for Land, Sea and Air, Vienna, Austria, June 14-17 2004. ASME.
- [86] B. Schuermans, H. Luebcke, D. Bajusz, and P. Flohr. Thermoacoustic analysis of gas turbine combustion systems using unsteady cfd. Number GT2005-68393 in Proc. of ASME Turbo Expo 2005 Power for Land, Sea and Air, Reno-Tahoe, Nevada, USA, June 6-9 2005. ASME.
- [87] L. Selle, L. Benoit, T. Poinso, and W. Krebs. Joint use of compressible les and helmholtz solvers for analysis of rotating modes in an industrial swirled burner. *Combust. and Flame*, 145:194–205, 2006.
- [88] L. Selle, F. Nicoud, and T. Poinso. Actual impedance of nonreflecting boundary conditions: Implications for computation of resonators. *AIAA*, 42(5):958–964, 2004.
- [89] P. Sijtsma. Experimental techniques for identification and characterisation of noise sources, 2004.

- [90] S. R. Stow and A. P. Dowling. Low-order modelling of thermoacoustic limit cycles. Number GT2004-54245 in Proc. of ASME Turbo Expo 2004 Power for Land, Sea and Air, Vienna, Austria, June 14-17 2004. ASME.
- [91] P. B. Subrahmanyam, R. I. Sujith, and T. C. Lieuwen. A family of exact transient solutions for acoustic wave propagation in inhomogeneous, non-uniform area ducts. *J. of Sound and Vibration*, 240(4):705–715, 2001.
- [92] G. W. Swift. What is thermoacoustics? A brief description, with technical details and citations. Technical Report LA-UR 04-2298, Condensed Matter and Thermal Physics Group, Los Alamos National Laboratory,, Los Alamos, New Mexico 87545, April 28, 2004.
- [93] E. Truckenbrodt. *Lehrbuch der angewandten Fluidmechanik*. Springer-Verlag, 1983.
- [94] C. T. Wall. *Numerical Methods for Large Eddy Simulation of Acoustic Combustion Instabilities*. PhD thesis, Stanford University, 2005.
- [95] D.C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., 1998.
- [96] H. Yoon, J. Peddieson, and K. R. Purdy. Mathematical modelling of a generalaized rijke tube. *Int. J. of Engineering Science*, 36:1235–1264, 1998.
- [97] H. Yoon, J. Peddieson, and K. R. Purdy. Non-linear response of a generalized rijke tube. *Int. J. of Engineering Science*, 39:1707–1723, 2001.

A Herleitung der linearisierten Rankine-Hugoniot-Gleichung für kleine Störungen

Bei eindimensionaler, kompressibler Strömung über eine kompakte Wärmequelle, lauten die stationären Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie (unter Vernachlässigung von Viskosität und Wärmeleitung)

$$\rho_h u_h = \rho_c u_c, \quad (\text{A.1})$$

$$p_h + \rho_h u_h^2 = p_c + \rho_c u_c^2, \quad (\text{A.2})$$

$$h_h + \frac{1}{2} u_h^2 = h_c + \frac{1}{2} u_c^2 + q, \quad (\text{A.3})$$

mit den spezifischen (massenbezogenen) Größen Enthalpie h und Wärme durch Quellen q in der Energiegleichung.

Für ein ideales Gas mit $p = \rho RT$ und Schallgeschwindigkeit $c^2 = \kappa RT$ gilt

$$c^2 = \kappa \frac{p}{\rho} \quad (\text{A.4})$$

und

$$\left(\frac{c_h}{c_c} \right)^2 = \frac{T_h}{T_c}, \quad (\text{A.5})$$

mit dem Isentropenexponent $\kappa \equiv c_p/c_v$. Enthalpie $h \equiv c_p T = c_v T + p/\rho$ und es folgt dass

$$h = \frac{p}{\rho} \frac{c_p}{c_p - c_v} = \frac{p}{\rho} \frac{\kappa}{\kappa - 1}. \quad (\text{A.6})$$

Wendet man Gleichung (A.6) auf Gleichung (A.3) an, so lässt sich die Energiegleichung umformen zu

$$\frac{p_h}{\rho_h} \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} u_h^2 = \frac{p_c}{\rho_c} \frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{1}{2} u_c^2 + q. \quad (\text{A.7})$$

Mit Gleichung (A.4) ergibt sich

$$\frac{c_h^2}{\kappa - 1} + \frac{1}{2}u_h^2 = \frac{c_c^2}{\kappa - 1} + \frac{1}{2}u_c^2 + q \quad (\text{A.8})$$

und schließlich

$$\frac{c_h^2}{c_c^2} = \frac{\frac{1}{2}(u_c^2 - u_h^2) + q}{c_c^2} (\kappa - 1) + 1. \quad (\text{A.9})$$

Unter Annahme kleiner Machzahl (d.h. $u_c < u_h \ll c_c$) und Anwendung von (A.4), reduziert sich dies zu

$$\frac{c_h^2}{c_c^2} = 1 + \frac{q\rho_c}{p_c} \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} + \mathcal{O}(M^2) \quad (\text{A.10})$$

und mit der Wärmequellendichte $\dot{Q} = \rho_c u_c q$ ergibt sich eine Beziehung zwischen den Schallgeschwindigkeiten auf der Kalt- und Heißgasseite

$$\frac{c_h^2}{c_c^2} = 1 + \frac{\dot{Q}}{p_c u_c} \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} + \mathcal{O}(M^2). \quad (\text{A.11})$$

Auf ähnliche Weise findet man eine Koppelungsbedingung für die Geschwindigkeiten. Schreibt man Gleichung (A.2) um zu

$$\frac{p_h}{\rho_h} + u_h^2 = \frac{p_c}{\rho_h} + \frac{\rho_c}{\rho_h} u_c^2, \quad (\text{A.12})$$

wendet die Massenerhaltung (A.1) und Gleichung (A.4) an, so folgt

$$\frac{c_h^2}{\kappa} + u_h^2 = \frac{c_c^2 u_h}{\kappa u_c} + u_h u_c \quad (\text{A.13})$$

oder

$$\frac{c_h^2}{c_c^2} + \frac{u_h^2}{c_c^2} \kappa - \frac{u_c u_h}{c_c^2} = \frac{u_h}{u_c}, \quad (\text{A.14})$$

welches, unter Einsetzung von Gleichung (A.11), schließlich ergibt

$$\frac{u_h}{u_c} = 1 + \frac{\dot{Q}}{p_c u_c} \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} + \mathcal{O}(M^2). \quad (\text{A.15})$$

Eine Umformung von Gleichung (A.2) liefert einen Ansatz für das Verhältnis der Drücke

$$\frac{p_h}{p_c} = 1 + \frac{\rho_c u_c^2 - \rho_h u_h^2}{p_c} = 1 + \kappa \frac{u_c^2}{c_c^2} - \frac{\rho_c}{p_c} u_c u_h = 1 + \kappa M_c^2 \left(1 - \frac{u_h}{u_c}\right), \quad (\text{A.16})$$

welcher, unter Verwendung von Gleichung (A.15) weiter umgeformt werden kann zu

$$\frac{p_h}{p_c} = 1 - M_c^2 (\kappa - 1) \frac{\dot{Q}}{p_c u_c} + \mathcal{O}(M^4). \quad (\text{A.17})$$

Werden die Gleichungen (A.5) und (A.11) kombiniert, so kann das Verhältnis der Temperaturen auch durch die Wärmefreisetzung und die Bedingungen auf der kalten Seite dargestellt werden:

$$\frac{T_h}{T_c} - 1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\dot{Q}}{p_c u_c}. \quad (\text{A.18})$$

Diese Beziehungen können nun für kleine Schwankungen, wie sie im Bereich der Akustik vorkommen linearisiert werden. Beginnend mit dem Druck, wird Gleichung (A.17) unter Vernachlässigung von Machzahltermen höherer Ordnung umgeformt zu

$$p_h = p_c - (\kappa - 1) \frac{\dot{Q} u_c}{c_c^2}. \quad (\text{A.19})$$

Alle Variablen werden dann in Mittelwerte und Schwankungswerte aufgeteilt (Produkte der Schwankungswerte können vernachlässigt werden):

$$\bar{p}_h + p'_h = \bar{p}_c + p'_c - (\kappa - 1) \frac{\bar{\dot{Q}} \bar{u}_c + \bar{\dot{Q}} u'_c + \dot{Q}' \bar{u}_c}{\bar{c}_c^2 + 2\bar{c}_c c'_c}. \quad (\text{A.20})$$

Unter Annahme von $c'_c \ll \bar{c}_c$ und Verwendung von Gleichung (A.4) gilt

$$\bar{p}_h + p'_h = \bar{p}_c + p'_c - \frac{(\kappa - 1) \bar{\rho}_c}{\kappa} \frac{\bar{\rho}_c}{\bar{p}_c} \left(\bar{\dot{Q}} \bar{u}_c + \bar{\dot{Q}} u'_c + \dot{Q}' \bar{u}_c \right). \quad (\text{A.21})$$

Abziehen der Erhaltungsgleichung

$$p'_h = p'_c - \frac{(\kappa - 1) \bar{\rho}_c}{\kappa} \frac{\bar{\rho}_c}{\bar{p}_c} \left(\bar{\dot{Q}} u'_c + \dot{Q}' \bar{u}_c \right) \quad (\text{A.22})$$

und Einbeziehung von Gleichung (A.18) führt schließlich zu einer Beziehung zwischen Schwankungen des Drucks auf der kalten und heißen Seite:

$$p'_h = p'_c - \bar{\rho}_c \bar{u}_c^2 \left(\frac{\bar{T}_h}{\bar{T}_c} - 1 \right) \left(\frac{u'_c}{\bar{u}_c} + \frac{\dot{Q}'}{\bar{Q}} \right). \quad (\text{A.23})$$

Um eine linearisierte Gleichung für die Geschwindigkeitsschwankungen herzuleiten wird mit einer Umformung von Gleichung (A.15) zu

$$u_h p_c = u_c p_c + \dot{Q} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \quad (\text{A.24})$$

begonnen und dann die Aufteilung in Mittel- und Schwankungswerte durchgeführt (Produkte der Schwankungswerte werden wiederum vernachlässigt)

$$\bar{u}_h \bar{p}_c + \bar{u}_h p'_c + u'_h \bar{p}_c = \bar{u}_c \bar{p}_c + \bar{u}_c p'_c + u'_c \bar{p}_c + \left(\bar{\dot{Q}} + \dot{Q}' \right) \frac{\kappa - 1}{\kappa}. \quad (\text{A.25})$$

Abziehen der Erhaltungsgleichung der Mittelwerte (A.24) und Umformung liefert

$$u'_h = u'_c + \frac{p'_c}{\bar{p}_c} (\bar{u}_c - \bar{u}_h) + \frac{\dot{Q}' \kappa - 1}{\bar{p}_c \kappa}. \quad (\text{A.26})$$

Anwendung von Gleichung (A.24) auf die Mittelwerte im zweiten Term und Erweiterung des dritten Terms führt zu

$$u'_h = u'_c + \frac{p'_c}{\bar{p}_c} \left(-\frac{\bar{\dot{Q}} \kappa - 1}{\bar{p}_c \kappa} \right) + \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\bar{\dot{Q}}}{\bar{p}_c \bar{u}_c} \bar{u}_c \frac{\dot{Q}'}{\bar{Q}}. \quad (\text{A.27})$$

Umformung und Einbeziehung von Gleichung (A.18) liefert schließlich

$$u'_h = u'_c + \left(\frac{\bar{T}_h}{\bar{T}_c} - 1 \right) \bar{u}_c \left(\frac{\dot{Q}'}{\bar{Q}} - \frac{p'_c}{\bar{p}_c} \right). \quad (\text{A.28})$$

B Umrechnung einer Transfermatrix von p - u - auf f - g -Notation bei nicht konstanter Temperatur

Es sei eine akustische Transfermatrix in p - u -Notation gegeben, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} p'_2 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11,pu} & T_{12,pu} \\ T_{21,pu} & T_{22,pu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ u'_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Die Riemann-Invarianten auf der Seite „2“ sind nun allgemein definiert als

$$\begin{aligned} f_2 &= 0.5 \left(\frac{p'_2}{\rho_2 c_2} + u'_2 \right) \\ g_2 &= 0.5 \left(\frac{p'_2}{\rho_2 c_2} - u'_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Im Folgenden soll nur noch f betrachtet werden, da sich bei g lediglich eine Vorzeichenänderung ergibt. Werden die Schwankungsgrößen in Gleichung (B.2) auf Seite „2“ nun über die Transfermatrix durch jene auf der Seite „1“ ausgedrückt, so kann man für f schreiben:

$$f_2 = 0.5 \left(\frac{T_{11,pu} p'_1 + T_{12,pu} u'_1}{\rho_2 c_2} + (T_{21,pu} p'_1 + T_{22,pu} u'_1) \right). \quad (\text{B.3})$$

Nun müssen noch die Schwankungsgrößen auf der Seite „1“ durch die jeweiligen Riemann-Invarianten ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} p'_1 &= (f_1 + g_1) \rho_1 c_1 \\ u'_1 &= (f_1 - g_1). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Eingesetzt in Gleichung (B.3) ergibt sich schließlich:

$$f_2 = 0.5 \left(\frac{\mathbb{T}_{11,pu}(f_1 + g_1)\rho_1c_1 + \mathbb{T}_{12,pu}(f_1 - g_1)}{\rho_2c_2} + (\mathbb{T}_{21,pu}(f_1 + g_1)\rho_1c_1 + \mathbb{T}_{22,pu}(f_1 - g_1)) \right) \quad (\text{B.5})$$

und analog für g .

In Matrizen Schreibweise ergibt sich somit

$$\begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_{11,fg} & \mathbb{T}_{12,fg} \\ \mathbb{T}_{21,fg} & \mathbb{T}_{22,fg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{11,fg} &= 0.5 \left(\mathbb{T}_{11,pu} \frac{\rho_1c_1}{\rho_2c_2} + \mathbb{T}_{12,pu} \frac{1}{\rho_2c_2} + \mathbb{T}_{21,pu}\rho_1c_1 + \mathbb{T}_{22,pu} \right) \\ \mathbb{T}_{12,fg} &= 0.5 \left(\mathbb{T}_{11,pu} \frac{\rho_1c_1}{\rho_2c_2} - \mathbb{T}_{12,pu} \frac{1}{\rho_2c_2} + \mathbb{T}_{21,pu}\rho_1c_1 - \mathbb{T}_{22,pu} \right) \\ \mathbb{T}_{21,fg} &= 0.5 \left(\mathbb{T}_{11,pu} \frac{\rho_1c_1}{\rho_2c_2} + \mathbb{T}_{12,pu} \frac{1}{\rho_2c_2} - \mathbb{T}_{21,pu}\rho_1c_1 - \mathbb{T}_{22,pu} \right) \\ \mathbb{T}_{22,fg} &= 0.5 \left(\mathbb{T}_{11,pu} \frac{\rho_1c_1}{\rho_2c_2} - \mathbb{T}_{12,pu} \frac{1}{\rho_2c_2} - \mathbb{T}_{21,pu}\rho_1c_1 + \mathbb{T}_{22,pu} \right). \end{aligned}$$

Analog gilt, ohne Herleitung, für p^* - u -Notation (mit $p^* = \frac{p'}{\rho c}$):

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{11,fg} &= 0.5 (\mathbb{T}_{11,p^*u} + \mathbb{T}_{12,p^*u} + \mathbb{T}_{21,p^*u} + \mathbb{T}_{22,p^*u}) \\ \mathbb{T}_{12,fg} &= 0.5 (\mathbb{T}_{11,p^*u} - \mathbb{T}_{12,p^*u} + \mathbb{T}_{21,p^*u} - \mathbb{T}_{22,p^*u}) \\ \mathbb{T}_{21,fg} &= 0.5 (\mathbb{T}_{11,p^*u} + \mathbb{T}_{12,p^*u} - \mathbb{T}_{21,p^*u} - \mathbb{T}_{22,p^*u}) \\ \mathbb{T}_{22,fg} &= 0.5 (\mathbb{T}_{11,p^*u} - \mathbb{T}_{12,p^*u} - \mathbb{T}_{21,p^*u} + \mathbb{T}_{22,p^*u}). \end{aligned}$$

C Transfermatrixkoeffizienten in f - g -Notation für einen Dichtesprung mit bzw. ohne schwankende Wärmequelle

Für einen Dichtesprung mit schwankender Wärmequelle in Form eines dünnen Drahtes konstanter Temperatur (siehe Gleichung (4.16)) ergeben sich die Transfermatrixkoeffizienten zu

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + K_1 + K_6 \left[K_2 (1 - K_3) + K_4 \left(-K_5 - \frac{c_c}{\bar{p}_c} \right) \right] \right\}, \\ T_{12} &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + K_1 + K_6 \left[K_2 (-1 + K_3) + K_4 \left(K_5 - \frac{c_c}{\bar{p}_c} \right) \right] \right\}, \\ T_{21} &= \frac{1}{2} \left\{ -1 + K_1 + K_6 \left[K_2 (-1 - K_3) + K_4 \left(-K_5 + \frac{c_c}{\bar{p}_c} \right) \right] \right\}, \\ T_{22} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + K_1 + \left(\frac{T_h}{T_c} + 1 \right) \left[K_2 (1 + K_3) + K_4 \left(K_5 + \frac{c_c}{\bar{p}_c} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\rho_c c_c}{\rho_h c_h}, K_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + c_\tau i \frac{\omega d}{u_c}}, K_3 = \frac{\rho_c \bar{u}_c}{\rho_h c_h}, \\ K_4 &= \rho_c \bar{u}_c, K_5 = \frac{1}{\rho_h c_h}, K_6 = \left(\frac{T_h}{T_c} - 1 \right). \end{aligned}$$

Für einen Dichtesprung am Ort x über die infinitesimale Distanz Δx (siehe

Gleichung (4.20)) lauten die Transfermatrixkoeffizienten

$$\begin{aligned}
 T_{11,\rho} &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\rho(x)c(x)}{\rho(x+\Delta x)c(x+\Delta x)} + \left(\frac{T(x+\Delta x)}{T(x)} - 1 \right) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \rho(x)u(x) \left(-\frac{1}{\rho(x+\Delta x)c(x+\Delta x)} - \frac{c(x)}{p} \right) \right] \\
 T_{12,\rho} &= \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{\rho(x)c(x)}{\rho(x+\Delta x)c(x+\Delta x)} + \left(\frac{T(x+\Delta x)}{T(x)} - 1 \right) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \rho(x)u(x) \left(\frac{1}{\rho(x+\Delta x)c(x+\Delta x)} - \frac{c(x)}{p} \right) \right] \\
 T_{21,\rho} &= \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{\rho(x)c(x)}{\rho(x+\Delta x)c(x+\Delta x)} + \left(\frac{T(x+\Delta x)}{T(x)} - 1 \right) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \rho(x)u(x) \left(-\frac{1}{\rho(x+\Delta x)c(x+\Delta x)} + \frac{c(x)}{p} \right) \right] \\
 T_{22,\rho} &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\rho(x)c(x)}{\rho(x+\Delta x)c(x+\Delta x)} + \left(\frac{T(x+\Delta x)}{T(x)} - 1 \right) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \rho(x)u(x) \left(\frac{1}{\rho(x+\Delta x)c(x+\Delta x)} + \frac{c(x)}{p} \right) \right].
 \end{aligned}$$

D Herleitung der Transfermatrix für eine plötzliche Querschnittsverengung

Da für die virtuellen Längen keine geschlossene Herleitung bekannt ist, kann nur eine vereinfachte Transfermatrix für die plötzliche Querschnittsverengung hergeleitet werden. Ausgangspunkt ist die Gleichung für die Energieerhaltung¹ von der stromaufliegenden Seite „1“ zur stromabliegenden Seite „2“ der plötzlichen Querschnittsverengung.

$$p_1 + \frac{\rho}{2}u_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}u_2^2 + \Delta p. \quad (\text{D.1})$$

Mit einem auf u_1 bezogenen Druckverlustkoeffizienten ζ_v gilt

$$\Delta p = \zeta_v \frac{\rho}{2}u_1^2. \quad (\text{D.2})$$

Aus der Kontinuität

$$A_1 u_1 = A_2 u_2 \quad (\text{D.3})$$

ergibt sich mit $\alpha = A_1/A_2$ aus Gleichung (D.1)

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}u_1^2(1 - \alpha^2 - \zeta_v). \quad (\text{D.4})$$

Durch eine Linearisierung folgt

$$p'_2 = p'_1 + \rho \bar{u}_1 u'_1 (1 - \alpha^2 - \zeta_v) \quad (\text{D.5})$$

und somit unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung

$$\begin{pmatrix} p'_2/\rho c \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & M_1(1 - \alpha^2 - \zeta_v) \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1/\rho c \\ u'_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.6})$$

¹Die übliche Herleitung aus der Impulserhaltung ist in diesem Fall ungenau, da durch die Strömungseinschnürung direkt stromab der Querschnittsverengung andere Verlustmechanismen auftreten

E Wachstumsrate einer komplexen Eigenfrequenz

Die Wachstumsrate einer Eigenfrequenz ist definiert als der Anteil, um den die Amplitude derselben pro Zyklus wächst. Für eine beliebige komplexe Kreisfrequenz ω gilt somit:

$$\Gamma = \frac{\left| e^{i\omega\left(t_0 + \frac{2\pi}{\operatorname{Re}(\omega)}\right)} \right|}{\left| e^{i\omega t_0} \right|} - 1, \quad (\text{E.1})$$

mit der Wachstumsrate Γ , dem beliebigen Startzeitpunkt t_0 und der Umlaufdauer für einen Schwingungszyklus von $\frac{2\pi}{\operatorname{Re}(\omega)}$. Der Quotient auf der rechten Seite von Gleichung (E.1) stellt also das Verhältnis der Amplitude zum Zeitpunkt t_0 plus ein Schwingungszyklus zu derjenigen zum Zeitpunkt t_0 dar. Es wird sofort offensichtlich, dass die Wachstumsrate für eine rein reelle Frequenz gleich 0 ist.

Da t_0 beliebig wählbar ist, vereinfacht sich Gleichung (E.1) für $t_0 = 0$ zu

$$\Gamma = \left| e^{i\omega\left(\frac{2\pi}{\operatorname{Re}(\omega)}\right)} \right| - 1 \quad (\text{E.2})$$

und weiter zu

$$\Gamma = \left| e^{\left(i - \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}\right)2\pi} \right| - 1. \quad (\text{E.3})$$

Mit $e^{i2\pi} = 1$, kann weiter vereinfacht werden zu

$$\Gamma = \left| i \cdot e^{-\frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}2\pi} \right| - 1, \quad (\text{E.4})$$

und da der Realteil des Terms in Betragstrichen nun 0 ist, ergibt sich schließlich

$$\Gamma = e^{-\frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)}2\pi} - 1. \quad (\text{E.5})$$