

**Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität München
Lehrstuhl für Technische Elektrophysik**

Physikalisch basierte Mixed-Level Modellierung von gedämpften elektromechanischen Mikrosystemen

Robert Sattler

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. h.c. D. Schröder

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. G. Wachutka
2. Univ.-Prof. Dr. rer. nat. I. Eisele,
Universität der Bundeswehr München

Die Dissertation wurde am 30.08.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik am 16.04.2007 angenommen.

Meiner Familie

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Modellierung und Simulation von Mikrosystemen	9
2.1	Modellierungsebenen	9
2.1.1	Prozeßebene	9
2.1.2	Bauelementebene	10
2.1.3	Systemebene	11
2.2	Anforderungen an die Simulation	12
2.3	Systemsimulation	13
2.3.1	Systembeschreibung	14
2.3.2	Systemzerlegung: Von der physikalischen Ebene zur Systemebene	16
2.3.3	Mixed-Level-Methode	17
2.3.4	Verallgemeinerte Kirchhoffsche Netze	18
2.4	Kompaktmodellierung	19
2.4.1	Anforderungen an ein Kompaktmodell	19
2.4.2	Verhaltensmodelle	20
2.4.3	Algebraisch basierte Ansätze	20
2.4.4	Variationsmethode mit modalen Basisfunktionen	22
2.4.5	Physikalisch basierte Ansätze	24
2.4.6	Zusammenfassung	25
3	Fluidmechanische Grundlagen	27
3.1	Navier-Stokes-Gleichung	27
3.1.1	Herleitung	28
3.1.2	Inkompressible Navier-Stokes-Gleichung	30

3.1.3	Analytische Lösungen	32
3.2	Reynoldsgleichung	37
3.2.1	Herleitung	37
3.2.2	Linearisierte Reynoldsgleichung	39
3.2.3	Inkompressible Reynoldsgleichung	43
3.2.4	Modifizierte Reynoldsgleichung	47
3.3	Verdünnte Gase	51
3.3.1	Modellierung verdünnter Gase	51
3.3.2	Klassifizierung verdünnter Gase	52
3.3.3	Schlupfströmung	53
3.3.4	Analytische Lösungen für Schlupfströmungen	54
3.3.5	Vergleich der Schlupffaktoren aus dem Kontinuumsansatz mit Schlupffaktoren aus einem Molekularansatz	56
4	Kompaktmodelle für fluidmechanische Elementarstrukturen	63
4.1	Randmodell	64
4.1.1	Große Aspektverhältnisse	65
4.1.2	Kleine Aspektverhältnisse	65
4.2	Lochmodelle	66
4.2.1	Kanalbereich	68
4.2.2	Blendenbereich	68
4.2.3	Transitbereich	69
4.2.4	Bewegter Kanal	70
4.2.5	Scherkraft der Kanalströmung	71
4.3	Übersicht aller Kompaktmodelle	72
5	Mixed-Level-Methode bei Squeeze-Film-Dämpfung	77
5.1	Analytische Lösung des Mixed-Level-Problems	77
5.1.1	Analytische Lösungen mit Randmodell	77
5.1.2	Analytische Lösungen mit Lochmodellen	82
5.1.3	Modifizierte Reynoldsgleichung mit Lochmodellen	85
5.2	Numerische Lösungen des Mixed-Level-Problems	89

5.2.1	Randmodell	89
5.2.2	Lochmodelle	91
5.2.3	Rand- und Lochmodelle	92
6	Elektrostatische Antriebselemente	97
6.1	Elektrostatische Grundlagen	97
6.2	Elementare Antriebselemente	98
6.2.1	Plattenkondensator	98
6.2.2	Torsionsplattenkondensator	99
6.3	Elektrostatische Streufelder	101
6.3.1	Streufelder am Rand einer Platte	101
6.3.2	Streufelder im Loch einer Platte	102
6.4	Kompaktmodelle zur Berechnung der elektrostatischen Kraft	104
6.4.1	Modell des „differentiellen Plattenkondensators“	105
6.4.2	Erweiterung für perforierte Platten	105
7	Elektromechanisch gekoppelte Probleme	109
7.1	Mathematische Beschreibung	109
7.2	Phänomene	110
7.2.1	Elektrostatischer Federeffekt	110
7.2.2	Elektromechanische Instabilität	111
7.3	Modellierungsebenen	113
7.3.1	Modellierung auf der Kontinuumsebene	113
7.3.2	Mixed-Level-Ansatz	114
7.4	Kopplungsmethoden	115
7.4.1	Lastvektorkopplung	115
7.4.2	Matrixkopplung	116
7.5	Kopplungssteuerung	118
7.5.1	Homotopieverfahren	119
7.5.2	Wahl des Steuerparameters	119
7.6	Mixed-Level-Ansatz zur Modellierung einer Membran	121

7.6.1	Demonstrator	121
7.6.2	Vergleich mit Simulationen auf der Kontinuumsebene	122
7.6.3	Einfluß der Kopplungsmethode und des Steuerparameters	123
7.7	Zusammenfassung und Bewertung	125
8	Simulation eines Mikroschalters auf Systemebene	127
8.1	Physikalische Domänen des Systemmodells	127
8.1.1	Elektronik	128
8.1.2	Elektrostatik	130
8.1.3	Mechanik	131
8.1.4	Fluidik	132
8.2	Systemanalyse	133
8.2.1	Statische Analyse	133
8.2.2	Harmonische Analyse	134
8.2.3	Transiente Analyse	135
9	Zusammenfassung und Ausblick	137
	Anhang	143
A	Die Finite-Netzwerk-Methode	145
B	APDL-Skript: ANTOS	149
C	Symbolverzeichnis	153
	Literaturverzeichnis	159
	Danksagung	173

1 Einleitung

1.1 Mikrosysteme

Der Begriff Mikrosystemtechnik ist eine deutsche Wortschöpfung. Eine Definition nach Kasper [74] lautet: „*Ein Mikrosystem ist die miniaturisierte Gesamtheit integrierter Sensor-, Signalverarbeitungs- und Aktorkomponenten mit charakteristischen Abmessungen im Mikrometerbereich. Mikrosystemtechnik ist die Gesamtheit von Verfahren zum Entwurf und zur Herstellung von Mikrosystemen.*“

Mikrosysteme werden auch als MEMS bezeichnet. Der Begriff wurde in den USA geprägt und ist die Abkürzung für mikroelektromechanische Systeme (“microelectromechanical systems“).

Ein Mikrosystem besteht im Gegensatz zum mikroelektronischen System nicht nur aus elektronischen Komponenten. Doch gerade die Gemeinsamkeit mit elektronischen Komponenten und die erfolgreiche Entwicklung der Mikroelektronik in den letzten Jahrzehnten haben die Mikrosystemtechnik geprägt. So haben sich bei Mikrosystemen überwiegend Materialien der Silizium-Halbleitertechnologie durchgesetzt. Das Besondere an Silizium ist, daß es je nach Dotierung als Isolator oder als Leiter eingesetzt werden kann. Zudem ist es bis zum Bruch linear elastisch, und die mechanische Steifigkeit ist vergleichbar mit Stahl, zeigt jedoch im Gegensatz dazu kaum Ermüdung [118]. Die gemeinsame Materialbasis vereinfacht die Integration von Mikroelektronik in ein Mikrosystem und erlaubt den Zugriff auf eine etablierte Technologie, die eine preiswerte Serienfertigung ermöglicht.

Als Geburtsjahr der Mikrosystemtechnik kann das Jahr 1959 angesehen werden, in dem der Physiknobelpreisträger Richard Feynman auf der Jahrestagung der Amerikanischen Physikalischen Gesellschaft seine historische Rede hielt: “There is plenty of room at the bottom“ [42]. Er war der erste Wissenschaftler, der die Zukunft der Miniaturisierung und ihren praktischen Nutzen sah. Er lobte damals zwei Wettbewerbe mit je \$1000 Preisgeld aus:

- Für denjenigen, der die Information einer Buchseite um den Faktor $1/25000$ so skaliert, daß diese mit einem Elektronenmikroskop lesbar ist. Somit wäre es möglich, den kompletten Inhalt der 24-bändigen Encyclopaedia Britannica auf einem Stecknadelkopf abzubilden.
- Für denjenigen, der den ersten regelbaren Elektromotor baut, der kleiner als $1/64$ Kubikzoll ist. Dies entspräche einer lateralen Abmessung von etwa 6 mm.

Es dauerte jedoch bis in die Mitte der 80er Jahre, daß die Preisgelder ausbezahlt werden konnten, Feynman seine zweite historische Rede hielt [43] und die Mikrosystemtechnik merklich an Bedeutung gewann.

Entscheidend für diese Entwicklung war die Verfügbarkeit verschiedener Herstellungsverfahren, die in zahlreichen Lehrbüchern (Heuberger [65]) beschrieben sind. Exemplarisch sollen hier zwei technologische Meilensteine aus dem historischen Rückblick der Mikrosystemtechnik von Middelhoek [101] erwähnt werden:

- Ende der 70er Jahre entwickelte Beam [21] die Volumenmikromechanik. Kristallines Silizium wird dabei mit naßchemischen Ätzverfahren strukturiert.
- Anfang der 80er Jahre entwickelte Howe [68] die Oberflächenmikromechanik. Die Strukturierung von Polysilizium erfolgt dabei mit Hilfe einer darunterliegenden Opferschicht aus Siliziumdioxid, die anschließend entfernt wird.

Heute hat die Mikrosystemtechnik ein weites Anwendungsfeld erschlossen. Dem Leser, der damit noch nicht vertraut ist, soll deshalb zunächst ein Überblick gegeben werden. Mikrosysteme lassen sich nach dem VDI/VDE-IT¹ nach folgenden Schlüsselkomponenten klassifizieren:

- **Sensoren** [51] dienen zur Bestimmung physikalischer und chemischer Größen, wie Druck, Beschleunigung oder die Zusammensetzung eines Gases.
- **Aktoren** [110], wie beispielsweise Schalter oder Pumpen, nutzen meist elektrostatische, piezoelektrische oder thermische Wandlereffekte zur Änderung einer mechanischen Ausgangsgröße.
- **Passive mikrofluidische Komponenten** [113], wie beispielsweise Ventile, Mikromischer oder Mikrowärmetauscher, erfüllen ihre Aufgabe ohne bewegliche Strukturen.

Mikrosensoren begegnet man inzwischen auch häufig im täglichen Leben, was in erster Linie der Entwicklung im Automobilbereich zuzuschreiben ist. Der *VW Käfer* aus dem Jahr 1953 besaß noch keinen einzigen Sensor, wohingegen das aktuelle Nachfolgemodell *New Beetle* bereits mit über 50 Sensoren bestückt ist. Abbildung 1.1 zeigt eine Auswahl der KFZ-Sensoren der Robert Bosch GmbH, die zur Zeit einer der Marktführer für Mikrosysteme im Automobilbereich ist. Im oberen Bereich des Bildes sieht man den Sensorchip mit dem mikromechanischen Sensorelement und der Elektronik. Im unteren Bildbereich ist der verpackte Sensor, wie er ins Kraftfahrzeug eingebaut wird, im Größenvergleich mit einem Streichholz zu sehen.

Neben dem Automobilbereich gibt es noch weitere wichtige Anwendungsfelder für Mikrosysteme. Die wichtigsten sind in Tabelle 1.1 aufgelistet, wobei die angeführten Beispiele nur einen kleinen Einblick in das weite Spektrum der jeweiligen Bereiche geben.

¹ <http://www.mstonline.de>

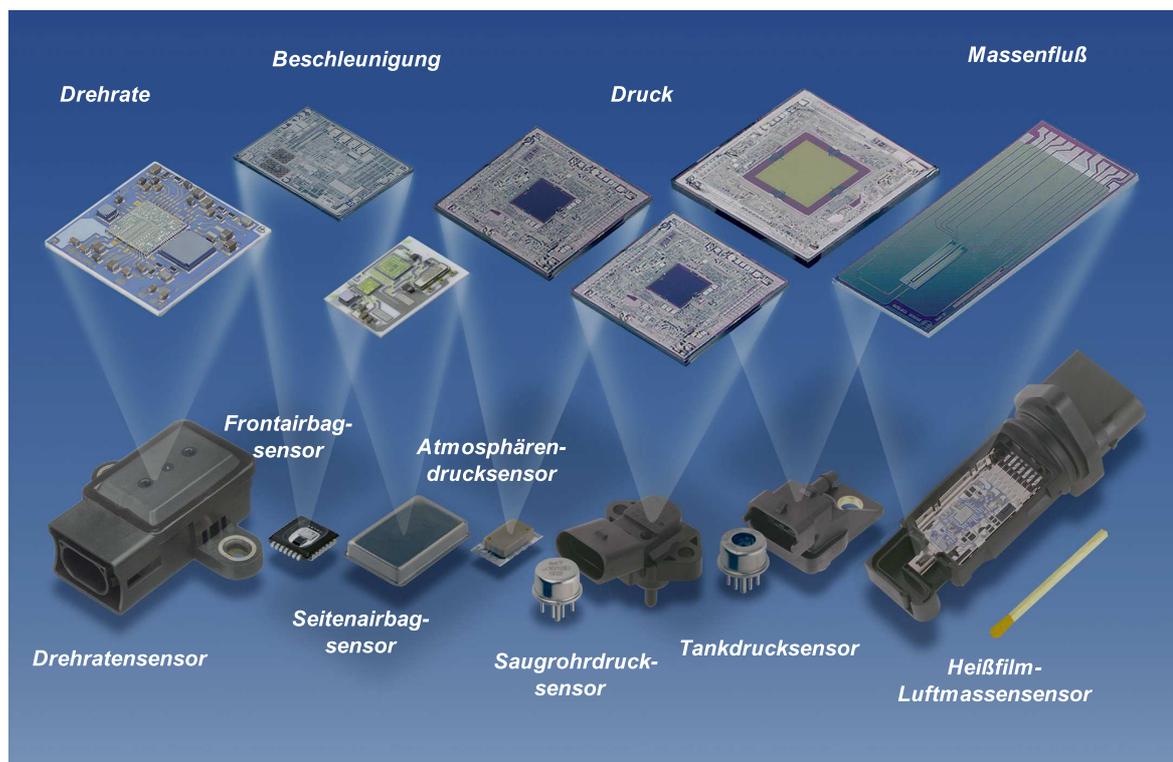


Abbildung 1.1: Mikromechanische Sensoren, die im Kraftfahrzeug eingesetzt werden.
Quelle: Robert Bosch GmbH.

<p>Datentechnische Anwendungen [169]</p> <ul style="list-style-type: none"> - Druckköpfe (Tintenstrahldrucker, Thermotransferdrucker) - Schreib-/Leseköpfe für Festplattenspeicher und CD-Spieler - Mikrospiegelarrays zur Bildprojektion (Beamer, Laserdrucker)
<p>Medizintechnik [105, 107, 111]</p> <ul style="list-style-type: none"> - Diagnostik (Glucosesensor, Genanalyse) - Mikroaktoren (implantierbare Infusionspumpen, Hörgeräte, Herzschrittmacher) - Multikontaktierung von Nerven (Retinaimplantat)
<p>Automobiltechnik [104, 106]</p> <ul style="list-style-type: none"> - Beschleunigungssensoren (Airbag) - Drehratensensoren (Fahrstabilität, Navigation) - Motorsteuerung über Druck-, Luftmassensensoren und Einspritzventile
<p>Mobile Telekommunikation [108, 109]</p> <ul style="list-style-type: none"> - Mikrophone - Mikroschalter und Mikrofilter zur Auswahl des Frequenzbandes - Biometrische Zugangskontrolle durch Erkennung des Fingerabdrucks

Tabelle 1.1: Hauptanwendungsgebiete für Mikrosysteme.

Heutzutage müssen zum Vorantreiben der Miniaturisierung keine Preisgelder mehr ausgelobt werden. Zum einen werden aufgrund der Miniaturisierung zur Herstellung weniger Ressourcen benötigt und somit Kosten gespart, zum anderen ergeben sich neue Anwendungen, wie beispielsweise eine implantierbare Infusionspumpe, die feinwerktechnisch in dieser kleinen Abmessung nicht realisierbar wäre.

Die Folge dieser Miniaturisierung ist, daß Effekte, die in der Makrowelt vernachlässigt werden können, jetzt eine wichtige Rolle spielen, wie zum Beispiel elektrostatische Kräfte oder Luftreibung bei langsamen Bewegungen. Zudem bestimmen insbesondere gekoppelte Effekte - erwünscht und unerwünscht - das Verhalten von Mikrobau-elementen und -systemen. Aufgrund ihrer kleinen Abmessungen haben Mikrobau-elemente eine im Verhältnis zum Volumen große Oberfläche, so daß Effekte, die auf der Kopplung zweier Strukturelemente über eine gemeinsame Grenzfläche beruhen, verstärkt in den Vordergrund treten.

MST World Market

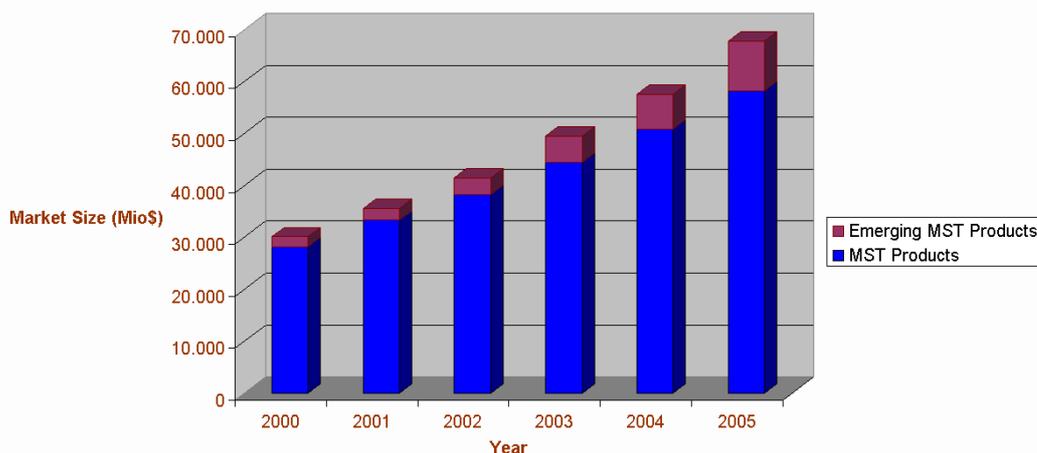


Abbildung 1.2: NEXUS Marktstudie für die Mikrosystemtechnik.

Die oben genannten Triebfedern für die Miniaturisierung sind auch für das Wachstum des Wirtschaftszweigs Mikrosystemtechnik verantwortlich. Nach der ersten Marktstudie der europäischen Mikrosystemtechnik-Initiative NEXUS² aus dem Jahr 1998 ist der Markt für Mikrosysteme in den Jahren 1996 bis 2002 von 14 auf 38 Mrd. US\$ gewachsen. Die aktuelle Studie in Abbildung 1.2 prognostiziert ein Marktpotential von 68 Mrd. US\$ für das Jahr 2005. Trotz stetigem Wachstum ist die Verbreitung im Vergleich zur Mikroelektronik noch gering. Das liegt nicht nur an der jüngeren Entwicklungsgeschichte, sondern auch an den heterogeneren Anwendungsgebieten und Schlüsselkomponenten, die eine Vielfalt an Bauelementen erfordern. Diese erschweren eine Standardisierung sowohl in Bezug auf den Herstellungsprozeß als auch auf den Entwurf. Insbesondere bei der Modellierung und Simulation zur Unterstützung des Entwurfs besteht noch großer Entwicklungsbedarf.

² Network of Excellence in Multifunctional Microsystems <http://www.nexus-mems.com>

1.2 Modellierung von Mikrosystemen

Abbildung 1.2 deutet an, daß Mikrosysteme trotz noch vorhandener Schwierigkeiten zunehmend Verbreitung finden und diese Entwicklung noch lange nicht abgeschlossen ist. Neue Produkte sind jedoch nur dann verkäuflich, wenn der Preis konkurrenzfähig ist. Nur wenige Produkte, wie beispielsweise Druckköpfe für Tintenstrahldrucker oder Sensoren im Automobilbereich, bedienen bisher Massenmärkte. Bei kleineren Stückzahlen ist der Anteil der Entwicklungskosten an den Stückkosten besonders groß, und deswegen müssen Entwicklungszeiten und -kosten reduziert werden.

Aus diesem Grund wird der Entwicklungszyklus im folgenden näher betrachtet. Für die Herstellung eines Prototypen müssen zuerst Layout-Masken zusammen mit einer Prozeßbeschreibung entworfen werden. Die Herstellung erfolgt dann mit Hilfe zahlreicher Prozeßschritte in einer Halbleiterfabrik und kann viele Wochen in Anspruch nehmen. Anschließend wird der Prototyp auf seine Funktion hin überprüft. Zur Optimierung werden Änderungen im Maskendesign oder im Prozeß vorgenommen, und ein neuer Entwicklungszyklus kann beginnen. Diese "trial and error"-Zyklen müssen zur Einsparung von Entwicklungskosten auf ein Minimum reduziert werden.

Durch den Einsatz von Modellierung und Computersimulation eröffnen sich hierbei folgende Vorteile und Möglichkeiten:

- Der Entwickler hat mit Hilfe von Simulationsprogrammen und CAD-Werkzeugen die Möglichkeit, die Designoptimierung in kurzer Zeit an virtuellen Prototypen durchzuführen. Auf eine zeitaufwendige Herstellung eines realen Prototypen kann somit verzichtet werden, und ein einfacher Designvariantenvergleich wird ermöglicht.
- Virtuelle Prototypen können nicht nur exemplarisch, sondern auch systematisch getestet werden. Der Entwickler bekommt so einen Einblick, in welchem Ausmaß das Verhalten eines Mikrosystems vom Herstellungsprozeß, von den Materialparametern und vom Design beeinflusst wird.
- Modellierung und Simulation ermöglichen die Visualisierung von Vorgängen und geben Einblick in die räumliche Verteilung und zeitliche Entwicklung verschiedener physikalischer Größen, die im Experiment nur unter großem Aufwand oder gar nicht zugänglich sind. Dieser Einblick ermöglicht ein fundiertes Verständnis der auftretenden physikalischen Effekte und erlaubt, die tatsächliche Funktionsweise mit dem zugrunde liegenden Konzept zu vergleichen.

In der Mikroelektronik ist die vollständige Unterstützung des Entwurfs- und Optimierungsprozesses durch Simulation bereits etabliert. Dies wird auch für die Mikrosystemtechnik angestrebt. Im Gegensatz zur Mikroelektronik müssen in der Mikrosystemtechnik nicht nur elektrische, sondern auch eine Vielzahl anderer Effekte aus der Mechanik, Fluidik, Optik, bis hin zur Biochemie sowie die Wechselwirkungen zwischen diesen unterschiedlichen physikalischen Domänen (Energieformen) betrachtet werden. Die Anforderungen an eine Simulationsplattform sind deshalb wesentlich größer.

1.3 Zielstellung und Gliederung der Arbeit

Der vorherige Abschnitt hat die Bedeutung der Modellierung von Mikrosystemen und den Bedarf an geeigneten Modellierungsmethoden und Simulationstechniken aufgezeigt. Ziel dieser Arbeit ist es nun, mit der Entwicklung einer sogenannten “Mixed-Level-Methode“ dieser Anforderung Rechnung zu tragen und so einen Baustein zur effizienten Designoptimierung mit Hilfe prädiktiver Simulation bereitzustellen. Die kleinen Abmessungen in Mikrosystemen machen einerseits den elektrostatischen Antrieb besonders effektiv, verstärken aber andererseits den Einfluß der fluidischen Dämpfung auf das transiente Verhalten des Bauelements. Aus diesem Grund ist die realitätsgetreue Modellierung dieser beiden Effekte besonders wichtig. Auf der Bauelementebene ist dies aufgrund der Komplexität der Problematik nicht mehr möglich, so daß ein ordnungsreduziertes Modell auf der Systemebene benötigt wird. Besonders geeignet ist dafür ein Mixed-Level-Ansatz, dessen Qualität von den dafür benötigten physikalisch basierten Kompaktmodellen bestimmt wird. Die Ableitung und die Validierung dieser analytischen Modelle umfassen den wesentlichen Teil dieser Arbeit, wobei dessen Leistungsfähigkeit schließlich am konkreten Beispiel eines elektrostatisch angetriebenen Mikroschalters demonstriert wird.

Zunächst wird in Kapitel 2 der Stand der Technik und verschiedene Ansätze zur Modellierung von Mikrosystemen dargestellt. Dabei werden wichtige Begriffe wie Bauelement-, Systemebene, Kompakt- oder Mixed-Level-Modell erläutert und die Vor- und Nachteile des Mixed-Level Ansatzes und physikalisch basierter Kompaktmodelle im Vergleich zu anderen Methoden diskutiert.

Die folgenden drei Kapitel behandeln die fluidische Dämpfung. In Kapitel 3 werden die Grundlagen vermittelt und analytische Lösungen für die wichtigsten Gleichungen abgeleitet. Diese bilden die Basis für die Dämpfungskompaktmodelle, die in Kapitel 4 beschrieben werden. Zusammen mit einem Kontinuumsansatz für die Dämpfung entsteht hieraus ein Mixed-Level-Modell, das in Kapitel 5 für elementare Strukturen durch etablierte Verfahren validiert wird.

In Kapitel 6 werden die notwendigen Kompaktmodelle für elementare elektrostatische Antriebselemente abgeleitet. Beim elektrostatischen Antrieb einer mechanischen Struktur treten stets elektromechanische Kopplungseffekte auf. Die Besonderheiten und verschiedene Modellierungsansätze für die elektromechanische Kopplung werden in Kapitel 7 am Beispiel des Mixed-Level-Modells einer elektrostatisch ausgelenkten Membran diskutiert.

Schließlich werden im Kapitel 8 die Ergebnisse für die Dämpfung und den elektrostatischen Antrieb zusammengeführt, daraus ein Mixed-Level-Modell des nachfolgend beschriebenen Mikroschalters erstellt und die Simulationsergebnisse mit experimentellen Daten verifiziert. Abschließend werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefaßt und diskutiert, sowie Anregungen und Ausblicke für weitere Arbeiten gegeben.

1.4 Industrieller Mikroschalter als Demonstrator

Der Aufbau und die Funktionsweise des bereits erwähnten Mikroschalters sollen schon an dieser Stelle erläutert werden, denn sie liefern die Motivation, weshalb in den Kapiteln

3-6 insbesondere perforierte Torsionsplatten betrachtet werden.

Mikromechanische Bauelemente für die Telekommunikation, wie zum Beispiel elektromechanische Schalter, variable Kondensatoren und mechanische Filter, wurden in den letzten Jahren intensiv erforscht. Insbesondere mikromechanische RF-Schalter [174] bieten gegenüber den Halbleiterpendants (PIN-Diode und FET) Vorteile aufgrund der geringeren Leistungsaufnahme und der besseren Isolierfähigkeit und Linearität. Literaturwerte für Schaltzeiten liegen zwischen 2 und 50 μs bei Schaltspannungen zwischen 20 und 60 Volt [120].

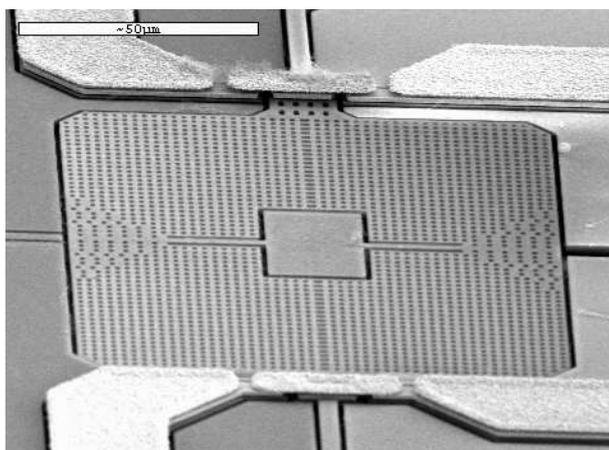


Abbildung 1.3: Aufnahme des Torsionsschalters von Infineon im Rasterelektronenmikroskop. Mittig ist die horizontale Torsionsachse, oben und unten sind die beiden Kontakte zu erkennen.

Abbildung 1.3 zeigt den in dieser Arbeit betrachteten Demonstrator, einen industriell gefertigten, mikromechanischen RF-Torsionsschalter der Firma Infineon. Eine freistehende Platte aus Polysilizium ist über zwei dünne Balken, die als Torsionsfeder wirken, über einen zentralen Anker mit dem Substrat verbunden. An zwei Randkanten der Platte ist symmetrisch zur Torsionsachse je eine Kontaktfläche angebracht, die wiederum ein auf dem Substrat angeordnetes Paar von festen Kontaktelektroden elektrisch leitend verbinden kann. Die starke Perforierung der Platte ermöglicht die Freizügung der Opferschicht unter der Platte und reduziert die fluidische Dämpfung. Die geringere Perforierung der Platte in der Nähe der Torsionsfedern dient zur Erhöhung der mechanischen Steifigkeit. Zum Schließen eines der beiden Kontakte wird zwischen der Torsionsplatte und einer der beiden Bodenelektroden (siehe Abbildung 1.4) eine Spannung von 10 Volt angelegt.

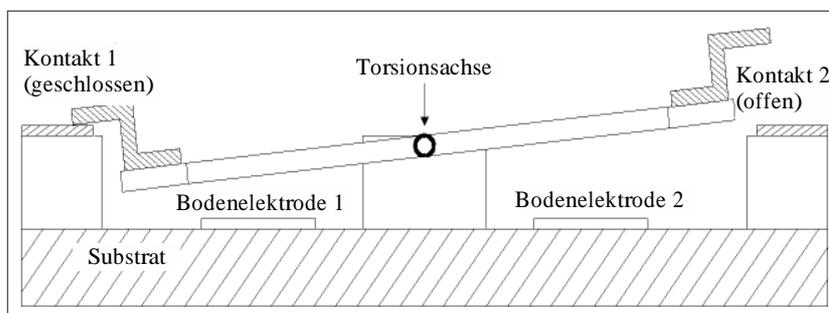


Abbildung 1.4: Schemazeichnung des Torsionsschalters von Infineon.

Die Torsionsstruktur bietet einige Vorteile gegenüber dem klassischen Cantileverschalter. Zum einen ergeben sich durch die beidseitige Aktuation zwei stabile Schaltzustände. Zum anderen wirkt ohne Steuerspannung bei einem einfachen Cantilever allein die Federkraft, die unter Umständen nicht ausreicht, die Adhäsionskräfte beim Kontakt zu überwinden. Weitere Details zum Design und zur Herstellung des Demonstrators findet man bei Plötz [120, 121].

2 Modellierung und Simulation von Mikrosystemen

Ziel dieses Kapitels ist es, einen allgemeinen Überblick über die Modellierung von Mikrosystemen zu geben. Zunächst werden in Abschnitt 2.1 die wichtigsten drei Modellierungsebenen beschrieben. Basierend auf den Anforderungen an die Modellierung aus Abschnitt 2.2 wird im Abschnitt 2.3 insbesondere die Modellierung auf der Systemebene behandelt. Neben einer Beschreibung der Vorgehensweise und verschiedener Ansätze wird dabei auf die in dieser Arbeit verwendeten Kirchhoffschen Netzwerke und den Mixed-Level-Ansatz näher eingegangen. Die Modellierung auf der Systemebene erfordert den Einsatz von Kompaktmodellen. In Abschnitt 2.4 werden verschiedene Ansätze vorgestellt, wie diese abgeleitet werden können.

2.1 Modellierungsebenen

Nach Abbildung 2.1 läßt sich der Entwurfsprozeß von Mikrosystemen in drei Hierarchieebenen einteilen: Die Prozeßebene, die Bauelementebene, die man auch physikalische Ebene oder Kontinuumsebene nennt, und die Systemebene.

2.1.1 Prozeßebene

In der ersten Ebene wird das virtuelle Bauelement erzeugt. Ausgehend vom Maskenlayout und den Parametern des Herstellungsprozesses sollen die Geometrie und die Materialparameter des Bauelements bestimmt werden. Typische Herstellungsprozesse sind dabei Photolithographie, Implantation, Diffusion, Schichtabscheidung und Ätzen. Diese können meist mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen beschrieben werden. Für das naßchemische Ätzen werden bei ANISE [70] hingegen zelluläre Automaten zur Simulation eingesetzt. Insbesondere die Modellierung des naßchemischen Ätzens ist Gegenstand intensiver Forschung, über die Horn [67] einen guten Überblick gibt. Eine Prozeßsimulation auf der Basis physikalischer Gleichungen ist sehr anspruchsvoll hinsichtlich der Rechenleistung, so daß viele Softwarehersteller, wie zum Beispiel Coventor [34], darauf verzichten und an deren Stelle eine geometrische Transformation anbieten. Dabei wird aus den Maskenlayouts und den Prozeßdaten ein dreidimensionales Modell für die Bauelementsimulation konstruiert. Abweichungen des Modells vom Konzept werden so au-

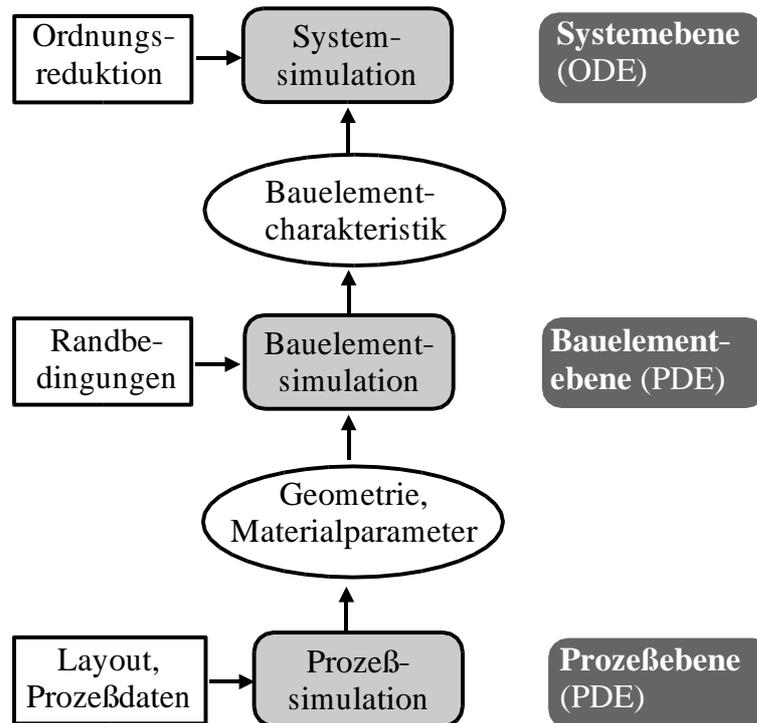


Abbildung 2.1: Entwurfsprozess von Mikrosystemen nach Wachutka [168].

genscheinlich und lassen auf systematische Fehler im Masken- und Prozeßdesign schließen. Der Verzicht auf eine physikalische Simulation bedeutet, daß die Materialparameter für die Bauelementsimulation aus Materialdatenbanken^{1,2} oder Messungen bestimmt werden müssen. Zur Bestimmung der Materialparameter aus Messungen werden zudem parameterspezifische Teststrukturen und die zugehörigen Parameterextraktionsmethoden benötigt. Diese findet man für thermische Materialparameter beispielsweise bei von Arx [163]. Für die industrielle Fertigung sind insbesondere Teststrukturen auf Waferebene von Interesse, um den laufenden Prozeß zu überwachen. Kapels [72] entwarf derartige Teststrukturen mit thermischen Aktoren zur Untersuchung der Bruchfestigkeit von Polysilizium. Osterberg [116] entwickelte diesbezüglich den M-Test, um aus der Schnappspannung das E-Modul und innere Spannungen von elementaren mechanischen Teststrukturen zu bestimmen.

2.1.2 Bauelementebene

Die in der Prozeßsimulation berechnete Bauelementgeometrie wird zusammen mit den Materialparametern an den Bauelementsimulator übergeben. Das Bauelementverhalten ist nun durch ein System von Modellgleichungen bestimmt, welche die zugrunde liegenden physikalischen Wirkmechanismen im Rahmen einer Kontinuumstheorie beschrei-

¹ <http://www.memsnet.org/material>

² <http://www.matweb.com>

ben. Mathematisch gesehen handelt es sich hierbei um ein System partieller Differentialgleichungen (“partial differential equations“ PDE) zusammen mit den entsprechenden Rand- und Grenzflächenbedingungen. Durch räumliche Diskretisierung wird das Bauelement und zum Teil auch die Umgebung in ein Netz aus Elementen und Knoten eingeteilt. Es existieren verschiedene Verfahren, die eine partielle Differentialgleichung mit Hilfe des Netzes aus Knoten und Elementen in ein algebraisches oder differential-algebraisches Gleichungssystem umwandeln, das numerisch leicht gelöst werden kann. Die gebräuchlichsten Verfahren sind die Finite-Elemente-Methode (FEM), die Finite-Differenzen-Methode (FDM), die Randelemente-Methode (“boundary element method“ BEM) und die Finite-Volumen-Methode (FVM). Kommerziell erhältliche Simulatoren für partielle Differentialgleichungen sind z.B. ABAQUS [1], ANSYS [5], CFDRC-ACE+ [28], COVENTORWARE [34], FEMLAB [32] und INTELLISUITE [70].

Ein Modell, das auf der Basis des Maskenlayouts erstellt wurde, besitzt oft zu viele Details, die aus Gründen des Rechenaufwands nicht alle in der Bauelementsimulation berücksichtigt werden können. Deshalb ist es wichtig, daß der Bauelementsimulator neben einer Importfunktion aus dem Prozeßsimulator über eine gut parametrisierbare Modelleingabe verfügt, um die Modelle direkt im Simulator erstellen zu können.

Bei der Berechnung der Dämpfung und der elektrostatischen Antriebskräfte sind beispielsweise nur die resultierenden Kräfte auf das Bauelement von Interesse und nicht die exakte Feldverteilung im umgebenden Luftraum. Die Vernetzung dieses Luftraums, die bei der FEM unverzichtbar ist, kann sehr aufwendig werden, wenn sich das Bauelement bewegt und sich der Luftraum dadurch verändert. Hieraus rührt die Idee, diese Vernetzung mit der Randelemente-Methode (BEM) zu umgehen und damit die Modellerstellung wesentlich zu vereinfachen, da dann nur die Bauelementoberfläche diskretisiert werden muß. Auf dieser Methode basieren die Simulatoren FastCap [112] für die Elektrostatik und FastStokes [175] für die fluidische Dämpfung. Durch Multipolentwicklung konnte Bächtold [11] die Effizienz von FastCap noch steigern.

Eine besondere Herausforderung stellen auf der Kontinuumsebene die gekoppelten Probleme dar, für deren Modellierung verschiedene Ansätze existieren [76]. Die Problematik der Fluid-Struktur-Kopplung wurde von Klein [76] genauer untersucht, bei Aluru [3, 4] und König [78] wird die elektromechanische Kopplung behandelt.

2.1.3 Systemebene

Bei Rechnungen auf der Bauelementebene nimmt mit einer feineren Vernetzung des Bauelements der Diskretisierungsfehler ab und die Anzahl der Knoten und Elemente des Modells zu. Oft sind viele tausend Knoten notwendig, um ein Bauelement ausreichend zu diskretisieren und je nach Problemstellung kann jeder Knoten mehrere Freiheitsgrade repräsentieren. Der Rechenaufwand zur numerischen Lösung des Modells wird schnell inakzeptabel hoch. Zur Modellierung eines ganzen Mikrosystems, das aus mehreren Bauelementen und der Antriebs-, Steuer- und Kalibrierel Elektronik bestehen kann, müssen deshalb zumindest Teile des Systems durch Kompaktmodelle beschrieben werden. Das bedeutet, daß Teilsysteme, die durch viele räumlich verteilte Variablen beschrieben wurden,

durch wenige räumlich konzentrierte Variablen ersetzt werden müssen. Kompaktmodelle zeichnen sich dadurch aus, daß sie im Vergleich zu den Modellen auf physikalischer Ebene eine stark reduzierte Anzahl an Freiheitsgraden besitzen, wobei sich das dynamische Verhalten eines Kompaktmodells mit Hilfe von gewöhnlichen Differentialgleichungen (“ordinary differential equations“ ODE) oder algebraischen Gleichungen beschreiben läßt.

Auf der Systemebene werden gegenüber der Bauelementebene vereinfachte Modelle verwendet, so daß dadurch das Zusammenspiel aller Komponenten eines Systems untersucht werden kann. In der Literatur gibt es keine einheitliche Definition für die Systemebene; in dieser Arbeit wird die Systemebene von der Bauelementebene durch den Einsatz von Kompaktmodellen abgegrenzt. Folgende Beispiele sollen den Unterschied der beiden Modellierungsebenen verdeutlichen. Ein Transistor oder eine Diode, bzw. eine Pumpe oder ein Ventil können noch auf der Bauelementebene modelliert werden. Das Zusammenspiel aller Bauelemente in einem elektrischen oder fluidischen Netzwerk kann jedoch nur auf der Systemebene simuliert werden. Treten gekoppelte Effekte auf, wie beim auf Seite 6 vorgestellten Mikroschalter, so kann oft nur die mechanische, die fluidische oder die elektrostatische Domäne eines Bauelements auf der Bauelementebene modelliert werden. Das Zusammenspiel aller physikalischen Domänen muß auf der Systemebene erfolgen.

Nach allgemeinen Betrachtungen zur Modellierung auf allen drei Ebenen wird in Abschnitt 2.3 auf die Vorgehensweise und auf verschiedene Ansätze der Systemsimulation eingegangen.

2.2 Anforderungen an die Simulation

Von Wachutka wird die Methode der „maßgeschneiderten Modellbildung“ (“tailored modeling“ [166, 168]) vorgeschlagen und eine umfassende und benutzerfreundliche Entwurfsumgebung, die „virtuelle Produktionsstätte“ (“virtual microtransducer fab“) für Mikrosysteme gefordert. In deren Entwicklungsprozeß wird die in Abbildung 2.1 gezeigte Modellierungshierarchie in Zyklen durchlaufen [167]. Nach der Bauelement- und Systemsimulation erfolgen die Verifikation und die Validierung der Ergebnisse. Der Vergleich mit den Spezifikationen des „idealen Bauelements“ und mit experimentellen Daten mündet dann in einem weiteren Optimierungszyklus (“closed loop simulation“).

Derartige Entwurfsumgebungen werden in der Mikroelektronik seit mehreren Jahren erfolgreich eingesetzt [145], in der Mikrosystemtechnik befindet sich diese Entwicklung jedoch erst am Anfang. Erste Ansätze einer durchgängigen Entwicklungsumgebung für Mikrosysteme werden von den Software-Firmen Coventor [34] und Memscap [99] angeboten. Nach wie vor ist der Entwickler aber gezwungen, den Optimierungszyklus selbst zu programmieren, wobei es noch an einer einheitlichen Skriptsprache, mit der sämtliche Ein- und Ausgabedaten aller Simulatoren gesteuert werden können, mangelt. Zudem gibt es noch große Defizite bei der Prozeß- und Systemsimulation.

Die grundlegenden Anforderungen an die Simulation lassen sich nach Wachutka [167, 168] auf die Kriterien der Konsistenz, der Transparenz und der „maßgeschneiderten Gültigkeit“ (“tailored validity“) zurückführen:

- Konsistenz: Aufgrund der zahlreichen beteiligten physikalischen Effekte und Kopplungen müssen in den Teilmodellen die physikalischen Prinzipien konsistent abgebildet werden.
- Transparenz: Ein transparentes Modell erlaubt eine intuitive Interpretation aller Parameter als Funktion physikalischer Größen, basierend auf oder abgeleitet von einer mikroskopischen Beschreibungsweise.
- Maßgeschneiderte Gültigkeit: Das Prinzip der „maßgeschneiderten Gültigkeit“ besagt, daß beim Aufstellen der zugrunde liegenden Gleichungen und der Anzahl der Freiheitsgrade eines Modells die Problemstellung und die speziellen Eigenschaften des Bauelements berücksichtigt werden müssen.

Diese drei Prinzipien werden in einem von Wachutka vorgestellten, allgemeingültigen, umfassenden theoretischen Rahmen, der auf der irreversiblen Thermodynamik beruht, auf natürliche Weise berücksichtigt. Der konzeptionelle Ansatz besteht darin, ein Mikrosystem als ein thermodynamisches System aufzufassen und die zugehörigen Bauelemente oder Komponenten als Untersystem des Gesamtsystems zu betrachten. Die Beschreibung der Transporteigenschaften in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts erfolgt nach dem Onsagerschen Reziprozitätsprinzip [115]. Aus den Bilanzgleichungen für die innere Energie der Teilsysteme erhält man einen Ausdruck für die Entropie, die im gesamten System erzeugt wird, aus der sich nach Onsager eine pseudolineare Beziehung zwischen verallgemeinerten treibenden Kräften und daraus resultierenden Flüssen ergibt. Von Schrag [131] wurde eine gute Zusammenfassung dieser Theorie publiziert, die auf Artikeln von Wachutka [165, 166, 167, 168] und Middelhoek [154] basiert. Nach dieser Theorie wurden von Voigt [160] Richtlinien für die systematische Zerlegung (Abschnitt 2.3.2) eines Mikrosystems in Kompaktmodelle entwickelt.

2.3 Systemsimulation

Bei der Modellierung eines ganzen Mikrosystems müssen neben den Wechselwirkungen zwischen verschiedenen physikalischen Teilsystemen auch die Antriebs-, Kalibrier- und Ausleseelektronik berücksichtigt werden. Die notwendige Rechenzeit auf der Bauelementebene wird dabei schnell inakzeptabel hoch. Das Ziel ist eine einheitliche Simulationsplattform auf Systemebene, auf der alle Teile des Systems zusammengefügt werden können. Dazu muß, wie bereits in Abschnitt 2.1.3 erwähnt, die Anzahl der Freiheitsgrade in zumindest einem Teilsystem auf ein handhabbares Maß reduziert werden. Viele verteilte Variablen in diesem Teilsystem werden so durch wenige konzentrierte Variablen bzw. ein Kompaktmodell ersetzt. Als Vorbild dient hier die elektrische Schaltungssimulation, in der alle Elemente eines Netzwerks wie elektrische Widerstände, Kapazitäten, Induktivitäten und andere elektronische Bauelemente als konzentrierte Modelle

miteinander verschaltet sind und über ihre Anschlüsse wechselwirken. Für Mikrosysteme gibt es jedoch noch einen Mangel an Verfahren für die Modellierung auf der Systemebene bzw. für den Übergang von der Bauelementebene zur Systemebene.

In diesem Abschnitt werden deshalb die Vorgehensweise und verschiedene Ansätze bei der Systemsimulation beschrieben. Nachdem eine geeignete Systembeschreibung (Abschnitt 2.3.1) festgelegt ist, muß das Gesamtsystem in Teilsysteme zerlegt werden (Abschnitt 2.3.2). Schwerpunktmäßig wird dabei auf die in dieser Arbeit verwendeten verallgemeinerten Kirchhoffschen Netze (Abschnitt 2.3.4) und den Mixed-Level-Ansatz eingegangen (Abschnitt 2.3.3).

Der wesentliche Bestandteil eines Systemmodells sind die Kompaktmodelle. Deshalb werden in Abschnitt 2.4 die wichtigsten Ansätze zu deren Ableitung vorgestellt.

2.3.1 Systembeschreibung

Zunächst müssen eine oder mehrere Beschreibungssprachen für die Systemsimulation festgelegt werden. Die Homogenität der Beschreibungssprache bestimmt, ob das System mit einem einzigen Simulator modelliert werden kann oder ob dafür mehrere gekoppelt werden müssen.

Bei den Beschreibungssprachen selbst hat man die Wahl zwischen verschiedenen kommerziellen und akademischen Entwicklungen, wobei seit kurzem eine Standardisierung angestrebt wird.

Homogenität der Beschreibungssprache

Die Alternative zu einer einheitlichen oder homogenen Systembeschreibung ist die heterogene Systembeschreibung. Dabei kann jedes einzelne Teilsystem mit einer anderen Beschreibungssprache modelliert und diese dann extern gekoppelt werden. Der Vorteil der heterogenen Systembeschreibung ist in der Verwendung von Beschreibungssprachen und Lösungsalgorithmen zu sehen, die auf das Teilproblem optimal zugeschnitten sind. Hierdurch kann jedes Teilsystem sehr detailliert und exakt in der Systemsimulation berücksichtigt werden. Es gibt zahlreiche Beispiele in der Literatur, in der ein Finite-Elemente-Simulator extern mit einem Schaltungssimulator gekoppelt wurde [53, 136]. Am Fraunhoferinstitut für integrierte Schaltungen wurde das Optimierungstool "MOSCITO" entwickelt, das zahlreiche Schnittstellen zu bekannten Simulatoren besitzt, die auch über das Internet gekoppelt werden können [130]. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt im erhöhten Aufwand hinsichtlich der Implementierung der Simulatorkopplung und der Gewährleistung der Konvergenz. Zudem kostet die externe Kopplung viel Rechenzeit, so daß stets eine homogene Systembeschreibung anzustreben ist.

Beschreibungssprachen für die Systemebene

Auf dem Markt existiert eine kaum überschaubare Palette an leistungsfähigen Simulatoren und Beschreibungssprachen, die zumindest ansatzweise von Schwarz [137] aufgelistet werden. Am meisten verbreitet, insbesondere in der Industrie, dürfte Matlab/Simulink [94] sein. In der Regel verfügen alle Simulatoren über eine eigene Eingabesprache. Die Folge ist eine Vielzahl von Konvertierungsprogrammen. Eine Gegenentwicklung besteht in der Standardisierung von Modellierungssprachen. Die Entwicklung von *VHDL-AMS*³ wurde von IEEE 1990 begonnen und 1999 abgeschlossen. Es handelt sich dabei um eine Weiterentwicklung der Hardwarebeschreibungssprache VHDL aus der Mikroelektronik, die zunehmend Verbreitung findet. Eine Alternative ist die objektorientierte Sprache *Modelica*⁴, die im Gegensatz zu VHDL-AMS ihre Wurzeln nicht in der Elektronik, sondern in der Regelungstechnik und Mechatronik hat und seit 1997 entwickelt wird.

Bei der Klassifizierung der Beschreibungssprachen ist die Unterscheidung zwischen konservativen und nichtkonservativen Größen und Systemen fundamental. Bei konservativen Systemen wird nach Fluß- und Potentialgrößen unterschieden, bei nichtkonservativen Systemen spricht man nur von Signalen.

Beispiele von konservativen Systemen sind mechanische Systeme, wie Feder-Masse-Systeme oder elektrische Schaltungen. Ein System ist konservativ, wenn Erhaltungssätze, wie die Kirchhoffschen Gesetze (siehe Abschnitt 2.3.4), für die Fluß- und Potentialgrößen gelten.

Nichtkonservative Systeme kennt man als regelungstechnische Blockschaltbilder, Signalflußgraphen und digitale informationsverarbeitende Systeme. Sie zeichnen sich durch gerichteten Signalfluß und rückwirkungsfreie Zusammenschaltung aus, was im Simulator die Aufstellung der Systemgleichungen wesentlich vereinfacht.

Soll das Mikrosystem zusammen mit der elektronischen Schaltung simuliert werden, so empfiehlt es sich, einen Schaltungssimulator zu verwenden, der auch eine Modellbibliothek für die elektronischen Bauelemente besitzt. Die wichtigsten kommerziellen Schaltungssimulatoren mit den in Klammern angegebenen Hardwarebeschreibungssprachen sind im folgenden aufgelistet: Saber(Mast) [149], ELDO(HDL-A) [100] oder Spectre(SpectreHDL) [27]. Diese werden auch von den beiden kommerziellen Simulationsumgebungen Memscap [99] und Coventorware [34] für die Systemsimulation von Mikrosystemen eingesetzt. Zudem wird eine Modellbibliothek mit typischen mikromechanischen Komponenten angeboten. Diese findet man auch bei von Hochschulinstituten entwickelten Systemsimulatoren (SUGAR⁵ [13] und NODAS⁶ [173]), die speziell für die Mikrosystemtechnik entwickelt wurden.

³ <http://www.vhdl.org/analog>

⁴ <http://modelica.org/>

⁵ <http://www-bsac.eecs.berkeley.edu/cadtools/sugar>

⁶ http://www.ece.cmu.edu/mems/projects/memsyn/nodasv1_4/index.shtml

2.3.2 Systemzerlegung: Von der physikalischen Ebene zur Systemebene

Nachdem die formale Systembeschreibung festgelegt ist, muß das Gesamtsystem in Teilsysteme zerlegt werden. Entsprechend den im Abschnitt 2.2 beschriebenen Anforderungen ist eine Zerlegung entsprechend den einzelnen physikalischen Domänen naheliegend. Wird beispielsweise die an Federn aufgehängte elektrostatisch angetriebene Platte aus Abbildung 2.2 betrachtet, erfolgt die Aufteilung in ein mechanisches und ein elektrostatisches Teilsystem. Da die unterschiedlichen physikalischen Domänen gekoppelt sind, fungieren einige Teilsysteme bzw. deren beschreibende Kompaktmodelle als Energie- und Signalwandler. Zudem kann eine physikalische Domäne weiter in funktionale Einheiten aufgespalten werden. Für das Beispiel aus Abbildung 2.2 kann das mechanische Modell in ein Teilmodell für die Feder und eines für die Masse unterteilt werden. Darüber hinaus läßt sich ein Modell auch geometrisch aufspalten. Jede Feder läßt sich in unserem Beispiel aus zwei Biegebalken zusammensetzen.

Die geeignete Art der Zerlegung hängt von der Problemstellung ab und bleibt meist dem Anwender überlassen, da bis jetzt keine systematischen und damit automatisierbaren Verfahren bekannt sind. Zu beachten ist, daß die physikalischen Größen entlang der Trennlinien des Systems nicht stark variieren, so daß sie dort zu konzentrierten Variablen zusammengefaßt werden können.

Nachdem die Zerlegung in Teilsysteme und die Größen, mit denen diese untereinander wechselwirken, festgelegt sind, muß für eine effiziente Simulation eine kompakte Beschreibung der Teilsysteme bzw. Netzwerkelemente gefunden werden.

Im Gegensatz zu dreidimensionalen physikalischen Objekten, die durch Oberflächen berandet sind, sind diese konzentrierten Elemente ("lumped elements") Abstraktionen, die nur zwei oder mehr Anschlüsse oder Klemmen besitzen. Über diese Klemmen können sie zu einem Netzwerk zusammengeschaltet werden und mit anderen Kompaktmodellen wechselwirken. Dieser Ansatz, der sich zur Beschreibung elektrischer Schaltungen bewährt hat, läßt sich mit Hilfe *verallgemeinerter Kirchhoffscher Netze* (siehe Abschnitt 2.3.4) auch auf Mikrosysteme übertragen.

Verschiedene Ansätze, *Kompaktmodelle* aus der Kontinuumsbeschreibung abzuleiten, werden in Abschnitt 2.4 vorgestellt. Für manche Teilsysteme sind jedoch Kompaktmodelle nicht bekannt, zu ungenau oder zu aufwendig zu berechnen, so daß es sinnvoll sein kann, ein Teilsystem auf der Kontinuums Ebene bzw. durch räumlich verteilte Variablen zu beschreiben, was zum *Mixed-Level-Ansatz* führt.

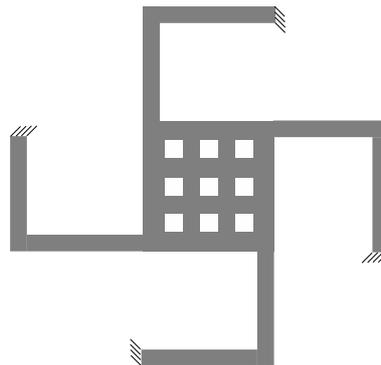


Abbildung 2.2: *Perforierte Platte, die elektrostatisch angetrieben wird und an vier Federn aufgehängt ist [41].*

2.3.3 Mixed-Level-Methode

Für eine homogene Systembeschreibung mit konzentrierten und verteilten Variablen wurde von Schrag [133] der Begriff Mixed-Level-Simulation eingeführt. Bei der Umsetzung dieser Methode hat man die Wahl zwischen den folgenden zwei Alternativen, die beide in dieser Arbeit zur Anwendung kommen.

Kompaktmodelle in Bauelementsimulatoren

Kompaktmodelle mit konzentrierten Elementen können in einen Bauelementsimulator mit verteilten Variablen (z.B. FEM-Simulator) integriert werden. Als Beispiel für diesen Ansatz dient wiederum die aufgehängte Platte aus Abbildung 2.2. Die Simulationszeit läßt sich deutlich reduzieren, wenn auf der Kontinuumssebene nicht das Gesamtmodell, sondern nur die mechanische Deformation der Platte modelliert wird, und die vier Federn hingegen kompakt mit je zwei Balkenmodellen beschrieben werden. Zur Berechnung der elektrostatischen Kraft muß der Luftraum um die Platte nicht vernetzt werden, wenn elektromechanische Wandlerelemente eingesetzt werden.

Die Integration von Kompaktmodellen in Bauelementsimulatoren soll am FEM-Simulator ANSYS [5] exemplifiziert werden, der auf diesem Gebiet eine Vorreiterrolle spielt. In der Elementbibliothek von ANSYS stehen zunehmend mehr Kompaktmodelle, die mit dem FEM-Modell verbunden werden können, wie zum Beispiel Balkenelemente (BEAM188), Federelemente (COMBIN39), elektromechanische Wandlerelemente (TRANS126) oder fluidische/thermische Widerstände (FLUID138/LINK33).

Dieser Ansatz ist vorteilhaft, wenn Teilsysteme ohne Elektronik zu modellieren sind, da FEM-Simulatoren bisher nicht für die Simulation anspruchsvoller Schaltungen ausgelegt sind. ANSYS beispielsweise bietet bisher nur elementare elektrische Schaltelemente wie Widerstand, Induktivität, Kapazität oder Diode an (CIRCU 124). Müssen anspruchsvollere Schaltungen modelliert werden, bietet es sich an, das Mixed-Level-Modell mit einem Schaltungssimulator zu lösen.

Finite-Netzwerke in Schaltungssimulatoren

Diskretisierungsverfahren zur Beschreibung partieller Differentialgleichungen können mit Hilfe der üblichen Beschreibungsform (z.B. Kirchhoffsche Netzwerke und Hardwarebeschreibungssprachen) in einen Schaltungssimulator integriert werden. Eine solche Möglichkeit stellt der Finite-Netzwerk-Ansatz dar. Das zu diskretisierende Gebiet wird dabei in eine endliche Anzahl von Teilgebieten untergliedert, dem jeweils ein elementares Kirchhoffsches Netzwerk zugeordnet ist, was im Anhang A genauer erläutert wird. Zur Beschreibung der Gleichungen, die eine lokale Approximation der partiellen Differentialgleichung in jedem elementaren Netzwerk darstellen, gibt es zwei Alternativen:

- Die Gleichungen können durch lineare elektrische Bauelemente repräsentiert werden. Auf diese Art wurden schon in den 30er Jahren physikalische Feldprobleme

mit Hilfe analoger elektrischer Schaltungen berechnet [150]. Von Tilmans [153] wurde dieser Ansatz erstmals zur Modellierung von Mikrosystemen eingesetzt.

- Die Gleichungen können durch analoge Hardwarebeschreibungssprachen definiert werden. Diese Alternative ist flexibler und gestattet die direkte Verwendung von Algebra-Differentialgleichungen (z.B. zur Beschreibung einer Diskretisierung nach der Finiten Differenzen Methode).

Klein [76] hat diese beiden Ansätze anhand der Modellierung einer Kirchhoff-Platte verglichen. Voigt [160] beschreibt den piezoelektrischen Membrantrieb einer Mikropumpe und den thermischen Selbsttest eines mikromechanischen Beschleunigungssensors mit der Finiten-Netzwerk-Methode und vergleicht die Ergebnisse mit der Methode der Finiten Elemente. Weitere Modelle für Platten und Balken, die in einen Finiten-Netzwerk-Ansatz implementiert werden können, findet man bei Gerlach [52], Lenk [87] und Schroth [135]. Bei diesem Ansatz hat der Anwender die volle Kontrolle über die Gleichungen, das Diskretisierungsverfahren, die Kompaktmodelle und die Kopplungen und ist nicht auf die Elementbibliothek einer FEM-Software angewiesen. Diese Flexibilität ist auch ein Nachteil, da Eigenentwicklungen Zeit kosten und die Effizienz der seit Jahrzehnten entwickelten FEM insbesondere in der Mechanik oft nicht erreicht werden kann.

2.3.4 Verallgemeinerte Kirchhoffsche Netze

In einem elektrischen Netzwerk treibt die elektrische Spannung den elektrischen Strom durch konzentrierte Elemente, wie zum Beispiel Widerstände, Kondensatoren oder Spulen. Dabei gelten die folgenden beiden Kirchhoffschen Gesetze, die aus der Schaltungstechnik bekannt sind:

- Die Kirchhoffsche Maschenregel folgt aus der Potentialdarstellung des elektrischen Feldes und besagt, daß die Summe der Spannungsabfälle in einer Masche des Netzwerkes Null ergibt.
- Die Kirchhoffsche Knotenregel folgt aus der Kontinuitätsgleichung und besagt, daß die Summe der Ströme, die in einen Netzwerkknoten hineinfließen, gleich der Summe der Ströme ist, die aus dem Knoten herausfließen.

Durch ein verallgemeinertes Kirchhoffsches Netzwerk lassen sich beliebige physikalische Domänen beschreiben. Allgemeine Potentialdifferenzen \mathcal{V} zwischen zwei Klemmen treiben dabei allgemeine Flüsse \mathcal{J} hindurch. In Tabelle 2.1 sind für einige ausgewählte physikalische Domänen zueinander konjugierte Variablenpaare \mathcal{V} und \mathcal{J} aufgelistet.

Nach Senturia [139] hat das Produkt konjugierter Variablenpaare die Dimension einer Leistung. In Tabelle 2.1 macht hier nur die thermische Domäne eine Ausnahme. Das Produkt ergibt wieder eine Leistung, wenn als Flußgröße die Entropie S verwendet wird, die nach der Gleichung $dQ_{th} = TdS$ proportional zur Wärmemenge Q_{th} ist. Historisch und aus praktischen Gründen hat sich Q_{th} als gebräuchliche Flußgröße etabliert.

	Elektrisch	Translation	Rotation	Fluidisch	Thermisch
Potential \mathcal{V}	$U [V]$	$v [m/s]$	$\omega_P [rad/s]$	$p [N/m^2]$	$T [K]$
Fluß \mathcal{J}	$I [A]$	$F [N]$	$M [Nm]$	$Q [m^3/s]$	$\dot{Q}_{th} [W]$
$q = \int \mathcal{V} dt$	$\Psi_{el} [V \cdot s]$	$u [m]$	$\varphi [rad]$		
$p = \int \mathcal{J} dt$	$Q [As]$	$p_t [kg \cdot m/s]$	$p_r [kg \cdot m^2/s]$	$V [m^3]$	$Q_{th} [J]$
$\int \mathcal{V} \cdot dp$	$Q^2/(2C)$	$m \cdot v^2/2$	$J \cdot \omega_P^2/2$	$p \cdot V$	
$\int \mathcal{J} \cdot dq$	$L_{el} \cdot I^2/2$	$k_t \cdot x^2/2$	$k_r \cdot \varphi^2/2$		
$\mathcal{V} \cdot \mathcal{J}$	$U \cdot I [W]$	$F \cdot v [W]$	$M \cdot \omega_P [W]$	$p \cdot Q [W]$	$T \cdot Q_{th} [W \cdot K]$
q/\mathcal{J}	$L_{el} [V \cdot s/A]$	$1/k_t [m/N]$	$1/k_r [rad/(Nm)]$		
p/\mathcal{V}	$C [A \cdot s/V]$	$m [kg]$	$J [kg \cdot m^2]$	$C_{fl} [m^3/Pa]$	$C_{th} [J/K]$
\mathcal{V}/\mathcal{J}	$R_{el} [\Omega]$	$1/\xi_t [Ns/m]$	$1/\xi_r [Nm \cdot s/rad]$	$R_{fl} [Pa \cdot s/m^3]$	$R_{th} [K/W]$

Tabelle 2.1: Analogiebeziehungen verschiedener physikalischer Domänen in einem verallgemeinerten Kirchhoffschen Netzwerk. Die auftretenden Symbole sind im Symbolverzeichnis auf Seite 153 erklärt.

Nach Tabelle 2.1 ist die Geschwindigkeit die Potentialgröße für die Mechanik. Eine häufig verwendete Alternative ist die mechanische Auslenkung u , was die Modelle nicht nur anschaulicher macht, sondern nach Iyer [71] auch deren Konvergenz verbessert.

Prinzipiell lassen sich Potential- und Flußgröße auch vertauschen. Senturia [139] verwendet die duale Konvention für die Mechanik: Kraft als Potentialgröße und Geschwindigkeit als Flußgröße. Dadurch läßt sich ein Feder-Masse-Schwinger als Serienschaltung anstelle einer Parallel-Schaltung darstellen, was als Schaltbild anschaulicher ist [152]. Eine Diskussion verschiedener Konventionen findet man bei Romanowicz [126] und Beranek [23].

2.4 Kompaktmodellierung

Nach der Zerlegung des Gesamtsystems müssen für die Teilsysteme Kompaktmodelle erstellt werden. In der Literatur werden alternativ zu dem Begriff Kompaktmodell auch die Begriffe Makromodell und “reduced order model (ROM)” verwendet.

2.4.1 Anforderungen an ein Kompaktmodell

Bevor in den folgenden Abschnitten verschiedene Ansätze zur Ableitung eines Kompaktmodells vorgestellt und anschließend diskutiert werden, sollen hier erst einmal die Anforderungen von Senturia [139] an ein ideales Kompaktmodell aufgelistet werden:

- Das wesentliche Verhalten des Bauelements sollte durch das Kompaktmodell nach kurzer Berechnung wiedergegeben werden können.
- Ein Kompaktmodell sollte gut in einen Systemsimulator integrierbar sein.
- Ein Kompaktmodell muß physikalisch korrekt sein. Insbesondere muß die integrale Energiebilanz richtig wiedergegeben werden.
- Ein Kompaktmodell sollte das statische und dynamische Verhalten des Bauelements für kleine (lineare) und große (nichtlineare) Auslenkungen wiedergeben.
- Ein Kompaktmodell muß im spezifizierten Gültigkeitsbereich mit Simulationen auf der physikalischen Bauelementebene und mit experimentellen Daten von Teststrukturen übereinstimmen.
- Die Abhängigkeit von den Material- und Geometrieparametern sollte sich im Kompaktmodell widerspiegeln. Deshalb sind analytische Modelle vorzuziehen. Einfache Optimierungen sind damit ohne numerische Simulation möglich.

2.4.2 Verhaltensmodelle

Die einfachste Methode, analytische Kompaktmodelle zu generieren, ist die Extraktion der Bauelementcharakteristik aus der Bauelementsimulation und die Anwendung mathematischer Kurvenanpassung (z.B. Polynomfunktionen oder Splinefunktionen). In der Simulationsplattform Coventorware [34] wurde dies halbautomatisiert [148]. Zum Beispiel lassen sich aus dem FEM-Modell eines Plattenkondensators die Masse und aus statischen Analysen bei verschiedenen Auslenkungen nichtlineare elektrostatische (siehe Abschnitt 7.2.1) und mechanische Federsteifigkeiten extrahieren. Diese Simulationsdaten werden durch einen Polynomfit zu einem analytischen Kompaktmodell, so daß auf der Systemebene der Plattenkondensator durch einen Feder-Masse-Schwinger modelliert werden kann. Der Vorteil dieses Ansatzes ist, daß sich mittels statischer FEM-Simulationen in kurzer Zeit ein dynamisches Systemmodell erstellen läßt. Aber nicht jedes Bauelementverhalten kann mit hinreichender Genauigkeit durch Polynome approximiert werden. Darüber hinaus sollte das Kompaktmodell nur den Wertebereich modellieren, der durch die Simulationsdaten abgedeckt wurde. Letztlich besitzt das Kompaktmodell keine Abhängigkeit von Geometrie- und Materialparametern. Für Designstudien in der Entwurfsphase muß deshalb für jede Designvariante der gesamte Extraktionsprozeß wiederholt werden, was einen hohen Rechenaufwand bedeutet.

2.4.3 Algebraisch basierte Ansätze

Zeitabhängige physikalische Probleme werden auf der Kontinuumsebene in der Regel durch partielle Differentialgleichungen beschrieben. Als Ergebnis einer Ortsdiskretisierung (z.B. FEM) erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit:

$$\underline{M}_1 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \underline{M}_2 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ den ortsdiskreten Zustandsvektor, der beispielsweise aus den Knotenwerten der kontinuierlichen Feldvariablen $u(\mathbf{r}, t)$ an den n Diskretisierungsknoten \mathbf{r}_j des Modells gebildet wird: $u_j(t) = u(\mathbf{r}_j, t)$, $j = 1, \dots, n$. Er beschreibt zum Beispiel den zeitlichen Verlauf der Temperatur an n Knoten des Modells. $\underline{M}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\underline{M}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind Systemmatrizen, die oft symmetrisch und schwach besetzt sind. Der Vektor $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ beschreibt äußere Lasten. Sind die Koeffizienten der Matrizen konstant bezüglich \mathbf{u} , dann spricht man von einem linearen System gewöhnlicher Differentialgleichungen, im anderen Fall von einem nichtlinearen System. Dieses Problem mit n Freiheitsgraden (Gleichungssystem der Ordnung n) könnte viel schneller gelöst werden, wenn der Zustand des Bauelements mit m Freiheitsgraden beschrieben werden könnte und m viel kleiner ist als n . Gesucht ist folglich ein geeigneter Satz von m vorzugsweise orthogonalen Basisfunktionen $\varphi_i \in \mathbb{R}^n$, die den Zustandsvektor $\mathbf{u}(t)$ in dem Teil des Zustandsraumes gut approximieren, der für das Betriebsverhalten des analysierten Systems von besonderem Interesse ist. Man macht daher den Ansatz:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^m q_i(t) \cdot \varphi_i \quad (2.2)$$

Der Vektor \mathbf{u}_0 stellt dabei einen definierten Anfangszustand und die $q_i(t)$ die zeitabhängigen Koeffizienten bzgl. der Basisfunktionen φ_i dar. Das Ziel der Ordnungsreduktion ist es nun, möglichst mathematisch fundiert m Basiszustände φ_i zu finden, die das Systemverhalten hinreichend genau beschreiben, so daß die restlichen Freiheitsgrade ohne nennenswerten Verlust an Genauigkeit vernachlässigt werden können. Im folgenden werden kurz die wichtigsten algebraischen Lösungsansätze zur Ordnungsreduktion von Gleichungssystemen genannt, die bei Antoulas [6]⁷ und Rudnyi [128] ausführlicher beschrieben sind.

Die Ordnungsreduktion für kleine lineare Systeme ist praktisch gelöst. Alle modernen Methoden basieren im wesentlichen auf Krylov-Unterraum-Methoden [128]. Die Berechnungszeit für die Ordnungsreduktion nimmt jedoch kubisch mit der Anzahl der Gleichungen im System zu. Prinzipiell ist auch die Strategie für sehr große Systeme bekannt, aber es bleibt die Herausforderung, die Lösung in kurzer Zeit zu erhalten. Zur Berechnung des Unterraumes, der von den Basisfunktionen aufgespannt wird, gibt es neben den Arnoldi- oder Lanczos-Verfahren [128] auch das ENOR-Verfahren ("efficient nodal order reduction") [19, 123]. Dieses Verfahren kann auch direkt auf Systeme (Differentialgleichungen) zweiter Ordnung angewendet werden. Beim Arnoldi-Verfahren muß ein System zweiter Ordnung zuerst in ein System erster Ordnung umgewandelt werden, wodurch sich die Dimension des Problems verdoppelt. Einen Vergleich dieser Verfahren mit dem unterlegenen Gyan-Verfahren [124], das in der "substructuring" Methode von ANSYS [5] implementiert ist, findet man bei Bechtold [22], die das thermische Verhalten einer Mikrodüse untersucht.

⁷ <http://www-ece.rice.edu/aca/mtns00.pdf>

Anders sieht es bei nichtlinearen Systemen aus. Bei schwacher Nichtlinearität läßt sich das System durch ein quadratisches System approximieren. Dieses kann dann mit den Methoden des vorherigen Absatzes reduziert werden, wie bei Chen [31] ausführlich beschrieben wird.

Für stark nichtlineare Systeme ist nach dem Stand der Forschung eine völlige Automatisierung der Ordnungsreduktion wie für lineare Systeme nicht möglich, aber gerade Mikrosysteme verhalten sich oft nichtlinear. Instabilitäten oder Hystereseeffekte können auftreten, die auch das reduzierte System wiedergeben soll. Im Gegensatz zu linearen Systemen muß vor der Ordnungsreduktion des nichtlinearen Systems eine transiente Simulation des vollen Systems durchgeführt werden. Sind erst einmal hinreichend viele Lösungen bekannt, so kann eine Singulärwertzerlegung („singular value decomposition“ SVD) der Lösungsmatrix angestrebt werden. Diese Methode ist in der Literatur auch als vollständige orthogonale Zerlegung („proper orthogonal decomposition“ POD) oder Karhunen-Loeve-Verfahren bekannt [69].

Ein alternativer Ansatz ist das balancierte Abschneiden („balanced truncation“), das von Moore [102] für lineare Systeme entwickelt wurde und auch unter dem Namen Hauptkomponentenanalyse („principal component analysis“ PCA) bekannt ist. Durch Hinzufügen von empirischen Gramschen Matrizen kann diese Methode auch auf nichtlineare Probleme erweitert werden. Auch eine Kombination aus balanciertem Abschneiden (PCA) und vollständiger orthogonaler Zerlegung (POD) wurde entwickelt [82].

Alle Ansätze haben gemeinsam, daß zuerst einzelne Lösungen („Schnappschüsse“) des vollen Systems berechnet werden müssen. Offen ist, wie viele Lösungen und zu welchen Zeitpunkten diese berechnet werden sollen. Erst danach kann die Ordnungsreduktion automatisch erfolgen. Die Qualität des reduzierten Modells hängt von der Qualität der „Schnappschüsse“ des Lösungsraumes ab. Damit ist dann aber nur eine Fehlerabschätzung bezüglich der gewählten Lösungen und nicht des gesamten Lösungsraumes möglich. Für die Designoptimierung eines Mikrosystems sind diese Ansätze weniger geeignet, da die Berechnung der „Schnappschüsse“ zu aufwendig ist. Für einzelne virtuelle Prototypen kann der Aufwand jedoch gerechtfertigt sein. Sie erlauben zum Beispiel, die Interaktion der elektrischen Beschaltung mit dem Bauelement zu simulieren.

2.4.4 Variationsmethode mit modalen Basisfunktionen

Wie im vorigen Abschnitt soll das System durch eine reduzierte Anzahl an Basisfunktionen (Gleichung 2.2) beschrieben werden. Die gesuchte Basis wird jedoch nicht durch ein strenges algebraisches Verfahren gefunden, sondern es werden die Moden des mechanischen Systems verwendet. Dieser Ansatz ist nicht neu, denn die modale Superposition [20] wird seit langem zur Beschleunigung transienter FEM-Berechnungen angewandt und ist zum Beispiel auch in ANSYS [5] implementiert. Die Wahl der Moden als Basisfunktionen hat zudem praktische Gründe, da deren Berechnung in jeder FEM-Software implementiert ist.

Der Unterschied zu den Methoden im vorigen Abschnitt ist, daß die Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ über Variationsprinzipien gewonnen werden. Mit Hilfe der Lagrangefunktion \mathcal{L}

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}(\dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (2.3)$$

erhält man dann durch Differentiation nach den verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} bzw. Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ die Bewegungsgleichungen für den Zustandsvektor \mathbf{q} als System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2.4)$$

Zur Berechnung der kinetischen Energie $\mathcal{T}(\dot{\mathbf{q}})$ und der potentiellen Energie $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ in Abhängigkeit von den verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} müssen zunächst letztere bestimmt werden. Wie bereits oben erwähnt, sollen hier die Eigenmoden des mechanischen Systems verwendet werden. Mit Hilfe einer Modalanalyse werden dazu aus der Steifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ und der Massenmatrix $\underline{\mathbf{M}}$ die Eigenfrequenzen ω_i und die zugehörigen Eigenvektoren oder Moden φ_i bestimmt.

$$(\underline{\mathbf{K}} - \omega_i^2 \underline{\mathbf{M}}) \varphi_i = 0 \quad (2.5)$$

Jetzt können die generalisierte Masse

$$m_i = \varphi_i^T \underline{\mathbf{M}} \varphi_i, \quad (2.6)$$

die kinetische Energie

$$\mathcal{T}(\dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 \quad (2.7)$$

und die lineare elastische Energie U_{le}

$$U_{le}(\mathbf{q}) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 q_i^2 \quad (2.8)$$

direkt berechnet werden. Die potentielle Energie $\mathcal{U}(\mathbf{q})$ ist die Summe aus der linearen elastischen Energie U_{le} , der elektrostatischen Energie und der nichtlinearen Deformationsenergie. Die beiden letzteren müssen aus statischen Bauelementsimulationen in einem Konfigurationsraum berechnet werden. Werden diese Simulationsergebnisse durch Polynome approximiert, so erhält man die Energiefunktionen in Abhängigkeit von den verallgemeinerten Koordinaten q_i . Diese Simulationsergebnisse müssen auch einen Hinweis geben, welche und wie viele Moden als Basisfunktionen verwendet werden müssen, damit der Zustandsvektor aus den FEM-Simulationen mit möglichst wenigen Basisfunktionen möglichst genau approximiert werden kann.

Dieser Ansatz zur Kompaktmodellierung von elektromechanisch gekoppelten Mikrosystemen, die sich primär in eine Vorzugsrichtung bewegen, wurde erstmals von Gabbay [47, 48, 49] vorgeschlagen und von Mehner [98] auf spannungsversteifte Mikrostrukturen erweitert.

Ein Vorteil dieses Ansatzes ist, daß er auf nichtlineare Probleme anwendbar ist, ohne daß im Vorfeld transiente Simulationen des vollen Systems durchgeführt werden müssen. Ein weiterer Vorteil ist, daß die Erstellung des Kompaktmodells weitgehend automatisierbar ist und damit weniger Expertenwissen vom Anwender vorausgesetzt werden muß als beim physikalisch basierten Ansatz, der im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

Sowohl die Auswahl und die Anzahl der Moden, die als Basisfunktionen verwendet werden, als auch die Auswahl und die Anzahl der statischen Bauelementsimulationen sind Freiheitsgrade, die sich auf nicht transparente Weise auf die Genauigkeit des Kompaktmodells auswirken. Generell stellt sich die Frage, ob die mechanischen Eigenmoden geeignete Basisfunktionen sind. Insbesondere, wenn sich die mechanische Struktur durch Kontakt stark verformt oder wenn diese starker elektromechanischer Kopplung ausgesetzt ist, wird dies von Handtmann [62] angezweifelt. Weitere Beispiele für die Kompaktmodellierung mit Basisfunktionen findet man bei Handtmann [61], Gabbay [47] und Voigt [160].

In ANSYS [5] ist dieser Variationsansatz mit modalen Basisfunktionen seit Version 7.0 implementiert. Das Kompaktmodell kann dann als Skript einer Hardwarebeschreibungssprache exportiert oder in die FEM-Simulation integriert werden. Letzteres hat den Vorteil, daß die Lösung des Kompaktmodells in verallgemeinerten Koordinaten wieder auf das anschauliche Koordinatensystem des ursprünglichen Modells umgerechnet werden kann. Die graphische Nachbearbeitung von ANSYS kann so genutzt werden, um zum Beispiel eine Animation des transienten Bauelementverhaltens zu erstellen.

Nichtkonservative Effekte, wie beispielsweise dissipative Reibungskräfte, können über verallgemeinerte Kräfte f_V berücksichtigt werden. Dazu muß der Kraftvektor $f_V(q, \dot{q})$ in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten berechnet werden. Für jede modale Eigenfunktion wird dazu mit der modalen Einheitsgeschwindigkeit als Randbedingung die komplexe Dämpfungskraft (Reibungs- und Federkraft) aus der Druckverteilung bei Squeeze-Film-Dämpfung berechnet [97].

Zur Erstellung eines Kompaktmodells muß jedoch viel Rechenzeit investiert werden, wodurch diese Methode für Designstudien weniger geeignet ist, da für jede Variante ein neues Kompaktmodell generiert werden muß. Deshalb gibt es Entwicklungen, die Parametrisierbarkeit dieser Modelle durch mehrdimensionale Taylorreihenentwicklungen zu gewährleisten [8]⁸.

2.4.5 Physikalisch basierte Ansätze

Ausgangspunkt aller bisherigen Ansätze war die ortsdiskretisierte Form eines Modells auf Kontinuumsebene, aus dessen Lösungen das Kompaktmodell berechnet wurde. Im Gegensatz dazu besteht ein physikalisch basiertes Kompaktmodell aus der analytischen

⁸ <http://www.cadoc.com>

Lösung einer physikalischen Gleichung und enthält somit die Geometrie- und Materialparameter als Eingabeparameter. Die letzte Anforderung an ein Kompaktmodell aus Abschnitt 2.4.1 wird damit nur von einem physikalisch basierten Ansatz erfüllt.

Bekannte Beispiele, die auch in dieser Arbeit verwendet werden, sind die Gleichungen für die Balkentorsion, die Kanalströmung oder den Plattenkondensator. Zu den meisten physikalischen Gleichungen findet man nur für elementare Geometrien analytische Lösungen. Kleine Abweichungen können jedoch durch Fitparameter berücksichtigt werden. Diese sollten physikalisch transparent und unabhängig von den Geometrie- und Materialparametern sein, wie beispielsweise die Übergangsfunktion für die Kapazität an einem gestuften Kammantrieb [161]. Gezielte Strategien zur Extraktion dieser Fitparameter aus Bauelementsimulationen oder Messungen können dabei aus der Mikroelektronik übernommen werden [162].

Die Stärken analytischer, physikalisch basierter Kompaktmodelle sind die guten Extrapolationseigenschaften bei Variation der Geometrie- und Materialparameter. Zudem erlaubt ihre Kompaktheit und die sofortige Verfügbarkeit durch Modellbibliotheken sehr schnelle Designstudien. Der Nachteil ist, daß sowohl zur Ableitung der Kompaktmodelle als auch zur Fehlerabschätzung bei deren Anwendung Expertenwissen notwendig ist. Weitere Beispiele für physikalisch basierte Kompaktmodellierung findet man u.a. bei Klein [76], Schrag [131] und Voigt [160].

2.4.6 Zusammenfassung

Zum Abschluß soll noch einmal der Einsatz von Kompaktmodellen bei der Simulation auf Systemebene veranschaulicht werden. In der Designphase eines neuen Mikrosystems muß zuerst das Konzept überprüft und der Designparameterraum abgegrenzt werden. Dazu bietet sich eine Simulation mit konzentrierten Variablen und physikalisch basierten Kompaktmodellen aus einer Modellbibliothek an, da analytische Modelle schnelle Designstudien erlauben. Ist die Genauigkeit eines Kompaktmodells ungenügend oder zweifelhaft, so kann dieses in einigen Fällen durch einen Fitparameter korrigiert oder durch ein Verhaltensmodell ersetzt werden. In den anderen Fällen muß auf die Kontinuumsebene gewechselt und ein Modell mit verteilten Variablen erstellt werden. Oftmals empfiehlt sich auch eine Kombination verschiedener Ansätze, wie nachfolgend das Beispiel der fluidischen Dämpfung zeigt. Die Abhängigkeit der Dämpfungskraft von der Auslenkung einer Struktur ist stark nichtlinear, so daß alle Ansätze zur algebraischen Ordnungsreduktion auf Lösungen des vollen Problems angewiesen sind. Dafür ist die Mixed-Level-Methode der ideale Ansatz und bietet einen Kompromiß zwischen ungenauen analytischen Lösungen und zeitaufwendigen Strömungssimulationen (“computational fluid dynamics“ CFD). Diese Methode eignet sich damit auch für die Systemsimulation. Muß das Systemmodell noch kompakter werden, können die Lösungen des Mixed-Level-Modells die Basis für verschiedene Ansätze zur weiteren Ordnungsreduktion sein. Vielversprechend ist dabei die Variationsmethode mit modalen Basisfunktionen, die einen guten Kompromiß aus Verhaltensmodell und physikalischem Ansatz darstellt. Der Variationsansatz benutzt das physikalische Prinzip der kleinsten Wirkung, und für die Energiefunktionen wird ein Verhaltensmodell aus einer Reihe von Mixed-Level-Simulationen erstellt.

Kritisch ist dabei die Auswahl der Basisfunktionen. Ein interessanter Ansatz, der in der Literatur noch nicht verfolgt wurde, wäre deshalb eine Kombination aus algebraischer Ordnungsreduktion und Variationsansatz. Die Basisfunktionen werden nicht über eine Modalanalyse berechnet, sondern durch ein fundiertes mathematisches Verfahren (z.B. POD) aus einem Satz von typischen Systemzuständen, die zuvor auf Bauelementebene berechnet wurden. Dadurch könnten auch starke Verformungen durch Kontakt besser berücksichtigt werden.

3 Fluidmechanische Grundlagen

Die physikalisch basierten Kompaktmodelle für Squeeze-Film-Dämpfung (auch Schmierfilmdämpfung genannt) bilden den Schwerpunkt dieser Arbeit und werden in Kapitel 4 abgeleitet. Zum besseren Verständnis ist das Studium der zugrunde liegenden Navier-Stokes- und Reynoldsgleichung notwendig, deren Herleitung und analytische Lösungen für elementare Geometrien in diesem Kapitel behandelt werden.

Prinzipiell sind diese Gleichungen sowohl für Flüssigkeiten als auch für Gase anwendbar. Man darf jedoch nicht vernachlässigen, daß sich Gase und Flüssigkeiten oft sehr unterschiedlich verhalten. Das beruht insbesondere darauf, daß die Moleküle in einer Flüssigkeit viel dichter gepackt sind als in einem Gas. Damit sind Flüssigkeiten quasi inkompressibel.

Für Flüssigkeiten gibt es im Gegensatz zu Gasen auch kein eindeutiges Kriterium, ob sie als Kontinuum betrachtet werden dürfen oder als Ansammlung individueller Moleküle modelliert werden müssen. In diesem Übergangsbereich zwischen Kontinuums- und Molekularströmung spricht man auch von verdünnten Gasen, deren Modellierung und analytische Lösungen für Strömungen durch elementare Geometrien in Abschnitt 3.3 vorgestellt werden.

Da im Rahmen dieser Arbeit die fluidische Dämpfung von Mikrosystemen untersucht wird, bezieht sich der Begriff Fluid hier auf Gase im allgemeinen und Luft im speziellen. Flüssigkeiten werden ausführlich bei Wereley [113] und Gad-el-Hak [40] diskutiert.

3.1 Navier-Stokes-Gleichung

Die Navier-Stokes-Gleichung bildet zusammen mit der Energie- und Kontinuitätsgleichung die Basis der Kontinuums-Fluidmechanik. Sie wurde für den inkompressiblen Fall im Jahr 1822 von Navier aufgestellt und später von Stokes verallgemeinert. Im dreidimensionalen Raum existieren sechs Freiheitsgrade des Fluids: die drei Komponenten der Geschwindigkeit v_x , v_y , v_z , die Dichte ρ , die Temperatur T und der Druck p . Folglich wird ein Gleichungssystem mit sechs Gleichungen benötigt, um den Zusammenhang zwischen den Freiheitsgraden zu beschreiben:

- Die Zustandsgleichung für ein ideales Gas lautet $p = n \cdot k \cdot T$, wobei k die Boltzmannkonstante ist.
- Die Massenerhaltung folgt aus der Kontinuitätsgleichung.
- Drei Newtonsche Bewegungsgleichungen für die drei Raumrichtungen.

- Die Energieerhaltungsgleichung.

Thermische Effekte aufgrund der Energieerhaltung werden in dieser Arbeit nicht betrachtet, da Temperaturänderungen wegen der kleinen Luftspalte der hier untersuchten Systeme sofort abgeleitet werden und damit vernachlässigbar sind. Für die Ableitung der Energiegleichung wird auf Lehrbücher (z.B. [75, 125]) der Fluidmechanik verwiesen.

3.1.1 Herleitung

Massenerhaltung

Betrachtet man ein kleines Kontrollvolumen und bilanziert die Masse der Fluidteilchen, die dieses Kontrollvolumen betritt, mit dem Massenzuwachs im Kontrollvolumen, so läßt sich die Kontinuitätsgleichung ableiten [60]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

Newtonsche Bewegungsgleichung

Nach Newton berechnet sich die Kraft \mathbf{F} aus dem Produkt von Masse und Beschleunigung. Der Beschleunigungsvektor entspricht der Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach der Zeit und setzt sich wegen der totalen Ableitung aus einem lokalen Beitrag, der die Änderung des Geschwindigkeitsfeldes an einem beliebigen Punkt mit der Zeit beschreibt, und einem konvektiven Beitrag zusammen, der von der Bewegung eines Fluidteilchens durch das Geschwindigkeitsfeld herrührt. Die x -Komponente der Beschleunigung lautet somit:

$$\frac{dv_x}{dt} = \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t}}_{\text{lokal}} + \underbrace{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}}_{\text{konvektiv}} \quad (3.2)$$

Die Kraft \mathbf{F} setzt sich aus Volumen- und Oberflächenkräften zusammen. Erstere sind externe Kraftdichten \mathbf{f} , wie zum Beispiel die Gravitation, die in Mikrosystemen meist vernachlässigt werden kann. Letztere setzen sich aus Scher- und Druckkräften zusammen.

In kompakter Vektorschreibweise lautet die Navier-Stokes-Gleichung damit:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} \underline{\tau} \quad (3.3)$$

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Spannungstensor

Der Spannungstensor $\underline{\tau}$ beschreibt die Zähigkeit eines Fluids. Durch Annahmen, die in den nachfolgenden drei Abschnitten beschrieben werden, läßt er sich vereinfachen und mit der Geschwindigkeit des Fluids \mathbf{v} in Zusammenhang bringen:

Newtonsche Fluide Zunächst soll die Widerstandskraft des Fluids bestimmt werden. In der Festkörpermechanik wird die Verspannung oft proportional zur Dehnung angenommen (Hooksches Gesetz). Das gilt jedoch nicht in der Fluidik, da sich ein Fluid unter Schubspannung kontinuierlich verformt. Newton beobachtete als erster, daß die Spannung linear proportional zur Dehnungsrate ist, d.h. der zeitlichen Veränderung der Dehnung:

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (3.5)$$

Die Proportionalitätskonstante η wird dabei als dynamische Viskosität bezeichnet. Dieses phänomenologische Ergebnis läßt sich für verdünnte Gase auch aus der Boltzmann-Gleichung ableiten, wenn das Fluid nicht zu weit vom thermodynamischen Gleichgewicht entfernt ist [40]. Fluide, die den linearen Zusammenhang in Gleichung 3.5 zwischen Spannung und Dehnungsrate aufweisen, heißen Newtonsche Fluide. Dieser Ausdruck bezeichnet eine Materialeigenschaft und keine Strömungseigenschaft. So sind Wasser und Luft Beispiele für Newtonsche Fluide, während Blut diese Eigenschaft nicht erfüllt.

Symmetrie Newtons Ansatz für einfache eindimensionale Strömungen wurde von Stokes verallgemeinert. In drei Dimensionen ergeben sich bei neun Spannungen und neun Dehnungsraten maximal 81 unabhängige Materialkonstanten. Geht man davon aus, daß das Fluid homogen und isotrop ist, der Spannungs- und der Dehnungsratentensor symmetrisch und die Beziehung zwischen beiden Tensoren in orthogonalen Koordinatensystemen drehinvariant ist, dann reduzieren sich die unabhängigen Materialkonstanten auf die dynamische Viskosität η und die Volumenviskosität ζ_v . Analoge Überlegungen führen in der Festkörpermechanik zum Elastizitätsmodul und Schubmodul. Die Bestimmungsgleichungen für die Normalspannungen σ und die Scherspannungen τ haben dann folgende Form [75, 125]:

$$\sigma_{xx} = 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \zeta_v \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (3.6)$$

$$\sigma_{yy} = 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} + \zeta_v \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (3.7)$$

$$\sigma_{zz} = 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} + \zeta_v \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (3.8)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (3.9)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (3.10)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad (3.11)$$

Die Normalspannungen ergeben sich aus einer Verformung mit Volumenänderung ($div \mathbf{v}$ entspricht der Verformung eines Elements pro Volumen) und einer Verformung ohne Volumenänderung. Erstere entfällt bei inkompressiblen Gasen.

Stokes Hypothese Stokes Hypothese besagt, daß der Mittelwert der Normalspannungen, unabhängig von der Verformung eines Elements, dem thermodynamischen Druck p entspricht. Der Druck wurde in Gleichung 3.3 bereits aus dem Spannungstensor ausgeklammert, somit muß die Summe der Normalspannungen im Spannungstensor 3.6 verschwinden:

$$3\zeta_v + 2\eta = 0 \quad (3.12)$$

Für diese Hypothese gibt es nach Rogers [125] keine theoretische Herleitung - bestenfalls eine Näherung für monoatomare Gase der kinetischen Gastheorie. Dennoch lassen sich auch mehratomige Gase in der Praxis sehr gut damit beschreiben, auch wenn dies von Gad-el-Hak [38] angezweifelt wird.

Mit den Annahmen aus diesem Abschnitt läßt sich der Spannungstensor und damit auch die Navier-Stokes-Gleichung 3.3 vereinfachen:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} - grad p + \eta (div grad \mathbf{v} - \frac{1}{3} grad div \mathbf{v}) \quad (3.13)$$

3.1.2 Inkompressible Navier-Stokes-Gleichung

Für inkompressible Fluide ($div \mathbf{v} = 0$) vereinfacht sich die Navier-Stokes Gleichung weiter:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = \mathbf{f} - grad p + \eta \cdot div grad \mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.14)$$

Dimensionsfreie Darstellung

Wählt man eine charakteristische Länge L und eine charakteristische Geschwindigkeit v , so lassen sich folgende dimensionslose Größen definieren:

$$\text{Geschwindigkeit: } \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{v} \quad (3.15)$$

$$\text{Druck: } p' = \frac{p}{\rho v^2} \quad (3.16)$$

$$\text{Gradient: } \nabla' = L \nabla \quad (3.17)$$

$$\text{Zeit: } t' = \frac{v}{L} t \quad (3.18)$$

$$\text{Reynoldszahl: } Re = \frac{L \rho v}{\eta} \quad (3.19)$$

Die dimensionslose Reynoldszahl Re beschreibt das Verhältnis von Trägheitskräften zu Reibungskräften in einer Strömung. Ab einer kritischen Reynoldszahl Re_{krit} wird die Strömung turbulent. Die kritische Reynoldszahl hängt von der Strömungsgeometrie ab und liegt beispielsweise im Falle der makroskopischen Rohrströmung bei $Re_{krit} \approx 2300$. In Mikrokanälen wurden jedoch bereits kritische Reynoldszahlen im Bereich von 300-2000 beobachtet [103, 113].

Werden im folgenden äußere Volumenkräfte \mathbf{f} vernachlässigt, so läßt sich die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung 3.14 auch dimensionslos ausdrücken:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \nabla') \mathbf{v}' \right) = -\nabla' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{v}' \quad (3.20)$$

Die dimensionslose Gleichung zeigt, daß für geometrisch ähnliche Strömungsverhältnisse und damit für ähnliche Randbedingungen auch die Strömung ähnlich verläuft, falls die Reynoldszahl Re (Gleichung 3.19) gleich ist. Dies ermöglicht, die aerodynamischen Eigenschaften eines großen Objektes anhand eines kleinen Modells zu testen (z.B. Flugzeug) und umgekehrt (z.B. Kraftstoffeinspritzdüsen).

Stokesgleichung

In Mikrosystemen sind die charakteristischen Abmessungen sehr klein, so daß auch die Reynoldszahl sehr klein wird ($Re \ll 1$). Der Trägheitsterm auf der linken Seite der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung 3.14 kann dann gegenüber dem Reibungsterm vernachlässigt werden und man erhält die Stokesgleichung:

$$\nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.21)$$

3.1.3 Analytische Lösungen

Analytische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung existieren nur für sehr einfache Geometrien und stationäre, eindimensionale Strömungen. Ausgangspunkt ist deshalb die Stokesgleichung 3.21, aus der im folgenden die Kanal- und Blendenströmung für elementare Strömungsgeometrien abgeleitet werden. Dabei wird auch der Einfluß des Anlaufbereichs bei Kanalströmungen untersucht. Diese Resultate werden im nächsten Kapitel zur Ableitung der physikalisch basierten Dämpfungskompaktmodelle verwendet.

Strömung in einem Kanal mit kreisförmigem Querschnitt

Für eine eindimensionale stationäre Strömung in z-Richtung gilt in einem rotationssymmetrischen Kanal die Stokesgleichung in Zylinderkoordinaten:

$$\eta \left(\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{dp}{dz} \quad (3.22)$$

Löst man diese Differentialgleichung unter den Randbedingungen, daß die Geschwindigkeit an der Kanalwand Null und in der Kanalmitte maximal ist ($v_z(R) = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial r} |_{r=0}$), so erhält man das parabolische Geschwindigkeitsprofil:

$$v_z(r) = \frac{-1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \quad (3.23)$$

Integration über den Strömungsquerschnitt ergibt die Flußrate Q_o in einem kreisförmigen Kanal mit Radius R . Dieser Zusammenhang ist auch als Hagen-Poiseuille-Gesetz bekannt:

$$Q_o = \int_0^R 2\pi r v_z(r) dr = \frac{-\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dz} \quad (3.24)$$

Strömung in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt

Ein Kanal mit rechteckigem Querschnitt und den Seitenlängen a, b besitzt das Aspektverhältnis $a/b = \beta \leq 1$. Die analytische Lösung der Stokesgleichung läßt sich nur durch einen unendlichen Summenterm ausdrücken, der jedoch schnell konvergiert. Der folgende Ausdruck für die Geschwindigkeitsverteilung wird in zahlreichen Lehrbüchern angegeben (z.B. [141]) und ist in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

$$v_z = \frac{-16}{\pi^4 \cdot \eta} \frac{dp}{dz} \sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)} \sin(n\pi \frac{y}{a}) \sin(m\pi \frac{x}{b}) \quad (3.25)$$

Die Integration über die Querschnittsfläche ergibt folgenden Ausdruck für die Flußrate:

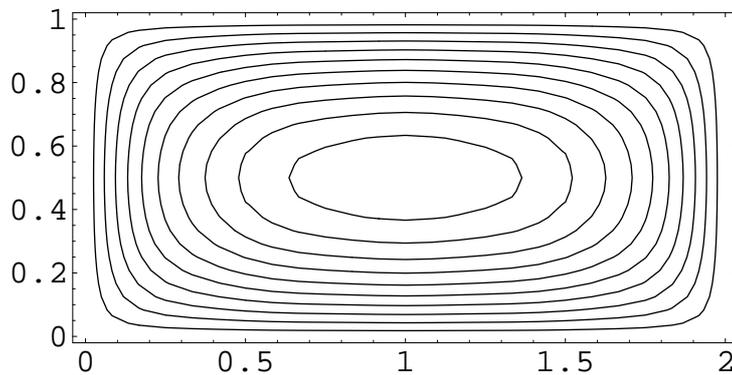


Abbildung 3.1: *Linien gleicher Geschwindigkeit in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt.*

$$Q_{\square} = -\frac{a^3 b}{12\eta} \frac{dp}{dz} \cdot \underbrace{12 \frac{64}{\pi^6} \sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 n^2} \frac{m^2 + n^2 \beta^2}{\beta^2 m^2 + n^2}}_{\Psi_{\square}(\beta)} \quad (3.26)$$

Der letzte Term $\Psi_{\square}(\beta)$ ist ein Korrekturterm für die Flußrate in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis β . Zur besseren Vergleichbarkeit und Handhabung wurde in dieser Arbeit das Maximum des Terms auf eins normiert und mit einem relativen Fehler unter 1% durch folgendes Polynom approximiert:

$$\Psi_{\square}(\beta) \approx 1 - 0.67\beta + 0.09\beta^2 \quad (3.27)$$

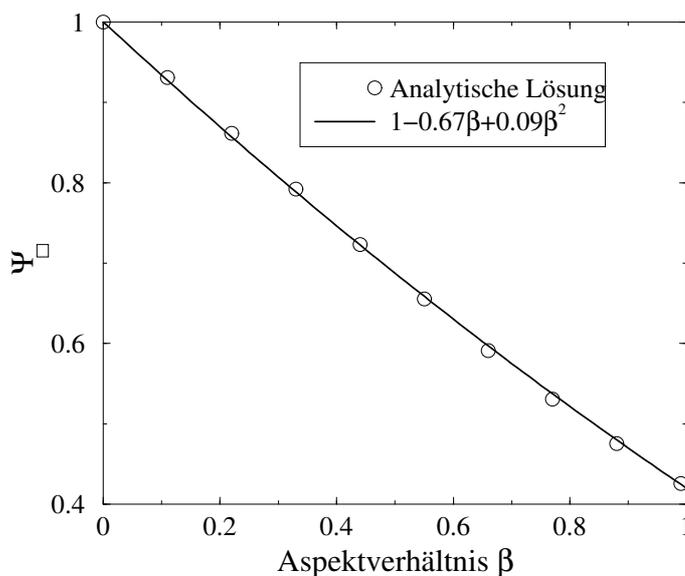


Abbildung 3.2: *Vergleich des theoretischen Korrekturfaktors $\Psi_{\square}(\beta)$ aus Gleichung 3.26 für den fluidischen Widerstand eines rechteckigen Kanals in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis mit der einfachen Näherungsformel.*

Abbildung 3.2 zeigt den Verlauf des Korrekturterms Ψ_{\square} in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis. $\beta = 1$ entspricht dabei einem Kanal mit quadratischem Querschnitt, $\beta = 0$ einem zweidimensionalen Kanal.

Zweidimensionale Kanalströmung

Mit einem zweidimensionalen Kanal ist ein rechteckiger Kanal mit einem extremen Aspektverhältnis gemeint. Die Höhe $h = a$ des Kanals ist viel kleiner als die Breite b . Wird eine eindimensionale stationäre Strömung in z -Richtung betrachtet, so ist das Strömungsprofil in x -Richtung konstant und die Stokesgleichung läßt sich weiter vereinfachen:

$$\eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3.28)$$

Löst man diese Differentialgleichung mit der Randbedingung einer verschwindenden Strömungsgeschwindigkeit an der Kanalwand ($v_z(0) = v_z(h) = 0$), so erhält man das parabolische Geschwindigkeitsprofil:

$$v_z(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} (y^2 - hy) \quad (3.29)$$

Die Integration über die Kanalhöhe h ergibt die gleiche Flußrate pro Kanalbreite, wie beim Kanal mit rechteckigem Querschnitt in Gleichung 3.26, wenn $a/b = \beta = 0$.

$$q_{2D} = \int_0^h v_z(y) dy = \frac{-h^3}{12\eta} \frac{dp}{dz} \quad (3.30)$$

Anlaufbereich

Bei den bisherigen Ableitungen wurden voll entwickelte Strömungsprofile vorausgesetzt, was in der Realität nicht immer der Fall ist. Ein homogenes Geschwindigkeitsprofil am Kanaleingang verändert sich kontinuierlich aufgrund der Reibung an den Kanalwänden, bis sich nach einer Anlaufstrecke L_{an} das Strömungsprofil nicht mehr ändert. Theoretisch ist diese Anlaufstrecke unendlich lang. Aus praktischen Gründen hat man sich in der Literatur darauf geeinigt, daß mit der Anlauflänge L_{an} die Strecke gemeint ist, nach der die Geschwindigkeit in der Kanalmitte 99% der Geschwindigkeit bei voll entwickeltem Strömungsprofil erreicht hat. Chen [30] gibt folgende empirische Formel für die Anlauflänge in einem Kanal mit kreisförmigem Querschnitt an, die auch numerisch durch Barber [18] bestätigt wurde:

$$\frac{L_{an}}{D_H} = \frac{0.60}{0.035 Re + 1} + 0.056 Re \quad (3.31)$$

$D_H = 4A/s$ ist der hydraulische Durchmesser. Dabei ist A der Kanalquerschnitt und s der vom Fluid benetzte Umfang des Kanals. Für einen Kanal mit kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius R gilt somit $D_H = 2R$.

Eine ähnliche Formel gilt auch für den zweidimensionalen Kanal [30].

Der Einfluß der Anlaufänge auf den Druckabfall in einem Kanal läßt sich nach White [170] mit dem Verlustfaktor K beschreiben:

$$\delta p(z) = \left(\frac{4 P_o}{Re} \frac{z}{D_H} + K(z) \right) \frac{\rho}{2} v^2 \quad (3.32)$$

Die beiden Terme in der Klammer sind dimensionslos. Der erste beschreibt den Druckverlust durch Reibung an der Kanalwand bei voll ausgebildetem Strömungsprofil. Die Poiseuillezahl P_o hängt lediglich von der Form des Kanalquerschnitts ab. Für einen Kanal mit kreisförmigem Querschnitt ist $P_o = 16$, somit entspricht der erste Term Gleichung 3.24. Der zweite Term ist der Verlustfaktor K und beschreibt die zusätzlichen Verluste im Anlaufbereich wegen des noch nicht voll ausgebildeten Strömungsprofils. Bei voll ausgebildeter Strömung in einem Kanal mit kreisförmigem Querschnitt ergibt sich ein Verlustfaktor $K(L_{an}) = 1.4$ [170]. Berechnet man den Druckabfall δp nach der Länge L_{an} , so ergibt folgende Gleichung die Korrektur des Druckabfalls bei radialsymmetrischer Kanalströmung mit Berücksichtigung des noch nicht voll ausgebildeten Strömungsprofils im Anlaufbereich:

$$\delta p(L_{an}) = \frac{64}{Re} \frac{L_{an}}{D_H} \frac{\rho}{2} v^2 \left(1 + \frac{D_h Re}{64 \cdot 0.6 D_h} K(L_{an}) \right) \quad (3.33)$$

Setzt man den empirischen Korrekturfaktor $K(L_{an}) = 1.4$ ein, so wird deutlich, daß dieser Korrekturterm für sehr kleine Reynoldszahlen vernachlässigt werden kann, selbst wenn der Kanal nicht länger als der Anlaufbereich ist.

Zu beachten ist, daß es bisher keine theoretischen oder experimentellen Untersuchungen zum Verlustfaktor K für mikromechanische Dimensionen gibt [16]. Zudem beruhen die makroskopischen Untersuchungen auf einem homogenen Strömungsprofil am Kanaleingang. Bei Untersuchungen in dieser Arbeit zeigt sich jedoch, daß das Strömungsprofil am Eingang eines mikromechanischen Lochkanals durchaus inhomogen sein kann und damit einen relevanten Beitrag zum Druckabfall leistet (siehe Abbildung 4.11 auf Seite 72).

Blendenströmung

Eine Strömungsblende ist eine Vorrichtung zur Begrenzung des Querschnitts einer Strömung. Alternativ kann eine Blende auch als ein infinitesimal kurzer Kanal betrachtet werden. Unter der Bedingung, daß an der Blendenwand die Strömungsgeschwindigkeit Null ist und in der Blendenströmung der Druck δp abfällt, läßt sich mit Hilfe der Stokesgleichung 3.21 die Blendenströmung berechnen. Abbildung 3.3 zeigt die numerisch berechnete Geschwindigkeitsverteilung der Strömung in der Nähe einer kreisförmigen

Blende. Roscoe [127] und Hasimoto [63] haben gezeigt, daß sich für eine elliptische Blende das Geschwindigkeitsprofil $v_z(x, y)$ in der Blendenebene ($z = 0$) mit folgendem analytischen Ausdruck beschreiben läßt:

$$v_z(x, y) = \frac{A \cdot \delta p}{\pi \cdot s \cdot \eta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (3.34)$$

Dabei sind a die große und b die kleine Halbachse der Ellipse, $A = \pi ab$ die Fläche und s der Umfang der Ellipse. Die Integration der Strömungsgeschwindigkeit über die Fläche A ergibt die Flußrate Q_B der *viskosen Blendenströmung*:

$$Q_B = \frac{2A^2}{3\pi\eta \cdot s} \delta p \quad (3.35)$$

Für große Reynoldszahlen darf die Reibung vernachlässigt werden, wohingegen Trägheitseffekte berücksichtigt werden müssen. Der Druckabfall in der Blende wird bei dieser *kinetischen Blendenströmung* vollständig in kinetische Energie umgewandelt und durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\delta p = \frac{\rho}{2} v^2 = Re \frac{v\eta}{4R} \quad (3.36)$$

Vergleicht man diesen Druckabfall mit dem einer *viskosen Blendenströmung* aus Gleichung 3.35 für eine Blende mit kreisförmigem Querschnitt und Radius R , so ergibt sich der gleiche Druckabfall für eine Reynoldszahl $Re = 12\pi$. Dieser Übergangsbereich zwischen viskoser und kinetischer Blendenströmung konnte auch von Bond [26] experimentell bestätigt werden.

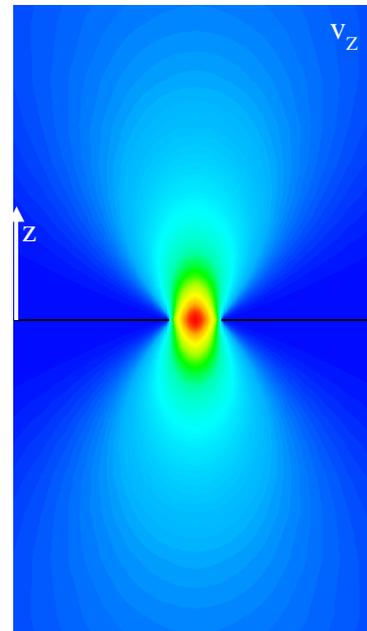


Abbildung 3.3: Geschwindigkeitsverteilung v_z bei viskoser Blendenströmung.

3.2 Reynoldsgleichung

Die Reynoldsgleichung beschreibt die Squeeze-Film-Dämpfung, die auch Schmierfilmdämpfung genannt wird. Diese ist ein aus der Lagerreibung (Tribologie) bekanntes Phänomen, das auch die Dämpfung vieler mikromechanischer Strukturen bestimmt. Bewegen sich Strukturen vertikal gegeneinander oder gegen eine nicht bewegliche Oberfläche und befindet sich ein dünner Fluidfilm zwischen den beiden Strukturteilen, so beschreibt die Squeeze-Film-Dämpfung die Reaktionskraft auf die sich bewegende Struktur. Diese setzt sich aus einer Reibungs- und einer Federkraft zusammen. Bei langsamen Bewegungen der Struktur kann das Fluid aus dem Spalt entweichen und es überwiegt die Reibungskraft. Ist dies nicht der Fall, so überwiegt aufgrund der Kompressibilität des Fluids die Federkraft.

Die Navier-Stokes-Gleichung läßt sich durch eine Mittelung der Freiheitsgrade Druck und Geschwindigkeit über den dünnen Fluidfilm zur Reynoldsgleichung vereinfachen. Dies entspricht einer beträchtlichen Reduzierung der Freiheitsgrade und führt zu einer erheblichen Vereinfachung des Modells. Im folgenden Abschnitt wird die Reynoldsgleichung für vertikale Plattenbewegungen abgeleitet. Deren analytische Lösung ist für physikalisch basierte Kompaktmodelle zur Beschreibung der Dämpfung in Mikrosystemen von besonderem Interesse. Leider existiert keine analytische Lösung der allgemeinen Reynoldsgleichung. Wichtige Spezialfälle sind jedoch die linearisierte und die inkompressible Reynoldsgleichung, deren analytische Lösungen für elementare Strukturen in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden. Zuletzt wird eine modifizierte Reynoldsgleichung abgeleitet, die sich auch zur Beschreibung der Dämpfung perforierter Platten eignet. Deren analytische Lösung wird für gelochte Rechteckplatten angegeben.

Diese analytischen Lösungen bieten nicht die Genauigkeit und Flexibilität des numerisch zu lösenden Mixed-Level-Modells, das in Kapitel 5.2 vorgestellt wird, und werden zu dessen Ableitung auch nicht benötigt. Sie erlauben jedoch eine schnelle Abschätzung der Dämpfungskräfte und sind für eine erste Systemauslegung unverzichtbar.

3.2.1 Herleitung

Die Differentialgleichung, welche die Druckverteilung in der Schmierfilmreibung beschreibt, wurde 1886 erstmals von Reynolds beschrieben. Harrison erweiterte Reynolds unnötige Beschränkung auf inkompressible Fluide um kompressible Effekte. Die Reynoldsgleichung basiert darauf, daß sich eine Platte mit den lateralen Dimensionen a, b und $b > a$ in geringem Abstand h über dem Substrat bewegt. Vernachlässigt man zur Herleitung alle Terme $(h/a)^n$ mit $n > 1$ in der Navier-Stokes-Gleichung 3.13 und spaltet die Vektorgleichung in die kartesischen Komponenten auf, so erhält man:

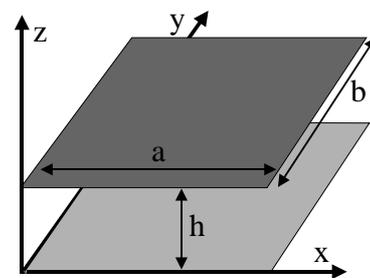


Abbildung 3.4: Geometrie zur Herleitung der Reynoldsgleichung.

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \operatorname{div} \mathbf{v}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (3.37)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \operatorname{div} \mathbf{v}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.39)$$

Werden nach Hamrock [60] alle Terme $(h/a)^n$ mit $n \geq 1$ vernachlässigt, können auch die linken Seiten der Gleichungen 3.37 und 3.38 vernachlässigt werden und die beiden Gleichungen entsprechen dann der x - und y -Komponente der Stokesgleichung 3.21. Werden nach Gleichung 3.39 vertikale Druckschwankungen vernachlässigt, so entspricht das Geschwindigkeitsprofil unter der Platte der zweidimensionalen Kanalströmung aus Gleichung 3.29. Wird dieses Poiseuille-Geschwindigkeitsprofil in die Kontinuitätsgleichung 3.1 eingesetzt und über die Luftspalthöhe h integriert, so erhält man die Reynoldsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.40)$$

In kompakter Schreibweise besteht die Reynoldsgleichung aus drei Termen: einem Reibungsterm, der auf der Poiseuille-Strömung in einem zweidimensionalen Kanal nach Gleichung 3.30 beruht, einem Generationsterm, der auf der vertikalen Plattenbewegung beruht und einem kapazitiven Term, der auf der Kompressibilität des Fluids beruht.

$$\underbrace{\nabla \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \nabla p \right)}_{\text{Poiseuille}} = \underbrace{\rho \frac{\partial h}{\partial t}}_{\text{Generation}} + \underbrace{h \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{Kompressibilität}} \quad (3.41)$$

Bewegt sich die Platte auch lateral, so wird die Reynoldsgleichung um Terme ergänzt, die der Couette-Strömung entsprechen. Diese Terme werden in dieser Arbeit nicht benötigt, man findet sie aber beispielsweise bei Hamrock [60].

In dieser Arbeit wird die Dämpfung in Luft untersucht. Luft kann mit sehr guter Näherung als ideales Gas betrachtet werden, was bedeutet, daß die Dichte ρ proportional zum Druck p ist (ρ_0 und p_0 sind die Referenzwerte bei Umgebungsdruck):

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0} p \quad (3.42)$$

3.2.2 Linearisierte Reynoldsgleichung

Unter der Voraussetzung kleiner Änderungen δh des Luftspalts h_0 ($\delta h \ll h$ mit $h = h_0 + \delta h$) und kleiner Druckschwankungen δp gegenüber dem Umgebungsdruck p_0 ($\delta p \ll p_0$ mit $p = p_0 + \delta p$) kann die Reynoldsgleichung 3.41 linearisiert werden:

$$\nabla^2 \left(\frac{\delta p}{p_0} \right) = \frac{12\eta}{h_0^2 p_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta h}{h_0} + \frac{\delta p}{p_0} \right) \quad (3.43)$$

Bei harmonischer (sinusförmiger) Anregung der Platte mit der Frequenz ω lassen sich mit Hilfe einer charakteristischen Länge L , die der kürzeren Plattenseitenlänge a entspricht, und der dynamischen Viskosität η folgende dimensionslose Größen definieren:

$$\text{Druck:} \quad p' = \frac{\Delta p}{p_0} \quad (3.44)$$

$$\text{Spalthöhe:} \quad h' = \frac{\Delta h}{h_0} \quad (3.45)$$

$$\text{Gradient:} \quad \nabla' = L \nabla \quad (3.46)$$

$$\text{Zeit:} \quad t' = \omega t \quad (3.47)$$

$$\text{Squeezezahl:} \quad \sigma = \frac{12\eta\omega L^2}{h_0^2 p_0} \quad (3.48)$$

Damit kann die linearisierte Reynoldsgleichung auch dimensionslos ausgedrückt werden:

$$\nabla'^2 p' = \sigma \left(\frac{\partial p'}{\partial t'} + \frac{\partial h'}{\partial t'} \right) \quad (3.49)$$

Die Squeezezahl σ ist eine wichtige Kennzahl bei der Squeeze-Film-Dämpfung und ein Maß, wie stark sich die Kompressibilität der Luft auf die Dämpfung der Platte auswirkt. Bei großen Squeezezahlen kann das Gas unter der Platte nicht mehr seitlich entweichen und die komprimierte Luft wirkt wie eine Feder auf die Platte.

Analytische Lösung der linearisierten Reynoldsgleichung

Wie bereits erwähnt, setzt sich die Dämpfungskraft, die mit der Reynoldsgleichung berechnet wird, aus einer Reibungs- und einer Federkraft zusammen. Dies läßt sich am elegantesten mit einer komplexen Dämpfungskraft ausdrücken. Der Realteil entspricht der Federkraft, der in Phase mit der Plattenauslenkung ist. Die Reibungskraft ist hingegen in Phase mit der Plattengeschwindigkeit und wird durch den Imaginärteil beschrieben. Im folgenden wird die analytische Lösung für die komplexe Dämpfungskraft auf eine Rechteckplatte bei vertikaler Schwingung und das Dämpfungsmoment bei Torsionsschwingung einer Rechteckplatte angegeben. Betrachtet werden dabei harmonische Schwingungen mit kleinen Auslenkungen.

Vertikale Schwingung Eine rechteckige Platte mit den Seitenlängen a, b (wobei $b \gg a$) und dem Luftspalt h zwischen der Platte und dem Substrat wird harmonisch mit der Frequenz ω und der kleinen Amplitude δh angeregt. Dies verursacht eine komplexe Dämpfungskraft F_{\square} , die sich aus der linearisierten Reynoldsgleichung berechnen läßt. Folgende analytische Lösung findet man bei Blech[25], Darling[36], Griffin[54] oder Langlois[85]:

$$F_{\square} = a \cdot b \cdot p_0 \frac{\delta h}{h} (f_{fed} + i \cdot f_{reib}) \quad (3.50)$$

$$f_{reib} = \frac{64\sigma}{\pi^6} \sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m^2 + n^2\beta^2}{(mn)^2[(m^2 + n^2\beta^2)^2 + \sigma^2/\pi^4]} \quad (3.51)$$

$$f_{fed} = \frac{64\sigma^2}{\pi^8} \sum_{m,n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(mn)^2[(m^2 + n^2\beta^2)^2 + \sigma^2/\pi^4]} \quad (3.52)$$

Dabei ist f_{reib} und f_{fed} die nach Gleichung 3.50 normierte Reibungs- bzw. Federkraft, σ die Squeezezahl, m, n ganzzahlige Zählindizes und $\beta = a/b \leq 1$ das Aspektverhältnis der Seitenlängen der Platte.

Abbildung 3.5 zeigt den Verlauf der beiden normierten Kraftanteile in Abhängigkeit von der Squeezezahl. Mit zunehmender Squeezezahl σ nimmt die Reibungskraft ab und die Federkraft zu, womit auch die Phasenverschiebung bezüglich der Auslenkung der Struktur zunimmt. Das Aspektverhältnis β beeinflusst den Verlauf der Kraftanteile ebenfalls.

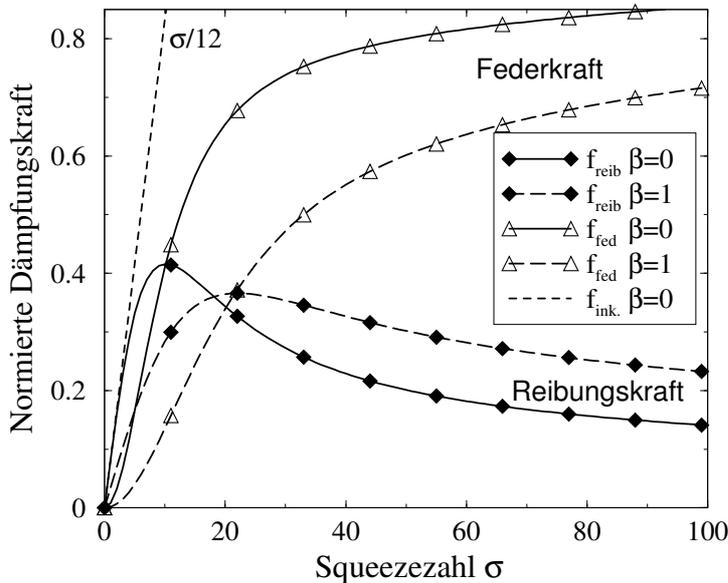


Abbildung 3.5: Anteil der normierten Federkraft f_{fed} und der normierten Reibungskraft f_{reib} an der Dämpfungskraft auf eine rechteckige Platte in Abhängigkeit von der Squeezezahl σ . Zum Vergleich die Lösung der inkompressiblen Reynoldsgleichung: $\sigma/12$.

Für kleine Squeezezahlen kann σ im Summenterm von Gleichung 3.51 vernachlässigt werden. Die Gleichung ist dann bis auf den Faktor $\sigma/12$ identisch mit dem Korrekturfaktor $\Psi_{\square}(\beta)$ für die Strömung durch einen Kanal mit rechteckigem Querschnitt aus Gleichung 3.26. Damit ist die Dämpfungskraft eine reine Reibungskraft, die mit der Plattenge-

schwindigkeit $v_P = \Delta h \cdot \omega$ in Phase ist und mit folgender Gleichung beschrieben werden kann:

$$F_{\square} = a \cdot b \cdot p_0 \frac{\delta h}{h} \frac{\sigma}{12} \Psi_{\square}(\beta) = \frac{a^3 b}{h^3} \eta v_P \Psi_{\square}(\beta) \quad (3.53)$$

Torsionsschwingung Eine rechteckige Platte mit den Seitenlängen a, b (wobei $b \gg a$) und dem Luftspalt h zwischen der Platte und dem Substrat wird harmonisch mit der Frequenz ω und der kleinen Amplitude $\delta\varphi$ angeregt. Dies verursacht ein komplexes Dämpfungsmoment M_{\square} , das sich aus der linearisierten Reynoldsgleichung berechnen lässt. Unterschiedliche analytische Lösungen findet man bei Blech[25], Darling[36], Griffin[54] oder Langlois[85]. Hier wird die Lösung von Darling angegeben:

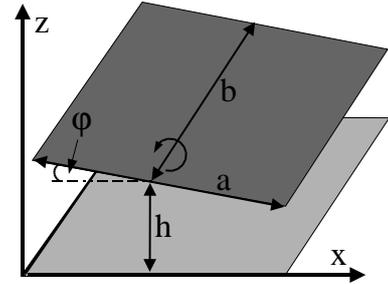


Abbildung 3.6: Geometrie einer Torsionsplatte.

$$M_{\square} = a \cdot b \cdot p_0 \frac{\frac{a}{2} \cdot \delta\varphi}{h} \cdot \frac{a}{2} (m_{fed} + i \cdot m_{reib}) \quad (3.54)$$

$$m_{reib} = \frac{64\sigma}{\pi^6} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{m^2 + n^2\beta^2}{(mn)^2 [(m^2 + n^2\beta^2)^2 + \sigma^2/\pi^4]} \quad (3.55)$$

$$m_{fed} = \frac{64\sigma^2}{\pi^8} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(mn)^2 [(m^2 + n^2\beta^2)^2 + \sigma^2/\pi^4]} \quad (3.56)$$

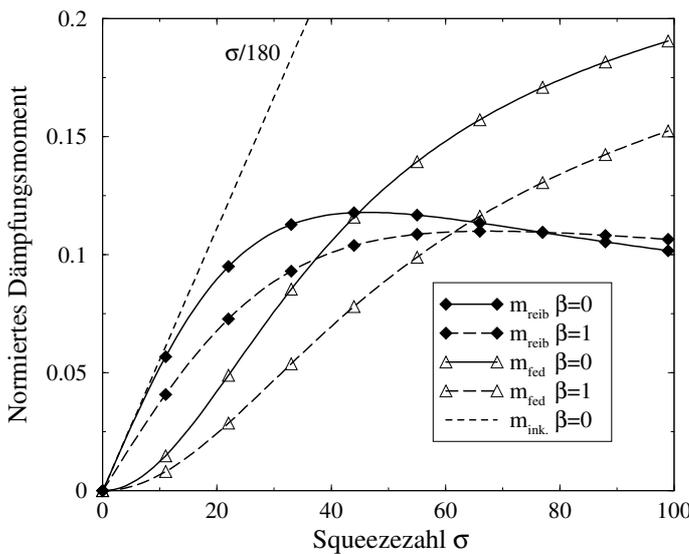


Abbildung 3.7: Anteil des normierten Feder- und des normierten Reibmoments am Dämpfungsmoment auf eine rechteckige Platte in Abhängigkeit von der Squeezezahl. Zum Vergleich die Lösung der inkompressiblen Reynoldsgleichung: $\sigma/180$

Dabei ist m_{reib} das normierte Reibungsmoment, m_{fed} das normierte Federmoment, σ die Squeezezahl, m, n ganzzahlige Zählindizes und $\beta = a/b \leq 1$ das Aspectverhältnis der

Seitenlängen der Platte.

Es ist zu beachten, daß die Ausdrücke für das normierte Dämpfungsmoment (Gleichungen 3.55 und 3.56) den Ausdrücken der normierten Dämpfungskraft (Gleichungen 3.51 und 3.52) entsprechen - mit dem einzigen Unterschied, daß der Summenindex m beim Dämpfungsmoment über gerade Zahlen summiert wird.

Qualitativ ist das Verhalten der beiden Komponenten des Dämpfungsmoments in Abbildung 3.7 ähnlich dem der Komponenten der Dämpfungskraft in Abbildung 3.5. Die kritische Squeezeszah, bei der der Federanteil den Reibungsanteil übertrifft, ist jedoch beim Dämpfungsmoment deutlich größer.

Für kleine Squeezeszahlen kann σ im Summenterm von Gleichung 3.55 vernachlässigt werden. Abbildung 3.8 zeigt diesen Summenterm, der dann nur noch vom Aspektverhältnis β abhängt. Für eine einfache Abschätzung des Dämpfungsmoments wurde im Rahmen dieser Arbeit dieser unhandliche Summenterm mit einem maximalen Fehler von 1% durch folgende Funktion approximiert:

$$\Psi_{tor}(\beta) = 1 - 0.3\beta \quad (3.57)$$

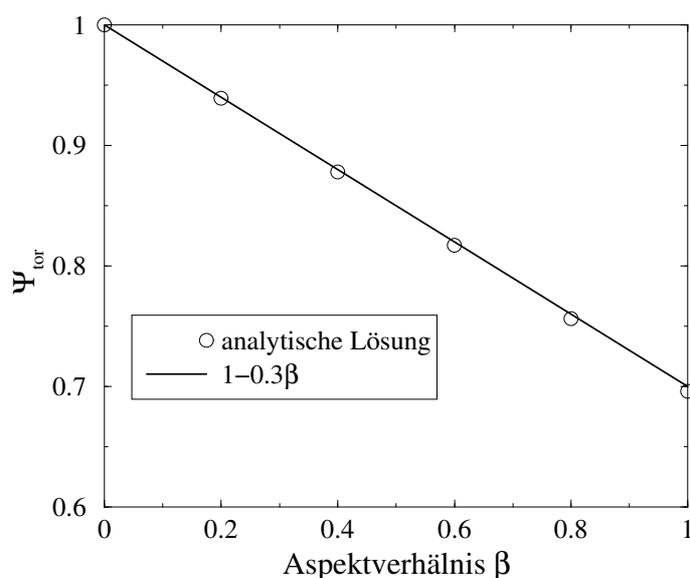


Abbildung 3.8: Vergleich des analytischen Korrekturfaktors aus Gleichung 3.55 für den Einfluß des Aspektverhältnisses einer Rechteckplatte auf das Dämpfungsmoment für kleine Squeezeszahlen mit einer einfachen Fitformel.

Für kleine Squeezeszahlen ist das Dämpfungsmoment ein Reibungsmoment in Phase mit der Winkelgeschwindigkeit der Platte $\omega_P = \Delta\varphi \cdot \omega$ und kann mit folgender Gleichung beschrieben werden:

$$M_{\square,K} = a \cdot b \cdot p_0 \frac{\frac{a}{2} \cdot \delta\varphi}{h} \cdot \frac{a}{2} \frac{\sigma}{180} \Psi_{tor}(\beta) = \frac{a^5 b}{60h^3} \eta \omega_P (1 - 0.3\beta) \quad (3.58)$$

Analytische Ausdrücke für die Dämpfungskraft auf runde Platten findet man bei Darling [36], Crandall[35] oder Griffin[54].

3.2.3 Inkompressible Reynoldsgleichung

Sind die Druckschwankungen δp unter der Platte klein im Vergleich zur Veränderung des Luftspalts h zwischen der Platte und dem Substrat,

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t p_0} \ll \frac{\partial \delta h}{\partial t h_0} \quad (3.59)$$

dann kann der letzte Term der Reynoldsgleichung 3.41 vernachlässigt werden und man erhält die inkompressible Reynoldsgleichung:

$$\nabla \left(\frac{h^3}{12\eta} \nabla p \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.60)$$

Zur Überprüfung dieser Annahme wird eine lange Rechteckplatte mit der kürzeren Seitenlänge L betrachtet, unter der sich der Luftspalt h_0 befindet. Diese wird mit kleiner Amplitude δh harmonisch ausgelenkt: $h(t) = h_0 + \delta h \sin(\omega t)$. Wird dieser Ansatz in die inkompressible Reynoldsgleichung 3.60 eingesetzt,

$$\frac{\delta p}{L^2} \approx \nabla^2 p = \frac{12\eta}{h_0^3} \cdot \delta h \cdot \omega \cos(\omega t) \quad (3.61)$$

die Gleichung mit L^2/p_0 multipliziert und nach der Zeit abgeleitet, so zeigt die folgende Gleichung,

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t p_0} = \underbrace{\frac{12\eta\omega L^2}{h_0^2 p_0}}_{\sigma} \underbrace{\frac{\delta h}{h_0} \left(-\omega \sin(\omega t) \right)}_{\frac{\partial \delta h}{\partial t h_0}} \quad (3.62)$$

daß die Annahme in Gleichung 3.59 für die inkompressible Reynoldsgleichung auch für kompressible Gase bei kleinen Squeezeszahlen gerechtfertigt ist.

Analytische Lösungen der inkompressiblen Reynoldsgleichung

Für kleine Squeezeszahlen kann, wie oben gezeigt, die Dämpfungskraft in kompressiblen Gasen auch mit der inkompressiblen Reynoldsgleichung berechnet werden. Der Anteil der Federkraft an der Dämpfungskraft kann aufgrund der kleinen Squeezeszahlen vernachlässigt werden, so daß die Dämpfungskraft stets in Phase mit der Plattengeschwindigkeit ist. Im folgenden sollen mit Hilfe der inkompressiblen Reynoldsgleichung die Druckverteilung und die Dämpfungskraft bzw. das Dämpfungsmoment für elementare Geometrien berechnet werden. Bis auf die 2D-Torsionsplatte mit großer Auslenkung sind die hier abgeleiteten analytischen Lösungen auch in der Literatur (z.B. [159]) zu finden.

2D-Platte Von einer 2D-Platte oder sehr langen Rechteckplatte spricht man, wenn bei der Rechteckplatte aus Abbildung 3.4 die Seitenlänge b viel größer als die Seitenlänge a ist. Dadurch verändern sich Druck und Strömung nur entlang der kurzen Seite, und die inkompressible Reynoldsgleichung vereinfacht sich zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{12\eta v_P}{h^3} \quad (3.63)$$

Dabei ist $v_P = \partial h / \partial t$ die vertikale Geschwindigkeit der Platte. Die Randbedingungen $p(-a/2) = p(a/2) = 0$ bestimmen die Druckverteilung unter der Platte, wobei der Druck hier und im folgenden stets relativ zum Umgebungsdruck p_0 angegeben wird ($p = 0$ entspricht dem Umgebungsdruck):

$$p(x) = \frac{3\eta v_P (a^2 - 4x^2)}{2h^3} \quad (3.64)$$

Die Integration über die Plattenfläche ergibt folgende Dämpfungskraft:

$$F_{2D} = b \cdot \int_{-a/2}^{a/2} p(x) dx = \frac{a^3 b}{h^3} \eta v_P \quad (3.65)$$

Denselben Ausdruck erhält man auch aus der Lösung 3.53 der linearisierten Reynoldsgleichung für den Fall kleiner Squeezezahlen und $\beta = a/b = 0$.

Im folgenden soll exemplarisch an diesem Beispiel überprüft werden, ob die inkompressible Reynoldsgleichung zur Berechnung der Dämpfungskraft auf eine Platte geeignet ist. Dazu wird das Strömungsprofil unter der Platte mit der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung verglichen.

Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{v} unter der Platte entspricht der Poiseuille-Flußrate aus Gleichung 3.30 pro Spalthöhe h :

$$\bar{v} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{12\eta} \quad (3.66)$$

Wird dieser Ausdruck in das Poiseuille-Profil aus Gleichung 3.29 eingesetzt, ergibt sich das folgende parabolische Geschwindigkeitsprofil $v_x(z)$ unter der Platte, das mit dem Abstand von der Plattenmitte x linear ansteigt:

$$v_x(z) = 6\bar{v} \frac{x}{h^3} z(h - z) \quad (3.67)$$

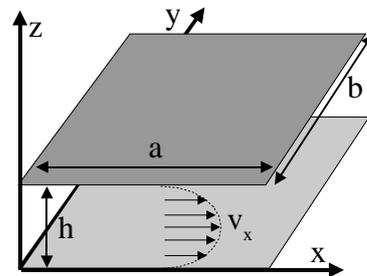


Abbildung 3.9: Geschwindigkeitsprofil unter einer langen Rechteckplatte ($b \gg a$).

Dieses analytische Ergebnis wird in Abbildung 3.10 für eine in der Mikromechanik typische Geometrie mit der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mittels FEM verglichen. Die sehr gute Übereinstimmung des Geschwindigkeitsprofils des Fluids unter der Platte rechtfertigt die Anwendung der Reynoldsgleichung, wenn die Bedingungen, die bei deren Herleitung vorausgesetzt wurden, erfüllt sind.

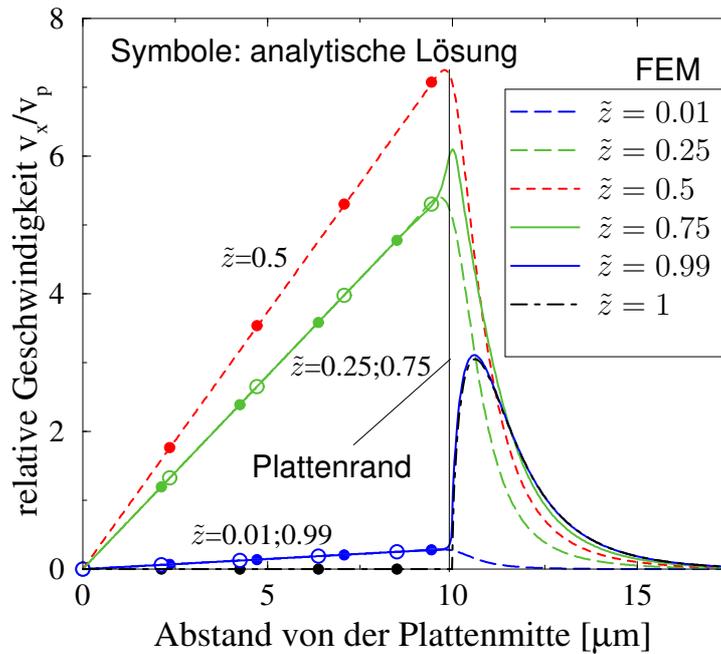


Abbildung 3.10: Vergleich der analytischen Lösung der Reynoldsgleichung mit der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung für das Geschwindigkeitsprofil unter einer langen Rechteckplatte bei verschiedenen relativen z -Koordinaten $\tilde{z}=z/h$. Plattengeschwindigkeit $v_P=100\mu\text{m/s}$, Plattenlänge $a=20\mu\text{m}$, Spalthöhe $h=1\mu\text{m}$.

2D-Torsionsplatte mit kleiner Auslenkung Von einer 2D-Torsionsplatte spricht man, wenn bei der Rechteckplatte aus Abbildung 3.6 die Seitenlänge b viel größer als die Seitenlänge a ist. Für kleine Torsionswinkel φ gilt die Kleinwinkelnäherung und die Geschwindigkeit v_P in Gleichung 3.63 kann somit durch $\omega_P \cdot x$ ersetzt werden. Dabei ist ω_P die Winkelgeschwindigkeit der Platte und x der Abstand von der Torsionsachse. Mit den Randbedingungen $p(-a/2) = p(a/2) = 0$ ergibt sich aus der inkompressiblen Reynoldsgleichung folgende Druckverteilung:

$$p(x) = \frac{\eta\omega_P x(a^2 - 4x^2)}{2h^3} \quad (3.68)$$

Die Integration über die Plattenfläche ergibt folgendes Dämpfungsmoment:

$$M_{2d} = b \int_{-a/2}^{a/2} x \cdot p(x) dx = \frac{a^5 b}{60h^3} \eta\omega_P \quad (3.69)$$

Derselbe Ausdruck ergibt sich auch aus der Lösung 3.58 der linearisierten Reynoldsgleichung für den Fall kleiner Squeezeszahlen und $\beta = a/b = 0$.

2D-Torsionsplatte mit großer Auslenkung Werden bei der 2D-Torsionsplatte auch große Auslenkungswinkel φ bis zum Kontakt bei $\varphi = \varphi_0 = 2h/a$ erlaubt, so hängt der Luftspalt unter der Platte nach Abbildung 3.11 vom Torsionswinkel und dem Abstand x von der Torsionsachse ab:

$$h(x) = h_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{a/2}\right) \quad (3.70)$$

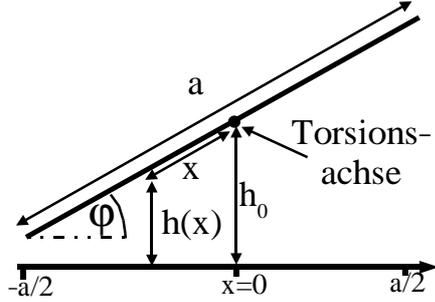


Abbildung 3.11: Geometrie einer 2D-Torsionsplatte mit großer Auslenkung.

Dabei ist $\gamma = \varphi/\varphi_0$ der relative Torsionswinkel. Der absolute Torsionswinkel φ ist weiterhin klein, so daß die Kleinwinkelnäherung gilt. Die Reynoldsgleichung lautet für diesen Fall:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h(x)^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12\eta\omega_P x \quad (3.71)$$

Deren Lösung mit der Randbedingung $p(-a/2) = p(a/2) = 0$ ergibt folgende Druckverteilung:

$$p(x) = \frac{3a^3\eta\omega_P}{16h^3\gamma^3(a-2x\gamma)^2} \left[4\gamma^2(a-2x)^2 + 4(a-2x\gamma)^2 \ln(a-2x\gamma) + \right. \\ \left. (a-2x)(\gamma+1)^2 \left(a(\gamma-2) + 2x\gamma \right) \ln(a+a\gamma) - \right. \quad (3.72) \\ \left. (a+2x)(\gamma-1)^2 \left(a(\gamma+2) - 2x\gamma \right) \ln(a-a\gamma) \right]$$

Die Integration der Druckverteilung analog zur Gleichung 3.69 ergibt folgendes Dämpfungsmoment:

$$M_{2D} = \frac{3a^5b\eta\omega_P}{64h^3\gamma^6} \left[-28\gamma^2 - \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \left(8\gamma(\gamma^2-2) + (\gamma^2-1)^2 \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right) \right] \quad (3.73)$$

Kreisscheibe Für eine runde Platte mit Radius R und der vertikalen Geschwindigkeit v_P lautet die inkompressible Reynoldsgleichung in Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{12\eta v_P}{h^3} \quad (3.74)$$

Aus den Randbedingungen $p(R) = 0 = \frac{\partial p}{\partial r}|_{r=0}$ ergibt sich folgende Druckverteilung:

$$p(r) = \frac{3\eta v_P}{h^3}(R^2 - r^2) \quad (3.75)$$

Die Integration über die Plattenfläche ergibt folgende Dämpfungskraft:

$$F_{\circ} = \int_0^R 2\pi p(r) dr = \frac{3\pi R^4}{2h^3} \eta v_P \quad (3.76)$$

Gelochte Kreisscheibe Eine gelochte Kreisscheibe mit dem äußeren Radius R_Z und dem Lochradius R_L hat den Perforationsgrad $\alpha = R_L/R_Z$. Kann die verdrängte Luft unter der Kreisscheibe nur über den inneren Rand durch das Loch entweichen und nicht über den äußeren Rand, dann lauten die Randbedingungen: $p(R_L) = 0 = \frac{\partial p}{\partial r}|_{r=R_Z}$. Damit ergibt sich aus der inkompressiblen Reynoldsgleichung 3.74 folgende Druckverteilung:

$$p(r) = \frac{3\eta v_P}{h^3} \left(R_L^2 - r^2 + 2R_Z^2 \ln \frac{r}{R_L} \right) \quad (3.77)$$

Die Integration über die Fläche des Kreisrings ergibt folgende Dämpfungskraft:

$$F_{\odot} = \int_{R_L}^{R_Z} 2\pi p(r) dr = \frac{3\pi R_Z^4}{2h^3} \eta v_P (4\alpha^2 - \alpha^4 - 3 - 4 \ln \alpha) \quad (3.78)$$

3.2.4 Modifizierte Reynoldsgleichung

Die Reynoldsgleichung beschreibt die Strömung in einem dünnen Spalt unter einer Platte in der xy -Ebene. Sie kann somit nicht zur Berechnung der Dämpfungskraft auf perforierte Platten, wie beispielsweise der in Abbildung 3.12 dargestellten, angewendet werden, da in diesem Fall das Fluid nicht auf die xy -Ebene beschränkt ist, sondern auch durch die Löcher in der Platte in z -Richtung entweichen kann. Bao [15] hat die Reynoldsgleichung diesbezüglich modifiziert. Zusätzlich zu den drei Termen der Reynoldsgleichung 3.41, die über die Kontinuitätsgleichung zusammenhängen, wird ein weiterer Term in die Kontinuitätsgleichung aufgenommen, der die Strömungsrate pro Flächeneinheit \hat{q}_{vert} durch

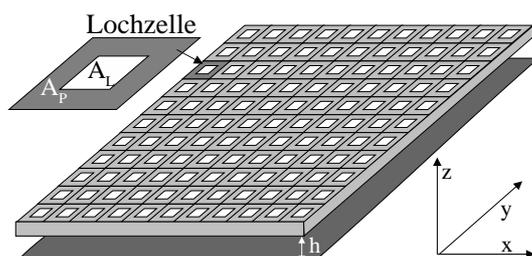


Abbildung 3.12: Regelmäßig perforierte Platte, die aus 121 Lochzellen mit der Fläche $A_Z = A_L + A_P$ besteht.

ein Loch beschreibt. Führt man die laterale Strömungsrate $q_{lat} = \frac{h^3}{12\eta} \nabla p$ ein, dann ergibt sich:

$$\nabla(\rho \cdot q_{lat}) + \rho \cdot \hat{q}_{vert} = \rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.79)$$

Für die vertikale Strömungsrate pro Fläche gilt:

$$\hat{q}_{vert} = \frac{\tilde{p}/Z_Z}{A_Z} \quad (3.80)$$

Dabei ist \tilde{p} der mittlere Druck unter einer Lochzelle, A_Z die Fläche und Z_Z der fluidische Widerstand einer Lochzelle. Unter einem fluidischen Widerstand eines Strömungskanal versteht man das Verhältnis aus dem Druckabfall im Kanal und der Strömungsrate durch den Kanal. Bei der Lochzelle berechnet sich der fluidische Widerstand aus der lateralen Strömung unter der Platte vom Zellenrand zum Lochrand und der vertikalen Strömung durch das Loch. Die Lochzelle wird dabei isoliert von den Nachbarzellen betrachtet, was bedeutet, daß die unter einer Lochzelle verdrängte Luft nur durch das Loch und nicht zu den Nachbarzellen entweichen kann.

Werden die Strömungsraten in Gleichung 3.79 durch den mittleren Druck \tilde{p} unter einer Lochzelle ausgedrückt, so erhält man die modifizierte Reynoldsgleichung:

$$\nabla \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \nabla \tilde{p} \right) - \frac{\tilde{p}}{Z_Z \cdot A_Z} = \rho \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.81)$$

Analog zur Reynoldsgleichung kann unter der Annahme kleiner und langsamer Druckschwankungen die Gleichung linearisiert und der kompressible Term vernachlässigt werden. Ersetzt man zudem auch die Dichte ρ durch den mittleren Druck \tilde{p} , so erhält man Bao's [15] inkompressible modifizierte Reynoldsgleichung:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} - \frac{\tilde{p}}{L_{MR}^2} = \frac{12\eta}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.82)$$

Dabei gilt für die charakteristische Länge L_{MR} :

$$L_{MR}^2 = \frac{Z_Z}{12\eta/h^3} \cdot A_Z \quad (3.83)$$

Die von Bao eingeführte charakteristische Länge L_{MR} wird von ihm nicht allgemein diskutiert und fälschlicherweise mit der Länge des Druckabfalls am Plattenrand in Verbindung gebracht.

Nach Gleichung 3.83 entspricht die charakteristische Länge jedoch der Wurzel aus einer effektiven Lochzellenfläche. Die Fläche wird dabei mit dem Verhältnis aus den fluidischen Widerständen der Lochzelle Z_Z und dem fluidischen Widerstand der Reynoldsgleichung $Z_{rey} = 12\eta/h^3$ multipliziert und bestimmt den Einfluß des Zusatzterms in der modifizierten Reynoldsgleichung. Für sehr kleine Löcher wird der fluidische Widerstand der

Lochzelle und damit die charakteristische Länge sehr groß, und folglich ist der Einfluß des Zusatzterms der modifizierten Reynoldsgleichung sehr klein. Ist L_{MR} hingegen klein, so haben die Löcher einen signifikanten Einfluß auf die Plattendämpfung.

Die Berechnung von Z_Z bzw. L_{MR} aus der Lochgeometrie wird in Abschnitt 5.1.3 anhand eines Beispiels gezeigt.

Analytische Lösung der inkompressiblen modifizierten Reynoldsgleichung

Bao [15] hat Gleichung 3.82 für eine regelmäßig perforierte Rechteckplatte mit den Seitenlängen $2a, 2b$, dem Aspektverhältnis $\beta = a/b \leq 1$ und den Randbedingungen $\tilde{p}(\pm a, y) = \tilde{p}(x, \pm b) = 0$ analytisch gelöst. Die Integration über die Druckverteilung ergibt die Dämpfungskraft:

$$F_{MR} = \Psi_{MR}(\Lambda, \beta) \cdot \frac{(2a)^3(2b)}{h^3} \eta v_P \quad (3.84)$$

Diese entspricht der Dämpfungskraft auf eine unperforierte Platte nach Gleichung 3.65 multipliziert mit folgendem Korrekturterm:

$$\Psi_{MR}(\Lambda, \beta) = 3\Lambda^2 - 6\Lambda^3 \frac{\sinh^2 \frac{1}{\Lambda}}{\sinh \frac{2}{\Lambda}} - \frac{24\Lambda^3 \beta}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\tanh \frac{\sqrt{1+(n\pi\Lambda/2)^2}}{\Lambda\beta}}{n^2(1+(n\pi\Lambda/2)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.85)$$

Dieser Korrekturterm hängt nur vom Aspektverhältnis β der Platte und von der relativen Länge $\Lambda = L_{MR}/a$ ab, die das Verhältnis der für die Perforation charakteristischen Länge L_{MR} zur kurzen Plattenseite a beschreibt. Die dimensionslose Größe Λ setzt den Druckabfall in den Löchern in Relation zum Druckabfall am Plattenrand und ist somit ein direktes Maß für die Dämpfung einer Platte.

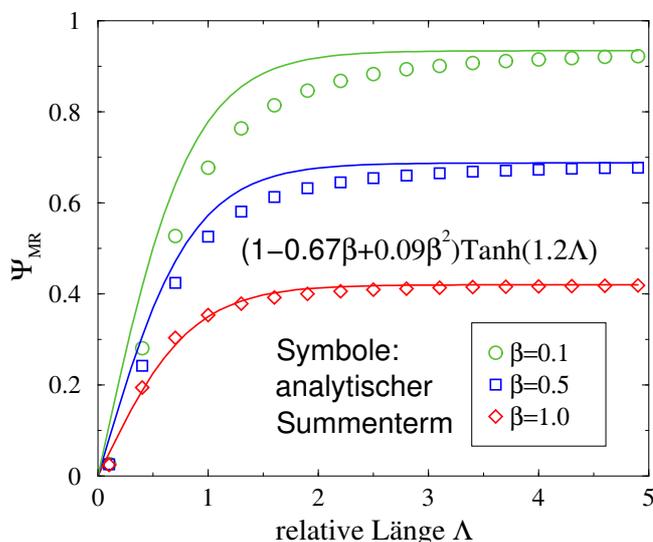


Abbildung 3.13: Analytische Lösung für den Korrekturfaktor Ψ_{MR} für die Dämpfungskraft F_{MR} auf eine perforierte Rechteckplatte mit unterschiedlichem Aspektverhältnis β . Zum Vergleich eine einfache Fitformel.

Dies wird auch durch Abbildung 3.13 bestätigt, die den Verlauf des Korrekturfaktors Ψ_{MR} für drei verschiedene Aspektverhältnisse β der Rechteckplatte in Abhängigkeit von Λ zeigt. Wird Λ größer als zwei, dann wird die Dämpfung durch den Druckabfall am Plattenrand bestimmt und der Einfluß der Löcher kann vernachlässigt werden.

Für die einfachere Berechnung der analytischen Lösung der modifizierten Reynoldsgleichung wurde der Korrekturfaktor Ψ_{MR} im Rahmen dieser Arbeit mit folgendem einfacheren analytischen Ausdruck

$$\Psi_{MR} \approx (1 - 0.67\beta + 0.09\beta^2) \tanh(1.2\Lambda) \quad (3.86)$$

approximiert, der nach Abbildung 3.13 insbesondere für quadratische Platten ($\beta = 1$) eine gute Übereinstimmung mit Gleichung 3.85 für $\Lambda > 0.5$ zeigt. Diese Näherungsformel erlaubt eine einfache Abschätzung der Dämpfungskraft auf regelmäßig perforierte Platten.

Die Vereinfachung der modifizierten Reynoldsgleichung besteht darin, daß als Freiheitsgrad statt des Drucks der mittlere Druck unter einer Lochzelle berechnet wird. Die Druckverteilung unter einer Lochzelle wird einmalig anhand einer isolierten Lochzelle ermittelt und in dieser Form durch einen Zusatzterm in der Reynoldsgleichung berücksichtigt. Für eine mit vielen Löchern regelmäßig perforierte Platte sollte die dadurch entstehende Ungenauigkeit vernachlässigbar sein. Für die Gültigkeit der linearisierten bzw. inkompressiblen Variante der modifizierten Reynoldsgleichung gelten die entsprechenden Einschränkungen der Reynoldsgleichung.

3.3 Verdünnte Gase

Bei der Ableitung der Navier-Stokes-Gleichung 3.1 wurde vorausgesetzt, daß ein Gas als Kontinuum betrachtet werden kann; der molekulare Charakter des Gases wurde dabei vernachlässigt. Diese Annahme ist jedoch nur dann gerechtfertigt, wenn Kollisionen von Gasmolekülen mit einer Wand viel seltener als intermolekulare Kollisionen auftreten. Wenn hingegen die mittlere freie Weglänge des Gases gegenüber der Abmessung des Strömungskanals nicht mehr vernachlässigt werden kann, spricht man von verdünnten Gasen.

Zunächst wird eine Übersicht zu Modellierungsansätzen für Kontinuums- und Molekularströmungen gegeben. Danach werden Gasströmungen anhand wichtiger Kenngrößen als hydrodynamische Strömung, Schlupfströmung, Übergangsströmung oder freie Molekularströmung klassifiziert. Im Detail wird die Schlupfströmung besprochen, für die physikalische Kompaktmodelle für elementare Strömungsgeometrien abgeleitet werden. Zuletzt werden diese mit numerischen Lösungen für Molekularströmungen verglichen, um den Gültigkeitsbereich der physikalischen Kompaktmodelle bei verdünnten Gasen abschätzen zu können.

3.3.1 Modellierung verdünnter Gase

Nach Abbildung 3.14 unterscheidet man zwischen Molekularmodellen und Kontinuumsmodellen. Bei letzteren wird das Gas als Kontinuum betrachtet. Zur Aufstellung der Strömungsgleichung wird dabei nach Abschnitt 3.1 neben der Zustandsgleichung und den Erhaltungssätzen ein Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnungsrate benötigt. Besteht kein Zusammenhang, so erhält man die reibungsfreie Euler-Gleichung. Ein linearer Zusammenhang führt zur Navier-Stokes-Gleichung und ein nichtlinearer zur Burnett-Gleichung [39].

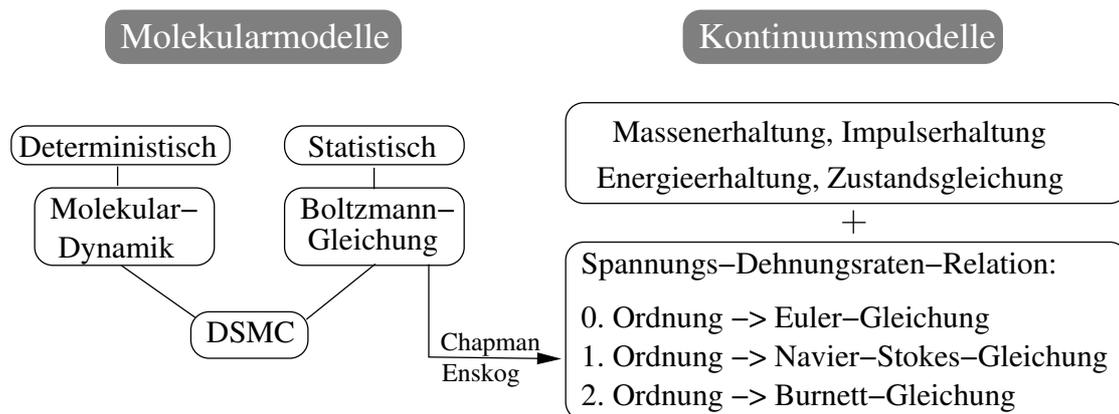


Abbildung 3.14: Übersicht über Modellierungsansätze zur Fluidik nach Gad-el-Hak [39].

Berücksichtigt man bei der Modellierung von Gasen den molekularen Charakter, so unterscheidet man deterministische und statistische Ansätze:

Deterministische Ansätze sind auch unter dem Begriff Molekulardynamik (MD) bekannt. Dabei bewegen sich viele Teilchen mit einer zufälligen Geschwindigkeitsverteilung, die einer Boltzmannverteilung entspricht, nach den Newtonschen Bewegungsgleichungen. Die vorherrschenden Potentialkräfte zwischen den Molekülen werden als Paarkräfte modelliert, wobei meist ein Lennard-Jones Potential angenommen wird. Nach Kopic [81] ist dieser Ansatz in zweifacher Hinsicht problematisch: Sowohl das wahre Potential als auch die notwendige Rechenleistung, um ausreichend viele Teilchen zu simulieren, sind meist nicht gegeben.

Statistische Ansätze basieren auf der Boltzmann-Transportgleichung. Wegen des nichtlinearen Stoßintegralterms ist diese Gleichung sehr schwer zu lösen. Deshalb werden verschiedene Näherungsmethoden verwendet, die im Übersichtsartikel von Sharipov [144] und im Buch von Beskok [73] ausführlich diskutiert werden.

Insbesondere die Simulation der Übergangsströmung ist mit der Boltzmann-Gleichung sehr rechenintensiv. Hier hat sich eine Mischung aus beiden Ansätzen unter dem Kürzel DSMC ("Direct Simulation Monte Carlo") etabliert. Sie wurde von Bird [24] in den 60er Jahren entwickelt. Im wesentlichen werden die Teilchenbewegungen deterministisch modelliert, wohingegen die Kollisionen statistisch behandelt werden, indem jedes simulierte Molekül viele reale Moleküle repräsentiert. Die entscheidende Näherung dabei ist nach Gad-el-Hak [40], daß die Molekülbewegungen und die intermolekularen Kollisionen über kurze Zeitintervalle entkoppelt werden. Damit steigt die benötigte Rechenleistung nur noch linear mit der Anzahl der simulierten Moleküle. Bei Molekulardynamiksimulationen steigt die Rechenleistung hingegen quadratisch.

Die Boltzmann-Gleichung ist für alle Strömungsbereiche gültig. Mit Hilfe der Chapman-Enskog Entwicklung kann diese für kleine Störungen um das thermodynamische Gleichgewicht entwickelt werden. Je nach Ordnung der Entwicklung bekommt man die Euler-, die Navier-Stokes- oder die Burnett-Gleichung. Dadurch erhält der im Kontinuumsmodell willkürliche Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnungsrate ein theoretisches Fundament, und die beiden Modellierungsansätze zur Fluidik sind nicht mehr isoliert [40].

3.3.2 Klassifizierung verdünnter Gase

Eine wichtige dimensionslose Kennzahl, die das Ausmaß der Verdünnung bei Gasen beschreibt, ist die Knudsenzahl Kn . Sie beschreibt das Verhältnis der mittleren freien Weglänge λ_f zu einer charakteristischen Länge L der Strömung, beispielsweise die Breite eines Strömungskanals.

$$Kn = \frac{\lambda_f}{L} \quad (3.87)$$

Die mittlere freie Weglänge λ_f ist die mittlere Strecke, die zwei Moleküle zwischen zwei Kollisionen zurücklegen. Für ein einfaches ideales Gas, das durch harte Kugeln mit Durchmesser d_M modelliert werden kann, gilt im thermodynamischen Gleichgewicht nach der kinetischen Gastheorie [40]:

$$\lambda_f = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d_M^2} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p d_M^2} \quad (3.88)$$

Dabei ist k die Boltzmannkonstante, T die Temperatur, p der Druck und n die Anzahl der Moleküle pro Volumen. Für Luft ergibt sich unter Normalbedingungen eine mittlere freie Weglänge von 65 nm.

In der Praxis hat man mit verdünnten Gasen zu tun, wenn entweder die mittlere freie Weglänge sehr groß wird, wie dies im Weltraum oder in Vakuumkammern der Fall ist, oder die geometrischen Abmessungen der Strömung sehr klein werden, wie es bei Mikrosystemen der Fall ist.

Mit Hilfe der Knudsenzahl Kn werden Gasströmungen klassifiziert. Bei Knudsenzahlen kleiner als 0.001 kann das Gas als Kontinuum betrachtet werden und man spricht von hydrodynamischer Strömung. Kollisionen zwischen den Molekülen sind in diesem Fall viel häufiger als Kollisionen mit einer Wand. Für größere Knudsenzahlen spricht man von verdünnten Gasen und nimmt nach Schaaf [129] empirisch die Einteilung aus Tabelle 3.1 vor, deren Grenzen je nach Strömungsgeometrie auch variabel sind:

$Kn \leq 0.001$	Hydrodynamische Strömung
$0.001 < Kn \leq 0.1$	Schlupfströmung
$0.1 < Kn \leq 10$	Übergangsströmung
$Kn > 10$	freie Molekularströmung

Tabelle 3.1: Klassifizierung von Gasströmungen nach der Knudsenzahl.

Bei Schlupfströmung kann das Gas noch als Kontinuum modelliert werden und die Verdünnung wird über eine Schlupfrandbedingung berücksichtigt. Ist die Knudsenzahl hingegen größer als 10, so liegt freie Molekularströmung vor und Kollisionen zwischen den Molekülen sind viel seltener als Kollisionen mit einer Wand. Dazwischen gibt es einen Übergangsbereich, in dem Kollisionen zwischen den Molekülen berücksichtigt werden müssen.

3.3.3 Schlupfströmung

Aus physikalischer Sicht muß an den Grenzflächen zwischen Gas und Festkörper (z.B. Wand) eine Haftbedingung gewählt werden, das heißt, die Geschwindigkeit des Gases an der Wand muß der Wandgeschwindigkeit entsprechen. Wäre dies nicht der Fall, hätte man einen Geschwindigkeitssprung zwischen Wand und Gas, und mit dem Geschwindigkeitsgradienten würde auch die Scherkraft nach unendlich streben. Dies gilt aber nur für das thermodynamische Gleichgewicht. In verdünnten Gasen treten die Stöße mit der Wand jedoch nicht mehr oft genug auf, so daß sich kein thermodynamisches Gleichgewicht einstellen kann. Um dies zu berücksichtigen, wird ein Geschwindigkeitssprung (Schlupf) an der Platte erlaubt. Zusätzlich tritt auch ein Temperatursprung auf, der

jedoch in den hier betrachteten Fällen eine untergeordnete Rolle spielt und auf den nicht näher eingegangen wird.

$$v_s - v_w = \frac{2 - \zeta}{\zeta} \lambda_f \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (3.89)$$

Diese Schlupfrandbedingung an der Wand wurde erstmals von Maxwell [95] aus der kinetischen Gastheorie abgeleitet. Dabei ist λ_f die mittlere freie Weglänge und ζ der Akkomodationskoeffizient, der sowohl vom Gas, als auch von der Beschaffenheit der Wandoberfläche abhängt. An einer besonders glatten Oberfläche tritt spiegelnde Reflexion auf, wohingegen die Reflexion an einer sehr rauhen Wand als diffus bezeichnet wird. Spiegelnde Reflexion ($\zeta = 0$) bedeutet, daß die tangentielle Geschwindigkeit der an der Wand reflektierten Moleküle unverändert bleibt und somit keine Reibung an der Wand auftritt.

Diffuse Reflexion ($\zeta = 1$) bedeutet, daß die mittlere tangentielle Geschwindigkeit der an der Wand reflektierten Moleküle Null ist; dabei gibt es Reibung an der Wand.

Eine Zusammenstellung experimentell gefundener Werte findet man beispielsweise bei Beskok [73], Sharipov [143] oder Veijola [157]. Der kleinste Wert für den Akkomodationskoeffizienten $\zeta = 0.2$ wurde von Lord [90] gemessen. Die einzigen Messungen in kristallinen Siliziumkanälen ($0 < Kn < 0.4$) stammen von Arkilic [7] und ergaben $\zeta \approx 0.8$ für Argon, Stickstoff und Kohlendioxid.

In der Ableitung der Theorie wird im folgenden stets diffuse Reflexion ($\zeta = 1$) angenommen. Es ist zu beachten, daß sich nach Gleichung 3.89 die effektive Knudsenzahl um den Faktor 1.5 erhöht, wenn der reale Akkomodationskoeffizient $\zeta = 0.8$ statt 1 beträgt.

Entfernt man sich noch weiter vom thermodynamischen Gleichgewicht, so ist das Gas zunehmend verdünnt. Nach Gad-el-Hak [40] gilt dann auch der lineare Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnungsrate nicht mehr, der die Grundlage für die Navier-Stokes-Gleichung ist, und die Burnett-Gleichung muß verwendet werden.

Veijola [158] gibt eine Übersicht, wie in der Literatur immer wieder versucht wurde, die Gültigkeit des Kontinuumsansatzes durch nichtlineare Schlupfrandbedingungen auch für den Übergangsbereich auszudehnen. Dies ist jedoch trügerisch, da diese Ansätze empirisch für spezielle Geometrien angepaßt wurden und dem nichtlinearen Zusammenhang von Spannung und Dehnungsrate nicht Rechnung tragen.

3.3.4 Analytische Lösungen für Schlupfströmungen

Zur Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der fluidischen Kompaktmodelle für den Schlupfströmungsbereich werden im folgenden aus der Literatur bekannte (z.B. [17]) analytische Korrekturfaktoren für die Flußrate durch elementare Strömungsgeometrien

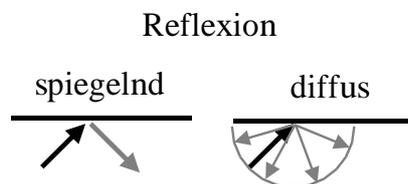


Abbildung 3.15: Unterschied zwischen spiegelnder und diffuser Reflexion an der Wand.

angegeben. Dabei wird stets diffuse Reflexion der Moleküle an der Wand ($\zeta = 1$) angenommen.

Kanalströmung

Kanalströmung mit kreisförmigem Querschnitt Die Schlupfgeschwindigkeit v_s der Strömung in einem Kanal mit rundem Querschnitt mit Radius R berechnet sich aus Gleichung 3.89 und dem Geschwindigkeitsprofil nach Hagen-Poiseuille aus Gleichung 3.23. Durch Integration des um die Schlupfgeschwindigkeit v_s ergänzten Geschwindigkeitsprofils ergibt sich die um den Schlupffaktor Υ_{o_s} erhöhte Flußrate:

$$Q_{o_s} = \int_0^R 2\pi r(v_z(r) + v_s)dr = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dz} \left(1 + 4\frac{\lambda_f}{R}\right) = Q_o \cdot \underbrace{\left(1 + 4Kn\right)}_{\Upsilon_{o_s}} \quad (3.90)$$

Das auf die mittlere Geschwindigkeit \bar{v}_z genormte Geschwindigkeitsprofil in Abbildung 3.16 veranschaulicht den Einfluß der Knudsenzahl auf die Rohrströmung.

$$\frac{v_z(r)}{\bar{v}_z} = 2 \frac{R^2 - r^2 + 2R\lambda_f}{R^2 + 4R\lambda_f} \quad (3.91)$$

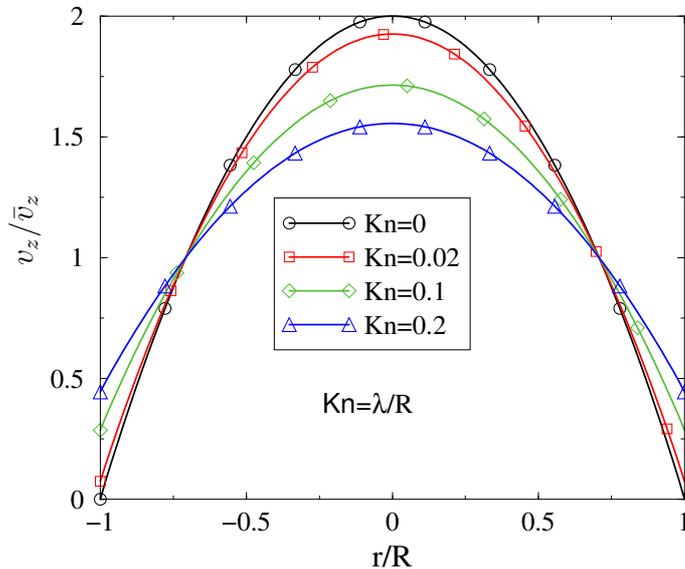


Abbildung 3.16: Normiertes Geschwindigkeitsprofil in einem Kanal mit kreisförmigem Querschnitt und Radius R in Abhängigkeit von der Knudsenzahl.

Kanalströmung mit rechteckigem Querschnitt Die Schlupfströmung in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt mit den Seitenlängen a, b und $a/b = \beta \leq 1$ wurde von Ebert [37] analytisch abgeleitet. Der Schlupffaktor hängt dabei auch vom Aspektverhältnis β ab und wächst mit zunehmendem β . Auf eine Wiedergabe der allgemeinen Lösung in Abhängigkeit von β wird hier verzichtet, da sich der komplexe und implizite Ausdruck nur numerisch auswerten läßt und in der Praxis meist quadratische Löcher ($\beta = 1$)

verwendet werden. Für diese läßt sich im Schlupfströmungsbereich ($Kn < 0.1$) die analytische Lösung für die Flußrate durch den im folgenden angegebenen Schlupffaktor Υ_{\square} mit einem Fehler kleiner 1% approximieren:

$$Q_{\square_s|\beta=1} = Q_{\square|\beta=1} \cdot \underbrace{(1 + 7.5Kn)}_{\Upsilon_{\square_s}} \quad (3.92)$$

Zweidimensionale Kanalströmung Die zweidimensionale Kanalströmung entspricht der Strömung in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt, dessen Seitenlängen sich deutlich unterscheiden ($\beta = 0$). Dies ist typisch für die Strömung bei der Squeeze-Film-Dämpfung einer großen Platte, die sich mit geringem Abstand h über dem Substrat befindet und durch die Reynoldsgleichung beschrieben wird. Die Schlupfgeschwindigkeit v_s an der Platte und am Substrat läßt sich nach Gleichung 3.89 aus dem Gradienten des Poiseuille-Geschwindigkeitsprofils aus Gleichung 3.29 berechnen. Durch Integration des um die Schlupfgeschwindigkeit v_s ergänzten Geschwindigkeitsprofils ergibt sich die um den Schlupffaktor Υ_{2D_s} erhöhte Flußrate:

$$q_{2D_s} = \int_0^h (v_z(y) + v_s) dy = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{dp}{dz} \left(1 + 6\frac{\lambda_f}{h}\right) = q_{2D} \cdot \underbrace{(1 + 6Kn)}_{\Upsilon_{2D_s}} \quad (3.93)$$

3.3.5 Vergleich der Schlupffaktoren aus dem Kontinuumsansatz mit Schlupffaktoren aus einem Molekularansatz

Das Kontinuumsmodell zusammen mit der Schlupfrandbedingung ist nur für kleine Knudsenzahlen gültig. Für stark verdünnte Gase muß die Strömung mit Molekularmodellen beschrieben werden, deren numerische Lösung wesentlich aufwendiger hinsichtlich der Rechenleistung ist. Vergleichsweise schnell geht die Simulation einer freien Molekularströmung, da die Wechselwirkung der Moleküle untereinander vernachlässigt werden kann. Es genügt aber nicht, zwischen der Kontinuumslösung und der Lösung für freie Molekularströmung zu interpolieren, um auch den Bereich der Übergangsströmung zu beschreiben. Die Minima der normierten Flußraten verschiedener Kanalströmungen bei $Kn \approx 1$ in Abbildung 3.17 liegen genau in diesem Bereich und können nicht durch Interpolation zwischen den Flußraten bei hydrodynamischer Strömung und freier Molekularströmung gefunden werden. Die Flußrate in Abbildung 3.17 für einen Kanal der Länge L_K , an dem die Druckdifferenz δp anliegt, ist auf eine Normflußrate $\tilde{Q}_{\circ} = \frac{\delta p}{L_K} \frac{\lambda_f}{\eta} \sqrt{\pi} R^3$ für einen Kanal mit kreisförmigem Querschnitt und Radius R bzw. $\tilde{Q}_{\square} = \frac{\delta p}{L_K} \frac{\lambda_f}{\eta} \frac{a^2 b}{\sqrt{\pi}}$ für einen Kanal mit rechteckigem Querschnitt und den Seitenlängen a, b normiert.

Dieses Beispiel zeigt, daß die korrekte Modellierung im Übergangströmungsbereich sehr wichtig ist. Da dies eine sehr große Rechenleistung erfordert, findet man in der Literatur bisher nur für sehr einfache Strömungsgeometrien die Flußraten in Abhängigkeit von der Knudsenzahl berechnet und tabelliert. Veijola und Beskok haben Tabellenwerte für Kanalströmungen aus der Literatur durch analytische Fitformeln approximiert, um

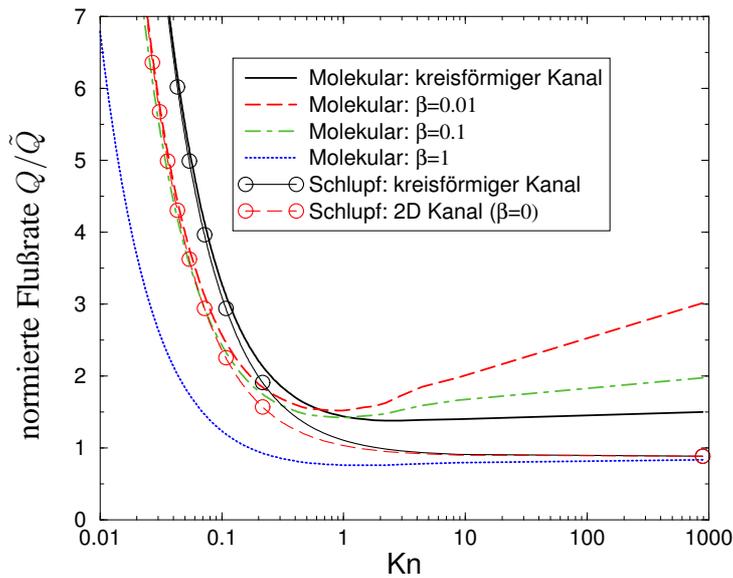


Abbildung 3.17: Normierte Flußrate durch einen Kanal mit kreisförmigem bzw. rechteckigem Querschnitt mit verschiedenen Aspektverhältnissen β . Die Lösungen des Kontinuumsansatzes mit Schlupfrandbedingung werden mit Lösungen der Boltzmann-Gleichung von Sharipov [142] verglichen.

molekulare Schlupffaktoren angeben zu können, die auch für große Knudsenzahlen gültig sind. Schlupffaktoren beschreiben die Zunahme der Flußrate mit der Knudsenzahl im Vergleich zur hydrodynamischen Strömung und werden im folgenden mit den zuvor analytisch abgeleiteten Schlupffaktoren für Schlupfströmung verglichen.

In der Literatur findet man auch oft den Begriff der *effektiven Viskosität* η_{eff} . Der Begriff ist äquivalent zum reziproken Schlupffaktor und wird in dieser Arbeit bewußt vermieden, da er irreführend auf eine Eigenschaft des Gases hindeutet, die unabhängig von der Strömungsgeometrie ist. Wie der Schlupffaktor ist aber auch die effektive Viskosität nur für diejenige Form des Strömungskanals gültig, für die sie berechnet bzw. angefitet wurde.

Kanalströmung mit kreisförmigem Querschnitt

Die Flußrate von verdünnten Gasen in einem Kanal mit kreisförmigem Querschnitt in Abhängigkeit von der Knudsenzahl wurde von Sharipov [144] mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung berechnet und tabelliert. Folgende Fitformel von Veijola [156] für den molekularen Schlupffaktor Υ_0 approximiert Sharipovs Ergebnisse für beliebig große Knudsenzahlen:

$$\Upsilon_0 = 1 + \frac{6.703Kn(1.577 + Kn)}{2.326 + Kn} \quad (3.94)$$

Beskok [73] verwendet eine etwas komplexere Fitformel, die hier nur zitiert wird, um sein Schlupfmodell an die Lösung der Boltzmann-Gleichung von Loyalka [92] anzupassen. Abbildung 3.18 zeigt, daß beide Fitformeln in einem großen Bereich von Knudsenzahlen übereinstimmen. Für kleine Knudsenzahlen ist auch der Schlupffaktor $\Upsilon_{0s} = 1+4Kn$, der

nach Gleichung 3.90 aus dem Kontinuumsmodell mit Schlupfrandbedingung abgeleitet wurde, eine gute Näherung.

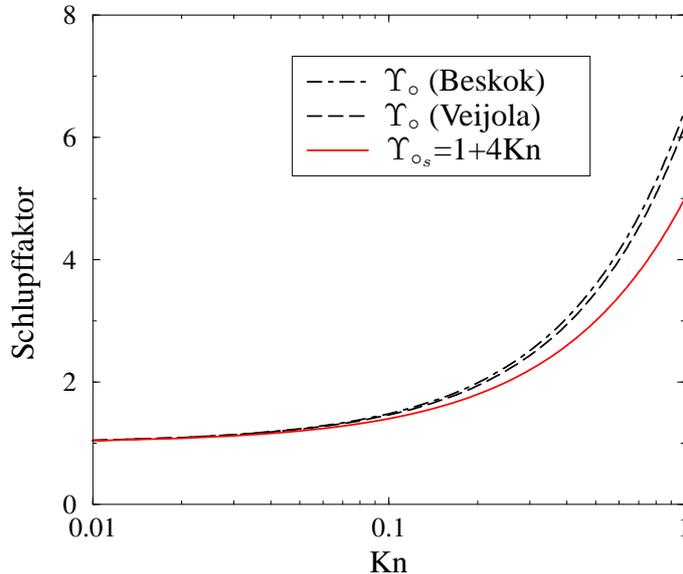


Abbildung 3.18: Schlupffaktor der Flußrate durch einen Kanal mit kreisförmigem Querschnitt. Vergleich der Fitformeln von Beskok [73] und Veijola (Gleichung 3.94) mit der analytischen Lösung des Kontinuumsmodells mit Schlupfrandbedingung $\Upsilon_{o_s} = 1 + 4Kn$ (Gleichung 3.90).

Kanalströmung mit quadratischem Querschnitt

Die Flußrate von verdünnten Gasen in einem Kanal mit quadratischem Querschnitt in Abhängigkeit von der Knudsenzahl wurde von Sharipov [142] mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung berechnet und tabelliert. Beskok [73] hat die Fitparameter seines Schlupf-Modells an Simulationsdaten von Sone [147] angepaßt:

$$\Upsilon_{\square} = \left(1 + 1.085Kn \cdot \arctan(8\sqrt{Kn}) \right) \left(1 + \frac{6Kn}{1 + Kn} \right) \quad (3.95)$$

Abbildung 3.19 zeigt, daß Gleichung 3.92, die aus dem Kontinuumsmodell mit Schlupfrandbedingung abgeleitet wurde, für kleine Knudsenzahlen eine gute Näherung an Beskoks Formel 3.95 darstellt. Die Simulationsdaten von Sharipov weichen jedoch ab, was einen Hinweis darauf gibt, daß Ergebnisse von Molekularsimulationen aus der Literatur kritisch zu betrachten sind, da immer wieder Abweichungen beobachtet werden.

Zweidimensionale Kanalströmung

Die Flußrate von verdünnten Gasen in einem zweidimensionalen Kanal in Abhängigkeit von der Knudsenzahl wurde von Fukui [44] mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung berechnet und tabelliert. Folgende Fitformel von Veijola [158] für den molekularen Schlupffaktor Υ_{2D} approximiert Fukuis Ergebnisse für Knudsenzahlen bis 880 mit einem Fehler von maximal 5%:

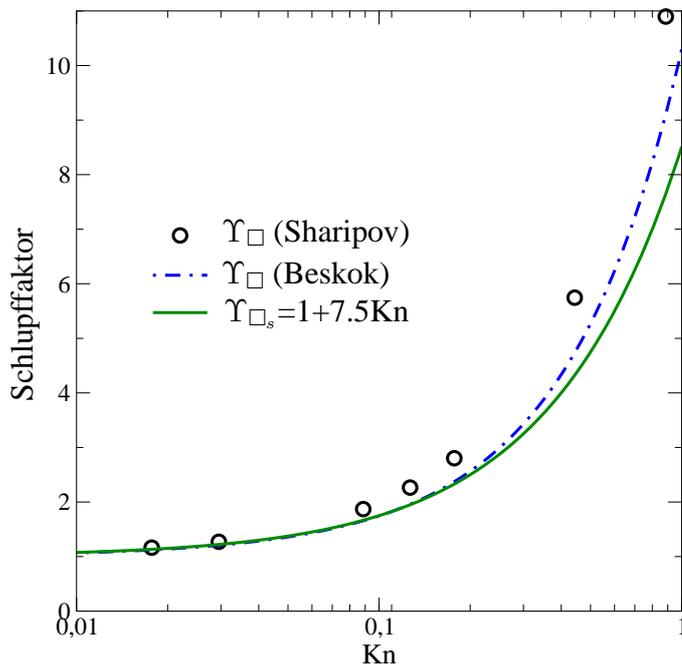


Abbildung 3.19: Schlupffaktor der Flußrate durch einen Kanal mit quadratischem Querschnitt. Vergleich der Fitformel von Beskok (Gleichung 3.95) und den Simulationsdaten von Sharipov [142] mit der analytischen Lösung des Kontinuumsmodells mit Schlupfrandbedingung $\Upsilon_{\square_s} = 1 + 7.5Kn$ (Gleichung 3.92).

$$\Upsilon_{2D} = 1 + 9.638Kn^{1.159} \quad (3.96)$$

Später hat Fukui [45] auch den Einfluß des Akkomodationsparameters ζ auf die Flußrate untersucht. Veijola hat diese zusätzliche Abhängigkeit in einer verallgemeinerten Fitformel [157] berücksichtigt, die für $\zeta = 1$ Gleichung 3.96 entspricht. Abbildung 3.20 vergleicht diese verallgemeinerte Formel mit Lösungen der Boltzmann-Gleichung von Sharipov [144] und Beskok [12] und der Kontinuumslösung mit Schlupfrandbedingung aus Gleichung 3.93, die für kleine Knudsenzahlen wieder eine gute Näherung darstellt. Die Abbildung besitzt eine hohe Informationsdichte, weshalb die beiden folgenden Aussagen hervorgehoben werden sollen:

Die Fitformel von Veijola stimmt sehr gut mit den molekularen Simulationsergebnissen von Sharipov überein, jedoch nicht mit denen von Beskok.

Viel entscheidender als die Wahl der richtigen Simulationsergebnisse bzw. der richtigen Fitformel ist der Einfluß des Akkomodationsparameters ζ , der jedoch nur experimentell ermittelbar ist. In dieser Arbeit wird, wie in der Literatur üblich, $\zeta = 1$ angenommen.

Blendenströmung

Den Einfluß stark verdünnter Gase auf die Blendenströmung hat Sharipov [144] untersucht, indem er mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung die Flußrate in Kanälen mit endlicher Länge berechnet hat. Untersucht wurden dabei Kanäle von kreisförmigem Querschnitt mit Radius R und zweidimensionale Kanäle mit der Breite h . Ein Kanal mit endlicher Länge berücksichtigt neben dem vollausgebildeten Kanalströmungsprofil eines unendlich langen Kanals auch die Veränderung des Strömungsprofils an den Enden des Kanals

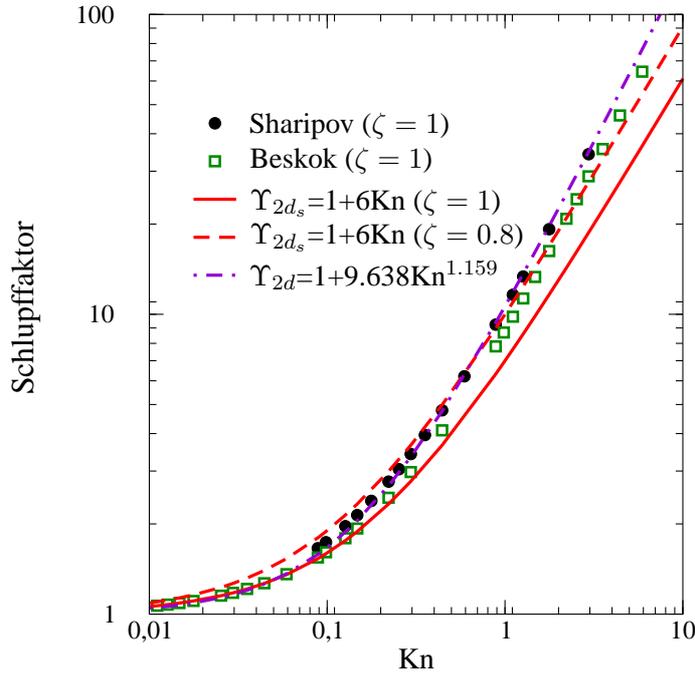


Abbildung 3.20: Schlupffaktor der Flußrate in einem zweidimensionalen Kanal. Vergleich der Ergebnisse der molekularen Simulationen (Symbole) von Sharipov [144] und Beskok [12] mit Näherungsformeln von Veijola (Gleichung 3.94 und [157]) und der analytischen Lösung des Kontinuumsmodells mit Schlupfrandbedingung (Gleichung 3.93).

aufgrund der Blendenströmung am Kanaleingang und am Kanalausgang. Diesen zusätzlichen Druckabfall beschreibt Sharipov durch eine effektive Länge, die im Vergleich zur realen Kanallänge L_K um die Länge ΔL verlängert ist. Er drückt seine Ergebnisse durch dimensionslose Größen aus und gibt dabei die Länge stets im Verhältnis zur Kanalbreite an. Diese relative Länge Λ_K entspricht dem Verhältnis der Länge L_K zum Radius R bzw. zur Breite h des Kanals.

Sharipovs tabellierte Ergebnisse weisen eine Abhängigkeit vom Verdünnungsparameter D und von der relativen Länge Λ_K des Kanals auf und wurden von Veijola [156] durch nachfolgende Fitfunktionen approximiert. Der Verdünnungsparameter D entspricht der inversen Knudsenzahl und ist der gebräuchlichere Parameter zur Klassifizierung stark verdünnter Gase:

$$D = \frac{\sqrt{\pi}}{2Kn} \quad (3.97)$$

Für einen kreisrunden Kanal mit Radius R verlängert sich aufgrund der Blendenströmung die Kanallänge $\Lambda_K = \Lambda_o = L_K/R$ um die Länge $\Delta\Lambda_o$:

$$\Delta\Lambda_o = \frac{3\pi}{8} \frac{1 + 1.7D^{-0.858}}{1 + 0.688D^{-0.858}\Lambda_o^{-0.125}} = \frac{3\pi}{8} \Upsilon_{\Delta\Lambda_o} \quad (3.98)$$

Diese Formel von Veijola approximiert Sharipovs Simulationsdaten für beliebige Knudsenzahlen mit einem maximalen Fehler von 2% für $1 < \Lambda_o < 30$.

Für einen zweidimensionalen Kanal der Breite h verlängert sich aufgrund der Blendenströmung die Kanallänge $\Lambda_K = \Lambda_{2d} = L_{2d}/h$ um die Länge $\Delta\Lambda_{2d}$:

$$\Delta\Lambda_{2d} = \frac{8}{3\pi} \frac{1 + 2.471D^{-0.659}}{1 + 0.5D^{-0.5}\Lambda_{2d}^{-0.238}} = \frac{8}{3\pi} \Upsilon_{\Delta\Lambda_{2d}} \quad (3.99)$$

Diese Formel von Veijola approximiert Sharipovs Simulationsdaten für $Kn < 880$ und $1 < \Lambda_{2d} < 30$ mit einem maximalen Fehler von 5%.

Aus den Korrekturfaktoren Υ_K für einen unendlichen Kanal und $\Upsilon_{\Delta\Lambda}$ für einen endlichen Kanal läßt sich nun der Schlupffaktor für die Blendenströmung berechnen, da der fluidische Widerstand Z eines um $\Delta\Lambda$ verlängerten Kanals der Länge Λ auch mit Hilfe eines zusätzlichen Blendenwiderstands ausgedrückt werden kann:

$$Z = Z_K + Z_B = Z_K \frac{\Lambda + \Delta\Lambda}{\Lambda} \quad (3.100)$$

Damit lautet der Blendenwiderstand Z_B :

$$Z_B = Z_K \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} \quad (3.101)$$

Werden die Terme dieser Gleichung für verdünnte Gase um den entsprechenden Schlupffaktor Υ erweitert,

$$\frac{Z_B}{\Upsilon_B} = \frac{Z_K}{\Upsilon_K} \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} \cdot \Upsilon_{\Delta\Lambda} \quad (3.102)$$

so folgt für den Schlupffaktor der Blendenströmung:

$$\Upsilon_B = \frac{\Upsilon_K}{\Upsilon_{\Delta\Lambda}} \quad (3.103)$$

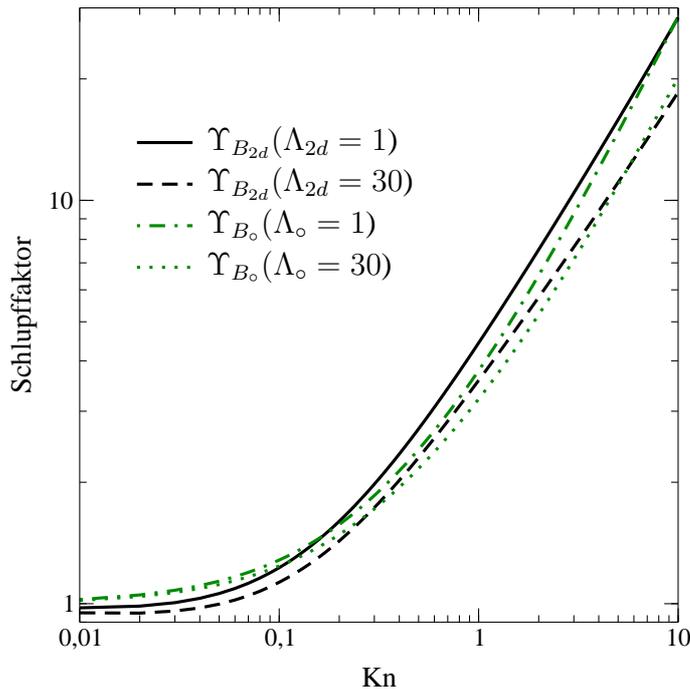


Abbildung 3.21: Schlupffaktor der Flußrate durch eine Kreisblende und eine Spaltblende extrahiert aus den Fitformeln von Veijola an die Simulationsdaten von Sharipov.

Damit ergeben sich für den Schlupffaktor einer kreisförmigen Blende Υ_{B_o} und den einer dünnen Spaltblende $\Upsilon_{B_{2d}}$ (rechteckige Blendenöffnung mit sehr großem Aspektverhältnis) folgende Gleichungen, die in Abbildung 3.21 dargestellt sind:

$$\Upsilon_{B_o} = \frac{\Upsilon_o}{\Upsilon_{\Delta\Lambda_o}} = \frac{1 + \frac{6.703Kn(1.577+Kn)}{2.326+Kn}}{\frac{1+1.7D^{-0.858}}{1+0.688D^{-0.858}\Lambda_o^{-0.125}}} \quad (3.104)$$

$$\Upsilon_{B_{2d}} = \frac{\Upsilon_{2d}}{\Upsilon_{\Delta\Lambda_{2d}}} = \frac{1 + 9.638Kn^{1.159}}{\frac{1+2.471D^{-0.659}}{1+0.5D^{-0.5}\Lambda_{2d}^{-0.238}}} \quad (3.105)$$

4 Kompaktmodelle für fluidmechanische Elementarstrukturen

Die Grundlage des hier vorgestellten Mixed-Level-Modells zur Beschreibung der Dämpfung mikromechanischer Platten ist die Reynoldsgleichung. Abbildung 3.10 aus dem letzten Kapitel hat gezeigt, daß diese die Strömung vergleichbar gut beschreibt wie die komplexere Navier-Stokes-Gleichung, solange die Bedingungen für die Gültigkeit der Reynoldsgleichung erfüllt sind. Vorausgesetzt wurde dabei, daß die lateralen Dimensionen (Plattenlänge) viel größer sind als die vertikale Dimension (Luftspalt). Ohne Einschränkungen gilt die Reynoldsgleichung damit nur für unendlich ausgedehnte Platten. In der Praxis hat man es aber stets mit endlichen Platten zu tun, die meist auch perforiert sind. Solche Perforationen werden durch zumeist regelmäßig angeordnete Löcher in der Platte realisiert. Sie sind in der Oberflächenmikromechanik einerseits notwendig für die vollständige Ätzung der Opferschicht zur Herstellung freistehender Platten und andererseits wünschenswert zur Dämpfungsreduktion.

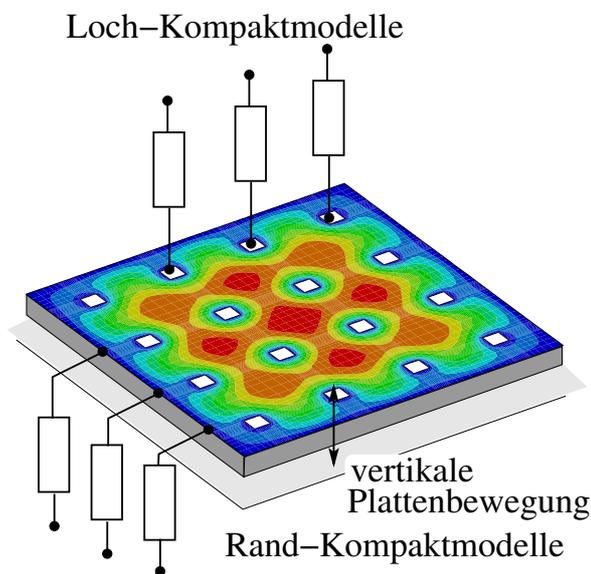


Abbildung 4.1: Druckverteilung unter einer perforierten Platte, wobei Kompaktmodelle am Rand und an den Löchern die Druckrandbedingungen beim Mixed-Level-Ansatz bestimmen.

Sowohl am äußeren Plattenrand als auch am Rand eines jeden Lochs treten zwei Effekte auf, die in der Reynoldsgleichung nicht berücksichtigt werden. Zum einen weicht nahe dem Rand das Strömungsprofil vom Poiseuille-Profil der Reynoldsgleichung ab und zum anderen ergibt sich ein zusätzlicher Druckabfall außerhalb der Platte bzw. im Loch. Nach Abbildung 4.1 soll dem Einfluß dieser beiden Effekte durch Kompaktmodelle Rechnung getragen werden. Diese entsprechen fluidischen Widerständen, da sich abhängig von der

Flußrate über den Rand oder durch ein Loch ein zusätzlicher Druckabfall ergibt, der als Randbedingung in der Reynoldsgleichung berücksichtigt wird.

Die physikalisch basierten Kompaktmodelle für den Druckabfall am Rand und im Loch einer Platte werden in den nächsten beiden Abschnitten mit Hilfe der Grundlagen aus dem letzten Kapitel abgeleitet, im letzten Abschnitt dieses Kapitels in einer Übersicht zusammengestellt und dabei ihr Gültigkeitsbereich durch Schlupffaktoren aus der Literatur auf verdünnte Gase erweitert.

4.1 Randmodell

In diesem Abschnitt wird ein Kompaktmodell für Squeeze-Film-Dämpfung abgeleitet, das die Druckrandbedingung der Reynoldsgleichung am Rand einer Platte so reguliert, daß auch endliche Platten mit der Reynoldsgleichung korrekt modelliert werden können. Bei den analytischen Lösungen der Reynoldsgleichung in Abschnitt 3.2 wurde der Druck am Plattenrand auf Umgebungsdruck gesetzt und damit der Druckabfall des Gases, nachdem es über den Rand hinausgeströmt ist, vernachlässigt. Bei der Druckverteilung am Plattenrand in Abbildung 4.2 fällt auf, daß der Druck unter der Platte zum Plattenrand abfällt, dort aber immer noch größer als der Umgebungsdruck ist. Wird der zusätzliche Druckabfall am Rand vernachlässigt, ist der relative Fehler in der Dämpfungskraft um so größer, je kleiner eine Platte ist. Der Einfluß dieses Randeffects auf die Dämpfungskraft wurde von Schrag [131] für eine sehr lange Rechteckplatte mit den Seitenlängen a, b und $b \gg a$ systematisch untersucht. Bei einem Verhältnis a/h von 100 ist die Abweichung der Reynoldsgleichung zur Navier-Stokes-Gleichung noch unter 3%. Bei $a/h = 10$ beträgt sie schon mehr als 10% und bei $a/h = 5$ mehr als 20%.

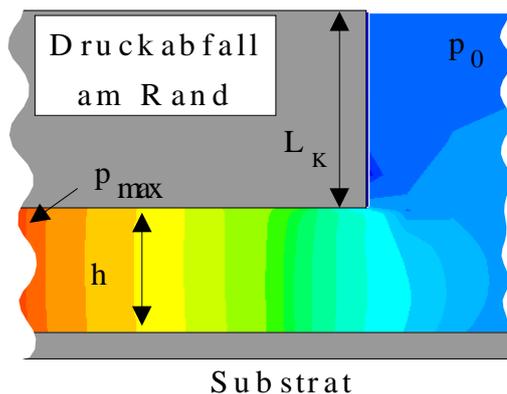


Abbildung 4.2: Druckverteilung am Plattenrand aus der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mit FEM.

Von Schrag [132] und Veijola [159] gibt es zwei verschiedene empirische Ansätze, den Randeffect durch eine Verlängerung der Platte zu berücksichtigen. In dieser Arbeit soll im Gegensatz dazu ein physikalisch basiertes Modell vorgestellt werden, dessen Grundlage die viskose Blendenströmung aus Abschnitt 3.1.3 ist.

Die Übergangsströmung vom Rand der Platte in die Umgebung der Platte wird dabei als viskose Blendenströmung betrachtet, die sowohl der Veränderung des Strömungsprofils (Gleichung 3.34) am Rand der Platte als auch dem zusätzlichen Druckabfall δp nach der

Blende Rechnung trägt. Die Begrenzung der Strömung am Plattenrand durch die Platte und durch das Substrat entspricht dabei einer Blendenöffnung. In Gleichung 3.35 wurde die Flußrate Q_B durch eine elliptische Blende angegeben. Damit ergibt sich für den fluidischen Widerstand einer elliptischen Blende Z_{B_E} folgender Ausdruck:

$$Z_{B_E} = \frac{\delta p}{Q_B} = \frac{3\pi}{2} \eta \frac{s}{A^2} \quad (4.1)$$

Dabei steht s für den Umfang und A für die Fläche der Blendenöffnung. Bei der Strömung über den Plattenrand gilt $A = h \cdot l_R$, wobei l_R die Länge des Plattenrandes und h den Luftspalt unter der Platte beschreibt. Bei der Berechnung des Blendenumfangs ist zu prüfen, ob der Luftspalt hierbei miteinbezogen werden muß. Im folgenden wird deshalb zwischen großen und kleinen Aspektverhältnissen l_R/h unterschieden.

4.1.1 Große Aspektverhältnisse

Ist der Luftspalt h klein gegenüber der Länge des Plattenrandes l_R , so kann er bei der Berechnung des Blendenumfangs $s = 2l_R$ vernachlässigt werden und man erhält folgenden Randwiderstand:

$$Z_R = \frac{\delta p}{Q} = \frac{3\pi\eta}{h^2 \cdot l_R} \tau \quad (4.2)$$

Dabei ist τ ein empirischer Korrekturfaktor, der aus FEM-Simulationen extrahiert werden muß, und in Abbildung 4.3 für verschiedene Aspektverhältnisse von $l_R = 2\pi R$ und h dargestellt wird. Für große Aspektverhältnisse R/h konvergiert der Korrekturfaktor τ gegen den konstanten Wert $\tau_\infty \approx 0.8$. Ein Wert kleiner als eins ist physikalisch sinnvoll, da bei der Ableitung der viskosen Blendenströmung aus der Stokesgleichung ein unbegrenztes Strömungsgebiet beiderseits der Blende angenommen wurde. Bei der Randströmung hingegen ist auf einer Seite der Blende das Strömungsgebiet nach oben unbegrenzt, auf der anderen Seite besitzen der Strömungskanal und die Blende denselben Querschnitt.

4.1.2 Kleine Aspektverhältnisse

Mit abnehmendem Aspektverhältnis l_R/h steigt der Korrekturfaktor τ in Abbildung 4.3 nahezu linear an. Dieser lineare Anstieg läßt sich zumindest qualitativ durch das viskose Blendenmodell erklären, denn für kleine Aspektverhältnisse kann der Einfluß des Luftspalts h auf den Blendenumfang s nicht mehr vernachlässigt werden. Wird die Spalthöhe h bei der Berechnung des Blendenumfangs $s = 2l_R + \hat{\tau} \cdot 2h$ berücksichtigt, so erhält man für den Randwiderstand folgende Gleichung:

$$Z_R = \frac{3\pi\eta}{h^2 \cdot l_R} \underbrace{\left(\tau_\infty + \hat{\tau} \frac{h}{l_R}\right)}_{\tau} \quad (4.3)$$

Dabei sind $\hat{\tau}$ und τ_∞ zunächst unbekannte Parameter, die aus FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung extrahiert werden müssen. Diese Simulationsergebnisse sind in

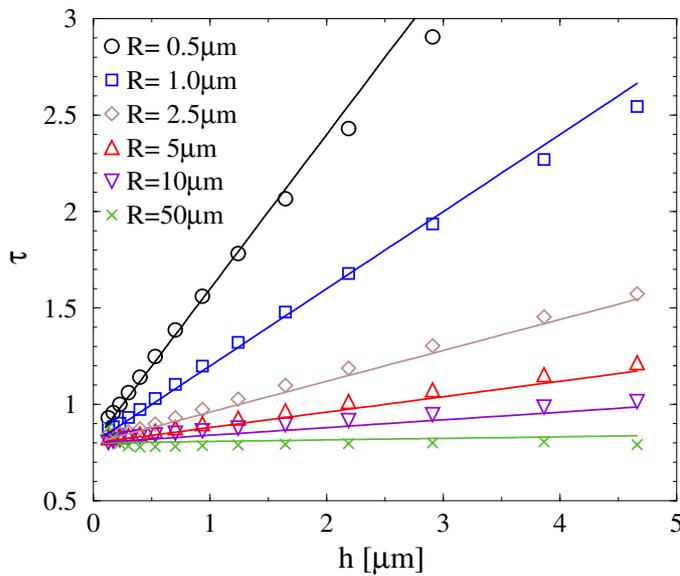


Abbildung 4.3: Der Fitparameter τ für den fluidischen Randwiderstand einer Kreisplatte wurde aus FEM-Simulationen für verschiedene Plattenradien R (Randlänge $l_R=2\pi R$) und Luftspalthöhen h berechnet und ist durch Symbole dargestellt. Gleichung 4.3 mit dem Parameter $\hat{\tau} = 2.5$ beschreibt die eingezeichneten Geraden.

Abbildung 4.3 als Symbole dargestellt. Zum Vergleich ist das Modell des viskosen Blendenwiderstandes aus Gleichung 4.3 mit $\hat{\tau} = 2.5$ als Gerade eingezeichnet. Es stellt sich heraus, daß $\tau_\infty \approx 0.8$ unabhängig von der Plattengeometrie ist. Die Konstante $\hat{\tau}$, die den Einfluß des Luftspalts h auf den Blendenumfang beschreibt, ist jedoch von der Geometrie abhängig. Da in Mikrosystemen typischerweise große Aspectverhältnisse auftreten, kann man sich in dieser Arbeit und im allgemeinen auf Gleichung 4.2 beschränken ($\tau = \tau_\infty \approx 0.8$), die auch äquivalent zum Kompaktmodell von Schrag [132] ist.

4.2 Lochmodelle

In diesem Abschnitt werden Kompaktmodelle für Squeeze-Film-Dämpfung abgeleitet, welche die Druckrandbedingung der Reynoldsgleichung am Rand eines Lochs in der Platte so regulieren, daß auch perforierte Platten mit der Reynoldsgleichung korrekt modelliert werden können. Zur Beschreibung des Dämpfungsverhaltens einer großen, re-

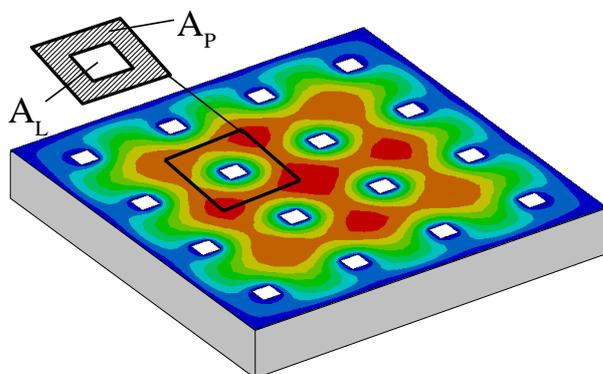


Abbildung 4.4: Das Bild zeigt die Druckverteilung unter einer regelmäßig perforierten Platte. Die Fläche einer Zelle A_Z setzt sich aus der Plattenfläche A_P und der Lochfläche A_L zusammen.

gelmäßig perforierten Platte kann in erster Näherung der Einfluß des Plattenrands vernachlässigt werden. Somit genügt es nach Abbildung 4.4, eine einzelne Lochzelle mit der

Zellenfläche $A_Z = A_P + A_L$ isoliert zu betrachten, was bedeutet, daß über den Zellenrand kein Gas mit einer Nachbarzelle ausgetauscht werden kann.

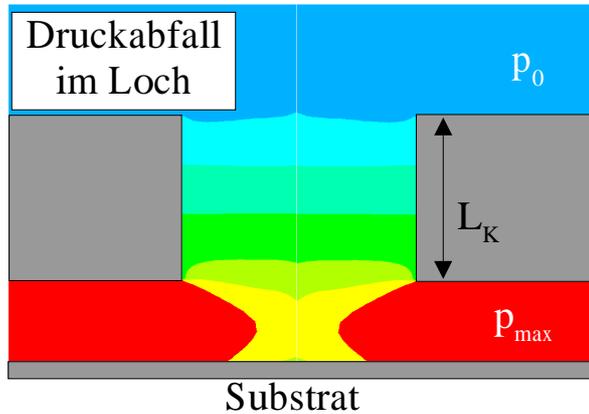


Abbildung 4.5: Numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mittels FEM für die Druckverteilung am Loch einer bewegten Platte.

Wird die Druckverteilung unter einer Lochzelle, die sich bei Squeeze-Film-Dämpfung nach der Reynoldsgleichung berechnet, über die Zellenfläche integriert, ergibt sich die Dämpfungskraft auf eine Lochzelle. Für eine ringförmige Lochzelle beschreibt Gleichung 3.77 die Lösung der inkompressiblen Reynoldsgleichung. Der analytische Ausdruck für die Dämpfungskraft wurde in Gleichung 3.78 berechnet. Als Randbedingung wurde dabei am Loch der Umgebungsdruck gewählt, was für sehr große Löcher eine gute Näherung darstellt, da in diesem Fall der Druckabfall im Loch vernachlässigt werden kann. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht der Fall, wie die Druckverteilung unter einer Lochzelle in Abbildung 4.5 verdeutlicht. Der Druck ist maximal (p_{max}) am äußeren Rand der Lochzelle und fällt zum Lochrand hin ab, wo er aber noch deutlich über dem Umgebungsdruck p_0 liegt. Zur Modellierung des Druckabfalls in einer Lochzelle ist die geometrische Zerlegung in vier Gebiete nach Abbildung 4.6 naheliegend.

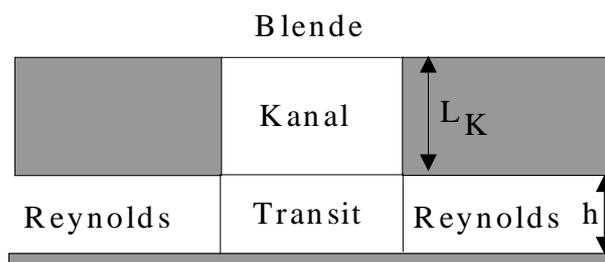


Abbildung 4.6: Phänomenologische Einteilung des Druckabfalls an einem Loch in vier Bereiche: Reynoldsbereich, Transitbereich, Kanalbereich und Blendenbereich.

Kompakt und anschaulich läßt sich der Druckabfall in einer Lochzelle durch ein Ersatzschaltbild mit fluidischen Widerständen in Abbildung 4.7 darstellen. Im Reynoldsbereich unter der Platte kann die Druckverteilung für beliebige Plattengeometrien mit Hilfe eines Finite-Netzwerk-Modells der allgemeinen Reynoldsgleichung (siehe Anhang A) modelliert werden. Die Druckrandbedingung für die Reynoldsgleichung am Loch wird durch die drei Kompaktmodelle für den Kanalbereich, den Blendenbereich und den Transitbereich bestimmt. Diese werden in den folgenden Abschnitten abgeleitet. Zudem müssen bei der Berechnung der Dämpfungskraft auch Korrekturen aufgrund der Bewegung des Lochkanals und der viskosen Scherkraft an den Lochkanalwänden berücksichtigt werden.

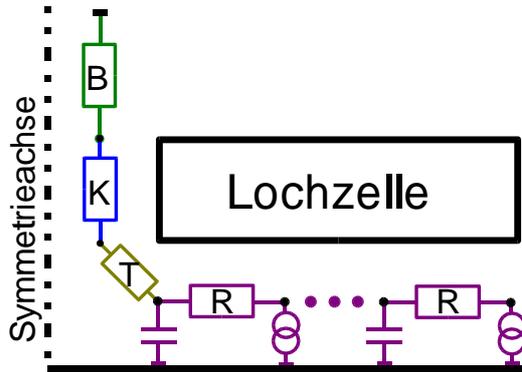


Abbildung 4.7: Das Ersatzschaltbild zeigt die fluidischen Widerstände, die den Druckabfall in den verschiedenen Bereichen modellieren. Im Reynoldsbereich wird der Generations- und Kompressibilitätsterm aus Gleichung 3.41 durch eine Quelle und eine Kapazität berücksichtigt.

4.2.1 Kanalbereich

Im Kanalbereich ist es naheliegend, als Kompaktmodell den Druckabfall einer Kanalströmung (Abschnitt 3.1.3) zu verwenden, wie dies auch schon von Schrag [131] vorgeschlagen wurde. Damit ergibt sich für den fluidischen Widerstand eines Kanals mit kreisförmigem Querschnitt, Radius R_L und Länge L_K nach Gleichung 3.24:

$$Z_{K\circ} = \frac{\delta p}{Q_\circ} = \frac{8}{\pi} \eta \frac{L_K}{R_L^4} \quad (4.4)$$

Für einen Kanal mit quadratischem Querschnitt und Seitenlänge a_L ergibt sich aus Gleichung 3.26:

$$Z_{K\Box} = \frac{\delta p}{Q_\Box} = \frac{12\eta L_K}{0.42 a_L^4} \quad (4.5)$$

4.2.2 Blendenbereich

Im Blendenbereich ist es naheliegend, als Kompaktmodell den Druckabfall einer viskosen Blendenströmung aus Abschnitt 3.1.3 zu verwenden. Der fluidische Widerstand einer Blende Z_B faßt dabei den Druckabfall beim Eintritt des Gases in den Lochkanal und beim Austritt aus dem Lochkanal zusammen.

Kreisförmige Blende

Die kreisförmige Blende ist ein Spezialfall der elliptischen Blende, deren fluidischer Widerstand in Gleichung 4.1 beschrieben wurde. Bei einem Blendenradius R_L gilt für den Umfang $s = 2\pi R_L$, für die Querschnittsfläche $A = \pi R_L^2$ und somit für den fluidischen Widerstand:

$$Z_{B\circ} = \frac{\delta p}{Q} = \frac{3\eta}{R_L^3} \quad (4.6)$$

Quadratische Blende

Für eine quadratische Blende konnte kein analytischer Ausdruck gefunden werden. Eine untere Abschätzung für den fluidischen Widerstand kann jedoch mit Hilfe der Gleichung 4.1 für elliptische Querschnitte gefunden werden. Wird für eine quadratische Blende die Seitenlänge a_L , der Umfang $s = 4a_L$ und die Fläche $A = a_L^2$ in Gleichung 4.1 eingesetzt, so erhält man folgenden fluidischen Widerstand:

$$Z = \frac{\delta p}{Q} = \frac{6\pi}{a_L^3} \eta \quad (4.7)$$

Eine obere Abschätzung für den fluidischen Widerstand einer quadratischen Blende kann durch eine eingeschriebene kreisförmige Blende angegeben werden. Der fluidische Widerstand einer kreisförmigen Blende mit dem Durchmesser der quadratischen Blende ($2R = a_L$) hat nach Gleichung 4.6 den fluidischen Widerstand:

$$Z = \frac{\delta p}{Q} = \frac{24}{a_L^3} \eta \quad (4.8)$$

Zwischen diesen beiden Werten muß der fluidische Widerstand einer quadratischen Blende liegen. Dies bestätigt die FEM-Simulation, die mit einem Fehler von etwa 3% folgenden fluidischen Widerstand ergab:

$$Z_{B\Box} = \frac{\delta p}{Q} = \frac{21}{a_L^3} \eta \quad (4.9)$$

4.2.3 Transitbereich

Die durchgezogene Linie in Abbildung 4.9 ganz unten zeigt den fluidischen Widerstand einer ringförmigen Lochzelle aus Abbildung 4.8, der aus den Kompaktmodellen für den Kanal- und Blendenbereich aus den letzten beiden Abschnitten berechnet wurde. Sie weist deutliche Abweichungen zu den FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung auf, die in der Abbildung durch Symbole gekennzeichnet sind. Wird der Luftspalt h zudem sehr klein, dann steigt der fluidische Widerstand stark an. Dieser Anstieg wird durch den Druckabfall im Transitbereich verursacht und kann analog zum Randwiderstand durch eine viskose Blende beschrieben werden. Der fluidische Widerstand Z_T entspricht damit Gleichung 4.2, wobei die Randlänge l_R durch die Länge des Lochrandes l_L ersetzt werden muß:

$$Z_T = \frac{3\pi\eta}{h^2 \cdot l_L} \tau \quad (4.10)$$

Bei der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung des fluidischen Widerstandes einer Lochzelle in Abbildung 4.9 fällt zudem auf, daß der Widerstand nicht nur vom Lochdurchmesser und vom Luftspalt abhängt, sondern auch vom Zellendurchmesser bzw. dem Perforationsgrad α . Diese Abhängigkeit wird im nächsten Abschnitt erklärt, indem beim Lochwiderstand die Plattenbewegung berücksichtigt wird.

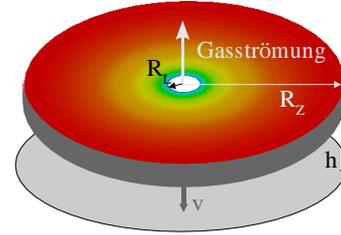
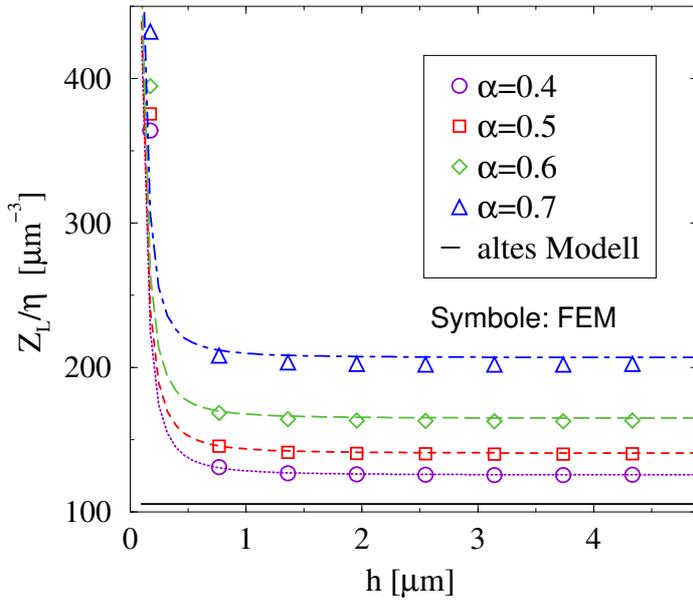


Abbildung 4.8: Druckverteilung unter einer ringförmigen Lochzelle. Das Gas unter der Zelle kann nur durch das Loch in der Zellenmitte entweichen.

Abbildung 4.9: Fluidischer Widerstand in Abhängigkeit von der Spalthöhe h unter einer ringförmigen Lochzelle mit Radius $R_L = 0.5\mu\text{m}$ aus Abbildung 4.8, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Parameter ist der Perforationsgrad $\alpha = R_L/R_Z$, wobei R_Z der Zellenradius ist. Die Symbole zeigen die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mittels FEM an. Die durchgezogene Linie berücksichtigt nur die beiden Kompaktmodelle für den Kanal- und Blendenbereich. Die gestrichelten Linien berücksichtigen zusätzlich das Kompaktmodell für den Transitbereich und die Korrektur für den bewegten Kanal.

4.2.4 Bewegter Kanal

Durch die Plattenbewegung mit der Geschwindigkeit v_P wird das Gas unter der Zelle verdrängt und strömt mit der Flußrate Q_{rey} in die Mitte der Lochzelle und durch das Loch. Zudem ergibt sich aufgrund der Plattenbewegung eine Strömung mit der Flußrate $Q_{rel} = v_P \cdot A_L$ des ruhenden Gases unterhalb des Lochbereichs der Lochzelle durch das Loch.

Der Druckabfall im Loch ist proportional zum fluidischen Widerstand des Lochs Z_L , der von der Lochgeometrie abhängt (Abschnitt 4.2.1) und proportional zur Flußrate Q durch das Loch. Diese Flußrate setzt sich aus dem unter der Platte verdrängten Gas Q_{rey} und der relativen Flußrate Q_{rel} zusammen:

$$p_L = Z_L \cdot \left(\underbrace{v_P \cdot A_P}_{Q_{rey}} + \underbrace{v_P \cdot A_L}_{Q_{rel}} \right) \quad (4.11)$$

Somit ergibt sich folgendes Verhältnis zwischen dem fluidischen Widerstand des Lochkanals bzw. der Lochblende mit (Z') und ohne (Z) Berücksichtigung der Relativbewegung zwischen Kanal bzw. Blende und umgebender Luft:

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{(Q_{rey} + Q_{rel})}{Q_{rey}} = \frac{A_Z}{A_P} = \frac{A_Z}{A_Z - A_L} = \frac{1}{1 - \alpha^2} \quad (4.12)$$

Dabei ist α der Perforationsgrad der Zelle und entspricht dem Verhältnis des Lochdurchmessers zum Zellendurchmesser. Wird dieser Korrekturfaktor beim Kanal- und Blendenwiderstand berücksichtigt, so ergibt sich zusammen mit dem Transitwiderstand ein analytischer Ausdruck, der durch die gestrichelten Linien in Abbildung 4.9 repräsentiert und durch die numerischen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung bestätigt wird.

4.2.5 Scherkraft der Kanalströmung

Die Strömung durch den Lochkanal bewirkt nicht nur einen Druckabfall im fluidischen System, sondern auch eine mechanische Scherkraft, die nach Gleichung 3.5 für Newtonsche Fluide proportional zur Viskosität und zum Geschwindigkeitsgradienten an der Lochkanalwand ist. Für einen Kanal mit kreisförmigem Querschnitt läßt sich die Scherkraft F_S auf die Lochkanalwand mit der Fläche $A_K = 2\pi \cdot R_L \cdot L_K$ aus dem Geschwindigkeitsprofil der Hagen-Poiseuille-Gleichung 3.23 berechnen:

$$F_S = \eta \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=R_L} \cdot A_K = A_L \cdot p_K \quad (4.13)$$

Obwohl dieser Ausdruck für ein kreisförmiges Loch abgeleitet wurde, folgt aufgrund des dritten Newtonschen Gesetzes „actio=reactio“, daß dieser Ausdruck unabhängig von der Lochgeometrie ist. Die Scherkraft ist somit stets proportional zur Lochfläche A_L und zum Druckabfall im Lochkanal p_K .

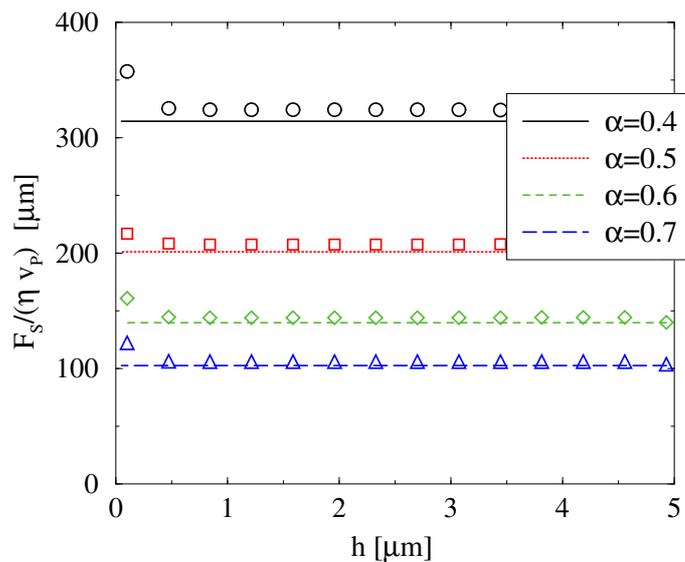


Abbildung 4.10: Scherkraft auf eine ringförmige Lochzelle ($R_L = 0.5\mu\text{m}$, $L_K = 2\mu\text{m}$) mit der Geschwindigkeit v_P . Parameter ist der Perforationsgrad $\alpha = R_L/R_Z$. Die Symbole zeigen die numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mit FEM. Die Linien entsprechen dem Kompaktmodell.

Zur Abschätzung des Einflusses der Scherkraft der Kanalströmung auf die Dämpfungskraft einer Lochzelle betrachten wir das Verhältnis aus F_S und F_K . Letztere ist der Anteil

des Druckabfalls im Lochkanal an der Dämpfungskraft auf eine Lochzelle.

$$\frac{F_S}{F_K} = \frac{p_K \cdot A_L}{p_K \cdot A_P} = \frac{A_L}{A_P} = \frac{A_L}{A_Z - A_L} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \quad (4.14)$$

Dabei ist α der Perforationsgrad der Zelle und entspricht dem Verhältnis von Lochdurchmesser zu Zellendurchmesser. Nach Gleichung 4.14 wächst der Einfluß der Scherkraft mit zunehmendem Perforationsgrad. Abbildung 4.10 zeigt die Scherkraft, die aus einer FEM-Simulation der Navier-Stokes-Gleichung extrahiert wurde im Vergleich zur analytischen Lösung aus Gleichung 4.13 für eine ringförmige Lochzelle.

Bis auf sehr kleine Spaltabstände h ist die Übereinstimmung sehr gut. Die Abweichung ist nicht auf Gleichung 4.13, sondern auf den analytischen Ausdruck für den Druckabfall im Lochkanal p_K zurückzuführen. Der wurde in Abbildung 4.10 aus dem fluidischen Kanalwiderstand (Gleichung 4.4) berechnet, wobei von einem voll entwickelten Strömungsprofil im Kanal ausgegangen wurde. Nach Abschnitt 3.1.3 ist der Druckverlust im Anlaufbereich bei einem homogenen Geschwindigkeitsprofil am Kanaleingang vernachlässigbar. Die Geschwindigkeitsverteilung am Lochkanaleingang ist nach Abbildung 4.11 jedoch nicht homogen. Für kleine Spalthöhen h weicht das Geschwindigkeitsprofil sogar in der Kanalmitte deutlich vom Hagen-Poiseuille-Profil (Gleichung 3.23) ab.

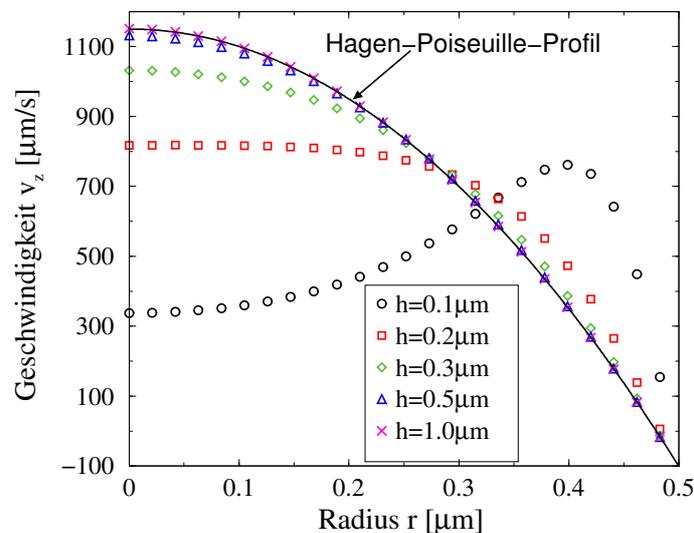


Abbildung 4.11: Geschwindigkeitsprofil in der Kanalmitte in einer ringförmigen Lochzelle mit $R_Z = 1.25\mu\text{m}$, $R_L = 0.5\mu\text{m}$, $L_K = 2\mu\text{m}$ und $v_P = 100\mu\text{m/s}$ für verschiedene Spaltabstände h im Vergleich zum Hagen-Poiseuille-Profil.

4.3 Übersicht aller Kompaktmodelle

Zur besseren Übersicht werden in diesem Abschnitt alle Kompaktmodelle aus diesem Kapitel zusammengetragen und dabei auch die Korrekturfaktoren Υ für verdünnte Gase aus Abschnitt 3.3.5 angegeben. Dabei ist L_K die Länge des Lochkanals bzw. die Plattendicke; A_L , A_P sind die Loch- bzw. Plattefläche einer Lochzelle mit der Fläche $A_Z = A_L + A_P$ und v_P ist die Plattengeschwindigkeit.

Kanal

Nachfolgend sind die fluidischen Widerstände $Z_{K_{\circ}}$ für einen Kanal mit kreisförmigem (Radius R_L) und $Z_{K_{\square}}$ für einen Kanal mit quadratischem Querschnitt (Durchmesser a_L) angegeben, die sich in verdünnten Gasen um den Schlupffaktor Υ reduzieren:

$$Z_{K_{\circ}} = \frac{8}{\pi} \eta \frac{L_K}{R_L^4} \cdot \Upsilon_{\circ}^{-1} \quad (4.15)$$

$$\Upsilon_{\circ} = 1 + \frac{6.703Kn(1.577 + Kn)}{2.326 + Kn} \quad (4.16)$$

$$Z_{K_{\square}} = \frac{12\eta L_K}{0.42a_L^4} \cdot \Upsilon_{\square}^{-1} \quad (4.17)$$

$$\Upsilon_{\square} = \left(1 + 1.085Kn \cdot \arctan(8\sqrt{Kn}) \right) \left(1 + \frac{6Kn}{1 + Kn} \right) \quad (4.18)$$

Es ist zu beachten, daß sich die Knudsenzahl, wie in der Literatur üblich, bei einem runden Querschnitt aus dem Radius ($Kn = \lambda_f/R$) und bei einem quadratischen Querschnitt aus dem Durchmesser berechnet ($Kn = \lambda_f/a_L$). Für kleine Knudsenzahlen ($Kn < 0.1$) können auch die analytischen Schlupffaktoren Υ_{\circ_s} aus Gleichung 3.90 bzw. Υ_{\square_s} aus Gleichung 3.92 verwendet werden. Analytische Ausdrücke für andere Querschnitte findet man beispielsweise bei Shah [141], wobei der Schlupffaktor dann angepaßt werden muß.

Blende

Die fluidischen Widerstände $Z_{B_{\circ}}$ für eine Blende mit kreisförmigem Querschnitt (Radius R_L) und $Z_{B_{\square}}$ für eine Blende mit quadratischem Querschnitt (Durchmesser a_L) lauten:

$$Z_{B_{\circ}} = \frac{3\eta}{R_L^3} \cdot \Upsilon_{B_{\circ}}^{-1} \quad (4.19)$$

$$\Upsilon_{B_{\circ}} = \frac{1 + \frac{6.703Kn(1.577+Kn)}{2.326+Kn}}{\frac{1+1.7D^{-0.858}}{1+0.688D^{-0.858}\Lambda_{\circ}^{-0.125}}} \quad (4.20)$$

$$Z_{B_{\square}} = \frac{21\eta}{a_L^3} \cdot \Upsilon_{B_{\circ}}^{-1} \quad (4.21)$$

Dabei ist $D = \frac{\sqrt{\pi}}{2Kn}$ der Verdünnungsparameter und $\Lambda_{\circ} = \frac{L_K}{R}$ die Länge des Lochkanals im Verhältnis zum halben Lochdurchmesser.

Es findet sich in der Literatur kein Ausdruck für den Schlupffaktor einer quadratischen Blende. Er kann jedoch mit Hilfe der Formel für den Schlupffaktor $\Upsilon_{B_{\circ}}$ einer kreisförmigen Blende abgeschätzt werden, wenn wie bei dieser die Knudsenzahl aus dem halben Blendendurchmesser berechnet wird ($Kn = 2\lambda_f/a_L$). Denn die Schlupffaktoren für

einen runden Kanal ($\Upsilon_{\circ} = 1 + 4Kn$) aus Gleichung 3.90 und einen quadratischen Kanal ($\Upsilon_{\square} = 1 + 3.75Kn$) aus Gleichung 3.92 unterscheiden sich nur geringfügig, wenn die Knudsenzahl auch bei letzterem aus dem halben Blendendurchmesser berechnet wird.

Rand und Transitbereich

Der fluidische Randwiderstand Z_R für einen Rand der Länge l_R und der Transitwiderstand Z_T für einen Lochrand der Länge l_L lauten:

$$Z_R = \underbrace{0.84}_{\tau} \cdot \frac{3\pi\eta}{h^2 \cdot l_R} \cdot \Upsilon_{B_{2d}}^{-1} \quad (4.22)$$

$$Z_T = \underbrace{0.84}_{\tau} \cdot \frac{3\pi\eta}{h^2 \cdot l_L} \cdot \Upsilon_{B_{2d}}^{-1} \quad (4.23)$$

$$\Upsilon_{B_{2d}} = \frac{1 + 9.638Kn^{1.159}}{\frac{1+2.471D^{-0.659}}{1+0.5D^{-0.5}\Lambda_{2d}^{-0.238}}} \approx \frac{1 + 9.638Kn^{1.159}}{\frac{1+2.471D^{-0.659}}{1+0.5D^{-0.5} \cdot 30^{-0.238}}} \quad (4.24)$$

Formel 4.24 setzt sich aus Fitfunktionen von Veijola an Simulationsergebnisse von Sharipov für $1 < \Lambda_{2d} = L_{2d}/h < 30$ zusammen. Für schwach verdünnte Gase ($Kn = \lambda_f/h < 0.1$) kann der Einfluß der Länge des Strömungskanals L_{2d} auf den Schlupffaktor $\Upsilon_{B_{2d}}$ vernachlässigt werden. Für stärker verdünnte Gase hat nach Sharipov auch die Länge des horizontalen Strömungskanals im Reynoldsbereich vor dem Übergang in den Rand- bzw. Transitbereich einen Einfluß auf den Rand- bzw. Transitwiderstand. Da diese beiden Widerstände jedoch nur für sehr kleine Spalthöhen h einen relevanten Beitrag zur Dämpfungskraft leisten, kann der Fehler vernachlässigt werden, wenn stets $\Lambda_{2d} = 30$ angenommen wird.

Der Korrekturfaktor $\tau = 0.84$ wird hier mit größerer Genauigkeit angegeben, was durch sehr genaue und unabhängige Referenzsimulationen, die in Abschnitt 5.1.1 beschrieben werden, möglich wurde.

Berechnung der Dämpfungskraft

Zur Berechnung der Dämpfungskraft auf eine perforierte Platte wird die Reynoldsgleichung unter der Platte mit den Kompaktmodellen als Randbedingung gelöst. Für den Druck p_R am Plattenrand relativ zum Umgebungsdruck p_0 gilt:

$$p_R = Z_R \cdot Q_{reyR} \quad (4.25)$$

Für den Druck p_L an jedem Lochrand relativ zum Umgebungsdruck p_0 gilt:

$$p_L = (Z_K + Z_B) \cdot (Q_{reyL} + Q_{rel}) + Z_T \cdot Q_{reyL} \quad (4.26)$$

Dabei ist $Q_{rel} = v_P \cdot A_L$ die Korrektur aufgrund des bewegten Lochkanals mit der Querschnittsfläche A_L und Q_{reyR}, Q_{reyL} sind die Strömungsraten über den Plattenrand bzw.

durch ein Loch, die sich aus der Reynoldsgleichung mit den Rand- und Lochwiderständen als Randbedingung ergeben.

Die Dämpfungskraft F auf eine Platte berechnet sich dann aus der Druckverteilung unter der Plattenfläche A und der Scherkraft F_S an den Lochkanalwänden aufgrund der Strömung durch die Löcher in der Platte:

$$F_S = A_L \cdot Z_K \cdot (Q_{rey_L} + Q_{rel}) \quad (4.27)$$

$$F = \int_A p \cdot da + F_S \quad (4.28)$$

5 Mixed-Level-Methode bei Squeeze-Film-Dämpfung

Unter einem Mixed-Level-Modell versteht man allgemein die Integration von Kompaktmodellen in ein Kontinuumsmodell. Im Falle einer beweglichen mikromechanischen Platte beschreiben die Kompaktmodelle den Einfluß der Geometrie des Plattenrandes sowie der Perforationen auf die Strömung unter der Platte, die durch ein Kontinuumsmodell der Reynoldsgleichung beschrieben wird. Die wesentliche Ordnungsreduktion bei diesem Ansatz entsteht dabei durch das Ersetzen der Navier-Stokes-Gleichung durch die Reynoldsgleichung; denn die zweidimensionale Reynoldsgleichung, die als einzige Feldvariable den Druck besitzt, läßt sich im Vergleich zur dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung, die zusätzlich die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors als Feldvariable besitzt, wesentlich schneller lösen.

Korrekte Ergebnisse ergeben sich jedoch nur in Verbindung mit den im letzten Kapitel abgeleiteten Kompaktmodellen, die für die geeigneten Randbedingungen der Reynoldsgleichung an den Gebietsgrenzen sorgen, außerhalb derer ihre Gültigkeit nicht mehr gegeben ist.

In diesem Kapitel wird anhand einfacher Teststrukturen die analytische und numerische Lösung des Mixed-Level-Dämpfungsmodells mit FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung verglichen, wobei insbesondere die Kompaktmodelle verifiziert werden.

5.1 Analytische Lösung des Mixed-Level-Problems

Für einfache geometrische Strukturen kann die Mixed-Level-Modellgleichung noch analytisch gelöst werden. Die resultierenden analytischen Ausdrücke für die Dämpfungskraft verbessern die Genauigkeit der Lösungen aus Abschnitt 3.2.3 und können als Teil einer Modellbibliothek den Entwurfsprozeß von Mikrosystemen unterstützen.

5.1.1 Analytische Lösungen mit Randmodell

In diesem Abschnitt werden analytische Ausdrücke für die Dämpfungskraft bzw. das Dämpfungsmoment berechnet. Betrachtet werden dabei neben einer Kreisscheibe und einer langen Rechteckplatte bei vertikaler Auslenkung auch eine lange Rechteckplatte bei Torsionsschwingung mit kleiner und großer Amplitude. Als Randbedingung am Plattenrand wird dabei im Gegensatz zu Abschnitt 3.2.3 nicht die triviale Randbedingung $p = 0$,

sondern das Kompaktmodell für den Randeffect aus Abschnitt 4.1 verwendet. Zur Verifizierung werden diese physikalisch basierten Kompaktmodelle auch mit empirischen Kompaktmodellen von Veijola verglichen.

Kreisscheibe

Wird die inkompressible Reynoldsgleichung 3.74 für eine runde Platte mit Radius R , der Geschwindigkeit v_P und dem Luftspalt h mit dem Kompaktmodell für den Randeffect (Gleichung 4.2)

$$p(R) = Z_R \cdot Q = \frac{3\pi\eta}{h^2 \cdot 2\pi R} \tau \cdot v_P \pi R^2 \quad (5.1)$$

als Randbedingung gelöst und die Druckverteilung über die Plattenfläche integriert, so ergibt sich folgende Dämpfungskraft ($\tau = 0.84$):

$$F_{\circ R} = \frac{3\pi R^4}{2h^3} \eta v_P \left(1 + \tau \pi \frac{h}{R}\right) \quad (5.2)$$

2D-Platte

Für eine lange Rechteckplatte mit den Seitenlängen a, b (wobei $b \gg a$) lautet die Randbedingung nach dem Randmodell:

$$p\left(\frac{a}{2}\right) = Z_R \cdot Q = \frac{3\pi\eta}{h^2 \cdot b} \tau \cdot v_P \frac{ab}{2} \quad (5.3)$$

Wird die Reynoldsgleichung 3.63 unter dieser Randbedingung gelöst und die Druckverteilung über die Plattenfläche integriert, so erhält man folgende Dämpfungskraft:

$$F_{2D_R} = \frac{a^3 b}{h^3} \eta v_P \left(1 + \frac{3}{2} \tau \pi \frac{h}{a}\right) \quad (5.4)$$

2D-Torsionsplatte mit kleiner Auslenkung

Das Dämpfungsmoment einer langen Rechteckplatte bei Torsionsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_P und sehr kleinen Torsionswinkeln φ läßt sich analog berechnen. Dabei ist zu beachten, daß die Randströmungsrate im Gegensatz zur Translationsbewegung nicht unabhängig vom Randwiderstand Z_R ist. Deshalb sind die Randbedingung 5.5 und die Reynoldsgleichung 5.6 als gekoppeltes Gleichungssystem zu lösen:

$$p\left(\frac{a}{2}\right) = Z_R \cdot Q = -\frac{3\pi\eta}{h^2 \cdot b} \tau \cdot \frac{bh^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=\frac{a}{2}} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{12\eta\omega_P x}{h^3} \quad (5.6)$$

Dabei wurde die Flußrate $Q = \bar{v} \cdot h$ nach Gleichung 3.66 berechnet. Die Integration analog zur Gleichung 3.69 der resultierenden Druckverteilung aus der Lösung des oberen Gleichungssystems ergibt folgendes Dämpfungsmoment:

$$M_{2dR} = \frac{a^5 b \eta \omega_P}{60 h^3} \cdot \frac{2a + 6h\pi\tau}{2a + h\pi\tau} \quad (5.7)$$

Vergleich mit dem Randmodell von Veijola

Veijola [159] berücksichtigt den Randeffect an einer Platte nicht durch einen Randwiderstand, sondern durch Verlängerung der Plattenabmessung zusammen mit der trivialen Randbedingung, daß der Druck am Plattenrand dem Umgebungsdruck entspricht. Die Verlängerung $\Delta a = \nu \cdot h$ ist dabei proportional zum Luftspalt h . Die Proportionalitätskonstante ν ist jedoch geometrieabhängig und muß aus FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung extrahiert werden. Um genaue Ergebnisse für ν zu bekommen, hat Veijola [155, 159] Simulationen mit langer Rechenzeit an fein diskretisierten FEM-Modellen durchgeführt. Deshalb wurden seine Ergebnisse aus Tabelle 5.1 verwendet, um den Fitparameter für den Randwiderstand τ aus Gleichung 4.2 zu überprüfen und genauer zu bestimmen. Dies wird im folgenden exemplarisch an der langen Rechteckplatte (2D-Platte)

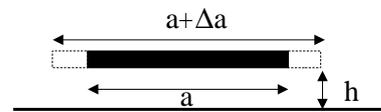


Abbildung 5.1: Verlängerung der Plattenabmessung nach dem Randmodell von Veijola.

	ν	τ
2D-Platte	1.3	0.83
Kreisscheibe	0.88	0.84
2D-Torsionsplatte	1.65	0.84

Tabelle 5.1: Extraktion des Parameters τ aus der Konstante ν im Kompaktmodell von Veijola.

mit den Seitenlängen a, b (wobei $b \gg a$) gezeigt. Wird in Gleichung 3.65 die um Δa verlängerte Seitenlänge eingesetzt, so ergibt sich unter Berücksichtigung des Randeffects nach Veijola folgende Dämpfungskraft:

$$F_{2dR} = \frac{b(a + \Delta a)^3 \eta v_P}{h^3} = F_{2D} \left(1 + \nu \frac{h}{a}\right)^3 \quad (5.8)$$

$$= F_{2D} \left(1 + \underbrace{3\left(\nu \frac{h}{a}\right)}_{\text{Randeffect}} + \underbrace{3\left(\nu \frac{h}{a}\right)^2}_{\text{Blendenform}} + \underbrace{\left(\nu \frac{h}{a}\right)^3}_{\text{Strömungswiderstand}}\right) \quad (5.9)$$

Ein mathematisch äquivalenter Ausdruck zu Gleichung 5.9 kann auch durch eine Serienschaltung von drei fluidischen Widerständen als Randmodell erzielt werden. Durch Vergleich mit Gleichung 5.4 läßt sich aus dem „Randeffect“-Term und $\nu = 1.3$ aus Tabelle 5.1 der Korrekturfaktor $\tau = 0.83$ berechnen. Der erste Term entspricht folglich dem

Randmodell für große Aspektverhältnisse aus Abschnitt 4.1.1.

Der zweite Term „Blendenform“ ist proportional zum Quadrat des Aspektverhältnisses h/a . Durch Vergleich mit Gleichung 4.2 könnte der Parameter $\hat{\tau}$ bestimmt werden. Da der Fehler in der Konstante ν sich auf die Terme höherer Ordnung in Gleichung 5.9 sehr stark auswirkt, wird von einer quantitativen Auswertung abgesehen. Aber zumindest qualitativ entsprechen die ersten beiden Terme dem Randmodell für kleine Aspektverhältnisse aus Abschnitt 4.1.2.

Wird der dritte Term „Strömungswiderstand“ mit der Dämpfungskraft F_{2D} auf eine lange Rechteckplatte multipliziert, so ergibt sich ein Korrekturterm zur Dämpfungskraft, der unabhängig vom Luftspalt h ist, was auch für die viskose Strömungswiderstandskraft F_{visk} gilt. So gilt beispielsweise für eine dünne Kreisscheibe mit Radius R , die sich mit der Geschwindigkeit v durch ein Medium mit der Viskosität η bewegt, $F_{visk} = 16\eta v R$ [83]. Damit läßt sich der dritte Term zumindest qualitativ physikalisch erklären.

Der Vergleich mit dem Randmodell von Veijola hat gezeigt, daß mit dem auf der viskosen Blendenströmung basierten Randmodell prädiktiv und geometrieunabhängig die zusätzliche Dämpfungskraft aufgrund der Randströmung berechnet werden kann. Der Fitparameter τ konnte durch unabhängige Untersuchungen von Veijola nicht nur bestätigt, sondern auch mit höherer Genauigkeit angegeben werden.

Das Modell von Veijola, die Plattenabmessungen zu verlängern, um den Randeffect zu erklären, widerspricht der physikalischen Beobachtung, daß die Strömung am Rand direkt nach oben entweicht und nicht einer imaginären Plattenverlängerung folgt. Der Erfolg dieses Modells kann erklärt werden, wenn die Verlängerung der Plattenlänge als Serienschaltung von fluidischen Randwiderständen betrachtet wird. Diesen Randwiderständen kann mit dem viskosen Blendenwiderstand und dem viskosen Strömungswiderstand zumindest eine qualitative physikalische Interpretation gegeben werden. Die Grenzen des Randmodells von Veijola sind jedoch erreicht, wenn die Dämpfung von Torsionsplatten auch für große Auslenkungen berechnet werden soll, wie das folgende Beispiel zeigt.

2D-Torsionsplatte mit großer Auslenkung

Wenn bei der Torsionsbewegung einer langen Rechteckplatte der absolute Torsionswinkel φ zwar so klein ist, daß die geometrische Kleinwinkelnäherung

$$\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi \quad (5.10)$$

gilt, aber der relative Torsionswinkel $\gamma = \varphi/\varphi_0$, wie in Abbildung 5.2, nicht mehr vernachlässigbar klein ist, dann hängt auch der Luftspalt h nach Gleichung 5.11 vom relativen Torsionswinkel γ und vom Abstand x von der Torsionsachse ab. Der maximale Torsionswinkel bei Kontakt ist $\varphi_0 = 2h_0/a$ und der Luftspalt ergibt sich aus:

$$h(x) = h_0 \left(1 - \gamma \frac{x}{a/2}\right) \quad (5.11)$$

Die Druckverteilung ist jetzt nicht mehr symmetrisch und die Randbedingungen an beiden Enden der Platte müssen getrennt voneinander betrachtet werden. Das gekoppelte Gleichungssystem aus Reynoldsgleichung und den beiden Randbedingungen lautet:

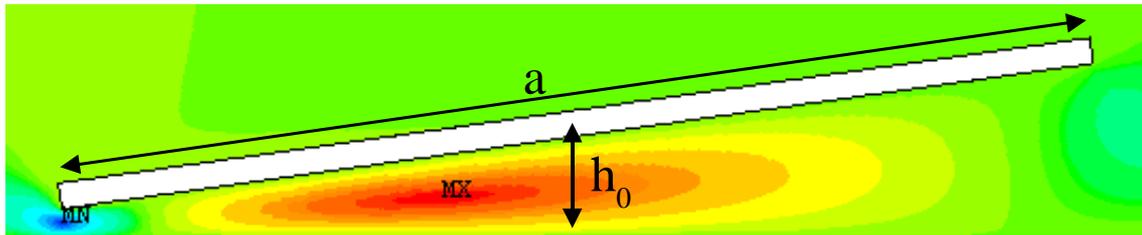


Abbildung 5.2: Horizontale Geschwindigkeitsverteilung unter einer Torsionsplatte mit relativem Torsionswinkel $\gamma = 0.7$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h(x)^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12\eta\omega_P x \quad (5.12)$$

$$p\left(\frac{a}{2}\right) = Z_R \cdot Q\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\pi\eta\tau}{h^2(1-\gamma)^2 \cdot b} \cdot \frac{bh^3(1-\gamma)^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \Bigg|_{x=\frac{a}{2}} \quad (5.13)$$

$$p\left(-\frac{a}{2}\right) = Z_R \cdot Q\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{3\pi\eta\tau}{h^2(1+\gamma)^2 \cdot b} \cdot \frac{bh^3(1+\gamma)^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \Bigg|_{x=-\frac{a}{2}} \quad (5.14)$$

Der analytische Ausdruck für die Druckverteilung unter der Platte ist sehr lang, läßt sich aber mit der Computeralgebra-Software Mathematica [93] leicht ermitteln und wird hier deshalb nicht angegeben. Abbildung 5.3 zeigt aber, daß er sehr gut mit der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung übereinstimmt.

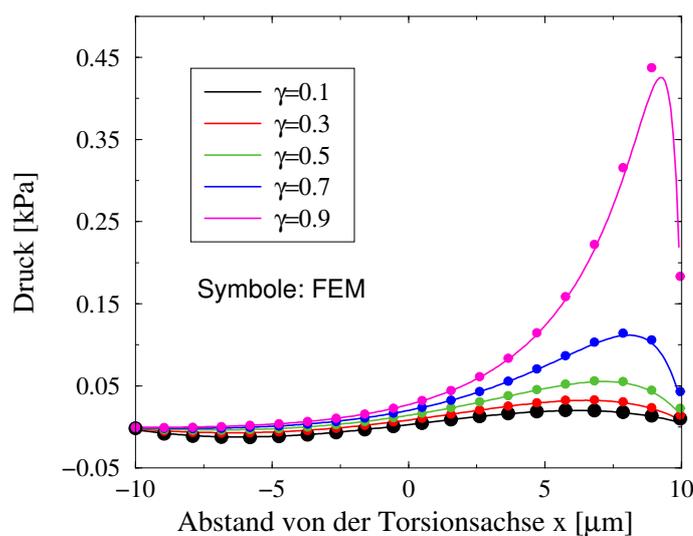


Abbildung 5.3: Vergleich der analytischen Lösung der Druckverteilung unter einer 2D-Torsionsplatte für verschiedene relative Torsionswinkel γ mit FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung ($a = 20\mu\text{m}$, $h_0 = 1\mu\text{m}$, $\omega_P = 1\text{kHz}$, $\tau = 0.84$).

Durch Integration des Produkts aus Druck und Abstand von der Torsionsachse über die Plattenfläche ergibt sich folgendes Dämpfungsmoment:

$$M_{2DR} = \frac{3a^5 b \eta \omega_P}{32h^3 \gamma^6 (2a + h\pi(1 + \gamma^2)\tau)} \left\{ 4\gamma^2 (-7a - 3h\pi(1 + \gamma^2)\tau) - \left[8a\gamma(\gamma^2 - 2) + 2h\pi\gamma(\gamma^2 - 3)(1 + \gamma^2)\tau + a(\gamma^2 - 1)^2 \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right] \ln \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \right\} \quad (5.15)$$

Dieser komplexe Ausdruck stimmt für die folgenden beiden Grenzfälle mit bereits vorher bestimmten analytischen Lösungen überein:

$$M_{2DR}(\tau \rightarrow 0) \Rightarrow M_{2D} \quad (\text{siehe Gleichung 3.73})$$

$$M_{2DR}(\gamma \rightarrow 0) \Rightarrow M_{2dR} \quad (\text{siehe Gleichung 5.7})$$

Darüberhinaus weist er nach Abbildung 5.4 eine sehr gute Übereinstimmung mit der numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung auf.

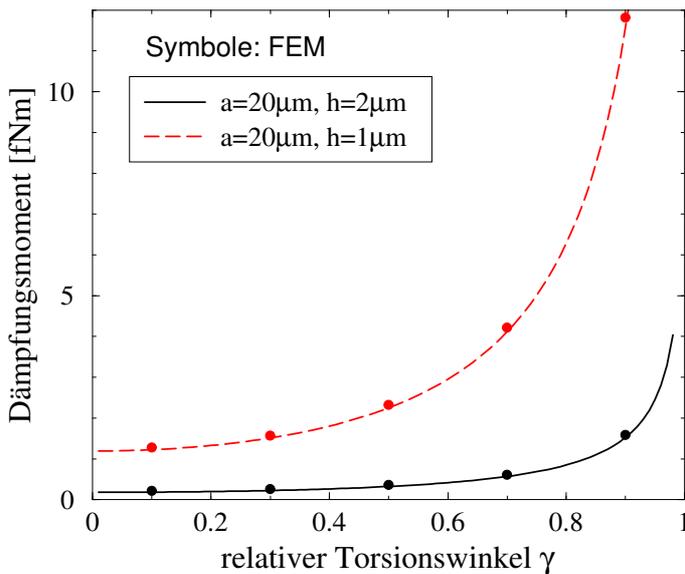


Abbildung 5.4: Dämpfungsmoment auf eine 2D-Torsionsplatte in Abhängigkeit vom relativen Torsionswinkel γ ($\omega=1\text{kHz}$, $\tau=0.84$). Vergleich der analytischen Lösung (Linien) mit FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung (Symbole).

Dieses Beispiel zeigt klar den Vorteil eines physikalisch basierten Kompaktmodells gegenüber einem Fitmodell, da es auch bei veränderten Rahmenbedingungen noch verlässliche Ergebnisse liefert. Beim Randmodell von Veijola (siehe Seite 79) führt eine Verlängerung der Plattenabmessung bei großen Torsionswinkeln zum Anschlag, so daß es für große Torsionswinkel nicht mehr anwendbar ist.

5.1.2 Analytische Lösungen mit Lochmodellen

Bei großen, regelmäßig perforierten Platten wie in Abbildung 4.4 kann der Randeffect meist vernachlässigt werden, denn das Dämpfungsverhalten wird im wesentlichen von der

Geometrie der Lochzellen bestimmt. In diesem Abschnitt wird der Beitrag der Reynoldsgleichung und der Beitrag der einzelnen Kompaktmodelle auf die Dämpfungskraft einer ringförmigen Lochzelle wie in Abbildung 5.5 analytisch berechnet. Diese Informationen erlauben durch analytische Betrachtungen geeignete Parameter für das Plattendesign festzulegen, was im folgenden für einige Beispielgeometrien graphisch veranschaulicht wird.

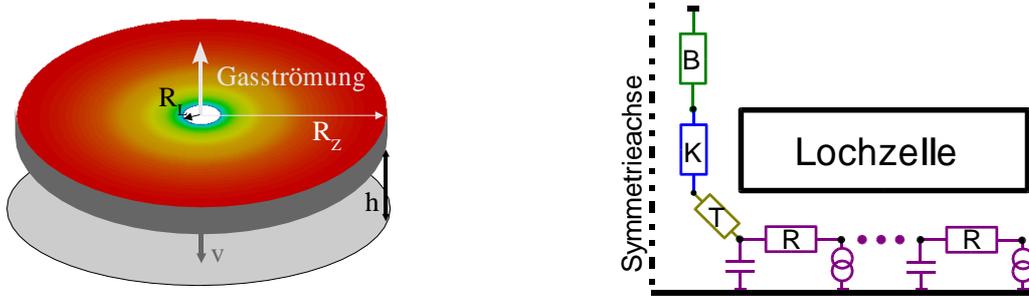


Abbildung 5.5: Links: Druckverteilung unter einer ringförmigen Lochzelle. Rechts: Ersatzschaltbild zur Modellierung der Dämpfungskraft auf eine Lochzelle mit Hilfe der Reynoldsgleichung und von Kompaktmodellen für den Locheffekt.

Wir betrachten eine ringförmige Lochzelle, da die Kreissymmetrie eine analytische Lösung der inkompressiblen Reynoldsgleichung erlaubt. Die Lochzelle besitzt den Lochradius R_L , die Lochfläche A_L , den Zellenradius R_Z , die Zellenfläche $A_Z = A_L + A_P$ und den Perforationsgrad $\alpha = R_L/R_Z = \sqrt{A_L/A_Z}$. Die Randbedingung am Zellenrand ist dabei so gewählt, daß die Strömung in der Zelle nur durch das Loch der Zelle entweichen kann, somit keine Strömung zwischen benachbarten Zellen auftritt, und sich die Strömungsrate $Q_{rey} = v_p \cdot A_P$ unter der Lochzelle aus dem Produkt der Plattengeschwindigkeit v_p und der Plattenfläche A_P einer Lochzelle ergibt.

Die Druckverteilung unter der Lochzelle in Abbildung 5.5 links wird nicht nur durch die Reynoldsgleichung bestimmt, sondern auch durch die Kompaktmodelle in Abbildung 5.5 rechts, welche die Randbedingung am Loch $p_L = p(r = R_L)$ vorgeben. Integration der Druckverteilung über die Plattenfläche ergibt die Dämpfungskraft auf eine Lochzelle $F = \int_{A_P} (p + p_L) \cdot da + F_S = F_R + F_K + F_B + F_T + F_S$:

$$F_R = F_{\odot} = \eta v_P \cdot \frac{3}{2\pi} \frac{A_Z^2}{h^3} (4\alpha^2 - \alpha^4 - 3 - 4 \ln \alpha) \quad (5.16)$$

$$F_K = Z_K \cdot (Q_{rey} + Q_{rel}) \cdot A_P = \eta v_P \cdot \frac{8}{\pi} \frac{L_K}{R_L^4} A_Z A_P \quad (5.17)$$

$$F_B = Z_B \cdot (Q_{rey} + Q_{rel}) \cdot A_P = \eta v_P \cdot \frac{3}{R_L^3} A_Z A_P \quad (5.18)$$

$$F_T = Z_T \cdot Q_{rey} \cdot A_P = \eta v_P \cdot 0.84 \frac{3\pi}{h^2 l_L} A_P^2 \quad (5.19)$$

$$F_S = Z_K \cdot (Q_{rey} + Q_{rel}) \cdot A_L = \eta v_P \cdot \frac{8}{\pi} \frac{L_K}{R_L^4} A_Z A_L \quad (5.20)$$

Der aus der Reynoldsgleichung resultierende Beitrag F_R kann aus Gleichung 3.78 berech-

net werden; die Beiträge der Kompaktmodelle für den Kanalwiderstand Z_K , den Blendenwiderstand Z_B , den Transitwiderstand Z_T und die Scherkraft F_S können der Übersicht der Kompaktmodelle in Abschnitt 4.3 entnommen werden. Dabei wurde auch die Flußrate $Q_{rel} = v_p \cdot A_L$ durch das Loch aufgrund des bewegten Kanals berücksichtigt.

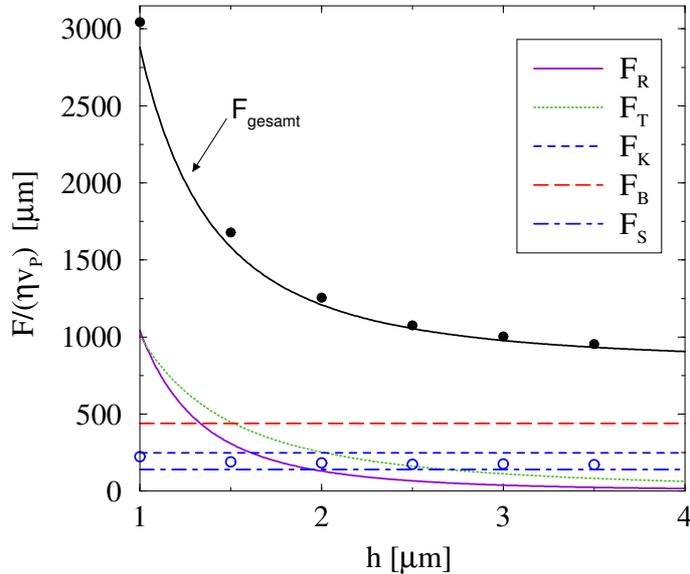


Abbildung 5.6: Anteile der Kompaktmodelle an der gesamten Dämpfungskraft für eine ringförmige Lochzelle mit $L_K = 2\mu\text{m}$, $R_L = 3\mu\text{m}$, $R_Z = 5\mu\text{m}$ ($\alpha=0.6$). Symbole kennzeichnen die Ergebnisse der FEM-Simulationen für F_{gesamt} und F_S .

In Abbildung 5.6 sind diese einzelnen Beiträge als Funktion des Plattenabstandes h für eine spezielle Lochzellegeometrie graphisch dargestellt. Dabei fällt zunächst die sehr gute Übereinstimmung des analytischen Modells mit der durch die Symbole gekennzeichneten Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mittels FEM auf. Aus dem FEM-Modell lassen sich zwei Vergleichsgrößen direkt extrahieren: die gesamte Kraft F_{gesamt} auf die Plattenunterseite und die Scherkraft F_S auf die Lochkanalwand. Bemerkenswert ist, daß der Transitwiderstand im dargestellten Bereich den Beitrag der Reynoldsgleichung übertrifft und die Scherkraft mehr als die Hälfte des Kraftbeitrags des Kanalwiderstandes ausmacht. Eine geringere Plattendicke L_K würde in diesem Fall die Dämpfung kaum reduzieren, da der Blendenwiderstand den größten Beitrag liefert.

Die Lochzelle in Abbildung 5.7 links hat denselben Perforationsgrad wie die vorher betrachtete, sie ist jedoch viel kleiner und hat dadurch ein ganz anderes Dämpfungsverhalten. Solange die Spalthöhe h nicht deutlich unter $1\mu\text{m}$ abnimmt, kann der nichtlineare Einfluß der Reynoldsgleichung auf die Dämpfung vernachlässigt werden. Aus den Kompaktmodellen für den Kanal- und Blendenbereich läßt sich deshalb eine Dämpfungskonstante berechnen, die unabhängig vom Luftspalt h ist. Das transiente Verhalten der Platte kann dann als lineares Feder-Masse-Dämpfer-System sehr einfach modelliert werden. Im Gegensatz dazu dominiert bei der schwächer perforierten Lochzellegeometrie (in Abbildung 5.7 rechts) die mit der Reynoldsgleichung beschriebene Squeeze-Film-Dämpfung. Der Kanalwiderstand ist gegenüber dem Transit- und dem Blendenwiderstand vernachlässigbar.

Die graphische Veranschaulichung der Beiträge der einzelnen Kompaktmodelle zur Dämpfungskraft auf eine Lochzelle gibt wertvolle Einblicke, welche Designparameter welchen Einfluß auf das Dämpfungsverhalten haben, und erlaubt Rückschlüsse auf den

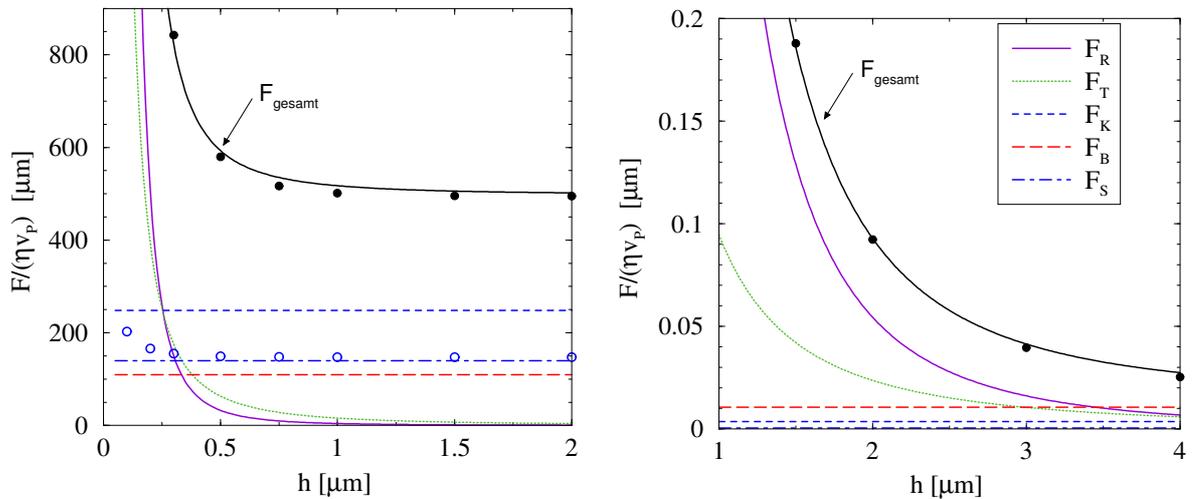


Abbildung 5.7: Anteile der Kompaktmodelle an der gesamten Dämpfungskraft für eine ringförmige Lochzelle der Dicke $L_K = 2\ \mu\text{m}$. Links: $R_L=0.75\ \mu\text{m}$, $R_Z=1.25\ \mu\text{m}$ ($\alpha=0.6$). Rechts: $R_L=5\ \mu\text{m}$, $R_Z=15\ \mu\text{m}$ ($\alpha=0.33$). Symbole kennzeichnen die Ergebnisse der FEM-Simulationen für F_{gesamt} und F_S .

besten Ansatz zur Modellierung und Optimierung der Dämpfung. Vernachlässigt wurde dabei die Gasströmung zwischen den Zellen. Insbesondere am Plattenrand wird die Dämpfung dadurch überschätzt. Soll der Druckabfall am Plattenrand zumindest durch die triviale Randbedingung (Druck am Plattenrand entspricht dem Umgebungsdruck) berücksichtigt werden, bietet es sich an, die Kompaktmodelle für den Druckabfall in einem Loch auf die modifizierte Reynoldsgleichung anzuwenden.

5.1.3 Modifizierte Reynoldsgleichung mit Lochmodellen

Die modifizierte Reynoldsgleichung aus Abschnitt 3.2.4 ist eine besondere Variante des Mixed-Level-Ansatzes, da die Kompaktmodelle für den Locheffekt direkt in die Gleichung integriert werden können. Mit ihr ist es möglich, einen analytischen Ausdruck für die Dämpfungskraft auf eine regelmäßig perforierte Rechteckplatte abzuleiten.

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe des analytischen Ausdrucks für die Dämpfungskraft bei festgelegtem Perforationsgrad ein optimaler Lochdurchmesser abgeleitet werden, bei dem die Dämpfung der Platte minimal ist. Prinzipiell gilt, je stärker eine Platte perforiert ist, desto geringer ist deren Dämpfung. Zur Gewährleistung der mechanischen Stabilität der Platte ist jedoch meist ein maximaler Perforationsgrad α vorgegeben. Abbildung 5.8 zeigt, daß die Steifigkeit einer regelmäßig perforierten Platte nahezu unabhängig von der Anzahl der Löcher ist und im wesentlichen durch den Perforationsgrad α festgelegt ist. Für die mechanische Stabilität ist es folglich unerheblich, ob die Platte mit vielen kleinen Löchern oder mit wenigen großen Löchern perforiert ist. Für die fluidische Dämpfung gibt es jedoch einen optimalen Lochdurchmesser mit minimaler Dämpfung. Bei gegebener Plattengröße ist der entscheidende Parameter der modifizierten Reynoldsgleichung

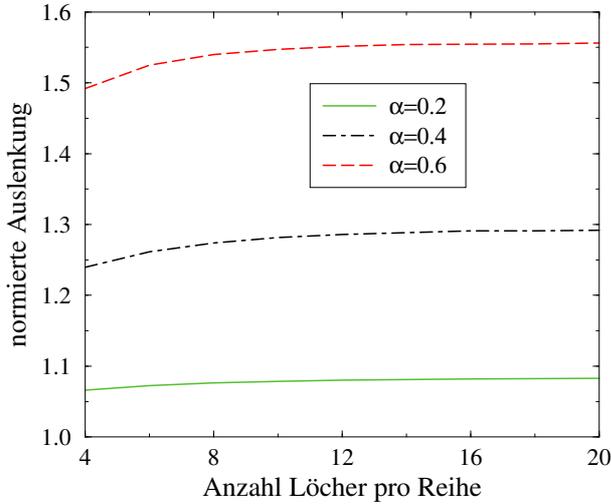


Abbildung 5.8: Mittlere Auslenkung aller Knoten einer fest eingespannten, regelmäßig perforierten Platte ($18 \times 18 \times 2 \mu\text{m}$) unter Druckbelastung, normiert auf die Auslenkung einer unperforierten Platte.

die charakteristische Länge L_{MR} aus Gleichung 3.83, die hier nochmals angegeben wird:

$$L_{MR}^2 = \frac{Z_Z}{12\eta/h^3} \cdot A_Z \quad (5.21)$$

Um einen analytischen Ausdruck für den optimalen Lochdurchmesser berechnen zu können, nehmen wir an, die Lochzelle hätte die Form eines Kreisrings (Abbildung 5.9). Damit gilt für den Perforationsgrad $\alpha = R_L/R_Z$ und die Zellenfläche $A_Z = \pi R_Z^2$. Der Druck unter einer ringförmigen Lochzelle entsteht durch die radiale Strömung unter der Zelle und der vertikalen Strömung durch das Loch. Aus diesen beiden Strömungen setzt sich auch der fluidische Widerstand der Lochzelle $Z_Z = Z_R + Z_L$ zusammen:

$$Z_R = \frac{\tilde{p}}{Q} = \frac{F_{\odot}/A_Z}{v_P \cdot A_Z} = \frac{3\eta}{2\pi h^3} (4\alpha^2 - \alpha^4 - 3 - 4 \ln \alpha) \quad (5.22)$$

Dabei ist \tilde{p} der mittlere Druck unter der Lochzelle und F_{\odot} aus Gleichung 3.78 der Anteil der Squeeze-Film-Dämpfung an der Dämpfungskraft auf die Lochzelle, der von der radialen Strömung unter der Zelle verursacht wird.

Der Lochwiderstand Z_L setzt sich aus allen Kompaktmodellen aus Abschnitt 4.3 zusammen. Um den optimalen Lochradius analytisch berechnen zu können, wird hier als Näherung nur der Kanalwiderstand eingesetzt und die Beiträge der übrigen Kompaktmodelle vernachlässigt:

$$Z_L \approx Z_K = \frac{8}{\pi} \eta \frac{L_K}{R_L^4} \quad (5.23)$$

Damit ergibt sich folgende charakteristische Länge bzw. effektive Zellenfläche:

$$L_{MR}^2 = \left(\frac{1}{8} (4\alpha^2 - \alpha^4 - 3 - 4 \ln \alpha) + \frac{2h^3 L_K}{3R_L^4} \right) \frac{R_L^2}{\alpha^2} \quad (5.24)$$

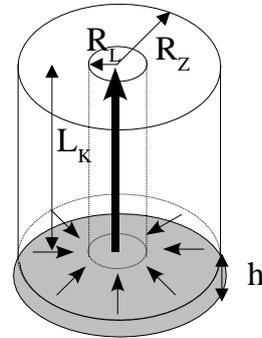


Abbildung 5.9: Geometrie einer ringförmigen Lochzelle.

Der optimale Lochradius R_{opt} für die minimale Dämpfung ergibt sich aus der Nullstelle der ersten Ableitung der charakteristischen Länge L_{MR} nach dem Lochradius R_L :

$$R_{opt} = \sqrt[4]{\frac{16}{3} \frac{L_K h^3}{(4\alpha^2 - \alpha^4 - 3 - 4 \ln \alpha)}} \quad (5.25)$$

Die Frage ist nun, wie sich dieses Ergebnis auf quadratische Lochzellen übertragen läßt. Dazu wurde die Dämpfungskraft, die sich nach der inkompressiblen Reynoldsgleichung für eine quadratische Lochzelle ergibt, mit FEM berechnet. Vorausgesetzt wurde dabei, daß der Druck am Lochrand gleich dem Umgebungsdruck ist. Der Vergleich mit der analytischen Lösung für eine ringförmige Lochzelle, welche die gleiche Loch- und Zellenfläche wie die quadratische Lochzelle besitzt, liegt nach Abbildung 5.10 nur im Promillebereich. Deshalb kann der Ausdruck für Z_R in Gleichung 5.22 und F_R in Gleichung 5.17 auch für quadratische Lochzellen verwendet werden.

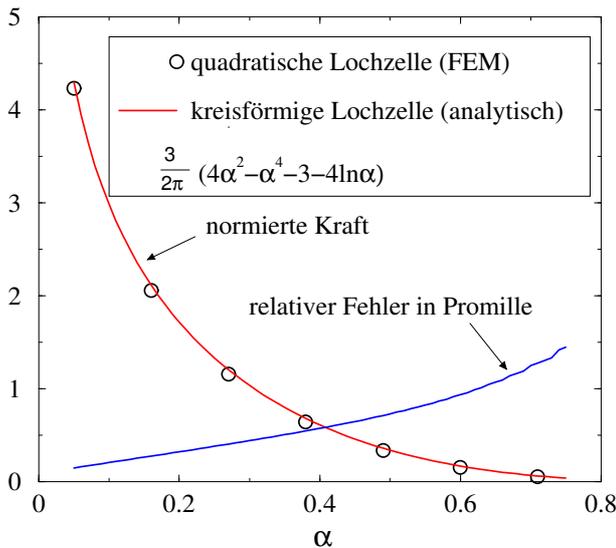


Abbildung 5.10: Der analytische Ausdruck nach Gleichung 5.17 für die Dämpfungskraft auf eine ringförmige Lochzelle stimmt sehr gut mit der numerischen Lösung für eine quadratische Lochzelle mittels FEM überein. Dargestellt ist die normierte Kraft $F/(\eta v_p A_Z^2/h^3)$.

Der Lochwiderstand für ein quadratisches Loch mit dem Durchmesser a_L ist nach Gleichung 4.5:

$$Z_L \approx Z_K = \frac{12}{0.42} \eta \frac{L_K}{a_L^4} \quad (5.26)$$

Somit ergibt sich für eine minimale Dämpfung von perforierten Platten mit quadratischen Löchern und Perforationsgrad α folgender optimaler Lochdurchmesser:

$$a_{opt} = \sqrt[4]{\frac{8\pi}{0.42} \frac{L_K h^3}{(4\alpha^2 - \alpha^4 - 3 - 4 \ln \alpha)}} \quad (5.27)$$

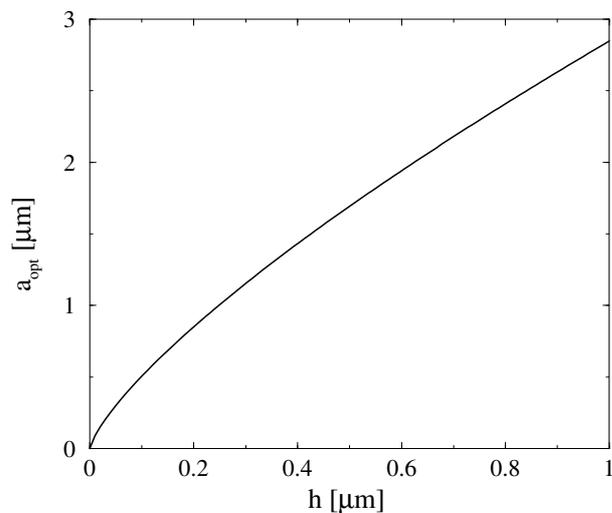


Abbildung 5.11: Lochdurchmesser für minimale Dämpfung einer mit quadratischen Löchern regelmäßig perforierten Platte ($\alpha = 1/3$, $L_K = 2\mu\text{m}$) in Abhängigkeit von der Spalthöhe h .

Abbildung 5.11 zeigt diesen Zusammenhang für eine bestimmte Lochzellengeometrie graphisch. Mit abnehmendem Luftspalt h sollten die Löcher kleiner werden, denn bei kleinem Luftspalt h dominiert die Squeeze-Film-Dämpfung. Das bedeutet, daß laterale Gasströmungen unter der Platte einen großen Druckabfall verursachen, der die Plattenbewegung stark dämpft und durch viele kleine Löcher minimiert werden kann. Bei großem Luftspalt h bestimmt der Druckabfall in den Löchern die Dämpfung, die durch wenige große Löcher reduziert werden kann.

Zu beachten ist, daß die hier vorgestellte analytische Lösung der inkompressiblen modifizierten Reynoldsgleichung nur für Platten gültig ist, die aus regelmäßig angeordneten, quadratischen oder ringförmigen Lochzellen zusammengesetzt sind. Sollen auch unregelmäßige Perforationen oder die Kompressibilität der Luft berücksichtigt werden, so bietet sich die numerische Lösung des Mixed-Level-Modells an, dessen Leistungsvermögen im folgenden Abschnitt demonstriert wird.

5.2 Numerische Lösungen des Mixed-Level-Problems

Analytisch läßt sich die Reynoldsgleichung nur für einfache Geometrien lösen. Zudem müssen bei der linearisierten Reynoldsgleichung 3.43 kleine Plattenauslenkungen und kleine Druckvariationen vorausgesetzt werden, bei der inkompressiblen Reynoldsgleichung 3.60 langsame Druckvariation. Diese Einschränkungen kann man umgehen, wenn die Kompaktmodelle aus Kapitel 4 mit einem numerischen Ansatz zur Lösung der Reynoldsgleichung kombiniert werden. Dazu wurde in dieser Arbeit die Reynoldsgleichung mit einem in Anhang A beschriebenen Finite-Netzwerk-Ansatz modelliert.

Zunächst wird dieser Mixed-Level-Ansatz im folgendem Abschnitt anhand einfacher Teststrukturen mit FEM-Vergleichsrechnungen überprüft. Dabei wurden die ersten Teststrukturen so gewählt, daß die Kompaktmodelle für den Rand- und Locheffekt möglichst einzeln überprüft werden können. Die letzten beiden Teststrukturen wurden realitätsnah gewählt, aber unter der Randbedingung, daß die FEM-Vergleichsrechnung nach wenigen Tagen Rechenzeit verfügbar ist.

Zur Überprüfung der Kompaktmodelle im Schlupfströmungsbereich wurde die Schlupfrandbedingung (Gleichung 3.89) durch einen Relaxationsalgorithmus im Navier-Stokes-Löser FLOTRAN [5] implementiert. Dabei wird iterativ die Schlupfgeschwindigkeit an jeder Wand angepaßt, bis die Schlupfrandbedingung erfüllt ist.

5.2.1 Randmodell

Zur Überprüfung der Kompaktmodelle sollte nicht nur die Dämpfungskraft, also der integrale Wert der Druckverteilung mit FEM-Vergleichsrechnungen, übereinstimmen, sondern auch der Druckverlauf an den einzelnen Freiheitsgraden oder Knoten des Modells. Abbildung 5.12 zeigt die Druckverteilung unter einer runden Platte und die Lage der numerierten Knoten. Der zeitliche Druckverlauf an jedem dieser Knoten bei harmonischer Auslenkung der Platte ist in Abbildung 5.13 dargestellt. Die

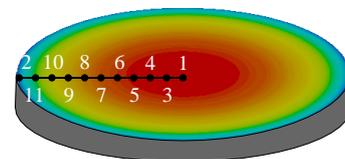


Abbildung 5.12: Druckverteilung unter einer Kreisplatte mit Randmodell. Die Nummern bezeichnen die Knoten.

Kurven zeigen die Ergebnisse des Mixed-Level-Modells, die sehr gut mit den Werten der transienten FEM-Simulationen übereinstimmen. Das Kompaktmodell für den Randwiderstand erhöht den Druck gleichmäßig für jeden Knoten. Die größte relative Änderung durch das Randmodell erfährt folglich der Randknoten mit der Nummer 2. Abbildung 5.14 zeigt den mit der Mixed-Level-Methode berechneten Druck an diesem Randknoten im Vergleich zu FEM-Simulationen. Danach skaliert das Randmodell sehr gut mit den wichtigen Geometrieparametern Plattenradius R und Luftspalt h .

Zur Überprüfung der Erweiterung des Kompaktmodells für Schlupfströmung wurde die Dämpfungskraft bei verschiedenen Umgebungsdrücken mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichung mit Schlupfrandbedingung berechnet. Abbildung 5.15 verdeutlicht den Einfluß der Schlupfströmung bei verschiedenen Umgebungsdrücken im Vergleich zur hydrodynamischen Lösung ($Kn = 0$) und die sehr gute Übereinstimmung des Mixed-Level-Modells mit der FEM-Referenzsimulation. Dabei ist zu beachten, daß die Knudsenzahl Kn sowohl mit abnehmendem Luftspalt h als auch mit abnehmendem Umgebungsdruck zunimmt.

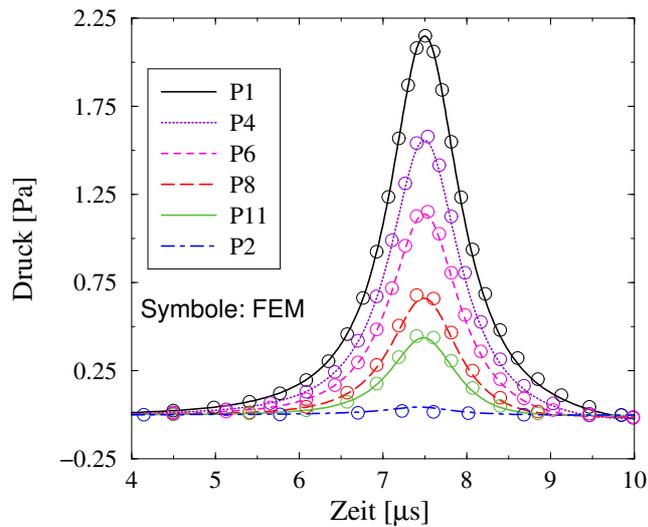


Abbildung 5.13: Vergleich der zeitlichen Druckentwicklung an verschiedenen Knoten unter einer runden Platte bei harmonischer Auslenkung. Die Lage der Knotennummern entspricht Abbildung 5.12 ($R = 50\mu\text{m}$, $h_0 = 1\mu\text{m}$, $\Delta h/h_0 = 0.95$, $\omega = 100\text{kHz}$).

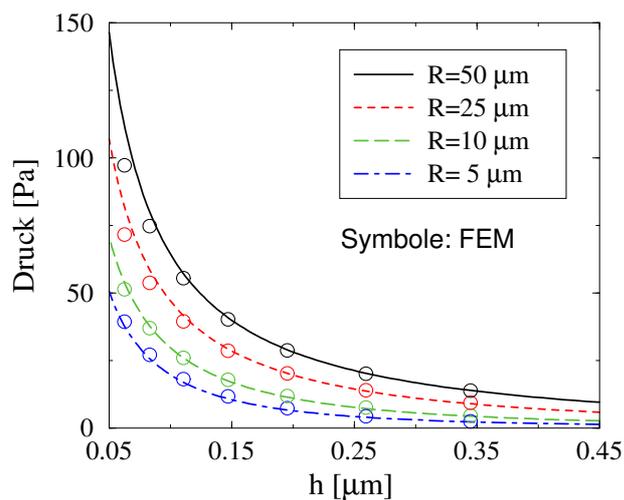


Abbildung 5.14: Vergleich des Mixed-Level-Modells mit FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung für den Druck am Rand einer runden Platte bei konstanter Plattengeschwindigkeit $v_P = 0.1\text{ m/s}$ für verschiedene Plattenradien R .

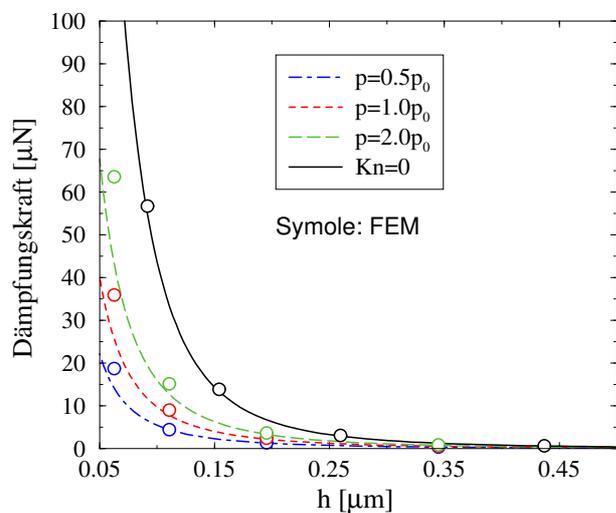


Abbildung 5.15: Vergleich des Mixed-Level-Modells mit FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung (Symbole) für die Dämpfungskraft auf eine runde Platte mit Radius $R = 50\mu\text{m}$ bei konstanter Geschwindigkeit. Die Graphik zeigt auch den Einfluß der Schlupfströmung bei verschiedenen Umgebungsdrücken im Vergleich zur hydrodynamischen Lösung ($Kn = 0$).

5.2.2 Lochmodelle

Auch zur Überprüfung der Lochmodelle ist der Druck am Lochrand der sensiblere Referenzwert als die Dämpfungskraft. Wird beispielsweise eine ringförmige Lochzelle aus Abbildung 5.5 links betrachtet, so kann auch mit dem kinetischen Blendenmodell aus Abschnitt 3.1.3 eine sehr gute Übereinstimmung der Dämpfungskraft mit FEM-Simulationen erzielt werden, wenn der empirische Fitparameter des Modells λ_{bl} (aus Gleichung 5.43 in [131]) für jeden Lochdurchmesser geschickt angepaßt wird. Betrachtet man hingegen in diesem Fall den Druckverlauf am Lochrand in Abbildung 5.16, so stimmt nur das viskose Blendenmodell mit den FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung überein.

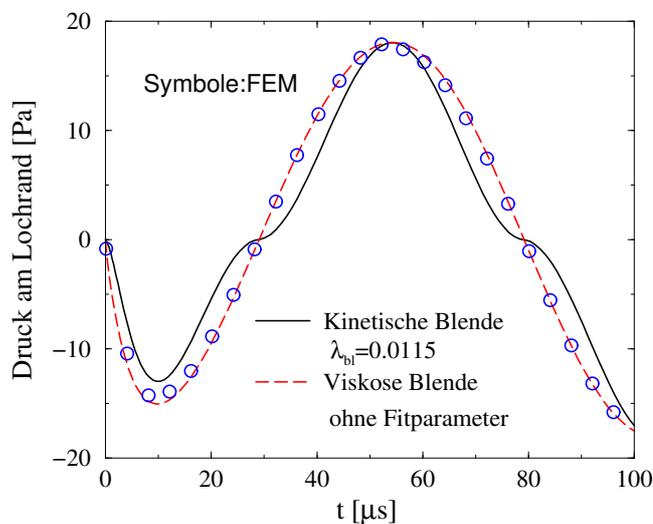


Abbildung 5.16: Vergleich von FEM-Simulationen (Symbole) der Navier-Stokes-Gleichung mit dem Mixed-Level-Modell (kinetischen bzw. viskosen Blendenmodell) für den Druck am Lochrand einer ringförmigen Lochzelle bei harmonischer Auslenkung ($R_Z = 50\mu\text{m}$, $R_L = 5\mu\text{m}$, $\omega = 10\text{kHz}$, $h = 1\mu\text{m}$, $\Delta h/h = 0.01$).

Zur Überprüfung der Schlupffaktoren der Kompaktmodelle für verdünnte Gase wurde die Dämpfungskraft für verschiedene Geometrien einer ringförmigen Lochzelle mit und ohne Schlupfströmung berechnet. Abbildung 5.17 zeigt, daß die Schlupfströmung einen

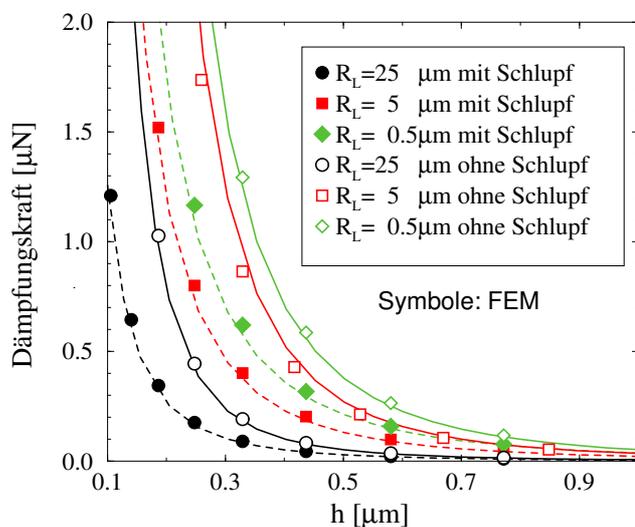


Abbildung 5.17: Vergleich des Mixed-Level-Modells mit FEM-Simulationen (Symbole) der Navier-Stokes-Gleichung für die Dämpfungskraft auf eine ringförmige Lochzelle für verschiedene Lochradien R_L bei konstanter Geschwindigkeit mit (gestrichelte Linien) und ohne Schlupfströmung ($R_Z = 50\mu\text{m}$, $L_K = 2\mu\text{m}$).

signifikanten Einfluß auf die Dämpfungskraft hat und dieser durch die Kompaktmodelle für verschiedene Geometrieparameter sehr gut beschrieben wird.

5.2.3 Rand- und Lochmodelle

Gelochte Kreisscheibe

Die einfachste Teststruktur, bei der die Kombination aus Rand- und Lochmodellen getestet werden kann, ist die gelochte Kreisplatte aus Abbildung 5.18. Nähert sich die Platte mit konstanter Geschwindigkeit dem Substrat, wird die Luft unter der Platte komprimiert oder entweicht über das Loch bzw. über den Rand. Abbildung 5.19 zeigt, wie mit zunehmendem Lochdurchmesser der Anteil des Massenflusses durch das Loch zunimmt. Bei der Platte mit kleinem Loch fließt die verdrängte Luft unter der Platte überwiegend über den Plattenrand.

Bei der Platte mit großem Loch hingegen fließt annähernd die Hälfte der verdrängten Luft durch das Loch. Bei sehr kleinem Luftspalt nimmt der Massenfluß dann aufgrund der Kompressibilität der Luft ab. Man beachte in Abbildung 5.19, daß mit dem Mixed-Level-Modell auch das betragsmäßige Maximum im Massenfluß durch das kleinste Loch bei einem Luftspalt $h \approx 0.5 \mu\text{m}$ modelliert werden kann.

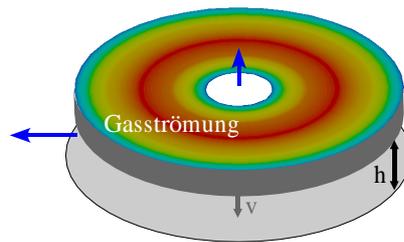


Abbildung 5.18: Druckverteilung unter einer gelochten Kreisplatte.

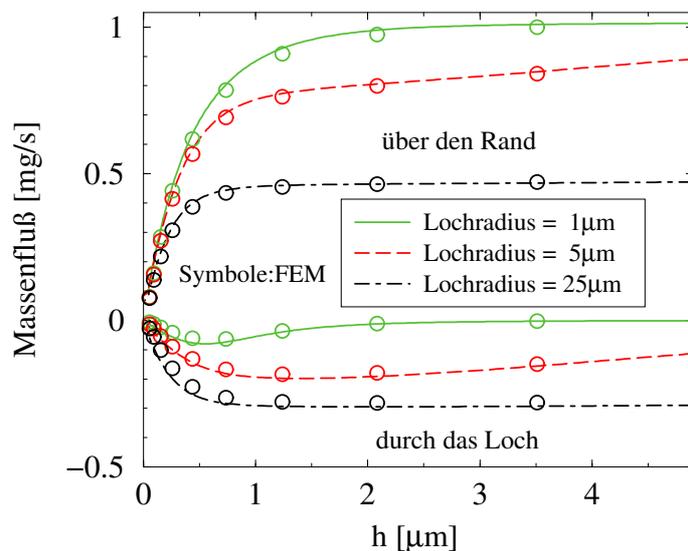


Abbildung 5.19: Vergleich des Mixed-Level-Modells mit FEM-Simulationen (Symbole) der Navier-Stokes-Gleichung für den zeitlichen Verlauf des Massenflusses über den Rand (positiv) und das Loch (negativ) einer gelochten Kreisscheibe für verschiedene Lochradien R_L (Geschwindigkeit $v_P = 0.1 \text{ m/s}$, Plattenradius $R = 50 \mu\text{m}$).

Regelmäßig perforierte Platte

Als realitätsnaher Demonstrator wurde die perforierte quadratische Platte ($18 \times 18 \mu\text{m}$) mit einer Dicke von $2 \mu\text{m}$ aus Abbildung 5.20 gewählt. Sie ist aus regelmäßig angeordneten,

quadratischen Lochzellen aufgebaut. Der Perforationsgrad $\alpha = 1/3$, der das Verhältnis des Lochdurchmessers zum Zellendurchmesser angibt, ist bei allen untersuchten Designvarianten konstant.

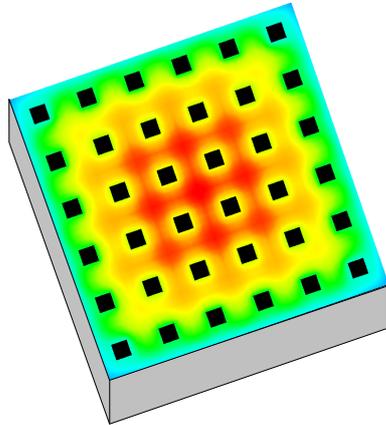


Abbildung 5.20: Druckverteilung unter einer quadratischen Platte mit 36 regelmäßig angeordneten quadratischen Löchern und dem Perforationsgrad $\alpha = 1/3$.

Untersucht wurde der Einfluß des Zellen- bzw. Lochdurchmessers auf das Dämpfungsverhalten. Was ändert sich, wenn die Platte statt mit wenigen großen Löchern mit vielen kleinen Löchern perforiert wird? Abbildung 5.21 links zeigt die Dämpfungskraft für verschiedene Lochdurchmesser a_L bei harmonischer Auslenkung der Platte.

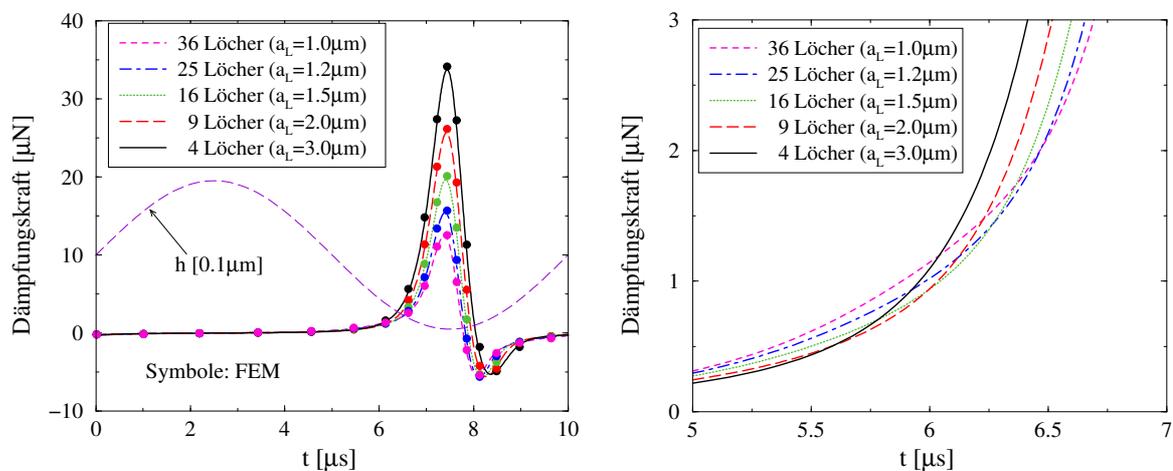


Abbildung 5.21: Links: Vergleich des Mixed-Level-Modells mit FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung für die Dämpfungskraft auf eine gelochte Platte unter harmonischer Auslenkung bei variabler Zellengröße, aber konstantem Perforationsgrad α . Rechts: Ausschnitt der Dämpfungskraft des Mixed-Level-Modells bei $t \approx 6 \mu\text{s}$, $h \approx 0.44 \mu\text{m}$.

Mit abnehmendem Luftspalt h nimmt die Dämpfung zu. Sie kann jedoch reduziert werden, wenn die Platte mit vielen kleinen Löchern perforiert wird, da die Dämpfungskraft bei kleinem Luftspalt von der Squeeze-Film-Dämpfung bestimmt wird. Das heißt, der Druck unter der Platte wird von der lateralen Luftströmung unter der Platte bzw. vom Poiseuille-Term ($\sim h^{-3}$) der Reynoldsgleichung 3.41 bestimmt und kann mit möglichst vielen Löchern in der Platte minimiert werden.

Bei großem Luftspalt h spielt die Squeeze-Film-Dämpfung eine untergeordnete Rolle. Durch den Druckabfall im Loch wird die Dämpfung bestimmt, die dann geringer ist, wenn wenige Löcher mit großem Durchmesser verwendet werden.

In einem bestimmten Luftspaltbereich (Abbildung 5.21 rechts) gehen diese beiden Bereiche ineinander über. Deshalb existiert für jeden Luftspalt ein optimaler Lochdurchmesser, für den die Dämpfungskraft bei gegebenem Perforationsgrad α minimal ist.

Diese Ergebnisse bestätigen sehr schön die analytische Gleichung 5.27 bzw. Abbildung 5.11 für den optimalen Lochdurchmesser. Besser erkennen läßt sich dies in Abbildung 5.22, in der im Gegensatz zur Abbildung 5.21 die Dämpfungskraft auf die Platte über den Luftspalt h und nicht über die Zeit t aufgetragen ist. Bei $h = 0.2\mu\text{m}$ tritt die geringste Dämpfung beim kleinsten Lochdurchmesser $a_L = 1\mu\text{m}$ auf. Mit zunehmendem Luftspalt nimmt der Lochdurchmesser, bei dem die Dämpfungskraft auf die Platte minimal ist, zu, bis bei $h = 1\mu\text{m}$ die Dämpfung beim größten Lochdurchmesser $a_L = 3\mu\text{m}$ am geringsten ist. Diese Beobachtungen bestätigen Gleichung 5.27 bzw. Abbildung 5.11.

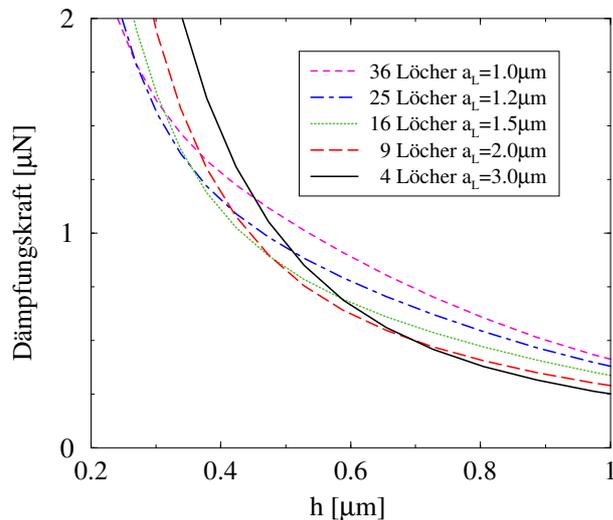


Abbildung 5.22: Dämpfungskraft auf eine $18 \times 18 \times 2\mu\text{m}$ Platte, die regelmäßig perforiert ist, bei harmonischer Auslenkung. Diese wurde mit Hilfe von FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung berechnet, wobei die Anzahl der Löcher und die Lochdurchmesser variiert wurden. Das Verhältnis der gesamten Lochfläche zur Plattenfläche ist dabei stets konstant ($\alpha = 1/3$).

Torsionsplatte

In Hinblick auf den Torsionsschalter, den in Abschnitt 1.4 diskutierten Demonstrator, wurde als Teststruktur ein einfaches Modell einer Torsionsplatte ($36 \times 12 \times 2\mu\text{m}$) gewählt. Damit soll gezeigt werden, daß der Mixed-Level-Ansatz nicht nur für vertikale Bewegungen, sondern auch für Torsionsbewegungen einsetzbar ist.

Die Torsionsplatte ist regelmäßig mit 12 quadratischen Löchern perforiert ($\alpha = 1/3$). Der Abstand der Torsionsachse vom Substrat ist $h_0 = 2\mu\text{m}$. Abbildung 5.23 zeigt die Hälfte des FEM-Modells und die daraus berechnete Druckverteilung unter der Platte.

Aus diesem FEM-Modell wurde die Netzliste für das Finite-Netzwerk-Modell der Reynoldsgleichung erstellt, das zusammen mit den Kompaktmodellen das Mixed-Level-Modell ergibt. Abbildung 5.24 zeigt das Dämpfungsmoment auf die Torsionsplatte mit und ohne Löcher bei harmonischer Auslenkung mit kleiner ($\varphi = 2^\circ$ bzw. $\gamma = 0.31$) und großer ($\varphi = 5^\circ$ bzw. $\gamma = 0.78$) Amplitude.

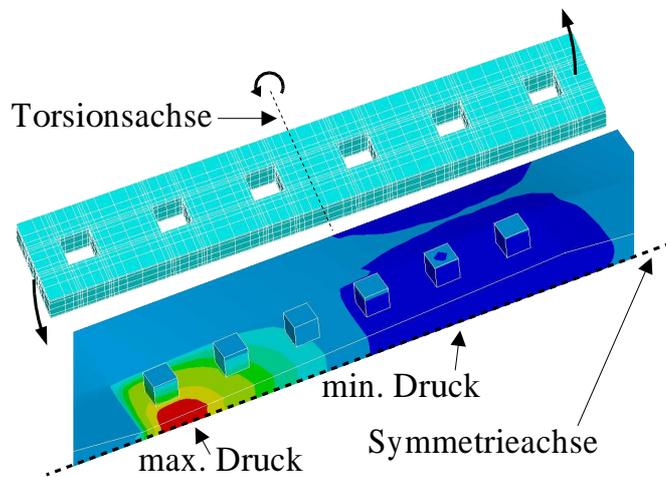


Abbildung 5.23: Oben: Die Hälfte der Torsionsplatte als FEM-Modell. Unten: Druckverteilung unter der Platte bei Torsion.

Das mit dem Mixed-Level-Modell in ca. 24s berechnete Dämpfungsmoment stimmt dabei gut mit dem Ergebnis der 24stündigen FEM-Simulation der Navier-Stokes-Gleichung überein.

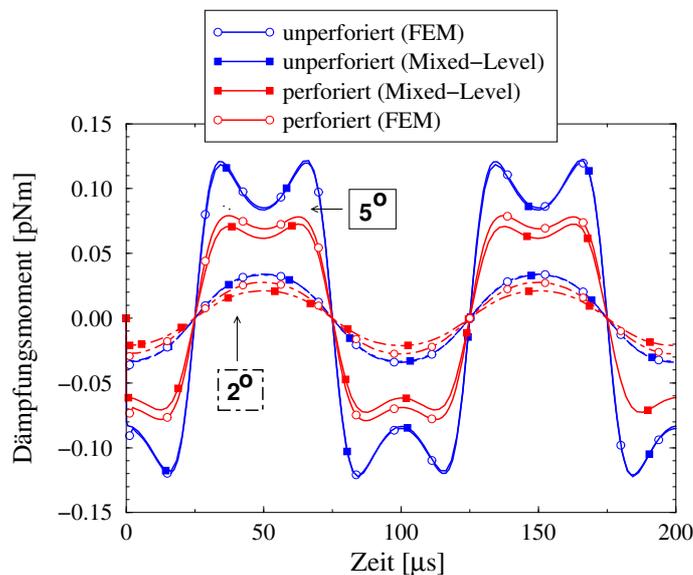


Abbildung 5.24: Vergleich des Mixed-Level-Modells mit FEM-Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung für das Dämpfungsmoment der Torsionsplatte mit und ohne Löcher.

Die verschiedenen Beispiele in diesem Abschnitt haben eindrucksvoll bestätigt, daß der Mixed-Level-Ansatz eine sehr effiziente Methode zur Berechnung der Dämpfung mikro-mechanischer Platten ist. Dabei können beliebige Plattengeometrien und Perforationen ebenso berücksichtigt werden wie Torsionsbewegung, Kompression oder verdünnte Gase.

6 Elektrostatische Antriebselemente

Elektrostatische oder *kapazitive* Aktoren, bei denen die Anziehungskraft zwischen zwei gegenpolig geladenen Elektroden nutzbar gemacht wird, sind als Antriebselemente in Mikrosystemen weit verbreitet. Dies beruht zum einen auf ihrer Kompatibilität zu den gängigen mikrotechnologischen Herstellungsverfahren und zum anderen darauf, daß sich in der Mikrostrukturtechnik Elektroden mit sehr geringen Abständen realisieren lassen. Dies ermöglicht es, durch Anlegen elektrischer Spannungen unter geringer Leistungsaufnahme und in sehr kurzer Zeit große Kräfte zu erzielen.

Dieses Antriebsprinzip nutzt auch unser Demonstrator aus Abschnitt 1.4, der Torsionschalter. Die dafür benötigten Kompaktmodelle für den elektrostatischen Antrieb werden in diesem Kapitel abgeleitet. Dazu wird zunächst auf die wichtigsten Grundlagen der Elektrostatik eingegangen und die elektrostatische Kraft, die mit elementaren Antriebselementen erzeugt werden kann, berechnet. Das wichtigste Ergebnis ist das parametrisierte Kompaktmodell für die elektrostatische Kraft auf eine Lochzelle einer perforierten Platte unter Berücksichtigung der Streufelder.

6.1 Elektrostatische Grundlagen

Die grundlegenden Gleichungen für die Elektrostatik sind die folgenden beiden Maxwellgleichungen:

$$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \varrho \quad (6.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (6.2)$$

Aus der Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes \mathbf{E} folgt die Existenz eines skalaren elektrostatischen Potentialfeldes Φ :

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (6.3)$$

Zusammen mit Gleichung 6.1 folgt daraus die Poissongleichung:

$$\operatorname{div}(\epsilon \nabla\Phi) = -\varrho \quad (6.4)$$

Dabei bezeichnet ϱ die Raumladungsdichte, ϵ die Dielektrizitätskonstante und \mathbf{E} den Vektor der elektrischen Feldstärke. In dem häufig auftretenden Fall, daß keine Raumladungen zwischen den Elektroden bzw. Leitern vorhanden sind ($\varrho = 0$) und die Dielektrizitätskonstante ϵ räumlich konstant ist, vereinfacht sich die Poissongleichung zur Laplace-Gleichung:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.5)$$

Eine Anordnung zweier elektrischer Leiter, zwischen denen sich ein elektrisches Feld ausbilden und mit denen elektrische Energie gespeichert werden kann, nennt man Kondensator. Das Prinzip des elektrostatischen Antriebs beruht darauf, diese Energie teilweise in mechanische Energie umzuwandeln. Wichtige Größen eines Kondensators sind die Ladung Q und die Kapazität C

$$C = \frac{Q}{U} \quad (6.6)$$

und die speicherbare elektrostatische Energie W :

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \quad (6.7)$$

Dabei ist U die elektrische Spannung oder Potentialdifferenz zwischen den beiden Leitern. Weitere Erläuterungen geben zahlreiche Lehrbücher zur Elektrostatik (z.B. Simonyi [146]).

6.2 Elementare Antriebs Elemente

Im folgenden werden zwei elementare Antriebs Elemente, der Plattenkondensator und der Torsionsplattenkondensator betrachtet. Die bewegliche Elektrode wird dabei als starrer Körper mit eindimensionaler Auslenkungsmöglichkeit betrachtet: z für die Translation des Plattenkondensators bzw. φ für die Drehung um eine feste Achse beim Torsionsplattenkondensator.

Von besonderem Interesse sind dabei die Kraft F bzw. das Drehmoment M , die aus der Änderung der Kapazität C bzw. der elektrostatischen Energie W berechnet werden können. Bei gegebener Spannungssteuerung gelten folgende Zusammenhänge:

$$W(U, z) = \frac{1}{2}C(z)U^2 \quad (6.8)$$

$$W(U, \varphi) = \frac{1}{2}C(\varphi)U^2 \quad (6.9)$$

$$F = -\frac{\partial W}{\partial z}(U, z) \quad (6.10)$$

$$M = -\frac{\partial W}{\partial \varphi}(U, \varphi) \quad (6.11)$$

Diese beiden Größen werden nachfolgend für den Plattenkondensator und den Torsionsplattenkondensator berechnet.

6.2.1 Plattenkondensator

Abbildung 6.1 zeigt den qualitativen Verlauf der Feldlinien einer Plattenkondensatoranordnung, bei der an den beiden gegenüberliegenden Leiterplatten die Spannung U anliegt. Gilt $h \ll a$, so kann von einem homogenen elektrischen Feld zwischen den Platten

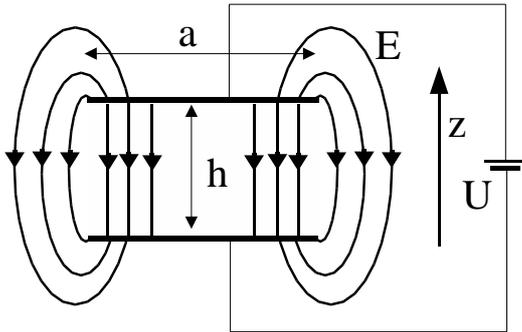


Abbildung 6.1: Geometrie eines Plattenkondensators mit qualitativem Verlauf des elektrischen Feldes beim Anlegen einer Potentialdifferenz zwischen den Platten.

ausgegangen werden und die Streufelder am Rand können vernachlässigt werden. Die Kapazität von zwei Platten mit der Fläche $A = a \cdot b$ im Abstand h ist nach Gleichung 6.6:

$$C_{pp} = \epsilon \frac{A}{h} \quad (6.12)$$

Zur besseren Vergleichbarkeit kann die Auslenkung des Plattenkondensators z auch durch die dimensionslose Größe $\gamma = z/h$ ausgedrückt werden:

$$C_{pp}(\gamma) = \epsilon \frac{A}{h} \frac{1}{1 - \gamma} \quad (6.13)$$

Die elektrostatische Kraft F_{pp} zwischen den Platten des Plattenkondensators berechnet sich nach Gleichung 6.10:

$$F_{pp} = -\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{U^2}{2} \frac{dC}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{2} \epsilon U^2 \frac{A}{h^2} \frac{1}{(1 - \gamma)^2} \quad (6.14)$$

6.2.2 Torsionsplattenkondensator

Der Torsionsplattenkondensator ist ein Plattenkondensator, bei dem die obere Platte drehbar gelagert ist. Auf jeder Hälfte der oberen Platte befindet sich eine Elektrode mit der Länge a . Gegenüber befindet sich eine Bodenelektrode mit der Länge $\vartheta \cdot a$. Die Breite der Elektroden ist b , wobei $b \gg a$ ist, so daß die Geometrie zweidimensional wie in Abbildung 6.2 betrachtet werden darf.

Dabei ist h_0 der Abstand der Torsionsachse von der Bodenelektrode, φ der Torsionswinkel und x der Abstand von der Torsionsachse. Der maximale Torsionswinkel $\varphi_0 = h_0/a$ wird beim Kontakt der Torsionselektrode mit der Bodenelektrode erreicht. Dabei wurde die Kleinwinkelnäherung

$$\varphi_0 \approx \sin \varphi_0 = \frac{h_0}{a} \quad (6.15)$$

vorausgesetzt, die in der Mikromechanik aufgrund der großen Aspektverhältnisse a/h_0 meist erfüllt ist.

Werden Streufelder am Rand vernachlässigt, so ist der Verlauf des elektrischen Feldes zwischen den Platten näherungsweise homogen. Für kleine Torsionswinkel φ kann der Torsionsplattenkondensator durch eine Parallelschaltung aus vielen kleinen differentiellen Plattenkondensatoren mit linear ansteigendem Plattenabstand $h(x)$ modelliert werden:

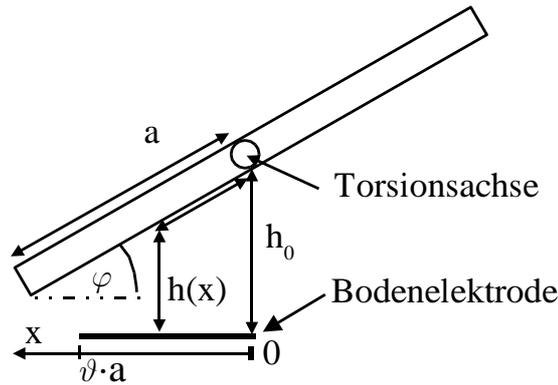


Abbildung 6.2: Geometrie eines Torsionsplattenkondensators.

$$h(x) = h_0 + x \sin(\varphi) = h_0 + \gamma \cdot x \sin(\varphi_0) = h_0 \left(1 + \gamma \frac{x}{a}\right) \quad (6.16)$$

Dabei ist der dimensionslose Parameter γ der relative Torsionswinkel:

$$\gamma = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \approx \frac{\varphi}{\varphi_0} \quad (6.17)$$

Durch Integration läßt sich die Kapazität pro Längeneinheit berechnen. Wird diese mit der Breite b der Platte multipliziert, ergibt sich folgende Kapazität:

$$C_{tp} = \epsilon b \int_0^{\vartheta \cdot a} \frac{dx}{h(x)} = \frac{\epsilon b}{\varphi_0} \frac{1}{\gamma} \ln(1 - \vartheta \gamma) \quad (6.18)$$

Der dimensionslose Parameter ϑ beschreibt dabei die Länge der Bodenelektrode relativ zur Länge der Torsionsplatte (siehe Abbildung 6.2). Das elektrostatische Drehmoment M_{tp} auf die Torsionsplatte berechnet sich nach Gleichung 6.11:

$$M_{tp} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{d\varphi} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \epsilon b U^2 \frac{1}{\varphi_0^2} \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\vartheta \gamma}{1 - \vartheta \gamma} + \ln(1 - \vartheta \gamma) \right) \quad (6.19)$$

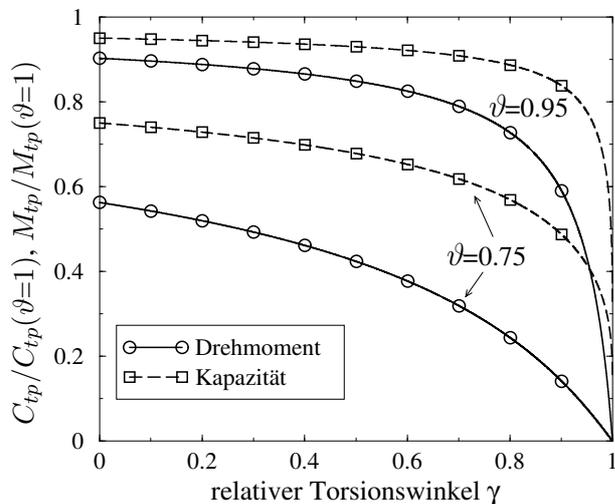


Abbildung 6.3: Normierte Kapazität bzw. normiertes elektrostatisches Drehmoment eines Torsionsplattenkondensators in Abhängigkeit vom relativen Torsionswinkel γ und der relativen Länge der Bodenelektrode ϑ . Die Kapazität bzw. das Drehmoment sind dabei auf die Kapazität bzw. das Drehmoment eines Torsionsplattenkondensators mit unverkürzter Bodenelektrode ($\vartheta = 1$) normiert.

Abbildung 6.3 zeigt die Auswirkung einer verkürzten Bodenelektrode ($\vartheta < 1$) auf die Kapazität und auf das elektrostatische Drehmoment eines Torsionsplattenkondensators. Insbesondere für große relative Torsionswinkel γ fällt das Drehmoment im Vergleich zu einem Torsionsplattenkondensator mit unverkürzter Bodenelektrode stark ab.

6.3 Elektrostatische Streufelder

Bisher wurden die Streufelder am Rand des Plattenkondensators in Abbildung 6.1 vernachlässigt. In diesem Abschnitt wird der Einfluß dieser Streufelder am Rand und in den Löchern einer perforierten Elektrode (Abbildung 4.4) untersucht. Dabei wird insbesondere die Geometrie des Torsionsschalters von Seite 6 berücksichtigt.

6.3.1 Streufelder am Rand einer Platte

Palmer [117] hat die Kapazität eines parallelen Plattenkondensators mit Hilfe konformer Abbildungen (Schwarz-Christoffel-Transformationen) berechnet und die Lösung mit folgender Näherungsformel approximiert:

$$C = C_{pp} \left(1 + \frac{h}{\pi a} \left(1 + \ln \frac{2\pi a}{h} \right) \right) \quad (6.20)$$

Nach Leus [88] liegt der maximale Fehler dieser Gleichung im Vergleich zu numerischen Lösungen der zweidimensionalen Laplace-Gleichung mit FEM bei 1.3%.

Chang [29] hat auch mit Hilfe von Schwarz-Christoffel-Transformationen die Kapazität eines Plattenkondensators mit endlicher Plattendicke d aus Abbildung 6.4 berechnet. Seine komplexe Näherungsformel ist jedoch nur unwesentlich genauer als die von Leus [88], der die Ergebnisse von Yang [14] leicht korrigiert und mit Gleichung 6.20 kombiniert hat:

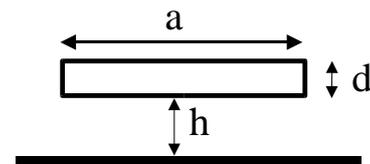


Abbildung 6.4: Plattenkondensator mit endlicher Dicke d .

$$C = C_{pp} \left\{ 1 + \frac{h}{\pi a} \left[1 + \ln \frac{2\pi a}{h} + \ln \left(1 + \frac{2d}{h} + 2\sqrt{\frac{d}{h} + \frac{d^2}{h^2}} \right) \right] \right\} \quad (6.21)$$

Der Fehler dieser Gleichung von Leus im Vergleich zu FEM-Simulationen der Laplace-Gleichung liegt unter 2% [88].

Durch Ableiten nach h läßt sich die Korrektur der elektrostatischen Kraft F_{pp} eines Plattenkondensators aufgrund von Streufeldern am Rand berechnen:

$$F = F_{pp} \left(1 + \frac{h}{\pi a} \left(1 + \frac{d}{\sqrt{d(h+d)}} \right) \right) \quad (6.22)$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß für unseren Demonstrator, einen Torsionsschalter mit dem Aspektverhältnis $h/a \approx 60$ und der Plattendicke $d = 2\mu\text{m}$, die Streufelder am Rand vernachlässigt werden können. Dies bestätigt auch Abbildung 6.5, in der die numerischen Lösungen der Laplace-Gleichung mittels FEM mit Symbolen gekennzeichnet sind. Diese zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit dem analytischen Kapazitätsverlauf nach Gleichung 6.18, der ohne Berücksichtigung der Streufelder abgeleitet wurde.

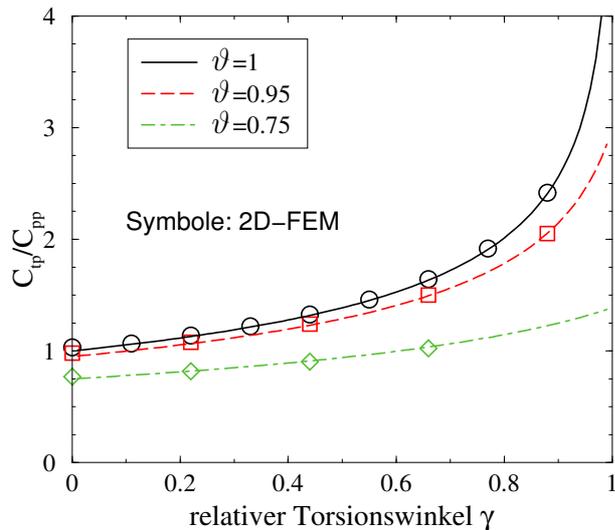


Abbildung 6.5: Vergleich der analytischen Lösung ohne Streufelder mit der numerischen Lösung der Laplace-Gleichung für die relative Kapazität eines Torsionsplattenkondensators in Abhängigkeit von der relativen Länge der Bodenelektrode ϑ und dem relativen Drehwinkel γ ($h_0 = 1\mu\text{m}$ und $a = 60\mu\text{m}$).

6.3.2 Streufelder im Loch einer Platte

Freistehende mikromechanische Platten sind meist perforiert. Solche Perforationen werden durch regelmäßige Ätzlöcher in der Platte realisiert. Sie sind in der Oberflächenmikromechanik einerseits notwendig für die vollständige Abätzung der Opferschicht zur Herstellung freistehender Platten und andererseits eine Designmaßnahme zur Dämpfungsreduktion. Bei großen Platten können nach dem letzten Abschnitt die Streufelder am Rand vernachlässigt werden. Damit kann die Kapazität einer regelmäßig perforierten Platte aus der Parallelschaltung der Kapazitäten aller Lochzellen aus Abbildung 4.4 berechnet werden.

Abbildung 6.6 links zeigt die Geometrie einer quadratischen Lochzelle. Aufgrund der Symmetrie genügt es, ein Viertel der Lochzelle zu modellieren. Dabei wird an den Elektroden das Potential als Dirichlet-Randbedingung und an den Symmetrierändern eine homogene Neumann-Randbedingung vorgegeben. Zudem muß berücksichtigt werden, daß oberhalb der Elektrode das Potential im Unendlichen auf Null abfällt.

Der Verlauf der Äquipotentiallinien als Ergebnis der numerischen Lösung der Laplace-Gleichung mittels FEM in Abbildung 6.6 rechts zeigt, daß sich das elektrische Feld dabei auch auf den Lochbereich ausdehnt. Der Einfluß dieser Streufelder auf die Antriebskraft unseres Demonstrators, der aus einheitlichen quadratischen Lochzellen besteht, soll nun untersucht werden. Die Lochzellegeometrie der drei Muster des Torsionsschalters, die von Plötz [121] vermessen wurden, sind in Abbildung 6.7 zu sehen.

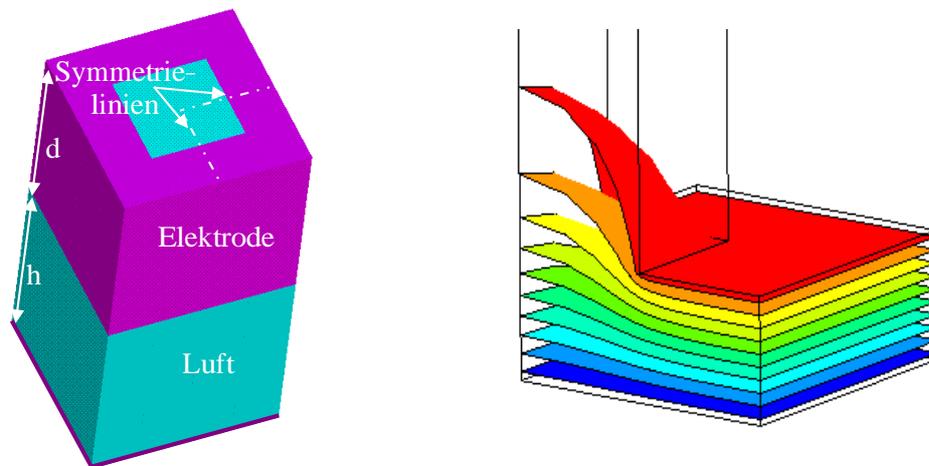


Abbildung 6.6: Links: *Geometrie einer quadratischen Lochzelle*. Rechts: *Äquipotentialflächen einer Viertel-Lochzelle*.

Die Kapazität in Abhängigkeit vom Plattenabstand h wurde für diese drei Lochzellen numerisch mit FEM berechnet. Die elektrostatische Kraft wurde dann nach den Gleichungen 6.7 und 6.10 aus der Ableitung der Kapazitätsfunktion nach dem Plattenabstand ermittelt. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden diese Größen in Abbildung 6.8 mit den analytischen Formeln für die Kapazität C_{pp} (Gleichung 6.13) und die elektrostatische Kraft F_{pp} (Gleichung 6.14) eines parallelen Plattenkondensators mit gleicher Elektrodenfläche A normiert.

In Abbildung 6.8 links entspricht die Fläche des Plattenkondensators der oberen Elektrode mit Loch ($A = A_P$). Für sehr kleine Plattenabstände h strebt die normierte Kapazität C_P bzw. Kraft F_P gegen eins, was bedeutet, daß die Streufelder für diesen Grenzfall vernachlässigt und die Größen mit den entsprechenden Formeln für den Plattenkondensator berechnet werden können.

Mit zunehmendem Plattenabstand wächst der Einfluß der Streufelder auf die Kapazität und geht dann in Sättigung über. Dieser Grenzwert läßt sich in Abbildung 6.8 rechts sehr gut erkennen, denn die normierte Kapazität C_Z bzw. Kraft F_Z strebt für große Plattenabstände gegen eins, was bedeutet, daß die Streufelder das Loch in der Elektrode kompensieren und die Größen wieder durch die Formeln für den Plattenkondensator beschrieben werden können. Die Fläche des Plattenkondensators entspricht in diesem Fall der Fläche

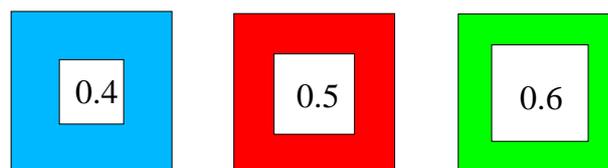


Abbildung 6.7: *Drei Perforationsmuster des Torsionsschalters von Infineon*. Der angegebene Perforationsgrad α drückt das Verhältnis des Lochdurchmessers zum Zellodurchmesser aus.

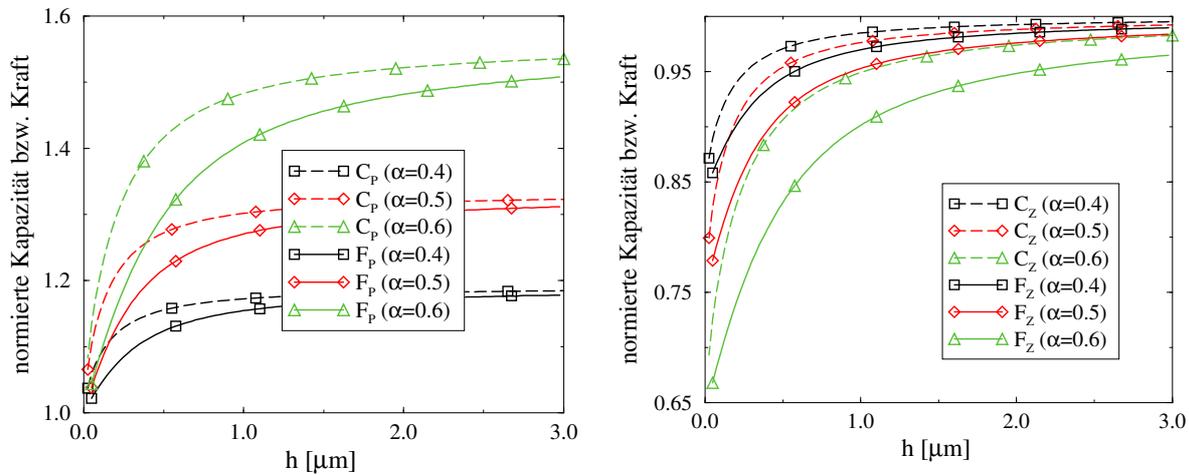


Abbildung 6.8: Kapazität und elektrostatische Kraft für die Lochzellen aus Abbildung 6.7. Die Größen sind auf die Kapazität C_{pp} und die Kraft F_{pp} eines Plattenkondensators normiert. Links: Die Fläche A des Plattenkondensators entspricht der Plattenfläche A_P . Rechts: Die Fläche A des Plattenkondensators entspricht der Zellenfläche A_Z .

der unteren Elektrode ohne Loch ($A = A_P + A_L = A_Z$).

Abbildung 6.8 verdeutlicht, daß die Streufelder einen signifikanten Einfluß auf die Kapazität (und damit auch auf die Kraft) einer Lochzelle haben, der mit dem Perforationsgrad zunimmt. Für die Grenzfälle von sehr kleinen oder sehr großen Plattenabständen können diese Größen durch die Formeln für einen parallelen Plattenkondensator beschrieben werden. Für sehr kleine Abstände muß dabei die Fläche der gelochten Elektrode und für sehr große Abstände die Fläche der ungelochten Elektrode als Plattenkondensatorfläche verwendet werden. Meist ist jedoch gerade der Übergangsbereich von Interesse. Für einzelne Perforationsmuster kann dazu die Kapazitätsfunktion wie in Abbildung 6.8 aus FEM-Simulationen extrahiert und interpoliert werden. Zur schnellen Durchführung von Designstudien sind aber analytische Kompaktmodelle zur Berechnung der elektrostatischen Kraft unverzichtbar.

6.4 Kompaktmodelle zur Berechnung der elektrostatischen Kraft

Bei der Lösung der Laplace-Gleichung für mikromechanische Platten wird viel Zeit in die Berechnung der Streufelder außerhalb der Elektroden investiert. Aufgrund der großen Aspektverhältnisse ist deren Beitrag zur elektrostatischen Kraft nach Gleichung 6.22 jedoch meist vernachlässigbar. Deshalb liegt es nahe, das Kontinuumsmodell durch ein Kompaktmodell auf der Basis des parallelen Plattenkondensators zu ersetzen. Dabei muß berücksichtigt werden, daß die Platte deformierbar sein kann und der Abstand der Elektroden über die Plattenfläche dann nicht mehr konstant ist. Dies führt zum Modell des „differentiellen Plattenkondensators“, das auch auf perforierte Platten anwendbar ist.

6.4.1 Modell des „differentiellen Plattenkondensators“

Einem variablen Elektrodenabstand wird bei diesem Ansatz Rechnung getragen, indem die Elektroden in kleine Elemente eingeteilt werden und jedes Element als paralleler Plattenkondensator aufgefaßt wird. Die Gesamtkapazität der Platte entspricht dann der Parallelschaltung aller Teilkapazitäten. Dieser Ansatz wurde auch in Abschnitt 6.2.2 verwendet, um die Kapazität eines Torsionsplattenkondensators analytisch zu berechnen. Er ist aber auch auf Platten mit beliebiger Geometrie anwendbar. Dazu werden die Kompaktmodelle nach Abbildung 6.9 mit den Knoten eines mechanischen Kontinuummodells für die Platte verknüpft und bilden so ein Mixed-Level-Modell für elektrostatische Antriebe.

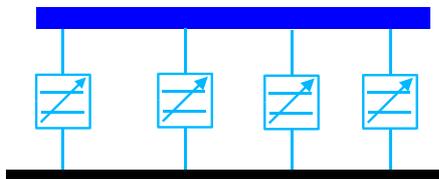


Abbildung 6.9: Das Kompaktmodell berechnet für jedes mechanische Element einer Platte analytisch die elektrostatische Kraft.

Für jedes mechanische Element mit der Fläche A_i und dem Elektrodenabstand h_i wird die elektrostatische Kraft F_i aus der Formel 6.14 für den Plattenkondensator berechnet:

$$F_i = \frac{1}{2} \varepsilon U^2 \frac{A_i}{h_i^2} \quad (6.23)$$

6.4.2 Erweiterung für perforierte Platten

Zur Ableitung analytischer, physikalisch basierter Kompaktmodelle für die Kapazität einer perforierten Platte werden in diesem Abschnitt zwei Wege verfolgt: Beim analytischen Ansatz wird versucht, die Laplace-Gleichung zu lösen. Beim heuristischen Ansatz hingegen wird aus den Erkenntnissen über die Streufelder aus Abschnitt 6.3.2 und zahlreichen FEM-Simulationen ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Kapazität und den Geometrieparametern entwickelt.

Analytischer Ansatz

Es gibt in der Literatur keine allgemeingültigen expliziten analytischen Ansätze zur Lösung der dreidimensionalen Laplace-Gleichung 6.5. Für die zweidimensionale Laplace-Gleichung bietet sich der aus der komplexen Funktionentheorie bekannte Ansatz der konformen (winkeltreuen) Abbildungen an, denn jede komplex-differenzierbare Funktion erfüllt automatisch die Laplace-Gleichung [146]. Die Schwierigkeit besteht darin, die sich den vorgegebenen Randbedingungen anschmiegenden Lösungen der Laplace-Gleichung zu finden. Ein systematischer Ansatz dafür ist, mit Hilfe der Schwarz-Christoffel-Transformation [77, 164] die Problemgeometrie in einen Plattenkondensator mit bekannter Potentialfunktion zu überführen. Zunächst muß aber das dreidimensionale

Problem durch ein zweidimensionales Problem approximiert werden. Dazu kann entweder ein *zweidimensionaler Schnitt* des dreidimensionalen Problems betrachtet oder eine vorhandene *Rotationssymmetrie* ausgenutzt werden.

Zweidimensionaler Schnitt Für einen Schnitt parallel zur z-Achse in Abbildung 6.6 kann nach Lorenz [91] mit Hilfe der Schwarz-Christoffel-Transformation eine Kapazität pro Lochkantenlänge berechnet werden. Zur Berechnung der Kapazität einer Lochzelle muß diese mit dem Durchmesser der Lochzelle multipliziert werden. Zusätzlich wird ein empirischer Faktor benötigt, der die Feldinhomogenitäten an den Ecken einer Lochzelle berücksichtigt. Der auf diesem Ansatz basierende Ausdruck von Lorenz [91] für die Kapazität von rechteckigen Lochzellen weist für quadratische Lochzellen aber relativ große Abweichungen zur numerischen Lösung der Laplace-Gleichung auf.

Rotationssymmetrie Wird anstelle einer quadratischen Lochzelle eine ringförmige Lochzelle aus Abbildung 6.10 betrachtet, so reduziert sich das Problem aufgrund der Rotationssymmetrie auf zwei Dimensionen. Mit Hilfe der konformen Abbildungen kann aber nur die zweidimensionale Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten gelöst werden. Die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten besitzt einen zusätzlichen dritten Term. Dieser kann nach Costamagna [33] als rechte Seite oder Raumladung der zweidimensionalen Poissongleichung in kartesischen Koordinaten betrachtet werden. Zur Lösung dieses Ansatzes werden aber numerische Verfahren benötigt.

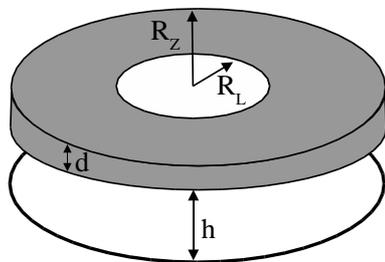


Abbildung 6.10: Geometrie einer ringförmigen Lochzelle mit der Perforationsrate $\alpha = R_L/R_Z$.

Aufgrund dieser Schwierigkeiten mußte der analytische Ansatz, einen expliziten Ausdruck für die Kapazität einer ringförmigen Lochzelle zu finden, verworfen werden. Erfolgreicher ist der im nächsten Abschnitt beschriebene heuristische Ansatz.

Heuristischer Ansatz

In Abschnitt 6.3.2 wurde die Kapazität verschiedener Lochzellengeometrien numerisch berechnet. Dabei wurde beobachtet, daß für den Grenzfall sehr kleiner oder sehr großer Plattenabstände die Kapazität durch die Formel für einen parallelen Plattenkondensator beschrieben werden kann. Für sehr kleine Abstände muß dabei die Fläche der gelochten Elektrode und für sehr große Abstände die Fläche der ungelochten Elektrode als Fläche des Plattenkondensators verwendet werden. Deshalb wurde für die Kapazität einer ringförmigen Lochzelle aus Abbildung 6.10 folgender physikalisch basierter Ansatz

gewählt:

$$C_{\odot} = C_{inf} + \theta(h, \alpha, R_Z)(C_{sup} - C_{inf}) \quad (6.24)$$

Als untere Schranke für C_{\odot} bei sehr kleinen Plattenabständen wurde C_{inf} , die Kapazität eines Plattenkondensators mit der Fläche $A = A_P = \pi(R_Z^2 - R_L^2)$, gewählt. Für diesen Grenzfall sind die Streufelder im Loch vernachlässigbar.

Als obere Schranke für C_{\odot} bei sehr großen Plattenabständen wurde C_{sup} , die Kapazität eines Plattenkondensators mit der Fläche $A = A_Z = \pi R_Z^2$, gewählt. Für diesen Grenzfall kompensieren die Streufelder im Loch die fehlende Elektrodenfläche.

Meist ist jedoch gerade der Übergangsbereich, der durch die Funktion θ beschrieben wird, von Interesse. Um diese zu bestimmen, wurde durch zahlreiche FEM-Simulationen der Laplace-Gleichung die Kapazität einer ringförmigen Lochzelle aus Abbildung 6.10 im folgenden Parameterraum berechnet:

$$0\mu m < h < 5\mu m, \quad 0.05 < \alpha < 0.75, \quad 1\mu m < R_L < 10\mu m$$

Als Randbedingung am Außenrand der Zelle wurde dabei eine Neumann-Symmetrie-Randbedingung vorgegeben. Durch iteratives Anpassen verschiedener mathematischer Funktionen an die Simulationsdaten wurde von Niessner [114] folgender Zusammenhang gefunden:

$$\theta(h, \alpha, R_Z) = \frac{h}{\theta_1(\alpha, R_Z) + \theta_2(\alpha, R_Z) \cdot h} \quad (6.25)$$

$$\theta_1(\alpha, R_Z) = \frac{\alpha}{3.716 \cdot R_Z^{-1.043} - \left(\frac{0.917}{R_Z} - 0.00852\right)\alpha^2} \quad (6.26)$$

$$\theta_2(\alpha, R_Z) = 0.985 + 0.00832 \cdot R_Z + 0.0261 \cdot R_Z^{0.646} \ln \alpha \quad (6.27)$$

Die dimensionsbehafteten Größen h und R_Z sind in Gleichung 6.25 in μm einzugeben. Aus Dimensionsbetrachtungen sollte die Funktion θ nur von dimensionslosen Parametern abhängen. Dies beeinträchtigt jedoch nicht die Genauigkeit der Fitfunktion C_{\odot} im Parameterraum.

Der relative Fehler der Funktion C_{\odot} im Vergleich zur numerischen Lösung der Laplace-Gleichung liegt innerhalb des Parameterraumes für $\alpha < 0.5$ unter 1% und wächst für $\alpha > 0.5$ und kleine Plattenabstände h auf bis zu 4%. Auch außerhalb des Parameterraumes bleibt der Fehler für $R_Z < 100\mu m$ und $h < 30\mu m$ unter 10% [114].

Einfluß der Plattendicke In den Simulationen zur Ableitung der Kapazitätsfunktion wurde eine Platte ohne vertikale Ausdehnung betrachtet. Die Fitfunktion C_{\odot} unterschätzt deshalb die Kapazität einer Platte mit endlicher Dicke d . Abbildung 6.11 zeigt den typischen Verlauf des relativen Fehlers in der Kapazität mit zunehmender Plattendicke. Man erkennt, daß ab einer bestimmten Plattendicke d die Kapazität nicht mehr zunimmt. Weitere Untersuchungen haben ergeben, daß der relative Fehler mit abnehmendem Plattenabstand zunimmt, aber im Parameterraum stets unter 5% bleibt. Für die drei Perforationsmuster des Mikroschalters aus Abbildung 6.7 bleibt der Fehler sogar unter 1% und kann vernachlässigt werden.

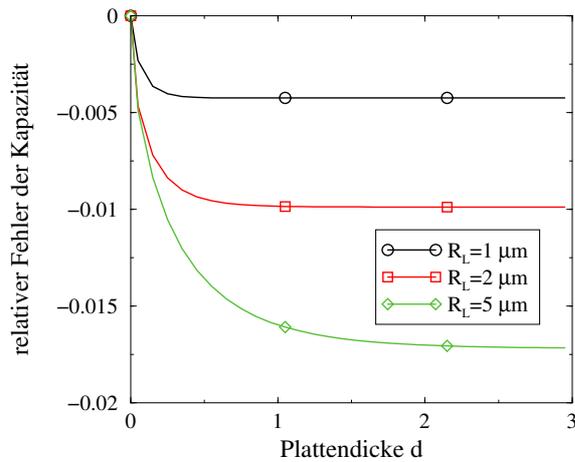


Abbildung 6.11: Relativer Fehler in der Kapazität C_{\odot} einer ringförmigen Lochzelle mit dem Perforationsgrad $\alpha = 0.5$ und dem Plattenabstand $h = 1 \mu\text{m}$ durch Vernachlässigung der Plattendicke.

Gültigkeit für quadratische Lochzellen Gleichung 6.24 für C_{\odot} kann auch für quadratische Lochzellen verwendet werden, obwohl die Übergangsfunktion θ für ringförmige Lochzellen abgeleitet wurde. Dazu müssen der Lochradius R_L und der Zellenradius R_Z so gewählt werden, daß die gleiche Lochfläche ($\pi R_L^2 = a_L^2$) und die gleiche Zellenfläche ($\pi R_Z^2 = a_Z^2$) wie bei der quadratischen Lochzelle entstehen. Dies bestätigt Abbildung 6.12, die den relativen Fehler der Kapazität C_{\odot} und der daraus abgeleiteten elektrostatischen Kraft im Vergleich zu FEM-Simulationen der quadratischen Lochzellen aus Abbildung 6.7 zeigt.

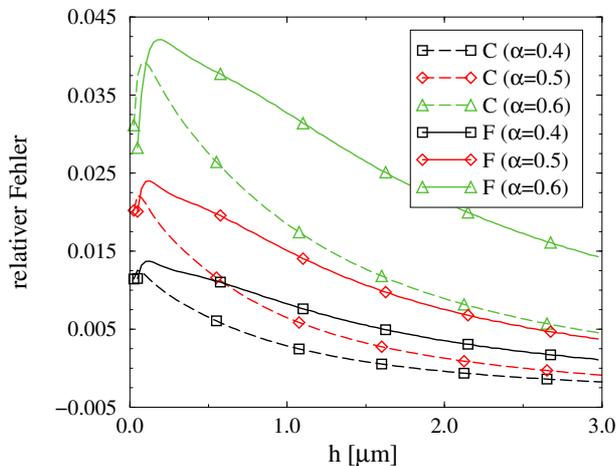


Abbildung 6.12: Relativer Fehler bei der Berechnung der Kapazität bzw. der elektrostatischen Kraft mit Hilfe der Gleichung 6.24 im Vergleich zur numerischen Lösung der Laplace-Gleichung für die quadratischen Lochzellen aus Abbildung 6.7.

7 Elektromechanisch gekoppelte Probleme

Beim elektrostatischen Antrieb wird elektrostatische Energie in mechanische Energie gewandelt. Bei der Kopplung dieser beiden physikalischen Domänen treten inhärente Phänomene auf, wie der elektrostatische Federeffekt und elektromechanische Instabilitäten. Deren numerische Handhabung stellt besondere Anforderungen an die Modellierung, insbesondere bei der Wahl der Modellierungsebene, der Kopplungsmethode und des Steuerparameters der Kopplung. Der Einfluß dieser drei Modellierungsaspekte wird am Ende dieses Kapitels anhand einer elektrostatisch ausgelenkten Membran untersucht.

7.1 Mathematische Beschreibung

Das elektrostatische Feld wird durch die elektrische Feldstärke \mathbf{E} und die dielektrische Verschiebung $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ beschrieben, die aus der Poissongleichung 6.4 berechnet werden können.

Die Kopplung zur Mechanik findet typischerweise an Grenzflächen, den Oberflächen von Elektrodenkörpern, statt. Da die Elektroden Äquipotentialflächen sind, wirken die elektrostatischen Kräfte parallel zum Oberflächennormalenvektor \mathbf{n} , und es gilt folgende Kopplungsbedingung:

$$\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \quad (7.1)$$

Dabei ist $\underline{\sigma}$ der Tensor der mechanischen Spannung, der über das Materialgesetz für deformierbare Körper

$$\underline{\sigma} = \underline{K} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (7.2)$$

und die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\text{Div } \underline{\sigma} + \mathbf{f} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (7.3)$$

mit der Deformation und Translation der Elektrode verknüpft ist [84]. Hierbei ist \underline{K} die Steifigkeitsmatrix, $\underline{\varepsilon}$ der Tensor der mechanischen Dehnung, \mathbf{f} die äußere Volumenkraftdichte (z.B. Gravitation), ρ die Massendichte und \mathbf{u} der Vektor der mechanischen Verschiebung.

7.2 Phänomene

Die elektromechanische Kopplung ist eine bidirektionale Kopplung. Dies bedeutet, daß die elektrostatische Kraft eine mechanische Auslenkung der Elektrode bewirkt, welche wiederum die elektrostatische Kraft beeinflusst. Die nichtlineare Abhängigkeit der elektrostatischen Kraft vom Elektrodenabstand drückt sich in den inhärent bei allen elektrostatischen Antrieben auftretenden Phänomenen des elektrostatischen Federeffekts und der elektromechanischen Instabilität aus.

7.2.1 Elektrostatischer Federeffekt

Nach den Gleichungen 6.14 und 6.19 aus Abschnitt 6.2 hängt die elektrostatische Kraft bzw. das Drehmoment eines elektrostatischen Antriebelements vom Elektrodenabstand ab. Sofern nur kleine Auslenkungen x einer beweglichen Struktur um eine Ruhelage betrachtet werden, kann die positionsabhängige Kraft um diese Ruhelage x_0 linearisiert werden:

$$F(x) \approx F(x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) \quad (7.4)$$

Der lineare Entwicklungskoeffizient beschreibt dabei einen linearen Zusammenhang zwischen der elektrostatischen Kraft F und der Auslenkung x , der üblicherweise als Federkonstante k_{el} interpretiert wird:

$$\Delta F = -k_{el} \cdot (x - x_0) = (x - x_0) \cdot \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0} \quad (7.5)$$

Bei einer mechanischen Feder mit positiver Federkonstante wirkt die Federkraft entgegengesetzt zur Auslenkungsrichtung. Im Gegensatz dazu wirkt die zusätzliche elektrostatische Kraft bei Auslenkung eines Plattenkondensators in Richtung dieser Auslenkung, so daß diese eine negative Federkonstante k_{el} besitzt.

Somit kann in elektromechanisch gekoppelten Systemen die mechanische Feder kompensiert und damit die Gesamtsteifigkeit des gekoppelten Systems in gewissen Grenzen justiert werden. Dieser Effekt kann genutzt werden, um die Empfindlichkeit von Beschleunigungssensoren zu erhöhen. Diese die umgekehrt proportional zur Steifigkeit der Feder, an der die träge Masse aufgehängt ist [61].

Eine andere Anwendung sind resonante Mikrosensoren, die in Resonanz betrieben werden, und deshalb eine hohe Empfindlichkeit aufweisen. Aber Fertigungstoleranzen beeinflussen die mechanische Steifigkeit des Systems und können die Resonanz verhindern. Mit Hilfe im Betrieb justierbarer elektrostatischer Federn kann ein solches System wieder in Resonanz gebracht werden, was beim Drehratensensor von Infineon demonstriert wurde [160, 161].

Eine ausführliche Diskussion und die Anwendung elektrostatischer Federn bei Kammantrieben unter Ladungssteuerung und in Differentialkondensatoren findet man bei Handtmann [61].

7.2.2 Elektromechanische Instabilität

Das plötzliche Einschnappen („pull-in“) einer elektrostatisch ausgelenkten mechanischen Struktur tritt ein, wenn die mechanische Rückstellkraft die elektrostatische Kraft nicht mehr ausgleichen kann. Diese Instabilität ist ein inhärentes Phänomen der elektromechanischen Kopplung und wird am Beispiel des Plattenkondensators in Abbildung 7.1 erläutert.

An der beweglichen Elektrode, die an einer Feder aufgehängt ist, liegt die Spannung U an. Die dabei wirkenden Kräfte in Abhängigkeit von der Auslenkung der beweglichen Elektrode sind in Abbildung 7.2 qualitativ dargestellt. Die Federkraft F_m steigt linear mit der Auslenkung, die elektrostatische Kraft F_e hingegen nimmt nichtlinear zu. An den Schnittpunkten herrscht Kräftegleichgewicht. Für kleine Spannungen und kleine Auslenkungen ist das Gleichgewicht stabil. Wird mit der Spannung die elektrostatische Kraft erhöht, so wandert der Schnittpunkt zu größeren Auslenkungen nach rechts, bis sich beide Kraftkurven bei $U = U_3$ gerade noch berühren. Diese Spannung, bei der ein labiles Gleichgewicht herrscht, nennt man Schnapp- oder „pull-in“-Spannung. Für größere Auslenkungen ist das Gleichgewicht instabil und die bewegliche Elektrode wird bis zum Anschlag ausgelenkt. Wird die Span-

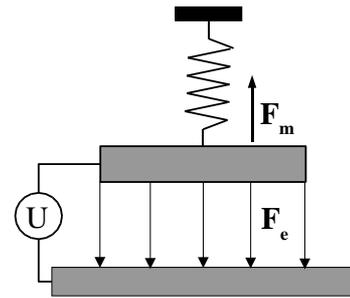


Abbildung 7.1: Die obere Platte eines Plattenkondensators ist vertikal beweglich an einer Feder aufgehängt.

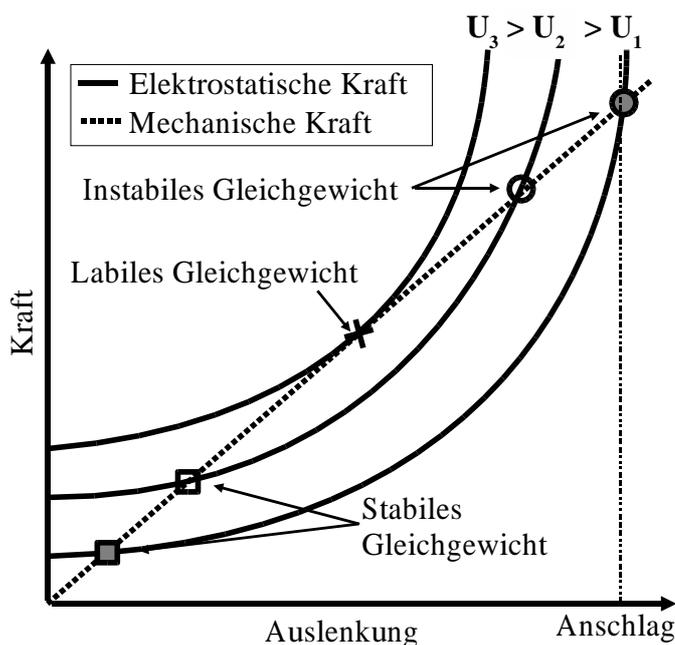


Abbildung 7.2: Qualitativer Verlauf der mechanischen Kraft der linearen Feder und der elektrostatischen Kraft des Plattenkondensators in Abhängigkeit von der Auslenkung und der angelegten elektrischen Spannung.

nung wieder reduziert, so schnappt die Elektrode erst bei der Spannung $U = U_1$ zurück (“pull-out“). Diese Rückschnappspannung hängt vom Abstand des Anschlagpunkts von der Elektrode ab und ist immer geringer als die Schnappspannung. Den unterschiedlichen Verlauf der Auslenkung beim schrittweisen Erhöhen der elektrischen Spannung über die Schnappspannung hinaus und dem anschließenden schrittweisen Reduzieren wird als elektromechanische Hysterese bezeichnet.

Die Schnappspannung U_{pin} ist ein wichtiger Parameter für elektromechanisch gekoppelte Systeme und kann für einen Platten- und Torsionsplattenkondensator analytisch berechnet werden.

Schnappspannung des Plattenkondensators

Für den Plattenkondensator in Abbildung 7.1 mit dem Plattenabstand h ergibt sich folgendes Gleichgewicht zwischen der elektrostatischen Kraft aus Gleichung 6.14 und der mechanischen Federkraft $F_m = k_t \cdot x = k_t \cdot \gamma \cdot h$:

$$U^2 = \frac{2k_t h^3}{\epsilon A} \cdot \gamma(1 - \gamma)^2 \quad (7.6)$$

Mit zunehmender relativer Auslenkung γ erhöht sich die Spannung U , die für ein stabiles Gleichgewicht benötigt wird, bis bei $\gamma = \gamma_{max} = \frac{1}{3}$ der labile Gleichgewichtspunkt erreicht wird. Dieser Punkt charakterisiert die Schnappspannung bzw. die maximale Gleichgewichtsspannung U_{pin} :

$$U_{pin} = \sqrt{\frac{8k_t h^3}{27\epsilon A}} \quad (7.7)$$

Schnappspannung des Torsionsplattenkondensators

Für den Torsionsplattenkondensator in Abbildung 6.2 mit dem mittleren Plattenabstand h_0 berechnet sich das elektrostatische Drehmoment nach Gleichung 6.19. Ist dieser an einer Torsionsfeder aufgehängt, dann ergibt sich folgendes Gleichgewicht zwischen dem elektrostatischen Drehmoment und dem Federdrehmoment $M_m = k_r \varphi = k_r \varphi_0 \gamma$:

$$U^2 = \frac{2k_r \varphi_0^3}{\epsilon b} \frac{\gamma^3}{\frac{\vartheta \gamma}{1 - \vartheta \gamma} + \ln(1 - \vartheta \gamma)} \quad (7.8)$$

Für eine unverkürzte Bodenelektrode ($\vartheta = 1$) liegt die maximale Auslenkung, die noch ein stabiles Gleichgewicht erlaubt, bei $\gamma = \gamma_{max} \approx 0.4404$, was folgende Schnappspannung U_{pin} ergibt:

$$U_{pin} = \sqrt{\psi(\vartheta) \cdot \frac{2k_r \varphi_0^3}{\epsilon b}} \quad (7.9)$$

Dabei ist ψ ein Faktor, der von der Länge der Bodenelektrode abhängt. Für eine unverkürzte Bodenelektrode ($\vartheta=1$) gilt $\psi \approx 0.41$. Wird die Bodenelektrode verkürzt, so läßt sich auf Kosten einer höheren Spannung der maximale stabile Torsionswinkel γ_{max} erhöhen. Bei $\vartheta \approx 0.4404$ und mit mehr als der dreifachen Spannung kann der Torsionsplattenkondensator stufenlos bis zum Kontaktwinkel φ_0 ausgelenkt werden. Abbildung 7.3 zeigt diesen Zusammenhang zwischen der relativen Länge der Bodenelektrode ϑ , dem maximalen stabilen Torsionswinkel $\varphi = \varphi_0 \cdot \gamma_{max}$ und der notwendigen Spannung $U_{pin} \sim \sqrt{\psi}$, um diesen zu erreichen.

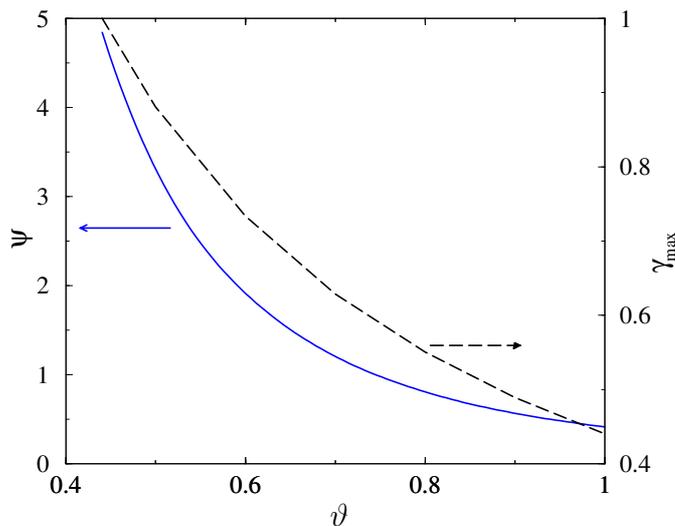


Abbildung 7.3: Wird die Bodenelektrode eines Torsionsplattenkondensators auf den Faktor $\vartheta \approx 0.44$ verkürzt, so erhöht sich der mit einem stabilen Gleichgewicht ansteuerbare relative Torsionswinkel γ von 0.44 auf 1. Gleichzeitig nimmt jedoch auch der Faktor ψ in der Schnappspannung aus Gleichung 7.9 von 0.41 auf 4.84 zu.

Im folgenden wird sich zeigen, daß elektromechanisch gekoppelte Probleme eine besondere Herausforderung an die Modellierung stellen. Für eine effiziente Modellierung muß deshalb die Modellierungsebene (siehe Abschnitt 7.3), die Kopplungsmethode (siehe Abschnitt 7.4) und die Kopplungssteuerung (siehe Abschnitt 7.5) mit Bedacht gewählt werden.

7.3 Modellierungsebenen

7.3.1 Modellierung auf der Kontinuumsebene

Der gebräuchlichste Ansatz, elektromechanisch gekoppelte Probleme auf der Kontinuumsebene zu lösen, besteht darin, für beide physikalische Domänen einen geeigneten Simulator zu verwenden und diese über die Lastvektoren zu koppeln, wie dies in Abbildung 7.4 illustriert ist. Die Form der Elektroden und die angelegte Spannung bestimmen die elektrostatischen Randbedingungen, mit denen der Simulator die elektrostatische Feldgleichung löst und die Ladungs- und Feldverteilung berechnet. Diese verursacht wiederum elektrostatische Kräfte auf die Elektroden, die zusammen mit der Fixierung der Elektrode die mechanischen Randbedingungen darstellen. Mit diesen löst der Simulator die mechanischen Feldgleichungen und berechnet die Auslenkung der

Elektrode. Damit schließt sich die Iterationsschleife, die solange aufgerufen wird, bis die Lösung in einem Kräftegleichgewicht der elektrostatischen und der mechanischen Kraft konvergiert.

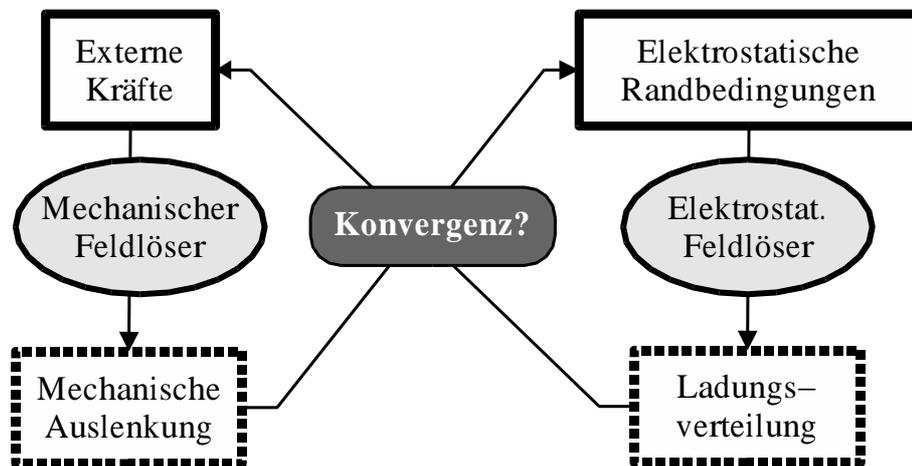


Abbildung 7.4: Relaxationsschema für ein lastvektorgekoppeltes elektromechanisches Problem.

Zur Berechnung der mechanischen Domäne hat sich die Finite-Elemente-Methode (FEM) bewährt. Damit kann auch die elektrostatische Domäne berechnet werden, jedoch mit dem Nachteil, daß auch der vom elektrischen Feld erfüllte Raum um die Elektroden vernetzt werden muß. Der Simulator ANSYS [5] verwendet diesen Ansatz und bietet spezielle Elemente (INFIN-Elemente [177] oder Trefftz-Elemente [57]) an, um die Vernetzung des Feldraumes zu vereinfachen. Da dieser aber aufgrund der mechanischen Deformation bei jeder Iteration neu vernetzt werden muß, verwenden die meisten kommerziellen Simulatoren (wie beispielsweise Coventor [34], CFD-ACE+ [28] oder IntelliSuite [70]) die Randelemente-Methode („boundary element methode“ BEM). Dabei wird der Vernetzungsaufwand deutlich reduziert, da nicht der gesamte dreidimensionale Raum um die Elektroden vernetzt werden muß, sondern nur die zweidimensionalen Oberflächen der Elektroden. Zudem müssen diese im Gegensatz zum Raum um die Elektroden auch bei einer Deformation der Elektroden nicht neu vernetzt werden.

7.3.2 Mixed-Level-Ansatz

Bei der Simulation auf der Kontinuumsebene wird viel Rechenzeit in die Berechnung der Streufelder außerhalb der Elektroden verwendet, deren Beitrag zur elektrostatischen Kraft, insbesondere bei kleinen Elektrodenabständen, sehr gering ist (Abschnitt 6.3.1). Deshalb bietet es sich an, den elektrostatischen Feldlöser in der Kopplungsschleife in Abbildung 7.4 durch das physikalisch basierte Kompaktmodell des differentiellen Plattenkondensators aus Abschnitt 6.4.1 zu ersetzen. Nach Abbildung 7.5 bestimmen die Kompaktmodelle an jedem Knoten die elektrostatische Kraft F_i ; daraus berechnet der

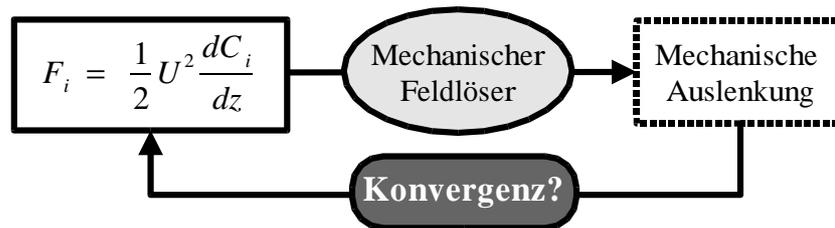


Abbildung 7.5: Relaxationsschema für ein elektromechanisch gekoppeltes Problem, in dem das elektrostatische Teilproblem durch das analytische Kompaktmodell des differentiellen Plattenkondensators ersetzt wird.

mechanische Feldlöser die Auslenkung, die wiederum die elektrostatische Kraftberechnung der Kompaktmodelle beeinflusst. Der Vorteil dieses Ansatzes ist, daß nicht nur die Simulationszeit stark verkürzt, sondern neben der Lastvektorkopplung auch die Matrixkopplung ermöglicht wird. Diese beiden alternativen Kopplungsmethoden werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

7.4 Kopplungsmethoden

Eine allgemeine Diskussion und weiterführende Literatur über Modellierungsansätze für gekoppelte Probleme findet man beispielsweise bei Schrag [131], Klein [76] und Gerlach [52]. Da in kommerziellen Simulatoren zumeist die Lastvektorkopplung und die Matrixkopplung zum Einsatz kommen, werden diese beiden im folgenden betrachtet.

7.4.1 Lastvektorkopplung

Die schon im vorigen Abschnitt in Abbildung 7.4 vorgestellte Lastvektorkopplung wird auch *schwache* oder *iterative* Kopplung genannt. Dabei wird jedes Teilproblem sequentiell und unabhängig gelöst und das Ergebnis als Lastvektor oder Randbedingung an das jeweils andere Teilproblem übergeben. Das hat den Vorteil, daß sie beispielsweise zusammen mit einem Gauß-Seidel-Relaxationsverfahren [55] leicht zu implementieren ist und damit beliebige Domänen gekoppelt werden können. Der Nachteil ist die schwache Konvergenz, denn insbesondere bei nichtlinear gekoppelten Problemen steigt die Zahl der benötigten Iterationen zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes stark an.

Stationäre physikalische Probleme werden auf der Kontinuumsebene in der Regel durch partielle Differentialgleichungen beschrieben. Der Verzicht auf die Zeitabhängigkeit vereinfacht nachfolgend nur die Darstellung und ist nicht als Einschränkung zu verstehen. Als Ergebnis einer Ortsdiskretisierung (z.B. FEM) erhält man ein großes Gleichungssystem: $\underline{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Hierbei bezeichnet $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ den ortsdiskreten Zustandsvektor, der beispielsweise aus den Knotenwerten der kontinuierlichen Feldvariablen $u(\mathbf{r})$ an den n Diskretisierungsknoten \mathbf{r}_j des Modells gebildet wird: $u_j = u(\mathbf{r}_j)$, $j = 1, \dots, n$. $\underline{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

ist die Systemmatrix (z.B. Steifigkeitsmatrix). Der Vektor $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ beschreibt äußere Lasten.

Ein lastvektorgekoppeltes Problem kann somit formal durch Gleichung 7.10 beschrieben werden. Die Kopplung wird durch die Abhängigkeit von \underline{K}_{11} und \mathbf{f}_1 von \mathbf{u}_2 und der Abhängigkeit von \underline{K}_{22} und \mathbf{f}_2 von \mathbf{u}_1 effektiv. Deshalb sind mindestens zwei Iterationen zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes notwendig.

Bei der elektromechanischen Kopplung entspricht \underline{K}_{11} der Steifigkeitsmatrix, \mathbf{u}_1 der mechanischen Verschiebung, \mathbf{f}_1 der mechanischen Kraft, \underline{K}_{22} der Kapazitätsmatrix, \mathbf{u}_2 der elektrischen Spannung U und \mathbf{f}_2 der elektrischen Ladung Q .

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & 0 \\ 0 & \underline{K}_{22}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

Die Arbeitsgruppe von Senturia war eine der ersten, die zur Berechnung elektromechanisch gekoppelter Probleme bei Mikrosystemen die Lastvektorkopplung in den Simulator MEMCAD [140] implementierte, woraus einige Jahre später (1995) die Software CoSolve-EM entwickelt [86] wurde. Durch einen Relaxationsalgorithmus wurde dabei die Lastvektorkopplung eines Standard-FEM-Simulators für Mechanik (ABAQUS [1]) mit einem BEM-Simulator (FASTCAP [112]) für die Elektrostatik gesteuert.

1999 wurde schließlich auch im FEM-Simulator ANSYS 5.6 die Lastvektorkopplung durch das Makro ESSOLV automatisiert; das bereits erwähnte Vernetzungsproblem des Feldraumes um die Elektroden bei FEM besteht aber weiterhin.

7.4.2 Matrixkopplung

Insbesondere kurz vor dem Einschnappen bewirkt bei der elektromechanischen Kopplung eine kleine Änderung in einer der beiden Domänen eine große Veränderung in der anderen Domäne. Die Folge ist ein starker Anstieg der Gleichgewichtssiterationen, die reduziert werden können, wenn beide Domänen nicht iterativ, sondern simultan gelöst werden. Diese *starke* oder *direkte* Kopplung ist auch unter dem Namen Matrixkopplung bekannt, denn formal kann das gekoppelte Problem durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

Die Kopplung wird dabei durch die Koppelmatrizen \underline{K}_{12} und \underline{K}_{21} schon bei der ersten Iteration berücksichtigt. Diese werden aus der Gesamtenergie W_{ges} der beiden Domänen berechnet. Voraussetzung dafür ist, daß diese Information lokal an jedem Freiheitsgrad zur Verfügung steht. Bei der elektromechanischen Kopplung ist das bei Anwendung der Mixed-Level-Methode aus Abschnitt 7.3.2 der Fall.

Die Kopplung des Kompaktmodells des differentiellen Plattenkondensators (Freiheitsgrad $U \in \mathbb{R}$) mit einem mechanischen Freiheitsgrad $x \in \mathbb{R}$, der die Steifigkeit k besitzt, ergibt ein eindimensionales Wandlerelement mit folgender Gesamtenergie:

$$W_{ges} = \frac{1}{2}C(x) \cdot U^2 + \frac{1}{2}k \cdot x^2 \quad (7.12)$$

Die äußeren Lasten des Wandlerelements berechnen sich aus der Ableitung der Gesamtenergie nach den Freiheitsgraden:

$$F(x, U) = \frac{\partial W_{ges}(x, U)}{\partial x} = \frac{1}{2}U^2 \frac{\partial C(x)}{\partial x} + k \cdot x \quad (7.13)$$

$$Q(x, U) = \frac{\partial W(x, U)}{\partial U} = C(x) \cdot U \quad (7.14)$$

Dieser Zusammenhang kann auch in ein verallgemeinertes Kirchhoffsches Netzwerk (siehe Tabelle 2.1) eingebunden werden. Das Wandlerelement besitzt dann die Potentialgrößen x, U und die Flußgrößen F, Q . Zur Implementierung in eine FEM-Umgebung müssen diese Gleichungen noch linearisiert werden,

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial U} dU \quad (7.15)$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial U} dU \quad (7.16)$$

um die Jacobimatrix \underline{K} des Wandlerelements zu erhalten:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{K}_{xx}(x, U) & \underline{K}_{xU}(x, U) \\ \underline{K}_{Ux}(x, U) & \underline{K}_{UU}(x, U) \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i(x, U) \\ \mathbf{U}_i(x, U) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^a(x, U) - \mathbf{F}_i^{NR}(x, U) \\ \mathbf{Q}^a(x, U) - \mathbf{Q}_i^{NR}(x, U) \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

Da die Teilmatrizen von \underline{K} nichtlinear sind, kann zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems beispielsweise ein iterativer Newton-Raphson Algorithmus [151] benutzt werden. Dabei sind \mathbf{F}^a , \mathbf{Q}^a die von außen vorgegebenen Lasten und \mathbf{x}_i , \mathbf{U}_i die Freiheitsgrade im Iterationsschritt i . Die Abweichungen \mathbf{F}_i^{NR} und \mathbf{Q}_i^{NR} vom Kräftegleichgewicht werden nach Gleichung 7.17 aus den Freiheitsgraden \mathbf{x}_{i-1} und \mathbf{U}_{i-1} des vorherigen Iterationsschritts des Newton-Raphson Algorithmus berechnet.

Für die Teilmatrizen der Jacobimatrix \underline{K} des Wandlerelements folgt aus den Gleichungen 7.15 und 7.16:

$$\underline{K}_{xx}(x, U) = \frac{\partial F(x, U)}{\partial x} = \frac{\partial^2 W_{ges}(x, U)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}U^2 \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} + k \quad (7.18)$$

$$\underline{K}_{xU}(x, U) = \frac{\partial F(x, U)}{\partial U} = \frac{\partial^2 W_{ges}(x, U)}{\partial x \partial U} = U \frac{\partial C(x)}{\partial x} \quad (7.19)$$

$$\underline{K}_{Ux}(x, U) = \frac{\partial Q(x, U)}{\partial x} = \frac{\partial^2 W_{ges}(x, U)}{\partial U \partial x} = U \frac{\partial C(x)}{\partial x} \quad (7.20)$$

$$\underline{K}_{UU}(x, U) = \frac{\partial Q(x, U)}{\partial U} = \frac{\partial^2 W(x, U)}{\partial U^2} = C(x) \quad (7.21)$$

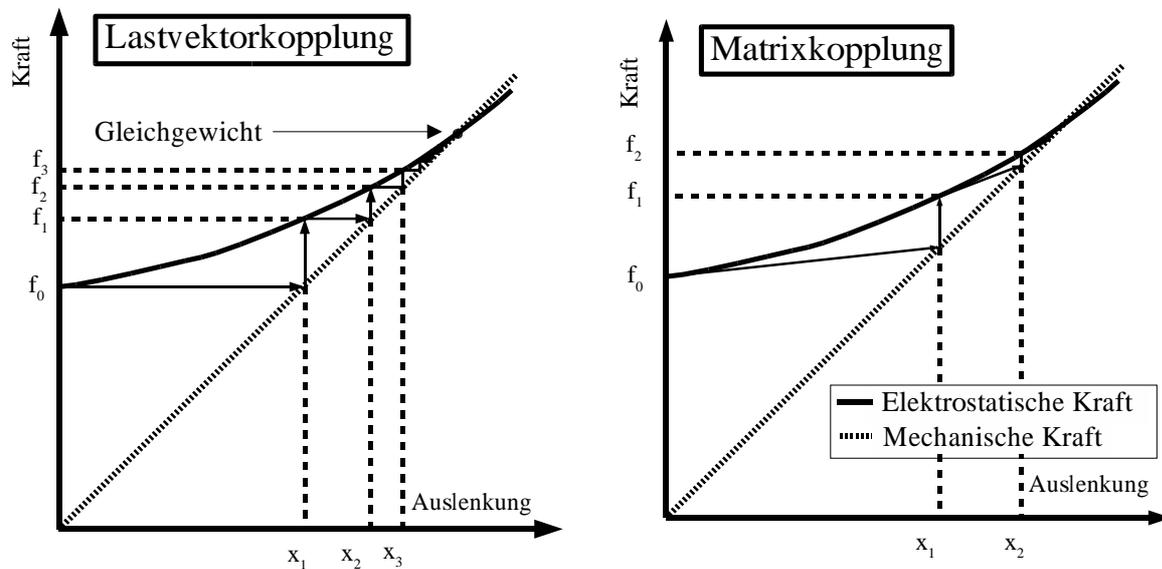


Abbildung 7.6: Annäherung an das Kräftegleichgewicht mit verschiedenen Kopplungsmethoden.

Dieses matrixgekoppelte elektromechanische Wandlerelement ist im Simulator ANSYS [5] seit der Version 5.6 als Element TRANS126 [58] implementiert. In den nachfolgenden Versionen wurde bzw. wird das Element auf zwei [59] (ANSYS 6.1) bzw. drei Dimensionen [10] erweitert. Avdeeb [9] beschreibt diese Elemente ausführlich.

Ein Vergleich der beiden Kopplungsmethoden ist in Abbildung 7.6 anschaulich dargestellt. Durch die simultane Lösung der beiden Domänen wird das Kräftegleichgewicht zwischen der elektrostatischen und der mechanischen Kraft schneller erreicht und damit die Anzahl der Gleichgewichtssiterationen und die Simulationszeit im Vergleich zur Lastvektorkopplung reduziert.

Darüber hinaus geht bei Matrixkopplung (Gleichung 7.18) der elektrostatische Anteil der Federsteifigkeit bereits in die mechanischen Gleichungen ein. So wird die elektrostatische Federaufweichung (“electrostatic spring softening”) (siehe Abschnitt 7.2.1) bei einer Modalanalyse automatisch berücksichtigt. Mit Lastvektorkopplung ist dies nur über einen iterativen Relaxationsalgorithmus möglich [64, 122].

Die Berechnung der Schnappspannung durch schrittweises Erhöhen der Spannung U führt unabhängig von der Kopplungsmethode zu Konvergenzschwierigkeiten. Abhilfe leistet hier ein anderer Steuerparameter der Kopplung.

7.5 Kopplungssteuerung

Der Wechsel des Steuerparameters zur numerischen Handhabung instabiler Arbeitspunkte entspricht mathematisch einem Homotopie- oder Fortsetzungsverfahren [2] und ermöglicht die Konvergenzschwierigkeiten elektromechanischer Probleme zu beheben. Auf dieser Basis wurde von König [79] ein neuer robuster Algorithmus entwickelt, um instabile Arbeitspunkte auf Kontinuumsebene zu berechnen. Dieses Verfahren wird in die-

sem Abschnitt auf das im vorherigen Kapitel vorgestellte Mixed-Level-Modell übertragen und steht damit auch bei der Modellierung auf Systemebene zur Verfügung.

7.5.1 Homotopieverfahren

Das Prinzip des Homotopieverfahrens bzw. der Pfadfortsetzung besteht darin, ein schwierig zu lösendes Problem B als Spezialfall eines parametrisierbaren Problems A zu betrachten, das heißt B in A einzubetten. λ ist ein Parameter von A und steuert die Lösung von A so, daß sich für $\lambda = \lambda_1$ ein einfach zu lösender Fall des Problems A ergibt, für $\lambda = \lambda_2$ die Lösung des gesuchten Problems B . Dabei ist zu beachten, daß der einfache Fall durch Variation von λ stetig in den gesuchten Fall B übergeführt werden kann.

Im Fall der elektromechanischen Kopplung ist die Berechnung der Schnappspannung mit Spannungssteuerung ein schwieriges Problem. Wichtig ist folglich die Wahl eines geeigneten Steuerparameters, mit dem die Lösung des Kräftegleichgewichts von stabilen Gleichgewichtskonfigurationen kontinuierlich zu instabilen Gleichgewichtspunkten weitergeführt werden kann.

Der Steuerparameter muß so gewählt werden, daß zu jedem festen Wert des Parameters die Gesamtenergie eindeutig und der Arbeitspunkt stabil ist. Die Energie teilt sich dabei so auf die beiden Teilsysteme auf, daß eine kleine Störung keinen Energieabfluß aus dem System bewirken kann, weil die Gesamtenergie an diesem Punkt ein Minimum gegenüber der Variation des Steuerparameters erreicht hat.

König [78] geht ausführlich auf diese Methode ein und wendet sie auf zweidimensionale elektromechanische Problemstellungen in der Mikrosystemtechnik an. In dieser Anwendung wurden der mechanische FEM-Simulator TP2000 [172] und der elektrostatische BEM-Simulator BETTI [89] über Lastvektoren gekoppelt. Mayr [96] hat diese Arbeit fortgesetzt und auf dreidimensionale Problemstellungen erweitert.

7.5.2 Wahl des Steuerparameters

Das Homotopieverfahren kann nicht nur auf der Kontinuumsebene eingesetzt werden, sondern auch bei der Systemsimulation mit dem Mixed-Level-Modell aus Abschnitt 7.3.2. Dies wird in Abschnitt 7.6 am Beispiel einer elektrostatisch ausgelenkten Membran demonstriert. Dabei wird insbesondere der Einfluß des Steuerparameters λ untersucht. Nach König [80] ist der optimale Steuerparameter sowohl von der Problemgeometrie als auch vom Arbeitspunkt abhängig. Der gebräuchlichste Steuerparameter neben der Spannung ist die Ladung. Damit lassen sich größere stabile Gleichgewichtsauslenkungen erreichen, was von Seeger [138] auch experimentell untersucht wurde. Am anschaulichsten läßt sich der Einfluß verschiedener Steuerparameter an den analytischen Modellen der elementaren Antriebselemente aus Abschnitt 6.2, dem Plattenkondensator und dem Torsionsplattenkondensator, zeigen.

Plattenkondensator

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Auslenkung bei einem Plattenkondensator aus Gleichung 7.6 ist in Gleichung 7.22 noch einmal dargestellt. Wird die Spannung durch die Ladung Q aus Gleichung 6.6, die elektrostatische Energie W aus Gleichung 6.7 oder die elektrostatische Kraft F aus Gleichung 6.10 ersetzt, so ergeben sich folgende Zusammenhänge, die in Abbildung 7.7 links graphisch dargestellt sind:

$$U^2 = \frac{2k_t h^3}{\epsilon A} \cdot \gamma(1 - \gamma)^2 \quad (7.22)$$

$$Q^2 = 2\epsilon A k_t h \cdot \gamma \quad (7.23)$$

$$W = k_t h^2 \gamma(1 - \gamma) \quad (7.24)$$

$$F = k_t h \gamma \quad (7.25)$$

Wird die Auslenkung des Plattenkondensators über die Spannung gesteuert, so ergibt sich die maximale Gleichgewichtsspannung bei $\gamma = 1/3$, was nach dem letzten Abschnitt der maximalen stabilen Auslenkung eines Plattenkondensators bei der Schnappspannung entspricht. Bei Energiesteuerung ergeben sich stabile Arbeitspunkte bis zu einer maximalen relativen Auslenkung von $\gamma = 0.5$. Wird hingegen die Auslenkung über die elektrische Ladung Q oder die elektrostatische Kraft F gesteuert, so ergibt sich globale Konvergenz.

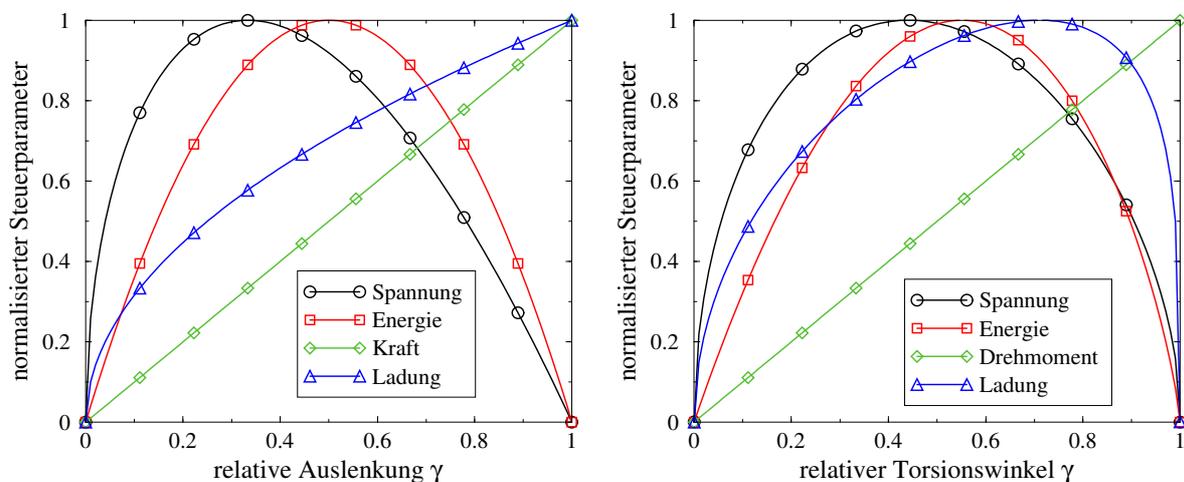


Abbildung 7.7: Gleichgewichtszustände eines parallelen Plattenkondensators (links) und eines Torsionsplattenkondensators (rechts) unter verschiedenen Steuerparametern. Aus Darstellungsgründen sind die Maxima aller Kurven auf eins normiert.

Torsionsplattenkondensator

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Auslenkung bei einem Torsionsplattenkondensator aus Gleichung 7.8 ist in Gleichung 7.26 noch einmal angegeben. Wird die Spannung in dieser Gleichung analog zum vorherigen Abschnitt durch die Ladung Q , die elektrostatische Energie W oder die elektrostatische Kraft F ersetzt, so ergeben sich folgende

Zusammenhänge, die in Abbildung 7.7 rechts für eine unverkürzte Bodenelektrode ($\vartheta=1$) graphisch dargestellt sind:

$$U^2 = \frac{2k_r\varphi_0^3}{\epsilon b} \frac{\gamma^3}{\frac{\gamma}{1-\gamma} + \ln(1-\gamma)} \quad (7.26)$$

$$Q^2 = \epsilon b k_r \varphi_0 \gamma \ln^2(1-\gamma) \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} + \ln(1-\gamma) \right) \quad (7.27)$$

$$W = -k_r \varphi_0^2 \frac{\gamma^2 \ln(1-\gamma)}{\frac{\gamma}{1-\gamma} + \ln(1-\gamma)} \quad (7.28)$$

$$M = k_r \varphi_0 \gamma \quad (7.29)$$

Bei Spannungssteuerung ergibt sich die maximale Auslenkung bei $\gamma \approx 0.44$ und entspricht damit dem Ergebnis aus Abschnitt 7.2.2. Bei Energie- bzw. Ladungssteuerung ergeben sich stabile Arbeitspunkte bis zu einer relativen Auslenkung von $\gamma \approx 0.55$ bzw. $\gamma \approx 0.71$. Globale Konvergenz ergibt sich nur, wenn das elektrostatische Drehmoment als Steuerparameter gewählt wird.

7.6 Mixed-Level-Ansatz zur Modellierung einer elektrostatisch ausgelenkten Membran

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird der Einfluß der vorgestellten Kopplungsmethoden und Steuerparameter auf die Konvergenz beim Mixed-Level-Ansatz untersucht. Dazu wird zunächst unser Demonstrator, eine elektrostatisch ausgelenkte Membran, vorgestellt und das Mixed-Level-Modell mit Vergleichsrechnungen auf der Kontinuumsebene verifiziert.

7.6.1 Demonstrator

Die elektrostatische Membran aus Abbildung 7.8 ist eine typische Komponente in Mikrosystemen und wird beispielsweise in Mikrofonen [46] und Mikropumpen [176] eingesetzt. Unser Demonstrator besitzt folgende Geometrie- und Materialparameter: Länge=Breite=100 μm , Dicke=0.1 μm , Elektrodenabstand=1 μm , E-Modul=165GPa, Poissonzahl=0.23.

Beim Mixed-Level-Ansatz für die elektromechanische Kopplung der Membran wird die mechanische Auslenkung auf der Kontinuumsebene modelliert und die elektrostatische Kraft, die an der Membranoberfläche wirkt, aus Kompaktmodellen berechnet. Dabei wurde entsprechend Abbildung 6.9 das Kompaktmodell des differentiellen Plattenkondensators aus Abschnitt 6.4.1 mit jedem Knoten des mechanischen FEM-Modells der Membran in ANSYS [5] verbunden. Zur Untersuchung der Matrixkopplung wurde als Kompaktmodell das Element TRANS126 von ANSYS verwendet.

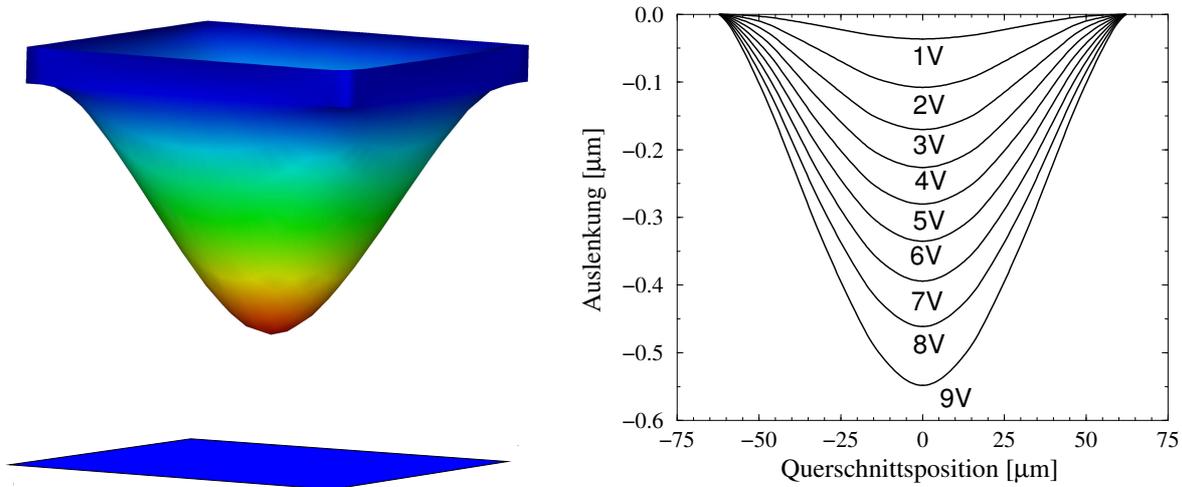


Abbildung 7.8: Links: *Maximale Auslenkung (um den Faktor 100 skaliert) der Membran bei der Schnappspannung.* Rechts: *Auslenkung der Membran bei verschiedenen Spannungen als Schnitt durch die Membrandiagonale.*

7.6.2 Vergleich mit Simulationen auf der Kontinuumsebene

Zunächst soll überprüft werden, ob die Anwendung des Mixed-Level-Ansatzes für die Membran gerechtfertigt ist. Dazu wurden voll gekoppelte FEM/BEM-Vergleichsrechnungen auf der Kontinuumsebene durchgeführt. Tabelle 7.1 zeigt, daß das Mixed-Level-Modell in deutlich kürzerer Zeit vergleichbare Ergebnisse für die Schnappspannung der Membran liefert. Die FEM/BEM-Kopplung (Schema in Abbildung 7.4) im Softwarepaket von Coventor [34] benötigt eine um mehr als zwei Größenordnungen längere Rechenzeit als die Kopplung des Kompaktmodells mit dem mechanischen FEM-Simulator ANSYS [5] (siehe Schema in Abbildung 7.5). Bei einer regelmäßigen Vernetzung der Elektrodenoberflächen mit je 1600 Elementen unterscheiden sich die Schnappspannungen beider Ansätze um weniger als 1%.

Elementgröße [μm]	Kontinuumsmodell (FEM/BEM)		Mixed-Level-Modell	
	Schnappspannung [V]	Rechenzeit [Minuten]	Schnappspannung [V]	Rechenzeit [Minuten]
10	9.98	35	9.5	0.13
5	9.84	120	9.66	0.35
2.5	9.76	500	9.7	0.85

Tabelle 7.1: *Vergleich der Rechenzeit auf einer HP J2240 Workstation zur Berechnung der Schnappspannung der Membran bei verschiedenen Modellierungsansätzen und Diskretisierungen des Problems (Elementgröße).*

7.6.3 Einfluß der Kopplungsmethode und des Steuerparameters

Nachdem der Mixed-Level-Ansatz durch die Vergleichsrechnungen bestätigt wurde, soll nun der Einfluß der Kopplungsmethode und des Steuerparameters auf das Simulationsergebnis untersucht werden. Abbildung 7.9 links zeigt, daß die verschiedenen Methoden übereinstimmende Ergebnisse liefern.

Ein genauer Blick auf die Auslenkung in der Nähe der Schnappspannung in Abbildung 7.9 rechts zeigt den Unterschied der beiden unterschiedlichen Steuerparameter. Bei Ladungssteuerung tritt keine Instabilität auf, bei Spannungssteuerung schnappt die Membran hingegen bei der Schnappspannung ein.

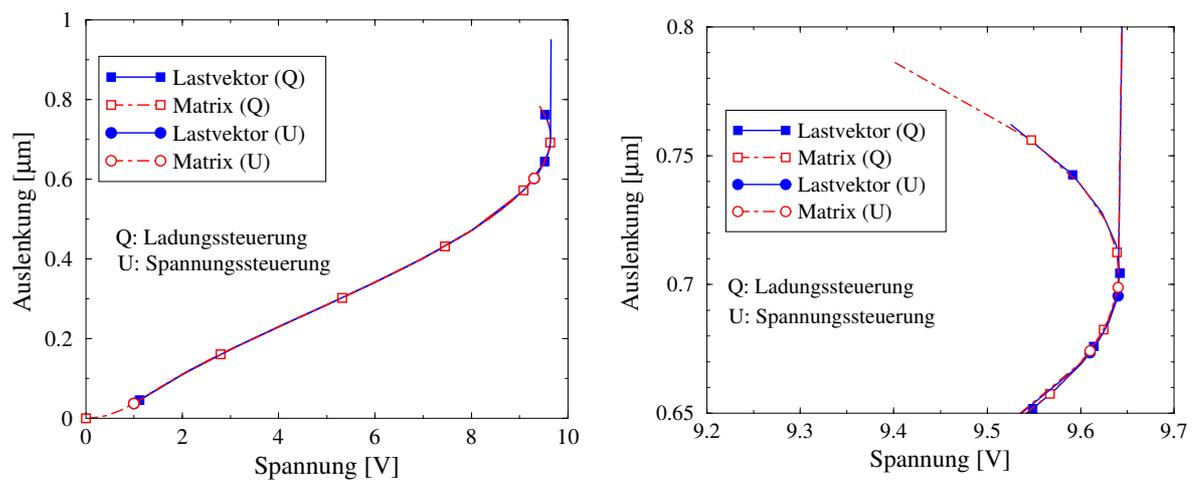


Abbildung 7.9: Links: Auslenkung der Membranmitte in Abhängigkeit der anliegenden Spannung für Matrix- bzw. Lastvektorkopplung und Spannungs- bzw. Ladungssteuerung. Rechts: Der Detailausschnitt der Abbildung links bei der Schnappspannung zeigt, daß bei Ladungssteuerung im Gegensatz zur Spannungssteuerung kein instabiles Verhalten auftritt.

Dieser Unterschied zwischen den Kopplungsmethoden wird deutlicher, wenn in Abbildung 7.10 die Simulationszeit bzw. die Anzahl der Gleichgewichtssiterationen betrachtet wird. Die Lastvektorkopplung benötigt im Vergleich zur Matrixkopplung die vielfache Anzahl an Gleichgewichtssiterationen, bis das Kräftegleichgewicht erreicht ist.

Betrachtet man eine Kopplungsmethode, so ist die Anzahl der Iterationen unter Ladungssteuerung etwas geringer als unter Spannungssteuerung. Schwer zu erkennen, aber entscheidend, ist, daß auch die Matrixkopplung unter Spannungssteuerung in der Nähe der Schnappspannung nicht mehr konvergiert, da die Kurve vorzeitig endet. Zur Abhilfe bietet ANSYS bei Konvergenzschwierigkeiten die "augmented stiffness" Methode an. Damit läßt sich die negative elektrostatische Federsteifigkeit ausschalten, um eine positive Steifigkeit des Gesamtsystems zu garantieren. Nach Erreichen des Gleichgewichtszustandes wird die elektrostatische Steifigkeit wiederhergestellt. So läßt sich mit erhöhter Anzahl an Gleichgewichtssiterationen Konvergenz in der Nähe des Schnapppunktes erreichen. Die bessere Lösung ist aber die Ladungssteuerung, da dann die Schnappspannung kein instabiler Arbeitspunkt mehr ist und nach Abbildung 7.10 auch über diesen Punkt hinaus keine

Konvergenzschwierigkeiten auftreten.

Ladung hat sich gegenüber der Spannung als besserer Steuerparameter zur Berechnung der Schnappspannung einer Membran erwiesen. Im folgenden Abschnitt werden noch die Energie W und die Kraft F als Steuerparameter untersucht. Diese können jedoch ohne Modifikation des Programmcodes von ANSYS nicht mit dem matrixgekoppelten Wandlerelement TRANS126 untersucht werden. Deshalb wurden die Untersuchungen nur unter Lastvektorkopplung durchgeführt. Dazu wird die Spannung U im analytischen Ausdruck für die Kraft F_i des elektrostatischen Kompaktmodells durch den Steuerparameter λ ersetzt:

Steuerparameter λ	$F_i(\lambda)$	$Q_i(\lambda)$
Spannung U	$\frac{1}{2} U^2 \frac{dC_i}{dz}$	$C_i U$
Ladung Q	$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC_i}{dz}$	$C_i \frac{Q}{C}$
Energie W	$\frac{W}{C} \frac{dC_i}{dz}$	$C_i \sqrt{2 \frac{W}{C}}$
Kraft F	$\frac{F}{\hat{C}} \frac{dC_i}{dz}$	$C_i \sqrt{2 \frac{F}{\hat{C}}}$

Dabei ist $Q_i(\lambda)$ die elektrische Ladung auf einem Kompaktelement in Abhängigkeit vom Steuerparameter λ ; $C = \sum_{i=1}^n C_i$ ist die Gesamtkapazität auf der Membran und $\hat{C} = \sum_{i=1}^n \frac{dC_i}{dz}$. Der Index i (von 1 bis n) bezeichnet die einzelnen elektrostatischen Kompaktmodelle, die in das mechanische FEM-Modell integriert sind. n ist die Anzahl der Kompaktelemente und entspricht bei der hier untersuchten Membran der Anzahl der mechanischen Elemente.

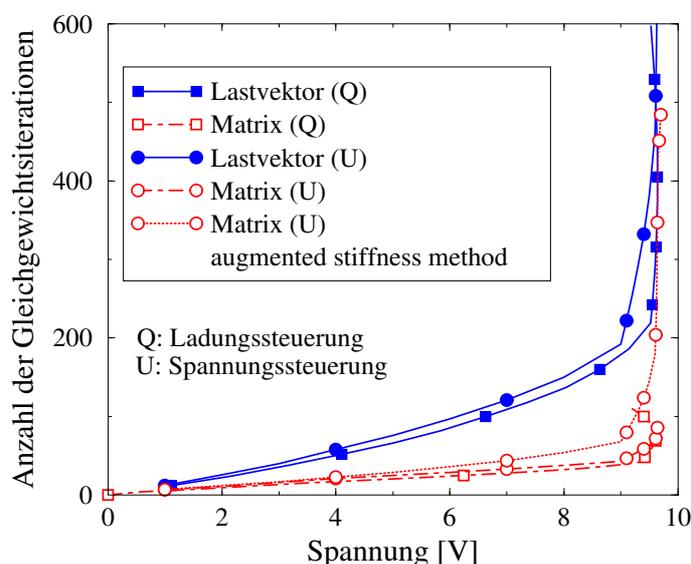


Abbildung 7.10: Kumulative Anzahl der Newton-Raphson Iterationen zum Erreichen des Kräftegleichgewichts für Matrix- bzw. Lastvektorkopplung und Spannung bzw. Ladung als Steuerparameter.

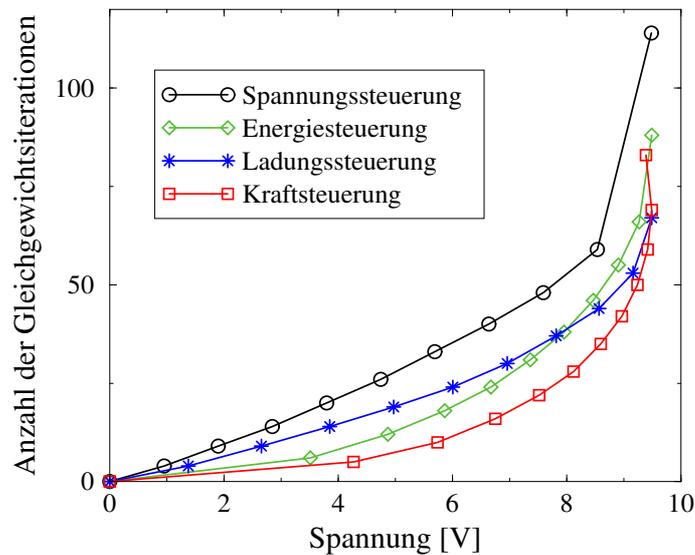


Abbildung 7.11: Anzahl der Gleichgewichtsiterationen in Abhängigkeit von der Spannung an der Membran und dem Steuerparameter.

In Abbildung 7.11 ist die Anzahl der Gleichgewichtsiterationen im Gegensatz zu Abbildung 7.10 nicht kumulativ, sondern für jeden Spannungswert einzeln aufgetragen. Für kleine Spannungswerte benötigt die Kraftsteuerung die wenigsten Iterationen. Nahe der Schnappspannung zeigen Kraft- und Ladungssteuerung vergleichbare Konvergenz. Diese Aussagen sind aber, wie bereits eingangs erwähnt, nicht auf andere Geometrien übertragbar.

7.7 Zusammenfassung und Bewertung

Für unseren Demonstrator - eine elektrostatisch ausgelenkte Membran - wurde das Mixed-Level-Modell durch gekoppelte Feldsimulationen bestätigt. Dabei wird das mechanische Kontinuumsmodell mit dem Kompaktmodell des differentiellen Plattenkondensators gekoppelt, das eine lokale Approximation des elektrischen Feldes darstellt. Dadurch steht als Kopplungsmethode der beiden physikalischen Domänen nicht nur die Lastvektorkopplung, sondern auch die Matrixkopplung zur Verfügung. Letztere konvergiert schneller und erlaubt zudem, den Einfluß des elektrostatischen Feldes auf die mechanische Steifigkeit des gekoppelten Problems direkt statt iterativ zu berücksichtigen. Aufgrund der inhärenten Instabilität von elektromechanisch gekoppelten Problemen ergeben sich unter Spannungssteuerung bei beiden Kopplungsarten Konvergenzschwierigkeiten beim Annähern an die Schnappspannung. Zur Lösung dieses Problems wurde entsprechend dem Homotopieverfahren eine Variation des Steuerparameters untersucht. Es wurde gezeigt, daß das Wandlerelement TRANS126 in ANSYS mit der elektrischen Ladung als Steuerparameter keine Konvergenzschwierigkeiten bei der Schnappspannung mehr aufweist. Die Auswirkung von anderen Steuerparametern wurde mit der Lastvektorkopplung untersucht. Für unseren Demonstrator hat sich die elektrostatische Kraft als der Parameter erwiesen, mit dem die wenigsten Iterationen bis zum Erreichen des Kräftegleichgewichts notwendig waren. Es kann hier aber keine allgemeingültige Regel für den

optimalen Parameter angegeben werden, da dieser u.a. von der momentanen Ladungsverteilung auf den Elektroden und der Nichtlinearität der Mechanik abhängt.

8 Simulation eines Mikroschalters auf Systemebene

Zum Abschluß werden die bisherigen Ergebnisse zusammengetragen und zur Modellierung eines realen Bauelements angewendet. Dabei handelt es sich um einen elektrostatischen Mikroschalter von Infineon, dessen Aufbau und Funktionsweise zu Beginn dieser Arbeit auf Seite 6 erläutert wurde.

Nach den Betrachtungen des letzten Kapitels läßt sich für dieses komplexe Bauelement nicht einmal der elektrostatische Antrieb mehr praktikabel auf der Kontinuumsebene modellieren. Dabei ist jedoch der entscheidende Einfluß der Dämpfung noch gar nicht berücksichtigt. Das Gesamtsystem des Schalters kann folglich nur auf der Systemebene modelliert werden. Nach den Betrachtungen zur Systemsimulation in Abschnitt 2.3 muß das Gesamtsystem in Teilsysteme zerlegt und diese zumindest teilweise durch Kompaktmodelle ersetzt werden. Die primäre Zerlegung erfolgt nach den beteiligten physikalischen Domänen. Beim Mikroschalter ergibt sich so ein elektronisches, ein mechanisches, ein fluidisches und ein elektrostatisches Teilsystem, die in den einzelnen Abschnitten dieses Kapitels näher betrachtet werden.

Als Modellierungsansatz kommt das in Abschnitt 2.3.4 beschriebene verallgemeinerte Kirchhoffsche Netzwerk zum Einsatz. Dieser Ansatz hat nicht nur den Vorteil, daß er inhärent Energie erhaltend ist, sondern er ermöglicht auch eine homogene Beschreibung des Systems. Am besten ist dafür eine Hardwarebeschreibungssprache geeignet, mit der sich sowohl die elektronischen Schaltungen des Systems als auch Finite-Netzwerke einfach beschreiben lassen. Durch Finite-Netzwerke können Teilsysteme auf der Kontinuumsebene beschrieben werden und ermöglichen so einen Mixed-Level-Ansatz (siehe Abschnitt 2.3.3), der bei unserem Demonstrator zur Beschreibung der Dämpfung zum Einsatz kommt.

Als Modellierungssprache wird die Hardwarebeschreibungssprache SpectreHDL des Netzwerksimulators Spectre [27] verwendet. Dieser ermöglicht statische, harmonische und transiente Analysen, die im letzten Abschnitt dieses Kapitels am Systemmodell unseres Mikroschalters durchgeführt und mit Messungen verglichen werden.

8.1 Physikalische Domänen des Systemmodells

Das Systemmodell des Schalters beschreibt die Wechselwirkung der vier beteiligten physikalischen Domänen, was in Abbildung 8.1 anschaulich als Netzwerk dargestellt ist. Die Modellierung dieser vier Teilsysteme, der elektronischen Schaltung, des elektrostatischen

Antriebs, der Mechanik und der fluidischen Dämpfung wird in diesem Abschnitt genauer beschrieben.

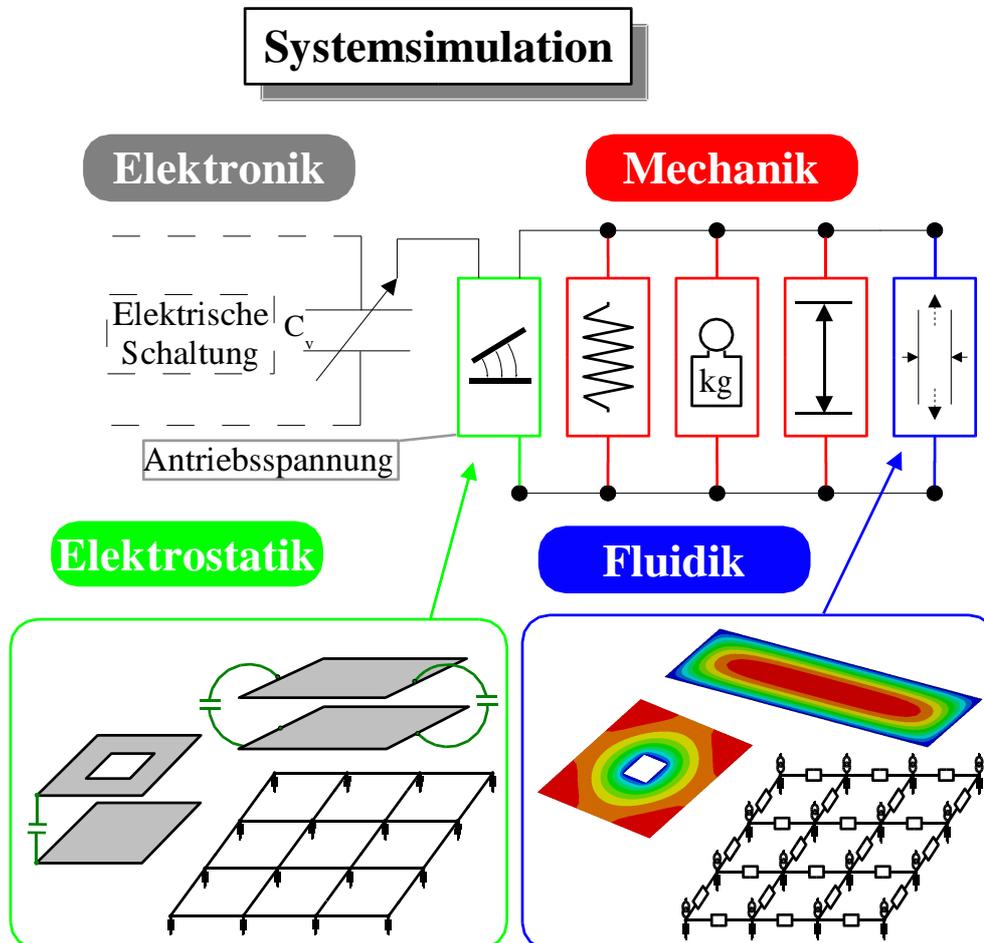


Abbildung 8.1: Schemabild für das Systemmodell des Mikroschalters.

8.1.1 Elektronik

Die Elektronik eines Mikrosystems dient beispielsweise zur Ansteuerung von Aktoren oder zur Verstärkung und zum Auslesen von Sensoren. Meist kommen neben analogen auch digitale Schaltelemente zum Einsatz ("mixed-signal"-Schaltungen), denn für Aufgaben wie Kalibrierung und Datenverarbeitung ist eine digitale Signalverarbeitung vorteilhaft.

Sehr oft sind dabei Elektronik und Mikromechanik stark gekoppelte Systeme, wie zum Beispiel bei der Kraftrückkopplung kapazitiver Signalwandler [61]. Auch bei der Ansteuerung können sich Kopplungseffekte ergeben. Aufgrund technischer Randbedingungen ist die zur Verfügung stehende Systemspannung in vielen Fällen (v.a. bei batteriebetriebenen Geräten) zu gering, um die benötigte Antriebskraft zu erzielen. Dieses Problem

kann mit Hilfe einer Ladungspumpe umgangen werden.

Diese entspricht einer Stufenschaltung verschiedener Kondensatoren und Dioden und wird von einer Wechselspannung gesteuert, die aus der Gleichstromversorgungsspannung erzeugt wird. In jeder Stufe wird die Spannung erhöht, aber der zur Verfügung stehende Strom ist begrenzt durch die pro Zyklus benötigte Ladungsmenge. Man kann deshalb eine Ladungspumpe als Spannungsquelle mit virtuellem Quellenwiderstand beschreiben, der zu einem Spannungsabfall ohne Ohmschen Verlust führt. Wenn der Laststrom zu groß für die verfügbaren Kondensatoren ist, dann nimmt auch die Welligkeit ("ripple") zu.

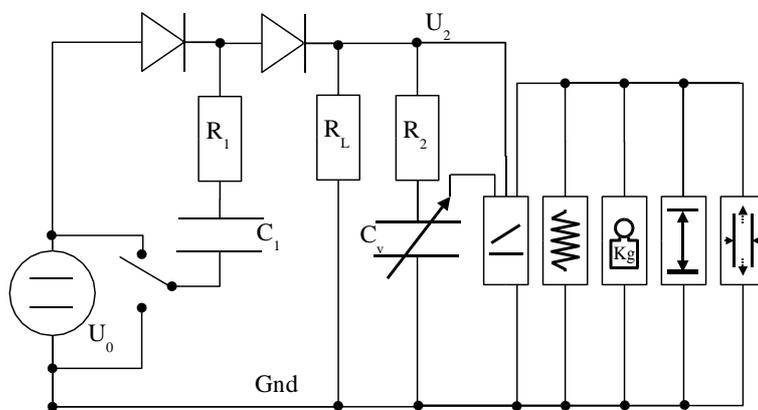


Abbildung 8.2: Schaltbild einer einfachen Ladungspumpe [66], die an das Systemmodell des Mikroschalters angeschlossen ist.

Da eine Ladungspumpe sensitiv gegenüber der Last ist, die sie ansteuert, ist es für den Schaltungsentwickler wichtig, ein Systemmodell zu besitzen, welches das Zusammenspiel von Elektronik und Mikromechanik beschreibt.

In unserer einfachen Demonstrationsschaltung zur Ansteuerung des Mikroschalters in Abbildung 8.2 hat die Ladungspumpe nur eine einzige Stufe. Die Widerstände R_1 , R_2 und R_L berücksichtigen die Verluste realer Zuleitungen und die variable Kapazität entspricht dem Torsionsplattenkondensator. Da das Systemmodell des Schalters in einer Hardwarebeschreibungssprache aufgesetzt ist, kann auch die komplexere elektronische Schaltung einer realen Ladungspumpe leicht integriert werden.

Bei jedem Wechsel der Schalterposition in Abbildung 8.2 wird Ladung auf die Elektrode des Mikroschalters gepumpt. Der Einfluß der Pumpfrequenz auf das Systemverhalten wird in Abbildung 8.3 gezeigt. Der exponentielle Anstieg der Ausgangsspannung darin zeigt die korrekte Funktion der Ladungspumpe an. Beim Schließen des Schalters nimmt der Abstand der Kondensatorplatten ab und die Kapazität steigt an. Wenn die Pumpfrequenz nicht hoch genug ist, dann kann die Ausgangsspannung der Ladungspumpe stark abfallen und damit den Schaltvorgang verzögern oder verhindern, wie die Kurve für eine Pumpfrequenz von 1 MHz in Abbildung 8.3 rechts zeigt.

Die Ausgangsspannung, die von der Elektronik bereitgestellt wird, muß nun im folgenden Teilsystem, das den elektrostatischen Antrieb beschreibt, in ein Drehmoment umgewandelt werden.

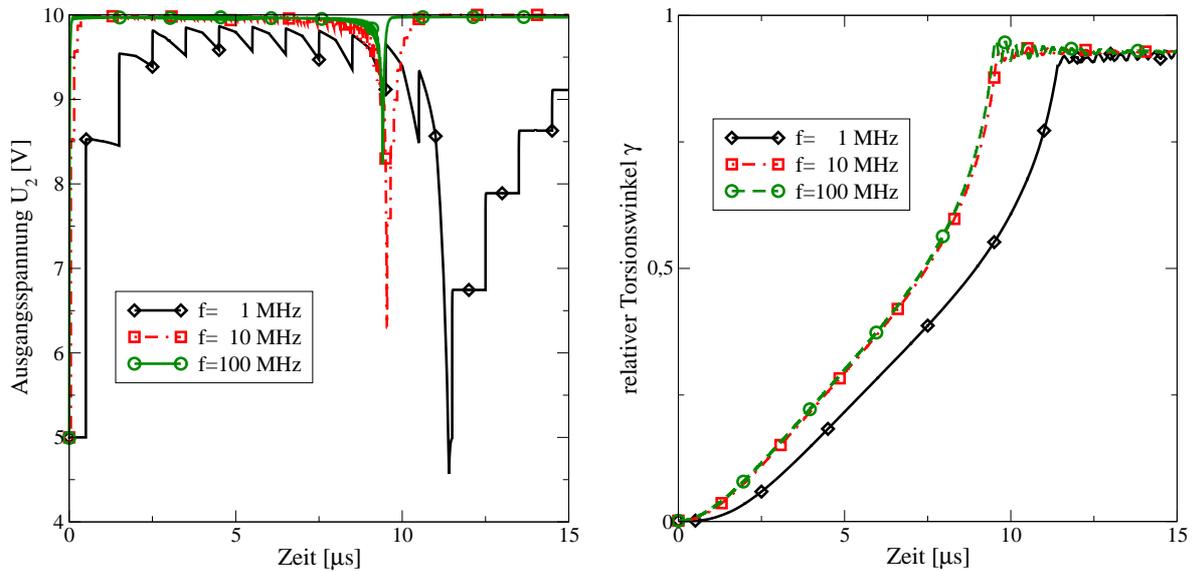


Abbildung 8.3: Einfluß der Pumpfrequenz f der Ladungspumpe auf die Ausgangsspannung (links) und das Schaltverhalten (rechts) des Mikroschalters.

8.1.2 Elektrostatik

Die REM-Aufnahme unseres Demonstrators in Abbildung 1.3 auf Seite 7 läßt erkennen, daß die Torsionsplatte - und damit die obere Elektrode - regelmäßig perforiert ist. Sie ist entsprechend Abbildung 4.4 auf Seite 66 aus gelochten Elementarzellen zusammengesetzt. Die Kapazität einer Elementarzelle wird mit Hilfe des Kompaktmodells aus Abschnitt 6.4 berechnet. Diese Kompaktmodelle für die einzelnen Lochzellen werden nach dem Schaltbild in Abbildung 8.1 in einer Parallelschaltung zusammengeführt. Dabei werden die Einzelkapazitäten $C(A_C, \alpha, h)$ in Abhängigkeit von der Fläche der Zelle A_C , dem Perforationsgrad α und dem Abstand der Zelle von der Bodenelektrode h nach den Gleichungen 6.24 und 6.25 für jede Lochzelle berechnet und addiert.

Das gesuchte elektrostatische Drehmoment (Gleichung 6.11) zur Einkopplung in das mechanische Teilsystem berechnet sich über die elektrostatische Energie (Gleichung 6.7) aus der angelegten Spannung und der Kapazität der Torsionsplatte. Die Kapazität berechnet sich nach Gleichung 6.6 aus dem elektrischen Feld. Dabei muß nach Abbildung 8.1 sowohl das elektrostatische Streufeld der Elementarzellen als auch das Streufeld außerhalb der Torsionsplatte berücksichtigt werden. Letzteres ist nach Gleichung 6.22 und Abbildung 6.5 für unseren Demonstrator jedoch vernachlässigbar.

Die Torsionsplatte des Mikroschalters kann mit sehr guter Näherung als steife Platte betrachtet werden. Damit vereinfacht sich das Modell, denn der Plattenabstand h jeder Lochzelle hängt nur noch vom Torsionswinkel und dem Abstand der Lochzelle von der Torsionsachse ab. Die Gesamtkapazität $C(\gamma)$ ist somit eine Funktion des relativen Torsionswinkels γ und steigt mit zunehmendem Winkel γ stark an. Bemerkenswert ist dabei der Einfluß der Streufelder in den Löchern und der leicht verkürzten Bodenelektrode ($\vartheta=0.95$) auf die Kapazität bzw. das elektrostatische Drehmoment. Dies ist in Abbildung 8.4 gut zu erkennen, da die beiden Größen bzgl. einem Torsionsplattenkondensator gleicher Geome-

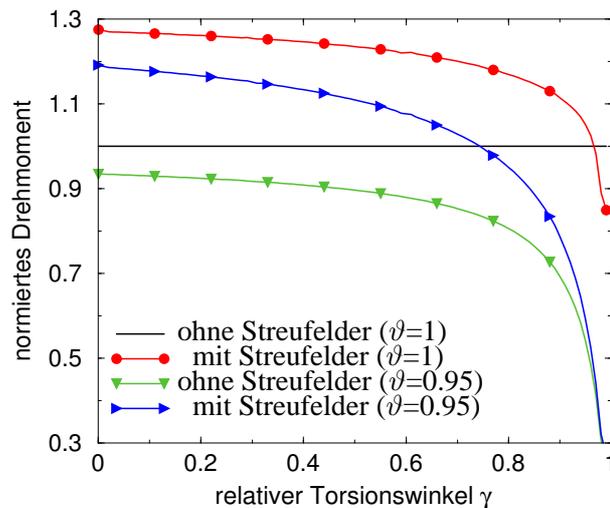


Abbildung 8.4: Einfluß der Streufelder in den Löchern und der verkürzten Bodenelektrode ($\vartheta=0.95$) auf das elektrostatische Drehmoment des Mikroschalters. Zum Vergleich ist das Drehmoment auf den Wert normiert, der mit unverkürzter Bodenelektrode und ohne Streufelder in den Löchern errechnet wurde.

trie normiert sind, bei dem diese beiden Effekte vernachlässigt wurden. Die Streufelder in den Löchern erhöhen die Kapazität und das Drehmoment deutlich. Die leicht verkürzte Bodenelektrode senkt hingegen die Kapazität und damit das Drehmoment unseres Demonstrators insbesondere für große relative Torsionswinkel stark ab.

Das elektrostatische Drehmoment bildet nun nach Abbildung 8.1 ein dynamisches Gleichgewicht mit den mechanischen Drehmomenten (Torsionsfeder, Trägheitsmoment, mechanischer Kontakt) und dem fluidischen Dämpfungsmoment (Abschnitt 8.1.4). Das Kräftegleichgewicht ist im Netzwerksimulator durch die Kirchhoffsche Knotenregel (Abschnitt 2.3.4) automatisch erfüllt. Es müssen deshalb nur die im folgenden Abschnitt beschriebenen Zusammenhänge zwischen den mechanischen Potential- und Flußgrößen für die mechanischen Kompaktmodelle definiert und nach Abbildung 8.1 zusammenschaltet werden.

8.1.3 Mechanik

Das mechanische Teilsystem ist nach Abbildung 8.1 funktional weiter unterteilt in den im vorherigen Abschnitt beschriebenen (elektrostatischen) Antrieb, die träge Masse der Torsionsplatte, die Torsionsfeder, an der diese aufgehängt ist, den mechanischen Kontakt beim Anschlag am Substrat und die im nächsten Abschnitt beschriebene Dämpfung.

Die Torsionsplatte kann mit guter Näherung als steife Platte betrachtet werden. Damit reduziert sich das mechanische Modell auf den Torsionswinkel als einzigen Freiheitsgrad und kann somit als angeregtes Feder-Masse-Dämpfer-System mit Anschlag beschrieben werden. Die Potentialgröße in unserem mechanischen Kirchhoffschen Netzwerk ist nach Tabelle 2.1 die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und die zugehörige Flußgröße ist das Drehmoment M .

Aus der Geometrie des Schalters berechnet sich das Trägheitsmoment J , das den Zusammenhang zwischen dem Drehmoment M und der Winkelbeschleunigung beschreibt:

$$M = J\ddot{\varphi} \quad (8.1)$$

Die Torsionsplatte ist an zwei Balken der Länge l aufgehängt, die als Torsionsfedern wirken. Die Torsionssteifigkeit k_r wird durch folgende Formel bestimmt,

$$M = k_r \varphi = 2 \frac{G \hat{I}}{l} \varphi \quad (8.2)$$

wobei G das Schermodul des Balkenmaterials und \hat{I} das Flächenträgheitsmoment des Balkens ist, welches aus dem Querschnitt des Balkens berechnet werden kann [56].

Der Anschlag der Torsionsplatte beim maximalen Torsionswinkel φ_0 wird mit einer harten Feder modelliert, die nur bei Kontakt wirkt.

Das Modell läßt sich auch auf deformierbare Platten erweitern, indem beispielsweise wie bei Klein [76] die Kirchhoffsche Plattengleichung auf der Kontinuumsebene als Finites Netzwerk modelliert wird. Damit steigt jedoch die Anzahl der Freiheitsgrade des Systemmodells beträchtlich, was eine effiziente Simulation gefährdet. Denn auch unser einfaches mechanisches Modell weist bereits große Nichtlinearitäten auf, zum einen durch den Beitrag des elektrostatischen Antriebs und zum anderen durch die im nächsten Abschnitt beschriebene fluidische Dämpfung in der Umgebungsluft.

8.1.4 Fluidik

Das fluidische Teilsystem beschreibt die Druckverteilung unter der Torsionsplatte in Abhängigkeit vom Torsionswinkel und der Winkelgeschwindigkeit. Der integrale Wert wird dann nach Abbildung 8.1 in das mechanische Teilsystem als Dämpfungsmoment eingespeist. Aufgrund des kleinen Luftspalts zwischen den Kondensatorplatten hat die Dämpfung einen entscheidenden Einfluß auf das Schaltverhalten. Um den Dämpfungseffekt möglichst genau und prädiktiv zu simulieren, wird der in Kapitel 5 beschriebene Mixed-Level-Ansatz angewandt und die Berechnung der Druckverteilung auf drei geometrische Teilbereiche aufgeteilt. Die Druckverteilung unter der Platte wird aus einem Kontinuumsmodell der kompressiblen Reynoldsgleichung berechnet. Dem Druckabfall an den Rändern der Platte und in den Löchern wird durch die Kompaktmodelle aus Kapitel 4 Rechnung getragen. Im Gegensatz zum rein analytischen Kompaktmodell aus der Lösung der modifizierten Reynoldsgleichung in Abschnitt 3.2.4 berücksichtigt das Mixed-Level-Modell auch die Kompressibilität der Umgebungsluft, die Nichtlinearität der Reynoldsgleichung und die Flußrate der Luft zwischen den Lochzellen untereinander und dem Rand.

Wie in Abschnitt 5.2 wird die Reynoldsgleichung dabei numerisch gelöst. Zur Anwendung kommt jeweils ein Finites-Netzwerk-Ansatz, der sich gut in ein Kirchhoffsches Netzwerk integrieren läßt. Dieser Ansatz wurde bereits von Schrag [131] beschrieben und wird im Anhang A kurz erläutert. Grundlage für das Finite-Netzwerk-Modell des Mixed-Level-Ansatzes ist eine Netzliste, welche die Ortsdiskretisierung des Kontinuumsmodells und dessen Parameter für die Kompaktmodelle beschreibt. Entscheidend für genaue Simulationsergebnisse ist eine feine Ortsdiskretisierung, die am besten mit einem professionellen Vernetzungs-Programm erstellt wird. In dieser Arbeit wurde dafür der FEM-Preprocessor von ANSYS [5] verwendet. Das Erstellen der entsprechenden Netzliste kann dann jedoch sehr aufwendig sein. Deshalb wurde ein Programm geschrieben,

das die Knoten- und Elementinformationen eines FEM-Netzes in eine Netzliste mit den zugehörigen Parametern überträgt, die vom Netzwerksimulator eingelesen werden kann. Vorlage dafür war das Programm ANTOS von Voigt [160], das von Schrag [131] erweitert wurde. Aufgrund kleiner Fehler wurde der Algorithmus im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelt. Das FEM-Netz muß dadurch auch nicht mehr aus regelmäßigen Rechtecken zusammengesetzt sein, sondern kann aus beliebigen Drei- oder Viereckselementen bestehen. Damit können Platten von jeglicher Geometrie untersucht werden. Ein Listing des verbesserten ANTOS-Codes findet sich im Anhang B in der ANSYS-Designsprache APDL. Da es sich dabei um eine Interpretersprache handelt, wurde der Algorithmus auch in C-Code übertragen, um auch große Netzlisten in kurzer Zeit erstellen zu können.

8.2 Systemanalyse

Nachdem im letzten Abschnitt der Aufbau des Systemmodells erläutert wurde, wird in diesem das Systemverhalten bei statischer, harmonischer und transienter Anregung analysiert. Die Ergebnisse werden mit experimentellen Untersuchungen an verschiedenen Designvarianten des Mikroschalters verglichen, um die Qualität des Modells zu überprüfen.

8.2.1 Statische Analyse

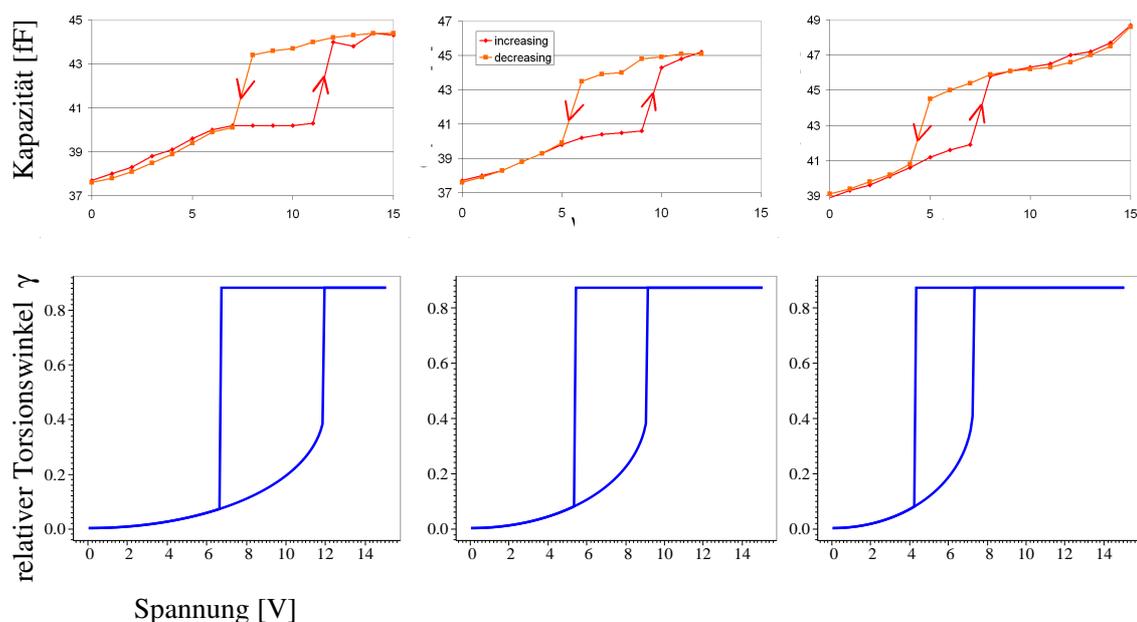


Abbildung 8.5: Spannungshysteresekurve des Mikroschalters für drei Designvarianten mit unterschiedlicher Plattengröße. Oben: Experiment [121]; unten: Systemmodell.

Mit einer statischen Analyse läßt sich der in Abschnitt 7.2.2 beschriebene Effekt der elektromechanischen Instabilität und der Spannungshysterese überprüfen. Dabei wird die Spannung am Schalter schrittweise erhöht, bis die Torsionsplatte beim Erreichen der Schnappspannung die Bodenelektrode kontaktiert und den Schalter damit schließt. Wird anschließend die Spannung wieder reduziert, dann öffnet sich der Schalter erst bei der deutlich kleineren Rückschnappspannung, wenn die Rückstellkraft der Torsionsfeder die elektrostatische Anziehungskraft übertrifft.

Für drei verschiedene Designvarianten des Mikroschalters wurde die Spannungshysteresekurve gemessen und mit unserem Systemmodell simuliert. Aufgrund des Einflusses von parasitären Kapazitäten des Meßaufbaus können die gemessenen Kapazitätswerte nicht zur Modellverifikation verwendet werden, aber die gemessenen und simulierten Schnapp- und Rückschnappspannungen für die drei Designvarianten in Abbildung 8.5 stimmen sehr gut überein.

8.2.2 Harmonische Analyse

Mit einer harmonischen Analyse läßt sich der in Abschnitt 7.2.1 beschriebene elektrostatische Federeffekt überprüfen. Die Resonanzfrequenz eines elektromechanisch gekoppelten Systems hängt nicht nur von der mechanischen Federsteifigkeit und der trägen Masse der Torsionsplatte ab, sondern auch von der angelegten Spannung. Die elektrostatische Anziehungskraft wirkt wie eine Feder mit negativer Federkonstante, die sich der mechanischen Torsionsfeder überlagert. Abbildung 8.6 zeigt, wie die Steifigkeit und damit die Resonanzfrequenz des Systems mit zunehmender Spannung abnimmt.

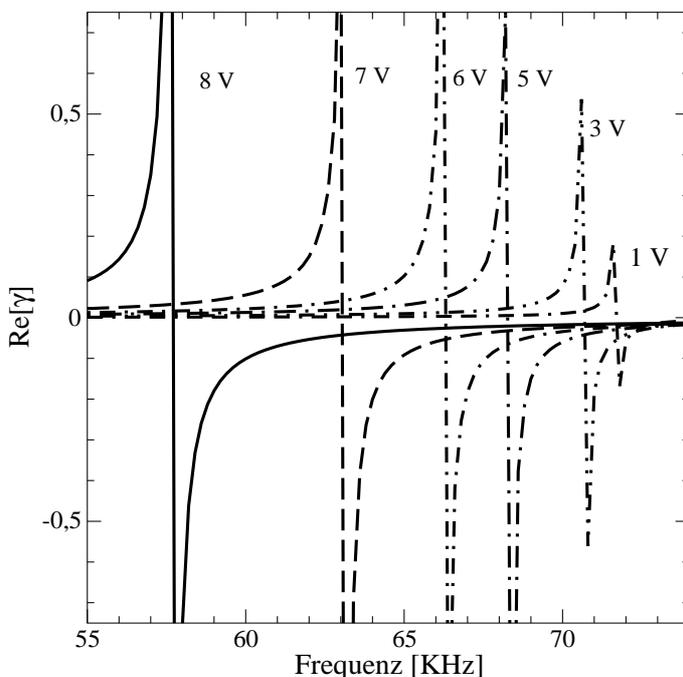


Abbildung 8.6: Die harmonische Analyse zeigt die Verschiebung der Resonanzfrequenz aufgrund des negativen elektrostatischen Federeffekts.

Die Resonanzfrequenz ohne angelegte Spannung stimmt gut mit den von Plötz [121] experimentell gemessenen 72 kHz überein.

8.2.3 Transiente Analyse

Mit einer transienten Analyse läßt sich das Schaltverhalten des Mikroschalters simulieren und somit überprüfen, ob die benötigte Zeit für das Öffnen und Schließen des Schalters den Anforderungen entspricht.

In Abbildung 8.7 ist die Auslenkung des Schalters beim Öffnen ($\gamma \rightarrow 0$) und beim Schließen ($\gamma \rightarrow 1$) des Schalters aufgetragen. Dabei zeigen die als Symbole gekennzeichneten experimentellen Meßdaten von Plötz [121] eine sehr gute Übereinstimmung mit den Kurven aus der Systemsimulation. Dies gilt für alle drei Designvarianten, die sich im Perforationsgrad α (Verhältnis des Lochdurchmessers zum Zellendurchmesser) unterscheiden. Der Einfluß des Perforationsgrades wird insbesondere beim Ausschaltvorgang deutlich. Beim Öffnen des Schalters mit der stärksten Perforierung schwingt die Torsionsplatte nach. Beim geringsten Perforationsgrad ist diese überkritisch gedämpft und nimmt sofort die Gleichgewichtsposition ein.

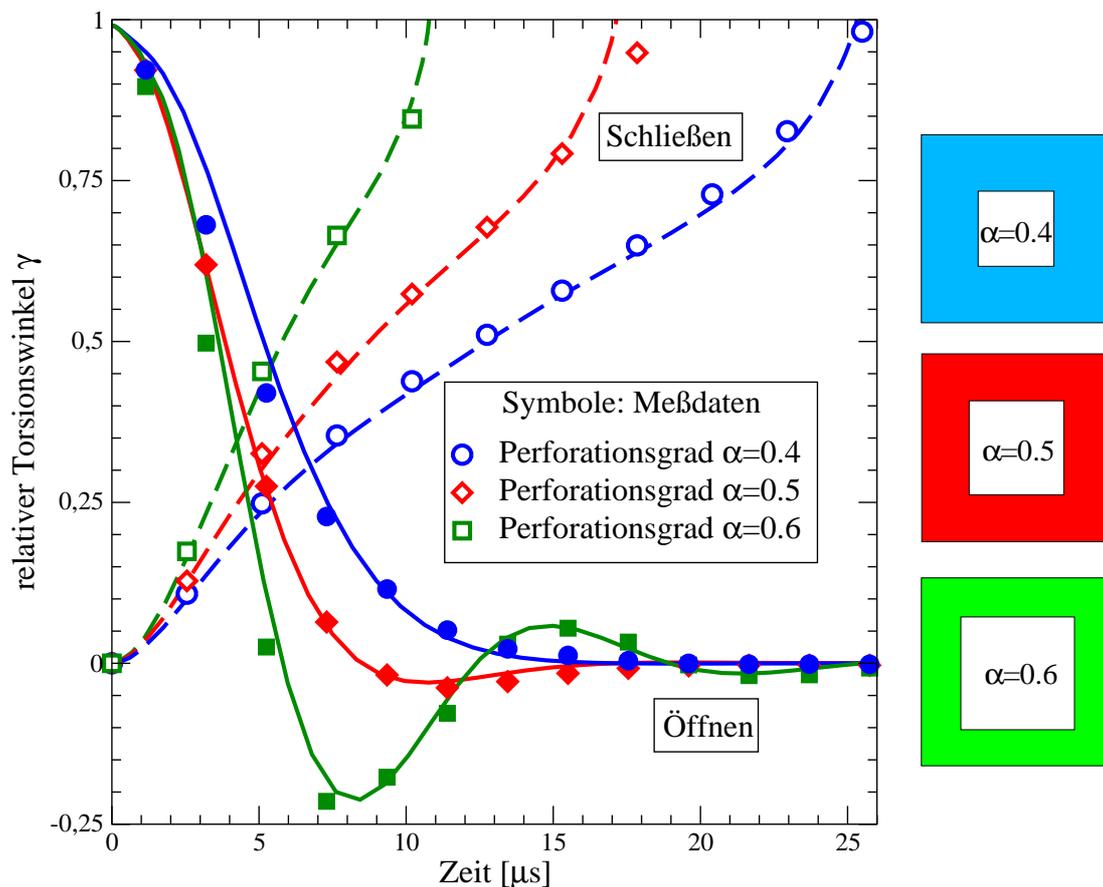


Abbildung 8.7: Vergleich der Systemsimulation mit Messungen beim Schließen und Öffnen des Schalters für drei verschiedene Designvarianten.

Das Mixed-Level-Modell für die Designvariante des Schalters mit etwa 3000 Löchern besitzt etwa 100000 Freiheitsgrade. Die Simulation eines Schaltvorgangs mit unserem Systemmodell benötigt auf einer Workstation nur etwa eine Stunde. Damit kann erstmals das transiente Verhalten eines so komplexen Bauelements unter Berücksichtigung aller

wichtigen physikalischen Effekte in akzeptabler Zeit prädiktiv simuliert werden. Zum Vergleich benötigt allein die Berechnung der Dämpfung mit FEM des einfachen Testschalters mit 12 Löchern auf Seite 94 auf dem gleichen Rechner 24 Stunden. Dieser Vergleich unterstreicht eindrucksvoll die Überlegenheit des Mixed-Level-Modells gegenüber einem Kontinuumsmodell.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Ansätze und Methoden entwickelt, die für Mikrosysteme typische Kopplung verschiedener Energie- und Signalformen effizient zu modellieren. Im Mittelpunkt steht dabei ein Mixed-Level-Ansatz mit physikalisch basierten Kompaktmodellen. Dieser hat sich insbesondere bei der Squeeze-Film-Dämpfung und der elektromechanischen Kopplung über Oberflächenkräfte bewährt. Beides sind bidirektional gekoppelte Effekte, die aufgrund der kleinen Dimensionen in Mikrosystemen eine große Kopplungsstärke besitzen und deshalb eine große Rolle spielen. Genau diese beiden Effekte beeinflussen auch wesentlich das Schaltverhalten unseres Demonstrators: ein industriell gefertigter, elektrostatisch angetriebener Mikroschalter. Dessen komplexe Geometrie und die Vielzahl der zu berücksichtigenden Kopplungsmechanismen machen dessen Modellierung besonders anspruchsvoll, so daß er sich gut zur Validierung der Methode eignet.

Zur Einordnung der Modellierungsmethode wurde in Kapitel 2 ein Überblick über bestehende Ansätze zur Simulation von Mikrosystemen gegeben. Diese lassen sich in erster Näherung in drei Ebenen einteilen: die Prozeßebene, die Bauelementebene und die Systemebene. Während in der ersten der Herstellungsprozeß eines Bauelements simuliert wird, beschreibt die zweite das Verhalten eines Bauelements auf der Basis gekoppelter partieller Differentialgleichungen, d.h. als Kontinuumsmodell mit räumlich verteilten Zustandsvariablen. Ein Schwerpunkt in der aktuellen Forschung und in dieser Arbeit ist jedoch die dritte - die Systemebene. Denn auf der Kontinuumsebene stößt man schnell an die Grenzen der verfügbaren Rechenkapazität, wenn ein komplexes Bauelement oder gar ein ganzes System aus mehreren Bauteilen und externer Beschaltung modelliert werden soll. Deshalb müssen Kompaktmodelle mit wenigen konzentrierten Zustandsvariablen abgeleitet werden, die einen Kompromiß aus Rechenzeit und Genauigkeit gegenüber einem Kontinuumsmodell auf der Bauelementebene darstellen, und in das diskretisierte Kontinuumsmodell integriert werden. Der Einsatz von mindestens einem Kompaktmodell in der Simulation wird deshalb in dieser Arbeit als Abgrenzung zwischen der Systemebene und der Bauelementebene verwendet.

Bei genauerer Betrachtung sind innerhalb der Systemebene noch viele Abstraktionsstufungen möglich, je nachdem, ob das Ergebnis der Systemsimulation möglichst genau oder möglichst schnell berechnet werden soll. Einen sehr geringen Abstraktionsgrad besitzt der in dieser Arbeit vorgestellte Mixed-Level-Ansatz, der alle relevanten physikalischen Design- und Materialparameter berücksichtigt. Im Gegensatz dazu ist auch eine „ausführbare Spezifikation“ als Modell mit besonders hohem Abstraktionsgrad denkbar. Dabei ist beispielsweise eine vorgegebene Schaltverzögerung der einzige Parameter, den das Modell besitzt und von diesem umgesetzt wird.

Beide Ansätze haben ihre Anwendung. Wenn auf der einen Seite interessiert, bei wel-

chem Design des Schalters die minimale Schaltzeit erzielt wird, dann kann dies nur mit dem vorgestellten Mixed-Level-Modell beantwortet werden. Wenn auf der anderen Seite zur Überprüfung der Designstabilität ein ganzes System mit kleinen Variationen sehr oft simuliert und statistisch ausgewertet werden muß, dann darf unser Schalter als Kompaktmodell nur Sekundenbruchteile als Rechenzeit benötigen. Doch auch zur Bestimmung realistischer Parameter für diese stark abstrahierten Kompaktmodelle kann das Mixed-Level-Modell im Zusammenhang mit weiteren Ordnungsreduktionsverfahren hilfreich sein.

Zur Systembeschreibung wird ein verallgemeinertes Kirchhoffsches Netzwerk verwendet. Dies hat den Vorteil, daß mit den Kirchhoffschen Gesetzen die für die jeweiligen Energiegrößen maßgeblichen Bilanzgleichungen automatisch erfüllt sind und die Signalflußrichtung im System nicht vorgegeben werden muß. Zudem erlaubt es eine homogene Systembeschreibung, da neben dem elektronischen Schaltkreis auch der Mixed-Level-Ansatz einfach integriert werden kann.

Mixed-Level-Ansatz bedeutet, daß Kompaktmodelle in einer Simulationsumgebung mit einem Kontinuumsmodell kombiniert werden; er erlaubt damit einen flexiblen Übergang von der Bauelementebene zur Systemebene.

Der entscheidende Bestandteil jedes System- oder Mixed-Level-Modells sind jedoch die Kompaktmodelle. In dieser Arbeit wurden bewußt physikalisch basierte Kompaktmodelle gewählt, da diese Material- und Designgrößen als Modellparameter besitzen, somit skalierbar sind und schnelle Designstudien erlauben. Zur Einordnung und Bewertung dieser Methode im Vergleich zu alternativen Ansätzen zur Kompaktmodellierung bzw. Ordnungsreduktion wurde in Abschnitt 2.4 eine Übersicht über bestehende Ansätze gegeben. Dabei wurde auch dargelegt, für welche Anwendungen diese Ansätze besondere Stärken und Schwächen aufweisen. Es zeigt sich, daß zur Zeit eine systematische, allgemein anwendbare Methode, Kompaktmodelle aus einer kontinuierlichen Feldbeschreibung abzuleiten, nicht existiert. Vielmehr ist ein Kompromiß zu finden, weil Kompaktmodelle um so weniger skalierbar und universell einsetzbar zu sein scheinen, je automatischer sie generiert werden und umgekehrt.

Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Ableitung von physikalisch basierten Kompaktmodellen für die Squeeze-Film-Dämpfung und den elektrostatischen Antrieb insbesondere für perforierte Plattenstrukturen. Diese können Teil eines Mixed-Level-Modells sein oder für sich allein ein Teilsystem beschreiben.

Squeeze-Film-Dämpfung

Wenn sich zwei Platten aufeinander zubewegen, dann beginnt die verdrängte Luft seitlich zu entweichen. Bei sehr geringem Abstand zwischen den Platten entsteht dabei ein merklicher Druckabfall, der als Squeeze-Film-Dämpfung bekannt ist. Diese bestimmt das Betriebsverhalten vieler dynamisch betriebener Mikrobaulemente, weshalb deren Modellierung aktuelles Forschungsgebiet ist.

Das Problem dabei ist, daß fluidische Dämpfungseffekte physikalisch korrekt eigentlich über die nichtlineare Navier-Stokes-Gleichung modelliert werden sollten, die jedoch nur durch langdauernde numerische Berechnungen gelöst werden kann. Da zusätzlich noch

die Kopplung zu mindestens einer anderen physikalischen Domäne, der Mechanik, betrachtet werden muß, und das Problem inhärent transient ist, sind diese Effekte auf der kontinuierlichen Feldebene nicht mehr zu handhaben.

Erschwerend kommt hinzu, daß die immer kleiner werdenden Strukturen der mikromechanischen Bauelemente dazu führen, daß die Grenze der Kontinuumstheorie erreicht wird. Man spricht dann von verdünnten Gasen, bei denen der molekulare Charakter berücksichtigt und mit der Boltzmann-Gleichung modelliert werden muß, deren numerische Lösung äußerst rechenintensiv ist.

Für den Übergangsbereich - gemeint sind damit leicht verdünnte Gase - hat sich in der Literatur ein sogenannter Schlupfströmungsansatz etabliert, der den Gültigkeitsrahmen der Navier-Stokes-Gleichung ausdehnt, wenn zusätzlich eine Schlupfrandbedingung angenommen wird.

Zur Reduzierung der Komplexität des Problems wurde ausgenutzt, daß in Mikrosystemen die Plattenstrukturen meist ein großes Aspektverhältnis haben und ein Fluid unter diesen als dünner Film oder quasi-zweidimensionales Fluid betrachtet werden kann. Unter dieser Annahme läßt sich die Navier-Stokes-Gleichung zur Reynoldsgleichung vereinfachen. Die Erweiterung der Gültigkeit der Reynoldsgleichung auch an den Rändern der Platte und in den Löchern wurde durch Kompaktmodelle ermöglicht. Dies entspricht dem Ansatz von Schrag [131], der in dieser Arbeit um folgende wichtige Beiträge ergänzt wurde:

Bei den kleinen Loch- und Spaltabmessungen treten typischerweise zähe Strömungen auf, so daß das Modell der kinetischen Blendenströmung durch die viskose Blendenströmung ersetzt wurde. Zudem läßt sich mit der viskosen Blendenströmung auch das bisher empirische Randmodell physikalisch erklären.

Folgende drei Kompaktmodelle für die Lochströmung wurden neu entwickelt: Zunächst der Transitwiderstand, der für den Druckabfall zwischen dem Lochrand und dem Lochkanal verantwortlich ist; desweiteren die viskose Scherkraft an den Lochkanalwänden und schließlich die Berücksichtigung der Relativbewegung der bewegten Platte zur umgebenden Luft.

Für sämtliche Kompaktmodelle konnte auch ein individueller Schlupffaktor angegeben werden, denn in verdünnten Gasen erhöht sich die Flußrate in den Kompaktmodellen um diesen Faktor. In der Literatur ist der inverse Schlupffaktor auch als effektive Viskosität bekannt. Dieser Begriff wurde bewußt vermieden, da die Schlupfströmung von der lokalen Strömungsgeometrie verursacht wird und keine globale Eigenschaft des Fluids ist.

Zur Lösung der Reynoldsgleichung auf dem Gebiet beliebig geformter Platten wurde ein Finiter-Netzwerk-Ansatz innerhalb des Systemmodells verwendet. Ausgehend von einem FEM-Modell der Torsionsplatte des Mikroschalters wurde mit einem dafür entwickelten Konvertierungsprogramm eine Finite-Netzliste der Struktur erzeugt, die auf den Geometrie- und Vernetzungsdaten des FEM-Modells basiert. Die Reynoldsgleichung wurde diskretisiert und in der Hardwarebeschreibungssprache SpectreHDL kodiert, so daß das Modell einfach in den Standardnetzwerksimulator Spectre [27] zur Systemsimulation integriert werden kann.

Um möglichst schnell und effizient eine Lösung zu erhalten, wurden in dieser Arbeit weitgehend kommerzielle Simulationsprogramme eingesetzt. So kann man auf einen be-

stehenden Erfahrungsschatz zurückgreifen und typische Probleme bei neuentwickelten Programmen vermeiden.

Elektrostatischer Antrieb

Aufgrund der großen Aspektverhältnisse, die in der Mikromechanik realisierbar sind, ist die elektrostatische Anziehung zwischen beweglichen Elektroden ein häufig benutztes Antriebsprinzip. Mit großen Elektrodenflächen und kleinem Elektrodenabstand lassen sich unter geringer Leistungsaufnahme in kurzer Zeit große Kraftdichten erzielen, weshalb der elektrostatische Antrieb auch beim Mikroschalter eingesetzt wird.

Das elektrostatische Drehmoment auf eine Torsionsplatte kann auf der Kontinuumsebene über die Laplace-Gleichung berechnet werden. Die Komplexität des Problems kann aber deutlich reduziert werden, wenn die exakte elektrostatische Feldberechnung durch das Kompaktmodell des „differentiellen Plattenkondensators“ ersetzt wird. Dieser aus der Literatur bekannte Ansatz wurde im Rahmen dieser Arbeit für perforierte Platten erweitert. Dazu wurde ein physikalisch basiertes Modell für die Kapazität einer runden oder quadratischen Lochzelle aus FEM-Simulationen abgeleitet. Da in diesem analytischen Modell alle Designparameter enthalten sind, erlaubt es eine sehr effiziente Berechnung der elektrostatischen Antriebskraft.

Die Problematik der Modellierung des elektrostatischen Antriebs liegt in erster Linie in der starken bidirektionalen Kopplung zwischen der elektrostatischen und der mechanischen Domäne. Die nichtlineare Abhängigkeit der elektrostatischen Kraft vom Elektrodenabstand verursacht die bekannten Phänomene des negativen elektrostatischen Feder-effekts und der elektromechanischen Instabilität und Hysterese.

Dieses Simulationsproblem läßt sich ebenfalls sehr effizient mit einem Mixed-Level-Ansatz behandeln. Die Auslenkung einer deformierbaren Struktur wird dabei durch einen mechanischen Kontinuumsansatz in Verbindung mit dem oben beschriebenen elektrostatischen Kompaktmodell berechnet.

Diese Methode hat nicht nur den Vorteil, daß die Rechenzeit bei vergleichbarer Genauigkeit stark verkürzt wird. Zudem kann die Kopplung der beiden Domänen neben der üblichen Lastvektorkopplung auch durch eine Matrixkopplung beschrieben werden. Dabei werden die mechanische und die elektrostatische Domäne im Gegensatz zur Lastvektorkopplung nicht nacheinander, sondern gleichzeitig gelöst. Das hat zum einen den Vorteil, daß die Anzahl der Gleichgewichtssiterationen zwischen beiden Domänen und damit die Rechenzeit weiter verkürzt wird. Zum anderen ermöglicht diese Kopplungsmethode den negativen elektrostatischen Federeffekt direkt zu berechnen.

Eine wichtige Kenngröße für elektromechanisch gekoppelte Probleme ist die Schnappspannung, bei der die mechanische Federkraft nicht mehr ausreicht, die elektrostatische Kraft zu kompensieren, und die bewegliche Elektrode an der Gegenelektrode anschlägt. Die Berechnung der instabilen Arbeitspunkte durch schrittweises Erhöhen der Spannung führt aber bei beiden Kopplungsarten aufgrund der starken elektromechanischen Wechselwirkung zu Konvergenzschwierigkeiten. Zur Lösung dieses Problems konnte das Homotopieverfahren von König [78] für elektromechanische Probleme auf der Kontinuums-ebene auch beim Mixed-Level-Modell erfolgreich eingesetzt werden. Anstelle der elektri-

schen Spannung wurde am Fallbeispiel einer Membran auch die elektrische Energie, die elektrische Ladung und die elektrostatische Kraft als Steuerparameter untersucht. Dabei hat sich die elektrostatische Kraft als der Steuerparameter erwiesen, bei dem zur Berechnung der Schnappspannung die wenigsten Gleichgewichtsiterationen und damit die kürzeste Rechenzeit benötigt wird. Es kann jedoch keine allgemeingültige Regel für den optimalen Steuerparameter angegeben werden, da dieser unter anderem von der Ladungsverteilung auf den Elektroden und der Nichtlinearität der mechanischen Feder abhängt.

Ergebnisse

Die Mixed-Level-Modelle für die Squeeze-Film-Dämpfung und den elektrostatischen Antrieb konnten nicht nur durch die Ergebnisse der zahlreichen zur Validierung durchgeführten FEM-Simulationen bestätigt werden, sondern ermöglichen auch eine deutliche Senkung der Rechenzeiten. Zur Berechnung des Dämpfungsmoments einer mit 12 Löchern gelochten Torsionsplatte werden nur noch 24 Sekunden benötigt im Vergleich zu den 24 Stunden, die das FEM-Modell zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichung rechnet. Zur Berechnung der Schnappspannung für eine elektrostatisch ausgelenkte Membran benötigt das Mixed-Level-Modell weniger als eine Minute im Vergleich zu den 500 Minuten des elektromechanischen Kontinuumsmodells mit BEM/FEM-Kopplung.

Im Systemmodell des Mikroschalters kamen diese Modelle zum Einsatz und konnten durch Messungen des Ein- und Ausschaltvorgangs eindrucksvoll bestätigt werden.

Damit konnte erstmals das transiente Verhalten eines derart komplexen Bauelements unter Berücksichtigung aller relevanten physikalischen Effekte simuliert werden.

Der vorgestellte Mixed-Level-Ansatz ist äußerst flexibel, da er es dem Modellierer ermöglicht, das Modell gemäß seinen speziellen Anforderungen an Genauigkeit, Skalierbarkeit, numerischem und modellbildnerischem Aufwand und Anwendbarkeit maßzuschneidern.

Die Formulierung des Modells mittels einer Hardwarebeschreibungssprache als verallgemeinertes Kirchhoffsches Netzwerk ermöglicht eine homogene Systembeschreibung und ein einfaches Einbinden verschiedener physikalischer Domänen und der Elektronik.

Der Einsatz physikalisch basierter Kompaktmodelle bedeutet, daß die Design- und Materialparameter Eingabeparameter des Modells sind und Designstudien in kurzer Zeit ermöglichen. Darüber hinaus enthält das Modell keine variablen Fitparameter, so daß eine prädiktive Simulation möglich ist, deren Ergebnis der Ausgangspunkt für weitere Ordnungsreduktionsverfahren sein kann, wenn dies die Rechenzeit erfordert.

Ausblick

Ausgehend von den in dieser Arbeit erzielten Ergebnissen sollten nun in verschiedenen Richtungen weitere Untersuchungen erfolgen. Der wichtigste Punkt ist dabei eine systematische experimentelle Überprüfung der Dämpfungskompaktmodelle durch spezielle Teststrukturen, die es erlauben, die Kompaktmodelle möglichst individuell zu validieren. Dies sollte insbesondere bei variablem Druck geschehen, um den Gültigkeitsbereich der Schlupffaktoren auch für stark verdünnte Gase zu überprüfen. Zusätzlich kann dies auch

von theoretischer Seite untersucht werden, denn bisher wurden die Schlupffaktoren nur für einfache Kanalströmungen ohne Wandbewegung ermittelt. Dazu sollte die Boltzmann-Gleichung beispielsweise auch für eine runde Lochzelle gelöst werden. Neue Ansätze in diese Richtung, die auch die Plattenbewegung berücksichtigen, findet man bei Gallis [50] und Petri [119].

Wenn Differenzen zwischen Theorie und Experiment beobachtet werden sollten, so ist zunächst nicht klar, ob diese den Schlupffaktoren oder einem nicht berücksichtigten Kontinuumseffekt zugeschrieben werden müssen. Nach Wittmann [171] können experimentelle Untersuchungen von makroskopischen, gelochten Strukturen in hochviskosen Medien mit gleicher Reynoldszahl wie bei mikromechanischen Strukturen hilfreich sein, da keine verdünnten Gaseffekte auftreten.

Die größte Einsparung an Rechenzeit beim Mixed-Level-Ansatz läßt sich erzielen, wenn die Anzahl der Freiheitsgrade im Kontinuumsteil reduziert wird. Insbesondere bei regelmäßig perforierten Platten liegt der von Schrag [134] vorgeschlagene Ansatz nahe, benachbarte Löcher zu einem effektiven Loch zusammenzufassen. Hier sollten durch systematische Untersuchungen die Grenzen der Gültigkeit dieses Ansatzes bestimmt werden. Gerade wenn auch die Squeeze-Film-Dämpfung einen entscheidenden Beitrag zur Dämpfung leistet, erscheint die numerische Lösung der (nichtlinearen und kompressiblen) modifizierten Reynoldsgleichung mit Kompaktmodell für die Randströmung der bessere Ansatz, da eine Reduktion der Freiheitsgrade bei diesem Ansatz keinen direkten Einfluß auf das lokale Strömungsverhalten hat.

Der Mixed-Level-Ansatz für gedämpfte elektromechanische Mikrostrukturen läßt sich natürlich auch bei anderen, ähnlichen mikromechanischen Bauteilen anwenden. Interessant wäre eine Erweiterung für flexible Platten bei Mikrofonen oder für laterale Auslenkungen bei elektrostatischen Kammantrieben.

Anhang

A Die Finite-Netzwerk-Methode

Ausgangspunkt ist ein physikalisches Kontinuumsmodell, das aus der Kombination einer Bilanzgleichung mit einem Materialgesetz („Flußgleichung“ oder „Stromgleichung“) besteht. Die Bilanzgleichung fordert, daß die Quellstärke oder Divergenz eines Strömungsfeldes j in einem Kontrollvolumen von der zeitlichen Dichteänderung $\dot{\rho}$ und von vorhandenen Quellen (oder Senken) verursacht wird:

$$\nabla j = -\dot{\rho} + \text{Quellterm} \quad (\text{A.1})$$

Das Materialgesetz besagt, daß das Strömungsfeld j proportional zum Gradienten einer Potentialgröße \mathcal{V} ist. Die Proportionalitätskonstante κ entspricht dabei einer Leitfähigkeit:

$$j = -\kappa \nabla \mathcal{V} \quad (\text{A.2})$$

Bekannte Beispiele sind die Wärmeleitung, die elektrische Leitung oder der durch die Reynoldsgleichung beschriebene fluidische Massenfluß. Setzt man nach Abbildung A.1 die spezifischen Terme der jeweiligen Transportgröße in die Bilanzgleichung ein, so ergibt sich in analoger Weise eine parabolische partielle Differentialgleichung. Wird nun

Bilanzgleichung:	$div j =$	$-\dot{\rho}$	$+$	Quellterm
	Materialgesetz:			
Elektrische Leitung:	$j = -\sigma \nabla U$	$-c \dot{U}$		Stromquelle
Wärmeleitung:	$j = -\lambda \nabla T$	$-\rho c \dot{T}$		Wärmequelle
Massenfluß: (Reynoldsgleichung)	$j = -\frac{h^3}{12\eta} \nabla p$	$-\frac{h}{p_0} \dot{p}$		\dot{h}
Ortsdiskretisierung:				

Abbildung A.1: Die Differentialgleichungen für stationäre Ströme, Wärmeleitung oder Squeeze-Film-Dämpfung lassen sich lokal durch verallgemeinerte Kirchhoffsche Netzwerkelemente approximieren.

das räumliche Gebiet mit Hilfe der Finite-Volumina-Methode diskretisiert, so lassen sich den drei Termen der Bilanzgleichung die Grundelemente eines Kirchhoffschen Netzwerks zuordnen: Ein Widerstand, der das Materialgesetz verkörpert, ein Kondensator als Energiespeicher und ein Quellterm.

Die Potentialgröße der Netzwerkelemente approximiert dabei lokal die Lösung der Differentialgleichung und kann durch Lösen der Netzwerkgleichungen (Kirchhoffsche Gesetze) berechnet werden. Abbildung A.2 zeigt ein Netzwerk, mit dem beispielsweise die Reynoldsgleichung oder die Wärmeleitungsgleichung auf einer Rechteckplatte modelliert werden kann.

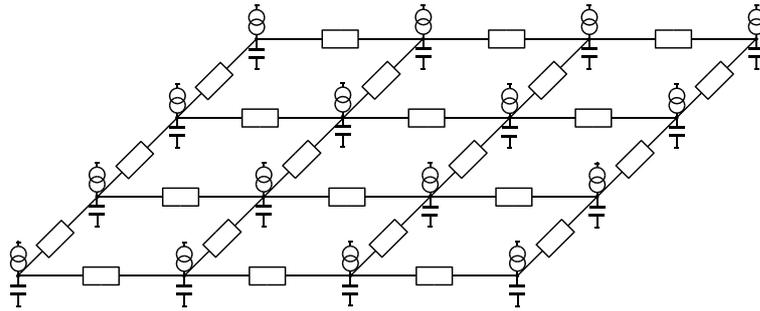


Abbildung A.2: *Finite-Netzwerk-Modell einer Rechteckplatte.*

Die Information aus Abbildung A.2, welche Knoten über welche Netzwerkelemente verknüpft sind, wird dem Netzwerksimulator in einer Netzliste übergeben.

Da in einem Schaltungssimulator die Kirchhoffsche Maschenregel (Energieerhaltung) und die Kirchhoffsche Knotenregel (Bilanzgleichung) intern implementiert sind, muß für jedes Netzwerkelement nur die Relation zwischen Potential- und Flußgröße an den Klemmen jedes der drei Netzwerkelemente festgelegt werden, was im folgenden am Beispiel der Reynoldsgleichung 3.41 dargestellt wird.

Widerstand: Zwischen zwei Knoten i und k fließt eine Poiseuilleströmung, die proportional zum Druckgradienten ist. Dieser wird durch die räumliche Diskretisierung aus dem Quotient der Druckdifferenz $p_{ik} = p_k - p_i$ und des Abstandes r_{ik} der beiden Knoten berechnet. Der Zusammenhang zwischen Flußrate Q_{ik} und Druckdifferenz p_{ik} lautet gemäß Gleichung 3.30:

$$Q_{ik} = b_{ik} \frac{h_{ik}^3}{12\eta r_{ik}} p_{ik} \quad (\text{A.3})$$

Dabei ist b_{ik} die Breite des Kanals, die sich aus der Diskretisierung ergibt, und h_{ik} der Mittelwert aus h_i und h_k .

In verdünnten Gasen ($Kn = \lambda_f/h_{ik} > 0$) erhöht sich die Flußrate um den Schlupffaktor $\Upsilon_{2D} = 1 + 9.638Kn^{1.159}$ aus Gleichung 3.96:

$$Q_{ik} = b_{ik} \frac{h_{ik}^3}{12\eta r_{ik}} p_{ik} \cdot (1 + 9.638Kn^{1.159}) \quad (\text{A.4})$$

Quelle: Die Ursache für die Poiseuilleströmung am Knoten i ist die Plattenbewegung mit der Geschwindigkeit \dot{h}_i . Der Generationsterm lautet demnach:

$$Q_{i,0} = A_i \dot{h}_i \frac{p_i}{p_0} \quad (\text{A.5})$$

Dabei ist A_i die Plattenfläche, die durch den Knoten i repräsentiert wird.

Kapazität: In kompressiblen Gasen ist zudem eine kapazitive Speicherung der Flußrate möglich, wobei in idealen Gasen die Änderung der Dichte proportional zur Änderung des Drucks gegenüber dem Umgebungsdruck p_0 ist:

$$Q_{i,0} = A_i h_i \frac{\dot{p}_i}{p_0} \quad (\text{A.6})$$

Die Reynoldsgleichung bestimmt die Druckverteilung an den Knoten im Netzwerk. Das eigentliche Interesse besteht jedoch an der Dämpfungskraft bzw. dem Dämpfungsmoment. Die Verknüpfung des fluidischen Netzwerks mit dem mechanischen erfolgt über folgende zusätzliche Gleichung:

$$F_i = p_i \cdot A_i \quad (\text{A.7})$$

Zur Berechnung des Drehmoments wird als zusätzliche Information in der Netzliste der Abstand r_i jedes Knotens von der Drehachse benötigt:

$$M_i = F_i \cdot r_i \quad (\text{A.8})$$

Für komplexe Geometrien kann das Bestimmen der Parameter A_i , b_{ik} , r_{ik} und r_i für die Netzliste sehr mühsam sein. Deshalb wurde ein Programm geschrieben, das die Knoten- und Elementinformationen eines FEM-Netzes in eine Netzliste mit den zugehörigen Parametern überträgt. Es baut auf dem Programm ANTOS von Voigt [160] auf, das von Schrag [131] um den Parameter r_i erweitert wurde. In dieser Arbeit wurden kleine Fehler bei der Berechnung der Flächen A_i eliminiert und der Algorithmus verallgemeinert. Der Programmcode in der ANSYS-Skriptsprache APDL findet sich im nachfolgenden Anhang B.

B APDL-Skript: ANTOS

Das APDL-Skript (Ansys Parametric Design Language) ANTOS erstellt eine Netzliste für eine beliebige Plattengeometrie. Vor dem Aufruf muß die Geometrie mit ebenen zweidimensionalen Elementen vernetzt sein und die im folgenden aufgelisteten Variablen müssen definiert sein: In der Variablen *ranz* steht die Anzahl der Randabschnitte der Platte. Die zugehörigen Knoten zu jedem Randabschnitt sind in den Komponenten mit den Namen *r1*, *r2*, ... gespeichert. In der Variablen *lanz* steht die Anzahl der Löcher in der Platte. Die zugehörigen Randknoten zu jedem Loch sind in den Komponenten mit den Namen *l1*, *l2*, ... gespeichert. Der Abstand jedes Lochs von der Torsionsachse steht im Array *lcx()*.

Das Programm gibt vier Dateien aus. In der Datei *info* stehen wichtige Informationen zur Geometrie der Platte. In der Datei *geo* steht die Netzliste der Plattengeometrie, in der Datei *loch* die Netzliste der Löcher und in der Datei *rand* die Netzliste der Randabschnitte. In jeder Zeile einer Netzliste steht der Name zweier Knoten, der Name des Kompaktmodells, das diese verbindet, und die Parameter, mit denen es aufgerufen werden soll.

```
!-----!  
! ET1: Ebener Elementtyp beliebig vernetzt      !  
! Randknoten: components: r1,...,ri  und ranz=i  !  
! Lochknoten: components: l1,...,lj  und lanz=j  !  
! Lochabstand von der Achse: lcx(1),...,lcx(j)  !  
!-----!  
  
/prep7  
ET,2,SHELL63 ! fuer die Flaechenberechnung  
  
!*****  
! Loecher  
!*****  
  
alls  
*get,nganz,node,,count ! Anzahl Knoten insgesamt  
*dim,Nindex,,nganz     ! An welchem Loch liegt der Knoten?  
  
*if,lanz,gt,0,then  
  
*c fopen,loch  
*vwrite  
// Kompaktmodell: Loch - ansys2spice - R. Sattler  
*vwrite  
simulator lang=spectre  
  
*do,1,1,lanz    ! Schleife ueber alle Loecher  
  
    cmsel,s,1%1% ! Lochknoten selektieren
```

```

*get,nanz,node,,count ! Anzahl der Lochknoten
n0=0
*do,n,1,nanz          ! Jeder Knoten bekommt die Lochnummer
  nn=ndnext(n0)      ! des Lochs an dem er liegt oder Null
  Nindex(nn)=1
  n0=nn
*enddo

! Verbinde jeden Lochknoten mit gemeinsamem Potential cpL ueber
! das Kompaktmodell loch mit x-Koord. des Lochs als Parameter
*vlen,1
*vwrite,1,1,lcx(1)
Loch\_%I L%I cpL z0 loch x=%G

*enddo ! Ende der Loecherschleife

*vwrite
  simulator lang=spice
*cfclose

*endif

!*****
! Geometrie
!*****

asum=0 ! initialis. Gesamtflaeche der Knoten
asumE=0 ! initialis. Gesamtflaeche der Elemente

*cfopen,geo
*vwrite
// Netzliste fuer Geometrie - ansys2spice - R. Sattler
*vwrite
simulator lang=spectre

*get,eanz,elem,number,count ! Anzahl der Elemente

*do,e,1,eanz          ! Schleife ueber alle Elemente

*get,aE,elem,e,area   ! Elementflaeche
asumE=asumE+aE      ! Summe aller Elementflaechen

*do,face,1,4         ! Schleife ueber alle Elementkanten (face)

n2=ndface(e,face,1) ! Knotennummern zu Elementkante (face)
n1=ndface(e,face,2)

*if,n1,eq,n2,cycle

ne=eladj(e,face)    ! Nachbarelement an dieser Kante (face)
                  ! ne=0, wenn die Kante am Rand liegt

! Wenn es kleiner ist als aktuelles Element,dann wurde
! diese Kante schon als Kompaktmodell beruecksichtigt

```

```

*if,ne,lt,e,AND,ne,ne,0,cycle

nsele,s,node,,n1 ! Laenge der Kante an Element e
nsele,a,node,,n2 ! die selektierte Knoten n1,n2 enthaelt
length=arface(e)

alls
emodif,all,type,2 ! fuer Flaechenberechnung mit arnode

area=arnode(n1) ! Knotenflaeche des ersten Knotens

esel,s,elem,,e ! aktuelles Element selektieren
*if,ne,ne,0,then
  esel,a,elem,,ne ! auch das Nachbarelement, wenn es existiert
*endif
nsele,s,all ! zugehoerigen Knoten fuer arnode() selektieren
a1=arnode(n1)
a2=arnode(n2)
width=(a1+a2)/length

! Nachbarelement mit kleinster Nummer zum Knoten n1
! wenn kleiner aktuelles Element, dann wurde
! Knotenflaeche schon beruecksichtigt => area=0
*if,enextn(n1,1),lt,e,then
  area=0
*endif

alls
emodif,all,type,1 ! plane Element fuer arface und eladj

asum=asum+area ! Gesamtflaeche

char1='n%n1%' ! Knoten der Netzliste heissen n'Knotennummer'
char2='n%n2%'
*if,Nindex(n1),gt,0,then
  char1='L%Nindex(n1)%' ! oder L'Lochnummer', wenn der Knoten
*endif ! an einem Loch liegt
*if,Nindex(n2),gt,0,then
  char2='L%Nindex(n2)%'
*endif

! E(elementnummer)f(facenummer) n(Knotennummer) n(Knotennummer)
*vwrite,e,face,char1,char2,area,length,width,nx(n1),nx(n2)
E%If%I %c %c z0 z0 reynold ar=%.6F le=%.6F wi=%.6F x1=%.6F x2=%.6F

*enddo
*enddo

*vwrite
simulator lang=spice

*cfclose

```

```

!*****
! Rand
!*****

*dim,randl,,ranz ! Randlaenge
*dim,randn,,ranz ! Randknotenanzahl

*cfopen,rand,,append

*vwrite
// Kompaktmodell: Rand - ansys2spice - R. Sattler
*vwrite
simulator lang=spectre

*do,r,1,ranz ! Schleife ueber alle Raender
  cmsel,s,r%r%
  *get,nanz,node,,count
  randn(r)=nanz
  n0=0
  *do,n,1,nanz ! Schleife ueber alle Knoten des Randes
    nn=ndnext(n0)
    r1=arnode(nn) ! Randlaenge
    randl(r)=randl(r)+r1 ! Gesamte Randlaenge
    *vwrite,r,enextn(nn,1),enextn(nn,2),nn,r,r1,nx(nn)
    R%Ie%I_%I n%I r%I z0 rand le=%G x=%G
    n0=nn
  *enddo
*enddo

*vwrite
simulator lang=spice

*cfclose

!*****
! Info
!*****

*cfopen,info
*vwrite,60*(tc2-tc1)
time= %G min.
*vwrite,loxd,loxr,zwxd,zwxr
loxd=%G loxr=%G zwxd=%G zwxr=%G
*vwrite,asum
areaN= %G
*vwrite,asumE
areaE= %G
*vwrite,nganz
Knoten= %G
*vwrite,eanz
Elemente= %G
*vwrite,sequ,randn(1),randl(1)
rand\_ %I: %I Knoten, Laenge: %G
*cfclose

```

C Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung
a, b	Seitenlängen einer Rechteckplatte; Halbachsen einer Ellipse
a_L	Lochdurchmesser eines quadratischen Loches
a_{opt}	Optimaler Lochdurchmesser
a_Z	Zellendurchmesser eines quadratischen Loches
A	Fläche
A_K	Wandfläche des Lochkanals
A_L	Lochfläche einer Zelle
A_P	Plattenfläche einer Zelle
A_Z	Gesamtfläche einer Zelle
C	Elektrostatische Kapazität
C_{fl}	Fluidische Kapazität
C_{inf}	Kapazität einer Lochzelle auf Basis der Plattenfläche
C_{pp}	Kapazität eines Plattenkondensators
C_{sup}	Kapazität einer Lochzelle auf Basis der Zellenfläche
C_{th}	Wärmekapazität
C_{tp}	Kapazität eines Torsionsplattenkondensators
C_{\odot}	Kapazität einer ringförmigen Lochzelle
d	Plattendicke d ; entspricht L_K
d_M	Durchmesser eines Moleküls
D	Verdünnungsparameter; proportional zur inversen Knudsenzahl Kn
\mathbf{D}	Vektor der dielektrischen Verschiebung
D_h	Hydraulischer Durchmesser
\mathbf{E}	Vektor der elektrischen Feldstärke
\mathbf{f}	Lastvektor einer äußeren Kraft
\mathbf{f}_V	Verallgemeinerter Kraftvektor
f_{fed}	Federanteil der normierten Dämpfungskraft
f_{reib}	Reibungsanteil der normierten Dämpfungskraft
F	Kraft
F_B	Kraftanteil des Blendenwiderstandes
F_K	Kraftanteil des Kanalwiderstandes
F_{pp}	Elektrostatische Kraft auf einen Plattenkondensator
F_{MR}	Dämpfungskraft einer perforierten Platte nach der modifizierten Reynoldsgleichung

Symbol	Bedeutung
F_S	Viskose Scherkraft bei Strömung durch den Lochkanal
F_R	Kraftanteil der Squeeze-Film-Dämpfung (Reynoldsgleichung)
F_T	Kraftanteil des Transitwiderstandes
F_{\odot}	Dämpfungskraft auf eine ringförmige Elementarzelle
F_{\circ}	Dämpfungskraft auf eine Kreisscheibe
F_{\square}	Dämpfungskraft auf eine rechteckige Platte
\mathbf{F}_{\square}	Komplexe Dämpfungskraft auf eine rechteckige Platte
F_{2D}	Dämpfungskraft auf eine lange Rechteckplatte
G	Schermodul
h	Luftspalt unter der Platte
h_0	Mittlerer Luftspalt unter der Torsionsplatte
I	Elektrische Stromstärke
\hat{I}	Flächenträgheitsmoment
j	Stromdichte
J	Trägheitsmoment
\mathcal{J}	Verallgemeinerter Fluß
k	Boltzmannkonstante
k	Federsteifigkeit
k_r	Torsions-Federsteifigkeit
k_t	Translations-Federsteifigkeit
K	Verlustfaktor für die Anlaufströmung in einem Kanal
\underline{K}	Mechanische Steifigkeitsmatrix
Kn	Knudsenzahl
l	Länge
l_L	Randlänge eines Loches
l_R	Randlänge einer Platte
L	Charakteristische Länge
L_{an}	Anlauflänge
L_{el}	Selbstinduktivität
L_K	Länge des Lochkanals
L_{2d}	Länge eines zweidimensionalen Kanals (Reynoldsbereich)
L_{MR}	Charakteristische Länge für die modifizierte Reynoldsgleichung
\mathcal{L}	Lagrangefunktion
m	Masse
m_i	Generalisierte Masse
m_{fed}	Federanteil des normierten Dämpfungsmoments
m_{reib}	Reibungsanteil des normierten Dämpfungsmoments
M	Drehmoment bzw. Dämpfungsmoment
M_{tp}	Drehmoment eines Torsionsplattenkondensators
\mathbf{M}_{\square}	Komplexes Dämpfungsmoment auf eine rechteckige Torsionsplatte

Symbol	Bedeutung
M_{\square}	Dämpfungsmoment auf eine rechteckige Torsionsplatte
M_{2D}	Dämpfungsmoment auf eine lange, rechteckige Torsionsplatte für große relative Auslenkungen
M_{2d}	Dämpfungsmoment auf eine lange, rechteckige Torsionsplatte für kleine relative Auslenkungen
\underline{M}	Massenmatrix
n	Teilchen pro Volumen
\mathbf{n}	Flächennormalenvektor
p	Druck
p_0	Umgebungsdruck
p_K	Druckabfall im Lochkanal
p_L	Druckabfall im Loch
\tilde{p}	Mittlerer Druck in einer Zelle
p_r	Drehimpuls
p_t	Impuls
p_R	Druck am Plattenrand
Po	Poiseuillezahl
$\mathbf{q}(q_1, q_2, \dots)$	Verallgemeinerte Koordinaten
q_{lat}	Laterale Strömungsrate pro Länge unter der Platte
\hat{q}_{vert}	Vertikale Strömungsrate pro Fläche durch ein Loch
q_{2D}	Flußrate pro Kanalbreite in einem rechteckigem Kanal mit sehr großer Breite im Vergleich zur Höhe
Q	Elektrische Ladung
Q	Volumenflußrate
Q_B	Flußrate durch eine elliptische Blende
Q_{rel}	Flußrate durch den Lochkanal aufgrund dessen Bewegung
Q_{rey}	Flußrate unter einer Platte nach der Reynoldsgleichung
Q_{th}	Wärmemenge
Q_{\circ}	Flußrate in einem Kanal mit kreisförmigem Querschnitt
\tilde{Q}_{\circ}	Normflußrate in einem Kanal mit kreisförmigem Querschnitt
Q_{\square}	Flußrate in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt
\tilde{Q}_{\square}	Normflußrate in einem Kanal mit rechteckigem Querschnitt
\mathbf{r}	Ortsvektor
R	Radius
R_{el}	Elektrischer Widerstand
R_{fl}	Fluidischer Widerstand
R_{th}	Thermischer Widerstand
R_L	Lochradius einer kreisförmigen Zelle
R_Z	Zellenradius einer kreisförmigen Zelle
Re	Reynoldszahl
Re_{krit}	Kritische Reynoldszahl

Symbol	Bedeutung
s	Umfang
t	Zeit
T	Temperatur
\mathcal{T}	Kinetische Energie
u	Auslenkung
\mathbf{u}	Zustandsvektor bzw. Vektor der mechanischen Verschiebung
U	Elektrische Spannung
U_{le}	Linear elastische Energie
U_{pin}	Schnappspannung
\mathcal{U}	Potentielle Energie
v	Charakteristische Geschwindigkeit
\bar{v}	Mittlere Geschwindigkeit
$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$	Geschwindigkeitsvektor
v_P	Plattengeschwindigkeit
v_s	Schlupfgeschwindigkeit
v_w	Wandgeschwindigkeit
V	Volumen
\mathcal{V}	Verallgemeinertes Potential
W	Elektrostatische Energie
Z	Fluidischer Widerstand
Z_B	Fluidischer Blendenwiderstand
Z_{BE}	Fluidischer Blendenwiderstand einer elliptischen Öffnung
$Z_{B\circ}$	Fluidischer Blendenwiderstand einer kreisförmigen Öffnung
$Z_{B\Box}$	Fluidischer Blendenwiderstand einer quadratischen Öffnung
Z_K	Fluidischer Lochkanalwiderstand
Z_L	Fluidischer Lochwiderstand
Z_R	Fluidischer Randwiderstand
Z_Z	Fluidischer Lochzellenwiderstand
\mathbb{R}	Reelle Zahlen
α	Perforationsgrad R_L/R_Z
β	Aspektverhältnis a/b der Seiten eines Rechtecks
γ	Relativer Winkel bzw. relative Auslenkung
ϵ	Dielektrizitätskonstante
$\underline{\epsilon}$	Tensor der mechanischen Verschiebung
η	Dynamische Viskosität
θ	Übergangsfunktion für die Kapazität einer Lochzelle
ϑ	Länge der Bodenelektrode relativ zur Torsionselektrode
κ	Leitfähigkeit
λ	Homotopieparameter

Symbol	Bedeutung
λ_f	Mittlere freie Weglänge eines Gases
$\Lambda = L_{MR}/a$	Relative Länge der modifizierten Reynoldsgleichung
Λ_K	Relative Länge des Kanals
Λ_o	Relative Länge eines Kanals mit kreisförmigem Querschnitt (L/R)
Λ_{2d}	Relative Länge eines zweidimensionalen Kanals (L/h)
ν	Fitkonstante von Veijola für den Randeffect
ξ_r	Torsions-Dämpfungs-konstante
ξ_t	Translations-Dämpfungs-konstante
ρ	Massendichte
ϱ	Ladungsdichte
σ	Squeezenzahl
$\underline{\sigma}$	Tensor der mechanischen Spannung
τ	Fitfaktor für Blendenströmung
τ_∞	Geometrieunabhängige Komponente von τ
$\hat{\tau}$	Geometrieabhängige Komponente von τ
$\underline{\tau}$	Spannungstensor
τ_{xy}	Scherspannungen; Komponenten des Spannungstensors
$\tau_{xx} = \sigma_{xx}$	Normalspannungen; Komponenten des Spannungstensors
Υ_{B_o}	Schlupffaktor für eine Kreisblende
$\Upsilon_{B_{2d}}$	Schlupffaktor für eine Spaltblende
Υ_o	Schlupffaktor für einen Kanal mit kreisförmigem Querschnitt
Υ_\square	Schlupffaktor für einen Kanal mit quadratischem Querschnitt
$\Upsilon_{\Delta\Lambda_o}$	Schlupffaktor für die Verlängerung eines Kanals mit kreisförmigem Querschnitt zur Berücksichtigung der Blendenströmung
$\Upsilon_{\Delta\Lambda_{2d}}$	Schlupffaktor für die Verlängerung eines rechteckigen Kanals mit großem Aspektverhältnis zur Berücksichtigung der Blendenströmung
Φ	Elektrisches Potential
φ	Winkel
φ_0	Maximaler Torsionswinkel
φ_i	Basisfunktionen
$\psi(\alpha)$	Korrekturfaktor für die Schnappspannung eines Torsionsplattenkondensators
Ψ_{el}	Verketteter Fluß
$\Psi_\square(\beta)$	Korrekturfaktor für den fluidischen Widerstand eines rechteckigen Kanals bzw. die Dämpfungskraft auf eine rechteckige Platte
$\Psi_{tor}(\beta)$	Korrekturfaktor für die Dämpfungskraft auf eine rechteckige Torsionsplatte
$\Psi_{MR}(\beta, \Lambda)$	Korrekturfaktor für die Dämpfungskraft auf eine gelochte Rechteckplatte

Symbol	Bedeutung
ζ	Akkomodationskoeffizient
ζ_v	Volumenviskosität
ω	Schwingungsfrequenz
ω_i	Eigenfrequenz
ω_P	Winkelgeschwindigkeit

Literaturverzeichnis

- [1] ABAQUS, Hibbit, Karlsson & Sorenson, Inc., Pawtucket, Rhode Island, <http://www.hks.com>.
- [2] E. ALLGOWER UND K. GEORG, *Numerical Continuation Methods: An introduction*, Springer Verlag, New York, 1990.
- [3] N. ALURU UND J. WHITE, *A Multi-Level Newton Method for Static and Fundamental Frequency Analysis of Electromechanical Systems*, in Proceedings of SIS-PAD, Cambridge, MA, Sept. 1997, S. 125–128.
- [4] N. R. ALURU UND J. WHITE, *An Efficient Numerical Technique for Electromechanical Simulation of Complicated Microelectromechanical Structures*, Sensors and Actuators A, 58 (1997), S. 1–11.
- [5] ANSYS, ANSYS Inc., Canonsburg, PA, USA, <http://www.ansys.com>.
- [6] A. ANTOULAS UND D. SORENSEN, *Approximation of large-scale dynamical systems: An overview*, Tech. Report, Rice University, Houston, 2001.
- [7] E. ARKILIC, *Measurement of the Mass Flow and Tangential Momentum Accommodation Coefficient in Silicon Micromachined Channels*, Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- [8] S. AUBERT, J. TOURNIER, M. ROCHETTE, J. BLANCHE, M. N'DIAYE, S. MELEN, M. TILL UND P. FERRAND, *Optimisation of a gas mixer using a new parametric flow solver*, in European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Swansea, Wales, UK, 4-7 September 2001.
- [9] I. AVDEEV, *New Formulation For Finite Element Modeling Electrostatically Driven Micromechanical Systems*, Dissertation, University of Pittsburgh, Pittsburgh, USA, 2003.
- [10] I. AVDEEV, M. GYIMESI, M. LOVELL UND D. OSTERGAARD, *New accurate 3-D finite element technology for solving geometrically complex coupled-field problems*, in Proc. of MSM'04, Boston, MA, USA, March 7–11, 2004, S. 323–326.
- [11] M. BÄCHTOLD, J. KORVINK UND H. BALTES, *The adaptive, multipole-accelerated BEM for the computation of electrostatic forces*, in Proc. CAD for MEMS, Zürich, 1997.

- [12] P. BAHUKUDUMBI UND A. BESKOK, *A phenomenological lubrication model for the entire Knudsen regime*, Journal of Micromechanics and Microengineering, Vol. 13, No. 6 (2003), S. 873–884.
- [13] Z. BAI, D. BINDEL, J. CLARK, J. DEMMEL, K. PISTER UND N. ZHOU, *New numerical techniques and tools in sugar for 3D MEMS simulation*, in Proc. of 4th Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'01), Hilton Head Island, SC, USA, Mar. 19–21, 2001, S. 31–34.
- [14] M. BAO, *Handbook of Sensors and Actuators*, Band 8 Micro Mechanical Transducers, Elsevier Science Ltd., Princeton, NJ, USA, 2000, ch. 4, S. 144–145.
- [15] M. BAO, H. YANG, Y. SUN UND P. J. FRENCH, *Modified Reynolds' equation and analytical analysis of squeeze-film air damping of perforated structures*, Journal of Micromechanics and Microengineering, 13 (2003), S. 795–800.
- [16] R. BARBER, *persönliche Mitteilung*. Centre for Microfluidics, CCL-RC Daresbury Laboratory, Daresbury, Warrington, Cheshire, UK, <http://www.cse.clrc.ac.uk/ceg/cegstaff/r.w.barber.shtml>, Nov. 2003.
- [17] R. BARBER UND D. EMERSON, *A numerical study of low Reynolds number slip flow in the hydrodynamic development region of circular and parallel plate ducts*, Tech. Report, DL-TR-00-002, Computational Science and Engineering Department, CLRC, Daresbury Laboratory, Cheshire, UK, 2000.
- [18] R. BARBER UND D. EMERSON, *A numerical investigation of low Reynolds number gaseous slip flow at the entrance of circular and parallel plate micro-channels*, in Proceedings of Computational Fluid Dynamics Conference (ECCOMAS), University of Swansea, Wales, GB, September 4-7, 2001.
- [19] J. BASTIAN, J. HAASE UND S. REITZ, *Verhaltensbeschreibung von Systemen mit verteilten Parametern durch Ordnungsreduktion*, in 5. GI/ITG/GMM workshop Rechnergestützter Entwurf von Schaltungen und Systemen, Tübingen, 25.-27.02.2002, S. 144–153.
- [20] K. BATHE, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.
- [21] K. BEAM, *Anisotropic etching of silicon*, IEEE Transactions on Electron Devices, 25 (1978), S. 1185–1193.
- [22] T. BECHTOLD, E. B. RUDNYI UND J. G. KORVINK, *Automatic generation of compact electro-thermal models for semiconductor devices*, IEICE Transactions on Electronics, E86C(3) (2003), S. 459–465.
- [23] L. BERANEK, *Acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [24] G. BIRD, *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

- [25] J. J. BLECH, *On Isothermal Squeeze Films*, ASME Journal of Lubrication Technology, 105 (1983), S. 615–620.
- [26] W. BOND, *The effect of viscosity on orifice flows*, Proc. Phys. Soc. London, 33, No.1 (1920), S. 225–230.
- [27] CADENCE, Cadence Inc., San Jose, CA, USA, <http://www.cadence.com>.
- [28] CFDRC, CFD Research Corporation, Huntsville, Alabama, USA, <http://www.cfdrc.com>.
- [29] W. CHANG, *Analytic ic-metal-line capacitance formulas*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., MTT-24 (1976), S. 608–611.
- [30] R. CHEN, *Flow in the entrance region at low Reynolds numbers*, Trans. ASME, J. Fluids Engineering, 95 (1973), S. 153–158.
- [31] Y. CHEN UND J. WHITE, *Model order reduction for nonlinear systems*, Master thesis, Dept. Mathematics., Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge, MA, 1999.
- [32] COMSOL, FEMLAB Multiphysics Modeling, COMSOL Inc., Los Angeles, California, USA, <http://www.comsol.com>.
- [33] E. COSTAMAGNA UND A. FANNI, *Computing capacitances via the Schwarz-Christoffel transformation in structures with rotational symmetry*, IEEE Trans. Magnetics, Vol. 34, No. 5 (1998), S. 2497–2500.
- [34] COVENTORWARE, Coventor Inc., Cary, North Carolina, USA, <http://www.coventor.com>.
- [35] I. CRANDALL, *The air-damped vibrating system: Theoretical calibration of the condenser transmitter*, Phys. Rev., 11 (1918), S. 449–460.
- [36] R. B. DARLING, C. HIVICK UND J. XU, *Compact analytical modeling of squeeze film damping with arbitrary venting conditions using a Green's function approach*, Sensors and Actuators A, 70 (1998), S. 32–41.
- [37] W. EBERT UND E. SPARROW, *Slip flow in rectangular and annular ducts*, ASME Journal of Basic Engineering, December (1965), S. 1018–1024.
- [38] M. G. EL HAK, *Questions in fluid mechanics: Stokes' hypothesis for a Newtonian isotropic fluid*, J. Fluids Eng., 117 (1995), S. 3–5.
- [39] M. G. EL HAK, *The fluid mechanics of microdevices*, J. Fluids Eng., 121 (1999), S. 5–33.
- [40] M. G. EL HAK, *The MEMS Handbook*, CRC Press, 2002.
- [41] G. FEDDER, *Issues in MEMS macromodeling*, in Proc. of IEEE International Behavioral Modeling and Simulation Conference (BMAS '03), San Jose, California, Okt. 7–8, 2003.

- [42] R. FEYNMAN, *There's plenty of room at the bottom*, Journal of Microelectromechanical Systems, 1 (1992), S. 60–66.
- [43] R. FEYNMAN, *Infinitesimal machinery*, Journal of Microelectromechanical Systems, 2 (1993), S. 4–14.
- [44] S. FUKUI UND R. KANEKO, *Analysis of Ultra-Thin Gas Film Lubrication Based on Linearized Boltzmann Equation: First Report—Derivation of a Generalized Lubrication Equation Including Thermal Creep Flow*, ASME Journal of Tribology, 110 (1988), S. 253–262.
- [45] S. FUKUI UND R. KANEKO, *A database for interpolation of Poiseuille flow rates for high Knudsen number lubrication problems*, ASME Journal of Tribology, 112 (1990), S. 78–83.
- [46] M. FÜLDNER, A. DEHE, R. AIGNER UND R. LERCH, *FEM-unterstützte Netzwerksimulation kapazitiver Silizium-Mikrofone*, in 29. Jahrestagung für Akustik (DAGA'03), Aachen, Deutschland, 18.-20. März, 2003.
- [47] L. GABBAY, *Computer-aided macromodeling for MEMS*, Dissertation, Dept. Elect. Eng. Comput. Sci., Massachusetts Inst. of Technol., Cambridge, MA, 1998.
- [48] L. GABBAY, J. MEHNER UND S. SENTURIA, *Computer-Aided Generation of Non-linear Reduced-Order Dynamic Macromodels—I: Non-Stress-Stiffened Case*, J. of Microelectromechanical Systems, 9, No. 2 (2000), S. 262–269.
- [49] L. GABBAY UND S. SENTURIA, *Automatic generation of dynamic macro-models using quasistatic simulations in combination with modal analysis*, in Proc. Solid-State Sensor & Actuator Workshop, Hilton Head, SC, 1998, S. 197–220.
- [50] M. GALLIS UND J. TORCZYNSKI, *An improved Reynolds-equation model for gas damping of microbeam motion*, J. of Micromechanics and Microengineering, 13 No. 4 (2004), S. 653–659.
- [51] J. GARDNER, *Microsensors*, John Wiley and Sons Ltd., New York, 1994.
- [52] G. GERLACH UND W. DÖTZEL, *Grundlagen der Mikrosystemtechnik*, Hanser Verlag, München, 1997.
- [53] A. GÖTZ, H. KRASSOW, M. ZABALA, J. SANTANDER UND C. CANE, *CMOS integrated pressure sensor optimization using electrical network simulator-FEM tool coupling*, Journal of Micromechanics and Microengineering, 9 (1999), S. 109–112.
- [54] W. S. GRIFFIN, H. H. RICHARDSON UND S. YAMANAMI, *A Study of Fluid Squeeze-Film Damping*, ASME Journal of Basic Engineering, (June 1966), S. 451–456.

- [55] C. GROSSMANN UND H.-G. ROOS, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig, 1994.
- [56] K.-H. GROTE UND J. FELDHUSEN, *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau*, Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [57] M. GYIMESI, D. LAVERS, D. OSTERGAARD UND T. PAWLAK, *Hybrid Finite Element-Trefftz Method for Open Boundary Analysis*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32, No. 3 (1996), S. 671–674.
- [58] M. GYIMESI UND D. OSTERGAARD, *Electro-mechanical capacitor element for MEMS analysis in ANSYS*, in Proc. of MSM'99, San Juan, Puerto Rico, USA, Apr. 19–21, 1999, S. 270–273.
- [59] M. GYIMESI UND D. OSTERGAARD, *Triangle transducer for micro electro mechanical systems (MEMS) simulation in ANSYS finite element program*, in Proc. of MSM'02, San Juan, Puerto Rico, USA, Apr. 21–25, 2002, S. 380–383.
- [60] B. J. HAMROCK, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, McGraw-Hill Inc., 1994.
- [61] M. HANDTMANN, *Dynamische Regelung mikroelektromechanischer Systeme (MEMS) mit Hilfe kapazitiver Signalwandlung und Krafrückkopplung*, Dissertation, Technische Universität München, München, 2005.
- [62] M. HANDTMANN, R. AIGNER, R. NADAL UND G. WACHUTKA, *Methodology of Macromodeling Demonstrated on Force Feedback Σ/Δ -Architectures*, in Proc. of 3rd Int. Conference on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'00), San Diego, CA, March 27–29, 2000, S. 138–141.
- [63] H. HASIMOTO, *On the flow of a viscous fluid past a thin screen at small Reynolds numbers*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 13, No. 6 (June, 1958), S. 633–639.
- [64] Y. HE, J. MARCHETTI, C. GALLEGOS UND F. MASEEH, *Accurate Fully-Coupled Natural Frequency Shift of MEMS Actuators due to Voltage Bias and Other External Forces*, in Proceedings of 12th International Workshop on Micro Electro Mechanical Systems - MEMS, Orlando, FL, USA, 1999, S. 321–325.
- [65] A. HEUBERGER, *Mikromechanik*, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [66] S. HOFFMANN, *Persönliche Mitteilung*. Universität Paderborn, Lehrstuhl für optische Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik, 7. März 2001.
- [67] A. HORN, *Modellierung und Simulation orientierungsabhängiger Ätzprozesse in Silizium*, Dissertation, Technische Universität München, München, 2005.
- [68] R. HOWE UND R. MULLER, *Polycrystalline silicon micromechanical beams*, Journal of the Electrochemical Society, 130 (1983), S. 1420–1423.

- [69] E. S. HUNG UND S. D. SENTURIA, *Generating Efficient Dynamical Models for Microelectromechanical Systems from a few Finite-Element Simulation Runs*, J. of Microelectromechanical Systems, 8, No. 3 (1999), S. 280–289.
- [70] INTELLISUITE, IntelliSense Software Corp., Woburn, MA, USA, <http://www.intellisensesoftware.com>.
- [71] S. IYER, Q. JING, T. MUKHERJEE UND G. K. FEDDER, *Convergence and speed issues in analog HDL model formulation of MEMS*, in Proc. of 4th Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'01), Hilton Head Island, SC, USA, Mar. 19–21, 2001, S. 590–593.
- [72] H. KAPELS, J. URSCHER, R. AIGNER, R. SATTLER, G. WACHUTKA UND J. BINDER, *Measuring fracture strength and long-term stability of polysilicon with a novel surface-micromachined thermal actuator by electrical wafer-level testing*, in Proc. of the 13th European Conference on Solid-State Transducers (Euroensors XIII), The Hague, The Netherlands, Sept. 12–15, 1999, S. 189–190.
- [73] G. KARNIADAKIS UND A. BESKOK, *Micro Flows*, Springer Verlag, New York, 2002.
- [74] M. KASPER, *Mikrosystementwurf*, Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [75] J. M. KIRSHNER, *Fluid Amplifiers*, McGraw-Hill Inc., 1966.
- [76] A. KLEIN, *Modellierung und Simulation von Mikromembranpumpen*, Dissertation, Technische Universität Dresden, w.e.b. Universitätsverlag, Dresden, 1999.
- [77] H. KOBER, *Dictionary of Conformal Representations*, Dover Publishing, New York, 1957.
- [78] E.-R. KÖNIG, *Modellierung und Simulation elektromechanischer Instabilitäten bei Mikrobauteilen*, Dissertation, Technische Universität München, München, 2005.
- [79] E.-R. KÖNIG, P. GROTH UND G. WACHUTKA, *New Coupled-field Device Simulation Tool for MEMS based on the TP2000 CAD Platform*, Sensors and Actuators A, 76 (1999), S. 9–18.
- [80] E.-R. KÖNIG UND G. WACHUTKA, *Multi-parameter homotopy for the numerical analysis of MEMS*, Sensors and Actuators A, 110 (2004), S. 39–51.
- [81] P. KOPLIC UND J. BANAVAR, *Continuum deductions from molecular hydrodynamics*, Annu. Rev. Fluid Mech., 27 (1995), S. 257–292.
- [82] S. LALL UND J. MARSDENEN, *A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems*, International Journal on Robust and Nonlinear Control, 12(5) (2002), S. 519–535.

- [83] L. LANDAU UND E. LIFSCHITZ, *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band VI (Hydrodynamik), Akademie-Verlag, Berlin, 1971.
- [84] L. LANDAU UND E. LIFSCHITZ, *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band 1 (Mechanik), Akademie-Verlag, Berlin, 1971.
- [85] W. E. LANGLOIS, *Isothermal Squeeze Films*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 20, No. 2 (1962), S. 131–150.
- [86] R. LEGTENBERG, J. GILBERT UND S. SENTURIA, *3D coupled electromechanics for MEMS: Application of Cosolve-EM*, in Proc. of the 1995 IEEE Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), Amsterdam, Netherlands, January, 1995, S. 122–127.
- [87] A. LENK, G. PFEIFER UND R. WERTHSCHTZKY, *Elektromechanische Systeme. Mechanische und akustische Netzwerke, deren Wechselwirkungen und Anwendungen*, Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [88] V. LEUS UND D. ELATA, *Fringing field effect in electrostatic actuators*, Tech. Report, TECHNION, Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, Haifa, Israel, May 2004.
- [89] G. LÖBEL UND W. SICHERT, *BETTI-Boundary Element Code for Heat Conduction*, Forschungskuratorium Maschinenbau, Frankfurt, Deutschland, 1987.
- [90] R. LORD, *Tangential momentum coefficients of rare gases on polycrystalline surfaces*, in Tenth International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, 1976, S. 531–538.
- [91] G. LORENZ, *Netzwerksimulation mikromechanischer Systeme*, Dissertation, Universität Bremen, Aachen, 1999.
- [92] S. LOYALKA UND S. HAMOODI, *Poiseuille flow of a rarefied gas in a cylindrical tube: Solution of linearized Boltzmann equation*, Physics of Fluids A, Vol. 2, No. 11 (1990), S. 2061–2065.
- [93] MATHEMATICA, Wolfram Research, Inc., Champaign, IL, USA, <http://www.wolfram.com>.
- [94] MATHWORKS, The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, USA, <http://www.mathworks.com>.
- [95] J. MAXWELL, *On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature*, Phil. Trans. R. Soc. Part1, 170 (1879), S. 231–256.
- [96] A. MAYR, E.-R. KÖNIG UND G. WACHUTKA, *New full 3D-analysis tool for electro-mechanical microdevices using coupled BEM-FEM/TP2000*, in Proc. of the 14th workshop of Micromechanics Europe (MME'03), Delft, The Netherlands, Nov. 2–4, 2003, S. 177–180.

- [97] J. MEHNER, W. DOETZEL, B. SCHAUWECKER UND D. OSTERGAARD, *Reduced order modeling of fluid structural interactions in mems based on modal projection techniques*, in Proc. of 12th Int. Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (Transducers '03), Boston, USA, June 8–12, 2003, S. 1840–1843.
- [98] J. MEHNER, L. GABBAY UND S. SENTURIA, *Computer-Aided Generation of Nonlinear Reduced-Order Dynamic Macromodels–II: Stress-Stiffend Case*, J. of Microelectromechanical Systems, 9, No. 2 (2000), S. 270–277.
- [99] MEMS XPLOERER, MEMSCAP S.A., St. Ismier, France,
<http://www.memscap.com>.
- [100] MENTOR GRAPHICS, Mentor Graphics Corporation, Wilsonville, OR, USA,
<http://www.mentor.com>.
- [101] S. MIDDELHOEK, *Celebration of the tenth transducers conference - the past, present and future of transducer research and development*, Sensors and Actuators, 82 (2000), S. 2–23.
- [102] B. MOORE, *Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction*, IEEE Transactions on Automatic Control, 26(1) (1981), S. 17–32.
- [103] G. L. MORINI, *Laminar-to-turbulent flow transition in micro-channels*, Microscale Thermophysical Engineering, 8, No. 1 (January/February/March 2004), S. 15–30.
- [104] MST NEWS 1/01, INTERNATIONAL NEWSLETTER ON MICRO - NANO INTEGRATION, VDI/VDE-TECHNOLOGIEZENTRUM INFORMATIONSTECHNIK GMBH, *Automotive Applications*, Teltow, Germany.
- [105] MST NEWS 1/02, INTERNATIONAL NEWSLETTER ON MICRO - NANO INTEGRATION, VDI/VDE-TECHNOLOGIEZENTRUM INFORMATIONSTECHNIK GMBH, *Health Care Applications*, Teltow, Germany.
- [106] MST NEWS 1/03, INTERNATIONAL NEWSLETTER ON MICRO - NANO INTEGRATION, VDI/VDE-TECHNOLOGIEZENTRUM INFORMATIONSTECHNIK GMBH, *Applications in Intelligent Automobiles*, Teltow, Germany.
- [107] MST NEWS 1/04, INTERNATIONAL NEWSLETTER ON MICRO - NANO INTEGRATION, VDI/VDE-TECHNOLOGIEZENTRUM INFORMATIONSTECHNIK GMBH, *Biomicrotechnology*, Teltow, Germany.
- [108] MST NEWS 2/01, INTERNATIONAL NEWSLETTER ON MICRO - NANO INTEGRATION, VDI/VDE-TECHNOLOGIEZENTRUM INFORMATIONSTECHNIK GMBH, *Intelligent Home And Telecommunication Application II*, Teltow, Germany.
- [109] MST NEWS 3/00, INTERNATIONAL NEWSLETTER ON MICRO - NANO INTEGRATION, VDI/VDE-TECHNOLOGIEZENTRUM INFORMATIONSTECHNIK GMBH, *Telecommunications Applications*, Teltow, Germany.

- [110] MST NEWS 3/04, INTERNATIONAL NEWSLETTER ON MICRO - NANO INTEGRATION, VDI/VDE-TECHNOLOGIEZENTRUM INFORMATIONSTECHNIK GMBH, *Micro Actuator and Drive Applications*, Teltow, Germany.
- [111] MST NEWS 4/00, INTERNATIONAL NEWSLETTER ON MICRO - NANO INTEGRATION, VDI/VDE-TECHNOLOGIEZENTRUM INFORMATIONSTECHNIK GMBH, *Biomedical and Pharmaceutical Applications*, Teltow, Germany.
- [112] K. NABORS UND J. WHITE, *Fastcap: A multipole-accelerated 3-d capacitance extraction program*, IEEE Transactions on Computer-Aided Design, 10 (1991), S. 1447–1459.
- [113] N.-T. NGUYEN UND S. WERELEY, *Fundamentals and Applications of Microfluidics*, Artech House Inc., 2002.
- [114] M. NIESSNER UND R. SATTLER, *Physikalisch basiertes Kompaktmodell zur Kapazitätsberechnung von gelochten mikrostrukturierten Platten*, Tech. Report, Lehrstuhl für Technische Elektrophysik, Technische Universität München, München, August 2004.
- [115] L. ONSAGER, *Reciprocal Relations in Irreversible Processes*, Physical Review, 37 (1931), S. 405–426.
- [116] P. OSTERBERG UND S. SENTURIA, *M-TEST: A Test Chip for MEMS Material Property Measurement Using Electrostatically Actuated Test Structures*, J. of Microelectromechanical Systems, 6 (1997), S. 107–118.
- [117] H. PALMER, *Capacitance of a parallel-plate capacitor by the Schwarz-Christoffel transformation*, Trans AIEE, 56 (1927), S. 363–367.
- [118] K. PETERSEN, *Silicon as a mechanical material*, Proc. of the IEEE, 70 (1982), S. 420–457.
- [119] F. PETRI, C. DÖRING, R. NEUL UND R. LAUR, *Dämpfungsberechnung für mikro-mechanische Sensoren unter niedrigen Drücken*, in Proc. of 10th GMM Workshop, Cottbus, 2004, S. 75–80.
- [120] F. PLÖTZ, *Mikromechanische Aktoren für Hochfrequenz-Schalter in der Telekommunikation*, Dissertation, Universität-GH Paderborn, Paderborn, 2001.
- [121] F. PLÖTZ, S. MICHAELIS, R. AIGNER, H. TIMME, J. BINDER UND R. NOÉ, *A low-voltage torsional actuator for application in RF-microswitches*, Sensors and Actuators A, 92 (2001), S. 312–317.
- [122] V. L. RABINOVICH, M. DESHPANDE UND J. R. GILBERT, *Prediction of Mode Frequency Shifts Due to Electrostatic Bias*, in Proceedings of TRANSDUCERS'99, Sendai, Japan, June 7–10, 1999, S. 442–445.

- [123] S. REITZ, C. DÖRING, J. BASTIAN, P. SCHNEIDER, P. SCHWARZ UND R. NEUL, *System level modeling of the relevant physical effects of inertial sensors using order reduction methods*, in Proceedings of DTIP'04, Montreux, Switzerland, May 12–14, 2004, S. 178–387.
- [124] R.J.GUYAN, *Reduction of stiffness and mass matrices*, AIAA Journal, 3(2) (1965).
- [125] D. F. ROGERS, *Laminar Flow Analysis*, Cambridge University Press, 1992.
- [126] B. ROMANOWICZ, *Methodology for the Modeling and Simulation of Microsystems*, Kluwer Academic Press, Boston, 1998.
- [127] R. ROSCOE, *The flow of viscous fluids round plane obstacles*, Philosophical Magazine, 40 (1949), S. 338–351.
- [128] E. RUDNYI UND J. KORVINK, *Review: Automatic model reduction for transient simulation of mems-based devices*, Sensors Update, 11 (2002), S. 3–33.
- [129] S.-A. SCHAAF UND P. CHAMBRE, *Flow of Rarefied Gases*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1961.
- [130] P. SCHNEIDER, A. SCHNEIDER, J. BASTIAN, S. REITZ UND P. SCHWARZ, *MO-SCITO - A Program System for MEMS Optimization*, in Proc. DTIP Conference, Cannes, France, May 5-8, 2002, S. 5–8.
- [131] G. SCHRAG, *Modellierung gekoppelter Effekte in Mikrosystemen auf kontinuierlicher Feldebene und Systemebene*, Dissertation, Technische Universität München, München, 2002.
- [132] G. SCHRAG, R. SATTLER UND G. WACHUTKA, *System level model of damping effects for highly perforated torsional microstructures*, in Proceedings of the 2002 International Conference on Simulation of Semiconductor Processes and Devices (SISPAD 2002), Kobe, Japan, Sep. 4–6, 2002, S. 111–114.
- [133] G. SCHRAG, P. VOIGT UND G. WACHUTKA, *Squeeze-Film-Damping in Arbitrary Shaped Microdevices Modelled by an accurate Mixed-Level Scheme*, in Proc. of 4th Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'01), Hilton Head Island, SC, USA, Mar. 19–21, 2001, S. 92–95.
- [134] G. SCHRAG UND G. WACHUTKA, *Accurate system-level model for highly perforated micromechanical devices*, Sensors and Actuators A, 111 (2004), S. 222–228.
- [135] A. SCHROTH, *Modelle von Platten und Balken in der Mikromechanik*, Dissertation, TU Dresden, Dresden, 1996.
- [136] A. SCHROTH, T. BLOCHWITZ UND G. GERLACH, *Simulation of a complex sensor system using coupled simulation programs*, Sensors and Actuators A, 54 (1996), S. 632–635.

- [137] P. SCHWARZ, *Modellierung und Simulation heterogener technischer Systeme*, in 66. Physikertagung, Leipzig, 19. März 2002.
- [138] J. SEEGER UND B. BOSER, *Dynamics and control of parallel-plate actuators beyond the electrostatic instability*, in Proc. of Transducers '99, Band 1, Sendai, Japan, June 1999, S. 474–477.
- [139] S. SENTURIA, *Microsystem Design*, Kluwer Academic Press, Norwell, MA, USA, 2001.
- [140] S. SENTURIA, R. HARRIS, B. JOHNSON, S. KIM, K. NEABORS, M. SHULMAN UND J. WHITE, *A computer-aided design system for microelectromechanical systems (Memcad)*, Journal of Microelectromechanical Systems, 1 (1992), S. 3–14.
- [141] R. SHAH UND A. LONDON, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic Press, New York, 1978.
- [142] F. SHARIPOV, *Rarefied gas flow through a long rectangular channel*, J. Vac. Sci. Technol. A, Vol. 17, No. 5 (1999), S. 3062–3066.
- [143] F. SHARIPOV, *Data on the Slip Coefficients*, in Proc. of 3rd Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'00), San Diego, CA, USA, March 27–29, 2000, S. 570–573.
- [144] F. SHARIPOV UND V. SELEZNEV, *Data on internal rarefied gas flow*, J. Phys. Chem. Ref. Data, Vol. 27, No. 3 (1998), S. 657–706.
- [145] SILVACO INTERNATIONAL, *Announcing: the virtual wafer fab, Simulation Standard, Vol.3, No. 6*, Santa Clara, CA, USA, <http://www.silvaco.com>.
- [146] K. SIMONYI, *Theoretische Elektrotechnik*, VEB Deutscher Verlag für Wissenschaften, Berlin, 1973.
- [147] Y. SONE UND M. HASEGAWA, *Poiseuille and thermal transpiration flows of a rarefied gas through a rectangular pipe*, Journal of Vacuum Society of Japan (in Japanese), Vol. 30, No. 5 (1987), S. 425–428.
- [148] N. SWART, S. BART, M. ZAMAN, M. MARIAPPAN, J. GILBERT UND D. MURPHY, *AutoMM: Automatic Generation of Dynamic Macromodels for MEMS Devices*, in Proceedings of MEMS'98, Heidelberg, 1998, S. 178–183.
- [149] SYNOPSIS, Synopsis Inc., Mountain View, CA, USA, <http://www.synopsis.com>.
- [150] I. TETELBAUM, *Elektrische Analogierechenverfahren*, Technik Verlag, Berlin, 1963.
- [151] S. TEUKOLSKY, W. PRESS, B. FLANNERY UND W. VETTERLING, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, USA, 1986.

- [152] H. TILMANS, *Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: I. Lumped-parameter systems*, Journal of Micromechanics and Microengineering, 6 (1996; erratum S. 359), S. 157–176.
- [153] H. TILMANS, *Equivalent circuit representation of electromechanical transducers: Ii. Distributed-parameter systems*, Journal of Micromechanics and Microengineering, 7 (1997), S. 285–309.
- [154] D. VAN DUYN UND S. MIDDELHOEK, *Information Transduction in Solid-state Transducers: A General Thermodynamic Systems Approach*, Sensors and Actuators A, 21-23 (1990), S. 25–32.
- [155] T. VEIJOLA, *Persönliche Mitteilung*. Department of Electrical and Communications Engineering, Helsinki University of Technology, 26. März 2004.
- [156] T. VEIJOLA, *End Effects of Rare Gas Flow in Short Channels and in Squeezed-Film Dampers*, in Proc. of MSM'02, San Juan, Puerto Rico, USA, Apr. 22–25, 2002, S. 104–107.
- [157] T. VEIJOLA, H. KUISMA UND J. LADENPERÄ, *The influence of gas-surface interaction on gas-film damping in a silicon accelerometer*, Sensors and Actuators A, 66 (1998), S. 83–92.
- [158] T. VEIJOLA, H. KUISMA, J. LADENPERÄ UND T. RYHÄNEN, *Equivalent-circuit model of the squeezed gas film in a silicon accelerometer*, Sensors and Actuators A, 48 (1995), S. 239–248.
- [159] T. VEIJOLA, A. PURSULA UND P. RABACK, *Extending the validity of existing squeezed-film damper models with elongations of surface dimensions*, in Proc. of 7th Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'04), Boston, USA, March 7–11, 2004, S. 235–238.
- [160] P. VOIGT, *Compact Modeling of Microsystems*, Dissertation, Technische Universität München, München, 2002.
- [161] P. VOIGT, R. SATTLER UND G. WACHUTKA, *Parameterextraktion für Mikrosysteme am Beispiel eines Gyroskopes*, in Mikrosystemtechnik '99, Chemnitz, Deutschland, Okt. 12, 1999, S. 156–159.
- [162] P. VOIGT UND G. WACHUTKA, *Compact MEMS Modeling for Design Studies*, in Proc. of 3rd Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'00), San Diego, CA, Mar. 27–28, 2000, S. 134–137.
- [163] M. VON ARX, *Thermal Properties of CMOS Thin Films*, Dissertation, ETH Zürich, Zürich, Switzerland, 1998.
- [164] K. VON KOPPENFELS UND F. STALLMANN, *Praxis der konformen Abbildungen*, Springer Verlag, Berlin, 1959.

- [165] G. WACHUTKA, *Rigorous Thermodynamic Treatment of Heat Generation and Conduction in Semiconductor Device Modeling*, IEEE Trans. on CAD, CAD-9 (1990), S. 1141–1149.
- [166] G. WACHUTKA, *Tailored Modeling of Miniaturized Electrothermomechanical Systems Using Thermodynamic Methods*, in Micromechanical Systems, DSC-Vol. 40, D. Cho, J. Peterson, A. Pisano und C. Friedrich, Hrsg., The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1992, S. 183–198.
- [167] G. WACHUTKA, *Problem-Oriented Modeling of Microtransducers: State of the Art and Future Challenges*, Sensors and Actuators A, 41 (1994), S. 279–283.
- [168] G. WACHUTKA, *Tailored modeling: a way to the ‘virtual microtransducer fab’?*, Sensors and Actuators A, 46–47 (1995), S. 603–612.
- [169] W. WEHL, *Tintendrucktechnologie: Paradigma und Motor der Mikrosystemtechnik*, F&M Feinwerktechnik Mikrotechnik Mikroelektronik, 103 (1995), S. 318–324, 486–491.
- [170] F. WHITE, *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [171] F. WITTMANN, *Persönliche Mitteilung*. Technische Universität München, Lehrstuhl für technische Elektrophysik, 17. März 2005.
- [172] WÖLFEL TECHNISCHE PROGRAMME, WTP2000, Wölfel Technische Programme, Max-Planck-Str. 15, 97204 Höchberg, <http://www.woelfel.de>.
- [173] G. WONG, G. TSE, Q. JING, T. MUKHERJEE UND G. FEDDER, *Accuracy and composability in NODAS*, in Proceedings of the 2003 IEEE/ACM Int. Workshop on Behavioral Modeling and Simulation (BMAS '03), San Jose, California, October 7–8, 2003, S. 82–87.
- [174] J. YAO, *RF-mems from a device perspective*, J. of Micromechanics and Microengineering, 10 (2000), S. 9–38.
- [175] W. YE, X. WANG UND J. WHITE, *A fast stokes solver for generalized flow problems*, in Proc. of 3rd Int. Conf. on Modeling and Simulation of Microsystems (MSM'00), San Diego, CA, USA, Mar. 27–28, 2000.
- [176] R. ZENGERLE, J. ULRICH, S. KLUGE, M. RICHTER UND A. RICHTER, *A bidirectional silicon micropump*, Sensors and Actuators A, 50 (1995), S. 81–86.
- [177] O. ZIENKIEWICZ, C. EMSON UND P. BETTESS, *A novel boundary infinite element*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19 (1983), S. 393–404.

Mein Dank ...

gilt allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle danke ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Gerhard Wachutka für die Bereitstellung der sehr guten Infrastruktur und die Kontakte zu verschiedenen Kooperationspartnern, aus denen sich interessante Projekte ergeben haben. Er stand stets mit gutem Rat zur Seite und gewährte die notwendigen Freiräume für selbstständiges und produktives Arbeiten. Herrn Prof. Dr. Ignaz Eisele danke ich für sein Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Zweitgutachtens.

Ein großer Dank gilt allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Technische Elektrophysik. Die Zeit am Institut wird mir durch die kollegiale Atmosphäre und zahlreichen Aktivitäten in guter Erinnerung bleiben. Hervorheben möchte ich meinen langjährigen Zimmergenossen Winfried Kaindl, der mir nicht nur bei Rechnerproblemen stets mit Rat und Tat zur Seite stand und meine Kollegin aus dem MEMS-Team Gabi Schrag für die Einführung in die Dämpfungsmodellierung und zahlreiche gemeinsame Diskussionen und Veröffentlichungen.

Vielen Dank auch an meine Kooperationspartner bei der Infineon Technologies AG, München, Dr. Robert Aigner und Florian Plötz für die Bereitstellungen von Demonstratoren und Meßergebnissen. In diesem Zusammenhang möchte ich auch Sebastian Hoffmann vom Lehrstuhl für optische Nachrichtentechnik und HF-Technik an der Universität Paderborn für den Schaltplan der Ladungspumpe und Martin Niessner für das elektrostatische Kompaktmodell, das er im Rahmen seiner Bachelorarbeit erstellt hat, danken.

Sehr hilfreich waren für mich die Hinweise der zahlreichen Korrekturleser dieser Arbeit. Mein Dank geht an Sven Spieth, Andreas Mayr, Eva-Renate König und insbesondere an Gabi Schrag und Franz Wittmann, die mit ihren kritischen Bemerkungen wesentlich zum besseren Verständnis dieser Arbeit beigetragen haben. Hervorheben möchte ich auch Christa Felber und meine Frau Susanne, die diese Arbeit aus geisteswissenschaftlicher Sicht Korrektur gelesen und von einigen orthografischen und stilistischen Mängeln befreit haben.

Zuletzt ein herzliches Dankeschön an meine Frau Susanne, die mir insbesondere in der Endphase der Arbeit jegliche Unterstützung gewährt hat und an meine beiden Töchter Sarah und Hannah für ihr Verständnis, daß unser Computer nicht nur zum Fotos anschauen da ist.