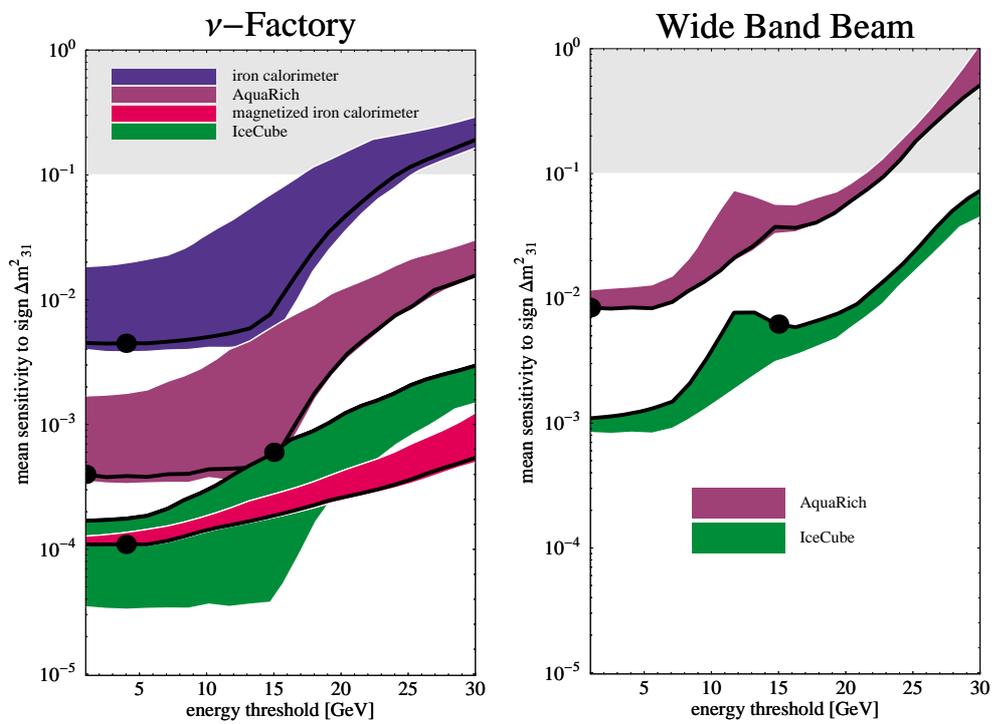


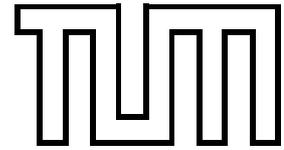
# Gekoppelte Oszillationen mit $n_\nu > 2$ Neutrinos und experimentelle Konsequenzen



Karin Dick



**Technische Universität München**  
Physik Department  
Institut für Theoretische Physik T30d  
Univ.-Prof. Dr. M. Lindner



# **Gekoppelte Oszillationen mit $n_\nu > 2$ Neutrinos und experimentelle Konsequenzen**

Karin Dick

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

*Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)*

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Franz von Feilitzsch

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. Manfred Lindner
2. Univ.-Prof. Dr. Andrzej J. Buras

Die Dissertation wurde am 18. Dezember 2000 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 18. Januar 2001 angenommen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretischer Hintergrund der Neutrinooszillation</b>	<b>9</b>
2.1	Erzeugung von Neutrinomassen . . . . .	9
2.2	Neutrinomischung und See-Saw-Mechanismus . . . . .	10
2.3	Parametrisierung der Mischungsmatrix . . . . .	12
2.4	Neutrinooszillation mit CP-Effekten . . . . .	13
2.5	Neutrinooszillation mit Materieeffekten . . . . .	16
2.5.1	Hamiltonoperator in Materie . . . . .	17
2.5.2	Oszillationsparameter in Materie . . . . .	18
2.5.3	Oszillations-Wahrscheinlichkeit in Materie . . . . .	20
2.5.4	Resonanz . . . . .	21
2.5.5	Auswirkungen der Materieeffekte in Experimenten . . . . .	23
2.5.6	CP-Verletzung in Materie . . . . .	28
2.6	Klassifizierung der Oszillationsparameter . . . . .	30
2.6.1	Führende Parameter . . . . .	31
2.6.2	Parameter nächster Ordnung . . . . .	32
2.6.3	Höhere Korrekturen . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Experimentelle Aufbauten</b>	<b>35</b>
3.1	Beams . . . . .	35
3.1.1	Neutrinofabrik . . . . .	36
3.1.2	Wide Band Beams . . . . .	37
3.1.3	Low Energy Superbeams . . . . .	38
3.2	Detektoren . . . . .	38
3.2.1	Magnetisierte Eisendetektoren . . . . .	39
3.2.2	Neutrinooteleskope . . . . .	39
3.2.3	Ring Imaging Cherenkov Detektoren . . . . .	40

<b>4</b>	<b>CP-Verletzung in Neutrino-Oszillationsexperimenten</b>	<b>43</b>
4.1	Definition der CP-Asymmetrie . . . . .	44
4.1.1	Intrinsische CP-Asymmetrie . . . . .	46
4.1.2	Experimentelle CP-Asymmetrie . . . . .	46
4.2	Drei-Neutrino Fall . . . . .	48
4.2.1	Größe der CP-Verletzung . . . . .	49
4.2.2	Long-Baseline $\nu_\mu - \nu_e$ Oszillationen . . . . .	50
4.2.3	Long-Baseline $\nu_\mu - \nu_\tau$ Oszillationen . . . . .	53
4.2.4	Materieeffekte in Long-Baseline Experimenten . . . . .	55
4.3	Vier-Neutrino Fall . . . . .	57
4.3.1	Parametrisierung . . . . .	59
4.3.2	Eingrenzung des erlaubten Parameterraums . . . . .	60
4.3.3	LBL und SBL $\nu_\mu - \nu_e$ . . . . .	64
4.3.4	LBL und SBL $\nu_\mu - \nu_\tau$ . . . . .	66
4.4	Zusammenfassung . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Bestimmung der Parameter höherer Ordnung aus Materieeffekten</b>	<b>73</b>
5.1	Überlebens- und Oszillationsraten in Materie . . . . .	75
5.1.1	Herleitung der Raten . . . . .	75
5.1.2	Analytische Diskussion der Energieabhängigkeit der Raten . . . . .	78
5.1.3	Experimenteller Rahmen . . . . .	79
5.1.4	Ereignisraten mit einer Neutrino-fabrik . . . . .	81
5.1.5	Ereignisraten in einem Neutrino-teleskop . . . . .	84
5.2	Extraktion der Parameter aus experimentellen Daten . . . . .	86
5.2.1	Vorgehensweise zur Bestimmung von $\theta_{13}$ und $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$ . . . . .	86
5.2.2	Statistik . . . . .	87
5.2.3	Neutrino-fabrik . . . . .	88
5.2.4	Neutrino-teleskop . . . . .	92
5.3	Vergleich des physikalischen Potentials verschiedener Experimente . . . . .	95
5.4	Zusammenfassung . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>103</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>115</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Lebensweg eines Neutrinos von Produktion bis zur Detektion . . . . .	13
2.2	Schwache Wechselwirkungen der Neutrinos in Materie . . . . .	17
2.3	Resonanzbreite für verschiedene Werte von $\theta_{13}$ . . . . .	22
2.4	Veränderung der Oszillations-Wahrscheinlichkeiten in Materie . . . . .	24
2.5	Materiekorrekturen in Appearance-Experimenten . . . . .	25
2.6	Materiekorrekturen in Disappearance-Experimenten . . . . .	26
2.7	Konturlinien der Sensitivität auf Materieeffekte . . . . .	27
2.8	$\Delta m_{12}^2$ Korrekturen 1. Ordnung zu Appearance-Raten in Materie . . . . .	29
2.9	$\Delta m_{12}^2$ Korrekturen 1. Ordnung zu Appearance-Raten in Materie . . . . .	29
2.10	Massenordnungsschemata für drei Neutrinos . . . . .	32
4.1	Konturlinien für $ a_{\nu_\mu\nu_e}^{\text{CP}} / \sin \delta $ in $3\nu$ LBL Experimenten . . . . .	52
4.2	Konturlinien für $ a_{\nu_\mu\nu_\tau}^{\text{CP}} / \sin \delta $ in $3\nu$ LBL Experimenten . . . . .	54
4.3	CP-Asymmetrien in Materie . . . . .	56
4.4	Massenschemen im Vier-Neutrino-Szenario . . . . .	58
4.5	Einschränkungen der Amplitude der LSND Übergangswahrscheinlichkeit . . . . .	62
4.6	Konturlinien für $ a_{\nu_\mu\nu_e}^{\text{CP}} / \sin \delta_{\mu e} $ in $4\nu$ LBL und SBL Experimenten . . . . .	66
4.7	Konturlinien für $ a_{\nu_\mu\nu_\tau}^{\text{CP}} / \sin \delta_{\mu\tau} $ in $4\nu$ SBL und LBL Experimenten . . . . .	69
5.1	Myon Appearance- und Disappearance-Raten in einer Neutrino-fabrik . . . . .	82
5.2	Kombinierte Myonraten beider Beampolaritäten der Neutrino-fabrik . . . . .	83
5.3	Spektrum der Myonraten beider Beampolaritäten der Neutrino-fabrik . . . . .	84
5.4	Totale Myonraten in einem Wide Band Beam . . . . .	85
5.5	Fit an das kombinierte Myonspektrum in der Neutrino-fabrik . . . . .	89
5.6	Fit an das Appearance-Myonspektrum in der Neutrino-fabrik . . . . .	90

5.7	Fit an das Appearance- und Disappearance-Myonspektrum in der Neutrino- fabrik . . . . .	91
5.8	Sensitivität auf das Vorzeichen von $\Delta m_{31}^2$ in der Neutrino- fabrik . . . . .	91
5.9	Fit an das Myonspektrum im Wide Band Beam . . . . .	92
5.10	Sensitivität auf $\sin^2 2\theta_{13}$ für den Wide Band Beam . . . . .	93
5.11	Sensitivität auf das Vorzeichen von $\Delta m_{31}^2$ für den Wide Band Beam . . . . .	94
5.12	Vergleich der relativen $3\sigma$ -Fehler in $\sin^2 2\theta_{23}$ . . . . .	96
5.13	Vergleich der relativen $3\sigma$ -Fehler in $ \Delta m_{31}^2 $ . . . . .	97
5.14	Mittlere Sensitivität auf $\sin^2 2\theta_{13}$ im Vergleich . . . . .	98
5.15	Mittlere Sensitivität auf das Vorzeichen von $\Delta m_{31}^2$ im Vergleich . . . . .	99

# Tabellenverzeichnis

2.1	Anzahl freier Parameter in verschiedenen Oszillations-Szenarien . . .	13
3.1	Mögliche Oszillationen in der Neutrino-fabrik . . . . .	37
5.1	Vergleich der experimentellen Parameter in Neutrino-fabrik und Wide Band Beam . . . . .	80
5.2	Typische Parameter verschiedener Detektoren . . . . .	95



# Kapitel 1

## Einführung

### Geschichte der Neutrinos

Im Jahre 1930 postulierte Wolfgang Pauli ein neues neutrales, nur wenig wechselwirkendes Teilchen, um im  $\beta$ -Zerfall den Energie- und Impulserhaltungssatz zu retten. Da dieses Teilchen bis dahin noch nicht beobachtet worden war und das Spektrum des  $\beta$ -Zerfalls keinen großen Energieverlust aufwies, sollte die Masse dieses Teilchens nach Pauli sehr klein sein. Dieses Teilchen wurde nach der Entdeckung des Neutrons, wie Pauli auch anfangs das neue Teilchen nannte, unter dem Namen Neutrino bekannt. Zur damaligen Zeit akzeptierten nur sehr wenige Physiker diese Idee eines neuen Teilchens. Sie waren zum Teil eher bereit, die Erhaltungssätze aufzugeben, als dieses seltsame Teilchen zu akzeptieren, denn lange gab es außer der fehlenden Energie und dem fehlenden Impuls im  $\beta$ -Zerfall keinen direkten Hinweis auf die Existenz dieses subatomaren Teilchens. Viele Jahre später (1953) gelang dann Frederick Reines und Clyde Cowan, gerade noch vor dem Tode Paulis, der Nachweis dieses mysteriösen Teilchens. Zuerst sollte die nukleare Kettenreaktion der kürzlich entwickelten Atombombe als intensive Neutrinoquelle genutzt werden, um das Neutrino in einem Flüssigszintillator über den inversen  $\beta$ -Zerfall nachzuweisen. Letztendlich gelang aber der Nachweis durch eine Koinzidenzmessung des Positrons mit dem Neutrinoeinfangprozeß an einem Fissionsreaktor. Seit dieser Entdeckung hat das Interesse am Neutrino nie mehr nachgelassen. Es folgten bald weitere Existenznachweise des Neutrinos, die zusätzlich die Messung des Wirkungsquerschnittes erlaubten. Ab 1962 wurden dann Experimente über die eventuelle Existenz weiterer Neutrinoarten durchgeführt, wobei zunächst konkret die Frage geklärt werden sollte, ob das Neutrino das im Myonzerfall beteiligt ist, identisch mit dem Elektronneutrino ist oder nicht. Bald konnte widerlegt werden, daß es sich um ein und dasselbe Teilchen handelt durch den Vergleich der Einfangreaktionen  $\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$  und  $\nu_\mu + n \rightarrow e^- + p$ . Die zweite Einfangreaktion kann nur stattfinden, wenn beide Neutrinoarten identisch sind. Sie wurde jedoch nicht beobachtet. Der direkte Nachweis für die Existenz eines Tauoneutrinos ist noch jetzt aktuell. Seit 1996 sucht Donut nach  $\tau$ -Neutrinos und hat auch

einige Ereignisse finden können. Nachdem geklärt war, daß es mehrere verschiedene Neutrinosorten gibt, die den Flavour der geladenen Leptonen zugeordnet werden können, interessierte nun die Physiker wieviele Neutrinos es insgesamt wohl gäbe. 1990 begannen sie mit Versuchen zur Messung der Zahl der leichten Neutrinoarten aus der totalen Zerfallsbreite der Z-Bosonen. Dies ergab eine Anzahl von ungefähr drei leichten Neutrinoarten. Dies konnte auch durch Messungen in der Kosmologie (BBN) und Messung der Wirkungsquerschnitte direkt bestätigt werden. Eine weitere ständige Frage war diejenige, ob Neutrinos zugleich ihr eigenes Antiteilchen sind. Teilchen mit dieser Eigenschaft nennt man Majorana-Teilchen und nur bei Teilchen ohne jegliche Ladung wie Neutrinos könnte dies überhaupt möglich sein. Die zahlreichen Versuche dazu (wie zum Beispiel der neutrinolose doppelte  $\beta$ -Zerfall) haben allerdings noch keine definitive Lösung des Problems gebracht.

### **Masse der Neutrinos**

Was die Physiker im Zusammenhang mit den Neutrinos aber bis heute am meisten beschäftigt, ist die Frage nach der Existenz und Größe einer eventuellen Masse der Neutrinos. Als das Neutrino in das Standardmodell integriert wurde, zeigte es sich, daß Neutrinos keine Masse besitzen können, da für die Existenz des dazu nötigen rechtshändigen Partners bisher jeglicher Hinweis fehlt. Andererseits existiert im Gegensatz zum Photon keine Invarianz, die die Masse für Neutrinos wirklich verbieten würde. Es wäre also potentiell eine Neutrinomasse denkbar, die aber nach Pauli selbst nicht allzugroß sein könnte. In den 50er Jahren wurden dann zahlreiche weitere Messungen zur direkten Bestimmung der Neutrinomasse aus den Endpunktmessungen des  $\beta$ -Zerfallsspektrums durchgeführt, die noch bis heute andauern. Sollten die Neutrinos Masse besitzen, müßte das hochenergetische Ende des Spektrums schon vor der maximalen Energie mit einem scharfen Knick nach unten abbrechen, da die Neutrinos, selbst wenn sie keine kinetische Energie haben, Energie in Form von Masse wegtragen würden. Diese Experimente konnten allerdings immer nur Obergrenzen für die Masse angeben. Weiterhin existieren auch aus astrophysikalischen Versuchen Schranken an die absolute Masse der Neutrinos.

### **Neutrinooszillationen**

Wesentlich später (1970) folgte ein erstes Experiment, das versuchte, den Fluß der in der Sonne durch Fusion erzeugten Neutrinos zu vermessen. Es handelte sich dabei um das historische Chlorexperiment der Gruppe um Davis. Obwohl das Experiment gelang, zeigte sich überraschenderweise, daß nur ungefähr die Hälfte der erwarteten Neutrinos beobachtet werden konnten. Zunächst bezweifelte man natürlich, daß das Experiment korrekt interpretiert worden war, doch auch andere Experimente konnten diese Ergebnisse bestätigen. Man zweifelte zunächst an der Richtigkeit des Sonnenmodells und der Wirkungsquerschnitte. Doch bald setzte sich der Glaube durch,

daß die zu geringe Anzahl an Neutrinos durch ein anderes Phänomen aus der theoretischen Neutrinophysik erklärt werden könnte. Schon einige Jahre zuvor (1957) hatte Pontecorvo die Theorie der Neutrinooszillationen aufgestellt. Dieses Phänomen ist inzwischen auch aus dem Quarksektor bekannt. Wenn ein Teilchen Masse besitzt, gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, diese Teilchen zu beschreiben. Dies ist zum einen die Wechselwirkungsbasis, in der das Teilchen erzeugt und vernichtet wird, und zum anderen die Masseneigenbasis, in der ein Teilchen sich durch den Raum bewegt. Der Übergang zwischen den beiden Basen, der zwischen Produktion und Detektion zweimal stattfindet, wird durch eine Rotationsmatrix, der sogenannten Mischungsmatrix, beschrieben. Dabei setzt sich ein Zustand in der einen Basis aus allen Zuständen der anderen Basis zusammen. Da nun die Teilchen in der Masseneigenbasis entsprechend ihrer jeweiligen Masse mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten propagieren, verschiebt sich damit das Verhältnis der einzelnen Beiträge der Masseneigenzustände und somit der Zustand in der Wechselwirkungsbasis. Dieser Zustandswechsel erfolgt periodisch auf der zurückgelegten Wegstrecke<sup>1</sup>. Da der Detektor nur auf den anfänglichen Flavour sensitiv ist, würden in solaren Experimenten zu wenig Neutrinos detektiert werden. Das solare Problem wäre gelöst. Dies würde aber gleichzeitig bedeuten, daß man noch einen zusätzlichen Hebel zur Bestimmung der Massen von Neutrinos erhalten hat. Diese Erkenntnis führte zu einer wahren Flut an Experimenten mit solaren Neutrinos, die nun mit allen möglichen unterschiedlichen Detektor-Prinzipien durchgeführt werden. Diese wurden weiterhin gefolgt von verschiedenen anderen terrestrischen und astrophysikalischen Experimenten. Allerdings gelang zunächst nur den atmosphärischen Neutrinos ein weiterer Hinweis auf Oszillationen und damit Massen für die Neutrinos.

### Einfachster Formalismus der Neutrinooszillation

Bei den ersten Neutrinooszillations-Experimenten wurde immer angenommen, daß die Mischungswinkel, die den Übergang zwischen den beiden Basen charakterisieren, so klein sind, wie wir es aus dem Quarksektor gewohnt sind. Unter diesen Umständen zerfällt aber die Oszillation zwischen drei Neutrinos in zwei Oszillationen zwischen zwei Neutrinos. Aber schon bald zeigte sich, daß im Fall der solaren und der atmosphärischen Neutrinos die Annahme kleiner Mischungswinkel nicht gerechtfertigt ist, daß im Gegenteil die Mischungswinkel sogar nahezu maximal sind. Trotzdem benutzte man den Zwei-Neutrino Formalismus beharrlich weiter. Erstens, weil der Drei-Neutrino Formalismus für die ersten, relativ ungenauen Experimente überdimensioniert erschien, und zweitens, weil durch ein terrestrisches Reaktorexperiment (CHOOZ) der dritte noch unbekannte Mischungswinkel auf sehr kleine Werte limitiert werden konnte. Dieser Winkel spiegelt aber genau die Trennung in solare und atmosphärische Neutrinos wider.

---

<sup>1</sup>Im Quarksektor wurde dieser Effekt beispielsweise bereits für  $K^0, \bar{K}^0$  beobachtet. Auch das im Quarksektor bekannte Phänomen der CP-Verletzung ist ein Resultat aus der Mischung der Zustände.

Weiterhin wurde zu Anfang der Einfluß von Materie durch kohärente Vorwärtsstreuung nicht berücksichtigt, obwohl man die Möglichkeit bereits kannte. Zusätzlich zu den Neutral Current Reaktionen über Z-Bosonen, welche alle drei Neutrinoarten erfahren, können Elektroneneutrinos noch Charged Current Wechselwirkungen über die W-Bosonen mit den Elektronen haben. Da weder Myonen noch Tauonen in der Materie vorhanden sind, unterscheiden sich die drei Flavours grundsätzlich in ihren Wechselwirkungen. Dies führt zu einer zusätzlichen Rotation zwischen den beiden Basen, was die Oszillationsparameter in Materie verändert. Im Fall der sogenannten Resonanz, wenn also Materiedichte und Neutrinoenergie aufeinander abgestimmt sind, kann sich die Oszillationsamplitude enorm erhöhen. Da die Materiedichte in der Sonne über einen weiten Bereich variiert, liegt die Vermutung nahe, daß dies bei den solaren Experimenten tatsächlich stattfinden könnte. Daher wurden hier die Materieeffekte zuerst betrachtet, während sie in den terrestrischen und atmosphärischen Oszillationsexperimenten bis vor kurzem noch nicht berücksichtigt wurden<sup>2</sup>. Dies führte in den solaren Experimenten zu neuen Ergebnissen für die Neutrinomassen und Mischungswinkel im Vergleich zu den im Vakuum berechneten. Außerdem gelang es mit diesem Effekt auch die Ergebnisse der verschiedenen solaren Experimente, die zum Teil widersprüchlich waren, in Einklang zu bringen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die verschiedenen Experimente die solaren Neutrinos bei unterschiedlichen Energien nachweisen und der oben genannte Materieeffekt durch die Resonanz stärker energieabhängig ist als die Vakuumoszillation. Inzwischen sucht man in vielen der Experimenten nach Signaturen dieses sogenannten MSW-Effektes. Ein Beispiel ist der Day/Night-Effekt der solaren Neutrinos durch einen weiteren Tageszeit abhängigen Materiedurchgang durch die Erde.

### Gekoppelte Oszillationen von mehr als zwei Neutrinos

Spätestens seit SuperKamiokande, ein Experiment mit atmosphärischen Neutrinos, das erstaunlich signifikante Ergebnisse vorweisen konnte, gelten Neutrinooszillationen als bewiesen und es hat ein wahrer Boom in der Neutrinoophysik eingesetzt. Nun plant man die Oszillationsparameter in den Neutrinoexperimenten der nächsten Generation mit hoher Genauigkeit zu vermessen. Dazu sind Hochpräzisions-Experimente mit sehr großen Wegstrecken auf der Erde geplant, um durch die besser kontrollierten Bedingungen die Fehler zu minimieren. Spätestens dann muß man sich Gedanken darüber machen, ob erstens die Näherung der Zwei-Neutrino Oszillation noch angebracht ist, und zweitens, ob bei Experimenten dieser Weglängen in der Erde tatsächlich Materieeffekte vernachlässigbar sind, so wie dies bisher immer angenommen wurde. Das Ziel dieser Arbeit ist diese Frage zu beantworten und, wie wir im Laufe dieser Arbeit sehen werden, ist die Antwort auf beide Fragen ganz klar nein. Denn diese Annahmen führen nicht nur zu den bereits bekannten und bisher akzeptierten Ungenauigkeiten,

---

<sup>2</sup>Es wäre ein großer Zufall, wenn Neutrinoenergie und Materiedichte der Erde zusammen passen würde, so daß Resonanz tatsächlich stattfände.

die durch solch eine Näherung entstehen<sup>3</sup>.

Diese Annahmen führen auch dazu, daß bisher zwei Parameter der Neutrinooszillation noch überhaupt nicht berücksichtigt wurden. Dabei handelt es sich zum einen um die CP-Verletzung, wie wir sie schon als Nebeneffekt des Übergangs zwischen den beiden Basen im Quarksektor kennengelernt haben. Diese ist im Prinzip auch im Neutrino Sektor möglich, wenn die Mischungsmatrix imaginär ist, sie also eine CP-Phase ungleich Null enthält. Diese CP-Verletzung kann aber überhaupt nur bei drei oder mehr in die Oszillation involvierten Neutrinos stattfinden, da in Zwei-Neutrino Oszillationen zu wenig freie Parameter in der Mischungsmatrix enthalten sind. Zum anderen handelt es sich dabei um die Ordnung der Massendifferenzen und damit um deren Vorzeichen. Die Reihenfolge, mit der die Massen angeordnet sind, ist im Vakuum nicht unterscheidbar, und die grundsätzliche Frage ist, ob die kleine solare Massendifferenz zu unterst liegt oder die größere atmosphärische Massendifferenz. Erst in Materie, die durch die unterschiedliche Wechselwirkung der Elektronneutrinos einen Eigenzustand gegenüber den anderen auszeichnet, spielt das Vorzeichen der Massendifferenzen eine Rolle.

Als dritten Nachteil dieser Näherungen nimmt man sich die zusätzliche, sehr attraktive Möglichkeit, durch CP- und Materie-Effekte in terrestrischen Experimenten Parameter zu messen, die bisher nur schlecht oder noch gar nicht bestimmt wurden. So erlaubt die Messung von CP-Verletzung auf der Erde zwischen den einzelnen Lösungen des solaren Problems zu unterscheiden und die Werte der solaren Massendifferenz weiter nach unten zu beschränken. Dies resultiert aus der Tatsache, daß CP-Verletzung nur dann für eine Messung groß genug sein kann, wenn die solare Massendifferenz auch relativ groß ist, da diese ein entscheidender limitierender Faktor für die Größe der CP-Verletzung ist. Weiterhin erlaubt die Messung von Materieeffekten, eventuell einen Wert für den – bisher nur nach oben beschränkten – dritten Mischungswinkel zu erhalten oder zumindest den Limit weiter zu senken. Dies ist darauf zurückzuführen, daß im Resonanzbereich der Materieeffekte der Wert dieses Mischungswinkels stark erhöht wird.

Die Vernachlässigung der höheren Ordnungen der Neutrinooszillation kann nicht nur die Parameter innerhalb dieses Spezialgebietes beeinflussen sondern auch Auswirkungen außerhalb des Neutrino Sektors haben. Die CP-Verletzung kann zum Beispiel bei einer Vereinigung von Quarks und Leptonen im Rahmen einer vereinheitlichten Theorie wichtig werden oder in den Theorien, die die Baryon asymmetrie erklären sollen. Aus diesen Gründen sollten alle zukünftigen Oszillationsexperimente im vollen Drei-Neutrino Formalismus in Materie gerechnet werden.

Das eigentliche Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen, daß es in den zukünftigen Neutrino-

---

<sup>3</sup>Bei der Näherung des Zwei-Neutrino Formalismus handelt es sich dabei darum, daß man den Beitrag der dritten Neutrinoart im jeweiligen Oszillationsexperiment vernachlässigt, wenn der kleine Mischungswinkel identisch Null gesetzt wird. Durch die Vernachlässigung der Materie berücksichtigt man nicht die Änderungen in den Oszillationsparameter, die durch die, in den Flavour unterschiedliche, Wechselwirkung mit der Materie hervorgerufen werden könnten.

experimenten durch die verwendeten Näherungen des Zwei-Neutrino Formalismus in Vakuum tatsächlich zu Verfälschungen der Ergebnisse kommen kann. Des weiteren wird diese Arbeit zeigen, daß die Möglichkeiten zur Bestimmung von Oszillationsparametern, die der vollständige Formalismus von drei Neutrinos in Materie bietet, nicht nur in der Theorie bestehen, sondern tatsächlich in den passenden Experimenten verwirklicht werden können. Unsere Ergebnisse schlagen des weiteren auch einige konkrete Experimente vor, die man im Hinblick auf diese neuen Erkenntnisse durchführen könnte.

### **Aufbau der Arbeit**

Der Aufbau dieser Arbeit ist folgendermaßen gestaltet: Zunächst werden wir im ersten Kapitel zeigen, wie im Standardmodell Massen für Neutrinos eingefügt werden können und wie daraus der Effekt der Oszillation folgt. Dann führen wir einen Formalismus ein, mit dem man die Oszillation für eine beliebige Anzahl von Neutrinos beschreiben kann. Dabei werden wir sehen, daß ganz automatisch ein CP-verletzender Term entsteht. Der Vergleich mit den üblichen Zwei-Neutrino Formeln wird dann zeigen, daß CP-Verletzung im Zwei-Neutrino Formalismus tatsächlich nicht möglich ist. Anschließend erweitern wir die Oszillationsformeln im Vakuum noch auf diejenigen in Materie. Dabei zeigen wir die Bedingungen auf, unter denen in einem der CP-konjugierten Kanäle Resonanz stattfinden kann. Wir werden sehen, daß in Resonanz das Vorzeichen der Massendifferenz zugänglich wird und der dritte Mischungswinkel bestimmt werden kann.

Nachdem wir in Kapitel eins die theoretischen Voraussetzungen zur Betrachtung von CP- und Materie-Effekt geschaffen haben, werden wir im nächsten Kapitel Experimente vorstellen, die potentiell für den Nachweis dieser beiden Effekte geeignet sind. In Kapitel drei betrachten wir dann Größe und Verhalten der CP-Verletzung in Experimenten im Drei- und Vier-Neutrino Szenario. Zuerst definieren wir eine passende Meßgröße für CP-Verletzung, die CP-Asymmetrie, und führen dann eine zusätzliche experimentelle Asymmetrie ein, die durch Materie und experimentellen Setup erzeugt wird. Danach beginnen wir im Drei-Neutrino Fall zunächst mit einer analytischen Diskussion der Abhängigkeit der Größe der CP-Verletzung von den Oszillationsparametern, bevor wir anschließend für Long-Baseline Experimente Plots sowohl für den  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal als auch für den  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal vorstellen. Im Drei-Neutrino Fall werden wir noch zusätzlich zeigen, daß bei diesen kleinen Baselines Materieeffekte vernachlässigbar sind. Anschließend werden wir die gleichen Analysen für den Fall von vier Neutrinos durchführen. Dazu müssen wir zunächst noch eine Parametrisierung festlegen und die Einschränkung dieser Parameter durch Experimente betrachten. Im Vier-Neutrino Szenario werden wir zusätzlich Plots für Short-Baseline Experimente vorstellen. Im vierten Kapitel werden wir dann ausführlich diskutieren, welche Experimente es erlauben, sowohl den Mischungswinkel als auch das Vorzeichen der Massendifferenz zu bestimmen und werden das rein generische physikalische Po-

---

tential von diesen Experimenten direkt miteinander vergleichen. Um diese Analysen durchführen zu können, betrachten wir zunächst die Ereignisraten, die in solch einem Experiment voraussichtlich zu beobachten sind. Aus diesen Raten generieren wir uns künstliche Daten und versuchen anschließend, die führenden Oszillationsparameter wieder zu re-extrahieren. Zuletzt versuchen wir, den Mischungswinkel und das Vorzeichen mit dem gewonnenen Best Fit der führenden Parameter zu bestimmen. Im letzten Kapitel werden wir unsere Ergebnisse zusammenfassen.



## Kapitel 2

# Theoretischer Hintergrund der Neutrinooszillation

### 2.1 Erzeugung von Neutrinomassen

Bisher waren im Standardmodell (SM) der Teilchenphysik keinerlei Massen für Neutrinos vorgesehen, sie sind sogar scheinbar nicht erlaubt. Dies allerdings nur, weil es keinerlei zwingenden Grund gibt, die dazu notwendigen rechtshändigen Neutrinos bei der Bildung des Standardmodells einzuführen und nicht, weil irgendwelche Symmetrien es verbieten würden. Auf der anderen Seite gibt es aber auch keinen Grund Neutrinomassen wirklich zu verbieten. Es ist sogar eher unschön, daß das Standardmodell sich im Lepton- und Quarksektor unsymmetrisch verhalten soll und für Neutrinos andere Gesetzmäßigkeiten gelten sollen als für die restlichen Fermionen. Nun, dies allein wäre allerdings noch kein Grund, Neutrinomassen auch tatsächlich einzuführen. Aber inzwischen mehren sich die Hinweise, daß Neutrinos wirklich Masse besitzen. Die verschiedenen Nachweise von Neutrinooszillationen sind ein Indiz dafür. Denn diese Oszillationen sind, wie wir im folgenden sehen werden, ohne nicht-degenerierte Neutrinomassen nicht möglich und daher ebenfalls im Standardmodell verboten. Um dies zu zeigen gehen wir zunächst einmal vom denkbar allgemeinsten Massenterm für Neutrinos in der Lagrangedichte aus.

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}_m &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} = \\
 &= \bar{\nu}_L M_D \nu_R + \frac{1}{2} \bar{\nu}_R^c M_R \nu_R + \frac{1}{2} \bar{\nu}_L^c M_L \nu_L + \text{h.c.} .
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dieser enthält zusätzlich zum Dirac-Massenterm  $M_D$ , wie er aus dem Quarksektor bekannt ist, sowohl eine linkshändige Majorana-Massenmatrix  $M_L$  als auch eine rechtshändige  $3 \times (n_N - 3)$  dimensionale Majorana-Massenmatrix  $M_R$ . Solch eine Majoranamasse ist nur für neutrale Teilchen, wie das Neutrino möglich, da nur solche

potentiell ihr eigenes Antiteilchen sein können. Dieser allgemeinste Massenterm wird daher auch Dirac-Majorana-Massenterm genannt.  $\nu_L$  stellt einen Vektor aus den Neutrino Flavour-Eigenzustände  $\nu_{e_f}$ ,  $f \in \{1, 2, 3\}$  dar, die im Standardmodell mit den entsprechenden geladenen Leptonen ( $e, \mu, \tau$ ) ein Dublett unter  $SU(2)_L$  bilden. Dabei nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit die geladenen Leptonen als bereits diagonal an. Der Vektor  $\nu_R$  besteht aus neutralen, sterilen (rechtshändigen) Neutrinos  $\nu_{N_s}$ ,  $N_s \in \{4, \dots, n_N\}$ , welche elektro-schwache Singulets sind.  $c$  notiert dabei die Ladungskonjugation  $\nu^c = C\gamma_0\nu^*$ . Da die zusätzlichen neutralen, sterilen Neutrinozustände zunächst nicht im Standardmodell beinhaltet sind, können im Standardmodell keine Diracmassen gebildet werden. Aus demselben Grund existieren natürlich auch keine rechtshändigen Majoranamassen. Weiterhin existieren im Standardmodell auch die linkshändigen Majoranamassen nicht. Denn da die linkshändigen Neutrinos  $\nu_{e_f}$  Teil des  $SU(2)_L$  Dubletts sind, sind keine Singulett Yukawa Kopplungen  $\bar{\nu}_L\nu_L^c$  zum Higgs Dublett  $\Phi$  möglich. Denn dies würde die Eichsymmetrie brechen.

Demnach ist die einfachste Möglichkeit Neutrinomassen im Standardmodell zu erlauben, daß man es um die rechtshändigen Neutrinozustände erweitert. Unter diesen Umständen sind sowohl Diracmassen  $M_D\bar{\nu}_L\nu_R$  aus Yukawakopplungen an  $\Phi$ , als auch explizite Majoranamassen  $M_R\bar{\nu}_R\nu_R^c$  möglich. Letztere verletzen allerdings die Leptonzahl. Der linkshändige Majorana-Massenterm  $M_L\bar{\nu}_L\nu_L^c$  ist weiterhin aus den gleichen Gründen wie zuvor verboten. Einzige Ausnahme stellt die zusätzliche Erweiterung des Standardmodells um ein Higgs Triplet ( $\Delta = (\Delta_0, \Delta_-, \Delta_{--}), 3_L$ ) oder Singulett ( $S^-, 1_L$ ) mit Hyperladung  $Y = -2$  dar. Eine Erweiterung des Standardmodells um zusätzliche Fermionfamilien ( $l^-, \nu_L$ ) ist mit diversen experimentellen Ergebnissen nicht konsistent. Beispielsweise wären dabei die am Beschleuniger-Experiment LEP gemessene Zerfallsbreite vom Z-Boson zu nennen. Desweiteren würde eine vierte Fermionen-Familie Strahlungskorrekturen zu anderen elektroschwachen Observablen, wie z.B. den  $\rho$ -Parameter liefern und die BBN-Ergebnisse verändern [8].

## 2.2 Neutrinomischung und See-Saw-Mechanismus

Um die physikalischen Neutrinomassen aus obiger Gleichung 2.2 zu erhalten, muß die Massenmatrix diagonalisiert werden. Dies entspricht einem Basiswechsel von der Flavourbasis in die Masseneigenbasis. Die Eigenvektoren der Massenmatrix stellen dann die Masseneigenzustände  $\nu_i$ ,  $i \in (1, \dots, n_N)$  der Neutrinos dar. Sie sind eine Überlagerung aus den Flavoureigenzuständen:

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L}_m &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} U M_{diag} U^\dagger \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \\
 |\nu_i\rangle &= \sum_{e_f=1}^3 U_{e_f i}^\dagger |\nu_{e_f}\rangle
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$U_{efi}$  wird Mischungsmatrix genannt. Mit den typischen Größenordnungen für die einzelnen Massenterme erhält man bei der Diagonalisierung sozusagen gratis den sogenannten See-Saw Mechanismus. Dieser kann die im Verhältnis zu den restlichen Fermionen kleinen Massen der Neutrinos wenn auch nicht wirklich erklären, so doch zumindest einen Grund dafür liefern. Die linkshändigen Massen  $M_L$  sind mit dem Standard Higgs Gehalt identisch Null (und im erweiterten Higgssektor zumindest klein). Für die Diracmassen  $M_D$  nehmen wir an, daß sie in der Größenordnung der geladenen Leptonen liegen. Die rechtshändigen Massen  $M_R$  sollen bei der Einbettungsskala (z.B. LR oder GUT Skala) liegen, da diese in keiner Weise mit der elektroschwachen Skala korreliert sind. Führt man unter diesen Umständen die Diagonalisierung durch, erhält man als Neutrinomassen zum einen schwere sterile Neutrinos mit Massen  $m \sim M_R$  und zum anderen leichte Zustände mit Massen  $m \sim M_D^2/M_R$ , die den drei Flavourzuständen entsprechen. Es muß aber nicht zwingend der Fall sein, daß alle sterilen Neutrinos in der Größenordnung der Einbettungsskala liegen und damit schwer sind. Unter diesen Umständen kann man auch eine größere Anzahl leichter Neutrinos erhalten. Zwei Szenarien sind dabei beliebt: Zum einen dasjenige mit tatsächlich nur den üblichen drei leichten Neutrinos und zum anderen dasjenige mit drei Neutrinos plus einem leichten sterilen. Im Prinzip sind auch solche mit noch mehr leichten sterilen Neutrinos denkbar, aber diese werden selten benutzt<sup>1</sup>. In jedem dieser Fälle sind nur die ersten drei Zustände, die den Flavourzuständen entsprechen, detektierbar. Es kann sich dabei um einen reinen Dirac- oder Majorana- oder auch um einen gemischten Massenterm handeln. Nach der Diagonalisierung existieren also drei oder mehr leichte Neutrinos, abhängig von der Anzahl schwerer Neutrinos unter den sterilen Neutrinos. Unabhängig davon teilt sich die Mischungsmatrix im Fall  $m_{heavy} \gg m_{light}$  in zwei Teilmatrizen auf, die in den Diagonaleinträgen stehen. Die schweren und die leichten Massen-Eigenzustände entkoppeln.

$$\begin{pmatrix} \nu_{ef} \\ \nu_{Ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{mix}^{light} & \approx 0 \\ \approx 0 & U_{mix}^{heavy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_i^{light} \\ \nu_j^{heavy} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Die schwere Mischungsmatrix  $U_{mix}^{heavy}$  tritt bei niedrigen Energien nicht mehr in Erscheinung, sie ist dann physikalisch nicht mehr relevant. Daher sind von nun an der Ursprung der Neutrinomassen und die Physik dahinter irrelevant. Für alle folgenden Betrachtungen dient uns nur mehr die leichte Mischungsmatrix  $U_{mix}^{light}$  und die zugehörigen leichten Neutrinozustände als Ausgangspunkt. Dies ist zulässig, da aufgrund der Massenhierarchie  $U_{mix}^{light}$  mit guter Näherung unitär ist und daher als vollwertige, alleinstehende Matrix benutzt werden kann. Im folgenden werden wir also nur  $U_{mix}^{light}$  parametrisieren.

---

<sup>1</sup>Die Ursache dafür ist, daß diese Szenarien einen unnötig großen Aufwand darstellen, da alle existierenden Experimente mit vier Neutrinos erklärt werden können. Für die große Menge an Parametern existieren daher nicht genug Einschränkungen, um alle genauer bestimmen zu können.

### 2.3 Parametrisierung der Mischungsmatrix

Eine Matrix mit  $n \times n$  Dimensionen besitzt zunächst einmal  $n^2$  Parameter, wobei die darin enthaltenen, globalen unphysikalischen Phasen instantan durch das Fermionen Feld absorbiert werden können. Dabei überleben aufgrund des potentiellen Majoranacharakters der Neutrinos mehr  $((n - 1))$  Parameter als im Quarksektor. Von diesen überlebenden  $n(n - 1)$  Parametern entsprechen genau  $\frac{n(n-1)}{2}$  einem physikalischen Winkel und  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  einer CP-verletzenden Phase, vergleichbar zur CKM-Matrix im Quarksektor (Cabibbo, Kobayashi, Maskawa). Die restlichen, zusätzlichen  $(n - 1)$  Parameter sind die sogenannten CP-verletzenden ( $\mathcal{CP}$ ) Majoranaphasen, welche in Form einer Diagonalmatrix an die bekannte CKM-Matrix angehängt werden können.

$$U_{mix} := U_{NMS} \cdot \text{Diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \dots, e^{i\alpha_{n-1}}, 1) \quad (2.4)$$

Da der Hamilton Operator mit Diagonalmatrizen, speziell mit  $\text{Diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \dots, 1)$ , kommutiert und nur  $UM_{diag}U^\dagger$  in die Oszillation eingeht (Gl. 2.7), heben sich die enthaltenen Diagonalmatrizen mit den Majoranaphasen gegenseitig weg. Daher geht in die Oszillation nur  $U_{NMS}$  und damit die  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  CKM-ähnlichen Phasen ein. Die Diagonalmatrix mit den Majoranaphasen werden wir daher in folgenden nicht mehr berücksichtigen. Dagegen kann man im doppelten  $\beta$ -Zerfall die Majoranaphasen nicht ignorieren.

Im Falle von Drei-Neutrino Oszillationen kann folglich  $U_{mix}$  wie im Quarksektor parametrisiert werden. Sie enthält die drei Winkel  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  und eine CP-verletzende Phase  $\delta$ . Die CP-verletzende Phase geht dabei in Form einer komplexen Rotation im Unterbereich 13 ein, durch die Ersetzung  $s_{13} \rightarrow s_{13}e^{-i\delta}$ . Alternativ könnte man die CP-Phase auch in jeder der anderen Rotationen einführen. Diese Wahl der Definition wird uns allerdings bei der Einführung von Materie in den Hamiltonoperator noch gute Dienste leisten.

$$\begin{aligned} U(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}, \delta) &= R_{23}(\theta_{23}) \cdot R_{13}(\theta_{13}, \delta) \cdot R_{12}(\theta_{12}) = & (2.5) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$c_{ij}$  bzw.  $s_{ij}$  seien durch  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  und  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$  gegeben. Im folgenden nehmen wir dabei an, daß die Winkel im Bereich  $0 \leq \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13} \leq \pi/4$  und  $0 \leq \delta \leq 2\pi$  liegen.

Für den Fall von zwei Neutrinos existiert nur ein Winkel und keine Phase. Bei vier Neutrinos existieren sechs Winkel und drei CP-verletzende Phasen. Auch wenn der Vier-Neutrino Fall zwischendurch behandelt werden wird, haben wir hierfür keine spezielle Parametrisierung gewählt.

$\nu$ 's	Winkel	CKM-ähnliche CP-Phasen	extra CP-Phasen
2	1	0	1
3	3	1	2
4	6	3	3
n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$	$n - 1$

Tabelle 2.1: Vergleich der Anzahl der freien Parameter in Modellen mit zwei, drei und vier Neutrinos aufgeteilt in Winkel, CP-Phasen, und den übrigen Majorana-Phasen, die nicht in die Neutrinooszillation eingehen.

## 2.4 Neutrinooszillation mit CP-Effekten

Wie wir gesehen haben existieren zwei verschiedene Basen in denen Neutrinos beschrieben werden können, die Flavourbasis und die Massensbasis. Welche der beiden Basen man zur Beschreibung der Neutrinos verwendet, hängt natürlich von der jeweiligen Situation ab. Während die Neutrinos durch schwache Wechselwirkung in ihren Flavoureigenzuständen erzeugt und detektiert werden, wird die Propagation in Masseneigenzuständen beschrieben. Daher ist sowohl beim Übergang von der Erzeugung in die Propagation als auch zurück in die Detektion jeweils die Mischungsmatrix involviert.

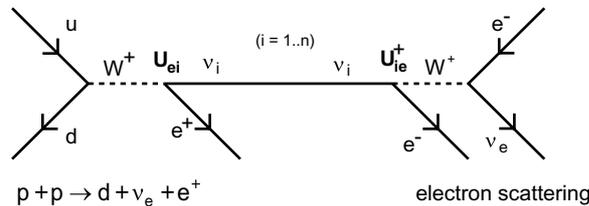


Abbildung 2.1: Lebenslauf eines Neutrinos von Produktion über Propagation bis zur Detektion. Erzeugung und Nachweis erfolgen in der Wechselwirkungsbasis, während die Propagation in der Massen-Eigenzuständen erfolgt. Daher tritt die Mischungsmatrix im Oszillationsexperiment zweifach auf.

Physikalisch interessant ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neutrino, das im Zustand  $\nu_{e_f}$  erzeugt wurde nach einer Strecke  $L$  im Zustand  $\nu_{e_m}$  detektiert wird. Ausgedrückt wird dies durch das Betragsquadrat der Übergangsamplitude von einem Zustand in den anderen, was bedeutet, daß die Mischungsmatrix vierfach eingeht. Die Propagation zwischen Erzeugung und Detektion des Neutrinos wird dabei durch den Hamiltonoperator beschrieben. In der ultrarelativistischen Näherung ( $E \gg m; E_i =$

$\sqrt{p^2 + m_i^2} \simeq p + \frac{m_i^2}{2E_\nu}$ ) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} P(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) &= |\langle \nu_m(t_1) | \nu_l(t_0 = 0) \rangle|^2 = |\langle \nu_i | U e^{-iHt_1} U^\dagger | \nu_j \rangle|^2 = \\ &= \underbrace{\delta_{lm} - 4 \sum_{i>j} \operatorname{Re} J_{ij}^{e_l e_m} \sin^2 \Delta_{ij}}_{P_{CP}} - 2 \underbrace{\sum_{i>j} \operatorname{Im} J_{ij}^{e_l e_m} \sin 2\Delta_{ij}}_{P_{CP}} , \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit den Abkürzungen  $J_{ij}^{e_l e_m} := U_{li} U_{lj}^\dagger U_{mi}^\dagger U_{mj}$  und  $\Delta_{ij} := \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}$ . Dabei sollte man die praktischen Umformungsregeln beachten  $J_{ij}^{e_l e_m} = (J_{ji}^{e_l e_m})^* = (J_{ij}^{e_m e_l})^*$  und  $\sum_i J_{ij}^{e_l e_m} = \delta_{lm} |U_{mj}|^2$ ,  $\sum_l J_{ij}^{e_l e_m} = \delta_{ij} |U_{lj}|^2$  [1]. Dazu wäre noch anzumerken, daß nur  $n-1$  der  $\frac{n(n-1)}{2}$  Oszillationsfrequenzen  $\Delta_{ij}$  überhaupt voneinander unabhängig sind. Da darin nur Massendifferenzen und nicht absolute Massen eingehen, können sie durch die anderen Differenzen ausgedrückt werden. Existieren nur drei Neutrinos bedeutet dies, daß lediglich zwei unabhängige Frequenzen existieren.

Man sieht, daß im ersten Term der allgemeinen Oszillationsformel ausschließlich der Realteil der Mischungsmatrix eingeht. Sie enthalten folglich nicht die CP-verletzende Phase  $\delta$ . Diese ist nur im zweiten Term  $P_{CP}$  enthalten, der aus dem Imaginärteil der Mischungsmatrix besteht. Diesen Anteil der Oszillationswahrscheinlichkeit nennt man daher CP-verletzend, während der erste Term den CP-erhaltenden Anteil darstellt. Wir haben also aus den allgemeinen Formeln für Neutrinooszillation, zusammen mit den imaginären Eigenschaften der Mischungsmatrix, eine CP-Verletzung, ähnlich derjenigen im Quarksektor, erhalten. Jedoch im Gegensatz zum Quarksektor müssen die Mischungswinkel, die den CP-verletzenden Term stark einschränken, nicht zwangsläufig klein sein (siehe auch Kap.4.2.1). Daher besteht prinzipiell durchaus die Möglichkeit, daß die CP-Verletzung für Neutrinos wesentlich größer ausfällt, als man zunächst annimmt [9, 10, 11, 12, 13] und daher gut beobachtbar wird.

Vergleicht man die Oszillations-Frequenzen einerseits vom CP-erhaltenden Term und andererseits vom CP-verletzenden Term erkennt man, daß diese nicht identisch sind. Während der CP-erhaltende Teil den Oszillationsterm  $\sin^2 \Delta_{ij}$  besitzt, ist der Oszillationsterm im CP-verletzende Teil  $\sin 2\Delta_{ij}$ . Dies kann im Prinzip genutzt werden um die CP-verletzende Phase im Experiment zu isolieren.

Vergleichen wir diese allgemeine Oszillationsformel nun mit den bekannten und meistens benutzten Formeln einer Oszillation zwischen nur zwei Neutrinos:

$$\begin{aligned} P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) &= \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \Delta = \\ &= \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \left( \frac{1.27 \Delta m^2 [eV^2] L [m]}{E_\nu [MeV]} \right) , \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\theta \cdot \sin^2 \Delta . \quad (2.6b)$$

Man erkennt, daß sich der erste, CP-erhaltende Term der allgemeinen Formel mit dem, aus der Zwei-Neutrino Oszillation bekannten, Ausdruck deckt. Der CP-

verletzende Term existiert in den Zwei-Neutrino Formeln nicht, da die Mischungsmatrix in diesem Fall rein reell ist und keine CP-verletzende Phase enthält, wie wir bei der Parametrisierung gesehen haben (Tabelle 2.1). CP-Verletzung ist wie bereits bekannt im Fall zweier Neutrinos nicht möglich. Da die CP-Verletzung nicht zwangsläufig vernachlässigbar ist, sollte daher der bisher (besonders bei führenden Parameter) gängige Zwei-Neutrino Formalismus nicht mehr weiter verwendet werden. Stattdessen sollte der auf drei Neutrinos erweiterte Formalismus benutzt werden. Dies gilt besonders mit Hinblick auf die zukünftig geplanten Hochpräzisionsmessungen der Oszillationsparameter. Diese werden eine Präzision erreichen, für die die Genauigkeit der Näherungen, die im Zwei-Neutrino Formalismus gemacht werden, nicht mehr ausreichen. Dasselbe gilt für die Vernachlässigung der Erdmaterie, die von den Neutrinos durchquert wird. Die zukünftigen Experimente sind auf der Erde mit sehr großen Entfernungen geplant, um durch kontrollierte Bedingungen die Fehler zu reduzieren und damit die Genauigkeit zu verbessern. Da dies bedeutet, daß die Trajektorien durch den Erdmantel oder sogar durch den Erdkern verlaufen, müssen Effekte der Materie berücksichtigt werden. Diese Erweiterungen werden wir im folgenden Kapitel betrachten. Doch bleiben wir zunächst bei der CP-Verletzung, wie sie in den Drei-Neutrino Formeln auftaucht.

Leitet man die allgemeinen Oszillationsformeln auch für Antineutrinos her, sieht man, daß der CP-verletzende Anteil mit umgekehrtem Vorzeichen eingeht.

$$P(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) = P_{CP} + P_{\mathcal{CP}} \quad , \quad P(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m}) = P_{CP} - P_{\mathcal{CP}} \quad . \quad (2.7)$$

Falls CP-Verletzung existiert, bedeutet dies, daß dadurch die Überlebenswahrscheinlichkeit in dem einen Neutrinokanal erhöht und im anderen verringert wird. Diese antisymmetrische Abänderung der Überlebenswahrscheinlichkeit ist damit ein sehr gutes Indiz dafür, daß eine CP-verletzende Phase existiert, und sie kann natürlich gut zur Messung der CP-Verletzung verwendet werden.

Weiterhin kann man zeigen, daß erwartungsgemäß der CP-erhaltende Anteil  $P_{CP}$  sowohl bei Zeitumkehr als auch beim Wechsel von Neutrinos zu Antineutrinos erhalten bleibt während der CP-verletzende Anteil  $P_{\mathcal{CP}}$  in beiden Fällen das Vorzeichen wechselt. Daraus und aus der Tatsache, daß die Gesamtwahrscheinlichkeit immer größer als Null sein muß, ergibt sich, daß der CP-verletzende Teil  $P_{\mathcal{CP}}$  immer kleiner ist als der CP-erhaltende Teil  $P_{CP}$ .

$$P_{CP}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) = P_{CP}(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m}) \quad (2.8a)$$

$$P_{CP}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) = P_{CP}(\nu_{e_m} \rightarrow \nu_{e_l}) \quad (2.8b)$$

$$P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) = -P_{\mathcal{CP}}(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m}) \quad (2.8c)$$

$$P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) = -P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_m} \rightarrow \nu_{e_l}) \quad (2.8d)$$

$$|P_{\mathcal{CP}}| \leq P_{CP} \quad (2.8e)$$

Hier zeigt sich bereits, daß der CP-verletzende Anteil immer schwerer zu detektieren sein wird, als der CP-erhaltende Anteil. Da bereits dieser aufgrund seiner Kleinheit

schwer meßbar ist, werden sich voraussichtlich für den CP-verletzenden Anteil einige Schwierigkeiten ergeben. Zuletzt bleibt noch zu erwähnen, daß CP-Verletzung nur im Zusammenhang mit Appearance-Experimenten  $P(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m})$  gemessen werden kann, da in Disappearance-Experimenten  $P(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_l})$  der CP-verletzende Anteil identisch Null ist. Dies sieht man in Gleichung (2.8d), da diese für  $l = m$  nur durch Null zu erfüllen ist. Man kann dies aber auch direkt aus der CPT-Erhaltung schließen.

Obige Relationen und die Tatsache, daß der CP-verletzende Anteil für Disappearance-Experimente identisch Null ist, gilt allerdings nur im Vakuum. Ist im Experiment Materie beteiligt, bricht diese selbst die CP- und CPT-Invarianz bereits dadurch, daß nur Materie und keine Antimaterie, speziell keine Antielektronen vorhanden sind. Der Materie und ihren Einflüsse auf die Oszillationswahrscheinlichkeit werden wir uns im nächsten Abschnitt widmen. Wir werden dann auch die veränderten CP-Relationen in Materie nocheinmal betrachten.

## 2.5 Neutrinooszillation mit Materieeffekten

Im letzten Abschnitt wurden die einfachsten Oszillationsformeln, der Zwei-Neutrino Formalismus im Vakuum ohne CP-Verletzung, bereits auf Oszillation mit beliebiger Anzahl von Neutrinos einschließlich CP-Verletzung erweitert. Die Berechnung mit drei oder mehr Neutrinos hat die Sache etwas verkompliziert, hat aber dadurch im Gegenzug auch die Messung eines weiteren Parameters erlaubt: die CP-verletzende Phase  $\delta$ . Dadurch haben wir eine sinnvolle Basis für die zukünftigen Präzisionsmessungen geschaffen. In diesem Kapitel werden wir die Oszillationsformeln um die Wechselwirkungen der Neutrinos mit der Materie (kohärente Vorwärtsstreuung) erweitern [14, 15, 16]. Auch hier wird sich dadurch der Formalismus zunächst verkomplizieren, aber auch ein neuer Parameter zugänglich werden: die Ordnung bzw. das Vorzeichen der Massendifferenzen (siehe Kap. 2.6.2) [5, 17, 18, 19, 20]. Mit den Formeln die wir dabei erhalten, können wir uns dann endgültig den Experimenten der nächsten Generation widmen.

Die Experimente der ersten Generation zur Messung der Neutrinomassen existieren inzwischen schon einige Jahre und haben schon reichlich Daten produziert. Nun will man diese ersten Ergebnisse in weiteren Experimenten verifizieren und die Fehlerbalken dabei minimieren. Dazu möchte man nicht mehr nur auf die natürlichen Neutrinoquellen angewiesen sein, da diese nicht genau genug bekannt und nicht kontrollierbar oder gar beeinflussbar sind. Für die Präzisionsmessungen der bereits bekannten Oszillationsparameter der nächsten Generation und die Bestimmung der neuen Parameter braucht man genaue Kontrolle über das Experiment. Dies ist nur bei Experimenten möglich, die auf der Erde stationiert sind. Um trotzdem Baselines zu erhalten, die im Verhältnis zu den Oszillationslängen groß sind, muß man über weite Strecken durch den Erdmantel oder sogar den Erdkern schießen.

Diese Wechselwirkung unterscheidet sich für Elektronneutrinos grundsätzlich von derjenigen der restlichen Flavours. Da in der Erdmaterie nur Elektronen und (fast) keine Myonen oder Tauonen vorhanden sind, können nur die Elektronneutrinos über geladene Ströme mit der Erdmaterie wechselwirken (**Charged Current**). Aufgrund der Erhaltung der Leptonzahl ist eine Wechselwirkung der restlichen Flavours über geladene W-Bosonen mit den Elektronen nicht erlaubt. Die Wechselwirkung über ungeladene Z-Bosonen (**Neutral Current**) ist für alle aktiven Flavour identisch. Existieren

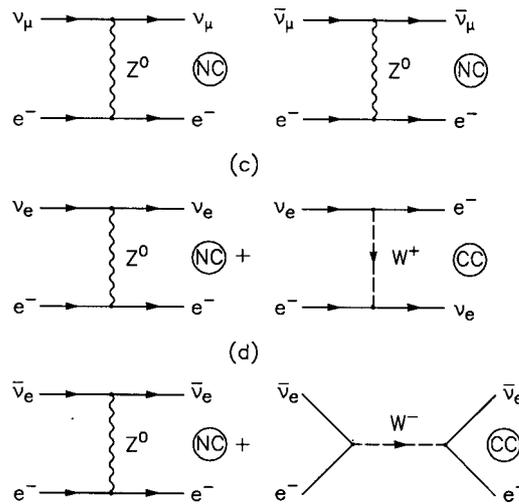


Abbildung 2.2: Dargestellt sind die verschiedenen möglichen schwachen Wechselwirkungen der Neutrinos mit der Erdmaterie. Während Myon- und Tauoneutrinos nur über geladene Ströme (Z-Bosonen) wechselwirken können, existiert für Elektronneutrinos auch die geladene Wechselwirkung über die W-Bosonen [8].

zusätzlich noch sterile Neutrinozustände, gibt es weitere Unterschiede in den Wechselwirkungstermen, denn diese können auch nicht über den neutralen Strom der Z-Bosonen wechselwirken.

### 2.5.1 Hamiltonoperator in Materie

Diese Wechselwirkungsterme in Materie führen zu einer Abänderung des Hamiltonoperators gegenüber der Vakuumsoszillation. Dies kann man durch zusätzliche Addition einer Diagonalmatrix darstellen, einen konstanten Eintrag einer gleichbleibenden Wechselwirkung kann man dabei als Phase separieren. Da die Wechselwirkungen zwischen den weiteren Flavour identisch sind, hat die Diagonalmatrix daher nur einen Eintrag im (1,1)-Element, welches das Elektronneutrino darstellt. Dieser Term  $A$  entspricht folglich dem Unterschied der Wechselwirkung zwischen Elektronneutrino

und den restlichen Flavour. Will man man eventuelle sterile Neutrinos berücksichtigen, erhält man auch in den weiteren Diagonalelementen Einträge  $A' \neq 0$ , die den Unterschied in der Wechselwirkung von aktiven und sterilen Neutrinos darstellen, also der Gesamtwechselwirkung. In den folgenden Abschnitten zu Materieeffekten, werden wir allerdings keine sterilen Neutrinos mit einschließen.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' &= \mathbf{H} + \delta\mathbf{H}_{CC} + \delta\mathbf{H}_{NC} = \\ &= \frac{1}{2E} \mathbf{U} \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} \mathbf{U}^\dagger + \frac{1}{2E} \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{A}' & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}' & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

In den Korrekturterm geht die Beschaffenheit der Materie ein und die Energie  $E$  mit der die Neutrinos sie durchqueren:  $A = 2EV = \pm \frac{2\sqrt{2}G_F Y \rho E}{m_n}$  mit  $Y$  Zahl der Elektronen/Nukleon,  $\rho$  Materiedichte und  $m_n$  Nukleonmasse, was zusammen die Zahl der Elektronen  $N_e$  ergibt. Das Vorzeichen ist dasjenige zwischen den Leptonzahlen von Materie und Neutrinos. Dabei steht " + " für den Fall der Kombination  $\nu \oplus$  Materie (und  $\bar{\nu} \oplus$  Antimaterie), für die Kombination  $\bar{\nu} \oplus$  Materie (und  $\nu \oplus$  Antimaterie) muß das Vorzeichen " - " benutzt werden. Der Grund ist die umgekehrte Wechselwirkung von Antineutrinos mit Materie. Wie man sieht führt dies für Neutrinos und Antineutrinos zu entgegengesetzten Korrekturen im Hamiltonoperator. Wegen diesem zusätzlichen Term muß die Mischungsmatrix re-diagonalisiert werden, wobei dies für Neutrinos und Antineutrinos zu unterschiedlichem Parametermapping führt. In Materie erhält man als neue Oszillationsparametern  $(\theta_{ij}, \delta, \Delta m_{12}^2, \Delta m_{23}^2, \Delta m_{31}^2 \rightarrow \theta_{ij,m}, \delta_m, \Delta m_{12,m}^2, \Delta m_{23,m}^2, \Delta m_{31,m}^2$  und damit auch veränderten Oszillations-Wahrscheinlichkeiten  $P_m$ . Allerdings führt der zusätzliche Anteil im Hamiltonoperator nur bei Beteiligung der Elektroneneutrinos zu veränderten Oszillationsparametern. Speziell werden die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten also nicht verändert, wenn man reine Zwei-Neutrino Oszillationen zwischen Tau- und Myonneutrinos betrachtet. Der Einfluß der Materie auf die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten wird nach seinen Entdeckern (Mikeheyev, Smirnov, Wolfenstein) MSW-Effekt genannt.

## 2.5.2 Oszillationsparameter in Materie

Betrachten wir nun wie die Korrekturen des Hamiltonoperators in Materie in die Oszillationsparameter eingehen. Im Folgenden werden wir immer in der Näherung, in der im Vakuum  $\Delta m_{12}^2 \simeq 0$  gesetzt werden kann, rechnen. Aufgrunddessen kann man annehmen, daß im Vakuum nur eine Massendifferenz existiert  $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2 = \Delta m^2$ . Diese Näherung ist zulässig für  $\Delta m_{21}^2 \ll 10^{-4} eV^2$ ,  $\sin^2 2\theta_{12} \ll 1$  und  $L \geq 6000$  km. Unter dieser Annahme fällt die Rotation  $R(\theta_{12})$  im Unterraum 12 komplett weg. Desweiteren fällt die CP-Phase  $\delta$  weg. Dies sieht man sofort, wenn man in Gl. 2.6 eine Konvention wählt, in der die CP-Phase im Unterraum 12 wirkt. Weiterhin

kommutiert  $R(\theta_{23})$  mit dem Materieterm, da sie nur im Unterraum 23 wirkt, der keinen Materieterm enthält. Zusammen ergibt sich dann für den Hamiltonoperator<sup>2</sup>:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2E} R_{23} \left[ R_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix} R_{13}^T + \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] R_{23}^T . \quad (2.10)$$

Materieeffekte sind folglich auf innerhalb der eckigen Klammer beschränkt, was bedeutet, daß im Limes  $\Delta m_{12}^2 \simeq 0$  Materieeffekte nur den 13-Unterraum betreffen. Man kann also sofort die üblichen Zwei-Neutrino Formeln 2.6b im Unterraum 13 verwenden, wenn man sie durch entsprechende Materiekorrekturen anpaßt. Demnach werden in dieser Näherung die beiden anderen unabhängigen Mischungswinkel  $\theta_{12}$  und  $\theta_{23}$  von den Korrekturtermen nicht betroffen.

Die beiden anderen Massendifferenzen erhalten ebenfalls eine Materiekorrektur und werden somit auch energieabhängig. Der Grund dafür ist, daß die drei Massendifferenzen nicht unabhängig voneinander sind. Dies bedeutet natürlich explizit, daß die im Vakuum vorhandene Degeneration der ersten beiden Massen in Materie aufgehoben wird, und daher in Materie  $\Delta m_{12,m}^2 = 0$  nicht mehr gilt. Aus diesem Grund benötigen wir in Materie trotz der Näherung  $\Delta m_{12}^2 = 0$  den vollen Drei-Neutrino Formalismus. Daher bleibt insgesamt in Materie als einzige Näherung  $\delta = 0$  und  $\theta_{12} = 0$  bestehen. Gesamt ergibt sich also aus dem geänderten Hamiltonoperator:

$$\sin^2 2\theta_{13,m} = \frac{\sin^2 2\theta_{13}}{C_{\pm}^2} , \quad (2.11a)$$

$$\Delta m_{31,m}^2 = \Delta m^2 C_{\pm} , \quad (2.11b)$$

$$\Delta m_{32,m}^2 = \frac{\Delta m^2 (C_{\pm} + 1) + A}{2} , \quad (2.11c)$$

$$\Delta m_{21,m}^2 = \frac{\Delta m^2 (C_{\pm} - 1) - A}{2} , \quad (2.11d)$$

mit dem Korrekturterm  $C_{\pm}^2 = \left(\frac{A}{\Delta m^2} - \cos 2\theta_{13}\right)^2 + \sin^2 2\theta_{13}$ . Wobei der Index  $\pm$  für die beiden möglichen Vorzeichen von  $A$  steht. In den Korrekturterm  $C_{\pm}$  geht nicht nur der Betrag sondern auch das Vorzeichen der Massendifferenz ein. Darum hängen die Materiekorrekturen vom Vorzeichen der Massendifferenz ab. Daher kann man aus den Oszillationswahrscheinlichkeiten in Materie prinzipiell das Vorzeichen von  $\Delta m^2$  bestimmen, indem man beispielsweise Neutrinos mit Antineutrinos vergleicht. Da in diesem Fall  $A$  unterschiedliche Vorzeichen besitzt, wirkt sich das gegebene Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  gegensätzlich aus. Für die Massekorrekturen entspricht der Wechsel von Neutrino zu Antineutrino bei gegebenem  $\Delta m_{31}^2$  dem Wechsel zwischen dem Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  bei gleichem Neutrino kanal. Die Richtung der Asymmetrie beim Wechsel zwischen diesen beiden Kanälen zeigt das Vorzeichen von  $\Delta m$  an.

<sup>2</sup>Eine absolute Neutrinomasse führt zu einer allgemeinen Phase die absepariert werden kann

### 2.5.3 Oszillations-Wahrscheinlichkeit in Materie

Diese mit  $C_{\pm}$  korrigierten Materieparameter müssen nun auch in den Oszillationsformeln verwendet werden. Benutzt man obige Näherung  $\delta = 0$  und  $\theta_{12} = 0$  auch für die Oszillationsformeln, ergibt sich[5, 21, 22, 23, 24]:

$$P_E^{3\nu}(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu) \simeq \sin^2 \theta_{23} \frac{\sin^2 2\theta_{13}}{C_{\pm}^2} \sin^2(\Delta_{31} C_{\pm}) = \sin^2 \theta_{23} P_E^{2\nu}(\Delta_{31}, \sin^2 2\theta_{13}) \quad (2.12a)$$

$$P_E^{3\nu}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \theta_{13,m} \sin^2(\Delta_{21,m}) - \sin^4 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13,m} \sin^2(\Delta_{31,m}) - \sin^2 2\theta_{23} \cos^2 \theta_{13,m} \sin^2(\Delta_{32,m}), \quad (2.12b)$$

$$P_E^{3\nu}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = \sin^2 2\theta_{23} \left[ \sin^2 \theta_{13,m} \sin^2(\Delta_{21,m}) - \frac{1}{4} \sin^2 2\theta_{13,m} \sin^2(\Delta_{31,m}) + \cos^2 \theta_{13,m} \sin^2(\Delta_{32,m}) \right]. \quad (2.12c)$$

Die Oszillationsformeln der Antineutrinos haben rein äußerlich dieselbe Form, man erhält sie indem man  $C_+$  durch  $C_-$  ersetzt, also von einem positiven Materieparameter A zu einem negativen A wechselt. Die Terme der Ordnung  $\Delta m_{12}^2$  kann man in der gewählten Näherung ( $\Delta m_{12}^2 \simeq 0$  im Vakuum) ohne große Fehler weglassen. Für die spätere Analyse der Materieeffekte wäre noch hervorzuheben, daß dann die Amplitude des Appearance-Kanals direkt von  $\theta_{13}$  ( $\propto \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13}$ ) abhängt, während im Disappearance-Kanal  $\theta_{13}$  nur in höheren Korrekturen auftritt ( $\propto \sin^2 2\theta_{23}$ ). Bisher wurden zwar in den Oszillationsformeln die CP-erhaltenden Terme der Ordnung  $\Delta m_{12}^2$  berücksichtigt<sup>3</sup>, aber nicht die CP-verletzende Terme der Ordnung  $\Delta m_{12}^2$ . Nimmt man diese Terme mit, ändern sich zwei Dinge grundsätzlich [25, 26]. Erstens können nicht mehr die unveränderten Vakuumswerte der beiden Mischungswinkel  $\theta_{12} = 0$  und  $\theta_{23}$  gesetzt werden und zweitens, was noch wichtiger ist, kann die CP-Phase  $\delta$  nicht mehr Null gesetzt werden. S. Petcov hat folgende analytischen Ausdrücke für die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten in erster Ordnung von  $\Delta m_{12}^2$  hergeleitet:

$$\begin{aligned} P_E^{3\nu}(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &\cong s_{23}^2 [1 + \cos \delta \cot \theta_{23} \sin 2\theta'_{23}] P_E^{2\nu}(\overline{\Delta m_{31}^2}, \theta_{13}) \\ &+ \cos \theta'_{12} \sin 2\theta_{23} \sin 2\bar{\theta}_{13}^m \sin \frac{\Delta \bar{E}_m L}{2} \\ &\times \left[ \cos \delta \left( \sin(\bar{\kappa} + \frac{\Delta \bar{E}_m L}{2}) - \cos 2\bar{\theta}_{13}^m \sin \frac{\Delta \bar{E}_m L}{2} \right) \right. \\ &\left. - 2 \sin \delta \sin \frac{\bar{\kappa}}{2} \sin(\frac{\bar{\kappa}}{2} + \frac{\Delta \bar{E}_m L}{2}) \right] \end{aligned} \quad (2.13a)$$

---

<sup>3</sup>Diese Terme enthalten zwar auch die CP-Phase  $\delta$  über den Faktor  $\cos \delta$ . Sie führen aber trotzdem nicht zu einer unterschiedlichen Korrekturen in den CP-konjugierten Kanälen

mit

$$\overline{\Delta m_{31}^2} \equiv \Delta m_{31}^2 - s_{12}^2 \Delta m_{21}^2 \quad (2.13b)$$

$$\bar{\kappa} = \frac{L}{2} \left[ \frac{\overline{\Delta m_{31}^2}}{2E} + V - \Delta \bar{E}_m \right] - \frac{L \Delta m_{21}^2}{2E} \cos 2\theta_{12} \quad (2.13c)$$

und

$$\cos \theta'_{12} = \frac{\Delta m_{21}^2 c_{12} s_{12} c_{13}}{2EV + s_{13}^2 \overline{\Delta m_{31}^2} - \Delta m_{21}^2 \cos 2\theta_{12}} \cong \frac{\Delta m_{21}^2 c_{12} s_{12} c_{13}}{2EV + s_{13}^2 \Delta m_{31}^2} \quad (2.13d)$$

$$\sin 2\theta'_{23} = - \frac{\Delta m_{21}^2 s_{13} \sin 2\theta_{12}}{\overline{\Delta m_{31}^2} c_{13}^2 - \Delta m_{21}^2 \cos 2\theta_{12}} \cong - \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} s_{13} \sin 2\theta_{12} . \quad (2.13e)$$

In den Ausdrücken

$$\Delta E_m = \frac{|\Delta m_{31}^2|}{2E} C_+, \quad \cos 2\theta_{13}^m = \frac{1}{C_+} \left( \cos 2\theta_{13} - \frac{2EV}{\Delta m_{31}^2} \right) \quad (2.13f)$$

und der bekannten Oszillations-Wahrscheinlichkeit  $P_E^{2\nu}(\overline{\Delta m_{31}^2}, \theta_{13})$  wurde  $\Delta m_{31}^2$  durch  $\overline{\Delta m_{31}^2}$  ersetzt. Die erweiterten Formeln müssen im Fall  $\Delta m_{12}^2 \sim 10^{-4} eV^2$  und für Entfernungen von  $L \leq 6000$  km verwendet werden. Die Terme der Ordnung  $\Delta m_{12}^2$  haben die wichtige Konsequenz, daß dann auch in Materie CP-Effekte auftreten, was die Trennung von Materie- und CP-Effekten erschwert.

Bevor wir uns im übernächsten Abschnitt dem Einfluß der Materiekorrekturen auf die Oszillationswahrscheinlichkeit zuwenden, werden wir uns zunächst noch dem Phänomen der Verstärkung der Materieeffekte aufgrund von Resonanz widmen.

## 2.5.4 Resonanz

Wie schon früher besprochen, gilt für die Wechselwirkung in Materie für Neutrinos und Antineutrinos unterschiedliches Vorzeichen und daher auch ein unterschiedliches Parametermapping. Die Korrekturen der Oszillationswahrscheinlichkeiten in Materie sind daher ebenfalls von unterschiedlicher Größe für Neutrinos und Antineutrinos. Sie führen aber zunächst einmal praktisch immer zu einer Erniedrigung der Oszillationsamplitude. Die Unterschiede in den Korrekturen stellt im Prinzip eine Möglichkeit zum Nachweis des MSW Effektes dar, sie ist aber in der Realität nicht nachweisbar. Eine entscheidende Ausnahme stellt aber der sogenannte Resonanzbereich dar, indem die Oszillationsamplitude maximal wird  $\sin^2 2\theta_m = 1$  (Gl. 2.11) für

$$A = \Delta m^2 \cos 2\theta . \quad (2.14)$$

Diese Bedingung kann für gegebenes Vorzeichen von  $\Delta m$  in Materie nur für einen der beiden Kanäle erfüllt werden. Im Resonanzbereich wird dann die Oszillationswahrscheinlichkeit und damit die Ereignisraten dieser Neutrinosorte stark erhöht,

während diejenigen im anderen Kanal um denselben Betrag vermindert werden. Diese starke, in den Kanälen asymmetrische Abweichung vom Vakuumfall versucht man zu beobachten. Dazu benutzt man im selben Experiment zum einen einen starken und präzisen Neutrinostrahl und zum anderen einen entsprechenden Antineutrino-Strahl und setzt diese ins Verhältnis. Durch das entgegengesetzte Vorzeichen der Effekte wird so einerseits das Signal verstärkt, andererseits heben sich Hintergrundeffekte weg. So stellt die Asymmetrie beider Kanäle ein ideales Maß für die Existenz des MSW Effekt dar. Da die Tatsache, welcher der beiden Kanäle die Resonanz erfährt, abhängig vom Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  ist, kann man aus der Richtung der Asymmetrie das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  schließen.

Zuletzt sei noch daran erinnert, daß  $\theta_{13}$  im Resonanzbereich durch die Materieeffekte vergrößert wird. Da  $\theta_{13}$  sehr klein und daher bisher nicht meßbar war, können Materieeffekte auch zur Messung von diesem Mischungswinkel benutzen werden. Das Verhalten von  $\sin^2 2\theta_{13}$  im Resonanzbereich kann man in Abbildung 2.3 ansehen. Deutlich zu erkennen ist, wie schnell die Oszillationsamplitude  $\sin^2 2\theta_{13}$  abseits der Resonanzbedingung wieder abfällt. Die Resonanzbreite ist dabei abhängig vom Wert von  $\theta_{13}$ . Je kleiner  $\theta_{13}$  ist, desto schmaler wird die Resonanz, umso schwieriger ist es im realen Experiment auch tatsächlich die Resonanz zu treffen und für die Messung der Materieeffekte auszunutzen.

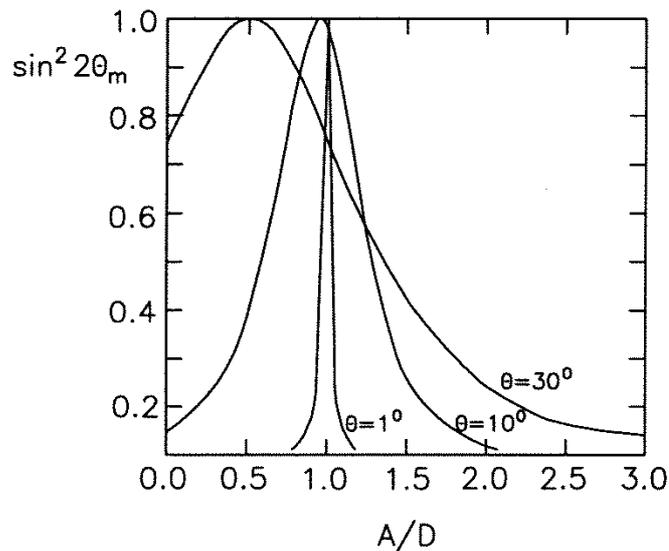


Abbildung 2.3: Verhalten der Oszillationsamplitude  $\sin^2 2\theta_{13}$  im Resonanzbereich. Für kleinere  $\theta_{13}$  wird die Resonanzbreite schmaler,  $\sin^2 2\theta_{13}$  fällt sehr schnell auf den Vakuumswert zurück

Bei konstanter Materiedichte und festem Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  kann die Resonanzbedingung nur für eine bestimmte Neutrinoenergie, die Resonanzenergie, erfüllt werden.

Im Erdmantel ergibt sich in Abhängigkeit der Massendifferenz  $\Delta m_{31}^2$  als brauchbare Näherung der optimalen mittleren Energie für Materieeffekte bei kleinem  $\theta_{13}$ :

$$E_{opt} = 15 \text{ GeV} \left( \frac{\Delta m_{31}^2}{3.5 \times 10^{-3} \text{ eV}^2} \right) \cdot \left( \frac{2.8 \text{ g/cm}^3}{\rho} \right). \quad (2.15)$$

Je nach Länge der Oszillationstrecke und damit Tiefe in der Erde<sup>4</sup> ergibt das aufgrund der variierenden Erddichte unterschiedliche Werte für die optimale Energie. Bei Entfernungen von 730 km ergibt das im Erdmantel eine optimale Energie von ca. 15 GeV bei einer mittleren Dichte von  $\langle \rho \rangle \simeq 2.8 \text{ g/cm}^3$  bis hinab zu 10 GeV bei Entfernungen von 7332 km mit  $\langle \rho \rangle \simeq 4.2 \text{ g/cm}^3$ . Dabei haben wir uns an das sogenannte Staceyprofil [27] der Erde gehalten. Solange man nur im Erdmantel bleibt, kann eine konstante Dichte angenommen werden. Diese ist aber für jede Trajektorie getrennt zu ermitteln, da die mittlere Dichte je nach Tiefe in der Erde schwankt [28, 22, 7, 29]. Bei einer Entfernung von  $L \geq 10600 \text{ km}$ , dringt man in den Erdkern ein, dann ist aufgrund des plötzlichen Dichtesprungs diese Näherung nicht mehr nutzbar. Somit beeinflusst die Länge der Oszillationsstrecke die Resonanz und damit die beobachtete Größe der Asymmetrie also zweifach. Zum einen steigt die Zahl der Wechselwirkungen mit der Erdmaterie direkt aufgrund der größeren Entfernung und zum anderen indirekt über die dadurch erzielte höhere Dichte.

### 2.5.5 Auswirkungen der Materieeffekte in Experimenten

Zum Abschluß sollen die durch Materie hervorgerufene Auswirkungen in Experimenten betrachtet werden. Zunächst einmal sehen wir uns dazu die Veränderungen der reinen Oszillationsamplitude an. Abb. 2.4 vergleicht die Oszillationsamplituden  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  und  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$  sowohl im Vakuum als auch in Materie in Abhängigkeit von Energie/ $\Delta m^2$ . Dabei werden sowohl die Näherung eines konstanten Dichteprofiles als auch das volle Erdprofil dargestellt. Außerdem werden die Materiekorrekturen noch für verschiedene Mischungswinkel  $\theta_{13}$  gezeigt. Wie man sieht, sind erwartungsgemäß die Unterschiede zwischen Materie und Vakuum deutlich erkennbar, während die gewählte Näherung über das Erd-Dichteprofil kaum Unterschiede hervorruft. Deutlich zu sehen ist auch die Abhängigkeit vom Wert des Mischungswinkels  $\theta_{13}$ .

Betrachten wir nun noch die Größe der Effekte in realen Experimenten in Abhängigkeit von der Strahlenergie und der Oszillationslänge [5]. Dazu wählen wir als Beispielquelle eine Neutrino-fabrik, da diese aufgrund der vorhandenen Elektron- und Myon-neutrinos nicht nur den Disappearancekanal, sondern auch den Appearancekanal zugänglich machen. Zum anderen werden diese den benötigten präzisen und intensiven Neutrinostrahl mit gut bekanntem Spektrum liefern können<sup>5</sup>. Als Detektor

<sup>4</sup> $L = 2R_\oplus \cos(h)$ ,  $h$  Nadirwinkel des Strahls, Erdradius  $R_\oplus = 6371 \text{ km}$

<sup>5</sup>Verwendet wurde eine Neutrino-fabrik mit Energien zwischen 10–50 GeV und  $2 \cdot 10^{20}$  nutzbaren Myonzerfälle im Jahr. Für die Oszillationsparameter wurde  $\Delta m_{31}^2 = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ ,  $\sin(2\theta_{23})^2 = 1$  und  $\sin(2\theta_{13})^2 = 0.01$  angenommen. Näheres zu Neutrino-fabriken in Kapitel 3.1.1

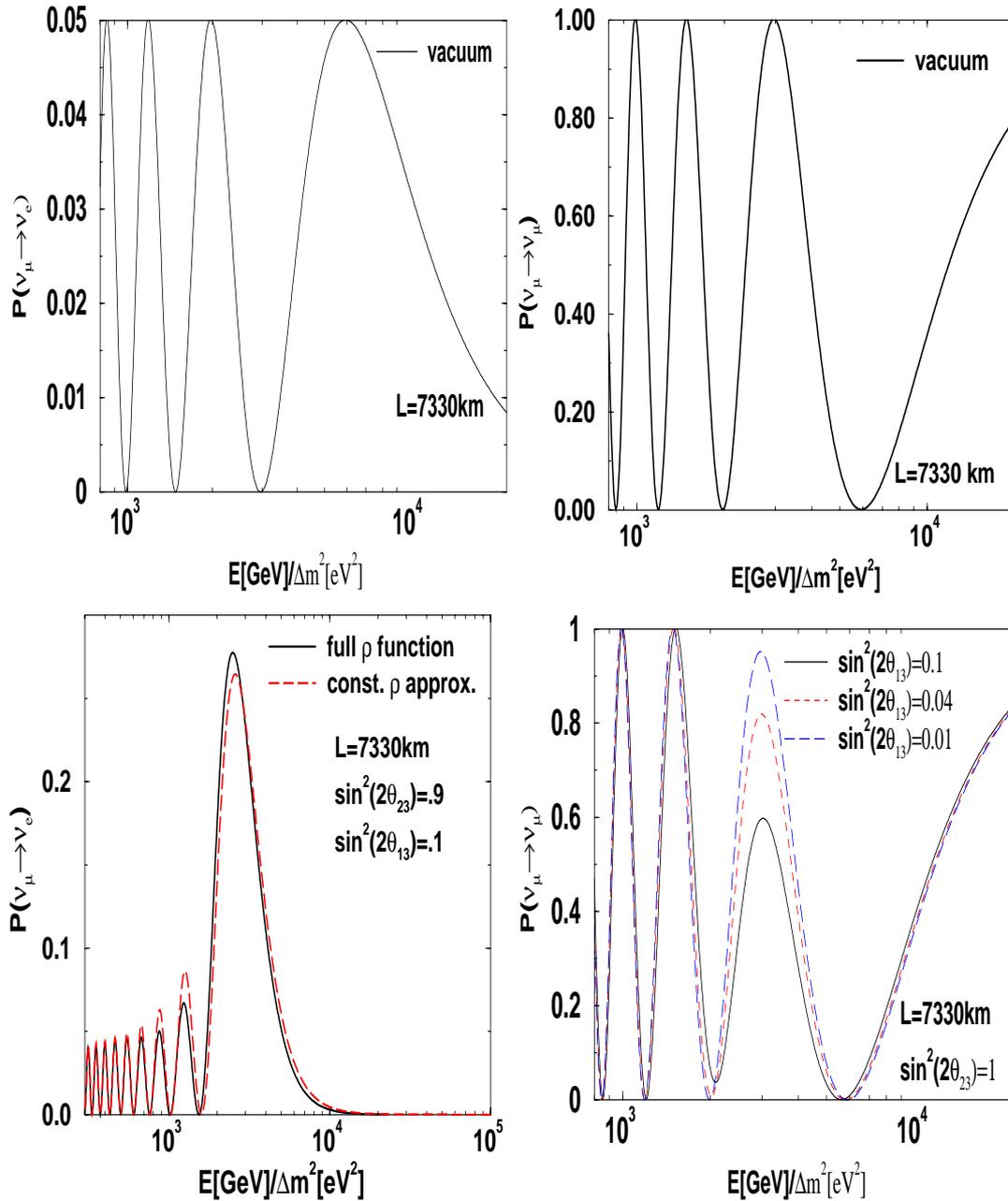


Abbildung 2.4: Veränderung der Oszillations-Wahrscheinlichkeiten von Vakuum zu Materie. Die Näherung des Erd-Dichteprofiles durch konstante Dichte entlang der Trajektorie verursacht nur geringe Fehler. Dagegen sind die Unterschiede aufgrund verschiedener Mischungswinkel  $\theta_{13}$  groß.

wurde entsprechend ein magnetisierter Eisendetektor gewählt. Dieser kann aufgrund seiner Fähigkeit der Ladungsidentifikation zwischen Appearance- und Disappearance-Kanal unterscheiden<sup>6</sup>. Als Laufzeit für das Experiment wurde typischerweise ein Jahr angenommen. Für die Appearancekanäle  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  und  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  ergeben sich in Abhängigkeit der Oszillationslänge  $L$  in der Erdmaterie durchaus meßbare Asymmetrien der Ereignisraten im Detektor (Abb. 2.5). Die analytischen Formeln zu den Ereignisraten können in Kap. 5.1.1 nachgesehen werden. Für die Plots wurde ein

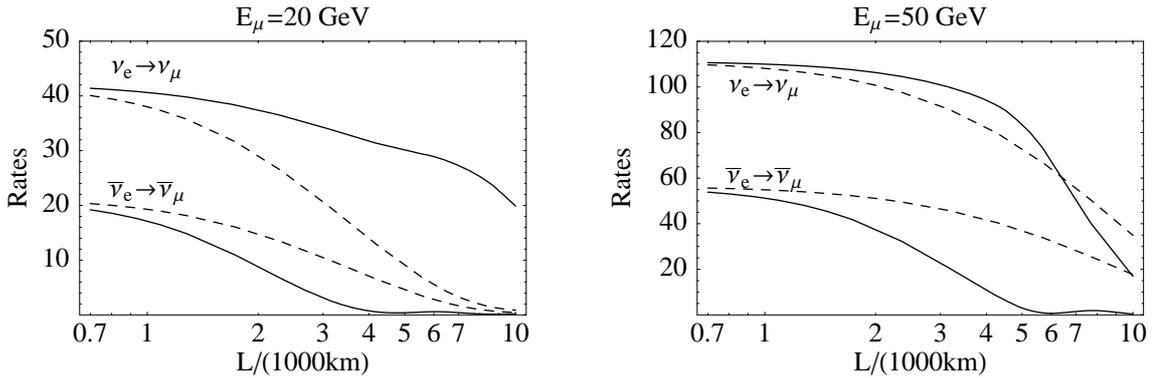


Abbildung 2.5: Raten für Wrong Sign Myon Ereignisse aus den  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  und  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  Übergängen im Erdmantel (durchgezogene Linie) und im Vakuum (gestrichelte Linie) in Abhängigkeit der Baseline  $L$  und der Strahlenergie (links 20 GeV, rechts 50 GeV). Die Unterschiede zwischen den beiden Linien stellen ein Maß für den Materieeffekt in der Erde dar.

positives Vorzeichen für  $\Delta m_{31}^2$  gewählt, die Plots für negatives Vorzeichen können daraus leicht abgeleitet werden, indem man Neutrinos und Antineutrinos vertauscht. Die gestrichelten Linien stellen dabei die Oszillation ohne Materie dar, die durchgezogenen Linien die Oszillation in Materie. Besonders deutlich ist die zuvor beschriebene Abhängigkeit von  $L$  zu sehen, die Erhöhung (Auslöschung) für Neutrinos (Antineutrinos) ist bei großen Baselines besonders deutlich. Dabei ist die Entwicklung der Ereignisraten in  $L$  für Neutrinos und Antineutrinos identisch. Man erhält vom  $\sin^2 \Delta_{ij}$  Term  $\propto A \cdot L^2 - B \cdot L^4$  und vom Fluß  $\propto 1/L^2$ , wie wir später noch sehen werden (Kap. 5.1.1). Daraus ergibt sich gesamt, daß die Raten proportional zu  $A - B \cdot L^2$  sind. Der Unterschied in den beiden Kanälen kann folglich im resonanten Kanal als eine gestreckte Oszillationslänge und im antiresonanten Kanal als gestauchte Oszillationslänge interpretiert werden. Ebenfalls zu beobachten ist das Anwachsen der totalen Raten mit der Strahlenergie (Vergleich links – rechts). Bei hohen Strahlenergien ist weiterhin das Verlassen des Resonanzbereich bei großen Baselines und damit hohen Dichten, was einer kleineren Resonanzenergie entspricht, zu sehen. Dies ist am Knick in der durchgezogenen Linie zu erkennen. Anschließend

<sup>6</sup>Der benutzte Detektor soll eine Masse von  $N_{kt} = 10$  kt haben und eine Myon-Detektionseffizienz von 50% aufweisen. Die Ladungsidentifikation sei perfekt.

fallen die Raten wieder unter den Wert der Vakuumsoszillation, da hier (abseits der Resonanzregion) gegenüber dem Vakuumfall Auslöschung auftritt. Das exakte Verhalten dabei ist allerdings nicht so trivial. Auffällig bei den Gesamtraten ist noch, daß die Antineutrino-Raten von vornherein um ca. einen Faktor zwei geringer sind. Dies liegt nicht an den Oszillations-Wahrscheinlichkeiten, die in der gewählten Näherung für beide Kanäle identisch sind, sondern an den kleineren Wirkungsquerschnitten der Antineutrinos in Materie.

Für die Disappearance-Experimente  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$  und  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  ergeben sich in Materie nur vernachlässigbare Asymmetrien, da diese ausschließlich von  $\theta_{13}$  herrühren, die nur in Korrekturen höherer Ordnung enthalten sind (Gl. 2.12). Die gestrichelte

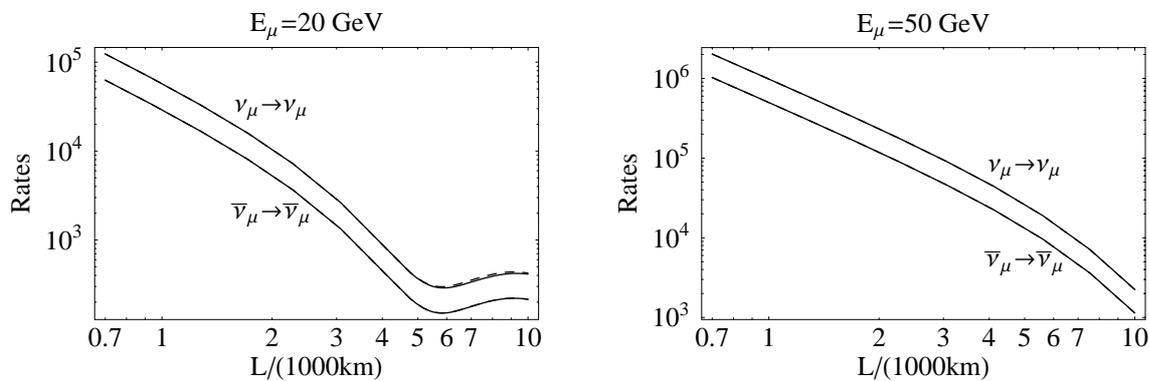


Abbildung 2.6: Zu Abb. 2.5 vergleichbarer Plot für Disappearance-Raten  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$  und  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ . Beide Linien sind nahezu identisch, was zeigt, daß die Materieeffekte in diesem Fall vernachlässigbar sind.

Linie (Vakuum) ist mit der durchgezogenen Linie (Materie) nahezu deckungsgleich. Trotzdem kann man erkennen, daß der Effekt im Disappearance-Kanal in die andere Richtung geht als im Appearance-Kanal. Da sich ebenso die Richtung der Korrekturen in den CP-konjugierten Kanälen umkehrt, gehen der Materieeffekt in den Neutrino-Appearance-Kanälen und den Antineutrino-Disappearance-Kanälen in dieselbe Richtung. Dies werden wir noch später bei der Nutzung der Materieeffekt für die Messung vom Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  benötigen. Im Vergleich ist sehr schön zu sehen, daß im Prinzip die Information zu Materieeffekten beiden Kanälen inhärent ist. Allerdings sind die Effekte in den Appearance-Raten deutlich größer. Daher sind die Appearance-Raten besser geeignet um materiebedingte Effekte, wie das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$ , zu vermessen und den MSW-Effekt selbst zu bestätigen. Materieeffekte können prinzipiell auch aus der Verbreiterung des Spektrums der Eventraten und dem Shift des dominierenden Maximums bestätigt werden [5]. Die Änderungen des Spektrums resultieren aus der Energieabhängigkeit der Materieeffekte und der Lage der Resonanzenergie im Verhältnis zum Energiemaximum des Spektrums. Darauf soll aber hier nicht näher eingegangen werden, da es zum Verständnis der folgenden Analysen dieser Arbeit nicht entscheidend ist.

Führt man obige Analyse der Materieeffekte im Parameterraum  $E_\mu - L$  durch, kann man die Sensitivität des Experiments auf die Existenz des Materieeffektes in Abhängigkeit der gewählten Energie und Entfernungen ablesen [5]. Die Parameter

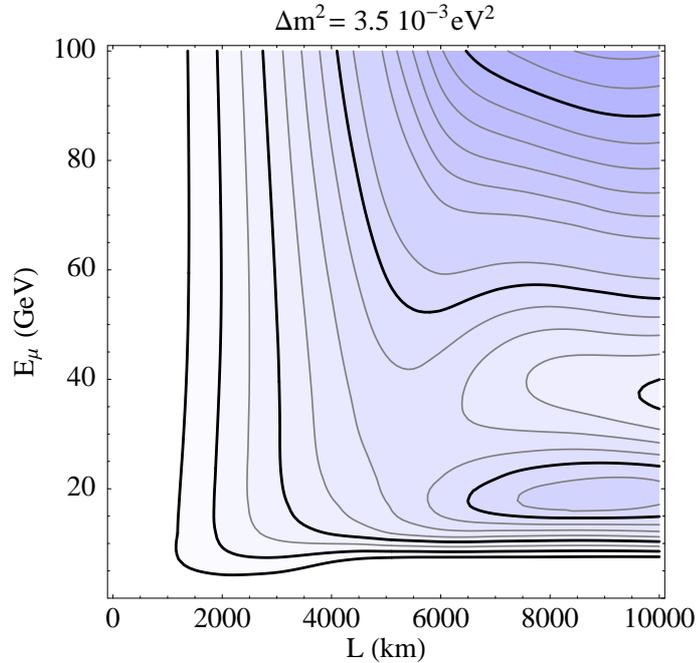


Abbildung 2.7: Konturlinien der Standardabweichungen in der  $L - E_\mu$ -Ebene unter der Annahme eines bekannten  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.01$ . Als Parameter wurden  $\Delta m_{31}^2 = 3.5 \cdot 10^{-3} eV^2$ ,  $E_\mu = 20 GeV$  und  $N_\mu N_{kT} \epsilon = 10^{21}$  benutzt. Die fetten Linien gehören zu  $n_\sigma = 10 \sin(2\theta_{13}) \cdot 1, 2, 4, 8, 16$ . Für unbekanntes  $\theta_{13}$  ist die Sensitivität auf den Materieeffekt schlechter.

sind wie zuvor (Abb. 2.5) gewählt. Die fettgedruckten Linien sind die Konturlinien für  $n_\sigma = 10 \sin(2\theta_{13}) \cdot 1, 2, 4, 8, 16$ . Das Verhalten der Sensitivität auf Materieeffekte in Abhängigkeit der Myonenenergie ist nicht ganz trivial. Für eine genauere Behandlung siehe [5] oder Kap. 5.1.2. Im Bereich  $L = (4.0 - 10.0) \times 10^3$  km ist der Nachweis von Materieeffekten für die gegebenen Parameter möglich, wobei die Sensitivität bei großen  $L$  besser wird. Unter 1000 km können keine Materieeffekte beobachtet werden. Im Fall eines unbekanntes  $\theta_{13}$ , welches nur durch CHOOZ limitiert ist, gelingt die Bestimmung natürlich deutlich schlechter, da der Materieeffekte stark vom genauen Wert von  $\theta_{13}$  abhängt. Ein anderer Wert von  $\Delta m_{31}^2$  sorgt lediglich für einen Shift der Resonanzenergie und damit für eine Verschiebung der Sensitivitäten in Richtung der Myonenenergie.

Das Wissen um die Existenz des MSW-Effekts ist deswegen so wichtig, weil er eine wichtige Rolle in verschiedenen physikalischen Szenarien spielt. Unter anderem stellt dieser die einzige Möglichkeit dar, als Lösung der solaren Neutrinoexperimente eine

Massendifferenz zu erhalten, die sich zumindest nur um drei Größenordnungen von den atmosphärischen Neutrinoexperimenten unterscheidet. Die Vakuumlösung der solaren Neutrinos liegt um so viel niedriger, daß man dafür ziemliche Erklärungsschwierigkeiten hätte. Existiert der MSW-Effekt, bietet dieser eventuell auch die Möglichkeit die solare Massendifferenz direkt auf der Erde zu messen, oder zumindest den Parameterraum weiter einzuschränken. Weiterhin ist es für atmosphärische Experimente wichtig zu wissen, ob die Neutrinos bei der Durchquerung der Erde auch eine materiebedingte Veränderung erfahren, um damit die Parameter exakter bestimmen zu können. Materiebedingte Verstärkung der Oszillation kann auch in der Astrophysik eine wichtige Rolle spielen. Nicht zuletzt ist ein Test der Existenz des MSW-Effekts so wichtig, weil dieser die Messung der CP-Verletzung, die ja ebenfalls potentiell in Materie stattfinden wird, verfälschen kann. Daher muß über potentielle Materieeffekte Sicherheit herrschen bevor man anfängt CP-Effekte zu vermessen.

### 2.5.6 CP-Verletzung in Materie

Wenden wir nun also noch einmal den CP-Effekten zu. In Kapitel 2.4 wurde bereits erwähnt, daß die Situation der CP-Effekte in Materie etwas anders als in Vakuum ist. Materie bricht die CP- und damit die CPT-Invarianz, da keine Antielektronen darin vorhanden sind. Daher erhält die CP-Verletzung, die durch die CP-Phase bedingt ist, noch einen zusätzlichen Anteil durch die CP-Verletzung der Materie. Dadurch sind die Oszillationswahrscheinlichkeiten sowohl des CP-erhaltenden Anteils als auch des CP-verletzenden Anteils nur noch bei einer Zeitumkehr identisch. Beim Wechsel von Neutrinos zu Antineutrinos ändert sich nun auch der Betrag beider Anteile der Übergangsamplitude.

$$P_{CP}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) = P_{CP}(\nu_{e_m} \rightarrow \nu_{e_l}) \quad (2.16a)$$

$$P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) = -P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_m} \rightarrow \nu_{e_l}) \quad (2.16b)$$

$$P_{CP}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) \neq P_{CP}(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m}) \quad (2.16c)$$

$$P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) \neq -P_{\mathcal{CP}}(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m}) \quad (2.16d)$$

$$|P_{\mathcal{CP}}| \leq P_{CP} \quad (2.16e)$$

Die Verletzung von CP, T und CPT rührt nun sowohl von der NMS-Matrix direkt als auch indirekt von den Materieeffekten her. Dabei erzeugen sowohl die NMS-Matrix als auch Materie die CP-Verletzung, während die T-Verletzung ausschließlich von der NMS-Matrix und die CPT-Verletzung ausschließlich von Materie verursacht wird. Im Disappearance-Kanal gilt daher nicht mehr, daß aufgrund von CPT-Erhaltung keine CP-Verletzung möglich ist, diese rührt dann aber ausschließlich von Materie her.

Betrachten wir uns Verhalten und Größe der CP-Verletzung in Materie genauer. Wie wir in Gl. (2.13) gesehen haben, spielen CP-Effekte in Materie nur dann eine Rolle, wenn man auch die führende Ordnung in der solaren Massendifferenz berücksichtigt. Wie wir gesehen haben, muß man dies zwangsläufig für Werte von  $\Delta m_{12}^2 \sim 10^{-4} eV^2$

und  $L \leq 6000$  km tun. Daher können die  $\Delta m_{12}^2$ -Terme besonders am oberen Ende der LMA-MSW Lösung nicht mehr vernachlässigt werden. Dann spielen Materieeffekte für zwei weitere Parameter, sowohl für  $\theta_{12}$  als auch  $\delta$ , eine Rolle und es entstehen auch für diese Parameter Korrekturen.  $\delta$  kann nun nicht mehr identisch Null gesetzt werden und die CP-Verletzung kann dann zu sichtbaren Effekten im Experiment führen (Abb. 2.8). Zu sehen sind CP-Effekte im vorherigen Neutrinfabrik-Experiment

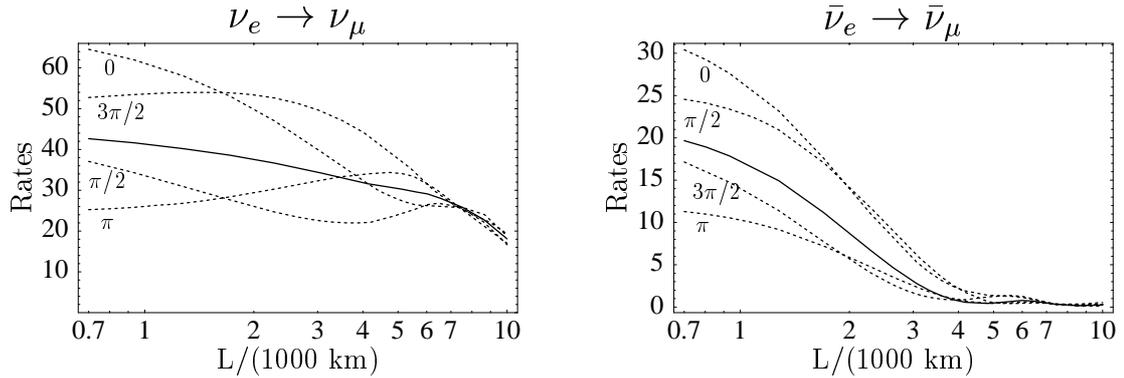


Abbildung 2.8: *Appearance-Raten in Materie für den oberen Bereich der solaren LMA-MSW Lösung  $\Delta m_{12}^2 = 10^{-4} eV^2$  und für  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.01$  in der Näherung  $\Delta m_{12, \text{vak}}^2 = 0$  (durchgezogene Linie) und die  $\Delta m_{12}^2$  Korrekturen führender Ordnung (gestrichelte Linien), die zu CP-verletzenden Effekten führen.*

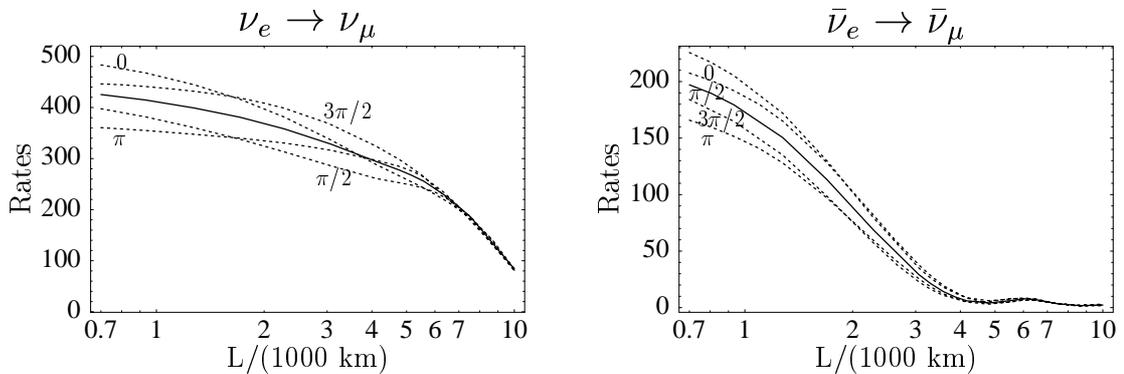


Abbildung 2.9: *Selbe Figur wie 2.8, allerdings für  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1$*

(Abb. 2.5) bei  $E_\mu = 20$  GeV und  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.01, 0.1$  für verschiedene  $\delta$ . Die durchgezogenen Linien stellen die Oszillation in Materie für  $\Delta m_{12}^2 = 0$  dar und die gestrichelte Linie beinhaltet die Korrekturen von der Ordnung  $\Delta m_{12}^2$ . Zunächst einmal bestätigt der Vergleich der beiden Bilder, daß die relative Größe des Effekts deutlich vom Wert von  $\theta_{13}$  abhängt, und zwar steigt sie, wenn  $\theta_{13}$  kleiner wird. Dies entsteht durch die unterschiedliche Abhängigkeiten der Ordnungen in  $\Delta m_{12}^2$  von  $\sin^2 2\theta_{13}$ . Während die

Nullte Ordnung von  $\sin 2\theta_{13}$  quadratisch abhängt (siehe Gl.2.12 und 2.13), hängt die erste Ordnung nur noch linear davon ab. Können keine Materieeffekte beobachtet werden, würde das zumindest beeindruckende Limites an  $\theta_{13}$  liefern. Im Gegensatz dazu wird der Disappearance-Kanal nicht durch  $\theta_{13}$  oder  $\Delta m_{12}^2$  unterdrückt, da er von den  $\nu_\tau$  Übergängen dominiert wird; die  $\theta_{13}$  unterdrückten  $\Delta m_{12}^2$  Korrekturen sind weniger entscheidend.

Beim Vergleich der beiden Plots links und rechts sieht man, daß für die Werte  $\delta = 0, \pi$  die  $\Delta m_{12}^2$  Korrekturen das gleiche Vorzeichen haben. Es handelt sich folglich nicht um CP-Verletzung, der  $\sin \delta$  Term im CP-verletzenden Anteil ist identisch Null. Diese Korrekturen stammen aus den  $\cos \delta$  Termen im CP-erhaltenden Anteil und sind vergleichbar zu der indirekten CP-Verletzung im Quarksektor. Folglich kann eine Messung der CP-Phase bei nur einer Baseline in die Irre führen, wenn es sich ungünstig trifft. Betrachtet man zum Beispiel die Fälle  $\delta = 0$  und  $\delta = \pi$ , dann sind die  $\Delta m_{12}^2$  Effekte identisch in den beiden Kanälen. Man würde  $\sin \delta = 0$  messen und die CP-Phase wäre noch immer zwischen beiden Fällen unbestimmt. Man würde nicht wissen, ob die  $\Delta m_{12}^2$  Korrektur addieren ( $\delta = 0$ ) oder subtrahieren ( $\delta = \pi$ ). Die  $\Delta m_{12}^2$  Effekte wären nicht unter Kontrolle, was wiederum zu einer Ungenauigkeit in der Bestimmung von  $\theta_{13}$  führen würde. Solange  $\delta$  nicht genauer bestimmt ist, tragen die  $\Delta m_{12}^2$  Effekte also entscheidend zu den systematischen Fehlern in Long-Baseline Experimenten bei.

Wie schon früher beschrieben sind die Raten in Materie proportional zu  $A - B \cdot L^2$ . Im Gegensatz dazu gilt für die Entwicklung der CP-Verletzung  $P_{\mathcal{CP}} \propto \sin \Delta_{ij} \propto L$ . Zusammen mit dem Fluß  $\propto 1/L^2$  ergibt sich gesamt für die CP-verletzenden Raten eine Proportionalität zu  $1/L$ . CP-Effekte spielen also bei kleineren Baselines ( $L < 6000$  km) eine größere Rolle, während Materieeffekte bei großen Baselines  $L \geq 10^3$  km bedeutender sind. Dies natürlich unter der Voraussetzung, daß die Baselines noch groß genug sind für die Entwicklung der Oszillation. Die unterschiedliche Abhängigkeit von der Baseline kann man folglich nutzen, um CP-Effekte von Materieeffekten zu trennen. Die CP-Phase extrahiert man bevorzugt bei einer Baseline von ca.  $L \simeq 1000$  km, Materieeffekte, das Vorzeichen von  $\Delta m^2$  und den Wert von  $\theta_{13}$  bei  $L = 3000$  km – 7000 km [30, 31]. Prinzipiell wäre auch eine Trennung der CP-Effekte von Materieeffekten durch Nutzung der differentiellen Raten bei ein und derselben Baseline denkbar [5], aber die Effekte sind zu klein und die Fehler zu groß um eine saubere Trennung zu ermöglichen. Eine Nutzung der Zeitumkehr die ausschließlich die CP-Verletzung enthält, ist aus experimenteller Sicht kaum möglich, da nicht die entsprechenden Kombinationen von Detektor und Quelle existieren.

## 2.6 Klassifizierung der Oszillationsparameter

In den Kapiteln zuvor wurden die Grundlagen von Neutrinomassen vorgestellt. Dabei haben wir gesehen, daß daraus die sogenannten Neutrinooszillationen resultieren, wel-

che durch verschiedene Parameter charakterisiert werden können. Diese Parameter haben nun unterschiedlich stark Einfluß auf die Oszillations- respektive Überlebenswahrscheinlichkeiten und sind daher unterschiedlich leicht zu messen. Größtenteils kann man dies auf ihre absolute Größe zurückführen, teilweise liegt dies aber auch daran, daß sie von einem anderen, unterdrückten Effekt abhängig sind. Im Folgenden sollen die Parameter nach ihrer Größe und Einfluß klassifiziert werden.

### 2.6.1 Führende Parameter

Die sogenannten Leading Parameter sind direkt und einfach meßbar und werden daher schon seit Jahren gemessen. Sie haben die ersten Hinweise darauf geliefert, daß tatsächlich Neutrinooszillation stattfindet und die Neutrinos somit Massen besitzen müssen. Man kann dabei die einfachste Näherung einer Zwei-Neutrino Oszillation benutzen. Es handelt sich dabei um den Betrag der großen Massendifferenz  $|\Delta m_{31}^2|$  und den Mischungswinkel  $\sin^2 2\theta_{23}$ . Diese werden aus den atmosphärischen Oszillationsexperimenten [32, 33, 34] gewonnen und sind heute schon recht gut bekannt.

$$|\Delta m_{31}^2| \simeq (1.5 - 5) \cdot 10^{-3} \text{eV}^2 \quad \sin^2 2\theta_{23} > 0.88 \quad (2.17)$$

Auch die kleinere Massendifferenz  $\Delta m_{12}^2$  und der zugehörige Mischungswinkel, sind im Prinzip einfach zu messen, aber trotzdem erst relativ ungenau bekannt, da sie erstens deutlich kleiner ist und zweitens verschiedenen Lösungen existieren. Im Gegensatz zu den Atmosphärischen Neutrinos, die relativ Modellunabhängig sind, da zunächst nur das Verhältnis von Myon-neutrinos zu Elektron-neutrinos gemessen wurde, hängen die solaren Neutrinos [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 33] sehr stark vom Sonnenmodell ab.

$$\text{LMA :} \quad \Delta m_{12}^2 \simeq 3 \cdot 10^{-5} \text{eV}^2 \quad \sin^2 2\theta_{12} > 0.9 \quad (2.18a)$$

$$\text{SMA :} \quad \Delta m_{12}^2 \simeq 6 \cdot 10^{-6} \text{eV}^2 \quad \sin^2 2\theta_{12} \simeq 10^{-2} \quad (2.18b)$$

$$\text{LOW :} \quad \Delta m_{12}^2 \simeq 10^{-7} \text{eV}^2 \quad \sin^2 2\theta_{12} > 0.8 \quad (2.18c)$$

$$\text{VAC :} \quad \Delta m_{12}^2 \simeq 10^{-10} \text{eV}^2 \quad \sin^2 2\theta_{12} > 0.6 \quad (2.18d)$$

Parameter die wiederum ausschließlich in Termen vorkommen, die von dieser kleinen Massendifferenz abhängen, sind aufgrund deren Kleinheit nur noch schwer zu messen.

Weiterhin existiert noch ein dritter Nachweis für Neutrinooszillationen, es handelt sich dabei um das Beschleunigerexperiment LSND [44, 45]. Dies ist der einzige direkte Nachweis über einen Appearancekanal, den  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{\mu}$ -Kanal und liefert einen Wert für  $\Delta m_{LSND}^2$  der deutlich höher liegt als die Massendifferenzen der anderen Experimente.

$$\Delta m_{LSND}^2 \sim 1 \text{eV}^2 \quad 10^{-2} < \sin^2 2\theta_{LSND} < 10^{-3} \quad (2.19)$$

Da es sich dabei um drei verschiedene Ergebnisse für Massendifferenzen handelt, können diese nur in einem Vier-Neutrinoszenario eingebunden werden. In Analysen

mit nur drei Neutrinos, was bei uns meistens der Fall sein wird, muß folglich einer dieser Nachweise ignoriert werden. Da LSND aufgrund früherer Begebenheit als am unzuverlässigsten gilt und desweiteren durch ein anderes Experiment (KARMEN) nahezu ausgeschlossen wird, werden wir dafür LSND vernachlässigen. Dann ergibt sich für das Drei-Neutrino Szenario folgende Annahmen:

$$\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\text{sun}}^2 \ll \Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{32}^2 \simeq \Delta m_{31}^2 \quad (2.20)$$

Für diese Parameter stellt sich nun die Frage, wie genau sie noch gemessen werden können. Dazu werden in Zukunft weitere Präzisionsmessungen durchgeführt werden, wie zum Beispiel mit Neutrino Fabriken und magnetisierten Eisendetektoren oder wie wir später in dieser Arbeit noch sehen werden, mit Wide Band Beams und Neutrinoteleskopen.

### 2.6.2 Parameter nächster Ordnung

Als Subleading Parameter bezeichnen wir diejenigen, auf die man im Vakuum keinen direkten Zugriff hat. Diese Parameter kann man aus verschiedenen Gründen nur mit Hilfe von Materieeffekten zugänglich machen. Wie schon früher erwähnt wurde, ist zum Beispiel der Mischungswinkel  $\sin^2 2\theta_{13}$  so klein, daß er sich einer Messung im Vakuum entzieht. Es existieren daher bis jetzt nur Obergrenzen, zum Beispiel von CHOOZ [46, 47]  $\sin^2 2\theta_{13} < 0.1$ . Da dieser in erster Näherung als einziger Winkel durch Materie beeinflusst wird – im Resonanzfall wird er stark erhöht –, besteht die Hoffnung ihn zumindest bei großen Baselines bestimmen zu können.

Ein ebenso interessanter Parameter, ist das Vorzeichen der großen Massendifferenz  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$ . Dieser Parameter ist im Vakuumfall sogar komplett bedeutungslos. Prinzipiell existieren zwei verschiedenen Möglichkeiten die Masseneigenzustände anzuordnen (Abb. 2.6.2). Bis vor kurzem hat man stillschweigend angenommen, daß die Rei-

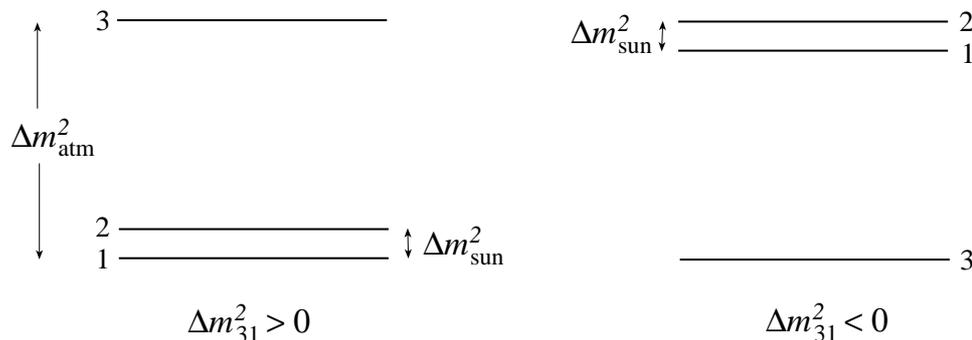


Abbildung 2.10: Die zwei potentiell möglichen Massenordnungsschemata für drei Neutrinos. Sie unterscheiden sich durch das gegensätzliche Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$

henfolge der Masseneigenzustände ohne Verlust der Allgemeinheit beliebig festgesetzt werden kann und nur die Differenzen zwischen ihnen eine Rolle spielen. Dies trifft im Vakuumfall auch durchaus zu. Als untere Massendifferenz wurde immer die solare Massendifferenz festgesetzt. In Anwesenheit von Materie ist das so aber nicht mehr richtig. Aufgrund des unterschiedlichen Verhaltens von Elektronneutrinos in Materie sind die – über die Mischungswinkel zugeordneten – Masseneigenzustände ebenfalls ausgezeichnet. Daher ist die Wahlfreiheit der Bezeichnung der Masseneigenzustände zerstört und das Vorzeichen  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$  in Materie bestimmbar. Wie wir in Kapitel (2.5.4) gesehen haben, geschieht dies am besten bei der Resonanzenergie, denn das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  bestimmt, ob der Neutrino- oder der Antineutrino-Kanal eine resonante Erhöhung erfährt.

Das Ziel für diese Parameter in den Experimenten der nächsten Generation ist, sie erstmalig messen zu können. Dies wird allerdings mit einiger Genauigkeit nur dann gelingen, wenn der Mischungswinkel  $\sin^2 2\theta_{13}$  nicht allzuklein (kleiner  $\sim 10^{-4}$ ) ist. Ansonsten hofft man für  $\theta_{13}$  zumindest den Limit von CHOOZ verbessern zu können

### 2.6.3 Höhere Korrekturen

Als am schwierigsten meßbar erweisen sich diejenigen Parameter die ausschließlich von der solaren Massendifferenz abhängig sind, dazu gehört die CP-Phase  $\delta$ . Wie wir gesehen haben, kann man Terme, die diese Massendifferenz enthalten, selbst in Materie weglassen ohne allzugroße Fehler zu machen. Erschwerend kommt noch hinzu, daß die CP-verletzenden Terme zusätzlich vom kleinen Mischungswinkel  $\theta_{13}$  abhängt und unter Umständen die CP-Phase selbst auch noch sehr klein sein kann. Bei der Messung ergibt sich zusätzlich noch die Schwierigkeit, daß die CP-Verletzung, die rein aus der NMS-Matrix stammt, zusätzlich durch die CP-Verletzung der Materie überlagert wird. Aus diesem Grund dürfen die Baselines bei der Messung nicht zu groß werden, was wiederum bedeutet, daß die Oszillation nicht allzuviel Zeit hat sich zu entwickeln und die Meßgenauigkeit zu wünschen übrigläßt. Insgesamt ist also die CP-Phase  $\delta$  der am schwierigsten zu messende Parameter. Nur wenn die solare Massendifferenz  $|\Delta m_{12}^2|$  am oberen Ende der erlaubten Parameterbereiche heutiger Experimente liegt ( $\Delta m_{12}^2 \sim 10^{-4}$ ) besteht überhaupt eine Hoffnung  $\delta$  zu messen.

Andererseits kann gerade die CP-Phase für einige weitere physikalischen Gebiete sehr interessant sein. Beispielhaft sei dafür die Baryogenese, und dabei der Spezialfall der Neutrinogenese [2], genannt, welche die Generierung der heutigen Baryoasymmetrie im Universum erklären sollen. Aber auch im Zusammenhang einer Vereinigung des Leptonsektors mit dem Quarksektor, in dem bereits CP-Verletzung nachgewiesen wurde, ist die CP-Phase der Neutrinos interessant. Abgesehen davon, daß CP-Verletzung in sich schon ein interessantes und untersuchungswertes Phänomen ist und sie die Analysen der anderen Neutrinoexperimente verfälschen kann, wenn sie nicht bekannt ist.

Da die CP-Phase also von anderen Parametern abhängt und unter Umständen sehr klein ist, ist es wichtig zuvor die anderen Parameter sehr präzise zu bestimmen. Besonders die Materieeffekte, die ebenfalls die benötigten Appearancekanäle stark beeinflusst, muß daher gut bekannt sein. Zuletzt sei noch erwähnt, daß auch CP-Effekte im Prinzip das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  zugänglich machen, da es sich aber bei ersteren bereits um einen subsubleading Effekt handelt, macht das für eine Messung von  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$  wenig Sinn.

## Kapitel 3

# Experimentelle Aufbauten

Im Folgenden werden wir verschiedene Typen sowohl von Detektoren als auch von Beams, die generell für unsere Analysen in Frage kommen, vorstellen und Beispielexperimente dafür gegeben. Prinzipiell können diese beliebig für Oszillations-Experimente kombiniert werden, insofern es aus rein physikalischer Sicht sinnvoll ist. Daher stellen wir zunächst Detektoren und Beams getrennt vor, bevor wir zum Abschluß noch erläutern welche Kombinationen prinzipiell zur Messung von  $\theta_{13}$  und  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$  geeignet sind und welche Methode dabei benutzt wird. Wir werden dabei die Annahmen zu den Detektoren und Beams, die in den späteren Kapiteln für die Analysen gemacht wurden, und auch die benutzten Werte für die Parameter genauer vorstellen. Einige der Parameter von denen die Eigenschaften der Detektoren und Beams und damit die Ergebnisse abhängen, sind leicht skalierbar. Für diese Parameter können die entsprechenden Ergebnisse für andere Werte der Beams und Detektoren leicht über die entsprechenden Skalengesetze errechnet werden. Für die Parameter, von denen die Abhängigkeiten weniger trivial sind, werden wir in den späteren Plots die experimentellen Ergebnisse in Abhängigkeit von diesen Parametern darstellen.

### 3.1 Beams

Für Long-Baseline Experimente, in denen Parameter der höheren Ordnungen gemessen werden sollen, kommen prinzipiell nur Neutrino Beams in Frage die intensiv und präzise genug gebündelt sind, damit nach den großen Entfernungen noch genug Ergebnisse für eine vernünftige Statistik übrigbleiben. Weiterhin sollte die Beamsystematik gut verstanden sein, um die Fehler gering halten zu können. Daher kommen die für viele Short-Baseline Experimente genutzten Reaktor-neutrinos nicht in Frage. Da es sich um Hochpräzisions-Experimente handelt, kommen weiterhin keine Experimente mit einer extraterrestrischen Quelle in Frage, da diese zu schlecht verstanden und nicht kontrollierbar sind. Von den herkömmlichen Experimenten bleibt folglich nur noch eine Quelle übrig, Wide Band Neutrino Beams aus den BeamDumps von

Beschleunigern. Eine weitere Quelle mit sogar noch höherem Fluß und besserer Beamsystematik stellen die in letzter Zeit vorgestellten Neutrino Fabriken dar, die als Zwischenziel beim Entwurf von Myonkollidern geplant sind.

### 3.1.1 Neutrino fabrik

In Neutrino fabriken [48, 30, 49, 50, 17, 51] werden Myonen bzw. Antimyonen einer bestimmten Energie in sogenannten Speicherringen gespeichert. Diese zerfallen dann entsprechend Tab. 3.1, es werden also gleichzeitig sowohl Myon-Neutrinos (Antineutrinos) als auch Elektron-Antineutrinos (Neutrinos) erzeugt. Die Myonenenergie kann dabei in einem weiten Bereich zwischen 10 GeV und 50 GeV liegen. Aber auch höhere Energien sind denkbar. Mit diesen Neutrino fabriken kann ein Neutrino fluß erreicht werden, der  $2 \cdot 10^{20}$  Myonzerfällen im Jahr entspricht, wobei nur die nutzbaren Zerfälle im geraden Stück des Speicherrings, das auf einen Detektor zeigt, gewertet werden. Auch höhere Flüsse werden besprochen [51, 52]. Diese Beams sind sehr gut gebündelt, einmalig intensiv und präzise bekannt, da die Flüsse sehr exakt aus dem Zerfallsspektrum in Ruhe berechnet werden können [48]. Die Beimischungen von  $\nu_e$  bzw.  $\bar{\nu}_e$  hängen dabei meßbar von der Beampolarisierung ab, wobei wir für unsere Analysen annehmen, daß diese vernachlässigbar ist. Die Zerfallsstrecke und somit der Strahl wird für Long-Baseline Experimente unter dem Nadirwinkel  $h$  in die Erde gerichtet, um die gewünschten großen Entfernungen  $L = 2R_{Erde} \cos h$  zu den Detektoren zu erhalten.

Der eindeutige Vorteil dieses Beams ist, daß aufgrund des großen Anteils an Elektronneutrinos im selben Detektor sowohl Disappearance- als auch Appearance-Experimente durchgeführt werden können. Somit sind diese Experimente sensitiver auf Materieeffekte, die vor allem den Appearancekanal beeinflussen, und haben trotzdem hohe Präzision bei der Bestimmung der Parameter führender Ordnung durch die höheren Raten des Disappearance-Kanals. Dazu ist es entscheidend, daß der Detektor zwischen Appearance-Kanal und Disappearance-Kanal unterscheiden kann. Dies geschieht mit Hilfe der Ladungsidentifikation (CID) der Myonen im Detektor, da die Myonen aus dem Appearancekanal entgegengesetzte Ladung zu den erwarteten Myonen ohne Oszillation und entsprechend im Disappearancekanal haben (Tab. 3.1). Man nennt sie daher Wrong Sign Myonen. Die Ladungsidentifikation muß sehr zuverlässig sein, um die Wrong Sign Myonen von der wesentlich höheren Anzahl von Right Sign Myonen trennen zu können. Im Prinzip wären dieselben Analysen natürlich auch mit Elektronneutrinos (oder Tauneutrinos) im Endzustand möglich, allerdings funktioniert die Ladungsidentifikation im Detektor bei Elektronen nicht zuverlässig genug. Daher bleiben aus den im Prinzip möglichen vier Disappearance und acht Appearanceexperimenten nur je zwei Experimente übrig,  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  plus  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  und  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$  plus  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ . Wie wir in Kap. 2.5.5 gesehen haben, gehen die Materiekorrekturen in diesen Kanälen jeweils in dieselbe Richtung, deswegen sind im Prinzip auch Experimente mit Detektoren ohne Ladungsidentifikation denkbar, bei denen die Myonen

$$\begin{array}{l}
\boxed{\mu^-} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_e \xrightarrow{\text{Oszillation}} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_e \Rightarrow e^+ \\ \bar{\nu}_\mu \Rightarrow \boxed{\mu^+} \\ \bar{\nu}_\tau \Rightarrow \tau^+ \end{array} \right. \quad \boxed{n_{\mu^-}(\mu^+)} \\ \\ \nu_\mu \xrightarrow{\text{Oszillation}} \left\{ \begin{array}{l} \nu_e \Rightarrow e^- \\ \nu_\mu \Rightarrow \mu^- \\ \nu_\tau \Rightarrow \tau^- \end{array} \right. \quad n_{\mu^-}(\mu^-) \end{array} \right. \\
\\
\boxed{\mu^+} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nu_e \xrightarrow{\text{Oszillation}} \left\{ \begin{array}{l} \nu_e \Rightarrow e^- \\ \nu_\mu \Rightarrow \boxed{\mu^-} \\ \nu_\tau \Rightarrow \tau^- \end{array} \right. \quad \boxed{n_{\mu^+}(\mu^-)} \\ \\ \bar{\nu}_\mu \xrightarrow{\text{Oszillation}} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nu}_e \Rightarrow e^+ \\ \bar{\nu}_\mu \Rightarrow \mu^+ \\ \bar{\nu}_\tau \Rightarrow \tau^+ \end{array} \right. \quad n_{\mu^+}(\mu^+) \end{array} \right.
\end{array}$$

Tabelle 3.1: *Mögliche Oszillationen in der Neutrino-fabrik. Die Umrahmungen verdeutlichen die sogenannten Wrong Sign Myon Ereignisse. Die hellgrau dargestellten Ereignisse sind die subdominanten Oszillationen. Die Rechte Spalte zeigt die entsprechenden Bezeichnungen der im Experiment möglichen Ereignisraten.*

beider Kanäle gemeinsam detektiert werden. Dann verliert man aber den Vorteil, den der Appearancekanal bietet.

Für die Analysen in den folgenden Kapiteln wurde eine Neutrino-fabrik mit  $2 \cdot 10^{20}$  bzw.  $1 \cdot 10^{20}$  nutzbarer Myonen  $N_{\mu^\pm}$  im Jahr und einer Myonenergie von 20 bzw. 50 GeV benutzt, falls diese festgelegt wird.

### 3.1.2 Wide Band Beams

Die herkömmlichen Wide Band Beams (WBB), welche schon seit Jahren für Oszillations-Experimente verwendet werden, erhält man, indem man mit hochenergetische Protonen von einigen hundert GeV auf massive Targets schießt. Die dabei erzeugten Pionen und Kaonen werden mit einem magnetischen Linsensystem gebündelt und zerfallen anschließend innerhalb einiger hundert Meter. Der resultierende Strahl enthält hauptsächlich  $\nu_\mu$  mit nur kleinen Beimischungen der anderen Flavours auf Prozentniveau. Aus diesem Grund kann man mit einem Wide Band Beam nur Disappearance Experimente durchführen. Im Prinzip kann man auch den Linsenstrom umkehren und damit einen Antineutrinostrahl erzeugen. Dieser hat dann allerdings höhere Beimischungen der anderen Flavour und eine andere Beamsystematik, die im allgemeinen zudem noch schlechter verstanden ist, und ist daher nicht direkt mit dem

Neutrino beam vergleichbar. Idealerweise müßten bei solchen Experimenten Beammonitore nahe der Neutrinoquelle aufgestellt werden, um einerseits exakte Ergebnisse ohne die Unsicherheit im Fluß zu erhalten, und andererseits falls nötig beide Beams vergleichen zu können. Da der Beam für Long-Baseline Experimente direkt in die Erde zeigen müßte, was leicht durch die Ausrichtung der Pionen und Kaonen zu erreichen ist, müßte der Beammonitor tief in der Erde plaziert werden, was natürlich zu einigen Schwierigkeiten führen könnte. Beispiele für solch einen konventionellen Wide Band Beam sind die Beams von K2K [53], NuMI [54] und CNGS [55, 56]. Für unsere Berechnungen haben wir ein CNGS-ähnliches Spektrum mit einem Fluß für  $4.5 \cdot 10^{19}$  pot (Protons on target) verwendet. Die Beimischungen im CNGS-Beam betragen 2%  $\bar{\nu}_\mu$ , 0.8%  $\nu_e$  und 0.05%  $\bar{\nu}_e$ . sie sind folglich vernachlässigbar, was im besonderen auch für die zusätzlichen Myonen gilt, die durch Oszillation von  $\nu_e$  entstehen könnten. Der Fluß des Antibeams beträgt nur ca. 75% des Neutrino beams und die Beimischungen sind etwas größer. Die mittlere Energie des Beams liegt zwischen 20 GeV und 30 GeV mit einem langem Schwanz zu hohen Energien.

### 3.1.3 Low Energy Superbeams

Es existieren Proposals [57], die vorschlagen obige Technik aufzuwerten, indem man sehr intensive Protonbeams (Megawatt-Skala) verwendet, die sogenannten Low Energy Superbeams. Diese Neutrino beams sollen zusätzlich etwas niedrigere Energien ( $m_\mu < E_\nu < m_\pi$ ) für ein günstigeres  $\langle L/E \rangle$ -Verhältnis besitzen. Dies erlaubt auch zu kürzeren Entfernungen zu gehen. Durch eine entsprechende Skalierung können unsere Ergebnisse leicht diesen Superbeams angepaßt werden und wir werden sie daher nicht näher betrachten.

## 3.2 Detektoren

Um Detektoren von grundsätzlich verschiedenem Aufbau miteinander vergleichen zu können, werden wir diese nur durch ihre grundlegenden Parameter charakterisieren und alle Feinheiten der einzelnen Detektoren vernachlässigen. In unserem Bild wird dann das generische physikalische Potential der Detektoren nur von drei Parametern abhängen, nämlich von der Energieschwelle, der Energieauflösung und natürlich der Detektormasse. Dies stellt natürlich eine sehr starke Verallgemeinerung dar, aber sie erlaubt uns eine einfach und effektive Beurteilung des Potentials von sehr verschiedenen Detektoren im direkten Vergleich auf einer gemeinsamen Basis. Die Energieschwellen sollen im allgemeinen so niedrig wie möglich liegen, typischerweise bei wenigen GeV, um möglichst viele der resonanten Neutrinos ( $\sim 15$  GeV) mit dem stärksten Materieeffekt zu detektieren. Die Effizienz  $\epsilon_\pm$  mit denen im Detektor die Myonen nachgewiesen werden können, haben wir in allen Analysen zum besseren Vergleich auf 100% gesetzt, wobei die Ergebnisse leicht auf andere Werte von  $\epsilon_\pm$

umgerechnet werden können. Die Abhängigkeit der Genauigkeit der Ergebnisse von der Detektormasse ist wichtig aber einfach. Sie bestimmt die Zahl der Ereignisse und somit den statistischen Fehler. Die Sensitivitäten skalieren im allgemeinen mit  $\sqrt{M\Phi t}$ , wobei  $M$  die Detektormasse,  $\phi$  der Fluß und  $t$  die Laufzeit des Experiments ist. Die Ergebnisse können ebenfalls leicht für einen anderen Wert der Detektormasse skaliert werden. Daher sind die Abhängigkeiten der Ergebnisse von diesen beiden Parametern nicht dargestellt. Die Abhängigkeiten von Energieschwelle und Auflösung sind wesentlich weniger trivial und daher in den Vergleichen der einzelnen Experimente dargestellt. All den vorgestellten Detektoren ist gemein, daß sie nur Myonneutrinos (Antineutrinos) nachweisen können, da die Detektion und vor allem die Ladungsidentifikation von  $\nu_e$  und  $\nu_\tau$  im allgemeinen aus experimenteller Sicht wesentlich schwieriger ist.

### 3.2.1 Magnetisierte Eisendetektoren

Magnetisierte Eisendetektoren werden im allgemeinen als die idealen Detektoren für Neutrino-Long-Baseline Oszillations Experimente anerkannt [48, 30, 50, 20, 58], da sie Appearance-Kanal  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  und Disappearance-Kanal  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  der Neutrino-Long-Baseline trennen können. Dazu werden sehr gute Fähigkeiten der Ladungstrennung benötigt um die Myonen von den Antimyonen unterscheiden zu können und damit die kleine Anzahl Wrong Sign Myon Ereignisse in der wesentlich größeren Anzahl der Right Sign Myon Ereignisse identifizieren zu können. Falls diese nicht gut genug ist (es werden Werte zwischen  $10^{-6}$  und  $10^{-2}$  diskutiert [20, 59]) werden die Messungen des Appearancekanal verschmutzt. Um dies zu berücksichtigen werden wir die beiden Grenzfälle der perfekten und der komplett versagenden CID in unseren Vergleichsanalysen berücksichtigen. Das Problem bei einer Ladungsidentifikation der Elektronneutrinos ergibt sich hier aus der großen Dichte, die solch ein Detektor haben muß, um eine statistisch signifikante Zahl von Ereignissen nachweisen zu können. In unseren Analysen verwenden wir für diese Art Detektor speziell eine Energieschwelle von 5 GeV, wie sie auch in den Studien zur Neutrino-Long-Baseline vorgeschlagen werden, außerdem eine Energieauflösung von 10% bzw. 20 Bins zwischen 5 GeV und 20 GeV und eine totale Masse von 10kt [51, 60, 61, 62].

### 3.2.2 Neutrino-Teleskope

Zunächst wurden große Wasser- oder Eis-Cherenkovdetektoren für die Messungen der Oszillationsparameter höherer Ordnung als nicht geeignet eingestuft, da diese zunächst einmal eine relativ hohe Schwellenenergie besitzen, die über der Resonanzenergie liegt. Der Vorteil dieser Detektoren liegt darin, daß sie sehr hohe Massen besitzen (ungefähr einen Faktor 100 mehr als die gewagtesten Ideen für SuperKamiokande-ähnliche Cherenkovdetektoren) und daher große Ereignisraten aufweisen. Diese Detektoren bestehen aus großen Arrays von Photomultipliern (PMTs),

die entweder im antarktischen Eis oder im Meerwasser plaziert sind. IceCube [63, 64], den wir für die meisten unserer Analysen verwendet haben, hat z.B. 80 Strings mit einer Länge von ca. 1 km in einem Abstand von ca. 100 m. Der vertikale Abstand der PMTs beträgt ungefähr 15 m. Die hohe Schwellenenergie des Detektors stammt aus dem eigentlichen Zweck für den diese Detektoren entworfen wurden. Sie ergibt sich bei der Rekonstruktion der kosmischen und atmosphärischen hochenergetischen Neutrinoereignisse und resultiert aus den großen Abständen der PMTs und der minimalen Anzahl von Treffern (zwischen 8 und 16) die für eine Spurrekonstruktion nötig sind, um die Richtung der Ereignisse bestimmen zu können. Mit den spezifischen optischen Eigenschaften des Meerwassers oder Eises und dem spezifischen Energieverlust der Myonen ( $\sim 0.2 \text{ GeV}/m$ ) ergibt sich dann die Schwellenenergie zu 30-50 GeV. Außerdem ist die Schwelle noch an die Notwendigkeit der Reduktion von Hintergrundsignalen gebunden. Bei einem Experiment mit hohen Ereignisraten und bekannter Strahlrichtung kann dagegen die Schwelle deutlich gesenkt werden [3]. Ersten ist die Rekonstruktion der Richtungsinformation nicht notwendig, da diese ja bekannt ist, man muß also nur sicherstellen, daß es sich um ein gewünschtes Ereignis handelt. Man kommt daher mit einer geringeren minimalen Anzahl von Treffern aus und damit können auch Teilchen mit niedrigerer Energie berücksichtigt werden. Zweitens kann der Hintergrund reduziert werden, indem man die Richtungs- und Beampulsinformation nutzt, und dadurch nur Teilchen aus einem bestimmten Zeit und Raumfenster berücksichtigt. Trotzdem ergibt sich eine untere Grenze für die Schwellenenergie durch die Notwendigkeit hadronische Schauer, die durch Neutral Current Reaktion verursacht werden, zu identifizieren. Während die Länge einer Spur für Myonen mit  $E$  wächst, wächst sie für die hadronischen Schauer nur mit  $\log E$ , man nutzt daher einen Cut bei ca. 10 GeV, um Ereignisse von hadronischen Schauern auszuschließen. Selbst wenn die Senkung der Schwellenenergie nicht gelingen sollte, können diese Detektoren noch nützlich sein, da nicht alle Messungen so schwellenabhängig sind, wie wir noch sehen werden. Um das enorme Potential dieser Detektoren zu demonstrieren, werden wir für die Analysen der Oszillationsparameter als Neutrinoquelle den schwächeren Wide Band Beam wählen. Für unsere Analysen haben wir einen IceCube-ähnlichen Detektor mit einer effektiven Masse von 5000 kt (AMANDA) bzw. 100 Mt (IceCube) und einer Energieauflösung von 10 GeV bzw. 50% verwendet [65]. Die Schwellenenergie soll zwischen dem optimistischen Wert von 5 GeV und dem konservativen Wert von 30 GeV liegen, wir haben als Mittelwert 15 GeV verwendet [65]. Weitere Beispiele sind AMANDA [66], ANTARES [67], NESTOR [68] und Baikal [69].

### 3.2.3 Ring Imaging Cherenkov Detektoren

Einen dritten Typ von Detektoren stellen die Ring Imaging Cherenkov Detektoren dar. Durch ihr wesentlich dichteres Photomultiplier Array und das verwendete Darstellungsverfahren, erreichen sie eine wesentlich niedrigere Schwelle als alle anderen

---

Cherenkovdetektoren. Außerdem besitzen sie trotzdem noch eine relativ große Masse von 1 Mt und liegen damit zwischen den zuvor genannten Detektortypen. Ein Detektor dieser Art stellt AQUA-RICH [70] dar. Wir verwenden für diesen Detektor eine Energieschwelle von 1 GeV und eine Energieauflösung von 7%.



## Kapitel 4

# CP-Verletzung in Neutrino-Oszillationsexperimenten

In Kapitel 2.4 haben wir gesehen, daß im Mehr-Neutrino Oszillationsszenario potentiell CP-Verletzung existieren kann, falls die Mischungsmatrix imaginär ist. Nun stellt sich uns die Frage, ob es sinnvoll ist im Neutrinosektor CP-Verletzung auch tatsächlich zu untersuchen, oder sie zumindest in den Analysen von Experimenten zu berücksichtigen. Dies gilt insbesondere, da wir aus dem Quark-Sektor bereits wissen, daß die CP-Verletzung sehr klein ist. Wie wir aber in den folgenden Untersuchungen sehen werden, kann die CP-Verletzung im Leptonsektor tatsächlich auch groß sein.

$$J_{CP}^{\nu} \gg J_{CP}^{quark} \quad (4.1)$$

Wie wir aus dem Quarksektor wissen, wird die Größe der CP-Verletzung unter anderem hauptsächlich durch die Kleinheit der Mischungswinkel limitiert. Im Gegensatz dazu ist im Neutrinosektor zumindest ein Mischungswinkel groß,  $\sin^2 2\theta_{23} \simeq 1$ . Damit auch der solare Mischungswinkel groß ist, wären bei der Betrachtung der CP-Effekte die LMA-MSW Lösungen der solaren Neutrinos (besonders am oberen Ende) interessant. Diese und andere Einschränkungen der CP-Verletzung werden wir uns im Folgenden noch genau betrachten. Wenn nun CP-Verletzung tatsächlich prinzipiell beobachtbar ist, warum könnte es für uns überhaupt interessant sein, sie auch wirklich näher zu betrachten. Zuerst ist natürlich zu nennen, daß unter diesen Umständen CP-Verletzung unsere Daten und somit die Ergebnisse der Analysen von Neutrinooszillationen beeinflussen oder sogar verfälschen kann, falls man sie nicht durch die richtigen theoretischen Formeln berücksichtigt. Dies bedeutet natürlich, daß man nicht den Zwei-Neutrino Formalismus benutzen darf. Zweitens bietet CP-Verletzung einen Hebel mit dem man auch in terrestrischen Experimenten Zugang zur solaren Massendifferenz bekommt, die anders aufgrund ihrer Kleinheit auf der Erde nicht meßbar ist. Aber außer diesen Gründen, die die Oszillation selbst betreffen, ist CP-Verletzung auch noch von allgemeinem physikalischen Interesse, zum Beispiel bei dem Versuch den Quarksektor und den Leptonsektor zu vereinen. Für die Form

einer vereinigten Theorie ist natürlich die Existenz einer CP-Phase im Leptonsektor von entscheidender Bedeutung. Aber auch für Theorien wie die Baryogenese kann die Existenz von CP-Verletzung entscheidend sein. Viele dieser Modelle die versuchen die Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie zu erklären, hängen von der Existenz einer CP-Verletzung ab. Zum Beispiel wäre dazu die sogenannte Neutrinogenese zu nennen [2], die von einigen Kollegen und mir entwickelt wurde. Nicht zuletzt ist das Phänomen der CP-Verletzung natürlich an sich interessant, einfach um die Physik unserer Welt besser zu verstehen und weitere Lücken zu füllen. Denn CP-Verletzung würde sich sehr natürlich in unser Standardmodell einfügen, falls man es um Neutrinomassen erweitert.

Wenden wir uns also in diesem Kapitel der Größe und dem Verhalten der CP-Verletzung in verschiedenen Long- und Short-Baseline Experimenten für drei und vier Neutrinos zu. Dazu führen wir zunächst eine passende Meßgröße, die CP-Asymmetrie ein und betrachten für diese auch Einflüsse, die durch das experimentelle Setup und die Materie entstehen. Anschließend werden wir unsere Analysen mit dem Drei-Neutrino Fall in Long-Baseline Experimenten beginnen. Hier werden wir zunächst ausführlich die mögliche Größe der CP-Asymmetrie analytisch diskutieren. Dann werden wir die CP-Verletzung in Long-Baseline Experimenten im Vakuum für die Kanäle  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  und  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  analytisch betrachten und illustrieren. Abschließend im Drei-Neutrino Fall zeigen wir durch numerische Berechnungen, daß die Korrekturen durch Materie relativ gering sind und eine einfache Subtraktion von numerisch berechneten Materieeffekten eine gute Näherung darstellen. Anschließend betrachten wir den Vier-Neutrino Fall sowohl für Long-Baseline als auch Short-Baseline Experimente. Dazu müssen wir zuvor noch eine geeignete Parametrisierung wählen und die Einschränkungen des Parameterraums durch bestehende Experimente betrachten. Da wir im Drei-Neutrino Fall gesehen haben, daß Materiekorrekturen klein sind, werden wir diese im Vier-Neutrino Fall nicht berücksichtigen.

## 4.1 Definition der CP-Asymmetrie

Um nun zeigen zu können, daß CP-Verletzung im Neutrinosektor tatsächlich prinzipiell beobachtbar ist und dafür auch groß genug ist, versuchen wir eine geeignete Meßgröße für CP-Verletzung zu finden. Wir führen dazu eine Asymmetrie zwischen CP-erhaltendem Term und CP-verletzenden Term ein [1], da solche Größen immer den Vorteil haben, daß sich das eigentliche Signal verstärkt und sich unerwünschte Hintergründe automatisch wegheben, ohne daß man ihren genauen Wert kennen muß. Dies verringert natürlich den Fehler enorm.

$$a_{lm}^{CP} = \frac{P_{\cancel{CP}}}{P_{CP}} \quad (4.2)$$

Neben der offensichtlichen physikalischen Bedeutung läßt sich daran sofort ablesen, zu welchem Ausmaß die Analyse eines möglichen Signals, die man ohne Berücksichtigung

der CP-Verletzung durchführt, durch CP-Effekte verfälscht werden kann. In Kap. 2.4 haben wir gesehen, daß in den allgemeinen Oszillationsformeln der CP-verletzendem Term für die CP-konjugierten Kanälen das Vorzeichen wechselt

$$P(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m}) = \underbrace{\delta_{lm} - 4 \sum_{i>j} \operatorname{Re} J_{ij}^{e_l e_m} \sin^2 \Delta_{ij}}_{P_{CP}} \pm 2 \underbrace{\sum_{i>j} \operatorname{Im} J_{ij}^{e_l e_m} \sin 2\Delta_{ij}}_{P_{\mathcal{CP}}}, \quad (4.3)$$

mit  $J_{ij}^{e_l e_m} := U_{li} U_{lj}^* U_{mi}^* U_{mj}$  und  $\Delta_{ij} := \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}$ . Daraus erkennt man, daß man die CP-konjugierten Kanäle aus einem Experiment erhält, indem man die Übergangswahrscheinlichkeiten von Neutrinos und Antineutrinos subtrahiert beziehungsweise addiert:

$$a_{lm}^{CP} := \frac{P(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) - P(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m})}{P(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) + P(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m})}. \quad (4.4)$$

Dabei bezeichnet  $lm$  die Übergangsamplitude zwischen den beiden Flavour  $l$  und  $m$ . Es sei noch daran erinnert, daß  $P_{\mathcal{CP}} \ll P_{CP}$  und daher  $a_{lm}^{CP} < 1$  gilt. In dieser Definition bedeutet also eine CP-Asymmetrie  $a_{lm}^{CP} = 0$  Invarianz gegenüber einer CP-Transformation. Möchte man diesen Parameter aus einem realen Experiment gewinnen, sind jedoch noch einige weitere Dinge zu beachten. Da die CP-Verletzung ein Subsubleading Parameter ist und daher im Vergleich zu den Parametern erster Ordnung sehr klein ist, wird CP-Verletzung grundsätzlich nur in den terrestrischen Hochpräzisions-Experimenten der nächsten Generation meßbar sein. Dabei werden die Neutrinos im Experiment durch die Erdmaterie fliegen und daher müssen für die totale CP-Asymmetrie die Übergangsamplituden in Materie benutzt werden, wie wir sie in Kapitel 2.5.3 kennengelernt haben. Damit in diesen die CP-Verletzung nicht vernachlässigt wird, müssen natürlich die führenden Ordnungen von  $\Delta m_{12}^2$  berücksichtigt werden. Die Oszillation in Materie wird hierbei durch das Symbol  $m$  gekennzeichnet.

Desweiteren haben die Neutrinos im allgemeinen nach der Produktion unterschiedliche Geschwindigkeiten respektive Energien und zwischen Quelle und Detektor aufgrund deren endlichen Ausdehnung unterschiedliche Weglängen. Daher muß man die Oszillationsamplituden zusätzlich über Energie und Wegstrecke mit entsprechender Gewichtung mitteln. Dies ist insofern entscheidend, da die Form der Verteilung für Neutrinos und Antineutrino unterschiedlich ist, aber in der Messung beide verwendet werden sollen. Mit der Mittelung

$$\langle P^m(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) \rangle = \int d(L/E) P^m(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m})(L/E) \mathbf{f}(L/E), \quad (4.5a)$$

$$\langle P^m(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m}) \rangle = \int d(L/E) P^m(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m})(L/E) \bar{\mathbf{f}}(L/E) \quad (4.5b)$$

ergibt sich dann die totale CP-Asymmetrie zu:

$$a_{lm}^{\text{tot}} = \frac{\langle P^m(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) \rangle - \langle P^m(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m}) \rangle}{\langle P^m(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) \rangle + \langle P^m(\bar{\nu}_{e_l} \rightarrow \bar{\nu}_{e_m}) \rangle}. \quad (4.6)$$

Die Wichtungsfunktionen  $\mathbf{f}, \bar{\mathbf{f}}$  in Gleichung (4.5) ergeben sich aus der Integration über Länge und Energie  $L/E$  der ursprünglichen Verteilungsfunktionen  $F, \bar{F}$ , die nur abhängig von  $L/E$  ist.

$$\mathbf{f}(L/E) = \int (E/L)^2 F(L, E/L \cdot L) dL \quad (4.7a)$$

$$\bar{\mathbf{f}}(L/E) = \int (E^2/L) \bar{F}(L, E/L \cdot L) dL \quad (4.7b)$$

$F, \bar{F}$  werden zum Beispiel durch unterschiedliche Wirkungsquerschnitte und somit Nachweiswahrscheinlichkeiten im Detektor verursacht. Weiterhin werden die konjugierten Kanäle mit unterschiedlichen Energiespektren und -flüssen erzeugt. Außerdem enthalten  $F$  und  $\bar{F}$  die unterschiedliche Effizienz und Auflösung im Detektor. Insgesamt sind  $\mathbf{f}$  und  $\bar{\mathbf{f}}$  unterschiedlich in ihrer Form, obwohl beide auf 1 normalisiert sind. Da die Beiträge sowohl dieser Verteilungen als auch von Materie unterschiedlich in den CP-konjugierten Kanälen sind, fallen sie leider in der CP-Asymmetrie nicht weg. Sie sorgen dafür, daß die eigentlich interessierende CP-Asymmetrie des Standardmodells durch experimentelle Gegebenheiten verändert wird. Daher unterscheidet man grundsätzlich zwischen zwei verschiedenen Beiträgen zur CP-Verletzung.

#### 4.1.1 Intrinsische CP-Asymmetrie

Als intrinsische CP-Asymmetrie werden wir diejenige Asymmetrie bezeichnen, die rein aus der Theorie der Neutrinomassen im Standardmodell entsteht, also auf eine CP-verletzende Phase  $\delta$  in der Mischungsmatrix zurückzuführen ist. Diese Asymmetrie ist die uns eigentlich interessierende Asymmetrie. Sie ist unabhängig vom experimentellen Setup und existiert nur, wenn die Mischungsmatrix  $U_{mix}$  einen imaginären Anteil enthält.

#### 4.1.2 Experimentelle CP-Asymmetrie

Durch die im Experiment asymmetrischen Bedingungen für CP-konjugierte Kanäle, erbt die gemessene CP-Asymmetrie noch weitere vom jeweiligen Experiment abhängige Beiträge. Dabei handelt es sich erstens um eine materieinduzierte CP-Verletzung und zweitens um Asymmetrien in der experimentellen Apparatur. Der erste Beitrag wird durch die Asymmetrie der Materie bezüglich CP-Konjugation aufgrund der fehlenden Antineutrinos verursacht. Es entsteht in Materie eine Asymmetrie in den Übergangswahrscheinlichkeiten durch die unterschiedliche Propagation von Neutrinos und Antineutrinos in der (Erd)Materie, wie sie in Kapitel 2.5 vorgestellt wurde. Der zweite zusätzliche Beitrag wird durch den unterschiedlichen Produktions- und Detektionsmechanismus für Neutrinos und Antineutrinos sowie durch andere Abweichungen vom idealen Experiment, wie zum Beispiel endliche Ausdehnungen von

Detektor, Quelle und Neutrinopaket erzeugt. Diese beiden Asymmetrien, die auf die verschiedene Form von  $\mathbf{f} \neq \bar{\mathbf{f}}$  und auf die Wechselwirkungen mit der Materie zurückzuführen sind, werden wir experimentelle Asymmetrien nennen. Sie sind auch dann präsent, wenn die Mischungsmatrix  $U_{mix}$  real ist.

Damit ergibt sich im realen Experiment eine totale CP-Asymmetrie [30], die sich aus den beiden experimentell bedingten Asymmetrien  $a^{exp}$  und der intrinsischen Asymmetrie  $a^{CP}$  zusammensetzt.

$$a_{lm}^{tot} = a_{lm}^{CP} + a_{lm}^{exp} \quad (4.8)$$

Per Definition muß  $a^{CP}$  dann verschwinden, wenn keine CP-verletzenden Phasen existieren, während dies nicht für  $a^{exp}$  und somit für  $a^{tot}$  gilt. Die totale CP-Asymmetrie  $a^{tot}$  wird also sowohl von der NMS-Mischungsmatrix als auch von Materie verursacht. Dagegen wird die Zeit-Asymmetrie  $a^T$  nur von der NMS-Mischungsmatrix verursacht und die CPT-Asymmetrie  $a^{CPT}$  nur durch Materie. Da in den hier behandelten Szenarien Materieeffekte kaum eine Rolle spielen, wie wir später noch sehen werden, können sie als Korrektur zu dem Fall ohne Materie behandelt werden. Daher werden wir ab nun den Index  $m$  fallen lassen und  $a_{lm}^{CP}$  analytisch im Vakuum behandeln. Die numerisch berechneten Korrekturen, die durch Materie entstehen, werden wir später präsentieren.

Nun kann man noch die mittlere Wichtungsfunktion und die Asymmetrie der Wichtungsfunktionen definieren  $f_{\pm} = (\mathbf{f} \pm \bar{\mathbf{f}})/2$ . Dann findet man für die Asymmetrie im Vakuum nach Vernachlässigung der zweifach unterdrückten Beiträge  $\int d(L/E)P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_i} \rightarrow \nu_{e_j})(L/E)f_{-}(L/E)$  im Nenner von  $a_{ij}^{tot}$ :

$$a_{lm}^{exp} = \frac{\int d(L/E)P_{CP}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_l})(L/E)f_{-}(L/E)}{\int d(L/E)P_{CP}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m})(L/E)f_{+}(L/E)}, \quad (4.9a)$$

$$a_{lm}^{CP} = \frac{\int d(L/E)P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m})(L/E)f_{+}(L/E)}{\int d(L/E)P_{CP}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m})(L/E)f_{+}(L/E)}. \quad (4.9b)$$

Damit entspricht  $a_{lm}^{exp}$  der experimentellen Asymmetrie  $f_{-}$  gemittelt mit dem CP-erhaltenden Anteil der Oszillations-Wahrscheinlichkeit und  $a_{lm}^{CP}$  ist der CP-verletzende Anteil gemittelt über  $f_{+}$ . Dabei kann man den angenehmen Nebeneffekt erkennen, daß die Asymmetrie im Vakuum nicht allzusehr von  $f_{+}$  also vom experimentellen Setup abhängt, weil sich die mittlere Wichtungsfunktion durch die Division nahezu weghebt.

Um nun die CP-Phase aus einem Experiment bestimmen zu können, muß man die experimentelle Asymmetrie von der intrinsischen Asymmetrie trennen. Dazu muß natürlich die experimentelle Asymmetrie aus theoretischen Berechnungen so gut als möglich bekannt sein. Dies wiederum erfordert, daß die CP-erhaltenden Oszillations-Parameter genau gemessen sein müssen. Zu dem Zeitpunkt wo CP-Verletzung meßbar werden wird, ist dies allerdings sehr wahrscheinlich und kann durchaus auch schon in anderen Experimenten geschehen sein. Weiterhin müssen die Parameter, die in

den Aufbau des Experiments eingehen genau bekannt sein. Das stellt natürlich hohe Ansprüche an das Setup des Experiments und erfordert gute Monte Carlo Simulationen. Da die Abhängigkeit der CP-Asymmetrie von den Wichtungsfunktionen sehr kompliziert ist, können zur Extraktion der CP-Phase kaum verschieden Experimente miteinander verglichen werden, ohne daß man große Fehler erhält, die evtl. sogar größer als der Effekt sein könnten. Die Unsicherheiten die in der Bestimmung der experimentellen Asymmetrie bestehen, gehen natürlich in die Fehler der intrinsischen Asymmetrie mit ein. Der Vorteil dabei ist aber, daß das genaue Verhalten der Wichtungsfunktion  $\mathbf{f}, \bar{\mathbf{f}}$  nur schwach in  $a^{CP}$  eingeht, da sich ja die Unterschiede größtenteils bei der Division wegheben.

Mit dieser sinnvollen Meßgröße für die CP-Verletzung, können wir uns in den folgenden Abschnitten dem Verhalten der CP-Asymmetrien in verschiedenen Experimenten im Fall von drei und vier Neutrinos widmen.

## 4.2 Drei-Neutrino Fall

Untersuchen wir Größe und Verhalten von CP-Effekte in verschiedenen realen Experimenten zunächst für den üblicheren Drei-Neutrino Fall. Für die Mischungsparameter verwenden wir dazu das Szenario, wie es in Kap. 2.6 definiert wurde. Unter Ausnutzung der Massenhierarchie, speziell von  $\Delta m_{23}^2 \simeq \Delta m_{13}^2$ , ergibt sich mit  $\text{Im } J_{ij}^{e_l e_m} = -\sigma_{lm} \sigma_{ij} J_{CP}$  und  $\sigma_{lm} \equiv \sum_n \varepsilon_{lmn}$  aus Gleichung (2.7) die Oszillationswahrscheinlichkeit zu:

$$P_{CP}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) \simeq \delta_{lm} - 4(\text{Re } J_{23}^{ml} + \text{Re } J_{31}^{ml}) \sin^2 \Delta_{13} - 4 \text{Re } J_{12}^{ml} \sin^2 \Delta_{12} , \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) &= -8\sigma_{lm} J_{CP} \sin \Delta_{12} \sin \Delta_{23} \sin \Delta_{31} \\ &= 8\sigma_{lm} J_{CP} (\sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{12} \cos \Delta_{12} + \sin^2 \Delta_{12} \sin \Delta_{23} \cos \Delta_{23}) . \end{aligned} \quad (4.10b)$$

Im linearen Bereich der Oszillation über  $\Delta m_{12}^2$  gilt  $\sin^2 \Delta_{12} \ll \sin \Delta_{12}$  und  $\cos \Delta_{12} \simeq 1$ . Damit ergibt sich näherungsweise für  $P_{\mathcal{CP}}$ :

$$P_{\mathcal{CP}}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) \simeq 8 \sigma_{lm} J_{CP} \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{12} . \quad (4.11)$$

Wie man sehen kann sind die CP-verletzenden Amplituden für alle Flavourübergänge identisch. Sie sind zum einen proportional zu dem sogenannten  $J_{CP}$ , wie es schon aus dem Quarksektor als Jarlskogvariante bekannt ist:

$$8J_{CP} = \cos \theta_{13} \sin(2\theta_{13}) \sin(2\theta_{12}) \sin(2\theta_{23}) \sin(\delta) . \quad (4.12)$$

Desweiteren sind alle CP-verletzenden Amplituden proportional zu einer Kombination der Massendifferenzen:

$$\sin \Delta_{12} \sin \Delta_{23} \sin \Delta_{31} = \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{12} \cos \Delta_{12} + \sin^2 \Delta_{12} \sin \Delta_{23} \cos \Delta_{23} . \quad (4.13)$$

An den letzten beiden Gleichungen kann man sehr gut ablesen in welchen Fällen die CP-Verletzung nicht allzustark unterdrückt wird, was wir nun im folgenden ausführlich behandeln werden.

### 4.2.1 Größe der CP-Verletzung

An Gleichung (4.13) kann man ablesen, daß zur Generierung von CP-Verletzung mindestens zwei verschiedene Massendifferenzen existieren müssen, die nicht identisch Null sein dürfen. Daraus kann man für drei Neutrinos schließen, daß im Verhältnis zu E/L kleine Massendifferenzen – also nahezu degeneriert Masseneigenzustände – CP-Verletzung unterdrücken. Aus Gleichung (4.12) kann man weiterhin ersehen, daß CP-Verletzung zusätzlich durch kleine Mischungswinkel unterdrückt wird. Man kann dies auch anschaulich verstehen, wenn man sich überlegt, daß im Extremfall (Winkel identisch Null) die gekoppelte Oszillation in zwei unabhängige Oszillationen zwischen je zwei Neutrinos zerfällt. Wie wir aber bereits wissen, gibt es in Zwei-Neutrino Oszillationen keine CP-Verletzung.

Somit ist einer der limitierenden Faktoren für CP-Verletzung der kleinste Mischungswinkel  $\theta_{13}$ , der von CHOOZ auf  $\sin^2 2\theta_{13} < 0.1$  limitiert wird. Aus den verschiedenen Lösungen der solaren Neutrinos kommen für die Beobachtung von CP-Effekten dementsprechend nur die Großwinkel-Lösungen (LMA-MSW und LOW-MSW) und die Vakuumlösung in Frage. Im Gegensatz dazu ist der atmosphärische Mischungswinkel  $\sin^2 2\theta_{13} \simeq 1$  in jedem Fall groß und stellt daher kein Problem dar. Der zweite limitierende Faktor ist die kleinste Massendifferenz  $\sin \Delta_{12} \approx \Delta_{12} \ll 1$ . Folglich ist der CP-verletzende Term am oberen Ende der LMA-MSW Lösung am größten; die anderen Großwinkel-Lösungen scheiden für eine Beobachtung der CP-Effekten aus. Ein positiver Nachweis der CP-Verletzung könnte demnach zwischen den einzelnen solaren Lösungen unterscheiden und  $\Delta m_{12}^2$  noch stärker nach unten limitieren.

Als günstigste Voraussetzung für die Messung von CP-Effekten hat sich also insgesamt die Großwinkelösung LMA-MSW – besonders am oberen Parameterbereich – herausgestellt. Genau diese Region wird derzeit auch durch SuperKamiokande bevorzugt, was für eine etwaige Messung von CP-Verletzung Hoffnung gibt. Desweiteren erweisen sich aus experimenteller Sicht nicht allzu große Long-Baseline Experimente für CP-Messung als günstig. Dies gibt der Oszillation Zeit sich zu entwickeln, da die kleine solare Massendifferenz mit grossen Oszillationslängen gleichzusetzen ist. Die kleinen Änderungen der Zahl der ursprünglichen Neutrinos in Short-Baseline Experimenten dagegen hat zuschlechte Statistik und zu große Fehler für eine Messung der kleinen CP-Verletzung. Andererseits sollte die Baseline nicht zu groß sein, weil sonst zum einen der Effekt ausgewaschen wird und zum anderen die Materieeffekte zu groß werden und den CP-Effekt überdecken (siehe Kap. 2.5.5).

Aber selbst in diesen idealen Fällen sind CP-verletzende Effekte auch bei maximaler CP-Phase ( $|\sin \delta| = 1$ ) nur klein. Ein Hinweis dafür ist, daß der CP-verletzende Anteil immer kleiner als der CP-erhaltende ist (vgl. Kapitel 2.4). Wie aber die bisherigen Experimente gezeigt haben, ist schon dieser nur schwer meßbar. Wie auch immer, letztendlich ist nur die CP-Asymmetrie, also das Größenverhältnis von CP-verletzendem und CP-erhaltendem Anteil interessant. Im Gegensatz zu  $P_{CP}$  ist  $P_{CP}$  nicht durch  $\Delta m_{\text{sun}}^2$  unterdrückt, was die Asymmetrie klein hält. Andererseits ergibt

sich für  $P_{CP}$  eine quadratische Unterdrückung durch das kleine  $\sin 2\theta_{13}$ , während  $P_{\mathcal{CP}}$  nur eine lineare Unterdrückung erfährt, was wir später noch sehen werden (vgl. Gl. 4.17). Dies führt in der Asymmetrie zu einer Verstärkung. Wenn man die Möglichkeiten einer Messung der CP-Asymmetrien behandelt, sollte noch erwähnt werden, daß eine große Asymmetrie immer von kleineren CP-erhaltenden Termen begleitet wird. Daher ist eine Verstärkung der CP-Verletzung immer mit einer Unterdrückung der Statistik verbunden und es gibt vom statistischen Standpunkt aus keinen Vorteil. Andererseits wird dadurch die Trennung der intrinsischen CP-Asymmetrie von der experimentellen einfacher.

Mit diesen Informationen kann die CP-verletzende Asymmetrie  $a_{lm}^{\text{CP}}$ , die von den Parametern  $|\Delta m_{12}^2|$ ,  $|\Delta m_{23}^2|$ ,  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{13}$  und  $\delta$  in unterschiedlicher Weise abhängt, nun genauer analysiert werden. Am stärksten hängt  $a_{lm}^{\text{CP}}$  von  $\theta_{13}$  und  $|\Delta m_{12}^2|$  ab, da dies die stärksten Unterdrückungsfaktoren sind und  $\theta_{13}$  zusätzlich bis auf den obereren Limit von CHOOZ unbekannt ist. Weiterhin ist die Größe von  $|\Delta m_{23}^2|$  noch wichtig, da sie das relative Verhältnis von  $\sin^2 \Delta_{12}$ - und  $\sin^2 \Delta_{23}$ -Termen bestimmt. Dagegen sind  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  relativ exakt bestimmt und spielen daher kaum eine Rolle. Wie zuvor besprochen wählen wir im folgenden die LMA-MSW Lösung der solaren Neutrinos, damit gilt für die Mischungswinkel  $\sin^2(2\theta_{12}) = \sin^2(2\theta_{23}) = 1$ . Die Abhängigkeit von  $\delta$  ist zwar sehr wichtig, kann aber in erster Ordnung als linear genähert werden. Daher werden wir im folgenden nur  $\left| \frac{a_{lm}^{\text{CP}}}{\sin \delta} \right|$  in Abhängigkeit von  $\sin^2 \theta_{13}$ ,  $|\Delta m_{12}^2|$  und  $|\Delta m_{23}^2|$  studieren. Wir haben getrennte Plots für die beiden Massendifferenzen erstellt, wobei die zweite Massendifferenz auf den Best Fit Wert festgelegt wurde. Wir werden zunächst den CP-verletzenden Anteil  $a_{lm}^{\text{CP}}$  analytisch im Vakuum in den Kanälen  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$  und  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\tau$  studieren, wobei wir annehmen, daß  $a_{lm}^{\text{exp}}$  klein oder unter Kontrolle ist. Später werden wir uns dann den numerisch berechneten Korrekturen, die in Materie auftreten, widmen. Da unsere Plots bestätigt haben, daß in Short-Baseline Experimenten keine CP-Verletzung beobachtbar ist, werden wir die Analysen dazu nicht präsentieren und nur Long-Baseline Experimente besprechen.

### 4.2.2 Long-Baseline $\nu_\mu - \nu_e$ Oszillationen

Betrachten wir zunächst die Eigenschaften und das Verhalten der CP-Asymmetrie im Kanal  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ . Mit  $\sin^2 2\theta_{12} = \sin^2 2\theta_{23} = 1$  kann man für die Oszillationswahrscheinlichkeiten (Gl. 4.10) schreiben:

$$P_{CP}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \simeq \frac{1}{2}(\cos^4 \theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{12} \rangle + \sin^2 2\theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle), \quad (4.14a)$$

$$|P_{\mathcal{CP}}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)| \simeq |\cos \theta_{13} \sin 2\theta_{13} \sin \delta \langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{12} \rangle|. \quad (4.14b)$$

Für die CP-Asymmetrie ergibt sich dann:

$$\left| \frac{a_{\nu_\mu \nu_e}^{\text{CP}}}{\sin \delta} \right| \simeq \left| \frac{2 \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{12} \rangle}{\cos^4 \theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{12} \rangle + \sin^2 2\theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle} \right|. \quad (4.15)$$

Für nicht allzu kleine  $\sin^2 2\theta_{13}$ <sup>1</sup>, kann man in  $P_{CP}$  den  $\cos^4 \theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{12} \rangle$ -Term vernachlässigen. Mit

$$P_{CP}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \simeq \frac{\sin^2 2\theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle}{2} \quad (4.16)$$

ergibt sich die CP-Asymmetrie dann zu:

$$\left| \frac{a_{\nu_\mu \nu_e}^{\text{CP}}}{\sin \delta} \right| \simeq \left| \frac{2 \langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{12} \rangle}{\sin 2\theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle} \right|. \quad (4.17)$$

Man kann sehen, daß ein LBL Experiment, auch wenn es im CP-erhaltenden Kanal nicht sensitiv auf die unterdrückten  $\Delta m_{12}^2$  Terme ist, sehr wohl im CP-verletzenden Kanal sensitiv auf  $\Delta m_{12}^2$  sein kann. Der Grund dafür ist, daß im CP-erhaltenden Term die Beiträge mit  $\Delta m_{12}^2$  quadratisch unterdrückt sind und daher für kleine solare Massendifferenzen wegfallen, während sie im CP-verletzten Term nur linear eingehen. Zweitens ist  $P_{CP}$  zusätzlich durch ein kleines quadratisches  $\sin^2(2\theta_{13})$  unterdrückt, während  $P_{\mathcal{CP}}$  nur  $\sin(2\theta_{13})$  enthält. Wenn ein Experiment also fähig ist die CP-erhaltende Wahrscheinlichkeit zu messen, die zweifach durch  $\sin \theta_{31}$  unterdrückt ist, kann es auch große Asymmetrien messen. Potentiell kann der CP-verletzende Kanal sogar in einem terrestrischen Experiment Zugriff auf die solare Massendifferenz bieten, während der CP-erhaltende Anteil der Amplituden nahezu gar nicht sensitiv darauf ist. In Abbildung 4.1 sind in Abständen von 10% die Konturlinien von  $|a_{\nu_\mu \nu_e}^{\text{CP}} / \sin \delta|$  in der  $|\Delta m_{12}^2| - \sin^2 2\theta_{13}$ -Ebene bei festem  $|\Delta m_{23}^2| = 2 \cdot 10^{-3} eV^2$  (a) und in der  $|\Delta m_{23}^2| - \sin^2 2\theta_{13}$ -Ebene bei festem  $|\Delta m_{12}^2| = 0.5 \cdot 10^{-4} eV^2, 2 \cdot 10^{-4} eV^2, 8 \cdot 10^{-4} eV^2$  (b,c,d) dargestellt, wobei die exakten Formeln (4.10) für die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten benutzt wurden. Wir haben dabei ein MINOS-ähnliches Experiment [62] angenommen mit einer Baseline von  $L = 730$  km und einer Energieverteilung um  $E = 6$  GeV mit  $\sigma \sim 3$  GeV. Eingezeichnet sind auch der durch CHOOZ ausgeschlossene Bereich (senkrecht schattierter Bereich rechts), die MINOS Sensitivität (dicke Linie in b,c,d) und die Limites durch die atmosphärischen Fits zusammen mit  $|\Delta m_{23}^2| > |\Delta m_{12}^2|$  (horizontale Linien). Wie man sieht ist der Parameterbereich den MINOS erreichen kann nicht allzugroß, allerdings könnte trotzdem ein maximaler Effekt von 40% in den Standardinterpretationen [36] des solaren Problems beobachtet werden. Für Experimente mit anderen Setups als MINOS, können die Ergebnisse leicht über einen Faktor  $\langle L/E \rangle / (100m/MeV)$  skaliert werden, da die Ergebnisse mit guter Näherung nur von  $\langle L/E \rangle$  abhängig sind.

Abb. 4.1(b–d) unterscheiden sich durch den verwendeten Wert für  $|\Delta m_{12}^2|$ . In Abb. 4.1(b) wurde ein für CP-Verletzung ungünstiger Wert von  $|\Delta m_{12}^2| = 0.5 \cdot 10^{-4}$  gewählt, während in Abb. 4.1(c) ein CP-optimistischer Wert von  $|\Delta m_{12}^2| = 2 \cdot 10^{-4}$  verwendet wurde. Wie in den Abb. 4.1(b,c) zu sehen ist, variiert die Sensitivität von MINOS zwischen 2% bis 10% und 10% bis 40%, je nach dem gewählten Wert von

<sup>1</sup>Dann wird der  $\sin^2 \Delta_{23}$  Term genauso klein wie der  $\sin^2 \Delta_{13}$  Term

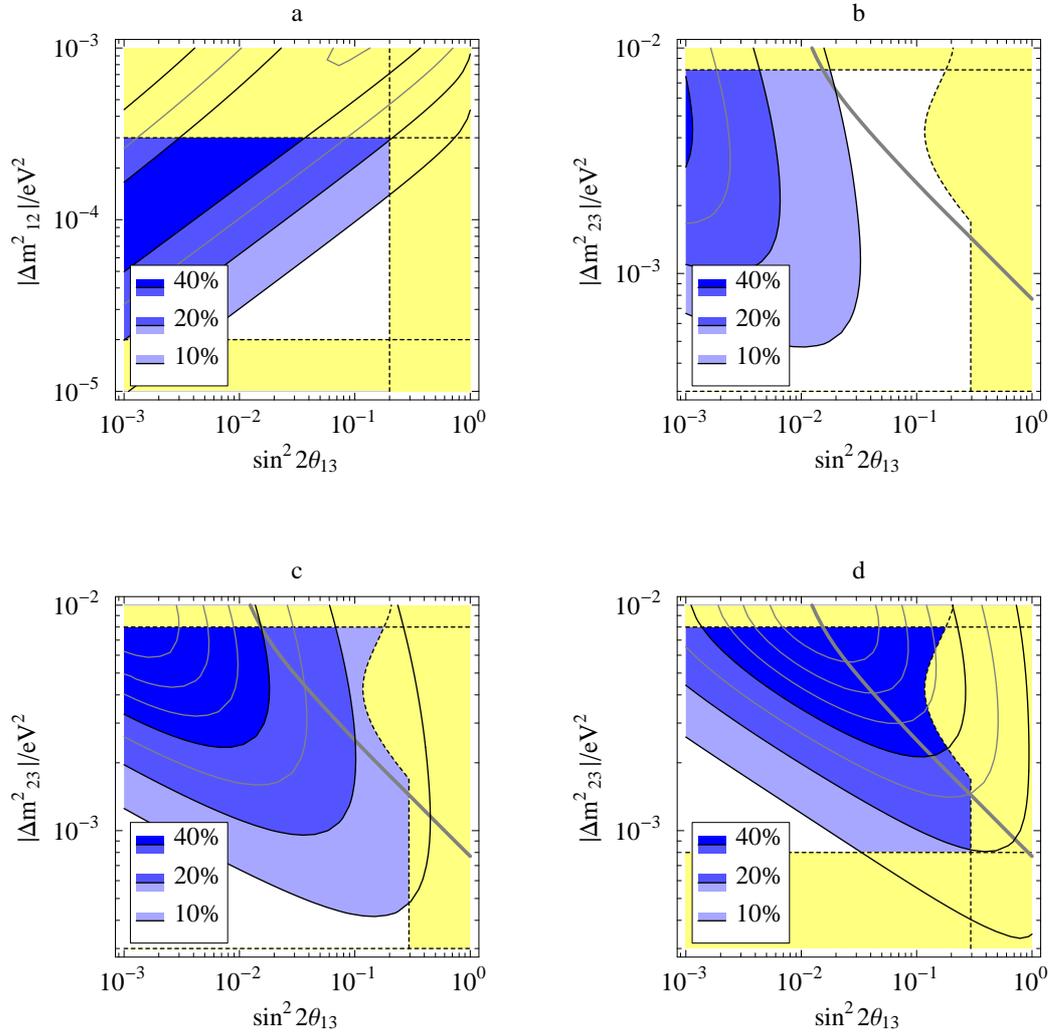


Abbildung 4.1: Konturlinien für  $|a_{\nu\mu\nu_e}^{CP}/\sin\delta|$  in der  $\sin^2 2\theta_{13}$ - $|\Delta m_{12}^2|$ -Ebene für  $|\Delta m_{23}^2| = 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$  (a) und in der  $\sin^2 2\theta_{13}$ - $|\Delta m_{23}^2|$ -Ebene für  $|\Delta m_{12}^2| = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ eV}^2, 2 \cdot 10^{-4} \text{ eV}^2, 8 \cdot 10^{-4} \text{ eV}^2$  (b, c, d) mit  $\sin^2 2\theta_{12} = \sin^2 2\theta_{23} = 1$  und  $\langle L/E \rangle \simeq 100 \text{ m/MeV}$  (siehe Text). Die Grenzen des erlaubten Parameterbereichs von  $|\Delta m^2|$  werden durch die schattierten horizontalen Bereiche dargestellt. Sie entsprechen der Gleichung (2.17), in (d) wurde zusätzlich  $|\Delta m_{23}^2| > |\Delta m_{12}^2|$  benutzt. Die schattierten Bereiche auf der rechten Seite entsprechen den Grenzen durch CHOOZ und den atmosphärischen Neutrinos. Die fette durchgezogene Linie stellt die MINOS Sensitivität dar.

$|\Delta m_{12}^2|$  und der Amplitude  $\sin^2 2\theta_{13}$  der  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  Oszillation. In der letzten Abbildung 4.1(d) wurde schließlich ein Wert gewählt, der in der Standardinterpretation der solaren Experimente nicht erlaubt ist, und daher in Abb. 4.1(a) im schattierten Bereich liegt, nämlich  $|\Delta m_{12}^2| = 8 \cdot 10^{-4}$ . Dieser Wert liegt bereits im unteren Bereich der Größenordnung der Parameter aus den atmosphärischen Neutrinoexperimenten, daher verschiebt sich die Grenze für  $\Delta m_{23}^2$  in Abb. 4.1(d) nach oben ( $|\Delta m_{23}^2| > |\Delta m_{12}^2|$ ). Man kann diesen Wert beispielsweise erhalten, falls man große systematische Fehler, z.B. im Chloexperiment [38] annimmt. Für diesen Fall werden erwartungsgemäß wesentlich höhere CP-Verletzungen erreicht, Werte von bis zu 70% sind möglich. Insgesamt sieht man, daß im Kanal  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  die CP-Verletzung also tatsächlich meßbar sein kann, oder zumindest die Ergebnisse aus den reinen CP-erhaltenden Wahrscheinlichkeiten verschmutzen kann.

### Prinzipielles Verhalten der Graphen

Während obige Abbildungen mit den exakten Oszillationsformeln gerechnet wurden, benutzen wir nun die Näherung (4.17), um das prinzipielle Verhalten der CP-Verletzung in den Plots auch verstehen zu können. Da in der Asymmetrie die Unterdrückung aufgrund von  $\langle \sin \Delta_{12} \rangle$  durch eine Verstärkung aufgrund von  $1/\sin 2\theta_{13}$  ausbalanciert wird, ergibt sich mit sinkendem  $\sin 2\theta_{13}$  eine Zunahme von  $a^{CP}$ . Für sehr kleine  $\sin 2\theta_{13}$  wird  $a^{CP}$  allerdings wieder abnehmen, da in dem Fall die gemachten Näherungen nicht mehr gelten, ansonsten würde in Gleichung (4.17) der  $\sin^2 \Delta_{23}$ -Term genauso klein wird wie der  $\sin^2 \Delta_{12}$ -Term. Wandert man auf gerader Linie (konstante Massendifferenz) von rechts nach links wird zunächst der CP-verletzenden Anteil größer bevor er wieder kleiner wird. Speziell für feste  $|\Delta m_{12}^2|$  (Abb. 4.1(b,c,d)) gilt  $|a_{\nu_\mu \nu_e}^{CP} / \sin \delta| \propto (\sin^2 2\theta_{13})^{-1/2}$ , solange die Näherung (4.17) hält. In diesem Bereich sind die Konturlinien vertikal, wenn man von den kleinen Effekten von  $\sin^2 \Delta_{23}$  in  $\langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{12} \rangle / \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle$  absieht. Dies gilt allerdings nicht mehr, wenn man zu kleinen  $|\Delta m_{23}^2|$  geht, dann ist im CP-erhaltenden Anteil der  $\sin^2 \Delta_{12}$ -Term nicht mehr vernachlässigbar. Einfach zu sehen ist dies an der Tatsache, daß sonst in Gleichung (4.17)  $|a_{\nu_\mu \nu_e}^{CP}| > 1$  gelten würde, falls zusätzlich  $\sin^2 2\theta_{13}$  klein ist. Die Linien weichen dann von der Vertikalen ab und biegen sich nach links oben. Der Wert von  $|\Delta m_{23}^2|$  an dem der  $\sin^2 \Delta_{12}$ -Term anfängt die Konturlinien zu beeinflussen, liegt höher wenn der  $\sin^2 \Delta_{23}$ -Term in  $P_{CP}$  kleiner ist. Dies ist der Fall, wenn  $\sin^2 2\theta_{13}$  kleiner wird. Daher biegen sich die linken Konturlinien früher nach oben.

### 4.2.3 Long-Baseline $\nu_\mu - \nu_\tau$ Oszillationen

Nun betrachten wir noch die CP-Asymmetrien im Fall der Oszillation  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ . In denselben Näherungen wie im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal ergeben sich die Drei-Neutrino Formeln

dann zu:

$$P_{CP}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \simeq \cos^4 \theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle, \quad (4.18a)$$

$$|P_{\mathcal{CP}}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)| = |\cos \theta_{13} \sin 2\theta_{13} \sin \delta \langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{12} \rangle|. \quad (4.18b)$$

Für die CP-Asymmetrie ergibt sich:

$$\left| \frac{a_{\nu_\mu \nu_\tau}^{\text{CP}}}{\sin \delta} \right| \simeq \left| \frac{\sin 2\theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{12} \rangle}{\cos^3 \theta_{13} \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle} \right|. \quad (4.19)$$

Während  $P_{\mathcal{CP}}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)$  bis auf das Vorzeichen identisch mit  $P_{\mathcal{CP}}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$  (Gl. 4.14) ist, wird  $P_{CP}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)$  nicht durch  $\sin^2 2\theta_{13}$  unterdrückt. Damit fällt der Verstärkungsfaktor in der Asymmetrie weg und die Asymmetrie wird kleiner als im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal. Weiterhin wird durch die höheren Raten auch der experimentelle Anteil der CP-Verletzung erhöht, was zusätzlich die Trennung der CP-Effekte erschwert. Dies alles kann auch nicht durch den Vorteil einer besseren Statistik, der durch die höheren Raten erreicht wird, aufgehoben werden. Daher ist dieser Kanal prinzipiell ungeeignet für eine Messung der CP-Verletzung. Dies untermauern auch

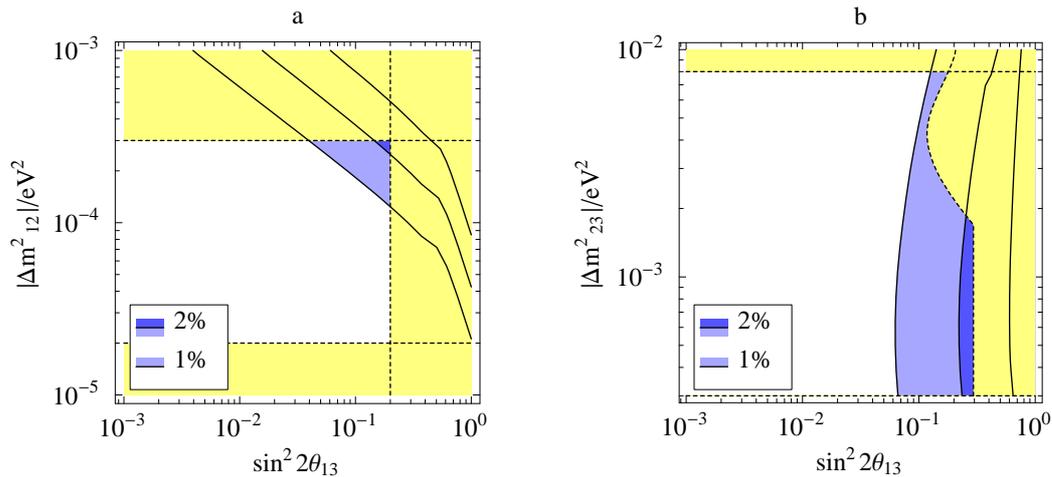


Abbildung 4.2: Konturlinien für  $|a_{\nu_\mu \nu_\tau}^{\text{CP}} / \sin \delta|$  in der  $|\Delta m_{12}^2| - \sin^2 2\theta_{13}$  Ebene für  $|\Delta m_{23}^2| = 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$  (a) und in der  $|\Delta m_{23}^2| - \sin^2 2\theta_{13}$  Ebene für  $|\Delta m_{12}^2| = 2 \cdot 10^{-4} \text{ eV}^2$  (b) für  $\sin^2 2\theta_{12} = \sin^2 2\theta_{23} = 1$  und  $\langle L/E \rangle \simeq 290 \text{ m/MeV}$ . Die Grenzen des erlaubten Parameterbereichs von  $|\Delta m^2|$  werden durch die schattierten horizontalen Bereiche dargestellt, entsprechend der Gleichung (2.17). Die schattierten Bereiche auf der rechten Seite entsprechen den Grenzen von CHOOZ und den atmosphärischen Neutrinos.

die Graphen 4.2 in denen die Konturlinien für  $|a_{\nu_\mu \nu_\tau}^{\text{CP}} / \sin \delta|$  in der  $|\Delta m_{12}^2| - \sin^2 2\theta_{13}$ -Ebene für  $|\Delta m_{23}^2| = 2 \cdot 10^{-3}$  (a) und in der  $|\Delta m_{23}^2| - \sin^2 2\theta_{13}$ -Ebene für ein optimistisches  $|\Delta m_{12}^2| = 2 \cdot 10^{-4}$  dargestellt sind. Man sieht, daß die Asymmetrien überall kleiner als 5% sind, obwohl im Vergleich zu  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  ein günstigeres Verhältnis

$\langle L/E \rangle \simeq 290 \text{ m/MeV}$  verwendet wurde. Daher werden in jedem Fall die Materieeffekte die CP-Asymmetrie dominieren und wir betrachten diesen Kanal nicht weiter.

#### 4.2.4 Materieeffekte in Long-Baseline Experimenten

Bei einem typischen Experiment zur CP-Verletzung liegen die Parameter nicht allzuweit von denjenigen für MSW-Resonanz entfernt. Besonders da im Neutrinostrahl immer die Energien verschmiert sind, ist es sehr wahrscheinlich, daß zumindest ein Teil der Neutrinos resonant sind und dadurch die CP-Messung durch Materieeffekte verfälscht wird. Daher betrachten wir nun noch die CP-Effekte unter Berücksichtigung der Materieeffekte mit den Oszillationswahrscheinlichkeiten aus Kap. 2.5.3 mit der Annahme  $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}$ . Im Gegensatz zu den analytischen Behandlung im Vakuumfall, berechnen wir die Korrekturen durch Materie nur numerisch. In Abbildung 4.3 ist die CP-Asymmetrie für die selben Parameter wie in Abbildung 4.1 ( $\langle L/E \rangle \simeq 100 \text{ m/MeV}$ ,  $\Delta m_{12}^2 = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\sin^2(2\theta_{12}) = \sin^2(2\theta_{23}) = 1$ ) dargestellt. Die Konturlinien wurden in äquidistanten Schritten von 10% zwischen 10% und 80% Prozent gewählt. Die schattierten Regionen sind wiederum durch CHOOZ ausgeschlossen und die fette Linie gibt die Sensitivität von MINOS an. Zum besseren Vergleich werden folgende Asymmetrien gezeigt: Plot (a) enthält die CP-Asymmetrie im Vakuum bei maximaler Phase  $a_{\mu e}^{CP}(\delta = \pi/2, Vak) \equiv a_{\mu e}^{tot}$  und ist identisch mit Plot 4.1(c). Plot (b) zeigt die im Experiment gemessene Gesamtasymmetrie in Materie mit maximaler Phase  $a_{\mu e}^{tot}(\delta = \pi/2, Mat)$ , Plot (c) den, rein durch das Setup bedingten, experimentellen Anteil in Materie  $a_{\mu e}^{exp}(\delta = 0, Mat)$  und Plot (d) schließlich den rein intrinsischen Anteil in Materie bei maximaler Phase  $a_{\mu e}^{CP}(\delta = \pi/2, Mat) \neq a_{\mu e}^{tot}$ . Letzterer wurde dabei durch eine simplen Subtraktion des experimentellen Anteils (c) von der totalen Asymmetrie (b) gewonnen. Wenn man (c) mit (a) vergleicht sieht man, daß der durch Materie induzierte Effekt relativ klein ist gegenüber der intrinsischen Asymmetrie. Man kann also tatsächlich die intrinsische Asymmetrie durch einfache Subtraktion der theoretisch berechneten Materieeffekte nähern, ohne allzu große Fehler zu erhalten<sup>2</sup>. Dies kann man überprüfen indem man die Graphen (a) und (d) miteinander vergleicht. Allerdings ist diese Näherung sicherlich nicht ganz exakt, da die Effekte nicht linear addieren. Diese Vorgehensweise setzt natürlich voraus, daß die Oszillationsparameter führender Ordnung sehr genau bekannt sind, um die Materieeffekte möglichst exakt berechnen zu können. Fehler bei der Bestimmung der Oszillationsparameter gehen dann natürlich in die Fehler der intrinsischen Asymmetrie ein. Insgesamt sieht man, daß die Separation im Prinzip möglich, aber sicher nicht einfach ist, und genaue experimentelle Informationen nötig sind. Zusätzlich zeigt Abb. 4.1(b) noch, daß die großen CP-Effekte durch Materie in Richtung größere  $\sin^2 2\theta_{13}$  und kleinere  $\Delta m_{23}^2$  geschoben werden. Dadurch erhält man im Sensitivitätsbereich von MINOS etwas höhere CP-Asymmetrien von bis zu 50% statt der

<sup>2</sup>Dabei ist natürlich auf die unterschiedlichen Vorzeichen der Korrekturen zu achten, und passend zu subtrahieren oder addieren.

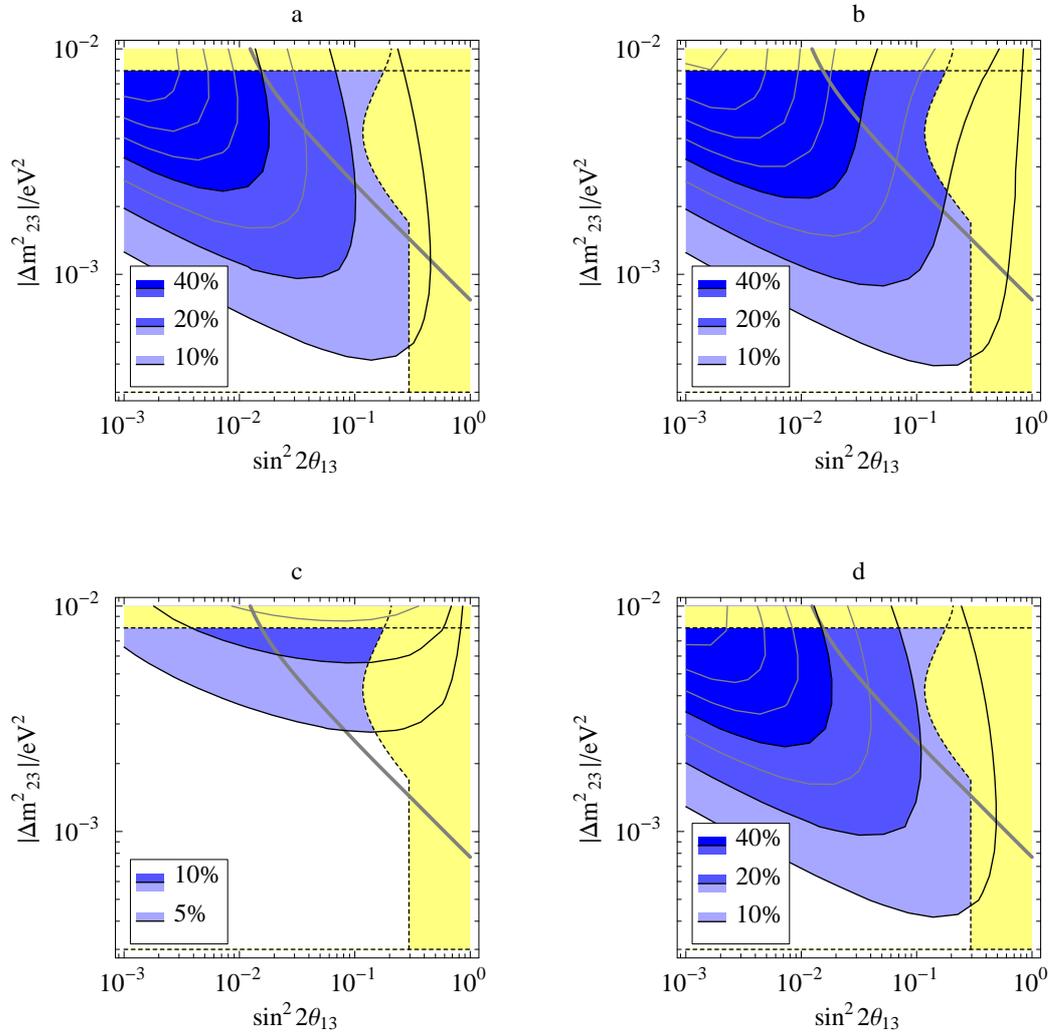


Abbildung 4.3: *CP-Asymmetrien für die vier im Text diskutierten Fälle analog zu Abb. 4.1: (a) intrinsische CP-Asymmetrie  $a_{\mu e}^{\text{CP}}(\delta = \pi/2, \text{Vak}) \equiv a_{\mu e}^{\text{tot}}$  in Vakuum mit maximaler CP-Phase, (b) im Experiment gemessene gesamte CP-Asymmetrie  $a_{\mu e}^{\text{tot}}(\delta = \pi/2, \text{Mat})$  in Materie mit maximaler CP-Phase, (c) experimentelle Asymmetrie  $a_{\mu e}^{\text{exp}}(\delta = 0, \text{Mat})$  in Materie ohne CP-Phase und (d) durch Subtraktion korrigierte CP-Asymmetrie  $a_{\mu e}^{\text{tot}}(\delta = \pi/2, \text{Mat}) - a_{\mu e}^{\text{exp}}(\delta = 0, \text{Mat})$  in Materie mit maximaler Phase.*

40%.

Zusammenfassend kann man sagen, daß CP-Verletzung im Drei-Neutrino Fall nur in Long-Baseline Experimenten und hier nur im Kanal  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  gemessen werden können, dann aber sogar für die Standardanalysen der solaren Daten. Die CP-Effekte sind groß genug um Ergebnisse zu verfälschen, die aus Long-Baseline Experiment gewonnen wurden mit Analysen, die CP-Effekte nicht berücksichtigen. Im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal und in Short-Baseline Experimenten sind die Effekte vernachlässigbar. Materieeffekte können bei den für CP-Verletzung interessanten Baselines vernachlässigt werden, oder falls nötig durch simple Subtraktion genähert werden. Daher werden wir diese im folgenden Vier-Neutrino Fall von vornherein nicht berücksichtigen.

### 4.3 Vier-Neutrino Fall

Die Annahme, daß in der Neutrinooszillation vier Neutrinos beteiligt sind (Kap. 2.6), eröffnet einige neue Möglichkeiten für die CP-Asymmetrie. Neben dem Vorteil der Berücksichtigung der bisher ignorierten, zusätzlichen Ergebnisse von LSND bestehen potentiell durch die größere Anzahl von Parametern auch bessere Möglichkeiten zur Beobachtung von CP-Verletzung. Im Drei-Neutrino Fall wurden die Ergebnisse der CP-Verletzung hauptsächlich durch die sehr kleine, quasi degenerierte solare Massendifferenz beschränkt. Für die Existenz einer CP-Verletzung sind aber mindestens zwei nichtdegenerierte Massendifferenzen notwendig. Daher wird im Vier-Neutrino Fall die zusätzliche Massendifferenz die Beobachtung von CP-Verletzung potentiell erleichtern, denn diese ist sogar noch größer als die atmosphärische Massendifferenz. Unter diesen Umständen kann die solare Massendifferenz sowohl im CP-erhaltenden als auch im CP-verletzenden Anteil der Oszillationswahrscheinlichkeiten komplett vernachlässigt werden, ohne die CP-Verletzung zu verhindern. Daher sind wir im Vier-Neutrino Fall zur Beobachtung der CP-Verletzung nicht mehr nur auf das obere Ende der solaren LMA-MSW-Lösung angewiesen, so wie dies im Drei-Neutrino Szenario der Fall war. CP-Verletzung kann auch beobachtet werden, falls sich eine der anderen solaren Lösungen als wahr herausstellen sollte. Für die Größe der Mischungswinkel besteht diese Freiheit allerdings nicht, im günstigsten Fall sollte jeder einzelne maximal sein. Speziell bei den solaren Neutrinos sollte auch im Vier-Neutrino Fall eine Lösung mit großem Mischungswinkel realisiert sein, besonders da zumindest noch ein weiterer Mischungswinkel klein ist (CHOOZ).

Wie im Drei-Neutrino Fall auch haben wir nun das Problem der verschiedenen Möglichkeiten für die Anordnung der Massenzustände. Im Gegensatz dazu bleiben im Vier-Neutrino Fall aber zwei physikalisch grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten der Massenanordnung übrig<sup>3</sup>. Die weiteren Möglichkeiten fallen wegen der Massen-

---

<sup>3</sup>Außerdem gibt es natürlich noch die Freiheit der Vorzeichen der Massendifferenzen, die nur in Materie eine Rolle spielen siehe Kap. 2.6, 2.5.2.

hierarchie  $\Delta m_{solar}^2 \ll \Delta m_{atm}^2 \ll \Delta m_{LSND}^2$  weg. Da es außerdem im Vakuum unerheblich ist, mit welcher der Massendifferenzen man beginnt, wählen wir dazu, wie im Drei-Neutrino Fall, das kleinste Massenquadrat.

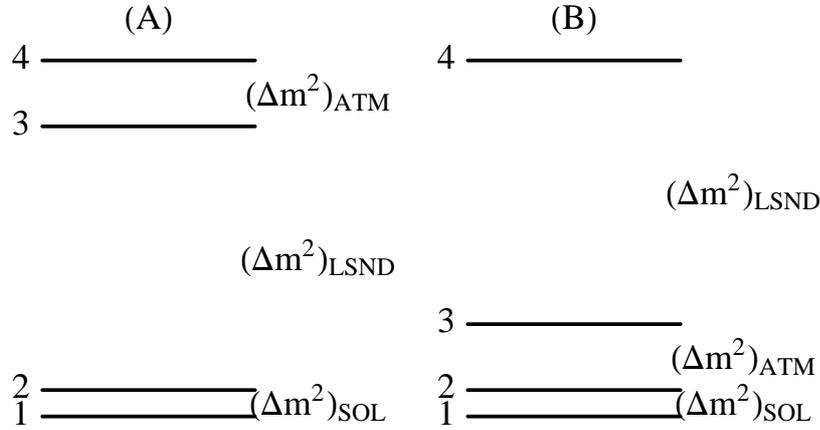


Abbildung 4.4: Mögliche Massenschemen im Vier-Neutrino-Szenario. Per Definition wurde in jedem der Fälle mit der kleinsten Massendifferenz begonnen. Fall A und B unterscheiden sich dabei durch die Reihenfolge der atmosphärischer Massendifferenz und der Massendifferenz aus LSND. Szenario (B) kann aber durch die experimentellen Ergebnisse ausgeschlossen werden (siehe Text).

- A) Die mittlere Massendifferenz liegt oberhalb der beiden anderen Massendifferenzen zwischen den Eigenzuständen drei und vier. Es gilt:  $|\Delta m_{12}^2| \equiv \Delta m_{SUN}^2 \ll |\Delta m_{34}^2| \equiv \Delta m_{ATM}^2 \ll |\Delta m_{14}^2| \simeq |\Delta m_{24}^2| \simeq |\Delta m_{13}^2| \simeq |\Delta m_{23}^2| \equiv \Delta m_{LSND}^2$
- B) Die mittlere Massendifferenz liegt zwischen den beiden anderen Massendifferenzen, also zwischen einem der Eigenzustände eins und zwei und einem der Eigenzustände drei und vier, üblicherweise wählt man den zweiten und dritten Eigenzustand. Es gilt:  $|\Delta m_{12}^2| \equiv \Delta m_{SUN}^2 \ll |\Delta m_{13}^2| \simeq |\Delta m_{23}^2| \equiv \Delta m_{ATM}^2 \ll |\Delta m_{14}^2| \simeq |\Delta m_{24}^2| \simeq |\Delta m_{34}^2| \equiv \Delta m_{LSND}^2$

In unseren Analysen werden wir von den beiden Möglichkeiten allerdings nur Schema (A) betrachten, weil nur dieses mit den Ergebnissen der Experimente vereinbar ist [71]. Diese Einschränkung erhält man durch Kombination der verschiedenen Experimente, die neben der Größe der Massendifferenz auch vorgeben zwischen welchen Zuständen die Oszillation stattgefunden hat. Gut zu verstehen ist das im Bild der Zwei-Neutrino Oszillation. Beginnt man in Szenario (B) mit der solaren Massendifferenz, welche  $\nu_e$  enthält, und läßt als nächstes die atmosphärische Massendifferenz anschließen, welche  $\nu_\mu$  enthält, dann kann die folgende größte Massendifferenz nicht mehr zwischen  $\nu_\mu$  und  $\nu_e$  stattfinden, was aber im Widerspruch zu den Ergebnissen von LSND ist.

Wenden wir uns nun den Oszillationswahrscheinlichkeiten im Vier-Neutrino Fall zu. Wie schon in Kap. 2.4 behandelt, existieren im Vier-Neutrino Fall deutlich mehr freie Parameter als im Drei-Neutrino Fall, nämlich sechs Winkel und drei CP-Phasen zusätzlich zu den drei Massenquadraten. Da die Existenz der CP-Verletzung durch die zwei wesentlich größeren Massendifferenzen  $\Delta m_{atm}^2$  und  $\Delta m_{LSD}^2$  sichergestellt ist, setzen wir die solare Massendifferenz identisch Null  $|\Delta m_{12}^2| = 0$ . Dies ist zumindest für Experimente korrekt, die nur auf  $\Delta m^2 \gtrsim 10^{-3}$  sensitiv sind, und wenn  $|\Delta m_{12}^2|$  nicht am oberen Limit der LMA-MSW Lösung (oder sogar darüber) liegt. In diesem Fall sehen die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
P_{CP}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) &= \delta_{lm}(1 - 4|U_{l4}|^2 \sin^2 \Delta_{24} - 4|U_{l3}|^2 \sin^2 \Delta_{23}) \\
&\quad - 4 \operatorname{Re} J_{34}^{ml} \sin^2 \Delta_{34} + 4(\operatorname{Re} J_{34}^{ml} + \operatorname{Re} J_{44}^{ml}) \sin^2 \Delta_{24} \\
&\quad + 4(\operatorname{Re} J_{33}^{ml} + \operatorname{Re} J_{34}^{ml}) \sin^2 \Delta_{23} ,
\end{aligned} \tag{4.20a}$$

$$P_{\overline{CP}}(\nu_{e_l} \rightarrow \nu_{e_m}) = 8 \operatorname{Im} J_{34}^{ml} (\sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{34} \cos \Delta_{34} + \sin^2 \Delta_{34} \sin \Delta_{23} \cos \Delta_{23}) , \tag{4.20b}$$

wobei die zweite und dritte Zeile von Gl. (4.20a) von besonderem Interesse für unser Vorhaben sind. Wie man in Gl. (4.20b) sieht ist es tatsächlich möglich eine CP-Asymmetrie rein durch die Massendifferenzen  $\Delta m_{23}^2$  und  $\Delta m_{34}^2$  zu erzeugen, die solare Massendifferenz ist dazu offensichtlich nicht mehr notwendig und die Wahl  $|\Delta m_{12}^2| = 0$  korrekt. Wir werden später in den Graphiken sehen, daß aus diesem Grund die CP-Verletzung tatsächlich groß werden kann. In Gleichung (4.20) sehen wir weiterhin, daß die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten zwischen zwei Neutrinos lediglich von einem Unterblock der Mischungsmatrix bestimmt werden. Es handelt sich dabei um die  $2 \times 2$  Matrix, die durch die beiden beteiligten Flavoureigenzustände  $l, m$  und die zwei Masseneigenzustände 3, 4 aufgespannt wird. Die beiden anderen Masseneigenzustände 1, 2 gehen folglich nirgends in die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten ein. Von den 8 reellen Parametern die diese Submatrix beschreiben, können 3 unphysikalische Phasen wegrotiert werden und es bleiben nur eine physikalische Phase und 4 Mischungsparameter übrig. Für diese verbleibenden 5 Parameter werden wir im Folgenden eine Parametrisierung festlegen.

### 4.3.1 Parametrisierung

Die Projektionen der Flavourzustände auf den 34-Masseneigenraum seien durch  $\nu'_{e_l} = U_{l3}\nu_3 + U_{l4}\nu_4$  und  $\nu'_{e_m} = U_{m3}\nu_3 + U_{m4}\nu_4$  gegeben. Dann definieren die Größen  $c_l, c_m$  die quadratischen Längen dieser Projektion analog zu Ref. [72]:

$$c_l = |U_{l3}|^2 + |U_{l4}|^2, \quad c_m = |U_{m3}|^2 + |U_{m4}|^2 . \tag{4.21}$$

Ferner sei als dritter Parameter die Orientierung von  $\nu'_{e_l}$ , nämlich  $\theta_l \in [0, \pi/2]$  definiert als

$$(|U_{l3}|, |U_{l4}|) = \sqrt{c_l}(\cos \theta_l, \sin \theta_l) , \tag{4.22}$$

und als vierter Parameter  $\phi_{lm} \in [0, \pi/2]$ , die relative Orientierung von  $\nu'_{e_l}$  und  $\nu'_{e_m}$ :

$$\cos \phi_{lm} = |U_{l3}^* U_{m3} + U_{l4}^* U_{m4}| / \sqrt{c_l c_m} . \quad (4.23)$$

Die CP-verletzende Phase sei schließlich durch

$$\delta_{lm} = \arg(U_{l3}^* U_{m3} U_{l4}^* U_{m4}) = \arg(J_{34}^{e_m e_l}) \quad (4.24)$$

definiert. Die Oszillationsamplituden in Gl. (4.20) sehen mit diesen Parametern wie folgt aus:

$$4 \operatorname{Re} J_{34}^{ml} = c_l c_m \sin 2\theta_l (\cos 2\phi_{lm} \sin 2\theta_l + \sin 2\phi_{lm} \cos 2\theta_l \cos \delta_{lm}) \quad (4.25a)$$

$$(\operatorname{Re} J_{34}^{ml} + \operatorname{Re} J_{44}^{ml}) = c_l c_m \sin \theta_l \cos \phi_{lm} (\cos \phi_{lm} \sin \theta_l + \sin \phi_{lm} \cos \theta_l \cos \delta_{lm}) \quad (4.25b)$$

$$(\operatorname{Re} J_{33}^{ml} + \operatorname{Re} J_{34}^{ml}) = c_l c_m \cos \theta_l \cos \phi_{lm} (\cos \phi_{lm} \cos \theta_l - \sin \phi_{lm} \sin \theta_l \cos \delta_{lm}) \quad (4.25c)$$

$$4 \operatorname{Im} J_{34}^{ml} = c_l c_m \sin 2\theta_l \sin 2\phi_{lm} \sin \delta_{lm} . \quad (4.25d)$$

### 4.3.2 Eingrenzung des erlaubten Parameterraums

Die 5 Parameter  $c_l$ ,  $c_m$ ,  $\theta_l$ ,  $\phi_{lm}$ ,  $\delta_{lm}$  können jedoch nicht willkürlich gewählt werden, da sie als Unterblock  $lm/34$  Teil einer unitären Gesamtmischungsmatrix sind. Daher müssen sie folgende Unitaritätsbedingungen erfüllen

$$0 \leq c_l \leq 1 ; \quad 0 \leq c_m \leq 1 , \quad (4.26a)$$

$$c_l c_m \cos^2 \phi_{lm} \leq (1 - c_l)(1 - c_m) . \quad (4.26b)$$

Um diese Relationen zu verstehen kann man sich überlegen, daß die Untermatrizen nur dann in eine unitäre Matrix eingebunden werden können, wenn die zwei  $\mathbb{C}^2$ -Vektoren  $(U_{l3}, U_{l4})$  und  $(U_{m3}, U_{m4})$  zu einem  $\mathbb{C}^4$ -Vektor erweitert werden können. Gleichung (4.26a) stellt dann die Normierungsbedingung dar und Gleichung (4.26b) die Orthogonalität der beiden  $\mathbb{C}^4$ -Vektoren.

Eine zu den Unitaritätsbedingungen zusätzliche Einschränkung für die Parameter  $c_l$ ,  $c_m$ ,  $\theta_l$ ,  $\phi_{lm}$ ,  $\delta_{lm}$  erhält man aus den Ergebnisse der  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  und  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$  Disappearance Experimente (CHOOZ [46, 47], Bugey [73], CDHS, CSFR [74, 75]), den solaren und atmosphärischen Experimenten und LSND (Kap. 2.6). Um diese Einschränkungen des Parameterraums aus den Experimenten extrahieren zu können, drücken wir die Oszillationsformeln durch diese Parameter aus. In der Näherung  $|\Delta m_{34}^2| \ll |\Delta m_{23}^2| \simeq |\Delta m_{24}^2|$  ergibt sich:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) \simeq 1 - 4c_e(1 - c_e) \sin^2 \Delta_{23} - c_e^2 \sin^2 2\theta_e \sin^2 \Delta_{34} , \quad (4.27a)$$

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \simeq 1 - 4c_\mu(1 - c_\mu) \sin^2 \Delta_{23} - c_\mu^2 \sin^2 2\theta_\mu \sin^2 \Delta_{34} , \quad (4.27b)$$

$$P_{CP}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \simeq 4c_e c_\mu \cos^2 \phi_{\mu e} \sin^2 \Delta_{23} - c_e c_\mu \sin 2\theta_\mu (\cos 2\phi_{\mu e} \sin 2\theta_\mu + \sin 2\phi_{\mu e} \cos 2\theta_\mu \cos \delta_{\mu e}) \sin^2 \Delta_{34} , \quad (4.27c)$$

$$P_{\mathcal{CP}}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \simeq 2c_e c_\mu \sin 2\theta_\mu \sin \delta_{\mu e} \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{34} . \quad (4.27d)$$

Schon im Drei-Neutrino Fall haben wir gesehen, daß die Disappearance Experimente  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  und  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$  (CHOOZ, Bugey) einen wichtigen Limit für den Mischungswinkel  $\theta_{13}$  liefern. Auch im Vier-Neutrino Fall erhalten wir daraus obere Schranken und zwar an die Amplituden der  $\sin^2 \Delta_{23}$ - und  $\sin^2 \Delta_{34}$ -Terme auf der rechten Seite von Gleichung (4.27a,b). Dies sind insbesondere  $4c_e(1 - c_e)$  und  $4c_\mu(1 - c_\mu)$ , da in den SBL Experimenten - um solche handelt es sich bei den betrachteten Experimenten - der  $\sin^2 \Delta_{34}$ -Term vernachlässigt werden kann. Diese Schranken sind abhängig vom genauen Wert von  $\Delta m_{32}^2$ .

$$4c_e(1 - c_e) \leq a_e^0(\Delta m_{32}^2) \quad (4.28a)$$

$$4c_\mu(1 - c_\mu) \leq a_\mu^0(\Delta m_{32}^2) \quad (4.28b)$$

Wegen der Kleinheit der Schranken  $a_e^0, a_\mu^0$  kann diese Bedingung von den Parametern  $c_e$  und  $c_\mu$  nur in zwei möglichen Bereichen erfüllt werden, und zwar entweder Nahe Null oder Nahe Eins. Aufgrund der Ergebnisse aus den solaren und atmosphärischen Neutrinos kann zwischen diesen beiden Möglichkeiten entschieden werden. Da die solaren Neutrinooszillationen durch ein  $c_e$  nahe Eins unterdrückt werden würden [71], ergibt sich für  $c_e$  ein Limit der Form:

$$0 \leq c_e \leq 1/2(1 - \sqrt{1 - a_e^0}) \simeq a_e^0 . \quad (4.29)$$

Bei den atmosphärischen Experimenten wird die Oszillation ausschließlich durch  $\Delta m_{34}^2$  bestimmt, denn die Oszillation in  $\Delta m_{23}^2$  wird gemittelt:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) \simeq 1 - 2c_\mu(1 - c_\mu) - c_\mu^2 \sin^2 2\theta_\mu \sin^2 \Delta_{34} . \quad (4.30)$$

Da die ersten beiden Terme somit konstant sind, kann nur noch der dritte Anteil die Zenithwinkel-Abhängigkeit von SuperKamiokande erklären. Daher muß aus den beiden Möglichkeiten diejenige ausgewählt werden, bei der  $c_\mu$  (und  $\sin^2 2\theta_\mu$ ) nahe Eins ist, da sonst die Variationen zu gering wären, um mit SuperKamiokande übereinstimmen zu können.

$$1 \geq c_\mu \geq 1/2(1 + \sqrt{1 - a_\mu^0}) \simeq 1 - a_\mu^0 \quad (4.31)$$

Bleiben nun noch die Limites von LSND zu berücksichtigen. Zunächst einmal können wir feststellen, daß in Gleichung (4.27c) für das LSND Experiment nur der  $\sin^2 \Delta_{23}$ -Term eine Rolle spielt, da der  $\sin^2 \Delta_{34}$ -Term keine Zeit hat sich zu entwickeln. Die Oszillations-Wahrscheinlichkeit kann daher für LSND mit  $P \simeq 4c_e c_\mu \cos^2 \phi_{\mu e} \cdot \sin^2 \Delta_{23}$  genähert werden, wenn man zusätzlich annimmt, daß der CP-verletzende Anteil vernachlässigbar ist. Die LSND Ergebnisse können daher relativ anschaulich in einer  $A - |\Delta m_{23}^2|$ -Ebene geplottet werden mit  $A_{LSND} = 4c_e c_\mu \cos^2 \phi_{\mu e}$  (Abb. 4.5). Der für  $c_\mu$  gewählte Bereich (Gl. 4.31) stellt dann auch sicher, daß die Amplitude  $A_{LSND}$  des  $\sin^2 \Delta_{23}$ -Terms für LSND nicht zu klein wird. Denn ein zusätzliches  $c_\mu \simeq 0$  würde ein  $A_{LSND} \simeq 0$  ergeben, was das LSND Ergebnis ausschließen würde (Abb. 4.5 gepunktete Linie) [72]. Zuletzt sei noch angemerkt, daß die solaren Ergebnisse keine weiteren

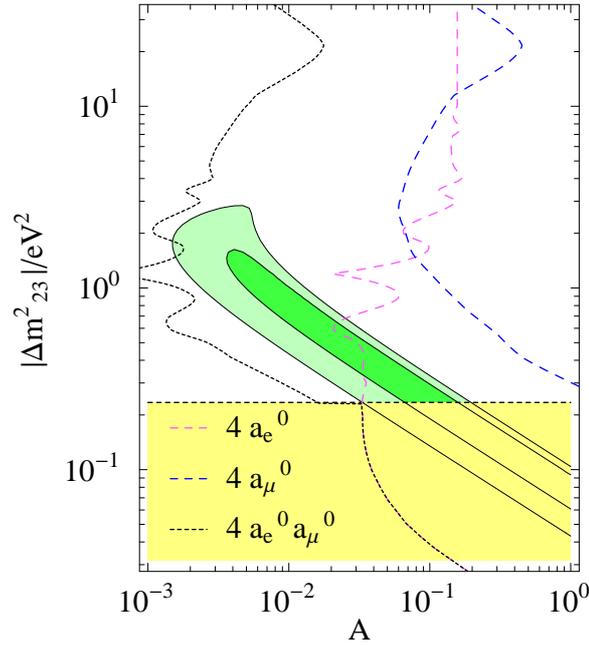


Abbildung 4.5: *Einschränkungen des Parameterbereichs der Amplitude  $A = 4c_e c_\mu \cos^2 \phi_{\mu e}$  der Übergangswahrscheinlichkeit in LSND. Das Band zeigt den durch LSND erlaubten Parameterbereich bei 90% und 99% C.L. Die gestrichelten Linien stellen  $4a_e^0$  (hell) und  $4a_\mu^0$  (dunkel) dar. Der Bereich rechts der gestrichelten Linien wird durch die Bedingung (4.38) ausgeschlossen. Die linke gepunktete Linie entspricht  $4a_e^0 a_\mu^0$  und demonstriert die Aussage von Gl. (4.38).*

Einschränkungen ergeben, da die solare Massendifferenz identisch Null gesetzt wurde. Insgesamt ergeben sich dann als Einschränkungen an die fünf Parameter.

$$0 \leq c_e \leq a_e^0 \quad \text{aus } \nu_e \rightarrow \nu_e \text{ Experimenten} \quad (4.32a)$$

$$1 - a_\mu^0 \leq c_\mu \leq 1 \quad \text{aus } \nu_\mu \rightarrow \nu_\mu \text{ Experimenten} \quad (4.32b)$$

$$c_e c_\mu \cos^2 \phi_{\mu e} \leq (1 - c_e)(1 - c_\mu) \quad \text{aus Unitarität} \quad (4.32c)$$

$$4c_e c_\mu \cos^2 \phi_{\mu e} = A \quad \text{aus LSND} \quad (4.32d)$$

Betrachten wir nun unter welchen Bedingungen die Gleichungen (4.32) gleichzeitig erfüllt werden können. Wenn auch die CP-Asymmetrie (Gl. 4.27) nicht direkt von  $c_\mu, c_e$  abhängt, so führt Gleichung (4.32c) doch indirekt über  $\cos^2 \phi_{\mu e}$  eine Abhängigkeit von diesen Parametern ein. Daher sind für uns zunächst die erlaubten Bereiche von  $c_\mu, c_e$  ausschlaggebend. Aus Gleichung (4.32c,d) folgt  $4c_e c_\mu \geq A$  und  $4(1 - c_e)(1 - c_\mu) \geq A$ , was man jeweils umformen kann zu  $c_e \geq A/(4c_\mu)$  bzw.  $c_\mu \leq 1 - A/(4(1 - c_e))$ . Setzt man diese Relationen ineinander ein, ergibt sich  $4c_e^2 - 4c_e + A \leq 0$  und  $4c_\mu^2 - 4c_\mu + A \leq 0$ . Somit erhält man insgesamt als untere bzw. obere Schranke von  $c_e$  bzw.  $c_\mu$  innerhalb der die Gleichungen (4.32) erfüllt werden

können:

$$c_e \geq c^{\min} = \frac{1 - \sqrt{1 - A}}{2} \left( \simeq \frac{A}{4} \right) ; \quad c_\mu \leq c^{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 - A}}{2} \left( \simeq 1 - \frac{A}{4} \right) . \quad (4.33)$$

Suchen wir nun noch die anderen Schranken zu  $c_e$  bzw.  $c_\mu$ . Dabei erhält man zwei potentielle Werte, wobei jeweils der kleinere bzw. größere Wert dann die Schranke ergibt. Den ersten der beiden Werte erhält man direkt aus Gl. (4.32a) bzw. Gl. (4.32b):

$$c_e^{\max} \leq a_e^0, \quad c_\mu^{\min} \geq (1 - a_\mu^0) . \quad (4.34)$$

Zusammen mit diesen Relationen folgt aus  $4c_e c_\mu \geq A$  bzw.  $4(1 - c_e)(1 - c_\mu) \geq A$  (aus Gl. (4.32c,d), siehe oben):

$$c_e^{\max} \leq 1 - \frac{A}{4a_\mu^0}, \quad c_\mu^{\min} \geq \frac{A}{4a_e^0} . \quad (4.35)$$

Damit erhalten wir insgesamt für die Grenzen von  $c_e$  und  $c_\mu$

$$\frac{A}{4} \simeq \frac{1 - \sqrt{1 - A}}{2} \leq c_e \leq \min \left( a_e^0, 1 - \frac{A}{4a_\mu^0} \right) , \quad (4.36a)$$

$$\max \left( 1 - a_\mu^0, \frac{A}{4c_e} \right) \leq c_\mu \leq \frac{1 + \sqrt{1 - A}}{2} \simeq 1 - \frac{A}{4} , \quad (4.36b)$$

wobei  $c_\mu = 1$  als gute Näherung benutzt werden kann, da bereits  $c_\mu^{\min} \geq 1 - a_\mu^0 \simeq 1$  gilt ( $a_\mu^0$  klein). Als Konsequenz von  $A = (1 - c_e^{\min})(1 - c_\mu^{\max})$  und  $c_\mu^{\max} \geq 1 - a_\mu^0$ , gilt  $c_e^{\min} \leq 1 - A/(4a_\mu^0)$  und somit ist Gleichung (4.36a) kein leeres Intervall.

Nun muß aber auch zusätzlich Gleichung (4.32a respektive b) für  $c_e^{\min}$  und  $c_\mu^{\max}$  erfüllt sein. Setzt man  $c_e^{\min} \leq a_e^0$  und  $c_\mu^{\max} \geq 1 - a_\mu^0$  in obige Relationen (4.33) ein, ergibt sich folglich:

$$A \leq 4a_e^0(1 - a_e^0) \quad \text{und} \quad A \leq 4a_\mu^0(1 - a_\mu^0) . \quad (4.37)$$

Aus letzteren Relationen folgt der in Experimenten erlaubte Parameterbereich, indem dann und nur dann Gl. (4.32) erfüllt werden kann:

$$A \leq \min (4a_\mu^0(1 - a_\mu^0), 4a_e^0(1 - a_e^0)) \simeq \min (4a_\mu^0, 4a_e^0) . \quad (4.38)$$

Dies ergibt eine wichtige Einschränkung für den zulässigen Bereich von  $\Delta m_{23}^2$  in LSND, der Bereich rechts von den gestrichelten Linien in Abbildung 4.5 ist durch diese Relation ausgeschlossen. Diese Einschränkungen führen auch dazu, daß der Bereich von  $c_e$  4.36 nicht mehr allzu groß ist. Zeigen wir nun noch, daß Gl. (4.38) auch tatsächlich für die Existenz von Lösungen von Gl. (4.32) ausreichend ist. Dazu genügt es zu prüfen ob  $c_e = c^{\min}$ ,  $c_\mu = c^{\max}$ ,  $\phi_{\mu e} = 0$  Lösungen der Gleichung (4.32) sind.

### 4.3.3 LBL und SBL $\nu_\mu - \nu_e$

Nachdem nun die Parametrisierung der Oszillations-Wahrscheinlichkeiten und die erlaubten Bereiche der Parameter im Vier-Neutrino Fall geklärt sind, wollen wir die Sensitivität auf die CP-Asymmetrie von verschiedenen Experimente betrachten. Beginnen wir zunächst mit dem Kanal  $\nu_\mu - \nu_e$ ; dann sind die relevanten Parameter  $c_e$ ,  $c_\mu$ ,  $\theta_\mu$ ,  $\phi_{\mu e}$  und  $\delta_{\mu e}$ . Der erlaubte Parameterbereich von  $c_e$  durch Gl. (4.36) angegeben, für  $c_\mu$  wählen wir die Näherung  $c_\mu = 1$ . Die atmosphärischen Neutrinoexperimente legen  $\sin^2 2\theta_\mu \simeq 1$  fest und  $\phi_{\mu e}$  wird durch LSND (Gl. 4.32d) bestimmt. Wie schon besprochen benutzen wir das Massenschema (A), wobei die Massendifferenzen die Werte  $|\Delta m_{34}^2| = \Delta m_{atm}^2 = (0.3 - 9) \cdot 10^{-3} eV^2$  und  $|\Delta m_{23}^2| = \Delta m_{LSND}^2 = (0.04 - 2.8) eV^2$  haben sollen. Wie im Drei-Neutrino Fall benutzen wir zur Analyse Terme der Größe  $|a_{\nu_\mu \nu_e}^{CP} / \sin \delta_{\mu e}|$ . Im Limit der durch das Massenschema A gegeben ist ( $\Delta m_{34}^2 \ll \Delta m_{23}^2$ ), ist die Abhängigkeit der CP-Asymmetrie  $|a_{\nu_\mu \nu_e}^{CP} / \sin \delta_{\mu e}|$  von  $|\delta_{\mu e}|$  vernachlässigbar. Insgesamt hat sich damit der relevante Parameterraum auf  $(|\Delta m_{34}^2|, |\Delta m_{23}^2|, c_e)$  reduziert. Zusammen mit  $\Delta m_{24}^2 \simeq \Delta m_{23}^2$  lauten die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten dann:

$$P_{CP}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \simeq 4c_e c_\mu \cos^2 \phi_{\mu e} \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle - c_e c_\mu \cos 2\phi_{\mu e} \langle \sin^2 \Delta_{34} \rangle, \quad (4.39a)$$

$$P_{\overline{CP}}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \simeq 4c_e c_\mu \sin \phi_{\mu e} \cos \phi_{\mu e} \sin \delta_{\mu e} \langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{34} \rangle. \quad (4.39b)$$

Die CP-Asymmetrie ergibt sich zu:

$$\left| \frac{a_{\nu_\mu \nu_e}^{CP}}{\sin \delta_{\mu e}} \right| \simeq \left| \frac{4 \sin \phi_{\mu e} \cos \phi_{\mu e} \langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{34} \rangle}{4 \cos^2 \phi_{\mu e} \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle - \cos 2\phi_{\mu e} \langle \sin^2 \Delta_{34} \rangle} \right|. \quad (4.40)$$

Auch wenn die Gleichung (4.40) scheinbar zeigt, daß die CP-Asymmetrie  $a_{\nu_\mu \nu_e}^{CP}$  nicht von  $c_e, c_\mu$  abhängt, führt Gleichung (4.32c) über  $\cos^2 \phi_{\mu e}$  eine Abhängigkeit von diesen Parametern ein.

### Short-Baseline Experimente

Im Falle der Short-Baseline Experimente kann in  $P_{CP}$  der  $\langle \sin^2 \Delta_{34} \rangle$ -Term gegenüber dem  $\langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle$ -Term vernachlässigt werden und es ergibt sich speziell:

$$\left| \frac{a_{\nu_\mu \nu_e}^{CP}}{\sin \delta_{\mu e}} \right| \simeq \left| \tan \phi_{\mu e} \frac{\langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{34} \rangle}{\langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle} \right|. \quad (4.41)$$

Selbst im CP-optimistischen Fall von  $|\Delta m_{23}^2| = 8 \cdot 10^{-3} eV^2$  ist folglich die CP-Asymmetrie in Short-Baseline-Experimenten durch  $\sin^2 \Delta_{34}$  stark unterdrückt. Die CP-Effekte würden nur dann meßbar werden, wenn im Gegenzug eine Verstärkung über ein großes  $\tan(\phi_{\mu e})$  stattfinden würde. Dies würde aber nach Gleichung (4.32c)

ein kleines  $A/4c_e$  bedeuten, was im Widerspruch zu den Ergebnissen von LSND steht. Der kleinste erlaubte Wert für  $A$  und der maximale Wert von  $c_e$  aus Gleichung (4.36) erzielen für  $A/c_e$  keinen wesentlich kleineren Wert als Eins. Folglich erwartet man, daß die CP-Verletzung vernachlässigbar ist, was auch im Plot 4.6(a) bestätigt wird. Wie man sieht ist die Asymmetrie selbst für maximale CP-Phase nirgends größer als 2%. In dieser Graphik wurden die Konturlinien für  $|a_{\nu_\mu n\nu_e}^{CP}/\sin\delta_{\mu e}|$  in der  $c_e - |\Delta m_{23}^2|$ -Ebene dargestellt, dazu wurden wie im Drei-Neutrino Fall die exakten Formeln benutzt (4.20, 4.25). Für die atmosphärische Oszillation wurde ein optimistischer Wert von  $|\Delta m_{34}^2| = 8 \cdot 10^{-3} eV^2$  verwendet, für das experimentelle Setup haben wir  $L \simeq 0.5$  km und eine breite Energieverteilung um  $\langle E \rangle = 1$  GeV mit  $\langle L/E \rangle \simeq 0.6$  ähnlich zu MiniBooNE gewählt. Der schattierte, ausgeschlossene Bereich wird durch Gl. (4.36) festgelegt.

### Long-Baseline Experimente

In einem Long-Baseline Experiment die wird die Abhängigkeit der CP-Asymmetrie von  $\Delta m_{23}^2$  vernachlässigbar, da diese durch die Mittelung über  $L/E$  ausgewaschen wird. Für die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten und die CP-Asymmetrie gilt dann:

$$P_{CP}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \simeq 2c_e c_\mu \cos^2 \phi_{\mu e} - c_e c_\mu \cos 2\phi_{\mu e} \langle \sin^2 \Delta_{34} \rangle , \quad (4.42a)$$

$$P_{\overline{CP}}(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \simeq 2c_e c_\mu \sin \phi_{\mu e} \cos \phi_{\mu e} \sin \delta_{\mu e} \langle \sin \Delta_{34} \rangle , \quad (4.42b)$$

$$\left| \frac{a_{\nu_\mu \nu_e}^{CP}}{\sin \delta_{\mu e}} \right| \simeq \left| \frac{2 \sin \phi_{\mu e} \cos \phi_{\mu e} \langle \sin \Delta_{34} \rangle}{2 \cos^2 \phi_{\mu e} - \cos 2\phi_{\mu e} \langle \sin^2 \Delta_{34} \rangle} \right| . \quad (4.42c)$$

Wie man sieht, findet in Long-Baseline Experimenten keine Unterdrückung durch  $\Delta m_{34}^2$  mehr statt, in diesem Kanal wird daher die CP-Verletzung maximal. Dies wird auch in Abb. 4.6(b) illustriert, in der  $|a_{\nu_\mu n\nu_e}^{CP}/\sin\delta_{\mu e}|$  in der  $c_e - |\Delta m_{34}^2|$ -Ebene für  $|\Delta m_{23}^2| = 1eV^2$  dargestellt ist. Der genaue Wert von  $|\Delta m_{23}^2|$  ist allerdings nicht weiter relevant, da ja die Terme mit  $|\Delta^2 m_{23}|$  ausgewaschen sind. Als Experimentaufbau wurde ein MINOS-ähnliches Long-Baseline-Experiment gewählt mit den Parametern  $L \simeq 730$  km,  $\langle E \rangle = 8$  GeV und  $\langle L/E \rangle \simeq 110$ . Der schattierte Bereich in Abb. 4.6(b) ist wiederum durch die Unitaritätsbedingung und Bugey verbotenen (Gl. 4.36). Im erlaubten Parameterbereich können CP-Verletzungen von über 80% bei maximaler CP-Phase erreicht werden. Nun stellt sich die Frage ob diese Bereiche trotz der starken Grenzen von Bugey in einem Long-Baseline Experiment erreicht werden können. Dies ist abhängig von  $|\Delta m_{23}^2|$  und  $\delta_{\mu e}$ , trifft aber in vielen Bereichen davon zu. Um dies sehen zu können muß man Sensitivitätsplots von Long-Baseline Experimenten in dem jeweiligen Parameterraum erstellen. Die bestehenden Sensitivitätsplots sind dazu leider nicht verwendbar, weil deren Darstellung der Wahrscheinlichkeiten mit unserer nicht vereinbar ist. Verwendet man aber die publizierten Zwei-Neutrino Plots zum Beispiel von MINOS, läßt sich die mittlere

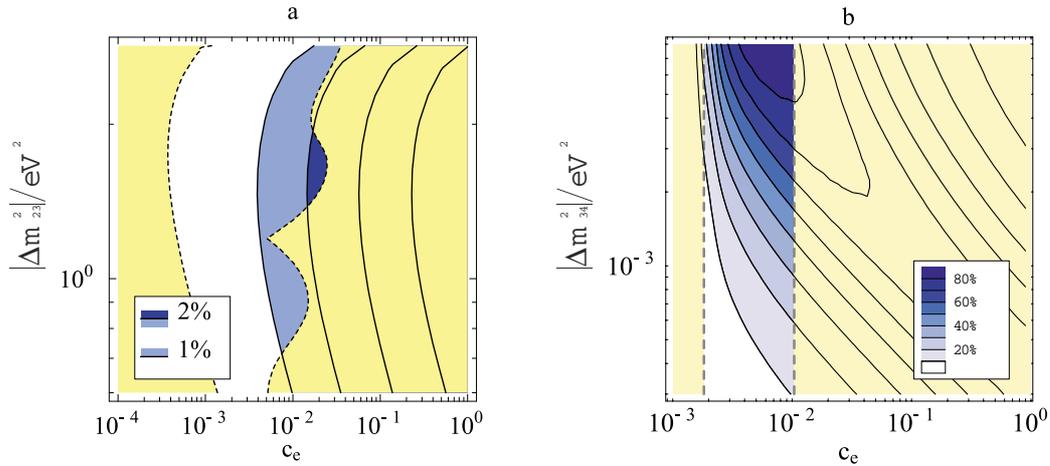


Abbildung 4.6: Konturlinien für  $|a_{\nu_\mu \nu_e}^{CP} / \sin \delta_{\mu e}|$  in der  $c_e - |\Delta m_{23}^2|$  Ebene in einem Short-Baseline Experiment für  $|\Delta m_{34}^2| = 8 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$  (a) und in der  $c_e - |\Delta m_{34}^2|$  Ebene für ein Long-Baseline Experiment für  $|\Delta m_{23}^2| = 1 \text{ eV}^2$  (b). Gezeigt wird nur der erlaubte Bereich von  $|\Delta m^2|$ . Die schattierten Bereiche werden durch Gleichung (4.36) ausgeschlossen.

Oszillation-Wahrscheinlichkeit zu  $\langle P \rangle = 0.003$  ablesen [62], was dann der Sensitivitätslinie im Vier-Neutrino Plot entspricht. Die somit bestimmte Sensitivität von MINOS überdeckt den gesamten Parameterraum.

Abschließend läßt sich feststellen, daß die andiskutierten  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  Long-Baseline Experimente im Fall von vier Neutrinos eine gute Chance haben Neutrinooszillation zu messen und dann auch eine meßbare oder sogar große CP-Verletzung sehen werden. In Short-Baseline Experimenten kann im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal keine CP-Verletzung beobachtet werden.

#### 4.3.4 LBL und SBL $\nu_\mu - \nu_\tau$

Wenden wir uns als letztes dem  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal im Vier-Neutrino Fall zu. Im Gegensatz zum Drei-Neutrino Fall ist der  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal in diesem Szenario sehr interessant. Analog zum vorherigen Abschnitt ergeben sich die relevanten Parameter der Oszillation zu  $|\Delta m_{23}^2|, |\Delta m_{34}^2|, c_\mu, c_\tau, \theta_\mu, \phi_{\mu\tau}$  und  $\delta_\tau$ . Für die Parameter  $|\Delta m_{23}^2|, |\Delta m_{34}^2|, \theta_\mu$  und insbesondere  $c_\mu$  gelten dieselben Beschränkungen wie schon zuvor (Gl. 4.36). Allerdings benötigen wir nun zusätzliche Einschränkungen für  $c_\tau$ , welche wir aus der Unitarität des Unterblocks  $\mu\tau/34$  (anstatt  $e\mu/34$ ) erhalten:

$$0 \leq c_\tau \leq 1, \quad (4.43a)$$

$$c_\mu c_\tau \cos^2 \phi_{\mu\tau} \leq (1 - c_\mu)(1 - c_\tau). \quad (4.43b)$$

$c_\mu$  sei dabei in dem bereits bekannten Bereich (Gl. 4.36). Aus Gl. (4.43) erhalten wir für  $c_\tau$  die Beschränkung

$$0 \leq c_\tau \frac{1 - c_\mu^{\min}}{1 - c_\mu^{\min} \sin^2 \phi_{\mu\tau}} . \quad (4.44)$$

Weitere Schranken an  $c_\tau$  existieren nicht und  $c_\tau$  kann in diesem Bereich frei gewählt werden. Nun kann wie im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal der Parameterraum reduziert werden, indem man näherungsweise  $c_\mu = 1$  und  $\sin^2 2\theta_{23} = 1$  setzt. Im Gegensatz zum  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal bleiben allerdings zwei freie Parameter übrig  $c_\tau$  und  $\phi_{\mu\tau}$ , da  $\phi_{\mu\tau}$  nicht wie  $\phi_{\mu e}$  durch ein Experiment (LSND) eingeschränkt wird. Die Oszillationswahrscheinlichkeit im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal ist somit abhängig von den Parametern ( $|\Delta m_{23}^2|$ ,  $|\Delta m_{34}^2|$ ,  $c_\tau$ ,  $\phi_{\mu e}$ )

$$P_{CP}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \simeq 4c_\mu c_\tau \cos^2 \phi_{\mu\tau} \langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle - c_\mu c_\tau \cos 2\phi_{\mu\tau} \langle \sin^2 \Delta_{34} \rangle , \quad (4.45a)$$

$$P_{\mathcal{CP}}(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \simeq 2c_\mu c_\tau \sin 2\phi_{\mu\tau} \sin \delta_{\mu\tau} \langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{34} \rangle . \quad (4.45b)$$

Wegen der Proportionalität  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) \propto 4c_\mu c_\tau$  steht die Sensitivität eines Experiments im direkten Zusammenhang mit dem gewählten Wert von  $c_\tau$ . Daher werden wir in die folgenden Plots zusätzlich die Isokurven von  $c_\tau$  einzeichnen, um auch diesem zusätzlichen Parameter gerecht zu werden. Die Sensitivität wird maximal für  $c_\tau = c_\tau^{\max}$ .

### Short-Baseline Experimente

Betrachten wir nun zunächst wieder die Short-Baseline Experimente. In diesem Fall kann wie gewohnt in  $P_{CP}$  der  $\langle \sin^2 \Delta_{34} \rangle$ -Term gegenüber dem  $\langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle$ -Term vernachlässigt werden. Dies gilt allerdings nur solange  $\cos^2 \phi_{\mu\tau}$  nicht zu klein wird. Mit diesen Annahmen lautet die CP-Asymmetrie wie folgt:

$$\left| \frac{a_{\nu_\mu \nu_\tau}^{\text{CP}}}{\sin \delta_{\mu\tau}} \right| \simeq \left| \tan \phi_{\mu\tau} \frac{\langle \sin^2 \Delta_{23} \sin \Delta_{34} \rangle}{\langle \sin^2 \Delta_{23} \rangle} \right| . \quad (4.46)$$

Der Vorteil des  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanals gegenüber dem  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal ist dabei, daß die Unterdrückung durch  $\sin \Delta_{34}$  hier sehr wohl durch einen großen Wert von  $\tan \phi_{\mu\tau}$  ausgeglichen werden kann, da keine experimentellen Einschränkungen bestehen, wie es für  $\tan \phi_{\mu e}$  der Fall war. Allerdings ergibt sich dabei dadurch ein Problem, daß mit zunehmenden  $\tan \phi_{\mu\tau}$  ebenfalls der vernachlässigte  $\langle \sin^2 \Delta_{34} \rangle$ -Term größer wird. Dies bedeutet, daß die Asymmetrie nicht beliebig groß werden kann. Ein weiterer Vorteil ist, daß die Unterdrückung durch  $c_\mu$  und  $c_\tau$  in  $P_{\mathcal{CP}}$  nicht so effektiv ist wie in  $P_{CP}$ . Daher nimmt die CP-Asymmetrie mit kleiner werdender Gesamtwahrscheinlichkeit zu, vergleichbar zum Drei-Neutrino Fall im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal.

In Abb. 4.7(a) sind wiederum die Konturlinien für  $|a_{\nu_\mu \nu_\tau}^{\text{CP}} / \sin \delta_{\mu\tau}|$  in der  $\cos^2 - |\Delta m_{34}^2|$ -Ebene für  $|\Delta_{23}^2| = 1eV^2$  dargestellt. Als Setup wurden dieselben Annahmen, wie sie bereits in Kap. 4.39 beschrieben wurden, gewählt. Der nicht schattierte Bereich

stellt den im idealen Fall von  $c_\tau = c_\tau^{max}$  zulässigen Bereich dar. Man sieht, daß in diesem Fall glücklicherweise das Maximum der potentiell möglichen Sensitivität im erlaubten Parameterbereich liegt. Die gestrichelten Linien zeigen den Bereich der Sensitivitäten für weniger günstige  $c_\tau < c_\tau^{max}$ . Gewählt wurden dabei als Beispiele  $\alpha = c_\tau/c_\tau^{max} = 0.2$  und  $\alpha = 0.04$ . Dies führt bis zum kompletten Ausschluß des gesamten Bereichs, in dem CP-Asymmetrie gemessen werden könnte. Leider liegt im Gegensatz zum Drei-Neutrino Fall die notwendige Verstärkung durch ein großes  $\tan \phi_{\mu\tau}$  außerhalb der Sensitivitäten der Experimente. Allerdings könnte sich das bereits mit einer kleinen Verbesserung um einen Faktor  $\sim 10$  in  $\langle L/E \rangle \sim 0.5$  ändern. Dies sieht man, wenn man den Plot 4.7(a) mit dem Faktor  $\langle L/E \rangle / 0.5$  multipliziert. Wirkliche Long-Baseline Experimente sind in diesem Kanal des Vier-Neutrino Fall zum Nachweis der CP-Verletzung also gar nicht unbedingt nötig.

### Long-Baseline Experimente

Als letztes wollen wir im Vier-Neutrino Fall noch Long-Baseline Experimente im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal betrachten. Hier wird wiederum der  $\langle \sin^2 \Delta m_{23}^2 \rangle$ -Term ausgewaschen. Die CP-Asymmetrie ergibt sich dann zu:

$$\left| \frac{a_{\nu_\mu \nu_\tau}^{CP}}{\sin \delta_{\mu\tau}} \right| \simeq \left| \frac{\sin 2\phi_{\mu\tau} \langle \sin \Delta_{34} \rangle}{2 \cos^2 \phi_{\mu\tau} - \cos 2\phi_{\mu\tau} \langle \sin^2 \Delta_{34} \rangle} \right|. \quad (4.47)$$

Die entsprechenden Konturlinien  $|a_{\nu_\mu \nu_\tau}^{CP} / \sin \delta_{\mu\tau}|$  sind in Abb. 4.7(b) zu sehen, wie zuvor in der  $\cos^2 \phi_{\mu\tau} - |\Delta m_{34}^2|$ -Ebene für  $|\Delta m_{23}^2| = 1eV^2$ . Auch in diesem Fall ist der genaue Wert von  $|\Delta m_{23}^2|$  wegen der Mittelung auf den Wert 1/2 nicht wichtig. Die CP-Asymmetrie ist vollkommen unabhängig von  $c_\mu, c_\tau$  und die Abhängigkeit von  $\theta_\mu$  ist vernachlässigbar. Allerdings ist auch hier die Sensitivität des Experiments und damit die erreichbare Größe der CP-Asymmetrie sehr wohl von  $c_\tau$  abhängig, da dieser den erreichbaren Parameterbereich einschränkt. Dies wird durch die Linien  $\alpha = c_\tau/c_\tau^{max}$  veranschaulicht. Beispielhaft wurden die Werte  $\alpha = 0.1$  und  $\alpha = 0.03$  dargestellt. In den Long-Baseline Experimenten handelt es sich dabei nicht mehr um senkrechte Geraden, ausgeschlossen ist der Bereich unterhalb der Kurven. Für den maximalen Wert von  $c_\tau$  findet man, daß die experimentelle Sensitivität nahezu den gesamten gezeigten Bereich abdeckt. Lediglich extrem kleine  $c_\tau$  sorgen dafür, daß der interessanteste Bereich nicht mehr erreichbar ist. Die Sensitivitäten wurden über  $\langle P \rangle = 0.015$  bestimmt, wobei dieser Wert aus den veröffentlichten Zwei-Neutrino Plots von MINOS [62] abgelesen wurde. Während die CP-Asymmetrie nicht von  $|\Delta m_{23}^2|$  abhängig ist, gilt das nicht für die Sensitivitäten, die indirekt über  $c_\mu$  davon abhängen. Man sieht, daß unabhängig von der Sensitivität des Experiments CP-Asymmetrien bis zu 80% möglich sind.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß auch im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal in Long-Baseline Experimenten  $P_{CP}$  von der gleichen Größenordnung wie  $P_{CP}$ . Daher sind im Gegensatz zum Drei-Neutrino Fall auch im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal Messungen der CP-Phase

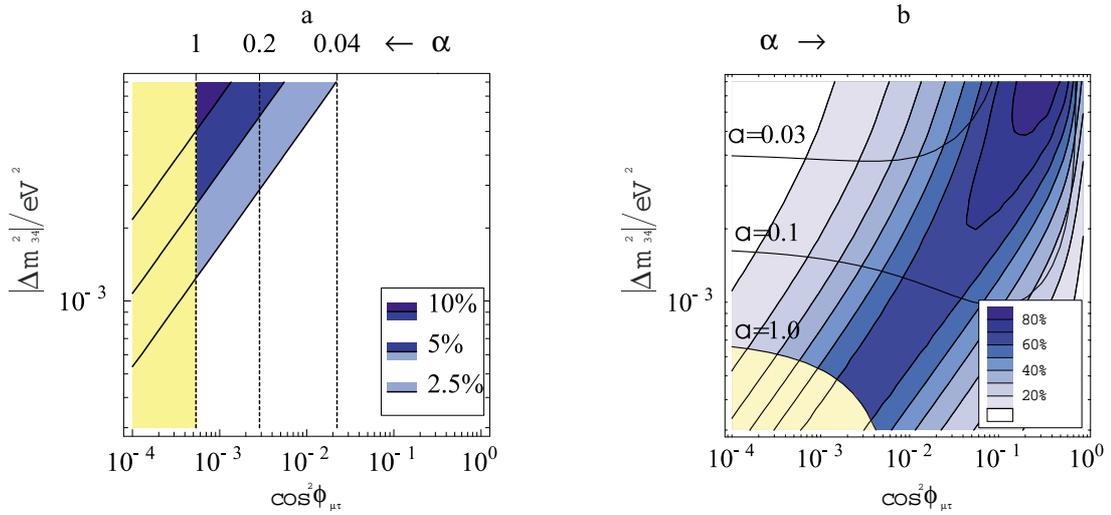


Abbildung 4.7: Konturlinien für  $|a_{\nu_\mu\nu_\tau}^{CP}/\sin\delta_{\mu\tau}|$  in der  $\cos^2\phi_{\mu\tau}-|\Delta m_{34}^2|$  Ebene für  $|\Delta m_{23}^2| = 1\text{eV}^2$  im Short-Baseline Experiment (a) und für das im Text diskutierte Long-Baseline Experiment (b). Die verschiedenen Linien zeigen die Abhängigkeit des im Experiment erreichbaren Parameterraums von  $c_\tau$ . Die gestrichelten respektive durchgezogenen Linien zeigen die Sensitivität des Experiments für  $c_\tau = \alpha c_\tau^{\text{max}}$ . Der Bereich links bzw. unterhalb der Linien ist ausgeschlossen. Der nicht schattierte Bereich zeigt den optimalen Fall von  $c_\tau = c_\tau^{\text{max}}$  und überdeckt in (b) fast den gesamten Bereich.

möglich, insofern sie vorhanden ist. Insbesondere kommen dafür nicht nur Experimente mit hohen Sensitivitäten in Frage, weil die Messung der CP-Effekte nicht an kleine Übergangswahrscheinlichkeiten gebunden ist. Die einzig ausschlaggebende Bedingung ist, daß das Experiment sensitiv auf die kleine atmosphärische Massendifferenz ist. Auch in geringfügig verbesserten Short-Baselineexperimenten könnte CP-Verletzung bei maximaler CP-Phase meßbar sein. Insgesamt wird sich in fast allen geplanten oder im Bau befindlichen Experimente für den Vier-Neutrino Fall die intrinsische CP-Verletzung mit großer Wahrscheinlichkeit nachweisen lassen.

## 4.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die Sensitivitäten von bestehenden und zukünftigen Experimenten auf CP-Verletzung diskutiert. Dazu haben wir als Meßgröße der CP-Verletzung die Asymmetrie zwischen den beiden CP-konjugierten Kanälen definiert. Diese Asymmetrie verdeutlichen die relative Größe von CP-verletzenden Effekten im Verhältnis zum CP-erhaltenden Anteil. Sie sind daher sehr gut geeignet, um die Größe der Verfälschung von Ergebnissen beurteilen zu können, die man ohne Berück-

sichtigung der CP-Verletzung gewonnen hat. Dabei haben wir gesehen, daß zusätzlich zu der intrinsischen CP-Verletzung aufgrund der CP-Phase noch eine experimentelle Asymmetrie, die durch den Experimentaufbau und Materie bedingt ist, existiert. Für unsere weiteren Analysen haben wir angenommen, daß dieser experimentelle Anteil klein oder unter Kontrolle ist. Die Analysen der Sensitivität auf CP-Effekte haben wir sowohl für Drei-Neutrino als auch für Vier-Neutrino Szenarien in Long-Baseline und Short-Baseline Experimenten durchgeführt. Wir haben gesehen, daß relevante CP-Effekte in den Drei-Neutrino Szenarien nur in Long-Baseline Experimenten auftreten. Dabei konnten aber im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal nur kleine Effekte unter 3% beobachtet werden. Dagegen erhält man im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal deutliche Effekte von bis zu 40% bei maximaler Phase  $\delta$  für solare LMA-MSW Lösungen. Im Vier-Neutrino Fall konnten dagegen auch für Short-Baseline Experiment im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal schon CP-Effekte beobachtet werden, wenn man  $\langle L/E \rangle \simeq 0.5$  nur um einen Faktor 10 erhöht. Ohne diese Aufwertung konnten in Short-Baseline Experimenten im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal immerhin Effekte von 2% und im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal von bis zu 10% gemessen werden. In Long-Baseline Experimenten sind die CP-Effekte sogar in beiden Kanälen groß. Im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal werden Asymmetrien von bis zu 80% erreicht und im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal sogar über 80%. CP-erhaltender Anteil und CP-verletzender Anteil können also von gleicher Größenordnung sein und CP-Verletzung ist daher im Vier-Neutrino Fall sicherlich nicht vernachlässigbar. Der Unterschied zwischen Drei-Neutrino und Vier-Neutrino Szenario resultiert aus der Tatsache, daß CP-Effekte durch kleine Mischungswinkel und kleine Massendifferenzen unterdrückt werden. Während im Drei-Neutrino Fall die kleine solare Massendifferenz für die Existenz der CP-Verletzung essentiell ist, da mindestens zwei unterschiedliche Massendifferenzen existieren müssen, kann im Vier-Neutrino Fall diese weggelassen werden, falls das Experiment nur sensitiv auf  $\Delta m^2 \geq 10^{-3} eV^2$  ist, da noch zwei weitere, deutlich größere Massendifferenzen existieren (atmosphärisch und LSND). Allerdings gilt solch eine Näherung nicht für die Mischungswinkel. Daher muß auch im Vier-Neutrino Fall für das solare Problem eine Groß-Winkel Lösung gewählt werden. Wegen der Tatsache, daß CP-Verletzung durch kleine Massendifferenzen unterdrückt wird, erlaubt die Beobachtung von CP-Verletzung die Unterscheidung zwischen den einzelnen solaren Lösungen und weitere Einschränkungen des erlaubten Parameterbereich von  $|\Delta m_{21}^2|$ , falls keine sterilen Neutrinos existieren.

Für den Drei-Neutrino Fall haben wir zum Vergleich auch noch die Größe von Materieeffekten in Long-Baseline Experimenten betrachtet. Dabei haben wir festgestellt, daß diese im Verhältnis zur CP-Verletzung nicht allzu groß sind und durch simple Subtraktion der numerisch kalkulierten Materieeffekte die rein intrinsischen CP-Effekte erhalten werden können, auch wenn in höherer Ordnung beide Effekte nicht linear sind. Die rein intrinsische CP-Verletzung wurde durch Materie-Effekte im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ -Kanal auf 50% angehoben. Im  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ -Kanal sind die Materie-Effekte größer als intrinsische CP-Verletzung und überdecken daher letztere.

Insgesamt läßt sich also feststellen, daß CP-Effekte in zukünftigen Experimenten

---

überraschen groß sein können und daher in den Experimenten der nächsten Generation durchaus meßbare Effekte durch CP-Verletzung möglich sind.



## Kapitel 5

# Bestimmung der Parameter höherer Ordnung aus Materieeffekten

In diesem Kapitel wollen wir näher untersuchen, wie man Materieeffekte in Neutrino-Oszillations Experimenten zur Bestimmung des Mischungswinkels  $\theta_{13}$  und des Vorzeichens von  $\Delta m_{31}^2$  nutzen kann, da ersterer zur Messung im Vakuum zu klein ist und zweitere keinerlei Bedeutung im Vakuum hat. Wir werden dazu verschiedene Kombinationen von Very-Long-Baseline Experimenten diskutieren und deren physikalisches Potential am Schluß miteinander vergleichen. Der Schwerpunkt dieser Studien soll dabei auf Experimenten mit Neutrinoteleskop liegen, da schon zahlreiche andere Studien zur Neutrinofabrik mit magnetisiertem Eisendetektor existieren [5, 6, 48, 30, 49, 50, 17, 20]. Um das enorme Potential der Neutrinooteleskope zu demonstrieren, haben wir zunächst als zugehörige Neutrinoquelle den Wide Band Beam gewählt [3]. Wobei wir zum Abschluß noch alle möglichen Kombinationen von Detektoren und Neutrinoquellen miteinander vergleichen [4]. Auf die Messung und Verifizierung der Materieeffekte an sich soll hier nicht mehr weiter eingegangen werden, weil dies bereits in anderen Arbeiten ausführlich diskutiert wurde [5, 7, 76, 77, 78, 11, 13, 29, 79, 80, 81].

In Kapitel 2.5 haben wir gesehen, daß die kohärente Vorwärtsstreuung von Elektronneutrinos in Materie zu effektiven Massen und Mischungen unterschiedlich zum Vakuumfall führt, wobei in Resonanz der größte Effekt im Mischungswinkel  $\theta_{13}$  zu beobachten war. Da der Disappearance-Kanal nur in höheren Ordnungen von  $\sin^2 2\theta_{13}$  abhängig wird, waren Materieeffekte vor allem im Appearance-Kanal beobachtbar, wo sie in Resonanz zu einer starken Erhöhung der Ereignisraten geführt haben (Kap. 2.5.5). Daher liegt zunächst für die Untersuchung von Materieeffekten ein Experiment nahe, daß den Appearance-Kanal nutzen kann. Da aus experimenteller Sicht die Detektion von Elektron- und Tauneutrinos nicht sehr erfolgversprechend ist, kommen in Appearance-Experimenten als Quelle nur eine Neutrinofabrik in Frage,

deren Strahl zum Teil aus Elektronantineutrinos zusätzlich zu den Myonneutrinos besteht. Der zugehörige Detektor benötigt eine gute Fähigkeit zur Ladungsidentifikation, um dann die wenigen Ereignisse der Wrong Sign Myonen vom wesentlich größeren Anteil der Right Sign Myonen (siehe Kap. 3.1.1) unterscheiden zu können. Dies werden voraussichtlich große magnetisierte Eisendetektoren bieten. Die Neutrino Fabriken haben zudem auch noch den Vorteil, daß die Beamsystematik sehr gut bekannt sein wird, der Strahl sehr gut gebündelt sein wird und auch noch vergleichsweise hohen Fluß besitzt. Trotzdem ist die Information im Prinzip auch dem Disappearance-Kanal in Form einer entsprechenden Erniedrigung der Raten inhärent. Erzielt man durch entsprechend hohe Raten eine gute Statistik und dadurch kleine Fehler, kann man auch diesen Kanal zur Bestimmung von  $\theta_{13}$  und  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$  nutzen. Dies kann man beispielsweise durch die große Detektormasse von Wasser oder Eis Cherenkov-Detektoren, den sogenannten Neutrino Teleskopen, erzielen. Unter diesen Umständen reicht dann auch schon ein konventioneller Wide Band Beam aus, um erstaunliche Ergebnisse zu erzielen. Eine Neutrino Fabrik ist also nicht unbedingt notwendig zur Bestimmung der Subleading Parameter. Allerdings würde eine Neutrino Fabrik als Quelle zu solch einem Detektor noch bessere Ergebnisse erzielen.

An einer Neutrino Fabrik bleiben in der Kombination mit magnetisiertem Eisendetektor noch vier verschiedene Möglichkeiten übrig, um das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  und den Winkel  $\theta_{13}$  zu bestimmen. Funktioniert die Ladungsunterscheidung mit brauchbarer Genauigkeit, kann man den Appearance-Kanal  $\overline{\nu}_e \rightarrow \overline{\nu}_\mu$  und den Disappearance-Kanal  $\overline{\nu}_\mu \rightarrow \overline{\nu}_\mu$  unabhängig studieren. Weiterhin kann man natürlich alle daraus verfügbaren Ergebnisse miteinander kombinieren, was die höchste Genauigkeit liefert. Versagt die Ladungsidentifikation, kann man viertens die kombinierten Myonraten  $\mu^+ + \mu^-$  des Disappearance- und Appearance-Kanals je für den  $\mu^+$  und  $\mu^-$ -Beam betrachten und den Unterschied in den Ereignisraten analysieren. Hierbei hat man den Vorteil, wie wir in Kapitel 2.5.5 gesehen haben und auch später nochmal illustrieren werden, daß die Effekte im Appearance- und Disappearance-Kanal in dieselbe Richtung gehen und sich daher addieren. Auch diese Vorgehensweise wird, wie wir sehen werden, zu relativ brauchbaren Ergebnissen führen, die aber bei weitem nicht vergleichbar sind mit denjenigen bei funktionierender CID. Folglich hängt der Vorteil der Neutrino Fabrik entscheiden von der Fähigkeit des Detektors zur Ladungstrennung ab. Dabei ist noch unsicher wie gut Ladungsidentifikation überhaupt funktionieren wird, manche sprechen von Werten von nur  $10^{-6}$ . Mit nur mangelhafter CID läßt jedoch das physikalische Potential zur Messung  $\text{sgn}\Delta^2 m_{31}$  und  $\theta_{13}$  sehr schnell nach, Aufwand und Ergebnis stehen dann unter Umständen in keinem Verhältnis mehr. Weiterhin liegt der Betrieb von Neutrino Fabriken noch in relativ ferner Zukunft und der Bau wird zudem recht teuer sein. Es wären daher Experimentkombinationen aus bereits existierenden oder im Bau befindlichen Komponenten wünschenswert, die schon früher zu Ergebnissen führen könnten. Diese würden dann zusätzlich erlauben den sinnvollen Parameterraum genauer abzuschätzen und dann den genauen Setup für Experimente mit Neutrino Fabriken festzulegen, über den momentan noch

sehr viel debattiert wird. Dabei handelt es sich z.B. um die günstigste Myonenergie, beste Entfernung etc., was wiederum von dem Parameter führender Ordnung  $\Delta m_{31}^2$  abhängig ist. Besonders wenn man die Neutrino-fabrik zur Messung der CP-Verletzung benutzen will, ist es für die Wahl des Setups wichtig, schon vor dem Bau den Wert von  $\theta_{13}$  genauer zu kennen [1, 31, 82, 83, 84]. Dazu kämen folglich existierende Experimente in Frage, die Energien nahe der Resonanz ermöglichen, für eine maximale Verstärkung der Materieeffekte, und zweitens lange Baselines haben, um den Effekt dadurch zu erhöhen. Dem zunächst widersprüchlich sind die zuvor genannten hohen Raten, für eine bessere Statistik, während systematische Fehler gut unter Kontrolle sein sollten. Genau das kann aber die zuvor genannte Kombination von Neutrino-teleskop und konventionellem Wide Band Beam bieten. Bei diesem sind die Möglichkeiten der Experimente natürlich nicht so vielfältig, man kann nur den Disappearance-Kanal allein untersuchen. Noch dazu sind zwar im Prinzip auch Experimente mit einem Antineutrinostrahl möglich, aber dieser ist schwächer und auch schlechter bekannt. Ein direkter Vergleich ist daher nicht möglich. Den Antineutrinostrahl wird man aber trotzdem nutzen müssen, wenn  $|\Delta m_{31}^2|$  im Verhältnis zum Beam das falsche Vorzeichen für Resonanz hat. Wie wir später sehen werden sind Präzision und Sensitivität die mit dieser Kombination erzielt werden, nicht wesentlich schlechter als bei Neutrino-fabriken mit guter Ladungsidentifikation. Auf alle Fälle ist diese Kombination vergleichbar oder sogar besser als die Neutrino-fabrik mit einem Eisendetektor mit mangelhafter CID.

Die weitere Vorgehensweise bei der Bestimmung der Subleading Parameter ist wie folgt: Zunächst einmal werden wir die Ereignisraten beider Experimente herleiten und analytisch betrachten. Nachdem wir die experimentellen Rahmenbedingungen festgelegt haben, werden wir die Raten sowohl für Neutrino-fabriken mit magnetisierten Eisendetektoren als auch für Wide Band Beams mit Neutrino-teleskopen numerisch berechnen und illustrieren. Dann wenden wir uns der Extraktion der Parameter zu, wobei wir uns zuvor die experimentellen Daten aus den theoretischen Raten simulieren, indem wir Fluktuationen in den Energiebins hinzufügen. Aus diesen Daten werden wir zunächst die Leading Parameter re-extrahieren und dazu die Präzision angeben mit der uns dies gelingt. Mit den gewonnenen Werten führen wir dann die Analyse der Sensitivität auf die Subleading Parameter durch. Zum Abschluß vergleichen wir noch das generische physikalische Potential beider Kombinationen direkt miteinander sowie mit allen anderen möglichen Kombinationen.

## 5.1 Überlebens- und Oszillationsraten in Materie

### 5.1.1 Herleitung der Raten

Für die Bestimmung der gewünschten Parameter benötigen wir zunächst die Ereignisraten, die in den jeweiligen Experimenten beobachtet werden können. Die Anzahl

von Myonneutrinos respektive die im Detektor nachgewiesene Anzahl von Myonen hängt lediglich von der Größe des Detektors, der Detektionseffizienz  $\epsilon_{\mu^\pm}$  von Myonen, der Anzahl der Neutrinos an der Quelle – normiert auf die Entfernung des Detektors – und natürlich von der Oszillations-Wahrscheinlichkeit ab. Da wir unsere Analysen auf der Basis der totalen und der differentiellen Raten durchführen wollen, geben wir zunächst die differentiellen Raten an. Benötigt man die totalen Raten, so muß man diese von der Schwellenenergie des Detektors  $E_{thres}$  bis zur maximalen Neutrinoenergie  $E_{max}$  integrieren.

$$\frac{dn}{dE} = \underbrace{[10^9 N_A N_{kT} \epsilon_{\mu^\pm} k]}_{\text{Normalisierung}} \cdot \underbrace{[F(L, E)]}_{\text{Fluß}} \cdot \underbrace{[P_E^{3\nu}(E)]}_{\text{Oszillation}} \quad (5.1)$$

Wobei  $10^9 N_A$  die Zahl der Nukleonen pro Kilotonne Detektormaterial ist,  $N_{kT}$  die Masse des Detektors und  $P_E^{3\nu}(E)$  die entsprechende Drei-Neutrino Oszillations-Wahrscheinlichkeit in Materie.  $k$  ist ein weiterer Normalisierungsfaktor der nur im Fall der Neutrinfabrik Bedeutung hat und ansonsten identisch eins ist. Er stellt im wesentlichen die Zahl der nützlichen Myonzerfälle  $N_{\mu^\pm}$  dar, also derjenigen, die im geraden Stück des Speicherrings stattfinden, weiterhin geht darin noch die Masse der Myonen ein:  $k = N_{\mu^\pm}/(m_\mu^2 \pi)$ . In den Fällen wo mehrere Kanäle zu den totalen Raten beitragen, müssen alle individuellen Beiträge mit den zugehörigen Oszillationswahrscheinlichkeiten  $P_i$  aufsummiert werden. Dies gilt insbesondere bei der Analyse der kombinierten Neutrino- und Antineutrino-raten in der Neutrinfabrik, wenn Ladungsidentifikation im zugehörigen Detektor nicht möglich ist.

Formulieren wir zunächst die Ereignisraten für den Wide Band Beam. Wir gehen davon aus, daß Nahe der Neutrinoquelle ein Beammonitor steht, der den unoszillierten Neutrinofluß mißt. Dies wäre vorteilhaft, da die Systematik dieser Beams im Vergleich zur Neutrinfabrik nicht genau genug bekannt und weniger unter Kontrolle ist. Dann muß der am Monitor gemessene Neutrinofluß  $f_{near}$  noch auf den Fluß am entfernten Detektor mit dem entsprechenden Unterdrückungsfaktor  $(L_{near}/L_{far})^2$  normiert werden. Dabei entspricht L den jeweiligen Entfernungen zum nahen Monitor und zum entfernten Detektor. Zuletzt geht noch der Wirkungsquerschnitt der Neutrinos ein. Gesamt ergeben sich damit die differentiellen Ereignisraten für den Wide Band Beam zu

$$\frac{dn_{\mu^\pm}}{dE} = \underbrace{[10^9 N_A N_{kT} \epsilon_{\mu^\pm}]}_{\text{Normalisierung}} \cdot \underbrace{\left[ \left( \frac{L_{near}}{L_{far}} \right)^2 f_{near}(E) \sigma(E) \right]}_{\text{Fluß}} \cdot \underbrace{[P_{\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu}(E)]}_{\text{Oszillation}} \quad (5.2)$$

Im Fall der Neutrinfabrik wird der Fluß im Detektor durch das normalisierte Beamspektrum  $g_{\nu_i}$  von  $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_e$  und  $\bar{\nu}_e$  und dem jeweiligen Charged Current Wirkungs-

querschnitt per Nukleon im Detektor bestimmt<sup>1</sup> [48]:

$$\sigma_{\nu_\mu}(E) = 0.67 \cdot 10^{-38} E \text{ cm}^2/\text{GeV} , \quad \sigma_{\bar{\nu}_\mu}(E) = 0.34 \cdot 10^{-38} E \text{ cm}^2/\text{GeV} , \quad (5.3a)$$

$$g_{\nu_e}(x) = g_{\bar{\nu}_e}(x) = 12x^2(1-x) , \quad g_{\nu_\mu}(x) = g_{\bar{\nu}_\mu}(x) = 2x^2(3-2x) , \quad (5.3b)$$

mit  $x = E/E_\mu$ .  $E_\mu$  ist die Energie der Myonen im Speicherring und bestimmt daher die Energieverteilung der Neutrinos. Etwaige Hintergründe von Myonen wurden nicht berücksichtigt. Gesamt ergibt sich damit für die differentiellen Ereignisraten in der Neutrinfabrik:

$$\frac{dn_i}{dE} = \underbrace{\left[ 10^9 N_A N_{\text{kT}} \epsilon_{\mu^\pm} \frac{N_{\mu^\pm}}{m_\mu^2 \pi} \right]}_{\text{Normalisierung}} \underbrace{\left[ \frac{E_\mu^2}{L^2} g_i(E/E_\mu) \sigma_i(E) \right]}_{\text{Fluß}} \underbrace{\left[ P_i(E) \right]}_{\text{Oszillation}} . \quad (5.4)$$

An diesen Formeln läßt sich gut das energieabhängige Verhalten der differentiellen Ereignisraten verstehen. Betrachten wir uns dazu die drei Anteile auf der rechten Seite: der erste Teil ist lediglich ein energieunabhängiger Normalisierungsfaktor, der für die richtigen absoluten Raten sorgt. Der zweite Faktor wächst zu Beginn mit  $E^3$  und erreicht dann ein Maximum kurz bevor er bei der maximalen Neutrinoenergie ( $\simeq E_\mu$ ) wieder Null wird ( $\propto x^3(1-x)$ ,  $x < 0$ ). Da die Ereignisraten durch dieses Maximum dominiert werden, kann man in der Neutrinfabrik für die Neutrinoenergie in Näherung  $E_\mu$  setzen. Eine entsprechende Energieabhängigkeit existiert auch für Wide Band Beams. Allerdings charakterisieren wir hier natürlich nicht die Energieverteilung und das Maximum durch die Myonenergie (die nicht existiert), sondern durch die Energie des Protonbeams und der Zerfallsprodukte respektive der mittleren Energie. Das Spektrum des Wide Band Beams hat sein Maximum schon relativ früh mit einem langen hochenergetischen Schwanz. Im Gegensatz zum Wide Band Beam, wo die Energieverteilungen und das Energiemaximum schon festliegen, ist die Neutrinfabrik noch in der Planungsphase und daher die Myonenergie noch variabel. Aus diesem Grund werden wir in der Neutrinfabrik einen festen Wert für die noch nicht exakt bestimmte Massendifferenz  $\Delta m_{13}^2$  wählen und stattdessen die Ereignisraten in Abhängigkeit des zusätzlichen Parameters  $E_\mu$  darstellen, während wir für den Wide Band Beam als Parameter die Massendifferenz gewählt haben. So kann man sofort ablesen welche Myonenergie für die Analysen der Materieeffekte am günstigsten ist, wobei dies über die Resonanz wiederum vom gewählten Wert von  $\Delta m_{13}^2$  abhängig ist. Zuletzt bleibt natürlich noch die Energieabhängigkeit des letzten Terms, wie sie ja bereits aus der Oszillation bekannt ist. Für eine gegebene Massendifferenz hängen die oszillierenden Anteile der Übergangswahrscheinlichkeiten ( $\sin^2 \Delta_{ij}$ ) nur noch von  $E/L$  ab. Folglich verschwindet die Oszillation für  $E/L \rightarrow \infty$ . Das erste Maximum der Oszillation tritt bei gegebenem  $L$  für  $E_1 = 2\Delta m^2 L/\pi$  auf. Das bedeutet, falls die Neutrinoenergie wesentlich größer als  $E_1$  ist, werden in den Ereignisraten im Wesentlichen keine Oszillationseffekte mehr auftreten.

<sup>1</sup>Dabei sei  $i$  ein entsprechend gewählter Strahlindex, der den passenden Kanal (Appearance und Disappearance) entsprechend der beteiligten Neutrinosorte ( $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\bar{\nu}_e$ ) kennzeichnet.

### 5.1.2 Analytische Diskussion der Energieabhängigkeit der Raten

Bevor wir zu den Plots der Ereignisraten kommen, betrachten wir nun analytisch die Abhängigkeit der totalen Ereignisraten in der Neutrino-fabrik von dem zusätzlichen Parameter, der Myonenergie  $E_\mu$  [6]. Dies wird uns helfen, die numerischen Ergebnisse zu verstehen und zu überprüfen. Wie schon zuvor bemerkt, könnte man natürlich auch für den Wide Band Beam einen entsprechenden Plot für die mittlere Energie des Neutrinospektrums  $E_{mean}$  durchführen. Aber da das kein freier Parameter ist, ist es wenig sinnvoll, wenn auch die meisten Aussagen trotzdem wahr sind. Die Abhängigkeiten der einzelnen Terme vom Energiemaximum respektive der Myonenergie kennen wir bereits, für die Abhängigkeiten der totalen Raten muß man nun die Faltung der entsprechenden Oszillations-Wahrscheinlichkeiten in Vakuum (Gl. 2.7) oder Materie (Gl. 2.12) mit dem Fluß analysieren.

#### Totale Disappearance-Raten im Vakuum

Aus der Energieabhängigkeit des Oszillationsterms, kann man schlußfolgern, daß zur Beobachtung von Oszillationen  $E_{mean}$  nicht wesentlich größer als  $E_1$  sein darf. Die ersten Oszillationseffekte tauchen dann auf, wenn die mittlere Energie in die Größenordnung des ersten Maximums kommt, und werden maximal, wenn beide nahezu identisch sind. Die Oszillationseffekte verschwinden wieder komplett, wenn  $E_{mean}$  halb so groß wie  $E_1$  ist. In einer Neutrino-fabrik ( $E_{mean} = E_\mu$ ) läßt sich folglich der Effekt der Oszillation in einer Abflachung des sonstigen allgemeinen  $E_\mu^2$ -Verhaltens (aus Wirkungsquerschnitte und Flüsse) der totalen Neutrino-raten beobachten. Gäbe es nicht die Detektorschwelle könnten im Prinzip für die weiteren Oszillationsmaxima bei niedrigeren Strahlenergien auch weitere Dips beobachtet werden.

#### Totale Disappearance-Raten in Materie

Damit die Materieeffekte überhaupt sichtbar werden, muß zunächst einmal natürlich  $E_{mean} > E_{opt}$  (ca. 10 - 15 GeV, Kap. 2.5.4) gelten, damit die Neutrinos überhaupt Resonanz erfahren können. Da Materieeffekte rund um die Resonanzenergie lokalisiert sind und  $\sin^2 2\theta_{13}$  abseits davon sehr schnell seinen (sehr kleinen) Vakuumswert annimmt, sollte ein Maximum an Neutrinos in den Resonanzbereich fallen. Daher sollten  $E_{mean}$  und  $E_{opt}$  am besten von der gleichen Größenordnung sein<sup>2</sup>. Wie wir zuvor besprochen haben, muß weiterhin noch das Verhältnis zum ersten Maximum  $E_1$  passen. Da die Massendifferenz  $\Delta m_{31}^2$  und die Resonanzenergie in der Erde (und damit auch die mittlere Energie) festliegen, ergibt sich über  $E_1$  eine optimale Baseline.

<sup>2</sup>Entsprechend dazu muß natürlich auch die Schwellenenergie des Detektors niedrig genug sein, um die Neutrinos die Resonanz erfahren noch detektieren zu können.

### Totale Appearance-Raten im Vakuum

Auch im Appearance-Kanal in der Neutrino-fabrik steigen wiederum die totalen Raten im Wesentlichen für große  $E_\mu$  an, was hauptsächlich auf den zunehmenden Fluß bei Energien nahe an  $E_\mu$  zurückzuführen ist und wir betrachten auch hier in guter Näherung das Verhalten von  $E_\mu^2 P(\nu_\mu \leftrightarrow \nu_e)$ . Entwickelt man dies in Ordnungen von  $1/E$  und nutzt, daß  $V \cdot L = \sqrt{2G_F N_e}$  numerisch klein ist, erhält man für die asymptotischen Appearance-Raten:

$$n \propto \sin^2 \theta_{23} \sin^2 2\theta_{13} (\Delta m^2)^2 L^2 \left( 1 - \frac{(\Delta m^2)^2 L^4}{3E_\mu^2} \right) + \frac{4(\Delta m^2)^3 L^4 V}{3E_\mu}. \quad (5.5)$$

Daraus kann man sehen, daß die Raten für  $E_\mu \gg E_1$  im Vakuum einen konstanten Wert erreichen, der nur von geraden Potenzen von  $\Delta m^2$  abhängt (erster Term). Die führende Korrektur zu dieser Konstante fällt mit  $1/E_\mu^2$  ab und hängt ebenfalls nur von geraden Potenzen von  $\Delta m^2$  ab (zweiter Term). Diese sorgt für den Abfall der Raten bei kleinen Energien.

### Totale Appearance-Raten in Materie

Den dritten Term in Gl. (5.5) erhält man, wenn man Materie hinzunimmt. Dieser fällt nur mit  $1/E_\mu$  ab und ist von  $(\Delta m^2)^3$  und damit vom Vorzeichen von  $\Delta m^2$  abhängig. Er erzeugt daher die gewünschte vorzeichenabhängige Aufspaltung der Appearance-Raten. Der Materieeffekt in den Appearance-Raten ist in der Myonenergie weniger lokalisiert, als derjenige in den Disappearance-Raten, und auch für Myonenergien, die etwas abseits der Resonanzenergien liegen, treten noch aussagekräftige Effekte auf. Allerdings sollte man noch in Erinnerung behalten, daß diese Diskussion für Myonenergien in der Nähe von oder unter  $E_1$  wesentlich komplizierter ist.

Das gesamte besprochene Verhalten kann in Abb. 5.1 überprüft werden. Wie man sieht ist in den Appearance-Raten die Voraussetzungen für Materieeffekte wesentlich einfacher zu erfüllen. Im Plot ist in den Appearance-Raten im gesamten, für Neutrino-fabriken diskutierten, Bereich der Myonenergie eine deutlich Aufspaltung zu sehen, während in den Disappearance-Raten diese um die 20 GeV lokalisiert sind, wo auch der Dip deutlich erkennbar ist. Dies zeigt, wie wichtig es ist, daß die benutzte Quelle die richtige mittlere Energie besitzt, besonders wenn nur Disappearance Experimente möglich sind, so wie das im Neutrino-teleskop der Fall ist.

#### 5.1.3 Experimenteller Rahmen

In diesem Abschnitt soll der experimentelle Rahmen, in dem wir die Analysen durchgeführt haben, näher erläutert werden. Für die Oszillationsformeln in Materie benutzen wir den vollen Drei-Neutrino Formalismus in der Näherung  $\Delta m_{12, \text{vak}}^2 = 0$

(Gl. 2.12), speziell vernachlässigen wir die CP-verletzenden Terme, die ja nur in Ordnungen von  $\Delta m_{12}^2$  auftauchen. Allerdings ist diese Degeneration von  $\Delta m_{12}^2$  in Materie aufgehoben, lediglich die Näherungen  $\sin^2 2\theta_{12} = \delta = 0$  bleiben erhalten (Kap. 2.5.2). Diese Näherungen sind für unseren Zweck akzeptabel. Folglich bleiben noch zwei Leading Parameter ( $|\Delta m_{31}^2|, \theta_{23}$ ) und zwei Subleading Parameter ( $\theta_{13}, \text{sgn}\Delta m_{31}^2$ ) übrig. Für diese und die weiteren Oszillationsparameter haben wir die Werte aus Tab. 5.1 angenommen.

	<b>Neutrino-fabrik</b>	<b>Wide Band Beam</b>
$E_\mu$	variabel, 20 GeV	–
$N_{\mu^\pm}/N_{pot}$	$2 \cdot 10^{20}$	$4.5 \cdot 10^{19}$
$N_{kT}$	10 kt	5000 kt
$\epsilon_{\mu^\pm}$	100%	100%
$E_{thres}$	5 GeV	15 GeV
$E_{res}$	20 Bins zwischen 5-20 GeV	4 Bins a 10 GeV
$L$	7332 km	6500 km & 11200 km
$ \Delta m_{31}^2 $	$3.5 \cdot 10^{-3} eV^2$	variabel
$\sin^2 2\theta_{23}$	1	1
$\sin^2 2\theta_{13}$	variabel, 0.1	variabel

Tabelle 5.1: *Tabelle der verschiedenen experimentellen Parameter, wie sie in den Analysen der Raten und Oszillationsparameter benutzt wurden, sowohl für eine Neutrino-fabrik als auch für einen Wide Band Beam.*

Da für unsere Analysen sehr große Baselines (6500 km bis 11200 km) nötig sind, um zum einen die Materieeffekte zu verstärken und zum anderen CP-Verletzung tatsächlich zu unterdrücken, müssen wir uns noch einige Gedanken machen, wie das Dichteprofil der Erde handzuhaben ist. Für Baselines die nicht den Erdkern durchqueren ( $L < 10600$  km), benutzen wir eine konstante Dichte, gemittelt über die jeweilige Wegstrecke. Damit haben wir eine brauchbare Näherung erhalten [80, 7], die zumindest die unterschiedlichen mittleren Dichten – verursacht durch das unterschiedliche Dichteprofil der verschiedenlangen Pfade – berücksichtigt (vgl. Kap. 2.5.5). Für die größeren Baselines integrieren wir die Oszillations-Wahrscheinlichkeiten über das volle Dichteprofil der Erde. Wir verwenden dazu ein Standard-Dichteprofil [27][85] von Stacey.

Für die Energieauflösung der Detektoren wurde ein konservatives Modell mit konstanter Auflösung benutzt. Dabei wächst die Halbwertsbreite der Verschmierung linear mit der Energie  $\sigma_E = c \times E$  an, wobei  $c$  die Energieauflösung in Prozent ist. Für die Auflösung und auch für die Energieschwelle der Detektoren haben wir in unseren Analysen, die Energie des detektierten Myons mit der Neutrinoenergie identisch gesetzt.

Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, daß wir nur das generische physikalische Potential der Experimente betrachtet haben. Während die statistischen Fehler berücksichtigt wurden, haben wir systematische Fehler und Backgrounds als vernachlässigbar betrachtet und daher nicht in die Analyse eingeschlossen. Daher können die Ergebnisse im realen Experiment noch etwas schlechter ausfallen, als in unseren Plots gezeigt.

#### 5.1.4 Ereignisraten mit einer Neutrino-fabrik

Die vorherigen analytischen Betrachtungen erlauben uns nun in der Neutrino-fabrik das Verhalten sowohl der numerisch errechneten totalen Appearance- bzw. Disappearance-Raten in Abhängigkeit der Myonenergie zu verstehen und zu überprüfen, als auch diejenigen der kombinierten Raten des  $\mu^+$ - respektive  $\mu^-$ -Strahls. Die Plots wurden mit den Parametern aus Tab. 5.1 erstellt:  $N_{\text{KT}}N_{\mu\pm}\epsilon_{\pm} = 2 \cdot 10^{21}$ ,  $|\Delta m_{31}^2| = 3.5 \cdot 10^{-3} eV^2$ ,  $\sin^2 2\theta_{23} = 1$ ,  $L = 7332$  km und verschiedene Werte von  $\sin^2 2\theta_{13}$ . In Abbildung 5.1 wurde  $\sin^2 2\theta_{13}$  auf den maximal mögliche Wert ( $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1$ ) festgesetzt. In den Fällen, in denen die Myonenergie fixiert ist, nehmen wir einen Wert von  $E_{\mu} = 20$  GeV an. Der Detektor soll eine Energieschwelle von 5 GeV und eine Auflösung von 20 Bins im Intervall zwischen 5 GeV und 20 GeV haben. In Abbildung 5.1 werden sowohl die totalen Appearance-Raten (gestrichelte Linien)  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{\mu}$  als auch die Disappearance-Raten (durchgezogene Linien)  $\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{\nu}_{\mu}$  auf einer logarithmischen Skala gezeigt (siehe dazu auch [17] und [6]). Von diesen Linienpaaren stellt je eine den Neutrino- ( $\bullet$ ) und eine den Antineutrino-Kanal ( $\circ$ ) dar. Diese unterscheiden sich, wie wir schon früher gesehen haben (Kap. 2.5.5) in der Größe ungefähr um einen Faktor zwei, resultierend aus den Wirkungsquerschnitten. Jede einzelne dieser Linien spaltet sich nochmal für positive ( $\oplus$ ) und negative ( $\ominus$ ) Vorzeichen von  $|\Delta m_{31}^2|$  auf. Zum Vergleich sind noch zusätzlich die Raten ohne Oszillation ( $\odot$ ) eingezeichnet. Die Aufspaltung, die die Bestimmung des Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  ermöglicht, ist in den Appearance-Raten (gestrichelte Linien) deutlich zu erkennen. Für die großen Baselines mit denen wir arbeiten, ist auch in den Disappearance-Raten ein ähnlich großer Materieeffekt beobachtbar, der nur aufgrund der logarithmischen Darstellung kleiner wirkt.

Vergleichen wir nun z.B. die Oszillation  $\nu_e \rightarrow \nu_{\mu}$  mit der Oszillation  $\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{\nu}_{\mu}$ , die in der Neutrino-fabrik zusammen in einem Beam auftreten können. Dabei handelt es sich um die gestrichelte Linie mit  $\bullet$  und die durchgezogene Linie mit  $\circ$ . Man sieht, daß die Materieeffekte in den kombinierten Myonraten einer Neutrino-fabrik tatsächlich in dieselbe Richtung gehen. Entsprechendes gilt natürlich auch für die Kombination der CP-konjugierten Kanäle  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{\mu}$  und  $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\mu}$ . Dies ist besonders wichtig, falls keine oder nur unbefriedigende Ladungsidentifikation möglich ist, wenn also die wenigen Wrong Sign Myon Ereignisse des Appearance-Kanals nicht von der großen Anzahl Right Sign Myonen des Disappearance-Kanals zu unterscheiden sind. Man kann folglich in der Neutrino-fabrik noch ein nützliches – wenn auch nicht ganz so nützliches – Ergebnis erhalten, wenn man einen Detektor ohne CID verwendet und Myonen beider

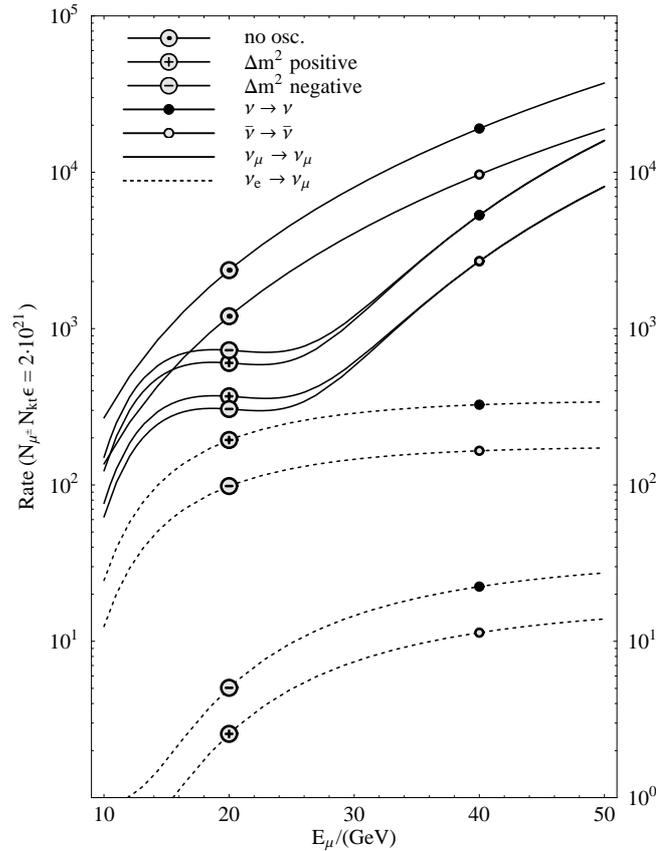


Abbildung 5.1: Myon Appearance-Raten  $\nu_e \rightarrow \nu_{\mu}$  und  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{\mu}$  (gepunktet) und Myon Disappearance-Raten  $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\mu}$  und  $\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{\nu}_{\mu}$  (durchgezogen) in Abhängigkeit der Myonenergie bei einer Baseline von 7332 km und den Oszillationsparametern  $|\Delta m_{31}^2| = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$  und  $\sin^2 2\theta_{13}$ .  $\oplus$  und  $\ominus$  bezeichnen dabei positives bzw. negatives Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$ ,  $\odot$  steht für Raten ohne Oszillation.  $\bullet$  und  $\circ$  kennzeichnen den Neutrino respektive Antineutrino Kanal.

Ladungen gemeinsam nachweist. Die resultierenden totalen Myonraten  $\nu_{\mu} + \bar{\nu}_{\mu}$  der kombinierten Oszillationskanäle sind in Abb. 5.2 für beide möglichen Beams  $\mu^+$  und  $\mu^-$  auf einer linearen Skala dargestellt. Die materieinduzierte, vorzeichenabhängige Aufspaltung ist deutlich zu sehen, sie beeinflusst die Raten bis zu einem Faktor von zwei oder mehr, je nach Wert des Mischungswinkels  $\sin^2 2\theta_{13} = (0.1, 0.04, 0.01)$ . Der Einfluß kommt dabei teilweise vom Disappearance- und teils vom Appearance-, aber immer vom resonanten Kanal. Dabei handelt es sich beim positivem Vorzeichen um den Neutrinoanteil im Strahl und beim negativen Vorzeichen um den Antineutrinoanteil. Betrachten wir das nochmal konkret an Beispiel des  $\mu^-$  Strahls: Bei negativem Vorzeichen wird der  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{\mu}$ -Kanal resonant und die Wrong Sign Myon Ereignisse nehmen stark zu während der  $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\mu}$  Kanal weitgehend unverändert bleibt. Bei

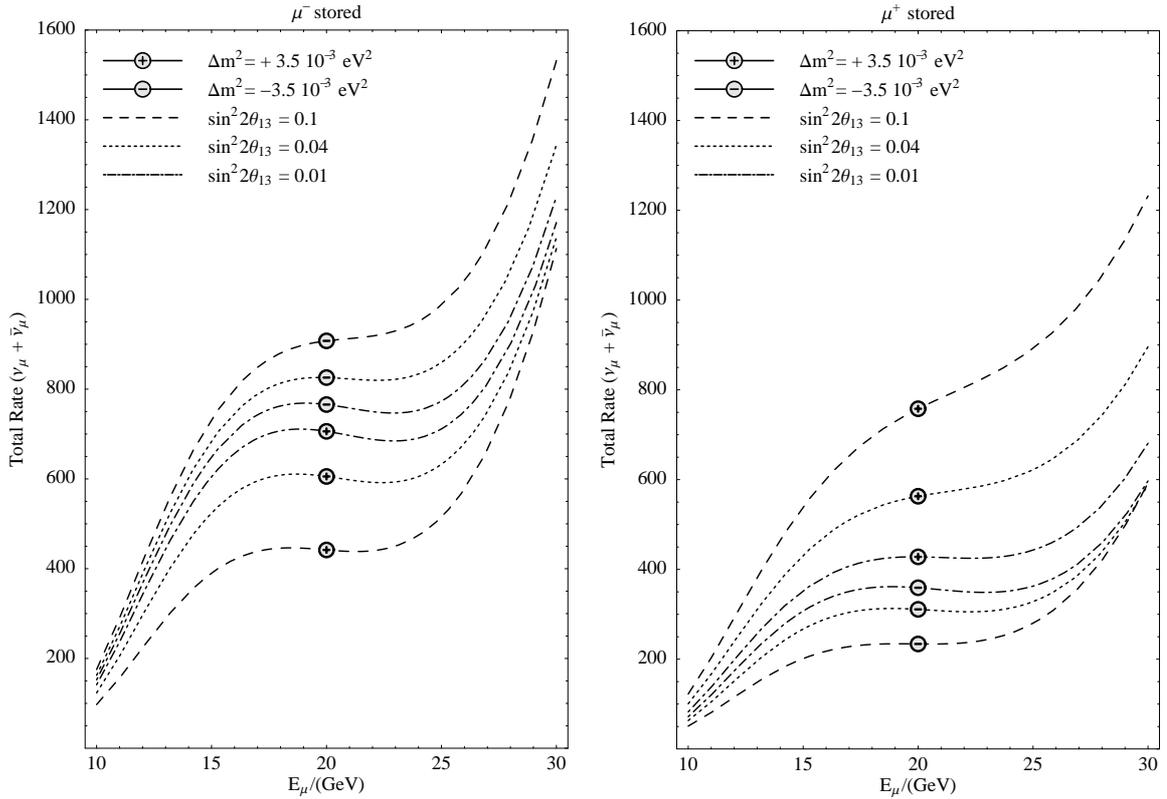


Abbildung 5.2: Totale Myonraten  $\mu^+ + \mu^-$  beider Beampolaritäten aus  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$  kombiniert mit  $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  bzw.  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  kombiniert mit  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$  in Abhängigkeit der Myonenergie bei einer Baseline von 7332 km,  $|\Delta m_{31}^2| = 3.5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$  und  $N_{\mu^\pm} N_{kT} \epsilon_\mu = 2 \cdot 10^{21}$ .  $\oplus$  und  $\ominus$  bezeichnen wiederum das positive respektive negative Vorzeichen. Die Analyse wurde bei verschiedenen Mischungswinkel  $\theta_{13}$  durchgeführt, vgl. dazu Kabels an den unterschiedlichen Linien.

positivem Vorzeichen, ist dagegen die  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ -Oszillation der resonante Kanal und die Ereignisraten für Myonen mit der richtigen Ladung nehmen stark ab. Insgesamt erhält man abhängig vom Vorzeichen einen entgegengesetzten Effekt. Für den  $\mu^+$ -Beam verhält sich der Effekt in den Vorzeichen genau umgekehrt.

Zuletzt betrachten wir noch, ob die Materieeffekte unterschiedliche spektrale Eigenschaften haben, um diese durch geschickte Cuts für eine Verstärkung der Signale im Verhältnis zur Oszillation zu nutzen. Dazu stellen wir in Abb. 5.3 die zugehörigen differentiellen Eventratenspektren der induzierten totalen Myonraten ( $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ ) bei maximalen Winkel  $\sin^2 2\theta_{13}$  in 20 Energiebins dar [6]. Da keine unterschiedlichen Eigenschaften beobachtet werden können, werden wir später differentielle Ereignisratenspektren nutzen, die aus simulierten Daten mit verschiedenen, definierten Anfangswerten gewonnen wurden. Genaueres darüber später in Kap. 5.2.1.

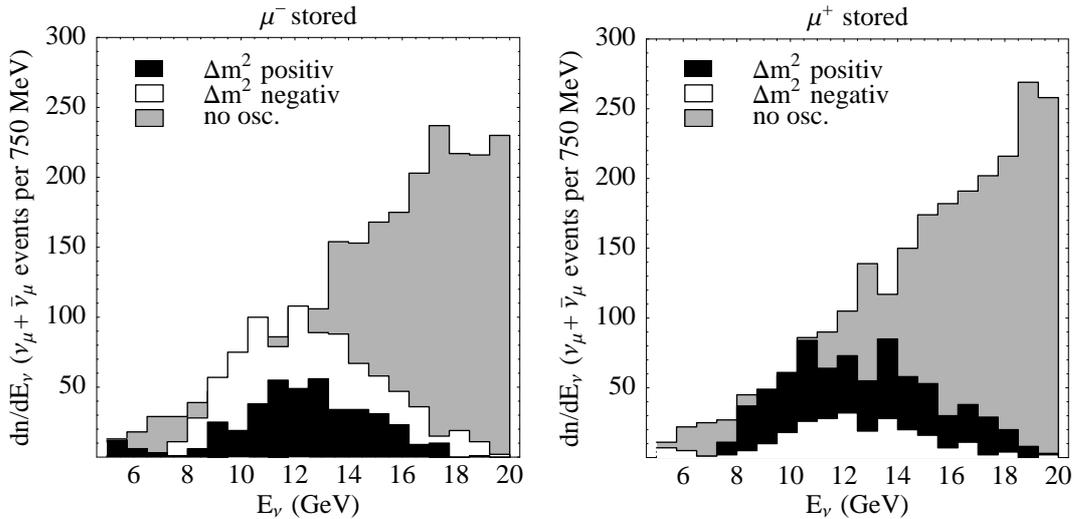


Abbildung 5.3: Spektrale Verteilung der Myonraten  $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$  beider Beampolaritäten aus Abb. 5.2 bei festem  $\sin^2 2\theta_{13} = 0.1$ . In dem Energiebereich 5 GeV bis 20 GeV wurden zwanzig Energiebins verwendet. Es sind keine typischen Unterschiede in der spektralen Verteilung zu erkennen.

### 5.1.5 Ereignisraten in einem Neutrino teleskop

Betrachten wir nun noch die totalen Raten in einem Neutrino teleskop mit einem Wide Band Beam. Im Gegensatz zur Neutrino fabrik sind die Möglichkeiten hier nicht so vielfältig, da aufgrund des fehlenden  $\nu_e$  Anteils im Strahl nur reine Disappearance-Experimente möglich sind. Desweiteren sind die Raten nicht von einem variablen  $E_\mu$  bzw.  $E_{mean}$  abhängig, da die Strahlenergien der in Frage kommenden Neutrinoquellen bereits festliegen. Daher haben wir als Plotparameter die noch nicht festliegende Massendifferenz  $\Delta m_{13}^2$  statt der Myonenergie benutzt. Für unsere Analyse verwenden wir eine Quelle mit einem CNGS-ähnlichen Flußspektrum bei  $4.5 \cdot 10^{19}$  pot [55, 56]. Als Detektor benutzen wir ein Neutrino teleskop ähnlich AMANDA [66], mit einer Masse von 5000 kt, einer Myon-Detektionseffizienz von  $\epsilon_{\mu\pm} = 100\%$ , einer Energieschranke von 15 GeV und einer Energieauflösung von 4 Bins a 10 GeV. Für die übrigen Parameter verwenden wir  $\sin^2 2\theta_{23} = 1$ ,  $L = 6500$  km bzw.  $L = 11200$  km und verschiedene Werte von  $\sin^2 2\theta_{13}$ , vgl. Tab. 5.1. Wie man in Abb. 5.4 sehen kann, induziert ein endliches  $\theta_{13}$  nur im Fall eines positiven  $|\Delta m_{31}^2|$  eine signifikante Auslöschung der totalen Raten. Eine Verstärkung für negatives Vorzeichen existiert nicht. Der Grund dafür ist, daß der Wide Band Beam nur aus (Myon)Neutrinos und praktisch keinen Anti(-Elektron)neutrinos besteht, bei gegebenem Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  aber nur einer der beiden konjugierten Kanäle die Resonanzbedingung erfüllen kann (Kap. 2.5.4). Im typischen Wide Band Beam ist für negatives Vorzeichen die passende Neutrinosorte stark unterdrückt und die materieresonante Verstärkung, wie

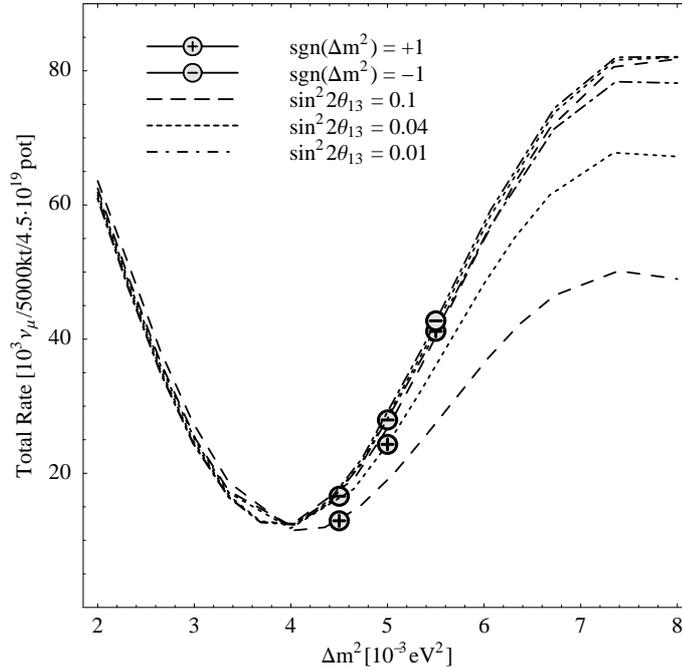


Abbildung 5.4: Totale Myonraten  $\nu_\mu$  bei einer Baseline von 6500 km als Funktion von  $|\Delta m_{31}^2|$  mit  $\sin^2 2\theta_{23} = 1$ .  $\oplus$  und  $\ominus$  bezeichnen positives bzw. negatives Vorzeichen von  $|\Delta m_{31}^2|$ . Für  $\theta_{13}$  wurden verschiedene Werte benutzt, vgl. Labels an den verschiedenen Linien.

sie in der Neutrinfabrik durch  $\bar{\nu}_e$  zu sehen war, existiert daher nicht. Um diesen Nachteil auszugleichen, benötigt man einen zusätzlichen Antineutrino-Strahl, der im Fall des negativen Vorzeichens von  $\Delta m_{31}^2$  resonant ist und zu einer entsprechend starken Auslöschung der Überlebensraten führt. Der Antineutrinostrahl ist prinzipiell durch eine Umschaltung der Magnetfokussierung zu erhalten (Kap. 3.1.2). Allerdings ist ein direkter Vergleich der Signale beider Beams nicht möglich, da der Antineutrinostrahl eine grundsätzlich andere Systematik hat, z.B. sind die Beimischungen anderer Flavour wesentlich größer. Sollten mit dem Neutrinostrahl keine Materieeffekte beobachtet werden, muß man für eine definitive Aussage diese Option nutzen. Nur ein Experiment mit dem Antineutrinostrahl kann dann nämlich zeigen, ob mit den gewählten Parametern tatsächlich keine Materieeffekte stattfinden, oder nur das falsche Vorzeichen eine Resonanz verhindert hat. Weiterhin kann man noch die Abhängigkeit des Materieeffekts vom genauen Wert von  $\theta_{13}$  sehen. Da diese  $\theta_{13}$ -abhängigen Terme, die nur in höheren Ordnungen auftreten, wiederum vom Wert von  $|\Delta m_{31}^2|$  abhängen (Kap. 2.12), wird die Aufspaltung zu großen  $|\Delta m_{31}^2|$  hin deutlicher.

## 5.2 Extraktion der Parameter aus experimentellen Daten

### 5.2.1 Vorgehensweise zur Bestimmung von $\theta_{13}$ und $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$

Da wir nun wissen, wie die Überlebens- und Oszillationsraten in solchen Experimenten aussehen, können wir uns unserem eigentlichen Ziel, der Bestimmung von  $\theta_{13}$  und dem Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  zuwenden. Dazu müssen wir uns zuerst einmal aus den theoretisch kalkulierten, spektralen Ereignisraten (Gl. 5.1) experimentelle Daten künstlich erzeugen. Dies tun wir, indem wir zu den Raten ein statistisches Rauschen hinzufügen, indem wir poissonverteilte Fluktuationen zu den Energiebins addieren. Um die Sensitivität im gesamten Parameterraum bestimmen zu können, werden wir die Raten für verschiedene, definierte Werte aus den erlaubten Bereichen der Oszillationsparameter ( $E_\mu, \Delta m_{31}^2, \sin^2 2\theta_{23}, \sin^2 2\theta_{13}$ ) erzeugen. Die anschließende Re-Analyse der Parameter aus den simulierten Daten werden wir sowohl für das richtige als auch das falsche Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$ <sup>3</sup> in zwei Schritten durchführen, da globale Mehrparameter-Fits relativ kompliziert sind<sup>4</sup>. Zunächst werden wir aus den simulierten Daten die führenden Oszillationsparameter ( $|\Delta m_{31}^2|$  und  $\theta_{23}$ ) bei richtigem Vorzeichen mit guter Präzision re-extrahieren, da wir diese zur Bestimmung der Subleading Parameter benötigen. Dazu analysieren wir vor allem das Myonspektrum der dominanten  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$  und  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$  Disappearance Oszillation. Da dieser Kanal in guter Näherung unabhängig von  $\sin^2 2\theta_{13}$  (siehe Gl. 2.12) ist, gelingt dann die Bestimmung von  $|\Delta m_{31}^2|$  im ganzen Bereich von  $\theta_{13}$  mit etwa der gleichen Präzision. In der Neutrino-fabrik werden wir diese Analyse zusätzlich im reinen Appearance-Kanal durchführen. Um zu demonstrieren, daß in diesem Fall besonders bei kleinem  $\theta_{13}$  die Präzision deutlich nachläßt, setzen wir  $\sin^2 2\theta_{23}$  fest und stellen den Plot in Abhängigkeit von dem noch zu bestimmenden  $\theta_{13}$  dar. Für den Wide Band Beam dagegen werden die Präzision in beiden Leading Parametern in einem Plot darstellen und erst später die Sensitivität auf  $\theta_{13}$  in einem separaten Plot. In den Plots der Leading Parameter werden wir immer neben dem gewonnenen Best Fit (Sternchen) auch die Werte mit denen die Daten erzeugt wurden (schwarze Vierecke) angeben. Desweiteren werden wir die Konturlinien des Konfidenzlevels angeben, mit denen bei richtigem Vorzeichen ausgeschlossen werden kann, daß die Ergebnisse durch statistische Fluktuationen zufällig erzielt worden sein könnten. Ist uns das gelungen werden wir den gewonnenen Best Fit benutzen, um den Bereich im Parameterraum  $\Delta m_{31}^2, \sin^2 2\theta_{13}$  zu ermitteln, in dem die Bestimmung von  $\theta_{13}$  und dem Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  aus den materieinduzierten Effekten möglich ist. Letzteres erhält man, indem

<sup>3</sup>Gemeint ist damit richtig oder falsch im Vergleich zum Vorzeichen, wie es für die Simulation der Raten benutzt wurde.

<sup>4</sup>Zur Zeit befinden sich auch Verfahrensweisen für Mehr-Parameterfits in der Entwicklung und eine entsprechende Veröffentlichung ist in Vorbereitung. Die Plots werden dazu natürlich noch um eine weitere Achse erweitert [17]. Diese Analysen erlauben eventuelle Relationen aufzudecken.

man denselben Fit mit falschem Vorzeichen durchzuführen. Im Fall der Neutrino-Fabrik sind dazu vor allem die Appearance-Kanäle nützlich. Die Ergebnisse werden wir dann für beide Beams in Sensitivitätsplots darstellen. Betrachten wir uns im folgenden die für die Analysen benutzte Maximum Likelihood Methode genauer [6].

### 5.2.2 Statistik

Wie wir gesehen haben bewirkt Materie eine Abweichung der Zahl der Myonraten gegenüber dem was wir ohne Materie erwarten würden. Wir wollen nun den Konfidenzlevel (CL) bestimmen, mit denen die beobachteten Myon Ereignisse – unsere künstlich generierten Daten – statistische Fluktuationen um den im Vakuum erwarteten Wert darstellen könnten. Die Analyse folgt dem in Particle Data Book [86] vorgestellten Verfahren für poissonverteilte Größen und benutzt

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( 2 [n_i^{\text{th}} - n_i^{\text{obs}}] + 2n_i^{\text{obs}} \log \frac{n_i^{\text{obs}}}{n_i^{\text{th}}} \right) . \quad (5.6)$$

Wobei  $i$  die Energiebins im Detektor sind,  $n_i^{\text{obs}}$  die beobachteten Myonereignisse und  $n_i^{\text{th}}$  die ohne Materie erwarteten Raten. Wir haben überprüft, daß die statistische Signifikanz der Ergebnisse nicht allzusehr abhängig von der Anzahl der Bins ist, solange noch genug Bins vorhanden sind, um das spektrale Verhalten richtig beschreiben zu können. Feineres Binning verbessert die Signifikanz nicht wegen der statistischen Limitierung durch Fluktuationen. Für die Neutrino-Fabriken nehmen wir dabei symmetrisches Verhalten in beiden Polaritäten  $\mu^+$  und  $\mu^-$  an, das totale  $\chi^2$  ist dann durch

$$\chi^2 = \chi_{\mu^+}^2 + \chi_{\mu^-}^2 \quad (5.7)$$

gegeben. Sollte im Detektor keine Ladungsidentifikation möglich sein, dann sei  $n_i = (n_{\mu^+}) + (n_{\mu^-})$  die gesamte ununterscheidbare Anzahl von Myon- und Antimyon-Ereignissen im  $i$ -ten Energiebin. Sollte dagegen Ladungsidentifikation schon möglich sein, werden  $\chi_{\mu^\pm}^2$  für Neutrinos und Antineutrinos getrennt berechnet und anschließend summiert.

$$\chi^2 = \chi_{\mu^-, \nu}^2 + \chi_{\mu^-, \bar{\nu}}^2 + \chi_{\mu^+, \nu}^2 + \chi_{\mu^+, \bar{\nu}}^2 . \quad (5.8)$$

Benutzt man einen Wide Band Beam als Neutrinoquelle existiert natürlich nur ein  $\chi^2$ . Anschließend wird  $\chi^2$  wie gewohnt minimiert in Bezug auf die geplotteten Parameter. Dann subtrahieren wir noch den minimalen Wert von  $\chi^2$  und definieren die Konfidenzlevel bezüglich den Werten von

$$\Delta\chi^2 = \chi^2 - \chi_{\text{min}}^2 . \quad (5.9)$$

Dieses  $\Delta\chi^2$  folgt einer  $\chi^2$  Verteilung von  $k$  Freiheitsgraden (Anzahl von gefitteten Parametern). Der entsprechende Wert von  $\Delta\chi_{CL}^2$  zu einem gegebenen Konfidenzlevel

wird durch

$$CL = \int_0^{\Delta\chi_{CL}^2} \frac{x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} dx \quad (5.10)$$

gegeben. Im Fall von zwei Freiheitsgraden entspricht ( $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ ) Werten für den Konfidenzlevel von  $CL = (68.3\%, 95.5\%, 99.7\%)$  und  $\Delta\chi_{CL}^2 = (2.3, 6.2, 11.8)$  wie gewöhnlich. Sei in dem Zusammenhang noch erwähnt, daß wir angenommen haben, daß  $\theta_{13}$  bekannt ist. Sollte nur eine Obergrenze vorhanden sein, dann muß auch  $\theta_{13}$  variiert und das Minimum von  $\chi^2$  gesucht werden. Man erhält einen zusätzlichen Parameter und die Signifikanz wird schlechter.

### 5.2.3 NeutrinoFabrik

In der NeutrinoFabrik führen wir die Parameterextraktion zunächst für den Fall, daß keine Ladungsidentifikation möglich ist, also für die kombinierten Myonraten, durch. Abb. 5.5 zeigt die  $1\sigma$  und  $2\sigma$  Konturlinien des Parameterfits mit richtigem Vorzeichen für verschieden Werte von  $|\Delta m_{31}^2|$  und  $\theta_{13}$ . Die Zahlen neben den Konfidenzleveln, stellen die  $\Delta\chi^2$ -Werte für das falsche Vorzeichen im Verhältnis zum richtigen Vorzeichen des Best Fit Wertes dar. Alle Plots wurden in Abhängigkeit von  $\sin^2 2\theta_{13}$  und  $\Delta m_{31}^2$  für die Parametern aus Tab. 5.1 erstellt:  $N_{\text{kT}} N_{\mu\pm} \epsilon_{\mu\pm} = 2 \cdot 10^{21}$ ,  $E_\mu = 20$  GeV,  $\sin^2 2\theta_{23} = 1$  und  $L = 7332$  km. Der Detektor soll eine Energieschwelle von 5 GeV haben und eine Auflösung von 20 Bins im Intervall bis 20 GeV. Da in dieser Analyse der dominante Disappearancekanal eingeht, kann  $|\Delta m_{31}^2|$  im gesamten Parameterraum mit gleichbleibend guter Genauigkeit bestimmt werden. Dagegen kann man sehen, daß mit kleiner werdendem  $\theta_{13}$  die Präzision in der Bestimmung von  $\sin^2 2\theta_{13}$  schlechter wird, die Ringe werden immer breiter. Trotzdem kann man ohne Ladungsidentifikation  $\theta_{13}$  bereits bis hinab zu Ordnungen von  $\mathcal{O}(10^{-2})$  bestimmen.

Ist die Ladungsidentifikation perfekt möglich und kann somit der Appearancekanal einzeln genutzt werden, wird die Sensitivität auf  $\sin^2 2\theta_{13}$  deutlich besser, da der Appearance-Kanal stärker von  $\theta_{13}$  abhängt (Kap. 2.5.3). Dies zeigt auch Abb. 5.6, in der die Ergebnisse ausschließlich des Appearancekanals dargestellt sind. Besonders für kleine Werte von  $\sin^2 2\theta_{13}$  kann mit dem Appearance-Kanal die Präzision in  $\sin^2 2\theta_{13}$  verbessert werden, die Sensitivität reicht dann hinab bis zu Werten der Ordnung  $\mathcal{O}(10^{-3} - 10^{-4})$ . Bei größeren Werten von  $\sin^2 2\theta_{13}$  (ab ungefähr einer Größenordnung unter CHOOZ) erreicht man in beiden Analysen die gleiche Präzision. Dagegen ist die Sensitivität auf das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  im gesamten Parameterbereich im Appearance-Kanal besser, wie die Zahlen neben den Konturlinien zeigen. Allerdings geben die summierten Raten für nicht zu kleine Werte von  $\theta_{13}$  ebenfalls gute Ergebnisse für  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$ . Da Abb. 5.6 den Disappearance-Kanal nicht mit einschließt, verliert man jedoch deutlich Präzision in der Bestimmung von  $|\Delta m_{31}^2|$ , was natürlich durch eine separate Analyse der Disappearance-Raten wettgemacht werden kann [17].

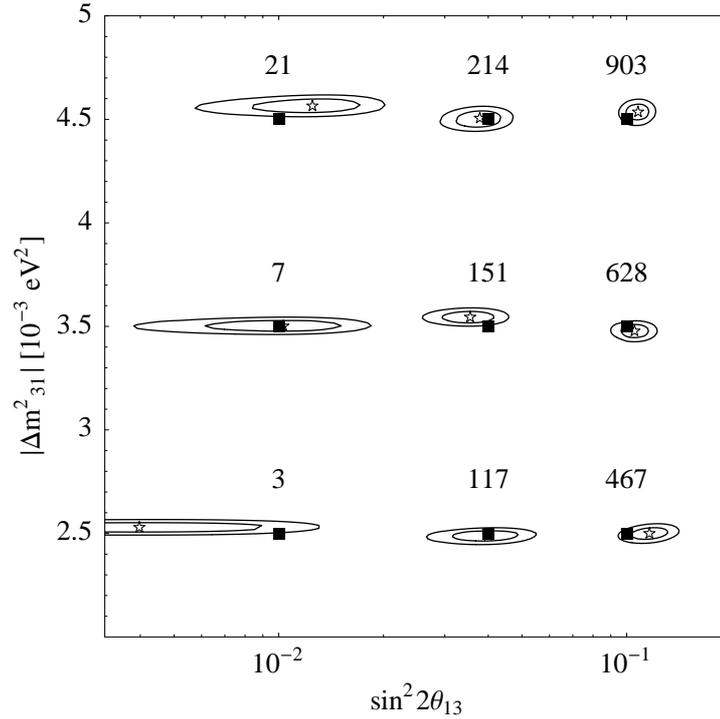


Abbildung 5.5: *Fit an das kombinierte Myonspektrum für positives  $\Delta m_{31}^2$  ohne Ladungsidentifikation, also an die Summe der unoszillierten ( $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ) und oszillierten ( $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ ) Myonneutrinos, bei einer Baseline von 7332 km. Die schwarzen Vierecke bezeichnen das Parameterpaar, das zur Simulation der Daten benutzt wurde, das Sternchen den gewonnenen Best Fit. Die Zahlen neben den  $1\sigma$  und  $2\sigma$  Konturlinien stellen die lokalen Minima von  $\chi^2$  bei zwei Freiheitsgraden für dieselben Best Fit Parameter dar, allerdings bei falschem Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$ .*

Folglich stellt, wenn Ladungsidentifikation möglich ist, natürlich die gemeinsame Analyse aller verfügbarer Daten die beste Strategie dar. Dies bedeutet einen globalen Fit der Materieeffekte, sowohl im Appearance-Kanal als auch im Disappearance-Kanal. Wie man in Abb. 5.7 sehen kann, gelingt dann sowohl für  $\sin^2 2\theta_{13}$  und  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$  als auch für  $|\Delta m_{31}^2|$  eine sehr gute Genauigkeit im gesamten betrachteten Parameterraum, die Ringe sind in beide Richtungen klein.

Zuletzt zeigt noch Abb. 5.8 den Bereich des  $|\Delta m_{31}^2| - \sin^2 2\theta_{13}$ -Parameterraums, in dem die Bestimmung des Vorzeichens von  $\Delta m_{31}^2$  möglich sein wird. Zu sehen sind die  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  und  $3\sigma$  Konturlinien eines Fits mit falschem Vorzeichen für positive (links) und negative (rechts)  $\Delta m_{13}^2$ . Wie man sieht, ist im Fall positiver  $\Delta m_{31}^2$  der Konfidenzlevel, mit dem das falsche Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  zurückgewiesen werden kann, geringfügig besser. Dies resultiert aus der Tatsache, daß im Fall des positiven Vorzeichens der Neutrino kanal der resonante Kanal ist und dessen Wirkungsquerschnitt

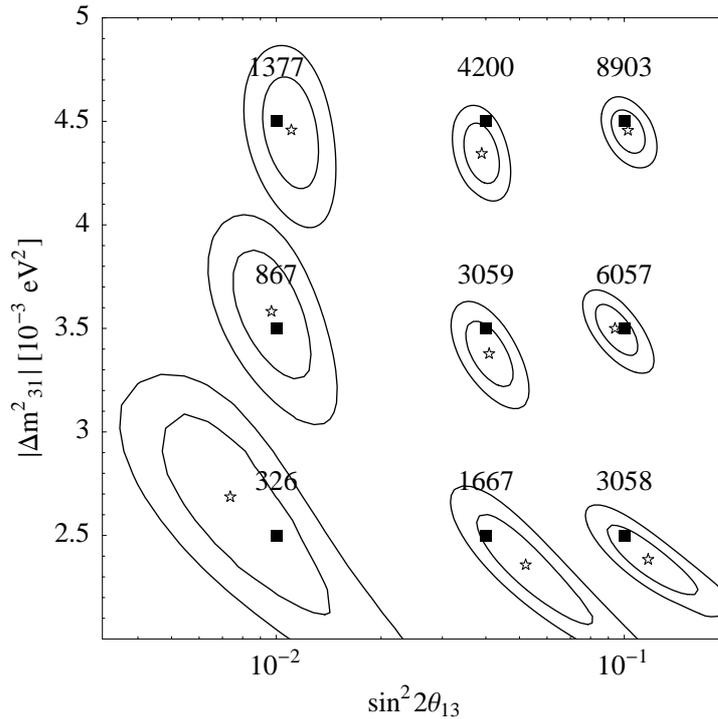


Abbildung 5.6: *Fit an das Appearance-Myonspektrum ( $\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ ) für positives  $\Delta m_{31}^2$  mit Ladungsidentifikation, bei einer Baseline von 7332 km. Kennzeichnung wie in Abb. 5.5. Das globale Minimum des Fits ist nicht erlaubt, da der dazugehörige Wert von  $\Delta m_{31}^2$  bereits ausgeschlossen ist.*

etwas besser ist. Für das negative Vorzeichen ist der Antineutrino kanal mit dem schlechteren Wirkungsquerschnitt resonant und damit verantwortlich für die etwas geringere Verstärkung. Dargestellt sind sowohl die Limites die mit Ladungsidentifikation aus den spektralen Daten des Appearancekanals gewonnen werden können (gestichelte Linien), als auch diejenigen aus den kombinierten Raten ohne CID (durchgezogene Linie). Dies zeigt, daß Ladungsidentifikation entscheidend sein wird, falls  $\sin^2 2\theta_{13}$  kleiner als  $\simeq 10^{-2}$  ist.

Diese Abbildungen zeigen deutlich, daß eine Neutrino fabrik eigentlich nur dann Vorteile bringt, wenn der zugehörige Detektor gute Fähigkeiten zur Ladungsidentifikation besitzt. Ohne CID stehen die nur geringen Verbesserungen gegenüber den bisherigen Messungen kaum im Verhältnis zum Aufwand, auch wenn dann immerhin noch die kombinierten Kanäle Ergebnisse liefern. Wie auch immer, da bisher noch nicht klar ist, wie gut Ladungstrennung in magnetisierten Eisendetektoren überhaupt realisiert werden kann, sind daher Neutrino teleskope mit konventionelle Wide Band Beams eine sinnvolle Alternative, wie wir schon in der Einleitung ausführlich diskutiert haben. Daher wollen wir uns nun den Wide Band Beams zuwenden.

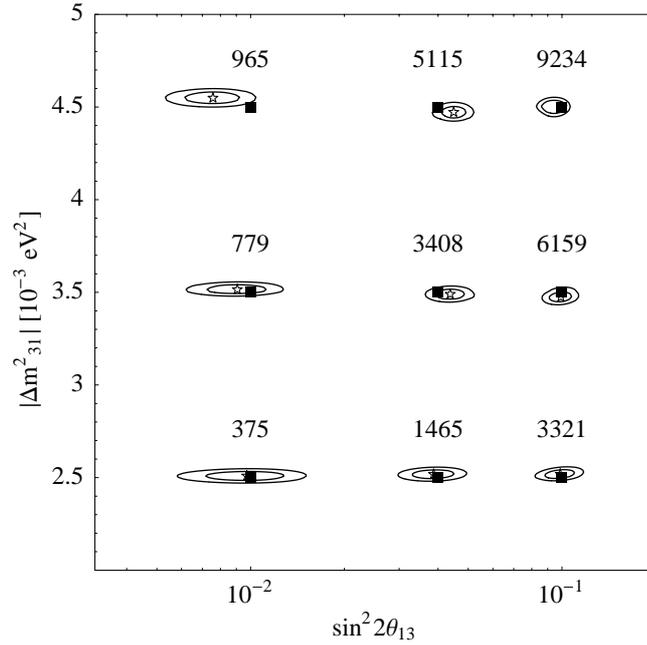


Abbildung 5.7: *Durch Ladungsidentifikation getrennter Fit an das Appearance- und Disappearance-Myonspektrum für positives  $\Delta m_{31}^2$  bei einer Baseline von 7332 km. Kennzeichnungen wie in Abb. 5.5. Das globale Minimum des Fits ist nicht erlaubt, da der dazugehörige Wert von  $\Delta m_{31}^2$  bereits ausgeschlossen ist.*

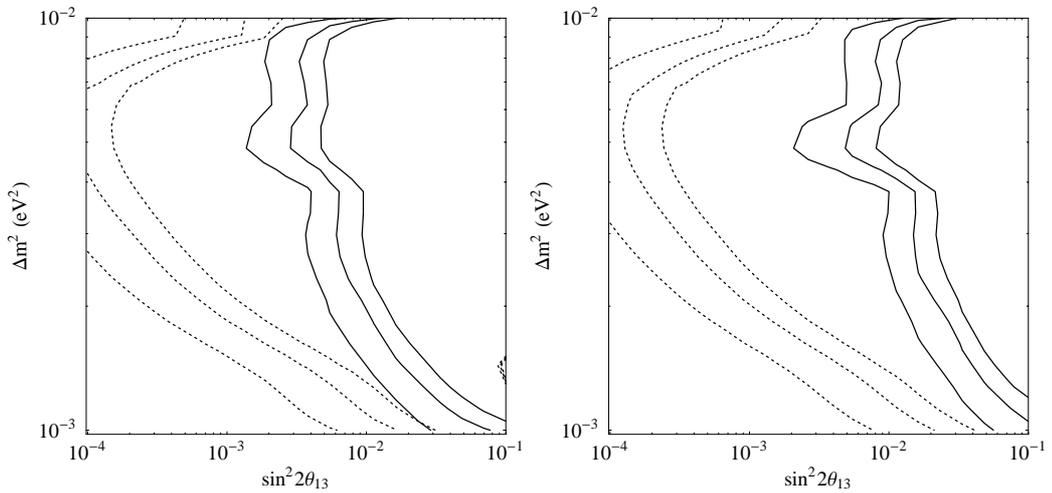


Abbildung 5.8: *Sensitivität auf das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  mit den  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  und  $3\sigma$  Konturlinien eines Fits bei falschem Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$ . Während die gepunkteten Linien durch einen Fit an die Daten des Appearance-Kanals allein entstanden sind, basieren die durchgezogenen Linien auf die kombinierten Raten  $\mu^+ + \mu^-$  ohne CID.*

### 5.2.4 Neutrinoteleskop

Wie schon in Kap. 5.1.5 besprochen, besteht ein Wide Band Beam ausschließlich aus Myonneutrinos und es existiert daher keine resonante Verstärkung für negatives Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$ . Daher werden die Ergebnisse, die von Materieeffekten abhängen, für negative  $\Delta m_{31}^2$  deutlich schlechter ausfallen. Zum Ausgleich können im Prinzip für negatives  $\Delta m_{31}^2$  dieselben Analysen dem Antineutrinostrahl gemacht werden, dann erhält man nur geringfügig schlechtere Sensitivitäten, was auf die größeren Beimischungen, die unsicherere Beamsystematik und den kleineren Fluß zurückzuführen ist. In dieser Arbeit sollen aber nur die Ergebnisse des Neutrinostrahls vorgestellt werden. Während die Bestimmung der führenden Oszillationsparameter nur für positives  $\Delta m_{31}^2$  durchgeführt wurde, sind in den Sensitivitätsplots auf  $\theta_{13}$  und  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$  die Ergebnisse beider Vorzeichen eingezeichnet. Für die Plots wurde ein CNGS-ähnlicher Beam mit  $4.5 \cdot 10^{19}$  pot und ein zu AMANDA ähnliches Neutrinoteleskop verwendet.

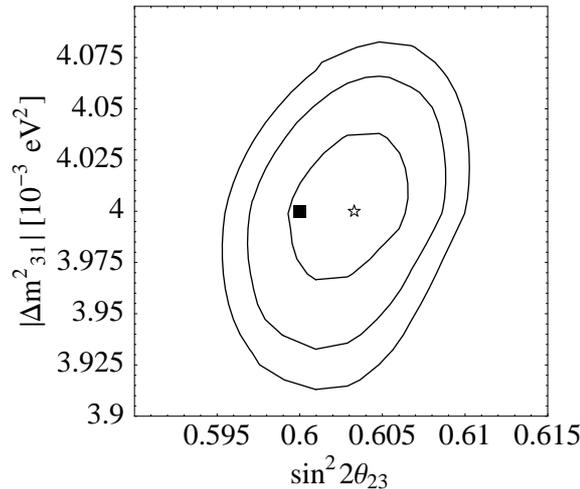


Abbildung 5.9: *Fit an das Myonspektrum der unoszillierten Myonneutrinos ( $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu$ ) mit positivem Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  bei einer Baseline von 6500 km. Gezeigt werden die  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  und  $3\sigma$  Konturlinien, der Best Fit (Sternchen) und das für die Simulation der Raten benutzte Parameterpaar,  $\sin^2 2\theta_{23} = 0.6$ ,  $|\Delta m_{31}^2| = 4.0 \cdot 10^{-3}$  (schwarzes Rechteck).*

In Abb. 5.9 sind die Ergebnisse des Fits der Leading Parameter an die Daten, die mit dem speziellen Parametersatz  $\sin^2 2\theta_{23} = 0.6$ ,  $|\Delta m_{31}^2| = 4.0 \cdot 10^{-3} eV^2$  generiert wurden, bei einer Entfernung von 6500 km (Fermilab – ANTARES) dargestellt. Die restlichen Parametern ergeben sich aus Tabelle 5.1:  $\sin^2 2\theta_{23} = 1$ ,  $\epsilon_{\mu\pm} = 100\%$ . Die Energieschwelle liegt bei 15 GeV, die Auflösung bei 10 GeV und 4 Bins. Die Analyse wurde auch mit anderen Parametersätzen  $\sin^2 2\theta_{23}$ ,  $|\Delta m_{13}^2|$  durchgeführt. Dies hat

gezeigt, daß die relativen  $3\sigma$  Fehler im ganzen SuperKamiokande Gebiet zwischen 0,5% und 10% in Abhängigkeit vom Wert von  $|\Delta m_{31}^2|$  liegen.

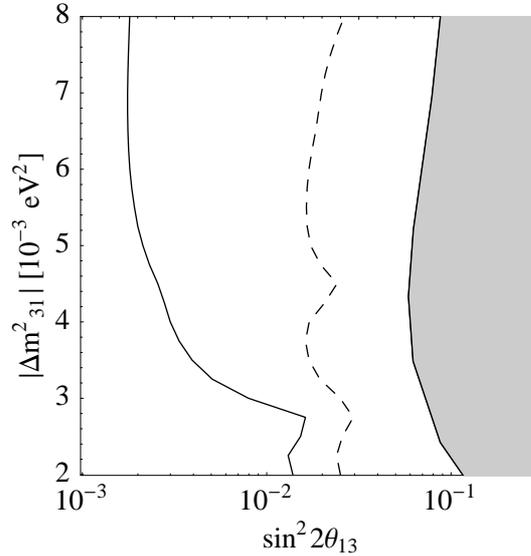


Abbildung 5.10: Die Ausschlusslinie von  $\sin^2 2\theta_{13} \equiv 0$  bei einem Konfidenzlevel von 90% für positives  $\Delta m_{31}^2$  (durchgezogene Linie) und negatives  $\Delta m_{31}^2$  (gestrichelte Linie) bei einer Baseline von 6500 km. Der schattierte Bereich wird bereits durch CHOOZ ebenfalls mit einem Konfidenzlevel von 90% ausgeschlossen.

Die Sensitivitäten auf die Subleading Parameter  $\sin^2 2\theta_{13}$  und  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$  sind in den Abbildungen 5.10 und 5.11 zu sehen. Abb. 5.10 zeigt das Parametergebiet in der  $\sin^2 2\theta_{13} - |\Delta m_{31}^2|$ -Ebene, in der die verwendeten simulierten Daten bei einem Konfidenzlevel von 90% nicht mit  $\theta_{13} \equiv 0$  konsistent sind. Auf demselben Level ist der schattierte Bereich durch CHOOZ ausgeschlossen. Wie man sieht, ist die Sensitivität im Fall eines negativen Vorzeichens von  $\Delta m_{13}^2$  besonders für große  $|\Delta m_{13}^2|$  erheblich schlechter, mehr als eine Größenordnung. Während man für positive  $\Delta m_{31}^2$  (durchgezogene Linie) auf den Mischungswinkel bis hinab zu  $\sin^2 2\theta_{13} \sim 9 \cdot 10^{-2}$  sensitiv ist, sind für negative  $\Delta m_{31}^2$  (gestrichelte Linie) nicht mal Werte von  $\sin^2 2\theta_{13} \sim 8 \cdot 10^{-1}$  möglich. Folglich gibt es zwei Möglichkeiten, wenn man im Experiment  $\theta_{13}$  nicht bestimmen kann. Ist das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  positiv, dann liegt  $\theta_{13}$  in jedem Fall außerhalb der Erreichbarkeit unter  $\sin^2 2\theta_{13} \sim 9 \cdot 10^{-2}$ . Andererseits kann  $\theta_{13}$  immer noch im Bereich zwischen  $\sin^2 2\theta_{13} \sim 9 \cdot 10^{-2}$  und  $\sin^2 2\theta_{13} \sim 7 \cdot 10^{-1}$  liegen, falls das Vorzeichen negativ sein sollte. Will man also bei Nichtbeobachtung des Materieeffekts die härtere Grenze von  $10^{-3}$  für  $\sin^2 2\theta_{13}$  erzielen, muß man beide Beams benutzen. Abb. 5.11 zeigt den  $\sin^2 2\theta_{13} - |\Delta m_{31}^2|$ -Parameterbereich in dem das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  mit einem Konfidenzlevel von 90% bestimmt werden kann, falls es positiv ist; sie wurde mit einer Baseline von 11200 km (CERN – AMANDA) bei verschiedenen Schwellenenergien des Detektors erstellt. Wie man sieht erlaubt ein ne-

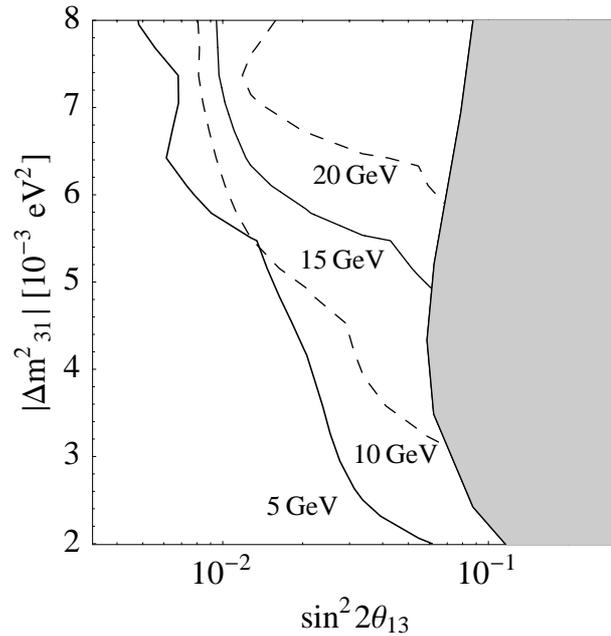


Abbildung 5.11: Sensitivität auf das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  bei einem Konfidenzlevel von 90% für positives  $\Delta m_{31}^2$  mit einer Baseline von 11200 km und mit  $\sin^2 2\theta_{23} = 1$ . Die verschiedenen Linien repräsentieren unterschiedliche Schwellen im Detektor von 5 GeV, 10 GeV, 15 GeV und 20 GeV. Der schattierte Bereich wird bereits durch CHOOZ ebenfalls mit einem Konfidenzlevel von 90% ausgeschlossen.

gatives Vorzeichen in Kombination mit dem Neutrinostrahl keine Bestimmung des Vorzeichens. Desweiteren kann man aus dem Plot auch den Limit an  $\theta_{13}$  ablesen, innerhalb dem die Bestätigung des Materieeffekts möglich ist. Die starke Abhängigkeit der Sensitivität von der Schwellenenergie verdeutlicht nochmal, daß es für diese Messungen besonders wichtig ist, möglichst viele resonante Neutrinos zu detektieren. Der genaue Wert der Resonanzenergie hängt von  $|\Delta m_{31}^2|$  ab und liegt ungefähr bei 15 GeV. Da die Resonanzenergie desto niedriger liegt, je kleiner  $|\Delta m_{31}^2|$  ist (Gl. 2.15), wird die Sensitivität bei gegebener Schwelle für kleineres  $|\Delta m_{31}^2|$  schlechter. Liegen die aus vorheriger Analyse gewonnenen Parameter  $|\Delta m_{31}^2|$  und  $\theta_{13}$  ungünstig, kann evtl. aus der Nichtbeobachtung keine Schlußfolgerung über die Existenz des Materieeffekts und über das Vorzeichen gezogen werden. Denn in manchen Bereichen kann es sein, daß trotz Sensitivität auf  $\theta_{13}$  keine Sensitivität auf das Vorzeichen besteht und es kann für keines der beiden Vorzeichen Materieeffekt beobachtet werden.

Nachdem wir nun die Vorgehensweise zur Bestimmung der Subleading Parameter ausgiebig diskutiert haben, und die Abhängigkeiten von den Parametern in den beiden Experimenten verstanden haben, wollen wir noch den direkten Vergleich verschiedener Experimente durchführen. Hierbei werden wir die Oszillationsparameter auf einen bestimmten zentralen Wert festlegen und uns stattdessen die Abhängigkeit der

Ergebnisse von Energieschwelle und Auflösung näher betrachten. Dies wird helfen die Ergebnisse falls nötig auf andere als die bisher diskutierten Experimente anzupassen und so einen idealen Setup zu finden.

### 5.3 Vergleich des physikalischen Potentials verschiedener Experimente

Zum Abschluß soll noch das physikalische Potential verschiedener Kombinationen von Quelle und Detektor direkt miteinander verglichen werden. Betrachtet werden die drei in Kap. 3 vorgestellten Detektortypen (magnetisierter Eisendetektor, IceCube und AquaRich) in Kombination mit dem Wide Band Beam und der Neutrino-fabrik. Dabei soll für die Neutrino-fabrik auch der Grenzfall einer versagenden Ladungsidentifikation im Eisendetektor berücksichtigt werden. Für die Detektoren wurden die Werte aus der Tabelle 5.3 benutzt und eine Myondetektionseffizienz von  $\epsilon_{\mu^\pm} = 100\%$ . Für den Wide Band Beam wurde ein CNGS-ähnliches Spektrum bei  $4.5 \cdot 10^{19}$  pot

	Magnetisierter Eisendetektor	Wasser/Eis Cherenkov Detektor	Megatonne Ring Imaging Detektor
<b>Schwelle</b>	4 GeV	15 GeV	1 GeV
<b>Auflösung</b>	10%	50%	7%
<b>Masse</b>	10 kt	100 Mt	1 Mt
<b>CID</b>	Ja	Nein	Nein
<b>Beispiele</b>	MINOS, MONOLITH	AMANDA, IceCube, ANTARES, NESTOR	AQUA-RICH

Tabelle 5.2: *Vergleich der typische Parameter verschiedener Detektoren, wie sie in unseren Analysen verwendet wurden.*

benutzt und für die Neutrino-fabrik  $N_{\mu^\pm} = 10^{20}$  nützliche Myonzerfälle bei einer Myonenergie von  $E_\mu = 50$  GeV. Für die Oszillationsparameter benutzen wir die momentanen atmosphärischen Best Fit Werte,  $|\Delta m_{31}^2| = |\Delta m_{32}^2| = 3.2 \cdot 10^{-3} eV^2$  und  $\sin^2 2\theta_{23} = 1$ .

Wir vergleichen die Präzision, mit der die Leading Parameter  $\theta_{23}$  (Abb. 5.12) und  $|\Delta m_{31}^2|$  (Abb. 5.13) bei einer Baseline von 11200 km (CERN – IceCube) bestimmt werden können. Desweiteren sind die mittleren Sensitivitäten auf  $\theta_{13}$  (Abb. 5.14) und die Möglichkeit der Bestimmung des Vorzeichens von  $\Delta m_{31}^2$  (Abb. 5.15) bei einer Baseline von  $L=6500$  km (Fermilab – ANTARES) dargestellt. Abb. 5.15 zeigt außerdem den Limit von  $\theta_{13}$ , oberhalb dem Tests für Materieeffekte möglich sind. Die Entfernung von 6500 km scheint zunächst für IceCube nicht sehr realistisch, aber der Einfluß der Baseline zwischen 6000 km und 12000 km für Detektoren ohne Ladungsidentifikation

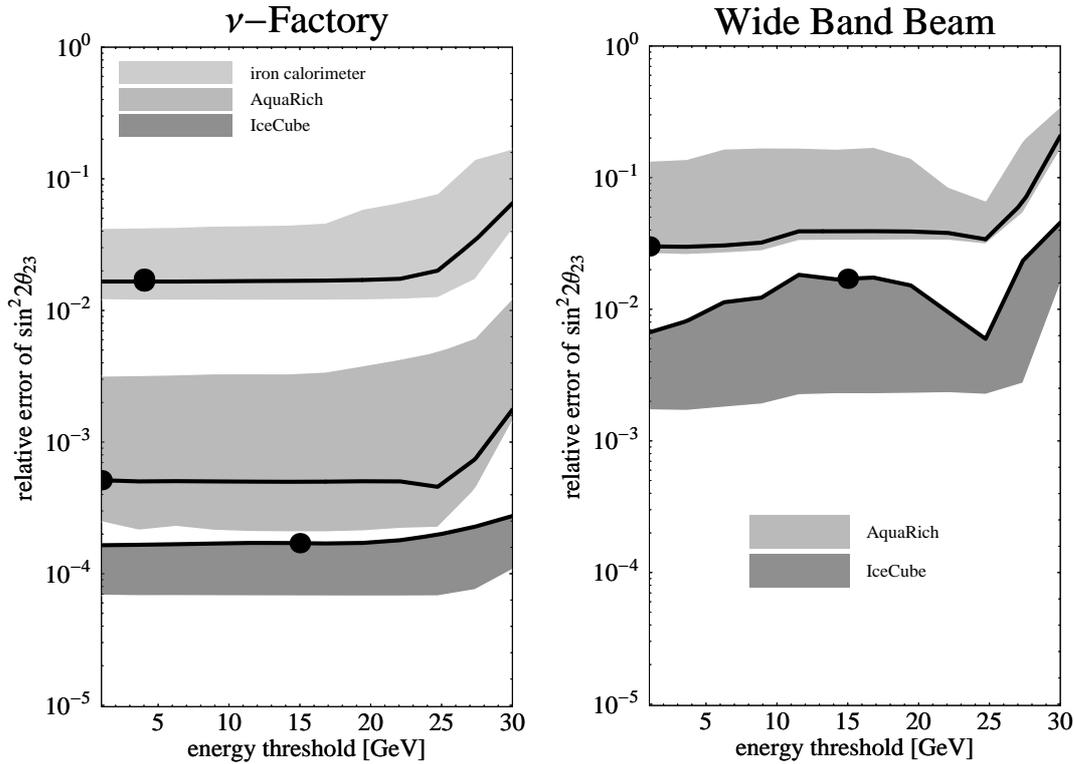


Abbildung 5.12: Vergleich der relativen  $3\sigma$ -Fehler in  $\sin^2 2\theta_{23}$  als Funktion der Schwelle des Detektors bei einer Baseline von 11200 km. Die Bänder zeigen die Abhängigkeit von der Energieauflösung zwischen 5% (unteres Ende) und 50% (oberes Ende). Die schwarzen Linien zeigen die typische Energieauflösung des jeweiligen Detektortyps, die Punkte darauf wiederrum die typische Schwellenenergie so wie sie in Tabelle 5.3 definiert wurden.

ist nicht sehr ausgeprägt. In allen Plots sind auf der linken Seite die Ergebnisse für einen Beam aus der Neutrino-fabrik und auf der rechten Seite für einen konventionellen Wide Band Beam zu sehen. Die Präzisionen und Sensitivitäten sind dabei immer in Abhängigkeit der Energieschwelle (1 GeV bis 30 GeV) dargestellt, während die Abhängigkeit von der Energieauflösung durch die Bänder (unteres Ende 5%, oberes Ende 50%) dargestellt ist. Letztere ist in allen Fällen streng monoton und nahezu linear auf der logarithmischen Skala. Die schwarzen Linien innerhalb der Bänder stellen die charakteristische Auflösung dar, wie sie in Tabelle 5.3 eingeführt wurden. Der Punkt auf dieser Linie wiederrum markiert die typische Energieschwelle und somit insgesamt das wahrscheinlichste physikalische Potential dieses Experiments. An dieser Stelle sei nochmal daran erinnert, daß wir lediglich die prinzipiellen physikalischen Möglichkeiten der Experimente diskutieren. Nur statistische Fehler wurden berücksichtigt, weitere systematische und Hintergrundeffekte wurden vernachlässigt, auch wenn sie evtl. unsere Schlußfolgerungen beeinflussen werden.

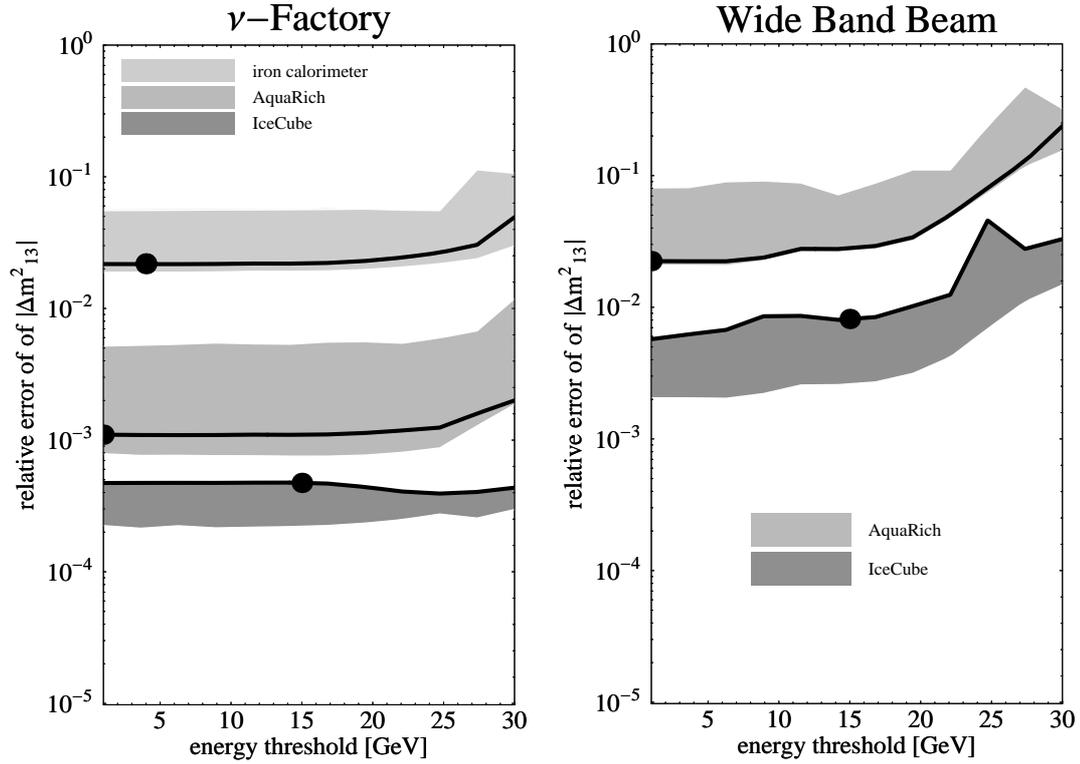


Abbildung 5.13: Vergleich der relativen  $3\sigma$ -Fehler in  $|\Delta m_{31}^2|$  als Funktion der Schwelle des Detektors bei einer Baseline von 11200 km. Kennzeichnung wie in Abb. 5.12.

In den Abbildungen 5.12 und 5.13 existiert für den Eisendetektor nur ein Band da sich die Performance mit und ohne Ladungsidentifikation nicht wesentlich unterscheidet, da die Information für die beiden Leading Parameter vor allem im Disappearancekanal enthalten ist. Keines der Experimente zeigt für die Leading Parameter eine allzu große Abhängigkeit von der Energieschwelle, da die Genauigkeit hauptsächlich durch die Statistik bestimmt wird und nicht durch die resonanzenergieabhängigen Materieeffekte. Die Statistik wird hauptsächlich durch die Detektormasse  $M$  und natürlich den Fluß  $\Phi$  bestimmt. Daher skaliert die Sensitivität allgemein ungefähr mit  $\sqrt{M\Phi t}$ , wobei  $t$  die Laufzeit des Experiments ist. Daher hat für beide Beams IceCube das beste Potential und schneidet die Neutrinfabrik besser ab. In den Abbildungen 5.14 und 5.15 jedoch gewinnen Detektoren mit perfekter Ladungsidentifikation gegenüber denjenigen ohne CID deutlich, da vor allem der Appearance-Kanal auf  $\theta_{13}$  sensitiv ist, während der Mischungswinkel in die Disappearance-Raten nur in höheren Korrekturen eingeht (Kap. 2.5.3). Speziell für den Eisendetektor existieren nun zwei Bänder, eines für den magnetisierten Eisendetektor mit Ladungsidentifikation und eines ohne. Hier zeigt sich wieder, wie in Kap. 5.1.5, besonders für Detektoren ohne Ladungsidentifikation eine deutliche Abhängigkeit von der Schwellenenergie. Bei der Resonanzenergie (15 GeV) ist besonders bei guter Energieauflösung (unterer Rand)

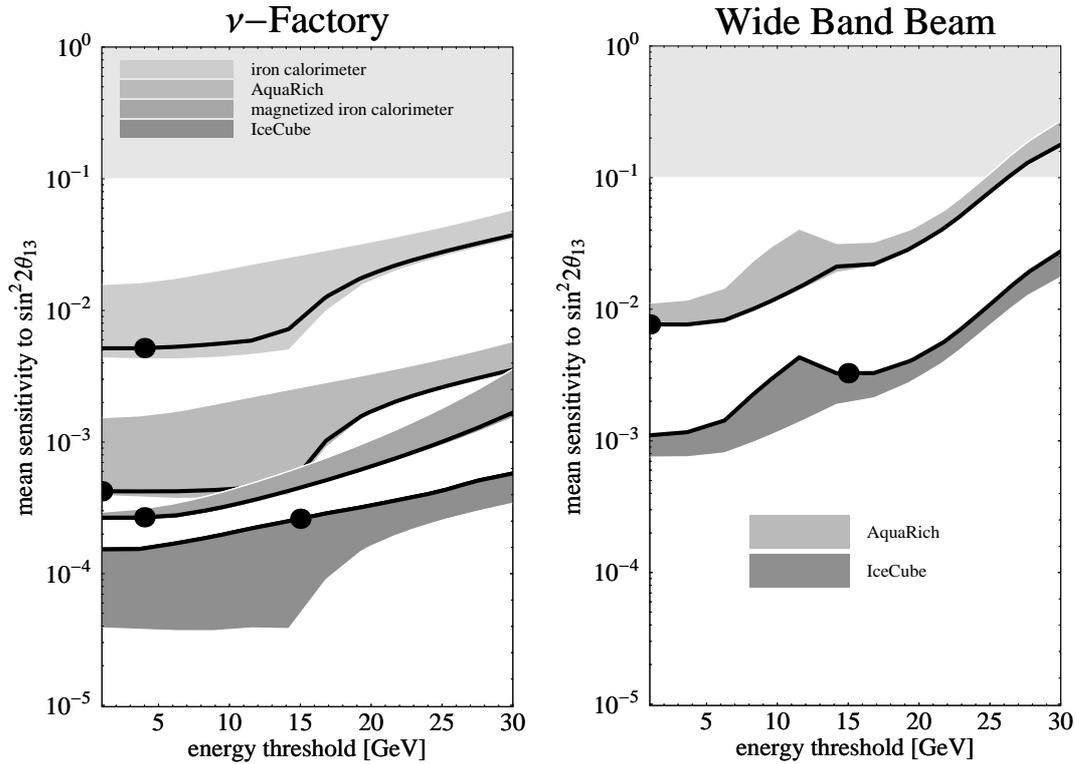


Abbildung 5.14: Mittlere Sensitivität auf  $\sin^2 2\theta_{13}$  bei einem Konfidenzlevel von 90% als Funktion der Schwelle des Detektors bei einer Baseline von 6500 km. Kennzeichnung wie in Abb. 5.12. Der schattierte Bereich stellt den durch CHOOZ ausgeschlossenen Bereich dar.

ein deutlicher Sprung zu erkennen. Für den Wide Band Beam ist dieser Effekt weniger deutlich zu sehen als für die Neutrinfabrik, da dessen Fluß im Resonanzbereich wesentlich geringer ausfällt. Dieser Plot zeigt nochmal, wie wichtig es ist, daß die Energieschwelle des Detektors unterhalb der Resonanzenergie liegt, um gute Ergebnisse zu erhalten. Besonders damit der Einsatz der Neutrino-Teleskope Sinn macht, ist es wichtig deren Energieschwelle zu senken indem man zum Beispiel die Richtungs- und Pulsinformation ausnutzt (Kap. 3.2.2).

## 5.4 Zusammenfassung

Die Analyse der Raten in der Neutrinfabrik hat gezeigt, daß Materieeffekte in den Appearance- und Disappearance-Raten von vergleichbarer Größe sind, wobei die Materieeffekte im Disappearance-Kanal statistisch gesehen geringfügig benachteiligt sind, da man sie von der großen Zahl der unoszillierten Ereignisse unterscheiden muß. Außerdem konnten wir zeigen, daß die Materieeffekte in den beiden in der Neutrino-

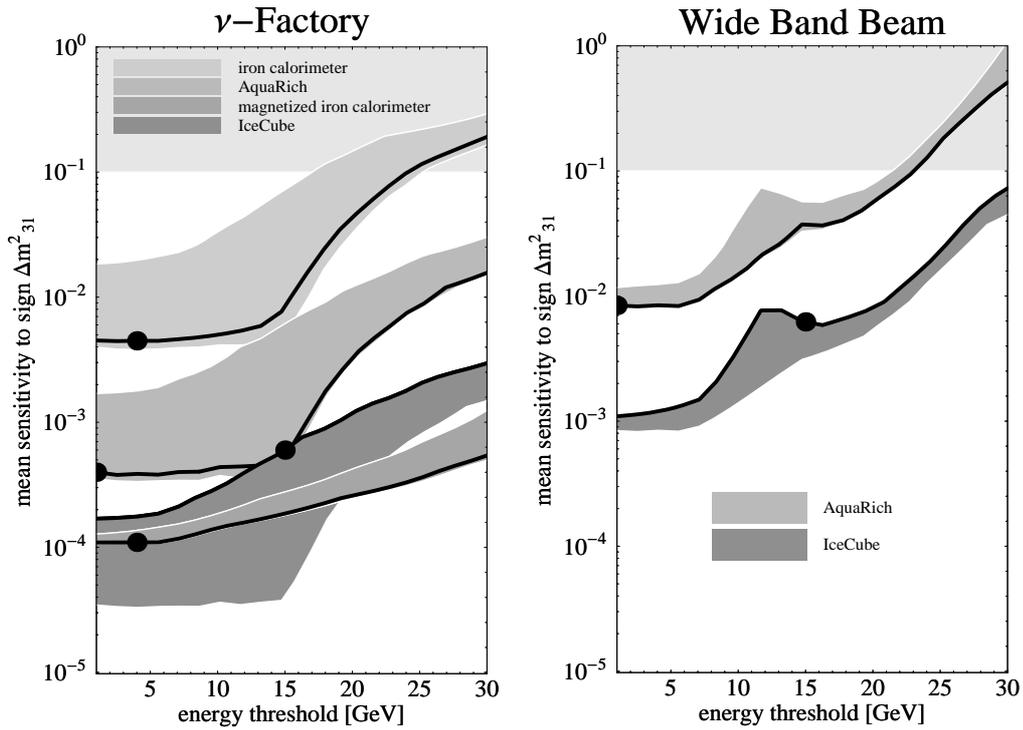


Abbildung 5.15: Mittlere Sensitivität in  $\sin^2 2\theta_{13}$  bei einem Konfidenzlevel von 90% auf das Vorzeichen von  $\Delta m^2_{31}$  als Funktion der Schwelle des Detektors bei einer Baseline von 6500 km. Kennzeichnung wie in Abb. 5.12. Der schattierte Bereich stellt den durch CHOOZ ausgeschlossenen Bereich dar.

fabrik enthaltenen Oszillationskanälen glücklicherweise in dieselbe Richtung gehen. Daher kann man, falls die Ladungsidentifikation im zugehörigen Detektor versagt auch aus den kombinierten Kanälen potentiell Ergebnisse erhalten, wenn auch diese für die Subleading Parameter nicht ganz so gut sind. Die Beobachtung der Materieeffekte in den kombinierten Kanälen wird dadurch erleichtert, daß für die zwei Beampolaritäten bei gleichem Vorzeichen eine deutliche Abweichung in die jeweils andere Richtung zu beobachten ist. Zudem existiert diese Abweichung für beide Vorzeichen und zwar entsprechend in unterschiedliche Richtung. In der Kombination Wide Band Beam/Neutrino teleskop hat sich dagegen gezeigt, daß in den Raten Materieeffekte nur für positives Vorzeichen von  $\Delta m^2_{31}$  sichtbar sind. Kann man keine Materieeffekte beobachten, muß man folglich für eine definitive Aussage den Beam umpolarisieren, da auch aufgrund des falschen Vorzeichens (im Verhältnis zur Beampolarität) lediglich keine Resonanz aufgetreten sein könnte. Die Größe der totalen Raten im Neutrino teleskop mit einem Wide Band Beam sind mit denjenigen einer Neutrino fabrik mit magnetisiertem Eisendetektor vergleichbar.

Insgesamt hat der Vergleich der Analysen gezeigt, daß für die mittlere Präzision der

Bestimmung der Leading Parameter  $\sin^2 2\theta_{23}$  und  $|\Delta m_{31}^2|$  ausschließlich die Zahl der Ereignisse und damit nur die Masse des Detektors und natürlich der Neutrinofluß der Quelle entscheidend sind; denn deren Bestimmung hängt nicht vom Materieeffekt ab. Weder typische Energieschwellen für Myondetektion noch die Energieauflösung haben einen großen Einfluß auf die Genauigkeit, solange die Schwelle nicht 25 GeV überschreitet. Daher bieten große Cherenkov-Detektoren wie IceCube in Verbindung mit Neutrino Fabriken die besten Möglichkeiten die Leading Parameter präzise zu bestimmen, im günstigsten Fall gelingt dies mit relativen Fehlern von nur  $9 \cdot 10^{-3}$  für  $\sin^2 2\theta_{23}$  und  $5 \cdot 10^{-3}$  für  $|\Delta m_{31}^2|$ . Auch ein konventioneller Wide Band Beam ist, wenn man ihn mit solch einem Neutrino teleskop kombiniert, mit einem relativen Fehler von ungefähr nur  $10^{-2}$  in solch einer Analyse der Leading Parameter noch sehr gut. Dies ist unerwarteterweise sogar ungefähr eine halbe Größenordnung besser als die üblicherweise vorgeschlagene Kombination von Neutrino fabrik mit magnetisierten Eisendetektor. Die Ergebnisse die man mit einem Megatonnen Ring Imaging Detektor erhält, sind für beide Beams aufgrund der geringeren Masse um ca. eine halbe Größenordnung schlechter, als sie mit IceCube erzielt werden können.

Für die Präzision in der Bestimmung der Leading Parameter macht es keinen Unterschied, ob der für die Neutrino fabrik verwendete Detektor die Fähigkeit zur Ladungsidentifikation hat oder nicht, da diese Information rein aus dem Disappearance kanal stammt. Speziell für den Eisendetektor, magnetisiert oder nicht, existieren keine unterschiedlichen Bänder. Dies hatte sich für die Bestimmung von  $|\Delta m_{31}^2|$  schon in den vorherigen getrennten Analysen bestätigt. Wir haben dabei gesehen, daß bei ausschließlicher Nutzung der Appearance-Raten die Präzision im gesamten Parameterraum deutlicher schlechter ausfällt als bei der Analyse der kombinierten Raten. Die getrennte Analyse beider Kanäle hat daher in der Präzision von  $\Delta m_{31}^2$  praktisch keine Vorteile gebracht. Dagegen hat die Analyse der Appearance-Raten in der Neutrino fabrik für die Bestimmung des Subleading Parameters  $\theta_{13}$  eine deutlich Verbesserung besonders bei kleinen Werten von  $\theta_{13}$  gebracht. Dasselbe gilt für den Konfidenzlevel mit dem das falsche Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  zurückgewiesen werden kann. Daher sieht die Situation beim Vergleich der Sensitivitäten der Experimente auf diese beiden Parameter schon ganz anders aus. In diesem Fall ist die Möglichkeit der Messung der Appearance-Raten mit einem relativ größeren Materieeffekt sehr hilfreich. Für den Eisendetektor existieren daher nun zwei unterschiedliche Bänder mit mehr als einer Größenordnung Unterschied, je eines für den magnetisierten Eisendetektor mit CID und eines für den Eisendetektor ohne CID. Generell schneidet aus diesem Grund auch der Wide Band Beam, mit dem Appearance-Experimente nicht möglich sind, deutlich schlechter ab. Die Messung des Wrong Sign Myon Signals einer Neutrino fabrik in einem magnetisierten Eisendetektor liefert nun die beste Sensitivität auf das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$ . Eine Bestimmung bis hinab zu  $\sin^2 2\theta_{13} \simeq 10^{-4}$  ist möglich. Die Performance der Neutrino fabrik mit IceCube und AquaRich ist ebenfalls sehr gut und erreicht ungefähr  $\sin^2 2\theta_{13} \simeq 6 \cdot 10^{-3}$ . Bei der Bestimmung von  $\theta_{13}$  sind alle drei Detektoren vergleichbar, wobei IceCube etwas besser abschneidet. Eine Bestimmung

von  $\sin^2 2\theta_{13}$  ist bis ungefähr  $9 \cdot 10^{-3}$  möglich. Besonders für Detektoren ohne CID ist dabei das Zwischenspiel von Ereignisraten, Schwelle und Energieauflösung nicht ganz einfach. Dies ist der Grund dafür, daß AquaRich mit der sehr guten Energieauflösung und niedrigen Schwelle, trotz der um einen Faktor 100 niedrigeren Masse, vergleichbare Ergebnisse zu IceCube erzielt. Es ist daher schwer verallgemeinernde Aussagen über diese Detektoren zu machen. Im Fall des konventionellen Wide Band Beams braucht man beides, große Massen ( $> 1$  Mt) und niedrige Schwellen, um noch nützliche Ergebnisse zu erhalten. Die Grenzen von CHOOZ für  $\sin^2 2\theta_{13}$  können im besten Fall mit AquaRich um ungefähr eine und mit IceCube um eineinhalb Größenordnung verbessert werden. Bei der Sensitivität auf das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  sind beide Detektoren wiederum nahezu identisch und können das Vorzeichen nur bis zu einer Größenordnung unter dem CHOOZ-Limit festlegen.

Im Gegensatz zur Bestimmung der Leading Parameter ist hier eine sehr starke Abhängigkeit dieser Limites von der Schwellenenergie besonders von Detektoren ohne CID zu beobachten. Bei einer Schwelle von ca. 15 GeV wird die Sensitivität schlagartig schlechter. Dieser Effekt ist besonders deutlich bei guter Auflösung am unteren Ende des Bandes zu beobachten. Die Abhängigkeit ist leicht zu verstehen, da der Materieeffekt bei der Resonanzenergie am stärksten ist, folglich ist es am wichtigsten Neutrinos dieser Energien zu detektieren. Besonders im Fall des Wide Band Beams auf ein Neutrino teleskop kann dies bei höheren Schwellen ( $> 20$  GeV) dazu führen, daß innerhalb des CHOOZ-Limites für  $\theta_{13}$  nur bei sehr große  $|\Delta m_{31}^2|$ , die schon am Rand oder jenseits des erlaubten Parameterbereichs liegen, die Bestimmung des Vorzeichens möglich ist, während für kleine Schwellen dies auch noch für  $|\Delta m_{31}^2|$  am unteren Ende des erlaubten Parameterraums gelingt.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß Wide Band Beams im Prinzip ein sehr gutes physikalisches Potential für die Messung der Oszillationsparameter besitzen. Zumindest bis die erste Neutrino fabrik fertiggestellt ist, können sie gute Dienste leisten, vor allem um die Parameter erster Ordnung genauer festzulegen und dadurch das beste Setup für eine Neutrino fabrik zu bestimmen. Denn zum Beispiel hängt die optimale Myonenergie stark vom genauen Wert von  $|\Delta m_{31}^2|$  ab, da dieser die Resonanzenergie bestimmt. Für die Beobachtung einer CP-Verletzung, wie sie potentiell mit einer Neutrino fabrik möglich ist, wäre es wichtig zuvor den genauen Wert von  $\theta_{13}$  zu wissen, da dieser die Größe der CP-Verletzung kontrolliert. Desweiteren wären auch die Erfahrungen nützlich, die man aus den Experimenten mit Wide Band Beams zur Senkung der Schwellen von Neutrino teleskopen gewinnt. Denn wenn erstmal die Neutrino fabriken fertiggestellt sind, bieten diese zusammen mit den Neutrino teleskopen die höchste Präzision auf die Leading Parameter. Zuletzt sei nochmal darauf hingewiesen, daß alle Ergebnisse nur unter Berücksichtigung der Statistik gewonnen wurden. Systematische Limitierungen und Hintergründe sind für jede Kombination unterschiedlich, aber vernachlässigbar bzw. kontrollierbar und wurden daher nicht betrachtet. Daher können im realen Experiment die Ergebnisse sich insgesamt noch verschlechtern, sie werden sich aber im Verhältnis zueinander nicht sehr verschieben.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war, Erweiterungen der einfachsten möglichen Beschreibung von Neutrinooszillationen, dem Zwei-Neutrino Formalismus im Vakuum, vorzustellen und zu zeigen, daß dieser einfachste Formalismus für zukünftige Hochpräzisions-Experimente nicht geeignet ist. Die üblichen Näherungen können in diesen Experimenten unter bestimmten Voraussetzungen zu sichtbaren Verfälschungen der Ergebnisse führen. Ein viel wichtigeres Ergebnis war aber, daß dadurch von vornherein zwei Oszillationsparameter gar nicht berücksichtigt werden, die in diesen Experimenten der nächsten Generation sogar meßbar sein könnten. Es handelt sich dabei um die CP-verletzende Phase  $\delta$  und das Vorzeichen von  $|\Delta m_{13}^2|$ . Zuletzt zeigte die Berücksichtigung der höheren Ordnungen noch, daß diese erlauben, bereits bekannte Oszillationsparameter in terrestrischen Experimenten genauer zu bestimmen. Es sind dies die kleine solare Massendifferenz  $\Delta m_{12}^2$ , für die bisher mehrere unterschiedliche Lösungen existiert, und den kleinen Mischungswinkel  $\theta_{13}$ , für den bisher nur eine Obergrenze gefunden wurde.

### Erweiterungen in der Theorie

Wir haben damit begonnen, den Zwei-Neutrino Formalismus auf den allgemeinen Fall beliebig vieler Neutrinos zu erweitern. Die Behandlung der Oszillation von drei Neutrinos durch zwei entkoppelte Zwei-Neutrino Oszillationen ist darin als Grenzfall für einen sehr kleinen Mischungswinkel enthalten. Die größere Mischungsmatrix erlaubt zusätzlich zu den bekannten Mischungswinkeln noch weitere neue Parameter, die CP-verletzenden Phasen. Diese verursachen in gekoppelten Oszillationen zwischen drei oder mehr Neutrinos eine CP-Verletzung, wie wir sie aus dem Quarksektor schon kennen. In diesen gekoppelten Oszillationen werden auch zunehmend Einflüsse der Materie wichtig. Diese werden durch unterschiedliche Wechselwirkung der Neutrinos mit verschiedenem Flavour in der Erd- oder Sonnenmaterie verursacht. Während die Neutrinos aller Flavour über die ungeladenen Z-Bosonen mit der Materie wechselwirken können, können nur die Elektronneutrinos auch über geladene Ströme mittels

der W-Bosonen mit den Elektronen wechselwirken. Eine solche Wechselwirkung ist für die anderen Neutrinos aufgrund fehlender Myonen und Tauonen in der Materie nicht möglich. Dies führte zu einer zusätzlichen Rotation zwischen der Massenbasis und der Wechselwirkungsbasis, was wiederum veränderte Oszillationsparameter zur Folge hat. Liegen Neutrinoenergie und die Dichte der Materie im richtigen Verhältnis zueinander, wird der Effekt der Materie noch deutlich verstärkt, die sogenannte Resonanz. Neben diesen offensichtlichen Auswirkungen der Materie auf die Oszillation zeigten sich auch noch weitere Folgen. In Resonanz ist der kleinste Mischungswinkel  $\theta_{13}$ , für den bisher nur eine Obergrenze aus dem Reaktorexperiment CHOOZ existiert, stark erhöht. Daher besteht die Hoffnung, daß dieser Mischungswinkel in Materie für eine direkte Messung groß genug wird. Noch ein zweiter Parameter wird mit Hilfe der Materieeffekte zugänglich, der bisher im Vakuum überhaupt keine Rolle gespielt hat: das Vorzeichen der Massendifferenz  $\Delta m_{31}^2$ . Dieses ist Ausdruck der Ordnung der Massendifferenzen und zeigt, welche der beiden Massendifferenz – solar oder atmosphärisch – zu unterst liegt. Der ausschlaggebende Unterschied zwischen Oszillation im Vakuum und Materie besteht darin, daß in Materie ein Eigenzustand durch die andersartige Wechselwirkung der Elektronneutrinos ausgezeichnet wird. Wie gezeigt wurde, bestimmt dieses Vorzeichen, welcher der beiden CP-konjugierten Kanäle in Materie Resonanz erfahren kann.

### CP-Verletzung im Experiment

Nach diesen theoretischen Herleitungen haben wir uns dem eigentlichen Ziel unserer Arbeit zugewendet: dem Nachweis, daß diese schon seit längerem bekannten Effekte auch tatsächlich eine Auswirkung in Oszillationsexperimenten haben können. Dazu haben wir eine neue Meßgröße, die CP-Asymmetrie eingeführt. Sie mißt den Unterschied in den CP-konjugierten Kanälen im Verhältnis zum CP-erhaltenden Anteil der Oszillation. Diese Größe hat neben der offensichtlichen physikalischen Bedeutung den Vorteil, daß sich das gewünschte Signal verstärkt, während sich die Hintergründe wegheben. Wir konnten dabei zeigen, daß zu der rein intrinsischen CP-Asymmetrie, die durch die CP-Phase erzeugt wird, noch ein experimenteller Anteil hinzukommt, der durch den jeweiligen Aufbau des Experiments bestimmt ist. Zum einen handelt es sich dabei um eine durch Materie erzeugte Asymmetrie, da die Wechselwirkung mit Materie in den CP-konjugierten Kanälen unterschiedlich ist. Zum anderen ist die Produktion und Detektion für Neutrinos und Antineutrinos unterschiedlich, was zu verschiedenen Spektren und Detektionswahrscheinlichkeiten führt. Diese experimentelle CP-Asymmetrie muß natürlich von der rein intrinsischen getrennt werden, um die CP-Phase aus dem Experiment extrahieren zu können. Für unsere Analysen haben wir angenommen, daß diese zusätzlichen experimentellen Asymmetrien klein oder zumindest unter Kontrolle sind. Da mit den Ergebnissen von LSND drei verschiedene Massendifferenzen existieren, haben wir unsere Analysen der CP-Asymmetrie sowohl für drei als auch für vier Neutrinos durchgeführt. Im Fall der drei Neutri-

nos haben wir zunächst die Beschränkungen der Größe der CP-Verletzung durch die einzelnen Oszillationsparameter analytisch betrachtet. Wir konnten zeigen, daß die CP-Asymmetrie durch kleine Mischungswinkel, im speziellen durch  $\theta_{13}$ , und durch kleine Massendifferenzen, im speziellen durch die solare Massendifferenz, beschränkt ist. Dies hat uns gezeigt, daß die Beobachtung von CP-Verletzung besonders am oberen Ende der LMA-MSW Lösung der solaren Neutrinos am wahrscheinlichsten ist. Da im Vier-Neutrino Fall eine zusätzliche Massendifferenz existiert und für die Erzeugung von CP-Verletzung nur zwei nichtgenerierte Massendifferenzen notwendig sind, gilt letztere Einschränkung in diesem Fall nicht. Allerdings wird auch hier die CP-Verletzung durch kleine Mischungswinkel beschränkt, denn im Gegensatz zu den Massendifferenzen sollten alle Mischungswinkel groß sein. Wir konnten außerdem zeigen, daß für die Beobachtung der CP-Verletzung Baselines um die 1000 km am geeignetsten erscheinen. Sind die Baselines zu klein, hat die Oszillation aufgrund der kleinen solaren Massendifferenz keine Zeit sich zu entwickeln, und CP-Effekte sind beobachtbar. Ist die Baseline dagegen zu groß, werden die Materieeffekte dominant und überdecken den CP-Effekt. Bei einer Baseline von 732 km sind Materieeffekte noch vernachlässigbar bzw. können einfach subtrahiert werden, wie unsere zusätzliche numerischen Kalkulation der Drei-Neutrino Oszillation in Materie bestätigt hat.

Insgesamt hat sich gezeigt, daß im Drei-Neutrino Szenario bei einer Baseline von 732 km CP-Verletzung nur in Long-Baseline Experimenten und hier wiederum nur im  $\overline{\nu}_e \rightarrow \overline{\nu}_\mu$  Kanal beobachtet werden können. Die CP-Effekte erreichten hier Werte von bis zu 40% bei maximaler CP-verletzender Phase  $\delta$ . Im Gegensatz dazu kann im Vier-Neutrino Fall bei gleichem experimentellen Aufbau sogar in beiden Kanälen Effekte von um die 80% beobachtet werden. Auch in Short-Baseline Experimenten konnten im  $\overline{\nu}_\tau \rightarrow \overline{\nu}_\mu$  Werte um 10% gefunden werden. In beiden Szenarien besteht folglich einige Aussicht CP-Verletzung mit den Experimenten nächster Generation zu messen, wobei im Vier-Neutrino Fall der CP-verletzende Anteil von der gleichen Größenordnung wie der CP-erhaltende sein kann. Die genauen Ergebnisse können im einzelnen auch in der Zusammenfassung von Kapitel 4 nachgelesen werden.

### Experimentelle Auswirkungen von Materie

Als zweites haben wir die Auswirkungen der Materieeffekte speziell bei der Bestimmung von  $\theta_{13}$  und vom Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  näher betrachtet. Die Analysen wurden sowohl für die Kombination NeutrinoFabrik mit magnetisiertem Eisendetektor als auch für Wide Band Beam mit NeutrinoTeleskop durchgeführt und abschließend direkt miteinander und mit anderen Kombinationen verglichen. Während im Wide Band Beam nur Disappearance Experimente  $\overline{\nu}_\mu \rightarrow \overline{\nu}_\mu$  durchführbar sind – solch ein Beam besteht nur aus Myon-neutrinos und der Nachweis von Tau- oder Elektron-neutrinos ist aus experimenteller Sicht problematisch –, sind in einer NeutrinoFabrik sowohl Disappearance  $\overline{\nu}_\mu \rightarrow \overline{\nu}_\mu$  als auch Appearance  $\overline{\nu}_e \rightarrow \overline{\nu}_\mu$  Experimente einzeln möglich, falls der Detektor Ladungen trennen kann. Ist letzteres nicht der Fall,

konnten wir zeigen, daß dennoch sinnvolle Ergebnisse in den kombinierten Myonraten  $\mu^+ + \mu^-$  möglich sind, da der Materieeffekt in beiden in der Neutrino-fabrik involvierten Kanälen in dieselbe Richtung geht.

Um die Analysen durchführen zu können, wurden zunächst die Ereignisraten, die in solchen Experimenten auftreten, analytisch hergeleitet und dargestellt. Aus diesen Ereignisraten haben wir künstlich Daten generiert, indem wir in den einzelnen Energiebins poissonverteilte Fluktuationen hinzugefügt haben. Anschließend analysierten wir mit welcher Präzision die Re-Extraktion der führenden Oszillationsparameter  $|\Delta m_{31}^2|$  und  $\theta_{23}$  bei korrektem Vorzeichen gelingt. Da die führenden Oszillationsparameter aus den Disappearance-Raten bestimmt werden (die Appearance-Raten liefern wesentlich ungenauere Ergebnisse), war einzig und allein die Zahl der Ereignisse für die Genauigkeit ausschlaggebend. Die Zahl der Ereignisse wiederum hängt neben dem Neutrinofluß nur von der Masse des Detektors ab, daher lieferten für beide Neutrino-beams die größten Detektoren die höchste Genauigkeit. Da außerdem die Neutrino-fabrik höhere Flüsse als der Wide Band Beam hat, schneidet erstere bei jedem Detektor im Vergleich besser ab. Im idealsten Fall (Neutrino-fabrik plus Ice-Cube) blieben die relativen Fehler bei einer Baseline von 11200 km für  $|\Delta m_{31}^2|$  unter  $6 \cdot 10^{-3}$  und für  $\sin^2 2\theta_{23}$  bei  $9 \cdot 10^{-3}$ . Dies stellt im Vergleich zu den herkömmlichen Experimenten ein traumhaftes Ergebnis dar. Die Kombination Wide Band Beam mit Neutrino-teleskop lag etwas mehr als eine Größenordnung darunter. Diese Plots bestätigten, daß die Ladungsidentifikation hier keinen Vorteil bringt, speziell für die Eisendetektoren existiert nur ein Band. Weiterhin konnte kaum eine Abhängigkeit von der Schwellenenergie des Detektors beobachtet werden.

Bei der eigentlich interessierenden Bestimmung von  $\theta_{13}$  und  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$ , die mit den Best Fit Werten der vorherigen Analyse durchgeführt wurde, sah die Sache dagegen ganz anders aus, da diese essentiell vom Materieeffekt und hierbei vor allem von der Resonanz abhängt. Detektoren mit guter Ladungsidentifikation, die erlauben die wesentlich stärker von Materie abhängigen Appearance-Raten zu nutzen, waren klar im Vorteil. Für magnetisierte Eisendetektoren hat sich ein Unterschied von über einer Größenordnung ergeben, je nachdem ob CID perfekt möglich ist oder versagt. In der Realität wird die Wahrheit irgendwo zwischen diesen Extremen liegen. Außerdem konnte speziell bei den Detektoren ohne Ladungsidentifikation eine starke Abhängigkeit von der Schwellenenergie beobachtet werden, die durch die Berücksichtigung der resonanten Neutrinos unter ca. 15 GeV verursacht wird. Wir konnten zeigen, daß man  $\theta_{13}$  im idealsten Fall (Neutrino-fabrik) bei einer Baseline von 6500 km bis hinab zu Werten von  $9 \cdot 10^{-3}$  mit einem Konfidenzlevel von 90% bestimmen kann. Die mittlere Sensitivität auf  $\text{sgn}\Delta m_{31}^2$  – ebenfalls bei einem Konfidenzlevel von 90% – reichte in der Neutrino-fabrik mit magnetisiertem Eisendetektor bis zu  $10^{-4}$  in  $\sin^2 2\theta_{13}$ . Mit einem konventionellen Wide Band Beam erreicht man für  $\sin^2 2\theta_{13}$  und sogar für das Vorzeichen von  $\Delta m_{13}^2$  noch Grenzen von  $\sin^2 2\theta_{13} \simeq 10^{-3}$ .

Zusammenfassend konnten wir feststellen, daß prinzipiell alle betrachteten Kombinationen einschließlich AquaRich geeignet sind, die heutigen Ergebnisse zu verbessern,

und daß die Wide Band Beams eine ausgezeichnete Übergangslösung darstellen, die zudem helfen können, den besten Setup für Neutrino Fabriken zu finden. Dies gilt insbesondere in Hinblick auf die Messung von CP-Effekten, die stark abhängig vom genauen Wert von  $\theta_{13}$  sind, und voraussichtlich höchstens in einer Neutrino Fabrik durchgeführt werden können. Insgesamt hat sich gezeigt, daß die Auswirkungen der Materieeffekte bei großen Baselines sicher betrachtenswert sind und interessante neue Ergebnisse liefern können, wenn man sie in zukünftigen Experimenten ausnutzt. Auch hier sind wiederum genauere Ergebnisse in der Zusammenfassung von Kapitel 5 zu finden.

### Ausblick

Wie man sieht, ist die Neutrino Physik noch lange nicht am Ende der interessanten, neuen Entdeckungen. Ganz im Gegenteil, nachdem nun mit ziemlicher Sicherheit bestätigt wurde, daß die beobachteten Effekte in solaren und atmosphärischen Neutrinoexperimenten tatsächlich auf Oszillation zurückzuführen sind, und ungefähre Bereiche für die Werte führender Oszillationsparameter eingegrenzt wurden, kann man nun versuchen, die feineren Facetten der Neutrino Physik und ihre Konsequenzen zu verstehen und zu überprüfen. In den höheren Korrekturen der Oszillationsformeln geschehen sehr interessante Dinge, die durchaus in den Hochpräzisions-Experimenten der nächsten Generation sichtbar werden könnten. Bei Experimenten mit nicht zu großen Long-Baselines können CP-Effekte beobachtbar werden und bei Very-Long-Baseline Experimenten können mit Hilfe des dabei zutage tretenden Materieeffektes voraussichtlich der kleinste Mischungswinkel  $\theta_{13}$  und das Vorzeichen von  $\Delta m_{31}^2$  bestimmt werden. Es ist nun an der Zeit, die entsprechenden Experimente der nächsten Generation zu planen und sich dabei genau zu überlegen welche Aufbauten die sinnvollsten sind und die interessantesten Ergebnisse liefern. Aber genau über diesen Punkt herrscht momentan noch reichlich Uneinigkeit, da bisher noch nicht viele genaue Analysen dieser Effekte existieren. Unsere und entsprechende Analysen können bei diesen Entscheidungen durchaus hilfreich sein. Vor allem haben unsere Analysen unerwarteterweise eine Möglichkeit vorgestellt, die zu zufriedenstellenden Ergebnissen schon auf mittleren Zeitskalen führen kann: der konventionelle Wide Band Beam mit Neutrino Teleskop. Dieser kann erstens, bis die Experimente mit längeren Zeitskalen fertig sind, schon Ergebnisse liefern und zweitens helfen deren experimentellen Setup genauer festzulegen. Dies gilt besonders im Hinblick auf Experimente mit Neutrino Fabriken zur Messung von CP-Verletzung, ein erfolgversprechendes Setup hängt besonders stark vom genauen Wert von  $\theta_{13}$  ab.

Aber auch unsere Berechnungen enthalten noch Näherungen. Beispielsweise in vielen Fällen die Vernachlässigung von Terme, die die solare Massendifferenz enthalten. Wie wir aber in Kap. 4.2.2 gesehen haben, werden für sehr kleine  $\theta_{13}$  die Terme mit  $\Delta m_{12}^2$  und mit  $\Delta m_{23}^2$  ungefähr gleich groß. Das Verhalten der Oszillation wird unter diesen Umständen in hohem Maße nichttrivial. CP-Effekte und Materieeffekte sind dann

stärker gekoppelt. Für das Verständnis der geplanten Experimente sollten daher in diesem Bereich noch weitere Analysen folgen, meine Kollegen bereiten solche derzeit bereits vor. Auch diese Analysen werden sicherlich noch interessante neue Ergebnisse liefern, speziell auch für die Korrelationen zwischen den einzelnen Parametern, die bisher durch die getrennten Parameterfits vernachlässigt wurden.

# Literaturverzeichnis

- [1] K. Dick, M. Freund, M. Lindner, and A. Romanino, Nucl. Phys. **B562**, 29 (1999), hep-ph/9903308.
- [2] K. Dick, M. Lindner, M. Ratz, and D. Wright, Phys. Rev. Lett. **84**, 4039 (2000), hep-ph/9907562.
- [3] K. Dick, M. Freund, P. Huber, and M. Lindner, Nucl. Phys. **B588**, 101 (2000), hep-ph/0006090.
- [4] K. Dick, M. Freund, P. Huber, and M. Lindner, *A comparison of the physics potential of future long baseline neutrino oscillation experiments* (2000), hep-ph/0008016.
- [5] M. Freund, M. Lindner, S. T. Petcov, and A. Romanino, Nucl. Phys. **B578**, 27 (2000), hep-ph/9912457.
- [6] M. Freund, P. Huber, and M. Lindner, Nucl. Phys. **B585**, 105 (2000), hep-ph/0004085.
- [7] M. Freund and T. Ohlsson, Mod. Phys. Lett. **A15**, 867 (2000), hep-ph/9909501.
- [8] N. Schmitz, *Neutrino physics* (Teubner, Stuttgart, Germany, 1997).
- [9] V. Barger, Y.-B. Dai, K. Whisnant, and B.-L. Young, Phys. Rev. **D59**, 113010 (1999), hep-ph/9901388.
- [10] K. R. Schubert, *May we expect  $cp$  violating and  $t$  violating effects in neutrino oscillations?* (1999), hep-ph/9902215.
- [11] J. Arafune, M. Koike, and J. Sato, Phys. Rev. **D56**, 3093 (1997), hep-ph/9703351.
- [12] M. Tanimoto, Phys. Lett. **B435**, 373 (1998), hep-ph/9806375.
- [13] H. Minakata and H. Nunokawa, Phys. Rev. **D57**, 4403 (1998), hep-ph/9705208.
- [14] L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D17**, 2369 (1978).

- 
- [15] S. P. Mikheev and A. Y. Smirnov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **42**, 913 (1985).
- [16] S. P. Mikheev and A. Y. Smirnov, *Nuovo Cim.* **C9**, 17 (1986).
- [17] V. Barger, S. Geer, R. Raja, and K. Whisnant, *Phys. Rev.* **D62**, 013004 (2000), hep-ph/9911524.
- [18] P. Lipari, *Phys. Rev.* **D61**, 113004 (2000), hep-ph/9903481.
- [19] V. Barger, S. Geer, R. Raja, and K. Whisnant, *Phys. Rev.* **D62**, 073002 (2000), hep-ph/0003184.
- [20] A. Cervera *et al.*, *Nucl. Phys.* **B579**, 17 (2000), hep-ph/0002108.
- [21] S. T. Petcov, *Phys. Lett.* **B214**, 259 (1988).
- [22] M. Chizhov, M. Maris, and S. T. Petcov, *On the oscillation length resonance in the transitions of solar and atmospheric neutrinos crossing the earth core* (1998), hep-ph/9810501.
- [23] O. Yasuda, *Acta Phys. Polon.* **B30**, 3089 (1999), hep-ph/9910428.
- [24] E. K. Akhmedov, A. Dighe, P. Lipari, and A. Y. Smirnov, *Nucl. Phys.* **B542**, 3 (1999), hep-ph/9808270.
- [25] P. I. Krastev and S. T. Petcov, *Phys. Lett.* **B205**, 84 (1988).
- [26] T. K. Kuo and J. Pantaleone, *Phys. Lett.* **B198**, 406 (1987).
- [27] F. Stacey, *Physics of the Earth* (John Wiley and Sons, New York, 1977), 2nd ed.
- [28] S. T. Petcov, *Phys. Lett.* **B434**, 321 (1998), hep-ph/9805262.
- [29] I. Mocioiu and R. Shrock, *AIP Conf. Proc.* **533**, 74 (2000), hep-ph/9910554.
- [30] A. D. Rujula, M. B. Gavela, and P. Hernandez, *Nucl. Phys.* **B547**, 21 (1999), hep-ph/9811390.
- [31] A. Romanino, *Nucl. Phys.* **B574**, 675 (2000), hep-ph/9909425.
- [32] Y. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande), *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998), hep-ex/9807003.
- [33] M. Nakahata (Super-Kamiokande), *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **76**, 425 (1999).
- [34] K. Scholberg (SuperKamiokande), *Atmospheric neutrinos at super-kamiokande* (1999), hep-ex/9905016.

- 
- [35] J. N. Bahcall, P. I. Krastev, and A. Y. Smirnov, Phys. Rev. **D58**, 096016 (1998), hep-ph/9807216.
- [36] J. N. Bahcall, S. Basu, and M. H. Pinsonneault, Phys. Lett. **B433**, 1 (1998), astro-ph/9805135.
- [37] A. Baldini and G. F. Giudice, Phys. Lett. **B186**, 211 (1987).
- [38] R. Barbieri, L. J. Hall, D. Smith, A. Strumia, and N. Weiner, JHEP **12**, 017 (1998), hep-ph/9807235.
- [39] G. L. Fogli, E. Lisi, D. Montanino, and A. Palazzo, Phys. Rev. **D62**, 013002 (2000), hep-ph/9912231.
- [40] Y. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande), Phys. Rev. Lett. **82**, 1810 (1999), hep-ex/9812009.
- [41] M. C. Gonzalez-Garcia, P. C. de Holanda, C. Pena-Garay, and J. W. F. Valle, Nucl. Phys. **B573**, 3 (2000), hep-ph/9906469.
- [42] T. A. Kirsten (GALLEX and GNO), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77**, 26 (1999).
- [43] T. K. Kuo and J. Pantaleone, Phys. Rev. Lett. **57**, 1805 (1986).
- [44] C. Athanassopoulos *et al.* (LSND), Phys. Rev. **C58**, 2489 (1998), nucl-ex/9706006.
- [45] D. H. White (LSND), Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77**, 207 (1999).
- [46] M. Apollonio *et al.* (CHOOZ), Phys. Lett. **B420**, 397 (1998), hep-ex/9711002.
- [47] M. Apollonio *et al.*, Phys. Lett. **B466**, 415 (1999), hep-ex/9907037.
- [48] S. Geer, Phys. Rev. **D57**, 6989 (1998), hep-ph/9712290.
- [49] M. Campanelli, A. Bueno, and A. Rubbia, hep-ph/9905240.
- [50] V. Barger, S. Geer, and K. Whisnant, Phys. Rev. **D61**, 053004 (2000), hep-ph/9906487.
- [51] *Nufact'99 Workshop*, Lyon (July 1999), <http://lyopsr.in2p3.fr/nufact99/talks/>.
- [52] V. Palladino, in *NuFACT'00 International Conferenc* (2000).
- [53] K. Nakamura (K2K), Nucl. Phys. **A663**, 795 (2000).
- [54] Hylen, *FERMILAB-TM-2018*, Tech. rep., FERMILAB (Sep 1997).
- [55] G. Acquistapace *et al.*, *CERN-98-02*, Tech. rep., CERN (1989).

- [56] R. Bailey *et al.*, *CERN-SL/99-034(DI)*, Tech. rep., CERN (1999).
- [57] H. Minakata and H. Nunokawa, *Measuring leptonic  $cp$  violation by low energy neutrino oscillation experiments* (2000), hep-ph/0004114.
- [58] V. Barger, S. Geer, R. Raja, and K. Whisnant, Phys. Lett. **B485**, 379 (2000), hep-ph/0004208.
- [59] *Talks presented at FNAL Two-Day Meeting* (17-18th February 2000), [http://www.fnal.gov/projects/muon\\_collider/nu/study/study.html](http://www.fnal.gov/projects/muon_collider/nu/study/study.html).
- [60] The Hamburg MONOLITH Group, *Internal Note 99-2*.
- [61] MINOS Collaboration, Venice, *Neutrino Telescopes (Vol.1) 391* (1999).
- [62] MINOS Collaboration, *MINOS Technical Design Report* (1999), [http://www.hep.anl.gov/ndk/hypertext/minos\\_tdr.html](http://www.hep.anl.gov/ndk/hypertext/minos_tdr.html).
- [63] M. Leuthold, *IceCube Performance Studies*, Tech. Rep. 19991102, Amanda (1999).
- [64] F. Halzen *et al.*, in *Proceedings of the 26th International Cosmic Ray Conference (ICRC 99)*, Salt Lake City (1999).
- [65] M. Leuthold, *Private communication*.
- [66] E. Andres *et al.*, Astropart. Phys. **13**, 1 (2000), astro-ph/9906203.
- [67] E. Aslanides *et al.* (ANTARES), *A deep sea telescope for high energy neutrinos* (1999), astro-ph/9907432.
- [68] Anassontiz *et al.*, *CERN-97-06, DFF-283-7-1997*, Tech. rep., CERN (1997).
- [69] I. A. Belolaptikov *et al.* (BAIKAL), Astropart. Phys. **7**, 263 (1997).
- [70] K. Zuber, in *Proceedings of Neutrino 2000 Conference*, Sudbury (June 2000).
- [71] S. M. Bilenkii, C. Giunti, and W. Grimus, Eur. Phys. J. **C1**, 247 (1998), hep-ph/9607372.
- [72] S. M. Bilenkii, C. Giunti, and W. Grimus, Phys. Rev. **D58**, 033001 (1998), hep-ph/9712537.
- [73] Y. Declais *et al.*, Nucl. Phys. **B434**, 503 (1995).
- [74] F. Dydak *et al.*, Phys. Lett. **B134**, 281 (1984).
- [75] I. E. Stockdale *et al.*, Phys. Rev. Lett. **52**, 1384 (1984).

- 
- [76] A. Y. Smirnov, *Yad. Fiz.* **46**, 1152 (1987).
- [77] S. Toshev, *Phys. Lett.* **B185**, 177 (1987).
- [78] P. Langacker, S. T. Petcov, G. Steigman, and S. Toshev, *Nucl. Phys.* **B282**, 589 (1987).
- [79] A. Bueno, M. Campanelli, and A. Rubbia, *Nucl. Phys.* **B573**, 27 (2000).
- [80] I. Mocioiu and R. Shrock, *Phys. Rev.* **D62**, 053017 (2000), hep-ph/0002149.
- [81] M. Narayan and S. U. Sankar, *Phys. Rev.* **D61**, 013003 (2000), hep-ph/9904302.
- [82] A. Donini, M. B. Gavela, P. Hernandez, and S. Rigolin, *Nucl. Phys.* **B574**, 23 (2000), hep-ph/9909254.
- [83] A. M. Gago, V. Pleitez, and R. Z. Funchal, *Phys. Rev.* **D61**, 016004 (2000), hep-ph/9810505.
- [84] V. Barger, S. Geer, R. Raja, and K. Whisnant, *Short baseline neutrino oscillations at a neutrino factory* (2000), hep-ph/0007181.
- [85] A. Dziewonski and D. Anderson, *Phys. Earth Planet. Interiors* **25**, 297 (1981).
- [86] C. Caso *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C3**, 1 (1998).



# Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle allen danken, die mich durch die letzten Jahre begleitet haben.

An erster Stelle bedanke ich mich beim Max-Planck-Institut für Physik (Werner-Heisenberg-Institut) für die Anstellung, durch die meine Promotion überhaupt erst möglich wurde. Insbesondere mit Herrn Dr. habil. Georg G. Raffelt durfte ich interessanten Gespräche führen.

Mein Betreuer Prof. Dr. Manfred Lindner und meine Kollegen Martin Freund und Patrick Huber an der Technischen Universität München haben mir zahlreiche gemeinsame Arbeiten ermöglicht. Aus diesen entstand die vorliegende Dissertation.

Ebenso danke ich den übrigen Mitgliedern der Gruppe Lindner und der Gruppe Buras für die angenehme Atmosphäre und die tatkräftige Unterstützung bei technischen und physikalischen Problemen.

Bei meinen Freunden bedanke ich mich für die Geduld, die sie besonders in den letzten Wochen für mich aufgebracht haben. Ganz besonders danke ich Wolfgang Klimt für die aktive Unterstützung und den ständigen Nachschub an Nervennahrung.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglicht haben.

München, Dezember 2000

Karin Dick