

Lehrstuhl für Bauinformatik
Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
Technische Universität München

**Strömungsakustik und Fluid-Struktur-Kopplung mit der
Lattice-Boltzmann- und der Finite-Element-Methode**

Barbara Neuhierl

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. techn. R. Lackner

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. E. Rank
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. G. H. Müller
3. Hon.-Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. hc. A. Gilg

Die Dissertation wurde am 31.10.2007 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 06.02.2008 angenommen.

Zusammenfassung

Die numerische Strömungsakustik ist ein relativ junges, ingenieurwissenschaftliches Entwicklungs- und Forschungsgebiet und beschäftigt sich mit der Abbildung von Schall, der durch Strömungsvorgänge verursacht wird. Als typische Anwendungsbereiche können – ohne Anspruch auf Vollständigkeit – die Luftfahrt, der Hochgeschwindigkeits-Schienenverkehr, Strömungen durch Rohrleitungen und HVAC¹-Systeme oder auch Geräte, in denen Lüfter zum Einsatz kommen, genannt werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird zunächst die Eignung der Lattice-Boltzmann-Methode zur simultanen Simulation von transienten Strömungsvorgängen und Druckausbreitung demonstriert. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Auflösung von solchen Druck- bzw. Dichteschwankungen, die typischerweise akustische Vorgänge repräsentieren, gelegt.

Im Fluid liegende oder das Fluid umschließende, vibrierende Strukturen können zusätzlichen Schall hervorrufen oder zu gekoppelten Phänomenen führen. Um diese Einflüsse zu berücksichtigen, wurde ein partitionierter Ansatz zur Fluid-Struktur-Kopplung implementiert. Das Strukturproblem wird dabei durch die Methode der Finiten Elemente abgebildet.

Sowohl beim Strömungscode als auch beim Finite-Element-Programm wird auf kommerzielle Software zurückgegriffen. Die verwendeten Programme sind EXA POWERFLOW auf der Strömungs- und ANSYS auf der Strukturseite. Beide sind in einen Rahmenalgorithmus eingebunden, der auch den Datenaustausch über entsprechende Schnittstellen sowie die Zeitschrittsteuerung übernimmt und damit die Simulation der Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur ermöglicht.

Um den vorgestellten Ansatz zu validieren, werden Simulationen an einfachen Modellen wie umströmten Zylindern und Profilen untersucht, deren Ergebnisse bekannt sind. Um die Eignung der Methode für komplexere Problemstellungen zu demonstrieren, wird ein weiteres Beispiel aus der Industrie vorgestellt, bei dem vergleichbare Effekte auftreten.

Abstract

Computational aeroacoustics is a relatively young field of engineering research and development and deals with the representation of sound generated by fluid flow. Characteristic application domains are – just to mention a few – the area of aviation and railway, internal flows in pipes and HVAC systems, or even consumer products and household devices, where aerodynamic sound is generated e.g. by fans.

Within this thesis, first of all the suitability of the Lattice-Boltzmann-Method for simultaneous simulation of transient flows and wave propagation is demonstrated. In particular, the resolution of pressure and density fluctuations representing acoustic phenomena is of interest.

Vibrating structures that lie within or enclose the fluid might cause further sound or lead to coupled phenomena. In order to take into account this influences, a par-

¹HVAC: *Heating, Ventilation, Air Conditioning*

tioned approach for fluid-structure interaction was implemented. The structure problem is represented using the Finite-Element-Method.

For both the CFD- and the Finite-Element-Code commercially available software was used. The programs applied are EXA POWERFLOW on the fluid and ANSYS on the structure side. Both are embedded in a framework algorithm that also controls the data exchange via adequate interfaces, thus enabling the simulation of the interaction between fluid and structure.

In order to validate the presented approach, simulations of simple models with well-known results like the flow around cylinders or other profiles are documented. Finally, to show the method's suitability to more complex problems, a further, industrially relevant example leading to similar effects is shown.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde parallel zu meiner Berufstätigkeit bei der *Corporate Technology* der Siemens AG in München erstellt.

An allererster Stelle möchte ich meinem Doktorvater Hrn. Prof. Dr. Rank für die großartige und engagierte Betreuung der Arbeit und die vielen fruchtbaren Diskussionen danken.

Den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Lehrstuhls für Bauinformatik der Technischen Universität München danke ich für das freundliche Klima und ihre Unterstützung und Hilfsbereitschaft.

Hrn. Prof. Dr. Müller und Hrn. Prof. Dr. Gilg danke ich für die Übernahme des Koreferats sowie Hrn. Prof. Dr. Lackner für die Leitung der Prüfungskommission.

Ferner möchte ich den Verantwortlichen bei der Siemens AG, Hrn. Prof. Dr. Gilg, Hrn. Dr. Nottbeck und Hrn. Keil dafür danken, dass sie es mir ermöglichten, berufsbegleitend die vorliegende Dissertation anzufertigen.

Der Firma EXA GmbH, die das Softwarepaket POWERFLOW zu Hochschulkonditionen zur Verfügung stellte, möchte ich an dieser Stelle Dank für ihre Kooperationsbereitschaft aussprechen.

Ganz besonderer Dank gilt meinem Mann Albrecht für seine Geduld und Unterstützung.

München, Februar 2008

Barbara Neuhierl

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 1.1 | Schallerzeugung durch Strömungsvorgänge | 1 |
| 1.2 | Wirkung von Schall auf Mensch und Umwelt | 1 |
| 1.3 | Entstehungsmechanismen von Strömungs- lärm | 2 |
| 1.4 | Simulationsmethoden | 3 |
| 1.5 | Ziele der Arbeit | 4 |
| 1.6 | Inhaltliche Übersicht | 5 |
| 2 | Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik | 7 |
| 2.1 | Das Schallfeld als ein Sonderfall der allgemeinen Strömungsbeschrei- bung | 7 |
| 2.2 | Kompressible und inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen | 8 |
| 2.3 | Linearisierung der Gasdynamik | 9 |
| 2.4 | Die Wellengleichung | 11 |
| 2.5 | Schallwellen in bewegten Fluiden | 12 |
| 3 | Die Reynolds-Gleichungen | 15 |
| 3.1 | Turbulenz in Strömungen | 15 |
| 3.2 | Reynolds-gemittelte Gleichungen | 16 |
| 3.3 | Das Schließungsproblem der Strömungsmechanik | 18 |
| 4 | Die akustische Analogie nach Lighthill und Fawkes, Williams und Hawkins | 21 |
| 4.1 | Die nichtlineare Wellengleichung | 21 |
| 4.2 | Abbildung von Schallquellen durch Elementarquellen (Punktstrahler) | 22 |
| 4.3 | Formulierung der Quellterme in der nichtlinearen Wellengleichung . . | 25 |
| 4.4 | Grenzen und Einschränkungen bei Anwen- dung der akustischen Analogie | 26 |
| 5 | Das Finite-Volumen-Verfahren | 29 |
| 5.1 | Simulationsverfahren in der Strömungsmechanik | 29 |
| 5.2 | Die Grundgleichungen in Erhaltungsform | 29 |
| 5.3 | Rand- und Anfangsbedingungen | 31 |
| 5.4 | Diskretisierung des Strömungsproblems | 32 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 5.5 | Numerische Lösung des Gleichungssystems | 33 |
| 5.6 | Die Berücksichtigung von Turbulenz | 33 |
| 5.6.1 | Direkte numerische Simulation | 33 |
| 5.6.2 | RANS-Simulation | 34 |
| 5.6.3 | Large-Eddy-Simulation | 34 |
| 5.6.4 | Turbulenzmodelle | 36 |
| 5.7 | Bedeutung für die Aeroakustiksimulation | 38 |
| 6 | Die Boltzmann-Gleichung | 41 |
| 6.1 | Herleitung der Lattice-Boltzmann-Methode aus der statistischen Physik | 41 |
| 6.2 | Verteilungsfunktionen als Lösungen der Boltzmann-Gleichung | 43 |
| 6.3 | Vereinfachung des Stoßterms | 44 |
| 6.4 | Chapman-Enskog-Entwicklung | 45 |
| 7 | Die Lattice-Boltzmann-Methode zur Simulation von Strömungen | 47 |
| 7.1 | Die Lattice-Boltzmann-Gleichung | 47 |
| 7.2 | Gittermodelle | 49 |
| 7.3 | Abbildung von akustischen Eigenschaften | 52 |
| 7.4 | Die Berücksichtigung von Randbedingungen bei der Lattice-Boltzmann-Methode | 53 |
| 7.5 | Gegenüberstellung von Lattice-Boltzmann-Methode und klassischer CFD | 57 |
| 7.6 | Die Behandlung von Turbulenz | 57 |
| 8 | Die Methode der Finiten Elemente | 61 |
| 8.1 | Motivation | 61 |
| 8.2 | Grundlagen der Kontinuumsmechanik | 61 |
| 8.3 | Spezielle Geometrien | 64 |
| 8.4 | Diskretisierung und Ansatzfunktionen | 64 |
| 8.5 | Approximation durch die FEM | 65 |
| 8.6 | Strukturdynamische Problemstellungen | 67 |
| 8.7 | Randbedingungen | 69 |
| 9 | Verwendete Software | 71 |
| 9.1 | Zusammenfassung | 71 |
| 9.2 | Das Lattice-Boltzmann-Programm POWERFLOW | 71 |
| 9.3 | Das Finite-Element-Programm ANSYS | 73 |
| 9.4 | Die Skriptsprache PYTHON | 74 |
| 9.4.1 | Skripte in POWERFLOW | 74 |
| 9.4.2 | Programmierung des Kopplungsprogrammes | 75 |
| 10 | Der umströmte Körper - ein Testfall für die Simulation aeroakustischer Phänomene | 77 |
| 10.1 | Motivation | 77 |
| 10.2 | Umströmte kreisrunde Zylinder | 77 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 10.3 | Strömungsmechanische Phänomene | 78 |
| 10.4 | Aeroakustik | 81 |
| 10.5 | Umströmte kantige Profile | 82 |
| 11 | Simulation aeroakustischer Phänomene | 85 |
| 11.1 | Der 'digitale Windkanal' | 85 |
| 11.2 | Messen von Strömungsergebnissen | 86 |
| 11.2.1 | Zeitlich gemittelte Ergebnisse | 86 |
| 11.2.2 | Ergebnisse ohne zeitliche Mittelung | 87 |
| 11.3 | Auswertung von Simulationsergebnissen mit Hilfe der FFT | 88 |
| 11.4 | Umströmter Zylinder bei niedrigen Reynolds-zahlen | 89 |
| 11.5 | Umströmter Zylinder bei hohen Reynolds-zahlen | 92 |
| 11.6 | Simulation mit dem Programm CFX | 94 |
| 12 | Fluid-Struktur-Kopplung | 97 |
| 12.1 | Überblick | 97 |
| 12.2 | Lösungsverfahren für gekoppelte Probleme | 97 |
| 12.3 | Wechselwirkung Fluid-Struktur | 99 |
| 12.3.1 | Strömungsfeld und akustisches Feld | 99 |
| 12.3.2 | Strömungsfeld und Strukturmechanik | 99 |
| 12.4 | Schnittstellen zwischen dem FE- und dem LB-Programm | 101 |
| 12.4.1 | Schnittstelle 1: Export von Strömungsdrücken | 101 |
| 12.4.2 | Schnittstelle 2: Kopplung Struktur zu Fluid | 103 |
| 12.5 | Kopplungsalgorithmus | 107 |
| 12.5.1 | Kopplung Strömung zu Struktur | 107 |
| 12.5.2 | Kopplung Struktur zu Strömung | 109 |
| 12.5.3 | Bidirektionale Kopplung | 110 |
| 13 | Simulationsbeispiele, einseitige Kopplung: Fluid \longrightarrow Struktur | 113 |
| 13.1 | Strömung um einen starren, elastisch gelagerten Zylinder | 113 |
| 13.2 | Strömung um einen elastischen, unverschieblich gelagerten Zylinder | 115 |
| 13.3 | Strömung um kantige Profile | 117 |
| 13.3.1 | Vergleich Zylinder - Balken | 117 |
| 13.3.2 | Vergleich von Winkelprofilen mit unterschiedlichen Anström- richtungen | 118 |
| 14 | Simulationsbeispiele, einseitige Kopplung: Struktur \longrightarrow Fluid | 123 |
| 14.1 | Umströmte vibrierende Profile | 123 |
| 14.2 | Der Lock-in-Effekt | 127 |
| 15 | Simulationsbeispiele, bidirektionale Kopplung | 131 |
| 15.1 | Strömung um ein starres, elastisch gelagertes, flächiges Profil | 131 |
| 16 | Ein industrielles Anwendungsbeispiel: Stromabnehmer | 137 |

| | |
|---|------------|
| 17 Zusammenfassung und Ausblick | 145 |
| 17.1 Zusammenfassung | 145 |
| 17.2 Ausblick | 146 |
| 17.2.1 Formulierung von Randbedingungen | 146 |
| 17.2.2 Schallabstrahlung ins Fernfeld | 147 |
| 17.2.3 Große Strukturverformungen | 147 |
| 17.2.4 Abgleich von Rechenergebnissen mit Messungen | 147 |

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Schallerzeugung durch Strömungsvorgänge

Luftschall besteht aus einer Abfolge von Druckschwankungen in einem Fluid in dem für Menschen hörbaren Frequenzbereich¹ und kann auf grundsätzlich unterschiedliche Weise verursacht werden.

Eine schwingende Struktur, etwa eine Membran oder auch ein vibrierendes Gehäuse, regt das umgebende Fluid zu Schwingungen an, die sich in Form von Schallwellen fortpflanzen, an Hindernissen reflektiert bzw. absorbiert werden und vom menschlichen Ohr als *Schall* wahrgenommen werden können. Diese Art der Schallentstehung wird mit dem Begriff *Vibroakustik* bezeichnet.

Die *Strömungs-* oder *Aeroakustik* dagegen beschäftigt sich mit Schallphänomenen, die durch Strömungsvorgänge verursacht werden. Typische Beispiele für den sogenannten *strömungsinduzierten* Schall sind der durch drehende Ventilatoren oder Windräder verursachte Lüfterlärm und der in der Luftfahrt auftretende Strahlärm. In durchströmten Komponenten wie Rohrleitungen, Klimaanlage oder Gehäusen von Elektrogeräten treten ebenso Strömungsgeräusche auf wie bei der Umströmung von Bauteilen oder Fahrzeugen durch den Fahrtwind.

1.2 Wirkung von Schall auf Mensch und Umwelt

Das Ziel, die Lärmbelastung in der Umwelt zu verringern, erfordert die Entwicklung leiserer Verkehrsmittel, Geräte, Maschinen und Anlagen. Lärmschutz ist heutzutage ein wesentlicher Bestandteil des Umweltschutzes und spiegelt sich in zunehmendem Maße in Gesetzen und Verordnungen wieder. Der durch Strömungen hervorgerufene Schall wird oft als besonders störend und unangenehm empfunden. Zudem befinden sich aerodynamische Schallquellen häufig in Innenräumen, in denen sich dauerhaft Personen aufhalten, so dass es zu teilweise erheblicher Lärmbelästigung kommen kann.

Eine besonders große Rolle spielt Strömungslärm im Bereich der Verkehrstechnik. Bei Kraftfahrzeugen, Zügen und Flugzeugen trägt insbesondere bei hohen Reise-

¹ca. 20 bis 20 000 Hz

geschwindigkeiten der aerodynamisch entstehende Lärm maßgeblich zum Gesamtgeräusch bei. Zur Veranschaulichung sollen folgende Ausführungen dienen:

Die Mechanismen, die bei Automobilen und Schienenfahrzeugen zu Geräuschentwicklung führen, sind die Motorgeräusche, das Rollgeräusch sowie der durch die Aerodynamik, also durch die Umströmung entstehende Schall. Bei niedrigen Geschwindigkeiten (bis ca. 50 km/h) dominiert das Motorgeräusch. Steigt die Geschwindigkeit, so wird die Rad-Fahrweg-Interaktion zur hauptsächlichen Schallursache. Bei sehr hohen Fahrgeschwindigkeiten dagegen (ab ca. 160 km/h beim Automobil, ab ca. 200 km/h beim Schienenfahrzeug) ist der aerodynamische Anteil ausschlaggebend für das Gesamtgeräusch². Die folgende Abbildung soll die Zusammenhänge verdeutlichen:

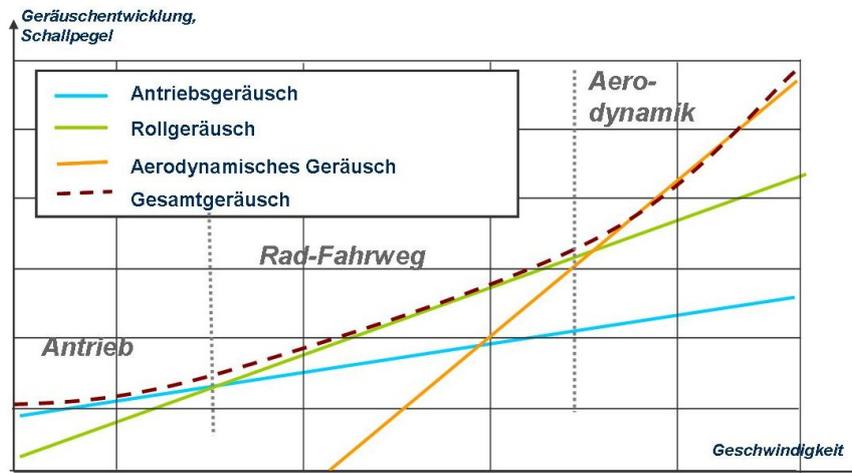


Abbildung 1.1: Schallquellen bei Fahrzeugen (qualitative Darstellung), nach [103], [104], [105]

1.3 Entstehungsmechanismen von Strömungs-lärm

Aerodynamische Geräusche entstehen durch Relativbewegungen im Fluid oder zwischen Fluid und Struktur. Die Schwankungen von Strömungsgrößen, die für die Geräuschentwicklung verantwortlich sind, können auf unterschiedliche Weise verursacht werden.

Die Hauptursachen für aerodynamisch erzeugte Geräusche sind:

- Massenzu- bzw. -abfuhr und Strömung durch kleine Öffnungen. Beispiele dafür

²Besonders hoch ist der Anteil des aerodynamischen Geräuschs am Gesamtgeräusch natürlich bei Fahrzeugen ohne Rad-Fahrweg-Kontakt, wie etwa dem *Transrapid*, der durch Linearmotoren angetrieben wird und auf einem Magnetfeld schwebt.

sind Ausströmung aus Auspuffmündungen, Leckagen, Lautsprechermembranen (Tief-, manchmal Mitteltöner) oder auch Kavitation.

- Veränderlicher Strömungsdruck auf feststehende oder bewegte Oberflächen. Das durch die Umströmung von Körpern entstehende Geräusch fällt ebenfalls in diese Kategorie. So führen an Fahrzeugen befindliche Bauteile, wie Dachaufbauten beim Schienenfahrzeug oder Seitenspiegel beim Automobil zur Schallentstehung.
- Turbulenzen bzw. turbulente Schubspannungen: Diese treten zum Beispiel beim Vorhandensein von turbulenten Scherschichten (Freistrahler) oder im turbulenten Nachlauf von Fahrzeugen auf.

Aber nicht nur Strömungsvorgänge führen zu Schallentstehung. Strukturen, die sich in der Strömung befinden oder diese begrenzen, werden unter bestimmten Umständen zu Vibrationen angeregt und verursachen dann selbst zusätzliche Schallabstrahlung.

Durch Wechselwirkungen von Fluid und Struktur kann aeroakustisch erzeugter Schall verstärkt werden, oder es treten Phänomene wie die Synchronisation von ablösenden Wirbeln mit Strukturbewegungen auf.

1.4 Simulationsmethoden

Der Einsatz von numerischen Simulationsverfahren als Unterstützung in der Entwicklung ist heute in vielen Industriezweigen etabliert. Dabei werden die unterschiedlichsten physikalischen Effekte abgebildet. Insbesondere in der Luftfahrt und im Automobilbau zählt die Simulation von struktur- und strömungsmechanischen Vorgängen zu den Standard-Verfahren. Auch im Bereich der Akustiksimulation werden erfolgreich verschiedene Möglichkeiten der Simulation eingesetzt. So können Körper- und Luftschall, Innenraumakustik oder Abstrahlprobleme mit Verfahren wie etwa der Methode der Finiten Elemente oder der Randelementmethode abgebildet werden³.

Die Aeroakustik ist ein Bereich der Physik, in dem Phänomene aus der Strukturmechanik, der Fluidmechanik und der Schwingungslehre eine Rolle spielen. Die Simulation von aerodynamisch erzeugtem Schall mit numerischen Näherungsmethoden stellt ein noch junges und bis heute erst teilweise erforschtes Gebiet dar, das nichtsdestotrotz weitreichende Anwendungsmöglichkeiten bietet.

Im Zentrum der Überlegungen bei der Simulation von aeroakustischen Phänomenen steht zunächst die Untersuchung des Strömungsproblems. Dabei müssen sowohl räumlich als auch zeitlich alle erforderlichen Skalen abgebildet werden können. Beim *klassischen* Verfahren zur Strömungssimulation, das bei den meisten der bekann-

³Kommerzielle Programme wie zum Beispiel SYSNOISE bzw. LMS VIRTUALLAB haben einen hohen Verbreitungsgrad in der Industrie und stellen sehr effektive Werkzeuge zur Simulation der Ausbreitung von Schallwellen dar.

ten Programme zur Anwendung kommt⁴, werden die diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen numerisch gelöst. Es handelt sich damit um ein *Top-Down*-Verfahren, bei dem von der makroskopischen Darstellung eines strömenden Fluides ausgegangen wird.

Eine Alternative dazu - einen sogenannten *Bottom-Up*-Ansatz - stellt die *Lattice*- oder *Gitter-Boltzmann-Methode*⁵ dar. Bei ihrer Herleitung wird auf der mikroskopischen Beschreibung von Fluiden durch die Boltzmann-Gleichung aufgebaut. Die *LBM* ist ein relativ junges Verfahren zur Simulation von Strömungsvorgängen in schwach kompressiblen Fluiden, das nichtsdestotrotz in Forschung und Industrie bereits sehr erfolgreich für aerodynamische Berechnungen eingesetzt wird. Neben der Beschreibung des Strömungsfeldes ermöglicht sie die Abbildung von Wellenausbreitung im Fluid und damit die *gleichzeitige* Berechnung von Strömungs- und Schallfeld.

Schallphänomene, die durch Strömungsvorgänge hervorgerufen werden, und durch Strukturschwingung verursachter Schall können gemeinsam auftreten und sich gegenseitig beeinflussen. Man spricht in diesem Fall von *Mehrfeldproblemen*. Sollen derartige gekoppelte Problemstellungen berechnet werden, so muss neben der Strömung auch die Struktur abgebildet werden. Das am besten geeignete Verfahren dazu ist die Methode der Finiten Elemente.

Typischerweise liegen bei der Simulation von gekoppelten Problemen aufgrund prinzipiell unterschiedlicher Diskretisierungsverfahren für die beiden Teilprobleme Strömungs- und Strukturberechnung verschiedenartige Netze bzw. Gitter vor. Um den erforderlichen Austausch von Berechnungsergebnissen am Interface zwischen den Modellen - also bei Fluid-Struktur-Kopplung an den Berührungsflächen der Struktur mit dem umgebenden Fluid - realisieren zu können, sind Schnittstellen erforderlich, die eine Interpolation zwischen Strömungsgitter und Strukturnetz ermöglichen. Weiterhin muss ein geeigneter Rahmenalgorithmus eingesetzt werden, der sowohl die Simulationscodes als auch den Datenaustausch steuert.

1.5 Ziele der Arbeit

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit innovativen Ansätzen zur numerischen Simulation von Strömungsschall und mit der Kopplung von aeroakustischen und strukturdynamischen Problemen. Da Planungszyklen und Entwicklungszeiten immer kürzer werden, müssen bereits möglichst früh Aussagen über akustische Eigenschaften von Produkten oder Bauteilen gemacht werden können. Im Rahmen der Arbeit wird gezeigt, dass die numerische Simulation von aeroakustischen Problemen gute Möglichkeiten bietet, zur Analyse entsprechender Problemstellungen bereits in der Planungsphase von Projekten beizutragen. So können aufwändige Windkanalversuche (für die zudem zumindest ein Prototyp oder ein Modell eines Produktes erforderlich ist) reduziert und die aus den Versuchen gewonnenen Aussagen intensi-

⁴Einige der bekanntesten derartigen Strömungsprogramme sind - ohne Anspruch auf Vollständigkeit - CFX, STAR CD und FLUENT.

⁵kurz *LBM* genannt

viert werden.

Zunächst wird die generelle Eignung der Lattice-Boltzmann-Methode als Alternative zu den *klassischen* Ansätzen der Simulation von strömungsakustischen Problemen untersucht. Weiterhin werden Schallausbreitungsphänomene gemeinsam mit einem Strömungsproblem simuliert, um auf diese Weise Probleme, bei denen ein Strömungs- und ein Schallfeld interagieren, mit Hilfe einer *Einfeldsimulation* abbilden zu können.

Die zusätzliche Berücksichtigung von Fluid-Struktur-Kopplung ermöglicht sodann die Abbildung von speziellen, mit einfachen, ungekoppelten Modellen nicht erfassbaren Effekten.

Um die eingesetzten Methoden zu verifizieren, wurden Vergleiche von Simulationsergebnissen mit analytischen Modellen durchgeführt sowie die Eignung der Methoden und insbesondere der programmierten Schnittstellen für allgemeinere Fälle und komplexere Geometrien gezeigt.

Soweit möglich, sollten kommerziell entwickelte und vertriebene Programme eingesetzt werden. Auf die Gründe hierzu wird im Rahmen der Arbeit noch weiter eingegangen.

Um den Austausch von Daten zwischen den verschiedenen Systemen zu ermöglichen, wurde ein entsprechendes Kopplungsprogramm geschrieben, das die beiden Simulationscodes ansteuert, den Datenaustausch ermöglicht sowie geeignete Schnittstellen zur Verfügung stellt.

1.6 Inhaltliche Übersicht

Die Akustiksimulation (*Computational Acoustics*, kurz *CA*, sowie *Computational Aeroacoustics*, kurz *CAA*) und die numerische Strömungsmechanik (*Computational Fluid Dynamics*, kurz *CFD*) sind miteinander verwandte Bereiche. In den Kapiteln 2 und 3 soll gezeigt werden, dass beide auf den gleichen Grundgleichungen aufbauen, und es soll auf den gemeinsamen Hintergrund eingegangen werden. Zunächst werden die Grundlagen der Strömungsmechanik behandelt, und die physikalischen und mathematischen Hintergründe der aeroakustischen Schallentstehung sowie der Ausbreitung von Schallwellen skizziert.

Auf den *klassischen* Ansatz der akustischen Analogie, mit dem strömungsmechanisch erzeugte Schallquellen modelliert werden können, wird im Kapitel 4 ausführlich eingegangen.

Weiterhin werden im Kapitel 5 Möglichkeiten zur numerischen Behandlung der Grundgleichungen der Strömungsmechanik aufgezeigt. Es werden Simulationsmethoden für Strömungs- und Akustikproblemstellungen vorgestellt. Die Anwendbarkeit der *klassischen* numerischen Strömungsmechanik auf strömungsakustische Probleme sowie die dabei auftretenden Schwierigkeiten werden angesprochen.

In den beiden folgenden Kapiteln wird die Lattice-Boltzmann-Methode als eine leistungsfähige Alternativmethode der numerischen Strömungssimulation behandelt. Dazu beschäftigt sich Kapitel 6 mit der Theorie der Beschreibung von allgemeinen Strömungsvorgängen mit der Boltzmann-Gleichung, während anschließend in Kapi-

tel 7 die Herleitung der *Lattice-Boltzmann-Methode* aus der Boltzmann-Gleichung skizziert wird.

Ein kurzer Überblick über die Theorie und die Hintergründe der zur Simulation von Strukturschwingungen eingesetzten Methode der Finiten Elemente wird in Kapitel 8 gegeben.

Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Softwarewerkzeuge werden im Kapitel 9 vorgestellt. Für die Simulation des strukturmechanischen Teilproblems wurde auf das bekannte und weit verbreitete Finite-Element-Programm ANSYS zurückgegriffen. Als Code zur Strömungssimulation wurde EXA POWERFLOW eingesetzt⁶. Weiterhin wird auf die zur Programmierung des Kopplungsprogrammes verwendeten Sprachen sowie auf die benutzten Datenformate eingegangen.

Theoretische Testfälle zur Verifizierung von aeroakustischen Phänomenen, die Strömung um verschiedene Hindernisse, werden in Kapitel 10 besprochen. Neben der Begründung der Wahl dieser Modelle werden die zu erwartenden Ergebnisse beschrieben.

Simulationen der Strömung um zylindrische Körper mit dem Ziel, die entstehenden akustischen Phänomene zu berechnen, werden in dem folgenden Kapitel 11 vorgestellt. Es wurde sowohl die Lattice-Boltzmann-Methode eingesetzt, als auch ein Navier-Stokes-Solver zur Lösung des gleichen Problems verwendet, so dass ein Vergleich der beiden Verfahren möglich ist.

Dann wird eine Möglichkeit zur Kopplung von Fluidströmung und strukturmechanischem Verhalten unter dem speziellen Aspekt der Abbildung von akustischen Vorgängen vorgestellt. Der Rahmenalgorithmus, der die Simulationscodes sowie den Datentransfer zwischen den Programmen steuert, wird beschrieben. Insbesondere wird dabei auf den Austausch von Informationen zwischen den unterschiedlichen Programmen durch Schnittstellen eingegangen, und die Eigenschaften der eingesetzten Diskretisierungstypen und Rechenverfahren werden erklärt.

In den Kapiteln 13 bis 15 werden Berechnungsbeispiele vorgestellt, die die Möglichkeiten der entwickelten Methode zur Fluid-Struktur-Kopplung demonstrieren. Es werden einfache, zu Verifizierungszwecken sehr gut geeigneten Modelle (umströmter Zylinder, umströmte Balken bzw. Profile) berechnet und die Ergebnisse diskutiert. In Kapitel 16 wird die Anwendbarkeit auf reale, komplexere Problemstellungen am Beispiel eines Stromabnehmers demonstriert.

Abschließend erfolgt in Kapitel 17 eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse, und es wird ein Ausblick auf weiterführende und ergänzende Themenbereiche gegeben.

⁶EXA POWERFLOW stellt derzeit das einzige kommerziell erhältliche Lattice-Boltzmann-Programm zur Strömungssimulation dar.

Kapitel 2

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik

2.1 Das Schallfeld als ein Sonderfall der allgemeinen Strömungsbeschreibung

Mit den *Navier-Stokes-Gleichungen*, einem System aus nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen, lassen sich dreidimensionale und instationäre Strömungsvorgänge in Fluiden mit unterschiedlichsten Eigenschaften beschreiben. Prinzipiell sind in dieser Formulierung auch akustische Phänomene, d.h. sowohl aeroakustisch erzeugter Schall als auch Schallausbreitung, enthalten.

Störungen in einem ansonsten gleichförmigen Strömungsfeld, wie Dichte- oder Druckschwankungen, die an beliebiger Stelle im Fluid durch unterschiedliche Mechanismen verursacht werden können, pflanzen sich aufgrund der Elastizitäts- und Trägheitseigenschaft des Fluides von ihrem Entstehungsort aus in die Umgebung fort. Treffen sie auf das menschliche Ohr, so werden sie als Schall wahrgenommen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden kleine Störungen betrachtet. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störung soll nicht von ihrer Amplitude abhängen. Dies ist bei Schallintensitäten unterhalb der Schmerzgrenze¹ der Fall.

Folgende Überlegung soll zur Abschätzung der Größenordnung der Störung gemacht werden:

Üblicherweise werden Schalldruckpegel in einer Dezibel-Skala beschrieben:

$$20 \log_{10} \left(\frac{p}{p_{ref}} \right) \text{ mit } p_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{N}{m^2} \quad (2.1)$$

Betrachtet man einen Schalldruckpegel von zum Beispiel 120 dB (d.h. nahe der Schmerzgrenze), so erhält man die (sehr kleine) Abweichung vom atmosphärischen Druck p_0 :

$$\frac{p}{p_0} = 2 \cdot 10^{-4} \ll 1 \quad (2.2)$$

¹Die Schmerzgrenze des menschlichen Ohrs liegt bei ca. 130 bis 140 dB

Typischerweise wird die Ausbreitung von Schall mit den oben genannten Eigenschaften durch die *Wellengleichung* beschrieben. Diese soll im folgenden aus den Navier-Stokes-Gleichungen abgeleitet werden, um zu zeigen, dass Schallausbreitung sowohl in ruhenden als auch in bewegten Fluiden einen Sonderfall des allgemeinen Strömungsproblems darstellt.

Es sollen lediglich Newtonsche Fluide² betrachtet werden. Bei den Formulierungen wird die bei der Index-Schreibweise übliche Einsteinsche Summenkonvention verwendet, welche besagt, dass bei mehrfach auftretenden Indices über alle Werte zu summieren ist.

2.2 Kompressible und inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

Für die Scherspannungen in Newtonschen Fluiden gelten die folgenden Beziehungen:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

mit der Viskosität μ .

Der im Fluid vorherrschende Druck p ergibt sich aus der Spur des Spannungstensors τ_{ij} :

$$p = -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3} \quad (2.4)$$

Kontinuitätsbedingung und Impulsbilanz, aufgestellt am differentiellen Element³, liefern zusammen ein System partieller nichtlinearer Differentialgleichungen 2. Ordnung für vier Unbekannte, den Geschwindigkeitsvektor \vec{u} und den Druck p . Für die Beschreibung inkompressibler Fluide mit einer konstanten Dichte ρ ist dies ausreichend.

Die Impulserhaltung führt auf die sogenannten *inkompressiblen* Navier-Stokes-Gleichungen ($\rho = \text{const.}$):

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = F_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \right), \quad (2.5)$$

\vec{F} bezeichnet auf das Fluid einwirkende Volumenkräfte.

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

Im Falle geringer Strömungsgeschwindigkeiten ($\vec{u} \ll c_0$, d.h. Unterschallgeschwindigkeit) verhalten sich viele Fluide in der Tat inkompressibel oder *schwach* kompressibel.

²Ein Newtonsches Fluid liegt vor, wenn die Schubspannung im Fluid τ proportional zur Schergeschwindigkeit ist: $\tau = \mu \frac{du}{dy}$; (τ = Schubspannung im Fluid, u = Strömungsgeschwindigkeit parallel zur Wand, y = Ortskoordinate senkrecht zur Wand)

³Herleitung siehe z.B. [44], [50]

In schwach kompressiblen Medien können Druck p und Dichte ρ als linear voneinander abhängig idealisiert werden (c_0 bezeichnet die Schallgeschwindigkeit im Fluid):

$$p = c_0^2 \cdot \rho \quad (2.7)$$

Die Gleichungen (2.5) und (2.6) sind zusammen mit Gleichung (2.7) ausreichend zur Beschreibung eines schwach kompressiblen Strömungsfeldes.

Liegen dagegen kompressible Fluide oder auch nicht vernachlässigbare Temperatureinflüsse vor, so ist zur Bestimmung der nun nicht mehr voneinander abhängigen Variablen p und ρ eine zusätzliche Gleichung, die sich aus der Energieerhaltung ergibt, erforderlich.

Die Navier-Stokes-Gleichungen lauten im *kompressiblen* Fall⁴:

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = F_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

Die *kompressible* Kontinuitäts-Gleichung ergibt sich zu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.9)$$

Für ein kalorisch ideales Gas erhält man (mit der Wärmeleitfähigkeit λ und der Temperatur T) die folgende *Energiegleichung*:

$$\rho \cdot c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \mu \cdot \Phi \quad (2.10)$$

In Gleichung (2.10) sind Anteile aus Strahlungsenergie vernachlässigt. c_p ist die spezifische Wärmekapazität des Fluids. Φ bezeichnet die Dissipationsrate und muss überall innerhalb des Strömungsfeldes größer als Null sein:

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot (\nabla \cdot \vec{u})^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.3 Linearisierung der Gasdynamik

Bevor in Kapitel 2.4 die für Schallausbreitung im hörbaren Bereich (vgl. Gleichungen (2.1) und (2.2), Kapitel 2.1) gültige Wellengleichung hergeleitet werden kann, wird eine Linearisierung der Navier-Stokes-Gleichungen durchgeführt.

Die Energiegleichung (2.10) muss in vollem Umfang berücksichtigt werden, wenn in einer Strömung etwa Energieübertragung durch Wärmeleitung auftritt, Schall durch Reibungsverluste beeinflusst oder durch Verbrennungsvorgänge oder andere Wärmequellen verursacht wird, oder falls nichtlineare Schallereignisse (Schockwellen) vorliegen. Für die hier interessierende Beschreibung der Wellenausbreitung

⁴Herleitung siehe zum Beispiel [44]

im Fluid ist es ausreichend, eine *homentrope* Strömung anzunehmen. Die gesamte Entropie des Fluids ist dann homogen verteilt und in der Zeit konstant, so dass sich die Energiegleichung zu

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \partial S = 0 \quad \text{mit} \quad S = c_p T - \frac{p}{\rho} \quad (2.12)$$

reduziert.

Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.7) (*schwache Kompressibilität*) oder mit $\rho = \text{const.}$ (*Inkompressibilität*) vereinfacht sich Gleichung (2.12) zu

$$S = \text{konstant.} \quad (2.13)$$

In der Akustik hat man es in der Regel mit Fluiden wie Wasser oder Luft zu tun, die geringe Viskosität und Wärmeleitfähigkeit aufweisen. Nach [65] kann der Einfluss der Viskosität auf die Ausbreitung des Schalls bei diesen Fluiden vernachlässigt werden⁵. Die Gleichung (2.5) wird bei verschwindender Viskosität zur *Euler-Gleichung* (2.14).

$$\rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = F_j - \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (2.14)$$

Es sei weiterhin vorausgesetzt, dass die Schallwellen (wie bereits oben ausgeführt) kleine Abweichungen vom Ruhedruck darstellen. Die Bewegungsgleichungen des Fluides können damit linearisiert werden.

Druck p und Dichte ρ werden im zeitlichen Mittel als stationär angenommen und mit ρ_0 und p_0 bezeichnet. Den stationären Größen sind die Schalldrücke als Schwingungswerte ρ' und p' überlagert. Es gilt:

$$\begin{aligned} \rho' &\ll \rho_0 \\ p' &\ll p_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die *linearisierte Impulsgleichung* wird im Falle eines stationären Fluids, in dem der Druck p_0 und die Dichte ρ_0 vorherrschen, zu (siehe [67]):

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla p' = \vec{F} \quad (2.16)$$

∇ bezeichnet den *Nabla*-Operator⁶.

Bevor die Kontinuitätsgleichung ebenfalls linearisiert wird, wird eine verteilte Quelle $q(\vec{x}, t)$ eingeführt. Sie steht für die Ausdehnung einer Volumeneinheit des Fluids und stellt veranschaulicht pulsierende Körper (dies entspricht punktförmigen Schallquellen) im Raum dar.

Die linearisierte Kontinuitätsgleichung lautet damit:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{u} = q \quad (2.17)$$

⁵Eine Ausnahme würde vorliegen, wenn sich Schallwellen über eine so große Distanz ausbreiten, dass die Amplitude der Schallwellen durch die Viskosität merklich gedämpft wird.

⁶ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$

2.4 Die Wellengleichung

Leitet man (2.16) nach t ab und bildet die Divergenz von (2.17), so kann die Geschwindigkeit \vec{u} eliminiert werden und man erhält:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{F} \quad (2.18)$$

Gleichung (2.18) beschreibt das Verhalten von Schall aufgrund der Quelle q sowie der auf das Fluid einwirkenden äußeren Kraft \vec{F} in einem ruhenden Fluid.

Für die Schwankungswerte lautet die Beziehung (2.7) $p' = c_0^2 \cdot \rho'$, und man kann ρ' in (2.18) substituieren, so dass nur noch p' als Unbekannte auftritt:

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p' = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{F} \quad (2.19)$$

Dies ist die sogenannte *Wellengleichung* der klassischen Akustik.

Mit $q = 0$ und $\vec{F} = 0$ wird (2.19) zur *homogenen Wellengleichung*, die die Schallausbreitung aufgrund von Schallquellen auf den Berandungen des Fluides beschreibt und eine zentrale Rolle bei der numerischen Akustiksimulation spielt.

Es sei bemerkt, dass in der vollständigen Beschreibung einer Fluidströmung durch die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (2.8), (2.9), (2.10) explizite *Schallquellen* der Form $q(\vec{x}, t)$ *nicht* enthalten sind. Bei der Herleitung der akustischen Wellengleichung wird $q(\vec{x}, t)$ *künstlich* eingeführt, wenn die Art der Schallquellen bekannt ist (siehe [67]).

Eine analoge Vorgehensweise wird im übrigen auch in der Strömungsakustik bei der Anwendung der *Lighthillsche Analogie* gewählt: Akustische Quellterme werden aus den Strömungseigenschaften ermittelt, um daraus das Schallfeld zu bestimmen. Auf diese Thematik wird jedoch im Kapitel 4 noch eingegangen.

Macht man zur Lösung der Wellengleichung (2.19) für $p(t)$ einen harmonischen Ansatz, so kann mit Hilfe der Fouriertransformation

$$p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.20)$$

eine Darstellung im Frequenzbereich gefunden werden.

Man erhält die bekannte *Helmholtzgleichung*, die homogene Wellengleichung im Frequenzbereich:

$$\nabla^2 p(\omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} p(\omega) = 0 \quad (2.21)$$

Gleichung (2.21) kann mit Hilfe des *Greenschen Satzes* in eine Integralgleichung über den Rand des Fluids umgewandelt werden (siehe [55]):

$$\int_S \left(p(\vec{x}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n} - G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial p(\vec{x})}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} p(x) & (\text{Fall 1}) \\ \frac{1}{2} p(x) & (\text{Fall 2}) \end{cases} \quad (2.22)$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ bezeichnet die Ableitung senkrecht zur Berandung des Fluids, und

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{4\pi r} e^{-jkr} \quad (2.23)$$

ist die *Greensche Funktion* mit der Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$ und dem Abstand $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ zwischen Quell- und Mikrofonpunkt.

Gleichung (2.22) liefert einen Zusammenhang zwischen Druck bzw. Schnelle am Ort \vec{x} auf der Oberfläche einer schwingenden Struktur und dem Schalldruck in einem beliebigen Aufpunkt \vec{y} im Raum. Dabei ist zu unterscheiden zwischen Aufpunkten *außerhalb* (*Fall 1*) und *auf* der Berandung (*Fall 2*). Voraussetzung ist die Homogenität des Mediums.

Die Richtung des Normalenvektors \vec{n} (vgl. Abbildung 2.1) entscheidet dabei, ob ein Abstrahl- oder ein Innenraumproblem vorliegt. Im Falle eines Abstrahlproblems (Abbildung 2.1, rechts) ist implizit die *Sommerfeldtsche Abstrahlbedingung* enthalten. Diese besagt, dass die Amplitude der Schallwellen von der Quelle (d.h. hier der Oberfläche S) aus im Verhältnis $1/r$ abnimmt und somit in unendlicher Entfernung gegen Null geht. Sie führt dazu, dass der Anteil der unendlich weit entfernten Berandung Σ in dem Oberflächenintegral auf der linken Seite der Gleichung (2.22) (Fall I) entfällt.

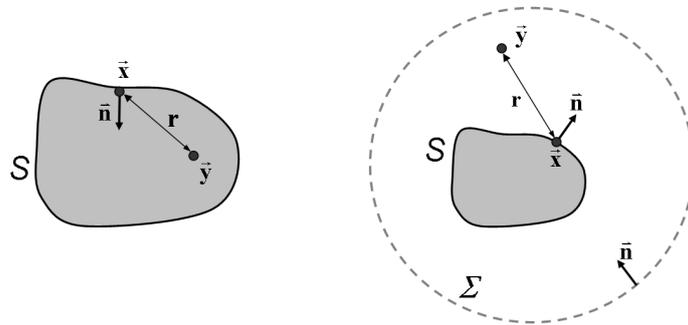


Abbildung 2.1: links: *Innenraumproblem, von der Oberfläche S umschlossenes Fluid*; rechts: *Abstrahlproblem, neben der Oberfläche S existiert die unendlich weit entfernte Berandung Σ , es gilt die Sommerfeldtsche Abstrahlbedingung*

2.5 Schallwellen in bewegten Fluiden

Die Wellengleichung (2.19) und die Helmholtzgleichung (2.21) beschreiben Schallwellen, die sich in einem ruhenden Fluid ausbreiten. Aus den strömungsmechanischen Grundgleichungen können jedoch ebenso die Gleichungen für die Ausbreitung von Schallwellen in einem Fluid mit gleichförmigem Geschwindigkeitsfeld abgeleitet werden⁷. Ausgehend von den gemittelten stationären Größen \vec{u}_0 , ρ_0 , p_0 mit den

⁷siehe zum Beispiel [63], [65]

überlagerten Schwankungswerten \vec{u}' , ρ' , p' sind die Gleichungen der *linearisierten Gasdynamik* gültig:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}' + \vec{u}' \cdot \nabla \vec{u}_0 \right) + \rho' \vec{u}_0 \cdot \nabla \vec{u}_0 = -\nabla p' + \vec{F} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}' + \rho' \vec{u}_0) = \rho_0 q \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \vec{u}_0 \cdot \nabla S' + \vec{u}' \cdot \nabla S_0 = 0 \quad (2.26)$$

Aus (2.24) bis (2.26) kann eine für Scherströmungen gültige Differentialgleichung abgeleitet werden. Dafür wird eine Koordinate $\zeta = \zeta(y, z)$ verwendet, die senkrecht zu der Richtung der Hauptgeschwindigkeit U steht (Abbildung 2.5).

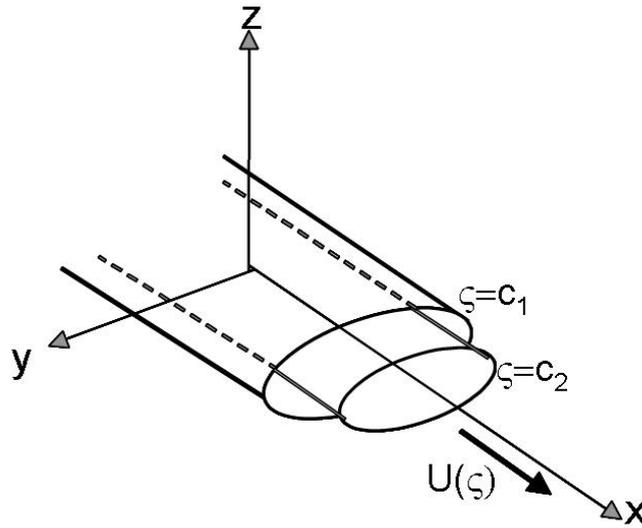


Abbildung 2.2: Parallelströmung mit zylindrischem Koordinatensystem

In den *Koordinatenflächen*, in denen $\zeta(y, z) = const.$ gilt, ist die Geschwindigkeit $U(\zeta)$ konstant. Mit dem Operator

$$\frac{D_0}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial_0}{\partial x} \right), \quad (2.27)$$

der die zeitliche Änderung der Strömung aus Sicht eines sich mit der Strömung mitbewegenden Beobachters beschreibt, und $g(y, z) = \nabla | \zeta |$ lautet diese (bei konstanter Entropie, also $\rho \leq p$):

$$\frac{D_0}{Dt} \left(\nabla \cdot c_0^2 \nabla p - \frac{D_0^2 p}{Dt^2} \right) - 2c_0^2 \frac{\partial U}{\partial \zeta} g^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta \partial x} = -c_0^2 \gamma \quad (2.28)$$

Liegt ein ruhendes Medium vor ($U = 0$), und existieren weder einwirkende Kräfte noch Quellen, so erhält man wiederum die bekannte homogene Gleichung für die Wellenausbreitung (2.19).

Kapitel 3

Die Reynolds-Gleichungen

3.1 Turbulenz in Strömungen

Fast alle für industrielle Fragestellungen relevanten Strömungen weisen hohe Reynoldszahlen auf. Die Reynoldszahl ist eine dimensionslose Kennzahl, die das Verhältnis zwischen Trägheit und Zähigkeit in einer Strömung quantifiziert. Sie ist definiert als

$$Re = \frac{u \cdot L_r}{\mu} \quad (3.1)$$

(mit der charakteristischen Geschwindigkeit u , der charakteristischen Länge L_r und der kinematischen Viskosität des Fluids μ). Ab einer Reynoldszahl von etwa 1500 bis 2000¹ [44], [45], [97] tritt bereits Turbulenz auf. Turbulente Strömungen sind zeitabhängig, unregelmäßig, dreidimensional, drehbehaftet und dissipativ [44].

Um zu verdeutlichen, dass bei technisch relevanten Problemen das Auftreten von Turbulenz der Regelfall ist, soll die folgende Abschätzung dienen: Nimmt man ein umströmtes Objekt, beispielsweise ein Fahrzeug, an, dessen Abmessungen in der Größenordnung von 1 m liegen, so ergibt sich bei einer Strömungsgeschwindigkeit von 1 m/s (dies entspricht 3,6 km/h, das heißt etwa Schrittgeschwindigkeit) im Medium Luft bereits eine Reynoldszahl von ca. 77 000! Somit wird klar, dass bei der numerischen Simulation von Strömungsvorgängen fast immer Turbulenzen berücksichtigt werden müssen. Ist man, wie im Rahmen der vorliegenden Arbeit, daran interessiert, Strömungsgeräusche abzubilden, so kommt den turbulenten Vorgängen besondere Bedeutung zu, da, wie eingangs (Kapitel 1) bereits angedeutet, viele aeroakustische Phänomene durch Turbulenzen verursacht oder wesentlich beeinflusst werden.

Die kleinsten Skalen (*Wirbel*) der turbulenten Strömung mit einer charakteristischen Abmessung l_k werden durch die *Kolmogorov-Länge*² bestimmt und sind üblicherweise viel kleiner als die makroskopischen Abmessungen L_r der Strömung. Das

¹Diese Zahlen stellen lediglich einen Anhaltspunkt dar. Ob im Einzelfall eine turbulente Strömung vorliegt, hängt natürlich stark von der Art des jeweiligen Problems ab.

²siehe zum Beispiel [51]

Verhältnis von L_r zu l_k beträgt:

$$\frac{L_r}{l_k} = Re^{3/4} \quad (3.2)$$

Damit treten bereits bei dem obengenannten Beispiel trotz der moderaten Strömungsgeschwindigkeit sehr kleine turbulente Skalen in der Größenordnung $2 \cdot 10^{-4}$ m auf, und es wird klar, dass es kaum möglich ist, in einer numerischen Simulation gleichzeitig die größte Skala (1m) und die kleinsten Störungen ($2 \cdot 10^{-4}$ m) zu erfassen.

3.2 Reynolds-gemittelte Gleichungen

Generell sind auch die durch turbulente Vorgänge hervorgerufenen Schwankungen der Strömungsgrößen durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben.

Um jedoch eine bessere quantitative Erfassung und Analyse der turbulenten Bewegungen in einem Fluid zu ermöglichen, wird üblicherweise der *Reynolds-Ansatz* gemacht. Die Strömungsgrößen werden dabei als Überlagerung der zeitlich gemittelten Größen und der zusätzlichen Schwankungen dargestellt.

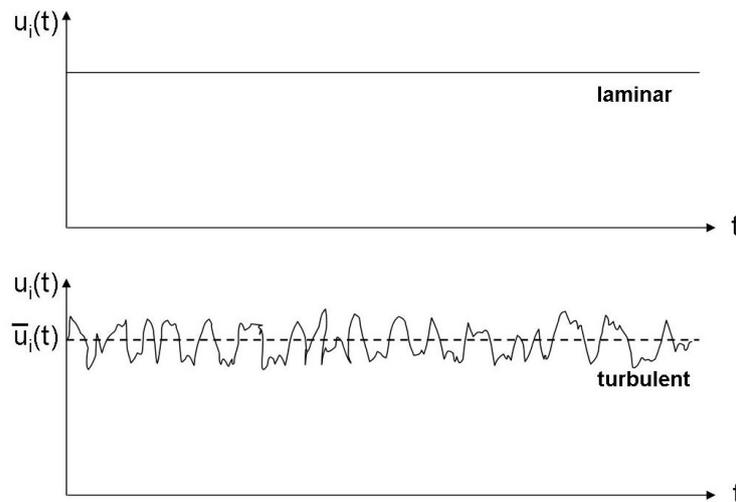


Abbildung 3.1: *Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit für laminare (oben) und turbulente (unten) Strömungen ([50])*

Für die Geschwindigkeit lautet der Ansatz:

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{\bar{u}}(x, y, z) + \vec{u}'(x, y, z, t) \quad (3.3)$$

Der zeitliche Mittelwert definiert sich für eine Geschwindigkeitskomponente u wie folgt:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(x, y, z, t) dt \quad (3.4)$$

Zeitlich gemittelte Größen werden durch Überstreichen gekennzeichnet. Bei der Mittelung über einen ausreichend langen Zeitraum verschwinden die Schwankungsgrößen.

$$\overline{u'} = 0 \quad (3.5)$$

Um turbulente, kompressible Größen beschreiben zu können, müssen auch massengemittelte Größen eingeführt werden³.

$$\tilde{u}_i = \frac{\overline{\rho \cdot u_i}}{\bar{\rho}} \quad (3.6)$$

$$\text{mit: } \overline{\rho \cdot u_i} = \frac{1}{T} \int (\rho \cdot u) dt$$

Der *Reynolds-Ansatz* für kompressible Strömungen lautet:

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho' \\ p &= \bar{p} + p' \\ u_i &= \tilde{u}_i + u'' \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten u_i wird eine Massenmittelung durchgeführt. Sie werden mit zwei Strichen gekennzeichnet, während der Druck p und die Dichte ρ dagegen nicht massengemittelt und mit nur einem Strich versehen werden.

Damit können die sogenannten *Reynolds-Gleichungen* formuliert werden. (Die ausführliche Herleitung soll hier nicht im Detail nachvollzogen werden. Sie kann zum Beispiel in [44] nachgelesen werden).

Die Kontinuitätsgleichung ändert sich bei zeitlicher Mittelung kaum, es werden lediglich die Größen ρ und u_i durch $\bar{\rho}$ und \tilde{u}_i ersetzt:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_i)}{\partial u_i} = 0 \quad (3.8)$$

Die zeitliche Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen führt zu:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \cdot \tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial u_j} = F_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial (\overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''})}{\partial x_i} \quad (3.9)$$

mit:

$$\bar{\tau}_{ij} = \left(\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \right) + \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j''}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial x_i} \right) \quad (3.10)$$

Um die Energiegleichung zeitlich zu mitteln, müssen zusätzlich zu (3.7) weitere massengemittelte Größen eingeführt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \frac{\overline{\rho \cdot T}}{\bar{\rho}} \\ \tilde{e} &= \frac{\overline{\rho \cdot e}}{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

³Diese Art der Mittelung wird auch als Favre-Mittelung bezeichnet.

Der Reynolds-Ansatz (3.7) ergänzt sich damit um:

$$T = \tilde{T} + T'' \quad \text{und} \quad e = \tilde{e} + e'' \quad (3.12)$$

Die gemittelte Energiegleichung läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \tilde{T})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \cdot c_p \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{u}_i)}{\partial x_i} = \\ & \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial T''}{\partial x_i} - c_p \cdot \overline{\rho \cdot T'' \cdot u_i''} \right) + \bar{\Psi} \end{aligned} \quad (3.13)$$

mit:

$$\bar{\Psi} = \overline{\tau_{ij}} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\tau_{ij} u_i'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \quad (3.14)$$

Lediglich im inkompressiblen Fall ist die Energiegleichung (3.13) entkoppelt von der Kontinuitäts- und den Navier-Stokes-Gleichungen (3.8), (3.9).

Mit

$$\tilde{u}_i = \bar{u}_i; \quad u_i = \bar{u}_i + u_i' \quad p = \bar{p} + p' \quad (3.15)$$

ergeben sich die *inkompressiblen Reynolds-Gleichungen* zu

$$\frac{\partial (\rho \cdot \bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{Kontinuität}) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial (\rho \cdot \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j)}{\partial x_j} = F_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_i} - \frac{\partial (\rho \cdot \overline{u_i' \cdot u_j'})}{\partial x_i} \quad (\text{Impuls}) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\rho \cdot c_p \cdot \bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot c_p \cdot \bar{T} \cdot \bar{u}_i)}{\partial x_i} = \\ & \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \overline{u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - c \cdot \rho \cdot \overline{T' \cdot u_i'} \right) \quad (\text{Energie}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3 Das Schließungsproblem der Strömungsmechanik

Lineare Terme, wie zum Beispiel der Druckterm, behalten ihre Form beim Übergang auf die gemittelten Formen. Nichtlineare Terme dagegen führen dazu, dass Korrelationen der Schwankungsgrößen auftreten. So enthält die Gleichung (3.9) bzw. (3.17) Ausdrücke der Form

$$\tau_{ij}^* = \overline{\rho \cdot u_i'' \cdot u_j''} \quad (3.19)$$

im kompressiblen Fall bzw.

$$\tau_{ij}^* = \overline{u_i' \cdot u_j'} \quad (3.20)$$

im inkompressiblen Fall.

Der Ausdruck τ_{ij}^* stellt die Komponenten eines Tensors dar, der den turbulenten Impulstransport beschreibt und im inkompressiblen Fall symmetrisch ist. Diese sogenannten *Reynolds-Spannungen* weisen Ähnlichkeiten zum Spannungstensor auf und haben auch die Einheit einer Spannung. Die Reynoldsspannungen führen zum Auftreten weiterer Unbekannter in der Reynoldsgleichung, ohne dass zusätzliche Gleichungen hinzukommen. Dies wird als das *Schließungsproblem* der Strömungsmechanik bezeichnet, zu dessen Lösung empirische Zusatzinformationen herangezogen werden müssen. Im Kapitel 5 wird darauf weiter eingegangen.

Kapitel 4

Die akustische Analogie nach Lighthill und Fawkes, Williams und Hawkins

4.1 Die nichtlineare Wellengleichung

Sobald Schallwellen nicht durch Vibrationen von strukturmechanischen Komponenten, sondern durch die Strömung in einem Fluid erzeugt werden, ist zu deren Beschreibung die homogene Wellengleichung (2.19) nicht mehr ausreichend. Sie muss erweitert werden zu einer *nichtlinearen Wellengleichung*, die sowohl die Schallentstehung durch Fluidvorgänge als auch den Einfluss von sich im Fluid befindlichen Strukturen berücksichtigt und einen zusätzlichen inhomogenen Anteil enthält, der aeroakustische Quellterme darstellt.

Untersuchungen zur Ableitung der aeroakustischen Wellengleichungen wurden in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts u.a. von Lighthill [59], [60], Curle [61] sowie von Ffowcs-Williams und Hawkins [62] gemacht. Dabei wurde der ursprüngliche, für unbegrenzte Fluide geltende Ansatz von Lighthill durch Curle erweitert, so dass auch starre Begrenzungen des Fluides berücksichtigt werden können. Schließlich erschlossen Ffowcs-Williams und Hawkins die Möglichkeit der Berücksichtigung von bewegten Berandungen eines Fluides.

Lighthill begründete damit die sogenannte *akustische* oder *Lighthill-Analogie*. Demnach entspricht das durch die Strömung eines Fluides erzeugte Schallfeld demjenigen in einem ruhenden homogenen Fluid, auf welches fluktuierende Spannungen einwirken. Dabei kann die Fluidströmung sowohl gleichmäßige laminare Wirbelbildung, wie sie bei niedrigen Reynoldszahlen auftritt (z.B. *von Kármánsche Wirbelstraße*, siehe Kapitel 10) als auch unregelmäßige turbulente Bewegungen, wie sie bei sehr hohen Reynoldszahlen entstehen, aufweisen. Durch Gegenüberstellen der exakten Bewegungsgleichungen einer Strömung (Navier-Stokes-Gleichungen, Kontinuitätsgleichung, siehe Kapitel 2) mit der Schallausbreitung in einem ruhenden Medium wurde von Lighthill eine Formulierung für die extern aufzubringenden Spannungen

gefunden [59]:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (T_{ij}) \quad (4.1)$$

T_{ij} sind dabei die Komponenten des sogenannten *Lighthill-Tensors*:

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + p_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij} \quad (4.2)$$

Der Term $(\rho u_i u_j)$ bezeichnet die *Reynoldsspannungen* (Reynoldsspannungstensor), p_{ij} steht für die viskosen Spannungen.

Von Lighthill wurde weiterhin gezeigt ([59],[60]), dass sich für niedrige Machzahlen der Lighthill-Tensor (4.2) zu

$$T_{ij} = \rho u_i u_j \quad (4.3)$$

vereinfacht.

4.2 Abbildung von Schallquellen durch Elementarquellen (Punktstrahler)

Für Strömungen in unbegrenzten Fluiden lautet die Lösung der Gleichung (4.1) nach Lighthill:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0})}{r} dy \quad (4.4)$$

Typischerweise wird (4.4) zur Beschreibung eines turbulenten Freistrahles herangezogen. Der Ausdruck $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ bezeichnet den Abstand zwischen dem Ort der Quelle \vec{y} und dem *Mikrofonpunkt*¹ \vec{x} . Als Randbedingung ist die sogenannte *Sommerfeldtsche Abstrahlbedingung* enthalten².

Die rechte Seite der Gleichung (9) stellt einen sogenannten *Quadrupol* oder Kugelstrahler 2. Ordnung dar. Anschaulich kann ein Kugelstrahler 2. Ordnung als eine sich periodisch verformende Kugel ohne Änderung ihres Volumeninhaltes angesehen werden, wie in der Abbildung 4.1 dargestellt.

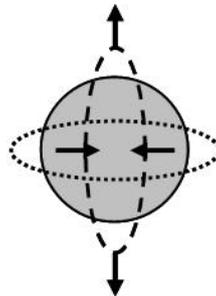


Abbildung 4.1: *Prinzipialskizze Quadrupolstrahler*

¹Mikrofonpunkt: hier: Ort eines Beobachters bzw. Zuhörers

²siehe Kapitel 2.4

Quadrupole der Größe T_{ij} (siehe Gleichung (4.2),(4.3)) pro Volumeneinheit sind, um das durch Strömungsvorgänge in einem unbegrenzten Fluid hervorgerufene Schallfeld abzubilden, in dem entsprechenden Volumen anzuordnen. Die Richtung der durch sie verursachten Abstrahlung ist durch die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit, die in den Lighthill-Tensor \mathbf{T}_{ij} eingehen, festgelegt und verändert sich gegebenenfalls transient mit den Strömungseigenschaften.

Befinden sich Festkörper innerhalb der Strömung, so muss die von Curle [61] erweiterte Lösung betrachtet werden:

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij} \left(y, t - \frac{r}{c_0} \right)}{r} dV(y) - \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{P_i \left(y, t - \frac{r}{c_0} \right)}{r} dS(y) \quad (4.5)$$

$P_i = (-n_i p_{ij})$ ist dabei die Kraft, die auf die sich im Fluid befindenden Oberflächen wirkt. n_i bezeichnet die Komponenten eines oberflächennormalen Einheitsvektors \vec{n} , und p_{ij} sind die viskosen Spannungen (vgl. Gleichung (4.2)).

Gleichung (4.4) ist hier um einen zusätzlichen Term erweitert, der als ein sogenannter *Dipol*, Strahler 1. Ordnung, interpretiert werden kann. Bei einem Dipol bzw. einem Strahler 1. Ordnung handelt es sich anschaulich um eine oszillierende Kugel, die nicht deformiert wird. Die Abbildung 4.2 zeigt die Prinzipskizze eines Dipolstrahlers.

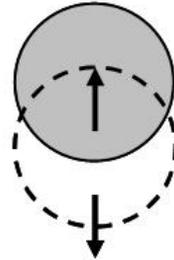


Abbildung 4.2: Prinzipskizze Dipolstrahler

Anschaulich gesprochen muss eine Verteilung von diskretisierten Dipolen zusätzlich zu den oben genannten Quadrupolen im Volumen auf den Berandungen angeordnet werden. Die Dipole beschreiben ein auf das Fluid einwirkendes Feld von Wechselkräften³.

Bei Vorhandensein bewegter Berandungen (wie dies zum Beispiel bei Lüftern der Fall ist) ist die Gleichung (4.6) nach Ffowcs-Williams und Hawkins [62] zu betrachten. Bei der Herleitung dieser Gleichung wurde auf ein bewegtes Bezugssystem übergegangen. Für Details sei auf [62], [65] verwiesen.

$$4\pi c_0^2 (\rho - \rho_0) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{\rho_0 \vec{V}}{r |1 - \vec{M}_r|} dS(y) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}}{r |1 - \vec{M}_r|} dV(y) + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{P_i}{r |1 - \vec{M}_r|} dS(y) \quad (4.6)$$

³Anmerkung: Ist das Fluid in Ruhe, d.h. existiert keine Strömung, so vereinfacht sich die Gleichung (4.5) und lässt sich zur Formulierung eines Abstrahlproblems (vgl. Kapitel 2) heranziehen.

\vec{V} bezeichnet die Geschwindigkeit eines fixen Punktes im bewegten Koordinatensystem, und es gilt: $\vec{M}_r = \frac{\vec{V}}{c_0}$.

Der neu hinzugekommene Term lässt sich als Strahler 0. Ordnung (*Monopol*, entspricht zum Beispiel einer *atmenden* Kugel, siehe Abbildung 4.3) interpretieren. Beim Monopol kommt es durch die Änderung des Volumens des Kugelstrahlers zu Fluktuationen von Masse. Auch hier wird, analog zur Vorgehensweise bei den oben genannten Quadrupolen und Dipolen, für jeden Punkt der bewegten Oberflächen ein Monopolstrahler angenommen.

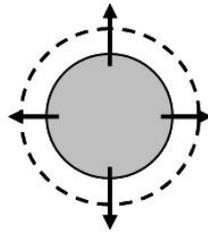


Abbildung 4.3: *Prinzipische Skizze Monopolstrahler*

Gemäß der akustischen Analogie lässt sich demnach ein reales Strömungsfeld analysieren, indem es durch ein akustisches Quellenfeld, das aus den entsprechenden Elementarstrahlern besteht, ersetzt wird.

Zur Veranschaulichung der Wirkung der Monopole, Dipole und Quadrupole werden nachfolgend drei verschiedene Möglichkeiten zur Umwandlung kinetischer in akustische Energie beschrieben:

Monopolstrahler (Volumenquelle): Ein in der Zeit veränderlicher Volumenfluss führt zur Schallentstehung. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Masse innerhalb eines bestimmten Volumens zum Fluktuieren gebracht wird. Beispiele hierzu sind die eingangs bereits erwähnten Lautsprechermembranen (Tieftöner), sowie pulsierende Ausströmungen, wie sie bei Auspuffen von Verbrennungsmotoren oder Sirenen auftreten. Auch implodierende Kavitationsblasen fallen in diese Kategorie.

Dipolstrahler (Impulsquelle): Der Impuls in einem bestimmten Fluidvolumen (oder ebenso die Massenflußrate über eine bestimmte Fläche) wird zum Fluktuieren angeregt, allerdings wird zu keinem Zeitpunkt Masse zu- oder abgeführt, was zu auf das Fluid einwirkenden Wechselkräften führt. Dies passiert zum Beispiel bei Schwingungen von Festkörpern (Abbildung durch Dipole) .

Quadrupolstrahler (freie Wirbelquelle, Strahler 2. Ordnung): Der von der Zeit abhängige *Impulsfluß* über eine bestimmte Fläche ist veränderlich, wie zum Beispiel bei aerodynamisch generiertem Schall ohne Beeinflussung durch die Bewegung von Festkörpern. Aus Gründen der Impulserhaltung⁴ treten keine Wechselkräfte auf. Ein typisches Beispiel für die Anwendung von Quadrupolstrahlern ist die Simulation des turbulenten Freistrahls.

⁴Beim Quadrupolstrahler existieren jeweils entgegengesetzte, gleich große Kräfte, siehe [59].

Monopolstrahler sind hinsichtlich der Schallgenerierung am effizientesten, gefolgt von Dipol- und Quadrupolstrahlern. Die Abnahme der Effizienz des Dipol- bzw. Quadrupolstrahlers ist um so ausgeprägter, je höher die Frequenz (bzw. kürzer die Wellenlänge) ist.

Mit steigender Machzahl Ma nimmt der Wirkungsgrad η der Umwandlung kinetischer in akustische Energie mit steigender Ordnung des Quelltyps ebenfalls ab:

$$\begin{aligned} \text{Monopolquelle: } \eta &\sim Ma \\ \text{Dipolquelle: } \eta &\sim Ma^3 \\ \text{Quadrupolquelle: } \eta &\sim Ma^5 \end{aligned}$$

4.3 Formulierung der Quellterme in der nichtlinearen Wellengleichung

Die Lighthillsche Analogie ist geeignet zur Simulation eines akustischen Feldes mit der Randelementmethode, da lediglich die Bereiche, in denen sich Anregungsmechanismen (d.h. die Elementarstrahler in Form von Monopol-, Dipol-, Quadrupolstrahlern) befinden, diskretisiert und modelliert werden müssen⁵.

Um die Analogie anwenden zu können, ist die Kenntnis des Strömungsfeldes im Zeitbereich erforderlich. Damit können die Quellterme (4.4), (4.5), (4.6) formuliert werden. Zur Berechnung des Schallfeldes, das durch die turbulente Strömung und durch feststehende oder bewegte Berandungen verursacht wird, muß der o.g. Lighthilltensor (4.2) und damit der örtliche und zeitliche Verlauf der Strömungsgrößen bekannt sein.

In der nachfolgenden Abbildung (4.4) ist veranschaulichend die Vorgehensweise bei der Berechnung eines Freistrahls skizziert.

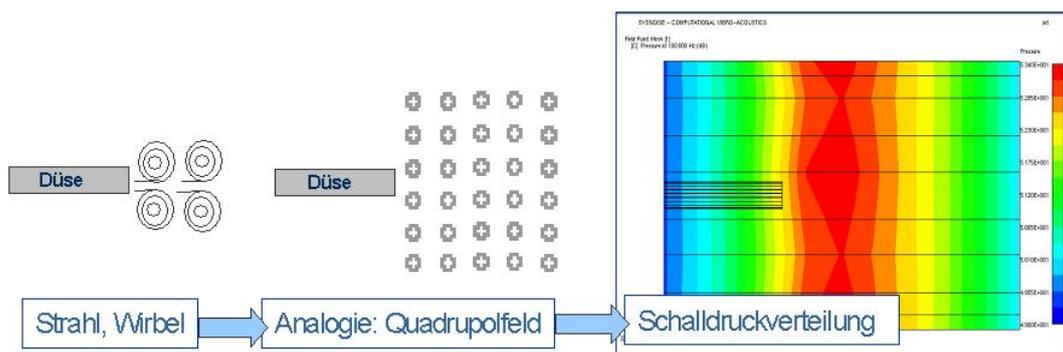


Abbildung 4.4: *Beispiel: Anwendung der akustischen Analogie bei der Simulation der Geräuschentwicklung eines turbulenten Freistrahles, nach [41]*

Die Modellierung von Dipolen und Monopolen bei festen oder bewegten Berandungen geschieht analog.

⁵Zur Theorie und Anwendung der Randelementmethode (auch Boundary-Element-Methode) siehe zum Beispiel [12], [13].

Die zur Bestimmung der entsprechenden Quellterme erforderlichen instationären Strömungsgrößen können durch Messungen (Hitzdrahtverfahren, Laseranemometrie) oder auch durch numerische Strömungssimulation ermittelt werden. (Auf Berechnungsverfahren wird im folgenden Kapitel 5 eingegangen.) Die Berechnung muss transient sein, so dass als Ergebnisse die Zeitverläufe der entsprechenden Größen vorliegen.

Unter Zuhilfenahme der Fouriertransformation⁶ kann eine Analyse im Frequenzbereich erfolgen:

$$p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.7)$$

$$\rho(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.8)$$

$$u_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.9)$$

Der Vollständigkeit halber soll eine alternative Möglichkeit erwähnt werden: Die Schallintensität eines Quelltermes kann auch als Funktion statistischer, durch Simulation ermittelter Turbulenzgrößen ausgedrückt werden. Zur Abbildung des strömungsinduzierten Schalls werden dabei Korrelationsfunktionen herangezogen. Eine derartige Vorgehensweise ist beispielsweise in [88], [89] beschrieben.

4.4 Grenzen und Einschränkungen bei Anwendung der akustischen Analogie

Der akustischen Analogie liegen bestimmte Annahmen zugrunde, die die Gültigkeit mehr oder weniger stark einschränken. Sie seien im folgenden skizziert⁷:

- Bei der Herleitung der nichthomogenen Wellengleichung (4.1) und ihrer Lösung durch Lighthill (siehe [59], [60]) wurde eine instationäre Strömung, die sich innerhalb eines ansonsten gleichförmigen Strömungsgebietes befindet, angenommen.
- Die turbulenten Bereiche der Strömung haben lediglich geringe Ausdehnung.
- Nach Lighthill dürfen sich weiterhin keine Berandungen im Strömungsgebiet befinden bzw. der Einfluss von (starren) Berandungen muss vernachlässigt werden können. Das Strömungsgebiet ist unendlich ausgedehnt. Die Schallwellen entstehen im instationären Strömungsbereich und können sich in alle Richtungen ungestört ausbreiten.
- Feststehende oder auch bewegte Berandungen, die nach [61] bzw. [62] durch Erweiterung der Lösung (4.4) der Gleichung (4.1) berücksichtigt werden (Gleichungen (4.5), (4.6)), erfassen lediglich die Schall*entstehung* durch vorhande-

⁶siehe auch Kapitel 11.3

⁷Für detailliertere Ausführungen sei der interessierte Leser auf [65], [67] verwiesen

ne harte Wände. Reflexion oder Absorption von Schallwellen an Wänden sind nicht enthalten.

- Um die Schallausbreitung berechnen zu können, müssen zunächst die Quellterme (siehe Gleichungen (4.4), (4.5), (4.6)) ermittelt werden, während sie in der Realität möglicherweise durch das Strömungsfeld beeinflusst werden können. Wechselwirkungen zwischen Schallfeld und Strömung werden somit bei der hier ausgeführten akustischen Analogie *nicht* berücksichtigt⁸.
- Die Gültigkeit der akustischen Analogie beschränkt sich auf den subsonischen Bereich.

Somit ist die akustische Analogie kein allgemeingültiger Ansatz für strömungsakustische Probleme. Vielmehr kann sie verwendet werden, um an bestimmte Problemklassen (wie zum Beispiel der oben bereits erwähnte turbulente Freistrah) angepasste Formulierungen zu finden.

⁸Es sei bemerkt, dass modifizierte Wellengleichungen, die die Schall-Fluid-Wechselwirkung berücksichtigen, formuliert werden können. Auch hier sei auf [65] sowie die dort aufgelisteten, weiterführenden Literaturstellen verwiesen.

Kapitel 5

Das Finite-Volumen-Verfahren

5.1 Simulationsverfahren in der Strömungsmechanik

Um Strömungsprobleme numerisch zu lösen, stehen unterschiedliche Verfahren, wie zum Beispiel

- die Methode der Finiten Elemente
- das Finite-Differenzen-Verfahren
- das Finite-Volumen-Verfahren
- die Lattice-Boltzmann-Methode

zur Verfügung, um - ohne Anspruch auf Vollständigkeit - nur einige der bekanntesten zu nennen.

Die am weitesten verbreitete Methode ist das Finite-Volumen-Verfahren. Es wird immer häufiger auch in Zusammenhang mit der im vorangehenden Kapitel behandelten akustischen Analogie nach Lighthill eingesetzt, um aeroakustische Probleme zu simulieren. Im vorliegenden Kapitel wird ein kurzer Überblick gegeben¹.

5.2 Die Grundgleichungen in Erhaltungsform

Um numerische Berechnungen von Strömungen durchführen zu können, ist es von Vorteil, die Navier-Stokes-Gleichungen als *Erhaltungsgleichungen* in *Integralform* zu verwenden. Dazu werden die Erhaltungsgrößen Φ ($\Phi = 1$ für die Massenerhaltung, $\Phi = \vec{u}$ für die Impulserhaltung, $\Phi =$ Erhaltungsgröße pro Masseneinheit für eine beliebige skalare Größe) in einem *Kontrollvolumen* betrachtet.

¹Auf die Lattice-Boltzmann-Methode wird in den Kapiteln 6 und 7 dieser Arbeit noch ausführlich eingegangen. Auf Details zu den übrigen der genannten, allerdings heutzutage eher selten eingesetzten Verfahren soll hier verzichtet werden. Der interessierte Leser sei auf einschlägige Literatur (zum Beispiel [49]) verwiesen.

Die generische Form der Erhaltungsgleichung für eine von Ort, Zeit und Geschwindigkeit abhängende Erhaltungsgröße $\Phi(\vec{x}, t, \vec{u})$ lautet:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \rho \Phi(\vec{x}, t, \vec{u}) dV}_{(I)} + \underbrace{\int_S \rho \Phi(\vec{x}, t, \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{(II)} = \underbrace{\sum \vec{f}}_{(III)} + \underbrace{\sum \vec{f}_\Phi}_{(IV)} + \underbrace{\int_V s_\phi dV}_{(V)} \quad (5.1)$$

Dabei bezeichnet V das Kontrollvolumen und S seine Oberfläche. \vec{n} ist der Einheitsvektor normal zu S . (I) gibt die *zeitliche Änderungsrate* der entsprechenden Erhaltungsgröße und (II) den sogenannten *konvektiven Fluss* an. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen Ausdrücke für die auf das Fluid einwirkenden Kräfte (III) sowie die Quellen (V). (IV) stellt den Transport von Φ durch sonstige Mechanismen, wie zum Beispiel den *diffusiven Fluss*, dar.

Die Kontinuitätsgleichung in Integralform ergibt sich dementsprechend zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (5.2)$$

Die Impulserhaltung am Kontrollvolumen führt zur Impulsgleichung in Integralform:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \int_V \rho \vec{u} dV + \int_S \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_S \Gamma \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{b} dV \quad (5.3)$$

Γ bezeichnet den Diffusionskoeffizienten, siehe zum Beispiel [47].

In vielen Anwendungsbereichen der Strömungsmechanik ist es ausreichend, das Fluid als inkompressibel anzunehmen. Die Dichte des Mediums ist damit konstant. Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Druck und Dichte (2.7) bedeutet dies, dass der rein rechnerische Wert für die Schallgeschwindigkeit im Medium *unendlich* sein muss. Da damit keine Aussagen über die Schallwellen im Fluid und somit die Akustik gemacht werden können, muss man, falls man an akustischen Fragestellungen interessiert ist, die kompressiblen Gleichungen heranziehen.

Zusätzlich zu den Gleichungen (5.2) und (5.3) ist dann die Erhaltungsgleichung für die Energie (5.4) zu berücksichtigen sowie die Zustandsgleichung des idealen Gases (5.5) zu formulieren (siehe zum Beispiel [47], [50]):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} \int_V \rho h dV + \int_S \rho h \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \\ & = \int_S k \nabla T \cdot \vec{n} dS + \int_V \nabla \cdot ([\tau] \cdot \vec{u}) dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V p dV \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$p = \rho R T \quad \text{bzw.} \quad p = \rho c_0^2 \quad (5.5)$$

Mit:

T : absolute Temperatur (Einheit: Kelvin);

h : Enthalpie pro Masseneinheit; für ein ideales Gas mit konstanter spezifischer Wärmekapazität c_p gilt: $h = c_p T$;

R : universale Gaskonstante;

k : Wärmeleitfähigkeit;

τ : Spannungstensor, siehe auch Gleichung (2.3);

b : Volumenkraft pro Masseneinheit;

c_0 : Schallgeschwindigkeit im Medium;

(Auf die ausführlichen Herleitungen der Gleichungen (5.2), (5.3) und (5.4) wurde hier verzichtet. Sie finden sich etwa in [44], [47], [50].)

Ergänzend zu den Ausführungen im Kapitel 2 hinsichtlich des linearen Zusammenhangs zwischen Druck und Dichte (Gleichung(5.5)) bei schwach kompressiblen Fluiden soll folgende Betrachtung dienen: Druck- und Dichteschwankungen aufgrund von Schallwellenausbreitung sind von so kurzer Dauer, dass im schwach kompressiblen Fall keine Umwandlung in Wärmeenergie berücksichtigt werden muss. Die Temperatur T kann somit im Grenzfall als konstant betrachtet werden, und die Zustandsgleichung entspricht der Gleichung (2.7).

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{V} dV \quad (5.6)$$

lassen sich die Oberflächenintegrale in Volumenintegrale umwandeln.

Beim Übergang zu infinitesimal kleinen Abmessungen lassen sich die Erhaltungsgleichungen wieder auf die differentielle Form der Grundgleichungen, wie sie im Kapitel 2 dargestellt wurden, zurückführen.

5.3 Rand- und Anfangsbedingungen

Um eine transiente Strömung ausreichend zu beschreiben, sind Rand- und Anfangsbedingungen erforderlich. So gelten an einer festen Wand die *Haftbedingung* (5.7) sowie bestimmte *Temperaturrandbedingungen* (5.8):

$$\vec{u}^* = 0 \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} T^* = T_w^* & \quad \text{isotherme Wand mit } T_w^* = \text{feste Wandtemperatur} \quad \text{oder} \\ \frac{\partial T^*}{\partial \vec{n}^*} & \quad \text{adiabate Wand mit } \vec{n}^* = \text{Koordinate in Wandnormalenrichtung} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Für den Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ wird die *Anfangsbedingung*

$$\vec{u}^*(x_i^*, 0) = \vec{u}_0^*(x_i^0) \quad (5.9)$$

festgelegt.

Damit wird das gesamte Strömungsproblem mit den Gleichungen (5.2), (5.3), (5.4) sowie (5.7) bis (5.9) beschrieben.

5.4 Diskretisierung des Strömungsproblems

Um das Strömungsproblem numerisch zu lösen, wird zunächst das gesamte Lösungsgebiet durch ein Gitternetz (das Berechnungsgitter) in *Kontrollvolumen* unterteilt. Das Gitter definiert die Begrenzungsflächen der Kontrollvolumen. Der Vorgang der Zerlegung des gesamten Lösungsgebietes in die Teilbereiche wird *Vernetzung* genannt. Die Kontrollvolumina können prinzipiell an beliebige Geometrien angepasst werden, was allerdings bei komplexen Strukturen sehr aufwändig sein kann².

Die Integral-Erhaltungsgleichungen (5.2) bis (5.4) gelten für jedes der Kontrollvolumen ebenso wie auch für das gesamte Berechnungsgebiet. Summiert man die Gleichungen für alle Teilvolumen, so erhält man wiederum die Gleichung für das Gesamtvolumen, da sich die Oberflächenintegrale im Inneren des Gesamtvolumens gegenseitig ausgleichen.

Die numerische Quadratur sowohl der Oberflächen- als auch der Volumenintegrale aus den Erhaltungsgleichungen führt zu einem System von algebraischen Gleichungen.

Approximation der Oberflächenintegrale: Abhängig von der Geometrie des jeweiligen Kontrollvolumens wird die Oberfläche in eine bestimmte Anzahl Facetten aufgeteilt (im dreidimensionalen Fall sechs Facetten bei der Verwendung von Hexaedern, vier bei Tetraedern etc.). Der Fluss einer Erhaltungsgröße durch die k Begrenzungsflächen eines Kontrollvolumens ist gleich der Summe der Integrale über die Facetten. f ist dabei die Komponente des konvektiven oder diffusiven Vektors in Normalenrichtung der entsprechenden Oberfläche des Kontrollvolumens.

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{s_k} f dS \quad (5.10)$$

Da die unbekanntenen Größen sich auf bestimmte Punkte der Kontrollvolumen – häufig die Mittelpunkte – beziehen, müssen die für die Berechnung der Oberflächenintegrale erforderlichen Werte f auf den Facetten durch geeignete Verfahren (siehe zum Beispiel [47]) approximiert werden.

Approximation der Volumenintegrale: Zur Behandlung der Volumenintegrale stehen verschiedenen Möglichkeiten zur Verfügung. Die einfachste besteht in der Multiplikation des Mittelwertes mit dem Volumeninhalt. Genauere Methoden erfordern die Kenntnis von Werten an unterschiedlichen Orten innerhalb des Kontrollvolumens.

Die die Strömung beschreibenden partiellen Differentialgleichungen werden nun durch ein System von algebraischen Gleichungen approximiert. Für jede Gitterzelle und jede Transportgröße Φ ergibt sich (mindestens) eine algebraische Gleichung. Insgesamt erhält man ein Gleichungssystem, das aus n Gleichungen und n unbekanntenen Größen Φ_i für jede Transportgröße besteht und nach Berücksichtigung der Randbedingungen eindeutig bestimmt ist.

²In der Praxis ist heutzutage durchaus üblich, dass von der für eine komplexe Berechnung benötigten Gesamtarbeitszeit ein Anteil von bis zu 80 % auf die Vernetzung entfällt!

5.5 Numerische Lösung des Gleichungssystems

Das die Strömung beschreibende Gleichungssystem ist gekoppelt, d.h. die *dominante*³ Variable in einer Gleichung tritt auch in einer oder mehrerer der übrigen Gleichungen auf. (Beispiel: Die Erhaltungsgröße Impuls enthält Dichte und Geschwindigkeitsvektor: $\Phi = \rho \cdot \vec{u}$. Beide Variablen tauchen sowohl in der Kontinuitäts- als auch in der Energiegleichung auf.). Die numerische Lösung ist aufwändig, und wird wegen der vorhandenen Nichtlinearitäten iterativ ermittelt. Dabei kann unterschiedlich vorgegangen werden: Entweder löst man alle Variablen simultan, oder aber man löst jede Gleichung nach ihrer dominanten Variablen, nimmt dabei die anderen Variablen als bekannt an und iteriert solange durch die Gleichungen, bis die Lösung für das gesamte (gekoppelte) System erreicht ist⁴, siehe [47].

Die zur Simulation von kompressiblen Strömungen erforderliche Berücksichtigung der Energiegleichung stellt im Vergleich zum inkompressiblen Fall einen bedeutenden zusätzlichen Aufwand dar.

Auf weitere Einzelheiten zum Verfahren der Finiten Volumen soll hier nicht eingegangen werden. Für Details sei zum Beispiel auf [47] verwiesen.

5.6 Die Berücksichtigung von Turbulenz

5.6.1 Direkte numerische Simulation

Durch die numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen können prinzipiell sämtliche Strömungseigenschaften – auch turbulente Schwankungen – beschrieben werden. Die Vorgehensweise, alle Strömungskalen aufzulösen, wird *direkte numerische Simulation (DNS)* genannt. Die kleinsten relevanten Skalen sind dabei durch die *Kolmogorov-Länge* bestimmt, und dementsprechend muss bei höheren Reynoldszahlen sowohl die räumliche als auch die zeitliche Diskretisierung extrem fein sein. Weiterhin muss die Abmessung des Strömungsgebietes mindestens so groß sein wie die größten interessierenden Skalen der Strömung.

In Abhängigkeit der Reynolds-Zahl können die Anzahl der erforderlichen Gitterpunkte N_g und Zeitschritte N_t nach [44], [51] wie folgt abgeschätzt werden:

$$N_t = Re^{\frac{3}{4}} \quad (5.11)$$

$$N_g = Re^{\frac{9}{4}} \quad (5.12)$$

Auf absehbare Zeit wird auch mit den zukünftig zur Verfügung stehenden leistungsfähigen Rechnern die *direkte* Simulation komplexer Problemstellungen, in denen Turbulenz auftritt⁵, nicht realisiert werden können⁶.

³Als *dominante* Größe wird häufig die Variable in einer Gleichung eines Gleichungssystems bezeichnet, die von der entsprechenden Gleichung am meisten beeinflusst wird.

⁴*Gauß-Seidel*-artige Iteration

⁵d.h. für Reynoldszahlen größer als 1500 bis 2000, vgl. Kapitel 3.1

⁶Direkte Simulation wird jedoch zum Beispiel eingesetzt, um begrenzte Strömungsbereiche zu simulieren, wie etwa zur Verifizierung von Turbulenzmodellen.

Um dennoch die Turbulenz in einer komplexen Strömung abzubilden, kommen sogenannte *Turbulenzmodelle* zum Einsatz. Diese bestehen aus algebraischen und/oder Differentialgleichungen, die eine Lösung für das Schließungsproblem der Reynolds-Gleichungen (siehe Kapitel 3) liefern. Die unbekanntenen Terme werden dabei durch empirische Annahmen modelliert. Diese zusätzlichen Informationen stellen allerdings lediglich Näherungsverfahren dar und sind jeweils nur für bestimmte Klassen von Problemen geeignet⁷. Das Prinzip der Turbulenzmodellierung sowie einige Details zu verschiedenen Turbulenzmodellen, die im Rahmen von numerischer Strömungssimulation zum Einsatz kommen, werden im folgenden ausgeführt. Auf die Bedeutung für die Abbildung akustischer Phänomene soll dabei besonderes Augenmerk gelegt werden. Aufgrund der Komplexität des Themas können Einzelheiten hier nicht behandelt werden, stattdessen wird auf die umfangreiche Literatur, z.B. [51], [47] verwiesen.

5.6.2 RANS-Simulation

Bei der *RANS*-Simulation (*RANS* = *Reynolds averaged Navier-Stokes*) wird jede Variable in einer stationären Strömung als Summe von Durchschnittswert und Schwankungsgröße entsprechend den Reynolds-Gleichungen dargestellt:

$$\Phi(x_i, t) = \bar{\Phi}(x_i) + \Phi'(x_i, t) \quad \text{mit:} \quad \bar{\Phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(x_i, t) dt \quad (5.13)$$

t ist dabei die Zeit und T das Mittelungsintervall⁸.

Aus Gleichung (5.13) folgt $\bar{\Phi}' = 0$.

Schallereignisse werden durch Druckschwankungen repräsentiert. Da diese jedoch durch die zeitliche Mittelung unterdrückt werden, ist die RANS-Methode zur Aeroakustiksimulation *nicht* geeignet⁹.

Die Schwankungsanteile der Strömung werden durch sogenannte *Turbulenzmodelle* abgebildet. Auf die wichtigsten Arten von Turbulenzmodellen wird im Kapitel 5.6.4 eingegangen.

5.6.3 Large-Eddy-Simulation

Turbulente Strömungen sind durch ein kontinuierliches Spektrum an räumlichen und zeitlichen Skalen gekennzeichnet. Sie setzen sich aus einer großen Bandbreite von *Turbulenzballen* vieler verschiedener Größenordnung zusammen. Die Turbulenzenergie entsteht aus der Bewegungsenergie der Strömung in den großen Turbulenzelementen, die die Größenordnung der makroskopischen Abmessungen des Strömungsgebietes L haben und deren Bewegung maßgeblich durch die makroskopischen Strömungseigenschaften (Geometrie des Strömungsgebietes, etc.) beeinflusst wird.

⁷Der Anwender eines Turbulenzmodells muß sich der getroffenen Annahmen immer bewusst sein!

⁸Anmerkung: Für instationäre Strömungen darf keine Zeitmittelung durchgeführt werden.

⁹Die Ausnahme bilden hier Methoden auf Basis der Beschreibung der Korrelationen im Fluid, siehe Kapitel 4.

Die großen Wirbel zerfallen und geben dabei ihre Energie jeweils an die nächstkleineren Strukturen ab, bis die Energie schließlich auf der Ebene der kleinsten Strukturen dissipiert wird. Dieses Prinzip wird als *Kolmogorovsche Energiekaskade* [51] bezeichnet.

Abbildung 5.1 zeigt eine schematische Darstellung der turbulenten Strukturen, während Abbildung 5.2 exemplarisch den Verlauf der langwelligen im Vergleich mit den höherfrequenten Anteilen einer fluktuierenden Strömungskomponente (Geschwindigkeit u) andeutet.

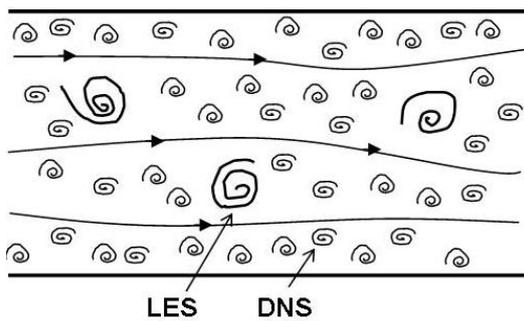


Abbildung 5.1: Schematische Abbildung der verschiedenen großen turbulenten Wirbel, nach [47]

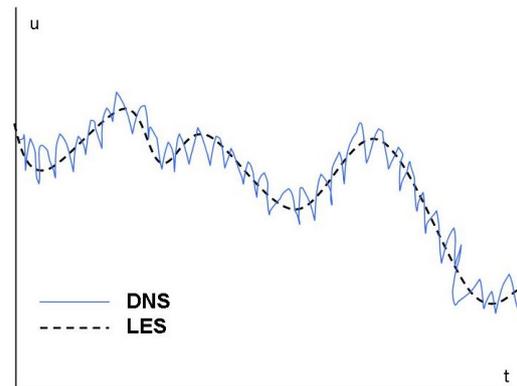


Abbildung 5.2: zeitabhängige Geschwindigkeitskomponente, DNS und LES, nach [47]

Der Begriff *Large-Eddy-Simulation*¹⁰ bezeichnet eine Grobstruktur-Simulation. Die großen, energiereichen Skalen einer Strömung werden dabei durch das numerische Verfahren direkt berechnet. Die kleinen Skalen dagegen, die energieärmer sind und von den größeren Wirbeln transportiert werden, werden durch ein sogenanntes *Feinstruktur-Modell* modelliert. Zur Trennung von *kleinen* und *großen* Wirbeln wird eine Filterfunktion $G(x, x')$ verwendet, die anhand eines Längenmaßes Δ die Skalen aufspaltet. Durch die Filterung ergibt sich für eine Strömungsgröße Φ die folgende Beziehung:

$$\bar{\Phi}_i(x) = \int G(x, x') u_i(x') dx' \quad (5.14)$$

Φ setzt sich somit zusammen aus einem durch ein numerisches Verfahren zu bestimmenden Anteil und dem gefilterten Anteil, der modelliert wird:

$$\Phi(x_i, t) = \bar{\Phi}(x_i, t) + \Phi'(x_i, t) \quad (5.15)$$

Wird die Filterfunktion auf die Navier-Stokes-Gleichungen angewandt, so erhält man einen Satz von Gleichungen (LES-Gleichungen), der – im Unterschied zu den RANS-Gleichungen, bei denen lediglich eine *räumliche* Filterung stattfindet – auch eine *zeitliche* Filterung der Turbulenzgrößen enthält.

Die Abbildung 5.3 veranschaulicht die Vorgehensweise der Filterung bei Anwendung der Large-Eddy-Simulation:

¹⁰abkürzend auch häufig *LES* genannt

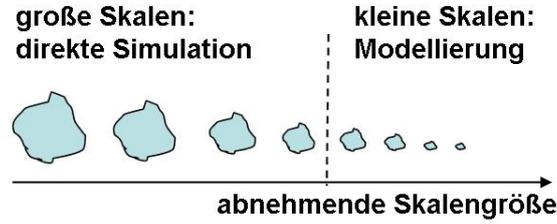


Abbildung 5.3: *Prinzip LES: Turbulenzmodellierung und direkte Lösung*

Die Filterung (5.14) führt zu zusätzlichen Feinstruktur-Spannungen in den LES-Gleichungen.

$$\tau_{ij}^s = \rho (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) \quad (5.16)$$

Bei τ_{ij}^s handelt es sich nicht um tatsächliche Spannungen, vielmehr hat der Term formale Ähnlichkeit mit dem Reynoldsspannungstensor. Das Turbulenzmodell muss in der Lage sein, die Feinstruktur-Spannungen sowie den Einfluss der Fein- auf die Grobstruktur abzubilden. Außerdem muss der Energietransfer von den aufgelösten Strukturen zu den modellierten Skalen dargestellt werden.

Als Feinstruktur-Modelle können – analog zur RANS-Vorgehensweise – ein- oder zwei-Gleichungs-Modelle und algebraische Modelle eingesetzt werden oder Transportgleichungen für alle Komponenten von τ_{ij}^s gelöst werden. Details zu verschiedenen Ansätzen können zum Beispiel [47], [50], [51] sowie der dort aufgelisteten Literatur entnommen werden.

5.6.4 Turbulenzmodelle

Die meisten Turbulenzmodelle bauen auf dem Prinzip der *Wirbelviskosität*¹¹ auf. Dazu wird der turbulente Spannungstensor

$$\tau_{t,ij} = -\overline{\rho u_i' u_j'} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} k \quad (5.17)$$

angesetzt. μ_t bezeichnet die sogenannte turbulente Viskosität oder Wirbelviskosität und stellt einen Turbulenzparameter dar, der die unbekanntenen Reynolds-Spannungen (siehe Gleichung (3.19) und (3.20)) ersetzt. Die Formulierung (5.17) ist offenbar nicht exakt, ermöglicht jedoch die Modellierung von Turbulenz mit relativ geringem Aufwand.

Die Auswirkungen von Turbulenz können bei den Wirbelviskositätsmodellen somit anschaulich als erhöhte Viskosität interpretiert werden.

k bezeichnet dabei die turbulente kinetische Energie:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} \quad (5.18)$$

¹¹auch *Eddy Viscosity* genannt

Die Größe μ_t (Wirbelviskosität) lässt sich durch zwei Parameter charakterisieren: die kinetische Energie k bzw. eine Geschwindigkeit $q = \sqrt{2k}$, und eine Längenskala L_t , die jeweils mit Hilfe des Turbulenzmodelles bestimmt werden müssen. Dazu existieren unterschiedliche Ansätze, die nach der Anzahl der formulierten Transportgleichungen unterschieden werden:

Null-Gleichungs-Modelle (Auch *algebraische Modelle* genannt.) Bei den sogenannten *Null-Gleichungsmodellen* stellen die turbulenten Größen keine Transportgrößen dar. Es wird angenommen, dass die Turbulenz direkt an ihrem Entstehungsort dissipiert. Die Wirbelviskosität wird durch algebraische Gleichungen und unter Heranziehung von empirischen Werten, die jeweils nur für ganz bestimmte Problemklassen zutreffend sind, bestimmt.

Aufgrund der geringen universellen Gültigkeit kommen Null-Gleichungs-Modelle heute nur noch selten zum Einsatz.

Ein-Gleichungs-Modelle Wird eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k (bzw. für $q = \sqrt{2k}$) gelöst, so spricht man von einem *Ein-Gleichungs-Modell*. Üblicherweise wird der Wert für das turbulente Längenmaß L_t mittels einer algebraischen Beziehung (siehe zum Beispiel [51]) bestimmt.

Zwei-Gleichungs-Modelle Bei den *Zwei-Gleichungs-Modellen* werden zwei Transportgleichungen gelöst. Das am meisten verbreitete derartige Modell in dieser Klasse ist das sogenannte *Standard- k - ε -Modell*¹². Da dieses auch in POWERFLOW, dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit zu Fluid-Strukturgekoppelten Berechnungen verwendeten Lattice-Boltzmann-Programm, implementiert ist (siehe Kapitel 7), soll es im folgenden genauer erklärt werden.

Neben der turbulenten kinetischen Energie k wird die Dissipationsrate ε betrachtet:

$$\varepsilon = \frac{\mu \overline{\partial u_i \partial u_j}}{\rho \partial x_j \partial x_i} \quad (5.19)$$

Die Transportgleichungen für k und ε lauten:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j k})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P_k + \rho \varepsilon \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \overline{u_j \varepsilon})}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - \rho C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (5.21)$$

$$\text{mit: } \mu_t = \rho C_\mu \sqrt{k} L_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \varepsilon \approx \frac{k^{3/2}}{L_t}$$

¹²Informationen zu weiteren etablierten Zwei-Gleichungs-Modellen können etwa [51] entnommen werden

P_k stellt dabei die Produktionsrate der kinetischen turbulenten Energie durch die Hauptströmung dar, und σ_k ist eine *turbulente Prandtlzahl*¹³. L_t bezeichnet wiederum das turbulente Längenmaß, siehe [47], [51].

Die in den Gleichungen (5.20) und (5.21) enthaltenen Parameter werden empirisch bestimmt. In der Literatur werden zum Beispiel folgende Werte vorgeschlagen [47]:

$$C_\mu = 0.09; \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44; \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92; \quad \sigma_k = 1.0; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3; \quad (5.22)$$

Die Implementierung dieses Modelles ist aufgrund der identischen Struktur der RANS-Gleichungen und der Gleichungen für laminare Strömungen relativ einfach, wenn die dynamische Viskosität μ gleich einer effektiven Viskosität $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ gesetzt wird ([47], [51]).

5.7 Bedeutung für die Aeroakustiksimulation

Die Navier-Stokes-Gleichungen stellen ein nichtlineares, gekoppeltes System dar, dessen numerische Lösung in der Regel aufwändig ist. Die direkte Lösung der diskretisierten Gleichungen - d.h. unter Auflösung aller relevanten Skalen - kommt aus den bereits erwähnten Gründen des Rechenaufwandes nicht bzw. nur für den Fall niedriger Reynoldszahlen in Frage.

Die oben beschriebene Large-Eddy-Simulation dagegen kann mit unterschiedlichen Zielen eingesetzt werden:

- Mit Hilfe der Ergebnisse einer transienten Berechnung der Strömung eines inkompressiblen Mediums kann in einer Nachlaufrechnung die *akustische Analogie* (siehe Kapitel 4) angewendet werden, um das Schallfeld zu bestimmen.
- Die Simulation einer kompressiblen Strömung ermöglicht die Abbildung von aeroakustisch entstehendem Schall *zusammen mit* der Wellenausbreitung im Fluid.

Die in unten stehender Abbildung 5.4 dargestellte Übersicht soll eine entscheidende Eigenschaft der Schallwellen in einem Fluid zeigen: Verglichen mit den strömungsmechanischen Skalen sind die akustischen Skalen größer bzw. langwelliger¹⁴. Die Schallenergie dagegen ist weitaus geringer als der Energieinhalt in einer turbulenten Strömung.

Somit erscheint die Large-Eddy-Simulation als eine sehr treffende Vorgehensweise, die die Physik der turbulenten Strömung genauer beschreibt als etwa eine RANS-Berechnung, und dabei in der Lage ist, Phänomene sowohl der Schallentstehung als auch der Schallausbreitung abzubilden.

Allerdings erfordert sie, wenn die Kompressibilität *nicht*, wie im Falle der Akustiksimulation, vernachlässigt werden darf, erheblichen Rechenaufwand. (In Kapitel 11

¹³ $\sigma_k \approx 1$

¹⁴So hat ein Sinuston mit einer Frequenz von 440 Hz (entspricht dem sogenannten *Kammerton A* in der Musik) im Medium Luft bei Raumtemperatur eine Wellenlänge von ca. 1,28 Metern.

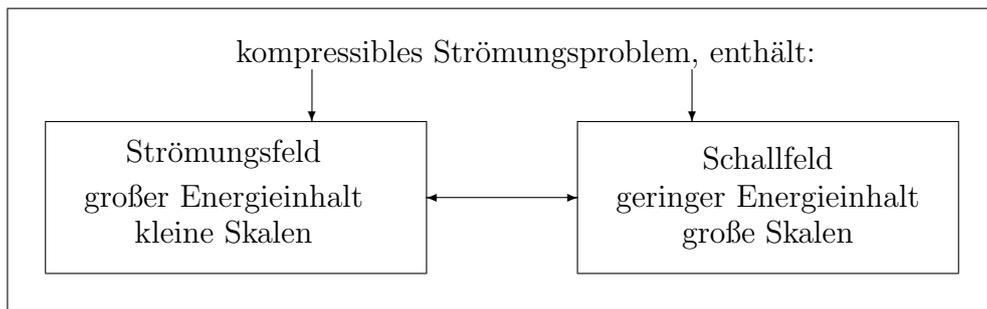


Abbildung 5.4: strömungsmechanische und akustische Skalen

wird eine derartige, auf der Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen basierende Simulation eines aeroakustischen Problems demonstriert.)

Aufgrund der diversen Nachteile bei der Simulation von aeroakustischen Problemstellungen wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit die *Lattice-Boltzmann-Methode* als Alternativ-Verfahren (siehe Kapitel 6, Kapitel 7) zur transienten Strömungssimulation herangezogen.

Kapitel 6

Die Boltzmann-Gleichung

6.1 Herleitung der Lattice-Boltzmann-Methode aus der statistischen Physik

Im folgenden sollen die Grundlagen der Lattice-Boltzmann-Methode als Alternative zu den im vorigen Kapitel besprochenen klassischen Ansätzen der Strömungssimulation dargestellt werden. Die Darstellung orientiert sich dabei an [19].

Die Thermodynamik liefert mit den Navier-Stokes-Gleichungen eine makroskopische Beschreibung von Fluiden und Strömungen. Im Gegensatz dazu hat die Lattice-Boltzmann-Methode ihren Ursprung in der statistischen Mechanik. Ein Teilgebiet davon, die sogenannte kinetische Gastheorie, beschäftigt sich mit der Dynamik von Partikelverteilungen und beschreibt die Fluideigenschaften auf mikroskopischer Ebene. Die Grundlage der kinetischen Gastheorie und gleichzeitig der Ausgangspunkt der Herleitung der Lattice-Boltzmann-Methode ist die Boltzmann-Gleichung¹:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{F} \frac{\partial f}{\partial \vec{\xi}} = C(f) \quad (6.1)$$

$f(t, \vec{x}, \vec{\xi})$ ist die sogenannte Wahrscheinlichkeitsdichte oder auch Partikelverteilungsfunktion. Sie stellt ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Partikel mit der Geschwindigkeit $\vec{\xi}$ zum Zeitpunkt t am Ort \vec{x} anzufinden, dar, und spielt eine zentrale Rolle in der kinetischen Gastheorie. $\vec{\xi}$ bezeichnet die Teilchen-Geschwindigkeit und \vec{F} eine externe, auf das Fluid einwirkende Kraft (die allerdings im folgenden vernachlässigt werden soll).

Die linke Seite der Gleichung beschreibt die räumliche und zeitliche Veränderung der Verteilungsfunktion $f(t, \vec{x}, \vec{\xi})$, während die rechte Seite den sogenannten Kollisionsoperator $C(f)$ darstellt. Der Kollisionsoperator wird in der Literatur oft auch *Stoßterm* genannt. Dieser Name veranschaulicht bereits die Bedeutung des Ausdrucks, nämlich die mikroskopischen Zwei-Teilchen-Stöße in einem Fluid zu modellieren. Die Geschwindigkeiten $\{\vec{\xi}, \vec{\xi}_1\}$ vor der Kollision werden dabei in die Geschwindigkeiten

¹benannt nach Ludwig Boltzmann (1844 - 1906)

$\{\vec{\xi}', \vec{\xi}'_1\}$ nach der Kollision transferiert ([36], [66]).

$$C(f) = \int (f(\vec{\xi}')f(\vec{\xi}'_1) - f(\vec{\xi})f(\vec{\xi}_1)) |\vec{\xi} - \vec{\xi}_1| \sigma(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} d\vec{\xi}_1 \quad (6.2)$$

σ bezeichnet einen differentiellen Kollisionsquerschnitt.²

Aus mathematischer Sicht ist die Boltzmann-Gleichung damit eine Integro-Differentialgleichung.

Die Boltzmann-Gleichung mit dem Kollisionsoperator $C(f)$ ist im eigentlichen Sinne gültig unter der Annahme, dass ein sogenanntes *verdünntes Gas*³ vorliegt. Jedoch geht im *hydrodynamischen Grenzfall*, wenn die mittlere freie Weglänge klein wird, die Boltzmann-Gleichung in die Navier-Stokes-Gleichungen über. Bedingung dafür ist jedoch, dass das Fluid eine kleine Knudsenzahl besitzt. Die Knudsenzahl ist eine dimensionslose Kenngröße für Fluidströmungen und ist definiert als Quotient aus mittlerer freier Weglänge l_r und charakteristischer Länge⁴ L_r der Strömung:

$$Kn = \frac{l_r}{L_r} \quad (6.3)$$

Weiterhin müssen die folgenden Annahmen zugrundegelegt werden:

- Es finden binäre Kollisionen zwischen (annähernd) dimensionslosen, punktförmigen Partikeln statt, d.h. es interagieren nur jeweils zwei Teilchen miteinander, wobei die Zeitdauer des Kollisionsvorganges vernachlässigbar kurz ist.
- Es liegt sogenanntes *molekulares Chaos*⁵ vor. Dies bedeutet, dass die Geschwindigkeiten der Teilchen vor der Kollision nicht miteinander korrelieren.
- Einwirkende äußere Kräfte sind sehr klein im Verhältnis zu den bei den Teilcheninteraktionen wirkenden Kräften, so dass sie keine Auswirkung auf die Partikelinteraktionen haben.

Letztendlich ist damit die Gültigkeit für eine breite Klasse an technisch relevanten Strömungsproblemen mit den entsprechenden Fluideigenschaften gegeben, insbesondere für diejenigen, die bei der Entstehung von Strömungsgeräuschen interessant sein können und die daher im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersucht werden sollten.

²Der differentielle Kollisionsquerschnitt bezeichnet ein Maß für die Anzahl von Partikeln mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{\xi} - \vec{\xi}_1$ um einen Raumwinkel $\vec{\Omega}$. Dieser ergibt sich aus dem räumlichen Streuwinkel der Partikel nach der Kollision (siehe [66]).

³Man spricht von einem verdünnten Gas, wenn die mittlere freie Weglänge groß im Vergleich zu den Teilchenabmessungen ist. Die mittlere freie Weglänge l_r eines Gases beschreibt die Weglänge, die ein Teilchen durchschnittlich ohne Interaktion mit einem anderen Teilchen zurücklegt. Somit befinden sich in einem verdünnten Gas nur eine geringe Anzahl an Gasteilchen (Molekülen) pro Volumen.

⁴Die charakteristische Länge L_r ist eine typische, die jeweilige Strömung kennzeichnende Länge und kann etwa die Abmessung des Strömungsgebietes oder der Durchmesser eines umströmten Hindernisses sein.

⁵Die Annahme von molekularem Chaos bezeichnet man auch als *Stoßzahlenansatz*.

6.2 Verteilungsfunktionen als Lösungen der Boltzmann-Gleichung

Makroskopische Erhaltungsgrößen wie Dichte und Impuls lassen sich als Momente bezüglich der Verteilungsfunktion ausdrücken.

$$\rho(t, \vec{x}) = \int_{\vec{\xi}=-\infty}^{\infty} f(t, \vec{\xi}, \vec{x}) d\vec{\xi} \quad (6.4)$$

$$\rho(t, \vec{x}) \vec{u}(t, \vec{x}) = \int_{\vec{\xi}=-\infty}^{\infty} \vec{\xi} \cdot f(t, \vec{\xi}, \vec{x}) d\vec{\xi} \quad (6.5)$$

Höhere Momente können bezüglich der Relativgeschwindigkeit $\vec{\zeta} = (\vec{\xi} - \vec{u})$ gebildet werden. Man erhält den Drucktensor

$$D_{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = \int_{\vec{\xi}=-\infty}^{\infty} \zeta_{\alpha} \zeta_{\beta} \cdot f(t, \vec{\xi}, \vec{x}) d\vec{\xi} \quad (6.6)$$

und den sogenannten Impulsstromtensor, der den Transport des in Richtung α wirkenden Impulsanteils in Richtung β angibt.

$$\Pi_{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = \int_{\vec{\xi}=-\infty}^{\infty} \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \cdot f(t, \vec{\xi}, \vec{x}) d\vec{\xi} \quad (6.7)$$

Es kann gezeigt werden, dass es fünf sogenannte Kollisionsinvarianten ψ_k gibt, die die folgende Bedingung erfüllen:

$$\int_{\vec{\xi}} (C(f) \cdot \psi_k) d\vec{\xi} = 0 \quad (6.8)$$

Diese entsprechen den Erhaltungsgleichungen aus der Kontinuumsmechanik, nämlich denjenigen bezüglich Masse, Impuls und Energie. Die Nichtlinearität des Kollisionsintegrals $C(f)$ (6.2) führt dazu, dass die Boltzmann-Gleichung in der Regel nur sehr aufwändig zu lösen ist. Für spezielle Fälle sind jedoch analytische Lösungen bekannt. So stellen die Maxwell-Verteilung $f^{(M)}$ für den Fall konstanter Dichte ρ und Strömungsgeschwindigkeit \vec{u} bzw. die Gleichgewichtsverteilung $f^{(0)}$ für den Sonderfall des ruhenden Mediums mit $\vec{u} = 0$ Lösungen der Boltzmann-Gleichung dar:

$$f^{(M)} = \frac{\rho}{2\pi c^2} \frac{(\vec{\xi} - \vec{u})^2}{2c^2} \quad (6.9)$$

$$f^{(0)} = \frac{\rho}{2\pi c^2} \frac{\xi^2}{2c^2} \quad (6.10)$$

Damit können Zustände beschrieben werden, in denen globales, thermodynamisches Gleichgewicht vorherrscht. Allerdings sind die Voraussetzungen für die Gültigkeit

der Lösungen bei Verwendung von $f^{(M)}$ bzw. $f^{(0)}$ streng beschränkt: Im gesamten Strömungsgebiet müssen die Zustandsgrößen Druck und Geschwindigkeit konstant sein, und es muss Spannungsfreiheit des Fluids gegeben sein.

Um auch allgemeinere, d.h. vom thermodynamischen Gleichgewicht weiter entfernte Zustände abbilden zu können, wird *lokales* Gleichgewicht vorausgesetzt. Dies wird durch eine *lokale* Maxwell-Verteilung beschrieben. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Zustandsgrößen nicht konstant sind, sondern örtlich und zeitlich variieren. Die Abweichungen von der globalen Gleichgewichtsverteilung sind allerdings klein und durch die Zeit- und Ortsabhängigkeiten der Parameter $\vec{\xi}$ und ρ in der Gleichgewichtsverteilung (6.10) definiert. Im System besteht damit eine Tendenz der Gleichgewichtsverteilung, sich zum globalen Gleichgewicht zu verändern. Die Annäherung an das globale Gleichgewicht wird typischerweise von folgenden Zeitskalen charakterisiert:

- $\tau_{int} \sim \frac{s}{\xi}$: Dauer eines Kollisionsvorganges mit der Partikelabmessung s
- $\tau_{\mu} \sim \frac{l_{\mu}}{\xi}$: mittlerer zeitlicher Abstand zwischen zwei Kollisionen
- $\tau_h \sim \min(\frac{l_M}{\nu}, \frac{l_M^2}{\nu})$: kleinste hydrodynamische Zeitdauer, beschreibt konvektive und diffusive Vorgänge (ν ist die kinematische Viskosität des Fluids.)

6.3 Vereinfachung des Stoßterms

Um sowohl die analytische als auch die numerische Behandlung der Boltzmann-Gleichung zu ermöglichen bzw. zu erleichtern, kann diese durch die Verwendung eines alternativen Kollisionsoperators vereinfacht werden. Dieser muss nach wie vor die grundlegenden physikalischen Eigenschaften der Boltzmann-Gleichung abdecken, soll aber mathematisch einfacher zu behandeln sein.

Der sogenannte *BGK-Ansatz*⁶ verkörpert einen derartigen vereinfachten Kollisionsoperator:

$$C_{BGK}(f) = -\frac{1}{\tau} (f - f^{(0)}) \quad (6.11)$$

τ bezeichnet einen sogenannten Relaxationsfaktor, der die Tendenz der Verteilungsfunktion f infolge der Partikelkollisionen beschreibt, sich zur Gleichgewichtsverteilung $f^{(0)}$ hin zu verändern. τ kann als gemittelttes Zeitintervall zwischen den Teilchenstößen gesehen werden und entspricht in der Größenordnung, wie später noch gezeigt werden wird, der Knudsenzahl (6.3).

⁶benannt nach Bathnagar, Gross und Krook, die diesen Ansatz im Jahre 1954 als Erstes veröffentlichten (siehe [17])

6.4 Chapman-Enskog-Entwicklung

Die Chapman-Enskog-Entwicklung⁷, oder auch *Multiskalenanalyse*, wird zur Analyse der Boltzmann-Gleichung herangezogen und führt zu ihren den Navier-Stokes-Gleichungen entsprechenden *hydrodynamischen* Lösungen.

Der Name *Multiskalenanalyse* deutet bereits die zentrale Idee des Ansatzes an: Sowohl zeitliche als auch räumliche Variablen werden aufgesplittet in einzelne Anteile auf unterschiedlichen hierarchischen Skalen. Die verschiedenen Skalen können als getrennte Modellierung unterschiedlicher, relevanter Fluideigenschaften gedeutet werden. Fluidodynamische Eigenschaften von Strömungen werden damit als Feldgrößen angesehen, die mittels eines Störansatzes aus den kinetischen Gleichungen abgeleitet werden. Der Störparameter ϵ entspricht der Knudsenzahl (6.3)⁸. Der Wert ϵ^{-1} charakterisiert die Größenordnung der Länge, über der die Störungsparameter veränderlich sind, d.h. die räumlichen Strömungsskalen.

Die Verteilungsfunktion wird um die Gleichgewichtsverteilung (lokale Maxwell-Verteilung) entwickelt:

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (6.12)$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll für die aufwändige Herleitung der Chapman-Enskog-Entwicklung auf die entsprechende Literatur, z.B. [17], [20], [23] verwiesen werden.

Es lässt sich zeigen, dass aus der Boltzmann-Gleichung mit Hilfe der Kollisionsinvarianten Ψ_i (6.8), die sowohl für den Kollisionsoperator (6.2) als auch den vereinfachten Operator (6.11) gültig sind, die Navier-Stokes-Gleichungen (2.5), (2.6) approximiert werden können.

Im Rahmen der Lattice-Boltzmann-Methode wird die Chapman-Enskog-Entwicklung dazu verwendet, aus der Boltzmann-Gleichung ein Verfahren zur Strömungssimulation abzuleiten.

⁷nach Chapman und Enskog, die diese Methode im Zeitraum von 1900 bis 1920 entwickelten [66]

⁸Die Knudsenzahl ergibt sich automatisch, wenn die Variablen der Boltzmann-Gleichung mit der charakteristischen makroskopischen Länge, der Kollisionsdauer τ_{int} und der charakteristischen Partikelgeschwindigkeit c (Größenordnung der Schallgeschwindigkeit) dimensionslos gemacht werden, siehe auch nächstes Kapitel.

Kapitel 7

Die Lattice-Boltzmann-Methode zur Simulation von Strömungen

7.1 Die Lattice-Boltzmann-Gleichung

Aus der Boltzmann-Gleichung (6.1) mit dem BGK-Ansatz für den Kollisionsoperator (6.11) wird die *Lattice-Boltzmann-Gleichung*¹ abgeleitet. Dazu wird zunächst die Boltzmann-Gleichung im mikroskopischen Geschwindigkeitsraum² diskretisiert. Dabei wird die kontinuierliche Verteilung $f(t, \vec{x}, \vec{\xi})$ durch eine diskrete Verteilung $f_i(t, \vec{x})$ mit einem Satz von n diskreten mikroskopischen Geschwindigkeiten $\vec{\xi}_i = c \cdot \vec{e}_i$ an n ausgewählten Kollokationspunkten substituiert. \vec{e}_i stellt hierbei ein Erzeugendensystem von Vektoren dar, und c ist eine beliebig wählbare Geschwindigkeit in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit c_0 .

Die Boltzmann-Gleichung wird damit zu der *diskreten Boltzmann-Gleichung*, einem System aus n Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{\xi}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{x}} = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{(0)}) \quad (7.1)$$

Die Gleichung (7.1) wird mit den Referenzgrößen L_r (charakteristische Länge), c_r (mikroskopische Referenzgeschwindigkeit), n_r (charakteristische Verteilungsdichte) und $t_c = \frac{L_r}{c_r}$ (Zeit zwischen den Kollisionsvorgängen) dimensionslos gemacht.

$$\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \hat{t}} + \hat{\xi}_i \cdot \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \hat{\vec{x}}} = -\frac{1}{\hat{\tau} \epsilon} (\hat{f}_i - \hat{f}_i^{(0)}) \quad (7.2)$$

Die dimensionslosen Größen lauten dabei: $\hat{\xi}_i = \frac{\vec{\xi}_i}{c_r}$, $\hat{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{L_r}$, $\hat{f}_i = \frac{f_i}{n_r}$, $\hat{\tau} = \frac{\tau}{t_c}$.

Die Größe $\epsilon = \frac{c_r \tau}{L_r} = \frac{l_r}{L_r}$ ist die bereits bekannte Knudsenzahl. Ist diese klein, so sind die Abweichungen von der Gleichgewichtsverteilung gering, und die Verteilungsfunktion kann um die Gleichgewichtsverteilung $\hat{f}^{(0)}$ entwickelt werden.

¹auch *Gitter-Boltzmann-Gleichung* genannt

²Der Geschwindigkeitsraum wird auch *Phasenraum* genannt.

Als nächstes wird ein regelmäßiges, kartesisches Gitter mit einem Gitterabstand Δx eingeführt, das über die Beziehung

$$\Delta x = \Delta t \cdot c \quad (7.3)$$

auch die diskrete Zeitschrittweite Δt festlegt, und Gleichung (7.2) wird mit einem *Upwind-Finite-Differenzen-Verfahren*³ in Raum und Zeit diskretisiert. Es ergibt sich die *diskretisierte* Boltzmann-Gleichung (mit $\Delta \hat{t} = \Delta t \cdot \frac{c_r}{L_r}$):

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}_i(\vec{\hat{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{f}_i(\vec{\hat{x}}, \hat{t})}{\Delta \hat{t}} + \xi_{ix} \frac{\hat{f}_i(\vec{\hat{x}} + \Delta \vec{\hat{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{f}_i(\vec{\hat{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t})}{\Delta \vec{\hat{x}}} \\ + \xi_{iy} \frac{\hat{f}_i(\vec{\hat{x}} + \Delta \vec{\hat{y}}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{f}_i(\vec{\hat{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t})}{\Delta \vec{\hat{y}}} \\ + \xi_{iz} \frac{\hat{f}_i(\vec{\hat{x}} + \Delta \vec{\hat{z}}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{f}_i(\vec{\hat{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t})}{\Delta \vec{\hat{z}}} \\ = -\frac{1}{\hat{\tau}\epsilon} \left(\hat{f}_i - \hat{f}_i^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Setzt man den Gitterabstand und diskrete Zeitschrittweite zu $\Delta x = 1$ bzw. $\Delta t = 1$, so kann man auf die dimensionslosen Einheiten *lattice time* (Gitterzeit) und *lattice length* (Gitterlänge) übergehen. Die Dimensionen werden damit durch den regelmäßigen Gitterabstand bestimmt. Mit der Beziehung $\vec{\xi}_i = \frac{\Delta \vec{\hat{x}}}{\Delta \hat{t}}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}_i(\vec{\hat{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{f}_i(\vec{\hat{x}}, \hat{t})}{\Delta \hat{t}} + \frac{\hat{f}_i(\vec{\hat{x}} + \vec{\xi}_i \Delta \hat{t}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{f}_i(\vec{\hat{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t})}{\Delta \vec{\hat{t}}} \\ = \frac{\hat{f}_i(\vec{\hat{x}} + \vec{x}_i \Delta \hat{t}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{f}_i(\vec{\hat{x}}, \hat{t})}{\Delta \hat{t}} = -\frac{1}{\hat{\tau}\epsilon} \left(\hat{f}_i - \hat{f}_i^{(0)} \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Nach Umformung und der Wahl von $\Delta t = t_c$ erhält man schließlich die Gitter-Boltzmann-Gleichung:

$$\hat{f}_i(t + \Delta t, \vec{x} + \vec{\xi}_i \Delta t) = \hat{f}_i(t, \vec{x}) - \frac{\Delta t}{\tau} \left(\hat{f}_i(t, \vec{x}) - \hat{f}_i^{(0)}(t, \vec{x}) \right) \quad (7.6)$$

Die makroskopischen Größen Dichte ρ , Impuls \vec{j} und Impulsstromtensor $\Pi_{\alpha\beta}$ ergeben sich dann (in Analogie zu den Gleichungen (6.4) bis (6.7)) als Summe der diskreten Verteilungsfunktionen $\hat{f}_i(\vec{x}, t)$ (siehe [66]). Die Integrale bezüglich der mikroskopischen Geschwindigkeit (siehe zum Beispiel Gleichung (6.4)) werden durch numerische Quadratur ermittelt.

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_i \hat{f}_i(\vec{x}, t) \quad (7.7)$$

³Vorwärtsdifferenzenverfahren, bei dem die Ableitungen im Punkt x von einer Seite approximiert werden, zum Beispiel: $\Delta t = t^{n+1} - t^n$, $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$, siehe etwa [47], [50]

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) \vec{\xi}(\vec{x}, t) = \sum_i c_i \hat{f}_i(\vec{x}, t) \quad (7.8)$$

$$\Pi_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = \sum_i c_i \hat{f}_i(\vec{x}, t) \quad (7.9)$$

Die diskrete Verteilungsfunktion wird nun als Summe von Gleichgewichtsverteilung (Maxwell-Verteilung) und einem Störwert, der Ungleichgewichtsverteilung $f^{(1)}$ dargestellt:

$$\hat{f}_i = \hat{f}_i^{(0)} + \hat{f}_i^{(1)} \quad (7.10)$$

Die Gitter-Boltzmann-Gleichung stellt ein explizites numerisches Schema für die transiente Simulation der lokalen Verteilungsfunktionen im Zeitbereich dar. Jeder Zeitschritt kann dabei als die Nacheinanderausführung der zwei Teilschritte *Kollision* und *Propagation* interpretiert werden. Beim Kollisionsschritt werden zunächst die sich aufgrund des Kollisionsvorganges neu ergebenden Verteilungen \hat{f}_i ermittelt. Im Propagationsschritt werden diese auf die entsprechenden benachbarten Gitterknoten verteilt. Da die Strömungsgrößen als Momente der Verteilungsfunktionen dargestellt werden können, ist somit eine die Navier-Stokes-Gleichungen annähernde Abbildung von Strömungen möglich.

$$\hat{f}_i(t+1, \vec{x} + \vec{e}_i) = \hat{f}_i(t, \vec{x}) - \frac{1}{\tau} \left(\hat{f}_i(t, \vec{x}) - \hat{f}_i^{(0)}(t, \vec{x}) \right) \quad (7.11)$$

Nach [20], [66] ergibt sich der folgende Zusammenhang für den Relaxationsparameter τ :

$$\tau = 3 \left(\frac{\nu}{c^2} + \frac{\Delta t}{6} \right) \quad (7.12)$$

bzw. mit $c = 1$, $\Delta t = 1$, $\Delta x = 1$:

$$\tau = 3 \left(\nu + \frac{1}{6} \right) \quad (7.13)$$

ν bezeichnet die kinematische Viskosität, eine Stoffkonstante, die auch in den Navier-Stokes-Gleichungen enthalten ist. Sie wird bestimmt durch die mittlere freie Weglänge des Gases und kann in der kinetischen Gastheorie aus der Verteilungsfunktion berechnet werden. In der Gitter-Boltzmann-Methode wird die gewünschte Viskosität durch den Relaxationsparameter τ des Kollisionsoperators eingestellt (siehe [20], [66]).

7.2 Gittermodelle

Die gewählten diskreten mikroskopischen Geschwindigkeiten ξ_i müssen, um Äquivalenz der Lattice-Boltzmann-Gleichung mit den Navier-Stokes-Gleichungen zu gewährleisten, bestimmten Symmetriebedingungen gehorchen. Dementsprechend sind die Werte für \vec{e}_i so zu wählen, dass ein raumfüllendes Gitter erzeugt werden kann.

Dreidimensionale Gitter, die beide Bedingungen erfüllen, sind zum Beispiel die Modelle $D3Q15$ oder $D3Q19^4$.

⁴Die Bezeichnung $DkQb$ geht auf Qian [74] zurück. k steht dabei für die Anzahl der Dimensionen und b für die Anzahl der diskreten Geschwindigkeitsvektoren e_i .

Beide Modelle sind nachfolgend beschrieben. Jede *Spalte* der sogenannten *Modell-Matrizen* N_{D3Q15} bzw. N_{D3Q19} stellt dabei einen Gittervektor e_i dar:

$$\{e_i\}_{D3Q15} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

mit:

$$N_{D3Q15} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

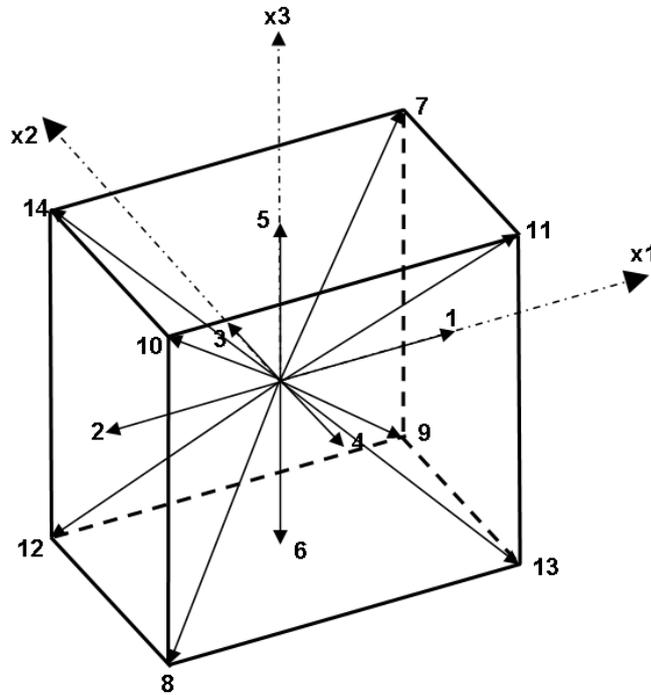


Abbildung 7.1: Kollokationspunkte des D3Q15-Modells

$$\{e_i\}_{D3Q19} = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

mit:

$$N_{D3Q19} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

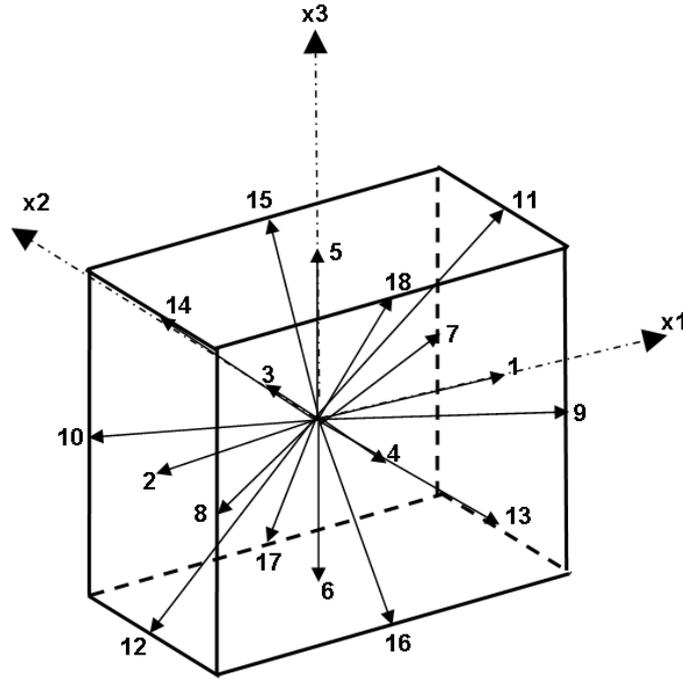


Abbildung 7.2: Kollokationspunkte des D3Q19-Modells

Die diskreten Geschwindigkeiten $\vec{\xi}_i$ sind damit festgelegt. Es ergeben sich (für die oben genannten Modelle D3Q15 und D3Q19) 3 unterschiedliche Geschwindigkeitsbeträge.

Nach [74] wird - aus Gründen der exakten Integrierbarkeit der Ausdrücke für den Druck, Impuls bzw. Impulsstromtensor (vgl. Gleichungen (7.7), (7.8) und (7.9)) - die lokale Gleichgewichtsverteilung bis zur zweiten Ordnung um die globale Gleichgewichtsverteilung (6.10) entwickelt (Details dazu können in [19], [20] nachgelesen werden).

Der folgende Ansatz für die Gleichgewichtsverteilung wird eingesetzt:

$$f_i^{(0)}(t, \vec{x}) = t_p \rho \left(1 + \frac{e_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{u_\alpha u_\beta}{2c_s^2} \left(\frac{e_{i\alpha} e_{i\beta}}{c_s^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) \right) \quad (7.16)$$

(α und β bezeichnen den jeweiligen räumlichen Index der Gittervektoren \vec{e}_i).

Der gewählte Ansatz hat nach [36], [66] allerdings zur Folge, dass die Gitter-Boltzmann-Methode lediglich für Strömungen mit geringen Machzahlen ($Ma \leq (\sim 0.3)$) korrekte Ergebnisse liefern kann. Für höhere Machzahlen ist die Annahme kleiner Abweichungen vom globalen Gleichgewicht nicht mehr ausreichend.

Nach dem Einsetzen von (7.16) in die diskrete Boltzmann-Gleichung (7.1) und unter Anwendung der Chapman-Enskog-Analyse können die in Gleichung (7.16) auftretenden Parameter t_p bestimmt werden. Die Vorgehensweise ist zum Beispiel in [20] ausführlich beschrieben.

Als Werte für t_p ergeben sich

- Modell D3Q15: $t_i = \{\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{72}\}$
- Modell D3Q19: $t_i = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36}, 0\}$

Für die numerische Schallgeschwindigkeit c_s gilt mit der Schallgeschwindigkeit im Fluid c_0 der folgende Ausdruck (siehe zum Beispiel [19]):

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}c_0} \quad (7.17)$$

7.3 Abbildung von akustischen Eigenschaften

Wie bereits oben ausgeführt, dürfen für die *Äquivalenz* der Lattice-Boltzmann-Methode mit einer Navier-Stokes-Simulation lediglich geringe Abweichungen in Bezug auf $f^{(0)}$ auftreten.

Schallwellen im linearen Bereich (siehe Kapitel 2) stellen kleine Abweichungen vom Ruhedruck p_0 und somit von der Gleichgewichtsverteilung $f^{(0)}$ dar.

Der Wert dieser Druckschwankung (siehe Gleichungen (2.1), (2.2)) ist klein. Somit ist in der Formulierung der Lattice-Boltzmann-Methode (im Rahmen ihrer Gültigkeitsgrenzen, zum Beispiel niedrige Machzahl) die Abbildung von akustischen Phänomenen wie Wellenausbreitung enthalten.

Bei Strömungen mit höheren Machzahlen verhalten Fluide sich deutlich kompressibel, die Bedingung *schwache Kompressibilität* im Sinne von Gleichung (2.7) ist nicht mehr eingehalten.

Im Kapitel 2 wurde bereits gezeigt, dass die Navier-Stokes-Gleichungen Schallentstehung und -ausbreitung sowohl in ruhenden als auch in bewegten Medien beschreiben. Nach Anwendung der Chapman-Enskog-Entwicklung können mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung die Navier-Stokes-Gleichungen approximiert (siehe Kapitel 6) werden. Daraus folgt, dass die Lattice-Boltzmann-Methode ebenfalls in der Lage ist, die gesuchten Schallphänomene abzubilden.

7.4 Die Berücksichtigung von Randbedingungen bei der Lattice-Boltzmann-Methode

An den Begrenzungen eines durch Simulation abgebildeten Strömungsgebietes müssen *Randbedingungen* berücksichtigt werden. In der *klassischen* CFD – d.h. bei der Lösung von diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen – werden dabei bestimmte makroskopische Strömungsgrößen (zum Beispiel Druck oder Geschwindigkeit) als bekannt angenommen.

Bei der Lattice-Boltzmann-Methode ist die Implementierung von Randbedingungen komplizierter, da die Strömung durch Partikelverteilungen abgebildet wird, und kein unmittelbar offensichtlicher Zusammenhang zwischen diesen und den makroskopischen Strömungsgrößen existiert (siehe zum Beispiel [19], [20]).

Da die Randbedingungen eine zentrale Rolle bei der Kopplung von Fluid und Struktur spielen, sollen nachfolgend die wichtigsten Klassen sowie ihre Umsetzung in der Lattice-Boltzmann-Methode angeschnitten werden. Weiterführende Details zur Formulierung von Randbedingungen können [19], [20], [36] entnommen werden.

periodische Randbedingung: Das Rechengebiet wird periodisch mit den Größen am gegenüberliegenden Rand fortgesetzt. Eine Möglichkeit ist es, eine zusätzliche Knotenebene zu definieren (*Pufferknoten*), in die die entsprechenden Werte für die Partikelverteilungen f kopiert werden (siehe Abbildung 7.3).

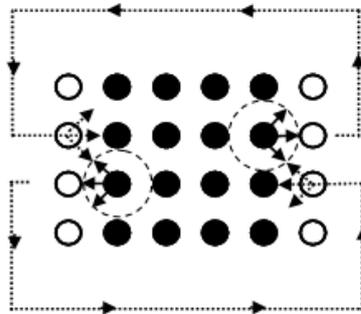


Abbildung 7.3: Schema der periodischen Randbedingung mit zusätzlicher Puffer-Knotenebene (weiß dargestellte Knoten), nach [36]

Symmetrie-Randbedingung: (auch *slip*-Randbedingung genannt.) Die Verteilungen f_i werden an einer Symmetrieebene gespiegelt. Es findet kein Massenaustausch statt. Die Komponenten der makroskopischen Geschwindigkeit an der Symmetrieebene werden nicht verändert. Die Komponente senkrecht zur Symmetrieebene ist gleich Null.

Haft-Randbedingung: Die makroskopische Geschwindigkeit des Fluids ist gleich der Geschwindigkeit der Wand. Ist die Wand ortsfest, so sind alle Komponenten der makroskopischen Geschwindigkeit gleich Null. Bei der Implementierung bedeutet dies, dass (falls die Berandungen auf einer Gitterlinie liegen)

alle sich auf einem Randknoten befindenden Verteilungen f_i umgekehrt werden müssen (Abbildung 7.4). Dies wird auch als *bounce-back*-Randbedingung bezeichnet [36]. Liegen die Berandungen *zwischen* den Gitterlinien, so müssen

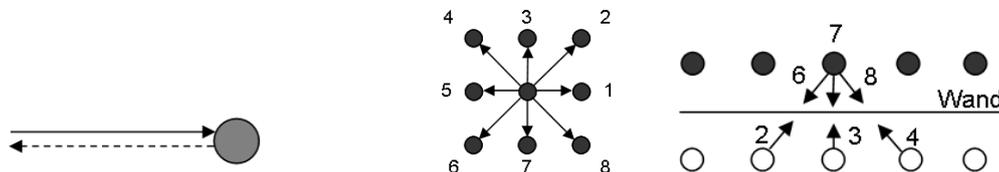


Abbildung 7.4: Haft- oder bounce-back-Randbedingung, 2 Fälle: 1. Berandung fällt mit einer Gitterlinie zusammen (links); 2. Berandung liegt zwischen zwei Gitterlinien (rechts); (nach [36])

die Berandungsknoten mit Verteilungen aus Pufferknoten beaufschlagt werden (siehe Abbildung 7.4).

Offene Berandungen: In den meisten Fragestellungen von praktischem Interesse treten Einfluss- und Ausflussrandbedingungen (*Inlets* und *Outlets*) auf.

Bei der Einflussrandbedingung werden die Pufferknoten am Einlassrand (Knotenreihe 0 in der untenstehenden Abbildung 7.5) mit Werten für die Verteilungen f besetzt, die der gewünschten makroskopischen Geschwindigkeit entsprechen. Eine Ausflussrandbedingung dagegen ist deutlich komplizierter zu

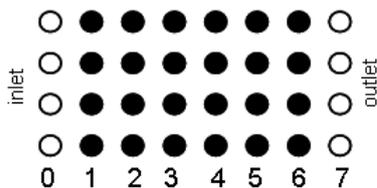


Abbildung 7.5: Ein- und Auslassrandbedingungen

implementieren. Typischerweise wird, um ein ausströmendes Medium abzubilden, der Gradient der oberflächennormalen Geschwindigkeit gleich Null gesetzt. Eine Möglichkeit ist es, lediglich die Verteilungen der vorletzten Knoten am Outlet (Abbildung 7.5: Knotenreihe 5) in die letzte Reihe (Knotenreihe 6) zu kopieren. Weisen die (makroskopischen) Strömungsgrößen jedoch einen deutlichen Gradienten auf, so werden sich stromaufwärts (d.h. weg vom Outlet) ausbreitende Störungen ausgelöst, die zu Instabilität der Rechnung führen können. Dieses Problem kann vermieden werden, wenn Partikelverteilungen am Outlet mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit – die so angepasst werden muss, dass die Massenerhaltung gegeben ist – zurück ins Strömungsgebiet reflektiert werden (siehe [36]).

Extrapolation: Eine allgemeinere Implementierungsmöglichkeit von Randbedingungen stellt ein Extrapolationsmodell dar. Eine Wand als Begrenzung des Strömungsgebietes wird durch Knoten dargestellt, auf denen zu bestimmten Zuständen gehörende Gleichgewichtsverteilungen angeordnet werden. Die Wand wird damit als Teil des Strömungsgebietes mit einem festgelegten Gleichgewicht modelliert, und führt den selben Kollisionsschritt wie die Fluidknoten durch. Um auch den Propagationsschritt durchführen zu können, ist eine zusätzliche Knotenreihe mit der o.g. Gleichgewichtsverteilung erforderlich (siehe Abbildung 7.6). Die Verteilung für die Wandknoten wird dann durch Interpolation aus den Fluid- und Solid-Knoten ermittelt.

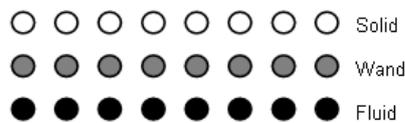


Abbildung 7.6: *Prinzip Extrapolation: Eine Knotenreihe repräsentiert die Wand selbst (weiß dargestellt), eine zusätzliche Knotenebene (grau) für den Solid-Bereich ist erforderlich;*

Die Surfel-Methode: Die oben beschriebenen Randbedingungen behandeln einfache Begrenzungen des Strömungsgebietes, die an den Gitterlinien ausgerichtet sind (siehe Abbildung 7.7, links). Sollen beliebige Geometrien abgebildet werden, so müssen auch Begrenzungen, die die Gitterlinien schneiden (siehe Abbildung 7.7, Mitte), behandelt werden können. Die *Surfel*-Methode⁵ stellt einen solchen Ansatz dar, der auch in POWERFLOW (siehe Kapitel 9) implementiert ist.

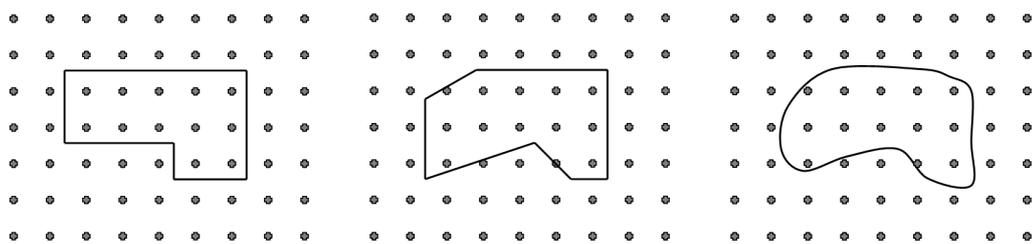


Abbildung 7.7: *An den Gitterlinien ausgerichtete Fluidbegrenzungen (links), Fluidbegrenzungen, die die Gitterlinien schneiden (Mitte), und Fluidbegrenzungen, die aus gekrümmten Oberflächen bestehen (rechts)*

Gekrümmte Oberflächen (siehe Abbildung 7.7, rechts), die in der Realität sehr häufig auftreten⁶, können als Facettenmodell dargestellt werden und damit

⁵Anmerkung: Der Ausdruck *Surfel* leitet sich von *surface element* her (© Exa Corporation).

⁶Zum Beispiel besteht die Oberfläche von Fahrzeugen typischerweise aus Bezier-Flächen

ebenso wie ebene, die Gitterlinien schneidende Berandungen behandelt werden.

Surfel sind elementare Bestandteile einer Fluidberandung, die eine Volumenzelle (ein sogenanntes *Voxel*) schneiden. Verteilungen f_i treffen auf das *Surfel* auf, und unter Berücksichtigung der Erhaltungssätze wird eine entsprechende Verteilung nach dem Kollisionsschritt wieder an das Fluid zurückgegeben. Abbildung 7.8 zeigt das Prinzip eines *Surfels* im zweidimensionalen Fall:

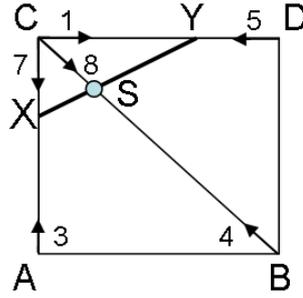


Abbildung 7.8: Fluidbegrenzung durch *Surfels*, nach [36]

Das zweidimensionale *Voxel* wird durch die Eckpunkte A, B, C, D aufgespannt und durch das durch die Punkte X und Y definierte *Surfel* zerteilt. Der pro Zeiteinheit durch das *Surfel* eintretende Massenstrom M_{in} muss – um Massenerhaltung sicherzustellen – gleich groß sein wie der an das Fluid zurückgegebene Massenstrom M_{out} :

$$M_{in} = a_7 f_7(C) \overline{AX} + a_8 f_8(C) \overline{SB} + a_1 f_1(C) \overline{YD} \quad (7.18)$$

$$M_{out} = a_3 f_3(A) \overline{XC} + a_4 f_4(B) \overline{SC} + a_5 f_5(D) \overline{YC} \quad (7.19)$$

($a_i = c_{ia} * n_a$ mit der nach außen (d.h. in Richtung des Fluids) weisenden Oberflächennormalen n_a des *Surfels*.)

Die Impulsströme können analog ermittelt werden:

$$J_x^{in} = f_1[C] a_1 \overline{YD} + f_8(C) a_8 \overline{SB} \quad (7.20)$$

$$J_x^{out} = f_4[B] a_4 \overline{CS} + f_8(D) a_5 \overline{YD} \quad (7.21)$$

$$J_y^{in} = f_7[C] a_7 \overline{AX} + f_8(C) a_8 \overline{SB} \quad (7.22)$$

$$J_y^{out} = f_3[A] a_3 \overline{CX} + f_8(B) a_4 \overline{CS} \quad (7.23)$$

Die drei Bedingungen

$$M^{out} = M^{in}, \quad J_x^{out} = J_x^{in}, \quad J_y^{out} = J_y^{in} \quad (7.24)$$

liefern ein Gleichungssystem für die drei Unbekannten $f_3(A), f_4(B)$ und $f_5(D)$ (siehe [36]).

7.5 Gegenüberstellung von Lattice-Boltzmann-Methode und klassischer CFD

Die Frage nach den Vorteilen der Lattice-Boltzmann-Methode im Vergleich zu auf den Navier-Stokes-Gleichungen basierenden *klassischen* CFD-Methoden stellt sich immer wieder.

In [107] sind Benchmark-Simulationen laminarer Strömungen mit dem Ziel, Lattice-Boltzmann-Berechnungen und Simulationen mit dem (kommerziellen) Navier-Stokes-Löser *CFX* sowie mit einem Finite-Element⁷-Strömungscode⁸ zu vergleichen, beschrieben. Demnach lässt die Lattice-Boltzmann-Methode bei der Simulation stationärer Strömungsprobleme keine signifikante Überlegenheit im Hinblick auf die erforderlichen Rechenressourcen erkennen. Bei durchgeführten Untersuchungen transienter Probleme in (schwach) kompressiblen Fluiden dagegen zeigt sich der Vorteil der Lattice-Boltzmann-Methode im Hinblick auf Rechenzeit und Genauigkeit.

Die Simulation turbulenter Vorgänge erfordert sowohl beim Einsatz von Navier-Stokes-Solvern als auch der Lattice-Boltzmann-Methode hohen Aufwand. Die Vorgehensweise der *Turbulenzmodellierung* in der *klassischen* CFD wurde bereits in Kapitel 5 angeschnitten⁹.

Auf die Besonderheiten der Behandlung von Turbulenz bei der Lattice-Boltzmann-Methode wird im nachfolgenden Kapitel 7.6 eingegangen.

7.6 Die Behandlung von Turbulenz

Prinzipiell kann mit der Lattice-Boltzmann-Methode direkte numerische Simulation – d.h. unter Auflösung aller relevanter Skalen – erfolgen.

Allerdings führen die bei technisch relevanten Strömungsproblemen zumeist auftretenden hohen Reynoldszahlen (Gleichung (3.1)) sowohl in physikalischer als auch in numerischer Hinsicht zu Einschränkungen:

- *physikalisch*: Ab einer bestimmten Reynoldszahl sind Strömungen turbulent. Um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten, muss die Simulation somit die Auflösung der turbulenten Skalen zulassen. (Diese Thematik wurde bereits in den Kapiteln 3 und 5 ausgeführt.)
- *numerisch*: Nach [21] ist der Quotient s aus Zeitschrittweite Δt und Relaxationsparameter τ (Gleichung (7.13)) beschränkt: $\frac{\Delta t}{\tau} \leq s_{max}$. (Konkrete Werte für s_{max} können ebenfalls [21] entnommen werden.)

Ein zu hoher Wert führt zu numerischer Instabilität des Lattice-Boltzmann-Verfahrens. Abhängig von den Gradienten der Strömungsgrößen darf unter Berücksichtigung von Gleichung (7.13) die Viskosität ν nicht zu gering sowie

⁷Auf Details zur Methode der Finiten Elemente wird im Kapitel 8 eingegangen

⁸*FeatFlow*, siehe [107]

⁹Für Details wurde dort bereits auf weiterführende Literatur, zum Beispiel [50] hingewiesen.

die Zeitschrittweite Δt und wegen Gleichung (7.3) damit auch die Gitterabmessung Δx nicht zu groß sein.

Die Viskosität geht zum einen direkt in die Reynoldszahl ein, und große Reynoldszahlen verursachen weiterhin typischerweise hohe Gradienten der Strömungsgrößen. Damit stellt die Größe der Reynoldszahl einen begrenzenden Parameter für die direkte numerische Simulation mit der Lattice-Boltzmann-Methode dar.

Aus diesen Gründen werden auch bei der Lattice-Boltzmann-Methode – analog zur Vorgehensweise bei der *klassischen CFD*, vgl. Kapitel 5 – Turbulenzmodelle eingesetzt.

Die Eigenschaften der Lattice-Boltzmann-Methode – insbesondere ihre inhärente Zeitabhängigkeit – lassen ein Large-Eddy-Modell als am geeignetsten erscheinen. Wegen des im Vergleich zu den auf den Navier-Stokes-Gleichungen basierenden Methoden geringeren rechnerischen Aufwands kann, wie aus [14], [15] hervorgeht, auch ein Zwei-Gleichungsmodell (zum Beispiel ein $k - \varepsilon$ - Modell, vgl. Kapitel 5) effektiv implementiert werden. Als einzige dazu erforderliche Abwandlung des Strömungsalgorithmus muß die räumliche Veränderlichkeit des Relaxationsparameters τ eingeführt werden, so dass die aus den dynamischen Strömungsgrößen k (turbulente kinetische Energie) und ε (Dissipationsrate) ermittelte Wirbelviskosität ν_t berücksichtigt werden kann (siehe [14]):

$$\tau = 3 \left((\nu + \nu_t) + \frac{1}{6} \right) \quad (7.25)$$

Die Filtergröße des Turbulenzmodells wird durch das Rechengitter bestimmt. Bei großen Reynoldszahlen ist es zudem aufwändig, die Wandschicht völlig aufzulösen. Vielmehr werden sogenannte *turbulente Wandmodelle* eingesetzt. Dabei wird eine künstliche Randbedingung eingeführt, die für den nicht aufgelösten Teil des Strömungsgebietes in Wandnähe die Wandschubspannungen modelliert. Anstatt eine *noslip*-Randbedingung zu verwenden, wird für die Berechnung um eine Zellenbreite von der Wand entfernt eine *slip*-Bedingung mit einer Strömungsgeschwindigkeit $u_0 \neq 0$ formuliert. Der Abstand zwischen der festen Wand und der gleitenden Oberfläche beträgt y_s .

Die untenstehende Abbildung 7.9 soll dieses Prinzip veranschaulichen. Entsprechend dem *universellen Wandgesetz* (siehe [79], [15]) wird ein logarithmischer Verlauf der tangentialen Geschwindigkeit an der Wand angenommen.

Die Wandschubspannung τ_w wird unter Heranziehung einer *Reibgeschwindigkeit* u_* , aus der sich ein Reibungskoeffizient C_f'' ableiten lässt, formuliert:

$$\tau_w = \rho u_*^2 = \frac{1}{2} C_f'' \rho u_0^2 \quad (7.26)$$

Werte für die Wandschubspannung τ_w werden mit Hilfe des *universellen Wandgesetzes* abgeschätzt (siehe zum Beispiel [79], [51], [52]). Der Quotient aus u_* und u_0 entspricht der folgenden logarithmischen Beziehung:

$$u^+ = \frac{u_s}{u_*} = \frac{1}{K} \ln \left(\frac{y_s u_*}{\nu} \right) + B \quad (7.27)$$

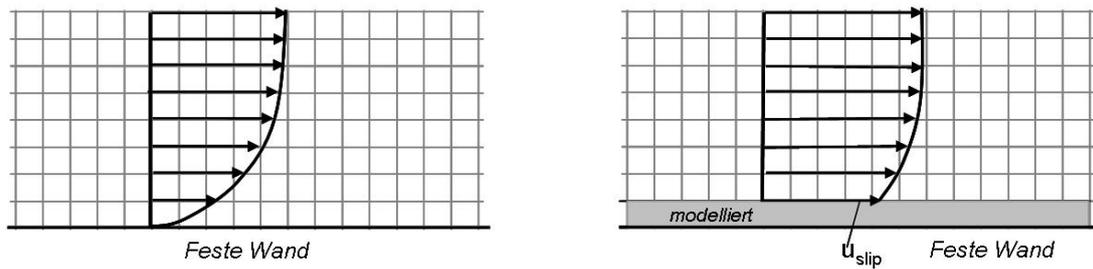


Abbildung 7.9: glatte Wand bei direkter Simulation (links) und logarithmisches Wandmodell (rechts)

K und B sind dabei empirisch zu bestimmende Konstanten, Details dazu können einschlägiger Literatur, zum Beispiel [14] entnommen werden.

Die Beziehungen (7.26) und (7.27) stellen somit zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten C_f'' und u_* dar.

Es sei weiterhin erwähnt, dass der obengenannte Wandmodell-Ansatz auch verwendet werden kann, um Randbedingungen für die turbulenten Strömungsgrößen, turbulente kinetische Energie k und Dissipationsrate ε , abzuleiten. Diese lauten:

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{C_\nu}} \quad (7.28)$$

$$\varepsilon = \frac{u_*^3}{Ky_s} \quad (7.29)$$

Die Konstante C_ν wird bei der Formulierung des $k-\varepsilon$ -Turbulenzmodells bestimmt, siehe Kapitel 5.

Kapitel 8

Die Methode der Finiten Elemente

8.1 Motivation

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die *Methode der Finiten Elemente*¹ als numerisches Berechnungsverfahren zur Simulation des Schwingungsverhaltens der betrachteten Strukturen eingesetzt.

Prinzipiell ist die Methode der Finiten Elemente geeignet zur Behandlung einer großen Bandbreite von physikalischen Problemstellungen. Neben Problemen der Festkörper- und Strukturmechanik, für deren Lösung die FEM ursprünglich entwickelt wurde, können zum Beispiel ebenso Feldprobleme (Elektromagnetismus, Akustik, Temperatur, Strömungen) abgebildet werden.

In diesem Kapitel soll lediglich ein kurzer Überblick über die Grundlagen der Methode gegeben werden. Für weiterführende Informationen sei auf die umfassende Literatur zu diesem Gebiet (als Beispiele seien [5], [6], [7], [9] genannt) verwiesen.

8.2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Es soll der in der Abbildung 8.1 dargestellte, beliebig geformte, dreidimensionale Körper betrachtet werden.

Der Körper soll isotropes, *linear elastisches* Materialverhalten aufweisen und lediglich kleine Verschiebungen erfahren, d.h. sich *geometrisch linear* verhalten².

Der Verformungszustand des Körpers lässt sich dann in jedem Punkt durch den in den drei Raumrichtungen x , y , z definierten Verschiebungsvektor

$$\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)^T \quad (8.1)$$

beschreiben.

¹abkürzend üblicherweise *FEM* genannt

²Bei den im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Strukturen trifft die Annahme sowohl des linear elastischen Materialverhaltens als auch der kleinen Verschiebungen zu. Für weiterführende Informationen zur Behandlung von nichtlinearen Materialien oder der Mechanik großer Verformungen sei der interessierte Leser auf entsprechende Literatur verwiesen. Informationen finden sich in [5], [6], [7], [9] sowie in den dort genannten weiterführenden Literaturstellen.

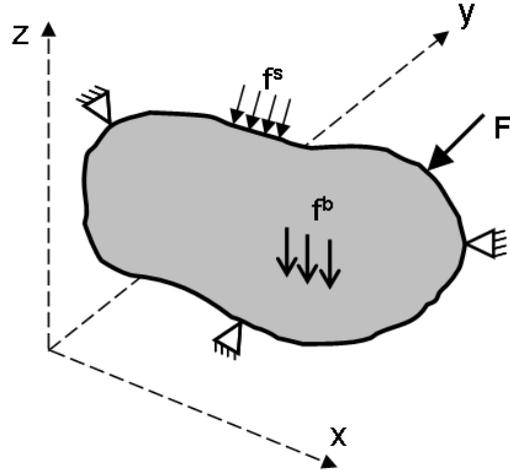


Abbildung 8.1: beliebig geformter, durch Einzelkräfte F_i , Oberflächenlasten q und Volumenlasten p belasteter und an mehreren Stellen gelagerter Körper

Die Dehnungen ε bzw. die Verzerrungen γ sind wie folgt definiert:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial w_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial w_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad (8.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \quad (8.3)$$

Sie können als *Dehnungsvektor*

$$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})^T \quad (8.4)$$

zusammengefasst werden.

Der Spannungszustand im Körper wird durch den *Spannungsvektor* beschrieben:

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})^T \quad (8.5)$$

Dabei sind σ_i die Normalspannungen in den drei Koordinatenrichtungen, während τ_{ij} die Schubspannungen in den Flächen normal zur Hauptspannungsrichtung bezeichnen.

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen, die im hier vorliegenden, linear elastischen Fall dem *Hookeschen Gesetz* entsprechen, lauten:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z), & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x + \sigma_y - \mu\sigma_z), & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(-\mu\sigma_x - \mu\sigma_y + \sigma_z), & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Die Konstanten λ und μ bezeichnen die sogenannten *Laméschen Konstanten*, E ist der *Elastizitätsmodul* und ν die *Querkontraktions-* oder auch *Poissonsche Zahl*.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.7)$$

Nach Umformung der Gleichung (8.6) und Übergang auf Matrizenform erhält man als Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen:

$$\vec{\sigma} = \mathbf{C}\vec{\epsilon} \quad (8.8)$$

mit der *Elastizitätsmatrix* \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Die Beziehung zwischen Verschiebung und Verzerrung gemäß (8.2) und (8.3) lässt sich ebenfalls in Matrizenform mit Hilfe des Verzerrungs-Verschiebungs-Matrixoperators

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

ausdrücken:

$$\vec{\epsilon} = \mathbf{L}\vec{w} \quad (8.11)$$

Nach [1] lässt sich unter Berücksichtigung von Gleichung (8.12)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \vec{w} \quad (\text{Massenbilanz}) \quad (8.12)$$

und Gleichung (8.13)

$$\rho \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \cdot \vec{f}_s \quad (\text{Impulsbilanz}) \quad (8.13)$$

sowie dem Hookeschen Gesetz (Gleichung (8.6)) ein geschlossenes Gleichungssystem für die Verschiebungskomponenten \vec{w} herleiten:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot w_i) + \mu \nabla^2 w_i + \rho_0 (f_i)_s \quad (8.14)$$

Gleichung (8.14) wird auch *Lamésche Gleichung* genannt.

Da analytische Lösungen der Gleichung (8.14) lediglich für Sonderfälle mit bestimmten Geometrien möglich sind, werden für den allgemeinsten Fall typischerweise Näherungslösungen herangezogen.

8.3 Spezielle Geometrien

Liegen anstatt eines dreidimensionalen Körpers von beliebiger Form und unter beliebiger Belastung spezielle Geometrien bzw. Belastungen vor, so wird typischerweise die allgemeine Formulierung (Gleichung (8.14)) entsprechend eingeschränkt und entsprechend den jeweiligen Spannungs- und Verzerrungszuständen angepasst.

Beispiele für derartige Formulierungen sind:

- *Balken*: Die Querschnittsfläche der Struktur ist klein im Vergleich zur Längsausdehnung;
- *ebener Spannungszustand*: Spannungen in einer Richtung können vernachlässigt werden (zum Beispiel Scheiben: ebene Geometrie, Belastung in der Scheibenebene, geringe Dicke im Vergleich zur Flächenausdehnung);
- *ebener Verzerrungszustand*: analog zum ebenen Spannungszustand; Verzerrungen in einer Richtung werden als konstant angenommen.
- *Axialsymmetrie*: Körper und Belastung sind rotationssymmetrisch;
- *Platten*: ebene Geometrie, Belastung senkrecht zur Plattenebene, geringe Dicke im Vergleich zur Flächenausdehnung;
- *Schalen*: räumliche Geometrie, Belastung sowohl in Schalenebene als auch senkrecht dazu, geringe Dicke im Vergleich zur Flächenausdehnung;

8.4 Diskretisierung und Ansatzfunktionen

Bei der FEM wird das Berechnungsgebiet in endlich große Teilgebiete, die sogenannten *Finiten Elemente*, die über *Knoten* und gemeinsame *Kanten* miteinander verbunden sind, zerlegt. Die Gesamtstruktur wird demnach als ein Verbund von einzelnen Strukturelementen idealisiert³.

Die problemspezifischen Freiheitsgrade werden dabei als *Knotenvariablen* in den Knotenpunkten definiert. Im Fall der verschiebungsbezogenen FEM⁴ sind dies die Knotenverschiebungen \vec{w} .

Zur Beschreibung der Verschiebungsverläufe innerhalb eines Elements werden Ansatzfunktionen formuliert. Diese sind Näherungen - in der Regel Polynome -, da

³Die Elemente haben oft auch die Dimension der Struktur - also eindimensional bei Balken, zweidimensional bei Schalen oder Platten, dreidimensional bei einem Kontinuum. Prinzipiell kann man jedoch beispielsweise auch schalenförmige Körper durch dreidimensionale Elemente abbilden. Allerdings müssten entweder über die Dicke der Struktur mehrere Elemente angeordnet werden, so dass bei den meisten Problemen die erforderliche Gesamtanzahl der Elemente stark ansteigen und das zu lösende Gleichungssystem sehr groß würde, oder es müssten Ansatzfunktionen mit hohen Polynomgraden gewählt werden.

⁴Auch das FE-Programm *ANSYS*, das im Rahmen der vorliegenden Arbeit eingesetzt wurde, basiert auf der Verschiebungsmethode.

die exakten Verschiebungsverläufe im Allgemeinen nicht bekannt sind⁵. Die Art der Ansätze (zum Beispiel lineare, quadratische oder höhergradige Polynome) ist abhängig sowohl von der Form des Elements als auch von der Art des abzubildenden Problems, und es müssen an den Elementgrenzen bestimmte Stetigkeitsanforderungen erfüllt sein.

Der Funktionsverlauf im Element wird durch Funktionswerte w_i und ggf. durch die Werte partieller Ableitungen in den Knoten beschrieben⁶.

Die Näherungsfunktionen für ein Element m können als Linearkombinationen von sogenannten *Formfunktionen* N_i^m mit den Knotenvariablen w_i^m als Koeffizienten dargestellt werden

$$w^m(x, y, z) = \sum_{i=1}^p w_i^m N_i^m(x, y, z) \quad (8.15)$$

Die Formfunktion N_i^m hat folgende Eigenschaft:

$$N_i^m(x_j^m, y_j^m, z_j^m) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{für } j \neq i \end{cases} \quad (8.16)$$

Um das gesamte Problem zu betrachten, können die Ansätze (8.15) aller n Elemente vereinigt werden, wobei die unbekanntenen Knotenvariablen fortlaufend numeriert werden. Es ergibt sich dann folgender Ausdruck für $\vec{w}(x, y, z)$

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^n w_k N_k(x, y, z) \quad (8.17)$$

Die unbekanntenen Knotenvariablen werden nun als Koeffizienten w_i^m ausgedrückt.

8.5 Approximation durch die FEM

Eine Verschiebungsinterpolationsmatrix \mathbf{H}^m verknüpft die Verschiebungen in den Knoten des m -ten Elements w_i^m mit den globalen Freiheitsgraden des Gesamtsystems. Der Vektor \vec{w} bezeichnet dabei den Verschiebungsvektor im globalen Koordinatensystem, der alle Knotenfreiheitsgrade enthält.

$$\vec{w}^m = \mathbf{H}^m \vec{w} \quad (8.18)$$

Die Spannungen $\vec{\sigma}^m$ in einem Element werden aus den Verzerrungen unter Heranziehung der Elastizitätsmatrix \mathbf{C}^m des entsprechenden Elementes bestimmt. \mathbf{C}^m entspricht der im Abschnitt 8.2 definierten Matrix \mathbf{C} (Gleichung 8.9) und charakterisiert das Materialgesetz für das jeweilige Element. (Details dazu können der

⁵Lediglich in Sonderfällen, wie zum Beispiel bei Balkenelementen, entsprechen die Verschiebungsansätze den exakten analytischen Lösungen – im Falle eines Balkens entspricht dies der Balkentheorie.

⁶Für Details zu typischen Ansatzfunktionen sowie deren Stetigkeitseigenschaften sei auf [6], [7], [9], [5] verwiesen.

Literatur, zum Beispiel [5], [6], [7] [10], [11] entnommen werden.) Mit $\vec{\sigma}^{m,0}$ werden die im Element gegebenenfalls vorhandenen Anfangsspannungen bezeichnet.

$$\vec{\sigma}^m = \mathbf{C}^m \vec{\varepsilon}^m + \vec{\sigma}^{m,0} \quad (8.19)$$

Auf den Körper können unterschiedliche Belastungsarten einwirken: Oberflächenspannungen \vec{f}^S , Einzelkräfte \vec{F}^i oder Volumenlasten \vec{f}^B müssen auf die jeweiligen Knoten bezogen werden. Die Reaktionskräfte zählen ebenfalls zu den Belastungen (siehe Abschnitt 8.7).

Das Gleichgewicht kann zum Beispiel durch das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* ausgedrückt werden: Befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, so ist für kleine, virtuelle und kompatible Verschiebungen, die auf den Körper einwirken und den wesentlichen Randbedingungen gehorchen, die gesamte innere virtuelle Arbeit gleich der gesamten äußeren virtuellen Arbeit [5].

Für eine Gruppierung von n Elementen mit den Nummern $m = 1, 2, 3, \dots, n$ gilt somit:

$$\sum_m \int_{V^m} \overline{\varepsilon}^{mT} \vec{\sigma}^m dV^m = \sum_m \int_{V^m} \overline{w}^{mT} \vec{f}^B dV^m + \sum_m \int_{S^m} \overline{w}^{mT} \vec{f}^S dS^m + \sum_i \overline{w}^{iT} \vec{F}^i \quad (8.20)$$

Die überstrichenen Ausdrücke symbolisieren virtuelle Verschiebungen.

Unter Berücksichtigung von (8.18), (8.2), (8.19) wird (8.20) zu:

$$\begin{aligned} \overline{w}^T \left(\sum_m \int_{V^m} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{C}^m \mathbf{B}^m dV^m \right) \vec{U} &= \overline{w}^T \sum_m \int_{V^m} \mathbf{H}^{mT} f^{\vec{B},m} dV^m \\ &+ \overline{w}^T \sum_m \int_{S^m} \mathbf{H}^{S,mT} f^{\vec{S},m} dS^m \\ &+ \overline{w}^T \sum_m \int_{V^m} \mathbf{B}^{mT} \vec{\sigma}^m dV^m \\ &+ \overline{w}^T \vec{F} \end{aligned} \quad (8.21)$$

$\mathbf{H}^{S,m}$ ist die Interpolationsmatrix für die Oberflächenverschiebung und kann aus \mathbf{H}^m unter Verwendung der Oberflächenkoordinaten des Elements m ermittelt werden.

Die Matrix \mathbf{B}^m ergibt sich unter Verwendung von (8.10) aus

$$\mathbf{B}^m = \mathbf{L} \mathbf{N}^m, \quad (8.22)$$

wobei \mathbf{N}^m die Matrix der Knotenansatzfunktionen ist.

Durch Anwenden des Prinzips der virtuellen Arbeit und Aufbringen von virtuellen Einheitsverschiebungen der Reihe nach für alle Verschiebungskomponenten erhält man schließlich das Gleichungssystem (8.23) für die diskreten Verschiebungen in den Knotenpunkten der Struktur, das numerisch gelöst werden kann:

$$\mathbf{K} \vec{w} = \vec{R} \quad (8.23)$$

\mathbf{K} ist die sogenannte *Gesamtsteifigkeitsmatrix* und kann durch die Aufsummierung der Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}^m ermittelt werden:

$$\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{K}^m = \sum_m \int_{V^m} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{C}^m \mathbf{B}^m dV^m \quad (8.24)$$

Analog zur Vorgehensweise bei den Steifigkeitsmatrizen kann der Lastvektor \vec{R} durch Summation der Elementanteile zusammengesetzt werden.

$$R = \sum_m \int_{V^m} \mathbf{H}^{mT} \vec{f}^{B,m} dV^m + \sum \int_{S^m} \mathbf{H}^{S,mT} \vec{f}^{S,m} dS^m \quad (8.25)$$

$$+ \sum \int_{V^m} \mathbf{B}^{mT} \vec{\tau}^m dV^m + \vec{F}$$

Beim linear elastischen Kontinuum ist das Prinzip der virtuellen Verschiebungen identisch mit dem Prinzip von der Stationarität des Gesamtpotentials eines Systems [5]. Physikalisch lässt sich das zugehörige Variationsproblem etwa im Falle eines statischen Problems anschaulich mit der Forderung nach einem Minimum der potentiellen Energie (Voraussetzung für einen stabilen Zustand) erklären.

Aus den bekannten Verschiebungen können in einer Nachlaufrechnung mit Hilfe der Beziehungen (8.2) und (8.19) die Dehnungen und die Spannungen ermittelt werden.

8.6 Strukturdynamische Problemstellungen

Im Fall, dass die auf eine Struktur einwirkenden Lasten oder Randbedingungen sich schnell – gemessen an den entsprechenden Eigenfrequenzen der Struktur – ändern, sind Trägheitskräfte zu berücksichtigen. Das *d'Alembertsche Prinzip* besagt, dass Trägheitskräfte wie zusätzliche, auf die Struktur einwirkende Kräfte behandelt werden können. Der Beitrag der räumlich verteilten Trägheitskräfte aufgrund der Masse der Struktur sowie der in den meisten Systemen vorhandenen, auf das jeweilige Element m bezogenen Dämpfung⁷ κ^m lautet damit:

$$R_B = \sum \int_{V^m} \mathbf{H}^{mT} \left(\vec{f}^{B,m} - \rho^m \mathbf{H}^m \vec{\ddot{w}} - \kappa^m \mathbf{H}^m \vec{\dot{w}} \right) dV^m \quad (8.26)$$

ρ^m ist dabei die Dichte der Struktur, und \vec{w} sowie $\vec{\dot{w}}$ stellen den Geschwindigkeits- bzw. den Beschleunigungsvektor dar.

Damit wird die Gleichung (8.23) zur Bewegungsgleichung (8.27)

$$\mathbf{M} \vec{\ddot{w}} + \mathbf{C} \vec{\dot{w}} + \mathbf{K} \vec{w} = \vec{R} \quad (8.27)$$

mit der Massenmatrix

$$\mathbf{M} = \sum_m M_m = \sum_m \int_{V^m} \rho^m \mathbf{H}^{mT} \mathbf{H}^m dV^m \quad (8.28)$$

und der Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{C} = \sum_m \mathbf{C}_m = \sum_m \int_{V^m} \kappa^m \mathbf{H}^{mT} \mathbf{H}^m dV^m. \quad (8.29)$$

⁷Die Ermittlung von korrekten Dämpfungswerten ist meist kompliziert und erfolgt typischerweise empirisch. Details zur Berücksichtigung unterschiedlicher Dämpfungseigenschaften können etwa [11] entnommen werden.

Die Gleichung (8.27), die das transiente Verhalten der Struktur abbildet, kann mit Hilfe von zum Beispiel dem *Newmarkschen Zeitintegrationschema* gelöst werden. Dabei wird die insgesamt betrachtete Zeitspanne T in n oftmals gleich groß angenommene Intervalle der Länge Δt unterteilt. Für die einzelnen Zeitintervalle werden Entwicklungen mit Finiten Differenzen herangezogen.

Es wird von den folgenden Ansätzen ausgegangen (siehe [39], [5]):

$$\vec{w}(t + \Delta t) = \vec{w}(t) + \left[(1 - \delta)\vec{w}(t) + \delta\vec{w}(t + \Delta t) \right] \Delta t \quad (8.30)$$

$$\vec{w}(t + \Delta t) = \vec{w}(t) + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \vec{w}(t) + \alpha \vec{w}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2 \quad (8.31)$$

α und δ sind festzulegende Parameter. Sie müssen so gewählt werden, dass ausreichende Stabilität⁸ und Integrationsgenauigkeit resultiert (siehe Gleichung (8.33)). (8.30) und (8.31) werden umgeformt und eingesetzt in die Bewegungsgleichung (8.27) zur Zeit $(t + \Delta t)$:

$$\mathbf{M}\vec{w}(t + \Delta t) + \mathbf{C}\vec{w}(t + \Delta t) + \mathbf{K}\vec{w}(t + \Delta t) = \vec{R} \quad (8.32)$$

Gleichung (8.32) kann nach $\vec{w}(t + \Delta t)$ aufgelöst werden, und unter Verwendung von (8.30) und (8.31) lassen sich $\vec{w}(t + \Delta t)$ und $\vec{w}(t + \Delta t)$ ermitteln.

Nach [6] ist Gleichung (8.32) bedingungslos stabil, wenn folgende Bedingungen für α und δ gelten:

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta \right)^2 \quad \delta \geq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} + \delta + \alpha > 0 \quad (8.33)$$

Dies bedeutet, dass die Stabilität der Lösung nicht von der gewählten Zeitschrittgröße Δt abhängt. Da zur Berechnung des Strukturverhaltens zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ auch die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt $(t + \Delta t)$ herangezogen wird, bezeichnet man die *Newmark-Methode* als *implizites* Verfahren zur Zeitintegration.

Anmerkung: Im Gegensatz dazu wird bei *expliziten* Verfahren⁹ die Lösung zum Zeit $t + \Delta t$ aus den Größen zur Zeit t ermittelt. Explizite Verfahren haben die Eigenschaft, beim Überschreiten einer kritischen Zeitschrittgröße instabil zu werden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde ein explizites mit einem impliziten Verfahren gekoppelt. Die daraus resultierenden Besonderheiten im Hinblick auf die Abstimmung der Zeitschrittlängen werden in Kapitel 12 ausgeführt.

⁸*Stabilität* eines Zeitintegrationsverfahrens bedeutet nach [5], dass die mit einem (im Vergleich zur Eigenschwingperiode T des betrachteten Systems) beliebig großen Zeitschritt Δt ermittelte Lösung für beliebige Anfangsbedingungen nicht über alle Grenzen wächst. Gilt dies nur für Werte von Δt unterhalb einer bestimmten Grenze, so nennt man das Verfahren *bedingt stabil*.

⁹dazu zählt zum Beispiel das *explizite Euler-Verfahren* als einfaches Einschrittverfahren, siehe [78]

8.7 Randbedingungen

Auf ein Kontinuum können neben den weiter oben erwähnten Belastungen bzw. Krastrandbedingungen \vec{f}^S , \vec{F}^i , \vec{f}^B auch Verschiebungsrandbedingungen einwirken. Die Krastrandbedingungen gehen unmittelbar in den Belastungsvektor R_b ein. Der Verschiebungsvektor sowie die Systemmatrizen in den Bewegungsgleichungen können nach unbekanntem Verschiebungen \vec{w}_a und aufgezwungenen Verschiebungen \vec{w}_b aufgeteilt werden.

(8.27) lautet damit wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ab} \\ \mathbf{M}_{ba} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{w}_a \\ \ddot{w}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{aa} & \mathbf{C}_{ab} \\ \mathbf{C}_{ba} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_a \\ \dot{w}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_a \\ w_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a \\ r_b \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

Zunächst wird der Lastvektor über die aufgezwungenen Anteile aus w_b modifiziert. Bei der Lösung des Gleichungssystems werden dann die unbekanntem w_a bestimmt (siehe etwa [5]).

Kapitel 9

Verwendete Software

9.1 Zusammenfassung

Zur Simulation der im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten gekoppelten Problemstellungen wurde soweit möglich auf kommerziell verfügbare Programme zurückgegriffen. Für diese Vorgehensweise sprachen mehrere Gründe:

Es sollte eine Methode entwickelt werden, mit der auch die Simulation vielfältiger, komplexer, industriell relevanter Problemstellungen ermöglicht wird. Die Lösung von Teilen gekoppelter Probleme (wie zum Beispiel die (ungekoppelte) strukturdynamische Berechnung und die Simulation der Strömung) gehören derzeit zum Stand der Technik. Es existiert bereits langjährig erprobte Software, so dass eine erneute Implementierung keinerlei Vorteil bringt, sondern vielmehr einen nicht zu rechtfertigenden Aufwand bedeuten würde.

Weiterhin sind in kommerzieller Software üblicherweise Schnittstellen zu gängigen CAD-Programmen enthalten, so dass auf dort aufgebaute oder gegebenenfalls auch auf bereits vorhandene Modelle zugegriffen werden kann.

Schließlich lässt der Einsatz von etablierter Software die Akzeptanz in weiten Bereichen der Industrie erwarten.

9.2 Das Lattice-Boltzmann-Programm POWERFLOW

Zur Simulation des Strömungsproblems wurde die Software POWERFLOW (Version 3.4) der Firma EXA verwendet. Dieses Programm ist derzeit das einzige kommerziell vertriebene und professionell unterstützte Lattice-Boltzmann-CFD-Programm auf dem Markt und beinhaltet Lösungen für die vielfältigen Anforderungen, die sich aus der Simulation von Strömungsvorgängen ergeben. Einige wichtige Eigenschaften von POWERFLOW sollen explizit erwähnt werden:

Preprozessing: Jede Simulation wird im Preprozessor definiert. Es besteht die Möglichkeit, elementare Geometrien (Rechtecke, Zylinder etc.) zu definieren,

und es können umfangreiche und komplexe geometrische Objekte in verschiedenen Formaten¹ importiert werden.

Die Definition und Manipulation von Parametern und Variablen sowie die Durchführung mathematischer Operationen ist möglich.

Weiterhin besteht die Möglichkeit, innerhalb eines Modells unterschiedliche Gitter-Verfeinerungsstufen zu verwenden. Für Details hierzu sei auf [38] verwiesen.

Der Preprozessor EXACASE kann PYTHON-Skripte verarbeiten (siehe unten, Kapitel 9.4.1).

Strömungslöser: Der zentrale Bestandteil des POWERFLOW-Pakets ist der Strömungskern. Die im Preprozessor definierten Simulationen werden transient gelöst. Nach dem Start der Simulation tritt zunächst eine anfängliche *Störung* auf, bis sich ein *eingeschwungener* Zustand eingestellt hat. Die Simulation läuft also ab wie ein Windkanalversuch – ein typisches Merkmal des Lattice-Boltzmann-Verfahrens, wie im Kapitel 7 bereits ausgeführt.

POWERFLOW unterstützt die Parallelisierung von Strömungsberechnungen. Eine Berechnung kann dabei sowohl auf Mehrprozessormaschinen durchgeführt werden als auch auf über LAN vernetzte Rechner verteilt werden². Von POWERFLOW wird die LAM³-Version von MPI⁴ benutzt. Aufgrund der hohen erforderlichen Ressourcen für transiente Strömungsberechnungen ist die Möglichkeit der verteilten Rechnung insbesondere für industriell relevante Problemstellungen erforderlich.

Turbulenzmodellierung: Mit POWERFLOW können in Abhängigkeit vom Reynolds-Zahl⁵-Bereich sowohl direkte Simulationen – d.h. unter Auflösung aller Skalen – als auch Berechnungen unter Einsatz eines Turbulenzmodells durchgeführt werden. Es sind ein $k-\varepsilon$ -Modell sowie ein Wandmodell (siehe Kapitel 5 und 7) implementiert. Diese sind jedoch nicht für alle Geschwindigkeitsbereiche gültig. Strömungen mit niedriger Reynoldszahl werden typischerweise direkt simuliert, während bei hohen Reynoldszahlen das Turbulenzmodell zum Einsatz kommt. Im Übergangsbereich besteht eine Lücke, die derzeit rechnerisch nicht behandelt werden kann:

- $Re \leq 10000$: direkte Simulation
- $10000 \leq Re \leq 100000$: *derzeit⁶ keine Lösung möglich!*
- $Re \geq 100000$: Simulation unter Verwendung eines Turbulenzmodells

¹zum Beispiel NASTRAN, *Stereolithographie* (stl)

²Ein solches Rechner-Cluster muß nicht zwangsläufig homogen sein, sondern kann ebenso aus Rechnern mit unterschiedlichen Hardwareeigenschaften bestehen.

³Local Area Multicomputer

⁴MPI steht für *Message Passing Interface*, eine Bibliothek, die die Kommunikation verschiedener, paralleler Prozesse ermöglicht

⁵Definition der Reynoldszahl: siehe Kapitel 3

⁶d.h. in POWERFLOW, Version 3.4

Postprocessing: Es existieren umfangreiche Optionen und Zusatzprogramme zum Postprocessing von Berechnungen und zur Visualisierung von Strömungen.

Als ein zusätzliches Werkzeug wird POWERSPECTRUM eingesetzt. Insbesondere können damit Fast-Fourier-Transformationen durchgeführt werden. Dies ist zur Beurteilung von akustischen Ergebnissen unabdingbar.

Eine bedeutende Schwierigkeit bei der Verwendung von POWERFLOW stellt das Fehlen einer Programmierschnittstelle dar. Auf einem Gitter definierte Daten können als sogenanntes *table* aus einer externen Datei eingelesen werden. Auch sonst muss, um Daten mit anderen Programmen auszutauschen, mit File-Schnittstellen gearbeitet werden.

9.3 Das Finite-Element-Programm ANSYS

Zur Simulation des strukturmechanischen Teiles wurde das Finite-Elemente-Programm ANSYS herangezogen.

Anmerkung: Die Möglichkeiten von ANSYS beschränken sich keineswegs auf strukturmechanische und -dynamische FE-Simulationen. Vielmehr können eine Vielzahl von Untersuchungen in den unterschiedlichsten Disziplinen (wie zum Beispiel Elektromagnetismus, Wärmeleitung, Akustik, um nur einige zu nennen) durchgeführt werden. Wie bereits im Kapitel 8 erwähnt, ist die FEM prinzipiell für vielerlei Fragestellungen anwendbar; jedoch war dies im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht von Interesse.

Die für die vorliegende Arbeit wichtigsten Merkmale und Funktionen von ANSYS sind in der nachfolgenden Auflistung beschrieben. Weitere Informationen sowie Details können [10], [11] sowie [39] entnommen werden.

Elementbibliothek: ANSYS verfügt über eine umfangreiche Elementbibliothek. So stehen zum Beispiel *Solid*⁷-, *Shell*⁸-, oder auch Balkenelemente mit den unterschiedlichsten Eigenschaften zur Verfügung.

Nichtlinearitäten: In ANSYS sind unterschiedliche Materialgesetze implementiert. Neben linearem Materialverhalten entsprechend dem Hookschen Gesetz können Materialmodelle verwendet werden, die nichtlineares Materialverhalten charakterisieren.

Probleme, in denen geometrische Nichtlinearitäten (große Verformungen, Kontaktprobleme) auftreten, können behandelt werden.

Geometrieimport: Mit CAD-Werkzeugen erstellte Geometrien können gehandhabt bzw. über entsprechende Geometrieschnittstellen importiert werden. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, auch sehr komplexe Geometrien im Preprozessor selbst aufzubauen. Auch eine parametrische Beschreibung von Geometrien ist möglich (siehe auch unten, *ANSYS Programming Design Language*).

⁷d.h. dreidimensionale Elemente

⁸Schalenelemente

Gleichungslöser: Es stehen viele unterschiedliche, ausgereifte Gleichungslöser zur Verfügung, so dass jeweils der am besten geeignete Solver für die jeweilige Anforderung gewählt werden kann. Für die Simulation transienter Problemstellungen werden geeignete Zeitintegrationsschemata verwendet.

Ansys Programming Design Language: Das Programm ANSYS verfügt über die integrierte, sehr mächtige Interpretersprache ANSYS *Programming Design Language* (abkürzend *APDL* genannt). Sie besteht aus mehreren tausend Befehlen, von denen jeder durch vier Buchstaben und gegebenenfalls ein Sonderzeichen ausreichend beschrieben ist. Letztendlich kann jede Aktion, die durch ANSYS ausgeführt wird, als Befehlssequenz geschrieben und in ein Skript eingefügt werden. So können sogar komplette, parametrische FE-Modelle mit Randbedingungen und Belastungen mit *APDL* aufgebaut werden. Neben den ANSYS-Kommandos existieren auch eigentliche Skripting-Kommandos, wie Schleifen, Abfragen, Wiederholungen, Makros sowie eine große Anzahl von Skalar-, Vektor- und Matrizenoperationen. Variablen unterschiedlicher Typen (zum Beispiel Character, Integer-, Gleitkomma-Zahlen) können verwendet werden, und es besteht die Möglichkeit, externe Dateien zu lesen und zu schreiben.

Die *APDL*-Skripte lassen sich in einem Batch-Programmablauf ausführen. Damit wird die Steuerbarkeit eines ANSYS-Laufs *von außen* - das heißt auch als *child*-Prozess eines anderen Programms - ermöglicht.

MPCCI-Schnittstelle: ANSYS verfügt weiterhin über eine MPCCI⁹-Schnittstelle, die hier der Vollständigkeit halber erwähnt werden soll. Diese stellt eine auf *MPI* basierende Softwareumgebung dar, die den Austausch von Daten zwischen unterschiedlichen Netzen ermöglicht und etwa zur Simulation von gekoppelten Problemen - insbesondere zwischen Fluid und Struktur - , oder beim Einsatz von parallelisierten numerischen Solvern verwendet wird. Allerdings sind Schnittstellen oder zumindest die Möglichkeit, MPCCI einzubinden, für alle beteiligten Simulationscodes erforderlich. Da jedoch POWERFLOW, wie oben bereits ausgeführt, nicht über eine derartige Schnittstelle verfügt, wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit MPCCI nicht verwendet.

9.4 Die Skriptsprache PYTHON

9.4.1 Skripte in POWERFLOW

Die objektorientierte Skriptsprache PYTHON wird von POWERFLOW unterstützt. Im Preprozessor EXACASE können skriptorientiert Berechnungsmodelle zusammen mit allen Solvereinstellungen aufgesetzt werden. Ein PYTHON-Skript ist somit die einzige Möglichkeit, EXACASE automatisiert auszuführen. Ebenso werden die Simulationsläufe selbst über den Aufruf von Skripten ausgeführt.

⁹Mesh-based parallel Code Coupling Interface

9.4.2 Programmierung des Kopplungsprogrammes

Um die beiden kommerziellen Programme ANSYS und EXA POWERFLOW zu steuern, wurde ebenfalls PYTHON verwendet.

Da ein PYTHON-Skript durch einen Interpreter ausgeführt wird, ist ein in PYTHON geschriebenes Programm plattformunabhängig. Allerdings ist es hinsichtlich der Geschwindigkeit einem (etwa in C++ geschriebenen) kompilierten Programm unterlegen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden aber lediglich nicht zeitkritische Programmteile mit PYTHON realisiert. Die zeitintensiven Vorgänge sind die Programmläufe in ANSYS und in POWERFLOW. Damit ist die die Geschwindigkeit des PYTHON-Programmes nicht ausschlaggebend.

Mit PYTHON wurde ein Kopplungsprogramm erstellt, das sowohl einseitige als auch bidirektionale gekoppelte Berechnungen ermöglicht. ANSYS und POWERFLOW sowie die weiteren Hilfsprogramme des EXA POWERFLOW-Paketes werden vom Kopplungsprogramm als sogenannte *Child*-Prozesse (siehe Abbildung 9.1) ausgeführt.

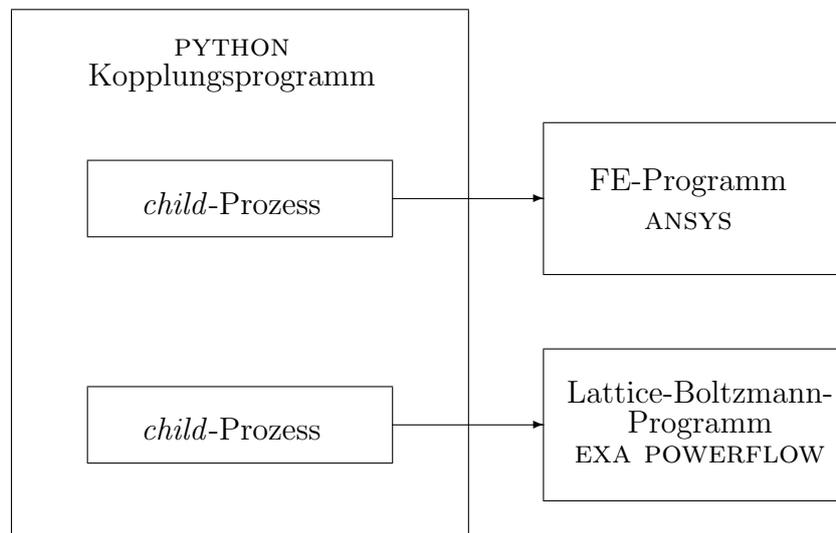


Abbildung 9.1: Kopplungsprogramm mit Child-Prozessen

Um das Kopplungsprogramm benutzerfreundlich zu gestalten, wurde eine graphische Oberfläche erstellt (siehe Abbildung 9.2). Diese ermöglicht neben der interaktiven Eingabe der erforderlichen Simulationsparameter die Abspeicherung der Simulationsumgebung.

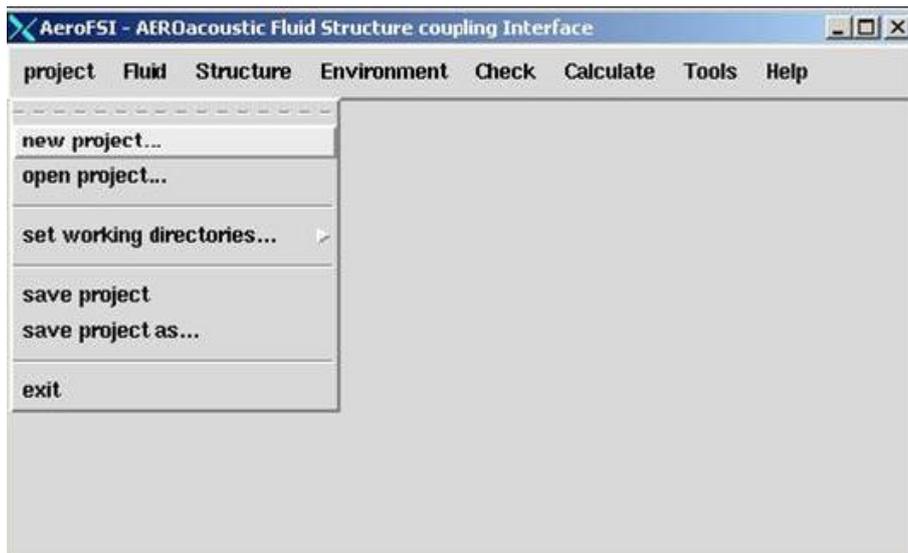


Abbildung 9.2: Grafische Benutzeroberfläche des Kopplungsprogramms

Kapitel 10

Der umströmte Körper - ein Testfall für die Simulation aeroakustischer Phänomene

10.1 Motivation

Um Methoden und Werkzeuge zur Simulation von strömungsinduziertem Schall hinsichtlich der Richtigkeit der gelieferten Ergebnisse beurteilen und mit der Realität abgleichen zu können, werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit Validierungsrechnungen durchgeführt. Dazu sind Modelle erforderlich, deren strömungsmechanische und akustische Eigenschaften hinreichend genau bekannt sind.

10.2 Umströmte kreisrunde Zylinder

Das Phänomen von Schallentstehung im Nachlauf angeströmter Zylinder war bereits Gegenstand zahlloser Untersuchungen und Messungen. Die dabei auftretenden Effekte sind bekannt. Abhängig von der Größe der Reynoldszahl Re ¹ stellen sich laminare Umströmungen, regelmäßig abgelöste Wirbel - die sogenannte *von Kármánsche Wirbelstraße* - und bei noch höheren Reynoldszahlen turbulente Nachläufe ein.

Es existiert umfangreiche Literatur mit ausführlichen Ergebnissen, die als Vergleich mit durch Simulationen erhaltene Ergebnisse dienen können (siehe etwa [34], [35]). Die Ergebnisse umfassen qualitative und quantitative Größen, insbesondere die zu erwartenden und teilweise in Messungen bestätigten Frequenzen und Intensitäten des Schalls. Der umströmte Zylinder ist daher als Testfall zur Validierung sowohl von Methoden zur Strömungssimulation als auch von akustischen Berechnungen geeignet. In der untenstehenden Abbildung 10.1 ist ein derartiger Zylinder mitsamt der Definition seiner Abmessungen gezeigt.

¹Definition von Re : siehe Kapitel 3

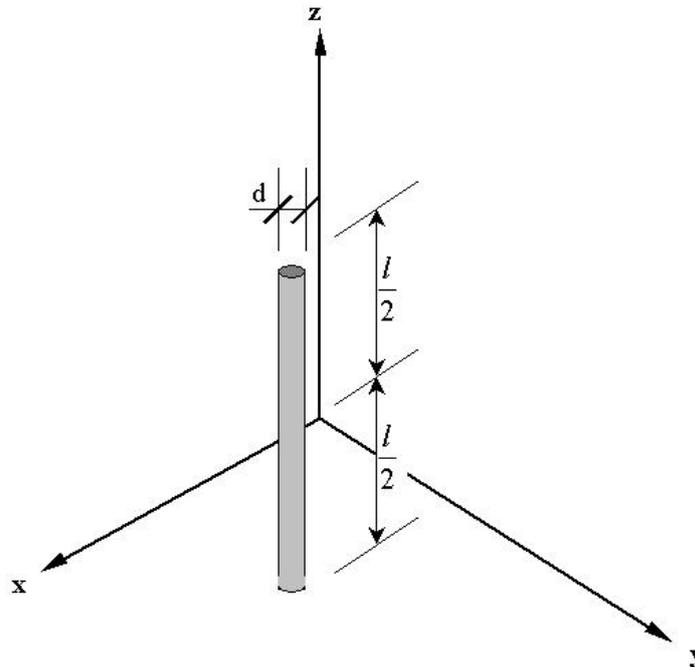


Abbildung 10.1: Umströmter Zylinder als Modell zur Validierung von aeroakustischen Berechnungen

10.3 Strömungsmechanische Phänomene

Ein Zylinder in einer Strömung stellt ein Hindernis dar, welches eine Störung des Strömungsfeldes verursacht. Die genaue räumliche und qualitative Ausbildung der Störungszone wird maßgeblich von den Eigenschaften der Strömung sowie den Abmessungen des Zylinders beeinflusst. Dabei verändert sich Richtung und Höhe der lokalen Strömungsgeschwindigkeit auch zeitabhängig.

Prinzipiell können 4 verschiedene Störungsbereiche unterschieden werden, die in der untenstehenden Abbildung 10.2 skizziert sind. (Der Zylinder soll dabei mit der Geschwindigkeit u_0 angeströmt werden.)

- Auf der strömungszugewandten Seite bildet sich ein sehr schmaler Bereich, in dem die Strömungsgeschwindigkeit verzögert ist (i). Direkt an der der Strömung zugewandten Zylinderseite befindet sich ein *Staupunkt* (ii), an dem die Geschwindigkeit auf Null abfällt.
- An der Oberfläche des Zylinders entstehen Grenzschichten auf beiden Seiten des Staupunktes (ii).
- Auf beiden Seiten des Zylinders befinden sich Zonen, in denen die Strömung verdrängt und beschleunigt wird (iii).
- Stromabwärts befindet sich der Nachlauf, in dem die Strömungsgeschwindigkeit geringer als die Anströmgeschwindigkeit ist (iv). Die Ausbildung und das

Abklingen des Nachlaufes hängt von der Art der Strömung ab, die laminar oder turbulent sein oder sich in einem Übergangszustand befinden kann.

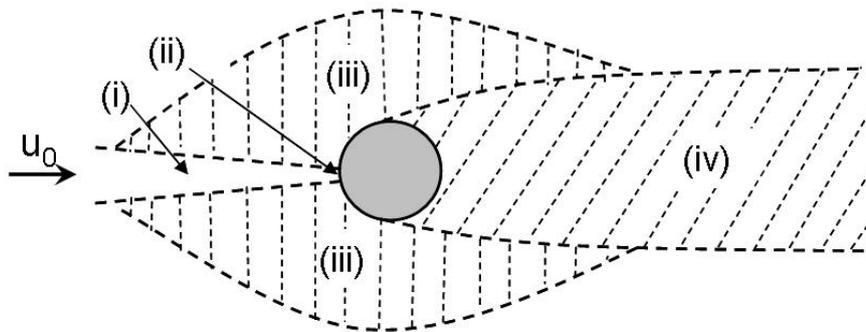


Abbildung 10.2: Störung der Hauptströmung im Bereich eines umströmten Zylinders, nach [34]

Die Strömung und damit die Ausbildung der Störungszonen des Zylinders – insbesondere des Nachlaufes – wird in erster Linie durch die Reynoldszahl bestimmt: In Abhängigkeit von der Reynoldszahl bilden sich insbesondere die charakteristischen Eigenschaften der Nachlaufströmung aus.

Ist die Reynoldszahl sehr gering, so bleibt die Strömung zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort laminar. Abhängig von der Anströmgeschwindigkeit liegt die Strömung zunächst immer am Zylinder an. Bei geringfügiger Erhöhung stellt sich ein stationärer, sehr schmaler, aber immer noch laminarer Nachlauf ein. Bei nochmaliger Erhöhung der Reynoldszahl bilden sich schließlich laminare stationäre Wirbel aus, es entsteht ein periodischer Nachlauf.

Mit weiter ansteigender Reynoldszahl entwickeln sich verschiedene Übergangsbereiche, in denen die Strömung turbulent wird.

Im folgenden soll eine Reynoldszahl angenommen werden, die sich kontinuierlich vergrößert, wie es zum Beispiel bei einem mit veränderlicher, zunehmender Geschwindigkeit angeströmten Zylinder der Fall ist.

Man wird die nachfolgend beschriebenen Beobachtungen machen:

- Zunächst beginnt sich ein turbulenter Bereich im Nachlauf zu bilden, während das Strömungsfeld seitlich vom Zylinder und direkt neben dem Nachlauf nach wie vor laminar bleibt.
- Als nächstes, d.h. bei weiter gesteigerter Reynoldszahl, geht der stromabwärts gelegene Bereich der Scherströmung (Grenze zwischen den Bereichen (iii) und (iv) in der Abbildung 10.2) zu Turbulenz über. Je höher die Reynoldszahl ist, desto näher wandert die Übergangszone zum Zylinder, den sie schließlich erreicht. Die Strömung neben dem Zylinder befindet sich jetzt im Übergang laminar - turbulent.

- Bei sehr hohen Reynoldszahlen ist bereits der Wandbereich seitlich am Zylinder turbulent. Der Übergangsbereich beginnt bereits am Staupunkt.

In der untenstehenden Tabelle sind die Anordnungen und Eigenschaften der Übergangsbereiche von laminarer zu turbulenter Strömung in Abhängigkeit von der Reynoldszahl zusammengefasst. Die Größenordnung der zugehörigen Reynoldszahlen ist ebenfalls angegeben.

| Zustand | Beschreibung | Reynoldszahl |
|---|--|---|
| laminar | keine Trennung der Strömung (liegt immer an); <i>Potentialströmung</i> | 0 bis 4-5 |
| | geschlossener, sehr schmaler laminarer Nachlauf | 4-5 bis 30-48 |
| | periodischer Nachlauf | 30-48 bis 180-200 |
| Übergang laminar - transient in der Nachlaufströmung | entfernter Nachlauf; mit der Entfernung von der strömungsabgewandten Seite des Zylinder geht die laminare, periodische Strömung in turbulente Wirbel über; | 180-200 bis 220-250 |
| | naher Nachlauf; Wirbel sind bereits bei ihrer Entstehung direkt auf der strömungsabgewandten Rückseite des Zylinders turbulent; | 220-250 bis 350-400 |
| Übergang laminar - transient im Bereich der Scherströmung | gering; Wellenbildung zwischen den Bereichen (iii) und (iv) | 350-400 bis 1000-2000 |
| | mittel; Es stellen sich Übergangswirbel zwischen (iii) und (iv) ein; | 1000 -2000 bis $2 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4$ |
| | hoch; unmittelbarer Übergang zu voller Turbulenz im Bereich (iii)- iv) | $2 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4$ bis $1 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5$ |
| Übergang laminar - transient im Bereich der Wand-schicht-strömung | Beginn von Turbulenz in der Grenzschicht; nach wie vor ausgeprägte Wirbelstraße im Nachlauf; beginnender Abfall des Widerstandskoeffizienten; | $1 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^5$ bis $3 \cdot 10^5 - 3.4 \cdot 10^5$ |
| | Bildung einseitiger Ablöseblasen auf der strömungsabgewandten Zylinderseite; Anstieg der Frequenz der Wirbelbildung; Abfall des Widerstandskoeffizienten; | $3 \cdot 10^5 - 3.4 \cdot 10^5$ bis $3.8 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^5$ |
| | Bildung symmetrischer Blasen; Weiterer sprunghafter Anstieg der Frequenz der Wirbelbildung bei weiterem Absinken des Widerstandskoeffizienten; | $3.8 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^5$ bis $5 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^6$ |

Tabelle 10.1: Charakterisierung der Nachlaufströmung in Abhängigkeit der Reynoldszahl bis hin zu einer Reynoldszahl von ca. $1 \cdot 10^6$ (nach [34])

10.4 Aeroakustik

Die Umströmung von Zylindern verursacht charakteristischen Schall. Insbesondere in bestimmten Reynoldszahlbereichen entstehen sehr schmalbandige Geräusche, die *Hiebtöne* oder *äolische Töne*² genannt werden. Ihre Frequenz wird charakterisiert durch die *Strouhalzahl*:

$$St = \frac{f \cdot d}{u} \quad (10.1)$$

Demnach ist die Frequenz f des entstehenden Tones proportional zu dem Verhältnis von Anströmgeschwindigkeit u und Zylinderdurchmesser d .

In der untenstehenden Abbildung 10.3 ist ein Diagramm mit Strouhalzahlen in Abhängigkeit von der Reynoldszahl abgebildet.

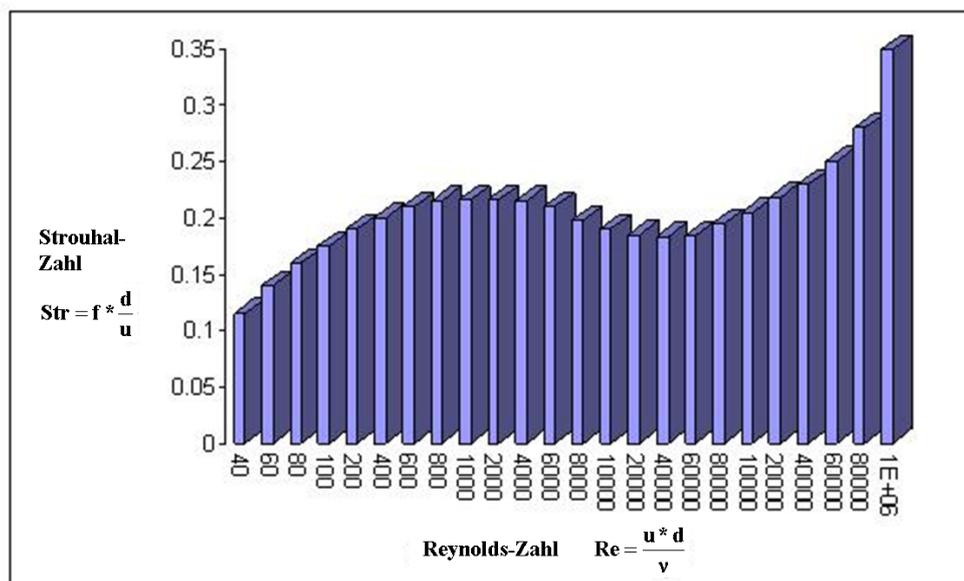


Abbildung 10.3: Von der Reynoldszahl abhängige Strouhalzahl

Hinsichtlich der Intensität des entstehenden Schallfeldes lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Töne sind rein aeroakustischer Natur. Der umströmte Zylinder wird nicht durch die Strömung beeinflusst. Dies bedeutet, dass Steifigkeiten oder Materialeigenschaften des Zylinders hier nicht von Bedeutung sind. Die einzigen entscheidenden Parameter sind die entsprechenden Reynoldszahlen.
2. Die Frequenzen der äolischen Töne liegen im Bereich einer Eigenfrequenz des Zylinders. Dadurch kann der Zylinder selbst zu Schwingungen angeregt werden. In diesem Fall erwartet man eine erhöhte Schallintensität.

Nur für den ersten Fall kann die Frequenz der entstehenden äolischen Töne rechnerisch unter Zuhilfenahme der *Strouhalzahl*, Gleichung (10.1), ermittelt werden.

²benannt nach *Aeolus*, dem Gott des Windes in der altgriechischen Mythologie

Im zweiten Fall ist zusätzlich das strukturdynamische Verhalten des Zylinders zu betrachten.

10.5 Umströmte kantige Profile

Weitere, für theoretische Untersuchungen interessante Objekte sind umströmte rechteckige Balken und kantige Profile. Hier ist zusätzlich der Anströmwinkel (siehe Abbildung 10.4) zu berücksichtigen.

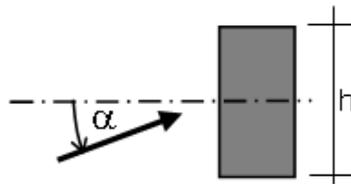


Abbildung 10.4: Anströmwinkel bei einem Rechteckprofil

Im Gegensatz zu einem zylindrischen Querschnitt liegen bei einem Kantprofil – zum Beispiel einem Rechteckprofil – eindeutige Abrisskanten für die Strömung vor. Die Strouhalzahl ist damit nicht, wie beim Kreisprofil, nur von der Reynoldszahl abhängig. Vielmehr beeinflusst die Breite der Wirbelstraße im Nachlauf des Körpers die entstehenden Frequenzen. Dabei bleibt das Verhältnis von Wirbelstraßenbreite zum Wirbelabstand in etwa konstant [69].

Diese Breite ergibt sich zum einen aus der Form des umströmten Profils, zum anderen wird sie entscheidend von dem oben erklärten Anströmwinkel beeinflusst.

Die untenstehende Abbildung 10.5 veranschaulicht den Einfluss von Geometrie und Art der Anströmung:

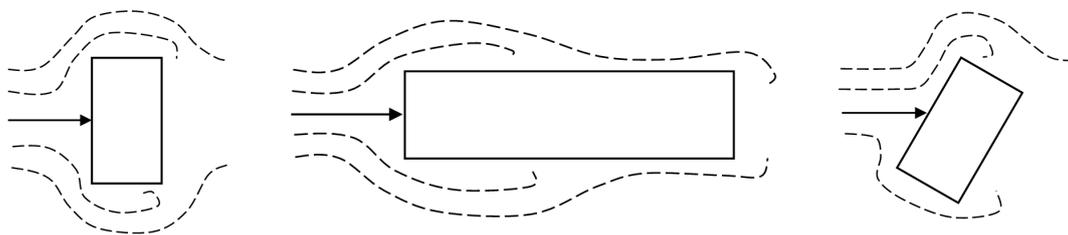


Abbildung 10.5: Rechteckprofile: Abhängigkeit der Wirbelstraße von den unterschiedlichen Abmessungen und Anströmwinkeln (nach [69])

Ein horizontal angeströmter (siehe Abbildung 10.5 links), gedrungener, rechteckiger Körper führt zu einem Abriss der Strömung am hinteren Ende. Eine Änderung des Anströmwinkels, wie in Abbildung 10.5 rechts dargestellt, führt unmittelbar zu einer Verbreiterung der sich ausbildenden Wirbelstraße.

Bei in Strömungsrichtung relativ lang ausgedehnten Profilen reisst die Strömung dagegen zunächst am vorderen (der Anströmung zugewandten) Ende ab, um sich dann stromabwärts wieder an den Körper anzulegen (Abbildung 10.5, Mitte). Besonders stark beeinflusst von der Richtung der Anströmung wird der Nachlauf sowie der Auftriebs- bzw. Quertriebsbeiwert bei stark unsymmetrischen Profilen. Die Abbildung 10.6 veranschaulicht ein Beispiel hierzu: Es wird ein Winkelprofil betrachtet, welches jeweils aus entgegengesetzten Richtungen angeströmt wird.

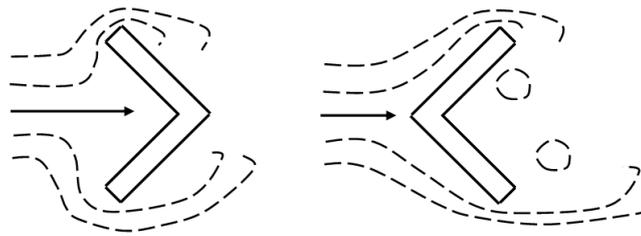


Abbildung 10.6: *Winkelprofil: in Abhängigkeit der Anströmrichtung ergeben sich eine unterschiedlich hohe Auf- bzw. Quertriebskraft; links: hohe Auftriebskraft; rechts: geringe Auftriebskraft; (nach [69])*

Wie in der Abbildung 10.6 angedeutet, ergeben sich unterschiedliche Abrisskanten, die zu unterschiedlich ausgeformten Wirbelstraßen führen und die Höhe der Auftriebskraft maßgeblich beeinflussen.

Kapitel 11

Simulation aeroakustischer Phänomene

11.1 Der 'digitale Windkanal'

Um durch Messungen bekannte Effekte zu verifizieren, wurden verschiedene Simulationen von umströmten Zylindern im sogenannten *digitalen Windkanal* durchgeführt. Die Berechnungen deuten darauf hin, dass die Lattice-Boltzmann-Methode zur Abbildung von strömungsakustischen Phänomenen sehr gut geeignet ist. Insbesondere die Fluktuationen der Strömungsgrößen Druck und Dichte im Zeitbereich können sehr gut wiedergegeben werden.

Der Aufbau des Simulationsmodelles ist in der Abbildung 11.1 dargestellt.

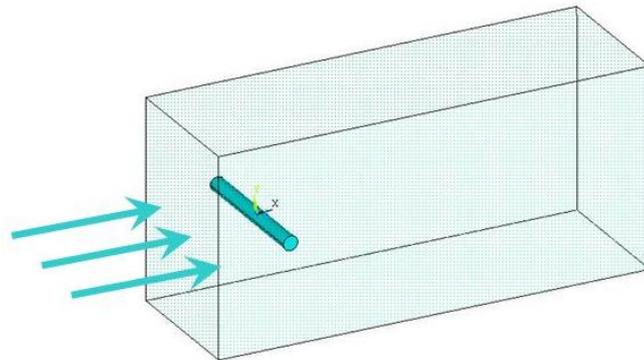


Abbildung 11.1: *Modell des digitalen Windkanals*

Der Modellaufbau ist dabei vergleichbar mit einem tatsächlichen Windkanal. Ein beliebiger Körper kann als umströmtes Hindernis im Raum angeordnet werden. Um die schallrelevanten Druckschwankungen aufzuzeichnen, werden sogenannte *Mikrofonpunkte*¹ angeordnet, in denen Strömungsgrößen, wie zum Beispiel Druck oder Dichte, über den Zeitverlauf abgegriffen werden (siehe unten, Abschnitt 11.2). Im Falle

¹in POWERFLOW *probes* genannt

des umströmten Zylinders wurden die Mikrofonpunkte seitlich neben dem Zylinder, senkrecht zur Anströmungsrichtung, sowie in der Achse des Zylinders angeordnet. (siehe Abbildung 11.2).

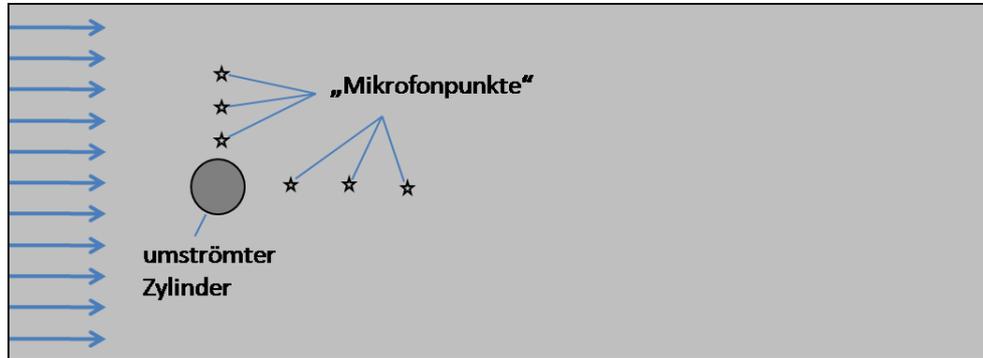


Abbildung 11.2: Anordnung von Mikrofonpunkten

11.2 Messen von Strömungsergebnissen

11.2.1 Zeitlich gemittelte Ergebnisse

Eine Strömungssimulation mit der Lattice-Boltzmann-Methode läuft analog zu einem Windkanalversuch (vgl. auch Kapitel 9.2) ab. Das Rechenmodell enthält Berandungen sowie gegebenenfalls Hindernisse in der Strömung (umströmte Körper). Zu Beginn der Simulation wird von einer gleichförmigen charakteristischen Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsgebiet ausgegangen. Im Laufe einer bestimmten Anzahl an Zeitschritten stellt sich die typische Strömung für das jeweilige Problem ein. Um Ergebnisse auswerten zu können, muss bereits vor dem Start der Simulation festgelegt werden, welche Ergebnisse für welche Teile des Fluids bzw. der Solids gespeichert werden sollen, und für wie viele Zeitschritte dies passieren soll. Typische Simulationen mit komplexen Modellen laufen über mehrere zehntausend Zeitschritte. Allein aus Gründen des Datenumfanges wird man üblicherweise nicht alle Ergebnisse für jeden Zeitschritt speichern. Vielmehr wird man lediglich besonders interessante Strömungsgebiete auswählen.

Weiterhin werden bei Simulationen die Ergebnisse typischerweise über eine Anzahl an Zeitschritten gemittelt. Derartige Ergebnisse können etwa Strömungsgrößen wie Druck, Dichte oder Strömungsgeschwindigkeit sein, aber auch auf Oberflächen wirkende Druckbeanspruchungen. Ist man an aerodynamischen Aussagen interessiert, so haben gemittelte Ergebnisse genügend oder sogar bessere Aussagekraft. Abbildung 11.3 verdeutlicht die Vorgehensweise der Mittelung von Ergebnissen.

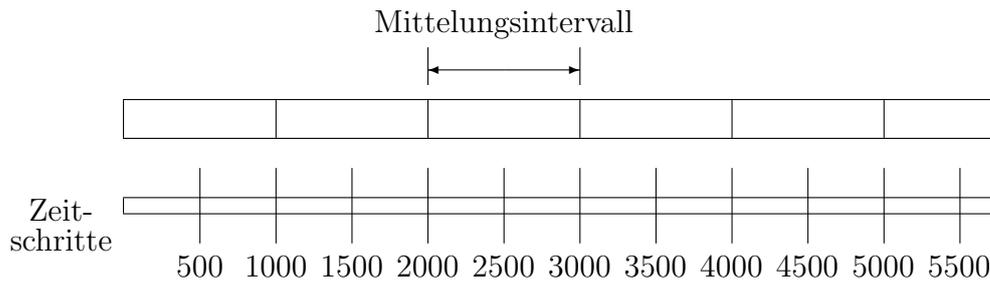


Abbildung 11.3: Mittelungsintervalle zur Auswertung von gemittelten (*stationären*) Größen

11.2.2 Ergebnisse ohne zeitliche Mittelung

Druckschwankungen, die akustische Phänomene repräsentieren, sind entsprechend ihrer Frequenz über sehr kurze Zeitdauern veränderlich. Um sie analysieren zu können, dürfen die Mittelungsintervalle nur maximal zwei Zeitschritte umfassen, bzw. es darf keine Mittelung stattfinden. Eine Mittelung über ein längeres Zeitintervall würde die sehr kleinen akustischen Druckschwankungen unterdrücken.

Die folgende Abbildung 11.4 zeigt das Prinzip der Abtastrate.

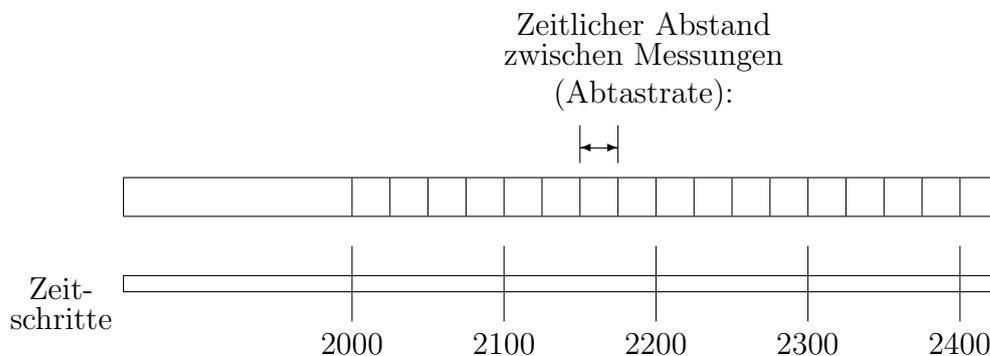


Abbildung 11.4: Abtastung von akustischen Druckschwankungen bzw. Samplerate, *keine* Mittelung

Sowohl die Strömungsgrößen (z.B. Druck, Dichte, aber auch Größen wie die turbulente kinetische Energie etc.) als auch die Einwirkungen der Strömung auf Festkörper in Form von Strömungsdrücken können aus den Simulationsergebnissen abgegriffen werden.

Neben der oben ausgeführten *zeitlichen* Mittelung (Abschnitt 11.2.1, Abbildung 11.3) kann eine *räumliche* Mittelung stattfinden. Dabei wird der Durchschnitt einer Größe gebildet, indem über das entsprechende Volumen integriert und anschließend durch den Volumeninhalt dividiert wird. Das Program EXA POWERFLOW erlaubt

es dabei, die Ergebnisse im Falle von Strömungsgrößen über beliebig viele Voxel zu mitteln.

Ebenso kann eine Mittelung der vorliegenden Ergebnisdaten für die Oberflächen über große Flächenstücke oder ganze Körper durchgeführt werden².

Um die Verformung eines Körpers aufgrund von Strömungsdrücken korrekt zu berechnen, muss jedoch ggf. die veränderliche Lastverteilung über die Oberfläche bekannt sein.

11.3 Auswertung von Simulationsergebnissen mit Hilfe der FFT

In der Akustik werden Zeitsignale typischerweise in den Frequenzbereich transferiert und dort ausgewertet. Die *Fourier-Transformation* ermittelt aus einem beliebigen Signal $h(t)$ die Sinusfunktionen der verschiedenen enthaltenen Frequenzen f ([76]). Das *Fourier-Integral* ist wie folgt definiert:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (11.1)$$

$H(f)$ heißt die *Fourier-Transformierte* der Funktion $h(t)$.

Unter Zuhilfenahme numerischer Integration wird Gleichung (11.1) zu:

$$H(f_k) = \sum_{i=0}^{N-1} h(t_i)e^{-j2\pi f_k t_i} (t_{i+1} - t_i) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11.2)$$

Simulationsergebnisse stellen – ebenso wie Messergebnisse – ein diskretes Signal über ein begrenztes Zeitintervall dar. Dieses sogenannte *Abtastsignal* lässt sich unter Verwendung einer Zeitbereichs-Abtastfunktion $\Delta_0(t)$, die aus einer Abfolge von Deltafunktionen $\delta(t)$ im Abstand T besteht, sowie einer *Fensterfunktion* $x(t)$ mit

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 && \text{für } -\frac{T}{2} < t < T_0 - \frac{T}{2} \\ x(t) &= 0 && \text{sonst} \end{aligned} \quad (11.3)$$

darstellen als

$$h(t)\Delta_0(t)x(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t - kT) \right) x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT) \quad (11.4)$$

T stellt dabei das Abtastintervall und N die Anzahl der Deltafunktionen im Fensterintervall dar³.

²Dies ist zum Beispiel von Interesse, wenn der aerodynamische Widerstandsbeiwert oder der Auftriebsbeiwert eines Körpers ermittelt werden soll.

³Die Wahl des Abtastintervalls sowie der Fensterfunktion erfordert einige Überlegungen, um unerwünschte Effekte wie zum Beispiel *Aliasing* (d.h. durch zu geringe Abtastfrequenz verursachte Fehler) oder *Leakage* (Dieser Effekt tritt auf, da die Beobachtungsdauer des Zeitsignals nicht einem Vielfachen der im Signal enthaltenen Sinusfunktionen entspricht. Er kann durch die Verwendung sogenannter Filterfunktionen verringert werden.) zu vermeiden. Für Details dazu sei auch hier auf [76] verwiesen.

Die *diskrete* Fourier-Transformation ermittelt aus dem diskreten Abtastsignal die zugehörige diskrete Fourier-Transformierte, die eine Approximation der kontinuierlichen Fourier-Transformierten darstellt. Sie ist für periodische Signale gültig⁴ und ergibt sich, wenn die Abtastfunktion auf die Fourier-Transformierte der Gleichung (11.4) angewendet wird:

$$H\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11.5)$$

Bei der Durchführung der Fourier-Transformation kommt üblicherweise die sogenannte *schnelle* Fourier-Transformation oder *Fast-Fourier-Transformation* (als *FFT* abgekürzt) zur Anwendung. Dabei handelt es sich um einen Algorithmus, der eine besonders schnelle Auswertung der diskreten Fourier-Transformation ermöglicht (siehe zum Beispiel [76]).

FFT-Analysen können für beliebige Strömungsgrößen an beliebig vielen Punkten im Strömungsgebiet durchgeführt werden und ermöglichen damit weiterreichendere Interpretationen als Betrachtungen im Zeitbereich.

11.4 Umströmter Zylinder bei niedrigen Reynoldszahlen

Simulationen bei niedrigen Reynoldszahlen ($Re \leq 10000$) können direkt, d.h. ohne Verwendung eines Turbulenzmodelles, durchgeführt werden (vgl. Kapitel 7).

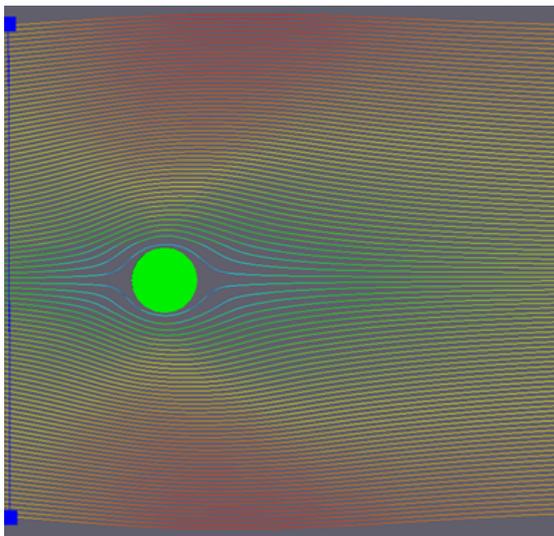


Abbildung 11.5: *Potentialströmung*, Reynoldszahl ~ 1

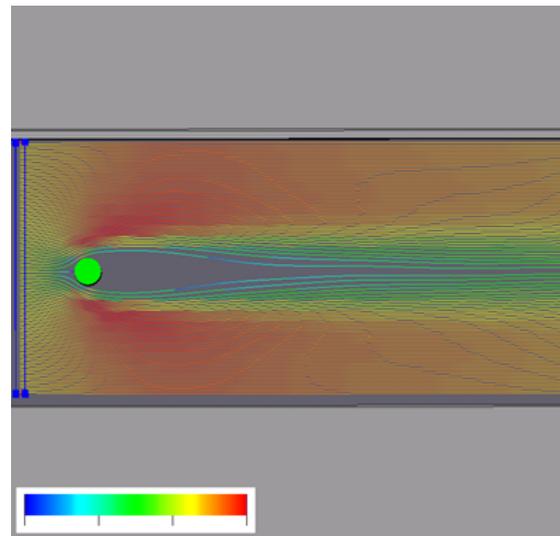


Abbildung 11.6: *geschlossener, laminarer Nachlauf*, Reynoldszahl ~ 7

⁴Für die Anwendung bedeutet dies, dass das jeweilige betrachtete Zeitfenster als sich periodisch wiederholend angenommen wird.

Abbildung 11.5 zeigt die in Kapitel 10 beschriebene *Potentialströmung*, die bei einer Kriechströmung, das heißt bei Reynoldszahlen annähernd gleich Null, auftritt. Die Strömung liegt dabei immer am Körper an. Eine Steigerung der Reynoldszahl auf etwa 5 bis 20 bewirkt einen sich einstellenden, sehr schmalen geschlossenen Nachlauf (siehe Abbildung 11.6).

Der laminare, jedoch periodische Nachlauf, der die *von Kármánsche Wirbelstraße* kennzeichnet, ist in der Abbildung 11.7 zu sehen.

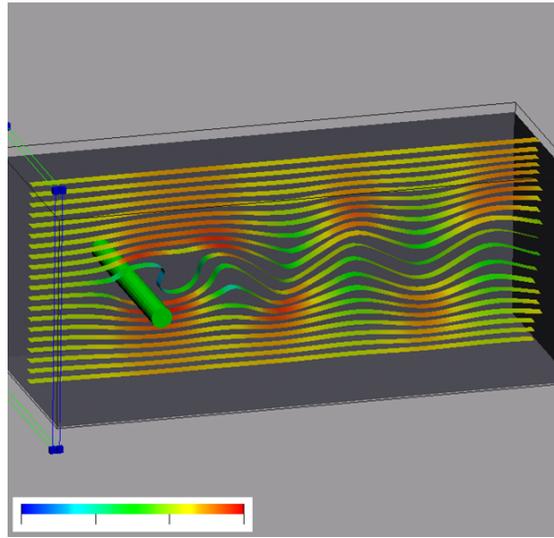


Abbildung 11.7: *laminarer, periodischer Nachlauf, Reynoldszahl ~ 75*

Die Auswertung der Mikrofonpunkte für den Fall mit einer Reynoldszahl $Re \sim 75$ (Abbildung 11.8) zeigt den harmonischen Verlauf der Oszillation des Druckes im Fluid. Weiterhin ist in der Darstellung des Zeitverlaufes des Druckes (siehe Abbildung 11.8) der *Einschwingvorgang*, d. h. das Abklingen der anfänglichen Störung, zu erkennen.

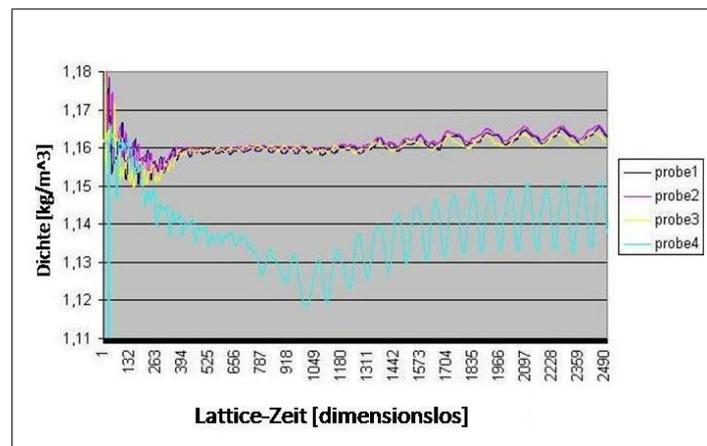


Abbildung 11.8: *Zeitverlauf des Druckes in den Mikrofonpunkten, Reynoldszahl ~ 75*

Erhöht man die Reynoldszahl weiter, so beginnen sich im entfernteren Bereich des zunächst laminaren periodischen Nachlaufs Turbulenzen zu bilden, die mit steigender Reynoldszahl immer näher zum Zylinder wandern (Abbildungen 11.9, 11.10).

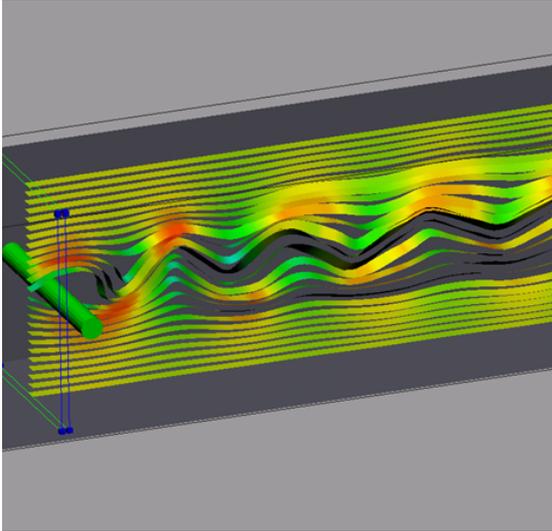


Abbildung 11.9: *Übergang zu Turbulenz im entfernten Nachlauf, Reynoldszahl ~ 180*

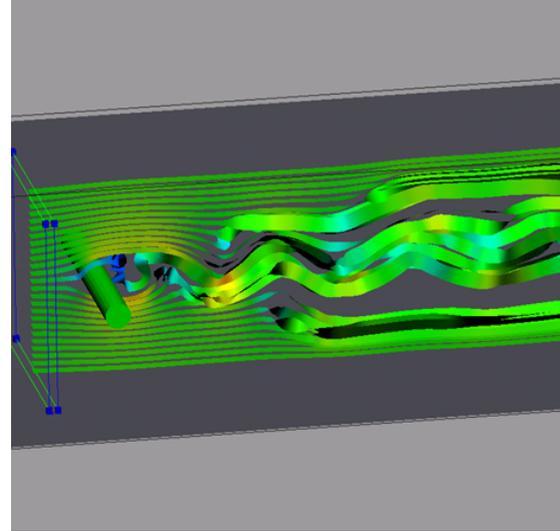


Abbildung 11.10: *Übergang zu Turbulenz im nahen Nachlauf, Reynoldszahl ~ 750*

Beim Blick auf den Zeitverlauf des Druckes in den Mikrofonpunkten zeigen sich ebenfalls deutlich die mit steigender Reynoldszahl zunehmenden turbulenten Anteile in der Strömung. Anhand der untenstehenden Abbildungen, die Zeitverläufe von umströmten Zylindern bei Reynoldszahlen von 180 (Abbildung 11.11) bzw. 750 (Abbildung 11.12) darstellen, kann dieser Effekt veranschaulicht werden.

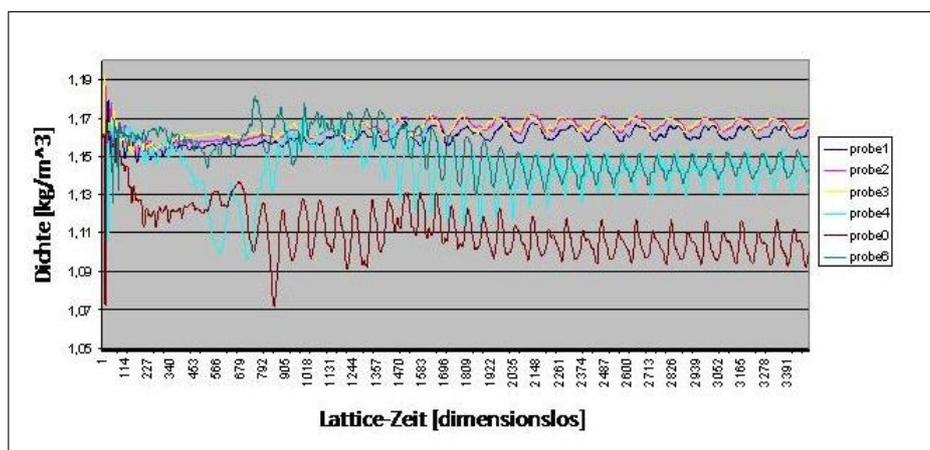


Abbildung 11.11: *Zeitsignal, Reynoldszahl ~ 180*

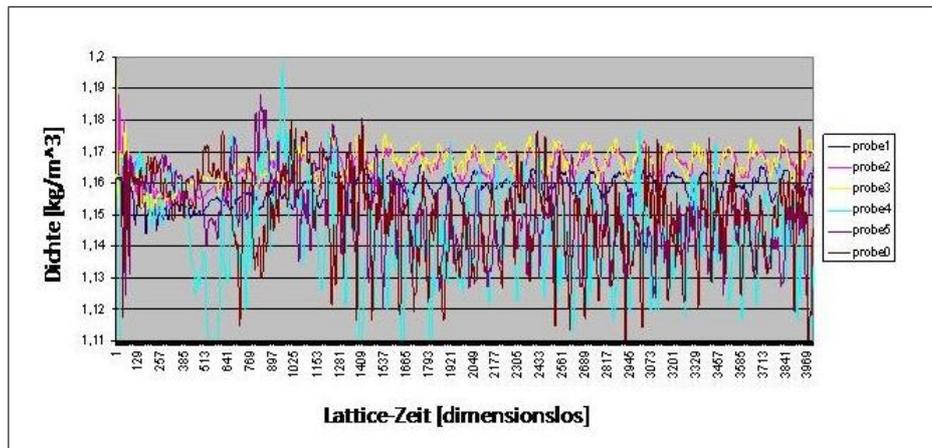


Abbildung 11.12: Zeitsignal, Reynoldszahl ~ 750

11.5 Umströmter Zylinder bei hohen Reynoldszahlen

Um die Eignung der Software EXA POWERFLOW zur Simulation aeroakustischer Phänomene zu untersuchen, wurden einige grundlegende Untersuchungen an einem umströmten Zylinder durchgeführt.

Zunächst wurden für verschiedene, hohe Reynoldszahlen ($Re \leq 100000$) und zwei alternative Zellenabmessungen des Grids die Frequenzen der Strouhal-Töne ermittelt.

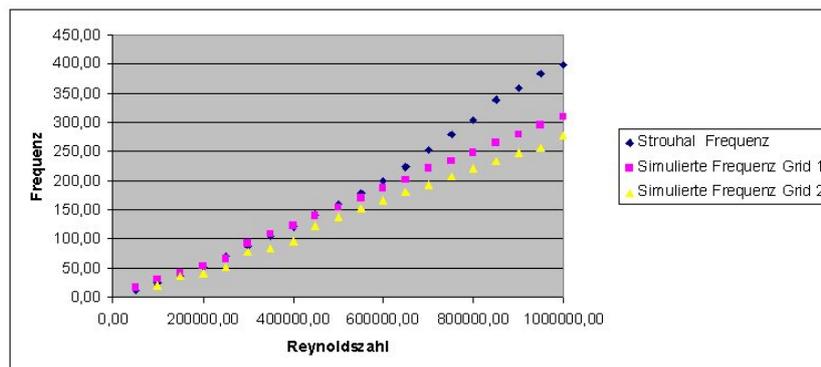


Abbildung 11.13: Strouhal-Frequenzen in Abhängigkeit der Reynoldszahl
 Abmessungen des Windkanals: Länge/Breite/Höhe = 2,5 m / 1 m / 1 m;
 Zylinder: Länge/Durchmesser = 1 m / 0,1m; Abstand Zylinder/Inlet: 0,5 m;
 Gittergrößen: Grid 1: 0,5 cm, Grid 2: 1,0 cm

Die Abbildung 11.13 stellt die sich aus den Simulationen ergebenden Werte den theoretisch erwarteten Frequenzen entsprechend Kapitel 10 gegenüber. Für die Simulation mit der feineren Auflösung (Gridlänge 0,5 cm) zeigt sich bis zu einer Reynoldszahl

von ca. 600 000 eine sehr gute Übereinstimmung von Theorie und Berechnung. Eine gröbere Auflösung ergibt immer noch sehr gute Werte bis zu einer Reynoldszahl von etwa 400 000. Die mit steigender Gittergröße nachlassende Übereinstimmung verhält sich erwartungsgemäß und erklärt sich durch die Formulierung der Viskosität des Fluides im Lattice-Boltzmann-Modell (siehe Kapitel 7).

Die hohen Reynoldszahlbereiche in dem hier vorliegenden Modell bewegen sich zudem bereits in einem Bereich der Machzahl, der in der Größenordnung der Gültigkeitsgrenzen der Gitter-Boltzmann-Methode, also über etwa 0,3 bis 0,4, liegt (siehe auch Abbildung 11.14).

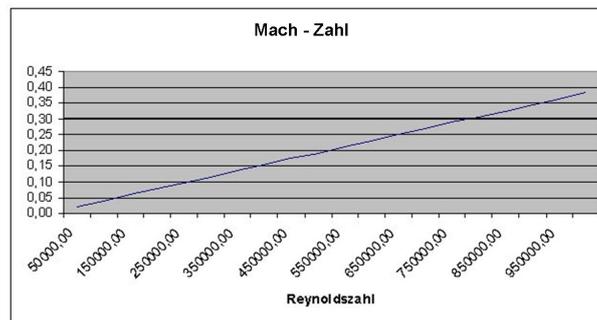


Abbildung 11.14: *Machzahl in Abhängigkeit der Reynoldszahl*

Der ebenfalls ermittelte Widerstandsbeiwert ist wie folgt definiert:

$$c_w = \frac{2F_w}{\rho A v^2} \quad (11.6)$$

F_w bezeichnet dabei die auf den betrachteten Körper einwirkende resultierende Kraft in Strömungsrichtung, A ist die Umrissfläche (d.h. der auf eine Ebene senkrecht zur Hauptströmungsrichtung projizierte Umriss des Körpers), v die ungestörte Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung und ρ die Dichte des Fluids.

Die Abbildung 11.15 zeigt den bekanntermaßen auftretenden (siehe Kapitel 10) charakteristischen Abfall bei einer Reynoldszahl von etwa 350 000.

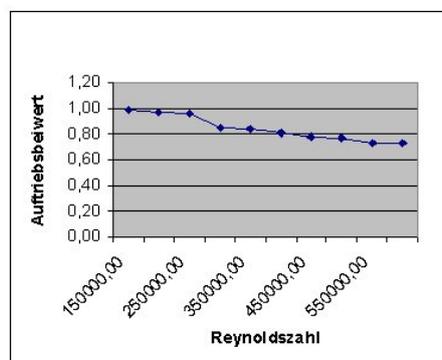


Abbildung 11.15: *Widerstandsbeiwert in Abhängigkeit der Reynoldszahl*

11.6 Simulation mit dem Programm CFX

Das vorliegende Kapitel dokumentiert Vergleichsrechnungen für hohe Reynoldszahlen mit dem Programm CFX, einem auf den diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen basierenden Simulationscode⁵.

Untersucht wurde ein Zylinder mit einem Durchmesser von 0,1 m. Es wurden transiente Rechnungen unter Verwendung eines Large-Eddy-Turbulenzmodells⁶ durchgeführt. Die modellierten Skalen wurden dabei mit dem *Smagorinsky*-Turbulenzmodell⁷ abgebildet.

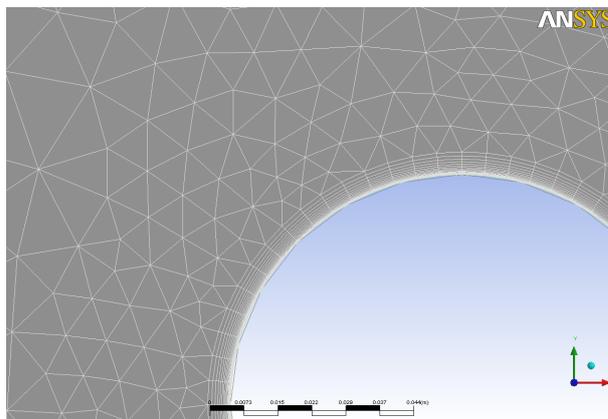


Abbildung 11.16: Ausschnitt Rechengitter, Auflösung der Randschicht um den Zylinder mit Hexaederzellen

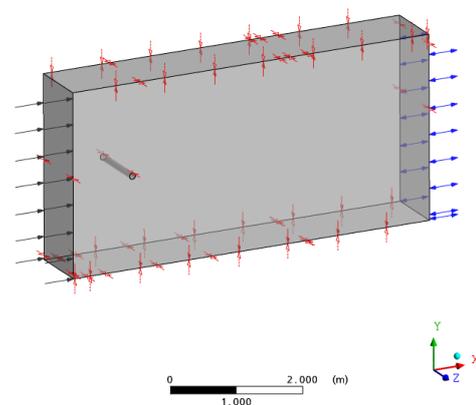


Abbildung 11.17: Simulationsanordnung, Abmessung des Windkanals: Breite, Länge, Höhe = 1m, 6m, 3m

Es wurde ein größtenteils aus Prismenzellen bestehendes Rechengitter eingesetzt. Lediglich die Wandschicht um den Zylinder wurde mit Hexaederzellen angenähert (vgl. Abbildung 11.16).

Die Anzahl der Gitterzellen betrug insgesamt ca. 450 000. Für die Seitenwände des Windkanals wurden Symmetrie-Randbedingungen vorgegeben. Abbildung 11.17 zeigt die Simulationsanordnung.

Die Simulationen wurden unter Annahme der Eigenschaften von Luft bei Raumtemperatur durchgeführt. Die simulierte Zeitdauer betrug jeweils 0,2 Sekunden.

Im Nachlauf des Zylinders tritt die typische Wirbelstraße auf (siehe Abbildung 11.18).

Die Analyse im Frequenzbereich lässt eine Beurteilung der simulierten Strouhal-Frequenzen zu. Das Diagramm in Abbildung 11.19 zeigt die theoretisch erwarteten Wirbelablöse-Frequenzen (siehe auch Kapitel 10) sowie die durch die Simulation mit CFX ermittelten Frequenzen.

⁵Details zu CFX können [40] entnommen werden.

⁶siehe Kapitel 5

⁷Bei dem sogenannten *Smagorinsky*-Turbulenzmodell handelt es sich um ein Ein-Gleichungs-Modell. Details dazu sind zum Beispiel in [83] aufgeführt.

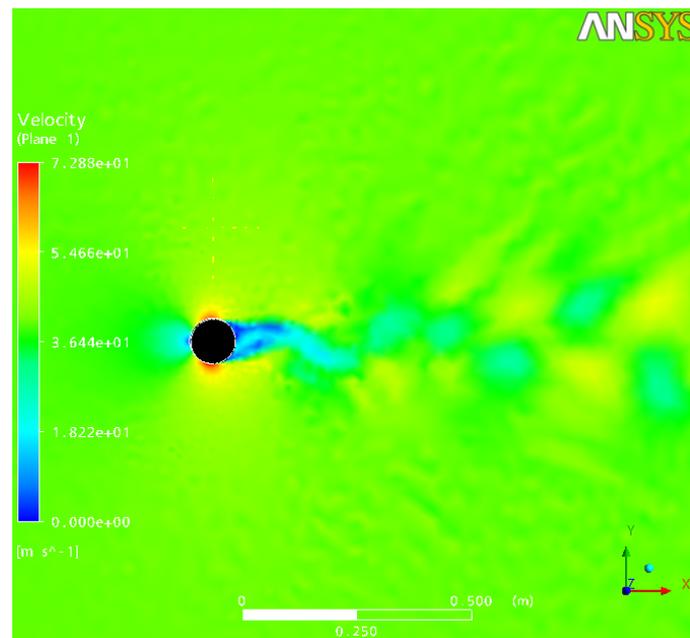


Abbildung 11.18: *Wirbelstraße im Nachlauf eines Zylinders, Simulation mit dem Programm CFX, Reynoldszahl ~ 300000 , vektorielle Geschwindigkeit;*

Aufgrund der in der Realität ab einer Machzahl⁸ von ca. 0,3 auftretenden kompressiblen Effekte, die in der vorliegenden Simulationen nicht erfasst sind, können mit steigender Reynoldszahl immer deutlichere Abweichungen der simulierten von der theoretischen Strouhalzahl beobachtet werden.

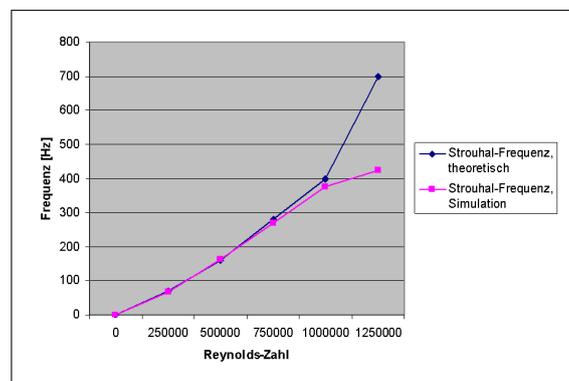


Abbildung 11.19: *Strouhal-Frequenzen, Vergleich von theoretischen (blaue Kurve) und durch Simulation mit CFX ermittelten Werten (magentafarbene Kurve)*

Mit transienten CFX-Simulationen können somit Ergebnisse erzeugt werden, die mit den ebenfalls in diesem Kapitel dokumentierten, mit Hilfe der Lattice-Boltzmann-Methode erhaltenen Ergebnissen (siehe insbesondere Abbildung 11.13) vergleichbar sind.

⁸Zum Vergleich: In den vorliegenden Simulation hatte die zu der Mach-Zahl von 0,3 gehörende Reynoldszahl einen Wert von ca. 750000

Kapitel 12

Fluid-Struktur-Kopplung

12.1 Überblick

In diesem Kapitel werden zunächst grundlegende Überlegungen zu gekoppelten Problemen und insbesondere zu Fluid-Struktur-Kopplung ausgeführt. Dann wird auf die Umsetzung einer Kopplung für die hier betrachteten Fragestellungen eingegangen. Die Grundlagen der verwendeten Methoden und Werkzeuge wurden bereits in den vorangegangenen Kapiteln 7, 8, 9 behandelt.

12.2 Lösungsverfahren für gekoppelte Probleme

Als *gekoppelte Probleme* oder *Mehrfeldprobleme* bezeichnet man ganz allgemein Probleme, bei denen unterschiedliche physikalische Systeme in Wechselwirkung zueinander treten. Das Gesamtproblem setzt sich demnach aus mehreren Teilproblemen zusammen.

Die Abbildung 12.1 zeigt eine Prinzipskizze zweier gekoppelter Teilprobleme auf zwei Gebieten Ω_1 und Ω_2 .

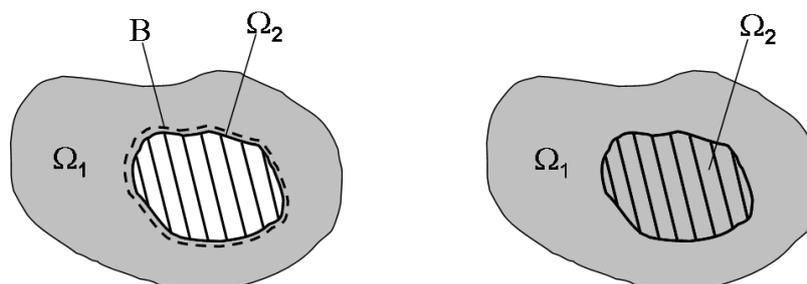


Abbildung 12.1: *Unterschiedliche Arten der Wechselwirkungen bei gekoppelten Problemen: 1. Kopplung auf dem gemeinsamen Rand B (links), 2. Kopplung auf einem gemeinsamen Gebiet, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ (rechts)*

Der Einfluss der Wechselwirkung zwischen den Teilproblemen ist so groß, dass die Systeme nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können.

Die Interaktion zwischen den Teilproblemen kann dabei auf der Grenze B zwischen den zwei Gebieten Ω_1 und Ω_2 stattfinden, wie in Abbildung 12.1 links angedeutet. Derartige Systeme werden auch als *oberflächengekoppelt* (siehe zum Beispiel [27]) bezeichnet.

Abbildung 12.1 rechts dagegen zeigt den Fall, dass zwei sich zumindest teilweise überschneidende Gebiete mit physikalischen Teil-Problemstellungen, die im gesamten gemeinsamen Gebiet $\Omega_1 \cap \Omega_2$ miteinander gekoppelt (*volumengekoppelt*, siehe [27]) sind, existieren.

Die beiden gekoppelten Systeme können über Randbedingungen oder über die entsprechenden, die Teilprobleme beschreibenden gesamten Gleichungen miteinander verknüpft sein.

Ansätze, mit denen sich gekoppelte Problemstellungen numerisch abbilden lassen, können *simultane* oder *partitionierte* Verfahren enthalten.

Simultane Verfahren: Für das gekoppelte Problem wird ein *gemeinsames* Modell herangezogen. Dieses wird simultan gelöst. Für die Gebiete beider Teilprobleme muss dabei die gleiche Geometriedarstellung sowie dieselbe Diskretisierung verwendet werden. Der Austausch von Daten zwischen den Teilmodellen ist damit extrem einfach, da typischerweise keinerlei Interpolation erforderlich ist. Auch starke Kopplung (siehe unten) zwischen den einzelnen Problemen kann gut abgebildet werden.

Partitionierte Verfahren: Für die Teilprobleme werden *unterschiedliche* Modelle herangezogen. Es können gänzlich unterschiedliche, auf das jeweilige Problem abgestimmte numerische Verfahren verwendet werden. Um die Lösung des Gesamtproblems zu erreichen, werden häufig Iterationen durchgeführt. An den gemeinsamen Begrenzungen der Berechnungsgebiete muss der Informationsaustausch mit Hilfe geeigneter Schnittstellen erfolgen, und gegebenenfalls müssen die zu übergebenden Daten interpoliert werden. Die Teilprobleme können zeitabhängig oder (quasi-) stationär sein.

In Abhängigkeit der Vorgehensweise beim Austausch von Daten zwischen den beiden Teilproblemen kann bei instationären partitionierten Verfahren zwischen *schwacher* und *starker* Kopplung unterschieden werden (siehe [27]). Die untenstehenden Abbildungen 12.2 und 12.3 veranschaulichen das Prinzip für ein gekoppeltes Problem mit jeweils zwei Feldern.

Bei der *schwachen* Kopplung (Abbildung 12.2) werden nach der Lösung eines der Teilprobleme die Informationen an der Schnittstelle zwischen den beiden Gebieten an das jeweils andere Teilproblem übergeben. Die Kopplungsbedingungen müssen dabei nicht zwangsläufig exakt erfüllt werden.

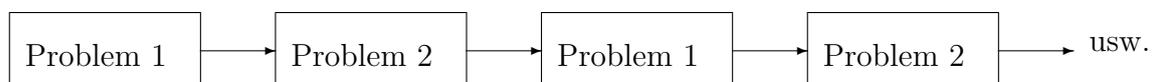


Abbildung 12.2: Prinzip der schwachen Kopplung

Bei der starken Kopplung dagegen findet in jedem Schritt zwischen den beiden Modellen eine Iteration statt (siehe Abbildung 12.3). Erst wenn Konvergenz erreicht ist, wird der nächste Schritt ausgeführt.

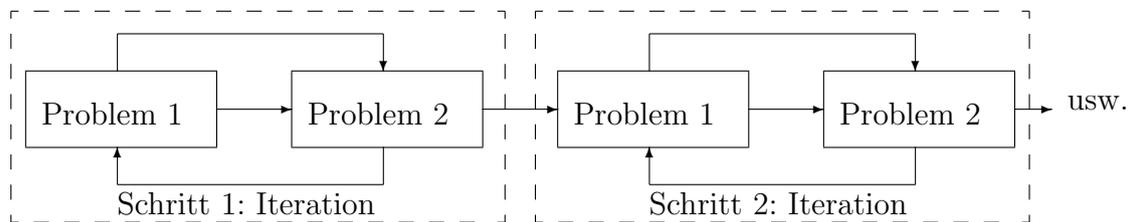


Abbildung 12.3: Prinzip der starken Kopplung

12.3 Wechselwirkung Fluid-Struktur

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollen Möglichkeiten zur Fluid-Struktur-Kopplung untersucht werden. Dabei soll auf der Fluid-Seite sowohl das Strömungsfeld als auch das akustische Feld berücksichtigt werden.

12.3.1 Strömungsfeld und akustisches Feld

Man betrachte ein strömendes Fluid um ein Hindernis oder durch einen Hohlraum. Eine derartige Strömung kann charakteristische aeroakustische Phänomene hervorrufen, d. h. es wird durch die Strömung selbst Schall verursacht (siehe Kapitel 10). Dieser Schall besteht aus Druckschwankungen im Fluid mit einer Frequenz im Hörbereich.

Zur Simulation des Strömungsproblems wurde die *Lattice-Boltzmann*-Methode herangezogen. Wie in den Kapiteln 6 und 7 ausgeführt, ist diese aufgrund der schwachen Kompressibilität der Strömung in der Lage, neben dem Strömungsfeld auch die Ausbreitung von Schallwellen abzubilden. Es wurde auf das im vorangegangenen Kapitel 9 vorgestellte kommerzielle LBM-Programm EXA POWERFLOW zurückgegriffen.

Entsprechend der im Abschnitt 12.2 eingeführten Nomenklatur stellt die *LBM* damit ein sehr effektives *simultanes* Verfahren zur gleichzeitigen Berechnung von Strömung und Akustik dar.

12.3.2 Strömungsfeld und Strukturmechanik

Die Kopplung zwischen Strömung und Struktur erfolgt mit Hilfe eines *partitionierten* Ansatzes, bei dem das Strukturproblem mit der Methode der Finiten Elemente (siehe Kapitel 8) abgebildet wird. Auch hier wird ein kommerzielles Programm in Form des weit verbreiteten FE-Codes ANSYS (vgl. Kapitel 9) herangezogen.

Die partitionierte Vorgehensweise ist geeignet, um die stark unterschiedlichen Anforderungen bei Abbildung des Strömungs- und des Strukturproblems zu berücksichtigen.

tigen. (Auf Details zu den Anforderungen der numerischen Strömungs- und Strukturmechanik wurde bereits in den Kapiteln 5, 7, 8 ausführlich eingegangen.)

Es wird nach folgendem Prinzip vorgegangen:

Die Strömung bewirkt Druckkräfte auf die sich im Fluid befindenden, umströmten Körper sowie auf die Umrandungen des Fluides. Diese Drücke auf die Oberflächen der Struktur werden im Rahmen der Strömungssimulation ermittelt und über eine geeignete Schnittstelle (siehe weiter unten, Abschnitt 12.4.1) auf ein FE-Strukturmodell übertragen.

Eine Strömung um ein Hindernis kann zu einer auf den Körper wirkenden oszillierenden Auftriebskraft führen. In bestimmten Frequenzbereichen verursacht dies Vibrationen der Struktur, d.h. Schwingungen mit hoher Frequenz und geringer Amplitude.

Derartige Vibrationen von Oberflächen innerhalb eines Fluids bewirken sogenannte *oberflächennormale Schnellen* auf der Berandung des Fluids. Diese können die Ursache für weitere Schallentstehung sein und haben Schallwellen in dem umgebenden Fluid zur Folge. Der Schall kann wiederum simultan mit dem Strömungsfeld (wie bereits im vorangegangenen Abschnitt 12.3.1 erklärt) von der Lattice-Boltzmann-Methode erfasst werden.

Die Strukturschwingungen werden mit der FEM in einer transienten Berechnung simuliert. Die resultierenden, im Zeitbereich schwankenden Oberflächenschnellen werden über eine zweite Schnittstelle (siehe Abschnitt 12.4.2) ins Lattice-Boltzmann-Strömungsmodell transferiert.

Die Oberflächenschnellen eines vibrierenden Körpers, der Schall im hörbaren Bereich abstrahlt, sind typischerweise klein im Verhältnis zu den Abmessungen des Körpers. Als Arbeitshypothese wurde daher von folgender Annahme ausgegangen:

Die Amplituden der Vibrationen der Struktur sind so gering, dass lediglich die Randbedingungen der Strömung verändert werden, der Einfluss der Änderung der Geometrie selbst jedoch vernachlässigt werden kann. Diese Hypothese ist für die zu untersuchenden Anwendungsfälle zu bestätigen (vgl. Kapitel 13).

Da es sich um ein transientes Problem handelt, müssen Strömungs- und Strukturproblem abwechselnd und wiederholt durchgeführt werden. Zwischen den Programmläufen, die durch den Kopplungsalgorithmus (siehe unten, Abschnitt 12.5) gesteuert werden, findet ein entsprechender Datenaustausch zwischen den Modellen statt. Es handelt sich somit um eine *schwache Kopplung* entsprechend Abbildung 12.2.

12.4 Schnittstellen zwischen dem FE- und dem LB-Programm

Für den Datenaustausch zwischen ANSYS und POWERFLOW wurden zwei Schnittstellen entwickelt. Diese ermöglichen den Export von entsprechenden Informationen aus einem Programm und den Import der Information in geeigneter Form in das jeweils andere Programm.

Die Ex- bzw. Importe der Informationen müssen natürlich im Zeitbereich wiederholt durchgeführt werden, um das transiente Verhalten sowohl der schwingenden Struktur als auch der Strömungsvorgänge abbilden zu können. Dabei ist jeweils darauf zu achten, dass die zeitliche Abtastung fein genug ist, um alle interessierenden Frequenzanteile des jeweiligen Problems zu erfassen.

Auf Details zur zeitlichen Steuerung wird jedoch im Abschnitt 12.5 noch eingegangen.

12.4.1 Schnittstelle 1: Export von Strömungsdrücken

Um die in der CFD ermittelten Oberflächendrücke im FE-Modell als Druckbelastung auf die Struktur aufbringen zu können, wurde ein dafür geeignetes Interface programmiert.

Die Modellierung der Struktur in ANSYS kann sowohl durch dreidimensionale Elemente¹ als auch durch Schalenememente² erfolgen. Weiterhin können im FE-Modell alle sonstigen zur Abbildung des Strukturproblems erforderlichen Elemente³ verwendet werden.

Im Falle von dreidimensionalen Elementen wirkt die Belastung durch die Strömungsdrücke auf die außenliegenden Berandungsflächen der Elemente, bei Schalenelementen auf eine (die *außenliegende*, d.h. strömungszugewandte) Seite der entsprechenden *shell*-Elemente.

Im Strömungsmodell werden die Oberflächen der Geometrie durch Facetten, die sogenannten *Surfel*⁴, repräsentiert. Die aus der Strömung resultierende Druckbelastung auf eine Oberfläche liegt für jedes *Surfel* vor. Typischerweise sind die *Surfel* aufgrund der erforderlichen hohen räumlichen Auflösung des Strömungsgebiets im Bereich von Wänden sehr viel kleiner als die die Struktur repräsentierenden Finiten Elemente, wie in Abbildung 12.4 zu erkennen ist.

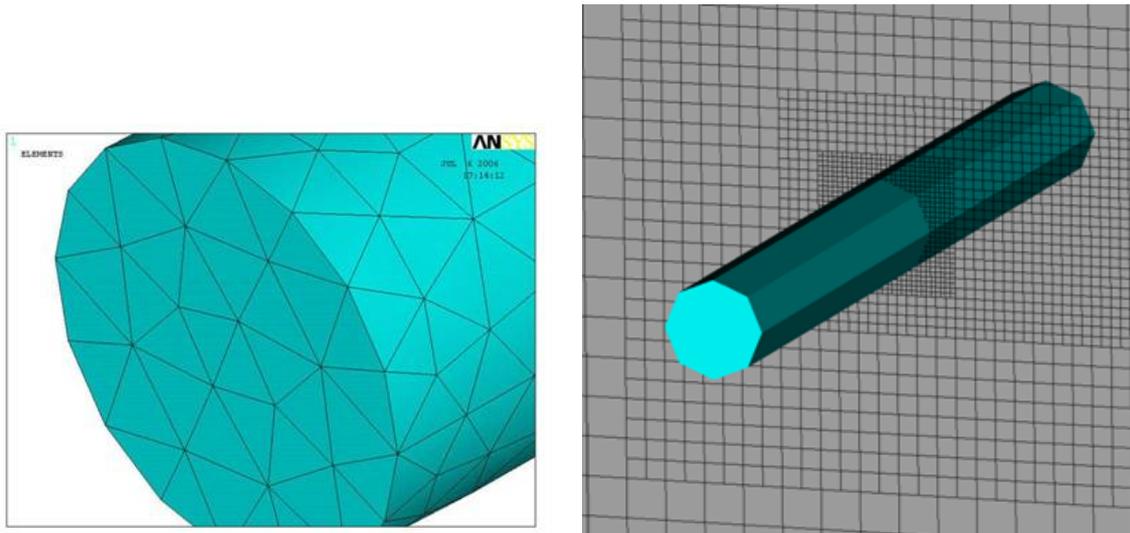
Aus den (Strömungs-) Drücken auf die *Surfel* werden die Werte für die entsprechenden Facetten des FE-Modelles ermittelt. Dabei wird der Druckwert desjenigen *Surfel*, dessen geometrischer Schwerpunkt dem Schwerpunkt der jeweiligen Facette am nächsten liegt, verwendet. Der sich durch diese Vorgehensweise ergebende Fehler ist umso größer, je größer der Gradient der Druckverteilung auf die Oberfläche der Struktur ist und je stärker die Abmessungen der Elementfacetten und der *Surfels*

¹sogenannte *solid*-Elemente

²sogenannte *shell*-Elemente

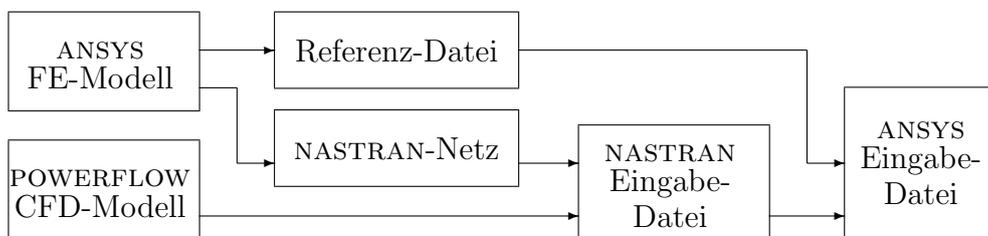
³zum Beispiel Federelemente oder dimensionslose Massenelemente

⁴siehe Kapitel 7

Abbildung 12.4: *FE-Netz und Schnitt durch das CFD-Gitter*

voneinander abweichen⁵.

In POWERFLOW ist eine Möglichkeit enthalten, Druckbelastungen auf Facetten in verschiedenen Formaten, darunter dem NASTRAN⁶-Format, zu exportieren. Dabei wird eine Eingabedatei in einer Makrosprache, die normalerweise in NASTRAN-Programmpaketen verwendet wird, erzeugt. Mit Hilfe dieser Exportschnittstelle kann dann eine von ANSYS lesbare Eingabedatei generiert werden. Die Abbildung 12.5 veranschaulicht die Vorgehensweise.

Abbildung 12.5: *Prinzipskizze Format-Konverter ANSYS-NASTRAN*

In ANSYS muss das endgültige FE-Modell, mit dem auch die strukturmechanische Berechnung durchgeführt werden soll, vorliegen. Anhand des ANSYS-Netzes wird ein identisches Netz im Format NASTRAN erzeugt und in einer Datei gespeichert. Weiterhin werden, um die korrekte Zuordnung der Elemente zu ermöglichen, entsprechende Informationen in einer Referenzdatei abgelegt. Anhand der POWERFLOW-Ergebnisse wird (zu jedem Kopplungs-Zeitpunkt, siehe Abschnitt 12.5) eine Datei im Format

⁵Zur Kontrolle sollte für jedes simulierte Problem der Fehler – zum Beispiel durch den Vergleich der Auftriebskraft eines Körpers mit der Resultierenden der Strukturkräfte – abgeschätzt werden.

⁶Bei NASTRAN handelt es sich um ein relativ universell einsetzbares FE-Programm

NASTRAN erzeugt, die für jedes Element des Netzes die zugehörige Druckbelastung enthält. Mit Hilfe des Referenzfiles wird dieses in ein *APDL*⁷-File konvertiert. Aus diesem können die Informationen über die Druckbelastung dann in ANSYS eingelesen werden⁸.

12.4.2 Schnittstelle 2: Kopplung Struktur zu Fluid

Mit der zweiten Schnittstelle sollte eine Möglichkeit geschaffen werden, die Vibration der Struktur in Form von Oberflächenschnellen auf die Berandungen des Fluids aufbringen zu können.

Die zu exportierenden Ergebnisse der transienten FE-Rechnung sind dabei die Bewegungsgeschwindigkeiten der einzelnen Knoten des FE-Modells. Sie müssen in eine von POWERFLOW lesbare Form gebracht werden.

Transfer von Schnelleergebnissen auf Hilfsgitter:

Vor dem Export der Ergebnisse aus ANSYS werden zunächst die in der transienten FE-Rechnung ermittelten Schnelle-Ergebnisse auf ein *Hilfsgitter* inter- bzw. extrapoliert. Dieses Hilfsgitter muss zusätzlich zum Rechenmodell in ANSYS vorliegen.

Die gewählte Vorgehensweise hat folgende Gründe:

- Die Ergebnisse sollen in einem nächsten Schritt als sogenanntes *table*⁹ in POWERFLOW eingelesen werden. Dazu ist es erforderlich, dass die Ergebnisse tabellarisch und bezogen auf ein kartesisches Gitter vorliegen.
- Zur Simulation eines Abstrahlproblems kann in der Regel mit einer deutlich größeren Skala als bei einer strukturdynamischen Rechnung gearbeitet werden. Dies ist oft auch bei der Simulation mit Hilfe der Randelementmethode eine übliche Vorgehensweise¹⁰.
- Da der Export der Schnelleergebnisse im Laufe der transienten gekoppelten Simulation sehr oft hintereinander ausgeführt werden muss, sollte aus Gründen der geringeren Rechenzeit - natürlich bei ausreichender Genauigkeit - die Menge der zu exportierenden Daten minimiert werden.

Abbildung 12.6 zeigt beispielhaft ein derartiges Hilfsgitter für ein zylindrisches Profil.

⁷ANSYS Parametric Design Language, siehe Kapitel 9

⁸Einzelheiten zu den dabei durchzuführenden Formatumwandlungen können [28] entnommen werden.

⁹Anmerkung: Diese *tables* sind, wie bereits in Kapitel 9 erwähnt, bei der im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten Version 3.4 von POWERFLOW die *einzig*e Möglichkeit, Felddaten zu importieren.

¹⁰Einzelheiten zu akustischen Skalen kann der interessierte Leser zum Beispiel in [41] oder [13] nachlesen. So existieren sogar spezielle Vernetzer, die grobe akustische Netze aufbauend auf detaillierteren FE-Modellen erstellen können.

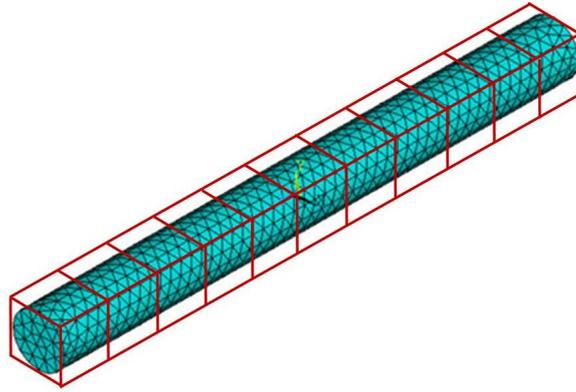


Abbildung 12.6: *Beispiel für ein Hilfsgitter, hier für den Fall, dass ein umströmter Zylinder untersucht werden soll*

Zum Transfer der Größen vom FE-Netz auf das Hilfsgitter wird lineare Interpolation verwendet. Dazu werden für jeden Punkt der Zielkoordinaten innerhalb eines bestimmten Radius alle möglichen Dreiecke im Quellnetz ermittelt. Der Radius ergibt sich aus der durchschnittlichen Elementkantenlänge. Dann wird dasjenige gewählt, für das der Abstand der durch die Eckpunkte gebildeten Fläche zum Zielknoten am geringsten ist, und linear interpoliert. Die Werte für Zielknoten, die außerhalb des Quellnetzes liegen, werden linear extrapoliert.

Da das FE-Netz bei weitem dichter ist als das erzeugte Hilfsgitter, wird ein nur geringer Fehler erwartet.¹¹

Export aus ANSYS:

In ANSYS liegen nun die gesuchten Schnelle-Größen auf dem Hilfsgitter für den jeweils aktuellen Zeitschritt als Feld (*array*) vor. Die Koordinatenwerte der Knoten des Hilfsgitters werden zusammen mit Werten für die Oberflächenschnellen in das von POWERFLOW lesbare *table*-Format transferiert und als externe Datei gespeichert.

Ein derartiges *table* besteht aus definierten, karthesischen Gitterpunkten und kann äquidistant, aber auch unregelmäßig sein. Hier wurde die Variante mit regelmäßigem Gitter verwendet. Eine ausführliche Beschreibung des Formats eines *table* in POWERFLOW findet sich in [38].

Die Abbildung 12.7 gibt einen Überblick über die Vorgehensweise der Interpolation auf das Hilfsgitter und des anschließenden Exports als *table*.

¹¹Auch hier sollte für jedes Modell die Größenordnung des Fehlers – etwa durch Vergleich der Schnelle-Werte in den Knoten des FE-Modells und in den Punkten des Hilfsgitters – abgeschätzt werden.

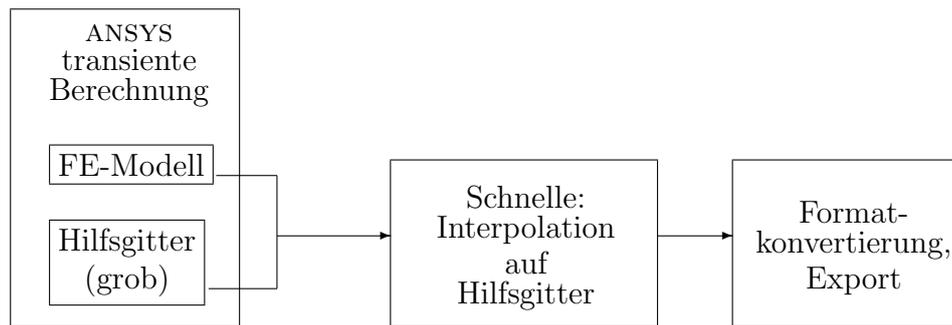


Abbildung 12.7: *Strukturmodell: Interpolation von Schnellewerten auf Hilfsgitter, Formatkonvertierung und Export; (Übersicht)*

Import in POWERFLOW, Interpolation vom Hilfsgitter auf die *Surfel*:

Die externe Datei mit den aus ANSYS exportierten Schnelldaten lässt sich dann in POWERFLOW einlesen.

In POWERFLOW kann auf die als *table* vorliegenden Schnelle-Werte zugegriffen werden. Die für die die Geometrie repräsentierenden Oberflächen-*Surfel* gültigen Werte werden anhand des Hilfsnetzes mittels trilinearärer Interpolation (siehe Abbildung 12.8, Gleichung 12.1) errechnet.

Nach der Interpolation liegen nun auf den die Oberfläche begrenzenden *Surfel* die kontinuierlichen Werte für die durch die FE-Rechnung ermittelte Schnelle vor.

$$\begin{aligned}
 v_{xyz} = & v_{000}(1-x)(1-y)(1-z) + v_{100}x(1-y)(1-z) + \\
 & v_{010}(1-x)y(1-z) + v_{001}(1-x)(1-y)z + \\
 & v_{101}x(1-y)z + v_{011}(1-x)yz + v_{110}xy(1-z) + v_{111}xyz
 \end{aligned} \tag{12.1}$$

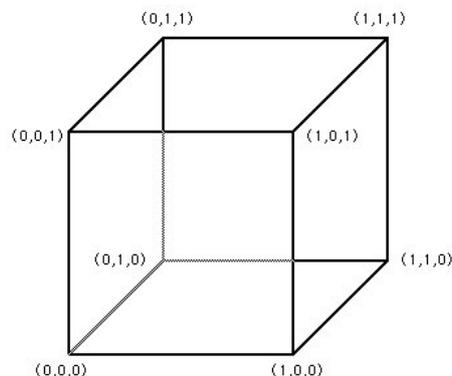


Abbildung 12.8: *Trilineare Interpolation vom Hilfsgitter auf die entsprechenden Fluidbegrenzungen*

Randbedingungen für Oberflächenschnellen

POWERFLOW stellt die in der Strömungsmechanik üblichen Randbedingungen (vgl. Kapitel 7.4) zur Verfügung. So können Wände durch *standard wall* oder auch *frictionless wall* repräsentiert werden. Dies entspricht den im Kapitel 7.4 beschriebenen Symmetrie- bzw. Haft-Randbedingungen.

Typischerweise treten an einer Wand lediglich wandparallele Strömungskomponenten auf. Die für die Schallentstehung verantwortlichen Oberflächenschnellen wirken jedoch *in Normalenrichtung* zur jeweiligen Wand. Um die im Strukturmodell berechneten Oberflächenschnellen im Fluidmodell aufbringen zu können, wurde daher anstelle einer Wand eine *Inlet*-Randbedingung angenommen.

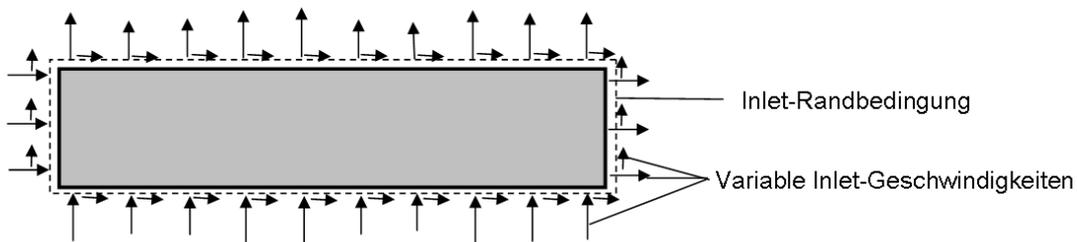


Abbildung 12.9: Aufbringen der Oberflächenschnellen als Inlet-Geschwindigkeiten

Als Geschwindigkeit des einströmenden Mediums werden die über die Schnittstelle importierten Werte aufgebracht. Es werden die Geschwindigkeitskomponenten in allen Raumrichtungen importiert (siehe Abbildung 12.9). Für die Schallabstrahlung spielt lediglich der jeweilige oberflächennormale Anteil eine Rolle. Der schallabstrahlende Körper kann somit eine beliebige Form aufweisen.

Turbulente Wandschichten und Fluid-Struktur-Kopplung

Aus der formalen Behandlung der Oberflächen als *inlet*-Randbedingung resultiert folgende Schwierigkeit:

Beim Einsatz eines Turbulenzmodelles wird üblicherweise - so auch in POWERFLOW - ein logarithmisches Wandmodell eingesetzt (siehe Kapitel 7). Das Ersetzen der Wand durch das *Inlet* führt dazu, dass die Physik der Strömung im Bereich von Oberflächen nicht richtig abgebildet wird.

Zur Lösung dieses Problems der Wandmodellierung ist eine alternative Formulierung von Randbedingungen erforderlich (siehe auch Kapitel 17).

Es kann jedoch davon ausgegangen werden, dass der Einfluss der Wandturbulenz bei einer Klasse von Problemstellungen, die *nicht* von einer sich über eine große Länge aufbauenden turbulenten Grenzschicht dominiert werden, nur von untergeordneter Bedeutung ist. Die im Kapitel 10 beschriebene Zylinderumströmung sowie verwandte Strömungsprobleme (wie Strömung um schlanke Profile) gehören zu dieser Klasse¹².

¹²Auf die Problematik wird im Kapitel 14 nochmals zurückgekommen.

12.5 Kopplungsalgorithmus

In diesem Abschnitt wird der Kopplungsalgorithmus beschrieben, der den Strömungslöser und das FE-Programm ansteuert sowie den Datenaustausch über die oben dargestellten Schnittstellen organisiert.

Die folgenden drei Möglichkeiten von gekoppelten Problemstellungen werden ausgeführt:

- einseitige Kopplung Strömung - Struktur (Abschnitt 12.5.1)
- einseitige Kopplung Struktur - Strömung (Abschnitt 12.5.2)
- bidirektionale Kopplung (Abschnitt 12.5.3)

12.5.1 Kopplung Strömung zu Struktur

Ist man lediglich an der Strukturantwort aufgrund der Belastung durch Strömungsvorgänge interessiert, so ist es ausreichend, eine Kopplung in einer Richtung durchzuführen.

Bei der Simulation des strukturmechanischen Verhaltens mit der Methode der Finiten Elemente und dem Programm ANSYS wird *implizite* Zeitintegration in Form des *Newmarkschen Zeitintegrationsschemas* angewandt. Eine implizite Zeitintegration erlaubt, wie bereits im Kapitel 8 dargestellt, auch große Zeitschrittweiten ohne Stabilitätsverlust.

Eine Strömungssimulation mit der Lattice-Boltzmann-Methode dagegen stellt immer ein *explizites* Verfahren mit relativ kurzer Zeitschrittweite dar (vgl. Kapitel 7).

Daher werden die Strömungsdrücke jeweils nach n expliziten Fluid-Zeitschritten exportiert, um als Randbedingung für einen impliziten Zeitschritt auf das Strukturmodell aufgebracht zu werden. Die untenstehende Abbildung 12.10 veranschaulicht die Vorgehensweise.



Abbildung 12.10: Explizite und implizite Zeitschritte

Die Anzahl der expliziten Fluid-Zeitschritte pro impliziten Struktur-Zeitschritt muss dabei an das entsprechende Problem angepasst werden. Insbesondere ist darauf zu achten, dass die interessierenden Effekte im Zeitbereich fein genug abgetastet werden. Dabei müssen sowohl die strömungsmechanischen Phänomene (wie zum Beispiel sich rhythmisch ablösende Wirbel) als auch die strukturmechanische Antwort

im Zeitbereich berücksichtigt werden. Die Daten aus der Strömungssimulation werden in konstanten Abständen von jeweils n Zeitschritten exportiert.

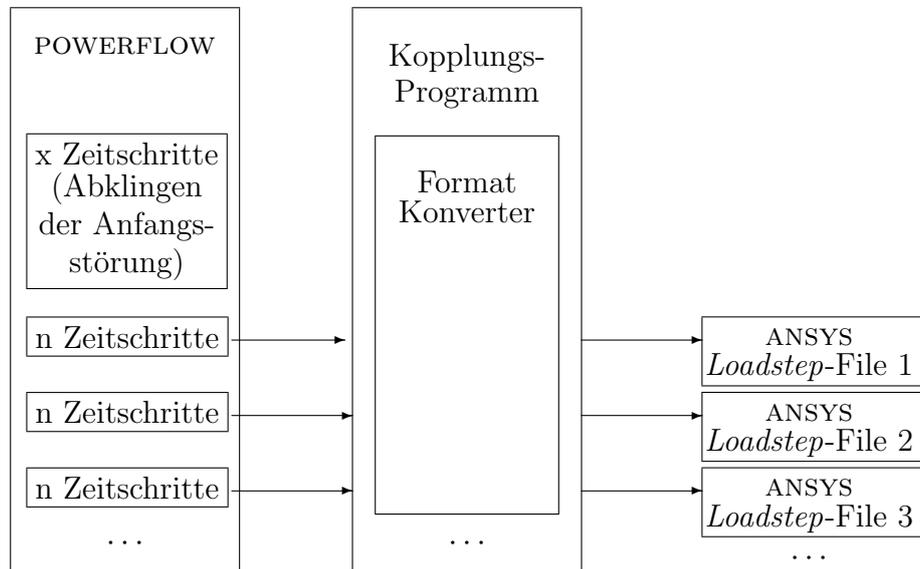


Abbildung 12.11: Übersicht einseitige Kopplung Strömung - Struktur

Im Falle einer einseitigen Kopplung ist man lediglich an der transienten Strukturantwort auf die Anregung aus der Strömungsbelastung interessiert. Dann kann zunächst das Strömungsproblem alleine (d. h. ohne Struktur) simuliert werden. Die auf die Struktur einwirkenden Strömungsdrücke werden dabei als Ergebnisse im Zeitbereich für bestimmte Berechnungsgebiete in zuvor definierte Dateien ausgeleitet.

Um das transiente Verhalten der Struktur simulieren zu können, ist es erforderlich, die oben beschriebene Prozedur wiederholt durchzuführen. Weiterhin muss sichergestellt sein, dass die Strömung bereits ausreichend Zeit hatte, sich zu entwickeln, bevor mit dem Export der Daten begonnen wird, d. h. die sich aus der anfänglich angenommenen Verteilung der charakteristischen Strömungsgrößen ergebende Störung muss abgeklungen sein (vgl. Abbildungen 11.8, 11.11, 11.12).

Die Abbildung 12.11 zeigt eine Übersicht dazu.

Man erhält eine Anzahl an ANSYS-Eingabefiles¹³. Diese enthalten Belastungsdaten für das Strukturmodell sowie die Information über die entsprechende Zeitschrittlänge und können in einer nachlaufenden transienten FE-Rechnung seriell eingelesen werden.

¹³ sogenannte *loadstep-files* mit den ANSYS-spezifischen Endungen *.s01, *.s02 etc.

12.5.2 Kopplung Struktur zu Strömung

Die in diesem Abschnitt beschriebene Kopplung der Struktur an das Strömungsfeld ermöglicht die Simulation der Einwirkungen von Festkörpervibrationen auf das Fluid. Die Abbildung 12.12 gibt einen zusammenfassenden Überblick über den Ablauf einer Strömungssimulation mit wiederholten Export von Schnelle-Daten aus ANSYS und dem anschließenden Import in POWERFLOW unter Verwendung der im Abschnitt 12.4.2 beschriebenen Schnittstelle.

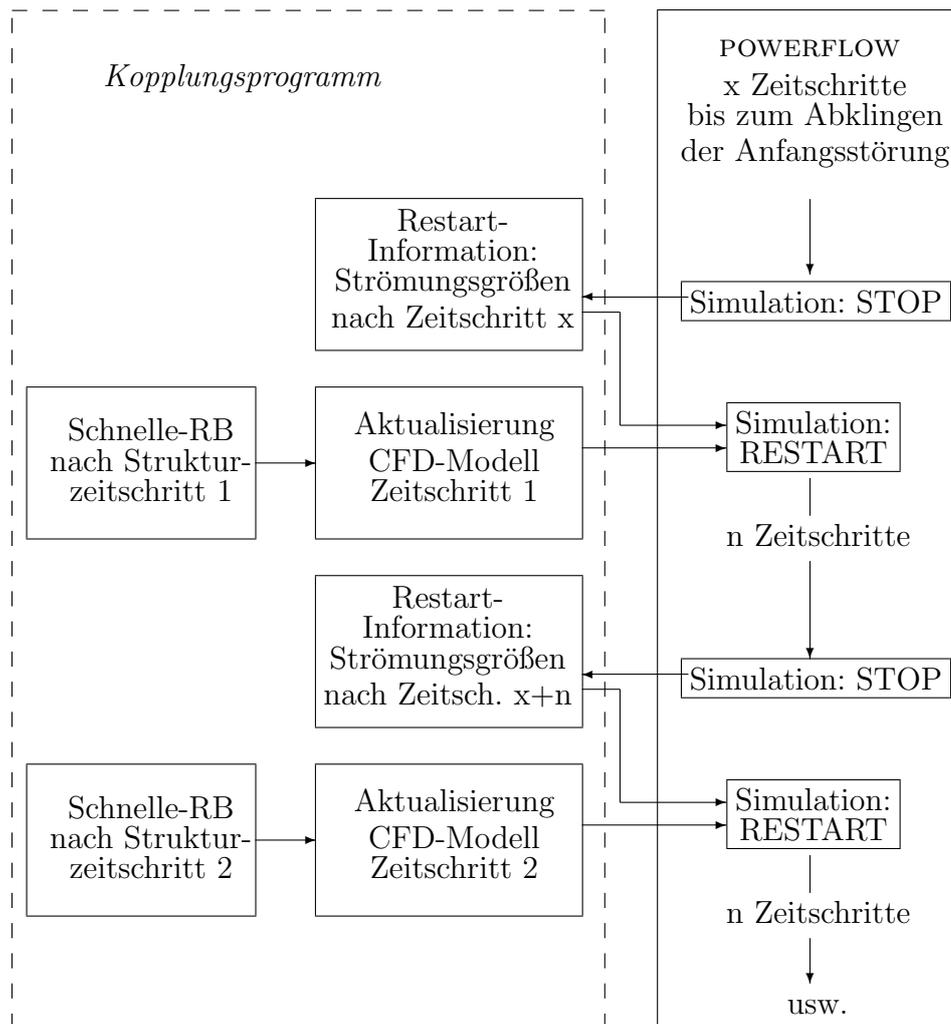


Abbildung 12.12: Übersicht einseitige Kopplung Struktur - Strömung

Während des Berechnungslaufes wird die CFD-Simulation nach einem bestimmten Zeitschritt gestoppt. Für diesen Zeitschritt werden die vollständigen Strömungsgrößen im gesamten Strömungsgebiet, die als *RESTART*-Information zur Wiederaufnahme des Simulationslaufes erforderlich sind, gespeichert. Anschließend werden die zu diesem Zeitpunkt gültigen Oberflächenschnelle-Daten importiert. Dies geschieht in EXACASE, dem Preprozessor von POWERFLOW. Aus dem so aktualisierten Modell wird dann eine neue Berechnungsdatei (die sogenannte *cdi*-Datei mit

der Extension *.cdi*) erzeugt. Diese enthält das komplette Modell sowie alle Solver-Einstellungen und wird stets zu Beginn bzw. beim Wiederanlauf einer Berechnung an POWERFLOW übergeben.

Die Veränderung des *cdi*-File nach einem Stop des POWERFLOW-Simulationslaufes mit einem darauf folgenden Wiederanlauf der Rechnung ist eigentlich für POWERFLOW *nicht* vorgesehen.

Da aber – in Ermangelung einer Programmierschnittstelle, wie bereits im Kapitel 9 ausgeführt – der Import von externen Daten zur Laufzeit von POWERFLOW andernfalls unmöglich wäre, muss auf eine solche Vorgehensweise ausgewichen werden.

Unter Einbeziehung der zwischengespeicherten *RESTART*-Informationen wird dann die Berechnung fortgesetzt.

Die Übersicht in der Abbildung 12.13 verdeutlicht nochmals die Vorgehensweise bei der Aktualisierung des CFD-Modells.

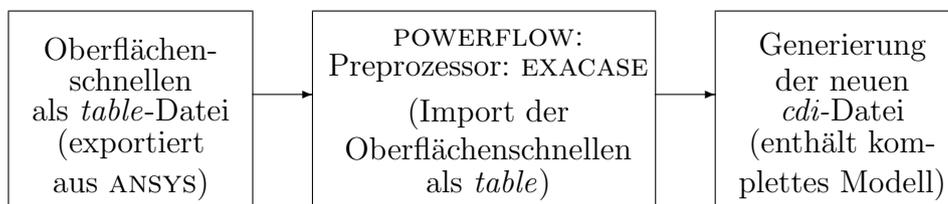


Abbildung 12.13: Aktualisierung des CFD-Modelles

12.5.3 Bidirektionale Kopplung

Um zweiseitig gekoppelte Problemstellungen zu simulieren, müssen die beiden einseitigen Kopplungsvorgänge kombiniert werden. Dabei werden die oben bereits beschriebenen Schritte

- Kopplung der Strömung an die Struktur; Export und Aufbringen von Strömungsdrücken auf die Oberflächen
- Kopplung der Struktur an die Strömung; Aufbringen von Schnellerandbedingungen aus der Struktursimulation auf die Berandungen des Fluids

abwechselnd durchgeführt, wie in Abbildung 12.14 dargestellt.

Auch hier werden die beiden in den Abschnitten 12.4.1 und 12.4.2 beschriebenen Schnittstellen verwendet.

Im Hinblick auf die Zeitsteuerung der bidirektionalen transienten Berechnung ist zu beachten, dass – wie auch im Falle der einseitigen Kopplung – die Zeitschrittlänge eines Struktur-Simulationsschrittes den addierten Zeitschrittlängen von n Strömungsschritten entspricht.

Vor Beginn der gekoppelten Berechnung müssen diese Zeitschritt-Größen, die während eines Simulationslaufes unverändert bleiben, festgelegt werden.

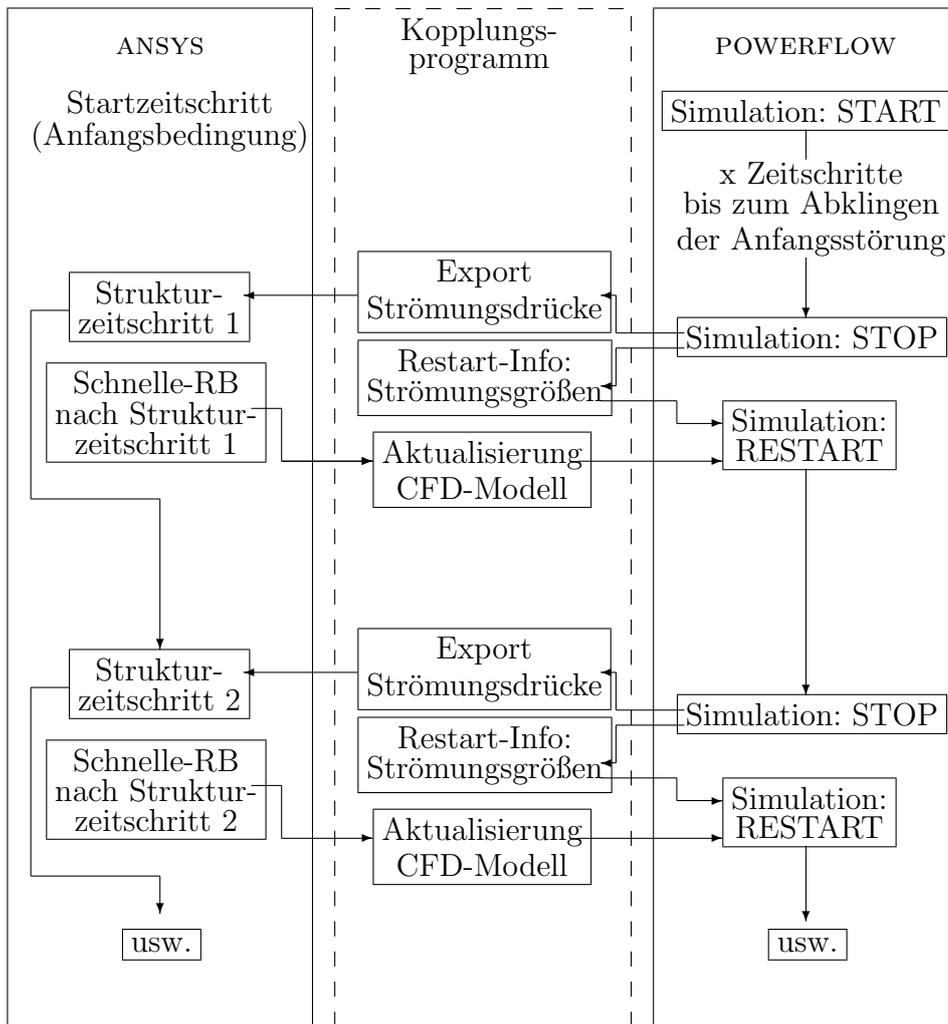


Abbildung 12.14: Übersicht bidirektionale Kopplung

Kapitel 13

Simulationsbeispiele, einseitige Kopplung: Fluid \longrightarrow Struktur

13.1 Strömung um einen starren, elastisch gelagerten Zylinder

Im folgenden soll die Strömung um einen elastisch gelagerten Zylinder betrachtet werden.

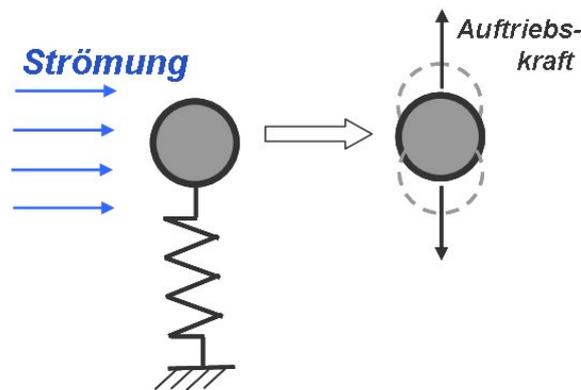


Abbildung 13.1: *elastisch gelagerter, umströmter Zylinder*

Problembeschreibung:

Die Strömung bewirkt eine auf den Körper wirkende oszillierende Auftriebskraft (siehe Abbildung 13.3). Diese führt wiederum zu einer dynamischen Antwort des Schwingers. Die sich einstellende Schwingung ist abhängig von der Eigenfrequenz $\vartheta = \sqrt{\frac{c}{m}}$ des Feder-Masse-Systems.

Der Zylinder in dem hier dokumentierten Beispiel hat einen Durchmesser von 10 cm. Die (ungestörte) Anströmgeschwindigkeit beträgt 30 m/s. Entsprechend Kapitel

10, Abbildung 10.3 ergibt sich damit eine Strouhal-Frequenz von ca. 50 Hz. Die Eigenfrequenzen des Feder-Masse-Systems betragen 50 Hz bzw. 80 Hz.

Die Drücke im Fluid werden an vier Mikrofonpunkten neben dem Körper senkrecht zur Anströmungsrichtung abgegriffen (siehe Abbildung 13.2).

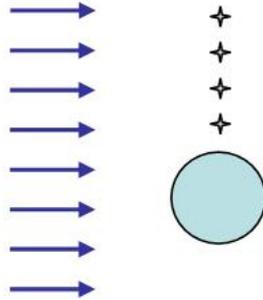


Abbildung 13.2: Anordnung der Mikrofonpunkte zur Messung des Druck-Zeitsignals

Modelleigenschaften:

Das Strömungsmodell besteht aus ca. 300000 Voxeln. Die kleinste Voxel-Kantenlänge im Bereich des Zylinders beträgt 5 mm, und es wurden 4 Gitter-Verfeinerungsstufen gewählt¹. Die Abmessung senkrecht zur Profilebene beträgt beim vorliegenden Modell² 1 m.

Das FE-Modell enthält ca. 5000 tetraederförmige *solid*-Elemente³ und ca. 8000 Knoten mit gekoppelten Freiheitsgraden. Die elastische Lagerung wurde durch Feder-elemente realisiert, so dass ein Ein-Massen-Schwinger vorliegt. Bei der transienten FE-Simulation der Strukturantwort wurde ein konstanter Dämpfungswert von 2 % angenommen.

Ergebnisse:

Im Resonanzfall, d.h. wenn die Eigenfrequenz des Schwingers mit der Wirbel-Anregungsfrequenz zusammenfällt, tritt eine deutlich höhere Auslenkung auf, wie in der Abbildung 13.4 (magenta-farbene Kurve) zu sehen ist. Weiterhin kann die für den Resonanzfall typische Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$ beobachtet werden. Tritt keine Resonanz auf (Abbildung 13.4, blaue Kurve), erhält man eine phasengleiche Schwingantwort mit deutlich geringerer Amplitude.

¹Eine derartige Gitterverfeinerung ist in der Abbildung 12.4 zu erkennen.

²wie auch bei allen anderen im vorliegenden sowie den beiden folgenden Kapiteln 14 und 15 beschriebenen Modellen

³Es wurden Elemente mit Mittelknoten verwendet, d.h. der Formfunktion des hier verwendeten Elementes liegt ein quadratischer Ansatz zugrunde.

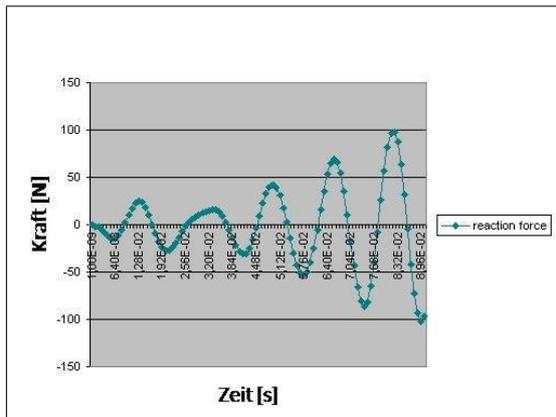


Abbildung 13.3: oszillierende Auftriebskraft

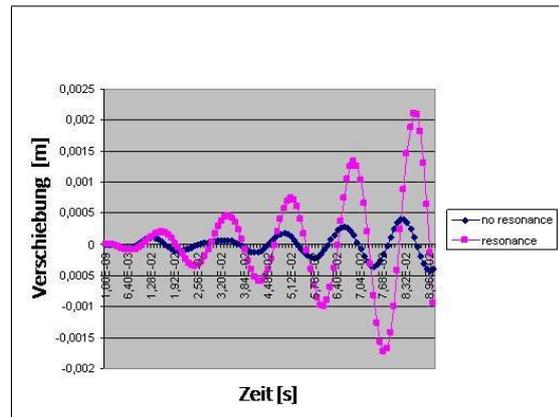


Abbildung 13.4: dynamische Antwort; magentafarbene Kurve: Resonanz, blaue Kurve: keine Resonanz

13.2 Strömung um einen elastischen, unverschieblich gelagerten Zylinder

In diesem Abschnitt wird ein elastischer, an beiden Enden unverschieblich gelagerter Zylinder betrachtet.

Problembeschreibung

Die zeitveränderlichen Strömungsdrücke verursachen transiente Verformungen. Die Abbildung 13.5 zeigt die Anordnung des Zylinders sowie die Koordinatenrichtungen. Die Anströmgeschwindigkeit beträgt hier 40 m/s, und der Durchmesser des Zylinders wie beim Beispiel im obenstehenden Abschnitt 13.1 10 cm. Die Strouhal-Frequenz liegt somit bei ca. 90 Hz.

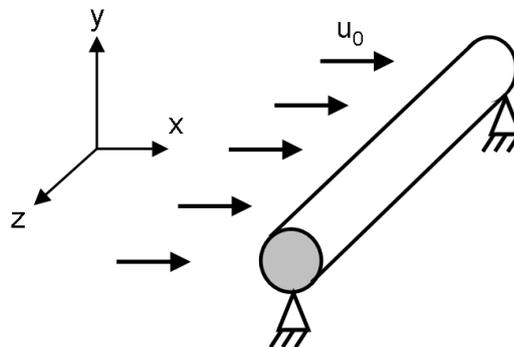


Abbildung 13.5: Strömung um einen elastischen, unverschieblich gelagerten Zylinder

Modelleigenschaften:

Das Strömungsmodell besteht aus ca. 300000 Voxeln. Die Gitterauflösung beträgt auch hier 5 mm bei 4 Verfeinerungsstufen.

Es wurden 20000 Strömungszeitschritte simuliert, davon wurden 16000 Zeitschritte ausgewertet. Die Länge eines Strömungszeitschrittes beträgt $1,14 \cdot 10^{-5}$ Sekunden. Der betrachtete Zeitraum (Zeitschritte 4000 bis 20000) hat damit eine Länge von 0,18 Sekunden. Pro 80 Strömungszeitschritte wurde ein Strukturzeitschritt der Länge $0,914 \cdot 10^{-3}$ Sekunden simuliert, dies bedeutet eine Gesamtanzahl von 200 (impliziten) Strukturzeitschritten. Die Frequenz der niedrigsten (Biege-) Eigenform des an den Enden unverschieblich gelagerten Zylinders beträgt 120 Hz.

Ergebnisse:

Neben der Verformung in Richtung der Anströmung (x-Richtung entsprechend Abbildung 13.5) stellt sich senkrecht dazu (in y-Richtung) eine Biegeschwingung ein. In der Abbildung 13.6 sind Momentanaufnahmen der stark überhöhten Verformung des Zylinders zusammen mit den Konturen des unverformten Körpers dargestellt.

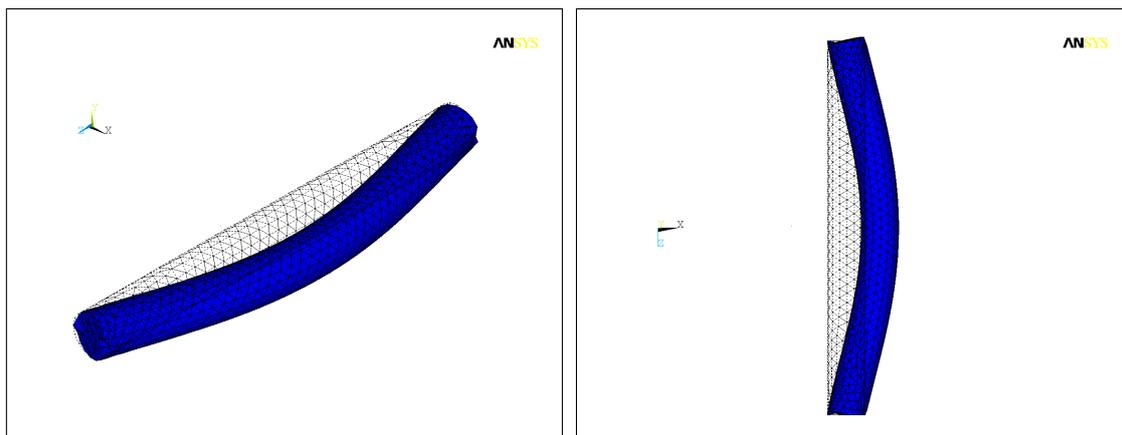


Abbildung 13.6: Momentaufnahme der Verformung (ca. 200-fach überhöht dargestellt) eines an beiden Enden unverschieblich gelagerten Zylinders aufgrund der von der Umströmung verursachten Drücke; links: Schrägansicht, rechts: Draufsicht

Abbildung 13.7 zeigt die dynamische Antwort des Zylinders am Ort der größten Durchbiegung in der Mitte des Zylinders⁴.

Die Größenordnung der Verschiebung (≤ 1 mm) ist gering im Vergleich zur Abmessung des Körpers (Zylinderdurchmesser: 10 cm). Die in Kapitel 12 vorausgesetzte Hypothese kleiner Vibrationsamplituden ist somit erfüllt.

⁴Die Schwankung der Amplitude ist ein bei umströmten Zylindern häufig auftretendes Phänomen, dass auch in Messungen beobachtet werden kann (siehe zum Beispiel [34], [35]).

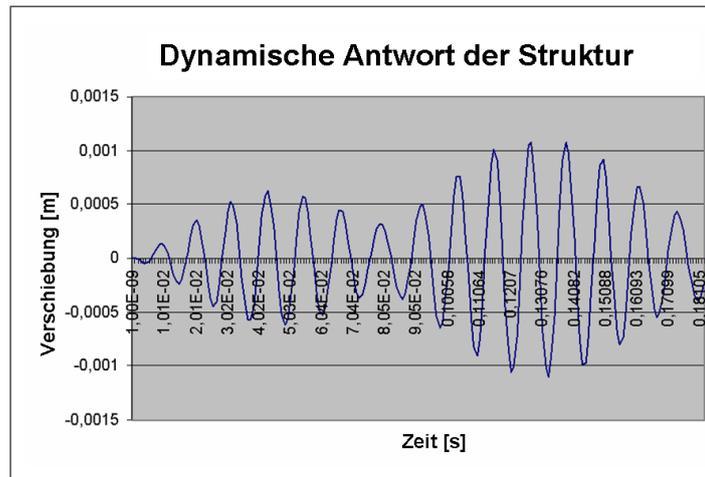


Abbildung 13.7: Biegeschwingung eines umströmten Zylinders, dynamische Antwort

13.3 Strömung um kantige Profile

13.3.1 Vergleich Zylinder - Balken

Im folgenden soll der Unterschied zwischen Rundprofilen (d.h. Zylindern) und kantigen Profilen aufgezeigt werden.

Problembeschreibung:

Bei der Strömung um kantige Profile wie etwa Balken entstehen aufgrund der definierten Abrisskanten für die Wirbel größere Wechsel-Auftriebskräfte als bei einem umströmten Zylinder.

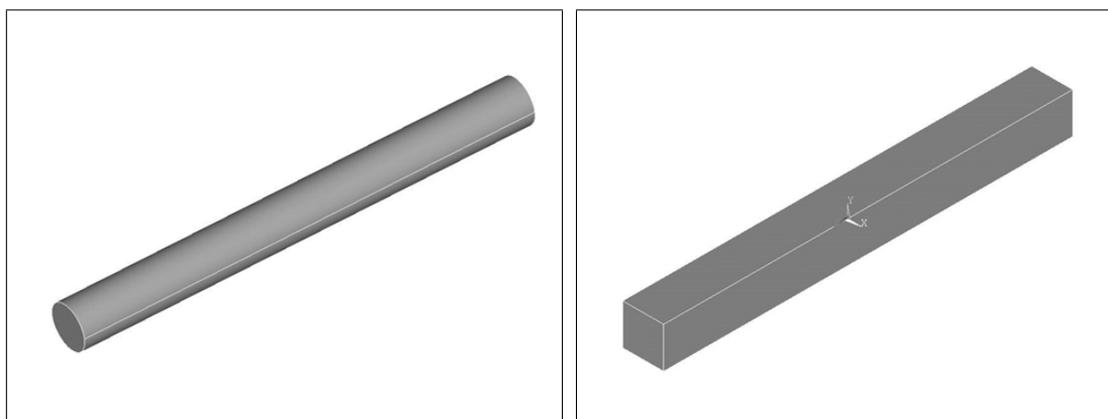


Abbildung 13.8: Unterschiedliche Profile für die Umströmung: Zylinder (links), Balken mit quadratischem Querschnitt (rechts)

Um die Auswirkungen zu demonstrieren, wurde die Strömung um zwei gleich lange, unterschiedlich geformte Profile simuliert (siehe Abbildung 13.8).

Modelleigenschaften:

Die Anzahl der Voxel (minimale Kantenlänge: 5 mm, 4 Verfeinerungsstufen, vgl. oben) beträgt auch hier für beide Modelle ca. 300000.

Der Betrag der Anströmgeschwindigkeit war in beiden Fällen 40 m/s. Es wurden 21000 Zeitschritte mit einer Zeitschrittlänge von $1,143 \cdot 10^{-5}$ Sekunden simuliert, davon wurden 17000 (die Zeitschritte 4000 bis 21000, d.h. insgesamt 0,194 Sekunden) ausgewertet. Die auf die Körper einwirkenden resultierenden Auftriebskräfte wurden im Abstand von 80 Zeitschritten abgetastet.

Ergebnis:

Der Vergleich der transienten Auftriebskräfte über die Zeitschritte ergibt bei dem kantigen Profil einen ca. 10-fach höheren Wert als beim Rundprofil (vgl. Abbildung 13.9).

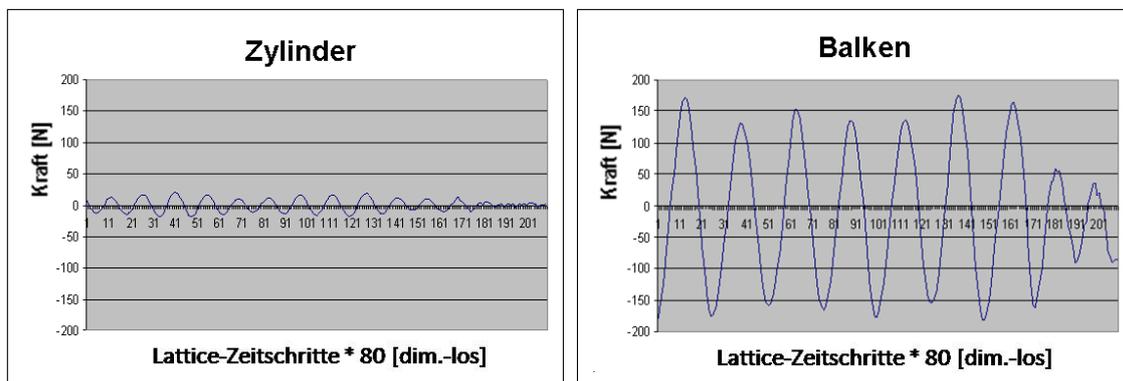


Abbildung 13.9: Vergleich der auf einen Zylinder (links) bzw. auf ein rechteckiges Balkenprofil (rechts) wirkenden oszillierenden Auftriebskräfte

13.3.2 Vergleich von Winkelprofilen mit unterschiedlichen Anströmrichtungen

Problembeschreibung:

Bei kantigen Profilen – insbesondere wenn sie nicht symmetrische Querschnitte aufweisen – ist die Richtung der Anströmung entscheidend für die Größe der Auftriebskraft und die Frequenz der entstehenden Töne. Als Beispiel sei hier die Strömung um ein Winkelprofil gezeigt, das entsprechend Abbildung 13.10 mit einem Winkelunterschied von 180 Grad angeströmt wird (siehe auch Kapitel 10).

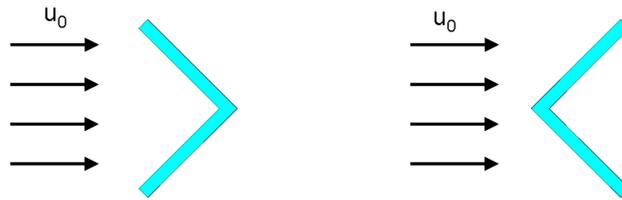


Abbildung 13.10: Aus unterschiedlichen Richtungen mit der Geschwindigkeit u_0 angeströmtes Winkelprofil

Modelleigenschaften:

Das Modell enthält ca. 390000 Voxel. Die minimale Voxel-Kantenlänge betrug 5 mm, insgesamt wurden 4 Verfeinerungsstufen gewählt. Ein Zeitschritt hatte eine Länge von $1,143 \cdot 10^{-5}$ Sekunden, es wurden insgesamt 13600 Zeitschritte simuliert, davon wurden 9600 (dies entspricht 0,109 Sekunden) aufgezeichnet. Die Auftriebsgeschwindigkeit wurde in einem Zeitraster von 80 Zeitschritten abgetastet. Die Anströmgeschwindigkeit betrug 40 m/s.

Ergebnisse:

Im Nachlauf der angeströmten Winkel stellen sich unterschiedliche Wirbelstraßen ein (siehe untenstehende Abbildungen 13.11 und 13.12).

Dabei sind die im Kapitel 10 beschriebenen typischen qualitativen Unterschiede in der Ausprägung der Wirbelstraße zu erkennen.

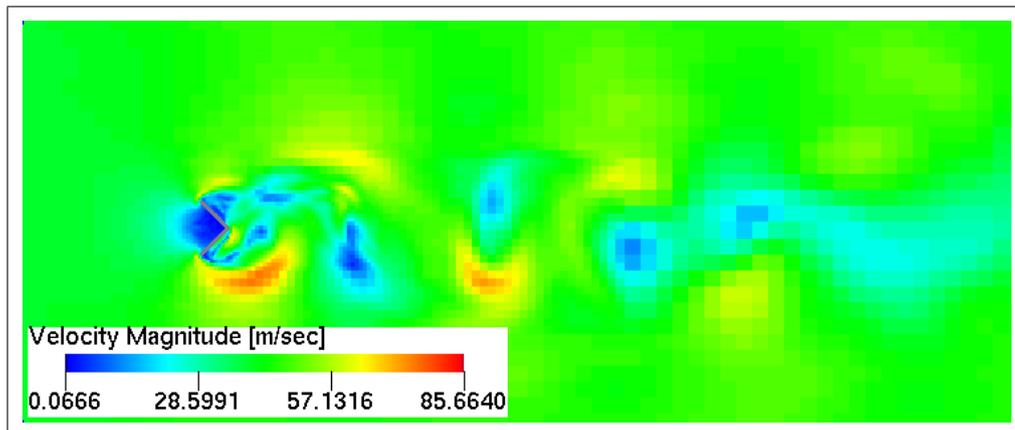


Abbildung 13.11: Wirbelstraße im Nachlauf eines umströmten Winkelprofils, entsprechend Abbildung 13.10 links

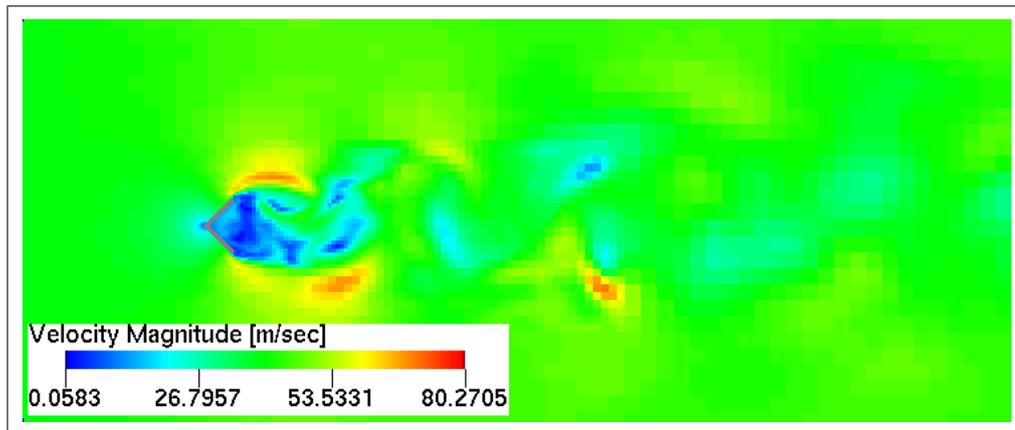


Abbildung 13.12: *Wirbelstraße im Nachlauf eines umströmten Winkelprofils mit um 180 Grad veränderter Anströmrichtung im Vergleich zum Profil aus Abbildung 13.11*

Der Vergleich der zeitlich veränderlichen Auftriebskräfte (Abbildung 13.13) zeigt dementsprechend die erwartungsgemäß unterschiedliche Größenordnung der resultierenden Kräfte.

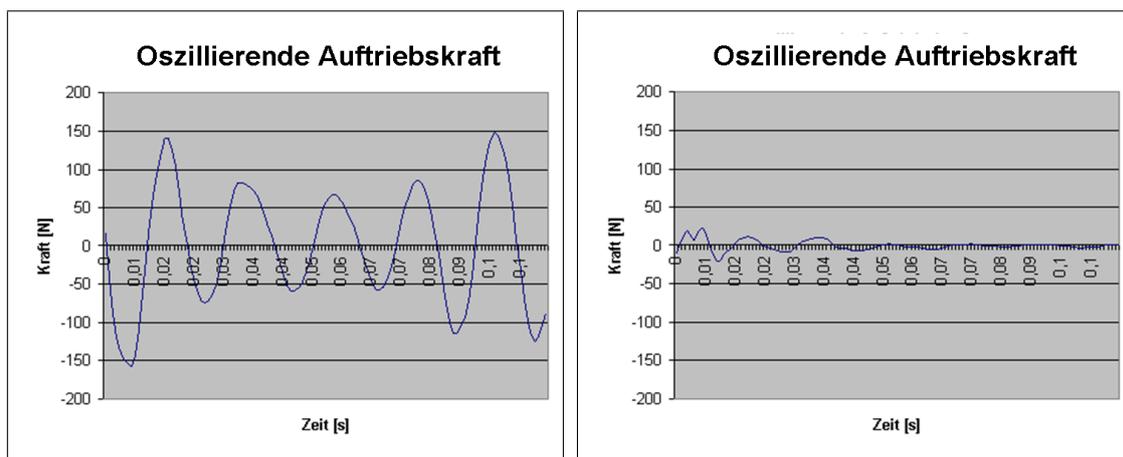


Abbildung 13.13: *Unterschiedliche, auf ein umströmtes Winkelprofil wirkenden Auftriebskräfte bei um 180 Grad verschiedenen Anströmwinkeln; links: Winkelprofil entsprechend Abbildung 13.10 links; rechts: Winkelprofil entsprechend Abbildung 13.10 rechts;*

Die Ergebnisse im Frequenzbereich (siehe Abbildungen 13.14 und 13.15) unterscheiden sich durch die Frequenzen der sich bildenden Wirbelstraßen sowie durch die unterschiedlich großen Pegel des entstehenden Schalls.

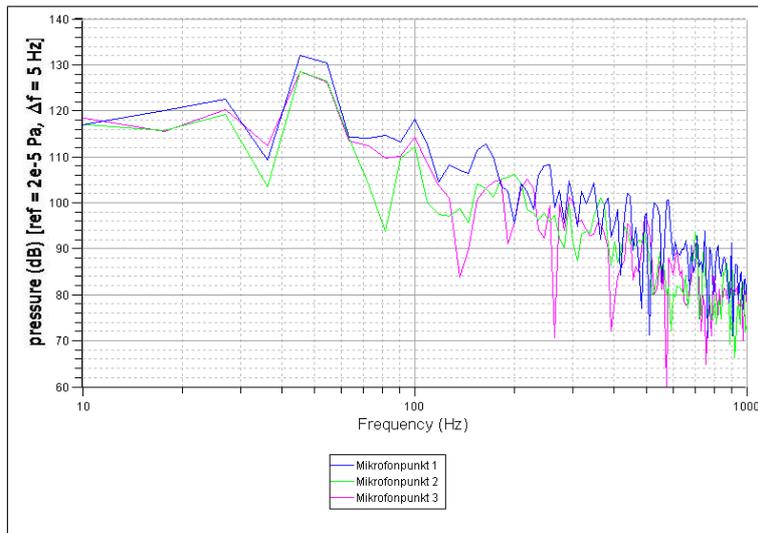


Abbildung 13.14: *Ergebnisse im Frequenzbereich, Winkelprofil entsprechend Abbildung 13.10 links*

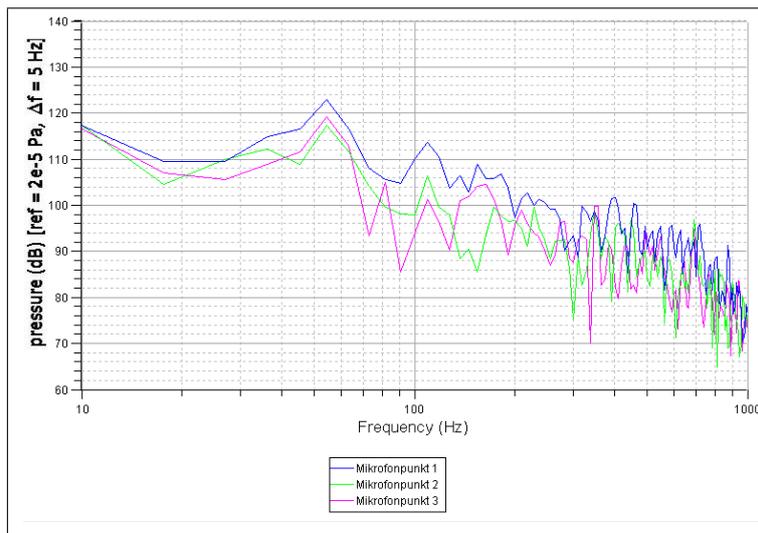


Abbildung 13.15: *Ergebnisse im Frequenzbereich, Winkelprofil entsprechend Abbildung 13.10 rechts*

Kapitel 14

Simulationsbeispiele, einseitige Kopplung: Struktur \longrightarrow Fluid

14.1 Umströmte vibrierende Profile

Problembeschreibung:

Um die einseitige Kopplung der Struktur an das Fluid zu untersuchen, wurden Strömungen um unterschiedliche Profile simuliert. Die umströmten Körper führten dabei jeweils eine erzwungene Schwingung aus. Da Schwingungen von schlanken Strukturen mit kreisförmigem Querschnitt nur geringe Schalldruckpegel erzeugen, wurde zunächst die Strömung um ein flächiges Profil untersucht.

Die Abbildung 14.1 zeigt den entsprechenden Modellaufbau:

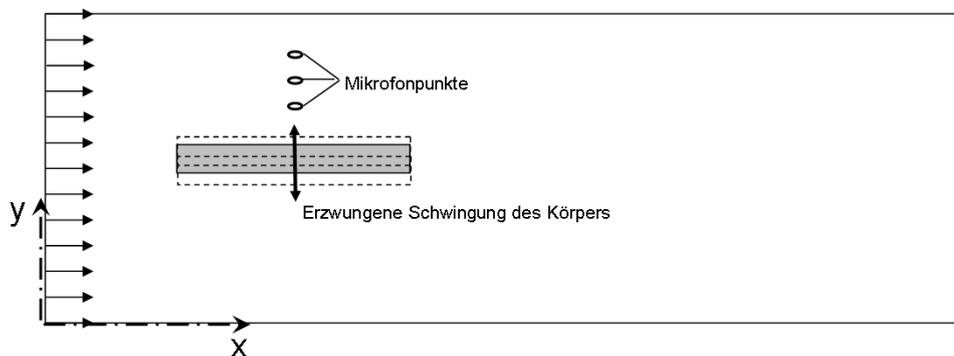


Abbildung 14.1: *Strömung um eine erzwungen schwingende, ebene Platte mit Mikrofonpunkten; Anordnung der Mikrofonpunkte 1 (ganz innen) bis 3 (ganz außen); Abmessungen: Länge / Dicke / Breite = 1m / 2,5cm / 25 cm)*

Modelleigenschaften:

Das Profil wurde mit einer Geschwindigkeit von 40 m/s angeströmt. Das Strömungsmodell bestand aus ca. 410000 Voxeln. Die Kantenlänge der Voxel im Bereich der

Oberfläche des umströmten Körpers betrug 5 mm, es wurden 4 Verfeinerungsstufen gewählt. Insgesamt wurden 13600 Strömungszeitschritte simuliert, davon wurden die Zeitschritte 4000 bis 13600 aufgezeichnet. Ein Zeitschritt war $1,143 \cdot 10^{-5}$ Sekunden lang.

Die Frequenz der erzwungenen Strukturschwingung betrug 50 Hz. Das Strukturmodell enthielt ca. 2000 Elemente und ca. 5000 Knoten mit gekoppelten Freiheitsgraden. Die Länge eines transienten Strukturzeitschritts war 80-mal so lang wie die eines Strömungszeitschritts. Somit wurde die Schnelle auf der Körperoberfläche im Strömungsmodell einmal pro 80 Strömungszeitschritte aktualisiert.

Die Oberfläche des umströmten Körpers wurde als *Inlet*-Randbedingung mit der entsprechenden, aus dem Strukturmodell importierten veränderlichen Schnelle modelliert.

Ergebnisse:

Die Auswertung der Simulation im Frequenzbereich für die Mikrofonpunkte 1 bis 3 zeigt zwei deutlich unterscheidbare Peaks (Abbildung 14.2). Neben dem durch die Umströmung selbst verursachten Ton, der bei einer Frequenz von ca. 90 Hz liegt, ist die Frequenz der erzwungenen Schwingung (50 Hz) zu erkennen.

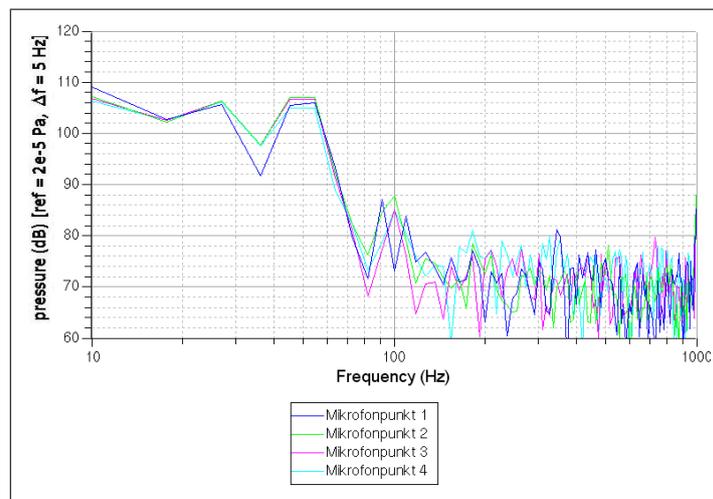


Abbildung 14.2: umströmte vibrierende Platte, Ergebnisse im Frequenzbereich für die Mikrofonpunkte 1 bis 3; Der Peak bei ca. 90 Hz wird durch die Anströmung, derjenige bei 50 Hz von der Vibration der Struktur verursacht.

Der Einfluss der turbulenten Wandschicht bei hohen Reynoldszahlen wird üblicherweise durch ein *logarithmisches Wandmodell* berücksichtigt (vgl. Kapitel 5, 7).

Wird, wie bereits in Kapitel 12 ausgeführt, jedoch eine *Inlet*-Randbedingung angenommen, um die variable Oberflächenschnelle auf der Begrenzung des Fluids zu modellieren, so kann in POWERFLOW kein Wandmodell verwendet werden.

Während bei den umströmten Hindernissen mit geringer Längenausdehnung, wie Zylinder oder Balken, der Einfluss der Randbedingung gering ist, macht man bei dem

hier untersuchten flächigen Profil einen größeren Fehler, wie in den untenstehenden Abbildungen 14.3 bis 14.6 dokumentiert ist. Dazu wurde die ungekoppelte Strömung um den Körper aus Abbildung 14.1 simuliert. Die Oberfläche wurde dabei einmal durch ein *Inlet* und einmal mit Hilfe eines Wand-Turbulenzmodelles abgebildet. Abbildung 14.3 zeigt den sich zwischen den beiden Modellen ergebenden Unterschied in der auf den Körper wirkenden oszillierenden Auftriebskraft.

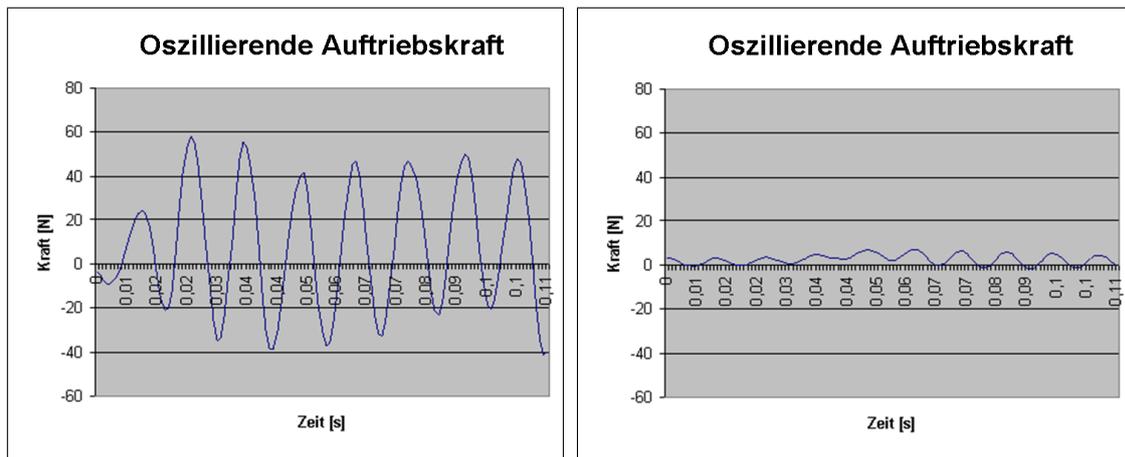


Abbildung 14.3: Umströmte Platte, oszillierende Auftriebskraft: Wandmodell (links), Inlet-Randbedingung (rechts)

Auch im Frequenzbereich sind Unterschiede – sowohl bei der Intensität als auch in der Frequenz – zu erkennen:

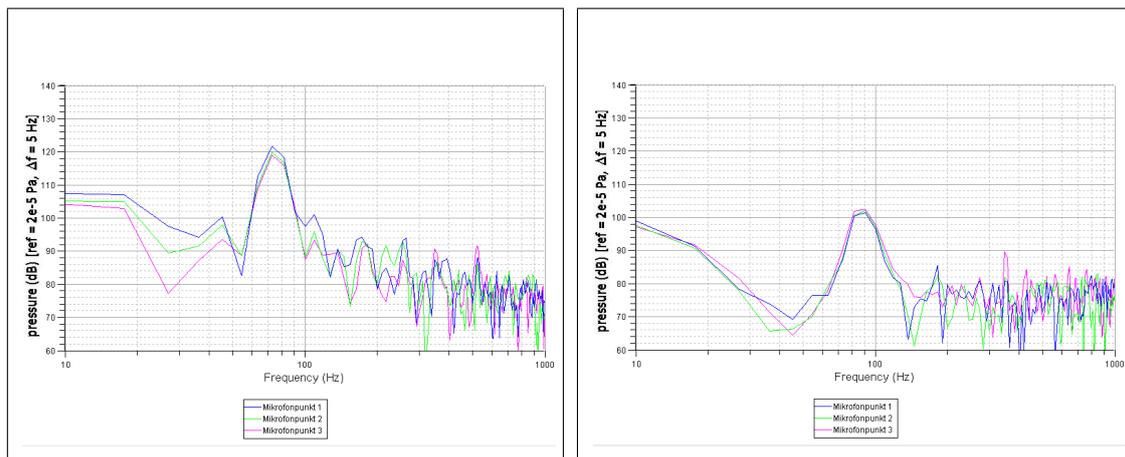


Abbildung 14.4: Umströmte Platte, Ergebnisse im Frequenzbereich für die Mikrofonpunkte 1 bis 3 Randbedingung: Wandmodell (links), Inlet-Randbedingung (rechts)

Auf prinzipielle Möglichkeiten zur Lösung dieser Problematik soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch nur kurz im abschließenden Kapitel 17.2 eingegangen werden. Die Abbildungen 14.5 und 14.6 zeigen die Wirbelstraßen im Nachlauf des Körpers. Die Farbskalen stehen dabei für die unterschiedlichen Geschwindigkeitsbeträge des

strömenden Fluids. Auch hier sind die Unterschiede zwischen den beiden Modellen deutlich zu erkennen:

Die Wirbelstraße ist deutlich ausgeprägter und breiter, wenn ein Wandmodell eingesetzt wird (Abbildung 14.5). Wird als Randbedingung ein *Inlet* – hier mit einer konstanten Schnelle von 0 m/s – verwendet (Abbildung 14.6), so bildet sich die Wirbelstraße nur andeutungsweise aus.

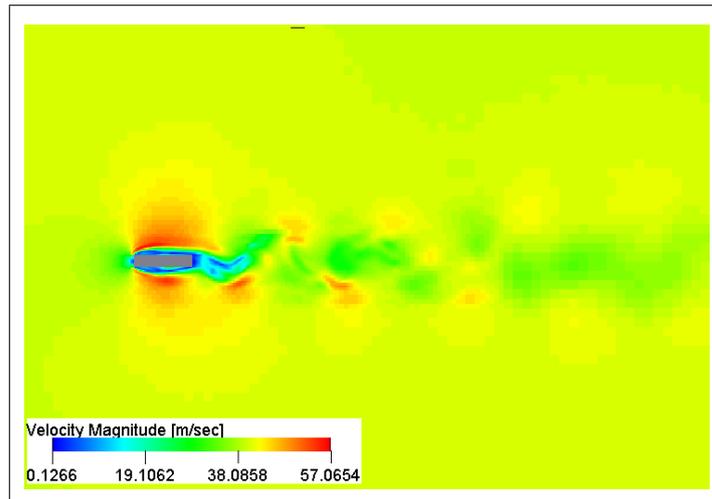


Abbildung 14.5: *Wirbelstraße im Nachlauf einer umströmten Platte, Randbedingung: logarithmisches Wandmodell;*

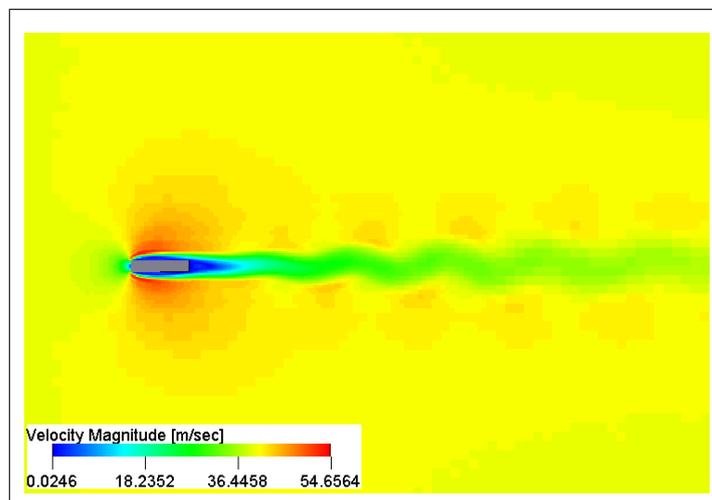


Abbildung 14.6: *Wirbelstraße im Nachlauf einer umströmten Platte, Randbedingung: Inlet;*

14.2 Der Lock-in-Effekt

Problembeschreibung

Ein interessanter weiterer beobachtbarer Effekt ist der sogenannte *Lock-in-Effekt*. Damit wird allgemein die Synchronisation zweier schwach gekoppelter Oszillatoren bezeichnet¹. Unterschreitet der Frequenzunterschied Δf der beiden Oszillatoren im nicht gekoppelten Zustand die sogenannte *Lock-in-Schwelle* f_L , so beginnen bei einer Kopplung beide mit gleicher Frequenz zu schwingen. Damit Lock-in eintritt, muß folgender Frequenzunterschied unterschritten werden:

$$\Delta f = \sqrt{f_0^2 - f_L^2} \tag{14.1}$$

f_0 ist die ungestörte Frequenz eines Schwingers. Die Höhe der Lock-in-Schwelle hängt dabei von der Stärke der Kopplung ab.

Bei einem umströmten Körper sind die Oszillatoren zum einen die sich am Körper ablösenden Wirbel im Fluid, zum anderen der elastisch gelagerte (in Schwingungen versetzte) Körper selbst. Zwischen Körper und Fluid tritt Wechselwirkung auf. Nähern sich die beiden Schwingfrequenzen bis zur *Lock-in-Schwelle* aneinander an, so beginnen sich beide Systeme zu synchronisieren. Im Fall der erzwungenen Vibration des Körpers verändert sich dabei die Wirbelablösefrequenz. Die Lock-in-Schwelle ist dabei abhängig von der Höhe der Schwelle des vibrierenden Körpers, d.h. je höher die Schwinggeschwindigkeit ist, desto größer kann der Frequenzabstand Δf werden, bei dem noch Synchronisation auftritt.

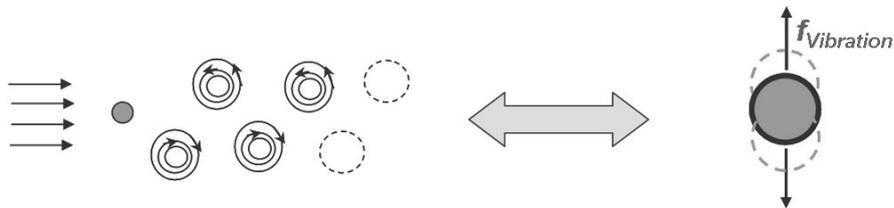


Abbildung 14.7: Zwei schwach gekoppelte Systeme bei einer Umströmung eines Körpers: 1. ablösende Wirbel am Körper, 2. mit der Frequenz $f_{vibration}$ schwingender Körper

Um die Lock-in-Schwelle zu demonstrieren, wurde ein senkrecht zu seiner Achse angeströmter Zylinder zu erzwungener Schwingung angeregt. Die Vibration wurde eingepreßt und ist somit nicht veränderlich. Die Frequenz der Schwingung des Körpers wurde dabei kontinuierlich verändert. Wie in dem Diagramm in der Abbildung 14.8 zu erkennen ist, verändert sich die Wirbelfrequenz (Strouhal-Frequenz, gelbe Kurve) bei Annäherung an die Lock-in-Schwelle und springt zur Vibrationsfrequenz des Körpers (blaue Kurve) über. Zum Vergleich ist die ungestörte Strouhal-Frequenz,

¹Das Phänomen des Lock-in-Effekts kann nicht nur bei mechanischen, sondern auch bei anderen Schwingungen, z.B. bei elektrischen Schwingkreisen, auftreten.

d.h. die Frequenz der Wirbelablösung für den Fall, dass kein zweiter Oszillator vorhanden ist, im Diagramm eingetragen (magenta-farbene Kurve).

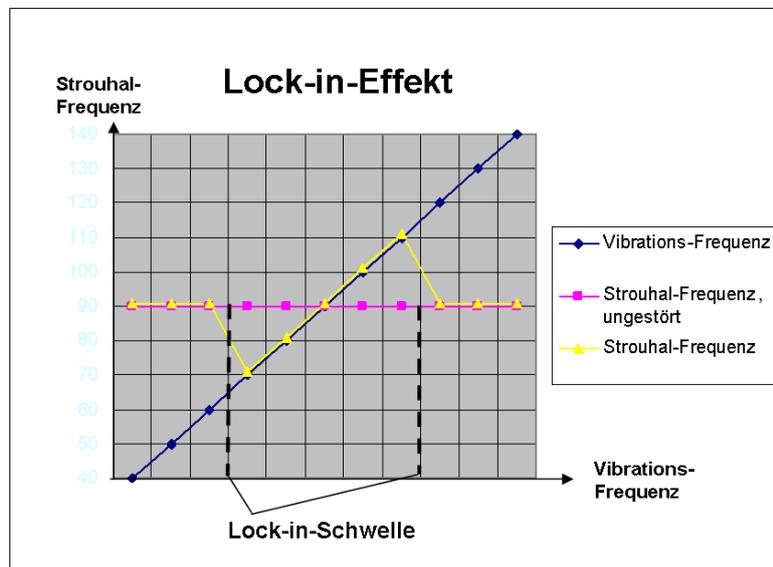


Abbildung 14.8: *Lock-in-Schwelle: Im Diagramm sind die Strouhal-Frequenz (vertikale Achse) sowie die Frequenz der Vibration des Körpers (horizontale Achse) eingetragen. Liegen die beiden Frequenzen nahe genug beieinander, so springt die Strouhal-Frequenz über zur Vibrationsfrequenz.*

Modelleigenschaften:

Das Strömungsmodell ist identisch zu dem in Kapitel 13, Abschnitt 13.1 bereits beschriebenen Modell.

Für die folgenden Ergebnisse wurden Simulationen bei einer Reynoldszahl von 350000 durchgeführt. Die theoretisch erwartete Strouhal-Frequenz liegt damit bei ca. 87 Hz. Die Frequenz der erzwungenen Vibration des Körpers beträgt 50 Hz.

Ergebnisse:

Die Abbildungen 14.9 bis 14.12 zeigen die Ergebnisse der Strömung um einen vibrierenden Zylinder im Frequenzbereich.

Bei einer oszillierenden Schnelle des Körpers mit einer Amplitude von 1 m/s bzw. 2 m/s tritt kein Lock-in auf. Im Frequenzbereich sind deutlich die unterschiedlichen Peaks für die Strouhal- und die Vibrationsfrequenz bei ca. 87 bzw. bei 50 Hz zu erkennen. Die Größe der Peaks ist jeweils abhängig von der Schwingamplitude.

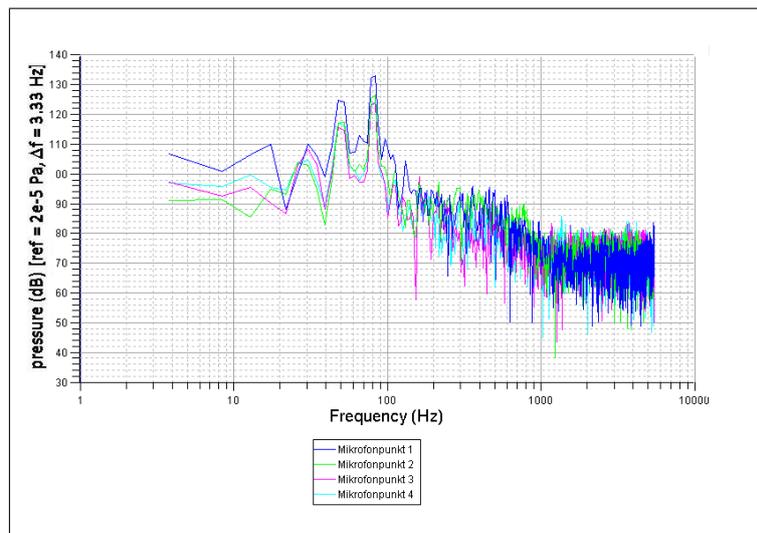


Abbildung 14.9: *Vibrationsfrequenz des Zylinders: 50 Hz, Strouhal-Frequenz: ca. 90 Hz, Schwingungsamplitude: 1m/s; kein Lock-in Effekt*

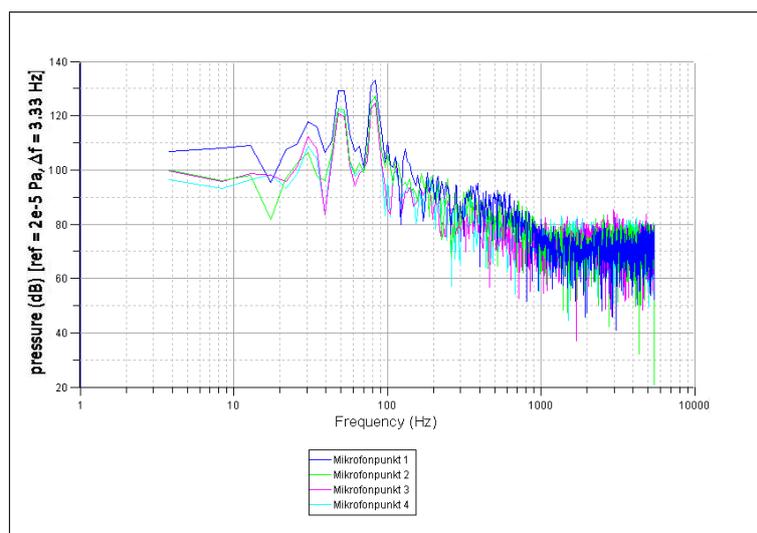


Abbildung 14.10: *Vibrationsfrequenz des Zylinders: 50 Hz, Strouhal-Frequenz: ca. 90 Hz, Schwingungsamplitude: 2m/s; kein Lock-in Effekt*

Bei einer Steigerung der Amplitude auf 5 m/s dagegen tritt Lock-in auf, die Wirbelablösefrequenz synchronisiert sich mit der Vibrationsfrequenz. Im Frequenzbereich zeigt sich nur noch eine deutliche Spitze bei 50 Hz (siehe Abbildung 14.11).
 Liegt dagegen die Vibrationsfrequenz näher an der Strouhal-Frequenz, so kann bereits bei geringeren Amplituden Lock-in beobachtet werden. Die Abbildung 14.12 veranschaulicht dies: Die Schwingamplitude von 2 m/s bei einer Frequenz von 50 Hz (Abbildung 14.10) war noch nicht ausreichend, um den Lock-in-Effekt hervorzurufen. Wird die Frequenz bei gleichbleibender Amplitude jedoch auf 70 Hz erhöht (Abbildung 14.12), so tritt der Lock-in-Effekt ein.

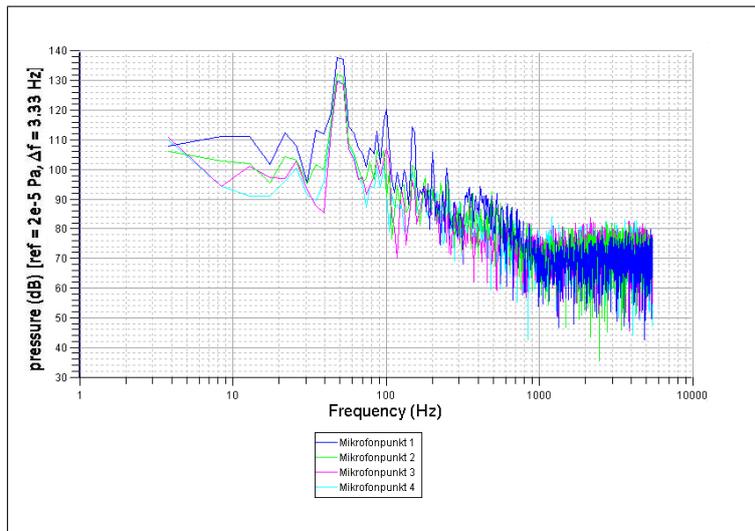


Abbildung 14.11: *Vibrationsfrequenz des Zylinders: 50 Hz, Strouhal-Frequenz: ca. 90 Hz, Schwingungsamplitude: 5m/s ; Lock-in Effekt*

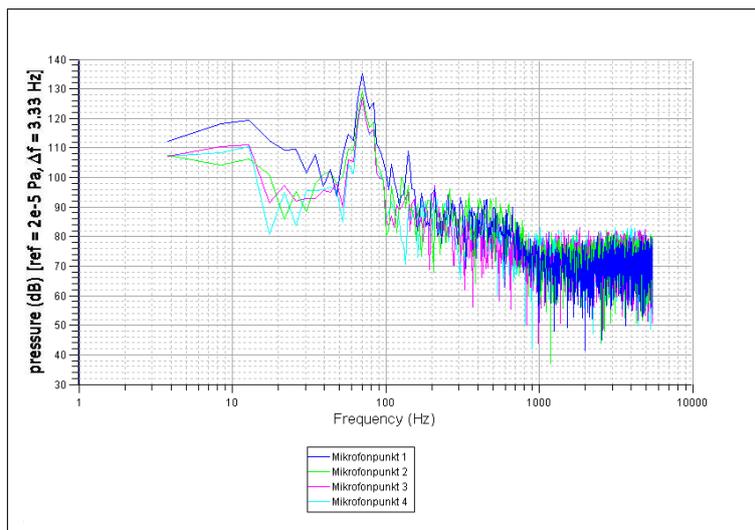


Abbildung 14.12: *Vibrationsfrequenz des Zylinders: 70 Hz, Strouhal-Frequenz: ca. 90 Hz, Schwingungsamplitude: 2m/s; Der Lock-in Effekt tritt auf.*

Kapitel 15

Simulationsbeispiele, bidirektionale Kopplung

15.1 Strömung um ein starres, elastisch gelagertes, flächiges Profil

Problembeschreibung:

Als Beispiel für ein bidirektional gekoppeltes Problem wurde die Strömung um ein elastisch gelagertes, flächiges Profil gewählt (siehe Abbildung 15.1)¹.

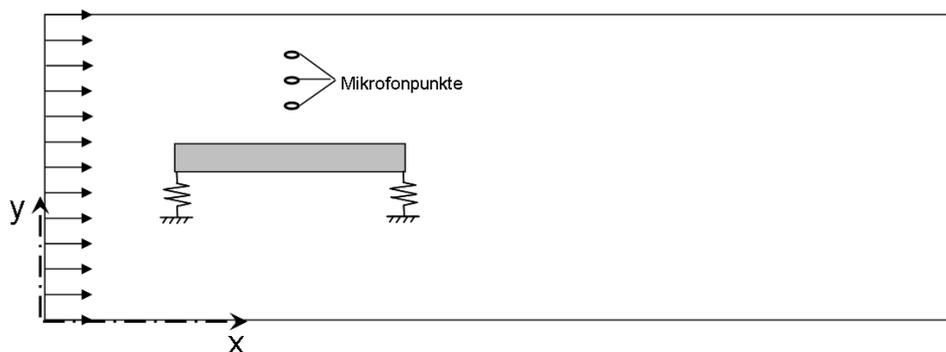


Abbildung 15.1: *Elastisch gelagerte, umströmte ebene Platte mit Mikrofonpunkten; Anordnung der Mikrofonpunkte 1 (ganz innen) bis 4 (ganz außen); Abmessungen: Länge / Dicke / Breite = 1m / 2,5cm / 25 cm)*

Bei einem entsprechend der Abbildung 15.1 angeströmten flächigen Profil wird man aufgrund der geringen Abmessung senkrecht zur Strömungsrichtung lediglich sehr geringe oszillierende Auftriebskräfte und eine dementsprechend geringe dynamische Antwort der Struktur erwarten.

¹Schwingende kreisförmige Strukturen verursachen bei gleicher Frequenz und Schnelle geringere Schalldruckpegel als flächige Profile.

Um größere Auftriebskräfte zu erhalten, wurde daher, wie in untenstehender Abbildung 15.2 angedeutet, eine zusätzliche Komponente der einströmenden Geschwindigkeit in y-Richtung (d.h. quer zum Profil) angenommen.

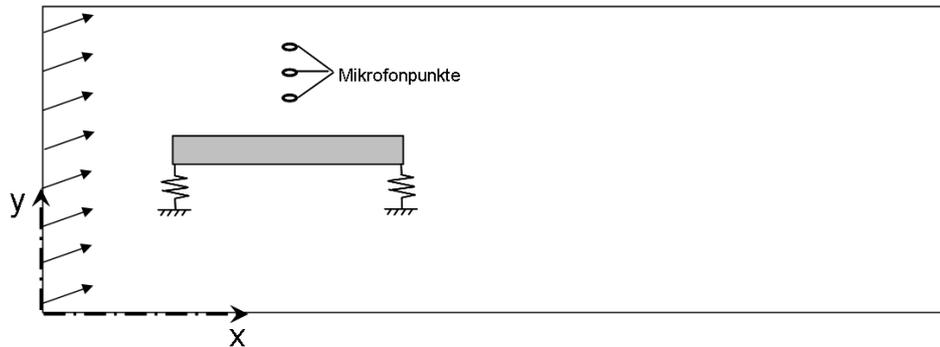


Abbildung 15.2: *Elastisch gelagerte, umströmte ebene Platte, Abmessungen wie in Abbildung 15.1; Die Einströmung am Inlet hat eine zusätzliche Komponente in y-Richtung.*

Modelleigenschaften:

Das Strömungsmodell besteht aus ca. 410000 Voxeln mit einer minimalen Kantenlänge von 5 mm und 5 Verfeinerungstufen. Insgesamt wurden 13600 Zeitschritte simuliert. Die Zeitdauer eines Zeitschrittes betrug dabei $1,143 \cdot 10^{-5}$ Sekunden. Das dargestellte Zeitsignal beginnt nach Zeitschritt 4000, d.h. nach 0,04572 Sekunden. Die Anströmgeschwindigkeit hatte eine Komponente von $u_x = 40$ m/s in x-Richtung und von $u_y = 10$ m/s in y-Richtung.

Das FE-Modell besteht aus ca. 2000 Elementen und ca. 5000 Knoten. Die Eigenfrequenz des in den Abbildungen 15.1 bzw. 15.2 dargestellten Feder-Masse-Systems beträgt ca. 130 Hz, es wurde ein konstanter Dämpfungswert von 2 % angenommen.

Ergebnisse:

Der zeitliche Verlauf der im ungekoppelten Fall durch die Strömung verursachten, auf die Struktur einwirkenden oszillierenden Auftriebskräfte ist - sowohl für $u_y = 0$ m/s als auch für $u_y = 10$ m/s) in der Abbildung 15.3 dargestellt.

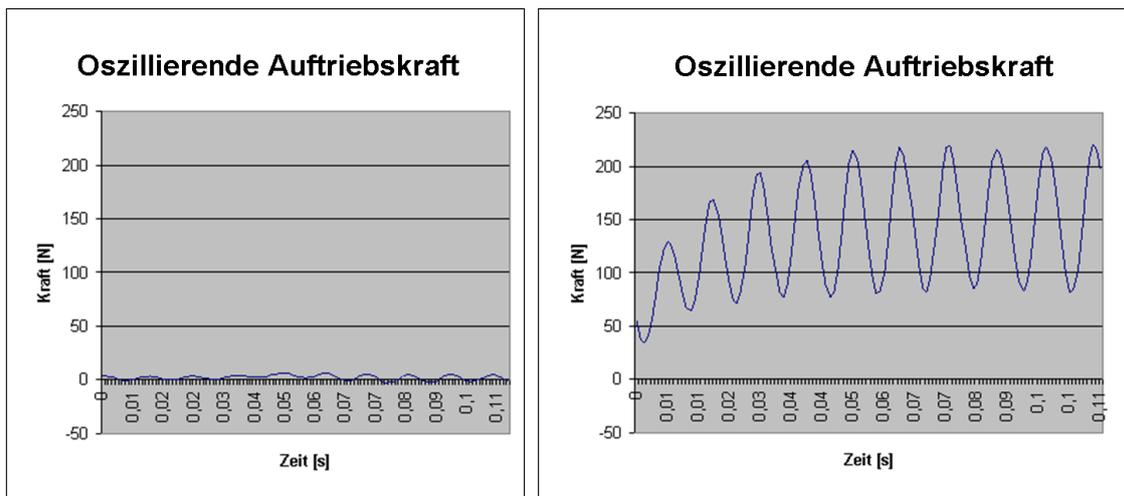


Abbildung 15.3: *Strömung um eine elastisch gelagerte Platte; Unterschiedliche resultierende transiente Belastung aufgrund der y-Komponente der Geschwindigkeit der Umströmung; links: $u_y = 0\text{m/s}$, rechts: $u_y = 10\text{m/s}$. (Koordinatendefinition: siehe Abbildung 15.2)*

Der Zeitverlauf der Auftriebskraft im Falle der bidirektionalen Kopplung ist in der Abbildung 15.4 zu sehen.

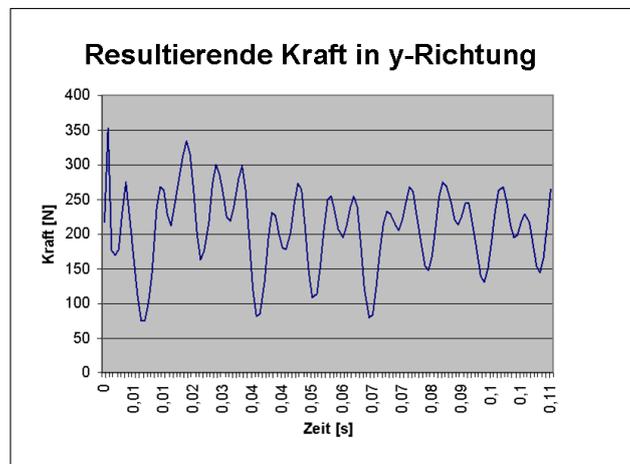


Abbildung 15.4: *Strömung um eine elastisch gelagerte Platte; resultierende transiente Belastung in y-Richtung aufgrund der Umströmung;*

Fallen die Eigenfrequenz des Schwingers und die Strouhal-Frequenz des umströmten Körpers nicht zusammen, so kann die Umströmung dennoch eine Strukturantwort in der Eigenfrequenz des Feder-Masse-Systems bewirken.

Die transiente Belastung bewirkt eine dynamische Schwingungsantwort des Systems. Ihr Zeitverlauf ist in Abbildung 15.5 zu sehen.

Aufgrund des breitbandigen Anteils des fluktuierenden Druckfeldes entspricht die Frequenz der Schwingungsantwort der (gedämpften) Eigenfrequenz des Feder-Masse-Schwingers.

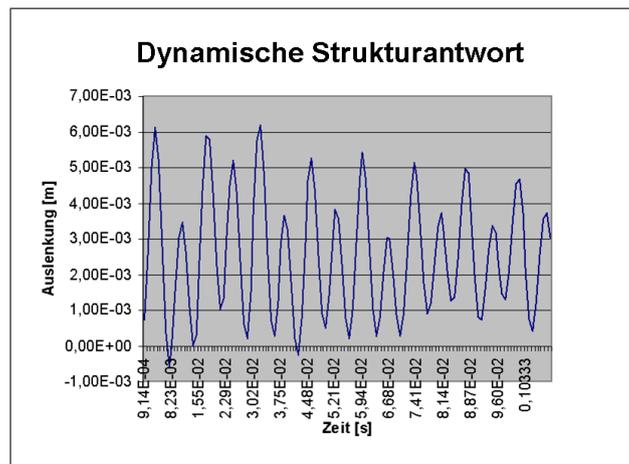


Abbildung 15.5: *Zweiseitige Fluid-Struktur-Kopplung; Dynamische transiente Antwort des Feder-Masse-Schwingers*

Auswertungen im Frequenzbereich wurden jeweils für die in der Abbildung 15.1 bzw. 15.2 dargestellten Mikrofonpunkte durchgeführt.

Die Druckschwankungen im Fluid wurden abgetastet und im logarithmischen Maßstab sowie als Dezibel-Größe dargestellt. Abbildung 15.6 zeigt eine entsprechende Auswertung für das ungekoppelte Modell. Im Frequenzbereich ist ein deutlicher Peak zu erkennen, der für die Strouhal-Frequenz des umströmten Körpers charakteristisch ist.

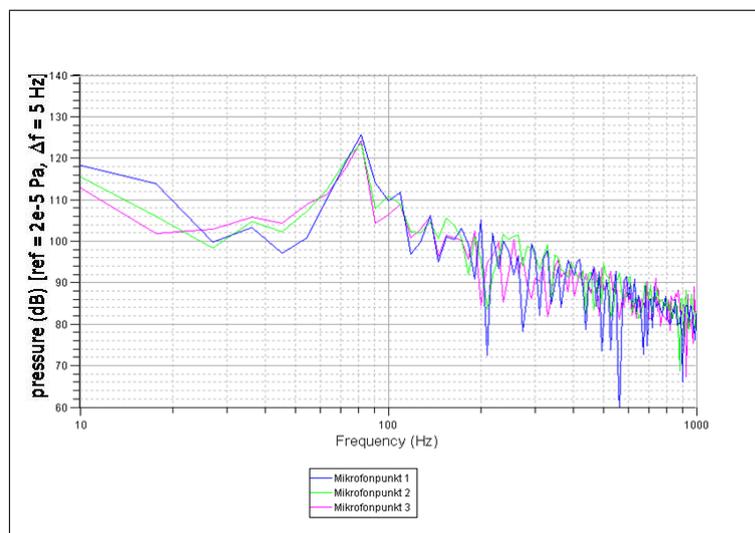


Abbildung 15.6: *Ergebnisse im Frequenzbereich für die Mikrofonpunkte 1 bis 3 (vgl. Abbildung 15.7), keine Kopplung zwischen Fluid und Struktur*

Im gekoppelten Fall dagegen (siehe Abbildung 15.7) können im Frequenzspektrum deutlich zwei Peaks unterschieden werden :

Der Peak bei ca. 70 Hz repräsentiert wiederum die Strouhal-Frequenz. Ein Ton dieser Größenordnung tritt auch auf, wenn keinerlei Kopplung zwischen Fluid und Struktur vorliegt (siehe Abbildung 15.6). Der Peak bei ca. 130 Hz dagegen wird von der dynamischen Antwort des Systems hervorgerufen.

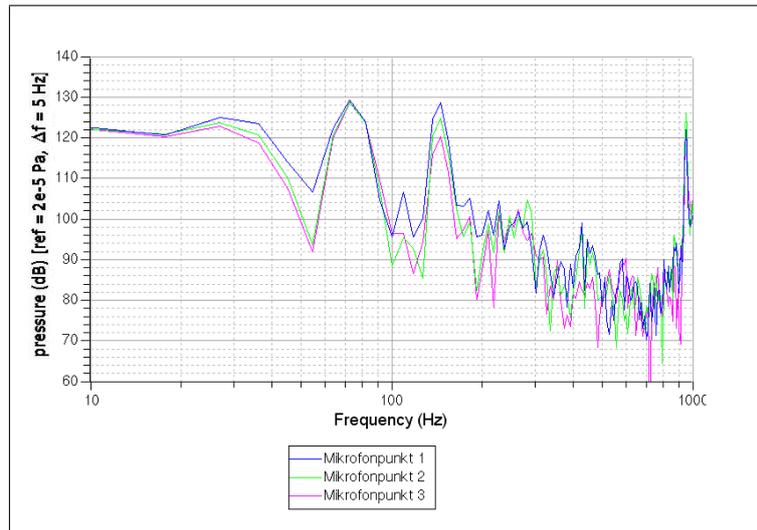


Abbildung 15.7: *Ergebnisse im Frequenzbereich für die Mikrofonpunkte 1 bis 3 (vgl. Abbildung 15.1), bidirektionale Kopplung zwischen Fluid und Struktur*

Kapitel 16

Ein industrielles Anwendungsbeispiel: Stromabnehmer

Problembeschreibung:

Bei Stromabnehmern (*Pantografen*) von Hochgeschwindigkeitszügen können viele der bereits an einfachen Modellen wie umströmten Zylindern oder Balken untersuchten Effekte beobachtet werden. Im folgenden soll dies anhand der Ergebnisse einer zweiseitig gekoppelten Berechnung entsprechend Kapitel 12, Abbildung 12.14 demonstriert werden. Es wurde das Modell eines Stromabnehmers im digitalen Windkanal untersucht.

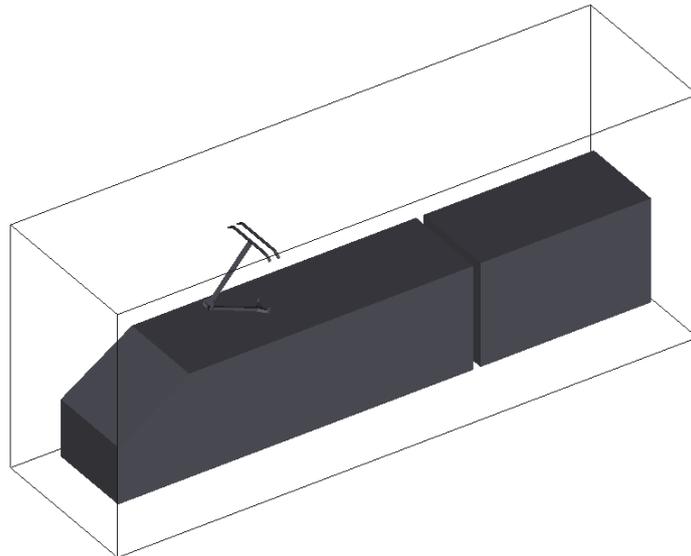


Abbildung 16.1: (*stark vereinfachtes*) Zugmodell mit Stromabnehmer im digitalen Windkanal

Der Stromabnehmer wurde dabei zusammen mit der stark vereinfachten Geometrie

eines Zuges (vgl. Abbildung 16.1) abgebildet.

Modelleigenschaften:

Das Lattice-Boltzmann-Strömungsmodell bestand aus ca. $4 * 10^6$ *Voxeln*, die Oberflächen wurden durch insgesamt ca. 150000 *Surfel* angenähert. Die Gitterverfeinerung fand in 6 Stufen statt. Die feinste Auflösung (im Bereich des Stromabnehmers) betrug dabei 0,5 cm.

Die Anströmung im Windkanal erfolgte in *z*-Richtung. Die ungestörte Anströmgeschwindigkeit betrug 55 m/s. Eine Lattice-Zeitschrittlänge betrug $2,286 * 10^{-5}$ Sekunden. Es wurden insgesamt 17000 Zeitschritte simuliert, davon wurden die Zeitschritte 5001 bis 17000 abgetastet. Die Gesamtdauer der simulierten Zeit entsprach somit ca. 0,387 Sekunden. Auf einen Strukturzeitschritt kamen 80 Strömungszeitschritte, die Länge eines impliziten Strukturschrittes ergab sich demnach zu $1,829 * 10^{-3}$ Sekunden.

Das Modell des Stromabnehmers besteht aus mehreren Teilvolumen (*Unterarm*, *Oberarm*, zwei *Schleifleisten*) und ist in Abbildung 16.2 dargestellt¹.

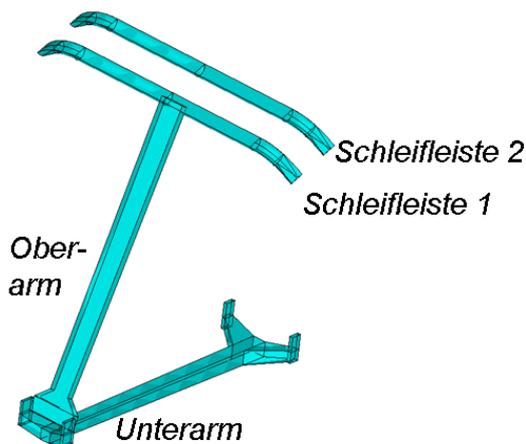


Abbildung 16.2: Geometrie des Stromabnehmers, unterteilt in Oberarm, Unterarm, Schleifleiste 1, Schleifleiste 2

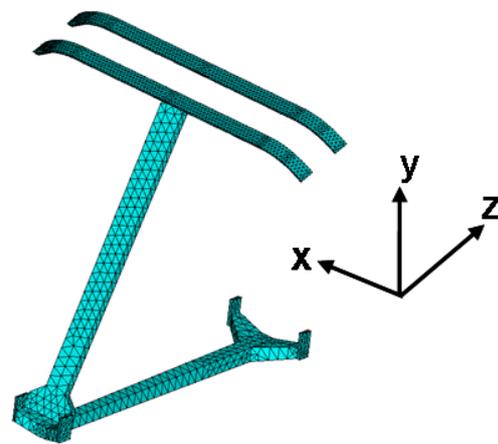


Abbildung 16.3: FE-Netz des Stromabnehmers, Ausrichtung im Koordinatensystem

Auf der Strukturseite wurde lediglich der Stromabnehmer abgebildet, das vereinfachte Modell des Zuges wurde nicht berücksichtigt. Die Struktur wurde mit ca. 24000 tetraederförmigen Finiten Elementen vernetzt. Die einzelnen Bauteile Oberarm, Unterarm sowie die beiden Schleifleisten (siehe Abbildung 16.2) wurden durch Kopplung von entsprechenden Freiheitsgraden miteinander verbunden. Am unteren Ende des Unterarms wurde eine unverschiebliche Lagerung des Modells angenommen.

¹Der im Rahmen dieser Arbeit dargestellte Stromabnehmer wurde lediglich zu Demonstrationszwecken konstruiert. Es handelt sich *nicht* um ein tatsächlich existierendes Bauteil.

Die niedrigste Eigenfrequenz der Struktur beträgt ca. 45 Hz. Die zugehörige Eigenform ist in Abbildung 16.4 angedeutet.

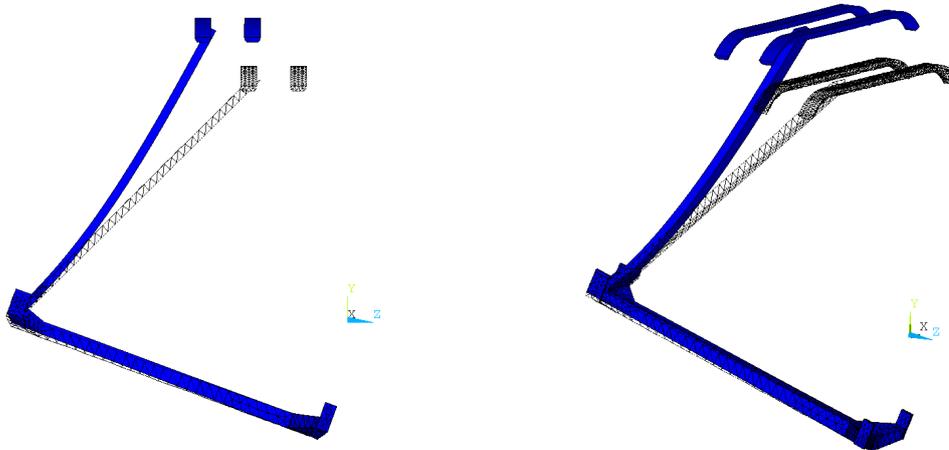


Abbildung 16.4: *Erste Eigenschwingform des Stromabnehmers bei einer Frequenz von ca. 45 Hz; verformte Geometrie und unverformter Umriss;*

Ergebnisse:

Die Abbildung 16.5 zeigt die typischen von Kármánschen Wirbelstraßen, die sich im Nachlauf des Stromabnehmers bilden.

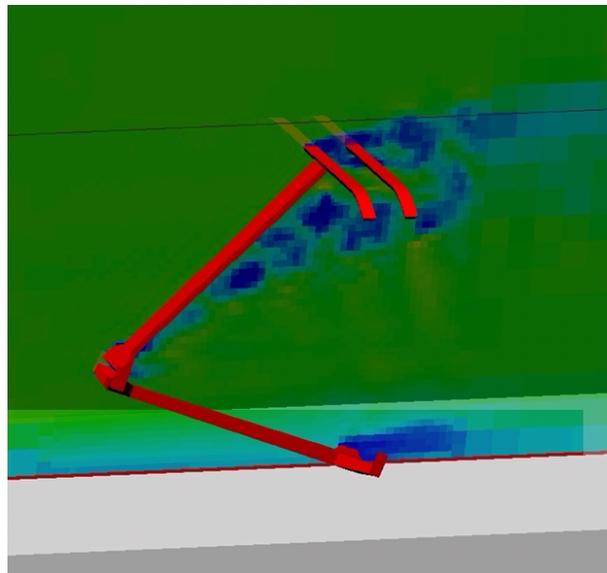


Abbildung 16.5: *von Kármánsche Wirbelstraße im Nachlauf des Stromabnehmers eines Hochgeschwindigkeitszuges*

Die Umströmung des Zugmodells aus Abbildung 16.1 verursacht die Einwirkung von im Frequenzbereich relativ breitbandigen Kräften auf die Struktur. Abbildung 16.6 zeigt die Resultierenden auf Ober- und Unterarm sowie die Schleifleisten.

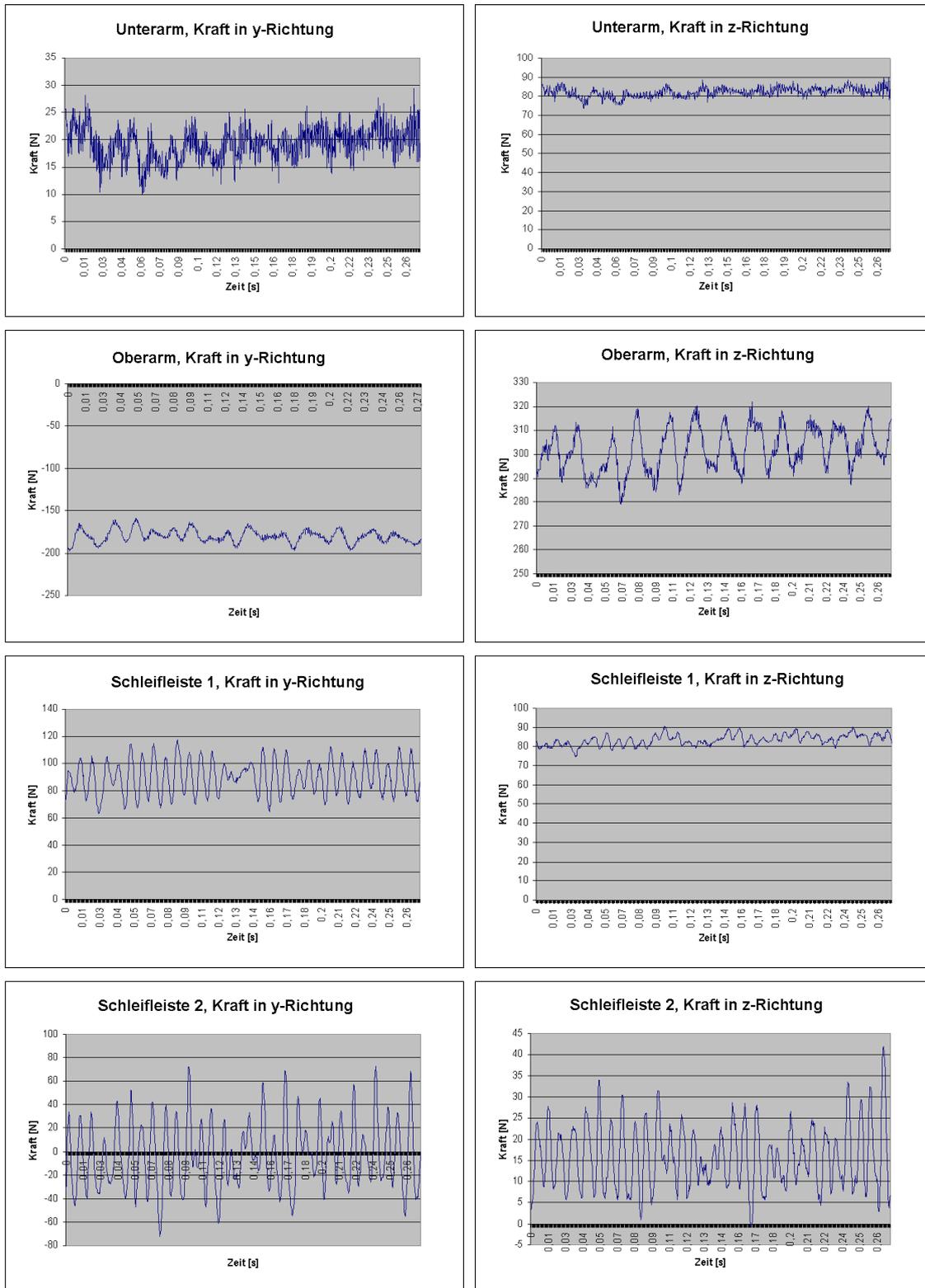


Abbildung 16.6: Resultierende Kräfte im Zeitbereich auf die Einzelteile Unterarm, Oberarm, Schleifleiste 1, Schleifleiste 2 des Stromabnehmers

Die im zeitlichen Verlauf der resultierenden Kräfte erkennbaren breitbandigen Anteile bewirken eine Antwort der Struktur in ihrer Eigenform (Abbildung 16.4) und mit der zugehörigen Eigenfrequenz von ca 45 Hz.

Der zugehörige Zeitverlauf der Verschiebung für den ungekoppelten Fall ist in Abbildung 16.7 dargestellt.

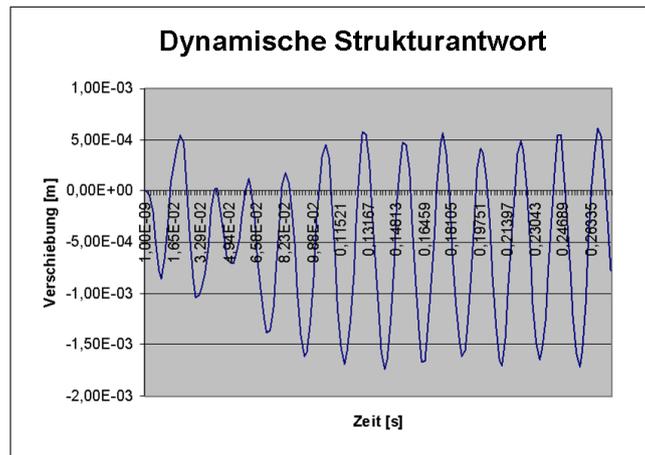


Abbildung 16.7: *Dynamische Strukturantwort des Stromabnehmers in einem Punkt in der Mitte der Schleifleiste; Die Frequenz beträgt ca. 45 Hz und entspricht der niedrigsten Eigenfrequenz des Systems, vgl. Abbildung 16.4*

Die transienten Strömungsergebnisse wurden für die in Abbildung 16.8 dargestellten Mikrofonpunkte im Frequenzbereich ausgewertet.

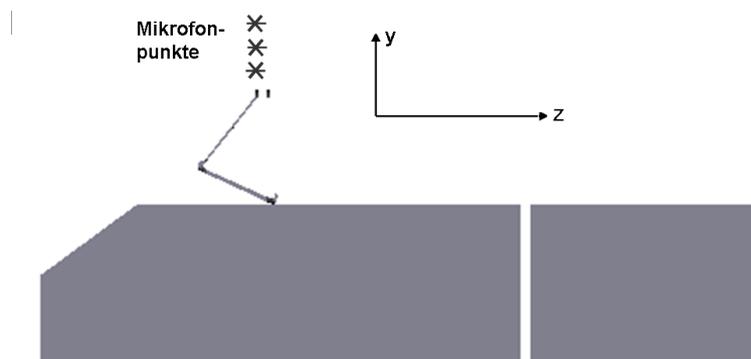


Abbildung 16.8: *Seitenansicht des Zugmodells mit Stromabnehmer, Anordnung der Mikrofonpunkte für die Auswertung der Strömungsergebnisse im Frequenzbereich*

Die breitbandigen Anteile im Spektrum werden insbesondere bei Auswertungen im Frequenzbereich (Abbildung 16.9) ersichtlich. Zum Vergleich wurde neben der bidirektional gekoppelten Berechnung eine ungekoppelte Berechnung des gleichen Modells durchgeführt und ebenfalls im Frequenzbereich ausgewertet (Abbildung 16.9, oben).

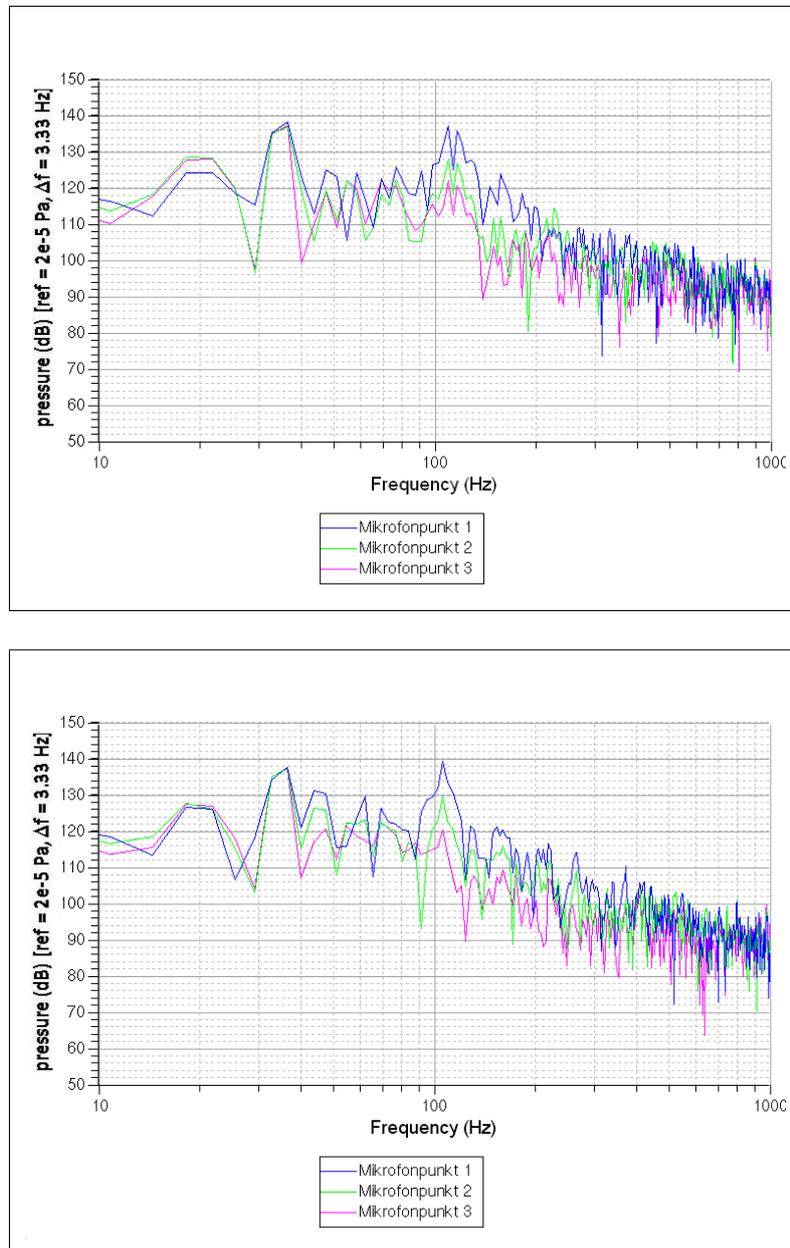


Abbildung 16.9: Strömungsergebnisse Stromabnehmer, Analyse im Frequenzbereich für die Mikrofonpunkte entsprechend Abbildung 16.8; Vergleich ungekoppelte Rechnung (oben) - gekoppelte Rechnung (unten)

Der Vergleich der Ergebnisse im Frequenzbereich der gekoppelten mit der ungekoppelten Berechnung (Abbildung 16.9) zeigt im Bereich der Eigenfrequenz des Stromabnehmers (ca. 45 Hz) um ca. 6 bis 7 dB erhöhte Schallpegel. Die Erhöhung fällt relativ gering aus; bei einer weniger schlanken Struktur würde man, wie bereits in Kapitel 15 angedeutet, deutlicher erkennbare Einflüsse erwarten.

Kapitel 17

Zusammenfassung und Ausblick

17.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Ansatz zur gekoppelten Simulation von Strömungsproblemen und vibrierenden Strukturen vorgestellt.

Zum einen war die Simulation von *strömungsinduziertem*, also durch Strömungsvorgänge erzeugtem Schall von Interesse, zum anderen sollte der durch die Vibrationen von Strukturen generierte Schall berechnet werden können.

Als explizites Ziel der Arbeit sollte die Eignung der Lattice-Boltzmann-Methode im Hinblick auf die simultane Abbildung der beiden o.g. Arten der Schallerzeugung – *Strömungs-* und *Vibroakustik* – *zusammen mit* dem Strömungsfeld untersucht werden.

Die Lattice-Boltzmann-Methode ist in der Lage, *schwach kompressible* Strömungen abzubilden und stellt somit eine sehr effektive Möglichkeit zur simultanen Simulation von Schall- und Strömungsfeld dar. Dies wurde im Rahmen der Arbeit demonstriert. Die Ergebnisse einer (ungekoppelten) Lattice-Boltzmann-Berechnung von schallgenerierenden Strömungen sind vergleichbar mit denjenigen, die mit etablierten *klassischen* CFD-Methoden erzeugt werden können.

Um die Wechselwirkung mit vibrierenden Strukturen, die in Kontakt mit dem Fluid stehen, simulieren zu können, wurde ein partitionierter Ansatz gewählt, bei dem das dynamische Verhalten der Struktur mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente abgebildet wurde.

Zur Simulation der Strömungs- und Struktur-Teilprobleme wurde auf kommerziell verfügbare Software zurückgegriffen. Die verwendeten Programme waren EXA POWERFLOW und ANSYS. Beide Programme wurden als *Child*-Prozesse in ein neu entwickeltes Kopplungsprogramm eingebunden, das auch die Simulations-Modelle verwaltet sowie die Zeitschritte steuert. Der dabei erforderliche Datenaustausch erfolgt über entsprechende, zu diesem Zweck implementierte Schnittstellen.

Die zu Validierungszwecken durchgeführten Prinzipstudien und Testrechnungen anhand einfacher Modelle zeigen, dass die erwarteten Ergebnisse erhalten werden.

Weiterhin wurde anhand eines Beispiels aus der Industrie (Stromabnehmer eines Hochgeschwindigkeitszuges im Fahrtwind) demonstriert, dass die Vorgehensweise sowie die Schnittstellen prinzipiell zur Behandlung realer, komplexer Probleme ge-

eignet sind.

Jedoch resultieren aus der Verwendung von Standard-Software gewisse Einschränkungen, die im nachfolgenden Abschnitt 17.2 erwähnt werden sollen.

17.2 Ausblick

17.2.1 Formulierung von Randbedingungen

Impedanzen

Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendete Lattice-Boltzmann-Programm EXA POWERFLOW wurde ursprünglich zur Simulation aerodynamischer Problemstellungen entwickelt. Dementsprechend sind die bei Simulationsverfahren in der Strömungsmechanik typischen Randbedingungen wie zum Beispiel *Inlets*, *Outlets* sowie *glatte* bzw. *rauhe Wände* (vgl. Kapitel 5, 7) enthalten.

Randbedingungen in der Akustik werden dagegen in der Regel gänzlich unterschiedlich beschrieben. Die Reflexion von Schallwellen an Wänden wird durch einen entsprechenden Kennwert, die *Impedanz* Z , bestimmt. Diese ist eine komplexe Größe und als Quotient aus akustischem Druck und oberflächennormaler Schnelle ($p = Z * u_n$) definiert.

In dem hier verwendeten digitalen Windkanal werden Schallwellen an den Wänden voll reflektiert. Der Wert für die Impedanz ist folglich unendlich. Dies entspricht einem Reflexionsgrad von 1,0. Man nennt solche Wände *schallhart*. Um auch ganz oder teilweise *schallabsorbierende* Wände modellieren zu können, ist die Implementierung alternativer Randbedingungen in Form von frei wählbaren Impedanzen erforderlich. Numerische akustische Berechnungen (wie etwa mit der Methode der Finiten Elemente, oder der Randelement-Methode) werden meistens im Frequenzbereich durchgeführt. Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgestellten aeroakustischen Simulationen stellen dagegen transiente Strömungssimulation dar. Dementsprechend müssen die Impedanzen als Randbedingung ebenfalls im Zeitbereich vorliegen. Geeignete Ansätze dazu werden etwa in [108] bzw. [109] beschrieben.

Wandmodelle mit Impulseintrag

Bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten wird der Einfluss von turbulenten Wand-schichten üblicherweise so groß, dass er nicht mehr vernachlässigt werden darf. Die Problematik wurde in den Kapiteln 12 und 14 dargestellt.

In der vorliegenden Arbeit wurde daher die aus der Bewegung der Struktur stammende Oberflächenschnelle über die Fluidberandung mit Hilfe der Inlet-Randbedingung aufgebracht.

Für einen universelleren Einsatz der Lattice-Boltzmann-Methode zur Abbildung von akustischen Phänomenen wäre dementsprechend eine kombinierte Randbedingung erforderlich. Diese muss zusätzlichen, der Schnelle der vibrierenden Oberflächen entsprechenden Impulseintrag im Wandbereich ermöglichen.

17.2.2 Schallabstrahlung ins Fernfeld

Die Strömungssimulation mit der Lattice-Boltzmann-Methode in der hier vorgestellten Form ist in der Lage, die Schallausbreitung in geschlossenen Räumen abzubilden. In der Realität interessieren jedoch häufig auch Abstrahlprobleme ins Fernfeld. Um dies zu erreichen, ist eine Kombination der Lattice-Boltzmann-Methode mit der akustischen Analogie (siehe Kapitel 4) denkbar. Die akustischen Ersatzstrahler lassen sich mit der Randlelementmethode (siehe [12], [13]) abbilden, in deren Formulierung die *Sommerfeldtsche Abstrahlbedingung* (siehe Kapitel 2) enthalten ist.

17.2.3 Große Strukturverformungen

Aufgrund der durch die Verwendung der Software EXA POWERFLOW in der Version 3.4 auferlegten Einschränkungen konnten zur Programm-Laufzeit lediglich Randbedingungen verändert werden, nicht jedoch die Geometrie eines Körpers. Die auf diese Weise erreichbare *schwache* Kopplung zwischen Strömung und Struktur war ausreichend zur Abbildung der im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Phänomene.

Sollen Verformungen der Struktur berücksichtigt werden, die so groß sind, dass sie auf das Strömungsfeld selbst einwirken, so ist die Grenze der Anwendbarkeit erreicht. Um eine derartige starke Kopplung umzusetzen, müsste die Möglichkeit bestehen, die Geometrie sowie das Rechengitter während der Laufzeit anzupassen¹.

17.2.4 Abgleich von Rechenergebnissen mit Messungen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Simulationsergebnisse mit theoretischen Ergebnissen aus der Literatur abgeglichen.

Schallmessungen im Windkanal sind geeignete und auch notwendige Maßnahmen zur weitergehenden Validierung der vorgestellten Methode.

¹In künftigen Versionen von POWERFLOW ist eine derartige Möglichkeit vorgesehen.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Greve, *Kontinuumsmechanik. Ein Grundkurs*, Springer, 2003
- [2] J. Betten, *Kontinuumsmechanik*, Springer, 1993
- [3] J. Altenbach, H. Altenbach, *Einführung in die Kontinuumsmechanik*, Teubner, 1994
- [4] R. W. Clough, J. Penzien: *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1993
- [5] K.-J. Bathe: *Finite Element Methoden*, Springer 1999
- [6] O. C. Zienkiewicz, *The finite element method*, McGrawHill, 1977
- [7] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Elsevier, 2005
- [8] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu, *The Finite Element Method. It's Basis and Fundamentals*, Elsevier, 2005
- [9] H. R. Schwarz, *Methode der finiten Elemente. Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis*, Teubner, 1991
- [10] U. Stelzmann, C. Groth, und G. Müller, *FEM für Praktiker, Band 1: Grundlagen*, Expert Verlag, 1997
- [11] U. Stelzmann, C. Groth, und G. Müller, *FEM für Praktiker, Band 2: Strukturdynamik*, Expert Verlag, 2006
- [12] C. A. Brebbia, J. Dominguez, *Boundary Elements, An Introductory Course*, McGrawHill, 1989
- [13] F. Hartmann, *Methode der Randelemente*, Springer, 1987
- [14] M. M. Pervaiz and C. M. Teixeira, *Two equation Turbulence Modeling with the Lattice-Boltzmann Method*, 2nd International Symposium on Computational technologies for Fluid/Thermal/Chemical Systems with Industrial applications, ASME PVP Division conference, August 1-5, 1999, Boston MA
- [15] C. M. Teixeira, *Incorporating Turbulence Models into the Lattice-Boltzmann Method*, International Journal of Modern Physics C, World Scientific Publishing Company

- [16] H. Chen, C. M. Teixeira, K. Molving, *Digital Physics Approach to Computational Fluid Dynamics: Some Basic Theoretical Features*, International Journal of Modern Physics C, World Scientific Publishing Company
- [17] S. Chapman, T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, 1990
- [18] U. Frisch, B. Hasslacher, Y. Pomeau, *Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equation*, Phys. Rev. Lett., Vol. 56, p 1505, 1986
- [19] M. Krafczyk, *Gitter-Boltzmann-Methoden: Von der Theorie zur Anwendung*, Habilitationsschrift, Technische Universität München, 2001
- [20] J. Tölke, *Gitter-Boltzmann-Verfahren zur Simulation von Zweiphasenströmungen*, Dissertation, Technische Universität München, Shaker Verlag 2001
- [21] B. Crouse, *Lattice-Boltzmann Strömungssimulationen auf Baumdatenstrukturen*, Dissertation, Technische Universität München, Online-Veröffentlichung, Bibliothek der TU München, 2003
- [22] S. Kühner, *Virtual Reality basierte Analyse und interaktive Steuerung von Strömungssimulation im Bauingenieurwesen*, Dissertation, Technische Universität München, 2003
- [23] M. Schelkle, *Lattice-Boltzmann-Verfahren zur Simulation dreidimensionaler Zweiphasenströmungen mit freien Oberflächen*, Dissertation, Universität Stuttgart, Shaker Verlag, 1997
- [24] C. v. Treeck, *Gebäudemodell-basierte Simulation von Raumluchtströmungen*, Dissertation, Technische Universität München, Shaker Verlag, 2004
- [25] V. Nübel, *Die adaptive rp-Methode für elastoplastische Probleme*, Dissertation, Technische Universität München, Shaker Verlag 2005
- [26] M. Glück, *Ein Beitrag zur numerischen Simulation von Fluid-Struktur-Interaktionen - Grundlagenuntersuchungen und Anwendung auf Membrantragwerke*, Dissertation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2003
- [27] A. Halfmann, *Ein geometrisches Modell zur numerischen Simulation der Fluid-Struktur-Interaktion windbelasteter, leichter Flächentragwerke*, Dissertation, Technische Universität München, 2003
- [28] M. Pfaffinger, *Implementierung einer Geometrieschnittstelle zur Unterstützung von Fluid-Struktur-Kopplung mit PowerFlow und Ansys*, Diplomarbeit, Lehrstuhl für Bauinformatik, Technische Universität München, 2005
- [29] M. Pfaffinger, B. Neuhierl, V. Nübel, *Implementierung einer Geometrieschnittstelle für Fluid-Struktur-Kopplung*, Forum Bauinformatik 2005, Lehrstuhl Bauinformatik, BTU Cottbus 2005

- [30] B. Neuhierl, E. Rank, *Aeroacoustics and Fluid-Structure-Coupling using the Lattice-Boltzmann- and the Finite-Element-Method*, Coupled Problems 2005 (Int. Conf. on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering), Santorini, 2005
- [31] B. Neuhierl, E. Rank, *Computational Aeroacoustics by Coupling the Finite-Element- and the Lattice-Boltzmann-Method*, ECCM 2006 (European Congress on Computational Mechanics), Lissabon, 2006
- [32] B. Neuhierl, E. Rank, *Computational Aeroacoustics including Fluid-Structure-Coupling with the Finite-Element- and the Lattice-Boltzmann-Method*, WCCM 2006 (World Congress on Computational Mechanics), Los Angeles, 2006
- [33] G. R. McNamara, G. Zanetti, *Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata*, Phys. Rev. Letters, Volume 61, No. 20, pp. 2332 - 2335, 1988
- [34] M.M. Zdravkovich, *Flow around circular cylinders*, Volume I: Fundamentals, Oxford University press, 1997
- [35] M.M. Zdravkovich, *Flow around circular cylinders*, Volume II: Applications, Oxford University press, 2003
- [36] S. Succi, *The Lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond*, Clarendon Press, 2001
- [37] B. Etkin, G. K. Korbacher, T. Keefe, *Acoustic Radiation from a Stationary Cylinder in a Fluid Stream: Aeolian Tones*, The Journal of the acoustic Society of America, vol-ume 29, number 1, January 1995
- [38] *PowerFlow Users Guide*, Release 3.4, Exa Corporation
- [39] *ANSYS Theory Manual*, Version 10.0, Ansys, Inc.
- [40] *CFX Manual*, Version 11.0, Ansys, Inc.
- [41] *Sysnoise Manual*, Version 5.6, LMS Inc.
- [42] *Sysnoise Tutorial*, Version 5.6, LMS Inc.
- [43] *MSC.Nastran 2001, Quick Reference Guide*, MSC Software Corporation
- [44] H. Oertel, E. Laurien, *Numerische Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, 2003
- [45] H. Oertel, M. Böhle, *Numerische Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, 2002
- [46] H. Oertel, M. Böhle, U. Dohrmann, *Übungsbuch Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, 2006
- [47] J. H. Ferziger, M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer Verlag, 2003

- [48] E. Truckenbrodt, *Fluidmechanik Bd. 1*, Springer Verlag, 1980
- [49] M. Mayr, U. Thalhafer, *Numerische Lösungsverfahren in der Praxis. FEM - BEM - FDM*, Hanser Elektronik, 1993
- [50] D. C. Wilcox, *Basic Fluid Mechanics*, DCW Industries, 2003
- [51] D. C. Wilcox, *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, 2003
- [52] H. Tennekes, J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, MIT Press, 1972
- [53] M. Griebel, T. Dornseifer, T. Neunhoeffler, *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, 1995
- [54] B. Noll, *Numerische Strömungsmechanik*, Springer, 1993
- [55] M. Heckl, H. A. Müller, *Taschenbuch der Technischen Akustik*, Springer Verlag, 1995
- [56] R. Aris, *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover Publications, 1989
- [57] W. Lips, *Strömungsakustik in Theorie und Praxis*, Expert Verlag, 1995
- [58] M.J.Lighthill, *Waves in Fluids*, Cambridge University Press, 1978
- [59] M. J. Lighthill, *On sound generated aerodynamically, I. General Theory*, Proc.Roy.Soc., London, A211 (1952), pp.564-587
- [60] M. J. Lighthill, *On sound generated aerodynamically, II. Turbulence as a source of sound*, Proc.Roy.Soc., London A222 (1954), pp.1-32
- [61] N. Curle, *The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound*, Proc.Roy.Soc. London A231 (1954)
- [62] Ffowcs /Hawkins, Williams, *Sound generated by Turbulence and surfaces in arbitrary motion*, Phil.Trans.Roy.Soc. London, 264A (1969) pp.321- 342
- [63] A. D. Pierce, *Acoustics, an Introduction to its Physical Principles and Applications*, Acoustical Society of America, 1981
- [64] A. D. Pierce, R. N. Thurston, *Underwater Scattering and Radiation*, Academic Press, 1993
- [65] M. E. Goldstein, *Aeroacoustics*, McGraw-Hill, 1976
- [66] D. A. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Model*, Springer, 2000
- [67] M. S. Howe, *Theory of Vortex sound*, Cambridge University Press, 2003
- [68] T. v. Kármán, *Aerodynamics*, Dover Publications, 2004

- [69] Ch. Petersen, *Dynamik der Baukonstruktionen*, Vieweg, 1996
- [70] A. Frohn, *Einführung in die kinetische Gastheorie*, Aula Verlag, 1988
- [71] I. Veit, *Technische Akustik*, Vogel Verlag, 1996
- [72] H. Ruscheweyh, *Dynamische Windwirkung an Bauwerken, Band 1: Grundlagen*, Bauverlag 1982
- [73] H. Ruscheweyh, *Dynamische Windwirkung an Bauwerken, Band 2: Praktische Anwendungen*, Bauverlag 1982
- [74] Y.H. Quian, D. d'Humieres, P. Lallemand, *Lattice BGK models for Navier-Stokes equations*, Europhys. Lett., Vol. 17, No.6, pp479 - 484, 1992
- [75] J. von Neumann, *Theory of Self-reproducing Automata*, 1966
- [76] E. O. Brigham, *FFT-Anwendungen*, Oldenbourg, 1997
- [77] Ch. Großmann, H.-G. Roos, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Teubner, 1992
- [78] H.-G. Roos, H. Schwetlick, *Numerische Mathematik*, Teubner, 1999
- [79] H. Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, Verlag Braun, 1982
- [80] W. -H. Hucho, *Aerodynamik des Automobils*, Vieweg, 2005
- [81] W. Fasold, W. Kraak, *Taschenbuch Akustik Band1*, Verlag Technik, 1984
- [82] W. Fasold, W. Kraak, *Taschenbuch Akustik Band2*, Verlag Technik, 1984
- [83] F. Durst, *Grundlagen der Turbulenzmodellierung*, Kursunterlagen zum Kurzlehrgang, 2003, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
- [84] F. Durst, *Strömungsinduzierter Lärm*, Kursunterlagen zum Kurzlehrgang, 2004, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
- [85] F. Durst, R. Lerch (Editors), *Kolloquium Strömungsinduzierter Lärm*, 12. Dezember 2001, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Lehrstuhl für Sensorik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG)
- [86] O. v. Estorff, *Computational Methods in Acoustics*, Vorlesungsskript, Technische Universität Hamburg-Harburg
- [87] T. Hüttl, C. Wagner, J. Delfs (Editors), *Proceedings of the International Workshop "LES for Acoustics"*, DGLR-Bericht 2002-03

- [88] J. Ostertag, A. Celic, S. Wagner, *Trailing edge noise prediction by SATIN on the basis of steady RANS solutions*, AIAA Paper 2002-2471, 2002
- [89] J. Ostertag, G. Guidati, S. Wagner, *Prediction of trailing edge noise using space-time correlations of turbulence and Tailored Greens function*, Proceedings of the Seventh International Congress on Sound and Vibration, Vol3, 2000
- [90] I. Pantle, *Strömungsakustik auf der Basis akustischer Analogie mit LES und URANS*, Dissertation, Universität Karlsruhe, 2002
- [91] D. A. Bies, J. M. Pickles, D. J. J. Leclercq, *Aerodynamic noise generation by a stationary body in a turbulent air stream*, Journal of Sound and Vibration, 204(A), pp. 631 - 634, 1997
- [92] P. Költzsch, *Beiträge zur Strömungsmechanik und Strömungsakustik*, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig, 1988
- [93] W. K. Blake, *Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration, Volume I, General Concepts and Elementary Solutions*, Applied Mathematics and Mechanics, Academic Press, 1986
- [94] J. W. S. Rayleigh, *Theory of Sound, Volume 1*, Dover Publications, 1976
- [95] J. W. S. Rayleigh, *Theory of Sound, Volume 2*, Dover Publications, 2003
- [96] M. P. Paidoussis, *Fluid-Structure Interactions, Slender Structures and Axial Flow, Volume 1*, Academic Press, 1998
- [97] P. Rinaldi, *Hydraulik III*, Lehrstuhl für Hydraulik und Gewässerkunde, Technische Universität München, Skript zur Vorlesung, 2001
- [98] H. Wengle, *Numerische Berechnung turbulenter Strömungen*, Lehrstuhl für Fluidmechanik, Technische Universität München, Skript zur Vorlesung, 2001
- [99] J. G. Roederer, *Physikalische und psychoakustische Grundlagen der Musik*, Springer, 1995
- [100] W. Huber, *Paralleles Rechnen*, Oldenbourg, 1997
- [101] H. Stoecker, *Taschenbuch der Physik*, Verlag Harri Deutsch, 2007
- [102] E. Klingbeil, *Tensorechnung für Ingenieure*, BI Hochschultaschenbücher, 1966
- [103] M. Helfer, *Aerodynamische Schallquellen und ihr Beitrag zum Fahrzeugaußen-geräusch*, Deutsche Jahrestagung für Akustik (DAGA) 2002, 04.-07.03.2002, Bochum
- [104] Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF), Referat Öffentlichkeitsarbeit, *Leiser Verkehr: Lärmforschung im Forschungsprogramm Mobilität und Verkehr*, Forschungsbericht, 2004

- [105] D. Wurzel, *Weniger Verkehrslärm trotz Wachstum; Maßnahmen zur Lärm-minderung im Forschungsverbund "Leiser Verkehr"*, 21. verkehrsplanerisches und verkehrsökologisches Kolloquium, TU Dresden, 2004
- [106] H. Schulz, *Physik mit Bleistift*, Verlag Harri Deutsch, 2004
- [107] S. Geller, M. Krafczyk, J. Tölke, S. Turek, J. Hron, *Benchmark computations based on Lattice-Boltzmann, Finite Element and Finite Volume Methods for laminar Flows*, Preprint submitted to Elsevier Science, 2005
- [108] C. K. W. Tam, L. Auriault, *Time-Domain Impedance Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics*, AIAA Journal, Vol. 34, No. 5, May 1996
- [109] R. S. Reichert, S. Biringen, *Time-Domain Simulation of Acoustic Propagation in a Lined Duct*, AIAA Journal, 1997