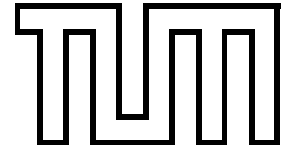


Technische Universität München
Physik Department
Institut für Theoretische Physik T30d
Univ.-Prof. Dr. M. Lindner



Nichtperturbative Untersuchung thermaler Feldtheorie im Realzeitformalismus mittels der thermalen Renormierungsgruppe

Dipl.-Phys. Jürgen Reingruber

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Stephan Paul

Prüfer der Dissertation:
1. Univ.-Prof. Dr. Manfred Lindner
2. Univ.-Prof. Dr. Wolfram Weise

Die Dissertation wurde am 19. September 2000 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 20. Oktober 2000 angenommen.

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
2	Einführung in die thermale Quantenfeldtheorie	7
2.1	Allgemeine Formulierung im Pfadintegralformalismus	7
2.2	Der Matsubaraformalismus	11
2.3	Der Realzeitformalismus	12
2.4	Der CTP-Formalismus	16
3	Thermale Renormierungsgruppen	19
3.1	Motivation für thermale Renormierungsgruppen	19
3.2	Kritische Phänomene und die wilsonsche Renormierungsgruppe	20
3.3	Die exakte Renormierungsgruppe ERG	22
3.4	Die thermale Renormierungsgruppe TRG	25
3.4.1	Herleitung der TRG	25
3.4.2	Berechnung des bosonischen und fermionischen Kerns	32
3.5	Approximationsmöglichkeiten zur Lösung von Flussgleichungen	34
4	Der Phasenübergang im skalaren $O(N)$-Modell	37
4.1	Einleitung	37
4.2	Herleitung der Flussgleichung für das effektive Potenzial	38
4.3	Numerische Untersuchung	43
5	Der chirale Phasenübergang im Quark-Meson-Modell	55
5.1	Das chirale Quark-Meson-Modell und seine Verbindung zur QCD	55
5.2	Das lineare Sigma-Modell gekoppelt an zwei Quarks	57
5.2.1	Fermion-Entkopplung am Phasenübergang zweiter Ordnung	58
5.2.2	Die Flussgleichungen für das Modell	59
5.3	Numerische Auswertung	62
6	Die Plasmon-Dämpfungsrate	67
6.1	Die Plasmon-Dämpfungsrate in der symmetrischen Phase	68
6.1.1	Die Flussgleichungen für die Imaginärteile	68
6.1.2	Vergleich mit Störungstheorie	71
6.1.3	Numerische Auswertung	74
6.2	Die Plasmon-Dämpfungsrate in der gebrochenen Phase	77

6.2.1	Die Flussgleichung für die retardierte Selbstenergie	77
6.2.2	Störungstheorie in der gebrochenen Phase	79
6.2.3	Die nichtperturbativen Flussgleichungen in der gebrochenen Phase	91
7	Zusammenfassung und Ausblick	97
A	Die thermale skalare Zweipunktfunktion	101
A.1	Eigenschaften des thermalen Propagators	101
A.1.1	Der zeitgeordnete thermale Propagator	101
A.1.2	Der thermale Propagator im Realzeitformalismus	105
A.2	Die thermale Selbstenergie im Realzeitformalismus	107
A.3	Der Imaginärteil der Selbstenergie bei $T \neq 0$ – die Dämpfungsrate	108
B	Das universelle Verhalten am Phasenübergang zweiter Ordnung	111
C	Die Superspur und thermale Spuren	115
C.1	Eigenschaften der Superspur	115
C.2	Thermale Spuren zur Berechnung des Imaginärteils der retardierten Selbstenergie	116
C.2.1	Thermale Spuren mit zwei Vertizes	117
C.2.2	Thermale Spuren mit drei Vertizes	118
C.2.3	Thermale Spuren mit vier Vertizes	119
	Literaturverzeichnis	121
	Danksagung	127

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

2.1	Grafische Darstellung der Matsubarakontur	11
2.2	Grafische Darstellung der Realzeitkontur	13
2.3	Grafische Darstellung der CTP-Kontur	17
3.1	Grafische Darstellung der thermalen Renormierungsgruppe TRG	30
4.1	Das Laufen des dimensionslosen und dimensionsbehafteten Minimums für verschiedene Temperaturen im $O(1)$ -Modell	46
4.2	Das Verhältnis $T_c/T_{c,1-loop}$ in Abhängigkeit der $(T = 0)$ -Kopplung im $O(1)$ -Modell	47
4.3	Der Logarithmus der Widom-Skalenfunktion $f(x)$ im $O(1)$ -Modell	49
4.4	Das Verhältnis $T_c/T_{c,1-loop}$ in Abhängigkeit der $(T = 0)$ -Kopplung im $O(4)$ -Modell	50
4.5	Der Logarithmus der Widom-Skalenfunktion $f(x)$ im $O(4)$ -Modell	51
4.6	Die kritische Temperatur T_c im $O(N)$ -Modell als Funktion von N	53
5.1	Das Laufen des dimensionslosen Minimums bei der kritischen Temperatur als Funktion der Yukawa-Kopplung	63
5.2	Die kritische Temperatur als Funktion der Yukawa-Kopplung	64
5.3	Die relative Abweichung der kritischen Temperatur vom perturbativen Ergebnis	64
6.1	Vergleich der Dämpfungsraten $\gamma(T)$ und $\gamma_{\text{pert}}(T)$	77
6.2	Real- und Imaginärteil der skalaren Selbstenergie als Funktion von $\log_{10}(\Lambda/T)$	77

TABELLENVERZEICHNIS

4.1	Kritische Exponenten im $O(1)$ -Modell	47
4.2	Fixpunktwerte, kritische Amplituden und Amplitudenverhältnisse im $O(1)$ -Modell	48
4.3	Kritische Exponenten im $O(4)$ -Modell	51
4.4	Fixpunktwerte, kritische Amplituden und Amplitudenverhältnisse im $O(4)$ -Modell	52
5.1	Kritische Exponenten im $O(4)$ -Modell	65

1. EINLEITUNG

In dieser Arbeit untersuchen wir die Anwendbarkeit einer neuen, nichtperturbativen Methode zur Berechnung thermaler Effekte in Quantenfeldtheorien. Diese Methode ist unter dem Namen “Thermale Renormierungsgruppe” (TRG) bekannt und wurde 1996 von Attanasio und Pietroni eingeführt [76]. Bevor wir auf die Zielsetzung dieser Arbeit eingehen, wollen wir erläutern, in welchen Zusammenhängen thermale Feldtheorie interessant ist und warum gerade hier nichtperturbative Methoden sehr wichtig sind.

Das Standardmodell (SM) der Teilchenphysik hat sich bei der Beschreibung der Physik auf kleinsten Skalen in den letzten Jahren als äußerst erfolgreich erwiesen [7]. Es wurden, mit Ausnahme des Higgs-Bosons, alle für die Konsistenz des SM notwendigen Teilchen gefunden. Am Tevatron wurde im Jahre 1995 als letztes Quark das vom SM vorhergesagte Top-Quark und in diesem Jahr das letzte noch fehlende Lepton, das Tau-Neutrino, nachgewiesen. Lediglich das vom SM vorhergesagte Higgs-Boson konnte bisher experimentell noch nicht entdeckt werden, es wird jedoch erwartet, dass es spätestens am LHC erzeugt wird, dessen Inbetriebnahme für das Jahr 2005 vorgesehen ist. In einer Reihe von Präzisionstests, die vorwiegend am LEP durchgeführt wurden, konnte die Gültigkeit des SM mit äußerster Genauigkeit bestätigt werden. Diese Tests betreffen hauptsächlich den elektroschwachen Anteil des SM bzw. den Bereich der Quantenchromodynamik (QCD) bei hohen Energien. Aufgrund kleiner Kopplungen kann man in diesen Bereichen Observable störungstheoretisch mit hoher Genauigkeit berechnen und mit den experimentellen Werten vergleichen. Mit dem experimentellen Nachweis von Neutrino-Oszillationen zeigte sich zum ersten Mal die Notwendigkeit, das SM zu modifizieren. Im SM werden die Neutrinos als masselos postuliert. Die Neutrino-Oszillationen können jedoch nur erklärt werden, wenn man annimmt, dass Neutrinos eine Dirac- und/oder Majorana-Masse besitzen.

Neben diesen experimentellen und theoretischen Erfolgen gibt es jedoch noch eine Reihe von Fragestellungen innerhalb des SM, die durch perturbative Methoden nicht lösbar und damit für Präzisionstests gar nicht oder nur sehr eingeschränkt zugänglich sind. Dazu gehört die QCD bei niedrigen Energien. Aufgrund der asymptotischen Freiheit ist QCD bei hohen Energien perturbativ sehr gut mit Hilfe von Quarks und Gluonen zu beschreiben. Durch das Confinement kommt es bei Energien ~ 600 MeV zu einer Umlagerung der Freiheitsgrade von Quarks und Gluonen hin zu Mesonen und Baryonen. Dieser Prozess ist perturbativ nicht behandelbar, und auch für nichtperturbative Methoden ergeben sich große Schwierigkeiten. Als Konsequenz wird die QCD bei niedrigen Energien momentan durch effektive Modelle beschrieben, die man jedoch nicht vollständig aus der fundamentalen Theorie der Quarks und Gluonen ableiten kann.

Für den Kontext dieser Arbeit sind diejenigen Probleme interessant, die sich störungstheoretisch bei Berücksichtigung einer endlichen Temperatur ergeben. In den letzten Jahren ist das

Interesse an Feldtheorie bei endlicher Temperatur unter anderem aufgrund der großen Bedeutung für die Astro–Teilchenphysik stark angestiegen. Die Entwicklung des Universums ist ohne die Einbeziehung der Temperatur nicht zu verstehen. Seit der fundamentalen Arbeit von Kirzhnits und Linde [9] weiß man, dass bei $T = 0$ spontan gebrochene Symmetrien bei hohen Temperaturen restauriert werden können. Es wird angenommen, dass es im Laufe der thermischen Entwicklung des Universums durch Phasenübergänge zu einer Reihe von Symmetriebrechungen gekommen ist, bis schließlich die Symmetriegruppe des SM übrig geblieben ist. Die genaue Anzahl und die Ordnungen dieser Phasenübergänge sind nicht bekannt und hängen von der GUT–Theorie ab. Für die Entwicklung des Universums sind die Phasenübergänge von entscheidender Bedeutung. Im Rahmen des SM sind die elektroschwache und die chirale Symmetrie bei genügend hohen Temperaturen unmittelbar nach dem Urknall ungebrochen. Durch die Abkühlung des Universums wird ca. 10^{-10} Sekunden nach dem Urknall die elektroschwache Symmetrie bei einer Temperatur von ca. 10^{15} K (~ 100 GeV) spontan gebrochen, der chirale Phasenübergang der QCD ereignet sich nach ca. 10^{-3} Sekunden bei einer Temperatur von ca. 10^{12} K (~ 100 MeV).

Der elektroschwache Phasenübergang im SM war bis vor ca. 2 bis 3 Jahren ein intensives Forschungsgebiet, da er die Möglichkeit zu bieten schien, die Baryonasymmetrie des Universums zu erzeugen. Störungstheoretische Rechnungen zeigen, dass dies nur für Higgs–Massen $\lesssim 80$ GeV möglich ist, da für größere Higgs–Massen der Phasenübergang nicht stark genug ist, um die Baryonasymmetrie zu generieren. Nichtperturbative Untersuchungen haben inzwischen jedoch gezeigt, dass Baryogenese im SM überhaupt nicht möglich ist. In supersymmetrischen Erweiterungen des SM ist die Erzeugung der Baryonasymmetrie am elektroschwachen Phasenübergang noch nicht ausgeschlossen, mit zunehmender Untergrenze für die Higgs–Masse, die momentan bei ca. 105 GeV liegt, werden jedoch auch diese Szenarien immer unwahrscheinlicher. Durch Hinzunahme von Neutrino–Massen ergeben sich jedoch ganz neue und vielversprechende Möglichkeiten, die Baryonasymmetrie des Universums außerhalb des elektroschwachen Phasenübergangs zu erzeugen [10].

Die Energien in der Größenordnung des chiralen Phasenübergangs liegen in der Reichweite heutiger Schwerionen–Beschleuniger. Experimente am SPS scheinen bereits kurzzeitig eine neue Materieform, das Quark–Gluon–Plasma, erzeugt zu haben [8]. Aufgrund theoretischer Überlegungen erwartet man, dass nach der Wiederherstellung der chiralen Symmetrie die Materie im thermischen Gleichgewicht in Form eines Quark–Gluon–Plasmas vorliegt. Genauere Daten werden die in diesem Jahr beginnenden Experimente am RHIC bzw. in Zukunft die geplanten Experimente am LHC liefern.

Um die Fülle von experimentellen Daten zuverlässig mit der Theorie vergleichen zu können, ist es notwendig, theoretische Methoden einzusetzen, die es erlauben, die experimentellen Daten mit entsprechender Genauigkeit zu reproduzieren bzw. vorherzusagen. Die Störungstheorie bei $T \neq 0$ ist für diese Aufgabe nur bedingt geeignet und mit schwerwiegenden Problemen behaftet. Kopplungen, die bei $T = 0$ klein sind und eine perturbative Entwicklung erlauben, können bei hohen Temperaturen im nichtperturbativen Bereich liegen. So ist der ‘magnetische Sektor’ der elektroschwachen Theorie bei hohen Temperaturen nicht mehr schwach gekoppelt. Das Ultraviolettverhalten von Feynman–Diagrammen wird durch die Temperatur nicht verändert, aber ihr Infrarotverhalten ist bei $T \neq 0$ viel problematischer als bei $T = 0$. Ein sehr bekanntes Beispiel für das Versagen thermaler Störungstheorie ist die Beobachtung von Linde, dass die freie

Energie einer nichtabelschen Eichtheorie jenseits von drei-loop perturbativ nicht berechenbar ist [40]. Die Probleme thermaler Störungstheorie sind zum Teil darauf zurückzuführen, dass der effektive Entwicklungsparameter bei $T \neq 0$ nicht mehr die vierdimensionale Kopplung λ ist, sondern $\lambda T/M$, wobei M die relevante Massenskala der Theorie ist. Diese Eigenschaft hängt eng mit dem Phänomen der dimensional Reduktion zusammen, denn $\lambda T/M$ ist in niedrigster Ordnung der Entwicklungsparameter der dreidimensionalen Theorie. Für kleine Massen bzw. große Korrelationslängen sind perturbative Berechnungen aufgrund der Divergenz des Entwicklungsparameters nicht mehr möglich. Genau dieses Phänomen tritt an einem Phasenübergang zweiter Ordnung bzw. einem schwachen Phasenübergang erster Ordnung auf, wo die Korrelationslänge divergiert bzw. sehr groß wird. Die Probleme der Störungstheorie zeigen sich z.B. bei der Bestimmung der Ordnung des elektroschwachen Phasenübergangs. Während selbst superdaisy-resummierte ein-loop-Störungstheorie nur einen Phasenübergang erster Ordnung vorher sagt [26] und Störungstheorie für Higgs-Massen $\gtrsim 70$ GeV zusammenbricht, zeigen Gitterrechnungen [11], dass der Phasenübergang erster Ordnung bei einer kritischen Higgs-Masse ~ 72 GeV in einem kritischen Punkt endet und für eine größere Higgs-Masse durch einen analytischen Crossover fortgesetzt wird.

Eine wichtige Größe an Phasenübergängen zweiter Ordnung ist die Dämpfungsrate, die mit dem Imaginärteil der Selbstenergie verknüpft ist. Sie gibt an, wie schnell Abweichungen vom Gleichgewicht bei Annäherung an den Phasenübergang zerfallen. Aufgrund der Theorie kritischer Phänomene [6, 13] erwartet man, dass die Dämpfungsrate langreichweitiger Fluktuationen am Phasenübergang verschwindet. Dies ist besonders aus astro-teilchenphysikalischer Perspektive von Bedeutung, da damit die Bildung topologischer Defekte an einem Phasenübergang zweiter Ordnung möglich ist [12]. Störungstheoretische Berechnungen der Dämpfungsrate [20,24,25] liefern fälschlicherweise ein divergentes Resultat. Damit könnten sich selbst bei beliebig schnellem Durchlaufen des Phasenübergangs keine topologischen Defekte ausbilden.

Die obigen Ausführungen machen deutlich, dass für die Untersuchung vieler thermaler Fragestellungen nichtperturbative Methoden erforderlich sind. Eine solche Methode besteht in der Durchführung von Gittersimulationen. Realistische Untersuchungen erfordern jedoch sehr große Gitter und sind damit sehr rechenzeitintensiv. Weiter treten Schwierigkeiten auf, wenn die Theorie chirale Fermionen, viele unterschiedliche relevante Massenskalen oder chemische Potentiale enthält. Ein Phasenübergang zweiter Ordnung ist auf dem Gitter nur sehr schwer zu untersuchen, da die Korrelationslänge divergiert und man zur Erfassung der relevanten Freiheitsgrade ein unendlich großes Gitter benötigen würde. Das kritische Verhalten kann in der vollen Theorie nur unter sehr großem Aufwand berechnet werden. In der dimensional reduzierten Theorie ist diese Untersuchung etwas einfacher, da man die Temperaturskala nicht berücksichtigen muss und man "finite-size-scaling"-Argumente verwenden kann. Zur Bestimmung nichtuniverseller Größen, wie der kritischen Temperatur, muss man jedoch die volle thermale Theorie berücksichtigen.

Eine sehr erfolgreiche nichtperturbative Untersuchungsmethode für Feldtheorien wird durch Renormierungsgruppengleichungen bereitgestellt. Die TRG, die wir in dieser Arbeit untersuchen, beruht auf der wilsonschen Renormierungsgruppe [50], die im Jahre 1971 von Wilson in der Festkörperphysik eingeführt wurde, um speziell das kritische Verhalten an Phasenübergängen zweiter Ordnung zu untersuchen. Neben dem wilsonschen Ansatz gibt es mittlerweile noch verschiedene andere Renormierungsgruppenansätze, z.B. die "environmentally

friendly”–Renormierungsgruppe [60] und die “auxiliary mass method” [59]. Die exakte Lösung der Renormierungsgruppengleichungen ist natürlich nicht möglich, aber es zeigt sich, dass man bereits mit relativ einfachen Näherungen und geringem Aufwand an Computer–Rechenzeit numerisch sehr gute Ergebnisse erzielen kann. Dies stelle man dem großen Rechenaufwand gegenüber, der störungstheoretisch betrieben werden muss, um z.B. einigermaßen akkurate Ergebnisse für kritische Exponenten zu erhalten. Konzeptionell hat die Anwendung der wilsonischen Renormierungsgruppe auf die Feldtheorie sehr viel zum Verständnis von Renormierung im Sinne von relevanten und irrelevanten Operatoren beigetragen [57]. Bis auf die TRG, die im Minkowskiraum formuliert ist, sind alle Renormierungsgruppengleichungen in euklidischer Feldtheorie bzw. im Matsubaraformalismus formuliert. Dies hat den Nachteil, dass damit nur statische Größen numerisch zugänglich sind. Für die Bestimmung dynamischer Größen, wie z.B. Dämpfungsraten, ist eine analytische Fortsetzung zu reeller Zeit notwendig, was bei numerischen Funktionen nicht möglich ist.

Für die numerische Berechnung nichtstatischer Größen mit Hilfe einer Renormierungsgruppengleichung ist es also unumgänglich, im Minkowskiraum zu arbeiten. Im Sinne von Linear Response wäre es damit auch möglich, geringe Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht zu untersuchen. Dies könnte z.B. für die richtige Interpretation der Daten aus den Schwerionen–Beschleunigern von Nutzen sein. Bisher ist noch nicht klar, ob das erzeugte Quark–Gluon–Plasma ein thermisches Gleichgewicht erreicht oder ob man für die Auswertung der Daten zusätzliche Nichtgleichgewichtseffekte berücksichtigen muss. Eine Übertragung der Methoden zur Herleitung von Renormierungsgruppengleichungen in euklidischer Feldtheorie auf den Minkowskiraum ist nicht möglich, da das Impulsquadrat im Minkowskiraum nicht positiv definit ist.

Im Jahr 1996 wurde von Attanasio und Pietroni eine skalare Renormierungsgruppengleichung im Realzeitformalismus vorgestellt [76], die seitdem unter dem Namen “Thermale Renormierungs–Gruppe” (TRG) bekannt ist. Im Vergleich zu den Renormierungsgruppen im Matsubaraformalismus, wo nicht zwischen Quanten– und thermalen Fluktuationen unterschieden werden kann, bewirkt die Formulierung der TRG im Realzeitformalismus, dass nur die thermalen Fluktuationen erfasst werden können. Diese sind im Gegensatz zu den Quantenfluktuationen on–shell und können damit auf sinnvolle Weise mit einem Cutoff versehen werden. In [76] wurde mit Hilfe der TRG das kritische Verhalten des skalaren $O(1)$ –Modells untersucht. In einer zweiten Arbeit [77] wurde die Formulierung der TRG auf Eichtheorien ausgedehnt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese neue nichtperturbative Methode zu testen und zu erweitern. Im ersten Teil der Arbeit untersuchen wir zunächst die Anwendbarkeit der TRG zur Bestimmung universeller und nichtuniverseller Größen an einem Phasenübergang zweiter Ordnung. Die zuverlässige Bestimmung nichtuniverseller Größen ist ein wichtiges Anliegen, da aufgrund von Infrarotdivergenzen die Störungstheorie dafür nicht geeignet ist. In diesem Teil der Arbeit kann die Zuverlässigkeit der TRG durch Vergleich mit anderen Untersuchungen getestet werden. Diese Vorgehensweise erlaubt es, die Stärken und Schwächen der neuen Methode kennenzulernen und wichtige Rückschlüsse über die Güte der von uns gemachten Näherungen zu ziehen. Wir untersuchen zunächst den Phasenübergang zweiter Ordnung im skalaren $O(N)$ –symmetrischen Modell. Für eine realistische Anwendung der TRG ist es jedoch notwendig, die Formulierung der TRG auf Systeme mit Fermionen auszudehnen. Dies tun wir anhand der Unter-

suchung des chiralen Phasenübergangs im linearen Sigma-Modell gekoppelt an zwei Quarks. Im zweiten Teil dieser Arbeit zeigen wir, wie man mit Hilfe der TRG auf konsistente Art nichtstatische Größen berechnen kann. Dazu untersuchen wir im skalaren $O(1)$ -Modell die Plasmon-Dämpfungsrate, die mit dem Imaginärteil der Selbstenergie verknüpft ist. In der Möglichkeit, im Rahmen der TRG auch nichtstatische Größen numerisch berechnen zu können, liegt der wesentliche Vorteil, den die TRG gegenüber den Renormierungsgruppen im Matsubaraformalismus bietet. Entsprechend können wir in diesem Teil der Arbeit zum Vergleich nicht mehr auf nicht-perturbative Ergebnisse anderer Methoden zurückgreifen.

Im folgenden Kapitel geben wir eine Einführung in die thermale Feldtheorie. Wir besprechen ausführlich den Realzeitformalismus, da dieser die Grundlage für die gesamten Berechnungen im Rahmen der TRG bildet. Darüber hinaus gehen wir in aller Kürze auf den Matsubaraformalismus und den CTP-Formalismus ein.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit den verschiedenen Renormierungsgruppengleichungen. Wir stellen die wilsonsche Renormierungsgruppe und die "Exakte Renormierungsgruppe" (ERG) vor. Wir geben die Herleitung der TRG für ein System aus Skalaren und Fermionen im Realzeitformalismus an und erläutern verschiedene Möglichkeiten zur approximativen Lösung einer solchen Flussgleichung. In dieser Arbeit verwenden wir als Approximationsschema die sog. Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung.

Ab Kapitel 4 geht es schließlich um die Anwendbarkeit der TRG. Als eine erste Anwendung der TRG untersuchen wir den Phasenübergang im skalaren $O(N)$ -symmetrischen Modell. Aufgrund der Universalität kritischer Phänomene findet dieses Modell vielfach sowohl in der Festkörperphysik als auch in der Teilchenphysik Anwendung. Für $N = 1$ und $N = 4$ bestimmen wir die Widom-Skalenfunktion sowie universelle und nichtuniverselle Größen. Wir untersuchen den Verlauf der kritischen Temperatur als Funktion von N und diskutieren unsere Ergebnisse ausführlich anhand des Vergleichs mit anderen Arbeiten.

Im Anschluss hieran wird in Kapitel 5 dargelegt, welche Auswirkungen die Fermionen im Rahmen der TRG haben. Zu diesem Zweck betrachten wir das chirale Quark-Meson-Modell im Limes von nur zwei Quark-Flavors und vollständig gebrochener axialer Symmetrie. Dies wird als effektives Modell für die Beschreibung des chiralen Phasenübergangs der QCD im Limes von nur zwei Quark-Flavors verwendet. Unsere Untersuchungen zeigen, dass im Rahmen der TRG die Fermionen am Phasenübergang mit den üblichen Näherungen nicht entkoppeln. Erst die Berücksichtigung einer thermalen Masse im Fermion-Propagator führt zu vollständiger Entkopplung. Die thermale Masse wird durch die nichtlokale Struktur des HTL-Fermionpropagators auf chiral invariante Art erzeugt.

In Kapitel 6 folgt die Untersuchung von Imaginärteilen im Rahmen der TRG. Dazu betrachten wir die Plasmon-Dämpfungsrate im $O(1)$ -Modell, die perturbativ einen zwei-loop Effekt darstellt. Unsere Untersuchungen zeigen, wie man auf konsistente Art Imaginärteile im Rahmen der TRG berechnen kann.

Eine Zusammenfassung unserer Ergebnisse wird in Kapitel 7 dargelegt.

In Anhang A diskutieren wir die Eigenschaften des skalaren Propagators und der skalaren Selbstenergie sowohl im Realzeit- als auch im Matsubaraformalismus. Die genaue Kenntnis dieser Eigenschaften ist für die Herleitung der TRG, für die Berechnung der Kerne und der Dämpfungsrate unerlässlich.

Anhang B beinhaltet eine Einführung in das universelle Verhalten an einem Phasenübergang zweiter Ordnung.

Abschließend erläutern wir in Anhang C die Eigenschaften der Superspur und geben die für die Auswertung der thermalen Spuren bei der Berechnung der Dämpfungsrates notwendigen Formeln an.

2. EINFÜHRUNG IN DIE THERMALE QUANTENFELDTHEORIE

In diesem Kapitel geben wir eine kurze Einführung in die Quantenfeldtheorie bei endlicher Temperatur und erläutern die wichtigsten Konzepte und technischen Grundlagen. Im Anhang A gehen wir näher auf die Eigenschaften der skalaren Zweipunktfunktion im thermalen Gleichgewicht ein. Die Erweiterung auf Fermionen ist sehr leicht möglich und bringt keine konzeptionell neuen Erkenntnisse. Die Zweipunktfunktion ist für uns von besonderer Bedeutung, da die Renormierungsgruppen TRG und ERG auf der Modifikation des Propagators beruhen. Weiterhin ist die genaue Kenntnis der Eigenschaften des Propagators bzw. der Selbstenergie wichtig für die Linear-Response-Theorie, für die Berechnung von Dämpfungsraten und Korrelationslängen, für kollektive Phänomene usw.

Im Folgenden werden wir hauptsächlich auf die Formulierung der Feldtheorie im thermischen Gleichgewicht eingehen. Damit sind jedoch auch Aussagen über geringe Abweichungen vom Gleichgewicht im Sinne von Linear-Response möglich (vgl. Anhang A.3). Wir geben die Formulierung der thermalen Feldtheorie im Imaginärzeitformalismus (Matsubaraformalismus) und Realzeitformalismus an. Dabei legen wir den Schwerpunkt auf die Ausarbeitung des Realzeitformalismus, da dieser die Grundlage für die Herleitung der Flussgleichung der thermalen Renormierungsgruppe TRG im nächsten Kapitel liefert. Zum Abschluss dieses Kapitels stellen wir noch den CTP-Formalismus vor. Dieser ist eng mit dem Realzeitformalismus verknüpft, im Gegensatz zu letzterem jedoch nicht auf Systeme im thermischem Gleichgewicht beschränkt.

Wir werden in dieser Arbeit das chemische Potenzial vernachlässigen und die üblichen Einheiten mit $\hbar = c = k_B = 1$ benutzen. Die Vernachlässigung des chemischen Potenzials entspricht dem Limes geringer Teilchendichte. Im Falle eines ungeladenen Skalarfeldes ist dies keine Einschränkung, da die Teilchenzahl keine Erhaltungsgröße ist und das chemische Potenzial verschwindet.

2.1. Allgemeine Formulierung im Pfadintegralformalismus

In diesem Abschnitt gehen wir auf die allgemeine Formulierung der Feldtheorie bei endlicher Temperatur im Pfadintegralformalismus ein. Zu diesem Thema gibt es eine Vielzahl von Büchern und Übersichtsartikeln [1–6].

Die thermale Feldtheorie ist die Beschreibung eines physikalischen Systems, das durch einen besonderen Dichteoperator $\hat{\rho}$ beschrieben wird. Im thermischen Gleichgewicht wird das System

durch den großkanonischen Dichteoperator

$$\hat{\rho} = e^{-\beta\hat{H} - \mu_\alpha \hat{N}_\alpha} \quad (2.1)$$

beschrieben, wobei \hat{H} der zeitunabhängige Hamiltonoperator, $\beta = 1/T$ die inverse Temperatur und μ_α die chemischen Potentiale der erhaltenen und miteinander kommutierenden Teilchenzahloperatoren \hat{N}_α sind. Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit die chemischen Potentiale vernachlässigen. Damit reduziert sich $\hat{\rho}$ auf den kanonischen Dichteoperator $\hat{\rho} = e^{-\beta\hat{H}}$. Ausgangspunkt für die statistische Behandlung des Systems ist die kanonische Zustandssumme

$$Z(\beta) = \text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}). \quad (2.2)$$

Diese Spur lässt sich durch Einsetzen eines vollständigen Systems von Heisenberg–Feldoperatoren bei der willkürlichen Zeit t_0 auswerten:

$$Z(\beta) = \sum_{\varphi(\vec{x}, t_0)} \langle \varphi(\vec{x}, t_0) | e^{-\beta\hat{H}} | \varphi(\vec{x}, t_0) \rangle = \sum_{\varphi(\vec{x}, t_0)} \langle \varphi(\vec{x}, t_0) | \varphi(\vec{x}, t_0 - i\beta) \rangle. \quad (2.3)$$

In der obigen Formel steht $\varphi(\vec{x}, t_0)$ stellvertretend für die unterschiedlichen physikalischen Felder, die in der Theorie vorkommen. Wir werden in dieser Arbeit nur Systeme betrachten, die aus Skalaren und Fermionen bestehen. Durch die Einführung von Quelltermen erhält man aus der Zustandssumme das erzeugende Funktional für die thermalen Greenfunktionen [1]

$$Z_C[j, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int_C d^4x (\mathcal{L} + j\varphi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right], \quad (2.4)$$

wobei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \psi, \bar{\psi})$ die Lagrangedichte des Systems ist. Die Kontur C bezieht sich auf die Integration in der komplexen Zeitebene. An (2.3) erkennt man, dass die Kontur bei $t_i = t_0$ starten und bei $t_f = t_0 - i\beta$ enden muss. Damit die Zustandssumme als Pfadintegral dargestellt werden kann, muss man somit die Zeit zu komplexen Werten erweitern. Die Feld–Integration in (2.4) erstreckt sich über solche Konfigurationen, die für Bosonen periodischen und für Fermionen antiperiodischen Randbedingungen (als Folge der Grassmann–Algebra) gehorchen:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t_0) &= \varphi(\vec{x}, t_0 - i\beta), \\ \psi(\vec{x}, t_0) &= -\psi(\vec{x}, t_0 - i\beta). \end{aligned}$$

Die thermalen Greenfunktionen erhält man aus (2.4) durch Funktionaldifferenziation nach den Quellen:

$$\begin{aligned} iD_C(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left(e^{-\beta\hat{H}} T_C(\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)) \right) \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^n Z_C[j, \eta, \bar{\eta}]}{i\delta j(x_1) \dots i\delta j(x_n)} \Bigg|_{j=\eta=\bar{\eta}=0}, \\ iS_C(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left(e^{-\beta\hat{H}} \psi(x_1) \dots \hat{\psi}(x_n) \hat{\bar{\psi}}(y_1) \dots \hat{\bar{\psi}}(y_n) \right) \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^{2n} Z_C[j, \eta, \bar{\eta}]}{i\delta\bar{\eta}(x_1) \dots i\delta\bar{\eta}(x_n) (-i)\delta\eta(y_1) \dots (-i)\delta\eta(y_n)} \Bigg|_{j=\eta=\bar{\eta}=0} \end{aligned}$$

wobei $x_i = (t_i, \vec{x}_i)$ und $y_i = (t_i, \vec{y}_i)$. Die Zeiten t_i müssen auf dem Pfad C liegen. Der Operator T_C ist der Zeitordnungsoperator entlang des Pfades C , wobei auf dem Pfad t_0 der Anfangszeitpunkt und $t_0 - i\beta$ der Endzeitpunkt ist. Der genaue Verlauf von C in der komplexen Zeitebene ist nicht festgelegt, der Imaginärteil der Zeit muss jedoch aus Konvergenzgründen entlang der Kontur monoton fallend sein [31, 35]. Die thermalen Greenfunktionen, die man aus dem Funktional (2.4) bestimmt, hängen von der gewählten Kontur ab. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Physik von der Wahl der Kontur abhängt. Aufgrund von Analytizitätseigenschaften kann man aus den Greenfunktionen, die entlang einer Kontur berechnet werden, die Greenfunktionen entlang einer anderen Kontur bestimmen. Je nach Wahl der Kontur erhält man verschiedene äquivalente Formulierungen der thermalen Feldtheorie.

In thermaler Störungstheorie sind die Propagatoren die einzigen Greenfunktionen, die auf tree-Niveau aufgrund der Randbedingungen thermale Korrekturen erhalten. Die Kopplungen sind in niedrigster Ordnung unabhängig von der Temperatur. Durch Auflösung der Zeitordnung erhält man für die Propagatoren

$$iD_C(x, x') = \theta_C(t, t')D^+(x, x') + \theta_C(t', t)D^-(x, x'), \quad (2.5)$$

$$iS_C(x, x')_{\alpha\beta} = \theta_C(t - t')S_{\alpha\beta}^+(x, x') + \theta_C(t' - t)S_{\alpha\beta}^-(x, x') \quad (2.6)$$

mit

$$D^+(x, x') = \langle \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x') \rangle_{\beta}, \quad D^-(x, x') = \langle \hat{\varphi}(x')\hat{\varphi}(x) \rangle_{\beta} = D^+(x', x), \quad (2.7)$$

$$S_{\alpha\beta}^+(x, x') = \langle \hat{\psi}_{\alpha}(x)\hat{\psi}_{\beta}(x') \rangle_{\beta}, \quad S_{\alpha\beta}^-(x, x') = -\langle \hat{\psi}_{\beta}(x')\hat{\psi}_{\alpha}(x) \rangle_{\beta}. \quad (2.8)$$

Das zusätzliche Minuszeichen bei $S^-(x, x')_{\alpha\beta}$ ist eine Folge der Antivertauschungsrelationen für die Fermionen. Mit $\langle \dots \rangle_{\beta}$ ist die thermale Spur gemeint, d.h.

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{\beta} = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left(e^{-\beta \hat{H}} \hat{\mathcal{O}} \right). \quad (2.9)$$

In (2.5) und (2.6) haben wir die Theta-Funktion $\theta_C(t, t')$ entlang der Kontur C eingeführt. Falls auf der Kontur der Punkt t vor t' liegt, ist $\theta_C(t, t')$ eins, im umgekehrten Fall ist $\theta_C(t, t')$ null. Dies kann man auch analytisch ausdrücken, indem man die Kontur C durch eine nichtsinguläre Parametrisierung $t(v)$ darstellt, wobei der Parameter v entlang der Kontur streng monoton steigend sein soll (v könnte z.B. die Länge der Kontur sein). In diesem Fall reduziert sich $\theta_C(t, t')$ auf die normale Theta-Funktion $\theta(v - v')$.

Die Funktionen $D^+(x, x')$ und $D^-(x, x')$ bzw. $S_{\alpha\beta}^+(x, x')$ und $S_{\alpha\beta}^-(x, x')$ sind nicht von der Kontur C abhängig, da es sich lediglich um thermale Erwartungswerte der Feldoperatoren handelt, die zu komplexen Zeiten erweitert wurden. Die gesamte Konturabhängigkeit der Greenfunktionen entsteht allein durch die Zeitordnung entlang der Kontur. Als Folge der zyklischen Eigenschaft der Spur erhält man die Kubo–Martin–Schwinger–Relationen (KMS–Relationen) [34, 35]

$$D^+(t, \vec{x}; t', \vec{x}') = D^-(t + i\beta, \vec{x}; t', \vec{x}'), \quad (2.10)$$

$$S^+(t, \vec{x}; t', \vec{x}')_{\alpha\beta} = -S_{\alpha\beta}^-(t + i\beta, \vec{x}; t', \vec{x}'). \quad (2.11)$$

Aufgrund der Translationsinvarianz hängen die thermischen Erwartungswerte nur von der Differenz $x - x'$ ab. Damit folgt

$$D^+(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} D^+(k), \quad (2.12)$$

$$D^-(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} D^-(k), \quad (2.13)$$

$$S_{\alpha\beta}^+(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} S_{\alpha\beta}^+(k), \quad (2.14)$$

$$S_{\alpha\beta}^-(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} S_{\alpha\beta}^-(k). \quad (2.15)$$

Die obigen Relationen gelten auch für komplexe Zeiten. In diesem Fall sind sie die analytische Fortsetzung dieser Relationen bei reellen Zeiten. Die Funktionen $D^+(k)$ und $D^-(k)$ bzw. $S_{\alpha\beta}^+(k)$ und $S_{\alpha\beta}^-(k)$ lassen sich damit als Fouriertransformierte bei reeller Zeit berechnen. Sie sind durch die KMS-Relationen miteinander verknüpft:

$$D^+(k) = e^{\beta k_0} D^-(k), \quad (2.16)$$

$$S_{\alpha\beta}^+(k) = -e^{\beta k_0} S_{\alpha\beta}^-(k). \quad (2.17)$$

Wir wollen an dieser Stelle noch zwei wichtige Größen einführen, die bosonische Spektraldichte $\rho(k)$ und die fermionische Spektraldichte $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(k)$:

$$\rho(k) = D^+(k) - D^-(k), \quad (2.18)$$

$$\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(k) = S_{\alpha\beta}^+(k) - S_{\alpha\beta}^-(k). \quad (2.19)$$

Die Eigenschaften von $\rho(k)$ werden im Anhang A diskutiert. Mit Hilfe von (2.16) und (2.17) erhält man

$$D^+(k) = (1 + N(k_0))\rho(k), \quad D^-(k) = N(k_0)\rho(k), \quad (2.20)$$

$$S_{\alpha\beta}^+(k) = (1 - \tilde{N}(k_0))\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(k), \quad S_{\alpha\beta}^-(k) = -\tilde{N}(k_0)\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(k). \quad (2.21)$$

mit den Definitionen

$$N(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \quad \text{und} \quad \tilde{N}(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} + 1}. \quad (2.22)$$

Für positive k_0 entsprechen $N(k_0)$ und $\tilde{N}(k_0)$ der Bose-Einstein- und Fermi-Dirac-Verteilung. Die Spektraldichten einer wechselwirkungsfreien Theorie sind gegeben durch

$$\rho(k) = 2\pi\delta(k^2 - m_\varphi^2)\epsilon(k_0), \quad (2.23)$$

$$\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(k) = 2\pi\delta(k^2 - m_\psi^2)\epsilon(k_0)(\not{k} + m_\psi)_{\alpha\beta}, \quad (2.24)$$

$$\text{mit} \quad \epsilon(k_0) = \theta(k_0) - \theta(-k_0). \quad (2.25)$$

Damit erhalten wir aus (2.5) und (2.6) für die entlang der Kontur C zeitgeordneten Propagatoren

$$iD_C(x - x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \left[\theta_C(t - t') + N(k_0) \right] \rho(k), \quad (2.26)$$

$$iS_C(x - x')_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \left[\theta_C(t - t') - \tilde{N}(k_0) \right] \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(k). \quad (2.27)$$

Formal ist die Formulierung der thermalen Feldtheorie im Pfadintegralformalismus derjenigen bei $T = 0$ sehr ähnlich. Im Unterschied zu der Formulierung bei $T = 0$ muss die Zeitintegration entlang einer Kontur C durchgeführt werden, die bei der willkürlichen Zeit t_0 startet und bei $t_0 - i\beta$ endet. Zusätzlich müssen die Feldkonfigurationen, über die im Pfadintegral integriert wird, periodischen bzw. antiperiodischen Randbedingungen genügen.

2.2. Der Matsubaraformalismus

Die traditionelle Wahl der Kontur für thermale Berechnungen ist die sog. Matsubarakontur (vgl. Abbildung 2.1). Bei der Wahl dieser einfachsten Kontur werden der Anfangspunkt t_0 und der Endpunkt $t_0 - i\beta$ durch eine gerade Linie miteinander verbunden. Der Formalismus, den man bei Verwendung dieser Kontur erhält, wird Matsubaraformalismus genannt [28]. Formal erhält man den Matsubaraformalismus aus der ($T = 0$)–Theorie dadurch, dass man $t = -i\tau$ setzt, wobei τ reell ist und die Randbedingungen berücksichtigt. Der große Vorteil des Matsubaraformalismus liegt darin, dass er sehr viel Ähnlichkeit mit euklidischer Feldtheorie hat. Insbesondere erhält man aus dem Matsubaraformalismus für $T = 0$ die euklidische Feldtheorie. Die Störungstheorie im Matsubaraformalismus wird durch die gleichen Feynman–Graphen generiert wie die Störungstheorie in euklidischer Feldtheorie. Im Impulsraum sind lediglich die Form des Propagators und die Integration über die euklidische k_4 Komponente modifiziert.

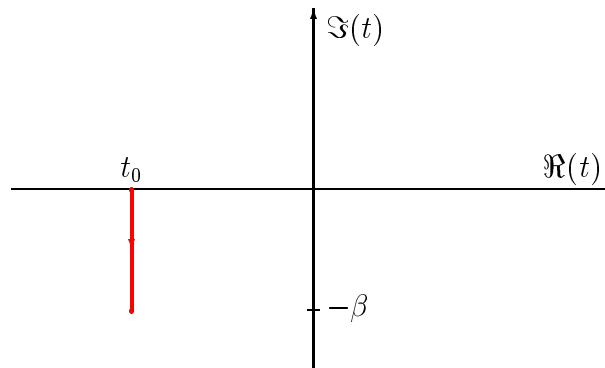


Abbildung 2.1: Grafische Darstellung der Matsubarakontur.

Auf tree–Niveau werden in thermaler Feldtheorie aufgrund der Randbedingungen nur die Propagatoren verändert. Aufgrund der Periodizität bzw. Antiperiodizität in τ sind die Propagatoren im Impulsraum diskret. Im Impulsraum sind die freien thermalen Propagatoren für Bosonen

und Fermionen gegeben durch

$$\begin{aligned} D(k) &= \frac{1}{\omega_n^2 + \omega_k^2}, & \omega_n &= \frac{2\pi n}{\beta}, & \omega_k^2 &= \vec{k}^2 + m_\varphi^2; \\ S(k) &= \frac{\tilde{\omega}_n \gamma^0 - \vec{k} \vec{\gamma} + m_\psi}{\tilde{\omega}_n^2 + \tilde{\omega}_k^2}, & \tilde{\omega}_n &= \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, & \tilde{\omega}_k^2 &= \vec{k}^2 + m_\psi^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die diskreten Impulswerte ω_n und $\tilde{\omega}_n$ nennt man Matsubarafrequenzen. Aufgrund der Diskretisierung muss die Integration über die euklidische Energie durch die Summation über die Matsubarafrequenzen ersetzt werden,

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (2.29)$$

Neben der konzeptionellen Einfachheit hat die Formulierung der thermalen Feldtheorie im Matsubaraformalismus jedoch eine entscheidende Schwäche. Die Greenfunktionen hängen von dem unphysikalischen Parameter τ (im Impulsraum von den Matsubarafrequenzen) ab, der einer imaginären Zeit (imaginären Energie) entspricht. Um zu physikalisch relevanten Aussagen zu gelangen, muss eine analytische Fortsetzung zu reeller Zeit (reeller Energie) durchgeführt werden. Prinzipiell kann man die Greenfunktionen bei reeller Zeit aus den Greenfunktionen im Matsubaraformalismus durch analytische Fortsetzung erhalten. Neben den technischen Schwierigkeiten bei analytischen Fortsetzungen aufgrund von Polen und Schnitten auf der reellen Energie-Achse (vgl. Anhang A) sind sie nur möglich, wenn die Greenfunktionen im Matsubaraformalismus analytisch bekannt sind. Damit ist es nicht möglich, numerisch mit Hilfe des Matsubaraformalismus nichtstatische Größen zu bestimmen. Zur Berechnung von statischen Größen, wie dem effektiven Potenzial, ist der Matsubaraformalismus hingegen sehr gut geeignet, da hierfür keine analytische Fortsetzung nötig ist.

2.3. Der Realzeitformalismus

Um Greenfunktionen direkt bei reeller Zeit berechnen zu können, muss die Kontur C so gewählt werden, dass sie die reelle Zeitachse enthält. Die einfachste Realisierung einer solchen Kontur für $0 \leq \sigma \leq \beta$ ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Realzeitkontur führt entlang der reellen Zeitachse von t_0 bis t_f , danach parallel zur imaginären Zeitachse bis $t_f - i\sigma$, danach wieder parallel zur reellen Zeitachse bis $t_0 - i\sigma$, um anschließend bei $t_0 - i\beta$ zu enden. Durch Variation von σ ($0 \leq \sigma \leq \beta$) erhält man äquivalente Formalismen [32, 33], die unter dem generellen Begriff Realzeitformalismus bekannt sind.

Die Zeiten t_0 und t_f haben wir bisher nicht näher spezifiziert; im Prinzip können wir sie willkürlich wählen. Ein wichtiges Ergebnis erhält man jedoch, wenn man die Limes $t_0 \rightarrow -\infty$ und $t_f \rightarrow \infty$ betrachtet [4]. In diesem Grenzfall faktorisiert das erzeugende Funktional (2.4), und man erhält

$$Z_C[j, \eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N}(\beta) Z_{34}[j, \eta, \bar{\eta}] Z_{12}[j, \eta, \bar{\eta}]. \quad (2.30)$$

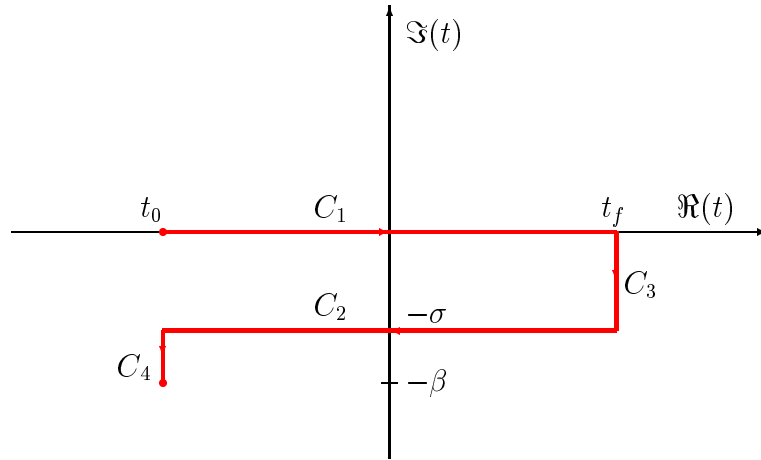


Abbildung 2.2: Grafische Darstellung der Realzeitkontur.

Das Funktional Z_{12} umfasst die Pfadabschnitte C_1 und C_2 , während Z_{34} die Pfadabschnitte C_3 und C_4 umfasst. Interessiert man sich nur für die physikalischen Greenfunktionen mit mindestens einem äußeren Bein, deren Argumente sich auf dem Pfad C_1 befinden, so kann man die Quellen auf den Abschnitten C_3 und C_4 null setzen. Damit reduziert sich dieser Anteil auf eine temperaturabhängige Konstante $Z_{34}(\beta)$, die für die Berechnung physikalischer Greenfunktionen mit mindestens einem äußeren Bein nicht relevant ist. Wenn man sich jedoch für die thermale Zustandssumme $Z(\beta) = \mathcal{N}(\beta)Z_{34}(\beta)Z_{12}(\beta)$ interessiert, so kann $Z_{34}(\beta)$ nicht vernachlässigt werden. Die thermale Zustandssumme ist wichtig, wenn man z.B. die freie Energie oder den Druck berechnen möchte. Diese berechnet man am einfachsten im Matsubaraformalismus, da dieser den vollen Pfad beinhaltet.

Für die Berechnung physikalischer Greenfunktionen mit reellen Zeitargumenten reicht die Kenntnis von $Z_{12}[j, \eta, \bar{\eta}]$ aus. Auf dem Abschnitt C_1 haben die Quellen und Felder die Argumente (t, \vec{x}) und auf C_2 die Argumente $(t - i\sigma, \vec{x})$. Da σ eine Konstante ist, können wir auf C_2 durch eine Substitution zu neuen Quellen und Feldern mit reellen Argumenten übergehen. Zur Unterscheidung geben wir den Quellen und Feldern auf dem Abschnitt C_1 den thermalen Index 1 und auf C_2 den thermalen Index 2. Damit erhalten wir $Z_{12}[j, \eta, \bar{\eta}] \rightarrow Z_{12}[j_1, j_2, \eta_1, \eta_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2]$ mit

$$j_1(t, \vec{x}) = j(t, \vec{x}) \quad j_2(t, \vec{x}) = j(t - i\sigma, \vec{x}), \quad (2.31)$$

$$\eta_1(t, \vec{x}) = \eta(t, \vec{x}) \quad \eta_2(t, \vec{x}) = \eta(t - i\sigma, \vec{x}), \quad (2.32)$$

$$\bar{\eta}_1(t, \vec{x}) = \bar{\eta}(t, \vec{x}) \quad \bar{\eta}_2(t, \vec{x}) = \bar{\eta}(t - i\sigma, \vec{x}). \quad (2.33)$$

Die entsprechenden Substitutionen müssen auch für die Felder vorgenommen werden. Das Funktional $Z_{12}[j_1, j_2, \eta_1, \eta_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2]$ hängt nun von jeweils zwei Feldern und Quellen mit reellen Argumenten ab. Man gelangt zu einer zweikomponentigen Matrixdarstellung für das Pfadintegral

(vgl. (2.36)). Für die Konturintegration erhalten wir

$$\int_{C_1} dz \int d^3x \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x, \quad (2.34)$$

$$\int_{C_2} dz \int d^3x \longrightarrow - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x. \quad (2.35)$$

Das Minuszeichen in (2.35) ist eine Folge davon, dass die Kontur C_2 von $+\infty$ nach $-\infty$ gerichtet ist, wir jedoch von $-\infty$ nach $+\infty$ integrieren. Mit diesen Substitutionen erhalten wir für das Pfadintegral

$$\begin{aligned} Z_{12}[j_a, \eta_a, \bar{\eta}_a] = & \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2 \mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\psi_2 \mathcal{D}\bar{\psi}_1 \mathcal{D}\bar{\psi}_2 \exp \left[\right. \\ & i \int d^4x \int d^4x' \left(\frac{1}{2} \varphi_a(x) (D_0^{-1})_{ab}(x-x') \varphi_b(x') + \bar{\psi}_a(x) (S_0^{-1})_{ab}(x-x') \psi_b(x') \right) \\ & + i \int d^4x \left(\mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi_1, \psi_1, \bar{\psi}_1) - \mathcal{L}_{\text{int}}(\varphi_2, \psi_2, \bar{\psi}_2) \right) \\ & \left. + i \int d^4x \left(j_a(x) \varphi_a(x) + \bar{\eta}_a(x) \psi_a(x) + \bar{\psi}_a(x) \eta_a(x) \right) \right]. \quad (2.36) \end{aligned}$$

Auf tree-Niveau treten wegen der Lokalität der Wechselwirkung keine Kopplungen zwischen Feldern mit unterschiedlichem thermalen Index auf. Einzig durch die Nichtdiagonalelemente des tree-Niveau-Propagators erhält man Mischungen zwischen den Feldern mit unterschiedlichem thermalen Index. Ohne diese Nichtdiagonalelemente wären die beiden Felder in allen Ordnungen entkoppelt. Aufgrund von loop-Effekten werden auch Kopplungen zwischen den Feldern mit unterschiedlichem thermalen Index generiert. Z.B. wird bereits durch das Diagramm (2.37) eine Kopplung zwischen den 1- und 2-Feldern auf ein-loop-Niveau generiert.



Physikalische Bedeutung haben nur die Felder mit dem thermalen Index 1, da sie auf der Kontur C_1 liegen und damit Greenfunktionen mit reeller Zeit entsprechen. Aufgrund dessen interessiert man sich normalerweise nur für Greenfunktionen, deren äußere Beine 1-Beine sind. Die Felder mit dem Index 2 treten jedoch als interne Felder in den loops auf (ähnlich den Geistfeldern für nicht-abelsche Eichtheorien) und eine konsistente Störungstheorie ist nur möglich, wenn man diese bei der Berechnung mitberücksichtigt. Bei ihrer Vernachlässigung würden in Störungstheorie Singularitäten auftreten, die als sog. “pinch singularities” bekannt sind [36].

Aus den Gleichungen (2.26) und (2.27) lassen sich die Propagatoren im Realzeitformalismus leicht bestimmen. Im Impulsraum erhalten wir mit Hilfe der expliziten Darstellung (A.19) für

die Theta–Funktion

$$iD_{11}(k) = i \int \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{\rho(k'_0, \vec{k})}{k_0 - k'_0 + i\epsilon} + N(k_0)\rho(k_0), \quad (2.38)$$

$$iD_{12}^\sigma(k) = e^{\sigma k_0} N(k_0)\rho(k_0), \quad (2.39)$$

$$iD_{21}^\sigma(k) = e^{-\sigma k_0} (1 + N(k_0))\rho(k_0), \quad (2.40)$$

$$iD_{22}(k) = -i \int \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{\rho(k'_0, \vec{k})}{k_0 - k'_0 - i\epsilon} + N(k_0)\rho(k_0), \quad (2.41)$$

$$iS_{11}(k) = i \int \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{\tilde{\rho}(k'_0, \vec{k})}{k_0 - k'_0 + i\epsilon} - \tilde{N}(k_0)\tilde{\rho}(k_0), \quad (2.42)$$

$$iS_{12}^\sigma(k) = -e^{\sigma k_0} \tilde{N}(k_0)\tilde{\rho}(k_0), \quad (2.43)$$

$$iS_{21}^\sigma(k) = e^{-\sigma k_0} (1 - \tilde{N}(k_0))\tilde{\rho}(k_0), \quad (2.44)$$

$$iS_{22}(k) = -i \int \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{\tilde{\rho}(k'_0, \vec{k})}{k_0 - k'_0 - i\epsilon} - \tilde{N}(k_0)\tilde{\rho}(k_0). \quad (2.45)$$

Die KMS–Relationen für allgemeines σ lauten

$$D_{21}^\sigma(k) = e^{(\beta-2\sigma)k_0} D_{12}^\sigma(k), \quad (2.46)$$

$$S_{21}^\sigma(k) = -e^{(\beta-2\sigma)k_0} S_{12}^\sigma(k). \quad (2.47)$$

Wenn man den Zusammenhang zwischen dem Feynman–Propagator und der Spektraldichte berücksichtigt¹, so kann man die thermalen Propagatoren als Funktion der thermalen Feynman–Propagatoren ausdrücken. In Matrixform folgen

$$D^\sigma(k) = \begin{pmatrix} \Delta & (\Delta - \Delta^*)\theta(-k_0)e^{\sigma k_0} \\ (\Delta - \Delta^*)\theta(k_0)e^{-\sigma k_0} & -\Delta^* \end{pmatrix} + (\Delta - \Delta^*)N(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & e^{\sigma k_0} \\ e^{-\sigma k_0} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

$$S^\sigma(k) = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} & (\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^*)\theta(-k_0)e^{\sigma k_0} \\ (\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^*)\theta(k_0)e^{-\sigma k_0} & -\tilde{\Delta}^* \end{pmatrix} - (\tilde{\Delta} - \tilde{\Delta}^*)\tilde{N}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & e^{\sigma k_0} \\ e^{-\sigma k_0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Die Funktionen $\Delta(k)$ und $\tilde{\Delta}(k)$ sind die vollen thermalen Feynman–Propagatoren für Bosonen

¹Für Bosonen ist dies im Anhang A erläutert; den Zusammenhang für die Fermionen erhält man durch die Ersetzung $N(|k_0|) \rightarrow -\tilde{N}(|k_0|)$

und Fermionen. Auf tree-Niveau gilt

$$\Delta_0 = \frac{1}{k^2 - m_\varphi^2 + i\epsilon}, \quad \Delta_0^* = \frac{1}{k^2 - m_\varphi^2 - i\epsilon}, \quad (2.50)$$

$$\tilde{\Delta}_0 = (\not{k} - m_\psi + i\epsilon)^{-1}, \quad \tilde{\Delta}_0^* = (\not{k} - m_\psi - i\epsilon)^{-1}. \quad (2.51)$$

Durch die Variation von σ werden nur die Nichtdiagonalelemente des Propagators beeinflusst. Dies ist anschaulich klar, da sich bei den Diagonalelementen beide Zeiten entweder auf C_1 oder C_2 befinden. Man kann zeigen, dass physikalische Größen nicht von σ abhängen [32, 33]. Für thermale Berechnungen steht es frei, welchen Wert man für σ verwendet. Für $\sigma = \beta/2$ erhält man die symmetrische Formulierung. Bei dieser Wahl sind die Nichtdiagonalelemente des Propagators identisch. Eine andere Wahl von σ , die wir auch für die Berechnungen im Rahmen der TRG verwenden werden, ist der Limes $\sigma = 0$. Diese Wahl ist eng verknüpft mit dem CTP-Formalismus, den wir im nächsten Abschnitt vorstellen.

Im Gegensatz zum Matsubaraformalismus können wir im Realzeitformalismus direkt thermale Greenfunktionen berechnen. Als Preis dafür müssen wir jedoch eine Verdopplung der Anzahl der Freiheitsgrade hinnehmen.

2.4. Der CTP-Formalismus

In diesem Abschnitt führen wir den CTP (“Closed-Time-Path”) Formalismus ein, der viele Gemeinsamkeiten mit dem Realzeitformalismus für $\sigma = 0$ hat. Der CTP-Formalismus [29, 30] ist jedoch älter als der Realzeitformalismus und allgemeiner, da man damit auch Systeme außerhalb des thermischen Gleichgewichts beschreiben kann. Eine ausführliche Beschreibung findet sich z.B. in [37, 38].

Ein physikalisches System wird im allgemeinsten Fall durch eine Dichtematrix $\hat{\rho}$ beschrieben. Im thermischen Gleichgewicht hat diese Dichtematrix eine besonders einfache Form, nämlich $\hat{\rho} = e^{-\beta\hat{H}}$. Der CTP-Formalismus wurde eingeführt, um ein physikalisches System mit beliebiger Dichtematrix beschreiben zu können. Die Greenfunktionen für ein Nichtgleichgewichtssystem sind analog denen für ein System im thermischen Gleichgewicht definiert:

$$G(x_1 \dots x_n) := \frac{1}{\text{Tr}(\hat{\rho})} \text{Tr} \left[\hat{\rho} T(\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)) \right]. \quad (2.52)$$

Die Spur kann man zu einem Zeitpunkt t_0 auswerten, der vor allen Zeitpunkten $t_1 \dots t_n$ liegen soll. Damit folgt

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\hat{\rho} T(\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)) \right] &= \sum_{\varphi_1} \langle \varphi_1, t_0 | \hat{\rho} T(\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)) | \varphi_1, t_0 \rangle \\ &= \sum_{\varphi_1} \sum_{\varphi_2} \langle \varphi_1, t_0 | \hat{\rho} | \varphi_2, t_0 \rangle \langle \varphi_2, t_0 | T(\hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n)) | \varphi_1, t_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Um Greenfunktionen mit beliebigen äußeren Beinen berechnen zu können, verallgemeinert man

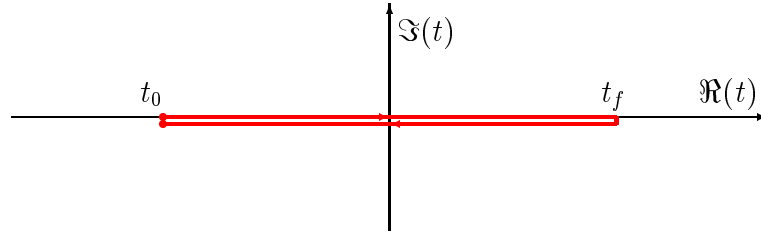


Abbildung 2.3: Grafische Darstellung der CTP-Kontur.

(2.53) zu einem erzeugenden Funktional:

$$Z_{CTP}[\hat{\rho}, j] = \sum_{\varphi_1} \sum_{\varphi_2} \langle \varphi_1, t_0 | \hat{\rho} | \varphi_2, t_0 \rangle \langle \varphi_2, t_0 | T_C \exp \left(i \int_C d^4x j \varphi \right) | \varphi_1, t_0 \rangle.$$

Der Ausdruck $\langle \varphi_2, t_0 | T_C \exp \left(i \int_C d^4x j \varphi \right) | \varphi_1, t_0 \rangle$ lässt sich als Pfadintegral schreiben. Dieses beginnt bei t_0 , führt entlang der reellen Zeitachse bis zu einem Zeitpunkt t_f und kehrt dann wieder zu dem Zeitpunkt t_0 zurück. Da das Pfadintegral bei t_0 beginnt und auch dort wieder endet, wird dieser Formalismus “Closed-Time-Path”-Formalismus genannt. Die Kontur für diesen Formalismus ist in Abbildung 2.3 verdeutlicht. Die Pfadintegraldarstellung des erzeugenden Funktionals lautet

$$Z_{CTP}[\hat{\rho}, j_1, j_2] = \int \mathcal{D}\varphi_1 \mathcal{D}\varphi_2 \langle \varphi_1, t_0 | \hat{\rho} | \varphi_2, t_0 \rangle \exp \left[i \left(S[\varphi_1] - S^*[\varphi_2] + j_1 \cdot \varphi_1 - j_2 \cdot \varphi_2 \right) \right] \quad (2.54)$$

wobei wir den Quellen und Feldern auf demjenigen Teil der Kontur, der von t_0 nach t_f führt, einen Index 1 und auf dem anderen Teil der Kontur einen Index 2 gegeben haben.

Bis jetzt ist der Anfangszustand, der durch $\langle \varphi_1, t_0 | \hat{\rho} | \varphi_2, t_0 \rangle$ dargestellt wird, noch nicht spezifiziert. Im thermischen Gleichgewicht setzen wir für die Dichtematrix $\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H}}$ ein, und damit erhalten wir aus (2.54) das Pfadintegral des Realzeitformalismus für $\sigma = 0$. Für allgemeines $\hat{\rho}$ kann das Matrixelement $\langle \varphi_1, t_0 | \hat{\rho} | \varphi_2, t_0 \rangle$ nicht mehr geschlossen berechnet werden. Man kann jedoch dieses Matrixelement nach Potenzen von φ_1 und φ_2 entwickeln [39]:

$$\langle \varphi_1, t_0 | \hat{\rho} | \varphi_2, t_0 \rangle = \exp \left[i \left(K + \int K_i \varphi_i + \frac{1}{2} \int K_{ij} \varphi_i \varphi_j + \dots \right) \right]. \quad (2.55)$$

Die Information über den Anfangszustand bei t_0 ist damit in den nichtlokalen Quellen K enthalten, die nur für $t = t_0$ existieren. Diese Quellen K modifizieren damit die Randbedingungen für die entsprechenden Greenfunktionen. Im thermalen Gleichgewicht bricht die Reihe in (2.55) nach dem quadratischen Term ab. Damit erhält auf tree-Niveau nur der Propagator eine thermale Korrektur, während die höheren Kopplungen zunächst unverändert bleiben.

3. THERMALE RENORMIERUNGSGRUPPEN

3.1. Motivation für thermale Renormierungsgruppen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Formulierung von Renormierungsgruppengleichungen in der thermalen Feldtheorie. Diese bieten eine Möglichkeit zur Lösung quantenfeldtheoretischer Probleme, die störungstheoretisch nicht zugänglich sind.

Störungstheorie bei $T = 0$ enthält Ultraviolettdivergenzen, die durch Einführung renormierter Parameter beseitigt werden. Diese renormierten Parameter müssen jedoch bei einer Skala μ spezifiziert werden. Die Renormierungsgruppengleichungen bei $T = 0$ [46–48] geben die Abhängigkeit der renormierten Parameter von der Skala μ an. Das Einschalten der Temperatur T hat auf die UV-Divergenzen keinen Einfluss, da die UV-Skala im Vergleich zur Temperatur beliebig groß gewählt werden kann, so dass die Physik bei dieser hohen Skala “nichts von der Temperatur merkt”. Im Infrarotbereich kann das Einschalten der Temperatur jedoch zu neuen, ernsthaften Problemen führen. Ein berühmtes Beispiel hierfür ist das Problem, die freie Energie einer nichtabelschen Eichtheorie störungstheoretisch jenseits von drei-loop zu bestimmen [40]. Weiterhin können in thermaler Störungstheorie zusätzliche Infrarotdivergenzen auftreten, die im Gegensatz zu den UV-Divergenzen nicht durch Einführung renormierter Parameter beseitigt werden können. Allgemein ist thermale Störungstheorie nicht mehr zuverlässig, wenn die Temperatur sehr viel größer als die typische Massenskala der Theorie ist. Insbesondere bricht die Störungstheorie in der Nähe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung zusammen, da dieser durch skalare, masselose Teilchen dominiert wird [26]. In der Nähe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung wird das Verhalten einer d -dimensionalen thermalen Theorie effektiv durch eine $(d - 1)$ -dimensionale, nichtthermale Theorie beschrieben, was unter dem Begriff “dimensionale Reduktion” bekannt ist [16]. Dieser Wechsel der effektiven Freiheitsgrade ist mit Hilfe der Störungstheorie nur sehr schwer oder gar nicht zu beschreiben. In einer skalaren Theorie ist in der Nähe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung nicht mehr die vierdimensionale Kopplung g der Entwicklungsparameter, sondern die dreidimensionale Kopplung gT skaliert mit der thermischen Masse m , d.h. mit gT/m . Da die Masse m am Phasenübergang gegen null geht, hat dies unweigerlich den Zusammenbruch der Störungstheorie zur Folge.

Viele fundamentale Fragen der Physik, insbesondere der Physik des frühen Universums, hängen mit Phasenübergängen zweiter Ordnung zusammen, an denen Störungstheorie nicht mehr anwendbar ist. Es ist deshalb wichtig, nichtperturbative Methoden zu finden, die auch in diesen Bereichen zuverlässige Antworten liefern. Eine Möglichkeit hierfür besteht darin, Gittersimulationen durchzuführen. Diese sind jedoch bei realistischen Systemen sehr rechenzeitintensiv und es gibt bisher keine Möglichkeit, auf dem Gitter nichtstatische Größen oder Systeme bei endlichem chemischen Potenzial zu untersuchen. Eine sehr erfolgreiche nichtperturbative Methode

besteht in der Anwendung von Renormierungsgruppengleichungen.

3.2. Kritische Phänomene und die wilsonsche Renormierungsgruppe

Die Renormierungsgruppen TRG und ERG basieren auf der wilsonschen Renormierungsgruppe. Diese wurde von Wilson 1971 [50] im Rahmen der statistischen Physik eingeführt, um das kritische Verhalten eines Ising–Ferromagneten am Phasenübergang zweiter Ordnung zu berechnen (für Übersichtsartikel siehe [51–53]).

Die entscheidende Größe an einem Phasenübergang zweiter Ordnung ist die Korrelationslänge ξ . Sie gibt an, bis zu welcher Skala Teile des Systems noch miteinander korreliert sind. Obwohl die zugrunde liegende Wechselwirkung lokal bzw. auf mikroskopische Skalen beschränkt ist (z.B. nur nächste Nachbarn–Wechselwirkungen enthält), kann die Korrelationslänge ξ makroskopische Dimensionen annehmen [41]. In der Nähe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung divergiert die Korrelationslänge, d.h. das System ist auf allen Skalen gekoppelt. Diese Divergenz der Korrelationslänge ist verantwortlich für das universelle Verhalten (Skalenhypothese [54]), das man an einem solchen Phasenübergang beobachtet. Aufgrund der divergierenden Korrelationslänge erhält man Fluktuationen auf Skalen, die viel größer sind als die mikroskopische Skala der zugrunde liegenden Theorie. Dies führt zu dem beobachteten universellen Verhalten an einem Phasenübergang zweiter Ordnung, das durch universelle kritische Exponenten beschrieben werden kann. Viele mikroskopisch unterschiedliche Theorien zeigen am Phasenübergang das gleiche kritische Verhalten, was allgemein als Universalität bezeichnet wird. Dieses universelle kritische Verhalten wird allein durch die Symmetrie des Hamiltonians und die Dimension des Ordnungsparameters und des Systems bestimmt.

Eine auf phänomenologischen Annahmen beruhende klassische Theorie, die das universelle Verhalten an einem Phasenübergang zweiter Ordnung beschreibt, wurde von Landau entwickelt [42,43]. Damit konnten zum ersten Mal kritische Exponenten berechnet werden (“mean-field” Werte). Experimentelle Messungen zeigten jedoch, dass die mit Hilfe der Landau–Theorie berechneten Exponenten in den meisten Fällen nicht besonders gut mit der Realität übereinstimmen. Dies trifft insbesondere auf Systeme zu, deren Dimension kleiner als die kritische Dimension $d = 4$ ist. Die Diskrepanz zu den Experimenten ist teilweise darauf zurückzuführen, dass in der Landau–Theorie die Dimensionalität des Ordnungsparameters und des Systems keinen Einfluss auf die kritischen Exponenten haben. Zum anderen wurden die starken Fluktuationen in der Nähe des Phasenübergangs nicht richtig berücksichtigt [56]. Die Einbeziehung dieser Fluktuationen führt zu dem Ginzburg–Kriterium, das den Bereich um die kritische Temperatur angibt, in dem die Landau–Theorie nicht mehr gültig ist. Die exakte Lösung des zweidimensionalen Ising–Systems durch Onsager [44, 45] zeigte ebenfalls die Grenzen der Landau–Theorie auf.

Ein entscheidender Fortschritt bei der Berechnung kritischer Phänomene wurde mit der Einführung der Blockspintransformation durch Kadanoff [49] erzielt. Bei dieser Transformation wird ein ganzer Block von Spins zu einem einzigen Spin zusammengefasst, wobei die Form des Hamiltonians nach geeigneter Reskalierung beibehalten wird. Mit Hilfe dieser Transformation konnte das Skalieren in der kritischen Region eines Phasenüberganges zweiter Ordnung gezeigt

und Skalenrelationen abgeleitet werden. Es war jedoch nicht möglich, den Wert der kritischen Exponenten zu berechnen, da die von Kadanoff eingeführte Blockspintransformation nur in der kritischen Region gilt, in der die Korrelationslänge ξ bereits sehr groß ist und Skaleninvarianz herrscht. Nur in diesem Bereich ist es möglich, einen ganzen Block von Spins zu einem einzigen Spin zusammenzufassen und so zu reskalieren, dass sich die Form des Hamiltonians nicht ändert. Damit ist der Hamiltonian ein Fixpunkt unter der kadanoffschen Blockspintransformation. Für die Bestimmung der Werte der kritischen Exponenten benötigt man jedoch das Verhalten des Hamiltonians in der Nähe dieses Fixpunktes.

Die Formulierung der Renormierungsgruppe durch Wilson [50] beruht auf der kadanoffschen Idee der Blockspintransformation. In der Implementierung dieser Idee durch Wilson werden in der Zustandssumme schrittweise Fluktuationen auf immer größeren Skalen ausintegriert. Weit weg von der kritischen Temperatur sind nur Fluktuationen auf relativ kleinen Skalen wichtig, da die Korrelationslänge klein ist. In der Nähe der kritischen Temperatur divergiert die Korrelationslänge, und damit werden Fluktuationen auf allen Skalen wichtig. Das Ziel der Renormierungsgruppe ist es, die sukzessive Ausintegration der Fluktuationen auf immer größeren Skalen auf den Fluss einer endlichen Anzahl relevanter Operatoren im Hamiltonian abzubilden.

Wir wollen dies an einem System mit der Gitterkonstanten a erläutern. Den mikroskopischen Hamiltonian, der nur nächste Nachbarn Wechselwirkungen enthält, bezeichnen wir mit H_0 . In der mikroskopischen Zustandssumme Z_0 , die vom Hamiltonian H_0 abhängt, wird über alle Moden mit $0 \leq q \leq \pi/a$ integriert. Durch Integration über die kurzreichweitigen Moden (dies entspricht großen Impulsen) im Intervall $\Lambda \leq q \leq \pi/a$ erhält man einen neuen effektiven Hamiltonian $H_\Lambda = \mathbf{R}(H_0)$, so dass

$$Z_0(H_0) = Z_\Lambda(H_\Lambda) \quad (3.1)$$

gilt. In der Zustandssumme Z_Λ wird nur noch über die Moden mit $0 \leq q \leq \Lambda$ integriert. Als nächstes integriert man über die Moden mit $\Lambda/2 \leq q \leq \Lambda$. Dies führt zu einem neuen Hamiltonian $H_{\frac{\Lambda}{2}} = \mathbf{R}(H_\Lambda)$, so dass

$$Z_0(H_0) = Z_\Lambda(H_\Lambda) = Z_{\frac{\Lambda}{2}}(H_{\frac{\Lambda}{2}}) \quad (3.2)$$

gilt. Durch wiederholte Iteration kann man damit alle kurzreichweitigen Fluktuationen bis zur Größe der Korrelationslänge ξ ausintegrieren, denn ab dieser Größe treten keine Veränderungen mehr auf. Durch die Transformation \mathbf{R} ändert sich die Form des Hamiltonians H_Λ . Der Wert der Kopplungen ändert sich, und zusätzlich werden neue Kopplungen erzeugt. Es zeigt sich jedoch, dass nur wenige Kopplungen (nämlich bloß die renormierbaren) für das Infrarotverhalten des Systems relevant sind. Ohne diese Eigenschaft hätte man nichts gewonnen, da man statt unendlich vielen Moden nun unendlich viele Kopplungen berücksichtigen müsste. Für das Verhalten der wenigen relevanten Kopplungen lassen sich Differenzialgleichungen (Renormierungsgruppengleichungen) bzw. Rekursionsformeln ableiten, die viel einfacher zu handhaben sind als die ursprüngliche Zustandssumme.

Die Transformationen $\mathbf{R}(H)$ kann man als einen Fluss im Raum der Hamiltonians ansehen. Für das kritische Verhalten des Systems sind die Fixpunkte dieser Transformation wichtig:

$H^* = \mathbf{R}(H^*)$. Die kritischen Eigenschaften des Systems werden durch das Verhalten der Transformation in der Nähe dieser Fixpunkte bestimmt. Die Fixpunkte sind eine Eigenschaft der Transformation \mathbf{R} und somit unabhängig vom mikroskopischen Hamiltonian H_0 . Damit haben wir den tieferen Grund dafür gefunden, warum das kritische Verhalten unabhängig von der mikroskopischen Struktur des Systems ist. Aufgrund der Existenz irrelevanter Operatoren ist es möglich, dass mikroskopisch unterschiedliche Hamiltonians, die zu verschiedenen physikalischen Systemen gehören, zum gleichen Fixpunkt führen. Dies bedeutet, dass unterschiedliche physikalische Systeme die gleichen kritischen Eigenschaften zeigen, was als Universalität bezeichnet wird.

Die wilsonsche Renormierungsgruppe bietet nicht nur die Möglichkeit, Systeme mit vielen relevanten Freiheitsgraden zu untersuchen, sondern liefert auch konzeptionell neue Erkenntnisse. In der Feldtheorie wurde die wilsonsche Form der Renormierungsgruppe zum ersten Mal von Polchinski [57] angewandt, um die störungstheoretische Renormierbarkeit der φ^4 -Theorie zu zeigen. Die Untersuchung der Fixpunktstruktur der φ^4 -Theorie wurde damit in [58] durchgeführt.

Neben der wilsonschen Form der Renormierungsgruppe gibt es auch noch andere Renormierungsgruppenansätze, z.B. die “environmentally friendly”-Renormierungsgruppe [60] und die “auxiliary mass method” Renormierungsgruppe [59]. Im Folgenden wollen wir zwei Renormierungsgruppen vorstellen, die auf der wilsonschen Form der Renormierungsgruppe beruhen.

3.3. Die exakte Renormierungsgruppe ERG

Die exakte Renormierungsgruppe ERG ist in euklidischer Feldtheorie bzw. bei endlicher Temperatur im Matsubaraformalismus formuliert (für Übersichtsartikel verweisen wir auf [61, 62]). Im Gegensatz zur wilsonschen Renormierungsgruppe für die Zustandssumme Z ist die ERG eine Renormierungsgruppe für die effektive Wirkung Γ .

Für die Herleitung der Flussgleichung müssen wir zunächst die effektive Mittelwertwirkung Γ_Λ einführen [63, 64]. Die Wirkung Γ_Λ erhält man, indem man in den freien Propagator einen Infrarotcutoff Λ einführt, so dass nur Moden mit $q^2 \gtrsim \Lambda^2$ ausintegriert werden (q^2 ist das euklidische Impulsquadrat). Damit tragen zur Wirkung Γ_Λ nur Fluktuationen auf Skalen kleiner als $\sim \Lambda^{-1}$ bei. Damit kann Γ_Λ als eine Wirkung für Felder angesehen werden, die über ein Volumen Λ^{-d} gemittelt wurden. Hier zeigt sich die enge Verwandtschaft zur wilsonschen Renormierungsgruppe in der statistischen Physik. Für $\Lambda \rightarrow 0$ werden alle Fluktuationen einbezogen, während für $\Lambda \rightarrow \infty$ alle Fluktuationen unterdrückt werden. Damit erhält man die Grenzfälle

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Gamma_\Lambda = S \quad \text{und} \quad \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \Gamma_\Lambda = \Gamma, \quad (3.3)$$

wobei S die klassische Wirkung und Γ die volle effektive Wirkung ist. Die Mittelwertwirkung Γ_Λ interpoliert zwischen diesen beiden Grenzfällen. Die ERG ist eine exakte Flussgleichung für Γ_Λ [65]. Wir wollen die Herleitung dieser Flussgleichung am Beispiel eines reellen skalaren Feldes φ skizzieren.

Die Implementierung eines Infrarotcutoffs Λ erfolgt, indem man der klassischen Wirkung

$S[\varphi]$ den Zusatzterm $\Delta S_\Lambda[\varphi]$ zuffügt:

$$\Delta S_\Lambda[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \varphi(k) \varphi(-k) R_\Lambda(k). \quad (3.4)$$

Dieser Zusatzterm ist quadratisch in den Feldern und modifiziert dadurch zunächst nur den freien Propagator. Die Cutoff-Funktion $R_\Lambda(k)$ kann als eine impulsabhängige Masse interpretiert werden. Der modifizierte freie Propagator lautet nun

$$D_\Lambda(k) = \frac{1}{k^2 + m^2 + R_\Lambda(k)}. \quad (3.5)$$

Um die Bedingungen (3.4) zu erfüllen, muss $R_\Lambda(k)$ für $\Lambda \rightarrow 0$ verschwinden und für $\Lambda \rightarrow \infty$ divergieren. Für $R_\Lambda(k)$ kann man z.B.

$$R_\Lambda(k) \sim \frac{k^2}{e^{k^2/\Lambda^2} - 1} \quad (3.6)$$

wählen. Aufgrund von $R_\Lambda(k)$ erhalten alle Fluktuationen mit $k^2 \ll \Lambda^2$ eine zusätzliche Masse von der Größenordnung Λ^2 . Dies ist natürlich nur im Fall $\Lambda^2 \gg m^2$ relevant, insbesondere also für $m = 0$. In diesem Fall werden durch $R_\Lambda(k)$ die Infrarotsingularitaten behoben, denn $R_\Lambda(k)$ wirkt als Infrarotcutoff für die langreichweitigen Fluktuationen mit $k^2 \ll \Lambda^2$. Durch Einführung der Funktion $R_\Lambda(k)$ wird die effektive Wirkung Λ -abhängig und die Änderung der effektiven Wirkung mit der Skala Λ wird durch eine Flussgleichung beschrieben, die als exakte Renormierungsgruppengleichung ERG bekannt ist.

Zur Herleitung dieser Flussgleichung gehen wir zunächst von der euklidischen Zustandssumme $Z_\Lambda[j]$ aus:

$$Z_\Lambda[j] = \int D\varphi \exp \left(-S[\varphi] - \Delta S_\Lambda[\varphi] + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} j(k) \varphi(-k) \right). \quad (3.7)$$

Die zusammenhängenden Greenfunktionen werden durch $W_\Lambda[j] = -\ln(Z_\Lambda[j])$ erzeugt. In der statistischen Physik entspricht $W_\Lambda[j]$ einer gemittelten freien Energie. Das Funktional $\Gamma_\Lambda[\phi]$ erhält man aus $W_\Lambda[j]$ durch eine Legendre-Transformation, wobei das makroskopische Feld $\phi(x)$ der Erwartungswert des Quantenfeldes $\varphi(x)$ ist,

$$\phi(x) = \langle \varphi(x) \rangle = \frac{\delta W_\Lambda[j]}{\delta j(x)}. \quad (3.8)$$

Wenn man $j(x)$ als Λ -unabhängigen Strom betrachtet, so ist das Feld $\phi(x)$ Λ -abhängig. Umgekehrt kann man jedoch auch $\phi(x)$ als unabhängiges Feld ansehen, und damit wird $j(x)$ Λ -abhängig. Wir definieren das Funktional $\Gamma_\Lambda[\phi]$ über eine etwas modifizierte Legendre-Transformation

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = -W_\Lambda[j] + \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} j(k) \phi(-k) - \Delta S_\Lambda[\phi]. \quad (3.9)$$

Im Vergleich zur üblichen Legendre–Transformation haben wir in (3.9) noch den Term $\Delta S_\Lambda[\phi]$ subtrahiert. Durch diese Subtraktion wird gewährleistet, dass die Eigenschaft (3.3) für $\Lambda \rightarrow \infty$ erfüllt ist. Dies ist anschaulich klar, da wir in der euklidischen Zustandssumme (3.7) von der modifizierten klassischen Wirkung $S_\Lambda[\varphi] = S[\varphi] + \Delta S_\Lambda[\varphi]$ ausgegangen sind. Im Limes $\Lambda \rightarrow 0$ verschwindet $\Delta S_\Lambda[\phi]$, da die Cutoff–Funktion $R_\Lambda(q)$ verschwindet. Damit wird $\Gamma_\Lambda[\phi]$ zur vollen effektiven Wirkung $\Gamma[\phi]$. In der Mittelwertwirkung $\Gamma_\Lambda[\phi]$ ist das Feld $\phi(x)$ eine unabhängige Variable und damit nicht Λ –abhängig. Dies bedeutet, dass man bei der Herleitung der Flussgleichung für $\Gamma_\Lambda[\phi]$ berücksichtigen muss, dass der Strom $j(x)$ implizit von Λ abhängt. Für die Flussgleichung erhält man [65]

$$\Lambda \partial_\Lambda \Gamma_\Lambda[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\Lambda \partial_\Lambda R_\Lambda \left(\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\phi]}{\delta \phi \delta \phi} + R_\Lambda \right)^{-1} \right]. \quad (3.10)$$

Die Gleichung (3.10) ist exakt. Formal hat sie den Charakter einer ein–loop Gleichung, allerdings mit dem Unterschied, dass auf der rechten Seite der Flussgleichung wieder die volle Mittelwertwirkung eingeht. Dadurch ist die Flussgleichung nicht mehr exakt lösbar und geeignete Approximationen werden wichtig. Dies soll noch genauer nach der Herleitung der TRG besprochen werden.

Bevor wir diesen Abschnitt beenden und uns der Herleitung der TRG zuwenden, wollen wir noch einige Eigenschaften der Flussgleichung (3.10) diskutieren. Dies erlaubt es uns, die Unterschiede zwischen der ERG und der TRG besser zu verstehen.

- Die Herleitung der Flussgleichung lässt sich sehr leicht auf Systeme im thermalen Gleichgewicht verallgemeinern [67]. Die Berücksichtigung der Temperatur führt zum Matsubaraformalismus. Fermionen lassen sich in chiral invarianter Weise einbeziehen [66].
- Aufgrund der Eigenschaft von $R_\Lambda(q)$ tragen zur Flussgleichung hauptsächlich die Moden mit $q^2 \sim \Lambda^2$ bei. Dies bedeutet, dass bei der Integration der Flussgleichung sukzessive Fluktuationen auf immer größeren Längenskalen einbezogen werden. Es entstehen keine Infrarotprobleme, da Fluktuationen mit $q^2 \ll \Lambda^2$ zur Flussgleichung nicht beitragen. Der Limes $\Lambda \rightarrow 0$ ist stetig erreichbar.
- Die Flussgleichung definiert ihr eigenes Renormierungsschema. Man startet bei einer hohen Skala Λ_0 mit einer Startwirkung S_0 , wobei die Wahl der Kopplungen in S_0 die physikalischen Kopplungen bei $\Lambda = 0$ bestimmt. Da die Flussgleichung ihr eigenes Renormierungsschema definiert, ist es äußerst schwierig, die Kopplungen in S_0 mit den physikalischen Kopplungen bei $\Lambda = 0$ zu verknüpfen [72, 73].
- Alle Symmetrien der ursprünglichen Wirkung Γ , die auch von ΔS_Λ respektiert werden, werden auch von der Mittelwertwirkung Γ_Λ respektiert. Bei Eichsymmetrien ergeben sich Probleme, da der Zusatzterm ΔS_Λ aufgrund des Cutoffs nicht eichinvariant ist. Man kann jedoch die Flussgleichung trotz dieser Schwierigkeit auf Systeme mit Eichsymmetrien ausdehnen [69–71]. In diesem Fall ist die Mittelwertwirkung Γ_Λ nicht eichinvariant und man erhält bei endlichem Λ modifizierte Slavnov–Taylor–Identitäten. Die Mittelwertwirkung

hat jedoch nur für $\Lambda = 0$ eine physikalische Bedeutung und in diesem Limes kann man zeigen, dass die Wirkung eichinvariant wird.

- Da die Flussgleichung in euklidischer Feldtheorie bzw. thermal im Matsubaraformalismus formuliert ist, muss man zur Bestimmung nichtstatischer physikalischer Größen eine analytische Fortsetzung zu reeller Energie bzw. Zeit durchführen. Bei numerischen Ergebnissen ist eine analytische Fortsetzung nicht möglich und damit beschränkt sich das Anwendungsgebiet der ERG auf die Berechnung des effektiven Potenzials, für das als statische Größe keine analytische Fortsetzung nötig ist. Dynamische Größen, wie z.B. Dämpfungsraten, sind mit Hilfe der ERG nicht berechenbar.

3.4. Die thermale Renormierungsgruppe TRG

3.4.1. Herleitung der TRG

Um das Problem der analytischen Fortsetzung zu vermeiden, ist es wünschenswert, eine Formulierung für die Renormierungsgruppe im Minkowskiraum zu finden. Eine naive Übertragung der Herleitung der ERG auf den Minkowskiraum ist jedoch nicht möglich, da das minkowskische Impulsquadrat $q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2$ nicht positiv definit ist. Die Bedingung $q^2 = 0$ erfüllen beliebige Moden mit $q_0^2 = \vec{q}^2$, und damit ist das Konzept einer Mittelwertwirkung in lorentzinvarianter Form nicht anwendbar.

Für thermale Feldtheorien im Realzeitformalismus konnte jedoch eine Implementierung der wilsonischen Form der Renormierungsgruppe gefunden werden [76]. Diese Renormierungsgruppe wird TRG genannt (“Thermal Renormalization Group”). Für die Herleitung der TRG wird die Tatsache ausgenutzt, dass im Realzeitformalismus der freie thermale Propagator in einen rein thermalen Anteil und einen ($T=0$)-Anteil zerfällt. Da der thermale Anteil des freien Propagators on-shell ist, kann man daran einen dreidimensionalen Cutoff anbringen. Aufgrund dessen erfasst die TRG nur die thermalen Effekte, und bei $T=0$ ist die Flussgleichung null. Als Startwirkung hat die TRG die volle effektive Wirkung bei $T=0$. Dies bedeutet, dass die Flussgleichung unmittelbar die renormierten physikalischen Kopplungen als Parameter enthält, was im Rahmen der ERG nicht der Fall ist. Andererseits ist es problematisch, stark gekoppelte Theorien bei $T=0$ zu untersuchen, da man die Startwirkung nicht kennt. Eine Möglichkeit zur Lösung dieses Problems besteht darin, die Startwirkung mit Hilfe anderer Methoden numerisch zu bestimmen bzw. experimentelle Resultate zu verwenden. Für schwach gekoppelte Theorien bei $T=0$ kann man auf störungstheoretische Ergebnisse zurückgreifen. Die Erweiterung der TRG auf Eichfelder [77] zerstört nicht die Eichinvarianz, da der Cutoff nur auf die thermalen Moden der Eichfelder wirkt und diese physikalisch sind.

Im Folgenden geben wir die Formulierung der TRG für Systeme an, die Skalare und Fermionen enthalten. Die Formulierung der TRG für Skalare wurde in [76,79] und für Fermionen in [80] abgeleitet. Wir werden im Realzeitformalismus für $\sigma = 0$ arbeiten. Dies ist jedoch nicht zwingend. Die TRG kann auch im CTP-Formalismus hergeleitet werden [79], wodurch man nicht auf Systeme im thermischen Gleichgewicht beschränkt ist. Für praktische Berechnungen ist es jedoch von großem Vorteil, Systeme im thermischen Gleichgewicht zu betrachten. Im Realzeit-

formalismus hat man damit aber auch die Möglichkeit, Nichtgleichgewichtsvorgänge im Sinne von Linear Response zu untersuchen.

Die freien thermischen Propagatoren für Fermionen (2.49) und Bosonen (2.48) lauten für $\sigma = 0$

$$D_0(k) = \begin{pmatrix} \Delta_0 & (\Delta_0 - \Delta_0^*)\theta(-k_0) \\ (\Delta_0 - \Delta_0^*)\theta(k_0) & -\Delta_0^* \end{pmatrix} + (\Delta_0 - \Delta_0^*)N(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$S_0(k) = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_0 & (\tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_0^*)\theta(-k_0) \\ (\tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_0^*)\theta(k_0) & -\tilde{\Delta}_0^* \end{pmatrix} - (\tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_0^*)\tilde{N}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

mit

$$\Delta_0 = \frac{1}{k^2 - m_\varphi^2 + i\epsilon}, \quad \Delta_0^* = \frac{1}{k^2 - m_\varphi^2 - i\epsilon}, \quad (3.13)$$

$$\tilde{\Delta}_0 = (\not{k} - m_\psi + i\epsilon)^{-1} = \frac{\not{k} + m_\psi}{k^2 - m_\psi^2 + i\epsilon}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{\Delta}_0^* = (\not{k} - m_\psi - i\epsilon)^{-1} = \frac{\not{k} + m_\psi}{k^2 - m_\psi^2 - i\epsilon}. \quad (3.15)$$

Mit Hilfe der Formel

$$\frac{1}{x + i\epsilon} - \frac{1}{x - i\epsilon} = -2\pi i\delta(x) \quad (3.16)$$

erhalten wir

$$\Delta_0 - \Delta_0^* = -2\pi i\delta(k^2 - m_\varphi^2) = -i\epsilon(k_0)\rho_0(k) \quad (3.17)$$

$$\tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_0^* = -2\pi i\delta(k^2 - m_\psi^2)(\not{k} + m_\psi) = -i\epsilon(k_0)\tilde{\rho}_0(k), \quad (3.18)$$

wobei $\rho_0(k)$ die freie bosonische Spektraldichte (2.23) und $\tilde{\rho}_0(k)$ die freie fermionische Spektraldichte (2.24) ist. Da der thermale Anteil des freien Propagators on-shell ist, wird die Energie k_0 durch den dreidimensionalen Impuls \vec{k} festgelegt und damit können wir eine Cutoff-Funktion $\Theta(|\vec{k}|, \Lambda)$ einführen, die nur auf den räumlichen Impuls \vec{k} wirkt. Die Cutoff-Funktion wird so gewählt, dass sie die langreichweitigen thermalen Fluktuationen für $|\vec{k}| \ll \Lambda$ ("weiche" Moden) unterdrückt, während die kurzreichweitigen thermalen Fluktuationen für $|\vec{k}| \gg \Lambda$ ("harte" Moden) nicht beeinflusst werden:

$$\Theta(|\vec{k}|, \Lambda) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } |\vec{k}| \gg \Lambda \\ 0 & \text{für } |\vec{k}| \ll \Lambda \end{cases}. \quad (3.19)$$

Um die Integrale analytisch auswerten zu können, werden wir in den nächsten Kapiteln für die Cutoff-Funktion die Theta-Funktion einsetzen, nämlich $\Theta(|\vec{k}|, \Lambda) = \theta(|\vec{k}| - \Lambda)$.

Das Einführen einer Cutoff-Funktion ist äquivalent dazu, die Verteilungsfunktionen in den freien Propagatoren Λ -abhängig zu machen:

$$N(|k_0|) \longrightarrow N_\Lambda(|k_0|) = N(|k_0|)\Theta(|\vec{k}|, \Lambda), \quad (3.20)$$

$$\tilde{N}(|k_0|) \longrightarrow \tilde{N}_\Lambda(|k_0|) = \tilde{N}(|k_0|)\Theta(|\vec{k}|, \Lambda). \quad (3.21)$$

Dies bedeutet, dass sich die harten Moden im thermischen Gleichgewicht befinden, während die weichen Moden bei $T = 0$ sind. Auf die Problematik, die sich hieraus ergibt, kommen wir noch in Abschnitt 3.4.2 zu sprechen. Zunächst leiten wir die Flussgleichung für eine thermale Theorie im Realzeitformalismus ab, deren freie Propagatoren gegeben sind durch

$$D_{0,\Lambda}(k) = \begin{pmatrix} \Delta_0 & (\Delta_0 - \Delta_0^*)\theta(-k_0) \\ (\Delta_0 - \Delta_0^*)\theta(k_0) & -\Delta_0^* \end{pmatrix} + (\Delta_0 - \Delta_0^*)N_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$$S_{0,\Lambda}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_0 & (\tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_0^*)\theta(-k_0) \\ (\tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_0^*)\theta(k_0) & -\tilde{\Delta}_0^* \end{pmatrix} - (\tilde{\Delta}_0 - \tilde{\Delta}_0^*)\tilde{N}_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Die inversen freien Propagatoren lauten

$$D_{0,\Lambda}^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \Delta_0^{-1} & ((\Delta_0^*)^{-1} - \Delta_0^{-1})\theta(-k_0) \\ ((\Delta_0^*)^{-1} - \Delta_0^{-1})\theta(k_0) & -(\Delta_0^*)^{-1} \end{pmatrix} - ((\Delta_0^*)^{-1} - \Delta_0^{-1})N_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

$$S_{0,\Lambda}^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_0^{-1} & ((\tilde{\Delta}_0^*)^{-1} - \tilde{\Delta}_0^{-1})\theta(-k_0) \\ ((\tilde{\Delta}_0^*)^{-1} - \tilde{\Delta}_0^{-1})\theta(k_0) & -(\tilde{\Delta}_0^*)^{-1} \end{pmatrix} + ((\tilde{\Delta}_0^*)^{-1} - \tilde{\Delta}_0^{-1})\tilde{N}_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Man erkennt, dass man die Ausdrücke für die Fermionen aus denjenigen für die Bosonen durch die Ersetzung $N_\Lambda(|k_0|) \rightarrow -\tilde{N}_\Lambda(|k_0|)$ und $\Delta_0 \rightarrow \tilde{\Delta}_0$ erhält.

Das Λ -abhängige erzeugende Funktional ist gegeben durch

$$Z_\Lambda[j, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \left(\frac{1}{2} \varphi \cdot (D_{0,\Lambda}^{-1}) \cdot \varphi + \bar{\psi} \cdot (S_{0,\Lambda}^{-1}) \cdot \psi + S_{\text{int}}[\varphi, \psi, \bar{\psi}] + j \cdot \phi + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta \right) \right]. \quad (3.26)$$

Im obigen Funktional haben wir alle Indizes, die die Felder tragen, unterdrückt. Alle Felder haben einen thermalen Index und eventuell zusätzliche innere Indizes. Die Fermion-Felder tragen auch einen Lorentzindex. Mit \cdot ist das Skalarprodukt gemeint, d.h.

$$\begin{aligned} j \cdot \varphi &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} j(k) \varphi(-k), \\ \varphi \cdot (D_{0,\Lambda}^{-1}) \cdot \varphi &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \varphi(k) (D_{0,\Lambda}^{-1})(k) \varphi(-k). \end{aligned}$$

Nun führen wir das Funktional für die zusammenhängenden Greenfunktionen $W_\Lambda[j, \eta, \bar{\eta}]$ und die modifizierte effektive Wirkung $\Gamma_\Lambda[\varphi, \psi, \bar{\psi}]$ ein:

$$W_\Lambda[j, \eta, \bar{\eta}] = -i \ln(Z_\Lambda[j, \eta, \bar{\eta}]), \quad (3.27)$$

$$\Gamma_\Lambda[\varphi, \psi, \bar{\psi}] = W_\Lambda[j, \eta, \bar{\eta}] - (j \cdot \phi + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta) - \frac{1}{2} \varphi \cdot D_{0,\Lambda}^{-1} \cdot \varphi - \bar{\psi} \cdot S_{0,\Lambda}^{-1} \cdot \psi. \quad (3.28)$$

Wir haben in der Definition der effektiven Wirkung zusätzlich den freien Anteil subtrahiert, um der Flussgleichung für Γ_Λ eine möglichst einfache Gestalt zu geben. Um die Formulierung für Skalare und Fermionen effizient zusammenfassen zu können [80], führen wir das Superfeld Φ , den Superstrom I und die Supermatrix $\mathcal{D}_{0,\Lambda}$ ein,

$$\Phi = (\varphi, \psi, \bar{\psi}) \quad , \quad \bar{\Phi} = (\varphi, -\bar{\psi}, \psi), \quad (3.29)$$

$$I = (j, \eta, \bar{\eta}) \quad , \quad \bar{I} = (j, -\bar{\eta}, \eta), \quad (3.30)$$

$$\mathcal{D}_{0,\Lambda} = \begin{pmatrix} D_{0,\Lambda} & & \\ & S_{0,\Lambda} & \\ & & (S_{0,\Lambda})^T \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Damit kann die Ableitung der Flussgleichung für die effektive Wirkung in kompakter Weise für Fermionen und Bosonen durchgeführt werden [81]. Auch für spätere Berechnungen im Quark-Meson-Modell erweist sich diese Schreibweise als sehr hilfreich. Die Gleichung (3.28) lässt sich nun schreiben als

$$\Gamma_\Lambda[\Phi] = W_\Lambda[I] - I \cdot \bar{\Phi} - \frac{1}{2} \text{STr}(\bar{\Phi} \cdot \mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} \cdot \Phi), \quad (3.32)$$

wobei wir zusätzlich noch die Superspur STr eingeführt haben. Die Superspur einer Supermatrix ist definiert als

$$\text{STr}(\mathcal{S}) = \text{Tr}(\mathcal{M}\mathcal{S}), \quad (3.33)$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Die Eigenschaften der Superspur werden in Anhang C.1 diskutiert. Sie resultieren aus der Tatsache, dass Fermionenfelder Grassmann-Variablen sind. Den Superstrom I und das Superfeld Φ

erhält man durch Funktionaldifferenziation von Γ und W ,

$$\frac{\delta W}{\delta I} = \bar{\Phi}, \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{I}} = \mathcal{M} \Phi, \quad (3.35)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\Phi}} = -\bar{I}, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi} = -\mathcal{M} I. \quad (3.36)$$

Die Flussgleichungen für das Funktional $Z_\Lambda[I]$ und $W_\Lambda[I] = -i \ln(Z_\Lambda[I])$ im Superspurformalismus lauten [81]

$$\Lambda \partial_\Lambda Z_\Lambda[I] = \frac{-i}{2} \text{STr} \left(\frac{\delta}{\delta I} \cdot (\Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1}) \cdot \mathcal{M} \cdot \frac{\delta}{\delta \bar{I}} \right) Z_\Lambda[I], \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda W_\Lambda[I] &= \frac{-i}{2} \text{STr} \left((\Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1}) \cdot \frac{\delta^2 W_\Lambda[I]}{\delta \bar{I} \delta I} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \text{STr} \left(\frac{\delta W_\Lambda[I]}{\delta I} \cdot (\Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1}) \cdot \mathcal{M} \cdot \frac{\delta W_\Lambda[I]}{\delta \bar{I}} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Aus der Definition von $\Gamma_\Lambda[\Phi]$ als Legendretransformierte von $W_\Lambda[I]$ folgt die Bedingung

$$\frac{\delta^2 W_\Lambda[I]}{\delta \bar{I} \delta I} \cdot \left(\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\Phi]}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} + \mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} \right) = -\mathbb{1}. \quad (3.39)$$

Damit erhalten wir durch Einsetzen von (3.38) in (3.32) die Flussgleichung für die effektive Wirkung $\Gamma_\Lambda[\Phi]$ (Φ ist ein von Λ unabhängiges Superfeld):

$$\boxed{\Lambda \partial_\Lambda \Gamma_\Lambda[\Phi] = \frac{i}{2} \text{STr} \left[(\Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1}) \cdot \left(\mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} + \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\phi]}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \right)^{-1} \right]}. \quad (3.40)$$

Dies ist die thermale Renormierungsgruppengleichung TRG für ein System aus Fermionen und Bosonen [80]. Sie ist der Ausgangspunkt für die numerischen und analytischen Berechnungen im weiteren Verlauf dieser Arbeit.

Von physikalischem Interesse sind die Grenzwerte der TRG für $\Lambda \rightarrow 0$ und $\Lambda \rightarrow \infty$. Diese ergeben sich als eine unmittelbare Folge des Verhaltens (3.19) der Cutoff-Funktion $\Theta(|\vec{k}|, \Lambda)$. Für $\Lambda \rightarrow \infty$ werden alle thermalen Moden unterdrückt, und nur die ($T=0$)-Quantenfluktuationen bleiben unangetastet. Damit erhalten wir in diesem Limes als Grenzwert die volle effektive Wirkung bei $T=0$. Für $\Lambda \rightarrow 0$ hat die Cutoff-Funktion keine Auswirkungen und alle thermalen Moden werden ausintegriert. Der Grenzwert ist in diesem Fall die volle effektive Wirkung bei der Temperatur T . Zusammen folgt

$$\Gamma_\Lambda[\Phi] \longrightarrow \begin{cases} \Gamma[\Phi] - \frac{1}{2} \text{STr} \left(\bar{\Phi} \cdot \mathcal{D}_{0,T}^{-1} \cdot \Phi \right) & \text{für } \Lambda \rightarrow 0 \\ \Gamma_{T=0}[\Phi] - \frac{1}{2} \text{STr} \left(\bar{\Phi} \cdot \mathcal{D}_{0,T=0}^{-1} \cdot \Phi \right) & \text{für } \Lambda \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (3.41)$$

Die Flussgleichung (3.40) ist eine Funktional–Integro–Differenzialgleichung und deshalb weder numerisch noch analytisch exakt lösbar. Wir werden uns im nächsten Abschnitt mit Approximationsmöglichkeiten zur Lösung einer solchen Flussgleichung beschäftigen. Formal hat die Flussgleichung den Charakter einer ein–loop Gleichung. Das zugehörige Diagramm ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

$$\Lambda \partial_\Lambda \bar{\Gamma}_\Lambda[\Phi] = \frac{i}{2} \text{STr} \left(\Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} \right) \left(\mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} + \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\phi]}{\delta \Phi \delta \Phi} \right)^{-1}$$

Abbildung 3.1: Grafische Darstellung der thermalen Renormierungsgruppe TRG.

Die Analogie zur ein–loop Korrektur der effektiven Wirkung wird deutlicher, wenn wir den Operator $\tilde{\partial}_\Lambda$ einführen, der nur auf die explizite Λ –Abhängigkeit der Verteilungsfunktionen im freien Propagator $\mathcal{D}_{0,\Lambda}$ wirkt. Damit folgt

$$\Lambda \partial_\Lambda \Gamma_\Lambda[\Phi] = \Lambda \tilde{\partial}_\Lambda \frac{i}{2} \text{STr} \left[\ln \left(\mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} + \Gamma_\Lambda^{(2)} \right) \right] \quad (3.42)$$

mit der Selbstenergiematrix

$$\Gamma_\Lambda^{(2)} = \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi \delta \varphi} & \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi \delta \psi} & \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi \delta \bar{\psi}} \\ -\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi} \delta \varphi} & -\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} & -\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi} \delta \bar{\psi}} \\ \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi \delta \varphi} & \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi \delta \psi} & \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \psi \delta \bar{\psi}} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

An Gleichung (3.42) wird deutlich, dass die Flussgleichung den Charakter der ein–loop Korrektur zur effektiven Wirkung hat. Dies ist jedoch nur eine formale Ähnlichkeit, da die rechte Seite der Flussgleichung die volle Zweipunktfunction enthält. Für physikalische Konstellationen muss man $\bar{\psi} = \psi = 0$ setzen, wodurch die Nichtdiagonalelemente in $\Gamma_\Lambda^{(2)}$ verschwinden. In diesem Fall ist $(\mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} + \Gamma_\Lambda^{(2)})^{-1}$ die volle diagonale Propagatormatrix \mathcal{D}_Λ :

$$\mathcal{D}_\Lambda = \left(\mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} + \Gamma_\Lambda^{(2)} \right)^{-1} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} = \begin{pmatrix} D_\Lambda & & \\ & S_\Lambda & \\ & & (S_\Lambda)^T \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

wobei wir mit D_Λ und S_Λ den vollen Boson–bzw. Fermionpropagator bezeichnen:

$$D_\Lambda = \left(D_{0,\Lambda}^{-1} + \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \varphi \delta \varphi} \right)^{-1} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}, \quad (3.45)$$

$$S_\Lambda = \left(S_{0,\Lambda}^{-1} - \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} \right)^{-1} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0}. \quad (3.46)$$

Bevor wir zu den Anwendungen der TRG kommen, wollen wir noch einige allgemeine Bemerkungen anführen. Mit der TRG haben wir zum ersten Mal eine nichtperturbative Methode, nichtstatische Greenfunktionen numerisch zu berechnen, da keine analytische Fortsetzung nötig ist. Dies ist der wesentliche Vorteil der TRG gegenüber der ERG, die in euklidischer Feldtheorie formuliert ist. Man kann die TRG auch im CTP-Formalismus ableiten, wodurch es prinzipiell möglich ist, Systeme zu untersuchen, die sich nicht im thermischen Gleichgewicht befinden. Im Rahmen der ERG, deren thermale Erweiterung zum Matsubaraformalismus führt, ist dies nicht möglich, da der Matsubaraformalismus thermisches Gleichgewicht impliziert. Andererseits ist die Formulierung der TRG im Realzeitformalismus konzeptionell komplizierter als die Formulierung der ERG im Matsubaraformalismus. Dies äußert sich darin, dass man durch Einführung thermaler Geistfelder die Anzahl der Freiheitsgrade verdoppelt und die Propagatoren zu 2×2 Matrizen werden. Weiterhin treten im Realzeitformalismus auf der reellen Energieachse Nichtanalytizitäten auf, die im Matsubaraformalismus nicht vorhanden sind, da die Funktionen auf der imaginären Energieachse analytisch sind. Bei Berechnungen im Matsubaraformalismus treten Nichtanalytizitäten erst nach der analytischen Fortsetzung auf [104]. Aufgrund der nichtanalytischen Struktur ist es nicht möglich, physikalische Größen, die mit diesen Nichtanalytizitäten verknüpft sind, aus dem Matsubaraformalismus numerisch zu extrahieren.

Da die Minkowskimetrik nicht positiv definit ist, kann man mit der TRG nur die thermalen Fluktuationen behandeln, während die Quantenfluktuationen unangetastet bleiben. Die ERG behandelt thermale und Quantenfluktuationen gleich, da im Matsubaraformalismus nicht zwischen den beiden unterschieden wird. Dieser Unterschied zwischen ERG und TRG äußert sich besonders in den Randbedingungen für $\Lambda \rightarrow \infty$. Während die ERG als Randbedingung die klassische Wirkung hat, hat die TRG die volle $(T=0)$ -renormierte Wirkung als Randbedingung. Dies hat zur Folge, dass man in der ERG-Formulierung große Schwierigkeiten hat, die Parameter der Startwirkung mit den physikalischen Größen bei $\Lambda = 0$ zu verknüpfen, denn die ERG definiert ihr eigenes Renormierungsschema, das nicht mit störungstheoretischen Schemen übereinstimmt. Bei der TRG treten diese Schwierigkeiten nicht auf, da man bereits mit den renormierten physikalischen Kopplungen bei $T=0$ startet und die Parameter der TRG damit die gesuchten physikalischen Größen sind. Da die TRG nur die thermalen Fluktuationen behandelt, muss man sich auch um die UV-Renormierung keine Gedanken machen – man startet bereits mit der vollständig renormierten Wirkung bei $T=0$. Dieser positive Aspekt offenbart jedoch einen Nachteil, sobald die Theorie bei $T=0$ stark korreliert ist, z.B. in der QCD. In diesem Fall benötigt man eine Startwirkung, die mit anderen nichtperturbativen Methoden bereits berechnet wurde, z.B. durch Gittersimulationen oder mit der ERG bei $T=0$. Eine Möglichkeit besteht auch darin, dass man experimentelle Resultate bei $T=0$ als Startwerte verwendet. Eine weitere Einschränkung für die Anwendung der TRG entsteht dann, wenn die asymptotischen Zustände bei $T=0$ und T nicht identisch sind. Die ist z.B. in der QCD für solche Temperaturen der Fall, die viel höher sind als die Temperatur des chiralen Phasenübergangs. Die Startwirkung der TRG bei $T=0$ muss dann mit Hilfe von Mesonen und Baryonen formuliert werden, während die asymptotischen Zustände bei $\Lambda = 0$ Quarks und Gluonen sind.

Aufgrund des Cutoffs Λ ist das Infrarotverhalten der ERG und der TRG völlig unproblematisch. Zudem steht mit Λ ein kontinuierlicher Parameter zur Verfügung, mit dessen Hilfe man sich der kritischen Region an einem Phasenübergang zweiter Ordnung stetig annähern kann.

Während die Erweiterung der ERG auf Eichtheorien schwierig ist, entstehen im Rahmen der TRG keine Probleme, da der Cutoff nur auf die physikalischen, thermalen Eichmoden wirkt und die Quantenfluktuationen der Eichfelder nicht beeinflusst werden. Deshalb ist die Formulierung der TRG manifest eichinvariant und konnte in [77] auf Systeme mit Eichsymmetrien ausgedehnt werden.

3.4.2. Berechnung des bosonischen und fermionischen Kerns

Um die Flussgleichungen für die 1PI–Greenfunktionen $\Gamma_\Lambda^{(n)}$ zu berechnen, muss man die Flussgleichung (3.40) funktional nach den Feldern differenzieren. Mit Hilfe der Formel

$$\delta A^{-1} = -A^{-1}(\delta A)A^{-1} \quad (3.47)$$

erkennt man, dass auf der rechten Seite der Flussgleichung immer ein Ausdruck auftritt, den wir als Kern \mathcal{K}_Λ definieren wollen:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\Lambda &= -i \left(\mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} + \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \right)^{-1} \left(\Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} \right) \left(\mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} + \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\Phi} \delta \Phi} \right)^{-1} \Bigg|_{\bar{\psi}=\psi=0} \\ &= -i \mathcal{D}_\Lambda \left(\Lambda \partial_\Lambda \mathcal{D}_{0,\Lambda}^{-1} \right) \mathcal{D}_\Lambda = \begin{pmatrix} K_\Lambda & & \\ & \tilde{K}_\Lambda & \\ & & (\tilde{K}_\Lambda)^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Wir bezeichnen mit K_Λ den Bosonkern und mit \tilde{K}_Λ den Fermionkern:

$$K_\Lambda = -i D_\Lambda (\Lambda \partial_\Lambda D_{0,\Lambda}^{-1}) D_\Lambda, \quad (3.49)$$

$$\tilde{K}_\Lambda = -i S_\Lambda (\Lambda \partial_\Lambda S_{0,\Lambda}^{-1}) S_\Lambda. \quad (3.50)$$

Zur expliziten Berechnung der Kerne benötigen wir die vollen thermalen Propagatoren. In Analogie zum thermischen Gleichgewicht (vgl. (A.51)) machen wir dafür die Ansätze [76]

$$\begin{aligned} D_\Lambda(k) &= \begin{pmatrix} \Delta_\Lambda & (\Delta_\Lambda - \Delta_\Lambda^*)\theta(-k_0) \\ (\Delta_\Lambda - \Delta_\Lambda^*)\theta(k_0) & -\Delta_\Lambda^* \end{pmatrix} \\ &\quad + (\Delta_\Lambda - \Delta_\Lambda^*) N_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} S_\Lambda(k) &= \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_\Lambda & (\tilde{\Delta}_\Lambda - \tilde{\Delta}_\Lambda^*)\theta(-k_0) \\ (\tilde{\Delta}_\Lambda - \tilde{\Delta}_\Lambda^*)\theta(k_0) & -\tilde{\Delta}_\Lambda^* \end{pmatrix} \\ &\quad - (\tilde{\Delta}_\Lambda - \tilde{\Delta}_\Lambda^*) \tilde{N}_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Inwiefern diese Ansätze für die vollen Propagatoren gerechtfertigt sind, diskutieren wir am Ende dieses Abschnitts. Wir geben im Folgenden nur die Herleitung der Formel für den Bosonkern an,

da man für den Fermionkern analog verfahren kann. Der Bosonpropagator (3.51) lässt sich auch in der Form (A.53) schreiben:

$$D_\Lambda(k) = M_\Lambda(k_0) \begin{pmatrix} \Delta_\Lambda & 0 \\ 0 & -\Delta_\Lambda^* \end{pmatrix} M_\Lambda(k_0) = M_\Lambda(k_0) \hat{D}_\Lambda(k) M_\Lambda(k) \quad (3.53)$$

mit

$$M_\Lambda(k_0) = \sqrt{1 + N_\Lambda(|k_0|)} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{\Theta(k_0)}{1 + N_\Lambda(|k_0|)} \\ 1 - \frac{\Theta(-k_0)}{1 + N_\Lambda(|k_0|)} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\hat{D}_\Lambda(k) = \begin{pmatrix} \Delta_\Lambda(k) & \\ & -\Delta_\Lambda^*(k) \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Sodann führen wir die bosonische Selbstenergie ein (vgl. (A.63)):

$$\begin{aligned} \Sigma_\Lambda(k) &= D_\Lambda^{-1} - D_{0,\Lambda}^{-1} = M_\Lambda^{-1}(k_0) \begin{pmatrix} \Pi_\Lambda(k) & 0 \\ 0 & -\Pi_\Lambda(k)^* \end{pmatrix} M_\Lambda^{-1}(k_0) \\ &= M_\Lambda^{-1}(k_0) \hat{\Sigma}_\Lambda(k) M_\Lambda^{-1}(k_0), \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\Pi_\Lambda(k) = \Delta_\Lambda^{-1}(k) - \Delta_0^{-1}(k). \quad (3.57)$$

Damit erhalten wir für den Bosonkern

$$K_\Lambda = -iD_\Lambda \left(\Lambda \partial_\Lambda D_{0,\Lambda}^{-1} \right) D_\Lambda = -iD_\Lambda \left(\Lambda \partial_\Lambda \left[M_\Lambda^{-1} \hat{D}_0^{-1} M_\Lambda^{-1} \right] \right) D_\Lambda. \quad (3.58)$$

Die Diagonalmatrix \hat{D}_0 enthält nur den freien Feynman-Propagator und ist damit unabhängig von Λ . Wir definieren den Operator $\tilde{\partial}$, der explizit nur auf die Λ -Abhängigkeit in der Matrix M_Λ , d.h. nur auf die Funktionen $N_\Lambda(k_0)$ und nicht auf Δ_Λ , wirkt. Damit erhalten wir für den Kern

$$\begin{aligned} K_\Lambda &= -iD_\Lambda \left(\Lambda \partial_\Lambda D_{0,\Lambda}^{-1} \right) D_\Lambda = -iD_\Lambda \left(\Lambda \tilde{\partial}_\Lambda D_{0,\Lambda}^{-1} \right) D_\Lambda \\ &= -iD_\Lambda \left(\Lambda \tilde{\partial}_\Lambda D_\Lambda^{-1} \right) D_\Lambda + iD_\Lambda \left(\Lambda \tilde{\partial}_\Lambda \Sigma_\Lambda \right) D_\Lambda \\ &= i\Lambda \tilde{\partial}_\Lambda D_\Lambda + iD_\Lambda \left(\Lambda \tilde{\partial}_\Lambda \Sigma_\Lambda \right) D_\Lambda. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Um (3.59) auszuwerten, benutzen wir für $M_\Lambda^{-1}(k_0)$ die Formel (A.65). Die Differenzierung von M_Λ nach Λ ergibt

$$\Lambda \partial_\Lambda M_\Lambda(k_0) = \frac{\Lambda \partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|)}{2\sqrt{1 + N_\Lambda(|k_0|)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 + \frac{\Theta(k_0)}{1 + N_\Lambda(|k_0|)} \\ 1 + \frac{\Theta(-k_0)}{1 + N_\Lambda(|k_0|)} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

Durch Einsetzen in (3.59) folgt

$$iD_\Lambda \left(\Lambda \tilde{\partial}_\Lambda \Sigma_\Lambda \right) D_\Lambda = i\Delta_\Lambda \Delta_\Lambda^* (\Pi_\Lambda - \Pi_\Lambda^*) \Lambda \partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

$$-iD_\Lambda \left(\Lambda \tilde{\partial}_\Lambda D_\Lambda^{-1} \right) D_\Lambda = i(\Delta_\Lambda - \Delta_\Lambda^*) \Lambda \partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Mit Hilfe der bosonischen Spektraldichte

$$\rho_\Lambda(k) = i\epsilon(k_0)(\Delta_\Lambda - \Delta_\Lambda^*), \quad (3.63)$$

ergibt sich für den bosonischen Kern schließlich die Formel

$$K_\Lambda(k) = \left[\epsilon(k_0)\rho_\Lambda(k) + i\Delta_\Lambda\Delta_\Lambda^*(\Pi_\Lambda - \Pi_\Lambda^*) \right] \Lambda\partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Den Fermionkern erhalten wir durch die Ersetzung $N_\Lambda \rightarrow -\tilde{N}_\Lambda$:

$$\tilde{K}_\Lambda(k) = -\left[\epsilon(k_0)\tilde{\rho}_\Lambda(k) + i\tilde{\Delta}_\Lambda\tilde{\Delta}_\Lambda^*(\tilde{\Pi}_\Lambda - \tilde{\Pi}_\Lambda^*) \right] \Lambda\partial_\Lambda\tilde{N}_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

mit der fermionischen Spektraldichte

$$\tilde{\rho}_\Lambda(k) = i\epsilon(k_0)(\tilde{\Delta}_\Lambda - \tilde{\Delta}_\Lambda^*). \quad (3.66)$$

In dieser Arbeit werden wir, abgesehen von den Ausführungen in Kapitel 6, den Imaginärteil der Feynman–Selbstenergien Π_Λ und $\tilde{\Pi}_\Lambda$ vernachlässigen. In diesem Fall hat der Kern eine besonders einfache Form und ist proportional zur Spektraldichte.

Zum Schluss wollen wir noch einige Anmerkungen zu den Ansätzen (3.51) und (3.52) für die vollen Propagatoren machen. Im thermischen Gleichgewicht, d.h. für $\Lambda = 0$, sind diese Ansätze exakt erfüllt (zur Erläuterung verweisen wir auf (A.51) im Anhang A). Wir verwenden in dieser Arbeit als Cutoff–Funktion die Theta–Funktion $\theta(|\vec{k}| - \Lambda)$, die die KMS–Bedingungen (2.16) und (2.17) in den freien Propagatoren verletzt, da Moden mit unterschiedlichem räumlichen Impuls verschiedene Temperaturen haben. Die Moden mit $|\vec{k}| > \Lambda$ haben die Temperatur T , während die Moden mit $|\vec{k}| < \Lambda$ bei $T = 0$ sind. Dies bedeutet, dass man durch die Einführung der Cutoff–Funktion das System in einen Nichtgleichgewichtszustand versetzt. Man würde erwarten, dass das System aufgrund von Streuprozessen mit der Zeit bei einer Temperatur T' thermalisiert. Durch die Ansätze (3.51) und (3.52) für die vollen Propagatoren gehen wir jedoch davon aus, dass auch unter Einbeziehung von Wechselwirkungen die Trennung zwischen den thermalen und nichtthermalen Moden bestehen bleibt, d.h. die Moden mit $|\vec{k}| < \Lambda$ auch durch Streuprozesse keinen thermalen Anteil erhalten. Dies ist gleichbedeutend damit, dass das System nicht thermalisiert. Für die Thermalisierung eines Nichtgleichgewichtssystems sind die Dämpfungsraten verantwortlich, die mit dem Imaginärteil der Selbstenergie zusammenhängen. Damit sind die Ansätze (3.51) und (3.52) nur dann gerechtfertigt, wenn man den Imaginärteil der Selbstenergie vernachlässigt bzw. wenn dieser so klein ist, dass die Thermalisierungsskala sehr viel größer als die mikroskopische Skala der Theorie ist. Bis auf Kapitel 6, wo wir die Imaginärteile in erster Ordnung berücksichtigen, werden wir in dieser Arbeit den Imaginärteil der Selbstenergie vernachlässigen. Unsere erzielten Ergebnisse rechtfertigen die Ansätze für die Propagatoren.

3.5. Approximationsmöglichkeiten zur Lösung von Flussgleichungen

Die Flussgleichungen (3.10) und (3.40) sind zu komplex, als dass man sie numerisch oder analytisch exakt lösen könnte. Daher ist es sehr wichtig, wirkungsvolle Näherungsmöglichkeiten zu

erarbeiten, die überschaubar sind und zugleich die wichtigsten physikalischen Effekte beinhalten [67].

Die volle effektive Wirkung enthält alle Operatoren, die mit der Symmetrie der zugrunde liegenden Theorie vereinbar sind. Diese unendlich vielen invarianten Operatoren treten in der effektiven Wirkung zusammen mit ihrer jeweiligen Kopplung auf. Durch Entwicklung der effektiven Wirkung nach diesen Operatoren kann man die Flussgleichung (3.40) in ein unendliches System von gekoppelten, nichtlinearen Differenzialgleichungen für diese Kopplungen umwandeln. Damit hat man natürlich noch nichts gewonnen, da dieses unendliche System von Differenzialgleichungen ebenfalls nicht lösbar ist. Vielmehr muss man nun durch geeignete Trunkierungen die Anzahl der Kopplungen so weit reduzieren, bis das verbleibende System lösbar wird. Dies bedeutet, dass man die für das zu untersuchende Problem relevanten Operatoren identifizieren muss.

Es gibt zwei unterschiedliche Möglichkeiten, die effektive Wirkung zu entwickeln. Die eine Möglichkeit besteht darin, die effektive Wirkung nach Potenzen der Felder zu entwickeln. Dies wurde im Rahmen der ERG bei $T = 0$ in [71, 83, 85] durchgeführt. Die Koeffizienten dieser Entwicklung sind die 1PI Greenfunktionen (wir geben im Folgenden der Einfachheit halber die Entwicklung für ein skalares Feld an),

$$\Gamma_\Lambda = \Gamma_\Lambda|_{\varphi=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d x_1 \dots d^d x_n \Gamma_\Lambda^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) . \quad (3.67)$$

Diese Art der Entwicklung wird auch bei der Untersuchung von Schwinger–Dyson–Gleichungen benutzt [82]. Wenn man die Entwicklung (3.67) in die Flussgleichung (3.40) einsetzt und funktional nach den Feldern ableitet, erhält man ein System von gekoppelten Differenzialgleichungen für die 1PI–Greenfunktionen. Dieses System ist nicht geschlossen, d.h. die Flussgleichungen für die Greenfunktionen einer bestimmten Ordnung enthalten immer Greenfunktionen höherer Ordnung. Mit zunehmender Ordnung nimmt die Anzahl der Greenfunktionen, die zur Flussgleichung beitragen, stark zu.

Die andere Entwicklungsmöglichkeit für die effektive Wirkung besteht darin, eine Ableitungsentwicklung durchzuführen [98–100]. In diesem Fall entwickelt man die effektive Wirkung um konstante Feldkonfigurationen und klassifiziert die entstehenden Operatoren nach der Anzahl der Feldableitungen, die sie enthalten. Die Koeffizienten der Operatoren sind Funktionen der konstanten Felder. In niedrigster Ordnung der Ableitungsentwicklung erhält man das effektive Potenzial V_Λ . Als Beispiel geben wir die Ableitungsentwicklung eines skalaren Feldes mit Z_2 –Symmetrie an:

$$\Gamma_\Lambda = \int d^d x \left\{ -V_\Lambda(\varphi^2) + \frac{1}{2} Z_\Lambda(\varphi^2) (\partial\varphi)^2 + \dots \right\} . \quad (3.68)$$

Durch Einsetzen von (3.68) in die Flussgleichung erhält man ein unendliches, gekoppeltes System von Differenzialgleichungen für $V_\Lambda(\varphi^2)$, $Z_\Lambda(\varphi^2)$ usw. Dieses System lässt sich stark vereinfachen, wenn man nur die niedrigsten Kopplungen (z.B. nur $V_\Lambda(\varphi^2)$ und $Z_\Lambda(\varphi^2)$) berücksichtigt und alle höheren Kopplungen gleich null setzt. Dies ist sehr oft eine gute Approximation, da in vielen Fällen die anomalen Dimensionen klein sind. In einem weiteren Schritt kann man das

effektive Potenzial nach Potenzen von φ entwickeln. In der LPA-Näherung (“Local Polynomial Approximation”) werden nur endlich viele Entwicklungskoeffizienten berücksichtigt, d.h. man approximiert das Potenzial durch ein endliches Polynom. Damit haben wir die Anzahl der Kopplungen auf wenige (relevante) Kopplungen reduziert, wodurch man das verbleibende System von Differenzialgleichungen numerisch oder analytisch lösen kann.

Die Ableitungsentwicklung bis zur ersten oder zweiten Ordnung, verbunden mit einer LPA-Näherung, ist das am meisten verwendete Approximationsschema für wilsonsche Renormierungsgruppengleichungen. Im Rahmen der ERG wurde dieses Schema sehr erfolgreich zum Studium verschiedenster System angewendet (eine Übersicht liefert [61]). Auch in dieser Arbeit werden wir in den nächsten Kapiteln Ableitungsentwicklungen der effektiven Wirkung durchführen, wobei wir das Potenzial jedoch nicht durch einen LPA-Ansatz trunkieren.

4. DER PHASENÜBERGANG IM SKALAREN $O(N)$ -MODELL

4.1. Einleitung

Als eine erste Anwendung der TRG untersuchen wir in diesem Kapitel das kritische Verhalten skalarer, $O(N)$ -symmetrischer Theorien in 3+1 Dimensionen [79]. Dabei gehen wir davon aus, dass die $O(N)$ -Symmetrie bei $T = 0$ spontan gebrochen ist. Experimente und theoretische Untersuchungen zeigen, dass es bei einer kritischen Temperatur T_c zu einer Restaurierung der $O(N)$ -Symmetrie durch einen Phasenübergang zweiter Ordnung kommt. Aufgrund von Infrarotproblemen ist es störungstheoretisch nicht möglich, das kritische Verhalten dieser Theorien in 3+1 Dimensionen zu berechnen, so dass man auf nichtperturbative Methoden angewiesen ist.

Für $O(N)$ -symmetrische, skalare Theorien gibt es zahlreiche Anwendungen sowohl in der statistischen Physik als auch in der Teilchenphysik. In der statistischen Physik wird der $N = 0$ Limes zur Beschreibung von langkettigen Polymeren verwendet. Der Fall $N = 1$ entspricht dem Ising-Modell und wird zur Beschreibung des flüssig-gasförmigen Übergangs am kritischen Punkt angewandt. Der Fall $N = 2$ entspricht dem Suprafluiditätsübergang in Helium und für $N = 3$ erhält man das Heisenberg-Modell zur Beschreibung ferromagnetischer Systeme. Der Fall $N = 1$ ist für die Teilchenphysik relevant, da er das kritische Verhalten des elektroschwachen Phasenübergangs für den kritischen Wert der ($T = 0$)-Higgs-Masse beschreibt [86]. Der Fall $N = 4$ beschreibt das kritische Verhalten des chiralen Phasenübergangs der QCD im Limes von nur zwei Quark-Flavors (vgl. nächstes Kapitel). Die Anwendbarkeit des kritischen Verhaltens des $O(N)$ -Modells auf eine Vielzahl verschiedener physikalischer Systeme ist eine Manifestation der Universalität kritischer Phänomene.

Da an einem Phasenübergang zweiter Ordnung die langreichweitigen, rein dreidimensionalen Fluktuationen entscheidend sind (dimensionale Reduktion [16]), kann das universelle Verhalten der Theorie auch direkt in drei Dimensionen bei $T = 0$ untersucht werden. Diese Methode ist auch für Störungstheorie zugänglich, da die thermalen Effekte, die in 3+1 Dimensionen für das schlechte Infrarotverhalten verantwortlich sind, mit ihr umgangen werden. In drei Dimensionen gibt es genaue Berechnungen für die kritischen Exponenten mit Hilfe von Borel-resummierter ϵ -Entwicklung, Störungstheorie bei fester Dimension und Gitterrechnungen (eine Übersicht liefern z.B. [6, 61, 90]). Das kritische Verhalten $O(N)$ -symmetrischer Theorien wurde auch mit Hilfe der ERG direkt in drei Dimensionen berechnet [75, 87, 88].

In der dreidimensionalen Theorie bei $T = 0$ lassen sich jedoch nur die universellen Größen berechnen. Nichtuniverselle Größen wie z.B. die kritische Temperatur oder kritische Amplituden sind damit nicht zugänglich. Ihre Berechnung muss in der vollen Theorie bei endlicher Tempera-

tur erfolgen. Für solche Berechnungen ist Störungstheorie in der Nähe des Phasenübergangs aufgrund ihres schlechten Infrarotverhaltens nicht mehr zuverlässig. So wird z.B. für $N = 1$ selbst von super-daisy-resummierter Störungstheorie fälschlicherweise ein Phasenübergang erster Ordnung vorhergesagt [26]. Im Falle einer $1/N$ -Entwicklung sagt daisy-resummierte Störungstheorie korrekterweise einen Phasenübergang zweiter Ordnung voraus [6,97]. Die damit erzielten Werte für die kritischen Exponenten sind jedoch nicht besonders akkurat. Nichtperturbativ wurden Resultate für universelle und nichtuniverselle Größen mit Hilfe der ERG in [67, 68, 91, 94] erzielt. Weitere Renormierungsgruppenuntersuchungen wurden in [92,93] durchgeführt. In [95] erfolgten Untersuchungen mit Hilfe der “environmentally friendly”-Renormierungsgruppe und in [96] mit Hilfe der “auxiliary mass”-Methode. Im Rahmen der TRG wurden kritische Exponenten für $N = 1$ in [76] und [78] berechnet, wobei in [78] zusätzlich die kritische Zustandsgleichung bestimmt wurde.

4.2. Herleitung der Flussgleichung für das effektive Potenzial

Das $O(N)$ -Modell ist definiert über die ($T=0$)-Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} (\phi^2)^2, \quad (4.1)$$

wobei ϕ ein N -komponentiges, reelles Skalarfeld ist. Als Index für den $O(N)$ -Vektor verwenden wir griechische Buchstaben, d.h. $\phi = \phi^\alpha$ mit $\alpha = 1 \dots N$. Die Flussgleichung (3.40) für die effektive Wirkung $\Gamma_\Lambda[\phi]$ lautet

$$\Lambda \partial_\Lambda \Gamma_\Lambda[\phi] = \frac{i}{2} \text{Tr} \left[\left(\Lambda \partial_\Lambda D_{0,\Lambda}^{-1} \right) \left(D_{0,\Lambda}^{-1} + \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\phi]}{\delta \phi \delta \phi} \right)^{-1} \right]. \quad (4.2)$$

Da wir im Realzeitformalismus arbeiten, trägt das Feld ϕ zusätzlich einen thermalen Index $i = 1, 2$. Da es nicht möglich ist, die Flussgleichung (4.2) exakt zu lösen, sind wir gezwungen, Näherungen einzuführen. Viele Untersuchungen für das $O(N)$ -Modell haben gezeigt, dass eine gute Näherung darin besteht, eine Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung vorzunehmen und nur die ersten Terme der Entwicklung zu berücksichtigen. Der Grund dafür ist, dass die Ableitungsentwicklung effektiv eine Entwicklung in der anomalen Dimension η und diese im vorliegenden Modell sehr klein ist. Am Phasenübergang ist $\eta \sim 0.05$. So kann man in einer ersten Näherung die anomale Dimension vernachlässigen und die effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ durch das effektive Potenzial $U(\phi)$ und einen tree-Niveau kinetischen Term $k^2 \phi^2$ approximieren. Der Fehler, den man durch diese Approximation bei der Berechnung universeller Größen macht, liegt in der Größenordnung der anomalen Dimension am Phasenübergang, d.h. in der Größenordnung von 5%. Diese Aussage lässt sich nur dadurch verifizieren, dass man den Einfluss von η explizit in Betracht zieht (vgl. nächstes Kapitel).

Bevor wir die Flussgleichung für allgemeines N herleiten, betrachten wir zunächst einmal den Fall $N = 1$. Im Realzeitformalismus ist das effektive Potenzial $U(\phi)$ eine Funktion der Felder ϕ_1 und ϕ_2 . Da das effektive Potenzial eine statische Größe ist, würde seine Berechnung im

Matsubaraformalismus direkt das physikalische effektive Potenzial $V(\varphi)$ liefern. Dieses hängt jedoch nur von einem Feld φ ab. Es stellt sich somit die Frage, wie $U(\phi)$ und $V(\varphi)$ zusammenhängen. In [23] wird gezeigt, dass für konstante Felder die physikalische Konstellation durch $\phi_1 = \phi_2 = \varphi$ gegeben ist. Das physikalische effektive Potenzial $V(\varphi)$ erhält man aus $U(\phi)$ durch die Gleichung

$$\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} = \left. \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi_1} \right|_{\phi_1 = \phi_2 = \varphi}. \quad (4.3)$$

Die Relation (4.3) ist auf tree-Niveau unmittelbar einsichtig, da dort $U(\phi) = V(\phi_1) - V(\phi_2)$ gilt. Um die Flussgleichung (4.2) approximativ lösen zu können, machen wir für die leicht modifizierte effektive Wirkung $\Gamma_\Lambda[\phi]$, bei der der freie Propagator subtrahiert wurde, den Ansatz

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = \int d^4x \left[-U_\Lambda(\phi) + \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 \right]. \quad (4.4)$$

Zur Auswertung des Matrix-Propagators (3.51) benötigen wir den Feynman-Propagator $\Delta_\Lambda(k)$. Unter Annahme einer Schwinger-Dyson-Gleichung machen wir dafür den Ansatz

$$\Delta_\Lambda(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + \Pi_\Lambda + i\epsilon}. \quad (4.5)$$

Aufgrund der Näherung (4.4) für die effektive Wirkung ist die Feynman-Selbstenergie Π_Λ reell und unabhängig vom Impuls. Für sie gilt (vgl. (A.66) und (A.68)):

$$\Pi_\Lambda = \Sigma_{11,\Lambda} = \Sigma_{11,\Lambda} + \Sigma_{12,\Lambda}. \quad (4.6)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Pi_\Lambda &= \sum_{i=1}^2 \left. \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda[\phi]}{\delta \phi_1 \delta \phi_i} \right|_{\phi_1 = \phi_2 = \varphi} = - \sum_{i=1}^2 \left. \frac{\partial^2 U_\Lambda(\phi)}{\partial \phi_1 \partial \phi_i} \right|_{\phi_1 = \phi_2 = \varphi} + m^2 \\ &= - \frac{\partial^2 V_\Lambda(\varphi)}{(\partial \varphi)^2} + m^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

wobei wir im letzten Schritt (4.3) benutzt haben. Aufgrund der Invarianz der Lagrangedichte unter der Transformation $\phi \rightarrow -\phi$ kann $V_\Lambda(\varphi)$ nur von $\rho = \frac{1}{2}\varphi^2$ abhängen, d.h.

$$\Pi_\Lambda = -V'_\Lambda(\rho) - 2\rho V''_\Lambda(\rho) + m^2. \quad (4.8)$$

Die Übertragung unserer bisherigen Vorgehensweise auf den Fall einer $O(N)$ -symmetrischen Theorie ist nicht schwer. Die Gleichung (4.3) lautet nun

$$\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^\alpha} = \left. \frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi_1^\alpha} \right|_{\phi_1^\gamma = \phi_2^\gamma = \varphi^\gamma}, \quad (4.9)$$

wobei wir den konstanten $O(N)$ -Vektor $\varphi^\gamma = (\varphi^1, \dots, \varphi^N)$ eingeführt haben. Aufgrund der $O(N)$ -Symmetrie kann das Potenzial V_Λ nur von der Invarianten

$$\rho = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \varphi^\alpha \varphi^\alpha \quad (4.10)$$

abhängen. Statt der Gleichung (4.7) erhalten wir im $O(N)$ -Modell

$$\begin{aligned} \Pi_{\Lambda}^{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\delta^2 \Gamma_{\Lambda}(\phi)}{\delta \phi_1^\alpha \delta \phi_i^\beta} \Big|_{\phi_1^\gamma = \phi_2^\gamma = \varphi^\gamma} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 U_{\Lambda}(\phi)}{\partial \phi_1^\alpha \partial \phi_i^\beta} \Big|_{\phi_1^\gamma = \phi_2^\gamma = \varphi^\gamma} + m^2 \delta^{\alpha\beta} \\ &= - \frac{\partial^2 V_{\Lambda}(\rho)}{\partial \varphi^\alpha \partial \varphi^\beta} + m^2 \delta^{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Eigenwerte der Massenmatrix $\partial^2 V_{\Lambda}(\rho)/(\partial \varphi^\alpha \partial \varphi^\beta)$ hängen nur von der Invarianten ρ ab. Aufgrund der $O(N)$ -Symmetrie kann man durch eine Drehung den Vektor $(\varphi^1, \dots, \varphi^N)$ in den Vektor $\varphi^\gamma = (\varphi^1, 0, \dots, 0)$ überführen, wobei $\varphi^1 = \sqrt{2\rho}$ gilt. Durch diese Transformation wird die Massenmatrix diagonalisiert:

$$\frac{\partial^2 V_{\Lambda}(\rho)}{\partial \varphi^\alpha \partial \varphi^\beta} = M_{\alpha,\Lambda}^2 \delta^{\alpha\beta} . \quad (4.12)$$

Die Eigenwerte $M_{\alpha,\Lambda}^2$ lauten

$$M_{1,\Lambda}^2 = M_{\sigma,\Lambda}^2 = V'_{\Lambda}(\rho) + 2\rho V''_{\Lambda}(\rho) , \quad (4.13)$$

$$M_{\alpha,\Lambda}^2 = M_{\pi,\Lambda}^2 = V'_{\Lambda}(\rho) \quad \text{für } \alpha = 2 \dots N . \quad (4.14)$$

Für den Fall, dass der Vakuumerwartungswert φ_1 und damit ρ nicht null ist, erhalten wir spontane Symmetriebrechung entlang der φ_1 -Richtung. Dies bedeutet, dass die Symmetriegruppe $O(N)$ zu der Gruppe $O(N-1)$ gebrochen wird. Dadurch erhalten wir in radialer φ_1 -Richtung eine Higgs-Mode (Sigma-Teilchen) mit der Masse $M_{\sigma,\Lambda}^2$ und in tangentialer Richtung $N-1$ Goldstone-Moden (Pionen) mit der Masse $M_{\pi,\Lambda}^2$. In der gebrochenen Phase sind die Pionen am Minimum des Potenzials masselos. In der symmetrischen Phase haben alle N Teilchen die gleiche Masse $V'(0)$. Für die Selbstenergie-Matrix im Falle $N > 1$ erhalten wir

$$\Sigma_{\Lambda,ij}^{\alpha\beta} = M_{\Lambda}^{-1}(k_0) \begin{pmatrix} \Pi_{\Lambda}^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -\Pi_{\Lambda}^{\alpha\beta} \end{pmatrix} M_{\Lambda}^{-1}(k_0) \quad (4.15)$$

$$\text{mit } \Pi_{\Lambda}^{\alpha\beta} = (-M_{\alpha,\Lambda}^2 + m^2) \delta^{\alpha\beta} = \Pi_{\Lambda}^{\alpha} \delta^{\alpha\beta} . \quad (4.16)$$

Damit folgt für die Propagator-Matrix

$$D_{\Lambda}^{\alpha\beta}(k) = D_{\Lambda}^{\alpha}(k) \delta^{\alpha\beta} , \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} D_{\Lambda}^{\alpha}(k) &= \begin{pmatrix} \Delta_{\Lambda}^{\alpha} & (\Delta_{\Lambda}^{\alpha} - \Delta_{\Lambda}^{\alpha*})\theta(-k_0) \\ (\Delta_{\Lambda}^{\alpha} - \Delta_{\Lambda}^{\alpha*})\theta(k_0) & -\Delta_{\Lambda}^{\alpha*} \end{pmatrix} \\ &+ (\Delta_{\Lambda}^{\alpha} - \Delta_{\Lambda}^{\alpha*}) N_{\Lambda}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

mit dem Feynman–Propagator

$$\Delta_{\Lambda}^{\alpha}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + \Pi_{\Lambda}^{\alpha} + i\epsilon}. \quad (4.19)$$

Zur Berechnung von Flussgleichungen müssen wir den Kern $K_{\Lambda}^{\alpha\beta}(k)$ aus (3.64) bestimmen. Für reelle Selbstenergien ist der Kern proportional zur Spektraldichte $\rho_{\Lambda}^{\alpha\beta}(k)$. Unter Verwendung von (3.16) erhalten wir für die Spektraldichte (vgl. (A.43))

$$\rho_{\Lambda}^{\alpha\beta}(k) = \rho_{\Lambda}^{\alpha}(k)\delta^{\alpha\beta}, \quad (4.20)$$

$$\rho_{\Lambda}^{\alpha}(k) = 2\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2 - m^2 + \Pi_{\Lambda}^{\alpha}). \quad (4.21)$$

Der Kern ist gegeben durch

$$K_{\Lambda}^{\alpha\beta}(k) = K_{\Lambda}^{\alpha}(k)\delta^{\alpha\beta}, \quad (4.22)$$

$$K_{\Lambda}^{\alpha}(k) = \epsilon(k_0)\rho_{\Lambda}^{\alpha}(k)\Lambda\partial_{\Lambda}N_{\Lambda}(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Nach diesen technischen Vorbereitungen können wir nun aus (4.2) die Flussgleichung für das effektive Potenzial herleiten. Durch Differenziation der Flussgleichung nach dem Feld ϕ_1^{γ} erhalten wir

$$\Lambda\partial_{\Lambda}\frac{\delta\Gamma_{\Lambda}[\phi]}{\delta\phi_1^{\gamma}} = \frac{-i}{2}\text{Tr}\left[\left(D_{0,\Lambda}^{-1} + \frac{\delta^2\Gamma_{\Lambda}[\phi]}{\delta\phi\delta\phi}\right)^{-1}\left(\Lambda\partial_{\Lambda}D_{0,\Lambda}^{-1}\right)\left(D_{0,\Lambda}^{-1} + \frac{\delta^2\Gamma_{\Lambda}[\phi]}{\delta\phi\delta\phi}\right)^{-1}\frac{\delta^3\Gamma_{\Lambda}[\phi]}{\delta\phi_1^{\gamma}\delta\phi\delta\phi}\right].$$

Indem wir die Flussgleichung für die konstante Feldkonfiguration $\phi_1^{\alpha} = \phi_2^{\alpha} = \varphi^{\alpha} = (\varphi_1, 0 \dots 0)$ auswerten, ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.9) (über α und β ist zu summieren)

$$\Lambda\partial_{\Lambda}\frac{\partial V_{\Lambda}(\rho)}{\partial\varphi^{\gamma}} = \frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{Tr}\left[K_{\Lambda}^{\alpha}(k)\delta^{\alpha\beta}\left(\begin{array}{cc} \frac{\delta^3\Gamma_{\Lambda}}{\delta\phi_1^{\beta}\delta\phi_1^{\alpha}\delta\phi_1^{\gamma}} & \frac{\delta^3\Gamma_{\Lambda}}{\delta\phi_1^{\beta}\delta\phi_2^{\alpha}\delta\phi_1^{\gamma}} \\ \frac{\delta^3\Gamma_{\Lambda}}{\delta\phi_2^{\beta}\delta\phi_1^{\alpha}\delta\phi_1^{\gamma}} & \frac{\delta^3\Gamma_{\Lambda}}{\delta\phi_2^{\beta}\delta\phi_2^{\alpha}\delta\phi_1^{\gamma}} \end{array}\right)\Bigg|_{\phi_1=\phi_2=\varphi}\right]. \quad (4.24)$$

Die Auswertung der Spur über die thermalen Indizes ergibt

$$\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cc} \frac{\delta^3\Gamma_{\Lambda}}{\delta\phi_1^{\beta}\delta\phi_1^{\alpha}\delta\phi_1^{\gamma}} & \frac{\delta^3\Gamma_{\Lambda}}{\delta\phi_1^{\beta}\delta\phi_2^{\alpha}\delta\phi_1^{\gamma}} \\ \frac{\delta^3\Gamma_{\Lambda}}{\delta\phi_2^{\beta}\delta\phi_1^{\alpha}\delta\phi_1^{\gamma}} & \frac{\delta^3\Gamma_{\Lambda}}{\delta\phi_2^{\beta}\delta\phi_2^{\alpha}\delta\phi_1^{\gamma}} \end{array}\right)\Bigg|_{\phi_1=\phi_2=\varphi}\right] = \frac{\partial^3 V_{\Lambda}(\rho)}{\partial\varphi^{\alpha}\partial\varphi^{\beta}\partial\varphi^{\gamma}}. \quad (4.25)$$

Damit erhalten wir als Flussgleichung für $V'_{\Lambda}(\rho)$

$$\begin{aligned} \Lambda\partial_{\Lambda}V'_{\Lambda}(\rho) &= \frac{1}{2}(3V''_{\Lambda}(\rho) + 2\rho V'''_{\Lambda}(\rho))\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}K_{\Lambda}^{\sigma}(k) \\ &+ \frac{1}{2}(N-1)V''_{\Lambda}(\rho)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}K_{\Lambda}^{\pi}(k), \end{aligned} \quad (4.26)$$

wobei wir verwendeten, dass $\varphi^\gamma \partial/\partial\varphi^\gamma = 2\rho \partial/\partial\rho$. Mit $K_\Lambda^\sigma(k)$ bezeichnen wir den Kern für das Sigma-Teilchen und mit $K_\Lambda^\pi(k)$ den Kern für die Pionen:

$$K_\Lambda^\sigma(k) = 2\pi\delta(k^2 - V'_\Lambda(\rho) - 2\rho V''_\Lambda(\rho))\Lambda\partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|), \quad (4.27)$$

$$K_\Lambda^\pi(k) = 2\pi\delta(k^2 - V'_\Lambda(\rho))\Lambda\partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|). \quad (4.28)$$

Für die numerische Auswertung müssen wir die Cutoff-Funktion in $N_\Lambda(|k_0|)$ spezifizieren. Wir wählen die Theta-Funktion als Cutoff-Funktion, da sich damit die Integrale analytisch lösen lassen:

$$N_\Lambda(|k_0|) = N(|k_0|)\theta(|\vec{k}| - \Lambda), \quad (4.29)$$

$$\Lambda\partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|) = -N(|k_0|)\delta(|\vec{k}| - \Lambda). \quad (4.30)$$

Im Idealfall sollten die Ergebnisse natürlich unabhängig von der Cutoff-Funktion sein. Dies wäre jedoch nur dann der Fall, wenn man exakt rechnen würde. Durch die Einführung von Näherungen werden die Ergebnisse abhängig von der Cutoff-Funktion. Der Einfluss der Cutoff-Funktion auf Renormierungsgruppen wurde z.B. in [101–103] untersucht. Insbesondere zeigt sich, dass die Wahl der Theta-Funktion zu Schwierigkeiten führen kann. Wir verwenden in dieser Arbeit die Theta-Funktion als Cutoff-Funktion, da sich die Integrale damit analytisch lösen lassen und die numerische Auswertung sich erheblich vereinfacht. Da wir mit der Theta-Funktion numerisch sehr gute Ergebnisse erzielen konnten, rechtfertigt dies a posteriori unsere Wahl. Weiterhin ist es wichtig, dass die hier abgeleiteten Formeln es erlauben, in einem nächsten Schritt verbesserte Cutoff-Funktionen einzusetzen, womit sich dann deren Einfluss abschätzen lässt.

Mit der Theta-Funktion als Cutoff erhalten wir aus (4.26) (sofern es eindeutig ist, wollen wir im Folgenden bei den verschiedenen Größen den Index Λ weglassen)

$$\Lambda\partial_\Lambda V' = -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \frac{N(\omega_\sigma)}{\omega_\sigma} (3V'' + 2\rho V''') \theta(\omega_\sigma^2) - (N - 1) \frac{\Lambda^3}{4\pi^2} - \frac{N(\omega_\pi)}{\omega_\pi} V'' \theta(\omega_\pi^2) \quad (4.31)$$

$$\text{mit } \omega_\sigma^2 = \Lambda^2 + V' + 2\rho V'', \quad \omega_\pi^2 = \Lambda^2 + V'. \quad (4.32)$$

Zur numerischen Auswertung benötigen wir in der gebrochenen Phase ebenfalls die Flussgleichung für das Minimum ρ_0 . Diese erhalten wir aus der Bedingung $V'(\rho_0) = 0$. Durch Differenziation nach Λ folgt daraus:

$$\Lambda\partial_\Lambda \rho_0 = -\frac{1}{V''(\rho_0)} \Lambda\partial_\Lambda V'(\rho) \Big|_{\rho=\rho_0}. \quad (4.33)$$

Für die numerische Untersuchung ist es nützlich, folgende dimensionslose Variablen einzuführen:

$$\lambda = \frac{\Lambda}{T}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho}{\Lambda T} \quad \text{und} \quad \hat{V} = \frac{V}{\Lambda^3 T}. \quad (4.34)$$

Der Grund für obige Skalierung liegt darin, dass in der Nähe des Phasenübergangs die langreichweitigen, rein dreidimensionalen Fluktuationen entscheidend sind (dimensionale Reduktion). In [76, 78] wurde gezeigt, dass man im Limes $\Lambda^2 + V' + 2\rho V'' \ll T$ und $\Lambda^2 + V' \ll T$ (beide

Bedingungen müssen zugleich erfüllt sein) aus (4.31) die Flussgleichung für das effektive Potenzial der dreidimensionalen Theorie erhält. Daher werden in (4.34) die Variablen mit Λ so skaliert, wie man sie in einer rein dreidimensionalen Theorie skalieren würde. Die dreidimensionalen Variablen gewinnt man durch naive dimensionale Skalierung der vierdimensionalen Variablen mit der Temperatur T . Wir definieren die Funktion $\hat{N}(x)$ als

$$\hat{N}(x) = \frac{1}{e^x - 1}. \quad (4.35)$$

Damit lauten die Flussgleichungen für das dimensionslose Potenzial und Minimum

$$\begin{aligned} \lambda \partial_\lambda \hat{V}' &= -2\hat{V}' + \hat{V}'' \hat{\rho} \\ &\quad - \frac{\lambda}{4\pi^2} \left[(3\hat{V}'' + 2\hat{\rho}\hat{V}''') \frac{\hat{N}(\lambda\hat{\omega}_\sigma)}{\hat{\omega}_\sigma} \theta(\hat{\omega}_\sigma^2) + (N-1)\hat{V}'' \frac{\hat{N}(\lambda\hat{\omega}_\pi)}{\hat{\omega}_\pi} \theta(\hat{\omega}_\pi^2) \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\lambda \partial_\lambda \hat{\rho}_0 = -\hat{\rho}_0 - \frac{1}{\hat{V}''(\hat{\rho}_0)} \lambda \partial_\lambda \hat{V}'(\hat{\rho}) \Big|_{\hat{\rho}=\hat{\rho}_0} \quad (4.37)$$

$$\text{mit} \quad \hat{\omega}_\sigma^2 = \frac{\omega_\sigma^2}{\Lambda^2} = 1 + \hat{V}' + 2\hat{\rho}\hat{V}'', \quad \hat{\omega}_\pi^2 = \frac{\omega_\pi^2}{\Lambda^2} = 1 + \hat{V}'. \quad (4.38)$$

Bevor wir mit der Numerik beginnen können, müssen wir das Startpotenzial für $\Lambda \rightarrow \infty$ spezifizieren. Ohne Näherungen ist das Startpotenzial gegeben durch das volle effektive Potenzial bei $T = 0$. Dieses ist exakt natürlich nicht zugänglich, und wir sind gezwungen, dafür eine geeignete Approximation zu verwenden. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die Betrachtung kleiner ($T = 0$)–Kopplungen und werden deshalb bei der Skala $\Lambda_0 \gg T$ für das effektive Potenzial ein symmetriebrechendes ($T = 0$)–tree–Niveau Potenzial

$$V_{\Lambda_0}(\rho) = \frac{g_{T=0}}{2} (\rho - \rho_0)^2 \quad (4.39)$$

als Startwert einsetzen. Diese Vereinfachung hat keinen Einfluss auf die universellen Eigenschaften des Systems, da diese unabhängig von der mikroskopischen Physik sind. Durch diese Näherung werden insbesondere die kritischen Exponenten, universelle Verhältnisse kritischer Amplituden oder die kritische Zustandsgleichung nicht beeinflusst. Für die nichtuniversellen Größen, wie z.B. die kritische Temperatur, erhält man durch Berücksichtigung von $T = 0$ Quanten-Effekten Korrekturen aufgrund des logarithmischen Laufens der ($T = 0$)–Kopplung. Für kleine Kopplungen sind diese Korrekturen jedoch geringfügig. Da wir in dieser ersten Untersuchung des $O(N)$ –Modells hauptsächlich an prinzipiellen Aussagen über die Anwendbarkeit der TRG und nicht an möglichst präzisen Ergebnissen interessiert sind, werden wir die ($T = 0$)–Quantenkorrekturen (und die damit verbundenen Schwierigkeiten [79]) ignorieren.

4.3. Numerische Untersuchung

In diesem Abschnitt geben wir die numerischen Resultate wieder, die mit Hilfe der Flussgleichungen (4.36) und (4.37) erzielt wurden [79]. Durch Ableiten von (4.36) nach $\hat{\rho}$ können wir

die Flussgleichung für jede beliebige Ableitung von $\hat{V}(\hat{\rho})$ bestimmen. Das System von Flussgleichungen, das wir dadurch erhalten, ist zu keiner Ordnung geschlossen, da auf der rechten Seite der Flussgleichungen immer um zwei Ordnungen höhere Ableitungen auftreten als auf der linken Seite. Eine Möglichkeit zur näherungsweise Lösung dieses unendlichen Systems von Flussgleichungen besteht darin, für das Potenzial einen Polynomansatz zu machen (LPA). Dies ist gleichbedeutend damit, dass man diejenigen Ableitungen des Potenzials, die höher sind als die Ordnung des Polynoms, gleich null setzt. Durch diesen LPA Ansatz erhält man ein endliches System von Flussgleichungen, das man numerisch lösen kann.

Wir machen für die numerische Ausarbeitung keinen LPA-Ansatz für das effektive Potenzial, sondern verwenden Methoden, die in [108] vorgeschlagen wurden. Dazu werten wir die Flussgleichungen für $\hat{V}'(\hat{\rho})$ und $\hat{V}''(\hat{\rho})$ an äquidistanten Punkten $\hat{\rho}_i$ aus. Die Flussgleichungen für $\hat{V}'(\hat{\rho})$ und $\hat{V}''(\hat{\rho})$ enthalten die unbekanntes Ableitungen $\hat{V}'''(\hat{\rho}_i)$ und $\hat{V}''''(\hat{\rho}_i)$, die wir aufgrund von sog. “matching”-Bedingungen bestimmen. Diese Bedingungen erhält man dadurch, dass man das Potenzial an jedem Punkt $\hat{\rho}_i$ durch ein Polynom vierter Ordnung approximiert und Stetigkeit für $\hat{V}'(\hat{\rho})$ und $\hat{V}''(\hat{\rho})$ in der Mitte zwischen zwei benachbarten Punkten $\hat{\rho}_i$ verlangt. Die daraus Folgenden Bedingungen bestimmen die unbekanntes Ableitungen $\hat{V}'''(\hat{\rho}_i)$ und $\hat{V}''''(\hat{\rho}_i)$ als Funktionen der Ableitungen $\hat{V}'(\hat{\rho}_j)$ und $\hat{V}''(\hat{\rho}_j)$. Aufgrund dieser matching-Bedingungen erhalten wir im Prinzip ein nichtlineares, gekoppeltes System von Differenzialgleichungen für $\hat{V}'(\hat{\rho}_i)$ und $\hat{V}''(\hat{\rho}_i)$. Dieses System von Flussgleichungen ist aufgrund des matchings nichtlokal, d.h. die Differenzialgleichungen an der Stelle $\hat{\rho}_i$ enthalten Größen an den anderen Punkten $\hat{\rho}_j$. Im Gegensatz dazu würde ein LPA-Ansatz zu einem lokalen Differenzialgleichungssystem führen. In der gebrochenen Phase skalieren wir den Abstand zwischen den Punkten $\hat{\rho}_i$ mit dem λ -abhängigen Minimum $\hat{\rho}_0$. Dies hat den Vorteil, dass sich zwischen dem Minimum und dem Ursprung immer die gleiche Anzahl von Stützstellen befindet. Unser Vorgehen zur numerischen Auswertung der Flussgleichungen geht beträchtlich über den LPA-Ansatz eines globalen Polynoms vierter Ordnung für das effektive Potenzial hinaus.

Wir wollen nun mit der Diskussion der numerischen Ergebnisse für den Fall $N = 1$ beginnen. Dieser Fall entspricht dem Ising-Modell in der statistischen Physik. Als Startwert für die Flussgleichungen bei einer hohen Skala Λ_0/T setzen wir das symmetriebrechende ($T = 0$)-tree-Niveau Potenzial ein. Die Skala für alle dimensionsbehafteten Größen ist durch das ($T = 0$)-Minimum $\rho_0(T = 0)$ gegeben. Unsere numerischen Ergebnisse zeigen, dass der Phasenübergang zweiter Ordnung ist. Dies kann man anhand der Abbildung 4.1 erkennen, die die Abhängigkeit des dimensionsbehafteten und dimensionslosen Minimums von der äußeren Skala Λ für verschiedene Temperaturen darstellt. Der obere Teil der Abbildung zeigt das dimensionslose Minimum $\hat{\rho}_0$ als Funktion von $\ln(\Lambda/T)$ für verschiedene Werte der Temperatur in der Nähe der kritischen Temperatur T_c (die ($T = 0$)-Kopplung beträgt $g_{T=0} = 0.1$). Für Temperaturen über der kritischen Temperatur T_c (durchgezogene Linien) wird das Minimum bei einer endlichen Skala Λ_s null und die Theorie geht in die symmetrische Phase über. Für Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur (gestrichelte Linien) wird das Minimum niemals null und die Theorie bleibt in der gebrochenen Phase. Aufgrund der Skalierung des dimensionsbehafteten Minimums mit ΛT divergiert das dimensionslose Minimum für $\Lambda \rightarrow 0$, falls das dimensionsbehaftete Minimum konstant wird. Im unteren Teil der Abbildung ist das dimensionsbehaftete Minimum als Funktion von Λ/T aufgetragen. Für Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur wird das

Minimum für $\Lambda \rightarrow 0$ konstant, während für Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur das Minimum bei einer endlichen Skala Λ_s verschwindet. An dem Verlauf des dimensionslosen Minimums erkennt man, dass es eine kritische Temperatur T_c gibt, bei der dieses asymptotisch einen endlichen Wert $\hat{\rho}_0^*$ annimmt. Aufgrund der dimensional Reduktion ist dieser Wert der Fixpunktwert der dreidimensionalen Theorie [78]. Die Unabhängigkeit der dimensionslosen Variablen von der Skala Λ an der kritischen Temperatur bedeutet, dass die Theorie skaleninvariant ist. An der kritischen Temperatur verschwindet das dimensionsbehaftete Minimum erst im Limes $\Lambda \rightarrow 0$. Dieses Verhalten des Minimums zeigt, dass der Phasenübergang zweiter Ordnung ist und die Theorie zur Universalitätsklasse des dreidimensionalen Ising-Modells gehört. Bevor wir uns dem universellen Verhalten zuwenden, wollen wir noch die Abhängigkeit der kritischen Temperatur von der ($T = 0$)-Kopplung diskutieren. In Abbildung 4.2 stellen wir das Verhältnis zwischen der mit Hilfe der TRG gefundenen kritischen Temperatur T_c und dem ein-loop perturbativen Ergebnis dar. Das perturbative Ergebnis lautet

$$T_{c,1-loop} = \sqrt{\frac{24}{N+2}} \sqrt{\rho_0}. \quad (4.40)$$

Zum Vergleich sind in Abbildung 4.2 auch Werte für dieses Verhältnis aufgetragen, die mit Hilfe der ERG in [67] bestimmt wurden (Quadrate). Es offenbart sich eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der ERG, die mit einem exponentiellen Cutoff erzielt wurden.

Nun diskutieren wir das universelle Verhalten am Phasenübergang. Im Anhang B geben wir eine Einführung in das universelle Verhalten an einem Phasenübergang zweiter Ordnung. Mit Hilfe der TRG untersuchen wir numerisch das kritische Verhalten der Masse, der Kopplung und des Minimums. Da wir die Wellenfunktionsrenormierung vernachlässigen, handelt es sich dabei um unrenormierte Größen. Weiter bestimmen wir die Widom-Skalenfunktion $f(x)$, die die gesamte Information über das kritische Verhalten am Phasenübergang beinhaltet.

Das kritische Verhalten des symmetriebrechenden Minimums in der gebrochenen Phase (in der symmetrischen Phase ist das Minimum null) ist gegeben durch $\varphi_0 = x_0^{-\beta} (-t)^\beta$ mit $t = T - T_c$. Es wird durch den kritischen Exponenten β und die Amplitude $x_0^{-\beta}$ charakterisiert. Das kritische Verhalten der unrenormierten Masse m wird beschrieben durch $m^2 = (C_\pm)^{-1} t^\gamma$, mit den kritischen Amplituden $(C_\pm)^{-1}$ und dem kritischen Exponenten γ . Das Verhältnis der kritischen Amplituden C_+ und C_- zueinander ist eine universelle Größe. In der statistischen Physik entspricht der unrenormierten Masse die Suszeptibilität χ . Das kritische Verhalten der renormierten Masse m_r wird durch den Exponenten ν beschrieben: $m_r \sim |t|^\nu$. In der statistischen Physik ist das Pendant zur renormierten Masse die Korrelationslänge ξ . Für verschwindende anomale Dimension η erhalten wir $\nu = \gamma/2$. Das kritische Verhalten der unrenormierten Vierpunktkopplung g wird beschrieben durch $g = l_\pm t^{\tilde{\nu}}$. In drei Dimensionen ist der kritische Exponent $\tilde{\nu}_r$ für die renormierte Vierpunktkopplung identisch mit dem kritischen Exponenten ν für die renormierte Masse (vgl. (B.20)). Bei Vernachlässigung der anomalen Dimension folgt damit $\tilde{\nu}_r = \tilde{\nu} = \gamma/2$. Weiter gilt in drei Dimensionen bei Vernachlässigung der anomalen Dimension $\delta = 5$ (vgl. (B.13)). Daher folgt aus (B.19) $\tilde{\nu} = 2\beta$ bzw. $\beta = \gamma/4$. Aus der Kenntnis zweier kritischer Exponenten (z.B. δ und γ) lassen sich alle anderen Exponenten berechnen. Das kritische Verhalten des Potentials für kleine ρ wird durch die Widom-Skalenform der Zustandsgleichung beschrieben: $V'(\rho) = \varphi^{\delta-1} f(x)$ mit $x = t/\varphi^{1/\beta}$ und $\varphi = \sqrt{2\rho}$. Die Funktion $f(x)$ ist bis auf Normie-

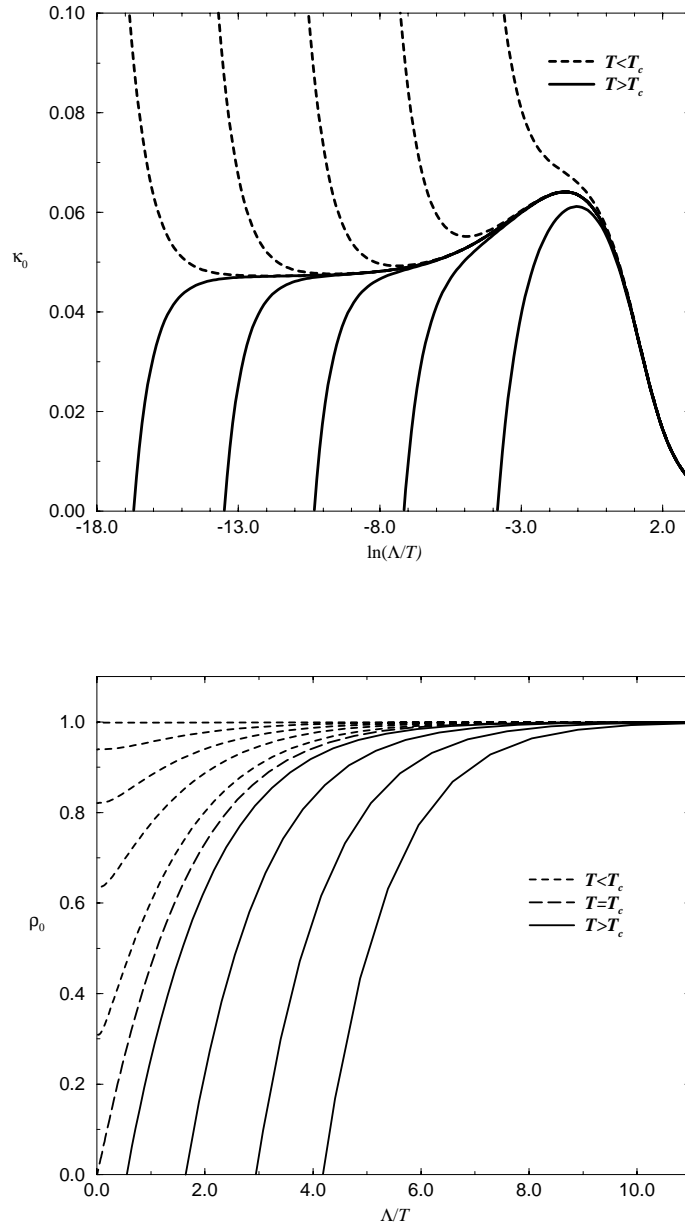


Abbildung 4.1: Der obere Teil zeigt das dimensionslose Minimum als eine Funktion von $\ln(\Lambda/T)$ für verschiedene Temperaturen in der Umgebung von T_c . Der untere Teil zeigt das dimensionsbehaftete Minimum in Einheiten des Minimums bei $T = 0$ als Funktion von Λ/T für verschiedene Temperaturen.

zung und Reskalierung von x universell. Insbesondere erhalten wir für $T = T_c$ für das Potenzial $V'(\rho) = D(\sqrt{2\rho})^{\delta-1}$, wobei wir die Amplitude $D = f(0)$ definiert haben.

Unsere numerischen Ergebnisse für die kritischen Exponenten im Falle $N = 1$ haben wir

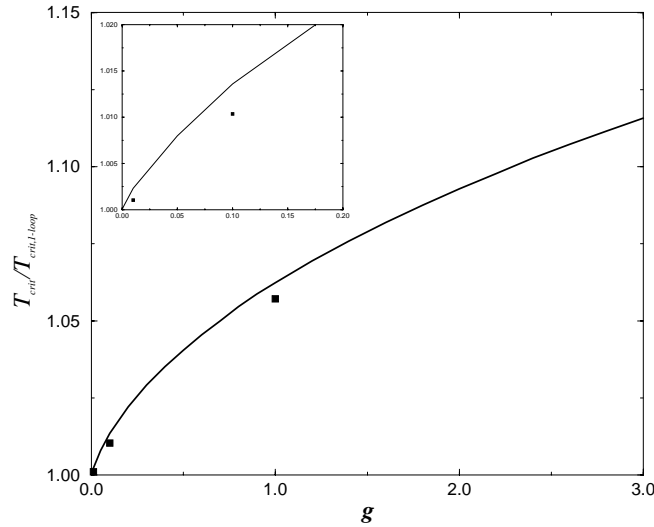


Abbildung 4.2: Das Verhältnis $T_c/T_{c,1-loop}$ in Abhängigkeit der $(T=0)$ -Kopplung g für $N = 1$. Zum Vergleich werden noch Ergebnisse aus [67] angeführt (Quadrate).

	β	γ	δ	η	$\tilde{\nu}$
TRG	0.345	1.37	4.97	–	0.67
TRG+LPA [76]			3.57	0.015	0.58
3d ERG + LPA [75]	0.333	1.247		0.045	0.638
3d ERG [87]	0.336	1.258	4.75	0.044	0.643
3d ERG + WFR [88]	0.330	1.232		0.047	0.631
Beste Werte [6]	0.325	1.240	4.81	0.032	0.630

Tabelle 4.1: Kritische Exponenten mittels verschiedener Methoden für $N = 1$. Die Abweichungen von den besten Werten liegen in der Größenordnung von 5%, was konsistent ist mit der Vernachlässigung der anomalen Dimension η . Die numerischen Fehler liegen bei $\mathcal{O}(3\%)$.

in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Wir vergleichen unsere Ergebnisse mit Resultaten, die in der dreidimensionalen Theorie abgeleitet wurden. Die kritischen Exponenten lassen sich auf unterschiedliche Arten bestimmen. Mann kann einerseits den kritischen Exponenten γ direkt aus dem kritischen Verhalten der Masse extrahieren, indem man in der kritischen Region $\ln(m^2)$ als Funktion von $\ln(|T - T_c|)$ aufträgt und die Steigung der Geraden bestimmt. Andererseits kann man γ auch aus dem asymptotischen Verhalten der Widom-Skalenfunktion bestimmen: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C_+^{-1} x^\gamma$. Wir haben die kritischen Exponenten auf beide Arten bestimmt und sehr gute Übereinstimmungen erzielt (für eine genauere Diskussion siehe [79]). Die Skalenrelation $\gamma = 4\beta$ und die Relation $\delta = 5$ sind mit einer Genauigkeit von weniger als 1% erfüllt. In [100] wurde explizit gezeigt, dass $\delta = 5$ die exakte Lösung der dreidimensionalen Fixpunkt-

gleichungen bei Vernachlässigung der Wellenfunktionsrenormierung ist (dies folgt auch unmittelbar aus den Skalenrelationen). Die Relation $\gamma = 2\tilde{\nu}$ ist mit einer Genauigkeit von weniger als 3% erfüllt. Der größere Fehler bei dieser Skalenrelation ist darauf zurückzuführen, dass wir die Kopplung durch die matching-Bedingungen bestimmen. Wir benutzen die Verletzung der Skalenrelationen, um unseren numerischen Fehler auf $\sim 3\%$ abzuschätzen. Die Abweichungen unserer kritischen Exponenten von den Vergleichswerten in Tabelle 4.1 beruht hauptsächlich auf der Vernachlässigung der anomalen Dimension η . Sie liegen in der Größenordnung der anomalen Dimension, d.h. bei $\sim 5\%$. In [76] wurde im Rahmen der TRG mit einer LPA-Approximation für das effektive Potenzial auch die anomale Dimension η berücksichtigt. In [75, 87, 88] wurden die kritischen Exponenten im Rahmen der ERG in drei Dimensionen bestimmt. In [75] wurde eine feldunabhängige Wellenfunktionsrenormierung berücksichtigt und für das Potenzial eine LPA-Approximation durchgeführt. In [87] wurde die LPA-Approximation verworfen und in [88] zusätzlich noch eine feldabhängige Wellenfunktionsrenormierung einbezogen.

	C_+/C_-	R_χ	λ_{4*}	λ_{6*}	B	C_+	D
					$(g_{T=0} = 0.1)$		
TRG	4.50	1.76	19.6	1725	1.05	0.54	2.73
3d ERG + LPA [75]			27.8	1311			
3d ERG [87]	4.29	1.61					
3d ERG + WFR [88]	4.966	1.647					
Monte-Carlo [109]			23.3	1476			
Beste Werte [6]	4.95	1.65					

Tabelle 4.2: Fixpunktwerte, kritische Amplituden und Amplitudenverhältnisse mittels verschiedener Methoden für $N = 1$. Die Abweichungen von den besten Werten liegen in der Größenordnung von 5%, was konsistent ist mit der Vernachlässigung der anomalen Dimension. Die numerischen Fehler liegen bei $\mathcal{O}(3\%)$.

In Tabelle 4.2 präsentieren wir unsere Ergebnisse für einige kritische Amplituden und Fixpunktkopplungen. R_χ ist eine universelle Kombination nichtuniverseller Größen: $R_\chi = C_+ D x_0^{-\beta(\delta-1)}$. Das Verhältnis C_+/C_- ist ebenfalls universell. Die dimensionslosen universellen Fixpunktkopplungen λ_{4*} und λ_{6*} sind über Ableitungen des Potenzials nach φ definiert. Damit sind λ_{4*} und λ_{6*} Kombinationen aus der zweiten und dritten Ableitung des Potenzials nach ρ . Die Größen B , C_+ und D sind nichtuniversell und hängen damit von dem Startparameter $g_{T=0}$ ab. Die Abweichungen unserer Resultate von den besten Werten in Tabelle 4.2 sind hauptsächlich auf die Vernachlässigung der anomalen Dimension zurückzuführen, wie der Vergleich mit den Ergebnissen aus [88] zeigt. Die Monte-Carlo-Ergebnisse aus [109] wurden in drei Dimensionen erzielt.

Nun wenden wir uns der Widom Skalenfunktion $f(x)$ zu. Diese wurde in drei Dimensionen in [87–89] bestimmt. In Abbildung 4.3 stellen wir $\ln(f(x))$ als Funktion von $\ln(|x|)$ dar. Der linke Teil der Abbildung wurde in der gebrochenen, der rechte Teil in der symmetrischen Phase bestimmt. Im linken Teil der Abbildung erkennen wir an der Divergenz des Logarithmus, dass

$f(x)$ für $x = -x_0$ eine Nullstelle besitzt. Weiter können wir aus dem rechten Teil der Abbildung die Amplitude $D = f(0)$ und den kritischen Exponenten γ bestimmen. Der Exponent γ ist die Steigung der Kurve für große x -Werte. In Abbildung 4.3 vergleichen wir unser Ergebnis für

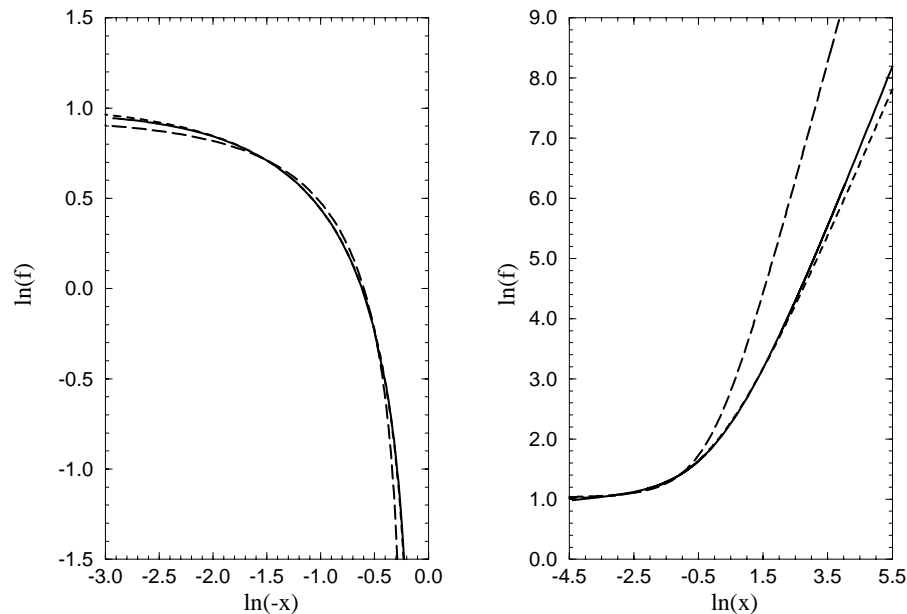


Abbildung 4.3: Die durchgezogene Linie zeigt den Logarithmus der Widom-Skalenfunktion $f(x)$, erzielt mit der TRG für $N = 1$ in symmetrischer (rechts) und gebrochener Phase (links). Die kurzgestrichelten Linien zeigen das Ergebnis, das mit der ERG in drei Dimensionen [87] erzielt wurde. Die langgestrichelten Linien zeigen das Ergebnis von Gittersimulationen in gebrochener [110] und symmetrischer Phase [109].

$f(x)$ mit dem dreidimensionalen ERG-Resultat aus [87] und mit dem Resultat einer dreidimensionalen Monte-Carlo-Simulationen in symmetrischer [109] und gebrochener Phase [110]. Der Verlauf von $f(x)$ ist universell, die Normierungen von $f(x)$ und von x sind jedoch nichtuniversell. Um unser Ergebnis mit den anderen Resultaten vergleichen zu können, müssen wir zunächst die unterschiedlichen Normierungen anpassen. Dies tun wir, indem wir verlangen, dass unser Ergebnis an zwei verschiedenen Punkten x_1 und x_2 (entsprechend den beiden Freiheitsgraden für die Normierung) mit dem zu vergleichenden Ergebnis übereinstimmt. Da die Monte-Carlo-Ergebnisse in gebrochener und symmetrischer Phase auf verschiedenen Gittern erzielt wurden, verwenden wir in Abbildung 4.3 verschiedene Normierungen für die symmetrische und die gebrochene Phase. Der linke Teil der Abbildung 4.3 zeigt, dass in der gebrochenen Phase unser Ergebnis nahezu perfekt mit dem Ergebnis aus [87] übereinstimmt. In der symmetrischen Phase besteht für große x -Werte eine kleine Diskrepanz zum Ergebnis aus [87], was auf unterschiedliche Werte für den Exponenten γ (vgl. Tabelle 4.1) zurückzuführen ist. In der gebrochenen Phase erzielen wir eine gute Übereinstimmung mit dem Gitterresultat aus [110]. Die starke Abweichung zum Gitterresultat [109] in der symmetrischen Phase für große x ist belanglos, da das

Gitterergebnis in diesem Bereich nicht mehr zuverlässig ist und einen kritischen Exponenten $\gamma = 2$ vorhersagt. Wenn man die beträchtlichen Abweichungen perturbativer Ergebnisse (z.B. im Rahmen einer ϵ -Entwicklung) von den Gitterresultaten berücksichtigt (für einen Vergleich siehe [78, 110]), so ist das TRG-Ergebnis eine nicht triviale Leistung.

Wir fahren nun fort mit der Untersuchung des kritischen Verhaltens für $N = 4$. Dieser Fall ist interessant, da er das universelle Verhalten des chiralen Phasenübergangs der QCD im Limes von nur zwei Quark-Flavors (up- und down-Quark) beschreibt. In der gebrochenen Phase treten ein massives (Sigma-Meson) und drei masselose Teilchen (Pionen) auf. In der symmetrischen Phase haben alle Teilchen die gleiche Masse $V'(0)$. Aufgrund der Existenz der masselosen Pionen für $N > 1$ sind perturbative Berechnungen viel problematischer als im Falle $N = 1$.

In Abbildung 4.4 stellen wir den Verlauf der kritischen Temperatur als Funktion der $(T=0)$ -Kopplung $g_{T=0}$ im Verhältnis zum ein-loop perturbativen Ergebnis aus (4.40) dar. Der Vergleich mit den ERG-Resultaten aus [67] (Quadrate) zeigt auch für $N = 4$ eine sehr gute Übereinstimmung.

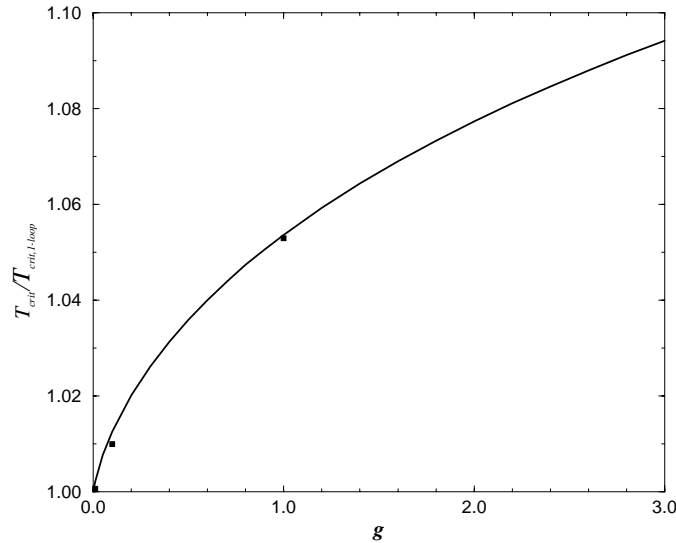


Abbildung 4.4: Das Verhältnis $T_c/T_{c,1-loop}$ in Abhängigkeit der $(T=0)$ -Kopplung g für $N = 4$. Zum Vergleich werden noch Ergebnisse aus [67] angeführt (Quadrate).

Die Abbildung 4.5 ist das Analogon zur Abbildung 4.3 und stellt unser Ergebnis für die Widom Skalenfunktion im Falle $N = 4$ dar. Im linken Teil der Abbildung erkennen wir wieder die Nullstelle von $f(x)$ für $x < 0$. Wir vergleichen unser Ergebnis für $f(x)$ (durchgezogene Linie) mit dem ERG-Resultat aus [111] (gestrichelte Linie), das im Matsubaraformalismus erzielt wurde. Die Normierung der ERG-Werte für $f(x)$ wurde mit Hilfe von zwei Punkten $x > 0$ an unsere Normierung angepasst. In der gebrochenen Phase erhalten wir eine nahezu perfekte Übereinstimmung mit dem ERG-Resultat, während die Abweichung in der symmetrischen Phase auf die unterschiedlichen Werte für die kritischen Exponenten γ (vgl. Tabelle 4.3) zurückzuführen sind. Ein Vergleich des ERG-Ergebnisses für die Widom-Skalenfunktion mit anderen Ergeb-

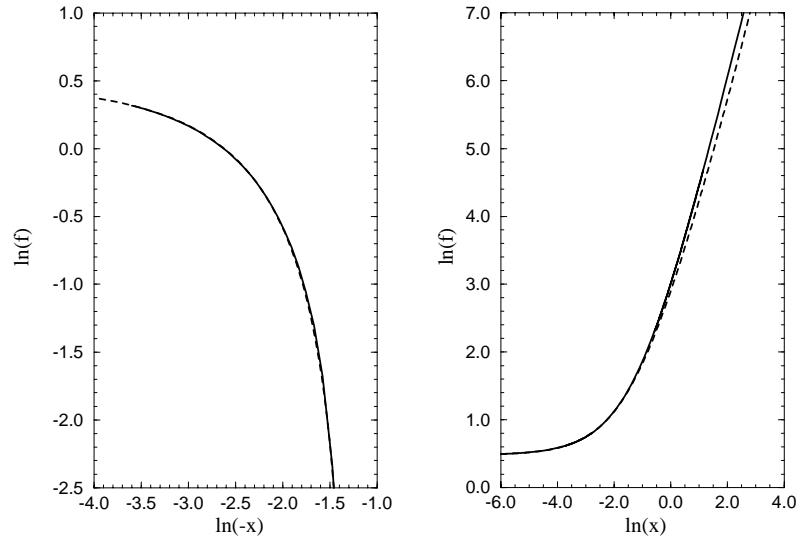


Abbildung 4.5: Die durchgezogene Linie zeigt den Logarithmus der Widom-Skalenfunktion $f(x)$, erzielt mit der TRG für $N = 4$ in symmetrischer (rechts) und gebrochener Phase (links). Die gestrichelten Linien zeigen das Ergebnis, das mit der ERG in [111] erzielt wurde.

	β	γ	δ	η	$\tilde{\nu}$
TRG	0.433	1.73	5.0	–	0.86
3d ERG + LPA [75]	0.409	1.556		0.034	0.791
MF ERG [111]	0.407	1.548	4.80	0.0344	0.787
3d PT [112]	0.38	1.44	4.82	0.03	0.73
3d MC [113]	0.384	1.48	4.85	0.025	0.748

Tabelle 4.3: Kritische Exponenten mittels verschiedener Methoden für $N = 4$. Die Abweichungen von den besten Werten liegen in der Größenordnung von 10%.

nissen, inklusive Gitter und ϵ -Entwicklung, findet man in [111]. Dabei wird offenbar, dass die Berechnung von $f(x)$ im Rahmen der ϵ -Entwicklung stärker vom Gitterresultat abweicht als die Berechnung mit Hilfe der ERG bzw. der TRG, deren Ergebnisse ja sehr gut übereinstimmen.

In Tabelle 4.3 vergleichen wir unsere Werte für die kritischen Exponenten mit den Gitterresultaten aus [113], den ERG-Resultaten aus [75, 111] und dem perturbativen Ergebnis einer sieben-loop Rechnung bei fester Dimension aus [112]. Bis auf die Resultate aus [111] (ERG bei endlicher Temperatur im Matsubaraformalismus) wurden alle Werte für die kritischen Exponenten in drei Dimensionen bei $T = 0$ erzielt. In [75, 111] wurde ebenfalls die Wellenfunktionsrenormierung berücksichtigt. Anders als im Falle $N = 1$ weichen unsere Ergebnisse für die kritischen Exponenten für $N = 4$ in der Größenordnung von $\sim 10\%$ von den übrigen Ergebnissen ab. Die Skalenrelationen $\nu = \gamma/2$, $\beta = \gamma/4$ und $\delta = 5$ sind auch für $N = 4$ hervorragend erfüllt.

	C_+/C_-	R_χ	λ_{4*}	λ_{6*}	B	C_+	D
					$(g_{T=0} = 0.1)$		
TRG	–	1.38	9.4	475	1.81	0.0797	1.62
MF ERG [111]	–	1.02					

Tabelle 4.4: Fixpunktwerte, Kritische Amplituden und Amplitudenverhältnisse mittels verschiedener Methoden für $N = 4$. Die Abweichungen von den besten Werten liegen in der Größenordnung von 10%.

Deshalb gehen wir davon aus, dass der Grund für die Abweichungen in der zu niedrigen Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung zu suchen ist, denn ein numerischer Fehler sollte sich auch in der Verletzung der Skalenrelationen stärker bemerkbar machen. Da die Dimension im Falle $N = 4$ sogar kleiner ist als für $N = 1$, kann der Hauptgrund für die Abweichungen nicht in der Vernachlässigung der Wellenfunktionsrenormierung Z_Λ liegen. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass die Berücksichtigung einer feldunabhängigen Wellenfunktionsrenormierung die Ergebnisse nicht wesentlich verbessert. Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit wäre somit die Berücksichtigung einer feldabhängigen Wellenfunktionsrenormierung. Neben der Wellenfunktionsrenormierung Z_Λ gibt es jedoch für $N > 1$ in niedrigster Ordnung der Ableitungsentwicklung noch einen Term von der Struktur $Z_\Lambda(\rho)\varphi^\alpha\varphi^\alpha\partial^2\varphi^\beta\varphi^\beta$, der für die stärkeren Abweichungen im Falle $N = 4$ verantwortlich sein könnte. Die Untersuchung der dreidimensionalen Theorie in LPA-Approximation und einer exponentiellen Cutoff-Funktion zeigte nur eine Abweichung in der Größenordnung von 3% gegenüber der Verwendung der Theta-Funktion als Cutoff.

In Tabelle 4.4 geben wir unsere Ergebnisse für die universelle Größe R_χ , die universellen Fixpunktkopplungen λ_{4*} und λ_{6*} und die nichtuniversellen Größen B , C_+ und D an. Für die Abweichung von R_χ gelten auch die vorigen Anmerkungen.

Zum Abschluss unserer numerischen Betrachtungen geben wir die Abhängigkeit der nichtuniversellen kritischen Temperatur T_c von N an. In Abbildung 4.6 stellen wir die kritische Temperatur als Funktion von N in Einheiten von $\sqrt{\rho_0}$ (Minimum bei $T = 0$) dar, wobei wir für die $(T = 0)$ -Kopplung g den Wert 0.1 wählen. Wir vergleichen unser Ergebnis (durchgezogene Linie) mit dem ERG-Ergebnis aus [67] (Quadrate) und mit der führenden Ordnung einer $1/N$ -Entwicklung. Wir erzielen gute Übereinstimmung mit dem ERG-Resultat (dies zeigte sich bereits in den Abbildung 4.2 und 4.4) und mit dem perturbativen Ergebnis für große N . Im Rahmen der TRG ist es sogar möglich, den Limes $N \rightarrow 0$ zu untersuchen.

Wir schließen nun die numerische Untersuchung des $O(N)$ -Modells ab. Wir konnten zeigen, dass die TRG ein geeignetes Mittel für die Untersuchung universeller und nichtuniverseller Größen an einem Phasenübergang zweiter Ordnung darstellt. Bereits mit relativ einfachen Näherungen (tree-Niveau Startpotenzial und Ableitungsentwicklung niedrigster Ordnung) konnten wir erstaunlich gute Ergebnisse erzielen, besonders im Falle $N = 1$. Für die Erklärung der signifikanteren Abweichungen im Falle $N = 4$ sind weitere detaillierte Untersuchungen notwendig.

Mit Hilfe der TRG konnten wir das kritische Verhalten in der $(3+1)$ -dimensionalen Theorie untersuchen. Dies ist aufgrund der Infrarotdivergenzen perturbativ nicht möglich. Wegen dimen-

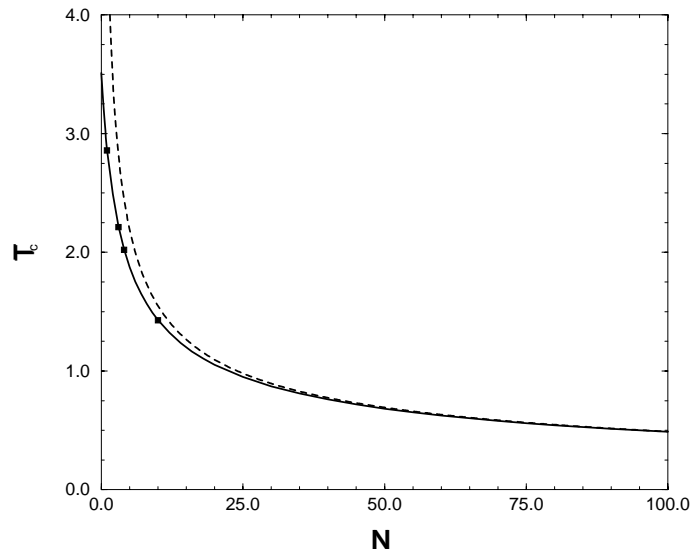


Abbildung 4.6: Die durchgezogene Linie zeigt die kritische Temperatur erzielt mit der TRG in Einheiten von ρ_0 in Abhängigkeit von N . Die $(T = 0)$ -Kopplung g beträgt 0.1. Zum Vergleich werden ERG-Ergebnisse aus [67] (Quadrate) und das Ergebnis der $1/N$ -Entwicklung (gestrichelte Linie) angeführt.

sionaler Reduktion lassen sich die universellen Größen perturbativ mit hoher Genauigkeit in drei Dimensionen bei $T = 0$ berechnen. Für die Untersuchung nichtuniverseller Größen wie der kritischen Temperatur muss jedoch die $(3+1)$ -dimensionale thermale Theorie in Betracht gezogen werden.

In der Nähe der kritischen Temperatur reduzieren sich die dimensionslosen Flussgleichungen der TRG auf die Flussgleichungen der dreidimensionalen Theorie [78]. Damit hat man im Rahmen der TRG die Möglichkeit, den Mechanismus der dimensional Reduktion nichtperturbativ zu untersuchen. Insbesondere kann man die Kopplungen der dreidimensionalen Theorie, die man normalerweise durch perturbatives Matching berechnet, nichtperturbativ mit Hilfe der TRG direkt als Funktion der physikalischen Startkopplungen bei $T = 0$ bestimmen.

5. DER CHIRALE PHASENÜBERGANG IM QUARK–MESON–MODELL

In diesem Kapitel untersuchen wir anhand eines Quark–Meson–Modells den Einfluss von Fermionen im Rahmen der TRG. Wir betrachten das Gell–Mann–Levy lineare Sigma–Modell gekoppelt an zwei Quarks. Dieses Modell ist für unsere Zwecke sehr gut geeignet, da die Probleme, die bei der Berücksichtigung von Fermionen im Rahmen der TRG auftreten, deutlich sichtbar sind und nicht durch technische Schwierigkeiten verdeckt werden. Auch vom physikalischen Gesichtspunkt ist dieses Modell interessant, da es ein effektives Modell für den chiralen Phasenübergang der QCD im Limes von zwei Quark–Flavors darstellt. In den Arbeiten [120–122] wurde darauf hingewiesen, dass der chirale Phasenübergang der QCD im Limes von nur zwei masselosen Quarks zweiter Ordnung sein und zur Universalitätsklasse des dreidimensionalen $O(4)$ –symmetrischen Heisenberg–Modells gehören sollte. Die Fermionen entkoppeln am Phasenübergang und haben damit keinen Einfluss auf die universellen Eigenschaften. Unsere Untersuchungen zeigen, dass das Entkoppeln der Fermionen im Rahmen der TRG nicht auf triviale Art realisiert ist. Um die Entkoppelung der fermionischen Freiheitsgrade sicherzustellen, muss man im Fermion–Propagator noch eine effektive thermische Masse berücksichtigen, die auf nichtlokale Art durch thermische Fluktuationen erzeugt wird.

5.1. Das chirale Quark–Meson–Modell und seine Verbindung zur QCD

Wir stellen in diesem Abschnitt das chirale Quark–Meson–Modell vor und zeigen seine Verbindung zur QCD auf. In dem für den chiralen Phasenübergang relevanten Energiebereich ($\lesssim 600$ MeV) kann die QCD durch ein effektives Modell aus Quarks und Mesonen beschrieben werden [123, 124]. Die Mesonen sind gebundene Zustände aus Quarks und Anti–Quarks. Im Limes von nur zwei Quark–Flavors lautet die Lagrangedichte des Modells

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \text{Tr}(\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi) - V(\phi^\dagger, \phi) - h \bar{\psi} \left(\frac{\phi + \bar{\phi}}{2} + \gamma_5 \frac{\phi - \bar{\phi}}{2} \right) \psi, \quad (5.1)$$

mit $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ und $\phi = \frac{1}{2}(\sigma - i\eta)\mathbb{1} + \frac{1}{2}(a^k + i\pi^k)\tau_k$.

Die Fermionen werden durch ein Dublett und die Mesonen durch ein komplexes Bi–Dublett beschrieben. Mit Hilfe der Pauli–Matrizen τ_k lässt sich die komplexe $2 \otimes 2$ –Meson–Matrix durch die reellen Felder $\sigma, \eta', \vec{a}, \vec{\pi}$ darstellen. Diese enthalten das skalare und pseudoskalare Singlett σ und η' sowie das skalare und pseudoskalare Triplet \vec{a} und $\vec{\pi}$. Das pseudoskalare Triplet $\vec{\pi}$ entspricht den Pionen. Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir mit π^a die Zustände

$(\sigma, \vec{\pi})$ und mit a^a die Zustände (η', \vec{a}) . Durch Zerlegen der Fermionenfelder in die rechts- und linkshändigen Felder $\psi_R = (1 - \gamma_5)/2 \psi$ und $\psi_L = (1 + \gamma_5)/2 \psi$ lässt sich leicht zeigen, dass die Lagrangedichte unter der globalen Transformation $U_R(2) \otimes U_L(2) = SU_R(2) \otimes SU_L(2) \otimes U_A(1) \otimes U_V(1)$ invariant ist, wobei sich die Felder transformieren wie

$$\psi_R \rightarrow U_R(2)\psi_R, \quad \psi_L \rightarrow U_L(2)\psi_L \quad \text{und} \quad \phi \rightarrow U_R(2) \phi U_L^\dagger(2). \quad (5.2)$$

Die Gruppe $U_V(1)$ entspricht der globalen Baryonzahlerhaltung. Das Potenzial $V(\phi, \phi^\dagger)$ in (5.1) ist eine Funktion der Invarianten der globalen Symmetriegruppe. Bei $T=0$ wurde dieses Modell im Rahmen der ERG in [125] untersucht, wo sich eine ausführliche Beschreibung der Symmetrieeigenschaften findet.

Die Felder π^a und a^a bilden zwei irreduzible Darstellungen hinsichtlich der Gruppe $SU_R(2) \otimes SU_L(2)$, die lokal isomorph zur Gruppe $O(4)$ ist. Die axiale Symmetriegruppe $U_A(1)$ mischt die beiden Darstellungen, wodurch ihre Massen bei ungebrochener $U_A(1)$ identisch sein müssen. In der QCD ist die axiale Symmetrie aufgrund der Anomalie des axialen Vektorstromes gebrochen [126] und damit können die Massen der beiden Darstellungen unterschiedlich sein. Die anomale Brechung der axialen Gruppe $U(1)_A$ erfolgt ohne Auftreten von Goldstone–Bosonen. Die Massen der Teilchen (η', \vec{a}) liegen in der Größenordnung ~ 1 GeV und sind im für den chiralen Phasenübergang relevanten Temperaturbereich viel schwerer als die Massen des σ -Teilchens¹ und der Pionen $\vec{\pi}$. Wie in [125] gezeigt wird, besteht eine gute Näherung darin, ein Quark–Meson–Modell zu betrachten, in dem die Teilchen (η', \vec{a}) unendlich schwer sind und entkoppeln. Das Quark–Meson–Modell, das nach dem Entkoppeln der a^a Teilchen übrig bleibt, ist das Gell–Mann–Levy lineare Sigma–Modell [127], das nun an zwei Quarks gekoppelt ist. Die Lagrangedichte für dieses Modell ist gegeben durch (5.1), wobei die Mesonen durch $\phi = (\sigma \mathbb{1} + i\vec{\pi}\vec{\tau})/2$ beschrieben werden. Die Lagrangedichte ist invariant unter der globalen Symmetriegruppe $SU_R(2) \otimes SU_L(2) \otimes U_V(1) = SU_V(2) \otimes SU_A(2) \otimes U_V(1)$, hinsichtlich derer die Zustände π^a einen invarianten $O(4)$ -Vektor bilden. Das Potenzial $V(\phi, \phi^\dagger)$ ist eine Funktion der $O(4)$ -Invarianten ρ , mit $\rho = \text{Tr}(\phi^\dagger \phi) = (\sigma^2 + \pi^2)/2$.

Das lineare Sigma–Modell gekoppelt an zwei Quarks wurde in [111] im Rahmen der ERG bei $T \neq 0$ untersucht, wobei auch der Einfluss von Strommassen für die Quarks berücksichtigt wurde. Bei $T=0$ ist die chirale Symmetrie aufgrund des Vakuumerwartungswertes des Feldes σ gebrochen. Durch diesen wird die Symmetriegruppe $SU_A(2) \otimes SU_V(2) \otimes U_V(1)$ zur Gruppe $SU_V(2) \otimes U_V(1)$ gebrochen. Für verschwindende Quark–Strommassen äußert sich die Brechung der axialen $SU_A(2)$ im Auftreten dreier masseloser Goldstone–Bosonen, der Pionen. Im Falle masseloser Pionen wird die chirale Symmetrie bei einer kritischen Temperatur $T_c \sim 116$ MeV durch einen Phasenübergang zweiter Ordnung restauriert, dessen kritisches Verhalten zur Universalitätsklasse des $O(4)$ -Modells gehört. Für nichtverschwindende Quark–Strommassen sind die Pionen in der gebrochenen Phase nicht mehr masselos (in einem realistischen Modell haben die Pionen bei $T=0$ eine Masse ~ 135 MeV) und aus dem Phasenübergang zweiter Ordnung wird ein analytischer Crossover. Für einen Übersichtsartikel zu Phasenübergängen in der QCD verweisen wir auf [119].

¹Wegen der großen Breite spricht man oft nur von der Sigma–Resonanz und nicht vom Sigma–Teilchen. Wir wollen jedoch weiterhin von einem Teilchen sprechen.

Interessante Aspekte ergeben sich, wenn man das chemische Potenzial nicht vernachlässigt [117]. Man erwartet, dass sich bei genügend hoher Quark–Dichte ein Quark–Quark–Kondensat (Diquark–Kondensat) bildet, das die Farbinvarianz verletzt und zu Farb–Supraleitung führt [114–116]. In [111] wurde im Rahmen der ERG der chirale Phasenübergang im linearen Sigma–Modell gekoppelt an zwei Quarks bei $T = 0$ und endlichem chemischen Potenzial untersucht. Es zeigte sich, dass bei $T = 0$ die chirale Symmetrie bei genügend hohem chemischen Potenzial durch einen Phasenübergang erster Ordnung restauriert wird. In [118] wurde im Rahmen eines zwei Flavor Modells bei endlicher Temperatur sowohl die Bildung eines Quark–Antiquark– als auch eines Quark–Quark–Kondensats berücksichtigt. Damit konnte das QCD–Phasendiagramm als Funktion der Temperatur, des chemischen Potenzials und der Quark–Strommasse untersucht werden. Man erhält ein sehr vielfältiges Phasendiagramm der zwei–Flavor–QCD, das durch Experimente an den Schwerionen–Beschleunigern teilweise verifiziert werden kann.

5.2. Das lineare Sigma–Modell gekoppelt an zwei Quarks

Wir untersuchen nun mit Hilfe der TRG den chiralen Phasenübergang im linearen Sigma–Modell gekoppelt an zwei Quarks [80]. Wir berücksichtigen keine Strommassen für die Quarks, weshalb wir einen Phasenübergang zweiter Ordnung erwarten. Die Lagrangedichte des Modells ist gegeben durch (5.1), wobei die Mesonen durch

$$\phi = \frac{1}{2} (\sigma \mathbb{1} + i\vec{\pi}\vec{\tau}) , \quad \rho = \text{Tr}(\phi^\dagger \phi) = \frac{1}{2} (\sigma^2 + \pi^2) \quad (5.3)$$

beschrieben werden. Das Modell besitzt eine globale $SU_A(2) \otimes SU_V(2) \otimes U_V(1)$ –Symmetrie, die im skalaren Teil einer $O(4)$ –Symmetrie mit Invarianten ρ entspricht. Zur Berechnung von Flussgleichungen nehmen wir für die effektive Wirkung eine Ableitungsentwicklung vor und berücksichtigen nur die niedrigsten Terme. Wie wir sehen werden, führt diese Trunkierung im fermionischen Sektor des Modells zu Problemen, da die Fermionen in dieser Näherung am Phasenübergang nicht entkoppeln. Um das Entkoppeln der Fermionen sicherzustellen, müssen wir im Fermionenpropagator zusätzlich einen nichtlokalen thermischen Beitrag berücksichtigen, der nicht durch die Ableitungsentwicklung erfasst wird.

Im bosonischen Teil des Modells gehen wir analog zum $O(N)$ –Modell vor. Zusätzlich berücksichtigen wir noch den Einfluss einer feldunabhängigen Wellenfunktionsrenormierung Z_Λ , die wir am Minimum des Potenzials definieren. In der gebrochenen Phase erhalten wir die Flussgleichung für Wellenfunktionsrenormierung aus der Selbstenergie der Pionen. Da der Vakuumerwartungswert des Sigma–Feldes in der gebrochenen Phase nicht null ist, würde man bei der Berechnung der Flussgleichung aus der Selbstenergie des Sigma zusätzliche Beiträge $\sim \Lambda \partial_\Lambda Z'_\Lambda(\rho)$ erhalten. Aufgrund der durch das Thermalbad gebrochenen Lorentzsymmetrie gibt es im Prinzip zwei verschiedene Wellenfunktionsrenormierungen für \vec{p}^2 und p_0^2 . Wir berücksichtigen nur die Wellenfunktionsrenormierung im Zusammenhang mit \vec{p}^2 , denn diese ist mit der anomalen Dimension η am Phasenübergang verknüpft.

Betrachten wir nun die Näherungen im fermionischen Sektor. Die Wechselwirkung der Fermionen mit den Bosonen nähern wir ausschließlich durch den Yukawa–Term in der Lagrangedichte. Die Λ –abhängige Yukawa–Kopplung h_Λ nehmen wir als feldunabhängig an und werten

sie bei $\rho = 0$ und $p = 0$ aus. Wir berücksichtigen keine höherdimensionalen Fermionoperatoren. Dies hat auf die universellen Eigenschaften am Phasenübergang keinen Einfluss, da die Fermionen entkoppeln. Da wir uns in der vorliegenden Arbeit auf kleine Kopplungen beschränken, hat diese Näherung auf nichtuniverselle Größen, wie z.B. die kritische Temperatur, keinen großen Einfluss, da die Beiträge höherdimensionaler Operatoren durch höhere Potenzen der Yukawa–Kopplung unterdrückt sind. Wir berücksichtigen für die Fermionen keine Wellenfunktionsrenormierung. Mit diesen Näherungen ist aufgrund der chiralen Symmetrie die Selbstenergie der Fermionen in der symmetrischen Phase null und in der gebrochenen Phase durch die chirale Symmetrie brechende Masse $m_\chi = h_\Lambda \sqrt{2\rho}/2$ gegeben.

Mit den bisher beschriebenen Näherungen lautet der Ansatz für die modifizierte effektive Wirkung $\Gamma_\Lambda[\phi, \bar{\psi}, \psi]$, bei der die freie Wirkung subtrahiert wurde,

$$\Gamma_\Lambda[\phi, \bar{\psi}, \psi] = \int d^4x \left[(Z_\Lambda - 1) \text{Tr} (\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi) - U_\Lambda(\phi, \phi^\dagger) + m^2 \rho_1 - m^2 \rho_2 - \tilde{h}_\Lambda \bar{\psi} \left(\frac{\phi + \phi^\dagger}{2} + \gamma_5 \frac{\phi - \phi^\dagger}{2} \right) \psi \right]. \quad (5.4)$$

In (5.4) ist zu berücksichtigen, dass die Felder thermale Indizes besitzen und ρ_1 (ρ_2) die $O(4)$ –Invariante in Bezug auf die Felder mit dem thermalen Index 1 (2) ist.

5.2.1. Fermion–Entkopplung am Phasenübergang zweiter Ordnung

In [80] wird gezeigt, dass mit dem Ansatz (5.4) für die effektive Wirkung die Fermionen am Phasenübergang zweiter Ordnung für $\rho = 0$ nicht entkoppeln. Dies würde bedeuten, dass die Fermionen Einfluss auf die universellen Eigenschaften hätten, was im Widerspruch zu den theoretischen Erkenntnissen steht. Um das Entkoppeln der Fermionen im Rahmen der TRG sicherzustellen, muss man für die Fermion–Selbstenergie zusätzlich einen nichtlokalen thermalen Beitrag berücksichtigen, der die chirale Symmetrie nicht zerstört. Dieser Beitrag wirkt sich effektiv wie eine zusätzliche thermale Masse $\sim T$ aus, die bewirkt, dass die Fermionen am Phasenübergang vollständig entkoppeln. Die chirale Symmetrie verhindert bei den Fermionen die Erzeugung einer lokalen thermalen Masse. Da die Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung lokal ist (solange man nur endlich viele Terme berücksichtigt), kann man damit den nichtlokalen Anteil der Fermion–Selbstenergie nicht erfassen. Dieser nichtlokale Anteil geht über die Ableitungsentwicklung hinaus und muss ‘von Hand’ eingeführt werden. Wir erhalten diesen Beitrag durch die Berechnung des Diagramms (5.5) in ‘hard–thermal–loop’ HTL–Approximation [130, 131]. In HTL–Approximation vernachlässigt man den äußeren Impuls p und die Massen der Teilchen im Vergleich zum loop–Impuls k .



$$(5.5)$$

Für den thermalen Fermion-Propagator erhält man unter Einbeziehung der nichtlokalen HTL-Beiträge aus dem Diagramm (5.5)

$$\tilde{\Delta}^{-1}(p) = (1 + a(p_0, P))\not{p} + b(p_0, P)\not{\psi} - m_\chi \quad (5.6)$$

$$\tilde{\Delta}(p) = \frac{(1 + a(p_0, P))\not{p} + b(p_0, P)\not{\psi} + m_\chi}{(1 + a(p_0, P))^2 p^2 + 2(1 + a(p_0, P))b(p_0, P)p_0 + b(p_0, P)^2 - m_\chi^2} \quad (5.7)$$

$$= \frac{\not{p} + m_\chi + \mathcal{O}(m_T^2/P)}{p^2 - 2m_T^2 - m_\chi^2 + \mathcal{O}(m_T^4/P^2)}, \quad (5.8)$$

mit $(P = \sqrt{\vec{p}^2})$, $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ sowie

$$a(p_0, P) = \frac{m_T^2}{P^2} \left[1 - \frac{p_0}{2P} \ln \left(\frac{p_0 + P}{p_0 - P} \right) \right], \quad (5.9)$$

$$b(p_0, P) = \frac{m_T^2}{P} \left[-\frac{p_0}{P} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_0^2}{P^2} - 1 \right) \ln \left(\frac{p_0 + P}{p_0 - P} \right) \right], \quad (5.10)$$

$$m_T^2 = \frac{h^2}{16} T^2. \quad (5.11)$$

Für $m_\chi = 0$ ist der Propagator (5.7) chiral invariant. Wir wollen hier nicht weiter auf die Eigenschaften des Propagators (5.7) eingehen; eine ausführliche Untersuchung findet sich z.B. in [1]. Wie in [129] vorgeschlagen und in [80, 81] ausführlich diskutiert wurde, besteht eine gute Näherung darin, statt des komplizierten Propagators (5.7) die einfachere Näherung (5.8) zu verwenden, da diese bereits den entscheidenden Effekt einer thermalen Fermionmasse m_T berücksichtigt, ohne die chirale Symmetrie zu zerstören. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwenden wir somit für den Fermionpropagator den Ansatz (5.8). Durch diesen Ansatz wird gewährleistet, dass die chirale Symmetrie nur durch den Vakuumerwartungswert des Sigma-Feldes gebrochen wird und dass die Fermionen am Phasenübergang von der universellen Physik vollständig entkoppeln. Zum Schluss dieses Abschnitts geben wir noch eine wichtige Relation an, die wir zur Berechnung der Flussgleichung für die thermale Masse verwenden:

$$-\frac{1}{4} \text{Tr}_D \left\{ \not{p} [a(p_0, P)\not{p} + b(p_0, P)\not{\psi} - m_\chi] \right\} = m_T^2. \quad (5.12)$$

5.2.2. Die Flussgleichungen für das Modell

Mit den besprochenen Näherungen können wir nun die Flussgleichungen zur Untersuchung des linearen Sigma-Modells gekoppelt an Quarks ableiten. Da im Folgenden alle Größen Λ -abhängig sind, werden wir der Übersichtlichkeit wegen meistens den Index Λ weglassen. Bevor wir die Flussgleichungen ableiten können, müssen wir zunächst noch die Vakuumkonfiguration spezifizieren. In der gebrochenen Phase erlauben wir spontane Symmetriebrechung aufgrund eines nichtverschwindenden Vakuumerwartungswertes des Mesonfeldes ϕ , $\langle \phi \rangle = \frac{1}{2} \sigma \mathbb{1}$, wobei σ eine positive Konstante ist. Die Vakuumerwartungswerte der Pion- und Fermionfelder sind null. Wie bereits in Kapitel 4 erläutert, ist der Vakuumerwartungswert unabhängig vom thermalen Index. Aufgrund der $O(4)$ -Symmetrie ist das effektive Potenzial nur eine Funktion von

$\rho = ((\sigma^2 + \vec{\pi}^2)/2 = \sigma^2/2$. Wie in Kapitel 4 erläutert, haben in der gebrochenen Phase das Sigma und die Pionen unterschiedliche Massen (am Minimum des Potentials sind die Pionen masselos). In der gebrochenen Phase wird die chirale Symmetrie der Fermionen durch den Vakuum Erwartungswert des Mesonfeldes spontan gebrochen, die Isospin–Invarianz bleibt jedoch erhalten. Dies bedeutet, dass die beiden Fermion–Flavors identische Massen haben müssen. Die Feynman–Propagatoren für die Mesonen und die Fermionen lauten

$$\Delta_{\Lambda}^{\sigma}(k) = \frac{1}{Zk^2 - m_{\sigma}^2 + i\epsilon}, \quad \Delta_{\Lambda}^{\pi}(k) = \frac{1}{Zk^2 - m_{\pi}^2 + i\epsilon}, \quad \tilde{\Delta}_{\Lambda}(k) = \frac{\not{k} + m_{\chi}}{k^2 - m_{\psi}^2 + i\epsilon}, \quad (5.13)$$

wobei die Massen gegeben sind durch

$$m_{\sigma}^2 = V'(\rho) + 2\rho V''(\rho), \quad m_{\pi}^2 = V'(\rho), \quad m_{\psi}^2 = m_{\chi}^2 + 2m_T^2, \quad m_{\chi}^2 = \frac{1}{4}h^2\sigma^2 = \frac{1}{2}h^2\rho. \quad (5.14)$$

Aufgrund der Näherungen sind die Selbstenergien reell und damit sind die Kerne proportional zu den Spektraldichten. Aus (3.64) und (3.65) folgt

$$K_{\Lambda}^{\sigma}(k) = -2\pi\delta(Zk^2 - m_{\sigma}^2)N(|k_0|)\delta(|\vec{k}| - \Lambda), \quad (5.15)$$

$$K_{\Lambda}^{\pi}(k) = -2\pi\delta(Zk^2 - m_{\pi}^2)N(|k_0|)\delta(|\vec{k}| - \Lambda), \quad (5.16)$$

$$\tilde{K}_{\Lambda}(k) = 2\pi(\not{k} + m_{\chi})\delta(k^2 - m_{\psi}^2)\tilde{N}(|k_0|)\delta(|\vec{k}| - \Lambda). \quad (5.17)$$

Im Vergleich zur Flussgleichung (4.26) im $O(N)$ –Modell enthält die Flussgleichung für das effektive Potenzial nun zusätzlich einen Fermionanteil. Im Ansatz (5.4) für die effektive Wirkung tragen die verschiedenen Größen zunächst noch thermale Indizes. Insbesondere trägt die Yukawa–Kopplung drei thermale Indizes: $\tilde{h} = \tilde{h}_{ijk}$. Auf tree–Niveau ist natürlich nur \tilde{h}_{111} und $\tilde{h}_{222} = -\tilde{h}_{111}$ von null verschieden, aber bereits auf ein–loop–Niveau werden die übrigen Kopplungen erzeugt. Die effektive Yukawa–Kopplung h , die im Folgenden in den Flussgleichungen auftritt, ist gegeben durch die Summe $h = \sum_{j,k=1}^2 \tilde{h}_{1jk}$. Als Flussgleichung für das effektive Potenzial erhalten wir

$$\begin{aligned} \Lambda\partial_{\Lambda}V'(\rho) &= \frac{1}{2}(3V''(\rho) + 2\rho V'''(\rho)) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} K_{\Lambda}^{\sigma}(k) + 3\frac{1}{2}V''(\rho) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} K_{\Lambda}^{\pi}(k) \\ &\quad - hN_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr}_{\text{D}} \tilde{K}_{\Lambda}(k). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Der Faktor $N_c = 3$ im Fermionanteil berücksichtigt den Farbfreiheitsgrad der Fermionen.

Wir geben im Folgenden nur die Flussgleichungen für die renormierten, dimensionslosen Größen an, da wir damit die numerischen Untersuchungen durchführen. Die Flussgleichungen für die dimensionsbehafteten Größen finden sich z.B. in [80, 81]. Die renormierten, dimensionslosen Größen sind definiert durch

$$\lambda = \frac{\Lambda}{T}, \quad \hat{\rho} = \frac{Z\rho}{\Lambda T} = \frac{\rho_r}{\Lambda T}, \quad h_r = \frac{h}{\sqrt{Z}}, \quad \hat{V} = \frac{V}{\Lambda^3 T}, \quad (5.19)$$

$$\hat{m}_{\sigma}^2 = \frac{m_{\sigma}^2}{Z\Lambda^2} = \hat{V}' + 2\hat{\rho}\hat{V}'', \quad \hat{m}_{\pi}^2 = \hat{V}', \quad \hat{m}_{\psi}^2 = \frac{m_{\psi}^2}{\Lambda^2} = \frac{1}{2\lambda}h_r^2\hat{\rho} + 2\hat{m}_T^2. \quad (5.20)$$

Mit diesen Größen lautet die Flussgleichung für das skalierte Potenzial

$$\begin{aligned} \lambda \partial_\lambda \hat{V}'(\hat{\rho}) &= -2\hat{V}' + \eta \hat{V}' + \hat{V}'' \hat{\rho} (1 + \eta) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4\pi^2} \left[\frac{\hat{N}(\lambda \hat{\omega}_\sigma)}{\hat{\omega}_\sigma} (3\hat{V}'' + 2\hat{\rho} \hat{V}''') \theta(\hat{\omega}_\sigma^2) + 3 \frac{\hat{N}(\lambda \hat{\omega}_\pi)}{\hat{\omega}_\pi} \hat{V}'' \theta(\hat{\omega}_\pi^2) \right] \\ &\quad - h_r^2 N_c \frac{\lambda}{\pi^2} \frac{\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi)}{\hat{\omega}_\psi}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

mit

$$\hat{\omega}_\sigma^2 = 1 + \hat{V}' + 2\hat{\rho} \hat{V}'' , \quad \hat{\omega}_\pi^2 = 1 + \hat{V}' , \quad \hat{\omega}_\psi^2 = 1 + \hat{m}_\psi , \quad (5.22)$$

$$\hat{N}(x) = \frac{1}{e^x - 1} , \quad \hat{N}_\psi(x) = \frac{1}{e^x + 1} . \quad (5.23)$$

In obiger Flussgleichung haben wir die anomale Dimension η eingeführt:

$$\eta = -\frac{1}{Z} \Lambda \partial_\Lambda Z . \quad (5.24)$$

Zur Berechnung von η benötigen wir die Flussgleichung für die Wellenfunktionsrenormierung. Diese erhalten wir aus der Flussgleichung für die retardierte Pion-Selbstenergie, indem wir $p_0 = 0$ setzen, um $\vec{p}^2 = 0$ entwickeln und den Anteil proportional zu \vec{p}^2 am Minimum κ_0 auswerten:

$$\begin{aligned} \eta &= \hat{\rho} (\hat{V}'')^2 \frac{\lambda}{12\pi^2} \left(F(\hat{\omega}_\sigma, \hat{\omega}_\pi) + F(\hat{\omega}_\pi, \hat{\omega}_\sigma) \right) \Big|_{\hat{\rho}=\kappa_0} + N_c \frac{h_r^2}{12\pi^2 \hat{\omega}_\psi^7} \times \\ &\quad \left\{ [6\hat{\omega}_\psi^4 - 3\hat{\omega}_\psi^2 - 9\hat{m}_T^2 \hat{\omega}_\psi^2 + 10\hat{m}_T^2] (-\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi) + \lambda \hat{\omega}_\psi \hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi) (\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi) - 1)) + \right. \\ &\quad [\hat{\omega}_\psi^2 + 3\hat{\omega}_\psi^2 \hat{m}_T^2 - 4\hat{m}_T^2] \lambda^2 \hat{\omega}_\psi^2 \hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi) (\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi) - 1) (2\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi) - 1) + \\ &\quad \left. \frac{2}{3} \hat{m}_T^2 \lambda^3 \hat{\omega}_\psi^3 \hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi) (\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi) - 1) (6\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi)^2 - 6\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_\psi) + 1) \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die Funktion $F(\hat{\omega}_\sigma, \hat{\omega}_\pi)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F(\hat{\omega}_\sigma, \hat{\omega}_\pi) &= \frac{1}{\hat{\omega}_\sigma \hat{\omega}_\pi^5 (\hat{\omega}_\sigma^2 - \hat{\omega}_\pi^2)^3} \left\{ \hat{N}(\lambda \hat{\omega}_\sigma) (6\hat{\omega}_\pi^7 - 8\hat{\omega}_\pi^5 - 6\hat{\omega}_\sigma^2 \hat{\omega}_\pi^5) \right. \\ &\quad + \hat{N}(\lambda \hat{\omega}_\pi) (3\hat{\omega}_\sigma^5 - 3\hat{\omega}_\sigma^5 \hat{\omega}_\pi^2 - 10\hat{\omega}_\sigma^3 \hat{\omega}_\pi^2 + 12\hat{\omega}_\sigma^3 \hat{\omega}_\pi^4 + 15\hat{\omega}_\sigma \hat{\omega}_\pi^4 - 9\hat{\omega}_\sigma \hat{\omega}_\pi^6) \\ &\quad - \lambda \hat{N}(\lambda \hat{\omega}_\pi) (\hat{N}(\lambda \hat{\omega}_\pi) + 1) (3\hat{\omega}_\sigma^5 \hat{\omega}_\pi^3 - 3\hat{\omega}_\sigma^5 \hat{\omega}_\pi + 10\hat{\omega}_\sigma^3 \hat{\omega}_\pi^3 - 6\hat{\omega}_\sigma^3 \hat{\omega}_\pi^5 + 3\hat{\omega}_\sigma \hat{\omega}_\pi^7 - 7\hat{\omega}_\sigma \hat{\omega}_\pi^5) \\ &\quad \left. + \lambda^2 \hat{N}(\lambda \hat{\omega}_\pi) (\hat{N}(\lambda \hat{\omega}_\pi) + 1) (2\hat{N}(\lambda \hat{\omega}_\pi) + 1) (\hat{\omega}_\sigma^5 \hat{\omega}_\pi^2 - 2\hat{\omega}_\sigma^3 \hat{\omega}_\pi^4 + \hat{\omega}_\sigma \hat{\omega}_\pi^6) \right\} . \end{aligned} \quad (5.26)$$

Die Fixpunktlösung für η erhalten wir, indem wir die Flussgleichung um $\lambda = 0$ entwickeln und die Fixpunktkopplungen einsetzen:

$$\eta_* = \frac{\hat{\rho}_* (\hat{V}''_*)^2}{6\pi^2} \frac{4\hat{\omega}_\sigma^4 - 3\hat{\omega}_\sigma^4 \hat{\omega}_\pi^2 + 4\hat{\omega}_\pi^4 - 3\hat{\omega}_\pi^4 \hat{\omega}_\sigma^2}{\hat{\omega}_\sigma^6 \hat{\omega}_\pi^6} \quad (5.27)$$

Die Fermionen tragen zur Fixpunktlösung nicht bei und haben damit auf das universelle Verhalten von η keinen Einfluss. Dies lässt sich auch im Falle des Potentials nachweisen. Für ein vollständiges System von Differenzialgleichungen benötigen wir noch die Flussgleichung für die Yukawa–Kopplung und die thermale Masse. Die Flussgleichung für die Yukawa–Kopplung erhalten wir, indem wir die Flussgleichung für die fermionische retardierte Selbstenergie $\tilde{\Sigma}_{11} + \tilde{\Sigma}_{12}$ berechnen und bei $p = 0$ und $\rho = 0$ auswerten:

$$\lambda \partial_\lambda h_r = \frac{h_r}{2} \eta - \frac{h_r^3}{4\pi^2} \frac{1}{\hat{\omega}_{\psi,0}^2 - \hat{\omega}_0^2} \left[\frac{\hat{N}(\lambda \hat{\omega}_0)}{\hat{\omega}_0} \theta(\hat{\omega}_0^2) + \frac{\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_{\psi,0})}{\hat{\omega}_{\psi,0}} \right], \quad (5.28)$$

wobei zu beachten ist, dass die Pionen und das Sigma bei $\rho = 0$ entartet sind. Im Limes $\lambda \rightarrow 0$ reduziert sich die Flussgleichung für die renormierte Yukawa–Kopplung auf $\lambda \partial_\lambda h_r = h_r \eta / 2$. Am Phasenübergang nimmt die anomale Dimension den positiven Fixpunktwert η_* an und damit verschwindet die renormierte Yukawa–Kopplung am Phasenübergang. Die Flussgleichung für die thermale Masse m_T erhalten wir ebenfalls aus der retardierten Selbstenergie der Fermionen unter Verwendung von Gleichung (5.12). Für eine konsistente Berechnung müssen wir die auftretenden Integrale in HTL–Approximation ausführen. In dieser Näherung folgt als Flussgleichung für die thermale Masse bei $\rho = 0$

$$\lambda \partial_\lambda m_T^2 = -T^2 \frac{h_r^2 \lambda^2}{4\pi^2} \left[\frac{\hat{N}(\lambda \hat{\omega}_0)}{\hat{\omega}_0} \theta(\hat{\omega}_0^2) + \frac{\hat{N}_\psi(\lambda \hat{\omega}_{\psi,0})}{\hat{\omega}_{\psi,0}} \right]. \quad (5.29)$$

In der gebrochenen Phase benötigen wir für die numerische Auswertung noch die Flussgleichung für das dimensionslose Minimum κ_0 . Diese erhalten wir aus der Bedingung $\hat{V}'(\kappa_0) = 0$:

$$\lambda \partial_\lambda \kappa_0 = - \frac{1}{\hat{V}''(\kappa_0)} \lambda \partial_\lambda \hat{V}'(\hat{\rho}) \Big|_{\hat{\rho}=\kappa_0}. \quad (5.30)$$

5.3. Numerische Auswertung

Wir präsentieren nun die numerischen Ergebnisse, wie wir sie in [80] mit den hier angegebenen Flussgleichungen erzielt haben. Durch Berücksichtigung der thermalen Masse m_T ist gewährleistet, dass die Fermionen am Phasenübergang vollständig entkoppeln. Für die universellen Größen ist daher nur der skalare Anteil des Modells verantwortlich. Wir erwarten deshalb, dass der Phasenübergang zur Universalitätsklasse des dreidimensionalen $O(4)$ –symmetrischen Heisenberg–Modells gehört. Wir geben im Folgenden alle dimensionsbehafteten Größen in Einheiten des skalaren Minimums bei $T = 0$ an.

Bei der Integration der Flussgleichung für das effektive Potenzial gehen wir wie in Kapitel 4 beschrieben vor. Als Startpotenzial bei $T = 0$ verwenden wir das symmetriebrechende tree–Niveau–Potenzial (4.39). Damit beschränken wir uns bei der numerischen Auswertung auf kleine Kopplungen, da wir sonst Quantenkorrekturen zum Startpotenzial berücksichtigen müssten. Da wir im fermionischen Sektor keine höherdimensionalen Operatoren einbeziehen, ist das hier

beschriebene Modell nur für kleine Yukawa-Kopplungen zuverlässig ¹. Als Startwert für die Wellenfunktionsrenormierung verwenden wir den tree-Niveau-Wert $Z = 1$. Der Startwert für die thermale Masse m_T beträgt null, da diese für $T = 0$ verschwindet.

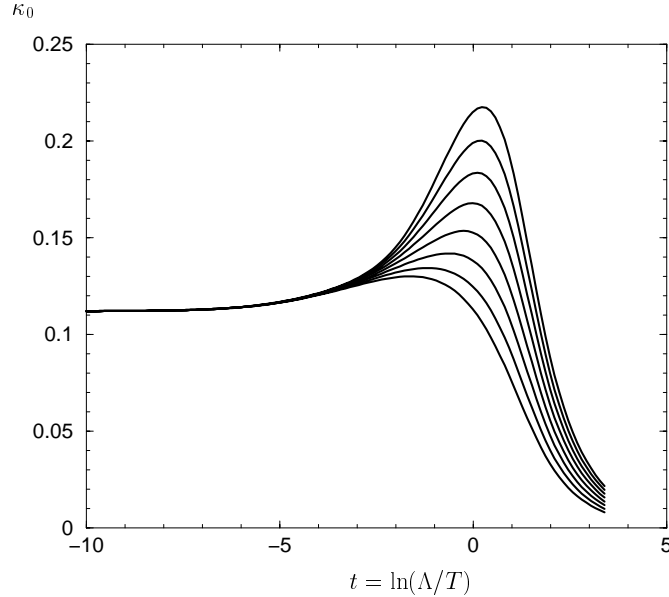


Abbildung 5.1: Das Laufen des dimensionslosen Minimums κ_0 bei der kritischen Temperatur für verschiedene Werte der Yukawa-Kopplung $h_{T=0}$. Die skalare Kopplung $g_{T=0}$ hat den Wert 0.1 (das Verhältnis $x = h_{T=0}^2/g_{T=0}$ von der untersten zur obersten Kurve beträgt $x = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4$).

Die Abbildung 5.1 zeigt das Laufen des dimensionslosen Minimums bei der kritischen Temperatur für verschiedene Werte der Yukawa-Kopplung bei $T = 0$. Die skalare Vierpunktkopplung bei $T = 0$ beträgt für alle Kurven $g_{T=0} = 0.1$. Man erkennt, dass die Fermionen hauptsächlich im Bereich $\Lambda \sim T$ zu der Flussgleichung für das Minimum beitragen. Für $\ln(\Lambda/T) \lesssim -4$ sind die Fermionen praktisch entkoppelt, und der Fixpunktwert des Minimums ist unabhängig von der Wahl der Yukawa-Kopplung.

Nun wenden wir uns der kritischen Temperatur zu. Das führende perturbative Ergebnis für die kritische Temperatur lautet

$$T_c^{\text{pert}} = \sqrt{\frac{4\rho_0(T=0)}{1+x}}, \quad \text{mit} \quad x = \frac{h_{T=0}^2}{g_{T=0}}. \quad (5.31)$$

¹Um das Modell mit der QCD vergleichen zu können, muss man jedoch große Kopplungen bei $T = 0$ einsetzen ($h \sim 6$ und $g_{T=0} \sim 40$), die durch die Pion-Zerfallskonstante $f_\pi \approx 93$ MeV, die Quark-Masse $m_\chi \approx 300$ MeV und die Masse der Sigma-Resonanz $m_\sigma \approx 600$ MeV bestimmt werden. In [81] wurde mit diesen großen Start-Kopplungen die kritische Temperatur und der Verlauf des chiralen Kondensats als Funktion der Temperatur bestimmt. Trotz der starken Simplifikationen befinden sich die TRG-Resultate in sehr guter Übereinstimmung mit anderen QCD-Berechnungen. Dies ist umso erstaunlicher, da es sich bei der kritischen Temperatur und dem chiralen Kondensat um nichtuniverselle Größen handelt, die von den $(T = 0)$ -Näherungen abhängen.

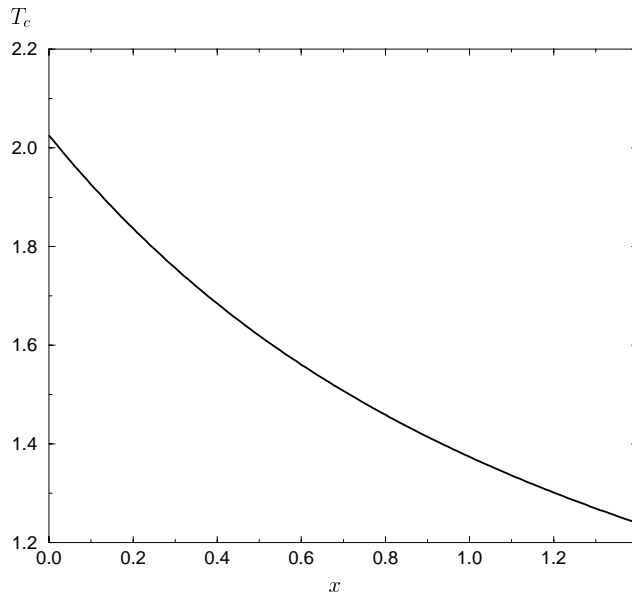


Abbildung 5.2: Die kritische Temperatur in Einheiten von $\sqrt{\rho_0(T=0)}$ als Funktion von $x = h_{T=0}^2/g_{T=0}$ für $g_{T=0} = 0.1$.

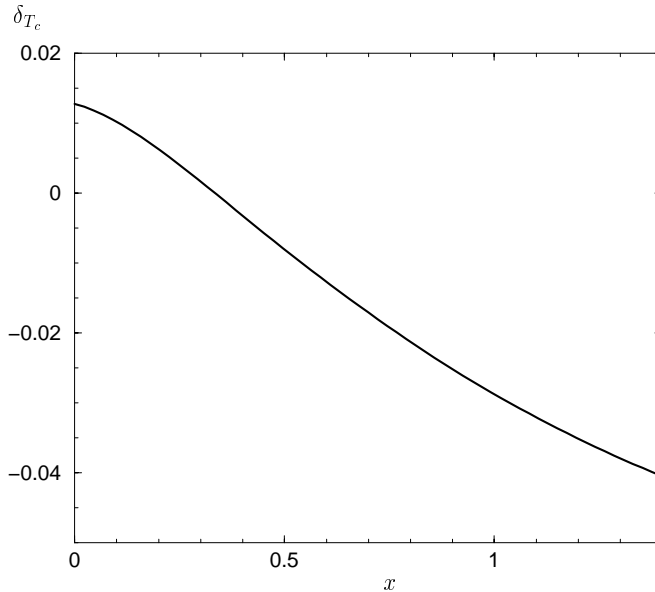


Abbildung 5.3: Die relative Abweichung der kritischen Temperatur vom perturbativen Ergebnis als Funktion von $x = h_{T=0}^2/g_{T=0}$ für $g_{T=0} = 0.1$.

In führender Ordnung Störungstheorie hängt die kritische Temperatur nur von dem Verhältnis der beiden Kopplungen ab. Für verschwindende Yukawa–Kopplung reduziert sich die Gleichung (5.31) auf das perturbative Ergebnis (4.40) im $O(N)$ –Modell für $N = 4$. Die Abbildung 5.2 zeigt

	β	γ	ν	δ	η
TRG	0.429	1.68	0.85	4.90	0.017
TRG + LO DE [79]	0.433	1.73	0.86	5.0	-
ERG [111]	0.407	1.548	0.787	4.80	0.0344
3d PT [112]	0.38	1.44	0.73	4.82	0.03
3d MC [113]	0.384	1.48	0.748	4.85	0.025

Tabelle 5.1: *Kritische Exponenten im $O(4)$ -Modell.*

den Verlauf der kritischen Temperatur als Funktion von x . In dieser Abbildung variieren wir x dadurch, dass wir die Yukawa-Kopplung verändern und die skalare Kopplung konstant lassen. In Abbildung 5.3 stellen wir die relative Abweichung $\delta_{T_c} = 2(T_c - T_c^{\text{pert}})/(T_c + T_c^{\text{pert}})$ unseres Ergebnisses zum perturbativen Ergebnis dar. Für $x = 0$ verschwindet die relative Abweichung nicht, da wir in diesem Limes nur die Yukawa-Kopplung null setzen, die skalare Kopplung jedoch immer noch $g_{T=0} = 0.1$ beträgt. Erst wenn man zusätzlich den Limes $g_{T=0} \rightarrow 0$ betrachtet, erhalten wir völlige Übereinstimmung mit dem störungstheoretischen Resultat.

Aufgrund der Fermion-Entkopplung ist das universelle Verhalten des Quark-Meson-Modells identisch mit dem des dreidimensionalen $O(4)$ -symmetrischen Heisenberg-Modells. Zur Bestimmung kritischer Exponenten muss man nur den skalaren Anteil des Modells in Betracht ziehen. In niedrigster Ordnung der Ableitungsentwicklung wurden diese bereits in Kapitel 4, Tabelle 4.3 angegeben und ausführlich diskutiert. In diesem Kapitel berücksichtigen wir zusätzlich eine feldunabhängige skalare Wellenfunktionsrenormierung. Unsere Ergebnisse für die kritischen Exponenten sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Es zeigt sich, dass die Hinzunahme einer feldunabhängigen Wellenfunktionsrenormierung die Werte für die kritischen Exponenten im Vergleich zu den Ergebnissen aus Kapitel 4 nicht wesentlich verbessert. Die Skalenrelationen sind mit einer Genauigkeit von weniger als 0.5% erfüllt, was gegen einen numerischen Fehler spricht. Unsere Flussgleichungen erlauben unter Einbeziehung der Wellenfunktionsrenormierung auch die Bestimmung der kritischen Exponenten im $O(1)$ -Modell. In [132] wurden unter Berücksichtigung der Wellenfunktionsrenormierung wilsonsche Renormierungsgruppen-gleichungen mit einem Theta-Funktions-Cutoff im dreidimensionalen $O(1)$ -Modell berechnet. Wir haben überprüft, dass sich die skalaren Anteile unserer Flussgleichungen auf die Flussgleichungen aus [132] reduzieren. Damit würden wir für $N = 1$ die Ergebnisse aus [132] reproduzieren, die gut mit denjenigen Ergebnissen übereinstimmen, die mittels anderer Methoden erzielt wurden. Für eine ausführliche Diskussion möglicher Ursachen für die stärkere Abweichung der kritischen Exponenten im $O(4)$ -Modell verweisen wir auf Kapitel 4. Damit wollen wir die numerische Diskussion unserer Ergebnisse abschließen.

Wir haben in diesem Kapitel die Formulierung der TRG auf Theorien erweitert, die Fermionen enthalten und damit das universelle Verhalten des chiralen Phasenübergangs im Limes von nur zwei Quark-Flavors untersucht. Es zeigte sich, dass die Entkopplung der Fermionen an einem Phasenübergang zweiter Ordnung im Rahmen der TRG nicht trivialerweise realisiert ist. Um das Entkoppeln der Fermionen sicherzustellen, muss man im Propagator eine thermale

Masse berücksichtigen, die auf chiral invariante Weise durch die nichtlokale Struktur des HTL–Fermionpropagators erzeugt wird. Wir haben das universelle Verhalten am chiralen Phasenübergang untersucht und bestätigen können, dass der Phasenübergang zur Universalitätsklasse des dreidimensionalen $O(4)$ –symmetrischen Heisenberg–Modells gehört. Trotz der relativ starken Simplifikationen konnten wir für die kritischen Exponenten gute Werte erzielen.

Nachdem wir in den letzten beiden Kapiteln die Anwendbarkeit der TRG zur Untersuchung kritischer Phänomene unter Beweis gestellt haben, wollen wir im nächsten Kapitel mit Hilfe der TRG den Imaginärteil der skalaren Selbstenergie berechnen und damit die Plasmon–Dämpfungsrate bestimmen.

6. DIE PLASMON–DÄMPFUNGSRATE

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir uns mit dem kritischen Verhalten von Quantenfeldtheorien an Phasenübergängen zweiter Ordnung befasst. Dabei zeigte sich, dass man mit Hilfe der TRG das kritische Verhalten sehr gut beschreiben kann.

In diesem Kapitel wollen wir im Rahmen der TRG Imaginärteile von Greenfunktionen bestimmen. Einer der Hauptvorteile der Formulierung der Renormierungsgruppe im Realzeitformalismus besteht ja darin, dass man damit nichtstatische physikalische Größen numerisch berechnen kann. Im Matsubaraformalismus kann man nichtstatische Größen zwar auch numerisch bestimmen, um jedoch zu physikalisch relevanten Aussagen zu gelangen, muss man analytisch zu reeller Zeit fortsetzen. Die analytische Fortsetzung nur numerisch bekannter Funktionen ist jedoch unmöglich.

In diesem Kapitel wollen wir uns der Berechnung der Plasmon–Dämpfungsrate γ zuwenden. Die thermale Dämpfungsrate ist definiert als

$$\gamma(k) = \frac{\Im \Pi_R(k_0, \vec{k})}{2k_0} = \frac{\Im \Pi(k_0, \vec{k})}{2|k_0|}. \quad (6.1)$$

Die Dämpfungsrate ist proportional zum Imaginärteil der retardierten bzw. Feynman–Selbstenergie. Wie im Anhang A erläutert, gibt $\tau = 1/2\gamma$ die Relaxationszeit einer Verteilung mit Energie k_0 und Impuls \vec{k} an, die leicht von der Gleichgewichtsverteilung $N(|k_0|)$ abweicht. Vom Gleichgewicht abweichende Fluktuationen werden somit im Plasma exponentiell mit der Relaxationszeit τ gedämpft.

Im thermischen Gleichgewicht werden die Eigenschaften der Teilchen, die man von $T = 0$ her kennt, aufgrund ihrer Wechselwirkung mit dem Plasma verändert [18]. Man spricht deshalb von kollektiven Anregungen bzw. von Quasi–Teilchen [1]. Oft können diese Quasi–Teilchen mit den Teilchen bei $T = 0$ identifiziert werden, wobei jedoch deren Eigenschaften aufgrund der Temperatur modifiziert sind. Daneben gibt es jedoch auch Quasi–Teilchen, die kein Pendant bei $T = 0$ besitzen und rein thermische Anregungen sind. Im bosonischen Fall spricht man bei den Quasi–Teilchen auch von Plasmonen, im fermionischen Fall von Plasminos.

Im Folgenden wollen wir die Plasmon–Dämpfungsrate im $O(1)$ –Modell mit Hilfe der TRG berechnen. Perturbativ ist die Dämpfungsrate ein zwei–loop Effekt und wurde z.B. in [20, 24, 25] im Hochtemperaturlimes mit Hilfe resummierter Störungstheorie berechnet. In Kapitel 4 wurde ausführlich diskutiert, dass im $O(1)$ –Modell bei einer kritischen Temperatur ein Phasenübergang zweiter Ordnung auftritt, falls die Symmetrie bei $T = 0$ spontan gebrochen ist. Interessant für uns ist das Verhalten der Dämpfungsrate in der Nähe dieses Phasenüberganges, da dort Störungstheorie nicht mehr anwendbar ist. An Phasenübergängen zweiter Ordnung sind die langreichweitigen Korrelationen entscheidend, da aufgrund der verschwindenden Plasmon–Masse die Korrelati-

onslänge divergiert. Die störungstheoretische Berechnung der Plasmon–Dämpfungsrate bei verschwindendem äußeren Impuls liefert jedoch ein divergentes Resultat, was unter dem Begriff “critical speeding up” bekannt ist. Dies bedeutet, dass perturbativ die Relaxationszeit für die Dämpfung langreichweitiger nichtthermischer Fluktuationen verschwindet. Damit würden selbst bei beliebig schnellem Durchlaufen des Phasenübergangs bei den langreichweitigen Korrelationen keine Abweichungen vom Gleichgewicht auftreten, da diese instantan gedämpft würden. Wie experimentelle Messungen zeigen und auch aufgrund der Theorie kritischer Phänomene erwartet wird [6, 13], verschwindet die Dämpfungsrate langreichweitiger Fluktuationen an einem Phasenübergang zweiter Ordnung, d.h. es zeigt sich “critical slowing down”.

Die Formulierung der TRG im Realzeitformalismus erlaubt es, nichtstatische Größen wie die Plasmon–Dämpfungsrate numerisch zu bestimmen. Insbesondere sollte man mit Hilfe dieser nichtperturbativen Formulierung das “critical slowing down” reproduzieren können. Die Plasmon–Dämpfungsrate wurde zum ersten Mal im Rahmen der TRG in [22] berechnet, wobei wie erwartet “critical slowing down” beobachtet wurde. Dabei ist entscheidend, dass bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung neben der Masse auch die Kopplung einem Skalengesetz folgt und gegen null geht (vgl. Kapitel 4). Bei der Berechnung in [22] wurden jedoch nur Felder mit thermalen 1–Beinen berücksichtigt, der Beitrag der Dreipunktfunktion wurde vernachlässigt und die Impulsabhängigkeit der Vierpunktfunktion wurde nicht richtig implementiert.

Wir wollen im Folgenden eine konsistente Berechnung der Plasmon–Dämpfungsrate bei verschwindendem äußeren Impuls durchführen, wobei wir Felder mit beliebigem thermalen Index berücksichtigen werden. Wie sich zeigen wird, werden damit viele undefinierte Ausdrücke verschwinden, die bei der Berechnung mit ausschließlich 1–Beinen auftreten würden. Dieser Sachverhalt ist in Störungstheorie bekannt, wo man sog. “pinch singularities” erhält, wenn man nur 1–Beine berücksichtigt. In der gebrochenen Phase werden wir zusätzlich den Beitrag der Dreipunktfunktion in Betracht ziehen.

6.1. Die Plasmon–Dämpfungsrate in der symmetrischen Phase

6.1.1. Die Flussgleichungen für die Imaginärteile

Bevor wir uns der etwas umfangreicheren Untersuchung der Plasmon–Dämpfungsrate in der gebrochenen Phase zuwenden, wollen wir zunächst die Dämpfungsrate in der symmetrischen Phase bestimmen [21]. Zur Berechnung der Plasmon–Dämpfungsrate benötigen wir den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie. Die retardierte Selbstenergie wollen wir mit Hilfe von (A.68) berechnen,

$$\Pi_R(p) = \Sigma_{11}(p) + \Sigma_{12}(p). \quad (6.2)$$

Zur Vereinfachung der Notation wollen wir im Folgenden bei den n –Punkt–Funktionen nur die äußeren Impulse und thermalen Indizes anführen, während wir die inneren Impulse und Indizes, über die die Spurbildung erfolgt, weglassen.

Als Flussgleichung für die retardierte Selbstenergie erhalten wir in der symmetrischen Phase

$$\Lambda \partial_\Lambda \Pi_R(p) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1i}^{(4)}(p, -p) \right), \quad (6.3)$$

wobei die Spur über die Impulse und die thermalen Indizes zu bilden ist. Diagrammatisch erhalten wir für (6.3)

$$\Lambda \partial_\Lambda \text{---}\bullet\text{---} = \frac{1}{2} \text{---}\bullet\text{---} \circlearrowleft^K \text{---}\bullet\text{---}$$

Nach dem Ausführen der thermalen Spur folgt:

$$\Lambda \partial_\Lambda \Pi_R(p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K(k) \sum_{i,j,k} \Gamma_{1ijk}^{(4)}(p, -p, k, -k), \quad (6.4)$$

Da der Kern rein reell ist, erhalten wir für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie nur dann einen Beitrag, wenn wir den Imaginärteil der impulsabhängigen Vierpunktfunktion berücksichtigen. In Gleichung (6.4) tritt eine Summe von Vierpunktfunktionen mit unterschiedlichen thermalen Indizes auf. Als Näherung könnte man somit für die Vierpunktfunktion nur thermale 1–Beine berücksichtigen. Dies führt jedoch zu Problemen, denn der Imaginärteil von $\Pi_R(p)$ ist antisymmetrisch in p_0 , während der Imaginärteil von $\Gamma_{1111}^{(4)}(p, -p, k, -k)$ symmetrisch in p_0 ist. Zusätzlich würden in der gebrochenen Phase aufgrund von Diagrammen, die Dreipunkt Kopplungen enthalten, “pinching singularities” auftreten. Um eine konsistente Flussgleichung zu erhalten, muss man somit die verschiedenen thermalen Indizes berücksichtigen.

Wir wollen im weiteren Verlauf die Notation

$$\sum_{i,j,k} \Gamma_{1ijk}^{(4)}(p, -p, k, -k) = \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k) \quad (6.5)$$

verwenden. Weiter führen wir noch die impulsunabhängigen Kopplungen $\bar{\Gamma}^{(n)}$ ein:

$$\bar{\Gamma}^{(n)} = \sum_{i_2 \dots i_n=1}^2 \Gamma_{1i_2 \dots i_n}^{(n)} = \frac{\partial^n V(\rho)}{(\partial \varphi)^n} \quad (6.6)$$

mit $\rho = \varphi^2/2$. Die Kopplungen $\bar{\Gamma}^{(n)}$ sind somit die Ableitungen des physikalischen effektiven Potentials $V(\rho)$ nach dem Feld φ . Für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie erhalten wir

$$\Lambda \partial_\Lambda \Im \Pi_R(p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K(k) \Im \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k). \quad (6.7)$$

Die Flussgleichung für die impulsabhängige Vierpunktfunktion lautet in der symmetrischen Phase

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k) = & \\ & + \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1ijk}^{(6)}(p, -p, k, -k) \right) \\ & - \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1i}^{(4)}(p, -p) D \Gamma_{jk}^{(4)}(k, -k) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$- \sum_{i,j,k} \sum_{Q=\pm k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1j}^{(4)}(p, Q) D \Gamma_{ik}^{(4)}(-p, -Q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \quad (6.9)$$

Diese Gleichung ist eine exakte Flussgleichung. Um sie lösen zu können, sind wir gezwungen, Näherungen einzuführen:

- Wir werden die Sechspunktfunktion vernachlässigen.
- Wir werden im Kern und Propagator nur impulsunabhängige, reelle Selbstenergien berücksichtigen. Dies hat die wichtige Konsequenz, dass in den Flussgleichungen keine Imaginärteile resummiert werden.
- Wir werden auf der rechten Seite der Flussgleichung nur impulsunabhängige, reelle Vertizes berücksichtigen, die bei φ_0 (Vakuumkonfiguration) ausgewertet werden (in der symmetrischen Phase ist $\varphi_0 = 0$). Diese Näherung steht auf der gleichen Stufe wie das Vernachlässigen des Imaginärteils der Selbstenergie in den Flussgleichungen.

Wir werden somit in den Flussgleichungen in erster Näherung die Imaginärteile der Kopplungen und der Selbstenergie vernachlässigen. Dies ist insofern gerechtfertigt, als die Imaginärteile erst durch loop–Korrekturen generiert werden und keine tree–Niveau Startwerte haben. Aufgrund dieser Näherungen erhalten wir auf der rechten Seite der Flussgleichung nur über den Imaginärteil des Propagators einen Beitrag zum Imaginärteil der Vierpunktfunktion:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Im \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k) \Big|_{\varphi_0} = & \\ & - \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1i}^{(4)}(p, -p) \Im D \Gamma_{jk}^{(4)}(k, -k) \right) \Big|_{\varphi_0} + \text{Perm. der Vertizes} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$- \sum_{i,j,k} \sum_{Q=\pm k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1j}^{(4)}(p, Q) \Im D \Gamma_{ik}^{(4)}(-p, -Q) \right) \Big|_{\varphi_0} + \text{Perm. der Vertizes} . \quad (6.11)$$

Sodann müssen wir die thermalen Spuren berechnen. Da die Vertizes in unserer Näherung nicht impulsabhängig sind, kann man die thermalen Spuren unabhängig von den Impulsintegralen be-

rechnen. Dazu ist es zweckmäßig, die Form (A.54) des Propagators zu verwenden,

$$\begin{aligned}
D(k) &= \mathcal{P}(\Delta(k)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\rho(k) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{i}{2}\epsilon(k_0)\rho(k)(1 + 2N_\Lambda(|k_0|)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= R(k) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + iI_1(k) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + iI_2(k) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.12)
\end{aligned}$$

d.h.

$$R(k) = \mathcal{P}(\Delta(k)), \quad (6.13)$$

$$I_1(k) = -\frac{1}{2}\rho(k), \quad (6.14)$$

$$I_2(k) = -\frac{1}{2}\epsilon(k_0)\rho(k)(1 + 2N_\Lambda(|k_0|)). \quad (6.15)$$

Im Anhang C.2 werden die Formeln angegeben, mit deren Hilfe man die thermalen Spuren in der Flussgleichung ausführen kann. Es zeigt sich, dass der Imaginärteil des Propagators $\propto I_2(k)$ hierzu keinen Beitrag liefert. Der Grund dafür liegt darin, dass $I_2(k)$ symmetrisch ist in k , während $\Im\bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k)$ antisymmetrisch ist in p . Weiter wird im Anhang C.2 gezeigt, dass in den Flussgleichungen nach dem Ausführen der thermalen Spuren nur noch die Kopplungen $\bar{\Gamma}^{(n)}$ auftauchen, die Ableitungen des physikalischen Potentials entsprechen. Der Anteil (6.10) liefert keinen Beitrag zum Imaginärteil der Vierpunktfunktion, denn dieser Anteil würde bei der Selbstenergie zu einer imaginären Masse führen. Unter Berücksichtigung von $I_1(-k) = -I_1(k)$ erhält man schließlich

$$\Lambda\partial_\Lambda\Im\bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k) = -(\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \sum_{Q=\pm k} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+Q) \quad (6.16)$$

Zusammen mit (6.7) und der Flussgleichung für das effektive Potenzial, die wir bereits vom $O(N)$ -Modell her kennen, verfügen wir über ein geschlossenes System von Flussgleichungen. Bevor wir uns der numerischen Auswertung zuwenden, wollen wir zunächst das störungstheoretische Ergebnis reproduzieren. Perturbativ ist die Dämpfungsrate ein zwei-loop Effekt, und damit ist es durchaus nicht trivial, dieses Ergebnis mit Hilfe der TRG zu reproduzieren.

6.1.2. Vergleich mit Störungstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir mit Hilfe der TRG das perturbative Ergebnis für die Dämpfungsrate herleiten. Auch wenn die TRG einen nichtperturbativen Ansatz darstellt, möchte man in Situationen, wo Störungstheorie gültig ist, das führende perturbative Ergebnis reproduzieren. Wir wollen das perturbative Ergebnis als Konsistenztest berechnen. Die Herleitung wird zeigen, dass man den ($T = 0$)-Startwert für den Imaginärteil der Vierpunktfunktion nicht vernachlässigen darf, um das korrekte Ergebnis zu erhalten. Dies ist insofern von Bedeutung, als

der $(T = 0)$ –Imaginärteil der Vierpunktfunktion auf tree–Niveau verschwindet und man dafür erst auf ein–loop einen Beitrag erhält. In allen Anwendungen der TRG wurden jedoch bisher nur tree–Niveau Startwerte berücksichtigt [21, 22, 78–80].

Die TRG ist formal eine ein–loop Gleichung. Aufgrund der Tatsache, dass die Kopplungen und Propagatoren exakt sind, enthält die Flussgleichung allerdings beliebig hohe loop–Beiträge. Es ist trivial, ein–loop Gleichungen mit Hilfe der TRG zu reproduzieren, da man auf der rechten Seite der Flussgleichung nur die tree–Niveau Größen einsetzen muss. Um höhere loop–Beiträge zu erhalten, muss man iterativ vorgehen. Dies kann man sich am Besten dadurch veranschaulichen, dass man die rechte Seite der Flussgleichung nach \hbar entwickelt und berücksichtigt, dass sie bereits ein \hbar mehr enthält als die linke Seite ¹. Um ein n –loop Ergebnis zu erhalten, müssen wir auf der rechten Seite der Flussgleichung loop–Ordnungen bis zur Größe $(n - 1)$ berücksichtigen. Um also das perturbative Ergebnis für die Dämpfungsrate auf zwei–loop zu erhalten, müssen wir auf der rechten Seite von Gleichung (6.7) die ein–loop Größen einsetzen. Da der Imaginärteil der Vierpunktfunktion bereits eine ein–loop Größe ist, können wir die loop–Korrekturen zu den anderen Größen vernachlässigen.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wollen wir im Folgenden alle Λ –abhängigen Größen auch durch den Index Λ kennzeichnen. In der Flussgleichung (6.16) für den ein–loop Imaginärteil der Vierpunktfunktion müssen wir die tree–Niveau Werte für die Kopplung, den Kern und die Funktion $I_1(k)$ einsetzen. Auf tree–Niveau ist nur der Kern aufgrund der modifizierten Verteilungsfunktion $N_\Lambda(|k_0|)$ Λ –abhängig. Die Λ –Integration von (6.16) liefert den ein–loop Imaginärteil der Vierpunktfunktion:

$$\begin{aligned} \Im \bar{\Gamma}_\Lambda^{(4)}(p, -p, k, -k) &= \Im \bar{\Gamma}_{\Lambda=\infty}^{(4)}(p, -p, k, -k) \\ &\quad - (\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \sum_{Q=\pm k} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} I_1(p + q + Q) \int_\infty^\Lambda \frac{d\Lambda'}{\Lambda'} K_{\Lambda'}(q). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Wenn wir (6.17) in (6.7) einsetzen, erhalten wir die Flussgleichung für den zwei–loop Imaginärteil der retardierten Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Im \Pi_{R,\Lambda}(p) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda(k) \Im \bar{\Gamma}_\Lambda^{(4)}(p, -p, k, -k) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda(k) \Im \bar{\Gamma}_{\Lambda=\infty}^{(4)}(p, -p, k, -k) \\ &\quad - (\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_\infty^\Lambda \frac{d\Lambda'}{\Lambda'} I_1(p + k + q) K_\Lambda(k) K_{\Lambda'}(q). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Um (6.18) mit dem perturbativen Ergebnis vergleichen zu können, müssen wir noch die explizite Form des Kerns einsetzen:

$$K_\Lambda(k) = \epsilon(k_0) \rho(k) \Lambda \partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|), \quad (6.19)$$

¹In Einheiten, in denen \hbar nicht eins ist, muss die rechte Seite der Flussgleichung zusätzlich mit \hbar multipliziert werden.

wobei die Spektraldichte durch den tree–Niveau Ausdruck gegeben ist:

$$\epsilon(k_0)\rho(k) = 2\pi\delta(k^2 - m^2). \quad (6.20)$$

Die Funktion $I_1(k)$ ist gegeben durch (6.14):

$$I_1(k) = -\frac{1}{2}\rho(k) = -\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2 - m^2). \quad (6.21)$$

Das Einsetzen von (6.19) in (6.18) und das Ausführen der Λ' –Integration liefert

$$\begin{aligned} \Lambda\partial_\Lambda\Im\Pi_{R,\Lambda}(p) = & \\ \Lambda\partial_\Lambda \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_\Lambda(|k_0|) 2\pi\delta(k^2 - m^2) \Im\bar{\Gamma}_{\Lambda=\infty}^{(4)}(p, -p, k, -k) \right. & \\ \left. - (\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} 2\pi^2 I_1(p+k+q) \delta(k^2 - m^2) \delta(q^2 - m^2) N_\Lambda(|k_0|) N_\Lambda(|q_0|) \right\}, & \end{aligned} \quad (6.22)$$

wobei wir verwendeten, dass $N_{\Lambda=\infty}(|k_0|) = 0$ ist. Die nochmalige Integration von $\Lambda = \infty$ bis $\Lambda = 0$ liefert den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie auf zwei–loop Niveau:

$$\begin{aligned} \Im\Pi_R(p) = \Im\Pi_{R,\Lambda=\infty}(p) + & \\ + \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N(|k_0|) 2\pi\delta(k^2 - m^2) \Im\bar{\Gamma}_{\Lambda=\infty}^{(4)}(p, -p, k, -k) & \\ - (\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} 2\pi^2 I_1(p+k+q) \delta(k^2 - m^2) \delta(q^2 - m^2) N(|k_0|) N(|q_0|). & \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die Werte für $\Lambda = \infty$ sind die ($T=0$)–Startwerte. Der Imaginärteil der Vierpunktfunktion bei $T=0$ auf ein–loop Niveau lautet

$$\begin{aligned} \Im\bar{\Gamma}_{\Lambda=\infty}^{(4)}(p, -p, k, -k) = \sum_{Q=\pm k} \frac{\pi}{8} (\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_q \omega_{p+Q+q}} \times & \\ \left(\delta(p_0 + Q_0 - \omega_q - \omega_{p+Q+q}) - \delta(p_0 + Q_0 + \omega_q + \omega_{p+Q+q}) \right) & \end{aligned} \quad (6.24)$$

wobei $\omega_q = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$.

Damit sind wir soweit, (6.23) mit dem perturbativen Ergebnis vergleichen zu können. Das perturbative zwei–loop Ergebnis für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie kann man

z.B in [20] finden:

$$\begin{aligned}
\Im\Pi_R(p) = & -\frac{(\bar{\Gamma}^{(4)})^2}{12} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{8\omega_k\omega_q\omega_r} \left\{ \right. \\
& [\delta(p_0 + \omega_k + \omega_q + \omega_r) - \delta(p_0 - \omega_k - \omega_q - \omega_r)] \times \\
& \quad [1 + N_k + N_q + N_r + N_k N_q + N_k N_r + N_q N_r] + \\
& [\delta(p_0 + \omega_k + \omega_q - \omega_r) - \delta(p_0 - \omega_k - \omega_q + \omega_r)] \times \\
& \quad [N_r + N_k N_r + N_q N_r - N_k N_q] + \\
& [\delta(p_0 + \omega_k - \omega_q + \omega_r) - \delta(p_0 - \omega_k + \omega_q - \omega_r)] \times \\
& \quad [N_q + N_k N_q + N_r N_q - N_k N_r] + \\
& [\delta(p_0 - \omega_k + \omega_q + \omega_r) - \delta(p_0 + \omega_k - \omega_q - \omega_r)] \times \\
& \quad [N_k + N_k N_q + N_k N_r - N_q N_r] \left. \right\}, \quad (6.25)
\end{aligned}$$

wobei $\vec{r} = \vec{p} + \vec{k} + \vec{q}$, $N_k = N(\omega_k)$ usw. .

Wenn wir (6.24) in (6.23) einsetzen, die Integrationen über k_0 und q_0 durchführen und anschließend über die Impulse symmetrisieren, erhalten wir ebenfalls das perturbative Ergebnis (6.25). Der Anteil in (6.25) $\propto 1$ ist der ($T=0$)–Wert für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie. In der Gleichung (6.23) entspricht dies der Integrationskonstanten $\Im\Pi_{R,\Lambda=\infty}(p)$.

Damit konnten wir zeigen, dass man mit Hilfe der TRG durch Iteration das perturbative zwei-loop Ergebnis für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie erhält und dass man den korrekten Ausdruck nur dann reproduzieren kann, wenn man den Imaginärteil der Vierpunktfunktion bei $\Lambda = \infty$ als Startwert mitberücksichtigt. Ohne diesen Startwert erhalten wir in (6.23) nur den quadratischen Anteil in den Verteilungsfunktionen, und alle thermischen Beiträge linear in den Verteilungsfunktionen werden nicht erfasst. Der ($T=0$)–Startwert für den Imaginärteil der Vierpunktfunktion ist jedoch eine ein-loop Größe und verschwindet auf tree–Niveau. Da in den bisherigen Anwendungen der TRG nur tree–Niveau Startwerte berücksichtigt und alle Quantenkorrekturen vernachlässigt wurden, ist dies eine wichtige Erkenntnis, denn nur damit lassen sich verlässliche numerische Resultate produzieren.

6.1.3. Numerische Auswertung

Nachdem wir im vorhergehenden Abschnitt das perturbative zwei-loop Ergebnis für die Dämpfungsrate abgeleitet haben, wollen wir nun nichtperturbativ mit Hilfe der TRG die Plasmon–Dämpfungsrate bei verschwindendem räumlichen Impuls $\vec{p} = 0$ in einer bei $T=0$ masselosen ϕ^4 –Theorie berechnen. Für p_0 setzen wir die thermische Masse m_T des Plasmons ein, d.h. wir werten die Dämpfungsrate on–shell aus.

Um die Dämpfungsrate zu bestimmen, werden wir die Flussgleichungen für das Potenzial, den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie und der Vierpunktfunktion numerisch integrieren. Für den Realteil der effektiven Wirkung nehmen wir eine Ableitungsentwicklung vor und berücksichtigen nur das effektive Potenzial. Detailliertere Ausführungen dazu finden sich in Kapitel 4.

Für den Kern $K(k)$ und den Imaginärteil des Propagators $I_1(k)$ verwenden wir die bereits bekannte Form

$$\begin{aligned} K(k) &= -2\pi\Lambda\delta(k^2 - m_\Lambda^2)\delta(|\vec{k}| - \Lambda)N(|k_0|), \\ I_1(k) &= -\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2 - m_\Lambda^2), \end{aligned}$$

wobei $m_\Lambda^2 = \frac{\partial^2 V(0)}{\partial \varphi^2}$.

Aus der Flussgleichung (6.7) erhalten wir damit

$$\Lambda\partial_\Lambda \Im\Pi_R(p) = -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \frac{N(\omega_\Lambda)}{\omega_\Lambda} \Im\bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k_\Lambda, -k_\Lambda), \quad (6.26)$$

$$\text{mit } \omega_\Lambda = \sqrt{\Lambda^2 + m_\Lambda^2}, \quad k_\Lambda = (\omega_\Lambda, |\vec{k}_\Lambda| = \Lambda). \quad (6.27)$$

Da der äußere Impuls \vec{p} verschwindet, kann in der Flussgleichung (6.7) die Vierpunktfunktion $\bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k)$ nur von $|\vec{k}|$ abhängen. Aus (6.16) folgt für den Imaginärteil der Vierpunktfunktion bei $\vec{p} = 0$:

$$\Lambda\partial_\Lambda \Im\bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k) = -(\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \frac{\Lambda^2}{16\pi} \frac{N(\omega_\Lambda)}{\omega_\Lambda} \frac{1}{|\vec{k}|} \sum_{Q_0=\pm k_0} \sum_{q_0=\pm\omega_\Lambda} \epsilon(p_0 + Q_0 + q_0), \quad (6.28)$$

$$\text{falls } |(p_0 + Q_0 + q_0)^2 - \vec{k}^2 - \omega_\Lambda^2| \leq 2\Lambda|\vec{k}|, \quad (6.29)$$

wobei $\bar{\Gamma}^{(4)} = \frac{\partial^4 V(0)}{\partial \varphi^4}$.

Die Flussgleichung für das Potenzial $V(\rho)$ (mit $\rho = \varphi^2/2$) können wir vom $O(N)$ -Modell übernehmen:

$$\Lambda\partial_\Lambda V'(\rho) = -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \frac{N(\omega_\Lambda)}{\omega_\Lambda} (3V''(\rho) + 2\rho V'''(\rho)) \Theta(\omega_\Lambda^2). \quad (6.30)$$

Die Flussgleichungen (6.26), (6.28) und (6.30) bilden ein geschlossenes System von Differenzialgleichungen. Bevor wir dieses numerisch integrieren können, müssen wir zunächst noch die Randbedingungen spezifizieren. Für das Potenzial benutzen wir bei $\Lambda = \infty$ als Startwert das tree-Niveau Potenzial einer masselosen ϕ^4 -Theorie:

$$V_{\Lambda=\infty}(\rho) = g_{T=0} \frac{\rho^2}{6}. \quad (6.31)$$

Weiter benötigen wir den ein-loop Imaginärteil der Vierpunktfunktion bei $T = 0$. In einer masselosen Theorie kann man das Integral in (6.24) explizit ausführen und man erhält

$$\Im\bar{\Gamma}_{T=0}^{(4)}(p, -p, k, -k) = \frac{g_{T=0}^2}{32\pi}. \quad (6.32)$$

Der Imaginärteil der retardierten Selbstenergie verschwindet in einer masselosen Theorie bei $T = 0$. Mit diesen Randbedingungen haben wir nun ein geschlossenes System von Differenzialgleichungen, das wir numerisch integrieren können.

Bevor wir zur Diskussion der numerischen Ergebnisse kommen, wollen wir unsere Vorgehensweise bei der numerischen Integration der Flussgleichungen erläutern. Wir benötigen den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie bei $p = (m_T, \vec{p} = 0)$ und den Imaginärteil der Vierpunktfunktion bei unterschiedlichen Impulsen $k_\Lambda = (\omega_\Lambda, |\vec{k}_\Lambda| = \Lambda)$. Da die Flussgleichung für das Potenzial von den Imaginärteilen entkoppelt, können wir diese zunächst unabhängig von den Imaginärteilen numerisch integrieren und damit bei $\Lambda = 0$ die thermische Plasmon–Masse $m_T^2 = V''(0)$ bestimmen. Gleichzeitig mit der Integration des Potenzials erzeugen wir entlang der Integration eine Menge von Punkten $\{k_\Lambda\} = \{(\omega_\Lambda, \Lambda)\}$, für die wir den Imaginärteil der Vierpunktfunktion bestimmen werden. In einem zweiten Durchgang berücksichtigen wir nun ebenfalls die Flussgleichungen für die Imaginärteile. Wir integrieren für die Punktmenge $\{k_\Lambda\}$ die Flussgleichung für den Imaginärteil der Vierpunktfunktion und setzen die entsprechenden Werte in die Flussgleichung für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie ein. Bei der Integration der Flussgleichung in [22] wurde dies nicht berücksichtigt. Die Werte für die Imaginärteile der Vierpunktfunktion, die zwischen den Punkten $\{k_\Lambda\}$ liegen, bestimmen wir durch lineare Interpolation.

Aus dem Imaginärteil der retardierten Selbstenergie bei $\Lambda = 0$ erhalten wir die Dämpfungsrate durch

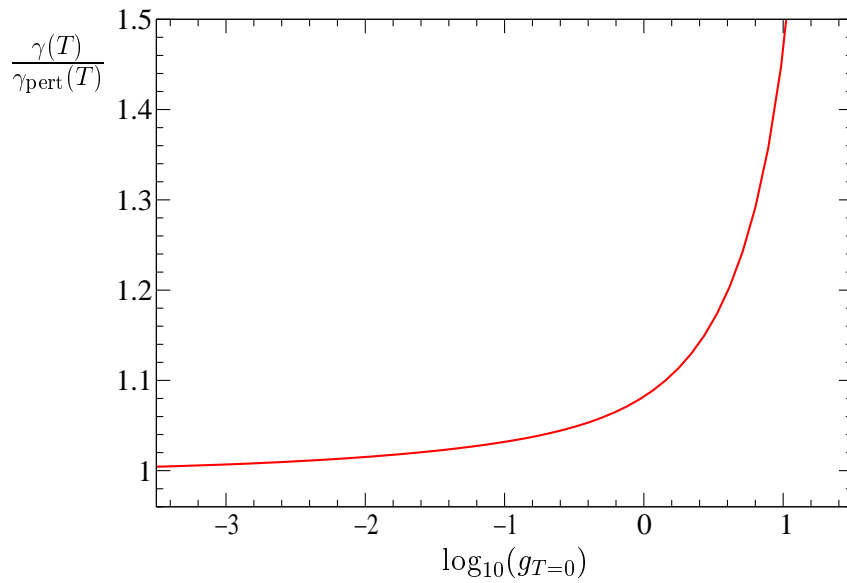
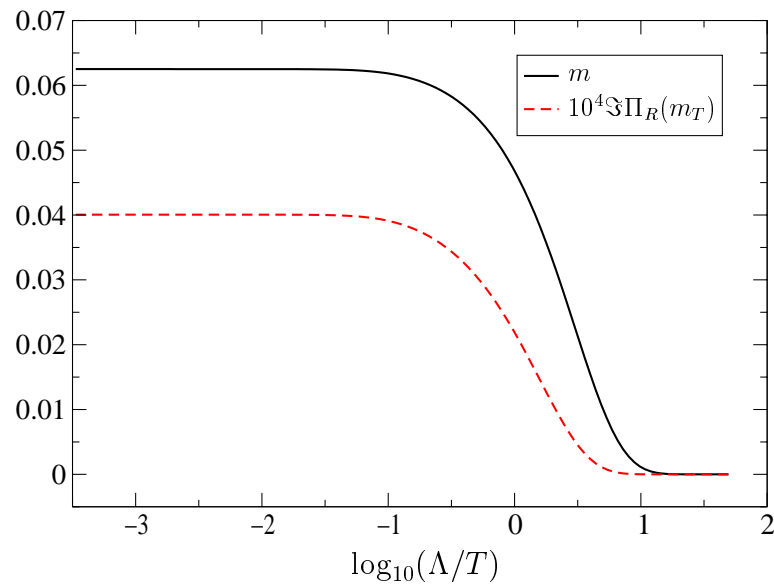
$$\gamma(T) = \frac{\Im \Pi_{R,\Lambda=0}(m_T, 0)}{2m_T}. \quad (6.33)$$

Mit Hilfe von daisy–resummiertes Störungstheorie erhält man in einer masselosen Theorie [20, 24, 25]

$$\gamma_{\text{pert}}(T) = T \frac{g_{T=0}^{3/2}}{64\sqrt{24}\pi} \sqrt{1 - \frac{3g_{T=0}^{1/2}}{\sqrt{24}\pi}}. \quad (6.34)$$

In Abbildung 6.1 stellen wir das Verhältnis der numerisch bestimmten Dämpfungsrate zum perturbativen Ergebnis (6.34) dar. Man erkennt, dass man mit der TRG daisy–resummierte Störungstheorie reproduzieren kann, auch wenn der führende perturbative Term von zwei–loop Ordnung ist. Für kleine Kopplungen erhalten wir Übereinstimmung mit resummiertes Störungstheorie, für größere Kopplungen kann man jedoch bereits deutliche Abweichungen zum perturbativen Ergebnis erkennen. Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, dass unser mit Hilfe der TRG erzielt Ergebnis aufgrund der nichtperturbativen Flussgleichung für das Potenzial in niedrigster Ordnung der Ableitungsentwicklung völlig resummiertes ist und damit weit über die daisy– bzw. superdaisy–Resummation hinausgeht, die in Störungstheorie verwendet wird.

Die Abbildung 6.2 zeigt das Laufen des Imaginär– und Realteils der Selbstenergie als Funktion der äußeren Skala Λ . Für große Werte von Λ/T gibt es keine thermischen Korrekturen, da die thermischen Fluktuationen aufgrund der Boltzmann–Verteilung unterdrückt sind. Für $\Lambda \propto T$ gibt es eine Übergangszone, in der praktisch das gesamte Laufen stattfindet. Für $\Lambda \ll T$ gibt es ebenfalls keine Korrekturen mehr, da jetzt die thermische Masse $m \propto T$ als Infrarotcutoff wirkt und jegliches Laufen unterdrückt. Aufgrund dieser Tatsache ist auch der Limes $\Lambda \rightarrow 0$ völlig unproblematisch.

Abbildung 6.1: $\gamma(T)/\gamma_{\text{pert}}(T)$ als Funktion von $\log_{10}(g_{T=0})$ Abbildung 6.2: Real- und Imaginärteil der Selbstenergie als Funktion von $\log_{10}(\Lambda/T)$ in Einheiten von T . Für die Kopplung wurde $g_{T=0} = 0.1$ gewählt.

6.2. Die Plasmon-Dämpfungsrate in der gebrochenen Phase

6.2.1. Die Flussgleichung für die retardierte Selbstenergie

Nach der Untersuchung der Dämpfungsrate in der symmetrischen Phase wollen wir uns nun der gebrochenen Phase zuwenden. Für eine Untersuchung der Dämpfungsrate am Phasenübergang

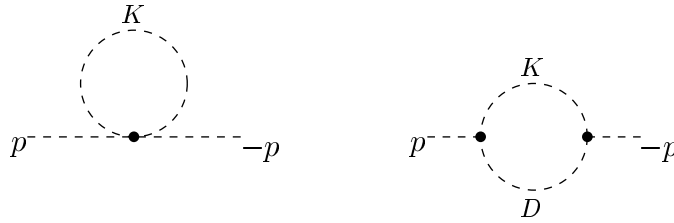
ist es unerlässlich, die Flussgleichungen in der gebrochenen Phase zu berechnen. Da wir bei $T = 0$ in der gebrochenen Phase starten, findet für $T \approx T_c$ das Laufen mit der Skala Λ ausschließlich oder fast ausschließlich in der gebrochenen Phase statt. Nur falls sich die Temperatur über der kritischen Temperatur befindet, wird die symmetrische Phase bei einem endlichen Λ erreicht. Für $T \rightarrow T_c^+$ wird dieses Λ jedoch beliebig klein, so dass praktisch das gesamte Laufen in der gebrochenen Phase stattfindet. Dies bedeutet, dass wir während des gesamten Laufens den Einfluss der Dreipunktfunktion zu berücksichtigen haben.

In [22] wurde der Einfluss der Dreipunktfunktion vernachlässigt und für die dort gemachten qualitativen Aussagen sollte dies gerechtfertigt sein. Für eine quantitative Untersuchung der Dämpfungsrate am Phasenübergang ist es jedoch wichtig, den Beitrag der Dreipunktfunktion zu berücksichtigen. Im Folgenden wollen wir die Flussgleichungen zur Berechnung der Dämpfungsrate in der gebrochenen Phase unter Einbeziehung der Dreipunktfunktion ableiten.

Die Flussgleichung für die retardierte Selbstenergie in der gebrochenen Phase lautet

$$\Lambda \partial_\Lambda \Pi_R(p) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ K \Gamma_{1i}^{(4)}(p, -p) - K \Gamma_1^{(3)}(p) D \Gamma_i^{(3)}(-p) - K \Gamma_i^{(3)}(-p) D \Gamma_1^{(3)}(p) \right\}, \quad (6.35)$$

wobei die Spur über die Impulse und thermalen Indizes zu bilden ist. Die Feynman–Diagramme zu (6.35) sind



Aus (6.35) erhalten wir für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Im \Pi_R(p) &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Im \Gamma_{1i}^{(4)}(p, -p) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Re \Gamma_1^{(3)}(p) \Im D \Re \Gamma_i^{(3)}(-p) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Re \Gamma_i^{(3)}(-p) \Re D \Im \Gamma_1^{(3)}(p) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Im \Gamma_i^{(3)}(-p) \Re D \Re \Gamma_1^{(3)}(p) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Im \Gamma_i^{(3)}(-p) \Im D \Im \Gamma_1^{(3)}(p) \right) + \text{Perm. der Vertizes}. \quad (6.36) \end{aligned}$$

Um einen ersten Überblick über den Beitrag der verschiedenen Terme in (6.36) zu erhalten,

wollen wir zunächst den zwei–loop Anteil für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie extrahieren. Diese Rechnung wird uns wichtige Hinweise für konsistente, nichtperturbative Näherungen zur Lösung der Flussgleichungen geben.

6.2.2. Störungstheorie in der gebrochenen Phase

In diesem Abschnitt berechnen wir den thermalen Anteil des Imaginärteils der retardierten Selbstenergie auf zwei–loop Niveau. Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir diejenigen ein–loop Größen, die auch auf tree–Niveau existieren, mit einem hochgestellten Index (1) kennzeichnen. Die tree–Niveau Größen werden wir nicht extra kennzeichnen. Die Λ –Abhängigkeit wollen wir ebenfalls explizit durch einen Index Λ andeuten.

Wie schon in der symmetrischen Phase, können wir auch in der gebrochenen Phase durch Einsetzen der ein–loop Größen die Flussgleichung für die retardierte Selbstenergie auf zwei–loop Niveau ableiten. Um das perturbative zwei–loop Ergebnis zu reproduzieren, müssen wir diese Flussgleichung anschließend noch über Λ integrieren. Damit sich diese Integration geschlossen durchführen lässt, muss sich die rechte Seite der Flussgleichung als eine totale Ableitung nach Λ schreiben lassen. Dies ist zwingend notwendig, da man die Flussgleichungen im Prinzip loopweise lösen und damit Störungstheorie reproduzieren kann. Wenn man alle Anteile der Flussgleichung berücksichtigt, die zu einem bestimmten loop–Niveau beitragen, so müssen sich diese zu einer totalen Ableitung kombinieren lassen. Durch die Bestimmung der retardierten Selbstenergie auf zwei–loop Niveau mit Hilfe der TRG können wir alle Anteile, die auf zwei–loop Niveau beitragen, identifizieren.

Um aus (6.36) die zwei–loop Anteile zu extrahieren, müssen wir berücksichtigen, dass die Imaginärteile der Vierpunkt– und Dreipunktfunktion auf tree–Niveau verschwinden (wir werden diese Größen deshalb auch nicht mit einem Index (1) versehen). Mit Hilfe der Formeln im Anhang C.2 zur Berechnung der Spur über die thermalen Indizes erhalten wir für die Flussgleichung der retardierten Selbstenergie auf zwei–loop Niveau

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Pi_{R,\Lambda}^{(2)}(p) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda(k) \bar{\Gamma}_\Lambda^{(4)}(p, -p, k, -k) \\ &\quad - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda(k) D_\Lambda^{(1)}(k+p) - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda^{(1)}(k) D(k+p) \\ &\quad - \bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda(k) D(k+p) F_\Lambda^{(3)}(p, k), \end{aligned} \quad (6.37)$$

wobei

$$D(k) = R(k) + iI_1(k), \quad (6.38)$$

$$\bar{\Gamma}_\Lambda^{(4)}(p, -p, k, -k) = \sum_{i,j,k} \Gamma_{\Lambda,1ijk}^{(4)}(p, -p, k, -k), \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} F_\Lambda^{(3)}(p, k) &= \sum_{i,j} \left[\Gamma_{\Lambda,1ij}^{(3)}(p, k, -(k+p)) + \Gamma_{\Lambda,1ij}^{(3)}(k+p, -p, -k) \right] \\ &= \bar{\Gamma}_\Lambda^{(3)}(p, k, -(k+p)) + \bar{\Gamma}_\Lambda^{(3)}(k+p, -p, -k). \end{aligned} \quad (6.40)$$

Für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie auf zwei–loop Niveau folgt:

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda \Im \Pi_{R,\Lambda}^{(2)}(p) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda(k) \Im \bar{\Gamma}_\Lambda^{(4)}(p, -p, k, -k) \\
&\quad - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda(k) I_{1,\Lambda}^{(1)}(k+p) - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda^{(1)}(k) I_1(k+p) \\
&\quad - \bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda(k) R(k+p) \Im F_\Lambda^{(3)}(p, k) \\
&\quad - \bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K_\Lambda(k) I_1(k+p) \Re F_\Lambda^{(3)}(p, k). \tag{6.41}
\end{aligned}$$

Die Kopplung $\bar{\Gamma}^{(3)}$ reduziert sich hier auf die tree–Niveau Dreipunktkopplung. Um die retardierte Selbstenergie auf zwei–loop berechnen zu können, benötigen wir somit $K_\Lambda(k)$, $D(k)$, $F^{(3)}(p, k)$ und $\bar{\Gamma}^{(4)}$ auf ein–loop Niveau. Dafür berechnen wir die Flussgleichungen für diese Größen auf ein–loop Niveau und integrieren anschließend über Λ .

Die Funktion $I_1(k)$ auf ein–loop Niveau

Physikalisch bedeutet die Berücksichtigung von $I_1^{(1)}(k)$, dass man den Beitrag der ein–loop Selbstenergie zur zwei–loop Selbstenergie nicht vernachlässigt. Die Funktion $I_1^{(1)}(k)$ können wir am einfachsten aus dem ein–loop Anteil des Propagators extrahieren. Aus der Definition der Selbstenergie $D^{-1}(k) = D_0^{-1}(k) + \Sigma(k)$ folgt durch Invertieren $D(k) = D_0(k) - D_0(k)\Sigma(k)D(k)$. Damit erhalten wir für den ein–loop Anteil des Propagators

$$D^{(1)}(k) = -D_0(k)\Sigma^{(1)}(k)D_0(k). \tag{6.42}$$

Nun müssen wir $I_1^{(1)}(k)$ aus $D^{(1)}(k)$ extrahieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
I_1^{(1)}(k) &= -\frac{i}{2} \text{Tr} \left[D^{(1)}(k) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= -R(k) \Im \Pi_R^{(1)}(k) R(k) - 2R(k) \Re \Pi_R^{(1)}(k) I_1(k) \\
&\quad + I_1(k) \Im \Pi_R^{(1)}(k) I_1(k). \tag{6.43}
\end{aligned}$$

Damit wir (6.43) auswerten können, müssen wir den Imaginärteil und den Realteil der retardierten Selbstenergie auf ein–loop bestimmen. Die ein–loop Flussgleichung für die retardierte Selbstenergie lautet

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda \Pi_{R,\Lambda}^{(1)}(k) &= \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^{(4)} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) \\
&\quad - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) (R(q+k) + iI_1(q+k)). \tag{6.44}
\end{aligned}$$

Auf tree–Niveau ist nur der Kern Λ –abhängig:

$$\begin{aligned} K_\Lambda(k) &= \epsilon(k_0)\rho(k)\Lambda\partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|), \\ \text{mit} \quad \rho(k) &= 2\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2 - m^2). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Wir wollen noch den “ Λ –integrierten” Kern einführen:

$$\tilde{K}_\Lambda(k) = \epsilon(k_0)\rho(k)N_\Lambda(|k_0|). \quad (6.46)$$

Durch Integration von (6.44) von ∞ bis Λ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Pi_{R,\Lambda}^{(1)}(k) &= \Pi_{R,\Lambda=\infty}^{(1)}(k) + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}^{(4)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) \\ &\quad - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) (R(q+k) + iI_1(q+k)). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Das Einsetzen von (6.47) in (6.43) liefert

$$\begin{aligned} I_{1,\Lambda}^{(1)}(k) &= I_{1,\Lambda=\infty}^{(1)}(k) - \bar{\Gamma}^{(4)} R(k)I_1(k) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 R(k)I_1(k) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) R(q+k) \\ &\quad + (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 R(k)R(k) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) I_1(q+k) \\ &\quad - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 I_1(k)I_1(k) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) I_1(q+k). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Der Kern auf ein–loop Niveau

Nun wollen wir den Kern auf ein–loop Niveau berechnen. Auf tree–Niveau ist der Kern proportional zur Spektraldichte $\rho(k) = 2\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2 - m^2)$. Vernachlässigt man den Imaginärteil der Selbstenergie, so wie wir es im bisherigen Verlauf dieser Arbeit getan haben, so bleibt der Kern proportional zur Spektraldichte $\rho(k) = 2\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2 - m^2 + \Re\Pi(k))$. Um jedoch den vollen zwei–loop Beitrag zur retardierten Selbstenergie zu erhalten, dürfen wir den Imaginärteil der Selbstenergie auf ein–loop Niveau nicht außer Acht lassen. Damit hat der Kern nicht mehr diese einfache Struktur. Um den Kern auf ein–loop Niveau zu berechnen, gehen wir von der Formel (3.64) aus

$$K_\Lambda(k) = \left[\epsilon(k_0)\rho_\Lambda(k) + i\Delta_\Lambda\Delta_\Lambda^*(\Pi_\Lambda - \Pi_\Lambda^*) \right] \Lambda\partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.49)$$

Für den ein–loop Anteil des Kerns erhalten wir daraus (die thermale Matrixstruktur lassen wir im Folgenden einfachheitshalber weg)

$$K_\Lambda^{(1)}(k) = \left[\rho_\Lambda^{(1)}(k) - 2\Delta_0(k)\Im\Pi_{R,\Lambda}^{(1)}(k)\Delta_0(k)^* \right] \epsilon(k_0)\Lambda\partial_\Lambda N_\Lambda(|k_0|). \quad (6.50)$$

An diesem Ausdruck erkennt man, dass der Kern für nichtverschwindenden Imaginärteil der Selbstenergie nicht mehr proportional zur Spektraldichte ist. Den Imaginärteil von $\Pi_{R,\Lambda}^{(1)}(k)$ können wir aus (6.47) ablesen. Die Spektraldichte auf ein-loop bestimmen wir mit Hilfe von (6.14) und (6.43):

$$\begin{aligned} \rho_{\Lambda}^{(1)}(k) = -2I_{1,\Lambda}^{(1)}(k) &= 4R(k) \Re\Pi_{R,\Lambda}^{(1)}(k) I_1(k) \\ &+ 2R(k) \Im\Pi_{R,\Lambda}^{(1)}(k) R(k) - 2I_1(k) \Im\Pi_{R,\Lambda}^{(1)}(k) I_1(k). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Durch Einsetzen von (6.51) in (6.50) erhalten wir mit Hilfe von $\Delta_0(k)\Delta_0(k)^* = (R(k))^2 + (I_1(k))^2$ für den Kern die Form

$$K_{\Lambda}^{(1)}(k) = -2R(k) \Re\Pi_{R,\Lambda}^{(1)}(k) K_{\Lambda}(k) + 2I_1(k) \Im\Pi_{R,\Lambda}^{(1)}(k) K_{\Lambda}(k). \quad (6.52)$$

Durch Einsetzen der retardierten Selbstenergie (6.47) erhalten wir für den ein-loop Anteil des Kerns

$$\begin{aligned} K_{\Lambda}^{(1)}(k) &= -2R(k) \Re\Pi_{R,\Lambda=\infty}^{(1)}(k) K_{\Lambda}(k) + 2I_1(k) \Im\Pi_{R,\Lambda=\infty}^{(1)}(k) K_{\Lambda}(k) \\ &- \bar{\Gamma}^{(4)} R(k) K_{\Lambda}(k) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) \\ &+ 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 R(k) K_{\Lambda}(k) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) R(q+k) \\ &- 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 I_1(k) K_{\Lambda}(k) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+k). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Die Dreipunktfunktion auf ein-loop Niveau

Zur Berechnung der Funktion $F_{\Lambda}^{(3)}(p, k)$ aus (6.40) benötigen wir die impulsabhängige Dreipunktfunktion auf ein-loop. Die Flussgleichung für die Dreipunktfunktion lautet:

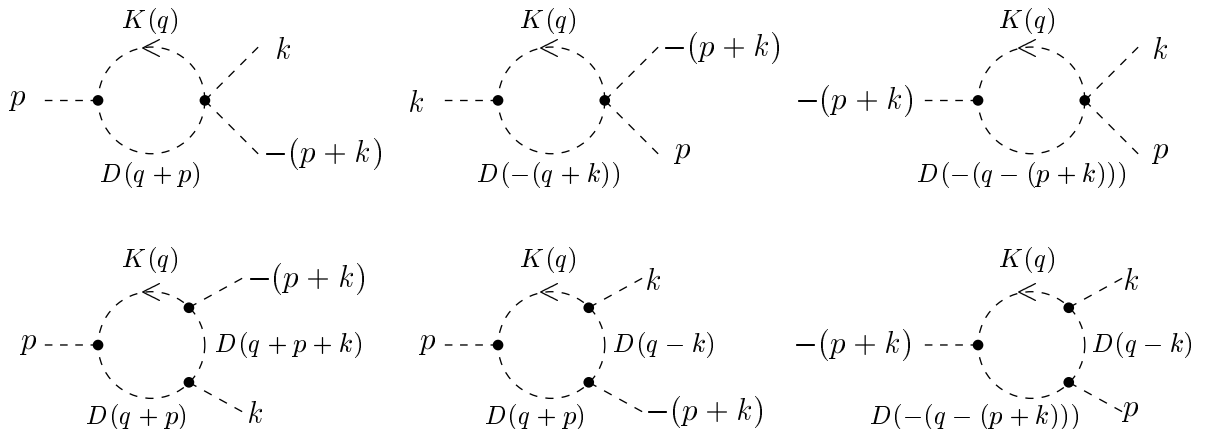
$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \Lambda \partial_{\Lambda} \Gamma_{1ij}^{(3)}(p, k, -(k+p)) &= \\ &+ \sum_{i,j} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1ij}^{(5)}(p, k, -(k+p)) \right) \\ &- \sum_{i,j} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_1^{(3)}(p) D \Gamma_{ij}^{(4)}(k, -(k+p)) \right) + \text{Perm. von Kern und Prop.} \\ &- \sum_{i,j} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_i^{(3)}(k) D \Gamma_{1j}^{(4)}(p, -(k+p)) \right) + \text{Perm. von Kern und Prop.} \\ &- \sum_{i,j} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_j^{(3)}(-(k+p)) D \Gamma_{1i}^{(4)}(p, k) \right) + \text{Perm. von Kern und Prop.} \\ &+ \sum_{i,j} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_1^{(3)}(p) D \Gamma_i^{(3)}(k) D \Gamma_j^{(3)}(-(k+p)) \right) + \text{Perm. der Vertizes.} \end{aligned} \quad (6.54)$$

Auf tree–Niveau existiert keine Fünfpunktkopplung und damit trägt dieser Anteil in der Flussgleichung (6.54) auch nicht zur ein–loop Dreipunktkopplung bei. Nach dem Ausführen der thermalen Spuren erhält man

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda \bar{\Gamma}_\Lambda^{(3)}(p, k, -(p+k)) = & \\
& -\bar{\Gamma}^{(4)} \bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) [D(q+p) + D(-(q+k)) + D(-(q-(p+k)))] \\
& + (\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) D(q+p) [D(q+p+k) + D(q-k)] \\
& + (\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) D(-(q+k)) D(q+k+p)
\end{aligned} \tag{6.55}$$

mit $D(q) = R(q) + iI_1(q)$.

Wie erwartet, trägt der Anteil des Propagators $\propto I_2(q)$ nicht zur Flussgleichung bei. Wie bereits in der Flussgleichung für die retardierte Selbstenergie, tritt auch hier wieder der ‘effektive’ Propagator $D(q)$ auf. An (6.55) lässt sich erkennen, dass wir an manchen Stellen statt dem normalen Propagator $D(q)$ den Propagator $D(-q)$ verwenden müssen. Dies ist eine Konsequenz aus Spur über die thermalen Indizes. In (6.55) wurde über die thermalen Indizes summiert, die zu den Impulsen k und $-(p+k)$ gehören. Der thermale Index, der zum Impuls p gehört, ist auf 1 fixiert. Wenn man in (6.55) nicht an gewissen Stellen $D(q)$ durch $D(-q)$ ersetzen müsste, so hätte die Flussgleichung genau die Form, die man erhielte, wenn man nur thermale 1–Beine berücksichtigen würde und für den (11)–Anteil des Propagators $R(q) + iI_1(q)$ einsetzen würde. Aus (6.12) wissen wir aber, dass $D_{11}(q) = R(q) + iI_2(q)$ ist. Dies zeigt, dass die gefundene ‘Vorschrift’ durchaus nicht trivial ist und nicht naiv allein durch Berücksichtigung thermaler 1–Beine gefunden werden kann. Die Ersetzung von $D(q)$ durch $D(-q)$ folgt bestimmten Mustern. Ihre Kenntnis kann sehr hilfreich sein, da man die (aufwendige) thermale Spurbildung nicht mehr explizit durchführen muss. Man kann diese Muster am Besten an den Feynman–Diagrammen erkennen, die zu (6.55) gehören. Die Feynman–Diagramme zur Flussgleichung (6.55) sind



Die Richtung des Impulsflusses in den Diagrammen ist von Bedeutung, da die Funktion $I_1(q)$ antisymmetrisch ist. Da $R(q)$ symmetrisch ist, besitzt $D(q)$ in q keine definierte Symmetrie mehr. An den Feynman–Diagrammen erkennen wir, dass man den Propagator $D(-q)$ immer dann einsetzen muss, wenn sich nach dem Kern in Flussrichtung des Impulses ein Vertex befindet, bei dem über alle äußeren thermalen Indizes summiert wird.

Aus (6.55) können wir nun leicht die Flussgleichung für den Imaginärteil und den Realteil von $F_\Lambda^{(3)}(p, k)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Im F_\Lambda^{(3)}(p, k) &= -2\bar{\Gamma}^{(4)}\bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) \left[I_1(q+p) + I_1(q+k+p) \right] \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p) \left[R(q-k) + R(q+k+p) \right] \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+k+p) \left[R(q+p) + R(q+k) \right], \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Re F_\Lambda^{(3)}(p, k) &= -2\bar{\Gamma}^{(4)}\bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) \left[R(q+p) + R(q+k) + R(q+k+p) \right] \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) R(q+p) \left[R(q-k) + R(q+k+p) \right] \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) R(q+k) R(q+k+p) \\ &\quad - 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p) I_1(q+k+p). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Die Integration über Λ liefert

$$\begin{aligned} \Im F_\Lambda^{(3)}(p, k) &= \Im F_{\Lambda=\infty}^{(3)}(p, k) \\ &\quad - 2\bar{\Gamma}^{(4)}\bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) \left[I_1(q+p) + I_1(q+k+p) \right] \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) I_1(q+p) \left[R(q-k) + R(q+k+p) \right] \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) I_1(q+k+p) \left[R(q+p) + R(q+k) \right], \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} \Re F_\Lambda^{(3)}(p, k) &= \Re F_{\Lambda=\infty}^{(3)}(p, k) \\ &\quad - 2\bar{\Gamma}^{(4)}\bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) \left[R(q+p) + R(q+k) + R(q+k+p) \right] \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) R(q+p) \left[R(q-k) + R(q+k+p) \right] \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) R(q+k) R(q+k+p) \\ &\quad - 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_\Lambda(q) I_1(q+p) I_1(q+k+p). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Der Imaginärteil der Vierpunktfunktion auf ein-loop Niveau

Wir berechnen nun den Imaginärteil der Vierpunktfunktion auf ein-loop Niveau. Die Flussgleichung für die Vierpunktfunktion lautet:

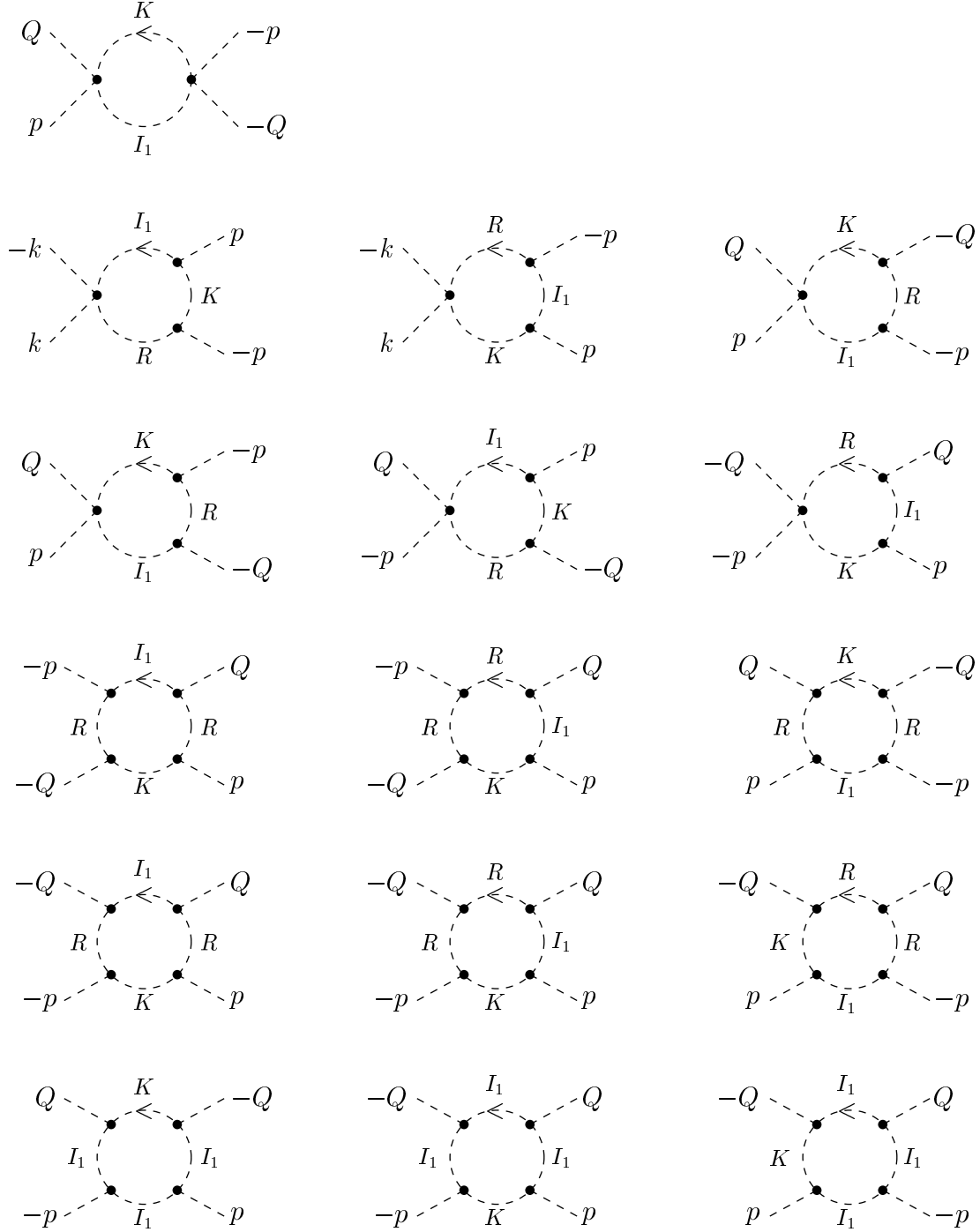
$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, q, -q) = & \\
& + \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1ijk}^{(6)}(p, -p, q, -q) \right) \\
& - \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_1^{(3)}(p) D \Gamma_{ijk}^{(5)}(-p, q, -q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\
& - \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_i^{(3)}(-p) D \Gamma_{1jk}^{(5)}(p, q, -q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\
& - \sum_{i,j,k} \sum_{Q=\pm q} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_j^{(3)}(Q) D \Gamma_{1ik}^{(5)}(p, -p, -Q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\
& - \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1i}^{(4)}(p, -p) D \Gamma_{jk}^{(4)}(q, -q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\
& - \sum_{i,j,k} \sum_{Q=\pm q} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1j}^{(4)}(p, Q) D \Gamma_{ik}^{(4)}(-p, -Q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\
& + \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1i}^{(4)}(p, -p) D \Gamma_j^{(3)}(q) D \Gamma_k^{(3)}(-q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\
& + \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{jk}^{(4)}(q, -q) D \Gamma_1^{(3)}(p) D \Gamma_i^{(3)}(-p) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\
& + \sum_{i,j,k} \sum_{Q=\pm q} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{1j}^{(4)}(p, Q) D \Gamma_i^{(3)}(-p) D \Gamma_k^{(3)}(-Q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\
& + \sum_{i,j,k} \sum_{Q=\pm q} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_{ij}^{(4)}(-p, Q) D \Gamma_1^{(3)}(p) D \Gamma_k^{(3)}(-Q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} \\
& - \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} \text{Tr} \left(K \Gamma_1^{(3)}(p) D \Gamma_i^{(3)}(-p) D \Gamma_j^{(3)}(q) D \Gamma_k^{(3)}(-q) \right) + \text{Perm. der Vertizes} .
\end{aligned}$$

Die Sechspunkt- und Fünfpunktkopplungen haben auf den ein-loop Imaginärteil der Vierpunktfunktion keinen Einfluss, da sie auf tree-Niveau verschwinden. Nach dem Ausführen der ther-

malen Spuren erhalten wir für den Imaginärteil der Vierpunktfunktion die Flussgleichung

$$\begin{aligned}
\Lambda \partial_\Lambda \Im \bar{\Gamma}_\Lambda^{(4)}(p, -p, k, -k) = & \\
& - \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p+Q) \\
& + 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) R(q+p) I_1(q+p) \\
& + 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) R(q) I_1(q+p) \\
& + \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p+Q) R(q+Q) \\
& + \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p+Q) R(q+p) \\
& + \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p) R(q+Q) \\
& + \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p) R(q+p+Q) \\
& - \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) R(q+p) I_1(q+p+Q) R(q+Q) \\
& - \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p) R(q+p+Q) R(q+Q) \\
& - \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) R(q+Q) I_1(q+p+Q) R(q+Q) \\
& - \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) R(q+p) I_1(q+p+Q) R(q+p) \\
& - \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p) R(q+p+Q) R(q+p) \\
& - \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p) R(q) R(q+Q) \\
& + \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+Q) I_1(q-p+Q) I_1(q+Q) \\
& + \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p) I_1(q+p+Q) I_1(q+p) \\
& + \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K_\Lambda(q) I_1(q+p) I_1(q) I_1(q+Q). \tag{6.60}
\end{aligned}$$

Die zur Flussgleichung zugehörigen Feynman-Diagramme lauten



Aufgrund der Summation über die thermalen Indizes liefert der Anteil des Propagators $\propto I_2$ zum Imaginärteil von $\bar{\Gamma}_\Lambda^{(4)}(p, -p, k, -k)$ keinen Beitrag. Wenn man bei der Berechnung nur thermale 1-Beine berücksichtigt, kann man dieses Ergebnis nicht reproduzieren. Durch Integration über

Λ erhalten wir aus (6.60)

$$\begin{aligned}
\Im \bar{\Gamma}_{\Lambda}^{(4)}(p, -p, k, -k) &= \Im \bar{\Gamma}_{\Lambda=\infty}^{(4)}(p, -p, k, -k) \\
&- \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p+Q) \\
&+ 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) R(q+p) I_1(q+p) \\
&+ 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) R(q) I_1(q+p) \\
&+ \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p+Q) R(q+Q) \\
&+ \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p+Q) R(q+p) \\
&+ \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p) R(q+Q) \\
&+ \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p) R(q+p+Q) \\
&- \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) R(q+p) I_1(q+p+Q) R(q+Q) \\
&- \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p) R(q+p+Q) R(q+Q) \\
&- \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) R(q+Q) I_1(q+p+Q) R(q+Q) \\
&- \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) R(q+p) I_1(q+p+Q) R(q+p) \\
&- \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p) R(q+p+Q) R(q+p) \\
&- \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p) R(q) R(q+Q) \\
&+ \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+Q) I_1(q-p+Q) I_1(q+Q) \\
&+ \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p) I_1(q+p+Q) I_1(q+p) \\
&+ \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\Lambda}(q) I_1(q+p) I_1(q) I_1(q+Q). \tag{6.61}
\end{aligned}$$

Die retardierte Selbstenergie auf zwei-loop Niveau

Damit haben wir nun alle Beiträge, um den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie auf zwei-loop Niveau berechnen zu können. Durch Einsetzen von (6.48), (6.53), (6.58), (6.59) und (6.61) in die Flussgleichung (6.41) können wir diese als eine totale Ableitung nach Λ schreiben. Durch Integration von $\Lambda = \infty$ (entspricht $T = 0$) bis $\Lambda = 0$ (entspricht T) erhalten wir dann für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie auf zwei-loop Niveau

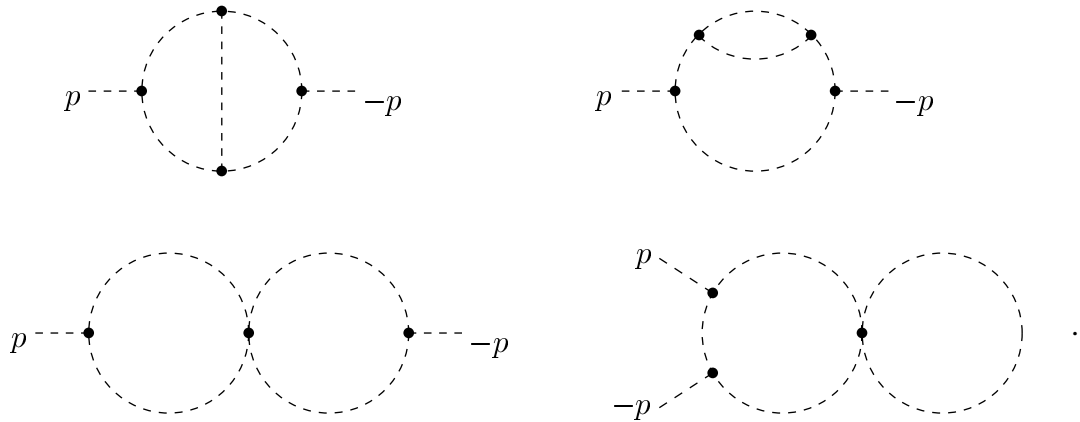
$$\begin{aligned}
\Im\Pi_R^{(2)}(p) &= \Im\Pi_{R,T=0}^{(2)}(p) \\
&+ \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) \Im\bar{\Gamma}_{T=0}^{(4)}(p, -p, k, -k) \\
&- \bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) R(k+p) \Im F_{T=0}^{(3)}(p, k) \\
&- \bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) I_1(k+p) \Re F_{T=0}^{(3)}(p, k) \\
&+ 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) R(k+p) I_1(k+p) \Re\Pi_{R,T=0}^{(1)}(k+p) \\
&+ (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) R(k+p) R(k+p) \Im\Pi_{R,T=0}^{(1)}(k+p) \\
&- (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) I_1(k+p) I_1(k+p) \Im\Pi_{R,T=0}^{(1)}(k+p) \\
&+ 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) I_1(k+p) R(k) \Re\Pi_{R,T=0}^{(1)}(k) \\
&- 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) I_1(k+p) I_1(k) \Im\Pi_{R,T=0}^{(1)}(k) \\
&- (\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) \tilde{K}(q) I_1(q+p+k) \\
&+ \bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) \tilde{K}(q) R(q+p) I_1(q+p) \\
&+ \bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) \tilde{K}(q) R(q) I_1(q+p) \\
&+ \bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) \tilde{K}(q) I_1(q+p+k) R(q+k) \\
&+ 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) \tilde{K}(q) I_1(q+p+k) R(q+p) \\
&+ 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) \tilde{K}(q) I_1(q+p) R(q+k) \\
&+ 2\bar{\Gamma}^{(4)} (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k) \tilde{K}(q) I_1(q+p) R(q+p+k) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\bar{\Gamma}^{(4)}(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(k+p)R(q+p) \\
& -2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(k+p)R(q+p)R(q-k) \\
& -2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(k+p)R(q+p)R(q+k+p) \\
& +(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(k+p)I_1(q+p)I_1(q+k+p) \\
& -(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)R(k+p)I_1(q+k+p)R(q+p) \\
& -2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)R(q+p)I_1(q+p+k)R(q+k) \\
& -2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(q+p)R(q+p+k)R(q+k) \\
& -\frac{1}{2}(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)R(q+k)I_1(q+p+k)R(q+k) \\
& -(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)R(q+p)I_1(q+p+k)R(q+p) \\
& -2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(q+p)R(q+p+k)R(q+p) \\
& -2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(q+p)R(q)R(q+k) \\
& +\frac{1}{2}(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(q+k)I_1(q-p+k)I_1(q+k) \\
& +(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(q+p)I_1(q+p+k)I_1(q+p) \\
& +2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tilde{K}(k)\tilde{K}(q)I_1(q+p)I_1(q)I_1(q+k) \tag{6.62}
\end{aligned}$$

mit $\tilde{K}(q) = \epsilon(k_0)\rho(k)N(|k_0|) = 2\pi\delta(k^2 - m^2)N(|k_0|)$. (6.63)

Die Feynman-Diagramme, die zum Imaginärteil der Selbstenergie auf zwei-loop Niveau beitragen, sind





Der Imaginärteil der retardierten Selbstenergie kann aus diesen zwei-loop Diagrammen durch Anwenden der “Cutting-Rules” bei $T \neq 0$ [14, 15], die eine Verallgemeinerung der “Cutting-Rules” bei $T = 0$ sind, berechnet werden. Alle Beiträge zum Imaginärteil der retardierten Selbstenergie in (6.62) lassen sich auf die entsprechend geschnittenen zwei-loop Feynman-Diagramme zurückführen.

Wir konnten in der Literatur keine Berechnung der thermalen retardierten Selbstenergie auf zwei-loop Niveau finden, womit wir unser Ergebnis vergleichen könnten. In (6.62) fehlen zur vollständigen Berechnung noch die $(T = 0)$ -Werte für die retardierte Selbstenergie, den Imaginärteil der Vierpunkt- sowie der Dreipunktfunktion. Diese müssen als Startwerte vorgegeben werden. Im Rahmen der TRG kann man nur die thermalen Korrekturen zu den $(T = 0)$ -Werten bestimmen.

6.2.3. Die nichtperturbativen Flussgleichungen in der gebrochenen Phase

Nachdem wir im vorhergehenden Abschnitt mit Hilfe der TRG den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie auf zwei-loop Niveau berechnet haben, wollen wir nun Flussgleichungen ableiten, mit deren Hilfe man zu nichtperturbativen Aussagen gelangen kann. Ziel ist, mit diesen Flussgleichungen die Dämpfungsrate langreichweitiger Korrelationen an einem Phasenübergang zweiter Ordnung numerisch zu berechnen. Da die Masse an einem Phasenübergang zweiter Ordnung gegen null geht, divergiert die Korrelationslänge. Dies bedeutet, dass die langreichweitigen Korrelationen am Phasenübergang entscheidend sind für das Verhalten des Systems. Im Folgenden meinen wir mit Dämpfungsrate immer die Dämpfungsrate bei verschwindendem räumlichen Impuls $\vec{p} = 0$, d.h. die Dämpfungsrate langreichweitiger Korrelationen.

Wie bereits erwähnt, liefert Störungstheorie an einem Phasenübergang zweiter Ordnung für die Dämpfungsrate ein divergentes Resultat, während man andererseits erwartet, dass eine korrekt berechnete Dämpfungsrate am Phasenübergang verschwindet. Der Grund für das Scheitern von Störungstheorie bei der Berechnung der Dämpfungsrate an einem Phasenübergang zweiter Ordnung liegt darin, dass man das kritische Verhalten der Theorie störungstheoretisch nicht reproduzieren kann. Die TRG hat sich bei der Beschreibung dieses kritischen Verhaltens als erfolgreich erwiesen. Es ist deshalb zu erwarten, dass man mit Hilfe der TRG auch für die Dämpfungsrate qualitativ und quantitativ richtige Ergebnisse erzielen kann.

Im Folgenden werden wir Flussgleichungen ableiten, mit denen man die Dämpfungsrate an einem Phasenübergang zweiter Ordnung untersuchen kann. Um die exakten Flussgleichungen lösen zu können, sind wir gezwungen, geeignete Approximationen einzuführen.

Wir werden die Imaginärteile in den Flussgleichungen nur dann einbeziehen, wenn sie die führenden Effekte beinhalten. In der Flussgleichung für das effektive Potenzial werden wir somit keine Imaginärteile berücksichtigen. Für alle Imaginärteile, die bereits auf ein-loop Niveau existieren, kann man in erster Näherung Flussgleichungen ableiten, die nicht wieder von den Imaginärteilen selbst abhängen. Die retardierte Selbstenergie bei $\vec{p} = 0$ ist ein zwei-loop Effekt und kann deshalb im Rahmen der TRG nur dann berechnet werden, wenn man die Imaginärteile in der Flussgleichung berücksichtigt. Das Vernachlässigen der Imaginärteile in den Flussgleichungen (außer in der Flussgleichung für die Selbstenergie) hat jedoch zur Konsequenz, dass die Imaginärteile auf das kritische Verhalten der Theorie keinen Einfluss haben und man für die Imaginärteile selbst kein kritisches Verhalten erhält. Die führenden Effekte sollten jedoch auch mit diesen Näherungen richtig beschrieben werden. Insbesondere sollte man beobachten können, dass die Dämpfungsrate am Phasenübergang verschwindet, denn dafür ist das kritische Verhalten der Kopplung entscheidend.

Die Flussgleichung für das effektive Potenzial $V_\Lambda(\rho)$ in der gebrochenen Phase übernehmen wir vom $O(N)$ -Modell für $N = 1$. Wir werden nun im Rahmen der erläuterten Approximationen die Flussgleichungen berechnen, die nötig sind, um den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie in der gebrochenen Phase beim Impuls $p = (p_0, \vec{p} = 0)$ zu bestimmen. Damit können wir die Dämpfungsrate für $T \rightarrow T_c^-$ untersuchen. Für p_0 setzen wir die thermische Plasmon–Masse m_T ein. Diese berechnen wir am Minimum des effektiven Potenzials $V_\Lambda(\rho)$ bei $\Lambda = 0$.

Wir starten in der gebrochenen Phase mit einem symmetriebrechenden tree-Niveau Potenzial. Die volle thermische Masse m_T ist kleiner als die Masse bei $T = 0$ (und verschwindet schließlich bei $T = T_c$) und während des gesamten Laufens gilt in der gebrochenen Phase

$$m_{T=0} > m_\Lambda > m_T . \quad (6.64)$$

Da wir den Imaginärteil der Selbstenergie im Propagator vernachlässigen, erhalten wir für den Kern $K(k)$ und die Funktion $I_1(k)$ die bereits bekannten Formen

$$K(k) = -2\pi\Lambda\delta(k^2 - m_\Lambda^2)\delta(|\vec{k}| - \Lambda)N(|k_0|) , \quad (6.65)$$

$$I_1(k) = -\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2 - m_\Lambda^2) , \quad (6.66)$$

$$\text{mit} \quad m_\Lambda^2 = \left. \frac{\partial^2 V(\rho)}{(\partial\varphi)^2} \right|_{\varphi=\varphi_{0,\Lambda}} .$$

Aufgrund von (6.64) ergeben sich mit $p = (m_T, \vec{p} = 0)$

$$K(k)I_1(k+p) = 0 \quad \text{und} \quad I_1(k)I_1(k+p) = 0 . \quad (6.67)$$

Die Gleichungen (6.67) drücken nur die Energieerhaltung aus, da ein ruhendes Teilchen mit Masse m_T nicht in zwei schwerere Teilchen mit Masse m_Λ zerfallen kann. Unter Verwendung von

(6.67) erhalten wir aus (6.41) für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie die Flussgleichung

$$\Lambda \partial_\Lambda \Im \Pi_R(p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K(k) \Im \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k) \quad (6.68)$$

$$- \bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K(k) R(k+p) \Im F^{(3)}(p, k) \quad (6.69)$$

$$- (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K(k) \bar{I}_1(k+p) \quad (6.70)$$

$$- (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{K}(k) I_1(k+p). \quad (6.71)$$

Um eine konsistente Flussgleichung für den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie zu erhalten, müssen wir nicht nur die Imaginärteile der Vierpunkt– und Dreipunktfunktion, sondern auch die führenden Imaginärteil–Korrekturen zum Kern und zur Funktion I_1 berücksichtigen, denn diese sind von gleicher Ordnung. Diese Korrekturen sind ein–loop in den Imaginärteilen, aber in den statischen Realteilen völlig resummiert und gehen damit weit über die störungstheoretischen ein–loop Korrekturen hinaus. In (6.70) und (6.71) deuten wir den modifizierten Kern und die modifizierte Funktion I_1 durch einen Querbalken an.

Unter Verwendung von (6.52) erhalten wir für den modifizierten Kern

$$\bar{K}(k) = [1 + 2I_1(k) \Im \Pi_R^{(1)}(k)] K(k), \quad (6.72)$$

wobei wir den Beitrag von $\Re \Pi_R^{(1)}(k)$ weglassen, da dieser für den impulsunabhängigen Anteil des Realteils der Selbstenergie bereits im resummierten Kern enthalten ist. Den impulsabhängigen Realteil der Selbstenergie vernachlässigen wir. Wir weisen darauf hin, dass $\Im \Pi_R^{(1)}(k)$ in den statischen Realteilen resummiert und damit nicht identisch mit dem ein–loop Imaginärteil der retardierten Selbstenergie ist.

Für $\bar{I}_1(k)$ erhalten wir aus (6.43)

$$\bar{I}_1(k) = I_1(k) - R(k) \Im \Pi_R^{(1)}(k) R(k) - I_1(k) \Im \Pi_R^{(1)}(k) I_1(k). \quad (6.73)$$

Durch Einsetzen von (6.72) und (6.73) folgt unter Berücksichtigung von (6.67):

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Im \Pi_R(p) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K(k) \Im \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k) \\ &\quad - \bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K(k) R(k+p) \Im F^{(3)}(p, k) \\ &\quad + (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} K(k) R(k+p) \Im \Pi_R^{(1)}(k+p) R(k+p). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Die Flussgleichung für $\Im \Pi_R^{(1)}(k)$ lautet

$$\Lambda \partial_\Lambda \Im \Pi_R^{(1)}(k) = -(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} K(q) I_1(q+k). \quad (6.75)$$

Aus (6.56) und (6.60) erhalten wir die Flussgleichungen für $\Im F^{(3)}(p, k)$ und $\Im \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k)$:

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Im F^{(3)}(p, k) &= -2\bar{\Gamma}^{(4)}\bar{\Gamma}^{(3)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+k) \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+k)R(q+k) \\ &\quad + 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^3 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+k)R(p+q), \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Im \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k) &= \\ &\sum_{Q=\pm k} -(\bar{\Gamma}^{(4)})^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+Q) \\ &+ \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)}(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+Q)R(q+p) \\ &- \sum_{Q=\pm k} 2(\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+Q)R(q+p)R(q+Q) \\ &+ \sum_{Q=\pm k} 2\bar{\Gamma}^{(4)}(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+Q)R(q+Q) \\ &- \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+Q)R(q+Q)R(q+Q) \\ &- \sum_{Q=\pm k} (\bar{\Gamma}^{(3)})^4 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K(q)I_1(p+q+Q)R(q+p)R(q+p). \end{aligned} \quad (6.77)$$

Zusammen mit der Flussgleichung für das effektive Potenzial haben wir ein geschlossenes System von Flussgleichungen. Durch Einsetzen von (6.65) und (6.66) können wir die Integrale in den Flussgleichungen analytisch auswerten. Mit der Bezeichnung

$$k_\Lambda = (\omega_\Lambda, |\vec{k}| = \Lambda) \quad (6.78)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \Lambda \partial_\Lambda \Im \Pi_R(p) &= -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \frac{N(|\omega_\Lambda|)}{\omega_\Lambda} \Im \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k_\Lambda, -k_\Lambda) \\ &\quad + \bar{\Gamma}^{(3)} \frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \frac{N(|\omega_\Lambda|)}{\omega_\Lambda} \sum_{k=\pm k_\Lambda} \frac{1}{p_0(p_0+2k_0)} \Im F^{(3)}(p, k) \\ &\quad - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \frac{N(|\omega_\Lambda|)}{\omega_\Lambda} \sum_{k_0=\pm \omega_\Lambda} \frac{1}{p_0^2(p_0+2k_0)^2} \Im \Pi_R^{(1)}(p_0+k_0, \Lambda), \end{aligned} \quad (6.79)$$

$$\Lambda \partial_\Lambda \Im \Pi_R^{(1)}(q) = -(\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \frac{\Lambda^2}{16\pi} \frac{N(|\omega_\Lambda|)}{\omega_\Lambda} \frac{1}{|\vec{q}|} \sum_{k_0=\pm\omega_\Lambda} \epsilon(q_0 + k_0), \quad (6.80)$$

$$\text{falls} \quad |q_0^2 + 2q_0 k_0 - \vec{q}^2| \leq 2\Lambda |\vec{q}|,$$

$$\Lambda \partial_\Lambda \Im F^{(3)}(p, k) = -\frac{\Lambda^2}{8\pi} \frac{N(|\omega_\Lambda|)}{\omega_\Lambda} \frac{1}{|\vec{k}|} \sum_{q_0=\pm\omega_\Lambda} \epsilon(p_0 + k_0 + q_0) \times \\ \bar{\Gamma}^{(3)} \left[\bar{\Gamma}^{(4)} - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \frac{2k_0}{p_0(p_0 + 2q_0)(p_0 + 2k_0 + 2q_0)} \right], \quad (6.81)$$

$$\text{falls} \quad |(p_0 + k_0)^2 + 2q_0(p_0 + k_0) - \vec{k}^2| \leq 2\Lambda |\vec{k}|,$$

$$\Lambda \partial_\Lambda \Im \bar{\Gamma}^{(4)}(p, -p, k, -k) = -\frac{\Lambda^2}{16\pi} \frac{N(|\omega_\Lambda|)}{\omega_\Lambda} \frac{1}{|\vec{k}|} \sum_{Q_0=\pm k_0} \sum_{q_0=\pm\omega_\Lambda} \epsilon(p_0 + Q_0 + q_0) \times \\ \left[\bar{\Gamma}^{(4)} - (\bar{\Gamma}^{(3)})^2 \frac{2Q_0}{p_0(p_0 + 2q_0)(p_0 + 2Q_0 + 2q_0)} \right]^2, \quad (6.82)$$

$$\text{falls} \quad |(p_0 + Q_0)^2 + 2q_0(p_0 + Q_0) - \vec{k}^2| \leq 2\Lambda |\vec{k}|.$$

Mit diesem System von Flussgleichungen sollte man das Verhalten der Dämpfungsrate in der Nähe des Phasenübergangs numerisch bestimmen und “critical slowing down” beobachten können. In dieser Arbeit werden wir die numerische Untersuchung jedoch nicht mehr durchführen.

Bevor wir dieses Kapitel schließen, wollen wir noch ein qualitatives Argument aus [22] anführen, das deutlich macht, warum die Berechnung der Dämpfungsrate im Rahmen der TRG “critical slowing down” reproduzieren sollte. In [22] wurde trotz einer unvollständigen Berechnung der thermalen Dämpfungsrate “critical slowing down” beobachtet, weil die wesentliche Ursache für das Verschwinden der Dämpfungsrate an einem Phasenübergang zweiter Ordnung, nämlich das kritische Verhalten von Masse und Kopplung, richtig implementiert wurde.

Die on-shell Dämpfungsrate bei verschwindendem räumlichen Impuls ist definiert für $p_0 = m_T$, wobei m_T die Plasmon-Masse ist. In der Nähe des Phasenübergangs, in der kritischen Region, zeigen Masse und Kopplung ein Skalenverhalten, d.h. sie verschwinden gemäß

$$m_T \propto |T - T_c|^\nu, \quad g_T \propto |T - T_c|^\nu. \quad (6.83)$$

Das perturbative Ergebnis für den Imaginärteil der Selbstenergie verhält sich für kleine Massen als $\Im \Pi_R(m_T, 0) \sim g_{T=0}^2 \ln m_T$, und damit folgt für die Dämpfungsrate

$$\gamma(T) \propto \frac{g_{T=0}^2 \ln m_T}{m_T}. \quad (6.84)$$

Dies bedeutet, dass das perturbative Ergebnis im Limes $m_T \rightarrow 0$ divergiert. Im Rahmen der TRG wird aufgrund der nichtperturbativen Resummation die $(T=0)$ -Kopplung durch die thermale

Kopplung g_T ersetzt, wodurch für $T \rightarrow T_c$ folgt:

$$\gamma(T \rightarrow T_c) \propto |T - T_c|^\nu \ln(|T - T_c|). \quad (6.85)$$

Damit verschwindet für positive ν die Dämpfungsrate am Phasenübergang. Dieses qualitative Argument für das Verschwinden der Dämpfungsrate sollte auch im Rahmen einer konsistenten Berechnung zutreffen. Wir erwarten deshalb, dass bei der numerischen Untersuchung der hier angegebenen Flussgleichungen "critical slowing down" beobachtet wird. Ob allerdings das Skalenverhalten der Dämpfungsrate wirklich die Form (6.85) hat, mit dem kritischen Exponenten ν , ist fraglich und könnte durch eine Untersuchung der in dieser Arbeit abgeleiteten Flussgleichungen verifiziert werden.

7. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Wir kommen nun zur Zusammenfassung unserer Ergebnisse und geben anschließend einen Ausblick auf Fragestellungen, deren Untersuchung sich im Anschluss an diese Arbeit anbietet.

Störungstheorie bei endlicher Temperatur ist häufig mit ernsthaften Problemen konfrontiert und aufgrund von Infrarotdivergenzen in vielen Situationen nicht mehr anwendbar. Es ist daher sehr wichtig, nichtperturbative Methoden zu erarbeiten, die auch in solchen Situationen noch einsetzbar sind, in denen Störungstheorie zusammenbricht. Neben Gittersimulationen eignen sich hierfür besonders Renormierungsgruppengleichungen. Bis auf die TRG sind jedoch alle Renormierungsgruppengleichungen in euklidischer Raumzeit bzw. im Matsubaraformalismus formuliert. Dies hat den Nachteil, dass man damit nur statische Größen numerisch berechnen kann. Für die Bestimmung dynamischer Größen, wie z.B. Dämpfungsraten, sind Renormierungsgruppen im Matsubaraformalismus nicht geeignet, da dafür eine analytische Fortsetzung zu reeller Zeit notwendig wäre, was bei numerischen Funktionen nicht möglich ist.

Die TRG wurde 1996 von Attanasio und Pietroni [76] im Realzeitformalismus eingeführt und eignet sich damit auch zur numerischen Berechnung nichtstatischer Größen. Im Vergleich zu den Renormierungsgruppen im Matsubaraformalismus, die Quanten- und thermale Fluktuationen gleich behandeln, bewirkt die Formulierung im Realzeitformalismus, dass mit der TRG nur die thermalen Fluktuationen erfasst werden. Damit kann die TRG nur zur Untersuchung physikalischer Systeme bei endlicher Temperatur eingesetzt werden. In [76] wurde die TRG für die numerische Untersuchung des Phasenübergangs zweiter Ordnung im skalaren $O(1)$ -Modell angewandt. In einer weiteren Arbeit [77] haben Attanasio und Pietroni die Formulierung der TRG auf Eichfelder erweitert, wobei jedoch keine numerischen Untersuchungen durchgeführt wurden. Bis zum Beginn dieser Dissertation gab es nur noch eine Arbeit von Bergerhoff, in der mit Hilfe der TRG ebenfalls der Phasenübergang des $O(1)$ -Modells numerisch untersucht wurde.

Das Ziel dieser Arbeit war zum einen, durch weitere Untersuchungen im Rahmen der TRG zusätzliche Erfahrungen im Umgang mit dieser neuen Methode zu sammeln und die Formulierung der TRG auch auf Systeme mit Fermionen auszudehnen. Zum anderen sollte in einem weiteren Schritt das Potenzial der TRG zur Berechnung nichtstatischer Größen genutzt werden. Zu Beginn der Untersuchungen gab es hierfür noch keinerlei Studien. Die Möglichkeit, Imaginärteile im Rahmen der TRG numerisch berechnen zu können, ist ja gerade das Besondere, dass die TRG von den Renormierungsgruppen im Matsubaraformalismus unterscheidet.

In Kapitel 4 untersuchten wir das skalare $O(N)$ -symmetrische Modell, wobei wir ausführlich die Fälle $N = 1$ und $N = 4$ behandelten. Das universelle Verhalten des $O(N)$ -Modells hat zahlreiche Anwendungen sowohl in der Festkörperphysik als auch in der Teilchenphysik. Für die numerische Auswertung führten wir eine Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung durch und berücksichtigten nur die Terme niedrigster Ordnung. Zur numerischen Berechnung des

effektiven Potenzials verwendeten wir eine nichtperturbative Methode, die in [108] eingeführt wurde und weit über einen LPA-Ansatz für das Potenzial hinausgeht. Für $N = 1$ und $N = 4$ bestimmten wir kritische Exponenten, kritische Amplituden und Amplitudenverhältnisse sowie den Verlauf der Widom-Skalenfunktion und diskutierten unsere Ergebnisse ausführlich anhand des Vergleichs mit anderen Arbeiten. Weiterhin bestimmten wir die kritische Temperatur als Funktion von N . Unsere Ergebnisse im Falle $N = 1$ befanden sich in sehr guter Übereinstimmung mit denen anderer Arbeiten, die geringen Abweichungen waren konsistent mit der Vernachlässigung der Wellenfunktionsrenormierung. Aufgrund der besseren Methode zur Berechnung des effektiven Potenzials konnten wir die Resultate für die kritischen Exponenten aus [77] erheblich verbessern. Für $N = 4$ waren die Abweichungen der kritischen Exponenten von den zuverlässigsten Ergebnissen signifikanter und konnten nicht mehr allein mit der Vernachlässigung der Wellenfunktionsrenormierung erklärt werden. Dies verdeutlichen noch unsere Ergebnisse für die kritischen Exponenten aus Kapitel 5, wo wir eine feldunabhängige Wellenfunktionsrenormierung berücksichtigten. Für die Abweichungen könnte die Vernachlässigung des Terms $Z_\Lambda(\rho)\varphi^\alpha\varphi^\alpha\partial^2\varphi^\beta\varphi^\beta$ verantwortlich sein, der nur für $N > 1$ vorhanden ist. Auf jeden Fall sind zur Klärung dieses Sachverhalts weitere Untersuchungen erforderlich. Als Fazit bleibt festzuhalten, dass sich die TRG für die Bestimmung des kritischen Verhaltens an einem Phasenübergang zweiter Ordnung als geeignet erwiesen hat und dass bei der Anwendung der TRG im skalaren Fall keine besonderen Schwierigkeiten auftraten.

In Kapitel 5 untersuchten wir, welche Auswirkungen die Berücksichtigung von Fermionen im Rahmen der TRG hat. Zu diesem Zweck betrachteten wir das chirale Quark-Meson-Modell im Limes von nur zwei Quark-Flavors. Es wird als effektives Modell zur Beschreibung des chiralen Phasenübergangs in der QCD im Limes von nur zwei Quark-Flavors verwendet. Wir berücksichtigten keine Strommassen für die Quarks und betrachteten den Limes vollständig gebrochener axialer Symmetrie, in welchem sich das chirale Quark-Meson-Modell auf das Gell-Mann-Levy lineare Sigma-Modell gekoppelt an zwei Quarks reduziert. Untersuchungen mit anderen Methoden haben bereits gezeigt, dass der chirale Phasenübergang in diesem Fall von zweiter Ordnung ist und zur Universalitätsklasse des dreidimensionalen skalaren $O(4)$ -Modells gehört. Für die numerische Evaluierung nahmen wir eine Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung vor, wobei wir im fermionischen Sektor nur die niedrigsten Ordnungen und im skalaren Sektor des Modells zusätzlich eine feldunabhängige Wellenfunktionsrenormierung berücksichtigten. Unsere Untersuchungen zeigten, dass die Entkopplung der Fermionen an einem Phasenübergang zweiter Ordnung im Rahmen der TRG nicht auf triviale Art realisiert und die Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung im fermionischen Sektor hierfür nicht ausreichend ist. Um das Entkoppeln der Fermionen sicherzustellen, mussten wir die nichtanalytische Struktur der Fermion-Selbstenergie berücksichtigen. Diese erhielten wir durch Berechnung der ein-loop Korrektur zur Fermion-Selbstenergie in HTL-Approximation. Aufgrund der nichtanalytischen Struktur der Selbstenergie wird auf chiral invariante Weise eine thermale Fermion-Masse erzeugt, die das Entkoppeln der Fermionen am Phasenübergang erzwingt. Wir verwendeten für den Fermion-Propagator statt der komplizierten nichtanalytischen Struktur eine einfache Näherung, die jedoch den entscheidenden Effekt einer thermalen Fermion-Masse auf chiral invariante Weise berücksichtigte. Mit dieser Modifikation des Fermion-Propagators konnten wir bestätigen, dass der chirale Phasenübergang im vorliegenden Modell von zweiter Ordnung ist und zur

Universalitätsklasse des dreidimensionalen skalaren $O(4)$ -Modells gehört. Das kritische Verhalten dieses Modells war zuvor bereits ausführlich in Kapitel 4 diskutiert worden. In diesem Kapitel bestimmten wir kritische Exponenten unter Berücksichtigung der anomalen Dimension. Das wichtigste Ergebnis des 5. Kapitels besteht in der Erkenntnis, dass im Rahmen der TRG die üblichen Argumente für eine Entkopplung der Fermionen an einem Phasenübergang zweiter Ordnung nicht gelten und man dafür die nichtanalytische Struktur des Fermion-Propagators berücksichtigen muss.

In Kapitel 6 berechneten wir die Plasmon-Dämpfungsrate im skalaren $O(1)$ -Modell. Die Dämpfungsrate ist mit dem Imaginärteil der Selbstenergie verknüpft und damit eine nichtstatische Größe. Dämpfungsrate sind von großer Bedeutung, da sie Aussagen über Nichtgleichgewichtsprozesse im Sinne von Linear Response ermöglichen. Die Plasmon-Dämpfungsrate ist störungstheoretisch ein zwei-loop Effekt und wurde im Hochtemperaturlimes mit Hilfe resumierter Störungstheorie berechnet. Für uns war das Verhalten der Dämpfungsrate langreichweitiger Fluktuationen am Phasenübergang zweiter Ordnung interessant, da dieses mit der Bildung topologischer Defekte verknüpft ist. Die Extrapolation des perturbativen Ergebnisses lieferte für die Dämpfungsrate am Phasenübergang ein divergentes Resultat ("critical speeding up"). Aufgrund der Theorie kritischer Phänomene erwartet man jedoch, dass die Dämpfungsrate langreichweitiger Fluktuationen am Phasenübergang verschwindet ("critical slowing down"). Im Rahmen der TRG wurde die Dämpfungsrate zum ersten Mal in [22] untersucht. In jener Arbeit wurden jedoch wichtige Effekte, die für eine konsistente quantitative Berechnung von Bedeutung sind, teilweise falsch implementiert oder nicht berücksichtigt. In Kapitel 6 berechneten wir die Dämpfungsrate auf konsistente Weise. Insbesondere berücksichtigten wir auch die Felder mit dem thermalen Index 2, da dies unverzichtbar ist um sog. "pinch singularities" zu vermeiden. Besonders in der gebrochenen Phase hätten wir ohne Berücksichtigung der thermalen "Geist"-Felder viele undefinierte Ausdrücke erhalten. Wir berechneten die Dämpfungsrate in der symmetrischen Phase. Um sicher zu gehen, dass wir alle Beiträge zur Dämpfungsrate berücksichtigt haben, reproduzierten wir zunächst mit Hilfe der TRG das perturbative Ergebnis. Dieses konnten wir anschließend sehr leicht in nichtperturbative Flussgleichungen umsetzen und numerisch auswerten. Der Vergleich mit dem resumierten perturbativen Ergebnis zeigte für kleine Kopplungen völlige Übereinstimmung. Für größere Kopplungen machten sich jedoch wie erwartet die Effekte höherer Ordnung bemerkbar und die Ergebnisse wichen voneinander ab. Für eine Berechnung der Dämpfungsrate am Phasenübergang ist es unerlässlich, die Flussgleichungen in der gebrochenen Phase zu betrachten. Um eine Übersicht über die zahlreichen Beiträge in dieser Phase zu erhalten, bestimmten wir zunächst die perturbative Dämpfungsrate auf zwei-loop Niveau. Leider konnten wir in der Literatur keine Vergleichsmöglichkeit für unser perturbatives Ergebnis finden. Ausgehend von dem perturbativen Ergebnis konnten wir anschließend leicht die nichtperturbativen Flussgleichungen in der gebrochenen Phase ableiten. Die numerische Auswertung dieser Flussgleichungen hätte jedoch den Rahmen dieser Arbeit überstiegen und bleibt Gegenstand zukünftiger Untersuchungen. Wir sind jedoch zuversichtlich, dass man mit den hier präsentierten Flussgleichungen in Zukunft das erwartete "critical slowing down" der Dämpfungsrate am Phasenübergang beschreiben kann.

Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, dass die TRG eine sehr nützliche und vielseitige Methode zur Untersuchung nichtperturbativer Phänomene darstellt. Dementsprechend gibt es eine

Vielzahl von Projekten, die sich für Untersuchungen im Rahmen der TRG anbieten. Bislang fehlt noch eine Formulierung der TRG für Systeme mit endlichem chemischen Potenzial. Für solche Systeme sind z.B. im Rahmen des chiralen Phasenübergangs der QCD sehr interessante Effekte zu erwarten. Als Weiterführung dieser Arbeit bietet sich natürlich im Besonderen die numerische Bestimmung der Dämpfungsrate in der gebrochenen Phase an. Aufgrund der Möglichkeit, Imaginärteile numerisch berechnen zu können, nimmt die TRG unter den Renormierungsgruppen eine Sonderrolle ein, die zu intensiver Nutzung anregt. In diesem Zusammenhang sind auch noch technische und konzeptionelle Fragen zu klären. In dieser Arbeit haben wir für den vollen Propagator eine Form angenommen, die durch den Propagator im thermischen Gleichgewicht inspiriert wurde. Für verschwindende oder kleine Imaginärteile ist dies sicherlich gerechtfertigt. Es ist jedoch nicht klar, wie in einem nächsten Schritt die Form des Propagators verbessert werden könnte. Weiter wäre es interessant, durch Verwendung verschiedener Cutoff-Funktionen den Einfluss derselben auf die bisher erzielten Ergebnisse zu untersuchen.

Prinzipiell könnte man auch versuchen, durch Berücksichtigung weiterer Korrekturterme die numerischen Ergebnisse für die kritischen Exponenten zu verbessern. Dies erscheint uns jedoch als weniger dringlich, da unserer Ansicht nach die Stärken der TRG nicht in der Bestimmung des universellen Verhaltens liegen, das sich auch im Matsubaraformalismus berechnen lässt. Nachdem wir in dieser Arbeit die Grundlagen für verschiedene Anwendungen der TRG gelegt haben, sollte man nun zum Studium solcher Probleme übergehen, die sich nur im Rahmen der TRG nichtperturbativ behandeln lassen.

A. DIE THERMALE SKALARE ZWEIPUNKTFUNKTION

Ausgehend vom Operatorformalismus wollen wir in diesem Anhang die bosonische thermale Zweipunktfunktion analysieren und dabei wichtige Größen wie die Dämpfungsrate, den analytischen Propagator und die Spektraldichte einführen und ihre Eigenschaften erläutern. Eine ausführliche Darstellung der Eigenschaften der thermalen Zweipunktfunktion findet sich z.B. in [1–6].

Die Zweipunktfunktion spielt in der thermalen Feldtheorie eine besondere Rolle, denn beim Übergang von nicht-thermalen zu thermaler Feldtheorie wird auf tree-Niveau wegen der periodischen bzw. antiperiodischen Randbedingungen nur die Form des Propagators verändert. Die Kopplungen erhalten erst aufgrund von loop-Korrekturen einen thermalen Beitrag. Die Formulierungen der ERG und TRG beruhen auf der Modifikation des freien thermalen Propagators. Eine genaue Kenntnis der analytischen Eigenschaften der Zweipunktfunktion ist wichtig, um die Implikationen der Renormierungsgruppengleichungen besser verstehen zu können. Die Eigenschaften der thermalen Selbstenergie sind von Bedeutung für die Linear-Response-Theorie, für die Beschreibung von Relaxations- und Thermalisierungsprozessen, für die Beschreibung kollektiver Anregungen im Plasma usw.

A.1. Eigenschaften des thermalen Propagators

A.1.1. Der zeitgeordnete thermale Propagator

Im Operatorformalismus ist der zeitgeordnete thermale Propagator definiert durch

$$iD_{11}(x) = \theta(x_0)\langle\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)\rangle_\beta + \theta(-x_0)\langle\hat{\phi}(0)\hat{\phi}(x)\rangle_\beta \quad (\text{A.1})$$

$$= \theta(x_0)D^+(x) + \theta(-x_0)D^-(x), \quad (\text{A.2})$$

wobei $\hat{\phi}(x)$ die Feldoperatoren im Heisenbergbild sind und mit $\langle \dots \rangle_\beta$ die thermale Spur gemeint ist:

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_\beta = \frac{1}{\text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})} \text{Tr} \left(e^{-\beta\hat{H}} \hat{\mathcal{O}} \right). \quad (\text{A.3})$$

Der retardierte und der avancierte thermale Propagator sind definiert durch

$$iD_R(x) = \theta(x_0)\langle[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(0)]\rangle_\beta = \theta(x_0)(D^+(x) - D^-(x)), \quad (\text{A.4})$$

$$iD_A(x) = -\theta(-x_0)\langle[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(0)]\rangle_\beta. \quad (\text{A.5})$$

Damit kann man (A.1) umformulieren zu

$$iD_{11}(x) = iD_R(x) + D^-(x) = iD_A(x) + D^+(x). \quad (\text{A.6})$$

Im Gleichgewicht lässt sich die thermale Zweipunktfunktion als Funktion der reellen Spektraldichte $\rho(x)$ darstellen:

$$\rho(x) = \langle [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(0)] \rangle_\beta = D^+(x) - D^-(x). \quad (\text{A.7})$$

Für den weiteren Verlauf wollen wir fouriertransformierte Spektraldichte $\rho(k)$ einführen:

$$\rho(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \rho(k). \quad (\text{A.8})$$

Mit Hilfe einer Lehmann–Spektralanalyse [1] lassen sich folgende wichtige Eigenschaften von $\rho(k)$ ableiten:

$$\rho(-k_0, \vec{k}) = -\rho(k_0, \vec{k}), \quad (\text{A.9})$$

$$k_0 \rho(k) \geq 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \rho(k) = 1. \quad (\text{A.11})$$

In einer freien Theorie kann man die Spektraldichte explizit berechnen, und man erhält

$$\rho_0(k) = 2\pi \epsilon(k_0) \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{A.12})$$

$$\text{mit} \quad \epsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x).$$

Die Spektraldichte einer freien Theorie ist unabhängig von der Temperatur. Der Grund dafür liegt darin, dass $\rho(k)$ mit der Energie und Lebensdauer fundamentaler Anregungen verknüpft ist und diese in einer freien Theorie unabhängig von der Temperatur sind.

Die Funktionen $D^+(x)$ und $D^-(x)$ sind im thermalen Gleichgewicht über die KMS-Relation miteinander verknüpft. Für die Fouriertransformierten gilt:

$$D^+(k) = D^(-k) = e^{\beta k_0} D^-(k). \quad (\text{A.13})$$

Unter Verwendung von (A.13) und (A.7) erhält man im thermischen Gleichgewicht

$$D^+(k) = \rho(k)(1 + N(k_0)), \quad (\text{A.14})$$

$$D^-(k) = \rho(k)N(k_0), \quad (\text{A.15})$$

mit

$$N(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}. \quad (\text{A.16})$$

Nun wollen wir den analytischen Propagator $\tilde{\Delta}(z, \vec{k})$ definieren, der im Wesentlichen durch die Spektraldichte charakterisiert ist:

$$\tilde{\Delta}(z, \vec{k}) = \int \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{\rho(k'_0, \vec{k})}{z - k'_0}. \quad (\text{A.17})$$

Wie wir sehen werden, lassen sich die physikalisch relevanten Propagatoren aus dem analytischen Propagator durch verschiedene Grenzfälle ableiten.

Für $z = i\omega_n$ erhält man aus (A.17) den Matsubarapropagator. In einer freien Theorie folgt durch Einsetzen von (A.12)

$$\tilde{\Delta}(i\omega_n, \vec{k}) = \frac{-1}{\omega_n^2 + \omega_k^2}, \quad (\text{A.18})$$

wobei $\omega_k^2 = (\vec{k})^2 + m^2$.

Im Realzeitformalismus, d.h. für reelle z , ist der Sachverhalt etwas komplizierter. Ausgehend von der Darstellung der Theta-Funktion

$$\theta(x_0) = i \int \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{e^{-ik'_0 x_0}}{k'_0 + i\epsilon} \quad (\text{A.19})$$

erhält man für die Fouriertransformierte des zeitgeordneten thermalen Propagators

$$iD_{11}(k) = i\tilde{\Delta}(k_0 + i\epsilon, \vec{k}) + \rho(k)N(k_0) \quad (\text{A.20})$$

$$= i\tilde{\Delta}(k_0 - i\epsilon, \vec{k}) + \rho(k)(1 + N(k_0)) \quad (\text{A.21})$$

$$= i\tilde{\Delta}(k_0 + \epsilon(k_0)i\epsilon, \vec{k}) + iN(|k_0|)[\tilde{\Delta}(k_0 + \epsilon(k_0)i\epsilon, \vec{k}) - \tilde{\Delta}(k_0 - \epsilon(k_0)i\epsilon, \vec{k})]. \quad (\text{A.22})$$

Durch Vergleich mit (A.6) ergibt sich für den retardierten und avancierten Propagator

$$\Delta_R(k) = \tilde{\Delta}(k_0 + i\epsilon, \vec{k}), \quad (\text{A.23})$$

$$\Delta_A(k) = \tilde{\Delta}(k_0 - i\epsilon, \vec{k}) = (\Delta_R(k))^*. \quad (\text{A.24})$$

An (A.17) erkennt man, dass $\Delta_R(k)$ in der oberen, $\Delta_A(k)$ hingegen in der unteren komplexen k_0 -Ebene analytisch ist. Dies ist die Konsequenz davon, dass der retardierte Propagator für $t < 0$ und der avancierte Propagator für $t > 0$ verschwinden.

Wir definieren den thermalen Feynman-Propagator als

$$\Delta(k) = \tilde{\Delta}(k_0 + \epsilon(k_0)i\epsilon, \vec{k}). \quad (\text{A.25})$$

Damit folgt aus (A.22):

$$D_{11}(k) = \Delta(k) + N(|k_0|)(\Delta(k) - \Delta^*(k)) \quad (\text{A.26})$$

$$= \Delta(k) + 2iN(|k_0|)\Im\Delta(k). \quad (\text{A.27})$$

Bei verschwindender Temperatur wird die Bose–Einstein–Verteilung $N(|k_0|)$ für jedes endliche k_0 null, wodurch sich D_{11} auf den Feynman-Propagator bei $T = 0$ reduziert.

Für eine freie Theorie erhält man durch Einsetzen von (A.12)

$$\Delta(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\text{A.28})$$

$$D_{11}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2\pi iN(|k_0|)\delta(k^2 - m^2), \quad (\text{A.29})$$

wobei wir die Hilfsformel

$$-2\pi i\delta(x) = \frac{1}{x+i\epsilon} - \frac{1}{x-i\epsilon} \quad (\text{A.30})$$

verwendet haben. Aus der Definition (A.17) folgt unter Berücksichtigung von (A.9):

$$\tilde{\Delta}(-z, \vec{k}) = \tilde{\Delta}(z, \vec{k}), \quad (\text{A.31})$$

$$\tilde{\Delta}(z, \vec{k})^* = \tilde{\Delta}(z^*, \vec{k}). \quad (\text{A.32})$$

Aufgrund der Eigenschaft (A.32) ist $\tilde{\Delta}(z, \vec{k})$ hermitisch analytisch. Dies bedeutet, dass $\tilde{\Delta}(z, \vec{k})$ Schnitte bzw. Pole entlang der reellen z -Achse besitzt. Für reelle k_0 folgt:

$$\Re\tilde{\Delta}(k_0 + i\epsilon, \vec{k}) = \Re\tilde{\Delta}(k_0 - i\epsilon, \vec{k}), \quad (\text{A.33})$$

$$\Im\tilde{\Delta}(k_0 + i\epsilon, \vec{k}) = -\Im\tilde{\Delta}(k_0 - i\epsilon, \vec{k}), \quad (\text{A.34})$$

$$\Im\tilde{\Delta}(i\epsilon, \vec{k}) = \Im\tilde{\Delta}(-i\epsilon, \vec{k}) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Der Realteil von $\tilde{\Delta}(z, \vec{k})$ ist entlang der reellen Achse stetig, während der Imaginärteil einen Sprung macht und am Ursprung verschwindet. Die Diskontinuität des Imaginärteils entlang der reellen Achse ist gegeben durch die Spektraldichte. Mit Hilfe von (A.30) erhält man

$$\begin{aligned} \rho(k) &= i[\tilde{\Delta}(k_0 + i\epsilon, \vec{k}) - \tilde{\Delta}(k_0 - i\epsilon, \vec{k})] \\ &= i(\Delta_R(k_0, \vec{k}) - \Delta_A(k_0, \vec{k})) \\ &= -2\Im\Delta_R(k_0, \vec{k}). \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Aus der Definition des thermalen Feynman-Propagator (A.25) und der Eigenschaft (A.32) erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho(k) &= i\epsilon(k_0)[\Delta(k_0, \vec{k}) - (\Delta(k_0, \vec{k}))^*] \\ &= -2\epsilon(k_0)\Im\Delta(k_0, \vec{k}). \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Die Spektraldichte ist somit proportional zum Imaginärteil des Feynman-Propagators. Der thermale Propagator lässt sich damit schreiben als

$$D_{11}(k) = \Delta(k) - iN(|k_0|)\epsilon(k_0)\rho(k). \quad (\text{A.38})$$

Eine wichtige Eigenschaft des thermalen Feynman-Propagators erhalten wir mit Hilfe von (A.31):

$$\Delta(k) = \Delta(-k). \quad (\text{A.39})$$

Unter Annahme einer Schwinger-Dyson-Gleichung machen wir für den vollen thermalen Feynman-Propagator den Ansatz

$$\Delta(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + \Pi(k) + i\epsilon}, \quad (\text{A.40})$$

wobei $\Pi(k)$ die Feynman–Selbstenergie darstellt. Durch Einsetzen von (A.40) in die Gleichung (A.37) erhalten wir

$$\rho(k) = 2\epsilon(k_0) \frac{\Im\Pi(k)}{[k^2 - m^2 + \Re\Pi(k)]^2 + [\Im\Pi(k)]^2}. \quad (\text{A.41})$$

Die Spektraldichte wird also durch eine Breit-Wigner-Formel beschrieben. Für kleinen oder verschwindenden Imaginärteil der Selbstenergie ist die Spektraldichte stark gepeakt bei $\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2 + \Re\Pi(\omega, \vec{k})$. Dies definiert ein Quasi-Teilchen, das Plasmon.

Für verschwindenden Imaginärteil erhält man mit Hilfe der Identität

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \delta(x), \quad (\text{A.42})$$

für die Spektraldichte

$$\rho(k) = 2\pi\epsilon(k_0)\delta(k^2 - m^2 + \Re\Pi(k)) \quad (\text{A.43})$$

und damit

$$D_{11}(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + \Re\Pi(k) + i\epsilon} - 2\pi i N(|k_0|) \delta(k^2 - m^2 + \Re\Pi(k)). \quad (\text{A.44})$$

A.1.2. Der thermale Propagator im Realzeitformalismus

Wir haben nun alle Voraussetzungen, um die Propagatormatrix im Realzeitformalismus anzugeben. Die (11)–Komponente der Propagator–Matrix entspricht dem zeitgeordneten thermalen Propagator, den wir bereits berechnet haben:

$$\begin{aligned} iD_{11}(x) &= \theta(x_0) \langle \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(0) \rangle_\beta + \theta(-x_0) \langle \hat{\phi}(0) \hat{\phi}(x) \rangle_\beta \\ \Rightarrow \quad iD_{11}(k) &= i[\Delta(k) + N(|k_0|)(\Delta(k) - \Delta^*(k))]. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Für die Nichtdiagonalelemente gilt

$$iD_{12}(x) = \langle \hat{\phi}(0) \hat{\phi}(x) \rangle_\beta, \quad iD_{21}(x) = \langle \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(0) \rangle_\beta.$$

Damit sind die Nichtdiagonalelemente identisch mit $D^+(x)$ und $D^-(x)$:

$$iD_{12}(k) = D^-(k) = \rho(k)N(k_0), \quad (\text{A.46})$$

$$iD_{21}(k) = D^+(k) = \rho(k)(1 + N(k_0)). \quad (\text{A.47})$$

Mit Hilfe von (A.37) lässt sich dies auch umschreiben zu

$$D_{12}(k) = N(|k_0|)(\Delta(k) - \Delta^*(k)) + \theta(-k_0)(\Delta(k) - \Delta^*(k)), \quad (\text{A.48})$$

$$D_{21}(k) = N(|k_0|)(\Delta(k) - \Delta^*(k)) + \theta(k_0)(\Delta(k) - \Delta^*(k)). \quad (\text{A.49})$$

Die (22)–Komponente der Propagatormatrix ist der anti–zeitgeordnete thermale Propagator:

$$iD_{22}(k) = (iD_{11}(k))^* = -i[\Delta(k)^* + N(|k_0|)(\Delta(k)^* - \Delta(k))] . \quad (\text{A.50})$$

Die thermale Propagatormatrix ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} D(k) &= \begin{pmatrix} \Delta & (\Delta - \Delta^*)\theta(-k_0) \\ (\Delta - \Delta^*)\theta(k_0) & -\Delta^* \end{pmatrix} \\ &\quad + (\Delta - \Delta^*)N(|k_0|) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} M(k_0) &= \sqrt{N(|k_0|)} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\beta|k_0|} & e^{-\frac{1}{2}\beta k_0} \\ e^{\frac{1}{2}\beta k_0} & e^{\frac{1}{2}\beta|k_0|} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{1 + N(|k_0|)} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \frac{\Theta(k_0)}{1 + N(|k_0|)} \\ 1 - \frac{\Theta(-k_0)}{1 + N(|k_0|)} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

lässt sich dies auch schreiben als

$$D(k) = M(k_0) \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* \end{pmatrix} M(k_0) . \quad (\text{A.53})$$

Die Gleichung (A.53) ist deshalb bemerkenswert, da sie sowohl für den vollen als auch für den freien thermalen Propagator gilt, wobei im letzteren Fall der volle thermale Feynman–Propagator $\Delta(k)$ durch den freien $\Delta_0(k)$ zu ersetzen ist. Für allgemeine Konturen σ muss $M(k_0)$ ersetzt werden durch $M_\sigma(k_0)$ mit

$$\begin{aligned} M_\sigma(k_0) &= U_\sigma(k_0)M(k_0)U_\sigma^{-1}(k_0) , \\ U_\sigma(k_0) &= \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\sigma k_0} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\sigma k_0} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Wir wollen die Gleichung (A.51) in einer Form schreiben, die sich bei der Berechnung der Imaginärteile als hilfreich erweisen wird:

$$\begin{aligned} D(k) &= \frac{1}{2}(\Delta + \Delta^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\Delta - \Delta^*)(1 + 2N(|k_0|)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{2}(\Delta - \Delta^*)\epsilon(k_0) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{P}(\Delta(k)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{i}{2}\epsilon(k_0)\rho(k)(1 + 2N(|k_0|)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{i}{2}\rho(k) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Man kann leicht folgende Relationen ableiten :

$$D_{11}(k) + D_{22}(k) = D_{12}(k) + D_{21}(k) , \quad (\text{A.55})$$

$$D_{11}(k) - D_{12}(k) = \Delta_R(k) , \quad (\text{A.56})$$

$$D_{12}(k) - D_{21}(k) = i\rho(k) . \quad (\text{A.57})$$

A.2. Die thermale Selbstenergie im Realzeitformalismus

In Analogie zum analytischen Propagator können wir die analytische Selbstenergie $\tilde{\Pi}(z, \vec{k})$ definieren:

$$\tilde{\Pi}(z, \vec{k}) = \tilde{\Delta}(z, \vec{k})^{-1} - \tilde{\Delta}_0(z, \vec{k})^{-1}. \quad (\text{A.58})$$

Die Funktion $\tilde{\Pi}(z, \vec{k})$ ist ebenfalls hermitisch analytisch und hat somit die gleichen Eigenschaften wie der analytische Propagator. Für $z = i\omega_n$ erhält man aus der analytischen Selbstenergie die Selbstenergie im Matsubaraformalismus, für $z = k_0 + i\epsilon$ die retardierte Selbstenergie, für $z = k_0 - i\epsilon$ die avancierte Selbstenergie und für $z = k_0 + \epsilon(k_0)i\epsilon$ die Feynman-Selbstenergie:

$$\Pi_R(k) = \tilde{\Pi}(k_0 + i\epsilon, \vec{k}), \quad (\text{A.59})$$

$$\Pi_A(k) = \tilde{\Pi}(k_0 - i\epsilon, \vec{k}) = (\Pi_R(k))^*, \quad (\text{A.60})$$

$$\Pi(k) = \tilde{\Pi}(k_0 + i\epsilon(k_0)\epsilon, \vec{k}) = \Delta^{-1}(k) - \Delta_0^{-1}(k). \quad (\text{A.61})$$

Analog zu (A.58) ist im Realzeitformalismus die Selbstenergiematrix definiert durch

$$\Sigma(k) = D^{-1}(k) - D_0^{-1}(k). \quad (\text{A.62})$$

Durch Einsetzen von (A.53) folgt

$$\begin{aligned} \Sigma(k) &= M^{-1}(k_0) \begin{pmatrix} \Delta^{-1} - \Delta_0^{-1} & 0 \\ 0 & -(\Delta^{-1} - \Delta_0^{-1})^* \end{pmatrix} M^{-1}(k_0) \\ &= M^{-1}(k_0) \begin{pmatrix} \Pi(k) & 0 \\ 0 & -(\Pi(k)^*) \end{pmatrix} M^{-1}(k_0) \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

mit

$$M^{-1}(k_0) = \sqrt{1 + N(|k_0|)} \begin{pmatrix} 1 & -1 + \frac{\Theta(k_0)}{1 + N(|k_0|)} \\ -1 + \frac{\Theta(-k_0)}{1 + N(|k_0|)} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.64})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M(k_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

In Komponentenschreibweise folgt:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(k) &= \Pi(k) + (\Pi(k) - \Pi(k)^*)N(|k_0|) \\ &= \Pi_R(k) + (\Pi_R(k) - \Pi_R(k)^*)N(k_0), \\ \Sigma_{22}(k) &= -\Sigma_{11}^*(k), \\ \Sigma_{12}(k) &= -(\Pi(k) - \Pi(k)^*)(N(|k_0|) + \theta(-k_0)) \\ &= -(\Pi_R(k) - \Pi_R(k)^*)N(k_0), \\ \Sigma_{21}(k) &= -(\Pi(k) - \Pi(k)^*)(N(|k_0|) + \theta(k_0)) \\ &= -(\Pi_R(k) - \Pi_R(k)^*)(N(k_0) + 1) \\ &= \Sigma_{12}(-k). \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Die Nichtdiagonalelemente der Selbstenergie– als auch der Propagatormatrix sind rein imaginär. Weiterhin gelten die Relationen

$$\Sigma_{11}(k) + \Sigma_{22}(k) = -\Sigma_{12}(k) - \Sigma_{21}(k), \quad (\text{A.67})$$

$$\Sigma_{11}(k) + \Sigma_{12}(k) = \Pi_R(k), \quad (\text{A.68})$$

$$\Sigma_{12}(k) - \Sigma_{21}(k) = 2i\Im\Pi_R(k) = 2i\epsilon(k_0)\Im\Pi(k). \quad (\text{A.69})$$

Aus der KMS-Relation (A.13) für den Propagator folgt die entsprechende Relation für die Selbstenergie:

$$\Sigma_{21}(k) = e^{\beta k_0} \Sigma_{12}(k). \quad (\text{A.70})$$

A.3. Der Imaginärteil der Selbstenergie bei $T \neq 0$ – die Dämpfungsrate

Nachdem wir uns mit der mathematischen Struktur des Propagators und der Selbstenergie befasst haben, wollen wir uns nun dem aus physikalischer Sicht interessanten Aspekt der Interpretation des Imaginärteils der Selbstenergie bei $T \neq 0$ zuwenden. Wir werden dabei der Argumentation in [17] folgen, wo dies zum ersten Mal diskutiert wurde. Die Bedeutung des Imaginärteils im Rahmen von Relaxations– und Thermalisierungsprozessen wurde z.B. in [19] mit Hilfe von Nichtgleichgewichtsphysik untersucht.

Bei $T = 0$ entspricht der Imaginärteil der Selbstenergie einer Zerfallsrate. Bei $T \neq 0$ hat die Selbstenergie eines jeden Teilchens aufgrund der Wechselwirkung mit dem Plasma einen Imaginärteil. Eine Interpretation des Imaginärteils als Zerfallsrate würde jetzt bedeuten, dass alle Teilchen instabil und nach genügend langer Zeit zerfallen wären. Damit würde sich das gesamte Plasma mit der Zeit auflösen. Dies ist natürlich nicht der Fall und zeigt, dass im thermischen Gleichgewicht eine andere Deutung für den Imaginärteil der Selbstenergie gefunden werden muss. Im thermischen Gleichgewicht erwartet man, dass alle Teilchen thermisch verteilt sind und sich diese Verteilung mit der Zeit nicht ändert.

Zur Berechnung des Imaginärteils der retardierten Selbstenergie lassen sich analog zu $T = 0$ Regeln ableiten, die als “Kobes–Semenoff–Cutting–Rules” bekannt sind [2, 14, 15]. Es zeigt sich, dass man den Imaginärteil der retardierten Selbstenergie bei Bosonen als Differenz (bei Fermionen als Summe) zwischen der differentiellen Erzeugungs– und Zerfallsrate darstellen kann. Dies wird auch durch die “Cutting-Rules” anschaulich nahegelegt.

Man erhält für ein Boson

$$\Im\Pi_R(k) = k_0 [\Gamma_z(k) - \Gamma_e(k)], \quad (\text{A.71})$$

wobei mit $\Gamma_e(k)$ die differentielle Erzeugungsrate für ein neues Teilchen mit Impuls (k_0, \vec{k}) und mit $\Gamma_z(k)$ die differentielle Zerfallsrate dieses Teilchens bezeichnet wird. Bei $T = 0$ verschwindet die Erzeugungsrate, weil kein Plasma mehr vorhanden ist, aus dem das Teilchen erzeugt werden kann. Im Gleichgewicht sind Erzeugungs– und Zerfallsrate korreliert, da die thermale Verteilung der Teilchen zeitlich konstant ist. Dies liefert die Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} \Gamma_z(k)N(k_0) &= \Gamma_e(k)(N(k_0) + 1) \\ \Rightarrow \Gamma_z(k) &= e^{\beta k_0} \Gamma_e(k). \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Durch Vergleich von (A.69) mit (A.71) erhalten wir unter Berücksichtigung von (A.72)

$$\Gamma_e(k) = -\frac{1}{2k_0} \Im \Sigma_{12}(k), \quad (\text{A.73})$$

$$\Gamma_z(k) = -\frac{1}{2k_0} \Im \Sigma_{21}(k). \quad (\text{A.74})$$

Zur Herleitung der Dämpfungsrate nehmen wir an, im Plasma sei zur Zeit $t = 0$ die Verteilung der Φ -Bosonen mit Energie $k_0 > 0$ gegeben durch $f(k, t = 0)$, wobei $f(k, t = 0)$ zunächst eine beliebige Anfangsverteilung sein kann. Für die zeitliche Entwicklung der Verteilung $f(k, t)$ erhält man die Differenzialgleichung

$$\frac{df}{dt} = -f\Gamma_z + (1 + f)\Gamma_e. \quad (\text{A.75})$$

Für beliebige Anfangsverteilungen $f(k, t = 0)$ ist (A.75) eine nichtlineare Differenzialgleichung, da $\Gamma_z(k, t)$ und $\Gamma_e(k, t)$ selbst wieder von $f(k, t)$ abhängen werden. Falls $f(k, t = 0)$ nur schwach von der Gleichgewichtsverteilung $N(k_0)$ abweicht, kann man in erster Ordnung für $\Gamma_z(k)$ und $\Gamma_e(k)$ die thermischen Raten einsetzen. Diese sind zeitunabhängig, und damit lässt sich (A.75) exakt lösen. Man erhält

$$\begin{aligned} f(k, t) &= \frac{\Gamma_e(k)}{\Gamma_z(k) - \Gamma_e(k)} + \left(f(k, t = 0) - \frac{\Gamma_e(k)}{\Gamma_z(k) - \Gamma_e(k)} \right) e^{-(\Gamma_z(k) - \Gamma_e(k))t} \\ &= N(k_0) + (f(k, t = 0) - N(k_0)) e^{-2\gamma(k)t}, \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

wobei wir die Dämpfungsrate $\gamma(k)$ wie folgt eingeführt haben:

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \frac{1}{2} (\Gamma_z(k) - \Gamma_e(k)) \\ &= \frac{\Im \Pi_R(k)}{2k_0} = \frac{\Im \Pi(k)}{2|k_0|}. \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Die Gleichung (A.76) zeigt, dass unabhängig von der Anfangsverteilung bei $t = 0$ für genügend große Zeiten die Verteilung $f(k, t)$ der Gleichgewichtsverteilung zustrebt. Wie schnell die Gleichgewichtsverteilung erreicht wird, hängt von der Dämpfungsrate γ und damit vom Imaginärteil der Selbstenergie ab.

B. DAS UNIVERSELLE VERHALTEN AM PHASENÜBERGANG ZWEITER ORDNUNG

Das universelle kritische Verhalten in der Nähe eines Phasenübergangs zweiter Ordnung wird durch kritische Exponenten und kritische Amplituden beschrieben. Bereits früh hat man aufgrund experimenteller Messungen festgestellt, dass die kritischen Exponenten nicht unabhängig voneinander sind, sondern sog. Skalenrelationen erfüllen. Diese Relationen können unter Annahme einer universellen Skalenform für die Zustandsgleichung in der kritischen Region abgeleitet werden. Diese Skalenform wurde zuerst 1965 von Widom vorgeschlagen [106] und konnte später mit Hilfe von Renormierungsgruppen-Analysen [50, 51, 107] bestätigt werden. Für ausführliche Darstellungen zu dieser Thematik verweisen wir auf [6, 53–55, 105].

Die Widom–Skalenform der Zustandsgleichung lautet im $O(N)$ –Modell:

$$\frac{\partial V(\rho)}{\partial \varphi} = \varphi^\delta f(x), \quad x = \frac{(T - T_c)}{\varphi^{1/\beta}} = \frac{t}{\varphi^{1/\beta}}, \quad (\text{B.1})$$

wobei $\varphi = \sqrt{2\rho}$ das unrenormierte Feld ist und β sowie δ kritische Exponenten sind. In der statistischen Physik entspricht dem Feld φ die Magnetisierung M und $\partial V(\rho)/\partial \varphi$ dem äußeren Magnetfeld H . Die Funktion $f(x)$ wird als Widom Skalenfunktion bezeichnet und ist bis auf die Normierung und Reskalierung von x universell. Sie enthält die gesamte Information über das universelle Verhalten am Phasenübergang (für $\varphi \rightarrow 0$) und hat folgende Eigenschaften:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = D, \quad f(-x_0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (C_+)^{-1} x^\gamma. \quad (\text{B.2})$$

Wir werden im Folgenden zeigen, wie man aus den Eigenschaften von $f(x)$ kritische Exponenten und Skalenrelationen ableiten kann. Eine sehr wichtige Größe in der kritischen Region ist die Korrelationslänge $\xi = m_r^{-1}$, die dem Inversen der renormierten Masse m_r entspricht. In der kritischen Region ist m_r die einzige relevante Massenskala der Theorie. Hier gilt

$$m_r \sim |t|^\nu, \quad \nu > 0. \quad (\text{B.3})$$

Die renormierte Masse verschwindet somit für $T \rightarrow T_c$ mit dem kritischen Exponenten ν . Dies bedeutet zugleich, dass die Korrelationslänge ξ divergiert. Als weitere Größe führen wir das renormierte Feld $\varphi_r = \sqrt{Z} \varphi$ ein. In der kritischen Region verhält sich die Wellenfunktionsrenormierung Z wie

$$Z \sim m_r^{-\eta}, \quad (\text{B.4})$$

wobei η ebenfalls ein kritischer Exponent ist.

Für $T < T_c$ haben wir spontane Symmetriebrechung, d.h. das Minimum des Potentials befindet sich bei einem nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert φ_0 . Aus (B.1) und (B.3) erhalten wir für $t < 0$

$$\varphi_0 = x_0^{-\beta} (-t)^\beta \sim x_0^{-\beta} m_r^{\beta/\nu}. \quad (\text{B.5})$$

Das unrenormierte Minimum verschwindet in der gebrochenen Phase für $t \rightarrow 0^-$ mit dem kritischen Exponenten β . Andererseits gilt für das renormierte Feld aus Dimensionsgründen $\varphi_r \sim m_r^{(d-2)/2}$. Damit folgt

$$\varphi_0 = \varphi_{0,r} Z^{-1/2} \sim m_r^{\frac{d-2+\eta}{2}}. \quad (\text{B.6})$$

Der Vergleich mit (B.5) liefert die Skalenrelation

$$\beta = \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta). \quad (\text{B.7})$$

Für $T > T_c$ ist der Zusammenhang zwischen dem äußeren Feld H und der Magnetisierung M für kleine H analytisch, $H \sim M$. Für verschwindendes äußeres Feld H liegt das Minimum des Potentials bei $\varphi = 0$. Aus (B.1) folgt für $t > 0$ und $\varphi \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial V(\rho)}{\partial \varphi} = \varphi^\delta (C_+)^{-1} \varphi^{-\gamma/\beta} t^\gamma \stackrel{!}{\sim} \varphi. \quad (\text{B.8})$$

Damit erhalten wir als weitere Skalenrelation

$$\gamma = \beta(\delta - 1). \quad (\text{B.9})$$

Nun beschäftigen wir uns mit der unrenormierten Masse m , der in der statistischen Physik die Suszeptibilität $\chi = m^{-1}$ entspricht. Für $N > 1$ existieren für $T < T_c$ zwei verschiedene Massen, $m_\pi = V'$ und $m_\sigma = V' + 2\rho V''$. Diese entsprechen einer transversalen Suszeptibilität $\chi_t = m_\pi^{-1}$ und einer longitudinalen Suszeptibilität $\chi_l = m_\sigma^{-1}$. Für $T > T_c$ sind die Massen und damit die Suszeptibilitäten gleich. Mit Hilfe von

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \varphi} = V'(\rho) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 V(\rho)}{(\partial \varphi)^2} = V'(\rho) + 2\rho V''(\rho) \quad (\text{B.10})$$

erhalten wir aus (B.1) für $t > 0$ und $\varphi \rightarrow 0$

$$\chi^{-1} = m^2 = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \varphi} = \varphi^{\delta-1} (C_+)^{-1} \varphi^{-\gamma/\beta} t^\gamma = (C_+)^{-1} t^\gamma \sim m_r^{\gamma/\nu}. \quad (\text{B.11})$$

Für $T \gtrsim T_c$ wird das Verhalten der unrenormierten Masse durch den kritischen Exponenten γ und die Amplitude $(C_+)^{-1}$ bestimmt. Unter Verwendung von $m^2 = m_r^2 Z$ folgt unmittelbar eine weitere Skalenrelation:

$$\gamma = \nu(2 - \eta). \quad (\text{B.12})$$

Im Falle verschwindender anomaler Dimension η wird $m_r = m$ und damit $\gamma = 2\nu$.

Aus den bisher abgeleiteten Skalenrelationen können wir eine weitere wichtige Relation ableiten:

$$\delta = \frac{\gamma}{\beta} + 1 = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta}. \quad (\text{B.13})$$

Bei Vernachlässigung der Wellenfunktionsrenormierung erhalten wir in drei Dimensionen $\delta = 5$. Für $T < T_c$ haben wir aufgrund spontaner Symmetriebrechung zwei verschiedene Massen:

$$\chi_t^{-1} = m_\pi^2 = \varphi^{\delta-1} f(x), \quad (\text{B.14})$$

$$\chi_l^{-1} = m_\sigma^2 = \varphi^{\delta-1} \left(\delta f(x) - \frac{x}{\beta} f'(x) \right). \quad (\text{B.15})$$

Am Minimum des Potentials gilt $\varphi = \varphi_0$ und $x = -x_0$. Aufgrund der masselosen Goldstone-Bosonen divergiert die transversale Suszeptibilität χ_t . Für die longitudinale Suszeptibilität folgt aus (B.15)

$$\chi_l^{-1} = m_\sigma^2 = \frac{1}{\beta} f'(-x_0) x_0^{1-\gamma} (-t)^\gamma := (C_-)^{-1} (-t)^\gamma, \quad (\text{B.16})$$

wobei wir für die kritische Amplitude $(C_-)^{-1}$ definiert haben. Das Verhältnis der Amplituden C_+ und C_- ist ebenfalls universell:

$$\frac{C_+}{C_-} = \frac{C_+}{\beta} f'(-x_0) x_0^{1-\gamma}. \quad (\text{B.17})$$

Abschließend diskutieren wir das kritische Verhalten der Vierpunktkopplung $g = \partial^4 V / (\partial \varphi)^4$. Am Phasenübergang verschwindet die unrenormierte Kopplung g und die renormierte Kopplung $g_r = Z^{-2} g$ gemäß

$$g = l_\pm |t|^{\tilde{\nu}} \sim m_r^{\tilde{\nu}/\nu} \quad \text{und} \quad g_r = l_{r,\pm} |t|^{\tilde{\nu}_r} \sim m_r^{\tilde{\nu}_r/\nu}. \quad (\text{B.18})$$

Durch Differenziation von (B.1) erhalten wir $g \sim \varphi^{\delta-3}$, und damit folgt für die kritischen Exponenten

$$\tilde{\nu} = \beta(\delta - 3), \quad (\text{B.19})$$

$$\tilde{\nu}_r = \nu(4 - d), \quad (\text{B.20})$$

wobei wir im letzten Schritt die Skalenrelationen $\beta(\delta - 3) = \nu(4 - d - 2\eta)$ und $\tilde{\nu}_r = \tilde{\nu} + 2\eta\nu$ verwendet haben. Wir erkennen, dass in der kritischen Region für die renormierte Kopplung $g_r \sim m_r^{d-4}$ gilt, so wie man es aus naiver dimensionaler Skalierung erwarten würde. In drei Dimensionen sind die kritischen Exponenten für die renormierte Masse und die renormierte Kopplung identisch. Damit strebt das für die Störungstheorie relevante Verhältnis g_r/m_r am Phasenübergang gegen eine Konstante.

Obige Betrachtungen zeigen, dass nur zwei der kritischen Exponenten unabhängig sind.

C. DIE SUPERSPUR UND THERMALE SPUREN

C.1. Eigenschaften der Superspur

Die Superspur wurde in Kapitel 3.4 eingeführt, um die Spuren über fermionische und bosonische Freiheitsgrade einheitlich behandeln zu können. Wir wollen nun die Eigenschaften der Superspur erläutern (eine ausführliche Darstellung findet sich in [81]).

Wir definieren die Struktur einer Supermatrix \mathcal{S}^+ durch

$$\mathcal{S}^+ = \begin{pmatrix} g & u & u \\ u & g & g \\ u & g & g \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

g bezeichnet eine gerade Anzahl, u eine ungerade Anzahl von Grassmann-Variablen. Ein Beispiel für eine solche Supermatrix ist $\delta^2\Gamma/(\delta\bar{\Phi}\delta\Phi)$. Die Ableitung einer Supermatrix \mathcal{S}^+ nach einer Grassmann Variablen (z.B. nach einem Fermion-Feld) bzw. die Multiplikation mit einer Grassmann-Variablen liefert eine eine Supermatrix \mathcal{S}^- , deren Struktur durch

$$\mathcal{S}^- = \begin{pmatrix} u & g & g \\ g & u & u \\ g & u & u \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

gegeben ist.

Durch Multiplikation der Supermatrizen \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- miteinander erhalten wir wieder Supermatrizen, deren Struktur derjenigen von \mathcal{S}^+ oder \mathcal{S}^- gleichen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^+ \cdot \mathcal{S}^+ &\in \mathcal{S}^+, \\ \mathcal{S}^- \cdot \mathcal{S}^- &\in \mathcal{S}^+, \\ \mathcal{S}^+ \cdot \mathcal{S}^- &\in \mathcal{S}^-, \\ \mathcal{S}^- \cdot \mathcal{S}^+ &\in \mathcal{S}^-. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Die Superspur einer Supermatrix ist definiert durch

$$\text{STr}(\mathcal{S}) = \text{Tr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}), \quad (\text{C.4})$$

wobei

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Für die Superspur zweier Supermatrizen und einer Grassmann–Variablen θ gilt:

$$\begin{aligned}
\text{STr}(\mathcal{S}_1^+ \cdot \mathcal{S}_2^+) &= \text{STr}(\mathcal{S}_2^+ \cdot \mathcal{S}_1^+), \\
\text{STr}(\mathcal{S}_1^- \cdot \mathcal{S}_2^-) &= -\text{STr}(\mathcal{S}_2^- \cdot \mathcal{S}_1^-), \\
\text{STr}(\mathcal{S}_1^+ \cdot \mathcal{S}_2^-) &= \text{STr}(\mathcal{S}_2^- \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_1^+ \cdot \mathcal{M}) = \text{STr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_2^- \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_1^+), \\
\text{STr}(\mathcal{S}_1^- \cdot \mathcal{S}_2^+) &= \text{STr}(\mathcal{S}_2^+ \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_1^- \cdot \mathcal{M}) = \text{STr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_2^+ \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{S}_1^-), \\
\text{STr}(\theta \cdot \mathcal{S}^+) &= \text{STr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}^+ \cdot \mathcal{M} \cdot \theta), \\
\text{STr}(\theta \cdot \mathcal{S}^-) &= -\text{STr}(\mathcal{M} \cdot \mathcal{S}^- \cdot \mathcal{M} \cdot \theta).
\end{aligned} \tag{C.6}$$

C.2. Thermale Spuren zur Berechnung des Imaginärteils der retardierten Selbstenergie

In diesem Teil des Anhangs wollen wir die thermalen Spuren ausführen, die bei der Berechnung des Imaginärteils der retardierten Selbstenergie auftreten. Im Realzeitformalismus besitzt die effektive Wirkung als Funktion der beiden thermischen Felder φ_1 und φ_2 die Symmetrie

$$\Gamma[\varphi_1, \varphi_2] = -\Gamma^*[\varphi_2^*, \varphi_1^*]. \tag{C.7}$$

Damit folgt für den Realteil von Γ für reelle Felder φ

$$\Re\Gamma[\varphi_1, \varphi_2] = -\Re\Gamma[\varphi_2, \varphi_1]. \tag{C.8}$$

Aufgrund der Symmetrie (C.8) gilt

$$\Gamma_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)} = -\Gamma_{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \dots \bar{i}_n}^{(n)}, \tag{C.9}$$

wobei $\bar{i} = 2$ für $i = 1$ und umgekehrt.

Wir betrachten die Matrizen K, R, I_1 und I_2 , die die thermale Struktur des Propagators aus (6.12) widerspiegeln,

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{C.10}$$

Weiterhin haben wir drei verschiedene Arten von reellen, impulsunabhängigen n –Punkt–Kopplungen. Mit $\Gamma^{(n)} = \Gamma_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ bezeichnen wir solche n –Punkt–Kopplungen, bei denen über alle äußeren thermalen Indizes $i_1 \dots i_{n-2}$ summiert wird (über die beiden verbleibenden inneren Indizes erfolgt die Spurbildung). Mit $\tilde{\Gamma}^{(n)} = \Gamma_{1 i_2 \dots i_n}^{(n)}$ bezeichnen wir n –Punkt–Kopplungen, bei denen ein äußerer thermaler Index festgehalten wird. Diejenigen n –Punkt–Kopplungen, bei denen, mit Ausnahme von einem, über alle Indizes summiert wird, bezeichnen wir mit $\bar{\Gamma}^{(n)}$:

$$\bar{\Gamma}^{(n)} = \sum_{i_2 \dots i_n=1}^2 \Gamma_{1 i_2 \dots i_n}^{(n)}. \tag{C.11}$$

Der Einfachheit halber wollen wir bei den folgenden Berechnungen nur die inneren Indizes explizit anführen, über die die thermale Spurbildung erfolgt. Die äußeren Indizes führen wir nicht an, denn für diese ist nur entscheidend, ob über alle äußeren Indizes summiert wird oder ob ein Index festgehalten wird.

C.2.1. Thermale Spuren mit zwei Vertizes

$$(C.12)$$

Wir wollen nun die thermalen Spuren der Diagramme (C.12) berechnen. Nach dem Ausführen der Spur erhalten wir

$$\text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} \right) = -(\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)})(\Gamma_{21}^{(n)} + \Gamma_{22}^{(n)}) + (\Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{22}^{(m)})(\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)}) \quad (C.13)$$

$$\text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_2 \Gamma^{(n)} \right) = -(\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{22}^{(m)})(\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)} + \Gamma_{21}^{(n)} + \Gamma_{22}^{(n)}) \quad (C.14)$$

Mit Hilfe von (C.9) folgt daraus

$$\begin{aligned} \sum_{\text{äu. Ind.}} \text{Tr} \left(K \tilde{\Gamma}^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} \right) &= \bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)}, \\ \sum_{\text{äu. Ind.}} \text{Tr} \left(K \tilde{\Gamma}^{(m)} I_2 \Gamma^{(n)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (C.15)$$

Durch das Vertauschen von K mit I erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{\text{äu. Ind.}} \text{Tr} \left(I_1 \tilde{\Gamma}^{(m)} K \Gamma^{(n)} \right) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)}, \\ \sum_{\text{äu. Ind.}} \text{Tr} \left(I_2 \tilde{\Gamma}^{(m)} K \Gamma^{(n)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (C.16)$$

Der Anteil des thermalen Propagators $\sim I_1$ ist antisymmetrisch im Impuls wodurch die Richtung des Impulsflusses von Bedeutung ist. Bei der Berechnung der thermalen Spur mit I_1 äußert sich dies darin, dass die Richtung der Spurbildung wichtig ist, wie der Vergleich von (C.15) mit (C.16) zeigt.

Die thermale Spur, die die Matrix I_2 enthält, liefert keinen Beitrag, da der Imaginärteil des Propagators $\sim I_2$ symmetrisch im Impuls ist, während der Imaginärteil der retardierten Selbstenergie antisymmetrisch im Impuls ist.

C.2.2. Thermale Spuren mit drei Vertizes

$$(C.17)$$

Die Spurbildung für die Diagramme in (C.17) ergibt:

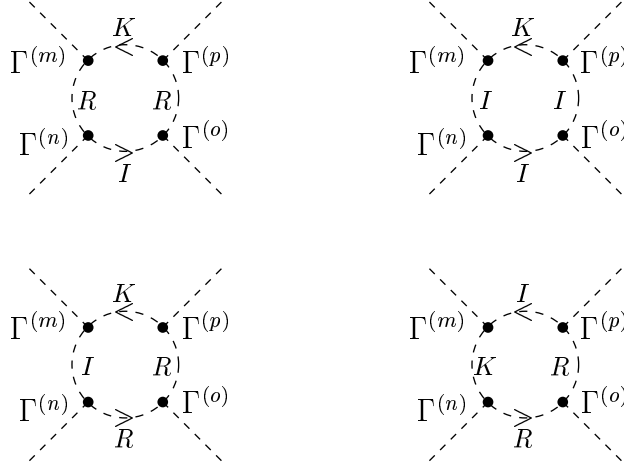
$$\begin{aligned} \text{Tr} (K\Gamma^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} R \Gamma^{(o)}) &= (\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)}) [(\Gamma_{21}^{(o)} + \Gamma_{22}^{(o)}) \Gamma_{22}^{(n)} - (\Gamma_{11}^{(o)} + \Gamma_{12}^{(o)}) \Gamma_{21}^{(n)}] + \\ &\quad (\Gamma_{22}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)}) [(\Gamma_{12}^{(o)} + \Gamma_{11}^{(o)}) \Gamma_{11}^{(n)} - (\Gamma_{22}^{(o)} + \Gamma_{21}^{(o)}) \Gamma_{12}^{(n)}], \\ \text{Tr} (I_1 \Gamma^{(m)} K \Gamma^{(n)} R \Gamma^{(o)}) &= -(\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)}) [(\Gamma_{12}^{(n)} + \Gamma_{22}^{(n)}) \Gamma_{22}^{(o)} - (\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{21}^{(n)}) \Gamma_{12}^{(o)}] \\ &\quad - (\Gamma_{22}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)}) [(\Gamma_{21}^{(n)} + \Gamma_{11}^{(n)}) \Gamma_{11}^{(o)} - (\Gamma_{22}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)}) \Gamma_{21}^{(o)}], \\ \text{Tr} (K\Gamma^{(m)} I_2 \Gamma^{(n)} R \Gamma^{(o)}) &= (\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{22}^{(m)}) [(\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{21}^{(n)}) (\Gamma_{11}^{(o)} + \Gamma_{12}^{(o)}) - \\ &\quad (\Gamma_{12}^{(n)} + \Gamma_{22}^{(n)}) (\Gamma_{21}^{(o)} + \Gamma_{22}^{(o)})]. \end{aligned}$$

Aufgrund der Summation über die äußeren Indizes folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} (K\tilde{\Gamma}^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} R \Gamma^{(o)}) &= \bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)}, \\ \sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} (K\Gamma^{(m)} I_1 \tilde{\Gamma}^{(n)} R \Gamma^{(o)}) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)}, \\ \sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} (K\Gamma^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} R \tilde{\Gamma}^{(o)}) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)}. \end{aligned}$$

Die Vertauschung von K mit I_1 liefert einen Faktor (-1) . Die Beiträge mit I_2 verschwinden aufgrund der Summation über die äußeren Indizes.

C.2.3. Thermale Spuren mit vier Vertizes



(C.18)

Die Spurbildung ergibt für die Diagramme in (C.18) unter Berücksichtigung der verschiedenen Möglichkeiten der Kombination von I_1 und I_2

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} (K\Gamma^{(m)} R\Gamma^{(n)} I_1\Gamma^{(o)} R\Gamma^{(p)}) = \\
& \quad (\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)}) [(\Gamma_{11}^{(p)} + \Gamma_{12}^{(p)})(\Gamma_{12}^{(n)}\Gamma_{11}^{(o)} - \Gamma_{11}^{(n)}\Gamma_{21}^{(o)}) + (\Gamma_{21}^{(p)} + \Gamma_{22}^{(p)})(\Gamma_{11}^{(n)}\Gamma_{22}^{(o)} - \Gamma_{12}^{(n)}\Gamma_{12}^{(o)})] \\
& \quad - (\Gamma_{22}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)}) [(\Gamma_{22}^{(p)} + \Gamma_{21}^{(p)})(\Gamma_{21}^{(n)}\Gamma_{22}^{(o)} - \Gamma_{22}^{(n)}\Gamma_{12}^{(o)}) + (\Gamma_{12}^{(p)} + \Gamma_{11}^{(p)})(\Gamma_{22}^{(n)}\Gamma_{11}^{(o)} - \Gamma_{21}^{(n)}\Gamma_{21}^{(o)})], \\
& \text{Tr} (K\Gamma^{(m)} I_1\Gamma^{(n)} R\Gamma^{(o)} R\Gamma^{(p)}) = \\
& \quad (\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)}) [(\Gamma_{11}^{(p)} + \Gamma_{12}^{(p)})(\Gamma_{22}^{(n)}\Gamma_{21}^{(o)} - \Gamma_{21}^{(n)}\Gamma_{11}^{(o)}) + (\Gamma_{21}^{(p)} + \Gamma_{22}^{(p)})(\Gamma_{21}^{(n)}\Gamma_{12}^{(o)} - \Gamma_{22}^{(n)}\Gamma_{22}^{(o)})] \\
& \quad - (\Gamma_{22}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)}) [(\Gamma_{22}^{(p)} + \Gamma_{21}^{(p)})(\Gamma_{11}^{(n)}\Gamma_{12}^{(o)} - \Gamma_{12}^{(n)}\Gamma_{22}^{(o)}) + (\Gamma_{12}^{(p)} + \Gamma_{11}^{(p)})(\Gamma_{12}^{(n)}\Gamma_{21}^{(o)} - \Gamma_{11}^{(n)}\Gamma_{11}^{(o)})], \\
& \text{Tr} (I_1\Gamma^{(m)} K\Gamma^{(n)} R\Gamma^{(o)} R\Gamma^{(p)}) = \\
& \quad (\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)}) [(\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{21}^{(n)})(\Gamma_{11}^{(o)}\Gamma_{12}^{(p)} - \Gamma_{12}^{(o)}\Gamma_{22}^{(p)}) + (\Gamma_{12}^{(n)} + \Gamma_{22}^{(n)})(\Gamma_{22}^{(o)}\Gamma_{22}^{(p)} - \Gamma_{21}^{(o)}\Gamma_{12}^{(p)})] \\
& \quad - (\Gamma_{22}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)}) [(\Gamma_{22}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)})(\Gamma_{22}^{(o)}\Gamma_{21}^{(p)} - \Gamma_{21}^{(o)}\Gamma_{11}^{(p)}) + (\Gamma_{21}^{(n)} + \Gamma_{11}^{(n)})(\Gamma_{11}^{(o)}\Gamma_{11}^{(p)} - \Gamma_{12}^{(o)}\Gamma_{21}^{(p)})], \\
& \text{Tr} (K\Gamma^{(m)} I_1\Gamma^{(n)} I_1\Gamma^{(o)} I_1\Gamma^{(p)}) = \\
& \quad (\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)}) [(\Gamma_{11}^{(p)} + \Gamma_{12}^{(p)})(\Gamma_{21}^{(n)}\Gamma_{22}^{(o)} - \Gamma_{22}^{(n)}\Gamma_{12}^{(o)}) + (\Gamma_{21}^{(p)} + \Gamma_{22}^{(p)})(\Gamma_{22}^{(n)}\Gamma_{11}^{(o)} - \Gamma_{21}^{(n)}\Gamma_{21}^{(o)})] \\
& \quad - (\Gamma_{22}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)}) [(\Gamma_{22}^{(p)} + \Gamma_{21}^{(p)})(\Gamma_{21}^{(n)}\Gamma_{11}^{(o)} - \Gamma_{11}^{(n)}\Gamma_{21}^{(o)}) + (\Gamma_{12}^{(p)} + \Gamma_{11}^{(p)})(\Gamma_{11}^{(n)}\Gamma_{22}^{(o)} - \Gamma_{12}^{(n)}\Gamma_{12}^{(o)})], \\
& \text{Tr} (K\Gamma^{(m)} I_1\Gamma^{(n)} I_2\Gamma^{(o)} I_1\Gamma^{(p)}) = \\
& \quad [(\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)})(\Gamma_{21}^{(n)} + \Gamma_{22}^{(n)}) - (\Gamma_{22}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)})(\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)})] \times \\
& \quad [(\Gamma_{11}^{(o)} + \Gamma_{21}^{(o)})(\Gamma_{21}^{(p)} + \Gamma_{22}^{(p)}) - (\Gamma_{22}^{(o)} + \Gamma_{12}^{(o)})(\Gamma_{11}^{(p)} + \Gamma_{12}^{(p)})], \\
& \text{Tr} (K\Gamma^{(m)} I_2\Gamma^{(n)} I_1\Gamma^{(o)} I_1\Gamma^{(p)}) = \\
& \quad (\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{22}^{(m)}) \{ (\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{21}^{(n)}) [\Gamma_{21}^{(o)}(\Gamma_{21}^{(p)} + \Gamma_{22}^{(p)}) - \Gamma_{22}^{(o)}(\Gamma_{11}^{(p)} + \Gamma_{12}^{(p)})] + \\
& \quad (\Gamma_{22}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)}) [\Gamma_{12}^{(o)}(\Gamma_{12}^{(p)} + \Gamma_{11}^{(p)}) - \Gamma_{11}^{(o)}(\Gamma_{22}^{(p)} + \Gamma_{21}^{(p)})] \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} R \Gamma^{(n)} I_2 \Gamma^{(o)} R \Gamma^{(p)} \right) &= \\
& \left[(\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{21}^{(m)}) (\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)}) - (\Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{22}^{(m)}) (\Gamma_{21}^{(n)} + \Gamma_{22}^{(n)}) \right] \times \\
& \left[(\Gamma_{11}^{(o)} + \Gamma_{21}^{(o)}) (\Gamma_{11}^{(p)} + \Gamma_{12}^{(p)}) - (\Gamma_{12}^{(o)} + \Gamma_{22}^{(o)}) (\Gamma_{21}^{(p)} + \Gamma_{22}^{(p)}) \right], \\
\text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_2 \Gamma^{(n)} R \Gamma^{(o)} R \Gamma^{(p)} \right) &= \\
& (\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{22}^{(m)}) \left\{ (\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{21}^{(n)}) \left[\Gamma_{11}^{(o)} (\Gamma_{11}^{(p)} + \Gamma_{12}^{(p)}) - \Gamma_{12}^{(o)} (\Gamma_{21}^{(p)} + \Gamma_{22}^{(p)}) \right] + \right. \\
& \left. (\Gamma_{22}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)}) \left[\Gamma_{22}^{(o)} (\Gamma_{22}^{(p)} + \Gamma_{21}^{(p)}) - \Gamma_{21}^{(o)} (\Gamma_{12}^{(p)} + \Gamma_{11}^{(p)}) \right] \right\}, \\
\text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_2 \Gamma^{(n)} I_2 \Gamma^{(o)} I_2 \Gamma^{(p)} \right) &= \\
& (\Gamma_{11}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{12}^{(m)} + \Gamma_{22}^{(m)}) (\Gamma_{11}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)} + \Gamma_{12}^{(n)} + \Gamma_{22}^{(n)}) \times \\
& (\Gamma_{11}^{(o)} + \Gamma_{12}^{(o)} + \Gamma_{12}^{(o)} + \Gamma_{22}^{(o)}) (\Gamma_{11}^{(p)} + \Gamma_{12}^{(p)} + \Gamma_{12}^{(p)} + \Gamma_{22}^{(p)}).
\end{aligned}$$

Die Summation über die äußeren Indizes liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \tilde{\Gamma}^{(m)} R \Gamma^{(n)} I_1 \Gamma^{(o)} R \Gamma^{(p)} \right) &= \bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} R \tilde{\Gamma}^{(n)} I_1 \Gamma^{(o)} R \Gamma^{(p)} \right) &= \bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} R \Gamma^{(n)} I_1 \tilde{\Gamma}^{(o)} R \Gamma^{(p)} \right) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} R \Gamma^{(n)} I_1 \Gamma^{(o)} R \tilde{\Gamma}^{(p)} \right) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \tilde{\Gamma}^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} R \Gamma^{(o)} R \Gamma^{(p)} \right) &= \bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_1 \tilde{\Gamma}^{(n)} R \Gamma^{(o)} R \Gamma^{(p)} \right) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} R \tilde{\Gamma}^{(o)} R \Gamma^{(p)} \right) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} R \Gamma^{(o)} R \tilde{\Gamma}^{(p)} \right) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \tilde{\Gamma}^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} I_1 \Gamma^{(o)} I_1 \Gamma^{(p)} \right) &= \bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_1 \tilde{\Gamma}^{(n)} I_1 \Gamma^{(o)} I_1 \Gamma^{(p)} \right) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} I_1 \tilde{\Gamma}^{(o)} I_1 \Gamma^{(p)} \right) &= \bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}, \\
\sum_{\text{äu.Ind.}} \text{Tr} \left(K \Gamma^{(m)} I_1 \Gamma^{(n)} I_1 \Gamma^{(o)} I_1 \tilde{\Gamma}^{(p)} \right) &= -\bar{\Gamma}^{(m)} \bar{\Gamma}^{(n)} \bar{\Gamma}^{(o)} \bar{\Gamma}^{(p)}.
\end{aligned}$$

Die Vertauschung von K mit I_1 liefert einen Faktor (-1) . Die Beiträge mit I_2 verschwinden aufgrund der Summation über die äußeren Indizes.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press 1996.
- [2] A. Das, *Finite Temperature Field Theory*, World Scientific 1997.
- [3] J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge University Press 1987.
- [4] N. P. Landsman, C. G. van Weert, Phys. Rep. **145** (1987) 141.
- [5] M. Quiros, Helv. Phys. Acta **67** (1994) 451.
- [6] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press Oxford 1996.
- [7] G. Altarelli, Preprint hep-ph/9912291.
- [8] U. Heinz, M. Jakob, Preprint nucl-th/0002042.
- [9] D. A. Kirzhnits, A. D. Linde, Sov. Phys. JETP **40** (1974) 628; Zh. Eksp. Teor. Fiz. **67** (1974) 1263.
- [10] W. Buchmüller, M. Plümacher, Preprint hep-ph/0007176.
- [11] F. Csikor, Z. Fodor, J. Heitger, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 21.
- [12] W. H. Zurek, Phys. Rep. **276** (1996) 177.
- [13] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49** (1977) 435.
- [14] R. L. Kobes, G. W. Semenoff, Nucl. Phys. **B260** (1985) 714.
- [15] R. L. Kobes, G. W. Semenoff, Nucl. Phys. **B272** (1986) 329.
- [16] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, M. Shaposhnikov, Nucl. Phys. **B458** (1996) 90.
- [17] H. A. Weldon, Phys. Rev. **D28** (1983) 2007.
- [18] H. A. Weldon, Phys. Rev. **D26** (1982) 1394.
- [19] D. Boyanowsky, I. D. Lawrie, D. -S. Lee, Phys. Rev. **D54** (1996) 4013.
- [20] E. Wang, U. Heinz, Phys. Rev. **D53** (1996) 899.

-
- [21] B. Bergerhoff, J. Reingruber, Phys. Lett. **B488** (2000) 435.
- [22] M. Pietroni, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 2424.
- [23] A. J. Niemi, G. W. Semenoff, Ann. of Phys. **152** (1984) 105.
- [24] R.R. Parwani, Phys. Rev. **D45** (1992) 4695; **D48** (1993) 5965 .
- [25] S. Jeon, Phys. Rev. **D52** (1995) 3591.
- [26] J. R. Espinosa, M. Quiros, F. Zwirner, Phys. Lett. **B291** (1992) 115.
- [27] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press 1992.
- [28] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14** (1955) 351.
- [29] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2** (1961) 407.
- [30] L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20** (1965) 1018.
- [31] R. Mills, *Propagators for Many Particle Systems*, Gordon&Breach 1969.
- [32] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, F. Mancini, M. Marinaro, Prog. Theor. Phys. **70** (1983) 599.
- [33] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, J. Math. Phys **25** (1984) 3076.
- [34] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12** (1957) 570.
- [35] P. C. Martin, J. Schwinger, Phys. Rev. **115** (1959) 1342.
- [36] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw–Hill New–York 1980.
- [37] K. Chou, Z. Su, B. Hao, L. Yu, Phys. Rep. **118** (1985) 1.
- [38] J. Rammer, H. Smith, Rev. Mod. Phys. **58** (1986) 323.
- [39] E. , Calzetta, L. Hu, Phys. Rev. **D35** (1988) 495; **D37** (1988) 2878.
- [40] A. D. Linde, Phys. Lett. **B96** (1980) 289.
- [41] L. S. Ornstein, F. Zernike, Proc. Akad. Sci. Amsterdam **17** (1914) 783.
- [42] L. D. Landau, Nature **138** (1936) 840.
- [43] L. D. Landau, G. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Oxford Pergamon Press 1958.
- [44] L. Onsager, Phys. Rev. **65** (1944) 117.
- [45] L. Onsager, Nuovo Cimento (Suppl.) **6** (1949) 261.

- [46] E. C. G. Stueckelberg, A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **26** (1953) 499.
- [47] M. Gell–Mann, F. E. Low, *Phys. Rev.* **95** (1954) 1300.
- [48] C. G. Callan, *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1541; K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **18** (1970) 227.
- [49] L. P. Kadanoff, *Physics* **2** (1966) 263.
- [50] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **B4** (1971) 3174; 3184.
- [51] K. G. Wilson, J. Kogut, *Phys. Rep.* **12** (1974) 75.
- [52] K. G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 773.
- [53] M. E. Fisher, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 653.
- [54] S-k. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, W. A. Benjamin, Inc. 1976.
- [55] D. J. Amit, *Field Theory, the RG, and Critical Phenomena*, McGraw–Hill 1978.
- [56] C. Domb, *The Critical Point*, Taylor&Francis 1996.
- [57] J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B231** (1984) 269.
- [58] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, *Nucl. Phys.* **B270** (1986) 687.
- [59] I. T. Drummond, R. R. Horgan, P. V. Landshoff, A. Rebhan, *Phys. Lett.* **B398** (1997) 326.
- [60] D. O’Connor, C. R. Stephens, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 2805.
- [61] J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, Preprint hep-ph/0005122.
- [62] J. Berges, Preprint hep-ph/9902419.
- [63] C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B352** (1991) 529.
- [64] C. Wetterich, *Z. Phys.* **C57** (1993) 451; **C60** (1993) 461.
- [65] C. Wetterich, *Phys. Lett.* **B301** (1993) 90.
- [66] S. Bornholt, C. Wetterich, *Z. Phys.* **C58** (1993) 585.
- [67] N. Tetradis, C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B398** (1993) 659.
- [68] N. Tetradis, C. Wetterich, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 4029.
- [69] U. Ellwanger, *Phys. Lett.* **B335** (1994) 364.
- [70] M. Bonini, M. D’Attanasio, G. Marchesini, *Nucl. Phys.* **B418** (1994) 81; *Nucl. Phys.* **B437** (1995) 163.

- [71] U. Ellwanger, M. Hirsch, A. Weber, Z. Phys. **C69** (1996) 687.
- [72] T. Papenbrock, C. Wetterich, Z. Phys. **C65** (1995) 519.
- [73] U. Ellwanger, Z. Phys. **C76** (1997) 721.
- [74] M. Reuter, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B408** (1993) 91.
- [75] N. Tetradis, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B422** (1994) 541.
- [76] M. D'Attanasio, M. Pietroni, Nucl. Phys. **B472** (1996) 711.
- [77] M. D'Attanasio, M. Pietroni, Nucl. Phys. **B498** (1997) 443.
- [78] B. Bergerhoff, Phys. Lett. **B437** (1998) 381.
- [79] B. Bergerhoff, J. Reingruber, Phys. Rev. **D60** (1999) 105036.
- [80] B. Bergerhoff, J. Manus, J. Reingruber, Phys. Rev. **D61** (2000) 125005.
- [81] J. Manus, *Der chirale Phasenübergang im Rahmen der thermalen Renormierungsgruppe*, Dissertation, TU-München, 2000.
- [82] C. D. Roberts, A. G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33** (1994) 477.
- [83] B. Bergerhoff, C. Wetterich, Phys. Rev. **D57** (1998) 1591.
- [84] U. Ellwanger, M. Hirsch, A. Weber, Eur. Phys. J. **C1** (1998) 563.
- [85] U. Ellwanger, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B423** (1994) 137.
- [86] K. Rummukainen, M. M. Tsy-pin, K. Kajantie, M. Laine, M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. **B532** (1998) 283.
- [87] J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 873.
- [88] S. Seide, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B562** (1999) 524.
- [89] R. Guida, J. Zinn-Justin, Nucl. Phys. **B489** (1997) 626.
- [90] J. Zinn-Justin, Preprint hep-th/0002136.
- [91] M. Reuter, N. Tetradis, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B401** (1993) 567.
- [92] S.-B. Liao, M. Strickland, Phys. Rev. **D52** (1995) 3653; Nucl. Phys. **B497** (1997) 611.
- [93] O. Bohr, B.-J. Schaefer, J. Wambach, Preprint hep-ph/0007098.
- [94] S.-B. Liao, M. Strickland, Nucl. Phys. **B532** (1998) 753.

- [95] M. A. van Eijck, D. O'Connor, C. R. Stephens, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 3343; F. Freire, D. O'Connor, C.R. Stephens, M.A. van Eijck, Proceedings "Dalian Thermal Field 1995" 383 (Preprint hep-th/9601165).
- [96] T. Inagaki, K. Ogure, J. Sato, *Prog. Theor. Phys.* **99** (1998) 1069; J. Arafune, K. Ogure, J. Sato, *Prog. Theor. Phys.* **99** (1998) 119; K. Ogure, J. Sato, *Phys. Rev.* **D57** (1998) 7460; **D58** (1998) 085010.
- [97] L. Dolan, R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3320.
- [98] O. Cheyette, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 2394.
- [99] T. Morris, *Phys. Lett.* **B329** (1994) 241.
- [100] T. Morris, *Phys. Lett.* **B334** (1994) 355.
- [101] T. Morris, J. F. Tighe, *JHEP* **9908** (1999) 007.
- [102] D. Litim, *Phys. Lett.* **B486** (2000) 92.
- [103] S.-B. Liao, J. Polonyi, M. Strickland, *Nucl.Phys.* **B567** (2000) 493.
- [104] P. Aurenche, T. Becherrawy, *Nucl. Phys.* **B379** (1992) 259.
- [105] M. E. Fisher in *Proceedings of the International School of Particle Physics Enrico Fermi, Course LI, Critical Phenomena*, ed. M. S. Green, Academic Press 1971.
- [106] B. Widom, *J. Chem. Phys.* **43** (1965) 3898.
- [107] F. Wegner, A. Houghton, *Phys. Rev.* **A8** (1973) 401; F. Wegner in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 6, eds. C. Domb, M. S. Green, Academic Press (1976).
- [108] J. Adams, J. Berges, S. Bornholdt, F. Freire, N. Tetradis, C. Wetterich, *Mod. Phys. Lett.* **A10** (1995) 2367.
- [109] M. M. Tsypin, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 2015.
- [110] M. M. Tsypin, *Phys. Rev.* **B55** (1997) 8911.
- [111] J. Berges, D. U. Jungnickel, C. Wetterich, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 030410.
- [112] G. Baker, D. Meiron, B. Nickel, *Phys. Rev.* **B17** (1978) 1365.
- [113] K. Kanaya, S. Kaya, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 2404.
- [114] D. Bailin, A. Love, *Phys. Rep.* **107** (1984) 325.
- [115] M. Alford, K. Rajagopal, F. Wilczek, *Phys. Lett.* **B422** (1998) 247.
- [116] R. Rapp, T. Schäfer, E. V. Shuryak, M. Velkowsky, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 53.

- [117] M. A. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov, J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev **D58** (1998) 096007.
- [118] J. Berges, K. Rajagopal, Nucl. Phys. **B538** (1999) 215.
- [119] H. Meyer–Ortmanns, Rev. Mod. Phys. **68** (1996) 473.
- [120] R. D. Pisarski, F. Wilczek, Phys. Rev. **D29** (1984) 338.
- [121] K. Rajagopal, F. Wilczek, Nucl. Phys. **B399** (1993) 395.
- [122] K. Rajagopal, F. Wilczek, Nucl. Phys. **B404** (1993) 577.
- [123] A. Manohar, H. Georgi, Nucl. Phys. **B234** (1984) 189.
- [124] U. Ellwanger, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B423** (1994) 137.
- [125] D.-U. Jungnickel, C. Wetterich, Phys. Rev. **D53** (1996) 5142.
- [126] G. t’Hooft, Phys. Rep. **142** (1986) 357.
- [127] M. Gell–Mann, M. Levy, Nuovo Cim. **16** (1960) 705.
- [128] J. Berges, D. U. Jungnickel, C. Wetterich, Eur. Phys. J. **C13** (2000) 323.
- [129] F. Flechsig, A. K. Rebhan, Nucl. Phys. **B464** (1996) 279.
- [130] V. V. Klimov, Sov. J. Nucl. Phys. **33** (1981) 934.
- [131] H. A. Weldon, Phys. Rev. **D26** (1982) 2789.
- [132] S.-B. Liao, M. Strickland, Nucl. Phys. **B497** (1997) 611.

DANKSAGUNG

An erster Stelle bedanke ich mich bei Prof. Manfred Lindner, der die Durchführung dieser Arbeit erst ermöglicht hat. Ich konnte mich immer auf seine volle Unterstützung und Hilfsbereitschaft verlassen, was mir besonders zu Beginn dieser Arbeit sehr geholfen hat. Sein Verhalten trägt wesentlich zu der angenehmen Atmosphäre in der Gruppe bei.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei meinen (Ex-) Kollegen und (immer noch) Freunden Bastian Bergerhoff und Johannes Manus für die sehr angenehme, knapp dreijährige Zusammenarbeit. Es war eine schöne Zeit und ich denke, dass wir nicht nur im Tischtennis gezeigt haben, wozu wir fähig sind. Ein großer Dank gebührt euch dafür, dass ihr euch für das Korrekturlesen des Manuskripts 'geopfert' habt.

Ich bedanke mich ebenfalls bei allen anderen Mitgliedern der Gruppe Lindner, die allesamt zu der angenehmen Atmosphäre in der Gruppe beigetragen und die mir oft nützliche Hilfestellungen geleistet haben (besonders, seit ich mir einen Computer gekauft habe).

Ein Dank auch an Prof. Andrzej Buras, der mir leider allzu oft mit seinem 'irregulären' Schläger eine Niederlage im Tischtennis beigebracht hat. Aber ich bin ja selbst schuld, da ich unbedacht die Rüstungsspirale beim Schlägerkauf in Gang gesetzt habe. Bedanken möchte ich mich auch bei den übrigen Mitgliedern der Gruppen Buras und Drees für die angenehme Atmosphäre und den regen sportlichen Austausch.

Ganz besonderer Dank gebührt meiner Korrekturleserin Diana Lammert, die nach meiner Diplomarbeit nun auch dieses Werk auf sprachliche Mängel hin untersucht hat. Wenn ich sie nicht besser kennen würde, so würde ich hier von einem eindeutigen Fall von Masochismus sprechen. Zuletzt möchte ich mich an dieser Stelle ganz herzlich bei meinen Eltern bedanken, die meine wissenschaftliche Ausbildung immer tatkräftig unterstützt, aber auch dafür gesorgt haben, dass ich das Ziel nicht aus den Augen verloren habe ("Wann bischt endlich fertig?").