

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
INSTITUT FÜR ENERGIETECHNIK MW7

LEHRSTUHL FÜR FLUIDMECHANIK

**Numerische Simulation der Strömung
in Radseitenräumen von Turbomaschinen**

Jusuf Jusuf

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. H. Spliethoff

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Schilling
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. H.-P. Kau

Die Dissertation wurde am 25.10.2006 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 15.12.2006 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Fluidmechanik, vormals Lehrstuhl für Hydraulische Maschinen und Anlagen, der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Rudolf Schilling, der es mir ermöglichte diese Arbeit anzufertigen und durch seine wissenschaftliche Anleitung und konstruktive Unterstützung wesentlich zum Gelingen beigetragen hat. Seine lehrreichen Anregungen und die zahlreichen fachlichen Diskussionen mit ihm waren mir stets eine wertvolle Hilfe während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Hans-Peter Kau danke ich für die Übernahme des Koreferates ebenso wie Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Hartmut Spliethoff, der freundlicherweise als Vorsitzender der Prüfungskommission zur Verfügung stand.

Weiterhin danke ich unserem akademischen Oberrat Herrn Dr.-Ing. Wilfried Knapp für die vielseitige Unterstützung.

Gerne möchte ich an dieser Stelle auch die Gelegenheit nutzen, all meinen Kollegen für die stets gute Zusammenarbeit und die angenehme Arbeitsatmosphäre zu danken.

Ich danke Herrn Dr.-Ing. Stefan Krämer herzlichst, dass er mir die Tür zu der wunderbaren Welt des C/C++ geöffnet hat. Herrn Dipl.-Ing. Johannes Einzinger danke ich für die interessanten, vielfältigen Diskussionen und Herrn Dipl.-Ing. Florian Kronschnabl danke ich für seine stets freundliche Hilfsbereitschaft.

Ganz herzlichen Dank möchte ich auch meinen Eltern und meinen Geschwistern aussprechen, die mich beim Erreichen meiner beruflichen Ziele immer bestärkt und nach Kräften unterstützt haben.

Meinem Herrn gilt mein herzlichster Dank für alles, was Er mir getan hat, tut und tun wird. In Ihm findet mein Geist und meine Seele himmlische Ruhe und Frieden. Mit Ihm hat mein Leben erst eine Bedeutung. Ihm ist diese Arbeit gewidmet.

München, November 2006

Jusuf Jusuf

Inhaltsverzeichnis

Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen	VIII
Zusammenfassung	XV
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Stand des Wissens I: Numerik	3
1.2.1 Numerische Strömungssimulation im Turbomaschinenbau	3
1.2.2 Grundlegende Ansätze für die numerischen Methoden zur Berechnung fluiddynamischer Fragestellungen	4
1.2.3 Lösungsverfahren nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen in der Fluiddynamik	7
1.2.4 Approximationen der instationären, konvektiven und diffusiven Terme	9
1.3 Stand des Wissens II: Turbulenz	10
1.3.1 Die wichtigsten theoretischen und experimentellen Grundlagen der Turbulenz	10
1.3.2 Numerische Simulation turbulenter Strömungen	11
1.4 Zielsetzung	17
2 Theoretische Grundlagen	19
2.1 Allgemein tensorielle Navier-Stokes Gleichungen	19
2.2 Statistische Mittelung der Navier-Stokes Gleichungen	22
2.2.1 Reynoldsscher Separationsansatz	22
2.2.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen	23
2.2.3 Transportgleichungen für Reynoldsspannungstensor	24
2.3 Turbulenzmodellierung	27
2.3.1 Boussinesq-Approximation	29

2.3.2	Definitionen wichtiger achsensymmetrischer Operatoren	31
2.3.3	k - ε -Modell	31
2.3.4	$\nu \widetilde{Re}_T$ -Modell	33
2.3.5	k - ω -Modell	34
2.3.6	Wandbehandlung	35
2.3.7	Realisierbarkeitsbedingung	37
2.4	Nichtlineare Turbulenzmodellierung	39
2.4.1	Nichtlineares k - ε -Modell	40
2.5	Dimensionslose Form der RANS-Gleichungen	42
3	Numerisches Verfahren	43
3.1	Finite-Volumen Verfahren	43
3.1.1	Definition des Kontrollvolumens	44
3.1.2	Anwendung des Integralsatzes von Gauß auf achsensymmetrische Operatoren	45
3.1.3	Integralform der Erhaltungsgleichungen	45
3.1.4	Berechnung der Oberflächen- und Volumenintegrale	46
3.1.5	Interpolationsverfahren	47
3.2	Diskretisierung der einzelnen Terme	55
3.2.1	Diffusive Flüsse	55
3.2.2	Konvektive Flüsse	58
3.2.3	Instationäre Terme	59
3.2.4	Quellterme	61
3.2.5	Spezielle Integraltransformation für achsensymmetrische Navier-Stokes Gleichungen	62
3.3	Eigenschaften der numerischen Verfahren	64
3.4	Lösungsverfahren nichtlinearer Gleichungen	65
3.4.1	SIMPLE- und SIMPLEC-Algorithmus als Vertreter der Druckkorrekturverfahren	66
3.4.2	Druckkorrekturverfahren für konturangepasste Netze	68
3.4.3	Zusammenfassung der Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme	70
3.5	Lösungsverfahren linearisierter Gleichungssysteme	71
3.5.1	ILU-Zerlegung mit SIP-Algorithmus	73
3.5.2	Erhöhung der Diagonaldominanz	74

3.5.3	Implementierungstechnik für den Computercode	74
3.6	Randbedingungen	76
3.6.1	Einströmränder	76
3.6.2	Ausströmränder	78
3.6.3	Wände	78
3.6.4	Symmetrie	82
3.7	Mehrblock-Strategie	84
3.8	Implementierung der Turbulenzmodelle	85
4	Validierung	87
4.1	Rohrströmung	87
4.1.1	Hydrodynamisch nicht ausgebildete und vollausgebildete lamina- nare Rohrströmung	88
4.1.2	Turbulente Rohrströmung	95
4.2	Strömung in einem Ringrohr	97
4.2.1	Hydrodynamisch nicht ausgebildete und vollausgebildete lamina- nare Strömung in einem Ringrohr	98
4.2.2	Turbulente Ringrohrströmung	103
4.3	Zylindrische Couette-Strömung	104
5	Anwendung	108
5.1	Idealisierter Radseitenraum	109
5.1.1	Radseitenraum ohne resultierenden Durchfluss	110
5.1.2	Radseitenraum mit resultierendem Durchfluss	125
5.2	Radseitenräume in einer Turbomaschine	132
5.2.1	Druckseitiger Radseitenraum	133
5.2.2	Saugseitiger Radseitenraum	134
5.2.3	Einfluss der Leckage	136
6	Bewertung und Ausblick	140
A	Komponenten des Reynoldsspannungstensors	143
	Literaturverzeichnis	146

Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen

Abkürzungen

AGARD	Advisory Group for Aerospace Research and Development
BB	Baldwin-Barth
BF	Blendingfaktor
CDS	Central Differencing Scheme
CBC	Convection Boundedness Criterion
CFD	Computational Fluid Dynamics
DCS	Deferred Correction Scheme
DNS	Direkte numerische Simulation
DS	Druckseite
EASM	Explizites Algebraisches Reynolds-Spannungsmodell
ERCOFTAC	European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion
FAS	Full Approximation Scheme
HRS	High Resolution Scheme
IP	Isotropization of Production
KW	k - ω -Modell
LCL	Modell nach LIEN, CHEN UND LESCHZINER [98]
LES	Large Eddy Simulation
MINMOD	Verfahren nach HARTEN [71]
MPI	Message Passing Interface
NACA	National Advisory Committee for Aeronautics
NATO	North Atlantic Treaty Organization
NSA	Navier-Stokes Axisymmetric
NVF	Normalized Variable Formulation
NVD	Normalized Variable Diagram
NVSF	Normalized Variable and Space Formulation
PDG	partielle Differentialgleichungen
Q3D	Quasi-dreidimensionale Strömungsrechnung
RANS	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen
SGS	Subgrid Scale Model
SIMPLE	Semi Implicit Methode for Pressure Linked Equations
SIMPLER	Semi Implicit Methode for Pressure Linked Equations Revised
SIP	Strongly Implicit Procedure

SS	Saugseite
STD	Standard- k - ε -Modell
TKE	Turbulente kinetische Energie
TVD	Total Variation Diminishing
UDS	Upwind Differencing Scheme
WF	Wandfunktion

Lateinische Zeichen

$\underline{\underline{A}}, A_{ij}$		Koeffizientenmatrix
\underline{A}		Eintrag der Koeffizientenmatrix
\underline{b}		Rechte Seite des Gleichungssystems
b		Eintrag der rechten Seite des Gleichungssystems
b_{ij}		Anisotropietensor der Reynolds-Spannungen
b_2	$[m]$	Lauftradaustrittsbreite
C		Konstante
\tilde{C}		Konstante der Wandfunktion
C_{Fax}		Axialkraftbeiwert
C_{Mf}		Reibmomentenbeiwert
C_{TG}		Turbulenzgitterkonstante
C_i		Modellkonstanten
C_p		Druckbeiwert
$C_{\varepsilon,1}, C_{\varepsilon,2}$		Modellkonstanten der k - ε -Modelle
C_μ, \tilde{C}_μ		Modellkonstante bzw. Modellfunktion
$C_{\mu,r}$		Funktion der Realizability-Bedingung nach MOORE UND MOORE [111]
C_S		Modellkonstante des Gradient-Transportmodells
CT^{kj}	$[m^2/s^3]$	Kontravarianter Konvektionstensor
D		Allgemeiner Diffusionskoeffizient
D, d	$[m]$	Durchmesser
DS^{kj}		Kontravarianter Dissipationsscherungstensor
DS_D^{kj}	$[m^2/s^3]$	Deviatorischer Anteil des Dissipationsscherungstensor
E	$[m^2/s^4]$	Term in der ε -Gleichung
\tilde{E}		Konstante der Wandfunktion
Eu		Euler-Zahl
F		Integraler Fluss durch eine Zellgrenzfläche
f		Fluss durch eine Zellgrenzfläche
$\underline{f}_w^d, f_{i,w}^d$		Diffusiver Wandfluss
f_μ, f_1, f_2		Dämpfungsfunktionen der Low-Reynolds-Number-Modelle
f_w		Dämpfungsfunktion des FLB-Modells
f_n		Funktion der Realizability-Bedingung nach MOORE UND MOORE [111]
$g^{(index)(index)}$		Kontravariante Metrikensorkomponente
\underline{g}_k		Kovariante Basisvektoren
$e\underline{g}_k$		Normierte, kovariante Basisvektoren
$\underline{\underline{I}}$		Einheitstensor

k	$[m^2/s^2]$	Turbulente kinetische Energie
k_r	$[m]$	Äquivalente Sandrauigkeit
L	$[m]$	Länge
L		Eintrag der unteren Teilmatrix
L_T	$[m]$	Integrales turbulentes Längenmaß
\dot{m}	$[m^3/s]$	Dichtebezogener Massenstrom
Ma		Mach-Zahl
N		Anzahl Knotenpunkte oder Zellen
\underline{n}, n_i		Normalenvektor
n		Koordinate in Normalenrichtung; lineare Iteration
n_q	$[1/min]$	Spezifische Drehzahl
P_k	$[m^2/s^3]$	Produktion von k
p	$[N/m^2]$	Statischer Druck
p^*	$[N/m^2]$	Effektiver Druck
p_t	$[N/m^2]$	Totaldruck
PD^{kj}	$[m^2/s^3]$	Kontravarianter Druckdiffusionstensor
Pe		Peclet-Zahl
PR^{kj}	$[m^2/s^3]$	Kontravarianter Produktionstensor
PS^{kj}	$[m^2/s^3]$	Kontravarianter Druckscherungstensor
Q	$[m^3/s]$	Volumenstrom
Q		Integraler Quellterm, Durchflusszahl
Q_F	$[m^3/s]$	Fördervolumenstrom
Q_L	$[m^3/s]$	Leckvolumenstrom
Q_s		Spalt-Durchflusszahl
q		Quellterm
q	$[m^3/s]$	Durchfluss pro Umfang
R		Residuum
\underline{r}, r_i	$[m]$	Ortsvektor
r	$[m]$	Radius
Re		Reynolds-Zahl
Re_y, Re_T		Turbulente Reynolds-Zahl
ΔS		Flächeninhalt
S^{kj}	$[1/s]$	Kontravarianter Deformationstensor
\tilde{S}^{kj}		Invariante von S^{kj}
s		Wandtangentele Koordinate
s	$[m]$	Laufvariable
St_r		Strouhal-Zahl
t	$[s]$	Zeit
\underline{t}, t_i		Tangentialvektor
t		Wandtangentele Koordinate
T	$[s]$	Zeitintervall
T_T	$[s]$	Turbulentes Zeitmaß
$T_{ij}^{(\lambda)}$		Tensorfunktion
Tu		Turbulenzgrad
TD^{kj}	$[m^2/s^3]$	Kontravarianter turbulenter Diffusionstensor
U		Eintrag der oberen Teilmatrix
VD^{kj}	$[m^2/s^3]$	Kontravarianter viskoser Diffusionstensor

u	$[m/s]$	Wandparallele Geschwindigkeitskomponente; Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung; Geschwindigkeit
\tilde{u}'_i	$[m/s]$	Diskreter Geschwindigkeitskorrekturvektor
u_b	$[m/s]$	Massengewichtet gemittelte Geschwindigkeit
u_T	$[m/s]$	Turbulentes Geschwindigkeitsmaß
u_τ	$[m/s]$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$\langle c''^k c''^j \rangle$	$[m^2/s^2]$	Reynolds-Spannungstensor
\dot{V}	$[m^3/s]$	Volumenstrom
ΔV	$[m^3]$	Volumen
v	$[m/s]$	Wandnormale Geschwindigkeitskomponente; Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung
\underline{x}, x_i, x	$[m]$	Ortskoordinate
y	$[m]$	Ortskoordinate; Wandabstand
z	$[m]$	Ortskoordinate

Griechische Zeichen

α		Modellkonstante des k - ω -Modells
α_r		Relaxationsparameter der Realizability-Bedingung
α_{ω_w}		Relaxationsparameter für die Wandrandbedingung bei k - ω -Modellen
$\alpha_\phi, \alpha_{u_i}, \alpha_p$		Unterrelaxationsfaktoren
$\alpha_{u'}, \alpha_{turb}, \alpha_{p_a}$		Unterrelaxationsfaktoren
β		Blendingfaktor; Modellkonstante des k - ω -Modells
β^*		Funktion des k - ω -Modells
$\Gamma_{(index)(index)}$		Christoffelsymbol zweiter Art
ΔV	$[m^3]$	Diskretes Volumen
δ		allgemeiner Differentialoperator; Variation
δr	$[m]$	Abstand zweier Netzknoten
ε	$[m^2/s^3]$	Dissipationsrate
ε		Numerischer Fehler
ε_0	$[m^2/s^3]$	Wandwert von ε
ε_{ijk}		Permutationstensor
η, η_1		Invariante der dimensionslosen Scherrate
η_2		Invariante des dimensionslosen Rotationstensors
η_3		Invariante
η_T	$[m]$	Kolmogorov-Länge
κ		von Karman Konstante; Schrittlänge
λ		Interpolationsfaktor
Λ		Seitenverhältnis
μ	$[kg/(m s)]$	Dynamische Viskosität
μ_T	$[kg/(m s)]$	Dynamische Wirbelviskosität
ν	$[m^2/s]$	Kinematische Viskosität
ν_{eff}	$[m^2/s]$	Effektive kinematische Viskosität
ν_T	$[m^2/s]$	Kinematische Wirbelviskosität
Ω^{kj}	$[1/s]$	Rotationstensor

$\tilde{\Omega}^{kj}$		Invariante des Rotationstensors
ω	$[1/s]$	Spezifische Dissipationsrate
Π^{kj}	$[m^2/s^3]$	Kontravarianter Umverteilungstensor
Π		Gesamtpotential bzw. Funktional des Problems
ξ		Netzorientierte Koordinate; Invariante des Rotationstensors
ρ	$[kg/m^3]$	Dichte
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon, \sigma_\omega$		Modellkonstanten
τ^{kj}	$[N/m^2]$	Kontravarianter Viskoser Normal- und Schubspannungstensor
τ_w	$[N/m^2]$	Wandschubspannung
ϕ		Allgemeine Variable
$\underline{\phi}$		Vektor einer allgemeinen Variable

Tiefgestellte Zeichen

0	Referenz; Maximalwert
<i>ave</i>	Mittelwert
<i>C</i>	Zentral gelegener Zellmittelpunkt
<i>const</i>	Konstanter Wert
<i>D</i>	Stromab gelegener Zellmittelpunkt; Durchmesser
<i>D</i>	Deviatorischer Anteil eines Tensors
<i>E</i>	East-Zellmittelpunkt
<i>e</i>	East-Zellflächenmittelpunkt
<i>exp</i>	Experiment
<i>h</i>	Halbe Kanalhöhe
<i>H</i>	Homogen
<i>I</i>	Isotroper Anteil eines Tensors
<i>j, k, ..., z</i>	Laufindizes
<i>K</i>	Kolmogorov
<i>L, LL</i>	Zellmittelpunkt des links gelegenen Blockes
<i>l</i>	Zählvariable über die Zellflächen; Allgemeiner Zellflächenmittelpunkt
<i>lam</i>	Laminar
<i>lin</i>	Linear
<i>max</i>	Maximum
<i>min</i>	Minimum
<i>N</i>	North-Zellmittelpunkt
<i>n</i>	North-Zellflächenmittelpunkt; in Normalenrichtung; <i>n</i> -ter Zeitschritt
<i>nb</i>	Nachbarzellen
<i>nlin</i>	Nichtlinear
<i>opt</i>	Optimum
<i>P</i>	Zellmittelpunkt
<i>Q</i>	Zellmittelpunkt
<i>R, RR</i>	Zellmittelpunkt des rechts gelegenen Blockes
<i>R</i>	Rohr
<i>r</i>	Randwert; radiale Richtung

S	South-Zellmittelpunkt
s	South-Zellflächenmittelpunkt; Symmetrie
T	Turbulent
TG	Turbulenzgitter
t	Top-Zellflächenmittelpunkt; Tangentialrichtung
$turb$	turbulent
U	Stromauf gelegener Zellmittelpunkt
W	West-Zellmittelpunkt; Fläche
w	West-Zellflächenmittelpunkt; Wand
(wf)	Wandfunktion
z	z -Richtung
ϕ	Auf die allgemeine Variable ϕ bezogen
φ	Azimutale Richtung
\parallel	Kovariante Ableitung

Hochgestellte Zeichen

c	Konvektiv
d	Diffusion
$exakt$	Exakt
j, k, \dots, z	Laufindizes in Sinne des Tensorkalküls
$k-\varepsilon$	$k-\varepsilon$ -Modell
k	k -ter linearer Iterationsschritt
l	Laufindex
m	m -ter nichtlinearer Iterationsschritt
m^*	Zwischeniterationsschritt
num	Numerisch
o, oo	Vergangene Zeitschritte
qh	Quasihomogen
u_i	i te Geschwindigkeitskomponente
T	Transponierte
$+$	Dimensionslose turbulente Größen
$*$	Dimensionslose Größen

Sonstige

d	Inkrement
$\overset{as}{div}$	Achsensymmetrischer Divergenz-Operator
Δ	Differenz
$\overset{as}{\Delta}$	Achsensymmetrischer Laplace-Operator
$\frac{\partial}{\partial t}$	Partielle Ableitung nach der Zeit
$\frac{d}{dt}$	Ableitung nach der Zeit
$\frac{D}{Dt}$	Totale Ableitung nach der Zeit

$\overset{as}{\nabla}$	Achsensymmetrischer Gradienten-Operator
\mathcal{O}	Größenordnung; Ordnung
$\langle \dots \rangle$	Statistischer bzw. zeitlicher Mittelwert
\times	Kreuzprodukt
$-$	Lineare Interpolation
$'$	Korrekturgröße
$''$	Schwankungsgröße

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein neu entwickeltes Navier-Stokes-Verfahren für die schnelle, realitätsnahe Berechnung der Strömung in Radseitenräumen von Turbomaschinen vorgestellt. Um die Physik der Strömung besser abbilden zu können wird das zylindrische Koordinatensystem zur Beschreibung der Navier-Stokes Gleichungen gewählt. Unter der Voraussetzung achsensymmetrischer Strömungen lassen sich die beschreibenden Navier-Stokes Gleichungen entsprechend vereinfachen.

Alle theoretischen Operationen werden im Riemann-Raum der Differentialgeometrie durchgeführt. Die kontravariante Formulierung wird für die kompakte Definition der Gleichungen und Operationen im krummlinigen Koordinatensystem zunächst herangezogen, und anschließend folgt die Auswertung für das zylindrische Koordinatensystem insbesondere für den achsensymmetrischen Fall.

Um die Strömung bei hoher, technisch relevanter Reynoldszahl zu erfassen, werden verschiedene Turbulenzmodelle implementiert. Sie umfassen das Eingleichungsturbulenzmodell von Baldwin und Barth, lineare Zweigleichungsturbulenzmodelle $k-\varepsilon$ und $k-\omega$ sowie die nichtlineare Erweiterung des genannten $k-\varepsilon$ -Turbulenzmodells.

Im Rahmen des Finiten-Volumen-Verfahren FVM werden die in den Impulsgleichungen in radialer sowie in Umfangsrichtung zusätzlich auftretenden Quellterme normalerweise approximiert. Im Rahmen dieser Arbeit wurde entdeckt, dass die Approximation nicht erforderlich ist. Physikalisch motiviert werden die Volumenintegrale über die Quellterme in Oberflächenintegrale direkt transformiert. Diese Vorgehensweise ist sehr vorteilhaft für das Konvergenzverhalten der numerischen Verfahren, das bekanntlich für krummlinige Koordinatensysteme Beeinträchtigung gegenüber dem numerischen Verfahren im vertrauten kartesischen Koordinatensystem unterliegt.

Für die technische Anwendung mit komplexen Geometrien, wie es in Radseitenräumen von Turbomaschinen der Fall ist, wird die Multiblock-Strategie verfolgt.

Mit dem entwickelten Navier-Stokes Verfahren werden zeitsparende und somit kostengünstige Untersuchungen des Reibmomentes und Axialschubs, der von der Druckverteilung im Raum zwischen den Deckscheiben des Laufrads und dem Gehäuse abhängt, möglich. Das Ergebnis kann dann in die Designoptimierung einfließen, um optimale Radseitenraumgeometrie zu finden, die der technischen Anforderungen möglichst genügt.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

Die Fluidodynamik wird durch die Navier-Stokes Gleichungen, die von Claude Navier im späten 19. Jahrhundert hergeleitet und danach durch Geroge Stokes mit seiner Hypothese ergänzt wurde, vollständig beschrieben, s. MOIN UND KIM [109]. Das Problem ist, dass eine analytische Lösung der Navier-Stokes Gleichungen in der Regel nicht möglich ist, da die allgemeine Lösung Turbulenz beinhaltet. Die sogenannte Potentialtheorie ist eine Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen, bei der die Reibung vernachlässigt und eine drehungsfreie Strömung angenommen wird. Sie war lange ein Werkzeug, um idealisierte, strömungstechnische Probleme analytisch zu beschreiben.

Heutzutage stellt im Auslegungs- und Optimierungsprozess von Turbomaschinen sowie in vielen anderen Bereichen der Ingenieurwissenschaften die numerische Strömungssimulation, kurz CFD¹, ein mächtiges Werkzeug neben dem Experiment dar. Das Werkzeug der analytischen Lösung verliert an Bedeutung, und es wird nur zur Validierung experimenteller Aufbauten oder numerischer Verfahren angewendet.

Während es schwierig ist, die anfallenden Kosten bei einer experimentellen Untersuchung zu senken, fallen die Kosten pro Rechenoperation durch immer schneller werdende Computer durch Fortschritte in der Mikroelektronik und Informatik automatisch. Somit hat die numerische Strömungssimulation an Attraktivität gewonnen, um Entwicklungszeiten und somit auch die Entwicklungskosten von Turbomaschinen spürbar zu senken.

So kommen CFD-Verfahren heute bereits beim Erstentwurf, vor allem aber bei der Optimierung eines bestehenden Entwurfes, zum Einsatz. Parameterstudien können durch den gezielten Einsatz der numerischen Strömungssimulation sehr schnell durchgeführt und somit zeit- und kostenintensive Experimente weitgehend vermieden werden. Aber auch Strömungsphänomene, die einem Experiment schwer zugänglich sind, können mit hochgenauen Verfahren untersucht werden.

Die Entwicklung eines genauen und effizienten CFD-Verfahrens stellt an die wirk-

¹CFD = Computational Fluid Dynamics

lichkeitsnahe Modellierung der Strömungsphysik, die Robustheit und Genauigkeit der Diskretisierung und die Schnelligkeit der Lösung des resultierenden Gleichungssystems einen hohen Anspruch. Je nach Anwendungsfall ist eine mehr oder minder hohe Abstraktionsstufe der zu lösenden Gleichungen erforderlich. Grundsätzlich gilt, dass der Rechenaufwand mit zunehmender Approximationsgenauigkeit steigt.

Bei technischen Anwendungen hängt die erfolgreiche numerische Modellierung von Strömungsvorgängen auf der Basis der Navier-Stokes-Gleichungen von vier folgenden Hauptaspekten ab, s. WALTERS UND LEYLEK [198]: Genaue Geometrieapproximation, hohe Qualität der Netzgenerierung, sowie genaue Approximation der konvektiven Terme und Modellierung der Turbulenz.

Die Berechnung der Turbulenz erfordert für technische Strömungen auch bis auf weiteres noch eine Modellierung. Statistische Turbulenzmodelle dominieren seit Jahrzehnten die industrielle Anwendung der CFD. Aber auch innerhalb der statistischen Modelle existiert eine Vielfalt an Optionen, die alle für bestimmte Anwendungen ein mehr oder weniger hohes Vorhersagepotential besitzen. Somit ist eine sorgfältige, problemangepaßte Auswahl von Turbulenzmodellen – You don't get, what You don't pay for, BRADSHAW [17] – für den Erfolg einer Strömungssimulation ausschlaggebend.

Mit der rasanten Steigerung der Rechenleistung wird die Grobstruktursimulation für technische Strömungen interessanter. Allerdings erfordert die Grobstruktursimulation für die wandgebundenen Strömungen eine Auflösung, die der bei der direkten numerischen Simulation (DNS) erforderlichen Auflösung etwa entspricht. Außerdem existiert ein kombiniertes Verfahren aus der statistischen Turbulenzmodellierung (RANS) und Grobstruktursimulation (LES), das als hybride RANS/LES bekannt ist. Bild 1.1 gibt eine vermutliche Aussicht über die Anwendung der verfügbaren Rechenleistung von den unterschiedlichen Simulationsansätzen bei gleichbleibend exponentiellem Wachstum der Rechenleistung an.

Im Bild 1.1 ist abzulesen, dass die LES-Euphorie, die das vorzeitige Ausscheiden von RANS vorhersagt, nicht Realität geworden ist. Stattdessen hat man die Probleme der LES erkannt, die im Kapitel 1.3.2 näher besprochen wird. Ausserdem ist abzulesen, dass Wirbelviskositätsmodelle² in RANS in zunehmender Maße durch Ansätze der Mehrgleichungs- und Mehrskalenschließungsmodelle zweiter Ordnung³ ersetzt werden.

²engl.: Eddy viscosity modell (EVM)

³engl.: Second moment closures (SMC)

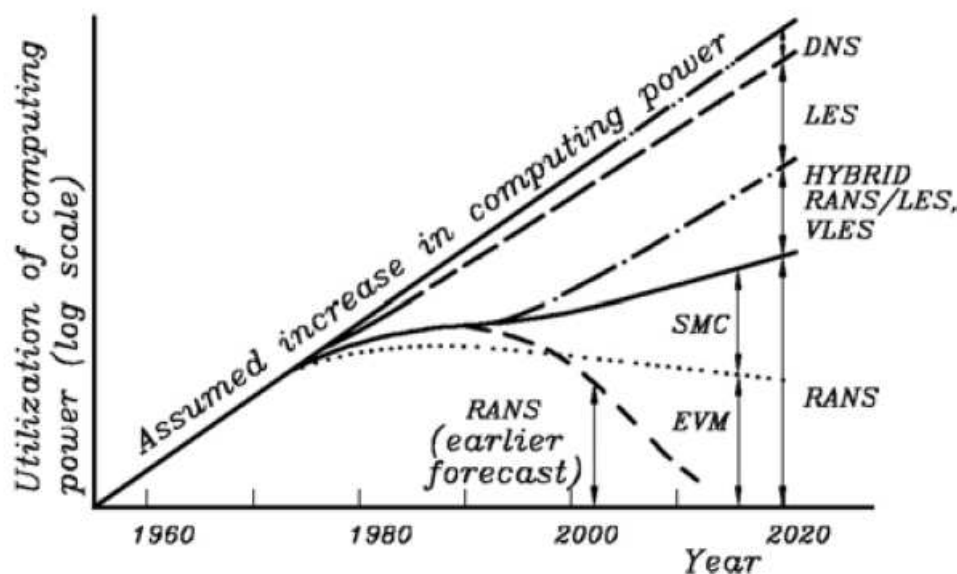


Bild 1.1: Vermutliche Aussicht über die Anwendung der verfügbaren Rechenleistung von den unterschiedlichen Simulationsansätzen, s. HANJALIĆ [67].

1.2 Stand des Wissens I: Numerik

1.2.1 Numerische Strömungssimulation im Turbomaschinenbau

Mangels Rechnerleistung wurden anfangs Euler-basierte quasi-dreidimensionale (EQ3D) Verfahren, bei denen nach der Theorie von WU [203] eine dreidimensionale Strömung durch drei zweidimensionale Strömungen in der Blade-to-blade oder Gitter-Ebene $S1_i$, Hub-to-shroud oder Meridian-Ebene $S2_j$ und in der Ebene normal zur Strömungsrichtung $S3_k$ superponiert werden, zur Berechnung der Strömung in Turbomaschinen eingesetzt.

SCHILLING [142, 143] wendet eine Vereinfachung des EQ3D-Verfahrens unter der Annahme von rotationssymmetrischen Stromflächen im Zusammenhang mit hydraulischen Strömungsmaschinen so an, dass eine Anzahl von Gitterströmungen $S1_i$ mit der Meridianströmung in nur einer repräsentativen Ebene $S2_m$ superponiert werden. Aufgrund der sehr geringen Rechenzeiten werden diese Verfahren auch heute noch für den rechnergestützten Entwurf von Beschaukelungen im Bereich des Optimalpunktes eingesetzt, s. WATZELT [199] und FERNÁNDEZ [51]. Außerdem gewinnt EQ3D-Verfahren für die numerische Optimierung von Turbomaschinen an Attraktivität, s. THUM UND SCHILLING [183] und SCHILLING ET AL. [148].

Die voll-dreidimensionalen Euler- bzw. Navier-Stokes-Verfahren wurden dann mit steigender Rechnerleistung für die Nachrechnung von Turbomaschinen in zunehmendem Maße eingesetzt. Je nach Fall werden Methoden für inkompressible und kompressible Strömungen entwickelt. SCHILLING [140] berechnet ein idealisiertes Radial-

rad unter der Verwendung der Navier-Stokes-Gleichungen in Wirbel- und Stromfunktionsformulierung. SCHILLING [141] entwickelte ein Navier-Stokes-Verfahren speziell für die Berechnung rotationssymmetrischer Strömungen in Radseitenräumen von Kreiselpumpen. ASCHENBRENNER ET AL. [4] berechnen die Laufradströmung mit einem Euler-Verfahren und den saugseitig von aussen nach innen durchströmten Radseitenraum mit einem Navier-Stokes-Verfahren. Durch die Kopplung der Laufradmit der Radseitenraumströmung wird der Impulsaustausch berücksichtigt.

Am Lehrstuhl für Fluidmechanik sind bereits Simulationen komplexer hydraulischer Strömungssysteme mit voll-dreidimensionalem Navier-Stokes-Verfahren durchgeführt worden:

- Turbine mit Traverse und Saugrohr, s. SCHILLING ET AL. [146] oder BÖHM [12], wobei BÖHM [12] die Particle-Tracking Methode auf einen ellipsoidgeformten Körper erweitert, um mit dem berechneten Strömungsfeld die dreidimensionale Bahnkurve des Körpers unter Berücksichtigung eventueller Kollisionen mit den Wänden ermitteln zu können,
- Pumpe mit Spirale und freiausblasend in großen Raum, s. MAURER [105],
- Ventilatorstufe aus Laufrad und Nachleitrad mit vorgeschaltetem Einlauf und anschließendem Diffusor, s. SCHILLING ET AL. [145].

Zur Effizienzsteigerung der Rechenzeit schlagen HACKBUSCH [65] sowie SCHRECK UND PERIĆ [152] lineare und nichtlineare Mehrgitterverfahren bei elliptischen Randwertproblemen vor. Weiterhin gibt es einen Trend in Richtung paralleler Verfahren. In den kleinen und mittelständischen Unternehmen (KMU) bedeuten Hochleistungsrechner eine relativ hohe Investition. Ein Ausweg zur preiswerteren Investition ermöglicht der Einsatz von Rechenclustern.

Nach der erfolgreichen Anwendung der voll-dreidimensionalen Verfahren wird die zeitechte Simulation von instationären Effekten in Turbomaschinen durch die weiter steigende Rechnerleistung begünstigt. Dabei werden die zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen mit einem geeigneten Zeitschrittverfahren gelöst. Zum Anwendungsbereich von instationären Simulationen gehören das sogenannte *Clocking* in Turbinenstufen sowie die rotierende Ablösung in Verdichtern. FRITZ [59] simulierte das zeitechte Verhalten der Interaktion zwischen dem Laufrad und der Spirale einer Kreiselpumpenstufe. THURSO [184] untersuchte die Strömung im Turbinengitter mit periodisch-gestörter Zuströmung im Hinblick auf das Grenzschichtverhalten und SKODA [167] den laminar-turbulenten Umschlag in Stufen von Gasturbinen.

1.2.2 Grundlegende Ansätze für die numerischen Methoden zur Berechnung fluiddynamischer Fragestellungen

Numerische Methoden wurden bereits einige Dekaden vor der Geburt der digitalen Rechenmaschine – Computer – geboren. Zwei signifikante Arbeiten waren die von RITZ [132] über die Methode zur Lösung von Variationsproblemen im Jahr 1909

und die von Galerkin über Verfahren der gewichteten Residuen im 1915. Die modernen numerischen Methoden begannen allerdings erst mit COURANT [31]. Erst in den 50er Jahren hatte man die Möglichkeit, die bereits geborenen numerischen Algorithmen in den Computer zu implementieren. Im folgenden werden die grundlegenden Ansätze für bestimmte numerische Methoden zur Berechnung fluiddynamischer Fragestellungen aufgezählt.

Finite-Volumen-Methode (FVM)

Das Prinzip bei der FVM ist, die Erhaltungseigenschaft der partiellen Differentialgleichungen zu nutzen. Die Erhaltungsgleichungen für die Masse, den Impuls und die Energie werden zuerst über beliebige Kontrollvolumina Ω integriert und dann mit Hilfe des Gaußschen Integralsatz in geschlossene Oberflächenintegrale über die Kontrolloberfläche $\partial\Omega$ umgewandelt. Somit reduziert sich das Differentialgleichungsproblem auf Flußbilanzen über Kontrolloberflächen. Die FVM ist konservativ, und deshalb ist sie für die Lösung der Erhaltungsgleichungen die geeignete numerische Methode. In dieser Arbeit wird die FVM angewendet, wobei aufgrund der Betrachtung inkompressibler Strömungen die Erhaltungsgleichung für die Energie nicht mitberücksichtigt werden muss.

Finite-Elemente-Methode (FEM)

Im Gegensatz zu FVM leiten sich die FEM-Ansätze nicht von der Erhaltungseigenschaft der kontinuierlichen Gleichungen, sondern von Variationsprinzipien ab. Die Variationsmethode liefert die Grundlage für die FEM. Sie führt zu den Gleichgewichtsbedingungen, denen ein System gehorcht, s. BATHE [9]. Der Kern von der FEM ist die Berechnung des Gesamtpotentials bzw. Funktional des Problems Π und die Forderung, dass die Variation des Funktionals des Problems $\delta\Pi$ hinsichtlich der (wesentlichen bzw. geometrischen) Randbedingung verschwindet.

Die Variationsmethode kann effektiv bei der Berechnung diskreter Systeme eingesetzt werden. Darüber hinaus ist sie ein wirkungsvoller Mechanismus für die Behandlung kontinuierlicher Systeme. Die Wirksamkeit der Variationsmethoden hängt davon ab, wie (natürliche) Randbedingungen aufgestellt und in die Rechnung eingebracht werden können.

Das Aufstellen des für ein vorgegebenes Problem passenden Funktionals ist die wichtige Frage bei der FEM. Für ein Problem können mehrere Funktionale definiert werden. Zwei nützliche Theoreme, die Richtlinien zur Aufstellung passender Funktionale geben, sind das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie bzw. das Prinzip der virtuellen Verschiebungen und das Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie.

Finite Differenzen Methode (FDM)

Mit Hilfe des Taylor-Entwicklungssatzes werden die zu lösenden Differentialgleichungen direkt in Differenzengleichungen umgewandelt, s. FORSYTHE UND WASOW [55]. Die Ähnlichkeit der FDM zu der FEM am Beispiel der Differentialgleichung für die longitudinale Verschiebung eines eindimensionalen, gleichförmigen, geraden Stabes besteht darin, dass Finite-Differenzen-Gleichungen auch als die Steifigkeitsmatrizen bzw. Elementmatrizen aus der FEM-Formulierung interpretiert werden können.

Eine Hauptschwierigkeit bei der FDM stellt die Einbeziehung der Randbedingungen dar. Da im Verlauf der Rechnung die differentiellen Gleichgewichtsbedingungen direkt durch das Differenzenschema approximiert werden, sind bei der Differenzenbildung sowohl die wesentlichen bzw. Dirichlet- als auch die natürlichen bzw. Neumannsche Randbedingungen zu befriedigen. Es kann schwierig sein, dies an beliebigen Rändern zu erreichen.

In den 70er Jahren gab es eine weitere Entwicklung der FDM, die auf dem Prinzip vom Minimum der gesamten potentiellen Energie beruht. Das Verfahren ist als **Finite-Differenzen-Energiemethode (FDEM)** bekannt, s. BUSCHNELL UND ALMROTH [19]. Erwartungsgemäß steht die FDEM in enger Beziehung zur verschiebungsbezognenen FEM⁴. In machen Fällen erzeugen beide Verfahren sogar dieselben algebraischen Gleichungen. Der spezifische Unterschied zwischen der FEM und FDEM besteht in der Wahl der generalisierten Verschiebungskomponenten.

Lattice-Boltzmann-Methode (LBM)

Mitte der 50er Jahre hat die Ära der Raumfahrttechnik in Russland und den USA – und zehn Jahre später in Deutschland – begonnen. Die Aerodynamik der Raumfahrzeuge benötigte aber Erweiterungen gegenüber der Aerodynamik der Flugzeuge. Mit der steigenden Höhe nimmt die Dichte der Luft ab. Es gibt aber eine Grenze, ab der die Dichte der Luft so niedrig ist, dass das Fluid nicht mehr als ein Kontinuum⁵ betrachtet werden kann. Man spricht von Strömungen verdünnter Gase. Somit muss bei der Gleitströmung⁵ die Boltzmann-Gleichung als die grundlegende Integro-Differentialgleichung der kinetischen Gastheorie zur strömungsmechanischen Beschreibung herangezogen werden.

Sie stellt eine Art Kontinuitätsgleichung für eine Funktion f dar, die als (Teilchen-) Geschwindigkeitsverteilungsfunktion bezeichnet wird. Dabei ist f eine Funktion der Zeit t , des Ortes \underline{x} und der absoluten Teilchengeschwindigkeit $\underline{\xi}$ und gibt an, wie viele

⁴In der Praxis wird gewöhnlich die verschiebungsbezogene FEM angewendet. Ein anderes, erfolgreiches Verfahren ist die gemischte FE-Formulierungen, die auf dem Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie beruht.

⁵ Es gilt folgende Unterteilung nach Knudsenzahl Kn , s. FRIEDRICH [57]:

$$Kn = \begin{cases} \leq 10^{-2} & : \text{Kontinuumsströmung} \\ 10^{-2} < Kn \leq 10^{-1} & : \text{Gleitströmung} \\ 10^{-1} < Kn \leq 1 & : \text{Übergangsgebiet zw. Gleitströmung und freier Molekularströmung} \\ > 1 & : \text{Molekularströmung} \end{cases}$$

Teilchen an einem bestimmten Ort \underline{x} zu einer bestimmten Zeit t ganz bestimmte Geschwindigkeiten besitzen.

Bei bekannter Verteilungsfunktion f durch Mittelwertbildung lassen sich alle gesuchten makroskopischen Größen als Momente der Verteilungsfunktion bestimmen. Somit ist der Zusammenhang zwischen der mikroskopischen Beschreibung des Gaszustandes und den gasdynamischen Zustandsgleichungsgrößen hergestellt.

In noch größeren Höhen ist die Dichte der Luft so gering, so dass ein Strömungszustand nur durch die Stöße der einzelnen Moleküle zu beschreiben ist. Dabei liefert die Molekulardynamik die theoretische Grundlagen.

Spektral-Methode (SM)

Wie die FEM kann die Spektral-Methode als ein Sonderfall der Methode der gewichteten Residuen betrachtet werden. Als Ansatzfunktionen dienen beliebig oft differenzierbare Funktionen, die im gesamten Rechengebiet gelten. Die Ansatzfunktionen sind hier global im Gegensatz zu den lokalen Ansatzfunktionen in kleinen räumlichen Bereichen bei der FEM. Die Rechengenauigkeit der Spektral-Methode übertrifft bei vergleichbarer räumlicher Diskretisierung die mit FEM, FDM und FVM erzielten Werte um mehrere Größenordnungen. Dabei spielt jedoch eine korrekte Formulierung der Randbedingungen eine tragende Rolle. Da die mathematisch konsistente Behandlung der Gebietsränder nicht in beliebigen Fällen möglich ist, sind Spektral-Methode für Strömungsprobleme nur beschränkt einsetzbar, s. CANUTO ET AL. [21].

Die Anfänge der Spektralmethoden in der Hydrodynamik gehen zurück auf Steven A. Orszag in den 70er Jahren, der als erster eine DNS von homogener isotroper Turbulenz mit Hilfe der Spektralmethode bei einer Auflösung von 32^3 Punkten durchführte, s. ORSZAG [120]. Die Methode wurde erweitert auf kompressible Fluide, Intermittenzuntersuchungen, passive Skalare und auch magnetische Felder.

Das Problem der Spektralmethode ist der sogenannte „Aliasing Effect“. Dieser tritt bei der Berechnung der Faltungssummen des nichtlinearen Terms der Navier-Stokes-Gleichung auf. Die direkte Berechnung der Faltungen würde N^6 Operationen erfordern, weshalb man die Faltung in den Fourier-Raum transformiert, dort die Terme multipliziert und danach wieder zurücktransformiert. Dies benötigt nur $N^3 \log_2 N$ Operationen, wenn die schnelle Fourier-Transformation (FFT) benutzt wird. Dabei vernachlässigt man Terme, welche die Wellenzahlen enthalten, die man in der Simulation vernachlässigt hat. Es gibt eine Reihe von Methoden, diesen Fehler zu beseitigen, jedoch immer auf Kosten der Rechenzeit und des Speicherbedarfs.

1.2.3 Lösungsverfahren nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen in der Fluidodynamik

Die Navier-Stokes Gleichungen als nichtlineare, partielle Differentialgleichungen in der Fluidodynamik können numerisch entweder mit druckbasierten Verfahren oder

dichtebasierten Verfahren behandelt werden. Naturgemäß eignen sich dichtebasierte Verfahren zur Berechnung von kompressiblen Strömungen. Eine Simulation von inkompressiblen Strömungen ist mit dichtebasierten Verfahren – wenn überhaupt – nur sehr ineffizient möglich, s. RIEDEL [131] und YUAN [205]. Druckbasierte Verfahren wurden dagegen zunächst ausschließlich zur Berechnung von inkompressiblen Strömungen entwickelt. Sie setzen sich in der letzten Zeit immer mehr auch bei der Berechnung kompressibler Strömungen moderater Mach-Zahlen durch, weil sie keiner besonderen Maßnahmen zur stabilen Berechnung von Strömungen mit gegen Null gehenden Mach-Zahlen bedürfen, s. BADER [5], LILEK [101] und LIEN UND LESCHZNER [100]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich inkompressible Strömungen untersucht.

Grundsätzlich stehen im inkompressiblen Fall vier Differentialgleichungen für vier Unbekannten zur Verfügung. Dennoch sind sie ohne weiteres nicht lösbar, weil der Druck entkoppelt ist, d.h. der Druck kann nicht direkt berechnet werden. Um diesem Problem zu begegnen, wurden zwei unterschiedliche Lösungsansätze entwickelt, zum einen das Pseudokompressibilitäts- und zum anderen das Druckkorrekturverfahren.

CHORIN [26] schlägt ein Pseudokompressibilitätsverfahren vor, in dem der Kontinuitätsgleichung ein zusätzlicher Term hinzugefügt werden, der eine Pseudo-Schallgeschwindigkeit enthält und nach Erreichen der stationären Lösung verschwindet. Durch diesen Ansatz können die selben Lösungsalgorithmen angewendet werden wie für Strömungen kompressibler Fluide. Eine detaillierte Beschreibung der Pseudokompressibilitätsverfahren findet sich bei KWAK ET AL. [86]. Im Turbomaschinenbau finden auch Pseudokompressibilitätsverfahren Verwendung z.B. bei RIEDEL [131] und YUAN [205], die die Strömung durch hydraulische Strömungsmaschinen auf Basis der Euler-Gleichungen bestimmen.

Bei den Druckkorrekturverfahren wird aus der Kontinuitätsgleichung eine Poisson-Gleichung für die Druckkorrektur abgeleitet. Die bekannteste Form dieser Verfahren ist der SIMPLE⁶-Algorithmus, der in PATANKAR [121] ausführlich dargestellt ist. Varianten des SIMPLE sind SIMPLER⁷ (PATANKAR [121]), SIMPLEC⁸ (VAN DOORMAL UND RAITBY [193]), SIMPLEX⁹ und PISO¹⁰ (ISSA [75]).

Ein für komplexe Geometrien modifiziertes Druckkorrekturverfahren findet sich in FERZIGER UND PERIĆ [53]. Im Gegensatz zu den Pseudokompressibilitätsverfahren wird bei den Druckkorrekturverfahren nicht das gekoppelte Gleichungssystem betrachtet, sondern die Erhaltungsgleichungen werden sukzessiv gelöst.

Die Druckkorrekturverfahren wurden grundsätzlich für die stationären Gleichungen entwickelt. Dennoch kann mit einem impliziten Zeitschrittverfahren eine zeitechte Lösung generiert werden. Tatsächlich ist diese Methodik attraktiv, da durch den sukzessiv gelösten Gleichungssatz auch komplizierteste Modellgleichungen relativ einfach in das Verfahren implementiert werden können.

⁶SIMPLE = Semi Implicit Procedure for Pressure-Linked Equations

⁷SIMPLER = SIMPLE Revised

⁸SIMPLEC = SIMPLE Consistent

⁹SIMPLEX = SIMPLE Extrapolation

¹⁰PISO = Pressure Implicit Splitting of Operators

1.2.4 Approximationen der instationären, konvektiven und diffusiven Terme

Numerische Verfahren erfordern die Aufteilung des Rechengebiets in diskrete Zellen. Im Sinne von Finiten-Volumen-Verfahren werden die diskreten Zellen als diskrete Kontrollvolumina interpretiert, in denen die integrale Form der Erhaltungsgleichungen gelöst werden. Die Aufteilung kann so erfolgen, dass die Kontrollvolumina entweder eine entlang der Indexrichtungen geordnete Struktur haben oder im Raum unstrukturiert angeordnet sind.

Bei unstrukturierten Verfahren können die Kontrollvolumina grundsätzlich eine beliebige Form haben, wohingegen strukturierte Verfahren auf eine Hexaederform der Teilvolumina angewiesen sind. Unstrukturierte Verfahren zeichnen sich durch die höhere Flexibilität und bessere Automatisierbarkeit der Netzgenerierung aus. Für wandbegrenzte Strömungen eignen sich ausschließlich Hexaeder zur genauen Auflösung der wandnahen Strömungsbereiche. In der Kernströmung hingegen sind Tetraeder aufgrund ihrer räumlich flexiblen Verteilbarkeit wünschenswert, so dass unstrukturierte Hybridverfahren entwickelt wurden, die sowohl Hexaedernetze als auch Tetraedernetze verarbeiten können. REINELT [128] entwickelte ein unstrukturiertes Verfahren und wendete es bei der Lösung der Euler-Gleichungen zur Berechnung der Strömung durch Wasserturbinen an. In unstrukturierten Verfahren können adaptive Netzverfeinerungs-Strategien hinterlegt werden, s. MUZAFERLIJA [116]. Auf der anderen Seite haben unstrukturierte im Vergleich zu strukturierten Verfahren wegen ihrer aufwendigen Datenstruktur einen deutlich erhöhten Speicher- und Rechenzeitbedarf.

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Vorschlag von LILEK ET AL. [102] verfolgt, der ein blockstrukturiertes Verfahren verwendet, das die Effizienz von strukturierten Verfahren mit einem Teil der Flexibilität von unstrukturierten Verfahren kombiniert.

Da Strömungen in Turbomaschinen in erster Linie vom konvektiven Transport der Erhaltungsgrößen gekennzeichnet sind, ist die Approximation der konvektiven Terme von besonderer Bedeutung, da von ihr zum einen die Genauigkeit der Simulation und zum anderen die Stabilität des Verfahrens maßgeblich bestimmt wird.

Das Upwind-Verfahren (UDS), bei dem abhängig von der lokalen Strömungsrichtung die Erhaltungsgröße im konvektiven Term als abschnittsweise konstant angenommen wird, ist zwar uneingeschränkt stabil, aber es führt zu einem Verschmieren der Lösung aufgrund seiner Genauigkeit von nur erster Ordnung, insbesondere bei starken Gradienten. Die zentrale Approximation (CDS) hat zwar eine Genauigkeit von zweiter Ordnung, erzeugt aber häufig Oszillationen in der Lösung. Die Kombination beider Verfahren findet in Form von *Flux-Blending*-Schemata eine weite Verbreitung, s. z.B. BADER [5], RITZINGER [133], SKODA [167] und FERZIGER UND PERIĆ [53].

Eine Methodik zur Beurteilung der Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften von konvektiven Approximationsverfahren wurden von LEONARD UND MOKHTARI [96] vorgeschlagen. Sie beruht auf den normierten Erhaltungs- und Geometriegrößen. DARWISH UND MOUKALLED [35] erweitern diese Methodik für inhomogene Netztopologien und ermöglichen so die einfache Implementierung von hochauflösenden

Flux-Limiter-Verfahren für komplexe Geometrien.

1.3 Stand des Wissens II: Turbulenz

1.3.1 Die wichtigsten theoretischen und experimentellen Grundlagen der Turbulenz

In der experimentellen Grundlagenforschung für die Entwicklung der Theorie der Turbulenz haben EMMONS [48], EMMONS UND BRYSON [49] und MITCHNER [108] das Auftreten von „Turbulenzflecken“ gezeigt. SCHUBAUER UND KLEBANOFF [154] haben die Turbulenzflecken sehr gründlich mittels Hitzdrahtsonden untersucht. Diese Flecken haben sie bei der Beobachtung einer dünnen Schicht Wasser, das längs einer geneigten Platte fließt, festgestellt. An den Flecken treten plötzlich Turbulenzen auf, und die Turbulenzflecken vergrößern sich beim weiteren Entlangfließen an der Platte.

Dank ihrer Ergebnisse und der Ergebnisse von DRYDEN [39, 38, 40, 41, 42] und SCHUBAUER UND SKRAMSTAD [155]¹¹ ist zu erkennen, dass man mittels der Methode der kleinen Schwingungen den Übergang der laminaren Strömung in die turbulente nicht erklären können.

Wenngleich die Methode der kleinen Schwingungen nicht das Entstehen der Turbulenz erklären kann, so zeigt sich doch, dass bei einer reinen Laminarströmung, bei der der sogenannte „natürliche Turbulenzgrad“ gleich Null ist ($Tu \rightarrow 0$)¹², endliche Störungen auftreten können, so bald die Reynoldszahlen bestimmte Werte überschreiten. Um die Voraussetzung der laminaren Strömung zu erfüllen, haben SCHUBAUER UND SKRAMSTAD [155] eine größere Anzahl von mehr oder weniger feinen Sieben in der Beruhigungsstrecke des Windkanals und ein großes Kontraktionsverhältnis der Querschnitte vom Beruhigungsraum A_b zur Versuchsstrecke A_v , nämlich $\frac{A_b}{A_v} = 7.1$ verwendet. Dabei ist es ihnen gelungen, den außerordentlich geringen Turbulenzgrad bei isotroper Turbulenz von $Tu = 0.018 \cdot 10^{-2}$ zu erreichen.

In der Methode der kleinen Schwingungen wurde eine Strömung längs einer ebenen Platte, bei der sich aufgrund einer geringen Zähigkeit eine dünne Grenzschicht ausgebildet hat, betrachtet. Dabei wurden cosinusförmige Strömungen, d. h. Wellen von beliebig kleiner Amplitude, der Strömung längs dieser ebenen Platte überlagert. Man stellte sich die Frage, unter welchen Bedingungen die Amplitude dieser Welle angefacht wird, siehe TIETJENS [187].

Nach einem Vorschlag von L. PRANDTL hat TIETJENS [185, 186] eine erweiterte Methode der kleinen Schwingungen untersucht, die eine geringe Zähigkeit berücksichtigt. Man hat erwartet, dass die Zähigkeit eine Dämpfung der Störschwingungen bewirken würde, so dass Profile, die reibungslos eine geringe Instabilität besitzen, mit Reibung sich als stabil erweisen würden. Demgegenüber erhielt man das physikalisch unbefriedigende Resultat einer Anfachung statt Dämpfung.

¹¹G. B. Schubauer, H. K. Skramstad und P. S. Klebanoff waren die Mitarbeiter von H. L. Dryden

¹² Tu bezeichnet den Turbulenzgrad. Auf den Turbulenzgrad wird in Kapitel 3.6.1 in Verbindung mit der Eintrittsrandbedingung für die kinetische turbulente Energie eingegangen.

Statistische Theorie der Turbulenz

Nachdem die Methode der kleinen Schwingungen die Turbulenz nur sehr beschränkt beschreiben kann, weil in turbulenten Geschwindigkeitsfeldern üblich ist, dass nicht mehr von kleinen Schwingungen gesprochen werden kann, sondern von starken Fluktuationen, die gleichgroß oder sogar größer als der Mittelwert selber sind, ist diese Theorie nicht mehr anwendbar.

Es ist notwendig, sich der statistischen Methode zu bedienen, die es erlaubt, die volle Momentenhierarchie miteinzubeziehen. Eine ganze Reihe von Theorien bilden das theoretische Gebäude der statistischen Turbulenztheorie. Darunter sind beispielweise die Theorien von:

- KOLMOGOROV [82] über die lokale isotrope Turbulenz,
- HEISENBERG [72]¹³ über den Mechanismus des Energietransfers, deren Lösung für den Fall der statistisch fast im Gleichgewicht befindlichen Wirbel von CHANDRASEKHAR [23]¹⁴ erzielt wurde,
- ONSAGER [119]¹⁵ über hydrodynamische Turbulenz, Abfall des Energiespektrums mit der Wellenzahl mit der $-5/3$ -Potenz, einige Jahren zuvor von KOLMOGOROV [82] und WEISZÄCKER [200] unabhängig voneinander formuliert und als das Kolmogorovsche „ $-5/3$ -Potenzgesetz“ bekannt geworden,
- KRAICHNAN [85] über die allgemeine Methode zur Untersuchung der Dynamik nichtlinearer stochastischer Systeme,
- HOPF [74] über die Betrachtung des Phasenflusses eines zufälligen Geschwindigkeitsfeldes im Phasenraum und das charakteristische Funktional.

Das dreidimensionale Energiespektrum $E(k)$ kann durch numerische Simulation ermittelt werden. Es läßt sich jedoch nur schwer direkt messen. Daher ist es üblich, eindimensionale Energiespektren zu messen. Die wichtigsten experimentellen Ergebnisse, die die statistische Theorie der Turbulenz unterstützen, sind das im Bild 1.2 dargestellte Energiespektrum-Diagramm über der Wellenzahl, s. POPE [126].

1.3.2 Numerische Simulation turbulenter Strömungen

Technisch interessante Strömungen und insbesondere die Strömungen in Turbomaschinen weisen meist hohe Reynoldszahlen $Re > 5 \cdot 10^5$ auf und können somit in der Regel als vollturbulent betrachtet werden. Die numerische Simulation dieser Strömungen erfordert besondere Maßnahmen. Um die Verluste in der Strömung

¹³Physik-Nobelpreisträger 1932

¹⁴Physik-Nobelpreisträger 1983

¹⁵Chemie-Nobelpreisträger 1968

korrekt zu erfassen, haben sich prinzipiell drei verschiedene Lösungsansätze im Bereich der numerischen Strömungssimulation etabliert, die Direkte Numerische Simulation (DNS), die Grobstruktur-Simulation (LES¹⁶) und die Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (RANS¹⁷).

Die Direkte Numerische Simulation

¹⁶LES: large-eddy simulation

¹⁷RANS: Reynolds-averaged Navier-Stokes equations

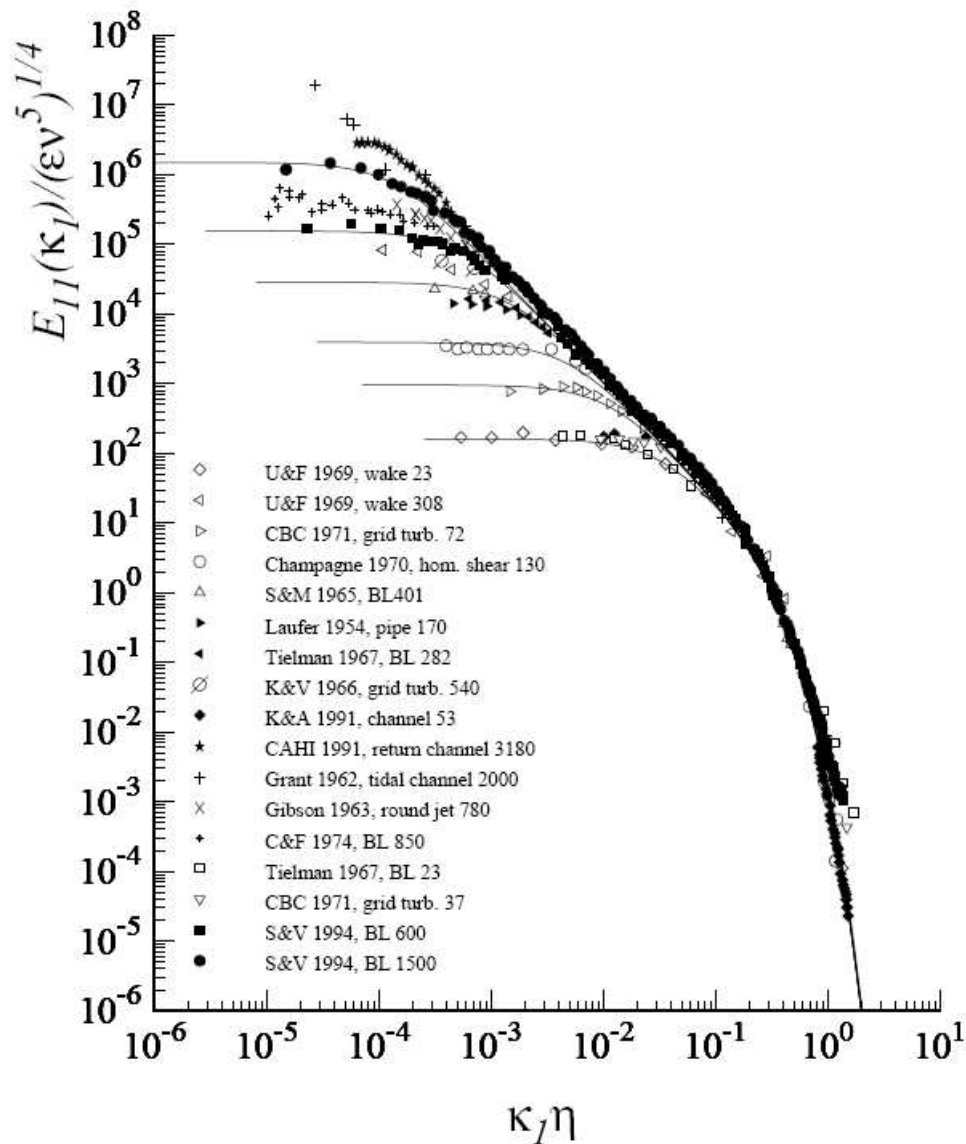


Bild 1.2: Messergebnisse der eindimensionalen Energiespektren bei verschiedenen experimentellen Anordnungen und für verschiedene Taylorsche Mikro-Längenmaße, gebildete Reynoldszahl R_λ , s. POPE [126].

Eigentlich ist die direkte numerische Simulation (DNS) ein Oberbegriff für alle Methoden, welche versuchen, alle Wellenzahlen im Rechner zu erfassen, ohne ein Modell für die nicht aufgelösten Wellenzahlen zu benutzen. Bei der DNS wird versucht, so viele Wellenzahlen wie möglich im Computer zu simulieren, s. MOIN UND MAHESH [110].

Da die DNS meist im Ortsraum durchgeführt wird, heißt dies, dass alle Skalen, die kleiner als ein Cutoff x_C sind, nicht in die Rechnungen einbezogen werden. Damit werden alle Wellenzahlen größer als $k_C = 2\pi/x_C$ nicht mehr aufgelöst in der Simulation, was zu Fehlern in den letzten kleinen noch erfassten Wellenzahlen führt.

Dass diese Methode für die Turbulenz schnell an die Grenzen der Kapazität modernster Großrechner führt, kann schnell eingesehen werden, wenn abgeschätzt wird, wieviele Freiheitsgrade eine Strömung bei einer gewissen Reynolds-Zahl besitzt. Die Freiheitsgrade müssen jedoch alle im Computer aufgelöst werden, damit alle Eigenschaften der Strömung beschrieben werden können.

Aus der folgenden Taylorschen Abschätzung für die turbulente Dissipation

$$\varepsilon \sim \frac{u^3}{l}, \quad (1.1)$$

wobei u und l die charakteristischen Geschwindigkeits- bzw. Längenskala der größten Wirbel sind, s. z.B. LANDAU¹⁸ UND LIFSCHITZ [87] oder WENGLER [201] und unter Verwendung der folgenden Kolmogorovschen Längenskala l_K und Zeitskala t_K der kleinsten Wirbel

$$l_K(\underline{x}, t) = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon(\underline{x}, t)} \right)^{1/4}, \quad t_K(\underline{x}, t) = \left(\frac{\nu}{\varepsilon(\underline{x}, t)} \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

s. z.B. FRIEDRICH [56] oder DURBIN UND PETERSSON REIF [45], kann man eine Abschätzung für die Anzahl der Freiheitsgrade ableiten:

$$\frac{l}{l_K} \sim \left(\frac{u \cdot l}{\nu} \right)^{3/4} \sim Re^{3/4}, \quad \frac{t}{t_K} \sim \left(\frac{u \cdot l}{\nu} \right)^{1/2} \sim Re^{1/2}. \quad (1.3)$$

Da Turbulenz ein dreidimensionales und instationäres Phänomen ist, beträgt die Anzahl der Freiheitsgrade N in Abhängigkeit der Reynoldszahl

$$N \sim Re^{11/4}. \quad (1.4)$$

Hieraus ergibt sich, dass für hohe und damit technisch relevante Reynoldszahlen die Leistungsfähigkeit der heutigen Supercomputer bei weitem nicht ausreicht, um selbst in einfachsten Strömungsfällen alle Skalen und somit Freiheitsgrade aufzulösen.

Momentan ist eine Auflösung von 1024^3 Wellenzahlen Stand der Technik auf den allergrößten Computern und mit erheblichem Aufwand verbunden. Als Standard

¹⁸Physik-Nobelpreisträger 1962

im Bereich der CFD ist etwa 256^3 anzusehen. Jedoch sind der Zeitaufwand für die Programmierung und Laufzeit, sowie die Größe der benötigten Rechner enorm. Entscheidend dabei ist, dabei keine Näherungen zu verwenden, um die nicht aufgelösten Wellenzahlen zu simulieren.

Die DNS bleibt also in Bezug auf die Klärung von Detailfragen einfacher Strömungen das wichtigste Werkzeug. Bei der Entwicklung von Turbulenzmodellen wird immer mehr auf DNS-Datenbasen zugegriffen. MANSOUR ET AL. [104] bilanzieren die einzelnen Terme in der Transportgleichung für die Reynolds-Spannungen, was für die Entwicklung von wandnahen Turbulenzmodellen sehr nützlich ist.

Die Grobstruktursimulation

Um den Rechenaufwand zu reduzieren kann die statistische Turbulenztheorie betrachtet werden. Aufgrund der Tatsache, dass das Energie-Spektrum im Grunde in den Bereich energietragender Strukturen, der Trägheit und der Dissipation aufgeteilt werden kann, kann der Rechenaufwand durch die vergrößerte Auflösung der berechneten turbulenten Skalen reduziert werden.

Bei der Grobstruktursimulation werden Navier-Stokes Gleichungen gefiltert. Die großen turbulenten Skalen werden direkt berechnet, und die kleinen werden modelliert. Man geht von Skalentrennung in Grobstruktur **GS** und Feinstruktur **SGS** aus. Im Unterschied zu RANS (s. Kap. 1.3.2) handelt es sich bei den Grobstrukturgrößen stets um räumlich und zeitlich fluktuierende und nicht um statistisch gemittelte Größen.

Die räumlich gefilterten Navier-Stokes Gleichungen zur Beschreibung der Dynamik der aufgelösten turbulenten Skalen sind aus bereits genannten Gründen nicht geschlossen. Um sie zu schließen werden SGS-Modelle benötigt. Die Lösung des Schließungsproblems ist schwierig, da die Unbekannten räumlich und zeitlich fluktuieren und nicht nur Wechselwirkungen zwischen stark unterschiedlichen Skalen, sondern auch zwischen benachbarten Skalen berücksichtigt werden müssen.

In Wandnähe führt die Wechselwirkung zwischen großen und kleinen Skalen momentan und lokal immer wieder zu einem Rückfluss von Energie von den kleinen zu den großen Skalen. Dieses Problem des „Backscatters“ kann noch durch keines der Modelle wiedergegeben werden.

Als problematisch erweist sich die Berechnung von wandgebundenen Strömungen bei hohen Reynolds-Zahlen, da eine wandnahe Auflösung wie bei einer DNS erforderlich ist. In diesem Zusammenhang ist SPALART [169] bezüglich der Anwendung der LES zur Lösung technischer Problemstellungen pessimistisch. Er schlägt einen hybriden Ansatz mit einer statistischen Behandlung der wandnahen Strömung vor, der von SHUR ET AL. [166] umgesetzt wird.

Einen Überblick über verschiedene Filteroperationen und SGS-Modelle geben FRIEDRICH [56] sowie BERNERT UND EPPLER [11]. Eine spezielle Art der Filterung wurde von SCHUMANN [157] vorgeschlagen.

Statistische Turbulenzmodellierung

Die statistische Mittelung der Navier-Stokes Gleichungen setzt voraus, dass Turbulenz ein Phänomen darstellt, das die Definition statistischer Mittelwerte zuläßt. REYNOLDS [129] hat als erster postuliert, dass statistische Mittelwerte existieren. Die Existenz der Mittelwerte von Strömungsgrößen erlaubt die Definition von Fluktuationen, d.h. Abweichungen von diesen Mittelwerten.

Mit der Methode der mathematischen Statistik ergibt sich bei der Auffassung der Strömungsgrößen als Zufallsvariable eine Möglichkeit, Mittelwerte bzw. Erwartungswerte mit Hilfe von **Wahrscheinlichkeitsdichten** f zu definieren, die folgende Normierungsbedingung erfüllen:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f(u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, t) du_1 du_2 du_3 = 1 . \quad (1.5)$$

Mittelwerte der Geschwindigkeit und Mittelwerte von Schwankungsgrößen lassen sich der mathematischen Statistik nach wie folgt schreiben:

$$\langle u_i \rangle (\underline{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} u_i (\underline{x}, t) f(\underline{u}, \underline{x}, t) du_1 du_2 du_3 , \quad (1.6)$$

$$\langle u_i'' \rangle (\underline{x}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} u_i'' f(\underline{u}, \underline{x}, t) du_1 du_2 du_3 = 0 , \quad (1.7)$$

Die weiteren Operationen in der mathematischen Statistik führen zur Berechnung der sogenannten **zentralen Momente** insbesondere die zentralen Momente 2., 3. und 4. Ordnung, **Varianz** σ_i^2 , **Schiefe** S , **Flachheitsgrad** F . Aus dem Mittelwert eines nichtlinearen Terms wird stets das Produkt der Mittelwerte und der Mittelwert der Schwankungswerte, auch Moment 2. Ordnung genannt. Er entspricht einer Korrelation zwischen Fluktuationen am selben Ort und zur selben Zeit, der sogenannten Einpunktkorrelation.

Angewendet auf die Reynoldsgemittelten Navier-Stokes Gleichungen stellen die Momenten 2. Ordnung das Schließungsproblem in der statistischen Turbulenzmodellierung dar. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft des Reynoldsschen Spannungstensors, der die Korrelation der Schwankungswerte der Geschwindigkeiten darstellt, treten in den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen sechs zusätzliche Unbekannte auf.

Zur Schließung des Gleichungssystems müssen diese Unbekannten durch ein Turbulenzmodell ausgedrückt werden. In der industriellen Anwendung werden zumeist lineare, niederparametrische Wirbelzähigkeitsmodelle (engl.: Eddy Viscosity Model, **EVM**) nach dem Ansatz von BOUSSINESQ [14], wie z.B. JONES UND LAUNDER [76] bzw. LAUNDER UND SPALDING [93], WILCOX [202], BALDWIN UND LOMAX [8] oder SPALART UND ALLMARAS, [170] eingesetzt.

Industrielle Anforderungen, in denen numerische Effizienz und Vorhersagegenauigkeit gleichermaßen wichtig sind, konnten bislang nur diese Modelle erfüllen. Das

resultierende Gesamtsystem besitzt eine hohe numerische Stabilität und die algorithmisch einfache, effiziente Umsetzung des Ansatzes führte schnell zu ausgereiften Verfahren.

Der lineare Wirbelzähigkeitsansatz besitzt jedoch erhebliche konzeptionelle Defizite in Bezug auf die Darstellung komplexer turbulenter Austauschmechanismen. Sie sind unsensibel gegenüber Stromlinienkrümmung und Systemrotation. Stau- punktströmungen und Strömungen mit positiven Druckgradienten zählen zu ihren Schwachstellen. Die erzielbare Vorhersagegenauigkeit im Bereich abgelöster oder ablösenaher Strömungen oder von anisotropiegetriebenen Sekundärströmungen sind mit derartiger Modellierung nahezu ausnahmslos unbefriedigend.

Der alternative Ansatz mit Transportgleichungsmodellen (Reynolds-Spannungs-Transportmodelle, RSTM) für zweite statistische Momente anstelle der EVM fand trotz Prädistinierung für komplexe Strömungen kaum Verbreitung. Dabei werden sechs zusätzliche Transportgleichungen gelöst. Die isotrope Dissipationsscherung wird durch eine eigene Transportgleichung ermittelt. Der Produktionsterm und die konvektiven Transportterme sind bei diesen Modellen exakt. Dadurch wird inhärent eine Stromlinienkrümmung oder eine Systemrotation berücksichtigt. Als wichtigste Unbekannte bedürfen die Druck-Geschwindigkeitskorrelation und der Dissipations- tensor einer Modellierung, s. LAUNDER ET AL. [90] und SPEZIALE ET AL. [175]. Andere Beispiele sind LAUNDER UND RODI [91] und GIBSON UND LAUNDER [62]. Die primären Gründe hierfür sind der hohe Kernspeicher- und Rechenbedarf, die geringe numerische Stabilität aufgrund der starken Kopplung der Gleichungen und der erhebliche Implementierungsaufwand der RSTM. Ferner vermögen einfache (lineare) RSTM nicht alle Defizite isotroper EVMs zu vermeiden und sind aufgrund ihrer wesentlich komplexeren Struktur schwieriger zu analysieren und modifizieren. Neuere Ansätze zur Erweiterung des Gültigkeitsbereichs der RSTM auf der Grundlage hoch- gradig nichtlinearer Umverteilungsterme werden vielfach mit Skepsis betrachtet, s. SPEZIALE [176].

Ungeachtet ihrer theoretischen Vorteile steht die erfolgreiche Validierung fortschrittlicher Transportgleichungs-Reynolds-Spannungsmodelle in Bezug auf die genauere Darstellung von komplexen, praxisrelevanten Strömungen noch aus, BRADSHAW ET AL. [18]. Erste vielversprechende Arbeiten hierzu findet man z.B. bei BATTEN [10] oder HANJALIĆ ET AL. [68].

Zur Verbesserung der Simulationsqualität, bei gleichzeitiger Beibehaltung der günstigen Eigenschaften der linearen Wirbelzähigkeitsmodelle, werden vielerorts nichtlineare Erweiterungen der Zwei-Parameter Wirbelzähigkeitsmodelle untersucht. Neben heuristisch motivierten Vorschlägen, z.B. SPEZIALE [174] oder CRAFT [32], sind in der Literatur eine Vielzahl unterschiedlicher Vorgehensweisen mit Über- geordneten mathematisch physikalischen Prinzipien zur Konstruktion nichtlinearer Beziehungen zwischen Reynolds-Spannungen und Geschwindigkeitsgradienten (Stress-Strain Relation) bekannt. Beispiele hierfür sind die Renormalisierungsgrup- pentheorie (RUBINSTEIN UND BARTON [137]), die „Direct-Interaction“ Approxima- tion (YOSHIZAWA [204]), das Realizability-Prinzip (SHIH ET AL. [163]) oder die Ra- tionale Mechanik (POPE [125], GATSKI [61]).

Unter diesen Vorschlägen erscheinen die expliziten algebraischen Spannungsmodel-

le (EASM), welche auf POPE [125] bzw. GATSKI [61] zurückgehen, überlegen. Ihre Herleitung basiert auf der Vereinfachung linearer RSTM, so dass Erkenntnisse dieser Modelle weiterbenutzt werden können. Für strukturell stationäre Turbulenz lassen sich die Transportgleichungen der Reynolds-Spannungen in ein System implizit gekoppelter algebraischer Gleichungen Überführen. Diese Gleichungen können dann mittels der Darstellungs- und Invariantentheorie (SPENCER UND RIVLIN [173], SPENCER [172]) in einen expliziten Zusammenhang zwischen Reynolds-Spannungen und Geschwindigkeitsgradienten umgeformt werden.

Durch die rigorose Ableitung aus dem linearen impliziten RSTM gewährleistet das EASM die korrekte Darstellung von Produktions- und Umverteilungsmechanismen. Die enge Beziehung zum impliziten RSTM eröffnet eine verbesserte Wiedergabe von Spannungsanisotropie, Systemrotation und Stromlinienkrümmung. Die EASM verfügen somit grundsätzlich über ähnliche physikalische Gültigkeitsbereiche wie die RSTM.

Im Wesentlichen kann durch die Verwendung einer Wandfunktion oder durch die Auflösung der wandnahen Strömung die Wandbehandlung erfolgen. Zwar zeigen Wandfunktionen Defizite bei Strömungen mit positiven Druckgradienten und Ablösungen, sie sind jedoch aufgrund der mit ihr verbundenen Einsparung an Rechenzeit für industrielle Anwendungen attraktiv. Aktuelle Entwicklungen spiegeln sich z.B. in den Veröffentlichungen von GROTHJANS UND MENTER [64] und SHIH ET AL. [161] wieder.

Bei der Auflösung der wandnahen Strömung müssen besondere Maßnahmen getroffen werden, da sowohl die Transportgleichungen für die turbulenten Größen als auch die Bestimmungsgleichung für die Wirbelviskosität in Wandnähe ihre Gültigkeit verlieren. Eine gängige Methode ist die Verwendung von Low-Reynolds-Number-Modellen, die durch geeignete Dämpfungsfunktionen das asymptotisch korrekte Verhalten der Turbulenzgrößen erzwingen. Eine Übersicht geben PATEL ET AL. [123].

1.4 Zielsetzung

Strömungen in Turbomaschinen sind also von einer Vielzahl von Phänomenen begleitet, deren zuverlässige numerische Simulation im Wesentlichen durch die Turbulenzmodellierung limitiert ist. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sind deshalb unter anderem geeignete Turbulenzmodelle für die Anwendung im achsensymmetrischen Fall der Reynoldsgemittelten Navier-Stokes Gleichungen zu finden.

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird das numerische Verfahren auf der Basis bewährter Methoden entwickelt und implementiert. Im Anschluss daran werden die zu untersuchenden Turbulenzmodelle implementiert. Aufgrund der numerischen Schwierigkeiten mit differentiellen Reynolds-Spannungsmodellen werden ausschließlich Wirbelviskositätsmodelle untersucht.

Im Rahmen dieser Arbeit wird somit ein achsensymmetrisches Navier-Stokes-Verfahren NSA ¹⁹, dessen Schwerpunkte unter anderem auf der genauen und stabi-

¹⁹Navier-Stokes Axisymmetric

len Diskretisierung der konvektiven Terme sowie auf einer parallelisierten, flexiblen Blockstruktur liegen. Ein weiterer Schwerpunkt betrifft den Codeaufbau, der die flexible Erweiterbarkeit für die Implementierung von Turbulenzmodellen zulässt. Zur Effizienzsteigerung ist es um Mehrgitterverfahren erweiterbar.

Neben guten Stabilitätseigenschaften wird eine gewisse Allgemeingültigkeit gefordert. Low-Reynolds-Number k - ε -Modelle werden am Beispiel von einem nichtlinearen k - ε -Modell angewendet. Die numerischen Eigenschaften und die Effizienz des Verfahrens werden an einfachen Testfällen untersucht. Dabei wird die hohe Genauigkeit der Approximation der konvektiven Terme nachgewiesen.

Die Anwendung der Modelle erfolgt an der Strömung in Radseitenräumen von Turbomaschinen, die eine hohe Komplexität aufweisen.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen theoretischen Grundlagen behandelt, die für das entwickelte Berechnungsverfahren wichtig sind. Von der mathematischen Seite sind besonders Differentialgeometrie und Tensoranalysis auf Grund des krummlinigen Koordinatensystems zu erwähnen.

BRADSHAW [15] hat in seiner Monografie erwähnt, dass es kein Lehrbuch zu geben scheint, in dem die Mathematik der Tensoranalysis für die fluidmechanischen Erhaltungsgleichungen in geeigneter Weise erklärt wird. Deshalb gibt er dort eine knappe Einführung. Die umgekehrte Betrachtungsweise findet sich bei ARIS [3], der die Strömungsmechanik als Beispiel der Tensoranalysis benutzt, statt umgekehrt. EVANS [50] gibt eine kurze Zusammenfassung der Tensorrechnung von BORISENKO UND TARAPOV [13] und KÄSTNER [78].

Die Anwendung der Tensoranalysis in der Kontinuumsmechanik der Festkörper findet sich beispielsweise bei LIPPMANN [103] und CHUNG [29]. Aufgrund der ausgiebigen Anwendung der Tensoranalysis in der allgemeinen Relativitätstheorie ist ein Einstieg in das mathematische Werkzeug bei EINSTEIN [46, 47] oder bei SCHACHINGER [139] zu finden.

Auf der fluidmechanischen Seite wird wie folgt verfahren: Nach der Vorstellung der Navier-Stokes Gleichungen wird auf die statistisch gemittelten Navier-Stokes (RANS) Gleichungen eingegangen. Durch die Mittelung entstehen zusätzliche Unbekannte aus der Korrelation der Geschwindigkeitsschwankungen. Diese Unbekannten sind die Komponenten des Reynoldsspannungstensors. Das somit nicht geschlossene partielle Differentialgleichungssystem kann mit Turbulenzmodellen geschlossen werden.

2.1 Navier-Stokes Gleichungen in allgemein tensorieller Formulierung

Zur Beschreibung des dreidimensionalen Strömungsfeldes eines inkompressiblen Fluids stehen vier Erhaltungsgleichungen für die vier Unbekannten zur Verfügung. Dies sind die Kontinuitätsgleichung sowie drei Impulserhaltungsgleichungen für die

Geschwindigkeiten in drei Koordinatenrichtungen \underline{c} und für den statischen Druck p .

Die oben genannten vier Erhaltungsgleichungen können in verschiedenen Koordinatensystemen ausgedrückt werden. Gekrümmte oder drallbehaftete Strömungen können am besten in anderen als im vertrauten, kartesischen Koordinatensystem analysiert werden. In dieser Arbeit wird das krummlinige, zylindrische Koordinatensystem benutzt. Der Übergang vom geradlinigen Koordinatensystem zum krummlinigen Koordinatensystem bedeutet, dass statt im euklidischen Raum der Differentialgeometrie im Riemannraum operiert wird.

Diese theoretischen Operationen betreffen alle Gleichungen in diesem Kapitel wie z.B. die Navier-Stokes, RANS, Boussinesq-Approximation, Transport von Reynolds-Spannungen, Geschwindigkeitsgradiententensor, Deformationstensor, Rotationstensor und Turbulenzmodelle.

Für ein krummliniges Inertialsystem und Newtonsche Fluide ergeben sich die Erhaltungsgleichungen unter Verwendung des Ricci-Kalküls¹ und der Annahme der Stokeschen Hypothese sowie einer ortsabhängigen Viskosität in allgemein tensorieller Formulierung wie folgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c^j \frac{\partial \rho}{\partial \xi^j} + \rho \frac{\partial c^j}{\partial \xi^j} + \rho c^j \Gamma_{jl}^l = 0, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \left(c^k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial c^k}{\partial t} \right) \underline{g}_k + \frac{\partial \rho}{\partial \xi^j} c^j c^k \underline{g}_k + \left(\frac{\partial c^j}{\partial \xi^j} + c^j \Gamma_{jl}^l \right) \rho c^k \underline{g}_k + \frac{\partial c^k}{\partial \xi^j} c^j \rho \underline{g}_k \quad (2.2) \\ & + \Gamma_{kj}^m \rho c^j c^k \underline{g}_m = -g^{kj} \left(p \Gamma_{jl}^l \underline{g}_k + p \Gamma_{kj}^t \underline{g}_t + \frac{\partial p}{\partial \xi^j} \underline{g}_k \right) \\ & - p \frac{\partial g^{kj}}{\partial \xi^j} \underline{g}_k + \left(\frac{\partial c^k}{\partial \xi^r} + c^m \Gamma_{mr}^k \right) \frac{\partial \mu}{\partial \xi^j} g^{rj} \underline{g}_k \\ & + \left(\frac{\partial c^j}{\partial \xi^q} + c^n \Gamma_{nq}^j \right) \frac{\partial \mu}{\partial \xi^k} g^{qk} \underline{g}_j + \mu \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left[\left(\frac{\partial c^k}{\partial \xi^r} + c^m \Gamma_{mr}^k \right) g^{rj} \right] \underline{g}_k \\ & + \mu \left(\frac{\partial c^k}{\partial \xi^r} + c^m \Gamma_{mr}^k \right) g^{rj} \Gamma_{jl}^l \underline{g}_k + \mu \left(\frac{\partial c^k}{\partial \xi^r} + c^m \Gamma_{mr}^k \right) g^{rj} \Gamma_{kl}^p \underline{g}_p \\ & + \mu \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left[\left(\frac{\partial c^j}{\partial \xi^q} + c^n \Gamma_{nq}^j \right) g^{qk} \right] \underline{g}_k + \mu \left(\frac{\partial c^j}{\partial \xi^q} + c^n \Gamma_{nq}^j \right) g^{qk} \Gamma_{jl}^l \underline{g}_k \\ & + \mu \left(\frac{\partial c^j}{\partial \xi^q} + c^n \Gamma_{nq}^j \right) g^{qk} \Gamma_{kl}^s \underline{g}_s. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 2.1 und 2.2 entstehen durch mathematisch formale Herleitung im Riemannraum der Differentialgeometrie. Um sie für ein spezielles Koordinatensystem auszuwerten, bedient man sich folgender Vorgehensweise:

¹Ricci-Kalkül: Wenn an einem Grundbuchstaben oder in einem Ausdruck, der aus mehreren, ohne zwischengeschaltetes Operationszeichen, hintereinandergestellten ggf. indizierten Grundbuchstaben besteht, ein Index doppelt auftritt - und zwar einmal oben und einmal unten - so wird über diesen Index automatisch summiert.

1. Formulierung der folgenden Größen: Kovariante Basisvektoren \underline{g}_k , Kontravariante Metriktenorkomponente g^{qk} , Christoffelsymbole zweiter Art Γ_{kj}^m und kovariante Maßstabsfaktoren $\sqrt{g_{(jj)}}$.

Die kovariante Maßstabsfaktoren $\sqrt{g_{(jj)}}$ unterscheiden sich von der kontravarianten nur in der Hinsicht, dass sie zur Normierung der Basisvektoren im Nenner stehen, während die kontravarianten Maßstabsfaktoren im Zähler stehen.

Mit der folgenden Definition der Christoffelsymbole zweiter Art Γ_{kj}^m

$$\Gamma_{kj}^m = \frac{1}{2} g^{mn} \left(\frac{\partial g_{jn}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial \xi^n} \right) \quad (2.3)$$

sind kovariante Metriktenorkomponenten g_{qk} implizit auch zu formulieren.

2. Die Größen in Gleichungen 2.1 und 2.2 einsetzen und algebraische Operationen unter Berücksichtigung des Ricci-Kalküls durchführen.
3. Die kovarianten Basisvektoren \underline{g}_k auf \underline{e}_{g_k} normieren. Damit werden die physikalischen Komponenten wiederhergestellt. Der Grund für die Normierung ist die Tatsache, dass die Basisvektoren im krummlinigen Koordinatensystem im Allgemeinen nicht normiert sind. Das kann sogar dazu führen, dass die Komponenten eines Vektors unterschiedliche Dimensionen haben.
4. Die normierten Basisvektoren werden normalerweise nicht mitgeschrieben. Sie zeigen die Koordinatenrichtung, für die die Gleichung ausgewertet ist.

Die Gleichungen in allgemein tensorieller Formulierung, wie sie in den Gleichungen 2.1 und 2.2 dargestellt sind, führen für die weiteren theoretischen Operationen wie beispielsweise statistische Mittelung, Linearkombination und Varianzbildung zu sehr unübersichtlichen Ausdrücken.

Deshalb wird ab jetzt die kontravariante Darstellung unter Berücksichtigung der kovarianten Ableitung gewählt. Diese Darstellung weist auf die Ähnlichkeit zu der Indexnotation im vertrauten, kartesischen Koordinatensystem hin. Dies gilt sowohl für die Navier-Stokes Gleichungen als auch für alle darauf aufbauenden Gleichungen.

Für die Navier-Stokes Gleichungen mit unveränderlicher Dichte ρ und temperaturunabhängiger, kinematischer Viskosität $\nu = \mu/\rho$ ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$c_{\parallel j}^j = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial c^k}{\partial t} + c^j c_{\parallel j}^k = -g^{kj} \frac{p_{\parallel j}}{\rho} + \left[\nu \left(g^{rj} c_{\parallel r}^k + g^{qk} c_{\parallel q}^j \right) \right]_{\parallel j}. \quad (2.5)$$

Das Gleichungssystem 2.4 und 2.5 gilt sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen. Die direkte, numerische Berechnung der turbulenten Strömungen erfordert aber aufgrund der kleinen Längenskalen sehr hohe Gitterauflösung und aufgrund der Zeitskala sehr feine zeitliche Auflösung, s. Kap. 1.3.2. Zudem liegen

technisch relevante Strömungen im Bereich sehr hoher Reynoldszahlen und somit ist die direkte, numerische Berechnung sehr zeit- und kostenaufwendig. Deshalb geht man zu einer statistischen Beschreibung der Turbulenz über.

Nach der Auswertung für das Zylinderkoordinatensystem und der Vereinfachung für den inkompressiblen achsensymmetrischen² Fall, resultieren folgende Gleichungen, vgl. z.B. mit FRIEDRICH [58], KOTSCHIN ET AL. [84], SCHLICHTING [151], SPURK [177], TRUCKENBRODT [188]:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right], \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right], \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \quad (2.9)$$

Hierin bezeichnet t die Zeit. Die Geschwindigkeiten werden mit u bezeichnet, um Verwechslung mit den Geschwindigkeiten in der kontravarianten Formulierung c mit hochgestelltem Index zu vermeiden. Da dieses System gekoppelter, nichtlinearer Differentialgleichungen selbst für laminare Strömungen nur in wenigen Sonderfällen eine analytische Lösung erlaubt, müssen zur Lösung numerische Verfahren herangezogen werden.

Der Term $\left[\nu \left(g^{ak} c_{\parallel q}^j \right) \right]_{\parallel j}$ in Gleichung 2.5 verschwindet bei der Auswertung in den Gleichungen 2.7 bis 2.9 aufgrund der Kontinuität. Aber im Rahmen der statistischen Turbulenzmodellierung verschwindet der Term nicht ganz, weil $\nu \rightarrow \nu_{eff} = \nu_{eff}(\underline{x}, t)$.

2.2 Statistische Mittelung der Navier-Stokes Gleichungen

2.2.1 Reynoldsscher Separationsansatz

Ein deutlich geringerer Aufwand bei der numerischen Lösung des Gleichungssystems 2.1 und 2.2 lässt sich durch eine zeitliche Mittelung erzielen. Die statistische Betrachtung der Turbulenz geht auf den Separationsansatz nach REYNOLDS [129] zurück. Danach lässt sich die lokal an einem Ort vorherrschende Strömungsgröße ϕ aufteilen in einen zeitlichen Mittelwert $\langle \phi \rangle$ und einen Schwankungsanteil ϕ'' :

²Unter achsensymmetrisch wird in dieser Arbeit achsensymmetrisch im zylindrischen Koordinatensystem verstanden, um eine Verwechslung mit parabolisch zylindrischem, elliptisch zylindrischem oder anderen Koordinatensystemen zu vermeiden.

$$\phi(\underline{x}, t) = \langle \phi \rangle(\underline{x}) + \phi''(\underline{x}, t) . \quad (2.10)$$

Die zeitlich gemittelte Größe $\langle \phi \rangle(\underline{x})$ ergibt sich durch Mittelung über einen ausreichend langen Zeitraum T :

$$\langle \phi \rangle(\underline{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(\underline{x}, t) dt . \quad (2.11)$$

Der zeitliche Mittelwert des Schwankungsanteils verschwindet:

$$\langle \phi'' \rangle(\underline{x}, t) = 0 . \quad (2.12)$$

Das Mittelungsintervall T muss dabei klein sein gegenüber dem charakteristischen Zeitmaß der statistisch instationären Strömung und groß verglichen mit den integralen Zeitskalen der Schwankungsbewegung.

2.2.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes Gleichungen

Führt man den Separationsansatz nach Gl. 2.10 in die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen 2.4 und 2.5 für die Geschwindigkeiten und den statischen Druck ein und mittelt diese zeitlich, so erhält man die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\langle c^j \rangle_{\parallel j} = 0 , \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c^k \rangle}{\partial t} + \langle c^j \rangle \langle c^k \rangle_{\parallel j} &= -g^{kj} \frac{\langle p \rangle_{\parallel j}}{\rho} + \left[\nu \left(g^{rj} \langle c^k \rangle_{\parallel r} + g^{qk} \langle c^j \rangle_{\parallel q} \right) \right]_{\parallel j} \\ &\quad - \langle c''^k c''^j \rangle_{\parallel j} . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nach der Auswertung für den achsensymmetrischen Fall, resultieren die folgenden Reynolds-averaged Navier-Stokes RANS-Gleichungen:

$$\frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} + \frac{\langle u_r \rangle}{r} + \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} = 0 , \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial t} + \langle u_r \rangle \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} + \langle u_z \rangle \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} - \frac{\langle u_\varphi \rangle^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial r} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} &+ \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_r \rangle}{\partial z^2} - \frac{\langle u_r \rangle}{r^2} \right] - \left(\left\langle u_r'' \frac{\partial u_r''}{\partial r} \right\rangle + \left\langle u_z'' \frac{\partial u_r''}{\partial z} \right\rangle - \frac{\langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle}{r} \right) , \\ \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial t} + \langle u_r \rangle \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial r} + \langle u_z \rangle \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial z} + \frac{\langle u_\varphi \rangle \langle u_r \rangle}{r} &= \quad (2.17) \\ &+ \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_\varphi \rangle}{\partial z^2} - \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r^2} \right] - \left(\left\langle u_r'' \frac{\partial u_\varphi''}{\partial r} \right\rangle + \left\langle u_z'' \frac{\partial u_\varphi''}{\partial z} \right\rangle + \frac{\langle u_\varphi'' u_r'' \rangle}{r} \right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial t} + \langle u_r \rangle \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} + \langle u_z \rangle \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} \\ + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial z^2} \right] &- \left(\left\langle u_r'' \frac{\partial u_z''}{\partial r} \right\rangle + \left\langle u_z'' \frac{\partial u_z''}{\partial z} \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Gleichungen 2.13 und 2.14 beschreiben im Gegensatz zu den originären Erhaltungsgleichungen den Transport der zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten $\langle \underline{c} \rangle$ und des Druckes $\langle p \rangle$. Sie enthalten zusätzlich den Reynolds-Spannungstensor $\langle c''^k c''^j \rangle$, der aus der Mittelung der konvektiven Terme als Korrelation der Geschwindigkeitsschwankungen resultiert. Die Reynolds-Spannungen stellen die zeitlich gemittelte Wirkung der turbulenten Konvektion dar; ihren zunächst irreführenden Namen kann man im Hinblick auf eine Diffusion des zeitlich gemittelten Impulses oder aber auch aus einer gängigen Modellierungsstrategie, der Wirbelviskositätsannahme heraus, verstehen.

Aufgrund der Symmetrie des Reynolds-Spannungstensors entstehen in RANS zusätzlich zu den Geschwindigkeiten in drei Koordinatenrichtungen und zu dem Druck sechs neue Unbekannte. Dies sind die nach der Symmetriebetrachtung übriggebliebenen Reynoldsspannungstensorkomponenten. Das RANS-Gleichungssystem ist also nicht geschlossen.

2.2.3 Transportgleichungen für Reynoldsspannungstensor

Durch Linearkombination der fluktuierenden Navier-Stokes Gleichungen für die Schwankungsgrößen können sechs Transportgleichungen für die sechs Komponenten des Reynoldsspannungstensors hergeleitet werden. Diese Transportgleichungen beinhalten jedoch höhere Korrelationen, die wiederum unbekannt sind. Dies ist eine Eigenschaft von nichtlinearen Gleichungen. Deshalb sind auch die Transportgleichungen für die Komponenten des Reynoldsspannungstensors nicht geschlossen.

Auch hier werden die Transportgleichungen für die Reynoldsspannungstensorkomponenten zuerst in kontravarianter Formulierung basierend auf BRADSHAW [15] mit entsprechender Umformulierung wie folgt geschrieben:

$$\frac{\partial \langle c''^k c''^j \rangle}{\partial t} + CT^{kj} = PR^{kj} + TD^{kj} + PD^{kj} + PS^{kj} + VD^{kj} + DS^{kj}. \quad (2.19)$$

Bei der Gleichung 2.19 bezeichnen die Terme CT^{kj} die Konvektion, PR^{kj} die Produktion, TD^{kj} die turbulente Diffusion, PD^{kj} die Druckdiffusion, PS^{kj} die Druckscherung, VD^{kj} die viskose Diffusion und DS^{kj} die Dissipationsscherung. Die Terme sind wie folgt definiert:

$$CT^{kj} = \langle c^l \rangle \langle c''^k c''^j \rangle_{||l}, \quad (2.20)$$

$$PR^{kj} = -\langle c''^l c''^j \rangle \langle c^k \rangle_{||l} - \langle c''^l c''^k \rangle \langle c^j \rangle_{||l}, \quad (2.21)$$

$$TD^{kj} = -\langle c''^j c''^l c''^k \rangle_{||l}, \quad (2.22)$$

$$PD^{kj} = -\frac{1}{\rho} \left(g^{jl} \langle p'' c''^k \rangle_{||l} + g^{kl} \langle p'' c''^j \rangle_{||l} \right), \quad (2.23)$$

$$PS^{kj} = \frac{1}{\rho} \left\langle p'' \left(g^{kl} c''^j_{||l} + g^{jl} c''^k_{||l} \right) \right\rangle, \quad (2.24)$$

$$VD^{kj} = \nu g^{ml} \langle c''^k c''^j \rangle_{||ml}, \quad (2.25)$$

$$DS^{kj} = -\nu g^{ml} \left(\langle c''^k_{||m} c''^j_{||l} \rangle + \langle c''^j_{||m} c''^k_{||l} \rangle \right). \quad (2.26)$$

Die Auswertung für den achsensymmetrischen Fall benötigt ziemlich lange algebraische Operationsschritte, siehe UNGER [192] oder MOSER UND MOIN [112].

Eine andere Möglichkeit, die Transportgleichungen zu bekommen, besteht darin, aus den ausgewerteten Navier-Stokes Gleichungen 2.7 bis 2.9 und ausgewerteten RANS Gleichungen 2.16 bis 2.18 die Navier-Stokes Gleichungen für die fluktuierenden Größen und Linearkombinationen davon zu bilden.

Anhand der Gleichungen 2.20 bis 2.26 wird offensichtlich, dass die Transportgleichungen für die Reynoldsspannungstensoranteile nicht geschlossen sind. Vielmehr enthalten sie noch mehr unbekannte Terme wie die turbulente Diffusion, die Druckdiffusion, die Druckscherung und die Dissipationsscherung. Um sie zu schließen, müssen diese unbekannteren Terme modelliert werden.

Für den industriellen Einsatz sind Transportgleichungen höherer Korrelationen wenig interessant, da ihre Lösung im allgemeinen aufgrund der vielen Anzahl der partiellen Differentialgleichungen (PDG) und aufgrund der damit verbundenen numerischen Instabilität sehr aufwendig ist. Die numerische Instabilität kommt dadurch zustande, dass die PDG stark miteinander gekoppelt sind. Bei CHOU UND CHOU [28] findet man Transportgleichungen der Triplekorrelation und der Quadrupolkorrelation.

Nimmt man die Auswertung der einzelnen Terme der Gleichung 2.19 nach UNGER [192], setzt man sie zu den Transportgleichungen für $\langle u''_r u''_r \rangle$, $\langle u''_\varphi u''_\varphi \rangle$ und $\langle u''_z u''_z \rangle$ zusammen und bildet man aus ihnen die halbe Varianz bzw. Spur von Gl. 2.19, so bekommt man die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k im achsensymmetrischen Fall des Zylinderkoordinatensystems wie folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\langle u_r \rangle \frac{\partial k}{\partial r} + \langle u_z \rangle \frac{\partial k}{\partial z}}_{\text{Konvektion}} &= - \underbrace{\left(\langle u_r'' u_r'' \rangle \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} + \langle u_r'' u_\varphi'' \rangle \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial r} + \langle u_r'' u_z'' \rangle \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} \right)}_{\text{Produktion}} \quad (2.27) \\
&\quad - \underbrace{\left(\langle u_z'' u_r'' \rangle \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} + \langle u_z'' u_\varphi'' \rangle \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial z} + \langle u_z'' u_z'' \rangle \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} \right)}_{\text{Produktion}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{r} \langle u_\varphi \rangle \langle u_r'' u_\varphi'' \rangle - \frac{1}{r} \langle u_r \rangle \langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle}_{\text{Produktion}} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{2} \left[\langle u_r'' u_r'' u_r'' \rangle + \langle u_r'' u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle + \langle u_r'' u_z'' u_z'' \rangle \right] \right)}_{\text{Turbulente Diffusion}} \\
&\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \left[\langle u_z'' u_r'' u_r'' \rangle + \langle u_z'' u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle + \langle u_z'' u_z'' u_z'' \rangle \right] \right)}_{\text{Turbulente Diffusion}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} \langle u_r'' u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{2} \langle u_r'' u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle \right)}_{\text{Turbulente Diffusion}} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \langle p'' u_r'' \rangle \right) - \frac{\partial}{\partial z} \langle p'' u_z'' \rangle}_{\text{Druckdiffusion}} \\
&\quad + \underbrace{\left\langle p'' \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r u_r'' \right) \right\rangle + \left\langle p'' \frac{\partial u_z''}{\partial z} \right\rangle + \frac{1}{r} \left\langle p'' \frac{\partial u_\varphi''}{\partial \varphi} \right\rangle}_{\text{Druckscherung}} \\
&\quad + \nu \underbrace{\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r k) + \frac{\partial k}{\partial z} \right]}_{\text{Viskose Diffusion}} \\
&\quad - \nu \underbrace{\left\langle \left(\frac{\partial u_r''}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi''}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z''}{\partial r} \right)^2 \right\rangle - \nu \left\langle \left(\frac{\partial u_r''}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi''}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z''}{\partial z} \right)^2 \right\rangle}_{\text{Dissipationsscherung}} \\
&\quad - \nu \underbrace{\frac{1}{r^2} \left\langle \left(\frac{\partial u_r''}{\partial \varphi} - u_\varphi'' \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\varphi''}{\partial \varphi} + u_r'' \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z''}{\partial \varphi} \right)^2 \right\rangle}_{\text{Dissipationsscherung}}.
\end{aligned}$$

Die turbulente kinetische Energie (TKE) pro Einheitsmasse in Gl. 2.27 ist also wie folgt definiert:

$$k = \frac{1}{2} \left(\langle u_r'' u_r'' \rangle + \langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle + \langle u_z'' u_z'' \rangle \right). \quad (2.28)$$

Die Gleichung für den Transport von k ist im Allgemeinen sehr wichtig für die Turbulenzmodellierung, in die im Kap. 2.3 eingegangen wird. Eingleichungsturbu-

lenzmodelle verwenden nur die Transportgleichung von k als zusätzliche Differentialgleichung zur RANS. Zweigleichungsturbulenzmodelle verwenden auch die Transportgleichung für k und eine zusätzliche Differentialgleichung für eine weitere kennzeichnende Größe der Turbulenz, wie beispielsweise die Dissipationsrate ε , s. JONES UND LAUNDER [76]³ oder die spezifische Dissipationsrate ω , s. KOLMOGOROV [83]⁴ oder auch das Produkt von k und die integrale Längenskala kl , s. ROTTA [135]. Darüber hinaus können Turbulenzmodellen aus beliebig vielen Transportgleichungen bestehen. Eine davon ist immer die Transportgleichung für k .

2.3 Turbulenzmodellierung

Im Allgemeinen muss die Vorgehensweise, ein nicht geschlossenes Gleichungssystem zu schließen, derart sein, dass Modelle gebildet werden, die die Realität möglichst gut beschreiben können. In der Fluidodynamik müssen Modelle zur Schließung des nicht geschlossenen, fluidodynamischen Gleichungssystem die Physik der Strömung möglichst gut beschreiben können. Ein Schließungsproblem tritt bei dieser Arbeit aufgrund der Eigenschaft, dass die RANS-Gleichungen 2.13 und 2.14 nicht geschlossenen sind, auf.

Differentielle Reynolds-Spannungsmodelle

Der naheliegende Ansatz ist, die zunächst unbekanntes Reynoldsspannungstensorkomponenten mit Hilfe der Gleichungen 2.19 zu berechnen. Damit ist das Problem auf das Schließungsmodell der turbulenten Diffusion TD^{kj} , der Druckdiffusion PD^{kj} , der Druckscherung PS^{kj} und die Dissipationsscherung DS^{kj} verlagert. Zunächst wird der Tensor der Dissipationsscherung DS^{kj} in seinen isotropen und deviatorischen Anteil aufgeteilt:

$$DS^{kj} = \frac{2}{3} DS_I + DS_D^{kj} . \quad (2.29)$$

Der isotrope Anteil des Tensors der Dissipationsscherung der turbulenten kinetischen Energie DS_I ist definiert als die halbe Spur des Tensors der Dissipationsscherung:

$$DS_I = \frac{1}{2} g_{kj} DS^{kj} = \frac{1}{2} DS_k^k . \quad (2.30)$$

Somit kann die Transportgleichung für die Reynolds-Spannungen in folgender Form modelliert werden:

³Die allerersten Entwicklungsarbeiten des k - ε -Modells beruhen auf CHOU [27], DAVIDOV [36] und HARLOW UND NAKAYAMA [69]. Aber das zentrale Paper ist das Paper von JONES UND LAUNDER [76], das in der Turbulenzwelt den Status von Boussinesq- und Reynolds-Paper annähert. Das Modell ist als Standard- k - ε -Modell bekannt. Das meistverwendete Modell ist aber das 1974 von LAUNDER UND SHARMA [92] rekalibrierte Standard- k - ε -Modell.

⁴Das allererste Zweigleichungsturbulenzmodell wurde von ihm 1942 vorgestellt.

$$\frac{\partial \langle c''^k c''^j \rangle}{\partial t} + CT^{kj} = PR^{kj} + TD^{kj} + PD^{kj} + PS^{kj} + DS_D^{kj} + VD^{kj} + \frac{2}{3} DS_I. \quad (2.31)$$

GATSKI UND SPEZIALE [61] oder DURBIN UND PETERSSON REIF [45] schlagen unter der Annahme homogener Turbulenz vor, die Summe von $PS^{kj} + DS_D^{kj}$ mit Hilfe des Umverteilungstensors Π_H^{kj} zu modellieren⁵. Bezüglich der Summe von $TD^{kj} + PD^{kj}$ schlagen DALY UND HARLOW [34] ein Gradiententransportmodell vor. Die isotrope Dissipationsscherung DS_I wird durch eine eigene Transportgleichung ermittelt. Alle anderen Terme der Gleichung 2.31 sind direkt zu berechnen.

Die Reynolds-Spannungsmodelle können im Gegensatz zu den später beschriebenen Wirbelviskositätsmodellen nichtlokale Effekte der Turbulenz wiedergeben. Sie können also Transportvorgänge der anisotropen Reynoldsspannungen beschreiben. Jedoch werden sie zur Lösung technischer Problemstellungen in der Regel nicht angewendet. Das Problem besteht darin, dass die partiellen Differentialgleichungen miteinander stark gekoppelt sind, so dass numerische Instabilitäten und langsame Konvergenz zu erwarten sind. Das alles erhöht die Rechenzeit und somit die Entwicklungsdauer und -kosten einer Maschine.

Wirbelviskositätsannahme

Eine in der Ingenieurpraxis gängigere Approximation ist die Modellierung über die Wirbelviskositätsannahme, welche die direkte Modellierung des Reynolds-Spannungstensors erlaubt. Der Ansatz von BOUSSINESQ [14] ist der bekannteste Vertreter davon, s. Kap. 2.3.1. Dabei wird die Existenz einer von den Strömungsgrößen abhängigen turbulenten Viskosität vorausgesetzt.

Die Bestimmung der von den Strömungsgrößen abhängigen turbulenten Viskosität erfolgt über Turbulenzmodellierung. Wie im Kap. 2.2.3 gezeigt, ist die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie nicht geschlossen. Für Turbulenzmodelle mit der Gleichungsanzahl größer als eins lässt sich auch zeigen, dass die zusätzlichen Transportgleichungen auch Schließungsprobleme beinhalten.

Im kartesischen Koordinatensystem ist das Gradiententransportmodell zur Approximation der turbulenten Diffusion TD^{kj} und der Druckdiffusion PD^{kj} der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie als Standardvorgehensweise angewendet, s. z.B. DALY UND HARLOW [34]⁶. Die allgemeine Formulierung des oben genannten Approximationsansatzes für krummlinige Koordinatensysteme lautet wie folgt:

$$-\frac{1}{2} g_{jk} \langle c''^j c''^m c''^k \rangle - \frac{1}{\rho} \langle p'' c''^m \rangle \approx \frac{\nu_T}{\sigma_\kappa} g^{ml} \kappa_{||m} \quad (2.32)$$

⁵Der tiefgestellte Index H steht für *homogene Turbulenz*.

⁶Das Gradiententransportmodell wird auch in den Transportgleichungen für die turbulente Dissipation ε bzw. für die bezogene Dissipation ω angewendet.

Es ist zweckmäßig, die turbulente kinetische Energie in der allgemeinen tensoriellen Formulierung mit κ zu bezeichnen, um Verwechslung mit dem Index k zu vermeiden. In der ausgewerteten Formulierung wird die turbulente kinetische Energie mit k bezeichnet, siehe z.B. Gleichung 2.28.

2.3.1 Boussinesq-Approximation

Die Grundlage linearer Wirbelviskositätsmodelle ist der Ansatz von BOUSSINESQ [14], der hier zweckmäßigerweise kontravariant zu formulieren ist:

$$-\langle c''^k c''^j \rangle = 2\nu_T \langle S^{kj} \rangle - g^{kj} \left(\frac{2}{3} \kappa \right). \quad (2.33)$$

Bei obiger Gleichung 2.33 ist der Deformationstensor $\langle S^{kj} \rangle$ wie folgt definiert:

$$\langle S^{kj} \rangle = \frac{1}{2} \left(g^{rj} \langle c^k \rangle_{\parallel r} + g^{qk} \langle c^j \rangle_{\parallel q} \right). \quad (2.34)$$

Im Rahmen dieser Arbeit ergibt sich für den achsensymmetrischen Fall folgender Deformationstensor:

$$\begin{aligned} \langle S^{kj} \rangle &= \begin{pmatrix} \langle S_{rr} \rangle & \langle S_{r\varphi} \rangle & \langle S_{rz} \rangle \\ \langle S_{\varphi r} \rangle & \langle S_{\varphi\varphi} \rangle & \langle S_{\varphi z} \rangle \\ \langle S_{zr} \rangle & \langle S_{z\varphi} \rangle & \langle S_{zz} \rangle \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} & \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial r} - \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r} & \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} \\ \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial r} - \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r} & 2 \frac{\langle u_r \rangle}{r} & \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial z} \\ \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} + \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} & \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial z} & 2 \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Das Schließungsproblem reduziert sich damit auf die Bestimmung der Wirbelviskosität ν_T . Diese lässt sich aus dimensionsanalytischen Gründen auf ein turbulentes Zeitmaß T_T und ein integrales Längenmaß L_T zurückführen:

$$\nu_T \propto \frac{L_T^2}{T_T}. \quad (2.36)$$

Das Problem wird somit auf die Bestimmung des turbulenten Zeit- und Längenmaßes verlagert. Diese Maße werden in der Praxis über die turbulente kinetische Energie k und ihre Dissipationsrate ε bestimmt. Das Längen- und Zeitmaß ergibt sich zu:

$$T_T = \frac{k}{\varepsilon}, \quad (2.37)$$

$$L_T = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}. \quad (2.38)$$

Die Größen k und ε werden dann mit entsprechenden Transportgleichungen ermittelt. Die effektive Viskosität ν_{eff} ist zweckmäßiger Weise wie folgt zu definieren:

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_T . \quad (2.39)$$

Alternativ zu ε kann auch eine bezogene Dissipation ω berechnet werden, die über folgende Beziehung mit ε verknüpft ist:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k} . \quad (2.40)$$

Die Konstante β^* wird in Kap. 2.3.5 definiert.

Die Anwendung der allgemeinen Boussinesq-Approximation für RANS und ihre Auswertung im achsensymmetrischen Fall

Die allgemeine Boussinesq-Approximation wird für RANS-Gleichungen, s. Gleichung 2.14 wie folgt angewendet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle c^k \rangle}{\partial t} + \langle c^j \rangle \langle c^k \rangle_{\parallel j} &= -g^{kj} \frac{\langle p \rangle_{\parallel j}}{\rho} \\ &+ [(\nu + \nu_T) (g^{rj} \langle c^k \rangle_{\parallel r} + g^{qk} \langle c^j \rangle_{\parallel q})]_{\parallel j} - g^{kj} \left(\frac{2}{3} \kappa \right)_{\parallel j} . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Die Boussinesq-Approximation nach Gl. 2.33 ist im achsensymmetrischen Fall für die Gleichungen 2.16 bis 2.18 wie folgt ausgewertet:

$$\begin{aligned} - \left(\left\langle u_r'' \frac{\partial u_r''}{\partial r} \right\rangle + \left\langle u_z'' \frac{\partial u_r''}{\partial z} \right\rangle - \frac{\langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle}{r} \right) &= \\ + \nu_T \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_r \rangle}{\partial z^2} - \frac{\langle u_r \rangle}{r^2} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial r} , \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} - \left(\left\langle u_r'' \frac{\partial u_\varphi''}{\partial r} \right\rangle + \left\langle u_z'' \frac{\partial u_\varphi''}{\partial z} \right\rangle + \frac{\langle u_\varphi'' u_r'' \rangle}{r} \right) &= \\ + \nu_T \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_\varphi \rangle}{\partial z^2} - \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r^2} \right] , \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} - \left(\left\langle u_r'' \frac{\partial u_z''}{\partial r} \right\rangle + \left\langle u_z'' \frac{\partial u_z''}{\partial z} \right\rangle \right) &= \\ + \nu_T \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_z \rangle}{\partial z^2} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial z} . \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.3.2 Definitionen wichtiger achsensymmetrischer Operatoren

In den vorangegangenen Kapiteln 2.1 bis 2.3 wurde gezeigt, dass sich die Gleichungen im achsensymmetrischen Fall aus der allgemein tensoriellen Formulierung herleiten lassen. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, wird für die weiteren Abhandlungen wie folgt verfahren:

- Auf die allgemein tensorielle Formulierung wird so viel wie möglich verzichtet.
- Die Gleichungen werden direkt für den achsensymmetrischen Fall dargestellt.

Die Gleichungen für den achsensymmetrischen Fall können wahlweise auch in Vektordarstellung mit Hilfe der achsensymmetrischen Vektoroperatoren ausgedrückt werden:

- Achsensymmetrischer Gradienten-Operator $\overset{as}{\nabla}$

$$\overset{as}{\nabla} \phi = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right), \quad (2.45)$$

- Achsensymmetrischer Divergenz-Operator $\overset{as}{div}$

$$\overset{as}{div} \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi) + \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (2.46)$$

- Achsensymmetrischer Laplace-Operator $\overset{as}{\Delta}$

$$\overset{as}{\Delta} \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (2.47)$$

2.3.3 k - ε -Modell

Das k - ε -Modell verwendet zwei zusätzliche Differentialgleichungen, eine für die spezifische turbulente kinetische Energie k und eine für die turbulente Dissipationsrate ε . Für den achsensymmetrischen Fall gelten die Gleichungen 2.48 und 2.49 wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (k \langle u_r \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (k \langle u_z \rangle) + \frac{1}{r} k \langle u_r \rangle &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} + P_k - \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon \langle u_r \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon \langle u_z \rangle) + \frac{1}{r} \varepsilon \langle u_r \rangle &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{C_{\varepsilon 1} f_1 P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon}{T_T}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Tabelle 2.1: Konstanten des Standard- k - ε -Modells

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Die Verteilung von ν_T im Strömungsfeld wird dann aus den beiden Lösungen der obigen Gleichungen wie folgt berechnet:

$$\nu_T(\underline{x}, t) = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} . \quad (2.50)$$

Das turbulente Zeitmaß T_T definiert sich nach Gl. 2.37. P_k ist der Produktionsterm von k und lautet im achsensymmetrischen Fall mit Gl. 2.21 und Gl. 2.33:

$$\begin{aligned} P_k &= -g_{jk} \langle c^{''l} c^{''j} \rangle \langle c^k \rangle_{||l} = 2 \nu_T \langle S^{kj} \rangle \langle c^k \rangle_{||j} = \quad (2.51) \\ &= 2 \nu_T \left[\left(\frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} \right) \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} \right] + \\ &2 \nu_T \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial r} - \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r} \right)^2 + \left(\frac{\langle u_r \rangle}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ &2 \nu_T \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} + \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} \right) \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} + \left(\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} \right)^2 \right] . \end{aligned}$$

Die Dämpfungsfunktionen f_μ , f_1 und f_2 sollen garantieren, dass das Low-Reynolds-Number-Turbulenzmodell, das asymptotisch korrekte Wandverhalten wiedergibt. Im Allgemeinen sind die turbulenten Reynoldszahlen Re_T und Re_y wie folgt definiert:

$$Re_T = \frac{k^2}{\varepsilon \nu} , \quad (2.52)$$

$$Re_y = \frac{\sqrt{k} y}{\nu} . \quad (2.53)$$

Außerdem sind sie für jede Modellvariante individuell definiert. f_μ , f_1 , f_2 nehmen weit entfernt von Wänden den Wert Eins an, was der Idee des Standard-High-Reynolds-Number-Modell von LAUNDER UND SPALDING [93] entspricht, nämlich, dass keine Dämpfungsfunktionen verwendet werden, sondern eine Wandfunktion.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Standard- k - ε -Modell von LAUNDER UND SPALDING [93] ausgewählt. Die im Standard- k - ε -Modell enthaltenen Konstanten sind in Tab. 2.1 zusammengefasst.

2.3.4 $\nu \widetilde{Re}_T$ -Modell

Normalerweise basieren die Eingleichungsturbulenzmodelle nur auf der Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k . Sie sind **inkomplett**, da sie die algebraische turbulente Längenskala L in Beziehung zur typischen Abmessung der Strömung setzen. In der Regel ist diese algebraische turbulente Längenskala L eine sehr komplizierte Funktion. Diese Modelle sind unpraktisch und deshalb sind sie selten verwendet. Dagegen liefern die Eingleichungsturbulenzmodelle, die auf Zweigleichungsmodellen basieren, automatisch die algebraische turbulente Längenskala L . Sie sind **komplett**.

BALDWIN UND BARTH [7] bildeten aus der turbulenten kinetischen Energie k und der turbulenten Dissipationsrate ε die nichtlineare Kombination

$$\frac{d(\nu Re_T)}{\nu Re_T} = 2 \frac{dk}{k} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (2.54)$$

um die Feldgleichung für die turbulente Reynoldszahl Re_T zu bilden.

Um die Anwendbarkeit des Modells in der Wandnähe zu ermöglichen, wird die turbulente Reynoldszahl Re_T in zwei Faktoren aufgeteilt

$$Re_T = \widetilde{Re}_T \cdot f_3(\widetilde{Re}_T), \quad (2.55)$$

wobei f_3 eine Dämpfungsfunktion ist, die $Re_T = \widetilde{Re}_T$ bei großer Re_T garantiert.

Zusammenfassend ergibt sich für den achsensymmetrischen Fall folgendes **$\nu \widetilde{Re}_T$ -Eingleichungsturbulenzmodell** nach BALDWIN UND BARTH [7], das im Folgenden als das Baldwin-Barth-Eingleichungsturbulenzmodell bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nu \widetilde{Re}_T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}((\nu \widetilde{Re}_T) \langle u_r \rangle) + \frac{\partial}{\partial z}((\nu \widetilde{Re}_T) \langle u_z \rangle) + \frac{1}{r}(\nu \widetilde{Re}_T) \langle u_r \rangle = & \quad (2.56) \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial(\nu \widetilde{Re}_T)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial(\nu \widetilde{Re}_T)}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial(\nu \widetilde{Re}_T)}{\partial r} \\ (C_{\varepsilon 2} f_2 - C_{\varepsilon 1}) \sqrt{(\nu \widetilde{Re}_T) \cdot P_k} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial \nu_T}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \widetilde{Re}_T) + \frac{\partial \nu_T}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\nu \widetilde{Re}_T) \right), \end{aligned}$$

In der Gleichung 2.56 werden die Funktionen wie folgt definiert:

$$\frac{1}{\sigma_\varepsilon} = (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) \frac{\sqrt{C_\mu}}{\kappa^2}, \quad (2.57)$$

$$\nu_T = C_\mu (\nu \widetilde{Re}_T) f_\mu f_3, \quad \mu_T = \rho \nu_T, \quad (2.58)$$

$$f_\mu f_3 = D_1 D_2, \quad (2.59)$$

$$D_1 = 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{A^+}\right), \quad D_2 = 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{A_2^+}\right), \quad (2.60)$$

$$f_2(y^+) = \frac{C_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 2}} + \left(1 - \frac{C_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 2}}\right) \left(\frac{1}{\kappa y^+} + D_1 D_2\right) \cdot \quad (2.61)$$

$$\left[\sqrt{D_1 D_2} + \frac{y^+}{\sqrt{D_1 D_2}} \left(\frac{1}{A^+} \exp\left(\frac{-y^+}{A^+}\right) D_2 + \frac{1}{A_2^+} \exp\left(\frac{-y^+}{A_2^+}\right) D_1\right) \right].$$

Die Konstanten sind in Tab. 2.2 zusammengefasst.

Tabelle 2.2: Konstanten des Baldwin-Barth-Eingleichungsturbulenzmodells

κ	C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	A^+	A_2^+
0.41	0.09	1.2	2.0	26	10

2.3.5 k - ω -Modell

Das Standard- k - ω -Modell beinhaltet zwei Transportgleichungen für die spezifische turbulente kinetische Energie k und die spezifische Dissipationsrate ω ⁷. Für den achsensymmetrischen Fall gelten die Gleichungen 2.62 und 2.63 wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (k \langle u_r \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (k \langle u_z \rangle) + \frac{1}{r} k \langle u_r \rangle &= \frac{\partial}{\partial r} \left((\nu + \sigma_k^* \nu_T) \frac{\partial k}{\partial r} \right) \quad (2.62) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left((\nu + \sigma_k^* \nu_T) \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} (\nu + \sigma_k^* \nu_T) \frac{\partial k}{\partial r} + P_k - \beta^* k \omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\omega \langle u_r \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (\omega \langle u_z \rangle) + \frac{1}{r} \omega \langle u_r \rangle &= \frac{\partial}{\partial r} \left((\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \quad (2.63) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left((\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} (\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\alpha \frac{P_k}{k} - \beta \omega}{C_\mu T_T}. \end{aligned}$$

Aus den Lösungen für k und ω wird die Verteilung der turbulenten Viskosität ν_T im Strömungsfeld durch folgende Gleichung berechnet:

$$\nu_T(\underline{x}, t) = \frac{k}{\omega} = C_\mu k T_T. \quad (2.64)$$

Das turbulente Zeitmaß T_T ist als $T_T = 1/(\beta^* \omega)$ definiert, wobei $\beta^* = C_\mu$ gilt. Der Produktionsterm P_k wird nach Gl. 2.51 berechnet. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Standard- k - ω -Modell von WILCOX [202] ausgewählt. Die Modellkonstanten sind in Tab. 2.3 zusammengefasst.

⁷Der Ausdruck „spezifische Dissipationsrate“ bezeichnet die Dissipationsrate pro turbulenter kinetischer Energie.

Tabelle 2.3: Konstanten des Standard- k - ω -Modells

α	β^*	β	σ_k^*	σ_ω
$\frac{5}{9}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2.3.6 Wandbehandlung

Für ausgebildete, statistisch stationäre und drallfreie Strömungen vereinfachen sich die RANS-Gleichungen. In der Hauptströmungsrichtung vereinfacht sich zusätzlich die Gleichung für die ausgebildete Rohrströmung wie folgt:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \langle u_z'' u_r'' \rangle \right) + \nu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \langle u_z \rangle}{dr} \right) = 0. \quad (2.65)$$

Nach der Integration der Gleichung 2.65 in r-Richtung mit dem folgenden Ergebnis

$$-\frac{r^2}{2\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} + r \left(-\langle u_z'' u_r'' \rangle + \nu \frac{d \langle u_z \rangle}{dr} \right) + C_1 = 0. \quad (2.66)$$

und Berücksichtigung der folgenden Randbedingungen

$$\langle u_z'' u_r'' \rangle \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{d \langle u_z \rangle}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad \langle u_z'' u_r'' \rangle \Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{d \langle u_z \rangle}{dr} \Big|_{r=R} = -u_\tau^2 \quad (2.67)$$

kommt die Beziehung für das Schubspannungsprofil wie folgt zum Ausdruck:

$$\nu \frac{d \langle u_z \rangle}{dr} - \langle u_z'' u_r'' \rangle = -\frac{r}{R} u_\tau^2. \quad (2.68)$$

In den Gleichungen 2.67 und 2.68 bezeichnet R den Radius des Rohres.

Die Relation der Newtonschen und der Reynoldsschen Schubspannung in der Gleichung 2.68 können aus Messungen, z.B. von LAUFER [88], entnommen werden. Dies führt direkt zu einem 3-Schichten-Konzept, das die vollentwickelte, turbulente Grenzschicht in drei Bereiche unterteilt, wobei der dimensionslose Wandabstand normal zur Wand y^+ später in Gleichung 2.71 definiert wird:

1. In der wandnahen Zone überwiegen die Zähigkeitseffekte bzw. Newtonsche Schubspannung. \Rightarrow Viskose Unterschicht; $0 \leq y^+ \leq 5$.
2. Außerhalb der wandnahen Zone dominieren die turbulenten Transportvorgänge bzw. Reynoldssche Schubspannung. \Rightarrow Die äußere Schicht (logarithmischer Bereich; $30 < y^+ \leq 500$ und turbulente Kernströmung; $y^+ > 500$).
3. Es gibt eine Zwischenzone, in der Zähigkeitseffekte und turbulente Transportvorgänge in der gleichen Größenordnung liegen. \Rightarrow Übergangsschicht (buffer layer); $5 < y^+ \leq 30$.

Bei ROTTA [136] wird statt $y^+ = 30$ bei dem Übergang von „buffer layer“ zum logarithmischen Bereich $y^+ = 60$ angegeben.

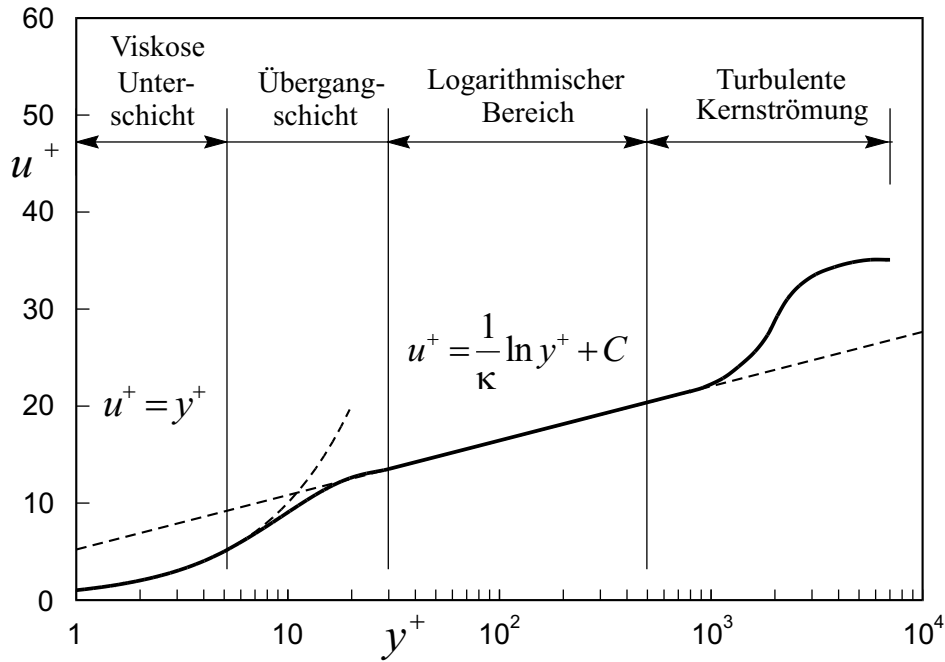


Bild 2.1: Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Grenzschicht

k - ε -Modelle, die bis in die viskose Wandschicht integriert werden, müssen um geeignete Dämpfungsfunktionen erweitert werden, um das asymptotische Verhalten zumindest annähernd korrekt wiederzugeben. k - ω -basierte Modelle bedürfen eines solchen Eingriffs nicht, jedoch ist die ausreichende Auflösung der wandnahen Zellen unbedingt erforderlich. Bei allen Modellen, die bis in die viskose Wandschicht integriert werden, ist für die wandnächste Zelle ein dimensionsloser Wandabstand von $y^+ = \mathcal{O}(1)$, s. Gl. 2.71, einzuhalten.

Bei der Verwendung einer Wandfunktion wird davon ausgegangen, dass das Rechengebiet erst in dem logarithmischen Bereich beginnt. Während das dimensionslose Geschwindigkeitsprofil u^+ in der viskosen Unterschicht einen linearen Verlauf $u^+ = y^+$ hat, gehorcht es im logarithmischen Bereich dem universellen logarithmischen Wandgesetz, das in Bild 2.1 dargestellt ist:

$$u_t^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad \text{bzw.} \quad u_t^+ = \frac{1}{\kappa} \ln (y^+ E) . \quad (2.69)$$

κ in Gl. 2.69 ist die v.Karman-Konstante ($\kappa = 0.41$). Die v.Karman-Konstante und die empirische Konstante $C = 5.2$ wurden durch Experimente bestimmt. Sie werden üblicherweise als eine Kombination gesehen, da man erkennen kann, dass sich κ und C gegenseitig bedingen, s. FRIEDRICH [56]. Ausserdem werden in der Literatur verschiedene Kombinationen für $0.40 \leq \kappa \leq 0.41$ und für $5.0 \leq C \leq 5.2$ angegeben, s. FERNHOLZ [52]. Die mögliche Abhängigkeit der v.Karman-Konstante von der Volumenviskosität findet Diskussion z.B. bei TENNEKES UND LUMLEY [182].

E ist per Definition $e^{(\kappa C)}$. Die verwendeten dimensionslosen Größen sind wie folgt definiert:

$$u_t^+ = \frac{\underline{u}_t}{u_\tau}, \quad (2.70)$$

$$y^+ = \frac{y_P u_\tau}{\nu}. \quad (2.71)$$

Darin ist \underline{u}_t die wandtangente Geschwindigkeitskomponente und y^+ der dimensionslose Wandabstand. Die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ ist wie folgt definiert:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (2.72)$$

Die Strömung der logarithmischen Schicht zeichnet sich dadurch aus, dass sich Produktion P_k und Dissipation ε der Turbulenz lokal nahezu im Gleichgewicht befinden. DURBIN UND PETTERSSON REIF [45] schlägt aufgrund dessen folgendes vor:

$$u_\tau = C_\mu^{1/4} \sqrt{k}. \quad (2.73)$$

Nach DURBIN UND PETTERSSON REIF [45] kann das Längenmaß L_T wie folgt approximiert werden:

$$L_T \approx \frac{\kappa y_P}{C_\mu^{3/4}}. \quad (2.74)$$

Somit ergibt sich mit der obigen Approximation aus Gl. 2.38:

$$\varepsilon \approx \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y_P}. \quad (2.75)$$

Ein dimensionsloser Wandabstand von $y^+ \approx 30$ für die wandnächste Zelle ist bei Verwendung der Wandfunktion einzustellen. Die Implementierung der Wandfunktion wird in Kap. 3.6.3 erläutert.

2.3.7 Realisierbarkeitsbedingung

In Staupunktströmungen wird ein bedeutender Nachteil der Wirbelviskositätsannahme 2.33 offensichtlich, dass eine unphysikalisch hohe Produktion von turbulenter kinetischer Energie P_k berechnet wird. Diese Überproduktion hat eine massive Auswirkung auf den Zustand der weiter stromab liegenden Grenzschicht. Durch die Einbringung von turbulenter kinetischer Energie in die turbulente Grenzschicht wird diese stabilisiert, so dass eine eventuelle Ablösung gar nicht oder weiter stromab erscheint.

DURBIN [43] führen diesen Umstand auf die quadratische Abhängigkeit von P_k vom Deformationstensor S^{kj} zurück, vgl. Gl. 2.51. DURBIN [44] argumentiert, dass die

Turbulenzintensität in Staupunktnähe abnehmen muss, wohingegen eine Erhöhung aufgrund der Wirbelviskositätsannahme vorhergesagt wird.

Dementsprechend wird eine Vielzahl von Korrekturen vorgeschlagen. TURNER UND JENNIONS [190] erhöhten im Wesentlichen die Dissipation am Eintritt in das Strömungsgebiet. Dieses Vorgehen ist in keinster Weise allgemeingültig und wird hier nicht weiter verfolgt.

KATO UND LAUNDER [79] führten ebenfalls eine pragmatische Korrektur ein, indem sie den Umstand ausnutzten, dass der Rotationstensor in Staupunktnähe annähernd verschwindet. In der kontravarianten Darstellung sieht der Rotationstensor unter Berücksichtigung der kovarianten Ableitung wie folgt aus:

$$\langle \Omega^{kj} \rangle = \frac{1}{2} \left(g^{rj} \langle c^k \rangle_{\parallel r} - g^{qk} \langle c^j \rangle_{\parallel q} \right), \quad (2.76)$$

Im Rahmen dieser Arbeit ergibt sich für den achsensymmetrischen Fall folgenden Rotationstensor:

$$\begin{aligned} \langle \Omega^{kj} \rangle &= \begin{pmatrix} \langle \Omega_{rr} \rangle & \langle \Omega_{r\varphi} \rangle & \langle \Omega_{rz} \rangle \\ \langle \Omega_{\varphi r} \rangle & \langle \Omega_{\varphi\varphi} \rangle & \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \\ \langle \Omega_{zr} \rangle & \langle \Omega_{z\varphi} \rangle & \langle \Omega_{zz} \rangle \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial r} + \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r} & \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} - \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} \\ \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial r} - \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r} & 0 & \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial z} \\ \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} - \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} & -\frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Nach KATO UND LAUNDER [79] wird der Produktionsterm also wie folgt definiert:

$$P_{k,KL} = 2 \nu_T \sqrt{\langle S^{kj} \rangle \langle S^{kj} \rangle} \sqrt{\langle \Omega^{kj} \rangle \langle \Omega^{kj} \rangle}. \quad (2.78)$$

Diese ad hoc-Korrektur wird von vielen Autoren als wirksame Methode zur Unterdrückung der Staupunktanomalie in Turbomaschinen verwendet. Allerdings ist zu beachten, dass die Wirkung der Kato-Lauder-Modifikation nicht auf die gewünschte Umgebung des Staupunktes beschränkt bleibt.

DURBIN [43] führt die Staupunktanomalie auf die Verletzung der Realizability-Bedingung zurück. Die Realizability-Bedingung besteht aus mathematischer Sicht aus einer Beschränkung der Normalspannungen:

$$2k \geq \langle u''_\alpha u''_\alpha \rangle \geq 0. \quad (2.79)$$

Nach SHIH ET AL. [163] hängt die Konstante C_μ von Invarianten der Scherrate $\langle S^{kj} \rangle$ und der Rotation $\langle \Omega^{kj} \rangle$ ab. MOORE UND MOORE [111] griffen diese Methode auf und formulierten sie so, dass sie sowohl mit Wandfunktion als auch mit einer Low-Reynolds-Formulierung im Zusammenhang mit dem linearen k - ε -Modellen verwendbar ist. Zunächst wird ein Koeffizient $C_{\mu,r}$ folgendermaßen formuliert:

$$C_{\mu,r} = \frac{1}{2.74 + 1.9 \left(\langle \tilde{S} \rangle^{2.4} + \langle \tilde{\Omega} \rangle^{2.4} \right)^{\frac{1}{2.4}}} . \quad (2.80)$$

Die Invarianten $\langle \tilde{S} \rangle$ und $\langle \tilde{\Omega} \rangle$ sind wie folgt definiert:

$$\langle \tilde{S} \rangle = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2 \langle S^{kj} \rangle \langle S^{kj} \rangle} , \quad (2.81)$$

$$\langle \tilde{\Omega} \rangle = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2 \langle \Omega^{kj} \rangle \langle \Omega^{kj} \rangle} . \quad (2.82)$$

Ohne eine Veränderung der Dämpfungsfunktion f_μ , die für einen konstanten Wert von C_μ kalibriert wurde, wird die Realizability-Bedingung in Gl. 2.50 mittels eines Faktors f_n implementiert:

$$\nu_T = C_\mu f_\mu f_n \frac{k^2}{\varepsilon} , \quad f_n = \min \left(1 ; \frac{C_{\mu,r}}{C_\mu f_\mu} \right) . \quad (2.83)$$

Die Realizability-Erweiterung nach MOORE UND MOORE [111] wird als Standard-Methode in den linearen k - ε -Modellen verwendet.

Nichtlineare Wirbelviskositätsansätze, wie sie am Beispiel von LCL-Modell in Kap. 2.4.1 vorgestellt wird, berücksichtigen die Realizability-Bedingung bereits. Somit ist die durch Gl. 2.83 eingeführte Korrektur dort nicht notwendig.

2.4 Nichtlineare Turbulenzmodellierung

Die Boussinesq-Approximation der Wirbelviskosität macht die Annahme, dass der Reynolds-Spannungstensor $\langle c''^k c''^j \rangle$ im gesamten turbulenten Strömungsfeld proportional zu dem mittleren Deformationsgeschwindigkeitstensor $\langle S^{kj} \rangle$ ist, siehe Kap. 2.3.1. Die Proportionalitätskonstante zwischen $\langle c''^k c''^j \rangle$ und $\langle S^{kj} \rangle$ ist die turbulente Viskosität ν_T .

Anders als die molekulare Viskosität, die eine Fluideigenschaft ist, hängt die Wirbelviskosität von vielen Details der Strömung ab. Sie ist von der Geometrie und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers, von der Intensität der Freistrom-Turbulenz und sogar am meisten von der Vorgeschichte der Turbulenz abhängig.

Allgemein gesagt sind lineare Wirbelviskositätsmodelle zur Beschreibung der Strömung mit plötzlicher Änderung bzw. mit Zusatz der mittleren Deformationsgeschwindigkeit mangelhaft, siehe BRADSHAW [15, 16]. Die Reynoldsspannungen regeln sich bei dieser Strömungssituation mit einer Rate aus, die von der mittleren Strömung verschieden sind, so dass die Boussinesq-Approximation versagen muss. Strömungen mit starker Stromlinienkrümmung und drallbehaftete Strömungen verursachen unsymmetrische Reynoldsspannungen. Ein paar Beispiele, für die Boussinesq-Approximation im Allgemeinen versagen, sind:

- Strömungen mit plötzlicher Erweiterung,
- Strömungen über gekrümmte Oberfläche,
- Strömungen im Kanal mit Sekundärbewegungen,
- Strömungen rotierender Fluide,
- Dreidimensionale Strömungen,
- Strömungen mit Grenzschichtablösung.

Nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle kombinieren die Einfachheit und Robustheit der Wirbelviskositätsannahme mit der Überlegenheit von Reynolds-Spannungsmodellen. Dabei wird eine Anisotropie der Turbulenz über eine explizite Abhängigkeit des Reynolds-Spannungstensors von lokalen Strömungsgrößen eingeführt.

2.4.1 Nichtlineares k - ε -Modell

Die Grundlage nichtlinearer Wirbelviskositätsmodelle bildet eine konstitutive Gleichung, die aus einer Reihenentwicklung des Spannungstensors nach dem Scher- und Rotationstensor, Gln. 2.34 und 2.76, hervorgeht. Konstitutive Beziehung für den Reynolds-Spannungstensor wurden von einigen Forschern hergeleitet, siehe POPE [125], YOSHIKAWA [204] und RUBINSTEIN UND BARTON [137]. SHIH UND LUMLEY [160] nutzt die Invariantentheorie in der Kontinuumsmechanik und die generalisierte Cayley-Hamilton Formulierung, s. RIVLIN [134], um allgemeine konstitutive Beziehung für die Reynoldsspannungen herzuleiten. Dabei wurde folgendes angenommen:

- Die Reynoldsspannungen sind nur von den mittleren Geschwindigkeitsgradienten abhängig.
- Die charakteristischen Skalen der Turbulenz sind die turbulente kinetische Energie k und die Dissipationsrate ε .

Die oben genannte Beziehung, die im Rahmen dieser Arbeit bis zum kubischen Anteil abgebrochen wird und im Zylinderkoordinatensystem geschrieben wird, ist im Anhang A zu finden.

Der allgemein gültige, für alle Strömungsarten funktionierende Satz der Modellkonstanten in den Gleichungen A.1 bis A.6 gibt es nicht bzw. solche Koeffizienten sind noch nicht gefunden oder publiziert worden. Deswegen sind die Koeffizienten C_1 bis C_6 entsprechend der Anforderungen an das Modell zu kalibrieren. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Low-Reynolds-Variante nach LIEN ET AL. [98] (LCL) betrachtet. Die Variante berücksichtigt die Stromlinienkrümmung bei der Kalibrierung der Koeffizienten.

Aufgrund der großen Anzahl von Forschern, aus deren Arbeiten die Formulierung und Anwendung des oben beschriebenen Turbulenzmodells in dieser vorliegenden Arbeit erst möglich wird, fühle ich mich verpflichtet, das achsensymmetrische, kubische, im Rahmen dieser Arbeit entwickelte k - ε -Modell in LCL-SZL-MMU-Modell zu taufen. LCL steht für Lien, Chien und Leschziner, SZL steht für Shih, Zhu und Lumley und MMU steht für Moser, Moin und Unger.

Das LCL-SZL-MMU-Modell basiert auf dem quadratischen Modell von SHIH ET AL. [163], das für Strömungen mit hoher Reynolds-Zahl entwickelt wurde und eine Realizability-Bedingung beinhaltet. LAUNDER [89] hat aufgezeigt, dass die Schwäche des linearen Wirbelviskositätsmodells nicht dadurch berichtigt werden kann, dass nur bis zu den quadratischen Terme berücksichtigt werden. Die Terme höherer Ordnung finden sich in SUGA [181], SHIH ET AL. [165, 164, 162] und LESCHZINER [97]. Die Low-Reynolds-Erweiterungen basieren auf dem linearen Modell von LIEN UND LESCHZINER [99].

Nichtlineare Modelle verwenden im Gegensatz zu linearen Modellen nicht die Gl. 2.51, sondern die Spur des Produktionstensors aus der exakten Beziehung 2.21 zur Bestimmung von P_k , der Produktion von k . Um die Realizability-Bedingung zu erfüllen, s. Kap. 2.3.7, sind die Koeffizienten beider Modelle eine Funktion der Invarianten des Deformations- und Rotationstensors, $\langle \tilde{S} \rangle$ und $\langle \tilde{\Omega} \rangle$, deren Definition den Gleichungen 2.81 und 2.82 zu entnehmen sind.

In den Tabellen 2.4, 2.5 und 2.6 sind die Koeffizienten und Dämpfungsfunktionen des LCL-SZL-MMU-Modells zusammengefaßt.

Tabelle 2.4: Modellkonstanten des nichtlinearen k - ε -LCL-SZL-MMU-Modells

Modell	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε	C_μ
LCL-SZL-MMU	$1.44 (1 + P'_k/P_k)$	1.92	1.0	1.3	$\frac{2}{3} (4 + \langle \tilde{S} \rangle + 0.9 \langle \tilde{\Omega} \rangle)^{-1}$
	$P'_k = 1.33 [1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)] (P_k + 2\nu \frac{k}{y^2}) \exp(-0.00375 Re_y^2)$				

Tabelle 2.5: Modellkonstanten des nichtlinearen k - ε -LCL-SZL-MMU-Modells

Modell	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
LCL-SZL-MMU	$\frac{3/4}{C_\mu (1000 + \langle \tilde{S} \rangle^3)}$	$\frac{15/4}{C_\mu (1000 + \langle \tilde{S} \rangle^3)}$	$\frac{19/4}{C_\mu (1000 + \langle \tilde{S} \rangle^3)}$	$-10 C_\mu^2$	$2 C_\mu^2$	$-2 C_\mu^2$

Tabelle 2.6: Dämpfungsfunktionen des nichtlinearen k - ε -LCL-SZL-MMU-Modells

Modell	f_μ	f_1	f_2
LCL-SZL-MMU	$[1 - \exp(-0.0198 Re_y)] (1 + \frac{5.29}{Re_y})$	1.0	$1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)$

2.5 Dimensionslose Form der RANS-Gleichungen

Es ist allgemein von Vorteil, beim Lösen technischer Probleme die Gleichungen dimensionslos zu machen. Die drei Vorteile sind:

- mit reinen Zahlen rechnen, was den Organisationsaufwand verringert und insbesondere Programme für Rechenautomaten vereinfacht,
- man kann die Bezugsgrößen so wählen, dass sich für die Rechnung Zahlen einer bequemen Größenordnung ergeben,
- die Anzahl der Systemparameter lässt sich häufig verringern, was einerseits die Rechnung übersichtlicher macht und andererseits „natürliche“, d.h. systemimmanente Bezugsgrößen liefert.

Wir wollen die RANS-Gleichungen 2.15 bis 2.18 dimensionslos machen. Dabei verwenden wir am Beispiel von linearen Wirbelviskositätsmodellen die in den Gleichungen 2.42 bis 2.44 durchgeführten Auswertungen.

Als Referenzwerte dienen eine Referenzlänge x_{ref} und eine Referenzgeschwindigkeit u_{ref} . Alle weiteren Referenzwerte lassen sich als Kombination der obigen Werte darstellen.

In der praktischen Anwendung dient der maximale Radius des Laufrads als Referenzlänge x_{ref} und die maximale Umfangsgeschwindigkeit des Laufrads als Referenzgeschwindigkeit u_{ref} .

Nach ein paar algebraischen Umformungen ergeben sich die dimensionslosen RANS-Gleichungen im achsensymmetrischen Fall wie folgt:

$$\frac{\partial \langle u_r^* \rangle}{\partial r^*} + \frac{\langle u_r^* \rangle}{r^*} + \frac{\partial \langle u_z^* \rangle}{\partial z^*} = 0, \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} Sr \frac{\partial \langle u_r^* \rangle}{\partial t^*} + \langle u_r^* \rangle \frac{\partial \langle u_r^* \rangle}{\partial r^*} + \langle u_z^* \rangle \frac{\partial \langle u_r^* \rangle}{\partial z^*} - \frac{\langle u_\varphi^* \rangle^2}{r^*} = -Eu \frac{\partial \langle p^* \rangle}{\partial r^*} \\ + \nu_{eff}^* \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \langle u_r^* \rangle}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_r^* \rangle}{\partial z^{*2}} - \frac{\langle u_r^* \rangle}{r^{*2}} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial k^*}{\partial r^*}, \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} Sr \frac{\partial \langle u_\varphi^* \rangle}{\partial t^*} + \langle u_r^* \rangle \frac{\partial \langle u_\varphi^* \rangle}{\partial r^*} + \langle u_z^* \rangle \frac{\partial \langle u_\varphi^* \rangle}{\partial z^*} + \frac{\langle u_\varphi^* \rangle \langle u_r^* \rangle}{r^*} = \\ + \nu_{eff}^* \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \langle u_\varphi^* \rangle}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_\varphi^* \rangle}{\partial z^{*2}} - \frac{\langle u_\varphi^* \rangle}{r^{*2}} \right], \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} Sr \frac{\partial \langle u_z^* \rangle}{\partial t^*} + \langle u_r^* \rangle \frac{\partial \langle u_z^* \rangle}{\partial r^*} + \langle u_z^* \rangle \frac{\partial \langle u_z^* \rangle}{\partial z^*} = -Eu \frac{\partial \langle p^* \rangle}{\partial z^*} \\ + \nu_{eff}^* \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \langle u_z^* \rangle}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_z^* \rangle}{\partial z^{*2}} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial k^*}{\partial z^*}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Kapitel 3

Numerisches Verfahren

In diesem Kapitel werden die verwendeten numerischen Verfahren beschrieben, die notwendig sind, um die in differentieller Form gegebenen Transportgleichungen einer numerischen Berechnung zugänglich zu machen. Das Verfahren wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit unter Berücksichtigung spezifischer Ansprüche, insbesondere der verwendeten Turbulenzmodelle, entwickelt.

Das entwickelte Verfahren basiert auf einer Finite-Volumen Diskretisierung. Hierbei wird das zu analysierende Strömungsfeld durch ein geeignetes Rechnernetz in N kleine Teilvolumina aufgeteilt. Auf jedes dieser Volumen werden die Transportgleichungen in integraler Form angewendet, wodurch eine für die Zelle gültige Bilanzgleichung entsteht. Diese setzt die lokale Änderung einer Erhaltungsgröße in Beziehung zu den über die Berandungsflächen ein- und austretenden Flüssen und den im Volumen wirkenden Quellen und Senken. Sowohl die Oberflächen- als auch die Volumenterme werden dabei durch geeignete Funktionen approximiert.

Als Ergebnis dieser Umformung erhält man für jedes betrachtete Kontrollvolumen eine linearisierte algebraische Beziehung, die die Erhaltungsgröße am betrachteten Punkt P mit den Nachbarwerten und sonstigen Einflüssen korreliert. Die Lösung des Gleichungssystems mit N Unbekannten wird daraufhin durch ein geeignetes Lösungsverfahren bestimmt.

Im Zusammenhang mit einer Blockstrukturierung wurde das Verfahren mit Hilfe von MPI-Bibliotheken parallelisiert. Besonders hervorzuhebende Eigenschaften des Verfahrens sind die genaue Approximation der konvektiven Terme und die flexible Blockstruktur.

3.1 Finite-Volumen Verfahren

Das entwickelte Verfahren ist ein Multiblock-Finite-Volumen-Navier-Stokes-Verfahren, das auf nichtversetzten, nichtüberlappenden strukturierten Gittern arbeitet. Hierbei wird das Rechengebiet zunächst in Teilblöcke aufgeteilt. Diese Blöcke werden durch ein geeignetes Rechnernetz in beliebig viele Teil- bzw. Kontrollvolumina zerlegt.

3.1.1 Definition des Kontrollvolumens

Die Eckpunkte eines Kontrollvolumens werden durch Geraden verbunden und in dem Mittelpunkt eines Kontrollvolumens werden die Lösungsvariablen definiert. Ein Kontrollvolumen entsteht im achsensymmetrischen Fall durch Rotieren des in Bild 3.1 dargestellten Vierecks um einen finiten Winkel $\Delta\varphi$ um eine horizontale Achse z , die das Viereck nicht schneidet.

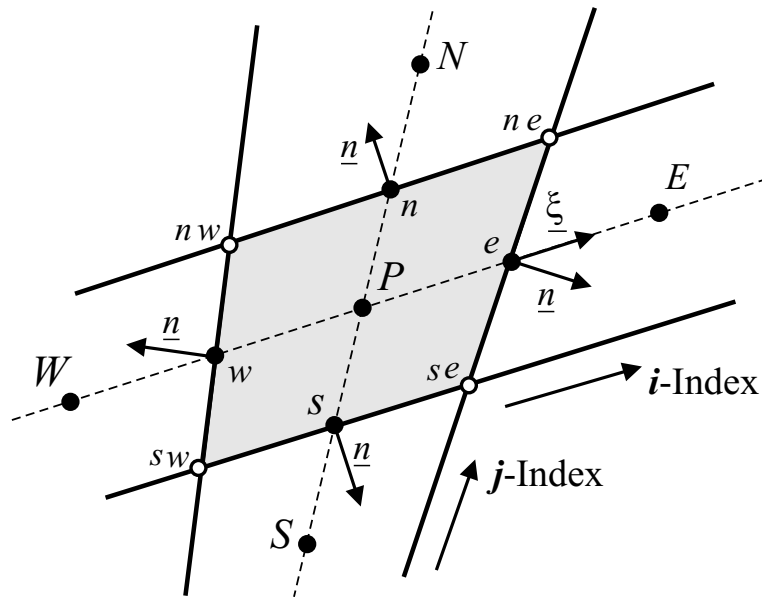


Bild 3.1: Die erzeugende Fläche für das achsensymmetrische Kontrollvolumen

Der Zellmittelpunkt wird mit P bezeichnet. Er wird als arithmetisches Mittel der Koordinaten der Eckpunkte ermittelt. Die Nachbarschaftsverhältnisse dieser zellzentrierten Anordnung werden mit der sogenannten Kompaßnotation bezeichnet, d. h. die Nachbarzellen sind in i -Indexrichtung mit *West*, *East*, und in j -Indexrichtung mit *South*, *North* betitelt. Die den zwei benachbarten Zellen gemeinsamen Zellflächenmittelpunkte werden entsprechend mit Kleinbuchstaben w , e , s oder n bezeichnet. Die den zwei benachbarten Zellen gemeinsame Zellfläche hat den Flächeninhalt S . Jede Zellfläche ist charakterisiert durch den Einheits-Normalenvektor \underline{n} und einen Einheitsrichtungsvektor $\underline{\xi}$ entlang der Verbindungslinie zweier Zellmittelpunkte. Im achsensymmetrischen Fall wird das Zellvolumen ΔV mittels folgender Formel berechnet:

$$\Delta V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_v} (z_{i-1} - z_i) (r_{i-1}^2 + r_i^2 + r_i r_{i-1}) . \quad (3.1)$$

In der Gleichung 3.1 bezeichnet N_v die Anzahl der Kanten, gezählt im Gegenuhreigersinn. Dabei entspricht $i = N_v$ dem $i = 0$.

Um eine konsistente und konservative Formulierung der zu lösenden Gleichungen zu gewährleisten, müssen die Teilvolumina das gesamte Rechengebiet einnehmen,

so daß die Summe der Teilvolumina das Gesamtvolumen ergibt. Weiterhin muß die Fläche zwischen zwei Teilvolumina für beide benachbarten Zellen identisch sein.

3.1.2 Anwendung des Integralsatzes von Gauß auf achsensymmetrische Operatoren

In dem Finiten-Volumen-Verfahren spielt der Integralsatz von Gauß eine tragende Rolle. Angewandt auf die achsensymmetrischen Vektoroperatoren, die im Kapitel 2.3.2 erwähnt wurden, ergeben sich in Anlehnung an NETZ [117] folgende Gleichungen:

$$\iiint_{\Delta V} \overset{as}{\nabla} \underline{u} dV = \iint_{\partial(\Delta V)=\Delta S} \underline{u} d\underline{S} = \iint_{\Delta S} \underline{u} \cdot \underline{n} dS, \quad (3.2)$$

$$\iiint_{\Delta V} \overset{as}{div} \underline{u} dV = \iint_{\Delta S} \underline{u} d\underline{S} = \iint_{\Delta S} \underline{u} \cdot \underline{n} dS, \quad (3.3)$$

$$\iiint_{\Delta V} \overset{as}{\Delta} \underline{u} dV = \iint_{\Delta S} \overset{as}{grad} \underline{u} \cdot d\underline{S} = \iint_{\Delta S} \overset{as}{grad} \underline{u} \cdot \underline{n} dS, \quad (3.4)$$

In den Gleichungen 3.2 bis 3.4 sind der Geschwindigkeitsvektor und der Normalenvektor im achsensymmetrischen Sinn wie folgt zu verstehen:

$$\underline{u} = \underline{\underline{u}} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_z \end{pmatrix}, \quad \underline{n} = \underline{\underline{n}} = \begin{pmatrix} n_r \\ n_z \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

3.1.3 Integralform der Erhaltungsgleichungen

Die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen sowie die Transportgleichungen der turbulenten Größen bestehen aus einem zeitabhängigen Term, einem konvektiven und diffusiven Transportterm sowie aus dem Quellterm. Aufgrund ihrer ähnlichen Struktur wird im folgenden der Transport einer allgemeinen Größe ϕ beschrieben. Die achsensymmetrische Transportgleichung für ein dichtebeständiges Fluid in differentieller Form lautet mit einem allgemeinen, dichtebezogenen Diffusionskoeffizienten Γ_ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \underline{\underline{u}} \cdot \overset{as}{\nabla} \phi = \overset{as}{\Delta} (\Gamma_\phi \phi) + q_\phi. \quad (3.6)$$

Bei der Finite-Volumen Diskretisierung wird das zu betrachtende Strömungsgebiet in eine Vielzahl kleiner Zellen endlicher Erstreckung unterteilt, die in ihrer Gesamtheit

das Rechnetz bilden. Über jede dieser Zellen wird die Erhaltungsgleichung 3.6 integriert. Für jedes betrachtete Kontrollvolumen folgt daraus zunächst

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta V} \phi dV + \iiint_{\Delta V} \underline{u}^{as} \cdot \nabla \phi dV = \iiint_{\Delta V} \Delta^{as} (\Gamma_\phi \phi) dV + \iiint_{\Delta V} q_\phi dV . \quad (3.7)$$

Unter Verwendung des achsensymmetrischen Gaußschen Integralsatzes, siehe Kap. 3.1.2, werden alle Volumenintegrale, die im Integrand räumliche Ableitungen enthalten, in Oberflächenintegrale umgewandelt.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta V} \phi dV + \iint_{\Delta S} \phi \underline{u}^{as} \cdot \underline{n}^{as} dS = \iint_{\Delta S} \Gamma_\phi \overset{as}{grad}(\phi) \cdot \underline{n}^{as} dS + \iiint_{\Delta V} q_\phi dV . \quad (3.8)$$

Gleichung 3.8 gilt zunächst für beliebige geschlossene Kontrollvolumina dV . Mit der Annahme, dass die Oberfläche des Bilanzvolumens aus einer endlichen Anzahl von Teilflächen l gebildet wird, läßt sich das allgemeine Oberflächenintegral als eine Summe von Oberflächenintegralen über diese Teilflächen wie folgt darstellen:

$$\iint_{\Delta S} f dS = \sum_l \iint_{\Delta S_l} f dS . \quad (3.9)$$

In der obigen Gleichung 3.9 steht der Integrand f für den konvektiven und diffusiven Fluß f^c bzw. f^d wie folgt:

$$f^c = \phi \underline{u}^{as} \cdot \underline{n}^{as} , \quad f^d = \Gamma_\phi \overset{as}{grad}(\phi) \cdot \underline{n}^{as} . \quad (3.10)$$

Bis zu diesem Schritt wurden keine approximativen Modellierungen verwendet. Die allgemeine Ausgangsgleichung wurde durch mathematische Operationen in eine für die weitere Herleitung günstigere Form gebracht, ist aber nach wie vor exakt erfüllt im Sinne der Gl. 3.6.

3.1.4 Berechnung der Oberflächen- und Volumenintegrale

Für eine konsistente Berechnung der integralen Terme muss das verwendete Rechnetz die Bedingungen erfüllen, dass die Teilvolumina das gesamte betrachtete Gebiet vollständig ausfüllen und sich dabei nicht überlappen. Die Zellflächen zweier benachbarter Elemente müssen eindeutig definiert sein. Ist darüber hinaus sichergestellt, dass der Fluss, der aus einer Fläche austritt, genau so in das benachbarte Element eintritt, wird das Verfahren als konservativ bezeichnet.

Im folgenden wird stellvertretend für alle Teilflächen eines Kontrollvolumens nur die repräsentative Zellfläche e betrachtet. Die Informationen an den anderen Seiten des Bilanzelements ergeben sich durch Vertauschung der Indizes.

3.1.4.1 Oberflächenintegrale

In der Gleichung 3.9 ist die exakte Auswertung der Oberflächenintegrale am Beispiel einer Teilzellfläche ΔS_e wie folgt vorgenommen:

1. Berechnen des Flächeninhalts von ΔS_e .
2. Berechnen des Funktionswertes von f_e durch geeignete Interpolationsalgorithmen aus den Werten an den Zellmittelpunkten.

Bei der obengenannten Berechnung des Funktionswertes von f_e wird angenommen, dass der Funktionswert von f_e , der im geometrischen Schwerpunktes von ΔS_e definiert ist, für die Teilzellfläche ΔS_e repräsentativ ist.

$$F_e = \iint_{\Delta S_e} f \, dS = \overline{f}_e S_e \approx f_e \Delta S_e \quad (3.11)$$

Die Bestimmung des Flusses f_e im Teilzellflächenmittelpunkt ΔS_e wird in den Kapiteln 3.2.1 und 3.2.2 diskutiert.

3.1.4.2 Volumenintegrale

In der Transportgleichung 3.8 treten neben den Oberflächenintegralen auch Terme auf, die über das Volumen zu integrieren sind. Hierfür wird die Annahme getroffen, dass sich das Volumenintegral als Produkt aus dem Wert am Zellmittelpunkt und dem Zellvolumen darstellen läßt. Der integrale Quell-/Senkenterm $Q_{\phi,P}$ berechnet sich somit aus

$$Q_{\phi,P} = \iiint_{\Delta V} q_{\phi} \, dV = \overline{q}_{\phi} \Delta V \approx q_{\phi,P} \Delta V_P . \quad (3.12)$$

Wenn P in der Mitte der Zelle definiert ist und wenn q_{ϕ} konstant oder linear veränderlich ist, dann ist diese Näherung zweiter Ordnung genau. Insbesondere ist bei dieser Approximation keine Interpolation erforderlich, da der unmittelbar bekannte Wert am Zellmittelpunkt verwendet wird.

3.1.5 Interpolationsverfahren

Wie im Kapitel 3.1.4 gezeigt, erfordert die Berechnung der Oberflächenintegrale Werte der Variablen an den Mittelpunkten der Zellflächen. Da diese nicht unmittelbar bekannt sind, müssen sie über geeignete Interpolationsverfahren bestimmt werden. Im folgenden werden einige Verfahren vorgestellt.

3.1.5.1 Stromaufinterpolation

Bei der Stromauf-Interpolation wird der gesuchte Wert ϕ_e abhängig von der an der Zellfläche vorherrschenden Geschwindigkeit durch den stromauf gelegenen Zellwert angenähert. Im englischen Sprachraum wurde hierfür der Begriff „Upwind Differencing Scheme“ (UDS) eingeführt.

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{falls } (\underline{u} \cdot \underline{n})_e > 0 \\ \phi_E & \text{falls } (\underline{u} \cdot \underline{n})_e < 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Die Anwendung der Interpolationsvorschriften zur Approximation des konvektiven Flusses gestaltet sich problematisch, wie im Folgenden gezeigt wird.

Das Upwind Differencing Scheme besitzt eine Genauigkeit erster Ordnung und ist ohne Einschränkung stabil. Der Nachteil dieser Interpolationsmethode besteht darin, daß sie sich numerisch diffusiv verhält. Durch eine Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt P für ein eindimensionales Netz und eine positive Geschwindigkeit $\underline{u} \cdot \underline{n}$ ergibt sich

$$\phi_e = \phi_p + (z_e - z_P) \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_P + \frac{(z_e - z_P)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right|_P + \dots \quad (3.14)$$

Da durch die Stromauf-Interpolation nur der erste Term wiedergegeben wird, entsteht aus dem ersten der vernachlässigten Terme ein zusätzlicher diffusiver Anteil mit dem Koeffizienten Γ_e^{num} , der oft als falsche oder numerische Diffusion bezeichnet wird.

$$f_e^{d,num} = \Gamma_e^{num} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\varrho u \Delta z}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.15)$$

3.1.5.2 Zentralinterpolation

Durch eine lineare Interpolation, die auch als Zentrale Differenz bzw. „Central Differencing Scheme“ (CDS) bezeichnet wird, berechnet sich der gesuchte Wert an der Zellfläche ϕ_e zwischen zwei benachbarten Zellmittelpunkten zu

$$\phi_e = \lambda_e \phi_E + (1 - \lambda_e) \phi_P, \quad (3.16)$$

wobei der Interpolationsfaktor λ Unregelmäßigkeiten in den Netzabständen berücksichtigt und z.B. wie folgt berechnet werden kann:

$$\lambda_e = \frac{|r_e - r_P|}{|r_E - r_P|}, \quad (3.17)$$

Beim Central Differencing Scheme ist die Genauigkeit der linear interpolierten Werte zweiter Ordnung, also höherwertiger als die Stromauf-Interpolation.

Die Approximation des diffusiven Terms erfordert die Berechnung einer örtlichen Ableitung im Zellmittelpunkt P . Diese wird mittels des Satzes von Gauß mit einem Oberflächenintegral approximiert¹:

$$\left(\frac{as}{\nabla} \phi\right)_P \approx \frac{1}{\Delta V} \sum_l \phi_l \left(\frac{as}{\underline{I}} \cdot \frac{as}{\underline{n}}\right)_l \Delta S_l . \quad (3.18)$$

Bei der Bestimmung des Oberflächenintegrals in Gl. 3.18 muss der Wert ϕ_l im Zellflächenmittelpunkt der Fläche ΔS_l bekannt sein. Er wird mit Hilfe einer Zentralinterpolation CDS bestimmt.

Diese Methode besitzt bei der Anwendung auf den konvektiven Transportterm jedoch die Eigenschaft, dass sie während der iterativen Lösungsprozedur oszillierende Lösungen erzeugt und damit die Stabilität des Verfahrens beeinträchtigt. PATANKAR [121] zeigt am vereinfachten Beispiel einer eindimensionalen stationären Konvektions-Diffusionsgleichung, dass die Verwendung von CDS für den konvektiven Term ab einer Zell-Peclet-Zahl größer als zwei physikalisch unsinnige Lösungen liefert und damit eine schlechte Approximation des Zellflächenwerts darstellt. Die Zell-Peclet-Zahl ist hierbei definiert als

$$Pe_e = \frac{(c)_e (\Delta r)_e}{\Gamma_{\phi,e}} \quad (3.19)$$

mit $(\Delta r)_e$ als Abstand zwischen zwei Zellmittelpunkten. Sie beschreibt analog zur Reynolds-Zahl das Verhältnis aus konvektivem und diffusivem Transport, allerdings bezogen auf die Zellwerte und nicht auf die globalen Abmessungen einer Problemstellung.

Die Notwendigkeit nach einer numerisch stabilen Approximation für den konvektiven Fluß, die gleichzeitig zweiter Ordnung genau ist, stellt ein fundamentales Problem bei Finite-Volumen Verfahren dar, das in der Fachwelt intensiv diskutiert wurde. Nachfolgend wird eine Auswahl an verbesserten Verfahren vorgestellt. Maßgeblich für den entwickelten CFD-Code ist hierbei die Forderung, dass die Interpolationsmethode eine Approximation mit einer Ordnung größer als eins ermöglicht und gleichzeitig keinen erheblich größeren zusätzlichen Rechenaufwand mit sich bringt.

3.1.5.3 Hybrid-Interpolation

Ein Verfahren, das ursprünglich auf SPALDING [171] zurückgeht, ist das sog. „Hybrid-Verfahren“, das auf einer Approximation der Flüsse mit einer Exponentialfunktion beruht. Hierbei wird, abhängig von der in Gl. 3.19 definierten Zell-Peclet-Zahl das Central Differencing Scheme verwendet, wenn die Stabilitätsbedingung $|Pe| < 2$ erfüllt ist, ansonsten das Upwind Differencing Scheme.

BADER [5] geht folgendermaßen vor, um die Eignung dieses Verfahrens für die numerische Berechnung von Laufradströmungen zu prüfen: Für ein typisches Simulationsergebnis wird die Zell-Peclet-Zahl berechnet, wobei das Längenmaß $(\delta x)_e$ von

¹Zur ausführlicheren Beschreibung wird auf das Kapitel 3.2.1 hingewiesen.

der Größenordnung $\sqrt[3]{\Delta V}$ ist. Hieraus ergibt sich, dass etwa 98% der Zellen Peclet-Zahlen größer als zwei aufweisen. Eine Verwendung des Hybrid-Verfahrens führt angewendet auf Laufradströmungen somit nur in 2% der Zellen zu einem verbesserten Ergebnis gegenüber dem reinen Upwind Differencing Scheme und erscheint deshalb keine sinnvolle Alternative zu sein.

3.1.5.4 QUICK-Verfahren

Nach einer Idee von LEONARD [94] entstand das QUICK-Verfahren². Dieser Ansatz folgt dem Grundgedanken des Upwind Differencing Scheme, dass der an die Zellfläche interpolierte Wert durch den stromauf gelegenen bestimmt wird. Im Gegensatz zum reinen UDS wird hier der Funktionswert jedoch mittels einer quadratischen Interpolation durch zwei stromauf und einen stromab gelegenen Zellmittelpunkt gewonnen.

Das Verfahren ist formal zweiter Ordnung genau und führt in der Regel zu verbesserten Ergebnissen. Eine Implementierung auf konturangepaßten Netzen mit variablen Punktabständen gestaltet sich schwierig, da drei auf einer Linie angeordnete Zellmittelpunkte die Ausnahme und nicht die Regel sind. Bei der Implementierung muß dies durch zusätzliche Geometriefaktoren berücksichtigt werden, wodurch der Rechenaufwand erheblich steigt.

3.1.5.5 Stromlinienbasierte Interpolation

Ein ebenfalls auf dem UDS basierendes Verfahren ist das von RATHBY [127] vorgestellte „Skew Upwind Differencing Scheme“. Der gesuchte Wert wird hierbei unter Berücksichtigung der lokal vorherrschenden Strömungsrichtung an die Zellfläche konvektiert und nicht entlang der Indexrichtung.

Die höherwertigen Formulierungen liefern zwar im Vergleich zu dem UDS verbesserte Approximationen der konvektiven Flüsse, sie sind allerdings implizit aufwendig zu implementieren, da zur Berechnung Informationen an mehr als den vier unmittelbaren Nachbarpunkten erforderlich sind. Dies führt zu umfangreichen Recheneinheiten, was die Lösung der Gleichung erschwert. Darüber hinaus müssen Unregelmäßigkeiten im Rechnetz durch die zusätzliche Berechnung umfangreicher Geometriefaktoren berücksichtigt werden.

Untersuchungen in die Richtung von stromlinienbasierten, höherwertigen Verfahren finden sich bei BUSNAINA [20] sowie bei MOUKALLED UND DARWISH [113, 114, 115]. Bisher sind nur sehr einfache Anwendungen dieser Verfahren veröffentlicht. SKODA [167] hat ein SUDS nach einem Vorschlag von ZHOU ET AL. [206] implementiert und validiert.

²QUICK = Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics

3.1.5.6 Limitierte hochauflösende Interpolation

Die in den Kapiteln 3.1.5.1 bis 3.1.5.5 angesprochenen Interpolationsverfahren können in die Gruppe nichtlimitierter Verfahren zusammengefügt werden. Neben diesen Verfahren wird das sogenannte *Flux-Limiter*-Verfahren zur Entwicklung sowohl genauer als auch stabiler Interpolationsverfahren verwendet. Dabei wird der mit einem hochgenauen Verfahren auf der Zellfläche ermittelte Fluss durch ein geeignetes Begrenzungskriterium derart limitiert, dass lokal zwar die Genauigkeit herabgesetzt wird, insgesamt aber die Ordnung des Verfahrens erhalten bleibt.

LEONARD UND MOKHTARI [96] stellen eine Methode vor, in der die zu interpolierende Variable normiert wird, Normalized Variable Formulation NVF. Diese wurde später von DARWISH UND MOUKALLED [35] für inhomogene Netztopologien zum Normalized Variable and Space Formulation NVSF erweitert, in dem zusätzlich zu der Variable die Ortskoordinate auch normiert wird.

Das NVSF-Verfahren ist nicht nur zur Entwicklung von Interpolationsverfahren geeignet, sondern erleichtert die Implementierung bestehender Verfahren erheblich. Zur Analyse in der NVSF wird ein eindimensionaler konvektiver Term betrachtet. Bild 3.2 stellt drei in Strömungsrichtung angeordnete Zellen eines inhomogenen Netzes dar.

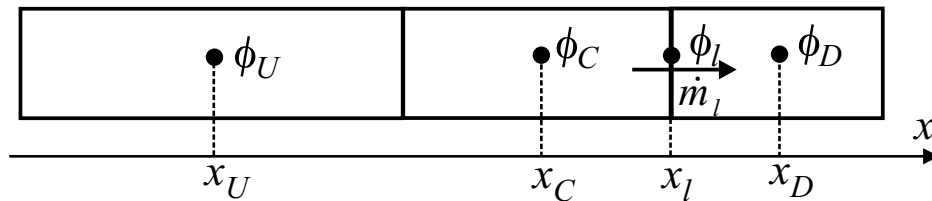


Bild 3.2: Eindimensionale Betrachtung der Kontrollvolumina zur Bestimmung des konvektiven Flusses

Gesucht ist die interpolierte Variable ϕ_l auf der Zellfläche l in Abhängigkeit von den beiden stromauf gelegenen Werten ϕ_C und ϕ_U sowie dem stromab gelegenen Wert ϕ_D ³. Die entsprechenden Positionen sind mit x_C , x_U und x_D bezeichnet. Zuerst werden die Variablen $\tilde{\phi}$ und \tilde{x} wie folgt normiert:

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi - \phi_U}{\phi_D - \phi_U}, \quad (3.20)$$

$$\tilde{x} = \frac{x - x_U}{x_D - x_U}. \quad (3.21)$$

Mit Hilfe der Normierung ist $\tilde{\phi}_l$ eine Funktion mit drei ebenfalls normierten Veränderlichen wie folgt:

³U = Upwind C = Central D = Downwind

$$\tilde{\phi}_l = f(\tilde{\phi}_C, \tilde{x}_C, \tilde{x}_l) \quad (3.22)$$

GASKELL UND LAU [60] formulierten ein Kriterium für die Begrenztheit eines beliebigen konvektiven Diskretisierungsverfahrens, das in der Literatur als „Convection Boundedness Criterion“ (CBC) bekannt ist. Mit der Begrenzung wird unterbunden, dass der interpolierte Wert ϕ_l ein neues Maximum erzeugt.

Anschaulich läßt sich CBC im „Normalized Variable Diagram“ NVD darstellen, in dem $\tilde{\phi}_l$ in Abhängigkeit von $\tilde{\phi}_C$ aufgetragen ist. In Bild 3.3 ist das NVD vom UDS, CDS und QUICK dargestellt. Ein Verfahren ist mindestens zweiter Ordnung genau, wenn es durch den Punkt $(\tilde{\phi}_C; \tilde{\phi}_l) = (\tilde{x}_C; \tilde{x}_l)$ verläuft.

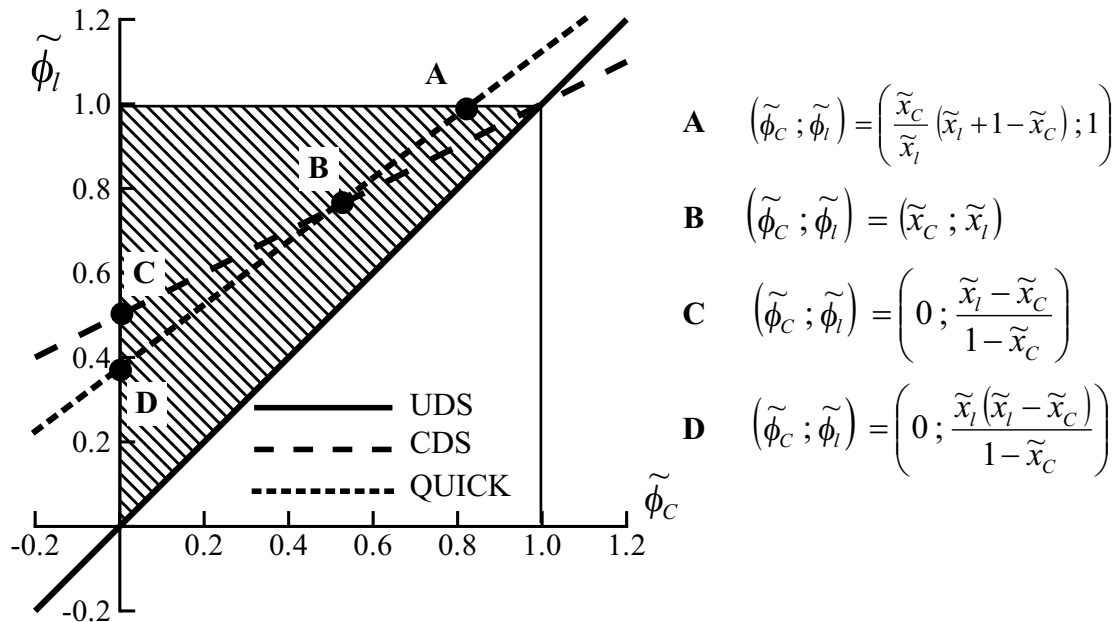


Bild 3.3: Normalized Variable Diagram für UDS, CDS und QUICK

Die unabhängigen Variablen \tilde{x}_C und \tilde{x}_l gehen in die Steigung und in den Achsenabschnitt der linearen Funktion $\tilde{\phi}_l = f(\tilde{\phi}_C)$ ein, wobei die grafischen Darstellungen in Bild 3.3 einem homogenen Rechennetz entsprechen. Somit hängen die Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften von der Inhomogenität des Rechennetzes ab.

Es ist zu beachten, dass in dem Bild 3.3 die Gültigkeitsbereich von CBC von dem schraffierte Bereich und von der Linie $\tilde{\phi}_C = \tilde{\phi}_l$ gekennzeichnet ist. Außerdem ist zu erkennen, das CDS und das QUICK mindestens zweiter Ordnung genau sind.

Zahlreiche *Flux-Limiter*-Verfahren wurden entwickelt. Ein paar Beispiele sind: SMART⁴ (GASKELL UND LAU [60]), OSHER⁵ (CHAKRAVARTHY UND OSHER [22]),

⁴SMART = Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport

⁵Prof. Osher (Univ. of California at Los Angeles) gehört zu den Erfindern von WENO-Verfahren = Weighted Essentially Non Oscillating. Ausserdem hat er mit prof. Sethian (Univ. of California at Berkeley) in den 80er Jahre das Level-Set-Verfahren entwickelt, das in zahlreichen Anwendungen

MINMOD⁶ (HARTEN [71]), CLAM⁷ (VAN LEER [194]), MUSCL⁸ (VAN LEER [195]), SUPER-C (LEONARD [95]), CICSAM⁹ (UBBINK [191]), SOUCUP¹⁰ (ZHU [209]), ISNAS¹¹ (ZIJLEMA [212]), COPLA¹² (CHOI ET AL. [25]), HLP A¹³ (ZHU [207] oder ZHU UND RODI [208]), LODA¹⁴ (ZHU [210]), CUBISTA¹⁵ (ALVES ET AL. [1]).

Die Beschreibung der einzelnen Schemata findet sich in einschlägigen Literaturen. Ausserdem werden einige davon beispielsweise bei SKODA [167]¹⁶ und bei HIRSCH [73] besprochen.

Diese Verfahren bestehen aus einer Kombination von meist linearen Funktionen, die sich im NVD als stückweise definierte, zusammengesetzte Kurve darstellt. Ein wesentlicher Aspekt der Formulierung der Verfahren in der NVSF ist die unmittelbare Implementierbarkeit.

In dieser Arbeit wird das MINMOD-Verfahren nach HARTEN [71] verwendet. Die Funktion $\tilde{\phi}_l = f(\tilde{\phi}_C, \tilde{x}_C, \tilde{x}_l)$ für das MINMOD-Verfahren lautet:

$$\tilde{\phi}_l = \begin{cases} \frac{\tilde{x}_l}{\tilde{x}_C} \tilde{\phi}_C & 0 < \tilde{\phi}_C \leq \tilde{x}_C \\ \frac{\tilde{x}_l - \tilde{x}_C}{1 - \tilde{x}_C} + \frac{\tilde{x}_l - 1}{\tilde{x}_C - 1} \tilde{\phi}_C & \tilde{x}_C < \tilde{\phi}_C \leq 1 \\ \tilde{\phi}_C & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.23)$$

Die entsprechende Darstellung des MINMOD-Verfahrens im Normalized Variable Diagram zeigt das Bild 3.4.

3.1.5.7 Nachgeführte Korrektur

Ein Ansatz wird auf die Interpolationsverfahren angewendet, die in den Kapiteln 3.1.5.1 bis 3.1.5.6 angesprochen wurden. Der Ansatz ermöglicht nämlich die Verwendung von Approximationen höherer Ordnung ohne signifikante Verschlechterung

findet, z.B. CFD, numerische Geometrie, geometrische Optik, Materialwissenschaft, Computergrafik, Bildverarbeitung und Optimierung.

⁶MINMOD = MINimum MODulus

⁷CLAM = Curved-Line Advection Method

⁸MUSCL = Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws

⁹Das Verfahren findet Anwendung in Mehrphasenströmungen, z.B. kavitierende Strömungen, Strömungen mit freier Oberfläche u.s.w.. Es basiert auf die Idee von Geber-Akzeptor-Formulierung, d.h. die Diskretisierung hängt von Geschwindigkeitsrichtung der Grenzfläche ab. Ausserdem wird der Winkel zwischen der Grenzfläche der Fluide und der Zellgrenzfläche mit berücksichtigt.

¹⁰SOUCUP = Second-Order Upwind Central differnce-first order UPwind

¹¹ISNAS = Interpolation Scheme which is Nonoscillatory for Advected Scalars

¹²COPLA = COmbination of Piecewise Linear Approximation

¹³HLP A = Hybrid Linear / Parabolic Approximation

¹⁴LODA = Local Oscillation-Damping Algorithm

¹⁵CUBISTA = Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection

¹⁶Die Formulierung der Interpolationsschemata erfolgt mit Hilfe der „Normalized Variable and Space Formulation“ $\tilde{\phi}_l = f(\tilde{\phi}_C, \tilde{x}_C, \tilde{x}_l)$ für einige Schemata und die entsprechenden Darstellungen erfolgen im „Normalized Variable Diagram“.

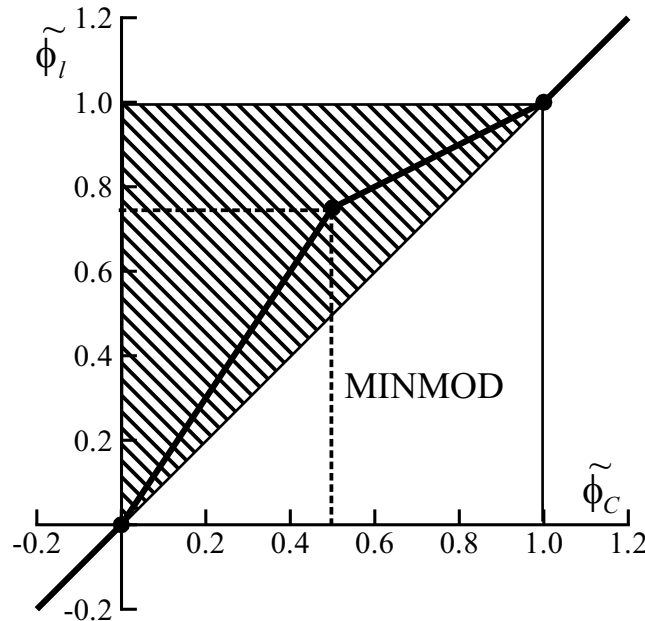


Bild 3.4: Normalized Variable Diagram für das MINMOD-Verfahren

der Stabilität. Er ist die sog. nachgeführte Korrektur, im englischen Sprachraum als „Deferred Correction Scheme“ bezeichnet.

Zuerst wird als implizit diskretisierten Teil eine stabil anwendbare Approximation niedriger Ordnung verwendet, die zudem nur die Informationen an den vier unmittelbar benachbarten Zellmittelpunkten enthält und korrigiert diese um eine explizit berechnete Differenz einer Approximation hoher und niedriger Ordnung. Diese Methode wurde erstmalig von KHOSLA UND RUBIN [81] vorgeschlagen. RITZINGER [133], FRITZ [59], SCHUSTER [158], REINELT [128], BADER [5], SKODA [167] und DEMIRDZIC [37] haben die Methode erfolgreich angewendet.

$$\phi_e^m = (\phi_e^{low})^m + \beta (\phi_e^{high} - \phi_e^{low})^{m-1} \quad (3.24)$$

In Gl. 3.24 bezeichnet $(\phi_e^{low})^m$ den implizit diskretisierten Anteil mit einer Approximation niedriger Ordnung zum Iterationsschritt m , der Klammerausdruck auf der rechten Seite die explizit berechnete Korrektur der Approximation höherer und niedriger Ordnung zum Iterationsschritt $m - 1$, die zum Quellterm addiert wird.

Der Übergangsfaktor β legt das Verhältnis zwischen den beiden verwendeten Interpolationsverfahren fest, wobei dieser aus dem Intervall $0 \leq \beta \leq 1$ zu wählen ist.

Die Verwendung des Deferred Correction Scheme stellt eine einfach zu implementierende Lösungsmöglichkeit für die eingangs definierte Forderung nach einer Approximation höherer Ordnung dar, bei der Oszillationen bzw. Stabilitätsprobleme vermieden werden. Die Konvergenzraten verschlechtern sich gegenüber der impliziten Betrachtungsweise in der Regel nur mäßig, da der explizite Korrekturterm i. a. klein gegenüber dem implizit diskretisierten Anteil ist.

Für das entwickelte Verfahren wird für die Approximation der konvektiven Flüsse eine nachgeführte Korrektur auf Basis UDS und CDS, s. Gl. 3.13 und 3.16, verwendet. Wahlweise wird UDS mit MINMOD kombiniert.

3.2 Diskretisierung der einzelnen Terme

3.2.1 Diffusive Flüsse

Stellvertretend für alle Zellflächen soll hier nur die Fläche e betrachtet werden. Nach der Gl. 3.10 und 3.11 läßt sich der diffusive Fluß F_e^d approximieren zu:

$$F_e^d = \iint_{\Delta S_e} \Gamma \stackrel{as}{grad}(\phi) \cdot \underline{n} dS \approx \left(\Gamma \stackrel{as}{grad} \phi \cdot \underline{n} \right)_e S_e \quad (3.25)$$

Für die Interpolation des Gradienten von ϕ an die Zellfläche muß dieser am Zellmittelpunkt P und den entsprechenden Nachbarpunkten bekannt sein.

Unter der Annahme, dass ein für die gesamte Zelle repräsentativer mittlerer Gradient existiert, kann die achsensymmetrische Vektorableitung einer beliebigen Variable ϕ_P wie folgt berechnet werden:

$$\nabla \phi \Big|_P \approx \frac{1}{\Delta V} \iiint_{\Delta V} \nabla \phi dV \quad (3.26)$$

Unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes läßt sich die Ableitung von ϕ in die Richtung x_i am Punkt P als

$$\iiint_{\Delta V} \nabla \phi dV = \iint_{\Delta S} \phi \left(\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{n}} \right) dS \approx \sum_l \phi_l \left(\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{n}} \right)_l \Delta S_l \quad (3.27)$$

berechnen, wobei l hier für die Summation über alle Teilflächen steht. Die Variable ϕ_l an den Zellflächen wird wiederum durch lineare Interpolation, s. Gl. 3.16, bestimmt.

Die Implementierung dieses Algorithmus in implizite Diskretisierungsschemata ist schwierig, wie das Bild 3.5 an einem vereinfachten Schema zeigen soll.

Der Gradient an der Zellfläche e wird aus den Gradienten an den Punkten P und E interpoliert, was durch die gepunktete Linie angedeutet wird. An der Stelle E wird der Gradient durch eine Summation der Funktionswerte ϕ_l an den Randflächen dieser Zelle bestimmt. Diese ϕ_l wiederum werden durch lineare Interpolation aus dem zentralen und den benachbarten Werten berechnet, was mit gestrichelten Linien dargestellt ist.

Die Bestimmung der diffusiven Transportterme beinhaltet folglich Informationen an mehr als den vier unmittelbaren Nachbarwerten um die Bilanzzelle P, was zu großen Rechenmolekülen führt und damit einer effizienten impliziten Diskretisierung entgegensteht. Aus diesem Grund wird die Berechnung der Gradienten aufgespalten in

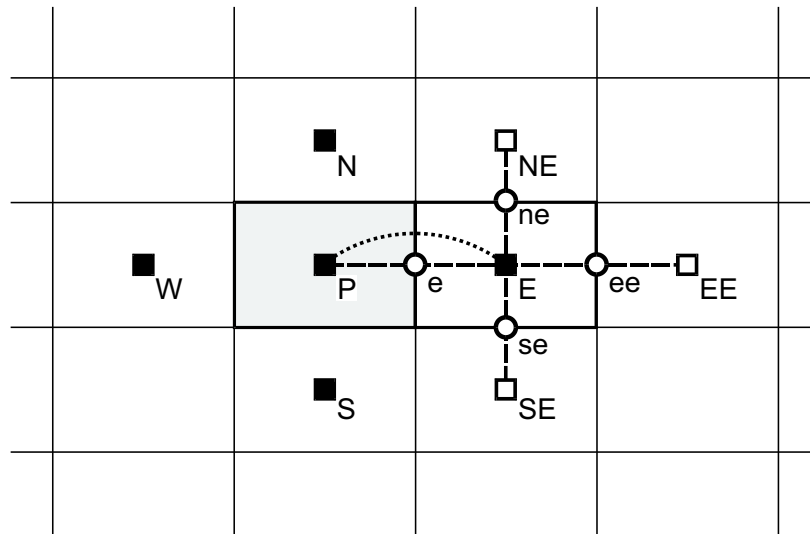


Bild 3.5: Vereinfachte Darstellung der in die Berechnung des diffusiven Flusses involvierten Kontrollvolumina

eine vereinfachte implizite Diskretisierung und eine nachgeführte explizit behandelte Korrektur, die den Fehler bei der einfacheren Betrachtungsweise durch die korrekte Approximation ersetzt. Bei einer geeigneten Wahl für die direkte und nachgeführte Diskretisierung der diffusiven Terme wird die Konvergenzrate dabei nur mäßig verschlechtert.

Bei Verwendung eines lokalen und orthogonal an der Zellfläche ausgerichteten Koordinatensystems $(n, s, t)^T$ trägt nur die Normalkomponente zum diffusiven Fluß bei.

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_e \quad (3.28)$$

Nach einer Idee von MUZAFERIJA [116] kann der Gradient in n -Richtung durch einen entsprechenden Gradienten in die Indexrichtung ξ ersetzt werden, solange sich diese nur wenig unterscheiden, vgl. Abb. 3.1.

Mit dieser Annahme und unter Verwendung einer zentralen Differenz läßt sich der resultierende diffusive Fluß durch eine Zellfläche implizit durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \Gamma_e S_e \frac{\phi_E - \phi_P}{|\mathcal{L}_E - \mathcal{L}_P|} . \quad (3.29)$$

Der explizit nachgeführte Term korrigiert die vereinfachte Betrachtungsweise durch die korrekte Ableitung in n -Richtung. Der gesamte diffusive Fluß durch eine Zellfläche ist nach MUZAFERIJA [116] somit wie folgt:

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e^m + \Gamma_e S_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_e - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e \right)^{m-1}. \quad (3.30)$$

Die in obiger Gleichung überstrichenen Terme bezeichnen dabei die von den Zellmittelpunkten an die Zellflächen interpolierten Gradienten. Zusammengefaßt ergibt sich für den diffusiven Fluß mit Gl. 3.29 und 3.30

$$F_e^d = \Gamma_e S_e \frac{\phi_E^m - \phi_P^m}{|\underline{r}_E - \underline{r}_P|} + \Gamma_e S_e \overline{\text{grad } \phi} \Big|_e^{as, m-1} (\underline{n} - \underline{i}_\xi) \quad (3.31)$$

Die Größenordnung des explizit betrachteten Korrekturterms, der die Differenz zwischen der lokalen ξ - und n -Richtung enthält, ist in der Regel klein gegenüber dem implizit diskretisierten Anteil, so dass diese Approximation keinen großen Einfluß auf das Konvergenzverhalten nimmt.

Für eine vollständige Bilanz der diffusiven Flüsse muss die Diskretisierung wie bei den konvektiven Termen auf alle vier Teilflächen des Kontrollvolumens angewendet werden.

Besonderheiten bei der Betrachtung der Impulsgleichungen

Da es sich bei den Impulsgleichungen um eine Vektorgleichung für \underline{u}^{as} handelt, unterscheiden sich deren diffusive Transportterme von demjenigen der allgemeinen Transportgleichung, s. Gl. 3.25. Formal läßt sich der gesamte Spannungstensor der Impulsgleichungen in zwei Anteile aufspalten:

$$\underline{F}_e^{as, d} = \iint_{\Delta S_e} \mu \overline{\nabla \underline{u}} \cdot \underline{n}^{as} dS + \iint_{\Delta S_e} \mu \left(\overline{\nabla \underline{u}} \right)^T \cdot \underline{n}^{as} dS. \quad (3.32)$$

Der erste Term auf der rechten Seite hat die Form des allgemein definierten diffusiven Transportterms in Gl. 3.25 und wird mit der oben beschriebenen Methode behandelt.

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung komplett, wenn die Viskosität auf allen Randflächen einer Zelle als konstant angenommen werden kann. Gilt diese Voraussetzung nicht, z.B. bei turbulenten Strömungen, so ist er jedoch immer noch klein gegenüber dem ersten Anteil. Aus diesem Grund wird dieser Term explizit behandelt.

Die zur Berechnung des Terms erforderlichen Geschwindigkeitsgradienten an den Zellflächen werden dabei wieder aus den in den Zellmittelpunkten bekannten Gradienten durch lineare Interpolation bestimmt.

Es ist zu beachten, dass der zweite Term auf der rechten Seite in der Impulsgleichung in azimuthaler Richtung im Falle der achsensymmetrischen Strömungen nicht existiert, weil bereits in der differentiellen Formulierung aufgrund der verschwindenden Ableitung der Terme in azimuthale Richtung folgender Ausdruck für den zweiten Term gilt:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\overset{as}{div} \underline{u} \right) = 0 . \quad (3.33)$$

Bei Strömungen kompressibler Fluide verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung 3.32 nicht (auch wenn die Strömung laminar ist, d.h. $\mu = const.$), weil die Dichte im Strömungsfeld nicht konstant ist und somit ist sie auch auf allen Randflächen einer Zelle nicht als konstant angenommen werden darf.

Es ist zu beachten, dass die Luftströmungen unter Mach-Zahl von 0.3 als inkompressibel angenommen werden können. Unter der Annahme der Standard-Temperature-Pressure STP-Bedingungen, die von International Union of Pure and Applied Chemistry IUPAC bei 273.15 K und 1 bar festgelegt sind, beträgt die kinematische Viskosität der Luft $1.5 \cdot 10^{-5} m/s$. Die Schallgeschwindigkeit beträgt dabei $342.62568 m/s$. Verbunden mit der technischen Referenzlängen, die im Millimeter- bis Meterbereich liegen, bekommt man für $Ma = 0.3$ die Reynoldszahlen im Bereich 10^4 bis 10^7 . Somit ist unter der oben gemachten Abschätzung die kompressible Luftströmung auch turbulent.

Auch im Falle der *natürlichen* oder *freien* Konvektion, die durch den Auftrieb zustande kommt, nämlich durch Dichteunterschiede im Schwerfeld der Erde, die ihrerseits von Temperaturunterschieden herrühren, kann nach dem Vorschlag von BOUSSINESQ die Strömung als inkompressibel angenommen werden. Dabei müssen die Impulsgleichungen mit einem Term, der die Auftriebskraft charakterisiert, erweitert werden, siehe BAEHR UND STEPHAN [6]. Im kryogenischen Strömungsfall ist die Schallgeschwindigkeit klein. Deshalb kann eine laminare Strömung bereits Kompressibilitätseffekte zeigen. Somit verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung 3.32 nicht.

3.2.2 Konvektive Flüsse

Der konvektive Fluss durch die Zellfläche e ist gegeben durch die Gl. 3.10 und 3.11 zu:

$$F_e^c = \iint_{\Delta S_e} \phi \overset{as}{\underline{u}} \cdot \overset{as}{\underline{n}} dS \approx \dot{V}_e \phi_e . \quad (3.34)$$

wobei \dot{V}_e der Volumenstrom durch die Fläche e ist. Zunächst wird \dot{V}_e als bekannt angenommen, so dass die diskretisierten Impulsgleichungen als lineares Gleichungssystem betrachtet werden können.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Größe ϕ_e auf dem Zellflächenmittelpunkt durch ein geeignetes Interpolationsverfahren aus den zellzentrierten Werten der umliegenden Teilvolumina zu bestimmen. Wie PATANKAR [121] verdeutlicht, besteht ein Zielkonflikt zwischen der Genauigkeit der Interpolation kontrovers und ihrer numerischen Stabilität. Zahlreiche Interpolationsverfahren wurden für die Lösung des Problems von verschiedenen Forschern entwickelt und einige davon wurden im Kap. 3.1.5 angesprochen. Außerdem ermöglicht das Deferred Correction Scheme DCS, s.

Kap. 3.1.5.7 eine stabile Berechnung des Terms und gleichzeitig eine hinreichende Genauigkeit, siehe BADER [5].

Die Anwendung von DCS auf Gleichung 3.34 ergibt für den konvektiven Fluss durch die Zellfläche e folgende Gleichung:

$$F_e^c = (\dot{V}_e \phi_e^{UDS})^m + \beta \left[(\dot{V}_e \phi_e^{CDS})^{m-1} - (\dot{V}_e \phi_e^{UDS})^{m-1} \right] \quad (3.35)$$

bzw. in ausgeschriebener Form

$$\begin{aligned} F_e^c = & \max(\dot{V}_e, 0) \phi_P^m + \min(\dot{V}_e, 0) \phi_E^m + \\ & \beta \left[\dot{V}_e \lambda_e \phi_E^{m-1} + \dot{V}_e (1 - \lambda_e) \phi_P^{m-1} - \right. \\ & \left. \left(\max(\dot{V}_e, 0) \phi_P^{m-1} + \min(\dot{V}_e, 0) \phi_E^{m-1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Die erste Zeile in Gl. 3.36 beschreibt den zum Iterationsschritt m implizit mit UDS diskretisierten Anteil des konvektiven Terms, während die zweite Zeile den mit dem Übergangsfaktor β gewichteten, explizit diskretisierten Korrekturterm enthält.

Der explizite Anteil, für dessen Berechnung ausschließlich bereits bekannte Informationen aus dem Iterationsschritt $m - 1$ erforderlich sind, wird zum Quellterm addiert.

Um die konvektiven Transportterme vollständig zu bilanzieren, muss die oben für Zellfläche e angeführte Diskretisierung auf alle vier Teilflächen des Kontrollvolumens angewendet werden.

3.2.3 Instationäre Terme

Betrachtet man den instationären Term in der Gleichung 3.7 bzw. Gleichung 3.8, so stellt man fest, dass folgende Approximation für ein Zellvolumen gemacht werden kann:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta V} \phi dV \approx \Delta V_P \frac{\partial \phi_P}{\partial t}. \quad (3.37)$$

Mit Hilfe des Taylor-Entwicklungssatzes können zahlreiche Zeitdiskretisierungsverfahren hergeleitet werden. Der Literatur nach können sie wie folgt kategorisiert werden:

- Zwei-Zeitebenen-Verfahren. Darunter sind das explizite Euler-, das implizite Euler-, das Crank-Nicholson- und das Trapez-Verfahren. Ausserdem gibt es das Prädiktor-Korrektur-Verfahren. Darunter versteht man die Kombination von explizitem Euler- und implizitem Euler-Verfahren.
- Mehrpunkteverfahren. Die Vertreter davon sind das Adams-Bashforth-(Explizit, Prädiktor)- und Adams-Moulton-(Implizit, Korrektur)-Verfahren.

- Runga-Kutta-Verfahren. Das Verfahren ist eine andere Art von Mehrpunktverfahren. Das Verfahren benützt zusätzliche Stützpunkte zwischen dem Zeitschritt t_n und t_{n+1} .
- Drei-Zeitebenen-Verfahren.

Ausführliche Informationen über die Herleitung, die Ordnung, die Vor- und Nachteile und weitergehende Analysen finden sich bei FERZIGER UND PERIĆ [53], ANDERSON [2], HIRSCH [73], SCHWARZ [159], SCHILLING UND MÜLLER [147] und einschlägigen Literaturen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Drei-Zeitebenen-Verfahren ausgewählt. Aus der folgenden, anschaulichen Herleitung kann festgestellt werden, dass das Verfahren implizit und dass es zweiter Ordnung genau ist. Außerdem liegt der Vorteil des Verfahrens auch an seiner relativ leichten Implementierbarkeit.

Zuerst wird die Funktion $\phi(t_{n+1})$ zum aktuell zu berechnenden Zeitschritt mit Hilfe des Taylor-Entwicklungssatzes zweimal rückwärts entwickelt und jeweils bei dem 3. Glied abgebrochen. Die erste Entwicklung ist ein Zeitschritt weit, d.h. sie betrifft der Funktion $\phi(t_n)$ zum gerade berechneten Zeitschritt. Die zweite Entwicklung ist zwei Zeitschritte weit, d.h. sie betrifft der Funktion $\phi(t_{n-1})$ zum entsprechend berechneten Zeitschritt:

$$\phi_n = \phi_{n+1} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{n+1} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{n+1} \cdot \Delta t^2 - \mathcal{O}(\Delta t^3) \quad (3.38)$$

bzw.

$$\phi_{n-1} = \phi_{n+1} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{n+1} \cdot 2 \Delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{n+1} \cdot 4 \Delta t^2 - \mathcal{O}(\Delta t^3) . \quad (3.39)$$

Eliminiert man $\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{n+1}$ aus der Gleichung 3.38 bzw. der Gleichung 3.39, so gelangt man zu folgendem Ausdruck für den Term $\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{n+1}$:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{n+1} = \frac{3 \phi_{n+1} - 4 \phi_n + \phi_{n-1}}{2 \Delta t} . \quad (3.40)$$

Bei dem Drei-Zeitebenen-Verfahren wird also eine Parabel durch die Lösung des aktuellen ϕ_{n+1} , des letzten ϕ_n und des vorletzten ϕ_{n-1} Zeitschrittes gelegt. Mit der Gleichung 3.40 ergibt sich für den instationären Term in der Gleichung 3.7 bzw. Gleichung 3.8 folgende Approximation:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta V} \phi dV \approx \Delta V_P \frac{3 \phi_{P,n+1} - 4 \phi_{P,n} + \phi_{P,n-1}}{2 \Delta t} . \quad (3.41)$$

3.2.4 Quellterme

Im Gegensatz zu dem vertrauten kartesischen Koordinatensystem können im krummlinigen Koordinatensystem auch Quellterme zusätzlich aus der formalen Mathematik der Differentialgeometrie auftreten. Diese Quellterme kommt dadurch zustande, dass im Riemannraum der Differentialgeometrie Ableitungen der Basisvektoren im allgemeinen nicht verschwinden.

Einerseits erfolgt die Approximation der Quellterme über den in Kap. 3.1.4 vorgestellten Ansatz. Andererseits wurde im Rahmen dieser Arbeit die physikalische Bedeutung der obengenannten zusätzlichen Quellterme beleuchtet und diese Erkenntnis für die Approximation eingesetzt. Somit stellt diese eigentlich keine Approximation mehr dar, sondern einen Zugang zur exakten Berechnung.

Diese spezielle Integraltransformation ist der Gegenstand vom Kapitel 3.2.5.

Berechnung des Druckgradienten in den Impulsgleichungen

Im Falle der Impulsgleichungen wird der darin enthaltene Druckgradient, s. Gl. 2.2, in eine konservative Form von Oberflächenintegralen umgewandelt.

$$- \iiint_{\Delta V} \nabla^{as,l} \langle p \rangle dV = - \iint_{\Delta S} \langle p \rangle \left(\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{n}} \right) dS \quad (3.42)$$

In diskretisierter Form ergibt sich:

$$- \nabla^{as,l} \langle p \rangle \Big|_P \Delta V_P = - \sum_l \langle p \rangle_l \left(\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{n}} \right)_l \Delta S_l, \quad (3.43)$$

Im Sinne der Approximation sei darauf hingewiesen, dass beide Ausdrücke in Gl. 3.43 gleichwertig sind, solange zur Berechnung des Druckgradienten $\nabla^{as} p$ an der Stelle P der Gaußsche Integralsatz angewendet wird.

Im Vergleich zu dem vertrauten kartesischen Koordinatensystem erfährt die Berechnung des Druckgradienten in den Impulsgleichungen im krummlinigen Koordinatensystem eine Erweiterung. Diese Tatsache war in den Gleichungen 2.2 im Kapitel 2.1 deutlich zu sehen.

Im achsensymmetrischen Fall gibt es in z-Richtung keine Erweiterung. Dagegen gibt es in radialer Richtung eine Erweiterung, was aus der Auswertung der Druckterme der Gleichung 2.2 für r-Richtung wie folgt zu entnehmen ist:

$$\begin{aligned} & -g^{kj} \left(p \Gamma_{jl}^l \underline{g}_k + p \Gamma_{kj}^t \underline{g}_t + \frac{\partial p}{\partial \xi^j} \underline{g}_k \right) - p \frac{\partial g^{kj}}{\partial \xi^j} \underline{g}_k = \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r p)}{\partial r} - \left(-p \frac{1}{r^2} r \right) \xrightarrow{RANS} -\frac{1}{r} \frac{\partial \langle r p \rangle}{\partial r} - \left(-\frac{\langle p \rangle}{r} \right), \end{aligned} \quad (3.44)$$

wobei der erste Term $-\frac{1}{r} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial r}$ auf der rechten Seite der Gleichung 3.44 in den Gleichungen 3.42 und 3.43 bereits behandelt wurde.

Für das Volumenintegral über den zweiten Term $-\frac{\langle p \rangle}{r}$ kann der traditionelle Ansatz wie folgt angewendet werden:

$$-\iiint_{\Delta V} \frac{\langle p \rangle}{r} dV \approx -\left(\frac{\langle p \rangle}{r}\right)_P \Delta V . \quad (3.45)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird der zweiter Term $-\frac{\langle p \rangle}{r}$ physikalisch motiviert wie folgt transformiert, was genauer als eine Approximation des traditionellen Ansatzes ist:

$$-\iiint_{\Delta V} \frac{\langle p \rangle}{r} dV = -2 \langle p \rangle_P \cdot \sin\left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right) \Delta S_{M,P} . \quad (3.46)$$

Die Gleichung 3.46 berücksichtigt nämlich den Beitrag der Druckkraft auf der Bottom- und Top-Seite der Kontrolloberfläche zu dem radialen Kräftegleichgewicht. Der Flächeninhalt der Teiloberfläche der Bottom- und Top-Seite ist aufgrund der Achsensymmetrie identisch und sie ist wie folgt zu berechnen¹⁷:

$$\Delta S_{M,P} = \frac{1}{2} |(\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{r}_{sw}) \times (\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{r}_{se})| . \quad (3.47)$$

Somit gilt:

$$-\iiint_{\Delta V} \frac{as}{\nabla} \langle p \rangle dV = -\left(\iiint_{\Delta V} \frac{as,l}{\nabla} \langle p \rangle dV + \iiint_{\Delta V} \frac{as,erw}{\nabla} \langle p \rangle dV\right) , \quad (3.48)$$

wobei

$$\iiint_{\Delta V} \frac{as,erw}{\nabla} \langle p \rangle dV = \left(\begin{array}{c} -2 \langle p \rangle_P \cdot \sin\left(\frac{\Delta \varphi}{2}\right) \Delta S_{M,P} \\ 0 \end{array} \right) . \quad (3.49)$$

Es ist zu beachten, dass durch diese Behandlung die Konservativität der Berechnung des Druckgradiententerms erhalten ist.

3.2.5 Spezielle Integraltransformation für achsensymmetrische Navier-Stokes Gleichungen

Im Rahmen des Finiten-Volumen-Verfahren FVM werden die in den Impulsgleichungen in radialer sowie in Umfangsrichtung zusätzlich auftretenden Quellterme normalerweise approximiert. Es hat sich im Rahmen dieser Arbeit herausgestellt, dass die Approximation nicht erforderlich ist. Physikalisch motiviert werden die

¹⁷Der tiefgestellte Index M bei $\Delta S_{M,P}$ steht für *Meridian*.

Volumenintegrale über die Quellterme in Oberflächenintegrale transformiert. Diese Vorgehensweise ist sehr vorteilhaft für das Konvergenzverhalten der numerischen Verfahren, das bekanntlich für krummlinige Koordinatensysteme Beeinträchtigung gegenüber dem numerischen Verfahren im vertrauten kartesischen Koordinatensystem unterliegt.

Die physikalisch motivierte Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen erfolgt folgendermaßen: Für die Konvektionsterme werden Impulsströme über das Kontrollvolumen bilanziert. Für die Diffusionsterme werden Spannungszustände über das Kontrollvolumen bilanziert. Anschließend findet man bei der Analyse mit Integralsatz von Gauß heraus, welche Terme übrigbleiben. Für die übriggebliebenen Terme wird anhand der Bilanzzeichnung analysiert, woher sie kommen. Somit kann festgestellt werden, wie sie direkt als Oberflächenintegral zu berechnen sind.

Im Rahmen dieser Arbeit werden folgende Volumenintegrale über zusätzliche Quellterme in den Impulsgleichungen direkt transformiert:

- Impulsgleichung in radialer Richtung, siehe Gleichung 2.16:

– konvektiver Term:

$$- \iiint_{\Delta V} \frac{\langle u_\varphi \rangle^2}{r} dV = -2 \langle u_\varphi \rangle_P^2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \Delta S_{M,P} . \quad (3.50)$$

– diffusiver Term:

$$- \iiint_{\Delta V} \nu_{eff} \frac{\langle u_r \rangle}{r^2} dV = - \underbrace{\left\{ 2 \nu_{eff} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \Delta S_M \right\}_P}_{= A_P^{JS2}} \langle u_r \rangle_P . \quad (3.51)$$

- Impulsgleichung in azimutale Richtung, siehe Gleichung 2.17:

– konvektiver Term:

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\langle u_\varphi \rangle \langle u_r \rangle}{r} dV = \underbrace{\left\{ 2 \langle u_r \rangle \cdot \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \Delta S_M \right\}_P}_{= A_P^{JS1}} \langle u_\varphi \rangle_P . \quad (3.52)$$

– diffusiver Term:

$$- \iiint_{\Delta V} \nu_{eff} \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r^2} dV = - \underbrace{\left\{ 2 \nu_{eff} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \Delta S_M \right\}_P}_{= A_P^{JS3}} \langle u_\varphi \rangle_P . \quad (3.53)$$

Durch diese spezielle, physikalisch motivierte Integraltransformation ist die Konservativität des Finiten Volumen Verfahren auch im krummlinigen – im speziellen – achsensymmetrischen Fall gewährleistet.

3.3 Eigenschaften der numerischen Verfahren

Allgemein und grundlegend sind die Arbeitsschritte einer numerischen Berechnung wie folgt gegliedert: Geometrieerzeugung, Netzgenerierung, numerische Berechnung und graphische Auswertung. Dafür werden folgende fünf Komponenten benötigt: Mathematisches Modell, Diskretisierung, numerisches Gitter, numerische Approximation und Lösungsmethode.

Die ersten vier Komponenten wurden im vorangegangenen Kapiteln beschrieben. Die fünfte Komponente, die Lösungsmethode, wird in den Kapiteln 3.4 und 3.5 besprochen.

Zur Beschreibung der Eigenschaften der fünf oben genannten Verfahrenskomponenten werden in der numerischen Fluidmechanik folgende Begriffe verwendet:

- **Konsistenz:**

Die Differenz zwischen diskretisierter Gleichung und Erhaltungsgleichung wird Abbruchfehler genannt. Eine Methode ist dann *konsistent*, wenn bei verschwindenden Gitterweiten $\Delta t \rightarrow 0$ und $\Delta x_i \rightarrow 0$ der Abbruchfehler ebenfalls verschwindet.

Dieses beinhaltet, dass der Abbruchfehler, der bei einer Taylor-Reihenentwicklung als ein Term höherer Ordnung bezeichnet wird, bei beliebig feiner Auflösung gegen Null geht. Dieser Abbruchfehler hat eine ähnliche Form wie der diffusive Term der Differentialgleichung, so dass ein Verfahren mit einem großen Abbruchfehler als diffusiv gilt. Im Falle der Approximation der konvektiven Terme muss das Interpolationsverfahren bei feiner werdender Auflösung somit den konvektiven Term möglichst genau wiedergeben. Daran ist auch die Bedingung geknüpft, dass der Fluss, der aus einer Zelle austritt, in die benachbarte Zelle eintritt. SKODA [167] untersuchte verschiedene Interpolationsverfahren, von denen ausgegangen werden kann, dass sie konsistent sind.

- **Stabilität:**

Eine numerische Lösung ist immer mit kleinen Fehlern behaftet. Wenn diese Fehler im Laufe eines Lösungsprozesses nicht verstärkt werden, sondern gedämpft, so heißt das Verfahren *stabil*.

- **Konvergenz:**

Eine numerische Methode ist dann *konvergent*, wenn bei verschwindenden Gitterweiten die Lösung der diskretisierten Gleichung gegen die exakte Lösung der Differentialgleichung geht. Der Begriff der Konvergenz wird auch in einem zweiten Zusammenhang verwendet. Bei der Lösung von Gleichungssystemen mit iterativen Verfahren wird als Konvergenz die Abnahme des Residuums der Gleichung mit zunehmender Iterationszahl bezeichnet.

In der Praxis wird die Konvergenz nachgewiesen, indem die Navier-Stokes-Gleichungen auf einer Serie von systematisch verfeinerten Rechennetzen gelöst werden. Ändert sich die Lösung bei einer weiteren Verfeinerung nicht mehr, wird sie als gitterunabhängig bezeichnet. Eine systematische Verfeinerung des Zeitschrittes führt bei einem konvergenten Verfahren zu einer zeitschrittunabhängigen Lösung. Die Potenz, mit der der Fehler bei einer Verdoppelung der Auflösung geringer wird, wird als Ordnung des Verfahrens bezeichnet.

Nicht ganz korrekt wird oft der Zustand einer iterativen Lösung als Konvergenz bezeichnet. So definiert man ein Konvergenzkriterium, unter dem die Residuen der zu lösenden Gleichungen fallen müssen, damit der Iterationsprozess als beendet angesehen werden kann.

- **Konservativität:**

Die zu lösenden partiellen Differentialgleichungen werden aus Erhaltungssätzen hergeleitet. Deshalb ist es für ein Lösungsverfahren unerlässlich, diese Erhaltungssätze zu erfüllen - sowohl lokal, als auch global. Wenn z. B. eine finite Volumenmethode zusammen mit der konservativen Form der Erhaltungsgleichung verwendet wird, so ist die Konservativität des Verfahrens gewährleistet.

- **Genauigkeit:**

Numerische Lösungen sind immer mit systematischen Fehlern behaftet. Sie sind Modellfehler in der Modellgleichung, Diskretisierungsfehler in der diskretisierten Gleichung und Konvergenzfehler. Die Genauigkeit eines Verfahrens kann manchmal nicht einfach erhöht werden, ohne die Konservativität zu verletzen. Man muss in manchen Fällen einen Kompromiss in der Genauigkeit eingehen, damit die Konservativität nicht verletzt wird.

3.4 Lösungsverfahren nichtlinearer Gleichungen

Die Navier-Stokes Gleichungen sind ein System von gekoppelten, nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Nachdem das Differentialgleichungssystem mit den in vorangegangenen Kapiteln besprochenen Verfahren im Sinne des Finiten Volumen Verfahrens diskretisiert wird, liegt also ein ebenfalls nichtlineares, diskretisiertes Differenzen-Gleichungssystem vor.

Der erste Ansatz ist der Ansatz zur Linearisierung. Für eine Variable ϕ mit Grad n wird zur Lösung des m -ten Iterationsschrittes den Produkt aus ϕ^{n-1} bei Iterationsschritt $m - 1$ und ϕ bei Iterationsschritt m wie folgt gebildet:

$$(\psi \phi^n)^m \approx (\psi \phi^{n-1})^{m-1} (\phi)^m, \quad (3.54)$$

wobei ψ eine Funktion ist, die die anderen Faktoren zusammenfassen soll.

Im Prinzip stehen vier Differenzgleichungen für vier Unbekannten. Dennoch sind sie ohne weiteres nicht lösbar, weil der Druck nämlich entkoppelt ist, d.h. der Druck kann nicht direkt berechnet werden, sondern es wird aus der Massenerhaltung eine Beziehung abgeleitet, aus der das Druckfeld bestimmt werden kann.

Der achsensymmetrische Fall hat die Besonderheit, dass die Impulsgleichung in Umfangsrichtung vollständig separat von dem restlichen Gleichungssystem gelöst werden kann. Somit ist im Sinne von Verfahren zur Lösung nichtlinearen, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen die Kontinuitätsgleichung mit den Impulsgleichungen in radialer sowie in achsenparalleler Richtung gekoppelt, während die Impulsgleichung als skalare Gleichung zu betrachten ist.

Für inkompressible Navier-Stokes Gleichungen hat sich das Druckkorrekturverfahren als Standard-Vorgehensweise durchgesetzt, deren Prinzip wie folgt darzustellen ist: Zuerst wird der Druck p^{m-1} angenommen. Mit dem Wert des angenommenen Drucks wird das Differenzgleichungssystem gelöst. Das Ergebnis sind die Geschwindigkeiten u_r^{m*} und u_z^{m*} . Diese Geschwindigkeiten sind aber im allgemeinen falsch, d.h. sie erfüllen nicht die Kontinuitätsgleichung 2.15. Die Geschwindigkeiten und der Druck werden um einen unbekanntem Betrag p' , u_r' und u_z' korrigiert. Aus der neuen Situation ergibt sich Differenzgleichung für Impuls mit den korrigierenden Beträgen von den Geschwindigkeiten und vom Druck. Die Differenzgleichung kann nach den korrigierenden Geschwindigkeiten u_r' bzw. u_z' aufgelöst werden. Somit entsteht ein Zugang, um die Geschwindigkeitkorrektur zu quantifizieren. Die Art und Weise, wie mit den Korrekturen der Nachbarzellen verfahren wird, bestimmt die Variante von Druckkorrekturverfahren. Die algebraische Formulierung des beschriebenen Lösungswegs folgt im folgenden Kapitel 3.4.1.

Stellvertretend wird in dieser Arbeit das „Semi IMPLICIT procedure for Pressure-Linked Equations“ SIMPLE-Verfahren von PATANKAR UND SPALDING [122] angewendet, siehe auch PATANKAR [121]. Dieses beruht darauf, dass zur Lösung der Geschwindigkeitskorrektur, die Korrekturen der Nachbarzellen vernachlässigt werden, so dass sich eine Poisson-Gleichung zur Lösung des Druckkorrektur ergibt. Die für konturangepasste Rechennetze erforderlichen Erweiterungen dieser Methode sowie eine umfassende Diskussion finden sich bei FERZIGER UND PERIĆ [53].

3.4.1 SIMPLE- und SIMPLEC-Algorithmus als Vertreter der Druckkorrekturverfahren

Die diskretisierten Impulsgleichungen können aufgrund von Nichtlinearitäten und einer starken wechselseitigen Kopplung nicht direkt, sondern iterativ gelöst werden. Innerhalb eines Iterationsschritts stellen sich die gelösten Impulsgleichungen der radialen und achsenparallelen Geschwindigkeitskomponenten wie folgt dar:

$$A_P^{u,m-1} \underline{u}_P^{as m*} = - \sum_{NB} A_{NB}^{u,m-1} \underline{u}_{NB}^{as m*} + \underline{b}_P^{as m-1} - \Delta V_P \left(\delta \nabla p^{m-1} \right)_P . \quad (3.55)$$

Im Folgenden wird aus Gründen der vereinfachten Darstellung auf die besondere

Kennzeichnung von gemittelten Mittelwerten verzichtet, so dass $\langle \underline{u} \rangle$, $\langle u_\varphi \rangle$ bzw. $\langle p \rangle$ durch \underline{u} , u_φ bzw. p bezeichnet werden. Der tief- und linksgestellte Index δ bezeichnet die diskretisierte Ableitung. Der Index wird im Weiteren auch im Zusammenhang mit Divergenz- oder Laplaceoperatoren verwendet.

Der Druckgradiententerm wird für die weitere Herleitung formal vom restlichen Quellterm abgespalten. Das aus dieser Gleichung zum Iterationsschritt m berechnete Geschwindigkeitsfeld erfüllt zwar die Impulsgleichung, in der Regel jedoch nicht die Kontinuitätsgleichung

$$\delta^{as} \text{div} \underline{u}_P^{m*} \neq 0 . \quad (3.56)$$

Aus diesem Grund werden die aus den Impulserhaltungsgleichungen berechneten Geschwindigkeiten als vorläufiges Ergebnis mit dem Index * gekennzeichnet.

Um zusätzlich die Massenerhaltung zu erfüllen, wird der Druck aus dem vorangegangenen Iterationsschritt p^{m-1} und die (vorläufigen) Geschwindigkeiten $\underline{u}^{as m*}$ um einen kleinen Wert p' , u'_r und u'_z wie folgt korrigiert:

$$\underline{u}^{as m} = \underline{u}^{as m*} + \underline{u}^{as'} , \quad (3.57)$$

$$p^m = p^{m-1} + p' . \quad (3.58)$$

Es ergibt sich eine neue Situation der diskretisierten Impulsgleichungen:

$$\begin{aligned} A_P^{u,m-1} \left(\underline{u}^{as m*} + \underline{u}^{as'} \right)_P &= - \sum_{NB} A_{NB}^{u,m-1} \left(\underline{u}^{as m*} + \underline{u}^{as'} \right)_{NB} \\ &+ \underline{b}_P^{as m-1} - \Delta V_P \left(\delta^{as} \nabla (p^{m-1} + p') \right)_P . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Aus der neuen Situation ergibt sich unter der Annahme $\underline{b}_P^{as m} \approx \underline{b}_P^{as m-1}$ Differenzgleichung für Impuls mit den korrigierenden Beträgen von den Geschwindigkeiten und vom Druck wie folgt:

$$\underline{u}_P^{as'} = \frac{1}{A_P^{u,m-1}} \left[- \sum_{NB} A_{NB}^{u,m-1} \underline{u}_{NB}^{as'} - \Delta V_P \left(\delta^{as} \nabla p'_P \right) \right] = \underline{u}_P^{as'} - \frac{\Delta V_P}{A_P^{u,m-1}} \left(\delta^{as} \nabla p'_P \right) . \quad (3.60)$$

Die Gleichung 3.60 stellt einen Zugang zur Berechnung der diskretisierten Kontinuitätsgleichung in der neuen Situation:

$$\delta^{as} \text{div} \left(\underline{u}^{m*} + \underline{u}' \right)_P = 0 . \quad (3.61)$$

Beim SIMPLE-Verfahren werden zur Lösung der Geschwindigkeitskorrektur die Korrekturen der Nachbarzellen $\underline{u}_{NB}^{as'}$ vernachlässigt, so dass

$$\tilde{\underline{u}}_P^{as'} = \frac{1}{A_P^{\underline{u},m-1}} \left[- \sum_{NB} A_{NB}^{\underline{u},m-1} \underline{u}_{NB}^{as'} \right] = 0 . \quad (3.62)$$

Aus der diskretisierten Kontinuitätsgleichung 3.61 ergibt sich somit eine Poisson-Gleichung zur Lösung des Druckkorrektur wie folgt:

$$\delta div \left(\frac{\Delta V_P}{A_P^{\underline{u},m-1}} \left(\delta \nabla p'_P \right) \right) = \delta div \left(\underline{u}_P^{m*} \right) . \quad (3.63)$$

Bei der Approximation der Korrekturen der Nachbarzellen $\underline{u}_{NB}^{as'}$ wie folgt:

$$\underline{u}_{NB}^{as'} \approx \underline{u}_P^{as'} , \quad (3.64)$$

ergibt sich eine weichere Behandlung zur Lösung der Geschwindigkeitskorrektur als beim SIMPLE. Die Poisson-Gleichung zur Lösung des Druckkorrektur lautet somit beim SIMPLEX-Algorithmus wie folgt :

$$\delta div \left(\frac{\Delta V_P}{\left(A_P^{\underline{u}} + \sum_{NB} A_{NB}^{\underline{u}} \right)^{m-1}} \left(\delta \nabla p'_P \right) \right) = \delta div \left(\underline{u}_P^{m*} \right) . \quad (3.65)$$

Für alle im folgenden diskutierten Simulationen wird der SIMPLE-Algorithmus verwendet.

3.4.2 Druckkorrekturverfahren für konturangepasste Netze

Im Sinne des finiten Volumen-Verfahren wird zur Lösung der Gl. 3.63 diese über ein Finites Volumen integriert und mit dem Integralsatz von Gauß unter der Annahme, dass die Oberfläche des Bilanzvolumens aus einer endlichen Anzahl von Teilflächen l gebildet wird, in eine Summe von Oberflächenintegralen wie folgt umgewandelt:

$$\sum_l \iint_{\Delta S_l} \left(\frac{\Delta V_P}{A_P^{\underline{u},m-1}} \left(\delta \nabla p'_P \right) \right) \cdot \underline{n} \, dS = \sum_l \iint_{\Delta S_l} \underline{u}_P^{m*} \cdot \underline{n} \, dS . \quad (3.66)$$

Die Auswertung dieser Gleichung erfordert die Berechnung der Normalgeschwindigkeiten an den Zellflächen. Stellvertretend für alle Zellflächen soll hier nur die Fläche e betrachtet werden.

Für orthogonale Netze zeigt PATANKAR [121], dass die Impuls- und Druckkorrekturgleichung entkoppelt sind, wenn für Druck und Geschwindigkeiten eine nicht-versetzte Variablenanordnung, bei der alle Informationen an ein und demselben Ort gespeichert sind, verwendet wird. Diese Anordnung wird auch als „colocated variable arrangement“ bezeichnet.

Er empfiehlt deshalb eine versetzte Variablenanordnung, ein sogenanntes „staggered variable arrangement“, das ursprünglich auf HARLOW UND WELSH [70] zurückgeht. Für nicht-orthogonale Netze ist die versetzte Variablenanordnung schwierig umzusetzen und führt zu einem erheblichen Verwaltungsaufwand innerhalb eines CFD-Codes.

Für ein colocated variable arrangement löst RHIE UND CHOW [130] das Problem mit einem Stabilisierungsterm, der im entwickelten CFD-Code verwendet wird. Die gesuchte Normalgeschwindigkeit an der Zellfläche $u_{n,e}^{m*}$ berechnet sich dabei nach folgender Vorschrift:

$$u_{n,e}^{m*} = \overline{u_{n,e}^{m*}} - \left(\frac{\Delta V_P}{A_P^{u_{n,e}^{m-1}}} \right)_e \left[\left(\frac{\delta p}{\delta n} \right)_e - \overline{\left(\frac{\delta p}{\delta n} \right)_e} \right]^{m-1}, \quad (3.67)$$

wobei

$$\overline{u_{n,e}^{m*}} = \left(\underline{u}^{m*} \cdot \underline{n} \right)_e. \quad (3.68)$$

Der Stabilisierungsterm stellt die Kopplung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes sicher. Ausserdem unterbindet er die Ausbildung oszillierender Lösungen.

In der Gleichung 3.67 bezeichnen überstrichene Terme an die Zellfläche interpolierte Werte. Der zweite Term auf der rechten Seite stellt den Stabilisierungsterm dar, der korrigierend in die Flussberechnung eingreift, sobald Oszillationen im Druckfeld auftreten. Die in Gl. 3.67 enthaltenen Druckgradienten werden nach FERZIGER UND PERIĆ [53] wie folgt approximiert:

$$\left(\frac{\delta p}{\delta n} \right)_e \approx \frac{p_E - p_P}{(\underline{r}_E - \underline{r}_P) \underline{n}} \quad (3.69)$$

$$\overline{\left(\frac{\delta p}{\delta n} \right)_e} \approx \frac{\overline{\left(\frac{as}{\delta \nabla} p \right)_e} (\underline{r}_E - \underline{r}_P)}{(\underline{r}_E - \underline{r}_P) \underline{n}} \quad (3.70)$$

Der resultierende vorläufige Volumenstrom \dot{V}_e^{m*} durch die repräsentative Zellfläche e ergibt sich zu

$$\dot{V}_e^{m*} = u_{n,e}^{m*} \Delta S_e. \quad (3.71)$$

Analog zu der rechten Seite der Gleichung 3.66 gilt für die linke Seite die Approximation in Normalenrichtung der Teilfläche e wie folgt:

$$\iint_{\Delta S_e} \left(\frac{\Delta V_P}{A_P^{u_{n,e}^{m-1}}} \left(\frac{as}{\delta \nabla} p'_P \right) \right) \cdot \underline{n} \, dS \approx \left(\frac{\Delta V_P}{A_P^{u_{n,e}^{m-1}}} \right)_e \left(\frac{\delta p'}{\delta n} \right)_e \Delta S_e \quad (3.72)$$

bzw. in diskretisierter Form

$$-\dot{V}'_e \approx \left(\frac{\Delta V}{A_P^{u,m-1}} \right)_e \left[\frac{p'_E - p'_P}{(\underline{\mathcal{L}}_E - \underline{\mathcal{L}}_P) \underline{\mathcal{L}}} \right]_e \Delta S_e . \quad (3.73)$$

Mit den Gleichungen 3.66 bis 3.73 kann ein lineares Differenzengleichungssystem in folgender Gestalt aufgebaut werden, das dann zu lösen gilt:

$$A_P^{p',m-1} p'_P + \sum_{NB} A_{NB}^{p',m-1} p'_{NB} = \underline{b}_P^{p',m} . \quad (3.74)$$

Es ist zu beachten, dass bei der Verwendung des SIMPLE-Algorithmus aufgrund der Vernachlässigung der Geschwindigkeitskorrekturen der Nachbarpunkte die Druckkorrektur p' relaxiert werden muss. Aus diesem Grund wird statt mit Gl. 3.58 die berechnete Lösung nur zum Teil zum bestehenden Druckfeld mit Unterrelaxationsfaktor α_p wie folgt addiert:

$$p^m = p^{m-1} + \alpha_p p' \quad (3.75)$$

wobei der Relaxationsfaktor α_p aus dem Intervall $0 < \alpha_p < 1$ zu wählen ist.

3.4.3 Zusammenfassung der Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Ungeachtet dessen, dass zur Lösung der linearisierten Gleichungssysteme, die im Kapitel 3.5 besprochen wird, innere Iterationen nötig ist, können die äußeren Iterationen zur Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme am Beispiel von achsensymmetrischen Navier-Stokes Gleichungen wie folgt zusammengefasst werden:

1. Lösung der diskretisierten Impulsgleichungen 3.55 in radialer und achsenparalleler Richtung zur Bestimmung von $\underline{u}^{as,m*}$,
2. Bestimmung der Korrekturgrößen:
 - Bestimmung des Volumenstromdefektes $\Delta \dot{V}^{m*}$ wie folgt:

$$\Delta \dot{V}^{m*} = \sum_l \dot{V}_l^{m*} , \quad (3.76)$$

- Berechnung der Druckkorrektur p' aus der Lösung der Druckkorrekturgleichung 3.66 bzw. 3.74,
- Korrektur des Druckfeldes unter Verwendung der Gleichung 3.75,
- Korrektur der Geschwindigkeiten in den Zellmittelpunkten P nach der Gleichung 3.57, wobei:

$$\underline{u}_{P'}^{as'} = - \frac{\Delta V_P}{A_P^{u,m-1}} \left(\delta \nabla p'_P \right) , \quad (3.77)$$

- Korrektur der Volumenströme an den Zellflächen l wie folgt:

$$\dot{V}_l^m = \dot{V}_l^{m*} + \dot{V}_l' , \quad (3.78)$$

3. Lösung der Impulsgleichung in azimuthaler Richtung,
4. Lösung der zusätzlichen Transportgleichungen für die turbulenten Größen,
5. Beginn einer neuen äußeren Iteration.

3.5 Lösungsverfahren linearisierter Gleichungssysteme

Nachdem die nichtlinearen Gleichungen linearisiert sind, besteht die Aufgabe darin die linearisierten Gleichungssysteme zu lösen. Es geht also um das Lösungsverfahren für folgendes lineares algebraisches Gleichungssystem:

$$\underline{\underline{A}}\underline{\phi} = \underline{b} . \quad (3.79)$$

Die Aufgabe erscheint anfänglich trivial. Mit dem Lösungsverfahren von Gauß, s. z.B. MEYBERG UND VACHENAUER [107], errechnet sich die Werte der unbekanntem Vektor $\underline{\phi}$ nach der Vorwärtselemination, Lösbarkeitsentscheidung und abschließenden Rückwärtssubstitution, wobei für eine Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathcal{R}^{f \times g}$ und für $\underline{b} \in \mathcal{R}^f$ folgendes gilt:

1. Lösbarkeitstest:

Das inhomogene lineare Gleichungssystem $\underline{\underline{A}}\underline{\phi} = \underline{b}$ ist genau dann lösbar, wenn gilt

$$\text{Rang}(\underline{\underline{A}} | \underline{b}) = \text{Rang}\underline{\underline{A}} . \quad (3.80)$$

2. Struktur der Lösungsmenge:

Ist das System $\underline{\underline{A}}\underline{\phi} = \underline{b}$ lösbar, dann läßt sich die allgemeine Lösung darstellen in der Form

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_s + \underline{\phi}_h \quad (3.81)$$

mit einer speziellen Lösung $\underline{\phi}_s$ und der allgemeinen Lösung $\underline{\phi}_h$ des zugehörigen homogenen Systems.

3. Anzahl der freien Variablen:

Ist $\underline{\underline{A}}\underline{\phi} = \underline{b}$ lösbar, dann enthält die allgemeine Lösung $(g - \text{Rang}\underline{\underline{A}})$ freie Variable ($g = \text{Anzahl der Unbekannten}$).

In der computergestützten praktischen Anwendung muss ein Lösungsverfahren allerdings andere Anforderungen erfüllen. Wichtige Anforderungen an das Lösungsverfahren sind Kosten, Rechenzeit, Genauigkeit und Zuverlässigkeit.

In der CFD ist die Matrix \underline{A} dünn besiedelt und ausserdem weist die Matrix diagonale Bandstruktur auf. Diese Matrixeigenschaften wurden bei der Diskretisierung der konvektiven und der diffusiven Termen durch die nachgeführte Korrektur aufrechterhalten.

Zahlreiche Lösungsverfahren wurden entwickelt. Sie können in die Gruppe der *direkten* und *indirekten / iterativen* Verfahren eingeteilt werden. Das Verfahren, das der Matrixeigenschaft in der CFD zugeschnitten wird, findet weite Anwendung auch in der Praxis. Im Rahmen dieser Arbeit wird das iterative Verfahren zur feldweisen Berechnung ausgewählt, in das im Kapitel 3.5.1 eingegangen wird.

Zu den direkten Verfahren gehören die Gaußsche Elimination, LU-Zerlegung¹⁸, TDMA¹⁹ und die zyklische Reduktion. Die Gaußsche Elimination ist Speicherintensiv und deshalb ist teuer. LU-Zerlegung ist eine Variante von Gauß-Elimination. Sie bildet die Grundlage für die besseren iterativen Verfahren. Die TDMA ist nur für tridiagonal besetzte Matrizen anwendbar. Und die zyklische Reduktion setzt eine sehr geordnete Geometrie wie beispielsweise rechteckige Kästen, die üblicherweise in der direkten oder Grobstruktur-Simulation der Turbulenz und in einigen meteorologischen Simulationen angewendet ist, voraus.

Zu den iterativen Verfahren gehören die Jacobi-Methode, Gauß-Seidel-Methode, die mit einem Überrelaxationsfaktor beschleunigte Variante von der Jacobi-Methode bzw. der Gauß-Seidel-Methode (SOR²⁰, SPOR²¹, und SLOR²²), die ILU-Zerlegung²³ nach STONE [180], die auch als SIP-Methode²⁴ bekannt ist, ADI-Methode²⁵ (HAGEMAN UND YOUNG [66]), CG-Methode²⁶ (GOLUB UND LOAN [63]), BiCG-Methode²⁷ (FLETCHER [54]), CGS-Methode²⁸ (SONNEVELD [168]), CGSTAB-Methode²⁹ (VAN DEN VORST UND SONNEVELD [196] bzw. VAN DEN VORST [197]) und GMRES-Methode³⁰ (SAAD UND SCHULTZ [138]).

Im Rahmen dieser Arbeit wird ILU-Zerlegung bzw. SIP-Methode angewendet. Diese Methode wurde speziell für die algebraischen Gleichungen, die aus der Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen zustande kommen, entwickelt. Sie gilt nämlich nicht für das allgemeine System der Gleichungen.

¹⁸LU = Lower-Upper

¹⁹TDMA = TriDiagonal Matrix Algorithm

²⁰SOR = Succesive OverRelaxation

²¹SPOR = Succesive Point OverRelaxation

²²SLOR = Succesive Line OverRelaxation

²³ILU = Incomplete Lower Upper

²⁴SIP = Strongly Implicit Procedure

²⁵ADI = Alternating Direction Implicit

²⁶CG = Conjugate Gradient

²⁷BiCG = BiConjugate Gradient

²⁸CGS = Conjugate Gradient Squared

²⁹CGSTAB = CGS sTABilized

³⁰GMRES = Generalized Minimal RESidual

3.5.1 ILU-Zerlegung mit SIP-Algorithmus

Jedes lineare algebraische Gleichungssystem $\underline{A}\underline{\phi} = \underline{b}$ kann, wie bereits erwähnt, mit der Gaußschen Elimination bzw. der LU-Zerlegung gelöst werden, die aber für eine dünn besetzte Matrix teuer sind, weil sie speicherintensiv sind. Ausserdem ist Diskretisierungsgenauigkeit üblicherweise viel kleiner als die Genauigkeit der Computer-Arithmetik. Deshalb muss das algebraische Gleichungssystem nicht mit der Genauigkeit der Computer-Arithmetik gelöst werden. Infolgedessen würde eine Lösung des algebraischen Gleichungssystems mit etwas höherer Genauigkeit als die aus der Diskretisierung genügen.

Die Grundgedanke der Iterativen Lösung kann deshalb wie folgt beschrieben werden:

1. Separation der Matrix \underline{A} in einfach zu invertierende Matrix \underline{M} und Restmatrix \underline{N} :

$$\underline{A}\underline{\phi} = (\underline{M} - \underline{N})\underline{\phi} = \underline{b}, \quad (3.82)$$

wobei

$$\underline{M} = \underline{L}\underline{U} \quad (3.83)$$

bzw. für später wichtig

$$\underline{M}^{-1} = \underline{U}^{-1}\underline{L}^{-1}. \quad (3.84)$$

2. Für das iterative Lösen des Gleichungssystem zum inneren Iterationschritt k

$$\underline{M}\underline{\phi}^k = \underline{b} + \underline{N}\underline{\phi}^k \quad (3.85)$$

kann folgende Approximation

$$\underline{N}\underline{\phi}^k \approx \underline{N}\underline{\phi}^{k-1} \quad (3.86)$$

gemacht werden, um Zugang zur Berechnung von $\underline{\phi}^k$ zu verschaffen.

3. Zum inneren Iterationschritt k gilt also folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\underline{\phi}^k = \underline{M}^{-1}(\underline{b} + \underline{\varrho}^{k-1}), \quad (3.87)$$

wobei

$$\underline{\varrho}^{k-1} = \underline{N}\underline{\phi}^{k-1}. \quad (3.88)$$

4. Unter der Annahme, dass zum inneren Iterationsschritt k die Lösung konvergiert, ergibt sich für den Restfehler $\underline{\varrho}^{k-1}$ folgende Bestimmungsgleichung

$$(\underline{M} - \underline{A})\underline{\phi}^k = \underline{\varrho}^{k-1}. \quad (3.89)$$

Offenbar gilt für die konvergente Lösung

$$\lim_{\underline{N} \rightarrow \underline{0}} \underline{\varrho}^{k-1} = \lim_{\underline{M} - \underline{A} \rightarrow \underline{0}} \underline{\varrho}^{k-1} = \lim_{\underline{M} \rightarrow \underline{A}} \underline{\varrho}^{k-1} \rightarrow 0. \quad (3.90)$$

Die Vorschrift zur Berechnung der Einträge in den Matrizen \underline{L} und \underline{U} nach dem SIP-Algorithmus findet sich z.B. bei FERZIGER UND PERIĆ [53].

3.5.2 Erhöhung der Diagonaldominanz

PATANKAR [121] schlägt eine Behandlung vor, um die Diagonaldominanz der Matrix \underline{A} in der allgemeinen diskretisierten Gleichung 3.79 bzw. $A_P^{\phi, m-1}$ in folgender ausgeschriebener Form zu erhöhen:

$$A_P^{\phi, m-1} \phi_P^m + \sum_{NB} A_{NB}^{\phi, m-1} \phi_{NB}^m = b_P^{\phi, m} . \quad (3.91)$$

Aus Stabilitätsgründen wird nach seinem Vorschlag für die Lösung zum Iterationsschritt m , ϕ_P^m , in der Regel eine Unterrelaxation mit der folgenden Vorschrift vorgenommen:

$$\phi_P^{m, \alpha_\phi} = \phi_P^{m-1} + \alpha_\phi (\phi_P^m - \phi_P^{m-1}) , \quad (3.92)$$

wobei der Relaxationsfaktor aus dem Intervall $0 < \alpha_\phi < 1$ gewählt wird.

Wird die Gleichung 3.91 unter Beibehaltung der Vorschrift 3.92 gelöst, so ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\underbrace{\frac{A_P^{\phi, m-1}}{\alpha_\phi} \phi_P^m}_{A_P^{\phi, m-1, *}} + \sum_{NB} A_{NB}^{\phi, m-1} \phi_{NB}^m = \underbrace{b_P^{\phi, m} + \frac{1 - \alpha_\phi}{\alpha_\phi} A_P^{\phi, m-1} \phi_P^{m-1}}_{b_P^{\phi, m, *}} \quad (3.93)$$

Diese umgeformte Gleichung wird während der Iterationen gelöst. Somit wird der Wert von A_P erhöht, während die Nachbarkoeffizienten A_{NB} unverändert bleiben.

3.5.3 Implementierungstechnik für den Computercode

Für die Implementierung in Computercode ist es sinnvoll, nicht direkt die Gleichung 3.87 zu lösen. Es wird zum inneren Iterationsschritt k ein Korrekturvektor $\underline{\xi}^k$ zu dem Lösungsvektor $\underline{\phi}^{k-1}$ addiert, wodurch folgende Gleichung gelöst wird:

$$\underline{\phi}^k = \underline{\phi}^{k-1} + \underline{\xi}^k . \quad (3.94)$$

Es geht also darum, ein reduziertes Gleichungssystem in Form von

$$\underline{M} \underline{\xi}^k = \underline{\phi}^k \quad (3.95)$$

ausgehend von dem im Kapitel 3.5.1 bekannten Gleichungssystem

$$\underline{M} \underline{\phi}^k = \underline{b} + \underline{N} \underline{\phi}^{k-1} \quad (3.96)$$

herzustellen. Dafür wird $\underline{M} \underline{\phi}^{k-1}$ von jeder Seite des Gleichungssystems 3.96 abgezogen, so dass sich folgendes Gleichungssystem ergibt:

$$\underline{\underline{M}} \left(\underline{\phi}^k - \underline{\phi}^{k-1} \right) = \underline{b} - \underline{\underline{A}} \underline{\phi}^{k-1} . \quad (3.97)$$

Die rechte Seite der Gleichung 3.97 gibt den Restfehler $\underline{\rho}^k$ für den aktuell zu berechnenden inneren Iterationsschritt k . Es ist zu beachten, dass zu dem Iterationsschritt, bei dem die Lösung noch nicht konvergiert, das Gleichungssystem 3.79 einen Restfehler $\underline{\tilde{\rho}}^k$ bzw. $\underline{\rho}^k$ beinhaltet:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\phi}^{k-1} = \underline{b} + \underline{\tilde{\rho}}^k \quad (3.98)$$

bzw.

$$\underline{\rho}^k = \underline{b} - \underline{\underline{A}} \underline{\phi}^{k-1} . \quad (3.99)$$

Der Korrekturvektor $\underline{\xi}^k$ ist dann mit folgender Vorschrift zu berechnen:

$$\underline{\xi}^k = \left(\underline{\underline{U}}^{-1} \left(\underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\rho}^k \right) \right) . \quad (3.100)$$

Residuum und Konvergenz

Die Güte der Lösung wird durch das Residuum R_{lin}^k beurteilt, das zur linearen Iteration k des linearen Gleichungslösers wie folgt gebildet wird:

$$R_{lin}^k = \sum_{i=1}^{i=f} | \varrho_i^k | \quad (3.101)$$

bzw.

$$R_{lin}^k = \sum_{i=1}^{i=f} \left| \left(b_P^\phi - A_P \phi_P^{k-1} - \sum_{NB} A_{NB} \phi_{NB}^{k-1} \right)_i \right| , \quad (3.102)$$

wobei f die Größe des Lösungsvektors ist, s. Kap. 3.5.

Der SIP-Algorithmus nach STONE [180] konvergiert normalerweise bei einer kleinen Anzahl von Iterationen. Im Zusammenhang mit dem impliziten Druckkorrekturverfahren wird ausserdem keine genauere Lösung gefordert. Die Reduktion wird bei der allgemeinen Transportgleichung bereits nach $k = 1$ bis 2 Iterationen erreicht, wohingegen bei der Druckkorrekturgleichung $k = 12$ bis 15 Iterationen notwendig sind.

Für die äußeren Iterationen gilt zur Beurteilung der Konvergenzgüte das entsprechende Residuum R_{nlin}^m , das zur äußeren Iteration m folgendermaßen gebildet wird:

$$R_{nlin}^m |_{R_{lin}^{k=1}} = b_P^{\phi, m-1} - A_P \phi_P^{m-1} - \sum_{NB} A_{NB} \phi_{NB}^{m-1} . \quad (3.103)$$

In der Regel sind Lösungen brauchbar, bei denen die Summennorm von R_{nlin} aller zu lösenden Gleichungen um vier Größenordnungen fällt. Bei Low-Reynolds-Number-Turbulenzmodellen kann es notwendig sein, die Residuen der turbulenten Transportgleichungen um sechs Größenordnungen zu reduzieren.

Falls eine solche Reduktion der Summennorm nicht möglich ist, sollte die Maximumnorm von R_{nlin} zur Abschätzung der Konvergenzgröße herangezogen werden. Oft ist das Gebiet unzureichender Konvergenz auf wenige Zellen, die den Wert der Summennorm dominieren, begrenzt.

3.6 Randbedingungen

Die Diskretisierung der Transportgleichung einer allgemeinen Variable ϕ setzt den Wert am betrachteten Punkt in Beziehung zu seinen Nachbarpunkten und sonstigen Einflüssen.

Dennoch fehlen an Zellen, die an die Berandungsflächen des betrachteten Strömungsgebiets angrenzen, Informationen für die Bilanzgleichung. Deshalb müssen zur Lösung des linearisierten Gleichungssystems an diesen Orten für jede Variable Randbedingungen vorgegeben werden.

Entsprechend sind an diesen Flächenelementen Aussagen über die drei Geschwindigkeitskomponenten u_r, u_φ und u_z , die Turbulenzgrößen k und ε bzw. k und ω sowie über die Druckkorrektur p' zu treffen.

Dies kann über die Vorgabe eines Gradienten oder über eine direkte Wertzuweisung geschehen, was entsprechend als Neumann- oder Dirichlet-Randbedingung bezeichnet wird. Gemeinsame Blockgrenzen erhalten im Sinne einer strengen Nomenklatur keine Randbedingung, sondern eine Durchflussbedingung, die in Kap. 3.7 beschrieben wird.

3.6.1 Einströmränder

Geschwindigkeiten

Die Geschwindigkeiten werden mit Dirichlet-Randbedingungen durch vorgeschriebene Werte für u_r, u_φ und u_z belegt.

Druck und Druckkorrektur

Sowohl für den Druck p als auch für die Druckkorrektur p' wird eine Neumann-Randbedingung mit einem konstanten Gradienten entlang der Netzlinien verwendet. Die Implementierung erfolgt über eine lineare Extrapolation aus den Werten im Feld.

Turbulenzgrößen

Zusätzlich zu den Stromfeldgrößen müssen an Einströmrändern Werte für die spezifische turbulente kinetische Energie k und die Dissipationsrate ε bzw. spezifische Dissipationsrate ω definiert werden. Die Werte sind nicht aus dem Feldinneren

extrapoliert, sondern sie müssen berechnet werden. Die Turbulenzgrößen werden also mit den Dirichlet-Randbedingungen belegt.

Der Eintrittswert für k wird wie folgt berechnet:

$$k = \frac{3}{2} (Tu \cdot u_\infty)^2 \quad (3.104)$$

In Gleichung 3.104 bedeutet Tu der Turbulenzgrad und die Größe u_∞ bezeichnet dabei den Betrag der Absolutgeschwindigkeit an der betrachteten Stelle.

Aus der Literatur ergeben sich für den Turbulenzgrad Tu Werte zwischen 0.01 und 0.1. Der Turbulenzgrad bezieht die Schwankungsgeschwindigkeit der Strömung auf die mittlere Geschwindigkeit wie folgt:

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} (\langle u_r''^2 \rangle + \langle u_\varphi''^2 \rangle + \langle u_z''^2 \rangle)}}{\sqrt{\langle u_r^2 \rangle + \langle u_\varphi^2 \rangle + \langle u_z^2 \rangle}} . \quad (3.105)$$

Mit dem Turbulenzgrad wird beispielsweise die Güte eines Windkanals angegeben. Je kleiner der Turbulenzgrad ist, desto besser ist der Windkanal, desto turbulenzärmer ist der Windkanal. Für die Grundlagenforschung der Turbulenz hat SCHUBAUER UND SKRAMSTAD [155] gezeigt, dass im Prinzip „laminare“ Windkanäle möglich sind, s. Kap. 1.3.1. Für die Untersuchung der technischen Strömungen sind Windkanäle mit $Tu = 2\%$ üblich.

Für die statistische Betrachtung liefern die früheren Messungen einer vorne schneidelförmigen Platte im Windkanal wichtiges Ergebnis für dieses Kapitel. Das Ergebnis läßt sich wie folgt beschreiben: Bei geringer werdendem Turbulenzgrad nimmt die kritische Reynoldszahl zu. Es ist zu beachten, dass das Phänomen für die Reynoldszahl, die den Beginn des laminaren Übergang zu Turbulenz charakterisiert, sowie für die Reynoldszahl, die vollausbildete Turbulenz charakterisiert, gilt. Es wurde aber auch festgestellt, dass bei weiterer Abnahme des Turbulenzgrades die kritischen Reynoldszahlen konstant bleiben. Im dem beschriebenen Strömungsfall betragen sie $2.8 \cdot 10^6$ und $4.0 \cdot 10^6$. Der Turbulenzgrad, bei dem also die Abhängigkeit der kritischen Reynoldszahlen vom Turbulenzgrad verschwindet, beträgt ca. 2%.

Deshalb wird der Wert für den Turbulenzgrad als 2% angenommen, wenn er durch untersuchtes Strömungsproblem nicht explizit vorgegeben ist.

Im Falle eines k - ε -basierten Turbulenzmodells wird die Dissipationsrate ε am Eintritt über ein sogenanntes turbulentes Längenmaß L_ε bestimmt und nach folgender Gleichung 3.106 berechnet:

$$\varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L_\varepsilon} . \quad (3.106)$$

Für k - ω -basierte Modelle ergibt sich die spezifische Dissipationsrate ω analog:

$$\omega = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{L_\omega \beta^*} . \quad (3.107)$$

Für das turbulente Längenmaß L_ϵ ergeben sich aus der Literatur Werte zwischen 1% und 100% einer charakteristischen Abmessung der Problemstellung.

3.6.2 Ausströmränder

Geschwindigkeiten

Am Ausströmrand ist die Strömung vorab nicht bekannt, sondern Ergebnis der Rechnung. Aus diesem Grund definiert man die Geschwindigkeitskomponenten hier über eine Extrapolation der Form $\partial u_i / \partial \xi = 0$. Diese Art von Randbedingung ist streng genommen nur dann gültig, wenn der Ausströmrand möglichst weit stromab liegt und keinen Einfluß auf die Strömung in den stromauf liegenden Bereiche nimmt

Druck und Druckkorrektur

Die Druckkorrektur wird analog zu den Einströmrändern über die Bedingung $\partial p' / \partial n = 0$ berechnet. Der statische Druck kann als konstanter oder als flächengemittelter Wert über der Austrittsfläche festgeschrieben werden. Über einen Faktor $0 \leq \alpha_p \leq 1$ kann zwischen den beiden Zuständen linear variiert werden.

$$p_{out} = \alpha_p p_{ave} + (1 - \alpha_p) p_{const}. \quad (3.108)$$

Turbulenzgrößen

Für alle Turbulenzgrößen wird eine Neumann-Randbedingung $\partial \phi / \partial \xi = 0$ bzw. $\phi_{out} = \phi_p$ vorgeschrieben. Der Fluß wird analog zu den Geschwindigkeiten berechnet.

3.6.3 Wände

Im Unterschied zu Euler-Verfahren, bei dem durch Vernachlässigung der Reibung an den Wänden Anliegebedingung herrscht, wird beim Navier-Stokes-Verfahren das strömende Fluid zur Wand hin bis zur Ruhe gebremst. Es herrscht also eine Haftbedingung. Es ist zu beachten, dass die Strömungen verdünnter Gase keine Kontinuumsströmung darstellt, s. Kap. 1.2.2. Fluidteilchen können nämlich an den Wänden gleiten. Somit gilt die Gleitbedingung statt der Haftbedingung.

An undurchlässigen Wänden verschwindet der Volumenfluß sowie der konvektive Fluß durch die Wand. Der Impulsaustausch findet lediglich über den diffusiven Fluß

statt.

Geschwindigkeiten

Die Geschwindigkeiten an der Wand sind aufgrund der Haftbedingung gleich der Wandgeschwindigkeit \underline{u}_w selbst. Für stehende Wände gilt $\underline{u}_w = 0$.

Für die Berechnung der Impulsgleichungen ist es erforderlich, die an ein Randkontrollvolumen angreifenden Wandschubspannungen τ_w nach Betrag und Richtung zu bestimmen. Die Richtung wird durch die wandparallele Richtung des Geschwindigkeitsvektors im Zellmittelpunkt der wandnächste Zelle approximiert.

Nach FERZIGER UND PERIĆ [53] wird dazu ein lokales Koordinatensystem $(t, n, s)^T$ eingeführt, wobei t und n die wandparallele und wandnormale Richtung und s die auf t und n senkrecht stehende Richtung angeben.

Für die Wandnormal- und Wandtangentialspannungen τ_{nn} , τ_{nt} und τ_{ns} gilt dann:

$$\tau_{nn} = 2\nu \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0, \quad (3.109)$$

$$\tau_{nt} = \nu \frac{\partial u_t}{\partial n}, \quad (3.110)$$

$$\tau_{ns} = \nu \frac{\partial u_s}{\partial n}. \quad (3.111)$$

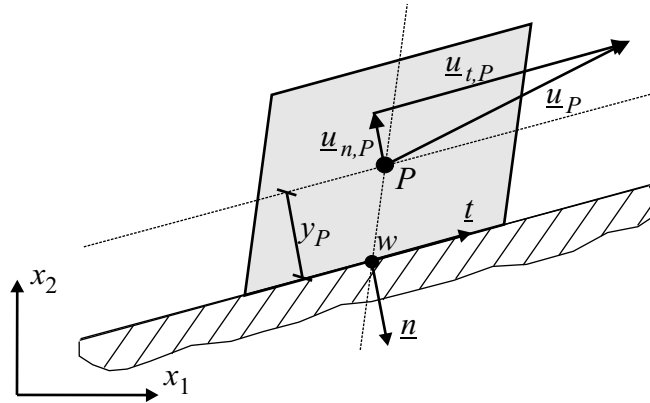


Bild 3.6: Meridionale Ansicht einer wandnächsten Zelle zur Implementierung der Wandrandbedingungen für die Impulsgleichungen

Bild 3.6 stellt eine wandnächste Zelle zur Implementierung der Wandrandbedingungen für die Impulsgleichungen dar. Für $\underline{t} = \underline{t}^{as}$ gilt:

$$\underline{t}^{as} = \frac{\underline{u}_{t,m,P}^{as}}{|\underline{u}_{t,P}^{as}|}, \quad (3.112)$$

während $t_\varphi = 1$ gilt.

Der meridionale Anteil des diffusiven Wandflusses \underline{F}_w^{asd} läßt sich mit Gl. 3.11 wie folgt berechnen, wobei ΔS_w der Flächeninhalt der Wandfläche ist:

$$\underline{F}_w^{asd} = \iint_{\Delta S_w} \tau_{nt} \underline{t}^{as} dS \approx \tau_{nt} \underline{t}^{as} \Delta S_w , \quad (3.113)$$

während der azimutale Anteil des diffusiven Wandflusses $F_{\varphi,w}^d$ wie folgt berechnet wird:

$$F_{\varphi,w}^d = \iint_{\Delta S_w} \tau_{ns} t_\varphi dS \approx \tau_{ns} t_\varphi \Delta S_w , \quad (3.114)$$

Der meridionale Anteil der Wandschubspannung τ_{nt} nach Gl. 3.110 wird mit den Geschwindigkeiten \underline{u}_P^{as} im Mittelpunkt der wandnächsten Zelle und \underline{u}_w^{as} an der Wand sowie dem normalen Wandabstand des wandnächsten Zellmittelpunktes y_P folgendermaßen approximiert:

$$\tau_{nt} \approx \nu \frac{\underline{t}^{as} (\underline{u}_P^{as} - \underline{u}_w^{as})}{y_P} . \quad (3.115)$$

Dagegen wird der azimutale Anteil der Wandschubspannung τ_{ns} nach Gl. 3.111 wie folgt berechnet wird:

$$\tau_{ns} \approx \nu \frac{(u_{\varphi,P} - u_{\varphi,w})}{y_P} . \quad (3.116)$$

Die Implementierung des meridionalen Anteils des diffusiven Flusses zum Iterationszähler m wird mittels einer nachgeführten Korrektur wie folgt vorgenommen:

$$\underline{F}_w^{asd,m} \approx \left(\nu \underline{u}^{as} \frac{\Delta S_w}{y_P} \right)^m + \left[-\nu \underline{u}^{as} \frac{\Delta S_w}{y_P} + \tau_{nt} \underline{t}^{as} \Delta S_w \right]^{m-1} , \quad (3.117)$$

während die nachgeführte Korrektur für den azimutalen Anteil wie folgt erfolgt:

$$F_{\varphi,w}^{d,m} \approx \left(\nu u_\varphi \frac{\Delta S_w}{y_P} \right)^m + \left[-\nu u_\varphi \frac{\Delta S_w}{y_P} + \tau_{ns} t_\varphi \Delta S_w \right]^{m-1} . \quad (3.118)$$

Druck und Druckkorrektur

Sowohl der Druck als auch die Druckkorrektur werden mit einer Neumann-Randbedingung, d.h. für einen konstanten Gradienten entlang der Netzlinien bestimmt.

Turbulenzgrößen

Für die turbulente kinetische Energie k wird sowohl die Dirichlet-Randbedingung $k_w = 0$ als auch eine Neumann-Randbedingung $\partial k / \partial n|_w = 0$ implementiert.

Für die in dieser Arbeit implementierten k - ε -Modelle wird eine ε -Randbedingung nach CHAPMAN UND KUHN [24] implementiert:

$$\varepsilon_w^{k-\varepsilon} = \nu \frac{4 k_P}{y_P^2} - \varepsilon_P . \quad (3.119)$$

Für die entsprechenden k - ω -Modelle wird der Wert der spezifischen Dissipation ω aus der asymptotischen Betrachtung $\omega_w \rightarrow \infty$. Er ist deshalb ohne weiteres nicht implementierbar. MENTER [106] verwendet die folgende Formulierung für ω_w :

$$\omega_w = \alpha_{\omega_w} \frac{6 \nu}{\beta y_P^2} . \quad (3.120)$$

Ausserdem empfiehlt MENTER [106], für den Vorfaktor $\alpha_{\omega_w} = 10$ zu wählen. Um bei sehr kleinen Wandabständen extrem große Werte von ω_w zu vermeiden, wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit, falls nicht explizit anders erwähnt, $\alpha_{\omega_w} = 1$ verwendet.

Die logarithmische Wandfunktion

Wie dem Kapitel 2.3.6 entnommen werden kann, bedeutet die Auflösung des Strömungsfeldes bis zur viskosen Unterschicht einen gestiegenen Rechenaufwand. Durch die lineare Beziehung zwischen dem dimensionslosen Wandabstand y^+ und der dimensionslosen Geschwindigkeit u^+ bleibt die Viskosität ν die laminare Viskosität ν_{lam} in der wandnächsten Zelle.

Befindet sich der geometrische Schwerpunkt P der wandnächsten Zelle – s. Bild 3.6 – im logarithmischen Bereich des turbulenten Geschwindigkeitsprofils, so gilt die entsprechend modifizierte Viskosität ν_{le} für die wandnächste Zelle. Der Index le in ν_{le} steht für „Local Equilibrium“.

Der logarithmische Bereich des turbulenten Grenzschichtprofils wird durch das Gleichgewicht zwischen der turbulenten Produktion und der turbulenten Dissipation gekennzeichnet. Die Viskosität ν_{le} läßt sich aus der „Theorie des lokalen fast Gleichgewichts“ wie folgt berechnen:

$$\nu_{le} = \nu_{lam} \frac{y^+ \kappa}{\ln(y^+ \tilde{E})} . \quad (3.121)$$

\tilde{E} ist die Modifikation von E der Gleichung 2.69 bei der Berücksichtigung der Rauigkeit der Wände und ist wie folgt definiert:

$$\tilde{E} = \exp(\kappa \tilde{C}) . \quad (3.122)$$

\tilde{C} ergibt sich aus der Superposition der empirischen Konstante C für glatte Wände und der empirischen Konstante für Wandrauigkeiten und lautet:

$$\tilde{C} = C - \frac{1}{\kappa} \ln \left(1 + 0.3 k_r^+ \right) . \quad (3.123)$$

In der Gleichung 3.123 ist k_r^+ die dimensionslose äquivalente Sandkornrauigkeit, die aus dem Verhältnis der äquivalenten Sandkornrauigkeit k_r und Wandabstand y_P mit dem dimensionslosen Wandabstand y^+ als Proportionalitätskonstante gebildet wird und lautet:

$$k_r^+ = y^+ \frac{k_r}{y_P} . \quad (3.124)$$

Da stets $k_r^+ \geq 0$ gilt, bewirkt die Berücksichtigung der Rauigkeit der Wände eine Erhöhung der Widerstandzahl, die sich in der Erhöhung der modifizierten Viskosität ν_{le} ausdrückt. Messungen von NIKURADSE [118] über die Rohrreibungszahlen für künstlich raue Rohre bestätigen diese Tatsache. Ferner hat NIKURADSE [118] die wichtige Feststellung gemacht, dass bei größeren Reynoldszahlen die Wandbeschaffenheit des Rohres auf die Schwankungsbewegung der Strömung ohne Einfluss ist, solange man von den Vorgängen in der Schmalen, von der Zähigkeit stark beeinflussten Zone in Wandnähe absieht.

Andere wichtige experimentelle Untersuchungen zum Rauigkeitsproblem finden sich bei SCHLICHTING [150] über systematische Messungen der äquivalenten Sandkornrauheit für eine größere Anzahl von regelmäßig angeordneten Rauheitselementen und SCHRÖDER [153] über die Anhaltspunkte über die Größe der äquivalenten Rauheitshöhen für eine Anzahl technisch wichtiger Rauheiten.

Im logarithmischen Bereich wird die k -Gleichung genauso gelöst wie bei der Integration in die viskose Wandschicht. Die ε -Gleichung jedoch wird in der Art modifiziert, dass sie in der wandnächsten Zellschicht nicht gelöst, sondern entsprechend Gl. 2.75 und $k = k_P$ vorgeschrieben wird.

3.6.4 Symmetrie

Es herrscht bei der Symmetrierandbedingung, die auch oft als reibungsfreie oder Euler-Wand bezeichnet wird, die entsprechende Anliegerandbedingung. Der Anteil des Massenflusses und somit des konvektiven Flusses, der senkrecht zum Rand steht, wird dabei unterbunden. Der Impulsaustausch findet über den diffusiven Fluss statt.

Geschwindigkeiten

Für die Symmetrie wird der diffusive Fluss über den Betrag und die Richtung der Schubspannung τ_{sym} vorgeschrieben:

$$\tau_{nn} = 2 \nu_{eff} \frac{\partial u_n}{\partial n} , \quad (3.125)$$

$$\tau_{nt} = \nu_{eff} \frac{\partial u_t}{\partial n} = 0 , \quad (3.126)$$

$$\tau_{ns} = \nu_{eff} \frac{\partial u_s}{\partial n} . \quad (3.127)$$

Der meridionale Anteil des diffusiven Flusses am Symmetrierand $\underline{F}_{sym}^{asd}$ läßt sich mit Gl. 3.11 wie folgt berechnen, wobei ΔS_{sym} der Flächeninhalt des Symmetrierands ist:

$$\underline{F}_{sym}^{asd} = \iint_{\Delta S_{sym}} \tau_{nn} \underline{n}^{as} dS \approx \tau_{nn} \underline{n}^{as} \Delta S_{sym} , \quad (3.128)$$

während der azimutale Anteil des diffusiven Flusses am Symmetrierand $F_{\varphi,sym}^d$ wie folgt berechnet wird:

$$F_{\varphi,sym}^d = \iint_{\Delta S_{sym}} \tau_{ns} n_{\varphi} dS \approx \tau_{ns} n_{\varphi} \Delta S_{sym} = 0 , \quad (3.129)$$

Aufgrund der Achsensymmetrie sind die Zellen in azimutale Richtung nicht geometrisch verzerrt und somit gilt $n_{\varphi} = 0$.

Die Implementierung des meridionalen Anteils des diffusiven Flusses zum Iterationszähler m wird mittels einer nachgeführten Korrektur wie folgt vorgenommen:

$$\underline{F}_{sym}^{asd,m} \approx \left(\nu_{eff} \underline{n}^{as} \frac{\Delta S_{sym}}{y_P} \right)^m + \left[-\nu_{eff} \underline{n}^{as} \frac{\Delta S_{sym}}{y_P} + \tau_{nn} \underline{n}^{as} \Delta S_{sym} \right]^{m-1} , \quad (3.130)$$

während die nachgeführte Korrektur für den azimutalen Anteil wie folgt erfolgt:

$$F_{\varphi,w}^{d,m} \approx \left(\nu u_{\varphi} \frac{\Delta S_w}{y_P} \right)^m + \left[-\nu u_{\varphi} \frac{\Delta S_w}{y_P} + 0 \right]^{m-1} . \quad (3.131)$$

In der Gleichung 3.130 wird τ_{nn} wie folgt berechnet:

$$\tau_{nn} \approx 2 \nu_{eff} \frac{\underline{n}^{as} \left(\underline{u}_P^{as} - \underline{u}_{sym}^{as} \right)}{y_P} . \quad (3.132)$$

Druck und Druckkorrektur

Auf den Symmetrierändern wird die Druckkorrektur mit der Neumann-Randbedingung für einen verschwindenden Gradienten extrapoliert. Der statische Druck wird linear aus dem Rechengebiet extrapoliert.

Turbulenzgrößen

Alle Turbulenzgrößen werden mit einer Neumann-Randbedingung für einen verschwindenden Gradienten festgesetzt.

3.7 Mehrblock-Strategie

Die Mehrblock-Strategie ist eine Methode, die bis zu einem bestimmten Maße die Effizienz von strukturierten und die Flexibilität von unstrukturierten Verfahren kombinieren kann. Im Rahmen dieser Arbeit wird Mehrblock-Strategie verfolgt, der auf einer Idee von LILEK ET AL. [102] basiert und bei dem die Netzknoten zweier angrenzender Blöcke nicht aufeinander liegen müssen³¹, siehe Bild 3.7. Die Blöcke können aufgrund einer flexiblen Datenstruktur beliebig zueinander orientiert sein. Ferner eignet sich dieser Algorithmus hervorragend für eine Parallelisierung.

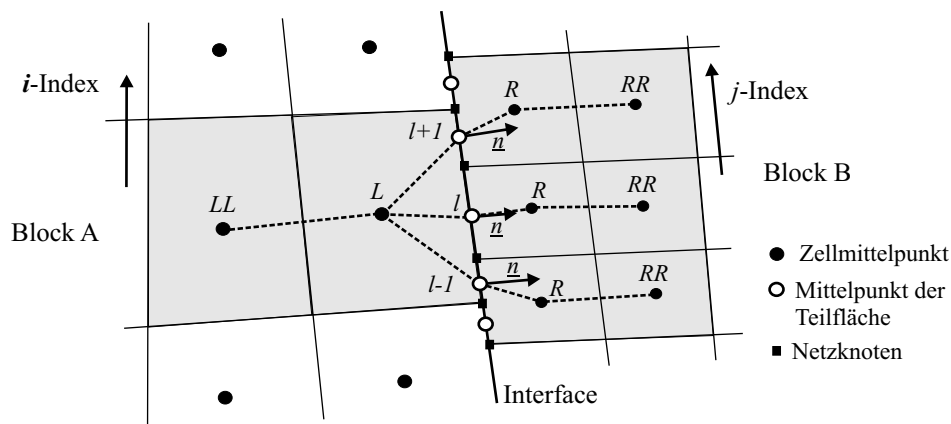


Bild 3.7: Grenzfläche von zwei Blöcken mit nichtpassenden Knoten

Eine einfache Möglichkeit besteht grundsätzlich darin, das Interface als Rand zu behandeln und die Randzellen durch Interpolation mit einer Randbedingung zu belegen. Bei diesem Vorgehen kann die Konservativität des Verfahrens jedoch nicht gewährleistet werden. Deshalb wird das Blockinterface mit demselben Algorithmus zur Bestimmung der Flüsse behandelt wie das Innere des Rechenblocks.

Bei der Verwendung von höherwertigen Diskretisierungsverfahren für die konvektiven Terme sind in jedem Block zwei Zellschichten betroffen, die in Bild 3.7 mit L und LL für Block A und R und RR für Block B gekennzeichnet sind.

Der Ablauf für die Teilflächen am Interface erfolgt über der Abarbeitung eines gesonderten Feldes, in dem die Koeffizientenmatrix $\underline{A}_{A/B}$ und die rechte Seite $\underline{b}_{A/B}$ der beiden angrenzenden Blöcke A bzw. B angepasst werden, s. Bild 3.7. In dem gesonderten Feld für jedes Blockinterface wird die gesamte Information gespeichert, die zur Auswertung des Oberflächenintegrals notwendig ist. Ausführlichere Beschreibung über den schematischen Programmablauf findet sich z.B. bei SKODA [167].

³¹In der Literatur ist diese Art der Grenzfläche als „non-matching interface“ bekannt.

Parallelisierung

Der ausschlaggebende Vorteil der Mehrblockstrategie für einen CFD-Algorithmus ist sicherlich die verbesserte Möglichkeit, qualitativ hochwertige Zellengeometrien in ein komplexes Rechengbiet einzubringen. Ausserdem hat die Mehrblockstrategie den ausschlaggebenden Vorteil, dass für rechenintensive Problemstellungen mehrere Computer parallel geschaltet werden können, ohne die Implementierung des linearen Solvers SIP signifikant zu ändern.

Für die Parallelisierung wird eine Software benötigt, die Aufgaben verteilt, überwacht und die Kommunikation der parallel geschalteten Computer sicherstellt. Dazu werden die frei verfügbaren Software-Bibliotheken Message Passing Interface MPI herangezogen.

Es ist darauf zu achten, dass Aufgaben „gerecht“ verteilt werden, um die Blindleistung, die während des Kommunikationsprozesses entsteht, zu verringern. Die Größe der Aufgaben muss möglichst der Leistungsfähigkeit der Computer entsprechen. In einer Sprache mit dynamischer Speicherverwaltung wie beispielsweise C/C++ erleichtert sich die Aufgabenverteilung bei stark inhomogener Größe der Aufgaben aufgrund der stark variierende Leistungsfähigkeit der Computer insofern, dass der Computercode nicht immer wieder übersetzt werden muss.

3.8 Besonderheiten für die Implementierung der Transportgleichungen der Turbulenzmodelle

Betrachtet man beispielsweise die beiden Quellterme der Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k in Gleichung 2.48, so kann man fragen, ob die Terme stets positiv sind, also eine echte Quelle darstellen, oder ob sie stets negativ sind, d.h. sie stellen eine echte Senke dar.

Da sich der Produktionsterm P_k als eine Summe aus Quadraten von Geschwindigkeitsgradienten darstellen läßt und da die turbulente Viskosität ν_T stets positiv ist, gilt $P_k \geq 0$ stets, siehe Gleichung 2.51. Die turbulente Dissipationsrate ε ist definitionsgemäß stets positiv. Aus der Gegebenheit der turbulenten Dissipationsrate ε , die in der Gleichung ein negatives Vorzeichen hat, läßt sich eine modifizierte Form formulieren, die zur Erhöhung der Diagonaldominanz der Koeffizientenmatrix für k , $\underline{\underline{A}}_k$ dienen kann:

$$S_k = P_k - \varepsilon \implies S_k^{mod} = P_k - \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{m-1} k^m \quad (3.133)$$

Wendet man das gleiche Gedankenexperiment für die Transportgleichung der turbulenten Dissipationsrate ε mit der besonderen Beachtung, dass der zweite Quellterm in der Gleichung 2.49 mit $T_T = k/\varepsilon$ nach Gl. 2.37 die Nichtlinearität von ε aufweist, an, so ergibt sich die modifizierte Form der Quellterme:

$$S_\varepsilon = \frac{C_{\varepsilon 1} f_1 P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon}{T_T} \implies S_\varepsilon^{mod} = C_{\varepsilon 1} f_1 P_k \left(\frac{1}{T_T}\right)^{m-1} - C_{\varepsilon 2} f_2 \left(\frac{1}{T_T}\right)^{m-1} \varepsilon^m \quad (3.134)$$

Die Anwendung des gleichen Gedankenexperiments erfolgt auch für die Transportgleichungen des k - ω Turbulenzmodells. Auf eine explizite Darstellung der Gleichungen wird an dieser Stelle verzichtet.

Wie bei den anderen Größen kann eine Relaxation auch für die turbulenten Größen k , ε bzw. ω und ν_T wie folgt verwendet werden.

$$\phi^m = \alpha_{turb} \phi^m + (1 - \alpha_{turb}) \phi^{m-1} . \quad (3.135)$$

In der Gleichung 3.135 bezeichnet die Größe ϕ eine der oben genannten turbulenten Größen. α_{turb} ist der Unterrelaxationsfaktor und es gilt $0.1 \leq \alpha_{turb} \leq 0.5$.

Physikalisch ist es sinnvoll, dass die berechnete turbulente Viskosität ν_T einen unendlichen Wert nicht erreichen. Dazu wird eine Begrenzungsvorschrift, die von den verschiedenen Klassen der Turbulenzmodelle abhängt, wie folgt angewendet:

$$(\nu_T/\nu)_{max}^{k-\varepsilon} \approx 10^5 \quad (\nu_T/\nu)_{max}^{k-\omega} \approx 10^8 . \quad (3.136)$$

Ausserdem wird für die Dämpfungsfunktionen f_μ , f_1 und f_2 der Low-Reynolds-Number-Turbulenzmodelle eine Begrenzung derart angewendet, so dass sie Werte zwischen Null und Eins annehmen.

Kapitel 4

Validierung

4.1 Rohrströmung

Drallfreie laminare Rohreinlaufströmungen sind seit eh und je der Gegenstand von theoretischer, experimenteller sowie numerischer Forschung. Das strömungsmechanische Phänomen in Rohrströmungen kann in zweierlei Weise aufgeteilt werden, einerseits in hydrodynamisch nicht ausgebildete und andererseits in vollausgebildete Strömung. Wird ein mittleres Geschwindigkeitsprofil am Einlass $u_z|_{z=0} = \bar{u}_z = \text{const.}$ vorgegeben, wobei z die Achse der Hauptströmungsrichtung ist, so ist eine gewisse Einlaufänge l_E zu beobachten, entlang der sich das vorgegebene Geschwindigkeitsprofil verformt. Bei $z = l_E$ wird 99% der maximalen Geschwindigkeit U_{max} erreicht. Für $z > l_E$ verformt sich das Geschwindigkeitsprofil also nahezu nicht mehr. Die Strömung ist ausgebildet und es gilt:

$$u_z(r, z) = u_z(r) , \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 , \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} \neq 0 . \quad (4.1)$$

Die Darstellung der Navier-Stokes Gleichungen in dem zu der Strömungskonfiguration passenden Zylinderkoordinatensystem zeichnet sich mit dem Vorteil aus, dass aufgrund der Drallfreiheit $u_\varphi = 0$ die Impulsgleichung in azimuthaler Richtung, s. Gleichung 2.8 sich völlig entartet.

Im Bereich $0 \leq z < l_E$ herrscht die hydrodynamisch nicht ausgebildete Strömung. Aus der theoretischen Überlegung und bei der Betrachtung der Kontinuitätsgleichung 2.6 ist ersichtlich, dass in dem Bereich $u_r = u_r(r, z) \neq 0$ gilt. Aus der Kontinuitätsgleichung 2.6 ist ersichtlich, dass $u_r = u_r(r, z)$ und $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ einander bedingen

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} \neq 0 \quad \iff \quad u_r \neq 0 . \quad (4.2)$$

Unter Verwendung der Ordnungsanalyse können die Navier-Stokes Gleichungen weiter vereinfacht werden, da aufgrund von $u_r \ll 1$ die Ableitungen $\frac{\partial u_r}{\partial r}$ und $\frac{\partial u_r}{\partial z}$ vernachlässigt werden können:

$$\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \approx 0, \quad (4.3)$$

$$0 \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \nu \frac{u_r}{r^2}, \quad (4.4)$$

$$u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \quad (4.5)$$

Die ausgebildete Rohrströmung stellt einen interessanten Fall für die Validierung dar, weil die Navier-Stokes Gleichungen sich vereinfachen. Zusätzlich zur Impulsgleichung in azimuthaler Richtung ist die Kontinuitätsgleichung 2.6 auch völlig entartet. Es ergeben sich folgende Differentialgleichungen

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.6)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right], \quad (4.7)$$

die unter der Verwendung der folgenden Randbedingungen¹ für die Gleichung 4.7

$$u_z|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (4.8)$$

folgende analytische Lösung liefert, s. z.B. SCHILLING [144]:

$$u_z(r) = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right). \quad (4.9)$$

Aus der Differentialgleichung 4.6 folgt direkt folgende Erkenntnis:

$$p \neq p(r) \quad \text{bzw.} \quad p(r, z) = p(z). \quad (4.10)$$

4.1.1 Hydrodynamisch nicht ausgebildete und vollaugedete laminare Rohrströmung

Vorbetrachtung und Strömungskonfiguration

Um die beiden Effekte in der Rohrströmung erfassen zu können, nämlich die Grenzschichtausbildung entlang der Einlaulänge l_E einerseits und die vollaugedete laminare Rohrströmung andererseits, ist die Kenntnis von der laminaren hydrodynamischen Einlaulänge nötig. Sie ist wie folgt zu berechnen:

¹ R in der Gleichung 4.8 bezeichnet den Rohrradius.

Tabelle 4.1: Verschiedene empirische Werte für die Konstante a_E zur Berechnung der hydrodynamischen laminaren Einlaufänge l_E

Autor	a_E [-]	u_z/U_{max} [-]
KAYS UND CRAWFORD [80]	0.05	98 %
BAEHR UND STEPHAN [6]	0.056	99 %
TRUCKENBRODT [189]	0.06	99 %

$$l_E = a_E Re D_h . \quad (4.11)$$

Re ist die Reynoldszahl, D_h ist der hydraulische Durchmesser, was dem Durchmesser des Rohres entspricht und a_E ist eine empirisch gewonnene Zahl, die in der Literatur verschieden angegeben wird, s. Tab. 4.1, wobei hier für die geometrische Strömungskonfiguration $a_E = 0.05$ verwendet wird.

In Bild 4.1 ist die geometrische Strömungskonfiguration skizziert. Das Verhältnis Rohrlänge zu Rohrradius ist nicht längentreu dargestellt. Als Gesamtlänge des Rohres l_{ges} wird $1.5 \cdot l_E$ festgelegt. Für die Rechnung wird $Re = 100$ verwendet, so dass nach Gleichung 4.11 sich die Einlaufänge l_E zu dem Rohrradius R wie folgt verhält:

$$\frac{l_E}{R} = 0.05 \cdot 100 \cdot 2 = 10 , \quad (4.12)$$

wobei die Kombination $(l_E, R) = (1.0 \text{ m}, 0.1 \text{ m})$ gewählt wird. Die Stoffgrößen für das Fluid sind die kinematische Viskosität ν und die Dichte ρ mit $\nu = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ und $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$. Mit den bereits bekannten Werten errechnet sich die volumetrisch gemittelte Geschwindigkeit zu $\bar{u}_z = 7.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}/\text{s}$.

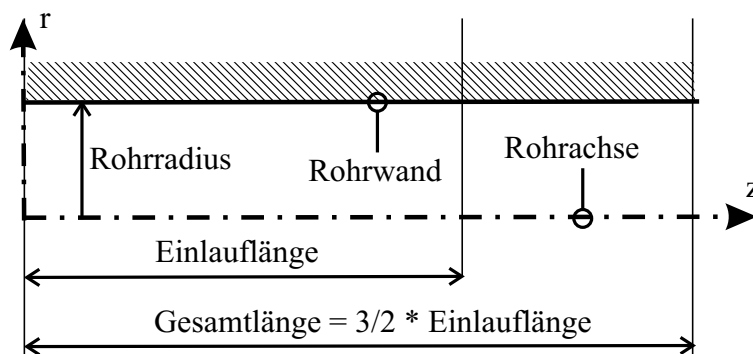


Bild 4.1: Skizze der geometrischen Strömungskonfiguration

Numerische Simulation und Diskussion der Ergebnisse

Bild 4.2 zeigt das Ergebnis der numerischen Simulation. Es ist zu erkennen,

dass sich für $z \geq 1.0\text{ m}$ das Geschwindigkeitsprofil nur marginal ändert, während bei $z = 0\text{ m}$ der Verformungsgradient am größten ist.

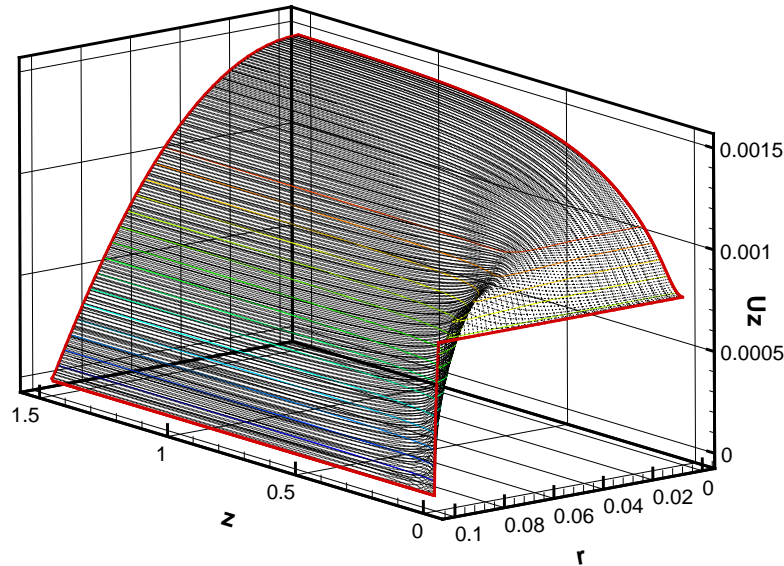


Bild 4.2: Rohrströmung bei $Re = 100$. Geschwindigkeitsprofil in Hauptströmungsrichtung u_z als Funktion von $u_z = u_z(r, z)$.

Bild 4.3 zeigt den Vergleich der ausgebildeten Geschwindigkeitsprofile zwischen der numerischen Simulation und der analytisch berechneten. Dabei wird $u_z(r)$ mit der volumetrisch gemittelten Geschwindigkeit $\bar{u}_z = U_{ref}$ und die radiale Richtung r mit dem hydraulischen Durchmesser $D_h = L_{ref}$ entdimensioniert. Das numerische Ergebnis zeigt mit dem analytischen Ergebnis gute Übereinstimmung.

Das linke, obere Bild des Bildes 4.4 ist der Nachweis der theoretischen Überlegung, die in Gleichung 4.2 zum Ausdruck gekommen ist. Es zeigt sich in dem vergrößerten Strömungsbild im Bereich der Einlaufkante $0 \leq z \leq 0.125\text{ m}$ deutlich, dass Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung u_r existiert, was vorhergesagt wurde und auch in Gleichung 4.3 gezeigt wurde. Weitere Analyse zeigt, dass u_r von der Rohrwand zur Achse hin sehr schnell anwächst und nach einem Maxima mit geringen Gradienten zur Achse hin wieder verschwindet.

Das untere Bild 4.4 zeigt den Druckverlauf. Verbunden mit der oben diskutierten theoretischen Überlegung zeigt sich, dass der stärkste Druckabfall am gleichen Ort, d.h. im Bereich der Einlaufkante stattfindet. Das Erkenntnis von Gleichung 4.10, dass im Bereich der vollentwickelten Strömung der Druck in der radialen Richtung konstant ist und somit der Druck nur eine Funktion der Strömungsrichtung $p(z)$ ist, gibt das untere Bild 4.4 genau wieder.

Der laminare Druckverlustbeiwert $\zeta_{E,Rohr}$ im beliebigen Bereich der hydrodynamisch noch nicht ausgebildeten Rohrströmung läßt sich nach STEPHAN [178] durch eine empirische Korrelation wie folgt annähern:

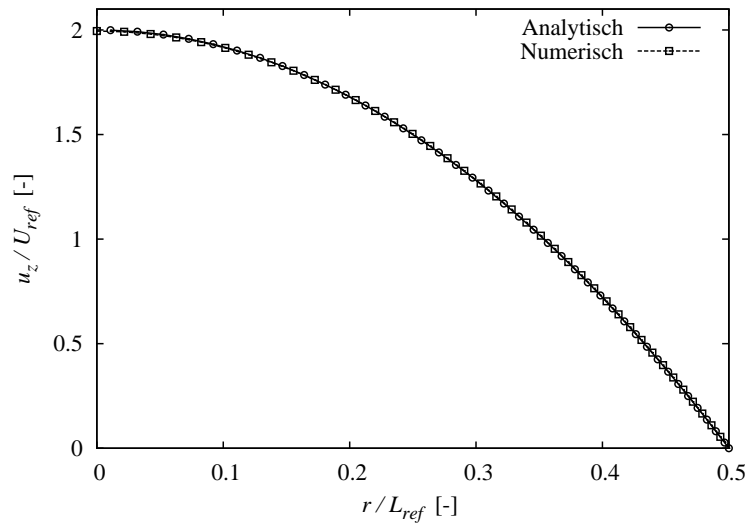


Bild 4.3: Rohrströmung bei $Re = 100$. Vergleich des numerisch und analytisch berechneten, vollausbildeten Geschwindigkeitsprofils in entdimensionierter Darstellung $u_z/U_{ref} = f(r/L_{ref})$.

$$\zeta(z)_{E,Rohr} = \frac{p_{ein} - p(z)}{\frac{\rho}{2} \bar{u}_z^2} = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \bar{u}_z^2} \approx (1.25 + 64 \cdot L(z)) \tanh\left(11.016 \cdot \sqrt{L(z)}\right), \quad (4.13)$$

wobei $L(z) = z \cdot (D_h \cdot Re)^{-1}$ gilt.

Die Tabelle 4.2 zeigt den Vergleich des empirisch – nach STEPHAN [178] – und numerisch ermittelten Druckverlustbeiwerts $\zeta_{E,Rohr}$ für eine hydrodynamisch nicht ausgebildete laminare Rohrströmung. Dabei werden die Werte für $z = l_E = 1.0\text{ m}$ ermittelt.

Tabelle 4.2: Vergleich des empirisch und numerisch berechneten Druckverlustbeiwerts $\zeta_{E,Rohr}$ für eine hydrodynamisch nicht ausgebildete laminare Rohrströmung

Rohreinlaufströmung	$\zeta_{E,Rohr} [-]$
Empirisch	4.3859
Numerisch	4.88398

Die auf die empirische Lösung bezogene Abweichung des numerischen Ergebnisses lautet²

²Diese bezogene Abweichung hat keine sehr große Aussagekraft, da erstens keine analytische Lösung vorhanden ist und zweitens der Vergleich mit empirischer Formel, die ca. vier Jahrzehnte alt ist und die ebenfalls aus numerischer Berechnung mit den verbundenen Ressourcennachteilen hinsichtlich numerischer Verfahren, Rechenleistung etc. gegenüber den heute verfügbaren Ressourcen gewonnen wurde, durchgeführt wird.

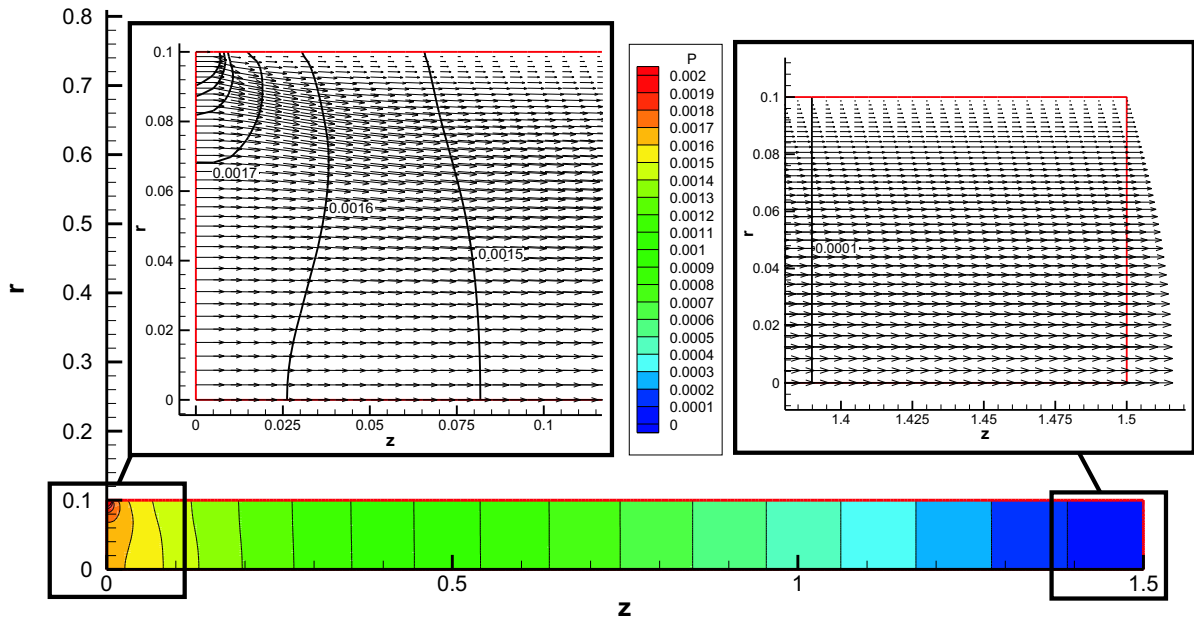


Bild 4.4: Druckkonturen $p(r, z)$ in der gesamten Rohrlänge (unteres Bild), vergrößert dargestellte Geschwindigkeitsvektoren am Anfang des Rohres (linkes, oberes Bild) und vergrößert dargestellte Geschwindigkeitsvektoren am Ende des Rohres (rechtes, oberes Bild)

$$\Xi_{\zeta_{E,Rohr}} = \frac{|\zeta_{E,Rohr,Empirisch} - \zeta_{E,Rohr,Numerisch}|}{\zeta_{E,Rohr,Empirisch}} \cdot 100\% . \quad (4.14)$$

$\Xi_{\zeta_{E,Rohr}}$ beträgt bei dem betrachteten Fall 11.356%.

Für die vollentwickelte laminare Rohrströmung mit der Länge l_{Rohr} gilt

$$\zeta_{Rohr} = \frac{p_{ein} - p_{aus}}{\frac{\rho}{2} \bar{u}_z^2} = \lambda_{Rohr} \frac{l_{Rohr}}{D_h} \quad \text{mit} \quad \lambda_{Rohr} = \frac{64}{Re} . \quad (4.15)$$

λ_{Rohr} in der obigen Gleichung 4.15 ist die Rohrreibungszahl, auch Widerstandszahl genannt³.

³ Die Beziehung für $\lambda = \lambda_{Rohr}$ leitet sich aus dem Kräftegleichgewicht zwischen dem Druckgradienten $\frac{dp}{dz}$ und die Schubspannung τ wie folgt

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} \quad \text{bzw.} \quad \tau_{wand} = \frac{R}{2} \frac{dp}{dz} \Big|_{r=R} . \quad (4.16)$$

Auf der einen Seite gilt für den Druckgradient

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\lambda}{D_h} \frac{\rho}{2} \bar{u}_z^2 . \quad (4.17)$$

Auf der anderen Seite gilt der Newtonsche Schubspannungsansatz

Wird das ausgebildete Geschwindigkeitsprofil bei $Re = 100$ am Einlass unter Verwendung des gleichen Rohres vorgeschrieben, so ergibt sich der in der Tabelle 4.4 dargestellte, analytisch und numerisch berechnete Druckverlustbeiwert ζ_{Rohr} . Das numerische Ergebnis wird in zwei Versionen präsentiert, die sich durch numerische Parameter unterscheiden. Die Version „Numerisch^{init}“ ist die Anfangsversion und die Version „Numerisch^{opt}“ ist die optimierte Version. Der Unterschied zwischen den beiden numerischen Versionen wird in der Tabelle 4.3 dargestellt.

Tabelle 4.3: Numerische Einstellungen zu Anfangs- bzw. optimierte Version

Numerische Einstellungen	„Numerisch ^{init} “	„Numerisch ^{opt} “
Diskretisierung	MINMOD	MINMOD
Netz ($i \times j$)	300 x 20	300 x 40
Expansionsverhältnis q	1.00	0.97
Konvergenzkriterium	1e-04	1e-05

Tabelle 4.4: Vergleich des analytisch und numerisch berechneten Druckverlustbeiwerts ζ_{Rohr} für eine laminar vollausgebildete Rohrströmung

vollentwickelte laminare Rohrströmung	$\zeta_{Rohr} [-]$
Analytisch	4.8
Numerisch ^{init}	4.600568
Numerisch ^{opt}	4.786453

Die auf die analytische Lösung bezogene Abweichung des numerischen Ergebnisses lautet

$$\Xi_{\zeta_{Rohr}} = \frac{|\zeta_{Rohr,Analytisch} - \zeta_{Rohr,Numerisch}|}{\zeta_{Rohr,Analytisch}} \cdot 100\% . \quad (4.20)$$

$\Xi_{\zeta_{Rohr}}^{init}$ bzw. $\Xi_{\zeta_{Rohr}}^{opt}$ beträgt bei dem betrachteten Fall 4.16544% bzw. 0.282292%.

$$\tau = \mu \left(\frac{d}{dr} u_z(r) \right) \quad (4.18)$$

und das Geschwindigkeitsprofil $u_z(r)$ als Funktion von \bar{u}_z wie folgt

$$u_z(r) = 2\bar{u}_z \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) . \quad (4.19)$$

Um die Beziehung für λ_{Rohr} , s. Gl. 4.15 zu erhalten, muss man die Gleichungen 4.17 bis 4.19 in Gleichung 4.16 einsetzen.

Bestimmung der hydraulischen Einlauflänge

Abschließend zeigt das Bild 4.5 den Geschwindigkeitsverlauf entlang der Rohrachse zur Bestimmung der Konstante a_E , die die Einlauflänge der hydrodynamisch nicht ausgebildete Strömung charakterisiert. Auf der Abzisse ist die Rohrlänge mit der Referenzlänge $L_{ref} = D_h$ entdimensioniert. Auf der Ordinate ist die Geschwindigkeit mit der maximalen Geschwindigkeit U_{max} entdimensioniert. Die vertikale und horizontale Markierungslinien verdeutlichen die Lage von $a_E \cdot Re = 5.71$ und $u_z/U_{max} = 99\%$.

Es ist an Hand des Bildes klar, dass U_{max} die maximale Geschwindigkeit des ausgebildeten Geschwindigkeitsprofils ist, die auf Grund des parabolischen Charakters auf der Rohrachse $r = 0$ liegt und das Doppelte der volumetrisch gemittelten Geschwindigkeit beträgt.

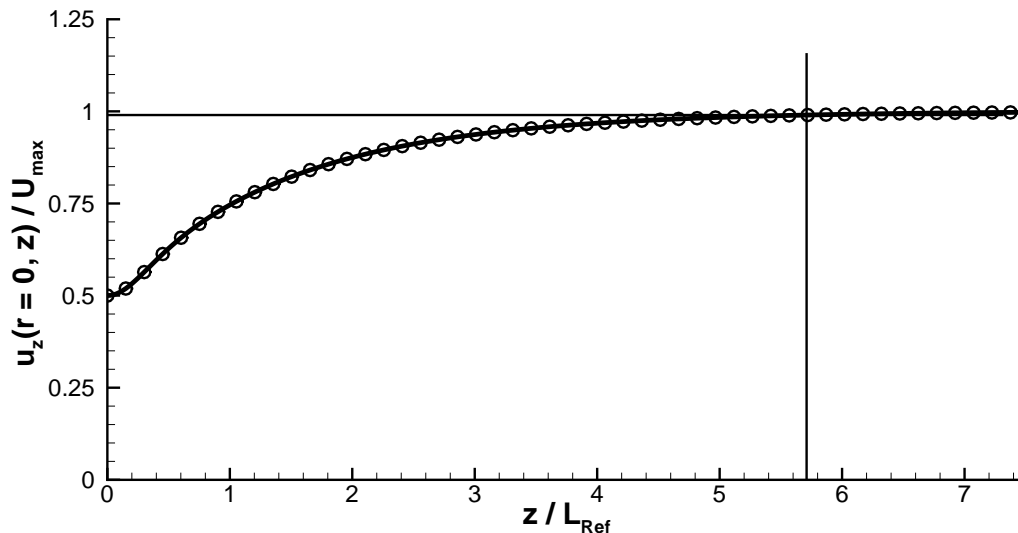


Bild 4.5: Verlauf der Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung entlang der Rohrachse. Die vertikale Markierungslinie steht bei $z/L_{ref} = 5.71$. Die horizontale Markierungslinie liegt bei $u_z/U_{max} = 0.99$, was der Definition der Grenzschicht entspricht.

Das Bild 4.5 macht die Bestimmung der Konstante a_E , die die Einlauflänge der hydrodynamisch nicht ausgebildete Strömung charakterisiert, möglich. Bei der Definition, dass die Strömung ausgebildet ist, wenn 99% der maximalen Geschwindigkeit U_{max} erreicht wird, kann festgestellt werden, dass a_E bei Reynoldszahl von 100 und bei der Lage der vertikalen Markierungslinie bei $z/L_{ref} = 5.71$ zu $a_E = 0.0571 \pm 0.00001$ sich bestimmt.

Detaillierte Strömungsphänomene zeigt das Bild 4.6. Mit der Verwendung des BERNOULLI-Satzes für Strömungen mit Verlusten kann der Totaldruckverlust $\Delta p_{t,1 \rightarrow 2}$ ermittelt werden. Hier wird der Totaldruckverlust mit dem dynamischen

Druck $p_{d,ref}$, der mit der Referenzgeschwindigkeit U_{ref} gebildet wird, dimensionslos gemacht. Ferner wird die Totaldruckzahl in ihren statischen und dynamischen Anteilen separiert. Formelmäßig erfolgt die Vorgehensweise wie folgt:

$$\begin{aligned}\Psi_t &= \frac{\Delta \bar{p}_{t,1 \rightarrow 2}}{\frac{\rho}{2} \cdot U_{ref}^2} = \frac{\bar{p}_{s,z/L_{ref}} - \bar{p}_{s,z/L_{ref}=1}}{\frac{\rho}{2} \cdot U_{ref}^2} + \frac{\bar{p}_{d,z/L_{ref}} - \bar{p}_{d,z/L_{ref}=1}}{\frac{\rho}{2} \cdot U_{ref}^2} \quad (4.21) \\ &= \Psi_s(z/L_{ref}) + \Psi_d(z/L_{ref}) .\end{aligned}$$

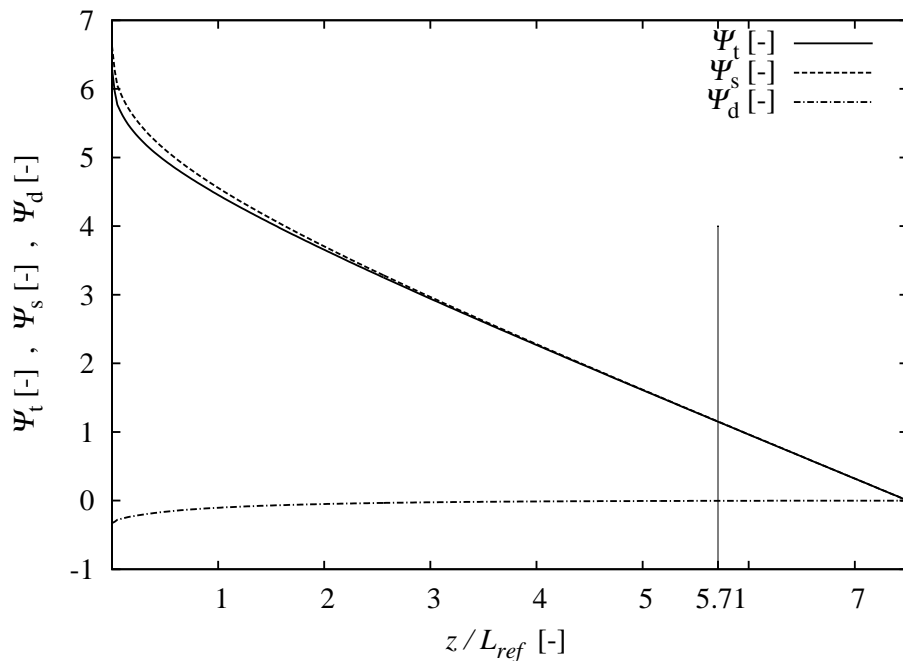


Bild 4.6: Verlauf der Druckzahlen in Hauptströmungsrichtung.

Links der vertikalen Markierungslinie bei $z/L_{ref} = 5.71$ im Bild 4.6 ist der Bereich der Einlaufströmung. Es ist zu erkennen, dass bei $z/L_{ref} = 0.0$ der Gradient von Ψ_t am größten ist, weil dort der Geschwindigkeitsgradient am größten ist. Ψ_t nimmt mit z/L_{ref} immer langsamer ab, bis zum Erreichen der Einlauflänge. Ab da nimmt Ψ_t konstant ab.

Es ist an Hand des Bildes 4.6 ausserdem zu erkennen, dass der statische Druck nicht nur wegen der Reibung abnimmt. Der statische Druck gibt auch seine Energie dem dynamischen Druck zur Bildung des Geschwindigkeitsprofil ab.

4.1.2 Turbulente Rohrströmung

Die im Kapitel 4.1.1 verwendete Strömungskonfiguration wird hier beibehalten. Eine Ausnahme betrifft notwendigerweise die Reynoldszahl, die hier zu $Re = 1 \cdot 10^6$ gewählt wird. Die numerische Parametereinstellungen sind in der Tabelle 4.5 angegeben.

Tabelle 4.5: Numerische Parametereinstellungen der turbulenten Rohrströmung

	Numerische Parametereinstellungen
Diskretisierung	MINMOD
Netz ($i \times j$)	300 x 40
Expansionsverhältnis q	0.97
Konvergenzkriterium	$1e-07$

Es wird an Hand von $Re = 1 \cdot 10^6$ diskutiert, welches der implementierten Turbulenzmodelle geeignet ist, um turbulente Rohrströmungen berechnen zu können.

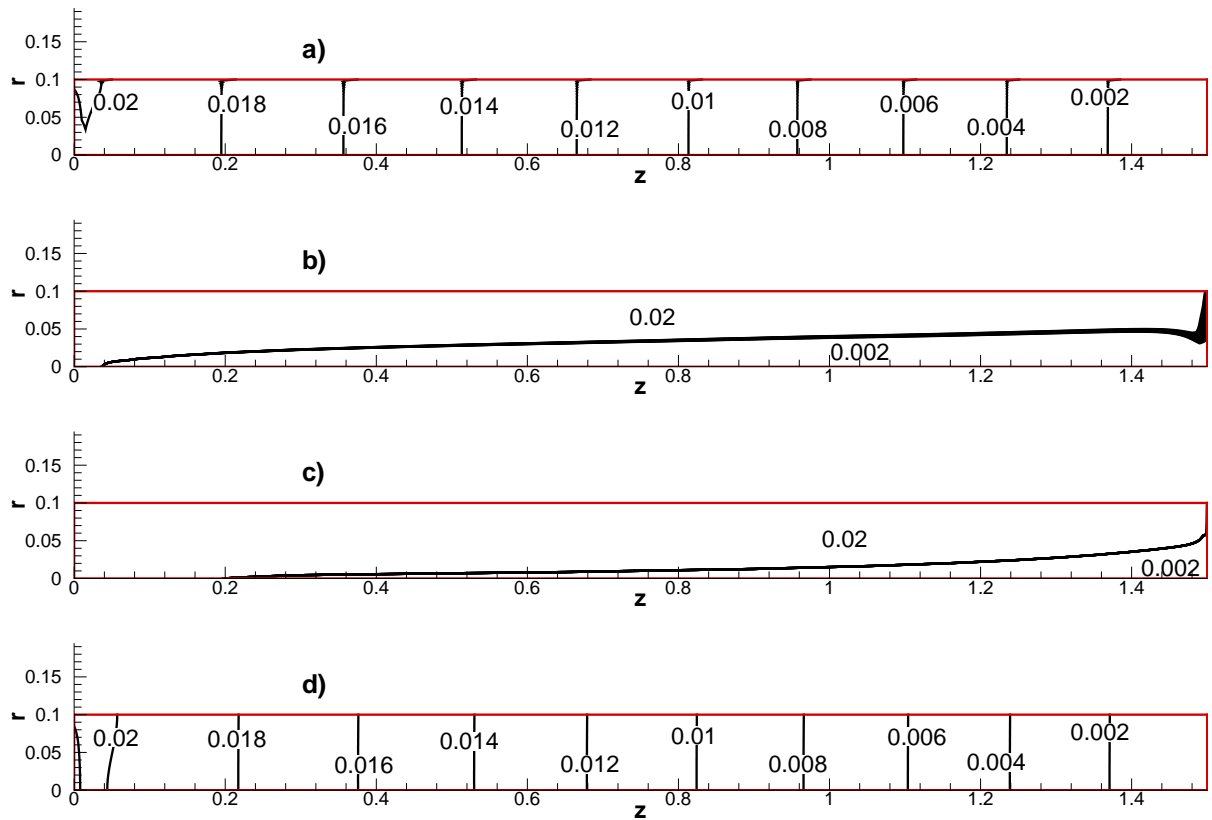


Bild 4.7: Turbulente Rohrströmung bei $Re = 10^6$. Vergleich der Turbulenzmodelle an Hand der Druckkonturen Ψ : a) Baldwin-Barth-Eingleichungsmodell, b) k - ε -Modell, c) k - ω -Modell und d) k - ε -LCL-SZL-MMU-Modell.

Das Bild 4.7 zeigt den Verlauf der Druckkonturen Ψ , die das Rechenergebnis mit den implementierten Turbulenzmodellen darstellen. An dieser Stelle wird von der **notwendigen Richtigkeit** gesprochen, wenn ein Rechenergebnis qualitativ die theoretische sowie erfahrungsbasierte Erwartung erfüllt. Eine hier verwendete notwendige Richtigkeit ist die Tatsache bzw. die Erwartung, dass Druckkonturen qualitativ senkrecht zur Rohrachse bzw. -innenwand verlaufen.

Während das Baldwin-Barth-Eingleichungsmodell und das nichtlineare k - ε -LCL-SZL-MMU-Modell die notwendige Richtigkeit erfüllen, versagen k - ε - und k - ω -Modell, die notwendige Richtigkeit wiederzugeben. Somit entfällt die Diskussion über die **hinreichende Richtigkeit**. Die Wahl des Turbulenzmodells beschränkt sich für die turbulenten Rohrströmungen auf das Baldwin-Barth-Eingleichungsmodell und das nichtlineare k - ε -LCL-SZL-MMU-Modell.

4.2 Strömung in einem Ringrohr

In diesem Abschnitt wird die Strömung in einem Ringrohr, das aus zwei konzentrisch angeordneten Rohre besteht, betrachtet. Alle theoretischen Überlegungen, die im vorigen Abschnitt bzw. Kap. 4.1 durch die Gleichungen 4.1 bis 4.7 dargestellt wurden, gelten hier auch.

Auch hier kann das strömungsmechanische Phänomen in zweierleiweise aufgeteilt werden, nämlich in hydrodynamisch nicht ausgebildete und vollausgebildete Strömung. Für die analytische Lösung der vollausgebildeten Ringrohr-Strömung werden folgende Randbedingungen⁴ für die Gleichung 4.7 verwendet:

$$u_z|_{r=r_i} = 0, \quad u_z|_{r=r_a} = 0 \quad (4.22)$$

Die analytische Lösung wird in der Form, durch die man die Strukturähnlichkeit der Lösung zu der Lösung in der Gleichung 4.9 erkennen kann, wie folgt angegeben:

$$u_z(r) = \frac{r_a^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(1 - \left(\frac{r}{r_a} \right)^2 \right) + \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \frac{(r_i^2 - r_a^2)}{\ln(r_i/r_a)} \ln \left(\frac{r}{r_a} \right). \quad (4.23)$$

Der erste Term der rechten Seite der Gleichung 4.23 ist ein quadratischer Term wie in der Gleichung 4.9, der die vollständige analytische Lösung der laminaren Rohrströmung darstellt. Der zweite Term der rechten Seite der Gleichung 4.23 treten zusätzlich für die vollausgebildete Ringrohr-Strömung auf.

⁴In der Gleichung 4.22 bezeichnet r_i den Radius des inneren Rohres und r_a den Radius des äußeren Rohres.

4.2.1 Hydrodynamisch nicht ausgebildete und vollaagebildete laminare Strömung in einem Ringrohr

Vorbetrachtung und Strömungskonfiguration

Alle Überlegungen zur numerischen Simulation, die in Kap. 4.1 dargestellt wurden, gelten hier auch. Die Strömungskonfiguration in diesem Abschnitt ist in den meisten Fällen gleich der Strömungskonfiguration von Kap. 4.1 gehalten. Im einzelnen sind es:

- die Reynoldszahl $Re = 100$,
- der hydraulische Durchmesser $D_h = 2(r_a - r_i) = 2 \cdot 0.1 \text{ m}$,
- die laminare hydrodynamische Einlaufänge $l_E \approx a_E Re D_h$ mit $a_E = 0.05$,
- das zu der gleichen bezogenen Einlaufänge $\frac{l_E}{D_h} = 10$ führt,
- die Gesamtlänge des Ringrohres $l_{ges} = 1.5 \cdot l_E$,
- die kinematische Viskosität $\nu = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- und die Dichte $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$.

Bild 4.8 zeigt die Skizze der geometrischen Strömungskonfiguration. Die Rohrlänge und die Rohrradien sind nicht zueinander längentreu dargestellt. Die numerische Parametereinstellungen sind in der Tabelle 4.6 angegeben.

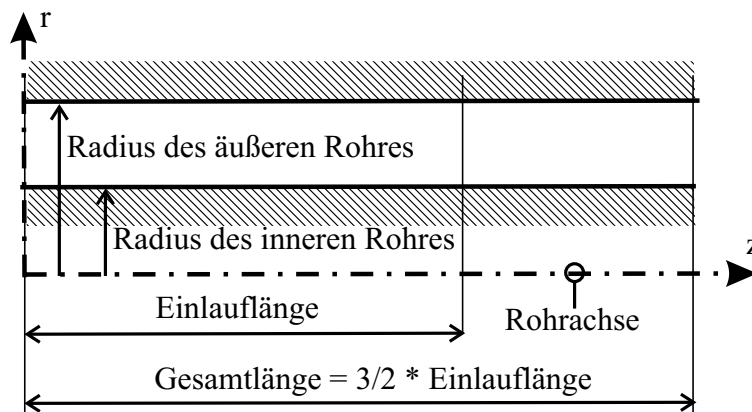


Bild 4.8: Skizze der geometrischen Strömungskonfiguration der Ringrohrströmung

Tabelle 4.6: Numerische Parametereinstellungen zu Ringrohrströmungen

	Numerische Parametereinstellungen
Diskretisierung	MINMOD
Netz ($i \times j$)	300 x 40
Forcing functions P und Q des elliptischen Netzgenerators	3.0 und 24.0
Konvergenzkriterium	$1e-04$

Numerische Simulation und Diskussion der Ergebnisse

Bild 4.9 zeigt das Ergebnis der numerischen Simulation. Auch hier ist zu erkennen, dass sich für $z \geq 1.0\text{ m}$ das Geschwindigkeitsprofil nur marginal ändert, während bei $z = 0\text{ m}$ der Verformungsgradient am größten ist.

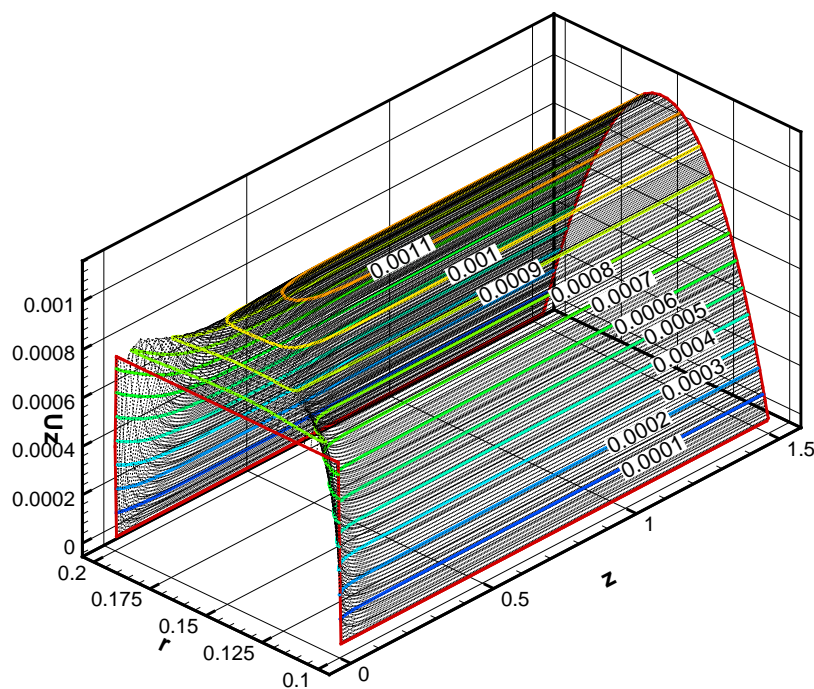


Bild 4.9: Ringrohrströmung bei $Re = 100$. Geschwindigkeitsprofil in Hauptströmungsrichtung u_z als Funktion von $u_z = u_z(r, z)$.

Das Bild 4.10 zeigt den Vergleich der ausgebildeten Geschwindigkeitsprofile zwischen der numerischen Simulation und der analytisch berechneten. Dabei wird $u_z(r)$ mit der volumetrisch gemittelten Geschwindigkeit $\bar{u}_z = U_{ref}$ und die radiale Richtung r mit dem hydraulischen Durchmesser $D_h = L_{ref}$ dimensionslos gemacht. Das numerische Ergebnis zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem analytischen Ergebnis.

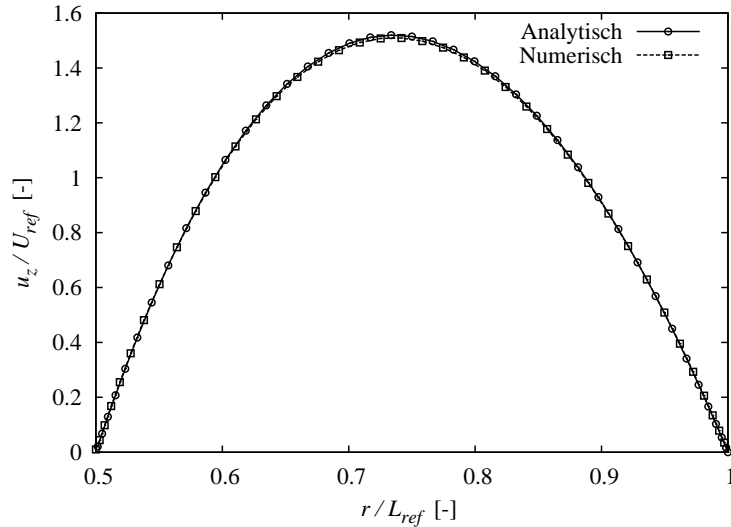


Bild 4.10: Ringrohrströmung bei $Re = 100$. Vergleich des numerisch und analytisch berechneten, vollausbildeten Geschwindigkeitsprofils in entdimensionierter Darstellung $u_z/U_{ref} = f(r/L_{ref})$.

Auch hier ist anhand des linken, oberen Bildes 4.11 die theoretischen Überlegung, die in Gleichung 4.2 zum Ausdruck gekommen ist, nachgewiesen. Es zeigt sich in dem vergrößerten Strömungsbild im Bereich der Einlaufkante $0 \leq z \leq 0.125 m$ deutlich, dass eine Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung u_r existiert, was vorhergesagt wurde und auch in Gleichung 4.3 gezeigt wurde.

Das untere Bild 4.11 zeigt den Druckverlauf. Verbunden mit der oben diskutierten theoretischen Überlegung zeigt sich, dass der stärkste Druckabfall am gleichen Ort, d.h. im Bereich der Einlaufkante stattfindet. Das untere Bild 4.11 gibt die Erkenntnis von Gleichung 4.10, dass im Bereich der vollentwickelten Strömung der Druck in der radialen Richtung konstant ist und somit der Druck nur eine Funktion der Strömungsrichtung $p(z)$ ist, wieder.

Für die vollentwickelte laminare Ringrohrströmung mit der Länge l_{Ring} gilt

$$\zeta_{Ring} = \frac{p_{ein} - p_{aus}}{\frac{\rho}{2} \bar{u}_z^2} = \lambda_{Ring} \frac{l_{Ring}}{D_h}, \quad (4.24)$$

wobei

$$\lambda_{Ring} = \frac{64}{Re} \left(\frac{(r_a - r_i)^2}{r_a^2 + r_i^2 + (r_a^2 - r_i^2) \cdot \ln \left(\frac{r_i}{r_a} \right)^{-1}} \right). \quad (4.25)$$

Die Beziehung für λ in der obigen Gleichung 4.25 leitet sich aus dem Kräftegleichgewicht zwischen dem Druckgradienten $\frac{dp}{dz}$ und der Schubspannung τ her. Die im Kapitel 4.1 für den Fall der Rohrströmung beschriebene theoretische Überlegung gilt hier auch, s. Gleichungen 4.16, 4.17 und 4.18. Der Verlauf der Gleichung 4.25

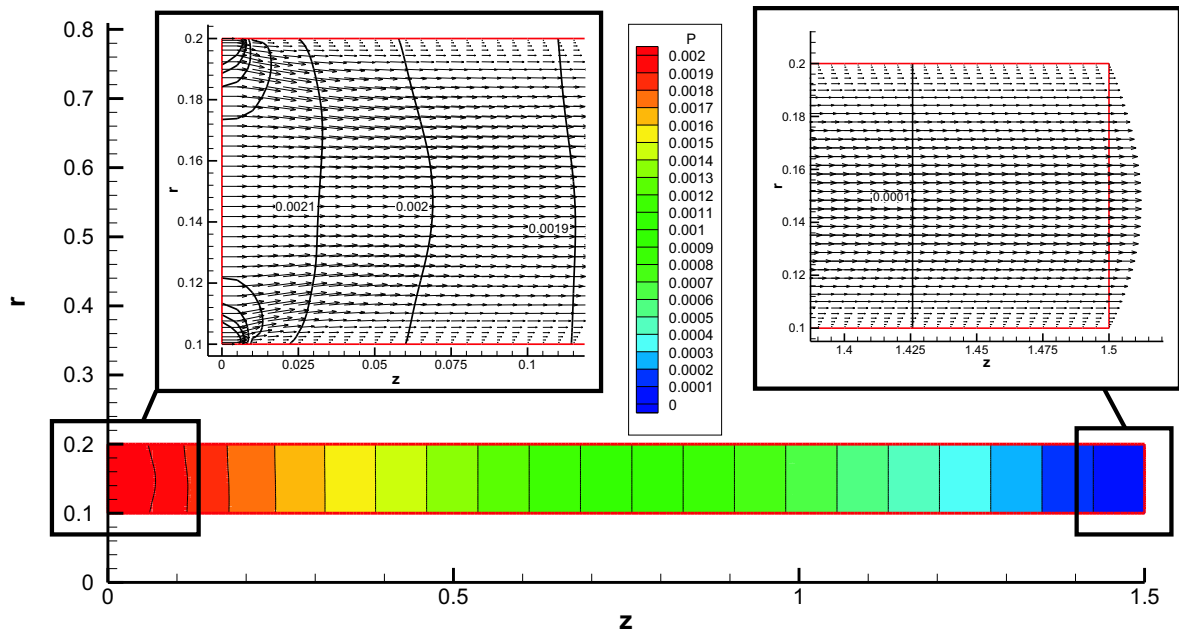


Bild 4.11: Druckkonturen $p(r, z)$ in der gesamten Länge des Ringrohres (unteres Bild), vergrößert dargestellte Geschwindigkeitsvektoren am Anfang des Rohres (linkes, oberes Bild) und vergrößert dargestellte Geschwindigkeitsvektoren am Ende des Rohres (rechtes, oberes Bild)

wird in Bild 4.12 dargestellt. Mittels Grenzwertbetrachtung von Gleichung 4.25 lassen sich die Rohrreibungszahlen für Rohr und Spalt herleiten:

$$\lambda_{Ring} = \begin{cases} \frac{64}{Re} & r_i \rightarrow 0 \quad : \text{Rohr} \\ \frac{96}{Re} & r_i \rightarrow r_a \quad : \text{Spalt} \end{cases} \quad (4.26)$$

Wird das ausgebildete Geschwindigkeitsprofil bei $Re = 100$ am Einlass vorgeschrieben, so ergibt sich der in der Tabelle 4.7 dargestellte, analytisch und numerisch berechnete Druckverlustbeiwert ζ_{Ring} . Bei der betrachteten Strömungskonfiguration gilt $\lambda_{Ring} = \frac{95.25}{Re}$.

Tabelle 4.7: Vergleich des analytisch und numerisch berechneten Druckverlustbeiwerts ζ_{Ring} für eine laminar vollausgebildete Ringrohrströmung

vollentwickelte laminare Ringrohrströmung	$\zeta_{Ring} [-]$
Analytisch	7,14375
Spaltannäherung	7.2
Numerisch	7.25031

Die auf die analytische Lösung bezogene Abweichung des numerischen Ergebnisses

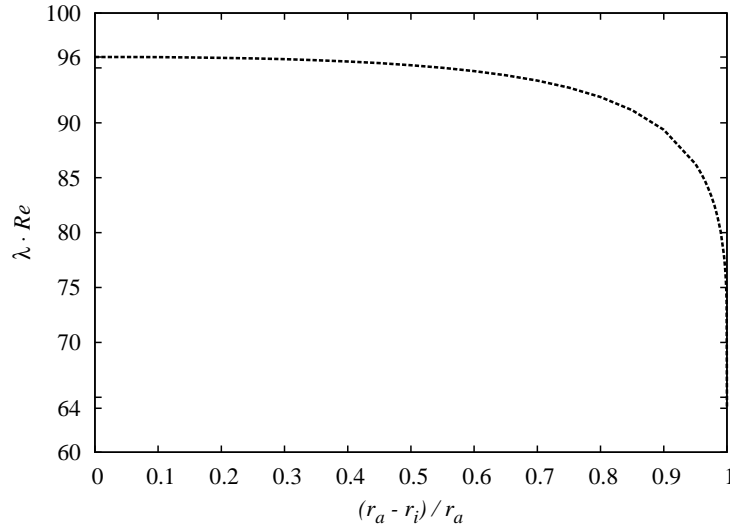


Bild 4.12: Rohrreibungszahl λ_{Ring} für Ringrohr bei verschiedenen Ringzahlen $Ri = (r_a - r_i) / r_a$, vgl. mit ZIEREP UND BÜHLER [211].

lautet

$$\Xi_{\zeta_{Ring}} = \frac{|\zeta_{Ring,Analytisch} - \zeta_{Ring,Numerisch}|}{\zeta_{Ring,Analytisch}} \cdot 100\% . \quad (4.27)$$

$\Xi_{\zeta_{Ring}}$ beträgt bei dem betrachteten Fall 1.4915%.

Das Bild 4.13 zeigt den Verlauf des Totaldruckes, des statischen Druckes und des dynamischen Druckes, der mit dem dynamischen Druck $p_{d,ref}$ entdimensioniert wurde. Formelmäßige Vorgehensweise ist der Formel 4.21 zu entnehmen.

Links der vertikalen Markierungslinie bei $z/L_{ref} = 5.71$ im Bild 4.13 ist der Bereich der Einlaufströmung. Es ist hier, wie bei der Rohrströmung, zu erkennen, dass bei $z/L_{ref} = 0.0$ der Gradient von Ψ_t am größten ist, weil dort der Geschwindigkeitsgradient am größten ist. Ψ_t nimmt mit z/L_{ref} immer langsamer ab, bis zum Erreichen der Einlaufflänge, danach nimmt Ψ_t konstant ab.

Es ist auch hier, wie bei der Rohrströmung zu bemerken, dass der statische Druck nicht nur wegen der Reibung abnimmt. Der statische Druck gibt auch seine Energie dem dynamischen Druck zur Bildung des Geschwindigkeitsprofils ab.

Die physikalischen Phänomene scheinen bisher sich von der Rohrströmung nicht zu unterscheiden. Der fundamentale Unterschied zu der Rohrströmung ist die Tatsache, dass $\Psi_t(z/L_{ref})$ und $\Psi_s(z/L_{ref})$ auf höherem Niveau als bei der Rohrströmung liegen, was einen größeren Druckverlust bedeutet. Der Grund dafür besteht darin, dass die Ringrohrströmung zusätzliche Wände auf dem inneren Radius hat, durch die die Strömung zusätzlich entstehende Newtonsche Schubspannung überwinden muss. Der auf Molekularebene stattfindende Prozess wandelt Strömungsenergie irreversibel in Wärme um. Dadurch entstehen die zusätzlichen Druckverluste.

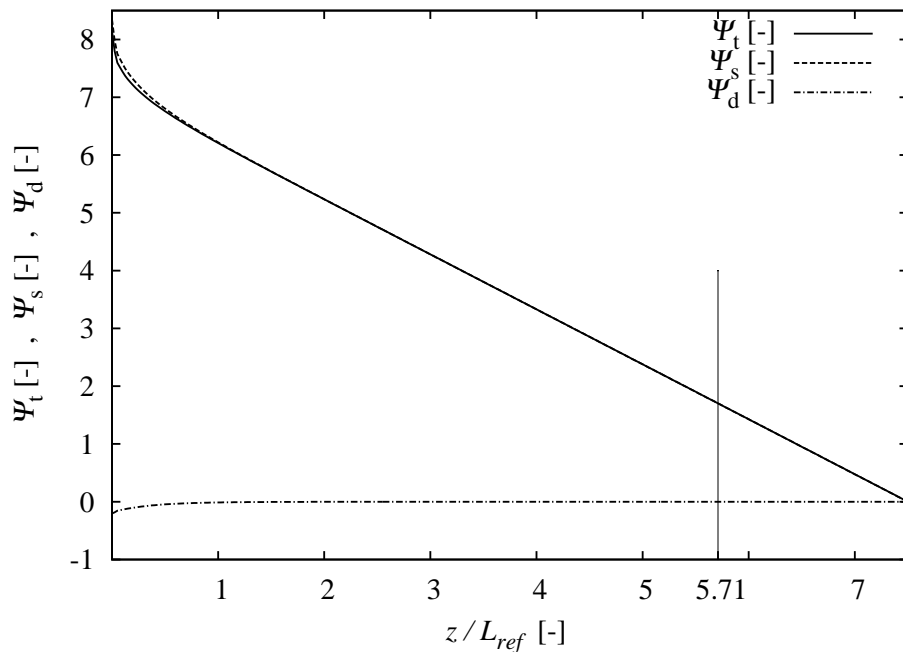


Bild 4.13: Verlauf der Druckzahlen in Hauptströmungsrichtung in einem Ringrohr bei Reynoldszahl $Re = 100$.

Das Bild 4.12 macht deutlich, dass für Ringzahl $Ri = 1$, was geometrisch ein Rohr darstellt, die Verlustziffer λ am kleinsten ist. Mit dem Vorhandensein eines inneren Rohres mit sehr kleinem Radius, dargestellt durch Ringzahl $Ri \rightarrow 1-$, steigt die Verlustziffer λ rapide an⁵. Die absolute Steigung fällt zuerst relativ schnell dann langsam wieder ab.

4.2.2 Turbulente Ringrohrströmung

Die im Kapitel 4.2.1 verwendete Strömungskonfiguration wird hier beibehalten. Eine Ausnahme betrifft notwendigerweise die Reynoldszahl, die hier zu $Re = 1 \cdot 10^6$ gewählt wird. Die numerische Parametereinstellungen sind in der Tabelle 4.6 zu entnehmen. Das Konvergenzkriterium ist bei 10^{-7} festgelegt.

Das Bild 4.14 zeigt den Verlauf der Druckkonturen Ψ , die das Rechenergebnis mit den implementierten Turbulenzmodellen darstellt. Das Baldwin-Barth-Eingleichungsmodell und das nichtlineare $k-\varepsilon$ -LCL-SZL-MMU-Modell zeigen ähnliche Ergebnisse. Die Druckkonturlinie bei dem Baldwin-Barth-Eingleichungsmodell verläuft wellig. Das lineare $k-\varepsilon$ -Modell zeigt verzerrte Druckkonturlinien. Ausserdem berechnet das lineare $k-\varepsilon$ -Modell höheren Druckverlust als das Baldwin-Barth-Eingleichungsmodell und das nichtlineare $k-\varepsilon$ -LCL-SZL-MMU-Modell. Das $k-\omega$ -Modell berechnet deutlich höhere Druckverluste. Die dicke Druckkonturlinie bei $k-\omega$ -Modell ist aus $\Psi = 0.002$ bis $\Psi = 0.02$ Druckkonturlinien zusammengesetzte Linie.

⁵Das Minuszeichen in “1-” stellt bei der Grenzwertbetrachtung eine Annäherung von links dar.

Das nichtlineare k - ε -LCL-SZL-MMU-Modell bietet sich die turbulenten Ringrohrströmungen als die beste Wahl an.

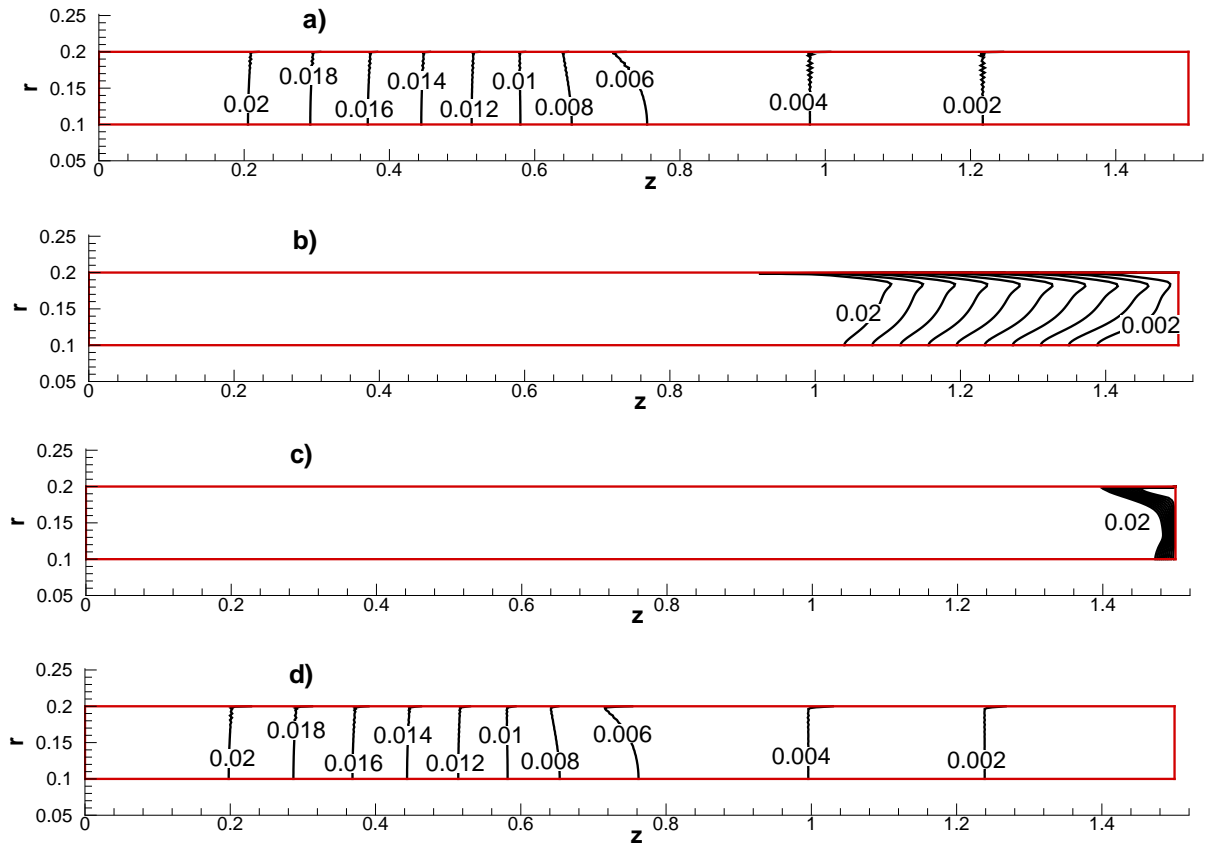


Bild 4.14: Turbulente Strömung in einem Ringrohr bei $Re = 10^6$. Vergleich der Turbulenzmodelle an Hand der Druckkonturen Ψ : a) Baldwin-Barth-Eingleichungsmodell, b) k - ε -Modell, c) k - ω -Modell und d) k - ε -LCL-SZL-MMU-Modell.

4.3 Zylindrische Couette-Strömung

Zylindrische Couette-Strömung erfolgt in einem Ringrohr, das aus zwei konzentrisch angeordneten Rohren besteht und bei dem sich entweder das äußere oder das innere Rohr relativ zu einander mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Die zylindrische Couette-Strömung ist durch die folgende physikalische Gegebenheiten gekennzeichnet:

$$u_r(r, z) = 0, \quad u_z(r, z) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0. \quad (4.28)$$

Die Darstellung der Navier-Stokes Gleichungen in dem zu der Strömungskonfiguration passenden Zylinderkoordinatensystem zeichnet sich hier mit dem Vorteil aus,

dass die Kontinuitätsgleichung, s. Gleichung 2.6 sich völlig entartet.

Die zylindrische Couette-Strömung stellt auch einen interessanten Fall für die Validierung dar, weil sich die Navier-Stokes Gleichungen stark vereinfachen. Es ergeben sich folgende Differentialgleichungen

$$-\frac{u_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.29)$$

$$0 = \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right], \quad (4.30)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.31)$$

Aus der Differentialgleichung 4.31 folgt direkt folgende Erkenntnis:

$$p \neq p(z) \quad \text{bzw.} \quad p(r, z) = p(r). \quad (4.32)$$

Unter der Verwendung der Randbedingungen⁶

$$u_\varphi|_{r=r_i} = 0, \quad u_\varphi|_{r=r_a} = \omega r_a \quad (4.33)$$

ergibt sich für die Gleichung 4.30 die folgende analytische Lösung, s. z.B. SCHILLING [144] oder TRUCKENBRODT [188]:

$$u_\varphi(r) = \frac{r_a^2 \cdot \omega \cdot r}{r_a^2 - r_i^2} \left(1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right). \quad (4.34)$$

Mit der Gleichung 4.34 ergibt sich die Lösung der Gleichung 4.29 wie folgt:

$$p(r) = \widetilde{K} \left(\frac{r^2}{2} - 2r_i^2 \ln(r) - \frac{r_i^4}{2} \frac{1}{r^2} \right) + K_1, \quad (4.35)$$

wobei

$$\widetilde{K} = \rho K^2 = \rho \left(\frac{r_a^2 \cdot \omega}{r_a^2 - r_i^2} \right)^2. \quad (4.36)$$

K_1 in der Gleichung 4.35 ist ein frei wählbarer Offset des Druckniveaus.

Vorbetrachtung und Strömungskonfiguration

Die Strömungskonfiguration in diesem Abschnitt ist in den meisten Fällen gleich der Strömungskonfiguration von Kap. 4.1 und Kap. 4.2 gehalten. Im einzelnen sind es:

⁶In der Gleichung 4.22 bezeichnet r_i den Radius des inneren Rohres und r_a den Radius des äußeren Rohres.

- der hydraulische Durchmesser $D_h = 2(r_a - r_i) = 2 \cdot 0.1 \text{ m}$,
- die kinematische Viskosität $\nu = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- und die Dichte $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$.

COUETTE [30] und SCHLICHTING [149] geben bei ruhendem inneren und rotierendem äußerem Zylinder die kritische Reynoldszahl des Umschlagpunktes wie folgt an:

$$Re_{krit}^{CS} = \frac{r_a \cdot \omega \cdot (r_a - r_i)}{\nu} = 1900 . \quad (4.37)$$

Es ist bei der obigen Definition in der Gl. 4.37 klar, dass gegenüber der üblichen Definition $Re^{CS} = 0.5 Re = 0.5 \frac{u_{ref} \cdot D_h}{\nu}$ gilt. Die Reynoldszahl ergibt sich bei dem gewählten Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 1.875 \cdot 10^{-2} \text{ rad}/\text{s}$ zu $Re = 500$ bzw. $Re^{CS} = 250$.

Bild 4.8 im Kap. 4.2 zeigt die Skizze der geometrischen Strömungskonfiguration, wobei hier Einlaufänge und Gesamtlänge des Ringrohres keine Rolle spielen. Die numerischen Parametereinstellungen sind in Tabelle 4.8 angegeben.

Tabelle 4.8: Numerische Parametereinstellungen zu Couette-Strömungen

	Numerische Parametereinstellungen
Diskretisierung	MINMOD
Netz ($i \times j$)	300 x 40
Forcing functions P und Q des elliptischen Netzgenerators	3.0 und 24.0
Konvergenzkriterium	1e-05

Numerische Simulation und Diskussion der Ergebnisse

Das Bild 4.15 zeigt den Vergleich der ausgebildeten Geschwindigkeitsprofile zwischen der numerischen Simulation und der analytisch berechneten. Dabei wird $u_\varphi(r)$ mit der Rotationsgeschwindigkeit des äußeren Rohres $\omega r_a =: U_{ref}$ und die radiale Richtung r mit dem hydraulischen Durchmesser $D_h = L_{ref}$ dimensionslos gemacht. Das numerische Ergebnis zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem analytischen Ergebnis.

Das Bild 4.16 zeigt den Vergleich des Druckverlaufs zwischen der numerischen Simulation und der analytisch berechneten. Auf der Abszisse ist die radiale Richtung r , die mit dem hydraulischen Durchmesser $D_h = L_{ref}$ entdimensioniert ist, aufgetragen. Auf der Ordinate ist die Druckzahl $\psi = \psi(r)$ aufgetragen, die wie folgt definiert ist

$$\psi(r) = \frac{p(r) - p|_{r=r_i}}{\frac{1}{2} \rho U_{ref}^2} , \quad (4.38)$$

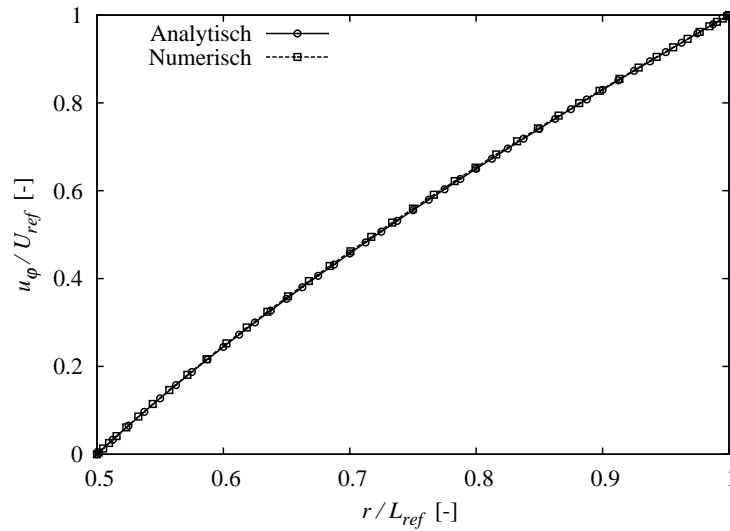


Bild 4.15: Zylindrische Couette-Strömung bei $Re = 500$. Vergleich des numerisch und analytisch berechneten, entdimensionierten Geschwindigkeitsprofils in azimuthaler Richtung $u_\varphi / U_{ref} = f(r / L_{ref})$.

Das numerische Ergebnis zeigt gute Übereinstimmung mit dem analytischen Ergebnis.

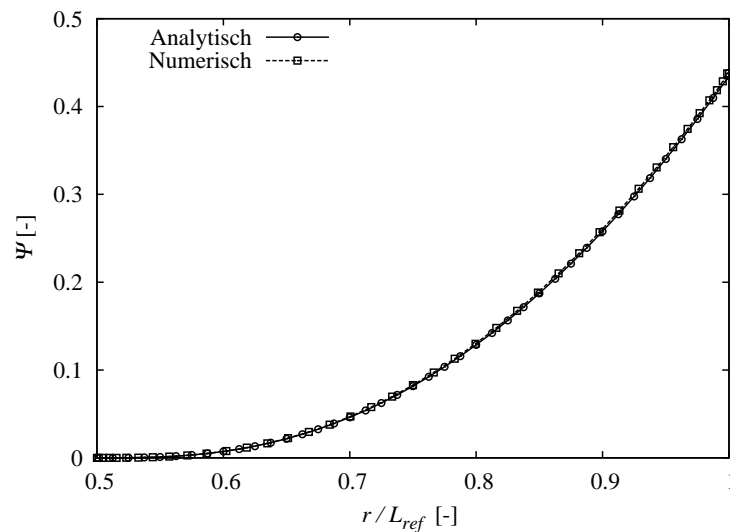


Bild 4.16: Zylindrische Couette-Strömung bei $Re = 500$. Vergleich der numerisch und analytisch berechneten Druckzahl $\psi = f(r / L_{ref})$.

Kapitel 5

Anwendung

Bei der Dimensionierung der Axiallager und die Abschätzung der Antriebsleistung von spezifisch langsamläufigen Turbomaschinen ist die Kenntnis der Axialkräfte und Reibmomente, die von dem Fluid in den Radseitenräumen auf das rotierende Laufrad ausgeübt werden, von Bedeutung, SCHILLING [141]. Beim einstufigen Laufrad wird der druckseitige und der saugseitige Radseitenraum unterschieden. Der druckseitige Radseitenraum wird an der Welle leckagefrei abgedichtet, während der saugseitige Radseitenraum nach innen durchströmt wird. Bild 5.1 zeigt einen Schnitt durch eine Radialmaschine, die einstufig und einflutig durchströmt wird.

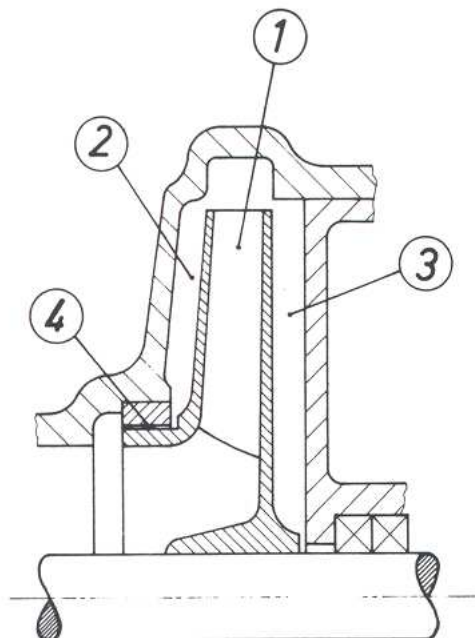


Bild 5.1: Schnitt durch eine Radialmaschine. ①: Laufrad, ②: Saugseitiger Radseitenraum, ③: Druckseitiger Radseitenraum und ④: Berührungsfreie Dichtung.

Beim zweiflutigen Laufrad ist der Axial Schub wegen der Symmetrie der Anordnung vollständig ausgeglichen. Einflutige Räder stehen dagegen unter Einwirkung einer Axialkraft, deren wesentliche Ursache darin besteht, dass auf die Eintrittsfläche (bei Arbeitsmaschinen) von der Vorderseite her der Saugdruck und von der Rückseite her der Förderdruck wirkt.

Die Größe des Axial Schubes hängt von der Druckverteilung im Raum zwischen den Deckscheiben des Rades und dem Gehäuse ab. Die Druckverteilung wird wiederum von der Spaltweite beeinflusst. Der Spalt zwischen Gehäuse und Rad wird in Spezialpumpen, wie Schlamm pumpen usw., die Suspensionen fördern, klein gehalten, um die Anlagerung von Feststoff zu vermeiden. Durch Verringerung des Rückwärtigen und Vergrößern des vorderen Spaltes kann der Axialdruck verringert oder sogar umgekehrt werden, s. z.B. POLHEMUS UND HENLEY [124].

Kann der Axial Schub durch ein Drucklager sicher aufgenommen werden, so ist der Einbau desselben die wirtschaftlichste Methode der Behandlung des Schubes. Andernfalls müssen Massnahmen zu seiner Verringerung getroffen werden, die jedoch alle auf Kosten des Wirkungsgrades gehen. STEPHANOFF [179] hat umfangreiche Versuche mit ein- und mehrstufigen horizontalen Pumpen durchgeführt. Bei den Versuchen gingen es unter anderem darum, das Verhalten von drei Läufern mit gleicher Drosselkurve unter Anwendung zweier Methoden, die gewöhnlich zur Verringerung bzw. Beseitigung des Axial Schubes angewandt werden, zu vergleichen.

Die Untersuchung mit dem entwickelten numerischen Verfahren, die den Inhalt vom Kapitel 5.1 bildet, wird in Anlehnung an SCHILLING [141] durchgeführt. Dabei wird bei der Beschreibung der Strömungsvorgänge in den Radseitenräumen zwei verschiedene Fälle unterschieden und zwar ohne und mit resultierendem Durchfluss.

Im Kapitel 5.2 wird das entwickelte numerische Verfahren angewendet, um Radseitenräumen mit komplexer Geometrie zu Untersuchen. Die verfolgte Multiblock-Strategie kommt dabei zur Anwendung.

5.1 Idealisierter Radseitenraum

Zur theoretischen Behandlung wurden in der Literatur vereinfachte Modellvorstellungen entwickelt. Die Räume zwischen Laufrad und Gehäuse werden dabei vereinfachend als parallele und zur Drehachse senkrechte Radialspalte mit zylindrischer Begrenzung angenähert. Bild 5.2 stellt schematisch die Modellvorstellungen dar, wobei das Laufrad als mit einer Winkelgeschwindigkeit ω drehende Scheibe dargestellt wird. Dabei bezeichnet r_a die radiale Erstreckung des Seitenraumes, r_s die radiale Erstreckung des Laufrades, r_i die radiale Erstreckung des Drosselspaltes, q die Leckvolumenstromdichte und s die Spaltweite.

Die erste Modellvorstellung ohne resultierendem Durchfluss gilt für druckseitigen Radseitenraum. Dabei wird die Durchflussdichte q unterbunden, indem man die radiale Erstreckung des Drosselspaltes r_i gegen Null gehen läßt. Es gilt $\lim_{r_i \rightarrow 0} q = 0$.

Die zweite Modellvorstellung mit resultierendem Durchfluss gilt für saugseitigen Radseitenraum. Dabei nimmt r_i einen endlichen Wert an und somit wird der Dro-

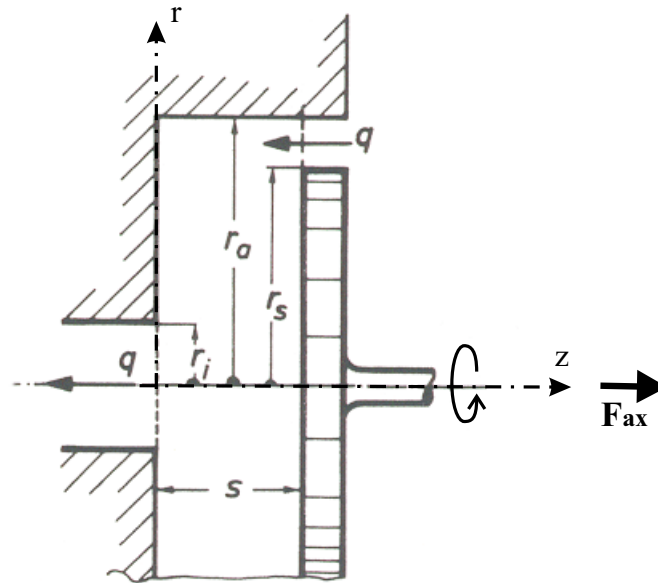


Bild 5.2: Modellvorstellungen für die Strömung im druckseitigen Radseitenraum ($r_i \rightarrow 0$) ohne resultierenden Durchfluss ($q = 0$) sowie für die Strömung im saugseitigen Radseitenraum ($r_i \neq 0$) mit resultierendem Durchfluss q , s. SCHILLING [141].

selspalt mit dem Leckvolumenstrom \dot{V}_L durchströmt.

5.1.1 Radseitenraum ohne resultierenden Durchfluss

Wichtige Kennzahlen, die bei der Modellvorstellung des Radseitenraumes ohne resultierenden Durchfluss wichtig sind, sind die mit der Spaltweite s gebildete Spalt-Reynoldszahl Re_s und das Seitenverhältnis Λ mit folgenden Definitionen:

$$Re_s = \frac{\omega \cdot s^2}{\nu}, \quad (5.1)$$

$$\Lambda = \frac{r_a}{s}. \quad (5.2)$$

In der Literatur wird die globale, mit dem Aussenradius r_a gebildete Reynoldszahl $Re = \frac{\omega \cdot r_a^2}{\nu}$ oft angegeben. Die Spalt-Reynoldszahl Re_s wird somit durch das Seitenverhältnis Λ mit der globalen Reynoldszahl Re wie folgt in Beziehung gesetzt:

$$Re = Re_s \cdot \Lambda^2. \quad (5.3)$$

Zuerst wird der Einfluss der Reynoldszahl Re untersucht. Dabei wird das Seitenverhältnis Λ konstant gehalten. Für diese Untersuchung wird $\Lambda = 10$ gewählt. Da-

nach wird der Einfluss des Seitenverhältnisses Λ bei konstanter Reynoldzahl $Re = 10^6$ untersucht.

Variation von Reynoldzahlen Re für konstantes Seitenverhältnis $\Lambda = 10$

Bild 5.3 und 5.4 zeigen den Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung (rechtes Bild) und Verlauf der Sekundärgeschwindigkeit in radialer Richtung (linkes Bild) bei den bezogenen Radien $R = r/r_a$ von $R = 0.25$, $R = 0.50$ und $R = 0.75$. Auf der Abzisse ist die z-Richtung z mit der Spaltweite s entdimensioniert (siehe das Koordinatensystem im Bild 5.2) aufgetragen. Somit liegt die rotierende Scheibe bei $Z = z/s = 1$. Auf der Ordinate sind die jeweiligen Geschwindigkeiten mit der Referenzgeschwindigkeit $U_{ref} = \omega \cdot r_a$ entdimensioniert aufgetragen.

Die Untersuchung erfolgt bei den gewählten Reynoldszahlen von $Re = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ und 10^6 , die nach der Gleichung 5.3 und bei dem Seitenverhältnis $\Lambda = 10$ den Spalt-Reynoldzahlen $Re_s = 1, 10, 10^2, 10^3$ und 10^4 entsprechen. Die Hauptströmungsrichtung ist die Strömung in azimuthaler Richtung. Die Strömung in r- und z-Richtung bilden zusammen ein Wirbelsystem, das in der Meridianebene sichtbar ist, siehe Bild 5.5.

Bei $Re = 10^2, 10^3$, und 10^4 ist die Strömung laminar. $Re_s = 1$ stellt den Fall schleicher Strömung dar, bei der das Geschwindigkeitsprofil in Hauptströmungsrichtung ein Couette-Profil aufweist, das bei laminarer Kanalströmung ohne Druckgradienten mit auf einer Seite bewegter Wand die analytische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen liefert. Das Geschwindigkeitsprofil in radialer Richtung weist eine sinusförmige Kurve auf. Mit der Annahme, dass bei dem bezogenen Radius $R = 0.5$ ein sinusförmiger Verlauf für das Geschwindigkeitsprofil in radialer Richtung gilt, kann mit Hilfe der Reihenentwicklung die Differentialgleichung in Hauptströmungsrichtung gelöst werden. Man erhält als Lösung das Couette-Profil, s. JUSUF [77].

Physikalisch überwiegen die Transportvorgänge bei schleicher Strömung durch Reibung/Diffusion. Das Fluidteilchen haftet an der Wand und durch die überwiegende Reibung zwischen den Fluidteilchen wird das nächste Fluidteilchen durch das an der Wand haftende Fluidteilchen in Bewegung gebracht und schichtweise erfolgt dann die Bewegung von der Wand weiter entfernter Fluidteilchen.

Die in Hauptströmungsrichtung bewegten Fluidteilchen tragen die Fliehkräfte mit sich und sie wirken als Impulsquelle für die Strömung in radialer Richtung. Somit wird durch den oben beschriebenen Mechanismus des Impulstransfers die Strömung in radialer Richtung aufrechterhalten. In radialer Richtung erfolgt also die Strömung mit der sich drehenden Scheibe radial nach außen. Sie wird durch die begrenzende Wand zwischen den Scheiben angestaut, zu der ruhenden Scheibe umgelenkt, nochmals radial nach innen entlang der ruhenden Scheibe umgelenkt und schließlich erfährt sie im Bereich des kleineren Radius zusätzlichen Impuls, um sich dann wieder radial nach außen bewegen zu können. Bild 5.5 verdeutlicht den oben beschriebenen Prozess.

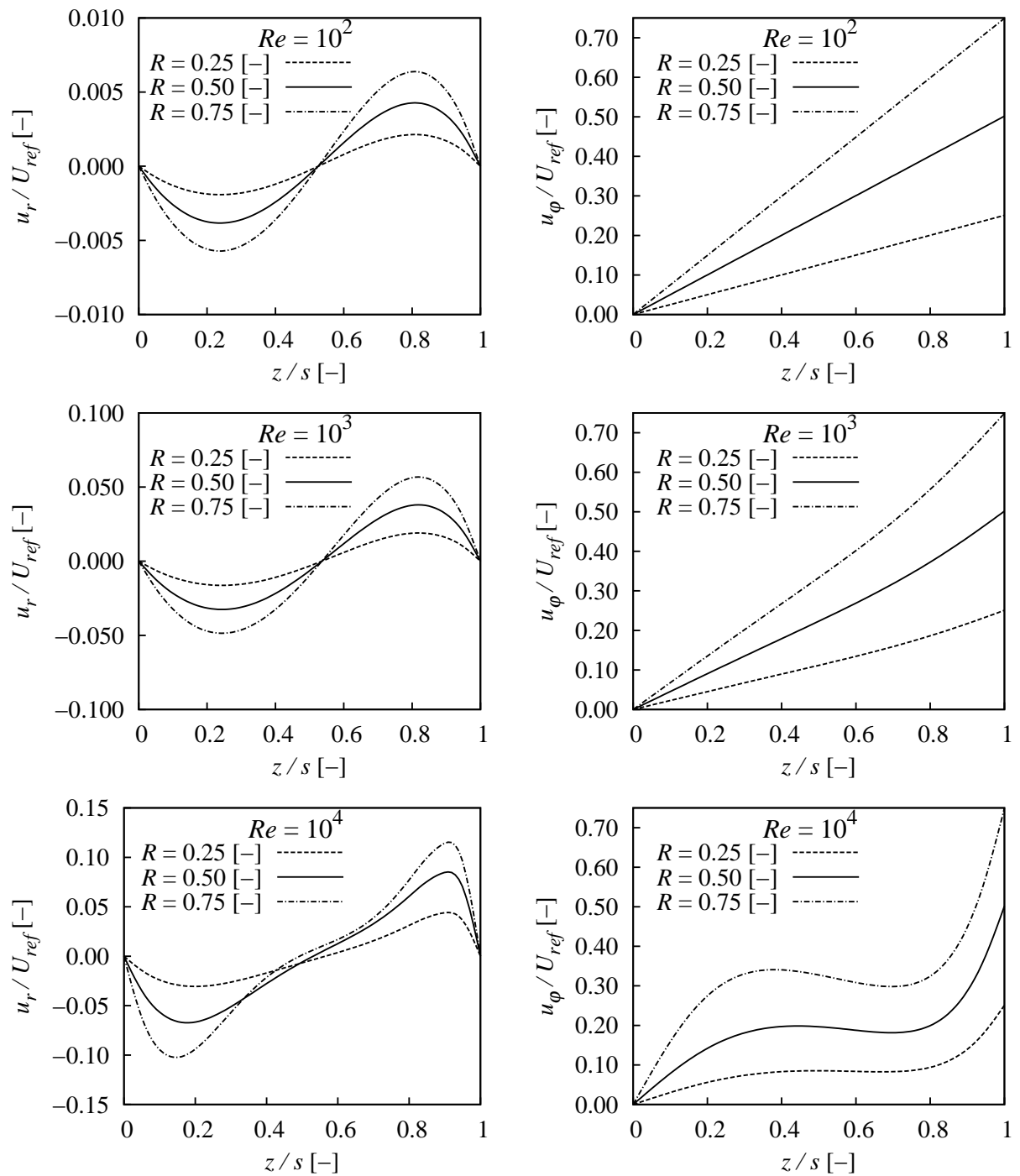


Bild 5.3: Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung (rechtes Bild) und Verlauf der Sekundärgeschwindigkeit in radialer Richtung (linkes Bild) bei Reynoldszahlen $Re = 10^2$, $Re = 10^3$ und $Re = 10^4$ und bei verschiedenen Radien R .

Aus dem Bild 5.5 wird auch ersichtlich, dass das Zentrum des Wirbelsystems mit steigender Reynoldszahl in Richtung größeren Radius verschoben wird. Das kann auf die steigende Stauwirkung bei höherer Reynoldszahl zurückgeführt werden.

Dreht sich die Scheibe schneller, so können weniger Teilchen durch Reibwechsellwirkung mitgerissen werden. Die Geschwindigkeitsgradienten $|\partial u_\varphi / \partial z|_{Wand}$ und $|\partial u_r / \partial z|_{Wand}$ an den Wänden werden mit steigender Reynoldszahl immer größer. Um die Stetigkeit und die stetige Differenzierbarkeit nicht zu verletzen, geht das lineare Couette-Profil der Hauptströmungsrichtung in ein Geschwindigkeitsprofil, das in Bild 5.3 für die Reynoldszahl $Re = 10^4$ gezeigt wird, über. Dabei weist das Geschwindigkeitsprofil ein lokales Maximum, einen Wendepunkt und ein lokales Minimum auf. Aus dem Bild für die Reynoldszahl $Re = 10^4$ ist auch zu entnehmen, dass das Maximum und das Minimum des sinusförmig verlaufenden radialen Geschwindigkeitsprofils mehr zu den Wänden hin verschoben ist.

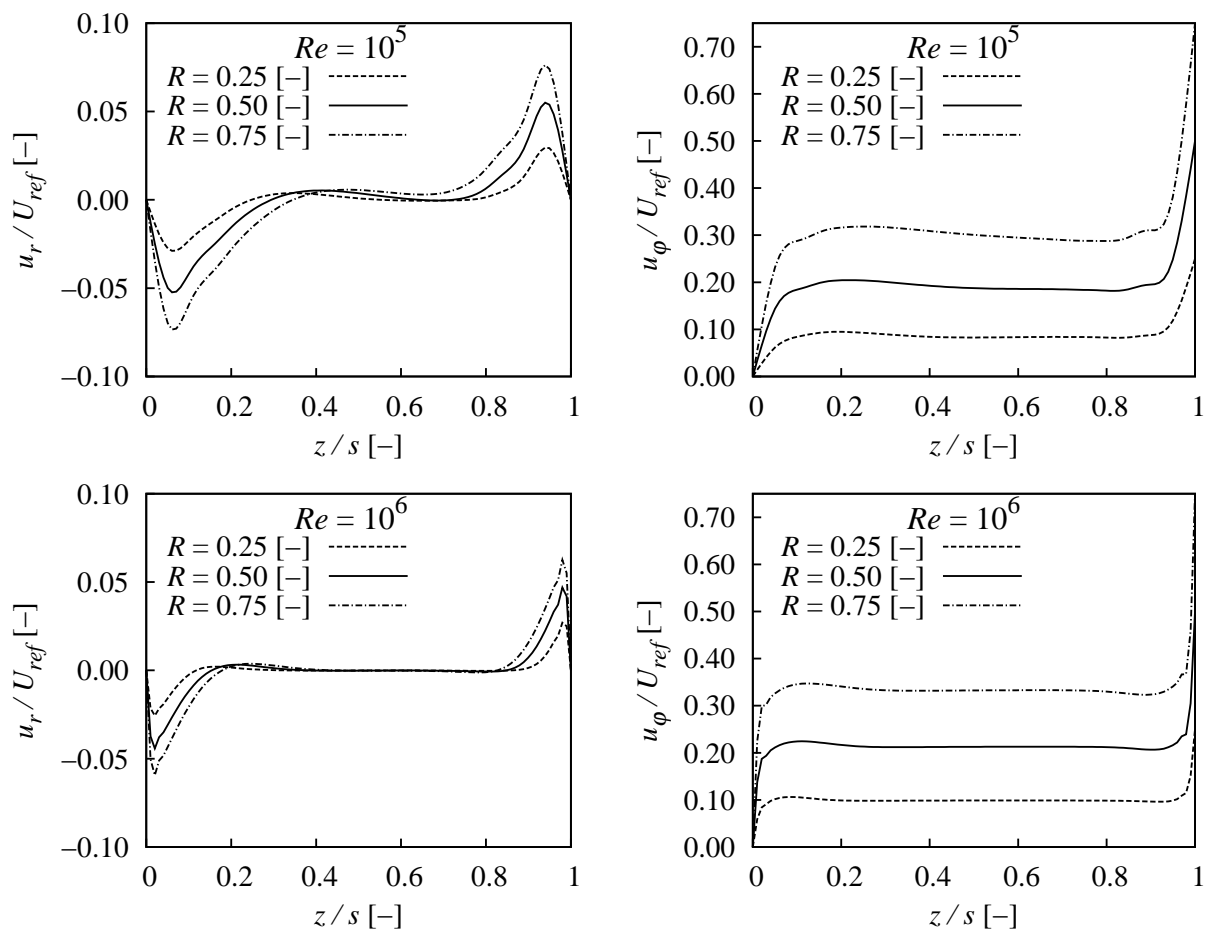


Bild 5.4: Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung (rechtes Bild) und Verlauf der Sekundärgeschwindigkeit in radialer Richtung (linkes Bild) bei Reynoldszahlen $Re = 10^5$ und $Re = 10^6$ und bei verschiedenen Radien R .

Bei $Re = 10^5$ und 10^6 ist die Strömung turbulent. Das numerische Ergebnis ist im Bild 5.4 dargestellt. Es zeigt sich, dass der Einfluss der Wandreibung bei der sich drehenden Scheibe sowie bei der ruhenden Scheibe wesentlich schneller abklingt, und damit verbunden vergrößert sich der Bereich der turbulenten Kernströmung. Die Reibungswechselwirkung zwischen Fluidteilchen im Bereich der turbulenten Kernströmung kann auf die turbulente Viskosität zurückgeführt werden.

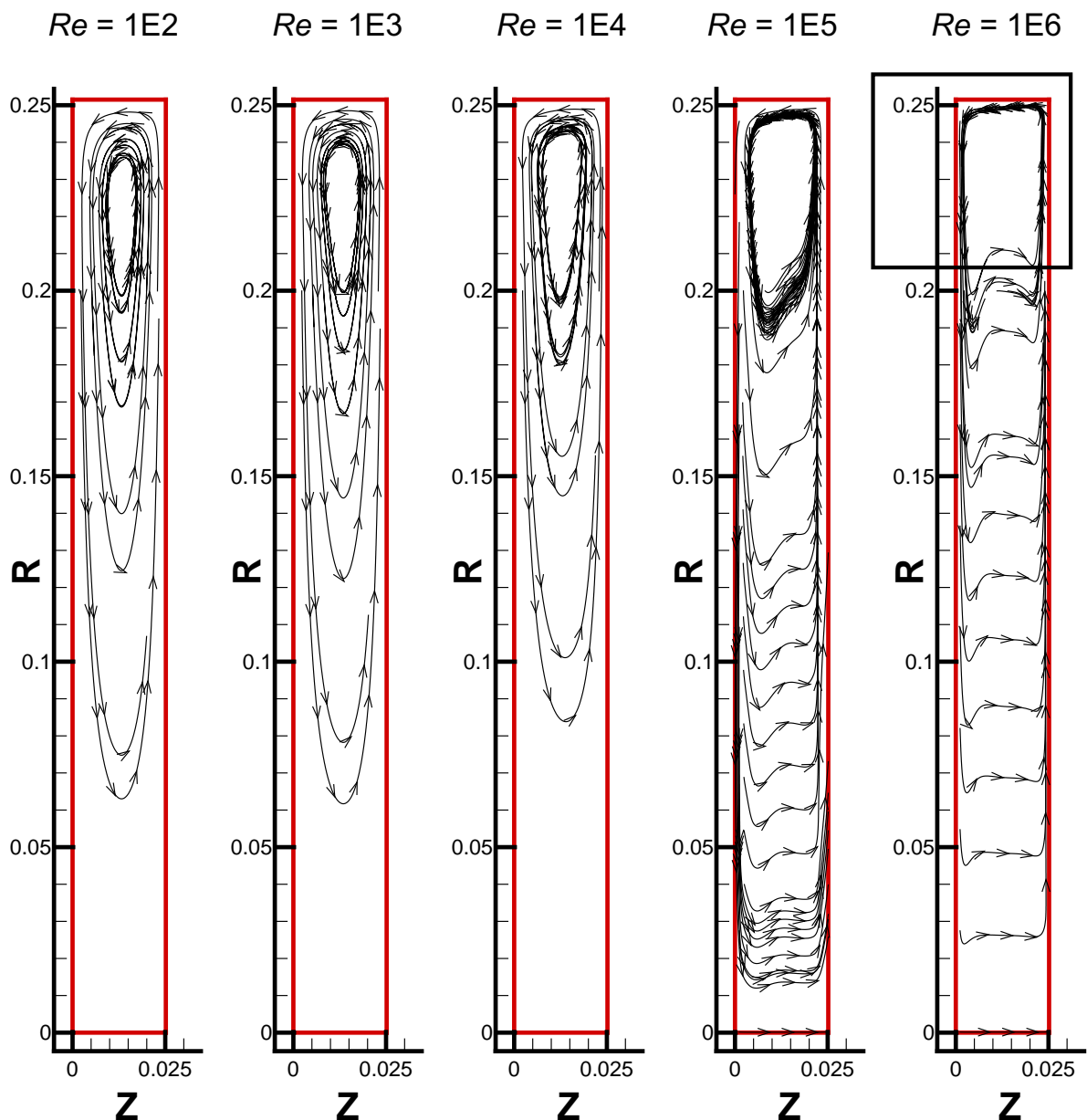


Bild 5.5: Wirbelsystem in der Meridianebene des idealisierten Radseitenraumes ohne resultierenden Durchfluss bei Reynoldszahlen $Re = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ und 10^6 .

Bild 5.6 zeigt die Vergrößerung des im Bild 5.5 eingekasteten Bereichs von Reynoldszahl $Re = 10^6$. Es zeigt sich, dass ein Wirbelsystem mit Verzweigungen in drei

Ästen sich ausbildet. Dieses komplexe Bild ist bei Reynoldszahl $Re = 10^5$ nicht zu beobachten. Das Phänomen läßt sich analog zu einer abgelösten Strömung erklären. Die Ursache für den Strömungsabriss liegt in der Stauwirkung, die mit steigender Reynoldszahl zunimmt.

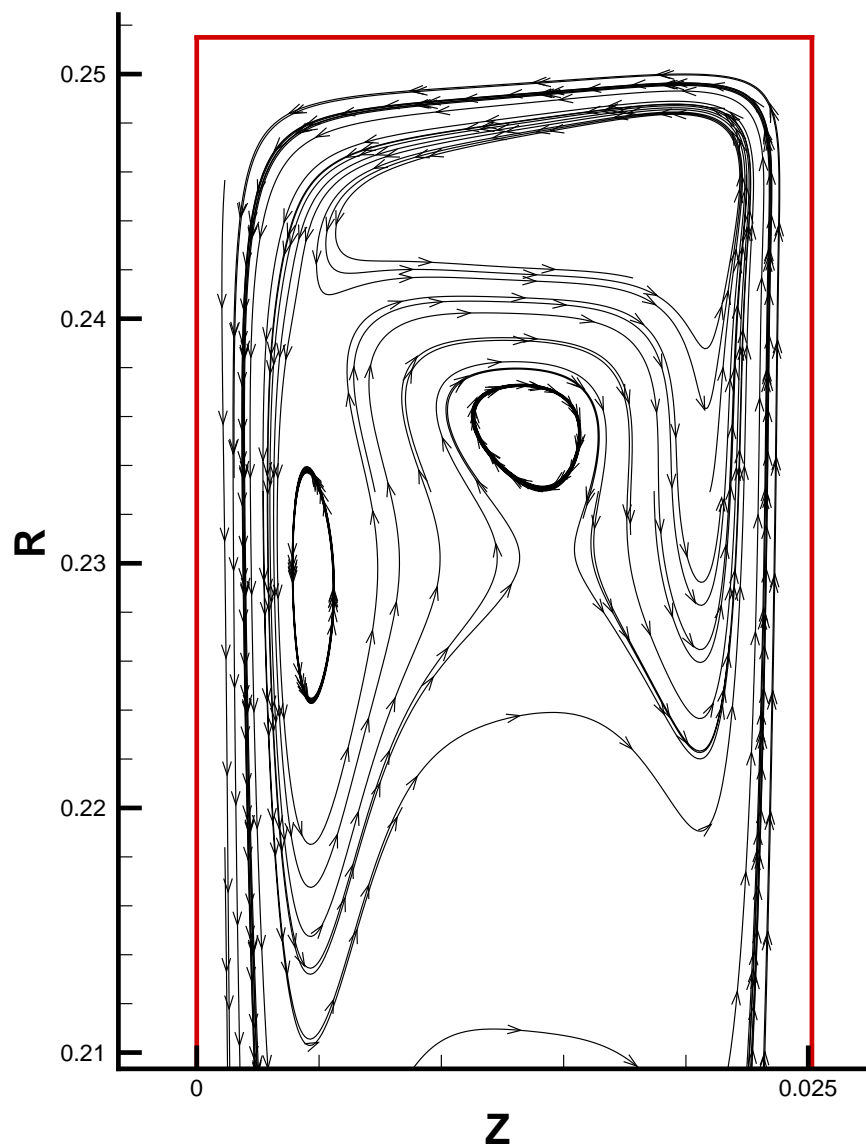


Bild 5.6: Komplexes Wirbelsystem mit Verzweigungen in der Meridianebene des idealisierten Radseitenraumes ohne resultierenden Durchfluss bei Reynoldszahl $Re = 10^6$.

Das Phänomen der Stauwirkung läßt sich an Hand der Bildreihe 5.3 und 5.4 von u_r/U_{ref} über den Reynoldszahlen und auf drei verschiedenen dimensionslosen Radien $R = 0.25$, $R = 0.50$ und $R = 0.75$ erklären. Insbesondere ist zu bemerken, dass mit steigender Reynoldszahl der Abstand der u_r/U_{ref} -Verlauf von $R = 0.50$ und $R = 0.75$ abnimmt. Das bedeutet, dass mit steigender Reynoldszahl der Bereich der Stauwirkung, der durch ein relativ homogenes Druckfeld gekennzeichnet ist, sich

vergrößert. Im Vergleich zur laminaren Strömung ist also der treibende Druckgradient von $R = 1.0$ zu $R = 0.75$ bei der turbulenten Strömung relativ klein, so dass die radial nach innen entlang der ruhenden Scheibe zurückgeführte Strömung eine größere Tendenz zum Strömungsabriss entwickelt.

Die oben gemachten Bemerkungen verknüpfen die Geschwindigkeitsfeldern der numerischen Simulation mit der grundlegenden Theorie zu einer in sich geschlossenen phänomenologischen Erklärung. Daneben sind die resultierenden integralen Größen wie zum Beispiel die Axialkraft F_{ax} und das Reibmoment M_f an der rotierenden Scheibe für technische Fragestellung interessant. Diese werden entdimensioniert als Axialkraft- und Reibmomentenbeiwert $C_{F_{ax}}$ und C_{M_f} wie folgt dargestellt:

$$C_{F_{ax}} = \frac{2 \cdot F_{ax}}{\rho \omega^2 r_a^4} ; \quad F_{ax} = 2 \pi \int_0^{r_a} p \cdot r \, dr , \quad (5.4)$$

$$C_{M_f} = \frac{4 \cdot M_f}{\rho \omega^2 r_a^5} ; \quad M_f = 2 \pi \int_0^{r_a} \tau_{z\varphi} \cdot r^2 \, dr . \quad (5.5)$$

Das Bild 5.7 zeigt den Verlauf des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ über der Reynoldszahl Re für ein konstantes Seitenverhältnis $\Lambda = 10$. Es ist bei der Diskussion über den im Bild 5.7 dargestellten Axialkraftbeiwert $C_{F_{ax}}$ sinnvoll, von dem Absolutwert zu sprechen, weil das Vorzeichen nur von der Orientierung des Koordinatensystems abhängig ist. An Hand der im Bild 5.2 betrachteten Konfiguration wirkt die integrale Druckkraft auf die drehende Scheibe in positive z -Richtung. Zieht man in Betracht, dass die drehende Scheibe in der Maschine den druckseitigen Radseitenraum darstellen soll und sie links statt rechts angeordnet ist, wirkt die integrale Druckkraft auf die drehende Scheibe in negative z -Richtung. Es zeigt sich, dass im Bereich der schleichenden und laminaren Strömung, representiert durch $Re = 10^2, 10^3$ und 10^4 , der Betrag des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ mit der Reynoldszahl Re sinkt. Im Bereich der turbulenten Strömung, representiert durch $Re = 10^5$ und 10^6 , steigt der Betrag des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ mit der Reynoldszahl Re .

In dem Bereich der schleichenden und laminaren Strömung kann der Anstieg von $C_{F_{ax}}$ durch den Anstieg der mittleren Winkelgeschwindigkeit β hervorgerufen werden. Die mittlere Winkelgeschwindigkeit ist zu der Wurzel des an der Wand herrschenden Druckgradienten proportional, siehe SCHILLING [141]:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p_w}{\partial r}} . \quad (5.6)$$

Ausserdem deutet das Bild 5.5 durch die Stauchung der Stromlinien im Bereich der begrenzenden Zylindermantelfläche an, dass die Stauwirkung in dem laminaren Bereich mit der Reynoldszahl schnell ansteigt. Die Wirkungen steigen offenbar schneller als der Anstieg des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit ω an, s. Gleichung 5.4.

Im Bereich der turbulenten Strömung strebt die Stauwirkung zu einem Grenzwert, weil im Bereich der begrenzenden Zylindermantelfläche das strömende Fluid unter anderem auf Grund der Inkompressibilität nicht beliebig gestaucht werden kann.

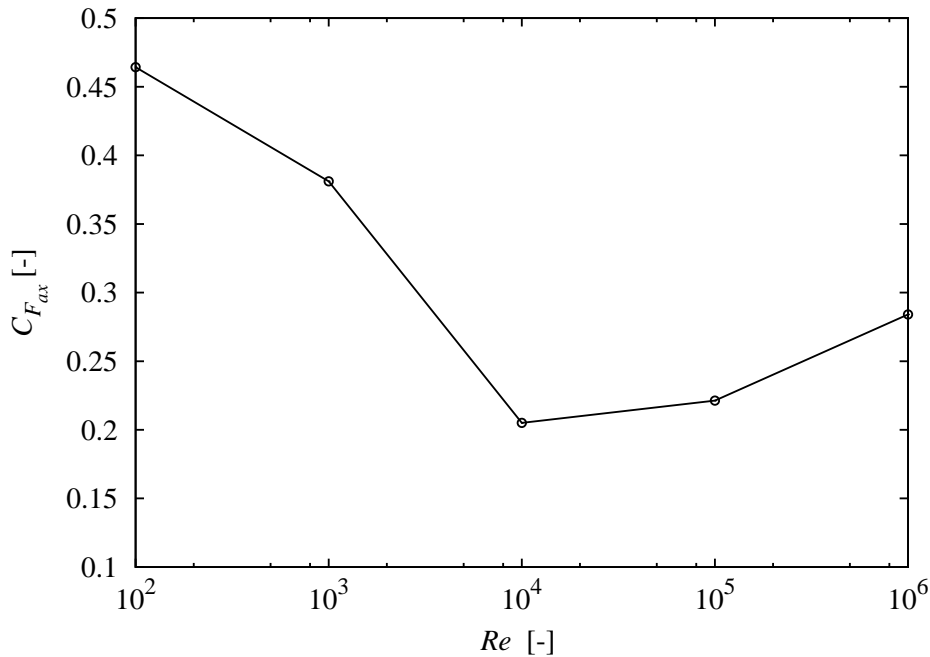


Bild 5.7: Axialkraftbeiwert $C_{F_{ax}}$ über der Reynoldszahl Re für das Seitenverhältnis $\Lambda = 10$.

Das bedeutet, dass das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ω stärker ansteigt als die Axialkraft.

Das Bild 5.8 zeigt den Verlauf des Reibmomentenbeiwert C_{M_f} über der Reynoldszahl Re für das konstante Seitenverhältnis $\Lambda = 10$. Zum Vergleich mit dem numerischen Ergebnis dienen SCHULTZ-GRUNOW [156] und DAILY UND NECE [33]. Im Reynoldszahlbereich zwischen $Re = 10^2$ und 10^3 gilt nach SCHULTZ-GRUNOW [156] die theoretische Beziehung:

$$C_{M_f}^{(I)} = \frac{2\pi}{s/r_a \cdot Re} . \quad (5.7)$$

Nach DAILY UND NECE [33] gilt für den Reynoldszahlbereich zwischen $Re = 10^3$ und 10^5 die empirische Beziehung:

$$C_{M_f}^{(II)} = \frac{3.70 (s/r_a)^{0.1}}{Re^{0.5}} . \quad (5.8)$$

Und schließlich gilt für $Re > 5 \cdot 10^5$ ebenfalls nach DAILY UND NECE [33] die empirische Beziehung:

$$C_{M_f}^{(IV)} = \frac{0.102 (s/r_a)^{0.1}}{Re^{0.2}} \quad (5.9)$$

und

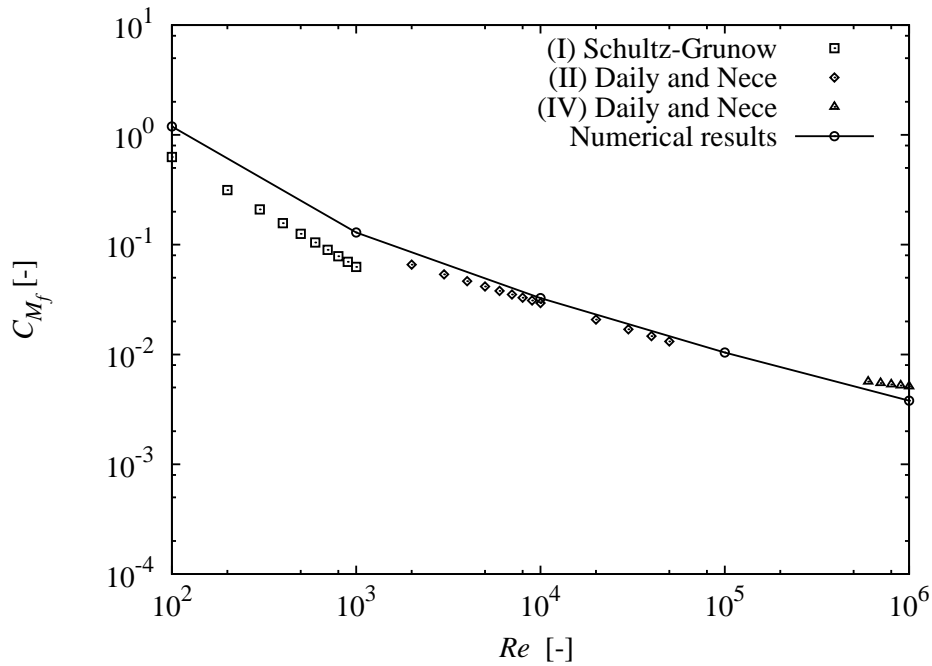


Bild 5.8: Reibmomentenbeiwert C_{M_f} über der Reynoldszahl Re für das Seitenverhältnis $\Lambda = 10$.

$$C_{M_f}^{(III)} = \frac{0.08}{(s/r_a)^{1/6} Re^{0.25}} = \frac{0.08 \cdot \Lambda^{1/6}}{Re^{0.25}} \quad \text{für } \Lambda = r_a/s > 25. \quad (5.10)$$

Die theoretische Beziehung nach SCHULTZ-GRUNOW [156] sagt niedrigere Reibmomentenbeiwerte als die numerische Lösung im entsprechenden Reynoldszahlbereich vorher. Die Ursache dafür ist, dass in SCHULTZ-GRUNOW [156] unendlich ausgehende Scheiben vorausgesetzt werden. In der numerischen Lösung wird die durch die begrenzende Zylindermantelfläche induzierte Reibung mitberücksichtigt, die zur Erhöhung des Reibmomentenbeiwertes beiträgt.

Die numerische Lösung zeigt gute Übereinstimmung mit DAILY UND NECE [33] im großen Reynoldszahlbereich zwischen $Re = 10^3$ und 10^6 . Dies kann als ein Fortschritt gegenüber numerischen Lösungen in der Literatur, die einen kleineren Reynoldszahlbereich zwischen $Re = 10^3$ und $5 \cdot 10^4$ abdecken, gesehen werden.

Variation von Seitenverhältnis Λ für konstante Reynoldszahl $Re = 10^6$

Die Untersuchung erfolgt bei den gewählten Seitenverhältnissen von $\Lambda = 100, 50, 20, 10, 5$ und 1 , die nach der Gleichung 5.3 und bei der Reynoldszahl $Re = 10^6$ den Spalt-Reynoldszahlen $Re_s = 100, 400, 2500, 10^4, 4 \cdot 10^4$, und 10^6 entsprechen. Die Vergrößerung des Seitenverhältnisses Λ erfolgt durch Verringerung der Spaltweite s , siehe Gleichung 5.2.

Bild 5.9 und 5.10 zeigen den Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungs-

richtung (rechtes Bild) und Verlauf der Sekundärgeschwindigkeit in radialer Richtung (linkes Bild) bei den bezogenen Radien $R = r/r_a$ von $R = 0.25$, $R = 0.50$ und $R = 0.75$. Auf der Abzisse ist die z -Richtung z mit der Spaltweite s entdimensioniert (siehe das Koordinatensystem im Bild 5.2) aufgetragen. Somit liegt die rotierende Scheibe bei $Z = z/s = 1$. Auf der Ordinate sind die mit der Referenzgeschwindigkeit $U_{ref} = \omega \cdot r_a$ entdimensionierten Geschwindigkeiten aufgetragen.

Die Reihenfolge der Geschwindigkeitsverläufe geht mit steigender Spalt-Reynoldszahl Re_s bzw. mit fallendem Seitenverhältnis Λ , um den gleichen Gedankengang bei Variation der Reynoldszahl Re , dass die Strömung der darauffolgenden Geschwindigkeitsverläufe turbulenter ist, beizubehalten.

Alle physikalischen Phänomene der Impulstransfermechanismus und der Stauwirkung, über die bei der Variation der Reynoldszahl Re diskutiert wurde, treten, wie in Bild 5.9 und 5.10 ersichtlich, wieder auf.

Der in der Bildreihe 5.9 und 5.10 dargestellte Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung zeigt, dass sich mit steigender Spaltweite der Geschwindigkeitsgradient vergrößert. Der Einfluss der Wände auf das gesamte Strömungsgebiet verkleinert sich dementsprechend mit steigender Spaltweite s . Mit der Vergrößerung der Spaltweite s vergrößert sich somit der Bereich der turbulenten Kernströmung.

Bild 5.11 und Bild 5.12 zeigen das Wirbelsystem bei der Variation des Seitenverhältnisses Λ . Während das Wirbelsystem für $\Lambda = 50, 20, 10, 5$ und 1 , siehe Bild 5.12, ein von der vorigen Untersuchung mit variablen Reynoldszahl Re bekanntes Bild liefert, bedarf das Wirbelsystem für $\Lambda = 100$ besondere Aufmerksamkeit.

$\Lambda = 100$ stellt einen sehr kurzen Abstand zwischen der ruhenden und der drehenden Scheibe dar. Die genauere Beobachtung des Wirbelsystems in Bild 5.11 für $\Lambda = 100$ zeigt einen Wirbelkern, der im Unterschied zu den kleineren Seitenverhältnissen Λ nicht in sich geschlossen ist.

Ein in sich geschlossener Wirbel ist ein Indiz dafür, dass um ihn herum genügend kinetische Energie vorhanden ist. Bei der sehr kurzen Abstand überwiegen jedoch in der turbulenten Strömung Newtonsche Spannungen die Reynoldsschen Spannungen. Auf Grund der Tatsache, dass Reynoldsschen Spannungen Träger der kinetischen Energie sind, kann der Wirbelkern bei der besprochenen Konfiguration nicht in sich geschlossen sein.

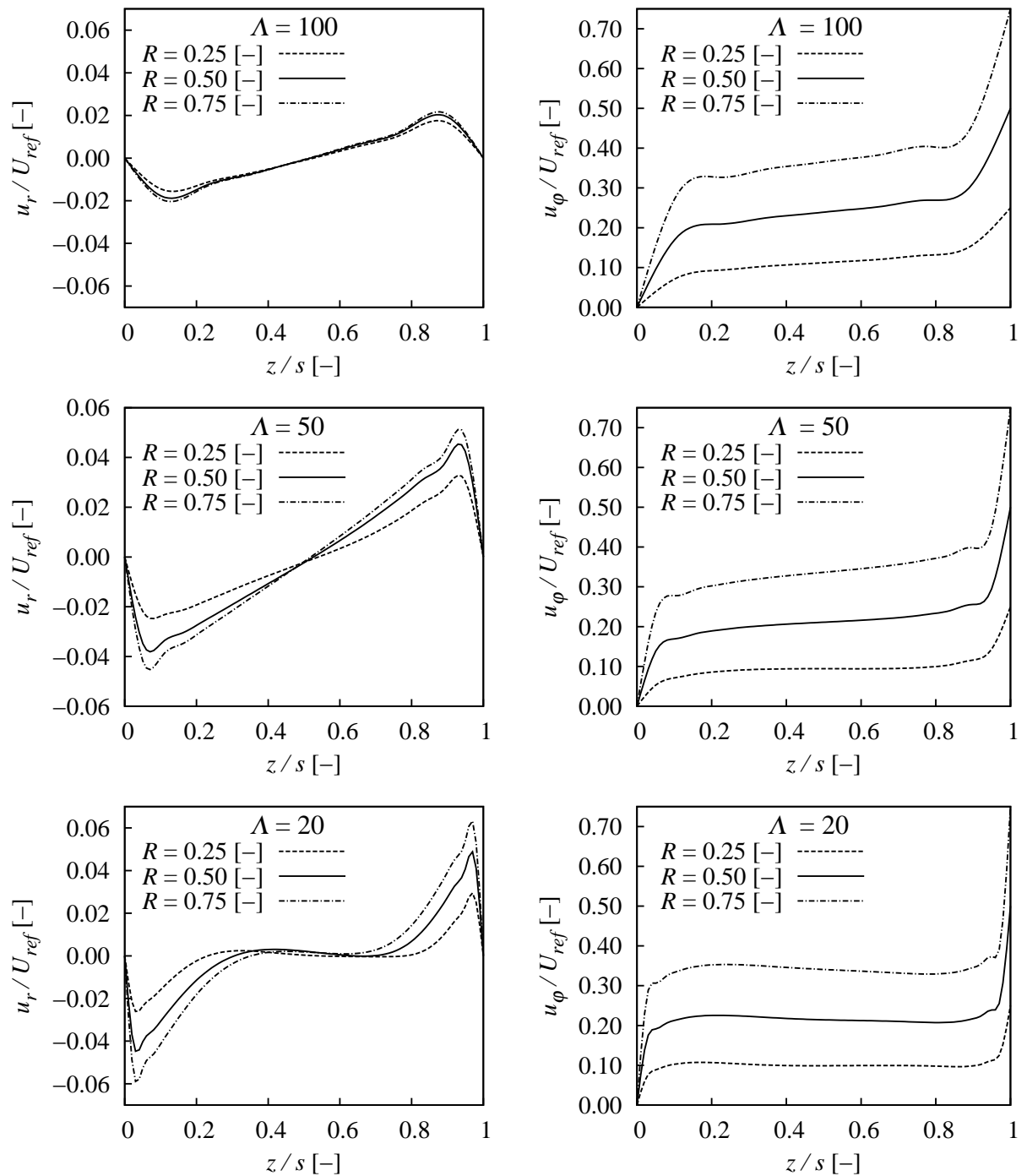


Bild 5.9: Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung (rechtes Bild) und Verlauf der Sekundärgeschwindigkeit in radialer Richtung (linkes Bild) bei Seitenverhältnissen $\Lambda = 100$, $\Lambda = 50$ und $\Lambda = 20$ und bei verschiedenen Radien R .

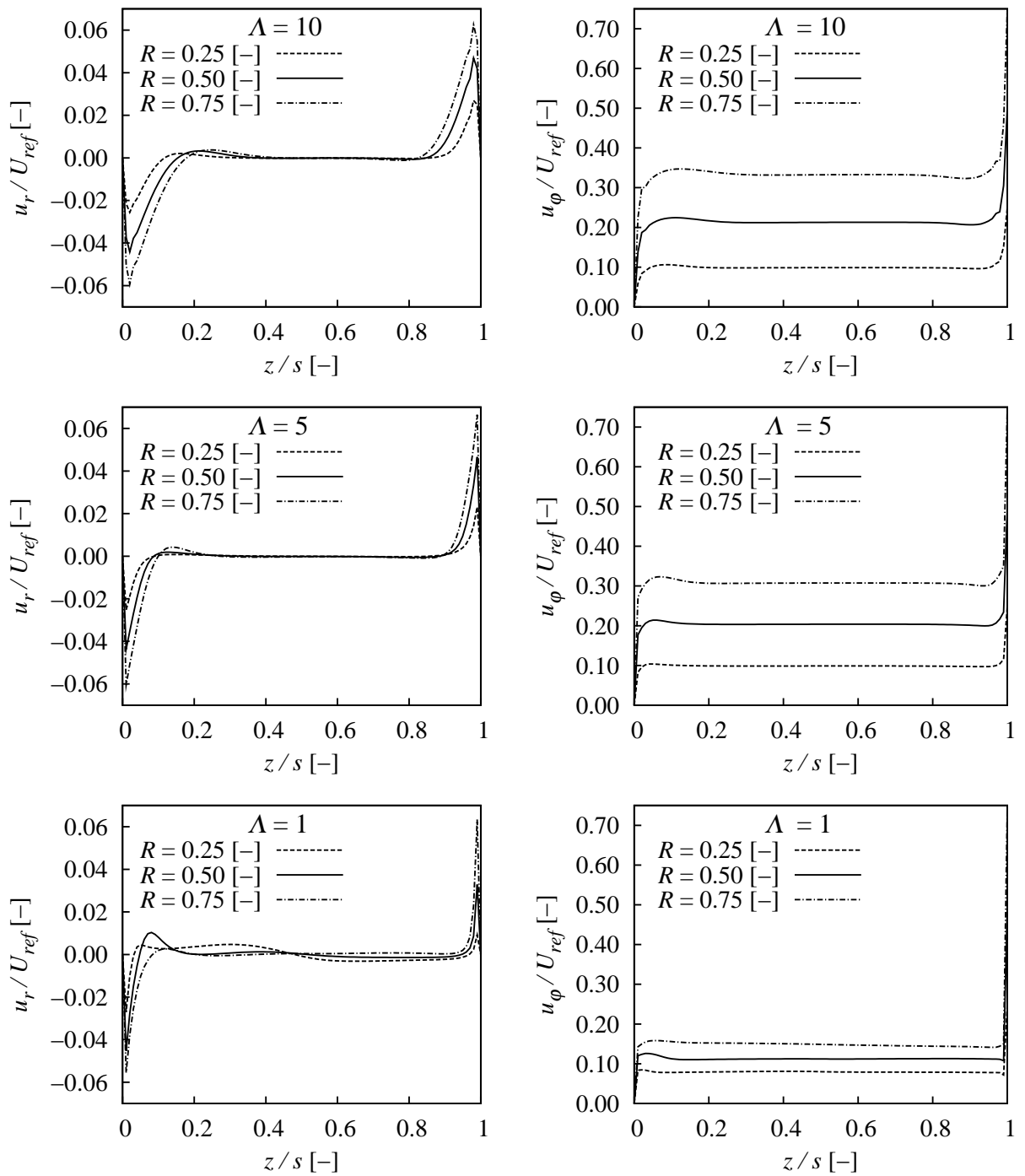


Bild 5.10: Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung (rechtes Bild) und Verlauf der Sekundärgeschwindigkeit in radialer Richtung (linkes Bild) bei Seitenverhältnissen $\Lambda = 10$, $\Lambda = 5$ und $\Lambda = 1$ und bei verschiedenen Radien R .

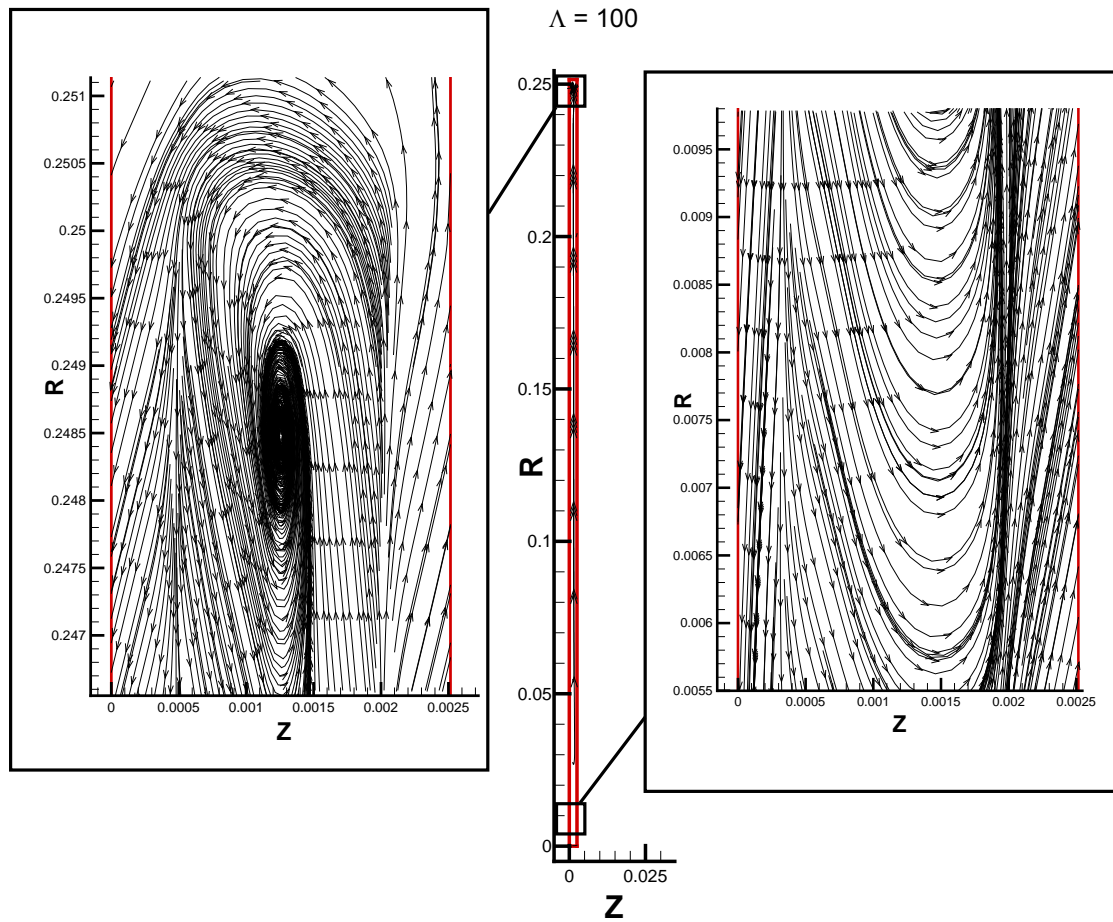


Bild 5.11: Wirbelsystem in der Meridianebene des idealisierten Radseitenraumes ohne resultierenden Durchfluss bei der Reynoldszahl $Re = 10^6$ und bei dem Seitenverhältnis $\Lambda = 100$.

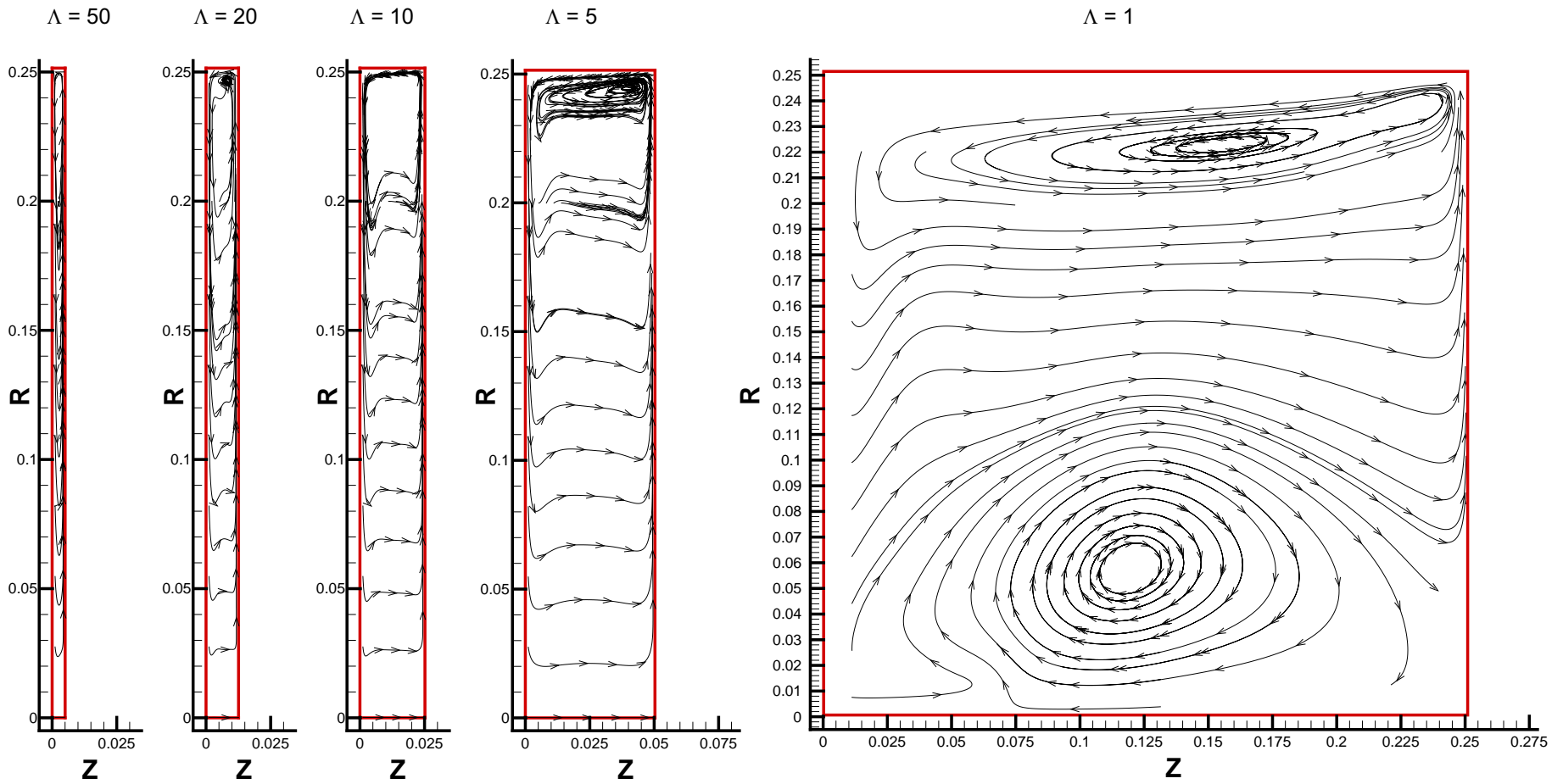


Bild 5.12: Wirbelsystem in der Meridianebene des idealisierten Radseitenraumes ohne resultierenden Durchfluss bei der Reynoldszahl $Re = 10^6$ und bei den Seitenverhältnissen $\Lambda = 50, 20, 10, 5$ und 1 .

Das Bild 5.13 zeigt den Verlauf des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ bei der Variation des Seitenverhältnisses Λ . Mit steigendem Seitenverhältnis Λ erhöht sich der Betrag des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$. Im Bereich $5 < \Lambda \leq 25$ zeigt das Bild den gleichen Verlauf, der in SCHILLING [141] für den Bereich $10 \leq Re_s \leq 100$ skizziert ist. Der Unterschied liegt darin, dass hier $Re_s = 10000$ herrscht. Neben dem Verlauf ist die Größenordnung gleich und letztlich auch die Größe. Es zeigt sich, dass offenbar die Vergrößerung der Spalt-Reynoldszahl Re_s um zwei bis drei Größenordnungen keine entsprechend starke Veränderung des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ im Bereich $5 < \Lambda \leq 25$ hervorruft.

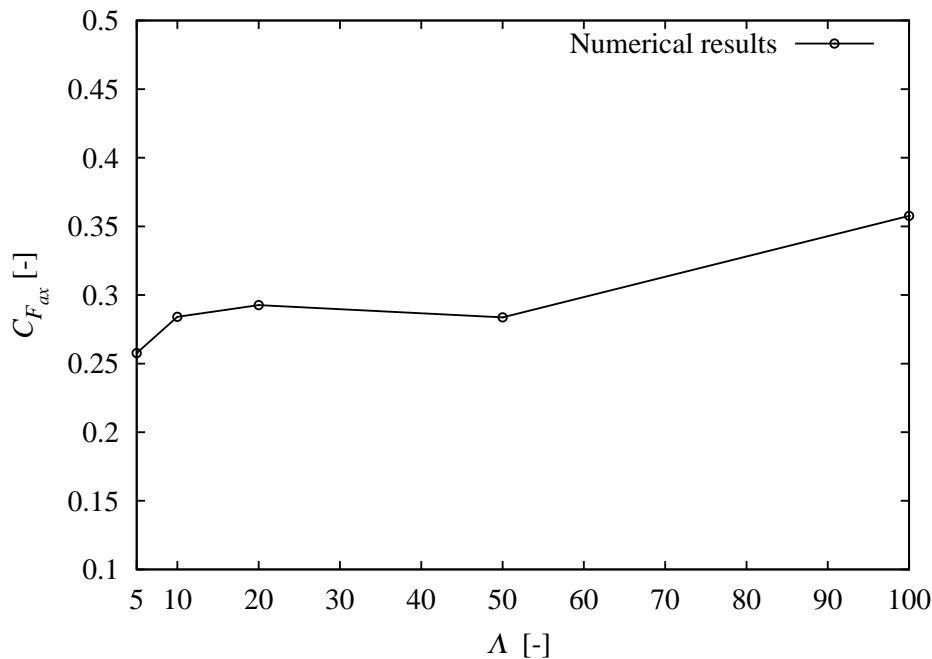


Bild 5.13: Axialkraftbeiwert $C_{F_{ax}}$ über dem Seitenverhältnis Λ für die Reynoldszahl $Re = 10^6$.

Das Bild 5.14 zeigt den Verlauf des Reibmomentenbeiwertes C_{M_f} bei der Variation des Seitenverhältnisses Λ . Im Bereich des Seitenverhältnisses zwischen $5 < \Lambda \leq 25$ sinkt der Reibmomentenbeiwert C_{M_f} . Für $\Lambda \geq 25$ steigt nach DAILY UND NECE [33] der Reibmomentenbeiwert C_{M_f} . Die numerische Lösung zeigt im Bereich des Seitenverhältnisses zwischen $25 < \Lambda \leq 50$ die gleiche Tendenz wie die empirische Beziehung nach DAILY UND NECE [33]. Es existiert in dem Bereich ein Offset des Reibmomentenbeiwertes C_{M_f} von $C_{M_f} \approx 0.0006$.

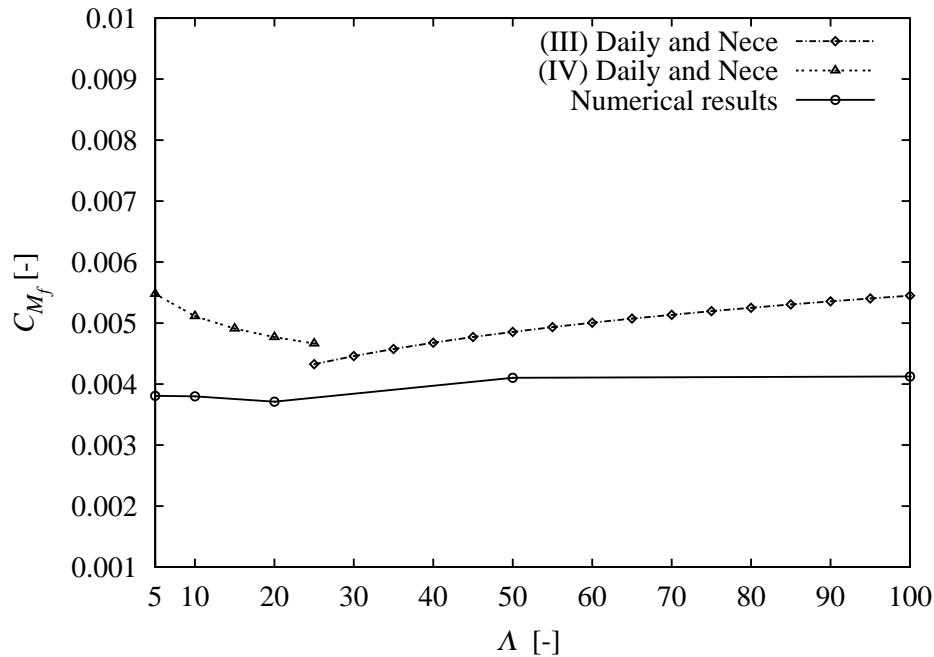


Bild 5.14: Reibmomentenbeiwert C_{M_f} über dem Seitenverhältnis Λ für die Reynoldszahl $Re = 10^6$.

5.1.2 Radseitenraum mit resultierendem Durchfluss

Wichtige Kennzahlen, die bei der Modellvorstellung des Radseitenraumes mit resultierendem Durchfluss zusätzlich wichtig sind, sind die Radienverhältnisse R_i und R_s und die Durchflusszahl, die wie folgt definiert sind:

$$R_i = \frac{r_i}{r_a} \quad \text{und} \quad R_s = \frac{r_s}{r_a}, \quad (5.11)$$

$$Q^* = \frac{q}{\omega \cdot s \cdot r_a^2} \quad \text{mit} \quad q = \frac{\dot{V}_L}{2\pi}. \quad (5.12)$$

q in der Gleichung 5.12 bezeichnet den Durchfluss pro Umfang. \dot{V}_L bezeichnet den Leckvolumenstrom. Um die geometrische Ähnlichkeit zu berücksichtigen, wird die Spalt-Durchflusszahl Q_s mit folgender Definition auch verwendet:

$$Q_s = Q^* \cdot \Lambda. \quad (5.13)$$

Die Untersuchung erfolgt in Anlehnung an SCHILLING [141] mit dem Parameterersatz, der in der Tabelle 5.1 dargestellt ist. Der einzige Unterschied liegt in der höheren Reynoldszahl von $Re = 10^6$. Die Untersuchungen wurden mit Spalt-Durchflusszahlen von $Q_s = 10^{-4}$, $5 \cdot 10^{-4}$, 10^{-3} , $5 \cdot 10^{-3}$ und 10^{-2} durchgeführt.

Tabelle 5.1: Parameter für die Untersuchung des Einflusses der Spalt-Durchflusszahl Q_s

Geometrische und kinetische Parameter	
R_i	0.2
R_s	0.9
Λ	10
Re	10^6

Der in der Bildreihe 5.15 und 5.16 dargestellte Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in radialer Strömungsrichtung zeigt, dass sich mit steigender Spalt-Durchflusszahl Q_s der Nulldurchgang in Richtung der drehenden Scheibe verschiebt. Das ist darauf zurückzuführen, dass die axiale Masse- und Impulszufuhr im Bereich des äußeren Radius stattfindet und dass im Bereich des inneren Radius sich ein Auslass befindet. Dabei strömt die zugeführte Masse an der ruhenden Scheibe entlang nach innen und strömt durch den Auslass aus dem Strömungsgebiet, siehe Bild 5.17.

Ausserdem ist beim Vergleich mit dem Verlauf der Sekundärgeschwindigkeit in radialer Richtung ohne resultierenden Durchfluss im Bild 5.4 zu bemerken, dass hier die Radialgeschwindigkeit sehr stark angefacht wird. Das entlang der ruhenden Scheibe strömende zugeführte Fluid überwindet einerseits die Wandreibung. Andererseits entsteht zwischen das zugeführte Fluid und das Fluid des Hauptwirbels Reibungswechselwirkung. Durch den Durchfluss wird also das Fluid schneller umgewälzt.

Beim Vergleich mit dem Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung ohne resultierenden Durchfluss im Bild 5.4 bemerkt man, dass hier die mittlere Umfangsgeschwindigkeit stark abgebremst wird. Die Winkelgeschwindigkeit der Kernströmung nimmt ab, weil sie Leistung abgeben muss, um den zugeführten Massenstrom in Umfangsrichtung zu beschleunigen.

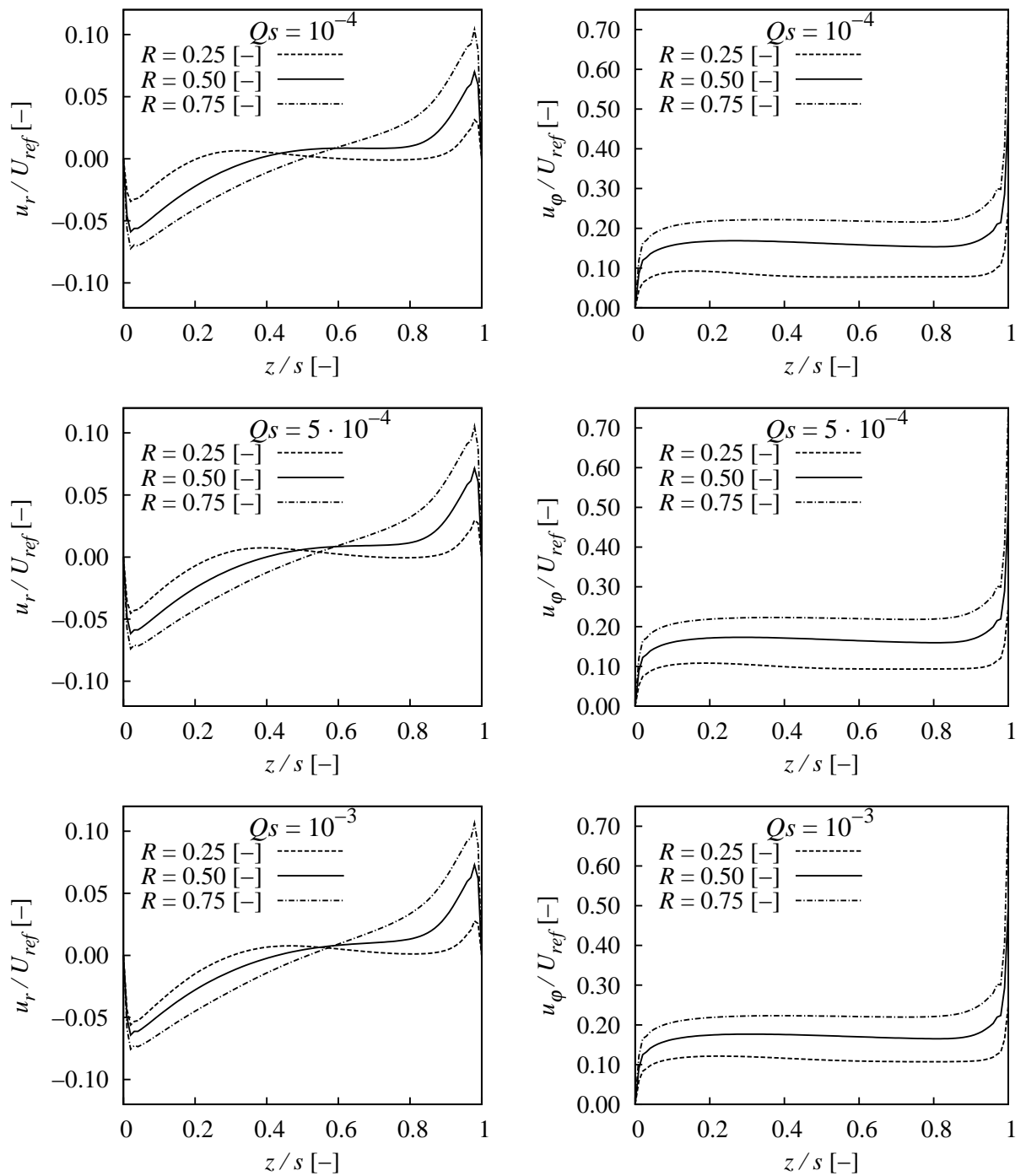


Bild 5.15: Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung (rechtes Bild) und Verlauf der Sekundärgeschwindigkeit in radialer Richtung (linkes Bild) bei Spalt-Durchflusszahl $Q_s = 10^{-4}$, $Q_s = 5 \cdot 10^{-4}$ und $Q_s = 10^{-3}$ und bei verschiedenen Radien R .

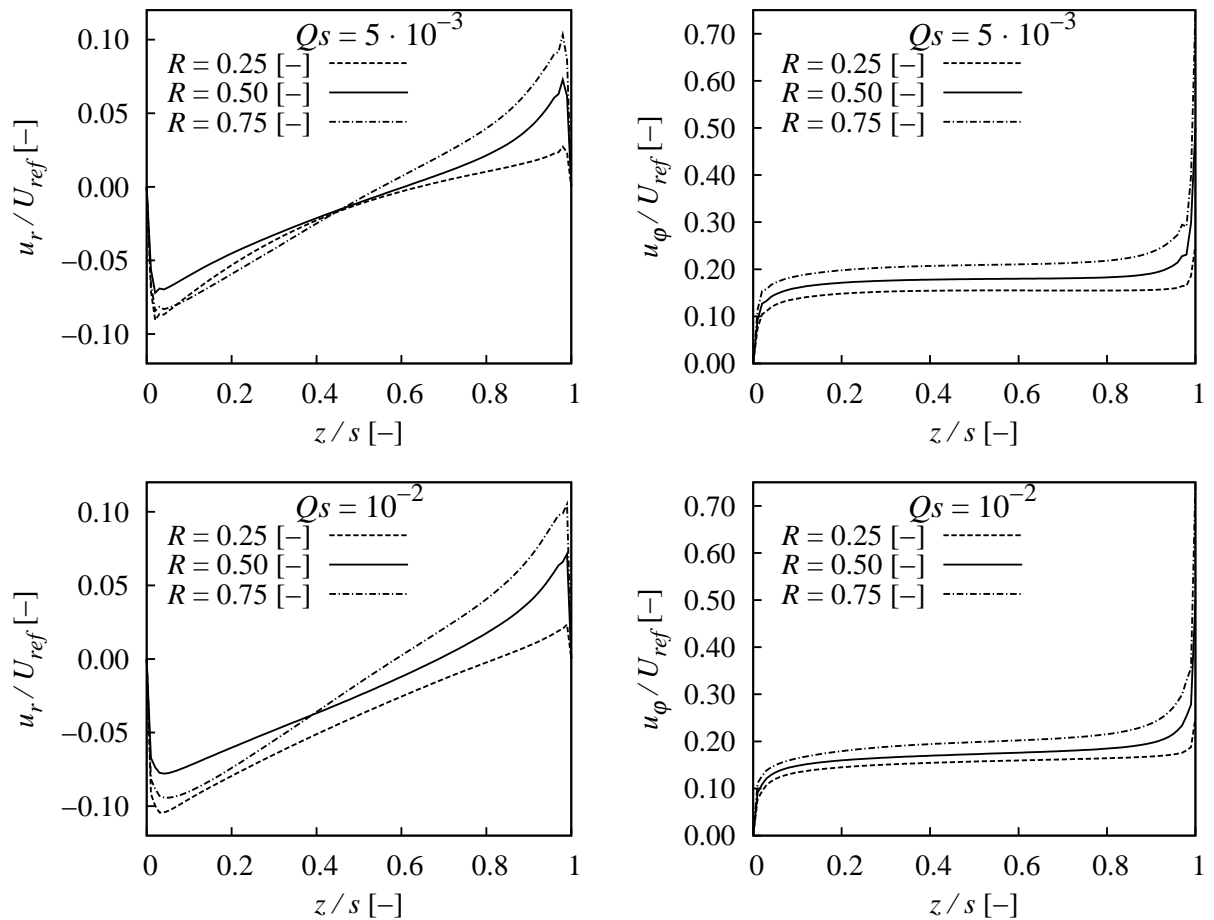


Bild 5.16: Verlauf des Geschwindigkeitsprofils in Hauptströmungsrichtung (rechtes Bild) und Verlauf der Sekundärgeschwindigkeit in radialer Richtung (linkes Bild) bei Spalt-Durchflusszahl $Q_s = 5 \cdot 10^{-3}$ und $Q_s = 10^{-2}$ und bei verschiedenen Radien R .

Das Bild 5.17 zeigt das Wirbelsystem mit Durchfluss. Auf der Zylindermantelfläche bildet sich ein Sekundärwirbel, der darauf zurückzuführen ist, dass die drehende Scheibe bei 90% des äußeren Radius aufhört. Der Hauptwirbel geht etwas über $R_s = 0.9$ vor der Umlenkung zu der ruhenden Scheibe hin. Das Fluid in dem vom Hauptwirbel nicht erfassten Raum wird von dem Hauptwirbel in Bewegung gesetzt.

Bei der Spalt-Durchflusszahl $Q_s = 10^{-4}$, $5 \cdot 10^{-4}$ und 10^{-3} beeinflusst der zugeführte axiale Impuls den Sekundärwirbel nicht wesentlich. Das eintretende Fluid strömt teils in den Hauptwirbel, der das Fluid zu der ruhenden Wand hintransportiert. Das im Bereich des Sekundärwirbels einströmende Fluid wird direkt nach innen umgelenkt, wo es auf die Strömung des Hauptwirbels trifft und zu der ruhenden Wand nochmals umgelenkt wird, siehe Bild 5.17. Die Erstreckung des Sekundärwirbels nimmt dennoch mit steigender Spalt-Durchflusszahl Q_s ab. Bei der Spalt-Durchflusszahl $Q_s = 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-3}$ und 10^{-2} ist die Abnahme deutlich ersichtlicher.

Das Bild 5.18 zeigt den Verlauf des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$. Mit dem Rechenmodell II ist bei kleinerer Spalt-Durchflusszahl Q_s der Betrag des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ kleiner als mit dem Rechenmodell I im Kap. 5.1.1 ohne resultierenden Durchfluss. Dies kann dadurch begründet werden, dass der Druckaufbau im Bereich $0 \leq R \leq R_i$ durch das wegfallende Wandstück der ruhenden Scheibe in dem Bereich wesentlich abgeschwächt wird. Mit steigendem Durchfluss erhöht sich der Betrag des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$. Die hohe Durchflussdichte kompensiert den abgeschwächten Druckaufbau im Bereich $0 \leq R \leq R_i$.

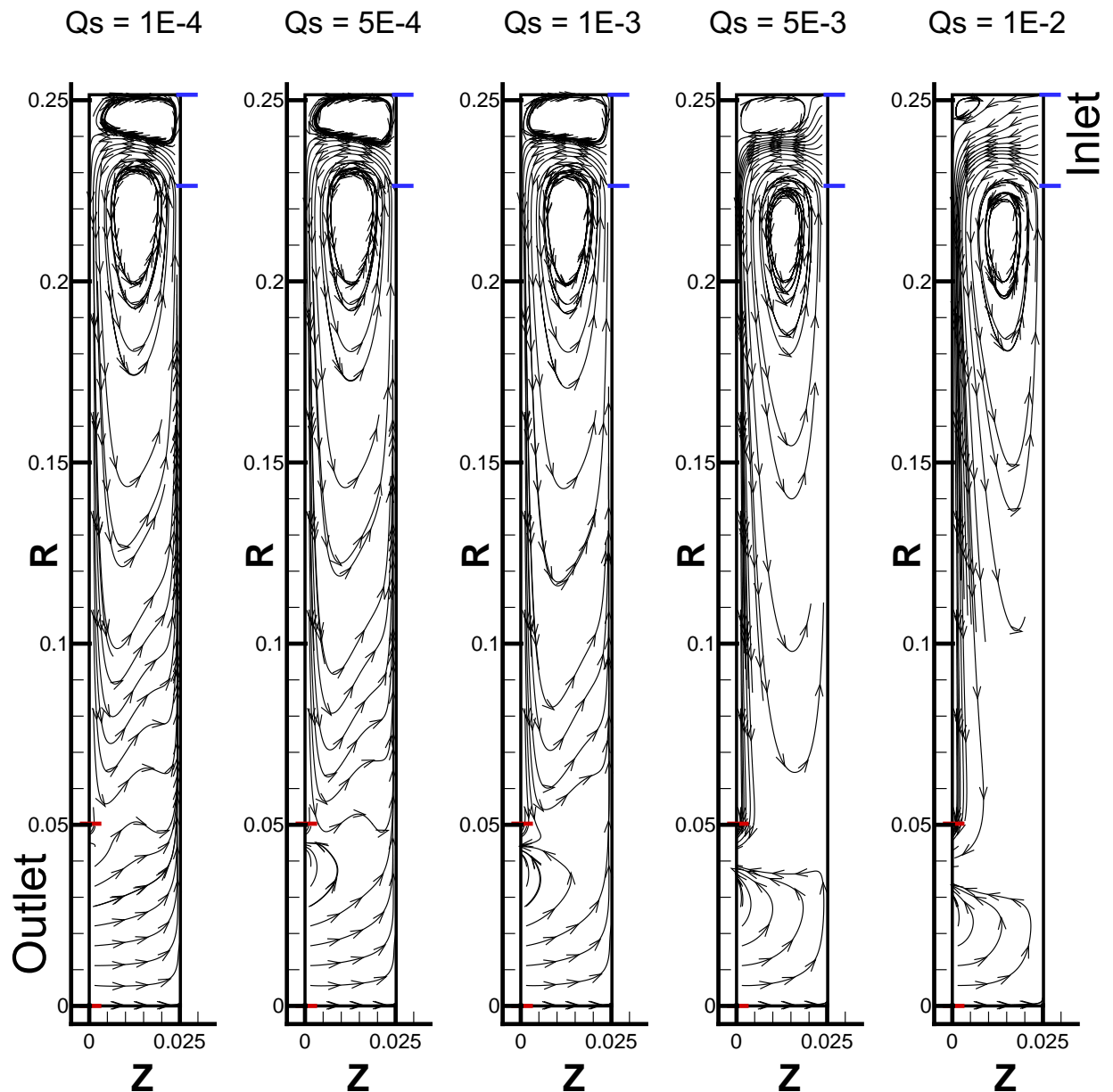


Bild 5.17: Wirbelsystem in der Meridianebene des idealisierten Radseitenraumes mit resultierendem Durchfluss bei der Reynoldszahl $Re = 10^6$ und bei dem Seitenverhältnis $\Lambda = 100$.

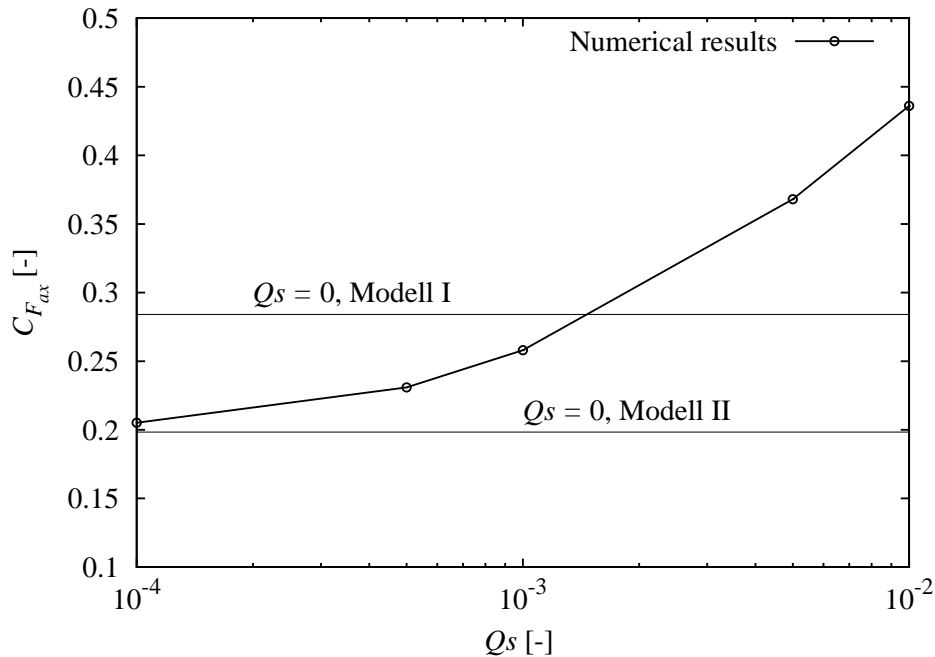


Bild 5.18: Axialkraftbeiwert $C_{F_{ax}}$ über der Spalt-Durchflusszahl Q_s bei dem Seitenverhältnis $\Lambda = 10$ und der Reynoldszahl $Re = 10^6$.

Das Bild 5.19 stellt den dem Axialkraftbeiwert $C_{F_{ax}}$ entsprechenden Druckverlauf dar. Dabei wird der Druckverlauf, der in der Literatur skizziert wurde, wiedergegeben. Für die Darstellung des Druckes p wird dabei ein reduzierter statischer Druck p^* verwendet, da das Druckniveau in der Regel nicht bekannt ist. Der statische Druck p wird also auf die Weise reduziert, so dass $p^*(r/r_a = 0) = 0$ gilt.

Bei dem Bild 5.19 wird der Abstand zwischen zwei Linien konstanter Spalt-Durchflusszahl Q_s als Steigung des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ im Bild 5.18 wiedergegeben. Es ist ausserdem dabei zu beachten, dass sich der im höheren Energieniveau befindliche statische bzw. reduzierte statische Druck p bzw. p^* im Radseitenraum unterschiedlich abbaut.

Das Bild 5.20 zeigt den Verlauf des Reibmomentenbeiwertes C_{M_f} bei der Variation der Spalt-Durchflusszahl Q_s . Die horizontale Markierungslinie „Modell I“ zeigt den Reibmomentenbeiwert C_{M_f} für das gleiche Seitenverhältnis $\Lambda = 10$ und die gleiche Reynoldszahl $Re = 10^6$ bei dem Modell ohne resultierenden Durchfluss vom Kap. 5.1.1. Es zeigt sich, dass bei der Variation im Bereich $10^{-4} \leq Q_s \leq 10^{-3}$ der Reibmomentenbeiwert C_{M_f} nur schwach sinkt. Im Vergleich zu dem Modell ohne resultierenden Durchfluss im Kap. 5.1.1 gibt es lediglich einen Offset. Nähere Untersuchung zeigt, dass der Offset durch das Rechenmodell bedingt wird. Im Bereich $10^{-3} \leq Q_s \leq 10^{-2}$ nimmt der Reibmomentenbeiwert C_{M_f} stark ab.

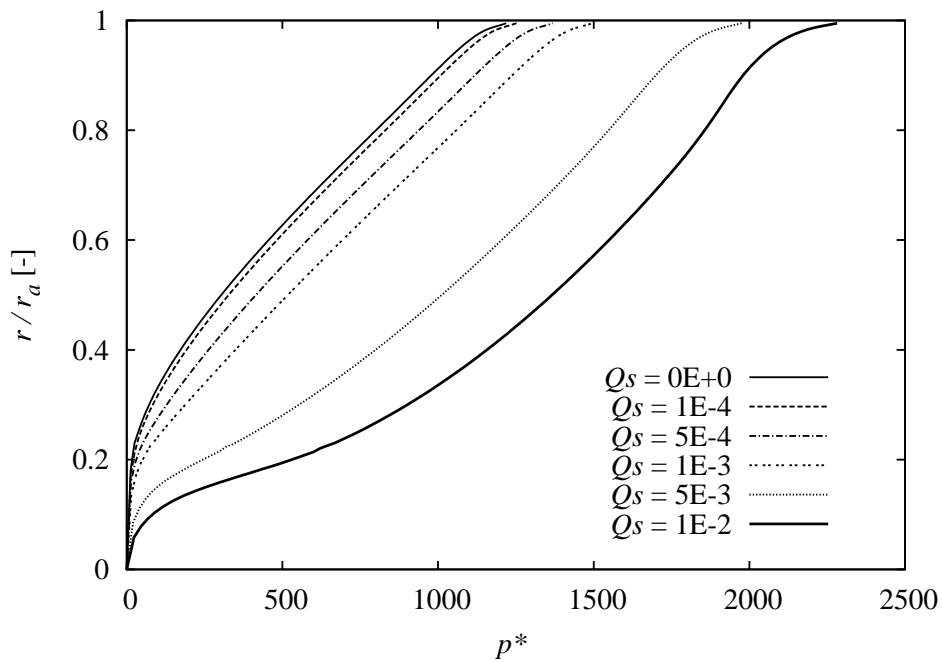


Bild 5.19: Verlauf des reduzierten statischen Druckes p^* auf der rotierenden Scheibe über dem bezogenen Radius für verschiedene Spalt-Durchflusszahlen Q_s bei dem Seitenverhältnis $\Lambda = 10$ und der Reynoldszahl $Re = 10^6$.

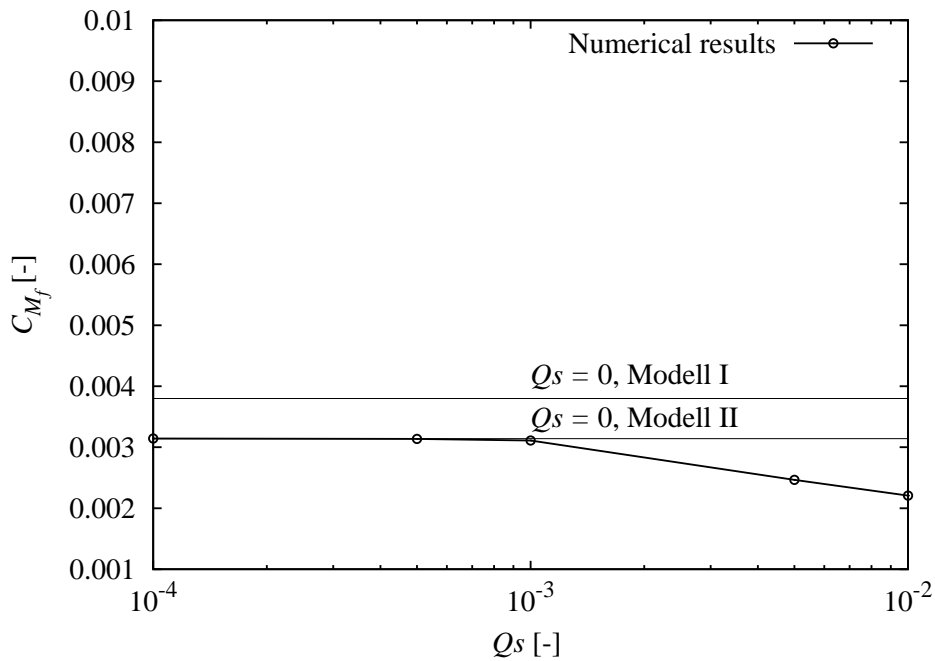


Bild 5.20: Reibmomentenbeiwert C_{M_f} über der Spalt-Durchflusszahl Q_s bei dem Seitenverhältnis $\Lambda = 10$ und der Reynoldszahl $Re = 10^6$.

5.2 Radseitenräume in einer Turbomaschine

In diesem Kapitel wird eine technische Ausführung der Radseitenräume in der Turbomaschinen am Beispiel von Francisturbine FT20 mit der spezifischen Drehzahl $n_q = 20 \frac{1}{min}$ betrachtet. Die originären Radseitenräume sind durch eine Re-Zahl $Re = 3.8 \cdot 10^6$ charakterisiert. Bei der durchgeführten Variation der Spaltweite s zwischen 3 und 7 mm variieren die entsprechenden charakteristischen Seitenverhältnisse Λ_{DS} und Λ_{SS} zwischen 83.83 und 36.93. Der Unterschied zum idealisierten Radseitenraum in Kap 5.1 liegt einerseits darin, dass die Scheibe nicht bis zum Radius $R = 0$ reicht, weil eine Welle durch das Laufrad geht. Andererseits haben Radseitenräume in der technischen Ausführung eine komplexere Geometrie.

Die Untersuchung wird zunächst am druckseitigen Radseitenraum (Kapitel 5.2.1) durchgeführt. Dabei wird die Spaltweite s in drei Schritten – 3, 5 und 7 mm – variiert. Danach wird der saugseitige Radseitenraum (Kapitel 5.2.2) untersucht. Die Spaltweite s wird in fünf Schritten – 3, 4, 5, 6 und 7 mm – variiert. Abschließend wird im Kapitel 5.2.3 der Einfluss des Leckvolumenstromes am saugseitigen Radseitenraum untersucht.

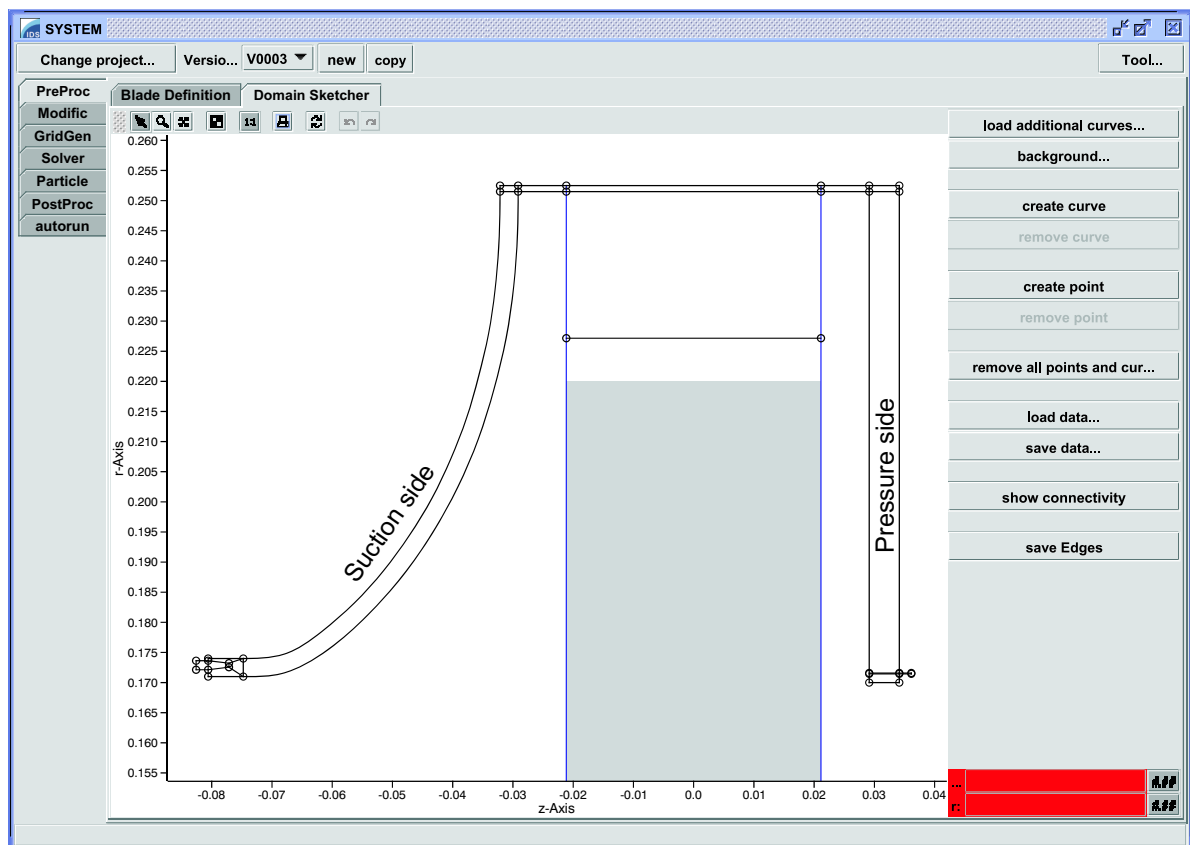


Bild 5.21: Skizze der Radseitenräume im Intergrated Design System IDS.

Bild 5.21 zeigt die schematische Anordnung des druckseitigen sowie des saugseitigen Radseitenraums auf der Benutzeroberfläche des Intergrated Design System IDS, das

am Lehrstuhl für Fluidmechanik der TU München entwickelt wurde. Dabei beträgt die Spaltweite des druckseitigen bzw. des saugseitigen Radseitenraums 5 mm bzw. 3 mm .

5.2.1 Druckseitiger Radseitenraum

Variation der Spaltweite s

Das Bild 5.22 zeigt den Verlauf des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ bei der Variation der Spaltweite s . Mit der steigenden Spaltweite von $s = 3\text{ mm}$ auf $s = 5\text{ mm}$ sinkt der Betrag des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$, der sich jedoch bei der Spaltweite von $s = 7\text{ mm}$ wieder leicht erhöht. Für das betrachtete Intervall der Spaltweite kann der berechnete Verlauf durch folgendes Polynom sehr gut beschrieben werden:

$$C_{F_{ax}} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \Lambda^2 - 2 \cdot 10^{-3} \cdot \Lambda + 0.1316 . \quad (5.14)$$

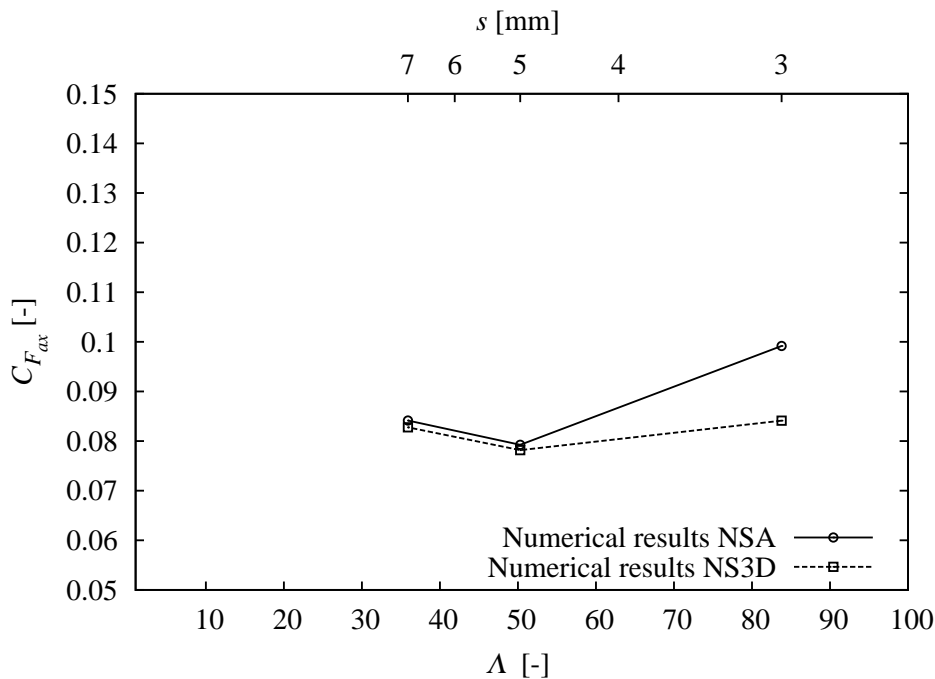


Bild 5.22: Axialkraftbeiwert $C_{F_{ax}}$ des druckseitigen Radseitenraumes der FT20 über dem Seitenverhältnis Λ bei $Re = 3.8 \cdot 10^6$.

Das Bild 5.23 zeigt den Verlauf des Reibmomentenbeiwertes C_{M_f} bei der Variation der Spaltweite s . Ausserdem wird zum Vergleich der Verlauf des Reibmomentenbeiwertes C_{M_f} bei der Variation der Spaltweite s für den idealisierten Radseitenraum nach DAILY UND NECE [33] dargestellt. Im Vergleich zu dem idealisierten Radseitenraum, der sich von $R = r/r_a = 0$ bis $R = 1$ erstreckt, beginnt der druckseitige Radseitenraum von FT20 mit der sich mitdrehenden inneren Zylinderwandfläche

bei $R \approx 0.68$. Ähnlich wie bei dem idealisierten Radseitenraum ist hier auch zu beobachten, dass der Reibmomentenbeiwert C_{M_f} mit steigendem Seitenverhältnis Λ bzw. mit fallender Spaltweite s leicht ansteigt. Für das betrachtete Intervall der Spaltweite kann der berechnete Verlauf durch folgendes Polynom sehr gut beschrieben werden:

$$C_{M_f} = -2 \cdot 10^{-7} \cdot \Lambda^2 + 5 \cdot 10^{-5} \cdot \Lambda + 0.002 . \quad (5.15)$$

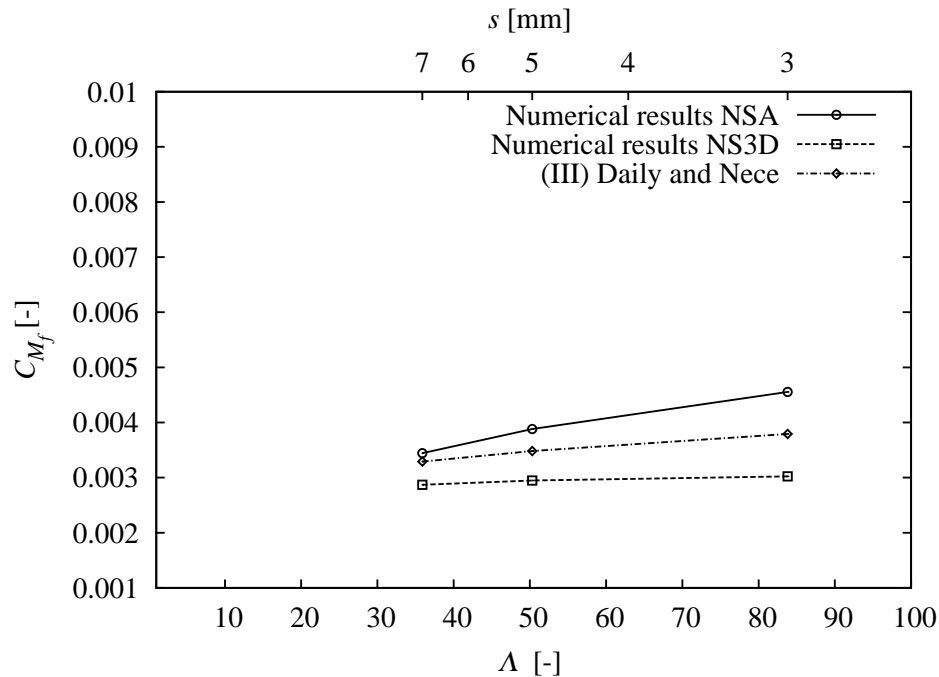


Bild 5.23: Reibmomentenbeiwert C_{M_f} des druckseitigen Radseitenraumes der FT20 über dem Seitenverhältnis Λ bei $Re = 3.8 \cdot 10^6$.

Performance-Vergleich

Das Bild 5.24 zeigt die normierte CPU-Zeit zum Performance-Vergleich zwischen dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten NSA-Code und dem am Lehrstuhl für Fluidmechanik der TU München vorhandenen NS3D-Code. Es zeigt sich an Hand der exemplarischen Beispiele, dass der entwickelte NSA-Code gegenüber dem NS3D-Code einen Performance-Faktor von 2 Größenordnungen aufweisen kann. Vereinfachend gesagt kann von einem Rechenzeitverhältnis NSA : NS3D von 1 : 100 ausgegangen werden.

5.2.2 Saugseitiger Radseitenraum

Das Rechengebiet des saugseitigen Radseitenraums wird in acht Blöcken unterteilt und entsprechend vernetzt, siehe Bild 5.25. Zur Verdeutlichung des Größenunterschiedes der Spaltweite $s = 3 \text{ mm}$ und 7 mm dient desweiteren das Bild 5.25.

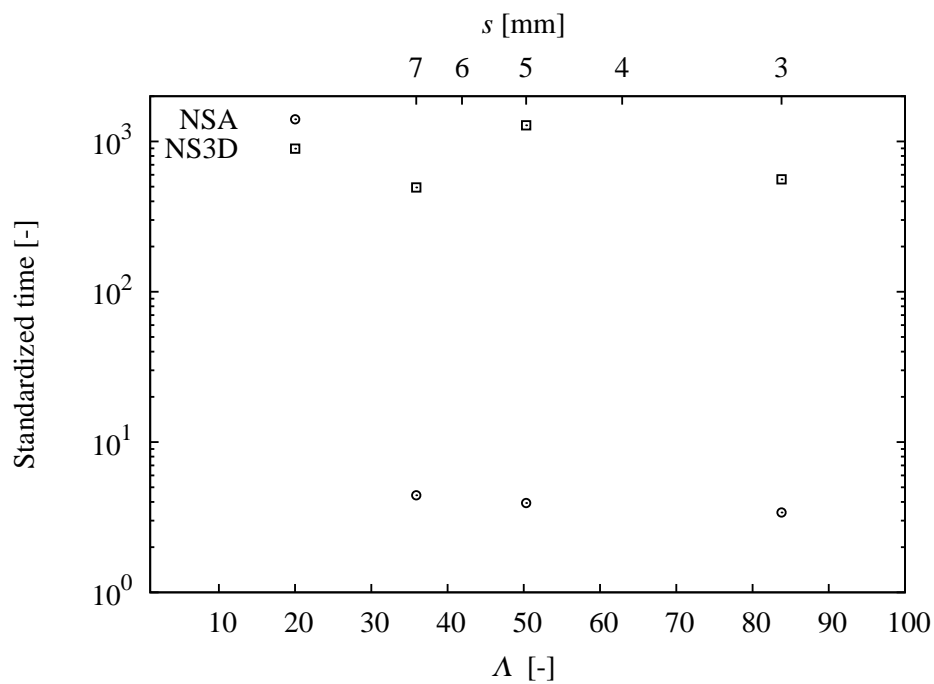


Bild 5.24: Normierte CPU-Zeit zum Performance-Vergleich zwischen NSA-Code und NS3D-Code über dem variierten Seitenverhältnis Λ bei $Re = 3.8 \cdot 10^6$.

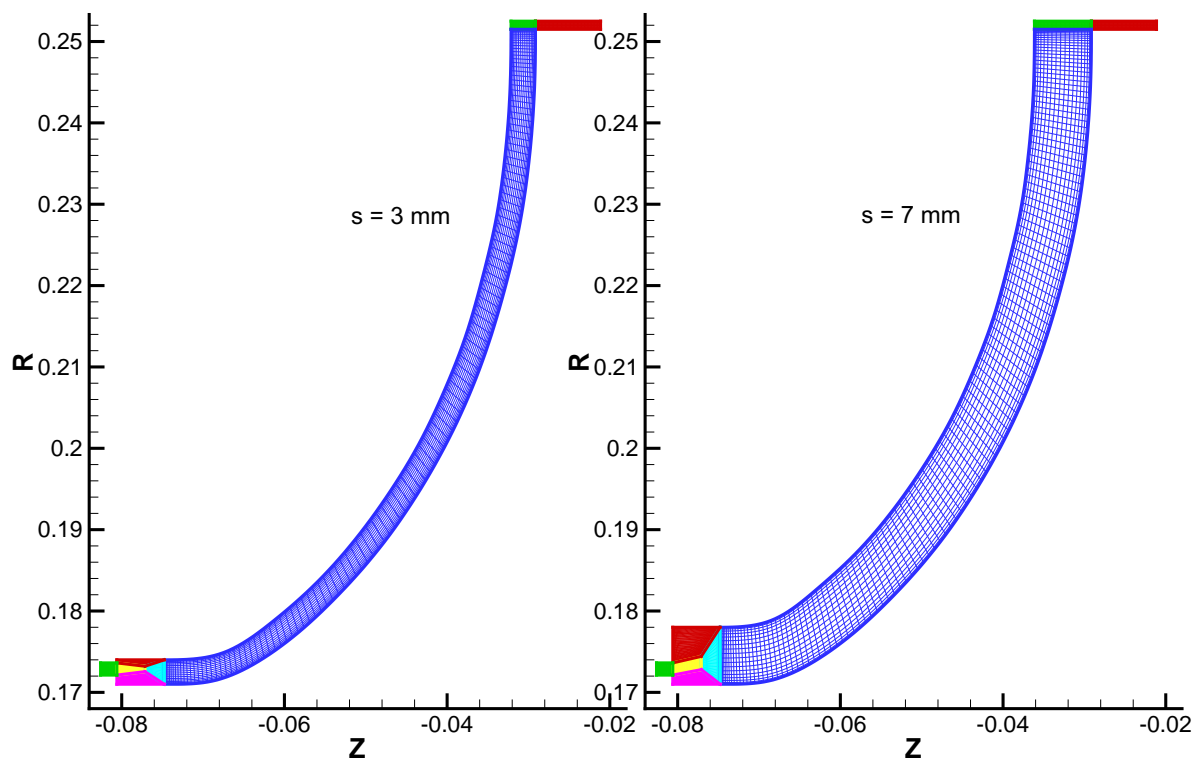


Bild 5.25: Multiblock vernetzter saugseitiger Radseitenraum bei 3 mm Spaltweite und bei 7 mm Spaltweite.

Variation der Spaltweite s bei $Q_L/Q = 0$

Das Bild 5.26 zeigt den Verlauf des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ bei der Variation der Spaltweite s . Der qualitative Verlauf des saugseitigen Radseitenraumes der betrachteten Francisturbine FT20 unterscheidet sich nicht von dem im Kap. 5.1.1 für den idealisierten Radseitenraum festgestellten Verlauf, vgl. mit Bild 5.13. Bei der ähnlichen Reynoldszahl in der Größenordnung von 10^6 weist der Axialkraftbeiwert $C_{F_{ax}}$ im Bereich $40 \leq \Lambda \leq 50$ ein Minimum auf.

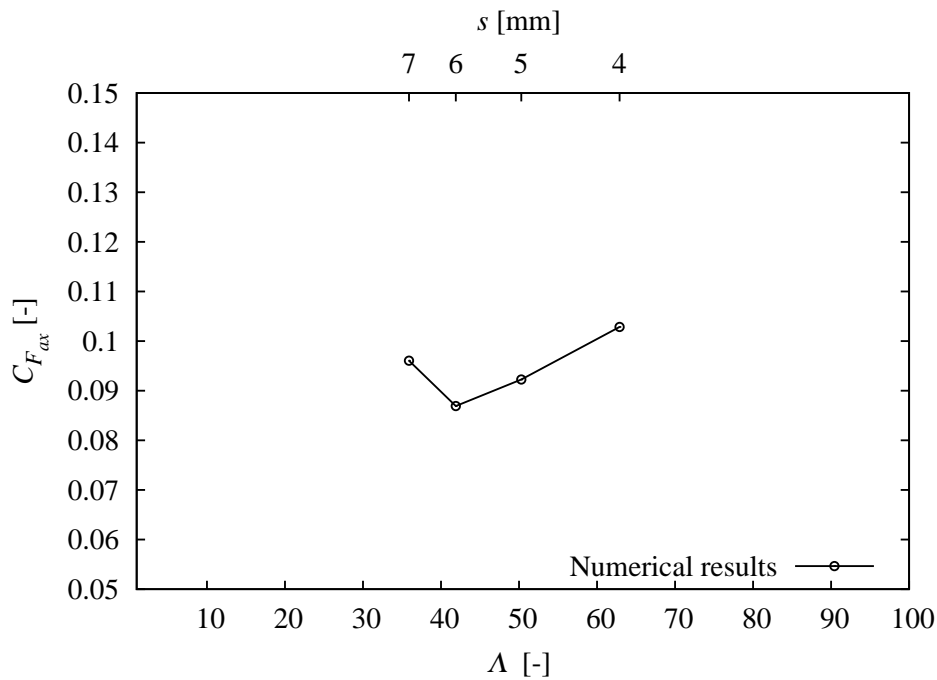


Bild 5.26: Axialkraftbeiwert $C_{F_{ax}}$ des saugseitigen Radseitenraumes der FT20 über dem Seitenverhältnis Λ bzw. über der Spaltweite s bei $Q_L/Q = 0$.

Das Bild 5.27 zeigt den Verlauf des Reibmomentenbeiwertes C_{M_f} bei der Variation der Spaltweite s . Ausserdem wird zum Vergleich der Verlauf des Reibmomentenbeiwertes C_{M_f} bei der Variation der Spaltweite s für den idealisierten Radseitenraum nach DAILY UND NECE [33] dargestellt. Im Vergleich zu dem idealisierten Radseitenraum zeigt der saugseitige Radseitenraum von FT20 höhere Reibmomentenbeiwerte C_{M_f} . Der Grund besteht darin, dass durch die zweifach gekrümmte Rotationsfläche eine insgesamt größere Flächen als bei der geraden Scheibe entsteht.

5.2.3 Einfluss der Leckage

In der technischen Ausführung ist man bestrebt, unter anderem den Wellenwirkungsgrad, der sich aus der Multiplikation des hydraulischen, volumetrischen und Schaufel-Wirkungsgrades berechnet, zu erhöhen. Die Erhöhung des volumetrischen Wirkungsgrades ist hier insbesondere interessant, da die Untersuchung des Leckvo-

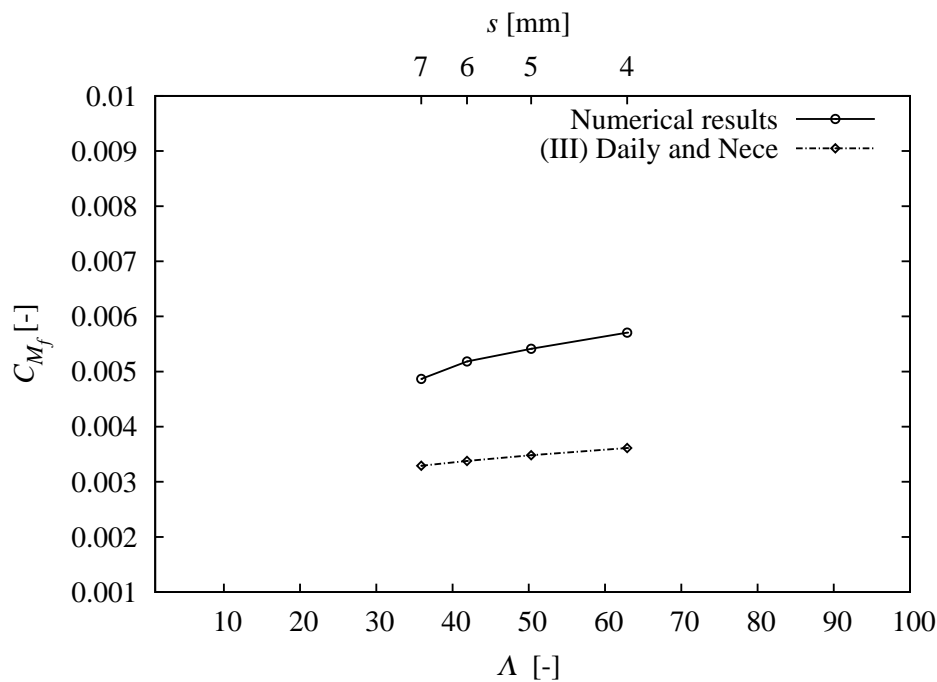


Bild 5.27: Reibmomentenbeiwert C_{M_f} des saugseitigen Radseitenraumes der FT20 über dem Seitenverhältnis Λ bzw. über der Spaltweite s bei $Q_L/Q = 0$.

lumenstromes Q_L die Frage beantworten kann, inwieweit die geforderten integralen Größen bei einem gegebenen Leckvolumenstrom eingehalten werden kann.

Für die Berechnung wird ein Leckvolumenstrom Q_L von 0.1%, 0.3% und 0.5% des durch das Laufrad fließenden Volumenstroms Q betrachtet. Ausserdem wird die Variation des Leckvolumenstromes Q_L für verschiedene Spaltweite s angewendet.

Das Bild 5.28 zeigt den Verlauf des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ bei der Variation des Leckvolumenstromes Q_L . Dabei ist die Parameter für die Kurvenschar die Spaltweite s . Der qualitative Verlauf des durchströmten saugseitigen Radseitenraumes der betrachteten Francisturbine FT20 unterscheidet sich nicht von dem im Kap. 5.1.2 für den idealisierten Radseitenraum mit resultierendem Durchfluss festgestellten Verlauf. Mit steigendem Durchfluss Q_L/Q erhöht sich der Betrag des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$.

Betrachtet man die Kurvenschar iso- s , so kann der qualitative, im Kap. 5.1.1 für den idealisierten Radseitenraum bei der Variation des Seitenverhältnisses Λ festgestellte Verlauf des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ wiedergefunden werden. Das trifft in erster Linie für kleineren Leckvolumenstrom Q_L zu. Mit steigender Spaltweite s von $s = 4 \text{ mm}$ bis $s = 6 \text{ mm}$ bzw. fallendem Seitenverhältnis Λ sinkt der Betrag des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$, der jedoch bei $s = 7 \text{ mm}$ sich erhöht, vgl. mit Bild 5.13.

Da sich aber mit steigendem Durchfluss Q_L/Q der Betrag des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ bei der Spaltweite $s = 7 \text{ mm}$ schwächer als bei den kleineren Spaltweiten erhöht, verschwindet der oben besprochene Effekt, der bei dem kleineren Durchfluss Q_L/Q zu sehen ist. Bei $Q_L = 0.5\%$ kann deutlich gesehen werden, dass der Betrag

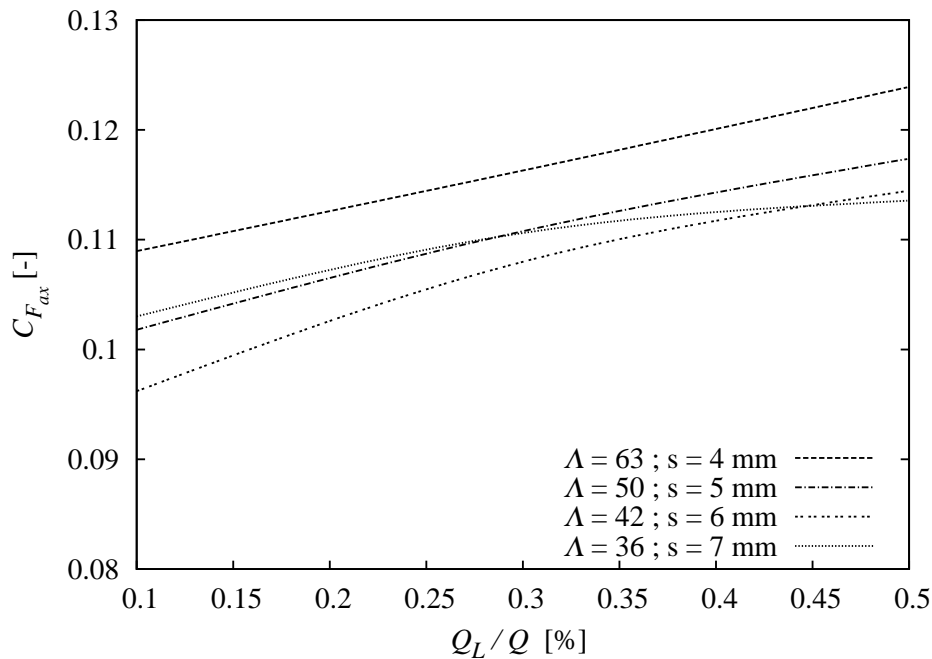


Bild 5.28: Axialkraftbeiwert $C_{F_{ax}}$ über dem bezogenen Leckvolumenstrom Q_L/Q .

des Axialkraftbeiwertes $C_{F_{ax}}$ mit steigender Spaltweite s monoton und immer abgeschwächer fällt. Zwischen $s = 6 \text{ mm}$ und $s = 7 \text{ mm}$ unterscheidet sich $C_{F_{ax}}$ bei $Q_L = 0.5\%$ nur noch marginal.

Das Bild 5.29 zeigt den Verlauf des Reibmomentenbeiwertes C_{M_f} bei der Variation des Leckvolumenstromes Q_L . Dabei ist die Parameter für die Kurvenschar die Spaltweite s . Der qualitative Verlauf des durchströmten saugseitigen Radseitenraumes der betrachteten Francisturbine FT20 unterscheidet sich nicht von dem im Kap. 5.1.2 für den idealisierten Radseitenraum mit resultierendem Durchfluss festgestellten Verlauf. Mit steigendem Durchfluss Q_L/Q sinkt der Reibmomentenbeiwert C_{M_f} .

Bei der Betrachtung der Kurvenschar iso- s kann der qualitative, im Kap. 5.1.1 für den idealisierten Radseitenraum bei der Variation des Seitenverhältnisses Λ festgestellte Verlauf des Reibmomentenbeiwertes C_{M_f} wiedergefunden werden. Mit steigender Spaltweite s bzw. fallendem Seitenverhältnis Λ sinkt der Reibmomentenbeiwert C_{M_f} , vgl. mit Bild 5.14.

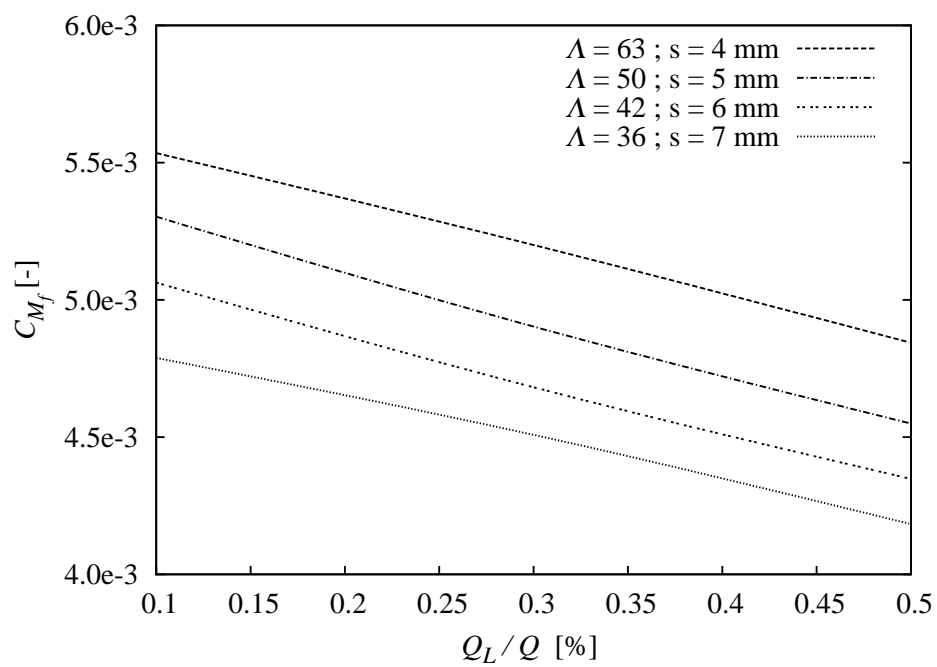


Bild 5.29: Reibmomentenbeiwert C_{M_f} über dem bezogenen Leckvolumenstrom Q_L/Q .

Kapitel 6

Bewertung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein neu entwickeltes Navier-Stokes Verfahren NSA auf der Basis von Finiten-Volumen-Verfahren FVM für die schnelle, hochgenaue und realitätsnahe Berechnung der Strömung in Radseitenräumen von Turbomaschinen, die durch die achsensymmetrische Eigenschaft der Strömung gekennzeichnet ist, vorgestellt.

Um die Physik der Strömung besser abbilden zu können, wird das zylindrische Koordinatensystem zur Beschreibung der Navier-Stokes Gleichungen gewählt. Damit ist die Strömungseigenschaft der Achsensymmetrie gewährleistet, wodurch in den Gleichungen alle Ableitungen in azimuthaler Richtung vernachlässigt werden können.

Das numerische Verfahren

Das achsensymmetrische Navier-Stokes Verfahren ist besonders dadurch genau, dass die in den Impulsgleichungen in radialer sowie in Umfangsrichtung zusätzlich auftretenden Quellterme nicht wie üblich approximiert werden. Stattdessen wird die physikalisch motivierte spezielle Integraltransformation, die speziell für das entwickelte Navier-Stokes Verfahren entwickelt und in Kap. 3.2.5 besprochen wurde, eingesetzt.

Zwei signifikante Vorteile dieser Integraltransformation betreffen erstens die Physik und desweiteren das numerische Verfahren. Physikalisch konserviert die Integraltransformation die Impulsströme sowie die Spannungszustände. Numerisch ist die Vorgehensweise sehr vorteilhaft für das Konvergenzverhalten, das bekanntlich für krummlinige Koordinatensysteme Beeinträchtigung gegenüber dem numerischen Verfahren im vertrauten kartesischen Koordinatensystem unterliegt, indem die transformierten Quellterme ohne künstlichen Eingriff als Produkt aus $A_P^{JS_\phi}$ und ϕ darstellen lassen, wobei $A_P^{JS_\phi}$ die Diagonaldominanz des Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystem verstärkt.

Die Rohrströmung vertritt die Strömungsart, bei der eine harte Grenze des Zylinderkoordinatensystems mitberücksichtigt wird, nämlich die Singularität bei dem Radius r gleich Null. Hier hat sich an Hand laminarer Rohrströmung gezeigt, dass das entwickelte numerische Navier-Stokes Verfahren die analytische Lösung bis auf

numerische Approximationsfehler sehr gut wiedergeben kann.

Die Turbulenzmodellierung

Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Turbulenzmodelle müssen kritisch bewertet werden. Während die laminare, mit dem entwickelten numerischen Verfahren berechnete Rohrströmung sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung zeigt, konnte die turbulente, mit dem k - ε -Modell sowie mit dem k - ω -Modell berechnete Rohrströmung den notwendigen Plausibilitätstest nicht bestehen, s. Kap. 4.1. Das Baldwin-Barth-Eingleichungsturbulenzmodell sowie das nichtlineare k - ε -Modell bestanden den notwendigen Plausibilitätstest.

Es hat sich gezeigt, dass das nichtlineare, im Rahmen dieser Arbeit erstellte, im Kap. 2.4.1 besprochene k - ε -Modell für die turbulente Rohrströmung sowie für die turbulente Ringrohrströmung gut einsetzbar ist. Durch den Einsatz eines kubischen k - ε -Modells kann auf Reynolds-Spannungsmodelle bzw. 7-Gleichungsmodelle und den damit verbundenen Instabilitätsprobleme der Numerik verzichtet werden.

Laminare Strömungen mit starkem Drall, die bei zylindrischen Couette-Strömungen, s. Kap. 4.3, und bei Strömungen in Radseitenräumen, s. Kap. 5.1, auftreten, können mit dem entwickelten numerischen Verfahren sehr gut berechnet werden. Für die turbulente Strömung in den Radseitenräumen kommen das lineare k - ε -Modell zum Einsatz. Das nichtlineare Low-Reynolds k - ε -Modell berechnet zu hohe Reibmomentenbeiwerte C_{M_f} .

Ausblick

Das vorgestellte ausbaufähige, achsensymmetrische und nichtlineare k - ε -Turbulenzmodell im zylindrischen Koordinatensystem könnte noch weiterentwickelt werden. Die erste Strategie betrifft die Kalibrierung der Modellkonstanten und der Dämpfungsfunktionen an die Achsensymmetrie des Zylinderkoordinatensystem. Die Motivation der zweiten Strategie beruht auf der theoretischen Grundlage, dass bei turbulenten Strömungen mit starkem Drall sehr viele im Riemann-Raum differentialgeometrisch, formal mathematisch entstandene Terme, die bei Strömungen ohne Drall keine Bedeutung haben, dominant werden. Diese Terme bilden zusammen die sechs Reynoldsspannungskomponenten, siehe Gleichung A.1 bis A.6. Für diese Terme kann die spezielle, physikalisch motivierte Integraltransformation, wie sie im Kapitel 3.2.4 und im Kapitel 3.2.5 mehrfach zur Anwendung gekommen ist, angewendet werden. Somit entfallen Approximationsfehler für diese Terme. Für das lineare, achsensymmetrische k - ε -Turbulenzmodell gelten die gleichen Strategien zur möglichen Verbesserung der Ergebnisqualität. Außer dem nichtlinearen Zweigleichungsturbulenzmodell könnte man die Anwendung der expliziten algebraischen Spannungsmodelle (EASM), welche auf POPE [125] bzw. GATSKI [61] zurückgehen, vorstellen. Dafür muss man die EASM in Zylinderkoordinaten formulieren und die Vereinfachung für den achsensymmetrischen Fall durchführen.

Fazit

Es hat sich schließlich gezeigt, dass das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Navier-Stokes Verfahren NSA gegenüber NS3D eine sehr gute Performance hat, siehe Bild 5.24. Eine Verringerung der Anzahl der Zellschichten in azimuthaler Richtung auf Eins relativiert den Performance-Gewinn auf ein Rechenzeitverhältnis NSA : NS3D von 1 : 10. Somit ist das numerische Navier-Stokes Verfahren zeitsparend und für die industrielle Anwendung kostengünstig.

Anhang A

Berechnung der Komponenten des Reynoldsspannungstensors

Im Kapitel 2.4 wurde in die nichtlineare Turbulenzmodellierung eingegangen. Die Berechnung der Komponenten des Reynoldsspannungstensors für den achsensymmetrischen Fall erfolgt dabei folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\langle u_z'' u_z'' \rangle &= \frac{2}{3} k - 2 \nu_T \langle S_{zz} \rangle & (A.1) \\
&+ 4 C_1 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{zz} \rangle \langle S_{zz} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle S_{rz} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle S_{\varphi z} \rangle - \frac{1}{3} \langle S \rangle^{(2)} \right) \\
&+ 4 C_2 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{zr} \rangle \langle \Omega_{rz} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \right) \\
&+ 4 C_3 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle \Omega_{zr} \rangle \langle \Omega_{rz} \rangle + \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle - \frac{1}{3} \langle \Omega \rangle^{(2)} \right) \\
&+ 8 C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[2 \langle S_{zz} \rangle \left(\langle S_{zr} \rangle \langle \Omega_{rz} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \right) \right. \\
&+ 2 \langle S_{zr} \rangle \left(\langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{rz} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \right) + 2 \langle S_{z\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi r} \rangle \langle \Omega_{rz} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \right) \left. \right] \\
&+ 8 C_5 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[\langle \Omega_{zr} \rangle \left(\langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{rz} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \right) \right. \\
&+ \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \left(\langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{rz} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \right) - \frac{1}{3} \overline{\langle \Omega \rangle \langle S \rangle \langle \Omega \rangle} \left. \right] \\
&+ 8 C_6 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[II_S \left(\langle S_{zz} \rangle - \frac{1}{3} \langle \Theta \rangle \right) \right. \\
&\left. - I_S \left(\langle S_{zz} \rangle \langle S_{zz} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle S_{rz} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle S_{\varphi z} \rangle - \frac{1}{3} \langle S \rangle^{(2)} \right) \right] ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle u_z'' u_r'' \rangle &= -2 \nu_T \langle S_{zr} \rangle & (A.2) \\
&+ 4 C_1 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{zz} \rangle \langle S_{zr} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle S_{rr} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle S_{\varphi r} \rangle \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 C_2 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle \Omega_{zr} \rangle (\langle S_{zz} \rangle - \langle S_{rr} \rangle) + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle - \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \langle S_{\varphi r} \rangle \right) \\
& + 4 C_3 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \\
& + 8 C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[\langle S_{zz} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) + \langle S_{zr} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right. \\
& + \langle S_{z\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) - \langle \Omega_{zr} \rangle \left(\langle S_{rr} \rangle \langle S_{rr} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle S_{\varphi r} \rangle \right) \\
& \left. - \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle S_{zr} \rangle + \langle S_{\varphi r} \rangle \langle S_{rr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle S_{\varphi r} \rangle \right) \right] \\
& + 8 C_5 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[\langle \Omega_{zr} \rangle \left(\langle S_{rz} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) \right. \\
& \left. + \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) \right] \\
& + 8 C_6 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[II_S \langle S_{zr} \rangle - I_S \left(\langle S_{zz} \rangle \langle S_{zr} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle S_{rr} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle S_{\varphi r} \rangle \right) \right] ,
\end{aligned}$$

$$\langle u_z'' u_\varphi'' \rangle = -2 \nu_T \langle S_{z\varphi} \rangle \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 C_1 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{zz} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) \\
& + 4 C_2 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{zz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle - \langle \Omega_{zr} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle \Omega_{r\varphi} \rangle (\langle S_{zr} \rangle - \langle S_{\varphi r} \rangle) \right) \\
& + 4 C_3 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \langle \Omega_{zr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \\
& + 8 C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[\langle S_{zz} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle S_{\varphi r} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right. \\
& + \langle S_{zr} \rangle \left(\langle S_{rz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) - \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi r} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) \\
& \left. - \langle \Omega_{zr} \rangle \left(\langle S_{rz} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) \right] \\
& + 8 C_5 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[\langle \Omega_{zr} \rangle \left(\langle S_{rz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) \right. \\
& \left. + \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi r} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) \right] \\
& + 8 C_6 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[II_S \langle S_{z\varphi} \rangle - I_S \left(\langle S_{zz} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) \right] ,
\end{aligned}$$

$$\langle u_r'' u_r'' \rangle = \frac{2}{3} k - 2 \nu_T \langle S_{rr} \rangle \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 C_1 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{rz} \rangle \langle S_{zr} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle S_{rr} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle S_{\varphi r} \rangle - \frac{1}{3} \langle S \rangle^{(2)} \right) \\
& + 4 C_2 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{rz} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) \\
& + 4 C_3 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle \Omega_{zr} \rangle \langle \Omega_{rz} \rangle + \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle - \frac{1}{3} \langle \Omega \rangle^{(2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8 C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[2 \langle S_{rz} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) \right. \\
& + 2 \langle S_{rr} \rangle \left(\langle S_{rz} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) + 2 \langle S_{r\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) \left. \right] \\
& + 8 C_5 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[\langle \Omega_{zr} \rangle \left(\langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) \right. \\
& + \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) - \frac{1}{3} \overline{\langle \Omega \rangle \langle S \rangle \langle \Omega \rangle} \left. \right] \\
& + 8 C_6 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[II_S \left(\langle S_{rr} \rangle - \frac{1}{3} \langle \Theta \rangle \right) \right. \\
& \left. - I_S \left(\langle S_{rz} \rangle \langle S_{zr} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle S_{rr} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle S_{\varphi r} \rangle - \frac{1}{3} \langle S \rangle^{(2)} \right) \right] ,
\end{aligned}$$

$$\langle u_r'' u_\varphi'' \rangle = -2 \nu_T \langle S_{r\varphi} \rangle \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 C_1 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{rz} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) \\
& + 4 C_2 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{rz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle - \langle \Omega_{rz} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle - \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) \\
& + 4 C_3 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \langle \Omega_{rz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \\
& + 8 C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[\langle S_{rz} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle S_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \right. \\
& + \langle S_{rr} \rangle \left(\langle S_{rz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{\varphi\varphi} \rangle \right) - \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) \\
& \left. - \langle \Omega_{rz} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{z\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) \right] \\
& + 8 C_5 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[\langle \Omega_{zr} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) \right. \\
& + \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi r} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) \left. \right] \\
& + 8 C_6 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[II_S \langle S_{r\varphi} \rangle - I_S \left(\langle S_{rz} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) \right] ,
\end{aligned}$$

$$\langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle = \frac{2}{3} k - 2 \nu_T \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 C_1 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi r} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle - \frac{1}{3} \langle S \rangle^{(2)} \right) \\
& + 4 C_2 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi r} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) \\
& + 4 C_3 \frac{k}{\varepsilon} \nu_T \left(\langle \Omega_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle - \frac{1}{3} \langle \Omega \rangle^{(2)} \right) \\
& + 8 C_4 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[2 \langle S_{\varphi z} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) \right. \\
& \left. + 2 \langle S_{\varphi r} \rangle \left(\langle S_{rz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) + 2 \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \left(\langle S_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle + \langle S_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8 C_5 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[\langle \Omega_{\varphi z} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{zr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) \right. \\
& + \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \left(\langle S_{rz} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \right) - \frac{1}{3} \overline{\langle \Omega \rangle \langle S \rangle \langle \Omega \rangle} \left. \right] \\
& + 8 C_6 \frac{k^2}{\varepsilon^2} \nu_T \left[II_S \left(\langle S_{\varphi\varphi} \rangle - \frac{1}{3} \langle \Theta \rangle \right) \right. \\
& \left. - I_S \left(\langle S_{\varphi z} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi r} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle - \frac{1}{3} \langle S \rangle^{(2)} \right) \right] .
\end{aligned}$$

Die Skalaren in der obigen Gleichungen A.1 bis A.6 sind wie folgt definiert:

$$\langle \Theta \rangle = \langle S_{zz} \rangle + \langle S_{rr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle , \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
\langle S \rangle^{(2)} & = \langle S_{zz} \rangle \langle S_{zz} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \langle S_{rr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \\
& + 2 \langle S_{zr} \rangle \langle S_{zr} \rangle + 2 \langle S_{z\varphi} \rangle \langle S_{z\varphi} \rangle + 2 \langle S_{r\varphi} \rangle \langle S_{r\varphi} \rangle , \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

$$\langle \Omega \rangle^{(2)} = 2 \langle \Omega_{zr} \rangle \langle \Omega_{zr} \rangle + 2 \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{z\varphi} \rangle + 2 \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle , \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}
\overline{\langle \Omega \rangle \langle S \rangle \langle \Omega \rangle} & = \langle \Omega_{zr} \rangle \langle \Omega_{rz} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle + \langle S_{rr} \rangle \right) + \langle \Omega_{zr} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \left(\langle S_{r\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi r} \rangle \right) \\
& + \langle \Omega_{rz} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \left(\langle S_{z\varphi} \rangle + \langle S_{\varphi z} \rangle \right) + \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \left(\langle S_{zr} \rangle + \langle S_{rz} \rangle \right) \\
& + \langle \Omega_{z\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi z} \rangle \left(\langle S_{zz} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) + \langle \Omega_{r\varphi} \rangle \langle \Omega_{\varphi r} \rangle \left(\langle S_{rr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \right) , \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

$$I_S = \langle \Theta \rangle , \quad II_S = \frac{1}{2} \left(\langle \Theta \rangle^2 - \langle S \rangle^{(2)} \right) . \quad (\text{A.11})$$

Literaturverzeichnis

- [1] ALVES, M. A. ; OLIVEIRA, P. J. ; PINHO, F. T.: A convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection. In: *International Journal of Numerical Methods in Fluids* 41 (2003), S. 47–75
- [2] ANDERSON JR., J. D.: *Computational fluid dynamics ; The basics with applications*. McGraw-Hill, New York, 1995
- [3] ARIS, R.: *Vector, tensors and the equations of fluid mechanics*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1967
- [4] ASCHENBRENNER, T. ; RIEDEL, N. ; SCHILLING, R.: Fluid flow interactions in hydraulic machinery. In: *Proceedings of the 18th IAHR Symposium* Bd. I, Kluwer academic publishers, 1996, S. 151–159
- [5] BADER, R.: *Simulation kompressibler und inkompressibler Strömungen in Turbomaschinen*, Technische Universität München, Diss., 2000
- [6] BAEHR, H. D. ; STEPHAN, K.: *Wärme- und Stoffübertragung*. Springer, Berlin, 1994
- [7] BALDWIN, B. S. ; BARTH, T. J.: A One-Equation Turbulence Transport Model for High Reynolds Number Wall-Bounded Flows. In: *NASA TM-102847 [see also AIAA paper 91-0610]* (1990)
- [8] BALDWIN, B. S. ; LOMAX, H.: Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. In: *AIAA paper 78-0257* (1978)
- [9] BATHE, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin, 1986
- [10] BATTEN, T. J. ; LESCHZINER, M. A. ; LOYAU, H.: Reynolds-Stress Transport Modelling for Compressible Aerodynamics Applications. In: *AIAA Journal* 37 (1999), S. 785–797
- [11] BERNERT, K. ; EPPLER, A.: Large-Eddy-Simulation - Grundlagenorientierte und anwendungsbezogene Untersuchungen zu Modellierungs- und numerischen Komponenten / Technische Universität Chemnitz-Zwickau. 1996. – Forschungsbericht
- [12] BÖHM, Ch.: *Numerische Simulation des Fischdurchgangs durch Wasserturbinen*, Technische Universität München, Diss., 2004

- [13] BORISENKO, R. ; TARAPOV, I. E.: *Vector and tensors analysis with applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1979
- [14] BOUSSINESQ, J.: Essai sur La Théorie Des Eaux Courantes. In: *Mem. Présenté Acad. Sci.* 23 (1877), S. 46. – Paris
- [15] BRADSHAW, P.: The effects of streamline curvature on turbulent flow / NATO. 1973 (AGRADograph No. 169). – Forschungsbericht
- [16] BRADSHAW, P.: Turbulent secondary flows. In: *Ann. Rev.Fluid Mech.* 19 (1987), S. 53–74
- [17] BRADSHAW, P.: *Highlights of Turbulence Modelling*. 1998. – ASME "ME'98" Meeting
- [18] BRADSHAW, P. ; LAUNDER, B. E. ; LUMLEY, J. L.: Collaborative Testing of Turbulence Models. In: *ASME J. Fluids Eng.* 118 (1996), S. 243–247
- [19] BUSCHNELL, D. ; ALMROTH, B. O.: Finite difference energy method for non-linear shell analysis. In: *J. Computers and Structures* 1 (1971), S. 361
- [20] BUSNAINA, A. A. ; ZHENG, X. ; SHARIF, M. A. R.: A modified skew upwind scheme for fluid flow and heat transfer computations. In: *Appl. Math. Modelling* 15 (1991), S. 425–432
- [21] CANUTO, C. ; HUSSAINI, M. Y. ; QUARTERONI, A. ; ZANG, T. A.: *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer, Berlin, 1998
- [22] CHAKRAVARTHY, S. R. ; OSHER, S.: High resolution applications of the OSHER upwind scheme for the Euler equations. In: *AIAA paper 83-1943* (1983)
- [23] CHANDRASEKHAR, S.: On Heisenberg's Elementary Theory of Turbulence. In: *Proc. Roy. Soc. London, Series A, Math. and Phys. Sci.* 200 (1949), S. 20–23
- [24] CHAPMAN, D. R. ; KUHN, G. D.: The limiting behaviour of turbulence near a wall. In: *Journal of Fluid Mechanics* 170 (1986), S. 265–292
- [25] CHOI, S. K. ; NAM, H. Y. ; CHO, M.: Evaluation of a High-Order Bounded Convection Scheme: Three-Dimensional Numerical Experiments. In: *Numerical Heat transfer; Part B* 28 (1995), S. 23–38
- [26] CHORIN, A. J.: A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. In: *Journal of Computational Physics* 2 (1967), S. 12
- [27] CHOU, P. Y.: On the velocity correlations and the solution of the equations of turbulent fluctuation. In: *Quart. App. Math.* 3 (1945), S. 38
- [28] CHOU, P. Y. ; CHOU, R. L.: 50 Years of Turbulence Research in China. In: *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 27 (1995), S. 1–15
- [29] CHUNG, T. J.: *Continuum Mechanics*. Prentice Hall, 1988

- [30] COUETTE, M.: Etudes sur le frottement des liquides. In: *Ann. Chim. Phys.* 21 (1890), S. 433–510
- [31] COURANT, R.: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. In: *Bulletin of the american mathematical society* 49 (1943), S. 1–23
- [32] CRAFT, T. J. ; LAUNDER, B. E. ; SUGA, K.: Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. In: *Int. Journal of Heat and Fluid Flow* 17 (1996), S. 108–115
- [33] DAILY, J. W. ; NECE, R. E.: Chamber dimension effects on induced flow and friction resistance of enclosed rotating discs. In: *ASME Journal of Basic Engineering* 82 (1960), S. 217–232
- [34] DALY, B. J. ; HARLOW, F. H.: Transport equations of turbulence. In: *Phys. Fluids* 13 (1970), S. 2634–2649
- [35] DARWISH, M. S. ; MOUKALLED, F.: Normalized variable and space formulation methodology for high-resolution schemes. In: *Journal of Numerical Heat Transfer B* 26 (1994), S. 79–96
- [36] DAVIDOV, B. I.: On the statistical dynamics of an incompressible Fluid. In: *Doklady Akademiyi Nauk SSSR* 136 (1961), S. 47
- [37] DEMIRDŽIĆ, I. ; Ž. LILEK ; PERIĆ, M.: A colocated finite volume method for predicting flows at all speeds. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 16 (1993), S. 1029–1050
- [38] DRYDEN, H. L.: Boundary layer flow near flat plates. In: *Proc. fourth internat. congress for applied mechanics* (1934), S. 175. – Cambridge
- [39] DRYDEN, H. L.: Air flow in the boundary layer near a plate / NACA Report. 1936 (562). – Forschungsbericht
- [40] DRYDEN, H. L.: Turbulence and the boundary layer. In: *J. Aer. Sci.* 6 (1939), S. 85–101
- [41] DRYDEN, H. L.: Some recent contributions of the study of transition and turbulent boundary layers / NACA. 1947 (TN 1168). – Forschungsbericht
- [42] DRYDEN, H. L.: Recent investigation of the problem with transition. In: *ZFW* 4 (1956), S. 89–95
- [43] DURBIN, P. A.: On the k - ϵ -stagnation point anomaly. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 17 (1996), S. 89–90
- [44] DURBIN, P. A.: Computational studies for turbomachinery simulation. In: *Proceedings of the 2002 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, Montreal, Canada, 2002*

- [45] DURBIN, P. A. ; PETERSSON REIF, B. A.: *Statistical theory and modelling for turbulent flows*. Wiley, New York, 2000
- [46] EINSTEIN, A.: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1916
- [47] EINSTEIN, A.: *Grundzüge der Relativitätstheorie*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1956
- [48] EMMONS, H. W.: The laminar-turbulent transition in a boundary layer - Part I. In: *Journal of Aerospace Science* 18 (1951), Nr. 7, S. 490–498
- [49] EMMONS, H. W. ; BRYSON, A. E.: The laminar-turbulent transition in a boundary layer - Part II. In: *Proc. first US national congress appl. mech.* (1952), S. 859–869
- [50] EVANS, G. S.: *Grobstruktursimulation der abgelösten Strömung um ein ange-stelltes Tragflügelprofil*, Technische Universität München, Diss., 2004
- [51] FERNÁNDEZ, A.: *Strömungstechnische Optimierung von Beschaufelungen hy-draulischer Maschinen*, Technische Universität München, Diss., 1997
- [52] FERNHOLZ, H.-H.: External Flows. In: BRADSHAW, P. (Hrsg.): *Turbulence*. Berlin : Springer-Verlag, 1976, S. 45–108
- [53] FERZIGER, J. H. ; PERIĆ, M.: *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, Berlin, 2001
- [54] FLETCHER, C. A. J.: Conjugate gradient methods for indefinite systems. In: *Lecture Notes in Mathematics* 506 (1976), S. 773–789
- [55] FORSYTHE, G. E. ; WASOW, W. R.: *Finite difference methods for partial differential equations*. John Willey & Sohns, Inc., New York, 1960
- [56] FRIEDRICH, R.: *Grundlagen turbulenter Strömungen und numerische Simu-lation*. Vorlesungsmanuskript des Fachgebietes Strömungsmechanik der Tech-nischen Universität München, 2000
- [57] FRIEDRICH, R.: *Aerodynamik der Raumfahrzeuge*. Vorlesungsmanuskript des Fachgebietes Strömungsmechanik der Technischen Universität München, 2002
- [58] FRIEDRICH, R. ; SCHMITT, L.: Numerische Simulation turbulenter Grenz-schichten *Large – Eddy – Simulation* / Institut für Strömungsmechanik der technischen Universität München. 1982 (Nr. 82/2). – Forschungsbericht
- [59] FRITZ, J.: *Strömungswechselwirkungen in hydraulischen Maschinen*, Techni-sche Universität München, Diss., 1999
- [60] GASKELL, P. H. ; LAU, A. K. C.: Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm. In: *International Journal of Numerical Methods in Fluids* 8 (1988), S. 617–641

- [61] GATSKI, T. B. ; SPEZIALE, C. G.: On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. In: *Journal of Fluid Mechanics* 254 (1993), S. 59–78
- [62] GIBSON, M. M. ; LAUNDER, B. E.: Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. In: *Journal of Fluid Mechanics* 86 (1978), S. 491–511
- [63] GOLUB, G. H. ; VAN LOAN, C.: *Matrix Computations*. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1990
- [64] GROTHJANS, H. ; MENTER, F. R.: Wall functions for general application CFD codes. In: PAPAILIOU, et a. (Hrsg.): *Proceedings of the ECCOMAS 98*, John Wiley & Sons, 1998, S. 1112–1117
- [65] HACKBUSCH, W.: *Multi-grid methods and applications*. Springer, Berlin, 1985
- [66] HAGEMAN, L. A. ; YOUNG, D. M.: *Applied iterative methods*. Wiley, New York, 1981
- [67] HANJALIĆ, K.: Will RANS survive LES? A view of perspectives. In: *2004 ASME Heat Transfer/Fluids Engineering Summer Conference*, ASME, 2004, S. HT-FED04-56356 ; 1–11
- [68] HANJALIĆ, K. ; HADŽIĆ, I. ; JAKIRLIĆ, S.: Modelling turbulent wall flows subjected to strong pressure variation. In: *ASME Journal of Fluids Engineering* 121 (1999), S. 57
- [69] HARLOW, F. H. ; NAKAYAMA, P. I.: Transport of turbulence energy decay rate / Los Alamos Sci. Lab, University of California. 1968 (LA-3854). – Forschungsbericht
- [70] HARLOW, F. H. ; WELSH, J. E.: Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow with free surface. In: *Phys. Fluids* 8 (1965), S. 2182–2189
- [71] HARTEN, A.: High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. In: *Journal of Computational Physics* 49 (1983), Nr. 3, S. 357–393
- [72] HEISENBERG, W.: Zur statistischen theorie der turbulenz / Max-Planck Institut für Physik, Göttingen. 1946. – Forschungsbericht
- [73] HIRSCH, Ch.: *Numerical Computation of internal and external flows ; Volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows*. Wiley, New York, 1991
- [74] HOPF, E.: Statistical hydromechanics and functional calculus. In: *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 1 (1952), S. 87–123
- [75] ISSA, R. I.: Solution of implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting. In: *Journal of Computational Physics* 62 (1986), S. 40–65

- [76] JONES, W. P. ; LAUNDER, B. E.: The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15 (1972), S. 301 – 314
- [77] JUSUF, J.: Analytical approximative solution of idealized laminar flow in gaps between the shroud of the impeller and the casing. URL: http://www.lhm.mw.tum.de/mitarbeiter/jusufj/public_html/index.html. 2005. – [Stand 04.05.2006]
- [78] KÄSTNER, S.: *Vektoren, Tensoren, Spinoren*. Akademie Verlag, Berlin, 1960
- [79] KATO, M. ; LAUNDER, B. E.: The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders. In: *9th Symposium on Turbulent Shear Flows, Kyoto, Japan, 1993*
- [80] KAYS, W. M. ; CRAWFORD, M. E.: *Convective heat and mass transfer*. McGraw-Hill, New York, 1980
- [81] KHOSLA, P. K. ; RUBIN, S. G.: A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. In: *Computers and Fluids* 2 (1974), S. 207–209
- [82] KOLMOGOROV, A. N.: Dissipation of energy in a locally isotropic turbulence. In: *Doklady Akad. Nauk SSSR* 32 (1941), S. 141
- [83] KOLMOGOROV, A. N.: Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. In: *Izvestia Academy of Sciences, USSR; Physics* 6, Nos. 1 and 2 (1942), S. 56–58
- [84] KOTSCHIN, N. J. ; KIBEL, I. A. ; ROSE, N. W.: *Theoretische Hydromechanik ; Band II*. Akademie-Verlag, Berlin, 1955
- [85] KRAICHNAN, Robert H.: Irreversible Statistical Mechanics of Incompressible Hydromagnetic Turbulence. In: *Phys. Rev.* 109 (1958), Nr. 5, S. 1407–1422
- [86] KWAK, D. ; CHANG, J. L. C. ; SHANKS, S. P. ; CHAKRAVARTHY, S. R.: A three-dimensional incompressible Navier-Stokes flow solver using primitive variables. In: *AIAA Journal* 24 (1986), S. 390–396
- [87] LANDAU, L. D. ; LIFSCHITZ, E. M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik: Band VI, Hydrodynamik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1974. – 3. Auflage
- [88] LAUFER, J.: The structure of turbulence in fully developed pipe flow / NASA. 1954 (TR 1174). – Forschungsbericht
- [89] LAUNDER, B. E.: An Introduction to single-point closure methodology. In: *Proceedings of the ERCOFTAC/IUTAM Summer school* (12-20 June 1995). – in Stockholm
- [90] LAUNDER, B. E. ; REECE, G. J. ; RODI, W.: Progress in the development of a Reynolds stress closure. In: *Journal of Fluid Mechanics* 68 (1975), S. 537–566

- [91] LAUNDER, B. E. ; RODI, W.: The turbulent wall jet - measurements and modeling. In: *Ann. Rev.Fluid Mech.* 15 (1983), S. 429–459
- [92] LAUNDER, B. E. ; SHARMA, B. I.: Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. In: *Letters in Heat and Mass Transfer* 1 (1974), Nr. 2, S. 131–138
- [93] LAUNDER, B. E. ; SPALDING, D. B.: The numerical computation of turbulent flows. In: *Computer Methods in applied mechanics and engineering* 3 (1974), S. 269–289
- [94] LEONARD, B. P.: A stable and accurate convection modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 19 (1979), S. 59–98
- [95] LEONARD, B. P.: The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection. In: *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering* 88 (1991), S. 17–74
- [96] LEONARD, B. P. ; MOKHTARI, S.: Beyond first-order upwinding: the ultra-sharp alternative for non-oscillatory steady-state simulation of convection. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30 (1990), S. 729–766
- [97] LESCHZINER, M. A.: Turbulence modelling for separated flows with anisotropy-resolving closures. In: *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 358 (2000), S. 3247–3277
- [98] LIEN, F. S. ; CHEN, W. L. ; LESCHZINER, M. A.: Low-Reynolds-number eddy-viscosity modelling based on non-linear stress-strain/vorticity relations. In: RODI, W. et a. (Hrsg.): *Proceedings of the 3rd Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, Kreta. Elsevier, Amsterdam u.a., 1996, S. 91–100
- [99] LIEN, F. S. ; LESCHZINER, M. A.: Computational modelling of 3D turbulent flow in S-diffuser and transition ducts. In: RODI, W. et a. (Hrsg.): *Proceedings of the 2nd Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, Florence. Elsevier, Amsterdam u.a., 1993, S. 217–228
- [100] LIEN, F.S. ; LESCHZINER, M.A.: A general non-orthogonal collocated finite volume algorithm for turbulent flow at all speeds incorporating second-moment turbulence-transport closure, Part 1: Computational implementation; Part 2: Application. In: *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering* Bd. 114. Elsevier Science B.V., 1994, S. 123–148
- [101] LILEK, Ž.: *Ein Finite-Volumen-Verfahren zur Berechnung von inkompressiblen und kompressiblen Strömungen in komplexen Geometrien mit beweglichen Rändern und freien Oberflächen*, Universität Hamburg, Diss., 1995

- [102] LILEK, Ž. ; MUZAFERIJA, S. ; PERIĆ, M. ; SEIDL, V.: An implicit finite-volume method using nonmatching blocks of structured grid. In: *Numerical Heat Transfer, Part B* 32 (1997), S. 385–401
- [103] LIPPMANN, H.: *Angewandte Tensorrechnung ; Für Ingenieure, Physiker und Mathematiker*. Springer-Verlag, Berlin, 1993
- [104] MANSOUR, N. N. ; KIM, J. ; MOIN, P.: Reynolds-stress and dissipation budgets in a turbulent channel flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 194 (1988), S. 15–44
- [105] MAURER, W. Persönliche Mitteilungen. Lehrstuhl für Fluidmechanik, Technische Universität München. 2003
- [106] MENTER, F. R.: Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. In: *AIAA Journal* 32 (1992), S. 1598–1605
- [107] MEYBERG, K. ; VACHENAUER, P.: *Höhere Mathematik 1*. Springer-Verlag, Berlin, 1990
- [108] MITCHNER, M.: Propagation of turbulence from an instantaneous point disturbance. In: *Journal of Aerospace Science* 21 (1954), S. 350–351
- [109] MOIN, P. ; KIM, J.: Tackling turbulence with supercomputer. In: *Scientific American* (January, 1997)
- [110] MOIN, P. ; MAHESH, K.: Direct Numerical Simulation. In: *Annu. Rev. Fluid Mech.* 30 (1998), S. 539–578
- [111] MOORE, J. G. ; MOORE, J.: Realizability in turbulence modelling for turbomachinery CFD. In: *ASME Turbo Expo 1999, Indianapolis, USA, ASME paper 99-GT-24* (1999)
- [112] MOSER, R. D. ; MOIN, P.: Direct numerical simulation of curved turbulent channel flow / Department of Mechanical Engineering, Stanford-Univ. 1984 (20). – Forschungsbericht
- [113] MOUKALLED, F. ; DARWISH, M. S.: New bounded skew central difference scheme, Part 1: formulation and testing. In: *Numerical Heat Transfer, Part B* 31 (1997), S. 91–110
- [114] MOUKALLED, F. ; DARWISH, M. S.: New bounded skew central difference scheme, Part 2: application to natural convection in an eccentric annulus. In: *Numerical Heat Transfer, Part B* 31 (1997), S. 111–133
- [115] MOUKALLED, F. ; DARWISH, M. S.: A new family of streamline-based very-high-resolution scheme. In: *Numerical Heat Transfer, Part B* 32 (1997), S. 299–320
- [116] MUZAFERIJA, S.: *Adaptive finite volume method for flow predictions using unstructured meshes and multigrid approach*, University of London, Diss., 1994

- [117] NETZ, H. ; RAST, J.: *Formeln der Mathematik*. Hanser Verlag, München, 1986
- [118] NIKURADSE, J.: Strömungsgesetze in rauhen Rohren / Ing.-Wesen. 1933 (361). – Forschungsbericht
- [119] ONSAGER, L.: Statistical hydrodynamics. In: *Nuovo Cimento (Supplemento)*, 1949, S. 279–287
- [120] ORSZAG, S. A.: Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: I Galerkin (Spectral) Representation. In: *Studies in Appl. Math.* 50 (1971), S. 293–327
- [121] PATANKAR, S. V.: *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere, New York, 1980
- [122] PATANKAR, S. V. ; SPALDING, D. B.: A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 15 (1972), S. 1787–1806
- [123] PATEL, V. C. ; RODI, W. ; SCHEUERER, G.: Turbulence models for near-wall and low-Reynolds-number flows: a review. In: *AIAA Journal* 23 (1985), Nr. 9, S. 1308–1319
- [124] POLHEMUS, J. H. ; HENLY, J.: Dredge pump pressures and thrust loads. In: *Trans. A.S.M.E* 51 (1929), S. 33
- [125] POPE, S. B.: A more general effective-viscosity hypothesis. In: *Journal of Fluid Mechanics* 72 (1975), S. 331–340
- [126] POPE, S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge university press, 2000
- [127] RAITHBY, G. D.: Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 9. North-Holland Publishing Company, 1976, S. 75–103
- [128] REINELT, R.: *Ein unstrukturiertes Finite-Volumen-Verfahren für hydraulische Strömungsmaschinen*, Technische Universität München, Diss., 2001
- [129] REYNOLDS, O.: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A* 186 (1895), S. 123
- [130] RHIE, C. M. ; CHOW, W. L.: A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. In: *AIAA Journal* 21 (1983), S. 1525 – 1532
- [131] RIEDEL, N.: *Rotor-Stator Wechselwirkung in hydraulischen Maschinen*, Technische Universität München, Diss., 1997

- [132] RITZ, E.: Über eine Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. In: *J. Reine und Angew. Math* 135 (1909), S. 1–61
- [133] RITZINGER, S.: *Simulation realer Laufradströmungen*, Technische Universität München, Diss., 1997
- [134] RIVLIN, R. S.: Further remarks on stress deformation relations for isotropic materials. In: *J. Arch. Ratl. Mech. Anal.* 4 (1955), S. 681–702
- [135] ROTTA, J. C.: Über eine Methode zur Berechnung turbulenter Scherströmungen / Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen. 1968 (Rep. 69 A 14). – Forschungsbericht
- [136] ROTTA, J. C.: *Turbulente Strömungen*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1972
- [137] RUBINSTEIN, R. ; BARTON, J. M.: Nonlinear Reynolds stress models and the renormalization group. In: *Phys. Fluids A* 2 (1990), S. 1472–1476
- [138] SAAD, Y. ; SCHULTZ, M. H.: GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. In: *j-SIAM-J-SCI-STAT-COMP* 7 (1986), Nr. 3, S. 856–869
- [139] SCHACHINGER, E.: *Allgemeine Relativitätstheorie*. Vorlesungsmanuskript des Instituts für theoretische Physik der Technischen Universität Graz, 2004
- [140] SCHILLING, R.: *Berechnung von Radialgittern zur Förderung hochviskoser Medien*, TH Karlsruhe, Diss., 1976
- [141] SCHILLING, R.: Strömung in Radseitenräumen von Kreiselpumpen. In: *Strömungsmechanik und Strömungsmaschinen* 27 (1979), S. 21–86. – Habilitationsschrift ; TH Karlsruhe
- [142] SCHILLING, R.: Numerical calculation of the Q3D incompressible, inviscid flow in turbomachines. In: *Proceedings of the 11th IAHR Symposium*. Amsterdam, 1982
- [143] SCHILLING, R.: CFD-aided design of hydraulic machinery bladings. In: VELENSEK, B. (Hrsg.): *CFD '91 Intensive Course on Computational Fluid Dynamics*. Ljubljana, 1991
- [144] SCHILLING, R.: *Strömungstechnik*. Vorlesungsmanuskript des Lehrstuhls für Hydraulische Maschinen der Technischen Universität München, 2001
- [145] SCHILLING, R. ; EINZINGER, J. ; JUSUF, J. ; KRONSCHNABL, F. ; WUNDERER, R.: Numerische Simulation des Ventilatorbetriebes in realen Einbausituationen / Abschlussbericht zum AiF-Forschungsvorhaben Nr. 13243 N-1. 2005. – Forschungsbericht

- [146] SCHILLING, R. ; KNAPP, W. ; BADER, R. ; FRITZ, J. ; MOCHKAAI, Y.: Experimental and theoretical loss analysis in a Kaplan turbine. In: *Proceedings of modeling, testing and monitoring for hydro powerplants – III*. Aix-en-Provence, France : The international journal on hydropower and damms, 1998, S. 563–570
- [147] SCHILLING, R. ; MÜLLER, N.: *Numerische Simulation realer Strömungen*. Vorlesungs- und Übungsmanuskript des Lehrstuhls für Fluidmechanik der Technischen Universität München, 2003
- [148] SCHILLING, R. ; THUM, S. ; MÜLLER, N. ; KRÄMER, S. ; RIEDEL, N. ; MOSER, W.: Design optimisation of hydraulic machinery blading by multi level CFD technique. In: *Proceedings of the 21th IAHR Symposium*. Lausanne, 2002
- [149] SCHLICHTING, H.: Über die Stabilität der Couette-Strömung. In: *Ann. Phys.* V (1932), S. 905–936
- [150] SCHLICHTING, H.: Experimentelle Untersuchungen zum Rauigkeitsproblem. In: *Ing.-Arch.* 7 (1936), S. 1–34
- [151] SCHLICHTING, H. ; GERSTEN, K.: *Grenzschicht-Theorie*. Springer, Berlin, 1997
- [152] SCHRECK, E. ; PERIĆ, M.: Computation of fluid flow with a parallel multigrid solver. In: *International Journal Numerical Methods in Fluids* 16 (1993), S. 303–327
- [153] SCHRÖDER, R.: Einheitliche Berechnung gleichförmiger turbulenter Strömungen in Rohren und Gerinnen. In: *Der Bauingenieur* (1965), S. 191–195
- [154] SCHUBAUER, G. B. ; KLEBANOFF, P. S.: Contributions of the mechanics of boundary layer transition / NACA. 1955 (TN 3489). – Forschungsbericht
- [155] SCHUBAUER, G. B. ; SKRAMSTAD, H. K.: Laminar boundary layer-oscillations and stability of laminar flow. In: *Nat. bureau of standards, Research paper 1772, Journal of Aerospace Science* 14 (1947), Nr. 69. – NACA Rep. 909
- [156] SCHULTZ-GRUNOW, F.: Der Reibungswiderstand rotierender Scheiben in Gehäusen. In: *Z. f. angew. Math. Mech.* 15 (1935), S. 191
- [157] SCHUMANN, U.: *Ein Verfahren zur direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen*, Universität Karlsruhe, Diss., 1973
- [158] SCHUSTER, M.: *Simulation gehäuseloser, hydraulischer Strömungsmaschinen*, Technische Universität München, Diss., 2000
- [159] SCHWARZ, H. R.: *Numerische Mathematik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1986
- [160] SHIH, T.-H. ; LUMLEY, J. L.: Remarks on turbulent constitutive relations. In: *Math. Comput. Modelling* 18 (1993), S. 9–16

- [161] SHIH, T.-H. ; POVINELLI, L. A. ; LIU, N.-S.: Application of generalized wall function for complex turbulent flows. In: RODI, W. et a. (Hrsg.): *Proceedings of the 5th Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Experiments, Spain*. Elsevier, Amsterdam u.a., 2002, S. 177–186
- [162] SHIH, T.-H. ; ZHU, J. ; LIOU, W. ; CHEN, K.-H. ; LIU, N.-S. ; LUMLEY, J. L.: Modelling of turbulent swirling flows / NASA Technical Memorandum. 1997 (113112). – Forschungsbericht
- [163] SHIH, T.-H. ; ZHU, J. ; LUMLEY, J. L.: A realisable Reynolds stress algebraic equation model / NASA Technical Memorandum. 1993 (105993). – Forschungsbericht
- [164] SHIH, T.-H. ; ZHU, J. ; LUMLEY, J. L.: Calculation of wall-bounded complex flows and free shear flows. In: *Intl Journal for Num. Meth. in Fluids* 23 (1994), S. 1133–1144
- [165] SHIH, T.-H. ; ZHU, J. ; LUMLEY, J. L.: Modelling of wall-bounded complex flows and free shear flows / NASA Technical Memorandum. 1994 (106513). – Forschungsbericht
- [166] SHUR, M. ; SPALART, P. R. ; STRELETS, M. ; TRAVIN, A.: Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack. In: RODI, W. et a. (Hrsg.): *Proceedings of the 4th Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Experiments, Corsica, France*. Elsevier, Amsterdam u.a., 1999, S. 669–678
- [167] SKODA, R.: *Numerische Simulation abgelöster und transitionaler Strömungen in Turbomaschinen*, Technische Universität München, Lehrstuhl für Fluidmechanik, Diss., 2003
- [168] SONNEVELD, P.: CGS, a fast Lanczos type solver for non-symmetric linear systems. In: *j-SIAM-J-SCI-STAT-COMP* 10 (1989), S. 36–52
- [169] SPALART, P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations. In: RODI, W. et a. (Hrsg.): *Proceedings of the 4th Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Experiments, Corsica, France*. Elsevier, Amsterdam u.a., 1999, S. 3–17
- [170] SPALART, P. R. ; ALLMARAS, S. R.: A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In: *AIAA paper 92-0439* (1992)
- [171] SPALDING, D. B.: A novel finite-differencing formulation for differential equations involving both first and second derivatives. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 4 (1972), S. 551–559
- [172] SPENCER, A. J. M.: Theory of invariants. In: *Continuum Physics* 1 (1971), S. 240–352
- [173] SPENCER, A. J. M. ; RIVLIN, R. S.: The Theory of Matrix Polynomials and its Application to the Mechanics of Isotropic Continua. In: *J. Arch. Ratl. Mech. Anal.* 2 (1959), S. 309–336

- [174] SPEZIALE, C. G.: On Nonlinear $k-l$ and $k-\varepsilon$ Models of Turbulence. In: *J. Fluid Mech.* 178 (1987), S. 459–475
- [175] SPEZIALE, C. G. ; SARKAR, S. ; GATSKI, T. B.: Modeling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical system approach. In: *Journal of Fluid Mechanics* 227 (1991), S. 245–272
- [176] SPEZIALE, Charles. G.: A review of Reynolds stress models for turbulent shear flows / NASA Langley Research Center ; Institute for Computer Applications in Science and Engineering, Hampton, VA. 1995 (ICASE Rep. 95-15). – Forschungsbericht
- [177] SPURK, J. H.: *Strömungslehre*. Springer, Berlin, 1993
- [178] STEPHAN, K.: Thermodynamik. In: DUBBEL, H. (Hrsg.): *Taschenbuch für den Maschinenbau*. Berlin : Springer-Verlag, 1990. – 17. Auflage
- [179] STEPHANOFF, A. J.: Leakage loss and axial thrust in centrifugal pumps. In: *Trans. A.S.M.E* 54 (1932), S. 100
- [180] STONE, H. L.: Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 5 (1968), Nr. 5, S. 530–559
- [181] SUGA, K.: *Development and application of a non-linear eddy viscosity model sensitized to stress and strain invariants*, UMIST, UK, Diss., 1995
- [182] TENNEKES, H. ; LUMLEY, J. L.: *A first course in turbulence*. MIT Press, Cambridge, 1972
- [183] THUM, S. ; SCHILLING, R.: Optimization of hydraulic machinery bladings by multilevel CFD techniques. In: *Proceedings of the 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Honolulu, Hawaii, February 10-14, 2002*
- [184] THURSO, J.: *Numerische Simulation des Grenzschichtverhaltens in Turbinengittern unter periodisch instationären Strömungsbedingungen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2001
- [185] TIETJENS, O.: *Beiträge zur Entstehung der Turbulenz*, Göttingen, Diss., 1923
- [186] TIETJENS, O.: Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. In: *Z. angew. Math. Mech.* 5 (1925), S. 200–217
- [187] TIETJENS, O.: *Strömungslehre ; Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt ; Zweiter Band*. Springer, Berlin, 1970
- [188] TRUCKENBRODT, E.: *Strömungsmechanik*. Springer, Berlin, 1968
- [189] TRUCKENBRODT, E.: *Lehrbuch der angewandten Strömungsmechanik*. Springer, Berlin, 1983

- [190] TURNER, M. G. ; JENNIONS, I. K.: An investigation of turbulence modeling in transonic fans including a novel implementation of an implicit k - ϵ -model. In: *ASME Journal of Turbomachinery* 115 (1993), S. 249–260
- [191] UBBINK, O. ; ISSA, R. I.: A Method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes. In: *Journal of Computational Physics* 153 (1999), S. 26–50
- [192] UNGER, F.: *Numerische Simulation turbulenter Rohrströmungen*, Technische Universität München, Diss., 1993
- [193] VAN DOORMAL, J. P. ; RAITHBY, G. D.: Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. In: *Journal of Numerical Heat Transfer* 7 (1984), S. 147–163
- [194] VAN LEER, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme II: monotonicity and conservation combined in a second order scheme. In: *Journal of Computational Physics* 14 (1974), S. 361–370
- [195] VAN LEER, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme V: a second order sequel to Godunov's method. In: *Journal of Computational Physics* 32 (1979), S. 101–136
- [196] VAN DEN VORST, H. A. ; SONNEVELD, P.: CGSTAB, a more smoothly converging variant of CGS / Delft University of Technology. 1990 (50). – Forschungsbericht
- [197] VAN DER VORST, H. A.: BI-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of BI-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems. In: *J-SIAM-J-SCI-STAT-COMP* 13 (1992), Nr. 2, S. 631–644
- [198] WALTERS, D. K. ; LEYLEK, J. H.: A systematic computational methodology applied to a three-dimensional film cooling flowfield. In: *ASME paper 96-GT-351* (1996)
- [199] WATZELT, C.: *Echtzeit-Entwurf radialer Beschaukelungen auf einem Multiprozessorsystem*, Technische Universität München, Diss., 1995
- [200] WEISZÄCKER, C. F.: Das Spektrum der turbulenz bei großen Reynoldszahlen / Max-Planck Institut für Physik, Göttingen. 1946. – Forschungsbericht
- [201] WENGLER, H.: *Numerische Berechnung turbulenter Strömungen*. Vorlesungsmanuskript des Lehrstuhls für Fluidmechanik der Technischen Universität München, 2000
- [202] WILCOX, D. C.: Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. In: *AIAA Journal* 26 (1988), S. 1299–1310
- [203] WU, C. H.: A general theory of the 3D flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed flow type. In: *NACA TN-2604* (1952)

- [204] YOSHIZAWA, A.: Statistical analysis of the derivation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation. In: *Phys. Fluids* 27 (1984), S. 1377–1387
- [205] YUAN, W.: *Simulation der Saugrohr-Unterwasser-Wechselwirkung*, Technische Universität München, Diss., 1999
- [206] ZHOU, S. ; MCCORQUODALE, J. A. ; JI, Z.: Semi-implicit skew upwind method for problems in environmental hydraulics. In: *International Journal of Numerical Methods in Fluids* 17 (1993), S. 803–823
- [207] ZHU, J.: A low dispersion and bounded convection scheme. In: *Communications and Applied Numerical Methods* 7 (1991), S. 225–232
- [208] ZHU, J.: A low dispersion and bounded discretization schemes for finite volume computations of incompressible flows. In: *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* 92 (1991), S. 87–96
- [209] ZHU, J.: On the higher-order bounded discretization schemes for finite volume computations of incompressible flows. In: *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* 98 (1992), S. 345–360
- [210] ZHU, J. ; LESCHZINER, M. A.: A local oscillation-damping algorithm for higher-order convection schemes. In: *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* 67 (1988), S. 355–366
- [211] ZIEREP, J. ; BÜHLER, K.: Strömungsmechanik. In: CZICHOS, H. (Hrsg.): *Hütte ; Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*. Berlin : Springer-Verlag, 2000, S. E120–E186
- [212] ZIJLEMA, M.: On the construction of a third-order accurate monotone convection scheme with application to turbulent flows in general domains. In: *International Journal for numerical methods in fluids* 22 (1996), S. 619–641