

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
LEHRSTUHL FÜR NUMERISCHE MATHEMATIK  
ZENTRUM MATHEMATIK

# Optimale Steuerung eines Mehrfinger-Greifers mit konkurrierenden Steuerungen unter Berücksichtigung von Elastizitäten

GERHARD F. SCHANZER

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Dr. J. Richter-Gebert  
Prüfer der Dissertation: 1. Priv.-Doz. Dr. R. Callies  
2. Univ.-Prof. Dr. P. Rentrop  
3. Univ.-Prof. Dr. B. Kugelman,  
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald  
(schriftliche Beurteilung)

Die Dissertation wurde am 26.04.2007 bei der Technischen Universität eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 31.10.2007 angenommen.



## Vorwort

Ich möchte an dieser Stelle die Gelegenheit nutzen, um mich bei all denen zu bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

An erster Stelle ist Herr Dr. Rainer Callies zu nennen, der immer mit Rat und Tat zur Seite stand. Ich bedanke mich für die interessante Aufgabenstellung, die den Grundstein für diese Arbeit legte. Seine engagierte Betreuung und hilfreichen Anregungen waren mir eine große Hilfe und Unterstützung.

Ein herzliches Dankeschön geht auch an Herrn Professor Dr. Peter Rentrop. Als Leiter des Lehrstuhls für Numerische Mathematik an der Technischen Universität München hat er immer ein offenes Ohr für die Sorgen und Belange seiner Mitarbeiter und ermöglichte mir als Mitglied seines Lehrstuhls die Promotion zu einem positiven Abschluss zu bringen.

Danken möchte ich auch Herrn Professor Dr. Bernd Kugelmann, der sich trotz vollem Terminkalender bereit erklärt hat, ein Gutachten zu übernehmen.

Mein besonderer Dank gilt auch den Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl. Ich möchte mich für hilfreiche und anregende Diskussionen bedanken, die beigetragen haben, das mathematische Verständnis zu vertiefen und neue Ideen zu entwickeln. Des Weiteren möchte ich mich für die Durchsicht der Arbeit auf Tipp- und Rechtschreibfehler, sowie die wertvollen Hinweise bedanken. Danke auch für die aufmunternden Worte und den Zuspruch, den ich erfahren durfte.

Besonders dankbar bin ich für die liebevolle und fürsorgliche Unterstützung aus meinem privaten Umfeld. Die Aufmunterung, der Zuspruch, das Verständnis und der Rückhalt in den vergangenen Jahren haben geholfen, auch schwere Zeiten durchzustehen.

München, April 2007

Gerhard F. Schanzer

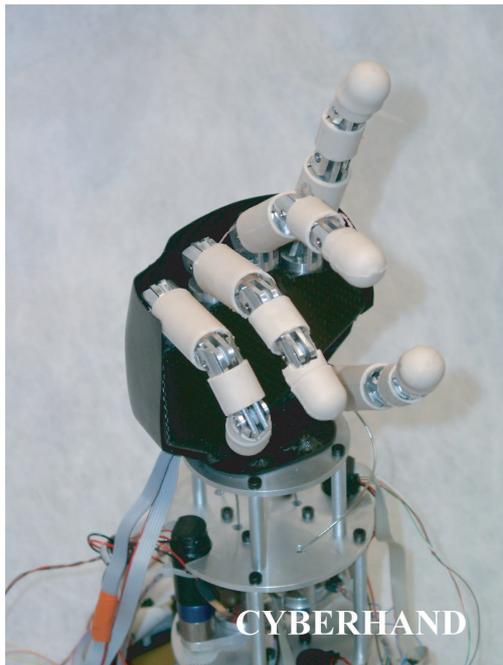


# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Modell eines Mehrfinger-Greifers</b>	<b>5</b>
1.1 Mathematisches Modell . . . . .	5
1.2 Wesentliche Problemstellung . . . . .	7
1.2.1 Konkurrierende Steuerungen . . . . .	8
1.2.2 Elastizität . . . . .	9
<b>2 Starre Mehrkörpersysteme</b>	<b>11</b>
2.1 Bindungen . . . . .	11
2.2 Prinzipien der Mechanik . . . . .	12
2.3 Bewegungsgleichungen . . . . .	14
2.4 Rechnergestützte Formalismen . . . . .	15
2.5 Denavit-Hartenberg-Vereinbarung . . . . .	16
2.6 Rekursiver Newton-Euler-Algorithmus . . . . .	18
2.7 Composite Rigid Body Method . . . . .	20
2.8 Bewegungsgleichungen des Mehrfinger-Greifers . . . . .	23
<b>3 Dynamik elastischer Körper</b>	<b>25</b>
3.1 Kinematik der Deformation . . . . .	25
3.2 Verzerrungszustand . . . . .	26
3.3 Spannungszustand . . . . .	28
3.3.1 Cauchyscher Spannungstensor . . . . .	30
3.3.2 Piolasche Spannungstensoren . . . . .	30
3.3.3 Transformationsgleichungen . . . . .	31
3.4 Materialgesetz . . . . .	32
3.5 Bewegungsgleichungen . . . . .	34
3.6 Rand- und Anfangsbedingungen . . . . .	35
3.7 Zusammenfassung . . . . .	37
<b>4 Finite-Elemente-Methode</b>	<b>39</b>
4.1 Variationsformulierung . . . . .	40
4.2 Semidiskretisierung . . . . .	42
4.3 Finite-Elemente Strukturen mit bewegtem Bezugssystem . . . . .	47
4.3.1 Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte . . . . .	49
4.3.2 Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte . . . . .	50
4.3.3 Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte . . . . .	55
4.3.4 Zusammenfassung . . . . .	56

4.4	Zeitintegration . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Grundlagen der Optimalen Steuerung</b>	<b>59</b>
5.1	Allgemeines Optimalsteuerungsproblem . . . . .	59
5.2	Notwendige Bedingungen . . . . .	62
5.3	Bang-Bang und singuläre Steuerungen . . . . .	66
5.4	Numerische Lösungsverfahren . . . . .	69
5.4.1	Überblick über numerische Lösungsverfahren . . . . .	69
5.4.2	Mehrzielmethode . . . . .	70
5.5	Optimale Steuerung in der Robotik . . . . .	72
5.5.1	Überblick bei Punkt-zu-Punkt Bewegungen mit indirekten Ver- fahren . . . . .	72
5.5.2	Optimalsteuerungsproblem in der Robotik . . . . .	76
5.5.3	Beispiel . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Optimale Steuerung mit konkurrierenden Steuerungen</b>	<b>83</b>
6.1	Ansatz mit Zielfunktional . . . . .	83
6.1.1	Problemspezifizierung . . . . .	84
6.1.2	Beispiel . . . . .	84
6.2	Ansatz mit Beschränkung der zeitlichen Änderung der Steuerungen . . . . .	86
6.2.1	Problemspezifizierung . . . . .	86
6.2.2	Transformation auf ein Zweipunkt-Randwertproblem . . . . .	87
6.2.3	Umsetzung in ein Randwertproblem nicht-konstanter Dimension . . . . .	91
6.2.4	Beispiel . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Berücksichtigung der Roboterelastizitäten</b>	<b>101</b>
7.1	Überblick über Finite-Elemente-Methoden bei flexiblen Robotern . . . . .	101
7.2	Anwendung der Finiten-Elemente-Methode auf den Mehrfinger-Greifer . . . . .	104
7.3	Beispiel . . . . .	108
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>111</b>
<b>A</b>	<b>Ergebnisse der Beispiele aus Kapitel 5</b>	<b>113</b>
<b>B</b>	<b>Ergebnisse der Beispiele aus Kapitel 6</b>	<b>119</b>
B.1	Ansatz mit Zielfunktional . . . . .	119
B.2	Ansatz mit Beschränkung der zeitlichen Änderung der Steuerungen . . . . .	120
<b>C</b>	<b>Ergebnisse des Beispiels aus Kapitel 7</b>	<b>121</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>133</b>

## Einleitung



**Abbildung 1:** *Cyberhand*  
(Bildquelle: [72]).

Die Entwicklungen auf dem Gebiet miniaturisierter Greifer geben Anlass zu hoffen: Künstliche High-Tech Hände – heute noch Vision, aber morgen vielleicht schon Wirklichkeit.

Die vorliegende Arbeit liefert einen Diskussionsbeitrag, wie Technologien weiter entwickelt werden können, wenn Optimalsteuerungstechniken eingesetzt werden. Desweiteren ermöglicht sie einen Einblick, welche Materialbelastungen infolge der Bewegung eines miniaturisierten Greifers auftreten.

Als Modell dient in der vorliegenden Arbeit ein Mehrfinger-Greifer mit sechs Freiheitsgraden. Geeignete Antriebsmotoren für die Mikrogelenke sind entweder langsam oder erzeugen nur kleine Antriebsmomente. Einen erfolgversprechenden Lösungsansatz bietet der Einsatz von zwei Antrieben, die parallel an einem Gelenk angreifen und unabhängig voneinander gesteuert werden können. Dieses Antriebskonzept führt auf den neuen Typ eines Optimalsteuerungsproblems mit konkurrierenden Steuerungen. Dieser Ansatz ist aber nur sinnvoll, wenn ein qualitativer Unterschied der in Konkurrenz

Die Entwicklung künstlicher Hände, die auf den ersten Blick nicht als künstlich zu erkennen sind: Viele Forscher widmen sich dieser Aufgabe. Künstliche Hände, die es ermöglichen, zu fühlen; ästhetische Hände, die der Anatomie des Menschen entsprechen. Hände, die sich an die Unterarme anfügen, ohne störend oder klobig zu wirken. Künstliche Hände, die einen vollwertigen Ersatz für natürliche Hände darstellen. Solche Hände anzufertigen ist in der Science Fiction schon lange möglich, in der Realität ist man noch weit davon entfernt.

Das CYBERHAND Projekt [72] beschäftigt sich mit der Entwicklung einer Handprothese. Abbildung 1 zeigt den Mehrfinger-Greifer der im Rahmen dieses Projekts entwickelt wurde.

Mögliche Antriebe für mechatronische Systeme sind Piezomotoren oder Formgedächtnismaterialien. Die kleinsten Piezomotoren haben Abmessungen von nur wenigen Millimetern und können ein maximales Drehmoment von einigen hundert  $\mu Nm$  erzeugen. Formgedächtnismaterialien haben ein hervorragendes Gewichts-Leistungs Verhältnis.

stehenden Steuerungen mathematisch formuliert werden kann. In dieser Arbeit werden zwei Ansätze untersucht:

1. Die Kombination eines starken Motors mit höherem Energiebedarf und eines schwachen, effizienteren Motors. Das Energiekriterium wird benutzt, um einen qualitativen Unterschied zwischen den beiden Steuerungen festzulegen.
2. Differenzierung in der Zeit, d.h. die zeitliche Änderung der Steuerungen ist beschränkt und unterschiedlich bei den jeweiligen Motoren. In der Theorie der optimalen Steuerung ist in der Problemformulierung die Ableitung einer Steuergröße nicht zulässig. Diese Schwierigkeiten werden effizient gelöst, indem das Optimalsteuerungsproblem in ein Randwertproblem mit nicht-konstanter Dimension transformiert wird und neue Bedingungen an Auf- und Abสปrungspunkten hergeleitet werden.

Zusätzlich ist bei der Entwicklung miniaturisierter Greifer auf Leichtbauweise zu achten, so dass Elastizitäten zu berücksichtigen sind. Die durch die Bewegung des Greifers auftretenden zeitabhängigen Spannungen im Inneren der Struktur werden mittels der Finite-Elemente-Methode berechnet. Die Simulation wird mit dem im Rahmen dieser Arbeit erstellten Programm SOLASTICA durchgeführt.

In Arbeit unterteilt sich in sieben Kapitel:

**Kapitel 1** stellt das mathematische Modell vor, das dieser Arbeit zugrunde gelegt wird und geht kurz auf die wesentlichen Problemstellungen ein, die in dieser Arbeit untersucht werden.

Ein miniaturisierter Greifer stellt ein Mehrkörpersystem dar. In **Kapitel 2** werden die Grundlagen starrer Mehrkörpersysteme bereitgestellt, sowie auf rechnergestützte Formalismen eingegangen, die es ermöglichen, das Aufstellen der Bewegungsgleichungen starrer Mehrkörpersysteme zu automatisieren.

Die Dynamik elastischer Körper wird in **Kapitel 3** beschrieben. Durch eine Bewegung wird ein elastischer Körper deformiert. Die Deformation erzeugt Verzerrungen und Spannungen im Körper. Der Zusammenhang von Verzerrung und Spannung ist durch ein Materialgesetz gegeben. Die sich ergebenden partiellen Differentialgleichungen, die die Bewegung des Körpers beschreiben und Rand- und Anfangswerten genügen müssen, werden bereitgestellt.

**Kapitel 4** geht auf die Finite-Elemente-Methode ein. Um die Bewegungsgleichungen aus Kapitel 3 zu lösen, werden der elastische Körper im Ort durch finite Elemente diskretisiert. Wird ein elastischer Körper beschleunigt bewegt, so müssen zusätzliche Trägheitskräfte berücksichtigt werden. Die sich für die Finite-Elemente-Methode ergebenden zusätzlichen Terme werden bereitgestellt. Es ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zuletzt wird auf die Zeitintegration eingegangen.

Die Grundlagen der optimalen Steuerung werden in **Kapitel 5** bereitgestellt. Es werden die notwendigen Bedingungen für ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem angegeben und numerische Lösungsverfahren einander gegenübergestellt. Anschließend

---

wird die Optimalsteuerung auf Probleme aus der Robotik spezialisiert. Ein komplexes Beispiel des Mehrfinger-Greifers mit mehreren aktiven Steuer- und Zustandsbeschränkungen und Steuerungen, bei denen einige linear, andere nichtlinear in die Hamiltonfunktion eingehen, beschließt dieses Kapitel.

Nachdem die benötigten Grundlagen bereitgestellt sind, wird in **Kapitel 6** auf den neuen Typ von Optimalsteuerungsproblemen mit konkurrierenden Steuerungen eingegangen. Zunächst wird der Ansatz über das Energiekriterium vorgestellt. Der Energiebedarf kann über das zu minimierende Zielfunktional beschrieben werden. Am Beispiel des Mehrfinger-Greifers wird die Wirkungsweise des Ansatzes demonstriert. Anschließend wird der Ansatz mit Beschränkung der zeitlichen Änderung der Steuerung verfolgt. In der optimalen Steuerung ist die Ableitung einer Steuerung nicht zulässig. Die Probleme, die sich bei einer Transformation der Steuervariablen in Zustandsvariablen ergeben, werden herausgearbeitet. Um diese Probleme zu überwinden, wird ein neuer Ansatz vorgeschlagen und mit dem Kalkül der Variationsrechnung analysiert. So können neue innere Punkt Bedingungen hergeleitet werden. Das Ergebnis ist ein Randwertproblem nicht-konstanter Dimension. So wird eine effiziente und numerisch stabile Behandlung des Ansatzes mit Beschränkung der zeitlichen Änderung der Steuerung möglich. Als numerisches Beispiel dient erneut der miniaturisierte Greifer mit konkurrierenden Steuerungen.

In **Kapitel 7** werden die Elastizitäten des Mehrfinger-Greifers berücksichtigt. Es wird dabei angenommen, dass die elastischen Körper neben großen Translationen und Rotationen nur kleine Deformationen erfahren. Als Starrkörperbewegung, die die zusätzlichen Trägheitskräfte verursacht, wird die optimale Bewegung des Mehrfinger-greifers mit konkurrierenden Steuerungen und Beschränkung der zeitlichen Änderung der Steuerungen, zugrunde gelegt. Die sich daraus ergebenden Verschiebungen – und die daraus resultierenden Verzerrungen und Spannungen – werden mit dem im Rahmen dieser Arbeit erstellten Finite-Elemente-Programm SOLASTICA berechnet.



# Kapitel 1

## Modell eines Mehrfinger-Greifers

Ein mathematisches Modell muss bestimmten Anforderungen genügen. Es muss in der Lage sein, die Wirklichkeit in dem Maße widerzuspiegeln, dass daraus Erkenntnisse für die Praxis abgeleitet werden können. Ein mathematisches Modell wird nicht in der Lage sein, die physikalische Wirklichkeit komplett nachzubilden, aber es soll einen Einblick in das betrachtete physikalische Problem ermöglichen. Dabei ist es wichtig, sich auf die wesentlichen physikalischen Effekte, die untersucht werden sollen, zu beschränken. Je genauer die physikalische Wirklichkeit wiedergegeben werden soll, desto komplexer wird das mathematische Modell. Durch den Einsatz leistungsstarker Rechner, ist es möglich, immer komplexere Aufgabe zu lösen. Werden dabei aber Effekte berücksichtigt, die von untergeordneter Relevanz sind, wird die Rechenzeit unnötig hoch. Ein gutes mathematisches Modell ist so komplex wie nötig und so effizient wie möglich.

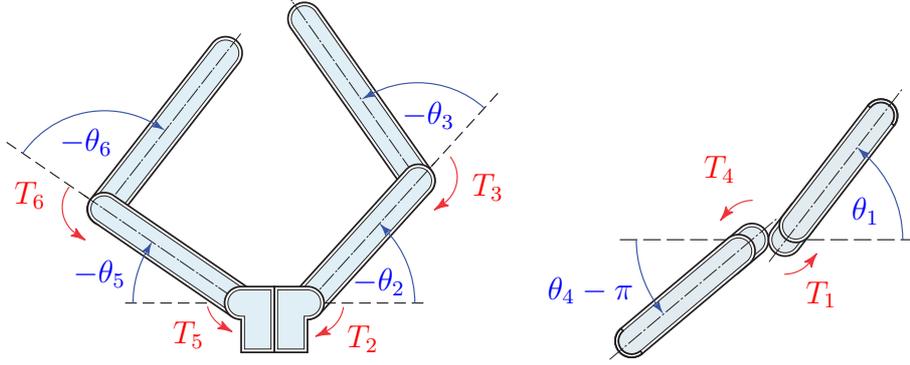
### 1.1 Mathematisches Modell

Dieser Arbeit wird ein Modell zu Grunde gelegt, in welchem die Reibung in den Gelenken vernachlässigt und kein Motormodell berücksichtigt wird. Dabei wurde darauf geachtet, dass alle wichtigen kinematischen und dynamischen Eigenschaften eines Mehrfinger-Greifers mit insgesamt sechs Freiheitsgraden wiedergespiegelt werden. Die Formulierung basiert auf der Starrkörpermechanik, mehr dazu in Kapitel 2.

Eine Skizze der Geometrie des Zwei-Finger-Greifers ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Gelenkwinkel werden mit  $\theta_i$ , die korrespondierenden Antriebsmomente mit  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) bezeichnet. Der Index  $i$  kennzeichnet zudem die Nummerierung der einzelnen Glieder.

Der Manipulator besteht aus zwei Teilen mit jeweils drei Gliedern, die mit Rotationsgelenken verbunden sind und eine kinematische Kette bilden. Die beiden Teile sind auf einer gemeinsamen Basis montiert (Glied 0). Um die Beziehung der Teilkörper zueinander beschreiben zu können, wird jedem Glied ein körperfestes Koordinatensystem zugeordnet. Der Übergang von einem Koordinatensystem zum nächsten kann mit Hilfe der Denavit-Hartenberg-Konvention [71, 74, 234] beschrieben werden. Damit ist die Geometrie des miniaturisierten Greifers festgelegt.

Die Gelenkwinkel  $\Theta := (\theta_1, \dots, \theta_n)^T \in \mathbb{R}^n$  (hier:  $n = 6$ ) bilden einen Satz von Minimalkoordinaten. Die Steuerung des Mehrkörpersystems erfolgt mit Hilfe der Antriebsmomente  $\mathbf{T} := (T_1, \dots, T_p)^T \in \mathbb{R}^p$  (hier:  $p = 6$ ). Da nur begrenzte Antriebsmomente



**Abbildung 1.1:** Zwei-Finger-Greifer: Vorderansicht (links) und Draufsicht (rechts).

zur Verfügung stehen, dient als grundlegende Steuerbeschränkung

$$T_i \in [T_{min,i}, T_{max,i}], \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.1)$$

Als maximale Antriebsmomente werden in dieser Arbeit

$$\mathbf{T}_{max} = (0.25, 0.50, 0.40, 0.20, 0.47, 0.35)^T [Nm] \quad (1.2)$$

gewählt, wobei  $\mathbf{T}_{max} := (T_{max,1}, \dots, T_{max,p})^T \in \mathbb{R}^p$  und  $\mathbf{T}_{min} = -\mathbf{T}_{max}$  gilt.

Die einzelnen Glieder können nicht beliebige Winkelstellungen einnehmen, das heißt, die einzelnen Winkel  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) sind zu beschränken. Als Beschränkungen für die Winkel  $\Theta$  gelten:

$$\begin{aligned} -90^\circ &\leq \theta_1 \leq 90^\circ, \\ -90^\circ &\leq \theta_2 \leq 10^\circ, \\ -170^\circ &\leq \theta_3 \leq 0^\circ, \\ -270^\circ &\leq \theta_4 \leq -90^\circ, \\ -90^\circ &\leq \theta_5 \leq 10^\circ, \\ -170^\circ &\leq \theta_6 \leq 0^\circ. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Da nicht beliebig hohe Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\Theta}$  möglich sind, sind diese ebenfalls beschränkt und zwar durch

$$|\dot{\theta}_i| \leq 65 [rad/s], \quad i = 1, \dots, 6. \quad (1.4)$$

Falls erforderlich können weitere Beschränkungen hinzugenommen werden. Das Modell wird komplettiert durch Randbedingungen, wie z.B. Winkel und Winkelgeschwindigkeiten zur Anfangszeit  $t_0$  und zur Endzeit  $t_F$ :

$$\Theta(t_0) = \Theta_0, \quad \dot{\Theta}(t_0) = \dot{\Theta}_0, \quad \Theta(t_F) = \Theta_F, \quad \dot{\Theta}(t_F) = \dot{\Theta}_F. \quad (1.5)$$

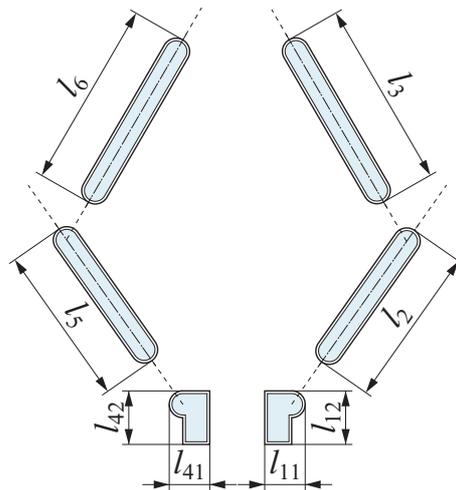
Für alle Beispiele in dieser Arbeit gilt:

$$\begin{aligned} \Theta(t_0) &= (0^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -180^\circ, -35^\circ, -25^\circ)^T, & \dot{\Theta}(t_0) &= \mathbf{0} [rad/s], \\ \Theta(t_F) &= (80^\circ, -65^\circ, -60^\circ, -100^\circ, -65^\circ, -60^\circ)^T, & \dot{\Theta}(t_F) &= \mathbf{0} [rad/s]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

## 1.2 Wesentliche Problemstellung

---

Die Abmessungen der Glieder sind gemäß Abbildung 1.2 definiert und in Tabelle 1.1 aufgelistet. Die dynamischen Größen sind in Tabelle 1.2 zusammengefasst, wobei  $m_i$  die Masse,  $s_{C_i,x}$ ,  $s_{C_i,y}$ ,  $s_{C_i,z}$  die  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Koordinaten des Schwerpunktes und  $I_{xx,i}$ ,  $I_{yy,i}$ ,  $I_{zz,i}$  die Komponenten des Hauptträgheitstensors in  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung des  $i$ -ten Gliedes bezeichnet.



**Abbildung 1.2:** *Explosionszeichnung mit Abmessungen der Zwei-Finger-Hand.*

$l_{11}$ [m]	$l_{12}$ [m]	$l_2$ [m]	$l_3$ [m]	$l_{41}$ [m]	$l_{42}$ [m]	$l_5$ [m]	$l_6$ [m]
0.02	0.02	0.06	0.07	0.02	0.02	0.06	0.07

**Tabelle 1.1:** *Abmessungen der Glieder des miniaturisierten Greifers.*

Als Werkstoff für den Mehrfinger-Greifer wird Aluminium gewählt. Die Materialparameter dafür sind in Tabelle 1.3 zusammengefasst, wobei  $E$  das Elastizitätsmodul,  $\nu$  die Poissonzahl und  $\rho$  die Dichte bezeichnet.

Dieses Modell dient als Grundlage für die in dieser Arbeit untersuchten Problemstellungen.

## 1.2 Wesentliche Problemstellung

Aus den zahlreichen interessanten Fragesstellungen wird hier auf zwei wichtige Aspekte von miniaturisierten Greifern eingegangen. Zum Einen sind herkömmliche Antriebe für Mikro-Gelenke nur bedingt brauchbar und zum Anderen müssen auf Grund der Leichtbauweise Elastizitäten berücksichtigt werden.

$i$	$m_i$ [kg]	$s_{C_i,x}$ [m]	$s_{C_i,y} = s_{C_i,z}$ [m]	$I_{xx,i}$ [kg m <sup>2</sup> ]	$I_{yy,i} = I_{zz,i}$ [kg m <sup>2</sup> ]
1	0.08	0.01	0.0	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$3.1\bar{6} \cdot 10^{-6}$
2	0.16	0.03	0.0	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$4.9 \cdot 10^{-5}$
3	0.20	0.035	0.0	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$8.291\bar{6} \cdot 10^{-5}$
4	0.08	0.01	0.0	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$3.1\bar{6} \cdot 10^{-6}$
5	0.16	0.03	0.0	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$4.9 \cdot 10^{-5}$
6	0.20	0.035	0.0	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$8.291\bar{6} \cdot 10^{-5}$

**Tabelle 1.2:** *Dynamische Größen des miniaturisierten Greifers.*

$E$ [ $\frac{N}{m^2}$ ]	$\nu$ [-]	$\rho$ [ $\frac{g}{cm^3}$ ]
$7.22 \cdot 10^{10}$	0.34	2.70

**Tabelle 1.3:** *Materialparameter für Aluminium* [119, 169].

### 1.2.1 Konkurrierende Steuerungen

Bei miniaturisierten Greifern für die minimalinvasive Chirurgie oder für künstliche Hände sind herkömmliche Antriebe wie Elektromotoren nicht brauchbar. Man benötigt wartungsfreie Antriebe, die darüber hinaus reinraumgeeignet und mit dem menschlichen Gewebe verträglich sind. Besonders dafür geeignet sind Piezomotoren oder Formgedächtnismaterialien. Die Entwicklung solcher Antriebe ist eine große technische Herausforderung. Entweder Aktoren sind schnell, haben aber nur ein geringes spezifisches Antriebsmoment, oder hohe Antriebsmomente können nur mit einer geringen Änderungsrate erzeugt werden.

Eine mögliche Abhilfe ist die Kombination von zwei Antrieben. Ein schneller, aber schwacher Aktor wird mit einem starken, aber langsamen kombiniert. Das heißt, pro Gelenk stehen zwei Antriebe zur Verfügung, die miteinander in Konkurrenz stehen. Dies führt auf den Begriff der konkurrierenden Steuerungen.

Konkurrierende Steuerungen werden eingeführt, indem eine ursprüngliche Steuerung in zwei unanabhängige und additive Steuerungen aufgesplittet wird. Das bedeutet, dass anstelle des einen Motors am Gelenk  $i$  mit Antriebsmoment  $T_i$ , nun zwei Motoren, die parallel wirken, eingesetzt werden. Dabei wird ein schneller, aber schwacher Aktor mit Antriebsmoment  $T_i^f$  und ein starker, aber langsamer Motor mit Antriebsmoment  $T_i^s$  kombiniert.

Somit gilt

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^f + \mathbf{T}^s. \quad (1.7)$$

Die resultierenden Antriebsmomente  $\mathbf{T}^f$  und  $\mathbf{T}^s$  können unabhängig voneinander gesteuert werden. Der Ansatz (1.7) ist nur dann sinnvoll, wenn ein qualitativer Unterschied zwischen  $\mathbf{T}^f$  und  $\mathbf{T}^s$  mathematisch formuliert werden kann. Darauf wird näher in Kapitel 6 eingegangen.

### 1.2.2 Elastizität

Beim Einsatz von miniaturisierten Greifern ist zudem auf Leichtbauweise zu achten. Bei der Entwicklung und Konstruktion von künstlichen Händen muss auf Gewichtsreduktion geachtet werden. Dies kann zum Beispiel durch spezielle Formgebung, oder durch Verwendung von speziellen Materialien erreicht werden. Die daraus resultierende Fragestellung ist, welchen Belastungen das Material bei einer Bewegung ausgesetzt ist. Es ist zu klären, welche Spannungen im Inneren der Struktur auftreten. Bei der Entwicklung von miniaturisierten Greifern können diese Informationen benutzt werden, um - mit einem Sicherheitsfaktor versehen - das Material entsprechend auszuwählen.

Bei der numerischen Behandlung ist darauf zu achten, dass das mathematische Modell den oben angeführten Anforderungen gerecht wird, insbesondere sollen bei der Geometrie keine vereinfachenden Annahmen getroffen werden, um auch komplizierte Formen, die die Anatomie des Menschen berücksichtigen, berechnen zu können.

In dieser Arbeit wird untersucht, welche Spannungen und Dehnungen im Mehrfinger-Greifer bei der berechneten optimalen Bewegung mit den Daten aus Abschnitt 1.1 auftreten. Auf die Einbeziehung in die Optimierung wird verzichtet, da miniaturisierte Greifer im praktischen Einsatz verschiedenste Bewegungen ausführen müssen. Für jede dieser Bewegungen ergeben sich andere Belastungen. In Kapitel 7 werden die auftretenden Belastungen der optimalen Bewegung mit konkurrierenden Steuerungen im dreidimensionalen Raum aus Kapitel 6 mit Hilfe einer 3D Finite-Elemente Berechnung simuliert. Solche Simulationen können dazu beitragen, die Kosten für die Entwicklung miniaturisierter Greifer erheblich zu senken.



## Kapitel 2

### Starre Mehrkörpersysteme

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für dynamische Mehrkörpersysteme bereitgestellt. Unter dynamischen Systemen versteht man Systeme, die unter dem Einfluss von Kräften und/oder Momenten Bewegungen ausführen. Ein System mehrerer starrer oder elastischer Körper, die miteinander durch Koppelemente verbunden und damit in ihrer Bewegungsfreiheit eingeschränkt sind, nennt man *Mehrkörpersysteme*. Ein wesentlicher Punkt bei der Behandlung dynamischer Systeme bzw. Mehrkörpersysteme ist die Herleitung der beschreibenden Differentialgleichungen, der *Bewegungsgleichungen*.

Starre Mehrkörpersysteme bestehen aus  $N$  starren Körpern, zwischen denen innere Kräfte und Momente wirken. Zusätzlich können noch beliebige äußere Kräfte und Momente am System angreifen. Die massebehafteten Körper erfahren dadurch Trägheitsmomente, welche berücksichtigt werden müssen. Die einzelnen Körper stehen durch Verbindungselemente, wie Stellglieder, Dämpfer, Federn und Gelenke (Abbildung 2.1) in Wechselwirkung. Die Bindungs- und Koppelemente werden dabei als masselos angenommen [40, 215, 222].

#### 2.1 Bindungen

Im Allgemeinen hängen die Bindungen von den Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten, sowie von der Zeit ab. Man unterscheidet holonome, nichtholonome, skleronome und rheonome Bindungen. Holonome Bindungen hängen nur von den Lagekoordinaten ab, nichtholonome zusätzlich noch von Geschwindigkeitskoordinaten, die nicht durch elementare Integration auf reine Lagebeschränkungen zurückgeführt werden können. Von skleronomen Bindungen spricht man, wenn die Zeit nicht explizit vorkommt, ansonsten von rheonomen [40, 192]. Holonome Bindungen werden in der Technik durch unachgiebige Führungen, Gelenke, Hebel, Lagerungen, Stäbe und sonstige Verbindungen realisiert und schränken gleichzeitig die Bewegungsfreiheit von Lage- und Geschwindigkeitsgrößen ein. Nichtholonome Bindungen schränken nur die Geschwindigkeitsgrößen ein und findet man in der Technik vergleichsweise selten. Lineare nichtholonome Bindungen können rein mechanisch verwirklicht werden, zum Beispiel durch rollende starre Räder [215]. Bindungen bzw. Verbindungselemente schränken die Bewegungsfreiheit des Mehrkörpersystems ein.

Ein starrer Körper hat im Allgemeinen sechs Freiheitsgrade, drei *translatorische* und drei *rotatorische*. Ein Mehrkörpersystem aus  $N$  starren Körpern hat somit maximal  $6N$  Freiheitsgrade. Durch die Bindungen zwischen den einzelnen Körpern, auch *Zwangsbedingungen* genannt, können sich die Teilkörper nicht unabhängig voneinander bewegen

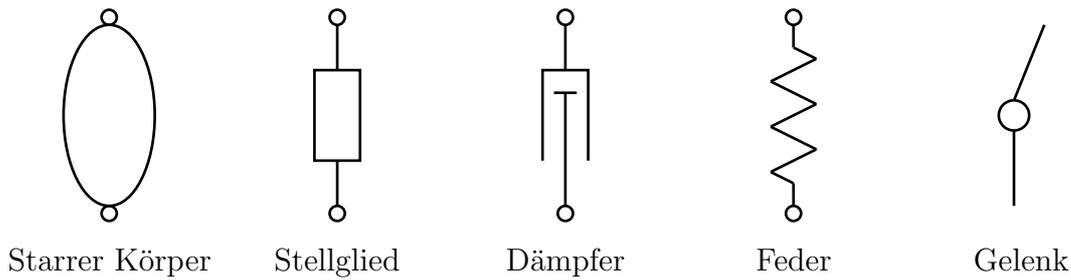


Abbildung 2.1: Elemente eines Mehrkörpersystems.

– die Bewegungsfreiheit wird eingeschränkt. So bewegt sich zum Beispiel ein schienegebundenes Fahrzeug nur längs der Schiene, oder ein Glied eines Roboters, der durch ein rotatorisches Gelenk mit einem anderen Glied verbunden ist, nur auf einer Kreisbahn um das Gelenk. Ein Mehrkörpersystem, dessen Bewegungsfreiheit durch  $n_\lambda$  holonome Bindungen eingeschränkt wird, hat dann nur noch

$$n_f = 6N - n_\lambda$$

Freiheitsgrade. Die  $n_f$  Freiheitsgrade eines holonomen Systems können durch weitere  $n_\mu$  nichtholonome Bindungen auf  $\bar{n}_f$  Freiheitsgrade der Geschwindigkeit reduziert werden, also

$$\bar{n}_f = n_f - n_\mu = 6N - n_\lambda - n_\mu.$$

Die nichtholonomen Bindungen gehören zu den kinematischen Bindungen und können sowohl skleronom, als auch rheonom sein [215]. Alle diese Bindungen müssen durch die Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden. In dieser Arbeit werden im Weiteren skleronome holonome Bindungen betrachtet. Zur Behandlung von rheonomen und nichtholonomen Bindungen sei auf [41, 114, 200] verwiesen.

## 2.2 Prinzipien der Mechanik

Um die Bewegungsgleichungen von starren Mehrkörpersystemen herzuleiten, stehen verschiedene Prinzipien aus der Mechanik zur Verfügung, die wesentlichen sollen hier vorgestellt werden.

Die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen erster Art, auch als *Deskriptorform* der Systemdarstellung bezeichnet, sind besonders dann von Vorteil, wenn die durch die Zwangsbedingungen hervorgerufenen Zwangskräfte in Abhängigkeit von dem Bewegungszustand des Systems bestimmt werden sollen [132]. Die Anwendung der LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen erster Art erfordert die Ermittlung der kinetischen und potentiellen Energien der Teilkörper. Die Bewegung des Systems wird mit  $6N$  Koordinaten – den maximalen Freiheitsgraden eines Mehrkörpersystems – beschrieben. Dabei liegt eine Redundanz in den Koordinaten vor, da die Bewegung durch  $n_\lambda$  Bindungen eingeschränkt ist. Die Zwangsbedingungen werden durch zusätzliche  $n_\lambda$  algebraische Nebenbedingungen berücksichtigt. Mit Hilfe von *Lagrangemultiplikatoren*

wird die *Zwangsmatrix* der Nebenbedingungen an die Bewegungsgleichungen angekoppelt. Als Ergebnis erhält man ein differential-algebraisches System.

Es ist auch möglich, die Zwangsbedingungen völlig zu eliminieren, so dass nur  $n_f = 6N - n_\lambda$  Bewegungsgleichungen gelöst werden müssen. Dazu führt man *verallgemeinerte Koordinaten* bzw. *Minimalkoordinaten* ein, deren Anzahl der Zahl der Freiheitsgrade des Systems entspricht. Um die Dynamik eines starren Mehrkörpersystems in Minimalkoordinaten zu beschreiben, dienen die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen zweiter Art, das HAMILTON Prinzip, die Prinzipien von D'ALEMBERT, JOURDAIN, sowie das Prinzip von NEWTON-EULER. Diese Bewegungsgleichungen werden auch als *Zustandsform* bezeichnet.

Um die LAGRANGE'schen Bewegungsgleichungen zweiter Art zu erhalten, werden die kinetischen und die potentiellen Energien der Teilkörper herangezogen. Der Grundgedanke beim Prinzip von HAMILTON besteht darin, ein dynamisches System durch die Lage- und die Impulskoordinaten zu beschreiben. Die hierbei verwendete Hamiltonfunktion beschreibt bei konservativen, d.h. verlustfreien Systemen, die Gesamtenergie als Summe von kinetischer und potentieller Energie. Das HAMILTON'sche Prinzip spielt besonders in der nichtlinearen Dynamik eine wichtige Rolle. Bei diesen beiden Energieverfahren kommt man mit der Kenntnis der Energien über eine Differentiation zu den Bewegungsgleichungen. Dieser Vorgang stellt ein Hauptargument gegen die Verwendung bei großen Systemen dar [192]. Steht bei den dynamischen Betrachtungen ein funktioneller Zusammenhang zwischen Minimalkoordinaten und generalisierten Kräften im Vordergrund, sind diese Energieverfahren am geeignetsten. Eine ausführlichere Beschreibung beider Verfahren findet man zum Beispiel in [40, 192].

Nach D'ALEMBERT können die an einem System angreifenden Kräfte in solche, die eine Bewegung verursachen und solche, die für die Bewegung verloren sind, eingeteilt werden. Dann gilt, dass die Gesamtheit der verlorenen Kräfte sich das Gleichgewicht hält (D'ALEMBERT'sche Prinzip). Zu den verlorenen Kräften gehören die Zwangskräfte, die bei starren Bindungen keine Arbeit leisten. Das Prinzip von JOURDAIN folgt qualitativ aus der gleichen Argumentation wie das D'ALEMBERT'sche Prinzip. Bindungsgleichungen schreiben eine bestimmte Bewegung vor. Die sich daraus ergebenden Zwangskräfte stehen senkrecht auf den durch die kinematischen Koppelbedingungen definierten Flächen und können damit in ihrer Wirkungsrichtung nicht verschoben oder als Moment nicht verdreht werden. Das bedeutet nicht nur, dass die Kräfte keine Arbeit leisten (D'ALEMBERT), sondern dass sie auch keine Leistung erbringen. Daraus folgt das JOURDAIN'sche Prinzip: Zwangskräfte erbringen keine Leistung. Der direkte Einsatz des D'ALEMBERT'schen oder JOURDAIN'schen Prinzips alleine empfiehlt sich weniger.

Dem NEWTON-EULER'schen Prinzip liegt der Impuls- und Drallsatz zugrunde. NEWTON-EULER ohne zusätzliche Prinzipien lässt sich nach Anwendung des Schnittprinzips einsetzen. Das Freischneiden der betrachteten Körper und Eintragen aller Schnittreaktionen führt zu einem Satz Teilkörpergleichungen, in dem alle Schnittreaktionen als Kräfte und Momente enthalten sind. Das Prinzip des Freischneidens bietet sich besonders bei der Fragestellung an, welche Bewegung eine Änderung der generalisierten Kräfte bewirkt, bzw. welche generalisierten Kräfte aufgebracht werden müssen, um

eine gewünschte Bewegung zu erhalten.

Ein für große Systeme effektives und transparentes Verfahren ergibt sich, wenn man NEWTON-EULER für die Teilkörper mit dem JOURDAIN'schen Prinzip kombiniert. Die in den Teilkörpern ursprünglich enthaltenen Zwangskräfte (passive Kräfte) lassen sich mit Hilfe des JOURDAIN'schen Prinzips eliminieren, so dass nur noch die eingepprägten Kräfte und Momente (aktive Kräfte) berücksichtigt werden müssen. Dies wird erreicht, indem der Impulssatz mit der Transponierten der Jacobi-Matrix der Translation und der Drallsatz mit der Transponierten der Jacobi-Matrix der Rotation der einzelnen Körper multipliziert wird, was eine Projektion in die durch die Zwangsbedingungen freigelassenen Bewegungsrichtungen bewirkt.

Neben den erwähnten Prinzipien gibt es auch noch weitere, die entsprechend ihrer historischen Entwicklung verschiedene Namen tragen, inhaltlich aber identisch sind [40]. Um eine Übersicht und Bewertung der verschiedenen Prinzipien zu gewinnen, sei auf [40, 171, 192] verwiesen.

Die Bewegungsgleichungen können in Deskriptorform angegeben werden (LANGRANGEsche Bewegungsgleichungen 1. Art), oder in Minimalkoordinaten (Zustandsform). Für komplexere Systeme mit kinematisch *geschlossenen Schleifen* oder einer *Substrukturtechnik*, die einen hierarchischen Modellaufbau mit einzelnen Modulen erlaubt, ist die Wahl von Minimalkoordinaten nur lokal möglich. Hier liegt die besondere Stärke der Deskriptorform. Bei Systemen mit geschlossenen Schleifen verwendet man auch Mischformen, bei denen die Bewegungsgleichungen nur partiell reduziert werden [200]. Für Systeme mit *Baumstruktur* findet man dagegen immer einen Satz von Minimalkoordinaten, so dass die Bewegungsgleichungen in Zustandsform angegeben werden können. Abbildung 2.2 zeigt die Topologie von Mehrkörpersystemen.

## 2.3 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen in Deskriptorform bilden ein differential-algebraisches System der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_d(\mathbf{p})\ddot{\mathbf{p}} &= \mathbf{f}_d(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t) - \mathbf{G}_d^T(\mathbf{p})\boldsymbol{\lambda}_d, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}_d(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

mit

- den Lagekoordinaten  $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ , Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{n_p}$  und Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{n_p}$
- den Lagrangemultiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}_d(t) \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$ ,  $n_\lambda < n_p$
- der Massenmatrix  $\mathbf{M}_d(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$
- den eingepprägten und äußeren Kräften  $\mathbf{f}_d(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t) \in \mathbb{R}^{n_p}$
- den holonomen Zwangsbedingungen  $\mathbf{g}_d(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$

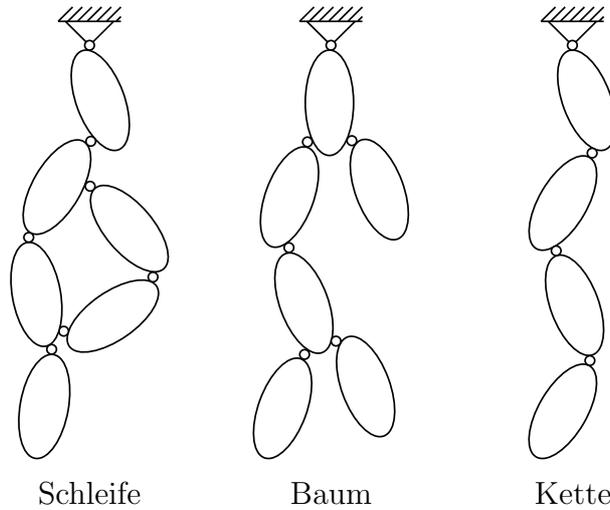


Abbildung 2.2: Topologie von Mehrkörpersystemen.

- der Zwangsmatrix  $\mathbf{G}_d(\mathbf{p}) = \frac{\partial \mathbf{g}_d(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{n_\lambda \times n_p}$ .

Auf die Deskriptorform wird im Weiteren nicht näher eingegangen. Zur Existenz der Lösungen und numerischen Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichung in Deskriptorform sei auf [86, 226], sowie den darin aufgeführten Literaturangaben verwiesen.

Die Bewegungsgleichungen in den  $n_f$  Minimalkoordinaten  $\mathbf{q}$  bilden ein System gewöhnlicher, nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$\mathbf{M}_z(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{Q}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.1)$$

mit

- den Minimalkoordinaten  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ , den Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n_f}$  und Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n_f}$
- der symmetrischen, positiv-definiten Massenmatrix  $\mathbf{M}_z(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$
- den gyroskopischen, dissipativen und Fesselungskräften  $\mathbf{g}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in \mathbb{R}^{n_f}$
- den verallgemeinerten eingepprägten Kräften und Momenten  $\mathbf{Q}_z(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \in \mathbb{R}^{n_f}$

In vielen praktisch relevanten Fällen hängen die Größen  $\mathbf{M}_z$ ,  $\mathbf{g}_z$  und  $\mathbf{Q}_z$  nicht explizit von der Zeit ab.

## 2.4 Rechnergestützte Formalismen

Für Mehrkörpersysteme mit vielen Freiheitsgraden ist es ohne Einsatz von Rechnern kaum möglich, die Bewegungsgleichungen aufzustellen. Deshalb sind seit den sechziger

Jahren rechnergestützte Formalismen entwickelt worden, die zunächst rein numerische Gleichungen lieferten, heute aber auch in der Lage sind, symbolische Gleichungen zu liefern. Weiterhin unterscheidet man zwischen nichtrekursiven und rekursiven Formalismen. Pionierarbeit auf dem Gebiet der symbolischen Programmierung wurde mit dem nichtrekursiven Formalismus NEWEUL [140, 141] geleistet. Am weitesten verbreitet ist das numerische Programmpaket ADAMS [1, 203] (ebenfalls nichtrekursiv), das in Industrie und Forschung eingesetzt wird.

Die rekursiven Formalismen nutzen spezielle Topologieeigenschaften von Mehrkörpersystemen aus, um die numerische Effizienz zu erhöhen. Eine wichtige Voraussetzung für rekursive Formalismen ist die Ketten- oder Baumtopologie des betrachteten Mehrkörpersystems (vgl. Abbildung 2.2).

Eine Schleifenstruktur ist nicht zugelassen. Treten dennoch Schleifen auf, so werden sie durch Aufschneiden in Baumtopologie zurückgeführt, wobei algebraische Schließbedingungen eingehalten werden müssen [215]. Als Beispiele für rekursive Formalismen sei SIMPACK [202, 230] und RecurDyn [198] erwähnt.

Zum Lösen der Bewegungsgleichungen (2.1) ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Der Aufwand dafür beträgt  $\mathcal{O}(N^3)$ . Mit rekursiven Algorithmen ist es möglich, das anschließende Lösen des linearen Gleichungssystems zu vermeiden und die Beschleunigungen mit einem Aufwand von  $\mathcal{O}(N^2)$  zu berechnen [37, 88, 90, 154, 167, 254]. Allerdings lohnt sich der numerische Mehraufwand erst bei mehr als 8 bis 10 Körpern [88, 215].

Eine Übersicht der gängigen Mehrkörpersimulationsprogramme findet man in [214]. Darin ist auch angegeben, welche dynamischen Prinzipien zur Generierung der Bewegungsgleichungen in den einzelnen Programmpaketen zugrunde gelegt werden.

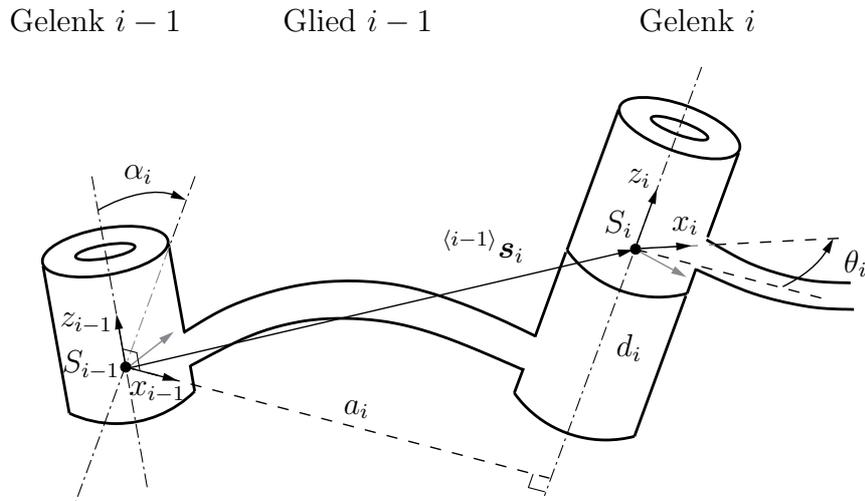
Im Folgenden soll auf die Bewegungsgleichungen bei Robotern eingegangen werden. Roboter bestehen aus  $N$  einzelnen Teilmittglieder, die entweder durch *Drehgelenke* oder *Schubgelenke* miteinander verbunden sind. Es handelt sich somit um ein starres Mehrkörpersystem mit  $n_f$  Freiheitsgraden. Bedingt durch ihre Bauweise weisen sie eine Baumstruktur auf, wobei die einzelnen Glieder in einer Kette aneinander gereiht sind. Im Allgemeinen weisen die Gelenke eines Roboters einen Freiheitsgrad auf. Ein Gelenk mit  $m > 1$  Freiheitsgraden kann durch  $m$  Gelenke mit nur einem Freiheitsgrad, die durch  $m - 1$  Gelenke der Länge 0 miteinander verbunden sind, modelliert werden. Auf diese Weise können sogar mobile Roboter behandelt werden. Für die Anzahl der Freiheitsgrade gilt somit

$$n_f = N.$$

Aufgrund der Baumstruktur besitzen Roboter die angenehme Eigenschaft, dass immer ein Satz von globalen Minimalkoordinaten  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)^T$  angegeben werden kann.

## 2.5 Denavit-Hartenberg-Vereinbarung

Um die Lage und Orientierung jedes Teilkörpers angeben zu können, werden ausgehend von der Basis die einzelnen Glieder, sowie die Gelenke fortlaufend nummeriert



**Abbildung 2.3:** Koordinatensysteme und Denavit-Hartenberg-Parameter zweier aufeinander folgender Glieder.

und jedem Glied  $i$  ein körperfestes Koordinatensystem  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  zugeordnet. Der Basis wird das *Inertialkoordinatensystem*  $S_0$  und – sofern vorhanden – dem *Endeffektor*, wie zum Beispiel bei Industrierobotern, das Koordinatensystem  $S_{N+1}$  zugeordnet. In der Roboterkinematik wird häufig die *Denavit-Hartenberg-Vereinbarung* [71, 74, 234] herangezogen, um die Übergänge zwischen den Koordinatensystemen zu beschreiben. Dabei werden mit Hilfe von *homogenen Koordinaten* die Rotation und Translation zusammen erfasst und die Lage und Orientierung eines Gliedes relativ zum benachbarten Glied über vier Parameter, den sogenannten *Denavit-Hartenberg-Parametern*, beschrieben. Dieses Verfahren stellt eine Standardisierung dar und liefert einen Satz von Minimalkoordinaten. Bei der Denavit-Hartenberg-Vereinbarung wird das Koordinatensystem  $S_{i-1}$  von Glied  $i-1$  so gewählt, dass die  $z$ -Achse  $z_{i-1}$  von  $S_{i-1}$  mit der Gelenkachse zusammenfällt – im Falle eines rotatorischen Gelenks mit der Drehachse, im Falle eines translatorischen Gelenks mit der Schubachse. Die beiden Geraden entlang der Achsen  $z_{i-1}$  und  $z_i$  zweier aufeinanderfolgender Koordinatensysteme sind im Allgemeinen windschief. Die Verbindungslinie senkrecht zu den beiden windschiefen Geraden legt die  $x$ -Achse  $x_{i-1}$  von  $S_{i-1}$  fest, die  $y$ -Achse  $y_{i-1}$  wird so gewählt, dass  $S_{i-1}$  ein Rechtssystem bildet. Nachdem die Koordinatensysteme festgelegt sind, kann die Lage zweier aufeinanderfolgender Koordinatensysteme  $S_{i-1}$  und  $S_i$  durch vier Parameter für jedes Glied  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) beschrieben werden.

- $a_i$ : Abstand von  $z_{i-1}$  und  $z_i$ , gemessen entlang  $x_{i-1}$ ,
- $\alpha_i$ : Winkel zwischen  $z_{i-1}$  und  $z_i$ , gemessen um  $x_{i-1}$  im mathematisch positiven Sinn,
- $d_i$ : Abstand von  $x_{i-1}$  und  $x_i$ , gemessen entlang  $z_i$ ,
- $\theta_i$ : Winkel zwischen  $x_{i-1}$  und  $x_i$ , gemessen um  $z_i$  im mathematisch positiven Sinn.

Die Parameter  $\alpha_i$ ,  $d_i$  und  $\theta_i$  sind vorzeichenbehaftete Größen,  $a_i$  wird nicht negativ gewählt ( $a_i \geq 0$ ). Abbildung 2.3 zeigt die Koordinatensysteme und Parameter zweier

aufeinander folgender Glieder.

Wenn ein Parameter beliebig gewählt werden kann, wird der Wert zu 0 gewählt, um spätere Rechnungen zu vereinfachen. Zum Beispiel ist die Verbindungsstrecke zwischen zwei parallelen Geraden im Gegensatz zu zwei windschiefen Geraden nicht eindeutig festgelegt. Sind nun zwei Drehachsen parallel, so kann der Wert  $d_i$  (*offset*) beliebig gewählt werden. In diesem Fall wird  $d_i = 0$  gewählt. Ist Gelenk  $i$  ein Drehgelenk, so ist  $\theta_i$  variabel und  $d_i$  konstant, ist es ein Schubgelenk, so ist  $\theta_i$  konstant und  $d_i$  variabel. Die variablen Größen stellen die Minimalkoordinaten  $q_i$  dar. Im Falle von  $N$  rein rotatorischen Gelenken gilt

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Theta}(t) = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$$

Die Transformation vom Koordinatensystem  $S_i$  in das Koordinatensystem  $S_{i-1}$  kann in homogenen Koordinaten mit der Transformationsmatrix  ${}^{(i-1)}\mathbf{T}_{(i)}$  dargestellt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} {}^{(i-1)}\mathbf{T}_{(i)} &:= \mathbf{Rot}(x_i, \alpha_i) \cdot \mathbf{Trans}(x_i, a_i) \cdot \mathbf{Rot}(z_i, \theta_i) \cdot \mathbf{Trans}(z_i, d_i) \\ &= \left( \begin{array}{ccc|c} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_i \\ \cos \alpha_i \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i & -d_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \cos \theta_i & \cos \alpha_i & d_i \cos \alpha_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.2) \\ &=: \left( \begin{array}{c|c} {}^{(i-1)}\mathbf{R}_{(i)} & {}^{(i-1)}\mathbf{s}_i \\ \hline \mathbf{0}^T & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$\mathbf{Rot}(x, \alpha)$  bezeichnet eine Drehung um die  $x$ -Achse mit Winkel  $\alpha$ ,  $\mathbf{Trans}(x, a)$  eine Verschiebung um  $a$  entlang der  $x$ -Achse. Die Transformation kann unterteilt werden in eine Rotation und eine Translation. Die Verdrehung des Koordinatensystems  $S_i$  relativ zum Koordinatensystem  $S_{i-1}$  wird durch eine Rotationsmatrix  ${}^{(i-1)}\mathbf{R}_{(i)} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) beschrieben. Die Verschiebung von  $S_i$  relativ zu  $S_{i-1}$  wird durch den Translationsvektor  ${}^{(i-1)}\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^3$  ( $i = 1, \dots, N$ ) vom Ursprung von  $S_{i-1}$  zum Ursprung von  $S_i$  angegeben. Damit gilt:

$${}^{(i-1)}\mathbf{x} = {}^{(i-1)}\mathbf{R}_{(i)} {}^{(i)}\mathbf{x} + {}^{(i-1)}\mathbf{s}_i, \quad {}^{(i)}\mathbf{R}_{(i-1)} = {}^{(i-1)}\mathbf{R}_{(i)}^{-1} = {}^{(i-1)}\mathbf{R}_{(i)}^T.$$

Der obere Index  $\langle i \rangle$  gibt an, in welchem Koordinatensystem der Vektor dargestellt ist, das heißt,  $\langle i-1 \rangle \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  und  $\langle i \rangle \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  beschreiben denselben Punkt im Raum, nur einmal im Koordinatensystem  $S_{i-1}$  und einmal im Koordinatensystem  $S_i$  dargestellt.

## 2.6 Rekursiver Newton-Euler-Algorithmus

Um nun die Dynamik des Mehrkörpersystems zu analysieren werden die NEWTON-EULER Gleichungen herangezogen. Wie bereits erwähnt bieten sich diese an, wenn kein funktionaler Zusammenhang zwischen Minimalkoordinaten und generalisierten Kräften

1. Vorwärtsrekursion:

Startwerte:  $\langle 0 \rangle \boldsymbol{\omega}_0, \langle 0 \rangle \dot{\boldsymbol{\omega}}_0, \langle 0 \rangle \dot{\boldsymbol{v}}_0$

Rekursion:  $i : 1 \rightarrow N$

$$\begin{aligned} \langle i \rangle \boldsymbol{\omega}_i &= \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i-1 \rangle} \langle i-1 \rangle \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \mathbf{e}_z \\ \langle i \rangle \dot{\boldsymbol{\omega}}_i &= \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i-1 \rangle} \langle i-1 \rangle \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i-1 \rangle} \langle i-1 \rangle \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \dot{\theta}_i \mathbf{e}_z + \ddot{\theta}_i \mathbf{e}_z \\ \langle i \rangle \dot{\boldsymbol{v}}_i &= \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i-1 \rangle} \left( \langle i-1 \rangle \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \langle i-1 \rangle \mathbf{s}_i + \right. \\ &\quad \left. \langle i-1 \rangle \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \left( \langle i-1 \rangle \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \langle i-1 \rangle \mathbf{s}_i \right) + \langle i-1 \rangle \dot{\boldsymbol{v}}_{i-1} \right) \\ \langle i \rangle \dot{\boldsymbol{v}}_{C_i} &= \langle i \rangle \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_i} + \langle i \rangle \boldsymbol{\omega}_i \times \left( \langle i \rangle \boldsymbol{\omega}_i \times \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_i} \right) + \langle i \rangle \dot{\boldsymbol{v}}_i \\ \langle i \rangle \mathbf{F}_{C_i} &= m_i \langle i \rangle \dot{\boldsymbol{v}}_{C_i} \\ \langle i \rangle \mathbf{N}_{C_i} &= \mathbf{I}_i \langle i \rangle \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \langle i \rangle \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \langle i \rangle \boldsymbol{\omega}_i \end{aligned}$$

2. Rückwärtsrekursion:

Startwerte:  $\langle N+1 \rangle \mathbf{F}_{N+1}, \langle N+1 \rangle \mathbf{N}_{N+1}$

Rekursion:  $i : N \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \langle i \rangle \mathbf{F}_i &= \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle} \langle i+1 \rangle \mathbf{F}_{i+1} + \langle i \rangle \mathbf{F}_{C_i} \\ \langle i \rangle \mathbf{N}_i &= \langle i \rangle \mathbf{N}_{C_i} + \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle} \langle i+1 \rangle \mathbf{N}_{i+1} + \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_i} \times \langle i \rangle \mathbf{F}_{C_i} + \\ &\quad \langle i \rangle \mathbf{s}_i \times \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle} \langle i+1 \rangle \mathbf{F}_{i+1} \\ T_i &= \mathbf{e}_z^T \langle i \rangle \mathbf{N}_i \end{aligned}$$

**Abbildung 2.4:** Rekursiver Newton-Euler-Algorithmus für rotatorische Gelenke.

von Interesse ist, sondern die Fragestellung im Vordergrund steht, welche generalisierten Kräfte aufgebracht werden müssen, um eine bestimmte Evolution der Minimalkoordinaten zu erreichen. Beim Newton-Euler Formalismus werden für jedes Glied des Roboters die beschreibenden Gleichungen für die Bewegung aufgestellt. Da die Teilkörper durch Gelenke verbunden sind, treten in den Gleichungen für jeden Teilkörper auch die Kopplungskräfte und -momente benachbarter Glieder auf (Schnittprinzip). Durch eine sogenannte *Vorwärts-Rückwärts-Rekursion* ist es möglich, alle Kopplungsterme zu berücksichtigen. Für einen Roboter mit rein rotatorischen Gelenken ist in Abbildung 2.4 der *rekursive Newton-Euler-Algorithmus* [71, 234] angegeben. Darin bezeichnen:

$\langle i \rangle \boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^3$	:	Winkelgeschwindigkeit von Glied $i$ ,
$\langle i \rangle \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \in \mathbb{R}^3$	:	Winkelbeschleunigung von Glied $i$ ,
$\langle i \rangle \dot{\boldsymbol{v}}_i \in \mathbb{R}^3$	:	lineare Beschleunigung des Gelenks $i$ ,
$\langle i \rangle \dot{\boldsymbol{v}}_{C_i} \in \mathbb{R}^3$	:	lineare Beschleunigung des Schwerpunkts von Glied $i$ ,
$\langle i \rangle \boldsymbol{F}_{C_i} \in \mathbb{R}^3$	:	Kräfte im Schwerpunkt von Glied $i$ ,
$\langle i \rangle \boldsymbol{N}_{C_i} \in \mathbb{R}^3$	:	Momente im Schwerpunkt von Glied $i$ ,
$\langle i \rangle \boldsymbol{F}_i \in \mathbb{R}^3$	:	Kräfte im Gelenk $i$ ,
$\langle i \rangle \boldsymbol{N}_i \in \mathbb{R}^3$	:	Momente im Gelenk $i$ ,
$\langle i \rangle \boldsymbol{s}_{C_i} \in \mathbb{R}^3$	:	Schwerpunkt von Glied $i$ ,
$m_i \in \mathbb{R}$	:	Masse von Glied $i$ ,
$\boldsymbol{I}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	:	Hauptträgheitstensor von Glied $i$ : bezogen auf ein Koordinatensystem mit Ursprung im Schwerpunkt von Glied $i$ und gleicher Orientierung wie $S_i$ ,
$T_i \in \mathbb{R}$	:	Antriebsmoment im Gelenk $i$ ,
$\boldsymbol{e}_z \in \mathbb{R}^3$	:	$\boldsymbol{e}_z := (0, 0, 1)^T$ .

### Bemerkung 2.1

Der Einfluss der Schwerkraft kann bei diesem Algorithmus sehr einfach berücksichtigt werden, indem zur Beschleunigung der Basis  $\langle 0 \rangle \dot{\boldsymbol{v}}_0$  der Vektor  $(0, 0, g)^T$  addiert wird, wobei  $g$  die Erdbeschleunigung bezeichnet. Durch die Beschleunigung um  $g$  nach oben erfährt der Roboter die gleichen Kräfte, wie sie die Schwerkraft erzeugen würde.

### Bemerkung 2.2

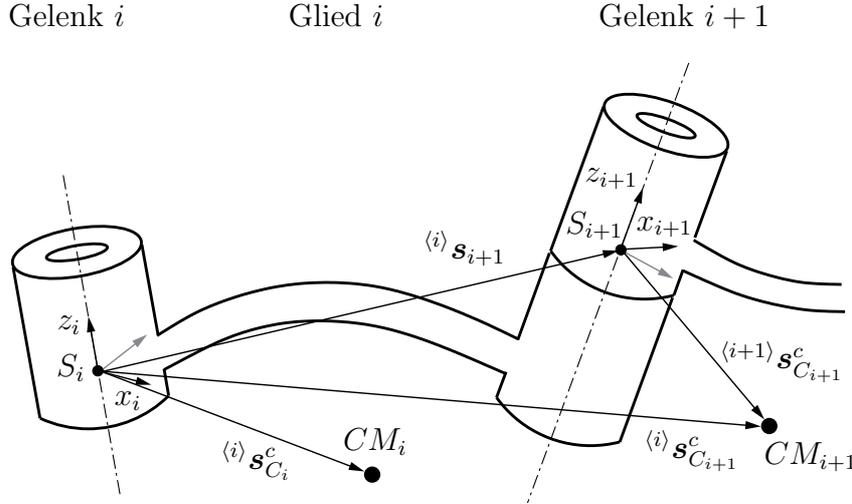
Die Startwerte der Rückwärtsrekursion berücksichtigen externe Kräfte und Momente am Endeffektor des Roboters, hervorgerufen zum Beispiel durch eine Nutzlast, die der Roboter bewegt oder durch Kontakt zu anderen Objekten im Arbeitsraum.

Betrachtet man die Bewegungsgleichungen (2.1), so erkennt man, dass man die Massenmatrix mit Hilfe des Newton-Euler-Algorithmus aufstellen kann, indem man  $\boldsymbol{g}_z(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \mathbf{0}$  setzt und für  $\ddot{\boldsymbol{q}}$  der Reihe nach den  $i$ -ten Einheitsvektor wählt. Als Ergebnis erhält man aus dem rekursiven Newton-Euler-Algorithmus den  $i$ -ten Spaltenvektor der Massenmatrix. Analog erhält man  $\boldsymbol{g}_z(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$  indem  $\ddot{\boldsymbol{q}} = \mathbf{0}$  gesetzt wird.

## 2.7 Composite Rigid Body Method

In diesem Abschnitt soll die Berechnung der Massenmatrix näher betrachtet werden. Der Aufwand zur Berechnung der Massenmatrix mit dem Newton-Euler-Algorithmus ist in [254] mit  $74N^2 - 22N$  Multiplikationen und  $54N^2 - 17N$  Additionen angegeben. Der Aufwand kann erheblich reduziert werden, benutzt man die *Composit Rigid Body Method* [88, 154, 155, 254].

Die Idee ist, dass man die Gelenke  $i, \dots, N$  als Verbund starrer Körper betrachtet, welcher am Gelenk  $i$  beschleunigt wird. Man benutzt die Trägheit des zusammengesetzten Körpers, um die beteiligten Kräfte und Momente zu berechnen. Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, stellt  $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}$  den Vektor der Gelenkkräfte dar, die eine Beschleunigung  $\ddot{\boldsymbol{q}}$  eines stationären Roboters, welcher frei von Gravitations- und externen Kräften



**Abbildung 2.5:** Darstellung des Schwerpunktes  $CM_i$  bzw.  $CM_{i+1}$  des Verbundes der starren Körper  $i$  bis  $N$ , bzw.  $i + 1$  bis  $N$ .

ist, bewirken. Die  $i$ -te Spalte der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  ist also der Vektor der Gelenkkräfte, die benötigt werden, um eine Beschleunigung des Betrags eins am Gelenk  $i$  und Beschleunigung des Betrags null an allen anderen Gelenken zu erreichen. Da keine Bewegung durch die Gelenke  $i + 1, \dots, N$  auftritt, können alle durch eine starre Verbindung ersetzt werden, welche keinen Einfluss auf die Dynamik der vorherigen Glieder der kinematischen Kette haben. Dadurch vereinfacht sich der bewegte Anteil auf einen einzigen zusammengesetzten starren Körper. Die Masse, der Schwerpunkt, sowie die Trägheiten des Verbundes der starren Körper von Glied  $i$  bis  $N$  werden auf das Koordinatensystem  $S_i$  bezogen und dann das Kräfte- und Momentengleichgewicht herangezogen. Abbildung 2.5 veranschaulicht die Umrechnung in das Koordinatensystem  $S_i$ . Beim Berechnen der Massenmatrix wird zudem die Symmetrie ausgenutzt.

Bei der Composit Rigid Body Method ist es geschickter, die Trägheitstensoren der einzelnen Glieder  $\mathbf{I}_i$  nicht auf den Schwerpunkt zu beziehen, sondern auf das Koordinatensystem  $S_i$ . Dadurch können zusätzliche Terme, die beim Umrechnen in das Schwerpunktsystem auftreten, vermieden werden. Da die Hauptträgheitstensoren  $\mathbf{I}_i$  in einem Koordinatensystem mit gleicher Orientierung wie  $S_i$  dargestellt sind, können sie mit der allgemeinen Form des *Satzes von Steiner* [146, 213]

$$\bar{\mathbf{I}}_i = \mathbf{I}_i + m_i \left( \left( {}^{(i)}\mathbf{s}_{C_i} \right)^T {}^{(i)}\mathbf{s}_{C_i} \mathbf{E}^3 - {}^{(i)}\mathbf{s}_{C_i} \left( {}^{(i)}\mathbf{s}_{C_i} \right)^T \right) \quad (2.3)$$

auf  $S_i$  bezogen werden, wobei  $\mathbf{E}^n := \text{diag}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bezeichnet, ansonsten die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.6 gelten.

Der Algorithmus der Composit Rigid Body Method ist in Abbildung 2.6 angegeben. Darin gelten die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.5 und 2.6, sowie zusätzlich:

- ${}^{(i)}\mathbf{s}_{C_i}^c \in \mathbb{R}^3$  : Schwerpunkt des zusammengesetzten Körpers,
- $m_i^c \in \mathbb{R}$  : Masse des zusammengesetzten Körpers,
- ${}^{(i)}\mathbf{I}_i^c \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ : Trägheitstensor des zusammengesetzten Körpers, bezogen auf  $S_i$ .

$$\text{Startwerte: } \begin{aligned} m_N^c &= m_N, \quad \langle N \rangle \mathbf{s}_{C_N}^c = \langle N \rangle \mathbf{s}_{C_N}, \quad \langle N \rangle \mathbf{I}_N^c = \bar{\mathbf{I}}_i \\ \langle N \rangle \mathbf{F}_N &= -m_N^c \mathbf{s}_{C_N}^c \times \mathbf{e}_z, \quad \langle N \rangle \mathbf{N}_N = \langle N \rangle \mathbf{I}_N^c \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{Schritt 1: } \quad i : N - 1 \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} m_i^c &= m_{i+1}^c + m_i \\ \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c &= \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle} \langle i+1 \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c + \langle i \rangle \mathbf{s}_{i+1} \\ m_i^c \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_i}^c &= m_{i+1}^c \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c + m_i \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_i} \\ \langle i \rangle \mathbf{I}_i^c &= \langle i \rangle \mathbf{R}_{\langle i+1 \rangle} \left[ \langle i+1 \rangle \mathbf{I}_{i+1}^c - m_{i+1}^c \left( \left( \langle i+1 \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c \right)^T \langle i+1 \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c \mathbf{E}^3 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \langle i+1 \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c \left( \langle i+1 \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c \right)^T \right) \right] \langle i+1 \rangle \mathbf{R}_{\langle i \rangle} + \\ &\quad m_{i+1}^c \left( \left( \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c \right)^T \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c \mathbf{E}^3 - \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c \left( \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_{i+1}}^c \right)^T \right) + \langle i \rangle \bar{\mathbf{I}}_i \\ \langle i \rangle \mathbf{F}_i &= -m_i^c \langle i \rangle \mathbf{s}_{C_i}^c \times \mathbf{e}_z \\ \langle i \rangle \mathbf{N}_i &= \langle i \rangle \mathbf{I}_i^c \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{Schritt 2: } \quad \begin{aligned} i &: 2 \rightarrow N \\ j &: i - 1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle j \rangle \mathbf{F}_i &= \langle j \rangle \mathbf{R}_{\langle j+1 \rangle} \langle j+1 \rangle \mathbf{F}_i \\ \langle j \rangle \mathbf{N}_i &= \langle j \rangle \mathbf{R}_{\langle j+1 \rangle} \langle j+1 \rangle \mathbf{N}_i + \langle j \rangle \mathbf{s}_{j+1} \times \langle j \rangle \mathbf{F}_i \end{aligned}$$

$$\text{Schritt 3: } \quad \begin{aligned} i &: 1 \rightarrow N \\ j &: 1 \rightarrow i \end{aligned}$$

$$M_{ji} = \mathbf{e}_z^T \langle j \rangle \mathbf{N}_i$$

Abbildung 2.6: *Composit Rigid Body Method für rotatorische Gelenke.*

Zum Aufstellen der Massenmatrix mit der in [254] angegebenen Composit Rigid Body Method für rotatorische und translatorische Gelenke benötigt man  $12N^2 + 56N - 27$  Multiplikationen und  $7N^2 + 67N - 53$  Additionen. Durch geschicktes Umschreiben der Gleichungen kann der Aufwand noch weiter reduziert werden, siehe Tabelle 2.1.

Methode	# Multiplikationen	# Additionen
[254]	$12N^2 + 56N - 27$	$7N^2 + 67N - 53$
[154, 155], Methode III	$12.5N^2 + 24.5N - 37$	$8N^2 + 40N - 48$
[154, 155], Methode IV	$10N^2 + 41N - 51$	$6N^2 + 52N - 58$
[10]	$11N^2 + 11N - 42$	$5.5N^2 + 32.5N - 54$
[167]	$10N^2 + 9N - 25$	$6N^2 + 30 - 46$

**Tabelle 2.1:** Anzahl der Operationen zum Aufstellen der Massenmatrix.

In [88, 90, 154, 155] ist die Composite Rigid Body Method in *spatial Notation* angegeben, das heißt, es werden die rotatorischen und translatorischen Geschwindigkeiten, sowie die Momente und Kräfte in einen  $6 \times 1$  Vektor zusammengefasst. Die Matrizen für Trägheitsmomente und Koordinatensysteme sind  $6 \times 6$  Matrizen. Für eine Einführung in spatial Notation sei auf [88] verwiesen. Desweiteren wird in [154, 155] der Algorithmus für beliebige Gelenke mit bis zu 6 Freiheitsgraden formuliert. Damit können zum Beispiel auch *Schraubgelenke* behandelt werden. Im Gegensatz zu [88, 154, 155] wird in [254] der Trägheitstensor  ${}^{(i)}\mathbf{I}_i^c$  des zusammengesetzten Körpers nicht im Koordinatensystem  $S_i$  angegeben, sondern im Schwerpunkt. In [90, 154] werden außerdem geschlossene kinematische Ketten (Schleifen) behandelt, in [88, 89] verzweigte kinematische Ketten (Bäume). Für einen Überblick über die Entwicklungen zur Berechnung der Massenmatrix in den letzten zwanzig Jahre sei auf [90] verwiesen.

## 2.8 Bewegungsgleichungen des Mehrfinger-Greifers

Es bietet sich an, die Massenmatrix mit der Composit Rigid Body Method (Abbildung 2.6) zu berechnen und die Coriolis-, Zentrifugal- und Gravitationskräfte mit dem rekursiven Newton-Euler Algorithmus (Abbildung 2.4). Dazu müssen zunächst für den Zwei-Finger-Greifer aus Abbildung 1.1 die Denavit-Hartenberg-Parameter festgelegt werden. Damit stehen mit (2.2) die für die Algorithmen benötigten Rotationsmatrizen  ${}^{(i-1)}\mathbf{R}_{(i)}$  und Translationvektoren  ${}^{(i-1)}\mathbf{s}_i$  zur Verfügung. Die gewählten Parameter  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $d_i$  und  $\theta_i$  sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst, wobei die Längen der Glieder Tabelle 1.1 zu entnehmen sind.

Die Werte für Trägheitstensor, Schwerpunkt und Masse der einzelnen Glieder sind gemäß Tabelle 1.2 zu wählen. Für die Composit Rigid Body Method müssen die Hauptträgheitstensoren aus Tabelle 1.2 mit dem Satz von Steiner (2.3) auf die Gelenke bezo-

$i$	$a_i [m]$	$\alpha_i [rad]$	$d_i [m]$	$\theta_i [rad]$
1	0.0	0.0	$l_{11}$	$\theta_1$
2	$l_{12}$	$-\frac{\pi}{2}$	0.0	$\theta_2$
3	$l_2$	0.0	0.0	$\theta_3$
4	0.0	0.0	$l_{41}$	$\theta_4$
5	$l_{42}$	$-\frac{\pi}{2}$	0.0	$\theta_5$
6	$l_5$	0.0	0.0	$\theta_6$

**Tabelle 2.2:** Denavit-Hartenberg-Parameter für den Zwei-Finger-Greifer.

gen werden. Die Koordinatensysteme, auf die sich die Größen aus Tabelle 1.2 beziehen, stimmen mit denen, die sich aus den Denavit-Hartenberg-Parametern ergeben, überein. Als Startwerte für den rekursiven Newton-Euler Algorithmus dienen bei der

$$\begin{aligned} \text{Vorwärtsrekursion : } & \langle 0 \rangle \boldsymbol{\omega}_0 = \langle 0 \rangle \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}, \quad \langle 0 \rangle \dot{\mathbf{v}}_0 = (0, 0, g)^T, \\ \text{Rückwärtsrekursion: } & \langle n+1 \rangle \mathbf{F}_{n+1} = \langle n+1 \rangle \mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen in Zustandsform des Zwei-Finger-Greifers zu

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta})\ddot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{h}(\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}) = \mathbf{T}$$

mit der symmetrisch positiv definiten Massenmatrix  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , den Coriolis-, Zentrifugal- und Gravitationskräften  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}) \in \mathbb{R}^6$ , sowie den Antriebsmomenten  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^6$ .

## Kapitel 3

### Dynamik elastischer Körper

In der Elastizitätstheorie wird ein elastischer Körper als *Kontinuum* betrachtet. Die Elastizitätstheorie befasst sich mit der Beschreibung und Ermittlung der Beanspruchungen und Deformationen elastischer Körper, wenn diese inneren oder äußeren Belastungen ausgesetzt sind. Dabei wird die Beanspruchung lokal durch den *Spannungszustand* erfasst und die lokale Deformation durch den *Verzerrungszustand*. Spannungen und Verzerrungen sind nicht unabhängig. Der Zusammenhang wird über ein *Materialgesetz* beschrieben – im Fall von linearer Elastizität durch das *Hookesche Gesetz*. Die Bewegung eines elastischen Körpers lässt sich durch partiellen Differentialgleichungen beschreiben, deren Lösung geometrischen und kinetischen Randbedingungen genügen muss.

#### 3.1 Kinematik der Deformation

In der Kontinuumsmechanik wird ein Körper  $\mathcal{K}$  als eine zusammenhängende und abgeschlossene Menge betrachtet. Kann der Ort aller Punkte  $P(t)$  des Körpers  $\mathcal{K}$  bezüglich eines raumfesten, kartesischen Koordinatensystem zu allen Zeiten  $t$  angegeben werden, ist die Bewegung von  $\mathcal{K}$  bekannt (Abbildung 3.1).

Zur Festlegung der zum Körper  $\mathcal{K}$  gehörenden Punkte betrachtet man eine *Referenzkonfiguration*, die zum Zeitpunkt  $t = t_0$  eingenommen wird – meist ein undeformierter Ausgangszustand. In der Referenzkonfiguration werden den Punkten  $P(t_0)$  des Körpers die Ortsvektoren  $\mathbf{R}$  zugeordnet. Der aktuelle Ort aller materiellen Punkte  $P(t)$  des Kontinuums ist gegeben durch die Funktion

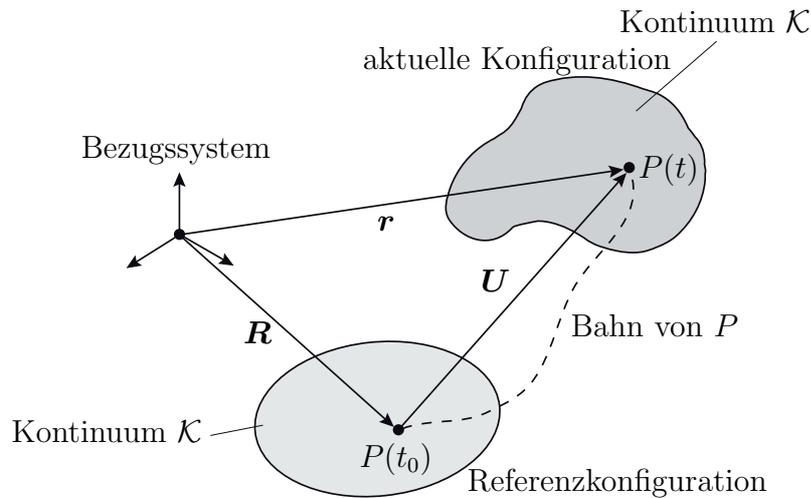
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \quad (3.1)$$

wo  $\mathbf{R}$  die Koordinaten von  $P$  in der Referenzkonfiguration sind.

Kontinua genügen den Kontinuitätsaxiomen [12], welche gewährleisten, dass die Zuordnung der Punkte  $P(t_0)$  und  $P(t)$ , wie mit (3.1) beschrieben und in Abbildung 3.1 dargestellt, injektiv und stetig ist. Darüber hinaus wird hier noch gefordert, dass die Zuordnung (3.1) hinreichend oft differenzierbar sei.

Da (3.1) injektiv ist, lässt sie sich nach  $\mathbf{R}$  auflösen und man erhält

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t). \quad (3.2)$$



**Abbildung 3.1:** Beschreibung der Bewegung der Punkte  $P$  eines deformierbaren Körpers  $\mathcal{K}$

**Bemerkung 3.1**

Man nennt  $\mathbf{R}$  materielle, substantielle oder Lagrangesche Koordinaten und  $\mathbf{r}$  lokale, räumliche oder Eulersche Koordinaten. Die Beschreibung mit Lagrangeschen Koordinaten wird bei festen Körpern bevorzugt, die mit Eulerschen Koordinaten insbesondere in der Fluidmechanik [13, 222].

Anstelle der Ortsvektoren  $\mathbf{r}$  kann man auch die Verschiebungsvektoren  $\mathbf{U}$  aus Abbildung 3.1 zur Angabe des Orts  $P(t)$  heranziehen, also

$$\mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{R}. \tag{3.3}$$

Die Systembewegung ist erfasst, wenn die Bewegung eines jeden Punkts des Systems, also  $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$  oder  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  angegeben werden kann.

**3.2 Verzerrungszustand**

Das Kontinuum  $\mathcal{K}$  wird infolge der Relativbewegungen der Punkte  $P(t)$  deformiert oder verzerrt. Der Ort des Punkts  $P(t)$  aus Abbildung 3.1 ist durch die injektive, stetig differenzierbare Abbildung (3.1) gegeben und man kann in  $P$  ein lokales, schiefwinkliges Koordinatensystem errichten. Eine Transformation zwischen der orthogonalen Basis des Bezugssystems und der schiefwinkligen Basis wird durch die Funktionalmatrix

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{F}_D(\mathbf{R}, t) := \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \right) \tag{3.4}$$

vermittelt.  $\mathbf{F}_D$  ist ein Tensor und wird *Deformationsgradient* genannt.

Wegen der Injektivität von  $\mathbf{r}$  hat die Funktionalmatrix  $\mathbf{F}_D$  stets vollen Rang. Man kann zeigen, dass  $\det \mathbf{F}_D > 0$  gilt, das heißt, positive Volumina bleiben unter der Deformation positiv [222].

Anstelle der Abbildung (3.1) kann auch die Gleichung (3.3) betrachtet werden. Eine Transformation zwischen orthogonaler und schiefwinkliger Basis wird dann durch die Funktionalmatrix

$$\mathbf{F}_V = \mathbf{F}_V(\mathbf{R}, t) := \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{R}} \right) \quad (3.5)$$

beschrieben. Sie enthält die Elemente des *Verschiebungsgradienten* oder *Verschiebungstensors*.

Deformationsgradient und Verschiebungsgradient hängen offensichtlich wie folgt zusammen:

$$\mathbf{F}_V = \mathbf{F}_D - \mathbf{E}^3, \quad (3.6)$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Zur Formulierung von Materialgesetzen sind Verzerrungstensen bequemer, die bei Verzerrungsfreiheit verschwinden. Ein solcher Tensor ist mit dem *Greenschen Verzerrungstensor*, auch *Green-Lagrangescher Verzerrungstensor* genannt,

$$\mathbf{G}_N := \frac{1}{2} (\mathbf{F}_D^T \mathbf{F}_D - \mathbf{E}^3) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_V + \mathbf{F}_V^T + \mathbf{F}_V^T \mathbf{F}_V) \quad (3.7)$$

gegeben und es gilt  $\mathbf{G}_N = \mathbf{G}_N^T$ .

### Bemerkung 3.2

*Zerlegt man die durch den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_D$  gegebene Abbildung in die Hintereinanderschaltung einer reinen Streckung und einer reinen Drehung oder in die Hintereinanderschaltung einer reinen Drehung und einer reinen Streckung, so lassen sich mit Hilfe der Teilabbildungen eine Reihe verschiedener Verzerrungsmaße definieren, wie sie zum Beispiel in [13] angegeben sind.*

Ordnet man die sechs verschiedenen Elemente von  $\mathbf{G}_N$  in der  $6 \times 1$ -Matrix

$$\boldsymbol{\varepsilon}_N := (G_{N,11}, G_{N,22}, G_{N,33}, 2G_{N,12}, 2G_{N,23}, 2G_{N,31})^T \quad (3.8)$$

an, so kann man die sogenannte *Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung* (3.7) in der Matrixdarstellung

$$\boldsymbol{\varepsilon}_N = \mathcal{L}(\mathbf{U})\mathbf{U} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathcal{L}_L + \frac{1}{2}\mathcal{L}_N(\mathbf{U})$$

angeben. Die Matrizen  $\mathcal{L}_L$  und  $\mathcal{L}_N(\mathbf{U})$  sind auf  $\mathbf{U}$  angewendete Differenzialoperatoren:

$$\mathcal{L}_L := \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{L}_N(\mathbf{U}) := \begin{pmatrix} \partial_1 U_1 \partial_1 & \partial_1 U_2 \partial_1 & \partial_1 U_3 \partial_1 \\ \partial_2 U_1 \partial_2 & \partial_2 U_2 \partial_2 & \partial_2 U_3 \partial_2 \\ \partial_3 U_1 \partial_3 & \partial_3 U_2 \partial_3 & \partial_3 U_3 \partial_3 \\ \partial_1 U_1 \partial_2 + \partial_2 U_1 \partial_1 & \partial_1 U_2 \partial_2 + \partial_2 U_2 \partial_1 & \partial_1 U_3 \partial_2 + \partial_2 U_3 \partial_1 \\ \partial_2 U_1 \partial_3 + \partial_3 U_1 \partial_2 & \partial_2 U_2 \partial_3 + \partial_3 U_2 \partial_2 & \partial_2 U_3 \partial_3 + \partial_3 U_3 \partial_2 \\ \partial_3 U_1 \partial_1 + \partial_1 U_1 \partial_3 & \partial_3 U_2 \partial_1 + \partial_1 U_2 \partial_3 & \partial_3 U_3 \partial_1 + \partial_1 U_3 \partial_3 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Die Matrix  $\mathcal{L}_L$  enthält nur partielle Ableitungen  $\partial_i = \partial/\partial R_i$ . In  $\mathcal{L}_N(\mathbf{U})$  sind Produkte von  $\partial_i U_j = \partial U_j / \partial R_i$  und  $\partial_i$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) zusammengefasst.

Der Greensche Verzerrungstensor  $\mathbf{G}_N$  wird häufig zur Beschreibung von großen („finiten“) elastischen Deformationen verwendet. In vielen Fällen kann der Verschiebungsgradient (3.5) aber als klein vorausgesetzt werden, das heißt, es gilt

$$\left| \frac{\partial U_i}{\partial R_j} \right| \ll 1, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Unter dieser Annahme können Produkte der Verschiebungsableitungen vernachlässigt werden. Bei technisch relevanten Bauteilen aus metallischen Werkstoffen werden Werte in der Größenordnung von  $10^{-2}$  kaum überschritten [13]. Bei der Verwendung der Annahme (3.11) zur Herleitung linearer Näherungen für die bisher angegebenen Gleichungen spricht man von *kinematischer* oder *geometrischer Linearisierung*.

Der Greensche Verzerrungstensor (3.7) vereinfacht sich damit zu

$$\mathbf{G} := \frac{1}{2} (\mathbf{F}_V + \mathbf{F}_V^T), \quad (3.12)$$

bzw. in der Matrixdarstellung der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung zu

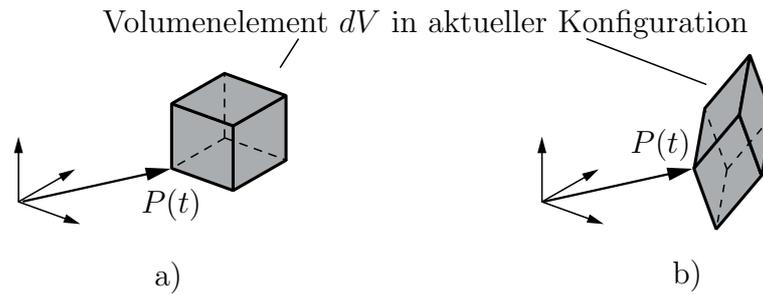
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L}_L \mathbf{U}, \quad (3.13)$$

wobei in  $\boldsymbol{\varepsilon}$  die sechs verschiedenen Elemente des (linearisierten) Greenschen Verzerrungstensors  $\mathbf{G}$  zusammengefasst werden, also

$$\boldsymbol{\varepsilon} := (G_{11}, G_{22}, G_{33}, 2G_{12}, 2G_{23}, 2G_{31})^T. \quad (3.14)$$

### 3.3 Spannungszustand

Wird ein Körper belastet, so kommt es zu Deformationen. Die wirkende Belastung kann aus *Volumenkräften* und *Flächenkräften* resultieren. Ein wichtiges Beispiel für eine Volumenkraft ist die Schwerkraft. Die aerodynamischen Kräfte an einem Flugkörper



**Abbildung 3.2:** a) *infinitesimales Volumenelement  $dV$  am Punkt  $P(t)$ , dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen des Bezugssystems sind (zur Beschreibung des Cauchyschen Spannungstensors).* b) *schiefwinkliges, infinitesimales Volumenelement  $dV$  am Punkt  $P(t)$  (zur Beschreibung der Piolaschen Spannungstensoren).*

stellen zum Beispiel Flächenkräfte dar. Neben den Volumen- und Flächenkräften gibt es außerdem als idealisierte Grenzfälle noch *Einzelkräfte*, die an einem einzelnen Punkt angreifen und *Linienkräfte*, die linienmäßig verteilt wirken. Aus den angreifenden äußeren Kräften resultieren im Körper *innere Kräfte*. Bei den inneren Kräften handelt es sich um Flächenkräfte oder *Spannungen*.

Die gebräuchlichsten Möglichkeiten zur Beschreibung des Spannungszustands ist die Darstellung der inneren Kräfte durch den *Cauchyschen Spannungstensor* und durch die *Piolaschen Spannungstensoren*. Die Elemente des Cauchyschen Spannungstensors sind Komponenten von *Spannungsvektoren* an den Oberflächen eines *kartesischen* Volumenelements in der aktuellen Konfiguration. Die Elemente der Piolaschen Spannungstensoren repräsentieren Spannungen an einem *schiefwinkligen* Volumenelement in der aktuellen Konfiguration, die auf Flächen des in der Referenzkonfiguration zugeordneten, kartesischen Volumenelements bezogen sind. Abbildung 3.2 verdeutlicht den Unterschied beider Spannungstensoren. Die Piolaschen Spannungstensoren vereinfachen die Formulierung der Materialgleichungen, wenn man den Verzerrungszustand durch den Greenschen Verzerrungstensor erfasst.

Die inneren Kräfte erhält man als Schnittkräfte, die beim Aufschneiden eines Kontinuums an den orientierten Schnittflächen  $\Delta A$  mit Normalenvektor  $\mathbf{n}$  freigelegt werden. Es wird angenommen, dass von den Schnittflächen nur Kräfte und keine Momente übertragen werden. Die Berücksichtigung von Momenten kann durch *Momentenspannungen* innerhalb der *Cosserat-Theorie* erfolgen, worauf hier nicht eingegangen werden soll. Dazu siehe zum Beispiel [12]. Das Oberflächenelement  $\Delta A$  gehöre zu einem Volumenelement  $\Delta V$ , das durch Herausschneiden aus einem Kontinuum gewonnen wurde. An den beiden Schnittufern aller Oberflächenelemente von  $\Delta V$  müssen die jeweils von dem einen auf den anderen Teil ausgeübten inneren Kräfte bzw. die inneren Spannungen angebracht werden. Da sich die inneren Kräfte auf  $\Delta A$  beim Einfügen von  $\Delta V$  in das Kontinuum wieder aufheben müssen, müssen die an beiden Schnittufern auftretenden Kräfte – und da die Flächen übereinstimmen auch die Spannungen – entgegengesetzt gleich sein. Die Gesamtheit der an einem Punkt  $P$  wirksamen inneren Kräfte (Spannungen) kann angegeben werden, wenn man drei Spannungsvektoren

kennt, die drei Flächenelementen in  $P$  zugeordnet sind. Die neun Koordinaten dieser Spannungsvektoren bilden die Elemente eines Tensors, des *Spannungstensors*.

### 3.3.1 Cauchyscher Spannungstensor

Schneidet man aus der aktuellen Konfiguration eines Kontinuums ein infinitesimales, kartesisches Volumenelement  $dV$  heraus, so sind die Kantenvektoren von  $dV$  am Punkt  $P(t)$  parallel zu den Basisvektoren des kartesischen Bezugssystems. In der Referenzkonfiguration sind ihnen Kantenvektoren eines schiefwinkligen Volumenelements  $dV_0$  am Punkt  $P(t_0)$  zugeordnet. Den Cauchyschen Spannungstensor zur Beschreibung des Spannungszustands am Ort  $\mathbf{r}$  erhält man bei der Angabe der Gleichgewichtsbedingungen für die an einem solchen Volumenelement  $dV$  angreifenden Kräfte.

Die Oberflächenkräfte auf die drei Seitenflächen können mit Hilfe von Spannungsvektoren

$$\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{\tau}_i(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

angegeben werden. Die inneren Kräfte werden durch die neun Größen, die Spannungen  $\tau_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) erfasst. Sie bilden die Elemente des *Cauchyschen Spannungstensors*

$$\boldsymbol{\tau}_C = \boldsymbol{\tau}_C(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_1^T \\ \boldsymbol{\tau}_2^T \\ \boldsymbol{\tau}_3^T \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

und es gilt  $\boldsymbol{\tau}_C^T = \boldsymbol{\tau}_C$ .

#### Bemerkung 3.3

Die Projektionen der Spannungsvektoren  $\boldsymbol{\tau}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) auf die Normalenvektoren der zugeordneten Flächen heißen Normalspannungen und sind die Hauptdiagonalelemente von  $\boldsymbol{\tau}_C$ , die in der zugeordneten Fläche liegenden Spannungen heißen Schubspannungen.

### 3.3.2 Piolasche Spannungstensoren

Der Cauchysche Spannungstensor wurde aus den Gleichgewichtsbedingungen an einem *kartesischen* Volumenelement  $dV$  in der aktuellen Konfiguration gewonnen. Man kann aber auch von einem schiefwinkligen Volumenelement  $dV$  ausgehen. Damit erhält man die *Piolaschen Spannungstensoren*. Ihre Elemente sind Spannungen, die nicht auf die Begrenzungsflächen von  $dV$  sondern auf die Oberflächen des zugeordneten Volumenelements  $dV_0$  in der Referenzkonfiguration bezogen sind.

Im Gegensatz zum Cauchyschen Spannungstensor werden die Spannungsvektoren in der Basis des Bezugssystems dargestellt, also

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = \boldsymbol{\Sigma}_i(\mathbf{R}) \in \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

### 3.3 Spannungszustand

---

Die neun Spannungen  $\Sigma_{ij}$  bilden wie die  $\tau_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 3$ ) die Elemente eines Tensors, des *ersten Piolaschen Spannungstensors* oder *Lagrangeschen Spannungstensors*

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} \Sigma_1^T \\ \Sigma_2^T \\ \Sigma_3^T \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Im Unterschied zu den  $\tau_{ij}$  sind die Spannungen  $\Sigma_{ij}$  nicht symmetrisch. Stellt man die Spannungsvektoren  $\boldsymbol{\Sigma}_i$  in dem lokalen, schiefwinkligen Koordinatensystem am Punkt  $P(t)$  dar (vgl. Abschnitt 3.2), so erhält man auch hier symmetrische Spannungskomponenten, die Elemente des *zweiten Piolaschen Spannungstensors* oder *Kirchhoffschen Spannungstensors*

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{R}). \quad (3.19)$$

Die Transformation zwischen den beiden Tensoren  $\boldsymbol{\Sigma}$  und  $\mathbf{S}$  ist durch den Deformationsgradienten (3.4) gegeben, der die Transformation zwischen der orthogonalen Basis des Bezugssystems und der schiefwinkligen Basis beschreibt. Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S}\mathbf{F}_D^T \quad (3.20)$$

und es gilt  $\mathbf{S}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{S}^T(\mathbf{R}, t)$ . Der Nachweis der Symmetrie erfolgt über die Drehimpulsbilanz bzw. das Momentengleichgewicht [12, 222].

#### **Bemerkung 3.4**

*Die Maßzahlen  $S_{ij}$  der Spannungsvektoren  $\boldsymbol{\Sigma}_i$  in der schiefwinkligen Basis sind symmetrisch. Dies bedeutet aber nicht, dass auch die Maßzahlen  $\Sigma_{ij}$  in der Basis des Bezugssystems symmetrisch sind. Die neun Maßzahlen  $\Sigma_{ij}$  genügen aber drei Bedingungsgleichungen, die sich aus der Symmetrie von  $\mathbf{S}$  und (3.20) ergeben (siehe [222]).*

In Analogie zu (3.14) fasst man die sechs verschiedenen Komponenten  $S_{ij}$  in der  $6 \times 1$ -Matrix

$$\boldsymbol{\sigma} := (S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31})^T \quad (3.21)$$

zusammen.

#### **3.3.3 Transformationsgleichungen**

Der Spannungszustand mit den Piolaschen Spannungstensoren wird in Abhängigkeit der materiellen Koordinaten  $\mathbf{R}$  angegeben, also  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{R})$  bzw.  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{R})$ , während der gleiche Spannungszustand mit dem Cauchyschen Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$  in Abhängigkeit der lokalen Koordinaten  $\mathbf{r}$  beschrieben wird. Der Übergang von einer Darstellung zur anderen wird durch Transformationsgleichungen beschrieben [222]:

$$\text{Erster Piolascher Spannungstensor: } \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S}\mathbf{F}_D^T = \Delta \cdot \mathbf{F}_D^{-1}\boldsymbol{\tau},$$

$$\text{Zweiter Piolascher Spannungstensor: } \mathbf{S} = \mathbf{S}^T = \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{F}_D^{-1})^T = \Delta \cdot \mathbf{F}_D^{-1}\boldsymbol{\tau} (\mathbf{F}_D^{-1})^T,$$

$$\text{Cauchyscher Spannungstensor: } \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T = \frac{1}{\Delta} \mathbf{F}_D \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{\Delta} \mathbf{F}_D \mathbf{S} \mathbf{F}_D^T,$$

mit  $\Delta := \det(\mathbf{F}_D)$ . Für weitere alternative Darstellungen des Spannungszustands in einem Kontinuum sei auf [12] verwiesen.

**Bemerkung 3.5**

Vernachlässigt man in (3.6) die in der linearen Elastizitätstheorie als klein vorausgesetzten Verschiebungsableitungen (3.11), so gilt  $\mathbf{F}_D \approx \mathbf{E}$  und damit  $\Delta := \det(\mathbf{F}_D) = 1$ . Für die Spannungstensoren ergibt sich dann

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S}. \tag{3.22}$$

**3.4 Materialgesetz**

Spannungs- und Verzerrungszustand sind nicht unabhängig, sondern durch das *Materialgesetz* miteinander verknüpft. Solche Gesetze hängen vom Werkstoff ab, aus dem der Körper besteht und müssen experimentell ermittelt werden (zum Beispiel durch geeignete Zugversuche). Hier soll rein elastisches Verhalten vorausgesetzt werden. Das bedeutet, dass der Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}$  zeitinvariant ist und eindeutig durch den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_D$  festgelegt ist, das heißt, es gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}_D). \tag{3.23}$$

Insbesondere gibt es nach einer vollständigen Entlastung keine bleibenden Verzerrungen. Hängt der Spannungszustand von der Deformationsgeschichte ab, so spricht man von *plastischer Verformung*. Für plastische Verformungen sei zum Beispiel auf [229] verwiesen. Ein Material, das sich an allen materiellen Punkten eines Körpers gleich verhält, wird als *homogen* bezeichnet, andernfalls als *inhomogen*. Sind die elastischen Eigenschaften überdies richtungsunabhängig, so spricht man von *isotropen* Materialien, bei einer Richtungsabhängigkeit der Eigenschaften von *anisotropen* Materialien. Anisotrope Eigenschaften liegen zum Beispiel bei faserverstärkten Materialien vor. Für anisotropes Materialverhalten sei auf [13] verwiesen.

Wenn die Verzerrungen hinreichend klein sind, kann das Materialgesetz linearisiert werden. Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen wird dann durch ein lineares Materialgesetz, das *Hookesche Gesetz*, beschrieben.

Das Hookesche Gesetz lässt sich hauptsächlich bei Metallen anwenden, solange die Verzerrungen klein sind. Kleinheit von Verzerrungen bedeutet aber nicht, dass auch die Verschiebungsableitungen  $\frac{\partial U_i}{\partial R_j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) klein sein müssen, das ist zum Beispiel bei schnell rotierenden schlanken Körpern der Fall, bei denen *geometrische Steifigkeiten* berücksichtigt werden müssen [222]. Oft kann von einem linearisierten Materialgesetz ausgegangen werden, aber es müssen auch nichtlineare Terme des Verschiebungstensors berücksichtigt werden, um die elastischen Deformationen hinreichend genau zu modellieren.

Im Folgenden wird auf das Hookesche Gesetz bei elastischen, homogenen und isotropen Materialien eingegangen.

Für homogene, elastische und isotrope Stoffe liefert das Materialgesetz (3.23) sechs, im Allgemeinen nichtlineare Gleichungen. Unter der Annahme kleiner Verzerrungen  $G_{ij}$  kann das Materialgesetz durch das Hookesche Gesetz

$$\mathbf{S} = 2\mathcal{G} \left( \mathbf{G} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{spur } \mathbf{G}) \mathbf{E}^3 \right) \quad (3.24)$$

approximiert werden. Man kann anstelle von (3.24) auch

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.25)$$

schreiben, mit  $\boldsymbol{\sigma}$  aus (3.21),  $\boldsymbol{\varepsilon}$  aus (3.14) und der symmetrischen *Material-* oder *Elastizitätsmatrix*  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathcal{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ \hline & & & \mathbf{O} & & \\ & & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{array} \right).$$

In (3.24) und der Materialmatrix  $\mathbf{H}$  aus (3.25) kommen insgesamt drei Materialparameter vor, das *Schubmodul*  $\mathcal{G}$ , das *Elastizitätsmodul*  $\mathcal{E}$  und die *Querdehnungs-* oder *Poissonzahl*  $\nu$ . Aber nur zwei von ihnen sind unabhängig; sie genügen der Beziehung

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{G}(1+\nu) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G} = \frac{\mathcal{E}}{2(1+\nu)}.$$

**Bemerkung 3.6**

In der Literatur ist das Hookesche Gesetz auch mit den Laméschen Konstanten  $\Lambda$  und  $\mu$  zu finden. Es gelten die Beziehungen [13, 36]

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\mu(3\Lambda + 1\mu)}{\Lambda + \mu}, & \nu &= \frac{\Lambda}{2(\Lambda + \mu)}, \\ \Lambda &= \frac{\nu\mathcal{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & \mu &= \mathcal{G} = \frac{\mathcal{E}}{2(1+\nu)}. \end{aligned}$$

Für die bei Ingenieuren gebräuchlichen Konstanten  $\mathcal{E}$  und  $\nu$  gelten die Einschränkungen

$$\mathcal{E} > 0 \quad , \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}.$$

Für diese Werte ist  $\mathbf{H}$  eine symmetrisch positiv definite Matrix [13]. Materialien mit  $\nu < 0$  sind nicht bekannt [12].

**Bemerkung 3.7**

Treten geometrische Steifigkeiten auf, das heißt, gilt die Annahme kleiner Verschiebungsableitungen nicht mehr, so wird der Verzerrungstensor  $\mathbf{G}$  durch  $\mathbf{G}_N$  aus (3.7) ersetzt. Im Hookeschen Gesetz (3.25) tritt dann  $\boldsymbol{\varepsilon}_N$  aus (3.8) an die Stelle von  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

**Bemerkung 3.8**

In belasteten Strukturern wirken Vorspannungen  $\boldsymbol{\sigma}_0$ , die den Lasten das Gleichgewicht halten. Eine weitere Modifikation ergibt sich, wenn thermische Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_T$  berücksichtigt werden müssen. Bei der Erwärmung des Materials von einer Referenztemperatur  $\hat{T}_0$  auf eine Temperatur  $\hat{T}$  gilt mit der Wärmeausdehnungsmatrix  $\boldsymbol{\alpha}_T$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \boldsymbol{\alpha}_T (\hat{T} - \hat{T}_0)$$

Damit lauten die an der Stelle  $\boldsymbol{\sigma}_0 \neq 0$  und  $\hat{T} \neq \hat{T}_0$  linearisierten Materialgleichungen [222, 267]

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{H} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T).$$

### 3.5 Bewegungsgleichungen

Wird den Punkten des Kontinuums  $\mathcal{K}$  eine Masse zugeordnet, lassen sich die Bilanzgleichungen für Impuls und Drehimpuls formulieren. Letztere liefern, wie die Bedingungen für das Momentengleichgewicht, die Symmetrie des Spannungstensors  $\mathbf{S}$ , während die Bilanzgleichungen für den Impuls auf drei partielle Differentialgleichungen für die Bewegungen der Punkte  $P$  des Kontinuums führen.

Der Impuls eines materiellen Punkts  $P$  bezüglich des Ursprungs des Bezugssystems in materieller Darstellung ist gegeben durch

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)}{\partial t} \rho_0(\mathbf{R}) dV_0, \tag{3.26}$$

mit der *materiellen Massendichte*  $\rho_0$  des Körpers  $\mathcal{K}$  in der Referenzkonfiguration aus Abbildung 3.1 und dem infinitesimalen Volumenelement in der Referenzkonfiguration  $dV_0$ . Der Index 0 soll dabei den Bezug zur Referenzkonfiguration kennzeichnen. Ein Grundgesetz der klassischen Mechanik besagt, dass es ein Inertialsystem gibt, in dem die zeitliche Ableitung des Impulses eines materiellen Punkts  $P$  mit der Resultierenden der am infinitesimalen Volumenelement  $dV$  wirksamen Volumen- und Flächenkräften übereinstimmt.

Ein infinitesimales Flächenelement in der Referenzkonfiguration sei

$$dA_{n_0} = \mathbf{n}_0 dA_0,$$

mit dem Flächeninhalt  $dA_0$  und dem normierten Normalenvektor  $\mathbf{n}_0$ . Bezieht man die Spannungen auf das dem Flächenelement  $dA_n$  am Ort  $\mathbf{r}$  in der Referenzkonfiguration zugeordnete Flächenelement  $dA_{n_0}$  am Punkt  $\mathbf{R}$ , so gilt mit dem ersten Piolaschen Spannungstensor  $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{n}_0.$$

Betrachtet man zunächst die  $i$ -te Komponente  $p_{0i}$  der Oberflächenkraft  $\mathbf{p}_0$  (Spannung), so gilt mit den Komponenten  $\Sigma_{ki}$  des Spannungstensors und  $n_{0k}$  des Normalenvektors ( $i, k = 1, \dots, 3$ ), sowie dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{\partial V_0} p_{0i} dA_0 = \int_{\partial V_0} \sum_{k=1}^3 \Sigma_{ki} n_{0k} dA_0 = \int_{V_0} \frac{\partial \Sigma_{1i}}{\partial R_1} + \frac{\partial \Sigma_{2i}}{\partial R_2} + \frac{\partial \Sigma_{3i}}{\partial R_3} dV_0.$$

Definiert man

$$\mathbf{Div} \boldsymbol{\Sigma} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \Sigma_{11}}{\partial R_1} + \frac{\partial \Sigma_{21}}{\partial R_2} + \frac{\partial \Sigma_{31}}{\partial R_3} \\ \frac{\partial \Sigma_{12}}{\partial R_1} + \frac{\partial \Sigma_{22}}{\partial R_2} + \frac{\partial \Sigma_{32}}{\partial R_3} \\ \frac{\partial \Sigma_{13}}{\partial R_1} + \frac{\partial \Sigma_{23}}{\partial R_2} + \frac{\partial \Sigma_{33}}{\partial R_3} \end{pmatrix}$$

und bezeichne  $\mathbf{k}_0$  die *materielle Volumenkraftdichte*, also die äußere Volumenkraft auf das Volumen  $dV$  am Punkt  $P(t)$ , bezogen auf das zugeordnete Volumen  $dV_0$  in der Referenzkonfiguration, so folgt mit dem Impulssatz

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{r}} - (\mathbf{k}_0 + \mathbf{Div} \boldsymbol{\Sigma}) dV_0 = \mathbf{0}$$

bzw.

$$\rho_0(\mathbf{R}) \ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{k}_0(\mathbf{R}, t) + \mathbf{Div} \boldsymbol{\Sigma} . \quad (3.27)$$

Die Großschreibung von „**Div**“ soll erkenntlich machen, dass die Divergenz bezüglich der materiellen Koordinaten  $\mathbf{R}$  und nicht in den räumlichen Koordinaten  $\mathbf{r}$  zu bilden ist.

Die drei Gleichungen in (3.27) sind die *Cauchyschen Bewegungsgleichungen* in materieller oder Lagrangescher Darstellung und beschreiben die Bewegung der Punkte im Inneren des Kontinuums  $\mathcal{K}$ .

Oft verwendet man zur Beschreibung der Bewegungen des Kontinuums anstelle der Vektoren  $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$  die in (3.3) definierten Verschiebungsvektoren  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$ . Identifiziert man das Bezugssystem in Abbildung 3.1 als Inertialsystem, so folgt für die Beschleunigungen

$$\ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{R}, t) = \ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t) .$$

Die Spannungen sind über ein Materialgesetz mit den Verzerrungen verknüpft – im linearen Fall über das Hookesche Gesetz (3.24). Da das Hookesche Gesetz mit dem zweiten Piolaschen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  formuliert ist, ist es sinnvoll, die Bewegungsgleichungen durch den Zusammenhang (3.20) ebenfalls mit  $\mathbf{S}$  auszudrücken. Damit gehen die Cauchyschen Bewegungsgleichungen (3.27) über in

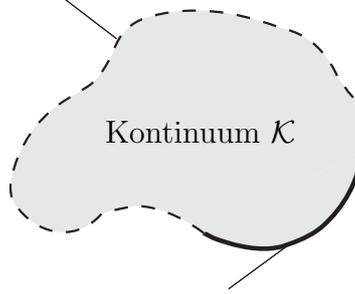
$$\rho_0(\mathbf{R}) \ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{k}_0(\mathbf{R}, t) + \mathbf{Div} (\mathbf{S} \mathbf{F}_D^T) . \quad (3.28)$$

Wie oben erwähnt, besagen die Bilanzgleichungen für den Drehimpuls, dass der Spannungstensor  $\mathbf{S}$  auch bei bewegten Körpern symmetrisch ist, es ergeben sich also keine neuen Bewegungsgleichungen.

### 3.6 Rand- und Anfangsbedingungen

Auf der Oberfläche von  $\mathcal{K}$ , dem *Rand* des Kontinuums, sind entweder Kräfte oder Verschiebungen vorgegeben. Zur Formulierung der Randbedingungen wird die Oberfläche

Oberfläche  $A_p$  (*Neumann Rand*):  
Kraftdichte ( $= 0$  und  $\neq 0$ ) vorgegeben



Oberfläche  $A_u$  (*Dirichlet Rand*):  
Verschiebungen vorgegeben

**Abbildung 3.3:** Klassifikation der Randbedingungen auf der Oberfläche eines Kontinuums

$A$  von  $\mathcal{K}$  in der aktuellen Konfiguration, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, in die beiden Bereiche  $A_u$  und  $A_p$  unterteilt. Auf  $A_u$ , dem *Dirichlet Rand*, sind Verschiebungen vorgegeben und auf dem *Neumann Rand*  $A_p$  die Kräfte, also Spannungen. Die  $A_u$  und  $A_p$  in der Referenzkonfiguration entsprechenden Oberflächen seien  $A_{u0}$  und  $A_{p0}$ .

Die auf  $A_u$  vorgegebenen Bedingungen bezeichnet man als *kinematische* oder *geometrische* Randbedingungen, auch *Dirichlet* Randbedingungen genannt. Bei Vorgabe der Verschiebungen lauten sie

$$U(\mathbf{R}, t) = \bar{U}(\mathbf{R}, t) \quad \text{für } \mathbf{R} \text{ auf } A_{u0}, \quad (3.29)$$

wo  $\bar{U}(\mathbf{R}, t)$  bekannte Funktionen sind. In vielen Fällen gilt  $\bar{U}(\mathbf{R}, t) \equiv 0$  (homogene Dirichlet Randbedingungen), wie zum Beispiel bei unnachgiebigen Lagern.

Auf  $A_p$  vorgegebene Bedingungen heißen *kinetische*, *dynamische* oder *mechanische* Randbedingungen, auch *Neumann* Randbedingungen. Die auf ein Element  $dA_n$  von  $A_p$  wirkende, vorgegebene Kraft sei  $\bar{dP}_n$ . Sie wird dargestellt durch die Kraftdichte  $\bar{p}_0(\mathbf{R}, t)$ , die bezogen ist auf das  $dA_n$  in der Referenzkonfiguration zugeordnete Flächenelement  $dA_{n0}$ , also

$$\bar{dP}_n(\mathbf{R}, t) = \bar{p}_0(\mathbf{R}, t) dA_0$$

Damit kann man die auf  $A_p$  vorgegebenen Bedingungen schreiben in der Form

$$dP_n(\mathbf{R}, t) = \bar{dP}_n(\mathbf{R}, t) \quad \text{für } \mathbf{R} \text{ auf } A_{p0}. \quad (3.30)$$

Die Neumann Randbedingungen (3.30) lassen sich durch die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungen  $S_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) und den auf der Oberfläche  $A_p$  durch die Kraftdichte  $\bar{p}_0$  vorgegebenen Kräften ausdrücken:

$$F_D(\mathbf{R}, t) \mathbf{S}(\mathbf{R}, t) \mathbf{n}_0(\mathbf{R}, t) = \bar{p}_0 \quad \text{für } \mathbf{R} \text{ auf } A_{p0}. \quad (3.31)$$

In (3.31) sind die kinetischen Randbedingungen durch den Piolaschen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  ausgedrückt, wobei die Elemente  $S_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) nach (3.24) mit den Verzerrungen

$G_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) aus  $\mathbf{G}$  verknüpft sind. Beispielsweise führen nachgiebige Lager zu kinetischen Randbedingungen.

Außerdem gelten für die drei Komponenten der Verschiebungen  $\mathbf{U}$  noch sechs zu einer Anfangszeit  $t = t_0$  vorgegebene Anfangsbedingungen

$$\mathbf{U}(\mathbf{R}, t_0) = \mathbf{U}^0(\mathbf{R}) \quad , \quad \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t_0) = \dot{\mathbf{U}}^0(\mathbf{R}) . \quad (3.32)$$

### 3.7 Zusammenfassung

Der aktuelle Ort aller materiellen Punkte  $P$  des Kontinuums  $\mathcal{K}$  ist durch die Ortsvektoren  $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$  gegeben, wo  $\mathbf{R}$  die Koordinaten von  $P$  in der Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt  $t_0$  sind. Im Allgemeinen verwendet man zur Beschreibung der Bewegungen des Kontinuums die Verschiebungs Koordinaten (3.3)

$$\mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) - \mathbf{R} .$$

Gibt man Vektoren und Tensoren in einem Inertialsystem an, gilt für die Beschleunigungen der Punkte  $P$   $\ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{R}, t) = \ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t)$ .

Unter der Annahme kleiner Verschiebungsgradienten, also

$$\left| \frac{\partial U_i}{\partial R_j} \right| \ll 1 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3$$

erhält man mit dem Verschiebungsgradienten  $\mathbf{F}_V$  aus (3.5) den (linearisierten) Green-schen Verzerrungstensor (3.12)

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_V + \mathbf{F}_V^T) ,$$

mit  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$ . Fasst man die sechs verschiedenen Komponenten von  $\mathbf{G}$  zu einem Vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (G_{11}, G_{22}, G_{33}, 2G_{12}, 2G_{23}, 2G_{31})^T$$

zusammen, so lässt sich die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung wie in Gleichung (3.14) als

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L}_L \mathbf{U}$$

schreiben, wobei  $\mathcal{L}_L$  der auf  $\mathbf{U}$  angewandte Differentialoperator aus (3.9) ist.

Die Spannungen werden mit dem zweiten Piolaschen Spannungstensor  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$  erfasst, wobei die sechs verschiedenen Spannungskordinaten zu dem Vektor

$$\boldsymbol{\sigma} = (S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31})^T$$

zusammengefasst werden.

Der Greensche Verzerrungstensor  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$  ist mit dem zweiten Piolaschen Spannungstensor  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$  in Materialgesetzen verknüpft. Bei kleinen Verzerrungen wird ein lineares Materialgesetz (Hookesches Gesetz) zugrunde gelegt, beschrieben durch die Gleichung (3.25)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon},$$

mit der Material- oder Elastizitätsmatrix  $\mathbf{H}$  aus Abschnitt 3.4. Die Verschiebungen  $\mathbf{U}$  genügen den Cauchyschen Bewegungsgleichungen (3.28)

$$\rho_0(\mathbf{R}) \ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{k}_0(\mathbf{R}, t) + \text{Div}(\mathbf{S}\mathbf{F}_D^T).$$

Die Größen  $\rho_0(\mathbf{R})$  und  $\mathbf{k}_0(\mathbf{R}, t)$  sind die Massen- und Volumenkraftdichten, die Spannungen  $\mathbf{S}$  genügen dem Hookeschen Gesetz und  $\mathbf{F}_D$  ist der Deformationsgradient aus (3.4).

Mit den Bewegungsgleichungen, zusammen mit den Beziehungen zwischen den Elementen des Verzerrungstensors  $\mathbf{G}$  und den Verschiebungsableitungen  $\partial\mathbf{U}/\partial\mathbf{R}$ , sowie mit den Materialgleichungen, also den Beziehungen zwischen den Elementen des Spannungs- und des Verzerrungstensors (Hookesche Gesetz), liefert die lineare Elastizitätstheorie insgesamt 15 Gleichungen für 15 unbekannte Koordinaten:

- die Verschiebungskordinaten  $\mathbf{U}$ ,
- die Verzerrungskordinaten aus  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$ , zusammengefasst in  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,
- die Spannungskordinaten aus  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ , zusammengefasst in  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Die Lösungen dieser partiellen Differentialgleichungen müssen Randbedingungen genügen, welche in kinematische (Dirichlet Randbedingungen) und kinetische (Neumann Randbedingungen) eingeteilt werden. Auf dem Dirichlet Rand des Kontinuums  $\mathcal{K}$  sind die Verschiebungen vorgegeben, beschrieben durch (3.29)

$$\mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t) \quad \text{für } \mathbf{R} \text{ auf } A_{u0}.$$

Die Neumann Randbedingungen lassen sich durch die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungen  $\mathbf{S}$  und den auf dem Neumann Rand  $A_p$  durch die Kraftdichte  $\bar{\mathbf{p}}_0$  vorgegebenen Kräften mit (3.31)

$$\mathbf{F}_D(\mathbf{R}, t)\mathbf{S}(\mathbf{R}, t)\mathbf{n}_0(\mathbf{R}, t) = \bar{\mathbf{p}}_0 \quad \text{für } \mathbf{R} \text{ auf } A_{p0}$$

ausdrücken. Dabei ist  $\mathbf{n}_0$  die Normale eines infinitesimalen Flächenelements  $dA_{n0}$  auf  $A_p$  in der Referenzkonfiguration, also auf  $A_{p0}$  und  $\mathbf{F}_D$  der Deformationsgradient (3.4). Außerdem gelten für die Verschiebungen noch die sechs zu einer Anfangszeit  $t = t_0$  vorgegebenen Anfangsbedingungen (3.32)

$$\mathbf{U}(\mathbf{R}, t_0) = \mathbf{U}^0(\mathbf{R}) \quad , \quad \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t_0) = \dot{\mathbf{U}}^0(\mathbf{R}).$$

Mit (3.29), (3.31) und (3.32) wird eine Lösung der Gleichungen (3.28), (3.14) und (3.25) eindeutig festgelegt.

## Kapitel 4

### Finite-Elemente-Methode

Finite-Elemente-Modelle werden zur Analyse der Verformungen und Spannungen von Bauteilen verwendet, wenn deren geometrische Form, Materialgesetz und Lagerung mit den einfachen Modellvorstellungen der Kontinua mit inneren Bindungen nicht in der wünschenswerten Genauigkeit darstellbar sind. Ein sehr wichtiger Anwendungsbereich für Finite-Elemente-Berechnungen ist die lineare Behandlung von Festkörpern und Strukturen. Der Standardansatz bei Finite-Elemente-Lösungen für Festkörper ist die Verschiebungsansatz.

Die *Finite-Elemente-Methode* ist eine rechnerorientierte Form des Ritzschen Verfahrens zur Angabe einer Näherungslösung der Bewegungsgleichungen kontinuierlicher Systeme. Die allgemeine Formulierung der verschiebungsbezogenen Finite-Elemente-Methode beruht auf der Verwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen, das dem Galerkin-Verfahren und ebenso dem Ritzschen Verfahren zur Minimierung des Gesamtpotentials des Systems äquivalent ist. Durch Anwenden des Ritzschen Verfahrens werden die partiellen Bewegungsgleichungen eines Kontinuums (3.28) nach Wahl geeigneter Ansatzfunktionen durch gewöhnliche Differentialgleichungen approximiert.

Die Finite-Elemente-Methode basiert auf einer physikalischen Diskretisierung. Das Kontinuum wird in geeignete Teilkörper, den finiten Elementen, zerlegt. Sie werden so gewählt, dass ihre Verformungen und die zugehörigen inneren Kräfte mit Hilfe lokaler Ritz-Ansätze gut erfasst werden können. Ein mit finiten Elementen diskretisierter Körper wird als *Finite-Elemente-Struktur* bezeichnet. Das einzelne finite Element ist ein nach den Modellvorstellungen der Kontinuumsmechanik deformierbarer Körper. Eine Vielzahl von Elementen erlauben die Analyse komplexer, flexibler Strukturen mit Gelenken oder Reib- und Stellelementen. Einen Überblick findet man beispielsweise in [11].

Der Aufbau der Systemgleichungen der *gesamten* Struktur aus den *Elementgleichungen* ergibt sich durch einfache Matrizenoperationen. Zur einfachen Formulierung der Bedingungen für den Zusammenhalt der Struktur wählt man für die unbekanntenen Variablen in den lokalen Ansätzen sogenannte Knotenvariablen, das heißt Verschiebungen und Verschiebungsableitungen der auf dem Rand oder im Inneren der Elemente liegenden Knoten. Mit Stetigkeitsforderungen an den Rändern der Elemente erhält man Näherungen für die Verformung und inneren Kräfte des gesamten Kontinuums.

Das Finite-Elemente-Verfahren garantiert die Konvergenz der Näherung gegen die wahre Lösung bei Verfeinerung des Netzes der Elemente [11, 36]. Standardwerke zur Finite-Elemente-Methode sind unter anderem [11, 36, 39, 136, 221, 267].

## 4.1 Variationsformulierung

In Kapitel 3 wurden die Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers  $\mathcal{K}$  hergeleitet. Das Kontinuum  $\mathcal{K}$  lässt sich als Abschluss einer beschränkten, offenen Menge  $\mathcal{K}^0$  auffassen und es gilt  $\mathcal{K} := \overline{\mathcal{K}^0} = \mathcal{K}^0 \cup \partial\mathcal{K}$ . Der Rand  $\partial\mathcal{K} := \mathcal{K} - \mathcal{K}^0 = \overline{A_{u0}} \cup \overline{A_{p0}}$  mit  $A_{u0} \cap A_{p0} = \emptyset$  wird als genügend glatt vorausgesetzt. Die Bewegungsgleichungen in *starker Form* lauten

$$\rho_0(\mathbf{R}) \ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{k}_0(\mathbf{R}, t) + \mathbf{Div}(\mathbf{S}\mathbf{F}_D^T), \quad \mathbf{R} \in \mathcal{K}^0, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t), \quad \mathbf{R} \in A_{u0}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F}_D(\mathbf{R}, t)\mathbf{S}(\mathbf{R}, t)\mathbf{n}_0(\mathbf{R}, t) = \overline{\mathbf{p}}_0, \quad \mathbf{R} \in A_{p0}. \quad (4.3)$$

Finite-Elemente-Methoden, die einen Ansatz für diese Gleichungen liefern, bezeichnet man als *Deformationsmethoden* oder *Verschiebungsmethoden*. Man kann die Aussagen der Elastizitätstheorie aber auch in Gleichungen zusammenfassen, in denen nur Spannungen vorkommen. Diese werden als *Kraftmethoden* bezeichnet.

Um die *schwache Form* der Bewegungsgleichungen herzuleiten, werden zunächst die zugrundeliegenden Funktionenräume eingeführt. Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \left\{ \mathbf{V} \in \mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)^3 : \mathbf{V}|_{A_{u0}} = \mathbf{0} \right\}, \\ \mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)^3 &= \left\{ \mathbf{V} : V_i \in \mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0), i = 1, 2, 3 \right\}. \end{aligned}$$

Der Sobolevraum  $\mathcal{H}^1$  ist eine Teilmenge des Funktionenraums  $L_2(\mathcal{K}^0)$  – der Raum über  $\mathcal{K}^0$  quadriert Lebesgues-integrierbaren Funktionen. Eine Funktion  $V \in L_2(\mathcal{K}^0)$  ist Element in  $\mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)$ , falls die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial V}{\partial R_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) im schwachen Sinn existieren und ebenfalls in  $L_2(\mathcal{K}^0)$  sind. Das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}, \mathbf{V})_{\mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)^3} &:= \sum_{i=1}^3 (U_i, V_i)_{\mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)}, \\ (U_i, V_i)_{\mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)} &:= (U_i, V_i)_{L_2(\mathcal{K}^0)} + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial U_i}{\partial R_j}, \frac{\partial V_i}{\partial R_j} \right)_{L_2(\mathcal{K}^0)}, \\ (U_i, V_i)_{L_2(\mathcal{K}^0)} &:= \int_{\mathcal{K}^0} U_i(\mathbf{R})V_i(\mathbf{R}) dV \end{aligned}$$

macht  $\mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)^3$  zu einem Hilbertraum mit der Norm  $\|\mathbf{V}\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)^3} = \sqrt{(\mathbf{V}, \mathbf{V})_{\mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)^3}}$ .

Für die schwache Form betrachtet man genügend glatte Testfunktionen  $\mathbf{V} \in \mathcal{V}$ . Wendet man die Testfunktionen  $\mathbf{V}$  auf (4.1) an und integriert über  $\mathcal{K}$ , so folgt die schwache Form der Bewegungsgleichung

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho_0 \ddot{\mathbf{U}} dV_0 = \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{Div}(\mathbf{S}\mathbf{F}_D^T) dV_0 + \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{k}_0 dV_0.$$

Die Transformation zwischen dem ersten und zweiten Piolaschen Spannungstensor ist gegeben durch (vgl. (3.20) und (3.18))

$$\mathbf{S}\mathbf{F}_D^T = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1^T \\ \boldsymbol{\Sigma}_2^T \\ \boldsymbol{\Sigma}_3^T \end{pmatrix}.$$

Definiert man das Vektorfeld  $\tilde{\mathbf{V}}_i := V_i \boldsymbol{\Sigma}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) so erhält man für die Divergenz

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}}_i &= \frac{\partial V_i}{\partial R_1} \boldsymbol{\Sigma}_{i1} + V_i \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i1}}{\partial R_1} + \frac{\partial V_i}{\partial R_2} \boldsymbol{\Sigma}_{i2} + V_i \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i2}}{\partial R_2} + \frac{\partial V_i}{\partial R_3} \boldsymbol{\Sigma}_{i3} + V_i \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i3}}{\partial R_3} \\ &= (\nabla V_i)^T \boldsymbol{\Sigma}_i + V_i \left( \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i1}}{\partial R_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i2}}{\partial R_2} + \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i3}}{\partial R_3} \right). \end{aligned}$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz folgt damit

$$\int_{\mathcal{K}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}}_i dV_0 = \int_{\mathcal{K}} (\nabla V_i)^T \boldsymbol{\Sigma}_i + V_i \left( \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i1}}{\partial R_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i2}}{\partial R_2} + \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i3}}{\partial R_3} \right) dV_0 = \int_{\partial \mathcal{K}} V_i \boldsymbol{\Sigma}_i^T \mathbf{n}_0 dA_{p0}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{Div} (\mathbf{S}\mathbf{F}_D^T) dV_0 &= \int_{\mathcal{K}} \sum_{i=1}^3 V_i \left( \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i1}}{\partial R_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i2}}{\partial R_2} + \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{i3}}{\partial R_3} \right) dV_0 \\ &= - \int_{\mathcal{K}} \sum_{i=1}^3 (\nabla V_i)^T \boldsymbol{\Sigma}_i + \int_{\partial \mathcal{K}} \sum_{i=1}^3 V_i \boldsymbol{\Sigma}_i^T \mathbf{n}_0 dA_{p0} \\ &= - \int_{\mathcal{K}} \operatorname{spur} (\boldsymbol{\Sigma}^T \nabla \mathbf{V}) dV_0 + \int_{\partial \mathcal{K}} \mathbf{V}^T \boldsymbol{\Sigma}^T \mathbf{n}_0 dA_{p0}. \end{aligned}$$

Setzt man noch die Randbedingung (4.3) ein, so erhält man schließlich die Bewegungsgleichung in schwacher Form in der Darstellung

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho_0 \ddot{\mathbf{U}} dV_0 = - \int_{\mathcal{K}} \operatorname{spur} (\boldsymbol{\Sigma}^T \nabla \mathbf{V}) dV_0 + \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{k}_0 dV_0 + \int_{A_{p0}} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{p}}_0 dA_{p0}. \quad (4.4)$$

Interpretiert man die Testfunktionen  $\mathbf{V}$  als mit den geometrischen Randbedingungen verträgliche virtuelle Verschiebungen  $\delta \mathbf{U}$ , so stellt (4.4) das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (oder Arbeiten) aus der Variationsformulierung dar, bei der das Gesamtpotential des Systems betrachtet wird [11, 159].

In der linearen Elastizitätstheorie werden die als klein vorausgesetzten Verschiebungsableitungen (3.11) vernachlässigt. Mit Bemerkung 3.5 sind die verschiedenen Spannungstensoren äquivalent und es gilt  $\det \mathbf{F}_D = 1$ . Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}_D$  beschreibt die Transformation zwischen aktueller Konfiguration und Referenzkonfiguration, die Funktionaldeterminante  $\det \mathbf{F}_D$  vermittelt demnach die Transformation zwischen den Volumenelementen  $dV$  und  $dV_0$ . Mit  $\det \mathbf{F}_D = 1$  folgt damit für Volumenelemente, sowie für die Massen- und Volumenkräftdichte  $dV = dV_0$ ,  $\rho = \rho_0$  und  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ .

Im Folgenden wird die lineare Elastizitätstheorie zugrunde gelegt und der Index 0, der die Referenzkonfiguration kennzeichnet, weggelassen.

Nutzt man die Symmetrie des zweiten Piolaschen Spannungstensors  $\mathbf{S}$ , ergibt sich mit dem Hookschen Gesetz (3.25) und den Bezeichnungen aus (3.12), (3.14) und (3.21)

$$\text{spur}(\mathbf{S}\nabla\mathbf{V}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V})^T \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V})^T \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}).$$

Damit ergibt sich in der linearen Elastizitätstheorie die Bewegungsgleichung in schwacher Form zu

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \ddot{\mathbf{U}} dV = - \int_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V})^T \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) dV + \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{k} dV + \int_{A_p} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{p}} dA_p, \quad (4.5)$$

wobei  $\mathbf{U}$  den geometrischen Randbedingungen (4.2) und den Anfangsbedingungen  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t_0) = \mathbf{U}^0(\mathbf{R})$ ,  $\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t_0) = \dot{\mathbf{U}}^0(\mathbf{R})$  aus (3.32) genügen muss.

#### Bemerkung 4.1

Es genügt  $\mathbf{U} \in \mathcal{V}$ , also homogene Dirichlet Randbedingungen  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t) \equiv \mathbf{0}$ , zu betrachten. Bei inhomogenen Randbedingungen  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t) \neq \mathbf{0}$  setzt man  $\mathbf{U} = \mathbf{W} + \mathbf{W}_r$  mit  $\mathbf{W} \in \mathcal{V}$  und einer gegebenen Funktion  $\mathbf{W}_r \in \mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)^3$ , die den Randbedingungen  $\mathbf{W}_r(\mathbf{R}, t) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{R}, t)$  für  $\mathbf{R} \in A_{u0}$  genügt. In (4.5) wird  $\mathbf{U}$  durch  $\mathbf{W}$  ersetzt und die rechte Seite ist um folgenden Ausdruck zu erweitern:

$$- \int_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V})^T \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{W}_r) dV - \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \ddot{\mathbf{W}}_r dV.$$

## 4.2 Semidiskretisierung

Für die numerische Lösung wird der Testfunktionenraum  $\mathcal{V}$  auf einen endlich dimensionalen Teilraum eingeschränkt:

$$\mathcal{V}_h := \left\{ \mathbf{V}_h \in \mathcal{H}^1(\mathcal{K}^0)^3 : \mathbf{V}_h|_{A_{u0}} = \mathbf{0} \right\}. \quad (4.6)$$

Der Index  $h$  weist darauf hin, dass eine Finite-Elemente-Diskretisierung betrachtet wird. Die Finite-Elemente-Formulierung des Problems lautet dann:

Finde  $\mathbf{U}_h \in \mathcal{V}_h$ , so dass

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}_h^T \rho \ddot{\mathbf{U}}_h dV = - \int_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V}_h)^T \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}_h) dV + \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}_h^T \mathbf{k} dV + \int_{A_p} \mathbf{V}_h^T \bar{\mathbf{p}} dA_p \quad \forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{V}_h.$$

Diese Formulierung ist nichts anderes als das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, angewendet mit den in  $\mathcal{V}_h$  enthaltenen Funktionen. Das entspricht auch der Minimierung der gesamten Energie (kinetische und potentielle Energie) im Raum der Ansatzfunktionen [11, 227].

Die Näherungslösung  $\mathbf{U}_h$  kann als Linearkombination der Basisfunktionen von  $\mathcal{V}_h$  geschrieben werden, also

$$\mathbf{U}_h(\mathbf{R}, t) = \sum_{i=1}^{n_q} \varphi_i(\mathbf{R}) q_i(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{R}) \mathbf{q}(t), \quad n_q = \dim \mathcal{V}_h, \quad (4.7)$$

mit unbekanntem Koeffizienten  $q_i(t)$  und linear unabhängigen Ansatzfunktionen  $\varphi_i$ . Dieser Ansatz entspricht dem *Ritzschen Verfahren* [199]. Setzt man für die Testfunktionen eine Linearkombination dieser Ansatzfunktionen an, so wird sich später zeigen, dass sich bei der linearen Elastizitätstheorie ein lineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F(t) + \mathbf{K}_F \mathbf{z}_F(t) = \mathbf{h}_L(t)$$

ergibt. Die sogenannte *Massenmatrix*  $\mathbf{M}_F$  und die *Steifigkeitsmatrix*  $\mathbf{K}_F$  sind symmetrisch positiv definite Matrizen. Der Vektor  $\mathbf{h}_L$  stellt den *Lastvektor* dar, der von im System wirkenden Kräften und inhomogenen Lösungsanteilen abhängt.

Bei der Finiten-Elemente-Methode werden die *globalen* Ansatzfunktionen  $\mathbf{\Phi}(\mathbf{R})$  durch *lokal* begrenzte Ansätze für Teile des Kontinuums ersetzt. Sie werden mit geeigneten Übergangsbedingungen zu einer Darstellung des gesamten Verschiebungsfeldes  $\mathbf{U}$  zusammengesetzt [11, 222].

Das Kontinuum  $\mathcal{K}$  wird in eine endliche Zahl von Teilkörpern, den *finiten Elementen* unterteilt, auf denen lokale Ansatzfunktionen gewählt werden. Damit sich ein sinnvolles Finite-Elemente-Verfahren ergibt, soll die Näherungslösung  $\mathbf{U}_h$  bei feiner werdendem Finite-Elemente-Netz gegen die exakte Lösung konvergieren. Dazu müssen die Elemente *vollständig* sein und die Elemente und das Netz müssen *kompatibel* sein [11]. Vollständigkeit eines Elements bedeutet, dass die Verschiebungsfunktionen des Elements in der Lage sein müssen, Starrkörperverschiebungen und konstante Verzerrungszustände wiederzugeben. Die Forderung nach Kompatibilität bedeutet, dass die Verschiebungen innerhalb der Elemente und über die Elementränder hinweg stetig sein müssen. Physikalisch gesehen stellt die Kompatibilität sicher, dass sich die Elemente an den Nahtstellen weder überlappen noch auseinanderklaffen, wenn die Gruppierung belastet wird [11, 136].

Da sich die lokalen Ansatzfunktionen nur über ein finites Element erstrecken, bleibt noch die Frage zu klären, welche Bedingungen die Approximation durch Finite-Elemente hinsichtlich der Stetigkeitsforderungen *zwischen* aneinandergrenzenden Elementen erfüllen müssen. Dazu werden die zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_F$  erforderlichen Integrationen betrachtet. Damit sich ein sinnvolles Finite-Elemente-Verfahren ergibt, ist es notwendig, dass die Ansatzfunktionen und ihre Ableitungen bis zur  $(m - 1)$ ten Ordnung zwischen den Elementen stetig sind, wenn  $m$  die Ordnung der höchsten Ableitung bezeichnet. Zur Berechnung der Verzerrungsmaße in der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_F$  treten nur erste Ableitungen des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{U}$  auf. Das heißt, die Ansatzfunktionen müssen einen stetigen Übergang zwischen den Elementen gewährleisten. Bei linearen finiten Elementen ist das der Fall und es gilt, dass die Näherungslösung bei immer feiner werdender Zerlegung des Gebietes in finite Elemente gegen die exakte Lösung konvergiert [11, 36, 227, 240, 268].

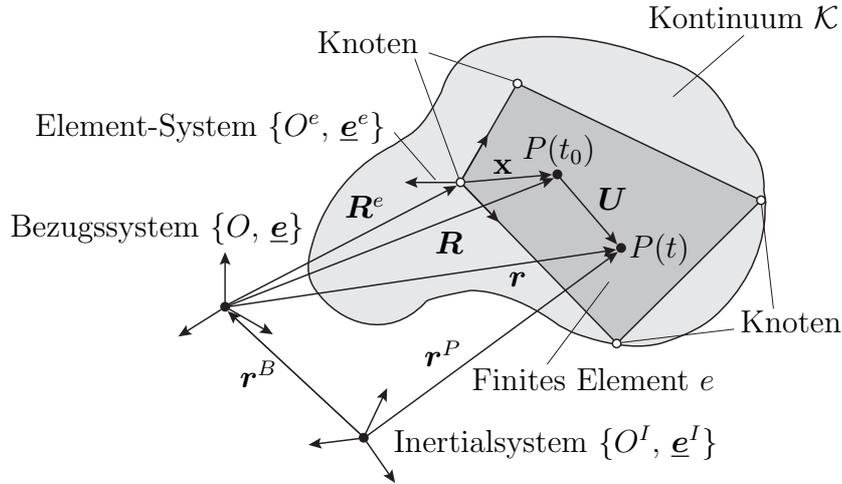


Abbildung 4.1: Modellvorstellung „Finite-Elemente-Struktur“

Wie bereits erwähnt, erhält man Finite-Elemente-Systeme durch Aufteilung des Kontinuums  $\mathcal{K}$  in finite Elemente. Das Element  $e$  der Finite-Elemente-Struktur  $\mathcal{K}$  aus Abbildung 4.1 wird als dreidimensionales Kontinuum modelliert. Die Bewegung des Elementes wird zunächst bezüglich eines Element-Koordinatensystems  $\{O^e, \underline{e}^e\}$  angegeben. In der Referenzkonfiguration von  $\mathcal{K}$  (zum Zeitpunkt  $t_0$ ) sind die Punkte  $P$  des Elements  $e$  durch den Vektor  $\mathbf{x}$  im Element-Koordinatensystem gekennzeichnet. Die Bewegungen der Punkte des Elements  $e$  bezüglich  $\{O^e, \underline{e}^e\}$  werden durch den Vektor  ${}^eU$  in der Basis  $\underline{e}^e$  erfasst. Das Verschiebungsfeld  ${}^eU(\mathbf{x}, t)$  erfasst Starrkörperbewegungen und Verzerrungen infinitesimaler Volumenelemente an den Punkten des Elements. Der obere Index  $e$  zeigt an, dass sich die Größen auf das Element  $e$  beziehen.

Ort und Orientierung des Element-Koordinatensystems  $\{O^e, \underline{e}^e\}$  relativ zu einem Bezugssystem  $\{O, \underline{e}\}$  zur Beschreibung der Bewegung der gesamten Struktur sind gegeben durch den Vektor  $\mathbf{R}^e$  und die Drehmatrix  $\Gamma^e$  gemäß  $\underline{e}^e = \Gamma^e \underline{e}$ .

Der Ort aller Punkte  $P$  eines Elements  $e$  bezüglich des Bezugssystems  $\{O, \underline{e}\}$  wird in der Referenzkonfiguration und in der aktuellen Konfiguration durch die Vektoren  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{U}$  beschrieben, mit

$$\mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = \Gamma^{eT} {}^eU(\mathbf{x}, t) \quad \text{wo} \quad \mathbf{x} = \Gamma^e(\mathbf{R} - \mathbf{R}^e) \quad \text{für } \mathbf{R} \text{ im Element } e \quad (4.8)$$

und für die Bewegung der Punkte  $P$  des Elements  $e$  bezüglich  $\{O, \underline{e}\}$  gilt

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R} + \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R}^e + \Gamma^{eT}(\mathbf{x} + {}^eU(\mathbf{x}, t)). \quad (4.9)$$

Das Verschiebungsfeld  ${}^eU(\mathbf{x}, t)$  der Punkte des Elements  $e$  wird durch einen lokalen Ritz-Ansatz

$${}^eU(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_q^e} \Phi_i^e(\mathbf{x}) q_i^e(t) = \Phi^e(\mathbf{x}) \mathbf{q}^e(t)$$

approximiert. Da nur  $n_q^e$  Größen  $q_i^e(t)$  ( $q_i^e(t)$  sind Freiheitsgrade, Koeffizienten der Ansatzfunktionen) frei wählbar sind, gibt es auch nur an einer von  $n_q^e$  abhängigen Zahl

von Randpunkten – den Knoten – frei wählbare Verschiebungen und ggf. Verdrehungen  $z_i^e(t)$ . Man sammelt sie in der Matrix der Element-Knotenkoordinaten  $\mathbf{z}^e(t) \in \mathbb{R}^{n_q^e}$ .

Durch eine Transformationsmatrix  $\mathbf{P}^e \in \mathbb{R}^{n_q^e \times n_q^e}$  kann  $\mathbf{z}^e(t)$  durch  $\mathbf{q}^e(t)$  ausgedrückt werden:

$$\mathbf{z}^e(t) = \mathbf{P}^e \mathbf{q}^e(t).$$

Mit  $\mathbf{q}^e(t) = \mathbf{P}^{e-1} \mathbf{z}^e(t)$  und der *Interpolations-* oder *Formmatrix*

$$\mathbf{N}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}^e(\mathbf{x}) \mathbf{P}^{e-1}, \quad \mathbf{N}^e \in \mathbb{R}^{3 \times n_q^e} \quad (4.10)$$

kann der Ritz-Ansatz für das Verschiebungsfeld  ${}^e\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  aller Punkte  $P$  eines Elements  $e$  umgeschrieben werden in

$${}^e\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{\Phi}^e(\mathbf{x}) \mathbf{q}^e(t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{P}^e \mathbf{q}^e(t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{P}^e \mathbf{P}^{e-1} \mathbf{z}^e(t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t). \quad (4.11)$$

Das Verschiebungsfeld des Elements  $e$  wird damit durch die Element-Knotenkoordinaten  $\mathbf{z}^e$  – also durch Verschiebungen und Verdrehungen auf dem Rand von  $e$  – und durch die Interpolationsmatrix  $\mathbf{N}^e$  dargestellt, deren Elemente nur von den lokalen Koordinaten  $\mathbf{x}$  abhängen. Interpolationsmatrizen für die wichtigsten finiten Elemente findet man in [11, 136, 267, 268].

Die Finite-Elemente-Struktur setzt sich aus einem Netz von  $n_E$  Elementen zusammen, die an  $n_K$  Knoten miteinander verbunden sind. Die Bewegungen der Struktur werden durch die Gesamtheit der Element-Knotenkoordinaten  $\mathbf{z}^e$  beschrieben. Mit den Bedingungen für den Zusammenhalt der Struktur findet man  $n_F$  voneinander unabhängige Element-Knotenkoordinaten zur Beschreibung der Bewegung der ungelagerten Struktur. Für eine Finite-Elemente-Struktur aus  $n_E$  Elementen und  $n_K$  Knoten definiert man einen Vektor von *Finite-Elemente-System-Koordinaten*  $\mathbf{z}_F \in \mathbb{R}^{n_F}$ , wo die Komponenten  $z_{F_i}$  in der Basis  $\underline{e}$  des Bezugssystems definierte Knotenkoordinaten sind. Bei einer dreidimensionalen Struktur mit Balken und Plattenelementen setzt sich zum Beispiel  $\mathbf{z}_F$  zusammen aus den Verschiebungen  $\mathbf{U}^k \in \mathbb{R}^3$  und den Winkeln  $\boldsymbol{\vartheta}^k \in \mathbb{R}^3$  der  $k = 1, \dots, n_K$  Knoten der Struktur, also sechs Koordinaten je Knoten  $k$ . Die Winkel geben die Orientierung eines am Knoten  $k$  festen Dreibeins  $\underline{e}^k$  bezüglich der Elementbasis  $\underline{e}^e$  an. Mit den eingeführten Größen besitzt  $\mathbf{z}_F$  den Aufbau

$$\mathbf{z}_F = \begin{pmatrix} \vdots \\ \left( \begin{array}{c} \mathbf{U}^k \\ \boldsymbol{\vartheta}^k \end{array} \right) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Bei Verwendung anderer Elemente ist  $\mathbf{z}_F$  aus einer Untermenge von Knotenverschiebungen und -verdrehungen zusammengesetzt – bei der verschiebungsbezogenen Finite-Elemente-Methode zum Beispiel nur aus den Verschiebungen  $\mathbf{U}^k$ .

Die Beziehung zwischen den Element-Knotenkoordinaten  $\mathbf{z}^e$  eines Elements  $e$  und den Systemkoordinaten  $\mathbf{z}_F$  enthält die Bedingungen für den Zusammenhalt der Struktur

und sie berücksichtigt die unterschiedliche Orientierung der Elemente bezüglich des Bezugssystems  $\{O, \underline{e}\}$ . Man schreibt

$$\mathbf{z}^e(t) = \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F(t), \quad e = 1, \dots, n_E \quad (4.12)$$

mit den orthogonalen (und konstanten) Sammelmatrix  $\mathbf{T}^e \in \mathbb{R}^{n_q \times n_F}$ . Die Sammelmatrix enthält neben Nullen und Einsen die von  $\mathbf{x}$  und  $t$  unabhängigen Drehmatrizen  $\mathbf{\Gamma}^e$  zur Angabe der Orientierung des Element-Koordinatensystems relativ zum globalen Bezugssystem  $\{O, \underline{e}\}$  gemäß  $\underline{e}^e = \mathbf{\Gamma}^e \underline{e}$ .

Mit den Gleichungen (4.11) und (4.12) ergibt sich für das Verschiebungsfeld  ${}^e\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  der Punkte eines Elements  $e$ , dargestellt in der Elementbasis  $\underline{e}^e$ ,

$${}^e\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F(t). \quad (4.13)$$

Mittels  $\mathbf{\Gamma}^e$  transformiert man diese Gleichung in die Basis  $\underline{e}$  des Bezugssystems und es ergibt sich für das Verschiebungsfeld die für alle Punkte der Struktur gültige Gleichung

$$\mathbf{U}_h(\mathbf{R}, t) = \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F(t), \quad \text{wo } \mathbf{x} = \mathbf{\Gamma}^e(\mathbf{R} - \mathbf{R}^e), \quad (4.14)$$

wobei  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \equiv 0$  für Punkte, die nicht im Element  $e$  liegen, definiert wurde. Damit erhält man in (4.14) nur für zum gleichen Element  $e$  gehörende Summanden Werte ungleich Null.

Gleichung (4.14) ist ein globaler Ritz-Ansatz der Form

$$\mathbf{U}_h(\mathbf{R}, t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{R}) \mathbf{z}_F(t)$$

mit den globalen Ansatzfunktionen

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{R}) = \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e, \quad \text{wo } \mathbf{x} = \mathbf{\Gamma}^e(\mathbf{R} - \mathbf{R}^e).$$

Sie ergeben sich durch Aneinanderstückeln der lokalen Ansatzfunktionen (4.13). Die beim Ritzschen Verfahren beliebig wählbaren Koordinaten  $\mathbf{q}(t)$  in Gleichung (4.7) werden als Knotenverschiebungen und -verdrehungen  $\mathbf{z}_F(t)$  festgelegt. Die Bedingung

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R} + \mathbf{U}_h(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R} + \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F(t), \quad \text{wo } \mathbf{x} = \mathbf{\Gamma}^e(\mathbf{R} - \mathbf{R}^e) \quad (4.15)$$

werden als explizite Zwangsgleichungen einer ungelagerten Finite-Elemente-Struktur bezeichnet. Eine Struktur ist aber im Allgemeinen mehrfach gelagert. Im Finite-Elemente-Modell werden die auf dem kontinuierlichen Rand  $A_u$  zu erfüllenden Randbedingungen, durch Zwangsgleichungen für die Bewegungen einiger diskreter Punkte der Struktur, der gelagerten Knotenpunkte auf dem Rand, ersetzt. Die zugehörigen Zwangsgleichungen erfassen im Rahmen des Finite-Elemente-Modells aus Abbildung 4.1 die geometrischen Randbedingungen (4.2), das heißt die Bewegungen

einiger Knoten der Struktur sind vorgegeben. Die Koordinaten der restlichen Knoten sind unbekannt und entsprechen den *Lagezustandsgrößen* der Struktur. Die Lagerungsbedingungen werden durch Gleichungen der Form

$$\mathbf{z}_F(t) = \overline{\mathbf{T}}\overline{\mathbf{z}}_F(t) + \overline{\overline{\mathbf{T}}}\overline{\overline{\mathbf{z}}}_F(t), \quad (4.16)$$

mit bekannten Funktionen  $\overline{\mathbf{z}}_F(t)$  erfasst. Für homogene Randbedingungen gilt zum Beispiel  $\overline{\mathbf{z}}_F(t) \equiv 0$ . Die Größen  $\overline{\overline{\mathbf{z}}}_F(t)$  sind die *Lagezustandsgrößen* (Minimalkoordinaten) einer Finiten-Elemente-Struktur. Die Aufteilung von  $\mathbf{z}_F$  in (4.16) entspricht einem analogen Vorgehen wie in Bemerkung 4.1.

Mit (4.16) erhält man aus (4.15) die expliziten Zwangsgleichungen einer *gelagerten* Finite-Elemente-Struktur:

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R} + \sum_{e=1}^{n_E} \Gamma^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \left( \overline{\mathbf{T}}\overline{\mathbf{z}}_F(t) + \overline{\overline{\mathbf{T}}}\overline{\overline{\mathbf{z}}}_F(t) \right), \quad \text{wo } \mathbf{x} = \Gamma^e(\mathbf{R} - \mathbf{R}^e).$$

Mit der Finite-Elemente-Methode wird das Verschiebungsfeld  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  durch den Ansatz (4.14) mit dem diskreten  $\mathbf{U}_h$  approximiert: Anstelle der von Ort und Zeit abhängigen Koordinaten  $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$  werden die nur von der Zeit abhängigen Systemkoordinaten  $\mathbf{z}_F = \mathbf{z}_F(t)$  zur Beschreibung der Bewegung eingeführt.

Für die Testfunktionen  $\mathbf{V}$  in der schwachen Formulierung wählt man analog zu (4.14) den Ansatz

$$\mathbf{V}_h(\mathbf{R}) = \sum_{e=1}^{n_E} \Gamma^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \hat{\mathbf{z}}_F, \quad \text{wo } \mathbf{x} = \Gamma^e(\mathbf{R} - \mathbf{R}^e) \text{ für } \mathbf{R} \text{ in } e. \quad (4.17)$$

### 4.3 Finite-Elemente Strukturen mit bewegtem Bezugssystem

Wenn das Bezugssystem  $\{O, \underline{\mathbf{e}}\}$  zur Beschreibung der Verformung einer Finite-Elemente-Struktur beschleunigt bewegt wird, sind an der Struktur zusätzliche Trägheitskräfte wirksam. Davon sei im folgenden ausgegangen. Der Ort und die Orientierung bezüglich des Inertialsystems  $\{O^I, \underline{\mathbf{e}}^I\}$  – vgl. Abbildung 4.1 – werden erfasst durch

$$\underline{\mathbf{e}} = \langle B \rangle \mathbf{R}_{\langle I \rangle} \underline{\mathbf{e}}^I,$$

wobei  $\langle B \rangle \mathbf{R}_{\langle I \rangle}$  die in Kapitel 2 eingeführte Drehmatrix zur Beschreibung der relativen Verdrehung zweier Koordinatensysteme zueinander bezeichnet und  $\langle I \rangle$  für *Inertial*-, sowie  $\langle B \rangle$  für *Bezugssystem* steht. Die absoluten Geschwindigkeiten von  $\{O, \underline{\mathbf{e}}\}$  sind

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}} &= \langle B \rangle \mathbf{R}_{\langle I \rangle} \langle B \rangle \dot{\mathbf{R}}_{\langle I \rangle}^T, \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}}^B + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}^B. \end{aligned}$$

Der Tilde-Operator ordnet den drei Koordinaten des Vektors  $\boldsymbol{\omega}$  die schiefsymmetrische Matrix  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  zu

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und entspricht dem Vektorprodukt  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^B =: \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}^B$ . Die Eigenschaften des Tilde-Operators, sowie Rechenregeln werden zum Beispiel in [114, 215, 222] beschrieben.

Der Abstand  $\mathbf{r}^B(t)$  und die Verdrehung  ${}^{(B)}\mathbf{R}_{(I)}(t)$  zwischen Inertial- und Bezugssystem, sowie die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  und Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}(t)$  seien bekannte Funktionen der Zeit. Sie beschreiben eine Referenzbewegung des als Finite-Elemente-Struktur modellierten Kontinuums  $\mathcal{K}$ . Stellt man zum Element  $e$  gehörende Vektoren im Element-System  $\{O^e, \underline{\mathbf{e}}^e\}$  dar, so ergibt sich mit Abbildung 4.1, sowie der Beschreibung von  $\mathbf{r}$  gemäß (4.8) und (4.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^P(\mathbf{R}, t) &= \mathbf{r}^B(t) + \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \\ \text{mit } \mathbf{r}(\mathbf{R}, t) &= \mathbf{R} + \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{R}^e + \boldsymbol{\Gamma}^{eT}(\mathbf{x} + {}^e\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)), \\ \text{wo } \mathbf{x} &= \boldsymbol{\Gamma}^e(\mathbf{R} - \mathbf{R}^e). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Ableitung von (4.18) nach der Zeit liefert unter Beachtung von (4.13) und der Bewegung des Bezugssystems die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^P(\mathbf{R}, t)$  und die Beschleunigung  $\mathbf{a}^P(\mathbf{R}, t)$  eines beliebigen Punktes  $P \in \mathcal{K}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^P(\mathbf{R}, t) &= \mathbf{v}(t) + \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{R}, t) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\mathbf{r}(\mathbf{R}, t) \\ \text{mit } \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{R}, t) &= \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Gamma}^{eT} \dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{z}}_F(t), \\ \mathbf{a}^P(\mathbf{R}, t) &= \ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{R}, t) + \mathbf{a}(t) + \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}(t)\mathbf{r}(\mathbf{R}, t) + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{R}, t) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t)\mathbf{r}(\mathbf{R}, t) \\ \text{mit } \ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{R}, t) &= \ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Gamma}^{eT} \ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t), \\ \text{wo } \mathbf{x} &= \boldsymbol{\Gamma}^e(\mathbf{R} - \mathbf{R}^e) = \boldsymbol{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{z}}_F(t). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die fünf Anteile  $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{r}$ ,  $2\tilde{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{r}}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}$  der Beschleunigung von  $P$  sind die Relativ- oder Verformungsbeschleunigung, die Translationsbeschleunigung des Ursprungs  $O$  des Bezugssystems, die Rotationsbeschleunigung seiner Basis  $\underline{\mathbf{e}}$ , die Coriolisbeschleunigung und die Zentripetalbeschleunigung [110].

Durch diese Beschleunigungen treten zusätzliche Trägheitskräfte auf, die in der schwachen Form (4.5) berücksichtigt werden müssen. Man erhält

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \ddot{\mathbf{U}} dV + \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \mathbf{a} dV + \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}\mathbf{r} dV + \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{r}} dV + \\ &\quad \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r} dV + \int_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V})^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) dV - \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{k} dV - \int_{A_p} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{p}} dA_p. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Um die Bewegung einer Finiten-Elemente-Struktur mit bewegtem Bezugssystem zu beschreiben, ist Gleichung (4.21) zu lösen.

Wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt, entspricht die schwache Form dem Prinzip der virtuellen Arbeit. Das d'Alembertsche Prinzip (vgl. Abschnitt 2.2) macht Aussagen über die von den Kräften am System geleistete virtuelle Arbeit. Die virtuelle Arbeit der durch Spannungen repräsentierten Kräfte entspricht der negativen Variation des elastischen Potentials, also der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte des Kontinuums [222]. Die gesamte virtuelle Arbeit setzt sich zusammen aus der virtuellen Arbeit der

Trägheitskräfte, der inneren Kräfte und der äußeren Kräfte. Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte ist bei Bewegung des Kontinuums gleich der Summe der virtuellen Arbeiten aller am Kontinuum wirksamen Kräfte. Beim d'Alembertschen Prinzip gehen nur eingeprägte Kräfte ein – Zwangskräfte, die sich zum Beispiel aufgrund von Lagerungen ergeben, sind für das System verlorene Kräfte. Die ersten fünf Integrale in (4.21) repräsentieren die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte, das Integral über die Spannungen stellt die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte dar und die letzten beiden Integrale fassen die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte zusammen. Nachfolgend soll auf die verschiedenen Anteile der virtuellen Arbeit näher eingegangen werden.

### 4.3.1 Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

Zur Berechnung der Verzerrungen im Element  $e$  in der linearen Elastizitätstheorie setzt man den Ansatz  ${}^e\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{z}^e(t)$  aus (4.11) in die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung (3.13)  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{L}_L \mathbf{U}$  ein. Die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung mit dem Operator  $\mathcal{L}_L \equiv \mathcal{L}^e$  liefert die Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t)$  im Element-Koordinatensystem:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}_L^e \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{z}^e(t).$$

Der Index  $e$  an der Operatormatrix  $\mathcal{L}_L$  erinnert daran, dass die partiellen Ableitungen bezüglich der materiellen Koordinaten  $\mathbf{x}$  des Elements gebildet werden und dass bei unterschiedlichen Elementen auch verschiedene Operatoren  $\mathcal{L}_L^e$  in die Gleichung eingehen [11].

Der Operator  $\mathcal{L}_L^e$  wirkt auf  ${}^e\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{z}^e(t)$ , das heißt auf die Interpolationsmatrix  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x})$ . Die in der Elementbasis  $\underline{\mathbf{e}}^e$  dargestellten Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  im Element  $e$  lassen sich mit (4.12) durch die Systemkoordinaten  $\mathbf{z}_F$  ausdrücken. Mit der Verzerrungsmatrix  $\mathbf{B}_L^e(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_L^e \mathbf{N}^e(\mathbf{x})$  eines Elements  $e$  erhält man schließlich

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, \mathbf{z}_F) = \mathbf{B}_L^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F. \quad (4.22)$$

Neben den Verzerrungen werden noch die im Element  $e$  wirksamen Spannungen benötigt. Ihre in der Elementbasis  $\underline{\mathbf{e}}^e$  angegebenen Komponenten seien  $\boldsymbol{\sigma}^e$ . Zu ihrer Berechnung verwendet man das Hooksche Gesetz (3.25) in der elementweisen Form

$$\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}, \mathbf{z}_F) = \mathbf{H}^e \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, \mathbf{z}_F). \quad (4.23)$$

Für die inneren Kräfte ergibt sich mit dem Volumen  $V_0^e$  des Elements  $e$  in der schwachen Form bei Summation über alle Elemente  $e$  mit den Testfunktionen (4.17)

$$\int_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V})^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) dV = \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \left( \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{B}_L^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{H}^e \mathbf{B}_L^e(\mathbf{x}) dV \mathbf{T}^e \right) \mathbf{z}_F,$$

wobei ausgenutzt wurde, dass  $\mathbf{z}_F$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_F$  und  $\mathbf{T}^e$  nicht von  $\mathbf{x}$  abhängen und dass für Punkte  $\mathbf{R}$  bzw.  $\mathbf{x}$ , die nicht zum Element  $e$  gehören,  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \equiv 0$  gilt. Definiert man die *Element-Steifigkeitsmatrix*  $\mathbf{K}^e := \int_{V_0^e} \mathbf{B}_L^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{H}^e \mathbf{B}_L^e(\mathbf{x}) dV$ ,  $\mathbf{K}^e \in \mathbb{R}^{n_q^e \times n_q^e}$ , so ergibt

sich die *Steifigkeitsmatrix* der gesamten Struktur durch  $\mathbf{K}_F := \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e$ , mit  $\mathbf{K}_F \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}$ . Damit ergibt sich

$$\int_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{V})^T \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) dV = \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F = \hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{K}_F \mathbf{z}_F. \quad (4.24)$$

Sollen geometrische Steifigkeiten berücksichtigt werden, so wird in der Verzerungs-Verschiebungs-Beziehung zusätzlich der Differenzialoperator  $\mathcal{L}_N$  aus (3.10) hinzugenommen. Die sich daraus ergebenden Gleichungen findet man zum Beispiel in [222], dort werden auch Vorspannungen  $\boldsymbol{\sigma}_0$  und thermische Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_T$  (vgl. Bemerkung 3.8) berücksichtigt.

### 4.3.2 Die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte

**Verformungsbeschleunigung.** Für die Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{U}}$  erhält man aus (4.14)

$$\ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}) = \sum_{e=1}^{n_E} \boldsymbol{\Gamma}^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \ddot{\mathbf{z}}_F \quad \text{wo} \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\Gamma}^e(\mathbf{R} - \mathbf{R}^e) \text{ für } \mathbf{R} \text{ in } e. \quad (4.25)$$

Damit und mit (4.17) kann das erste Integral aus (4.21)  $\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \ddot{\mathbf{U}} dV$  durch  $\mathbf{z}_F$  und  $\hat{\mathbf{z}}_F$  mit der Dichte  $\rho^e(\mathbf{x})$  des Elements  $e$  dargestellt werden:

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \ddot{\mathbf{U}} dV = \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \left( \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \rho^e(\mathbf{x}) \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) dV \mathbf{T}^e \right) \ddot{\mathbf{z}}_F.$$

Definiert man die  $n_q^e \times n_q^e$  *Element-Massenmatrizen*  $\mathbf{M}^e := \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \rho^e(\mathbf{x}) \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) dV$ ,

so erhält man die *Massenmatrix* der gesamten Struktur durch  $\mathbf{M}_F = \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{T}^e$ ,

$\mathbf{M}_F \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}$  und als Ergebnis

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \ddot{\mathbf{U}} dV = \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{T}^e \ddot{\mathbf{z}}_F = \hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F. \quad (4.26)$$

**Translationsbeschleunigung.** Bevor auch das zweite Integral aus (4.21)  $\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \mathbf{a} dV$  umgeschrieben wird, werden die Matrizen  $\mathbf{C}1^e \in \mathbb{R}^{3 \times n_q^e}$  und  $\mathbf{C}_{Ft} \in \mathbb{R}^{n_F \times 3}$  eingeführt:

$$\mathbf{C}1^e := \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \rho^e(\mathbf{x}) dV, \quad \mathbf{C}_{Ft} := \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{C}1^e \boldsymbol{\Gamma}^e. \quad (4.27)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \mathbf{a} dV &= \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \rho^e(\mathbf{x}) dV \Gamma^e \mathbf{a} \\ &= \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{C} \mathbf{1}^{eT} \Gamma^e \mathbf{a} = \hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{C}_{Ft} \mathbf{a} =: -\hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{h}_{Fa}(t). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Der Vektor  $\mathbf{h}_{Fa}(t) = -\mathbf{C}_{Ft} \mathbf{a}(t)$  enthält die aus der Translationsbeschleunigung  $\mathbf{a}(t)$  des Ursprungs  $O$  des Bezugssystems resultierenden, verallgemeinerten Trägheitskräfte. Die zur Angabe von  $\mathbf{h}_{Fa}$  erforderliche Elementmatrix  $\mathbf{C} \mathbf{1}^e$  ist eine der in [255] zur Standardisierung von flexiblen Mehrkörpersystemen eingeführten Elementmatrizen.

**Rotationsbeschleunigung.** Für die Beschleunigung  $\dot{\tilde{\omega}} \mathbf{r}$  im dritten Integral aus (4.21) ergibt sich mit  $\mathbf{r}$  aus (4.18) und Berücksichtigung der Rechenregeln für den Tilde-Operator

$$\dot{\tilde{\omega}} \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}^T \dot{\tilde{\omega}} = (\mathbf{R}^e + \Gamma^{eT} \mathbf{x} + \Gamma^{eT} e \mathbf{U})^{\sim T} \dot{\tilde{\omega}} = \left( \tilde{\mathbf{R}}^{eT} + \Gamma^{eT} \tilde{\mathbf{x}}^T \Gamma^e + \Gamma^{eT} e \tilde{\mathbf{U}}^T \Gamma^e \right) \dot{\tilde{\omega}}.$$

Damit folgt zusammen mit (4.13) und (4.17)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \dot{\tilde{\omega}} \mathbf{r} dV &= \sum_{e=1}^{n_E} \int_{V_0^e} \hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{T}^{eT} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \Gamma^e \left( \tilde{\mathbf{R}}^{eT} + \Gamma^{eT} \tilde{\mathbf{x}}^T \Gamma^e + \Gamma^{eT} e \tilde{\mathbf{U}}^T \Gamma^e \right) \dot{\tilde{\omega}} \rho^e dV \\ &= \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \left( \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \rho^e dV \Gamma^e \tilde{\mathbf{R}}^{eT} + \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} \tilde{\mathbf{x}}^T \rho^e dV \Gamma^e \right) \dot{\tilde{\omega}} + \\ &\quad \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT} (\mathbf{N}^e \mathbf{T}^e \mathbf{z}_F)^{\sim T} \rho^e dV \Gamma^e \dot{\tilde{\omega}} \\ &=: -\hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{h}_{F\dot{\omega}}(\mathbf{z}_F, t). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die aus  $\dot{\tilde{\omega}}$  resultierende verallgemeinerte Kraft  $\mathbf{h}_{F\dot{\omega}}$  enthält demnach einen konstanten Anteil und einen in den Systemkoordinaten  $\mathbf{z}_F$  linearen Anteil. Die beiden Beiträge werden durch die Indizes null und eins gekennzeichnet, also

$$\mathbf{h}_{F\dot{\omega}}(\mathbf{z}_F, t) = -\mathbf{C}_{Fr}(\mathbf{z}_F) \dot{\tilde{\omega}}(t) \quad , \quad \mathbf{C}_{Fr}(\mathbf{z}_F) = \mathbf{C}_{Fr0} + \mathbf{C}_{Fr1}(\mathbf{z}_F), \quad (4.30)$$

mit der konstanten Matrix  $\mathbf{C}_{Fr0} \in \mathbb{R}^{n_F \times 3}$  und der von  $\mathbf{z}_F$  abhängigen Matrix  $\mathbf{C}_{Fr1} \in \mathbb{R}^{n_F \times 3}$ . Zur Angabe von  $\mathbf{C}_{Fr1}$  ist es zweckmäßig, die  $n_q^e \times n_q^e$ -Element-Massenmatrizen

$$\mathbf{C} \mathbf{3}_{\alpha\beta}^e = \int_{V_0^e} \mathbf{N}_{\alpha*}^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{N}_{\beta*}^e(\mathbf{x}) \rho^e(\mathbf{x}) dV \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} \mathbf{3}_{\beta\alpha}^e = \mathbf{C} \mathbf{3}_{\alpha\beta}^{eT}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (4.31)$$

einzuführen, wo  $\mathbf{N}_{\alpha^*}^e$  die Zeilen der Interpolationsmatrix  $\mathbf{N}^e$  aus (4.10) sind. Mit diesen Matrizen lässt sich das Produkt  $\mathbf{C}_{Fr1}\dot{\boldsymbol{\omega}}$  in folgender Form darstellen [222, 223]:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{Fr1}(\mathbf{z}_F)\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{i=1}^{n_F} \sum_{e=1}^{n_E} \sum_{\lambda=1}^3 \mathbf{T}^{eT} (-\mathbf{C}\mathbf{3}_{\mu\nu}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{\nu\mu}^e) \mathbf{T}_{*i}^e \Gamma_{\lambda\alpha}^e z_{Fi} \dot{\omega}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\omega}_{\alpha} \left( \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \sum_{\lambda=1}^3 (-\mathbf{C}\mathbf{3}_{\mu\nu}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{\nu\mu}^e) \mathbf{T}^e \Gamma_{\lambda\alpha}^e \right) \mathbf{z}_F \quad (4.32) \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\omega}_{\alpha} \mathbf{K}_{Fr\alpha} \mathbf{z}_F \end{aligned}$$

Hierin sind

$$\mathbf{K}_{Fr\alpha} = \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \sum_{\lambda=1}^3 (-\mathbf{C}\mathbf{3}_{\mu\nu}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{\nu\mu}^e) \mathbf{T}^e \Gamma_{\lambda\alpha}^e, \quad \mathbf{K}_{Fr\alpha} \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (4.33)$$

drei schiefsymmetrische Matrizen. Die Indizes  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  durchlaufen die zyklischen Permutationen von 1, 2 und 3.

Zusammen mit  $\mathbf{C}\mathbf{1}^e$  aus (4.27) sind die sechs verschiedenen  $n_q^e \times n_q^e$ -Matrizen  $\mathbf{C}\mathbf{3}_{\alpha\beta}^e$  aus (4.31) die in [223] eingeführten sieben *elementaren Element-Massenmatrizen* eines finiten Elements. Alle anderen Massenmatrizen lassen sich durch sie darstellen. Für die Element-Massenmatrix  $\mathbf{M}^e$  gilt zum Beispiel  $\mathbf{M}^e = \mathbf{C}\mathbf{3}_{11}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{22}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{33}^e$ .

Mit den Interpolationsfunktionen  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x})$  können Verschiebungsfelder dargestellt werden, die aus Starrkörperbewegungen der Elemente  $e$  resultieren. Unter Verwendung dieser Eigenschaft der  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x})$  kann man zeigen, dass sich  $\mathbf{C}_{Fr0}$  mit den Matrizen  $\mathbf{C}\mathbf{3}_{\alpha\beta}^e$  angeben lässt. Der Ort des Elements  $e$  in der Struktur ist nach Abbildung 4.1 durch den Vektor  $\mathbf{R}^e$  gegeben. Er beschreibt eine Translationsbewegung des Elements von  $\mathbf{R}^e = 0$  zu seinem Ort  $\mathbf{R}^e \neq 0$ . Das zu dieser Translationsbewegung gehörende Verschiebungsfeld der Punkte  $\mathbf{x}$  eines Elements ist bei Darstellung von  $\mathbf{R}^e$  in der Elementbasis  $\underline{\mathbf{e}}^e$  durch  $\Gamma^e \mathbf{R}^e + \mathbf{x}$  gegeben. Die Interpolationsfunktionen  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x})$  können dieses Verschiebungsfeld mit Hilfe der Werte  $\mathbf{Z}_{F0} \in \mathbb{R}^{n_F}$  der Knotenkoordinaten  $\mathbf{z}_F$  in der Form  $\Gamma^e \mathbf{R}^e + \mathbf{x} = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \mathbf{Z}_{F0}$  darstellen. Nach Multiplikation mit  $\Gamma^{eT}$ , also bei Darstellung der Verschiebungen in der Basis  $\underline{\mathbf{e}}$ , erhält man

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^e + \Gamma^{eT} \mathbf{x} = \Gamma^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \mathbf{Z}_{F0}$$

Die  $n_F$  Elemente von  $\mathbf{Z}_{F0}$  geben also den Ort der Knoten der Struktur in der Referenzkonfiguration bezüglich  $\{O, \underline{\mathbf{e}}\}$  an. Somit kann man anstelle von (4.18)

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}, t) = \Gamma^{eT} \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e (\mathbf{Z}_{F0} + \mathbf{z}_F(t)), \quad \mathbf{x} = \Gamma^e (\mathbf{R} - \mathbf{R}^e), \quad (4.34)$$

schreiben. Man kann zeigen, dass gilt [222, 223]:

$$\mathbf{C}_{Fr0}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{C}_{Fr1}(\mathbf{Z}_{F0})\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\omega}_{\alpha} \mathbf{K}_{Fr\alpha} \mathbf{Z}_{F0}. \quad (4.35)$$

Damit kann  $\mathbf{C}_{Fr0}$  durch die Matrizen  $\mathbf{C}\mathbf{3}_{\alpha\beta}^e$  ausgedrückt werden. Mit (4.35) und (4.32) erhält man anstelle von (4.30)

$$\mathbf{h}_{F\dot{\omega}}(\mathbf{z}_F, t) = -\mathbf{C}_{Fr0}\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) - \mathbf{C}_{Fr1}(\mathbf{z}_F)\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = -\sum_{\alpha=1}^3 \dot{\omega}_\alpha(t)\mathbf{K}_{Fr\alpha}(\mathbf{Z}_{F0} + \mathbf{z}_F),$$

also eine Darstellung von  $\mathbf{h}_{F\dot{\omega}}$  durch die in  $\mathbf{K}_{Fr\alpha}$  aus (4.33) enthaltenen Elementmatrizen  $\mathbf{C}\mathbf{3}_{\alpha\beta}^e$ , die Knotenkoordinaten  $\mathbf{Z}_{F0}$  und  $\mathbf{z}_F$  und die Winkelbeschleunigung  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ .

**Coriolisbeschleunigung.** Das vierte Integral in (4.21) kann in der gleichen Weise wie das vorige umgeformt werden. Mit  $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{U}} = \boldsymbol{\Gamma}^{eT}\mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{T}^e\dot{\mathbf{z}}_F(t)$  gilt

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{r}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}^T\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\Gamma}^{eT}\mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{T}^e\dot{\mathbf{z}}_F)^{\sim T}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Gamma}^{eT}(\mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{T}^e\dot{\mathbf{z}}_F)^{\sim T}\boldsymbol{\Gamma}^e\boldsymbol{\omega}$$

und es ergibt sich mit (4.17) und (4.13)

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \tilde{\boldsymbol{\omega}} \dot{\mathbf{r}} dV &= 2 \int_{V_0} \mathbf{V}^T \dot{\mathbf{U}}^T \boldsymbol{\omega} \rho dV = \dot{\mathbf{z}}_F^T 2 \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Gamma}^e \dot{\mathbf{U}}^T \boldsymbol{\omega} \rho^e(\mathbf{x}) dV \\ &= \dot{\mathbf{z}}_F^T 2 \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) (\mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e \dot{\mathbf{z}}_F)^{\sim T} \rho^e(\mathbf{x}) dV \boldsymbol{\Gamma}^e \boldsymbol{\omega}(t) \\ &=: -\dot{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{h}_{F\dot{\omega}}(\dot{\mathbf{z}}_F, t). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Für die aus der Coriolisbeschleunigung resultierenden, verallgemeinerten Trägheitskräfte  $\mathbf{h}_{F\dot{\omega}}$  ergibt sich mit der Definition (4.32) von  $\mathbf{C}_{Fr1}$

$$\mathbf{h}_{F\dot{\omega}}(\dot{\mathbf{z}}_F, t) = -2 \mathbf{C}_{Fr1}(\dot{\mathbf{z}}_F)\boldsymbol{\omega} = -2 \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha(t)\mathbf{K}_{Fr\alpha}\dot{\mathbf{z}}_F, \quad (4.37)$$

mit den schiefsymmetrischen Matrizen  $\mathbf{K}_{Fr\alpha}$  aus (4.33). Im Gegensatz zu den  $\dot{\omega}_\alpha\mathbf{K}_{Fr\alpha}\mathbf{z}_F$  aus (4.32) sind die Kräfte  $\omega_\alpha\mathbf{K}_{Fr\alpha}\dot{\mathbf{z}}_F$  aus (4.37) Dämpfungskräfte. Sie werden oft als gyroskopische Kräfte bezeichnet [222].

**Zentrifugalbeschleunigung.** Zur Berechnung des fünften Terms aus (4.21) wird das Integral  $\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r} dV$  so umgeformt, dass die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  nicht mehr im Integranden vorkommt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \rho \tilde{\boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r} dV &= \int_{\mathcal{K}} (\mathbf{V}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}}) (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}) \rho dV = \boldsymbol{\omega}^T \int_{\mathcal{K}} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{r}} \rho dV \boldsymbol{\omega} \\ &=: -\dot{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{h}_{F\omega\omega}(\mathbf{z}_F, t). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Die  $n_F$  Elemente von  $\mathbf{h}_{F\omega\omega}(\mathbf{z}_F, t)$  sind die zu den  $n_F$  Systemkoordinaten  $\mathbf{z}_F$  gehörenden verallgemeinerten Trägheitskräfte infolge der Zentrifugalbeschleunigung  $-\tilde{\boldsymbol{\omega}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}$ . Zur

Ermittlung von  $\mathbf{h}_{F\omega\omega}$  werden  $\mathbf{V}_h$  aus (4.17) und  $\mathbf{r}$  aus (4.34) verwendet. Mit den Elementen  $T_{nk}^e$  und  $T_{ml}^e$  der Sammelmatrix  $\mathbf{T}^e$ , den Elementen  $\Gamma_{\lambda\alpha}^e$  und  $\Gamma_{\mu\beta}^e$  der Drehmatrix  $\mathbf{\Gamma}^e$ , den Einträgen  $N_{\lambda m}^e$ ,  $N_{\mu n}^e$ ,  $N_{\gamma m}^e$  und  $N_{\gamma n}^e$  der Interpolationsmatrix  $\mathbf{N}^e$  und mit dem Kronecker-Symbol  $\delta_{\lambda\mu}$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3$ ;  $n, m = 1, \dots, n_q^e$ ) gilt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{n_q^e} \sum_{m=1}^{n_q^e} T_{nk}^e \mathbf{\Gamma}_{*\alpha}^{eT} \int_{V_0^e} \tilde{\mathbf{N}}_{*n}^e \tilde{\mathbf{N}}_{*m}^e \rho^e dV \mathbf{\Gamma}_{*\beta}^e T_{ml}^e \\
 = & \sum_{n,m=1}^{n_q^e} \sum_{\lambda,\mu=1}^3 T_{nk}^e \mathbf{\Gamma}_{\lambda\alpha}^e \int_{V_0^e} \underbrace{\left( N_{\lambda m}^e N_{\mu n}^e - \sum_{\gamma=1}^3 N_{\gamma m}^e N_{\gamma n}^e \delta_{\lambda\mu} \right)}_{=:\Xi_{\lambda\mu nm}^e} \rho^e dV \mathbf{\Gamma}_{\mu\beta}^e T_{ml}^e \\
 = & \sum_{n,m=1}^{n_q^e} \sum_{\lambda,\mu=1}^3 T_{nk}^e \mathbf{\Gamma}_{\lambda\alpha}^e \Xi_{\lambda\mu nm}^e \mathbf{\Gamma}_{\mu\beta}^e T_{ml}^e \\
 = & \mathbf{T}_{*k}^{eT} \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \mathbf{\Gamma}_{\lambda\alpha}^e \Xi_{\lambda\mu}^e \mathbf{\Gamma}_{\mu\beta}^e \mathbf{T}_{*l}^e.
 \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (4.31) zeigt

$$\begin{aligned}
 \Xi_{\lambda\lambda}^e &= -\left( \mathbf{C}\mathbf{3}_{\mu\mu}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{\nu\nu}^e \right) \quad \text{wo } \lambda, \mu, \nu = \text{zyklische Permutationen von } 1, 2, 3 \\
 \Xi_{\lambda\mu}^e &= \Xi_{\mu\lambda}^{eT} = \mathbf{C}\mathbf{3}_{\lambda\mu}^{eT} = \mathbf{C}\mathbf{3}_{\mu\lambda}^e \quad \text{für } \lambda \neq \mu
 \end{aligned}$$

Bei einer Summation über alle Elemente  $e$  lassen sich für  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  die symmetrischen Matrizen

$$\mathbf{K}_{F\omega\alpha\beta} = \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \mathbf{\Gamma}_{\lambda\alpha}^e \Xi_{\lambda\mu}^e \mathbf{\Gamma}_{\mu\beta}^e \mathbf{T}^e = \mathbf{K}_{F\omega\beta\alpha}^T, \quad \mathbf{K}_{F\omega\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{n_F \times n_F}, \quad (4.39)$$

bilden. Mit ihnen gilt

$$\begin{aligned}
 -\hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{h}_{F\omega\omega} &= \sum_{e=1}^{n_E} \sum_{k,l=1}^{n_F} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \hat{z}_{Fk} \mathbf{T}_{*k}^{eT} \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \mathbf{\Gamma}_{\lambda\alpha}^e \Xi_{\lambda\mu}^e \mathbf{\Gamma}_{\mu\beta}^e \mathbf{T}_{*l}^e \omega_\alpha \omega_\beta (\mathbf{Z}_{F0l} + z_{Fl}) \\
 &= \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \omega_\alpha \omega_\beta \mathbf{K}_{F\omega\alpha\beta} (\mathbf{Z}_{F0} + \mathbf{z}_F).
 \end{aligned}$$

Die beiden Summen über  $\alpha$  und  $\beta$  lassen sich durch nur eine Summe ausdrücken, wenn man den Vektor

$$\boldsymbol{\omega}_q := \left( \omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \omega_3^2 \quad \omega_1\omega_2 \quad \omega_2\omega_3 \quad \omega_3\omega_1 \right)^T, \quad \boldsymbol{\omega}_q \in \mathbb{R}^6 \quad (4.40)$$

eingführt und die sechs unabhängigen  $n_F \times n_F$ -Matrizen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{F\omega i} &:= \mathbf{K}_{F\omega\alpha\beta} \quad \text{wo } \alpha = \beta = i \text{ für } i = 1, 2, 3, \\
 \mathbf{K}_{F\omega i} &:= \mathbf{K}_{F\omega\alpha\beta} + \mathbf{K}_{F\omega\alpha\beta}^T \quad \text{wo } \begin{cases} \alpha = 1, \beta = 2 \text{ für } i = 4 \\ \alpha = 2, \beta = 3 \text{ für } i = 5 \\ \alpha = 3, \beta = 1 \text{ für } i = 6 \end{cases}. \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\mathbf{h}_{F\omega\omega} = - \sum_{i=1}^6 \omega_{qi} \mathbf{K}_{F\omega i} (\mathbf{Z}_{F0} + \mathbf{z}_F). \quad (4.42)$$

Die symmetrischen Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{F\omega i}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) erfassen den Einfluss der Zentrifugalkräfte auf rotierende Strukturen. Sie destabilisieren deren Bewegungen [222].

### 4.3.3 Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte

**Volumenkräfte.** Der siebte Term in (4.21)  $\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{k} dV$  enthält die in der Basis  $\underline{\mathbf{e}}$  des Bezugssystems angegebene Volumenkraftdichte  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{R})$  zur Darstellung der am Kontinuum wirksamen Volumenkräfte. Die an den Punkten  $\mathbf{x}$  des Elements  $e$  wirksamen Volumenkräfte sind wegen  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^e + \mathbf{\Gamma}^{eT} \mathbf{x}$  durch die Kraftdichte  $\mathbf{k}(\mathbf{R}^e + \mathbf{\Gamma}^{eT} \mathbf{x}) =: \mathbf{k}^e(\mathbf{x})$  gegeben. Die in der Elementbasis  $\underline{\mathbf{e}}^e$  dargestellte Kraftdichte ist  ${}^e \mathbf{k}^e(\mathbf{x})$  und wegen  $\underline{\mathbf{e}}^e = \mathbf{\Gamma}^e \underline{\mathbf{e}}$  gilt  $\mathbf{k}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{\Gamma}^{eT} {}^e \mathbf{k}^e(\mathbf{x})$ . Mit (4.17) findet man

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{k} dV = \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) {}^e \mathbf{k}^e(\mathbf{x}) dV. \quad (4.43)$$

Das wichtigste Beispiel einer Volumenkraft ist die Schwerkraft. Für sie gilt  $\mathbf{k}^e = \rho^e \mathbf{g}$  mit den Koordinaten  $\mathbf{g}$  des Vektors der Erdbeschleunigung in der Basis  $\underline{\mathbf{e}}$  des Bezugssystems und mit der Dichte  $\rho^e$  im Element  $e$ . Somit gilt anstelle von (4.43) für Gewichtskräfte

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{k} dV &= \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \rho^e(\mathbf{x}) dV \mathbf{\Gamma}^e \mathbf{g} = \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{C1}^e \mathbf{\Gamma}^e \mathbf{g} \\ &= \hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{C}_{Ft} \mathbf{g} =: \hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{h}_{Fg}, \end{aligned}$$

wobei wieder ausgenutzt wurde, dass weder  $\mathbf{\Gamma}^e$  noch  $\mathbf{g}$  von den Ortskoordinaten  $\mathbf{x}$  abhängen. Desweiteren erscheinen die aus (4.27) bekannten Matrizen  $\mathbf{C1}^e$  und  $\mathbf{C}_{Ft}$ .

**Oberflächenkräfte.** Der Term mit den Oberflächenkräften  $\int_{A_p} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{p}} dA_p$  wird wie der mit den Volumenkräften umgeformt. Mit der Oberfläche  $A_{p0}^e$  des Elements  $e$ , mit der Oberflächenkraftdichte  $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{R}^e + \mathbf{\Gamma}^e \mathbf{x}) = \bar{\mathbf{p}}^e(\mathbf{x})$  und mit der in  $\underline{\mathbf{e}}^e$  angegebenen Oberflächenkraftdichte  ${}^e \bar{\mathbf{p}}^e(\mathbf{x})$ , für die  $\bar{\mathbf{p}}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{\Gamma}^{eT} {}^e \bar{\mathbf{p}}^e(\mathbf{x})$  gilt, ergibt sich

$$\int_{A_p} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{p}} dA_p = \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \underbrace{\int_{A_{p0}^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) {}^e \bar{\mathbf{p}}^e(\mathbf{x}) dA}_{=: \mathbf{h}_{\bar{\mathbf{p}}}^e} = \hat{\mathbf{z}}_F^T \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{h}_{\bar{\mathbf{p}}}^e =: \hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{h}_{F\bar{\mathbf{p}}}.$$

Die Gleichungen für die an einem Element  $e$  wirksamen Kräfte zeigen, dass die über das Element verteilten Kräfte  ${}^e \bar{\mathbf{p}}^e(\mathbf{x}) dA$  und  $\rho^e(\mathbf{x}) dV \mathbf{\Gamma}^e \mathbf{g}$  durch Einzelkräfte ersetzt werden. Diese Einzelkräfte greifen an den Knoten der Elemente an und sind die zu den  $n_q^e$  Element-Knotenkoordinaten  $\mathbf{z}^e$  gehörenden generalisierten Kräfte. Die an den Knoten der Elemente wirksamen Kräfte werden in  $\mathbf{h}_{F\bar{\mathbf{p}}}$  und  $\mathbf{h}_{Fg}$  zu den an der gesamten

Struktur wirksamen Kräften zusammengefasst. Die jeweils  $n_F$  Elemente von  $\mathbf{h}_{F\bar{p}}$  und  $\mathbf{h}_{Fg}$  sind die generalisierten Kräfte zu den  $n_F$  Systemkoordinaten  $\mathbf{z}_F$ .

Die äußeren Kräfte werden in  $\mathbf{h}_F := \mathbf{h}_{F\bar{p}} + \mathbf{h}_{Fg} \in \mathbb{R}^{n_F}$  zusammengefasst. Insgesamt erhält man somit für die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte:

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{V}^T \mathbf{k} dV + \int_{A_p} \mathbf{V}^T \bar{\mathbf{p}} dA_p = \hat{\mathbf{z}}_F^T (\mathbf{h}_{Fg} + \mathbf{h}_{F\bar{p}}) = \hat{\mathbf{z}}_F^T \mathbf{h}_F. \quad (4.44)$$

#### 4.3.4 Zusammenfassung

Wenn das Bezugssystem zur Beschreibung der Verformung einer Finiten-Elemente-Struktur beschleunigt bewegt wird, sind an der Struktur zusätzliche Trägheitskräfte wirksam. Dabei wird angenommen, dass die Bewegungen des Bezugssystems bekannte Funktionen der Zeit sind.

Mit den Gleichungen (4.24), (4.26), (4.28), (4.29), (4.36), (4.38) und (4.44) ergibt sich für die diskreten Bewegungsgleichungen (4.21):

$$\hat{\mathbf{z}}_F^T (\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{K}_F \mathbf{z}_F) = \hat{\mathbf{z}}_F^T (\mathbf{h}_F(t) + \mathbf{h}_{Fa}(t) + \mathbf{h}_{F\dot{\omega}}(\mathbf{z}_F, t) + \mathbf{h}_{F\omega}(\dot{\mathbf{z}}_F, t) + \mathbf{h}_{F\omega\omega}(\mathbf{z}_F, t)).$$

Bei ungelagerten Finiten-Elemente-Strukturen sind die  $n_F$  Elemente von  $\hat{\mathbf{z}}_F$  voneinander unabhängige, beliebig wählbare Größen ungleich Null. Demnach kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn die Koeffizienten von  $\hat{\mathbf{z}}_F$  auf der linken und rechten Seite übereinstimmen. Dies liefert die diskreten Bewegungsgleichungen der ungelagerten Finite-Elemente-Struktur:

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{K}_F \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_F(t) + \mathbf{h}_{Fa}(t) + \mathbf{h}_{F\dot{\omega}}(\mathbf{z}_F, t) + \mathbf{h}_{F\omega}(\dot{\mathbf{z}}_F, t) + \mathbf{h}_{F\omega\omega}(\mathbf{z}_F, t). \quad (4.45)$$

Infolge von Lagerungsbedingungen verringert sich die Zahl unabhängiger Koordinaten. Die Lagerungen resultieren in Einschränkungen der Bewegungsmöglichkeiten der Knoten auf dem Rand. Die Lagerungsbedingungen werden durch Gleichungen der Form

$$\mathbf{z}_F(t) = \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{z}}_F(t) + \bar{\bar{\mathbf{T}}} \bar{\bar{\mathbf{z}}}_F(t)$$

mit bekannten Funktionen  $\bar{\mathbf{z}}_F(t)$  erfasst. Die Größen  $\bar{\bar{\mathbf{z}}}_F(t)$  sind die (unbekannten) Lagezustandsgrößen (Minimalkoordinaten) einer Finiten-Elemente-Struktur.

Wegen der Lagerung erscheinen in den Bewegungsgleichungen zusätzliche Zwangskräfte  $\bar{\mathbf{h}}_F$ , das heißt  $\mathbf{h}_F$  ist durch  $\mathbf{h}_F + \bar{\mathbf{h}}_F$  zu ersetzen.

Bei vielen Anwendungen muss die bisher nicht berücksichtigte Dämpfung der Strukturschwingungen modelliert werden. Das einfachste Modell ist  $\mathbf{D}_F \dot{\mathbf{z}}_F$  – eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung, wobei  $\mathbf{D}_F$  die Matrix der Strukturdämpfung bezeichnet. Bei Kenntnis der Element-Dämpfungsmatrizen  $\mathbf{D}^e$ , berechnet sich  $\mathbf{D}_F$  aus  $\mathbf{D}_F = \sum_{e=1}^{n_E} \mathbf{T}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{T}^e$ . Häufig kennt man die Element-Dämpfungsmatrizen  $\mathbf{D}^e$  nicht, man wählt stattdessen eine *Rayleigh-Dämpfung* mit Parametern  $\alpha_R, \beta_R \in \mathbb{R}$  [11]:

$$\mathbf{D}_F = \alpha_R \mathbf{M}_F + \beta_R \mathbf{K}_F. \quad (4.46)$$

Nimmt man die Gleichungen (4.28), (4.32), (4.35), (4.37) und (4.42) zusammen, so ergeben sich schließlich die diskreten Bewegungsgleichungen einer gelagerten Finiten-Elemente-Struktur mit bewegtem Bezugssystem und berücksichtigter Dämpfung zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{D}_{F\Sigma}(t) \dot{\mathbf{z}}_F + \mathbf{K}_{F\Sigma}(t) \mathbf{z}_F &= \mathbf{h}_{F\Sigma}(t) + \bar{\mathbf{h}}_F, \\
 \mathbf{D}_{F\Sigma} &:= \mathbf{D}_F + 2 \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha(t) \mathbf{K}_{Fr\alpha}, \\
 \mathbf{K}_{F\Sigma} &:= \mathbf{K}_F + \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\omega}_\alpha(t) \mathbf{K}_{Fr\alpha} + \sum_{i=1}^6 \omega_{qi}(t) \mathbf{K}_{F\omega i}, \\
 \mathbf{h}_{F\Sigma} &:= \mathbf{h}_{F\bar{p}} + \mathbf{h}_{Fg} - \mathbf{C}_{Ft} \mathbf{a}(t) - \\
 &\quad \sum_{\alpha=1}^3 \dot{\omega}_\alpha(t) \mathbf{K}_{Fr\alpha} \mathbf{z}_{F0} - \sum_{i=1}^6 \omega_{qi}(t) \mathbf{K}_{F\omega i} \mathbf{z}_{F0}, \\
 \mathbf{z}_F &= \bar{\bar{\mathbf{T}}} \bar{\bar{\mathbf{z}}}_F + \bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{z}}_F.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Dabei wurden  $\mathbf{C}_{Ft}$  aus (4.27),  $\mathbf{K}_{Fr\alpha}$  aus (4.33),  $\omega_q$  aus (4.40) und  $\mathbf{K}_{F\omega i}$  aus (4.41) verwendet. Es ergibt sich also ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den Anfangswerten

$$\mathbf{z}_F(t_0) = \mathbf{z}_F^0, \quad \dot{\mathbf{z}}_F(t_0) = \dot{\mathbf{z}}_F^0, \tag{4.48}$$

wobei die Anfangswerte (3.32) mit der Darstellung (4.14) zu erfüllen sind.

## 4.4 Zeitintegration

Die Gleichung (4.45) bzw. (4.47) stellt zusammen mit (4.48) ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung dar, für das bekannte Integrationsmethoden zur Verfügung stehen. In der Strukturmechanik liegt allerdings ein *steifes mechanisches System* vor. Hinzu kommt, dass bei strukturdynamischen Problemen hochfrequente Anteile in der Lösung nicht aufgelöst werden müssen. Aus den eben genannten Gründen ist eine implizite Zeitintegration am effektivsten [11].

Insbesondere ist die Art, wie die Dirichlet Randbedingungen berücksichtigt werden, für die Wahl des Integrationsschemas entscheidend. Werden die Zwangsgleichungen der gelagerten Knotenpunkte auf dem Rand mittels Lagrange-Multiplikatoren an die Differentialgleichungen angekoppelt, so führt das auf ein differential-algebraisches System; ein *dynamisches Sattelpunktproblem*. An dieser Stelle soll nicht weiter darauf eingegangen werden, näheres dazu ist zum Beispiel [227] zu entnehmen. Dort finden sich auch geeignete Integrationsmethoden, ebenso in [111].

Die Zwangsgleichungen lassen sich auch direkt in den Gleichungen (4.47) berücksichtigen. Man kann – gegebenenfalls nach Permutation der Gleichungen und Komponenten von  $\mathbf{z}_F$  – ein partitioniertes System der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ab} \\ \mathbf{M}_{ba} & \mathbf{M}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{z}}}_F \\ \ddot{\bar{\mathbf{z}}}_F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{aa} & \mathbf{D}_{ab} \\ \mathbf{D}_{ba} & \mathbf{D}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{z}}}_F \\ \dot{\bar{\mathbf{z}}}_F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{z}}_F \\ \bar{\mathbf{z}}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{h}}_L \\ \bar{\mathbf{h}}_L \end{pmatrix}$$

erreichen. Dabei werden im Lastvektor  $\mathbf{h}_L = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{h}}_L \\ \bar{\mathbf{h}}_L \end{pmatrix}$  alle Anteile auf der rechten

Seite von (4.47) zusammengefasst und  $\bar{\mathbf{z}}_F, \dot{\bar{\mathbf{z}}}_F$  sind nach (4.16) die entsprechenden Komponenten der vorgegebenen bzw. unbekanntem Anteile von  $\mathbf{z}_F$ . Daraus erhält man für  $\bar{\mathbf{z}}_F$  die Differentialgleichung

$$\mathbf{M}_{aa}\ddot{\bar{\mathbf{z}}}_F + \mathbf{D}_{aa}\dot{\bar{\mathbf{z}}}_F + \mathbf{K}_{aa}\bar{\mathbf{z}}_F = \bar{\mathbf{h}}_L - \mathbf{K}_{ab}\bar{\mathbf{z}}_F - \mathbf{D}_{ab}\dot{\bar{\mathbf{z}}}_F - \mathbf{M}_{ab}\ddot{\bar{\mathbf{z}}}_F. \quad (4.49)$$

Es ergibt sich ein System von Differentialgleichungen ohne algebraische Nebenbedingungen. Für homogene Randbedingungen gilt  $\bar{\mathbf{z}}_F = \dot{\bar{\mathbf{z}}}_F \equiv 0$ . Da bei Finite-Elemente-Methoden die Dimension des Differentialgleichungssystems groß werden kann, ist man in der Praxis an leistungsfähigen Methoden interessiert. In [11, 103, 268] wird die NEWMARK-Methode empfohlen.

Die Newmark-Methode ist ein Integrationsschema für Differentialgleichungen zweiter Ordnung und soll kurz anhand des Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (4.50)$$

erläutert werden. Es geht von den folgenden Annahmen aus [183]:

$$\dot{\mathbf{y}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{y}}(t) + [(1 - \delta_{NM})\dot{\mathbf{y}}(t) + \delta_{NM}\dot{\mathbf{y}}(t + \Delta t)] \Delta t, \quad (4.51)$$

$$\mathbf{y}(t + \Delta t) = \mathbf{y}(t) + \dot{\mathbf{y}}(t)\Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha_{NM} \right) \ddot{\mathbf{y}}(t) + \alpha_{NM}\ddot{\mathbf{y}}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2. \quad (4.52)$$

Dabei bezeichnet  $\Delta t$  die Schrittweite. Die beiden Parameter  $\delta_{NM}$  und  $\alpha_{NM}$  können variiert werden, um optimale Stabilität und Genauigkeit zu erhalten. Für  $\delta_{NM} \geq 0.5$  und  $\alpha_{NM} \geq 0.25(\delta_{NM} + 0.5)^2$  ist das Integrationsschema unbedingt stabil, das heißt für jede gewählte Schrittweite  $\Delta t$  stabil. Die besten Genauigkeitseigenschaften werden für  $\delta_{NM} = 0.5$  und  $\alpha_{NM} = 0.25$  erreicht [11].

Zur Berechnung von  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$  und  $\ddot{\mathbf{y}}$  zur Zeit  $t + \Delta t$  wird zusätzlich zu (4.51) und (4.52) das Differentialgleichungssystem (4.50) zur Zeit  $t + \Delta t$  betrachtet. Löst man (4.52) nach  $\ddot{\mathbf{y}}(t + \Delta t)$  auf und setzt diesen Ausdruck in (4.51) ein, so erhält man Gleichungen, die als Unbekannte nur die Variable  $\mathbf{y}(t + \Delta t)$  enthalten. Die so gewonnenen Ausdrücke werden in die Differentialgleichung (4.50) eingesetzt und diese nach  $\mathbf{y}(t + \Delta t)$  aufgelöst. Anschließend lassen sich mit Hilfe von (4.51) und (4.52) auch  $\dot{\mathbf{y}}(t + \Delta t)$  und  $\ddot{\mathbf{y}}(t + \Delta t)$  berechnen. Eine ausführlichere Beschreibung der Newmark-Methode findet sich zum Beispiel in [11].

Das Differentialgleichungssystem (4.49) hat die Form (4.50), und die Newmark-Methode kann angewendet werden. Eine weitere Möglichkeit, (4.49) effizient zu lösen, stellt die Modenüberlagerung dar. Sie entspricht einem Basiswechsel von der Basis der Finite-Elemente-Koordinaten zur Basis der Eigenvektoren des verallgemeinerten Eigenwertproblems  $\mathbf{K}_F\boldsymbol{\varphi} = \omega^2\mathbf{M}_F\boldsymbol{\varphi}$ . Dadurch können die Bewegungsgleichungen entkoppelt werden. Für eine detailliertere Beschreibung sei zum Beispiel auf [11] verwiesen.

# Kapitel 5

## Grundlagen der Optimalen Steuerung

Erst durch die Entwicklung leistungsfähiger numerischer Verfahren ist es möglich geworden, realistische Optimalsteuerungsaufgaben zu lösen. Typische Aufgabenstellungen der optimalen Steuerung ergeben sich unter anderem im Bereich der Luft- und Raumfahrt [16, 50, 51, 52, 55, 138, 142, 143, 144], chemischen Prozessen [30, 31, 38, 81, 118, 151, 208], oder Robotik [47, 48, 57, 209, 211, 212, 236, 237, 253, 266], um nur einige Beispiele zu nennen.

In diesem Kapitel werden die notwendigen Bedingungen für ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem bereitgestellt und numerische Verfahren vorgestellt. Dabei nimmt die Mehrzielmethode eine zentrale Rolle ein. Ein Abschnitt ist der optimalen Steuerung in der Robotik gewidmet, dabei wird an einem Beispiel die numerische Realisierung demonstriert.

### 5.1 Allgemeines Optimalsteuerungsproblem

Im Folgenden sei ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem auf dem festen Zeitintervall  $[t_0, t_F]$  mit fester Endzeit  $t_F > t_0$  betrachtet. Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t \in [t_0, t_F]$  wird durch den Vektor der Zustandsvariablen  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  erfasst. Das System wird durch den Vektor der Steuervariablen  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  gesteuert. Die Steuerungsfunktion  $\mathbf{u} : [t_0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei eine bis auf eine Menge mit Maß Null beschränkte Funktion, das heißt, ein Element aus dem Banachraum  $L^\infty([t_0, t_F]; \mathbb{R}^m)$  mit der Norm  $\|\mathbf{u}\| := \text{ess sup} \{\|\mathbf{u}\|_2 \mid t \in [t_0, t_F]\}$ , wobei  $\|\cdot\|_2$  für die Euklidische Norm steht. Die Zustandsfunktion  $\mathbf{x} : [t_0, t_F] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei aus dem Banachraum der gleichmäßig Lipschitzstetigen Funktionen  $\mathcal{W}^{1,\infty}([t_0, t_F]; \mathbb{R}^n)$  mit der Norm  $\|\mathbf{x}\|_{1,\infty} := \|\mathbf{x}(t_0)\|_2 + \|\dot{\mathbf{x}}\|_\infty$ .

Das Optimalsteuerungsproblem lässt sich damit wie folgt formulieren: Berechne ein *optimales Paar*  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathcal{W}^{1,\infty}([t_0, t_F]; \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_F]; \mathbb{R}^m)$ , welches das Zielunktional

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \Psi(t_F, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) + \int_{t_0}^{t_F} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (5.1)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad \text{f.ü.} \quad t \in [t_0, t_F], \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) = \mathbf{0}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{0} \quad \text{f.ü.} \quad t \in [t_0, t_F], \quad (5.4)$$

$$c(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{0} \quad \text{f.ü.} \quad t \in [t_0, t_F] \quad (5.5)$$

minimiert.

Die Funktionen  $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $1 \leq r \leq 2n$ ,  $\mathbf{C} := (C_1, \dots, C_k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  werden als stetig differenzierbar, die Funktionen  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als  $(p + 1)$ -mal stetig differenzierbar vorausgesetzt.

**Definition 5.1 (Zulässiges Paar, optimales Paar)**

Ein Funktionenpaar  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \in \mathcal{W}^{1,\infty}([t_0, t_F]; \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_F]; \mathbb{R}^m)$  heißt zulässiges Paar, falls die Funktionen  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{u}(t)$  den Restriktionen (5.2) - (5.5) genügen. Ein zulässiges Paar  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  heißt optimales Paar, wenn es (5.1) (lokal) minimiert.

**Bemerkung 5.2**

Die Formulierung (5.1) wird als Bolza-Problem bezeichnet. Falls  $\Psi(t_F, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) = 0$  gilt, so handelt es sich um ein Lagrange-Problem. Wenn  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$  gilt, wird es Mayer-Problem genannt. Durch geeignete Transformationen kann gezeigt werden, dass die Formulierungen äquivalent sind, siehe zum Beispiel [59].

**Bemerkung 5.3**

Bei dem allgemeinen Optimalsteuerungsproblem (5.1) - (5.5) handelt es sich um den autonomen Fall, bei dem  $L$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $c$  nicht explizit von der Zeit abhängen. Der autonome Fall kann durch Einführung einer zusätzlichen Zustandsvariablen  $x_{n+1} := t$ , für welche die Differentialgleichung

$$\dot{x}_{n+1} = 1$$

mit den Randwerten

$$x_{n+1}(\tau_0) = t_0 \quad x_{n+1}(\tau_F) = t_F$$

gilt, und Einführung einer neuen unabhängigen Variablen  $\tau$  erreicht werden. Dabei bedeutet  $(\cdot)$  nun  $\frac{d}{d\tau}$ .

Mit Gleichung (5.3) werden Randwerte der Zustandsvariablen vorgegeben. Häufig haben die Randwerte die Form

$$\psi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_F) - \mathbf{x}_F \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

mit gegebenen  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_F \in \mathbb{R}^n$ . Die Ungleichungsnebenbedingungen (5.4) werden gemischte Steuer- und Zustandsbeschränkungen genannt, die Ungleichungsbedingung (5.5) wird reine Zustandsbeschränkung genannt. Für mehrere reine Zustandsbeschränkungen  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^c$  sei auf [113] verwiesen.

**Definition 5.4 (Ordnung einer Zustandsbeschränkung – nichtautonomer Fall)**

Sei  $c = c(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$  und  $c^i$ ,  $i = 0, \dots, p$  rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned} c^0 &:= c &= c(\mathbf{x}, t) \\ c^1 &:= \dot{c} &= c_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + c_t(\mathbf{x}, t) \\ c^2 &:= \dot{c}^1 &= c_{\mathbf{x}}^1(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + c_t^1(\mathbf{x}, t) \\ &\vdots & \\ c^p &:= \dot{c}^{p-1} &= c_{\mathbf{x}}^{p-1}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + c_t^{p-1}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $c_{\mathbf{x}} := \frac{\partial c}{\partial \mathbf{x}}$ ,  $c_t := \frac{\partial c}{\partial t}$  die partiellen Ableitungen.  
Gilt

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{u}}^i &= 0 && \text{für } 0 \leq i \leq p-1, \\ c_{\mathbf{u}}^p &\neq 0, \end{aligned}$$

so heißt  $p$  die Ordnung der Zustandsbeschränkung  $c$ .

Für die Beschränkungen (5.4) gelte die Regularitätsbedingung

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} & \text{diag}(\mathbf{C}) & \mathbf{0} \\ \left( \frac{\partial c^p}{\partial \mathbf{u}} \right)^T & \mathbf{0} & c \end{pmatrix} = k + 1. \quad (5.7)$$

**Definition 5.5**

- Eine Steuerbeschränkung  $C_i \leq 0$  heißt aktiv, wenn  $C_i = 0$  gilt.
- Ein Intervall  $[t_{\text{entry}}, t_{\text{exit}}] \subset [t_0, t_F]$ ,  $t_{\text{entry}} < t_{\text{exit}}$ , auf dem die Steuerbeschränkung  $C_i$  aktiv ist, nennt man Randstück der Steuerbeschränkung  $C_i$ .
- Ein Intervall, auf dem keine Steuerbeschränkung aktiv ist, nennt man freies Teilstück.

Durch die Regularitätsbedingung (5.7) wird also gewährleistet, dass sowohl die Zustandsbeschränkung, als auch jede Komponente der Funktion  $\mathbf{C}$  explizit von der Steuerung abhängt. Zusätzlich wird angenommen, dass die optimale Lösung  $\mathbf{u}^*$  nur endlich viele Randstücke besitzt.

Analog zu Definition 5.5 definiert man für Zustandsbeschränkungen:

**Definition 5.6**

- Eine Zustandsbeschränkung  $c \leq 0$  heißt aktiv, wenn  $c = 0$  gilt.
- Ein Intervall  $[t_{\text{entry}}, t_{\text{exit}}] \subset ]0, t_f[$ ,  $t_{\text{entry}} < t_{\text{exit}}$ , auf dem die Zustandsbeschränkung aktiv ist, heißt Randstück der Zustandsbeschränkung. Der Punkt  $t_{\text{entry}}$  bzw.  $t_{\text{exit}}$  heißt Aufsprungpunkt bzw. Absprungpunkt des Randstückes  $[t_{\text{entry}}, t_{\text{exit}}]$ .
- Ein Punkt  $t_{\text{touch}} \in ]0, t_f[$  heißt Kontaktpunkt der Zustandsbeschränkung, wenn  $c$  nur an einem isolierten Punkt aktiv ist. Gilt bei  $t_{\text{touch}}$  zusätzlich zu  $c = 0$  auch  $c^1 = 0$ , so heißt der Kontaktpunkt Berührungspunkt.
- Ein Intervall, auf dem die Zustandsbeschränkung nicht aktiv ist, heißt inneres Teilstück.

**Bemerkung 5.7**

Durch die Bedingung  $[t_{\text{entry}}, t_{\text{exit}}] \subset ]0, t_f[$  wird eine Degeneration des Problems vermieden, ein Phänomen, von dem in [7, 197] berichtet wird. Der Fall  $[t_{\text{entry}}, t_{\text{exit}}] \subseteq [0, t_f]$  lässt sich durch Hinzunahme einer erweiterten Regularitätsbedingung behandeln [8].

**Definition 5.8**

Die Punkte  $t_{\text{entry}}$ ,  $t_{\text{exit}}$  und  $t_{\text{touch}}$ , bei denen gemischte Zustands- und Steuerbeschränkungen und reine Zustandsbeschränkungen aktiv bzw. inaktiv werden, werden auch Verbindungspunkte genannt.

Im Weiteren wird angenommen, dass es nur eine endliche Anzahl von disjunkten Verbindungspunkten  $t_i$  gibt. Im Falle gemischter Zustands- und Steuerbeschränkungen (5.4) gelte  $t_0 \leq t_1 < \dots < t_{\text{max}} \leq t_F$ , für die reine Zustandsbeschränkung (5.5) gelte  $t_0 < t_1 < \dots < t_{\text{max}} < t_F$ . Die Disjunktheit der Verbindungspunkte gewährleistet, dass jeder Punkt  $t_i$  ein Verbindungspunkt für genau eine der Beschränkungen in (5.4) oder (5.5) ist.

## 5.2 Notwendige Bedingungen

In diesem Abschnitt werden die notwendigen Bedingungen für ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem (5.1) - (5.5) bereitgestellt. Eine optimale Lösung muss diesen Bedingungen genügen. Durch die Überprüfung dieser Bedingungen insbesondere der Vorzeichenbedingungen, lassen sich nichtoptimale Lösungen ausschließen. Auf hinreichende Bedingungen, denen eine optimale Lösung genügen muss, soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Für hinreichende Bedingungen sei auf [165, 166, 158] und den dort angegebenen Literaturstellen verwiesen. Dort werden hinreichende Bedingungen für Steuerungsprobleme, bei denen die Steuerung nur linear in der Hamiltonfunktion auftritt [165, 166] – sowohl für zeitoptimale Funktionale [166], als auch für allgemeine Zielfunktionale [165] – hergeleitet. Desweiteren werden Steuerungsprobleme mit gemischten Steuer- und Zustandsbeschränkungen und reine Zustandsbeschränkungen der Ordnung 1 betrachtet [158].

Das allgemeine Optimalsteuerungsproblem (5.1) - (5.5) wird auf bekannte Weise in ein Mehrpunkt-Randwertproblem transformiert [45, 116]. Bevor die notwendigen Bedingungen, denen ein optimales Paar  $(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))$  genügen muss, angegeben werden, wird die *Hamiltonfunktion*  $H^0$  und die *erweiterte Hamiltonfunktion*  $H$  definiert:

$$\begin{aligned} H^0(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) &:= L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\mu}(t), \bar{\nu}(t)) &:= H^0 + \boldsymbol{\mu}(t)^T \mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \bar{\nu}(t) c^p(\mathbf{x}(t)). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Darin bezeichnen  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$  die *adjungierten Variablen* und  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\bar{\nu} \in \mathbb{R}$  *Multiplikatorfunktionen*. Mit

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \bar{\nu}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathcal{W}^{1,\infty}([t_0, t_F]; \mathbb{R}^n) \times L^\infty([t_0, t_F]; \mathbb{R}^k) \times L^\infty([t_0, t_F]; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^p,$$

wobei  $\boldsymbol{\eta} := (\eta_1, \dots, \eta_p)$  einen Vektor mit konstanten *Sprungparametern* darstellt, lauten die notwendigen Bedingungen für eine optimale Lösung:

- *Adjungierte Differentialgleichungen:*

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_{\mathbf{x}} := -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (5.9)$$

- *Optimalitätsbedingung:*

$$H_{\mathbf{u}} := \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (5.10)$$

- *Legendre-Clebsch-Bedingung:* (bei inaktiven Steuerbeschränkungen)

$$H_{\mathbf{uu}} := \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \quad \text{positiv semidefinit}, \quad (5.11)$$

- *Vorzeichenbedingungen:*

$$\boldsymbol{\mu}(t) \geq 0, \quad \boldsymbol{\mu}^T(t) \mathbf{C} = 0, \quad (5.12)$$

$$(-1)^k \bar{\nu}^{(k)}(t) \geq 0, \quad k = 0, \dots, p, \quad \bar{\nu}(t) c = 0, \quad (5.13)$$

Die Funktion  $\bar{\nu}(t)$  sei  $(p-1)$ -mal differenzierbar,  $(\bar{\nu})^{p-1}$  sei von beschränkter Variation und die Funktionen  $(-1)^k \bar{\nu}^{(k)}(t) \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, p-1$  sind nicht zunehmend (auch an Unstetigkeiten von  $\boldsymbol{\lambda}$ ).

- An einem Kontaktpunkt  $t_{\text{touch}}$ :

$$\boldsymbol{\lambda}(t_{\text{touch}}^-) = \boldsymbol{\lambda}(t_{\text{touch}}^+) + \eta_1(t_{\text{touch}}) c_{\mathbf{x}}(t_{\text{touch}}), \quad (5.14)$$

$$H(t_{\text{touch}}^-) = H(t_{\text{touch}}^+) - \eta_1(t_{\text{touch}}) c_t(t_{\text{touch}}), \quad (5.15)$$

$$\eta_1(t_{\text{touch}}) \geq 0, \quad \eta_1(t_{\text{touch}}) c(t_{\text{touch}}) = 0, \quad (5.16)$$

- Am Aufsprungpunkt  $t_{\text{entry}}$  eines Randstückes:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_{\text{entry}}^-) = \boldsymbol{\lambda}(t_{\text{entry}}^+) + \sum_{k=1}^p \eta_k(t_{\text{entry}}) (c^{(k-1)})_{\mathbf{x}}(t_{\text{entry}}), \quad (5.17)$$

$$H(t_{\text{entry}}^-) = H(t_{\text{entry}}^+) - \sum_{k=1}^p \eta_k(t_{\text{entry}}) (c^{(k-1)})_t(t_{\text{entry}}), \quad (5.18)$$

$$\eta_k(t_{\text{entry}}) \geq 0, \quad \eta_k(t_{\text{entry}}) c(t_{\text{entry}}) = 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad (5.19)$$

bei einer Zustandsbeschränkung der Ordnung  $p = 1$ :

$$\eta_1(t_{\text{entry}}) \geq \bar{\nu}(t_{\text{entry}}^+), \quad (5.20)$$

bei einer Zustandsbeschränkung der Ordnung  $p \geq 2$ :

$$\eta_k(t_{\text{entry}}) \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ = \end{array} \right\} (-1)^{p-k} (\bar{\nu})^{(p-k)}(t_{\text{entry}}^+) \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2, \dots, p \end{array} \right., \quad (5.21)$$

- Am Absprungpunkt  $t_{exit}$  eines Randstückes:

$$\boldsymbol{\lambda}(t_{exit}^-) = \boldsymbol{\lambda}(t_{exit}^+), \quad (5.22)$$

$$H(t_{exit}^-) = H(t_{exit}^+), \quad (5.23)$$

bei einer Zustandsbeschränkung der Ordnung  $p \geq 2$ :

$$(\bar{\nu})^{(k)}(t_{exit}^-) = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, p - 2, \quad (5.24)$$

- *Transversalitätsbedingungen:*

Für die Indizes  $i$ , für die die Komponenten  $x_i$  der Zustandsvariablen  $\boldsymbol{x}$  mit (5.3)

- zum Zeitpunkt  $t_0$  nicht festgelegt sind:

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i(t_0)} + \lambda_i \right) \Big|_{t=t_0} = 0, \quad (5.25)$$

- zum Zeitpunkt  $t_F$  nicht festgelegt sind:

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i(t_F)} - \lambda_i \right) \Big|_{t=t_F} = 0, \quad (5.26)$$

- *Hamiltonfunktionstest:*

$$H = const. \quad (5.27)$$

Durch das Argument  $t^-$  bzw.  $t^+$  wird der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert bezeichnet. Die hier angegebenen notwendigen Bedingungen für ein allgemeines Optimalsteuerungsproblem mit Steuer- und Zustandsbeschränkungen sind noch nicht vollständig bewiesen [113]. In [17] werden die notwendigen Bedingungen ohne Zustandsbeschränkungen mittels der allgemeinen Variationsrechnung hergeleitet. In [44] wurde der Satz für eine skalare Steuerung  $u(t)$ , eine gemischte Zustands- und Steuerbeschränkung, sowie eine reine Zustandsbeschränkung der Ordnung  $p$  formuliert. Den Satz findet man ebenso in [45]. In [18] werden für vektorwertige, gemischte Zustandsbeschränkungen und vektorwertige reine Zustandsbeschränkungen der Ordnung 1 Bedingungen mit Hilfe der allgemeinen Variationsrechnung hergeleitet. Bei [18] treten Stünge nicht am Aufsprungpunkt der Zustandsbeschränkung, sondern sowohl am Aufsprung- als auch am Absprungpunkt auf. In [44] konnte aber gezeigt werden, dass der Sprung am Absprungpunkt nicht beliebig ist und durch eine Normalisierung des Sprungs beide Artikel zum gleichen Ergebnis führen. Es ist auch möglich, auftretende Unstetigkeiten am Absprungpunkt zu wählen, so dass die Stetigkeit am Aufsprungpunkt gegeben ist, wie zum Beispiel in [152]. Dies führt zu modifizierten Bedingungen. Die sich ergebenden Änderungen findet der interessierte Leser zum Beispiel in [113]. Sowohl in [18], als auch in [44] und [45] fehlen allerdings die Bedingungen (5.19), sowie die Bedingungen (5.20), (5.21) und (5.24). Diese wurden durch [139] hinzugefügt. Die Vorzeichenbedingung (5.13) ist eine der wichtigsten Bedingungen, um Nicht-Extremale zu eliminieren [113, 242]. In den meisten praktischen Beispielen treten Sprünge von  $\boldsymbol{\lambda}$  und (im nichtautonomen

Fall) von  $H$  nur an Verbindungspunkten auf. Es kann aber auch vorkommen, dass eine Unstetigkeit im Inneren eines Randstückes auftritt, zum Beispiel wenn eine gemischte Beschränkung  $C_i \leq 0$  in (5.4) aktiv wird [113]. In den Beweisen werden in der Regel die Multiplikatorfunktionen als existent vorausgesetzt, auch die von  $\bar{v}(t)$ . In [164] wird die Existenz der Multiplikatoren für den Fall, dass die Steuerbeschränkungen unabhängig von  $\mathbf{x}$  sind, bewiesen. In [54] wird gezeigt, dass die Existenz der Multiplikatoren nur unter starken Voraussetzungen gesichert ist. Ein Beispiel zeigt, dass eine Lösung existieren kann, obwohl keine zugehörigen Multiplikatoren existieren [54].

In Gleichung (5.8) wurde  $c^p$  an die Hamiltonfunktion  $H$  angekoppelt. Diese Methode wird als *indirektes Ankoppeln* bezeichnet. Es ist auch möglich,  $c$  direkt anzukoppeln. Beim *direkten Ankoppeln* ergeben sich äquivalente notwendige Bedingungen [122, 113]. Die adjungierten Variablen, die Multiplikatorfunktionen und die Sprungparameter lassen sich ineinander umrechnen [122, 139]. In [122] werden für dieses Vorgehen die notwendigen Bedingungen bei einer skalaren Zustandsbeschränkung der Ordnung  $p$ , einer skalaren Steuerung  $u \in \mathbb{R}$  und einem von  $\mathbf{x}$  unabhängigen Steuerbereich  $\Omega = \Omega(t)$  bewiesen. In [163] werden Probleme betrachtet, bei denen die skalare Steuervariable  $u \in \mathbb{R}$  linear in der Hamiltonfunktion  $H$  auftritt, wobei gilt:  $|u| \leq K = \text{const}$  und eine skalare Zustandsbeschränkung der Ordnung  $p$  auftritt. Die gleiche Problemklasse (Linearität in der Steuervariable  $u \in \mathbb{R}$ ) mit Zustandsbeschränkungen der Ordnung 1, mit nur einer Zustandsvariable  $x \in \mathbb{R}$ , einer Zustandsbeschränkung der Form  $\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2$ ;  $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$  und einer Steuerbeschränkung der Form  $\beta_1 \leq u \leq \beta_2$ ;  $\beta_1, \beta_2 = \text{const}$  wird in [194] behandelt.

Ein weiterer Ansatz, um Zustandsbeschränkungen zu behandeln, wird in [68, 69] betrachtet. Bei einer aktiven Zustandsbeschränkung wird nach einer Zustandsvariablen aufgelöst. Diese Zustandsvariable wird in den Differentialgleichungsnebenbedingungen – und eventuell in den Steuerbeschränkungen – durch den so gewonnen Ausdruck ersetzt. Insgesamt erhält man ein nicht zustandsbeschränktes Optimalsteuerungsproblem mit abschnittsweise definierten Differentialgleichungsnebenbedingungen und Steuerbeschränkungen mit nichtkonstanter Dimension des Zustandsvektors. Da ein Optimalsteuerungsproblem mit aktiver Zustandsbeschränkung ein differential-algebraisches System darstellt, werden so die Schwierigkeiten, die sich bei differential-algebraischen Systemen ergeben, vermieden.

**Bemerkung 5.9**

*Die Bedingungen (5.10) und (5.11) sind notwendige Bedingungen für ein lokales Minimum der Hamiltonfunktion. Dies entspricht dem PONTRYAGIN'schen Minimumprinzip. Dieses besagt, dass die optimale Steuerung  $\mathbf{u}^*$  die Hamiltonfunktion minimiert:*

$$\mathbf{u}^*(t) = \underset{\mathbf{u} \in \Omega(\mathbf{x}^*(t))}{\operatorname{argmin}} H^0(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) ,$$

wobei

$$\Omega(\mathbf{x}(t)) := \{\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq 0 ; c^p(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq 0, \text{ falls } c(\mathbf{x}(t)) = 0\}$$

den zulässigen Steuerbereich bezeichnet.

**Bemerkung 5.10**

Die Endzeit wird hier als fest vorausgesetzt. Bei Problemen mit freier Endzeit ist die Bedingung (5.27) durch

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial t_F} + H \right) \Big|_{t=t_F} = 0 \quad (5.28)$$

zu ersetzen. Durch Einführung einer zusätzlichen Zustandsvariablen  $x_{n+1} := t_F$  kann immer ein Problem mit fester Endzeit erreicht werden. Das Integrationsintervall kann somit immer auf das Intervall  $[0, 1]$  transformiert werden. Für die zusätzliche Zustandsvariable gilt die triviale Differentialgleichung

$$\dot{x}_{n+1} = 0. \quad (5.29)$$

Zusätzlich muss eine neue unabhängige Variable  $\tau \in [0, 1]$  eingeführt werden mit

$$\begin{aligned} \tau &:= \frac{t - t_0}{t_F - t_0} \quad \tau \in [0, 1], \\ \Rightarrow dt &= (t_F - t_0) d\tau. \end{aligned}$$

Beim Übergang von der alten unabhängigen Variablen  $t$  zur neuen unabhängigen Variablen  $\tau$  müssen somit die Differentialgleichungen mit dem Faktor  $t_F - t_0$  multipliziert werden und  $(\cdot)$  bedeutet dann  $\frac{d}{d\tau}$ . Die Bedingung (5.28) stellt eine Randbedingung für die Differentialgleichung (5.29) dar.

**Bemerkung 5.11**

Der Hamiltonfunktionstest (5.27) bzw. (5.28) ist einer der wichtigsten Tests bei der numerischen Durchführung.

### 5.3 Bang-Bang und singuläre Steuerungen

Tritt in der Hamiltonfunktion  $H$  die Steuerung nur linear auf, so kann die Steuerung nicht mit Gleichung (5.10) bestimmt werden, da  $H_{\mathbf{u}}$  nicht von  $\mathbf{u}$  abhängt. Die optimale Steuerung muss also auf eine andere Weise bestimmt werden. Man erhält eine *Bang-Bang-Steuerung* und es können *singuläre Steuerungen* auftreten. Für eine ausführliche Darstellung der Vorgehensweise singulärer Steuerungsprobleme sei auf [14, 45] verwiesen.

Um die Vorgehensweise zu erläutern, sei die Hamiltonfunktion linear in der Steuerung  $\mathbf{u}$  und habe die Form

$$\tilde{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) := \tilde{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) + \mathbf{u}(t)^T \cdot \tilde{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)).$$

Die gemischten Zustands- und Steuerbeschränkungen (5.4) seien für  $j = 1, \dots, m$  von der speziellen Form

$$\underline{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) \leq u_j \leq \bar{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) \quad \text{mit} \quad -\infty < \underline{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) < \bar{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) < \infty,$$

wobei die Funktionen  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}(t), t) := (\underline{\sigma}_1, \dots, \underline{\sigma}_m)$  und  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}(t), t) := (\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_m)$  stückweise  $C^2$ -Funktionen sind. Dann kann die beschränkte Steuerung  $\mathbf{u}$  auf eine offene

Menge transformiert werden. Dazu werden neue (unbeschränkte) Steuervariablen eingeführt:

$$u_j = \underline{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) + (\bar{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) - \underline{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t)) \cdot \sin^2 \zeta_j \quad , \quad j = 1, \dots, m . \quad (5.30)$$

Für die neuen Steuervariablen  $\zeta_j$  gilt:

$$-\infty < \zeta_j < \infty \quad , \quad j = 1, \dots, m .$$

Somit entfallen die gemischten Zustands- und Steuerbeschränkungen (5.4), ebenso wie die Multiplikatorfunktion  $\boldsymbol{\mu}$ .

Die gesuchte Steuerung  $\mathbf{u}$  erhält man aus:

$$\begin{aligned} H_{\zeta} &= 0 , \\ \Rightarrow H_{\zeta_j} &= \frac{\partial H}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \zeta_j} = H_{u_j} \cdot (\bar{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) - \underline{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t)) \cdot \sin 2\zeta_j \stackrel{!}{=} 0 . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Man definiert die sogenannte *Schaltfunktion*  $S_j := H_{u_j}$ . Die Bedingung (5.31) ist erfüllt, wenn für  $j = 1, \dots, m$  gilt:

$$\zeta_j = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad \stackrel{(5.30)}{\Rightarrow} \quad u_j = \underline{\sigma}_j \quad \text{oder} \quad (5.32)$$

$$\zeta_j = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad \stackrel{(5.30)}{\Rightarrow} \quad u_j = \bar{\sigma}_j \quad \text{oder} \quad (5.33)$$

$$S_j = 0 . \quad (5.34)$$

Sei zunächst der *nichtsinguläre Fall*  $H_{u_j} = S_j \neq 0$  betrachtet. Die Legendre-Clebsch-Bedingung (5.11) lautet

$$\begin{aligned} H_{\zeta\zeta} &\quad \text{positiv (semi-)definit} \\ \Rightarrow H_{\zeta_j\zeta_j} &= 2H_{u_j} (\bar{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) - \underline{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t)) \cos 2\zeta_j \stackrel{!}{\geq} 0 \quad j = 1, \dots, m . \end{aligned} \quad (5.35)$$

### Bemerkung 5.12

$H_{\zeta\zeta}$  lautet vollständig ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} H_{\zeta_j\zeta_j} &= 2H_{u_j} (\bar{\sigma}_j - \underline{\sigma}_j) \cos 2\zeta_j + H_{u_j u_j} [(\bar{\sigma}_j - \underline{\sigma}_j) \sin 2\zeta_j]^2 , \\ H_{\zeta_j\zeta_i} &= H_{u_j u_i} (\bar{\sigma}_j - \underline{\sigma}_j) \sin 2\zeta_j \cdot (\bar{\sigma}_i - \underline{\sigma}_i) \sin 2\zeta_i . \end{aligned}$$

Im nichtsingulären Fall gilt mit (5.32) und (5.33)  $\sin 2\zeta_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$  und somit  $H_{\zeta_j\zeta_i} = 0$  für  $i \neq j$ .  $H_{\zeta\zeta}$  ist also eine Diagonalmatrix mit den Einträgen wie in (5.35).

Wegen  $\underline{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) < \bar{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t)$  ist (5.35) genau dann erfüllt, wenn

$$H_{u_j} \cos 2\zeta_j \geq 0 .$$

Im nichtsingulären Fall  $H_{u_j} = S_j \neq 0$  ergibt sich somit für die Steuerung  $\zeta_j$  und damit auch für die gesuchte optimale Steuerung  $u_j^*$  ( $j = 1, \dots, m$ ):

$$\begin{aligned} \zeta_j &= \begin{cases} k\pi & \text{falls } H_{u_j} > 0 \\ \frac{\pi}{2} + k\pi & \text{falls } H_{u_j} < 0 \end{cases}, \\ u_j^* &= \begin{cases} \underline{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) & \text{falls } S_j > 0 \\ \bar{\sigma}_j(\mathbf{x}(t), t) & \text{falls } S_j < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Steuerung in (5.36) wird als *Bang-Bang-Steuerung* bezeichnet. Hat  $S_j$  eine isolierte Nullstelle bei  $t_i \in [0, t_f]$ , so ist  $t_i$  ein *Umschaltzeitpunkt* der Bang-Bang-Steuerung. Gilt  $S_j \equiv 0$  für  $t \in [t_1, t_2] \subset ]0, t_f[$ ,  $t_1 < t_2$ , so führt dies zu einer *singulären Steuerung*.

Zuerst wird die *Ordnung einer singulären Steuerung* eingeführt. Im folgenden soll dabei, wegen der einfacheren und übersichtlicheren Notation, eine skalare Steuerung  $u \in \mathbb{R}$  angenommen werden.

**Definition 5.13 (Ordnung einer singulären Steuerung)**

Sei  $H_u =: S \equiv 0$  für  $t \in [t_1, t_2]$ ,  $t_1 < t_2$ . Sei  $\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}S$  die erste totale Ableitung nach der Zeit, in der  $u$  explizit auftritt. Dann heißt  $q$  die Ordnung der singulären Steuerung. Tritt in keiner Ableitung  $u$  explizit auf, so handelt es sich um eine singuläre Steuerung mit Ordnung  $\infty$ .

**Bemerkung 5.14**

Wie man in Definition 5.13 erkennt und in [134] gezeigt wurde, bedarf es immer einer geraden Anzahl von zeitlichen Ableitungen der Schaltfunktion.

**Bemerkung 5.15**

In der Literatur findet man verschiedene Definitionen, was zu einiger Verwirrung führen kann. Manche Autoren bezeichnen zum Beispiel  $2q$  als Ordnung. In [153] sind die verschiedenen Definitionen gegenübergestellt und auf ihre Unzulänglichkeit hin überprüft. Die oben gewählte Definition wird in [153] als *intrinsische Ordnung* bezeichnet. In [134, 162, 196] wurde obige Definition gewählt.

Da  $S$  im Intervall  $[t_1, t_2]$  unendlich glatt ist, sind auch sämtliche Ableitungen identisch Null und es kann mittels der Gleichung

$$\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}S =: \hat{S}(\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = 0 \quad t \in [t_1, t_2] \quad (5.37)$$

die singuläre Steuerung berechnet werden, indem  $\hat{S} = 0$  nach  $u$  (lokal) für jeden Zeitpunkt  $t \in [t_1, t_2]$  aufgelöst wird. Dabei muss die *verallgemeinerte Legendre-Clebsch-Bedingung*

$$(-1)^q \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \hat{S}(\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) \right) \right] \geq 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

erfüllt sein [134].

**Bemerkung 5.16**

Die Vorgehensweise in [68, 69], eine aktive Zustandsbeschränkung in die Differentialgleichungen und eventuell in die Steuerbechränkungen einzusetzen, ist auch auf singuläre Steuerungen übertragbar und wurde bereits in [55] erfolgreich angewendet.

## 5.4 Numerische Lösungsverfahren

Die Lösung von Optimalsteuerungsaufgaben ist in der Praxis nur mit numerischen Verfahren möglich, da die Dynamik durch Gleichungssysteme hoher Dimension und Nichtlinearität beschrieben wird und die Lösung einer Vielzahl von Beschränkungen genügen muss.

Zum Lösen eines Optimalsteuerungsproblems gibt es verschiedene Ansätze, von denen die wichtigsten vorgestellt werden. Für einen Überblick sei auf [53, 251, 191, 190, 26, 205], sowie auf die darin angegebenen Original-Literaturstellen verwiesen.

### 5.4.1 Überblick über numerische Lösungsverfahren

**Direkte Verfahren.** Bei *direkten* Verfahren wird durch Diskretisierung entweder nur der Steuervariablen oder der Steuer- und auch der Zustandsvariablen das unendlich-dimensionale Optimalsteuerungsproblem auf ein endlich-dimensionales nichtlineares Optimierungsproblem transformiert und es werden Methoden der nichtlinearen Optimierung angewendet. Diese Verfahrensklasse ist unter anderem dadurch gekennzeichnet, dass vom Benutzer keine Informationen über adjungierte Variablen oder das Minimumprinzip bereitzustellen sind. Einige direkte Verfahren sind in der Lage, zusätzlich Schätzungen der adjungierten Variablen zu liefern [46, 250, 251]. Das nichtlineare Optimierungsproblem wird mit Standardalgorithmen wie SQP-Verfahren [107, 108, 216, 217] oder Innere-Punkt-Methoden [246, 257, 258] gelöst. Ein Vergleich von Innere-Punkt-Methoden und SPQ Methoden bei optimalen Steuerungsproblemen ist in [28] zu finden.

In der Klasse der direkten Verfahren unterscheidet man:

- *direkte Schießverfahren*, die die Steuerungen diskretisieren und die Bewegungsdifferentialgleichungen durch numerische Integration erfüllen. Algorithmen, die auf dem direkten Schießverfahren basieren, sind zum Beispiel MUSCOD [32], PROMIS [125], TOMP [137], PAREST [115] oder NUDOCCCS [46].
- *direkte Kollokationsverfahren*, die auch die Zustandsvariablen diskretisieren und zur Erfüllung der Zustandsdifferentialgleichungen Kollokation verwenden. Direkte Kollokationsverfahren sind zum Beispiel DIRCOL [251], SOCS [29] oder OTIS [112].

Eine Übersicht über direkte Verfahren bieten unter anderem [25, 27, 107].

**Indirekte Verfahren.** Als *indirekt* werden alle Verfahren bezeichnet, die in irgendeiner Form *explizit* auf die notwendigen Bedingungen der Optimalsteuerungstheorie, denen die optimale Lösung genügen muss – wie in Abschnitt 5.2 beschrieben – zurückgreifen. Diese Verfahren verwenden die adjungierten Variablen, die Hamiltonfunktion, sowie das Minimumprinzip. Das heißt, für die indirekten Methoden sind vom Benutzer entsprechende Informationen für jedes Optimalsteuerungsproblem bereitzustellen.

Bei den *Gradientenverfahren* wird die Hamiltonfunktion unter den Nebenbedingungen eines Randwertproblems durch iterative Verbesserung der Steuerung minimiert. Die Bewegungsgleichungen werden dabei durch Vorwärtsintegration, anschließend die adjungierten Differentialgleichungen durch Rückwärtsintegration gelöst [45, 170, 63, 259].

Andere indirekte Verfahren lösen ein Mehrpunkt-Randwertproblem für die Zustands- und adjungierten Differentialgleichungen. Dabei werden die Steuervariablen und Multiplikatorfunktionen aus den Optimalitätsbedingungen und den aktiven Steuer- und Zustandsbeschränkungen bestimmt. Im Falle linearer Steuerungsprobleme sind die Steuerungen gemäß Abschnitt 5.3 zu bestimmen. Nicht optimale Lösungen werden a posteriori durch Verifizierung der Vorzeichenbedingungen eliminiert. Zum Lösen des Mehrpunkt-Randwertproblems wird die *Mehrzielmethode* [49] verwendet. Es gibt eine Vielzahl erfolgreich eingesetzter Algorithmen, die auf der Mehrzielmethode basieren, wie BOUNDSOL, OPTSOL [49], DLOPTR [78, 79], BOUNDSCO [184], VBDSO [135], sowie MUMUS [117] und dessen Weiterentwicklung JANUS [53].

**Vergleich.** Der größte Vorteil der direkten Verfahren liegt darin, dass sie keine Informationen über adjungierte Variablen oder das Maximumprinzip benötigen. Dadurch erfordern sie weniger Vorkenntnisse und weniger Vorarbeiten, als indirekte Verfahren. Durch die Diskretisierung der Steuer- bzw. der Steuer- und Zustandsvariablen erzielt man jedoch eine geringere Genauigkeit. Bei indirekten Verfahren lassen sich dagegen durch die Verifikation der notwendigen Bedingungen Lösungen mit sehr hoher Genauigkeit erzielen. Allerdings ist bei indirekten Verfahren Vorwissen über die Optimalsteuerungstheorie notwendig. Zur Formulierung des Mehrpunkt-Randwertproblems ist zudem die Kenntnis der Schaltstruktur erforderlich. Zusätzlich werden gute Startwerte für die adjungierten Variablen benötigt, um eine Konvergenz des Verfahrens zu erzielen. Diese Probleme können aber durch *Homotopietechniken* [49, 53, 80, 239] überwunden werden. In [251] und [252] wird vorgeschlagen, mittels des direkten Verfahrens DIRCOL die Schaltstruktur und Startwerte für die adjungierten Variablen zu ermitteln. Diese Werte stellen gute Startlösungen für indirekte Verfahren dar. Damit wird der größte Vorteil der direkten Methoden – keine Information über adjungierte Variablen und Schaltstruktur nötig – mit dem der indirekten Methoden – hohe Genauigkeit – kombiniert. Der erfolgreiche Einsatz dieser *hybriden* Methode wird in [67], [251] und [252] demonstriert.

#### 5.4.2 Mehrzielmethode

Sowohl direkte (direkte Schießverfahren) als auch indirekte Verfahren basieren auf der Mehrzielmethode, welche ein Verfahren zur Lösung von Randwertproblemen ist. Falls (5.10) eindeutig lösbar ist, so kann man  $\mathbf{u}^*$  in das Differentialgleichungssystem einsetzen und man erhält:

$$\dot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, t), t) \quad (5.38)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(t_F), t_F) = 0 \quad (5.39)$$

mit  $\mathbf{y}^T := (\mathbf{x}^T, \boldsymbol{\lambda}^T)$  und  $\tilde{\mathbf{f}}^T := (\mathbf{f}^T, -H_{\mathbf{x}}^T)$  aus Abschnitt 5.2. Die Randwerte und eventuelle Transversalitätsbedingungen werden durch  $\mathbf{r}$  beschrieben. An Schaltpunkten  $t_i$  müssen Schalt- und Sprungbedingungen (vgl. Abschnitt 5.2) berücksichtigt werden:

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{y}(t_i^+), \mathbf{y}(t_i^-, t_i)) = \mathbf{0} \quad , \quad i = 1, \dots, n_s .$$

Zusätzlich wird bei der Mehrzielmethode [49, 91, 239] das Intervall  $[t_0, t_F]$  durch geeignete Stützpunkte  $\bar{t}_k$  ( $k = 1, \dots, v - 1$ ) in  $v$  Teilintervalle

$$\begin{aligned} [t_0, \bar{t}_1[ , [\bar{t}_1, \bar{t}_2[ , \dots , [\bar{t}_{v-1}, t_F] \quad \text{mit} \\ t_0 < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_{v-1} < t_F \end{aligned}$$

zerlegt. An diesen Stützpunkten wird als Übergangsbedingung die Stetigkeit von  $\mathbf{y}$  gefordert. Rand-, Schalt- und Stützpunkte werden zu einer Menge verallgemeinerter Schaltpunkte zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \{\tau_1, \dots, \tau_{\bar{N}}\} &:= \{t_0, t_F\} \cup \{t_1, \dots, t_{n_s}\} \cup \{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_v\} , \\ t_0 = \tau_1 &< \tau_2 < \dots < \tau_{\bar{N}} = t_F . \end{aligned}$$

Damit erhält man das erweiterte Mehrpunkt-Randwertproblem

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}(t), t) = \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{y}(t), t) \quad \text{für } \tau_i \stackrel{<}{=} t \stackrel{<}{=} \tau_{i+1}, \quad i = 1, \dots, \bar{N} - 1, \quad (5.40)$$

$$\bar{\mathbf{s}}_i(\mathbf{y}(\tau_i^+), \mathbf{y}(\tau_i^-), \tau_i) = \mathbf{0} \quad i = 2, \dots, \bar{N} - 1, \quad (5.41)$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}(\tau_1^+), \mathbf{y}(\tau_{\bar{N}}), \tau_{\bar{N}}) = \mathbf{0} . \quad (5.42)$$

Der Anfangspunkt  $\tau_1$  wird als fest angenommen. Die restlichen Schaltpunkte  $\tau_i$  ( $i = 2, \dots, \bar{N}$ ), sowie die Werte  $\mathbf{y}_i^+ := \mathbf{y}(\tau_i^+)$  ( $i = 1, \dots, \bar{N} - 1$ ) des Randwertproblems (5.40) – (5.42) werden an den Stellen  $\tau_i$  *gleichzeitig* iterativ berechnet. Sei dazu  $\mathbf{y}(t; \tau_i, \mathbf{y}_i^+)$  für  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$  die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y}(\tau_i) = \mathbf{y}_i^+$$

In Abbildung 5.1 sind die stückweise definierten Funktionen  $\mathbf{y}(t; \tau_i, \mathbf{y}_i^+)$  für den ein-dimensionalen Fall dargestellt. Insgesamt stellen (5.41) und (5.42) ein nichtlineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) := \begin{pmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{y}_1^+, \mathbf{y}(\tau_{\bar{N}}; \tau_{\bar{N}-1}, \mathbf{y}_{\bar{N}-1}^+), \tau_{\bar{N}}) \\ \bar{\mathbf{s}}_2(\mathbf{y}_2^+, \mathbf{y}(\tau_2; \tau_1, \mathbf{y}_1^+), \tau_2) \\ \bar{\mathbf{s}}_3(\mathbf{y}_3^+, \mathbf{y}(\tau_3; \tau_2, \mathbf{y}_2^+), \tau_3) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{s}}_{\bar{N}-1}(\mathbf{y}_{\bar{N}-1}^+, \mathbf{y}(\tau_{\bar{N}-1}; \tau_{\bar{N}-2}, \mathbf{y}_{\bar{N}-2}^+), \tau_{\bar{N}-1}) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} := \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^+ \\ \tau_{\bar{N}} \\ \mathbf{y}_2^+ \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{\bar{N}-1}^+ \\ \tau_{\bar{N}-1} \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

dar. Das Gleichungssystem (5.43) kann mit Hilfe des Newton-Verfahrens [80, 238] iterativ gelöst werden, wobei noch ein Startwert  $\mathbf{z}^{(0)}$  benötigt wird. Um den Konvergenzbereich zu vergrößern, wird das modifizierte Newton-Verfahren [79] mit der Iterationsvorschrift

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - \bar{\lambda} \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

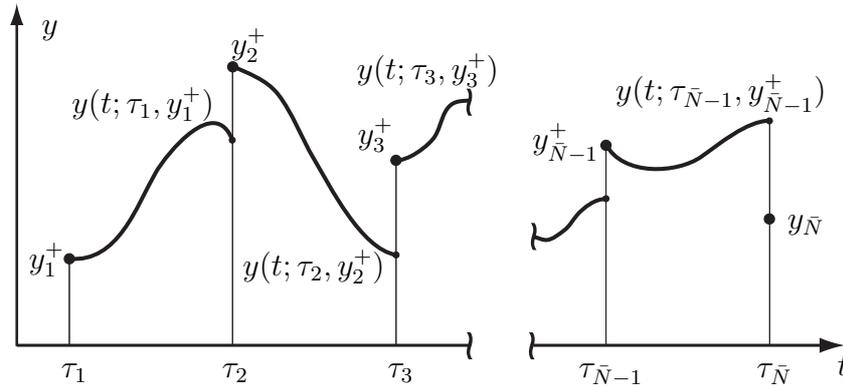


Abbildung 5.1: Mehrzielmethode im eindimensionalen Fall.

verwendet.  $\bar{\lambda}$  ist ein Relaxationsfaktor mit  $0 < \bar{\lambda} \leq 1$ ,  $\mathbf{DF}$  stellt eine numerische Approximation der Jacobimatrix dar, das heißt  $\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)}) \approx \mathbf{DF}(\mathbf{z}^{(k)}) := \partial\mathbf{F}(\mathbf{z})/\partial\mathbf{z}|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}^{(k)}}$ . In [239] wird empfohlen, die Matrix  $\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{F}$  durch ein *Broyden-Rang-1-Verfahren* anzupassen. Eine modifizierte Version der Broydenmethode, welche die Struktur von  $\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{F}$  nicht zerstört, wird in [219] angegeben. In JANUS [53] wird ein Iterationsschritt akzeptiert, wenn mindestens einer der folgenden Tests erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k+1)})\| &\leq \|\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)})\|, \\ \left\| \left( \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)}) \right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k+1)}) \right\| &\leq \left\| \left( \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)}) \right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)}) \right\|. \end{aligned}$$

Zusätzlich wird gefordert:

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k+1)})\| < \|\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k-2)})\| \quad \wedge \quad (5.44)$$

$$\left\| \left( \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)}) \right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k-2)}) \right\| < \left\| \left( \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k)}) \right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{z}^{(k-2)}) \right\|. \quad (5.45)$$

Die Bedingungen (5.44) und (5.45) stabilisieren und beschleunigen die Iteration erheblich [53]. Eine detailliertere Beschreibung der Mehrzielmethode findet man in [49, 53, 239].

## 5.5 Optimale Steuerung in der Robotik

### 5.5.1 Überblick bei Punkt-zu-Punkt Bewegungen mit indirekten Verfahren

Auf dem Gebiet der optimalen Steuerung in der Robotik gibt es eine Vielzahl von Veröffentlichungen. Im Folgenden soll ein Überblick der Literatur mit indirekten Verfahren und bei Punkt-zu-Punkt Bewegungen gegeben werden. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Auf Fragestellungen wie optimale Steuerung entlang einer vorgegebenen Bahn oder Optimierung redundanter Roboter soll an dieser Stelle verzichtet werden – der interessierte Leser sei auf [42] und die darin angegebenen Literaturstellen verwiesen. Einen Überblick über optimale Steuerung in der Robotik

mit direkten Verfahren bieten zum Beispiel [61, 235]. Ein ausführlicher Überblick über optimale Steuerung in der Robotik findet sich in [56].

Die Existenz einer Punkt-zu-Punkt Bewegung für zeitoptimale Steuerungsprobleme eines zweigelenkigen, planaren Roboters ohne Zustandsbeschränkungen wird in [4] gezeigt. Diese Art von Robotern werden auch in [5, 62, 101, 168, 185, 193, 259, 260] betrachtet. In [5] wird ein auf dem Pontryaginschen Maximumprinzip basierender semi-analytischer Ansatz gewählt. Für ein vereinfachtes, entkoppeltes System wird in [62] eine Lösung mit Bang-Bang Struktur durch Kombination von analytischen und numerischen Methoden erzielt. Die so gewonnene Steuerung ist allerdings für das ursprüngliche System suboptimal. Zeitoptimale Lösungen mit Steuerbeschränkungen für eine Bewegung mit vorgegebenen Anfangs- und Endstellungen sind in [259] zu finden. Die Lösung wird mit einer Erweiterung des in [45] angegebenen Gradientenverfahrens berechnet. Eine reine Bang-Bang Steuerung ist bei diesem Ansatz nicht möglich. Eine Weiterentwicklung des in [259] angegebenen Verfahrens findet sich in [168]. Dort wird eine Methode des steilsten Abstiegs zusammen mit einem Schaltungspunkt-Optimierungsprogramm verwendet, um die exakte Bang-Bang Lösung zu berechnen. Singuläre Steuerungen werden durch hochfrequente Bang-Bang Steuerungen angenähert. Ein ähnliches Problem, bei dem auch singuläre Steuerungen auftreten, wird in [185] mit der Mehrzielmethode gelöst. Die Bewegungsgleichungen, die adjungierten Differentialgleichungen und die Gleichungen für singuläre Steuerungen werden analytisch bereitgestellt. In [101] wird die Struktur der optimalen Steuerung bei einer zeitoptimalen Bewegung mit Steuerbeschränkung, aber ohne Zustandsbeschränkung analysiert. Zum Lösen des optimalen Steuerungsproblems wurden sowohl eine Parameteroptimierungsmethode und ein Schießverfahren verwendet. Die Parameteroptimierung wurde benutzt, um Startwerte für das Schießverfahren zu erhalten. Als Lösung der Steuerungen treten sowohl Bang-Bang, als auch singuläre Steuerungen auf. Mit Hilfe eines Strafterms wird die Einhaltung der Endposition gewährleistet. In [260] wird ein Zweipunkt Randwertproblem gelöst. Dazu wird die sogenannte *minimizing-boundary-condition* Methode [66] benutzt, ein modifiziertes Schießverfahren, um den Konvergenzbereich zu vergrößern. Für die Schaltpunkte der Bang-Bang Steuerung werden die Nullstellen der Schaltfunktionen berechnet. Für einen zweigelenkigen Roboter ohne Beschränkungen wird in [193] die optimale Bewegung für verschiedene Zielfunktionale berechnet. Es wird ein gemischtes zeit-energieminimales Funktional mit verschiedenen Gewichtungsfaktoren optimiert. Das resultierende Zweipunkt Randwertproblem wird mittels der Mehrzielmethode gelöst. In [218] wird ebenfalls ein zweigelenkiger planarer Roboter ohne Zustandsbeschränkungen betrachtet. Es wird eine zeitoptimale Lösung berechnet, wobei die Schaltfunktionen, Abschnitte mit singulären Steuerungen und die adjungierten Differentialgleichungen symbolisch berechnet werden und die Bewegungsgleichungen in expliziter Form gegeben sind.

Für einen dreigelenkigen Roboter wird in [126] mit vorgegebener Bang-Bang Struktur die zeitoptimale Lösung berechnet. Da nur die Schaltpunkte optimiert werden, reduziert sich das Problem zu einem Minimierungsproblem mit Beschränkungen endlicher Dimension.

In [20, 21, 22, 23] wird die optimale Lösung mit einem Schießverfahren berechnet, wobei

mit einem Gradientenverfahren [45] zunächst Schätzungen für die Zustandsvariablen berechnet werden. Als zu minimierendes Funktional dient ein zeit-energieoptimales, wobei die Fälle „reine Zeitoptimalität“ und „reine Energieoptimalität“ ausgeschlossen werden, erstere um Bang-Bang Steuerungen zu vermeiden. Als Beispiele werden optimale Lösungen für Roboter mit zwei und drei Freiheitsgraden berechnet. In [20] sind nur Steuerbeschränkungen zugelassen, in [22] werden zusätzlich noch gemischte Zustands- und Steuerbeschränkungen berücksichtigt.

Für einen dreigelenkigen Roboter werden in [253] zeitoptimale und energieoptimale Lösungen unter Berücksichtigung von Zustandsbeschränkungen erster Ordnung berechnet. Das optimale Steuerungsproblem wird in ein Randwertproblem transformiert und mit der Mehrzielmethode gelöst. Startwerte werden mit dem direkten Kollokationsverfahren DIRCOL [250, 251] erzeugt. Die Bewegungsgleichungen sind aus [187] entnommen und explizit gegeben. Die für die adjungierten Differentialgleichungen benötigten Ableitungen werden symbolisch mit MAPLE berechnet, wofür ca. 3350 Programmzeilen benötigt werden.

Kooperierende Roboter und Greifvorgänge werden in [75, 76, 77, 269, 270, 271] untersucht. In [75, 76, 269] werden auch Ungleichungsnebenbedingungen betrachtet. Diese werden durch Einführung von Schlupfvariablen in Gleichungsnebenbedingungen umgeformt [121, 249]. [77, 269, 272] beschäftigen sich mit kooperierenden Robotern, die ein Objekt halten, [75, 76] auch mit mobilen Robotern. In [75, 77, 272, 269] geht in das zu minimierende Funktional die Ableitung der Antriebsmomente ein. Laut [247] minimiert eine menschliche Punkt-zu-Punkt Bewegung das Integral über die Norm der zeitlichen Änderung der Antriebsmomente. Die Ableitungen der Antriebsmomente werden als neue Steuergrößen definiert. In [272] wird neben dem Integral über die Norm der zeitlichen Änderung auch das Integral über die Norm der Antriebsmomente und das Integral über die Gelenkwinkel betrachtet. Letztere führt auf eine analytische Lösung. Das optimale Steuerungsproblem wird mit einer finite Differenzenmethode gelöst. In [75, 77, 269, 270] wird das Optimalsteuerungsproblem durch Ankoppeln der Nebenbedingungen an die Hamiltonfunktion in ein freies Optimalsteuerungsproblem transformiert. Die neuen Zustandsvariablen des nun unbeschränkten Problems und deren Ableitungen enthalten die ursprünglichen Zustandsvariablen, die Steuerungen und die adjungierten Variablen, im Falle von Ungleichungsnebenbedingungen auch die Schlupfvariablen [75, 269]. Das Zeitintervall wird äquidistant unterteilt und die Euler-Lagrange-Gleichungen des neuen Zielfunktionals werden an diesen Punkten ausgewertet. Die unbekanntenen Zustandsvariablen werden durch stückweise lineare Funktionen mit beschränktem Träger, die Ableitungen werden durch finite Differenzen approximiert [109]. Das resultierende nichtlineare Gleichungssystem wird mit dem Newton-Raphson Verfahren gelöst. Glatte Lösungen, welche unabhängig von der Koordinatenwahl im Raum sind, werden in [271] erzeugt. Dabei werden Werkzeuge der Differentialgeometrie und der Theorie der Lie-Gruppen verwendet. Notwendige Bedingungen werden hergeleitet und das resultierende Zwei-Punkt-Randwertproblem wird entweder analytisch oder numerisch mit einer finiten Differenzenmethode berechnet.

In [2] findet sich ein Beispiel für einen viergelenkigen Roboter. Die Steuerungen gehen quadratisch in das zu minimierende Funktional ein, Steuer- oder Zustandsbe-

schränkungen werden nicht berücksichtigt. Die numerische Lösung wird mittels einer Mehrzielmethode berechnet. In [3] wird sowohl ein zweigelenkiger, als auch ein viergelenkiger Roboter betrachtet, wobei Design-Parameter des Roboters mitoptimiert werden. Die dortige Methode setzt voraus, dass alle Steuerungen ins Zielfunktional eingehen. Die Bewegungsdifferentialgleichungen werden in das Zielfunktional eingesetzt und man erhält ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen. Dadurch werden keine Lagrange Funktionen benötigt. Die Zustandsvariablen werden durch einen modalen Ansatz approximiert und das resultierende Randwertproblem wird numerisch mit einer gewichteten Residuen-Methode und Kollokation gelöst.

Optimale Punkt-zu-Punkt Bewegungen mit Hindernissen im Arbeitsraum werden in [92] für energieoptimale und in [93] für zeitoptimale Bewegungen betrachtet. Die Idee des Gradientenverfahrens in [45, 259] wird auf Probleme mit Zustandsbeschränkungen erweitert. In jedem Iterationsschritt wird ein lineares Optimierungsproblem gelöst. Eine stückweise lineare Steuerfunktion, welche die Zustandsbeschränkung verletzen darf, dient als Ausgangslösung, welche dann durch Hinzunahme einer stückweise konstanten Steuerfunktion verbessert wird. Die Methode wird an Hand eines planaren Roboters mit drei Freiheitsgraden demonstriert und es kann gezeigt werden, dass damit bessere Ergebnisse erzielt werden können als mit Penalty Methoden.

Greifvorgänge von bewegten Objekten finden sich in [131]. Ein Objekt auf einem Fließband wird von einem planaren dreigelenkigen Roboter aus der Bewegung gegriffen. Die Gesamtbewegung wird in zwei Teilprobleme aufgeteilt. Die *Annäherungsphase* entspricht einer Bewegung mit bekannter Ausgangskonfiguration und unbekannter Greifkonfiguration. Zum Zeitpunkt des Greifvorgangs wird die Greifkonfiguration zur Ausgangskonfiguration der *Abnehmphase*, bei der das Objekt durch den Roboter zu einer bekannten Endkonfiguration befördert wird. Der Zeitpunkt des Greifvorgangs und die Greifbedingungen sind nur teilweise definiert: die Winkelgeschwindigkeit und die lineare Geschwindigkeit von Objekt und Greifer müssen übereinstimmen. Die Annäherungsphase führt auf eine Punkt-zu-Punkt Bewegung mit beschränktem Endzustand und freier Endzeit. Es wird ein gemischtes zeit-energieoptimales Zielfunktional betrachtet, wo alle Steuerungen quadratisch eingehen. Zustandsbeschränkungen werden mittels einer Penalty Methode [130] behandelt. Notwendige Bedingungen für die Endkonfiguration der Annäherungsphase werden hergeleitet und das Randwertproblem wird durch einer Kombination eines Schießverfahrens [45] und einer finiten Differenzenmethode gelöst, wobei Homotopietechniken [49, 239] zum Einsatz kommen.

Zweibeinige Laufmaschinen werden in [19, 24, 64, 201] untersucht. In [64] wird eine fünfgelenkige, in [19, 24, 201] eine siebengelenkige Laufmaschine betrachtet. In [19, 64, 201] wird ein energieoptimales Funktional, in das die Steuerungen quadratisch eingehen, in [24] ein gemischtes zeit-energieoptimales Funktional, wobei der zeitoptimale Fall ausgeschlossen wird, minimiert. Zustandsbeschränkungen werden mit einer Penalty Methode an das Funktional angekoppelt [19, 24, 64, 201]. Numerische Lösungen werden durch Schießverfahren [45] und finite Differenzenmethode erzielt. Geschlossene kinematische Ketten [64] werden freigeschnitten und Schließbedingungen berücksichtigt, die mit einem Strafterm an das Funktional angekoppelt werden. Dadurch werden auch Schwierigkeiten, die sich bei den sich sonst ergebenden differential-

algebraischen Gleichungen auftreten, vermieden. Beschränkungen an die Ableitung der Steuerung [24] werden, wie in [195] vorgeschlagen, berücksichtigt, indem die Ableitung als neue Steuerung definiert wird. Weitere numerische Beispiele in [24] sind ein zweigelenkiger planarer Roboter und ein Roboter mit fünf Freiheitsgraden.

### 5.5.2 Optimalsteuerungsproblem in der Robotik

Bei Optimalsteuerungsproblemen in der Robotik nehmen die Differentialgleichungsnebenbedingungen eine zentrale Rolle ein. Aufgrund der Geometrie von Robotern kann immer ein Satz von Minimalkoordinaten angegeben werden. Das heißt, die Bewegungsgleichungen können in der Form (2.1) angegeben werden. Im Falle rein rotatorischer Gelenke stellen die Gelenkwinkel aus der Denavit-Hartenberg-Vereinbarung einen Satz von Minimalkoordinaten dar:  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\Theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T$ . Bei Optimalsteuerungsproblemen in der Robotik kann die spezielle Struktur der Bewegungsgleichungen ausgenutzt werden, um eine effiziente Berechnung der Lösung zu ermöglichen.

Das Vorgehen soll im Folgenden an einem Roboter mit rein rotatorischen Gelenken erläutert werden, es lässt sich problemlos auch auf Schubgelenke anwenden [57]. Die Bewegungsgleichungen für einen Roboter mit  $N$  rotatorischen Gelenken lauten:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}(t)) \cdot \ddot{\boldsymbol{\Theta}}(t) = \mathbf{T}(t) - \mathbf{h}(\boldsymbol{\Theta}(t), \dot{\boldsymbol{\Theta}}(t)) \quad (5.46)$$

mit der symmetrisch positiv definiten Massenmatrix  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\Theta}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  den Coriolis-, Zentrifugal- und Gravitationskräften  $\mathbf{h}(\boldsymbol{\Theta}, \dot{\boldsymbol{\Theta}}) \in \mathbb{R}^N$ , sowie den Antriebsmomenten  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^N$ , wie sie in Kapitel 2 angegeben wurden.

Fasst man die Gelenkwinkel  $\boldsymbol{\Theta}$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$  zum Vektor der Zustandsgrößen und die Antriebsmomente  $\mathbf{T}$  zum Vektor der Steuerungen zusammen, also

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Theta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad \mathbf{u}(t) := \mathbf{T} \in \mathbb{R}^N,$$

so lautet ein Optimalsteuerungsproblem bei einer Punkt-zu-Punkt Bewegung in der Robotik:

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_F} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \rightarrow \min!, \quad (5.47)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^N & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \\ \mathbf{u}(t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -H_{\mathbf{x}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} L - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}(t), \quad (5.49)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) := \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}(t_F) - \mathbf{x}_F \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (5.50)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{max} \\ \mathbf{u}_{min} - \mathbf{u} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}, \quad (5.51)$$

mit  $\mathbf{E}^N = \text{diag}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , den adjungierten Variablen  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{2N}$ , den Anfangswerten  $\mathbf{x}_0^T = (\boldsymbol{\Theta}(t_0)^T, \dot{\boldsymbol{\Theta}}(t_0)^T)$ , den Endwerten  $\mathbf{x}_F^T = (\boldsymbol{\Theta}(t_F)^T, \dot{\boldsymbol{\Theta}}(t_F)^T)$ , den

minimalen Antriebsmomenten  $\mathbf{u}_{min} := (u_{min,1}, \dots, u_{min,N})^T$ , den maximalen Antriebsmomenten  $\mathbf{u}_{max} := (u_{max,1}, \dots, u_{max,N})^T$ , sowie der Hamiltonfunktion

$$H := L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}.$$

Das Zielfunktional ist je nach Aufgabenstellung zu wählen. Man wählt häufig:

$$L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) := 1 \quad (\text{zeitoptimal}), \quad (5.52)$$

$$\text{oder} \quad L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) := \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}_{max}\|^2} \quad (\text{energieoptimal}). \quad (5.53)$$

Bei Bedarf können weitere gemischte Steuer- und Zustandsbeschränkungen, sowie reine Zustandsbeschränkungen hinzugefügt werden.

Treten nur einfache Steuerbeschränkungen wie in (5.51) auf, müssen die zugehörigen Lagrangemultiplikatoren bei Zielfunktionalen mit  $L$  gemäß (5.52) oder (5.53) (oder einer Kombination aus beiden) nicht explizit berechnet werden, denn es gilt

**Lemma 5.17**

Für die Lagrangemultiplikatoren  $\mu_i$  von Steuerbeschränkungen der Form (5.51) und  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  gemäß (5.52) bzw. (5.53) gilt stets

$$\mu_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N.$$

*Beweis.* Betrachtet man die erweiterte Hamiltonfunktion  $\tilde{H}$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &:= L + \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mu}_1(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{max}) + \boldsymbol{\mu}_2(\mathbf{u}_{min} - \mathbf{u}), \\ \tilde{H}_{u_i} &= \frac{\partial L}{\partial u_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \dot{\mathbf{x}} \right) + \mu_{1,i} - \mu_{2,i}. \end{aligned}$$

Da die Steuerungen in den Bewegungsdifferentialgleichungen (5.48) nur linear auftreten, hängt  $\frac{\partial}{\partial u_i} \dot{\mathbf{x}}$  nicht explizit von  $u_i$  ab. Aufgrund der speziellen Form des betrachteten

Zielfunktional sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder hängt  $\frac{\partial L}{\partial u_i}$  nicht explizit von  $u_i$  ab ( $u_i$  ist nur linear im Zielfunktional), oder es hängt *nur* von  $u_i$  ab, und keiner weiteren Steuerung  $u_j \neq u_i$ . Für die Steuerungen, die nur linear in der Hamiltonfunktion auftreten, ist wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, vorzugehen.

Im Folgenden wird angenommen, dass  $\frac{\partial L}{\partial u_i}$  für mindestens ein  $i$  explizit von  $u_i$  abhängt.

Die Steuerung  $u_i$  wird dann aus  $H_{u_i} = 0$  ermittelt. Da  $\frac{\partial L}{\partial u_i}$  explizit von  $u_i$  abhängt, gilt  $\frac{\partial^2 L}{\partial u_i^2} \neq 0$  und mit der Legendre-Clebsch-Bedingung sogar  $\frac{\partial^2 L}{\partial u_i^2} > 0$ . Der Satz über implizite Funktionen gewährleistet die Auflösbarkeit nach  $u_i$ .

Sei zunächst angenommen, die Steuerung  $u_i$  befinde sich im Inneren des zulässigen Steuerbereichs. Dann gilt  $\mu_{1,i} = \mu_{2,i} = 0$  und  $u_i$  berechnet sich als Nullstelle von

$$\hat{S}_i(u) := \frac{\partial L}{\partial u_i} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \dot{\mathbf{x}} \right) = 0.$$

Da  $\frac{\partial \hat{S}_i}{\partial u_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial u_i^2} > 0$ , gilt:  $\hat{S}_i(\hat{u}) \leq \hat{S}_i(\bar{u})$  für  $\hat{u} \leq \bar{u}$ .

Wird nun die Beschränkung  $u_i - u_{max,i} \leq 0$  verletzt, so liefert  $\hat{S}_i(u) = 0$  ein  $\bar{u}$  mit  $\bar{u} \geq u_{max,i}$ . In diesem Fall gilt  $u_i = u_{max,i}$  und  $\mu_{1,i}$  berechnet sich aus

$$\hat{S}_i(u_{max,i}) + \mu_{1,i} = 0.$$

Wegen  $\bar{u} \geq u_{max,i}$  gilt  $\hat{S}_i(u_{max,i}) \leq \hat{S}_i(\bar{u}) = 0$  und somit  $\mu_{1,i} \geq 0$ .

Wird dagegen die Bechränkung  $u_{min,i} - u_i \leq 0$  verletzt, so liefert  $\hat{S}_i(u) = 0$  ein  $\bar{u}$  mit  $\bar{u} \leq u_{min,i}$  und  $\mu_{2,i}$  berechnet sich aus

$$\hat{S}_i(u_{min,i}) - \mu_{2,i} = 0.$$

Wegen  $\bar{u} \leq u_{min,i}$ , gilt  $\hat{S}_i(u_{min,i}) \geq \hat{S}_i(\bar{u}) = 0$  und somit gilt auch  $\mu_{2,i} \geq 0$ . ◇

Die Steuerungen berechnen sich aus der Optimalitätsbedingung

$$\mathbf{0} = H_{\mathbf{u}} = L_{\mathbf{u}} + \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}$$

und der Legendre-Clebsch-Bedingung ( $H_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$  positiv semidefinit). Für  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  wie in (5.53) gilt

$$L_{\mathbf{u}} = \frac{2}{\|\mathbf{u}_{max}\|^2} \mathbf{u}, \quad L_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \frac{2}{\|\mathbf{u}_{max}\|^2} \mathbf{E}^N$$

und  $H_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$  ist sogar positiv definit. Im zeitoptimalen Fall kommt die Steuerung  $\mathbf{u}$  nur linear in der Hamiltonfunktion vor. Mit den Schaltfunktionen

$$S_i := \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}, \quad i = 1, \dots, N$$

ergeben sich die Steuerungen mit

$$u_i = \begin{cases} -u_{max,i} & \text{falls } S_i > 0 \\ u_{i,sing} & \text{falls } S_i = 0 \\ +u_{max,i} & \text{falls } S_i < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Gilt  $S_i = 0$  für  $t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, t_F]$ , so ist die zugehörige singuläre Steuerung  $u_{i,sing}$ , wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, zu berechnen.

Die Ableitungen  $\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right)$  in Gleichung (5.49) können ebenfalls rekursiv berechnet werden. Betrachtet man dazu zunächst die Bewegungsgleichungen (5.46), so gilt für

$i = 1, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\mathbf{M} \cdot \ddot{\Theta}) &= \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathbf{M} \right) \cdot \ddot{\Theta} + \mathbf{M} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ddot{\Theta} \right) = -\frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathbf{h} \\ \Leftrightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \left( \frac{\partial \ddot{\Theta}}{\partial \theta_i} \right) &= -\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \theta_i} - \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_i} \right) \cdot \ddot{\Theta} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_i} (\mathbf{M} \cdot \ddot{\Theta}) &= \mathbf{M} \cdot \left( \frac{\partial \ddot{\Theta}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = -\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \dot{\theta}_i} \end{aligned}$$

Die zum Lösen der linearen Gleichungssysteme benötigten Ausdrücke

$$\frac{\partial \mathbf{M}(\Theta)}{\partial \theta_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{h}(\Theta, \dot{\Theta})}{\partial \theta_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{h}(\Theta, \dot{\Theta})}{\partial \dot{\theta}_i}$$

erhält man, indem der rekursive Newton-Euler-Algorithmus (Abbildung 2.4) nach  $\Theta$  bzw.  $\dot{\Theta}$  differenziert wird [9, 124, 176, 177, 231, 57]. Die erweiterte Rekursion für die Ableitungen ermöglicht die Berechnung der Ableitungen mit hoher Genauigkeit bei geringerem numerischen Aufwand, als bei numerischer Differentiation, welche geringere Genauigkeit liefert. Dies ist möglich, da vorab berechnete Größen wiederverwertet werden und die spezielle Struktur der Ableitungen ausgenutzt wird [57]. Höhere Ableitungen können analog berechnet werden [57].

### Bemerkung 5.18

Die Ableitungen  $\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{x}} \right)$  können ebenfalls durch Lösen von linearen Gleichungssystemen berechnet werden.

### 5.5.3 Beispiel

Als Beispiel für ein Optimalsteuerungsproblem in der Robotik dient der Mehrfinger-Greifer aus Kapitel 1. Winkel  $\Theta$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\Theta}$  werden zum Vektor der Zustandsvariablen  $\mathbf{x}$  zusammengefasst und die Antriebsmomente  $\mathbf{T}$  dienen als Steuerungen  $\mathbf{u}$ .

Als Steuerbeschränkungen entsprechend (5.51) werden mit  $\mathbf{u}_{max} := \mathbf{T}_{max}$  die Werte gemäß (1.2) gewählt. Die zu berücksichtigenden Beschränkungen der Winkel (1.3) bzw. Winkelgeschwindigkeiten (1.4) stellen Zustandsbeschränkungen zweiter bzw. erster Ordnung dar. Es soll ein zeit-energieoptimales Zielfunktional betrachtet werden, wobei sich ein Finger zeitoptimal, der andere Energieoptimal bewegen soll.

Ausgangspunkt dafür sind die zeitoptimalen Bewegungen der einzelnen Finger. Bewegt sich zunächst der Finger mit den Gliedern 1, 2 und 3, ergibt sich eine minimale Endzeit von  $t_{F,1} = 0.11997$  [s]. Anschließend bewegt sich der Finger mit den Gliedern 4, 5 und 6 mit einer minimalen Endzeit von  $t_{F,2} = 0.12116$  [s]. Die Ergebnisse sind in Anhang A zusammengefasst. Das Maximum der beiden Endzeiten  $t_{F,1}$  und  $t_{F,2}$  legt fest, welcher Finger sich zeitoptimal bewegen soll, also der Finger mit den Gliedern 4, 5 und 6.

Das vollständige als Beispiel dienende Optimalsteuerungsproblem einer Punkt-zu-Punkt Bewegung für den Mehrfinger-Greifer lautet:

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \int_{t_0}^{t_F} 1 + \alpha_E \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{\|\mathbf{u}_{max}\|^2} dt \rightarrow \min!, \\
 \begin{pmatrix} \mathbf{E}^6 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{\Theta} \\ \mathbf{u}(t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix}, \\
 \dot{\lambda}(t) &= - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \lambda(t) - \sum_{j=7}^{12} (\bar{v}_{1,j} + \bar{v}_{1,j-6} - \bar{v}_{2,j} - \bar{v}_{2,j-6}) \left( \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \mathbf{x}} \right), \\
 \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\
 \mathbf{x}(t_F) &= \mathbf{x}_F, \\
 |\mathbf{u}(t)| &\leq \mathbf{u}_{max}, \\
 \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{max} &\leq \mathbf{0}, \\
 \mathbf{x}_{min} - \mathbf{x}(t) &\leq \mathbf{0},
 \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{x}_0^T = (\Theta(t_0)^T, \dot{\Theta}(t_0)^T)$  und  $\mathbf{x}_F^T = (\Theta(t_F)^T, \dot{\Theta}(t_F)^T)$  gemäß (1.6), sowie

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{max} &:= \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{18}, 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{18}, 0, 65, 65, 65, 65, 65, 65 \right)^T, \\
 \mathbf{x}_{min} &:= \left( -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{17\pi}{18}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{17\pi}{18}, -65, -65, -65, -65, -65, -65 \right)^T
 \end{aligned}$$

gemäß den Beschränkungen der Winkel (1.3) und der Winkelgeschwindigkeiten (1.4) und der Hamiltonfunktion

$$H := 1 + \alpha_E \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{\|\mathbf{u}_{max}\|^2} + \lambda^T \dot{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^6 \bar{v}_{1,i} \ddot{x}_i + \sum_{i=7}^{12} \bar{v}_{1,i} \dot{x}_i - \sum_{j=1}^6 \bar{v}_{2,j} \ddot{x}_j - \sum_{j=7}^{12} \bar{v}_{2,j} \dot{x}_j.$$

Die Lagrangemultiplikatoren der Steuerbeschränkungen können nach Lemma 5.17 auch ohne Anknüpfeln an die Hamiltonfunktion  $H$  behandelt werden.

Die Steuerungen  $u_4$ ,  $u_5$  und  $u_6$  treten nur linear in der Hamiltonfunktion auf und man definiert für  $i = 4, 5, 6$  die Schaltfunktionen

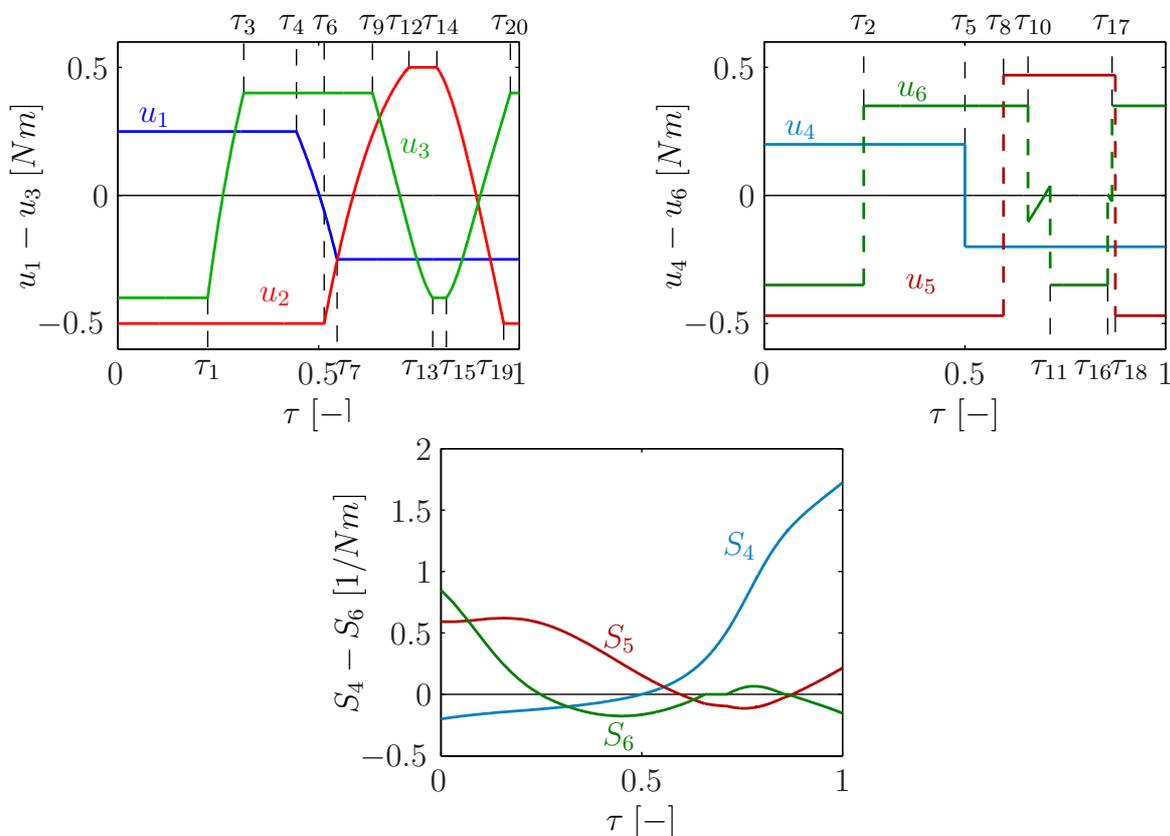
$$S_i := \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \lambda + \sum_{j=1}^6 (\bar{v}_{1,j} - \bar{v}_{2,j}) \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \ddot{x}_j \right) + \sum_{j=7}^{12} (\bar{v}_{1,j} - \bar{v}_{2,j}) \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \dot{x}_j \right).$$

Die Steuerungen  $u_4$ ,  $u_5$  und  $u_6$  ergeben sich dann zu

$$u_i = \begin{cases} -u_{max,i} & \text{falls } S_i > 0 \\ u_{i,sing} & \text{falls } S_i = 0 \\ +u_{max,i} & \text{falls } S_i < 0 \end{cases}, \quad i = 4, 5, 6.$$

Die Steuerungen  $u_1$ ,  $u_2$  und  $u_3$  berechnen sich aus

$$\begin{aligned}
 0 = H_{u_i} &:= \frac{2\alpha_E u_i}{\|\mathbf{u}_{max}\|^2} + \lambda^T \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \dot{\mathbf{x}} \right) + \\
 &\sum_{j=1}^6 (\bar{v}_{1,j} - \bar{v}_{2,j}) \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \ddot{x}_j \right) + \sum_{j=7}^{12} (\bar{v}_{1,j} - \bar{v}_{2,j}) \left( \frac{\partial}{\partial u_i} \dot{x}_j \right), \quad i = 1, 2, 3,
 \end{aligned}$$



**Abbildung 5.2:** Steuerungen  $u_1 - u_6$  und Schaltfunktionen  $S_4 - S_6$  als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .

und der Legendre-Clebsch-Bedingung, die hier stets erfüllt ist.

Dieses Beispiel wurde mit JANUS [53] gelöst, wozu die Zeit mit  $\tau := \frac{t}{t_F - t_0} = \frac{t}{t_F}$  auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$  transformiert und als Wert für den Parameter  $\alpha_E$  im Zielfunktional  $\alpha_E = 0.1$  gewählt wurde. Aufgrund aktiver Zustandsbeschränkungen wächst die minimale Endzeit auf

$$t_F = 0.1213262947 \text{ [s]}. \quad (5.54)$$

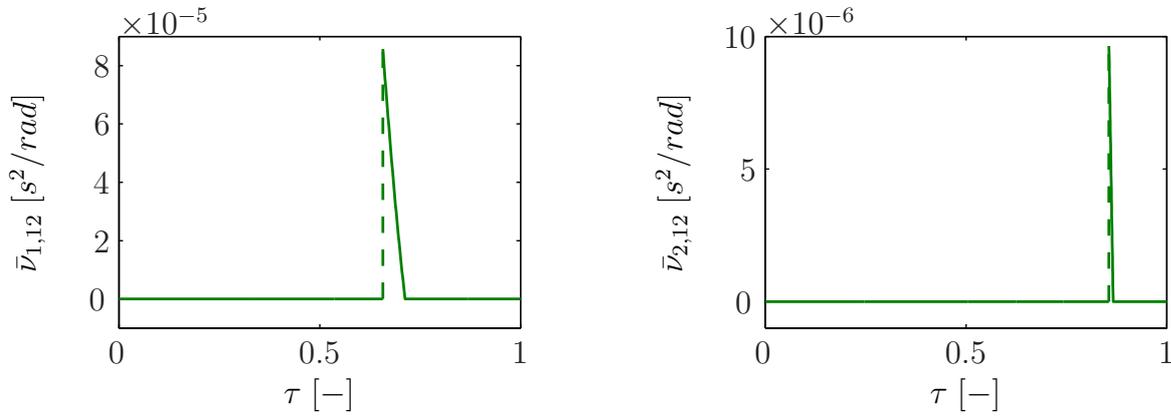
Die optimalen Steuerungen, sowie die Schaltfunktionen der Steuerungen  $u_4 - u_6$  sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Die Schaltpunkte  $\tau_1 - \tau_{20}$  sind in Tabelle 5.1 aufgelistet.

Am Schaltpunkt  $\tau_{10}$  wird die Zustandsbeschränkung  $x_{12} - 65 \leq 0$  aktiv, am Schaltpunkt  $\tau_{11}$  wieder inaktiv. Die Zustandsbeschränkung  $-65 - x_{12} \leq 0$  wird am Schaltpunkt  $\tau_{16}$  aktiv und am Schaltpunkt  $\tau_{17}$  wieder inaktiv. Aufgrund der aktiven Zustandsbeschränkungen ist für  $\tau \in [\tau_{10}, \tau_{11}]$  und  $\tau \in [\tau_{16}, \tau_{17}]$  die Steuerung  $u_6$  im Inneren des Steuerbereichs.

An den Aufsprungpunkten  $\tau_{10}$  und  $\tau_{16}$  sind die Vorzeichenbedingungen (5.13) der Lagrangemultiplikatoren  $\bar{\nu}_{1,12}$  und  $\bar{\nu}_{2,12}$  zu erfüllen, sowie die Sprungbedingungen (5.17) der adjungierten Variablen  $\lambda_{12}$ .

$\tau_1 = 0.223998$	$\tau_6 = 0.513995$	$\tau_{11} = 0.712760$	$\tau_{16} = 0.856044$
$\tau_2 = 0.248088$	$\tau_7 = 0.546276$	$\tau_{12} = 0.725307$	$\tau_{17} = 0.866558$
$\tau_3 = 0.313626$	$\tau_8 = 0.596288$	$\tau_{13} = 0.784341$	$\tau_{18} = 0.874786$
$\tau_4 = 0.444915$	$\tau_9 = 0.634618$	$\tau_{14} = 0.794610$	$\tau_{19} = 0.961093$
$\tau_5 = 0.500000$	$\tau_{10} = 0.657232$	$\tau_{15} = 0.818325$	$\tau_{20} = 0.977639$

**Tabelle 5.1:** Schaltpunkte, transformiert auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$ .



**Abbildung 5.3:** Lagrange-Multiplikatoren  $\bar{v}_{1,12}$  und  $\bar{v}_{2,12}$  der aktiven Zustandsbeschränkungen als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .

In Abbildung 5.3 sind die Lagrangemultiplikatoren  $\bar{v}_{1,12}$  und  $\bar{v}_{2,12}$  dargestellt – man erkennt, dass  $\bar{v}_{i,12} > 0$  und  $\bar{v}_{i,12}$  ( $i = 1, 2$ ) eine monoton fallende Funktion ist und somit (5.13) erfüllt ist.

Die adjungierten Variablen sind in Anhang A in Abbildung A.11 dargestellt. In Abbildung A.12 ist die adjungierte Variable  $\lambda_{12}$  an den Aufsprungpunkten der Zustandsbeschränkungen  $\tau_{10}$  und  $\tau_{12}$  vergrößert dargestellt, so dass die Sprünge erkennbar sind. Die Sprunghöhe entspricht dabei genau den Werten des jeweiligen Sprungparameters  $\eta_{12}$  bzw.  $\eta_{24}$ .

Da es sich jeweils um eine Zustandsbeschränkung erster Ordnung handelt, ist zudem die Ungleichungsbedingung (5.20) zu berücksichtigen, welche erfüllt ist, da für die Sprungparameter  $\eta_{12}$  und  $\eta_{24}$  gilt:

$$\eta_{12}(\tau_{10}) = 8.57103898 \cdot 10^{-5} = \bar{v}_{1,12}(\tau_{10}^+), \quad \eta_{24}(\tau_{16}) = 9.63801790 \cdot 10^{-6} = \bar{v}_{2,12}(\tau_{16}^+).$$

Für dieses Beispiel muss für die Hamiltonfunktion  $H \equiv 0$  gelten; das ist mit einer relativen Genauigkeit von  $10^{-10}$  erfüllt (vgl. Abbildung A.9). Desweiteren ist in Anhang A der zeitliche Verlauf der Winkel  $\theta_1 - \theta_6$ , sowie der Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_6$  in Abbildung A.10 dargestellt. Man erkennt dort auch die Bereiche der aktiven Zustandsbeschränkungen.

## Kapitel 6

### Optimale Steuerung mit konkurrierenden Steuerungen

In diesem Kapitel wird das Beispiel aus Abschnitt 5.5.2 unter den neuen Aspekten der konkurrierenden Steuerungen betrachtet. Anhand einer Punkt-zu-Punkt Bewegung werden zwei verschiedene Ansätze für konkurrierende Steuerungen untersucht. Anfangs- und Endpunkt des Mehrfinger-Greifers werden als fest angenommen:

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{pmatrix} \Theta(t_0) \\ \dot{\Theta}(t_0) \end{pmatrix} =: \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_F) = \begin{pmatrix} \Theta(t_F) \\ \dot{\Theta}(t_F) \end{pmatrix} =: \mathbf{x}_F \quad (6.1)$$

In den Beispielen in diesem Kapitel wird sich zeigen, dass die Zustandsbeschränkungen zweiter Ordnung (1.3) und erster Ordnung (1.4) nicht aktiv werden. Um die Notation übersichtlich zu gestalten, wird deshalb bei den Problemspezifizierungen auf die Berücksichtigung der Zustandsbeschränkungen verzichtet.

In Abschnitt 1.2.1 wurden konkurrierende Steuerungen eingeführt, indem anstelle eines Motors, zwei parallel und unabhängig voneinander wirkende Motoren an einem Gelenk angreifen – ein schneller, aber schwacher und ein starker, aber langsamer. Die Antriebsmomente  $\mathbf{T}$  der Motoren dienen als Steuerungen  $\mathbf{u}$ . Die Steuerungen  $\mathbf{u}$  werden in zwei neue, unabhängige und additive Steuerungen aufgespalten:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^f + \mathbf{u}^s, \quad \mathbf{u}^f, \mathbf{u}^s \in \mathbb{R}^p,$$

mit den schnellen, aber schwachen Steuerungen  $\mathbf{u}^f$  und den starken, aber schnellen Steuerungen  $\mathbf{u}^s$ . Mit  $\mathbf{u}_{max}^f = (u_{max,p}^f, \dots, u_{max,p}^f)^T$  und  $\mathbf{u}_{max}^s = (u_{max,1}^s, \dots, u_{max,p}^s)^T$  können die starken bzw. schwachen Antriebsmomente durch die Beschränkungen

$$|\mathbf{u}^f| \leq \mathbf{u}_{max}^f \quad \wedge \quad |\mathbf{u}^s| \leq \mathbf{u}_{max}^s \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_{max}^f \ll \mathbf{u}_{max}^s \quad (6.2)$$

berücksichtigt werden. Bis jetzt sind beide Steuerungen gleichwertig. Um einen qualitativen Unterschied mathematisch zu beschreiben, sind weitere Überlegungen notwendig.

#### 6.1 Ansatz mit Zielfunktional

Berücksichtigt man, dass ein starker Motor einen höheren Energiebedarf hat, als ein schwacher, so kann der Energiebedarf der konkurrierenden Steuerungen benutzt werden, um einen qualitativen Unterschied der beiden Steuerungen zu formulieren.

### 6.1.1 Problemspezifizierung

Der Energiebedarf der Steuerungen  $\mathbf{u}^f$  und  $\mathbf{u}^s$  kann über das Zielfunktional berücksichtigt werden. Dabei hat  $\mathbf{u}^f$  einen geringeren Energiebedarf als  $\mathbf{u}^s$ . Durch Gewichtungsfaktoren  $\alpha_i > 1$  kann ein erhöhter Energiebedarf beschrieben werden, indem im zu minimierenden Funktional die Steuerungen  $\mathbf{u}^s$  mit  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  multipliziert werden:

$$I(\mathbf{u}^f(t), \mathbf{u}^s(t)) = \int_{\tau_0}^{\tau_F} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^f, \beta(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}^s)) dt \longrightarrow \min \quad (6.3)$$

Je größer ein Gewichtungsfaktor  $\alpha_i$  gewählt wird, desto mehr gerät die Steuerung  $u_i^s$  in Nachteil. Die Kosten für diese Steuerung sind höher und für ein Minimum wird sie sich nur gemächlich ändern.

Als Optimalsteuerungsproblem ergibt sich: Minimiere (6.3) auf dem festen Intervall  $[\tau_0, \tau_F]$ , mit den Nebenbedingungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^f, \mathbf{u}^s), \quad (6.4)$$

$$|\mathbf{u}^f| \leq \mathbf{u}_{max}^f, \quad (6.5)$$

$$|\mathbf{u}^s| \leq \mathbf{u}_{max}^s, \quad (6.6)$$

mit den Steuerbeschränkungen aus (6.2). Die Hamiltonfunktion ergibt sich zu

$$H := L(\mathbf{x}, \mathbf{u}^f, \beta(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}^s)) + \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}} \quad (6.7)$$

mit den adjungierten Variablen  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n$ . Zu den Differentialgleichungen (6.4) kommen die adjungierten Differentialgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_{\mathbf{x}} = -L_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^f, \beta(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{u}^s)) - \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6.8)$$

hinzu. Die optimale Steuerungen ergeben sich aus der Optimalitätsbedingung

$$\mathbf{0} = H_{\mathbf{u}^f} = L_{\mathbf{u}^f} + \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^f} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{0} = H_{\mathbf{u}^s} = L_{\beta} \cdot \beta_{\mathbf{u}^s} + \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^s} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6.10)$$

und der Legendre-Clebsch-Bedingung ( $H_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$  positiv semidefinit).

### 6.1.2 Beispiel

Als numerisches Beispiel dient der miniaturisierte Greifer aus Kapitel 1, mit Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0$  und fester Endzeit  $t_F = 0.137$  [s]. Dabei wurde  $t_F$  um etwa 13% größer gewählt, als die minimale Endzeit (5.54), die sich in Abschnitt 5.5.3 ergab. Das energieoptimale Steuerungsproblem dafür wird wie folgt beschrieben [212]:

$$I(\mathbf{u}^f(t), \mathbf{u}^s(t)) = \int_{\tau_0}^{\tau_F} \frac{\sum_i \left( (u_i^f)^2 + \alpha_i (u_i^s)^2 \right)}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2} dt \longrightarrow \min, \quad (6.11)$$

mit fester Endzeit  $t_F$  und Gewichtungsfaktoren  $\alpha_i$ . Durch  $\alpha_i > 1$  wird ein erhöhter Energiebedarf modelliert. Für die Steuerbeschränkungen (6.2) werden die maximalen Antriebsmomente aus (1.2) wie folgt aufgeteilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{max}^f &= (0.25, 0.05, 0.40, 0.20, 0.07, 0.35)^T \quad [Nm], \\ \mathbf{u}_{max}^s &= (0.00, 0.45, 0.00, 0.00, 0.40, 0.00)^T \quad [Nm].\end{aligned}$$

Die Hamiltonfunktion ergibt sich für dieses Beispiel zu

$$H = \frac{\sum_i \left( (u_i^f)^2 + \alpha_i (u_i^s)^2 \right)}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2} + \boldsymbol{\lambda}^T \dot{\mathbf{x}}.$$

Das optimale Steuerungsproblem wird in das Randwertproblem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^6 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\Theta}} \\ \mathbf{u}^f(t) + \mathbf{u}^s(t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_{\mathbf{x}} = - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (6.13)$$

transformiert, wobei  $\boldsymbol{\lambda}$  die adjungierten Variablen,  $\mathbf{E}^n := \text{diag}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix, sowie  $\mathbf{h}$  die Coriolis-, Zentrifugal- und Gravitationskräfte aus Abschnitt 2.8 bezeichnet. Wie bereits in Abschnitt 5.5.3 werden die Randwerte (6.1) gemäß den Werten aus (1.6) gewählt. Die Steuerungen  $\mathbf{u}^f$  und  $\mathbf{u}^s$  berechnen sich aus der Optimalitätsbedingung  $H_{\mathbf{u}} = 0$ , also aus

$$0 = H_{u_i^f} := \frac{2u_i^f}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial}{\partial u_i^f} \dot{\mathbf{x}} \right), \quad i = 1, \dots, 6, \quad (6.14)$$

$$0 = H_{u_i^s} := \frac{2\alpha_i u_i^s}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2} + \boldsymbol{\lambda}^T \left( \frac{\partial}{\partial u_i^s} \dot{\mathbf{x}} \right), \quad i = 1, \dots, 6, \quad (6.15)$$

und der Legendre-Clebsch-Bedingung ( $H_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$  positiv semidefinit).

Die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial u_i^f} \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial u_i^s} \dot{\mathbf{x}}$$

werden effizient durch eine erweiterte Newton-Euler Rekursion [57], wie in Abschnitt 5.5.2 diskutiert, berechnet. Die Gewichtungsfaktoren  $\alpha_i$  im Funktional (6.11) sind in Tabelle 6.1 aufgelistet.

Abbildung 6.1 zeigt das Verhalten der optimalen Steuerungen, die Zeit wurde mit  $\tau := \frac{t}{t_F - t_0} = \frac{t}{t_F}$  auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$  transformiert. Die Schaltpunkte sind in Tabelle 6.2 aufgelistet.

Die Steuerungen spiegeln das gewünschte Verhalten wider. Die Steuerbeschränkungen der ineffizienten Steuerungen  $u_2^s$  und  $u_5^s$  werden nicht aktiv und weisen eine moderate

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$
1	5	1	1	10	1

**Tabelle 6.1:** Wahl der Gewichtungsfaktoren.

$\tau_1 = 0.149132$	$\tau_5 = 0.387392$	$\tau_9 = 0.603302$	$\tau_{13} = 0.694107$
$\tau_2 = 0.196010$	$\tau_6 = 0.474550$	$\tau_{10} = 0.609095$	$\tau_{14} = 0.776847$
$\tau_3 = 0.275452$	$\tau_7 = 0.523620$	$\tau_{11} = 0.650935$	$\tau_{15} = 0.836709$
$\tau_4 = 0.279400$	$\tau_8 = 0.578656$	$\tau_{12} = 0.653568$	$\tau_{16} = 0.879501$

**Tabelle 6.2:** Schaltpunkte, transformiert auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$ .

Änderung auf. Bei der hier getroffenen Wahl der Parameter  $\alpha_i$  nutzt die Steuerung  $u_2^s$  circa 67.2% und  $u_5^s$  etwa 75.5% des jeweiligen maximalen Antriebsmoments.

Aufgrund der Sensibilität der Hamiltonfunktion  $H$  ist sie ein hervorragender Test für die Richtigkeit der Lösung. In diesem Beispiel muss die Hamiltonfunktion  $H$  konstant sein, was mit einer relativen Genauigkeit von  $10^{-10}$  erfüllt ist.

Der zeitliche Verlauf der Winkel  $\theta_1 - \theta_6$ , der Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_6$ , sowie der adjungierten Variablen  $\lambda_1 - \lambda_{12}$  ist in Anhang B, Abbildung B.1 bzw. Abbildung B.2 dargestellt.

## 6.2 Ansatz mit Beschränkung der zeitlichen Änderung der Steuerungen

Ein alternative Möglichkeit, um bei konkurrierenden Steuerungen einen qualitativen Unterschied in den Steuerungen zu modellieren, stellt die Beschränkung der zeitlichen Änderung der Steuerungen dar. Bei den schnellen Steuerungen ist eine höhere zeitliche Änderung zugelassen, als bei den langsamen.

### 6.2.1 Problemspezifizierung

Für die Steuerungen  $\mathbf{u}^f$  und  $\mathbf{u}^s$  gelten wieder die Steuerbeschränkungen (6.2). Um den Unterschied zwischen schneller und langsamer Steuerung zu beschreiben, werden zusätzliche Beschränkungen eingeführt [211, 210]:

$$\left| \frac{d}{dt} \mathbf{u}^f \right| \leq \mathbf{w}_{max}^f \quad \wedge \quad \left| \frac{d}{dt} \mathbf{u}^s \right| \leq \mathbf{w}_{max}^s \quad \text{mit} \quad \mathbf{w}_{max}^f \gg \mathbf{w}_{max}^s, \quad (6.16)$$

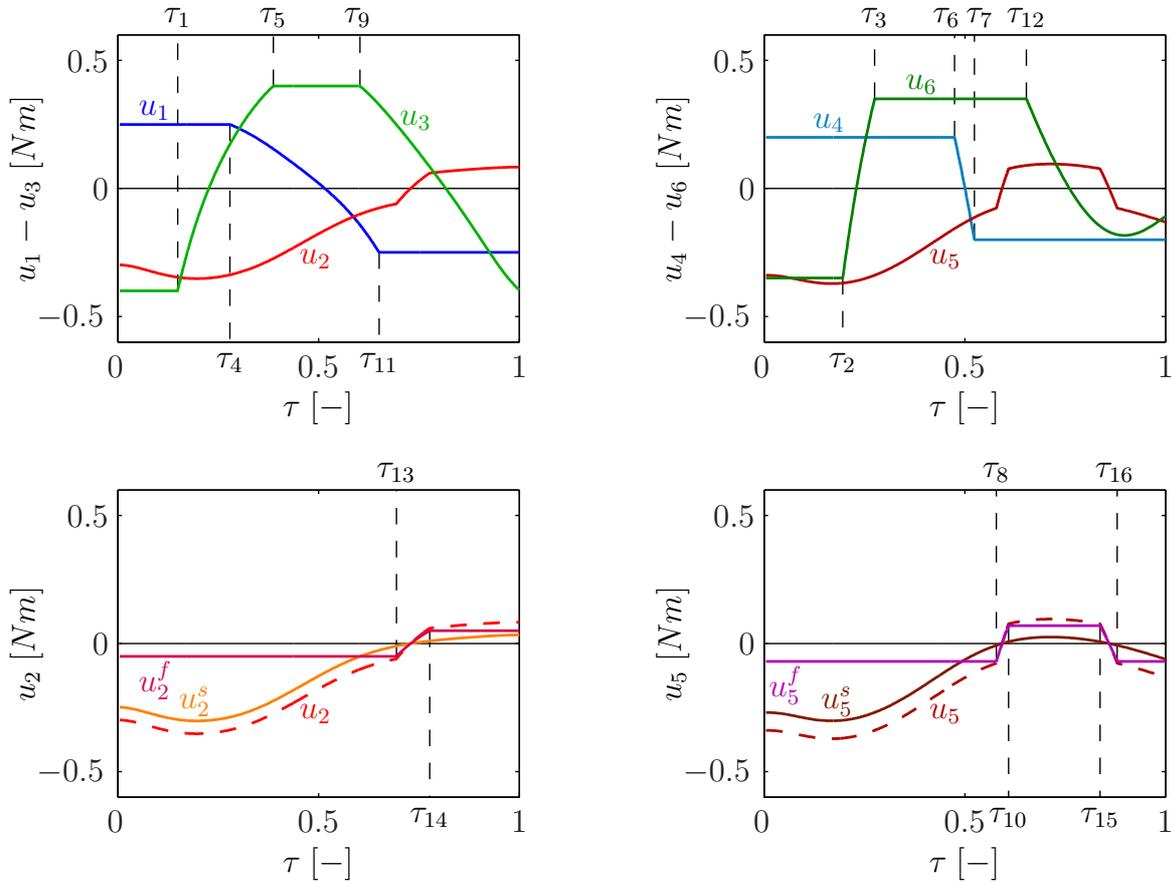


Abbildung 6.1: Steuerungen  $u_1 - u_6$  als Funktion von  $\tau := \frac{t}{\tau_F}$

wobei  $\mathbf{w}_{max}^f := (w_{max,1}^f, \dots, w_{max,6}^f)^T$ ,  $\mathbf{w}_{max}^s := (w_{max,1}^s, \dots, w_{max,6}^s)^T$  gilt.

Aus Sicht der optimalen Steuerung stellt die Beschränkung der ersten Ableitung einer Steuerung ein Problem dar: Per Definition ist eine Steuerung eine Variable, für die im gesamten optimalen Steuerungsproblem keine Ableitung auftritt – diese Forderung ist hier nicht mehr erfüllt.

### 6.2.2 Transformation auf ein Zweipunkt-Randwertproblem

Einen möglichen Ausweg liefert eine Transformation, in dem neue Steuerungen  $\mathbf{w}^f$  und  $\mathbf{w}^s$ , zusammen mit den stückweise definierten gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{u}}^f := \mathbf{w}^f, \quad \dot{\mathbf{u}}^s := \mathbf{w}^s \quad (6.17)$$

definiert werden. Dadurch werden  $\mathbf{u}^f$  und  $\mathbf{u}^s$  in Zustandsvariablen und die Steuerbeschränkungen (6.2) in Zustandsbeschränkungen der Ordnung eins transformiert. Die kritischen Beschränkungen der Ableitungen (6.16) werden durch die neuen Steuerbeschränkungen

$$|\mathbf{w}^f| \leq \mathbf{w}_{max}^f \quad \wedge \quad |\mathbf{w}^s| \leq \mathbf{w}_{max}^s \quad \text{mit} \quad \mathbf{w}_{max}^f \gg \mathbf{w}_{max}^s \quad (6.18)$$

ersetzt. Man erhält ein analytisch äquivalentes Problem höherer Dimension, wobei die Änderungsrate von  $\mathbf{u}^f$  und  $\mathbf{u}^s$  durch  $\mathbf{w}^f$  und  $\mathbf{w}^s$  weiterhin beschränkt ist. Aus numerischer Sicht ist das transformierte System aber nur schwer lösbar. Eine effiziente und stabile numerische Lösung des transformierten Systems ist bei komplexen Problemstellungen, wie sie aus industriellen Anwendungen hervorgehen (zum Beispiel [50, 51]), nur schwer zu erzielen. Anhand des folgenden autonomen Optimalsteuerungsproblem werden die kritischen Operationen aufgezeigt:

Betrachtet werde das optimale Steuerungsproblem:

Berechne  $(\mathbf{x}^*, u^*) \in \mathcal{W}^{1,\infty}([t_0, t_F]; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{W}^{1,\infty}([t_0, t_F]; \mathbb{R})$  welches das Funktional

$$I(u) = \Psi(x(t_0), x(t_F)) \quad (6.19)$$

auf dem festen Intervall  $[\tau_0, \tau_F]$  minimiert, mit Nebenbedingungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \quad (6.20)$$

$$\dot{u} = w, \quad (6.21)$$

$$\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad (6.22)$$

$$u(t) \in [u_{min}, u_{max}], \quad (6.23)$$

$$w(t) \in [w_{min}, w_{max}], \quad (6.24)$$

mit gegebenen Konstanten  $u_{min}, u_{max}, w_{min}, w_{max} \in \mathbb{R}$  und vorgegebenen Anfangswerten  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ . Desweiteren sei  $\Psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$  und  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ . Im Vergleich zum allgemeinen Optimalsteuerungsproblem in Abschnitt 5.1 wird hier für die Steuervariable  $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}([t_0, t_F]; \mathbb{R})$  und nicht mehr  $u \in L^\infty([t_0, t_F]; \mathbb{R})$  gefordert. Das ist nötig, da die Ableitung nur beschränkt werden kann, wenn sie existiert. Wie in der Optimalsteuerung üblich, wird die Existenz einer optimalen Lösung  $(\mathbf{x}^*, u^*)$  vorausgesetzt. Das Optimalsteuerungsproblem wird hier als Mayer-Problem formuliert, was aber keine Einschränkung bedeutet, da die verschiedenen Formulierungen äquivalent sind (vgl. Bemerkung 5.2).

Betrachtet werde folgende Situation, welche den schwierigsten Fall abdeckt:

Es existiere ein a priori unbekanntes  $t_1 \in ]t_0, t_F[$  derart, dass

$$w = w_{max} \quad \text{für} \quad t \in [t_0, t_1] \quad \wedge \quad w \in ]w_{min}, w_{max}[ \quad \text{für} \quad t \in ]t_1, t_F]. \quad (6.25)$$

Aus (6.25) folgt, dass  $u \in ]u_{min}, u_{max}[$  für  $t \in [t_0, t_1]$ . Um das Minimumprinzip direkt anwenden zu können, wird das Problem auf ein Zweipunkt-Randwertproblem transformiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(\tau_i) &:= \mathbf{x}(t), \\ z_i(\tau_i) &:= u(t), \quad w_i(\tau_i) := w(t), \quad i = 1, 2, \\ \tau_i &:= \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \in [0, 1], \quad t_2 := t_F, \\ \frac{d}{dt} &:= \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \frac{d}{d\tau_i}, \quad \tau_i \rightarrow \tau. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung gelte  $t_0 = 0$ . Man erhält das äquivalente Optimalsteuerungsproblem mit dem Zielfunktional

$$I = \Psi(\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(1)) \quad (6.26)$$

und dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen, transformiert auf das feste Intervall  $\tau \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= t_1 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, z_1), \\ \dot{z}_1 &= t_1 \cdot w_1, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= (t_F - t_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, z_2), \\ \dot{z}_2 &= (t_F - t_1) \cdot w_2, \\ \dot{t}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

In diesem System treten keine innere Punkt Bedingungen auf. Die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}_1(1) &= \mathbf{x}_2(0), \\ z_1(1) &= z_2(0), \end{aligned} \quad (6.28)$$

vervollständigen das Zweipunkt-Randwertproblem. Die erweiterte Hamiltonfunktion  $\tilde{H}$  lautet

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= t_1 \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, z_1) + t_1 \lambda_2 w_1 + (t_F - t_1) \boldsymbol{\lambda}_3^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, z_2) + (t_F - t_1) \lambda_4 w_2 + \\ &\quad \mu_1(w_1 - w_{max}) + \mu_2(w_{min} - w_1) + \mu_3(w_2 - w_{max}) + \mu_4(w_{min} - w_2), \end{aligned} \quad (6.29)$$

mit den zu den Zustandsvariablen  $\mathbf{x}_1$ ,  $z_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  und  $z_2$  korrespondierenden adjungierten Variablen  $\boldsymbol{\lambda}_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_3$  und  $\lambda_4$ . Für eine optimale Lösung müssen die Multiplikatorfunktionen  $\mu_1(\tau)$ ,  $\mu_2(\tau)$ ,  $\mu_3(\tau)$  und  $\mu_4(\tau)$  folgende Vorzeichenbedingungen erfüllen:

$$\begin{array}{ll} \mu_1 \geq 0 & \text{für } w_1 = w_{max}, \\ \mu_1 = 0 & \text{für } w_1 < w_{max}, \\ \mu_2 \geq 0 & \text{für } w_1 = w_{min}, \\ \mu_2 = 0 & \text{für } w_1 > w_{min}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \mu_3 \geq 0 & \text{für } w_2 = w_{max}, \\ \mu_3 = 0 & \text{für } w_2 < w_{max}, \\ \mu_4 \geq 0 & \text{für } w_2 = w_{min}, \\ \mu_4 = 0 & \text{für } w_2 > w_{min}. \end{array}$$

Das erweiterte Zielfunktional  $\tilde{I}$  erhält man, indem das Differentialgleichungssystem (6.27), die Beschränkungen (6.24), sowie die Randbedingungen (6.28) mit Hilfe der Multiplikatorfunktionen  $\boldsymbol{\lambda}_i$  ( $i = 1, 3$ ),  $\lambda_j$  ( $j = 2, 4, 5$ ),  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) bzw. der Lagrange Multiplikatoren  $\boldsymbol{\nu}_1$ ,  $\boldsymbol{\nu}_2$ ,  $\nu_3$  an das Zielfunktional (6.26) angekoppelt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{I} &:= \tilde{\Psi} + \int_0^1 \left( \tilde{H} - \boldsymbol{\lambda}_1^T \dot{\mathbf{x}}_1 - \lambda_2 \dot{z}_1 - \boldsymbol{\lambda}_3^T \dot{\mathbf{x}}_2 - \lambda_4 \dot{z}_2 - \lambda_5 \dot{t}_1 \right) d\tau, \\ \tilde{\Psi} &:= \Psi(\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)) + \boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{x}_1(0) - \mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\nu}_2(\mathbf{x}_1(1) - \mathbf{x}_2(0)) + \nu_3(z_1(1) - z_2(0)). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen der adjungierten Variablen lauten:

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 &= -t_1 \mathbf{f}_{\mathbf{x}_1}^T(\mathbf{x}_1, z_1) \boldsymbol{\lambda}_1, \\
 \dot{\lambda}_2 &= -t_1 \mathbf{f}_{z_1}^T(\mathbf{x}_1, z_1) \boldsymbol{\lambda}_1, \\
 \dot{\lambda}_3 &= -(t_F - t_1) \mathbf{f}_{\mathbf{x}_2}^T(\mathbf{x}_2, z_2) \boldsymbol{\lambda}_3, \\
 \dot{\lambda}_4 &= -(t_F - t_1) \mathbf{f}_{z_2}^T(\mathbf{x}_2, z_2) \boldsymbol{\lambda}_3, \\
 \dot{\lambda}_5 &= -\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1, z_1) \boldsymbol{\lambda}_1 - w_1 \boldsymbol{\lambda}_2 + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_2, z_2) \boldsymbol{\lambda}_3 + w_2 \boldsymbol{\lambda}_4.
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Mit (6.25) gilt, dass  $\mu_2 \equiv 0$  und  $\mu_2 = \mu_4 \equiv 0 \forall \tau \in [0, 1]$ . Desweiteren müssen die Optimalitätsbedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
 w_1 = w_{max} &\Rightarrow 0 = \tilde{H}_{w_1} = \lambda_2 t_1 + \mu_1 \Rightarrow \mu_1 = -\lambda_2 t_1 \wedge \mu_1 \geq 0 \\
 &\Rightarrow \lambda_2 \leq 0 \quad \forall \tau \in [0, 1],
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned}
 w_2 \text{ frei} &\Rightarrow 0 = \tilde{H}_{w_2} = \lambda_4 (t_F - t_1) + \mu_3 \wedge \mu_3 = 0 \\
 &\Rightarrow \lambda_4 = 0 \quad \forall \tau \in [0, 1].
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Die fehlenden sieben Randbedingungen erhält man aus der ersten Variation von  $\tilde{I}$ :

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z_1(0)} + \lambda_2(0) \Rightarrow \lambda_2(0) = 0 \tag{6.33}$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{x}_2(0)} + \boldsymbol{\lambda}_3(0) = -\boldsymbol{\nu}_2 + \boldsymbol{\lambda}_3(0)$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z_2(0)} + \lambda_4(0) = -\nu_3 + \lambda_4(0)$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t_1(0)} + \lambda_5(0) \Rightarrow \lambda_5(0) = 0 \tag{6.34}$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{x}_1(1)} - \boldsymbol{\lambda}_1(1) = \boldsymbol{\nu}_2 - \boldsymbol{\lambda}_1(1) \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}_1(1) = \boldsymbol{\lambda}_3(0) \tag{6.35}$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z_1(1)} - \lambda_2(1) = \nu_3 - \lambda_2(1) \Rightarrow \lambda_2(1) = \lambda_4(0) \tag{6.36}$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{x}_2(1)} - \boldsymbol{\lambda}_3(1) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{x}_2(1)} - \boldsymbol{\lambda}_3(1) = 0 \tag{6.37}$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z_2(1)} - \lambda_4(1) \Rightarrow \lambda_4(1) = 0 \tag{6.38}$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t_1(1)} - \lambda_5(1) \Rightarrow \lambda_5(1) = 0. \tag{6.39}$$

Die Bedingungen (6.33) bis (6.39) komplettieren die Transformation des Optimalsteuerungsproblems (6.19) bis (6.25) in ein Zweipunkt-Randwertproblem.

Die Berechnung der freien Steuerung  $w_2$  aus der Bedingung (6.32) bereitet numerische

Schwierigkeiten. Die Steuerung berechnet sich aus:

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\lambda}_4 &= -(t_F - t_1) \mathbf{f}_{z_2}^T(\mathbf{x}_2, z_2) \lambda_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{\lambda}_4 &= -(t_F - t_1) \dot{\lambda}_3^T \mathbf{f}_{z_2}(\mathbf{x}_2, z_2) - \\ &\quad (t_F - t_1) \lambda_3^T (\mathbf{f}_{z_2 \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_2, z_2) \dot{\mathbf{x}}_2 + (t_F - t_1) \mathbf{f}_{z_2 z_2}(\mathbf{x}_2, z_2) w_2) = 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Die Differentialgleichungen (6.27) und (6.30) bilden zusammen mit der algebraischen Gleichung (6.32) ein differential-algebraisches System (DAE System). Im Falle von  $\mathbf{f}_{z_2 z_2}(\mathbf{x}_2, z_2) \neq 0$  hat es den differentiellen Index 3, wobei der Index gemäß [58, 100, 145, 228] definiert ist. Bei Optimalsteuerungsproblemen in der Robotik tritt die ursprüngliche Steuerung  $z_2$  nur linear in den Bewegungsgleichungen auf. Somit gilt  $\mathbf{f}_{z_2 z_2}(\mathbf{x}_2, z_2) = 0$  und der differentielle Index ist sogar höher (System vom Index 4).

Gleichung (6.32) ist Teil der Lösungsprozedur, wie man beim Lösen von DAE Systemen mit höherem Index vorgeht. Der Index wird reduziert, indem die algebraische Gleichung differenziert wird, bis man ein DAE System vom Index 1 erhält, welches direkt mit Standard-Integrationsmethoden gelöst werden kann. Durch kleine, aber unvermeidbare Störungen bei der numerischen Lösung des reduzierten Index Problems kommt es zu einem *Driftoff* von der ursprünglichen algebraischen Bedingung (6.32). Diese Störungen werden zum Beispiel verursacht durch Rundungsfehler und Diskretisierungsfehler bei der numerischen Integration [69, 145]. Obwohl die Steuerung  $w_2$  explizit berechnet wird, werden keine Zustandsvariablen eliminiert und es wird ein Ansatz in Deskriptorform benutzt [228]. Das Problem des Driftoffs kann zumindest für Index 2 und Index 3 Probleme überwunden werden, indem Invarianten ausgenutzt und Projektionstechniken benutzt werden [85, 99, 220, 226]. Die Projektionen führen allerdings zu einem analytischen und numerischen Mehraufwand. Darüber hinaus werden spezielle implizite Integratoren für DAEs benötigt, die auch im Falle von nichtsteifen Problemen angewendet werden müssen.

Hinzu kommt ein weiterer Aspekt, der betrachtet werden sollte. Die Stabilisierungstechniken für DAEs funktionieren gut, solange die Störungen klein sind. Das bedeutet, in Gleichung (6.41) muss mindestens die zweite partielle Ableitung von  $\mathbf{f}$  mit hoher Genauigkeit berechnet werden. Diese Schwierigkeiten können vermieden werden, wenn man die Informationen der Lösungsstruktur aus (6.25) ausnutzt.

### 6.2.3 Umsetzung in ein Randwertproblem nicht-konstanter Dimension

Mit  $w_1 = w_{max}$  kann die korrespondierende Differentialgleichung für  $z_2$  in (6.27) direkt integriert werden. Man erhält

$$z_1(\tau) = z_1(0) + \int_0^\tau t_1 w_1(\xi) d\xi = z_1(0) + t_1 w_{max} \tau,$$

mit der noch unbekanntem Konstante  $z_1(0)$ . Einsetzen in die Differentialgleichung für  $\mathbf{x}_1$  in (6.27) liefert eine Transformation mit einer retardierten rechten Seite:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, z_1) \longrightarrow \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_1(\tau), z_1(0) + \int_0^\tau t_1 w_1 d\xi\right), \quad \tau \in [0, 1].$$

Für die unbeschränkte Steuerung  $w_2$  ist die Transformation  $z_2 \rightarrow w_2$ , welche die Sensitivität erhöht, nicht notwendig. Aus (6.32) ist bekannt, dass  $\lambda_4 = 0 \forall \tau \in [0, 1]$  und somit auch  $\dot{\lambda}_4 = 0 \forall \tau \in [0, 1]$ . Mit dieser Differentialgleichung und der Randbedingung (6.38) gilt für die Bedingung (6.36)

$$\lambda_2(1) = 0. \quad (6.42)$$

Es wird sich zeigen, dass (6.42) die Schaltbedingung für den Übergang vom Randstück zum inneren Teilstück ist. Die Variable  $z_2$  muss nicht länger wie eine Zustandsvariable behandelt werden, sondern wird zu einer Steuerung, die mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen aus (6.40) bestimmt wird:

$$\dot{\lambda}_4 = -(t_F - t_1) \mathbf{f}_{z_2}^T(\mathbf{x}_2, z_2) \boldsymbol{\lambda}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_2 = \phi(\boldsymbol{\lambda}_3, \mathbf{x}_2). \quad (6.43)$$

Das ist genau die Optimalitätsbedingung für die Steuerung  $z_2$ . Durch die Randbedingung (6.35), sowie der Bedingung  $\mathbf{x}_1(1) = \mathbf{x}_2(0)$  aus (6.28), kann die Bedingung  $z_1(1) = z_2(0)$  aus (6.28) in folgende äquivalente Form umgeschrieben werden:

$$z_1(1) = \phi(\boldsymbol{\lambda}_1(1), \mathbf{x}_1(1)). \quad (6.44)$$

Das Randwertproblem auf dem Intervall  $[0, 1]$  reduziert sich damit zu:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= t_1 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, z_1) & \mathbf{x}_1(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \dot{z}_1 &= t_1 \cdot w_{max} & z_1(1) &= \phi(\boldsymbol{\lambda}_1(1), \mathbf{x}_1(1)) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= (t_F - t_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, z_2) & \mathbf{x}_2(0) &= \mathbf{x}_1(1) \\ \dot{t}_1 &= 0 & \lambda_2(1) &= 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 &= -t_1 \mathbf{f}_{\mathbf{x}_1}^T(\mathbf{x}_1, z_1) \boldsymbol{\lambda}_1 & \boldsymbol{\lambda}_1(1) &= \boldsymbol{\lambda}_3(0) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_3 &= -(t_F - t_1) \mathbf{f}_{\mathbf{x}_2}^T(\mathbf{x}_2, z_2) \boldsymbol{\lambda}_3 & \boldsymbol{\lambda}_3(1) &= \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}_2(1)} \\ & & \lambda_2(0) &= 0 \\ \dot{\lambda}_2 &= -t_1 \mathbf{f}_{z_1}^T(\mathbf{x}_1, z_1) \boldsymbol{\lambda}_1 & \lambda_5(0) &= 0 \\ \dot{\lambda}_5 &= -\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1, z_1) \boldsymbol{\lambda}_1 - \lambda_2 w_{max} + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_2, z_2) \boldsymbol{\lambda}_3 & \lambda_5(1) &= 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

Mit  $z_2$  aus (6.43) sind in (6.45)  $z_2$  und  $\lambda_4$  komplett eliminiert. Allerdings taucht ein neues Problem auf: Für acht Differentialgleichungen stehen neun Randbedingungen zur Verfügung, das heißt, das Randwertproblem (6.45) scheint überbestimmt zu sein. Man kann aber zeigen, dass auf eine der Bedingungen (6.34) oder (6.39) verzichtet werden kann:

### Satz 6.1 ([210])

*Betrachtet werde das Optimalsteuerungsproblem (6.19) bis (6.25), was auf das Randwertproblem (6.45) führt. Dann gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Die Bedingung  $\lambda_5(1) = 0$  ist redundant.*

*Beweis.* Bildet man die totale Ableitung nach der Zeit für die Differentialgleichung von  $\lambda_5$  in (6.45), so ergibt sich unter Berücksichtigung der Differentialgleichungen (6.27) und (6.30), sowie der Bedingung für  $\lambda_4$  aus (6.31) bzw. (6.40):

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_5 &= -\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1, z_1)\boldsymbol{\lambda}_1 - \lambda_2 w_{max} + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_2, z_2)\boldsymbol{\lambda}_3, \\
 \ddot{\lambda}_5 &= -\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1, z_1)\dot{\boldsymbol{\lambda}}_1 - \boldsymbol{\lambda}_1^T(\mathbf{f}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_1, z_1)\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{f}_{z_1}(\mathbf{x}_1, z_1)\dot{z}_1) - \dot{\lambda}_2 w_{max} + \\
 &\quad \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_2, z_2)\dot{\boldsymbol{\lambda}}_3 + \boldsymbol{\lambda}_3^T(\mathbf{f}_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_2, z_2)\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{f}_{z_2}(\mathbf{x}_2, z_2)\dot{z}_2) \\
 &= t_1 \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1, z_1)\mathbf{f}_{\mathbf{x}_1}^T(\mathbf{x}_1, z_1)\boldsymbol{\lambda}_1 - t_1 \boldsymbol{\lambda}_1^T(\mathbf{f}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_1, z_1)\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, z_1) + \mathbf{f}_{z_1}(\mathbf{x}_1, z_1)w_1) + \\
 &\quad t_1 \mathbf{f}_{z_1}^T(\mathbf{x}_1, z_1)\boldsymbol{\lambda}_1 w_{max} - (t_F - t_1)\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_2, z_2)\mathbf{f}_{\mathbf{x}_2}^T(\mathbf{x}_2, z_2)\boldsymbol{\lambda}_3 + \\
 &\quad (t_F - t_1)\boldsymbol{\lambda}_3^T(\mathbf{f}_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_2, z_2)\mathbf{f}(\mathbf{x}_2, z_2) + \mathbf{f}_{z_2}(\mathbf{x}_2, z_2)w_2) \\
 &= (t_f - t_1)\boldsymbol{\lambda}_3^T \mathbf{f}_{z_2}(\mathbf{x}_2, z_2)w_2 = -\dot{\lambda}_4 w_2 = 0,
 \end{aligned}$$

und somit gilt:  $\dot{\lambda}_5 = const =: C_4 \quad \forall \tau \in [0, 1]$ .

Für die Auswertung von  $\dot{\lambda}_5$  an den Stellen  $\tau = 0$  und  $\tau = 1$ , werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 C_1 &:= \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1(0), z_1(0))\boldsymbol{\lambda}_1(0), & \bar{C}_2 &:= \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_2(0), z_2(0))\boldsymbol{\lambda}_3(0), \\
 C_2 &:= \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_1(1), z_1(1))\boldsymbol{\lambda}_1(1), & C_3 &:= \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_2(1), z_2(1))\boldsymbol{\lambda}_3(1).
 \end{aligned}$$

Mit den Randwerten aus (6.45) gilt:  $\bar{C}_2 = C_2$  und man erhält

$$\begin{aligned}
 -C_1 + C_2 - C_4 &= 0, \\
 -C_2 + C_3 - C_4 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

Die erste Variation von  $\tilde{I}$  bezüglich der unabhängigen Variable  $\tau$  führt auf die Bedingung  $\tilde{H}\Big|_{\tau=0,1} = 0$ , mit  $\tilde{H}$  gemäß (6.29). Unter Verwendung der Abkürzungen  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  erhält man

$$\begin{aligned}
 t_1 C_1 + (t_F - t_1)C_2 &= 0, \\
 t_1 C_2 + (t_F - t_1)C_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Die Gleichungen (6.46) und (6.47) stellen ein homogenes Gleichungssystem dar:

$$\begin{pmatrix} t_1 & (t_F - t_1) & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & (t_F - t_1) & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für  $\tau \in ]0, 1[$  hat die Matrix vollen Rang und es gilt  $C_4 = 0$ . Schließlich erhält man damit  $\lambda_5 = const \quad \forall \tau \in [0, 1]$ .  $\diamond$

Die Rücktransformation des Randwertproblems (6.45) auf das ursprüngliche Zeitintervall  $t \in [t_0, t_F]$  führt auf das folgende stückweise definierte Randwertproblem nicht-konstanter Dimension und einer nicht-konstanten Anzahl von Steuervariablen [210]:

$$\begin{array}{l|l}
 t \in [t_0, t_1] & : \\
 \dot{\mathbf{x}} & = \mathbf{f}(\mathbf{x}, z) \\
 \dot{z} & = w_{max} \\
 \dot{\lambda}_1 & = -\mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}, z)\lambda_1 \\
 \hline
 t \in [t_1, t_F] & : \\
 \dot{\mathbf{x}} & = \mathbf{f}(\mathbf{x}, z) \\
 \dot{\lambda}_1 & = -\mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}, \phi(\lambda_1, \mathbf{x}))\lambda_1
 \end{array} \quad (6.48)$$

mit den Randwerten

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, & \mathbf{x}(t_1^-) &= \mathbf{x}(t_1^+), & \lambda_1(t_F) &= \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t=t_F}, \\
 z(t_1^-) &= \phi(\lambda_1(t_1^-), \mathbf{x}(t_1^-)), \\
 \lambda_1(t_1^-) &= \lambda_1(t_1^+).
 \end{aligned} \quad (6.49)$$

Die Schaltfunktion  $\lambda_2(t)$  ist bestimmt durch

$$\dot{\lambda}_2 = -\mathbf{f}_{z_1}^T(\mathbf{x}_1, z_1)\lambda_1, \quad \lambda_2(t_0) = 0. \quad (6.50)$$

Der Schaltpunkt  $t_1 \in ]t_0, t_F[$  ist festgelegt durch die Schaltbedingung

$$\lambda_2(t_1^-) = 0. \quad (6.51)$$

Die Gleichungen (6.48) bis (6.51) korrespondieren zu dem Optimalsteuerungsproblem

$$\begin{aligned}
 I(u) &:= \Psi(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_F)) \\
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{cases} \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), z_1(0) + \int_0^t w_{max} d\xi\right), & t \in [t_0, t_1], \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)), & t \in [t_1, t_F], \end{cases} \\
 \mathbf{0} &= \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0, \\
 \mathbf{0} &= \mathbf{x}(t_1^-) - \mathbf{x}(t_1^+), \quad 0 = u(t_1^-) - u(t_1^+) \quad (\text{Stetigkeitsbedingung}).
 \end{aligned}$$

Bis auf eine additive Konstante ist die Steuerung  $u$  auf dem Intervall  $[t_0, t_1]$  bestimmt – diese Konstante wird durch die Stetigkeitsbedingung festgelegt. Auf dem Intervall  $[t_1, t_F]$  wird die ursprüngliche Steuerung beibehalten. Damit ist das Problem der Beschränkung der Ableitung der Steuerung vollständig gelöst [211, 210].

Für die innere Punkt Bedingungen stellt der hier dargestellte Fall den schwierigsten dar. Ein Umschalten zwischen  $w_{max}$  und  $w_{min}$ , oder ein Übergang von einem Randstück zu einem inneren Teilstück der ursprünglichen Steuervariablen  $u$ , kann analog transformiert werden und mit Standardmethoden für lineare Steuerungen behandelt werden [45, 185].

Die Lösungsstruktur der optimalen Lösung – das heißt, die Folge der Intervalle, auf denen verschiedene Beschränkungen aktiv sind – kann durch Homotopietechniken ermittelt werden (vgl. Abschnitt 5.4.1).

### 6.2.4 Beispiel

Das Optimalsteuerungsproblem mit konkurrierenden Steuerungen wird hier wieder aufgegriffen und obige Lösungsstrategie erweitert, um auf den miniaturisierten Greifer angewendet werden zu können. Ähnliche Beispiele finden sich in [211, 210].

Die konkurrierenden Steuerungen  $\mathbf{u}^f$  und  $\mathbf{u}^s$  mit  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^f + \mathbf{u}^s$  werden gemäß (6.2) und (6.16) wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{max}^f &= (0.25, 0.05, 0.40, 0.20, 0.07, 0.35)^T & [Nm], \\ \mathbf{w}_{max}^f &= (100.00, 100.00, 100.00, 100.00, 100.00, 100.00)^T & [Nm/s], \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{max}^s &= (0.00, 0.45, 0.00, 0.00, 0.40, 0.00)^T & [Nm], \\ \mathbf{w}_{max}^s &= (10.00, 8.00, 10.00, 10.00, 8.50, 10.00)^T & [Nm/s]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Die Komponenten von  $\dot{\mathbf{u}}^f$ , für die Beschränkungen  $|\dot{\mathbf{u}}^f| \leq \mathbf{w}_{max}^f$  aktiv sind, werden in der Index-Menge  $I_a$ , die Komponenten, für die keine dieser Beschränkungen aktiv ist, werden in der Index-Menge  $I_p$  gesammelt. Analog werden die Index-Mengen  $J_a$  für Komponenten von  $\mathbf{u}^s$  mit aktiver Beschränkung und  $J_p$  für Komponenten mit inaktiven Beschränkungen eingeführt. Desweiteren werden

$$\begin{aligned} z_i^f &:= u_i^f, & i \in I_a, \\ z_j^s &:= u_j^s, & j \in J_a, \end{aligned}$$

sowie  $\mathbf{s}^f \in \mathbb{R}^6$  und  $\mathbf{s}^s \in \mathbb{R}^6$  mit

$$s_k^f := \begin{cases} u_k^f & \text{für } k \in I_p \\ z_k^f & \text{für } k \in I_a \end{cases} \quad k = 1, \dots, 6, \quad (6.54)$$

$$s_k^s := \begin{cases} u_k^s & \text{für } k \in J_p \\ z_k^s & \text{für } k \in J_a \end{cases} \quad k = 1, \dots, 6, \quad (6.55)$$

$$\text{und } \mathbf{s} := \mathbf{s}^f + \mathbf{s}^s. \quad (6.56)$$

definiert. Als zu minimierendes Zielfunktional für das energieoptimale Steuerungsproblem wird

$$I(\mathbf{s}(t)) = \int_{\tau_0}^{\tau_F} \frac{\sum_k \left( (s_k^f)^2 + (s_k^s)^2 \right)}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2} dt \quad (6.57)$$

mit Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0$  [s] und fester Endzeit  $t_F = 0.137$  [s] betrachtet und es ergibt sich als Hamiltonfunktion

$$H = \frac{\sum_k \left( (s_k^f)^2 + (s_k^s)^2 \right)}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2} + \boldsymbol{\lambda}_1^T \dot{\mathbf{x}} + \sum_{i \in I_a} \lambda_{2,i} \dot{z}_i^f + \sum_{j \in J_a} \lambda_{3,j} \dot{z}_j^s. \quad (6.58)$$

Unter Berücksichtigung von (6.54) und (6.55) gilt

$$\frac{\sum_{k=1}^6 \left( (s_k^f)^2 + (s_k^s)^2 \right)}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2} = \frac{\sum_{k \in I_p} (u_k^f)^2 + \sum_{i \in I_a} (z_i^f)^2 + \sum_{k \in J_p} (u_k^s)^2 + \sum_{j \in J_a} (z_j^s)^2}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2}.$$

Das optimale Steuerungsproblem wird in das Randwertproblem nicht-konstanter Dimension

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}^6 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\Theta} \\ \mathbf{s}(t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix}, \quad (6.59)$$

$$\dot{z}_i^f(t) = w_i^f, \quad i \in I_a, \quad w_i^f \in \{-w_{max,i}^f, w_{max,i}^f\}, \quad (6.60)$$

$$\dot{z}_j^s(t) = w_j^s, \quad j \in J_a, \quad w_j^s \in \{-w_{max,j}^s, w_{max,j}^s\}, \quad (6.61)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -H_{\mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}\right)^T \lambda_1, \quad (6.62)$$

$$\dot{\lambda}_{2,i} = -H_{z_i^f} = -\frac{2z_i^f}{\|u_{max}^f\|^2 + \|u_{max}^s\|^2} - \left(\frac{\partial}{\partial z_i^f} \dot{\mathbf{x}}\right)^T \lambda_1, \quad i \in I_a, \quad (6.63)$$

$$\dot{\lambda}_{3,j} = -H_{z_j^s} = -\frac{2z_j^s}{\|u_{max}^f\|^2 + \|u_{max}^s\|^2} - \left(\frac{\partial}{\partial z_j^s} \dot{\mathbf{x}}\right)^T \lambda_1, \quad j \in J_a, \quad (6.64)$$

mit Randwerten gemäß (6.1), transformiert. Die adjungierten Variablen werden mit  $\lambda_1$ ,  $\lambda_{2,i}$  für  $i \in I_a$  und  $\lambda_{3,j}$  für  $j \in J_a$  bezeichnet, ansonsten gelten die Bezeichnungen wie im Beispiel in Abschnitt 6.1.2.

Die Steuerungen  $u_i^f$  mit  $i \in I_p$  und  $u_j^s$  mit  $j \in J_p$ , für welche in diesem Fall keine Beschränkung der Ableitung aktiv ist, erhält man – zusammen mit der Legendre-Clebsch-Bedingung – aus

$$0 = H_{u_i^f} = \frac{2u_i^f}{\|u_{max}^f\|^2 + \|u_{max}^s\|^2} + \left(\frac{\partial}{\partial u_i^f} \dot{\mathbf{x}}\right)^T \lambda_1, \quad i \in I_p, \quad (6.65)$$

$$0 = H_{u_j^s} = \frac{2u_j^s}{\|u_{max}^f\|^2 + \|u_{max}^s\|^2} + \left(\frac{\partial}{\partial u_j^s} \dot{\mathbf{x}}\right)^T \lambda_1, \quad j \in J_p. \quad (6.66)$$

### Bemerkung 6.2

Die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial z_i^f} \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial z_j^s} \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial u_i^f} \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial u_j^s} \dot{\mathbf{x}}$$

werden wieder effizient durch eine erweiterte Newton-Euler-Rekursion [57] berechnet.

Die Steuerungen  $w_i^f$  für  $i \in I_a$  und  $w_j^s$  für  $j \in J_a$  kommen linear in der Hamiltonfunktion (6.58) vor und man erhält die Schaltfunktionen

$$S_i^f := H_{w_i^f} = \lambda_{2,i}, \quad i \in I_a, \quad S_j^s := H_{w_j^s} = \lambda_{3,j}, \quad j \in J_a. \quad (6.67)$$

Das heißt in diesem Fall sind die Schaltfunktionen die zusätzlichen adjungierten Variablen  $\lambda_{2,i}$  für  $i \in I_a$  und  $\lambda_{3,j}$  für  $j \in J_a$  und legen die Vorzeichen von  $w_i^f(t)$  und  $w_j^s(t)$  fest:

$$w_i^f(t) = \begin{cases} -w_{max,i}^f & \text{falls } \lambda_{2,i} > 0 \\ +w_{max,i}^f & \text{falls } \lambda_{2,i} < 0 \end{cases}, \quad i \in I_a, \quad (6.68)$$

$$w_j^s(t) = \begin{cases} -w_{max,j}^s & \text{falls } \lambda_{3,j} > 0 \\ +w_{max,j}^s & \text{falls } \lambda_{3,j} < 0 \end{cases}, \quad j \in J_a. \quad (6.69)$$

An Schaltpunkten  $t_s$  an denen mindestens eine der Beschränkungen der Ableitung aktiv oder inaktiv wird, ändern sich die Indexmengen von  $I_a$  bei  $t_s^-$  in  $\tilde{I}_a$  bei  $t_s^+$  und von  $J_a$  bei  $t_s^-$  in  $\tilde{J}_a$  bei  $t_s^+$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird  $I_a \subseteq \tilde{I}_a$  und  $\tilde{J}_a \subseteq J_a$  angenommen. Damit können die Bedingungen sowohl an einem Aufsprungpunkt, als auch an einem Absprungpunkt formuliert werden und es müssen folgende innere Punktbedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_s^-) &= \mathbf{x}(t_s^+), \\ u_i^f(t_s^-) &= z_i^f(t_s^+), \quad i \in \tilde{I}_a \setminus I_a, & z_j^s(t_s^-) &= u_j^s(t_s^+), \quad j \in J_a \setminus \tilde{J}_a, \\ z_i^f(t_s^-) &= z_i^f(t_s^+), \quad i \in I_a, & z_j^s(t_s^-) &= z_j^s(t_s^+), \quad j \in \tilde{J}_a, \\ \boldsymbol{\lambda}_1(t_s^-) &= \boldsymbol{\lambda}_1(t_s^+), \\ \lambda_{2,i}(t_s^-) &= \lambda_{2,i}(t_s^+), \quad i \in I_a, & \lambda_{3,j}(t_s^-) &= \lambda_{3,j}(t_s^+), \quad j \in \tilde{J}_a, \\ \lambda_{2,i}(t_s^-) &= 0, \quad i \in \tilde{I}_a \setminus I_a, & \lambda_{3,j}(t_s^-) &= 0, \quad j \in J_a \setminus \tilde{J}_a. \end{aligned}$$

Für dieses Beispiel zeigt Abbildung 6.2 das Verhalten der optimalen Steuerungen; durch  $\tau := \frac{t}{t_F - t_0} = \frac{t}{t_F}$  auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$  transformiert. Die Schaltpunkte sind in Tabelle 6.3 aufgelistet. An den Schaltpunkten  $\tau_6$ ,  $\tau_7$ ,  $\tau_{10}$  und  $\tau_{13}$  ändert sich die Indexmenge  $J_a$ :

$$\begin{aligned} J_a(\tau_6^-) = \emptyset &\longrightarrow J_a(\tau_6^+) = \{2\} \\ J_a(\tau_7^-) = \{2\} &\longrightarrow J_a(\tau_7^+) = \{2, 5\} \\ J_a(\tau_{10}^-) = \{2, 5\} &\longrightarrow J_a(\tau_{10}^+) = \{2\} \\ J_a(\tau_{13}^-) = \{2\} &\longrightarrow J_a(\tau_{13}^+) = \emptyset \end{aligned}$$

Das heißt, am Schaltpunkt  $\tau_6$  wird die Beschränkung  $w_2^s \leq w_{max,2}^s$  aktiv, am Schalt-

---

$\tau_1 = 0.083592$	$\tau_7 = 0.286395$	$\tau_{13} = 0.679408$
$\tau_2 = 0.091875$	$\tau_8 = 0.518840$	$\tau_{14} = 0.693571$
$\tau_3 = 0.096625$	$\tau_9 = 0.559569$	$\tau_{15} = 0.711393$
$\tau_4 = 0.155421$	$\tau_{10} = 0.576198$	$\tau_{16} = 0.766194$
$\tau_5 = 0.214970$	$\tau_{11} = 0.651682$	$\tau_{17} = 0.866703$
$\tau_6 = 0.231661$	$\tau_{12} = 0.678124$	$\tau_{18} = 0.977383$

---

**Tabelle 6.3:** Schaltpunkte, transformiert auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$ .

punkt  $\tau_{13}$  wird sie wieder inaktiv. Die Beschränkung  $w_5^s \leq w_{max,5}^s$  wird bei  $\tau_7$  aktiv und bei  $\tau_{10}$  wieder inaktiv. Diese Bereiche sind in den Abbildungen 6.2 und 6.3 farblich hinterlegt.

Die zugehörigen Schaltfunktionen sind in Abbildung 6.3 dargestellt. Für  $S_2^s := \lambda_{3,2} < 0$  gilt  $w_2^s = w_{max,2}^s$  und für  $S_5^s := \lambda_{3,5} < 0$  gilt entsprechend  $w_5^s = w_{max,5}^s$ . Die restlichen Schaltpunkte in Tabelle 6.3 bezeichnen den Beginn oder das Ende einer Steuerbeschränkung, welche sehr effizient durch Standardmethoden der optimalen Steuerung behandelt werden [45, 185].

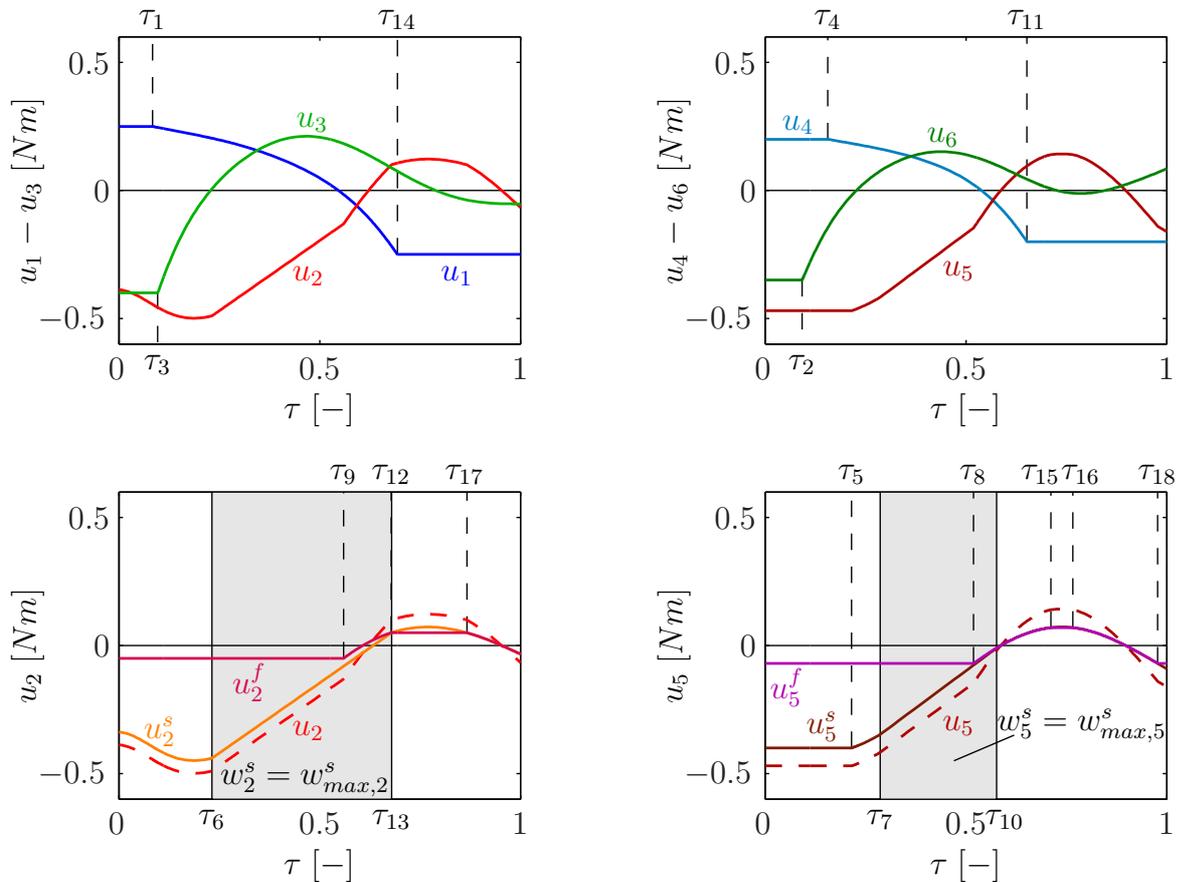


Abbildung 6.2: Steuerungen  $u_1 - u_6$  als Funktion von  $\tau := t/\tau_F$ .

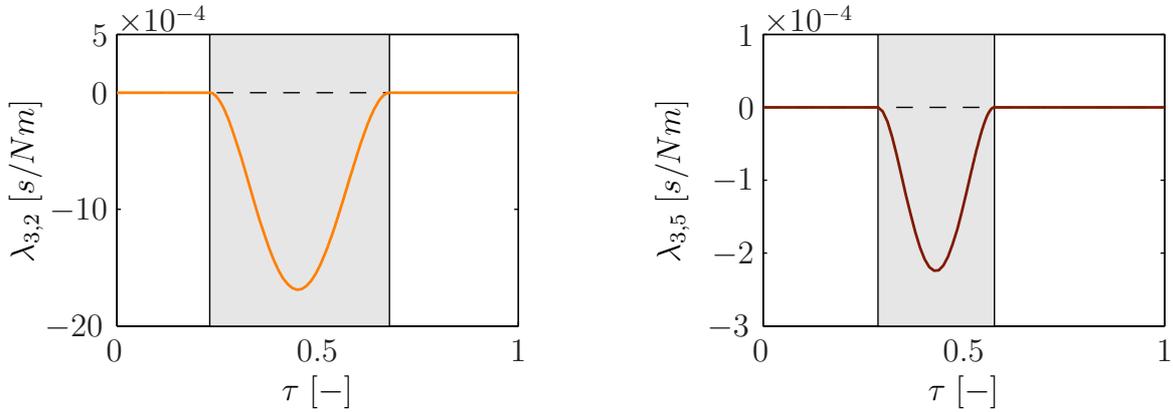
In diesem Beispiel muss die Hamiltonfunktion wieder konstant sein, was wieder mit einer relativen Genauigkeit von  $10^{-9}$  erfüllt ist.

In Anhang B, Abbildung B.3 bzw. Abbildung B.4 finden sich der zeitliche Verlauf der Winkel  $\theta_1 - \theta_6$ , der Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_6$ , sowie der adjungierten Variablen  $\lambda_1 - \lambda_{12}$ .

Wie in Abschnitt 6.2.2 angesprochen, führt beim herkömmlichen Ansatz der Übergang der ursprünglichen Steuervariablen zu deren Ableitungen als neue Steuervariablen auf ein erheblich komplizierteres Steuerungsproblem.

**Klassischer Ansatz.** Der klassische Ansatz, um die Beschränkung der Ableitung der Steuerung zu berücksichtigen, wird nur für Vergleichszwecke angegeben. In diesem Fall sind die Ableitungen der ursprünglichen Steuerungen die einzigen Steuerungen. Mit der Hamiltonfunktion

$$H = \frac{\sum_{k=1}^n \left( (z_k^f)^2 + (z_k^s)^2 \right)}{\|u_{max}^f\|^2 + \|u_{max}^s\|^2} + \lambda_1^T \dot{x} + \lambda_2^T \dot{z}^f + \lambda_3^T \dot{z}^s, \quad (6.70)$$



**Abbildung 6.3:** Adjungierte Variablen  $\lambda_{3,2}$  und  $\lambda_{3,5}$  als Funktion von  $\tau := t/\tau_F$ .

und den Definitionen  $\mathbf{z}^f := \mathbf{u}^f \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z}^s := \mathbf{u}^s \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z} := \mathbf{z}^f + \mathbf{z}^s$  ergibt sich das System nichtlinearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^6 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{\Theta} \\ \mathbf{z}(t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathbf{z}}^f(t) &= \mathbf{w}^f, \\ \dot{\mathbf{z}}^s(t) &= \mathbf{w}^s, \\ \dot{\lambda}_1 &= -H_{\mathbf{x}} = - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \lambda_1, \\ \dot{\lambda}_2 &= -H_{\mathbf{z}^f} = - \frac{2}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2} \cdot \mathbf{z}^f - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^f} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \lambda_1, \\ \dot{\lambda}_3 &= -H_{\mathbf{z}^s} = - \frac{2}{\|\mathbf{u}_{max}^f\|^2 + \|\mathbf{u}_{max}^s\|^2} \cdot \mathbf{z}^s - \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^s} \dot{\mathbf{x}} \right)^T \lambda_1. \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen sind identisch mit (6.59),  $\lambda_2 \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda_3 \in \mathbb{R}^n$  sind die zu  $\mathbf{z}^f$  und  $\mathbf{z}^s$  korrespondierenden adjungierten Variablen und  $\mathbf{w}^f \in \mathbb{R}^n$ , sowie  $\mathbf{w}^s \in \mathbb{R}^n$  sind die neuen Steuerungen. Man beachte, dass hier alle Differentialgleichungen für  $t \in [t_0, t_F]$  definiert sind.

Da  $\mathbf{w}^f$  und  $\mathbf{w}^s$  linear in der Hamiltonfunktion (6.70) vorkommen, ergeben sich die Steuerungen aus

$$\begin{aligned} w_i^f(t) &= \begin{cases} -w_{max,i}^f & \text{falls } \lambda_{2,i} > 0 \\ w_{i,sing}^f(t) & \text{falls } \lambda_{2,i} = 0 \\ +w_{max,i}^f & \text{falls } \lambda_{2,i} < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n, \\ w_j^s(t) &= \begin{cases} -w_{max,j}^s & \text{falls } \lambda_{3,j} > 0 \\ w_{j,sing}^s(t) & \text{falls } \lambda_{3,j} = 0 \\ +w_{max,j}^s & \text{falls } \lambda_{3,j} < 0 \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Im Falle singularer Steuerungen  $w_{i,sing}^f(t)$  oder  $w_{j,sing}^s(t)$  ist die Ordnung der singulären Steuerung eins, d. h. die zweite totale Ableitung der zugehörigen adjungierten Variable muss berechnet werden, um die nötigen Informationen zur Berechnung der Steuerung zu erhalten (vgl. Abschnitt 5.3). Da die ursprünglichen Steuerungen in das Zielfunktional eingehen, erhält man ein DAE System vom Index 3. Durch die Transformation wird jede der vormaligen Steuerbeschränkungen (6.2) zu einer Zustandsbeschränkung erster Ordnung.

In Tabelle 6.4 sind die Anzahl der aktiven Zustandsbeschränkungen und singulären Steuerungen auf den einzelnen Teilintervallen zusammengefasst. An den einzelnen

	Zustands- beschränkung (1. Ordnung)	Singuläre Steuerungen		Zustands- beschränkung (1. Ordnung)	Singuläre Steuerungen
$]0, \tau_1 [$	7	1	$] \tau_{10}, \tau_{11} [$	0	7
$] \tau_1, \tau_2 [$	6	2	$] \tau_{11}, \tau_{12} [$	1	6
$] \tau_2, \tau_3 [$	5	3	$] \tau_{12}, \tau_{13} [$	2	5
$] \tau_3, \tau_4 [$	4	4	$] \tau_{13}, \tau_{14} [$	2	6
$] \tau_4, \tau_5 [$	3	5	$] \tau_{14}, \tau_{15} [$	3	5
$] \tau_5, \tau_6 [$	2	6	$] \tau_{15}, \tau_{16} [$	4	4
$] \tau_6, \tau_7 [$	2	5	$] \tau_{16}, \tau_{17} [$	3	5
$] \tau_7, \tau_8 [$	2	4	$] \tau_{17}, \tau_{18} [$	2	6
$] \tau_8, \tau_9 [$	1	5	$] \tau_{18}, 1 [$	3	5
$] \tau_9, \tau_{10} [$	0	6			

**Tabelle 6.4:** *Klassischer Ansatz: Anzahl der aktiven Zustandsbeschränkungen und singulären Steuerungen auf den Teilintervallen.*

Schaltpunkten müssen beim klassischen Ansatz die entsprechenden inneren Punktbedingungen erfüllt sein. Da einzelne aktive Zustandsbeschränkungen mit singulären Steuerungen zusammenfallen können, müssen in jedem einzelnen Fall die inneren Punktbedingungen mühsam hergeleitet werden. Die meisten Sätze in der Literatur sind beschränkt auf den Fall von nur wenigen aktiven Zustandsbeschränkungen, oder nur wenigen singulären Steuerungen, allerdings auf *inneren* Teilintervallen, d. h. Randpunkte sind ausgeschlossen. Diese Sätze müssten noch erweitert werden, um sie in diesem Fall anwenden zu können.

Der klassische Ansatz ist darüber hinaus ein Beispiel für ein Phänomen, dass theoretisch bekannt ist, aber selten in echten Steuerungsproblemen auftritt: Wenn Steuerungen linear in der Hamiltonfunktion vorkommen, können singuläre Steuerungen auch auftreten, obwohl keine andere Beschränkung aktiv ist.

## Kapitel 7

### Berücksichtigung der Roboterelastizitäten

Für den Mehrfinger-Greifer aus Kapitel 1 sollen zusätzlich Elastizitäten berücksichtigt werden. Der Mehrfinger-Greifer stellt damit ein elastisches Mehrkörpersystem dar. Die Bewegung wird als Überlagerung einer Starrkörperbewegung mit kleinen Deformationen betrachtet und die lineare Elastizitätstheorie angewendet. Als Starrkörperbewegung wird dabei die optimale Lösung mit konkurrierenden Steuerungen und Beschränkung der Ableitung der Steuerungen aus Abschnitt 6.2 zugrunde gelegt.

#### 7.1 Überblick über Finite-Elemente-Methoden bei flexiblen Robotern

Auf dem Gebiet flexibler Mehrkörpersysteme existiert eine umfangreiche Literatur. Im Folgenden soll ein Literaturüberblick bei flexiblen Robotern mit Finite-Elemente Methoden gegeben werden. Dabei wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Für einen Überblick mit anderen Lösungsansätzen, wie zum Beispiel modalen Ansätzen, sei auf [84, 224] verwiesen. Verschiedene mathematische Darstellungsmöglichkeiten von elastischen Armen und Gelenken werden in [33] zusammengefasst. In [243] wird der modale Ansatz mit dem Finite-Elemente-Ansatz für einen Roboter mit zwei rotatorischen Gelenken und einem prismatischen Gelenk verglichen. Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen werden in geschlossener Form angegeben. Die Deformationen werden mittels der Euler-Bernoulli Balkentheorie ermittelt.

In [181, 182] werden die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen für elastische Mechanismen hergeleitet. Die elastischen Glieder werden mit finiten Elementen modelliert. Sowohl die Freiheitsgrade der Starrkörper, als auch der elastischen Körper werden als generalisierte Koordinaten betrachtet. Die Bewegungsgleichungen werden in geschlossener Form angegeben. Ein numerisches Beispiel wird nicht angegeben. In [43] wird die Finite-Elemente-Methode benutzt, um einen elastischen Roboter zu untersuchen. Es werden die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen herangezogen. Der Algorithmus wird an einem planaren Roboter demonstriert, wobei als finite Elemente 2D Balkenelemente dienen. Eine finite Elemente Diskretisierung wurde auch in [174, 175] gewählt, um die Bewegung eines flexiblen Roboters entlang einer vorgegebenen Bahn mit jeder gewünschten Genauigkeit zu beschreiben. Als Modell dient ein eingelenkiger flexibler Arm. Die Bewegungsgleichungen werden in linearisierter Form betrachtet und mittels Laplace-Transformation gelöst. Zentrifugal- und Corioliskräfte werden nicht

berücksichtigt und für die finiten Elemente wird die Euler-Bernoulli Balkentheorie zugrunde gelegt. Ebenfalls ein eingelenkiger Manipulator wird in [60] untersucht. Der flexible Arm wird als Euler-Bernoulli Balken modelliert, Scher- und Rotationseffekte werden vernachlässigt. Als Ansatzfunktionen für die Finite-Elemente-Methode dienen modale Ansatzfunktionen, wobei die ersten beiden Moden benutzt werden. Die Euler-Bernoulli Balkentheorie wird auch in [160, 161, 244, 245] angewendet. Ein dynamisches Modell für einen eingelenkigen flexiblen Manipulator werden hergeleitet und mit der Finite-Elemente-Methode [160, 161, 245] beziehungsweise der Finiten-Differenzen-Methode [244] gelöst. Die Simulationsergebnisse werden mit gemessenen Daten verglichen. In [98] werden die Bewegungsgleichungen mittels der Lagrange'schen Formulierung hergeleitet, der eingelenkige Manipulator als Euler-Bernoulli Balken modelliert und die Gleichungen mit der Finiten-Elemente-Methode gelöst. Mit Hilfe des Finite-Elemente-Programms NASTRAN wird in [6] der Einfluss viskoelastischer Dämpfung untersucht, was zur passiven Regelung von Schwingungen benutzt werden kann. Der Ausleger des flexiblen Manipulators wird mit Balken- und Schalenelementen modelliert und die quasi-statischen Gleichungen gelöst. Ein eingelenkiger flexibler Roboterarm wird mit der Finite-Elemente-Methode in [172] betrachtet, um einen Regler zu entwickeln, der auftretende Schwingungen dämpft. Dabei wird die Euler-Bernoulli Balkentheorie zugrunde gelegt und die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen hergeleitet. Ein Euler-Bernoulli Balken wird auch in [70] benutzt, um einen eingelenkigen flexiblen Roboterarm zu beschreiben. Als finite Elemente dienen Balkenelemente mit zwei Knoten pro Element. Ein eingelenkiger flexibler Roboterarm, der sich in drei Raumdimensionen bewegen kann, wird in [150] betrachtet. Die Bewegungsgleichungen werden explizit angegeben und als finite Elemente dienen Balkenelemente. Grundlagen der optimalen Steuerungen werden herangezogen, um einen linearen Regler zu entwerfen. Auf Grundlage der optimalen Steuerung werden in [148, 186, 188] ebenfalls Regler für eingelenkige flexible Roboter entworfen. In der Arbeit von [156] wird ein dreigelenkiger Roboter, wobei ein flexibles prismatisches Glied berücksichtigt wird, untersucht. Das prismatische Glied wird mit Verbundwerkstoffen modelliert. Darüber hinaus werden geometrische Steifigkeiten berücksichtigt.

Beschränkte und unbeschränkte Bewegungen eines zweigelenkigen planaren flexiblen Roboters werden in [65] analysiert. Anhand eines zweigelenkigen planaren Roboters werden in [133, 225] die Deformationen mit der Finiten-Elemente-Methode berechnet. Als Ansatzfunktionen werden Hermite-Polynome erster Ordnung verwendet. Flexible Roboterglieder werden auch in [147] betrachtet. Dort werden Balkenelemente als finite Elemente gewählt und die Bewegungsgleichungen werden mit Hilfe des Jourdan'schen Prinzips explizit aufgestellt. Auch in [149] werden die Bewegungsgleichungen für einen zweigelenkigen planaren flexiblen Roboter hergeleitet. Als finite Elemente werden Balkenelemente gewählt. Die Bewegungsgleichungen für einen planaren flexiblen Roboter mit zwei Drehgelenken werden in [94, 95] mit dem Newton-Euler Formalismus und Balkenelementen als finite Elemente hergeleitet. In [256] werden numerische Beispiele für einen eingelenkigen und einen zweigelenkigen planaren Manipulator demonstriert. Als finite Elemente dienen Balkenelemente. Die Modellierung wird speziell für Kontaktprobleme angegeben. Ein zweigelenkiger planarer Roboter, bei dem das erste Glied als starr, das zweite als flexibel angenommen wird, findet sich in [157]. Dabei wird die

Lagrange'sche Methode und die Theorie von Euler-Bernoulli Balken zugrunde gelegt. In [82] wird ebenfalls ein planarer Roboter mit einem starren und einem flexiblen Glied betrachtet. Auch dort wird das zweite Glied als Euler-Bernoulli Balken modelliert. Die dynamischen Gleichungen werden mit dem Hamilton'schen Prinzip hergeleitet. In [233] wird unter anderem ein Beispielsystem eines zweigelenkigen planaren Roboters mit elastischen Gliedern berechnet. Die Glieder werden als Euler-Bernoulli Balken modelliert und es werden geometrische Steifigkeiten berücksichtigt.

Die Bewegungsgleichungen für einen mehrgelenkigen flexiblen Roboter werden in [34, 35] mit Hilfe des Newton-Euler Formalismus hergeleitet. Die Deformation eines Gliedes wird als Überlagerung einer Starrkörperbewegung mit kleinen Deformationen betrachtet. In [241] werden mit dem Finite-Elemente Programm NASTRAN die zeitinvarianten Systemmatrizen bestimmt, anschließend die Dimension mit der sogenannten *Component Mode Synthesis* [120] reduziert, mit Matrixtransformationen die zusätzlichen dynamischen Gleichungen berücksichtigt und schließlich die Zeitintegration mit Standardintegrationsverfahren durchgeführt. Das verwendete Integrationschema wird nicht angegeben. Ein mehrgelenkiger flexibler Roboter wird in [73] betrachtet. Die Deformationen werden mit einer Finite-Elemente-Methode realisiert, wobei Linienelemente gewählt werden. Als numerisches Beispiel wird ein flexibler Roboter mit drei rotatorischen Gelenken präsentiert. Räumliche Balkenelemente werden in [96, 97] benutzt, um quasi-statische Berechnungen [96, 97] und dynamische Berechnungen [97] für einen dreigelenkigen planaren flexiblen Roboter durchzuführen. Nichtlineare Balkenelemente werden in [127, 128, 129] benutzt, um mehrgelenkige flexible Roboter zu berechnen. Die generalisierten Koordinaten lassen sich aufteilen in den Anteil der Starrkörperbewegung und den Anteil der überlagerten Deformation. In [83] wird ein mobiler Manipulator betrachtet. Der Manipulator hat drei, das Fahrzeug sechs Freiheitsgrade. Die Deformationen werden mit finiten Elementen berechnet. Die Durchbiegung planarer flexibler Roboter wird in [248, 262] untersucht. Dabei wird die Lagrange'sche Formulierung zugrunde gelegt. Die Deformationen werden mit Finite-Elemente-Ansätzen berechnet, mit Balkenelementen als finiten Elementen. In [262] wird der Einfluss der Rayleigh-Dämpfung berücksichtigt, im Modell von [248] werden die nichtlinearen Gleichungen mit generalisierter Massenmatrix betrachtet. In [102, 104] werden Finite-Elemente-Methoden benutzt, um flexible Roboter zu modellieren. Als finite Elemente dienen Balkenelemente. Als Integrationschema wird in [104] die Newmark-Methode angegeben. In [178, 179, 180] wird ein Finite-Elemente-Modell vorgestellt, das die nichtlinearen Kopplungseffekte zwischen der beschleunigten Starrkörperbewegung und den elastischen Deformationen berücksichtigt. Die Elemente werden aus den Newton-Euler Gleichungen und der Timoshenko Balkentheorie hergeleitet. In [179, 180] wird ein planarer zweigelenkiger Roboter mit rotatorischen Gelenken betrachtet, in [178, 179] ein dreigelenkiger Roboter. In [179] wird darüber hinaus ein flexibler Roboter berechnet, der aus einem rotatorischen und einem prismatischen Gelenk besteht. Die sich ergebenden gewöhnlichen Differentialgleichungen werden mit einem iterativen Verfahren gelöst. In [15] wird ein Lagrange'scher Finite-Elemente-Ansatz gewählt. Die Ansatzfunktionen der Balkenelemente sind Polynome dritten Grades. Die Methode wird an einem zweigelenkigen flexiblen Manipulator demonstriert. Mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode wird in [206, 207] die Elastizität eines zweigelenkigen

Manipulators bei der Bahnplanung berücksichtigt. Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen werden auf der Basis einer Finiten-Elemente-Diskretisierung hergeleitet. Eine ebenfalls auf der Lagrange'schen Formulierung basierende Finite-Elemente-Methode für Manipulatoren mit flexiblen Gliedern und Gelenken wird in [87] betrachtet. In [189] werden lineare 3D Elemente für zylindrische Balken mit zwölf Freiheitsgraden gewählt, um mit der Bernoulli-Euler Balkentheorie die Verschiebungen eines elastischen Balkens zu beschreiben. Eine auf der Finiten-Elemente-Methode basierende Methode wird in [261] angegeben. Es werden die verallgemeinerten Bewegungsgleichungen flexibler Roboter angegeben. Ein numerisches Beispiel, um das Modell zu verifizieren, fehlt. Ein SCARA-Roboter, modelliert mit faserverstärkten Verbundwerkstoffen, wird mittels Finite-Elemente-Methode in [204] untersucht. Ein finites Element für röhrenförmige Glieder wird entwickelt. Redundante Roboter mit flexiblen Gliedern und Gelenken werden in [263, 264, 265] betrachtet. Die flexiblen Glieder und Gelenke werden mit *Rotor Beam Elementen* realisiert – eine Kombination aus Balkenelementen der Finite-Elemente-Methode, um die Glieder zu modellieren, und Torsionsfedern, um die Gelenke zu modellieren. Es wird ein planarer Roboter mit drei Rotationsgelenken untersucht.

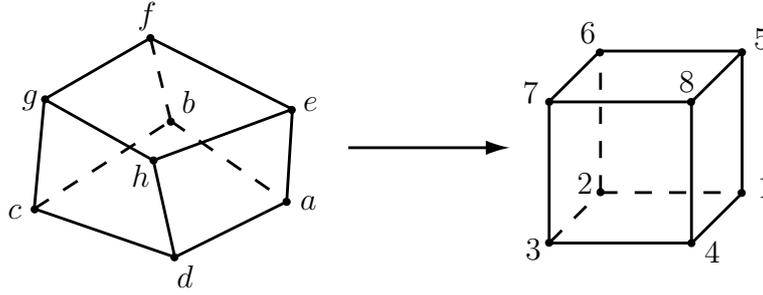
## 7.2 Anwendung der Finiten-Elemente-Methode auf den Mehrfinger-Greifer

Bei der numerischen Behandlung von elastischen Robotern ist die Balkentheorie – vor allem die Euler-Bernoulli Balkentheorie – nicht immer ausreichend, insbesondere bei hohen Querkräften [96, 97]. Bei miniaturisierten Greifern, die als künstliche Hände eingesetzt werden sollen, sind komplizierte Formen nötig, um der Anatomie des Menschen gerecht zu werden. Um diese Anforderungen zu berücksichtigen, wird hier ein allgemeiner Verschiebungsansatz mit 3D finiten Elementen gewählt. Dadurch ist es möglich, jede denkbare Geometrie durch finite Volumenelemente zu diskretisieren und die Belastungen im Inneren der Struktur zu berechnen.

Um die zusätzlichen Trägheitskräfte bei beschleunigten Bezugssystemen zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 4.3), wird ein ähnliches Vorgehen wie in [123] gewählt. In [123] werden die Bewegungsgleichungen des starren Mehrkörpersystems in expliziter Form mittels des Programms NEWEUL [141] bereitgestellt. Die zusätzlichen Trägheitskräfte werden als zusätzliche äußere Kräfte angenommen und gehen lediglich in die rechte Seite der Bewegungsgleichungen (4.45) des flexiblen Körpers ein. Die benötigten Verschiebungen und Geschwindigkeiten werden von dem vorherigen Integrationsschritt benutzt. Mit Hilfe des Finite-Elemente Programms SOLVIA [232] werden verschiedene 2D Beispiele simuliert.

Im Gegensatz zu [123] werden in dieser Arbeit die Bewegungsgleichungen (4.47) mit der modifizierten Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{F\Sigma}$  und Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}_{F\Sigma}$  gelöst, die Bewegungsgleichungen des starren Mehrkörpersystems werden nicht in expliziter Form benötigt und es wird eine dreidimensionale Bewegung simuliert.

Die einzelnen elastischen Glieder des Mehrfinger-Greifers werden hier durch lineare Hexaederelemente diskretisiert. Zur Berechnung der Systemmatrizen aus Abschnitt 4.3,



**Abbildung 7.1:** Transformation auf das Referenzelement.

wird jedes Element auf ein Referenzelement transformiert. Das Element  $e$  mit den globalen Knoten  $a$  bis  $h$  wird transformiert auf das Referenzelement mit den lokalen Knoten 1 bis 8 (vgl. Abbildung 7.1), wobei das Referenzelement ein Würfel mit Kantenlänge 2 ist. Die Punkte des Referenzelements werden durch die Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  beschrieben. Man hat also eine Koordinatentransformation der Form

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

Auf diesem Referenzelement werden nun Ansatzfunktionen  $N_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) gewählt, die jeweils an einem Knoten des Referenzelements den Wert 1, an allen anderen Knoten den Wert 0 annehmen. Man erhält somit als Ansatzfunktionen:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), & N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta), \\ N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), & N_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), \\ N_5(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta), & N_6(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta), \\ N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta), & N_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ansatzfunktionen wird das Verschiebungsfeld  $\mathbf{U}^e$  des Elements  $e$ , wie in Gleichung (4.11) angegeben, approximiert. Dazu sammelt man die Ansatzfunktionen in der Interpolationsmatrix  $\mathbf{N}^e$ :

$$\mathbf{N}^e = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 24}.$$

Zum Aufstellen der Systemmatrizen, müssen Volumenintegrale berechnet werden. Diese Integrationen werden ebenfalls auf dem Referenzelement durchgeführt. Bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix (4.24) in Abschnitt 4.3.1 müssen die Ableitungen der

Ansatzfunktionen nach den materiellen Koordinaten  $\mathbf{x}$  berechnet werden. Für die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen gilt:

$$\begin{aligned} N_{i,\xi} &= N_{i,x} \cdot x_\xi + N_{i,y} \cdot y_\xi + N_{i,z} \cdot z_\xi, \\ N_{i,\eta} &= N_{i,x} \cdot x_\eta + N_{i,y} \cdot y_\eta + N_{i,z} \cdot z_\eta, \\ N_{i,\zeta} &= N_{i,x} \cdot x_\zeta + N_{i,y} \cdot y_\zeta + N_{i,z} \cdot z_\zeta. \end{aligned}$$

Mit der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  der Koordinatentransformation (7.1)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{N}^e \right) \mathbf{z}^e & \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{N}^e \right) \mathbf{z}^e & \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{N}^e \right) \mathbf{z}^e \end{pmatrix}$$

erhält man schließlich

$$\begin{pmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-T}(\xi, \eta, \zeta) \begin{pmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \\ N_{i,\zeta} \end{pmatrix}.$$

Damit können die in Abschnitt 4.3 angegebenen acht Elementmatrizen  $\mathbf{K}^e$ ,  $\mathbf{C}\mathbf{1}^e$  und  $\mathbf{C}\mathbf{3}_{\alpha\beta}^e = \mathbf{C}\mathbf{3}_{\beta\alpha}^{eT}$ , ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) durch die Transformation auf das Referenzelement berechnet werden:

$$\int_{V_0^e} \Upsilon(\mathbf{x}) dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Upsilon(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) \cdot |\det \mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta,$$

wobei  $\Upsilon$  jeweils durch den entsprechenden Ausdruck aus Abschnitt 4.3 zu ersetzen ist.

Die Volumenintegrale werden bei der numerischen Realisierung durch eine  $2 \times 2 \times 2$ -Gauß-Quadraturformel ersetzt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Upsilon(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)) \cdot |\det \mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \approx \\ \sum_{l=1}^8 \Upsilon(\mathbf{x}(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)) \cdot |\det \mathbf{J}(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)| \cdot W_l, \end{aligned}$$

mit den in Tabelle 7.1 zusammengestellten Quadraturpunkten und Gewichten.

Von den acht Volumenintegralen müssen lediglich sieben ausgewertet werden, denn es gilt

### Lemma 7.1

Die Elementmatrix  $\mathbf{C}\mathbf{1}^e$  aus (4.27) lässt sich bei der hier gewählten Interpolationsmatrix  $\mathbf{N}^e$  ebenfalls durch die Element-Massenmatrizen  $\mathbf{C}\mathbf{3}_{\alpha\beta} = \mathbf{C}\mathbf{3}_{\beta\alpha}^T$  aus (4.31) ausdrücken.

$l$	$\xi_l$	$\eta_l$	$\zeta_l$	$W_l$	$l$	$\xi_l$	$\eta_l$	$\zeta_l$	$W_l$
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	5	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	6	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	7	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
4	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	8	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1

**Tabelle 7.1:** Gauß-Quadraturpunkte und Gewichte im Referenzelement.

*Beweis.* Sei  $\mathbf{E}_{N^e} = (\mathbf{E}^3 \ \mathbf{E}^3 \ \mathbf{E}^3 \ \mathbf{E}^3 \ \mathbf{E}^3 \ \mathbf{E}^3 \ \mathbf{E}^3 \ \mathbf{E}^3)^T \in \mathbb{R}^{24 \times 3}$ , dann gilt  $\mathbf{N}^e \cdot \mathbf{E}_{N^e} = \mathbf{E}^3$ , da für die hier gewählten Ansatzfunktionen  $\sum_{i=1}^8 N_i = 1$  gilt. Ferner ist aus Abschnitt 4.3.2 der Zusammenhang

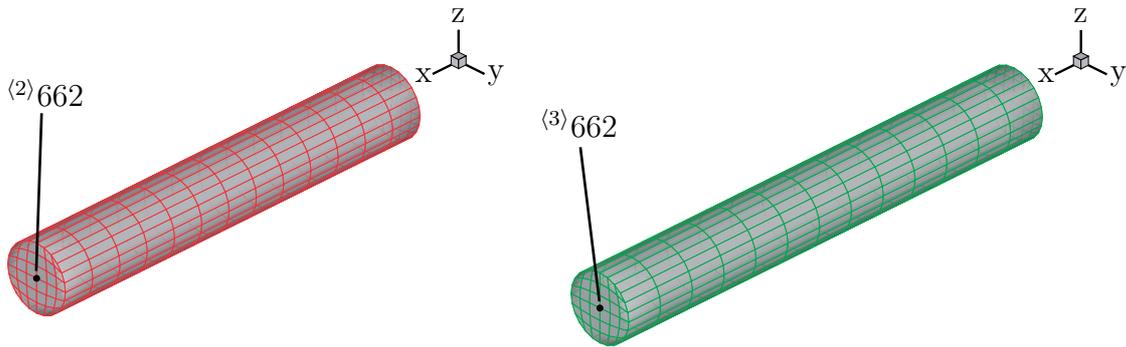
$$\mathbf{C}\mathbf{3}_{11}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{22}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{33}^e = \mathbf{M}^e = \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \rho^e(\mathbf{x}) \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) dV$$

bekannt und es ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}\mathbf{3}_{11}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{22}^e + \mathbf{C}\mathbf{3}_{33}^e) \mathbf{E}_{N^e} &= \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \rho^e(\mathbf{x}) \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \mathbf{E}_{N^e} dV \\ &= \int_{V_0^e} \mathbf{N}^{eT}(\mathbf{x}) \rho^e(\mathbf{x}) dV = \mathbf{C}\mathbf{1}^e. \end{aligned}$$

◇

Zur Berechnung der Bewegungsgleichungen einer Finiten-Elemente-Struktur mit bewegtem Bezugssystem (4.47) werden die Translationsbeschleunigung  $\mathbf{a}$ , die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  und die Winkelbeschleunigung  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  der Starrkörperbewegung benötigt. Desweiteren sind die externen Kräfte zu berücksichtigen, die auf ein Glied des flexiblen Mehrfinger-Greifers wirken – zum Beispiel durch die Bewegung des nachfolgenden Gliedes in der kinematischen Kette. Diese Größen sind im Bezugssystem des jeweiligen Körpers darzustellen. Betrachtet man den rekursiven Newton-Euler-Algorithmus in Abbildung 2.4, so erkennt man, dass dort diese benötigten Größen in der Rekursion berechnet werden. Wählt man die Bezugssysteme der einzelnen flexiblen Körper gemäß den Denavit-Hartenberg-Vereinbarungen (vgl. Abschnitt 2.5), dann stimmen diese mit den Koordinatensystemen der Starrkörperbewegung überein. Damit sind die Bewegungsgleichungen der Starrkörperbewegung nicht in expliziter Form nötig, vielmehr stellt der rekursive Newton-Euler-Algorithmus die benötigten Größen für jedes Glied des Mehrkörpersystems bereit.



**Abbildung 7.2:** Diskretisierung von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts) jeweils mit 686 Knoten und 468 Hexaederelementen.

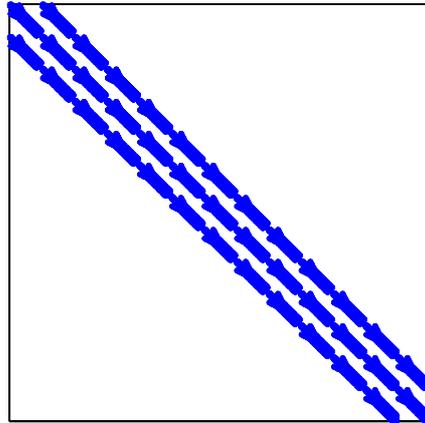
### 7.3 Beispiel

Die Berechnung der Finite-Elemente Simulation wird mit dem im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Finite-Elemente-Programm SOLASTICA durchgeführt. Es löst speziell Probleme aus der Festkörpermechanik auf Grundlage der linearen Elastizitätstheorie mit 3D Finiten-Elementen (Hexaederelemente) unter Berücksichtigung der zusätzlichen Trägheitskräfte, die sich aus einem beschleunigten Bezugssystem ergeben. Die zu lösenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden mittels der Newmark-Methode (vgl. Abschnitt 4.4) mit konstanter Schrittweite gelöst.

Von dem Mehrfinger-Greifer aus Kapitel 1 werden die vorderen beiden Glieder (Glied 2 und 3 bzw. 5 und 6) als elastisch, die auf der gemeinsamen Basis montierten Glieder (Glied 1 bzw. 4) als starr angenommen. In der Tat treten bei einem typischen Industrieroboter mit sechs Freiheitsgraden nur bei zweien der Glieder signifikante Trägheitskräfte auf. Diese beiden Glieder sollten als elastische Arme betrachtet werden [173]. Dieser Tatsache wird hier Rechnung getragen. Da sich bei der Simulation für den zweiten Finger (Glied 5 und 6) qualitativ gleiche Lösungen ergeben, wird an dieser Stelle auf die Darstellung der Ergebnisse verzichtet.

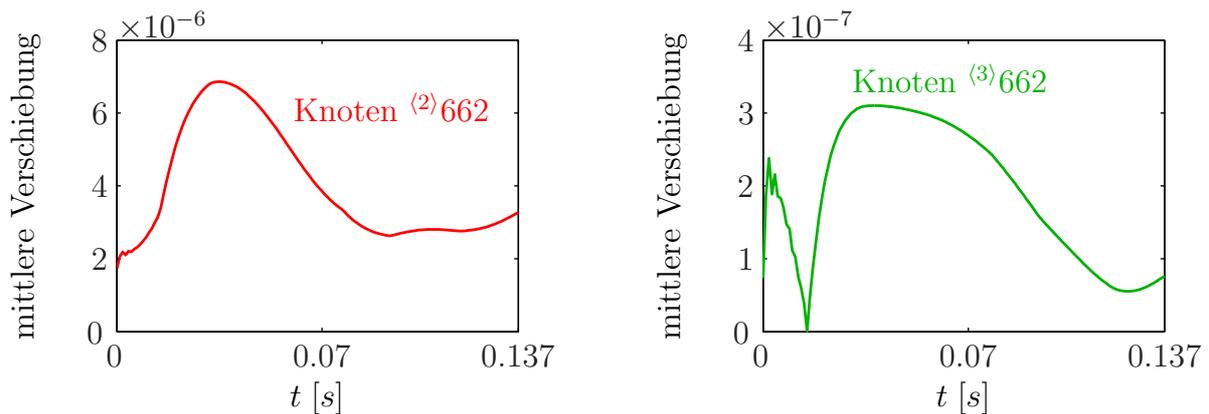
Um die beiden Glieder unterscheiden zu können, wird im Folgenden mit einem oberen Index  $\langle i \rangle$  ( $i = 2, 3$ ) gekennzeichnet, auf welches Glied sich die jeweilige Größe bezieht. Die Gelenke werden als idealisierte Verbindungen betrachtet. Die einzelnen Glieder werden auf einer Seite als fest eingespannt mit homogenen Dirichlet Randbedingungen angenommen. Abbildung 7.2 zeigt die Diskretisierung der beiden Glieder mit Hexaederelementen. Jedes Glied wird mit 686 Knoten in 468 Elemente unterteilt.

Die Systemmatrizen einer Finite-Elemente-Diskretisierung sind dünn besetzt. Abbildung 7.3 zeigt die Besetzungsstruktur der Steifigkeitsmatrix  ${}^{(2)}\mathbf{K}_F$ . Bei zu großer Bandbreite der dünnbesetzten Matrizen ist es sinnvoll, eine Permutation durchzuführen, so dass eine möglichst geringe Bandbreite entsteht. Dies entspricht einer Umnummerierung der Knotenpunkte. Ein Überblick über mögliche Permutationsalgorithmen findet sich in [106]. Dort wird der *Reverse-Cuthill-McKee-Algorithmus* als effizientester bezeichnet. Eine Beschreibung des Reverse-Cuthill-McKee-Algorithmus findet man zum Beispiel in [105].



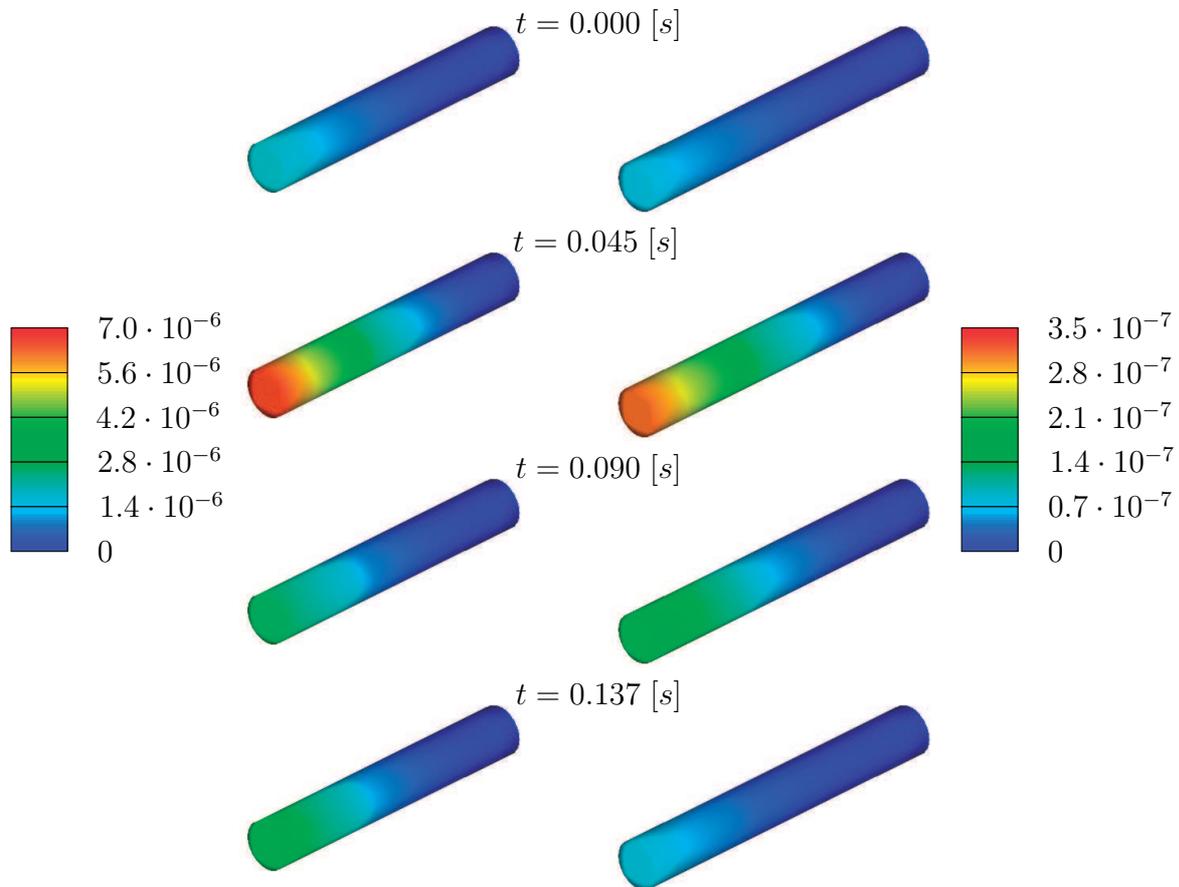
**Abbildung 7.3:** Besetzungsstruktur der Steifigkeitsmatrix  ${}^{(2)}\mathbf{K}_F$  mit 120213 von Null verschiedenen Einträgen.

Als Dämpfung wird eine Rayleigh-Dämpfung (4.46), mit  $\alpha_R = 1.0$  und  $\beta_R = 8 \cdot 10^{-5}$  angenommen und die Parameter der Newmark-Methode zu  $\delta_{NM} = \frac{1}{2}$  und  $\alpha_{NM} = \frac{1}{4}$  gewählt. Als Startwert für die Verschiebungen wird die stationäre Lösung  $\mathbf{K}_F \mathbf{z}_F = \mathbf{h}_{Fg}$ , die sich unter Einfluss der Gravitation ergibt, festgesetzt. Desweiteren wird  $\dot{\mathbf{z}}_F = \mathbf{0}$  angenommen. In Abbildung 7.4 ist der zeitliche Verlauf der mittleren Verschiebung  $\sqrt{U_{i,1}^2 + U_{i,2}^2 + U_{i,3}^2}$  der Knoten  ${}^{(2)}662$  und  ${}^{(3)}662$  dargestellt. Die größere Verschiebung am Knoten  ${}^{(2)}662$  resultiert aus den zusätzlichen externen Kräften, die Glied 3 auf Glied 2 ausübt.



**Abbildung 7.4:** Mittlere Verschiebung der Knoten  ${}^{(2)}662$  und  ${}^{(3)}662$  als Funktionen der Zeit  $t$ .

Die Mittleren Verschiebungen der gesamten Stuktur zu verschiedenen Zeitpunkten sind in Abbildung 7.5 dargestellt. Kennt man das Verschiebungsfeld  $\mathbf{U}$ , so lassen sich die sechs verschiedenen Komponenten des Verzerrungstensors – zusammengefasst im Vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – über die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung (3.14) berechnen und schließlich



**Abbildung 7.5:** Animation der mittleren Verschiebungen von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

die Spannungen mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes (3.25). Die sich aus den Verschiebungen ergebenden Verzerrungen finden sich in Anhang C in den Abbildungen C.1 – C.6 und die Spannungen in den Abbildungen C.7 – C.12.

## Zusammenfassung

Auf Grundlage des Modells eines Mehrfinger-Greifers mit sechs Freiheitsgraden wurden in dieser Arbeit zwei wesentliche Aspekte behandelt: Es wurden konkurrierende Steuerungen betrachtet und Elastizitäten berücksichtigt.

Werden die Gelenke des miniaturisierten Greifers mit zwei Antrieben ausgestattet, die parallel wirken und unabhängig voneinander gesteuert werden können, so führt das auf den neuen Typ von Optimalsteuerungsproblemen mit konkurrierenden Steuerungen. Um einen qualitativen Unterschied der in Konkurrenz stehenden Steuerungen mathematisch zu formulieren, wurden zwei Ansätze verfolgt.

Der erste Ansatz benutzte ein Energiekriterium, um einen qualitativen Unterschied der beiden Steuerungen festzulegen. Über das Zielfunktional wurde der Energiebedarf beschrieben. Am Beispiel des Mehrfinger-Greifers konnte die Wirksamkeit des Ansatzes demonstriert werden.

Ein alternativer Zugang ergab sich, indem die zeitliche Änderung der Steuerungen beschränkt wurde. Beschränkungen an die zeitliche Ableitung einer Steuerung sind in der klassischen Theorie der optimalen Steuerung nicht zulässig. Eine Transformation, bei der die Ableitungen der Steuerungen als neue Steuervariablen definiert und die bisherigen Steuervariablen in Zustandsvariablen transformiert werden, führt auf ein differentialalgebraisches System mit einem differentiellen Index bis zu vier. In dieser Arbeit wurde ein neuer Ansatz entwickelt. Mit Hilfe der Variationsrechnung wurden neue innere Punkt Bedingungen an Auf- und Absprungpunkten hergeleitet und es ergab sich ein Randwertproblem nicht-konstanter Dimension. Dieser neue Ansatz zeichnet sich durch höchste Flexibilität aus und kann lokal an die Anforderung des Optimalsteuerungsproblems angepasst werden. Eine effiziente und numerisch stabile Berechnung der optimalen Steuerungen wurde ermöglicht und am Modell des Mehrfinger-Greifers erfolgreich angewendet.

Mittels der Finite-Elemente-Methode wurden die Verschiebungen berechnet, die sich durch die dreidimensionale Bewegung des Mehrfinger-Greifers ergeben. Als zugrunde gelegte Starrkörperbewegung wurde die optimale Bewegung mit Beschränkung der zeitlichen Ableitung der Steuerungen gewählt. Die in der Finite-Elemente-Simulation benötigten linearen Geschwindigkeiten, Winkelgeschwindigkeiten, Winkelbeschleunigungen, sowie die externen Kräfte, die die Glieder in der kinematischen Kette aufeinander ausüben, wurden über die Newton-Euler-Rekursion bereitgestellt. Die einzelnen Glieder wurden mit 3D finiten Elementen diskretisiert (Hexaederelemente), die Berechnung der Verschiebungen erfolgte mit dem im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Programm SOLASTICA.



## Anhang A

### Ergebnisse der Beispiele aus Kapitel 5

Alle Beispiele wurden mit dem indirekten Verfahren JANUS [53] berechnet. Zur Lösung des Differentialgleichungssystems wird in JANUS ein Extrapolationsverfahren, basierend auf DIFS1M, benutzt. Die Ergebnisse wurden mit DP853B, einem expliziten Runge-Kutta Verfahren der Ordnung 8(5,3) von Dormand und Prince verifiziert.

Die zeitoptimalen Bewegungen dienen als Referenzlösung. Als Beschränkungen werden lediglich die Steuerbeschränkungen mit Werten gemäß (1.2) berücksichtigt - die Beschränkungen der Winkel (1.3) und Winkelgeschwindigkeiten (1.4) werden nicht berücksichtigt. Die beiden Finger sollen einzeln bewegt werden. Dazu werden die Randbedingungen (1.6) entsprechend abgeändert. Zunächst werden die Rangbedingungen

$$\begin{aligned}\Theta(t_0) &= (0^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -180^\circ, -35^\circ, -25^\circ)^T, & \dot{\Theta}(t_0) &= \mathbf{0} \text{ [rad/s]}, \\ \Theta(t_F) &= (80^\circ, -65^\circ, -60^\circ, -180^\circ, -35^\circ, -25^\circ)^T, & \dot{\Theta}(t_F) &= \mathbf{0} \text{ [rad/s]}\end{aligned}$$

betrachtet. Als Zielfunktional dient

$$I_1(\mathbf{u}) = \int_0^{t_{F,1}} 1 dt \rightarrow \min!.$$

Die Zeit wird mit  $\tau := \frac{t}{t_{F,1} - t_0} = \frac{t}{t_{F,1}}$  auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$  transformiert und es ergibt sich als minimale Endzeit  $t_{F,1} = 0.11997468651$  [s]. Die sich ergebende Schaltstruktur ist in Abbildung A.1 dargestellt, die Schaltpunkte  $\tau_i$  in Tabelle A.1 zusammengefasst.

---

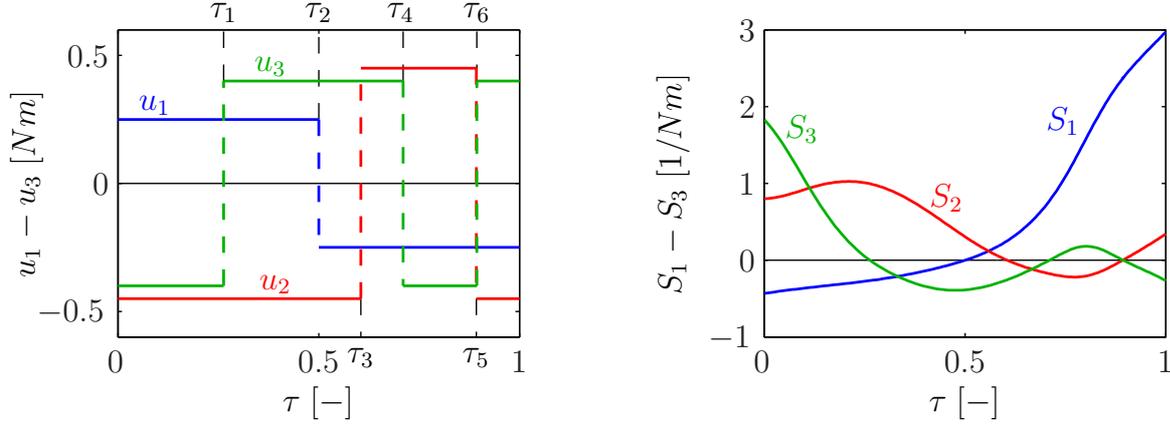
$\tau_1 = 0.263066$	$\tau_3 = 0.604977$	$\tau_5 = 0.892862$
$\tau_2 = 0.500000$	$\tau_4 = 0.710252$	$\tau_6 = 0.893764$

---

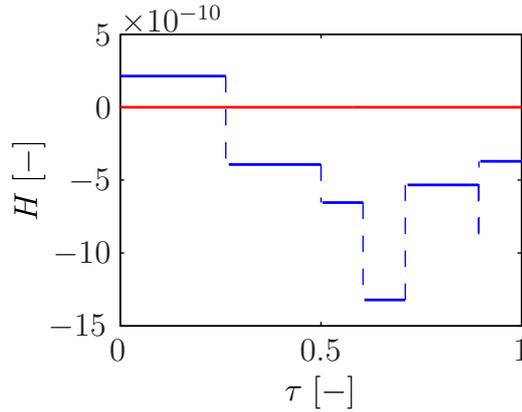
**Tabelle A.1:** *Schaltpunkte des ersten zeitoptimalen Problems, transformiert auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$ .*

Bei der zeitoptimalen Bewegung muss  $H \equiv 0$  gelten – wie in Abbildung A.2 ersichtlich, ist das mit einer relativen Genauigkeit von  $10^{-9}$  erfüllt.

Die Zustandsvariablen und adjungierten Variablen sind in Abbildung A.3 bzw. Abbildung A.4 dargestellt.



**Abbildung A.1:** Steuerungen  $u_1 - u_3$  ( $u_4 = u_5 = u_6 \equiv 0$ ) und Schaltfunktionen  $S_1 - S_3$  des ersten zeitoptimalen Problems als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .



**Abbildung A.2:** Hamiltonfunktion des ersten zeitoptimalen Problems als Funktion von  $\tau := t/t_F$ .

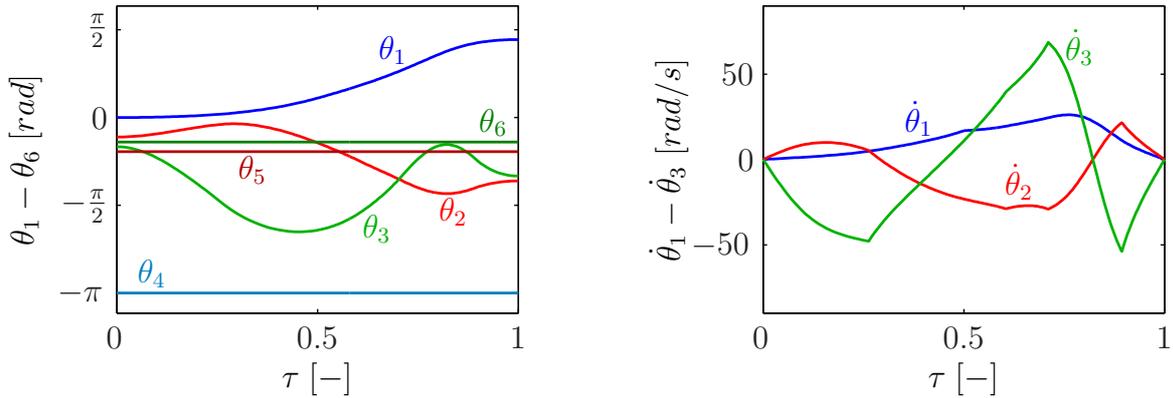
Anschließend wird der zweite Finger bewegt und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Theta(t_0) &= (0^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -180^\circ, -35^\circ, -25^\circ)^T, & \dot{\Theta}(t_0) &= \mathbf{0} \text{ [rad/s]}, \\ \Theta(t_F) &= (0^\circ, -20^\circ, -30^\circ, -100^\circ, -65^\circ, -60^\circ)^T, & \dot{\Theta}(t_F) &= \mathbf{0} \text{ [rad/s]} \end{aligned}$$

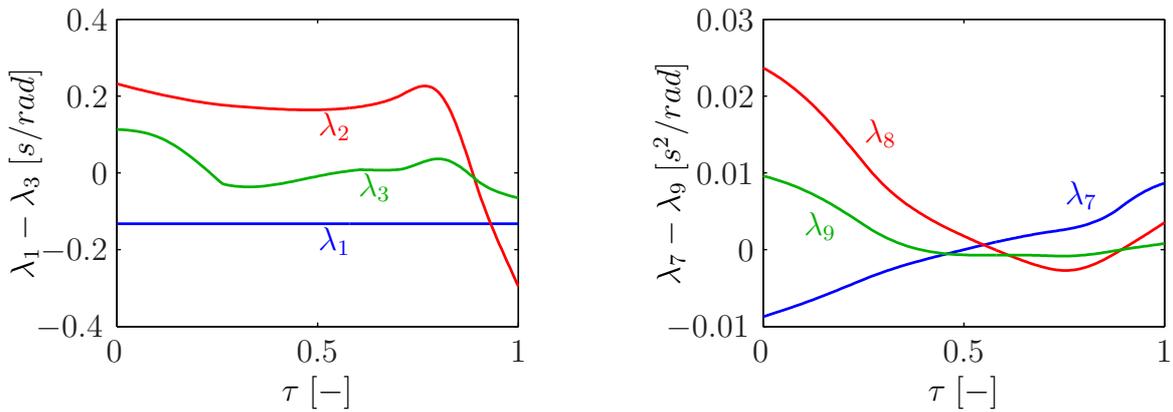
gefordert. Mit dem entsprechenden Zielfunktional

$$I_2(\mathbf{u}) = \int_0^{t_{F,2}} 1 dt \rightarrow \min!$$

ergibt sich bei Transformation der Zeit mit  $\tau := \frac{t}{t_{F,2} - t_0} = \frac{t}{t_{F,2}}$  auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$  eine minimale Endzeit von  $t_{F,2} = 0.12115805331$  [s]. In Abbildung A.5 ist wieder die Schaltstruktur dargestellt und die Schaltpunkte  $\tau_i$  sind in Tabelle A.2 zusammengefasst.



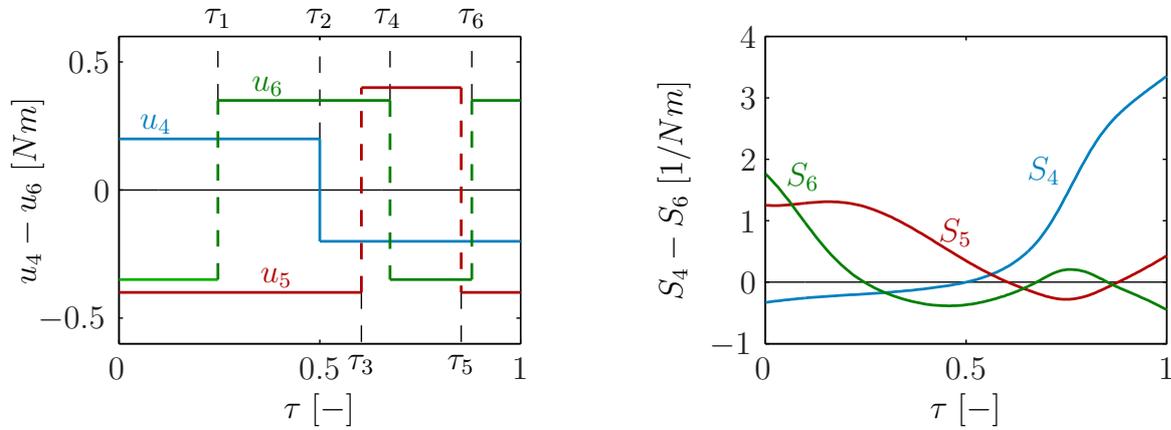
**Abbildung A.3:** Winkel  $\theta_1 - \theta_6$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3$  ( $\dot{\theta}_4 = \dot{\theta}_5 = \dot{\theta}_6 \equiv 0$ ) des ersten zeitoptimalen Problems als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .



**Abbildung A.4:** Adjungierte Variablen  $\lambda_1 - \lambda_3$  und  $\lambda_7 - \lambda_9$  ( $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_{10} = \lambda_{11} = \lambda_{12} \equiv 0$ ) des ersten zeitoptimalen Problems als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .

Die Hamiltonfunktion muss wieder identisch Null sein - auch hier ist das mit einer relativen Genauigkeit von  $10^{-9}$  erreicht (vgl. Abbildung A.6).

Die Zustandsvariablen und adjungierten Variablen sind in Abbildung A.7 bzw. Abbildung A.8 dargestellt.



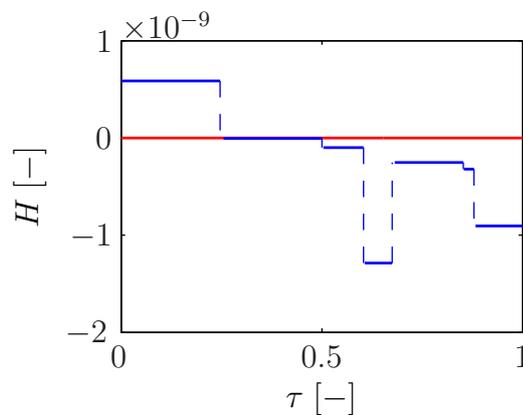
**Abbildung A.5:** Steuerungen  $u_4 - u_6$  ( $u_1 = u_2 = u_3 \equiv 0$ ) und Schaltfunktionen  $S_4 - S_6$  des zweiten zeitoptimalen Problems als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .

---

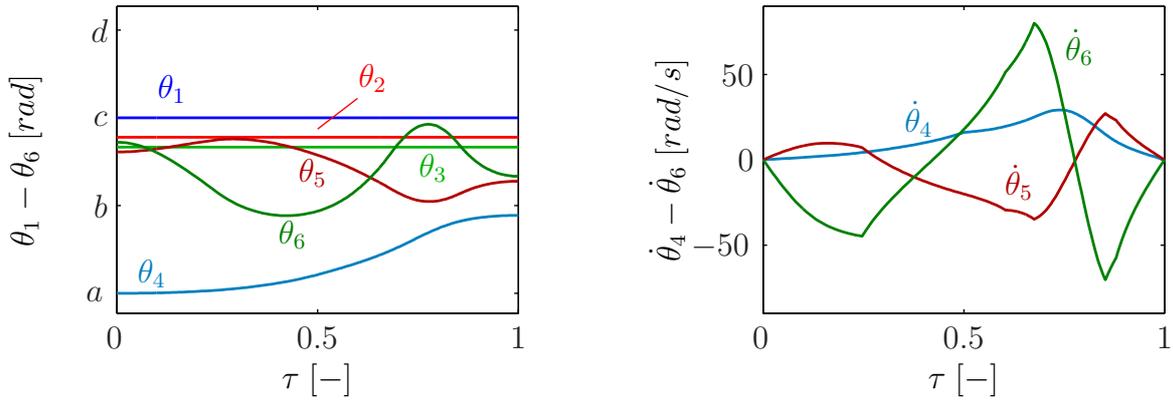
$\tau_1 = 0.246744$	$\tau_3 = 0.604096$	$\tau_5 = 0.852576$
$\tau_2 = 0.500000$	$\tau_4 = 0.675352$	$\tau_6 = 0.878599$

---

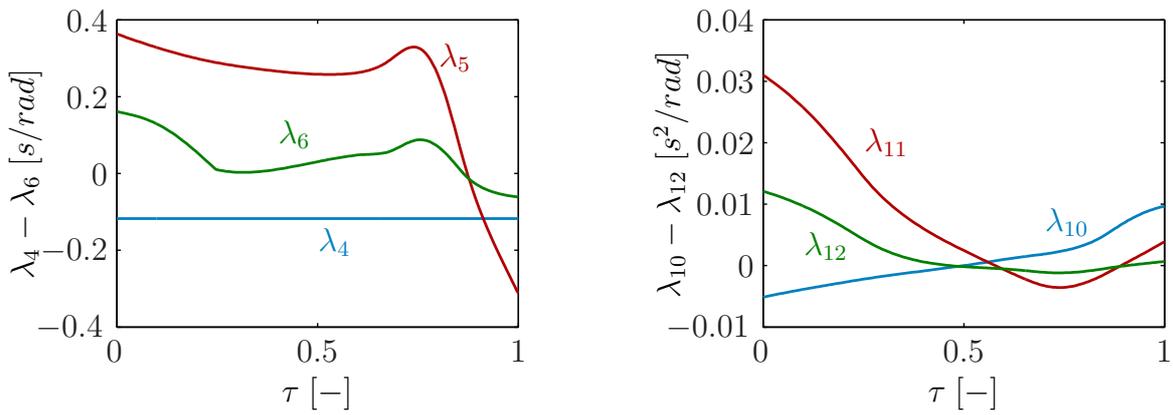
**Tabelle A.2:** Schaltpunkte des zweiten zeitoptimalen Problems, transformiert auf das Einheitsintervall  $[0, 1]$ .



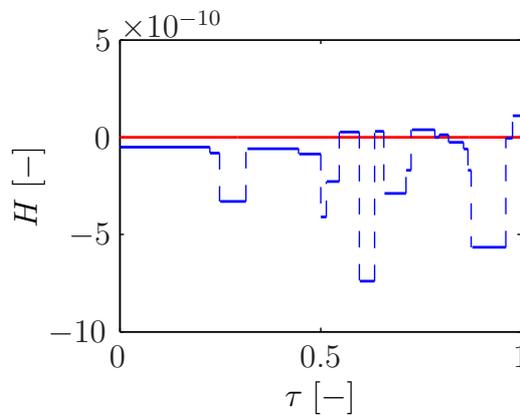
**Abbildung A.6:** Hamiltonfunktion des zweiten zeitoptimalen Problems als Funktion von  $\tau := t/t_F$ .



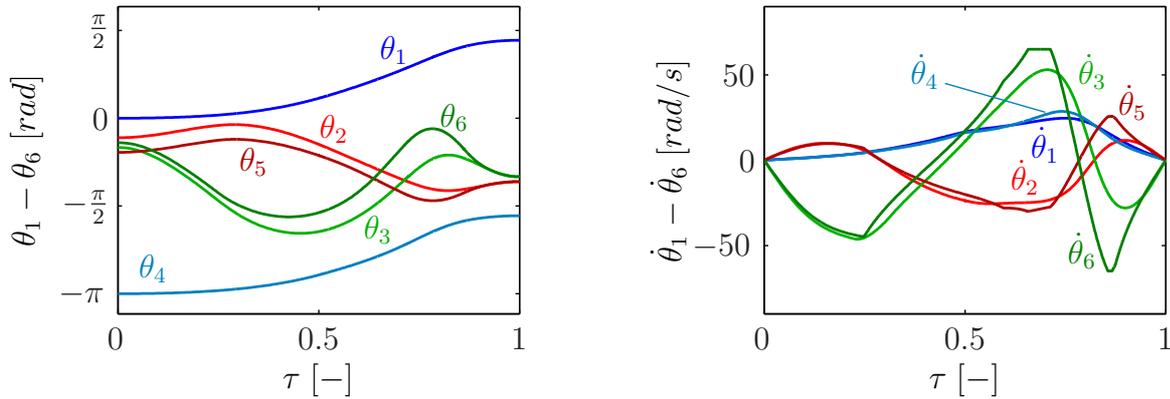
**Abbildung A.7:** Winkel  $\theta_1 - \theta_6$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_6$  ( $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 \equiv 0$ ) des zweiten zeitoptimalen Problems als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .



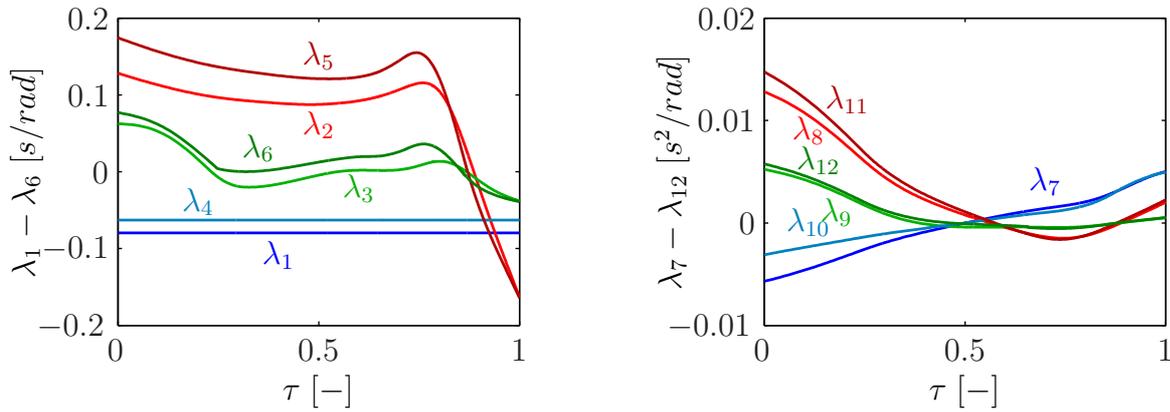
**Abbildung A.8:** Adjungierte Variablen  $\lambda_4 - \lambda_6$  und  $\lambda_{10} - \lambda_{12}$  ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 \equiv 0$ ) des zweiten zeitoptimalen Problems als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .



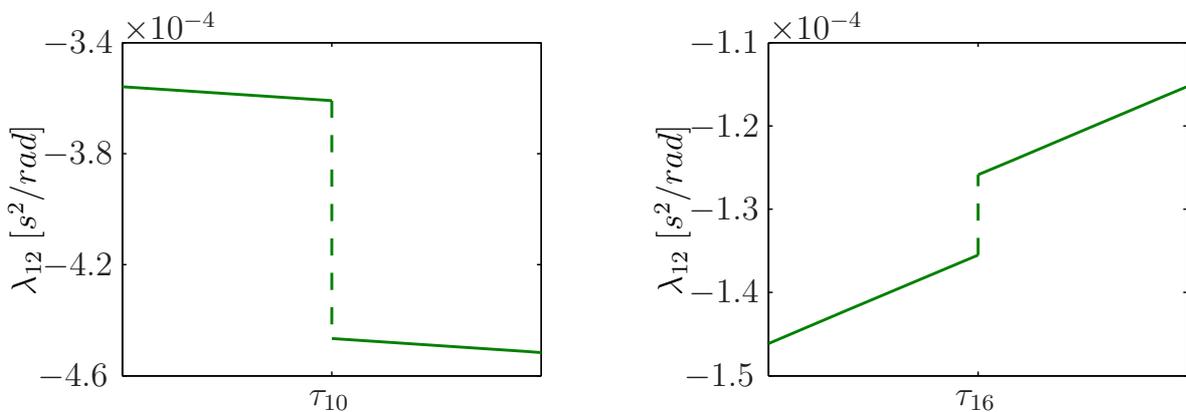
**Abbildung A.9:** Hamiltonfunktion des zeit-energieoptimalen Problems als Funktion von  $\tau := t/t_F$ .



**Abbildung A.10:** Winkel  $\theta_1 - \theta_6$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_6$  des zeit-energieoptimalen Problems als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .



**Abbildung A.11:** Adjungierte Variablen  $\lambda_1 - \lambda_6$  und  $\lambda_7 - \lambda_{12}$  des zeit-energieoptimalen Problems als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .



**Abbildung A.12:** Detail der adjungierten Variable  $\lambda_{12}$  an den Schaltpunkten  $\tau_{10}$  und  $\tau_{16}$  des zeit-energieoptimalen Problems als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .

## Anhang B

### Ergebnisse der Beispiele aus Kapitel 6

Auch die Beispiele in Kapitel 6 wurden mit dem indirekten Verfahren JANUS [53] berechnet und mit dem Runge-Kutta Verfahren DP853B verifiziert.

#### B.1 Ansatz mit Zielfunktional

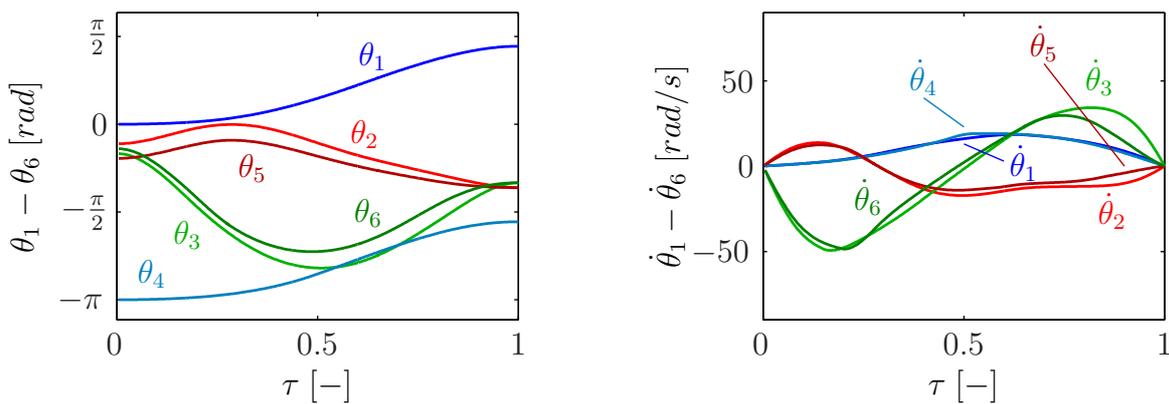


Abbildung B.1: Winkel  $\theta_1 - \theta_6$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_6$  als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .

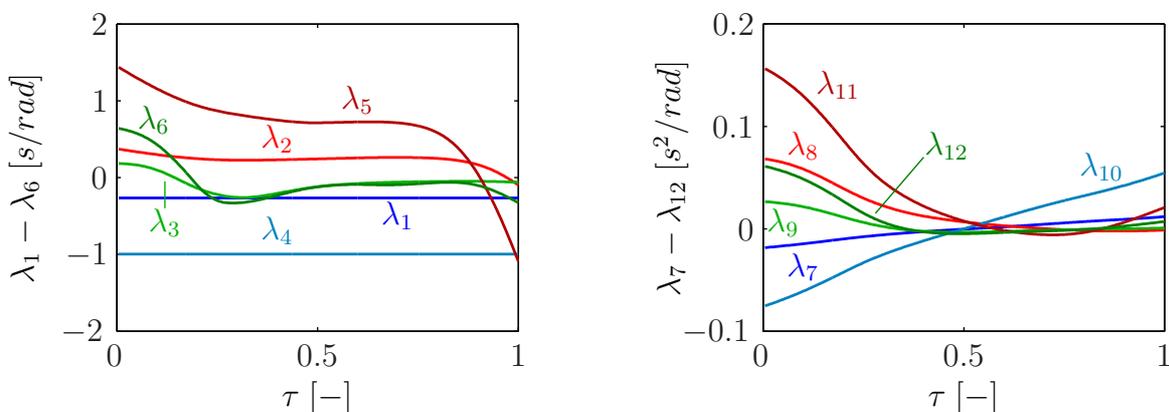


Abbildung B.2: Adjungierte Variablen  $\lambda_1 - \lambda_6$  und  $\lambda_7 - \lambda_{12}$  als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .

## B.2 Ansatz mit Beschränkung der zeitlichen Änderung der Steuerungen

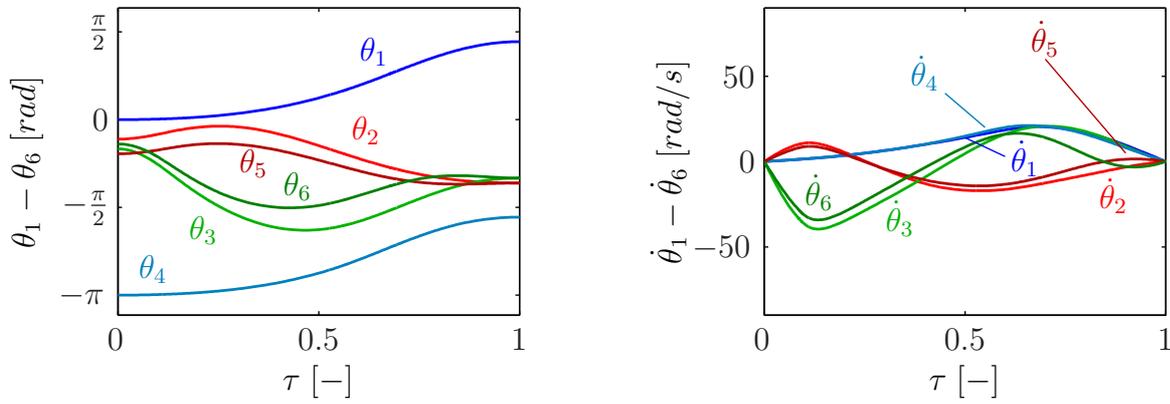


Abbildung B.3: Winkel  $\theta_1 - \theta_6$  und Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_6$  als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .

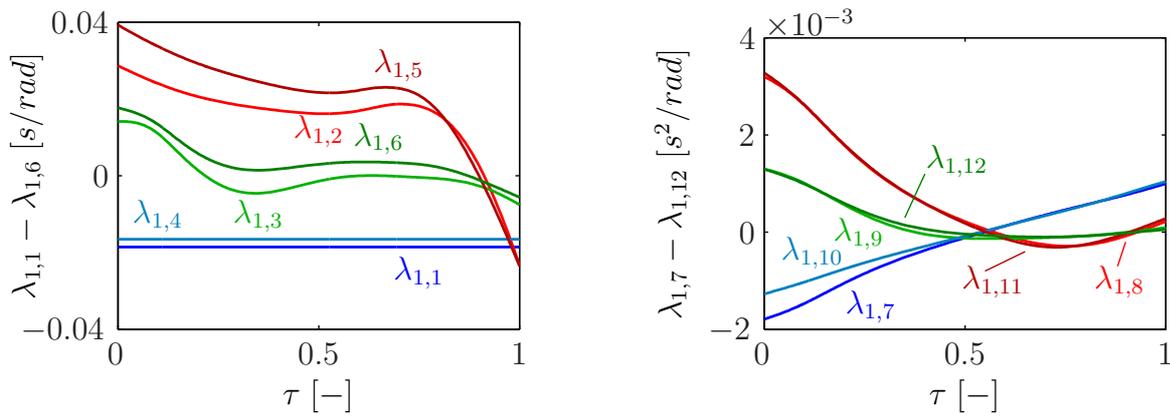


Abbildung B.4: Adjungierte Variablen  $\lambda_{1,1} - \lambda_{1,6}$  und  $\lambda_{1,7} - \lambda_{1,12}$  als Funktionen von  $\tau := t/t_F$ .

## Anhang C

### Ergebnisse des Beispiels aus Kapitel 7

Die numerische Simulation des als elastisch betrachteten Mehrfinger-Greifer in Kapitel 7 wurde mit dem im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Programm SOLASTICA durchgeführt. Es ist speziell zur Analyse von 3D Festkörperproblemen entwickelt worden. Auf Grundlage der linearen Elastizitätstheorie wird mit Hilfe von 3D Finiten Elementen (Hexaederelemente) das Verschiebungsfeld unter Berücksichtigung der zusätzlichen Trägheitskräfte aufgrund eines bewegten Bezugssystems ermittelt. Nachfolgend werden die sich ergebenden Verzerrungen und Spannungen graphisch dargestellt.

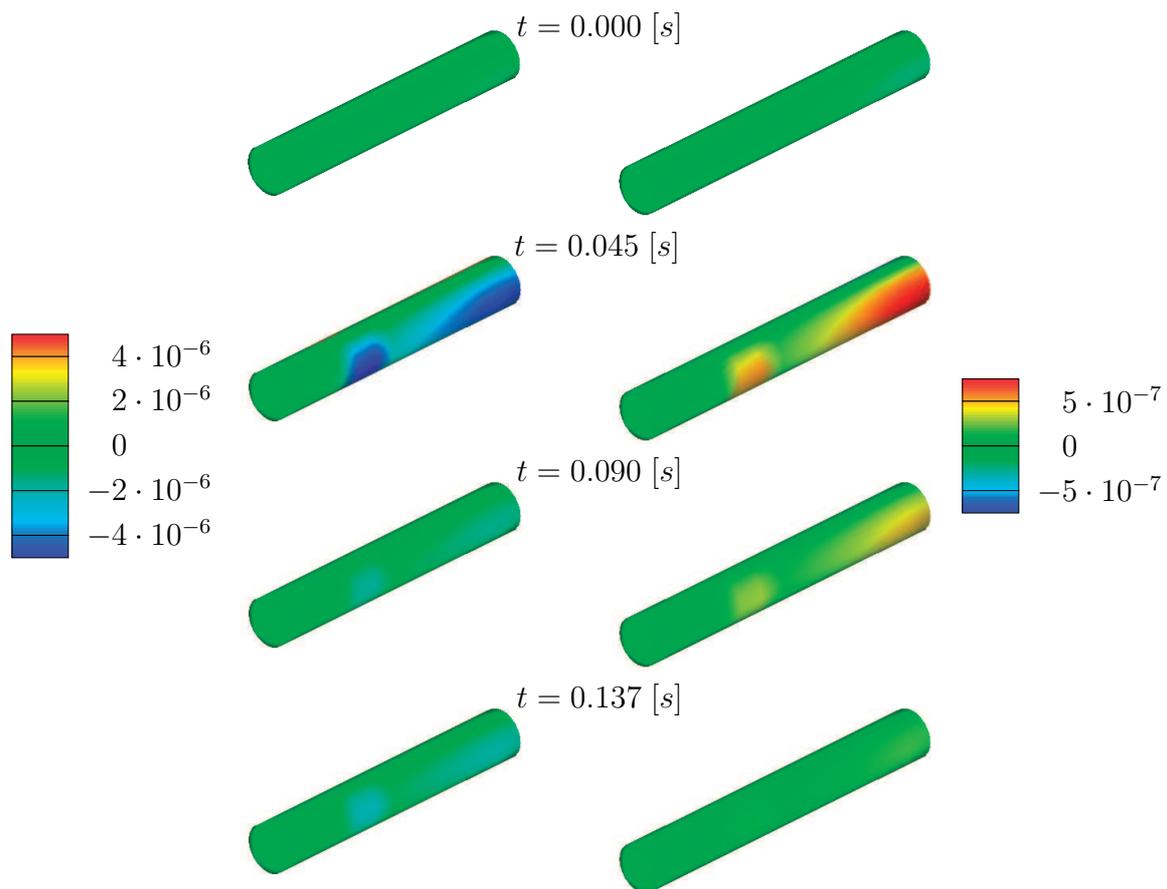


Abbildung C.1: Verzerrung  $G_{11}$  von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

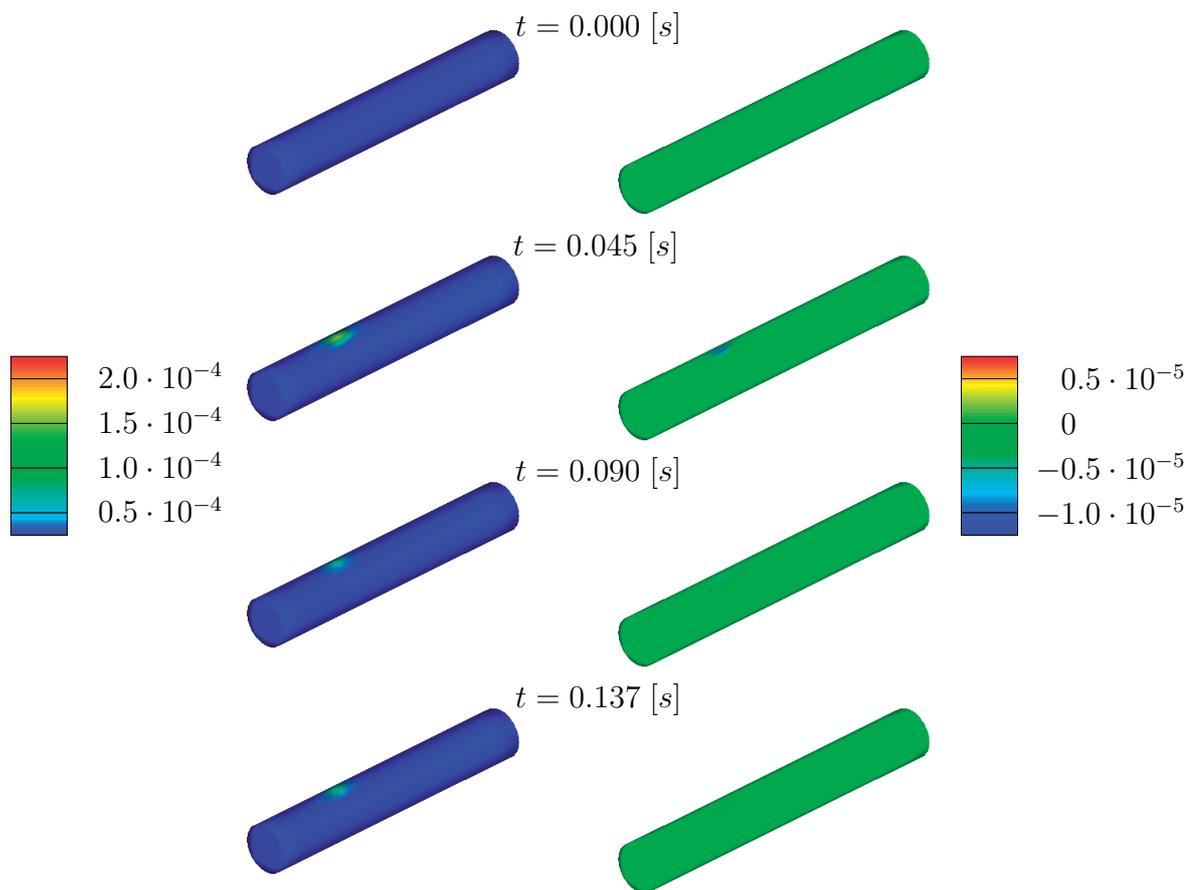


Abbildung C.2: Verzerrung  $G_{22}$  von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

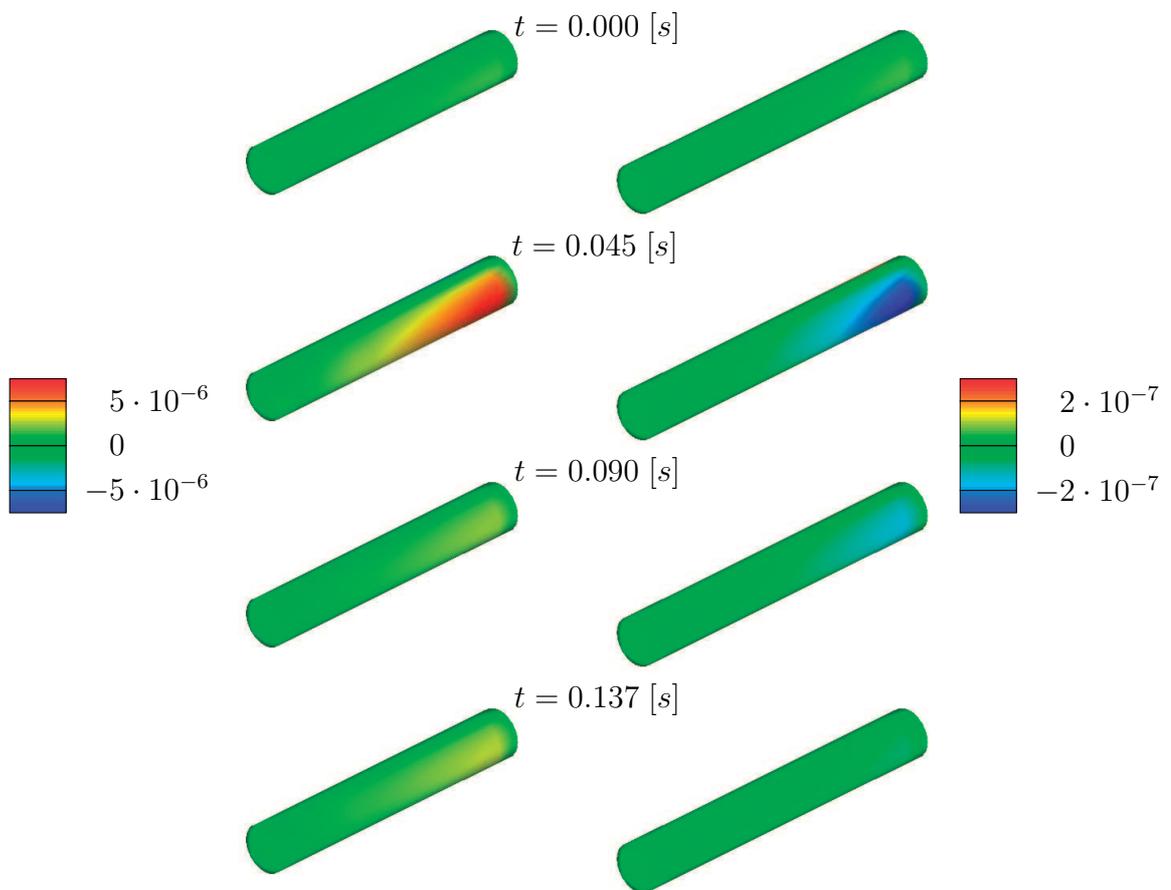


Abbildung C.3: Verzerrung  $G_{33}$  von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

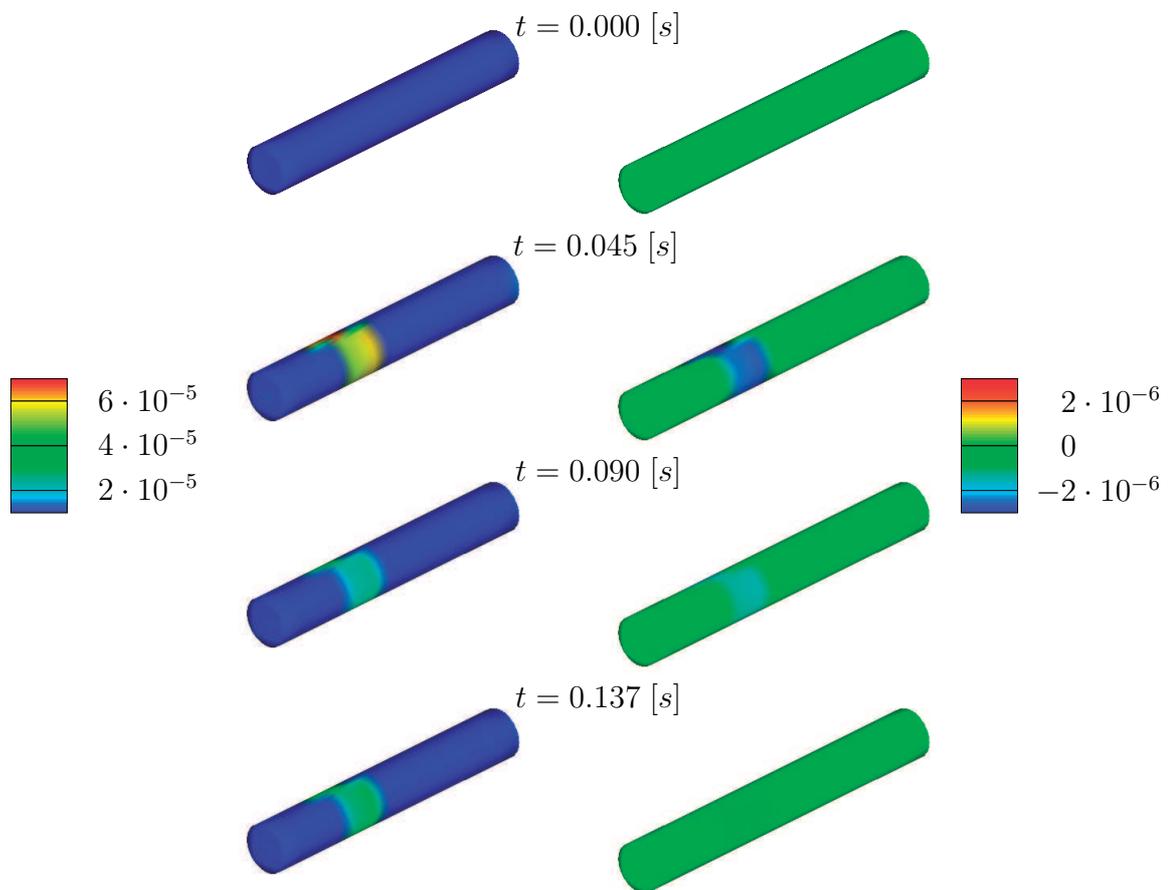


Abbildung C.4: Verzerrung  $2G_{12}$  von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

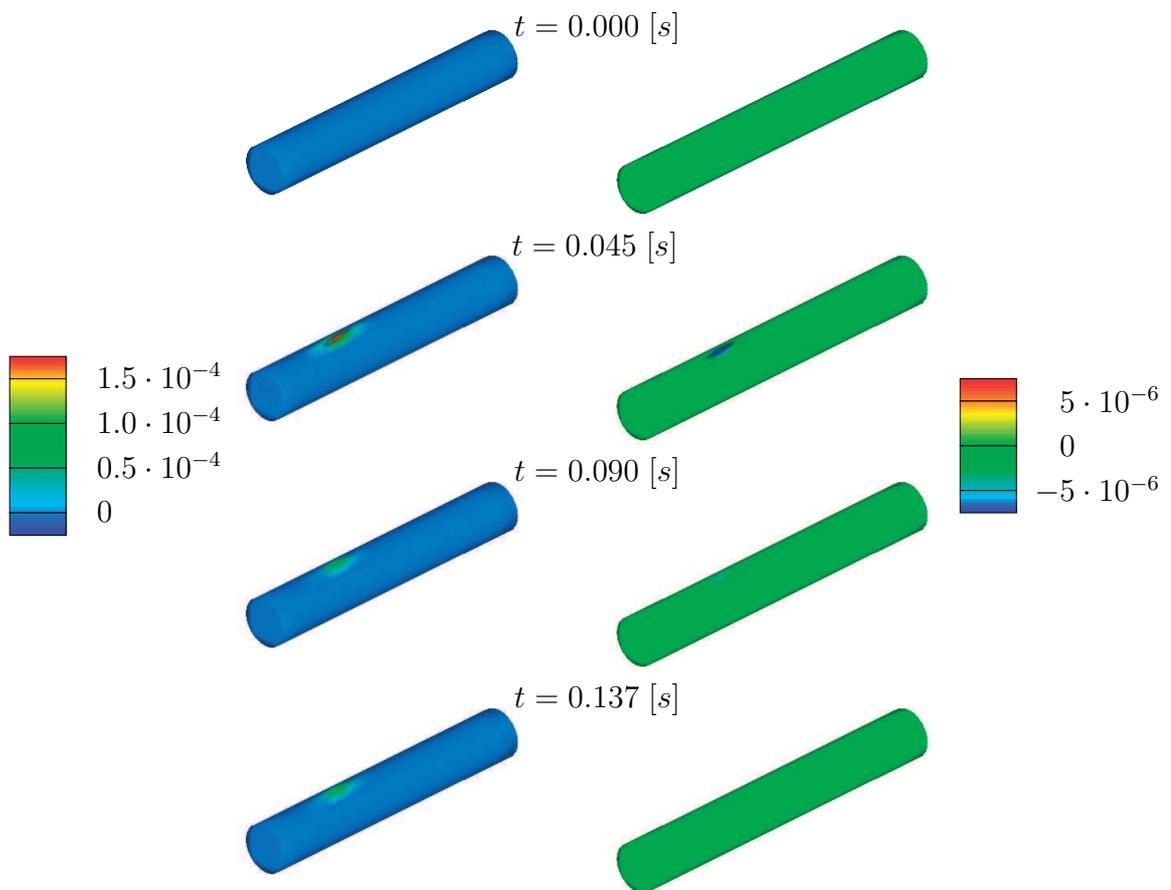


Abbildung C.5: Verzerrung  $2G_{23}$  von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

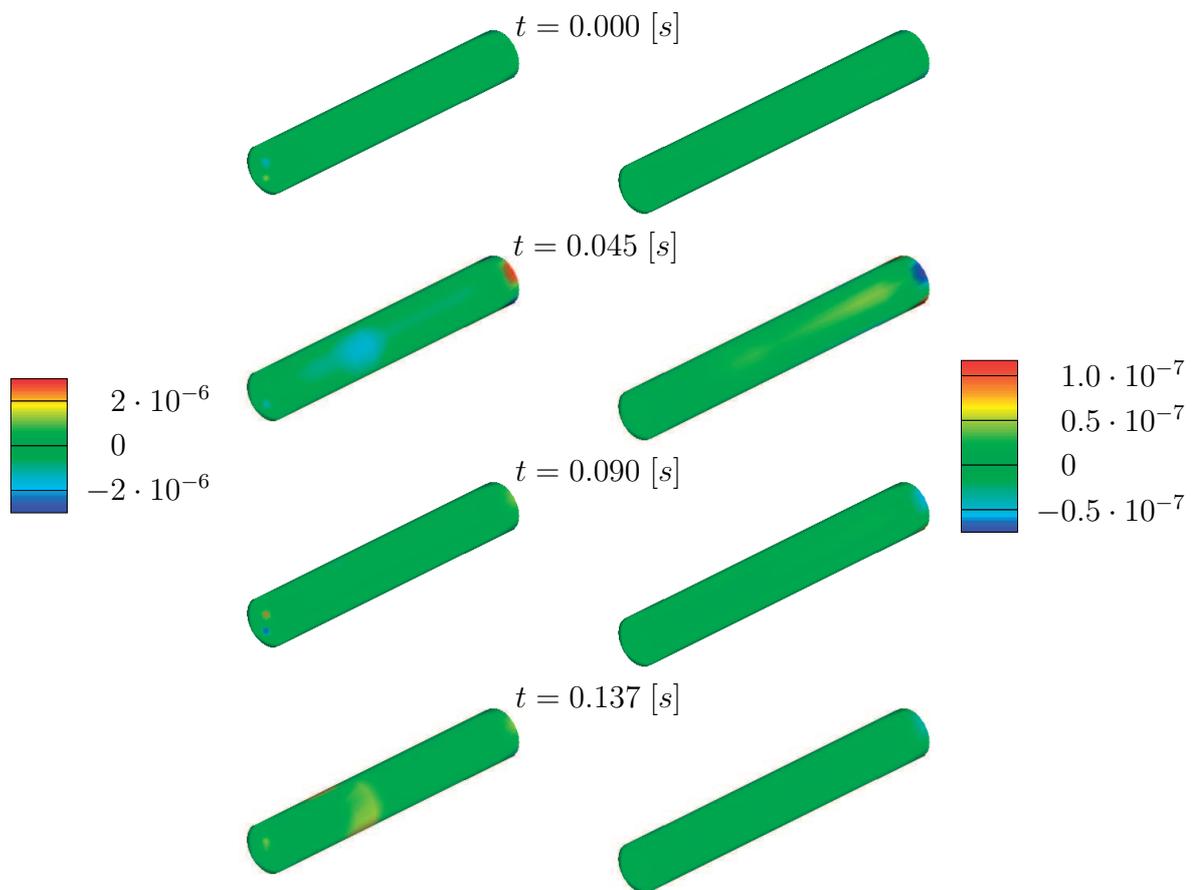


Abbildung C.6: Verzerrung  $2G_{31}$  von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

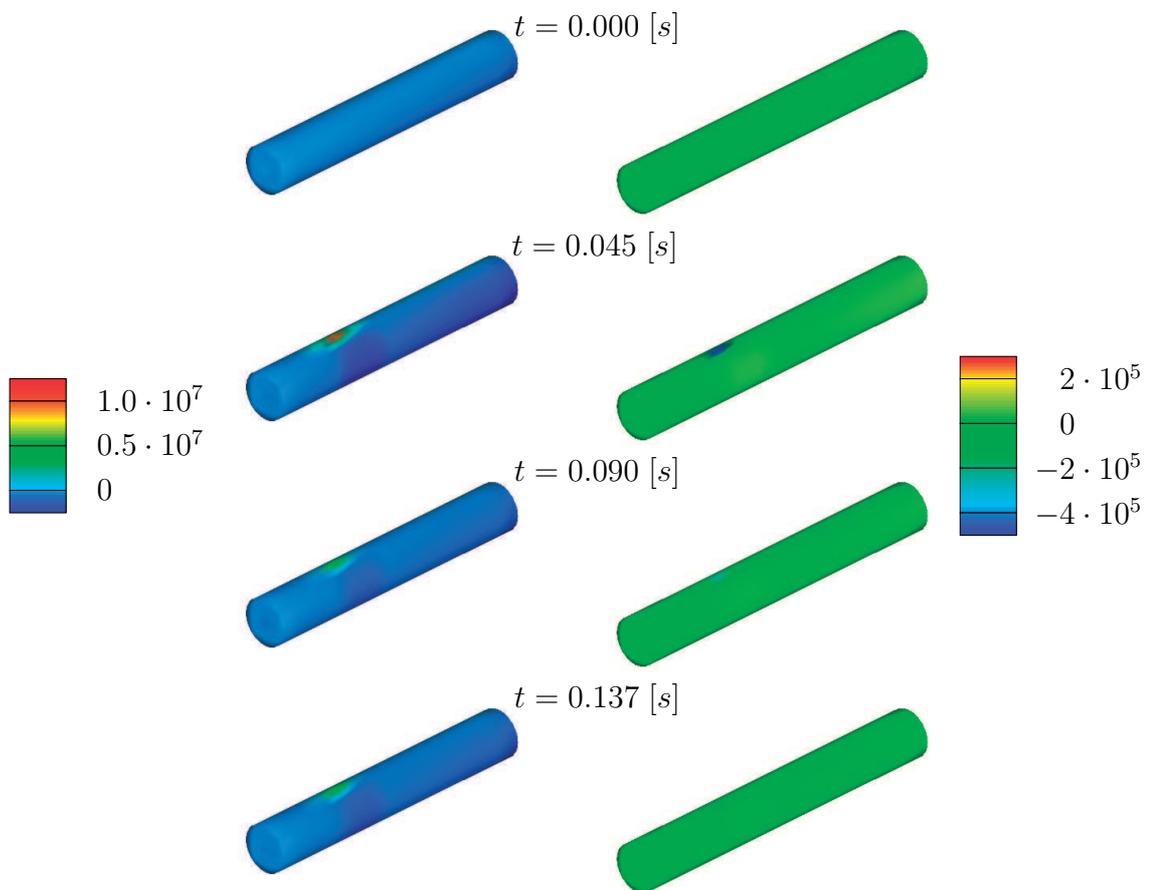


Abbildung C.7: Spannung  $S_{11}$  (Einheit: Pa) von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

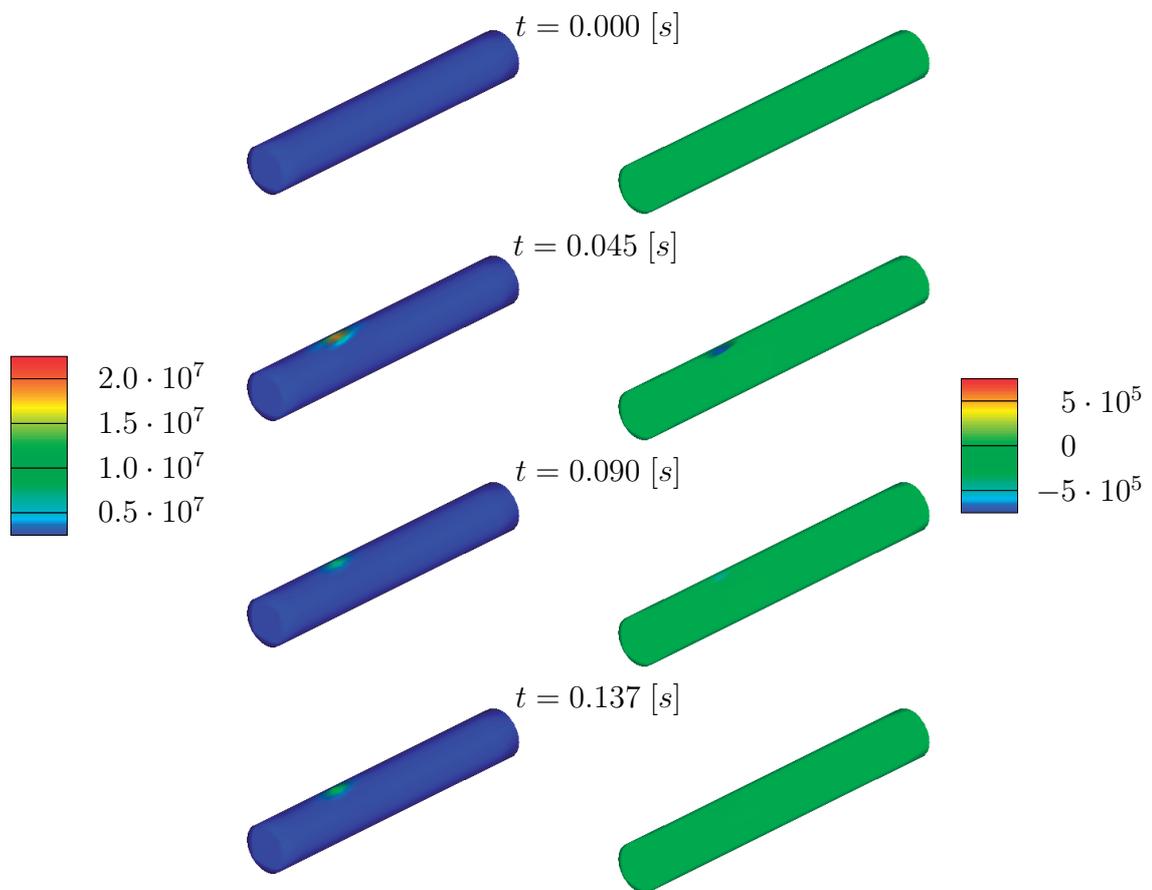


Abbildung C.8: Spannung  $S_{22}$  (Einheit: Pa) von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

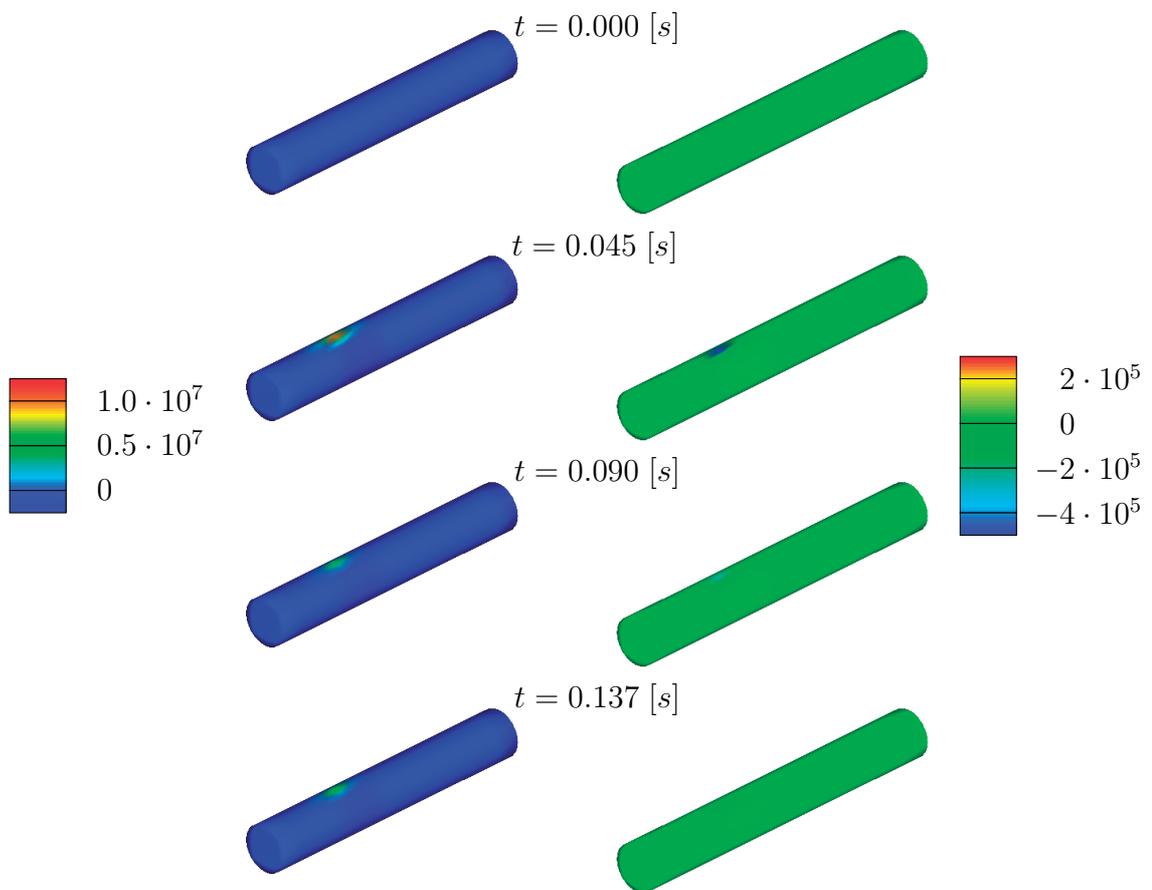


Abbildung C.9: Spannung  $S_{33}$  (Einheit: Pa) von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

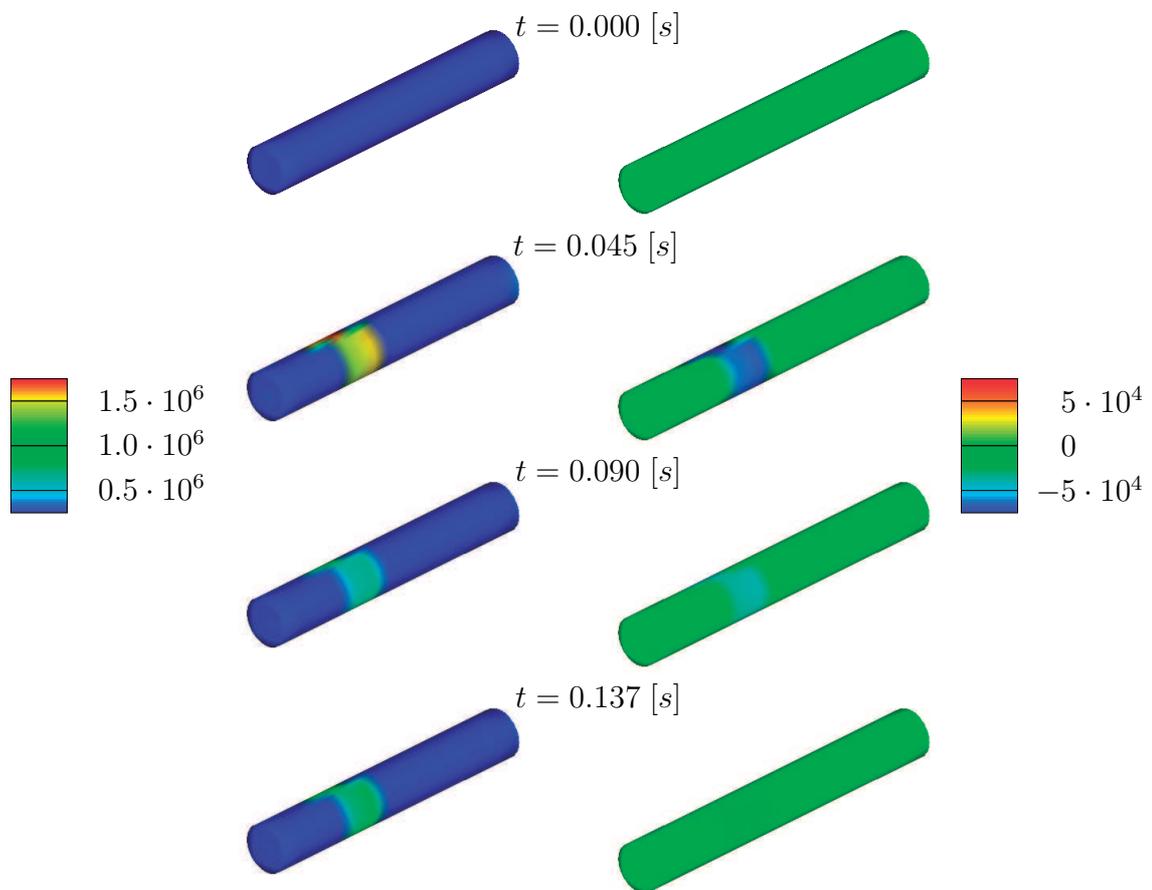


Abbildung C.10: Spannung  $S_{12}$  (Einheit: Pa) von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

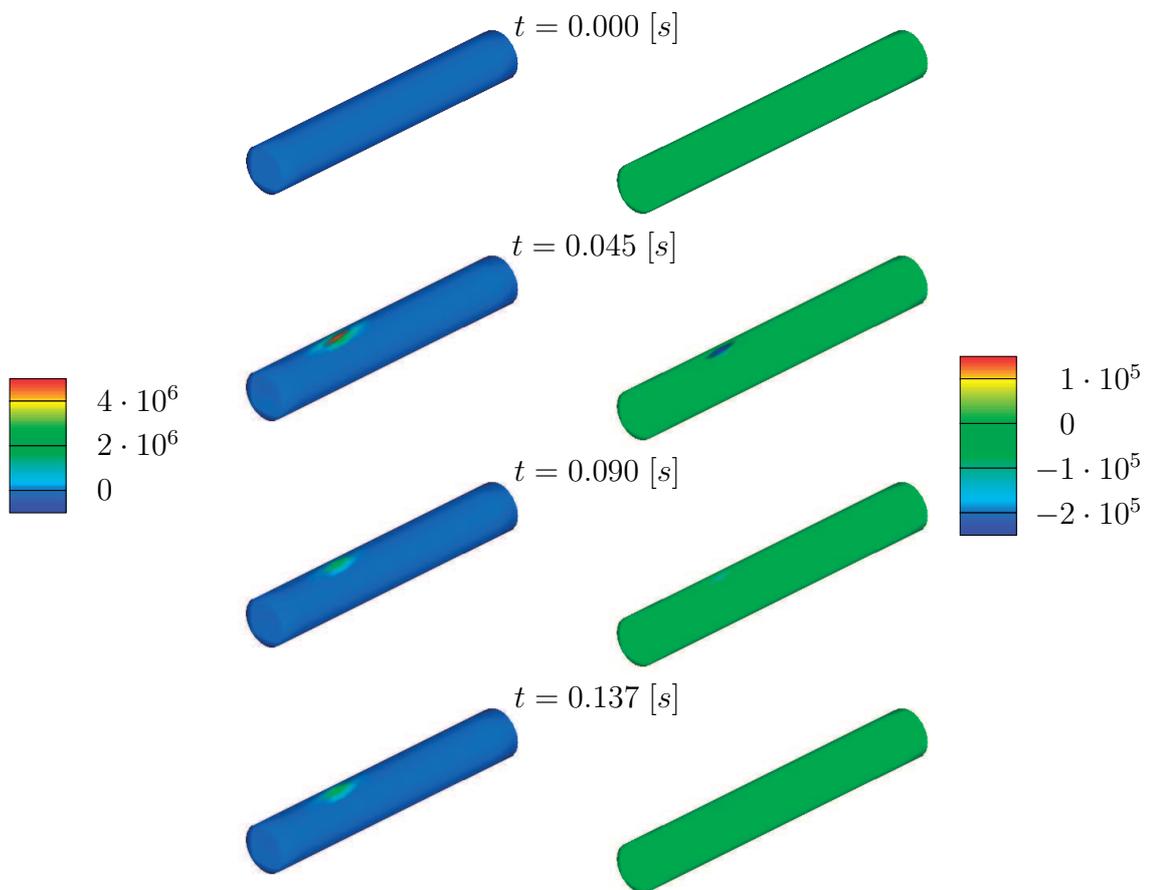


Abbildung C.11: Spannung  $S_{23}$  (Einheit: Pa) von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

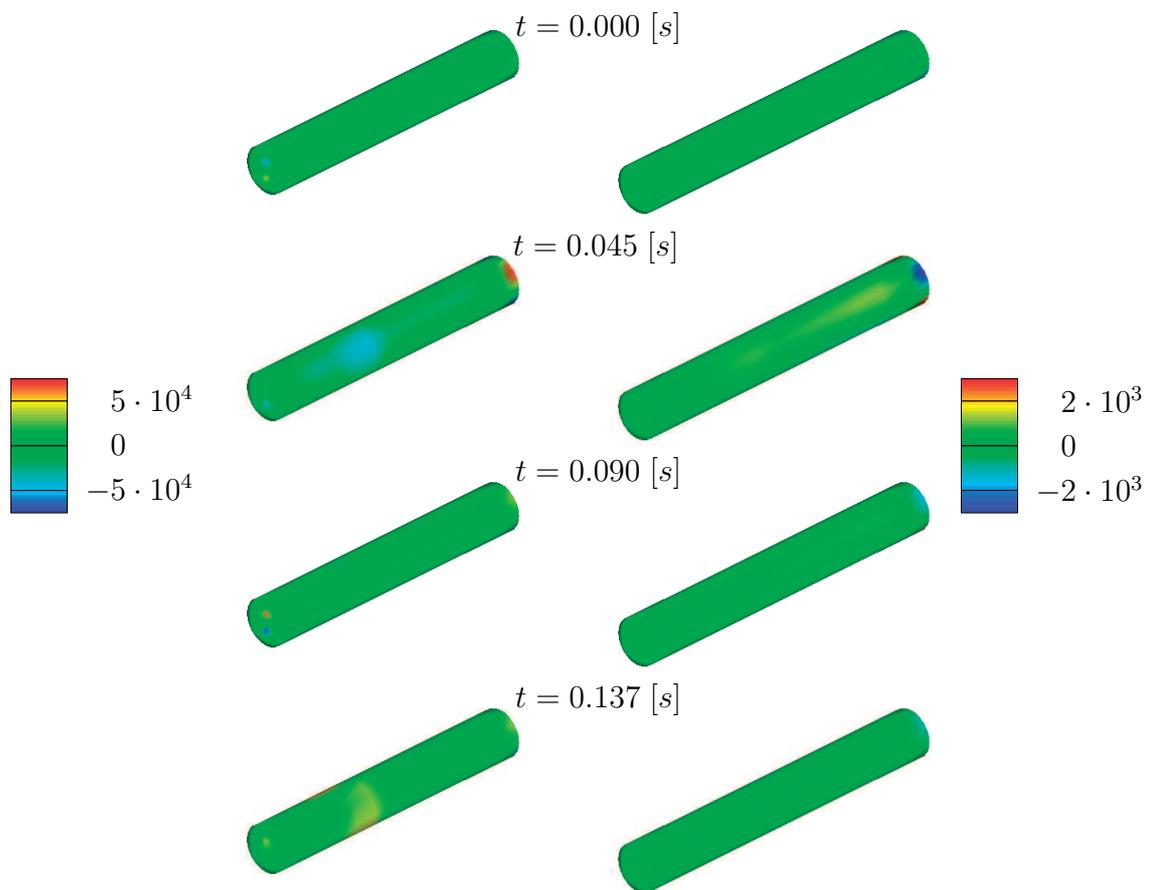


Abbildung C.12: Spannung  $S_{31}$  (Einheit: Pa) von Glied 2 (links) und Glied 3 (rechts).

## Literaturverzeichnis

- [1] ADAMS. <http://www.mscsoftware.com>.
- [2] S. K. AGRAWAL, S. LI UND B. C. FABIEN, *Optimal Trajectories of Open .Chain Mechanical Systems: An Explicit Optimality Equation with a Multiple Shooting Solution*, Mechanics of Structures and Mahines, 25 (1997), S. 163–177.
- [3] S. K. AGRAWAL UND T. VEERAKLAEW, *Designing Robots for Optimal Performance During Repetitive Motion*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 14 (1998), S. 771–777.
- [4] A. AILON UND G. LANGHOLZ, *On the Existence of Time-Optimal Control of Mechanical Manipulators*, Journal of Optimization Theory and Applications, 46 (1985), S. 1–21.
- [5] L. D. AKULENKO, N. N. BOLOTNIK, F. L. CHERNOUSKO UND A. A. KAPLUNOV, *Optimal control of manipulation*, in: Proceedings of the 9th Triennial World Congress of IFAC, J. Gertler und L. Keviczky, Hrsg., Band 1, Oxford, 1985, Pergamon Press, S. 331–340.
- [6] T. E. ALBERTS, H. XIA UND Y. CHEN, *Dynamic Analysis to Evaluate Viscoelastic Passive Damping for the Space Shuttle Remote Manipulator System*, Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, 114 (1992), S. 468–474.
- [7] A. V. ARUTYUNOV UND S. M. ASEEV, *Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints*, SIAM Journal of Control and Optimization, 35 (1997), S. 930–952.
- [8] D. AUGUSTIN UND H. MAURER, *Sensitivity Analysis and Real-Time Control of a Container Crane under State Constraints*, in: Online Optimization of Large Scale Systems, M. Grötschel, S. O. Krumke und J. Rambau, Hrsg., Springer, 2001, S. 69–82.
- [9] C. A. BALAFOUTIS, P. MISRA UND R. V. PATEL, *Recursive Evaluation of Linearized Dynamic Robot Models*, IEEE Jorunal of Robotics and Automation, 2 (1986), S. 146–155.
- [10] C. A. BALAFOUTIS UND R. V. PATEL, *Efficient Computation of Manipulator Inertia Matrices and the Direct Dynamics Problems*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 19 (1989), S. 1313–1321.
- [11] K.-J. BATHE, *Finite-Elemente-Methoden*, Springer, 2. Aufl., 2002.

- [12] E. BECKER UND W. BÜRGER, *Kontinuumsmechanik*, B. G. Teubner, 1975.
- [13] W. BECKER UND D. GROSS, *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*, Springer, 2002.
- [14] D. J. BELL UND D. H. JACOBSON, *Singular Optimal Control Problems*, Band 117 in Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1975.
- [15] W. BERES, J. Z. SASIADEK UND G. VUKOVICH, *Control and Dynamic Analysis of Multilink Flexible Manipulator*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, USA, 1993, S. 478–483.
- [16] P. BERKMANN UND H. J. PESCH, *Abort Landing in Windshear: Optimal Control Problem with Third-Order State Constraint and Varied Switching Structure*, Journal of Optimization Theory and Applications, 85 (1995), S. 21–57.
- [17] L. D. BERKOVITZ, *Variational Methods in Problems of Control and Programming*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 3 (1961), S. 145–169.
- [18] L. D. BERKOVITZ, *On Control Problems with Bounded State Variables*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 5 (1962), S. 488–498.
- [19] G. BESSONNET, S. CHESSE´ UND P. SARDAIN, *Optimal Gait Synthesis of a Seven-Link Planar Biped*, The International Journal of Robotic Research, 23 (2004), S. 1059–1073.
- [20] G. BESSONNET UND J. P. LALLEMAND, *Optimal trajectories of robot arms minimizing constrained actuators and travelling time*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Cincinnati, USA, 1990, S. 112–117.
- [21] G. BESSONNET UND J. P. LALLEMAND, *Optimal motions of robotic manipulators with bounded actuator powers*, in: Proc. of the VIII World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Prag, Tschechien, 1991, S. 413–416.
- [22] G. BESSONNET UND J. P. LALLEMAND, *Planning of optimal free paths of robotic manipulators with bounds on dynamic forces*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, USA, 1993, S. 270–275.
- [23] G. BESSONNET UND J. P. LALLEMAND, *On the optimization of robotic manipulator trajectories with bounded joint actuators or joint kinetic loads considered as control variables*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 116 (1994), S. 819–826.
- [24] G. BESSONNET, P. SARDAIN UND S. CHESSE´, *Optimal Motion Synthesis - Dynamic Modelling and Numerical Solving Aspects*, Multibody System Dynamics, 8 (2002), S. 257–278.
- [25] J. T. BETTS, *Issues in the Direct Transcription of Optimal Control Problems to Sparse Nonlinear Programs*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., ISNM 115, Birkhäuser, 1994, S. 3–17.

- [26] J. T. BETTS, *Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 21 (1998), S. 193–207.
- [27] J. T. BETTS, *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*, Society for Industrial & Applied Mathematics, 2001.
- [28] J. T. BETTS UND J. M. GABLONSKY, *A Comparison of Interior Point and SQP Methods on Optimal Control Problems*, Mathematics and Computing Technology, Tech. Doc. M&CT-TECH-02-004, Boeing Information and Support Services, The Boeing Company, PO Box 3707, Seattle, 1997.
- [29] J. T. BETTS UND W. P. HUFFMANN, *Sparse optimal control software SOCS*, Mathematics and Engineering Analysis Tech. Doc. MEA-LR-085, Boeing Information and Support Services, The Boeing Company, PO Box 3707, Seattle, 1997.
- [30] H. G. BOCK, I. BAUER, D. B. LEINWEBER UND J. P. SCHLÖDER, *Direct multiple shooting methods for control and optimization of dae in chemical engineering*, in: Scientific Computing in Chemical Engineering II, F. Keil, W. Mackens, H. Voß und J. Werther, Hrsg., Band 2, Springer, 1999, S. 2–18.
- [31] H. G. BOCK, T. LOHMANN UND J. P. SCHLÖDER, *Numerical methods for parameter estimation and optimal experimental design in chemical reaction systems*, Industrial and Engineering Chemistry Research, 31 (1992), S. 54–57.
- [32] H. G. BOCK UND K. J. PLITT, *A Multiple Shooting Algorithm for Direct Solution of Optimal Control Problems*, in: Proceedings of the 9th IFAC World Congress, Budapest, Ungarn, 1984, S. 242–247.
- [33] W. J. BOOK, *Modeling, Design, and Control of Flexible Manipulator Arms: A Tutorial Review*, in: Proc. IEEE Conference on Decision and Control, Honolulu, USA, 1990, S. 500–506.
- [34] F. BOYER UND P. COIFFET, *Generalization of Newton-Euler Model for Flexible Manipulators*, Journal of Robotic Systems, 13 (1996), S. 11–24.
- [35] F. BOYER UND P. COIFFET, *Symbolic modelling of a flexible manipulator via assembling of its generalized Newton-Euler model*, Mechanism and Machine Theory, 31 (1996), S. 45–56.
- [36] D. BRAESS, *Finite Elemente*, Springer, 3. Aufl., 2003.
- [37] H. BRANDL, R. JOHANNI UND M. OTTER, *A Very Efficient Algorithm for the Simulation of Robots and Similar Multibody Systems Without Inversion of the Mass Matrix*, in: Proc. of IFAC/IFIP/IMACS Int. Syp. on Theory of Robots, Wien, Österreich, 1986, S. 95–100.
- [38] U. BRANDT-POLLMANN, D. LEBIEDZ, M. DIEHL, S. SAGER UND J. P. SCHLÖDER, *Real-time nonlinear feedback control of pattern formation in (bio)chemical reaction–diffusion processes: A model study*, Chaos, 15 (2005), S. 033901.

- [39] C. A. BREBBIA, *Finite Element Systems, A Handbook*, Springer, 1982.
- [40] H. BREMER, *Dynamik und Regelung mechanischer Systeme*, B. G. Teubner, 1988.
- [41] H. BREMER UND F. PFEIFFER, *Elastische Mehrkörpersysteme*, B. G. Teubner, 1992.
- [42] S. BREUN, *Optimale Steuerung redundanter Roboter auf Mannigfaltigkeiten – Strukturanalyse und numerische Realisierung*, Dissertation, Technische Universität München, 2007.
- [43] J. N. BRICOUT, J. C. DEBUS UND P. MICHEAU, *A Finite Element Model for the Dynamics of Flexible Manipulator*, Mechanism and Machine Theory, 25 (1990), S. 119–128.
- [44] A. E. BRYSON, W. F. DENHAM UND S. E. DREYFUS, *Optimal Programming Problems with Inequality Constraints I: Necessary Conditions for Extremal Solutions*, AIAA, 1 (1963), S. 2544–2550.
- [45] A. E. BRYSON UND Y.-C. HO, *Applied Optimal Control*, Revised Printing, Hemisphere Publishing Corporation, 1975.
- [46] C. BÜSKENS, *Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustands-Beschränkungen*, Dissertation, Fachbereich Mathematik und Informatik, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Universität Münster, 1998.
- [47] C. BÜSKENS UND H. MAURER, *Realtime control of robots with initial value perturbations via nonlinear programming methods*, Optimization, 47 (2000), S. 383–405.
- [48] C. BÜSKENS UND H. MAURER, *Real-Time Control of an Industrial Robot under Control and State Constraints*, in: Online Optimization of Large Scale Systems, M. Grötschel, S. O. Krumke und J. Rambau, Hrsg., Springer, 2001, S. 83–92.
- [49] R. BULIRSCH, *Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung*, Report der Carl-Cranz-Gesellschaft e.V., Oberpfaffenhofen, 1971, Nachdruck: Mathematisches Institut, Technische Universität München, 1993.
- [50] R. BULIRSCH, F. MONTRONE UND H. J. PESCH, *Abort Landing in the Presence of Windshear as a Minmax Optimal Control Problem, Part 1: Necessary Conditions*, Journal of Optimization Theory and Applications, 70 (1991), S. 1–23.
- [51] R. BULIRSCH, F. MONTRONE UND H. J. PESCH, *Abort Landing in the Presence of Windshear as a Minmax Optimal Control Problem, Part 2: Multiple Shooting and Homotopy*, Journal of Optimization Theory and Applications, 70 (1991), S. 223–254.

- [52] R. CALLIES, *Optimal Design of a Mission to Neptune*, in: Optimal Control, R. Bulirsch, A. Miele, J. Stoer und K. H. Well, Hrsg., ISNM 111, Birkhäuser, 1993, S. 341–349.
- [53] R. CALLIES, *Entwurfsoptimierung und optimale Steuerung. Differential-algebraische Systeme, Mehrgitter-Mehrzielansätze und numerische Realisierung*, Habilitationsschrift, Technische Universität München, 2000.
- [54] R. CALLIES, *Some Aspects of the Optimal Control of Nonlinear Differential-Algebraic Equations*, in: Oberwolfach Reports, Band 3, 2006, S. 1095–1997.
- [55] R. CALLIES UND R. BULIRSCH, *3D Trajectory Optimization of a Single-Stage VTVL System*, in: Paper AIAA-96-3903, San Diego, USA, 1996.
- [56] R. CALLIES UND P. RENTROP, *Optimal Control of Rigid-Link Manipulators by Indirect Methods*. eingereicht in: GAMM-Mitteilungen.
- [57] R. CALLIES UND T. SCHENK, *Recursive Modeling of Optimal Control Problems for Multi-Link Manipulators*, Technische Universität München, Bericht TUM-NUM13, 2005.
- [58] S. L. CAMPBELL UND C. W. GEAR, *The index of general nonlinear DAEs*, Numerische Mathematik, 72 (1995), S. 173–196.
- [59] L. CESARI, *Optimization - Theory and Applications*, Springer, 1983.
- [60] L. W. CHANG UND K. P. GANNON, *A Dynamic Model on a Single-Link Flexible Manipulator*, Journal of Vibration and Acoustics, 112 (1990), S. 138–143.
- [61] F. L. CHERNOUSKO, *Optimization in Control of Robots*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., ISNM 115, Birkhäuser, 1994, S. 19–28.
- [62] F. L. CHERNOUSKO, L. D. AKULENKO UND N. N. BOLOTNIK, *Time-optimal control for robotic manipulators*, Optimal Control Applications and Methods, 10 (1989), S. 293–311.
- [63] F. L. CHERNOUSKO UND A. A. LYUBUSHIN, *Method of Successive Approximations for Solutions of Optimal Control Problems*, Optimal Control Applications and Methods, 3 (1982), S. 101–114.
- [64] S. CHESSE' UND G. BESSONNET, *Optimal dynamics of constrained multibody systems: Application to bipedal walking synthesis*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul, Korea, 2001, S. 2499–2505.
- [65] B. O. CHOI UND K. KRISHNAMURTHY, *Unconstrained and Constrained Motion Control of a Planar Two-Link Structurally Flexible Robotic Manipulator*, Journal of Robotic Systems, 11 (1994), S. 557–571.

- [66] C.-H. CHUANG UND J. L. SPEYER, *Periodic optimal hypersonic scramjet cruise*, Optimal Control Applications & Methods, 8 (1987), S. 231–242.
- [67] K. CHUDEJ, *Optimale Steuerung des Aufstiegs eines zweistufigen Hyperschall-Raumtransporters*, Dissertation, Technische Universität München, 1994.
- [68] K. CHUDEJ, *Effiziente Lösung zustandsbeschränkter Optimalsteuerungsaufgaben*, Habilitationsschrift, Universität Bayreuth, 2001.
- [69] K. CHUDEJ UND M. GÜNTHER, *Global State Space Approach for the Efficient Numerical Solution of State-Constrained Trajectory Optimization Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 103 (1999), S. 75–93.
- [70] J. CHUNG UND H. H. YOO, *Dynamic analysis of a rotation cantilever beam by using finite element method*, Journal of Sound and Vibration, 249 (2002), S. 147–164.
- [71] J. J. CRAIG, *Introduction to Robotics*, Pearson Prentice Hall, 3. Aufl., 2005.
- [72] CYBERHAND. <http://www.cyberhand.org>.
- [73] M. DADO UND A. H. SONI, *A generalized approach for forward and inverse dynamics of elastic manipulators*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, USA, 1986, S. 359–364.
- [74] J. DENAVIT UND R. S. HARTENBERG, *A Kinematic Notation for lower-pair Mechanisms based on Matrices*, ASME J. Applied Mechanics, 22 (1955), S. 215–221.
- [75] J. P. DESAI, *Motion Planning and Control of Cooperative Robotic Systems*, Dissertation, Mechanical Engineering and Applied Mechanics, University of Pennsylvania, 1998.
- [76] J. P. DESAI UND V. KUMAR, *Nonholonomic motion planning for multiple mobile manipulators*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, USA, 1997, S. 3409–3414.
- [77] J. P. DESAI, M. ŽEFRAN UND V. KUMAR, *Two-arm manipulation tasks with friction assisted grasping*, in: Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Grenoble, Frankreich, 1997, S. 189–195.
- [78] P. DEUFLHARD, *A Modified Newton Method for the Solution of Ill-Conditioned Systems of Nonlinear Equations with Application to Multiple Shooting*, Numerische Mathematik, 22 (1974), S. 289–315.
- [79] P. DEUFLHARD, *A Relaxation Strategy for the Modified Newton Method*, in: Optimization and Optimal Control, R. Bulirsch, W. Oettli und J. Stoer, Hrsg., Lecture Notes in Mathematics 477, Springer, 1975, S. 59–73.

- [80] P. DEUFLHARD UND A. HOHMANN, *Numerische Mathematik I*, de Gruyter, 1993.
- [81] M. DIEHL, R. FINDEISEN, S. SCHWARZKOPF, I. USLU, F. ALLGÖWER, H. G. BOCK, E. D. GILLES UND J. P. SCHLÖDER, *An efficient algorithm for non-linear model predictive control of large-scale systems. Part II: Application to a distillation column*, *Automatisierungstechnik*, 51 (2003), S. 22–29.
- [82] A. DOĞAN UND A. IFTAR, *Modeling and control of a two-link flexible robot manipulator*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Triest, Italien, 1998, S. 761–765.
- [83] S. DUBOWSKY, P. Y. GU UND J. F. DECK, *The dynamic analysis of flexibility in mobile robotic manipulator systems*, in: Proc. of the VIII World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Prag, Tschechien, 1991.
- [84] S. K. DWIVEDY UND P. EBERHARD, *Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review*, *Mechanism and Machine Theory*, 41 (2006), S. 749–777.
- [85] E. EICH, R. MEHLORN UND G. SACHS, *Stabilization of numerical solutions of boundary value problems exploiting invariants*, in: Proc. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, Scottsdale, USA, 1994, S. 338–348.
- [86] E. EICH-SOELLNER UND C. FÜHRER, *Numerical Methods in Multibody Dynamics*, Teubner, 1998.
- [87] M. FARID UND S. A. LUKASIEWICZ, *Dynamic modeling of spatial manipulators with flexible links and joints*, *Computers and Structures*, 75 (2000), S. 419–437.
- [88] R. FEATHERSTONE, *Robot Dynamics Algorithms*, Kluwer Academic Publishers, 1987.
- [89] R. FEATHERSTONE, *Efficient Factorization of the Joint-Space Inertia Matrix for Branched Kinematic Trees*, *The International Journal of Robotic Research*, 24 (2005), S. 487–500.
- [90] R. FEATHERSTONE UND D. ORIN, *Robot Dynamics: Equations and Algorithms*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, USA, April 2000, S. 826–834.
- [91] G. FEICHTINGER UND R. F. HARTL, *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse*, de Gruyter, 1986.
- [92] M. GALICKI, *The Planning of Robotic Optimal Motions in the Presence of Obstacles*, *The International Journal of Robotic Research*, 17 (1998), S. 248–259.
- [93] M. GALICKI UND D. UCÍŃSKI, *Time-optimal motions of robotic manipulators*, *Robotica*, 18 (2000), S. 659–667.

- [94] V. O. GAMARRA-ROSADO, *A planar flexible robotic manipulator*, Kybernetes, 29 (2000), S. 787–796.
- [95] V. O. GAMARRA-ROSADO UND E. A. O. YUHARA, *Dynamic modeling and simulation of a flexible robotic manipulator*, Robotica, 17 (1999), S. 523–528.
- [96] P. E. GAULTIER UND W. L. CLEGHORN, *Modelling of multi-link spatial flexible manipulators employing the finite element method*, in: Proc. of the Thirteenth Canadian Congress of Applied Mechanics, Toronto, Kanada, 1991, S. 648–649.
- [97] P. E. GAULTIER UND W. L. CLEGHORN, *A spatially translating and rotating beam finite element for modeling flexible manipulators*, Mechanism and Machine Theory, 127 (1992), S. 415–433.
- [98] S. S. GE, T. H. LEE UND G. ZHU, *A Nonlinear Feedback Controller for a Single-Link Flexible Manipulator Based on a Finite Element Model*, Journal of Robotic Systems, 14 (1997), S. 165–178.
- [99] C. W. GEAR, *Maintaining solution invariants in the numerical solution of ODEs*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computation, 7 (1986), S. 734–743.
- [100] C. W. GEAR, *Differential-algebraic equations, indices, and integral algebraic equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 27 (1990), S. 1527–1534.
- [101] H. P. GEERING, L. GUZZELA, S. A. HEPNER UND C. H. ONDER, *Time-optimal motions of robots in assembly tasks*, IEEE Transactions on Automatic Control, 31 (1986), S. 512–518.
- [102] M. GERADIN UND A. CARDONA, *Kinematics and dynamics of rigid and flexible mechanisms using finite elements and quaternion algebra*, Computational Mechanics, 4 (1989), S. 115–135.
- [103] M. GÉRADIN, A. CARDONA, D. B. DOAN UND J. DUYSSENS, *Finite element modeling concepts in multibody dynamics*, in: Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems, M. F. O. S. Pereira und J. A. C. Ambroósio, Hrsg., Kluwer Academic Publishers, 1993, S. 233–284.
- [104] M. GERADIN, G. ROBERT UND C. BERNARDIN, *Dynamic modelling of manipulators with flexible members*, in: Advanced Software in Robotics, A. Danthine und M. Géradin, Hrsg., Elsevier Science Publishers B. V., 1984.
- [105] N. E. GIBBS, W. G. POOLE UND P. K. STOCKMEYER, *An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 13 (1976), S. 236–250.
- [106] N. E. GIBBS, W. G. POOLE UND P. K. STOCKMEYER, *A Comparison of Several Bandwidth and Profile Reduction Algorithms*, ACM Transactions on Mathematical Software, 2 (1976), S. 322–330.

- [107] P. E. GILL, W. MURRAY UND A. SAUNDERS, *Large-scale SQP Methods and their Application in Trajectory Optimization*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., ISNM 115, Birkhäuser, 1994, S. 29–42.
- [108] P. E. GILL, W. MURRAY, A. SAUNDERS UND M. H. WRIGHT, *User's guide for NPSOL 4.0*, Tech. Report SOL 86-2, Department of Operations Research, Stanford University (California, USA), 1986.
- [109] J. GREGORY UND C. LIN, *Constrained Optimization in the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Reprinted, Chapman & Hall, 1996.
- [110] P. GUMMERT UND K. A. RECKLING, *Mechanik*, Vieweg, 1986.
- [111] E. HAIRER UND G. WANNER, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer, 2. Aufl., 1996.
- [112] C. R. HARGRAVES UND S. W. PARIS, *Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation*, AIAA J. of Guidance, Control, and Dynamics, 10 (1987), S. 338–342.
- [113] R. F. HARTL, S. P. SETHI UND R. G. VICKSON, *A Survey of the Maximum Principles for Optimal Control Problems*, SIAM Review, 37 (1995), S. 181–218.
- [114] E. J. HAUG, *Computer-aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Volume 1: Basic Methods*, Allyn and Bacon, 1989.
- [115] A. HEIM UND O. VON STRYK, *Documentation of PAREST – A Multiple Shooting Code For Optimization Problems in Differential-Algebraic Equations*, Report TUM-M9616, Fakultät für Mathematik, Technische Universität München, 1996.
- [116] M. R. HESTENES, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, 1966.
- [117] P. HILTMANN, *Numerische Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung mit Steuerfunktionen über endlichdimensionalen Räumen*, Dissertation, Technische Universität München, 1990.
- [118] H. HINSBERGER, S. MIESBACH UND H. J. PESCH, *Optimal Temperature Control of Semibatch Polymerization Reactors*, in: Scientific Computing in Chemical Engineering, F. Keil, W. Mackens, H. Voß und J. Werther, Hrsg., Springer, 1996, S. 75–83.
- [119] E. HORNBOGEN, *Werkstoffe*, Springer, 7. Aufl., 2002.
- [120] W. C. HURTY, *Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes*, AIAA Journal, 3 (1965), S. 678–685.
- [121] D. H. JACOBSON UND M. M. LELE, *A Transformation Technique for Optimal Control Problems with a State Variable Inequality Constraint*, IEEE Transactions on Automatic Control, 14 (1969), S. 457–464.

- [122] D. H. JACOBSON, M. M. LELE UND J. L. SPEYER, *New Necessary Conditions of Optimality for Control Problems with State-Variable Inequality Constraints*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35 (1971), S. 255–284.
- [123] M. JAHNKE, K. POPP UND B. DIRR, *Approximate analysis of flexible parts in multibody systems using the finite element method*, in: Advanced Multibody System Dynamics, W. Schiehlen, Hrsg., Kluwer Academic Publishers, 1993, S. 237–256.
- [124] A. JAIN UND G. RODRIGUEZ, *Linearization of Manipulator Dynamics Using Spatial Operators*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 23 (1993), S. 239–248.
- [125] C. JÄNISCH, K. SCHNEPPER UND K. H. WELL, *Ascent and Descent Trajectory Optimization of Ariane V / Hermes*. Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 197, 1990.
- [126] R. JOHANNI, *Optimale Bahnplanung bei Industrierobotern*, Fortschritt Berichte VDI-Reihe 18 Nr. 51, VDI, 1988.
- [127] B. JONKER, *A finite element dynamic analysis of spatial mechanisms with flexible links*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 76 (1989), S. 17–40.
- [128] B. JONKER, *A Finite Element Dynamic Analysis of Flexible Manipulators*, The International Journal of Robotics Research, 9 (1990), S. 59–74.
- [129] B. JONKER UND R. G. K. M. AARTS, *A Perturbation Method for Dynamic Analysis and Simulation of Flexible Manipulators*, Multibody System Dynamics, 6 (2001), S. 245–266.
- [130] A. D. JUTARD-MALINGE UND G. BESSONNET, *Optimal path planning of manipulatory systems subjected to non-autonomous motion laws*, Robotica, 15 (1997), S. 251–261.
- [131] A. D. JUTARD-MALINGE UND G. BESSONNET, *Optimal Motion Planning of Robotic Manipulators Removing Mobile Objects Grasped in Motion*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, 29 (2000), S. 233–255.
- [132] H. H. M. K. MAGNUS, *Grundlagen der Technischen Mechanik*, B. G. Teubner, 6. Aufl., 1990.
- [133] P. KALRA UND A. M. SHARAN, *Accurate modelling of flexible manipulators using finite element analysis*, Mechanism and Machine Theory, 26 (1991), S. 299–313.
- [134] H. J. KELLY, R. E. KOPP UND H. G. MOYER, *Singular Extremals*, in: Topics in Optimization, G. Leitmann, Hrsg., Academic Press, 1967, S. 63–101.

- [135] M. KIEHL, *Vektorisierung der Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung.*, Dissertation, Technische Universität München, 1989. Nachdruck: Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report No. 115, Technische Universität München, 1989.
- [136] K. KNOTHE UND H. WESSELS, *Finite Elemente*, Springer, 2. Aufl., 1992.
- [137] T. KRAFT, *TOMP - Fortran Modules for Optimal control Calculations*, Fortschritt Berichte VDI-Reihe 8 Nr. 254, VDI, 1991.
- [138] H. KREIM, B. KUGELMANN, H. J. PESCH UND M. H. BREITNER, *Minimizing the maximum heating of a re-entering space shuttle: An optimal control problem with multiple control constraints*, Optimal Control Applications and Methods, 17 (1996), S. 45–69.
- [139] E. KREINDLER, *Additional Necessary Conditions for Optimal Control with State-Variable Inequality Constraints*, Journal of Optimization Theory and Applications, 38 (1982), S. 241–250.
- [140] E. KREUZER, *Symbolische Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen*, Fortschritt Berichte VDI-Reihe 11 Nr. 32, VDI, 1979.
- [141] E. KREUZER UND W. SCHIEHLEN, *NEWEUL - Software for the Generation of Symbolical Equations of Motion*, in: Multibody Systems Handbook, W. Schiehlen, Hrsg., Springer, 1990, S. 181–202.
- [142] B. KUGELMANN, *Minimizing The Noise of an Aircraft During Landing Approach*, in: Variational Calculus, Optimal Control and Applications, W. H. Schmidt, K. Heier, L. Bittner und R. Bulirsch, Hrsg., ISNM 124, Birkhäuser, 1998, S. 271–280.
- [143] B. KUGELMANN UND H. J. PESCH, *New General Guidance Method in Constrained Optimal Control, Part 2: Application to Space Shuttle Guidance*, Journal of Optimization Theory and Applications, 67 (1990), S. 437–446.
- [144] B. KUGELMANN UND W. WEBER, *Conflict Avoidance During Landing Approach Using Parallel Feedback Control*, in: Online Optimization of Large Scale Systems, M. Grötschel, S. O. Krumke und J. Rambau, Hrsg., Springer, 2001, S. 143–155.
- [145] P. KUNKEL UND V. MEHRMANN, *Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution*, European Mathematical Society, 2006.
- [146] F. KUYPERS, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH, 7. Aufl., 2005.
- [147] J. KÖVECSES, *A Distributed Parameter Model for the Dynamics of Flexible-Link Robots*, Journal of Robotic Systems, 15 (1998), S. 281–298.
- [148] J. D. LEE, *Application of optimal control theory to flexible robotic manipulators*, Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 7 (1990), S. 327–335.

- [149] J. D. LEE UND B. L. WANG, *Dynamic equations for a two-link flexible robot arm*, Computers and Structures, 29 (1988), S. 469–477.
- [150] J. D. LEE UND B. L. WANG, *Optimal control of a flexible robot arm*, Computers and Structures, 29 (1988), S. 459–467.
- [151] D. B. LEINEWEBER, H. G. BOCK, J. P. SCHLÖDER, A. S. S. SCHÄFER UND P. JANSOHN, *Efficient Techniques for the Optimization of Complex Chemical Processes*, in: Modelling of Chemical Reaction Systems, J. Warnatz und F. Behrendt, Hrsg., IWR, Heidelberg, 1996.
- [152] G. LEITMANN, *A Note on State-Constrained Optimal Control*, Journal of Optimization Theory and Applications, 7 (1971), S. 209–214.
- [153] R. M. LEWIS, *Definitions of Order and Junction Conditions in Singular Optimal Control Problems*, SIAM J. Control and Optimization, 18 (1980), S. 21–32.
- [154] K. W. LILLY, *Efficient Dynamic Simulation of Robotic Mechanisms*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [155] K. W. LILLY UND D. E. ORIN, *Alternate Formulations for the Manipulator Inertia Matrix*, The International Journal of Robotics Research, 10 (1991), S. 64–74.
- [156] Q. LIU, *Dynamic Analysis of a Spatial Robot Manipulator with a Flexible Prismatic Link*, Dissertation, Mechanical Engineering, West Virginia University, Morgantown, USA, 1993.
- [157] K. H. LOW UND M. VIDYASAGAR, *A Lagrangian Formulation of the Dynamic Model for Flexible Manipulator Systems*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 110 (1988), S. 175–181.
- [158] K. MALANOWSKI, H. MAURER UND S. PICKENHAIN, *Second Order Sufficient Conditions for State Constrained Optimal Control Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 123 (2004), S. 595–617.
- [159] J. E. MARSDEN UND T. J. R. HUGHES, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Reprinted, Dover, 1994.
- [160] J. MARTINS, M. A. BOTTO UND J. S. DA COSTA, *Modeling of Flexible Beams for Robotic Manipulators*, Multibody System Dynamics, 7 (2002), S. 79–100.
- [161] J. MARTINS, Z. MOHAMED, M. O. TOKHI UND J. S. DA COSTA, *Approaches for dynamic modelling of flexible manipulator systems*, IEE Proceedings of Control Theory and Applications, 150 (2003), S. 401–411.
- [162] H. MAURER, *Numerical Solution of Singular Control Problems Using Multiple Shooting Techniques*, Journal of Optimization Theory and Applications, 18 (1976), S. 235–257.

- [163] H. MAURER, *On Optimal Control Problems with Bounded State Variables and Control Appearing Linearly*, SIAM Journal of Control and Optimization, 15 (1977), S. 345–362.
- [164] H. MAURER, *On the minimum principle for optimal control problems with state constraints*, Rechenzentrum Universität Münster, Schriftenreihe Nr. 41, 1979.
- [165] H. MAURER UND N. P. OSMOLOVSKII, *Second Order Optimality Conditions for Bang-Bang Control Problems*, Control and Cybernetics, 32 (2003), S. 555–584.
- [166] H. MAURER UND N. P. OSMOLOVSKII, *Second order sufficient conditions for time-optimal bang-bang control*, SIAM Journal of Control and Optimization, 42 (2004), S. 2239–263.
- [167] S. McMILLAN, *Computational Dynamics for Robotic Systems on Land and Under Water*, Dissertation, The Ohio State University, 1995.
- [168] E. B. MEIER UND A. E. BRYSON, *Efficient algorithm for time-optimal control of a two-link manipulator*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 13 (1990), S. 859–866.
- [169] D. MESCHÉDE, *Gerthsen Physik*, Springer, 22. Aufl., 2004.
- [170] A. MIELE, *Gradient Algorithms for the Optimization of Dynamic Systems*, in: Control and Dynamic Systems, C. T. Leondes, Hrsg., Band 16, Academic Press, 1980, S. 1–52.
- [171] W. H. MÜLLER UND F. FERBER, *Technische Mechanik für Ingenieure*, Fachbuchverlag Leipzig, 2. Aufl., 2005.
- [172] Z. MOHAMED UND M. O. TOKHI, *Command shaping techniques for vibration control of a flexible manipulator*, Mechatronics, 14 (2004), S. 69–90.
- [173] A. S. MORRIS UND A. MADANI, *Quadratic optimal control of a two-flexible-link robot manipulator*, Robotica, 16 (1998), S. 97–108.
- [174] H. MOULIN UND E. BAYO, *Accuracy of discrete models for the inverse dynamics of flexible arms, feasible trajectories*, in: Proc. IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, USA, 1990, S. 531–532.
- [175] H. MOULIN UND E. BAYO, *On the Accuracy of End-Point Trajectory Tracking for Flexible Arms by Noncausal Inverse Dynamic Solutions*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 113 (1991), S. 320–324.
- [176] J. J. MURRAY UND D. W. JOHNSON, *The Linearized Dynamic Robot Model: Efficient Computation and Practical Applications*, in: Proc. of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, USA, 1989, S. 1659–1664.

- [177] J. J. MURRAY UND C. P. NEUMAN, *Linearization and Sensitivity Models of the Newton-Euler Dynamic Robot Model*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 108 (1986), S. 272–276.
- [178] G. NAGANATHAN UND A. H. SONI, *Non-linear flexibility studies for spatial manipulators*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, USA, 1986, S. 373–378.
- [179] G. NAGANATHAN UND A. H. SONI, *An analytical and experimental investigation of flexible manipulator performance*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Raleigh, USA, 1987, S. 767–773.
- [180] G. NAGANATHAN UND A. H. SONI, *Coupling Effects of Kinematics and Flexibility in Manipulators*, The International Journal of Robotics Research, 6 (1987), S. 75–84.
- [181] S. NAGARAJAN UND D. A. TURCIC, *Lagrangian Formulation of the Equations of Motion for Elastic Mechanisms With Mutual Dependence Between Rigid Body and Elastic Motions. Part I: Element Level Equations*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 112 (1990), S. 203–214.
- [182] S. NAGARAJAN UND D. A. TURCIC, *Lagrangian Formulation of the Equations of Motion for Elastic Mechanisms With Mutual Dependence Between Rigid Body and Elastic Motions. Part II: System Equations*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 112 (1990), S. 215–224.
- [183] N. M. NEWMARK, *A Method of Computation for Structural Dynamics*, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, 85 (1959), S. 67–94.
- [184] H. J. OBERLE, *Numerische Berechnung optimaler Steuerungen von Heizung und Kühlung für ein realistisches Sonnenhausmodell*, Habilitationsschrift, Technische Universität München, 1982.
- [185] H. J. OBERLE, *Numerical computation of singular control functions for a two-link robot arm*, in: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Band 95, Springer, 1987, S. 244–253.
- [186] T. ONSAY UND A. AKAY, *Vibration reduction of a flexible arm by time-optimal open-loop control*, Journal of Sound and Vibration, 147 (1991), S. 283–300.
- [187] M. OTTER UND S. TÜRK, *The DFVLR Models of the Manutec r3 Robot*, Institut für Dynamik der Flugsysteme, Report DFVLR-Mitt. 88-13, 1988.
- [188] S. PAL, H. E. STEPHANOU UND G. COOK, *Optimal Control of a Single-Link Flexible Manipulator*, Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2 (1989), S. 187–199.
- [189] N. L. PEDERSEN UND M. L. PEDERSEN, *A direct derivation of the equations of motion for 3D-flexible mechanical systems*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 41 (1998), S. 679–719.

- [190] H. J. PESCH, *A practical guide to the solution of real-life optimal control problems*, Control and Cybernetics, 23 (1994), S. 7–60.
- [191] H. J. PESCH, *Solving Optimal Control and Pursuit-Evasion Game Problems of High Complexity*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., ISNM 115, Birkhäuser, 1994, S. 43–61.
- [192] F. PFEIFFER, *Einführung in die Dynamik*, B. G. Teubner, 1992.
- [193] F. PFEIFFER UND E. REITHMEIER, *Roboterdynamik*, B. G. Teubner, 1987.
- [194] H. X. PHÚ, *Some Necessary Conditions for Optimality for a Class of Optimal Control Problems which are Linear in the Control Variable*, System & Control Letters, 8 (1987), S. 261–271.
- [195] L. S. PONTRJAGIN, V. G. BOLTJANSKIJ, R. V. GAMKRELIDZE UND E. F. MISČENKO, *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*, Oldenburg, 2. Aufl., 1967.
- [196] W. F. POWERS, *On the Order of Singular Optimal Control Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 32 (1980), S. 479–489.
- [197] F. RAMPAZZO UND R. VINTER, *Degenerate optimal control problems with state constraints*, SIAM Journal of Control and Optimization, 39 (2000), S. 989–1007.
- [198] RECURDYN. <http://www.functionbay.co.kr>.
- [199] W. RITZ, *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 135 (1909), S. 1–61.
- [200] R. E. ROBERSON UND R. SCHWERTASSEK, *Dynamics of Multibody Systems*, Springer, 1988.
- [201] M. ROSTAMI UND G. BESSONNET, *Impactless sagittal gait of a biped robot during the single support phase*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgien, 1998, S. 1385–1391.
- [202] W. RULKA, *SIMPACK - A Computer Program for Simulation of Large-motion Multibody Systems*, in: Multibody Systems Handbook, W. Schiehlen, Hrsg., Springer, 1990, S. 265–284.
- [203] R. R. RYAN, *ADAMS - Multibody System Analysis Software*, in: Multibody Systems Handbook, W. Schiehlen, Hrsg., Springer, 1990, S. 361–402.
- [204] D. A. SARAVANOS UND J. S. LAMANCUSA, *Optimum structural design of robotic manipulators with fiber reinforced composite materials*, Computers and Structures, 36 (1990), S. 119–132.

- [205] R. W. H. SARGENT, *Optimal control*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 124 (2000), S. 361–371.
- [206] R. K. SARKAR, M. YAMAMOTO UND A. MOHRI, *Significance of Spline Curve in Path Planning of Flexible Manipulator*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Albuquerque, USA, 1997, S. 2535–2540.
- [207] R. K. SARKAR, M. YAMAMOTO UND A. MOHRI, *A Numerical Method to Minimize Tracking Error of Multi-Link Elastic Robot*, in: Proc. IEEE/RJS International Conference on Intelligent Robots and Systems, Victoria, Kanada, 1998, S. 685–690.
- [208] A. A. S. SCHÄFER, U. BRANDT-POLLMANN, M. DIEHL, H. G. BOCK UND J. P. SCHLÖDER, *Fast optimal control algorithms with application to chemical engineering*, in: Operations Research Proceedings, D. Ahr, R. Fahrion, M. Oswald und G. Reinelt, Hrsg., Springer, 2003, S. 300–307.
- [209] G. F. SCHANZER, *Optimale Steuerung eines miniaturisierten Greifers mit Zustandsbeschränkung zweiter Ordnung*, Diplomarbeit, Technische Universität München, 2002.
- [210] G. F. SCHANZER UND R. CALLIES, *Multiple constrained rivalling actuators in the optimal control of miniaturized manipulators*. angenommen bei: Multibody Dynamic Systems.
- [211] G. F. SCHANZER UND R. CALLIES, *Optimal control of multi-link manipulators with rivalling actuators*, in: Proc. of the III. European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, C. A. M. S. et al., Hrsg., Lissabon, Portugal, 2006.
- [212] G. F. SCHANZER UND R. CALLIES, *Rivalling Optimal Control in Robot-Assisted Surgery*, in: Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2004, A. Di Bucchianico, R. M. M. Mettheij und M. A. Peletier, Hrsg., Springer, 2006, S. 330–334.
- [213] F. SCHECK, *Mechanik*, Springer, 4. Aufl., 1994.
- [214] W. SCHIEHLEN, Hrsg., *Multibody Systems Handbook*, Springer, 1990.
- [215] W. SCHIEHLEN UND P. EBERHARD, *Technische Dynamik: Modelle für Regelung und Simulation*, B. G. Teubner, 2. Aufl., 2004.
- [216] K. SCHITTKOWSKI, *The nonlinear programmin method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. part 1: Convergence analysis*, Numerische Mathematik, 38 (1981), S. 83–114.
- [217] K. SCHITTKOWSKI, *The nonlinear programmin method of Wilson, Han and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. part 2: An efficient implementation with linear least square subproblems*, Numerische Mathematik, 38 (1981), S. 115–127.

- 
- [218] R. SCHÖPF UND P. DEUFLHARD, *OCCAL a Mixed Symbolic-Numeric Optimal Control CALculator*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., ISNM 115, Birkhäuser, 1994, S. 115–127.
- [219] L. K. SCHUBERT, *Modification of a Quasi-Newton Method for Nonlinear Equations with a Sparse Jacobian*, Mathematics of Computation, 24 (1970), S. 27–30.
- [220] V. H. SCHULZ, H. G. BOCK UND M. C. STEINBACH, *Exploiting invariants in the numerical solution of multipoint boundary value problems for dae*, SIAM Journal on Scientific Computing, 19 (1998), S. 440–467.
- [221] H. R. SCHWARZ, *Methode der finiten Elemente*, B. G. Teubner, 2. Aufl., 1984.
- [222] R. SCHWERTASSEK UND O. WALLRAPP, *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*, Vieweg, 1999.
- [223] A. A. SHABANA, *Dynamics of Multibody Systems*, J. Wiley & Sons, 1989.
- [224] A. A. SHABANA, *Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments*, Multibody System Dynamics, 1 (1997), S. 189–222.
- [225] A. M. SHARAN, J. JAIN UND P. KALRA, *Efficient Methods for Solving Dynamic Problems of Flexible Manipulators*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 114 (1992), S. 78–88.
- [226] B. SIMEON, *Numerische Integration mechanischer Mehrkörpersysteme: Projizierende Deskriptorformen, Algorithmen und Rechenprogramme*, Fortschritt Berichte VDI-Reihe 20 Nr. 130, VDI, 1994.
- [227] B. SIMEON, *Numerische Simulation gekoppelter Systeme von partiellen und differential-algebraischen Gleichungen in der Mehrkörperdynamik*, Fortschritt Berichte VDI-Reihe 20 Nr. 325, VDI, 2000.
- [228] B. SIMEON, C. FÜHRER UND P. RENTROP, *Differential algebraic equations in vehicle system dynamics*, Surveys on Mathematics for Industry, 1 (1991), S. 1–37.
- [229] J. C. SIMO UND T. J. R. HUGHES, *Computational Inelasticity*, Springer, 2000.
- [230] SIMPACK. <http://www.simpack.com>.
- [231] G. A. SOHL UND J. E. BOBROW, *A Recursive Multibody Dynamics and Sensitivity Algorithm for Branched Kinematic Chains*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 123 (2001), S. 391–399.
- [232] SOLVIA. <http://www.solvias.com>.
- [233] K. SORGE, H. BREMER UND F. PFEIFFER, *Multi-Body Systems with Rigid-Elastic Subsystems*, in: Advanced Multibody System Dynamics, W. Schiehlen, Hrsg., Kluwer Academic Publishers, 1993, S. 195–215.

- [234] M. W. SPONG UND M. VIDYASAGAR, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, 1989.
- [235] M. C. STEINBACH, H. G. BOCK, G. V. KOSTIN UND R. W. LONGMAN, *Mathematical optimization in robotics: towards automated high-speed motion planing*, *Surveys on Mathematics for Industry*, 7 (1998), S. 303–340.
- [236] M. C. STEINBACH, H. G. BOCK UND R. W. LONGMAN, *Time optimal control of SCARA robots*, in: *Proc. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Portland, USA, 1990, S. 707–716.
- [237] M. C. STEINBACH, H. G. BOCK UND R. W. LONGMAN, *Time-Optimal Extension and Retraction of Robots: Numerical Analysis of the Switching Structure*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 84 (1995), S. 589–616.
- [238] J. STOER, *Numerische Mathematik 1*, Springer, 1999.
- [239] J. STOER UND R. BULIRSCH, *Numerische Mathematik 2*, Springer, 2000.
- [240] G. STRANG UND G. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, 1973.
- [241] W. SUNADA UND S. DUBOWSKY, *The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Spatial and Co-Planar Linkage Systems*, *Journal of Mechanical Design*, 103 (1981), S. 643–651.
- [242] J. G. TAYLOR, *Comments on a Multiplier Condition for Problems with State Variable Inequality Constraints*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17 (1972), S. 743–744.
- [243] R. J. THEODORE UND A. GHOSAL, *Comparison of the Assumed Modes and Finite Element Models for Flexible Multilink Manipulators*, *The International Journal of Robotic Research*, 14 (1995), S. 91–111.
- [244] M. O. TOKHI, A. K. M. AZAD, H. POERWANTO, S. KOURTIS UND M. J. BAXTER, *A SIMULINK environment for simulation and control of flexible manipulator systems*, in: *UKACC International Conference on Control*, 1996, S. 210–215.
- [245] M. O. TOKHI, Z. MOHAMED, S. H. M. AMIN UND R. MAMAT, *Dynamic characterization of a flexible manipulator system: theory and experiments*, in: *Proceedings of TENCON*, Kuala Lumpur, Malaysia, 2000, S. 167–172.
- [246] M. ULBRICH, S. ULBRICH UND L. N. VICENTE, *A globally convergent primal-dual interior-point filter method for nonlinear programming*, *Mathematical Programming*, 100 (2004), S. 379–410.
- [247] Y. UNO, M. KAWATO UND R. SUZUKI, *Formation and Control of Optimal Trajectory in Human Multijoint Arm Movement*, *Biological Cybernetics*, 61 (1989), S. 89–101.

- [248] P. B. USORO, R. NADIRA UND S. S. MAHIL, *A Finite Element/Lagrangian Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 108 (1986), S. 198–205.
- [249] F. A. VALENTINE, *The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions*, in: Contributions to the Calculus of Variations 1933-1937, University of Chicago Press, 1937, S. 403–447.
- [250] O. VON STRYK, *Numerical Solution of Optimal Control Problems by Direct Collocation*, in: Optimal Control, R. Bulirsch, A. Miele, J. Stoer und K. H. Well, Hrsg., ISNM 111, Birkhäuser, 1993, S. 129–143.
- [251] O. VON STRYK, *Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen*, Fortschritt Berichte VDI-Reihe 8 Nr. 441, VDI, 1995.
- [252] O. VON STRYK UND R. BULIRSCH, *Direct and Indirect Methods for Trajectory Optimization*, Annals of Operations Research, 37 (1992), S. 357–373.
- [253] O. VON STRYK UND M. SCHLEMMER, *Optimal Control of the Industrial Robot Manutec r3*, in: Computational Optimal Control, R. Bulirsch und D. Kraft, Hrsg., ISNM 115, Birkhäuser, 1994, S. 367–382.
- [254] M. W. WALKER UND D. E. ORIN, *Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 104 (1982), S. 205–211.
- [255] O. WALLRAPP, *Standardization of Flexible Body Modeling in Multibody System Codes, Part I: Definition of Standard Input Data*, Mechanics of Structures and Machines, 22 (1994), S. 283–304.
- [256] T. WASFY, *Modeling Contact/Impact of Flexible Manipulators with a Fixed Rigid Surface*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Japan, 1995, S. 621–626.
- [257] A. WÄCHTER, *An Interior Point Algorithm for Large-Scale Nonlinear Optimization with Applications in Process Engineering*, Dissertation, Carnegie Mellon University, 2002.
- [258] A. WÄCHTER UND L. T. BIEGLER, *On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming*, Mathematical Programming, 106 (2006), S. 25–57.
- [259] A. WEINREB UND A. E. BRYSON, *Optimal Control of Systems with Hard Control Bounds*, IEEE Transactions on Automatic Control, 30 (1985), S. 1135–1138.
- [260] B. WIE, C.-H. CHUANG UND J. SUNKEL, *Minimum-Time Pointing Control of a Two-Link Manipulator*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 13 (1990), S. 867–873.

- [261] X. R. XU, W. J. CHUNG UND Y. H. CHOI, *Modeling of Kineto-Elastodynamic Robots with Flexible Links*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Detroit, USA, 1999, S. 753–758.
- [262] Z. YANG UND J. P. SADLER, *Large-Displacement Finite Element Analysis of Flexible Linkages*, Journal of Mechanical Design, 112 (1990), S. 175–182.
- [263] S. G. YUE, *Redundant robot manipulators with joint and link flexibility I: dynamic motion planning for minimum end-effektor deformation*, Mechanism and Machine Theory, 33 (1998), S. 103–113.
- [264] S. G. YUE, *Weak-vibration configurations for flexible robot manipulators with kinematic redundancy*, Mechanism and Machine Theory, 35 (2000), S. 165–178.
- [265] S. G. YUE, Y. Q. YU UND S. X. BAI, *Flexible rotor beam element for the manipulators with joint and link flexibility*, Mechanism and Machine Theory, 32 (1997), S. 209–219.
- [266] J. ZHAO, M. DIEHL, R. LONGMAN, H. G. BOCK UND J. P. SCHLÖDER, *Nonlinear Model Predictive Control of Robots Using Real-Time Optimization*, in: Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Providence, USA, 2004.
- [267] O. C. ZIENKIEWICZ, *Methode der finiten Elemente*, Carl Hanser Verlag, 2. Aufl., 1984.
- [268] O. C. ZIENKIEWICZ UND R. L. TAYLOR, *The Finite Element Method, Volume 1: Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill, 4. Aufl., 1994.
- [269] M. ŽEFRAN UND V. KUMAR, *Optimal control of systems with unilateral constraints*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nagoya, Japan, 1995, S. 2695–2700.
- [270] M. ŽEFRAN UND V. KUMAR, *A variational calculus framework for motion planning*, in: Proc. 8th International Conference on Advanced Robotics, Monterey, USA, 1997, S. 415–420.
- [271] M. ŽEFRAN, V. KUMAR UND C. B. CROKE, *On the Generation of Smooth Three-Dimensional Rigid Body Motions*, IEEE Transactions on Robotics and Automation, 14 (1998), S. 576–589.
- [272] M. ŽEFRAN, V. KUMAR UND X. YUN, *Optimal Trajectories and Force Distribution for Cooperating Arms*, in: Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Diego, USA, 1994, S. 874–879.