

Lehrstuhl für Angewandte Mechanik

**Modellierung und Optimierung von
Robotern mit einseitigen Bindungen
und lokalen Verspannungen**

Robert Engelke

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. G. H. Schnerr

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. H. Ulbrich
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. A. Wall
3. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. E.h., Dr.-Ing. h.c. (RAS) F. Pfeiffer, i.R.

Die Dissertation wurde am 29.6.2007 der Technischen Universität München ein-
gereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 27.2.2008 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik, vormals Lehrstuhl B für Mechanik der Technischen Universität München. Sie wurde im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 453 „Wirklichkeitsnahe Telepräsenz und Teleaktion“ aus den Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG gefördert.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Pfeiffer i.R. für die Betreuung der Arbeit und das in mich gesetzte Vertrauen. Das von ihm als ehemaliger Lehrstuhlinhaber geprägte angenehme Arbeitsklima am Lehrstuhl, sein wohlwollendes, förderndes Interesse sowie die von ihm gewährte „lange Leine“, eigenen Ideen nachgehen zu können, haben wesentlich zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen. Ihm gilt zudem mein Dank für die Übernahme der Zweitgutachtens.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. H. Ulbrich danke ich für die Übernahme des Erstgutachtens sowie für das Interesse an meiner Arbeit, sein Vertrauen und die freundliche Unterstützung, die er mir als neuer Lehrstuhlinhaber entgegen brachte.

Für die Übernahme des Drittgutachtens und das meiner Arbeit entgegengebrachte Interesse bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Wall.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. G. H. Schnerr danke ich für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Allen Kollegen des Lehrstuhls danke ich für die immer freundliche Arbeitsatmosphäre und Kollegialität. Insbesondere meinen Bürokollegen Martin Schleich und Arnd Golle danke ich für eine schöne gemeinsame Zeit und viele anregende, manchmal auch fachliche, Gespräche. Des Weiteren danke ich Zeljko Gazic für die erstklassige und lehrreiche Unterstützung in allen Computerangelegenheiten. Den Kollegen Gerhard Schillhuber, Martin Förg und Lucas Ginzinger sei Dank für das gewissenhafte und kritische Korrekturlesen dieser Arbeit.

Ohne die Hilfe des Sekretariats und der Werkstatt des Lehrstuhls wäre ich oftmals auf verlorenem Posten gestanden. Daher gilt den Damen Margrit Blöchl, Rita Schneider und Manuela Müller-Philipp, sowie den Herren Georg Mayr, Wilhelm Miller, Walter Wöß und Wolfgang Kruppa mein herzlicher Dank. Ebenso danke ich Herrn Dr.-Ing. Thomas Thümmel für seine Hilfe in administrativen Dingen.

Letztlich danke ich ganz herzlich meiner Familie und meinen Freunden für Hilfe, Rückhalt, Inspiration und gutes Essen in allen Lebenslagen.

München, im März 2008

Robert Engelke

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Literaturüberblick	2
1.3	Ziel und Aufbau der Arbeit	13
2	Mechanische Modellbildung	15
2.1	Starrkörpermodell	15
2.1.1	Jacobimatrizen	16
2.1.2	Bewegungsdifferentialgleichungen	18
2.2	Spezialfall serielles System	21
2.2.1	Zweiteilung in Arm und Basis	21
2.2.2	Kinematik	24
2.2.3	Kinetik	25
2.3	Kontaktmechanik	27
2.4	Kontaktgesetze	31
2.4.1	Normalenrichtung	31
2.4.2	Ebenes tangenciales Kontaktgesetz	32
2.4.3	Räumliches tangenciales Kontaktgesetz	34
2.5	Lineares Komplementaritätsproblem LCP	39
2.5.1	Terminologie der Mengenkompemtaritäten	39
2.5.2	Kontaktformulierung mit finitem Zustandsautomaten	42
2.5.3	Formulierung des LCPs	44
3	Finite Zustandsautomaten	47
3.1	Standardfall einseitige Bindung	48
3.1.1	Ebener Fall	48
3.1.2	Räumlicher Fall	51
3.2	Lokale Verspannungen	58
3.2.1	Grundidee	58
3.2.2	Kraftvariable halbstarre lokale Verspannung	62

3.2.3	Kraftvariable lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung . . .	70
3.2.4	Kraftkonstante halbstarre lokale Verspannung	74
3.2.5	Kraftkonstante lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung . .	76
4	Statische Bindungsoptimierung	79
4.1	Problemstellung	79
4.2	Optimierungsparameter	79
4.3	Gütekriterien	81
4.4	Nebenbedingungen	85
4.5	Formulierung des Optimierungsproblems	89
4.6	Beispiel	90
5	Bahnoptimierung	93
5.1	Problemstellung	93
5.2	Hardwarenaher Rampenansatz	94
5.3	Optimierungsparameter	98
5.4	Kinematik der passiven Gelenke	98
5.5	Gütekriterium	101
5.5.1	Definition	101
5.5.2	Numerische Auswertung	101
5.6	Nebenbedingungen	103
5.6.1	Definition	103
5.6.2	Numerische Auswertung	105
5.7	Formulierung des Optimierungsproblems	106
5.8	Untersuchte Szenarien	108
5.9	Optimierungsergebnisse	111
6	Versuchsstand	115
6.1	Aufbau der seriellen Arme der Versuchsroboter	115
6.1.1	Modulares Robotiksystem	115
6.1.2	Modulparameter	117
6.1.3	Mechanische Kopplung der Module, Nomenklatur	122
6.1.4	Modellbildung der Roboterglieder	124
6.2	Aufbau des Versuchsstands	125
6.2.1	Aufbau und Parameter der Basis	125
6.2.2	Aufbau der Bindungsträger	127
6.2.3	Mess- und Steuerungsaufbau	130

7	Messergebnisse und Modellverifikation	132
7.1	Kinematik	132
7.2	Kinetik	134
7.3	Energieumsatz	136
7.4	Bindungsverhalten	137
7.4.1	Normalenrichtung	137
7.4.2	Tangentialrichtung	139
8	Zusammenfassung	142
A	Lokale Verspannungen im räumlichen Fall	146
A.1	Kraftvariable lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung	146
A.2	Kraftkonstante halbstarre lokale Verspannung	149
A.3	Kraftkonstante lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung	152
B	Modellparameter	154
B.1	Parameter der Montageadapter	154
B.2	Parameter der realisierten Achsfolgen	157
C	Inverse Kinematiken	165
C.1	Trigonometrische Grundgleichungen	165
C.2	Inverse Kinematiken der realisierten Achsfolgen	166
D	Das Nelder-Mead Downhill-Verfahren	172
D.1	Ursprüngliche Version	172
D.2	Ergänzungen des Originalverfahrens	174
E	Daten der Referenzlösungen	176
F	Literatur	178

Nomenklatur

Allgemeines

Die in dieser Arbeit dargestellten mathematischen Betrachtungen gehorchen den folgenden Festlegungen bezüglich einer einheitlichen Schreibweise der benutzten Größen.

- Skalare Größen werden kursiv dargestellt, Vektoren und Matrizen werden zusätzlich in fetter Schrift geschrieben: $a + b = c$, $\mathbf{X} \mathbf{y} = \mathbf{z}$
- Runde Klammern finden bei Vektoren, eckige bei Matrizen Anwendung.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

- Eine Indizierung an spitzen Klammern gilt für alle darin enthaltenen Größen.

$$\langle a + b \rangle_i = a_i + b_i \quad , \quad \sum_n \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle_n = \sum_n (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n + \mathbf{z}_n)$$

- Für Mengen bzw. Vektoren getroffene Aussagen implizieren die gleiche Aussage für jedes Element der Menge bzw. jeden Skalar des Vektors.

$$\{a, b, c\} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge c \geq 0 \quad , \quad \mathbf{x} < 1 \Rightarrow x_i < 1$$

$$\{a, b\} \neq \{c, d\} \Rightarrow a \neq c \wedge a \neq d \wedge b \neq c \wedge b \neq d$$

Mathematische Operatoren

- \square^T Transponierte einer Matrix oder eines Vektors
- $\dot{\square}, \ddot{\square}$ 1. und 2. Zeitableitung. Es gilt: $K \dot{\square} = (\dot{K} \square) \neq K(\dot{\square})$
- $\delta \square$ Variation
- $d \square$ Differentialoperator
- $\partial \square$ Operator der partiellen Ableitung
- $\square \times \square$ Kreuzprodukt zweier Vektoren $\in \mathbb{R}^3$
- $\tilde{\square}$ Tildeoperator, substituiert das Kreuzprodukt durch ein Matrix-Vektor-Produkt: $\tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}} \mathbf{a}$, $\tilde{\square} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$
- $|\square|$ Betrag eines Skalars oder Vektors
- $\|\square\|$ Frobeniusnorm einer Matrix
- $\bar{\square}$ Eine Über- und Unterstreichung einer ganzzahligen Größe findet Anwendung bei der Analyse der Kontaktzustände an einer S -seitigen Reibpyramide, wenn eine Laufvariable i ein Ausbrechen der ganzzahligen Größe $x(i)$ aus dem zulässigen Intervall $x \in [1; S]$ verursachen kann. Bei $x(i) > S$ wird solange S vom

Wert x substrahiert, bis der so korrigierte Wert im zulässigen Intervall liegt, bei $x(i) < 1$ wird S korrigierend hinzuaddiert.

Beispiel: $S = 3: \quad \overline{(-1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)} = (2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2)$

Dieser Operator ist verwandt mit dem Modulo-Operator „mod“, der ganzzahlige Werte auf das Intervall $[0; S-1]$ korrigiert, $\bar{x} = \text{mod}(x-1, S) + 1$.

- $\square \downarrow 0$ Eine zuvor positive skalare Größe nimmt den Wert Null ein
- $\square \uparrow x$ Eine zuvor kleinere skalare Größe nimmt den Wert x ein
- $\forall \square: \dots$ Für alle \square gilt: ...
- $\exists \square: \dots$ Es gibt ein \square , so dass gilt: ...
- $[\mathbf{x}]_i = x_i$: Das i -te skalare Element eines Vektors \mathbf{x}
- $[\mathbf{X}]_{ij} = X_{ij}$: Das j -te skalare Element der i -ten Zeile einer Matrix \mathbf{X}
- $\square \cup \square$ Mengenvereinigungsoperator
- $\square \cap \square$ Schnittmengenoperator
- $\square \setminus \square$ Mengendifferenzoperator („ \square ohne \square “)
- $\square \subset \square$ Teilmengenoperator
- $\bigcup_i(\square_i)$ Mengenvereinigung mit Laufvariable
- $\sphericalangle(\square, \square)$ Öffnungswinkel zwischen zwei Vektoren
- $s\square, c\square$ Kurzschreibweise für $\sin(\square)$ und $\cos(\square)$
- $\text{sign}(\square) \in \{-1, +1\}$: Vorzeichen einer Größe. Sonderfall: $\text{sign}(0) = +1$
- $\text{diag}(\square)$ Der „diag“-Operator erzeugt eine (Block-)Diagonalmatrix.

$$\text{diag} \langle \mathbf{a} \rangle = \text{diag}_{i=1}^3 \langle a_i \rangle = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \text{diag}_{i=1}^2 \langle \langle i^2 \ i+1 \rangle \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{row}_{i=x}^y \langle a_i \rangle$: Ein Nebeneinanderstellen von Skalaren, Vektoren oder Matrizen zu Sammelvektoren bzw. -matrizen ist mittels des „row“-Operators unter Verwendung einer Laufvariablen möglich. Rekursionen sind zulässig.

$$\text{row}_{i=1}^3 \langle \mathbf{b}_i \rangle = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}, \quad \text{row}_{k=1}^2 \langle \text{row}_{i=1}^{k+1} \langle \mathbf{c}_{i,k} \rangle \rangle = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1,1} & \mathbf{c}_{2,1} & \mathbf{c}_{1,2} & \mathbf{c}_{2,2} & \mathbf{c}_{3,2} \end{bmatrix}$$

$\text{col}_{i=x}^y \langle a_i \rangle$: Analog zu „row“ erwirkt der „col“-Operator eine Untereinanderstellung.

$$\text{col}_{i=1}^2 \langle a_i \rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Koordinatensysteme

- 1 ... 6 körperfeste Koordinatensysteme der sechs Körper des Roboterarms
- B Basiskoordinatensystem
- B_0 Basiskoordinatensystem zu Beginn der Betrachtung
- E Koordinatensystem der Aufstandsebene
- G Greiferkoordinatensystem
- I Inertialkoordinatensystem

Ausgezeichnete Punkte

G	Greiferpunkt
K	Kontaktpunkt
P	Allgemeiner, nicht näher spezifizierter Punkt
Q_i	Kopplungspunkt des Körpers i mit dem Vorgängerkörper im Baumsystem
S	Schwerpunkt

Mengen

\mathbb{G}	Teilmenge von \mathbb{K}
$\check{\mathbb{G}}$	Unzulässige Teilmenge von \mathbb{K}
\mathbb{K}	Kontaktgrößenpool
\mathbb{L}	Indexmenge der vom LCP-Löser mit Werten > 0 belegten Kontaktpunkte
\mathbb{N}	Hypermengen der neutralen Teilmengen des Kontaktgrößenpools
$\mathbb{P}_o, \mathbb{P}_p$	Indexmenge mit den Nummern der optimierbaren bzw. passiven Gelenke
\mathbb{T}_{\square}	Menge der Zeitpunkte, an denen eine Unstetigkeit des Motorkennfeldes zum Tragen kommt ($\square: S$), an denen Sprünge der Gelenkmomente vorliegen ($\square: S$), an denen Nulldurchgänge der Gelenkwinkelgeschwindigkeit vorliegen ($\square: \dot{\varphi}$)
\mathbb{T}_G	Menge der Stützstellen der Gauß-Legendre-Quadratur
\mathbb{U}	Hypermengen der unzulässigen Teilmengen des Kontaktgrößenpools
\mathbb{Z}	Hypermengen der zulässigen Teilmengen des Kontaktgrößenpools

Indizes

IK_{\square}	Von der inversen Kinematik bereitgestellte Größe
L_{\square}	Von Lemke-Algorithmus aus der LCP-Lösung bereitgestellte Größe
X_{\square}	Instanzierung einer koordinatenfreien Größe im Koordinatensystem X
$\mathbf{A}_{X,Y}$	Bei Drehtransformationsmatrizen wird das Ziel-Koordinatensystem X , gefolgt vom Ausgangs-Koordinatensystem Y , durch rechtsseitige Indizierung angegeben. $\mathbf{A}_{YX} X_{\square} = Y_{\square}$ überführt einen Vektor vom X - ins Y -System.
$a \times b_{\square}$	$\in \mathbb{R}^{a \times b}$: a bezeichnet die Anzahl der Zeilen, b die der Spalten einer Matrix.
$\square_{90}, \square_{70}, \square_{HG}$	Auf das 90mm- / 70mm- / Handgelenk-Antriebsmodul bezogene Größe
$\square_{\textcircled{1}}, \square_{\textcircled{2}} \dots$	Auf einen der Bereiche des ebenen zulässigen Kraftbereichs bezogene Größe
$\square_{\textcircled{A}}, \square_{\textcircled{B}} \dots$	Auf einen der Bereiche der approximierten Reibpyramide bezogene Größe
\square_A, \square_B	Auf den Roboterarm bzw. die Basis bezogene Größe
\square_A, \square_K	Auf einen Montageadapter bzw. Kabelstecker bezogene Größe (Kapitel 6)
$\square_{Haft}, \square_{Gleit}, \square_{Sep}$	Auf den Kontaktzustand des persistenten Haftens, des Losgleitens oder der Separation bezogene Größe
\square_a, \square_e	Auf den Anfangs- bzw. Endzeitpunkt einer $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe bezog. Größe
$\square_{el}, \square_{me}$	Auf die Elektronik- bzw. Mechanikhälfte eines Antriebsmoduls bezog. Größe
$\square_h, \square_i, \square_k$	Auf einen der sukzessiven Körper h, i und k bezogene Größe

\square_n, \square_t	Auf die Normalen- oder Tangentialrichtung bezogene Größe
\square_o, \square_p	Auf die optimierbaren bzw. passiven Gelenke des Roboterarms bezog. Größe
\square_o, \square_u	Auf die beiden Seiten (oben/unten) einer lokalen Verspannung bezog. Größe
\square_r	Auf den reduzierten Kontaktpunkt einer lokalen Verspannung bezog. Größe
$\square_{tr}, \square_{ro}$	Auf eine translatorische bzw. rotatorische Bewegung bezogene Größe
\square_{\circ}	Auf eine Hüllkugel bezogene Größe
\square', \square''	Auf den ersten bzw. zweiten Eckzeitpunkt einer $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe bezog. Größe
\square^*	Auf die Null- bzw. Ausgangstellung des Systems bezogene Größe
\square^A, \square^E	Größen zum Anfangs- bzw. Endzeitpunkt einer Sequenz von $\dot{\varphi}(t)$ -Rampen
$\square^{\oplus}, \square^{\ominus}$	Auf den pos. bzw. neg. Teil der Tangentialrichtung bezog. Größe (Kap. 2, 3)
$\square^{\oplus}, \square^{\ominus}$	Auf die Grenzfallbetrachtung einer $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe bezogene Größe (Kapitel 5)
$\square^{\perp}, \square^{\nabla}$	Auf die orthogonalen bzw. an die S -seitige Reibpyramide angepassten Kontakteinheitsvektoren bezogene Größe

Formelzeichen

$\mathbf{0}_n$	Quadratische Nullmatrix der Dimension n
\emptyset	Leere Menge
\mathbf{A}	Drehtransformationsmatrix
\mathbf{A}, \mathbf{H}	Matrix des linearen Komplementaritätsproblems
\mathbf{C}_{\square}	Vektoren der Gleichheits- ($\square:1$) und Ungleichheitsnebenbedingungen ($\square:2$)
\mathbf{E}_n	Einheitsmatrix der Dimension n
F^{\star}	Vorspannkraft einer lokalen Verspannung
\mathbf{F}_{\square}	eingeprägte Kraft ($\square:e$), Gewichtskraft ($\square:g$), Prozesskraft ($\square:P$), Kraft am Kopplungspunkt zweier Körper ($\square:Q$), Kraft am Kraft-Momenten-Sensor ($\square:KMS$)
\mathbf{G}_{\square}	Gütefunktionen bzgl. Energieumsatz ($\square:E$), Kraftraum ($\square:K$), Kippen ($\square:N$), Losgleiten ($\square:T$)
$\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2 \dots$	Hilfsmatrizen bei der Herleitung der Zusammenhänge am approx. Reibkegel
G^{\star}	Skalare Ersatzgütefunktion
I	Elektrischer Strom
\mathbf{J}_P	Jacobimatrix am Punkt P
\mathbf{K}	Kontaktkraft
\mathbf{L}	Drall
$M_{M,i}$	skalares Motormoment bzw. Lastmoment am i -ten Gelenk des Roboterarms
$M_{\tau,i}$	Betrag der Summe der auf den i -ten Körper wirkenden Motormomente
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{M}_{\square}	eingepprägtes Moment ($\square:e$), Vektor aller Motormomente des Roboterarms ($\square:M$), Prozessmoment ($\square:P$), Kopplungsmoment zw. zwei Körpern ($\square:Q$), Moment am Kraft-Momenten-Sensor ($\square:KMS$)
$\mathbf{M}_{\tau,i}$	Vektorsumme der auf den i -ten Körper wirkenden Motormomente

$N_{\square}, \mathbf{N}_{\square}$	Nebenbedingungen der Optimierung bzgl. Manipulierbarkeit ($\square: G$), Lösbarkeit der inversen Kinematik ($\square: IK$), Motormomentengrenzen ($\square: M$), Konfigurationsraumgrenzen ($\square: \mathbf{p}$), Bindungspersistenz ($\square: S$), Gelenkwinkelgrenzen ($\square: \varphi$), Umgebungskollision ($\square: \circ U$), Eigenkollision ($\square: \circ \circ$)
\mathbf{N}	Matrix mit der orthogonalen Einheitsvektoren der Kontaktebene als Spalten
P_i	Kennfeldfunktion für den i -ten Gelenkmotor
R	Radius
\mathbb{R}	Raum der reellen Zahlen
S	Anzahl der Seiten der den Reibkegel approximierenden Reibpyramide
U	Elektrische Spannung
W	Arbeit (engl. <i>work</i>)
\mathbf{W}_{\square}	Projektionsmatrix der orthogonalen Kontaktkraftkoeffizienten und Kontaktpunktbeschleunigungen ($\square: \lambda$) sowie der Motormomente ($\square: \tau$)
\mathbf{a}	Einheitsvektor entlang einer potenziellen Kippachse
\mathbf{b}, \mathbf{c}	Konstantanteil des linearen Komplementaritätsproblems
c_j	Polynomialkoeffizienten der Kennfelder der Antriebsmodule
$d\mathbf{f}$	infinitesimale Kraft
dm	infinitesimales Massenelement
$d_{\mathbb{G}}$	Mächtigkeit der Teilmenge \mathbb{G}
\mathbf{e}^M	Einheitsvektor entlang einer Motor-/Gelenkachse
f_A, f_S	Anzahl der Arm- und Systemfreiheitsgrade
f_U	Funktional zur Beschreibung der Umgebungstopologie
g	Normalenabstand am Kontaktpunkt (engl. <i>gap</i>)
\dot{g}	skalärer Kontaktpunktgeschwindigkeitskoeffizient
\ddot{g}	skalärer Kontaktpunktbeschleunigungskoeffizient
$\ddot{\mathbf{g}}$	Kontaktpunktbeschleunigungsvektor
g	Ordnungszahl des Gauß-Legendre-Quadraturverfahrens (Kapitel 5)
\mathbf{g}	Gravitationsvektor
h	Laufvariable für die S Tangentialrichtungen an der approx. Reibpyramide
h, i, j	laufende Nummern dreier sukzessiver Körper des Roboterarms
h, l, r	geometrische Hilfsgrößen bei der Analyse der Approximation des Reibkegels
\mathbf{h}	Kraftvektor der Bewegungsgleichung
i	Laufvariable für die n_K bzw. f_A Körper
j	Laufvariable für die o Motormomente an einem Körper
\hat{v}_P	Führungsgeschwindigkeit am Punkt P
k	Laufvariable für die n_P Kontaktpunkte
\mathbf{k}	Einheitsvektor entlang einer Kante der S -seitigen Reibpyramide
l_{Δ}	Seitenlänge des Aufstands Dreiecks
m	Masse

n_{\square}	Anzahl der Körper ($\square:K$), der auf einen Körper wirkenden Motormomente ($\square:\tau$), der Kontaktpunkte ($\square:P$), der funktionalen Konfigurationsraumgrenzen ($\square:\mathbf{p}$), der Hüllkugeln ($\square:\bigcirc$), der Gütefunktionen ($\square:\mathbf{G}$), der sukzessiven $\dot{\varphi}(t)$ -Rampenbefehle ($\square:R$),
\mathbf{n}	Normalenvektor bzgl. Kontaktebene
o, p	Laufvariable für die $ \mathcal{P}_o $ optimierbaren bzw. $ \mathcal{P}_p $ passiven Gelenke
\mathbf{p}	Vektor der Optimierungsparameter
\mathbf{p}	Impuls (Kapitel 2)
\mathbf{q}	Vektor der generalisierten Systemkoordinaten
r	Laufvariable für die n_R sukzessiven $\dot{\varphi}(t)$ -Rampenbefehle
\mathbf{r}_P	Ortsvektor vom inertialen Nullpunkt zum Punkt P
\mathbf{r}_{XY}	Relativvektor vom Punkt X zum Punkt Y
$\ddot{\mathbf{r}}_K$	Vektorielle Kontaktpunktbeschleunigung
\mathbf{s}	an die approximierte Reibpyramide angepasster Tangentialeinheitsvektor
t	Zeit (engl. <i>time</i>)
t_c	Zeitpunkte der Spline-Interpolations- bzw. Integrationsintervallgrenzen
t^*	Zeitpunkte des Nulldurchgangs einer der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten
$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$	Tangentialvektoren bzgl. Kontaktebene
v	Hilfsgröße bzgl. Vorzeichen
\mathbf{w}, w_i	Wichtungsfaktoren bei der Optimierung
Δ	Differenz
$\Delta x_{\square}, \Delta y_{\square}$	Tangentiale Verschiebungen der Roboterbasis beim Versuchsstand
Θ	Skalares Massenträgheitsmoment
Θ	Trägheitstensor am Schwerpunkt eines Körpers
α	Öffnungswinkel des Reibkegels
γ	Anteil der Haftreibungskoeffizientensumme an einer lokalen Verspannung
ε	Klein gewählter Differenzwert
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Eulerwinkel
κ_n, κ_t	Normaler und tangentialer Anteil des Einheitsvektors \mathbf{k}
λ	Skalarer Kontaktkraftkoeffizient
λ_N	Normale Kraftreserve
$\hat{\lambda}$	Skalare Haftkraftreserve
$\boldsymbol{\lambda}$	Vektor der Kontaktkraftkoeffizienten
$\hat{\boldsymbol{\lambda}}$	Vektor der Haftkraftreserven
μ_0, μ_G	Haft- und Gleitreibungskoeffizient
τ	skalares Motormoment
$\boldsymbol{\tau}$	Vektor der Motormomente an allen Körpern
φ	Skalarer Armgelenkwinkel
$\boldsymbol{\varphi}$	Vektor der Armgelenkwinkel

$\dot{\varphi}^*, \ddot{\varphi}^*$	Sollparameter der $\dot{\varphi}$ -Rampe eines Gelenkwinkels
$\Delta\varphi_m$	Gelenkwinkeländerung während der mittleren Phase einer $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe
ω	Winkelgeschwindigkeitsvektor eines Körpers
$\omega_{h,i}$	Vektor der Relativwinkelgeschwindigkeit des Körpers i zum Körper h

Kapitel 1

Einführung

1.1 Problemstellung

Ein Großteil der Arbeiten in der klassischen Robotik befassen sich mit Robotern, welche an einem festen Ort montiert sind. Diese Fixierung resultiert aus dem Bedarf, mit dem Roboter variable Aufgaben an einem immer gleichen Ort, etwa an einer bestimmten Position in einer automatisierten industriellen Fließbandfertigung, wiederholt durchzuführen. Die kinetischen Fähigkeiten dieser Roboter sind nur durch die Leistungsfähigkeit der Gelenkmotoren limitiert, eine uneingeschränkte Kraft- und Momentenaufnahmefähigkeit der Fixierung der Roboter an der Umgebung ist stets eine Grundprämisse.

In jüngerer Zeit hat sich der Fokus der Robotikforschung in Richtung mobiler Roboter erweitert. Die Schwerpunkte sind hier bei Themen wie der optimierenden Wegplanung, der optischen Weg- und Hinderniserkennung und bei mit Beinen versehenen und somit lauffähigen Systemen in der Regelung dynamischer und energieeffizienter Gang- und Laufmuster zu finden. Speziell bei den lauffähigen Robotern liegt der Forschungsschwerpunkt zur Zeit in der Entwicklung hochleistungsfähiger Aktorik und Sensorik sowie in der Entwicklung echtzeitfähiger Regelungsarchitektur und -software.

Was bei mobilen Robotern bisher jedoch kaum betrachtet wird ist die Frage, welche Aufgabe der Roboter am Zielort seiner Bewegung überhaupt bewältigen soll und welche Probleme sich dabei aus seiner Ortsvariabilität ergeben. Die Mobilität eines Roboters kann nicht nur Selbstzweck sein, vielmehr wird sie dazu dienen, die manipulativen Möglichkeiten der klassischen, ortsinvarianten Roboter an verschiedenen Einsatzorten zu Einsatz zu bringen. Es ist offenkundig, dass ein auf einer mobilen Basis montierter Roboterarm niemals die gleichen kinetischen Möglichkeiten wie im fest fixierten Fall haben kann, da die Bindung zur Umgebung nur über Reibkontakte realisiert ist und daher bei einer ungünstigen Konstellation aus Last, geometrischer Konfiguration und Bahndynamik ein Kippen oder Weggleiten des Roboters auftreten kann.

Ein typischer Fall für eine solche Problematik ist in der Telerobotik zu finden. Hier werden mobile Serviceroboter ferngesteuert zu verschiedenen, für Menschen nicht zugänglichen Einsatzorten navigiert und führen dort, durch einen menschlichen Operator mit Krafrückkopplung fernbedient, bestimmte Manipulationsaufgaben durch. Im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft DFG getragenen Sonderforschungsbereichs 453 für „Wirklichkeitsnahe Telepräsenz und Teleaktion“ war daher in einem Teilprojekt die Fragestellung zu klären, wie bei einem derartigen teleoperativen System die mechanischen Zwänge zu berücksichtigen sind und ein ungewolltes

Kippen oder Weggleiten des mobilen Teleroboters vermieden werden kann. Die vorliegende Arbeit fasst die in diesem Forschungsprojekt gewonnenen Erkenntnisse zusammen und folgt dem Anspruch, eine auf der Theorie der nichtglatten Mechanik basierende Methodik zur Beherrschung der Dynamik von mobilen und somit einseitig an die Umgebung gebundenen Robotern bereitzustellen.

1.2 Literaturüberblick

In der vorliegenden Dissertationsschrift werden mehrere Themengebiete berührt, zu denen im Folgenden ein Überblick über die verwendete oder themenverwandte Literatur gegeben wird. Der Literaturüberblick erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern soll vielmehr einen repräsentativen Querschnitt über Arbeiten vorstellen, die im Rahmen dieser Dissertationsschrift als relevant erachtet werden. Eine Einteilung in die Themengebiete Mehrkörperdynamik, Nichtglatte Mehrkörpersysteme mit Kontakten, Robotik sowie Optimierung und Bahnplanung erscheint dabei sinnvoll.

1.2.1 Mehrkörperdynamik

Aus mechanischer Sicht handelt es sich bei Robotern um Mehrkörpersysteme (MKS), die unter dem im Allgemeinen zulässigen Postulat des Starrkörperansatzes mit der Theorie der Mehrkörperdynamik erfolgreich als Modell abgebildet und berechnet werden können. Die Mehrkörperdynamik bildet seit langem einen Schwerpunkt in der ingenieurwissenschaftlichen Forschung und reicht in ihren Ursprüngen zurück ins 17. Jahrhundert zu Pionieren wie NEWTON oder EULER [33] [41]. Sie ist Teil der klassischen Mechanik, welche somit eine der ältesten Disziplinen der Physik darstellt, und wird in einer unüberschaubaren Vielzahl von Veröffentlichungen behandelt. Mit der Theorie der Mehrkörperdynamik lassen sich Systeme mehrerer Körper beschreiben, die durch Koppellemente, welche als Krafterelemente oder in Form von ein- und zweiseitigen Bindungen realisiert sein können, miteinander verbunden und somit in ihrer Bewegungsfreiheit eingeschränkt sind.

Das Fundament für die Analyse der Dynamik von MKS bildet die Theorie der Schwingungslehre, deren Grundlagen in detaillierter Weise von MAGNUS/POPP [99], HAGEDORN/OTTERBEIN [67], WITTENBURG [177] oder BROMMUNDT ET AL. [26] ausgebreitet werden. OTTL fokussiert seine Arbeit auf die in einem Schwingungssystem vorhandene Strukturdämpfung [114]. Für Systeme, deren Bewegungsgleichungen zusätzliche Nichtlinearitäten aufweisen, analysiert BREMER [22] das Schwingungsverhalten und zeigt mehrere Lösungswege auf. Die Behandlung linearer und nichtlinearer Schwingungen setzt mathematische Methoden und Werkzeuge voraus. Diese werden von RIEMER ET AL. [138] für das Anwendungsgebiet Technische Mechanik allgemein sowie von HAIRER/WANNER [68] speziell für die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgestellt.

Einen Einstieg in die Mehrkörperdynamik und eine Darstellung der grundlegenden Verfahren bieten die Standardwerke von PFEIFFER [125], WITTENBURG [176] oder

SCHIEHLEN [146]. ROBERSON/SCHWERTASSEK orientieren sich in ihrer Einführung [139] an der Implementierung der Dynamik von MKS in entsprechende Simulationsprogramme. BREMER behandelt in [20] die Regelung und Systemsynthese von mechanischen Systemen und Mehrkörpersystemen. Während ULBRICH in seiner Arbeit [169] einen thematischen Schwerpunkt in der Maschinendynamik setzt, stellt KERLE mit der Getriebelehre die kinematischen Aspekte in den Vordergrund [87].

Liegen in einem System deformierbare Körper vor, stellt die Theorie der elastischen Mehrkörpersysteme ein leistungsfähiges Werkzeug zur Verfügung. Eine allgemeine Übersicht der zur Behandlung solcher Systeme möglichen Vorgehensweisen geben SHABANA [151] und SCHWERTASSEK/WALLRAPP [149] an. Eine umfassende Beschreibung der Theorie ist auch bei BREMER/PFEIFFER [19] nachzulesen. Im Review-Artikel [23] von BREMER finden sich weitere Literaturstellen. FRANZ [53] und WAGNER [171] schildern anhand der Beispiele einer Präzisionswaage bzw. einer Waschmaschine die Anwendung dieser Theorie auf komplexe technische Systeme. Die Herleitungen zum rekursiven Aufstellen der Bewegungsgleichungen baumstrukturierter, starr-elastischer Mehrkörpersysteme nach dem Prinzip von D'ALEMBERT werden von BREMER [21] beschrieben. Der Ansatz wird von JOHANNI für balkenförmige Körper durchgeführt und in einem Programmsystem implementiert [82]. SORGE ergänzt die Theorie um weitere Körpertypen wie Ringe, Platten und Schalen und behandelt einen Aspekt der Subsystemtechnik, die durch die Zusammenfassung von linearen Teilsystemen die Übersichtlichkeit und Handhabung bei großen Systemen wesentlich verbessert [156].

Einen eigenständigen und in Relation zu den eingangs genannten „alten Meistern“ noch sehr jungen Themenbereich innerhalb der Mehrkörpertheorie bilden nichtglatte, d.h. strukturvariante Systeme, bei denen Bindungswechsel, Reibungseffekte und Stoßvorgängen an den Kontaktpunkten zwischen jeweils zwei Körpern des Systems zu un stetigen Kraftverläufen in den beschreibenden Bewegungsgleichungen führen. Das dabei zu beobachtende Phänomen, dass eine Konfigurationsänderung in einem Kontakt des Systems einen Konfigurationswechsel an anderen Kontaktstellen bewirken kann, wird von den Methoden der Starrkörperdynamik mit einseitigen Bindungen erfasst, für die SEYFFERTH [150] und GLOCKER [62] die grundlegenden Konzepte und Lösungsverfahren beschreiben. PFEIFFER und GLOCKER erläutern die Theorie in ausführlicher Weise und wenden sie auf eine Reihe praxisbezogener Beispiele an [121]. STIEGELMEYR befasst sich in [161] mit der Numerik derartiger Systeme und präsentiert weitere interessante Anwendungsbeispiele. Eine detailliertere Behandlung der Literatur zur Thematik nichtglatter Systeme wird im nachfolgenden Abschnitt 1.2.2 unternommen.

Mit der Umsetzung der Theorie der MKS in programmierbare Algorithmen und der Simulation von MKS befassen sich NIKRAVESH [112], DE JALÓN [39] und JOHANNI, der in [81] einen rekursiven Formalismus für das automatische Aufstellen der Bewegungsgleichungen von baumstrukturierten Systemen vorstellt. BROGLIATO ET AL. [24] behandeln die numerische Simulation nichtglatter mechanischer Systeme.

Es existieren einige kommerzielle, mittlerweile sehr umfangreiche und mit komfortablen grafischen Benutzerschnittstellen ausgestattete Simulationsprogramme, mit denen Mehrkörpersysteme abgebildet und berechnet werden können. *ADAMS* [1] sowie im

deutschsprachigen Raum auch das von RULKA in [146] beschriebene *SIMPACK* [155] stellen die wohl bekanntesten Produkte dar. Als Aufsatz von universell konzipierten Berechnungs- und Analyseprogrammen fungieren die Programme *DYNAPLEXPRO* [43], welches auf dem symbolisch operierenden Mathematikwerkzeug *MAPLE* basiert, sowie *SIMMECHANICS* [154], das als Zusatz von *SIMULINK* die Grundfunktionalität des im natur- und ingenieurwissenschaftlichen Bereich sehr verbreiteten Berechnungstools *MATLAB* nutzt. Ebenfalls von industrieller Relevanz ist die Software *DYMOLA* [42], die eine grafische Schnittstelle zur objektorientiert aufgebauten Modellierungssprache *MODELICA* bereitstellt. Neben diesen kommerziellen Lösungen wurden im akademischen Umfeld einige Programme entwickelt, die ebenfalls zur Abbildung und Simulation von Robotern als starre Mehrkörpersysteme genutzt werden können, wie etwa *NEWEUL* von KREUZER und LEISTNER [91] oder *MOBILE* von KECSKEMÉTHY [86].

Komplexere Problemstellungen der Mehrkörperdynamik erfordern mitunter spezifische Softwarelösungen, etwa wenn sich die zuvor genannten MKS-Universalwerkzeuge zur Lösung dieser Probleme als insuffizient erweisen. So hat FRITZ das Programm *KetSim* zur dynamischen Simulation von Kettentrieben entwickelt, bei dem unter Berücksichtigung der mittels einseitiger Bindungen erfassten kontaktmechanischen Vorgänge jedes einzelne der mehreren hundert Kettenglieder als gekoppelter Starrkörper erfasst wird [54]. Die Vorteile des objektorientierten Ansatzes bei der Entwicklung von MKS-Programmen zur Berechnung von Antriebssträngen in Kraftfahrzeugen setzt POST mit der Software *DYNAS* um [129].

1.2.2 Nichtglatte Mehrkörpersysteme mit Kontakten

Die Behandlung von starren Mehrkörpersystemen mit einseitigen Bindungen besitzt eine lange Tradition und ist mit Namen wie NEWTON, HUYGENS, FOURIER, BOLTZMANN und SIGNORINI verbunden. Entscheidende Impulse auf diesem Gebiet, die insbesondere für die heutige Anwendung von größter Bedeutung sind, gingen Anfang der 1970er Jahre von MOREAU aus. Ihm ist es mit neuartigen mathematischen Methoden gelungen, eine kompakte und allgemeingültige Beschreibung einseitig gebundener Mehrkörpersysteme anzugeben [106]. PANAGIOTOPOULOS hat vor allen Dingen aus mathematischer Sicht die Theorie auf diesem Gebiet weiter vorangetrieben, indem er auf Basis der konvexen Analysis eine Formulierung der Kontaktgesetze als hemivariationelle Ungleichungen entwickelte [117]. Als Einstiegspunkt für den mathematischen Hintergrund sei das Standardwerk von ROCKAFELLAR [142] über konvexe Analysis genannt. Das Review-Paper von BROGLIATO ET AL. [24] gibt einen exzellenten Überblick über den Stand der Forschung auf dem Gebiet der numerischen Simulation nichtglatter Systeme.

Formulierung der Kontaktgesetze

Die klassischen Methoden zur Modellierung von Kontakten zwischen Körpern, die im wesentlichen elastisches oder viskoelastisches Materialverhalten voraussetzen, sind zum großen Teil von JOHNSON [84] zusammengefasst. Ausgehend von der Druckverteilung innerhalb der Kontaktzone werden Schlupfmodelle entwickelt. Viele auf elasti-

schem Materialverhalten basierende Kontaktmodelle sind von HERTZ [73] abgeleitet. Zusätzliche hydrodynamische Effekte in der Kontaktfläche werden von CHANG [29] und LARSSON/HÖGLUND [93] berücksichtigt.

Eine andere Klasse einseitiger Bindungsmodelle geht von Kontakten diskretisierter Körper aus, wobei in der unmittelbaren Kontaktumgebung auf die Einführung einer lokalen Nachgiebigkeit in jeglicher Form verzichtet werden kann. Diese Modellierung bedingt mengenwertige, nicht-glatte Kraftgesetze, deren mathematische Formulierung spezielle Methoden erfordert. Von NANIEWICZ/PANAGIOTOPOLUOS ET AL. werden grundlegende Ansätze zur mathematischen Abbildung dieser Kontaktgesetze entwickelt [110] [115], die sich primär an der Anwendung auf quasistatische Probleme orientieren. GLOCKER gibt in [61] für ein dynamisches System eine geometrische Interpretation von Starrkörperstößen an und stellt damit einen Zusammenhang mit Projektionen bzw. Reflektionen her. Die Arbeiten von ROCKAFELLAR [142], CLARKE ET AL. [31] und MISTAKIDIS/STAVROULAKIS [104] bereiten aus mathematischer Sicht den Zugang zur Thematik.

Eine mögliche Darstellung einseitiger Bindungen kann in Ungleichungsform als Komplementaritätsproblem erfolgen. PFEIFFER beschreibt in [126] die komplette Methodik von der Relativkinematik über die Kontaktgesetze bis hin zur Formulierung des gekoppelten Kontaktproblems und zeigt die Anwendung anhand einiger Beispiele. Im Fall ebener COULOMB'scher Reibkontakte geben GLOCKER [62] und PFEIFFER/GLOCKER [121] unter anderem ein lineares Komplementaritätsproblem in Standardform an. FUNK [55] gelingt eine kompaktere Formulierung in einer Nicht-Standardform und schlägt zur numerischen Lösung einen angepassten Pivotalgorithmus vor, der sehr effektiv und robust arbeitet. Die komplette Formulierung räumlicher Kontakte als nichtlineares Komplementaritätsproblem in Standardform wird erstmals von GLOCKER in [60] angegeben. Dabei ist bemerkenswert, dass neben einer nichtglatten Form auch eine stetig differenzierbare Variante abgeleitet und damit die Anwendung einer großen Klasse iterativer Lösungsalgorithmen ermöglicht wird. Mit Hilfe sogenannter NCP-Funktionen ist eine gleichwertige Darstellung der Komplementarität in Form einer nichtlinearen Gleichung möglich, wie WÖSLE zeigt [180]. Eine weitere Möglichkeit im Falle räumlicher Kontakte besteht in der Diskretisierung des Reibkegels in Form einer „Reibpyramide“ mit dem Ziel, das nichtlineare Problem auf ein lineares Komplementaritätsproblem zu reduzieren. Dieses Verfahren wurde von mehreren Autoren eingehend untersucht. Die Beschreibung von KLARBRING/BJÖRKMAN [89] ist zunächst auf voneinander unabhängige Kontakte beschränkt. ROSSMANN ET AL. [143], GLOCKER [60] und TRINKLE ET AL. [166] erarbeiten eine Verallgemeinerung dieser Idee auf abhängige Bindungen.

Stoßvorgänge

Einen eigenen Themenkomplex innerhalb der nichtglatten Mechanik stellt die Behandlung von Stößen zwischen Körpern dar. Da Stoßvorgänge in der vorliegenden Arbeit nicht behandelt werden, sei diesbezüglich auf die Literaturüberblicke in den Dissertationen von GLOCKER [62], WÖSLE [180] und BEITELSCHMIDT [10] sowie auf das Buch von BROGLIATO [25] mit über 1000 Referenzen verwiesen.

Diskretisierung dynamischer Kontaktprobleme

Bei der Berechnung dynamischer Systeme mit einseitigen Starrkörperbindungen besteht eine mögliche Vorgehensweise darin, ausgehend von einer Formulierung der Kontaktgesetze auf Beschleunigungsebene die Kontaktkräfte zu berechnen und die Bewegungsgleichungen mit einem numerischen Integrator zu lösen. Bei häufigen Zustandswechseln der Kontakte sind als Integratoren insbesondere Einschrittverfahren niedriger Ordnung wie zum Beispiel Runge-Kutta-Fehlberg 2/3 günstig. Beispiele hierfür finden sich z.B. bei PFEIFFER/GLOCKER [121], WÖSLE [180], WOLFSTEINER [179] oder SEYFFERTH [150].

Für höherdimensionale Kontaktprobleme sind sogenannte Time-Stepping-Integratoren, bei denen die Kontakte entweder auf Geschwindigkeits-/Impulsebene oder gar auf Lageebene gelöst werden, besser geeignet. So diskretisiert MOREAU in [108] zuerst die Bewegungsgleichung auf Geschwindigkeitsebene, löst dann die Kontaktgesetze ebenfalls auf Geschwindigkeitsebene und schließt mit der Berechnung der Systemlagen anhand einer Euler-Diskretisierung den Algorithmus ab. Eine Formulierung erster Ordnung auf Lageebene stammt von VOLA ET AL. [170]. Das von STIEGELMEYR [161] unter Verwendung eines halb expliziten Euler-Einschrittverfahrens entwickelte Time-Stepping-Verfahren auf Lageebene erzielte enorme Rechenzeitvorteile bei Systemen, in denen die Komplexität der einseitigen Bindungen gegenüber der glatten Systemdynamik überwiegt. Weitere Beispiele zur Time-Stepping Integration finden sich bei ANITESCU ET AL. [4] und STEWART/TRINKLE [160].

Numerische Lösungsverfahren

Eine häufig anzutreffende Formulierung bei ebenen Kontaktproblemen ist die komplementäre Darstellung als LCP (Linear Complementarity Problem). Entsprechend vielfältig sind die numerischen Lösungsansätze, die für allgemeine und auch spezielle Problemtypen entwickelt wurden. MURTY [109] und COTTLE ET AL. [35] geben eine umfassende Übersicht über die Theorie von LCPs. Sie klassifizieren die Komplementaritätsprobleme anhand deren Struktur und stellen jeweils mehrere Lösungsverfahren zur Auswahl. Ein Methode zur Lösung des LCPs, die bis auf wenige Ausnahmesituationen angewendet werden kann, ist der Pivotalgorithmus von LEMKE [94], der eine exakte Lösung liefert und im Gegensatz zu enumerativen Verfahren relativ günstig im Berechnungsaufwand ist. Zur Verbesserung der Robustheit hat SEYFFERTH den LEMKE-Algorithmus um eine iterative Komponente erweitert [150]. Eine Alternative wird von MOREAU mit einem Gauß-Seidel-artigen Löser angegeben [107]. Die Problemformulierung erfolgt dabei allerdings nicht als LCP, sondern als Differentialinklusion. Ein sehr robuster und ebenfalls effektiver Algorithmus, der einen enumerativen Ansatz mit der linearen Programmierung kombiniert, wird in [3] von AL-KHAYYAL vorgestellt. Seine Idee besteht darin, die kombinatorische Vielfalt des Komplementaritätsproblems durch wiederholtes Lösen linearer Programme schrittweise einzugrenzen. Als Besonderheit des Verfahrens ist die Berechnung der kompletten Lösungsmenge bei akzeptablem Aufwand möglich. LUO ET AL. schlagen in [98] zur Lösung linearer Komplementaritätsprobleme die Lösung äquivalenter quadratischer Programme vor.

PANAGIOTOPOULOS stellt in [116] einen Algorithmus vor, der das COULOMB'sche Reibproblem durch iteratives Lösen separierter Normal- und Tangentialprobleme löst. Dies hat den Vorteil, dass für beide Teilprobleme getrennt Minimalprinzipien angegeben werden können, welche sich zur Lösung verwenden lassen, siehe GLOCKER [62].

Bei räumlichen und somit nichtlinearen Kontaktproblemen liegt eine deutlich geringere Anzahl geeigneter Lösungsalgorithmen vor als im linearen Fall. Einen Zugang zur Lösung nichtlinearer Komplementaritätsprobleme ermöglichen die sogenannten NCP-Funktionen. Als Beispiele hierfür seien die Funktionen von MANGASARIAN [100], FISCHER [50] und DE LUCA ET AL. [40] genannt. WÖSLE [180] verwendet darüber hinaus auch Homotopiemethoden und die „Methode der verbesserten LAGRANGE-Multiplikatoren“. Bei sämtlichen Verfahren handelt es sich um iterative Algorithmen, deren Konvergenz zumindest für Spezialfälle bewiesen ist (zum Beispiel [40]). FÖRG greift in seiner Arbeit [52] wichtige Vertreter der iterativen Löser heraus und vergleicht deren wesentliche Eigenschaften. Ausgehend von der Differentialinklusion lässt sich zur Lösung nichtlinearer Kontaktprobleme aber auch die „augmented Lagrangian Newton Method“ anwenden, wie von ALART/CURNIER in [2] vorgeschlagen.

1.2.3 Robotik

Die Robotik ist ein Gebiet des Ingenieurwesens und auch der Informationstechnik, dem weltweit viel Forschungsaufwand zukommt. Die Anzahl der jährlich stattfindenden Konferenzen, Symposien und Workshops ist dementsprechend hoch. Sammlungen richtungsweisender Arbeiten, wie zum Beispiel JAMSHIDI [80] oder [78], helfen dabei, einen Überblick über die vielfältigen Forschungsaktivitäten zu erlangen. Eine umfangreiche Zusammenfassung über die Robotikforschung allein in Deutschland bietet die Sammlung von PRASSLER/DILLMAN/KUNTZE [132], in der sich auch eine Liste der wichtigsten internationalen, regelmäßig einberufenen Robotik-Konferenzen findet. Ebenso fassen die Tagungsbände der zur Zeit zweijährig vom Verein Deutscher Ingenieure VDI durchgeführten Tagungsreihe „Robotik“ die Aktivitäten der deutschen Forschungslandschaft auf dem Gebiet der Robotik zusammen und breiten ein großes Spektrum möglicher Anwendungsgebiete von Robotern aus [140].

Modellierung und Parameteridentifikation

Die Arbeiten von PAUL [119] und LUH [97] bieten eine gute Einführung in die Robotik. Sie stellen den Aufbau von Robotern und deren Kinematik, Steuerung und Regelung in übersichtlicher Weise dar und geben einen Überblick über deren Einsatzmöglichkeiten. Die Bücher von PFEIFFER/REITHMEIER [123], ASADA/SLOTINE [6], CRAIG [36], STADLER [158] und YOSHIKAWA [183] sind Basiswerke für die theoretische Behandlung von Robotern als geregelte Mehrkörpersysteme.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Starrkörperansatz ohne Elastizitäten in den Gelenken als hinreichend für die Modellierung des betrachteten Roboters angenommen. Im Zuge der zunehmenden Verbreitung von Leichtbaurobotern mit immer filigraneren Armstrukturen in Verbindung mit zunehmender Leistungsfähigkeit der Gelenkantriebe rückt die Berücksichtigung von Elastizitäten im System jedoch immer mehr in den

Fokus der Robotikforschung. So geben GEBLER [57] und KLEEMANN [90], basierend auf der Arbeit von JOHANNI [82], ein Modell für einen Laborroboter an, welches sowohl Elastizität und Dämpfung in den Getrieben als auch verformbare Armglieder berücksichtigt. BLANCK [16] berücksichtigt ebenso die Getriebeelastizitäten für den Entwurf einer Roboterregelung. Nichtlinearitäten im Antriebsmodell wie Reibung oder Spiel im Getriebe werden z.B. von TÜRK [167] oder WHITNEY [174] untersucht. In seiner Arbeit [137], die sich mit der Kraftregelung von kraftschlüssigen Roboterbahnen befasst, schlägt RICHTER eine interessante Methode vor, um die inneren Kräfte und Momente bei einem elastischen Roboterarm zu ermitteln. Werden bei einem Roboterarm sämtliche Antriebe in die Basis integriert, so dass der Roboterarm von der Last der Motoren befreit ist, ergibt sich ein Leichtbaupotenzial für die Armkonstruktion. Damit einher geht eine erhöhte Armeelastizität, was SCHLOTTER bei der Modellierung des *TELBOT TB 100* Roboterarms als teilelastisches Mehrkörpersystem mit 36 Freiheitsgraden berücksichtigt [148].

Mit den in jüngerer Zeit rapide gestiegenen Möglichkeiten zur numerischen Simulation von Robotern mit Hilfe mechanischer Modelle nahm auch die Komplexität der Modelle und damit die Notwendigkeit einer möglichst guten Kenntnis bzgl. der Systemparameter stetig zu. Eine pragmatische und einfache Methode der Parameterbeschaffung bei einem Roboter liegt, wie ARMSTRONG ET AL. für den Fall eines *Puma 560* Industrieroboters zeigt [5], in der Demontage und im Wiegen und Auspendeln der einzelnen Teile, um deren Massen, Schwerpunktslagen und Trägheitstensoren zu bestimmen. HÖLZL zeigt ein Verfahren, das die Identifikation der Getriebesteifigkeiten, Dämpfungseigenschaften und Reibkennlinien durch gezielte Bewegungsanalysen des Roboters während des Betriebs ermöglicht, und beschreibt für das Beispiel eines *Puma 562* Industrieroboters die dafür geeigneten Bahnen [76]. Weitere Erkenntnisse zu mathematischen Verfahren zur Identifikation benötigter Systemparameter und zur Kalibrierung von Robotern finden sich bei BERNHARDT/ALBRIGHT [12], ISERMANN [79] und PRÜFER [134]. Die Auswirkungen stochastischer Unsicherheiten bzgl. der Systemparameter auf die Trajektorienplanung und Regelung von Industrierobotern behandeln QU [135] und AURNHAMMER [8].

Inverse Kinematik

Ein bei seriellen Roboterarmen stets wiederkehrendes Problem ist das der inversen Kinematik (IK), welche die Bestimmung der für eine gewünschte Position und Orientierung des Endeffektors benötigten Gelenkwinkel umfasst. Die IK kann für beliebige Roboterkonfigurationen nicht allgemein analytisch gelöst werden. Ein Teil der Forschungsarbeiten zu diesem Thema befasst sich daher mit der numerischen Lösung der IK, während ein anderer Teil systematisch Roboterkonfigurationen sucht, für die eine analytische Lösung existiert. So weist PIEPER [127] nach, dass die IK für jeden Roboter mit drei sich in einem Punkt schneidenden Achsen auf eine Polynomgleichung vierter Ordnung übergeführt werden kann, welche stets analytisch lösbar ist. Dabei können drei sukzessive parallele Achsen als sich in einem im Unendlichen liegenden Punkt schneidend interpretiert werden. HEISS [72] gibt Klassen von Robotern an, bei denen sich das Problem auf die sukzessive Lösung von quadratischen Gleichungen

reduzieren lässt. Daneben existiert eine Reihe von Arbeiten, die die explizite Lösung der IK für einen bestimmten Robotertyp angeben, z.B. ELGAZZAR [44] oder CRAIG [36] für den *PUMA 560* als Vertreter der industriell weit verbreiteten Vertikalknickarmroboter. Arbeiten zur numerischen Lösung der IK benutzen größtenteils ein modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren. Eine der ältesten Veröffentlichungen auf diesem Gebiet (mit Anwendung auf allgemeine räumliche Gelenkketten) stammt von UICKER ET AL. [168], weitere Beiträge leisteten u.a. GOLDENBERG ET AL. [63] und CHEVALLE-REAU/KHALIL [30]. Bei diesen Arbeiten stellt die bei der numerischen Lösung der IK gegebene Redundanz, dass mehr Gleichungen als Unbekannte zur Verfügung stehen und daher geeignete Gleichungen auszuwählen sind, ein gewisses Problem dar. HILLER und WOERNLE schlagen eine Methode zur Vermeidung dieser Redundanz vor, welche gleichzeitig die Anzahl der zu lösenden Gleichungen reduziert [74] [178]. Dabei kann eine gegebenenfalls mögliche analytische Lösung der IK sofort ermittelt werden.

Maßzahlen für Manipulationsvorgänge

Zur Bewertung und Optimierung von Manipulationsvorgängen mit Roboterarmen sind Maßzahlen notwendig, die die Güte bestimmter Konfigurationen bewerten. SALISBURY/CRAIG [145] nutzen die Konditionszahl der transponierten Greifer-Jacobimatrix als Maß der Genauigkeit, mit der sich Kräfte ausüben lassen. YOSHIKAWA [184] multipliziert die Jacobimatrix mit deren Transponierten und nennt die Wurzel der daraus berechneten Determinante *manipulability measure*. Sie beschreibt das Volumen des *manipulability ellipsoids*, welches die Bewegungsmöglichkeit des Greifers in die verschiedenen Raumrichtungen bewertet. In singulärer Stellung entartet das Ellipsoid zu einer Scheibe, das *manipulability measure* wird Null. ASADA [7] führt zur Beurteilung des dynamischen Manipulationsverhaltens des Greifers ein generalisiertes Trägheitsellipsoid ein, das das Beschleunigungspotenzial in die verschiedenen Raumrichtungen angibt. Gleiches leistet das von YOSHIKAWA beschriebene *dynamic manipulability ellipsoid*, das zusätzlich die Schwerkraft und die normierten Motormomente berücksichtigt [182]. In singulärer Stellung entartet es ebenso wie das *manipulability ellipsoid*. Durch Berechnung des Volumens oder unter Verwendung der Hauptachsen des Ellipsoids lassen sich skalare Maßzahlen zur Beurteilung der unterschiedlichen Roboterstellungen ableiten. Diese Idee wird von BURGMAIR [28] aufgegriffen und mit den Beschränkungen der maximalen Motormomente verknüpft, was eine bessere Beurteilung der Roboterkonfiguration ermöglicht. PROKOP [36] verwendet einen Großteil der Bewertungskriterien für die Formulierung von Gütefunktionalen und setzt diese zusammen mit Bewertungskriterien für das dynamische Führungs- und Störverhalten für numerische Optimierungsrechnungen ein. BARCIO und WALKER [9] nutzen das Trägheitsellipsoid gemäß ASADA [7], um den Einfluss von Stößen auf den Roboter abzuschätzen, und geben analog zu SALISBURY/CRAIG [145] die Konditionierung der das Stoßellipsoid beschreibenden Matrix als skalare Maßzahl an. Mit dem *dexterity measure* wurde von STURGES ein anderes Maß zur Beurteilung der „Geschicklichkeit“ eines Manipulators eingeführt [163]. Es beschreibt, welche Winkelfehler in den Roboterjunkten zugelassen werden können, ohne vorgegebene maximale Positions- und Orientierungsfehler des Greifers zu überschreiten. Letztere werden meist aus einer

quasistatischen Analyse der Manipulationsaufgabe gewonnen, siehe WHITNEY [175]. Anders als beim *manipulability measure* [184] zeigt das so berechnete *dexterity measure* in der Nähe von kinematischen Singularitäten Optimalität an, da dort große Gelenkwinkeländerungen nur sehr kleine Greiferbewegungen bewirken, weshalb rechnerisch die zulässigen Gelenkwinkelabweichungen steigen.

Mobile Roboter

Die Basis - im semantischen wie auch im technisch-konstruktiven Sinne - für die Betrachtungen in der vorliegenden Arbeit bilden mobile Roboter. Die Mobilität kann durch Räder, Raupen-/Kettenantriebe oder Beine realisiert sein. Am Lehrstuhl B für Mechanik, inzwischen Lehrstuhl für Angewandte Mechanik, der TU München, wurden in den letzten Jahren unter der Leitung von F. PFEIFFER einige mit Beinen versehene und somit lauffähige Roboter entwickelt. Den Anfang machte die sechsbeinige *TUM-Laufmaschine MAX*, deren adaptives Bewegungsmuster und dezentrale Rechner- und Regelungsstruktur sich in bionischer Weise an dem natürlichen Vorbild der Stabheuschrecke orientieren, wie bei PFEIFFER, WEIDEMANN und ELTZE nachzulesen ist [120] [173] [45]. Erstmals wurde in diesem Projekt ein Ganggenerator realisiert, der den Gangablauf über aus der Natur adaptierte Mechanismen individuell an die Geschwindigkeit und den Untergrund anpasst. STEUER erweiterte das System um eine Neigungsregelung und eine optische Hinderniserkennung [159].

Die Erfahrungen aus der Entwicklung des sechsbeinigen Laufroboters flossen in die Konstruktion eines achtbeinigen Roboters ein, der sich durch Verspreizen seiner Beine in horizontalen wie vertikalen Rohren unter optimaler Ausnutzung der Reibkraft zwischen seinen kugeligen Gummifüßen und der Rohrwand fortbewegen kann. Der von ROSSMANN [144] entwickelte *Rohrkrabber MORITZ* wird ähnlich der sechsbeinigen Laufmaschine über einen zentralen und vier dezentrale, über einen CAN-Bus verbundene Mikrocontroller geregelt und verfügt in seinen Beinen über eine durchdachte Kraft- und Positionssensorik. ZAGLER [185] erweitert die Bewegungsmöglichkeiten durch Integration zusätzlicher Freiheitsgrade im Zentralkörper des Rohrkrabblers und konzipiert ein optisches Erkennungssystem, um so das Durchschreiten von Rohrabzweigungen zu ermöglichen.

Den vorläufigen Höhepunkt stellt wohl der zweibeinige Laufroboter *JOHNNIE* dar, den GIENGER und LÖFFLER in nur vier Jahren entwickelten [58] [96]. Trotz eines eingeschränkten finanziellen Spielraums gelang es ihnen, ein technologisches Niveau zu erreichen, das vergleichbare, hauptsächlich japanische Laufmaschinen-Projekte mit einem Vielfachen an personellen und monetären Aufwand vorgeben. Die genannten, am Lehrstuhl B für Mechanik durchgeführten Arbeiten zu Laufmaschinen stützen sich bei der Modellierung der Bein-Umgebung-Kontakte auf die Theorie der nichtglaten Mehrkörpersysteme. Als weiterführende Literatur zur Laufmaschinenforschung empfehlen sich die Arbeiten von BERNIS [13], ELTZE [45], GIENGER [58] und WEIDEMANN [173].

1.2.4 Optimierung und Bahnplanung

Das mathematisch-mechanische Modell des einseitig gebundenen Roboters kann für modellgestützte Optimierungen auf der Basis der mathematischen Optimierungsrechnung genutzt werden. Diese befasst sich mit der Aufgabenstellung, unter Einhaltung von Nebenbedingungen das Minimum einer Funktion mehrerer Veränderlicher zu finden. Die Nebenbedingungen können in der Form von Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen vorliegen. Einen allgemeinen Überblick über die Optimierungsrechnung und deren numerische Verfahren geben Standardwerke wie die von BEVERIDGE/SCHECHTER [15] und PAPAGEORGIOU [118]. Speziell zur Mehrkriterienoptimierung stellt ESCHENAUER in [46] verschiedene Methoden und Anwendungsbeispiele zusammen und erläutert dabei verschiedene Ansätze zur Formulierung von Präferenzfunktionen und das Auffinden von Kompromisslösungen bei konkurrierenden Kriterien. Zur Optimierungstheorie im Kontext der nichtglatten Analysis sei auf die Beiträge von CLARKE [32], CLARKE ET AL. [31] und ROCKAFELLAR/WETS [141] hingewiesen.

Numerische Methoden

Bei der numerischen Lösung von Optimierungsproblemen kann prinzipiell auf zwei Arten vorgegangen werden. Eine Möglichkeit ist die sukzessive Auswertung des Gütefunktional. Sie kann wie bei der „Monte Carlo Methode“ [103] zufällig erfolgen oder wird nach bestimmten Regeln durchgeführt, z.B. bei der „Downhill-Simplex-Methode“ nach NEALDER [111], die BOX auf Systeme mit Nebenbedingungen erweitert [18], oder beim „simulierten Ausglühen“ [88]. Einen neuen Ansatz aus dem Gebiet der Bionik stellt die Nachbildung von evolutorischen Prozessen in evolutionären Algorithmen dar [75]. So optimieren DATOUSSAID ET AL. [38] durch simulierte Mutation und Selektion die Parameter mechanischer Systeme. Die andere Möglichkeit besteht darin, zusätzlich Informationen über die Gradienten des Gütefunktional bezüglich der Optimierungsparameter auszuwerten. Als eines der effektivsten Verfahren gilt die Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP), die von SCHITTKOWSKY in [147] vorgestellt wird. FAN ET AL. [48] vergleichen die Effizienz von SQP-Verfahren anhand numerischer Experimente.

Bahnplanung

Hinsichtlich der Trajektorienoptimierung bzw. Bahnplanung von Roboterarmen können im Allgemeinen zwei Problemtypen unterschieden werden. Die erste Teilkategorie umfasst Fälle, bei denen die Trajektorie des Endeffektors bereits bekannt bzw. gegeben ist und der Geschwindigkeitsverlauf für den Effektor entlang dieser Trajektorie zu optimieren ist. Anwendungsbeispiele hierfür sind Klebe-, Nahtschweiß- oder Fügeprozesse. Für das resultierende eindimensionale Optimierungsproblem stellen PFEIFFER/JOHANNI [122] ein Verfahren vor, das aufgrund der Beschränkungen in der Phasenebene den zeitoptimalen Verlauf des Bahnparameters sehr effizient aus Extremalkurven generiert. Weitere Verfahren, die ebenfalls Begrenzungen in den Stellgrößen und in den kinematischen Größen berücksichtigen, werden von SHIN/MCKAY [153] sowie BOBROW ET AL. [17] beschrieben. Mit der Methode des *dynamic programming*

nach BELLMANN [11] werden in [122] und [153] zusätzliche Optimierungskriterien zur minimalen Verfahrzeit berücksichtigt. Das BELLMANN-Verfahren stellt ein effizientes Werkzeug zur Optimierung des dynamischen Verhaltens von mechanischen Systemen dar und eignet sich bei passender Darstellung der Modellbeschreibung zur Entwicklung einer optimalen modellbasierten Zustandsregelung. Eine Methode für die Begrenzung der Beschleunigungsänderung wird von TARKIAINEN/SHILLER [165] in einem rechenaufwendigen iterativen Verfahren beschrieben. HUANG/MCCLAMROCH [77] und PFEIFFER/RICHTER [124] erweitern die Bahnplanungsverfahren durch eine Sollkraft, was die Optimierung entlang kontaktschlüssiger Bahnen ermöglicht. Die von WHITNEY [175] definierten Toleranzfelder für die Lage und die Orientierung der Bauteile beim Fügen werden von WAPENHANS [172] mit der Roboterdynamik verknüpft, um einen Fügeprozess zu optimieren.

Die zweite Klasse von Bahnplanungsproblemen behandelt die optimale Planung von Trajektorien, für die nur der Anfangs- und Endpunkt (bzw. Anfangs- und Endzustand der Gelenkwinkel) fest vorgegeben ist, und bezieht somit auch die optimale Auslegung der Bahn im Raum mit ein. Anwendungen wie Montage-, Zuführ-, Punktschweiß- oder Be- und Entladeaufgaben stellen hierfür Beispiele dar. Das Problem kann gemäß PFEIFFER/REITHMEIER [123] geschlossen durch einen Satz kanonischer Differentialgleichungen mit vorgegebenen Randwerten, algebraischen Nebenbedingungen und (bei freier Endzeit) freier oberer Grenze beschrieben werden, für dessen Lösung STOER verschiedene numerische Verfahren aufzeigt [162]. Berücksichtigt man dabei die Begrenzung der Motormomente, so liefert die Auswertung des Maximumprinzips von PONTRJAGIN [128] für zeitminimale Lösungen die *Bang-Bang-Steuerung*, bei der zwischen den Maximal- und Minimalwerten der Steuergrößen umgeschaltet wird. Die Auswertung der sehr komplizierten differentialalgebraischen Gleichungen vermeidet PROKOP [133] für die Untersuchung von Fügeprozessen durch die Parametrisierung der Bahn und der Orientierung des Endeffektors im kartesischen Raum mit Hilfe kubischer Spline-Funktionen. SHILLER/DUBOWSKY [152] verwenden Bezier-Splines zur Beschreibung der Bahn in kartesischen Koordinaten, um die Berücksichtigung von Hindernissen im Arbeitsraum zu erleichtern. RAJAN hingegen wendet Splineverläufe direkt auf die Gelenkwinkel an und wählt dabei eine iterative Bestimmung der optimalen Bahn, indem er von einer groben zu einer feineren Darstellung übergeht und das Verfahren abbricht, wenn die Hinzunahme eines weiteren Splines das Gütefunktional kaum noch verbessert [136].

Alle genannten Arbeiten zur Optimierung von Armtrajektorien setzen inertial an der Umgebung fixierte Roboterarme voraus. Mit der Berücksichtigung von einseitigen Bindungen an der Basis eines Roboterarms im Kontext von Bahnoptimierungen wird in der vorliegenden Arbeit vermutlich Neuland beschritten; entsprechende Referenzen wurden bei der Literaturrecherche nicht gefunden.

1.3 Ziel und Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, ein theoretisches Fundament für die eingangs geschilderte Aufgabe bzgl. der Beherrschung des Verhaltens ortsvariabler, nicht inertial fixierter Roboter bereitzustellen. Dies soll mit Methoden der mechanischen Modellbildung unter besonderer Berücksichtigung der Mechanik einseitiger Bindungen sowie der Optimierungsrechnung realisiert werden. Die Gültigkeit der getroffenen Aussagen sowie die Richtigkeit der daraus ableitbaren Prognosen für das dynamische Verhalten des Roboters sind durch Realisierung ausgewählter Fallbeispiele experimentell zu überprüfen.

Bei der Verfolgung dieses Ziels sind als Nebeneffekt die aus vorangegangenen Arbeiten adaptierten Methoden zur Modellbildung auf ihre Zuverlässigkeit zu prüfen und gegebenenfalls zu erweitern. Einen wesentlichen Teil dieser Arbeit nimmt daher eine detaillierte Betrachtung der Modellierung der Kontakte zwischen der Basis des ortsvariablen Roboters und der Umgebung durch einseitige Bindungen ein, die zur Verwendung finiter Zustandsautomaten bei der Beschreibung der Kontaktzustände führt.

Den Aussagen zur theoretischen Modellbildung, der Anwendung im Rahmen von Optimierungsaufgaben, dem Nachweis der prinzipiellen Machbarkeit einer programmtechnischen Umsetzung sowie der experimentellen Verifikation wird die alleinige Relevanz in dieser Arbeit eingeräumt. Der Anspruch auf Echtzeitfähigkeit der numerischen Umsetzung in Computerprogramme wird nicht gestellt.

Die Herleitung eines allgemeingültigen, mechanischen Starrkörper-Ersatzmodells eines baumstrukturierten, einseitig an die Umgebung gebundenen Roboters ist in Kapitel 2 dargestellt. Der Roboter wird dabei in die Subsysteme Basis und Arm unterteilt, wobei die im System vorhandenen starren Kontakte ausschließlich bei der Basis vorliegen und als einseitige Bindungen modelliert werden. Die Analyse der geforderten Bindungspersistenz des Systems, d.h. des gewollten Fortbestands des gesicherten Stillstands des Roboters ohne Auftreten eines Losgleitens oder einer Separation an den Bindungspunkten der Basis, reduziert sich dann auf das Subsystem der Basis. In diese werden an der Kopplungsstelle zum Arm die aus der Dynamik des Arms resultierenden Reaktionskräfte und -momente eingeprägt.

Bei der Beschreibung der räumlichen Kontaktmechanik mittels eines linearen Komplementaritätsproblems (LCP) in Kapitel 2 führt eine konventionelle strikte Separation der Kontaktkräfte in Normalen- und Tangentialrichtung zu einem nicht robusten Ablauf des standardgemäß verwendeten numerischen Lösungsalgorithmus von LEMKE. Eine alternative und kompakte Formulierung der Kontaktmechanik, die mit einer speziellen Nomenklatur bzgl. der Komplementaritäten zwischen den Kontaktgrößen einhergeht, schafft hier Abhilfe. Der modifizierte LEMKE-Algorithmus verlangt dann nach bestimmten, von finiten Zustandsautomaten bereitgestellten Regeln für die jeweiligen, als Basisaustauschschritte bezeichneten Lösungsschritte.

Kapitel 3 stellt in detaillierter Weise die kompakte Formulierung der kontaktmechanischen Verhältnisse bei verschiedenen Bindungstypen und die zugehörigen finiten Zustandsautomaten dar. Es werden hier auf der Ebene der Kontaktpunktbeschleunigung

gungen sowohl der Standardfall der gewöhnlichen einseitigen Bindung als auch Varianten lokaler Verspannungen an den Bindungspunkten, die einen von der Standardform des Reibkegels abweichenden zulässigen Bereich für die übertragbaren Kontaktkräfte aufweisen und die kinetisch-dynamischen Möglichkeiten des ortsvariablen Roboters erweitern, für den ebenen und räumlichen Fall betrachtet.

Die im ersten Teil dieser Arbeit in Kapitel 2 und 3 vorgestellten Methoden zur Analyse des Bindungszustands des ortsvariablen Roboters können im zweiten Teil bei Optimierungsaufgaben angewendet werden. Dies beschreibt Kapitel 4 zunächst für den statischen Fall, bei dem unter der Vorgabe einer bestimmten Manipulationsaufgabe und unter Berücksichtigung einiger Nebenbedingungen der optimale Standort für den Roboter in einer bestimmten Umgebungstopologie durch eine gewichtete Minimierung des Losgleit-, des Kipprisikos, des Energieumsatzes sowie einer optimalen Nutzung des Krafraums bestimmt wird.

Die statische Bindungsoptimierung stellt mit den Kriterien zur Beschreibung der Güte der normalen und tangentialen Bindungspersistenz die Grundlagen für eine Bahnoptimierung beim einseitig gebundenen Roboter bereit, die in Kapitel 5 behandelt wird. Die Bewegung des Roboterarms wird dabei durch mehrere, sukzessiv an die einzelnen Gelenke erteilte Rampenbefehle generiert, die ein komplexes und durch Variation der Rampenparameter optimierbares Bewegungsmuster des Arms ermöglichen. Eine optimale Armbewegung definiert sich durch einen minimalen Energieumsatz, die Forderung nach Persistenz der einseitigen Bindungen fließt als Nebenbedingung in die Optimierung ein.

Die Definition der Rampenbefehle sowie die zu beachtenden Besonderheiten bei ihrer sukzessiven Applikation zur Generierung komplexer Bewegungsmuster sind in Kapitel 5 ebenso dargestellt wie die drei verschiedenen Achsfolgen des Roboterarms, auf die die Bahnoptimierung angewendet wird. Das Kapitel schließt mit einem Vergleich der bei diesen Achsfolgen erzielten Optimierungsergebnisse.

Der dritte Teil der Arbeit behandelt die experimentelle Umsetzung der vorangegangenen Betrachtungen an einem Versuchsstand. Kapitel 6 beschreibt zunächst das bei der Versuchsdurchführung eingesetzte modulare Robotiksystem. Nachfolgend werden die experimentelle Ermittlung der zur Simulation benötigten Parameter wie Massenträgheitsmomente oder Motorkennlinien sowie der konstruktive Aufbau des Robotikversuchsstands zur Realisierung von Bahnbewegungen eines einseitig gebundenen Roboters dargestellt.

Kapitel 7 stellt die während der Bahnbewegung des Roboterarms experimentell ermittelten Zeitverläufe verschiedener Messgrößen den mit der modellgestützten Simulation prognostizierten Daten gegenüber und verifiziert so die Modellbildung im Allgemeinen und die Eignung der kompakten, auf Zustandsautomaten basierenden Modellierung von Kontakten durch einseitige Bindungen im Speziellen.

Zum Abschluss dieser Arbeit fasst Kapitel 8 die erzielten Ergebnisse zusammen.

Kapitel 2

Mechanische Modellbildung

Bei der Modellbildung wird zu einem realen mechanischen System ein abstrahiertes Abbild geschaffen, um die bei diesen Systemen auftretenden physikalischen Phänomene mathematisch beschreiben und so sein Verhalten prognostizieren zu können. Dies geschieht in einem für die jeweils vorliegende Aufgabe ausreichend detaillierten Maß, so dass nach dem ökonomischen Prinzip „*so wenig wie möglich, so viel wie nötig*“ die im Fokus stehenden Effekte mit minimal notwendigem Aufwand vollständig erfasst werden. Das Modell als Abstraktion der Realität muss also nicht exakt, sondern nur hinreichend genau sein. Bei einer übermäßigen Detaillierungstiefe des Modells wird dessen numerische Handhabung unnötig erhöht und die Modelltransparenz verschlechtert, ohne dass sich die Erkenntnis in das Systemverhalten erhöht. Durch Intuition und Erfahrung kann die Anzahl der Schritte des iterativen Prozesses zum Auffinden der optimalen Modelltiefe minimiert werden. Die Modellbildung muss skalierbar erfolgen, so dass sich eine Änderung der Parameter des zu beschreibenden Systems nicht auf die hinreichend genaue Prognostizierbarkeit auswirkt. Einen Einblick in die allgemeine Thematik der Modellbildung bietet [157].

2.1 Starrkörpermodell

Roboterstrukturen sind im Allgemeinen sehr steif ausgeführt. Dies gilt auch für den in dieser Arbeit behandelten mobilen Roboter. Die eigendynamischen Schwingungsvorgänge spielen sich im höheren Frequenzbereich ab und seien für diese Arbeit nicht von Interesse. Es ist somit zulässig, gemäß den obigen Ausführungen zur Modellbildung des Roboters vereinfachend einen Starrkörperansatz zu wählen, mit dem jegliche statischen und dynamischen Verformungen der Struktur vernachlässigt und so die Anzahl der zur Beschreibung des Systemzustands benötigten Systemfreiheitsgrade minimiert werden. Die Kopplungen der Starrkörper des Systems durch Gelenke werden dabei als zweiseitige Bindungen zwischen den einzelnen Starrkörpern erfasst.

Eine zentrale Rolle bei der mathematischen Behandlung von Starrkörpersystemen nehmen die Jacobimatrizen ein, die nachfolgend dargestellt werden. Anschließend folgt die mathematisch-mechanische Beschreibung der Systemdynamik mittels der Bewegungsdifferentialgleichungen für das gekoppelte System starrer Körper, die der späteren Einführung der einseitigen Bindungen zur Beschreibung der Kontaktmechanik den Weg ebnet.

Die durch einseitige Kontakte charakterisierte Anbindung des behandelten mobilen Roboters an die Umgebung wird in Abschnitt 2.3 mit Methoden der nichtglatten Me-

chanik modelliert, die zugehörigen Kontaktpunkte werden dabei unter Verzicht auf eine Modellierung der lokalen Kontaktnachgiebigkeiten und Entfall der zugehörigen lokalen Freiheitsgrade als einseitige Bindungen erfasst.

2.1.1 Jacobimatrizen

Nach mathematisch-allgemeiner Definition ist die Jacobimatrix \mathbf{J} die Matrix der partiellen Ableitungen aller skalaren Teilfunktionen y_a , $a \in [1 \dots n_y]$, einer vektoriellen Funktion $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n_y}$ nach allen Elementen x_b des Argumentenvektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ [102]:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \text{col}_{b=1}^{n_x} \left\langle \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_b} \right\rangle = \begin{bmatrix} \partial y_1 / \partial x_1 & \cdots & \partial y_1 / \partial x_{n_x} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial y_{n_y} / \partial x_1 & \cdots & \partial y_{n_y} / \partial x_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x} \quad (2.1)$$

In der Mechanik beschreibt sie den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ der f_S generalisierten Geschwindigkeiten eines Mehrkörpersystems und der translatorischen Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_P$ eines Körperpunkts P sowie der Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ des zugehörigen Teilkörpers des Mehrkörpersystems:

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_P}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{i}}_{P,tr} = \mathbf{J}_{P,tr} \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{i}}_{P,tr}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{i}}_{P,ro} = \mathbf{J}_{P,ro} \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{i}}_{P,ro} \quad (2.2)$$

$\mathbf{J}_{P,tr} \in \mathbb{R}^{3 \times f_S}$ bzw. $\mathbf{J}_{P,ro} \in \mathbb{R}^{3 \times f_S}$ werden als Jacobimatrizen der Translation im Punkt P bzw. der Rotation des Körpers, dem P zugeordnet ist, bezeichnet. Sie geben die freien, d.h. mit den Systembindungen verträglichen Bewegungsrichtungen des Punkts P an und sind von den generalisierten Koordinaten \mathbf{q} abhängig, welche die aktuelle Konfiguration des Systems beschreiben. In dieser Arbeit werden skleronome Systembindungen vorausgesetzt, vgl. [125], so dass die Führungsgeschwindigkeiten in Gleichung (2.2) entfallen, $\hat{\mathbf{i}}_{P,tr} = \hat{\mathbf{i}}_{P,ro} = \mathbf{0}$. Mit der Gesamtjacobimatrix \mathbf{J}_P werden die translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten gemeinsam erfasst:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_P \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P,tr}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_{P,ro}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times f_S} \quad (2.3)$$

Aus Gleichung (2.3) folgt für die auf den Punkt P bezogenen Beschleunigungen eine Abhängigkeit von den generalisierten Geschwindigkeiten und -beschleunigungen:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_P \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{J}}_P(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{P,tr} \\ \dot{\mathbf{J}}_{P,ro} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P,tr} \\ \mathbf{J}_{P,ro} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.4)$$

Sind die Jacobimatrizen des Punkts P bekannt, können über die Starrkörperformel

$$\dot{\mathbf{r}}_Q = \dot{\mathbf{r}}_P + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}_{PQ} = \dot{\mathbf{r}}_P - \tilde{\mathbf{r}}_{PQ} \boldsymbol{\omega} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_Q \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & -\tilde{\mathbf{r}}_{PQ} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_P \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

durch Einsetzen von Gleichung (2.3) die Jacobimatrizen eines Punkts Q des gleichen Körpers, und daraus deren Zeitableitung, aufgestellt werden [62]:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_Q \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & -\tilde{\mathbf{r}}_{PQ} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P,tr} \\ \mathbf{J}_{P,ro} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \stackrel{!}{=} \mathbf{J}_Q \dot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Q,tr} \\ \mathbf{J}_{Q,ro} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P,tr} - \tilde{\mathbf{r}}_{PQ} \mathbf{J}_{P,ro} \\ \mathbf{J}_{P,ro} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\dot{\mathbf{J}}_Q = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{Q,tr} \\ \dot{\mathbf{J}}_{Q,ro} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_{P,tr} - \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_{PQ} \mathbf{J}_{P,ro} - \tilde{\mathbf{r}}_{PQ} \dot{\mathbf{J}}_{P,ro} \\ \dot{\mathbf{J}}_{P,ro} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Die Jacobimatrizen spielen bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen eine zentrale Rolle. Sie projizieren den Impuls- und Drallsatz eines jeden Körpers in den Raum der generalisierten Koordinaten. Dabei werden die zweiseitigen Bindungskräfte aus der Kräfte- und Momentenbilanz eliminiert, was eine kompakte Formulierung der Systemdynamik mit den generalisierten Koordinaten ermöglicht. Des Weiteren finden sie Anwendung bei der Beschreibung des kinematischen Zustands einzelner Punkte eines Systems, im Speziellen bei der Analyse der Kontaktgrößen an einseitigen Bindungen sowie der Beschreibung der Kinematik eines Robotergreifers.

Bei Systemen mit Baumstruktur, wie sie auch in dieser Arbeit betrachtet werden, lassen sich die Jacobimatrizen für den Punkt P_i eines Körpers i rekursiv aus den Jacobimatrizen bzgl. des Punkts S_h des Vorgängerkörpers $h = i - 1$ herleiten. Ausgehend von der inertialen Basis des Baumsystems werden hierbei sukzessiv die Jacobimatrizen der einzelnen Relativverdrehungen und -verschiebungen aufsummiert. Es gilt [133]

- für rein translatorische Gelenke:

$$\begin{aligned} {}_i \mathbf{J}_{P_i,ro} &= \mathbf{A}_{i,h} {}_h \mathbf{J}_{S_h,ro} \quad , \\ {}_i \mathbf{J}_{P_i,tr} &= \mathbf{A}_{i,h} {}_h \mathbf{J}_{S_h,tr} - \left(\mathbf{A}_{i,h} {}_h \mathbf{r}_{SQ,h} + {}_i \mathbf{r}_{QP,i} \right) \tilde{\phantom{\mathbf{J}}} \quad {}_i \mathbf{J}_{P_i,ro} + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ({}_i \dot{\mathbf{r}}_{QP,i}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

- für rein rotatorische Gelenke (wie in dieser Arbeit ausschließlich betrachtet):

$$\begin{aligned} {}_i \mathbf{J}_{P_i,ro} &= \mathbf{A}_{i,h} {}_h \mathbf{J}_{S_h,ro} + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ({}_i \boldsymbol{\omega}_{h,i}) \quad , \\ {}_i \mathbf{J}_{P_i,tr} &= \mathbf{A}_{i,h} \left({}_h \mathbf{J}_{S_h,tr} - {}_h \tilde{\mathbf{r}}_{SQ,h} {}_h \mathbf{J}_{S_h,ro} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} ({}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}_i \mathbf{r}_{QP,i}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dabei ist Q der Gelenkpunkt zwischen den Körpern und $\mathbf{A}_{i,h}$ die Drehtransformationmatrix vom h - ins i -System. Die Rücktransformation wird durch die Inverse realisiert, die der Transponierten entspricht:

$$\mathbf{A}_{h,i} = (\mathbf{A}_{i,h})^{-1} = \mathbf{A}_{i,h}^T \quad (2.10)$$

Die Vektoren \mathbf{r}_{SQ} und \mathbf{r}_{QP} sowie die Relativwinkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{h,i}$ werden in Abschnitt 2.2 beschrieben. Die Jacobimatrizen der Rotation und Translation des Greiferpunkts G am letzten der n_K Körper eines Roboters mit Baumstruktur lassen sich dann aus Gleichung (2.9) direkt, d.h. nichtrekursiv herleiten,

$$\begin{aligned} {}_G \mathbf{J}_{G,ro} &= \sum_{i=1}^{n_K-1} \left\{ \left(\prod_{k=i}^{n_K-1} \mathbf{A}_{k,k+1} \right)^T \frac{\partial {}_i \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\} + \frac{\partial {}_{n_K} \boldsymbol{\omega}_{n_K-1,n_K}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad , \\ {}_G \mathbf{J}_{G,tr} &= - \sum_{i=1}^{n_K-1} \left\{ \left(\prod_{k=i}^{n_K-1} \mathbf{A}_{k,k+1} \right)^T {}_i \tilde{\mathbf{r}}_{QQ,i} \frac{\partial {}_i \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\} - {}_{n_K} \tilde{\mathbf{r}}_{QG} \frac{\partial {}_{n_K} \boldsymbol{\omega}_{n_K}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

mit ${}_G\mathbf{J}_{G,ro/tr} \in \mathbb{R}^{3 \times f_S}$, wobei für den letzten Körper ${}_n\tilde{\mathbf{r}}_{QQ,n} = {}_n\tilde{\mathbf{r}}_{QG}$ gilt. Zur Definition von \mathbf{r}_{QQ} und \mathbf{r}_{QG} siehe ebenfalls Abschnitt 2.2.

2.1.2 Bewegungsdifferentialgleichungen

Bild 2.1 zeigt ein System aus n starren, massebehafteten, mit zweiseitigen Bindungen beliebig gekoppelten Körpern mit ein- und zweiseitigen Bindungen zur starren Umgebung, jedoch ohne einseitige Bindungen zwischen den Körpern. Das System befindet sich im konstanten Schwerfeld mit dem Gravitationsvektor \mathbf{g} . Sämtliche einseitigen Bindungen des Systems seien im betrachteten Zeitpunkt geschlossen. Die jeweiligen Kontaktpunkte zur Umgebung seien körperfest, der Fall des Wanderns eines Kontaktpunkts entlang der Körperoberfläche infolge eines Abrollens sei ausgeschlossen und wird nicht betrachtet. Eine detaillierte und umfassende Darstellung der Mechanik von Kontakten in Starrkörpersystemen geben z.B. [62] [105] [121], die folgenden Darstellungen beschränken sich auf den für diese Arbeit notwendigen Umfang.

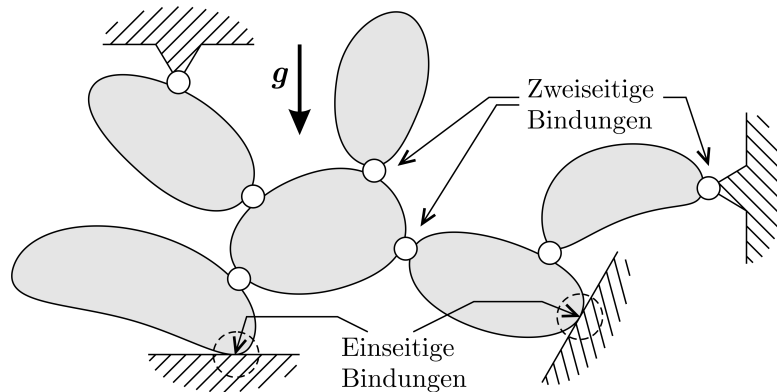


Bild 2.1: Starres Mehrkörpersystem mit ein- und zweiseitigen Bindungen

Die Kräfte $d\mathbf{f}_P$, die auf ein infinitesimales Massenelement dm am Punkt P eines Körpers des Systems wirken, lassen sich aufteilen in eingeprägte Kräfte $d\mathbf{f}_{P_e}$ und Zwangskräfte $d\mathbf{f}_{P_z}$, so dass $d\mathbf{f}_P = d\mathbf{f}_{P_e} + d\mathbf{f}_{P_z}$ [125]. Die Bewegungsgleichungen für das System lassen sich dann nach dem Prinzip von D’ALEMBERT [37] in der Fassung von LAGRANGE herleiten, wonach die im System auftretenden Zwangskräfte keinen Beitrag zur virtuellen Arbeit δW des Systems leisten und somit die virtuellen Arbeiten der Massenbeschleunigungen und der eingeprägten Kräfte über das gesamte System einander aufheben [69] [164]:

$$\delta W = \int_{System} \delta \mathbf{r}_P^T (\ddot{\mathbf{r}}_P dm - d\mathbf{f}_{P_e}) = 0 \quad (2.12)$$

Dabei ist \mathbf{r}_P der Ortsvektor im inertialen Koordinatensystem zum Massenelement dm und $\delta \mathbf{r}_P$ der Vektor der mit den Bindungen des Systems verträglichen infinitesimalen virtuellen Verschiebung. Letzterer kann mit der Jacobimatrix der Translation $\mathbf{J}_{P,tr}$ des Punkts P durch die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{q}$ der Minimalkoordinaten \mathbf{q} des Systems dargestellt werden:

$$\delta \mathbf{r}_P = \mathbf{J}_{P,tr} \delta \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{r}_P^T = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{J}_{P,tr}^T \quad (2.13)$$

Mit dem Relativvektor \mathbf{r}_{SP} vom Schwerpunkt S des jeweiligen Körpers zum Bezugspunkt P sowie den Schwerpunkt-Jacobimatrizen gilt nach Gleichung (2.6):

$$\mathbf{J}_{P,tr}^T = (\mathbf{J}_{S,tr} - \tilde{\mathbf{r}}_{SP} \mathbf{J}_{S,ro})^T = \mathbf{J}_{S,tr}^T + \mathbf{J}_{S,ro}^T \tilde{\mathbf{r}}_{SP} \quad (2.14)$$

Setzt man Gleichung (2.14) in Gleichung (2.13), daraufhin diese sowie die nach der Zeit abgeleitete Starrkörperformel $\ddot{\mathbf{r}}_P = \ddot{\mathbf{r}}_S + (\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{r}_{SP}$ in Gleichung (2.12) ein, und separiert das Gesamtintegral nach den n_K Körpern K_i des Systems, erhält man:

$$\delta \mathbf{q}^T \sum_{i=1}^{n_K} \left(\left\langle \int_{K_i} (\mathbf{J}_{S,tr}^T + \mathbf{J}_{S,ro}^T \tilde{\mathbf{r}}_{SP}) \left(\ddot{\mathbf{r}}_S + (\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \mathbf{r}_{SP} \right) dm - d\mathbf{f}_{Pe} \right\rangle_i \right) = 0 \quad (2.15)$$

Mit den wohlbekannten Starrkörperintegralen

$$\begin{aligned} \int_{K_i} dm &= m_i \quad , \quad - \int_{K_i} \tilde{\mathbf{r}}_{SP} \tilde{\mathbf{r}}_{SP} dm = \boldsymbol{\Theta}_i \quad , \quad \int_{K_i} \mathbf{r}_{SP} dm = 0 \quad , \\ \int_{K_i} d\mathbf{f}_{Pe} &= \mathbf{F}_{e,i} \quad , \quad \int_{K_i} \tilde{\mathbf{r}}_{SP} d\mathbf{f}_{Pe} = \mathbf{M}_{e,i} \end{aligned} \quad (2.16)$$

folgt für die Integrale in Gleichung (2.15):

$$\begin{aligned} \int_{K_i} \mathbf{J}_{S,tr}^T (\dots) &= \left\langle \mathbf{J}_{S,tr}^T (\ddot{\mathbf{r}}_S m - \mathbf{F}_e) \right\rangle_i \quad , \\ \int_{K_i} \mathbf{J}_{S,ro}^T \tilde{\mathbf{r}}_{SP} (\dots) &= \left\langle \mathbf{J}_{S,ro}^T (\boldsymbol{\Theta} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{M}_e) \right\rangle_i \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dabei ist m_i die Masse des i -ten der n_K Körper, $\boldsymbol{\Theta}_i$ der auf den Schwerpunkt dieses Körpers bezogene Trägheitstensor sowie $\mathbf{F}_{e,i}$ und $\mathbf{M}_{e,i}$ die auf den Schwerpunkt reduzierten eingepprägten Kräfte und Momente. Aus Gleichung (2.15) folgt unter Verwendung der Matrix-Vektor-Schreibweise:

$$\delta \mathbf{q}^T \sum_{i=1}^{n_K} \left(\left\langle \mathbf{J}_S^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_S \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{M}_e \end{pmatrix} \right) \right\rangle_i \right) = 0 \quad (2.18)$$

Die eingepprägten Kräfte $\mathbf{F}_{e,i}$ enthalten die Gewichtskraft $\mathbf{F}_{g,i} = m_i \mathbf{g}$, gegebenenfalls eine von außen auf den Körper wirkende Prozesskraft $\mathbf{F}_{P,i}$ sowie die Kontaktkräfte. Die eingepprägten Momente $\mathbf{M}_{e,i}$ umfassen die durch die eingepprägten Kräfte über die jeweiligen Hebelvektoren verursachten Momente, gegebenenfalls ein äußeres Prozessmoment $\mathbf{M}_{P,i}$ sowie die Summe der auf den i -ten Körper wirkenden Motormomente $\mathbf{M}_{\tau,i}$. Am k -ten von $n_{P,i}$ Kontaktpunkten dieses Körpers mit der Umgebung wirkt die Kontaktkraft $\mathbf{K}_{i,k}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{e,i} &= m_i \mathbf{g} + \mathbf{F}_{P,i} + \sum_{k=1}^{n_{P,i}} \mathbf{K}_{i,k} \quad , \\ \mathbf{M}_{e,i} &= \tilde{\mathbf{r}}_{SP,i} \mathbf{F}_{P,i} + \sum_{k=1}^{n_{P,i}} \left(\tilde{\mathbf{r}}_{SK,i,k} \mathbf{K}_{i,k} \right) + \mathbf{M}_{P,i} + \mathbf{M}_{\tau,i} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die virtuellen Verschiebungen der generalisierten Koordinaten $\delta \mathbf{q}$ unterliegen keinerlei Einschränkungen durch Bindungen, somit ist Gleichung (2.18) nur dann erfüllt, wenn der Summenterm verschwindet. Die skalare Arbeitsgleichung geht über in eine vektorielle Kraft-Momenten-Gleichung, die die Projektion des für jeden der n_K Körper formulierten Impuls- und Drallsatzes über die Jacobimatrizen in den Raum der generalisierten Koordinaten beschreibt. Mit der Zeitableitung von Gleichung (2.3),

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_{S,i} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{S,i} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_{S,i} \dot{\mathbf{q}} \quad , \quad (2.20)$$

$$\text{folgt:} \quad \sum_{i=1}^{n_K} \left\langle \mathbf{J}_S^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix} (\mathbf{J}_S \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_S \dot{\mathbf{q}}) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{M}_e \end{pmatrix} \right) \right\rangle_i = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

Wertet man Gleichung (2.21) im jeweils körperfesten Koordinatensystem unter Ausnutzung der dann gegebenen Konstanz der Trägheitsmatrizen $\boldsymbol{\Theta}_i$ aus, erhält man für die f_S generalisierten Koordinaten \mathbf{q} die nichtlineare, vektorielle Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{W}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{W}_\lambda \boldsymbol{\lambda}^\perp \quad , \quad (2.22)$$

deren Komponenten nachfolgend erläutert werden. Die Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n_K} \left(\mathbf{J}_{S,i}^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 m_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Theta}_i \end{bmatrix} \mathbf{J}_{S,i} \right) \in \mathbb{R}^{f_S \times f_S} \quad (2.23)$$

ist symmetrisch; der Vektor $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ fasst die Gravitationskraft, die Prozesskräfte und -momente sowie die gyroskopischen Anteile zusammen:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{n_K} \left\langle \mathbf{J}_S^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{J}}_S \dot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \mathbf{g} + \mathbf{F}_P \\ \tilde{\mathbf{r}}_{SP} \mathbf{F}_P + \mathbf{M}_P \end{pmatrix} \right) \right\rangle_i \quad (2.24)$$

Das j -te von $n_{\tau,i}$ am i -ten Körper wirkenden vektoriellen Motormomenten wird über die in Richtung der Motorachsen zeigenden Einheitsvektoren $\mathbf{e}_{i,j}^M$ mit skalaren Motormomenten $\tau_{i,j}$ parametrisiert, so dass für die Summe $\mathbf{M}_{\tau,i}$ aus Gleichung (2.19) gilt:

$$\mathbf{M}_{\tau,i} = \sum_{j=1}^{n_{\tau,i}} (\mathbf{e}_{i,j}^M \tau_{i,j}) \quad . \quad (2.25)$$

Es wird dabei von starren Getrieben zwischen den Gelenkmotorenläufern und den starren Körpern des Systems ausgegangen, so dass sich an den Gelenken keine zusätzlichen inneren Freiheitsgrade ergeben, vgl. [28].

Sämtliche skalaren Motormomente $\tau_{i,j}$ des Systems werden zum Vektor $\boldsymbol{\tau}$ zusammengefasst und in Gleichung (2.22) mit der Projektionsmatrix \mathbf{W}_τ in den Raum der generalisierten Koordinaten projiziert, wobei gilt:

$$\mathbf{W}_\tau = \text{row}_{i=1}^{n_K} \left\langle \mathbf{J}_{S,i,ro}^T \left(\text{row}_{j=1}^{n_{\tau,i}} \langle \mathbf{e}_{i,j}^M \rangle \right) \right\rangle \quad , \quad \boldsymbol{\tau} = \text{col}_{i=1}^{n_K} \left\langle \text{col}_{j=1}^{n_{\tau,i}} \langle \tau_{i,j} \rangle \right\rangle \quad (2.26)$$

Die einzelnen Kontaktkräfte $\mathbf{K}_{i,k}$ werden mit den orthogonalen und basisfesten Einheitsvektoren $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$, die in die normale und die beiden tangentialen Richtungen der Kontaktebene des jeweiligen Kontaktpunkts zeigen und zur Matrix $\mathbf{N}_{i,k}$ zusammengefasst sind, sowie durch zugeordnete skalare Kraftkoeffizienten λ beschrieben:

$$\mathbf{K}_{i,k} = \left\langle \mathbf{n} \lambda_n + \mathbf{t}_1 \lambda_{t_1} + \mathbf{t}_2 \lambda_{t_2} \right\rangle_{i,k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_{i,k} & \mathbf{t}_{1,i,k} & \mathbf{t}_{2,i,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_{i,k}} \begin{pmatrix} \lambda_{n,i,k} \\ \lambda_{t_1,i,k} \\ \lambda_{t_2,i,k} \end{pmatrix} = \mathbf{N}_{i,k} \boldsymbol{\lambda}_{i,k}^\perp \quad (2.27)$$

Der hochgestellte Index „ \perp “ zeigt hier und im Folgenden die Orthogonalität der mit den betreffenden Kontaktgrößen gewichteten Einheitsvektoren an und dient zur Unterscheidung gegenüber solchen Kraftkoeffizienten, die mit nichtorthogonalen Einheitsvektoren einhergehen und im weiteren Lauf dieser Arbeit eine entscheidende Rolle spielen werden. Alle Kraftkoeffizienten des Gesamtsystems werden zum Kraftkoeffizientenvektor $\boldsymbol{\lambda}^\perp$ zusammengefasst, welcher in Gleichung (2.22) mittels der Projektionsmatrix \mathbf{W}_λ in den Raum der generalisierten Koordinaten projiziert wird.

$$\mathbf{W}_\lambda = \text{row}_{i=1}^{n_K} \left\langle \mathbf{J}_{S,i}^\top \left(\text{row}_{k=1}^{n_{P,i}} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 \\ \tilde{\mathbf{r}}_{SK,i,k} \end{bmatrix} \mathbf{N}_{i,k} \right\rangle \right) \right\rangle, \quad \boldsymbol{\lambda}^\perp = \text{col}_{i=1}^{n_K} \left\langle \text{col}_{k=1}^{n_{P,i}} \left\langle \boldsymbol{\lambda}_{i,k}^\perp \right\rangle \right\rangle \quad (2.28)$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Bindungskräfte aus den einseitigen Bindungen bis hier provisorisch als eingeprägte Kräfte betrachtet wurden, die in Form der Kontaktkräfte $\mathbf{K}_{i,k}$ an ungebundenen Kraftangriffspunkten auf das System einwirken. Das Modell enthält formal somit zunächst nur zweiseitige Bindungen; die Mechanik der einseitigen Bindungen ist noch nicht vollständig erfasst. Die zugehörigen Kontaktpunkte sind im Rahmen der Verträglichkeit mit den generalisierten Koordinaten frei beweglich, was durchaus noch ein Eindringen der die einseitigen Bindungen enthaltenden starren Körper in die Umgebung erlaubt.

Die obige Herleitung auf Basis des Prinzips von D’ALEMBERT dient als Grundlage für die noch folgende Ortsdiskretisierung. Die Bewegung der Kontaktpunkte wird dann durch Einführung mengenwertiger Kraftgesetze für die Kontaktkräfte eingeschränkt. Auf die Details der Kraftgesetze wird in den Abschnitten 2.3 und 2.4 eingegangen.

2.2 Spezialfall serielles System

2.2.1 Zweiteilung in Arm und Basis

Im Rahmen dieser Arbeit soll die Betrachtung auf Systeme mit folgenden Eigenschaften eingeschränkt werden:

- Eine signifikant große Gruppe der Körper des Systems bildet eine serielle Struktur und wird im Folgenden als *Arm* bezeichnet. Jeder Körper des Arms ist an zwei andere Körper gekoppelt. Als Ausnahme weist der letzte, äußere Körper des Arms nur einen benachbarten Körper auf und wird als *Greifer* bezeichnet. Weder

am Greifer noch an den restlichen Körpern des Arms liegen einseitige Bindungen mit der Umgebung vor. Auf den Greifer durch Manipulation mit der Umgebung wirkende Kräfte fließen somit als eingeprägte Kräfte in die Systemdynamik ein. Die f_A Gelenkwinkel φ_i des Arms bilden eine Teilmenge der f_S generalisierten Koordinaten des Gesamtsystems und werden als generalisierte Koordinaten des Arms bezeichnet:

$$\mathbf{q}_A = \text{col}_{i=1}^{f_A} \langle \varphi_i \rangle = \boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^{f_A} \quad , \quad f_A < f_S \quad (2.29)$$

- Die nicht zum Arm gehörenden Körper des Systems bilden die *Basis*. Dort, und entsprechend dem obigen ersten Punkt nur dort, liegen einseitige, jedoch keine zweiseitigen Bindungen mit der Umgebung vor.
- Der Betrieb des Arms erfolgt in Abhängigkeit von der Basis: Ist der Arm in Bewegung, sind alle Gelenke innerhalb der Basis, z.B. durch Bremsen, starr gesperrt. Die Basis kann dann als einzelner zusammenhängender Starrkörper betrachtet werden. Das System verfügt somit über 6 zusätzliche generalisierte Koordinaten $\mathbf{q}_B \in \mathbb{R}^6$, die die kartesische Position und Orientierung der intern gesperrten Basis beschreiben, und es gilt:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{f_S} \quad , \quad f_S = f_A + 6 \quad (2.30)$$

In Bild 2.2a) ist ein den getroffenen Einschränkungen entsprechendes abstrahiertes System dargestellt. Man erkennt einen seriellen Knickarmroboter wieder, der auf einer mobilen Basis angebracht ist.

Zur Vereinfachung des programmiertechnischen Aufwands sowie zur Steigerung der Transparenz des Systemverhaltens bei der numerischen Untersuchung hat es sich als vorteilhaft erwiesen, das System entsprechend der Unterteilung in Arm und Basis in zwei Teilsysteme durch Freischneiden aufzutrennen. Am Kopplungspunkt Q_1 , der mit dem ersten Gelenk des Arms zusammenfällt, werden die vom Arm auf die Basis wir-

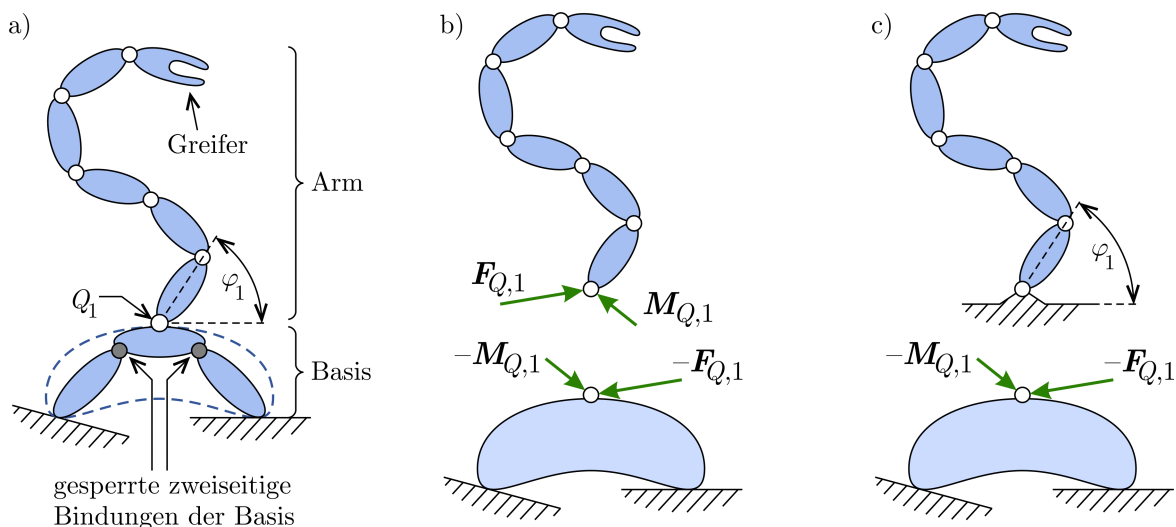


Bild 2.2: Abstrahierter Roboterarm auf einseitig gebundener Basis

kenden Schnittkräfte und -momente als eingeprägte Kräfte und Moment in die beiden Teilsysteme eingebracht, vgl. Bild 2.2b).

Wenn nun die Basis unbeschleunigt ruht, können der Kopplungspunkt Q_1 und der erste Armgelenkfreiheitsgrad φ_1 als inertial fest betrachtet werden, so dass entsprechend Bild 2.2c) der Arm als ein über eine gewöhnliche zweiseitige Bindung am Punkt Q_1 an die Umgebung gebundenes System interpretiert werden kann. Für beide Teilsysteme lässt sich dann analog zu Gleichung (2.22) eine eigene Bewegungsdifferentialgleichung angeben, wobei der Arm (Index A) mangels einseitiger Bindungen über keine Kontaktkräfte, die als einzelner Starrkörper betrachtete Basis (Index B) hingegen mangels Gelenke über keine Motormomente verfügt:

$$\mathbf{M}_A \ddot{\mathbf{q}}_A + \mathbf{h}_A = \mathbf{W}_\tau \boldsymbol{\tau} \quad , \quad \mathbf{M}_B \ddot{\mathbf{q}}_B + \mathbf{h}_B = \mathbf{W}_\lambda \boldsymbol{\lambda}^\perp \quad (2.31)$$

Das Fortbestehen des Status der geschlossenen einseitigen Bindungen der Basis, im Folgenden als Bindungspersistenz bezeichnet, ist somit fundamentale Voraussetzung für die Gültigkeit aller folgenden Betrachtungen in dieser Arbeit. Zu keinem Zeitpunkt darf der Arm Kräfte oder Momente auf die Basis ausüben, die deren einseitige Bindungen öffnen und so ein Losgleiten oder eine Separation an einer der einseitigen Bindungen verursachen. Entscheidend ist also, dass der Arm über die Kopplungskräfte und -momente Einfluss auf den Bindungszustand der Basis und somit auf die Zulässigkeit der Zweiteilung des Modells nimmt. Diese Forderung auf der Ebene der Gültigkeit des Modells deckt sich mit dem ohnehin für diese Arbeit formulierten Ziel, ein Kippen oder Wegrutschen eines mobilen Roboters zu verhindern.

Dieser gewählte Ansatz der Separation zwischen Arm und Basis wäre natürlich unzulässig, wenn das Systemverhalten nach einem eventuellen Wechsel des Bindungszustands der Basis von Interesse wäre. Dann beeinflussten sich der Arm und die Basis gegenseitig in ihrer Dynamik, so dass die vektorielle Bewegungsgleichung (2.22) für das zusammenhängende, gesamte Modell zu berücksichtigen wäre. In dieser Arbeit geht es jedoch darum, zu analysieren, ob überhaupt ein Bindungswechsel an der Basis auftritt. Ist dies der Fall, spielt der genau Wert der Beschleunigung der Basis direkt nach dem Bindungswechsel keine Rolle: Der mobile Roboter kippt oder gleitet auf jeden Fall weg. Solange jedoch kein Bindungswechsel an der Basis vorliegt, ist es zulässig, statt des gekoppelten Gesamtsystems nur das entkoppelte Basis-Teilsystem mit eingepägten Kräften und Momenten zur Untersuchung der Auswirkungen der Armdynamik zu nutzen.

Für eine Analyse des Bindungsverhaltens der einseitig gebundenen Basis ist dann die Kenntnis der am Kopplungspunkt Q_1 als eingepägte Kräfte auf die Basis wirkenden Kopplungskräfte $\mathbf{F}_{Q,1}$ und -momente $\mathbf{M}_{Q,1}$ notwendig. Als Zwangskräfte des Roboterarms werden diese jedoch nicht durch die vorangegangene, auf dem Prinzip von D'ALEMBERT basierenden Herleitung in Abschnitt 2.1.2 erfasst. Daher führt alternativ im Folgenden die Kinematik der Körper des seriellen Roboterarms zum Impuls- und Drallsatz, welche die sukzessive Bestimmung der gesuchten kinetischen Kopplungsgrößen ermöglichen. Diese Aufgabe ist nicht mit dem inversen Problem der Dynamik zu verwechseln, wo für die bekannte Bewegung des Roboters die notwendigen Gelenkmomente bestimmt werden. Vielmehr werden im vorliegenden Fall auch die zu den

Achsen und somit zu den Gelenkmomenten orthogonalen Anteile der Kopplungsmomente zwischen den Körpern gesucht.

2.2.2 Kinematik

Für die Analyse der Kinetik des Arms sind zunächst die kinematischen Größen, also die translatorischen und rotatorischen Lagen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Körper mit Hilfe der generalisierten Koordinaten, hier die Gelenkwinkel φ_i , zu bestimmen. Dies geschieht unter Ausnutzung der Baumstruktur in rekursiver Weise, so dass die auf den Schwerpunkt bezogenen kinematischen Größen eines Körpers i aus denen seines Vorgängerkörpers $h=i-1$ berechnet werden [123]. Im Folgenden wird dabei die instanzierte, d.h. koordinatenbehaftete Schreibweise verwendet, was der programmtechnischen Umsetzung der Zusammenhänge entgegen kommt.

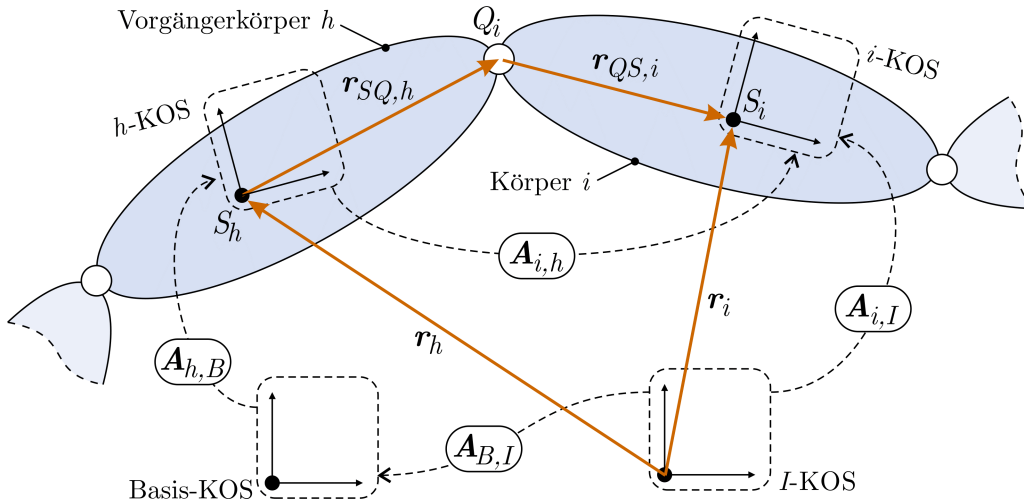


Bild 2.3: Relativkinematik zwischen zwei Körpern des Roboterarms

Gemäß Bild 2.3 werden die Lage und die Orientierung des i -ten Körpers gegenüber dem inertialen I -System, ausgedrückt durch den Ortsvektor r_i zum Körperschwerpunkt S_i sowie die Orientierungsmatrix $A_{i,I}$, rekursiv aus den entsprechenden Größen r_h bzw. $A_{h,I}$ des vorangehenden h -ten Körpers hergeleitet,

$${}_i r_i = A_{i,h} {}_h r_h + A_{i,h} {}_h r_{SQ,h} + {}_i r_{QS,i} \quad , \quad A_{i,I} = A_{i,h} A_{h,I} \quad , \quad i=h+1 \quad , \quad (2.32)$$

wobei die Gelenkwinkel φ_i die Transformationsmatrizen $A_{i,h}(\varphi_i)$ bestimmen. Der Vektor $r_{SQ,h}$ zeigt vom Schwerpunkt S_h des h -ten Körpers zum Kopplungspunkt Q_i mit dem folgenden i -ten Körper, der Vektor $r_{QS,i}$ dementsprechend von Q_i zum Schwerpunkt S_i des i -ten Körpers. Die sukzessive Bestimmung der Ortsvektoren und Orientierungsmatrizen aller Körper des Arms mittels Gleichung (2.32) wird als Vorwärtskinematik des Roboterarms bezeichnet.

Die Rekursionsgleichung (2.32) wird initialisiert durch die nur vom Gelenkwinkel φ_1 bestimmte Transformationsmatrix $A_{1,I}$ vom Inertialsystem über das Basis-System zum körperfesten Koordinatensystem des ersten Körpers sowie durch den von $A_{1,I}$

abhängigen Vektor \mathbf{r}_1 vom Ursprung des Inertialsystems zum Schwerpunkt des ersten Körpers:

$${}_1\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}_{1,I} {}_I\mathbf{r}_B + \mathbf{A}_{1,B}(\varphi_1) {}_B\mathbf{r}_{BQ_1} + {}_1\mathbf{r}_{QS,1} \quad , \quad \mathbf{A}_{1,I} = \mathbf{A}_{1,B}(\varphi_1) \mathbf{A}_{B,I} \quad (2.33)$$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{A}_{B,I}$ vom Inertial- zum Basis-System, der Vektor \mathbf{r}_B vom Ursprung des Inertialsystems zum Schwerpunkt S_B der Basis sowie der Vektor \mathbf{r}_{BQ_1} von S_B weiter zum Kopplungspunkt Q_1 der Basis mit dem ersten Körper des Roboterarms sind bei geschlossenen Bindungen der Basis konstant und bekannt.

Unter Berücksichtigung der Differentiationsregel nach Euler,

$$\begin{aligned} {}_i(\dot{\mathbf{r}}_i) &= ({}_i\mathbf{r}_i)' + {}_i\boldsymbol{\omega}_i \times {}_i\mathbf{r}_i = {}_i\dot{\mathbf{r}}_i + {}_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}_i\mathbf{r}_i \\ {}_i(\dot{\boldsymbol{\omega}}_i) &= ({}_i\boldsymbol{\omega}_i)' + {}_i\boldsymbol{\omega}_i \times {}_i\boldsymbol{\omega}_i = {}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \quad \text{mit} \quad {}_i\boldsymbol{\omega}_i \times {}_i\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{0} \quad , \end{aligned} \quad (2.34)$$

sowie der bei Drehgelenken gegebenen zeitlichen Konstanz der in den jeweiligen Körperkoordinaten instanziierten Relativvektoren, ${}_h\dot{\mathbf{r}}_{SQ,h} = \mathbf{0}$ und ${}_i\dot{\mathbf{r}}_{QS,i} = \mathbf{0}$, lassen sich mit Gleichung (2.32) die Schwerpunktgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_i$ sowie -beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_i$ des i -ten Körpers mit den entsprechenden Größen des Vorgängerkörpers h angeben:

$$\begin{aligned} {}_i(\dot{\mathbf{r}}_i) &= \mathbf{A}_{i,h} {}_h(\dot{\mathbf{r}}_h) + \mathbf{A}_{i,h} {}_h\tilde{\boldsymbol{\omega}}_h {}_h\mathbf{r}_{SQ,h} + {}_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}_i\mathbf{r}_{QS,i} \quad , \\ {}_i(\ddot{\mathbf{r}}_i) &= \mathbf{A}_{i,h} {}_h(\ddot{\mathbf{r}}_h) + \left(\dot{\mathbf{A}}_{i,h} + 2 {}_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{A}_{i,h} \right) {}_h\mathbf{r}_{SQ,h} + \left({}_i\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_i + {}_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \right) \left(\mathbf{A}_{i,h} {}_h\mathbf{r}_{SQ,h} + {}_i\mathbf{r}_{QS,i} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Für die rotatorische Geschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_i$ und Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ des i -ten Körpers gilt:

$${}_i\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{A}_{i,h} {}_h\boldsymbol{\omega}_h + {}_i\boldsymbol{\omega}_{h,i} \quad , \quad {}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\mathbf{A}}_{i,h} {}_h\boldsymbol{\omega}_h + \mathbf{A}_{i,h} {}_h\dot{\boldsymbol{\omega}}_h + {}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{h,i} \quad (2.36)$$

Die Relativwinkelgeschwindigkeiten und -beschleunigungen ${}_i\boldsymbol{\omega}_{h,i}$ und ${}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{h,i}$ können mit der Transformationsmatrix $\mathbf{A}_{i,h}(\varphi_i)$ und deren beiden Zeitableitungen $\dot{\mathbf{A}}_{i,h}(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)$ sowie $\ddot{\mathbf{A}}_{i,h}(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i)$ bestimmt werden.

$${}_i\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{h,i} = \mathbf{A}_{i,h} \dot{\mathbf{A}}_{h,i} \quad , \quad {}_i\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{h,i} = \dot{\mathbf{A}}_{i,h} \dot{\mathbf{A}}_{h,i} + \mathbf{A}_{i,h} \ddot{\mathbf{A}}_{h,i} \quad (2.37)$$

Für die Orientierung und Lage des Greiferpunkts G im Inertialsystem gelten dann mit $\mathbf{r}_{QQ,i} = \mathbf{r}_{QS,i} + \mathbf{r}_{SQ,i}$ die direkten, nicht rekursiven Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{I,G} &= \mathbf{A}_{I,B} \prod_{k=1}^{f_A} \mathbf{A}_{k-1,k} \quad \left(\text{wobei } \mathbf{A}_{0,1} \stackrel{!}{=} \mathbf{A}_{B,1} \right) , \\ {}_I\mathbf{r}_G &= {}_I\mathbf{r}_B + \mathbf{A}_{I,B} \left({}_B\mathbf{r}_{SQ,0} + \sum_{i=1}^{f_A-1} \left(\left(\prod_{k=1}^i \mathbf{A}_{k-1,k} \right) {}_i\mathbf{r}_{QQ,i} \right) \right) + \mathbf{A}_{I,G} {}_G\mathbf{r}_{QG} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Diese Berechnung der kinematischen Greifergrößen aus den bekannten Gelenkwinkeln wird in der Robotik als Vorwärtskinematik oder auch direkte Kinematik bezeichnet.

2.2.3 Kinetik

Mit Hilfe des vorausgegangenen Gleichungssatzes ist der kinematische Zustand des baumstrukturierten Arms von innen nach außen berechenbar. Der kinetische Zustand kann nun entgegengesetzt, also von außen nach innen bzw. vom Greifer zur Basis,

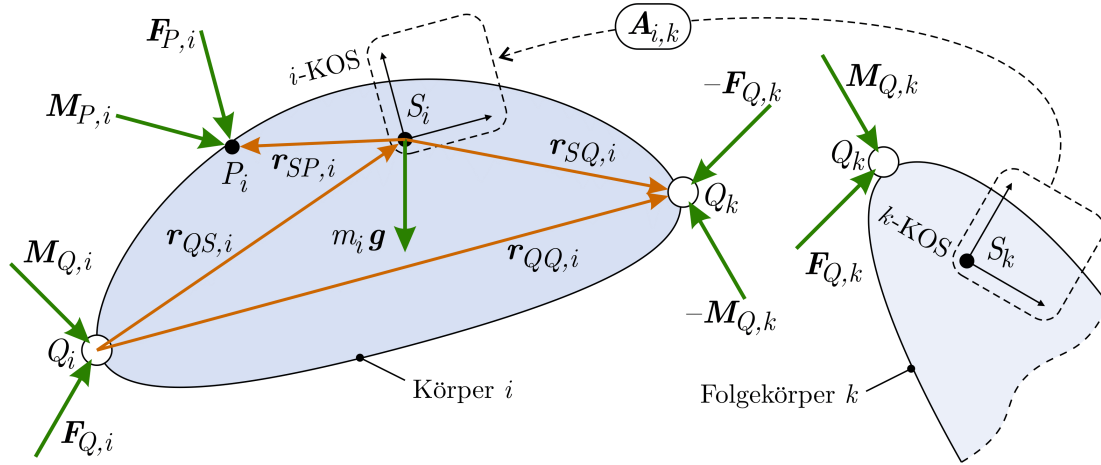


Bild 2.4: Kräfte und Momente am freigeschnittenen i -ten Körper des Roboterarms

sukzessiv durch Freischneiden der einzelnen Körper und Analyse des Impuls- und Drallsatzes im jeweils körperfesten Koordinatensystem bestimmt werden. Nach dem Impulssatz entspricht die Zeitableitung des Impulses $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ der Summe der auf den Körper angreifenden Kräfte gemäß Bild 2.4,

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{m}_i \dot{\mathbf{r}}_i + m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum \mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{F}_{Q,i} - \mathbf{F}_{Q,k} + \mathbf{F}_{P,i} + m_i \mathbf{g} . \quad (2.39)$$

Dabei sind $\mathbf{F}_{Q,i}$ und $\mathbf{F}_{Q,k}$ die Kopplungskräfte zwischen den Körpern h und i bzw. i und k sowie $\mathbf{F}_{P,i}$ eine gegebenenfalls vorhandene Prozesskraft, vgl. Gleichung (2.19).

Nach Instanzierung im i -System und unter Berücksichtigung der Konstanz der beteiligten Massen, $\dot{m}_i = 0$, erhält man die rekursive Bestimmungsgleichung für die Kopplungskräfte zwischen den Körpern des Arms:

$${}_i \mathbf{F}_{Q,i} = m_i {}_i (\ddot{\mathbf{r}}_i) + \mathbf{A}_{i,k} {}_k \mathbf{F}_{Q,k} - \mathbf{A}_{i,I} ({}_I \mathbf{F}_{P,i} + m_i {}_I \mathbf{g}) \quad (2.40)$$

Analog zum Impulssatz entspricht nach dem Drallsatz die Zeitableitung des auf den Körperschwerpunkt S_i bezogenen Dralls $\mathbf{L}_i = \Theta_i \boldsymbol{\omega}_i$ der Summe aller auf den Körper angreifenden Momente um S_i , vgl. Bild 2.4,

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \sum \mathbf{M}^{(S_i)} = \mathbf{M}_{Q,i} - \mathbf{M}_{Q,k} + \mathbf{M}_{P,i} - \tilde{\mathbf{r}}_{QS,i} \mathbf{F}_{Q,i} - \tilde{\mathbf{r}}_{SQ,i} \mathbf{F}_{Q,k} + \tilde{\mathbf{r}}_{SP,i} \mathbf{F}_{P,i} , \quad (2.41)$$

mit den Kopplungsmomenten $\mathbf{M}_{Q,i}$ und $\mathbf{M}_{Q,k}$ zwischen den Körpern h und i bzw. i und k und einem Prozessmoment $\mathbf{M}_{P,i}$, vgl. Gleichung (2.19). Instanzieren von $\dot{\mathbf{L}}_i$ im i -System unter der Voraussetzung zeitlich konstanter Trägheitstensoren (${}_i \dot{\Theta}_i = \mathbf{0}$),

$${}_i (\dot{\mathbf{L}}_i) = {}_i \dot{\mathbf{L}}_i + {}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}_i \mathbf{L}_i = {}_i \Theta_i {}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}_i \Theta_i {}_i \boldsymbol{\omega}_i , \quad (2.42)$$

liefert mit den Gleichungen (2.40) und (2.41) die rekursive Gleichung zur Bestimmung der Kopplungsmomente zwischen den Körpern des Arms:

$${}_i \mathbf{M}_{Q,i} = {}_i \Theta_i {}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + {}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i {}_i \Theta_i {}_i \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{A}_{i,k} {}_k \mathbf{M}_{Q,k} + \mathbf{A}_{i,I} {}_I \mathbf{M}_{P,i} + \\ + {}_i \tilde{\mathbf{r}}_{QQ,i} \mathbf{A}_{i,k} {}_k \mathbf{F}_{Q,k} + m_i {}_i \tilde{\mathbf{r}}_{QS,i} ({}_i (\ddot{\mathbf{r}}_i) - \mathbf{A}_{i,I} {}_I \mathbf{g}) - {}_i \tilde{\mathbf{r}}_{SP,i} \mathbf{A}_{i,I} {}_I \mathbf{F}_{P,i} \quad (2.43)$$

Die kinematischen Größen ${}_i(\ddot{\mathbf{r}}_i)$, ${}_i\boldsymbol{\omega}_i$ und ${}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ in den Gleichungen (2.40) und (2.43) folgen aus den Gleichungen (2.35) und (2.36). Legt man die z-Achse des i -Systems stets parallel zur Drehachse zwischen den Körpern h und i , dann gilt für das skalare Motormoment $M_{M,i}$ bzw. die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_i$ am i -ten Gelenk des Arms:

$$M_{M,i} = [{}_i\mathbf{M}_{Q,i}]_3 \Rightarrow \mathbf{M}_M = \text{col}_{i=1}^{f_A} \langle M_{M,i} \rangle \in \mathbb{R}^{f_A} \quad , \quad {}_i\boldsymbol{\omega}_{h,i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\varphi}_i \end{pmatrix}^T \quad (2.44)$$

Es können nur am Greifer, dem letzten Körper des Arms, Prozesskräfte und -momente auftreten, so dass folgende Vereinfachung getroffen wird:

$$\mathbf{F}_{P,i} = \mathbf{M}_{P,i} = \mathbf{0} \quad , \quad i < f_A \quad (2.45)$$

2.3 Kontaktmechanik

Die Gleichungen (2.40) und (2.43) liefern die Kräfte $\mathbf{F}_{Q,1}$ und Momente $\mathbf{M}_{Q,1}$, die der Arm am Kopplungspunkt Q_1 auf die Basis ausübt. Es ist nun zu untersuchen, ob die Basis unter dieser Last ohne wegzugleiten oder umzukippen ihre Position hält, ob also die einseitigen Bindungen an den Kontaktpunkten der Basis zur Umgebung weiterhin geschlossen bleiben. Dazu werden die generalisierten Koordinaten der Basis \mathbf{q}_B definiert als Kombination eines translatorischen und eines rotatorischen Anteils, welche die Lage und Orientierung $\{I\mathbf{r}_B, \mathbf{A}_{B,I}\}$ des Basisschwerpunkts S_B , vgl. Gleichung (2.33), über die relative Verschiebung und Verdrehung bzgl. einer bekannten, durch das B_0 -System definierten Null- bzw. Referenzstellung $\{I\mathbf{r}_{B_0}, \mathbf{A}_{B_0,I}\}$ beschreiben, wie Bild 2.5 zeigt.

$$\mathbf{q}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{B,tr} \\ \mathbf{q}_{B,ro} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{cases} I\mathbf{r}_B = I\mathbf{r}_{B_0} + \mathbf{A}_{I,B_0} \mathbf{q}_{B,tr} \\ \mathbf{A}_{B,I} = \mathbf{A}_{B,B_0} \mathbf{A}_{B_0,I} \quad , \quad \mathbf{q}_{B,ro} \mapsto \mathbf{A}_{B,B_0} \end{cases} \quad (2.46)$$

In der Nullstellung des Systems sind alle einseitigen Bindungen geschlossen. Der translatorische Anteil von \mathbf{q}_B enthält die kartesischen Koordinaten der Basis im B_0 -System,

$$\mathbf{q}_{B,tr} = {}_{B_0}\mathbf{r}_{B_0,B} = {}_{B_0} \begin{pmatrix} x_B & y_B & z_B \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \quad , \quad (2.47)$$

während der rotatorische Anteil $\mathbf{q}_{B,ro}$ eine Transformationsmatrix definiert. Wählt man die z-y-x-Eulerwinkel bzgl. des Koordinatensystems B_0 als die die Orientierung beschreibenden Größen, $\mathbf{q}_{B,ro} = (\theta_x \ \theta_y \ \theta_z)^T \in \mathbb{R}^3$, dann gilt [36]:

$$\mathbf{A}_{B,B_0} = \begin{bmatrix} c\theta_y c\theta_z & c\theta_y s\theta_z & -s\theta_y \\ s\theta_x s\theta_y c\theta_z - c\theta_x s\theta_z & s\theta_x s\theta_y c\theta_z + c\theta_x c\theta_z & s\theta_x c\theta_y \\ c\theta_x s\theta_y c\theta_z + s\theta_x s\theta_z & c\theta_x s\theta_y c\theta_z - s\theta_x c\theta_z & c\theta_x c\theta_y \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Das der Nullstellung zugeordnete Referenzkoordinatensystem B_0 ist ortsfest, für die translatorische und rotatorische Geschwindigkeit der Basis gilt dann

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_{I,B_0}}_{\mathbf{0}} + \dot{\mathbf{r}}_{B_0,B} \quad , \quad \boldsymbol{\omega}_B = \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{I,B_0}}_{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\omega}_{B_0,B} \quad , \quad (2.49)$$

so dass nach Instanziierung im basisfesten Koordinatensystem B folgt:

$${}_B(\dot{\mathbf{r}}_B) = \mathbf{A}_{B,B_0} {}_{B_0}(\dot{\mathbf{r}}_{B_0,B}) = \mathbf{A}_{B,B_0} \left(\underbrace{{}_{B_0}\dot{\mathbf{r}}_{B_0,B}}_{\dot{\mathbf{q}}_{B,tr}} + \underbrace{{}_{B_0}\boldsymbol{\omega}_{B_0}}_{\mathbf{0}} \underbrace{{}_{B_0}\mathbf{r}_{B_0,B}}_{\mathbf{q}_{B,tr}} \right) = \mathbf{A}_{B,B_0} \dot{\mathbf{q}}_{B,tr} \quad (2.50)$$

$$\text{Zudem gilt: } {}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B = {}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{B_0,B} = \mathbf{A}_{B,B_0} \dot{\mathbf{A}}_{B_0,B} \quad (2.51)$$

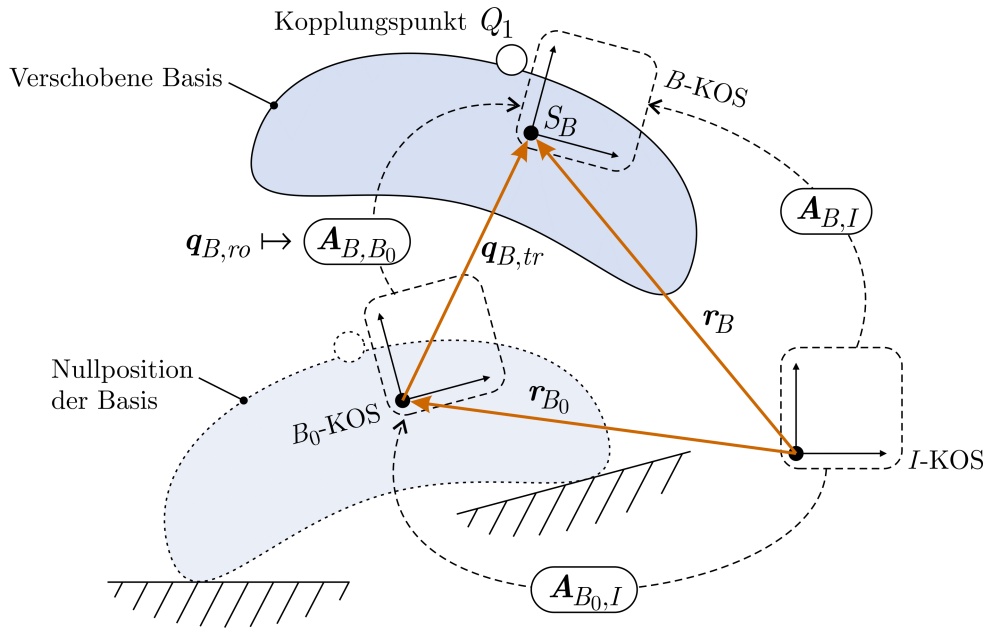


Bild 2.5: Generalisierte Koordinaten \mathbf{q}_B der Basis

Die Basis befinde sich zum Betrachtungszeitpunkt in der im Folgenden mit dem Hochindex „*“ gekennzeichneten Nullstellung, $\mathbf{q}_B^* = \mathbf{0}$. Die Transformationsmatrix \mathbf{A}_{B,B_0} und ihre Zeitableitung lauten dann:

$$\mathbf{A}_{B,B_0}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_3 \quad , \quad \dot{\mathbf{A}}_{B,B_0}^* = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_z & -\dot{\theta}_y \\ -\dot{\theta}_z & 0 & \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y & -\dot{\theta}_x & 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} -\tilde{\mathbf{q}}_{B,ro} \quad (2.52)$$

Für die translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten der Basis folgt

$${}_B(\dot{\mathbf{r}}_B)^* = \dot{\mathbf{q}}_{B,tr} \quad , \quad {}_B\tilde{\boldsymbol{\omega}}_B^* = \dot{\mathbf{A}}_{B_0,B}^* \stackrel{!}{=} +\tilde{\mathbf{q}}_{B,ro} \Rightarrow {}_B\boldsymbol{\omega}_B^* = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_x & \dot{\theta}_y & \dot{\theta}_z \end{pmatrix}^T = \dot{\mathbf{q}}_{B,ro} \quad , \quad (2.53)$$

so dass sich die Jacobimatrix bzgl. des Basisschwerpunkts S_B zur Einheitsmatrix berechnet, was die noch folgenden Herleitungen vereinfacht:

$$\left. \begin{aligned} {}_B \mathbf{J}_{S_B, tr}^* &= \frac{\partial_B (\dot{\mathbf{r}}_B)^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}_B} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{B, tr}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_B} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \vdots & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \\ {}_B \mathbf{J}_{S_B, ro}^* &= \frac{\partial_B \boldsymbol{\omega}_B^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}_B} = \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}_{B, ro}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \vdots & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} {}_B \mathbf{J}_{S_B}^* = \begin{bmatrix} {}_B \mathbf{J}_{S_B, tr} \\ {}_B \mathbf{J}_{S_B, ro} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_6 \quad (2.54)$$

Es können nun alle Komponenten der Bewegungsgleichung (2.31) der Basis bestimmt werden. Wegen Gleichung (2.54) vereinfacht sich - verglichen mit Gleichung (2.23) - die symmetrische Massenmatrix der Basis zu

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 m_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}_B \boldsymbol{\Theta}_B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} . \quad (2.55)$$

Der Vektor \mathbf{h}_B enthält neben den vom Arm in die Basis eingprägten Kopplungskräften und -momenten $\mathbf{F}_{Q,1}$ und $\mathbf{M}_{Q,1}$ noch die Schwerkraft als eingprägte Kraft sowie die gyroskopischen Anteile. Verglichen mit Gleichung (2.24) hat er wegen Gleichung (2.54) sowie wegen ${}_B \dot{\mathbf{J}}_{S_B} = 0$ die einfache Form

$$\mathbf{h}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ {}_B \tilde{\boldsymbol{\omega}}_B \quad {}_B \boldsymbol{\Theta}_B \quad {}_B \boldsymbol{\omega}_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_B \mathbf{A}_{B,I} \mathbf{I} \mathbf{g} - \mathbf{A}_{B,1 \ 1} \mathbf{F}_{Q,1} \\ {}_B \tilde{\mathbf{r}}_{BQ_1} \mathbf{A}_{B,1 \ 1} \mathbf{F}_{Q,1} - \mathbf{A}_{B,1 \ 1} \mathbf{M}_{Q,1} \end{pmatrix} . \quad (2.56)$$

An der Basis liegen $n_{P,B}$ Kontaktpunkte zur festen Umgebung vor, die als einseitige Bindung modelliert werden. Mit dem im körperfesten Koordinatensystem B beschriebenen Vektor $\mathbf{r}_{BK,k}$ vom Basisschwerpunkt S_B zum k -ten Kontaktpunkt berechnet sich die Matrix \mathbf{W}_λ zur Projektion der Kraftkoeffizienten in den Raum der generalisierten Koordinaten gegenüber Gleichung (2.28) vereinfacht zu:

$$\mathbf{W}_\lambda = \text{row}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \mathbf{W}_{\lambda,k} \rangle \quad , \quad \mathbf{W}_{\lambda,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 \\ {}_B \tilde{\mathbf{r}}_{BK,k} \end{bmatrix} {}_B \mathbf{N}_k \quad (2.57)$$

Entsprechend den vorangegangenen Ausführungen in Kapitel 2.2 ist nun eine Aussage über die Persistenz der geschlossenen einseitigen Bindungen der Basis mit der Umgebung gesucht. Da eine einseitige Bindung genau dann geschlossen bleibt, wenn die Relativbeschleunigung zwischen den beiden Kontaktpartnern verschwindet, wird also die translatorische Beschleunigung am k -ten der $n_{P,B}$ Kontaktpunkte der Basis betrachtet. Diese lässt sich gemäß Gleichung (2.4) mit den generalisierten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Basis $\dot{\mathbf{q}}_B$ und $\ddot{\mathbf{q}}_B$ über die Jacobimatrizen der Kontaktpunkte sowie deren Zeitableitung darstellen:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,k} = \dot{\mathbf{J}}_{K_k, tr} \dot{\mathbf{q}}_B + \mathbf{J}_{K_k, tr} \ddot{\mathbf{q}}_B \quad (2.58)$$

Im betrachteten, mit dem Hochindex „*“ gekennzeichneten Fall ruht die Basis, es gilt $\dot{\mathbf{q}}_B^* = \mathbf{0}$. Nach Instanzierung im Basissystem B folgt aus Gleichung (2.58)

$${}_B (\ddot{\mathbf{r}}_{K,k}) = {}_B \mathbf{J}_{K_k, tr}^* \ddot{\mathbf{q}}_B \quad , \quad (2.59)$$

sowie aus Gleichung (2.6) mit Gleichung (2.54):

$${}_B \mathbf{J}_{K_k, tr}^* = {}_B \mathbf{J}_{S_B, tr}^* - {}_B \tilde{\mathbf{r}}_{BK, k} {}_B \mathbf{J}_{S_B, ro}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 \\ -{}_B \tilde{\mathbf{r}}_{BK, k} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Jede der Kontaktpunktbeschleunigungen ${}_B(\ddot{\mathbf{r}}_{K, k})$ wird entsprechend den Kontaktkräften in Gleichung (2.27) durch basisfeste Einheitsvektoren, die orthogonal in die normale und die beiden tangentialen Richtungen der Kontaktebene des jeweiligen Kontaktpunkts zeigen, sowie durch zugeordnete skalare Beschleunigungsgrößen \ddot{g} beschrieben:

$${}_B(\ddot{\mathbf{r}}_{K, k}) = {}_B \mathbf{n}_k \ddot{g}_{k, n} + {}_B \mathbf{t}_{1, k} \ddot{g}_{k, t_1} + {}_B \mathbf{t}_{2, k} \ddot{g}_{k, t_2} = {}_B \mathbf{N}_k \ddot{\mathbf{g}}_k^\perp \quad (2.61)$$

Auch hier zeigt das hochgestellte „ \perp “ an, dass sich die im Vektor $\ddot{\mathbf{g}}_k^\perp$ enthaltenen skalaren Beschleunigungskoeffizienten auf die orthogonalen Einheitsvektoren in Normalen- und Tangentialrichtung beziehen, vgl. Gleichung (2.27). Mit $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^T$ folgt dann aus den Gleichungen (2.59) bis (2.61):

$$\ddot{\mathbf{g}}_k^\perp = {}_B \mathbf{N}_k^T \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 \\ -{}_B \tilde{\mathbf{r}}_{BK, k} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_B \stackrel{!}{=} \mathbf{W}_{\lambda, k}^T \ddot{\mathbf{q}}_B \quad (2.62)$$

Die bereits aus Gleichung (2.57) bekannte Projektionsmatrix $\mathbf{W}_{N, k}^T$ beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen den normalen und tangentialen Beschleunigungsanteilen am k -ten der $n_{P, B}$ Kontaktpunkte der Basis mit der Umgebung und den generalisierten Beschleunigungen. Mit dem Vektor $\ddot{\mathbf{g}}^\perp$ der orthogonalen Beschleunigungen an allen Kontaktpunkten folgt aus Gleichung (2.62):

$$\ddot{\mathbf{g}}^\perp = \text{col}_{k=1}^{n_{P, B}} \langle \ddot{\mathbf{g}}_k^\perp \rangle = \mathbf{W}_\lambda^T \ddot{\mathbf{q}}_B \quad (2.63)$$

Setzt man die nach den generalisierten Beschleunigungen der Basis $\ddot{\mathbf{q}}_B$ umgeformte Bewegungsgleichung (2.31) der Basis in Gleichung (2.63) ein, erhält man

$$\ddot{\mathbf{g}}^\perp = -\mathbf{W}_\lambda^T \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{h}_B + \mathbf{W}_\lambda^T \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{W}_\lambda \boldsymbol{\lambda}^\perp, \quad (2.64)$$

was zu einem linearen Gleichungssystem umgeformt werden kann:

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}^\perp \\ \boldsymbol{\lambda}^\perp \end{pmatrix} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(3n_{P, B})} \\ -\mathbf{W}_\lambda^T \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{W}_\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = -\mathbf{W}_\lambda^T \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{h}_B \quad (2.65)$$

Die generalisierten Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{q}}_B$ konnten somit eliminiert und das kontaktmechanische Problem auf einen funktionalen Zusammenhang zwischen den unbekannt kinematischen und kinetischen Kontaktgrößen $\ddot{\mathbf{g}}^\perp$ und $\boldsymbol{\lambda}^\perp$ an den einseitigen Bindungen reduziert werden. Die Gleichung (2.65) hat nun folgende zwei Eigenschaften:

- Sie ist die zentrale Gleichung zur Analyse des Systemverhaltens hinsichtlich der geforderten Persistenz der geschlossenen einseitigen Bindungen, und damit der Standstabilität des Gesamtsystems aus Arm und Basis. Eine Separation oder ein Losgleiten an einem der Kontaktpunkte zwischen der Basis und der festen Umgebung kann durch die zugehörigen Kontaktpunktbeschleunigungen identifiziert werden. Sind diese alle gleich Null, dann ist die Basis unbeschleunigt, und es liegt ein sicherer Stand des mobilen Roboters vor. Ist dies nicht der Fall, muss ein unerlaubter Wechsel des Bindungszustandes zum Gleiten oder zur Separation kons-

tatiert werden. Hinsichtlich des Vektors der orthogonalen Kontaktpunktbeschleunigungen $\ddot{\mathbf{g}}^\perp$ gilt also:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{g}}^\perp &= \mathbf{0} && \rightarrow \text{Der mobile Roboter steht sicher.} \\ \exists \ddot{g}_{k,n} \in \ddot{\mathbf{g}}^\perp : \ddot{g}_{k,n} &\neq 0 && \rightarrow \text{Separation an mind. einem Kontaktpunkt.} \\ \exists \ddot{g}_{k,t_i} \in \ddot{\mathbf{g}}^\perp : \ddot{g}_{k,t_i} &\neq 0 && \rightarrow \text{Losgleiten an mind. einem Kontaktpunkt.} \end{aligned} \quad (2.66)$$

- Sie ist mehrfach unterbestimmt. Die Matrix \mathbf{H} enthält deutlich mehr Spalten als Zeilen. Eine eindeutige Lösung von Gleichung (2.65) kann ohne Weiteres nicht bestimmt werden.

Das im zweiten Punkt geforderte Weitere besteht in der Analyse der physikalischen Randbedingungen am Kontaktpunkt. Die kinematischen und kinetischen Kontaktgrößen unterliegen bestimmten Einschränkungen in Form der Kontaktgesetze, die im folgenden Abschnitt dargestellt werden. Erst die Kontaktgesetze erlauben es, Gleichung (2.65) zu lösen, so dass der Bindungsstatus eindeutig beschrieben und die gesuchte Aussage über die Standstabilität des mobilen Roboters getroffen werden kann.

2.4 Kontaktgesetze

Bei der Analyse der Kontaktgrößen wird konventionell zwischen der Normalenrichtung und den Tangentialrichtungen der einseitigen Bindungen an den Kontaktpunkten der Basis mit der Umgebung unterschieden. Die Kontaktgesetze schränken in der Normalen- und den Tangentialrichtungen die Kontaktpunktbeschleunigung und die Kontaktkraft auf zulässige Werte ein und stellen einen Zusammenhang zwischen diesen her. Sie beziehen sich jeweils nur auf die Kontaktgrößen eines einzelnen Kontaktpunkts.

2.4.1 Normalenrichtung

Das Kontaktgesetz in Normalenrichtung basiert auf der mit der Starrkörperannahme einhergehenden Impenetrabilitätsbedingung, nach der auf Lageebene nur zwei verschiedene Zustände existieren können. Entweder sind zwei Starrkörper voneinander separiert, also deren Normalabstand g_n größer als Null, dann können keine normalen Kontaktkräfte λ_n vorliegen. Oder die Körper berühren einander bei verschwindendem Normalabstand im Kontaktpunkt, dann kann eine Kontaktkraft in Normalenrichtung vorliegen, die unter Ausschluss von Adhäsion als Druckkraft wirken muss.

$$g_n > 0 \Rightarrow \lambda_n = 0 \quad \vee \quad g_n = 0 \Rightarrow \lambda_n \geq 0 \quad (2.67)$$

Beide Fälle sind komplementär zueinander, das Zutreffen des einen schließt also den anderen aus, und können durch Ungleichungen mit Komplementaritätsbedingung ausgedrückt werden.

$$g_n \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda_n \geq 0 \quad \wedge \quad g_n \lambda_n = 0 \quad (2.68)$$

Eine solche Komplementarität zwischen zwei Skalaren sei als Paarkomplementarität bezeichnet und im Folgenden alternativ beschrieben durch

$$g_n \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \downarrow 0 \end{array} \lambda_n . \quad (2.69)$$

Gleichung (2.68) formuliert das Kontaktgesetz in Normalenrichtung auf Lageebene und muss mit dem Ziel der Lösung von Gleichung (2.65) auf Beschleunigungsebene überführt werden. Dies ist problemlos möglich, da alle einseitigen Bindungen zwischen der Basis und der Umgebung zum Betrachtungszeitpunkt im geschlossenen Zustand vorliegen und somit nur die beiden Möglichkeiten des persistenten Kontakts und der Separation in Betracht zu ziehen sind. Ein geschlossener Kontakt bleibt geschlossen, wenn die relative Normalbeschleunigung verschwindet, $\ddot{g}_n = 0$. Liegt hingegen eine relative Normalbeschleunigung vor mit $\ddot{g}_n > 0$, so dass die Bindung im Begriff ist, sich zu öffnen, können keine Normalkräfte mehr vorliegen, $\lambda_n = 0$. Dies führt zur Paarkomplementarität auf Beschleunigungsebene:

$$\ddot{g}_n \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda_n \geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_n \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{g}_n \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \downarrow 0 \end{array} \lambda_n \quad (2.70)$$

Die grafische Darstellung der Komplementarität in Bild 2.6 zeigt die Kennlinie einer einseitigen Normalbindung auf Beschleunigungsebene und somit den zulässigen Bereich für das Kontaktgrößenpaar $\{\ddot{g}_n, \lambda_n\}$. Die Kontaktkraft λ_n und die Relativbeschleunigung in Normalenrichtung \ddot{g}_n schließen sich gegenseitig aus. Entweder ist die Kontaktkraft oder die Relativbeschleunigung positiv, niemals jedoch beide. Entsprechend der Form der Kennlinie in Bild 2.6 wird das Kontaktgesetz in Normalenrichtung auch als *Signorinis Ecken-gesetz* bezeichnet.

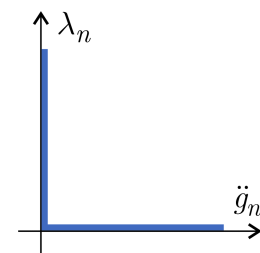


Bild 2.6: Kennlinie einer einseitigen Bindung in Normalenrichtung

2.4.2 Ebenes tangenciales Kontaktgesetz

Bei einer in Normalenrichtung geschlossenen einseitigen Bindung kann Haften oder Gleiten in Tangentialrichtung vorliegen. Setzt man COULOMB'sche Trockenreibung voraus, kann das tangential Bindungsverhalten auf Geschwindigkeitsebene durch die Kennlinie gemäß Bild 2.7 dargestellt werden. Im ebenen Fall sind dann drei Kontaktzustände möglich: Haften oder Gleiten in eine der beiden tangentialen Richtungen. Beim Haften liegt keine tangentiale Relativgeschwindigkeit zwischen den Kontaktkörpern vor, $\dot{g}_t = 0$, der Betrag der Tangentialkraft λ_t ist dann in Abhängigkeit von der Normalkraft λ_n durch den COULOMB'schen Haftreibungskoeffizienten μ_0 limitiert, $|\lambda_t| \leq \mu_0 \lambda_n$. Im Falle des Gleitens hingegen liegt eine tangentiale Relativgeschwindigkeit vor, $|\dot{g}_t| > 0$, so dass die Tangentialkraft λ_t entgegengesetzt zur Gleitrichtung wirkt und ihr Betrag durch λ_n sowie den geschwindigkeitsabhängigen Gleitreibungskoeffizienten $\mu_G(\dot{g}_t)$ festgelegt ist. Das tangentiale Kontaktgesetz auf Geschwindig-

keitsebene stellt also eine Fallunterscheidung bezüglich der tangentialen Relativgeschwindigkeit dar und lautet:

$$\begin{aligned} \dot{g}_t = 0 &\Rightarrow |\lambda_t| \leq \mu_0 \lambda_n \quad \vee \quad \dot{g}_t < 0 \Rightarrow \lambda_t = +\mu_G(|\dot{g}_t|) \lambda_n \\ &\quad \vee \quad \dot{g}_t > 0 \Rightarrow \lambda_t = -\mu_G(|\dot{g}_t|) \lambda_n \end{aligned} \tag{2.71}$$

Auch hier kann das Kontaktgesetz problemlos auf Beschleunigungsebene überführt werden, da für alle einseitigen Bindungen zum Betrachtungszeitpunkt Haften vorliegt und sich das tangential Kontaktproblem auf die Zustände des persistenten Haftens oder des Losgleitens reduziert. Im ersten Fall existiert keine tangentiale Relativbeschleunigung, $\ddot{g}_t = 0$, im zweiten Fall erreicht die Tangentialkraft ihren Grenzwert, $|\lambda_t| = \mu_0 \lambda_n$, und es tritt eine Tangentialbeschleunigung auf, $|\dot{g}_t| > 0$. Für das tangential Kontaktgesetz auf Beschleunigungsebene folgt somit

$$\begin{aligned} \ddot{g}_t = 0 &\Rightarrow |\lambda_t| \leq \mu_0 \lambda_n \quad \vee \quad \ddot{g}_t < 0 \Rightarrow \lambda_t = +\mu_0 \lambda_n \\ &\quad \vee \quad \ddot{g}_t > 0 \Rightarrow \lambda_t = -\mu_0 \lambda_n \end{aligned} \tag{2.72}$$

oder in komplementärer Schreibweise:

$$|\dot{g}_t| \geq 0 \wedge \mu_0 \lambda_n - |\lambda_t| \geq 0 \wedge |\dot{g}_t| (\mu_0 \lambda_n - |\lambda_t|) = 0 \Rightarrow (\mu_0 \lambda_n - |\lambda_t|) \begin{matrix} \xrightarrow{|\lambda_t| \uparrow \mu_0 \lambda_n} \\ \xleftrightarrow{\quad} |\dot{g}_t| \\ \xleftarrow{\dot{g}_t \downarrow 0} \end{matrix} \tag{2.73}$$

Bild 2.8a) zeigt die zugehörige Kennlinie. Die Formulierung in Gleichung (2.73) ist nun insofern nachteilig, als keine paarweisen Komplementaritäten vorliegen. Die beteiligten Größen können durchaus negative Werte annehmen; das Kontaktverhalten wird in dieser Form nicht durch ein einfaches Eckengesetz wie beim normalen Kontaktgesetz beschrieben. Die Kennlinie wird daher zweigeteilt, siehe Bild 2.8b). Dabei wird die tangentiale Kontaktpunktbeschleunigung \ddot{g}_t in einen Positiv- und einen Negativanteil \ddot{g}_t^\oplus und \ddot{g}_t^\ominus zerlegt, die beide nichtnegativ sein müssen, so dass gilt:

$$\ddot{g}_t = \ddot{g}_t^\oplus - \ddot{g}_t^\ominus \quad , \quad \{ \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus \} \geq 0 \tag{2.74}$$

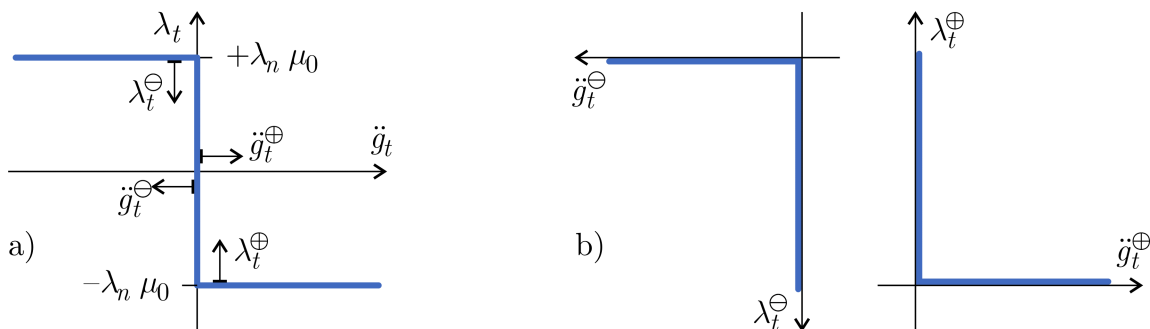


Bild 2.8: Zerlegung der Reibkennlinie auf Beschleunigungsebene

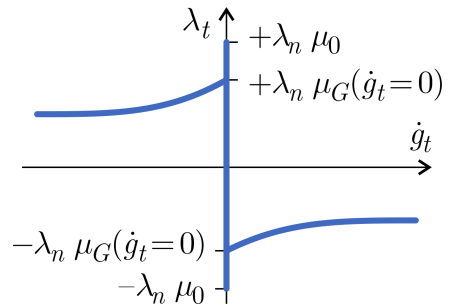


Bild 2.7: Reibkennlinie auf Geschwindigkeitsebene

Die tangentialen Kontaktkraft λ_t wird definiert mit Hilfe der als Haftkraftreserven bezeichneten, stets nichtnegativen Größen λ_t^\oplus und λ_t^\ominus , die die Differenz zwischen der maximal zulässigen Haftreibungskraft $\pm\mu_0\lambda_n$ und der tatsächlich wirkenden tangentialen Kontaktkraft λ_t angeben.

$$\lambda_t = \mu_0 \lambda_n - \lambda_t^\ominus \quad \wedge \quad \lambda_t = \lambda_t^\oplus - \mu_0 \lambda_n \quad , \quad \{\lambda_t^\oplus, \lambda_t^\ominus\} \geq 0 \quad (2.75)$$

Ein Übergang vom Haften zum Gleiten ist somit nur möglich, wenn eine der Haftkraftreserven ausgeschöpft ist, $\lambda_t^\oplus = 0$ oder $\lambda_t^\ominus = 0$. Unter Berücksichtigung der aus Gleichung (2.75) folgenden Nebenbedingung

$$\lambda_t^\oplus + \lambda_t^\ominus - 2\mu_0 \lambda_n = 0 \quad (2.76)$$

kann das tangentiale Kontaktgesetz auf Beschleunigungsebene für den ebenen Fall somit durch die folgenden Paarkomplementaritäten beschrieben werden:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{g}_t^\oplus \geq 0 \\ \wedge \lambda_t^\oplus \geq 0 \\ \wedge \ddot{g}_t^\oplus \lambda_t^\oplus = 0 \end{array} \right\} \ddot{g}_t^\oplus \begin{array}{c} \ddot{g}_t^\oplus \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_t^\oplus \downarrow 0 \end{array} \lambda_t^\oplus \quad , \quad \left. \begin{array}{l} \ddot{g}_t^\ominus \geq 0 \\ \wedge \lambda_t^\ominus \geq 0 \\ \wedge \ddot{g}_t^\ominus \lambda_t^\ominus = 0 \end{array} \right\} \ddot{g}_t^\ominus \begin{array}{c} \ddot{g}_t^\ominus \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_t^\ominus \downarrow 0 \end{array} \lambda_t^\ominus \quad (2.77)$$

Die vier Kontaktgrößen $\ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_t^\oplus$ und λ_t^\ominus ersetzen die beiden bisherigen Größen \ddot{g}_t und λ_t . Wegen der obigen Komplementaritäten in Verbindung mit Gleichung (2.76) sind nur drei der vier möglichen Permutationen der vier tangentialen Kontaktgrößen physikalisch sinnvoll. Da nämlich zumindest eine der beiden Haftkraftreserven stets größer Null ist, $\lambda_t^\oplus > 0 \vee \lambda_t^\ominus > 0$, können gemäß Gleichung (2.77) der Positiv- und Negativanteil der Kontaktpunktbeschleunigung nie gleichzeitig größer Null sein:

$$\ddot{g}_t^\oplus = 0 \quad \vee \quad \ddot{g}_t^\ominus = 0 \quad (2.78)$$

Analog zur Existenz von nur drei Abschnitten der Kennlinie in Bild 2.8a) sind also nur folgende drei Fälle für die tangentialen Kontaktgrößen im ebenen Fall zulässig:

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{g}_t^\oplus \geq 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_t^\ominus = 0 \quad \wedge \quad \lambda_t^\oplus = 0 \quad \wedge \quad \lambda_t^\ominus \geq 0 \right) \rightarrow \text{Losgleiten} \\ \vee & \left(\ddot{g}_t^\oplus = 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_t^\ominus = 0 \quad \wedge \quad \lambda_t^\oplus \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda_t^\ominus \geq 0 \right) \rightarrow \text{Haften} \\ \vee & \left(\ddot{g}_t^\oplus = 0 \quad \wedge \quad \ddot{g}_t^\ominus \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda_t^\oplus \geq 0 \quad \wedge \quad \lambda_t^\ominus = 0 \right) \rightarrow \text{Losgleiten} \end{aligned} \quad (2.79)$$

2.4.3 Räumliches tangenciales Kontaktgesetz

Das tangentiale Kontaktgesetz gewinnt beim Übergang vom ebenen zum räumlichen Fall an Komplexität, der Modellierungsaufwand dementsprechend an Anspruch. Das COULOMB'sche Reibgesetz bildet nach wie vor die Grundlage der Modellierung des tangentialen Kontaktverhaltens auf Beschleunigungsebene, jedoch ist im Gegensatz zum ebenen Fall gemäß Gleichung (2.72) die Anzahl möglicher Richtungen eines eventuellen Losgleitens uneingeschränkt und dementsprechend die Wirkrichtung der Haft-

kraft unbestimmt. Für die Tangentialanteile der Kontaktpunktbeschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_K$ gemäß Gleichung (2.61) und der Kontaktkraft \mathbf{K} gemäß Gleichung (2.27),

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,t} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{g}_{t_1} \\ \ddot{g}_{t_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{t_1} \\ \lambda_{t_2} \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

ermöglicht das COULOMB'schen Reibgesetz nur eine Aussage über deren Beträge:

$$\begin{aligned} |\ddot{\mathbf{r}}_{K,t}| &= \sqrt{\ddot{g}_{t_1}^2 + \ddot{g}_{t_2}^2}, \quad |\mathbf{K}_t| = \sqrt{\lambda_{t_1}^2 + \lambda_{t_2}^2} \\ \Rightarrow |\ddot{\mathbf{r}}_{K,t}| &\geq 0 \wedge \mu_0 \lambda_n - |\mathbf{K}_t| \geq 0 \wedge |\ddot{\mathbf{r}}_{K,t}| (\mu_0 \lambda_n - |\mathbf{K}_t|) = 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Diese formale Darstellung geht einher mit dem COULOMB'schen Reibkegel, der den vom normalen Kontaktkraftanteil \mathbf{K}_n abhängigen zulässigen Bereich für die tangentiale Kontaktkraft \mathbf{K}_t beschreibt, (siehe Bild 2.9a). Ein Losgleiten an einer geschlossenen einseitigen Bindung mit $|\ddot{\mathbf{r}}_{K,t}| > 0$ tritt demnach nur auf, wenn die maximal übertragbare Tangentialkraft ausgereizt ist, $|\mathbf{K}_t| = \mu_0 \lambda_n$, und der Kontaktkraftvektor \mathbf{K} somit auf der Hüllfläche des Reibkegels liegt. Befindet sich \mathbf{K} jedoch innerhalb des Reibkegels, $\mu_0 \lambda_n - |\mathbf{K}_t| > 0$, ist kein Losgleiten möglich, $|\ddot{\mathbf{r}}_{K,t}| = 0$. Der Öffnungswinkel α des Reibkegels hängt vom Haftreibungskoeffizienten μ_0 ab, $\alpha = \arctan(\mu_0)$.

Die Komplementarität der beteiligten Kontaktgrößen in Gleichung (2.81) liegt in nichtlinearer Form vor. In Verbindung mit der zentralen Gleichung (2.65) des Kontaktproblems hat man es mit einem nichtlinearen Komplementaritätsproblem NCP zu tun, das nur iterativ und dementsprechend aufwendig mit Hilfe Newton-artiger Lösungsverfahren gelöst werden kann [2] [180].

Eine pragmatische Alternative zum nichtlinearen Problem liegt in der Linearisierung des glatten Reibkegels. Die Kontur des glatten Reibkegels wird dabei durch eine S -seitige Reibpyramide approximiert, (siehe Bild 2.9b), der kreisförmige Bereich für die zulässige tangentiale Kontaktkraft wird dementsprechend durch ein S -seitiges, gleich-

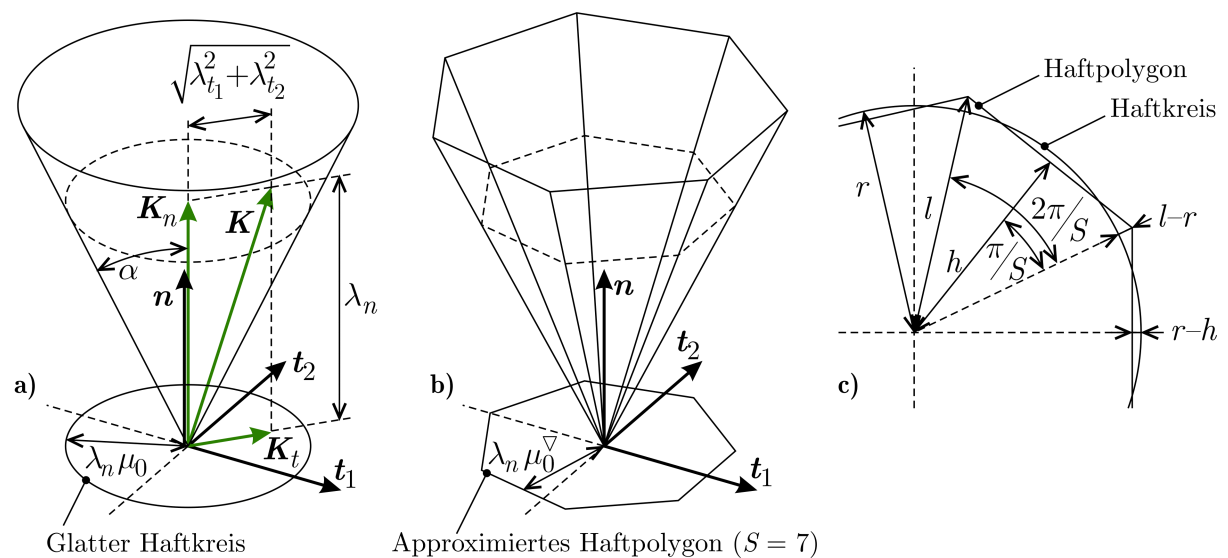


Bild 2.9: Approximation des glatten Reibkegels durch eine S -seitige Reibpyramide

mäßiges Polygon ersetzt. Statt des Haftkreises ist somit im Folgenden vom Haftpolygon die Rede.

Um den Approximationsfehler gegenüber dem idealen Kreis zu minimieren, wird das Haftpolygon dem Haftkreis derart überlagert, dass gemäß Bild 2.9c) die innere Geometrieabweichung der äußeren gleicht, $r - h = l - r$. Mit $h(S) = l \cos(\pi/S)$ gilt dann

$$r - l \cos(\pi/S) = l - r \quad \Rightarrow \quad l = 2r / (1 + \cos(\pi/S)) . \quad (2.82)$$

Für die prozentuale Abweichung $\Delta_{\%} = l/r - 1$ gilt somit in Abhängigkeit von S :

$$\begin{aligned} S = & (6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18) \\ \Delta_{\%} = & (7,18\% \quad 3,96\% \quad 2,51\% \quad 1,73\% \quad 1,27\% \quad 0,97\% \quad 0,77\%) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Der Polygonisierungsgrad S beeinflusst die Rechenzeit des Lösungsalgorithmus für das Kontaktproblem, eine Approximation des Reibkegels mit sehr großen S ist daher zu vermeiden. Der gewählte Wert S sollte sich an der Genauigkeit des Haftreibungskoeffizienten μ_0 orientieren, welche stets mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist. Als guter Kompromiss hat sich im vorliegenden Fall ein Wert von $S=12 \sim 16$ erwiesen. Für den korrigierten Haftreibungskoeffizienten $\mu_{0,k}^{\nabla}$, der den Tangens des Winkels der Pyramidenflächen zur Normalenrichtung am k -ten Kontaktpunkt beschreibt, gilt:

$$\mu_{0,k}^{\nabla} = \mu_{0,k} h/r = \mu_{0,k} (2r - l) / r = 2 \mu_{0,k} \cos(\pi/S) / (1 + \cos(\pi/S)) \quad (2.84)$$

Es werden für die folgenden Betrachtungen Einheitsvektoren $\mathbf{s}_{k,h}$ definiert, die gemäß Bild 2.10 in der Tangentialebene des k -ten Kontaktpunkts liegen und radial auf den jeweils h -ten Randabschnitt des den Haftkreis approximierenden Haftpolygons zeigen.

$$\mathbf{s}_{k,h} = \mathbf{t}_{1,k} \cos(2\pi(h-1)/S) + \mathbf{t}_{2,k} \sin(2\pi(h-1)/S) \quad (2.85)$$

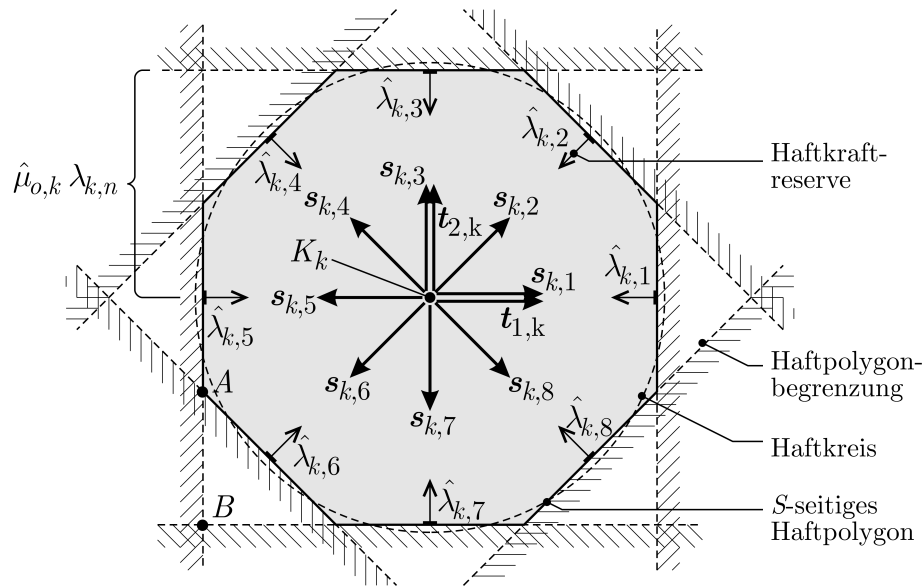


Bild 2.10: Tangentiale Haftkraftreserven $\hat{\lambda}_{k,i}$ am k -ten Kontaktpunkt K_k ($S=8$)

An dieser Stelle sei eine vorausnehmende Anmerkung gegeben: Die tangentialen Einheitsvektoren $\mathbf{s}_{k,h}$ werden im Folgenden zur Projektion der tangentialen Kontaktkraft $\mathbf{K}_{k,t}$ in Gleichung (2.87) sowie zur Beschreibung der Kontaktpunktbeschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_{K,k,t}$ gemäß Gleichung (2.94) benutzt. Dies stellt den Standard in vorangegangenen Arbeiten zur Modellierung einseitiger Bindungen dar [62] [144]. Es wird sich zeigen, dass dieser Standard unter Verwendung des Lösungsalgorithmus nach LEMKE den Anspruch einer zuverlässigen und robusten numerischen Behandlung der Problematik nicht immer erfüllt. Dies wird zu einer alternativen und in Kapitel 3 für verschiedene Bindungstypen detailliert dargestellten kompakten Kontaktmodellierung auf der Basis von Mengenkomplicitäten führen. Die Vektoren $\mathbf{s}_{k,h}$ werden dann nur noch bei der Beschreibung von $\ddot{\mathbf{r}}_{K,k,t}$ Anwendung finden. Der Sinn in der detaillierten Darstellung des bisherigen paarkomplementären Standards auf den folgenden Seiten liegt darin, die Motivation für die neue, kompakte Formulierung darzustellen und die „modellhistorische“ Einordnung des Kapitels 3 zu erleichtern.

Für die obigen Vektoren $\mathbf{s}_{k,h}$ gilt:

$$\text{row}_{h=1}^S \langle \mathbf{s}_{k,h} \rangle = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1,k} & \mathbf{t}_{2,k} \end{bmatrix} \mathbf{G}_{1,k} \quad , \quad \mathbf{G}_{1,k} = \text{row}_{h=1}^S \left\langle \begin{pmatrix} \cos(2\pi(h-1)/S) \\ \sin(2\pi(h-1)/S) \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2.86)$$

Analog zum ebenen Fall werden die skalaren Haftkraftreserven $\hat{\lambda}_{k,h}$ als der Abstand der tangentialen Kontaktkraft $\mathbf{K}_{k,t}$ zum h -ten der S Begrenzungen des Haftpolygons am k -ten Kontaktpunkt definiert, vgl. [144] [180]. Sie berechnen sich über die Projektion von $\mathbf{K}_{k,t}$ auf den jeweiligen Vektor $\mathbf{s}_{k,h}$:

$$\hat{\lambda}_{k,h} = \mu_{0,k}^\nabla \lambda_{k,n} - \mathbf{s}_{k,h}^\text{T} \mathbf{K}_{k,t} \quad (2.87)$$

Einsetzen der Gleichungen (2.80) und (2.85) liefert mit $\mathbf{t}_{1,k}^\text{T} \mathbf{t}_{1,k} = \mathbf{t}_{2,k}^\text{T} \mathbf{t}_{2,k} = 1$ sowie mit $\mathbf{t}_{1,k}^\text{T} \mathbf{t}_{2,k} = \mathbf{t}_{2,k}^\text{T} \mathbf{t}_{1,k} = 0$:

$$\hat{\lambda}_{k,h} = \hat{\mu}_{0,k} \lambda_{k,n} - \lambda_{k,t_1} \cos(2\pi(h-1)/S) - \lambda_{k,t_2} \sin(2\pi(h-1)/S) \quad (2.88)$$

Betrachtet man in Gleichung (2.88) die ersten beiden Haftkraftreserven, so dass $h=1$ bzw. $h=2$, und fügt die triviale Identität $\lambda_{k,n} = \lambda_{k,n}$ hinzu, erhält man die Gleichung zur Substitution der orthogonalen Kraftkoeffizienten $\boldsymbol{\lambda}_k^\perp$ gemäß Gleichung (2.27),

$$\boldsymbol{\lambda}_k^\perp = \left(\lambda_{k,n} \quad \lambda_{k,t_1} \quad \lambda_{k,t_2} \right)^\text{T} = \mathbf{G}_{3,k} \begin{pmatrix} \lambda_{k,n} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

mit dem Vektor der Haftkraftreserven am k -ten Kontaktpunkt $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_k$ sowie der Matrix $\mathbf{G}_{3,k}$, basierend auf der für $S > 2$ stets invertierbaren Matrix $\mathbf{G}_{2,k}$:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k &= \text{col}_{i=1}^S \langle \hat{\lambda}_{k,i} \rangle \quad , \\ \mathbf{G}_{3,k} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{2,k}^{-1} & \vdots & \mathbf{0}_{(S-2)} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{G}_{2,k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hat{\mu}_{0,k} & -1 & 0 \\ \hat{\mu}_{0,k} & -\cos(2\pi/S) & -\sin(2\pi/S) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Für den die orthogonalen Kraftkoeffizienten an allen $n_{P,B}$ Kontaktpunkten der Basis zusammenfassenden Vektor $\boldsymbol{\lambda}^\perp$ gilt gemäß Gleichung (2.28):

$$\boldsymbol{\lambda}^\perp = \text{col}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \boldsymbol{\lambda}_k^\perp \rangle \quad (2.91)$$

Die restlichen Haftkraftreserven $\hat{\lambda}_{k,3}$ bis $\hat{\lambda}_{k,S}$ können über die Gleichungen (2.88) und (2.89) aus den ersten beiden berechnet werden.

$$\begin{aligned} \text{col}_{i=3}^S \langle \hat{\lambda}_{k,i} \rangle &= \mathbf{G}_{4,k} \mathbf{G}_{2,k}^{-1} \left(\lambda_{k,n} \quad \hat{\lambda}_{k,1} \quad \hat{\lambda}_{k,2} \right)^\text{T} , \\ \mathbf{G}_{4,k} &= \text{col}_{i=3}^S \left\langle \left[\hat{\mu}_{0,k} \quad -\cos\left(2\pi \frac{i-1}{S}\right) \quad -\sin\left(2\pi \frac{i-1}{S}\right) \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\text{Zusammengefasst gilt:} \quad \mathbf{G}_{5,k} \begin{pmatrix} \lambda_{k,n} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{G}_{5,k} = \left[\mathbf{G}_{4,k} \quad \mathbf{G}_{2,k}^{-1} \quad \Big| \quad -\mathbf{E}_{(S-2)} \right] \quad (2.93)$$

Die tangentiale Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_{K,k,t}$ des k -ten Kontaktpunkts kann mit den tangentialen Einheitsvektoren $\mathbf{s}_{k,i}$ gemäß Gleichung (2.85) sowie den zugehörigen nichtnegativen Beschleunigungskoeffizienten $\ddot{g}_{k,i}$ dargestellt werden durch

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,k,t} = -\sum_{h=1}^S \left(\mathbf{s}_{k,h} \ddot{g}_{k,h} \right) = -\text{row}_{h=1}^S \langle \mathbf{s}_{k,h} \rangle \ddot{\mathbf{g}}_{k,t} \quad , \quad \ddot{\mathbf{g}}_{k,t} = \text{col}_{h=1}^S \langle \ddot{g}_{k,h} \rangle \geq \mathbf{0} . \quad (2.94)$$

Nach Einsetzen von Gleichung (2.86), Hinzufügen der Identität $\ddot{g}_{k,n} = \ddot{g}_{k,n}$ und Abgleich mit Gleichung (2.80) folgt die Substitutionsgleichung für die orthogonalen Beschleunigungskoeffizienten am k -ten Kontaktpunkt $\ddot{\mathbf{g}}_k^\perp$:

$$\ddot{\mathbf{g}}_k^\perp = \begin{pmatrix} \ddot{g}_{k,n} \\ \ddot{g}_{k,t_1} \\ \ddot{g}_{k,t_2} \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{6,k} \begin{pmatrix} \ddot{g}_{k,n} \\ \ddot{\mathbf{g}}_{k,t} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{G}_{6,k} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 0 & -\mathbf{G}_{1,k} \\ 0 & \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Der tangentiale Anteil der Kontaktkraft $\mathbf{K}_{k,t}$ muss nun stets innerhalb oder auf dem Rand des Haftpolygons liegen, die Haftkraftreserven sind daher immer nichtnegativ, $\hat{\lambda}_{k,i} \geq 0$. Liegt $\mathbf{K}_{k,t}$ gerade auf dem i -ten Randabschnitt des Haftpolygons, dann ist die zugehörige Haftkraftreserve ausgeschöpft, $\hat{\lambda}_{k,i} = 0$, und es kann gemäß dem ebenen Fall ein Losgleiten in die dem Vektor $\mathbf{s}_{k,i}$ entgegengesetzte Richtung (was das negative Vorzeichen in Gleichung (2.94) erklärt) mit der Kontaktpunktbeschleunigung $\ddot{g}_{k,i} \geq 0$ auftreten. Daraus folgt analog zu Gleichung (2.77) eine Paarkomplementarität für alle Kontaktpunktbeschleunigungen und die zugehörigen Haftkraftreserven:

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{g}_{k,i} \geq 0 \\ \hat{\lambda}_{k,i} \geq 0 \\ \ddot{g}_{k,i} \hat{\lambda}_{k,i} = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \ddot{g}_{k,i} \downarrow 0 \\ \hat{\lambda}_{k,i} \leftarrow \hat{\lambda}_{k,i} \\ \hat{\lambda}_{k,i} \downarrow 0 \end{array} \quad (2.96)$$

2.5 Lineares Komplementaritätsproblem LCP

Vor der Formulierung des lineares Komplementaritätsproblems LCP erfolgt eine Erweiterung der Terminologie und die Einführung finiter Zustandsautomaten. Beides wird für das weitere Vorgehen in dieser Arbeit von zentraler Bedeutung sein.

2.5.1 Terminologie der Mengenkomplicitäten

Man fasst alle skalaren Kontaktgrößen, die zur nichtnegativen Beschreibung des Bindungszustands eines Kontaktpunkts zur Verfügung stehen, zu einer als *Kontaktgrößenpool* \mathbb{K} bezeichneten Menge zusammen. Beispielsweise gilt für den zuvor beschriebenen Fall des ebenen tangentialen Kontaktproblems $\mathbb{K}_t = \{\dot{g}_t^\oplus, \dot{g}_t^\ominus, \lambda_t^\oplus, \lambda_t^\ominus\}$. Wenn nun die ausschließliche paarweise Komplementarität einzelner Kontaktgrößen (hier entsprechend Gleichung (2.77)) aus dem zugehörigen Kontaktgrößenpool \mathbb{K} zu Problemen führt (beispielsweise ist $\dot{g}_t^\oplus > 0 \wedge \dot{g}_t^\ominus > 0$ physikalisch unsinnig) und durch deswegen notwendige zusätzliche Nebenbedingungen (Gleichung (2.76)) sich die Anzahl zulässiger Kombinationen von Null ungleicher Kontaktgrößen aus \mathbb{K} auf wenige Fälle beschränkt (Gleichung (2.79)), ist eine alternative Beschreibungsweise sinnvoll. Dafür wird mit den Mengen \mathbb{G}_i , die Teilmengen des Kontaktgrößenpools \mathbb{K} sind und alleamt die Mächtigkeit $d_{\mathbb{G}}$ aufweisen, die *Hypermeng*e \mathbb{Z} als Menge von Teilmengen \mathbb{G}_i definiert,

$$\mathbb{Z} = \{\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \dots, \mathbb{G}_i, \dots\} \quad , \quad \mathbb{G}_i \subset \mathbb{K} \quad , \quad |\mathbb{G}_i| = d_{\mathbb{G}} > 0 \quad , \quad (2.97)$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Die in \mathbb{Z} enthaltenen Teilmengen \mathbb{G}_i müssen *zulässig* sein. Eine Teilmenge \mathbb{G}_i ist genau dann zulässig, wenn das Auftreten eines Kontaktzustands möglich ist, der mit den in \mathbb{G}_i enthaltenen Kontaktgrößen unter Beachtung der Randbedingungen für die Kontaktkraft (approximierte COULOMB'sche Reibpyramide) und Kontaktpunktbeschleunigung (Impenetrabilität der Starrkörper) rein positiv beschrieben werden kann, so dass $\mathbb{G}_i > 0$. Alle anderen Kontaktgrößen außerhalb der betrachteten Teilmenge müssen dann gleich Null sein:

$$\left(\mathbb{G}_i > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{G}_i : x > 0 \right) \Rightarrow \forall y \notin \mathbb{G}_i : y = 0 \quad , \quad x, y \in \mathbb{K} \quad , \quad \mathbb{G}_i \in \mathbb{Z} \quad (2.98)$$

- Die Hypermenge \mathbb{Z} ist *vollständig*: Für jeden möglichen Kontaktzustand gibt es mindestens eine Teilmenge $\mathbb{G}_i \in \mathbb{Z}$, mit deren $d_{\mathbb{G}}$ Kontaktgrößen der Kontaktzustand nichtnegativ beschrieben werden kann, $\mathbb{G}_i \geq 0$. Die Gesamtheit der möglichen Kontaktzustände wird durch \mathbb{Z} also vollständig abgedeckt.
- Die Teilmengen \mathbb{G}_i sind so gewählt, dass \mathbb{Z} *minimal* ist: Für jeden möglichen Kontaktzustand gibt es dann höchstens eine Teilmenge $\mathbb{G}_i \in \mathbb{Z}$, deren $d_{\mathbb{G}}$ Kontaktgrößen den Kontaktzustand rein positiv beschreiben.

$$\mathbb{G}_i > 0 \Rightarrow \forall \mathbb{G}_k \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{G}_k : x = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{K} \quad , \quad \mathbb{G}_i \neq \mathbb{G}_k \quad (2.99)$$

Bei der Abdeckung der Gesamtheit der möglichen Kontaktzustände dürfen sich die $\mathbb{G}_i \in \mathbb{Z}$ also nicht überschneiden. Somit kann es durchaus Teilmengen \mathbb{G}_k geben, die nach diesem dritten Punkt zwar keinen Platz mehr in der Hypermengen \mathbb{Z} finden, nach dem ersten Punkt aber trotzdem eine zulässige Teilmenge darstellen.

Die in \mathbb{Z} enthaltenen Teilmengen sind dann komplementär zueinander, aus der Zulässigkeit einer Teilmenge $\mathbb{G}_i \in \mathbb{Z}$ zur rein positiven Beschreibung des Kontaktzustands folgt die Unzulässigkeit jeder anderen Teilmenge $\mathbb{G}_k \in \mathbb{Z}$. Diese Art der Komplementarität von Mengen soll im Folgenden im Gegensatz zur bisherigen Paarkomplementarität als *Mengenkomplementarität* bezeichnet werden.

Die Teilmengen in \mathbb{Z} decken einzelne Bereiche der Gesamtheit der möglichen Kontaktzustände ab. An den Grenzen zwischen diesen Bereichen gehen jeweils zwei Teilmengen \mathbb{G}_i und \mathbb{G}_k durch Austausch einer Kontaktgröße *mengenkomplementär* ineinander über, die restlichen Kontaktgrößen der beiden Teilmengen sind dabei identisch. In Anlehnung an die Nomenklatur bei Paarkomplementaritäten gilt dann:

$$\mathbb{G}_i \begin{array}{c} \xrightarrow{a \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{b \downarrow 0} \end{array} \mathbb{G}_k \quad , \quad a \in \mathbb{G}_i \quad , \quad b \in \mathbb{G}_k \quad , \quad \mathbb{G}_i \setminus a = \mathbb{G}_k \setminus b \quad , \quad \{\mathbb{G}_i, \mathbb{G}_k\} \in \mathbb{Z} \quad (2.100)$$

Einer einzelnen Kontaktgröße c ist es demnach durchaus möglich, in mehreren Teilmengen enthalten zu sein, $c \in \mathbb{G}_i \wedge c \in \mathbb{G}_k$.

Die nach dem ersten Punkt der obigen Auflistung zulässigen Teilmengen $\mathbb{G} \subset \mathbb{K}$, die nach dem dritten Punkt keinen Platz in \mathbb{Z} gefunden haben, werden in der Hypermengen \mathbb{N} der neutralen Teilmengen zusammengefasst. Ebenfalls als neutral bezeichnet und in \mathbb{N} eingruppiert werden die redundanten Teilmengen \mathbb{G}_{red} , für die zwar gemäß dem ersten Punkt der Auflistung kein Kontaktzustand möglich ist, der durch die in den jeweiligen \mathbb{G}_{red} enthaltenen skalaren Kontaktgrößen rein positiv beschrieben werden könnte,

$$\forall x \notin \mathbb{G}_{red,i} : x = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists y \in \mathbb{G}_{red,i} : y < 0 \quad , \quad \{x, y\} \subset \mathbb{K} \quad , \quad (2.101)$$

die jedoch auch keinen Rangabfall der Pivotmatrix verursachen und somit den LEMKE'schen Lösungsalgorithmus (\rightarrow Abschnitt 2.5.3) nicht gefährden.

Kritisch sind letztlich die verbliebenen Teilmengen $\tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{K}$, die sehr wohl einen Rangabfall und somit ein Scheitern des Lösungsalgorithmus verursachen. Sie werden in der Hypermengen \mathbb{U} der unzulässigen Teilmengen zusammengefasst.

Die genannten drei Hypermengen \mathbb{Z} , \mathbb{N} und \mathbb{U} sind disjunkt und umfassen sämtliche möglichen Teilmengen \mathbb{G}_i der Mächtigkeit $d_{\mathbb{G}}$:

$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{Z} \cap \mathbb{U} = \mathbb{N} \cap \mathbb{U} = \emptyset \quad , \quad \forall \mathbb{G}_i \subset \mathbb{K} : |\mathbb{G}_i| = d_{\mathbb{G}} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{G}_i \in \{ \mathbb{Z} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{U} \} \quad (2.102)$$

Sind die skalaren Kontaktgrößen in \mathbb{K} und darauf aufbauend die zulässigen Teilmengen $\mathbb{G}_i \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass für jedes \mathbb{G}_i nur mengenkomplementäre Übergänge zu anderen zulässigen $\mathbb{G}_k \in \mathbb{Z}$ möglich sind, ohne dass zu neutralen Teilmengen $\mathbb{G} \in \mathbb{N}$ oder unzulässigen Teilmengen $\mathbb{G} \in \mathbb{U}$ übergegangen werden könnte, dann wird die Hypermengen \mathbb{Z} als *streng abgeschlossen* bezeichnet.

$$\forall \mathbb{G}_i \in \mathbb{Z}: \quad \mathbb{G}_i \begin{array}{c} a \downarrow 0 \\ \rightleftarrows \\ b \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbb{G}_k \overset{!}{\in} \mathbb{Z} \quad , \quad \{a, b\} \in \mathbb{K} \quad (2.103)$$

Die Hypermengende \mathbb{Z} wird abgeschwächt als *neutral abgeschlossen* bezeichnet, wenn zwar mengenkomplementäre Übergänge zwischen \mathbb{Z} und Teilen der Hypermengende der neutralen Teilmengen $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{N}$ möglich, solche zur Hypermengende der unzulässigen Teilmengen \mathbb{U} jedoch ausgeschlossen sind:

$$\forall \mathbb{G}_i \in \left\{ \mathbb{Z} \cup \mathbb{N}^* \right\}: \quad \mathbb{G}_i \begin{array}{c} a \downarrow 0 \\ \rightleftarrows \\ b \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbb{G}_k \overset{!}{\in} \left\{ \mathbb{Z} \cup \mathbb{N}^* \right\} \quad , \quad \{a, b\} \in \mathbb{K} \quad (2.104)$$

Ist auch dies nicht der Fall, dann ist die Hypermengende \mathbb{Z} *nicht abgeschlossen*. Die in \mathbb{Z} enthaltenen zulässigen Teilmengen können dann durch mengenkomplementären Austausch einer skalaren Kontaktgröße in unzulässige Teilmengen $\tilde{\mathbb{G}} \in \mathbb{U}$ übergehen:

$$\exists \mathbb{G}_i \in \mathbb{Z}: \quad \mathbb{G}_i \begin{array}{c} a \downarrow 0 \\ \rightleftarrows \\ b \downarrow 0 \end{array} \tilde{\mathbb{G}} \quad , \quad \{a, b\} \in \mathbb{K} \quad (2.105)$$

Der LEMKE'sche Lösungsalgorithmus arbeitet nun genau dann robust, wenn die Hypermengende \mathbb{Z} streng oder neutral abgeschlossen ist, wenn also kein mengenkomplementärer Übergang zu einer unzulässigen Teilmenge gemäß Gleichung (2.105) möglich ist.

Als Beispiel zur Verdeutlichung der obigen, abstrakten Begriffe sei das zuvor behandelte ebene tangential Kontaktproblem betrachtet. Gemäß Gleichung (2.79) existieren drei zulässige Teilmengen $\mathbb{G}_{t,i}$ des Kontaktgrößenpools $\mathbb{K}_t = \{\ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_t^\oplus, \lambda_t^\ominus\}$,

$$\underbrace{\mathbb{G}_{t,1} = \{\ddot{g}_t^\ominus, \lambda_t^\oplus\}}_{\text{Gleiten nach links}} \geq 0 \quad , \quad \underbrace{\mathbb{G}_{t,2} = \{\lambda_t^\oplus, \lambda_t^\ominus\}}_{\text{Haften}} \geq 0 \quad , \quad \underbrace{\mathbb{G}_{t,3} = \{\ddot{g}_t^\oplus, \lambda_t^\ominus\}}_{\text{Gleiten nach rechts}} \geq 0 \quad , \quad (2.106)$$

die den Hyperraum \mathbb{Z}_t der zulässigen Teilmengen bilden, $\mathbb{Z}_t = \{\mathbb{G}_{t,1}, \mathbb{G}_{t,2}, \mathbb{G}_{t,3}\}$. Die drei zulässigen Teilmengen $\mathbb{G}_{t,i}$ repräsentieren die drei geraden Abschnitte des Graphen in Bild 2.8a). Die beiden Ecken des Graphen entsprechen den beiden mengenkomplementären Übergängen der $\mathbb{G}_{t,i}$ vom Haften zum Gleiten in die beiden tangentialen Richtungen. Des Weiteren existiert gemäß Gleichung (2.78) eine unzulässige, weil physikalisch unsinnige Teilmenge $\tilde{\mathbb{G}}_t = \{\ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus\}$, $\mathbb{U}_t = \{\tilde{\mathbb{G}}_t\}$, in die die beiden zulässigen Teilmengen $\mathbb{G}_{t,1}$ und $\mathbb{G}_{t,3}$ übergehen können. Wegen $\mathbb{U}_t \neq \emptyset$ ist die vorliegende Hypermengende \mathbb{Z}_t also nicht abgeschlossen, der LEMKE'sche Lösungsalgorithmus wird somit bei einer eventuellen Aktivierung der unzulässigen Teilmenge $\tilde{\mathbb{G}}_t$ scheitern. Neutrale Teilmengen liegen nicht vor, $\mathbb{N}_t = \emptyset$. Die drei zulässigen und die eine unzulässige Teilmenge entsprechend den vier möglichen Permutationen der beiden Paarkomplementaritäten in Gleichung (2.77) und bilden einen Ringschluss komplementärer Mengen:

$$\underbrace{\underbrace{\left\{ \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus \right\}}_{\tilde{\mathbb{G}}_t}}_{\text{unzulässig}} \begin{array}{c} \ddot{g}_t^\oplus \downarrow 0 \\ \rightleftarrows \\ \lambda_t^\oplus \downarrow 0 \end{array} \underbrace{\underbrace{\left\{ \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_t^\oplus \right\}}_{\mathbb{G}_{t,1}}}}_{\text{zulässig}} \begin{array}{c} \ddot{g}_t^\ominus \downarrow 0 \\ \rightleftarrows \\ \lambda_t^\ominus \downarrow 0 \end{array} \underbrace{\underbrace{\left\{ \lambda_t^\oplus, \lambda_t^\ominus \right\}}_{\mathbb{G}_{t,2}}}}_{\text{zulässig}} \begin{array}{c} \lambda_t^\oplus \downarrow 0 \\ \rightleftarrows \\ \ddot{g}_t^\oplus \downarrow 0 \end{array} \underbrace{\underbrace{\left\{ \ddot{g}_t^\oplus, \lambda_t^\ominus \right\}}_{\mathbb{G}_{t,3}}}}_{\text{zulässig}} \begin{array}{c} \lambda_t^\ominus \downarrow 0 \\ \rightleftarrows \\ \ddot{g}_t^\ominus \downarrow 0 \end{array} \underbrace{\underbrace{\left\{ \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus \right\}}_{\tilde{\mathbb{G}}_t}}_{\text{unzulässig}} \quad (2.107)$$

2.5.2 Kontaktformulierung mit finitem Zustandsautomaten

Das tangentielle Kontaktproblem im räumlichen Fall ist in Abschnitt 2.4.3 linearisiert und durch Paarkomplementaritäten vollständig erfasst worden. Wie zuvor im ebenen Fall lassen sich nun die Paarkomplementaritäten durch Mengenkompentaritäten ersetzen. Dazu wird die Gesamtheit aller theoretisch möglichen Permutationen der paarkomplementären Kontaktgrößen auf nur einige wenige, physikalisch sinnvolle Fälle beschränkt. Es sei beispielsweise ein vierseitig approximierter Reibkegel am k -ten Kontaktpunkt betrachtet, $S=4$. Der zugehörige Kontaktgrößenpool lautet dann:

$$\mathbb{K}_{k,t} = \left\{ \ddot{g}_{k,1}, \ddot{g}_{k,2}, \ddot{g}_{k,3}, \ddot{g}_{k,4}, \hat{\lambda}_{k,1}, \hat{\lambda}_{k,2}, \hat{\lambda}_{k,3}, \hat{\lambda}_{k,4} \right\} \quad (2.108)$$

Liegt persistentes Haften am Kontaktpunkt vor, dann existieren keine Tangentialbeschleunigungen, $\ddot{g}_{k,i}=0$. Der mit „Haft“ bezeichnete Kontaktzustand wird durch die ausschließlich die Haftreserven enthaltende Teilmenge $\mathbb{G}_{k,t,Haft} \subset \mathbb{K}_{k,t}$ beschrieben:

$$\mathbb{G}_{k,t,Haft} = \left\{ \hat{\lambda}_{k,1}, \hat{\lambda}_{k,2}, \hat{\lambda}_{k,3}, \hat{\lambda}_{k,4} \right\} \geq 0 \quad (2.109)$$

Wird eine der vier Haftkraftreserven ausgeschöpft, $\hat{\lambda}_{k,i}=0$, dann liegt die tangentielle Kontaktkraft $\mathbf{K}_{k,t}$ auf einem der Randabschnitte des Haftpolygons, und es kann ein Losgleiten in der zum Vektor $\mathbf{s}_{k,i}$ entgegengesetzten Richtung mit der Beschleunigung $\ddot{g}_{k,i} \geq 0$ auftreten. Ein solcher Kontaktzustand, an dem eine tangentielle Kontaktpunktbeschleunigung, ansonsten aber nur Kraftkoeffizienten beteiligt sind, sei im Folgenden mit „Gleit_⊙“ bezeichnet. Die zugehörigen vier Teilmengen von $\mathbb{K}_{k,t}$ lauten:

$$\mathbb{G}_{k,t,Gleit_{\odot},i} = \left\{ \ddot{g}_{k,i}, \hat{\lambda}_{k,a}, \hat{\lambda}_{k,b}, \hat{\lambda}_{k,c} \right\} \geq 0 \quad , \quad \{a,b,c\} \neq i \quad (2.110)$$

Verschwindet eine weitere Haftkraftreserve, $\hat{\lambda}_{k,j}=0$, ist ein Losgleiten in eine Richtung innerhalb des durch die tangentialen Einheitsvektoren $-\mathbf{s}_{k,i}$ und $-\mathbf{s}_{k,j}$ aufgespannten Sektors möglich. Für die zugeordneten Beschleunigungsgrößen gilt $\ddot{g}_{k,i} \geq 0$ und $\ddot{g}_{k,j} \geq 0$. Die tangentielle Kontaktkraft $\mathbf{K}_{k,t}$ liegt dann auf einer der Ecken des Haftpolygons, z.B. Punkt A in Bild 2.10. Somit sind nur Teilmengen mit in benachbarte Richtungen $\mathbf{s}_{k,i}$ und $\mathbf{s}_{k,j}$, $\sphericalangle(\mathbf{s}_{k,i}, \mathbf{s}_{k,j}) = 2\pi/S$, zeigende Tangentialbeschleunigungen $\ddot{g}_{k,i}$ und $\ddot{g}_{k,j}$ zur nichtnegativen Beschreibung des mit „Gleit_⊗“ bezeichneten Kontaktzustands relevant, welcher folgende vier Teilmengen von $\mathbb{K}_{k,t}$ umfasst:

$$\mathbb{G}_{k,t,Gleit_{\otimes},i} = \left\{ \ddot{g}_{k,i}, \ddot{g}_{k,j}, \hat{\lambda}_{k,a}, \hat{\lambda}_{k,b} \right\} \geq 0 \quad , \quad \{a,b\} \cap \{i,j\} = \emptyset \quad (2.111)$$

Die mengenkompentären Zusammenhänge zwischen den Kontaktzuständen *Haft*, *Gleit_⊙* und *Gleit_⊗* lassen sich darstellen durch

$$\mathbb{G}_{k,t,Haft} \begin{array}{c} \hat{\lambda}_{k,i} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \ddot{g}_{k,i} \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_{k,t,Gleit_{\odot},i} \begin{array}{c} \hat{\lambda}_{k,j} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \ddot{g}_{k,j} \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_{k,t,Gleit_{\otimes},i} \quad (2.112)$$

Die Teilmengen $\mathbb{G} = \{ \ddot{g}_{k,i}, \ddot{g}_{k,l}, \hat{\lambda}_{k,a}, \hat{\lambda}_{k,c} \} \geq 0$, $\{a,c\} \cap \{i,l\} = \emptyset$, die aus dem Kontaktzustand *Gleit_⊙* durch Austausch einer zweiten Haftkraftreserve $\hat{\lambda}_{k,l}$ hervorgehen, die

der ersten $\hat{\lambda}_{k,i}$ nicht benachbart ist, $\sphericalangle(\mathbf{s}_{k,i}, \mathbf{s}_{k,l}) > 2\pi/S$, führen zwar zu keinem Rangabfall der Pivotmatrix und somit zu keinem Scheitern des LEMKE-Algorithmus (\rightarrow Abschnitt 2.5.3). Sie erzwingen jedoch wegen Gleichung (2.93) für mindestens eine andere, dritte Haftkraftreserve einen negativen Wert und können daher den Kontaktzustand niemals durch ausschließlich nichtnegative Werte für die Kontaktgrößen beschreiben. Diese Teilmengen sind gemäß Gleichung (2.101) redundant und somit der Hypermengende der neutralen Teilmengen \mathbb{N} zugehörig. Anschaulich liegt die vektorielle tangentielle Kontaktkraft $\mathbf{K}_{k,t}$ dann auf einem Schnittpunkt zweier Haftpolygonbegrenzungen, der nicht zu dem Haftpolygon selbst gehört, z.B. Punkt B in Bild 2.10.

Weitere zulässige Teilmengen können nicht existieren, weil sie das Verschwinden einer dritten Haftkraftreserve erfordern würden, was jedoch sowohl aus der Anschauung heraus, vgl. Bild 2.10, als auch mathematisch aus Gleichung (2.93) folgend unmöglich ist. Somit gilt für die Hypermengende \mathbb{Z} der zulässigen Teilmengen:

$$\mathbb{Z}_{k,t} = \mathbb{G}_{k,t,Haft} \cup \bigcup_{h=1}^4 \left(\left\{ \mathbb{G}_{k,t,Gleit_{\textcircled{1}},h}, \mathbb{G}_{k,t,Gleit_{\textcircled{2}},h} \right\} \right) \quad (2.113)$$

Wie schon beim ebenen Fall gehen die genannten komplementären Teilmengen durch Austausch jeweils einer skalaren Kontaktgröße ineinander über. Die Mengenkompementaritäten zwischen den neun zulässigen Teilmengen lassen sich entsprechend Gleichung (2.107) darstellen durch:

$$\begin{array}{l} \left\{ \ddot{g}_{k,2}, \ddot{g}_{k,3}, \hat{\lambda}_{k,1}, \hat{\lambda}_{k,4} \right\} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\hat{g}_{k,3} \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\hat{\lambda}_{k,3} \downarrow 0} \end{array} \left\{ \ddot{g}_{k,2}, \hat{\lambda}_{k,1}, \hat{\lambda}_{k,3}, \hat{\lambda}_{k,4} \right\} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\hat{\lambda}_{k,1} \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\hat{g}_{k,1} \downarrow 0} \end{array} \left\{ \ddot{g}_{k,1}, \ddot{g}_{k,2}, \hat{\lambda}_{k,3}, \hat{\lambda}_{k,4} \right\} \\ \hat{\lambda}_{k,2} \downarrow 0 \uparrow \downarrow \ddot{g}_{k,2} \downarrow 0 \qquad \hat{\lambda}_{k,2} \downarrow 0 \uparrow \downarrow \ddot{g}_{k,2} \downarrow 0 \qquad \hat{\lambda}_{k,2} \downarrow 0 \uparrow \downarrow \ddot{g}_{k,2} \downarrow 0 \\ \left\{ \ddot{g}_{k,3}, \hat{\lambda}_{k,1}, \hat{\lambda}_{k,2}, \hat{\lambda}_{k,4} \right\} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\hat{g}_{k,3} \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\hat{\lambda}_{k,3} \downarrow 0} \end{array} \left\{ \hat{\lambda}_{k,1}, \hat{\lambda}_{k,2}, \hat{\lambda}_{k,3}, \hat{\lambda}_{k,4} \right\} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\hat{\lambda}_{k,1} \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\hat{g}_{k,1} \downarrow 0} \end{array} \left\{ \ddot{g}_{k,1}, \hat{\lambda}_{k,2}, \hat{\lambda}_{k,3}, \hat{\lambda}_{k,4} \right\} \\ \hat{\lambda}_{k,4} \downarrow 0 \uparrow \downarrow \ddot{g}_{k,4} \downarrow 0 \qquad \hat{\lambda}_{k,4} \downarrow 0 \uparrow \downarrow \ddot{g}_{k,4} \downarrow 0 \qquad \hat{\lambda}_{k,4} \downarrow 0 \uparrow \downarrow \ddot{g}_{k,4} \downarrow 0 \\ \left\{ \ddot{g}_{k,3}, \ddot{g}_{k,4}, \hat{\lambda}_{k,1}, \hat{\lambda}_{k,2} \right\} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\hat{g}_{k,3} \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\hat{\lambda}_{k,3} \downarrow 0} \end{array} \left\{ \ddot{g}_{k,4}, \hat{\lambda}_{k,1}, \hat{\lambda}_{k,2}, \hat{\lambda}_{k,3} \right\} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\hat{\lambda}_{k,1} \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\hat{g}_{k,1} \downarrow 0} \end{array} \left\{ \ddot{g}_{k,1}, \ddot{g}_{k,4}, \hat{\lambda}_{k,2}, \hat{\lambda}_{k,3} \right\} \end{array} \quad (2.114)$$

Es ist offensichtlich, dass eine solche Darstellungsform aus Gründen der Übersichtlichkeit inakzeptabel ist, zumal der hier dargestellte Fall mit $S=4$ noch vergleichsweise simpel ist. Zur Darstellung von Mengenkompementaritäten wird daher im Folgenden eine vereinfachte grafische Form benutzt, welche alle zulässigen Zustände eines Systems zusammenfassen, die Übergänge zwischen den einzelnen Zuständen, die den Austausch jeweils eines skalaren Elements kennzeichnen, durch einfache Linienverbindungen symbolisieren und als *finite Zustandsautomaten* bezeichnet werden. Bild 2.11 zeigt exemplarisch für das oben geschilderte tangentielle, räumliche Kontaktproblem mit dem Polygonisierungsgrad $S=4$ den zugehörigen finiten Zustandsautomaten. Dabei sind zusätzlich zu den zulässigen Teilmengen $\mathbb{G}_{k,t} \in \mathbb{Z}_{k,t}$ gemäß Gleichung (2.114) in der rechten Bildhälfte die neutralen Teilmengen $\mathbb{G}_{k,t} \in \mathbb{N}_{k,t}$ sowie die unzulässigen Teilmengen $\mathbb{G}_{k,t} \in \mathbb{U}_{k,t}$ dargestellt.

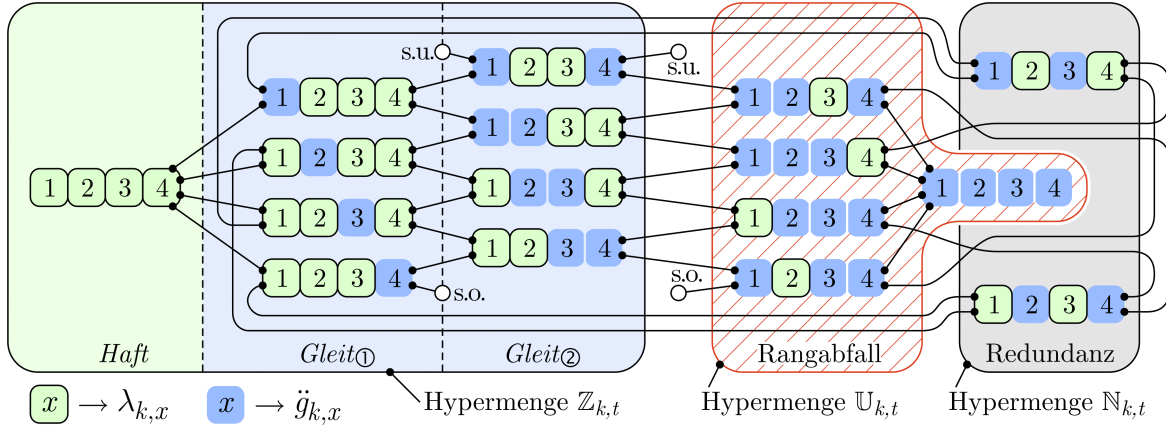


Bild 2.11: Finiter Zustandsautomat der tangentialen Kontaktgrößen für $S=4$

2.5.3 Formulierung des LCPs

Mit der zentralen Bewegungsgleichung (2.65) bzgl. der orthogonalen Kontaktgrößen, den zusammenfassenden Gleichungen (2.63) und (2.91), den Substitutionsgleichungen (2.89), (2.93) und (2.95) zwischen den orthogonalen und den haftpolygonbezogenen, tangentialen Kontaktgrößen sowie den Paarkomplementaritäten gemäß den Gleichungen (2.70) bzw. (2.96) liegt ein hinreichender Satz von Gleichungen vor, um das Kontaktproblem der einseitig gebundenen Basis des mobilen Roboters zu lösen, um also eine Aussage bezüglich des sicheren Stands des mobilen Roboters zu treffen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{(3n_{P,B})} \\ -\mathbf{W}_\lambda^T \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{W}_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}^\perp \\ \boldsymbol{\lambda}^\perp \end{bmatrix} &= \mathbf{c}, \quad \mathbf{g}^\perp = \text{col}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \mathbf{g}_k^\perp \rangle, \quad \boldsymbol{\lambda}^\perp = \text{col}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \boldsymbol{\lambda}_k^\perp \rangle, \\ \boldsymbol{\lambda}_k^\perp &= \mathbf{G}_{3,k} \begin{pmatrix} \lambda_{k,n} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_{5,k} \begin{pmatrix} \lambda_{k,n} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}_k^\perp = \mathbf{G}_{6,k} \begin{pmatrix} \ddot{g}_{k,n} \\ \ddot{\mathbf{g}}_{k,t} \end{pmatrix}, \\ \ddot{g}_{k,n} \geq 0 \wedge \lambda_{k,n} \geq 0 \wedge \ddot{g}_{k,n} \lambda_{k,n} &= 0, \quad \ddot{g}_{k,i} \geq 0 \wedge \hat{\lambda}_{k,i} \geq 0 \wedge \ddot{g}_{k,i} \hat{\lambda}_{k,i} = 0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

Fasst man die auf die approximierten Reibpyramide bezogenen Kontaktgrößen an den $n_{P,B}$ Kontaktpunkten der Basis zusammen,

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = \text{col}_{k=1}^{n_{P,B}} \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_{k,n} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}_k \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \ddot{\mathbf{g}} = \text{col}_{k=1}^{n_{P,B}} \left\langle \begin{pmatrix} \ddot{g}_{k,n} \\ \ddot{\mathbf{g}}_{k,t} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (2.116)$$

dann folgt aus dem Gleichungssatz (2.115) die Gleichung zur Bestimmung der Kontaktgrößenvektoren $\ddot{\mathbf{g}}$ und $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \text{diag}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \mathbf{G}_{6,k} \rangle & -\mathbf{W}_\lambda^T \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{W}_\lambda \text{diag}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \mathbf{G}_{3,k} \rangle \\ \mathbf{0} & \text{diag}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \mathbf{G}_{5,k} \rangle \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

mit den paarkomplementären Nebenbedingungen $\ddot{\mathbf{g}} \geq 0 \wedge \hat{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0 \wedge \ddot{\mathbf{g}}^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = 0$. Bezüglich der Dimensionen der beteiligten Matrizen gilt

$$\mathbf{G}_{5,k} \in \mathbb{R}^{(S-2) \times (S+1)} \wedge \mathbf{G}_{6,k} \in \mathbb{R}^{3 \times (S+1)} \Rightarrow \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_{P,B}(S+1) \times n_{P,B}(2S+2)}, \quad (2.118)$$

die Matrix \mathbf{H} hat also doppelt so viele Spalten wie Zeilen und weist somit die für das gewöhnliche LEMKE-Verfahren (siehe unten) benötigte Dimensionierung auf. Durch Umsortieren der Kontaktgrößen und dementsprechenden Austausch der Spalten von \mathbf{H} geht Gleichung (2.117) über in:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_x & \mathbf{H}_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ & \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \text{col}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \langle \hat{\lambda}_{k,n} \quad \hat{\lambda}_{k,1} \quad \hat{\lambda}_{k,2} \rangle^T \rangle \\ \text{col}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \text{col}_{i=3}^S \langle \ddot{g}_{k,i} \rangle \rangle \end{pmatrix} \geq 0, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \text{col}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \langle \ddot{g}_{k,n} \quad \ddot{g}_{k,1} \quad \ddot{g}_{k,2} \rangle^T \rangle \\ \text{col}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \text{col}_{i=3}^S \langle \hat{\lambda}_{k,i} \rangle \rangle \end{pmatrix} \geq 0 \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

Wegen der Struktur der Matrizen $\mathbf{G}_{5,k}$ und $\mathbf{G}_{6,k}$ und damit der Matrix \mathbf{H} ist \mathbf{H}_y eine obere Dreiecksmatrix mit besetzter Hauptdiagonale und daher stets invertierbar. Mit

$$\mathbf{A} = -\mathbf{H}_y^{-1} \mathbf{H}_x, \quad \mathbf{b} = \mathbf{H}_y^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

lässt sich Gleichung (2.119) somit in der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \geq 0 \wedge \mathbf{y} \geq 0 \wedge \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0, \quad (2.121)$$

schreiben, die als *Lineares Komplementaritätsproblem* (engl. LCP) in Standardform bekannt ist und einen Sonderfall des allgemeinen Komplementaritätsproblems

$$x_i \geq 0 \wedge f_i(\mathbf{x}) \geq 0 \wedge x_i f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in \{1 \dots n\} \quad (2.122)$$

darstellt. Probleme dieser Art sind nicht auf das Feld der Mechanik beschränkt, man findet sie in vielen wissenschaftlichen Gebieten [49]. Im Hinblick auf die Linearität des Problems wurden zur Lösung von LCPs eine Vielzahl unterschiedlicher Pivotalgorithmen entwickelt [35] [109]. Der Algorithmus von LEMKE [94] ist ein auf dem Simplexverfahren der linearen Optimierung basierender komplementärer Pivotalgorithmus und stellt den wohl wichtigsten Vertreter der Gattung von Lösern dar, die sich für Starrkörpersysteme mit reibungsbehafteten einseitigen Kontakten eignen. Seine Funktionsweise sowie Hinweise zur praktischen Implementierung sind z.B. in [34] [35] [65] und [109] detailliert dargestellt und sollen hier nicht weiter vertieft werden.

Entscheidend für den LEMKE-Algorithmus in seiner gewöhnlichen Form und wichtig für das weitere Vorgehen im vorliegenden Zusammenhang ist, dass die Paarkomplementaritäten die sogenannten Basis-Austauschschritte vorgeben, bei denen entsprechend der Zueinandergehörigkeit jeweils zweier paarkomplementärer Variablen jeder Spalte der Pivotmatrix paarkomplementär eine andere Spalte zugeordnet ist. Wird eine bestimmte Spalte der Pivotmatrix bei einem Iterationsschritt deaktiviert, kann

statt ihrer stets nur eine bestimmte andere Spalte aktiviert werden. Der LEMKE-Algorithmus liefert zuverlässig genau eine der möglicherweise mehreren Lösungen des Problems, wenn die Pivotmatrix wohlkonditioniert ist. Dies ist der Fall, wenn die jeweils aktiven Spalten der Pivotmatrix den Vektorraum immer vollständig aufspannen und somit die Pivotmatrix niemals einen Rangabfall aufweist.

Bei der Analyse des Bindungszustands des betrachteten mobilen Roboters erweist sich nun diese Forderung als Problem. Wie weiter oben dargestellt, existieren durchaus Permutationen der paarkomplementären Kontaktgrößen, die physikalisch unzulässig sind. So führt beispielsweise die Teilmenge

$$\tilde{\mathbb{G}}_{k,t} = \left\{ \ddot{g}_{k,h}, \ddot{g}_{k,i}, \ddot{g}_{k,j}, \hat{\lambda}_{k,a} \right\} \geq 0 \quad , \quad a \notin \{h, i, j\} \quad , \quad \tilde{\mathbb{G}}_{k,t} \subset \mathbb{K}_{k,t} \quad (2.123)$$

bezüglich des in Gleichung (2.108) definierten Kontaktgrößenpools $\mathbb{K}_{k,t}$ des räumlichen tangentialen Kontaktproblems zu einem Rangabfall, weil sich erstens mehr als zwei haftpolygonbezogene, tangentiale Kontaktpunktbeschleunigungen ungleich Null nach Gleichung (2.95) nicht mehr eindeutig bestimmen lassen, und zweitens gemäß der Paarkomplementarität dann drei Haftkraftreserven gleich Null sein müssten, was an den tangentialen Kontaktkraftvektor $\mathbf{K}_{k,t}$ die unerfüllbare Forderung stellt, sich auf drei Randbegrenzungen des Haftpolygons gleichzeitig zu befinden. Solche Teilmengen gehören der Hypermengende \mathbb{U} der unzulässigen Teilmengen an, $\tilde{\mathbb{G}}_{k,t} \in \mathbb{U}_{k,t}$.

Es wurde nun im Rahmen der Berechnungen zu dieser Arbeit beobachtet, dass der LEMKE-Algorithmus in seiner gewöhnlichen Form mitunter zu einer der unzulässigen Teilmengen $\mathbb{G} \in \mathbb{U}$ übergeht, damit linear abhängige Pivotspalten aktiviert und einen Rangabfall der Pivotmatrix bewirkt. Der bei jedem Pivotschritt notwendige GAUß'sche Eliminationsschritt kann dann nicht durchgeführt werden und der Lösungsprozess muss ergebnislos abgebrochen werden. Dem ursprünglichen LEMKE-Algorithmus mangelt es also an Robustheit gegenüber schlecht konditionierten Pivotmatrizen.

In dem folgenden Kapitel wird daher mit dem Ziel einer robusten Lösung des Kontaktproblems eine alternative Beschreibung der Kontaktgrößen vorgestellt, die einen modifizierten LEMKE-Algorithmus begründet. Zentraler Baustein dieses alternativen Ansatzes wird die zuvor dargestellte Idee der Mengenkomplementaritäten sein, die die bisherigen Paarkomplementaritäten ablösen bei der Beschreibung der Basenaustauschregeln des Pivot-Algorithmus. Auf diese Weise wird eine Verallgemeinerung des LEMKE-Verfahrens realisiert [56].

Kapitel 3

Finite Zustandsautomaten

In Kapitel 2 wurde gezeigt, dass die Modellierung der Kontaktmechanik als lineares Komplementaritätsproblem LCP in Standardform mit paarweise komplementären skalaren Kontaktgrößen zum Scheitern des LEMKE'schen Pivot-Algorithmus führen kann. Durch eine Beschreibung der Kraft $\mathbf{K}_{k,t}$ und Beschleunigung $\ddot{\mathbf{g}}_{k,t}$ am k -ten Kontaktpunkt durch mehrere, radial angeordnete Haftkraftreserven und paarkomplementär zugeordnete, radiale Beschleunigungen können im Verlauf des LEMKE-Algorithmus unzulässige Permutationen der paarkomplementären Kontaktgrößen - bzw. unzulässige Teilmengen des Kontaktgrößenpools gemäß der im Abschnitt 2.5.1 dargestellten Terminologie - aktiviert werden, die mit einem Rangabfall der Pivotmatrix einhergehen.

In diesem Kapitel wird ein alternativer Ansatz vorgestellt, der durch Aufhebung der bisherigen strikten Trennung der Kontaktkräfte \mathbf{K}_k in normale und tangentiale Anteile das Auftreten unzulässiger Kontaktgrößenpermutationen prinzipiell vermeidet. Dies wird, in Fortführung der Grundlagen für den ebenen Fall [56], durch eine modifizierte Approximation des räumlichen COULOMB'schen Reibgesetzes und damit des Reibkegels durch eine S -seitige Reibpyramide erreicht. Der Kontaktzustand an einer räumlichen einseitigen Bindung wird dann nicht mehr in Tangentialrichtung durch S Kontaktgrößen aus einem Pool der Mächtigkeit $2S$ sowie in Normalenrichtung durch eine von zwei möglichen Kontaktgrößen beschrieben, vgl. Abschnitt 2.4, sondern mit insgesamt nur drei Kontaktgrößen, die die Normalen- und Tangentialrichtung geschickt kombinieren. Wegen dieser Verschlinkung der Modellierung wird der alternative Ansatz als *kompakte Formulierung* des Kontaktproblems bezeichnet.

Die in Abschnitt 2.5.1 vorgestellten Mengenkomplicitäten stellen den Schlüssel zur kompakten Formulierung und damit zur Steigerung der Robustheit des LEMKE-Algorithmus dar. Sie lösen in Form der finiten Zustandsautomaten die Paarkomplicitäten als Regulativ für die Basis-Austauschschritte ab und begründen somit einen modifizierten LEMKE-Algorithmus. Gelingt es, eine Hypermengung \mathbb{Z}_k von zulässigen Teilmengen $\mathbb{G}_{k,i} \in \mathbb{Z}_k$ für den k -ten Kontaktpunkt aufzustellen, die entsprechend Abschnitt 2.5.1 in sich abgeschlossen ist, dann kann niemals ein Rangabfall der Pivotmatrix durch eine unzulässige Teilmenge $\tilde{\mathbb{G}} \notin \mathbb{Z}_k$ hervorgerufen werden. Einer bei einem LEMKE'schen Pivotschritt bzw. dem zugeordneten mengenkomplicitären Teilmengenübergang entfallenden skalaren Kontaktgröße x ist dann nicht mehr stets dieselbe paarkomplementäre Kontaktgröße zugeordnet. Vielmehr wird das skalare Komplement y variabel dadurch bestimmt, welche Teilmenge $\mathbb{G}_{k,i} \in \mathbb{Z}_k$ beim Basen-Austauschschritt gerade deaktiviert wird. Der so modifizierte LEMKE-Algorithmus arbeitet in wesentlich robusterer Weise als in seiner ursprünglichen Form, ein Abbruch konnte bei den zahl- und variantenreichen Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit nicht festgestellt werden.

Im Folgenden wird dieser kompakte Ansatz zunächst auf den Standardfall der einseitigen Bindung entsprechend Kapitel 2 angewendet. Anschließend wird der kompakte Ansatz der Mengenkomplicitäten auf komplexere Bindungssituationen übertragen, die aus lokalen Verspannungen des mobilen Roboters resultieren. Bis zum ersten behandelten Fall der lokalen Verspannungen in Abschnitt 3.2.2 wird dabei zur Darlegung der grundlegenden Ideen vom einfachen ebenen Fall zum praxisrelevanten räumlichen Fall übergegangen, in den darauf folgenden Fällen ist aus Platzgründen jeweils nur der ebene Fall (mit Verweis auf Anhang A für den räumlichen Fall) dargestellt.

3.1 Standardfall einseitige Bindung

3.1.1 Ebener Fall

Mit den in Abschnitt 2.4.2 eingeführten Haftkraftreserven und dem Normalanteil der Kontaktkraft standen drei Kraftkoeffizienten $\{\lambda_n, \lambda_t^\oplus, \lambda_t^\ominus\}$ zur Beschreibung der vektoriellen Kontaktkraft $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^2$ mit der Nebenbedingung gemäß Gleichung (2.76) zur Verfügung. Jeder dieser drei Kraftgrößen war eine der drei skalaren Beschleunigungskoeffizienten $\{\ddot{g}_n, \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus\}$ paarkomplementär zugeordnet, mit denen die vektorielle Kontaktpunktbeschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_K \in \mathbb{R}^2$ beschrieben wurde. Dieses Überangebot an Beschreibungsgrößen führte zur mangelnden Robustheit des LEMKE'schen Pivot-Lösers.

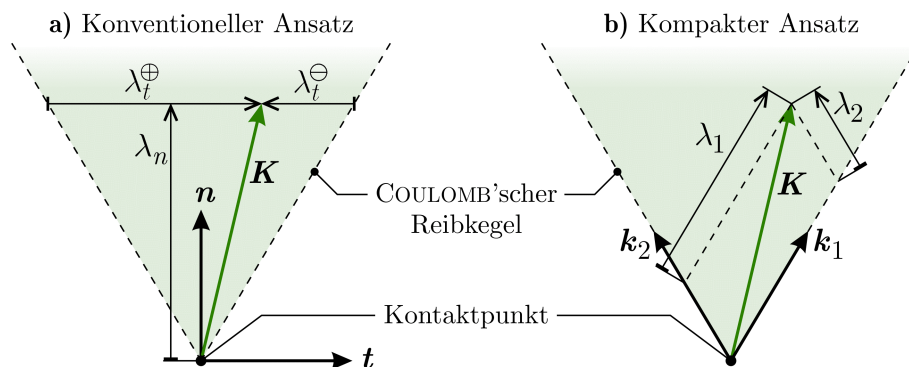


Bild 3.1: Formulierungsvarianten des Kontaktkraftvektors \mathbf{K} beim ebenen Kontaktproblem

Die Grundidee des kompakten Ansatzes besteht nun darin, die ebene vektorielle Kontaktkraft \mathbf{K} durch nur zwei statt drei skalare Kraftkoeffizienten zu beschreiben. Dazu werden statt der normalen und tangentialen Einheitsvektoren \mathbf{n} und \mathbf{t} , wie noch beim konventionellen Ansatz in Kapitel 2, zwei Einheitsvektoren \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 benutzt, die gemäß Bild 3.1 auf der Grenze des COULOMB'schen Reibkegels liegen und durch den Haftreibungskoeffizienten μ_0 bestimmt werden:

$$\mathbf{k}_1 = \left(\sqrt{1 + \mu_0^2} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \left(\sqrt{1 + \mu_0^2} \right)^{-1} \begin{pmatrix} -\mu_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Die Kontaktkraft \mathbf{K} wird dann mit skalaren Kraftkoeffizienten λ_1 und λ_2 beschrieben, die zur Einhaltung des COULOMB'schen Reibgesetzes nichtnegativ sein müssen.

$$\mathbf{K} = \lambda_1 \mathbf{k}_1 + \lambda_2 \mathbf{k}_2 \quad , \quad \lambda_1 \geq 0 \wedge \lambda_2 \geq 0 \quad (3.2)$$

Der Vektor der Kontaktpunktbeschleunigung wird unverändert über den normalen sowie den positiven und negativen tangentialen Anteil dargestellt.

$$\ddot{\mathbf{r}}_K = \mathbf{n} \ddot{g}_n + \mathbf{t} \ddot{g}_t^\oplus - \mathbf{t} \ddot{g}_t^\ominus \quad , \quad \ddot{g}_n \geq 0 \wedge \ddot{g}_t^\oplus \geq 0 \wedge \ddot{g}_t^\ominus \geq 0 \quad (3.3)$$

Der dem kompakten Ansatz zugeordnete Kontaktgrößenpool lautet dann:

$$\mathbb{K} = \{ \ddot{g}_n, \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_2 \} \quad (3.4)$$

Bei persistentem Haften der einseitigen Bindung ohne Separation in Normalenrichtung oder Losgleiten in Tangentialrichtung sind die Beschleunigungskoeffizienten gleich Null, $\ddot{g}_n = \ddot{g}_t^\oplus = \ddot{g}_t^\ominus = 0$, so dass $\ddot{\mathbf{r}}_K = \mathbf{0}$. Der Kontaktkraftvektor \mathbf{K} liegt dann innerhalb des Reibkegels mit $\lambda_1 \geq 0$ und $\lambda_2 \geq 0$, siehe Bild 3.1. Der zugehörige Kontaktzustand *Haft* wird beschrieben durch die Teilmenge

$$\mathbb{G}_{Haft} = \{ \lambda_1, \lambda_2 \} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{Haft} \subset \mathbb{K} \quad (3.5)$$

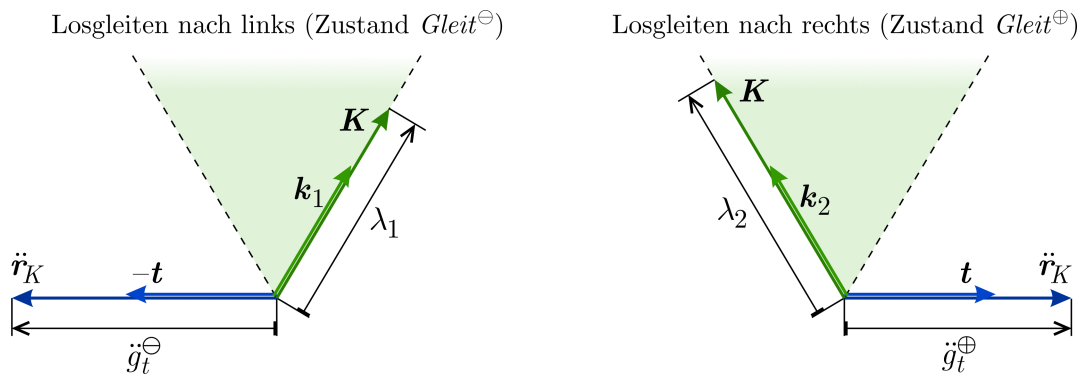


Bild 3.2: Kontaktzustand Losgleiten bei ebener einseitiger Bindung

Ein Losgleiten in die rechte (bzw. linke) Tangentialrichtung mit $\ddot{g}_t^\oplus \geq 0$ (bzw. $\ddot{g}_t^\ominus \geq 0$) erfordert, dass \mathbf{K} auf dem linken (bzw. rechten) Rand des COULOMB'schen Reibkegel liegt, weswegen der rechte (bzw. linke) Kontaktkraftkoeffizient verschwinden muss, $\lambda_1=0$ (bzw. $\lambda_2=0$), siehe Bild 3.2. Dieser Wechsel vom Kontaktzustand *Haft* zum Kontaktzustand *Gleit^{oplus}* (bzw. *Gleit^{ominus}*) ist gekennzeichnet durch den Austausch von λ_1 durch den Beschleunigungskoeffizienten \ddot{g}_t^\oplus (bzw. von λ_2 durch \ddot{g}_t^\ominus). Die zugehörigen, zu \mathbb{G}_{Haft} komplementären Teilmengen des Kontaktgrößenpools lauten:

$$\mathbb{G}_{Gleit^\oplus} = \{ \ddot{g}_t^\oplus, \lambda_2 \} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{Gleit^\ominus} = \{ \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1 \} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{Gleit^\oplus/\ominus} \subset \mathbb{K} \quad (3.6)$$

Eine Separation an der einseitigen Bindung liegt vor, wenn der Vektor der Kontaktpunktbeschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_K$ einen normalen Anteil $\ddot{g}_n \geq 0$ aufweist. In diesem Fall verschwindet die Kontaktkraft ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$); der zum Nullvektor degenerierte Kontakt-

kraftvektor \mathbf{K} zeigt dann auf die untere Spitze des Reibkegels. Zur Beschreibung von $\ddot{\mathbf{r}}_K$ werden die beiden entgegengesetzten, nichtnegativen tangentialen Beschleunigungsgrößen \ddot{g}_t^\oplus und \ddot{g}_t^\ominus herangezogen, so dass alle möglichen Beschleunigungszustände bei der Separation durch einen der beiden Kontaktzustände Sep^\oplus oder Sep^\ominus rein positiv dargestellt werden können und $\ddot{\mathbf{r}}_K$ in alle Richtungen des tangentialen Halbraums zeigen kann. Die zugehörigen Teilmengen des Kontaktgrößenpools lauten

$$\mathbb{G}_{Sep^\oplus} = \{\ddot{g}_n, \ddot{g}_t^\oplus\} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{Sep^\ominus} = \{\ddot{g}_n, \ddot{g}_t^\ominus\} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{Sep^\oplus/\ominus} \subset \mathbb{K} \quad (3.7)$$

und gehen durch Austausch der Größen \ddot{g}_t^\oplus und \ddot{g}_t^\ominus mengenkomplementär ineinander über. Bild 3.3 zeigt die Lage von $\ddot{\mathbf{r}}_K$ im tangentialen Halbraum sowie die genannten Beschleunigungsgrößen bei den zwei Separations-Kontaktzuständen.

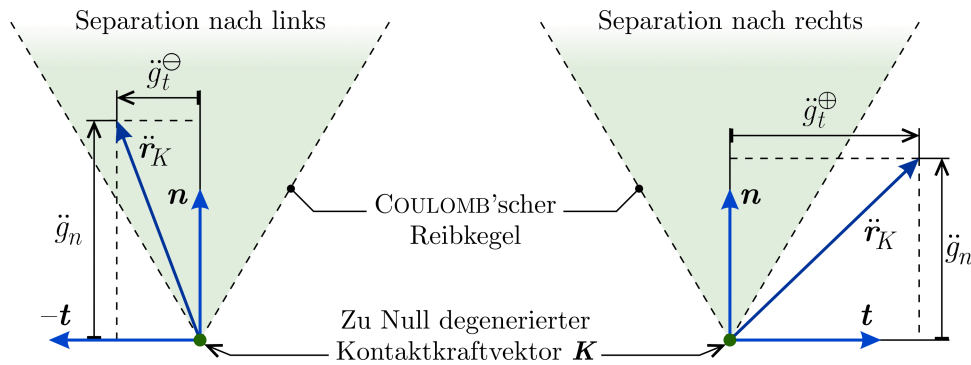


Bild 3.3: Kontaktzustand Separation bei ebener einseitiger Bindung

Zusätzlich besteht jeweils eine Komplementarität zwischen den Teilmengen \mathbb{G}_{Sep^\oplus} und $\mathbb{G}_{Gleit^\oplus}$ sowie zwischen \mathbb{G}_{Sep^\ominus} und $\mathbb{G}_{Gleit^\ominus}$, da diese durch Austausch der Größen \ddot{g}_n und λ_2 bzw. λ_1 mengenkomplementär ineinander übergehen und so den Unterschied zwischen tangentialem Losgleiten und Separation erfassen. Fasst man alle genannten Mengenkomplementaritäten zusammen,

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{g}_n, \\ \ddot{g}_t^\ominus \end{Bmatrix}}_{\mathbb{G}_{Sep^\ominus}} \begin{matrix} \ddot{g}_n \downarrow 0 \\ \lambda_1 \downarrow 0 \end{matrix} \begin{matrix} \rightleftharpoons \\ \leftarrow \end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{g}_t^\ominus, \\ \lambda_1 \end{Bmatrix}}_{\mathbb{G}_{Gleit^\ominus}} \begin{matrix} \ddot{g}_t^\ominus \downarrow 0 \\ \lambda_2 \downarrow 0 \end{matrix} \begin{matrix} \rightleftharpoons \\ \leftarrow \end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \lambda_1, \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbb{G}_{Haft}} \begin{matrix} \lambda_1 \downarrow 0 \\ \ddot{g}_t^\oplus \downarrow 0 \end{matrix} \begin{matrix} \rightleftharpoons \\ \leftarrow \end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{g}_t^\oplus, \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbb{G}_{Gleit^\oplus}} \begin{matrix} \lambda_2 \downarrow 0 \\ \ddot{g}_n \downarrow 0 \end{matrix} \begin{matrix} \rightleftharpoons \\ \leftarrow \end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{g}_n, \\ \ddot{g}_t^\oplus \end{Bmatrix}}_{\mathbb{G}_{Sep^\oplus}} \begin{matrix} \ddot{g}_t^\oplus \downarrow 0 \\ \ddot{g}_t^\ominus \downarrow 0 \end{matrix} \begin{matrix} \rightleftharpoons \\ \leftarrow \end{matrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{g}_n, \\ \ddot{g}_t^\ominus \end{Bmatrix}}_{\mathbb{G}_{Sep^\ominus}} \quad (3.8)$$

stellt man einen Ringschluss der alle Kontaktzustände beschreibenden Teilmengen fest. Die zusätzlich aus der Kombinatorik folgenden, jedoch unzulässigen Teilmengen, z.B. $\tilde{\mathbb{G}} = \{\ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus\}$, sind mit den zulässigen nicht mengenkomplementär verbunden, so dass die Hypermenge \mathbb{Z} der zulässigen Teilmengen \mathbb{G} im ebenen Fall der kompakten Formulierung streng abgeschlossen ist, vgl. Gleichung (2.103):

$$\mathbb{Z} = \left\{ \mathbb{G}_{Haft}, \mathbb{G}_{Gleit^\oplus}, \mathbb{G}_{Gleit^\ominus}, \mathbb{G}_{Sep^\oplus}, \mathbb{G}_{Sep^\ominus} \right\} \quad (3.9)$$

Bild 3.4a) zeigt den zugehörigen finiten Zustandsautomaten für die kompakte Formulierung des ebenen Kontaktproblems. Dem ist in Bild 3.4b) der finite Zustandsautomat für die konventionelle Formulierung gegenübergestellt, welcher die Paarkomple-

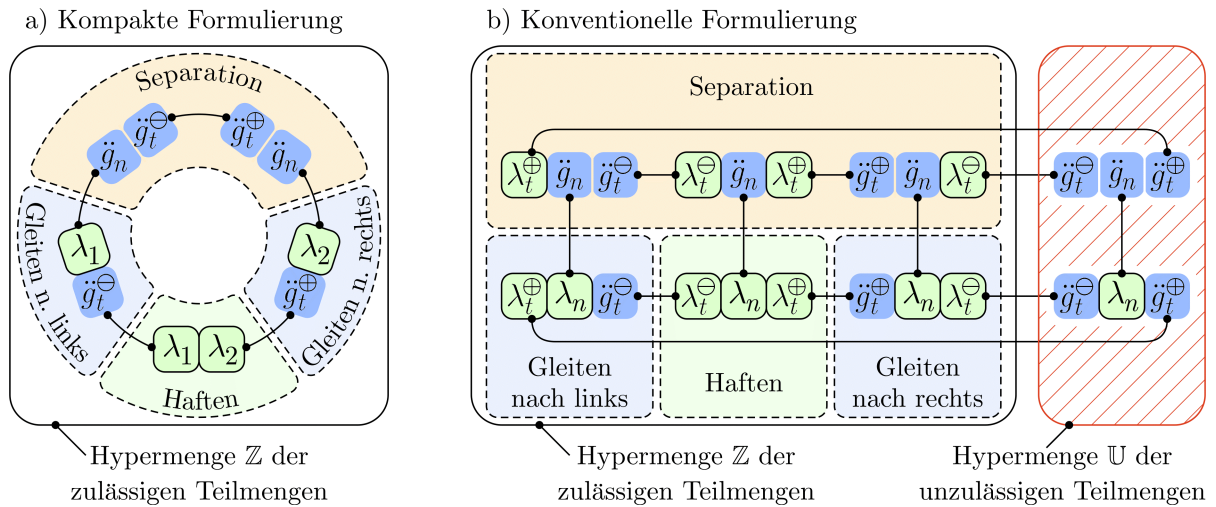


Bild 3.4: Finite Zustandsautomaten der ebenen einseitigen Bindung

mentaritäten für die Normalen- und die Tangentialrichtung gemäß den Abschnitten 2.4.1 und 2.4.2 zusammenfasst. Man erkennt den Vorteil der geringeren Größe sowie der Abgeschlossenheit der Hypermenge \mathbb{Z} bei der kompakten Formulierung.

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass sich der Begriff des „Ineinandertübergehens“ der Teilmengen bzw. der Kontaktzustände auf die Lösungsprozedur des modifizierten LEMKE-Algorithmus bezieht, also darauf, in welcher Weise die Kontaktzustände im Rahmen der Basis-Austauschschritte bei der Lösungssuche systematisch durchlaufen werden. Eine einseitige Bindung kann durchaus direkt vom Haften in die Separation übergehen, auch wenn Gleichung (3.8) und Bild 3.4a) hier einen anderen Eindruck vermitteln mögen. Natürlich muss eine zuvor haftende Bindung nicht erst einmal losgleiten, bevor ein Öffnen der Bindung in normaler Richtung auftreten darf.

3.1.2 Räumlicher Fall

Zur kompakten Formulierung des räumlichen Kontaktproblems wird das Vorgehen vom ebenen Problem auf den räumlichen COULOMB'schen Reibkegel übertragen. Die Beschleunigung des k -ten Kontaktpunktes $\ddot{\mathbf{r}}_{K,k}$ wird wie in Abschnitt 2.4 durch den normalen Einheitsvektor \mathbf{n} und die S radialen Einheitsvektoren \mathbf{s}_i beschrieben, vgl. Bild 3.5a), so dass die Gleichung (2.95) zur Substitution der orthogonalen Beschleunigungskoeffizienten \ddot{g}_k^\perp übernommen werden kann. Zur Beschreibung der vektoriellen Kontaktkraft \mathbf{K} hingegen werden S Einheitsvektoren \mathbf{k} benutzt, die gemäß Bild 3.5b) umlaufend entlang der Kanten der aus Kapitel 2 bekannten S -seitigen approximierten Reibpyramide verlaufen. Der hier und im Folgenden verwendete Hochindex „ ∇ “ symbolisiert dabei die approximierte Reibpyramide und zeigt an, dass sich die Kontaktkoeffizienten, die in derart gekennzeichneten Vektoren zusammengefasst sind, auf die Einheitsvektoren der kompakten Formulierung gemäß Bild 3.5 beziehen.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,k} = \left[\mathbf{n}_k \quad -\text{row}_{h=1}^S \langle \mathbf{s}_{k,h} \rangle \right] \ddot{\mathbf{g}}_k^\nabla \quad , \quad \ddot{\mathbf{g}}_k^\nabla = \begin{pmatrix} \ddot{g}_{k,n} \\ \text{col}_{h=1}^S \langle \ddot{g}_{k,h} \rangle \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad , \quad (3.10)$$

$$\ddot{\mathbf{g}}_k^\perp = \mathbf{G}_{6,k} \ddot{\mathbf{g}}_k^\nabla, \quad \mathbf{G}_{6,k} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ 0 & -\text{row}_{h=1}^S \left\{ \begin{bmatrix} \cos(2\pi(h-1)/S) \\ \sin(2\pi(h-1)/S) \end{bmatrix} \right\} \\ 0 & \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

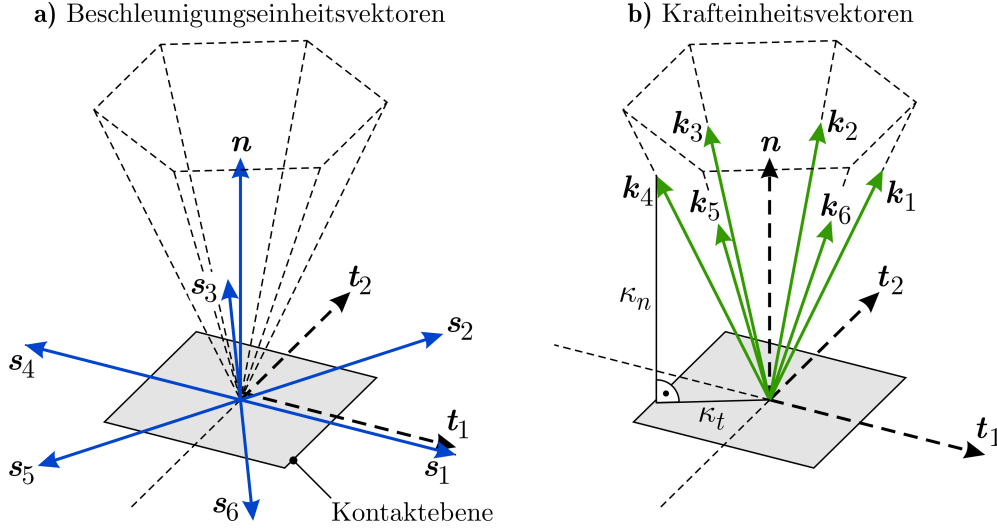


Bild 3.5: Einheitsvektoren für die kompakte räumliche Formulierung ($S = 6$)

Die Beträge des normalen und des tangentialen Anteils der Kräfteinheitsvektoren $\mathbf{k}_{k,h}$ am k -ten Kontaktpunkt in Bild 3.5b) hängen vom korrigierten Haftreibungskoeffizienten $\mu_{0,k}^\nabla$ gemäß Gleichung (2.84) sowie vom Polygonisierungsgrad S ab:

$$\kappa_{n,k} = \cos(\pi/S) / \sqrt{(\mu_{0,k}^\nabla)^2 + \cos^2(\pi/S)}, \quad \kappa_{t,k} = \mu_{0,k}^\nabla / \sqrt{(\mu_{0,k}^\nabla)^2 + \cos^2(\pi/S)} \quad (3.12)$$

Der h -te Kräfteinheitsvektor kann damit über die orthogonalen Einheitsvektoren in Normalen- und Tangentialrichtung beschrieben werden,

$$\mathbf{k}_{k,h} = \mathbf{n}_k \kappa_{n,k} + \mathbf{t}_{1,k} \kappa_{t,k} \cos(2\pi(h-1/2)/S) + \mathbf{t}_{2,k} \kappa_{t,k} \sin(2\pi(h-1/2)/S), \quad (3.13)$$

so dass für alle $\mathbf{k}_{k,h}$ zusammengefasst gilt:

$$\text{row}_{h=1}^S \langle \mathbf{k}_{k,h} \rangle = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_k & \mathbf{t}_{1,k} & \mathbf{t}_{2,k} \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_k} \mathbf{G}_{3,k}, \quad \mathbf{G}_{3,k} = \text{row}_{h=1}^S \left\langle \begin{bmatrix} \kappa_{n,k} \\ \kappa_{t,k} \cos(2\pi(h-1/2)/S) \\ \kappa_{t,k} \sin(2\pi(h-1/2)/S) \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3.14)$$

Zur Beschreibung der Kontaktkraft \mathbf{K}_k am k -ten Kontaktpunkt summiert man die Faktorierungen der Einheitsvektoren $\mathbf{k}_{k,h}$ mit skalaren Kraftkoeffizienten $\lambda_{k,h}$, welche nichtnegativ sein müssen, damit \mathbf{K}_k dem COULOMB'schen Reibgesetz folgend stets innerhalb der approximierten Reibpyramide liegt.

$$\mathbf{K}_k = \sum_{h=1}^S (\mathbf{k}_{k,h} \lambda_{k,h}) = \text{row}_{h=1}^S \langle \mathbf{k}_{k,h} \rangle \boldsymbol{\lambda}_k^\nabla, \quad \boldsymbol{\lambda}_k^\nabla = \text{col}_{h=1}^S \langle \lambda_{k,h} \rangle \geq 0 \quad (3.15)$$

Einsetzen von Gleichung (3.14) und Abgleich mit Gleichung (2.27) liefert die Gleichung zur Substitution der orthogonalen Kraftkoeffizienten λ_k^\perp durch die Kraftkoeffizienten λ_k^∇ der kompakten Kontaktformulierung:

$$N_k \lambda_k^\perp = K_k = N_k G_{3,k} \lambda_k^\nabla \quad \Rightarrow \quad \lambda_k^\perp = G_{3,k} \lambda_k^\nabla \quad (3.16)$$

Man fasst die Kontaktgrößen der kompakten Formulierung an den $n_{P,B}$ Kontaktpunkten der Basis des mobilen Roboters zur festen Umgebung zu Spaltenvektoren $\dot{\mathbf{g}}^\nabla = \text{col}\langle \dot{\mathbf{g}}_k^\nabla \rangle$ und $\boldsymbol{\lambda}^\nabla = \text{col}\langle \lambda_k^\nabla \rangle$ zusammen und erhält mit der Zusammenfassung der Gleichungen (3.11) und (3.16) für alle Kontaktpunkte,

$$\ddot{\mathbf{g}}^\perp = \text{diag}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \mathbf{G}_{6,k} \rangle \ddot{\mathbf{g}}^\nabla \quad , \quad \boldsymbol{\lambda}^\perp = \text{diag}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \mathbf{G}_{3,k} \rangle \boldsymbol{\lambda}^\nabla \quad , \quad (3.17)$$

analog zu Gleichung (2.117) die zentrale Bestimmungsgleichung der kompakten Formulierung für die kinematischen und kinetischen Kontaktgrößen $\dot{\mathbf{g}}^\nabla$ und $\boldsymbol{\lambda}^\nabla$,

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{g}}^\nabla \\ \boldsymbol{\lambda}^\nabla \end{pmatrix} = \mathbf{c} \quad , \quad \mathbf{H} = \left[\text{diag}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \mathbf{G}_{6,k} \rangle \quad \Bigg| \quad -\mathbf{W}_\lambda^T \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{W}_\lambda \text{diag}_{k=1}^{n_{P,B}} \langle \mathbf{G}_{3,k} \rangle \right] \quad , \quad (3.18)$$

mit den Nebenbedingungen $\ddot{\mathbf{g}}^\nabla \geq 0$ und $\boldsymbol{\lambda}^\nabla \geq 0$. Eine Analyse der Dimensionen der beteiligten Matrizen liefert

$$\mathbf{G}_{6,k} \in \mathbb{R}^{3 \times (s+1)} \quad , \quad \mathbf{G}_{3,k} \in \mathbb{R}^{3 \times s} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3n_{P,B} \times (2s+1)n_{P,B}} \quad , \quad (3.19)$$

das Gleichungssystem (3.18) ist also mit nur 3 Zeilen pro Kontaktpunkt deutlich kleiner als das konventionelle Pendant in Gleichung (2.117) mit $S+1$ Zeilen pro Kontaktpunkt, womit sich das Attribut der „Kompaktheit“ der Formulierung erklärt.

Zur Lösung von Gleichung (3.18) werden die Mengenkomplicitäten zwischen den Teilmengen $\mathbb{G}_{k,i}$ des Kontaktgrößenpools \mathbb{K}_k bzgl. des k -ten Kontaktpunktes aufgestellt. Die $\mathbb{G}_{k,i}$ haben die Mächtigkeit 3, d.h. die Kontaktzustände an den $n_{P,B}$ Kontaktpunkten der Basis des mobilen Roboters werden mit jeweils 3 skalaren Kraft- oder Beschleunigungskoeffizienten beschrieben.

$$\mathbb{K}_k = \dot{g}_{k,n} \cup \bigcup_{h=1}^S (\dot{g}_{k,h}) \cup \bigcup_{h=1}^S (\lambda_{k,h}) \quad , \quad \mathbb{G}_{k,j} \subset \mathbb{K}_k \in \mathbb{R}^{2S+1} \quad , \quad \mathbb{G}_{k,j} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.20)$$

Ein persistentes Haften am k -ten Kontaktpunkt ohne jeglichen Beschleunigungsanteil, $\dot{\mathbf{g}}_k^\nabla = \mathbf{0}$, wird durch die Teilmengen $\mathbb{G}_{k,\text{Haft},j}$ beschrieben, die ausschließlich drei der Kraftkoeffizienten $\lambda_{k,h}$ gemäß Gleichung (3.15) enthalten:

$$\mathbb{G}_{k,\text{Haft},j} = \left\{ \lambda_{k,a}, \lambda_{k,b}, \lambda_{k,c} \right\} \geq 0 \quad , \quad 1 \leq a < b < c \leq S \quad (3.21)$$

Bei einer Anzahl von S Kraftkoeffizienten existieren nach den Regeln der Kombinatorik $\binom{S}{3}$ (sprich „ S über 3“) mögliche Permutationen dreier verschiedener $\lambda_{k,i}$, jedoch sind lediglich $S-2$ von diesen ausreichend, um für den Zustand des persistenten Haftens die Kontaktkraft stets nichtnegativ durch

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{k}_{k,a} \lambda_{k,a} + \mathbf{k}_{k,b} \lambda_{k,b} + \mathbf{k}_{k,c} \lambda_{k,c} \quad , \quad \left\{ \lambda_{k,a}, \lambda_{k,b}, \lambda_{k,c} \right\} \geq 0 \quad (3.22)$$

beschreiben zu können. Diese Einschränkung geht einher mit der Forderung nach einer *minimalen* Hypermengende \mathbb{Z}_k von zulässigen Teilmengen (gemäß dem 3. Punkt der Auflistung der Eigenschaften von \mathbb{Z}_k in Abschnitt 2.5.1) und entspricht einer Aufteilung der S -seitigen Reibpyramide in $S-2$ Abschnitte. Hierfür gibt es zahlreiche kombinatorische Varianten. Im Folgenden soll jene Anwendung finden, die den ersten Kontaktkraftkoeffizienten $\lambda_{k,1}$ in allen Teilmengen $\mathbb{G}_{k,Haft,h}$ bereithält. Für die h -te, den Zustand *Haft* beschreibende Teilmenge gilt somit:

$$\mathbb{G}_{k,Haft,h} = \left\{ \lambda_{k,1}, \lambda_{k,h+1}, \lambda_{k,h+2} \right\} \geq 0 \quad , \quad 1 \leq h \leq S-2 \quad (3.23)$$

Die dreiseitigen Abschnitte einer dementsprechend aufgeteilten approximierten Reibpyramide enthalten allesamt an einer Ecke den Kräfteinheitsvektor $\mathbf{k}_{k,1}$. Für den Fall $S=6$ ist dies exemplarisch in Bild 3.6 dargestellt.

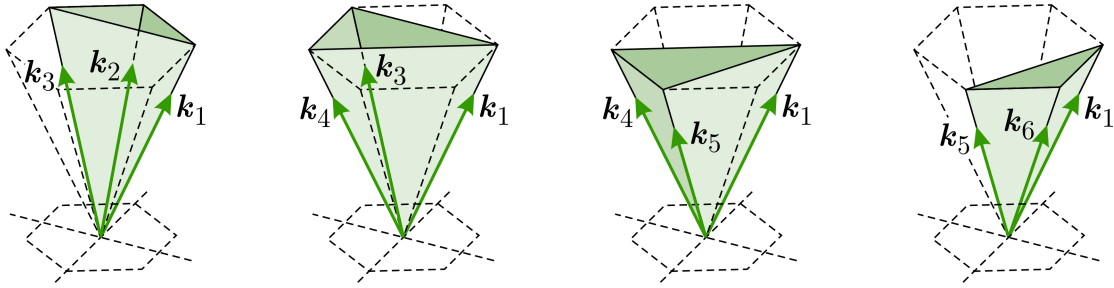


Bild 3.6: Aufteilung einer Reibpyramide ($S = 6$) in dreiseitige Abschnitte

Die gemeinsamen Grenzflächen der $S-2$ Abschnitte im Inneren der Reibpyramide entsprechen den in Abschnitt 2.5.1 beschriebenen Bereichsgrenzen der Gesamtheit der möglichen Kontaktzustände. Dort gehen jeweils zwei der Teilmengen $\mathbb{G}_{k,Haft,h}$ durch Austausch eines skalaren Kontaktkraftkoeffizienten mengenkomplementär ineinander über, so dass alle dem Zustand des persistenten Haftens zugeordneten $\mathbb{G}_{k,Haft,h}$ eine offene Kette komplementärer Teilmengen bilden:

$$\mathbb{G}_{k,Haft,h} \begin{array}{c} \lambda_{k,h+1} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_{k,h+3} \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_{k,Haft,h+1} \quad , \quad 1 \leq h \leq S-3 \quad (3.24)$$

Für den Kontaktzustand des Losgleitens gibt es analog zur konventionellen Formulierung des räumlichen Kontaktproblems in Abschnitt 2.5.2 zwei Abstufungen. Im Falle der ersten, mit $Gleit_{\circlearrowleft}$ bezeichneten Stufe liegt der Vektor der Kontaktkraft \mathbf{K}_k auf einer der S Begrenzungsflächen der Reibpyramide. Der kinematische und kinetische Zustand am k -ten Kontaktpunkt wird dann nichtnegativ durch zwei Kraft- und einen Beschleunigungskoeffizienten beschrieben.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,k} = -\mathbf{s}_{k,h} \ddot{g}_{k,h} \quad , \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{k}_{k,h-1} \lambda_{k,\overline{h-1}} + \mathbf{k}_{k,h} \lambda_{k,h} \quad , \quad 1 \leq h \leq S \quad (3.25)$$

Zur Erläuterung der Über-/Unterstreichung von $\overline{h-1}$, die zur formalen Beschreibung von benachbarten Elementen auf einem Ring dient, siehe die Hinweise zur Notation zu Beginn dieser Arbeit. Die S zugehörigen Teilmengen $\mathbb{G}_{k,Gleit_{\circlearrowleft},h} \subset \mathbb{K}_k$ lauten

$$\mathbb{G}_{k,Gleit_{\circlearrowleft},h} = \left\{ \ddot{g}_{k,h}, \lambda_{k,\overline{h-1}}, \lambda_{k,h} \right\} \geq 0 \quad , \quad 1 \leq h \leq S \quad . \quad (3.26)$$

Sie gehen mengenkomplementär aus den dem Kontaktzustand *Haft* zugeordneten Teilmengen hervor:

$$\begin{aligned} h=1: \mathbb{G}_{k,Haft,S-2} &\xleftrightarrow[\ddot{g}_{k,1} \downarrow 0]{\lambda_{k,S-1} \downarrow 0} \mathbb{G}_{k,Gleit_{\circlearrowleft},1} \quad , \quad h=2: \mathbb{G}_{k,Haft,1} \xleftrightarrow[\ddot{g}_{k,2} \downarrow 0]{\lambda_{k,3} \downarrow 0} \mathbb{G}_{k,Gleit_{\circlearrowleft},2} \\ 3 \leq h \leq S: \mathbb{G}_{k,Haft,h-2} &\xleftrightarrow[\ddot{g}_{k,h} \downarrow 0]{\lambda_{k,1} \downarrow 0} \mathbb{G}_{k,Gleit_{\circlearrowleft},h} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Zur Verdeutlichung sind in Bild 3.7 als Beispiel die mengenkomplementären Übergänge zwischen Haften und Losgleiten 1. Stufe gemäß Gleichung (3.27) für die Fälle $h=2$ und $h=3$ bei einem Approximationsgrad von $S=6$ dargestellt.

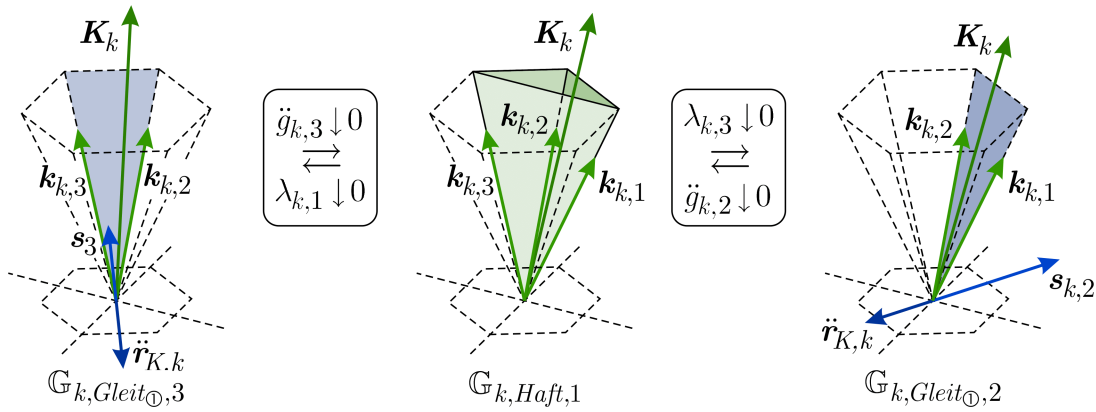


Bild 3.7: Mengenkomplementäre Übergänge $Gleit_{\circlearrowleft} \leftrightarrow Haft \leftrightarrow Gleit_{\circlearrowright}$

Im Falle der zweiten Stufe $Gleit_{\circlearrowright}$ des Losgleitens befindet sich der Vektor der Kontaktkraft \mathbf{K}_k auf einer S der Kanten der Reibpyramide und wird nur durch den dieser Kante zugeordneten Kräfteinheitsvektor beschrieben. Demgegenüber stehen zwei Beschleunigungskoeffizienten zur Beschreibung der tangentialen Kontaktpunktbeschleunigung zur Verfügung, so dass die Richtung des Losgleitens nicht mehr strikt an die Richtungen der tangentialen radialen Einheitsvektoren gebunden ist. Für die S zugehörigen Teilmengen $\mathbb{G}_{k,Gleit_{\circlearrowright},h} \subset \mathbb{K}_k$ gilt:

$$\mathbb{G}_{k,Gleit_{\circlearrowright},h} = \left\{ \ddot{g}_{k,h}, \ddot{g}_{k,\overline{h+1}}, \lambda_{k,h} \right\} \geq 0 \quad , \quad 1 \leq h \leq S \quad (3.28)$$

Somit wird der kinematische und kinetische Zustand am k -ten Kontaktpunkt in der zweiten Stufe des Losgleitens beschrieben durch:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,k} = -\mathbf{s}_{k,h} \ddot{g}_{k,h} - \mathbf{s}_{k,\overline{h+1}} \ddot{g}_{k,\overline{h+1}} \quad , \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{k}_{k,h} \lambda_{k,h} \quad , \quad 1 \leq h \leq S \quad (3.29)$$

Analog zum Aufeinanderstoßen zweier benachbarter Grenzflächen der Reibpyramide in einer der Kanten geht jede der Teilmengen $\mathbb{G}_{k,Gleit_{\circlearrowright},h}$ der zweiten Stufe des Losgleitens mengenkomplementär aus zwei Teilmengen des Kontaktzustands $Gleit_{\circlearrowleft}$ hervor:

$$\mathbb{G}_{k,Gleit_{\ominus},h} \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_{k,\overline{h-1}} \downarrow 0} \\ \xleftarrow{\dot{g}_{k,\overline{h+1}} \downarrow 0} \end{array} \mathbb{G}_{k,Gleit_{\otimes},h} \begin{array}{c} \xrightarrow{\ddot{g}_{k,h} \downarrow 0} \\ \xleftarrow{\lambda_{k,\overline{h+1}} \downarrow 0} \end{array} \mathbb{G}_{k,Gleit_{\ominus},\overline{h+1}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mathbb{G}_{k,Gleit_{\ominus},h} \quad (3.30)$$

Die jeweils S Teilmengen der ersten und zweiten Stufe des Losgleitens gehen somit abwechselnd ineinander über und bilden einen mengenkomplementären Ringschluss. Anschaulich entspricht dies der Möglichkeit für den Kontaktkraftvektor, die Hüllfläche der Reibpyramide zu umrunden und dabei von einer Seitenfläche über eine Kante zur nächsten Seitenfläche zu wechseln. Bild 3.8 zeigt die mengenkomplementären Übergänge gemäß Gleichung (3.30) für den exemplarischen Fall $h=3$ bei $S=6$.

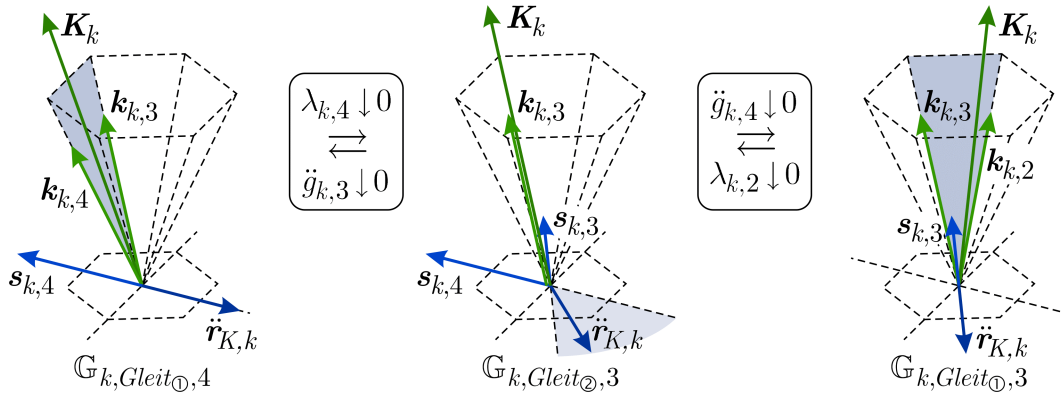


Bild 3.8: Mengenkomplementäre Übergänge $Gleit_{\ominus} \leftrightarrow Gleit_{\otimes} \leftrightarrow Gleit_{\ominus}$

Liegt letztlich eine Separation am k -ten Kontaktpunkt mit verschwindender Kontaktkraft vor, $\lambda_k^{\nabla} = \mathbf{0}$, so kann der zugehörige Kontaktzustand Sep stets durch eine der S Teilmengen $\mathbb{G}_{k,Sep,h} \subset \mathbb{K}_k$ nichtnegativ beschrieben werden, die ausschließlich drei der Beschleunigungskoeffizienten gemäß Gleichung (3.10) (zwei der tangentialen, $\ddot{g}_{k,h}$ und $\ddot{g}_{k,\overline{h+1}}$, sowie stets den einen normalen $\ddot{g}_{k,n}$) enthalten.

$$\mathbb{G}_{k,Sep,h} = \left\{ \ddot{g}_{k,n}, \ddot{g}_{k,h}, \ddot{g}_{k,\overline{h+1}} \right\} \geq 0 \quad , \quad 1 \leq h \leq S \quad (3.31)$$

Für den kinematischen und kinetischen Zustand am k -ten Kontaktpunkt gilt dann:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,k} = \mathbf{n}_k \ddot{g}_{k,n} - \mathbf{s}_{k,h} \ddot{g}_{k,h} - \mathbf{s}_{k,\overline{h+1}} \ddot{g}_{k,\overline{h+1}} \quad , \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

Die $\mathbb{G}_{k,Sep,h}$ gehen mengenkomplementär aus den $\mathbb{G}_{k,Gleit_{\otimes},h}$ durch Austausch des Kraftkoeffizienten $\lambda_{k,h}$ mit dem normalen Beschleunigungskoeffizienten hervor. Zudem bilden sie untereinander einen mengenkomplementären Ringschluss. Beides zeigt Bild 3.9 für den Fall $h=3$ bei einem Approximationsgrad von $S=6$.

$$\mathbb{G}_{k,Gleit_{\otimes},h} \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_{k,h} \downarrow 0} \\ \xleftarrow{\dot{g}_{k,n} \downarrow 0} \end{array} \mathbb{G}_{k,Sep,h} \quad , \quad \mathbb{G}_{k,Sep,h} \begin{array}{c} \xrightarrow{\ddot{g}_{k,h} \downarrow 0} \\ \xleftarrow{\ddot{g}_{k,\overline{h+2}} \downarrow 0} \end{array} \mathbb{G}_{k,Sep,\overline{h+1}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mathbb{G}_{k,Sep,h} \quad (3.33)$$

Die Gesamtheit der möglichen Kontaktzustände ist somit vollständig abgedeckt. Die minimale, in sich abgeschlossene Hypermenge \mathbb{Z}_k für den räumlichen Fall der kompakten Formulierung einer einseitigen Bindung enthält die genannten, zueinander men-

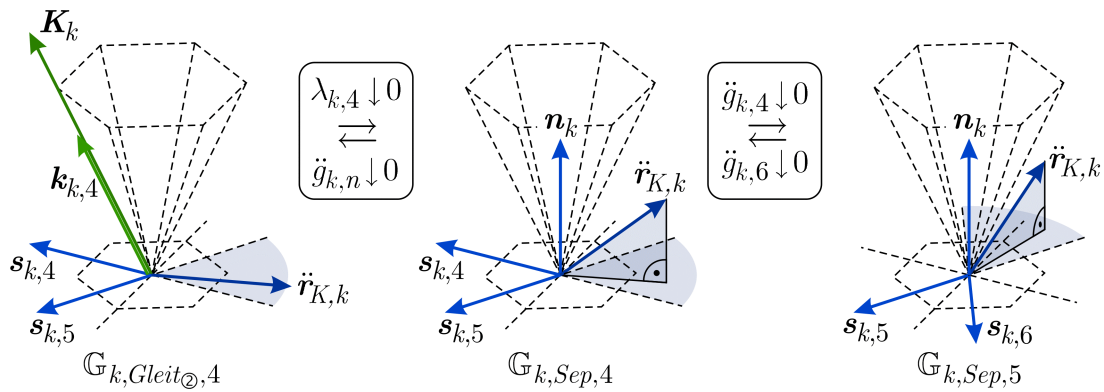


Bild 3.9: Mengenkomplementäre Übergänge $Gleit_{\textcircled{0}} \leftrightarrow Sep \leftrightarrow Sep$

genkomplementären $4S-2$ Teilmengen \mathbb{G} des Kontaktgrößenpools \mathbb{K}_k bzgl. des k -ten Kontaktpunkts gemäß Gleichung (3.20):

$$\mathbb{Z}_k = \bigcup_{h=1}^{S-2} (\mathbb{G}_{k,Haft,h}) \cup \bigcup_{h=1}^S (\{\mathbb{G}_{k,Gleit_{\textcircled{0}},h}, \mathbb{G}_{k,Gleit_{\textcircled{2}},h}, \mathbb{G}_{k,Sep,h}\}) \quad (3.34)$$

Die Mengenkomplementaritäten der Teilmengen $\mathbb{G}_{k,h} \in \mathbb{Z}_k$ und damit die Basenaustauschvorschriften für den LEMKE-Algorithmus sind in Bild 3.10 in dem zugehörigen finiten Zustandsautomaten zusammengefasst. Man stellt bei der kompakten Formulierung des räumlichen einseitigen Kontaktproblems ein Fehlen mengenkomplementärer Übergänge von den zulässigen Teilmengen $\mathbb{G}_{k,h} \in \mathbb{Z}_k$ zu unzulässigen Teilmengen $\mathbb{G} \notin \mathbb{Z}_k$ fest. Die daraus resultierende strenge Abgeschlossenheit der Hypermengen \mathbb{Z}_k begründet die robuste und zuverlässige Arbeit des modifizierten LEMKE'schen Pivot-solvers, der mittels der Zustandsautomaten aller $n_{P,B}$ Kontaktpunkte die Gleichung (3.18) zur Bestimmung des Kontaktzustandes der einseitig gebundenen Basis des mobilen Roboters löst.

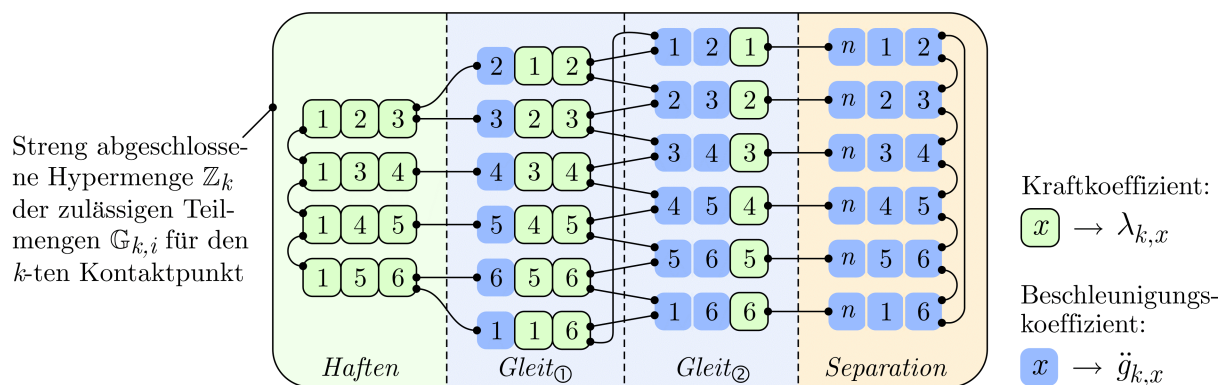


Bild 3.10: Finites Zustandsautomat für eine räumliche einseitige Bindung ($S=6$)

3.2 Lokale Verspannungen

Der zuvor dargestellte Formalismus beschreibt eine Methode zur Modellierung des Kontaktverhaltens an einseitigen Bindungen, welches durch die Impenetrabilitätsbedingung in Normalenrichtung und das COULOMB'sche Reibgesetz in Tangentialrichtung bestimmt wird. Die Idee der kompakten Formulierung wird nun im Folgenden auf lokale Verspannungen übertragen, die zwar auf einseitigen Bindungen basieren, in ihrer Gesamtheit jedoch komplexere Bindungsformen darstellen.

Lokale Verspannungen werden benötigt, wenn die Gewichtskräfte allein nicht mehr ausreichen, um die bei einer Manipulationsaufgabe auftretenden Prozesskräfte zu kompensieren und somit ein Kippen oder Weggleiten des nur durch einseitige Bindungen an die Umgebung gebundenen mobilen Roboters zu verhindern. Dies kann auftreten, wenn die Prozesskräfte selbst zu groß werden, wenn die einseitigen Bindungen ungünstig zum Gravitationsfeld und damit zu den Gewichtskräften ausgerichtet sind oder wenn wie bei Raumfahrtszenarien keine Gravitation vorhanden ist. In diesen Fällen müssen spezielle Vorrichtungen auf Seiten des Roboters sowie der Umgebung vorhanden sein, die ein temporäres Fixieren an lokalen Verspannungspunkten ermöglichen.

3.2.1 Grundidee

Zur Realisierung temporärer lokaler Verspannungen sind von konstruktiver Seite her Mechanismen vorzusehen, mit der der mobile Roboter bei Bedarf an der festen Umgebung fixiert werden kann. Diese Mechanismen und dementsprechend jede einzelne der dann vorliegenden einseitigen Bindungen zwischen den Bauteilen der Verspannung auf Roboterseite und den Gegenstücken der Umgebung wären bei einer detaillierten Modellbildung mit zu berücksichtigen. Wollte man also das Verhalten der lokalen Verspannungsmechanik im Detail nachbilden, würde das mechanische Modell des mobilen Roboters bei Verwendung lokaler Verspannungen in seinem Umfang stark anwachsen.

Zur Beschreibung des Verhaltens des Gesamtsystems aus Basis und Roboterarm, welches durchaus mehrere einseitige Bindungen sowie lokale Verspannungen zur festen Umgebung aufweisen kann, ist es jedoch ausreichend und im Hinblick auf einen möglichst geringen Modellierungsaufwand damit sinnvoller, die Details des Verspannungsmechanismus außer Acht zu lassen. Für jede der lokalen Verspannungen wird stattdessen ein *reduzierter Kontaktpunkt* definiert und das zugehörige Bindungsverhalten über eine *Black-Box-Bindung* beschrieben, deren Charakteristik sich anhand des *zulässigen Kraftbereichs* beschreiben lässt. Dieser legt fest, innerhalb welchen Bereichs die jeweilige vektorielle *reduzierte Kontaktkraft* \mathbf{K}_r liegen kann, die am reduzierten Kontaktpunkt K_r von der festen Umgebung auf die Basis des mobilen Roboters übertragen werden. Eine Beschleunigung von K_r und damit ein Wechsel des Bindungszustands des Gesamtsystems kann dann nur auftreten, wenn die reduzierte Kontaktkraft \mathbf{K}_r auf eine der Randflächen oder Kanten des zugehörigen zulässigen Kraftbereichs zeigt.

Im Falle einer gewöhnlichen zweiseitigen Bindung unterliegt der Vektor der Bindungskraft keinerlei Beschränkungen, der zugehörige zulässige Kraftbereich deckt (unter

Vernachlässigung strukturmechanischer Einschränkungen) den gesamten unendlichen Krafraum ab, eine Relativbeschleunigung des Kontaktpunkts ist ausgeschlossen. Bei den zuvor näher betrachteten einseitigen Bindungen wird der zulässige Kraftbereich durch den COULOMB'schen Reibkegel bestimmt; es sind nur Kräfte von der festen Umgebung auf die Basis übertragbar, die innerhalb oder auf den Grenzen des in die Normalenrichtung gerichteten und bis ins Unendliche ragenden Reibkegels liegen. Bei einer lokalen Verspannung hingegen ist der auf den reduzierten Kontaktpunkt bezogene zulässige Kraftbereich von komplexerer geometrischer Struktur. Es sind hier je nach Verspannungstypus konkave wie konvexe, geschlossene wie offene Kraftbereiche möglich.

Analog zur kompakten Formulierung des Kontaktproblems bei der einseitigen Bindung in Abschnitt 3.1 werden im Folgenden die zulässigen Kraftbereiche verschiedener Typen von lokalen Verspannungen analysiert und die entsprechend gewählten Kontaktgrößen und ggf. notwendigen Hilfsgrößen dargestellt. Basierend auf den Mengenkomplicitäten, die die Übergänge zwischen den jeweiligen Kontaktzuständen abbilden, werden die zugehörigen finiten Zustandsautomaten aufgestellt. Sie sind an das spezifische Verhalten der jeweiligen Black-Box-Bindung angepasst, da jegliche Kontaktzustände, deren Auftreten ausgeschlossen werden kann, gezielt durch entsprechende Definition der Kontaktgrößen und damit der Mengenkomplicitäten aus der Betrachtung herausgenommen werden. Dies bewirkt für das Gesamtsystem eine geringere Modellgröße als bei einer vollständigen Modellierung des gesamten lokalen Verspannungsmechanismus mit einem eigenen finiten Zustandsautomaten gemäß Abschnitt 3.1 für jede der einseitigen Bindungen innerhalb der lokalen Verspannung.

Des Weiteren werden, als Ersatz für die Gleichungen (3.10) und (3.15), die jeweiligen Vektoren der Kontaktpunktbeschleunigung $\ddot{r}_{K,k}$ und der Kontaktkraft und \mathbf{K}_k aufgestellt. Die darauf aufbauende Herleitung der LCP-Gesamtgleichung zur Bestimmung des Bindungszustands des Gesamtsystems mit lokalen Verspannungen entsprechend Gleichung (3.18) soll jedoch nicht weiter verfolgt bzw. dargestellt werden, sie erfolgt analog zu den Ausführungen im vorangegangenen Abschnitt 3.1. Im Folgenden entfällt zur Vereinfachung bei allen Größen der Index k , alle angegebenen Mengen, Vektoren und Skalare beziehen sich jedoch weiterhin auf den k -ten der $n_{P,B}$ Kontaktpunkte der Basis.

Das Vorgehen wird anhand eines einfachen ebenen Beispiels verdeutlicht. Bild 3.11 zeigt den bereits bekannten mobilen Roboter, welcher neben den bisherigen einseitigen

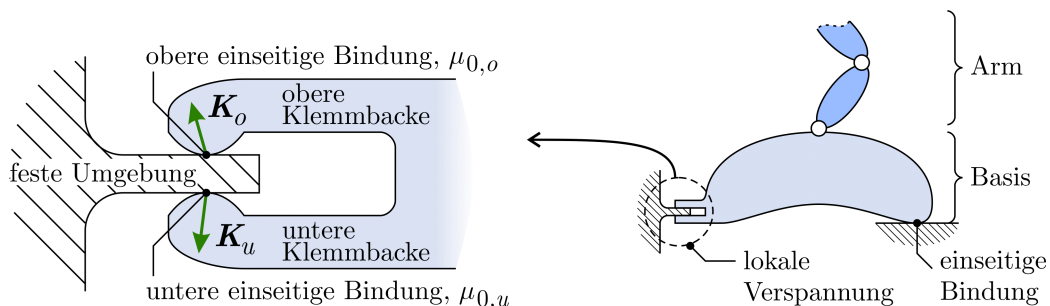


Bild 3.11: Zwei einseitige Bindungen als Teil einer lokalen Verspannung mit starren Spannbacken ohne Anpressung und ohne Spiel

Bindungen an einem Kontaktpunkt eine lokale Verspannung mit der festen Umgebung aufweist. Diese Verspannung ist zur einführenden Darstellung zunächst beidseitig starr ausgeführt, so dass die unbewegliche obere (Index o) und untere Spannbacke (Index u) ohne Anpressung, aber auch ohne Spiel die Basis an die feste Umgebung binden. In Normalenrichtung liegt somit spielfreier Formschluss, in Tangentialrichtung Reibschluss vor. Die Reibkoeffizienten $\mu_{0,o}$ und $\mu_{0,u}$ können durchaus verschieden sein.

Gemäß der zuvor dargestellten Formulierung wäre beiden in der Ausgangsstellung geschlossenen einseitigen Bindungen an den Punkten K_o und K_u ein vollständiger Pool von kinematischen und kinetischen Kontaktgrößen gemäß Gleichung (3.4) zuzuordnen. Diese beschreiben gemäß den Gleichungen (3.2) und (3.3) mit den in Bild 3.12 dargestellten Einheitsvektoren die formal voneinander unabhängigen Kontaktkräfte und -beschleunigungen am oberen und unteren Kontaktpunkt:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_o &= \left\{ \ddot{g}_{n,o}, \ddot{g}_{t,o}^\oplus, \ddot{g}_{t,o}^\ominus, \lambda_1, \lambda_2 \right\}, & \mathbb{K}_u &= \left\{ \ddot{g}_{n,u}, \ddot{g}_{t,u}^\oplus, \ddot{g}_{t,u}^\ominus, \lambda_3, \lambda_4 \right\}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_{K,o} &= \mathbf{n}_o \ddot{g}_{n,o} + \mathbf{t}_o \ddot{g}_{t,o}^\oplus - \mathbf{t}_o \ddot{g}_{t,o}^\ominus, & \ddot{\mathbf{r}}_{K,u} &= \mathbf{n}_u \ddot{g}_{n,u} + \mathbf{t}_u \ddot{g}_{t,u}^\oplus - \mathbf{t}_u \ddot{g}_{t,u}^\ominus, \\ \mathbf{K}_o &= \lambda_1 \mathbf{k}_1 + \lambda_2 \mathbf{k}_2, & \mathbf{K}_u &= \lambda_3 \mathbf{k}_3 + \lambda_4 \mathbf{k}_4 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Die zugehörigen Mengenkompimentaritäten gemäß Gleichung (3.8) werden durch jeweils einen vollständigen finiten Zustandsautomaten gemäß Bild 3.4 erfasst, wie Bild 3.12 zeigt. Zur Beschreibung des Kontaktverhaltens der Verspannung durch zwei einseitige Bindungen werden also 4 Kontaktgrößen aus dem vereinigten Pool $\mathbb{K} = \mathbb{K}_o \cup \mathbb{K}_u$ der Größe 10 benötigt. Die zwei zugehörigen Zustandsautomaten erlauben $5^2 = 25$ theoretisch mögliche Kombinationen für die Kontaktzustände der lokalen Verspannung.

Nun ist der Abstand der beiden einseitigen Bindungen der lokalen Verspannung zueinander viel kleiner als die Abmessungen des Gesamtsystems. Es ist also hier sowie bei allen noch folgenden lokalen Verspannungen aus Sicht des Gesamtsystems die Näherung zulässig, die Kontaktpunkte der lokalen Verspannung als einen einzigen reduzier-

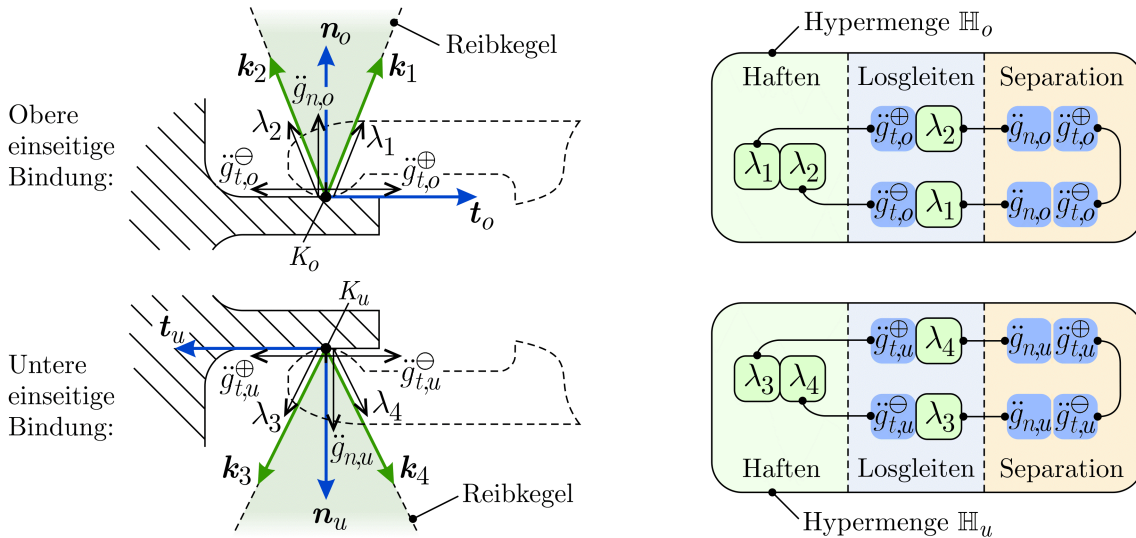


Bild 3.12: Kontaktgrößen bei lokaler Verspannung (links), finite Zustandsautomaten (rechts)

ten, zur starren Basis festen Kontaktpunkt K_r in ihrer Mitte zu betrachten. Für die Kontaktgrößen können dann folgende Einschränkungen festgestellt werden:

- Die tangentialen Kontaktpunktbeschleunigungen oben und unten sind identisch, $\ddot{g}_{t,o}^\oplus = \ddot{g}_{t,u}^\ominus$ und $\ddot{g}_{t,o}^\ominus = \ddot{g}_{t,u}^\oplus$, so dass nur die tangentialen Beschleunigung des reduzierten Kontaktpunkts durch $\ddot{g}_t^\oplus = \ddot{g}_{t,o}^\oplus$ und $\ddot{g}_t^\ominus = \ddot{g}_{t,o}^\ominus$ zu berücksichtigen sind.
- Die beiden starren Klemmbacken lassen keine Bewegung von K_r in Normalenrichtung zu. Somit gilt $\ddot{g}_{n,o} = \ddot{g}_{n,u} = 0$, die normale Beschleunigung von K_r verschwindet also, $\ddot{g}_n = 0$, und braucht nicht weiter als unbekannte Kontaktgröße behandelt zu werden. K_r kann nur tangential beschleunigt werden.
- Es liegt keine Vorspannung der starren Klemmbacken vor. Somit wirkt nur am oberen oder am unteren Kontaktpunkt eine Kontaktkraft, was zur Mengenkomplicität $\{\lambda_1, \lambda_2\} \Leftrightarrow \{\lambda_3, \lambda_4\}$ der oberen und unteren Kontaktkraftkoeffizienten führt.

Diese Einschränkungen führen zum reduzierten Kontaktgrößenpool \mathbb{K}_r , für die vektorielle Beschleunigung und Kraft am reduzierten Kontaktpunkt gilt dann:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K_r} = \mathbf{t} \ddot{g}_t^\oplus - \mathbf{t} \ddot{g}_t^\ominus, \quad \mathbf{K}_r = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{k}_i \lambda_i), \quad \mathbb{K}_r = \{\ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \geq 0 \quad (3.36)$$

Der zugehörige zulässige Kraftbereich für die Kontaktkraft \mathbf{K}_r der in dem Ersatzpunkt reduzierten lokalen Verspannung ist in Bild 3.13a) dargestellt. Bild 3.13b) zeigt den zugehörigen finiten Zustandsautomaten, der die streng abgeschlossene Hypermengenge der zulässigen Teilmengen \mathbb{G}_A bis \mathbb{G}_F und die entsprechenden Mengenkomplicitäten umfasst. Die Zuordnung zwischen den Bereichen bzw. Grenzlinien des zulässigen Kraftbereichs und den Teilmengen des finiten Zustandsautomaten wird durch die Markierungen A bis F angezeigt.

Durch Berücksichtigung der spezifischen Verhältnisse der beidseitig starren lokalen Verspannung im ebenen Fall reduzieren sich der Kontaktgrößenpool von 10 auf 6 Elemente, die Anzahl der formal möglichen Kontaktzustände von 25 auf 6 und die Anzahl der zur Kontaktzustandsbeschreibung benötigten Kontaktgrößen von 4 auf 2. Dieses Vorgehen, das die Rechenzeit des LEMKE'schen Algorithmus zur Analyse des Bindungszustands deutlich senkt, soll im Folgenden auf lokale Verspannungen über-

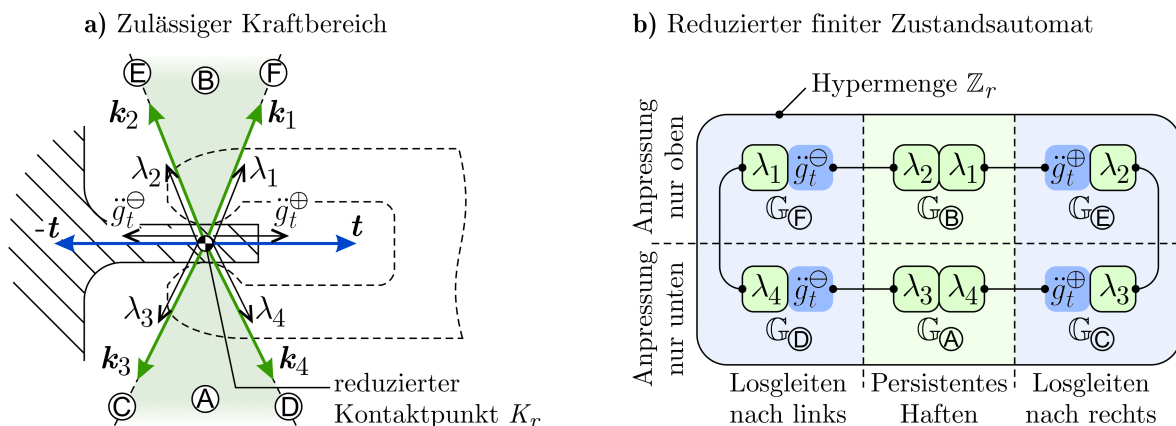


Bild 3.13: Kontaktzustände am reduzierten Kontaktpunkt der lokalen Verspannung

tragen werden, bei denen eine zusätzliche Anpressung der Klemmbacken infolge eines lokalen Verspannungsmechanismus vorliegt. Es wird dabei zwischen *kraftvariablen* und *kraftkonstanten* lokalen Verspannungen unterschieden. Bei ersteren wird die Anpressung durch ein elastisches Element erzeugt, welches nach einem einmaligen, energieaufwändigen Spannvorgang während der Dauer der lokalen Verspannung keinen weiteren Energiebedarf aufweist. Bei letzteren hingegen sorgt ein Aktor fortwährend für eine konstante Anpressung und damit für einen fortwährenden Energieumsatz.

3.2.2 Kraftvariable halbstarre lokale Verspannung

Bild 3.14a) zeigt eine kraftvariable lokale Verspannung. Während die obere Klemmbacke ein fester Bestandteil der starren Basis des mobilen Roboters ist, wird die untere bewegliche Klemmbacke in der Ausgangslage über einen Mechanismus mit der Vorspannkraft F^* angepresst. Das die Vorspannkraft erzeugende und das Attribut der Kraftvariabilität begründende elastische Element sei hier und in allen folgenden Fällen von hoher Steifigkeit. Gemäß den vorangegangenen Ausführungen lässt sich die lokale Verspannung auf einen einzelnen Kontaktpunkt reduzieren, ohne die Verhältnisse an den beiden einseitigen Kontaktpunkten separat abzubilden oder den Spannmechanismus durch zusätzliche Starrkörper im Modell zu berücksichtigen.

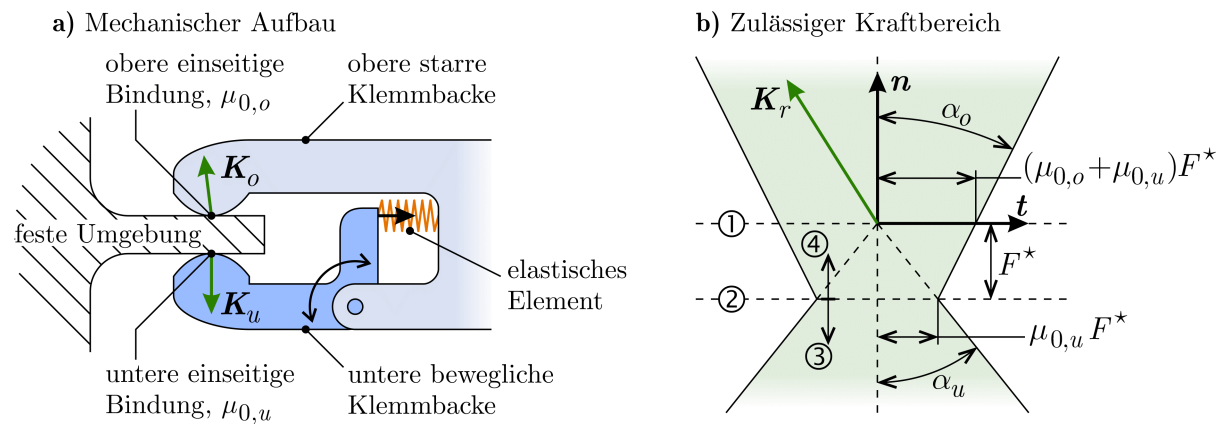


Bild 3.14: Kraftvariable lokale Verspannung mit Anpressung an nur einer Seite

Der zugehörige zulässige Kraftbereich für die reduzierte Kontaktkraft $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_o + \mathbf{K}_u$ ist in Bild 3.14b) dargestellt und unterliegt den folgenden Gegebenheiten:

- Ist der Normalanteil der am reduzierten Kontaktpunkt auf die Basis wirkenden Kontaktkraft \mathbf{K}_r gerade gleich Null (Index ①, vgl. Bild 3.14b)), dann ist die Anpressung an beiden Klemmbacken identisch und gleich F^* ,

$$\mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,①} = \mathbf{n}^T (\mathbf{K}_{o,①} + \mathbf{K}_{u,①}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{o,①} = -\mathbf{n}^T \mathbf{K}_{u,①} = F^* \quad , \quad (3.37)$$

so dass mit den Haftreibungskoeffizienten am oberen und unteren Kontaktpunkt $\mu_{0,o}$ und $\mu_{0,u}$ der tangential Anteil der Kontaktkraft \mathbf{K}_r limitiert wird durch:

$$\left| \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r,①} \right| \leq (\mu_{0,o} + \mu_{0,u}) F^* \quad (3.38)$$

- Auf dem mit ② indizierten Niveau der reduzierten Kontaktkraft \mathbf{K}_r , verschwindet gerade die Kontaktkraft \mathbf{K}_o an der starren Klemmbacke, die dann gerade im Begriff ist, sich von der festen Umgebung zu lösen. Für den normalen und den tangentialen Anteil von \mathbf{K}_r gilt dann:

$$\mathbf{K}_{o,②} \downarrow \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_{r,②} = \mathbf{K}_u \Rightarrow \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,②} = -F^* \wedge \left| \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r,②} \right| \leq \mu_{0,u} F^* \quad (3.39)$$

- Im mit ③ indizierten Teil des zulässigen Kraftbereichs, welcher sich unterhalb vom Niveau ② erstreckt, hat sich der Kontakt an der oberen starren Klemmbacke gelöst. Die untere Klemmbacke wurde ein gewisses Stück ausgelenkt und presst in Normalenrichtung mit einer zur Auslenkung linearen Kraft größer als F^* gegen die feste Umgebung. Wegen der als sehr steif angenommenen Elastizität kann jedoch diese Auslenkung der Klemmbacke relativ zur Basis nach unten und damit die absolute Auslenkung des der Basis zugehörigen reduzierten Kontaktpunkts nach oben als sehr klein gegenüber den Abmessungen des Gesamtsystems und damit vernachlässigbar betrachtet werden. Die reduzierte Black-Box-Bindung ist im vorliegenden Fall also nur in der Lage, seitwärts in tangentialer Richtung loszugleiten, eine Bewegung in Normalenrichtung wird ausgeschlossen. Teil ③ des zulässigen Kraftbereichs entspricht dem COULOMB'schen Reibkegel des unteren Kontaktpunkts, und es gilt:

$$\mathbf{K}_{o,③} = 0 \Rightarrow \mathbf{K}_{r,③} = \mathbf{K}_u \Rightarrow \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,③} < -F^* \wedge \left| \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r,③} \right| \leq -\mu_{0,u} \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,③} \quad (3.40)$$

- Im Teilbereich ④ oberhalb des Niveaus ② liegt letztlich Anpressung an beiden Klemmbacken vor,

$$-\mathbf{n}^T \mathbf{K}_{u,④} = F^* \quad \wedge \quad \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{o,④} > 0 \quad \Rightarrow \quad -F^* < \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,④} < 0, \quad (3.41)$$

so dass mit den Gleichungen (3.38) und (3.39) der tangentialer Anteil der reduzierten Kontaktkraft \mathbf{K}_r limitiert wird durch:

$$\left| \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r,④} \right| \leq \mu_{0,o} \left(\mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,④} + F^* \right) + \mu_{0,u} F^* \quad (3.42)$$

- Für die Öffnungswinkel α_u und α_o der Bereiche ③ und ④ gilt:

$$\alpha_u = \arctan(\mu_{0,u}) \quad , \quad \alpha_o = \arctan(\mu_{0,o}) \quad (3.43)$$

Ebener Fall

Bild 3.15 zeigt für den ebenen Fall die Kontaktgrößen und zugehörigen Einheitsvektoren, die zur Beschreibung der anhand des zulässigen Kraftbereichs definierten Kontaktzustände ① bis ⑥ benötigt werden, sowie den finiten Zustandsautomaten der mengenkomplementären Teilmengen des Kontaktgrößenpools $\mathbb{K}_r = \{ \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_o, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_b, \lambda_e \}$. Die Kraftereinheitsvektoren \mathbf{k}_i werden analog zu Gleichung (3.1) definiert,

$$\left[\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2 \right] = \left(\sqrt{1 + \mu_{0,u}^2} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -\mu_{0,u} & \mu_{0,u} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

für die reduzierte Kontaktkraft \mathbf{K}_r und die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_{K,r}$ am reduzierten Kontaktpunkt gilt:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = \mathbf{t} \ddot{g}_t^\oplus - \mathbf{t} \ddot{g}_t^\ominus, \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{n} \lambda_o + \mathbf{k}_1 \lambda_1 + \mathbf{k}_2 \lambda_2, \quad \{\ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_o, \lambda_1, \lambda_2\} \geq 0 \quad (3.45)$$

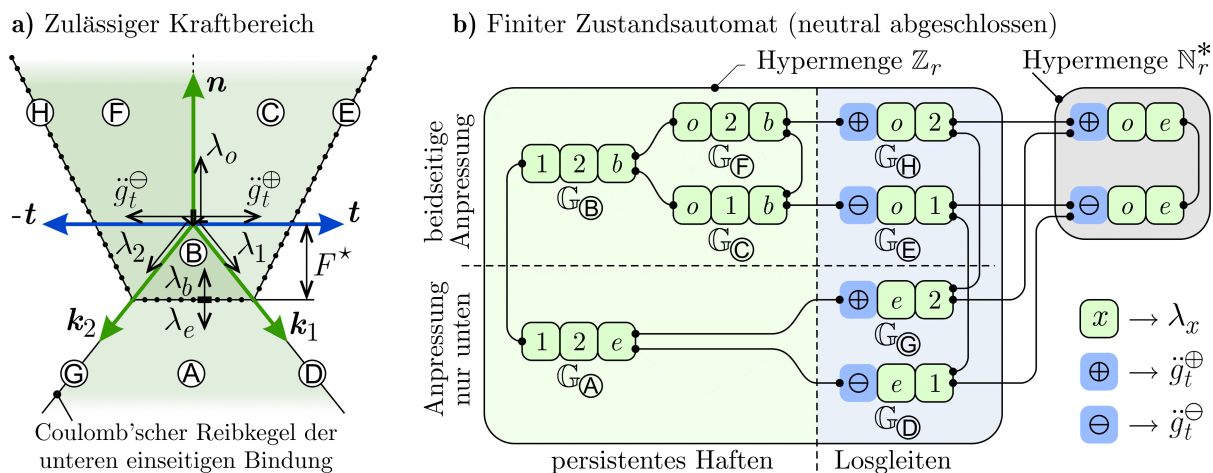


Bild 3.15: Kontaktzustände bei kraftspeichernder, einseitig starrer lokaler Verspannung

Die nichtnegativen, gegenläufigen und daher komplementären Kontaktgrößen λ_b und λ_e sind Hilfsgrößen, die zwar nicht an der Beschreibung von \mathbf{K}_r beteiligt sind, jedoch als Indikatorvariablen bei der Beschreibung des zulässigen Kraftbereichs fungieren. Sie zeigen an, ob die vektorielle Kontaktkraft \mathbf{K}_r in den Bereich oberhalb oder unterhalb des horizontalen Niveaus ② aus Bild 3.14 zeigt, ob also an beiden ($\lambda_b \geq 0$) oder nur einer ($\lambda_e \geq 0$) der Klemmbacken, hier an der unteren beweglichen, Kontakt vorliegt, und sind definiert durch:

$$\cos \alpha_u (\lambda_1 + \lambda_2) - \gamma_o \lambda_o = F^* + \lambda_e - \lambda_b, \quad \lambda_b \geq 0 \wedge \lambda_e \geq 0 \wedge \lambda_b \lambda_e = 0 \quad (3.46)$$

mit $\gamma_o = \mu_{0,o} / (\mu_{0,u} + \mu_{0,o}) \in [0; 1]$

Dabei ist γ_o der Anteil des Haftreibungskoeffizienten $\mu_{0,o}$ an der Summe $\mu_{0,u} + \mu_{0,o}$. Gleichung (3.46) beschreibt für den Fall $\lambda_b = \lambda_e = 0$ die Abschnitte der gepunkteten Grenzlinie in Bild 3.15a):

$$\begin{aligned} \text{Grenzlinie } \textcircled{A}/\textcircled{B}: \quad & \cos \alpha_u (\lambda_1 + \lambda_2) = F^*, \quad \lambda_o = 0 \\ \text{Grenzlinie } \textcircled{E}: \quad & \cos \alpha_u \lambda_1 - \gamma_o \lambda_o = F^*, \quad \lambda_2 = 0 \\ \text{Grenzlinie } \textcircled{H}: \quad & \cos \alpha_u \lambda_2 - \gamma_o \lambda_o = F^*, \quad \lambda_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Jede der Teilflächen bzw. Grenzlinien \textcircled{A} bis \textcircled{H} des zulässigen Kraftbereichs der Kontaktkraft \mathbf{K}_r in Bild 3.15a) entspricht einer der zulässigen Teilmengen aus der Hypermenge \mathbb{Z}_r . Die Teilmengen $\mathbb{G}_\textcircled{A}$ und $\mathbb{G}_\textcircled{B}$ kennzeichnen ein persistentes Haften des reduzierten Kontaktpunkts, $\ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = \mathbf{0}$, und liegen innerhalb der COULOMB'schen Reibkegel der unteren einseitigen Bindung. Mit Gleichung (3.46) gilt dann

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_r &= \mathbf{k}_1 \lambda_1 + \mathbf{k}_2 \lambda_2 \quad , \quad \lambda_o = 0 \quad , \\
 \textcircled{A} : \cos \alpha_u (\lambda_1 + \lambda_2) &\geq F^* \Rightarrow \lambda_e \geq 0 \wedge \lambda_b = 0 \Rightarrow \mathbb{G}_{\textcircled{A}} = \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_e \} \geq 0 \quad , \quad (3.48) \\
 \textcircled{B} : \cos \alpha_u (\lambda_1 + \lambda_2) &\leq F^* \Rightarrow \lambda_e = 0 \wedge \lambda_b \geq 0 \Rightarrow \mathbb{G}_{\textcircled{B}} = \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_b \} \geq 0 \quad ,
 \end{aligned}$$

so dass $\mathbb{G}_{\textcircled{A}}$ und $\mathbb{G}_{\textcircled{B}}$ durch den Austausch $\lambda_b \leftrightarrow \lambda_e$ mengenkomplementär ineinander übergehen können. Während $\mathbb{G}_{\textcircled{A}}$ an den seitlichen Rändern der Teilfläche \textcircled{A} mengenkomplementär zu den den Grenzlinien \textcircled{D} und \textcircled{C} zugeordneten Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{D}}$ und $\mathbb{G}_{\textcircled{C}}$ übergeht, die ein Losgleiten des reduzierten Kontaktpunkts bei Anpressung nur an der unteren elastischen Klemmbacke beschreiben,

$$\begin{aligned}
 \textcircled{D} : \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} &= -\mathbf{t} \ddot{g}_t^\ominus \quad , \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{k}_1 \lambda_1 \quad , \quad \cos \alpha_u \lambda_1 \geq F^* \quad , \quad \lambda_o = \lambda_2 = 0 \\
 \textcircled{C} : \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} &= \mathbf{t} \ddot{g}_t^\oplus \quad , \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{k}_2 \lambda_2 \quad , \quad \cos \alpha_u \lambda_2 \geq F^* \quad , \quad \lambda_o = \lambda_1 = 0 \\
 \Rightarrow \lambda_e &\geq 0 \wedge \lambda_b = 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{\textcircled{D}} = \{ \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_e \} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{\textcircled{C}} = \{ \ddot{g}_t^\oplus, \lambda_2, \lambda_e \} \geq 0
 \end{aligned} \quad (3.49)$$

liegt an den gemeinsamen Rändern der Teilfläche \textcircled{B} mit den Teilflächen \textcircled{C} und \textcircled{E} ein mengenkomplementärer Übergang der Teilmenge $\mathbb{G}_{\textcircled{B}}$ zu den Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{C}}$ und $\mathbb{G}_{\textcircled{E}}$ vor, die ebenfalls ein persistentes Haften des reduzierten Kontaktpunkts beschreiben.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{C} : \mathbf{K}_r &= \mathbf{n} \lambda_o + \mathbf{k}_1 \lambda_1 \quad , \quad \lambda_2 = 0 \quad , \quad \cos \alpha_u \lambda_1 - \gamma_o \lambda_o \leq F^* \\
 \textcircled{E} : \mathbf{K}_r &= \mathbf{n} \lambda_o + \mathbf{k}_2 \lambda_2 \quad , \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \cos \alpha_u \lambda_2 - \gamma_o \lambda_o \leq F^* \\
 \Rightarrow \lambda_e &= 0 \wedge \lambda_b \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{\textcircled{C}} = \{ \lambda_o, \lambda_1, \lambda_b \} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{\textcircled{E}} = \{ \lambda_o, \lambda_2, \lambda_b \} \geq 0
 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Über die Hilfsgröße λ_b kann nun in den Fällen \textcircled{C} und \textcircled{E} mit Gleichung (3.46) detektiert werden, ob die tangentielle Haftkraftreserve ausgeschöpft ist. Dann nämlich zeigt der Vektor der Kontaktkraft \mathbf{K}_r auf die Grenzlinien \textcircled{E} bzw. \textcircled{H} , somit liegt ein mengenkomplementärer Übergang zu den Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{E}}$ bzw. $\mathbb{G}_{\textcircled{H}}$ vor, die ein Losgleiten des reduzierten Kontaktpunkts bei Anpressung an beiden Klemmbacken beschreiben. Die Hilfsgröße λ_b verschwindet dann gerade, und gemäß Gleichung (3.47) gilt:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{E} : \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} &= -\mathbf{t} \ddot{g}_t^\ominus \quad , \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{n} \lambda_o + \mathbf{k}_1 \lambda_1 \quad , \quad \lambda_2 = 0 \quad , \quad \cos \alpha_u \lambda_1 - \gamma_o \lambda_o = F^* \\
 \textcircled{H} : \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} &= \mathbf{t} \ddot{g}_t^\oplus \quad , \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{n} \lambda_o + \mathbf{k}_2 \lambda_2 \quad , \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \cos \alpha_u \lambda_2 - \gamma_o \lambda_o = F^* \\
 \Rightarrow \lambda_b &= \lambda_e = 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{\textcircled{E}} = \{ \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_o, \lambda_1 \} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{\textcircled{H}} = \{ \ddot{g}_t^\oplus, \lambda_o, \lambda_2 \} \geq 0
 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Für eine robuste Performanz des modifizierten LEMKE-Algorithmus müssen den drei Skalare enthaltenden Teilmengen stets drei andere Teilmengen zum mengenkomplementären Übergang zugeordnet sein. Der finite Zustandsautomat in Bild 3.15b) ist daher um redundante Teilmengen \mathbb{G}_{red} ergänzt, die von den in Gleichung (3.46) vorkommenden Größen nur λ_o und λ_e enthalten, so dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_b = 0$. Mit $F^* > 0$ folgt

$$-\gamma_o \lambda_o = F^* + \lambda_e \quad \Rightarrow \quad \lambda_o < 0 \vee \lambda_e < 0 \quad , \quad (3.52)$$

somit können die Teilmengen der Ergänzung niemals den Kontaktzustand nichtnegativ beschreiben. Sie bilden die Hypermengende \mathbb{N}_r^* als Teil der Hypermengende aller neutralen Teilmengen, $\mathbb{N}_r^* \subseteq \mathbb{N}_r$. Die Hypermengende \mathbb{Z}_r ist dann gemäß Abschnitt 2.5.1 neutral abgeschlossen, der LEMKE-Algorithmus kann also nicht durch unzulässige Teilmengen gestoppt werden und der Kontaktzustand wird zuverlässig berechnet.

Räumlicher Fall

Ausgangspunkt für die Beschreibung des Kontaktverhaltens im räumlichen Fall ist analog zum Abschnitt 3.1.2 die Approximation des zulässigen Kraftbereichs in Bild 3.16a), der der Rotation des zulässigen Kraftbereichs für den ebenen Fall aus Bild 3.14b) entspricht, durch einen S -seitigen prismatischen Körper. Für den Fall $S=6$ zeigt Bild 3.16b) die zugehörigen Kraft- und Beschleunigungseinheitsvektoren \mathbf{k}_i und \mathbf{s}_i , die analog zu Abschnitt 3.1.2 bzw. 2.4.3 über die orthogonalen Einheitsvektoren in Normalen- und Tangentialrichtung am reduzierten Kontaktpunkt definiert werden,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_h &= -\mathbf{n} \kappa_n + \left(\mathbf{t}_1 \cos\left(2\pi\left(h-\frac{1}{2}\right)/S\right) + \mathbf{t}_2 \sin\left(2\pi\left(h-\frac{1}{2}\right)/S\right) \right) \kappa_t, \quad 1 \leq h \leq S, \\ \mathbf{s}_h &= \mathbf{t}_1 \cos\left(2\pi(h-1)/S\right) + \mathbf{t}_2 \sin\left(2\pi(h-1)/S\right), \end{aligned} \quad (3.53)$$

und zur Beschreibung der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_{K,r}$ am reduzierten Kontaktpunkt sowie der reduzierte Kontaktkraft \mathbf{K}_r beitragen:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = \sum_{h=1}^S (\mathbf{s}_h \ddot{g}_h), \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{n} \lambda_o + \sum_{h=1}^S (\mathbf{k}_h \lambda_h), \quad \lambda_h \geq 0, \quad \ddot{g}_h \geq 0 \quad (3.54)$$

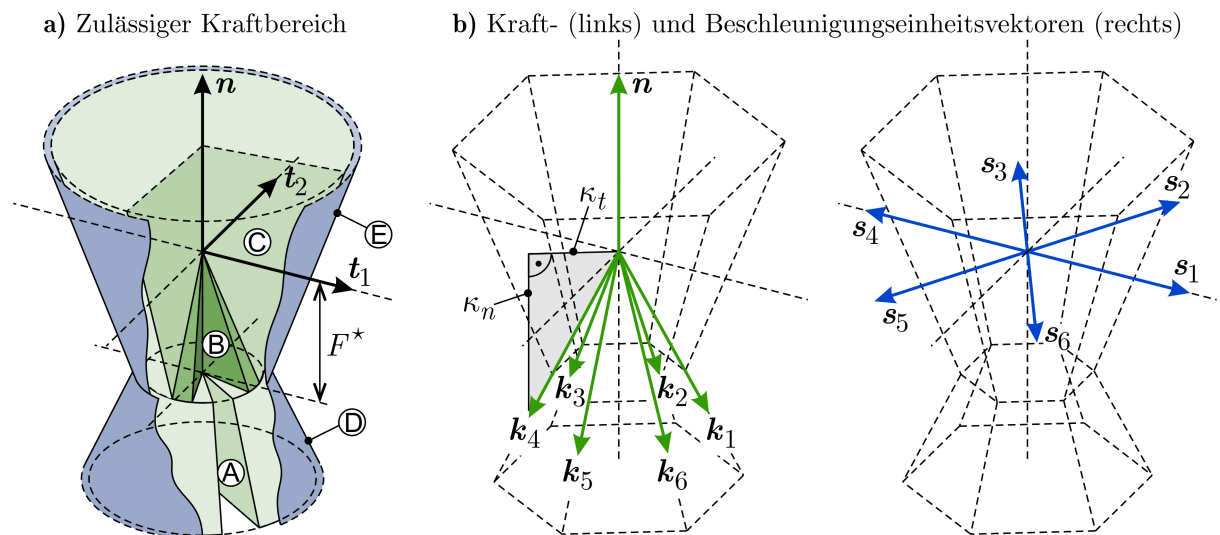


Bild 3.16: Aufteilung und Approximation des zulässigen Kraftbereichs bei kraftvariabler halbstarrer lokaler Verspannung ($S=6$)

Die Faktoren κ_n und κ_t werden mit dem korrigierten Haftreibungskoeffizienten $\mu_{0,u}^\nabla$, der seinerseits gemäß Gleichung (2.84) bestimmt wird, aus Gleichung (3.12) gewonnen. Der Pool der den Einheitsvektoren in Gleichung (3.53) zugeordneten Kontaktgrößen für den räumlichen Fall lautet

$$\mathbb{K}_r = \bigcup_{h=1}^S \left(\left\{ \ddot{g}_h, \lambda_h \right\} \right) \cup \left\{ \lambda_o, \lambda_b, \lambda_e \right\}, \quad (3.55)$$

für die darin enthaltenen Hilfsgrößen λ_b und λ_e gilt analog zu Gleichung (3.46) die Abhängigkeit von den Kraftkoeffizienten λ_o und λ_1 bis λ_S :

$$\kappa_n \sum_{h=1}^S \lambda_h - \gamma_o \lambda_o = F^* + \lambda_e - \lambda_b, \quad \lambda_b \geq 0 \wedge \lambda_e \geq 0 \wedge \lambda_b \lambda_e = 0, \quad (3.56)$$

$$\gamma_o = \tan \alpha_o / \left(\kappa_t / \kappa_n + \tan \alpha_o \right)$$

Beim Aufbau der Gesamtgleichung zur Bestimmung des Bindungszustandes des Systems aus einseitig gebundener und/oder lokal verspannter Basis sowie Roboterarm analog zu Gleichung (3.18) in Abschnitt 3.1.2 wird Gleichung (3.56) (bzw. Gleichung (3.46) im ebenen Fall) als zusätzliche Zeile dem Gleichungssystem (3.18) hinzugefügt.

Die Beschreibung der Bereiche \textcircled{A} bis \textcircled{E} des zulässigen Bereichs für die reduzierte Kontaktkraft \mathbf{K}_r gemäß Bild 3.16a) durch mengenkomplementäre Teilmengen des Kontaktgrößenpools erfolgt analog zum ebenen Fall. Die Bereiche \textcircled{A} und \textcircled{B} , die ein persistentes Haften mit $\ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = \mathbf{0}$ beschreiben, liegen innerhalb des COULOMB'schen Reibkegels des unteren Kontaktpunkts und können somit analog zu Gleichung (3.23) für die gewöhnliche einseitige Bindung in Abschnitt 3.1.2 durch die Kräfteinheitsvektoren \mathbf{k}_1 bis \mathbf{k}_s und die zugehörigen Kraftkoeffizienten beschrieben werden. Die Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{A},h}$ und $\mathbb{G}_{\textcircled{B},h}$ gehen durch den Austausch $\lambda_e \leftrightarrow \lambda_b$ mengenkomplementär ineinander über.

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{k}_1 \lambda_1 + \mathbf{k}_{h+1} \lambda_{h+1} + \mathbf{k}_{h+2} \lambda_{h+2}, \quad 1 \leq h \leq S-2$$

$$\textcircled{A} : \kappa_n (\lambda_1 + \lambda_{h+1} + \lambda_{h+2}) \geq F^* \Rightarrow \lambda_e \geq 0 \wedge \lambda_b = 0 \quad (3.57)$$

$$\textcircled{B} : \kappa_n (\lambda_1 + \lambda_{h+1} + \lambda_{h+2}) \leq F^* \Rightarrow \lambda_e = 0 \wedge \lambda_b \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{G}_{\textcircled{A},h} = \left\{ \lambda_1, \lambda_{h+1}, \lambda_{h+2}, \lambda_e \right\} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\textcircled{B},h} = \left\{ \lambda_1, \lambda_{h+1}, \lambda_{h+2}, \lambda_b \right\} \geq 0$$

Während die Hüllfläche \textcircled{D} des unteren Reibkegels durch komplementäre, gemäß Gleichung (3.30) einen mengenkomplementären Ringschluss bildende Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{D}1,h}$ und $\mathbb{G}_{\textcircled{D}2,h}$ abgebildet wird, die gemäß Gleichung (3.26) bzw. (3.28) für die Seitenflächen und Kanten der approximierten Reibpyramide den Kontaktzustand des Losgleitens der ersten ($\textcircled{D}1$) und zweiten Stufe ($\textcircled{D}2$) beschreiben,

$$\textcircled{D}1 : \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = -\mathbf{s}_h \ddot{g}_h, \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{k}_{\overline{h-1}} \lambda_{\overline{h-1}} + \mathbf{k}_h \lambda_h, \quad \kappa_n (\lambda_{\overline{h-1}} + \lambda_h) \geq F^*$$

$$\textcircled{D}2 : \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = -\mathbf{s}_h \ddot{g}_h - \mathbf{s}_{\overline{h+1}} \ddot{g}_{\overline{h+1}}, \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{k}_h \lambda_h, \quad \kappa_n \lambda_{S+h} \geq F^* \quad (3.58)$$

$$\Rightarrow \lambda_e \geq 0 \wedge \lambda_b = 0 \Rightarrow \mathbb{G}_{\textcircled{D}1,h} = \left\{ \ddot{g}_h, \lambda_{\overline{h-1}}, \lambda_h, \lambda_e \right\} \geq 0,$$

$$\mathbb{G}_{\textcircled{D}2,h} = \left\{ \ddot{g}_h, \ddot{g}_{\overline{h+1}}, \lambda_h, \lambda_e \right\} \geq 0, \quad 1 \leq h \leq S,$$

wobei gemäß Gleichung (3.27) die Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{D}1}$ mengenkomplementär aus den $\mathbb{G}_{\textcircled{A}}$ hervorgehen, kann für die Abbildung des Bereichs \textcircled{C} und der Hüllfläche \textcircled{E} auf keinen der vorangegangenen Fälle zurückgegriffen werden. Wie Bild 3.17 zeigt, werden die S umlaufenden, den Bereich \textcircled{C} approximierenden und in positive Normalenrichtung un-

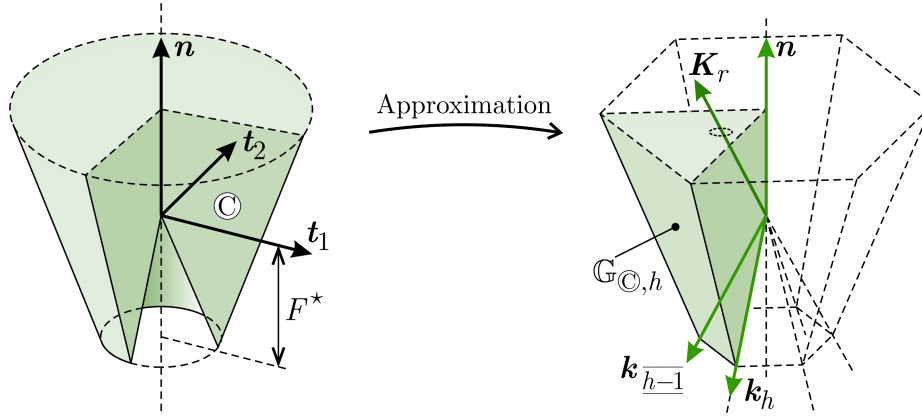


Bild 3.17: Lineare Approximation des Bereichs ©

begrenzten Sektoren durch Teilmengen $\mathbb{G}_{\text{©},h}$ erfasst, die dem Kontaktzustand des persistenten Haftens mit $\dot{\mathbf{r}}_{K,r} = \mathbf{0}$ zugeordnet sind und nur Kraftkoeffizienten enthalten:

$$\begin{aligned} \text{©} : \mathbf{K}_r &= \mathbf{n}\lambda_o + \mathbf{k}_{\underline{h-1}}\lambda_{\underline{h-1}} + \mathbf{k}_h\lambda_h \quad , \quad \kappa_n(\lambda_{\underline{h-1}} + \lambda_h) - \gamma_o\lambda_o \leq F^* \quad , \\ &\Rightarrow \lambda_e = 0 \wedge \lambda_b \geq 0 \Rightarrow \mathbb{G}_{\text{©},h} = \left\{ \lambda_o, \lambda_{\underline{h-1}}, \lambda_h, \lambda_b \right\} \geq 0 \quad , \quad 1 \leq h \leq S \end{aligned} \quad (3.59)$$

Die Teilmengen $\mathbb{G}_{\text{©},h}$ bilden einen mengenkomplementären Ringschluss:

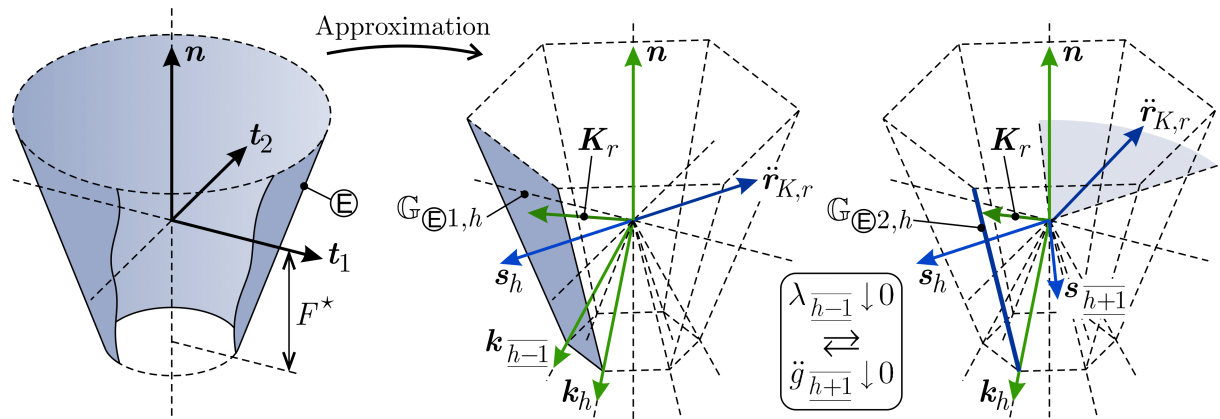
$$\mathbb{G}_{\text{©},h} \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_{\underline{h-1}} \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\lambda_{\underline{h+1}} \downarrow 0} \\ \xleftarrow{\lambda_{\underline{h+1}} \downarrow 0} \end{array} \mathbb{G}_{\text{©},\underline{h+1}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mathbb{G}_{\text{©},h} \quad (3.60)$$

Zudem sind zum einen nach innen mengenkomplementäre Übergänge zu den Teilmengen des Bereichs © möglich, $\mathbb{G}_{\text{©},h} \Leftrightarrow \mathbb{G}_{\text{©},h}$. Dies erfolgt analog zur Komplementarität $\mathbb{G}_{\text{Haft}} \Leftrightarrow \mathbb{G}_{\text{Gleit}_\text{©}}$ der gewöhnlichen einseitigen Bindung in Gleichung (3.27), wobei die $\mathbb{G}_{\text{©},h}$ die Rolle der dortigen Teilmengen $\mathbb{G}_{\text{Gleit}_\text{©},h}$ einnehmen. Zum anderen können gemäß Bild 3.18 die Teilmengen $\mathbb{G}_{\text{©},h}$ nach außen zu denen der äußeren Hüllfläche © komplementär übergehen, wenn $\kappa_n(\lambda_{\underline{h-1}} + \lambda_h) \uparrow F^*$. Der Vektor der reduzierten Kontaktkraft \mathbf{K}_r zeigt dann auf eine der Seitenflächen des die Hüllfläche © approximierenden Prismas, und gemäß Gleichung (3.56) verschwindet die Hilfsgröße λ_b :

$$\mathbb{G}_{\text{©},h} \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_b \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\dot{g}_h \downarrow 0} \\ \xleftarrow{\dot{g}_h \downarrow 0} \end{array} \mathbb{G}_{\text{©1},h} \quad (3.61)$$

Die Indizierung ©1 beschreibt ein Losgleiten der ersten Stufe, also mit nur einem Beschleunigungskoeffizienten \dot{g}_h in entgegengesetzte Richtung des Beschleunigungseinkheitsvektors \mathbf{s}_h . Die $\mathbb{G}_{\text{©1},h}$ bilden mit den Teilmengen $\mathbb{G}_{\text{©2},h}$ einander abwechselnd einen mengenkomplementären Ringschluss. Dabei steht ©2 für das Losgleiten der zweiten Stufe mit zwei Beschleunigungskoeffizienten \dot{g}_h und $\dot{g}_{\underline{h+1}}$, wobei gemäß Bild 3.18 der Kontaktkraftvektor \mathbf{K}_r auf eine der Ecken des approximierenden Prismas zeigt.

$$\mathbb{G}_{\text{©1},h} \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_{\underline{h-1}} \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\dot{g}_{\underline{h+1}} \downarrow 0} \\ \xleftarrow{\dot{g}_{\underline{h+1}} \downarrow 0} \end{array} \mathbb{G}_{\text{©2},h} \begin{array}{c} \xrightarrow{\dot{g}_h \downarrow 0} \\ \xleftrightarrow{\lambda_{\underline{h+1}} \downarrow 0} \\ \xleftarrow{\lambda_{\underline{h+1}} \downarrow 0} \end{array} \mathbb{G}_{\text{©1},\underline{h+1}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \mathbb{G}_{\text{©1},h} \quad (3.62)$$


 Bild 3.18: Lineare Approximation der oberen Hüllfläche \mathbb{E}

Für die approximierten Kontaktzustände der Hüllfläche \mathbb{E} gilt somit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}1 : \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} &= -\mathbf{s}_h \ddot{g}_h, \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{n} \lambda_o + \mathbf{k}_{\underline{h-1}} \lambda_{\underline{h-1}} + \mathbf{k}_h \lambda_h, \\ \kappa_n (\lambda_{\underline{h-1}} + \lambda_h) - \gamma_o \lambda_o &= F^* \quad \Rightarrow \quad \lambda_b = \lambda_e = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}2 : \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} &= -\mathbf{s}_h \ddot{g}_h - \mathbf{s}_{\underline{h+1}} \ddot{g}_{\underline{h+1}}, \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{n} \lambda_o + \mathbf{k}_h \lambda_h, \\ \kappa_n \lambda_h - \gamma_o \lambda_o &= F^* \quad \Rightarrow \quad \lambda_b = \lambda_e = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{G}_{\mathbb{E}1,h} &= \{ \ddot{g}_h, \lambda_o, \lambda_{\underline{h-1}}, \lambda_h \} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\mathbb{E}} \\ 2,h &= \{ \ddot{g}_h, \ddot{g}_{\underline{h+1}}, \lambda_o, \lambda_h \} \geq 0, \quad 1 \leq h \leq S \end{aligned}$$

Letztlich sind durch den Austausch $\lambda_e \leftrightarrow \lambda_o$ mengenkomplementäre Übergänge zwischen den Teilmengen der unteren und oberen Hüllflächen \mathbb{D} und \mathbb{E} möglich:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\mathbb{D}1,h} &\begin{array}{c} \lambda_e \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_o \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_{\mathbb{E}1,h}, \quad \mathbb{G}_{\mathbb{D}2,h} \begin{array}{c} \lambda_e \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_o \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_{\mathbb{E}2,h} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Die Hypermengen \mathbb{Z}_r der zulässigen Teilmengen $\mathbb{G} \subset \mathbb{K}_r$ zur Beschreibung aller möglichen Kontaktzustände der kraftvariablen, einseitig starren lokalen Verspannung im räumlichen Fall ist somit vollständig erfasst und mitsamt den zugehörigen mengenkomplementären Übergängen im finiten Zustandsautomaten in Bild 3.19 dargestellt. Gemäß dem ebenen Fall sind dabei den zulässigen Teilmengen $\mathbb{G}_{\mathbb{D}2,h}$ und $\mathbb{G}_{\mathbb{E}2,h}$, die ein Losgleiten der zweiten Stufe beschreiben und trotz der vier enthaltenen skalaren Kontaktgrößen gemäß der obigen Ausführung zu nur jeweils drei mengenkomplementären Teilmengen aus \mathbb{Z}_r übergehen können, redundante Teilmengen \mathbb{G}_{red} aus der Hypermengen der neutralen Teilmengen $\mathbb{N}_r^* \subseteq \mathbb{N}_r$ zugeordnet. So kann der LEMKE'sche Pivotsolver für jede skalare Kontaktgröße eines jeden Kontaktzustands auf eine entsprechenden Austauschgröße zurückgreifen, und die Hypermengen \mathbb{Z}_r ist neutral abgeschlossen. Die redundanten Teilmengen $\mathbb{G}_{red} \in \mathbb{N}_r^*$ können den Kontaktzustand niemals nichtnegativ beschreiben, da für sie entsprechend Gleichung (3.52) mit $F^* > 0$ aus Gleichung (3.56) folgt:

$$\forall h \in [1, S]: \lambda_h = 0 \Rightarrow -\gamma_o \lambda_o = F^* + \lambda_e \Rightarrow \lambda_o < 0 \vee \lambda_e < 0 \quad (3.65)$$

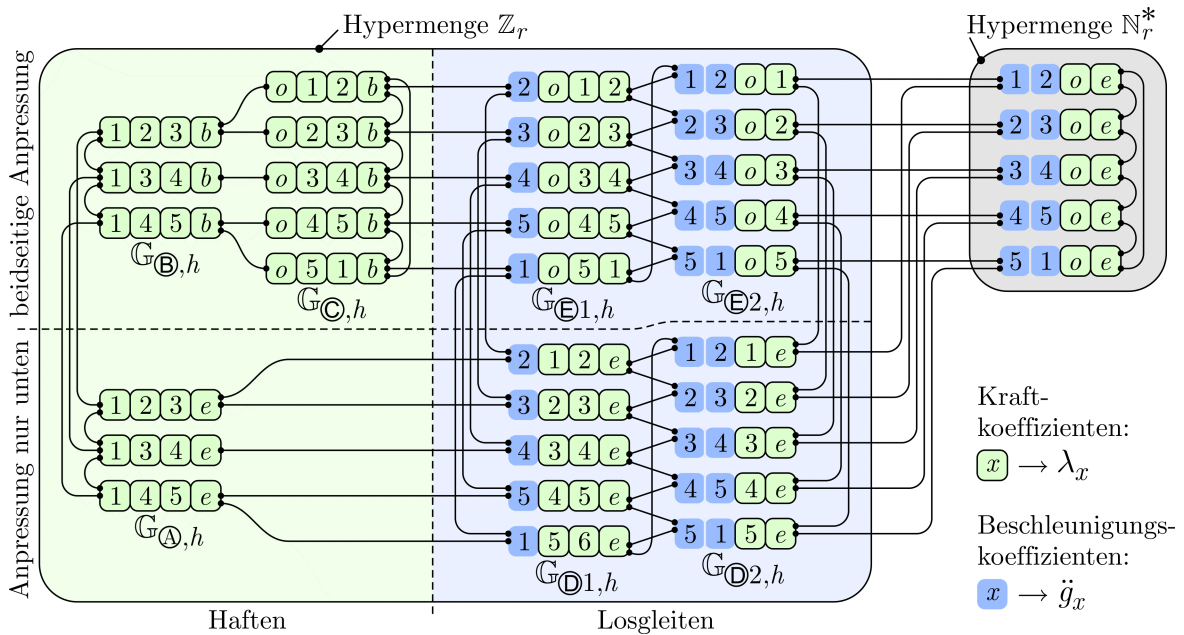


Bild 3.19: Finiter Zustandsautomat für die kraftvariable lokale Verspannung mit Anpressung an nur einer Seite im räumlichen Fall ($S=5$)

3.2.3 Kraftvariable lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung

Ist die eine, zuvor als starr angenommene Klemmbacke ebenfalls beweglich und wird durch ein elastisches Element an die Umgebung gepresst, liegt eine kraftvariable lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung vor. Bild 3.20a) zeigt eine solche Verspannung für den Fall einer kinematischen Kopplung der Auslenkungen der beiden beweglichen Klemmbacken. Da das elastische Element als sehr steif angenommen wird, fallen die Auslenkungen der Klemmbacken relativ zur Roboterbasis sehr klein aus. Somit ist eine Linearisierung der kinematischen Kopplung der beiden Klemmbacken zulässig;

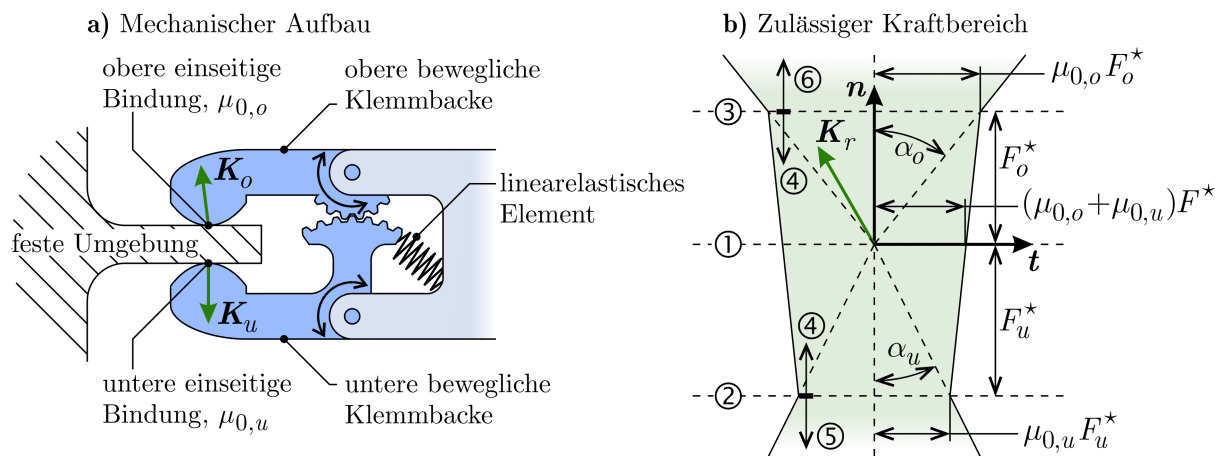


Bild 3.20: Kraftvariable lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung

für das Verhältnis i der virtuellen Verschiebungen δs_o und δs_u der Kontaktpunkte an der oberen und unteren Klemmbacke relativ zur Basis gilt dann $i = \delta s_o / \delta s_u$. Die Kontaktkräfte an der oberen und unteren Klemmbacke infolge der einseitigen Bindungen zur Umgebung addieren sich wieder zur reduzierten Kontaktkraft, $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_o + \mathbf{K}_u$. Wie zuvor wird die lokale Verspannung als Black-Box-Bindung betrachtet. Den zugehörigen zulässigen Kraftbereich für \mathbf{K}_r sowie dessen Aufteilung in die Bereiche ① bis ⑥ zeigt Bild 3.20b).

Für die Bereiche ① bis ⑥ des zulässigen Kraftbereichs gilt:

- Wie zuvor beim Fall der nur einseitigen Anpressung sind auf dem mit ① bezeichneten Niveau die Normalanteile von \mathbf{K}_o und \mathbf{K}_u identisch und gleich F^* . Der Normalanteil von \mathbf{K}_r ist dann gemäß Gleichung (3.37) gleich Null. Der Betrag der dann rein tangentialen Kraft \mathbf{K}_r ist entsprechend Gleichung (3.38) limitiert auf $(\mu_{0,o} + \mu_{0,u})F^*$.
- Auf dem Niveau ②/③ ist die obere/untere Klemmbacke gerade im Begriff, sich von der festen Umgebung zu lösen. Analog zu Gleichung (3.39) gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{②: } \mathbf{K}_{o,\text{②}} \downarrow \mathbf{0} &\Rightarrow \mathbf{K}_{r,\text{②}} = \mathbf{K}_u \Rightarrow -\mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,\text{②}} = F_u^* \wedge \left| \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r,\text{②}} \right| \leq \mu_{0,u} F_u^* , \\ \text{③: } \mathbf{K}_{u,\text{③}} \downarrow \mathbf{0} &\Rightarrow \mathbf{K}_{r,\text{③}} = \mathbf{K}_o \Rightarrow \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,\text{③}} = F_o^* \wedge \left| \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r,\text{③}} \right| \leq \mu_{0,o} F_o^* , \end{aligned} \quad (3.66)$$

wobei sich der Betrag der Anpressung F_u^* bzw. F_o^* über die virtuelle Arbeit aus der kinematischen Übersetzung i berechnen lässt:

$$F_u^* = (1+i)F^* \quad , \quad F_o^* = (1+1/i)F^* \quad (3.67)$$

- Im mittleren Bereich ④ liegt Anpressung an beiden Klemmbacken vor,

$$0 < \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{o,\text{④}} < F_o^* \quad \wedge \quad 0 < -\mathbf{n}^T \mathbf{K}_{u,\text{④}} < F_u^* \quad \Rightarrow \quad -F_u^* < \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,\text{④}} < F_o^* \quad , \quad (3.68)$$

der Tangentialanteil der Kraft \mathbf{K}_r ist dann in Abhängigkeit von ihrem Normalanteil limitiert durch:

$$\left| \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r,\text{④}} \right| \leq (\mu_{0,u} + \mu_{0,o})F^* + \left(\frac{\mu_{0,o} - \mu_{0,u} i}{i+1} \right) \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,\text{④}} \quad (3.69)$$

- Der nach unten/oben offene Bereich ⑤/⑥ entspricht dem COULOMB'schen Reibkegel des unteren/oberen Kontaktpunkts mit dem Winkel $\alpha_u = \arctan(\mu_{0,u})$ bzw. $\alpha_o = \arctan(\mu_{0,o})$. Zeigt \mathbf{K}_r in diesen Bereich, so hat sich an der oberen bzw. unteren Klemmbacke der Kontakt mit der Umgebung gelöst, wegen der hohen Steifigkeit des elastischen Elements jedoch in vernachlässigbarem Maße. Analog zu Gleichung (3.40) gilt:

$$\begin{aligned} \text{⑤: } \mathbf{K}_{o,\text{⑤}} = \mathbf{0} &\Rightarrow \mathbf{K}_{r,\text{⑤}} = \mathbf{K}_u \Rightarrow -\mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,\text{⑤}} > F_u^* \wedge \left| \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r,\text{⑤}} \right| \leq \mu_{0,u} \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,\text{⑤}} \\ \text{⑥: } \mathbf{K}_{u,\text{⑥}} = \mathbf{0} &\Rightarrow \mathbf{K}_{r,\text{⑥}} = \mathbf{K}_o \Rightarrow \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,\text{⑥}} > F_o^* \wedge \left| \mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r,\text{⑥}} \right| \leq \mu_{0,o} \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r,\text{⑥}} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Für die reduzierte Black-Box-Bindung wird auch hier eine Auslenkung in Normalenrichtung ausgeschlossen und somit nur ein tangenciales Losgleiten zugelassen.

Mit dem Kontaktgrößenpool $\mathbb{K}_r = \{ \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_b, \lambda_e \}$ sowie den analog zu Gleichung (3.1) definierten Kräfteinheitsvektoren \mathbf{k}_i entlang der Reibkegelgrenzen,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_{0,o}^2}} \begin{bmatrix} \mu_{0,o} & -\mu_{0,o} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{k}_3 & \mathbf{k}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_{0,u}^2}} \begin{bmatrix} -\mu_{0,u} & \mu_{0,u} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

gilt für die reduzierte Kontaktkraft \mathbf{K}_r und die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_{K,r}$ am reduzierten Kontaktpunkt im ebenen Fall:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = \mathbf{t}(\ddot{g}_t^\oplus - \ddot{g}_t^\ominus), \quad \mathbf{K}_r = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{k}_i \lambda_i), \quad \{ \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \} \geq 0 \quad (3.72)$$

Bild 3.21a) zeigt die Aufteilung des zulässigen Bereichs für die Kraft \mathbf{K}_r in die Bereiche \textcircled{A} bis \textcircled{L} , denen die verschiedenen Kontaktzustände der lokalen kraftvariablen Verspannung mit beidseitiger Anpressung zugeordnet sind. Die diese Kontaktzustände beschreibenden Teilmengen $G_{\textcircled{A}}$ bis $G_{\textcircled{L}}$ des Kontaktgrößenpools \mathbb{K}_r sowie deren Mengenkompimentaritäten werden durch den finiten Zustandsautomaten in Bild 3.21b) dargestellt. Die nichtnegativen und komplementären Hilfsgrößen λ_b und λ_e zeigen an, ob der Kraftvektor \mathbf{K}_r in den mittleren Bereich $\textcircled{4}$ aus Bild 3.20b) zeigt oder nicht, ob also an beiden ($\lambda_b > 0$) oder nur an einer ($\lambda_e > 0$) der beweglichen Klemmbacken Kontakt zu festen Umgebung vorliegt, und folgen aus:

$$\frac{i \cos \alpha_o}{1+i} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{\cos \alpha_u}{1+i} (\lambda_3 + \lambda_4) = F^* + \lambda_e - \lambda_b, \quad \begin{matrix} \lambda_b \geq 0 \wedge \lambda_e \geq 0 \\ \wedge \lambda_b \lambda_e = 0 \end{matrix} \quad (3.73)$$

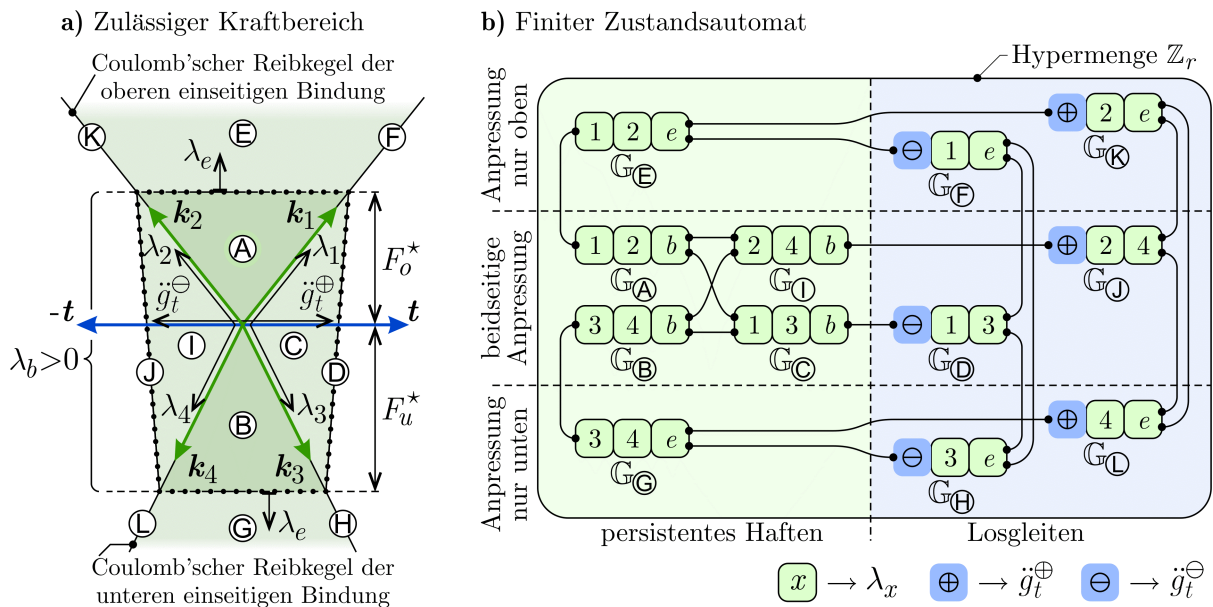


Bild 3.21: Kontaktzustände bei kraftvariabler lokaler Verspannung mit beidseitiger Anpressung, ebener Fall

Für den Fall $\lambda_b = \lambda_e = 0$ werden mit Gleichung (3.73) die vier Abschnitte der gepunkteten Grenzlinie in Bild 3.21a) beschrieben:

$$\begin{aligned}
 \text{Grenzlinie } \mathbb{A}/\mathbb{E} : \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0 &\Rightarrow \cos \alpha_o i (\lambda_1 + \lambda_2) = (1+i) F^* \\
 \text{Grenzlinie } \mathbb{B}/\mathbb{C} : \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 &\Rightarrow \cos \alpha_u (\lambda_3 + \lambda_4) = (1+i) F^* \\
 \text{Grenzlinie } \mathbb{D} : \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 0 &\Rightarrow \cos \alpha_o i \lambda_1 + \cos \alpha_u \lambda_3 = (1+i) F^* \\
 \text{Grenzlinie } \mathbb{J} : \quad \lambda_1 = \lambda_3 = 0 &\Rightarrow \cos \alpha_o i \lambda_2 + \cos \alpha_u \lambda_4 = (1+i) F^*
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Es sei bzgl. der ein persistentes Haften des reduzierten Kontaktpunkts beschreibenden Teilmengen $\mathbb{G}_\mathbb{A}$, $\mathbb{G}_\mathbb{B}$, $\mathbb{G}_\mathbb{E}$ und $\mathbb{G}_\mathbb{C}$ auf Gleichung (3.48) verwiesen. Bei den Teilmengen $\mathbb{G}_\mathbb{F}$, $\mathbb{G}_\mathbb{H}$, $\mathbb{G}_\mathbb{K}$ und $\mathbb{G}_\mathbb{L}$, die ein Losgleiten bei Anpressung an nur einer Klemmbacke beschreiben, liegt Analogie zu Gleichung (3.49) vor.

Die Teilmengen $\mathbb{G}_\mathbb{A}$ und $\mathbb{G}_\mathbb{B}$ können mengenkomplementär zu den Teilmengen $\mathbb{G}_\mathbb{C}$ und $\mathbb{G}_\mathbb{J}$ übergehen, die den außerhalb der COULOMB'schen Reibkegel gelegenen Bereichen \mathbb{C} und \mathbb{J} zugeordnet sind, jedoch ebenfalls ein persistentes Haften des reduzierten Kontaktpunkts, $\dot{\mathbf{r}}_{K,r} = \mathbf{0}$, bei Anpressung an beiden Klemmbacken beschreiben. Mit Gleichung (3.73) gilt dann:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C} : \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{k}_1 \lambda_1 + \mathbf{k}_3 \lambda_3 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 0 \quad , \quad \cos \alpha_o i \lambda_1 + \cos \alpha_u \lambda_3 &\leq (1+i) F^* \\
 \mathbb{J} : \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{k}_2 \lambda_2 + \mathbf{k}_4 \lambda_4 \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \quad , \quad \cos \alpha_o i \lambda_2 + \cos \alpha_u \lambda_4 &\leq (1+i) F^* \\
 \Rightarrow \lambda_b \geq 0 \wedge \lambda_e = 0 \quad , \quad \mathbb{G}_\mathbb{C} = \{ \lambda_1, \lambda_3, \lambda_b \} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_\mathbb{J} = \{ \lambda_2, \lambda_4, \lambda_b \} &\geq 0
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Der mengenkomplementäre Übergang von der Teilmenge $\mathbb{G}_\mathbb{C}$ zur Teilmenge $\mathbb{G}_\mathbb{D}$ bzw. von $\mathbb{G}_\mathbb{J}$ zu $\mathbb{G}_\mathbb{I}$ entspricht dem Übergang vom persistenten Haften zum Losgleiten des reduzierten Kontaktpunkts mit $\dot{\mathbf{r}}_{K,r} \geq \mathbf{0}$, der Kraftvektor \mathbf{K}_r zeigt dann auf die Grenzlinie \mathbb{D} bzw. \mathbb{I} in Bild 3.21a). Damit verbunden ist ein Verschwinden der Hilfsgröße λ_b , deren Platz die tangentialen Beschleunigungen \ddot{g}_t^\oplus bzw. \ddot{g}_t^\ominus einnehmen, so dass mit Gleichung (3.74) gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D} : \quad \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = -\mathbf{n} \ddot{g}_t^\ominus \quad , \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{k}_1 \lambda_1 + \mathbf{k}_3 \lambda_3 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda_4 = 0 \quad , \quad \cos \alpha_o i \lambda_1 + \cos \alpha_u \lambda_3 &= (1+i) F^* \\
 \mathbb{I} : \quad \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = \mathbf{n} \ddot{g}_t^\oplus \quad , \quad \mathbf{K}_r = \mathbf{k}_2 \lambda_2 + \mathbf{k}_4 \lambda_4 \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \quad , \quad \cos \alpha_o i \lambda_2 + \cos \alpha_u \lambda_4 &= (1+i) F^* \\
 \Rightarrow \lambda_b = \lambda_e = 0 \quad , \quad \mathbb{G}_\mathbb{D} = \{ \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_3 \} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_\mathbb{I} = \{ \ddot{g}_t^\oplus, \lambda_2, \lambda_4 \} &\geq 0
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Mit der willkürlichen Festlegung von mengenkomplementären Verbindungen zwischen den ein Losgleiten bei Anpressung an nur einer der beiden Klemmbacken beschreibenden Teilmengen $\mathbb{G}_\mathbb{F}$ und $\mathbb{G}_\mathbb{H}$ sowie $\mathbb{G}_\mathbb{K}$ und $\mathbb{G}_\mathbb{L}$,

$$\begin{array}{ccc}
 \lambda_1 \downarrow 0 & & \lambda_2 \downarrow 0 \\
 \mathbb{G}_\mathbb{F} \rightleftharpoons \mathbb{G}_\mathbb{H} & , & \mathbb{G}_\mathbb{K} \rightleftharpoons \mathbb{G}_\mathbb{L} \\
 \lambda_3 \downarrow 0 & & \lambda_4 \downarrow 0
 \end{array} \tag{3.77}$$

sind jeder der drei Skalare enthaltenden Teilmengen $\mathbb{G}_j \in \mathbb{Z}_r$ drei andere Teilmengen aus \mathbb{Z}_r mengenkomplementär zugeordnet, so dass der finite Zustandsautomat in Bild 3.21b) gänzlich ohne neutrale Teilmengen auskommt, $N_r^* = \emptyset$, und somit gemäß Gleichung (2.103) streng abgeschlossen ist. Der LEMKE-Algorithmus bewegt sich also aus-

schließlich innerhalb der Hypermengen der zulässigen Teilmengen \mathbb{Z}_r für die lokale kraftvariable Verspannung mit beidseitiger Anpressung und arbeitet somit robust.

Das im Anhang A.1 dargestellte Vorgehen für den räumlichen Fall verläuft analog.

3.2.4 Kraftkonstante halbstarre lokale Verspannung

Bei einer kraftkonstanten lokalen Verspannung übt ein Aktor eine konstante Kraft bzw. ein konstantes Moment auf den Mechanismus zur lokalen Verspannung aus. Für den Fall der halbstarren Verspannung, also mit Anpressung an nur einer, hier der unteren Seite, ist dies in Bild 3.22a) dargestellt. An der unteren beweglichen Klemmbacke liegt somit ein konstanter Normalanteil der Kontaktkraft vor, $\mathbf{n}^T \mathbf{K}_u = F^*$. Der zulässige Kraftbereich für die reduzierte Kontaktkraft $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_o + \mathbf{K}_u$ in Bild 3.22b) ähnelt dem für den kraftvariablen halbstarren Fall in Bild 3.14b) und es gilt:

- Auf dem Niveau ① sind die Normalanteile der oberen und unteren Kontaktkraft identisch, der Normalanteil der reduzierten Kontaktkraft verschwindet, es gelten unverändert die Gleichungen (3.37) und (3.38). Es liegt keine Beschleunigung des reduzierten Kontaktpunkts K_r in Normalenrichtung vor.
- Das Niveau ② stellt das untere Limit für den Normalanteil von \mathbf{K}_r dar; der Kontakt an der oberen Klemmbacke zur festen Umgebung ist gerade im Begriff, sich zu lösen. Da die Anpressung an der unteren beweglichen Klemmbacke (anders als beim vorangegangenen Fall der kraftvariablen Verspannung mit sehr steifem elastischen Element) auch bei Auslenkungen dieser Klemmbacke relativ zur Basis des mobilen Roboters stets konstant bleibt, ist auf dem Niveau ② eine Separation des reduzierten Black-Box-Kontaktpunkts in positive Normalenrichtung möglich:

$$\mathbf{n}^T \ddot{\mathbf{g}}_{K_r, \textcircled{2}} \geq 0 \quad , \quad \mathbf{K}_{o, \textcircled{2}} \downarrow \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_{r, \textcircled{2}} = \mathbf{K}_u \wedge \begin{cases} \mathbf{n}^T \mathbf{K}_{r, \textcircled{2}} = -F^* \\ |\mathbf{t}^T \mathbf{K}_{r, \textcircled{2}}| \leq \mu_{0,u} F^* \end{cases} \quad (3.78)$$

- Im gesamten Inneren ③ des zulässigen Kraftbereichs liegt Anpressung an beiden Klemmbacken ohne Beschleunigung des reduzierten Kontaktpunkts in Normalenrichtung vor, die Gleichungen (3.41) und (3.42) gelten unverändert.

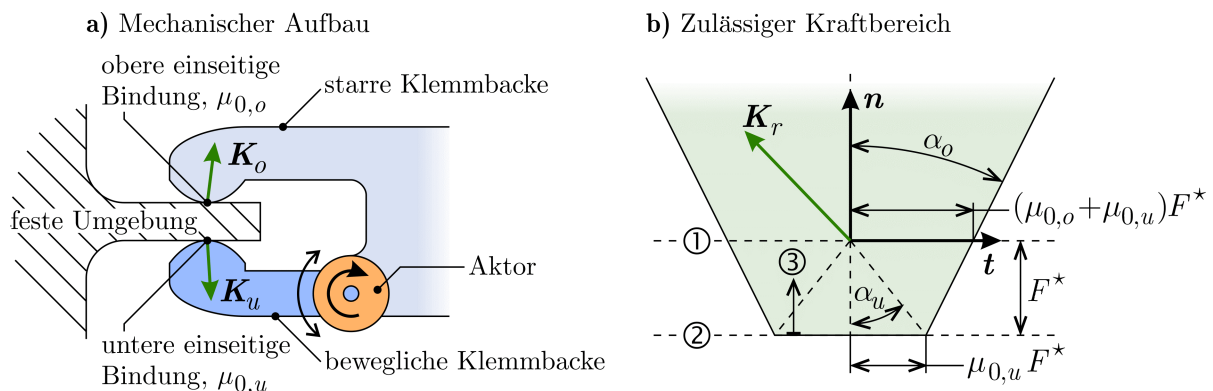


Bild 3.22: Kraftkonstante halbstarre lokale Verspannung

In Bild 3.23 ist für den ebenen Fall einer kraftkonstanten, halbstarren lokalen Verspannung die Aufteilung des zulässigen Kraftbereichs in die Teilbereiche \textcircled{A} bis \textcircled{F} sowie der finite Zustandsautomat bzgl. der diese Bereiche beschreibenden Teilmengen $\mathbb{G}_i \subset \mathbb{K}_r$ des Kontaktgrößenpools $\mathbb{K}_r = \{\ddot{g}_n, \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_b\}$ dargestellt. Für den kinematischen und kinetischen Zustand am reduzierten Kontaktpunkt gilt:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} &= \mathbf{n} \ddot{g}_n + \mathbf{t} \ddot{g}_t^\oplus - \mathbf{t} \ddot{g}_t^\ominus, & \{\ddot{g}_n, \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_2\} &\geq 0 \\ \mathbf{K}_r &= \mathbf{k}_1 \lambda_1 + \mathbf{k}_2 \lambda_2 - \mathbf{n} F^* (1 + \mu_{0,u} / \mu_{0,o}), & \end{aligned} \quad (3.79)$$

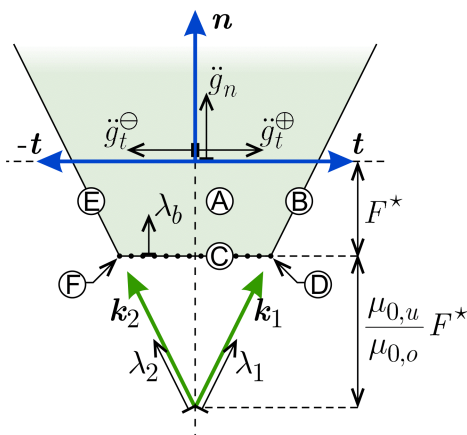
Die reduzierte Kontaktkraft \mathbf{K}_r wird dabei über eine Quasiverschiebung des zulässigen Kraftbereichs in Normalenrichtung über die Distanz $F^* (1 + \mu_{0,u} / \mu_{0,o})$ mit den auf den Reibkegel des oberen Kontaktpunkts ausgerichteten Krafteinheitsvektoren \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 , vgl. Gleichung (3.71), beschrieben. Die zugehörigen nichtnegativen Kraftkoeffizienten λ_1 und λ_2 sind unter Verwendung der nichtnegativen Hilfsgröße λ_b limitiert durch

$$\cos \alpha_o (\lambda_1 + \lambda_2) = (\mu_{0,u} / \mu_{0,o}) F^* + \lambda_b, \quad \lambda_b \geq 0 \wedge \ddot{g}_n \geq 0 \wedge \lambda_b \ddot{g}_n = 0, \quad (3.80)$$

womit für den Fall $\lambda_b = 0$ die gepunktete horizontale Grenzlinie in Bild 3.23a) definiert wird. Die Teilmengen, die die Kontaktzustände mit beidseitiger Anpressung ohne Separation oberhalb dieser Grenzlinie nichtnegativ beschreiben, lauten:

$$\begin{aligned} \textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{E} : \cos \alpha_o (\lambda_1 + \lambda_2) &\geq (\mu_{0,u} / \mu_{0,o}) F^* \Rightarrow \lambda_b \geq 0 \Rightarrow \ddot{g}_n = 0 \\ \Rightarrow \mathbb{G}_{\textcircled{A}} &= \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_b\} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\textcircled{B}} = \{\ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_b\} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\textcircled{E}} = \{\ddot{g}_t^\oplus, \lambda_2, \lambda_b\} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

a) Zulässiger Kraftbereich



b) Finiter Zustandsautomat

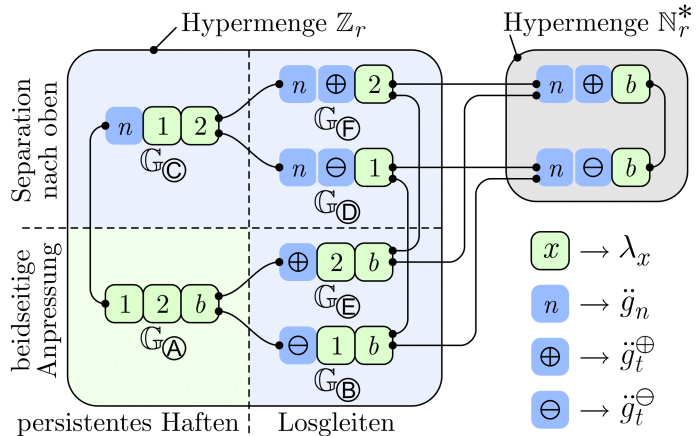


Bild 3.23: Kontaktzustände bei einer kraftkonstanten halbstarren lokalen Verspannung im ebenen Fall

Ein Verschwinden der Hilfsgröße λ_b zeigt ein Loslösen den Kontakts an der oberen starren Klemmbacke an. Somit ist λ_b gemäß Gleichung (3.80) komplementär zur Normalbeschleunigung \ddot{g}_n des reduzierten Kontaktpunkts. Für die die entsprechenden Kontaktzustände nichtnegativ beschreibenden Teilmengen gilt:

$$\begin{aligned} \textcircled{C}, \textcircled{D}, \textcircled{F} : \cos \alpha_o (\lambda_1 + \lambda_2) &= (\mu_{0,u} / \mu_{0,o}) F^* \Rightarrow \lambda_b = 0 \Rightarrow \ddot{g}_n \geq 0 \quad (3.82) \\ \Rightarrow \mathbb{G}_{\textcircled{C}} &= \{\ddot{g}_n, \lambda_1, \lambda_2\} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\textcircled{D}} = \{\ddot{g}_n, \ddot{g}_t^{\ominus}, \lambda_1\} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\textcircled{F}} = \{\ddot{g}_n, \ddot{g}_t^{\oplus}, \lambda_2\} \geq 0 \end{aligned}$$

Wie bei der kraftvariablen, halbstarren lokalen Verspannung in Abschnitt 3.2.2 ist der finite Zustandsautomat um redundante Teilmengen $\mathbb{G}_{red} \in \mathbb{N}_r^* \subseteq \mathbb{N}_r$ erweitert, so dass jeder Teilmenge aus der dann neutral abgeschlossenen Hypermengen \mathbb{Z}_r entsprechend der Anzahl der jeweils enthaltenen skalare Kontaktgrößen genau drei mengenkomplementäre andere Teilmengen $\mathbb{G} \in \{\mathbb{Z}_r \cup \mathbb{N}_r^*\}$ zugeordnet sind. Die Teilmengen \mathbb{G}_{red} sind deshalb redundant, da sie gemäß Gleichung (3.80) mit $F^* > 0$ den Kontaktzustand niemals nichtnegativ beschreiben können:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_b = -(\mu_{0,u} / \mu_{0,o}) F^* \stackrel{!}{<} 0 \quad (3.83)$$

Die Behandlung des räumlichen Falls ist im Anhang A.2 beschrieben.

3.2.5 Kraftkonstante lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung

Die Zusammenhänge bei der kraftkonstanten lokalen Verspannung mit beidseitiger Anpressung gemäß Bild 3.24a) stimmen weitgehend mit denen des entsprechenden kraftvariablen Falls in Abschnitt 3.2.3 überein, die dortigen Gleichungen können mit geringen, unten beschriebenen Anpassungen übernommen werden. Wie der zulässige Kraftbereich in Bild 3.24b) zeigt, liegt der Unterschied im Bindungsverhalten bei Erreichen des unteren bzw. oberen Grenzniveaus ② bzw. ③: Im vorliegenden kraftkonstanten Fall ist im Gegensatz zum kraftvariablen Fall keine weitere Steigerung des Betrages des Normalanteils der reduzierten Kontaktkraft K_r möglich, die Bereiche ⑤ und ⑥ gemäß Bild 3.20b) sind hier also nicht existent und die reduzierte Black-Box-Bindung ist zur Separation in positive sowie negative Normalenrichtung imstande.

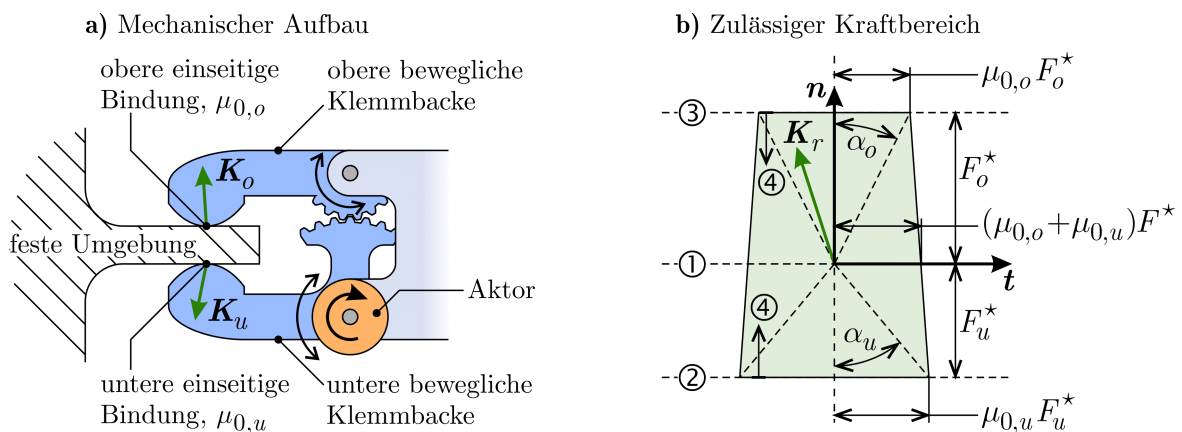


Bild 3.24: Kraftkonstante lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung

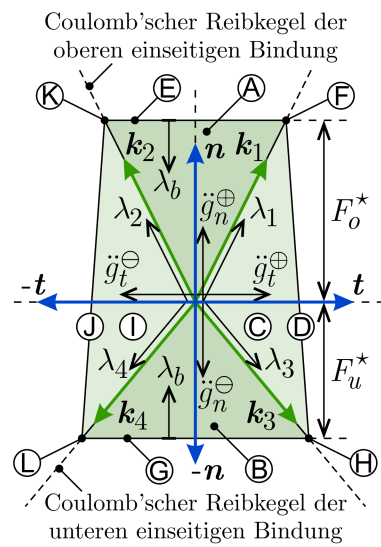
Für den kinematischen und kinetischen Zustand am reduzierten Kontaktpunkt gilt im ebenen Fall

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = \mathbf{n}(\ddot{g}_n^\oplus - \ddot{g}_n^\ominus) + \mathbf{t}(\ddot{g}_t^\oplus - \ddot{g}_t^\ominus) \quad , \quad \mathbf{K}_r = \sum_{h=1}^4 (\mathbf{k}_h \lambda_h) \quad , \quad (3.84)$$

$$\{\ddot{g}_n^\oplus, \ddot{g}_n^\ominus, \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \geq 0 \quad ,$$

der zugehörige Kontaktgrößenpool lautet $\mathbb{K}_r = \{\ddot{g}_n^\oplus, \ddot{g}_n^\ominus, \ddot{g}_t^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_b, \lambda_e\}$, wobei für die nichtnegativen, an der Beschreibung der Kontaktkraft unbeteiligten Hilfsgrößen λ_b und λ_e Gleichung (3.73) gilt. Die Beschleunigungsgrößen \ddot{g}_n^\oplus und \ddot{g}_n^\ominus nehmen gegenüber Abschnitt 3.2.3 den Platz der Hilfsgröße λ_e ein, wenn die Kraft \mathbf{K}_r das Niveau ② bzw. ③ gemäß Bild 3.24b) erreicht.

a) Zulässiger Kraftbereich



b) Finiter Zustandsautomat

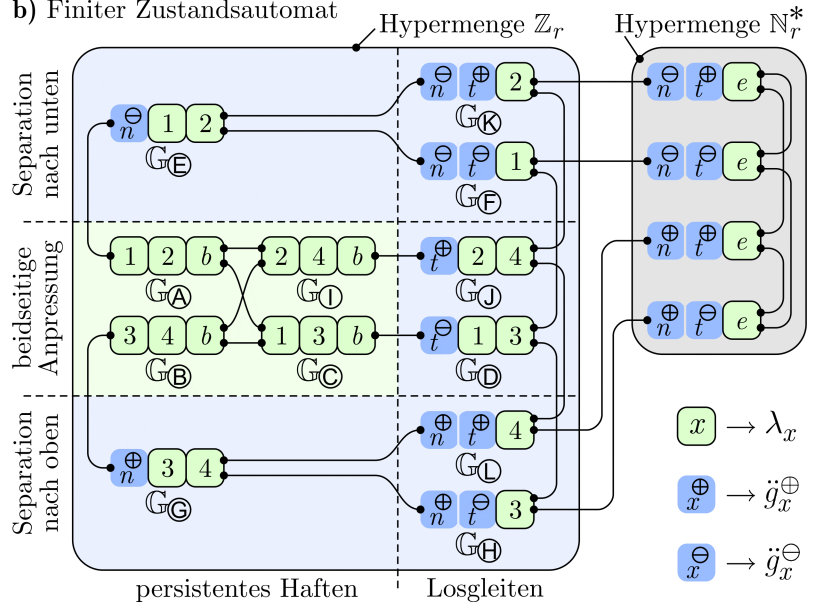


Bild 3.25: Kontaktzustände bei einer kraftkonstanten lokalen Verspannung mit beidseitiger Anpressung im ebenen Fall

Bild 3.25 zeigt die Aufteilung des zulässigen Kraftbereichs in die Bereiche ① bis ⑬ sowie den zugehörigen finiten Zustandsautomaten, der die Hypermenge \mathbb{N}_r^* der neutralen Teilmengen umfasst. Diese enthält vier redundanten Teilmengen $\mathbb{G}_{red,i}$, die gemäß Gleichung (3.73) mit $F^* > 0$ wegen

$$\lambda_{\{1,2,3,4\}} = 0 \wedge \lambda_b = 0 \Rightarrow 0 = F^* + \lambda_e \Rightarrow \lambda_e < 0 \quad (3.85)$$

den Kontaktzustand niemals nichtnegativ beschreiben können. Für die Teilmengen, die eine Separation des reduzierten Kontaktpunkts nach unten beschreiben, gilt

$$\begin{aligned} \text{⑤, ⑥, ⑦} : \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \wedge \cos \alpha_o (\lambda_1 + \lambda_2) = F_o^* &\Rightarrow \ddot{g}_n^\ominus \geq 0 \wedge \lambda_b = \lambda_e = 0 \quad (3.86) \\ \Rightarrow \mathbb{G}_{\text{⑤}} = \{\ddot{g}_n^\ominus, \lambda_1, \lambda_2\} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\text{⑥}} = \{\ddot{g}_n^\ominus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_1\} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\text{⑦}} = \{\ddot{g}_n^\ominus, \ddot{g}_t^\oplus, \lambda_2\} \geq 0, \end{aligned}$$

die Teilmengen bzgl. einer Separation des reduzierten Kontaktpunkts nach oben lauten:

$$\begin{aligned} \textcircled{G}, \textcircled{H}, \textcircled{L} : \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \wedge \cos \alpha_u (\lambda_3 + \lambda_4) = F_u^* &\Rightarrow \ddot{g}_n^\oplus \geq 0 \wedge \lambda_b = \lambda_e = 0 \quad (3.87) \\ \Rightarrow \mathbb{G}_{\textcircled{G}} = \{\ddot{g}_n^\oplus, \lambda_3, \lambda_4\} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\textcircled{H}} = \{\ddot{g}_n^\oplus, \ddot{g}_t^\ominus, \lambda_3\} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\textcircled{L}} = \{\ddot{g}_n^\oplus, \ddot{g}_t^\oplus, \lambda_4\} \geq 0 \end{aligned}$$

Die übrigen in der Hypermengende der zulässigen Teilmengen Z_r enthaltenen, eine beidseitige Anpressung ohne eine Beschleunigung in Normalenrichtung beschreibenden und den Teilbereichen \textcircled{A} bis \textcircled{D} sowie \textcircled{I} und \textcircled{J} zugeordneten Teilmengen werden unverändert aus Abschnitt 3.2.3 übernommen.

Für den räumlicher Fall sei auf Anhang A.3 verwiesen.

Kapitel 4

Statische Bindungsoptimierung

Die vorangegangenen Ausführungen stellen die Werkzeuge bereit, um für den einseitig gebundenen bzw. zusätzlich lokal verspannten mobilen Roboter unter einer bestimmten Last und einem bestimmten kinematischen Zustand den Bindungsstatus zu ermitteln. Dies kann nun bei Optimierungsaufgaben angewendet werden. In diesem Kapitel wird zunächst der statische Fall betrachtet, dynamische Aspekte werden bei der Optimierung somit nicht berücksichtigt.

4.1 Problemstellung

Die Optimierungsaufgabe liegt in der Wahl eines optimalen Standortes und einer optimalen Orientierung des in Kapitel 2 dargestellten mobilen Roboters relativ zu einem durch die inertielle Greiferposition ${}^I r_G$, vgl. Gleichung (2.38), vorgegebenen Manipulationspunkt im kartesischen Raum. An diesem hat der Roboter mit ebenfalls vorgegebener Greiferorientierung $A_{G,I}$ eine bestimmte manipulative Aufgabe zu verrichten, siehe Bild 4.1. Zur mathematischen Beschreibung des Optimierungsproblems sind zusätzlich zu dem bereits bekannten mathematisch-mechanischen Modell des mobilen Roboters mitsamt den einseitigen Bindungen und ggf. lokalen Verspannungen im Folgenden noch die Optimierungsparameter, die Gütekriterien und die Nebenbedingungen zu definieren.

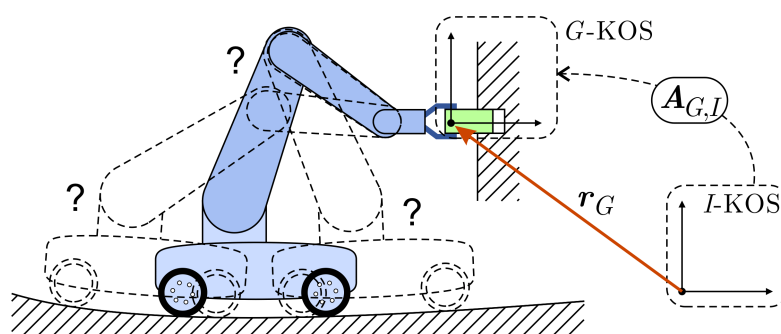


Bild 4.1: Statische Bindungsoptimierung eines mobilen Roboters

4.2 Optimierungsparameter

Gemäß Gleichung (2.46) in Abschnitt 2.3 wird die Position und die Orientierung der den Roboterarm tragenden Basis in der bindungspersistenten, mit dem Index „0“ ge-

kennzeichneten Referenzlage durch den Ortsvektor \mathbf{r}_{B_0} vom Ursprung des Inertialsystems zum Basisschwerpunkt sowie durch die Transformationsmatrix $\mathbf{A}_{B_0,I}$ beschrieben. Zum Zwecke der Bindungsoptimierung sind diese beiden geometrischen Größen zu parametrisieren. Dabei muss die Verträglichkeit mit der gegebenen Topologie der festen Umgebung, die der Basis zur Standort- und Orientierungsvariation zur Verfügung steht, berücksichtigt werden. Mit dem Vektor \mathbf{p} der Optimierungsparameter gilt:

$$f_U : \mathbf{p} \mapsto \{\mathbf{r}_{B_0}(\mathbf{p}), \mathbf{A}_{B_0,I}(\mathbf{p})\} \quad (4.1)$$

Das Funktional f_U beschreibt die Umgebungstopologie. Als Beispiel sei in Bild 4.2 der Fall einer schiefen Ebene E betrachtet, auf der die Position und Orientierung des mobilen Roboters durch die kartesischen Raumkoordinaten p_1 und p_2 sowie den Drehwinkel p_3 um die Normalenachse parametrisiert werden. Mit den die schiefe Ebene definierenden Konstanten $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\} \in \mathbb{R}$ gilt dann für den Ortsvektor \mathbf{r}_{B_0} und die Transformationsmatrix $\mathbf{A}_{B_0,I}$:

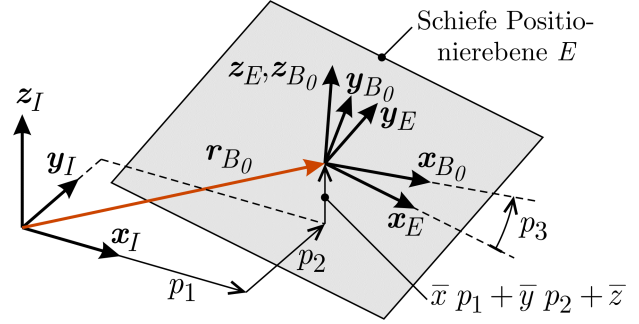


Bild 4.2: Position und Orientierung des mobilen Roboters auf einer schiefen Ebene

$${}^I\mathbf{r}_{B_0}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \bar{x} p_1 + \bar{y} p_2 + \bar{z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{B_0,I}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_{B_0,E}(\mathbf{p}) \mathbf{A}_{E,I} = \begin{bmatrix} c p_3 & s p_3 & 0 \\ -s p_3 & c p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^I\mathbf{x}_E^T \\ {}^I\mathbf{y}_E^T \\ {}^I\mathbf{z}_E^T \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Für die zur schiefen Ebene tangentialen bzw. normalen Einheitsvektoren gilt:

$$\begin{aligned} {}^I\mathbf{x}_E &= 1/\sqrt{1+\bar{x}^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bar{x} \end{pmatrix}^T, & {}^I\mathbf{z}_E &= 1/\sqrt{1+\bar{x}^2+\bar{y}^2} \begin{pmatrix} -\bar{x} & -\bar{y} & 1 \end{pmatrix}^T, \\ {}^I\mathbf{y}_E &= 1/\sqrt{(1+\bar{x}^2+\bar{y}^2)(1+\bar{x}^2)} \begin{pmatrix} -\bar{x}\bar{y} & (1+\bar{x}^2) & \bar{y} \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.3)$$

Geht man von einem zum vorliegenden Gravitationsfeld ausgerichteten Inertialsystem aus, so dass $\mathbf{g} \parallel \mathbf{z}_I$, dann wird der Standardfall der horizontalen, zur Gravitation orthogonalen Ebene durch $\bar{x} = \bar{y} = 0$ beschrieben.

Sind die Referenzposition \mathbf{r}_{B_0} und -orientierung $\mathbf{A}_{B_0,0}$ der Basis mit den Optimierungsparametern \mathbf{p} festgelegt, wird über die inverse Kinematik (IK) des Roboterarms der Vektor der Gelenkwinkel $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p})$, vgl. Gleichung (2.29), bestimmt, mit denen der Arm die geforderte inertielle Position ${}^I\mathbf{r}_G$ und Orientierung $\mathbf{A}_{I,G}$ des Greifers einhält:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\stackrel{f_U}{\mapsto} \{\mathbf{r}_{B,G}(\mathbf{p}), \mathbf{A}_{B,G}(\mathbf{p})\} \stackrel{\text{IK}}{\mapsto} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}), & \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p}) &= \text{col}_{i=1}^{f_A} \langle \varphi_i(\mathbf{p}) \rangle, \\ \mathbf{r}_{B,G}(\mathbf{p}) &= \mathbf{r}_G - \mathbf{r}_{B_0}(\mathbf{p}) - \mathbf{r}_{B_0,B}, & \mathbf{A}_{B,G}(\mathbf{p}) &= \mathbf{A}_{B_0,B}^T \mathbf{A}_{B_0,I}(\mathbf{p}) \mathbf{A}_{I,G} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Gemäß Gleichung (2.46) zur Kontaktmechanik in Abschnitt 2.3 kann im persistenten Bindungszustand der Basis $\mathbf{r}_{B_0,B} = \mathbf{0}$ sowie $\mathbf{A}_{B_0,B} = \mathbf{E}_3$ gesetzt werden.

4.3 Gütekriterien

Bindungspersistenz in Normalenrichtung

Als Prämisse für die Analyse der Gefahr eines Bindungswechsels an den $n_{P,B}$ Kontaktpunkten der Basis in Normalenrichtung wird eine simultane Separation an allen Kontaktpunkten ausgeschlossen. Selbst wenn also ein vollständiges Loslösen des mobilen Roboters von der Umgebung auftreten sollte, so wird dieser Vorgang an den einzelnen Kontaktpunkten zeitlich versetzt ablaufen und ist am Anfang durch ein Kippen um eine durch zwei zunächst weiterhin geschlossene Kontaktpunkte verlaufende Achse gekennzeichnet. Jeder Separationsvorgang kann somit als Kippvorgang betrachtet werden, dessen Auftrettswahrscheinlichkeit auf der Basis der mit Hilfe des LEMKE-Algorithmus gewonnenen Lösung des Linearen Komplementaritätsproblems LCP bzgl. des Bindungszustands quantifiziert wird.

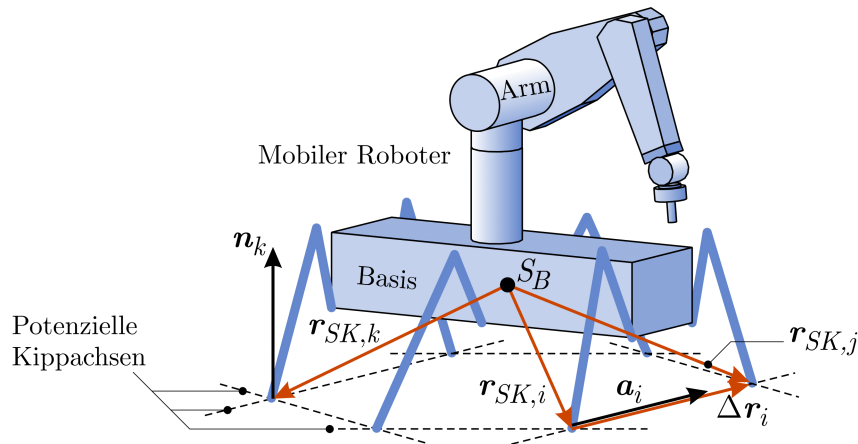


Bild 4.3: Potenzielle Kippachsen eines mobilen Roboters

Ein Kippen des mobilen Roboters kann nur um die potenziellen Kippachsen erfolgen. Diese folgen aus den Positionen der einzelnen Kontaktpunkte und werden gemäß Bild 4.3 durch den jeweiligen Richtungs-Einheitsvektoren \mathbf{a}_i beschrieben. Mit den Vektoren $\mathbf{r}_{SK,i}$ bzw. $\mathbf{r}_{SK,j}$ vom Basisschwerpunkt S_B zum i -ten und j -ten Kontaktpunkt gilt:

$$\mathbf{a}_i = \Delta \mathbf{r}_i / |\Delta \mathbf{r}_i| \quad , \quad \Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{SK,j} - \mathbf{r}_{SK,i} \quad , \quad \{i, j\} \in \{1 \dots n_{P,B}\} \quad (4.5)$$

Sind im System kraftvariable lokale Verspannungen gemäß den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3 vorhanden, so kann an den zugehörigen Kontaktpunkten jegliche Separation ausgeschlossen werden. Sämtliche potenzielle Kippachsen des mobilen Roboters verlaufen dann durch die diesen Verspannungen zugehörigen Kontaktpunkte.

Die Gütefunktion $G_N(\mathbf{p})$ bzgl. der Reserve gegen ein Kippen des mobilen Roboters umfasst zwei Anteile. Für den ersten Anteil $G_{N\odot}$ wird das Minimum der Summen M_i der von den normalen Kraftreserven $\lambda_{N,k}$ (Definition folgt unten) um die potenziellen Kippachsen \mathbf{a}_i erzeugten Momente betrachtet, so dass gilt:

$$G_{N\ominus}(\mathbf{p}) = M_0 / (M_0 + \min_i (|M_i(\mathbf{p})|)) \quad , \quad (4.6)$$

$$M_i(\mathbf{p}) = \mathbf{a}_i \sum_{\forall k} \left((\tilde{\mathbf{r}}_{SK,k} - \tilde{\mathbf{r}}_{SK,i}) \mathbf{n}_k \lambda_{N,k}(\mathbf{p}) \right) \quad , \quad k \in (\{1 \dots n_{P,B}\} \setminus \{i, j\})$$

Im Falle des Loskippens verschwinden die normalen Kraftreserven an allen nicht auf der jeweiligen Kippachse liegenden Kontaktpunkten, $\forall k: |\lambda_{N,k}| \downarrow 0$, ein Loskippen wird dann durch $G_{N\ominus}(\mathbf{p}) \uparrow 1$ indiziert. Für das frei wählbare konstante Referenzmoment $M_0 > 0$ sollte ca. 1/10 des Wertes, den die kleinste der Momentensummen M_i ohne äußere Last bei ruhendem Arm maximal einnehmen kann ($\min_i (|M_i(\mathbf{p})|) \rightarrow \max$), gewählt werden. Für den ersten Anteil von G_N gilt dann $\sim 0,1 \leq G_{N\ominus}(\mathbf{p}) \leq 1$.

Die Bestimmung der normalen Kraftreserven $\lambda_{N,k}$ in Gleichung (4.6) erfolgt in Abhängigkeit vom Typ der jeweiligen Bindung mit Hilfe der vom LEMKE-Algorithmus bereitgestellten Kraftkoeffizienten ${}_L\lambda$:

- Bei gewöhnlichen einseitigen Bindungen gilt mit den Kraftkoeffizienten ${}_L\lambda_{k,h}$ gemäß Gleichung (3.15) sowie dem normalen Anteil κ_n der \mathbf{k}_h gemäß (3.12):

$$\lambda_{N,k}(\mathbf{p}) = \left\langle \kappa_n \sum_{h=1}^S {}_L\lambda_h(\mathbf{p}) \right\rangle_k \geq 0 \quad (4.7)$$

- Bei der kraftkonstanten halbstarren lokalen Verspannung aus Abschnitt 3.2.4 entspricht die normale Kraftreserve der Hilfsgröße λ_b aus Gleichung (A.12):

$$\lambda_{N,k}(\mathbf{p}) = {}_L\lambda_{b,k}(\mathbf{p}) \geq 0 \quad (4.8)$$

- Im Falle einer kraftkonstanten lokalen Verspannung mit beidseitiger Anpressung, siehe Abschnitt 3.2.5, werden die Kraftkoeffizienten ${}_L\lambda_h$ aus Gleichung (A.17) sowie die Faktoren $\kappa_{n,o}$ und $\kappa_{n,u}$ aus Gleichung (A.3) herangezogen, vgl. Bild 3.32:

$$\lambda_{N,k}^*(\mathbf{p}) = \left\langle \kappa_{n,o} \sum_{h=1}^S {}_L\lambda_h(\mathbf{p}) - \kappa_{n,u} \sum_{h=S+1}^{2S} {}_L\lambda_h(\mathbf{p}) \right\rangle_k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_{N,k}^* \geq 0 & \Rightarrow \lambda_{N,k}(\mathbf{p}) = \lambda_{N,k}^* - F_o^* \leq 0 \\ \lambda_{N,k}^* < 0 & \Rightarrow \lambda_{N,k}(\mathbf{p}) = F_u^* + \lambda_{N,k}^* \geq 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

- Bei den kraftvariablen lokalen Verspannungen, die zu keiner Separation in Stande sind, liegt formal eine normale Kraftreserve von $\lambda_{N,k}(\mathbf{p}) = +\infty$ vor.

Im Falle eines Loskippens gilt $G_{N\ominus}(\mathbf{p}) = 1$, der zugehörige Gradient verschwindet, $\Delta G_{N\ominus}(\mathbf{p}) / \Delta \mathbf{p} = 0$, was ein Scheitern gradientenbasierter Optimierungsalgorithmen zur Folge hätte, wäre $G_{N\ominus}$ das alleinige Gütekriterium bzgl. der normalen Bindungspersistenz. Daher wird zusätzlich als zweiter Anteil $G_{N\otimes}$ der Gütefunktion der maximal auftretende Normalenanteil der aus der LCP-Lösung bekannten Kontaktpunktbeschleunigungen ${}_L\ddot{g}_{k,n}(\mathbf{p})$ gemäß den Gleichungen (3.10), (A.11), (A.17) betrachtet,

$$G_{N\otimes}(\mathbf{p}) = \max_k \left({}_L\ddot{g}_{k,n}(\mathbf{p}) \right) \geq 0 \quad , \quad (4.10)$$

$$\text{so dass zusammengefasst gilt:} \quad G_N(\mathbf{p}) = G_{N\ominus}(\mathbf{p}) + G_{N\otimes}(\mathbf{p}) \quad (4.11)$$

Bindungspersistenz in Tangentialrichtung

Die Quantifizierung der Persistenzsicherheit für die Bindungen in Tangentialrichtung und somit der Reserve bzgl. eines Losgleitens der Roboterbasis folgt aus dem Grad der Ausnutzung der Haftkraftreserven an den Kontaktpunkten des Systems zur festen Umgebung. Die vom LEMKE-Algorithmus bereitgestellte Lösung des das Kontaktproblem beschreibenden LCPs bildet hierfür die Grundlage. Je zentrischer die einzelnen Kontaktkraftvektoren bzgl. der jeweiligen Reibpyramide (bzw. der prismatischen zulässigen Kraftbereiche bei den lokalen Verspannungen) positioniert sind, desto höher ist die Losgleitreserve und desto sicherer die tangential Bindungspersistenz.

Infolge der linearen Approximation der rotationssymmetrischen zulässigen Kraftbereiche gemäß Kapitel 3 liegen nun über alle Kontaktpunkte summiert deutlich mehr Kraftkoeffizienten vor, als zur eindeutigen Beschreibung des kinematischen Systemzustands notwendig sind. Der LEMKE-Algorithmus weist daher nur einer minimal notwendigen Anzahl von Kraftkoeffizienten Werte ungleich Null zu. Dadurch wird zwar der Systemzustand korrekt erfasst, jedoch werden dabei mitunter an einigen der Kontaktpunkte sämtliche Kraftkoeffizienten zu Null gesetzt. An mindestens einem weiteren Kontaktpunkt werden stets für nur einen oder zwei der Kraftkoeffizienten Werte größer als Null ermittelt, so dass dort für den Kontaktkraftvektor \mathbf{K} eine Lage auf dem Rand der approximierten Reibpyramide bestimmt wird. Infolgedessen wird eine erschöpfte Haftkraftreserve und somit fälschlicherweise ein unmittelbar bevorstehendes Losgleiten angezeigt.

Daher werden in einer der LCP-Lösung nachfolgenden, bei jedem Schritt der übergeordneten Bindungsoptimierung von Neuem durchzuführenden Minimax-Optimierung die tangentialen Anteile der Kontaktkräfte λ_t derart neu ermittelt, dass sich eine minimale Ausnutzung des jeweiligen Haftkraftlimits $\lambda_{i,t,lim}$ ergibt. Es wird dabei nur über die Kontaktpunkte optimiert, für die der LEMKE-Algorithmus zuvor Kraftkoeffizienten größer als Null ermittelt hat, ${}_L\lambda_i \neq \mathbf{0}$. Deren Indizes i werden zur Indexmenge $\mathbb{L} \subseteq \{k\}_{k=1}^{PB}$ zusammengefasst mit $i \in \mathbb{L}$. Aus diesem Optimierungsproblem folgt direkt die Gütefunktion $G_T(\mathbf{p})$ bzgl. der tangentialen Bindungspersistenz:

$$G_T(\mathbf{p}) = \min_{{}_L\lambda_t} \left(\max_i \left(\sqrt{\lambda_{i,t_1}^2 + \lambda_{i,t_2}^2} / {}_L\lambda_{i,t,lim}(\mathbf{p}) \right) \right), \quad {}_L\lambda_t = \text{col}_{\forall i \in \mathbb{L}} \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_{i,t_1} \\ \lambda_{i,t_2} \end{pmatrix} \right\rangle \quad (4.12)$$

Als Nebenbedingung der Minimax-Optimierung ist die allgemeine Bewegungsgleichung des Systems gemäß Gleichung (2.64) zu berücksichtigen,

$${}_L\ddot{\mathbf{g}}^\perp(\mathbf{p}) = \mathbf{c} + \mathbf{W}_B^T \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{W}_{n,\mathbb{L}} {}_L\lambda_n(\mathbf{p}) + \mathbf{W}_{t,\mathbb{L}} \lambda_t \right), \quad {}_L\lambda_n = \text{col}_{\forall i \in \mathbb{L}} \langle {}_L\lambda_{i,n} \rangle \quad (4.13)$$

wobei für die Projektionsmatrizen $\mathbf{W}_{n,\mathbb{L}}$ und $\mathbf{W}_{t,\mathbb{L}}$ analog zu Gleichung (2.57) gilt:

$$\mathbf{W}_{n,\mathbb{L}} = \text{row}_{\forall i \in \mathbb{L}} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 \\ {}_B\tilde{\mathbf{r}}_{SK,i} \end{bmatrix} {}_B\mathbf{n}_i \right\rangle, \quad \mathbf{W}_{t,\mathbb{L}} = \text{row}_{\forall i \in \mathbb{L}} \left\langle \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 \\ {}_B\tilde{\mathbf{r}}_{SK,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_B\mathbf{t}_{1,i} & {}_B\mathbf{t}_{2,i} \end{bmatrix} \right\rangle \quad (4.14)$$

Der Vektor ${}_L\ddot{\mathbf{g}}^\perp$ der auf die orthogonalen Einheitsvektoren bezogenen Beschleunigungskoeffizienten in Gleichung (4.13) folgt über Gleichung (3.17) aus dem Vektor

${}_L\dot{\mathbf{g}}^\nabla$. Dieser umfasst die vom LEMKE-Algorithmus aus dem LCP ermittelten, auf den approximierten zulässigen Kraftbereich bezogenen Beschleunigungsgrößen gemäß Kapitel 3. Die Bestimmung des Normalenanteils der Kontaktkraft ${}_L\lambda_{i,n}$ in Gleichung (4.13) sowie des Haftkraftlimits ${}_L\lambda_{i,t,\text{lim}}$ in Gleichung (4.12) erfolgt in Abhängigkeit davon, welcher Bindungstyp jeweils am i -ten Kontaktpunkt vorliegt:

- Gewöhnliche einseitige Bindung gemäß Abschnitt 3.1:

$${}_L\lambda_{i,n}(\mathbf{p}) = \kappa_{n,i} \sum_{h=1}^S {}_L\lambda_{i,h} \quad , \quad {}_L\lambda_{i,t,\text{lim}} = \mu_{0,i} {}_L\lambda_{i,n} \quad (4.15)$$

- Kraftvariable halbstarre lokale Verspannung gemäß Abschnitt 3.2.2:

$$\begin{aligned} {}_L\lambda_{i,n}(\mathbf{p}) &= \lambda^\nabla + {}_L\lambda_{i,o} \quad , \quad {}_L\lambda_{i,t,\text{lim}} = \mu_{0,u,i} \lambda^\nabla + \mu_{0,o,i} {}_L\lambda_{i,o} \quad , \\ \text{wobei } \lambda^\nabla &= \kappa_{n,i} \sum_{h=1}^S {}_L\lambda_{i,h} \end{aligned} \quad (4.16)$$

- Kraftkonstante halbstarre lokale Verspannung gem. Abschnitt 3.2.4 (Anhang A.2):

$$\begin{aligned} {}_L\lambda_{i,n} &= \lambda^\nabla \quad , \quad \lambda_{i,t,\text{lim}} = \mu_{0,o,i} \lambda^\nabla + (\mu_{0,o,i} + \mu_{0,u,i}) F^* \quad , \\ \text{wobei } \lambda^\nabla &= \kappa_{n,i} \sum_{h=1}^S {}_L\lambda_{i,h} - F^* (1 + \mu_{0,u,i} / \mu_{0,o,i}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

- Kraftvariable und kraftkonstante lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung gemäß Abschnitt 3.2.3 (Anhang A.1) und Abschnitt 3.2.5 (Anhang A.3):

$$\begin{aligned} {}_L\lambda_{i,n} &= \lambda_o^\nabla + \lambda_u^\nabla \quad , \quad \lambda_{i,t,\text{lim}} = \mu_{0,o,i} \lambda_o^\nabla + \mu_{0,u,i} \lambda_u^\nabla \quad , \\ \text{wobei } \lambda_o^\nabla &= \kappa_{n,o,i} \sum_{h=1}^S {}_L\lambda_{i,h} \quad , \quad \lambda_u^\nabla = \kappa_{n,u,i} \sum_{h=S+1}^{2S} {}_L\lambda_{i,h} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Kraftraum

Die manipulativen Prozesskräfte $\mathbf{F}_{P,i}$, die der Roboterarm in einer bestimmten geometrischen Konfiguration in die verschiedenen Raumrichtungen aufbringen soll, müssen innerhalb des für diese Konfiguration geltenden und durch die maximalen Motor Momente an den einzelnen Gelenken des Roboterarms definierten Krafttraums liegen. Das Gütekriterium $G_K(\mathbf{p})$ bewertet die Ausnutzung des Krafttraums, indem es die Manipulationskraftreserven $|\mathbf{F}_{max,i}(\mathbf{p})|$ maximiert, und lautet:

$$G_K(\mathbf{p}) = \max_i \left(|\mathbf{F}_{P,i}| / |\mathbf{F}_{max,i}(\mathbf{p})| \right) \quad (4.19)$$

Die in der i -ten Raumrichtung maximal mögliche Manipulationskraft $\mathbf{F}_{max,i}(\mathbf{p})$ wird in Abhängigkeit vom jeweils schwächsten Gelenkantrieb des Roboterarms gemäß den Ausführungen bzgl. maximaler Fügekräfte in [28] bestimmt. Sind die Prozesskräfte \mathbf{F}_P nicht diskret, sondern durch einen kontinuierlichen Prozesskrafttraum gegeben, so wird dieser gemäß Bild 4.4 in homogen verteilte Krafrichtungen diskretisiert. Da sich unterschiedliche Manipulationskräfte auf die zuvor betrachteten Losgleit- und Kippreserven für das betrachtete, einseitig gebundene bzw. lokal verspannte System auswirken, kann bei der hier behandelten Bindungsoptimierung nur eine einzelne Prozesskraft $\mathbf{F}_{P,i}$, $i \in \{1\}$, berücksichtigt werden.

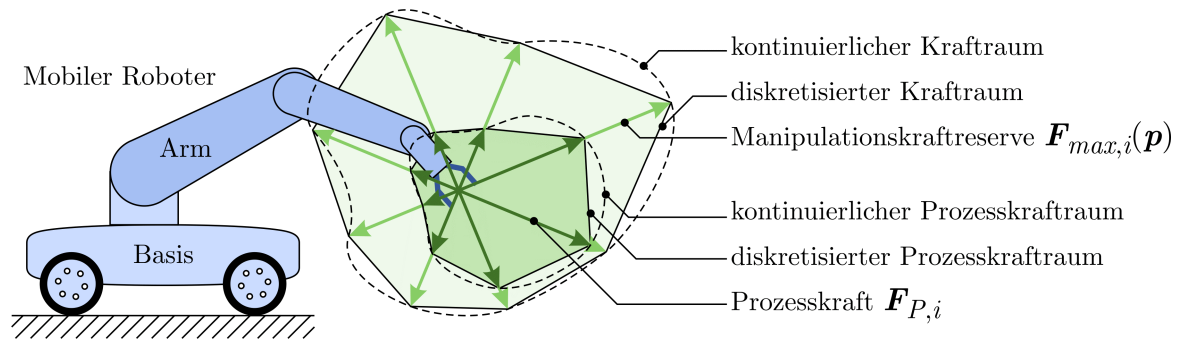


Bild 4.4: Umschließung der diskreter Prozesskräfte $F_{P,i}$ durch den Kraftraum

Energieumsatz

Im autonomen Betrieb ohne externe Energiezufuhr ist ein sparsamer Umgang mit der gespeicherten Energie des mobilen Roboters notwendig. Als zusätzliche zu minimierende Gütefunktion $G_E(\mathbf{p})$ wird daher die Summe der Energieumsätze an den f_A Gelenken des Roboterarms betrachtet. Diese lassen sich aus den jeweiligen, als bekannt vorausgesetzten Leistungskennfeldern der einzelnen Gelenkmotoren bestimmen, die die elektrische Leistung P_i in Abhängigkeit vom Motormoment $M_{M,i}$ sowie von der Gelenk-Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_i$ beschreiben, siehe Abschnitt 6.1.2, so dass gilt:

$$G_E(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{f_A} P_i(M_{M,i}(\mathbf{p}), \dot{\varphi}_i(\mathbf{p})) \quad (4.20)$$

Bei der hier betrachteten statischen Bindungsoptimierung wird $\dot{\varphi}_i = 0$ gesetzt, so dass nur die sukzessive vom Greifer zur Basis zu bestimmenden Motormomente $M_{M,i}(\mathbf{p})$ gemäß Gleichung (2.44) relevant sind.

4.4 Nebenbedingungen

Standsicherheit

Zusätzlich zu der zuvor als Gütefunktionen formulierten Forderung nach minimalen Losgleit- und Separationsrisiken ist die Persistenz der einseitigen Bindungen bzw. lokalen Verspannungen die zwingende Voraussetzung für einen sicheren Stand des mobilen Roboters ohne Losgleiten oder Separation. Für die vom LEMKE-Algorithmus bestimmten Kontaktpunktbeschleunigungskoeffizienten muss also gelten:

$$N_S(\mathbf{p}) = \left| {}_L \ddot{\mathbf{g}}^\nabla(\mathbf{p}) \right| \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.21)$$

Alternativ können den Gütefunktionen bzgl. der Bindungspersistenz in Normal- und Tangentialrichtung $G_N(\mathbf{p})$ bzw. $G_T(\mathbf{p})$ bestimmte Grenzwerte gesetzt werden:

$$N_S(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} G_N(\mathbf{p}) \\ G_T(\mathbf{p}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_N \\ 1 - \varepsilon_T \end{pmatrix} \stackrel{!}{\leq} 0 \quad , \quad \varepsilon_i \approx 10^{-2} \dots 10^{-1} \quad (4.22)$$

Inverse Kinematik

Über die Taylorreihenentwicklung der Sinus- und Cosinusfunktion zeigt sich:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + i\right) = \cos(0 + i) \approx 1,543 > 1 \quad , \quad \sin\left(\frac{3}{2}\pi - i\right) = \cos(\pi - i) \approx -1,543 < -1 \quad (4.23)$$

Damit wird exemplarisch deutlich, dass die Arcussinus- und Arcuscosinusfunktion Argumente von außerhalb des Intervalls $[-1; 1]$ in den komplexen Raum abbildet. Dies tritt bei der inversen Kinematik (IK) des auf der Basis montierten Roboterarms gemäß Gleichung (4.4) genau dann auf, wenn der Greifer in der durch die Optimierungsparameter \mathbf{p} festgelegten Position des mobilen Roboters den geforderten Manipulationspunkt in der geforderten Orientierung nicht erreichen kann. Die Numerik zur Lösung der IK liefert dann komplexe Werte für die Gelenkwinkel, und die IK ist formal nicht lösbar. Für die Gelenkwinkel werden daher verschwindende Imaginärteile gefordert.

$$N_{\text{IK}}(\mathbf{p}) = \left| \text{Im}(\text{IK}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{p})) \right| \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.24)$$

Limitierungen des Konfigurationsraums

Die Positionierbarkeit des mobilen Roboters kann durch Grenzen wie Wände, Säulen o.ä. eingeschränkt sein. Je nach Definition der Optimierungsparameter \mathbf{p} kann dies eine direkte Begrenzung des Konfigurationsraums der Optimierung bedeuten,

$$N_{\mathbf{p},\text{lim}}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{\min} - \mathbf{p} \\ \mathbf{p} - \mathbf{p}_{\max} \end{pmatrix} \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad p_i \stackrel{!}{\in} [p_{i,\min}, p_{i,\max}] \quad (4.25)$$

wobei unlimitierte Parameter durch $p_{i,\min} = -\infty$ bzw. $p_{i,\max} = +\infty$ berücksichtigt werden. Solche direkten konfigurativen Beschränkungen können bei vielen Optimierungsalgorithmen gesondert (d.h. unabhängig von den sonstigen Nebenbedingungen) festgelegt werden, was die Rechenzeit vermindert. Lässt sich eine Limitierung nicht direkt erfassen, ist eine funktionale Beschreibung erforderlich, so dass die vektorielle Nebenbedingung $N_{\mathbf{p},f}$ bzgl. der $n_{\mathbf{p}}$ funktionalen Konfigurationsgrenzen lautet:

$$N_{\mathbf{p},f}(\mathbf{p}) = \text{col}_{j=1}^{n_{\mathbf{p}}} \langle f_{K,j}(\mathbf{p}) \rangle \leq \mathbf{0} \quad (4.26)$$

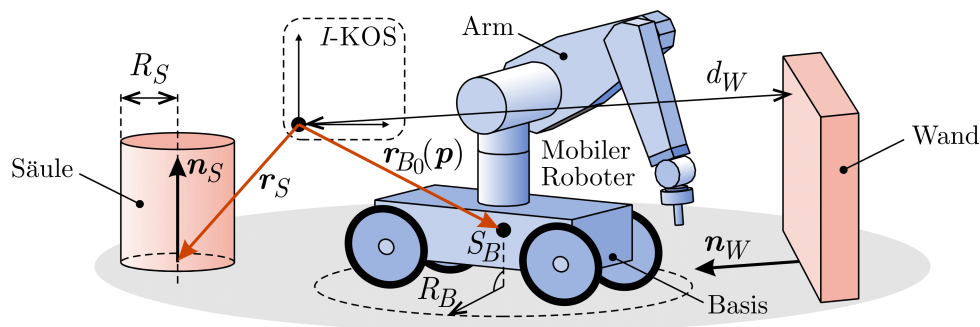


Bild 4.5: Beispiele für funktionale Limitierungen des Konfigurationsraums

Für die in Bild 4.5 dargestellten Limitierungen gilt beispielsweise:

$$\begin{aligned}
 \text{Wand: } f_{K,W}(\mathbf{p}) &= R_B - d_W - \mathbf{n}_W^T \mathbf{r}_{B_0}(\mathbf{p}) \stackrel{!}{\leq} 0 \\
 \text{Säule: } f_{K,S}(\mathbf{p}) &= R_S + R_B - \left| \left(\mathbf{E}_3 - \mathbf{n}_S \mathbf{n}_S^T \right) \left(\mathbf{r}_{B_0}(\mathbf{p}) - \mathbf{r}_S \right) \right| \stackrel{!}{\leq} 0
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Kinematische Limitierungen

Bei der Wahl der Optimierungsparameter \mathbf{p} müssen bei der Berechnung der ihnen zugeordneten Gelenkwinkel über die inverse Kinematik nach Gleichung (4.4) deren bauartbedingte Endlagen berücksichtigt werden.

$$\mathbf{N}_\varphi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \varphi_{\min} - \text{IK}\varphi(\mathbf{p}) \\ \text{IK}\varphi(\mathbf{p}) - \varphi_{\max} \end{pmatrix} \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_i \stackrel{!}{\in} \left[\varphi_{\min,i}, \varphi_{\max,i} \right] \tag{4.28}$$

Umgebungskollisionen

Eine Kollision des Roboterarms mit der Umgebung ist zu vermeiden. Dies wird durch die Approximation des i -ten potenziell betroffenen Körpers mit $n_{\circ,i}$ einhüllenden Kugeln (symbolisiert durch den Kreisindex „ \circ “) gemäß Bild 4.6 geprüft, deren Mittelpunkte unter Berücksichtigung des Kugelradius $R_{\circ,i,h}$, $h \in \{1.. n_{\circ,i}\}$, zum jeweiligen Hindernis einen bestimmten Mindestabstand einhalten müssen. Mit der Vorwärtskinematik (VK) gemäß Gleichung (2.32) werden aus den von der inversen Kinematik gelieferten Gelenkwinkeln $\text{IK}\varphi(\mathbf{p})$ der Ortsvektor \mathbf{r}_i zum Schwerpunkt S_i des i -ten Körpers und die die Orientierung des i -ten Körpers beschreibende Transformationsmatrix $\mathbf{A}_{I,i}$ bestimmt. Daraus folgt der Ortsvektor $\mathbf{r}_{\circ,i,h}$ zum Mittelpunkt der h -ten Hüllkugel des i -ten Körpers im I -System. $\mathbf{r}_{S_{\circ,i,h}}$ beschreibt deren Lage relativ zum Schwerpunkt S_i .

$$\mathbf{p} \stackrel{\text{IK}}{\mapsto} \varphi(\mathbf{p}) \stackrel{\text{VK}}{\mapsto} \left\{ \mathbf{A}_{I,i}(\varphi), {}_i\mathbf{r}_i(\varphi) \right\} \quad \Rightarrow \quad {}_I\mathbf{r}_{\circ,i,h}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}_{I,i} \left({}_i\mathbf{r}_i + {}_i\mathbf{r}_{S_{\circ,i,h}} \right) \tag{4.29}$$

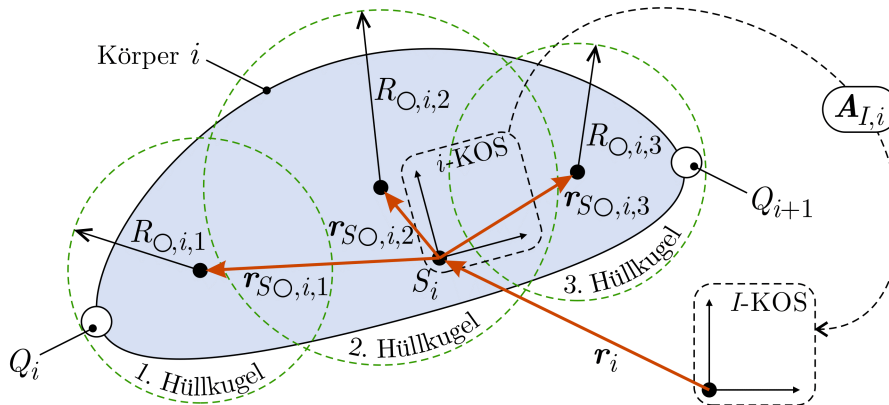


Bild 4.6: Approximation der Körpergeometrie mit Hüllkugeln

Die Nebenbedingungen zur Vermeidung von Kollisionen mit Hindernissen vom Typ „Wand“ oder „Säule“, vgl. Bild 4.5, lauten dann:

$$\text{Wand: } \mathbf{N}_{OU,i}(\mathbf{p}) = \text{col}_{h=1}^{n_{O,i}} \left\langle R_{O,i,h} - d_W - \mathbf{n}_W^T \mathbf{r}_{O,i,h}(\mathbf{p}) \right\rangle \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad (4.30)$$

$$\text{Säule: } \mathbf{N}_{OU,i}(\mathbf{p}) = \text{col}_{h=1}^{n_{O,i}} \left\langle R_S + R_{O,i,h} - \left| \left(\mathbf{E}_3 - \mathbf{n}_S \mathbf{n}_S^T \right) \left(\mathbf{r}_{O,i,h}(\mathbf{p}) - \mathbf{r}_S \right) \right| \right\rangle \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad (4.31)$$

Eigenkollisionen

Analog zum obigen Vorgehen bei Umgebungskollisionen kann eine Eigenkollision des Roboterarms zwischen dem i -ten und dem j -ten Körper ebenfalls durch n_i bzw. n_j Hüllkugeln approximiert erfasst werden. Die entsprechende Nebenbedingung lautet:

$$\mathbf{N}_{OO,i,j}(\mathbf{p}) = \text{col}_{h_i=1}^{n_{O,i}} \left\langle \text{col}_{h_j=1}^{n_{O,j}} \left\langle R_{O,i,h_i} + R_{O,j,h_j} - \left| \mathbf{r}_{O,i,h_i}(\mathbf{p}) - \mathbf{r}_{O,j,h_j}(\mathbf{p}) \right| \right\rangle \right\rangle \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad (4.32)$$

Kinetische Limitierung

Die von den Gelenkmotoren in positive und negative Drehrichtung lieferbaren Momente sind begrenzt, so dass die für eine bestimmte Bindungskonfiguration benötigten Motormomente $\mathbf{M}_M(\mathbf{p})$ innerhalb dieser Grenzen liegen müssen:

$$\mathbf{N}_M(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{M,min} - \mathbf{M}_M(\mathbf{p}) \\ \mathbf{M}_M(\mathbf{p}) - \mathbf{M}_{M,max} \end{pmatrix} \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad (4.33)$$

Singularitäten bzw. Manipulierbarkeit

Um am geforderten Manipulationspunkt in der geforderten Orientierung eine ausreichende translatorische und rotatorische Bewegungsfreiheit des Greifers sicherzustellen, müssen Singularitäten des Roboterarms im Konfigurationsraum gemieden werden. Dazu wird mit der Frobenius-Norm der auf den Greifer bezogenen Jacobimatrix \mathbf{J}_G gemäß Gleichung (2.11) eine Konditionszahl κ definiert,

$$\kappa(\mathbf{J}_G(\mathbf{p})) = \left\| \mathbf{J}_G \right\| \left\| \mathbf{J}_G^{-1} \right\|, \quad \left\| \mathbf{X} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}^2}, \quad (4.34)$$

die bei Annäherung an singuläre Konfigurationen des Roboterarms gegen Unendlich strebt, da dort die Greifer-Jacobimatrix einen Rangabfall aufweist. Die Inverse der Jacobimatrix des Greifers \mathbf{J}_G^{-1} kann nur dann gebildet werden, wenn \mathbf{J}_G quadratisch ist. Dies ist bei sechsachsigen Roboterarmen, $f_A=6$, stets der Fall. Die Nähe zu Singularitäten wird dann gemieden durch die Nebenbedingung

$$N_G(\mathbf{p}) = \kappa(\mathbf{p}) - \varepsilon \stackrel{!}{\leq} 0 \quad (4.35)$$

mit typischen Werten für ε aus dem Bereich $10 < \varepsilon < 40$ [133].

Alternativ kann über die Singulärwertzerlegung der Greifer-Jacobimatrix

$${}_{6 \times f_A} \mathbf{J}_G(\mathbf{p}) = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T, \quad \mathbf{U} = \text{row}_{i=1}^6 \langle \mathbf{u}_i \rangle, \quad |\mathbf{u}_i| = 1, \quad \mathbf{S} = \left[\text{diag}_{i=1}^6 \langle \sigma_i \rangle \quad \mathbf{0} \right] \quad (4.36)$$

mit den Orthogonalmatrizen ${}_{6 \times 6} \mathbf{U}$ und ${}_{f_A \times f_A} \mathbf{V}$ das *Manipulierbarkeitsellipsoid* nach YOSHIKAWA analysiert werden, dessen Hauptachsen durch die gewichteten Einheitsvektoren $\sigma_i \mathbf{u}_i$ beschrieben werden [183] [184]. Je degenerierter (d.h. je unähnlicher zur idealen Kugel im \mathbb{R}^6) das Manipulierbarkeitsellipsoid ausfällt, desto näher befindet sich der Roboterarm an einer Singularität. Die alternative Nebenbedingung für die Bindungsoptimierung lautet somit:

$$N_G(\mathbf{p}) = \max_i \left(\sigma_i(\mathbf{p}) \right) / \min_i \left(\sigma_i(\mathbf{p}) \right) - \varepsilon \stackrel{!}{\leq} 0 \quad (4.37)$$

4.5 Formulierung des Optimierungsproblems

Die zuvor aufgestellten Gütefunktionen und Nebenbedingungen bilden ein nichtlineares Mehrparameter-Vektor-Optimierungsproblem. Da im Allgemeinen die Minima der n_G Gütefunktionen im Konfigurationsraum nicht zusammenfallen, kann keine eindeutige Lösung des gesamten Optimierungsproblems existieren. Daher wird nach der Methode gewichteter Gütekriterien [46] das Problem mit den vektoriellen Gütekriterien $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ und den Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen $\mathbf{C}_1(\mathbf{p})$ und $\mathbf{C}_2(\mathbf{p})$ über einen Wichtungsfaktorenvektor $\mathbf{w} = \text{col}_{i=1}^{n_G} \langle w_i \rangle$, $w_i \geq 0$, auf ein skalares Ersatzproblem mit der Gütefunktion $G^*(\mathbf{p}, \mathbf{w})$ reduziert,

$$\min_{\mathbf{p}} \left(G^*(\mathbf{p}, \mathbf{w}) : \mathbf{C}_1(\mathbf{p}) = \mathbf{0}, \mathbf{C}_2(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0} \right), \quad G^* = \mathbf{w}^T \mathbf{G}(\mathbf{p}), \quad \sum_{i=1}^{n_G} w_i = 1, \quad (4.38)$$

wobei sich die Vektoren \mathbf{G} , \mathbf{C}_1 und \mathbf{C}_2 aus den zuvor dargestellten Gütefunktionen und Nebenbedingungen zusammensetzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{p}) &= \left(G_N(\mathbf{p}) \quad G_T(\mathbf{p}) \quad G_K(\mathbf{p}) \quad G_E(\mathbf{p}) \right)^T, \quad \mathbf{C}_1(\mathbf{p}) = \left(N_S(\mathbf{p}) \quad N_{IK}(\mathbf{p}) \right)^T, \\ \mathbf{C}_2(\mathbf{p}) &= \text{col} \left\langle N_{p,lim}(\mathbf{p}), N_{p,f}(\mathbf{p}), N_{\varphi}(\mathbf{p}), N_{OU}(\mathbf{p}), N_{OO}(\mathbf{p}), N_M(\mathbf{p}), N_{J_G}(\mathbf{p}) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.39)$$

Zur Lösung des Optimierungsproblems kann ein Algorithmus aus der Familie der Sequentiellen Quadratischen Programmierung SQP genutzt werden, die in vielen Programmsammlungen zur Optimierungsrechnung enthalten sind (im vorliegenden Fall *fmincon* unter *MATLAB*, vgl. [6] [51] [59] [64]) und zu den effektivsten Verfahren für nichtlineare Optimierungsprobleme gehören [131] [147]. Zur Steigerung der Effizienz des Algorithmus können die Gütekriterien auf bekannte Referenzwerte normiert und so die Konditionierung des Problems verbessert werden.

4.6 Beispiel

Ein einfaches Beispiel soll die vorangegangenen Ausführungen verdeutlichen. Sämtliche Größen sind dabei einheitenlos aufgeführt, wobei von einem in sich geschlossenen und konsistenten Basis-Einheitensystem ausgegangen wird. Bild 4.7 zeigt einen ebenen mobilen Roboter mitsamt seinen geometrischen und kinetischen Daten, dessen zweigliedriger Arm eine horizontal gerichtete Prozesskraft der Stärke $|\mathbf{F}_P| = 5$ aufbringen soll. Es ist zu berücksichtigen, dass der Arm vor Aufbringen der geforderten Prozesskraft zunächst einmal in Position gebracht werden muss, ohne dass bei $|\mathbf{F}_P| = 0$ ein unerwünschte Wechsel des Bindungszustands eintritt. Zur Vereinfachung sei ein Losgleiten des mobilen Roboters auf dem ebenen Boden ausgeschlossen, $\mu_0 \gg 1$.

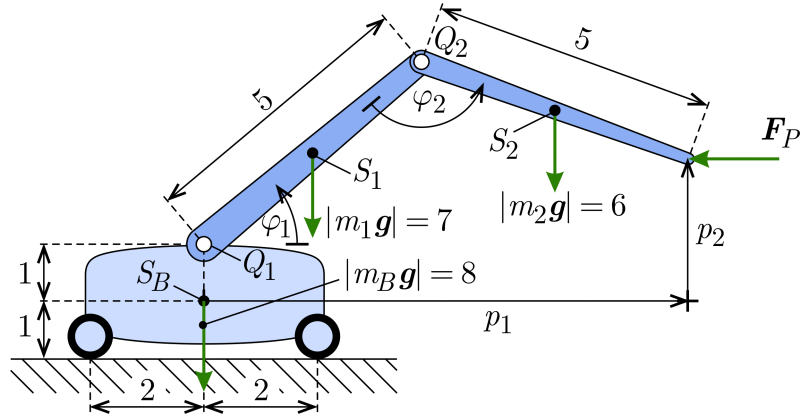


Bild 4.7: Abmessungen und wirkende Kräfte beim ebenen mobilen Roboter

Als zu optimierende Parameter stehen die horizontale Position des mobilen Roboters p_1 sowie die vertikale Höhe des Manipulationsortes p_2 zur Verfügung. Dies kann umgedeutet werden zu einem fixen Manipulationspunkt und einer vertikalen Positionierbarkeit des Roboters, so dass beim in den Manipulationspunkt gelegten Inertialsystem ${}_I \mathbf{r}_P = \mathbf{0}$ und $\mathbf{p} = (p_1 \ p_2)^T = -{}_I \mathbf{r}_{B_0}$ gilt. Die Nebenbedingungen bzgl. des Konfigurationsraums, der Gelenkwinkel und der Motormomente lauten:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_{\mathbf{p},lim}(\mathbf{p}) &= (-p_2) \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \ , \\
 \mathbf{N}_{\varphi}(\mathbf{p}) &= \left((20^\circ \ 10^\circ) - \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{p}) \quad \boldsymbol{\varphi}^T(\mathbf{p}) - (160^\circ \ 170^\circ) \right)^T \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \\
 \mathbf{N}_M(\mathbf{p}) &= \left((-35 \ -30) - \mathbf{M}_M^T(\mathbf{p}) \quad \mathbf{M}_M^T(\mathbf{p}) - (35 \ 30) \right)^T \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Jegliche Umgebungs- oder Eigenkollisionen ($\mathbf{N}_{OU}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO}(\mathbf{p})$) sowie funktionale Limitierungen des Konfigurationsraums ($\mathbf{N}_{p,f}(\mathbf{p})$) seien ausgeschlossen. Gemäß Bild 4.8 folgt der Konfigurationsraum des Optimierungsproblems über die Vorwärtskinematik aus der Projektion des Raums der zulässigen Gelenkwinkel in den kartesischen Raum und entspricht dem Arbeitsraum des Roboterarms. Außerhalb dieses Konfigurations-

raums kann die Nebenbedingung bzgl. der inversen Kinematik $N_{IK}(\mathbf{p})$ keinesfalls erfüllt werden. Innerhalb des Konfigurationsraums liegen keine Singularitäten vor, so dass die Manipulierbarkeit des Greifers als ausreichend vorausgesetzt und die entsprechende Nebenbedingung $N_{J_G}(\mathbf{p})$ nicht weiter betrachtet wird.

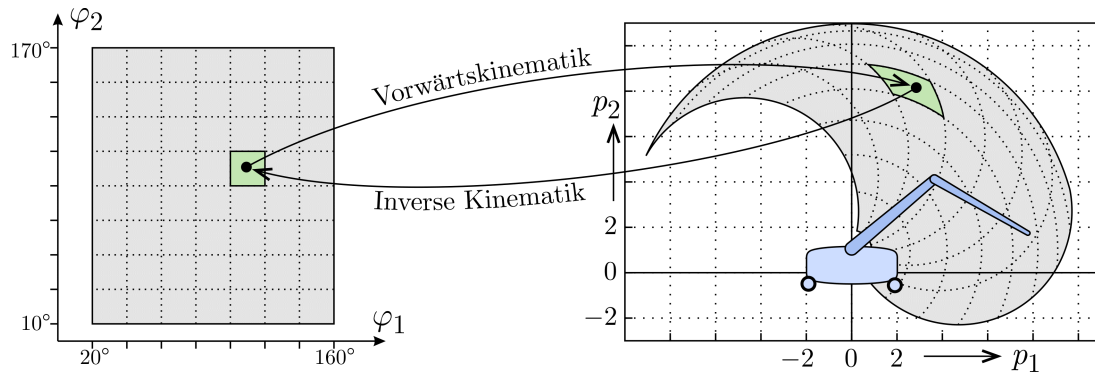


Bild 4.8: Projektion des Raums der zulässigen Gelenkwinkel

Der Konfigurationsraum wird durch die gegebenen Nebenbedingungen je nach der äußeren Prozesskraft unterschiedlich eingeschränkt, wie Bild 4.9 für die hier relevanten Fälle $|\mathbf{F}_P|=0$ sowie $|\mathbf{F}_P|=5$ zeigt.

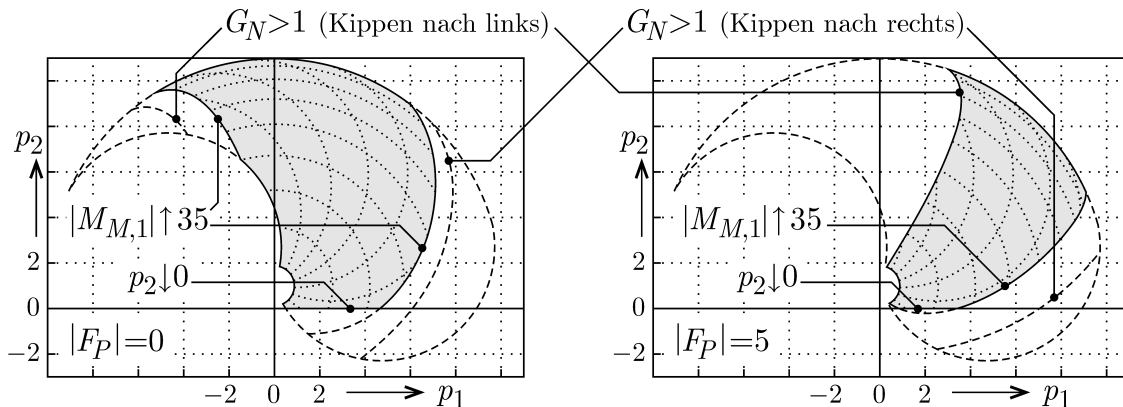


Bild 4.9: Einschränkung des Konfigurationsraums

Die Schnittmenge der zwei Varianten des eingeschränkten Konfigurationsraums gemäß Bild 4.9 definiert den Bereich, in dem eine optimale Systemkonfiguration liegen muss. Man beschränkt sich auf die zwei Gütefunktionen bzgl. der Bindungspersistenz in Normalenrichtung sowie des Energieumsatzes und wählt willkürliche Werte für die beiden Wichtungsfaktoren w_i sowie die Motorkennfelder:

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} G_N(\mathbf{p}) \\ G_E(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}, \quad G_E(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1,0 \cdot M_{M,1}(\mathbf{p}) \\ 1,2 \cdot M_{M,2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Eine den Konfigurationsraum ausreichend fein abdeckende Variation der Optimierungsparameter liefert die in Bild 4.10 dargestellten Isolinien-Kennfelder für die einzelnen Gütefunktionen $G_N(\mathbf{p})$ und $G_E(\mathbf{p})$ sowie die skalare Ersatz-Gütefunktion $G^*(\mathbf{p})$. Man

erkennt, dass der SQP-Optimierungsalgorithmus das globale Minimum von $G^*(\mathbf{p})$ und damit die optimale Position für den mobilen Roboter bei der Konfiguration $\mathbf{p} \approx (6,6 \ 7,9)^T$ finden wird. In dieser Konfiguration liegen an den Gelenken des Roboterarms nahezu keine Motormomente an, $\mathbf{M}_M(\mathbf{p}) \approx \mathbf{0}$, die geforderte horizontale Prozesskraft \mathbf{F}_P wird dann ausschließlich von den Gewichtskräften der einzelnen Körper des Arms erzeugt.

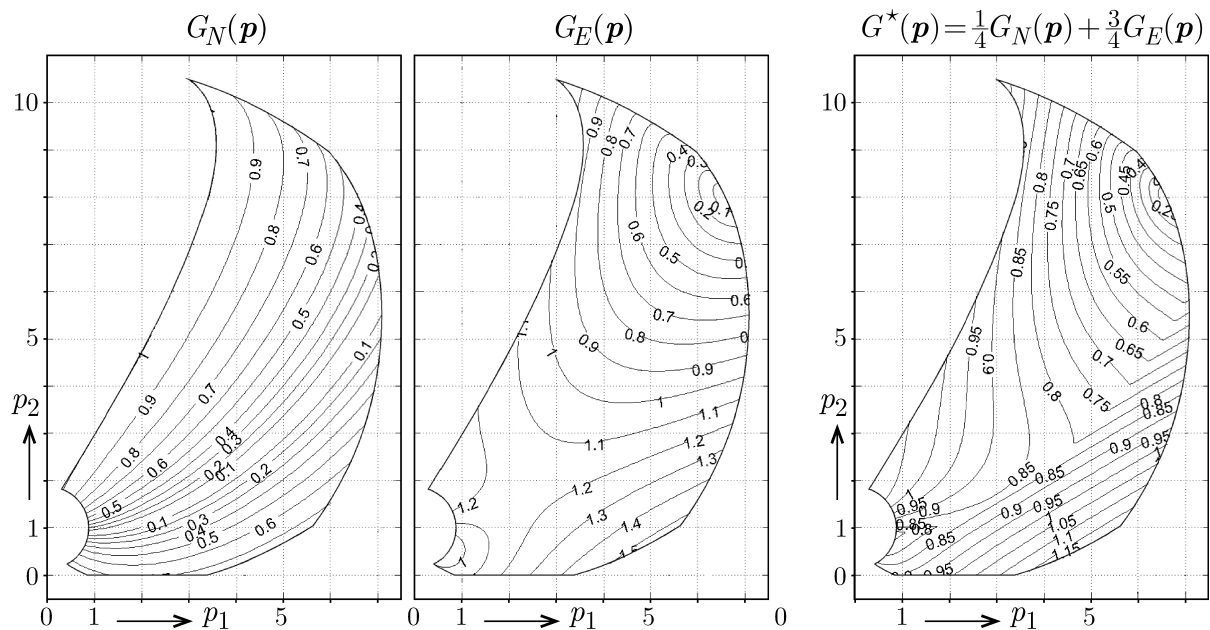


Bild 4.10: Kennfelder der einzelnen Gütefunktionen mit Isolinien

Die Konvergenz bei der statischen Bindungsoptimierung hängt von den gewählten Startparametern ab. Beim vorliegenden Beispiel etwa findet der SQP-Optimierungsalgorithmus im ungünstigen Fall nur das lokale Minimum von $G^*(\mathbf{p})$ bei $\mathbf{p} \approx (0,8 \ 0,8)^T$. Daher sind Aussagen bzgl. einer vermeintlich optimalen Bindungskonfiguration stets mit einer gewissen verbleibenden Unsicherheit behaftet.

Kapitel 5

Bahnoptimierung

Die Bahnoptimierung stellt im Gegensatz zur statischen Bindungsoptimierung in Kapitel 4 ein komplexes dynamisches Problem dar. Es werden nun über der Zeit ablaufende Vorgänge betrachtet, daher sind gemäß der Modellbildung in Kapitel 2 die aus der Bewegung des Roboterarms resultierenden dynamischen Massenkräfte zu berücksichtigen. Eine Besonderheit und Neuerung gegenüber der Bahnplanung bei fest montierten seriellen Industrierobotern sind die einseitigen Bindungen bzw. lokalen Verspannungen des mobilen Roboters, die stets das Vermeiden des Losgleitens oder der Separation an einem der Bindungspunkte während der Bewegung des Arms erfordern.

5.1 Problemstellung

Ziel der Bahnplanung ist es, den Roboterarm in einer Punkt-zu-Punkt-Bewegung von einer Anfangskonfiguration, ausgedrückt durch die Greiferposition und -orientierung $\{ {}^I\mathbf{r}_G^A, \mathbf{A}_{I,G}^A \}$, in eine Endkonfiguration $\{ {}^I\mathbf{r}_G^E, \mathbf{A}_{I,G}^E \}$ zu überführen. Dabei ist die zeitabhängige Trajektorie des Greifers $\{ {}^I\mathbf{r}_G(t), \mathbf{A}_{I,G}(t) \}$ derart zu gestalten, dass bestimmte, sie bewertende Kostenfunktionen unter Beachtung bestimmter Nebenbedingungen minimal ausfallen. Die geometrische Bahn im Raum und das Geschwindigkeitsprofil dieser Punkt-zu-Punkt-Bewegung sind nicht vorgegeben und durch eine Optimierung zu bestimmen. Die Position ${}^I\mathbf{r}_{B_0}$ und die Orientierung $\mathbf{A}_{B_0,I}$ der Basis des mobilen Roboters seien bekannt und während der Bahnbewegung des Roboterarms konstant.

Über die inverse Kinematik des Roboterarms ist jeder kinematisch zulässigen Greiferkonfiguration mindestens eine Gelenkwinkelkonfiguration zugeordnet. Die Gelenkwinkel in der Anfangskonfiguration φ^A sowie der Startzeitpunkt der Bahnbewegung t^A mögen bekannt sein. Bzgl. der Endkonfiguration hingegen sind sämtliche mehrdeutige Lösungen der inversen Kinematik $\varphi_i^E \neq \varphi_j^E$ zu berücksichtigen, wenn keine Präferenz für eine der Lösungen definiert ist. Der Endzeitpunkt der Bewegung sei nicht vorgegeben und kann über die einzelnen Gelenkwinkel variieren, $t_k^E \neq t_l^E$.

Im Folgenden erfolgt die Bahnoptimierung in der Domäne der Gelenkwinkel. Statt also die Trajektorie des Greifers im kartesischen Raum über der Zeit zu parametrisieren und zu optimieren, werden die Zeitverläufe $\varphi_k(t)$ für die einzelnen Gelenkwinkel unter Berücksichtigung der Anfangs- und Endbedingung $\varphi_k(t^A) = \varphi_k^A$ bzw. $\varphi_k(t_{E,k}) = \varphi_{E,k}$ optimiert. Dies erspart eine beim Optimierungsprozess fortwährend zu wiederholende zeitintensive Berechnung der inversen Kinematik, zudem wird so der durch die Grenzlagen der Gelenkwinkel bestimmte Arbeitsraum des Roboterarms leichter eingehalten.

Zur Reduktion des Rechenaufwands bei der Optimierung werden die Gelenke des Roboterarms in zwei Gruppen aufgeteilt: Die Indexmenge \mathbb{P}_o enthält die fortlaufenden Nummern der *optimierbaren* Gelenke, deren kinematischer Zeitverlauf optimiert werden soll. Die *passiven* Gelenke hingegen sind in der Indexmenge \mathbb{P}_p zusammengefasst. Ihr kinematischer Zeitverlauf entspricht einer simplen Geschwindigkeitsrampe, die im Folgenden detailliert erläutert wird und deren Endzeitpunkt durch die Optimierungsparametern für die optimierbaren Gelenke determiniert ist. \mathbb{P}_o und \mathbb{P}_p sind disjunkt und decken vereinigt alle f_A Gelenke des Roboterarms ab, $\mathbb{P}_o \cap \mathbb{P}_p = \emptyset \wedge |\mathbb{P}_o \cup \mathbb{P}_p| = f_A$. Aufgrund der jeweils bewegten Massen und wirkenden Gelenkmomente ist es sinnvoll, nur die Kinematik der basisnahen Gelenke zu optimieren. Für den im Folgenden betrachteten sechssachsigen seriellen Roboterarm wird somit festgelegt:

$$\mathbb{P}_o = \{1, 2, 3\} \quad , \quad \mathbb{P}_p = \{4, 5, 6\} \quad (5.1)$$

5.2 Hardwarenaher Rampenansatz

Grundprinzip des Rampenbefehls

Für die Parametrisierung des kinematischen Zeitverlaufs der Gelenkwinkel wird ein Ansatz gewählt, der sich im Rahmen der Steuerungsmöglichkeiten der vorhandenen Versuchshardware – die Gelenkregelung liegt ‚gekapselt‘ in den einzelnen Antiebsmodulen vor und lässt nur einen eingeschränkten Befehlssatz zu, siehe Kapitel 6 – möglichst einfach umsetzen lässt. Im vorliegenden Fall ist dies ein Rampenansatz für die Gelenkwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_o(t)$, $o \in \mathbb{P}_o$. Jede Drehbewegung setzt sich dabei zusammen aus den Phasen einer konstanten Beschleunigung, einer konstanten Geschwindigkeit sowie abschließend einer der anfänglichen Beschleunigung entsprechenden konstanten Verzögerung bis zum Stillstand, siehe Bild 5.1. Ausgehend vom bekannten Anfangswinkel φ_a wird die Bewegung eines Gelenks somit durch einen Rampenbefehl mit den die $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe beschreibenden Parametern der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}^* \in [0, \ddot{\varphi}_{max}]$, der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}^* \in [0, \dot{\varphi}_{max}]$ sowie des Endwinkels $\varphi_e \in [\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ erzeugt.

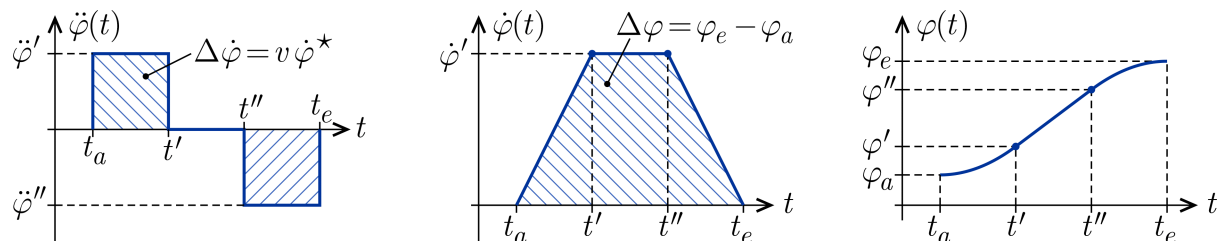


Bild 5.1: Zeitverläufe der Gelenkwinkelkinematik infolge eines Rampenbefehls

Die Zeitpunkte t' , t'' und t_e , an denen die drei Phasen der $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe enden, sowie die zugehörigen kinematischen Zustände lauten mit $v = \text{sign}(\varphi_e - \varphi_a)$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}' &= \dot{\varphi}(t' \leq t \leq t'') = v \dot{\varphi}^* \\ \ddot{\varphi}' &= \ddot{\varphi}(t_a < t < t') = v \ddot{\varphi}^* \\ \ddot{\varphi}'' &= \ddot{\varphi}(t'' < t < t_e) = -\ddot{\varphi}' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} t' = t_a + \dot{\varphi}' / \ddot{\varphi}' \\ t'' = t_a + (\varphi_e - \varphi_a) / \dot{\varphi}' \\ t_e = t' + t'' - t_a \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow \varphi' = \varphi(t=t') = \varphi_a + \frac{1}{2} \dot{\varphi}'(t' - t_a) \quad , \quad \varphi'' = \varphi(t=t'') = \varphi_a + \dot{\varphi}'(t'' - t_a)$$

Ein Sonderfall liegt bei $|\varphi_e - \varphi_a| \dot{\varphi}^* < (\dot{\varphi}^*)^2$ vor, die gewählte Sollgeschwindigkeit $\dot{\varphi}^*$ kann dann nicht vor Beginn der Verzögerungsphase erreicht werden. Wie Bild 5.2 zeigt, degeneriert dann der dreiphasige Rampen- zu einem zweiphasigen Dreiecksverlauf der Gelenkwinkelgeschwindigkeit. Die maximal erreichte Geschwindigkeit errechnet sich zu

$$\dot{\varphi}' = v \sqrt{|\varphi_e - \varphi_a| \ddot{\varphi}^*} \quad , \quad (5.3)$$

der Rest von Gleichung (5.2) gilt unverändert, woraus dann mangels der mittleren Rampenphase $t' = t''$ und $\varphi' = \varphi''$ folgt. Der Parameter $\dot{\varphi}^*$ nimmt in diesem Sonderfall keinen Einfluss auf den Gelenkwinkelverlauf und ist daher irrelevant.

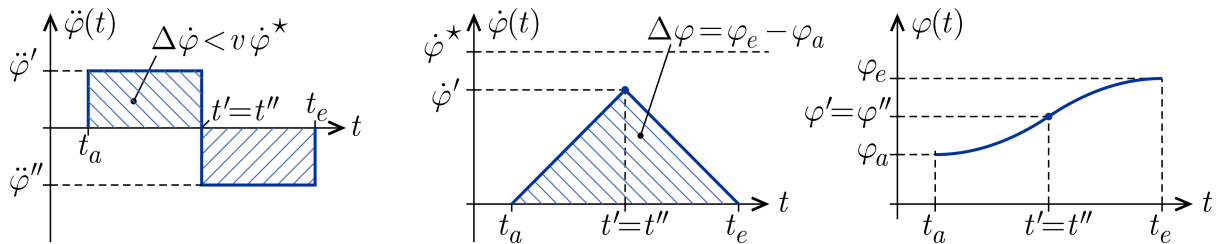


Bild 5.2: Degeneration des dreiphasigen Rampen- zum zweiphasigen Dreiecksverlauf

Komplexe Bewegungen

Durch n_R sukzessive Rampenbefehle können komplexe Bewegungen des Roboterarms generiert werden. Der r -te Rampenbefehl für das optimierbare Gelenk $o \in \mathcal{P}_o$ wird zum Zeitpunkt $t''_{o,r-1}$ erteilt, wenn gerade die Verzögerungsphase der vorhergehenden Rampe $\dot{\varphi}_{o,r-1}(t)$ ansteht, mit $r \in \{2 \dots n_R\}$. Die Übergangzeitpunkte können über die einzelnen Gelenke durchaus variieren. Es gelten die Übergangsbedingungen

$$t_{a,o,r} = t''_{o,r-1} \quad , \quad \varphi_{a,o,r} = \varphi_o(t_{a,o,r}) = \varphi''_{o,r-1} \quad , \quad \dot{\varphi}_{a,o,r} = \dot{\varphi}_o(t_{a,o,r}) = \dot{\varphi}''_{o,r-1} \neq 0 \quad , \quad (5.4)$$

ab dem 2. Rampenbefehl werden somit die neuen Rampenvorgaben aus der Bewegung heraus umgesetzt. Die im Folgenden dargestellte Ermittlung der einzelnen Schaltzeitpunkte und der zugehörigen kinematischen Zustände gestaltet sich dann gegenüber Gleichung (5.2) aufwändiger.

Es ist zunächst zu klären, ob überhaupt die $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe mit den gegebenen Parametern $\{\varphi_{e,o,r}, \dot{\varphi}^*_{o,r}, \ddot{\varphi}^*_{o,r}\}$ die Sollgeschwindigkeit erreichen kann, so dass $|\dot{\varphi}(t'_{o,r})| = \dot{\varphi}^*_{o,r}$. Dazu werden die in Bild 5.3 für verschiedene Ausgangssituationen gezeigten Grenzfälle betrachtet, in denen aus der Bewegung heraus die Sollgeschwindigkeit im Positiven wie im Negativen gerade eben erreicht wird, anschließend jedoch sofort die Verzö-

gerungsphase beginnt, ohne dass die mittlere Phase der unbeschleunigten Bewegung existiert. Für die dabei jeweils zurückgelegten Gelenkwinkel $\Delta\varphi^\oplus$ bzw. $\Delta\varphi^\ominus$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta t_1^\oplus &= |\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}^*| / \ddot{\varphi}^* \quad , \quad \Delta t_1^\ominus = |\dot{\varphi}_a + \dot{\varphi}^*| / \ddot{\varphi}^* \quad , \quad \Delta t_2 = \dot{\varphi}^* / \ddot{\varphi}^* \\ \Rightarrow \Delta\varphi^\oplus &= \Delta\varphi_1^\oplus + \Delta\varphi_2^\oplus = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_a + \dot{\varphi}^*) \Delta t_1^\oplus + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^* \Delta t_2 \quad , \quad (5.5) \\ \Delta\varphi^\ominus &= \Delta\varphi_1^\ominus + \Delta\varphi_2^\ominus = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}^*) \Delta t_1^\ominus - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^* \Delta t_2 \quad , \quad \Delta\varphi^\oplus > \Delta\varphi^\ominus \end{aligned}$$

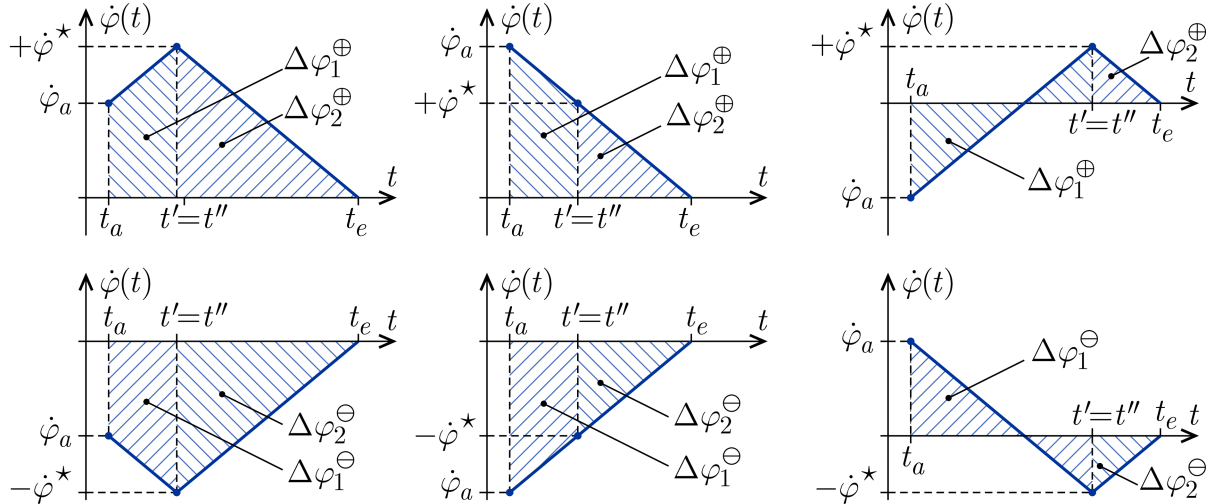


Bild 5.3: Grenzfälle beim aus der Bewegung heraus erteilten Rampenbefehl

Eine Fallunterscheidung bzgl. des Sollrelativwinkels $\langle \Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_a \rangle_{o,r}$ liefert dann folgende Aussagen zu den Eckwerten der $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe:

- $\Delta\varphi \geq \Delta\varphi^\oplus$: In der Beschleunigungsphase wird die Sollgeschwindigkeit im Positiven erreicht, $\dot{\varphi}(t') = +\dot{\varphi}^*$, anschließend liegt eine mittlere Phase der unbeschleunigten Bewegung vor, wie Bild 5.4 zeigt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle \varphi' = \varphi_a + \Delta\varphi_1^\oplus \quad , \quad \Delta\varphi_m = \Delta\varphi - \Delta\varphi^\oplus \geq 0 \rangle &\mapsto \varphi'' = \varphi' + \Delta\varphi_m \quad , \\ \dot{\varphi}' = +\dot{\varphi}^* \quad , \quad \ddot{\varphi}' = \text{sign}(\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}^*)\ddot{\varphi}^* \quad , \quad \ddot{\varphi}'' = -\ddot{\varphi}^* \quad , &(5.6) \\ t' = t_a + \Delta t_1^\oplus &\mapsto t''_{o,n} = t' + \Delta\varphi_m / \dot{\varphi}^* \mapsto t_e = t'' + \Delta t_2^\oplus \end{aligned}$$

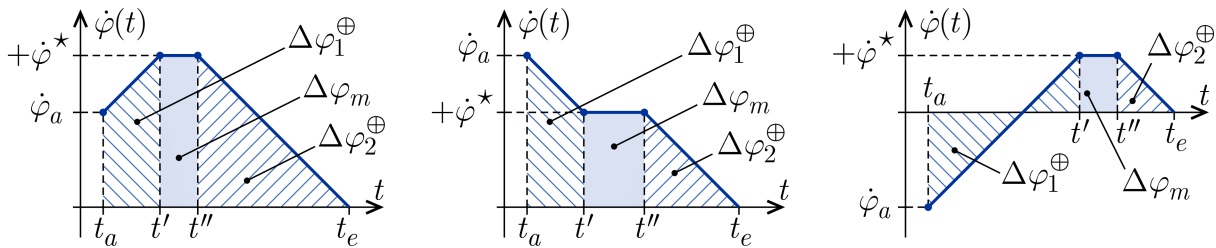


Bild 5.4: $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe enthält Mittelphase mit positiver Sollgeschwindigkeit $+\dot{\varphi}^*$

- $\Delta\varphi \leq \Delta\varphi^\ominus$: Die Sollgeschwindigkeit wird gemäß Bild 5.5 im Negativen erreicht, $\dot{\varphi}(t') = -\dot{\varphi}^*$, mit anschließender unbeschleunigter Mittelphase:

$$\left\langle \Delta\varphi_m = \Delta\varphi - \Delta\varphi^\ominus \leq 0, \varphi' = \varphi_a + \Delta\varphi_1^\ominus \right\rangle \mapsto \varphi'' = \varphi' + \Delta\varphi_m,$$

$$\dot{\varphi}' = -\dot{\varphi}^*, \quad \ddot{\varphi}' = \text{sign}(-\dot{\varphi}^* - \dot{\varphi}_a)\ddot{\varphi}^*, \quad \ddot{\varphi}'' = +\ddot{\varphi}^*, \quad (5.7)$$

$$t' = t_a + \Delta t_1^\ominus \mapsto t'' = t' - \Delta\varphi_m / \dot{\varphi}^* \mapsto t_e = t'' + \Delta t_2^\ominus$$

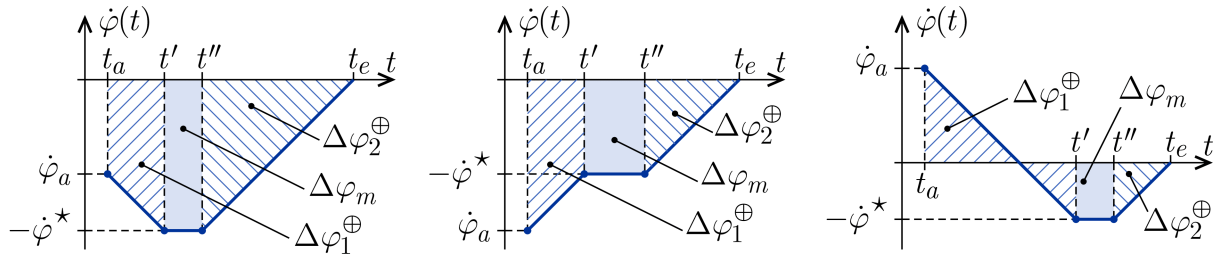


Bild 5.5: $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe enthält Mittelphase mit negativer Sollgeschwindigkeit $-\dot{\varphi}^*$

- $\Delta\varphi^\ominus < \Delta\varphi < \Delta\varphi^\oplus$: Eine mittlere Phase der unbeschleunigten Bewegung mit der Sollgeschwindigkeit kann mit den gewählten Rampenparametern nicht realisiert werden, $|\dot{\varphi}'_{o,r}| < \dot{\varphi}^*_{o,r}$, so dass gemäß Bild 5.6 auf die Beschleunigungsphase unmittelbar die Verzögerungsphase folgt. Mit der das Vorzeichen der Steigung der Verzögerungsphase beschreibenden Hilfsgröße $v = \text{sign}(-\Delta\varphi + \dot{\varphi}_a^2 \text{sign}(\dot{\varphi}_a) / 2\ddot{\varphi}^*)$ gilt dann für die Eckwerte der $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe:

$$t' = t'' = t_a + \left(v\dot{\varphi}_a + \sqrt{\frac{1}{2}\dot{\varphi}_a^2 - v\Delta\varphi\ddot{\varphi}^*} \right) / \ddot{\varphi}^* \mapsto t_e = t' + |\dot{\varphi}'| / \dot{\varphi}^*,$$

$$\Delta\varphi_m = 0, \quad \dot{\varphi}' = -v\sqrt{\frac{1}{2}\dot{\varphi}_a^2 - v\Delta\varphi\ddot{\varphi}^*}, \quad \ddot{\varphi}'' = -v\ddot{\varphi}^*, \quad (5.8)$$

$$\mapsto \left\langle \varphi' = \varphi'' = \varphi_a + \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_a + \dot{\varphi}')(t' - t_a), \quad \ddot{\varphi}' = \text{sign}(\dot{\varphi}' - \dot{\varphi}_a)\ddot{\varphi}^* \right\rangle$$

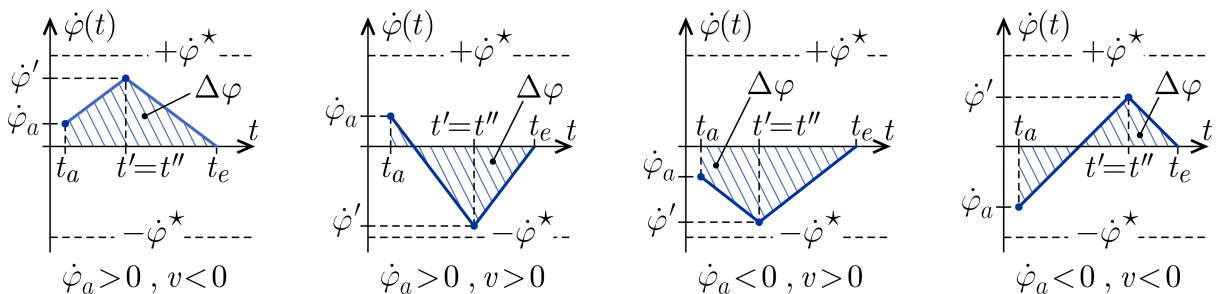


Bild 5.6: $\dot{\varphi}(t)$ -Rampe erreicht nicht die Sollgeschwindigkeit $\pm\dot{\varphi}^*$

Mit den Eckwerten für die r -te der n_R Teilrampen ist für jeden Zeitpunkt t der kinematische Zustand am o -ten optimierbaren Gelenk bestimmbar:

$t \in \dots$	$\ddot{\varphi}_o(t) = \dots$	$\dot{\varphi}_o(t) = \dots$	$\varphi_o(t) = \dots$
$[-\infty, t^A]$	0	0	φ_o^A
$[t_{a,o,r}, t'_{o,r}]$	$\ddot{\varphi}'_{o,r}$	$\langle \dot{\varphi}' - \dot{\varphi}'(t' - t) \rangle_{o,r}$	$\langle \varphi_a + \dot{\varphi}_a(t - t_a) + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}'(t - t_a)^2 \rangle_{o,r}$
$[t'_{o,r}, t''_{o,r}]$	0	$\dot{\varphi}'_{o,r}$	$\varphi'_{o,r} + \dot{\varphi}'_{o,r}(t - t'_{o,r})$
$[t''_{o,n_R}, t_{e,o,n_R}]$	$\ddot{\varphi}''_{o,r}$	$\ddot{\varphi}''_{o,n_R}(t - t_{e,o,n_R})$	$\varphi_o^E + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}''_{o,n_R}(t_{e,o,n_R} - t)^2$
$[t_{e,o,n_R}, \infty]$	0	0	φ_o^E

Im Folgenden wird von einem simultanen Bewegungsstart an allen Gelenken zum Zeitpunkt $t^A = t_{a,o,1} = 0$ ausgegangen, für die Endzeitpunkte gilt individuell $t_o^E = t_{e,o,n_R}$.

5.3 Optimierungparameter

Der kinematische Zeitverlauf der optimierbaren Gelenkwinkel wird im Folgenden exemplarisch durch jeweils $n_R = 3$ sukzessive Rampenbefehle generiert, siehe Bild 5.7. Der Anfangswinkel $\varphi_{a,o,1}$ der ersten sowie der Zielwinkel φ_{e,o,n_R} der letzten Rampe sind durch die bekannte Anfangs- und Endkonfiguration der Roboterarms vorgegeben,

$$\varphi_{a,o,1} = \varphi_o^A \quad , \quad \varphi_{e,o,n_R} = \varphi_{e,o,3} = \varphi_o^E \quad , \quad o \in \mathbb{P}_o = \{1, 2, 3\} \quad , \quad (5.10)$$

für jedes der drei Armgelenke aus \mathbb{P}_o stehen somit $3n_R - 1 = 8$ freie Rampenparameter zur Bahnoptimierung zur Verfügung. Das gesamte Optimierungsproblem umfasst also $8|\mathbb{P}_o| = 24$ im Parametervektor \mathbf{p} zusammengefasste Optimierungsparameter :

$$\mathbf{p} = \text{col}_{o \in \mathbb{P}_o} \langle \mathbf{p}_o \rangle \quad , \quad \mathbf{p}_o = \left(\varphi_{e,o,1} \quad , \quad \dot{\varphi}_{o,1}^* \quad , \quad \ddot{\varphi}_{o,1}^* \quad , \quad \varphi_{e,o,2} \quad , \quad \dot{\varphi}_{o,2}^* \quad , \quad \ddot{\varphi}_{o,2}^* \quad , \quad \varphi_{o,3}^* \quad , \quad \ddot{\varphi}_{o,3}^* \right)^T \quad (5.11)$$

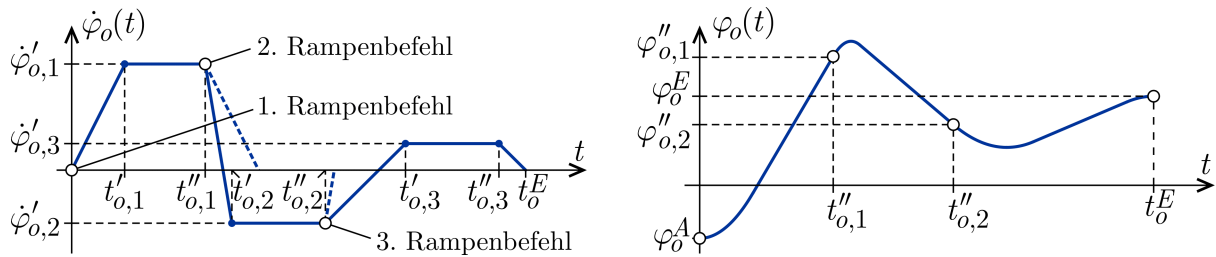


Bild 5.7: Gelenkinematik infolge dreier sukzessiver Rampenbefehle

5.4 Kinematik der passiven Gelenke

Die passiven Gelenke werden jeweils durch nur einen zum Zeitpunkt t^A erteilten Rampenbefehl mit den Rampenparametern $\{\varphi_p^E, \dot{\varphi}_p^*, \ddot{\varphi}_p^*\}$ vom Anfangswinkel φ_p^A in den Endwinkel φ_p^E bewegt, wobei $p \in \mathbb{P}_p$ gemäß Gleichung (5.1). Der Endwinkel φ_p^E ist bekannt, die Parameter $\dot{\varphi}_p^*$ und $\ddot{\varphi}_p^*$ sind zu bestimmen. Zum Zeitpunkt t_o^E , an dem

das letzte der optimierbaren Gelenke seine komplexe Rampenfahrt beendet, sollen alle passiven Gelenke nach Möglichkeit ebenfalls die Bewegung beenden, ein früheres Ende sei hingegen ausgeschlossen:

$$\min_{\forall p} (t_p^E) \geq t_O^E = \max_{\forall o} (t_o^E) \quad , \quad o \in \mathbb{P}_o \quad , \quad p \in \mathbb{P}_p \quad (5.12)$$

Die $\dot{\varphi}_p(t)$ -Rampe zum Verfahren um den Sollrelativwinkel $\Delta\varphi_p = \varphi_p^E - \varphi_p^A$ in dem Zeitintervall $\Delta t = t_p^E - t^A$ wird gemäß Bild 5.8 so geformt, dass die maximal mögliche Geschwindigkeit $\dot{\varphi}_{p,lim}$ erreicht wird. Ein Beschleunigen bzw. Verzögern mit der maximal zulässigen Winkelbeschleunigung $\pm\ddot{\varphi}_{p,lim}$ steht hinter dieser Vorgabe zurück.

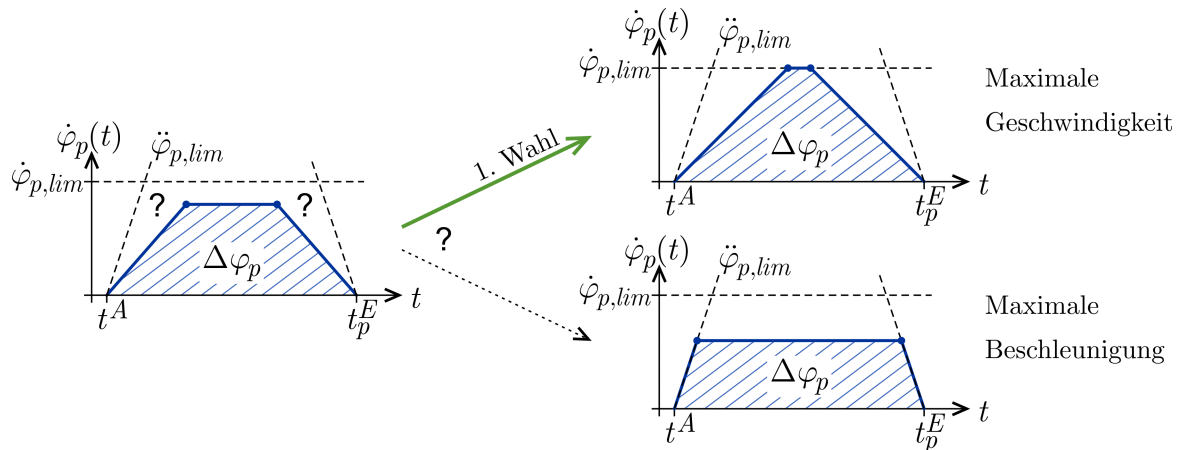
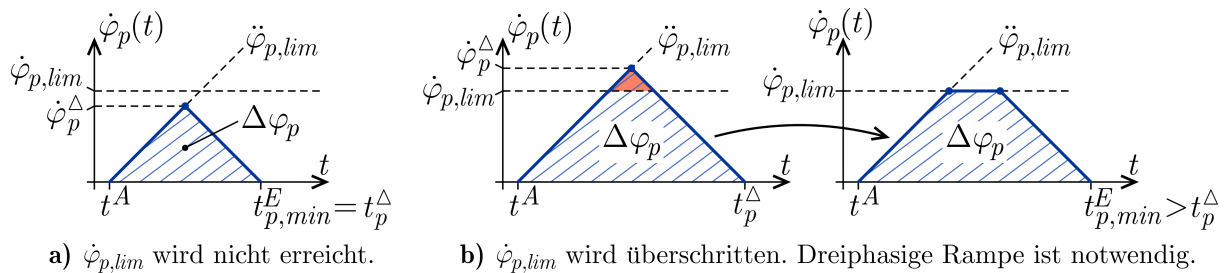


Bild 5.8: Maximale Geschwindigkeit (oben) wichtiger als maximale Beschleunigung (unten)

Zur Bestimmung der Rampenparameter für das passive Gelenk p ist zu analysieren, zu welchem Zeitpunkt $t_{p,min}$ das Gelenk frühestens den Endwinkel φ_p^E erreichen kann. Es wird zunächst von einer dreieckigen Rampenfahrt mit maximal zulässiger Beschleunigung ohne mittlere Phase mit konstanter Geschwindigkeit ausgegangen, vgl. Bild 5.9a). Die dabei maximal erreichte Geschwindigkeit $\dot{\varphi}_p^\Delta$ sowie der Endzeitpunkt t_p^Δ lauten:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{\varphi}_p^\Delta &= \text{sign}(\Delta\varphi_p) \ddot{\varphi}_{p,lim} (t_p^\Delta - t^A) \\ \wedge 2\Delta\varphi_p &= \dot{\varphi}_p^\Delta (t_p^\Delta - t^A) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} t_p^\Delta &= t^A + 2\sqrt{|\Delta\varphi_p| / \ddot{\varphi}_{p,lim}} \quad , \\ \dot{\varphi}_p^\Delta &= \text{sign}(\Delta\varphi_p) \sqrt{|\Delta\varphi_p| \ddot{\varphi}_{p,lim}} \end{aligned} \right. \quad (5.13)$$



a) $\dot{\varphi}_{p,lim}$ wird nicht erreicht. b) $\dot{\varphi}_{p,lim}$ wird überschritten. Dreiphasige Rampe ist notwendig.

Bild 5.9: Schnellstmögliches Verfahren des passiven Gelenks $p \in \mathbb{P}_p$

Für $|\dot{\varphi}_p^\Delta| > \dot{\varphi}_{p,lim}$ ist eine dreiphasige Rampe zum schnellstmöglichen Erreichen des Sollendwinkels φ_p^E notwendig, wie Bild 5.9b) zeigt. Somit gilt:

$$\begin{aligned} |\dot{\varphi}_p^\Delta| \leq \dot{\varphi}_{p,lim} &\Rightarrow t_{p,min}^E = t_p^\Delta \\ |\dot{\varphi}_p^\Delta| > \dot{\varphi}_{p,lim} &\Rightarrow t_{p,min}^E = t^A + |\Delta\varphi_p| / \dot{\varphi}_{p,lim} + \dot{\varphi}_{p,lim} / \ddot{\varphi}_{p,lim} > t_p^\Delta \end{aligned} \quad (5.14)$$

Für den Zeitpunkt t^E , an dem die Bewegung aller passiven Gelenke simultan enden soll und der damit das Ende der Bewegung des gesamten Roboterarms markiert, gilt:

$$\forall p: t_p^E = t^E \stackrel{!}{=} \max\left(t_O^E, \max_{\forall p}(t_{p,min}^E)\right), \quad p \in \mathbb{P}_p \quad (5.15)$$

Die Eckwerte der Rampenverläufe und damit die Parameter der Rampenbefehle für die passiven Gelenke folgen mit dem Relativwinkel $\Delta\varphi_p^\Delta = \frac{1}{2}\dot{\varphi}_{p,lim}(t^E - t^A)$ bzgl. des Grenzfall-Dreiecksverlaufs gemäß Bild 5.10 aus einer Fallunterscheidung:

- $\Delta\varphi_p > \Delta\varphi_p^\Delta$: Der Sollrelativwinkel $\Delta\varphi_p$ ist groß genug, dass das passive Gelenk p die maximal zulässige Geschwindigkeit erreicht und somit ein dreiphasiger Rampenverlauf $\dot{\varphi}_p(t)$ vorliegt. Wegen Gleichung (5.15) ist sichergestellt, dass zum Zeitpunkt t^E der Endwinkel φ_p^E erreicht werden kann, und es gilt:

$$\dot{\varphi}_p' = \text{sign}(\Delta\varphi_p)\dot{\varphi}_{p,lim} \Rightarrow \begin{aligned} t_p' &= t^E - \Delta\varphi_p / \dot{\varphi}_p' \\ t_p'' &= t^A + \Delta\varphi_p / \dot{\varphi}_p' \end{aligned} \Rightarrow \ddot{\varphi}_p' = \frac{\dot{\varphi}_p'}{t_p' - t^A} \quad (5.16)$$

Die Parameter des Rampenbefehls lauten $\dot{\varphi}_p^* = \dot{\varphi}_{p,lim}$ sowie $\ddot{\varphi}_p^* = \ddot{\varphi}_p'$.

- $\Delta\varphi_p \leq \Delta\varphi_p^\Delta$: Das passive Gelenk p kann unter der Voraussetzung, exakt zum Zeitpunkt $t_{E,p}$ den Endwinkel φ_p^E zu erreichen und die Bewegung zu beenden, nicht bis auf die maximal zulässige Geschwindigkeit $\dot{\varphi}_{p,lim}$ beschleunigen. Es stellt sich ein zweiphasiger Dreiecksverlauf für $\dot{\varphi}_p(t)$ ein, für den gilt:

$$t_p' = t_p'' = \frac{1}{2}(t^A + t^E) \Rightarrow \dot{\varphi}_p' = \Delta\varphi_p / (t_p' - t^A), \quad \ddot{\varphi}_p' = \Delta\varphi_p / (t_p' - t^A)^2 \quad (5.17)$$

Für die Parameter des Rampenbefehls folgt $\dot{\varphi}_p^* \geq \dot{\varphi}_p'$ sowie $\ddot{\varphi}_p^* = \ddot{\varphi}_p'$.

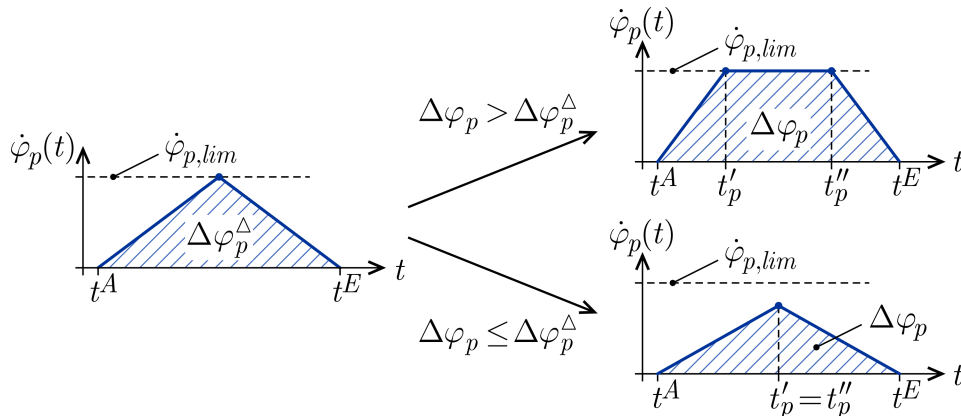


Bild 5.10: Fallunterscheidung zur Analyse der $\dot{\varphi}_p(t)$ -Rampen der passiven Gelenke

In beiden Fällen gilt für die Winkellage zum Zeitpunkt des ersten Phasenwechsels

$$\varphi_p(t=t'_p) = \varphi'_p = \varphi_p^A + \frac{1}{2} \dot{\varphi}'_p (t'_p - t^A) , \quad (5.18)$$

so dass für jeden Zeitpunkt t der kinematische Zustand am passiven Gelenk $p \in \mathbb{P}_p$ beschrieben wird durch:

$t \in \dots$	$\ddot{\varphi}_p(t) = \dots$	$\dot{\varphi}_p(t) = \dots$	$\varphi_p(t) = \dots$
$[-\infty, t^A]$	0	0	φ_p^A
$[t^A, t'_p]$	$\ddot{\varphi}'_p$	$\dot{\varphi}'_p(t - t^A)$	$\varphi_p^A + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}'_p (t - t^A)^2$
$[t'_p, t''_p]$	0	$\dot{\varphi}'_p$	$\varphi'_p + \dot{\varphi}'_p (t - t'_p)$
$[t''_p, t^E]$	$-\ddot{\varphi}'_p$	$\dot{\varphi}'_p(t - t^E)$	$\varphi_p^E - \frac{1}{2} \ddot{\varphi}'_p (t^E - t)^2$
$[t^E, \infty]$	0	0	φ_p^E

(5.19)

5.5 Gütekriterium

5.5.1 Definition

Es wird von einem autonom agierenden mobilen Roboter ohne externe Energiezufuhr ausgegangen. Das Ziel der Bahnoptimierung ist es somit, einen minimalen Energieumsatz infolge der Armbewegung von der Anfangs- in die Endkonfiguration zu realisieren. Ein mechanischer Ansatz im Sinne der Integration der einzelnen Gelenkleistungen („Moment mal Drehzahl“) ist nicht sinnvoll, da mangels dissipativer Elemente im System die Gesamt-Energiebilanz stets konstant wäre, nämlich gleich der Differenz der potenziellen Energie des Systems im Anfangs- und Endzustand. Daher wird auf die bereits in Abschnitt 4.3 benutzten und in Abschnitt 6.1.2 detailliert dargestellten Kennfelder $P_i(M_{M,i}, \dot{\varphi}_i)$ der Gelenkmotoren an den $f_A=6$ Gelenken des Roboterarms zurückgegriffen. Das skalare Gütekriterium der Bahnoptimierung wird dann über die Summe der Zeitintegrale der elektrischen Leistungen an den Gelenkantrieben definiert:

$$G(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{f_A} \left(\int_{t^A=0}^{t^E(\mathbf{p})} P_i(M_{M,i}(\mathbf{p}, t), \dot{\varphi}_i(\mathbf{p}, t)) dt \right) \quad (5.20)$$

5.5.2 Numerische Auswertung

Die Integrale in Gleichung (5.20) werden mit dem Gauß-Legendre-Quadraturverfahren bestimmt, nach dem das Integral einer stetig differenzierbaren Funktion $f(x)$ durch Steigerung der Ordnungszahl g beliebig genau approximiert werden kann über:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^g \left(w_{g,i} f\left(\frac{a+b}{2} + x_{g,i} \frac{b-a}{2}\right) \right) \quad (5.21)$$

Die Stützstellen \mathbf{x}_g und Wichtungszahlen \mathbf{w}_g werden aus Tabellen entnommen [27]. Polynome des g -ten Grades werden durch dieses Verfahren exakt integriert. Im vorliegenden Fall hat sich für die nicht-polynomialen Zeitverläufe der Leistungen $P_i(t)$ die Ordnung $g=4$ als ausreichend genau erwiesen, wobei gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_g &\approx \begin{pmatrix} -0.86114 & -0.33998 & 0.33998 & 0.86114 \end{pmatrix} \\ \mathbf{w}_g &\approx \begin{pmatrix} 0.34785 & 0.65215 & 0.65215 & 0.34785 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Auswertung der Integralsumme in Gleichung (5.20) erfolgt somit abschnittsweise für die einzelnen Zeitintervalle $[t_c, t_{c+1}]$, innerhalb derer die Zeitverläufe der Leistungen $P_i(t)$ an den $f_A=6$ Gelenken stetig differenzierbar sind,

$$G(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{f_A} \sum_{c=1}^{|\mathbb{T}_S|-1} \left(\int_{t_c}^{t_{c+1}} P_i(M_{M,i}(\mathbf{p}, t), \dot{\varphi}_i(\mathbf{p}, t)) dt \right), \quad (5.23)$$

wobei für die Zeitpunkte t_c und t_{c+1} gilt:

$$\{t_c, t_{c+1}\} \subset \mathbb{T}_S, \quad t_c < t_{c+1}, \quad]t_c, t_{c+1}[\cap \mathbb{T}_S = \emptyset, \quad \begin{aligned} c=1: t_c &= t^A \\ c=c_{max}: t_{c+1} &= t^E \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die Menge $\mathbb{T}_S = \mathbb{T}_M \cup \mathbb{T}_{\dot{\varphi}}$ enthält die Zeitpunkte, an denen mindestens eines der $P_i(t)$ nicht stetig differenzierbar ist. Sie wird bestimmt durch die Zeitpunkte der Gelenkmomenten-Sprünge in \mathbb{T}_M sowie der Nulldurchgänge der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten in $\mathbb{T}_{\dot{\varphi}}$, welche im Folgenden erläutert werden. Für die Menge \mathbb{T}_G der Stützstellen der Gauß-Legendre-Quadratur folgt:

$$\mathbb{T}_G = \bigcup_{c=1}^{|\mathbb{T}_S|-1} \left(\bigcup_{i=1}^g \left((t_c + t_{c+1})/2 + x_{g,i}(t_{c+1} - t_c)/2 \right) \right) \quad (5.25)$$

Zur Auswertung wird für jeden der betrachteten Zeitpunkte sowohl der kinematische Systemzustand, der durch die zuvor beschriebenen Rampenansätze mit den Gleichungen (5.9) bzw. (5.19) beschrieben wird, als auch der davon abhängige, mit Gleichung (2.43) bzw. (2.44) rekursiv bestimmbare, kinetische Systemzustand benötigt.

Zeitpunkte der Momentensprünge

Da sich die Winkelbeschleunigungen $\ddot{\varphi}_i(t)$ an den einzelnen Gelenken des Roboterarms wegen des Rampenansatzes für $\dot{\varphi}_i(t)$ sprunghaft ändern, vgl. Bild 5.1, ist der Zeitverlauf der Motormomente $M_{M,i}(\mathbf{p}, t)$ und damit der Energieumsätze $E_i(\mathbf{p}, t)$ an den Sprungzeitpunkten nicht stetig, vgl. [83] [133] [172]. Der Sprung nur einer Winkelbeschleunigung kann dabei einen Sprung aller Motormomente bewirken, wie Bild 5.11 exemplarisch für einen von nur zwei Gelenkwinkeln bewegten Roboterarm zeigt.

Die Menge der Momentensprung-Zeitpunkte \mathbb{T}_M setzt sich aus den in den Abschnitten 5.2 und 5.4 bestimmten, von den Optimierungsparametern \mathbf{p} abhängigen Eckzeitpunkten der $\dot{\varphi}(t, \mathbf{p})$ -Verläufe der optimierbaren und passiven Gelenke zusammen:

$$\mathbb{T}_M = \{t^A, t^E\} \cup \bigcup_{\forall o \in \mathbb{P}_o} \left(\bigcup_{r=1}^{n_R} \left(\{t'_{o,r}, t''_{o,r}\} \cup \{t^E_o\} \right) \right) \cup \bigcup_{\forall p \in \mathbb{P}_p} \left(\{t'_p, t''_p\} \right) \quad (5.26)$$

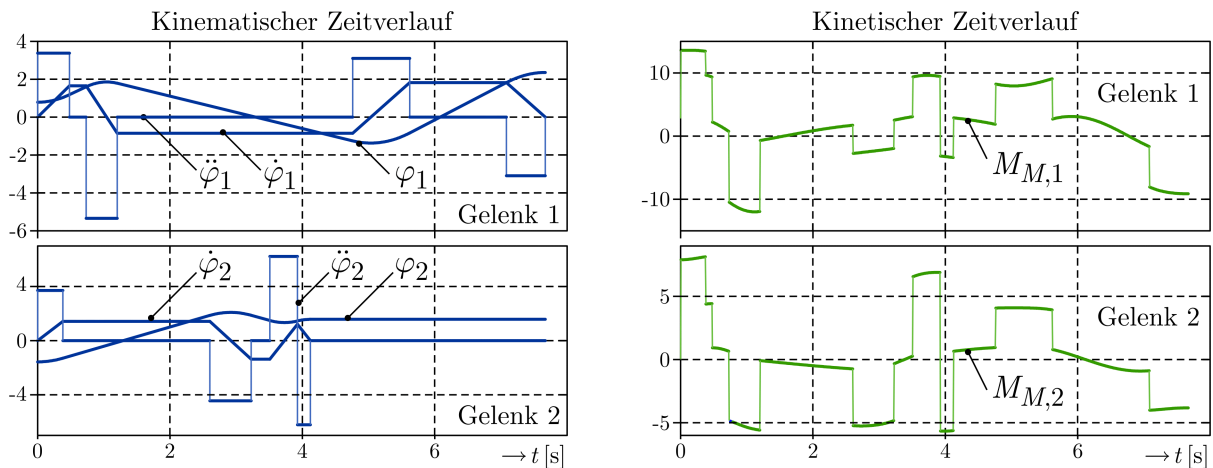


Bild 5.11: Kopplung der Sprünge der kinematischen und kinetischen Zeitverläufe

Zeitpunkte der Nulldurchgänge der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten

Die Motorkennfelder $P_i(M_{M,i}, \dot{\varphi}_i)$ weisen, wie Abschnitt 6.1.2 zeigen wird, bei $\dot{\varphi}_i = 0$ einen Sprung auf. Die Menge $\mathbb{T}_{\dot{\varphi}}$ der Zeitpunkte eines Vorzeichenwechsels einer der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten und damit eines Sprungs von $P_i(t)$ wird definiert durch

$$t^* \in \mathbb{T}_{\dot{\varphi}} \Leftrightarrow \exists o \in \mathbb{P}_o : \dot{\varphi}_o(t^*) = 0 \wedge \ddot{\varphi}_o(t^*) \neq 0, \quad (5.27)$$

wobei die passiven Gelenke mangels Nulldurchgängen von $\dot{\varphi}_p(t)$ aus der Betrachtung ausgeschlossen werden. Die Zeitpunkte t^* lassen sich gemäß Bild 5.12 trivial aus dem linearen Verlauf von $\dot{\varphi}_o(t)$ sowie der Tatsache bestimmen, dass ein Nulldurchgang von $\dot{\varphi}_o(t)$ nur in den Zeitintervallen $[t_{a,o,r}, t'_{o,r}]$, $r \in \{2 \dots n_R\}$, möglich ist:

$$\forall o \in \mathbb{P}_o : \dot{\varphi}_{a,o,r} \dot{\varphi}'_{o,r} < 0 \Leftrightarrow \langle t_a + \dot{\varphi}_a(t' - t_a) / (\dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}') \rangle_{o,r} = t^*_{o,r} \in \mathbb{T}_{\dot{\varphi}} \quad (5.28)$$

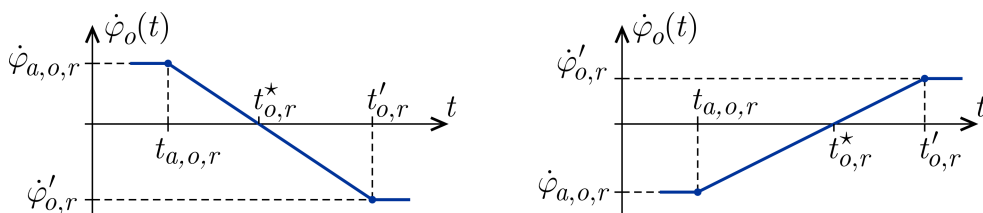


Bild 5.12: Nulldurchgänge der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_o(t)$

5.6 Nebenbedingungen

5.6.1 Definition

Bei der Bahnoptimierung werden einige der in Abschnitt 4.4 dargestellten Nebenbedingungen der statischen Bindungsoptimierung übernommen. So ist für jeden Zeitpunkt $t \in [t^A, t^E]$ während der Bewegung des Roboterarms zu gewährleisten, dass

- eine Persistenz des Bindungszustands vorliegt und der mobile Roboter somit weder kippt noch weggleitet, vgl. Gleichung (4.22). Diese auf die einseitigen Bindungen bzw. lokalen Verspannungen des Systems zielende Nebenbedingung stellt den entscheidenden Unterschied zur Bahnoptimierung bei fix an der Umgebung montierten Roboterarmen dar. Basierend auf den Gleichungen (4.11) und (4.12) gilt mit den Reserven ε_N bzw. ε_T für den normalen und tangentialen Fall:

$$\mathbf{N}_S(\mathbf{p}) = \max_{t \in [t^A, t^E]} \left(\begin{pmatrix} G_N(t, \mathbf{p}) \\ G_T(t, \mathbf{p}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_N \\ 1 - \varepsilon_T \end{pmatrix} \right) \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad , \quad \varepsilon_i \approx 10^{-2} \dots 10^{-1} \quad (5.29)$$

Im Folgenden wird $\varepsilon_N = \varepsilon_T = 0,1$ gesetzt, so dass $G_N \stackrel{!}{\leq} 0,9$ und $G_T \stackrel{!}{\leq} 0,9$.

- der Roboterarm nicht mit der Umgebung kollidiert. Unter Verwendung des Hüllkugel-Ansatzes für den i -ten betroffenen Körper gemäß Gleichung (4.30) gilt:

$$\mathbf{N}_{OU}(\mathbf{p}) = \max_{t \in [t^A, t^E]} \left(\text{col}_{\forall i} \left\langle \mathbf{N}_{OU,i}(\mathbf{r}_{O,ih}(t, \mathbf{p})) \right\rangle \right) \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad (5.30)$$

- keine hüllkugelbasierte Eigenkollision auftritt. Gleichung (4.32) liefert den Ansatz:

$$\mathbf{N}_{OO}(\mathbf{p}) = \max_{t \in [t^A, t^E]} \left(\text{col}_{\forall \{i,j\}} \left\langle \mathbf{N}_{OO,ij}(\mathbf{r}_{O,ih_i}(t, \mathbf{p}), \mathbf{r}_{O,jh_j}(t, \mathbf{p})) \right\rangle \right) \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad (5.31)$$

- sich die zeitabhängigen Gelenkmomente analog zu Gleichung (4.33) innerhalb der gegebenen Grenzwerte $\mathbf{M}_{M,min}$ und $\mathbf{M}_{M,max}$ bewegen:

$$\mathbf{N}_M(\mathbf{p}) = \max_{t \in [t^A, t^E]} (\mathbf{N}_M(t, \mathbf{p})) \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{N}_M(t, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{M,min} - \mathbf{M}_M(t, \mathbf{p}) \\ \mathbf{M}_M(t, \mathbf{p}) - \mathbf{M}_{M,max} \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Dabei ist das zeitliche Maximum eines zeitabhängigen Vektors \mathbf{x} zu verstehen als der Vektor der zeitlichen Maxima der einzelnen n_x skalaren Komponenten von \mathbf{x} :

$$\max_t (\mathbf{x}(t)) = \text{col}_{i=1}^{n_x} \left\langle \max_t (x_i(t)) \right\rangle \quad (5.33)$$

Des Weiteren sind die kinematischen Limitierungen des Roboterarms zu beachten. Dies umfasst zum einen die direkte Begrenzung der die $\dot{\varphi}_o(t)$ -Rampen definierenden Optimierungsparameter \mathbf{p} gemäß Gleichung (5.11) und damit des zur Verfügung stehenden Konfigurationsraums der Bahnoptimierung, wobei $0 < \{\dot{\varphi}_{min}, \ddot{\varphi}_{min}\} \ll 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{p,lim}(\mathbf{p}) &= \text{col}_{\forall o \in \mathbb{P}_o} \left\langle \text{col} \left\langle \mathbf{p}_{o,min} - \mathbf{p}_o \quad , \quad \mathbf{p}_o - \mathbf{p}_{o,max} \right\rangle \right\rangle \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad , \\ \mathbf{p}_{o,min} &= \left(\text{row}_{r=1}^{n_R-1} \left\langle \left(\varphi_{o,min} \quad \dot{\varphi}_{o,min} \quad \ddot{\varphi}_{o,min} \right) \right\rangle \dot{\varphi}_{o,min} \quad \ddot{\varphi}_{o,min} \right)^T \quad , \\ \mathbf{p}_{o,max} &= \left(\text{row}_{r=1}^{n_R-1} \left\langle \left(\varphi_{o,max} \quad \dot{\varphi}_{o,max} \quad \ddot{\varphi}_{o,max} \right) \right\rangle \dot{\varphi}_{o,max} \quad \ddot{\varphi}_{o,max} \right)^T \quad , \quad \text{hier: } n_R = 3 \end{aligned} \quad (5.34)$$

Zum anderen dürfen die optimierbaren Gelenke $o \in \mathbb{P}_o$ bei einer Drehrichtungsumkehr den jeweils zulässigen Grenzwinkel, je nach Drehrichtung $\varphi_{o,min}$ oder $\varphi_{o,max}$, nicht überschreiten. Dies passiert, wenn einem Gelenk während der Bewegung ein neuer

Rampenbefehl mit einer zu geringen Sollbeschleunigung erteilt wird, so dass das Gelenk nicht rechtzeitig vor Erreichen des Grenzwinkels auf $\dot{\varphi}_o = 0$ verzögern kann, vgl. Bild 5.13. Die Sollbeschleunigung $\ddot{\varphi}_{o,n}^*$ des r -ten Rampenabschnitts, $r \geq 2$, darf daher nicht kleiner sein als die durch die Übergangswinkelgröße $\varphi_{a,o,r}$ und -geschwindigkeit $\dot{\varphi}_{a,o,r}$ definierte kritische Beschleunigung $\ddot{\varphi}_{o,r,krit}$, bei der das Gelenk gerade noch beim Grenzwinkel eine Richtungsumkehr erreichen würde:

$$\ddot{\varphi}_{o,r,krit} = \frac{\dot{\varphi}_{a,o,r}^2}{2\Delta\varphi_{o,r,krit}} \geq 0, \quad \begin{cases} \dot{\varphi}_{a,o,r} > 0: \Delta\varphi_{o,r,krit} = \varphi_{o,max} - \varphi_{a,o,r} \\ \dot{\varphi}_{a,o,r} < 0: \Delta\varphi_{o,r,krit} = \varphi_{a,o,r} - \varphi_{o,min} \end{cases} \quad (5.35)$$

Für die entsprechende Nebenbedingung der Bahnoptimierung gilt somit:

$$\mathbf{N}_{\dot{\varphi}}(\mathbf{p}) = \text{col}_{\forall o \in \mathbb{P}_o} \left\langle \text{col}_{r=2}^{n_R} \left\langle \ddot{\varphi}_{o,r,krit}(\mathbf{p}) - \ddot{\varphi}_{o,r}^* \right\rangle \right\rangle \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \quad (5.36)$$

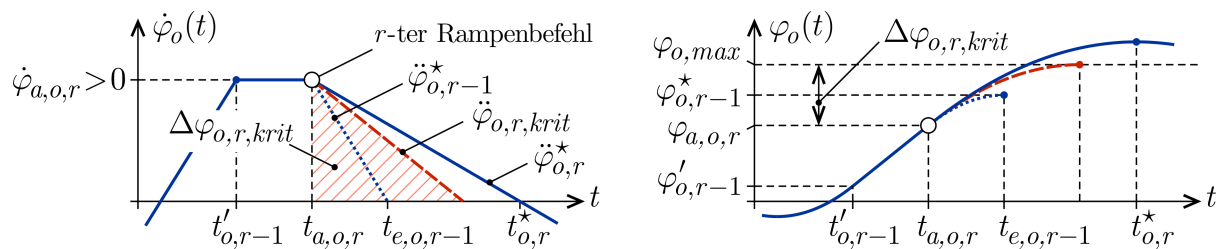


Bild 5.13: Überschreitung der Gelenkwinkelgrenze bei Drehrichtungsumkehr

5.6.2 Numerische Auswertung

Die Nebenbedingungen in den Gleichungen (5.29) bis (5.32) erfordern das Auffinden des jeweiligen absoluten Maximums der zeitabhängigen skalaren Komponenten im Zeitintervall $[t^A, t^E]$. Es zeigt sich in der Praxis, dass hier eine Anwendung numerischer Standardalgorithmen zur Extremasuche (beispielsweise gradientenbasiert mittels der Funktion *fminbnd* unter *MATLAB*) wegen des erforderlichen Rechen- und damit Zeitaufwands nicht sinnvoll ist. So kann die vollständige Analyse aller Nebenbedingungen um den Faktor $\sim 10^2$ mehr Zeit beanspruchen als die Auswertung der Gütefunktion. Insbesondere die Analyse der Nebenbedingung $N_G(\mathbf{p})$ bzgl. der Bindungspersistenz ist sehr zeitaufwändig, weil hier für jeden der betrachteten Zeitpunkte stets von neuem das LCP zur Bestimmung des lastabhängigen Bindungszustands zu lösen ist.

Stattdessen werden zur Analyse der Nebenbedingungen die zum Zwecke der Auswertung der Gütefunktion ohnehin bereits berechneten kinematischen und kinetischen Systemzustände an den Gauß'schen Integrations-Stützstellen genutzt. Gemäß Gleichung (5.25) liegen $|\mathbb{T}_G| = g \cdot (|\mathbb{T}_S| - 1)$ solche Stützstellen vor. Die an diesen Stützstellen ermittelten Werte für die einzelnen Nebenbedingungen dienen als Grundlage für eine kubische Spline-Interpolation über das gesamte relevante Zeitintervall $[t_A, t_E]$, so dass die Nebenbedingungen als approximierter, kontinuierlicher, stückweise kubischer Verlauf bekannt und somit ihre Maxima durch eine Nullpunktsuche ihrer Zeitableitungen aufzufinden sind. Da diese Zeitableitungen kubischer Splinefunktionen natür-

lich stückweise quadratisch sind, reduziert sich die Suche nach Maxima der Nebenbedingungen auf eine triviale Suche von Nullstellen quadratischer Funktionen.

Eine Ausnahme stellt die Nebenbedingung $\mathbf{N}_M(\mathbf{p})$ bzgl. der Gelenkmoment-Begrenzungen in Gleichung (5.32) dar. Da sich die bereits in Abschnitt 5.5.2 erwähnten Sprünge in der Zeitverläufe $\mathbf{M}_M(t, \mathbf{p})$ der einzelnen Gelenkmomente an den Zeitpunkten $t_c \in \mathbb{T}_M$ gemäß Gleichung (5.26) natürlich direkt auf $\mathbf{N}_M(t, \mathbf{p})$ übertragen, ist hier für jedes der Zeitintervalle $[t_c, t_{c+1}]$ eine separate Interpolation durchzuführen.

Für Details zur kubischen Spline-Interpolation siehe [102].

5.7 Formulierung des Optimierungsproblems

Die Optimierungsparameter \mathbf{p} gemäß Gleichung (5.11), die Gütefunktion $G(\mathbf{p})$ gemäß Gleichung (5.20) sowie die in Abschnitt 5.6 definierten Nebenbedingungen $\mathbf{N}_i(\mathbf{p})$ bilden ein nichtlineares Mehrparameter-Optimierungsproblem. Da die Gütefunktion bereits skalar ist, findet die Methode der gewichteten Gütekriterien im Gegensatz zur statischen Bindungsoptimierung in Kapitel 4 hier keine Anwendung. Analog zu den Gleichungen (4.38) und (4.39) wird das Bahnoptimierungsproblem mit den vektoriel- len Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen $\mathbf{C}_1(\mathbf{p})$ bzw. $\mathbf{C}_2(\mathbf{p})$ formal be- schrieben durch:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{p}} \left(G(\mathbf{p}) : \mathbf{C}_1(\mathbf{p}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \mathbf{C}_2(\mathbf{p}) \stackrel{!}{\leq} \mathbf{0} \right) &\mapsto \mathbf{p}_{opt} \quad , \quad \mathbf{C}_1(\mathbf{p}) \stackrel{\checkmark}{=} \emptyset, \\ \mathbf{C}_2(\mathbf{p}) &= \text{col} \left\langle \mathbf{N}_{\mathbf{p}, \text{lim}}(\mathbf{p}), \mathbf{N}_S(\mathbf{p}), \mathbf{N}_{OU}(\mathbf{p}), \mathbf{N}_{OO}(\mathbf{p}), \mathbf{N}_M(\mathbf{p}), \mathbf{N}_{\ddot{\varphi}}(\mathbf{p}) \right\rangle \end{aligned} \quad (5.37)$$

Es zeigt sich, dass die Verwendung eines SQP-Algorithmus zur Lösung des Bahnoptimierungsproblems zu Problemen führt. Die nachfolgend dargestellten Faktoren verursachen ein nicht stetig differenzierbares Verhalten der Gütefunktion sowie der Nebenbedingungen bei einer Varianz der Optimierungsparameter – $G(\mathbf{p})$ und $\mathbf{N}_i(\mathbf{p})$ weisen also Knicke auf – so dass die wegen Unkenntnis der analytischen Ableitungen $\partial G(\mathbf{p})/\partial \mathbf{p}$ bzw. $\partial \mathbf{N}_i(\mathbf{p})/\partial \mathbf{p}$ notwendige numerische Ermittlung der jeweiligen Gradienten zu numerischen Instabilitäten und mitunter zum gänzlichen Abbruch des verwendeten SQP-Algorithmus *fmincon* unter *MATLAB* führt:

- Wie in Abschnitt 5.2 gezeigt, kann der standardgemäß dreiphasige Rampenverlauf der Gelenkwinkelgeschwindigkeit abschnittsweise zu einem zweiphasigen Dreiecksverlauf degenerieren. Der die Sollgeschwindigkeit des entsprechenden Rampenabschnitts beschreibende Optimierungsparameter $\dot{\varphi}_{o,r}^* \in \mathbf{p}$ nimmt dann keinerlei Einfluss auf die Systemdynamik sowie auf die Gütefunktion und die Nebenbedingungen und ist somit irrelevant. An der Grenze zwischen Relevanz und Irrelevanz der einzelnen Sollgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_{o,r}^*$ liegen Knicke von $G(\mathbf{p})$ und $\mathbf{N}_i(\mathbf{p})$ vor.
- Die Dauer der Bewegung der passiven Gelenke orientiert sich an der Bewegungsdauer t_O^E der optimierbaren Gelenke, siehe Gleichung (5.15). Löst bei der Vari-

anz der Optimierungsparameter ein optimierbares Gelenk ein anderes als das sich zuletzt bewegende ab, hat dies ebenfalls Knicke zu Folge.

- Ein Knick in einer der das zeitliche globale Maximum einer Funktion $f(t, \mathbf{p})$ suchenden Nebenbedingungen vom Typ $N_i(\mathbf{p}) = \max_{t \in [t^A, t^E]} (f(t, \mathbf{p}))$ gemäß den Gleichungen (5.29) bis (5.32) liegt vor, wenn sich zwei verschiedene lokale Maxima des zu analysierenden zeitlichen Verlaufs durch eine Varianz der Optimierungsparameter \mathbf{p} in der Rolle als globales Maximum ablösen, wie Bild 5.14 zeigt.

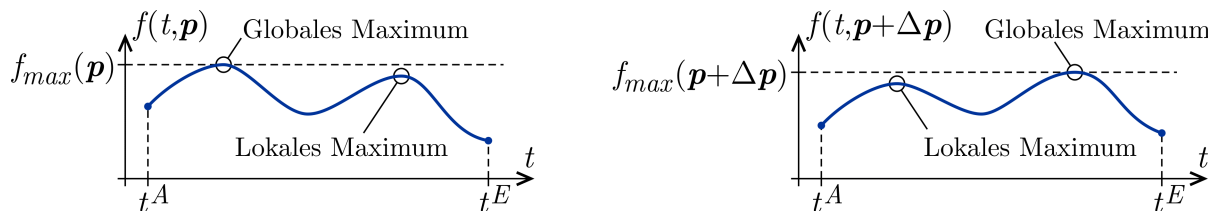


Bild 5.14: Wechsel des globalen Maximums durch Varianz der Optimierungsparameter \mathbf{p}

Zur pragmatischen Umgehung dieser numerischen Probleme wird daher bei der Lösung des Bahnoptimierungs-Problems ein gradientenfreies Verfahren gewählt. Hier hat sich das Downhill-Suchverfahren nach NELDER/MEAD [59] [92] [111], welches unter *MATLAB* in der Funktion *fminsearch* implementiert ist, als robust und zuverlässig, wenn auch relativ langsam, erwiesen. Das Verfahren bedient sich eines sogenannten Simplex, eines im n -dimensionalen Parameterraum aufgespannten $n+1$ -eckigen Körpers, und wird auch als Downhill-Simplex-Verfahren bezeichnet. Es ist nicht mit dem vor allem in den Wirtschaftswissenschaften geläufigen, inhaltlich und kontextuell grundverschiedenen Simplex-Verfahren für lineare Optimierungsprobleme zu verwechseln.

Im Anhang D ist das Verfahren in seiner im Rahmen der Bahnoptimierung benutzten Form dargestellt. Dabei wurde das ursprüngliche Verfahren von NELDER/MEAD um eine aus den kinematischen Limitierungen des Roboterarms folgende direkte Beschränkungen der Parameterraums erweitert. Die vektorielle Nebenbedingung $\mathbf{N}_{\mathbf{p},lim}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}$ entsprechend Gleichung (5.34) kann somit aus dem Vektor $\mathbf{C}_2(\mathbf{p})$ der Ungleichheitsnebenbedingungen gemäß Gleichung (5.37) entfernt werden. Die restlichen Nebenbedingungen $\mathbf{C}'_2(\mathbf{p}) = \mathbf{C}_2(\mathbf{p}) \setminus \mathbf{N}_{\mathbf{p},lim}(\mathbf{p})$ werden über eine lineare Straffunktion in eine skalare Ersatz-Gütefunktion $G^*(\mathbf{p})$ integriert,

$$G^*(\mathbf{p}) = G(\mathbf{p}) + S \cdot \sum_{\forall C \in \mathbf{C}'_2(\mathbf{p})} (\max(0, C)) \quad , \quad S \sim 10^3 \dots 10^4 \quad , \quad (5.38)$$

was mit $\mathbf{p}_{o,min}$ und $\mathbf{p}_{o,max}$ aus Gleichung (5.34) zu einem Ersatz-Optimierungsproblem mit eingeschränktem Parameterraum, jedoch ohne funktionale Nebenbedingungen führt:

$$\min_{\mathbf{p}} (G'(\mathbf{p})) \mapsto \mathbf{p}_{opt} \quad , \quad \text{col}_{\forall o \in \mathbb{P}_o} \langle \mathbf{p}_{o,min} \rangle \leq \mathbf{p} \leq \text{col}_{\forall o \in \mathbb{P}_o} \langle \mathbf{p}_{o,max} \rangle \quad (5.39)$$

Zur Steigerung der Effizienz des Optimierungsverfahrens sind solche Parameter \mathbf{p}_0 als Startparameter zu wählen, die bereits alle Nebenbedingungen erfüllen, $\mathbf{C}_2(\mathbf{p}_0) \leq \mathbf{0}$. Insbesondere die Forderung $\mathbf{N}_S(\mathbf{p}_0) \leq \mathbf{0}$ bzgl. Bindungspersistenz ohne Kippen oder

Weggleiten kann dabei nicht einfach zu erfüllen sein. Hier hat sich das iterative Auswählen von zufälligen Parametern als probates und pragmatisches Mittel erwiesen.

5.8 Untersuchte Szenarien

Die vorangegangenen Ausführungen zur Bahnoptimierung werden im Folgenden praktisch umgesetzt. Die Beschreibung der dafür ausgewählten Szenarien greift auf das nachfolgende Kapitel 6 vor, das die Details zum Aufbau des Versuchsroboter, zum Versuchsstand und zur Nomenklatur der verschiedenen Armkinematiken enthält.

Es werden die drei in Bild 5.15 dargestellten Achsfolgen untersucht, die gemäß den noch folgenden Ausführungen zur Nomenklatur in Abschnitt 6.1.3 mit den Kürzeln FP_1W_2F , $FSFS$ und $W_1P_1P_2W_2$ bezeichnet werden. Ihre geometrischen Daten sind im Anhang B zu finden, die Gleichungen zur inversen Kinematik beschreibt Anhang C.

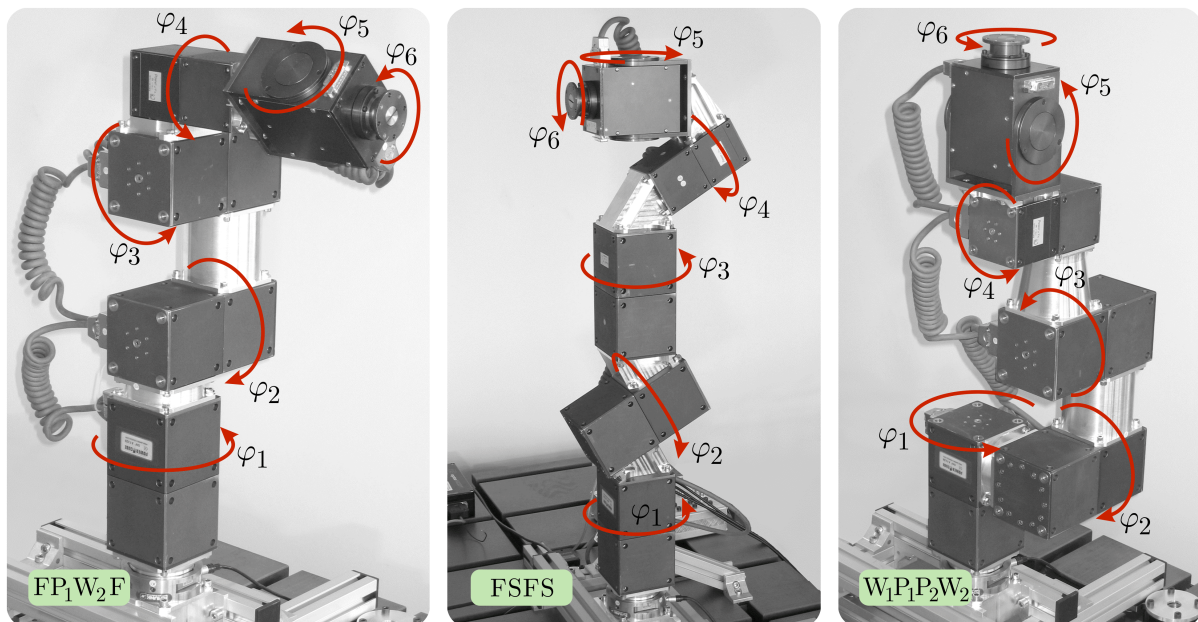


Bild 5.15: Für die Bahnoptimierung ausgewählte Achsfolgen in Nullposition ($\varphi_i = 0$)

Die Achsfolgen wurden dahingehend ausgewählt, dass die jeweilige inverse Kinematik analytisch lösbar ist. Die ist bei seriellen sechachsigen Roboterarmen der Fall, wenn sich drei aufeinanderfolgende Achsen in einem Punkt schneiden [127]. Bei der Achsfolge FP_1W_2F sind dies die letzten Achsen Nr. 4 bis 6. Diese Kinematik entspricht den in der Industrie am häufigsten vorkommenden vertikalen Knickarmrobotern.

Die Achsfolge $FSFS$ umfasst zwei solcher Schnittpunkte, die Achsen Nr. 1 bis 3 sowie Nr. 3 bis 5 schneiden sich jeweils in einem Punkt. Durch eine Abkehr von der bei Industrierobotern üblichen Rechtwinkligkeit oder Parallelität benachbarter Achsen und Einführung von schrägen Achswinkeln (vgl. Bild 6.10) konnte hier eine vollständige Eigenkollisionsfreiheit des Roboterarms realisiert werden.

Bei der Achsfolge $W_1P_1P_2W_2$ letztlich liegen die Achsen Nr. 2 bis 4 parallel zueinander. Ihr gemeinsamer Schnittpunkt liegt im Unendlichen, was die Voraussetzung für eine analytische Lösbarkeit der inversen Kinematik ebenfalls erfüllt.

Die zur Durchführung der Bahnoptimierung willkürlich gewählten Anfangs- und Endwerte für die Position und Orientierung des Greifers soll bei allen drei Achsfolgen identisch sein. Da das ohnehin schon kleine Schnittvolumen der verschiedenen Arbeitsräume der drei Kinematiken zusätzlich noch durch die Forderung nach einem sicheren Stand ohne Kippen oder Losgleiten des gesamten Roboters eingeschränkt wird, ist es mit einem gewisser Suchaufwand verbunden, eine für alle drei Achsfolgen zulässige Anfangs- und Endkonfiguration zu finden. Es wird festgelegt, vgl. Gleichung (2.38):

$$\begin{aligned} {}_I\mathbf{r}_G^A &= (0\text{ m} \quad -0,30\text{ m} \quad 0,12\text{ m})^T, & {}_I\mathbf{r}_G^E &= (0\text{ m} \quad 0,39\text{ m} \quad 0,24\text{ m})^T, \\ \mathbf{A}_{I,G}^A &= \mathbf{A}_{I,6}^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{A}_{I,G}^E &= \mathbf{A}_{I,6}^E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -\sin 20^\circ & 0 & \cos 20^\circ \\ -\cos 20^\circ & 0 & -\sin 20^\circ \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Die inversen Kinematiken der drei Achsfolgen liefern jeweils mehrere Lösungen für die Anfangskonfiguration der Gelenkwinkel, aus denen wie folgt ausgewählt wird:

$$\begin{aligned} \varphi_{FP_1W_2F}^A &\approx (-90,10^\circ \quad 35,06^\circ \quad -17,82^\circ \quad 45,00^\circ \quad -37,12^\circ \quad 89,90^\circ)^T \\ \varphi_{FSFS}^A &\approx (-90,60^\circ \quad 98,66^\circ \quad 108,80^\circ \quad -132,26^\circ \quad -42,87^\circ \quad -77,15^\circ)^T \\ \varphi_{W_1P_1P_2W_2}^A &\approx (-72,49^\circ \quad 17,37^\circ \quad -28,80^\circ \quad -133,83^\circ \quad 0,00^\circ \quad 17,51^\circ)^T \end{aligned} \quad (5.41)$$

Zur Vereinfachung wird nur die eine von mehreren möglichen Lösungen der inversen Kinematik als Endkonfigurationen der Gelenkwinkel betrachtet, die der Anfangskonfiguration morphologisch ähnelt (\rightarrow gleiche Wahl der Vorzeichen bei Zweideutigkeiten der inversen Kinematik, vgl. Anhang C) und aus dieser primär durch Drehung der ersten Achse bei nur geringer Veränderung des zweiten und dritten Gelenkwinkels hervorgeht. Die Gelenkwinkelwerte dieser in Bild 5.16 gezeigten Konfigurationen lauten:

$$\begin{aligned} \varphi_{FP_1W_2F}^E &\approx (89,91^\circ \quad 30,16^\circ \quad -8,15^\circ \quad 44,72^\circ \quad 18,31^\circ \quad 90,23^\circ)^T \\ \varphi_{FSFS}^E &\approx (36,95^\circ \quad 101,87^\circ \quad 50,72^\circ \quad 120,85^\circ \quad 99,74^\circ \quad 56,87^\circ)^T \\ \varphi_{W_1P_1P_2W_2}^E &\approx (107,19^\circ \quad -20,17^\circ \quad -72,50^\circ \quad -58,53^\circ \quad 16,12^\circ \quad 6,04^\circ)^T \end{aligned} \quad (5.42)$$

Um verschiedene Bindungskonfigurationen zu vergleichen, werden bei allen drei Armkinematiken zwei Varianten der Kantenlänge l_Δ des im Abschnitt 6.2.1 beschriebenen Aufstandsdreiecks der Basis betrachtet. Diese lauten:

$$l_{\Delta,1} = 500\text{ mm} \quad , \quad l_{\Delta,2} = 300\text{ mm} \quad (5.43)$$

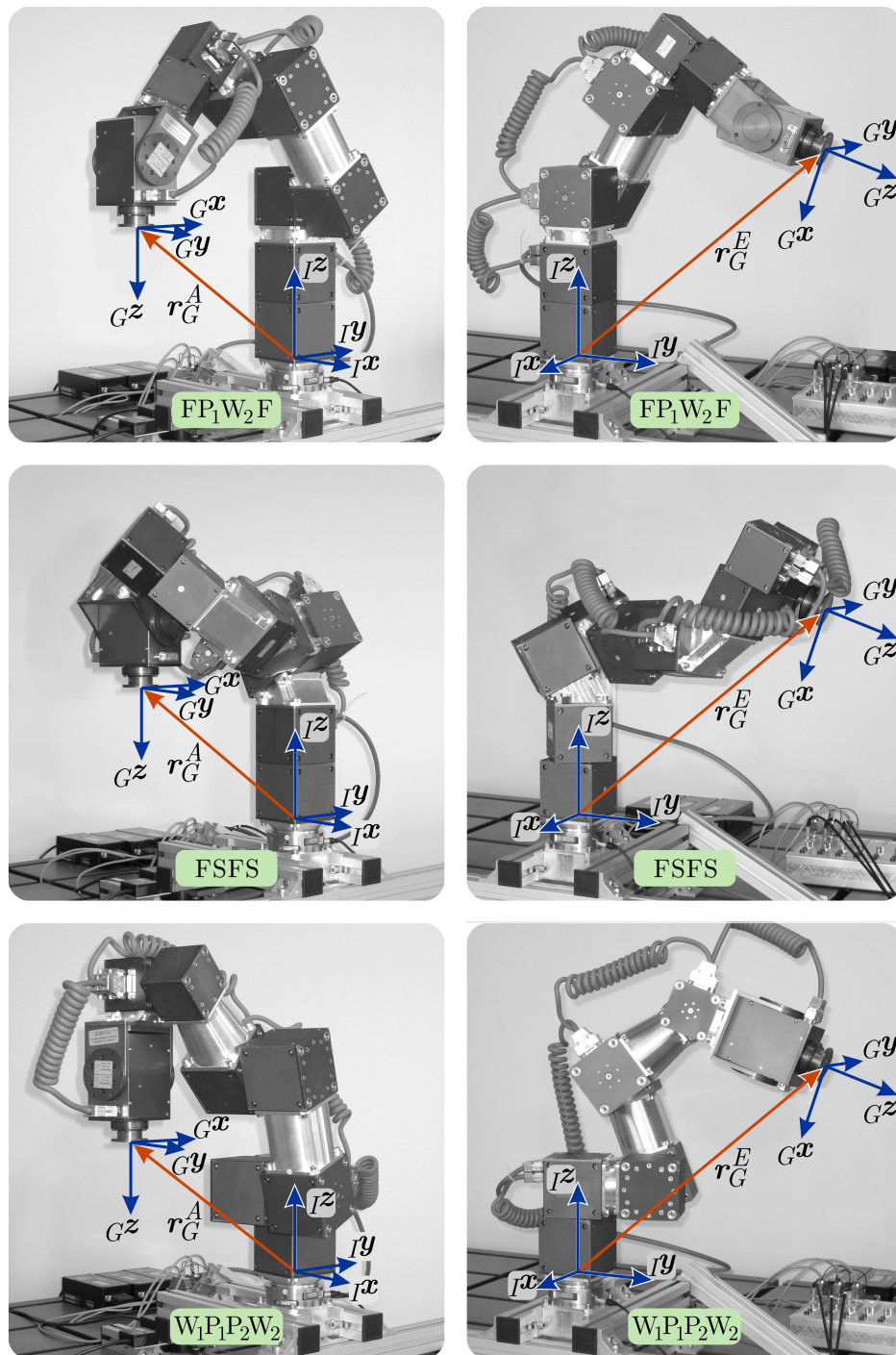


Bild 5.16: Anfangs- (links) und Endkonfigurationen (rechts) bei der Bahnoptimierung

Bei den Achsfolgen FP_1W_2F und $FSFS$ wird zudem der Fall einer lokalen Verspannung berücksichtigt: Im Falle des kleineren Aufstands-dreiecks wird am Bindungspunkt K_3 statt der einseitigen Bindung der im Abschnitt 6.2.2 detailliert dargestellte Spannmeechanismus zur Bildung einer kraftkonstanten lokalen Verspannung mit einseitiger Anpressung gemäß Abschnitt 3.2.4 benutzt. Die konstante Anpresskraft beträgt $F^* = 29,33\text{N}$, vgl. Gleichung (A.11) und (A.12). Die Achsfolge $W_1P_1P_2W_2$ wird

hier nicht betrachtet, da infolge eines längerfristigen Gerätedefekts keine Messdaten zur experimentellen Verifikation ermittelt werden konnten. Tabelle 5.1 fasst die bei der Bahnoptimierung exemplarisch untersuchten acht Fälle A bis H zusammen.

Tabelle 5.1: Im Rahmen der Bahnoptimierung untersuchte Fälle A bis H

↓ Bindungskonfiguration \ Achsfolge →	FP ₁ W ₂ F	FSFS	W ₁ P ₁ P ₂ W ₂
$l_{\Delta,1} = 500\text{mm}$, nur einseitig gebunden	A	D	G
$l_{\Delta,2} = 300\text{mm}$, nur einseitig gebunden	B	E	H
$l_{\Delta,2} = 300\text{mm}$, lokale Verspannung bei K_3	C	F	–

5.9 Optimierungsergebnisse

Für jeden der zuvor definierten Fälle A bis H wurden 50 Optimierungsrechnungen mit unterschiedlichen, zufällig gewählten Anfangswerten $\mathbf{p}_{0,i}$, $i \in [1; 50]$, für die Optimierungsparameter durchgeführt. Die den $\mathbf{p}_{0,i}$ zugehörigen, sehr verschiedenen Gelenkwinkelverläufe $\dot{\varphi}(t, \mathbf{p}_{0,i})$ approximierten zu einander ähnlichen, den optimierten Bahnparametern $\mathbf{p}_{opt,i}$ zugehörigen Gelenkwinkelverläufen $\dot{\varphi}(t, \mathbf{p}_{opt,i})$. Die Ähnlichkeit kann durch eine Verschärfung des Abbruchkriteriums gemäß Gleichung (D.5) weiter verbessert werden und stellt einen Kompromiss zwischen der erzielten Güte der Optimierung und der Berechnungsdauer dar. Bild 5.17 zeigt, sortiert nach den Endwerten $G^*(\mathbf{p}_{opt,i})$, die jeweils erzielten Verbesserungen der Ersatz-Gütefunktion gemäß Gleichung (5.38) gegenüber den jeweiligen Anfangswerten $G^*(\mathbf{p}_{0,i})$.

Es wird für jeden der Fälle A bis H jeweils eine der 50 ähnlichen Lösungen als Referenzlösung ausgewählt. Deren zugehörige optimierte Parameter sowie die daraus folgenden, für die Berechnung des Gütevalues $G(\mathbf{p})$ gemäß Gleichung (5.23) benötigten Zeitpunkte $t_a \in \mathbb{T}_S$ sind in Anhang E aufgelistet. Die Bilder 5.18 bis 5.20 zeigen die Zeitverläufe der Gelenkwinkel und Winkelgeschwindigkeiten für die Referenzlösungen der drei Achsfolgen. Man stellt folgende Auswirkungen der unterschiedlichen Bindungssituationen auf die Bahnbewegung fest:

- Bei den Fällen ohne lokale Verspannung ermöglicht das größere Aufstandsdreieck ($l_{\Delta} = 0,5\text{m}$: Fall A, D und G) eine höhere Dynamik des Roboters und damit eine geringere Gesamtdauer für die Bahnbewegung als beim kleineren Aufstandsdreieck ($l_{\Delta} = 0,3\text{m}$: Fall B, E und H). Der Einfluss der geringeren Kippgefahr auf die Bahndynamik des einseitig gebundenen Roboters ist erkennbar. Besonders stark fällt der Unterschied bei der Achsfolge W₁P₁P₂W₂ aus. Hier verringert sich die Gesamtdauer der Armbewegung von 6,88 s (Fall H) auf 1,99 s (Fall G).
- Ebenso ist bei den Fällen C und F mit lokaler Verspannung am Bindungspunkt K_3 eine geringere Gesamtdauer für die Bahnbewegung möglich als bei den Fällen B und E mit ausschließlich einseitigen Bindungen.
- Die dem industriellen Standard entsprechende Achsfolge FP₁W₂F benötigt in den vergleichbaren Fällen weniger Zeit für die Bahnbewegung als die Achsfolgen

FSFS und $W_1P_1P_2W_2$ (A:1,81s, D:2,12s, G:1,99s / B:2,41s, E:3,84s, H:6,88s / C:2,13s, F:3,36s). Dies kann auf eine günstigere Massenverteilung des Roboterarms um die vertikale erste Achse zurückgeführt werden, so dass höhere Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ bzw. -beschleunigungen $\ddot{\varphi}_1$ möglich sind, ohne dass der einseitig gebundene Roboter kippt oder weggleitet.

- Bei den Fällen des kleinen Aufstandsdreiecks ($l_\Delta = 0,3\text{m}$, ohne und mit lokaler Verspannung) ist ein Anheben des Roboterarms um die φ_2 -Achse (FP_1W_2F , Fälle B und C / FSFS, Fälle E und F) bzw. φ_3 -Achse ($W_1P_1P_2W_2$: Fall H) während der Bahnbewegung zu beobachten. Auf diese Weise nähert sich der Roboter einer vertikal gestreckten Konfiguration an, um ein Loskippen des einseitig gebunden Roboters während der hauptsächlich aus der Drehung um die vertikale φ_1 -Achse bestehenden Bahnbewegung zu vermeiden.
- Im Falle des großen Aufstandsdreiecks ($l_\Delta = 0,5\text{m}$) hingegen tritt bei der Achsfolge FP_1W_2F (Fall A) während der Bahnbewegung ein Absenken des Roboterarms um die φ_2 -Achse auf. Das Kipp- und das Losgleitrisiko sind hier so gering, dass der dabei zunehmende Abstand der Armmassen von der φ_1 -Achse unproblematisch ist. Die zur Bewegungsausführung benötigte Energie wird durch eine Umwandlung der im Roboterarm gespeicherten potenziellen Energie in kinetische Energie durch Absenken des Arms zu Beginn der Bewegung und eine entsprechende Rückumwandlung durch erneutes Anheben des Arms zum Bewegungsende minimiert. Bei dem entsprechenden Fall D (bzw. G) der Achsfolge FSFS (bzw. $W_1P_1P_2W_2$) hingegen kann zwar kein signifikantes Absenken des Roboterarms um die φ_2 -Achse (bzw. φ_3 -Achse) beobachtet werden, jedoch ist auch kein Anheben des Arms (wie noch beim Punkt zuvor) mehr notwendig.

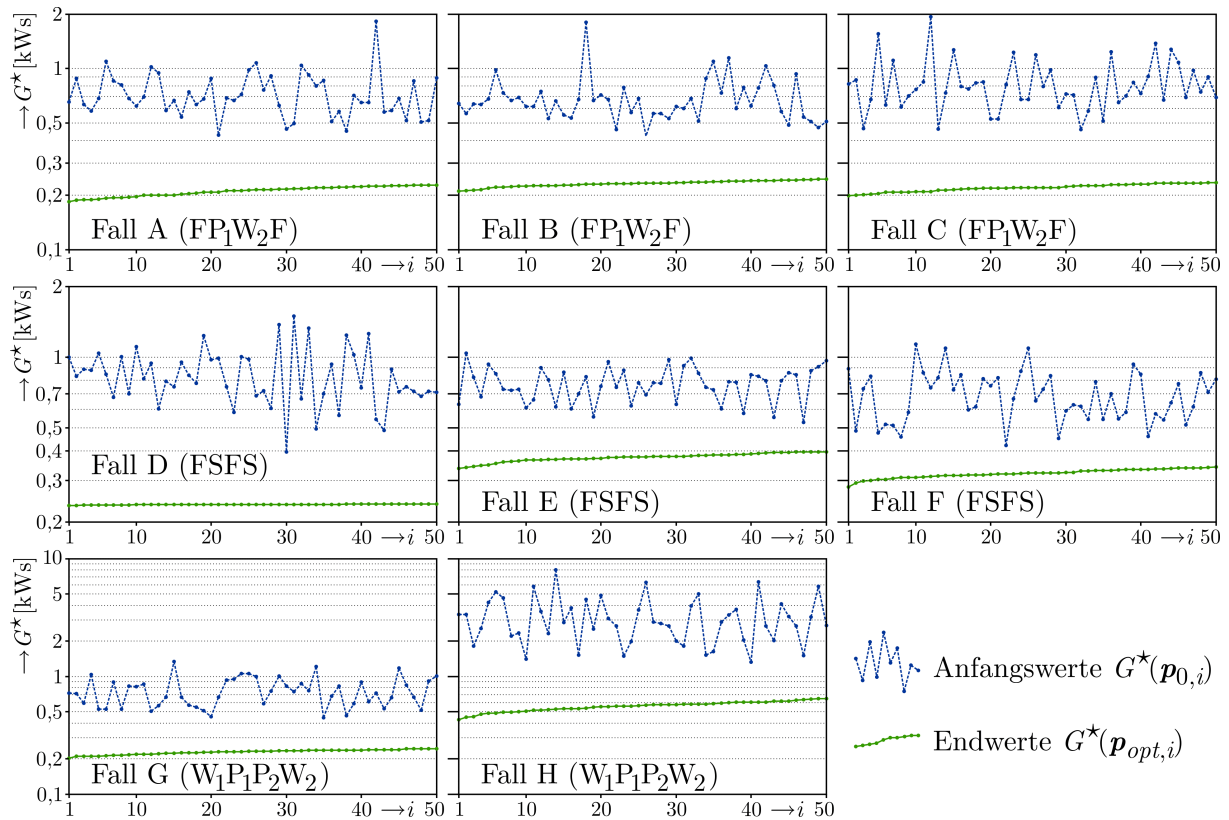


Bild 5.17: Verbesserungen der Gütefunktion $G^*(p)$ im Zuge der Optimierung

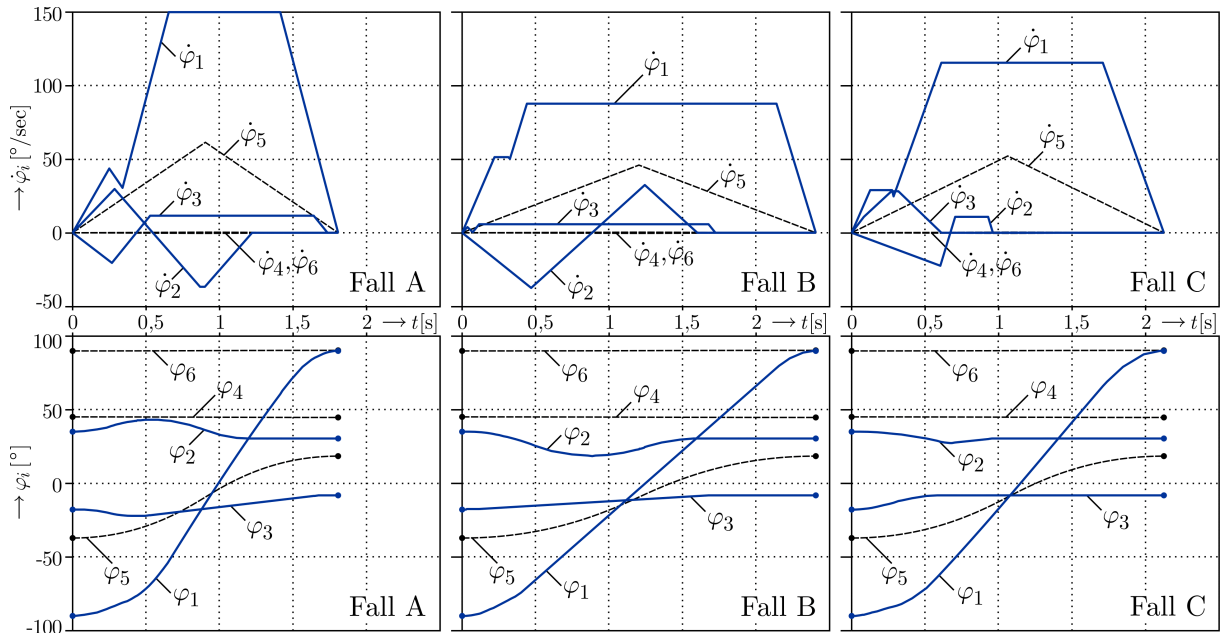


Bild 5.18: Zeitverläufe der Gelenkwinkel φ_1 bis φ_3 (optimierbar, durchgezogen) bzw. φ_4 bis φ_6 (passiv, gestrichelt) sowie ihrer Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ bei der Achsfolge FP₁W₂F

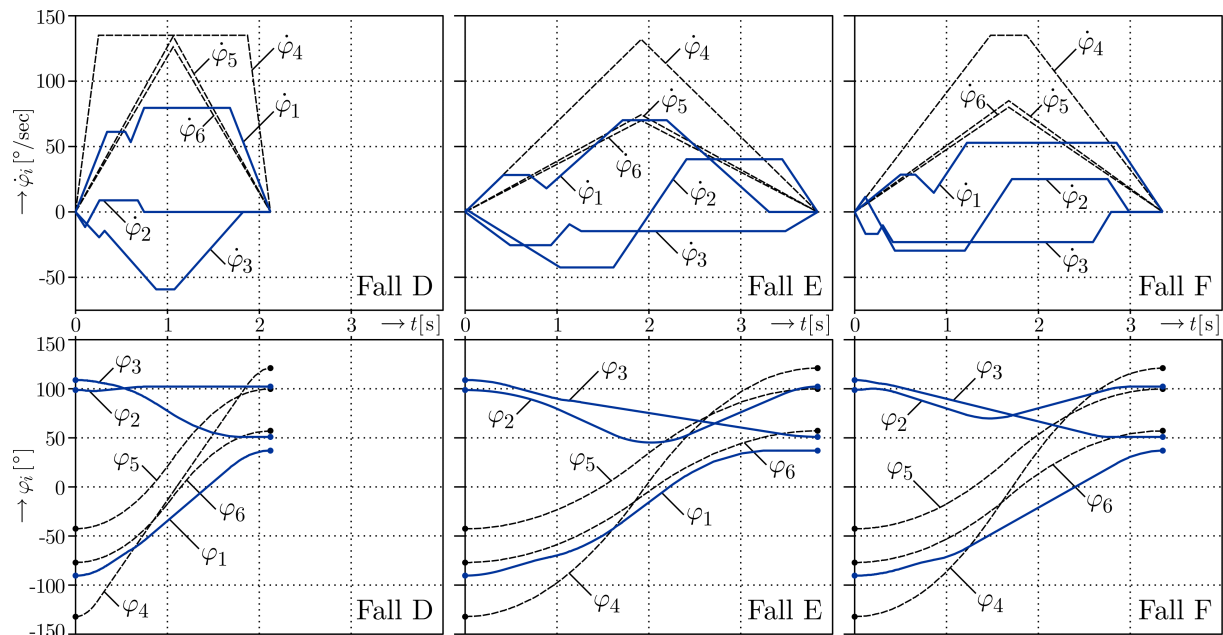


Bild 5.19: Zeitverläufe der Gelenkwinkel φ_1 bis φ_3 (optimierbar, durchgezogen) bzw. φ_4 bis φ_6 (passiv, gestrichelt) sowie ihrer Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ bei der Achsfolge FSFS

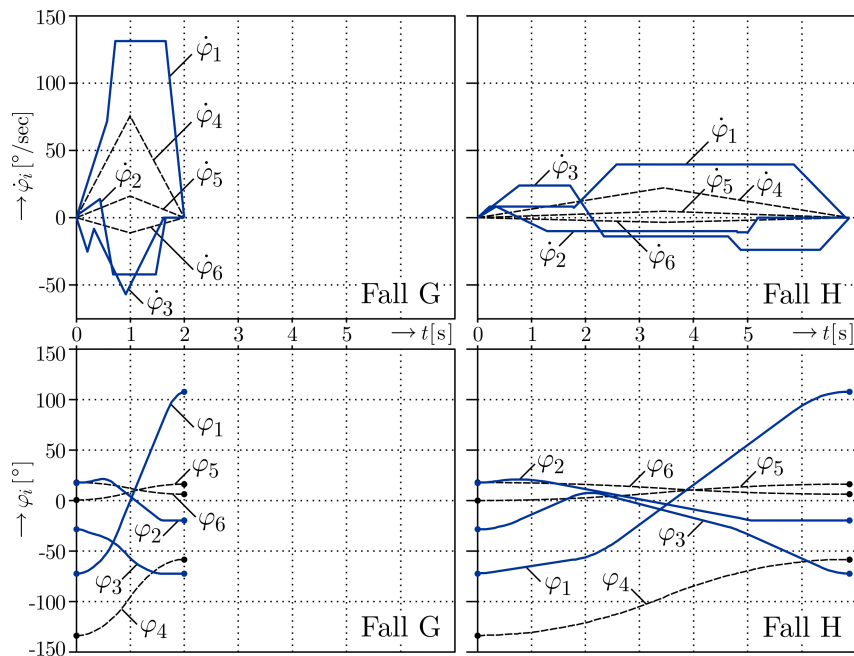


Bild 5.20: Zeitverläufe der Gelenkwinkel φ_1 bis φ_3 (optimierbar, durchgezogen) bzw. φ_4 bis φ_6 (passiv, gestrichelt) sowie ihrer Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ bei der Achsfolge W₁P₁P₂W₂

Kapitel 6

Versuchsstand

Im Folgenden wird der zur Validierung der vorangegangenen Ausführungen genutzte Versuchsstand beschrieben. Dies umfasst, entsprechend der Zweiteilung des mobilen Roboters in Abschnitt 2.2, die Darstellung des Aufbaus, der Parameterermittlung, der Ansteuerung und der Messdatenermittlung hinsichtlich des seriellen Roboterarms sowie der den Arm tragenden, einseitig gebundenen bzw. lokal verspannten Basis.

6.1 Aufbau der seriellen Arme der Versuchsroboter

6.1.1 Modulares Robotiksystem

Die untersuchten verschiedenen Kinematiken des Roboterarms wurden unter Verwendung des modularen Robotiksystems *Powercube* der Firma *Amtec Robotics* aufgebaut. Es handelt sich hierbei um einzelne autonome Antriebsmodule, deren Drehbewegung durch elektrisch kommutierte Gleichstrommotoren erzeugt und mit *Harmonic-Drive* Getrieben untersetzt werden. Mittels Zwischenadapter können die Antriebsmodule in der Art eines Baukastensystems zu komplexen Kinematiken montiert werden. Die Energieversorgung mit 24V Gleichstrom sowie die Kommunikationszuleitung via CAN-Bus erfolgt gemeinsam über Spiralkabel, die sukzessiv von einem Modul zum nächsten verlaufen. Bild 6.1 zeigt die im Rahmen dieser Arbeit benutzten Antriebsmodule und ihre Verkabelung. Über einen Standard-PC mit CAN-Bus-Karte werden den Antriebsmodulen Kommandos zur Bewegungssteuerung erteilt, die von den lokalen Logikeinheiten in den Modulen analysiert und mittels digitaler Positions-, Geschwindigkeits- oder Stromregler mit Servo-Endstufe in entsprechende Bewegungen umgesetzt werden. Im vorliegenden Fall dieser Arbeit handelt es sich um die $\dot{\varphi}$ -Rampenbefehle gemäß Abschnitt 5.2, die zu den Zeitpunkten $t''_{o,i}$ an die jeweiligen Antriebsmodule erteilt werden, vgl. Bild 5.8.

Der CAN-Bus stellt als asynchrones, serielles Bussystem den derzeitigen Standard im Automotive-Bereich dar. Das Bus-Protokoll sichert mit Hilfe von Checksummen eine korrekte Datenübertragung zwischen Sender und Empfänger, so dass sicherheitskritische Daten in Echtzeit übertragen werden können. Die maximal mögliche Datenrate ist umgekehrt proportional zur Länge des Bus; bis zu einer Länge von 30m ist eine Datenrate von 1000 kbit/s gewährleistet [47].

Die Regelung der einzelnen Roboterachsen erfolgt dezentral und autonom in den Antriebsmodulen. In dem die beiden Achsen 5 und 6 enthaltenden, in Bild 6.1 rechts dargestellten Handgelenkmodul sind zwei jeweils einer Achse zugeordneten autonome

Logikeinheiten enthalten. Jede der sechs Logikeinheiten tritt als separates Gerät am CAN-Bus auf. Das Betriebssystem jedes der Antriebsmodule überwacht fortwährend die Stromaufnahme des Motors, die Temperatur der Motorwicklung und Endstufentransistoren sowie die Einhaltung der jeweiligen Endlagen. Zum Betrieb der Antriebsmodule wird neben dem Steuerungs-PC eine 24V Gleichstrom-Versorgung benötigt.

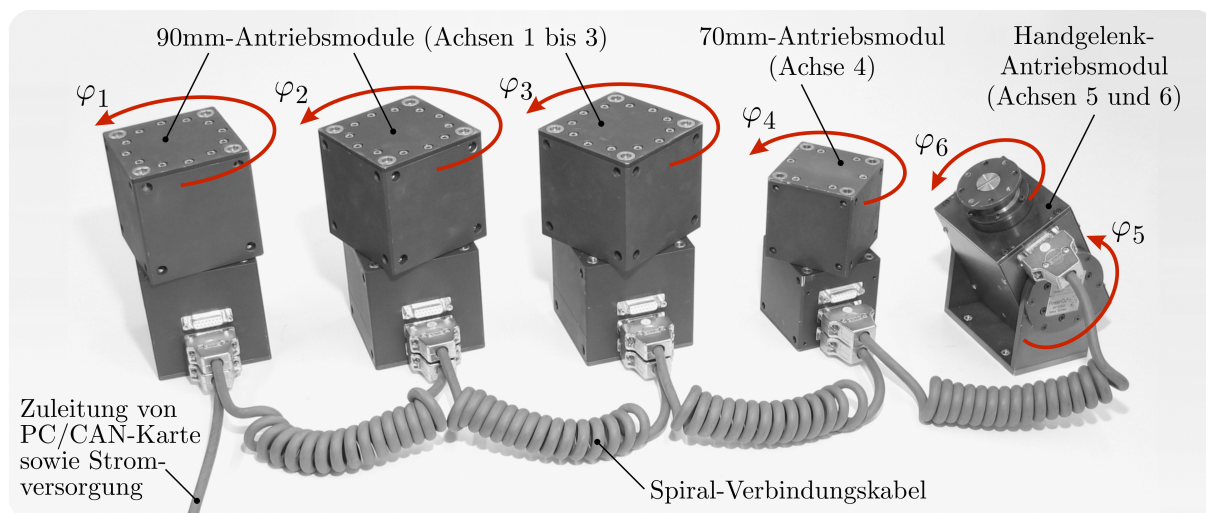


Bild 6.1: Im Experiment eingesetzte *Powercube*-Antriebsmodule

Der Einsatz einer separaten, bei gewöhnlichen Industrierobotern üblichen Roboterregelung mit Leistungsverstärkern für jedes der Robotergelenke und entsprechender paralleler Leistungsstrom-Zuleitung zu jedem Gelenk ist beim vorliegenden System somit nicht erforderlich und auch praktisch nicht realisierbar. Zwar ließe sich eine klassische zentrale Regelung des Roboters durchaus mittels eines speziellen Stromsteuerungsbefehls über den CAN-Bus emulieren, der den von der Endstufe auf den Motor zu leitenden Strom vorgibt. Da nun jedoch sechs Antriebsmodule am Bus vorliegen, deren kinematische Zustände zudem fortwährend ausgelesen werden sollen, ist die Bandbreite des CAN-Bus pro Antriebsmodul für eine solche emulierte Stromregelung nicht ausreichend. Die Bewegungen der einzelnen Achsen werden daher durch bereits im Abschnitt 5.2 detailliert beschriebene, vom *Application Programming Interface* API zur Verfügung gestellte $\dot{\varphi}$ -Rampenbefehle erzeugt, die einen minimalen Datenverkehr am CAN-Bus erzeugen und somit eine Erfassung der kinematischen Zustandsdaten mit nahezu der gesamten Bus-Bandbreite ermöglichen. Das vom Hersteller bereitgestellte und die Befehle zur Ansteuerung und zum Auslesen der Antriebsmodule umfassende API ist zur Einbindung in C/C++ Code ausgelegt. Unter Nutzung der *MATLAB*-spezifischen *mex*-Schnittstelle, die eine Einbindung eigener C/C++ Programme ermöglicht, wurde eine Steuerung des Roboters von *MATLAB* aus realisiert. Die Erfassung der Gelenkwinkel erfolgt an der Motorwelle über Schlitzscheiben-Encoder, was eine Wiederholgenauigkeit der Positionierung von $\pm 0,02^\circ$ ermöglicht.

Bei der statischen Bindungsoptimierung in Kapitel 4, Gleichung (4.28) und (4.33), sowie bei der Bahnoptimierung in Kapitel 5, Gleichung (5.32), (5.34) und (5.35), wurden die kinematischen und kinetischen Limitierungen an den einzelnen Gelenken be-

rücksichtigt. Ungeachtet spezieller kinematischer Limitierungen bei den drei realisierten Achsfolgen lauten die entsprechenden Werte der verwendeten Antriebsmodule:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{max} &= \left(160^\circ \ 160^\circ \ 160^\circ \ 160^\circ \ 100^\circ \ 1080^\circ\right)^T, \quad \varphi_{min} = -\varphi_{max}, \\
 \dot{\varphi}_{lim} &= \left(150^\circ \ 150^\circ \ 150^\circ \ 135^\circ \ 216^\circ \ 340^\circ\right)^T \text{ sec}^{-1}, \\
 \ddot{\varphi}_{lim} &= \left(600^\circ \ 600^\circ \ 600^\circ \ 540^\circ \ 864^\circ \ 1700^\circ\right)^T \text{ sec}^{-2}, \\
 \mathbf{M}_{M,max} &= \left(50 \ 50 \ 50 \ 19 \ 8 \ 2\right)^T \text{ Nm}, \quad \mathbf{M}_{M,min} = -\mathbf{M}_{M,max}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

6.1.2 Modulparameter

Massen und Schwerpunkte

Die Massen der 90mm-Module betragen jeweils $m_{90} = 3409 \text{ g}$, die des 70mm-Moduls lautet $m_{70} = 1833 \text{ g}$. Gemäß Bild 6.2 liegen die jeweiligen Schwerpunkte S_{90} bzw. S_{70} zwar auf der Drehachse, wegen der ungleichmäßigen Masseverteilung im Innern der Antriebsmodule jedoch in einem gewissen Abstand zum geometrischen Mittelpunkt M .

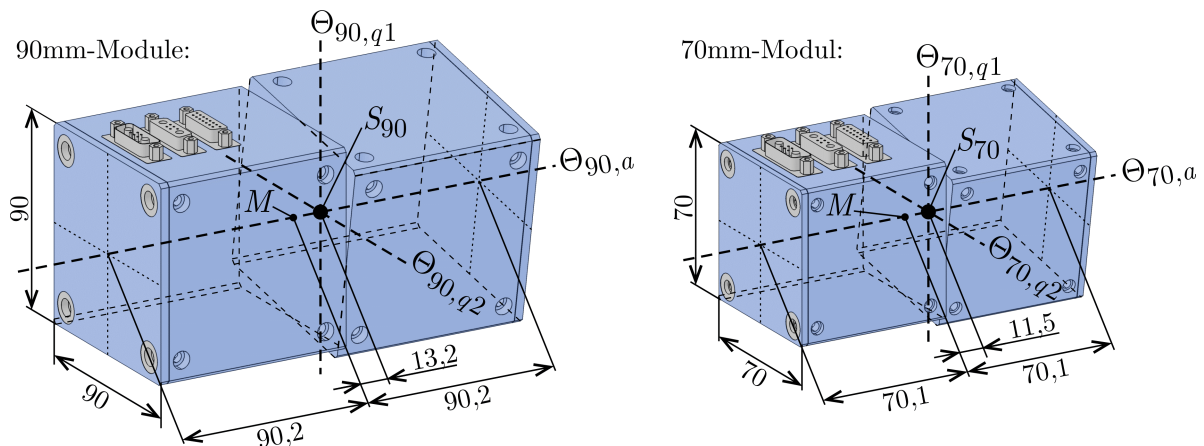


Bild 6.2: Schwerpunktlagen und Hauptachsen der 90mm-Module und des 70mm-Moduls

Die schwerpunktnahe ‚Mechanik‘-Hälfte eines Antriebsmoduls enthält die mechanischen Komponenten wie die Wälzlager oder das *Harmonic-Drive* Getriebe, in der schwerpunktfernen ‚Elektronik‘-Hälfte mit den Kabelanschlüssen befinden sich die elektronischen Komponenten. Die beiden Hälften werden dementsprechend hier und bei der detaillierten Beschreibung der untersuchten Kinematiken im Anhang B.2 mit den Indizes *me* und *el* gekennzeichnet.

In Bild 6.3 sind die Abstände der Schwerpunkte $S_{HG,A}$ bzw. $S_{HG,B}$ der das Handgelenk-Modul bildenden Teilkörper *A* und *B* zur Drehachse 5 dargestellt. Beide Schwerpunkte befinden sich auf der Schnittgeraden der beiden Symmetrieebenen des jeweiligen Teilkörpers. Die jeweiligen Massen betragen $m_{HG,A} = 283 \text{ g}$ bzw. $m_{HG,B} = 1502 \text{ g}$. Die Masse des zum Teilkörper *B* um die Achse 6 verdrehbaren Teilkörpers *C* ist zur Vereinfachung der Modellbildung in $m_{HG,B}$ enthalten, daher gilt $m_{HG,C} = 0 \text{ g}$.

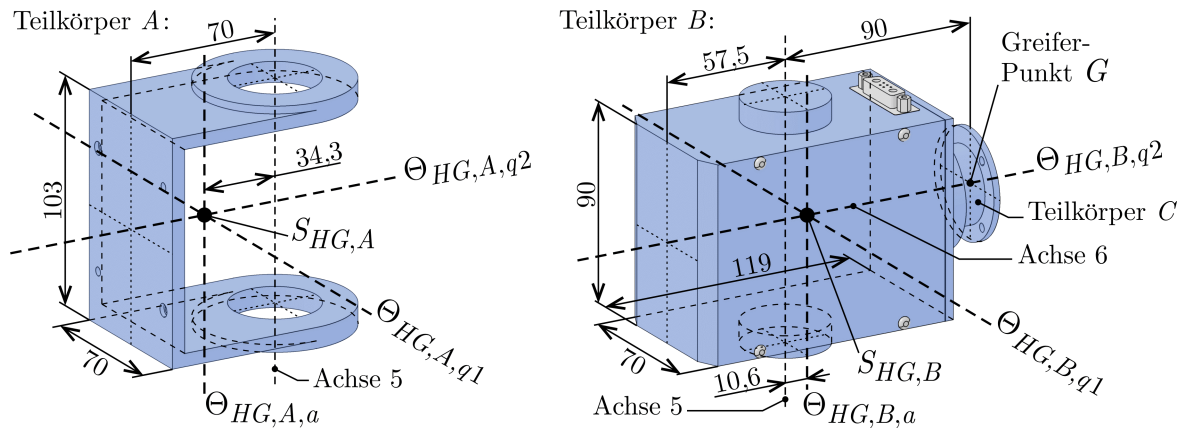


Bild 6.3: Schwerpunktlagen und Hauptachsen der Teilkörper des Handgelenk-Moduls

Massenträgheitsmomente

Die axialen Hauptmassenträgheitsmomente $\Theta_{90,a}$ bzw. $\Theta_{70,a}$ der 90mm-Module bzw. des 70mm-Moduls gemäß Bild 6.2 sowie die jeweils zwei quer dazu verlaufenden Hauptmassenträgheitsmomente $\Theta_{90,qi}$ bzw. $\Theta_{70,qi}$ wurden experimentell durch Auspendeln der Module an einem Torsionsfederdraht ermittelt, vgl. Bild 6.4 und [14]:

$$\begin{aligned} \Theta_{90,a} &= 4,517 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2, & \Theta_{90,q1} &= \Theta_{90,q2} \stackrel{\text{Def.}}{=} \Theta_{90,q} = 11,229 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2, \\ \Theta_{70,a} &= 1,464 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2, & \Theta_{70,q1} &= \Theta_{70,q2} \stackrel{\text{Def.}}{=} \Theta_{70,q} = 3,593 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$



Bild 6.4: Ermittlung der Massenträgheitsmomente durch Auspendeln am Beispiel eines der 90mm-Module

Bei der Modellbildung können die gesamte Modulmasse m_{90} bzw. m_{70} sowie die Hauptmassenträgheitsmomente $\Theta_{90,qi}$ bzw. $\Theta_{70,qi}$ zur Gänze nur einer der beiden Modulhälften, die gemäß dem noch folgenden Abschnitt 6.1.4 zu verschiedenen Körpern des seriellen Mehrkörpersystems gehören, zugeordnet werden. Die axialen Hauptmassenträgheitsmomente $\Theta_{90,a}$ bzw. $\Theta_{70,a}$ hingegen werden bei der Modellbildung gesplittet

und auf die ‚Mechanik‘- und die ‚Elektronik‘-Hälften der Module aufgeteilt. Zu ihrer Identifikation wurden die Module an der ‚Elektronik‘-Hälfte auf einem Kraft-Momentensensor montiert und das axiale Reaktionsmoment $M_{a,me}$ bei bekannter maximaler Drehbeschleunigung $\ddot{\varphi}_{lim}$ gemäß Gleichung (6.1) der ‚Mechanik‘-Modulhälfte gemessen, vgl. Bild 6.5. Mit $\Theta_{a,me} = M_{a,me} / \ddot{\varphi}_{lim} \Rightarrow \Theta_{a,el} = \Theta_a - \Theta_{a,me}$ lassen sich über die durch das Auspendeln bekannten Größen $\Theta_{90,a}$ bzw. $\Theta_{70,a}$ die Beträge der jeweiligen Anteile identifizieren:

$$\begin{aligned} \Theta_{90,a,me} &= 11,730 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2 & \Rightarrow & \Theta_{90,a,el} = -7,213 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2, \\ \Theta_{70,a,me} &= -3,013 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2 & \Rightarrow & \Theta_{70,a,el} = 4,476 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Man stellt fest, dass die partiellen axialen Massenträgheitsmomente sich nicht etwa ungefähr halbiert auf die beiden Modulhälften aufteilen, sondern der eine Anteil die Gesamtsumme übersteigt, während der andere Anteil bemerkenswerterweise einen negativen Betrag aufweist. Dieser Effekt ist auf die sehr hoch beschleunigte Motorwelle

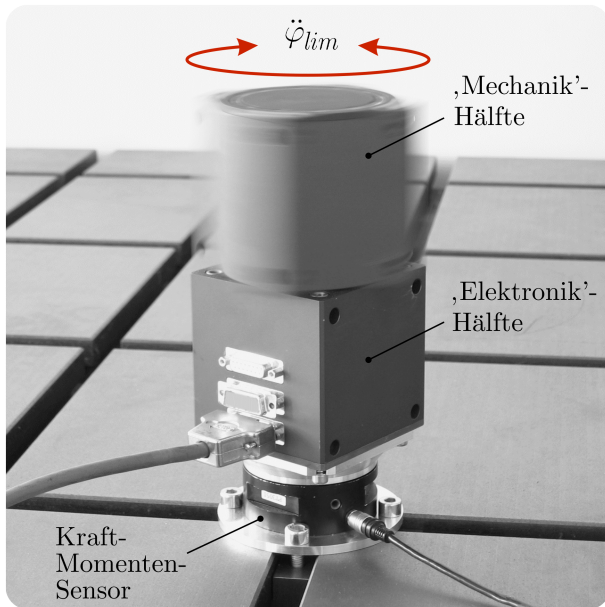


Bild 6.5: Messung des axialen Reaktionsmoments

im Innern der Module zurückzuführen, deren Massenträgheit sich je nach relativer Drehrichtung bzgl. der angetriebenen Modulhälfte positiv oder negativ auf das jeweilige partielle axiale Massenträgheitsmoment auswirkt. Der negative Anteil liegt bei den drei 90mm-Antriebsmodulen bei der ‚Elektronik‘-Hälfte vor, während beim 70mm-Antriebsmodul das Massenträgheitsmoment der ‚Mechanik‘-Hälfte negativ ausfällt. Dies beruht auf einem unterschiedlichen Anschluss der jeweiligen Modulhälften an das *Harmonic-Drive* Getriebe: Bei den 90mm-Modulen ist die ‚Elektronik‘-Hälfte mit dem *Flexspline* und die ‚Mechanik‘-Hälfte mit dem *Circular Spline* verbunden, beim 70mm-Modul hingegen sind die Verhältnisse umgekehrt. Die Motorwelle treibt dabei stets den *Wavegenerator* an [70].

In analoger Weise können die in Bild 6.3 dargestellten Massenträgheitsmomente der Teilkörper *A* und *B* des Handgelenkmoduls bestimmt werden. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \Theta_{HG,A,a} &= 0,668 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2, & \Theta_{HG,B,a} &= 2,331 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2, \\ \Theta_{HG,A,q1} &= 0,847 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2, & \Theta_{HG,B,q1} &= 3,318 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2, \\ \Theta_{HG,A,q2} &= 0,664 \cdot 10^6 \text{ mm}^2, & \Theta_{HG,B,q2} &= 1,946 \cdot 10^6 \text{ g mm}^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Das axiale Massenträgheitsmoment des um die Achse 6 drehbaren Teilkörpers C wird vernachlässigt, die beiden quer dazu verlaufenden Massenträgheitsmomente sind in $\Theta_{HG,B,a}$ bzw. in $\Theta_{HG,B,q1}$ enthalten, vgl. Bild 6.3, so dass gilt:

$$\Theta_{HG,C,a} = \Theta_{HG,C,q1} = \Theta_{HG,C,q2} = 0 \quad (6.5)$$

Kennfelder der Antriebsmodule

Bei der statischen Bindungsoptimierung sowie bei der Bahnoptimierung wird der elektrische Energiebedarf des Systems betrachtet und soll minimiert werden. Die dazu in den Gleichungen (4.20) sowie (5.20) bzw. (5.23) benötigten Kennfelder $P_i(M_{M,i}, \dot{\varphi}_i)$ der einzelnen Antriebsmodule werden durch Approximation von an diskreten Stützstellen gemessenen Werten experimentell ermittelt. Dazu ist es notwendig, über einen gewissen Zeitraum ein konstantes Lastmoment $M_{M,i}$ bei konstanter Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_i$ auf das i -te Antriebsmodul zu geben und den dabei vom Antriebsmodul benötigten elektrischen Strom $I_i(t)$ durch Auslesen des Monitor-Ausgangs der verwendeten Stromversorgung zu messen, siehe Abschnitt 6.2.3. Dessen zeitlicher Mittelwert $\bar{I}_{i,mess}$ beschreibt, mit der anliegenden konstanten Gleichspannung $U_i = 24V$ multipliziert, die jeweilige zugehörige Leistung $P_{i,mess}$ des Antriebsmoduls.

Die Strommessungen wurden mit dem in Bild 6.6 gezeigten Versuchsstand durchgeführt, bei dem durch ein variabel schnelles Anheben oder Absenken verschieden großer Massen mittels Auf- oder Abwickeln einer gewöhnlichen Fahrradkette auf einer Kreisscheibe von der Drehgeschwindigkeit unabhängige Lastmomente $M_{M,i}$ auf das zu vermessende Antriebsmodul aufgebracht wurden. Die frei hängende, nicht aufgewickelte Kettenmasse nimmt einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das ansonsten konstante Lastmoment und damit auf den gemessenen Strom $I_i(t)$. Daher wurde stets innerhalb eines zum Referenzwinkel $\varphi_{i,0} = 0^\circ$ symmetrischen Winkelbereichs des Moduls gemessen. Für $\varphi_{i,0}$ ist der Momentenanteil der Kettenmasse mit $M_{Kette,0^\circ} = 0,93Nm$ bekannt. Die Kreisscheibe weist einen Wirkradius von $0,2m$ auf. Bei der experimentellen Kennfelderermittlung wurden nun verschiedene Massen m_S einzeln oder kombiniert angehängt, so dass für das Lastmoment $M_{M,i}$ gilt:

$$M_{M,i} = M_{Kette,0^\circ} + 0,2m g \sum_S m_S \quad (6.6)$$

Zur hinreichend genauen Approximation der gemessenen Stützstellen sind für die Kennfelder $P_i(M_{M,i}, \dot{\varphi}_i)$ Polynomansätze zu wählen, bei dem die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_i$ quadratisch und das Lastmoment $M_{M,i}$ kubisch einfließen:

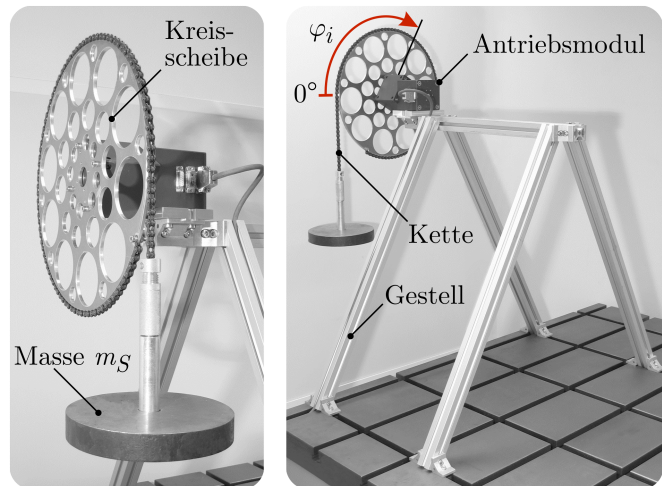


Bild 6.6: Versuchsstand zum Ausmessen der Antriebsmodule

$$\begin{aligned}
 P_i(M_{M,i}, \dot{\varphi}_i) = & \left\{ (c_1 + c_2 M_{M,i} + c_3 M_{M,i}^2 + c_4 M_{M,i}^3) + \right. \\
 & + (c_5 + c_6 M_{M,i} + c_7 M_{M,i}^2 + c_8 M_{M,i}^3) \dot{\varphi}_i + \\
 & \left. + (c_9 + c_{10} M_{M,i} + c_{11} M_{M,i}^2 + c_{12} M_{M,i}^3) \dot{\varphi}_i^2 \right\} \cdot 24 \text{ V}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Die Polynomkoeffizienten c_j wurden unter *MATLAB* mit einem Datafitting-Verfahren ermittelt, bei dem mittels einer Minimierung der Summe der kleinsten Fehlerquadrate die Kennfelder $P_i(M_{M,i}, \dot{\varphi}_i)$ an die gemessenen Leistungen, auf deren Auflistung hier aus Platzgründen verzichtet wird, approximiert wurden. Die dabei für die sechs Antriebsmodule ermittelten Koeffizienten fasst Tabelle 6.1 zusammen.

Tabelle 6.1: Polynomkoeffizienten der Kennfelder der Antriebsmodule

Koeffizienten c_j	Achse 1	Achse 2	Achse 3	Achse 4	Achse 5	Achse 6
c_1 [A]	4,869 e-1	5,027 e-1	4,929 e-1	4,835 e-1	2,495 e-1	3,531 e-1
c_2 [A/Nm]	-5,489 e-3	-2,925 e-3	-3,137 e-3	-1,245 e-2	-3,009 e-2	-7,197 e-2
c_3 [A/(Nm) ²]	3,703 e-4	3,630 e-4	3,641 e-4	1,354 e-3	1,106 e-2	1,302 e-1
c_4 [A/(Nm) ³]	-1,224 e-6	-1,605 e-6	-1,292 e-6	-2,735 e-5	-5,548 e-4	-3,868 e-3
c_5 [A(s/°)]	1,207 e-2	5,304 e-3	7,070 e-3	3,180 e-3	1,520 e-3	5,491 e-4
c_6 [A(s/°)/Nm]	-8,322 e-4	-7,624 e-4	-7,718 e-4	-9,629 e-4	-9,606 e-4	-1,326 e-3
c_7 [A(s/°)/(Nm) ²]	5,027 e-6	3,969 e-6	4,036 e-6	1,370 e-5	9,815 e-6	-7,481 e-5
c_8 [A(s/°)/(Nm) ³]	1,337 e-9	1,494 e-8	5,718 e-9	1,382 e-7	2,845 e-6	4,062 e-5
c_9 [A(s/°) ²]	5,139 e-5	1,916 e-6	7,370 e-6	1,321 e-5	6,395 e-6	1,730 e-6
c_{10} [A(s/°) ² /Nm]	1,849 e-7	2,712 e-7	2,301 e-7	-4,630 e-8	1,141 e-7	5,034 e-7
c_{11} [A(s/°) ² /(Nm) ²]	3,086 e-9	6,396 e-9	1,123 e-8	1,796 e-8	7,270 e-8	5,596 e-7
c_{12} [A(s/°) ² /(Nm) ³]	-0,163 e-9	-0,256 e-9	-0,290 e-9	-1,096 e-9	-1,155 e-8	-2,655 e-7

Die Kennfelder weisen bei $\dot{\varphi}_i = 0$ einen Sprung auf, wie Bild 6.7 für das erste 90mm-Antriebsmodul exemplarisch zeigt. Dieser ist auf den inneren Reibwiderstand der Antriebsmodule zurückzuführen, der bei der Drehbewegung stets überwunden werden muss. In der einen Drehrichtung wirkt das Lastmoment $M_{\tau,i}$ dabei unterstützend, in der anderen muss das Antriebsmodul gegen $M_{\tau,i}$ arbeiten. Die Kennfelder gemäß Gleichung (6.7) gelten somit formell nur für positive Winkelgeschwindigkeiten. Bei negativen $\dot{\varphi}_i$ gilt:

$$\dot{\varphi}_i < 0 \Rightarrow P_i(M_{M,i}, \dot{\varphi}_i) \stackrel{!}{=} P_i(-M_{M,i}, -\dot{\varphi}_i) \tag{6.8}$$

Bei entgegengesetzt wirkenden maximalen Lastmoment $M_{M,i}$ und maximaler Drehgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_i$ liegt ein maximaler Leistungsbedarf der Antriebsmodule vor. Wirkt $M_{M,i}$ hingegen in die gleiche Richtung wie $\dot{\varphi}_i$, fällt der Leistungsbedarf der Module geringer aus. Hier sind durchaus negative Werte möglich, wie das Kennfeld in Bild 6.7

exemplarisch zeigt, so dass das betroffene Modul als Generator fungiert und elektrische Leistung an die anderen Module des Roboterarms abgibt.

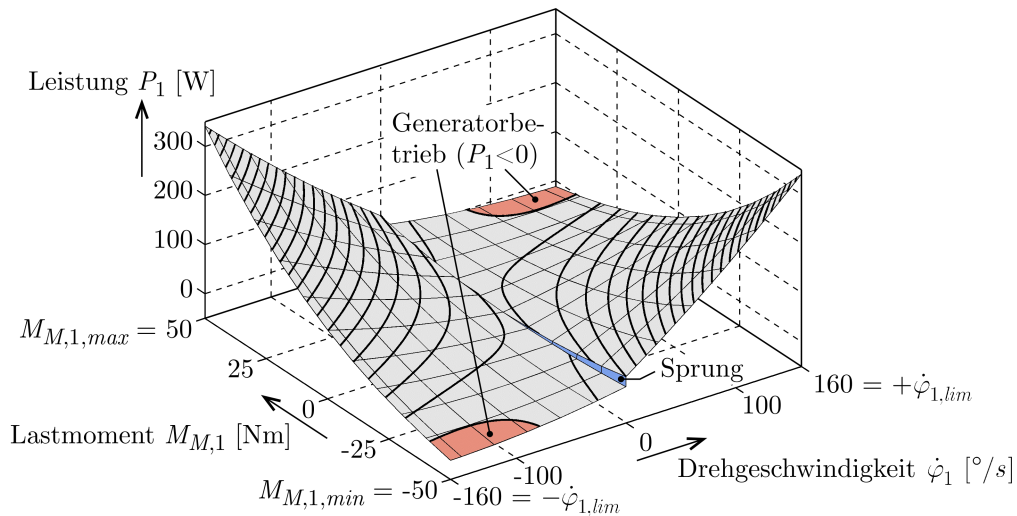


Bild 6.7: Kennfeld des ersten 90mm-Antriebsmoduls (Achse $i=1$)

6.1.3 Mechanische Kopplung der Module, Nomenklatur

Die Antriebsmodule werden mittels Montageadapter, die an die Stirn- oder eine der Seitenflächen durch Schraubverbindungen montiert werden, miteinander verbunden. Die geometrische Exaktheit und Reproduzierbarkeit der Verbindungen gewährleisten Passhülsen, siehe Bild 6.8, die die Montageschrauben umschließen und in entsprechende Passlöcher auf der Modul- und Adapterseite eingefügt werden.

Die Adapter wurden unter der Vorgabe einer kompakten Bauweise bei geringem Gewicht als Eigenentwicklung konstruiert und aus hochfestem Aluminium gefertigt. Die Strukturfestigkeit der Adapter wurde unter der Annahme typischer Lastsituationen (z.B. Anheben des gestreckten Roboterarms mit maximaler Modulbeschleunigung) durch FEM-Analysen abgesichert. In Fortführung des rechtwinkligen Designs der Antriebsmodule wurden die Adapter mit dem Ziel einer Rechtwinkligkeit oder Parallelität zweier sukzessiver Drehachsen entworfen. Es wurden die in Bild 6.9 dargestellten Anordnungen berücksichtigt, bei denen das jeweils zweite Antriebsmodul frontal (F), seitlich (S), parallel (P) oder windschief (W) an das erste Antriebsmodul montiert

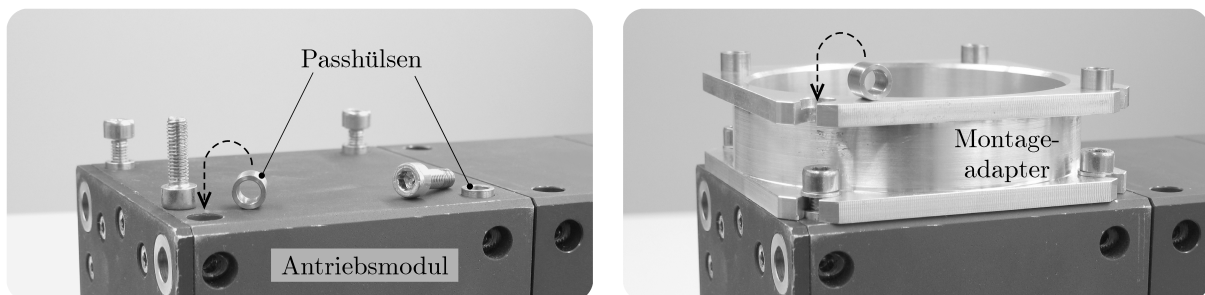


Bild 6.8: Verschraubung der Antriebsmodule mit den Montageadaptern

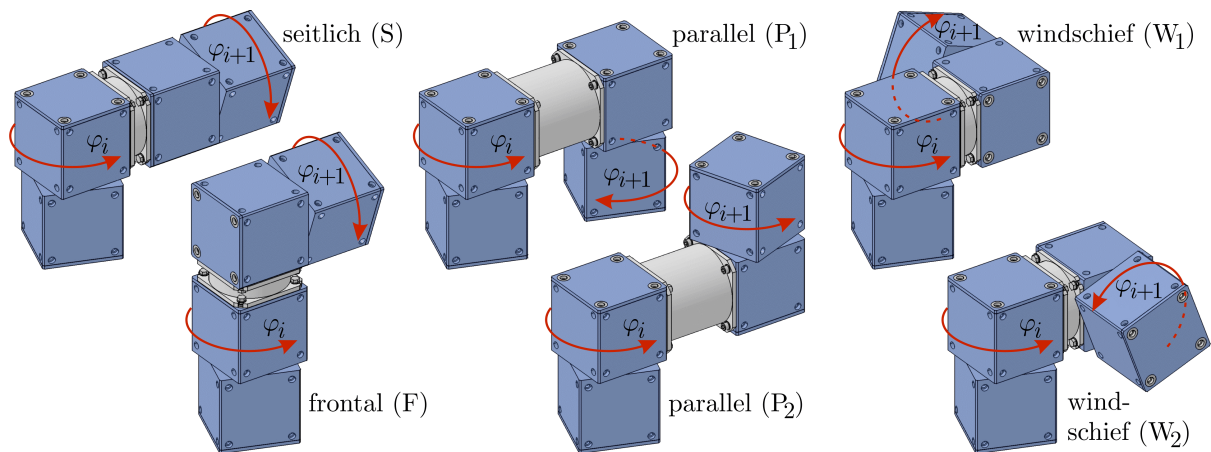


Bild 6.9: Varianten der Verbindung zweier Antriebsmodule

wird. Bei den Anordnungen P und W sind je zwei Varianten zu unterscheiden, die durch die numerische Indizierung P_1 und P_2 bzw. W_1 und W_2 gekennzeichnet werden. Die Buchstaben-Kürzel werden zur Nomenklatur der Achsfolgen genutzt. Da innerhalb des Handgelenkmoduls die seitliche Anordnung (S) der Achse 6 zur Achse 5 unveränderlich feststeht, sind vierbuchstellige Kürzel ausreichend, um die Anordnung der Achsen 2 bis 5 relativ zu den Achsen 1 bis 4 und damit die unterschiedlichen Arminematiken zu beschreiben. Wie schon in Abschnitt 5.8 dargestellt, wurden die Achsfolgen FP_1W_2F , $FSFS$ sowie $W_1P_1P_2W_2$ für diese Arbeit ausgewählt, vgl. Bild 5.15. Gemäß den Ausführungen ebendort müssen die Achsfolgen die Sequenzen FS oder PP enthalten, damit ein gemeinsamer Schnittpunkt dreier sukzessiver Achsen vorliegt und somit die inverse Kinematik analytisch lösbar ist. (Man beachte: Sämtliche Achsfolgen werden durch die S-Verbindung der im Handgelenkmodul kombinierten Achsen 5 und 6 ergänzt, so dass am Ende der Achsfolge FP_1W_2F die Sequenz FS vorliegt). Die Geometrie- und Massenparameter der bei den drei ausgewählten Achsfolgen benutzten Zwischenadapter sind detailliert im Anhang B.1 beschrieben.

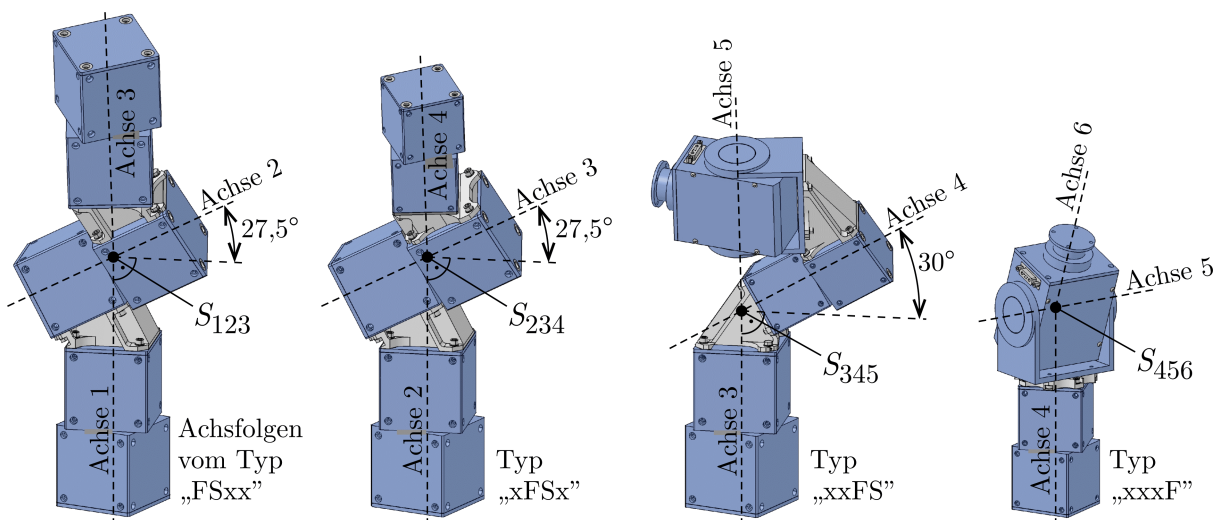


Bild 6.10: Varianten der Achsfolgensequenz FS mit teilweise nichtorthogonalen Drehachsen

Damit sich bei der Sequenz FS die drei beteiligten Achsen in einem Punkt schneiden, wurden konstruktive Sonderlösungen gewählt und spezielle Montageadapter konstruiert, siehe Bild 6.10. Sie lösen sich von den obigen Designvorgaben in der nichtorthogonalen Anordnung der Drehachsen zueinander. Auf diese Weise werden Kollisionen zwischen dem ersten und dritten der drei an der Sequenz FS beteiligten Antriebsmodule und damit Bewegungseinschränkungen des mittleren Antriebsmoduls vermieden.

6.1.4 Modellbildung der Roboterglieder

Es ist zu unterscheiden zwischen dem i -ten Glied des Roboterarms und dem i -ten Antriebsmodul. Die Masse m_i des i -ten Glieds addiert sich aus den der zweiten Hälfte des i -ten Antriebsmoduls sowie der ersten Hälfte des nachfolgenden k -ten Antriebsmoduls zugeordneten Massen $m_{M_2,i}$ und $m_{M_1,k}$, aus den Massen $m_{K_2,i}$ und $m_{K_1,k}$ der ggf. an diesen Hälften angeschlossenen und als Punktmassen erfassten Verbindungskabel sowie der Masse $m_{A,i}$ des die Antriebsmodule verbindenden Montageadapters.

$$m_i = m_{M_2,i} + m_{M_1,k} + m_{K_2,i} + m_{K_1,k} + m_{A,i} \quad , \quad k = i+1 \quad (6.9)$$

Gemäß Bild 6.11 zeigt der Vektor $\mathbf{r}_{QQ,i}$ vom Kopplungspunkt Q_i zum nachfolgenden Kopplungspunkt Q_k . Für die Vektoren $\mathbf{r}_{QS,i}$ vom Kopplungspunkt Q_i zum Gesamtschwerpunkt S_i des i -ten Glieds des Roboterarms bzw. $\mathbf{r}_{SQ,i}$ von S_i zum Kopplungspunkt Q_k , vgl. Abschnitt 2.2.1, gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{QS,i} = & \left(\mathbf{r}_{QM,i} m_{M_2,i} + (\mathbf{r}_{QQ,i} + \mathbf{r}_{QM,k}) m_{M_1,k} + \mathbf{r}_{QA,i} m_{A,i} + \mathbf{r}_{QK_2,i} m_{K_2,i} + \right. \\ & \left. + (\mathbf{r}_{QQ,i} + \mathbf{r}_{QK_1,k}) m_{K_1,k} \right) / m_i \quad , \quad \mathbf{r}_{SQ,i} = \mathbf{r}_{QQ,i} - \mathbf{r}_{QS,i} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Der im körperfesten Koordinatensystem i formulierte und auf den Gesamtschwerpunkt S_i bezogene Massenträgheitstensor ${}^i\Theta_i$ des i -ten Glieds summiert

- die auf die jeweiligen Schwerpunkte S_i bzw. S_k bezogenen Massenträgheitstensoren ${}^i\Theta_{M_2,i}$ und ${}^i\Theta_{M_1,k}$ der beiden beteiligten Antriebsmodulhälften,
- der auf den Schwerpunkt $S_{A,i}$ bezogene Massenträgheitstensor ${}^i\Theta_{A,i}$ des Montageadapters sowie
- die Steiner-Anteile \mathbf{S} aller Teilmassen aus Gleichung (6.9).

$$\begin{aligned} {}^i\Theta_i = & {}^i\Theta_{M_2,i} + {}^i\Theta_{M_1,k} + {}^i\Theta_{A,i} + \mathbf{S} \left({}^i\mathbf{r}_{QA,i} - {}^i\mathbf{r}_{QS,i} \right) m_{A,i} + \dots \\ & \dots + \mathbf{S} \left({}^i\mathbf{r}_{QM,i} - {}^i\mathbf{r}_{QS,i} \right) m_{M_2,i} + \mathbf{S} \left({}^i\mathbf{r}_{QQ,i} + {}^i\mathbf{r}_{QM,k} - {}^i\mathbf{r}_{QS,i} \right) m_{M_1,k} + \dots \\ & \dots + \mathbf{S} \left({}^i\mathbf{r}_{QK_2,i} - {}^i\mathbf{r}_{QS,i} \right) m_{K_2,i} + \mathbf{S} \left({}^i\mathbf{r}_{QQ,i} + {}^i\mathbf{r}_{QK_1,k} - {}^i\mathbf{r}_{QS,i} \right) m_{K_1,k} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Für die Steiner-Matrizen gilt dabei:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} x^2 & -xy & -xz \\ -xy & y^2 & -yz \\ -xz & -yz & z^2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

Im Anhang B.2 sind für die drei realisierten Achsfolgen die Werte der jeweiligen Geometrie- und Massengrößen aufgelistet.

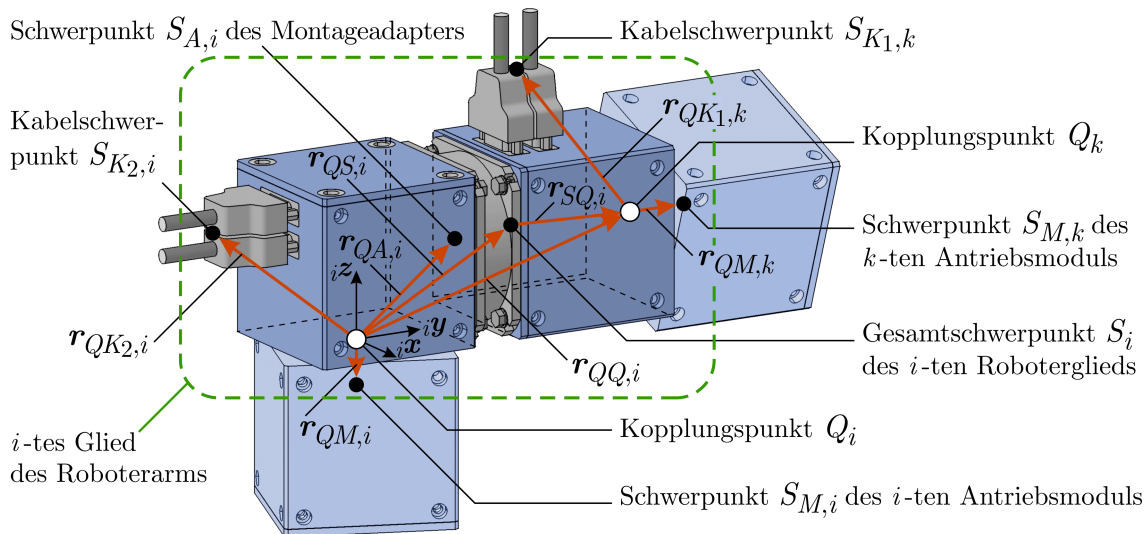


Bild 6.11: Vektoren und Teilmassen am i -ten Glied des Roboterarms

6.2 Aufbau des Versuchsstands

6.2.1 Aufbau und Parameter der Basis

Die Basis bildet den unteren, tragenden Teil des Versuchsroboters und besteht hauptsächlich aus mit Winkelementen verbundenen Standard-Aluminiumprofilen. Sie stellt die einseitigen Bindungen und ggf. lokalen Verspannungen zur festen Umgebung her und umfasst alle Bauteile des Versuchsroboters, die unterhalb des Kopplungspunkts Q_1 zum ersten Glied des auf ihr montierten Roboterarms liegen. Die erste Hälfte des ersten 90mm-Antriebsmoduls, welches mittels eines Adapters mit einem Kraft-Momenten-Sensor (KMS) verbunden ist, gehört ebenfalls zur Basis. Bild 6.12 zeigt die Komponenten der Basis sowie ihre geometrischen Kenngrößen.

An der Unterseite der Basis sind drei Stahlstege angebracht, die beim vollständigen Versuchsaufbau in die im nachfolgenden Abschnitt näher dargestellten Bindungsträger ragen. In die Stege sind von unten 16mm-Wälzlagerkugeln eingepresst, die den Kontakt zur Umgebung herstellen und wegen ihrer definierten Geometrie eine gute Reproduzierbarkeit der kontaktmechanischen Verhältnisse an den Kontaktpunkten sichern.

Ein Loskippen bzw. -gleiten des Versuchsroboter ist durchaus im Sinne dieser Arbeit, ein vollständiges Umkippen ist jedoch zur Schonung des Materials zu vermeiden. Daher ermöglichen die an den Stegobenseiten angebrachten Kontaktringe eine definierte maximale Auslenkung der Kontaktpunkte von 2mm in normaler sowie tangentialer Richtung bis zum Anschlag am geometrisch korrespondierenden Gegenstück der Bindungsträger. Die Stegseiten sind zum Zwecke der tangentialen Bewegungsdetektion durch Lasersensoren (siehe Abschnitt 6.2.2) mattweiß lackiert.

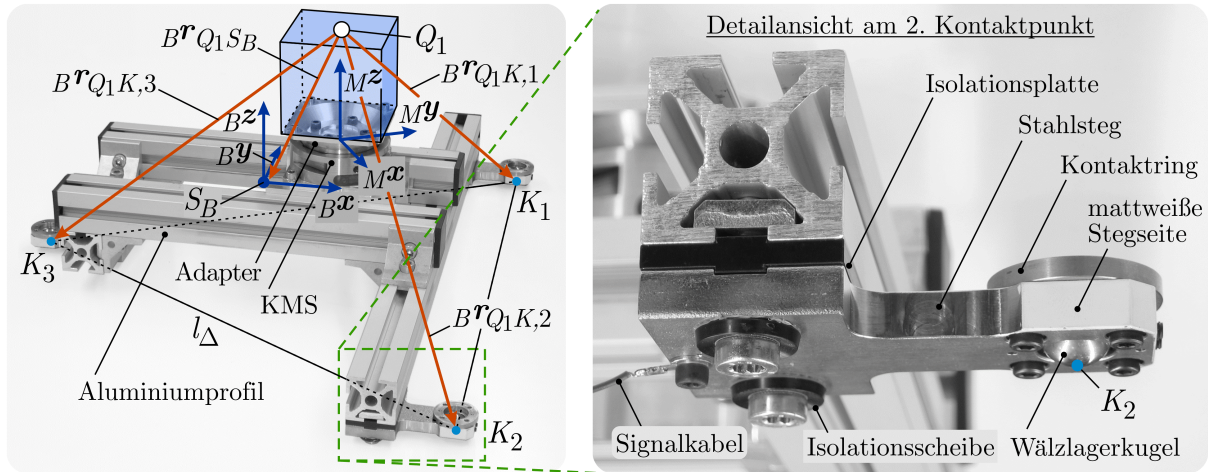


Bild 6.12: Komponenten und geometrische Kenngrößen der Roboterbasis

Die Verschraubung der Stege an den Aluminiumprofilen der Basis ist mittels Kunststoffplatten und -scheiben elektrisch isoliert ausgeführt, so dass der Kontaktzustand in Normalenrichtung an jedem Bindungspunkt einzeln elektrisch erfasst werden kann. Eine Separation einer Bindung in Normalenrichtung zieht eine einfach zu detektierende Öffnung des entsprechenden elektrischen Kontakts zur festen Umgebung nach sich.

Zur Evaluierung des dynamischen Modells des Roboterarms wird der KMS mit dem Messkoordinatensystem M eingesetzt. Der Zusammenhang zwischen den auf ihn wirkenden Kräften und Momenten ${}^M \mathbf{F}_{KMS}$ bzw. ${}^M \mathbf{M}_{KMS}$ und den am Kopplungspunkt Q_1 vom Arm auf die Basis eingprägten Kräften und Momenten $\mathbf{F}_{Q,1}$ bzw. $\mathbf{M}_{Q,1}$ lautet unter Berücksichtigung der Adaptermasse $m_A = 164 \text{ g}$:

$$\begin{aligned} {}^M \mathbf{F}_{KMS} &= \mathbf{A}_{M,B} \left({}^B \mathbf{F}_{Q,1} + B^z (m_A + m_{M_{1,1}}) g \right) \\ {}^M \mathbf{M}_{KMS} &= \mathbf{A}_{M,B} \left({}^B \mathbf{M}_{Q,1} + B^z \tilde{z} {}^B \mathbf{F}_{Q,1} 108,2 \text{ mm} \right) \end{aligned}, \quad \mathbf{A}_{M,B} = \begin{bmatrix} c 60^\circ & s 60^\circ & 0 \\ -s 60^\circ & c 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Die drei Kontaktpunkte der Basis bilden ein gleichseitiges Aufstandsdreieck mit der Kantenlänge l_Δ . Sie liegen infolge der horizontalen Kontaktebene auf gleicher Höhe sowie konzentrisch zur vertikalen ersten Drehachse des Roboterarms. Für die Normalen- und Tangentialvektoren an den Kontaktpunkten gemäß Gleichung (2.27) gilt ${}^B \mathbf{t}_{1,k} = (1 \ 0 \ 0)^T$, ${}^B \mathbf{t}_{2,k} = (0 \ 1 \ 0)^T$ sowie ${}^B \mathbf{n}_k = (0 \ 0 \ 1)^T$.

Die Kantenlänge l_Δ des Aufstandsdreiecks ist bis $l_{\Delta, \max} = 500 \text{ mm}$ über die Verschraubung der Aluminiumprofile frei einstellbar. Für die Ortsvektoren $\mathbf{r}_{Q_1 K, k}$ vom ersten Kopplungspunkt Q_1 zum k -ten der $p_B = 3$ Kontaktpunkte K_k gilt bzgl. des körperfesten Basissystems B , vgl. Kapitel 2.3:

$${}^B \mathbf{r}_{Q_1 K, 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} l_\Delta \\ \frac{1}{2} l_\Delta \\ -246 \text{ mm} \end{pmatrix}, \quad {}^B \mathbf{r}_{Q_1 K, 2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} l_\Delta \\ -\frac{1}{2} l_\Delta \\ -246 \text{ mm} \end{pmatrix}, \quad {}^B \mathbf{r}_{Q_1 K, 3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} l_\Delta \\ 0 \\ -246 \text{ mm} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Das Basis- und das Inertialkoordinatensystem sind zu Beginn der Betrachtung kongruent, $\mathbf{A}_{I,B_0} = \mathbf{E}_3$, der Basisschwerpunkt S_B befindet sich im Ursprung des Inertialsystems, ${}^I\mathbf{r}_{B_0} = \mathbf{0}$, vgl. Gleichung (2.46) und Bild 2.5.

Die Masse der Basis beträgt $m_B = 6582\text{g}$. Die relative Lage des Basisschwerpunkts S_B bzgl. des Kopplungspunkts Q_1 hängt von l_Δ ab und wird beschrieben durch:

$${}^B\mathbf{r}_{Q_1B} = \begin{pmatrix} 36\text{ mm} - 0,126l_\Delta & 0\text{ mm} & -100\text{ mm} \end{pmatrix}^T \quad (6.15)$$

Für den Ortsvektor vom Basisschwerpunkt S_B zum k -ten Kontaktpunkt K_k gemäß Gleichung (2.57) folgt ${}^B\mathbf{r}_{BK,k} = -{}^B\mathbf{r}_{Q_1B} + {}^B\mathbf{r}_{Q_1K,k}$. Gemäß den Ausführungen zur Zweiteilung des Systems in Arm und Basis im Abschnitt 2.2.1 ist eine Kenntnis des Massenträgheitstensors ${}^B\Theta_B$ der Basis nicht notwendig. Er wäre nur beim Auftreten einer beschleunigten Bewegung der Basis relevant, was jedoch einen Bindungswechsel der Basis bedeutet und somit außerhalb des Fokus dieser Arbeit liegt. Es kann daher vereinfachend ${}^B\Theta_B = \mathbf{E}_3$ gesetzt werden.

6.2.2 Aufbau der Bindungsträger

Einseitige Bindungen

Die Bindungsträger sind Teil der starren Umgebung. Sie enthalten die Kontaktpunkte der Umgebung mit den in den drei Stegen der Basis eingepressten Wälzlagerkugeln, vgl. Bild 6.12, und liegen somit dreifach vor. Die Montage erfolgt an auf einem Mess-tisch befestigten Standard-Aluminiumprofilen. Mittels an der Unterseite angebrachter Passführungen wird eine präzise Verschieblichkeit erreicht, die eine Feinjustage ihrer Position bezüglich der Geometrie der Roboterbasis ermöglichen, vgl. Bild 6.13a).

Der Hauptkorpus der Bindungsträger weist eine 90° -Rotationsymmetrie auf, was die Variabilität und Flexibilität beim Aufbau des Versuchstands steigert, und besteht aus Kunststoff POM-C. So wird eine elektrische Isolation der Kontaktplatten erreicht, die für die Detektion eines Bindungswechsels in Normalenrichtung über den elektrischen Kontakt zwischen der Kontaktplatte und dem Steg der Basis benötigt wird. Die gemäß Bild 6.13b) in den Korpus eingepassten runden Kontaktplatten aus nichtrostendem CrNi-Stahl werden von unten durch Schrauben fixiert, welche zudem zur Befestigung der Signalleitung dienen. Die Oberflächen der Kontaktplatten wurden zur Reduktion des Haftreibungskoeffizienten sowie zur Reproduzierbarkeit der Versuche poliert.

Mittels Aluminium-Montageträger werden laseroptische Triangulationssensoren zur Detektion eines Bindungswechsels in Tangentialrichtung an den Hauptkorpus befestigt und auf die mattweißen Stegseiten ausgerichtet, vgl. Bild 6.13c).

Den oberen Abschluss der Bindungsträger bilden angeflanschte Aluminiumdeckel, siehe Bild 6.13d). Ihre innere Formgebung korrespondiert mit den auf der Oberseite der Stege der Basis befestigten Kontaktringen, so dass sie als Endanschlüsse für die Bewegungen der Basis fungieren (Auslenkungsbeschränkung auf je 2mm, vgl. Abschnitt 6.2.1). Ein zentrisches Guckloch im Deckel vereinfacht die manuelle Rückzentrierung der Kontaktpunkte nach erfolgter Auslenkung der Basis.

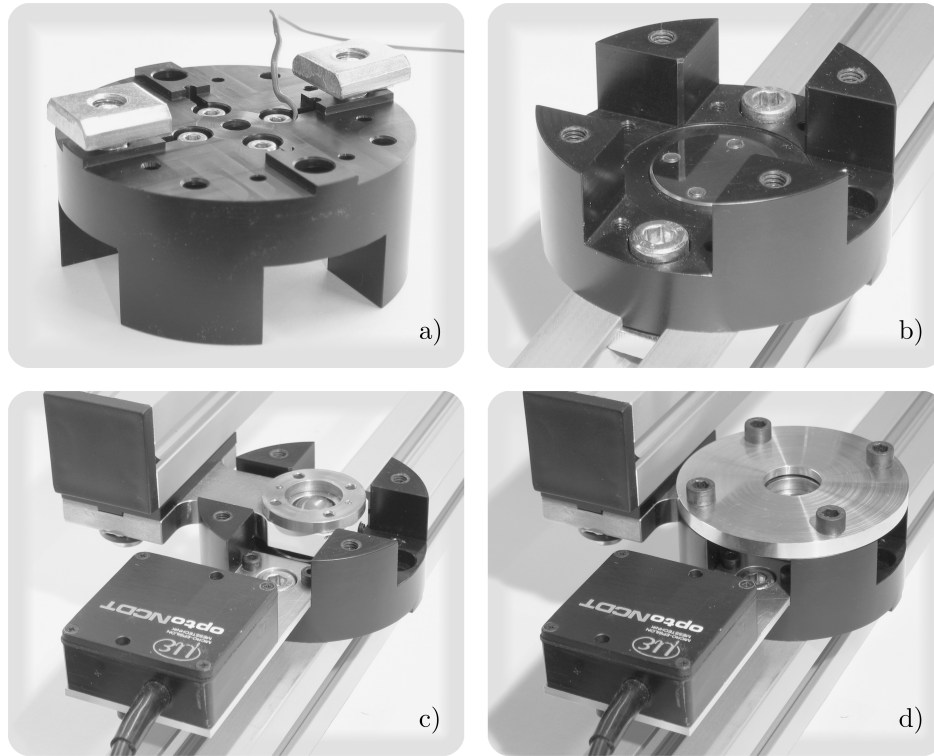


Bild 6.13: Aufbau der Bindungsträger

Während sich ein Bindungswechsel in Normalenrichtung durch das Öffnen des elektrischen Kontakts sofort detektieren lässt, kann ein Bindungswechsel in Tangentialrichtung infolge des Signalrauschens der Lasersensoren erst nach Überschreiten eines entsprechenden Schwellenwertes festgestellt werden, was im Rahmen dieser Arbeit jedoch eine vernachlässigbare Rolle spielt. Es reichen drei sinnvoll (d.h. mit möglichst großem Abstand zwischen den Schnittpunkten der Messachsen) auf die drei Bindungsträger verteilte Lasersensoren aus, um jegliche tangentiale Bewegung der Basis zu erfassen.

Der dem Kontaktpunkt K_3 zugehörige Bindungsträger erhält zwei in Ix - bzw. Iy -Richtung ausgerichtete Sensoren (\rightarrow Messwerte Δx_3 und Δy_3), vgl. Bild 6.14. Der dritte Sensor wird, in Iy -Richtung ausgerichtet, am Bindungsträger des Kontaktpunkts K_2 montiert (\rightarrow Messwert Δy_2). Für die Verschiebungen Δx_M und Δy_M des in der Verlängerung der ersten Drehachse des Roboterarms liegenden Mittelpunktes M zwischen den drei Kontaktpunkten der Basis sowie für deren Verdrehwinkel α_M folgt aus dem Starrkörperansatz sowie den Gleichung (6.14) und (C.3):

$$\alpha_M = 2 \arctan \left(\frac{\kappa_1 \pm \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}}{\kappa_2 + 1} \right), \quad \begin{aligned} \kappa_1 &= \sqrt{3} l_\Delta / (2(\Delta y_2 - \Delta y_3) - l_\Delta) \\ \kappa_2 &= -l_\Delta / (2(\Delta y_2 - \Delta y_3) - l_\Delta) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\Rightarrow \Delta x_M = \Delta x_3 + (\cos \alpha_M - 1) l_\Delta / \sqrt{3}, \quad \Delta y_M = \Delta y_3 + \sin \alpha_M l_\Delta / \sqrt{3}$$

Für α_M gilt die betragsmäßig kleinere der beiden Lösungen. Die restlichen tangentialen Verschiebungen der Kontaktpunkte K_1 und K_2 lauten damit:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_M \\ \Delta y_M \\ \Delta x_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha_M - 1 \\ \sin \alpha_M \\ \cos \alpha_M - 1 \end{pmatrix} \frac{l_\Delta}{2\sqrt{3}} + \begin{pmatrix} -\sin \alpha_M \\ \cos \alpha_M - 1 \\ \sin \alpha_M \end{pmatrix} \frac{l_\Delta}{2} \quad (6.17)$$

Wie Voruntersuchungen zeigten, dominiert bei reiner Trockenreibung zwischen der Kontaktplatte und der Wälzlagerkugel das Risiko eines Umklippens gegenüber dem eines Weggleitens. Daher wird der Haftreibungskoeffizient μ_0 durch Einölen der Kontaktfläche abgesenkt und so das Risiko eines Weggleitens des Roboters gezielt erhöht. Mittels einer Kraftmessfeder wird $\mu_0 = 0,2$ identifiziert. Ein allgemeiner Literaturüberblick zu experimentell ermittelten Reibcharakteristika der Materialpaarung Stahl/Stahl ist in den Arbeiten [101] [113] zu finden.

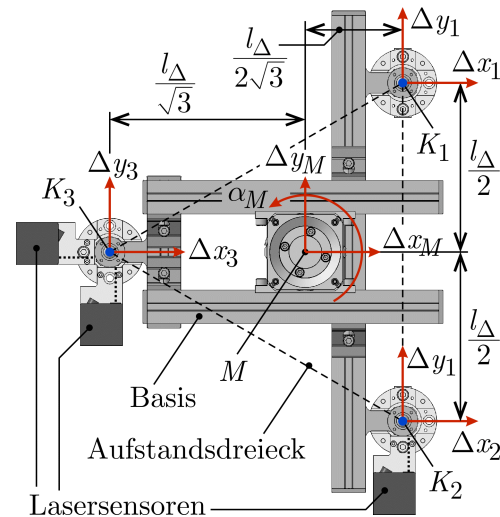


Bild 6.14: Geometrie der Roboterbasis, Ausrichtung der tangentialen Lasersensoren

Kraftkonstante halbstarre lokale Verspannung

Der in Bild 6.15 dargestellte Spannmechanismus realisiert eine kraftkonstante lokale Verspannung mit einseitiger Anpressung. Er wird entsprechend der Definition der untersuchten Szenarien zur Bahnoptimierung in Abschnitt 6.8 an den dem Kontaktpunkt K_3 zugeordneten Bindungsträger alternativ zum zuvor beschriebenen einfachen Deckel angeschraubt, vgl. Bild 6.13d). Bei dieser konstruktiven Lösung verlagert sich entgegen Bild 3.22a) die Verspannungsmechanik auf die Seite der festen Umgebung. Der zulässige Kraftbereich gemäß Bild 3.22b) und damit die in Abschnitt 3.2.4 dargestellte Modellierung des Bindungsverhaltens gelten jedoch unverändert. Die konstante Anpresskraft F^* wird durch die Schwerkraft der bereits bei der Ermittlung der Motorkennfelder gemäß Abschnitt 6.1.2 genutzten Massen erzeugt, vgl. Bild 6.6, die über die Zentrierstange des mittels zweier Linearführungen vertikal beweglichen Massenträgers aufgelegt werden, siehe Bild 6.16. Bei Überschreiten der durch F^* definierten Kraftgrenze in Normalenrichtung hebt die Basis den Massenträger mitsamt den Zusatzmassen an, so dass ein Bindungswechsel zwischen der eingepressten Wälzlagerkugel und der darunter angebrachten Kontaktplatte auftritt. Die Vorspannung der Linearführungen und damit die Leichtgängigkeit des Massenträgers sind mittels Justierschrauben über Klemmschlitze im Aluminiumgehäuse des Mechanismus einstellbar.

Der Kontaktpunkt zwischen der Wälzlagerkugel und der oberen Kontaktplatte am vertikal beweglichen Massenträger ist ebenfalls eingeölt. Die beiden Haftreibungskoeffizienten betragen $\mu_{0,u} = \mu_{0,o} = 0,2$. Der Massenträger (540 g) und die aufgelegte Zusatzmasse (2450 g) erzeugen eine Anpresskraft von $F^* = 29,33\text{N}$. Ein in das Alumi-

umgehäuse eingepresster Kontaktring fungiert im Zusammenspiel mit dem Kontaktring des Stegs in Tangentialrichtung als Endanschlag der lokalen Verspannung, der zugehörige Bewegungsspielraum beträgt 2mm. Der Bewegungsspielraum des Massenträgers bis zum Endanschlag in Normalenrichtung beträgt 1,5mm.

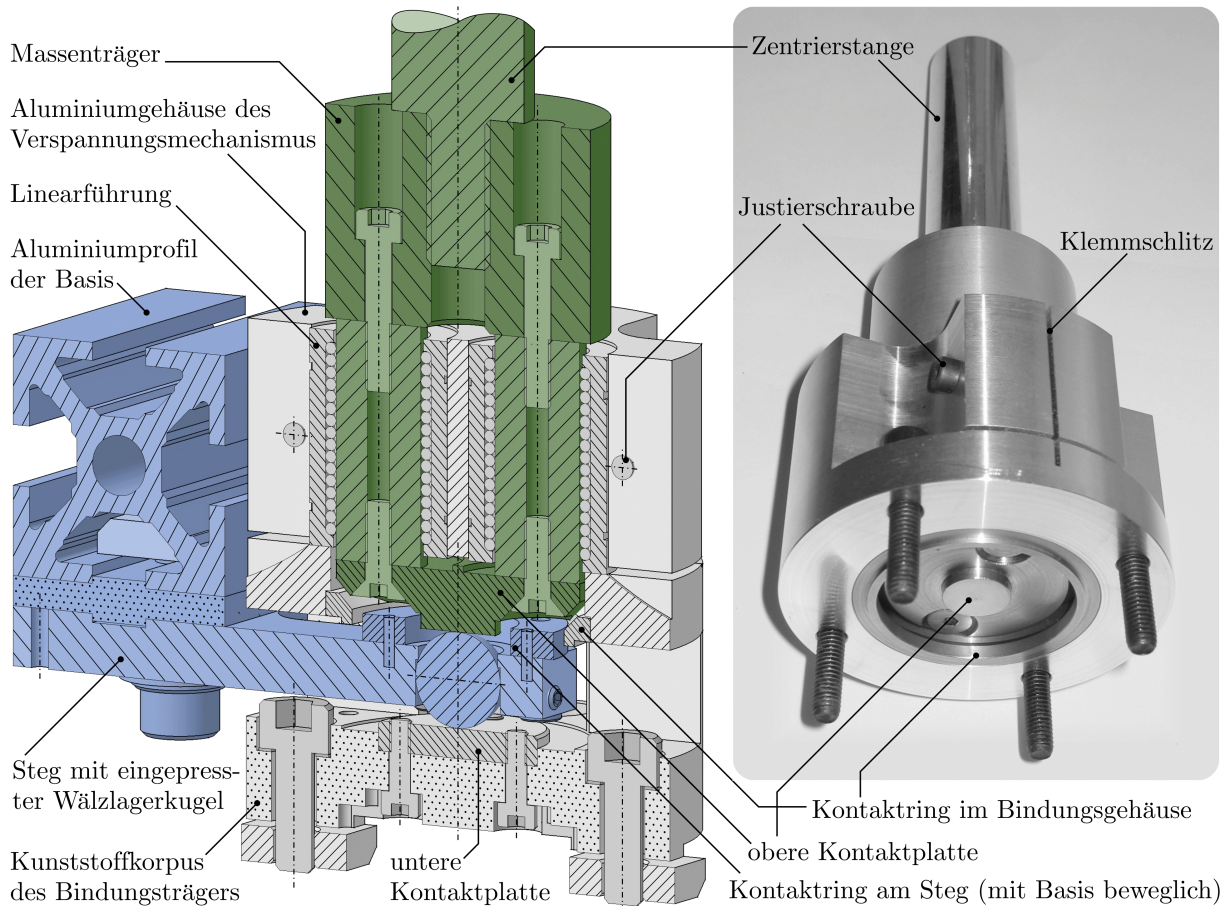


Bild 6.15: Realisierte kraftkonstante lokale Verspannung mit einseitiger Anpressung

6.2.3 Mess- und Steuerungsaufbau

Die elektronische Peripherie des Versuchsstands zeigt Bild 6.16. Die Messdatenerfassung erfolgt über eine DS1103 Karte des Herstellers *dSpace*, die zur Abschirmung in einem separaten Gehäuse eingebaut und per Glasfaser über eine Optokopplerkarte mit einem Mess- und Steuer-PC verbunden ist. Über die analogen Eingänge der DS1103 werden die von jeweiligen Auswertelogiken aufbereiteten Werte des Kraftmomentensensors (3 Kräfte und 3 Momente \rightarrow 6 Kanäle) und der drei Lasersensoren (vgl. Abschnitt 6.2.2 \rightarrow 3 Kanäle) sowie die Monitoring-Daten der 24V-Gleichstromversorgung (Ausgangsstrom und -spannung \rightarrow 2 Kanäle) eingelesen. Zur Detektion eines

Bindungswechsels in Normalenrichtung sind drei digitale Eingänge der DS 1103 mit den Kontaktplatten in den drei Bindungsträgern verbunden.

Die mit 380V-Drehstrom gespeiste 24V-Gleichstromversorgung beliefert den Versuchsroboter sowie die Auswertelogiken der Lasersensoren. Das Monitoring des Ausgangsstroms der Gleichstromversorgung dient zur Validierung des bei der Bahnoptimierung auf Basis der Kennfelder $P_i(M_{M,i}, \dot{\varphi}_i)$ der Antriebsmodule prädierten Energieumsatzes während der Bewegung des Roboters, vgl. Abschnitt 5.5.1.

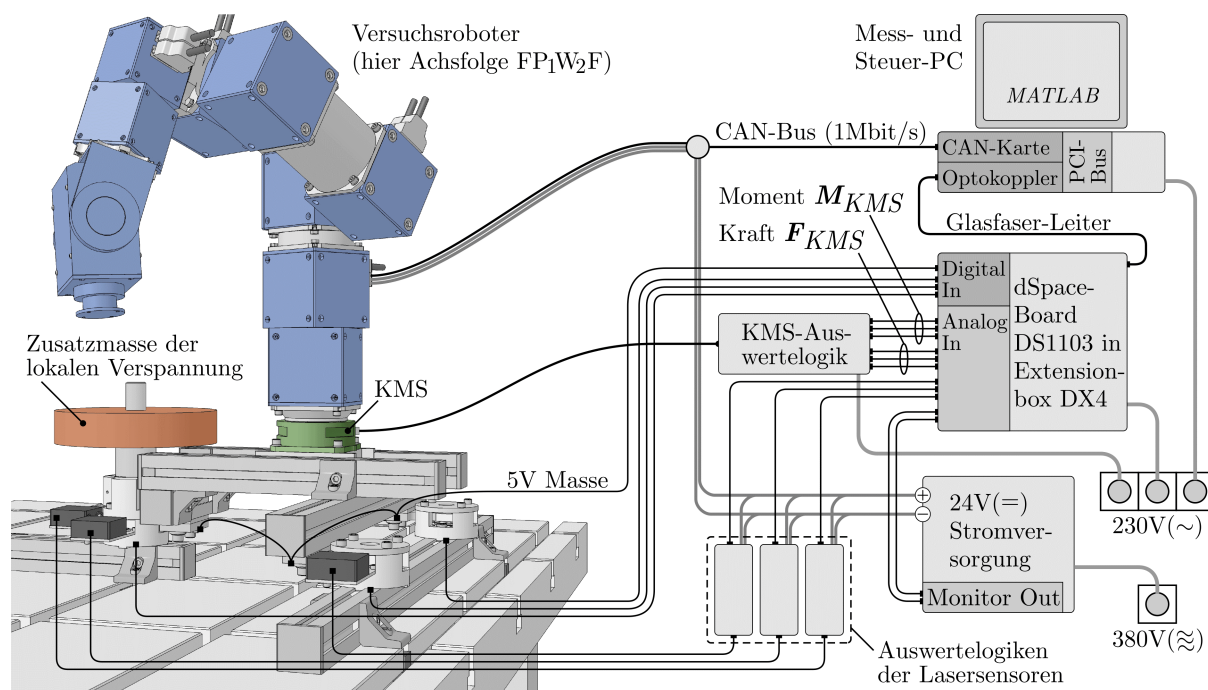


Bild 6.16: Mess- und Steuerungsaufbau beim Versuchsstand

Kapitel 7

Messergebnisse und Modellverifikation

In Kapitel 5 wurden das Bahnoptimierungsproblem für einen mobilen Roboter mit einseitigen Bindungen und ggf. zusätzlichen lokalen Verspannungen definiert sowie die entsprechenden Lösungen für die betrachteten Fälle A bis H der drei Achsfolgen mit den verschiedenen Bindungskonfigurationen dargestellt, vgl. Tabelle 5.1. Im Folgenden können nun für diese Lösungen mit dem in Kapitel 6 beschriebenen Versuchstand die prognostizierten Zeitverläufe der kinematischen, kinetischen und energetischen Größen während der Armbewegung validiert sowie das reale Bindungsverhalten zwischen der Roboterbasis und der Umgebung zur Verifikation der Bindungspersistenz beobachtet werden.

7.1 Kinematik

Es ist zu prüfen, inwieweit die bei der Bahnoptimierung festgelegten Zeitverläufe der Kinematik des Versuchsroboters bei der realen Bahnbewegung eingehalten werden. Dazu werden zunächst die Schleppfehler der Gelenkwinkel $\Delta\varphi_i(t) = \varphi_{i,mess}(t) - \varphi_{i,soll}(t)$ betrachtet. Sie beschreiben die Differenz zwischen den während der Bewegung des Roboterarms fortlaufend gemessenen Istwerten der Gelenkwinkel $\varphi_{i,mess}$ und den über die Gleichungen (5.9) und (5.19) aus dem hardwarenahen $\dot{\varphi}$ -Rampenansatz folgenden Sollwerten $\varphi_{i,soll}$. Bild 7.1 zeigt für die Referenzlösungen gemäß Abschnitt 5.9 der in Abschnitt 5.8 definierten Fälle A bis H die Zeitverläufe der Schleppfehler $\Delta\varphi_i$.

Bei der experimentellen Realisierung der Referenzlösungen sind bei den sechs Gelenkwinkeln Schleppfehler von bis zu $-1,5^\circ$ zu beobachten. Eine Abweichung bei einem greifernahen Gelenkwinkel wirkt sich hierbei jedoch wegen der geringeren Hebellängen weniger stark auf die Bahnposition des Greiferpunkts des Roboterarms aus als bei einem basisnahen Gelenkwinkel.

Zur Analyse der skalaren Bahnabweichung $\Delta r_G(t) = \left| I\mathbf{r}_G(\varphi_{mess}(t)) - I\mathbf{r}_G(\varphi_{soll}(t)) \right|$ werden die über die Vorwärtskinematik gemäß Gleichung (2.38) aus den Soll- und den gemessenen Istwerten der Gelenkwinkel folgenden Positionen des Greiferpunkts im inertialen Koordinatensystem I ausgewertet. Die Zeitverläufe $\Delta r_G(t)$ der Bahnabweichung bei der experimentellen Realisierung der Referenzlösungen der betrachteten Fälle A bis H sind in Bild 7.2 dargestellt.

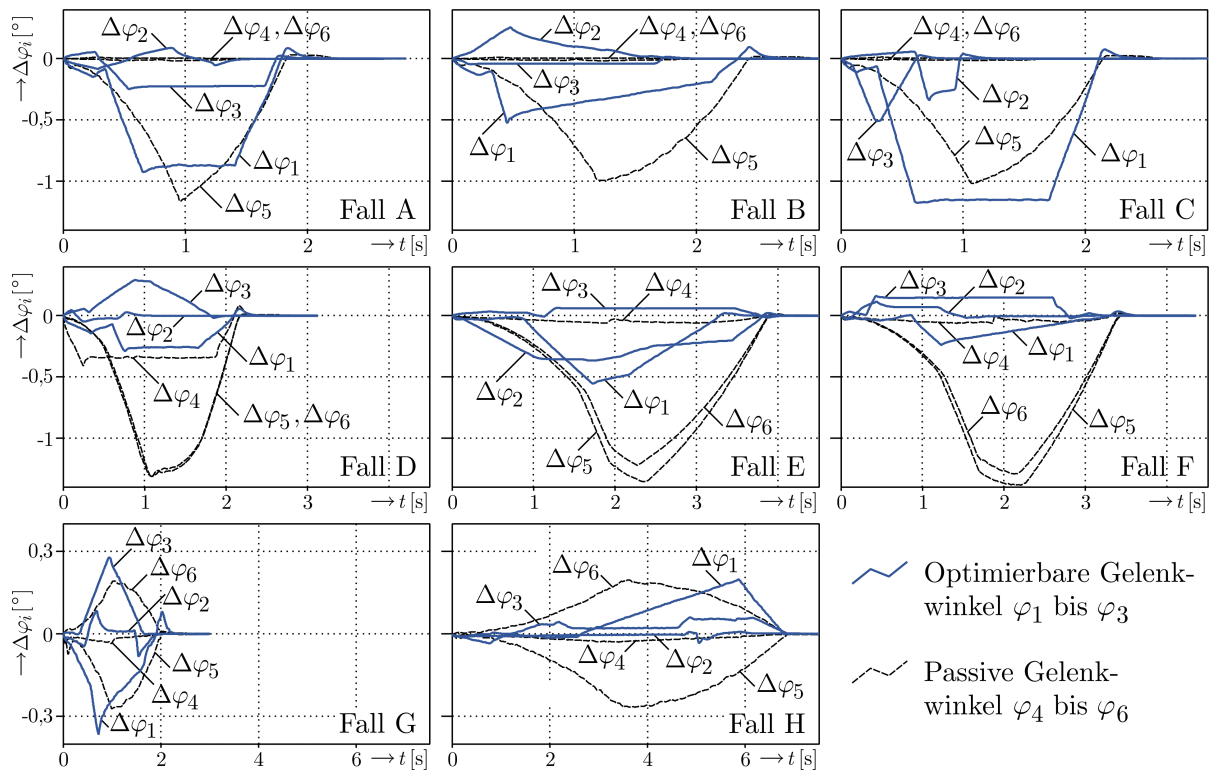


Bild 7.1: Zeitverläufe der auftretenden Schleppfehler $\Delta\varphi_i(t)$

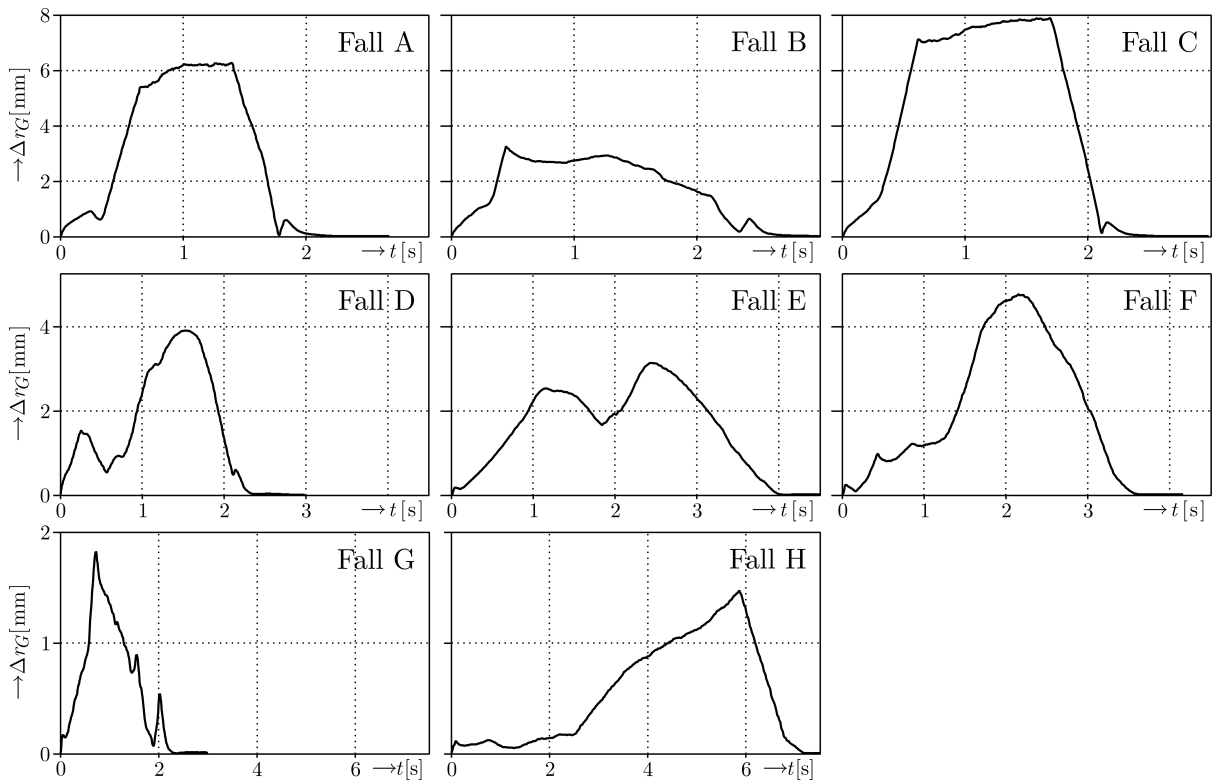


Bild 7.2: Zeitverläufe der auftretenden Bahnabweichung $\Delta r_G(t)$

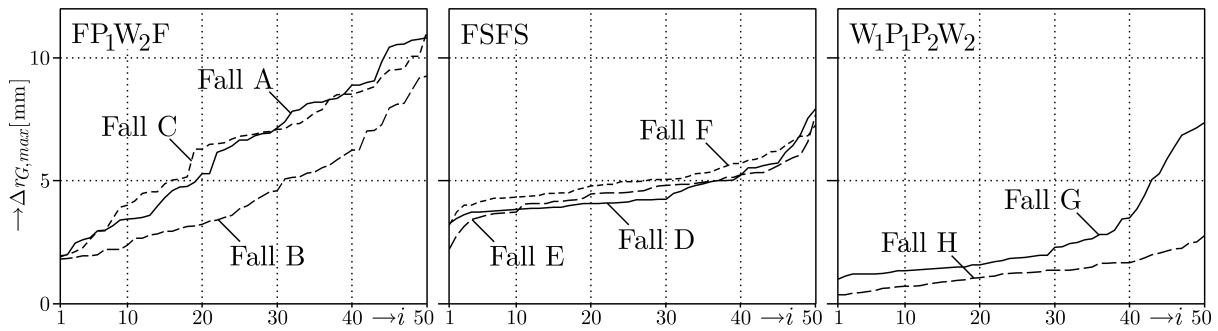


Bild 7.3: Maximal über der Zeit auftretende Bahnabweichungen $\Delta r_{G,max}$

Die skalaren Bahnabweichungen $\Delta r_{G,max} = \max_t(\Delta r_G(t))$, die bei der experimentellen Realisierung der 50 Optimierungslösungen der betrachteten Fälle A bis H über der Zeit maximal auftreten, zeigt Bild 7.3 in jeweils aufsteigender Reihenfolge. Bei der Achsfolge FP_1W_2F treten maximale Bahnabweichungen $\Delta r_{G,max}$ bis 10 mm auf. Die Abweichungen liegen bei der Achsfolge $FSFS$ in der Größenordnung von 5 mm, bei der Achsfolge $W_1P_1P_2W_2$ hingegen liegen größtenteils Bahnabweichungen von nur ca. 2 mm vor. Die Ursache für diesen Unterschied zwischen den drei Achsfolgen ist in den infolge der jeweiligen geometrischen Massenverteilung unterschiedlichen Lastmomenten begründet, die während der Bahnbewegung des Roboterarms auf die Gelenke wirken. Die beobachteten Bahnabweichungen werden für die Zwecke dieser Arbeit als akzeptabel eingestuft.

7.2 Kinetik

In Bild 7.4 sowie Bild 7.5 werden für die Referenzlösungen der Fälle A bis H die am Kraftmomentensensor während der Bahnbewegung gemessenen Kräfte $F_i \in {}_M\mathbf{F}_{KMS}$ und Momente $M_i \in {}_M\mathbf{M}_{KMS}$, siehe Abschnitt 6.2.1, mit den Sollkräften und -momenten verglichen. Letztere werden über Gleichung (6.13) mit den aus dem dynamischen Modell des Roboterarms gemäß Kapitel 2.2.2 gewonnenen Sollgrößen $\mathbf{F}_{Q,1}$ und $\mathbf{M}_{Q,1}$ am Kopplungspunkt Q_1 zwischen Roboterarm und Basis bestimmt.

Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung, die jeweiligen Kurven sind mitunter kaum unterscheidbar. Es müssen jedoch Schwingungen in den gemessenen Kraft- und Momentenverläufen konstatiert werden, die auf die real vorhandenen, im Modell jedoch vernachlässigten Elastizitäten in den Harmonic Drive Getrieben sowie in dem den Roboterarm tragenden Kraft-Momenten-Sensor zurückzuführen sind. Die experimentelle Realisierung der übrigen 49 betrachteten Lösungen des Bahnoptimierungsproblems liefert Ergebnisse auf entsprechend gutem Niveau. Das dynamische Modell des Roboterarms kann somit als plausibel bewertet werden.

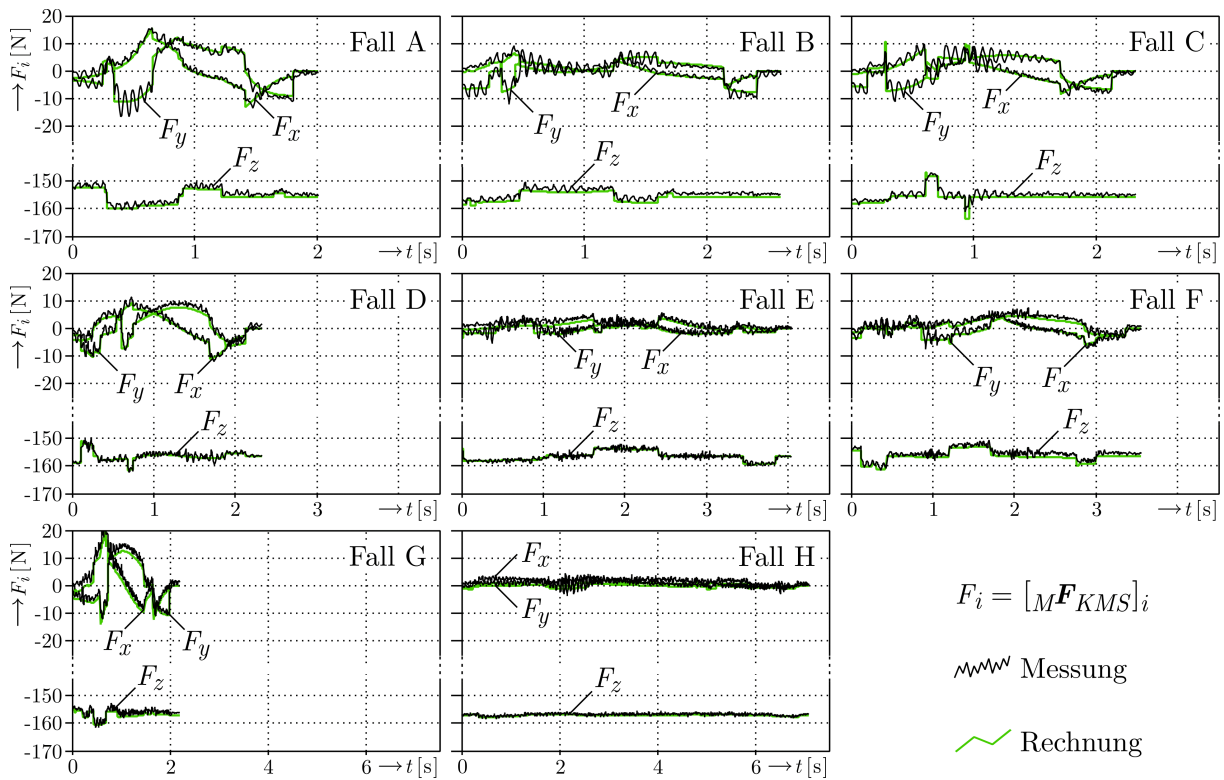


Bild 7.4: Zeitverläufe der Komponenten F_i des Kraftvektors $M^{\mathbf{F}}_{KMS}$

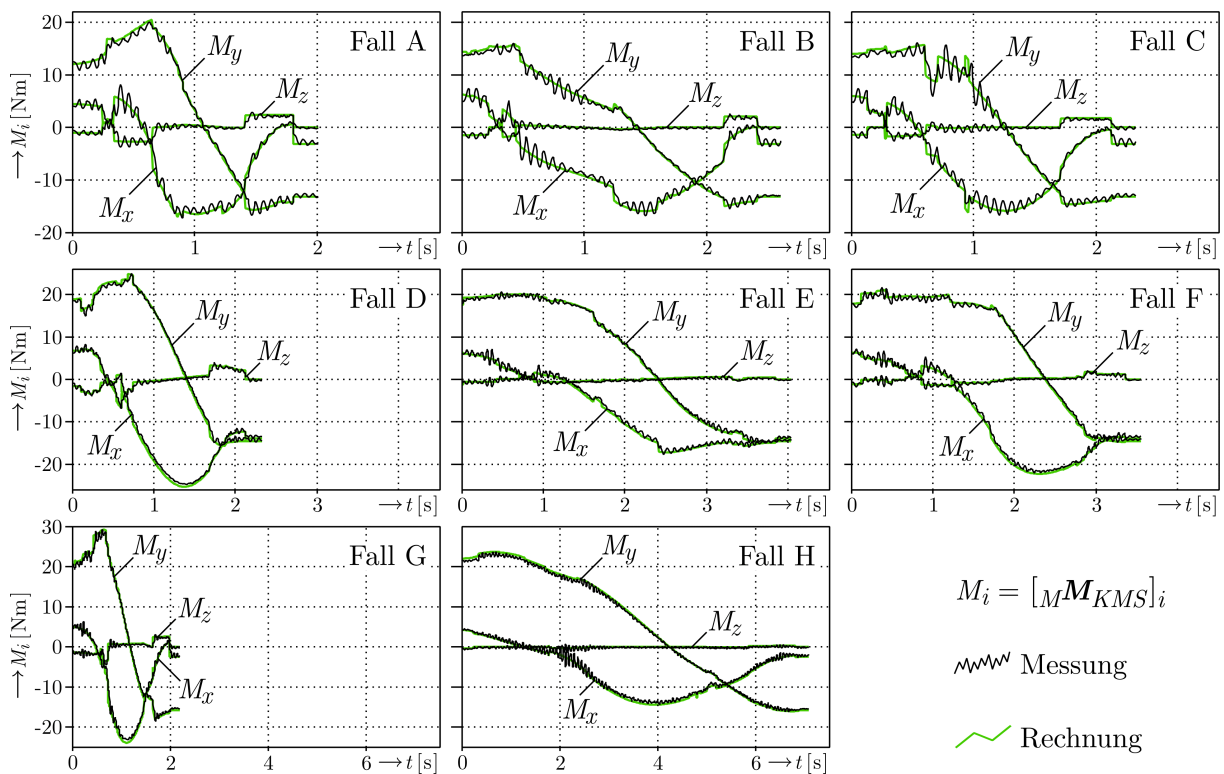


Bild 7.5: Zeitverläufe der Komponenten M_i des Momentenvektors $M^{\mathbf{M}}_{KMS}$

7.3 Energieumsatz

Über den Monitorausgang der 24V-Gleichstromversorgung wird der Betrag des während der Bahnbewegung des Roboterarms bei der experimentellen Realisierung der Referenzlösungen der betrachteten Fälle A bis H bereitgestellten elektrischen Stroms und damit die jeweilige elektrische Gesamtleistung $P_{ges}(t) = \sum_{i=1}^6 P_i(t)$ erfasst, vgl. Abschnitt 6.2.3. Die gemessenen Werte werden mit den über die Armdynamik aus den Kennfeldern $P_i(M_{M,i}, \dot{\varphi}_i)$ der einzelnen Antriebsmodule prädizierten Werten für die elektrische Leistung des Roboterarms verglichen.

Es ist sowohl bei den in Bild 7.6 näher betrachteten Referenzlösungen als auch bei den anderen jeweils 49 Lösungen des Bahnoptimierungsproblems eine gute Übereinstimmung zwischen den prädizierten und den gemessenen Zeitverläufen der elektrischen Leistung zu verzeichnen. Die im Auf-/Abwickelversuch gemäß Abschnitt 6.1.2 realisierte experimentelle Ermittlung der Kennfelder der einzelnen Antriebsmodule erweist sich somit als gut geeignet für die Prädiktion des Energieumsatzes des gesamten bewegten Roboterarms und als zweckdienlich für die Bahnoptimierung.

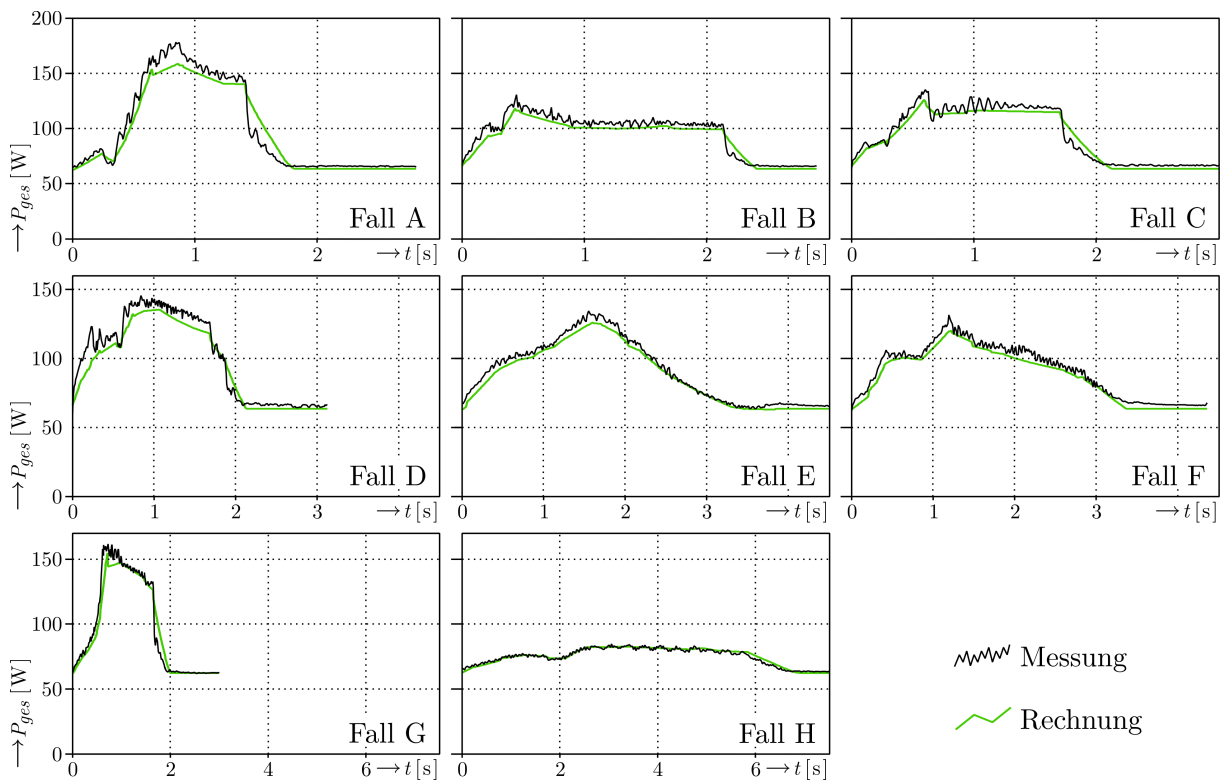


Bild 7.6: Zeitverläufe der elektrischen Gesamtleistung $P_{ges}(t)$ des Roboterarms

7.4 Bindungsverhalten

7.4.1 Normalenrichtung

Der elektrische Kontakt zwischen den in den Stegen der Roboterbasis eingepressten Wälzlagerkugeln und den in den Bindungsträgern fixierten Kontaktplatten auf Seiten der festen Umgebung, vgl. Abschnitt 6.2.2, ermöglicht eine Analyse des Bindungsverhaltens des Roboters in Normalenrichtung. Ein Öffnen der Bindungen in Normalenrichtung kann durch einen Abfall der jeweiligen Messspannung detektiert werden.

Bei der experimentellen Realisierung der Referenzlösungen der betrachteten Fälle A bis H ist kein längerfristiges Öffnen einer der einseitigen Bindungen zu beobachten, die Kippsicherheit des einseitig gebundenen Roboters ist somit gegeben. Jedoch ist mitunter für sehr kurze Zeiträume ein Öffnen eines Kontakts festzustellen, wie die Zeitverläufe der Messspannungen an den drei Bindungspunkten K_1 bis K_3 , vgl. Abschnitt 6.2.1, für den exemplarischen Fall F in Bild 7.7 zeigen. Die Ursache hierfür liegt in den von den einzelnen Antriebsmodulen erzeugten und sowohl hörbaren als auch per aufgelegte Hand spürbaren Vibrationen im Roboterarm. Diese setzen sich in die Basis des Roboters fort und können dort an den mit nur einer geringen normalen Anpressung $F_N \gtrsim 0$ behafteten Kontaktpunkten eine kurzfristige Separation der Kontaktpartner hervorrufen. Eine echte Separation an den Bindungspunkten und damit ein Kippen des einseitig gebundenen Roboters ist in diesen kurzfristigen Kontaktunterbrechungen jedoch nicht zu sehen.

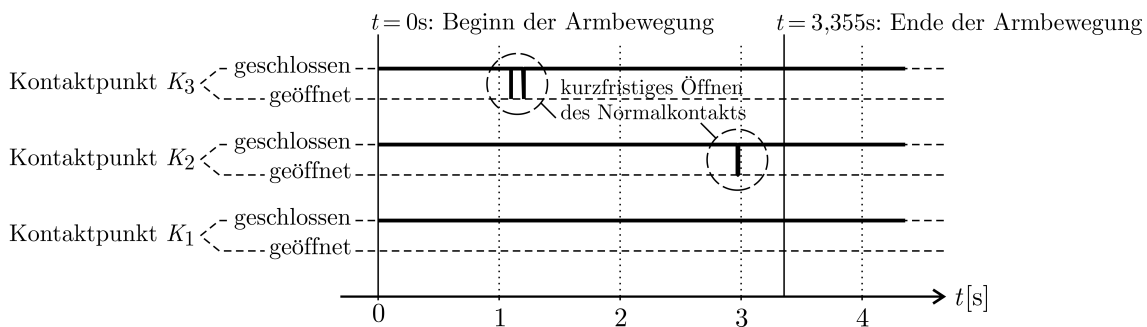


Bild 7.7: Zeitverlauf des Bindungszustand in Normalenrichtung bei der experimentellen Realisierung der Referenzlösung des Falls F (Achsfolge FSFS)

Die maximal auftretende Dauer Δt_{max} der Kontaktunterbrechungen an den drei Kontaktpunkten bei allen jeweils 50 Lösungen des Bahnoptimierungsproblems für die Fälle A bis H stellt Bild 7.8 in sortierter Reihenfolge dar. Es zeigt sich, dass bei keiner der experimentell realisierten Lösungen des Bahnoptimierungsproblems eine Kontaktunterbrechung in Normalenrichtung von mehr als 30ms Dauer auftritt, und somit auch kein Kippen des einseitig gebundenen Versuchsroboters vorliegt. Das Einhalten der Randbedingung der normalen Bindungspersistenz während der Armbewegung bei der Bahnoptimierung gemäß Abschnitt 5.6.1 konnte somit experimentell bestätigt werden.

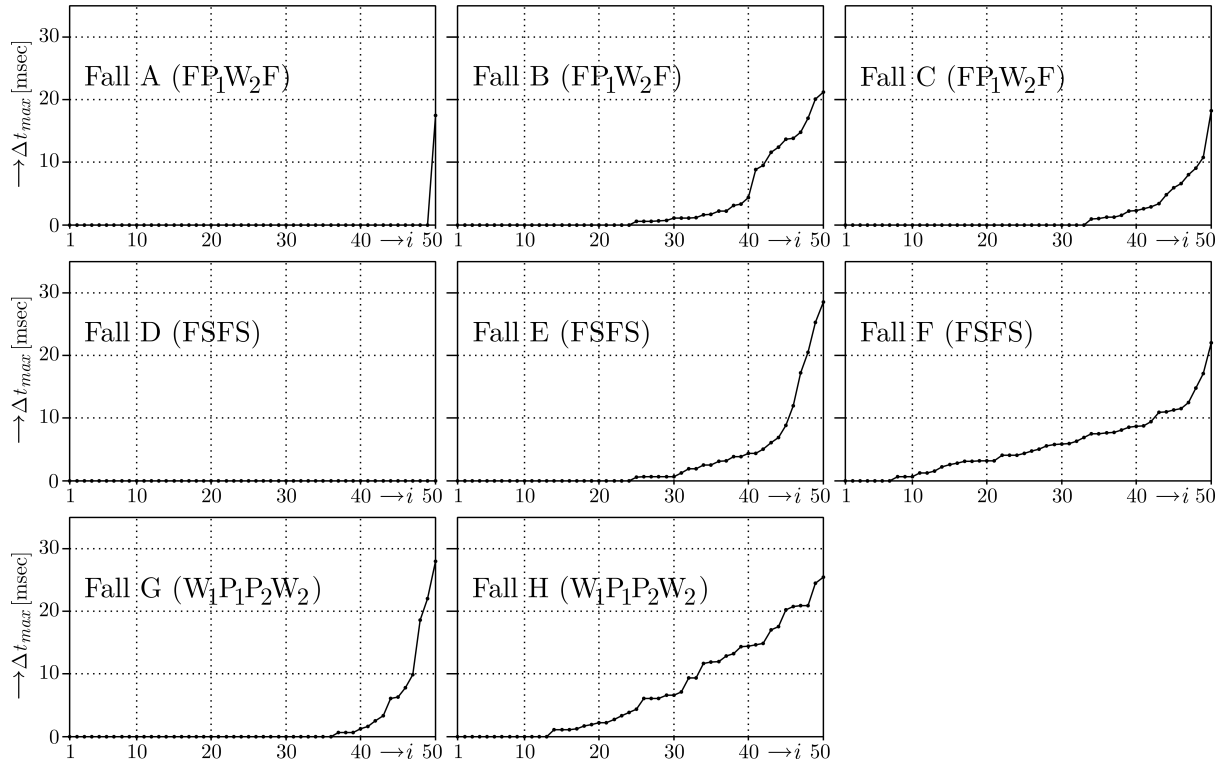


Bild 7.8: Maximal auftretende Dauer Δt_{max} der Kontaktunterbrechungen bei allen jeweils 50 Lösungen des Bahnoptimierungsproblems

Um zu prüfen, wie nah die bei der Bahnoptimierung gefundenen Lösungen an der Grenze zum Kippen oder Losgleiten des einseitig gebundenen Versuchsroboters liegen, wird ein Zeit-Skalierungsfaktor τ eingeführt, der die optimierten Soll-Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_{o,i,opt}^*$ und -beschleunigungen $\ddot{\varphi}_{o,i,opt}^*$ der einzelnen Rampenbefehle reziprok skaliert. Auf diese Weise können die kinematischen Zeitverläufe der einzelnen Lösungen des Bahnoptimierungsproblems linear zu τ gestaucht oder ausgedehnt werden.

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{o,i,skal}^* &= \dot{\varphi}_{o,i,opt}^* / \tau \quad , \quad \ddot{\varphi}_{o,i,skal}^* = \ddot{\varphi}_{o,i,opt}^* / \tau^2 \quad , \quad i \in \{1,2,3\} \quad , \quad o \in \mathbb{P}_o \\ \Rightarrow t_{E,o,skal} &= t_{E,o,opt} \cdot \tau \end{aligned} \quad (7.1)$$

Infolge dieser Variation ändern sich die Systemdynamik und damit die vom Roboterarm auf die einseitig gebundene Basis des Roboters eingepprägten Kräfte und Momente, was das Risiko eines Bindungswechsels in Tangentialrichtung (Losgleiten) oder Normalenrichtung (Kippen) als Nebenbedingung der Bahnoptimierung unmittelbar beeinflusst. Bild 7.9 zeigt exemplarisch für die kippempfindlichen Fälle B und C ($l_{\Delta,2} = 300\text{mm}$, ohne und mit lokaler Verspannung) der Achsfolge FP_1W_2F die Auswirkung der Variation auf das Bindungsverhalten in Normalenrichtung. Die Kenngröße ist dabei die maximal auftretende Dauer Δt_{max} der Kontaktunterbrechungen, die bei experimenteller Realisierung der gestauchten bzw. gestreckten $\dot{\varphi}(t)$ -Rampenverläufe der zugehörigen 50 Lösungen auftreten.

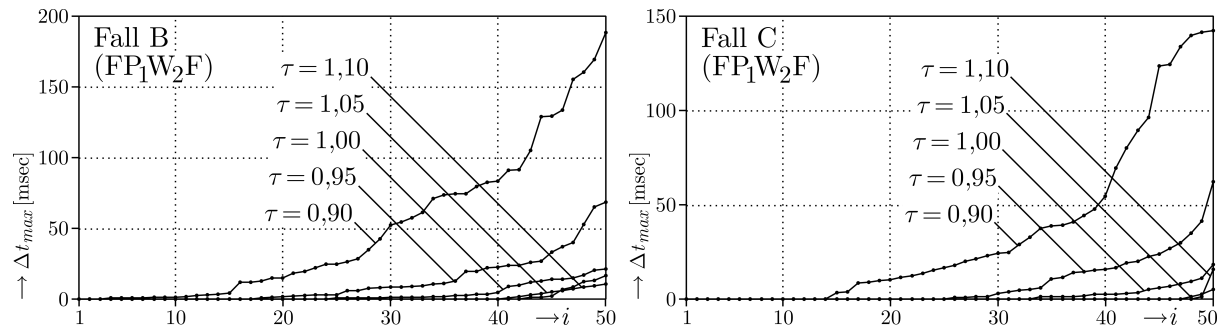


Bild 7.9: Auswirkung des Skalierungsfaktors f_t auf die Kontaktunterbrechungsdauer Δt_{max} [sec] bei der Achsfolge FP_1W_2F , Fälle B und C

Man erkennt, dass bereits eine geringe Steigerung der Systemdynamik durch Stauchung der kinematischen Zeitverläufe um nur 5% ($\tau = 0,95$) die maximale Kontaktunterbrechungsdauer Δt_{max} derart anhebt, dass von einer Separation an den einseitigen Bindungspunkten gesprochen werden kann. Dieses Urteil wird dadurch bestärkt, dass bei der experimentellen Realisierung der zeitlich gestauchten Armbewegungen die auf der Oberseite der Stege der Basis befestigten Kontaktringe, vgl. Abschnitt 6.2.1, mitunter deutlich hörbar gegen die an die Bindungsträger angeflanschten Aluminiumdeckel stoßen. Es kann festgehalten werden, dass die Bahnoptimierung mit Hilfe der einseitigen Kontaktmodellierung Lösungen liefert, die den Spielraum der Bindungspersistenz in Normalenrichtung nahezu ausreizen, aber eben nicht überschreiten.

7.4.2 Tangentialrichtung

Gemäß Abschnitt 6.2.2 wird die tangentiale Bindungspersistenz der Roboterbasis durch Lasersensoren überwacht, die die x- und y-Auslenkungen Δx_3 , Δy_2 und Δy_3 an den Bindungspunkten K_2 und K_3 erfassen.

In Bild 7.10 sind exemplarisch für die Referenzlösung des Falls G ($l_{\Delta,1} = 500\text{mm}$) bei der Achsfolge $W_1P_1P_2W_2$ die Ortskurven $\Delta \mathbf{r}_k(t) = [\Delta x_k(t) \ \Delta y_k(t)]^T$ der drei Kontaktpunkte K_k sowie die zeitabhängigen Verläufe der Verschiebungen $\Delta x_M(t)$ und $\Delta y_M(t)$ sowie des Verdrehwinkels $\alpha_M(t)$ des Mittelpunkts dargestellt. Man stellt über die gesamte Dauer der Armbewegung ein Wandern der Kontaktpunkte in der Größenordnung einiger Zehntelmillimeter fest. Bei der experimentellen Realisierung der anderen Lösungen des Bahnoptimierungsproblems tritt ein ähnliches Verhalten auf. Dieses ist wie die kurzzeitigen Kontaktunterbrechungen in Normalenrichtung auf die Vibrationen im Roboterarm sowie auf die beim Starrkörper-Modellierungsansatz unberücksichtigten, real jedoch existenten Elastizitäten in der Basis zurückzuführen. Ein echtes Losgleiten der einseitig gebundenen Roboterbasis ist in diesem vibrationsbedingten Kontaktpunkt wandern nicht zu sehen, da die auftretenden tangentialen Geschwindigkeiten der Kontaktpunkte nur sehr gering ausfallen ($|\dot{\mathbf{r}}_{K_k,t}| \ll 1$, $k \in \{1,2,3\}$, vgl. Abschnitte 2.3 und 2.4.4). Der Zusammenhang zwischen hochfrequenten Vibrationen und Verminderung des Reibwertes ist bekannt [71] [85] [181], und wird z.B. bei Montageaufgaben genutzt, wo durch vibrierende Montagetische das Fügen von Bauteilen vereinfacht wird [66] [95].

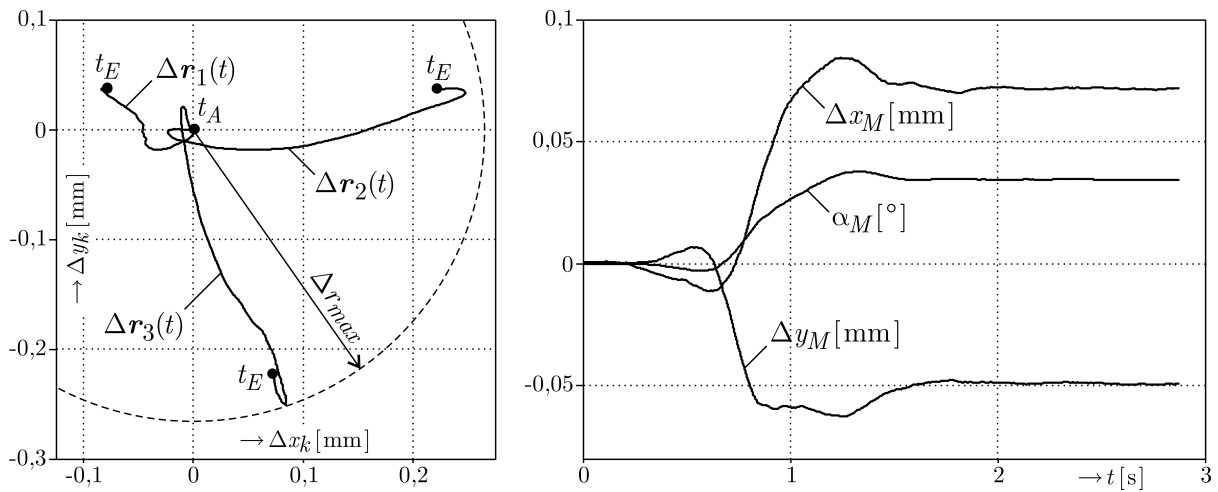


Bild 7.10: Tangentiale Bewegung der Roboterbasis bei der experimentellen Realisierung der Referenzlösung beim Fall G der Achsfolge $W_1P_1P_2W_2$

Die maximal über der Zeit auftretende tangentialen Auslenkung bei den drei Kontaktpunkten wird durch $\Delta r_{max} = \max_{k,t} (\sqrt{\Delta x_k(t)^2 + \Delta y_k(t)^2})$ beschrieben, vgl. Bild 7.10. In Bild 7.11 sind in sortierter Reihenfolge die bei allen jeweils 50 Lösungen der Fälle A bis H des Bahnoptimierungsproblems auftretenden Δr_{max} dargestellt.

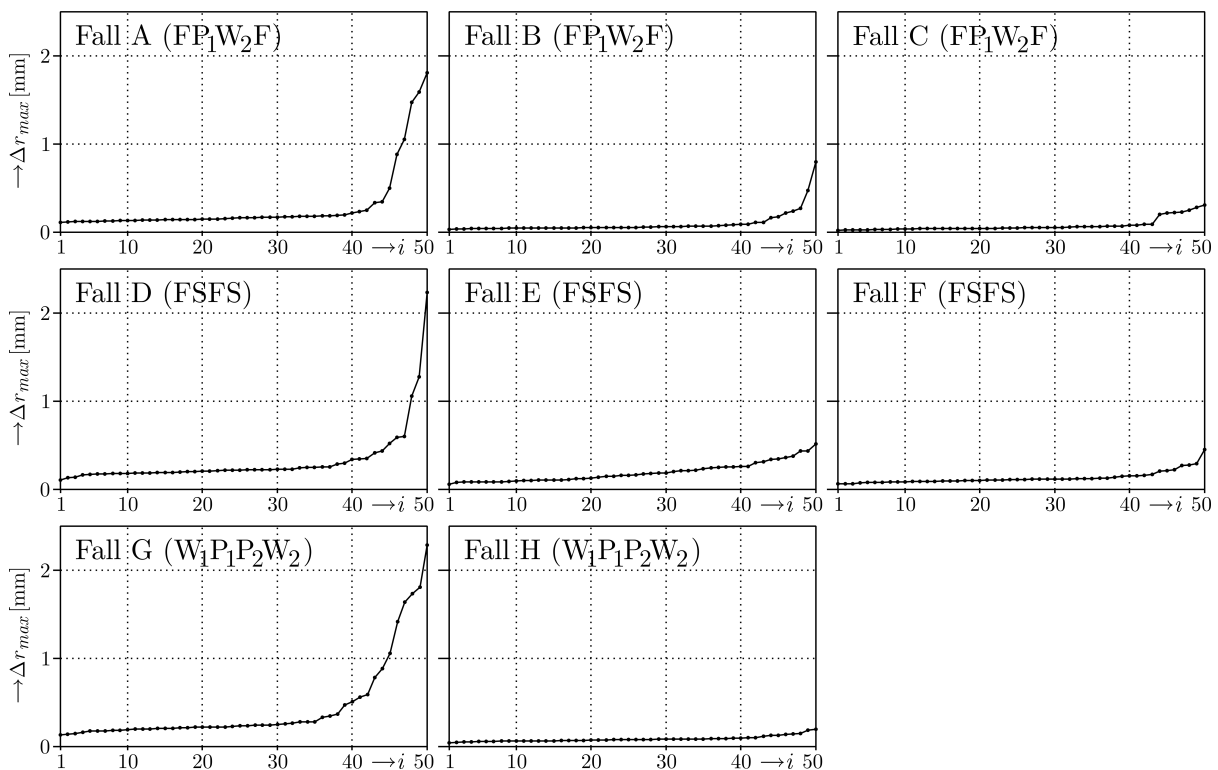


Bild 7.11: Maximal auftretende tangentialen Kontaktpunktauslenkung Δr_{max} bei allen jeweils 50 Lösungen der Fälle A bis H des Bahnoptimierungsproblems

Hier ist nun festzustellen, dass bei den Fällen A, D und vor allem G mitunter maximale Auslenkungen von ca. 2 mm erreicht werden, so dass der Spielraum zwischen den Kontakttringen der Basis-Stege und den Deckeln der Bindungsträger ausgereizt wird, vgl. Abschnitt 6.2.2. Es ist festzuhalten, dass bei diesen drei Fällen das größere Aufstandsdreieck der Basis mit $l_{\Delta}=0,5\text{m}$ vorliegt, was das Risiko G_N eines Umkippens soweit mindert, dass das Risiko eines Losgleitens G_T als Randbedingung der Bahnoptimierung gemäß Gleichung (5.29) dominiert. Die Prädiktion zur tangentialen Bindungspersistenz während der optimierten Bewegung des Roboterarms wird jedoch bei allen überprüften Fällen eingehalten.

Wie beim Kontaktverhalten in Normalenrichtung kann durch zeitliche Dehnung oder Stauchung der kinematischen Zeitverläufe gemäß Gleichung (7.1) und entsprechender experimenteller Realisierung geprüft werden, wie nah die gefundenen Lösungen an der Grenze zum tangentialen Losgleiten liegen. Dies ist in Bild 7.12 exemplarisch für den Fall H dargestellt. Man erkennt auch hier, dass sich bereits eine Steigerung der Systemdynamik um nur 5% ($\tau=0,95$) signifikant verschlechternd auf das tangential Kontaktverhalten auswirkt. Bei $\tau=0,95$ und $\tau=0,90$ ist in einigen Fällen deutlich eine Kollision zwischen dem Steg-Kontakttring und dem Deckel bei der Versuchsdurchführung hörbar, hier muss also statt eines vibrationsbedingten und vernachlässigbaren Kontaktpunkt wanderns tatsächlich ein Losgleiten der einseitigen Bindungen mit markanten Tangentialgeschwindigkeiten konstatiert werden. Bei den ebenfalls mit einem gegenüber dem Kipprisiko G_N dominierenden Losgleitrisiko G_T behafteten Fällen A und D liefert eine entsprechende Stauchung der Zeitverläufe vergleichbare Ergebnisse.

Es kann letztlich also festgestellt werden, dass die in dieser Arbeit dargestellte Methodik zur Modellierung und numerischen Behandlung der einseitigen Bindungen durchaus geeignet ist, bei der Bahnoptimierung Lösungen zu finden, die das tangentiale Haftpotenzial der einseitigen Bindungen an der Roboterbasis nahezu auszuschöpfen, jedoch kein ungewolltes Losgleiten des mobilen Roboters hervorrufen.

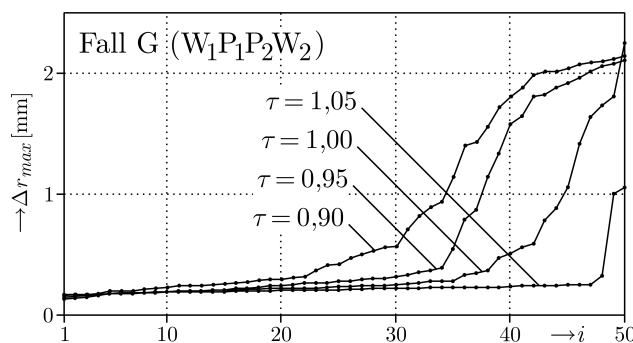


Bild 7.12: Auswirkung des Skalierungsfaktors τ auf die maximal auftretende tangentiale Auslenkung Δr_{max} beim Fall G der Achsfolge W₁P₁P₂W₂

Kapitel 8

Zusammenfassung

Der Gegenstand der Betrachtungen in der vorliegenden Arbeit sind einseitig an die Umgebung gebundene Roboter. Mobile Roboter, deren Mobilität durch Beine oder Räder realisiert sein kann, stellen Beispiele hierfür dar. Ist ein solches mobiles System mit einem Arm ausgerüstet und soll für kraftintensive oder hochdynamische Manipulations- oder Handhabungsaufgaben eingesetzt werden, erweist sich die Ortsungebundenheit als Nachteil bzw. als Herausforderung für die Robotik: Im Gegensatz zu gewöhnlichen, fest an der Umgebung fixierten Roboterarmen kann ein mobiler Roboter nicht beliebig große Kräfte und Momente in die Umgebung einleiten. Während bei fixierten Roboterarmen die kinetischen Möglichkeiten nur durch die Leistungsfähigkeit der Antriebsmotoren an den Gelenken limitiert sind, muss bei einem ortsvariablen System stets die Persistenz seiner Bindungen zur Umgebung, also das Fortbestehen eines sicheren Stands ohne Kippen oder Weggleiten, beachtet und gesichert werden.

Diese Arbeit befasst sich daher mit der Abbildung einseitig gebundener Roboter als mathematisch-mechanisches Ersatzmodell, der Formulierung von Methoden zur Sicherstellung und Optimierung eines kipp- und weggleitsicheren Betriebs dieser nicht inertial fixierten Roboter und der experimentellen Validierung der theoretischen Betrachtungen.

Der erste, die Kapitel 2 und 3 umfassende Teil der Arbeit behandelt die mechanische Modellbildung. Der ortsvariable Roboter wird dabei als System gekoppelter Starrkörper abgebildet und in die zwei Subsysteme Arm und Basis aufgeteilt. Die Herleitung der Bewegungsgleichung der Roboterbasis erfolgt mit Hilfe des Prinzips von D'ALEMBERT in der Fassung von LAGRANGE; die Dynamik der baumstrukturierten Roboterarms wird durch Analyse des Impuls- und Drallsatzes für jeden Körper des Arms erfasst. Die Kontaktpunkte der Basis zur starren Umgebung werden als einseitige Bindungen in das Starrkörpermodell integriert; die physikalischen Verhältnisse an den Bindungspunkten werden durch eine Approximation des glatten COULOMB'schen Reibkegels als polylaterale Reibpyramide linearisiert. Durch Analyse der Kontaktkinematik an der Roboterbasis wird die vektorielle Bewegungsgleichung in eine Form überführt, in der, nach Elimination der generalisierten Koordinaten und ihrer Zeitableitungen, die Kontaktkraft- und Kontaktpunktbeschleunigungskoeffizienten die einzigen unbekanntenen Größen darstellen.

Das so gewonnene, mehrfach unterbestimmte lineare Gleichungssystem wird durch die Kontaktgesetze ergänzt, die für jeden Kontaktpunkt in Normalenrichtung die Impenetrabilitätsbedingung zwischen Starrkörpern und in Tangentialrichtung das lineare COULOMB'sche Reibgesetz berücksichtigen. Durch geschickte Substitution und Erweiterung der Kontaktgrößen kann für die unbekanntenen Größen Positivität sowie paar-

weise Komplementarität gefordert werden, so dass sich das Gleichungssystem zu einem Linearen Komplementaritätsproblem LCP überführen lässt. Dessen Lösung wird mit Hilfe des LEMKE-Algorithmus aus der Klasse der Pivot-Algorithmen bestimmt und beschreibt den Zustand an den einseitigen Bindungen der Roboterbasis in Abhängigkeit von den vom Roboterarm auf die Basis einwirkenden Kräften und Momenten, welche aus der Armdynamik oder von den Manipulationskräften am Greifer des Arms herrühren.

Bei der numerischen Umsetzung des Problems wird nun ein unrobustes Lösungsverhalten des LEMKE-Algorithmus beobachtet. Bedingt durch die konventionelle Formulierung des LCPs mit paarweisen Komplementaritäten zwischen den Kraft- und den Beschleunigungsgrößen kann in seltenen Fällen ein Rangabfall der Pivotmatrix auftreten und der Lösungsprozess abbrechen. In diesen Fällen hat der Algorithmus bei seiner Suche im Parameterraum nach einer zulässigen Lösung des Kontaktproblems eine physikalisch unzulässige Kombination von Kontaktgrößen aufgegriffen und kann den nächsten Gauß'schen Eliminationsschritt nicht durchführen.

Als zentraler Baustein dieser Arbeit wird daher in Kapitel 3 als Alternative eine kompakte Formulierung des Kontaktproblems vorgeschlagen, die bei den Kontaktkräften die bisherige strikte Trennung in Tangential- und Normalenrichtung aufhebt. Sie geht einher mit einer speziellen Nomenklatur, die die Komplementarität zwischen Mengen von Kontaktgrößen sprachlich und mathematisch in einen formalen Rahmen fasst. Mit diesen Mengenkombinationen werden für die verschiedenen Bindungstypen finite Zustandsautomaten formuliert. Diese bilden für jeden Kontaktpunkt des Systems die Gesamtheit aller physikalisch erlaubten Bindungszustände lückenlos und überlappungsfrei ab und dienen einem modifizierten LEMKE-Algorithmus als Regulator für die Basis-Austauschschritte im Rahmen des Pivot-Lösungsprozesses. Auf diese Weise findet von vornherein eine gezielte Einschränkung auf zulässige bzw. sinnvolle Kombinationen der Kontaktgrößen statt.

Die Grundzüge der kompakten Formulierung werden zunächst anhand der gewöhnlichen einseitigen Bindung dargestellt und dann auf lokale Verspannungen übertragen. Dieser Bindungstyp bildet lokale Verspannungsmechanismen, mit denen sich der mobile Roboter temporär an der Umgebung fixieren und so seine kinetischen Möglichkeiten erweitern kann, in einem singulären reduzierten Kontaktpunkt ab. Nach Beschreibung und linearer Approximation des zulässigen Bereichs für die reduzierte Kontaktkraft dieser Bindung sowie Aufstellung des zugehörigen Zustandsautomaten kann eine lokale Verspannung als Black-Box-Bindung behandelt werden. Deren interne kontaktmechanischen Vorgänge müssen zur Analyse des globalen Kontaktverhaltens des mobilen Roboters mit dem modifizierten LEMKE-Algorithmus nicht mehr im Detail aufgelöst werden. Somit wird eine Methodik bereitgestellt, um Bindungen, deren zulässiger Kraftbereich vom COULOMB'schen Reibkegel abweicht, in einem Starrkörpersystem zu integrieren.

Im zweiten Teil der Arbeit erfolgt eine Anwendung des theoretischen Fundaments auf Optimierungsprobleme. Kapitel 4 behandelt zunächst den statischen Fall, bei dem für einen einseitig gebundenen und ggf. zusätzlich lokal verspannten Roboter der optimale Standort zur Durchführung einer Manipulationsaufgabe gesucht wird. Die Güte der

Bindungspersistenz in Normalenrichtung wird über die Momentensummen um die potenziellen Kippachsen sowie über die im Falle einer Separation auftretende maximale Normalbeschleunigung der Kontaktpunkte analysiert. In Tangentialrichtung erfolgt die Quantifizierung der Bindungspersistenz über eine bei jedem Schritt der übergeordneten Optimierungsaufgabe durchzuführenden Minimax-Optimierung, bei der die Tangentialkräfte auf die Bindungspunkte verteilt und dabei deren Haftkraftlimits optimal ausgenutzt werden. Beides Mal bildet der vom LEMKE-Algorithmus ermittelte Zustand an den Bindungen der Roboterbasis zur Umgebung die Berechnungsgrundlage. Als weitere Gütekriterien der statischen Bindungsoptimierung werden eine günstige Ausnutzung des Krafraums sowie im Hinblick auf die operative Autonomie eines mobilen Roboters ein minimaler Energieumsatz gewählt. Das nichtlineare Mehrparameter-Vektor-Optimierungsproblem kann über Wichtungsparemeter auf ein skalares Problem reduziert und mit einem Algorithmus aus der Familie der Sequentiellen Quadratischen Programmierung SQP gelöst werden. Dies ist zum Abschluss von Kapitel 4 exemplarisch für ein ebenes Problem dargestellt.

Die bei der statischen Bindungsoptimierung aufgestellten Kriterien zur Beschreibung der Standsicherheit des Roboters werden als Nebenbedingungen in Kapitel 5 übernommen, in dem mit der Bahnoptimierung die Dynamik beim einseitig gebundenen Roboter betrachtet wird. Die Parametrisierung der zu optimierenden Bahnbewegung des Roboterarms erfolgt über die Zeitverläufe der Gelenkwinkelgeschwindigkeiten, die Bahnoptimierung wird somit statt im kartesischen Raum in der Domäne der Gelenkwinkel durchgeführt. Die zur Versuchsdurchführung genutzte Hardware bietet hierbei einen Rampenansatz für die Winkelgeschwindigkeiten an, der für einen Gelenkwinkel je eine Phase der konstanten Beschleunigung und Verzögerung sowie dazwischen eine Phase der unbeschleunigten Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit vorsieht. Durch mehrere (im vorliegenden Fall drei), sukzessiv an die einzelnen Gelenke erteilte Rampenbefehle können komplexe Bewegungsmuster des Arms generiert werden. Zur Einschränkung der Dimension des Bahnoptimierungsproblems erfolgt eine Unterteilung in optimierbare und passive Gelenkwinkel. Erstere unterliegen der obigen Parametrisierung und Optimierung ihrer transienten Kinematik, letztere werden mit nur einem, nicht parametrisierten Rampenbefehl direkt vom Anfangs- in den Endwinkel bewegt.

Ziel der Bahnoptimierung ist ein minimaler Energieumsatz bei der Bahnbewegung des mobilen, energieautonomen, einseitig gebundenen und ggf. zusätzlich lokal verspannten Roboters. Die Gütefunktion wird über die Summe der Zeitintegrale der elektrischen Leistung an den Gelenkantrieben während der Bahnbewegung des Arms definiert. Die momenten- und drehgeschwindigkeitsabhängigen Leistungskennfelder liegen für jedes der Gelenke als Funktion vor. Die Auswertung der Leistungsintegrale erfolgt abschnittsweise in mehreren Zeitintervallen, in denen die Zeitverläufe der Gelenkleistungen durchgehend stetig differenzierbar sind, mit dem Gauß-Legendre-Quadraturverfahren. Aus problemspezifischen Gründen wird mit dem Suchverfahren nach NELDER-MEAD ein robuster, jedoch relativ langsamer Algorithmus aus der Klasse der gradientenfreien Verfahren zur Lösung des Bahnoptimierungsproblems gewählt.

Die Bahnoptimierung wird anhand dreier Achsfolgen für den Roboterarm, welche

über eine analytisch lösbare inverse Kinematik verfügen, für verschiedene Bindungskonfigurationen ohne und mit lokaler Verspannung durchgeführt. Dabei wird stets die gleiche Anfangs- und Endposition bzw. -orientierung des Greifers am Ende des Arms berücksichtigt. Als Besonderheit ist eine der drei Achsfolgen durch eine schrägwinklige Anordnung der Drehachsen derart ausgelegt, dass eine Eigenkollision des Arms kinematisch ausgeschlossen ist.

In den zum Ende von Kapitel 5 dargestellten Optimierungsergebnissen zeigt sich, dass sowohl die Größe der Aufstandsfläche der Roboterbasis als auch die Verwendung lokaler Verspannungen auf die Trajektorie des Greifers und auf die Zeit, die die verschiedenen Achsfolgen zum Erreichen der Zielkonfiguration benötigen, Einfluss nehmen. Je nach Randbedingung kann sich das Anheben des Roboterarms während einer Schwenkbewegung zur notwendigen Verringerung des Kipprisikos oder das Absenken zur energetisch günstigen Wandlung potenzieller in kinetische Energie als geeignete Strategie für die Bahnbewegung erweisen.

Im abschließenden dritten Teil der Arbeit werden die theoretischen Betrachtungen in die reale Welt des Experiments übertragen. Kapitel 6 beschreibt das zur Durchführung der Versuche genutzte baukastenartige, modulare Robotiksystem sowie die Messung der für die Bahnoptimierung benötigten Parameter und Leistungskennfelder der einzelnen Antriebsmodule. Des Weiteren wird der konstruktive Aufbau der im Roboterarm realisierten Achsfolgen sowie der Versuchsstandsperipherie dargestellt.

Die bei der experimentellen Realisierung der optimierten Bahnbewegungen ermittelten Zeitverläufe der einzelnen Messgrößen sind abschließend in Kapitel 7 zusammengefasst und den Berechnungsdaten aus der Simulation des mobilen Roboters gegenübergestellt. Die prognostizierten Zeitverläufe der kinematischen Größen während der Bahnbewegung und der dabei vom Roboterarm auf die Basis wirkenden Kräfte und Momente können im Experiment bestätigt werden. Der gemessene Zeitverlauf des elektrischen Energieumsatzes deckt sich in ebenfalls guter Weise mit den Berechnungen.

Beim Bindungsverhalten des mobilen Roboters zeigt sich hingegen ein diffizileres Bild. Zwar kann die geforderte Standsicherheit des Roboters im Experiment durchaus festgestellt werden, die bei der Modellierung der Kontakte als einseitige Bindungen postulierte scharfe Trennung zwischen Bindungspersistenz und -wechsel kann bei der experimentellen Realisierung jedoch nur eingeschränkt beobachtet werden. Durch die real vorhandenen Elastizitäten und die dadurch ermöglichten Schwingungen im System stellt sich mitunter ein kurzfristiges Abheben der Kontaktpunkte in Normalenrichtung bzw. ein Wandern über kürzeste Strecken in Tangentialrichtung ein, ohne dass von einem vollwertigen Losgleiten oder Kippen des Roboters gesprochen werden kann. Die Grenze der Gültigkeit des gewählten Starrkörperansatzes zur Prädiktion des Kontaktverhaltens scheint somit erreicht.

Eine Berücksichtigung von Getriebe- und Armelastizitäten im Modell sowie eine Erfassung der von den Gelenkantrieben angeregten Schwingungen im System lässt eine Verbesserung der Prognosegüte für das Kontaktverhalten des mobilen, einseitig gebunden und ggf. lokal verspannten Roboters erwarten und stellt somit für die Zukunft den nächsten sinnvollen Schritt bei der Betrachtung mobiler Roboter dar.

Anhang A

Lokale Verspannungen im räumlichen Fall

Im Folgenden ist die Modellbildung für den räumlichen Fall von den lokalen Verspannungen dargestellt, die aus Gründen der Übersichtlichkeit in Abschnitt 3.2 nur für den ebenen Fall behandelt wurden.

A.1 Kraftvariable lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung

(Fortführung von Abschnitt 3.2.3)

Das Vorgehen im räumlichen Fall vollzieht sich analog zu den Ausführungen für den ebenen Fall. Mit den Kraft- und Beschleunigungseinheitsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_h &= \mathbf{n} \kappa_{n,o} + \left(\mathbf{t}_1 \cos(2\pi(h - \frac{1}{2})/S) + \mathbf{t}_2 \sin(2\pi(h - \frac{1}{2})/S) \right) \kappa_{t,o} \quad , \\ \mathbf{k}_{s+h} &= -\mathbf{n} \kappa_{n,u} + \left(\mathbf{t}_1 \cos(2\pi(h - \frac{1}{2})/S) + \mathbf{t}_2 \sin(2\pi(h - \frac{1}{2})/S) \right) \kappa_{t,u} \quad , \\ \mathbf{s}_h &= \mathbf{t}_1 \cos(2\pi(h - 1)/S) + \mathbf{t}_2 \sin(2\pi(h - 1)/S) \quad , \quad 1 \leq h \leq S \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

wird, wie Bild A.1 für den Fall $S=6$ zeigt, der zulässige Kraftbereich linear approximiert. Er setzt sich aus den Bereichen und Hüllflächen \textcircled{A} bis \textcircled{H} zusammen und geht aus der Rotation des zulässigen Kraftbereichs für den ebenen Fall gemäß Bild 3.21 hervor. Für die Beschleunigung und Kraft am reduzierten Kontaktpunkt gilt dann:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = \sum_{h=1}^S (\mathbf{s}_h \ddot{g}_h) \quad , \quad \mathbf{K}_r = \sum_{h=1}^{2S} (\mathbf{k}_h \lambda_h) \quad , \quad \lambda_h \geq 0 \quad , \quad \ddot{g}_h \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

Die Faktoren κ in Gleichung (A.1) werden analog zu Gleichung (3.12) berechnet.

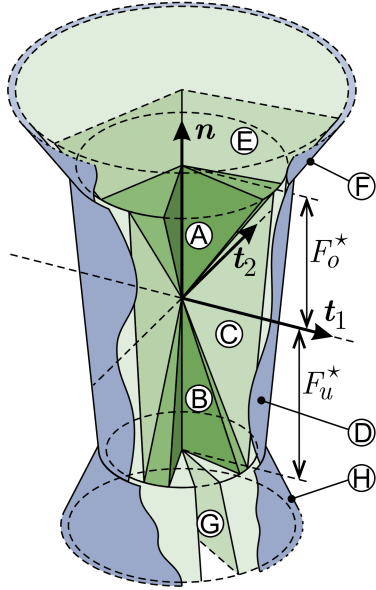
$$\kappa_{n,i} = \cos(\pi/S) / \sqrt{(\mu_{0,i}^\nabla)^2 + \cos^2(\pi/S)} \quad , \quad \kappa_{t,i} = \mu_{0,i}^\nabla / \sqrt{(\mu_{0,i}^\nabla)^2 + \cos^2(\pi/S)} \quad , \quad i \in \{o, u\} \quad (\text{A.3})$$

Der Kontaktgrößenpool \mathbb{K}_r enthält wie beim ebenen Fall die komplementären Hilfsgrößen λ_b und λ_e , die in Abhängigkeit von den Kraftkoeffizienten λ_1 bis λ_{2S} analog zu Gleichung (3.56) eine Anpressung an beiden oder nur einer der Klemmbacken anzeigen.

$$\mathbb{K}_r = \bigcup_{h=1}^S (\ddot{g}_h) \cup \bigcup_{h=1}^{2S} (\lambda_h) \cup \{ \lambda_b, \lambda_e \} \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{i \kappa_{n,o}}{1+i} \sum_{h=1}^S (\lambda_h) + \frac{\kappa_{n,u}}{1+i} \sum_{h=S+1}^{2S} (\lambda_h) = F^* + \lambda_e - \lambda_b \quad , \quad \begin{array}{l} \lambda_b \geq 0 \wedge \lambda_e \geq 0 \\ \wedge \lambda_b \lambda_e = 0 \end{array} \quad (\text{A.5})$$

a) Zulässiger Kraftbereich



b) Kraft- (links) und Beschleunigungseinheitsvektoren (rechts)

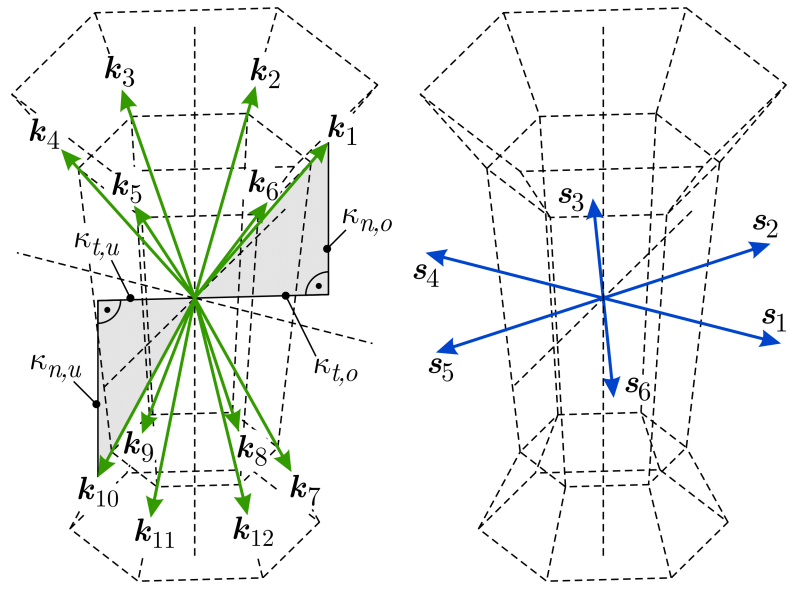


Bild A.1: Aufteilung und Approximation des zulässigen Kraftbereichs bei kraftvariabler lokaler Verspannung mit beidseitiger Anpressung ($S=6$)

Zur Beschreibung der innerhalb der COULOMB'schen Reibkegel gelegenen Bereiche \textcircled{A} , \textcircled{B} , \textcircled{E} und \textcircled{G} des zulässigen Kraftbereichs in Bild 3.22a) sei auf das Vorgehen im Falle der Anpressung an nur einer Klemmbacke gemäß Gleichung (3.57) verwiesen, als Nebenbedingung ist dabei statt Gleichung (3.56) die obige Gleichung (A.5) zu berücksichtigen. Dementsprechend kann für die Beschreibung der Hüllflächen \textcircled{F} und \textcircled{H} der beiden Reibkegel auf Gleichung (3.58) zurückgegriffen werden.

Zeigt der Vektor \mathbf{K}_r in den Bereich \textcircled{C} des zulässigen Kraftbereichs, welcher sich außerhalb der COULOMB'schen Reibkegel der beiden Kontaktpunkte befindet, liegt persistentes Haften vor. Die Approximation des Bereichs \textcircled{C} ist in Bild A.2 dargestellt.

Zur mengenkomplementären Abbildung der S Sektoren, die jeweils durch die vier Kräfteinheitsvektoren $\mathbf{k}_{\overline{h-1}}$, \mathbf{k}_i , $\mathbf{k}_{S+\overline{h-1}}$ und \mathbf{k}_{s+h} aufgespannt werden, werden diese zweigeteilt, um, passend zu den restlichen Teilmengen zur Beschreibung des Kontaktzustands der lokalen Verspannung, Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{C},h}$ mit nur drei Kraftkoeffizienten plus der Hilfsgröße λ_b zu erhalten. Die $2S$ Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{C},h}$ bilden einen mengenkomplementären Ringschluss, gehen nach innen in die Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{A},h}$ bzw. $\mathbb{G}_{\textcircled{B},h}$,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{G}_{\textcircled{C},h} & \begin{array}{c} \lambda_{\overline{h-1}} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_{S+h} \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_{\textcircled{C},S+h} & \begin{array}{c} \lambda_{S+\overline{h-1}} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_{\overline{h+1}} \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_{\textcircled{C},\overline{h+1}} & \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons \mathbb{G}_{\textcircled{C},h} \quad , \\
 \mathbb{G}_{\textcircled{C},h} & \begin{array}{c} \lambda_{S+\overline{h-1}} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_1 \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_{\textcircled{A},h} \quad , \quad \mathbb{G}_{\textcircled{C},S+h} & \begin{array}{c} \lambda_h \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_{S+1} \downarrow 0 \end{array} \mathbb{G}_{\textcircled{B},h} \quad , \quad 1 \leq h \leq S \quad , \quad (\text{A.6})
 \end{aligned}$$

und, für den Fall des Verschwindens der Hilfsgröße λ_b gemäß Gleichung (A.5), nach außen in die Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{D},h}$ über:

$$\mathbb{G}_{\odot,h} \begin{matrix} \lambda_b \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \ddot{g}_h \downarrow 0 \end{matrix} \mathbb{G}_{\odot 1,h} \quad , \quad 1 \leq h \leq 2S \quad , \quad (\text{A.7})$$

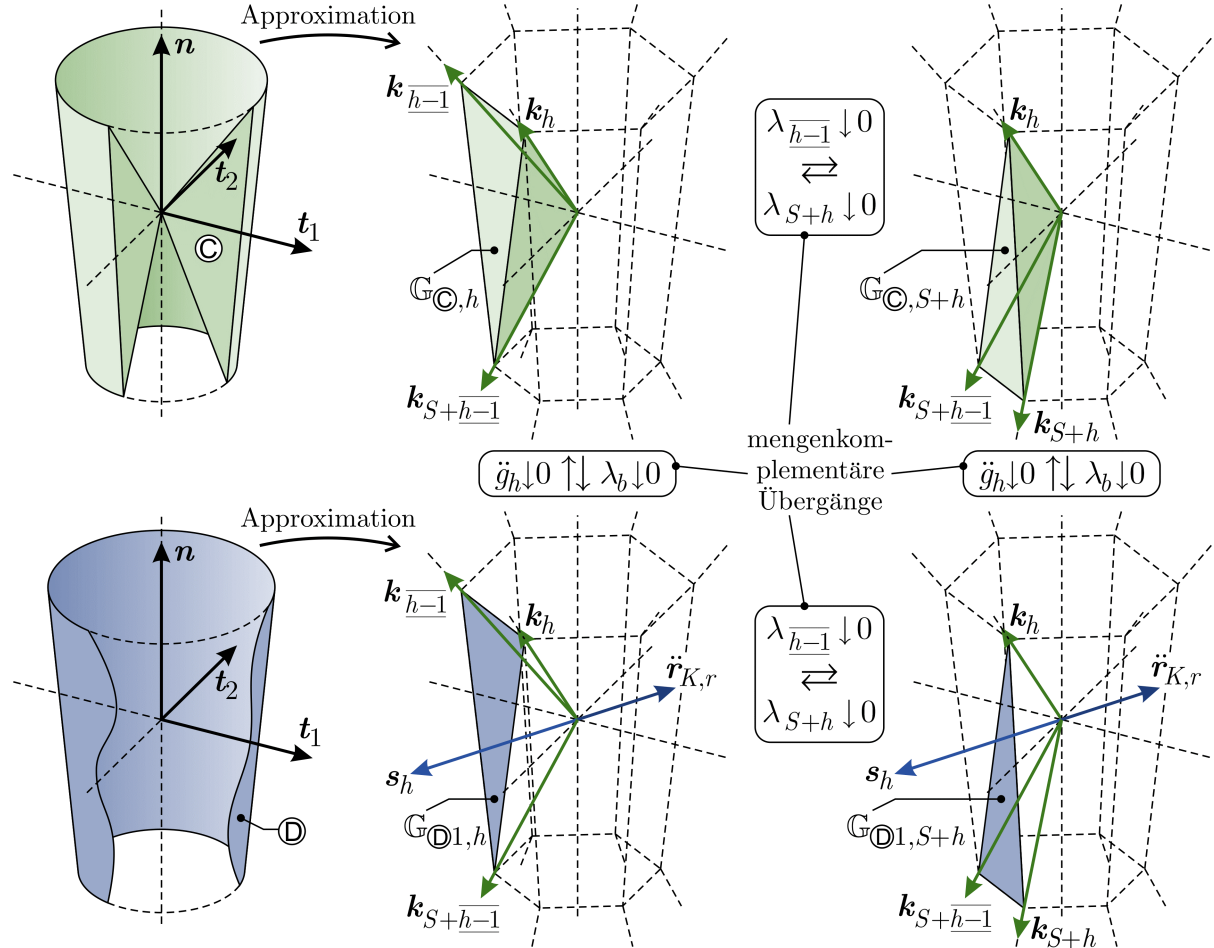


Bild A.2: Lineare Approximation des inneren Bereichs © (persistentes Haften) sowie der Hüllfläche © (Losgleiten) mit $1 \leq i \leq S$

Die $2S$ Teilmengen $\mathbb{G}_{\odot 1,h}$ definieren eine Zweiteilung der S Abschnitte der approxiierten äußeren Hüllfläche ©, wie Bild A.2 zeigt, und beschreiben ein Losgleiten der ersten Stufe mit nur einem Beschleunigungskoeffizienten $\ddot{g}_h \geq 0$. Zusammen mit den ein Losgleiten der zweiten Stufe beschreibenden Teilmengen $\mathbb{G}_{\odot 2,h}$ bilden sie einen mengenkomplementären Ringschluss und können zudem nach unten bzw. nach oben in die Teilmengen $\mathbb{G}_{\oplus 1,h}$ bzw. $\mathbb{G}_{\ominus 1,h}$ übergehen:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\odot 1,h} \begin{matrix} \lambda_{\overline{h-1}} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_{S+h} \downarrow 0 \end{matrix} \mathbb{G}_{\odot 1,S+h} \begin{matrix} \lambda_{S+i-1} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \ddot{g}_{i+1} \downarrow 0 \end{matrix} \mathbb{G}_{\odot 2,h} \begin{matrix} \ddot{g}_h \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_{S+h+1} \downarrow 0 \end{matrix} \mathbb{G}_{\odot 1,\overline{h+1}} \rightleftharpoons \dots \rightleftharpoons \mathbb{G}_{\odot 1,h} \quad , \\ \mathbb{G}_{\odot 1,h} \begin{matrix} \lambda_{S+h-1} \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_1 \downarrow 0 \end{matrix} \mathbb{G}_{\oplus 1,h} \quad , \quad \mathbb{G}_{\odot 1,S+h} \begin{matrix} \lambda_h \downarrow 0 \\ \rightleftharpoons \\ \lambda_{S+1} \downarrow 0 \end{matrix} \mathbb{G}_{\oplus 1,h} \quad , \quad 1 \leq h \leq S \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

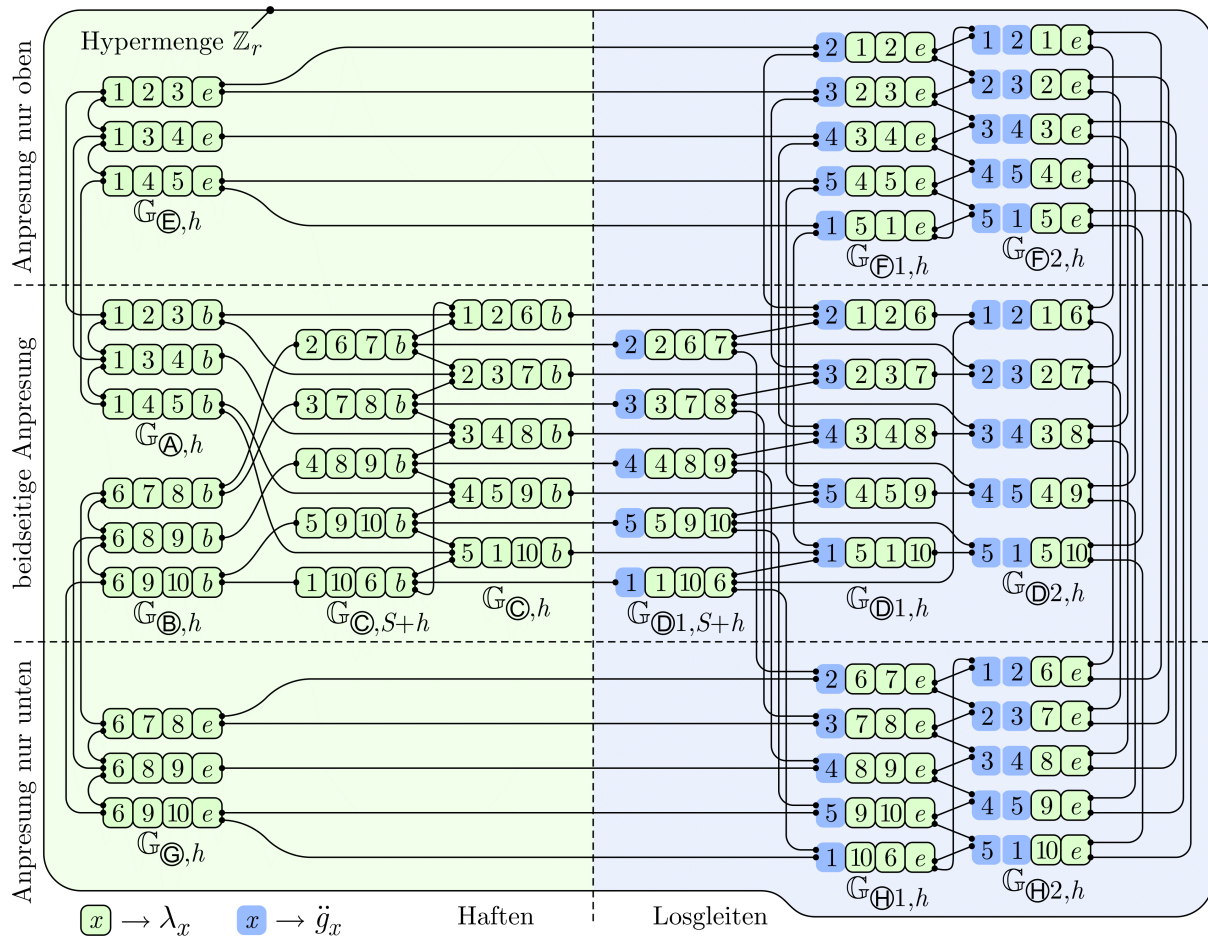


Bild A.3: Finiter Zustandsautomat für die kraftvariable lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung im räumlichen Fall ($S = 5$)

Die Zusammensetzung der Teilmengen und die Gesamtheit ihrer mengenkomplementären Übergänge entnimmt man dem finiten Zustandsautomaten in Bild A.3. Analog zum ebenen Fall sind dort mengenkomplementäre Übergänge zwischen den Teilmengen $G_{\oplus 2,h}$ und $G_{\ominus 2,h}$, die ein Losgleiten der zweiten Stufe beschreiben, willkürlich festgelegt. Die somit streng abgeschlossene Hypermengende Z_r von zulässigen Teilmengen, vgl. Gleichung (2.103), sichert die erwünschte Robustheit des LEMKE-Algorithmus.

A.2 Kraftkonstante halbstarre lokale Verspannung

(Fortführung von Abschnitt 3.2.4)

Mit den Kraft- und Beschleunigungseinheitsvektoren,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_h &= \mathbf{n} \kappa_n + \left(\mathbf{t}_1 \cos(2\pi(h - \frac{1}{2})/S) + \mathbf{t}_2 \sin(2\pi(h - \frac{1}{2})/S) \right) \kappa_t, \quad 1 \leq h \leq S, \quad (\text{A.9}) \\
 \mathbf{s}_h &= \mathbf{t}_1 \cos(2\pi(h - 1)/S) + \mathbf{t}_2 \sin(2\pi(h - 1)/S),
 \end{aligned}$$

$$\text{und dem Kontaktgrößenpool } \mathbb{K}_r = \bigcup_{h=1}^S \left(\left\{ \ddot{g}_h, \lambda_h \right\} \right) \cup \left\{ \ddot{g}_n, \lambda_b \right\} \quad (\text{A.10})$$

wird im räumlichen Fall der kinematische und kinetische Zustand am reduzierten Kontaktpunkt entsprechend Gleichung (3.79) mit $\{\ddot{g}_n, \ddot{g}_h, \lambda_h\} \geq 0$ beschrieben durch:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{K,r} = \mathbf{n} \ddot{g}_n - \sum_{h=1}^S (\mathbf{s}_h \ddot{g}_h) \quad , \quad \mathbf{K}_r = \sum_{h=1}^S (\mathbf{k}_h \lambda_h) - \mathbf{n} F^* (1 + \mu_{0,u}/\mu_{0,o}) \quad (\text{A.11})$$

Analog zu Gleichung (3.80) wird der Kontaktkraftvektor \mathbf{K}_r nach unten mit Hilfe der nichtnegativen, zum Normalanteil \ddot{g}_n der Kontaktpunktbeschleunigung komplementären Hilfsgröße λ_b limitiert durch

$$\kappa_n \sum_{h=1}^S (\lambda_h) = \left(\mu_{0,u}/\mu_{0,o} \right) F^* + \lambda_b \quad , \quad \lambda_b \geq 0 \wedge \ddot{g}_n \geq 0 \wedge \lambda_b \ddot{g}_n = 0 \quad . \quad (\text{A.12})$$

Die lineare Approximation des zulässigen Kraftbereichs sowie die Lage der zugehörigen Einheitsvektoren aus Gleichung (A.9) für den exemplarischen Fall $S=6$ zeigt Bild A.4.

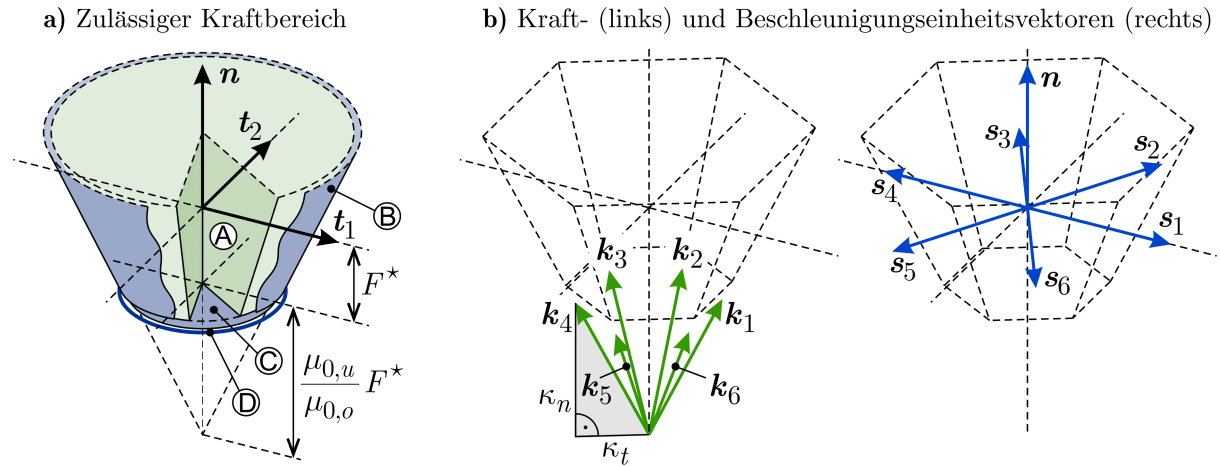


Bild A.4: Aufteilung und Approximation des zulässigen Kraftbereichs bei kraftkonstanter halbstarre lokaler Verspannung ($S=6$)

Die dem Bereich \textcircled{A} bzw. der Hüllfläche \textcircled{B} des zulässigen Kraftbereichs zugehörigen Teilmengen $\mathbb{G}_{\textcircled{A},h}$ bzw. $\mathbb{G}_{\textcircled{B}1,h}$ und $\mathbb{G}_{\textcircled{B}2,h}$ beschreiben das persistente Haften bzw. die zwei Stufen des Losgleitens bei Anpressung an beiden Klemmbanken, so dass mit $\lambda_b \geq 0$ und $\ddot{g}_n = 0$ keine Beschleunigung in Normalenrichtung vorliegt. In Analogie zur gewöhnlichen einseitigen Bindung in Abschnitt 3.1.2 sowie mit Gleichung (A.12) gilt für sie:

$$\textcircled{A}, \textcircled{B}1, \textcircled{B}2 : \kappa_n \sum_{h=1}^S (\lambda_h) \geq (\mu_{0,u}/\mu_{0,o}) F^* \Rightarrow \lambda_b \geq 0 \Rightarrow \ddot{g}_n = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\Rightarrow \mathbb{G}_{\textcircled{A},h} = \left\{ \lambda_1, \lambda_{h+1}, \lambda_{h+2}, \lambda_b \right\} \geq 0 \quad , \quad 1 \leq h \leq S-2,$$

$$\mathbb{G}_{\textcircled{B}1,h} = \left\{ \ddot{g}_h, \lambda_{\overline{h-1}}, \lambda_h, \lambda_b \right\} \geq 0 \quad , \quad \mathbb{G}_{\textcircled{B}2,h} = \left\{ \ddot{g}_h, \ddot{g}_{\overline{h+1}}, \lambda_h, \lambda_b \right\} \geq 0 \quad , \quad 1 \leq h \leq S$$

Zeigt der Vektor \mathbf{K}_r auf die untere Grenzfläche \textcircled{C} oder die sie umgebende kreisförmige Kante \textcircled{D} , liegt der zuvor für das Niveau $\textcircled{2}$ beschriebene Fall des Loslösens an der

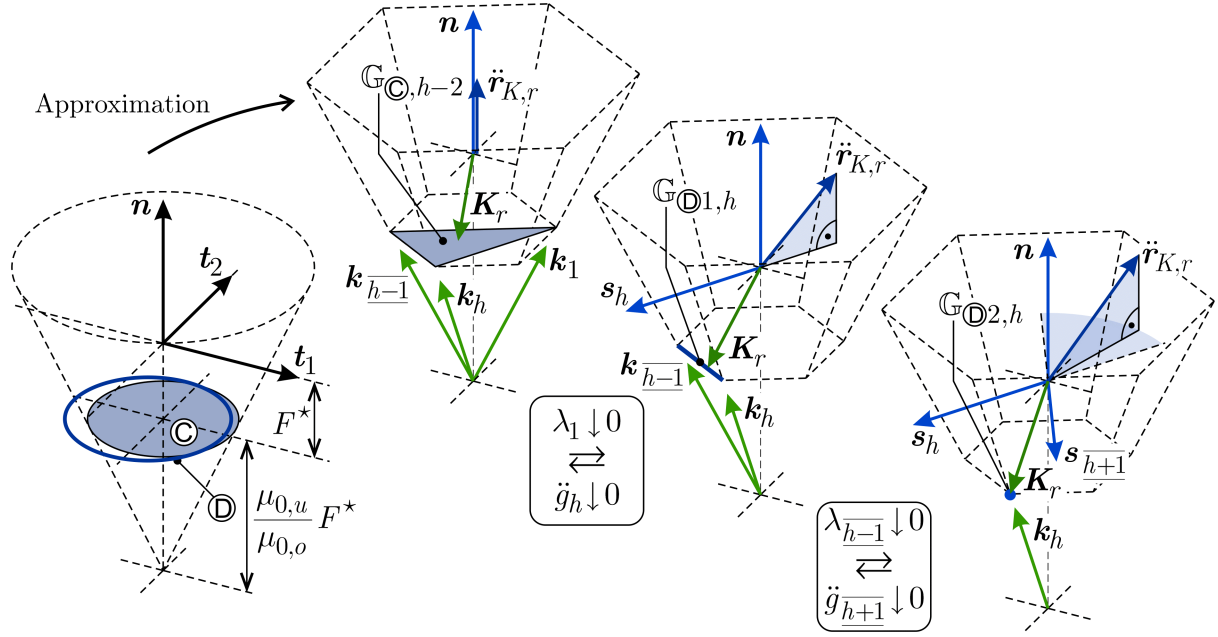


Bild A.5: Lineare Approximation der Grenzfläche © sowie der Kante ©

starrten Klemmbacke vor. Die lineare Approximation von © und © durch die Teilmengen $\mathbb{G}_{\text{©},h}$ bzw. $\mathbb{G}_{\text{©1},h}$ und $\mathbb{G}_{\text{©2},h}$,

$$\begin{aligned} \text{©}, \text{©1}, \text{©2} : \kappa_n \sum_{h=1}^S (\lambda_h) = (\mu_{0,u}/\mu_{0,o}) F^* &\Rightarrow \lambda_b = 0 \Rightarrow \ddot{g}_n \geq 0 \quad (\text{A.14}) \\ \Rightarrow \mathbb{G}_{\text{©},h} = \{ \ddot{g}_n, \lambda_1, \lambda_{h+1}, \lambda_{h+2} \} \geq 0, \quad 1 \leq h \leq S-2, \\ \mathbb{G}_{\text{©1},h} = \{ \ddot{g}_n, \ddot{g}_h, \lambda_{\overline{h-1}}, \lambda_h \} \geq 0, \quad \mathbb{G}_{\text{©2},h} = \{ \ddot{g}_n, \ddot{g}_h, \ddot{g}_{\overline{h+1}}, \lambda_h \} \geq 0, \quad 1 \leq h \leq S, \end{aligned}$$

die mit $\ddot{g}_n \geq 0$ die Separation des reduzierten Kontaktpunkts bei gleichzeitigem Haf-ten bzw. Losgleiten der ersten und zweiten Stufe an der beweglichen Klemmbacke beschreiben, ist in Bild A.5 dargestellt.

Bild A.6 zeigt die Zusammenfassung der obigen Teilmengen mitsamt den möglichen mengenkomplementären Übergängen zum finiten Zustandsautomaten. Damit dem LEMKE-Algorithmus, der sich des finiten Zustandsautomaten als Regulativ für die Basis-Austauschschritte bedient, bei jeder der Teilmengen die erforderliche Anzahl von vier anderen Teilmengen des Kontaktgrößenpools zur Verfügung steht, werden dabei wie beim ebenen Fall zusätzliche redundante Teilmengen \mathbb{G}_{red} berücksichtigt. Diese sind mit den ein Losgleiten der zweiten Stufe beschreibenden Teilmengen $\mathbb{G}_{\text{©2},h}$ und $\mathbb{G}_{\text{©2},h}$ mengenkomplementär verbunden. Die Hypermenge der zulässigen Teilmengen \mathbb{Z}_r ist somit gemäß Gleichung (2.103) neutral abgeschlossen. Die Teilmengen \mathbb{G}_{red} sind der Hypermenge \mathbb{N}_r der neutralen Teilmengen zugeordnet, $\mathbb{G}_{red} \in \mathbb{N}_r^* \subseteq \mathbb{N}_r$, und führen zwar zu keinem Rangabfall der Pivotmatrix, sind jedoch wegen Gleichung (A.12) mit $F^* > 0$ auch nicht in der Lage, den Kontaktzustand nichtnegativ zu beschreiben, da analog zu Gleichung (3.83) gilt:

$$\forall h \in [1, S]: \lambda_h = 0 \Rightarrow \lambda_b = -(\mu_{0,u}/\mu_{0,o}) F^* < 0 \quad (\text{A.15})$$

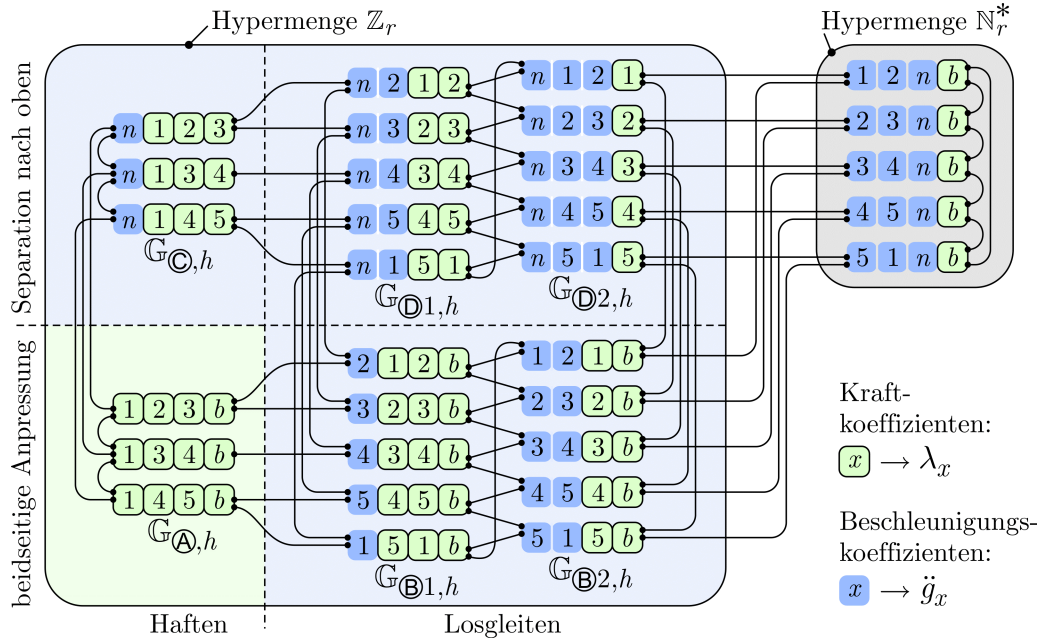


Bild A.6: Finiter Zustandsautomat für die kraftvariable, halbstarre lokale Verspannung im räumlichen Fall ($S=5$)

A.3 Kraftkonstante lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung

(Fortführung von Abschnitt 3.2.5)

Der Kontaktgrößenpool im räumlichen Fall der kraftkonstanten lokalen Verspannung mit beidseitiger Anpressung lautet

$$\mathbb{K}_r = \{\ddot{g}_n^\oplus, \ddot{g}_n^\ominus\} \cup \bigcup_{h=1}^S (\ddot{g}_h) \cup \bigcup_{h=1}^{2S} (\lambda_h) \cup \{\lambda_b, \lambda_e\}, \quad (\text{A.16})$$

der kinematische und kinetische Kontaktzustand wird beschrieben durch:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{K,r} &= \mathbf{n} (\ddot{g}_n^\oplus - \ddot{g}_n^\ominus) + \sum_{h=1}^S (\mathbf{s}_h \ddot{g}_h), \quad \mathbf{K}_r = \sum_{h=1}^{2S} (\mathbf{k}_h \lambda_h), \\ \ddot{g}_n^\oplus &\geq 0, \quad \ddot{g}_n^\ominus \geq 0, \quad \ddot{g}_h \geq 0, \quad \lambda_h \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Die nichtnegativen Hilfsgrößen λ_b und λ_e folgen aus Gleichung (A.5). Bild A.7 zeigt die sich am ebenen Fall orientierende Aufteilung des zulässigen Kraftbereichs sowie die zur linearen Approximation benötigten Einheitsvektoren gemäß Gleichung (A.1).

Die den Bereichen \textcircled{A} bis \textcircled{H} des zulässigen Kraftbereichs gemäß Bild 3.32 zugehörigen und sämtliche Kontaktzustände der Bindung beschreibenden Teilmengen des Kontaktgrößenpools werden nahezu unverändert vom räumlichen Fall der kraftvariablen lokalen Verspannung mit beidseitiger Anpressung aus Abschnitt A.1 übernommen.

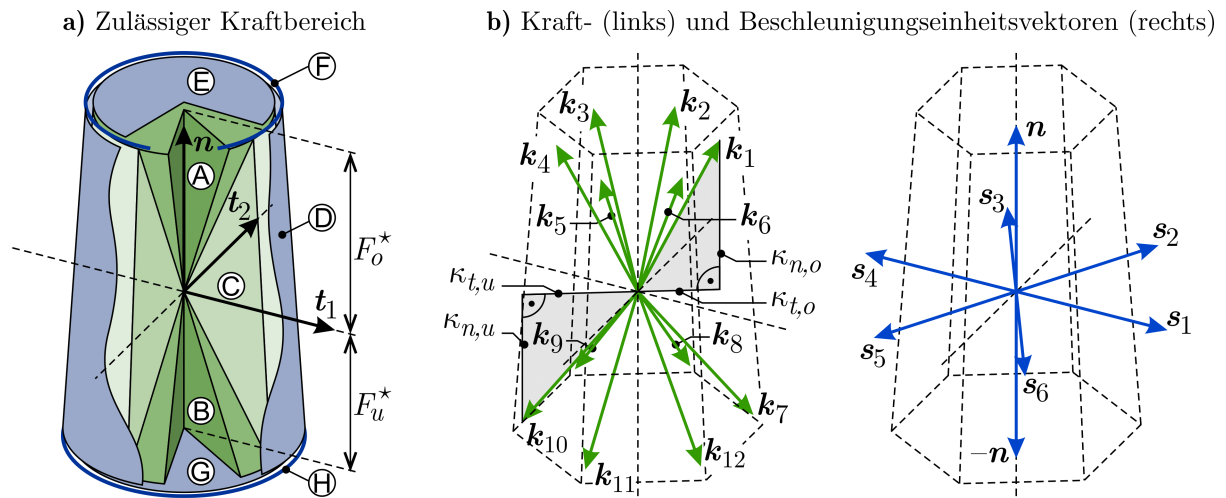


Bild A.7: Aufteilung und Approximation des zulässigen Kraftbereichs bei kraftkonstanter lokaler Verspannung mit beidseitiger Anpressung ($S=6$)

Nur bei den Teilmengen $G_{\ominus,h}$ bis $G_{\oplus,h}$ ist die Hilfsgröße λ_e durch den Beschleunigungsanteil in positive bzw. negative Normalenrichtung \ddot{g}_n^{\oplus} bzw. \ddot{g}_n^{\ominus} auszutauschen. Es folgt der in Bild A.8 für den Fall $S=5$ gezeigte finite Zustandsautomat, der dem aus Bild A.3 in Abschnitt A.1 in seiner Struktur bis auf die analog zum ebenen Fall notwendige Erweiterung durch die Hypermengen der neutralen Teilmengen N_r^* gleicht.

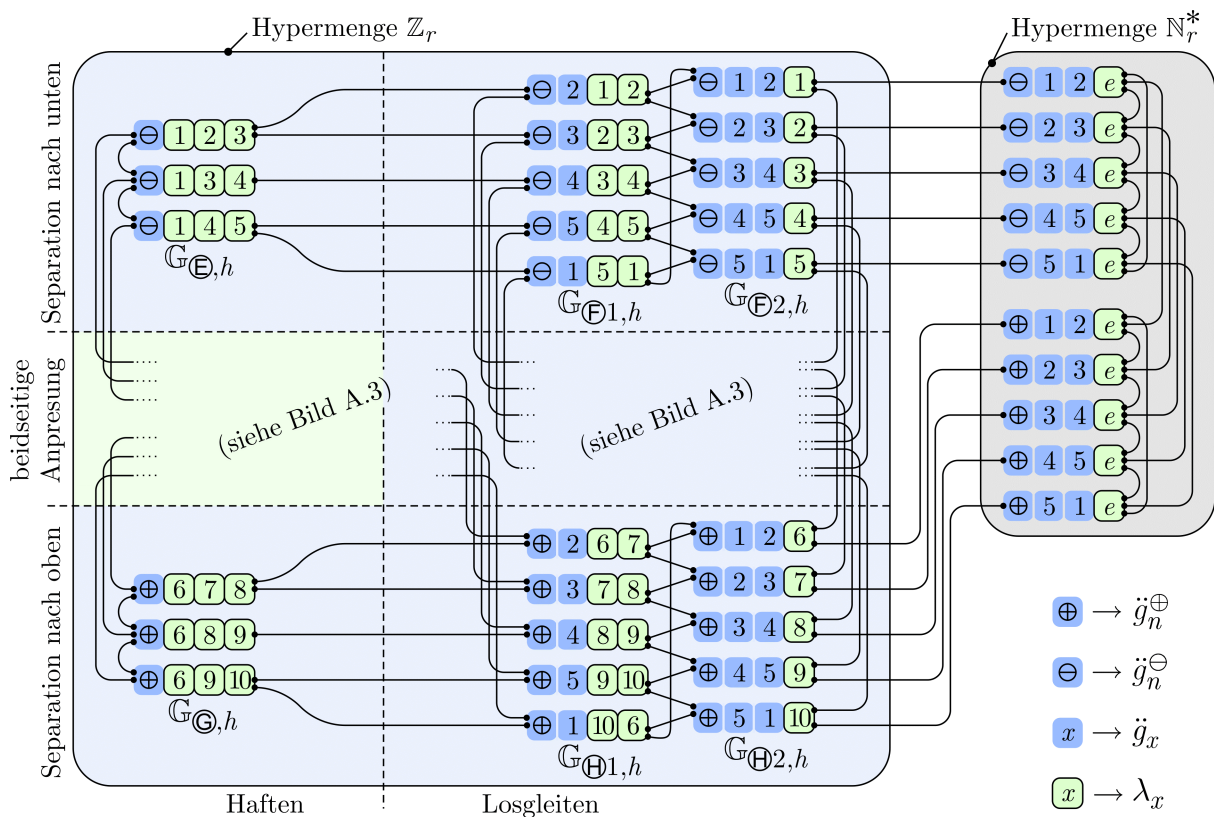


Bild A.8: Finite Zustandsautomat für die kraftkonstante lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung im räumlichen Fall ($S=5$)

Diese enthält ausschließlich Teilmengen, die gemäß Gleichung (A.5) mit $F^* > 0$ wegen

$$\forall h \in [1, 2S]: \lambda_h = 0 \wedge \lambda_b = 0 \Rightarrow 0 = F^* + \lambda_e \Rightarrow \lambda_e \stackrel{!}{<} 0 \quad (\text{A.18})$$

den Kontaktzustand niemals nichtnegativ beschreiben können und somit redundant sind. Die Hypermengende der zulässigen Teilmengen \mathbb{Z}_r ist gemäß Gleichung (2.104) neutral abgeschlossen. Der Lemke-Algorithmus wird somit robust eine Lösung des Kontaktproblems für den mobilen Roboter berechnen, welcher eine kraftkonstante lokale Verspannung mit beidseitiger Anpressung zur festen Umgebung aufweist.

Anhang B

Modellparameter

Alle im Folgenden genannten Vektoren \boldsymbol{r} haben die Einheit $[\text{mm}]^3$, alle Massenträgheitsmomente Θ haben die Einheit $[\text{gmm}^2]$.

B.1 Parameter der Montageadapter

Die folgenden Werte enthalten stets die Anteile der Schrauben und Passhülsen. Die Massenträgheitsmomente wurden mittels der CAD-Software *Catia* bestimmt. Bei allen Achsfolgen gilt mangels entsprechender Adapter ${}_5\Theta_{A,5} = {}_6\Theta_{A,6} = \mathbf{0}_3$.

Achsfolge FP₁W₂F

Ortsvektoren ${}^i r_{P_1 A, i}$ bzw. ${}^i r_{P_1 P_2, i}$ vom Bezugspunkt $P_{1, i}$ zum Adapterschwerpunkt $S_{A, i}$ bzw. zum Bezugspunkt $P_{2, i}$ (vgl. Bild B.1):

$$\hat{r}_{P_1 A} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & -6,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 45 & 4,8 & 0 & 0 & 0 \\ 13,5 & 0 & 0 & 4,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{r}_{P_1 P_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -17 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 90 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 26 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\Rightarrow {}^i r_{P_1 A, i} = \{\hat{r}_{P_1 A}\}_i, \quad {}^i r_{P_1 P_2, i} = \{\hat{r}_{P_1 P_2}\}_i$$

Massen $m_{A, i}$ der Montageadapter:

$$\mathbf{m}_A = (160 \ 356 \ 106 \ 62 \ 0 \ 0) \text{g} \Rightarrow m_{A, i} = \{\mathbf{m}_A\}_i \quad (\text{B.2})$$

Massenträgheitstensoren ${}^i \Theta_{A, i}$ der Montageadapter, bezogen auf $S_{A, i}$:

$${}^1 \Theta_{A, 1} = \begin{bmatrix} 1,829 & 0 & 0 \\ 0 & 1,829 & 0,002 \\ 0 & 0,002 & 3,336 \end{bmatrix} 10^5, \quad {}^2 \Theta_{A, 2} = \begin{bmatrix} 6,956 & 0,010 & 0 \\ 0,010 & 6,991 & 0 \\ 0 & 0 & 6,956 \end{bmatrix} 10^5, \quad (\text{B.3})$$

$${}^3 \Theta_{A, 3} = \begin{bmatrix} 1,909 & 0,020 & 0 \\ 0,020 & 0,973 & 0 \\ 0 & 0,002 & 1,028 \end{bmatrix} 10^5, \quad {}^4 \Theta_{A, 4} = \begin{bmatrix} 0,432 & 0 & 0 \\ 0 & 0,448 & 0 \\ 0 & 0 & 0,857 \end{bmatrix} 10^5$$

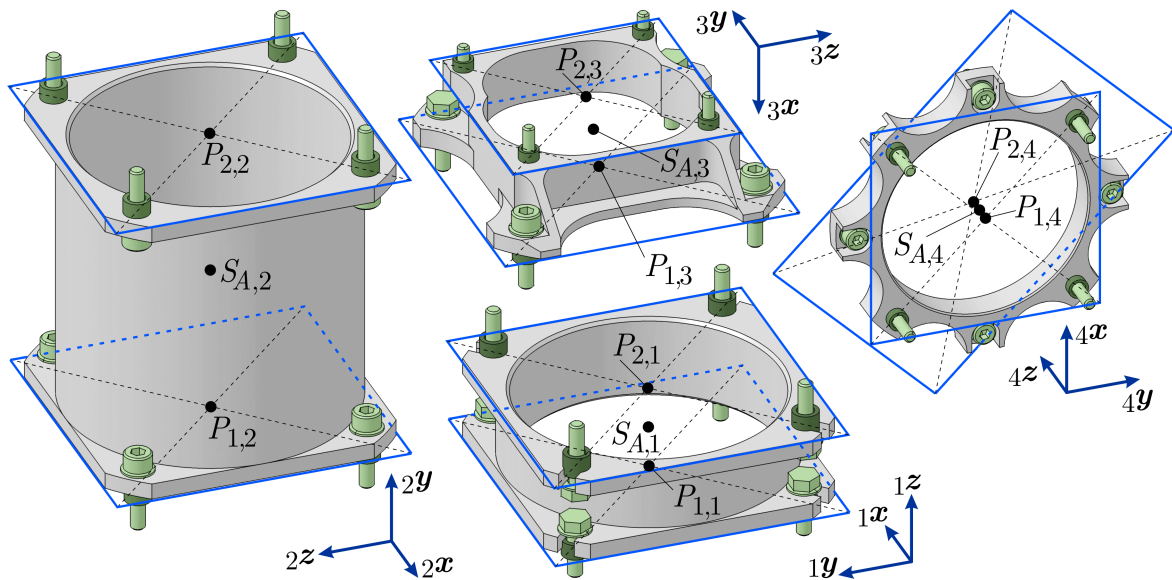


Bild B.1: Verwendete Montageadapter bei der Achsfolge FP₁W₂F

Achsfolge FSFS

Analog zur Achsfolge FP_1W_2F gilt (vgl. Bild B.2):

$$\hat{r}_{P_1A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 19,4 & 1,0 & 30,9 & 0 & 0 \\ 18,3 & -11,4 & 25,3 & 9,3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{r}_{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -19,3 & 34,8 & 24,1 & 54,7 & 0 & 0 \\ 29,2 & -3,6 & 46,4 & -0,4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$\Rightarrow {}_i r_{P_1A,i} = \{\hat{r}_{P_1A}\}_i, \quad {}_i r_{P_1P_2,i} = \{\hat{r}_{P_1P_2}\}_i$$

$$m_A = (203 \ 203 \ 199 \ 161 \ 0 \ 0) \text{g} \Rightarrow m_{A,i} = \{m_A\}_i \quad (\text{B.5})$$

$${}_1 \Theta_{A,1} = \begin{bmatrix} 2,284 & 0 & 0 \\ 0 & 2,225 & -0,214 \\ 0 & -0,214 & 3,628 \end{bmatrix} 10^5, \quad {}_2 \Theta_{A,2} = \begin{bmatrix} 2,284 & 0 & 0 \\ 0 & 3,504 & 0,452 \\ 0 & 0,452 & 2,349 \end{bmatrix} 10^5, \quad (\text{B.6})$$

$${}_3 \Theta_{A,3} = \begin{bmatrix} 2,270 & 0 & 0 \\ 0 & 2,149 & -0,036 \\ 0 & -0,036 & 2,447 \end{bmatrix} 10^5, \quad {}_4 \Theta_{A,4} = \begin{bmatrix} 1,518 & 0,007 & 0,004 \\ 0,007 & 1,304 & -0,225 \\ 0,004 & -0,225 & 1,756 \end{bmatrix} 10^5$$

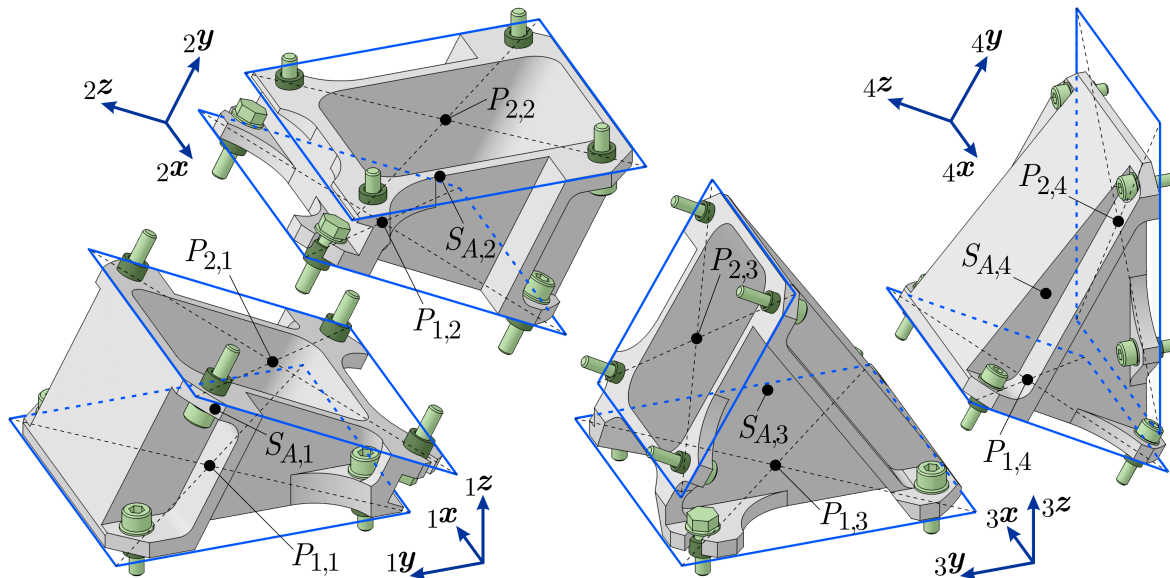


Bild B.2: Verwendete Montageadapter bei der Achsfolge FSFS

Achsfolge $W_1P_1P_2W_2$

Analog zur Achsfolge FP_1W_2F gilt (vgl. Bild B.3):

$$\hat{r}_{P_1A} = \begin{bmatrix} 13 & -0,5 & 0 & -6,3 & 0 & 0 \\ 0 & 45 & 35,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0 & 10,0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{r}_{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 26 & -1 & 0 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 80 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\Rightarrow {}_i r_{P_1A,i} = \{\hat{r}_{P_1A}\}_i, \quad {}_i r_{P_1P_2,i} = \{\hat{r}_{P_1P_2}\}_i$$

$$m_A = (159 \ 356 \ 230 \ 78 \ 0 \ 0) \text{g} \Rightarrow m_{A,i} = \{m_A\}_i \quad (\text{B.8})$$

$${}_1 \Theta_{A,1} = \begin{bmatrix} 3,325 & 0 & -0,001 \\ 0 & 1,816 & 0 \\ -0,001 & 0 & 1,816 \end{bmatrix} 10^5, \quad {}_2 \Theta_{A,2} = \begin{bmatrix} 6,956 & 0,010 & 0 \\ 0,010 & 6,991 & 0 \\ 0 & 0 & 6,956 \end{bmatrix} 10^5, \quad (\text{B.9})$$

$${}_3 \Theta_{A,3} = \begin{bmatrix} 3,662 & 0 & 0 \\ 0 & 3,732 & 0 \\ 0 & 0 & 3,662 \end{bmatrix} 10^5, \quad {}_4 \Theta_{A,4} = \begin{bmatrix} 1,021 & 0 & -0,016 \\ 0 & 0,534 & 0,008 \\ -0,016 & 0,008 & 0,486 \end{bmatrix} 10^5$$

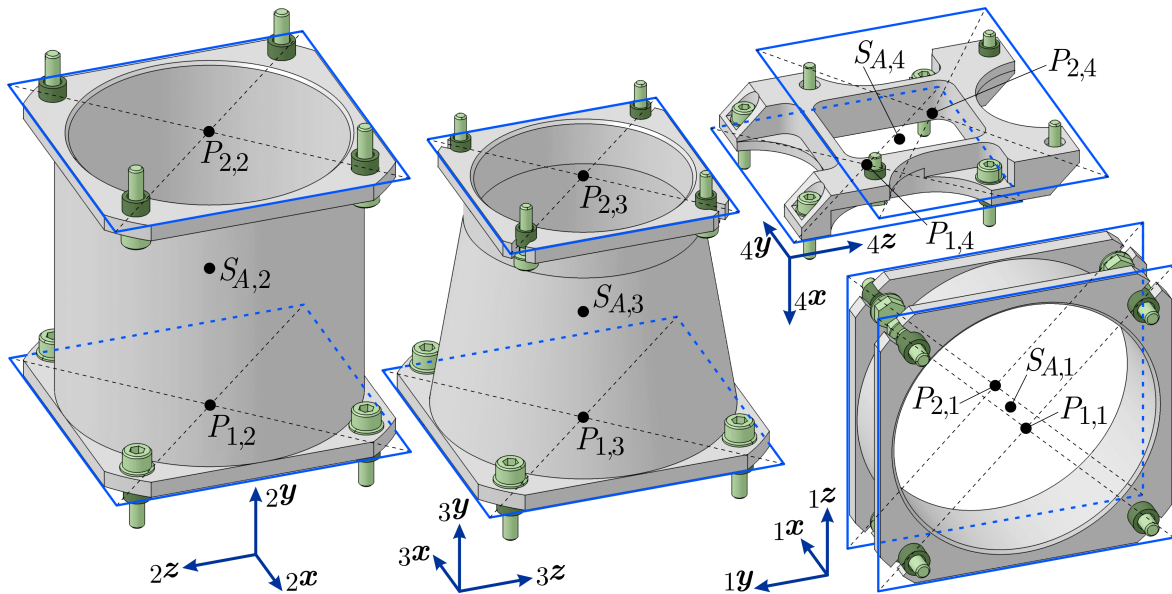


Bild B.3: Verwendete Montageadapter bei der Achsfolge $W_1P_1P_2W_2$

B.2 Parameter der realisierten Achsfolgen

Im Folgenden werden die Werte der zur Modellbildung des Roboterarms gemäß Abschnitt 6.1.4 benötigten Parameter für die drei realisierten Achsfolgen dargestellt. Die Massenträgheitstensoren ${}_i \Theta_{M_2,i}$ und ${}_i \Theta_{M_1,k}$ enthalten die in Abschnitt 6.1.2 genann-

ten Werte der Hauptmassenträgheitsmomente der Antriebsmodule. Bild B.4 zeigt die Lage der sechs körperfesten Koordinatensysteme bei den realisierten Achsfolgen. Der z -Vektor zeigt stets in positive Drehrichtung ($\hat{=}$ rechtsdrehend) der i -ten Drehachse.

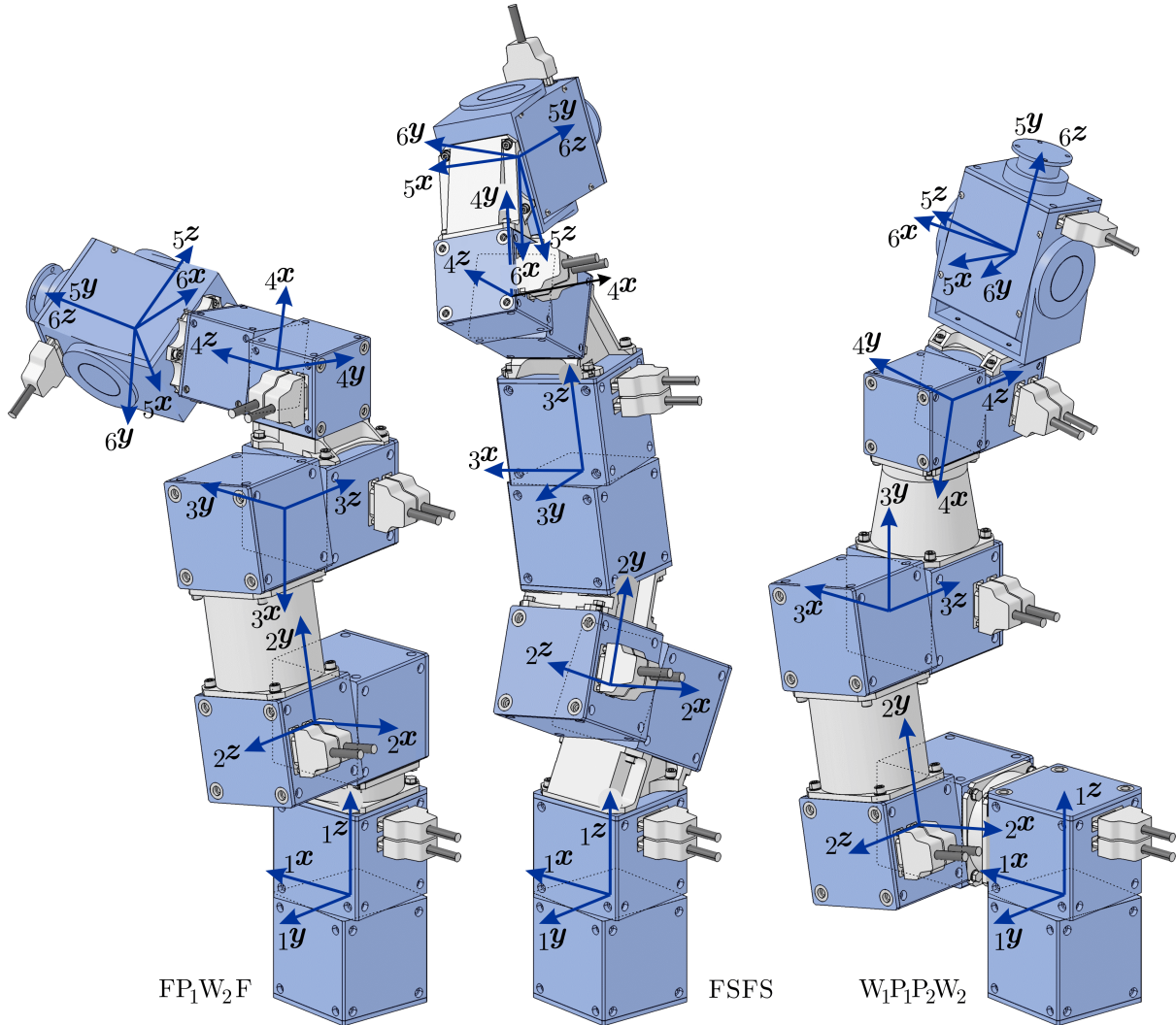


Bild B.4: Lage der körperfesten Koordinatensysteme

Allgemeingültige Parameter

Die folgenden Parameter sind bei allen drei betrachteten Achsfolgen gültig.

Gelenkwinkelabhängige Transformationsmatrizen $\mathbf{A}_{i-1,i}(\varphi_i)$:

$$\mathbf{A}_{B,1}(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{5,6}(\varphi_6) = \begin{bmatrix} \sin \varphi_6 & \cos \varphi_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \varphi_6 & -\sin \varphi_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Körperfeste Ortsvektoren ${}^i r_{QM,i}$ vom Kopplungspunkt Q_i zum Schwerpunkt $S_{M,i}$ des i -ten Antriebsmoduls:

$$\hat{\mathbf{r}}_{QM_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10,6 & 0 \\ -13,2 & -13,2 & -13,2 & 11,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QM,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QM_i}\}_i \quad (\text{B.11})$$

Massen $m_{M_2,i}$ bzw. $m_{M_1,k}$, die der zweiten Hälfte des jeweils i -ten bzw. der ersten Hälfte des nachfolgenden k -ten Antriebsmoduls zugeordnet sind ($k = i+1$).

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{M_2} &= \begin{pmatrix} 3409 & 3409 & 3409 & 1833 & 1502 & 0 \end{pmatrix} \text{g} \Rightarrow m_{M_2,i} = \{\mathbf{m}_{M_2}\}_i, \\ \mathbf{m}_{M_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 283 & 0 \end{pmatrix} \text{g} \Rightarrow m_{M_1,k} = \{\mathbf{m}_{M_1}\}_k \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Massenträgheitstensoren ${}_i\Theta_{M_2,i}$ der jeweils am i -ten Roboterglied beteiligten zweiten Hälfte des i -ten Antriebsmoduls, bezogen auf den Schwerpunkt S_i :

$$\begin{aligned} {}_1\Theta_{M_2,1} &= {}_2\Theta_{M_2,2} = {}_3\Theta_{M_2,3} = \text{diag}\left\langle\left\langle \Theta_{90,q} \quad \Theta_{90,q} \quad \Theta_{90,a,el} \right\rangle\right\rangle, \\ {}_5\Theta_{M_2,5} &= \text{diag}\left\langle\left\langle \Theta_{HG,B,q1} \quad \Theta_{HG,B,q2} \quad \Theta_{HG,B,a} \right\rangle\right\rangle, \quad {}_6\Theta_{M_2,6} = \mathbf{0}_3 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Es ist stets auf Hüllkugelbasis eine Kollision mit der Aufstandsebene zu vermeiden, welche gemäß Abschnitt 4.4 als Hindernis vom Typ „Wand“ zu berücksichtigen ist:

$${}_I\mathbf{n}_W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad d_W = 40 \text{ mm} \quad (\text{B.14})$$

Bei allen betrachteten Achsfolgen stellen die Körper 5 sowie diesem zugeordnet der Körper 6 mögliche Kollisionspartner mit der Aufstandsebene dar, dementsprechend ist stets die Nebenbedingung $\mathbf{N}_{OU,5}(\mathbf{p})$ gemäß Gleichung (4.30) zu berücksichtigen. Die Lage und Radien der zugehörigen $n_5 = 6$ Hüllkugeln sind definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{QO,5} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -34 & -34 & 42 & 42 & 74 & 48 \\ -25 & 25 & -25 & 25 & 0 & -89 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_5\mathbf{r}_{SO,5,h} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QO,5}\}_h - {}_5\mathbf{r}_{QS,5} \\ \hat{\mathbf{R}}_{O,5} &= \begin{pmatrix} 45 & 45 & 45 & 45 & 30 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow R_{O,5,h} = \{\hat{\mathbf{R}}_{O,5}\}_h \text{ [mm]} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Achsfolge FP₁W₂F

Gelenkwinkelabhängige Transformationsmatrizen $\mathbf{A}_{i-1,i}(\varphi_i)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1,2}(\varphi_2) &= \begin{bmatrix} -c\varphi_2 & s\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s\varphi_2 & c\varphi_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{2,3}(\varphi_3) = \begin{bmatrix} -s\varphi_3 & -c\varphi_3 & 0 \\ -c\varphi_3 & s\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{3,4}(\varphi_4) = \begin{bmatrix} -c\varphi_4 & s\varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s\varphi_4 & c\varphi_4 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{4,5}(\varphi_5) &= \mathbf{A}_{4,4'} \mathbf{A}_{4',5}(\varphi_5) = \begin{bmatrix} -s45^\circ & 0 & c45^\circ \\ c45^\circ & 0 & s45^\circ \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi_5 & -s\varphi_5 & 0 \\ s\varphi_5 & c\varphi_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Körperfeste Ortsvektoren ${}^i\mathbf{r}_{QQ,i}$ vom Kopplungspunkt Q_i zum folgenden Kopplungspunkt Q_{i+1} :

$$\hat{\mathbf{r}}_{QQ} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -97 & 0 & 0 & 0 \\ 45,7 & 180 & 46,1 & 0 & 0 & 0 \\ 161,2 & 0 & 45,2 & 150,1 & 0 & 90 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^i\mathbf{r}_{QQ,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QQ}\}_i \quad (\text{B.17})$$

Körperfeste Ortsvektoren ${}^i\mathbf{r}_{QM,k}$ vom Kopplungspunkt Q_k zum Schwerpunkt $S_{M,k}$ des nachfolgenden k -ten Antriebsmoduls ($k=i+1$):

$$\hat{\mathbf{r}}_{QM_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13,2 & 0 & 11,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13,2 & 0 & -34,3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^i\mathbf{r}_{QM,k} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QM_k}\}_i \quad (\text{B.18})$$

Körperfeste Ortsvektoren ${}^i\mathbf{r}_{QA,i}$ vom Kopplungspunkt Q_i zum Schwerpunkt $S_{A,i}$ des i -ten Montageadapters zwischen dem i -ten und k -ten Antriebsmodul:

$$\hat{\mathbf{r}}_{QA} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & -51,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 90,0 & 4,8 & 0 & 0 & 0 \\ 103,7 & 45,2 & 45,2 & 74,6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^i\mathbf{r}_{QA,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QA}\}_i \quad (\text{B.19})$$

Körperfeste Ortsvektoren ${}^i\mathbf{r}_{QK_2,i}$ (bzw. ${}^i\mathbf{r}_{QK_1,k}$) vom Kopplungspunkt Q_i zu dem Schwerpunkt $S_{K_2,i}$ (bzw. $S_{K_1,k}$) der an der zweiten (bzw. ersten) Hälfte des k -ten (bzw. i -ten) Antriebsmoduls angeschlossenen Verbindungskabel:

$$\hat{\mathbf{r}}_{QK_2} = \begin{bmatrix} -95,0 & 95,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -95,0 & 0 & 48,3 & 0 \\ 67,5 & 67,5 & 67,5 & 0 & -95,0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}_{QK_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -97,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,4 & 0 & 48,3 & 0 \\ 0 & 0 & -39,8 & 0 & 65,0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\Rightarrow {}^i\mathbf{r}_{QK_2,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QK_2}\}_i, \quad {}^i\mathbf{r}_{QK_1,k} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QK_1}\}_i$$

Körperfeste Ortsvektoren ${}^i\mathbf{r}_{QS,i}$ vom Kopplungspunkt Q_i zum Gesamtschwerpunkt S_i des i -ten Roboterglieds:

$$\hat{\mathbf{r}}_{QS} = \begin{bmatrix} -6,3 & 6,0 & -7,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8,0 & -6,0 & 0 & 14,6 & 0 \\ -3,0 & -2,8 & -8,4 & 26,9 & -4,7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^i\mathbf{r}_{QS,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QS}\}_i \quad (\text{B.21})$$

Massen $m_{K_2,i}$ und $m_{K_1,k}$ der jeweils an der zweiten Hälfte des i -ten bzw. ersten Hälfte des k -ten Antriebsmoduls angeschlossenen Verbindungskabel:

$$\mathbf{m}_{K_2} = (250 \ 250 \ 250 \ 0 \ 125 \ 0) \text{g} \Rightarrow m_{K_2,i} = \{\mathbf{m}_{K_2}\}_i, \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{m}_{K_1} = (0 \ 0 \ 250 \ 0 \ 57 \ 0) \text{g} \Rightarrow m_{K_1,k} = \{\mathbf{m}_{K_1}\}_i$$

Massenträgheitstensoren ${}^i\mathbf{\Theta}_{M_2,i}$ der jeweils am i -ten Roboterglied beteiligten zweiten Hälfte des i -ten Antriebsmoduls, bezogen auf den Schwerpunkt S_i :

$${}_4\Theta_{M_2,4} = \text{diag}\left\langle\left\langle 0 \ 0 \ \Theta_{70,a,me} \right\rangle\right\rangle \quad (\text{B.23})$$

Massenträgheitstensoren ${}_i\Theta_{M_1,i+1}$ der jeweils am i -ten Roboterglied beteiligten ersten Hälfte des $(i+1)$ -ten Antriebsmoduls, bezogen auf den Schwerpunkt S_{i+1} :

$$\begin{aligned} {}_1\Theta_{M_1,2} &= \text{diag}\left\langle\left\langle 0 \ \Theta_{90,a,me} \ 0 \right\rangle\right\rangle, \quad {}_2\Theta_{M_1,3} = \text{diag}\left\langle\left\langle 0 \ 0 \ \Theta_{90,a,me} \right\rangle\right\rangle, \\ {}_3\Theta_{M_1,4} &= \text{diag}\left\langle\left\langle \Theta_{70,q} \ \Theta_{70,a,el} \ \Theta_{70,q} \right\rangle\right\rangle, \quad {}_5\Theta_{M_1,6} = {}_6\Theta_{M_1,7} = \mathbf{0}_3, \\ {}_4\Theta_{M_1,5} &= \mathbf{A}_{4,4'} \text{diag}\left\langle\left\langle \Theta_{HG,A,q1} \ \Theta_{HG,A,q2} \ \Theta_{HG,A,a} \right\rangle\right\rangle \mathbf{A}_{4,4'}^T \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Zur Vermeidung einer Kollision der am 4. Antriebsmodul angebrachten Kabelstecker mit dem die Antriebsmodule 2 und 3 verbindenden zylindrischen Montageadapter wird der dritte Gelenkwinkel nach oben limitiert, $\varphi_{max,3} = +137^\circ$, die übrigen kinematischen Grenzwerte gemäß Gleichung (6.1) gelten unverändert.

Weitere mögliche Eigenkollisionen der Achsfolge FP₁W₂F werden durch die Nebenbedingungen $\mathbf{N}_{OO,B,3}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO,B,5}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO,1',3}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO,1',5}(\mathbf{p})$ und $\mathbf{N}_{OO,1'',5}(\mathbf{p})$ gemäß Gleichung (4.32) erfasst. In Ergänzung zu ${}_5\mathbf{r}_{S_{O,5,h}}$ und $R_{O,5h}$ aus Gleichung (B.15) lauten die die zugehörigen Hüllkugeln definierenden Parameter:

$${}_B\mathbf{r}_{S_{O,B,1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -45,2 \end{pmatrix}^T - {}_B\mathbf{r}_{Q_1B}, \quad R_{O,B,1} = 77 \text{ mm} \quad (\text{B.25})$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{Q_{O,1'}} = \begin{bmatrix} 24 & 24 & 24 & 24 & -89 \\ -24 & 24 & -24 & 24 & 0 \\ 21,2 & 21,2 & 69,2 & 69,2 & 68,6 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}}_{O,1'} = \begin{pmatrix} 36 & 36 & 36 & 36 & 15 \end{pmatrix} \quad (\text{B.26})$$

$$\Rightarrow \quad {}_1\mathbf{r}_{S_{O,1',h}} = \left\{ \hat{\mathbf{r}}_{Q_{O,1'}} \right\}_h - {}_1\mathbf{r}_{QS,1}, \quad R_{O,1',h} = \left\{ \hat{\mathbf{R}}_{O,1'} \right\}_h [\text{mm}]$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_{Q_{O,1''}} &= \begin{bmatrix} 0 & 24 & 24 & 24 & 24 & -24 & -24 \\ 0,25 & -23,5 & 24,5 & -23,5 & 24,5 & -23,5 & 24,5 \\ 103,2 & 137,2 & 137,2 & 185,2 & 185,2 & 185,2 & 185,2 \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{R}}_{O,1''} &= \begin{pmatrix} 50 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\Rightarrow \quad {}_1\mathbf{r}_{S_{O,1'',h}} = \left\{ \hat{\mathbf{r}}_{Q_{O,1''}} \right\}_h - {}_1\mathbf{r}_{QS,1}, \quad R_{O,1'',h} = \left\{ \hat{\mathbf{R}}_{O,1''} \right\}_h [\text{mm}]$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{Q_{O,3}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -97 \\ 0 & -89 & 11 \\ 45,2 & 68,6 & 45,2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}}_{O,3} = \begin{pmatrix} 77 & 15 & 60 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} {}_3\mathbf{r}_{S_{O,3,h}} = \left\{ \hat{\mathbf{r}}_{Q_{O,3}} \right\}_h - {}_3\mathbf{r}_{QS,3} \\ R_{O,3,h} = \left\{ \hat{\mathbf{R}}_{O,3} \right\}_h [\text{mm}] \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Achsfolge FSFS

Analog zur Achsfolge FP₁W₂F gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{1,2}(\varphi_2) = \mathbf{A}_{1,1'} \mathbf{A}_{1',2}(\varphi_2) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -s27,5^\circ & c27,5^\circ \\ 0 & c27,5^\circ & s27,5^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi_2 & -s\varphi_2 & 0 \\ s\varphi_2 & c\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_{2,3}(\varphi_3) = \mathbf{A}_{2,2'} \mathbf{A}_{2',3}(\varphi_3) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -s27,5^\circ & c27,5^\circ \\ 0 & c27,5^\circ & s27,5^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi_3 & -s\varphi_3 & 0 \\ s\varphi_3 & c\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_{3,4}(\varphi_4) = \mathbf{A}_{3,3'} \mathbf{A}_{3',4}(\varphi_4) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -s30^\circ & c30^\circ \\ 0 & c30^\circ & s30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi_4 & -s\varphi_4 & 0 \\ s\varphi_4 & c\varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_{4,5}(\varphi_5) = \mathbf{A}_{4,4'} \mathbf{A}_{4',5}(\varphi_5) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & s30^\circ & -c30^\circ \\ 0 & -c30^\circ & -s30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\varphi_5 & -s\varphi_5 & 0 \\ s\varphi_5 & c\varphi_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QQ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 181,2c27,5^\circ & 98c30^\circ & 144c30^\circ & 0 & 0 \\ 181,2 & 181,2s27,5^\circ & 122,7 + 98s30^\circ & -98 + 144c30^\circ & 0 & 90 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QQ,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QQ}\}_i \tag{B.30}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QM_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13,2c27,5^\circ & -13,2c27,5^\circ & -11,5c30^\circ & -34,3s30^\circ & 0 & 0 \\ -13,2s27,5^\circ & -13,2s27,5^\circ & -11,5s30^\circ & 34,3c30^\circ & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QM,k} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QM_k}\}_i \tag{B.31}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 64,4 & 1,1 & 65,9 & 0 & 0 \\ 108,4 & 33,8 & 115,5 & 44,4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QA,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QA}\}_i \tag{B.32}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{r}}_{QK_2} &= \begin{bmatrix} -95,0 & 95,0 & -95,0 & 85,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48,3 & 0 \\ 67,5 & 67,5 & 67,5 & 48,5 & -95,0 & 0 \end{bmatrix}, & \hat{\mathbf{r}}_{QK_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 65,0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QK_2,i} &= \{\hat{\mathbf{r}}_{QK_2}\}_i, & {}_i\mathbf{r}_{QK_1,k} &= \{\hat{\mathbf{r}}_{QK_1}\}_i
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QS} = \begin{bmatrix} -6,2 & 6,2 & -6,2 & 8,4 & 0 & 0 \\ 0 & 3,4 & 0,1 & 16,3 & 14,6 & 0 \\ -1,5 & -5,3 & -1,5 & -0,3 & -4,7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QS,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QS}\}_i \tag{B.34}$$

$$\mathbf{m}_{K_2} = \begin{pmatrix} 250 & 250 & 250 & 250 & 125 & 0 \end{pmatrix} \text{g} \Rightarrow m_{K_2,i} = \{\mathbf{m}_{K_2}\}_i, \quad (\text{B.35})$$

$$\mathbf{m}_{K_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 57 & 0 \end{pmatrix} \text{g} \Rightarrow m_{K_1,k} = \{\mathbf{m}_{K_1}\}_i$$

$${}_4\Theta_{M_2,4} = \text{diag} \left\langle \left(\Theta_{70,q} \quad \Theta_{70,q} \quad \Theta_{70,a,el} \right) \right\rangle \quad (\text{B.36})$$

$${}_1\Theta_{M_1,2} = \mathbf{A}_{1,1'} \text{diag} \left\langle \left(0 \ 0 \ \Theta_{90,a,me} \right) \right\rangle \mathbf{A}_{1,1'}^T, \quad {}_2\Theta_{M_1,3} = \mathbf{A}_{2,2'} \text{diag} \left\langle \left(0 \ 0 \ \Theta_{90,a,me} \right) \right\rangle \mathbf{A}_{2,2'}^T, \quad (\text{B.37})$$

$${}_3\Theta_{M_1,4} = \mathbf{A}_{3,3'} \text{diag} \left\langle \left(0 \ 0 \ \Theta_{70,a,me} \right) \right\rangle \mathbf{A}_{3,3'}^T,$$

$${}_4\Theta_{M_1,5} = \mathbf{A}_{4,4'} \text{diag} \left\langle \left(\Theta_{HG,A,q1} \quad \Theta_{HG,A,q2} \quad \Theta_{HG,A,a} \right) \right\rangle \mathbf{A}_{4,4'}^T, \quad {}_5\Theta_{M_1,6} = {}_6\Theta_{M_1,7} = \mathbf{0}_3$$

Es liegen keine kugelhüllenbasierten Eigenkollisionsmöglichkeiten vor.

Achsfolge $\mathbf{W}_1\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{W}_2$

Analog zur Achsfolge $\mathbf{FP}_1\mathbf{W}_2\mathbf{F}$ gilt:

$$\mathbf{A}_{1,2}(\varphi_2) = \begin{bmatrix} -c\varphi_2 & s\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ s\varphi_2 & c\varphi_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{2,3}(\varphi_3) = \begin{bmatrix} -c\varphi_3 & s\varphi_3 & 0 \\ s\varphi_3 & c\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.38})$$

$$\mathbf{A}_{3,4}(\varphi_4) = \begin{bmatrix} s\varphi_4 & c\varphi_4 & 0 \\ -c\varphi_4 & s\varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{4,5}(\varphi_5) = \begin{bmatrix} -s\varphi_5 & -c\varphi_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c\varphi_5 & s\varphi_5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QQ} = \begin{bmatrix} 116 & -1 & 0 & -118 & 0 & 0 \\ 45,2 & 180 & 160 & 0 & 0 & 0 \\ 45,7 & 0 & 80,4 & 55,1 & 0 & 90 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QQ,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QQ}\}_i \quad (\text{B.39})$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QM_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 34,3 & 0 & 0 \\ -13,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13,2 & -11,5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QM,k} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QM_k}\}_i \quad (\text{B.40})$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QA} = \begin{bmatrix} 58,0 & -0,5 & 0 & -41,3 & 0 & 0 \\ 0 & 90,0 & 80,0 & 0 & 0 & 0 \\ 45,5 & 45,2 & 45,2 & 45,1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QA,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QA}\}_i \quad (\text{B.41})$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QK_2} = \begin{bmatrix} -95,0 & 95,0 & -95,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -85,0 & 48,3 & 0 \\ 67,5 & 67,5 & 67,5 & 48,5 & -95,0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{r}}_{QK_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 65,0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.42})$$

$$\Rightarrow {}_i\mathbf{r}_{QK_2,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QK_2}\}_i, \quad {}_i\mathbf{r}_{QK_1,k} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QK_1}\}_i$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QS} = \begin{bmatrix} -3,9 & 6,0 & -6,2 & -11,0 & 0,0 & 0 \\ 0,0 & 8,0 & 4,7 & -8,7 & 14,6 & 0 \\ -5,4 & -2,8 & -4,7 & 4,1 & -4,7 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad {}_i\mathbf{r}_{QS,i} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QS}\}_i \quad (\text{B.43})$$

$$\mathbf{m}_{K_2} = (250 \ 250 \ 250 \ 250 \ 125 \ 0) \text{g} \Rightarrow \quad m_{K_2,i} = \{\mathbf{m}_{K_2}\}_i \quad , \quad (\text{B.44})$$

$$\mathbf{m}_{K_1} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 57 \ 0) \text{g} \Rightarrow \quad m_{K_1,k} = \{\mathbf{m}_{K_1}\}_i$$

$${}_4\Theta_{M_2,4} = \text{diag}\left(\left\langle \Theta_{70,q} \ \Theta_{70,q} \ \Theta_{70,a,el} \right\rangle\right) \quad (\text{B.45})$$

$${}_1\Theta_{M_1,2} = \text{diag}\left(\left\langle 0 \ \Theta_{90,a,me} \ 0 \right\rangle\right) \quad , \quad {}_2\Theta_{M_1,3} = \text{diag}\left(\left\langle 0 \ 0 \ \Theta_{90,a,me} \right\rangle\right) \quad ,$$

$${}_3\Theta_{M_1,4} = \text{diag}\left(\left\langle \Theta_{70,q} \ \Theta_{70,q} \ \Theta_{70,a,el} \right\rangle\right) \quad , \quad (\text{B.46})$$

$${}_4\Theta_{M_1,5} = \text{diag}\left(\left\langle \Theta_{HG,A,q2} \ \Theta_{HG,A,a} \ \Theta_{HG,A,q1} \right\rangle\right) \quad , \quad {}_5\Theta_{M_1,6} = {}_6\Theta_{M_1,7} = \mathbf{0}_3$$

Bzgl. einer Kollision mit der Aufstandsebene, siehe Gleichung (B.14), sind außer Körper 5, siehe Gleichung (B.15), noch das dritte 90mm-Antriebsmodul (Körper 3) und das 70mm-Antriebsmodul mit den daran befestigten Kabelsteckern (Körper 4) und damit die Nebenbedingungen $\mathbf{N}_{OU,3}(\mathbf{p})$ und $\mathbf{N}_{OU,4}(\mathbf{p})$ zu berücksichtigen. Für die Lage und die Radien der zugeordneten Hüllkugeln gilt:

$${}_3\mathbf{r}_{SO,3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 45,2 \end{pmatrix}^T - {}_3\mathbf{r}_{QS,3} \quad , \quad R_{O,3,1} = 63 \text{ mm}$$

$${}_4\mathbf{r}_{SO,4,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35,1 \end{pmatrix}^T - {}_4\mathbf{r}_{QS,4} \quad , \quad R_{O,4,1} = 49 \text{ mm} \quad (\text{B.47})$$

$${}_4\mathbf{r}_{SO,4,2} = \begin{pmatrix} 0 & -79 & 48,5 \end{pmatrix}^T - {}_4\mathbf{r}_{QS,4} \quad , \quad R_{O,4,2} = 15 \text{ mm}$$

Die bei der Achsfolge $W_1P_1P_2W_2$ möglichen Eigenkollisionen werden durch die Nebenbedingungen $\mathbf{N}_{OO,B,4}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO,B,5}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO,1',4}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO,1',5}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO,1'',3'}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO,1'',5}(\mathbf{p})$, $\mathbf{N}_{OO,1''',3''}(\mathbf{p})$ und $\mathbf{N}_{OO,3',5}(\mathbf{p})$ gemäß Gleichung (4.32) erfasst. In Ergänzung zu $R_{O,5h}$ und ${}_5\mathbf{r}_{SO,5,h}$ aus Gleichung (B.15) lauten die die zugehörigen Hüllkugeln definierenden Parameter:

$${}_B\mathbf{r}_{SO,B,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -45,2 \end{pmatrix}^T - {}_B\mathbf{r}_{Q_1B} \quad , \quad R_{O,B,1} = 77 \text{ mm} \quad (\text{B.48})$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{QO,1'} = \begin{bmatrix} -24 & 92 & 140 & 140 \\ -24 & -24 & -24 & -24 \\ 21,1 & 69,7 & 69,7 & 21,7 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\mathbf{R}}_{O,1'} = \begin{pmatrix} 36 & 36 & 36 & 36 \end{pmatrix} \quad (\text{B.49})$$

$$\Rightarrow \quad {}_1\mathbf{r}_{SO,1',h} = \{\hat{\mathbf{r}}_{QO,1'}\}_h - {}_1\mathbf{r}_{QS,1} \quad , \quad R_{O,1',h} = \{\hat{\mathbf{R}}_{O,1'}\}_h \text{ [mm]}$$

$${}_1\mathbf{r}_{SO,1'',1} = \begin{pmatrix} -24 & -24 & 69,2 \end{pmatrix}^T - {}_1\mathbf{r}_{QS,1} \quad , \quad R_{O,1'',1} = 36 \text{ mm} \quad , \quad (\text{B.50})$$

$${}_1\mathbf{r}_{SO,1'',2} = \begin{pmatrix} 24 & -24 & 69,2 \end{pmatrix}^T - {}_1\mathbf{r}_{QS,1} \quad , \quad R_{O,1'',2} = 36 \text{ mm}$$

$${}^1\mathbf{r}_{S_O,1''',1} = \begin{pmatrix} -89 & 0 & 68,6 \end{pmatrix}^T - {}^1\mathbf{r}_{QS,1} \quad , \quad R_{O,1''',1} = 15 \text{ mm} \quad (\text{B.51})$$

$${}^3\mathbf{r}_{S_O,3',1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 45,2 \end{pmatrix}^T - {}^3\mathbf{r}_{QS,3} \quad , \quad R_{O,3',1} = 77 \text{ mm} \quad , \quad (\text{B.52})$$

$${}^3\mathbf{r}_{S_O,3',2} = \begin{pmatrix} -89 & 0 & 68,6 \end{pmatrix}^T - {}^3\mathbf{r}_{QS,3} \quad , \quad R_{O,3',2} = 15 \text{ mm}$$

$${}^3\mathbf{r}_{S_O,3'',1} = \begin{pmatrix} 0 & 160 & 45,2 \end{pmatrix}^T - {}^3\mathbf{r}_{QS,3} \quad , \quad R_{O,3'',1} = 60 \text{ mm} \quad (\text{B.53})$$

$${}^4\mathbf{r}_{S_O,4,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35,1 \end{pmatrix}^T - {}^4\mathbf{r}_{QS,4} \quad , \quad R_{O,4,1} = 60 \text{ mm} \quad (\text{B.54})$$

Anhang C

Inverse Kinematiken

C.1 Trigonometrische Grundgleichungen

Es gelten die trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad , \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{C.1})$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Identitäten

$$\sin \alpha = 2u/(1+u^2) \quad \wedge \quad \cos \alpha = (1-u^2)/(1+u^2) \quad \Rightarrow \quad u = \tan(\alpha/2) \quad (\text{C.2})$$

können Gleichungen des Typs $\kappa_1 \sin \alpha + \kappa_2 \cos \alpha = 1$ gelöst werden zu:

$$\alpha = 2 \arctan \left((\kappa_1 \pm \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}) / (\kappa_2 + 1) \right) \quad (\text{C.3})$$

Des Weiteren gilt:

$$k_1 \sin \alpha + k_2 \cos \alpha = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \cos \left(\alpha - \arctan(k_1/k_2) \right) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \sin \left(\alpha + \arctan(k_2/k_1) \right) \quad (\text{C.4})$$

Für die Lösungsbereiche der Arcus-Funktionen sei hier definiert:

$$-1 \leq x \leq 1: \quad -90^\circ \leq \arcsin(x) \leq +90^\circ \quad , \quad 0^\circ \leq \arccos(x) \leq +180^\circ \quad (\text{C.5})$$

C.2 Inverse Kinematiken der realisierten Achsfolgen

Gegeben sind die Position und Orientierung des Greifers als Teil des 6. und letzten Körpers des seriellen Roboterarms, die durch den Ortsvektor ${}^B\mathbf{r}_{BG}$ vom Basisschwerpunkt S_B zum Greiferpunkt G bzw. durch die Transformationsmatrix $\mathbf{A}_{B,6}$ beschrieben werden. Gesucht sind in Umkehrung der Vorwärtskinematik $\varphi \mapsto \{\mathbf{r}_{BG}, \mathbf{A}_{B,6}\}$ alle zulässigen Varianten der im Vektor φ zusammengefassten zugehörigen sechs Gelenkwinkel φ_i . Die Lösung erfolgt mittels der inversen Kinematik $\{\mathbf{r}_{BG}, \mathbf{A}_{B,6}\} \xrightarrow{IK} \varphi$, die für jede der Achsfolgen anders ausfällt. Es zeigt sich, dass für jede der Achsfolgen $2^3 = 8$ verschiedene Lösungen existieren.

Die im Folgenden benutzte Matrix $\mathbf{A}_{0,1}$ entspricht $\mathbf{A}_{B,1}$, siehe Gleichung (2.38), der Vektor $\mathbf{r}_{QQ,6}$ zeigt vom Kopplungspunkt Q_6 zum Greiferpunkt G . Zur Auswertung wird für die bekannte Größe $\mathbf{A}_{B,6}$ gesetzt:

$$\mathbf{A}_{B,6} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Inverse Kinematik für die Achsfolge $\text{FP}_1\text{W}_2\text{F}$

Der Vektor ${}^B\mathbf{r}_{Q_1Q_5}$ vom Kopplungspunkt Q_1 zum Kopplungspunkt Q_5 , welcher den Schnittpunkt der Achsen 4 bis 6 darstellt und als Handwurzelpunkt bezeichnet wird, lässt sich sowohl über die einzelnen Glieder ‚von innen nach außen‘ als auch mit Hilfe des bekannten Ortsvektors des Greiferpunkts ${}^B\mathbf{r}_{BG}$ sowie der bekannten Transformationsmatrix $\mathbf{A}_{B,6}$ ‚von außen nach innen‘ beschreiben.

$${}^B\mathbf{r}_{Q_1Q_5} = \sum_{i=1}^4 \left(\left(\prod_{j=1}^i \mathbf{A}_{j-1,j} \right) {}^i\mathbf{r}_{QQ,i} \right) \stackrel{!}{=} \underbrace{{}^B\mathbf{r}_{Q_1B} + {}^B\mathbf{r}_{BG} - \mathbf{A}_{B,6} {}^6\mathbf{r}_{QQ,6}}_{\text{bekannt!}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}^T \quad (\text{C.7})$$

Einsetzen der Größen und Abgleich der x- und y-Komponente liefert

$$\left. \begin{array}{l} -0,5 \sin \varphi_1 + h_4 \cos \varphi_1 = h_1 \\ 0,5 \cos \varphi_1 + h_4 \sin \varphi_1 = h_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Elimination von } h_4 \\ \Rightarrow \end{array} 1 = -2 h_1 \sin \varphi_1 + 2 h_2 \cos \varphi_1 \quad (\text{C.8})$$

mit $h_4 \stackrel{\text{Def.}}{=} 180 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 + 97 \sin \varphi_h + 196,2 \cos \varphi_h$, $\varphi_h \stackrel{\text{Def.}}{=} \varphi_2 - \varphi_3$.

Für φ_1 folgt mit (C.3) die zweideutige Lösung:

$$\boxed{\varphi_1 = 2 \arctan \left(\frac{-2h_1 \pm \sqrt{4h_1^2 + 4h_2^2 - 1}}{2h_2 + 1} \right)} \quad (\text{C.9})$$

Es wird gemäß (C.8) für h_4 berechnet: $h_4 = (h_1 + 0,5 \sin \varphi_1) / \cos \varphi_1$ (C.10)

Die z-Komponente von (C.7) sowie obige Definition von h_4 liefern:

$$\left. \begin{aligned} -s\varphi_2 + 180 c\varphi_2 - 196,2 s\varphi_h + 97 c\varphi_h &= h_5, \\ 180 s\varphi_2 + c\varphi_2 + 97 s\varphi_h + 196,2 c\varphi_h &= h_4 \end{aligned} \right| h_5 \stackrel{\text{Def.}}{=} h_3 - 161 \quad (\text{C.11})$$

Unter Berücksichtigung von (C.4) folgt:

$$\left. \begin{aligned} h_6 c(\varphi_2 + \varphi'_2) + h_7 c(\varphi_h + \varphi'_h) &= h_5 \\ h_6 s(\varphi_2 + \varphi'_2) + h_7 s(\varphi_h + \varphi'_h) &= h_4 \end{aligned} \right| \begin{aligned} h_7 &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sqrt{1^2 + 180^2}, \quad h_7 \stackrel{\text{Def.}}{=} \sqrt{196,2^2 + 97^2}, \\ \varphi'_2 &\stackrel{\text{Def.}}{=} \arctan \frac{1}{180}, \quad \varphi'_h \stackrel{\text{Def.}}{=} \arctan \frac{196,2}{97} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Quadrieren und summieren der Teilgleichungen in (C.12) sowie Anwenden von (C.1) und die Rücksubstitution $\varphi_h = \varphi_2 - \varphi_3$ führen zur zweideutigen Lösung für φ_3 :

$$\boxed{\varphi_3 = \pm \arccos \left(\frac{(h_5^2 + h_4^2 - h_6^2 - h_7^2)}{(2 h_6 h_7)} \right) - \varphi'_2 + \varphi'_h} \quad (\text{C.13})$$

Setzt man die Rücksubstitution $\varphi_h = \varphi_2 - \varphi_3$ in (C.11) ein, erhält man mit (C.1) nach Umformen

$$\left. \begin{aligned} -h_8 \sin \varphi_2 + h_9 \cos \varphi_2 &= h_5 \\ h_9 \sin \varphi_2 + h_8 \cos \varphi_2 &= h_4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -h_8 & h_9 \\ h_9 & h_8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_5 \\ h_4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} h_{10} \\ h_{11} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.14})$$

mit $h_8 \stackrel{\text{Def.}}{=} 1 - 97 \sin \varphi_3 + 196,2 \cos \varphi_3$, $h_9 \stackrel{\text{Def.}}{=} 180 + 196,2 \sin \varphi_3 + 97 \cos \varphi_3$,

so dass für φ_2 eindeutig gilt: $\varphi_2 = \text{sign}(\arcsin(h_{10})) \arccos(h_{11})$ (C.15)

Die Gelenkwinkel φ_4 bis φ_6 werden durch Abgleich der Matrix \mathbf{A}_{64} bestimmt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{64} &= (\mathbf{A}_{45} \mathbf{A}_{56})^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -c\varphi_5 s\varphi_6 + c\varphi_6 & c\varphi_5 s\varphi_6 + c\varphi_6 & \sqrt{2} s\varphi_5 s\varphi_6 \\ -c\varphi_5 c\varphi_6 - s\varphi_6 & c\varphi_5 c\varphi_6 - s\varphi_6 & \sqrt{2} s\varphi_5 c\varphi_6 \\ s\varphi_5 & -s\varphi_5 & \sqrt{2} c\varphi_5 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \underbrace{\mathbf{A}_{B,6}^T \mathbf{A}_{B1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{23}}_{\text{bekannt!}} \mathbf{A}_{34} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} \dots & h_{12} & \dots \\ \dots & h_{13} & \dots \\ h_{14} & h_{15} & h_{16} \end{bmatrix} \mathbf{A}_{34} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & h_{12} \\ \dots & \dots & \dots & h_{13} \\ -h_{14} c\varphi_4 + h_{16} s\varphi_4 & h_{14} s\varphi_4 + h_{16} c\varphi_4 & h_{15} \end{bmatrix} \quad (\text{C.16}) \end{aligned}$$

Der Abgleich der dritten Spalte von (C.16) liefert eine zweideutige Lösung für φ_5 , die dann eine eindeutige Lösung für φ_6 ermöglicht.

$$\begin{aligned} \cos \varphi_5 = h_{15} & \Rightarrow \boxed{\varphi_5 = \pm \arccos(h_{15})} , \\ \left. \begin{aligned} \sin \varphi_6 = h_{12}/\sin \varphi_5 , \\ \cos \varphi_6 = h_{13}/\sin \varphi_5 \end{aligned} \right\} & \Rightarrow \boxed{\varphi_6 = \text{sign}(\arcsin(h_{12}/\sin \varphi_5)) \arccos(h_{13}/\sin \varphi_5)} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Der Abgleich der ersten zwei Elemente der dritten Zeile von (C.16) liefert letztlich die eindeutige Lösung für φ_4 :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} s \varphi_5 / \sqrt{2} = -h_{14} c \varphi_4 + h_{16} s \varphi_4 \\ -s \varphi_5 / \sqrt{2} = h_{14} s \varphi_4 + h_{16} c \varphi_4 \end{aligned} \right\} & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s \varphi_4 \\ c \varphi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} h_{16} & -h_{14} \\ h_{14} & h_{16} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s \varphi_5 \\ -s \varphi_5 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} h_{17} \\ h_{18} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \boxed{\varphi_4 = \text{sign}(\arcsin(h_{17})) \arccos(h_{18})} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Inverse Kinematik für die Achsfolge FSFS

Der Relativvektor $\mathbf{r}_{Q_1 Q_2}$ zwischen den Kopplungspunkten Q_1 und Q_2 lässt sich analog zum Vorgehen bei der Achsfolge FP₁W₂F im 4'-Koordinatensystem auf zwei Wegen beschreiben:

$$\begin{aligned} {}_4' \mathbf{r}_{Q_1 Q_2} &= \mathbf{A}_{4',1} {}_1 \mathbf{r}_{Q Q,1} \stackrel{!}{=} \mathbf{A}_{4',6} \mathbf{h}_1 - \sum_{i=2}^6 \mathbf{A}_{4',i} {}_i \mathbf{r}_{Q Q,i} , \\ \mathbf{h}_1 &= (h_{1x} \ h_{1y} \ h_{1z})^T \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathbf{A}_{6,B} ({}_B \mathbf{r}_{Q_1 B} + {}_B \mathbf{r}_{B G}) \quad (\text{bekannt!}) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Die in (C.19) benötigten Transformationsmatrizen folgen aus

$$1 \leq i \leq 3 : \mathbf{A}_{4',i} = \mathbf{A}_{4,4'}^T \left(\prod_{j=i}^3 \mathbf{A}_{j,j+1} \right)^T , \quad \mathbf{A}_{4',4} = \mathbf{A}_{4,4'}^T , \quad \mathbf{A}_{4',6} = \mathbf{A}_{4',5} \mathbf{A}_{5,6} , \quad (\text{C.20})$$

so dass man durch Einsetzen und Umformen folgendes Gleichungssystem erhält:

$$\begin{aligned} h_2 c \varphi_5 s \varphi_6 + h_3 c \varphi_5 c \varphi_6 - h_4 s \varphi_5 &= s \varphi_4 \\ h_2 s \varphi_5 s \varphi_6 + h_3 s \varphi_5 c \varphi_6 + h_4 c \varphi_5 &= s 30^\circ (1 - c \varphi_4) \\ h_2 c \varphi_6 - h_3 s \varphi_6 &= c 30^\circ c \varphi_4 + h_5 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} h_2 & \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{181,2 b_7 - h_{1x}}{303,9 c 30^\circ} \\ h_3 & \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{181,2 b_8 - h_{1y}}{303,9 c 30^\circ} \\ h_4 & \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{181,2 b_9 - h_{1z} + 90}{303,9 c 30^\circ} \\ h_5 & \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{303,9 (s 30^\circ)^2 + 144}{303,9 c 30^\circ} \end{aligned} \right. \quad (\text{C.21})$$

Durch Vergleich der Beträge der Vektoren in (C.21) erhält man die zweideutige Lösung für φ_4 :

$$\begin{aligned}
h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 &= (\sin \varphi_4)^2 + (\sin 30^\circ(1 - \cos \varphi_4))^2 + (\cos 30^\circ \cos \varphi_4 + h_5)^2 \\
\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \boxed{\varphi_4 = \pm \arccos(h_6)} &, h_6 \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 - 1 - (\sin 30^\circ)^2 - h_5^2}{2(\cos 30^\circ h_5 - (\sin 30^\circ)^2)} \quad (\text{C.22})
\end{aligned}$$

Einsetzen von $\cos \varphi_4 = h_6$ in (C.21) liefert mit (C.3) die zweideutige Lösung für φ_6 ,

$$-h_3 s\varphi_6 + h_2 c\varphi_6 = \cos 30^\circ h_6 + h_5 \Rightarrow \boxed{\varphi_6 = 2 \arctan\left(\frac{h_7 \pm \sqrt{h_7^2 + h_8^2 - 1}}{h_8 + 1}\right)}, \quad (\text{C.23})$$

mit $h_7 \stackrel{\text{Def.}}{=} -h_3 / (\cos 30^\circ h_6 + h_5)$, $h_8 \stackrel{\text{Def.}}{=} h_2 / (\cos 30^\circ h_6 + h_5)$.

Weiterhin folgt mit $h_9 \stackrel{\text{Def.}}{=} h_2 s\varphi_6 + h_3 c\varphi_6$ aus (C.21)

$$\left. \begin{aligned} h_9 c\varphi_5 - h_4 s\varphi_5 &= s\varphi_4 \\ h_9 s\varphi_5 + h_4 c\varphi_5 &= s 30^\circ(1 - h_6) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} s\varphi_5 \\ c\varphi_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -h_4 & h_9 \\ h_9 & h_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} s\varphi_4 \\ s 30^\circ(1 - h_6) \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} h_{10} \\ h_{11} \end{pmatrix} \quad (\text{C.24})$$

so dass für φ_5 eindeutig gilt:

$$\boxed{\varphi_5 = \text{sign}(\arcsin(h_{10})) \arccos(h_{11})}, \quad \begin{pmatrix} h_{10} \\ h_{11} \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} -h_4 & h_9 \\ h_9 & h_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sin \varphi_4 \\ s 30^\circ(1 - h_6) \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

Die Gelenkwinkel φ_1 bis φ_3 werden durch Abgleich der Transformationsmatrix \mathbf{A}_{B3} bestimmt. Mit den bereits ermittelten Gelenkwinkeln φ_4 bis φ_6 gilt:

$$\mathbf{A}_{B,3} = \mathbf{A}_{B,1} \mathbf{A}_{1,2} \mathbf{A}_{2,3} \stackrel{!}{=} \underbrace{\mathbf{A}_{B,6} (\mathbf{A}_{3,4} \mathbf{A}_{4,5} \mathbf{A}_{5,6})^T}_{\text{bekannt!}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{12} & h_{13} & h_{14} \end{bmatrix} \quad (\text{C.26})$$

Durch Einsetzen erhält man folgende zweideutige Lösung für φ_2 :

$$\boxed{\varphi_2 = \pm \arccos\left(\left(h_{14} - (\sin 27,5^\circ)^2\right) / (\cos 27,5^\circ)^2\right)} \quad (\text{C.27})$$

Des Weiteren folgt aus dem Abgleich gemäß (C.26)

$$\begin{aligned}
-c 27,5^\circ \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 + s 27,5^\circ c 27,5^\circ (1 - \cos \varphi_2) \sin \varphi_3 &= h_{12}, \\
c 27,5^\circ \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + s 27,5^\circ c 27,5^\circ (1 - \cos \varphi_2) \cos \varphi_3 &= h_{13} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sin \varphi_3 \\ \cos \varphi_3 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} s 27,5^\circ (1 - \cos \varphi_2) & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & s 27,5^\circ (1 - \cos \varphi_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} \frac{1}{c 27,5^\circ} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} h_{15} \\ h_{16} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.28})
\end{aligned}$$

so dass für φ_3 eindeutig gilt:

$$\boxed{\varphi_3 = \text{sign}(\arcsin(h_{15})) \arccos(h_{16})} \quad (\text{C.29})$$

Letztlich folgt φ_1 eindeutig aus einem Abgleich der Transformationsmatrix \mathbf{A}_{B1} :

$$\mathbf{A}_{B,1} = \begin{bmatrix} c\varphi_1 & -s\varphi_1 & 0 \\ s\varphi_1 & c\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \underbrace{\mathbf{A}_{B,6} (\mathbf{A}_{1,2} \mathbf{A}_{2,3} \mathbf{A}_{3,4} \mathbf{A}_{4,5} \mathbf{A}_{5,6})^T}_{\text{bekannt!}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} h_{17} & \dots & \dots \\ h_{18} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{C.30})$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \text{sign}(\arcsin(h_{18})) \arccos(h_{17})}$$

Inverse Kinematik für die Achsfolge $W_1P_1P_2W_2$

Der Relativvektor ${}^1\mathbf{r}_{Q_1Q_5}$ zwischen den Kopplungspunkten Q_1 und Q_5 kann auf zwei Wegen im 1-Koordinatensystem beschrieben werden. Es gilt:

$${}^1\mathbf{r}_{Q_1Q_5} = {}^1\mathbf{r}_{Q_1Q_2} + \sum_{i=2}^4 \left(\prod_{j=2}^i \mathbf{A}_{j-1,j} \right) {}^i\mathbf{r}_{Q_2Q_i} \stackrel{!}{=} \mathbf{A}_{1,B} (\mathbf{h}_1 - \mathbf{A}_{B,6} {}^6\mathbf{r}_{Q_2Q_6}), \quad (\text{C.31})$$

$$\mathbf{h}_1 = (h_{1x} \ h_{1y} \ h_{1z})^T \stackrel{\text{Def.}}{=} {}^B\mathbf{r}_{Q_1B} + {}^B\mathbf{r}_{BG} \quad (\text{bekannt!})$$

Nach Einsetzen erhält man aus der y-Komponente von Gleichung (C.31) mit Gleichung (C.3) die zweideutige Lösung für φ_1 :

$$\begin{aligned} -90,3 &= (90b_3 - h_{1x}) \sin \varphi_1 + (-90b_6 + h_{1y}) \cos \varphi_1 & \left| \begin{array}{l} h_2 \stackrel{\text{Def.}}{=} (-90b_3 + h_{1x}) / 90,3 \\ h_3 \stackrel{\text{Def.}}{=} (90b_6 - h_{1y}) / 90,3 \end{array} \right. & (\text{C.32}) \\ \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = 2 \arctan \left(\frac{h_2 \pm \sqrt{h_2^2 + h_3^2 - 1}}{h_3 + 1} \right)} & & & \end{aligned}$$

Dem Bild B.4 entnimmt man die Gegenläufigkeit der Einheitsvektoren ${}^1\mathbf{y}$ und ${}^4\mathbf{z}$. Bezogen auf das Basiskoordinatensystem B gilt somit nach Einsetzen:

$$\mathbf{A}_{B,1} {}^1\mathbf{y} = -\mathbf{A}_{B,6} (\mathbf{A}_{4,5} \mathbf{A}_{5,6})^T {}^4\mathbf{z} \Leftrightarrow \begin{cases} -b_1 \sin \varphi_1 + b_4 \cos \varphi_1 = \cos \varphi_5 \sin \varphi_6 \\ -b_2 \sin \varphi_1 + b_5 \cos \varphi_1 = \cos \varphi_5 \cos \varphi_6 \\ -b_3 \sin \varphi_1 + b_6 \cos \varphi_1 = -\sin \varphi_5 \end{cases} \quad (\text{C.33})$$

Die dritte der Teilgleichungen (C.33) liefert mit $\sin \varphi_5 = \cos(\varphi_5 - 90^\circ)$ die zweideutige Lösung für φ_5 , aus den ersten beiden Teilgleichungen folgt dann eindeutig für φ_6 :

$$\begin{aligned} \boxed{\varphi_5 = 90^\circ \pm \arccos(b_3 \sin \varphi_1 - b_6 \cos \varphi_1)} & \left| \begin{array}{l} h_4 \stackrel{\text{Def.}}{=} (-b_1 \sin \varphi_1 + b_4 \cos \varphi_1) / \cos \varphi_5 \\ h_5 \stackrel{\text{Def.}}{=} (-b_2 \sin \varphi_1 + b_5 \cos \varphi_1) / \cos \varphi_5 \end{array} \right. & (\text{C.34}) \\ \boxed{\varphi_6 = \text{sign}(\arcsin(h_4)) \arccos(h_5)} & & & \end{aligned}$$

Die zweideutige Lösung für φ_4 erhält man durch Abgleich des auf zwei Wegen formulierbaren Relativvektors ${}^1\mathbf{r}_{Q_2Q_3}$ zwischen den Kopplungspunkten Q_2 und Q_3 im 1-KOS:

$${}^1\mathbf{r}_{Q_2Q_3} = \mathbf{A}_{1,2} {}^2\mathbf{r}_{Q_2Q_2} \stackrel{!}{=} \mathbf{h}_6 - \mathbf{A}_{1,B} \mathbf{A}_{B,6} \mathbf{A}_{4,6}^T \mathbf{A}_{4,3} {}^3\mathbf{r}_{Q_2Q_3}, \quad (\text{C.35})$$

$$\mathbf{h}_6 = \text{col} \langle h_{6x}, h_{6y}, h_{6z} \rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathbf{A}_{1,B} \left({}^B\mathbf{r}_{Q_1B} + {}^B\mathbf{r}_{BG} - \mathbf{A}_{B,6} \sum_{i=4}^6 \left(\mathbf{A}_{i,6}^T {}^i\mathbf{r}_{Q_2Q_i} \right) \right) - {}^1\mathbf{r}_{Q_2Q_1}$$

Mit der Substitution des inzwischen bekannten Matrixprodukts

$$\begin{bmatrix} h_7 & h_8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -h_8 & h_7 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathbf{A}_{1,B} \mathbf{A}_{B,6} \mathbf{A}_{4,6}^T \quad (\text{C.36})$$

und Einsetzen lauten die x- und die z-Komponente von Gleichung (C.35):

$$\begin{aligned} 180 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 &= h_{6x} + 160 h_7 \cos \varphi_4 - 160 h_8 \sin \varphi_4, \\ -\sin \varphi_2 + 180 \cos \varphi_2 &= h_{6z} - 160 h_8 \cos \varphi_4 - 160 h_7 \sin \varphi_4 \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Quadrieren und Addieren liefert mit Gleichung (C.3) die zweideutige Lösung für φ_4 :

$$\begin{aligned} 1 &= h_9 \sin \varphi_4 + h_{10} \cos \varphi_4 \\ \Rightarrow \varphi_4 &= 2 \arctan \left(\frac{h_9 \pm \sqrt{h_9^2 + h_{10}^2 - 1}}{h_{10} + 1} \right) \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} h_9 &\stackrel{\text{Def.}}{=} -160(h_{6x}h_8 + h_{6z}h_7)/h_{11} \\ h_{10} &\stackrel{\text{Def.}}{=} 160(h_{6x}h_7 - h_{6z}h_8)/h_{11} \\ h_{11} &\stackrel{\text{Def.}}{=} 181 - h_{6x}^2 - h_{6z}^2 - 160^2(h_7^2 + h_8^2) \end{aligned} \right. \quad (\text{C.38})$$

Gleichung (C.37) führt damit zur eindeutigen Lösung für φ_2 :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 180 & 1 \\ -1 & 180 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_{6x} + 160 h_7 \cos \varphi_4 - 160 h_8 \sin \varphi_4 \\ h_{6z} - 160 h_8 \cos \varphi_4 - 160 h_7 \sin \varphi_4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{13} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \varphi_2 &= \text{sign}(\arcsin(h_{12})) \arccos(h_{13}) \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Letztlich folgt φ_3 eindeutig aus einem Abgleich der Transformationsmatrix \mathbf{A}_{23} :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{2,3} &= \begin{bmatrix} -\cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \underbrace{(\mathbf{A}_{B,1} \mathbf{A}_{1,2})^T \mathbf{A}_{B,6} (\mathbf{A}_{3,4} \mathbf{A}_{4,5} \mathbf{A}_{5,6})^T}_{\text{bekannt!}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{bmatrix} \dots & h_{14} & \dots \\ \dots & h_{15} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \varphi_3 &= \text{sign}(\arcsin(h_{14})) \arccos(h_{15}) \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Anhang D

Das Nelder-Mead Downhill-Verfahren

D.1 Ursprüngliche Version

Das Downhill-Verfahren nach Nelder-Mead ist ein gradientenfreies, iteratives Verfahren zur Minimierung einer von n Parametern, die zum Parametervektor \mathbf{p} zusammengefasst werden, nichtlinear abhängigen skalaren Gütefunktion $f(\mathbf{p})$, siehe [28]. Gegenstand des Verfahrens ist ein von $n+1$ Punkten aufgespannter *Simplex* im Parameterraum der Dimension n . Im Eindimensionalen entspricht der Simplex einer Strecke, im Zweidimensionalen einem Dreieck, im Dreidimensionalen einem Tetraeder.

Die Idee des Verfahrens ist, den Simplex aufgrund bestimmter Austauschregeln für seine Eckpunkte durch den n -dimensionalen Parameterraum zu bewegen und so ein Minimum von $f(\mathbf{p})$ aufzufinden. Der Vorteil des Verfahrens ist seine Robustheit gegenüber Unstetigkeiten oder Sprüngen der Gütefunktion f , die gradientenbasierte Verfahren mitunter scheitern lassen (so in dieser Arbeit bei der Bahnoptimierung), der Nachteil liegt in der langsamen Konvergenz. Wie bei gradientenbasierten Verfahren auch, kann das Verfahren in einem lokalen Minimum konvergieren.

Die die Gestaltsänderung des Simplex beeinflussenden Nelder-Mead-Parameter werden standardgemäß auf $\rho=1$, $\chi=2$, $\gamma=0,5$ und $\sigma=0,5$ gesetzt. Die einzelnen Schritte des iterativen Verfahrens lauten, vgl. Bild D.1:

1. Bilde den Startsimplex durch Wahl von $n+1$ Startpunkte \mathbf{p}_1 bis \mathbf{p}_{n+1} und berechne die zugehörigen Funktionswerte $f(\mathbf{p}_1)$ bis $f(\mathbf{p}_{n+1})$.
2. Tausche die Indizes der Eckpunkte, so dass $f(\mathbf{p}_1) \leq f(\mathbf{p}_2) \leq \dots \leq f(\mathbf{p}_{n+1})$.
3. Bestimme mit dem *Centroid Point* \mathbf{p}_c als Mittelpunkt der dem „schlechtesten“ Eckpunkt \mathbf{p}_{n+1} gegenüberliegenden Grenzfläche des Simplex die Suchrichtung:

$$\mathbf{p}_c = 1/n \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \quad (\text{D.1})$$

4. Spiegele den Simplex an der zuvor genannten Grenzfläche durch Bestimmung des *Reflection Points* \mathbf{p}_r . Berechne $f(\mathbf{p}_r)$.

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{p}_c + \rho(\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{n+1}) \quad (\text{D.2})$$

5. Führe eine Fallunterscheidung durch, vgl. Bild D.1a):

5.1 Falls $f(\mathbf{p}_1) \leq f(\mathbf{p}_r) < f(\mathbf{p}_n)$: Setze $\mathbf{p}_{n+1,neu} = \mathbf{p}_r$ und gehe zu Schritt 2.

- 5.2 Falls $f(\mathbf{p}_r) < f(\mathbf{p}_1)$: Bestimme den *Expansion Point* \mathbf{p}_e und berechne $f(\mathbf{p}_e)$. Wenn $f(\mathbf{p}_e) < f(\mathbf{p}_r)$, dann setze $\mathbf{p}_{n+1,neu} = \mathbf{p}_e$, sonst $\mathbf{p}_{n+1,neu} = \mathbf{p}_r$. Gehe zu Schritt 2.
- 5.3 Falls $f(\mathbf{p}_n) \leq f(\mathbf{p}_r) < f(\mathbf{p}_{n+1})$: Bestimme den *Outside Contraction Point* \mathbf{p}_{oc} und berechne $f(\mathbf{p}_{oc})$. Wenn $f(\mathbf{p}_{oc}) \leq f(\mathbf{p}_r)$, dann setze $\mathbf{p}_{n+1,neu} = \mathbf{p}_{oc}$ und gehe zu Schritt 7, sonst gehe zur Simplexkontraktion in Schritt 6.
- 5.4 Falls $f(\mathbf{p}_{n+1}) \leq f(\mathbf{p}_r)$: Bestimme den *Inside Contraction Point* \mathbf{p}_{ic} und berechne $f(\mathbf{p}_{ic})$. Wenn $f(\mathbf{p}_{ic}) \leq f(\mathbf{p}_{n+1})$, dann setze $\mathbf{p}_{n+1,neu} = \mathbf{p}_{ic}$ und gehe zu Schritt 7, sonst gehe zur Simplexkontraktion in Schritt 6.

Für die genannten Punkte gilt:

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_c + \chi(\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_c) \quad , \quad \mathbf{p}_{oc} = \mathbf{p}_c + \gamma(\mathbf{p}_r - \mathbf{p}_c) \quad , \quad \mathbf{p}_{ic} = \mathbf{p}_c + \gamma(\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_c) \quad (\text{D.3})$$

6. Kontrahiere den Simplex um den „besten“ Punkt \mathbf{p}_1 , vgl. Bild D.1b):

$$2 \leq h \leq n+1: \quad \mathbf{p}_{h,neu} = \mathbf{p}_1 + \sigma(\mathbf{p}_{h,alt} - \mathbf{p}_1) \quad (\text{D.4})$$

7. Das Volumen des Simplex Δ hat sich verringert. Prüfe Abbruchbedingung:

$$\text{vol}(\Delta) = \det(\mathbf{V})/n! \stackrel{?}{<} \varepsilon \quad , \quad \mathbf{V} = \text{row}_{h=2}^{n+1} \langle \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_1 \rangle \quad , \quad \varepsilon \ll 1 \quad (\text{D.5})$$

Wenn Gleichung (D.5) erfüllt und das Simplexvolumen somit ausreichend klein ist, ist die Minimierung beendet, und der Eckpunkt des aktuellen Simplex mit dem kleinsten Funktionswert stellt die Lösung des Minimierungsproblems dar. Anderenfalls gehe zu Schritt 2 und setze die Iteration fort.

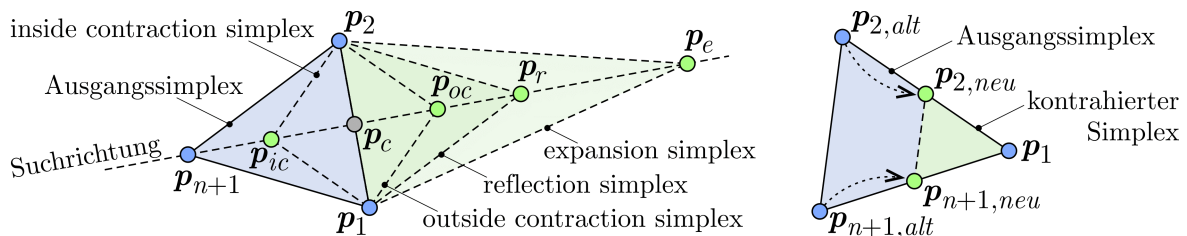


Bild D.1: Simplexänderung (links) bzw. -kontraktion (rechts) gemäß Iterationsschritt 5 bzw. 6

Mit diesen Regeln wird sich der Simplex durch Spiegeln an einer seiner $(n-1)$ -dimensionalen Seitenflächen bzw. durch Dehnen und Stauchen durch den Parameterraum in Richtung eines Minimums bewegen und sich letztlich um dieses zusammen ziehen. Die Wahl der Startpunkte in Schritt 1 nimmt wesentlichen Einfluss auf die Geschwindigkeit der Konvergenz sowie auf die Lage bzw. die Art (global/lokal) des jeweils gefundenen Minimums.

D.2 Ergänzungen des Originalverfahrens

Adaption der Suchrichtung

Eine an den lokalen Gradienten von $f(\mathbf{p})$ adaptierte Suchrichtung wirkt sich positiv auf die Konvergenz des Verfahrens aus. Für \mathbf{p}_c gilt statt Gleichung (D.1) nun:

$$\mathbf{p}_c = \left(\sum_{h=1}^n \Delta f_h \right)^{-1} \sum_{h=1}^n (\Delta f_h \mathbf{p}_h) \quad , \quad \Delta f_h = f(\mathbf{p}_{n+1}) - f(\mathbf{p}_h) \quad (\text{D.6})$$

Gemäß Bild D.2 wird der *Centroid Point* \mathbf{p}_c somit näher am „besten“ Punkt \mathbf{p}_1 positioniert, wodurch sich in der großen Mehrzahl der Fälle bessere Funktionswerte für die Testpunkte \mathbf{p}_r , \mathbf{p}_e , \mathbf{p}_{oc} und \mathbf{p}_{ic} , auf dem Suchstrahl ergeben. Die Konvergenzgeschwindigkeit bei der Bahnoptimierung wurde so um ca. 10% gesteigert.

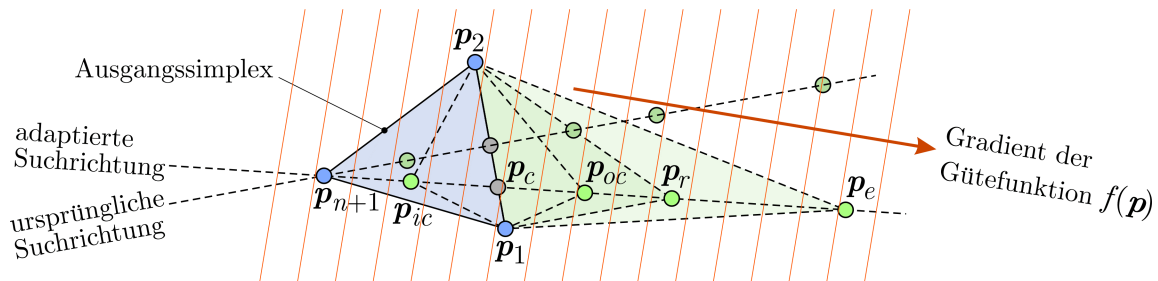


Bild D.2: Adaption der Suchrichtung an das lokale Gefälle der Gütefunktion

Begrenzungen des Parameterraums

Der n -dimensionale Parameterraum kann durch direkte ($\mathbf{p}_{min} \stackrel{!}{\leq} \mathbf{p} \stackrel{!}{\leq} \mathbf{p}_{max}$) oder lineare ($\mathbf{A}\mathbf{p} \leq \mathbf{b}_{max}$) Nebenbedingungen für die Optimierungsparameter \mathbf{p} begrenzt sein. Dies wird durch die im Folgenden dargestellte Anpassung der Strategie des Nelder-Mead Verfahrens berücksichtigt.

Fall 1:

Im Schritt 3 des Verfahrens wird festgestellt, dass der *Centroid Point* \mathbf{p}_c kritisch, d.h. auf einer der Grenzen des Parameterraums liegt, vgl. Bild D.3a). Es ist dann direkt der *Inside Contraction Point* \mathbf{p}_{ic} gemäß Gleichung (D.3) zu bestimmen und entsprechend Schritt 5.4 zu analysieren.

Fall 2:

Im Schritt 4 des Verfahrens wird festgestellt, dass der *Reflection Point* \mathbf{p}_r außerhalb des zulässigen Parameterraums liegt, vgl. Bild D.3b). Der Punkt \mathbf{p}_r ist dann als Schnittpunkt des Suchstrahls mit der betroffenen Grenze neu zu bestimmen. Im Folgenden ist dann bei Gültigkeit der Bedingung für Schritt 5.2 wie bei Schritt 5.1 zu verfahren (setze $\mathbf{p}_{n+1,neu} = \mathbf{p}_r$, gehe zu Schritt 2); der *Expansion Point* \mathbf{p}_e braucht nicht bestimmt und analysiert zu werden.

Fall 3:

Im Schritt 5.2 des Verfahrens wird festgestellt, dass der *Expansion Point* p_e unzulässig hinter einer der Grenzen des Parameterraums liegt, wie Bild D.3c) zeigt. Analog zu Fall 2 ist der Punkt p_e dann als Schnittpunkt des Suchstrahls mit der betroffenen Grenze neu zu bestimmen und entsprechend Schritt 5.2 zu analysieren.

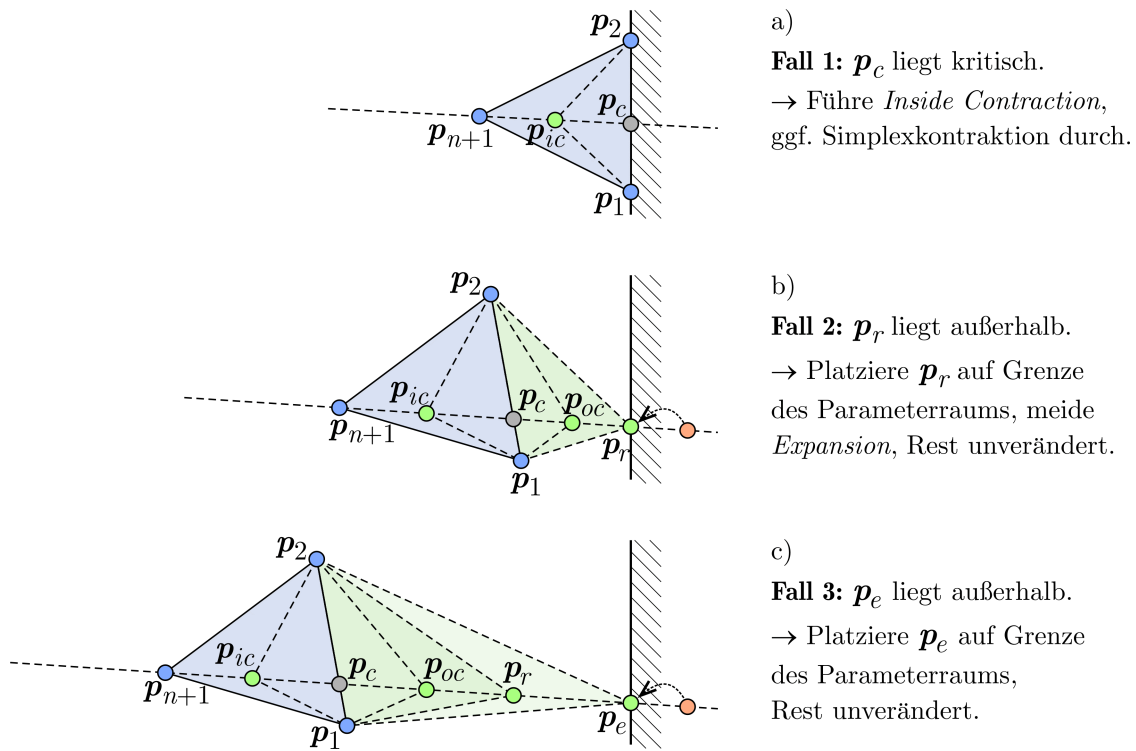


Bild D.3: Strategie bei linearen Begrenzungen des zulässigen Parameterraums

Anhang E

Daten der Referenzlösungen

Tabelle E.1 fasst die optimierten Bahnparameter $p_i \in \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{24}$ der in Abschnitt 5.9 ausgewählten Referenzlösungen der betrachteten Fälle A bis H zusammen. Die eingeklammerten Soll-Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}^*$ werden bei der $\dot{\varphi}(t)$ -Rampenfahrt nicht erreicht, vgl. Bild 5.3, und sind für die Armbewegung irrelevant.

Tabelle E.1: Optimierte Bahnparameter der Referenzlösungen

			Achsfolge FP ₁ W ₂ F			Achsfolge FSFS			Achsf. W ₁ P ₁ P ₂ W ₂	
			Fall A	Fall B	Fall C	Fall D	Fall E	Fall F	Fall G	Fall H
1. Gelenk	p_1	$\varphi_{e,1,1}$ [°]	-73,7773	-79,1739	-82,0476	-70,8041	-57,3283	-71,7594	-57,9433	-69,6409
	p_2	$\dot{\varphi}_{1,1}^*$ [°/s]	51,3830	43,7215	29,1024	28,2473	61,2449	28,4424	8,1938	(56,435)
	p_3	$\ddot{\varphi}_{1,1}^*$ [°/s ²]	231,5074	175,7589	223,7876	67,3143	177,8094	56,6914	35,3891	125,8087
	p_4	$\varphi_{e,1,2}$ [°]	-70,8692	-77,9924	-83,1421	-69,5122	-53,8866	-73,0786	-58,3819	-31,5849
	p_5	$\dot{\varphi}_{1,2}^*$ [°/s]	50,1743	30,4367	24,6710	18,0227	53,4163	14,6737	7,3074	(149,740)
	p_6	$\ddot{\varphi}_{1,2}^*$ [°/s ²]	154,1972	145,0823	547,9627	55,4395	134,6871	69,7855	67,4092	125,1848
	p_7	$\dot{\varphi}_{1,3}^*$ [°/s]	87,8198	149,6472	115,4960	70,1700	79,3777	52,8409	39,2685	130,9124
	p_8	$\ddot{\varphi}_{1,3}^*$ [°/s ²]	328,4639	379,8673	277,3832	62,9024	180,1066	105,0669	40,9396	381,4885
2. Gelenk	p_9	$\varphi_{e,2,1}$ [°]	33,5582	43,5308	21,2383	98,6853	97,4211	99,9992	20,2835	17,6606
	p_{10}	$\dot{\varphi}_{2,1}^*$ [°/s]	(18,642)	29,5380	22,8468	(37,937)	11,6112	(13,709)	(11,725)	3,5277
	p_{11}	$\ddot{\varphi}_{2,1}^*$ [°/s ²]	76,8966	103,0743	37,7724	103,7450	110,1873	98,3422	24,0875	63,2730
	p_{12}	$\varphi_{e,2,2}$ [°]	17,5020	40,4861	27,5253	32,3604	97,6314	70,3411	-19,4550	23,9320
	p_{13}	$\dot{\varphi}_{2,2}^*$ [°/s]	(90,745)	29,5079	22,7270	42,4981	7,9766	29,6053	9,9737	(14,652)
	p_{14}	$\ddot{\varphi}_{2,2}^*$ [°/s ²]	80,4247	368,0683	423,6915	43,3184	171,9152	128,7198	19,5159	29,6512
	p_{15}	$\dot{\varphi}_{2,3}^*$ [°/s]	(82,775)	36,4981	10,9789	40,1223	8,8652	25,1985	10,8912	42,4003
	p_{16}	$\ddot{\varphi}_{2,3}^*$ [°/s ²]	90,9440	113,6032	334,5735	104,0502	125,8682	107,2173	57,6169	226,3365
3. Gelenk	p_{17}	$\varphi_{e,3,1}$ [°]	-17,6753	-23,2914	-16,9522	84,9014	103,7364	104,5677	11,8664	-34,1276
	p_{18}	$\dot{\varphi}_{3,1}^*$ [°/s]	3,6734	(25,231)	10,4638	25,4963	19,4769	16,8117	23,7657	25,4495
	p_{19}	$\ddot{\varphi}_{3,1}^*$ [°/s ²]	96,3193	76,2122	126,2472	51,9018	75,2271	141,0022	30,5056	122,3612
	p_{20}	$\varphi_{e,3,2}$ [°]	-17,6773	24,9137	-17,1780	87,1042	104,1687	104,3505	-27,9391	-33,6845
	p_{21}	$\dot{\varphi}_{3,2}^*$ [°/s]	0,3140	(36,738)	10,4550	9,4172	14,4386	10,3513	13,9224	8,3905
	p_{22}	$\ddot{\varphi}_{3,2}^*$ [°/s ²]	99,7130	48,5271	263,8667	80,2527	91,5186	117,0287	59,9307	147,6260
	p_{23}	$\dot{\varphi}_{3,3}^*$ [°/s]	5,9288	11,7053	28,3682	14,7622	59,1209	22,9615	24,0360	60,0604
	p_{24}	$\ddot{\varphi}_{3,3}^*$ [°/s ²]	127,9456	123,9363	97,0118	42,1568	79,2299	115,1981	43,9195	81,8160

Tabelle E.2 listet die Zeitpunkte $t_c \in \mathbb{T}_S = \mathbb{T}_M \cup \mathbb{T}_\varphi$ auf, vgl. Abschnitt 5.5.2.

Tabelle E.2: Zeitpunkte t_c [sec] der Intervallgrenzen des Gauß-Legendre-Quadraturverfahrens

		Achsfolge FP ₁ W ₂ F			Achsfolge FSFS			Achsf. W ₁ P ₁ P ₂ W ₂			
		Fall A	Fall B	Fall C	Fall D	Fall E	Fall F	Fall G	Fall H		
Menge \mathbb{T}_M		t_A	0	0	0	0	0	0	0	0	
		1. Gelenk	$t'_{1,1}$	0,2219	0,2488	0,1300	0,4196	0,3444	0,5017	0,2315	0,1505
	$t''_{1,1}$		0,3176	0,2498	0,2765	0,7009	0,5433	0,6625	1,7756	”	
	$t'_{1,2}$		0,3254	0,3414	0,2846	0,8853	0,6014	0,8598	1,7888	0,5709	
	$t''_{1,2}$		0,3264	0,3424	0,2856	0,8866	0,6026	0,8612	1,7904	”	
	$t'_{1,3}$		0,4410	0,6562	0,6131	1,7156	0,7468	1,2244	2,5711	0,7265	
	$t''_{1,3}$		2,1410	1,4137	1,7093	2,1959	1,6837	2,8524	5,8549	1,6509	
	$t_{E,1}$		2,4083	1,8077	2,1257	3,3114	2,1244	3,3554	6,8141	1,9941	
	2. Gelenk	$t'_{2,1}$	0,1399	0,28657	0,6049	0,0161	0,1054	0,1168	0,3480	0,0558	
		$t''_{2,1}$	”	0,28665	0,6051	”	0,1066	”	”	0,0836	
		$t'_{2,2}$	0,4730	0,28673	0,6054	1,0359	0,1277	0,4360	1,2887	0,4356	
		$t''_{2,2}$	”	0,28682	0,6057	1,6159	0,1289	1,2024	4,7962	”	
		$t'_{2,3}$	1,2437	0,8678	0,7064	2,4099	0,2627	1,7136	4,8121	0,6847	
		$t''_{2,3}$	”	0,9020	0,9286	3,4534	0,6776	2,7567	5,0018	1,4700	
		$t_{E,2}$	1,6015	1,2233	0,9614	3,8390	0,7480	2,9917	5,1909	1,6574	
	3. Gelenk	$t'_{3,1}$	0,0381	0,2679	0,08288	0,4912	0,2589	0,1192	0,7791	0,2080	
		$t''_{3,1}$	0,0393	”	0,08292	0,9374	0,2601	0,2518	1,7113	0,2092	
		$t'_{3,2}$	0,0730	0,2694	0,08295	1,1378	0,3151	0,3070	2,3402	0,3247	
		$t''_{3,2}$	0,0742	”	0,08298	1,1388	0,3163	0,3082	4,6405	0,3259	
		$t'_{3,3}$	0,1181	0,5293	0,2676	1,2656	0,8802	0,4177	4,8708	0,9180	
		$t''_{3,3}$	1,6792	1,6422	0,3207	3,4889	1,0796	2,5943	6,3363	”	
		$t_{E,3}$	1,7255	1,7366	0,6131	3,8391	1,8258	2,7936	6,8836	1,6127	
	Passive Gelenke	4. G.	t'_4	1,2042	0,9038	1,0628	1,9195	0,2500	1,4805	3,4418	0,9970
			t''_4	”	”	”	”	1,8749	1,8749	”	”
		5. G.	t'_5	”	”	”	”	1,0624	1,6777	”	”
			t''_5	”	”	”	”	”	”	”	”
		6. G.	t'_6	”	”	”	”	”	”	”	”
			t''_6	”	”	”	”	”	”	”	”
		t_E	2,4083	1,8077	2,1257	3,8391	2,1249	3,3554	6,8836	1,9941	
	Menge \mathbb{T}_φ	1. G.	$t_{1,2}^*$	-	-	-	-	-	-	-	-
			$t_{1,3}^*$	-	-	-	-	-	-	-	-
		2. G.	$t_{2,2}^*$	-	-	-	0,0548	-	0,2060	0,7776	-
			$t_{2,3}^*$	0,8858	0,5466	0,6736	2,0243	0,1922	1,4785	-	-
		3. G.	$t_{3,2}^*$	-	-	-	-	-	-	2,1079	-
			$t_{3,3}^*$	-	0,4348	-	-	-	-	-	-

Anhang F

Literatur

- [1] ADAMS. MSC.Software GmbH, München, www.adams.com
- [2] ALART, P., CURNIER, A.: *A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems prone to Newton Like Solutions Methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 92, S. 353-375, 1991
- [3] AL-KHAYYAL, F.A.: *An Implicit Enumeration Procedure for the General Linear Complementarity Problem*. Mathemat. Programming Study, 31, S. 1-20, 1987
- [4] ANITESCU, M., POTRA, F.A., STEWART, D.: *Time-stepping for three-dimensional rigid body dynamics*. Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 177, S. 183-197, 1999
- [5] ARMSTRONG B., KHATIB O., BURDICK J.: *The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 Arm*. Proc. IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation, San Francisco (CA), S. 510-518, 1986
- [6] ASADA, H., SLOTINE, J.: *Robot analysis and control*. John Wiley, New York, 1986
- [7] ASADA, H.: *A geometrical representation of manipulator dynamics and its application to arm design*. ASME Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control, 105(3), S. 131-135, 1983
- [8] AURNHAMMER, A.: *Optimale stochastische Trajektorienplanung und Regelung von Industrierobotern*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2004
- [9] BARCIO, B.T., WALKER, I.D.: *Impact Ellipsoids and Measures for Robot Manipulators*. Proc. IEEE Intl. Conference on Robotics and Automation, San Diego (CA), S. 1588-1594, 1994
- [10] BEITELSCHMIDT, M.: *Reibstöße in Mehrkörpersystemen*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1999
- [11] BELLMANN, R.E.: *Dynamic Programming*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1957
- [12] BERNHARDT, R., ALBRIGHT, S.L.: *Robot Calibration*. Chapman Hall, London, 1993
- [13] BERNS, K.: *Survey of the State of Walking and Climbing Machines*. Workshop II, New Approaches on Dynamic Walking and Climbing Machines, ICAR'97, 8th Int. Conference on Advanced Robotics, Monterey (CA), 1997
- [14] *Bestimmung der Massenträgheitsmomente und Trägheitsachsen mit einem Torsionspendel*. Skriptum zum Mechanikpraktikum für Fortgeschrittene am Lehrstuhl für Angewandte Mechanik, TU München, 2003
- [15] BEVERIDGE, G.S. , SCHECHTER, R.S.: *Optimization: Theory and Practice*. McGraw-Hill, New York, 1970

- [16] BLANCK, N.: *Genaue Roboterregelung entlang vorgegebener Trajektorien*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1988
- [17] BOBROW, J.E., DUBOWSKY, S., GIBSON, J.S.: *Time-Optimal Control of Robotic Manipulators Along Specified Paths*. Intl. J. on Robotics Research, 4(3), S. 3-17, 1985
- [18] BOX, M.J.: *A new method of constrained optimization and a comparison with other methods*. Computer Journal, 8, S. 43-52, 1965
- [19] BREMER, H., PFEIFFER, F.: *Elastische Mehrkörpersysteme*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1992
- [20] BREMER, H.: *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*. Teubner Studienbücher: Mechanik, Teubner Verlag, Stuttgart, 1988
- [21] BREMER, H.: *Kinetik starr-elastischer Mehrkörpersysteme*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1983
- [22] BREMER, H.: *Nichtlineare Schwingungssysteme*. Vorlesungsmanuskript, Lehrstuhl B für Mechanik, TU München, 1987
- [23] BREMER, H.: *On the dynamics of elastic multi body systems*. Applied Mechanics Reviews, 52, S. 275-303, 1999
- [24] BROGLIATO, B., TEN DAM, A.A., PAOLI, L., GÉNOT, F., ABADIE, M.: *Numerical Simulation of Finite Dimensional Multibody Nonsmooth Mechanical Systems*. Applied Mechanics Reviews, 55(2), S. 107-150, 2002
- [25] BROGLIATO, B.: *Nonsmooth Impact Mechanics*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, Berlin, 1996
- [26] BROMMUNDT, E., SACHS, G., SACHAU, D.: *Technische Mechanik - eine Einführung*. 4. Aufl., Oldenbourg Verlag, München, 2007
- [27] BRONSTEIN, I.N., SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1991
- [28] BURGMAIR, R.: *Modellierung und Optimierung der Dynamik automatisierter Montageprozesse*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2002
- [29] CHANG, L.: *An Efficient Calculation of the Load and Coefficient of Restitution of Impact Between Two Elastic Bodies With a Liquid Lubrication*. ASME Journal of Applied Mechanics, 63(2), S. 347-352, 1996
- [30] CHEVALLEREAU, C., KHALIL, W.: *Efficient Method for the Calculation of the Pseudo Inverse Kinematic Problem*. Proc. IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation, Raleigh (NC), S. 1842-1848, 1987
- [31] CLARKE, F.H., LEDYAEV, Y.S., STERN, R.J., WOLENSKI, P.R.: *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. Springer Verlag, New York, 1998
- [32] CLARKE, F.H.: *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Wiley, New York, 1983
- [33] COHEN, I.B.: *Introduction to Newton's "Principia"*. Univ. Press, Cambridge, 1971

- [34] COTTLE, R.W., DANTZIG, G.B.: *Complementary Pivot Theory of Mathematical Programming*. Linear Algebra and its Applications 1, S. 103-125, 1968
- [35] COTTLE, R.W., PANG, J.S., STONE, R.E.: *The Linear Complementarity Problem*. Academic Press Inc., Boston, 1992
- [36] CRAIG, J.J.: *Introductions to Robotics: Mechanics and Controls*. 3. Aufl., Pearson-Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2005
- [37] D'ALEMBERT, J.L.: *Traité de dynamique*, 1743
- [38] DATOUSSAID, S., VERLINDEN, O., CONTI, C.: *Application of Evolutionary Strategies to Optimal Design of Multibody Systems*. Multibody System Dynamics, 8(4), Springer, S. 393-408, 2002
- [39] DE JALÓN, J.G.: *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems*. Springer Verlag, New York, 1994
- [40] DE LUCA, T., FACCHINEI, F., KANZOW, C.: *A Semismooth Equation Approach to the Solution of Nonlinear Complementarity Problems*. Mathematical Programming, 75, S. 407-439, 1996
- [41] DUNHAM, W.: *Euler: The Master of us all*. Mathematical Association of America, Washington, 1999
- [42] DYMOLA. Dynasim AB, Lund, Schweden, www.dynasim.se
- [43] DYNAFLEXPRO. Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario, Kanada, www.maple-soft.com/dynaflexpro
- [44] ELGAZZAR, S.: *Efficient Kinematic Transformations for the PUMA 560 Robot*. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1, S. 142- 151, 1985
- [45] ELTZE, J.: *Biologisch orientierte Entwicklung einer sechsbeinigen Laufmaschine*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1994
- [46] ESCHENAUER, H.: *Multicriteria design optimization*, Springer Verlag, Berlin, 1990
- [47] ETSCHBERGER, K.: *CAN Controller-Area-Network - Grundlagen, Protokolle, Bausteine, Anwendungen*. 2. Aufl., Hanser Verlag, München, 2000
- [48] FAN, Y., SARKAR, S., LASDON, L.: *Experiments with successive quadratic programming algorithms*. J. of Optimization Theory and Appl., 56, S. 359-383, 1988
- [49] FERRIS, M.C., PANG, J.S.: *Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems*. SIAM Rev., 39, S. 669-713, 1997
- [50] FISCHER, A.: *A special Newton-type optimization method*. Optimization, 24, S. 269-284, 1992
- [51] FLETCHER, R., POWELL, M.J.D.: *A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization*. Computer Journal, 6, S. 163-168, 1963
- [52] FÖRG, M.: *Lösung von nichtlinearen Komplementaritätsproblemen bei starren Mehrkörpersystemen mit einseitigen Bindungen*. Semesterarbeit, Lehrstuhl B für Mechanik, TU München, 2000

- [53] FRANZ, E.: *Dynamik von elektromechanischen Präzisionswaagen*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1993
- [54] FRITZ, P.: *Dynamik schnellaufender Kettentriebe*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1998
- [55] FUNK, K.: *A Pivoting Solver for Dynamic Planar Multi-Contact Friction Problems*. Machine Dynamics Problems, 24, S. 87-99, 2000
- [56] FUNK, K.: *Simulation eindimensionaler Kontinua mit Unstetigkeiten*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2004
- [57] GEBLER, B.: *Modellbildung, Steuerung und Regelung für elastische Industrieroboter*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1987
- [58] GIENGER, M.: *Entwurf und Realisierung einer zweibeinigen Laufmaschine*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2005
- [59] GILL, P. E., MURRAY, W., WRIGHT, M. H.: *Practical Optimization*. Academic Press, New York, S. 94-96, 1981
- [60] GLOCKER, C.: *Formulation of spatial contact situations in rigid multibody systems*. Computer Meth. in Appl. Mech. and Engineering, 177(3), S. 199-214, 1999
- [61] GLOCKER, C.: *Velocity Jumps Induced by C^0 -Constraints*. Proc. of the ASME Design Engineering Technical Conference, Las Vegas, 1999
- [62] GLOCKER, Ch.: *Dynamik von Starrkörpersystemen mit Reibung und Stößen*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1995
- [63] GOLDENBERG, A.A., BENHABIB, B., FENTON, R.G.: *A Complete Generalized Solution to the Inverse Kinematics of Robots*. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1, S. 14-20, 1985
- [64] GOLDFARB, D.: *A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means*. Mathematics of Computing, 24, S. 23-26, 1970
- [65] GROSCHE, G., ZIEGLER, V.: *Taschenbuch der Mathematik, Teil II*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1995
- [66] GWEON, D.: *Fügen von biegeschlaffen Steckkontakten mit Industrierobotern*. IPA-IAO Forschung und Praxis, 107, Springer-Verlag, 1987
- [67] HAGEDORN, P., OTTERBEIN, S.: *Technische Schwingungslehre. Band 1: Lineare Schwingungen diskreter mechanischer Systeme*. Springer Verlag, Berlin, 1987
- [68] HAIRER, E., WANNER, G.: *Solving ordinary differential equations II*. 2. Edition, Springer Verlag, Berlin, 1996
- [69] HAMEL, G.: *Theoretische Mechanik*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1967
- [70] HARMONIC DRIVE AG: *Präzision in Bewegung*. Gesamtkatalog 2005/2006 der Harmonic Drive AG, Limburg an der Lahn, 2005
- [71] HEINRICH, G.: *Über die Kompensation der Reibung durch zusätzliche Schwingbewegungen*. Zeitschr. F. angew. Math. u. Mechanik, Bd. 22, Nr. 3, S. 136-141, 1942

- [72] HEISS, H.: *Die explizite Lösung der kinematischen Gleichung für eine Klasse von Industrierobotern*. Dissertation, Institut für Informatik, TU München, 1985
- [73] HERTZ, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Nr. 92, S. 156-171, 1882
- [74] HILLER, M., WOERNLE, C.: *Ein systematisches Verfahren zur numerischen Behandlung der Rückwärtstransformation bei Industrierobotern*. VDI-Bericht 598 - Steuerung und Regelung von Robotern, VDI-Verlag, Düsseldorf, S. 147-161, 1986
- [75] HOLLAND, J.H.: *Adaption in natural and artificial systems*. MIT Press, Cambridge (MA), 1995
- [76] HÖLZL, J.: *Modellierung, Identifikation und Simulation der Dynamik von Industrierobotern*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1994
- [77] HUANG, H., MCCLAMROCH, N.H.: *Time-optimal control for a robotic contour following Problem*. IEEE J. of Robotics & Automation, 4(2), S. 140-149, 1988
- [78] *ICRA 2002 Proceedings*. Proc. of the 2002 IEEE Int. Conference on Robotics and Automation in Washington (DC), IEEE, Piscataway (NJ), 2002
- [79] ISERMANN, R.: *Identifikation dynamischer Systeme*. Springer Verlag, Berlin, 1992
- [80] JAMSHIDI, M.: *Robotics and manufacturing - recent trends in research and applications*. Proc. of the 6th International Symposium on Robotics and Manufacturing (ISRAM '96) in Montpellier, ASME Press, New York, 1996
- [81] JOHANNI, R.: *Automatisches Aufstellen der Bewegungsgleichungen von baumstrukturierten Mehrkörpersystemen mit elastischen Körpern*. Diplomarbeit, Lehrstuhl B für Mechanik, TU München, 1984
- [82] JOHANNI, R.: *On the Automatic Generation of the Equations of Motion for Robots with Elastically Deformable Arms*. Preprints of the IFAC-IFIP-IMACS Intl. Symposium on Theory of Robots, Wien, S. 195-199, 1986
- [83] JOHANNI, R.: *Optimale Bahnplanung bei Industrierobotern*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1988
- [84] JOHNSON, K.L.: *Contact Mechanics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987
- [85] JUNGHANS, R.: *Experimentelle Untersuchungen der scheinbaren Reibungsverminderung durch Schwingungserregung*. Wissenschaftliche Zeitschrift der TH Karl-Marx-Stadt, Jahrgang XII, Heft 1, S. 107-113, 1970
- [86] KECSKEMÉTHY, A.: *MOBILE 1.3 User's Guide*. Institut für Mechanik und Getriebelehre, TU Graz, 1999
- [87] KERLE, H., PITTSCHELLIS, R.: *Einführung in die Getriebelehre*. 2. Aufl., Teubner Verlag, Stuttgart, 2002
- [88] KIRKPATRICK, S., GELATT, C.D., VECCHI, M.P.: *Optimization by simulated annealing*. Science, 220, S. 671-680, 1983

- [89] KLARBRING, A., BJÖRKMAN, G.: *A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface*. Computers & Structures, 30, S. 1185-1198, 1988
- [90] KLEEMANN, U.: *Regelung elastischer Roboter*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1989
- [91] KREUZER, E., LEISTNER, G.: *Programmsystem NEWEUL'90*. Anleitung AN-24, Institut B für Mechanik, Univ. Stuttgart, 1991
- [92] LAGARIAS, J.C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H., WRIGHT, P. E.: *Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions*. SIAM Journal of Optimization, 9(1), S. 112-147, 1998
- [93] LARSSON, R.; HÖGLUND, E.: *Numerical Solution of a Ball Impacting and Rebounding a Lubricated Surface*. Journal of Tribology, 117, S. 94-102, 1995
- [94] LEMKE, C.E.: *Some pivot schemes for the linear complementarity problem*. Mathematical Programming Study, S. 15-35, 1978
- [95] LI, S.-H., ASADA, H.: *Automated Robotic Assembly using Vibratory Work Table: Optimal Tuning of Vibrators Based on the Taguchi Method*. JAPAN/USA Symposium on Flexible Automation, ASME, 2, S. 1531-1538, 1992
- [96] LÖFFLER, K.: *Dynamik und Regelung einer zweibeinigen Laufmaschine*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2006
- [97] LUH, J. Y. S.: *An anatomy of industrial robots and their controls*. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-28, S. 133-153, 1983
- [98] LUO, Z.Q., PANG, J.S., RALPH, D.C.: *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996
- [99] MAGNUS, K., POPP, K.: *Schwingungen*. 7.Aufl., Teubner Verlag, Stuttgart, 2005
- [100] MANGASARIAN, O.L.: *Equivalence of the Complementarity Problem to a System of Nonlinear Equations*. SIAM Journal on Appl. Mathematics, 31, S. 89-92, 1976
- [101] MARTINS, J.A.C., ODEN, J.T., SIMOES, F.M.F.: *A Study of Static and Kinetic Friction*. Int. Journal of Engineering Science, 28(1), S. 29-92, 1990
- [102] MEYBERG, K., VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik*. Band 1, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995
- [103] MEYER, H.A.: *Symposium on Monte Carlo Methods*. John Wiley, New York, 1956
- [104] MISTAKIDIS, E.S., STAVROULAKIS, G.E.: *Nonconvex Optimization in Mechanics*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1998
- [105] MOREAU, J.J., PANAGIOTOPOULOS, P.D.: *Nonsmooth Mechanics and Applications*, CISM Courses and Lectures, 302, Springer Verlag, Wien, New York, 1988
- [106] MOREAU, J.J.: *On unilateral constraints, friction and plasticity*. New Variational Techniques in Mathematical Physics, Edizioni Cremonese, Rom, S. 173-322, 1974
- [107] MOREAU, J.J.: *Some Numerical Methods in Multibody Dynamics: Application to Granular Materials*. European J. of Mechanics A Solids, 13, S. 93-114, 1994

- [108] MOREAU, J.J.: *Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics*. CISM Courses and Lectures, Montpellier, Springer-Verlag, 1987
- [109] MURTY, K.G.: *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*. Heldermann Verlag, Berlin, 1988
- [110] NANIEWICZ, Z., PANAGIOTOPOULOS, P.D.: *Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications*. Dekker, New York, 1995
- [111] NELDER, J.A., MEAD, R.: *A Simplex Method for Function Minimization*. Computer Journal 7, S. 308-313, 1965
- [112] NIKRAVESH, P.: *Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988
- [113] ODEN, J.T., MARTINS, J.A.C.: *Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 52, S. 527 - 634, 1985
- [114] OTTL, D.: *Schwingungen mechanischer Systeme mit Strukturdämpfung*. VDI-Forschungsheft 603, VDI Verlag, Düsseldorf, 1981
- [115] PANAGIOTOPOULOS, P.D., PANAGOULI, O.K., MISTAKIDIS, E.S.: *Fractal Interfaces in Contact Problems. Theory and Numerical Applications*. Proc. Contact Mechanics International Symposium, Lausanne, S. 237-260, 1992
- [116] PANAGIOTOPOULOS, P.D.: *A Nonlinear Programming Approach to the Unilateral Contact and Friction-Boundary Value Problem in the Theory of Elasticity*. Ingenieur Archiv, 44, S. 421-432, 1975
- [117] PANAGIOTOPOULOS, P.D.: *Hemivariational Inequalities*. Springer, Berlin, 1993
- [118] PAPAGEORGIOU, M.: *Optimierung: Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. Oldenbourg, München, 1996
- [119] PAUL, R. P.: *Robot manipulators - Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, Cambridge (MA), 1986
- [120] PFEIFFER, F., ELTZE, J., WEIDEMANN, H. J.: *Six-legged Technical Walking Considering Biological Principles*. Robotics and Autonomous Systems, S. 223-232, 1995
- [121] PFEIFFER, F., GLOCKER, C.: *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Wiley Series in Nonlinear Science, John Wiley and Sons, New York, 1996
- [122] PFEIFFER, F., JOHANNI, R.: *A Concept for Manipulator Trajectory Planning*. IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-3(2), S. 115-123, 1987
- [123] PFEIFFER, F., REITHMEIER, E.: *Roboterdyamik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1987
- [124] PFEIFFER, F., RICHTER, K.: *Optimal path planning including forces at the gripper*. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 3, S. 251-258, 1990
- [125] PFEIFFER, F.: *Einführung in die Dynamik*. 2. Aufl., Teubner Verlag, Stuttgart, 1992

- [126] PFEIFFER, F.: *Unilateral Problems of Dynamics*. Archive of Applied Mechanics, 69, Springer Verlag, Berlin, S. 503-527, 1999
- [127] PIEPER, D.L., ROTH, B.: *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*. Proc. 2nd Intl. Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 2, Zakopane, S. 159-169, 1969
- [128] PONTRJAGIN, L.S.: *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. 2. Aufl., Oldenbourg Verlag, München, 1967
- [129] POST, J.: *Objektorientierte Softwareentwicklung zu Simulation von Antriebsträngen*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2003
- [130] POWELL, M.J.D.: *A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculations*. Numerical Analysis, ed. G.A. Watson, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 630, 1978
- [131] POWELL, M.J.D.: *Variable Metric Methods for Constrained Optimization*. Mathematical Programming: The State of the Art, S. 288-311, Springer Verlag, Berlin, 1983
- [132] PRASSLER, E., DILLMANN, R., KUNTZE, H.: *Robotik in Deutschland - Lehre, Forschung und Entwicklung*. Shaker Verlag, Aachen, 1998
- [133] PROKOP, G.: *Optimale Prozeßdynamik bei Manipulation mit Robotern*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1998
- [134] PRÜFER, M.: *Reibungsanalyse und Identifikation von Dynamikparametern bei direktangetriebenen und getriebebehafteten Robotern*. Shaker Verlag, Aachen, 1996
- [135] QU, S.: *Optimale Bahnplanung für Roboter unter Berücksichtigung stochastischer Parameterschwankungen*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1995
- [136] RAJAN, V.T.: *Minimum Time Trajectory Planning*. Proc. IEEE Intl. Conference on Robotics and Automation, St. Louis (MO), S. 759-764, 1985
- [137] RICHTER, K.: *Kraftregelung elastischer Roboter*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1991
- [138] RIEMER, M., WAUER, J., WEDIG, W.: *Mathematische Methoden der technischen Mechanik*. Springer Verlag, Berlin, 1993
- [139] ROBERSON, R. E., SCHWERTASSEK, R.: *Dynamics of multibody systems*. Springer Verlag, Berlin, 1988
- [140] *Robotik 2006*. Tagung der VDI/VDE-Gesellschaft Mess- und Automatisierungstechnik, VDI Verlag, Düsseldorf, 2006
- [141] ROCKAFELLAR, R.T., WETS, R.J.: *Variational Analysis*. Springer, Berlin, 1998
- [142] ROCKAFELLAR, R.T.: *Convex Analysis*. Princeton Univ. Press, Princeton (NJ), 1972
- [143] ROSSMANN, T., PFEIFFER, F., GLOCKER, C.: *Efficient Algorithms for Nonsmooth Dynamics*. ASME Intl. Mech. Engineering Congress and Exposition, Dallas, 1997
- [144] ROSSMANN, T.: *Eine Laufmaschine für Rohre*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1998

- [145] SALISBURY, J.K., CRAIG, J.J.: *Articulated Hands - Force Control and Kinematic Issues*. Intl. Journal of Robotics Research, 1(1), S. 4-17, 1982
- [146] SCHIEHLEN, W.: *Multibody Systems Handbook*. Springer Verlag, Berlin, 1990
- [147] SCHITTKOWSKI, K.: *On the Convergence of a Sequential Quadratic Programming Method with an Augmented Lagrangian Line Search Function*. In: Mathematische Optimierungsforschung und Statistik, Section Optimization, 4, S. 197-216, 1983
- [148] SCHLOTTER, A.: *Dynamik, Regelung und Optimierung eines neuartigen Roboters*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2000
- [149] SCHWERTASSEK, R., WALLRAPP, O.: *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1999
- [150] SEYFFERTH, W.: *Modellierung unstetiger Montageprozesse mit Robotern*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1993
- [151] SHABANA, A.A.: *Dynamics of multibody systems*. 3. Ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005
- [152] SHILLER, Z., DUBOWSKY, S.: *Robot Path Planning with Obstacles, Actuator, Gripper and Payload Constraints*. Intl. J. of Robotics Research, 8(6), S. 3-18, 1989
- [153] SHIN, K.G., MCKAY, N.D.: *A Dynamic Programming Approach to Trajectory Planning of Robotic Manipulators*. IEEE Trans. on Automatic Control, AC-31(6), S. 491-500, 1986
- [154] *SIMMECHANICS*. The MathWorks Inc., Natick (MA), www.mathworks.com/products/simmechanics
- [155] *SIMPACK*. INTEC GmbH, Wessling, www.simpack.com
- [156] SORGE, K.: *Mehrkörpersysteme mit starr-elastischen Subsystemen*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1993
- [157] STACHOWIAK, H.: *Allgemeine Modelltheorie*. Springer Verlag, Wien, 1973
- [158] STADLER, W.: *Analytical Robotics and Mechatronics*. McGraw-Hill, New York, 1995
- [159] STEUER, J.: *Autonome Regelung einer sechsbeinigen Laufmaschine*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2002
- [160] STEWART, D.E., TRINKLE, J.C.: *An Implicit Time-Stepping Scheme for Rigid Body Dynamics with Inelastic Collisions and Coulomb Friction*. Intl. Journal of Numerical Methods in Engineering, 39, S. 2673-2691, 1996
- [161] STIEGELMEYR, A.: *Zur numerischen Berechnung strukturvarianter Mehrkörpersysteme*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2001
- [162] STOER, J.: *Numerische Mathematik 2*. 4. Aufl., Springer Verlag, Berlin, 2000
- [163] STURGES, R.H.: *A Quantification of Machine Dexterity Applied to an Assembly Task*. Intl. Journal of Robotic Research, 9(3), S. 49-62, 1990
- [164] SZABÓ, I.: *Einführung in die Technische Mechanik*. 8. Aufl., Springer Verlag, 1975

- [165] TARKIAINEN, M., SHILLER, Z.: *Time optimal motions of manipulators with actuator dynamics*. Proc. IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation, Atlanta, S. 725-730, 1993
- [166] TRINKLE, J.C., PANG, J.S., SUDARSKY, S., LO, G.: *On Dynamic Multi-Rigid-Body Contact Problems with Coulomb Friction*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 77(4), S. 267-279, 1997
- [167] TÜRK, S.: *Zur Modellierung der Dynamik von Robotern mit rotatorischen Gelenken*. VDI Verlag, , Düsseldorf, 1990
- [168] UICKER, J.J., DENAVIT, J., HARTENBERG, R.S.: *An Iterative Method for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms*. ASME Journal of Applied Mechanics, S. 309-314, 1964
- [169] ULBRICH, H.: *Maschinendynamik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1996
- [170] VOLA, D., PRATT, E., JEAN, M., RAOUS, M.: *Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementarity techniques*. Rev. Europ. Éléments Finis, 7, S. 149-162, 1998
- [171] WAGNER, F.: *Dynamics of washing machines*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2000
- [172] WAPENHANS, H.: *Optimierung von Roboterbewegungen bei Manipulationsvorgängen*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1994
- [173] WEIDEMANN, H.: *Dynamik und Regelung von sechsbeinigen Robotern und natürlichen Hexapoden*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1993
- [174] WHITNEY, D.E., LOZINSKI, C.A., ROURKE, J.M.: *Industrial Robot Forward Calibration and Results*. J. of Dynamics, Measurement and Control, 108(1), 1986
- [175] WHITNEY, D.E.: *Quasi-static assembly of compliantly supported rigid parts*. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 104, S. 65-77, 1982
- [176] WITTENBURG, J.: *Dynamics of systems of rigid bodies*. Teubner, Stuttgart, 1977
- [177] WITTENBURG, J.: *Schwingungslehre - Lineare Schwingungen, Theorie und Anwendungen*. Springer Verlag, Berlin, 1996
- [178] WOERNLE, C.: *Ein systematisches Verfahren für die Rückwärtstransformation bei Industrierobotern*. Robotersysteme, Band 3, S. 219-228, Springer Verlag, 1987
- [179] WOLFSTEINER, P.: *Dynamik von Vibrationsförderern*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1999
- [180] WÖSLE, M.: *Dynamik von räumlichen strukturvarianten Starrkörpersystemen*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1997
- [181] YOKOYAMA, Y., OKABE, S.: *Reduction of Kinetic Friction by Harmonic Vibration in an Arbitrary Direction*. Bulletin of the JSME, 14(68), S. 139-146, 1971
- [182] YOSHIKAWA, T.: *Dynamic Manipulability of Robot Manipulators*. Proc. IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation, St. Louis (MO), S. 1033-1038, 1985

- [183] YOSHIKAWA, T.: *Foundations of Robotics. Analysis and Control*. The MIT Press, Cambridge (MA), London, 1990
- [184] YOSHIKAWA, T.: *Manipulability of Robotic Systems*. Int. Journal of Robotics Research, 4(2), S. 3-9, 1985
- [185] ZAGLER, A.: *Dynamik und Regelung eines Rohrkrabblers*. VDI Verlag, Düsseldorf, 2006