

Zur Dynamik des Falk-Modells für Formgedächtnismaterialien

Matthias Lepschi

Technische Universität München
2006

ZENTRUM MATHEMATIK DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT MÜNCHEN
LEHRSTUHL UNIV.-PROF. DR. J. SCHEURLE

Zur Dynamik des Falk-Modells für Formgedächtnismaterialien

Matthias Lepschi

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Jürgen Richter-Gebert

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. Jürgen Scheurle

2. Priv.-Doz. Dr. Christof Eck, Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg

Die Dissertation wurde am 7.9.2005 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 31.1.2006 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Das Falk-Modell in einer Ortsdimension	2
1.1.1	Die freie Energie Φ	3
1.1.2	Die Gleichungen	5
1.1.3	Rand- und Anfangsbedingungen	6
1.1.4	Stand der Forschung in einer Ortsdimension	8
1.2	Das Falk-Modell in höheren Ortsdimensionen	8
1.3	Notation	9
1.4	Kapitelübersicht	11
2	Wohlgestelltheit der Bewegungsgleichung	15
2.1	Der Lösungsbegriff zur Bewegungsgleichung	16
2.1.1	Zugeordnetes System gewöhnlicher Differentialgleichungen	18
2.2	Der Existenzsatz	18
2.3	Beweis des Existenzsatzes	19
2.3.1	Wohldefiniiertheit von S	20
2.3.2	Kontraktivität	23
2.4	Die Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten	26
2.4.1	Operatoren bei verschiedenen Anfangswerten	26
2.5	Die Abhängigkeit der Lösung von θ	28
2.5.1	Operatoren zu verschiedenen Temperaturen	28
2.6	Glattheit der Lösung für $\gamma > 0$	30
2.7	Die induzierte zweiparametrische Evolution Ψ^{t_1, t_0}	36
2.7.1	Dynamisches System bei zeitperiodischer Temperatur	37
3	Existenz und Eindeutigkeit zum vollen Falk-System	39
3.1	Der Lösungsbegriff	40
3.1.1	Problematik der Randbedingungen	41
3.1.2	Zugeordnetes System gewöhnlicher Differentialgleichungen	41
3.2	Der Existenzsatz	42
3.3	Beweis des Existenzsatzes	42
3.3.1	Entwicklung eines Lösungsausdrucks	43
3.3.2	Der Operator S	43
3.3.3	Abschätzungen zu S und Existenz von Fixpunkten	44
3.3.4	Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten	47
3.4	Die induzierte zweiparametrische Evolutionsabbildung	50
3.4.1	Dynamisches System zu periodischen Randdaten	51
3.4.2	Bemerkungen	52

3.5	Regularität der Lösungen zu glatteren Anfangsdaten	52
4	Eigenschaften von Ψ^{t_1, t_0}	55
4.1	Die linearisierten Bewegungsgleichungen	55
4.2	Differenzierbarkeit von Ψ^{t_1, t_0}	57
4.2.1	Differenzen zweier Lösungen bei gleicher Temperatur θ	57
4.2.2	Differenzierbarkeit	59
4.3	Eigenschaften von Ψ^{t_1, t_0} im Fall $\beta^2 - 4\gamma > 0$, $\gamma > 0$	60
4.4	Beweis des Satzes 4.3	61
4.4.1	Definition von V_p und \hat{V}_p	62
4.4.2	Die Projektionen P_{V_p} und $P_{\hat{V}_p}$	63
4.4.3	Norm der Projektionen P_{V_p} und $P_{\hat{V}_p}$	63
4.4.4	Äquivalente Normen in Z	66
4.4.5	Die Operatoren S und Q	67
4.4.6	Nachweis der Kontraktion von Q	69
4.4.7	Wohldefiniertheit von Q	71
4.4.8	Definition von $E(z_0, t_0)$	71
4.4.9	Eigenschaften der Projektionen	72
4.4.10	Abhängigkeit der Lösung von z_0 und von θ	74
4.4.11	Lipschitzstetigkeit von \mathcal{Q}_{z_0, t_0} und \mathcal{W}_{z_0, t_0} bezüglich z_0 und t_0	76
5	Konstruktion einer „inertialen Mannigfaltigkeit“	77
5.1	Schichtung von Z für $\beta^2 - 4\gamma > 0$, $\gamma > 0$	78
5.1.1	Bestimmendes DGL-System der Fasern	79
5.1.2	Die Länge von Faserabschnitten	80
5.1.3	Parametrisierung von \mathcal{S}_t	80
5.2	Modifikation des Raumes \hat{V}_p zu $\hat{V}_{p, mod}$	81
5.3	Reduktion auf endlichdimensionales System $\Psi_p^{t_1, t_0}$	87
5.4	Der Fehler $\Psi^{t_1, t_0} z_0 - \Psi_p^{t_1, t_0} z_0$	89
5.5	Evolution der Volumenelemente	93
6	Attraktoren bei gewissen zeitperiodischen Temperaturfunktionen	95
6.1	Die Dynamik bei zeitlich konstanten Temperaturfunktionen	95
6.2	Dynamik der Bewegungsgleichungen zu einer Klasse von Temperaturfunktionen	98
6.2.1	Eine gewisse Klasse von Temperaturfunktionen θ	98
6.2.2	Positiv invariante beschränkte Mengen \mathcal{B} unter Ψ^T	99
6.2.3	Existenz eines Attraktors	100
6.3	Struktur des Attraktors \mathcal{A} im Fall $\beta^2 - 4\gamma > 0$	100
7	Numerische Resultate in einer Ortsdimension	103
7.1	Näherungslösungen zum vollen Falk-Modell	103
7.1.1	Das Gitter G	104
7.1.2	Finite Differenzen	104
7.1.3	Das diskretisierte System gewöhnlicher Differentialgleichungen	105
7.1.4	Numerische Ergebnisse	106
7.2	Das reduzierte diskrete System	107
7.2.1	Linearisierung des diskreten reduzierten Systems	109
7.2.2	Konvergenz bei Verfeinerung des Gitters	110

7.3	Quasiplastizität und Pseudoelastizität	112
7.3.1	Energien und Randdaten	112
7.3.2	Resultate	114
8	Numerische Resultate in zwei Ortsdimensionen	117
8.1	Das Falk-Modell in höheren Ortsdimensionen	117
8.1.1	Die freie Energie	118
8.2	Numerische Implementierung	120
8.2.1	Das Gitter	120
8.2.2	Finite Differenzen	120
8.2.3	Ortsdiskretisierung	120
8.2.4	Ergebnisse	121
A	Verwendete Sätze und Lemmata	127
B	Abschätzungen nichtlinearer Terme	129
B.1	Nichtlineare Terme	129
B.2	Elementare Abschätzungen	129
C	Untersuchung gewisser Reihen	131
D	Literaturverzeichnis	131

Zusammenfassung

Zunächst wird gezeigt, daß eine gewisse Klasse von Falk-Systemen auf dem Ortsgebiet $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ bei nichtverschwindender Viskosität in geeigneten unendlichdimensionalen Phasenräumen ein dynamisches System erzeugt. Dies geschieht sowohl unter Einbeziehung einer parabolischen Regularisierung als auch ohne.

Darüberhinaus wird die Wohlgestelltheit des Systems bei beliebig vorgegebener stetiger Temperaturfunktion gezeigt. Im parabolischen Fall wird für letzteres System eine endlichdimensionale „inertiale Mannigfaltigkeit“ konstruiert. Für gewisse zeitperiodische Temperaturfunktionen besitzt die Periodenabbildung des betrachteten Systems einen nichttrivialen Attraktor.

Zusätzlich werden numerische Approximationen des Falk-Systems vorgestellt, die auf Semidiscretisierung im Ort mittels finiter Differenzen beruhen. Eine Konvergenzanalyse sowie Simulationsergebnisse in einer und zwei Ortsdimensionen runden die Arbeit ab. Die Resultate der Simulationen zeigen für passend gewählte Randbedingungen unter anderem materialtypische Hysteresiskurven der Pseudoelastizität und Quasiplastizität, wie sie auch experimentell zu beobachten sind.

Abstract

First we show that a class of Falk-systems on the spatial domain $[0; 1] \subset \mathbb{R}$ with nonvanishing viscosity induces a dynamical system in appropriate infinite-dimensional phase spaces. This is accomplished with parabolic regularisation as well as without it.

Furthermore the wellposedness of the system for an arbitrary given continuous temperature function is shown. In the parabolic case we construct a finite-dimensional „inertial manifold“ for this system. For certain time-periodic temperature functions there exists a nontrivial attractor with respect to the period-map of the system.

Additionally we present numerical approximations of the Falk-system relying on a spatial semi-discretisation using finite difference schemes. An analysis of convergence and simulation results in one and two spatial dimensions conclude the work. The results obtained for suitable chosen boundary conditions show hysteresis-loops of pseudo-elasticity and quasi-plasticity that also can be observed in experiments.

Dank

Zunächst sei an dieser Stelle Professor Jürgen Scheurle gedankt – er hat mich auf so manche Klippe der Doktorarbeit hingewiesen und mit seinen Anregungen geholfen, sie zu umschiffen. Viele Dinge habe ich durch ihn aus einem anderen Blickwinkel gesehen und daraus gelernt. Auch wenn es trivial klingen mag: Ohne seinen Input gäbe es vorliegende Arbeit nicht in dieser Form. Ebenfalls gilt mein herzlicher Dank Herrn Priv.-Doz. Dr. Christof Eck für seine hilfreichen Anregungen und Anmerkungen – die der Arbeit ihren Feinschliff gegeben haben – und natürlich für die Übernahme des zweiten Gutachtens.

Desweiteren möchte ich mich für die Unterstützung bedanken, die mir aus der Forschungseinheit Dynamische Systeme zugekommen ist: Noch im Studium hat mich Jochen Denzler auf interessante mathematische Gebiete hingewiesen und motiviert. In der Promotionsphase haben mir die fachlichen (und natürlich auch die fachfremden!) Gespräche und Diskussionen mit Thomas Hagen, Hans-Peter Kruse, Dominik Eberlein, Peter Giesl, Andreas Johann, Andreas Putz, Stephan Schmitz, Florian Rupp und Christian Bauer weitergeholfen.

Professor Josef Dorfmeister hat Hinweise und Anmerkungen zu Arbeit und Arbeitstechnik zugesteuert. Gunnar Teichelmann lieferte mir Informationen zum Helm-Modell. Nicht wenige Unterhaltungen mathematischen Natur (und Freude am Problemlösen) hatte ich mit Jan Wehrstedt. Ihnen allen gilt an dieser Stelle mein Dank. Für das freundliche Arbeitsklima und die „moralische“ Unterstützung möchte ich mich schließlich noch bei Dr. Peter Vachenaer, Vicky Fasen, Christoph Lunk, Thomas Stolte, Sylvia Breun, Gerhard Schanzer und Kai Arens bedanken.

Kapitel 1

Einleitung

Die mathematische Modellierung von Formgedächtnismaterialien und deren dynamischem Verhalten unter äußeren Anregungen ist eine Fragestellung, die sowohl von mathematischer Seite als auch von der Anwendungsseite her von großer Bedeutung ist. In vermehrtem Maße werden diese Werkstoffe beispielsweise in der Industrie oder in der Medizin zum Einsatz gebracht – beispielsweise als Aktoren von Robotern, als Mikrobauanteile in aktiver und passiver Form oder als biologisch verträgliche medizinische Implantate.

Die Entwicklung von Geräten oder Bauteilen, deren Funktionalität auf den speziellen Eigenschaften der Formgedächtnismaterialien beruht, erfordert mathematische Modelle, die in der Lage sind, diese typischen Effekte auch auf analytischer oder numerischer Ebene wiederzugeben.

Es gibt mittlerweile eine ganze Reihe von mathematischen Modellen, welche zur Beschreibung von Formgedächtnismaterialien verwendet werden, und die auf unterschiedlichen Ansätzen beruhen. Zu nennen sind hier unter anderem (vgl. auch die Überblicke in [Rou00, Zim00]):

- Die Makro-Modelle von Müller und Seelecke [MS01], die auf den Prinzipien der statistischen Mechanik beruhen. Diese Modelle bestehen aus gewöhnlichen Differentialgleichungen für die *prozentualen Anteile* der verschiedenen Phasen (Austenit, Martensit) eines *eindimensionalen* Formgedächtnismaterials (Stab, Draht) und der Temperaturgleichung. Damit sind zwar Aussagen auf Makroebene möglich, jedoch wird die Mikrostruktur nicht aufgelöst. Für Simulation und Optimalsteuerung eindimensionaler Formgedächtniswerkstücke (etwa Drähte oder dünne Stäbe) hat sich die Modellklasse sehr gut bewährt.
- *Mischungsmodelle* wie zum Beispiel das Frémond-Modell [FM98] oder das Modell von Helm [Hel01]. Hier sucht man die *Phasenanteile* an jedem Punkt des Materials. Temperatur und Verschiebung werden über ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen bestimmt, weitere auftretende innere Variablen durch Evolutionsgleichungen in Form von Variationsungleichungen bzw. gewöhnlichen Differentialgleichungen. Diese Modelle liefern nur statistische Aussagen über die Mikrostruktur im untersuchten Material an einem gegebenem Materialpunkt.
- Die Klasse der Falk-Modelle, ausgehend von [Fal80a, Fal80b]. Hier werden Temperatur und Verschiebung über ein System gekoppelter partieller Differentialgleichungen bestimmt. Lösungen der Modelle geben für jeden Materialpunkt den Verzerrungszustand wieder, die Mikrostruktur wird also (nicht nur in statistischem Sinne) aufgelöst. Die typischen Eigenschaften von Formgedächtnismaterialien werden über die zugrundeliegende freie Energie modelliert, die in gewissen Temperaturbereichen nicht konvex ist.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Klasse von Falk-Modellen, und dabei größtenteils mit der Situation in einer Ortsdimension. Sie verfolgt zwei Hauptziele:

- Zunächst werden für das Falk-System Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen erbracht und die Abhängigkeit von den Daten untersucht. Der in dieser Arbeit verwendete Lösungsbegriff erlaubt es, Anfangsdaten geringerer Regularität zu verwenden als bisher in der Literatur bekannt.
- Daraufhin wird das *Teilsystem der Bewegungsgleichungen* des Falksystems zu vorgegebener Temperatur genauer untersucht. Ist die Temperaturfunktion a-priori als Parameter vorgegeben und nicht mehr Teil der Lösung, vereinfacht sich das Problem, und es wird eine weitergehende Untersuchung der Dynamik der Lösungen möglich. In einem Phasenraum Z wird durch die Bewegungsgleichungen eine zweiparametrische Evolutionsabbildung induziert. Für diese existiert für gewisse (Material-)Parameter eine Art von inertialer Mannigfaltigkeit des Systems, eine zeitvariable, endlichdimensional parametrisierbare Menge in Z , welche alle Lösungen der Bewegungsgleichungen exponentiell schnell anzieht.

Begonnen wird mit einer Einführung des Falk-Modells und der Spezifikation der freien Energie, einem der grundlegendsten Elemente dieses Modells.

1.1 Das Falk-Modell in einer Ortsdimension

Um einen eindimensionalen Körper (ein Werkstück aus Formgedächtnislegierungen) mathematisch beschreiben zu können, wird von einer *Referenzkonfiguration* $\Omega \subset \mathbb{R}$ ausgegangen, vgl. dazu die Einführung in [Ant95]. Jedem Punkt $x \in \Omega$ dieser Konfiguration entspricht genau einem Materialpunkt des betrachteten Körpers.

Daraufhin kann die *Temperatur* θ als eine skalare Funktion $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eingeführt werden; sie hängt außerdem vom Parameter t , der Zeit, ab. Der Wert $\theta(x)$ gibt dementsprechend die Temperatur des Materialpunktes x an.

Unter der *Verschiebung* u ist der *Differenzvektor* des Ortes eines Materialpunktes bezüglich

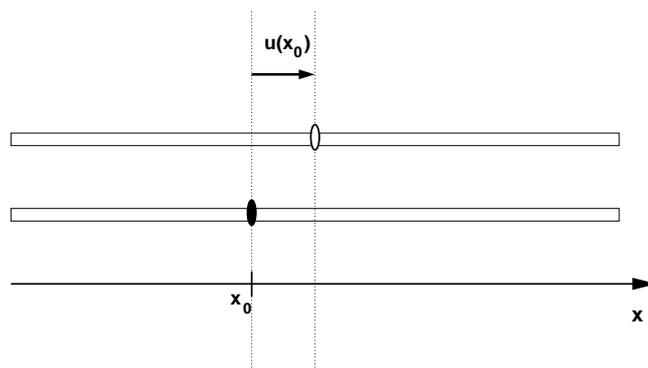


Abbildung 1.1: Im oberen eindimensionalen „Stab“ die Verschiebung $u(x_0)$ eines Materialpunktes x_0 gegenüber seiner Referenzlage (Stab unten). Der verschobene Materialpunkt ist durch die ungefüllte Ellipse im Gegensatz zur unverschobenen gefüllten Ellipse in der Ausgangskonfiguration gekennzeichnet.

seines Ortes x in der Referenzkonfiguration Ω zu verstehen. Befindet sich in dieser Ausgangskonfiguration der Materialpunkt an der Stelle x , so befindet er sich zur Zeit t an der Stelle $x + u(x, t)$, siehe Abbildung 1.1. Die Verschiebung ist also eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die zusätzlich noch vom Parameter t abhängt. Als Ausgangskonfiguration wird der unverzerrte Zustand bei hohen Temperaturen verwendet, also ein Material komplett in der sogenannten *Austenit*-Phase¹.

Als *Verzerrung* wird die Ableitung der Verschiebung u nach x bezeichnet. Anschaulich gesprochen gibt der Wert der Verzerrung $u_x(x)$ an einem Materialpunkt $x \in \Omega$ an, ob das infinitesimale Volumenelement an diesem Punkt gestaucht oder gestreckt ist. Die Verzerrung geht neben der Temperatur als ausschlaggebende Größe in die freie Energie ein.

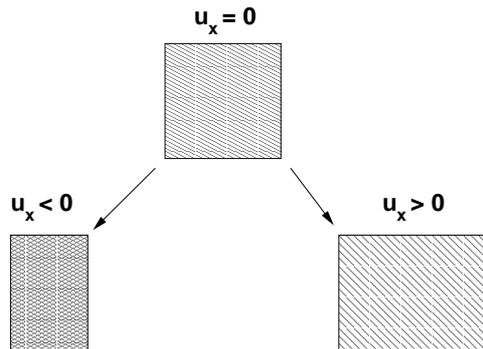


Abbildung 1.2: Skizzenhafte Darstellung eines infinitesimal kleinen Elements. Oben das unverzerrte Element, links unten ein zusammengestauchter Zustand, rechts unten ein gedehntes Element.

Indem man – je nach Temperatur – den Verzerrungszuständen gewisse *freie Energien* zuweist, kann man die typischen Materialeigenschaften von Formgedächtnismaterialien modellieren.

1.1.1 Die freie Energie Φ

Als freie Energie (ohne den thermischen Anteil) werden in dieser Arbeit Ausdrücke der Art

$$\Phi = \Phi(u_x, \theta) = \Phi_1(u_x) + \phi(\theta) \cdot \Phi_2(u_x)$$

verwendet, also Funktionen der *Verzerrung* u_x und der Temperatur θ . Dabei hat die Energie Φ als Funktion in u_x für große Temperaturen θ nur ein globales Minimum bei $u_x = 0$, beispielsweise wie bei der rechten der drei Energien in Abbildung 1.4. Dies bedeutet, daß der *unverzerrte* Zustand des Materials bei hohen Temperaturen energetisch am günstigsten ist (in Abbildung 1.2 also der obere). Physikalisch spricht man von der *Austenit*-Phase. Typischerweise sind die Gitterzellen der zugrundeliegenden Kristallstruktur in dieser Phase von hoher Symmetrie.

Für kleine Temperaturen θ kann die Energie Φ mehrere verschiedene globale Minima auch außerhalb von $u_x = 0$ besitzen (Abbildung 1.4 Mitte und links), und damit sind in diesem Temperaturbereich die jeweils entsprechenden verzerrten Zustände energetisch am günstigsten, beispielsweise die beiden unteren in Abbildung 1.2. Man spricht in diesem Zusammenhang von *Martensit*-Phasen; zumeist treten diese Martensitphasen in der Praxis in „Zwillingen“ auf.

Für den ersten Summanden $\Phi_1(u_x)$ der freien Energie Φ soll gelten:

¹Der Begriff Austenit wird bei der Spezifikation der freien Energie genauer gefaßt werden

$$\Phi_1(u_x) = \frac{C_1}{2} u_x^2$$

Der Anteil Φ_1 der Energie ist eine Energie quadratischer Form, wie sie in der linearen Elastizitätstheorie Verwendung findet. Der Parameter C_1 kann dementsprechend als die Steifigkeit beziehungsweise die Elastizität des Materials interpretiert werden. Der zu Φ_1 gehörende Spannungstensor $\sigma_1 = \frac{d\Phi_1}{du_x}$ ist aufgrund der quadratischen Form der Energie eine lineare Funktion der Verzerrung u_x .

Um die typischen nichtlinearen Effekte von Formgedächtnismaterialien zu modellieren, wird auf diesen quadratischen Anteil der Energieanteil $\phi(\theta) \cdot \Phi_2(u_x)$ aufgesetzt. Der erste Faktor $\phi(\theta)$ dieses Produkts bringt die *Temperaturabhängigkeit* der freien Energie ins Spiel. Er steht für eine Abschneidefunktion, beziehungsweise allgemeiner für eine Interpolationsfunktion in der Temperatur θ , welche den Umschlag der freien Energie bei niedrigen Temperaturen hin zu hohen Temperaturen bewerkstelligt, vgl. Abbildung 1.3. Nur innerhalb eines Temperaturintervalles $[\theta_{start}, \theta_{end}]$ ändert sich die Funktion.

Der zweite Faktor $\Phi_2(u_x)$ beschreibt einen Anteil, dessen zugehöriger Spannungstensor nichtlinear ist. Mit ihm können weitere lokale bzw. globale Minima der freien Energie erzeugt werden. In diesem Anteil werden die typischen Eigenschaften von Formgedächtnismaterialien modelliert.

Insgesamt werden an die freie Energie in dieser Arbeit folgende Forderungen gestellt:

$$\left. \begin{array}{l} \phi(y)\Phi_2(x) \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \\ |\Phi_2(x)| \leq C_3 \\ \left| \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x) \right| \leq C_2 \\ \left| \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2}(x) \right| \leq C_6 \\ |\phi(y)| \leq 1 \\ \left| \frac{d}{dy} \phi(y) \right| \leq C_4 \\ \frac{d}{dy} \phi(y) = 0 \text{ für } \theta \notin [\theta_{start}, \theta_{end}] \\ (C_2 C_4)^2 \leq \frac{\kappa \beta}{2} \end{array} \right\} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

Diese Voraussetzungen lassen eine verhältnismäßig große Klasse von Energien zu, nämlich fallen unter anderem die typischen *double-* bzw. *multi-well*-Potentiale, wie sie in Abbildung 1.3 skizziert sind, in diese Gruppe. Insbesondere die Verwendung der *multi-well*-Potentiale erlaubt die

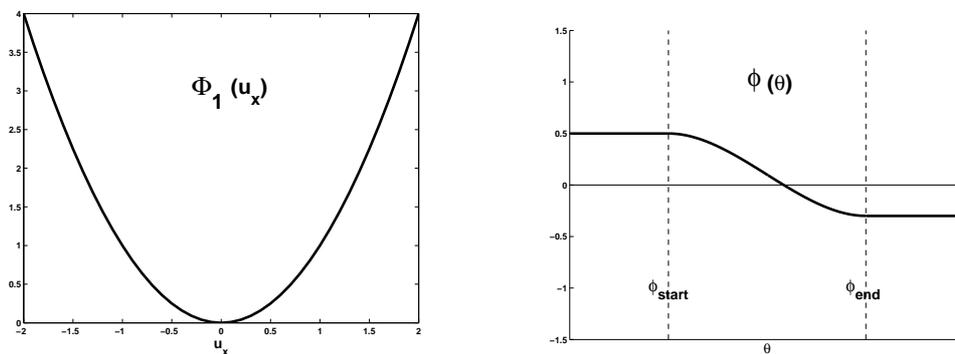


Abbildung 1.3: Links der quadratische Energieanteil Φ_1 für $C_1 = 2$, rechts ein Beispiel für die Interpolationsfunktion $\phi(\theta)$

Modellierung von materialtypischen Effekten wie *Quasiplastizität* und *Pseudoelastizität*, vergleiche die Ergebnisse aus Kapitel 7.

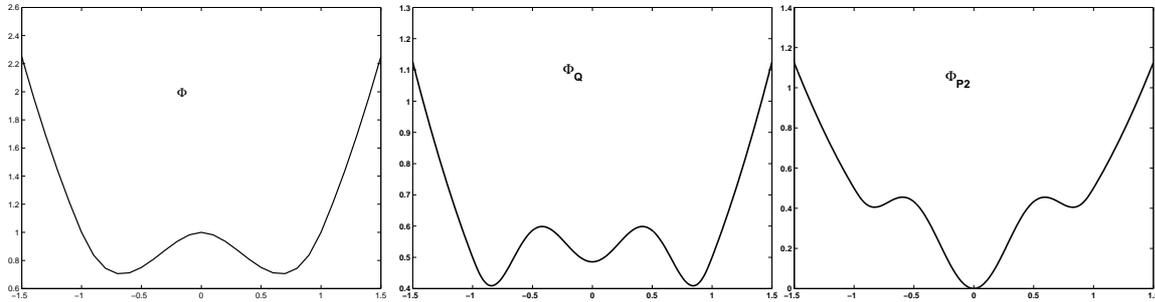


Abbildung 1.4: Beispiele für $\Phi(u_x, \theta)$ für konstantes θ , angetragen über der u_x – Achse. Eine double-well-Energie wie in der linken Skizze wird in Kapitel 7 zur Erzeugung numerischer Lösungen verwendet. Die anderen beiden Energien erlauben die Nachbildung der materialtypischen Effekte der Quasiplastizität bzw. der Pseudoelastizität, ebenfalls in Kapitel 7.

Der Spannungstensor

Mit der Abkürzung

$$r(u_x, \theta) := \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_x}(u_x) \phi(\theta)$$

schreibt sich der *Spannungstensor* σ als Ableitung der freien Energie nach der Verzerrung als

$$\sigma(u_x, \theta) = \frac{\partial \Phi}{\partial u_x}(u_x, \theta) = C_1 u_x + r(u_x, \theta) \quad (1.2)$$

Nach den Voraussetzungen (1.1) gilt

$$|r(u_x, \theta)| \leq C_2$$

Außerdem ergibt sich daraus die Abschätzung

$$|\theta \sigma_\theta(u_x, \theta)| \leq C_5$$

mit

$$C_5 := C_2 \left\| \frac{d}{d\theta} \phi(\theta) \right\|_\infty \quad (1.3)$$

1.1.2 Die Gleichungen

Ausgehend von der freien Energie leitet man mittels Impuls- und Energieerhaltung wie auch unter der Berücksichtigung der Clasius-Duhem-Ungleichung die Evolutionsgleichungen für u und θ her; vgl. [Zim00] bzw. [Ant95].

Der Großteil der Arbeit beschäftigt sich mit der eindimensionalen Variante des Falk-Modells auf dem Ortsgebiet $\Omega = [0; 1]$. Die Gleichungen dafür schreiben sich

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \sigma_x(u_x, \theta) - \gamma u_{xxxx} + \beta u_{txx} \\ \theta_t &= \kappa \theta_{xx} + \theta \sigma_\theta(u_x, \theta) v_x + \beta v_x^2 \end{aligned}$$

beziehungsweise nach Einführung der neuen Variable $v := u_t$ als System erster Ordnung der Bauart

$$\begin{aligned} u_t &= v \\ v_t &= \sigma_x(u_x, \theta) - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} \\ \theta_t &= \kappa \theta_{xx} + \theta \sigma_\theta(u_x, \theta) v_x + \beta v_x^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

In das Modell gehen die Materialparameter β, γ, κ ein. Durch den ersten Parameter $\beta > 0$ wird Viskosität eingeführt; anschaulich ergibt „Bewegung“ durch den Term βv_x^2 auf der rechten Seite der Temperaturgleichung einen Temperaturzuwachs in Form eines Quelltermes.

Der Parameter $\kappa > 0$ kennzeichnet wie üblich die Wärmeleitfähigkeit des Materials.

Ist der sogenannte *Ginzburg*-Parameter γ positiv, wird eine Art von Grenzflächenenergie eingeführt, welche mathematisch nichts anderes als eine Regularisierung der Lösung bedeutet: Durch sie wird das Auftreten von abrupten Sprüngen in der Verzerrung u_x energetisch „bestraft“; es entstehen stattdessen „fließende“ Übergänge bzw. Grenzschichten der Größenordnung γ . Die mathematische Analyse vereinfacht sich in diesem Fall erheblich. In dieser Arbeit werden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen sowohl für $\gamma > 0$ als auch $\gamma = 0$ erbracht.

Die typischen Effekte von Formgedächtnismaterialien gehen also über die freie Energie $\Phi = \Phi(u_x, \theta)$ und über den aus der Energie abgeleiteten Spannungstensor $\sigma = \sigma(u_x, \theta)$ mit

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial u_x}$$

in die Bewegungsgleichung für u ein. An dieser Stelle weist das Modell eine Nichtlinearität auf, nämlich gerade den Summanden r des Spannungstensors σ .

1.1.3 Rand- und Anfangsbedingungen

Um eine größere Klasse von Temperatur-„rand“werten untersuchen zu können, führt man zunächst eine Funktion $g = g(x, t)$ der Art

$$g \in C(\Omega \times \mathbb{R}), \quad g_t - \kappa g_{xx} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}; L_2(\Omega)) \quad (1.5)$$

ein. Setzt man $\theta = \tilde{\theta} + g$, so ergibt sich für $\tilde{\theta}$ aus der Temperaturgleichung des Falk-Systems die modifizierte Gleichung

$$\tilde{\theta}_t = \kappa \tilde{\theta}_{xx} + (\tilde{\theta} + g) \sigma_\theta(u_x, \tilde{\theta} + g) v_x + \beta v_x^2 + g_t - \kappa g_{xx} \quad (1.6)$$

Mit dieser Version der Temperaturgleichung wird weitergearbeitet. Um die Schreibweise einfach zu halten, wird der Bezeichner $\tilde{\theta}$ wieder durch θ ersetzt. Insgesamt ergibt sich also das System

$$\begin{aligned} u_t &= v \\ v_t &= C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta + g) \\ \theta_t &= \kappa \theta_{xx} + (\theta + g) \sigma_\theta(u_x, \theta + g) v_x + \beta v_x^2 + g_t - \kappa g_{xx} \end{aligned} \quad (1.7)$$

In vorliegender Arbeit sollen diese Falk-Gleichungen auf dem Ortsgebiet $\Omega = [0, 1]$ betrachtet werden, also anschaulich ein eindimensionaler Stab oder Draht der Länge 1 aus einer Formgedächtnislegierung.

Um ein mathematisch wohlgestelltes Problem zu bekommen, müssen Rand- und Anfangswerte vorgeschrieben werden, um die passenden Räume zu identifizieren, in denen das Problem gelöst

werden kann. Dabei sind – je nachdem, welche physikalische Situation nachgebildet werden soll – verschiedene Fälle möglich. Konkret wählen wir als Randbedingungen in dieser Arbeit für die Verschiebung u

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Dies bedeutet anschaulich eine Einspannung des Materials an den Endpunkten.

Es ist zunächst nicht zu erwarten, mit dieser Forderung allein neben der Existenz auch die Eindeutigkeit von Lösungen zeigen zu können. Üblicherweise erfordert die rechte Seite im Falle $\gamma > 0$, also beim Auftreten des Terms $-\gamma u_{xxxx}$ das Stellen von weiteren Randbedingungen an u bzw. u_{xx} , genauso wie der Term βv_{xx} Randbedingungen an v erfordert. Auch für die Temperaturgleichung stellt man üblicherweise Randbedingungen an θ , um Eindeutigkeit zu bekommen. In dieser Arbeit wird jedoch ein so schwacher Lösungsbegriff verwendet, daß das Stellen dieser zusätzlichen Randbedingungen a-priori keinen Sinn macht, weil in diesem Lösungsbegriff die entsprechenden „Funktionen“ nur in $L_2(\Omega)$ oder sogar noch größeren Distributionenräumen liegen und damit im Allgemeinen nicht stetig sind.

Allerdings stellt sich im Laufe der Arbeit heraus, daß es der gewählte Lösungsbegriff dennoch erlaubt, dem Falk-System ein unendlichdimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen zuzuordnen, welches in passenden Räumen auch *ohne* das Stellen der fraglichen Randbedingungen eindeutig lösbar ist.

Außerdem wird ausgeführt, daß für *hinreichend reguläre* Anfangsdaten die zugehörigen Lösungen des modifizierten Systems (1.7) über ausreichend hohe Regularität verfügen und die zusätzlichen Randbedingungen der Art

$$\begin{aligned} u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0 & \quad \text{für } \gamma > 0 \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ \theta(0, t) = 0 = \theta(1, t) = 0 \end{aligned}$$

wenigstens *fast überall in der Zeit* erfüllen. Dies bedeutet für das ursprüngliche System (1.4) fast überall in der Zeit:

$$\begin{aligned} u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0 & \quad \text{für } \gamma > 0 \\ v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ \theta(0, t) = g(0, t), \quad \theta(1, t) = g(1, t) \end{aligned}$$

In diesem Sinne kann man also für *hinreichend reguläre Anfangsdaten* mittels der Funktion g von Null verschiedene Temperaturranddaten einführen.

Insbesondere kann zu zwei Funktionen $g_0(t), g_1(t)$ auf \mathbb{R} , die auf jedem beschränkten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ihres Definitionsbereiches in $W_2^1(I)$ liegen, also eine schwache Ableitung in $L_2(I)$ besitzen, ein passendes g konstruiert werden durch:

$$g(x, t) = g_0(t)(1 - x) + g_1(t)x$$

Damit ergibt sich

$$g_{xx}(x, t) = 0, \quad g_t(x, t) = g_{0t}(t)(1 - x) + g_{1t}(t)x$$

mit

$$\|g_t\|_{L_2(I, L_2(\Omega))} \leq \|g_{0t}\|_{L_2(I)} + \|g_{1t}\|_{L_2(I)}$$

Damit erfüllt g die Bedingungen (1.5).

Anfangswerte

Natürlich müssen auch Anfangswerte für $u, v = u_t$ und θ vergeben werden, nämlich

$$u(x, 0) = u_0, \quad v(x, 0) = v_0, \quad \theta(x, 0) = \theta_0$$

also die Anfangsverschiebung, die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangstemperatur. Welche Regularitäten diese Anfangswerte erfüllen müssen, um Existenz und darüber hinaus Eindeutigkeit der Lösungen garantieren zu können, wird im Laufe der Arbeit spezifiziert.

1.1.4 Stand der Forschung in einer Ortsdimension

Existenz global in der Zeit und Eindeutigkeit für das eindimensionale Falk-System wurden in der Literatur sowohl für $\gamma > 0$ als auch $\gamma = 0$ und unter verschiedenen Sätzen von Randbedingungen eingehend behandelt:

Zu verhältnismäßig glatten Anfangsdaten wird Existenz und Eindeutigkeit für $\gamma > 0$ in [HŽ92] zu eingespannten Enden und Dirichlet-Temperaturranddaten gezeigt. In [Spi95] wird Existenz und Eindeutigkeit lokal in der Zeit und zu anderen, technisch einfacher zu behandelnden Temperaturranddaten, gezeigt. In [SZ98] werden darüberhinaus – allerdings zu *homogenen Neumann*-Temperaturranddaten, also im energetisch abgeschlossenen Fall – Aussagen über die Langzeitdynamik dieses Systems gemacht.

Im Falle $\gamma = 0$ wird in [CH94] wie auch in [Wat00] für eingespannte Enden Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu Anfangsdaten in Hölderräumen, nämlich $u_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega), v_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega), \theta_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ gezeigt. In [Qin01] wird für ebensolche Anfangsdaten Existenz, Eindeutigkeit und Asymptotik zu einfacheren Randbedingungen diskutiert, ebenso auch in [HL98] zu thermisch isolierten Enden. In [RZ97] wird zu speziellen Randdaten mithilfe der Pego-Transformation Existenz, Eindeutigkeit und Asymptotik zu Anfangsdaten der Art $u_0 \in H_\infty^1(\Omega), v_0 \in H_\infty^1(\Omega), \theta_0 \in H_2^1(\Omega)$ gezeigt, und zwar ebenfalls bei thermisch isolierten Enden. Ähnliche Ergebnisse werden auch in [SZZ98] präsentiert.

An dieser Stelle ist zu erwähnen, daß Zimmer in [Zim00] die Existenz von Lösungen zum Falkmodell in 2 bzw. 3 Ortsdimensionen beweist. Die dabei verwendeten Methoden sind auch in einer Ortsdimension anwendbar und führen auf die Existenz von Lösungen zu Anfangsdaten der Art $u_0 \in \dot{H}_2^1(\Omega), v_0 \in L_2(\Omega), \theta_0 \in L_1(\Omega)$. Die Eindeutigkeit dieser Lösungen ist jedoch ein offenes Problem.

1.2 Das Falk-Modell in höheren Ortsdimensionen

Unter naheliegenden Verallgemeinerungen der Begriffe Verschiebung und Verzerrung (vgl. [Zim00]) schreibt sich die mehrdimensionale Version des Falk-Modells als

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= \text{Div}(\sigma(\nabla u, \theta) + \beta \rho \nabla u_t) - \gamma \Delta^2 u \\ \theta_t &= \kappa \Delta \theta + \theta \sigma_\theta(\nabla u, \theta) : \nabla u_t + \beta \nabla u_t : \nabla u_t \end{aligned}$$

Auch hier werden Spannungstensoren $\sigma = \sigma(\nabla u, \theta)$ bzw. freie Energien $\Phi = \Phi(\nabla u, \theta)$ mit

$$\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \nabla u}$$

verwendet, wobei

$$\Phi(\nabla u, \theta) = \Phi_0(\theta) + \Phi_1(\nabla u) + \phi(\theta)\Phi_2(\nabla u)$$

Existenz und Eindeutigkeit zum mehrdimensionalen Falk-Modell auf Gebieten mit C^2 -Rand und unter gewissen Sätzen von Randbedingungen wurde für $\gamma > 0$ in [PŽ00] bewiesen; weitergehende Erkenntnisse zur Dynamik liegen unseres Wissens zur Zeit nicht vor. Im Falle von $\gamma = 0$ wird die Existenz in [Zim00] in bewiesen, wobei die Temperatur im Raum $L_1((0, T), L_1(\Omega))$ liegt.

1.3 Notation

Hier werden einige Schreibweisen eingeführt, die in der vorliegenden Arbeit gebraucht werden.

Gebiete und Basisfunktionen. Es bezeichnet Ω das Ortsgebiet

$$\Omega = [0, 1]$$

das Symbol Q_t steht für den Orts-Zeit-Zylinder

$$Q_t = \Omega \times [0, t]$$

Weiterhin wird definiert

$$\begin{aligned} e_k(x) &:= \sqrt{2} \sin(k\pi x), & k \in \mathbb{N}, \\ e_{kx}(x) &:= \frac{d}{dx} e_k(x) \end{aligned}$$

Es gelten für diese Funktionen die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{\Omega} e_k e_s dx = \delta_{ks}$$

wobei δ_{ks} für das Kronecker-Delta steht.

Funktionsräume über Ω . Mit $L_2(\Omega)$ wird der Raum der über Ω quadratintegrierbaren Funktionen(klassen) $u = u(x)$ bezeichnet. Er ist wie üblich mit der Norm

$$\|u\|_{\Omega} := \|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 dx}$$

versehen.

Mit $W_2^k(\Omega)$ werden – wie in der Literatur gebräuchlich – die Sobolevräume von Funktionen mit verallgemeinerter Ableitung der Ordnung k in $L_2(\Omega)$ über Ω bezeichnet.

Der Raum $L_2(\Omega)$ läßt sich alternativ darstellen als

$$L_2(\Omega) := \overline{\text{lin} \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}}_{\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}}$$

und mit $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ ergibt sich mit den Orthogonalitätsrelationen für die Norm der Ausdruck

$$\|u\|_{\Omega} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}$$

Motiviert dadurch werden für $u = \sum_k^{\infty} a_k e_k$ die Funktionen- bzw. Distributionsräume $H_2^s(\Omega)$ eingeführt durch

$$H_2^s(\Omega) := \overline{\text{lin} \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}}^{\|\cdot\|_{H_2^s(\Omega)}}$$

bezüglich der Norm

$$\|u\|_{H_2^s} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^{2s} a_k^2}$$

Unter dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H_2^s} := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^{2s} a_k b_k}$$

für $v = \sum_k^{\infty} b_k e_k$ sind diese Räume Hilberträume, vgl. [Tem97].

Nur für $s \geq 0$ sind die Elemente der Räume $H_2^s(\Omega)$ und $H_2^s(\Omega)$ allerdings Funktionen im klassischen Sinne; für $s < 0$ muß man sie als Distributionen interpretieren.

Nach bekannten Einbettungssätzen gilt für $s > \frac{1}{2}$ in einer Ortsdimension

$$u \in H_2^s(\Omega) \Rightarrow u \in C^0(\Omega)$$

Damit kann in diesem Falle sinnvoll von Randwerten $u(0)$ und $u(1)$ gesprochen werden. Aufgrund der Darstellung des Raumes $H_2^s(\Omega)$ als lineare Hülle der Sinusfunktionen e_k verschwindet für $s > \frac{1}{2}$ automatisch jedes $u \in H_2^s(\Omega)$ am Rand: $u(0) = u(1) = 0$.²

Funktionsräume über Q_t . Analog zum bisherigen Vorgehen auf dem Ortsgebiet Ω wird mit $L_2(Q_t)$ der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen $u = u(x, t)$ auf Q_t bezeichnet. Die Norm wird abgekürzt mit

$$\|\cdot\|_{Q_t} := \|\cdot\|_{L_2(Q_t)} = \sqrt{\int_{Q_t} (u(x, t))^2 d(x, t)}$$

Desweiteren werden die in der Literatur gebräuchlichen Bezeichnungen

$$L_p((0, T); H_2^s(\Omega)), \quad L_{\infty}((0, T); H_2^s(\Omega)), \quad C^0([0, T]; H_2^s(\Omega))$$

für banachraumwertige Funktionen über einem Zeitintervall $[0, T]$ verwendet. Abkürzenderweise werden die Argumente (x, t) desöfteren weggelassen, um die Notation nicht zu überfrachten.

²Im Gegensatz zur in der Literatur gebräuchlichen Notation $\dot{H}_2^s(\Omega)$ für Funktionen mit Nullrandbedingungen wird in vorliegender Arbeit also nur $H_2^s(\Omega)$ verwendet; der Nullrand kommt durch die Wahl der Basisfunktionen e_k automatisch ins Spiel.

Notation von Ableitungen. Ableitungen einer Funktion $u = u(x, t)$ nach x oder nach t werden aus Platzgründen oft durch Subskripte abgekürzt:

$$\begin{aligned} u_x &:= \frac{d}{dx}u, & u_{xx} &:= \frac{d^2}{dx^2}u, & \text{usw.} \\ u_t &:= \frac{d}{dt}u, & & & \text{usw.} \end{aligned}$$

Bisweilen werden auch indizierte Funktionen noch abgeleitet und entsprechend abgekürzt:

$$\begin{aligned} \xi_{1x} &:= \frac{d}{dx}\xi_1, & \xi_{2xx} &:= \frac{d^2}{dx^2}\xi_2, & \text{usw.} \\ u_t &:= \frac{d}{dt}u, & & & \text{usw.} \end{aligned}$$

1.4 Kapitelübersicht

Im vorliegenden **ersten Kapitel** wurde das Falk-Modell mit seinen Daten vorgestellt und die verwendete freie Energie spezifiziert. Es wurde ein kurzer Überblick über bereits bekannte Existenzresultate gegeben. Desweiteren wurde die in der Arbeit verwendete Notation eingeführt. Im folgenden wird eine Zusammenfassung der Inhalte der einzelnen Kapitel gegeben.

In **Kapitel 2** wird das auf die Bewegungsgleichung reduzierte Falk-System

$$u_{tt} = \sigma_x(u_x, \theta) - \gamma u_{xxxx} + \beta u_{txx} \quad \beta > 0 \quad \gamma \geq 0$$

zu den Randdaten³ $u(0, t) = u(1, t) = 0$ und einer als Parameter vorgegebenen stetigen Temperaturfunktion $\theta = \theta(x, t)$ untersucht, und zwar sowohl für $\gamma > 0$ als auch für $\gamma = 0$. Es wird definiert, was unter einer Lösung dieses Systems zu verstehen ist.

Darauf wird dem Problem ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zugeordnet, für welches zu Anfangswerten $u_0 \in H_2^1(\Omega), v_0 \in H_2^{-1}(\Omega)$ für $\gamma > 0$ bzw. $u_0 \in H_2^1(\Omega), v_0 \in L_2(\Omega)$ für $\gamma = 0$ mittels Kontraktionsprinzip Existenz von Lösungen, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten gezeigt wird.

Schließlich wird für $t_0 \leq t_1$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$ eine zweiparametrische Evolutionsabbildung Ψ^{t_1, t_0} von $Z := H_2^1(\Omega) \times H_2^{-1}(\Omega)$ nach Z bzw. für $\gamma = 0$ entsprechend $\tilde{\Psi}^{t_1, t_0}$ von $\tilde{Z} := H_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ nach \tilde{Z} eingeführt. Diese Abbildung ordnet einem „Anfangswert“ $z(t_0) = z_0 = (u_0, v_0)$ zum Startzeitpunkt t_0 die zugehörige Lösung $z(t_1) = (u(t_1), v(t_1))$ zu.

In **Kapitel 3** dieser Arbeit wird für $\beta > 0, \gamma \geq 0$ das eindimensionale Falk-System

$$\begin{aligned} v_t &= C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta + g) \\ \theta_t &= \kappa \theta_{xx} + (\theta + g) \sigma_\theta(u_x, \theta + g) v_x + \beta v_x^2 + g_t - \kappa g_{xx} \end{aligned}$$

zu Anfangsdaten

$$\begin{aligned} u_0 \in H_2^2(\Omega) \quad \text{für } \gamma > 0, & \quad \text{bzw.} \quad u_0 \in H_2^1(\Omega) \quad \text{für } \gamma = 0 \\ v_0 \in L_2(\Omega), & \quad \theta_0 \in L_2(\Omega) \end{aligned}$$

³Typischerweise erfordert die rechte Seite der Bewegungsgleichung das Stellen von weiteren Randbedingungen. Dies ist allerdings in Verbindung mit dem gewählten Lösungsbegriff nicht möglich, da zuwenig Regularität vorliegt. Auf diese Problematik wird noch genauer eingegangen werden.

und den Randbedingungen⁴

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

wie auch einer „Temperatur-Randdatenfunktion“⁵ g mit den Eigenschaften (1.5) betrachtet. Wie auch schon bei der Bewegungsgleichung wird ihm ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zugeordnet, für welches Existenz von Lösungen, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten gezeigt wird. Der Existenzbeweis beruht auf der Verwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes.

Es wird für $t_0 \leq t_1$ außerdem eine zweiparametrische Evolutionsabbildung Υ^{t_1, t_0} von $Y := H_2^2(\Omega) \times H_2^0(\Omega) \times H_2^{-3/4}(\Omega)$ nach Y bzw. für $\gamma = 0$ entsprechend $\tilde{\Psi}^{t_1, t_0}$ von $\tilde{Y} := H_2^2(\Omega) \times H_2^1(\Omega) \times H_2^{-3/4}(\Omega)$ nach \tilde{Z} eingeführt. Diese Abbildung ordnet einem „Anfangswert“ $y(t_0) = y_0 = (u_0, v_0, \theta_0)$ zum Startzeitpunkt t_0 die zugehörige Lösung $z(t_1) = (u(t_1), v(t_1), \theta(t_1))$ zu.

In **Kapitel 4** werden die linearisierten Gleichungen der Bewegungsgleichung

$$\xi_{1tt} = (r_\varepsilon(u_x, \theta)\xi_{1x})_x + C_1\xi_{1xx} - \gamma\xi_{1xxxx} + \beta\xi_{2xx}$$

zu Randbedingungen $\xi_1(0, t) = \xi_1(1, t) = 0$ und Anfangswerten aus Z bzw. \tilde{Z} entlang einer vorgegebenen Lösung $(u(t), v(t))$ betrachtet. Diesem Problem wird ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zugeordnet, von welchem Existenz von Lösungen, deren Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten gezeigt wird. Die Lösungen liegen in einem Raum von höchstens exponentiell in der Zeit wachsenden Funktionen.

Damit kann für $t_0 \leq t_1$ eine Evolutionsabbildung $D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0}$ von $Z := H_2^1(\Omega) \times H_2^{-1}(\Omega)$ nach Z bzw. für $\gamma = 0$ entsprechend $D\tilde{\Psi}_{z_0}^{t_1, t_0}$ von $\tilde{Z} := H_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ nach \tilde{Z} eingeführt werden, die von zwei Parametern der Zeit und von der Lösung $(u(t), v(t))$ bzw. deren Anfangswert z_0 abhängt. Weiter wird gezeigt, daß für diese (lineare) Abbildung gilt

$$D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0} \cdot \xi_0 = D_{z_0}(\Psi^{t_1, t_0} z_0) \cdot \xi_0 \quad \forall \xi_0 \in Y$$

Damit ist Evolutionsabbildung $\Psi^{t_1, t_0} z_0$ nach den Anfangswerten z_0 in diesem Sinne differenzierbar mit Differential $D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0}$.

Außerdem wird in diesem Kapitel für den Parameterfall $\beta^2 - 4\gamma > 0, \gamma > 0$ gezeigt, daß für jedes $z_0 \in Z$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ zwei Untervektorräume $E(z_0, t_0)$ und \hat{V}_p von Z existieren, die linear unabhängig sind und in direkter Summe ganz Z aufspannen. Anfangswerte $\xi_0 = (\xi_{1,0}, \xi_{2,0}) \in E(z_0, t_0)$ führen zu Lösungen der linearisierten Gleichungen $\xi(t) = D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0} \xi_0$, welche in der Zeit exponentiell schnell gegen Null gehen. Die Dimension von \hat{V}_p ist endlich und von z_0 und t_0 unabhängig.

In **Kapitel 5** werden die Erkenntnisse des vorangegangenen Kapitels für den Fall $\beta^2 - 4\gamma > 0, \gamma > 0$ dazu genutzt, den Raum Z in gewisse Mengen, sogenannte *Schichten*, zu zerlegen. Anfangswerte z_0 des reduzierten Falksystems auf der gleichen Schicht haben Lösungen, die sich in der Zeit exponentiell schnell annähern. Es wird außerdem in Kapitel 5 gezeigt, daß sich die Menge der Schichten endlichdimensional parametrisieren läßt, und daß überhalb einer Schranke

⁴Auch hier erfordert die rechte Seite der Bewegungsgleichung das Stellen von weiteren Randbedingungen, zum Beispiel auch für die Temperaturgleichung. Dies ist allerdings in Verbindung mit dem gewählten Lösungsbegriff nicht möglich, da zuwenig Regularität vorliegt. Auf diese Problematik wird an passender Stelle noch genauer eingegangen werden.

⁵Diese Bezeichnung wird verwendet, weil g durch Homogenisierung von vorgegebenen Temperaturranddaten entsteht.

$M \in \mathbb{N}$ alle m -dimensionalen Volumenelemente mit $m > M$ unter der Dynamik des Systems gegen Null gehen.

Außerdem wird eine Menge von Lösungen zum reduzierten Falk-System konstruiert, welche für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert und sämtliche andere Lösungen des Systems exponentiell schnell anzieht. Diese Menge, in gewissem Sinne eine „inertiale Mannigfaltigkeit“, ist endlichdimensional parametrisierbar.

In **Kapitel 6** wird auf die Dynamik der Bewegungsgleichungen zu einer gewissen Klasse von zeitperiodischen Temperaturfunktionen eingegangen. Zunächst wird die Existenz eines Attraktors für in der Zeit konstante Temperaturfunktionen gezeigt. Insbesondere folgt damit die Existenz eines Attraktors \mathcal{A}_H in der sog. Hochtemperaturphase – also für eine Temperaturfunktion, die in Ort und Zeit immer über der kritischen Temperatur θ_{end} liegt – als auch die Existenz eines Attraktors \mathcal{A}_N für den sog. Niedertemperaturfall, also für Temperaturfunktionen, die in Ort und Zeit immer unter der kritischen Temperatur θ_{start} liegen.

Dann wird ausgeführt, daß für eine gewisse Klasse von Temperaturfunktionen, welche periodisch mit Periode T zwischen den beiden Temperaturphasen wechselt, die Periodenabbildung $\Psi^{T,0}$ einen Attraktor \mathcal{A} besitzt. Für den Fall $\beta^2 - 4\gamma > 0$ lassen sich nach den Resultaten aus Kapitel 5 außerdem exponentiell gute Approximationen dieses Attraktors als Bilder von beschränkten Teilmengen eines endlichdimensionalen Untervektorraums von Z angeben. Desweiteren ergibt sich mit den Resultaten über das Verhalten der Volumenelemente unter der Evolution, daß der Attraktor endliche Hausdorff- bzw. fraktale Dimension besitzt.

In **Kapitel 7** werden numerische Lösungen zum vollen eindimensionalen Falk-Modell berechnet. Grundlage des verwendeten Algorithmus ist eine Diskretisierung des Ortsgebietes Ω über einem äquidistanten Gitter und die Verwendung von Finite-Differenzen-Approximationen der Differentialausdrücke bezüglich der Ortsvariable in den Gleichungen. Das entstehende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen wird dann mit einem Integrator aus dem MATLAB-Paket numerisch gelöst. Das Ergebnis eines Simulationslaufs zu periodischen Temperaturranddaten ist angegeben. Eine Konvergenzanalyse für die numerisch erzeugten Lösungen für das volle System hat sich wegen der stark ausgeprägten Nichtlinearität als sehr schwierig herausgestellt. Allerdings wird für das auf die Bewegungsgleichungen reduzierte System eine solche Analyse durchgeführt. Es wird gezeigt, daß für eine hinreichend reguläre Lösung des reduzierten Falk-Systems die numerisch erzeugten Lösungen bei Verfeinerung des Gitters und passend gewählten finiten Differenzen auf dem Gitter gegen die exakte Lösung konvergiert.

Weiterhin werden in diesem Kapitel für gewisse freie Energien auch numerische Resultate zu den materialtypischen Effekten der *Pseudoelastizität* und der *Quasiplastizität* präsentiert. Stellt man die Last-Dehnungs-Versuche durch passende Randbedingungen numerisch nach, so sind in der Simulation die typischen Hysteresiskurven, die man im realen Experiment bekommt, gut zu beobachten.

Das **Kapitel 8** schließlich präsentiert numerische Resultate für das Falk-System in zwei Ortsdimensionen. Der Algorithmus beruht auf einer Ortsdiskretisierung des Gebietes $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ auf einem Schachbrettgitter und auf der Verwendung von passenden finiten Differenzen. Die verwendete freie Energie wurde nach Maßgaben der *Orbitraumtheorie* (vgl. [RS01, Zim04, DZ04]) so konstruiert, daß sie den physikalischen Eigenschaften auf Kristallebene Rechnung trägt. Als Temperaturranddaten wurde eine zeitperiodische Funktion gewählt, die um die kritische Umschlagtemperatur oszilliert.

Kapitel 2

Wohlgestelltheit der Bewegungsgleichung

In diesem Kapitel wird die Wohlgestelltheit der *Bewegungsgleichung* des Falk-Systems

$$v_t = C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta)$$

gezeigt, das heißt: die Existenz von Lösungen sowie deren Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten.

Dabei wird die Temperaturfunktion θ , die in r_x eingeht, als Parameter aus dem Raum¹

$$Y_\theta = C^0(\mathbb{R}, L_2(\Omega)) \quad (2.1)$$

mit der üblichen Norm

$$\|\theta\|_{Y_\theta} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\theta(t)\|_\Omega$$

vorgegeben.

Die Anfangswerte $z_0 = (u_0, v_0)$ werden im Fall $\gamma > 0$ als Elemente des Raumes

$$Z := H_2^1(\Omega) \times H_2^{-1}(\Omega)$$

und im Fall $\gamma = 0$ als Elemente des Raumes

$$\tilde{Z} := H_2^1(\Omega) \times H_2^0(\Omega)$$

vorgeschrieben. Dabei sind die jeweiligen Normen gegeben durch

$$\|(u, v)\|_Z := \|u\|_{H_2^1(\Omega)} + \|v\|_{H_2^{-1}(\Omega)}; \quad \|(u, v)\|_{\tilde{Z}} := \|u\|_{H_2^1(\Omega)} + \|v\|_{H_2^0(\Omega)}$$

Als Randdaten werden zunächst „nur“ die Forderungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

gestellt, obwohl man aus der Form der rechten Seite der Gleichung erwarten würde, für die Eindeutigkeit weitere Bedingungen an u oder seine Ableitungen und auch an v stellen zu

¹Zunächst mag die Wahl des Parameterraumes befremdlich wirken, weil der Raum nicht nur für positive Zeiten definiert ist, sondern für ganz \mathbb{R} . Allerdings wird die Wahl von Y_θ später zur Definition einer zweiparametrischen Evolutionsabbildung wichtig werden.

müssen. Bei der geringen Regularität des – unten beschriebenen – gewählten Lösungsbegriffs macht dies aber a-priori keinen Sinn. Diese Problematik wird noch eingehender diskutiert.

Die Untersuchung dieses Teilproblems des Falk-Systems liefert Ergebnisse, welche im nächsten Kapitel dazu verwendet werden, Existenzaussagen für das volle System zu zeigen.

Darüberhinaus kann man für das reduzierte System der Bewegungsgleichungen weitergehende Aussagen über die Dynamik machen: Durch die Vorgabe gewisser Klassen von Temperaturfunktionen als Parameter kann die Existenz von Attraktoren der Bewegungsgleichungen gezeigt werden. Außerdem kann für bestimmte Parameterwerte eine „inertiale Mannigfaltigkeit“ konstruiert werden.

In der Literatur finden sich für den Fall $u(0) \in H_\infty^1$ Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen bei konstanter Temperaturfunktion für den Fall $\gamma = 0$ in [And80, AB82]; unsere Aussage $v_0 \in H_2^{-1}(\Omega)$ für $\gamma > 0$ scheint neu zu sein.

2.1 Der Lösungsbegriff zur Bewegungsgleichung

Im Fall $\gamma > 0$ heißt eine Funktion $u(x, t)$ mit $x \in \Omega$ und $t \in [0, \infty)$ mit

$$\|u(t)\|_{H_2^1(\Omega)} < \infty \quad \forall t \in [0, \infty)$$

und $H_2^{-3}(\Omega)$ -wertigen Zeitableitungen $v := u_t$ und u_{tt} im Distributionssinn nach Lemma A.1 mit

$$\begin{aligned} \|u_t(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)} &< \infty \quad \forall t \in [0, \infty) \\ \|u_{tt}(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)} &< \infty \quad \text{für fast alle } t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

eine *Lösung der Bewegungsgleichung*

$$v_t = C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta) \quad (2.2)$$

wenn die Differentialgleichung im Falle $\gamma > 0$ im skalaren Distributionssinne in $H_2^{-3}(\Omega)$ erfüllt ist, wenn also für fast alle $t \in (0, \infty)$ gilt:

$$\left\| v_t(t) - \left(C_1 u_{xx}(t) - \gamma u_{xxxx}(t) + \beta v_{xx}(t) + r_x(u_x, \theta)(t) \right) \right\|_{H_2^{-3}(\Omega)} = 0$$

Im Falle $\gamma = 0$ heißt entsprechend eine Funktion $u(x, t)$ mit $x \in \Omega$ und $t \in [0, \infty)$ mit

$$\|u(t)\|_{H_2^1(\Omega)} < \infty \quad \forall t \in [0, \infty), \quad \|u_t(t)\|_{H_2^0(\Omega)} < \infty \quad \forall t \in [0, \infty)$$

und

$$\|u_{tt}(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)} < \infty \quad \text{für fast alle } t \in [0, \infty)$$

eine *Lösung der Bewegungsgleichung*, wenn fast überall in der Zeit sogar in $H_2^{-1}(\Omega)$ gilt

$$\left\| v_t(t) - \left(C_1 u_{xx}(t) + \beta v_{xx}(t) + r_x(u_x, \theta)(t) \right) \right\|_{H_2^{-1}(\Omega)} = 0$$

Es ist sicherzustellen, daß der Term $r_x(t)$ für fast alle t unter den Voraussetzungen $\|u(t)\|_{H_2^1(\Omega)} < \infty$ und $\|\theta(t)\|_{H_2^0(\Omega)} < \infty$ in geeignetem formalem Sinne als Linearkombination aus den Sinusfunktionen e_k dargestellt werden kann und in $H_2^{-3}(\Omega)$ liegt. Dazu betrachtet man auf Ω die Funktion $r(u_x(t), \theta(t))$. Diese liegt in $L_2(\Omega)$ – es gilt ja aufgrund der Annahmen über r sogar $r(u_x(t), \theta(t)) \in L_\infty(\Omega)$. Damit kann sie achsensymmetrisch zu $x = 0$ auf das Intervall $[-1, 1]$ fortgesetzt werden. Für die Fortsetzung $\tilde{r}(t)$ gilt entsprechend $\tilde{r} \in L_2([-1, 1])$, und damit kann \tilde{r} als Linearkombination von Cosinus-Funktionen dargestellt werden:

$$\tilde{r}(u_x(t), \theta(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{1,k}(t) \cos(k\pi x) \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (h_{1,k}(t))^2 < \infty$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus

$$h_{1,k}(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{r}(u_x(t), \theta(t)) \cdot \cos(k\pi x) dx = \int_{\Omega} r(u_x(t), \theta(t)) \cdot \cos(k\pi x) dx$$

Damit kann natürlich auch $r(t)$ selbst als Reihe von Cosinus-Funktionen geschrieben werden. Somit kann die Ableitung im Distributionssinn $r_x(t) \simeq -\sum_{k=0}^{\infty} (k\pi) h_{1,k}(t) e_k$ als Element im Distributionen-Raum $H_2^{-1}(\Omega)$ aufgefaßt werden – also als formale Sinus-Reihe. Insbesondere ist $r_x(t)$ auch Element im Raum $H_2^{-3}(\Omega)$, da $H_2^{-1}(\Omega) \subset H_2^{-3}(\Omega)$. Die Nichtlinearität r_x „führt“ also nicht aus $H_2^{-3}(\Omega)$ „heraus“, der Lösungsbegriff ist sinnvoll gewählt.

Problematik der Randbedingungen

Nach der Definition des Lösungsbegriffes erfüllt eine Lösung in obigem Sinne die Randbedingungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Dies reicht im Allgemeinen nicht aus, um auch die Eindeutigkeit der Lösung zu vorgegebenen Anfangsbedingungen zu garantieren. Im Falle von $\gamma > 0$ steht auf der rechten Seite der Gleichungen der Term vierter Ordnung u_{xxxx} , der das Stellen weiterer Randbedingungen an u bzw. u_{xx} erforderlich macht, sowie der Term zweiter Ordnung v_{xx} , der seinerseits ebenso das Vorschreiben einer Randbedingung an v erfordert. Typischerweise könnte man weitere Randbedingungen der Art

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = v(0, t) = v(1, t) = 0 \tag{2.3}$$

vorschreiben, um das Problem zu beheben.

Allerdings ist dies nur dann möglich, wenn die Lösung über *genügend Regularität* verfügt, daß man von Randdaten für u_{xx} bzw. v sprechen kann – beide müßten stetige Funktionen auf Ω sein. Der von uns oben eingeführte Lösungsbegriff läßt diesen Schluß jedoch nicht zu; $u_{xx}(t)$ ist wie auch $v(t)$ im Allgemeinen *keine stetige Funktion*² auf Ω .

Nichtsdestotrotz kann man einer Lösung in unserem Lösungssinn ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen zuordnen, dessen Lösungen in passend gewählten Räumen eindeutig bestimmt sind.

²Falls jedoch für die Lösung gilt

$$\|u(t)\|_{H_2^3(\Omega)} < \infty \quad \forall t \in [0, \infty), \quad \|v(t)\|_{H_2^1(\Omega)} < \infty \quad \forall t \in [0, \infty)$$

werden die zusätzlichen Randbedingungen (2.3) erfüllt.

2.1.1 Zugeordnetes System gewöhnlicher Differentialgleichungen

Die Lösungseigenschaft

$$\left\| v_t(t) - \left(C_1 u_{xx}(t) - \gamma u_{xxxx}(t) + \beta v_{xx}(t) + r_x(u_x, \theta)(t) \right) \right\|_{H_2^{-3}(\Omega)} = 0$$

fast überall in der Zeit ist nach Einsetzen von $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ gleichbedeutend mit

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ddot{a}_k}{(k\pi)^3} + C_1 \frac{a_k(k\pi)^2}{(k\pi)^3} + \gamma \frac{a_k(k\pi)^4}{(k\pi)^3} + \beta \frac{\dot{a}_k(k\pi)^2}{(k\pi)^3} + \frac{k\pi h_{1,k}}{(k\pi)^3} \right) e_k \right\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

fast überall in der Zeit. Dies ist im $L_2(\Omega)$ aber äquivalent zu

$$\frac{\ddot{a}_k}{(k\pi)^3} + C_1 \frac{a_k(k\pi)^2}{(k\pi)^3} + \gamma \frac{a_k(k\pi)^4}{(k\pi)^3} + \beta \frac{\dot{a}_k(k\pi)^2}{(k\pi)^3} + \frac{k\pi h_{1,k}}{(k\pi)^3} = 0$$

für alle k und fast überall in der Zeit. Multiplikation mit $(k\pi)^3$ und partielle Integration ergibt für fast alle t

$$\ddot{a}_k + C_1 a_k(k\pi)^2 + \gamma a_k(k\pi)^4 + \beta \dot{a}_k(k\pi)^2 + k\pi h_{1,k} = 0 \quad (2.4)$$

Analoges Vorgehen im Falle $\gamma = 0$ führt von

$$\|v_t(t) - (C_1 u_{xx}(t) + \beta v_{xx}(t) + r_x(u_x, \theta)(t))\|_{H_2^{-1}(\Omega)} = 0$$

auf die Gleichungen

$$\ddot{a}_k + C_1 a_k(k\pi)^2 + \beta \dot{a}_k(k\pi)^2 + k\pi h_{1,k} = 0 \quad (2.5)$$

fast überall in der Zeit.

Jede Lösung in unserem Lösungssinne erfüllt also in ihren Koeffizientenfunktionen a_k fast überall in der Zeit das Differentialgleichungssystem 2.4 bzw. 2.5. Dieses System von gewöhnlichen Differentialgleichungen kann jedoch in einem passenden Raum Z_p eindeutig gelöst werden. Dies wird dadurch gezeigt, indem ein Operator $S : Z_p \rightarrow Z_p$ konstruiert wird, welcher in Z_p kontrahiert und demnach einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Dabei ist S so beschaffen, daß ein Fixpunkt automatisch fast überall in der Zeit das unendlichdimensionale System gewöhnlicher Differentialgleichungen löst.

2.2 Der Existenzsatz

Ausgehend von den Räumen

$$Z := H_2^1(\Omega) \times H_2^{-1}(\Omega); \quad \tilde{Z} := H_2^1(\Omega) \times H_2^0(\Omega)$$

bezeichnet im Falle $\gamma > 0$ der Raum Z_p den Raum der Funktionenpaare $z = (u(x, t), v(x, t))^T$ je auf dem Gebiet $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ mit

$$\sup_{t \in [0, \infty)} e^{-pt} \|z(t)\|_Z < \infty$$

normiert durch

$$\|z\|_{Z_p} := \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-pt} \|z(t)\|_Z$$

Im Falle $\gamma = 0$ bezeichnet Z_p entsprechend den Raum der Funktionenpaare mit

$$\sup_{t \in [0, \infty)} e^{-pt} \|z(t)\|_{\tilde{Z}} < \infty$$

normiert durch

$$\|z\|_{Z_p} := \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-pt} \|z(t)\|_{\tilde{Z}}$$

Nun kann der Existenzsatz formuliert werden:

Satz 2.1 *Existenz von Lösungen des zugeordneten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.*

Das Problem (2.4) hat für hinreichend großes $p > 0$ im Falle $\gamma > 0$ zu den Anfangsdaten

$$u_0 \in H_2^1(\Omega), \quad v_0 \in H_2^{-1}(\Omega)$$

für beliebiges $\beta > 0$ und θ gemäß (2.1) unter den Energie-Voraussetzungen 1.1 eine eindeutige Lösung $(u, v)^T \in Z_p$. Desweiteren hängt die Lösung stetig von den Anfangswerten ab.

Im Falle $\gamma = 0$ mit den Anfangsdaten

$$u_0 \in H_2^1(\Omega), \quad v_0 \in H_2^0(\Omega)$$

hat das Problem unter sonst gleichen Voraussetzungen für hinreichend großes p eine eindeutige Lösung in Z_p , die ebenfalls stetig von den Anfangsdaten abhängt.

2.3 Beweis des Existenzsatzes

Umgeschrieben in ein System erster Ordnung ergibt sich aus den einzelnen gewöhnlichen Differentialgleichungen $\forall k \in \mathbb{N}$ kurz:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma(k\pi)^4 - C_1(k\pi)^2 & -\beta(k\pi)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -k\pi h_{1,k} \end{pmatrix} (t) \quad (2.6)$$

Die Anfangswerte u_0, v_0 übertragen sich zu den Anfangsvorgaben

$$a_k(0) = \int_{\Omega} u_0 e_k dx, \quad \dot{a}_k(0) = \int_{\Omega} v_0 e_k dx \quad (2.7)$$

Bezeichnet man die Koeffizientenmatrix mit

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma(k\pi)^4 - C_1(k\pi)^2 & -\beta(k\pi)^2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

so schreibt sich die Lösung des zugehörigen homogenen Systems als

$$\begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} (t) = e^{A_k t} \begin{pmatrix} a_k(0) \\ \dot{a}_k(0) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

und mit Variation der Konstanten ergibt sich als formaler Lösungsausdruck des inhomogenen Problems entsprechend

$$\begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} (t) = e^{A_k t} \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} (0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ -k\pi h_{1,k}(\tau) \end{pmatrix} d\tau \quad (2.10)$$

Dieser Lösungsausdruck wird dazu verwendet, einen passenden Operator zu konstruieren.

Der Operator S

Der Operator S wird definiert durch

$$S : Z_p \rightarrow Z_p \\ (u, v) \mapsto S(u, v)$$

mit

$$S(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{A_k t} \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} (0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ -k\pi h_{1,k}(\tau) \end{pmatrix} d\tau \cdot e_k$$

Mit anderen Worten liefert mit den Projektionen

$$P^I : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \\ P^{II} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y$$

die erste Komponente $U := P^I S(u)$ zusammen mit der zweiten Komponente $V := P^{II} S(u)$ die Lösung (U, V) des linearen Problems

$$\begin{aligned} U_t &= V \\ U(x, 0) &= u_0 \\ V_t &= C_1 U_{xx} - \gamma U_{xxxx} + \beta V_{xx} + r_x(u_x, \theta) \\ V(x, 0) &= v_0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

in dem schwachen Sinn, wie er auch für den Lösungsbegriff zu den Bewegungsgleichungen verwendet wird.

2.3.1 Wohldefiniertheit von S

Zunächst sollen Abschätzungen zu Lösungen (U, V) des inhomogenen linearen Problems (2.11) erbracht werden, mit denen gezeigt wird, daß der Operator S tatsächlich nach Z_p abbildet.

Der Fall $\gamma > 0$

Multiplikation der Differentialgleichung

$$\ddot{a}_k = -(\gamma(k\pi)^4 + C_1(k\pi)^2)a_k - \beta\dot{a}_k(k\pi)^2 - k\pi h_{1,k}$$

mit $\frac{\dot{a}_k}{(k\pi)^2}$ und Summation über alle k ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 = - \sum_{k=1}^{\infty} h_{1k} \frac{\dot{a}_k}{k\pi}$$

Mit der Youngschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 &\leq \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\beta} (h_{1k})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{2} \left(\frac{\dot{a}_k}{k\pi} \right)^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\beta} (h_{1k})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{2} \dot{a}_k^2 \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 \leq \frac{1}{2\beta} \sum_{k=1}^{\infty} (h_{1k})^2$$

Damit steht auf der rechten Seite aber gerade die L_2 -Norm von r , für die nach den Annahmen zur Energie gilt

$$\|r\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_2^2$$

Damit ergibt sich nach Integration in der Zeit über $(0; t)$ und Einsetzen der Definitionen der Normen der Räume $H_2^1(\Omega)$, $H_2^0(\Omega)$, $H_2^{-1}(\Omega)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0}^2 + \frac{\beta}{2} \|V\|_{L_2((0;t), H_2^0)}^2 \\ \leq \frac{C_2^2}{2\beta} t + \frac{1}{2} \|V(0)\|_{H_2^{-1}}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(0)\|_{H_2^1}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(0)\|_{H_2^0}^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Demnach gilt

$$\frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{\Omega}^2 \leq \frac{C_2^2}{2\beta} t + \left(\frac{1}{2} \|v(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right)$$

und somit

$$e^{-pt} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)} \leq e^{-pt} \sqrt{\frac{2C_2^2}{\gamma\beta} t + \left(\frac{1}{\gamma} \|v(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{\gamma} \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right)}$$

Für positives p und $t \geq 0$ existiert jedoch eine Konstante c_{p1} mit

$$e^{-pt} \sqrt{\frac{2C_2^2}{\gamma\beta} t + \left(\frac{1}{\gamma} \|v(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{\gamma} \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right)} \leq c_{p1}$$

Ebenso untersucht man die Geschwindigkeit; für sie folgt

$$e^{-pt} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)} \leq e^{-pt} \sqrt{\frac{2C_2^2}{\beta} t + \left(\|v(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \gamma \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 C_1 \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right)}$$

Auch hier findet man für positives p und $t \geq 0$ eine Konstante c_{p2} mit

$$e^{-pt} \sqrt{\frac{2C_2^2}{\beta} t + \left(\|v(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \gamma \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 C_1 \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right)} \leq c_{p2}$$

Summiert man die beiden Abschätzungen auf, erhält man

$$e^{-pt} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)} + e^{-pt} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)} = \|S(u, v)\|_{Z_p} \leq c_{p1} + q c_{p2}$$

Daraus folgt für positive p die Wohldefiniertheit des Operators S .

Für spätere Verwendung seien noch folgende Resultate bereitgestellt, die durch Integration von (2.12) über das Zeitintervall $(0, \varepsilon)$ entstehen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v\|_{L_2((0,\varepsilon), H_2^{-1}(\Omega))}^2 &\leq \frac{C_2^2}{4\beta} \varepsilon^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \|V(0)\|_{H_2^{-1}}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(0)\|_{H_2^1}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(0)\|_{H_2^0}^2 \right) \\ \frac{\gamma}{2} \|u\|_{L_2((0,\varepsilon), H_2^1(\Omega))}^2 &\leq \frac{C_2^2}{4\beta} C_2^2 \varepsilon^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \|V(0)\|_{H_2^{-1}}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(0)\|_{H_2^1}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(0)\|_{H_2^0}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Der Fall $\gamma = 0$

Zum Vorgehen für $\gamma > 0$ ändert sich nicht viel; anstelle die Gleichungen für die Koeffizienten a_k mit $\frac{\dot{a}_k}{(k\pi)^2}$ zu multiplizieren, werden sie „nur“ mit \dot{a}_k multipliziert und dann aufaddiert:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 \right) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 \dot{a}_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} h_{1k} \dot{a}_k(k\pi)$$

Mit der Youngschen Ungleichung folgt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 \right) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 \dot{a}_k^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\beta} h_{1k}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{2} (\dot{a}_k(k\pi))^2$$

Dies ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 \dot{a}_k^2 \leq \frac{1}{2\beta} \sum_{k=1}^{\infty} h_{1k}^2$$

Damit steht auf der rechten Seite wieder gerade die L_2 -Norm von r , für die nach den Annahmen zur Energie gilt

$$\|r\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_2^2$$

und es folgt daraus nach Integration über $(0, t)$ in der Zeit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \|V\|_{L_2((0;t), H_2^1(\Omega))}^2 \\ \leq \frac{C_2^2}{2\beta} t + \frac{1}{2} \|V(0)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Damit gilt

$$\frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C_2^2}{2\beta} t + \left(\frac{1}{2} \|v(0)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right)$$

und

$$\frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \leq \frac{C_2^2}{2\beta} t + \left(\frac{1}{2} \|v(0)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right)$$

und somit gibt es Konstanten c_{p1}, c_{p2} mit

$$e^{-pt} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)} \leq e^{-pt} \sqrt{\frac{C_2^2}{C_1\beta} t + \frac{1}{C_1} \|v(0)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \|u(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2} < c_{p1}$$

wie auch

$$e^{-pt} \|V(t)\|_{H_2^0(\Omega)} \leq c_{p2}$$

Die Wohldefiniertheit des Operators S für $p > 0$ ist damit gezeigt.

2.3.2 Kontraktivität

Um zu untersuchen, ob S kontraktiv ist, wird die Differenz $S(\hat{u}) - S(\tilde{u})$ für zwei unterschiedliche Argumente \hat{u} und \tilde{u} zu gleichen Anfangswerten untersucht. Einsetzen der Definition von S ergibt daraus

$$\begin{aligned} S(\hat{u}) - S(\tilde{u}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{A_k t} \begin{pmatrix} a_k(0) \\ \dot{a}_k(0) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ -k\pi h_{1,k}(\hat{u}_x(\tau), \theta) \end{pmatrix} d\tau \right) \cdot e_k - \\ &\quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{A_k t} \begin{pmatrix} a_k(0) \\ \dot{a}_k(0) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ -k\pi h_{1,k}(\tilde{u}_x(\tau), \theta) \end{pmatrix} d\tau \right) \cdot e_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ -k\pi (h_{1,k}(\hat{u}_x(\tau), \theta) + h_{1,k}(\tilde{u}_x(\tau), \theta)) \end{pmatrix} d\tau \right) \cdot e_k \end{aligned}$$

Wird abgekürzt

$$\begin{aligned} \hat{h}_{1,k} &:= h_{1,k}(\hat{u}_x(\tau), \theta) \\ \tilde{h}_{1,k} &:= h_{1,k}(\tilde{u}_x(\tau), \theta) \end{aligned}$$

und die Differenz $U := S(\hat{u}) - S(\tilde{u})$ mit $U = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, so gilt fast überall in der Zeit

$$\ddot{a}_k = -(\gamma(k\pi)^4 + C_1(k\pi)^2)a_k - \beta\dot{a}_k(k\pi)^2 - (k\pi) \left(\hat{h}_{1,k} - \tilde{h}_{1,k} \right) \quad (2.15)$$

Mit anderen Worten löst U mit $V := U_t = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k e_k$ das Problem

$$V_t - C_1 U_{xx} + \gamma U_{xxxx} - \beta V_{xx} = (r(\hat{u}_x, \theta) - r(\tilde{u}_x, \theta))_x$$

zu den Anfangswerten

$$U(x, 0) = 0, \quad V(x, 0) = 0$$

im Sinne des Lösungsbegriffes, der für die Lösungen der Bewegungsgleichungen eingeführt worden ist: Fast überall in der Zeit im jeweiligen Distributionenraum $H_2^s(\Omega)$.

Der Fall $\gamma > 0$

Multiplikation der fast überall in der Zeit gültigen Differentialgleichung 2.15 für die Koeffizientenfunktionen a_k mit $\frac{\dot{a}_k}{(k\pi)^2}$ und anschließende Addition ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 \right) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 = \left(\hat{h}_{1,k} - \tilde{h}_{1,k} \right) \frac{\dot{a}_k}{k\pi}$$

Mit der Youngschen Ungleichung folgt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 \right) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\beta} \left(\hat{h}_{1,k} - \tilde{h}_{1,k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{2} \dot{a}_k^2$$

Dies ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 \leq \frac{1}{2\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\hat{h}_{1,k} - \tilde{h}_{1,k} \right)^2$$

Damit steht auf der rechten Seite gerade die L_2 -Norm von $r(\hat{u}_x, \theta) - r(\tilde{u}_x, \theta)$, und es folgt daraus nach Integration über $(0, t)$ in der Zeit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \|V\|_{L_2((0;t), H_2^0(\Omega))}^2 \\ \leq \frac{1}{2\beta} \|r(\hat{u}_x, \theta) - r(\tilde{u}_x, \theta)\|_{L_2((0;t); L_2(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Mit der Annahme zur Form der Energie

$$|r_\varepsilon(u_x, \theta)| \leq C_6 \quad \forall \quad (u_x, \theta) \in \mathbb{R}^2$$

folgt:

$$\|r(\hat{u}_x, \theta) - r(\tilde{u}_x, \theta)\|_{L_2(Q_t)}^2 \leq \|C_6|\hat{u}_x - \tilde{u}_x|\|_{L_2(Q_t)}^2 = C_6^2 \|\hat{u}_x - \tilde{u}_x\|_{L_2(Q_t)}^2$$

Für $(\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v})^T \in Z_p$ gilt jedoch

$$\|\hat{u}_x - \tilde{u}_x\|_{L_2(Q_t)}^2 \leq \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p}^2 \frac{1}{2p} e^{2pt} \quad (2.17)$$

wie man durch Integration der Ungleichung der Norm

$$\|\hat{u}_x(t) - \tilde{u}_x(t)\|_{\Omega}^2 e^{-pt} \leq \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p}^2$$

einsieht.

Insgesamt ergibt sich dadurch

$$\|r(\hat{u}_x, \theta) - r(\tilde{u}_x, \theta)\|_{L_2(Q_t)}^2 \leq C_6 \frac{1}{p} e^{2pt} \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p}^2$$

Somit folgt

$$\frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \|V\|_{Q_t}^2 \leq \frac{1}{2\beta} \cdot C_6 \frac{1}{p} e^{2pt} \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p}^2$$

und weiter

$$\|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 e^{-2pt} \leq \frac{1}{\gamma\beta} C_6 \frac{1}{p} \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p}^2$$

wie auch

$$\|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 e^{-2pt} \leq \frac{1}{\beta} C_6 \frac{1}{p} \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p}^2$$

Diesen Abschätzungen entnimmt man, daß für hinreichend großes p gilt

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-pt} \left(\|U\|_{H_2^1(\Omega)} + \|V\|_{H_2^{-1}(\Omega)} \right) &= \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-pt} \|S(\hat{u}, \hat{v}) - S(\tilde{u}, \tilde{v})\|_Z \\ &\leq \frac{1}{2} \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p} \end{aligned} \quad (2.18)$$

und in diesem Fall Kontraktion vorliegt.

Der Fall $\gamma = 0$

Multiplikation der fast überall in der Zeit gültigen Differentialgleichung 2.15 für die Koeffizientenfunktionen a_k je mit \dot{a}_k und anschließende Addition über alle k ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 \right) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 (k\pi)^2 = k\pi \left(\hat{h}_{1,k} - \tilde{h}_{1,k} \right) \dot{a}_k$$

Mit der Youngschen Ungleichung folgt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 \right) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 (k\pi)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\beta} \frac{1}{(k\pi)^2} \left(\hat{h}_{1,k} - \tilde{h}_{1,k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{2} \dot{a}_k^2 (k\pi)^2$$

Dies ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k^2 + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 a_k^2 \right) + \frac{\beta}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 \dot{a}_k^2 \leq \frac{1}{2\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} \left(\hat{h}_{1,k} - \tilde{h}_{1,k} \right)^2$$

Damit steht auf der rechten Seite gerade die L_2 -Norm von $r(\hat{u}_x, \theta) - r(\tilde{u}_x, \theta)$, und es folgt daraus nach Integration über $(0, t)$ in der Zeit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \|V\|_{L_2((0;t), H_2^1(\Omega))}^2 \\ \leq \frac{1}{2\beta} \|r(\hat{u}_x, \theta) - r(\tilde{u}_x, \theta)\|_{L_2((0;t); L_2(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Mit 2.17 folgt

$$\frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{2} \|V\|_{L_2((0;t), H_2^1(\Omega))}^2 \leq \frac{1}{2\beta} \cdot C_6 \frac{1}{p} e^{2pt} \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p}^2$$

und weiter

$$\|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 e^{-2pt} \leq \frac{1}{C_1 \beta} C_6 \frac{1}{p} \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p}^2$$

wie auch

$$\|V(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 e^{-2pt} \leq \frac{1}{\beta} C_6 \frac{1}{p} \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p}^2$$

Diesen Abschätzungen entnimmt man, daß für hinreichend großes p gilt

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-pt} \left(\|U\|_{H_2^1(\Omega)} + \|V\|_{H_2^0(\Omega)} \right) &= \sup_{t \in [0, \infty)} e^{-pt} \|S(\hat{u}, \hat{v}) - S(\tilde{u}, \tilde{v})\|_Z \\ &\leq \frac{1}{2} \|\tilde{u} - \hat{u}, \tilde{v} - \hat{v}\|_{Z_p} \end{aligned} \quad (2.20)$$

und in diesem Fall Kontraktion vorliegt.

Damit ist Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des zugehörigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gezeigt, denn nach dem Kontraktionsprinzip hat S einen eindeutigen Fixpunkt in Z_p , welcher dieses System nach Konstruktion von S löst. Der Satz ist bewiesen. \square

Vorbereitungen für das volle System

Im Hinblick auf die Existenztheorie zum vollen Falk-System mit Temperaturgleichung ist es erforderlich, eine andere Klasse von Temperaturparametern θ zuzulassen, nämlich $\theta \in W$ mit

$$W = L_2((0, T); H_2^0(\Omega))$$

In diesem Sinne wird der Operator M_{z_0} eingeführt, der einer Temperaturfunktion $\theta \in W$ die Lösung der Bewegungsgleichungen $z = (u, v)$ zum Anfangswert z_0 zuordnet:

$$M_{z_0} : \theta \mapsto M_{z_0}(\theta) := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Dieser Operator wird dazu verwendet, um in einem späteren Kapitel einen Operator zu konstruieren, mit welchem schließlich die Existenz von Lösungen des vollen Falk-Systems gezeigt wird.

2.4 Die Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten

Nachdem Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für das zu den Bewegungsgleichungen gehörige System gewöhnlicher Differentialgleichungen gezeigt worden ist, soll nun noch auf die Abhängigkeit von den Anfangswerten eingegangen werden. Als Räume für die Anfangswerte werden die folgenden, bereits eingeführten Räume verwendet:

$$Z := H_2^1(\Omega) \times H_2^{-1}(\Omega); \quad \tilde{Z} := H_2^1(\Omega) \times H_2^0(\Omega)$$

Die Normen der Räume ist die Summe der beiden Teilraumnormen:

$$\|(u, v)\|_Z := \|u\|_{H_2^1(\Omega)} + \|v\|_{H_2^{-1}(\Omega)}; \quad \|(u, v)\|_{\tilde{Z}} := \|u\|_{H_2^1(\Omega)} + \|v\|_{H_2^0(\Omega)}$$

Der erste der beiden Räume wird für den Fall $\gamma > 0$ verwendet, der zweite entsprechend für $\gamma = 0$.

Die Anfangswerte $z_0 = (u_0, v_0)$ gehen in den kontrahierenden Operator S als *Parameter* ein – somit liegt nahe, den Zusatz zum Kontraktionsprinzip A.2 bezüglich der Abhängigkeit des Fixpunktes von Parametern zu gebrauchen.

2.4.1 Operatoren bei verschiedenen Anfangswerten

Man untersucht die Differenz $\hat{S}(u) - \tilde{S}(u)$, wobei die Superskripte zwei Operatoren S bezeichnen, die sich nur in den Anfangswerten unterscheiden:

$$\begin{aligned} \hat{S}(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{A_k t} \begin{pmatrix} \hat{a}_k \\ \dot{\hat{a}}_k \end{pmatrix} (0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ h_{1,k}(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right) \cdot e_k \\ \tilde{S}(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{A_k t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_k \\ \dot{\tilde{a}}_k \end{pmatrix} (0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ h_{1,k}(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right) \cdot e_k \end{aligned}$$

Die Differenz schreibt sich demnach als

$$\begin{aligned} \hat{S}(u) - \tilde{S}(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{A_k t} \begin{pmatrix} \hat{a}_k(0) \\ \dot{\hat{a}}_k(0) \end{pmatrix} \cdot e_k \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{A_k t} \begin{pmatrix} \tilde{a}_k(0) \\ \dot{\tilde{a}}_k(0) \end{pmatrix} \cdot e_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{A_k t} \begin{pmatrix} \hat{a}_k(0) - \tilde{a}_k(0) \\ \dot{\hat{a}}_k(0) - \dot{\tilde{a}}_k(0) \end{pmatrix} \cdot e_k \right) \end{aligned}$$

Schreibt man abkürzend $U := \hat{S}(u) - \tilde{S}(u)$ als Reihe $U = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, dann erfüllen die Koeffizientenfunktionen a_k fast überall in der Zeit die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen

$$\ddot{a}_k = -(\gamma(k\pi)^4 + C_1(k\pi)^2)a_k - \beta \dot{a}_k(k\pi)^2$$

Dies bedeutet nichts anderes, daß mit $V := \frac{d}{dt}(\hat{S}(u) - \tilde{S}(u)) = \frac{d}{dt}U$ das homogene Anfangsrandwertproblem

$$V_t - C_1 U_{xx} + \gamma U_{xxxx} - \beta V_{xx} = 0$$

zu den Anfangswerten

$$U(x, 0) = \hat{u}_0 - \tilde{u}_0, \quad V(x, 0) = \hat{v}_0 - \tilde{v}_0$$

im Sinne des Lösungsbegriffs von Lösungen der Bewegungsgleichungen erfüllt ist.

Nun wird je nach $\gamma > 0$ bzw. $\gamma = 0$ weiterverfahren.

Der Fall $\gamma > 0$

Wieder einmal werden die zugeordneten Gleichungen je mit $\frac{\dot{a}_k}{(k\pi)^2}$ multipliziert und über k summiert. Dies liefert die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) + \beta \|V\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \leq 0$$

Integration in der Zeit über $(0, t)$ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|V(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(0)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt aber, daß

$$\sup_{t \in [0, T]} e^{-2pt} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\gamma} \|V(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \|U(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{\gamma} \|U(0)\|_{H_2^0(\Omega)}^2$$

und weiter

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} e^{-pt} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{\gamma} \|V(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)} + \|U(0)\|_{H_2^1(\Omega)} + \frac{C_1}{\gamma} \|U(0)\|_{H_2^0(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{1}{\gamma} + 1 + \frac{C_1}{\gamma} \right) \cdot \|(U_0, V_0)\|_Z \end{aligned}$$

Demnach ist S von den Anfangswerten aus dem Raum Z lipschitz-stetig abhängig mit Lipschitz-Konstante $\left(\frac{1}{\gamma} + 1 + \frac{C_1}{\gamma} \right)$. Nach einem Zusatz zum Kontraktionsprinzip ist somit auch der eindeutige Fixpunkt von S lipschitz-stetig bezüglich dieser Anfangswerte:

Satz 2.2 *Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten.*

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems (2.4) hängt für $\gamma > 0$ stetig von den Anfangswerten

$$z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in Z$$

ab, und damit hängt auch der Operator M_{z_0} stetig vom Parameter z_0 ab.

Eine andere Abschätzung über die Differenz zweier Lösungen zu unterschiedlichen Anfangswerten, die in einem späteren Kapitel Anwendung finden wird, liefert zum Beispiel auch das Lemma von Gronwall. Ausgehend von Gleichung 2.15 erhält man durch Multiplikation der zweiten Zeile mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{a}_k}{(k\pi)^2}$, Integration über Ω und einfachen Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) \\ \leq C_6 \frac{2}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

und daraus mit dem Lemma von Gronwall

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \leq \\ \left(\frac{1}{2} \|V(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(0)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(0)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) \cdot \exp \left(C_6 \frac{2}{\gamma} t \right) \quad (2.22) \end{aligned}$$

Der Fall $\gamma = 0$

Auch hier betrachtet man die Differenz $\hat{S}(u) - \tilde{S}(u)$ mit den oben eingeführten Abkürzungen. Allerdings wird hier nicht mit $\frac{\dot{a}_k}{(k\pi)^2}$ multipliziert, sondern „nur“ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k e_k$. Nach analoger Argumentation wie oben ergibt sich der Satz

Satz 2.3 *Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten für $\gamma = 0$.*

Die Lösungen des Anfangsrandwertproblems (2.5) hängen für $\gamma = 0$ stetig von den Anfangswerten

$$z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \tilde{Z}$$

ab, und damit hängt auch der Operator M_{z_0} stetig vom Parameter z_0 ab.

2.5 Die Abhängigkeit der Lösung von θ

Auch die Temperatur $\theta \in Y_\theta$ geht als Parameter in S ein – somit liegt es nahe, den Zusatz zum Kontraktionsprinzip bezüglich der Abhängigkeit des Fixpunktes von Parametern zu gebrauchen, um die Abhängigkeit der Lösung von θ zu untersuchen.

2.5.1 Operatoren zu verschiedenen Temperaturen

Man untersucht die Differenz $\hat{S}(u) - \tilde{S}(u)$, wobei die Superskripte zwei Operatoren S bezeichnen, die sich nur in der jeweiligen Temperaturfunktion unterscheiden, welche in die Terme $h_{1,k}$ eingeht. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{1,k}(t) &= \int_{\Omega} r(u_x(t), \tilde{\theta}(t)) \cdot \cos(k\pi x) dx \\ \hat{h}_{1,k}(t) &= \int_{\Omega} r(u_x(t), \hat{\theta}(t)) \cdot \cos(k\pi x) dx \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{S}(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{A_k t} \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} (0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{h}_{1,k}(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right) \cdot e_k \\ \tilde{S}(u) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{A_k t} \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} (0) + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{h}_{1,k}(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right) \cdot e_k\end{aligned}$$

Die Differenz schreibt sich demnach als

$$\hat{S}(u) - \tilde{S}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{h}_{1,k}(\tau) - \tilde{h}_{1,k}(\tau) \end{pmatrix} d\tau \right)$$

Schreibt man abkürzend $U := \hat{S}(u) - \tilde{S}(u)$ als Reihe $U = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, dann erfüllen die Koeffizientenfunktionen a_k fast überall in der Zeit die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\ddot{a}_k = -(\gamma(k\pi)^4 + C_1(k\pi)^2)a_k - \beta \dot{a}_k(k\pi)^2 + k\pi (\hat{h}_{1,k} - \tilde{h}_{1,k})$$

Nun wird je nach $\gamma > 0$ bzw. $\gamma = 0$ weiterverfahren.

Der Fall $\gamma > 0$

Wieder einmal werden die gewöhnlichen Differentialgleichungen mit $\frac{\dot{a}_k}{(k\pi)^2}$ multipliziert und über k summiert. Dies liefert mit der Ungleichung von Young die Beziehung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) + \beta \|V\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{\beta}{2} \|V\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\beta} \|r(u_x, \hat{\theta}) - r(u_x, \tilde{\theta})\|_{H_2^0(\Omega)}^2\end{aligned}$$

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) + \frac{\beta}{2} \|V\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{(C_2 C_4)^2}{2\beta} \|\hat{\theta} - \tilde{\theta}\|_{H_2^0(\Omega)}^2\end{aligned}$$

Integration in der Zeit über $(0, t)$ führt zu

$$\frac{1}{2} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|U(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \leq \frac{(C_2 C_4)^2}{2\beta} t \|\hat{\theta} - \tilde{\theta}\|_{Y_\theta}^2$$

Daraus folgt aber zum einen, daß

$$\sup_{t \in [0, \infty)} e^{-2pt} \|U(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \leq \frac{(C_2 C_4)^2}{\gamma\beta} \|\hat{\theta} - \tilde{\theta}\|_{Y_\theta}^2 \cdot t e^{-2pt}$$

zum anderen, daß

$$\sup_{t \in [0, \infty)} e^{-2pt} \|V(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 \leq \frac{(C_2 C_4)^2}{\beta} \|\hat{\theta} - \tilde{\theta}\|_{Y_\theta}^2 \cdot t e^{-2pt}$$

Da es für positive p und t bekanntlich eine obere Schranke C gibt mit $te^{-2pt} \leq C$, folgt daraus

$$\sup_{t \in [0, \infty)} e^{-pt} \|U(t), V(t)\|_Z \leq \left(\sqrt{\frac{(CC_2C_4)^2}{\beta}} + \sqrt{\frac{(CC_2C_4)^2}{\gamma\beta}} \right) \|\hat{\theta} - \tilde{\theta}\|_{Y_\theta}$$

Demnach ist S von der Temperatur aus dem Raum Y_θ lipschitz-stetig abhängig mit Lipschitz-Konstante $\sqrt{\frac{(CC_2C_4)^2}{\beta}} + \sqrt{\frac{(CC_2C_4)^2}{\gamma\beta}}$. Nach einem Zusatz zum Kontraktionsprinzip ist somit auch der eindeutige Fixpunkt von S lipschitz-stetig bezüglich θ :

Satz 2.4 *Stetige Abhängigkeit vom Temperaturparameter θ für $\gamma > 0$.*

Die Lösungen des Anfangsrandwertproblems (2.4) hängen für $\gamma > 0$ lipschitzstetig von der Temperatur

$$\theta \in Y_\theta$$

ab. Genauer gilt mit einem $p_ > 0$ für die Differenz U zweier Lösungen*

$$\|U(t)\|_{H^1_2(\Omega)} \leq \left(\sqrt{\frac{(CC_2C_4)^2}{\beta}} + \sqrt{\frac{(CC_2C_4)^2}{\gamma\beta}} \right) \|\hat{\theta} - \tilde{\theta}\|_{Y_\theta} e^{p_* t}$$

Also ist der Operator $M_{z_0}(\theta)$ lipschitz-stetig bezüglich seines Arguments θ .

Der Fall $\gamma = 0$

Auch hier betrachtet man die Differenz $\hat{S}(u) - \tilde{S}(u)$ mit den oben eingeführten Abkürzungen. Allerdings wird hier nicht mit $\frac{\hat{a}_k}{(k\pi)^2}$ multipliziert, sondern „nur“ mit \hat{a}_k . Nach analoger Argumentation wie oben ergibt sich der Satz

Satz 2.5 *Stetige Abhängigkeit vom Temperaturparameter θ für $\gamma = 0$.*

Die Lösungen des Anfangsrandwertproblems (2.5) hängen für $\gamma = 0$ lipschitzstetig von der Temperatur

$$\theta \in Y_\theta$$

ab. Genauer gilt mit einem $p_ > 0$ für die Differenz U zweier Lösungen*

$$\|U(t)\|_{H^1_2(\Omega)} \leq \left(\sqrt{\frac{(CC_2C_4)^2}{\beta}} + \sqrt{\frac{(CC_2C_4)^2}{C_1\beta}} \right) \|\hat{\theta} - \tilde{\theta}\|_{Y_\theta} e^{p_* t}$$

Also ist der Operator $M_{z_0}(\theta)$ lipschitz-stetig bezüglich seines Arguments θ .

2.6 Glattheit der Lösung für $\gamma > 0$

Nachdem die Existenzfrage geklärt worden ist, soll nun die Glattheit der erhaltenen Lösung untersucht werden. Es ergibt sich, daß diese von der Regularität der Anfangswerte, der Glattheit der als Parameter vorgegebenen Temperaturfunktion θ und der Glattheit der Funktion der freien Energie abhängt.

In den folgenden Sätzen bezeichne

$$\begin{aligned} Q_t &:= \Omega \times [0, t] \\ \tilde{Q}_t &:= \Omega \times [\varepsilon, t] \quad \text{mit} \quad 0 < \varepsilon < t \end{aligned}$$

die entsprechenden Raum-Zeit-Zylinder.

Satz 2.6 *Regularität der Lösung der Bewegungsgleichung für $\gamma > 0$ bei glatteren Daten*
Es gelte für ein $k \in \mathbb{N}_0$:

$$u \in L_2((0, t), H_2^{k+1}(\Omega)), \quad \frac{d^k}{dx^k} \theta \in L_2(Q_t), \quad u_0 \in H_2^{k+2}(\Omega), \quad v_0 \in H_2^k(\Omega)$$

Desweiteren gelte mit einer Konstanten $C(r, k) > 0$

$$\left| \frac{d^s}{dx^s} \frac{d^q}{dy^q} r(x, y) \right| \leq C(r, k) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \forall s + q = k \quad \text{mit} \quad s, q \in \mathbb{N}_0$$

Dann gilt für beliebiges $0 < \varepsilon \leq t$:

$$u(\varepsilon) \in H_2^{k+2}(\Omega), \quad v(\varepsilon) \in H_2^k(\Omega), \quad v \in L_2((0, t), H_2^{k+1}(\Omega)), \quad u \in L_2((0, t), H_2^{k+2}(\Omega))$$

Beweis:

Multiplikation der zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen der Bewegungsgleichung

$$\ddot{a}_l + C_1 a_l (l\pi)^2 + \gamma a_l (l\pi)^4 + \beta \dot{a}_l (l\pi)^2 + l\pi h_{1,l} = 0$$

je mit $(l\pi)^{2k} \dot{a}_l$ und anschließende Summation über alle l führt nach Integration über t und der Youngschen Ungleichung zu eine Reihe von Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + C_1 \|u(t)\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \gamma \|u(t)\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 + \beta \|v\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 \leq \\ 2 \left\| \frac{d^k}{dx^k} r \right\|_{L_2((0,t); L_2(\Omega))}^2 + \|v_0\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + C_1 \|u_0\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \gamma \|u_0\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Für $\frac{d^k}{dx^k} r$ gilt nach Anhang (B.2) unter den Voraussetzungen an r und seine partiellen Ableitungen

$$\left\| \frac{d^k}{dx^k} r \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{r,k} \left(\|u\|_{H_2^{k+1}(\Omega)} + \left\| \frac{d^k}{dx^k} \theta \right\|_{L_2(\Omega)} \right)$$

mit einer Konstanten $C_{r,k}$, die nur von k und den Schranken für den Betrag der Ableitungen von r abhängt.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + \gamma \|u(t)\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 + C_1 \|u(t)\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta \|v\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 \leq \\ 2C_{r,k} \left(\|u\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 + \left\| \frac{d^k}{dx^k} \theta \right\|_{L_2((0,t); L_2(\Omega))}^2 \right) \\ + \|v_0\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + C_1 \|u_0\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \gamma \|u_0\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Damit ist der erste Teil der Behauptung abgearbeitet. Integration dieser Ungleichung in der Zeit liefert die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \gamma \|u\|_{L_2((0,t);H_2^{k+2}(\Omega))}^2 &\leq t \cdot 2C_{r,k} \left(\|u\|_{L_2((0,t);H_2^{k+1}(\Omega))}^2 + \left\| \frac{d^k}{dx^k} \theta \right\|_{L_2((0,t);L_2(\Omega))}^2 \right) \\ &\quad + t \cdot \left(\|v_0\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + C_1 \|u_0\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \gamma \|u_0\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

und

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_2((0,t);H_2^k(\Omega))}^2 &\leq t \cdot 2C_{r,k} \left(\|u\|_{L_2((0,t);H_2^{k+1}(\Omega))}^2 + \left\| \frac{d^k}{dx^k} \theta \right\|_{L_2((0,t);L_2(\Omega))}^2 \right) \\ &\quad + t \cdot \left(\|v_0\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + C_1 \|u_0\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \gamma \|u_0\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die auftretenden Konstanten hängen dabei nicht von (u, v, θ) ab. Damit sind auch die verbleibenden Behauptungen des Satzes gezeigt. \square

Iterative Anwendung des Satzes 2.6 liefert folgende Aussage:

Satz 2.7 *Regularität der Lösung der Bewegungsgleichung für $\gamma > 0$ bei glatteren Daten*
Es gelte für ein $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{d^k}{dx^k} \theta \in L_2(Q_t), \quad u_0 \in H_2^{k+2}(\Omega), \quad v_0 \in H_2^k(\Omega)$$

Desweiteren gelte mit einer Konstanten $C(r, k) > 0$

$$\left| \frac{d^s}{dx^s} \frac{d^q}{dy^q} r(x, y) \right| \leq C(r, k) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \forall s + q = k \quad \text{mit} \quad s, q \in \mathbb{N}_0$$

Dann gilt für beliebiges $0 < \varepsilon \leq t$:

$$u(\varepsilon) \in H_2^{k+2}(\Omega), \quad v(\varepsilon) \in H_2^k(\Omega), \quad v \in L_2((0, t), H_2^{k+1}(\Omega)), \quad u \in L_2((0, t), H_2^{k+2}(\Omega))$$

Damit ist gezeigt, daß bei hinreichend glatten Anfangswerten und im Ort genügend glatter Temperaturfunktion auch die zugehörige Lösung im Ort beliebig regulär ist.

Aufgrund des Kapillaritätsterm $-\gamma u_{xxxx}$ auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung kann jedoch noch mehr ausgesagt werden: *Unabhängig von der Regularität der Anfangswerte* wird die Regularität der Lösung im Ort für $t > 0$ nur durch die Glattheit der Temperaturfunktion und der Regularität der freien Energie bzw. des Terms r bestimmt.

Satz 2.8 *Regularitätsverbesserung der Lösung der Bewegungsgleichung in der Zeit für $\gamma > 0$*
Es gelte für ein $k \in \mathbb{N}_0$:

$$u \in L_2((0, t), H_2^{k+1}(\Omega)), \quad v \in L_2((0, t), H_2^{k-1}(\Omega)), \quad \frac{d^k}{dx^k} \theta \in L_2(Q_t)$$

Desweiteren gelte mit einer Konstanten $C(r, k) > 0$

$$\left| \frac{d^s}{dx^s} \frac{d^q}{dy^q} r(x, y) \right| \leq C(r, k) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \forall s + q = k \quad \text{mit} \quad s, q \in \mathbb{N}_0$$

Dann gilt für beliebiges $0 < \varepsilon \leq t$:

$$u(\varepsilon) \in H_2^{k+2}(\Omega), \quad v(\varepsilon) \in H_2^k(\Omega), \quad v \in L_2((0, t), H_2^{k+1}(\Omega))$$

Beweis:

Man setzt mit einer Funktion $\varphi = \varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$ der Bauart

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(t \geq \varepsilon) = 1, \quad \|\varphi\|_\infty = 1$$

und

$$C_\varphi := \max(\|\varphi\|_\infty, \|\varphi_t\|_\infty, \|\varphi_{tt}\|_\infty)$$

an:

$$w := \varphi \cdot u$$

Wenn u die Gleichung

$$u_{tt} = -\gamma u_{xxxx} + C_1 u_{xx} + \beta v_{xx} + r_x$$

im Sinne des Lösungsbegriffs der Lösungen der Bewegungsgleichungen erfüllt, so genügt w im gleichen Sinne der Gleichung

$$w_{tt} = -\gamma w_{xxxx} + C_1 u_{xx} + \beta w_{txx} - \varphi r_x - q$$

mit

$$q = 2\varphi_t v + \varphi_{tt} u - \beta u_{xx} \varphi_t$$

Führt man zu

$$w_t = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k e_k dx$$

die Abkürzung

$$A^s \dot{w} := \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^s \dot{a}_k e_k$$

ein und multipliziert die Gleichung mit $A^{2k} \dot{w}_t$, so kann man nach Integration über Q_t und der Youngschen Ungleichung eine Reihe von Abschätzungen herleiten:

$$\begin{aligned} \|w_t(t)\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + C_1 \|w(t)\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \gamma \|w(t)\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 + \beta \|w_t\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 \leq \\ 2 \left\| \varphi \frac{d^k}{dx^k} r \right\|_{L_2((0,t); L_2(\Omega))}^2 + 2 \|q\|_{L_2((0,t); H_2^{k-1}(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Mit den Voraussetzungen über φ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|w_t(t)\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + C_1 \|w(t)\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \gamma \|w(t)\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 + \beta \|w_t\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 \leq 2 \|r\|_{L_2((0,t); H_2^k(\Omega))}^2 \\ + 2C_\varphi \left(2 \|v\|_{L_2((0,t); H_2^{k-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_2((0,t); H_2^{k-1}(\Omega))}^2 + \beta \|u\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Für $\frac{d^k}{dx^k} r$ gilt nach Anhang (B.2) unter den Voraussetzungen an r und seine partiellen Ableitungen

$$\left\| \frac{d^k}{dx^k} r \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C_r \left(\|u\|_{H_2^{k+1}(\Omega)} + \left\| \frac{d^k}{dx^k} \theta \right\|_{L_2(\Omega)} \right)$$

mit einer Konstanten, die nur von $C(r, k)$ abhängt.

Damit folgt

$$\begin{aligned} & \|w_t(t)\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + \gamma \|w(t)\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 + C_1 \|w(t)\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \beta \|w_t\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 \leq \\ & \quad 2C_r \left(\|u\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 + \left\| \frac{d^k}{dx^k} \theta \right\|_{L_2((0,t); L_2(\Omega))}^2 \right) \\ & \quad + 2C_\varphi \left(2\|v\|_{L_2((0,t); H_2^{k-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L_2((0,t); H_2^{k-1}(\Omega))}^2 + \beta \|u\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die auftretenden Konstanten hängen von r ab, von der Funktion φ , aber nicht von (u, v, θ) . Es gilt deswegen

$$\begin{aligned} & \|w_t(t)\|_{H_2^k(\Omega)}^2 + C_1 \|w(t)\|_{H_2^{k+1}(\Omega)}^2 + \gamma \|w(t)\|_{H_2^{k+2}(\Omega)}^2 + \beta \|w_t\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 \leq \\ & \quad 2(C_r + C_\varphi(3 + \beta)) \left(\|u\|_{L_2((0,t); H_2^{k+1}(\Omega))}^2 + \|v\|_{L_2((0,t); H_2^{k-1}(\Omega))}^2 + \left\| \frac{d^k}{dx^k} \theta \right\|_{L_2(Q_t)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Da aufgrund der Wahl von φ gilt

$$u|_{\tilde{Q}_t} = w|_{\tilde{Q}_t}$$

folgt daraus die Behauptung des Satzes. □

Iterative Anwendung dieses Satzes liefert folgende Aussage:

Satz 2.9 *Regularitätsverbesserung der Lösung der Bewegungsgleichung in der Zeit für $\gamma > 0$*
Es gelte für ein $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{d^k}{dx^k} \theta \in L_2(Q_t)$$

Desweiteren gelte mit einer Konstanten $C(r, k) > 0$

$$\left| \frac{d^s}{dx^s} \frac{d^q}{dy^q} r(x, y) \right| \leq C(r, k) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \forall s + q = k \quad \text{mit} \quad s, q \in \mathbb{N}_0$$

Dann gilt für beliebiges $0 < \varepsilon \leq t$:

$$u(\varepsilon) \in H_2^{k+2}(\Omega), \quad v(\varepsilon) \in H_2^k(\Omega), \quad v \in L_2((0, t), H_2^{k+1}(\Omega))$$

An dieser Stelle soll eine Implikation dieses Satzes gesondert herausgestellt werden, weil sie in einem späteren Kapitel für den Nachweis eines Attraktors eine Rolle spielen wird:

Satz 2.10 *Regularität der Lösungen der Bewegungsgleichung für positive Zeiten.*
Es gelte :

$$u \in L_2((0, t), H_2^1(\Omega)), \quad v \in L_2((0, t), H_2^{-1}(\Omega)), \quad \theta \in L_2(Q_t)$$

Dann gilt für beliebiges $0 < \varepsilon \leq t$:

$$u(\varepsilon) \in H_2^2(\Omega), \quad v(\varepsilon) \in H_2^0(\Omega), \quad v \in L_2((0, t), H_2^1(\Omega))$$

mit der konkreten Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u(\varepsilon)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 &\leq C(\varepsilon, \theta) \left(\frac{1}{4\beta} C_2^2 \varepsilon^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \|v(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(0)\|_{H_2^{+1}(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(0)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) \right) \\ \|v(\varepsilon)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 &\leq C(\varepsilon, \theta) \left(\frac{1}{4\beta} C_2^2 \varepsilon^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \|v(0)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(0)\|_{H_2^{+1}(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(0)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) \right) \end{aligned}$$

Wie bereits durch die Schreibweise angedeutet, hängt die Konstante $C(\varepsilon, \theta)$ von θ und ε ab, nicht aber von den Anfangsdaten u_0 und v_0 .

Beweis:

Betrachte die Abschätzung (2.30) aus dem Beweis des Satzes 2.8 zu $k = 0$. Setzt man die Abschätzungen (2.13) ein, ergibt sich die Aussage des Satzes.

□

Ein weiterer Satz sei für späteren Gebrauch angegeben:

Satz 2.11 *Differenzierbarkeit der Lösung in der Zeit bei hinreichend glatten Anfangsdaten und hinreichend glatter Temperaturfunktion*

Es gelte :

$$\begin{aligned} \theta &\in L_2((0, t), W_2^2(\Omega)) \cap C^0([0, t], W_2^1(\Omega)) \\ u_0 &\in H_2^4(\Omega), \quad v_0 \in H_2^2(\Omega); \\ |r_{\varepsilon\varepsilon}(x, y)| &\leq C \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ |r_{\varepsilon\theta}(x, y)| &\leq C \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ |r_{\theta\theta}(x, y)| &\leq C \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Dann gilt für die zugehörige Lösung z des Anfangswertproblems

$$z \in C^1([0, t], Z)$$

also die Differenzierbarkeit der Lösung nach der Zeit in Z .

Beweis:

Es ergibt sich aus Satz 2.7 die Aussage

$$u \in L_2((0, t), H_2^4(\Omega)); \quad v \in L_2((0, t), H_2^3(\Omega))$$

Führt man zu

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k dx$$

die Abkürzung

$$A^s u := \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^s a_k e_k$$

ein, heißt das nichts anderes als

$$A^3 u \in L_2((0, t), H_2^1(\Omega)); \quad A^3 v \in L_2((0, t), H_2^0(\Omega))$$

Daraus folgt nach Lemma A.2, daß $A^3u \in C^0([0; t], H_0(\Omega))$ ist.

Der Ausdruck $A^1v_t = C_1A^1u_{xx} - \gamma A^1u_{xxxx} + \beta A^1v_{xx} + A^1r_x$ liegt in $L_2((0; t), H_2^{-1}(\Omega))$. Aus $v \in L_2((0; t), H_2^3(\Omega))$ folgt $A^1v \in L_2((0; t), H_2^2(\Omega))$. Mit Lemma A.2 ergibt sich daher $A^1v \in C^0([0; t], H_0(\Omega))$.

Setzt man die Stetigkeitsresultate für u und v in die rechte Seite ein, ergibt sich

$$v_t = C_1u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x \in C^0([0; t], H_2^{-1}(\Omega))$$

Zusammen ist damit gezeigt, daß $u_t \in C^0([0; t], H_2^1(\Omega))$ und $v_t \in C^0([0; t], H_2^{-1}(\Omega))$ liegt. Damit ist der Beweis beendet. □

2.7 Die induzierte zweiparametrische Evolution Ψ^{t_1, t_0}

Nachdem Existenz und Eindeutigkeit und darüberhinaus auch stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten gezeigt worden ist, kann zu vorgegebener Temperaturfunktion $\theta \in Y_\theta$ eine *zweiparametrische Evolutionsabbildung* Ψ^{t_1, t_0} auf dem Raum Z bzw. \tilde{Z} definiert werden.

Dabei wird zunächst die von der Temperatur $\theta \in Y_\theta$ als Parameter und $t \geq 0$ abhängige Abbildung ψ_θ^t eingeführt, die einem Anfangswert $z_0 \in Z$ den Wert der zugehörigen Lösung z zum Zeitpunkt t zuordnet

$$\begin{aligned} \psi_\theta^t : \quad Z &\rightarrow Z \\ z_0 &\mapsto \psi_\theta^t z_0 := z(t) = (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

Zu einem beliebig aus \mathbb{R} gewähltem *Startzeitpunkt* t_0 wird die um t_0 *zeitverschobene* Temperaturfunktion $L^{t_0}\theta(t) := \theta(t + t_0)$ eingeführt³. Damit läßt sich für $t_1 \geq t_0$ die zweiparametrische Evolutionsabbildung Ψ^{t_1, t_0} erklären durch

$$\begin{aligned} \Psi^{t_1, t_0} : \quad Z &\rightarrow Z \\ z &\mapsto \Psi^{t_1, t_0} z := \psi_{L^{t_0}\theta}^{t_1 - t_0} z \end{aligned}$$

In diesem Sinne bezeichnet $\Psi^{t_1, t_0} z$ die Lösung zum Zeitpunkt t_1 des Anfangswertproblems (2.2) zu einem vorgegebenem Anfangswert $z(t_0) \in Z$ bei Anfangszeit t_0 ist. Ψ^{t_1, t_0} hat aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen für $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ die Eigenschaft

$$\Psi^{t_2, t_1} \Psi^{t_1, t_0} z = \Psi^{t_2, t_0} z$$

und außerdem gilt

$$\Psi^{t_0, t_0} z = z$$

Aufgrund der stetigen Abhängigkeit der Lösungen der Bewegungsgleichungen von den Anfangswerten bzw. Abschätzung (2.22) ist die Ψ^{t_1, t_0} eine stetige Abbildung von Z in sich. Weiterhin ist Ψ^{t_1, t_0} für $\gamma > 0$ für $t_1 > t_0$ eine kompakte Abbildung.

³An dieser Stelle wird klar, warum der Parameterraum Y_θ Temperaturfunktionen umfaßt, welche für alle Zeiten definiert sind – dadurch ist die Wohldefiniertheit der Verschiebungsabbildung gesichert.

Auch für $\gamma = 0$ kann auf gleiche Weise eine stetige zweiparametrische Evolutionsabbildung $\tilde{\Psi}^{t_1, t_0}$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{t_1, t_0} : \quad \tilde{Z} &\rightarrow \tilde{Z} \\ z &\mapsto \tilde{\Psi}^{t_1, t_0} z \end{aligned}$$

definiert werden, allerdings im Raum

$$\tilde{Z} := H_2^1(\Omega) \times H_2^0(\Omega) \quad \text{mit} \quad \|(u, v)\|_Z := \max\left(\|u\|_{H_2^1}, \|v\|_{L_2}\right)$$

Anmerkung: Die so eingeführten zweiparametrischen Evolutionsabbildungen haben gewisse Ähnlichkeit mit einem sogenannten *Prozeß* oder einem *zweiparametrischen Halbfluß* im Sinne eines nichtautonomen dynamischen Systems, vgl. [KS03a]. Solch ein Prozeß μ auf einem Phasenraum X ist definiert als *stetige* Abbildung

$$\begin{aligned} \mu : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X &\rightarrow X \\ (t, s, x) &\mapsto \mu(t, s, x) \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

$$\mu(t, t, x) = x \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$$

und

$$\mu(t, \tau, \mu(\tau, s, x)) = \mu(t, s, x), \quad s \leq \tau \leq t$$

Die Eigenschaft der *Stetigkeit* in den beiden Zeit-Argumenten t_1 und t_0 ist jedoch bei der Abbildung Ψ^{t_1, t_0} nicht gegeben; nur bei $\tilde{\Psi}^{t_1, t_0}$ ist dies erfüllt.

In vorliegender Arbeit werden diese Eigenschaften aber auch nicht in vollem Umfang benötigt, und deswegen wird dieses Thema nicht weiter vertieft.

2.7.1 Dynamisches System bei zeitperiodischer Temperatur

Im Falle eines *zeitperiodischen Temperaturparameters* θ mit Periode T kann noch etwas mehr gesagt werden. Offenkundig gilt in diesem Fall nämlich wegen $L^T\theta(t) := \theta(t + T) = \theta(t)$ die Gleichheit

$$\Psi^{t_0+T, t_0} = \Psi^{t_0+nT, t_0+(n-1)T}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Damit kann mit der Abkürzung

$$\Psi^T := \Psi^{T, 0}$$

eine stetige Abbildung auf Z bzw. \tilde{Z} und damit ein diskretes dynamisches System auf diesen Räumen eingeführt werden.

In Kapitel 6 wird für $\gamma > 0$ (was die Kompaktheit von Ψ^T garantiert) durch Wahl von passenden zeitperiodischen Temperaturfunktionen die Existenz von Attraktoren dieser Klasse von dynamischen Systemen gezeigt.

Kapitel 3

Existenz und Eindeutigkeit zum vollen Falk-System

Nachdem in vorangegangem Kapitel die Wohlgestellttheit der Bewegungsgleichungen zu *vorgegebener* Temperaturfunktion θ gezeigt worden ist, wenden wir uns in diesem Kapitel dem vollen Falk-System zu:

$$\begin{aligned}v_t &= C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta) \\ \theta_t &= \kappa \theta_{xx} + (\theta + g) \sigma_\theta(u_x, \theta + g) v_x + \beta v_x^2 + g_t - \kappa g_{xx}\end{aligned}$$

Dabei steht g für eine Funktion mit den Eigenschaften

$$g \in C(\Omega \times \mathbb{R}), \quad g_t - \kappa g_{xx} \in L_{2,loc}((0, \infty); L_2(\Omega))$$

die man sich formal aus der Homogenisierung von vorgegebenen Dirichlet-Temperaturranddaten entstanden denken kann.

Es werden Existenz von Lösungen, deren Eindeutigkeit und die stetige Abhängigkeit von Anfangsdaten gezeigt.

Im Falle von $\gamma > 0$ werden Anfangsdaten der Form ¹

$$u_0 \in H_2^2(\Omega), \quad v_0 := u_{t,0} \in H_2^0(\Omega), \quad \theta_0 \in H_2^{-3/4}(\Omega)$$

vorgeschrieben. Für $\gamma = 0$ werden

$$u_0 \in H_2^1, \quad v_0 := u_{t,0} \in H_2^0(\Omega), \quad \theta_0 \in H_2^{-3/4}(\Omega)$$

gefordert. Als Randbedingungen werden zunächst „nur“ die Randbedingungen

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

vorgeschrieben, obwohl die rechten Seiten der beiden Gleichungen typischerweise noch weitere Randbedingungen benötigen, um auf ein sinnvoll gestelltes Problem zu führen. Wird jedoch von Lösungen im unten definierten Lösungssinn gesprochen, so sieht man, daß dieser Lösungsbegriff zu wenig Regularität aufweist, um weitere Randbedingungen zu stellen; zum Beispiel macht es für eine Funktion $\theta \in H_2^0(\Omega)$ keinen Sinn, von Randwerten zu sprechen.

¹Die Forderung $u_0 \in H_2^2(\Omega) \cap H_2^1(\Omega), v_0 \in L_2(\Omega)$ ist nötig, um ausreichende Regularität für v_x auf der rechten Seite der Temperaturgleichung zu bekommen. Vergleiche dazu auch Kapitel 2 das reduzierte Problem ohne Temperaturgleichung, wo Anfangsdaten der Art $u_0 \in H_2^1(\Omega), v_0 \in H_2^{-1}(\Omega)$ ausreichen.

Nichtsdestotrotz kann man dem eindimensionalen Falksystem auch ohne das Stellen der fraglichen Randbedingungen ein unendlichdimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen zuordnen, für welches man in passenden Räumen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen treffen kann.

3.1 Der Lösungsbegriff

Es sei ein beliebiges $0 \leq T < \infty$ vorgegeben. Für $\gamma > 0$ heißen die Funktionen $u(x, t)$ und $\theta(x, t)$ mit $x \in \Omega, t \in [0, T]$ und

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)} &< \infty && \text{überall in } [0, T], \\ \|u_t(t)\|_{H_2^0(\Omega)} &< \infty && \text{überall in } [0, T], \\ \|u_{tt}(t)\|_{H_2^{-2}(\Omega)} &< \infty && \text{fast überall in } [0, T], \\ \|\theta(t)\|_{H_2^{-3/4}(\Omega)} &< \infty && \text{überall in } [0, T], \\ \|\theta_t(t)\|_{H_2^{-7/4}(\Omega)} &< \infty && \text{fast überall in } [0, T] \end{aligned}$$

Lösung des Falksystems

$$\begin{aligned} v_t &= C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta) \\ \theta_t &= \kappa \theta_{xx} + (\theta + g) \sigma_\theta(u_x, \theta + g) v_x + \beta v_x^2 + g_t - \kappa g_{xx} \end{aligned} \quad (3.1)$$

wenn die Zeitableitungen $v = u_t$ und u_{tt} jeweils $H_2^{-2}(\Omega)$ -wertige Distributionsableitungen von u respektive u_t im Sinne von Lemma A.1 sind, wenn θ_t analog in diesem Sinne die $H_2^{-7/4}(\Omega)$ -wertige Distributionsableitungen von θ ist, und wenn schließlich für fast alle $t \in [0, T]$ gilt

$$\|v_t(t) - (C_1 u_{xx}(t) - \gamma u_{xxxx}(t) + \beta v_{xx}(t) + r_x(u_x, \theta)(t))\|_{H_2^{-2}(\Omega)} = 0$$

und für fast alle $t \in [0, T]$

$$\|\theta_t - \kappa \theta_{xx} - (\theta + g) \sigma_\theta(u_x, \theta + g) v_x - \beta v_x^2 - g_t + \kappa g_{xx}\|_{H_2^{-7/4}(\Omega)} = 0$$

Im Falle $\gamma = 0$ ist der Lösungsbegriff entsprechend mit kleinen Änderungen gefaßt; hier ist eine Lösung gekennzeichnet durch

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H_2^1(\Omega)} &< \infty && \text{überall in } [0, T], \\ \|u_t(t)\|_{H_2^0(\Omega)} &< \infty && \text{überall in } [0, T], \\ \|u_{tt}(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)} &< \infty && \text{fast überall in } [0, T] \end{aligned}$$

und gleichen Bedingungen für die Temperatur wie bei $\gamma > 0$. Die Lösungseigenschaft bei der Bewegungsgleichung wird für fast alle T in der $H_2^{-1}(\Omega)$ -Norm gefordert:

$$\|v_t(t) - (C_1 u_{xx}(t) + \beta v_{xx}(t) + r_x(u_x, \theta)(t))\|_{H_2^{-1}(\Omega)} = 0$$

Die Lösungseigenschaft der Temperaturgleichung wird gegenüber $\gamma > 0$ nicht verändert.

Aus der Untersuchung zur Bewegungsgleichung ist bereits bekannt, daß für die Nichtlinearität r_x unter den geforderten Regularitäten für eine Lösung in obigem Sinne gilt $r_x(u_x, \theta)(t) \in H_2^{-1}(\Omega)$.

Es muß jedoch sichergestellt werden, daß auch für die Nichtlinearität auf der rechten Seite der Temperaturgleichung für fast alle $t \in [0, T]$ gilt

$$-(\theta + g)\sigma_\theta(u_x, \theta + g)v_x - \beta v_x^2 - g_t + \kappa g_{xx} \in H_2^{-7/4}(\Omega)$$

Aus dem Existenzbeweis zu den Bewegungsgleichungen liest man ab $v_x(t) \in L_2(Q_T)$. Daraus folgt jedoch $v_x^2(t) \in L_1(\Omega)$ für fast alle $t \in [0, T]$, und außerdem gilt nach den Annahmen zu Energie $|y\sigma_\theta(x, y)| \leq C_5$. Mit den Forderungen an g ergibt sich daraus zunächst

$$-(\theta + g)\sigma_\theta(u_x, \theta + g)v_x - \beta v_x^2 - g_t + \kappa g_{xx} \in L_1(Q_T)$$

Diese Nichtlinearität wird nun punktsymmetrisch zum Ursprung auf das Intervall $[-1; 1]$ fortgesetzt; die Fortsetzung trage den Namen w . Natürlich gilt $w \in L_1([-1; 1] \times [0, T])$.

Bis jetzt ist noch nicht klar, ob sich $w(t)$ in geeigneter Weise als Element aus $H_2^{-7/4}(\Omega)$ interpretieren läßt. Faßt man $w(t)$ jedoch als Element des Distributionenraumes $W_2^{-1}([-1; 1])$ auf, erlaubt dies eine formale Darstellung der Form

$$w \simeq \sum_{k=1}^{\infty} h_{2,k} e_k + \sum_{k=0}^{\infty} q_k \cos(k\pi x)$$

mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{2,k}^2}{(k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^2}{(k\pi)^2} + q_0 < \infty$$

„Anwendung“ der Distribution w auf die Elemente $\cos(k\pi x) \in W_2^1([-1; 1])$ ergibt wegen der Punktsymmetrie von w und $w \in L_1([-1; 1])$ die Null:

$$\int_{[-1; 1]} w \cos(k\pi x) dx = 0$$

Dies bedeutet aber nichts anderes als $q_k = 0$ für alle k ; also, daß w für fast alle $t \in [0, T]$ in $H_2^{-1}(\Omega)$ liegt, und damit auch in $H_2^{-7/4}(\Omega)$. Der Lösungsbegriff macht also Sinn.

3.1.1 Problematik der Randbedingungen

Wie schon bei der Behandlung der Bewegungsgleichungen entsteht das Problem, daß es die Regularität im Lösungsbegriff nicht zuläßt, von ausreichend vielen Randbedingungen zu sprechen. Bei der Temperaturgleichung kann überhaupt keine klassische Randbedingung vorgeschrieben werden, weil nur $\theta \in H_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ gilt.

Dennoch kann aus dem Lösungsbegriff ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen abgeleitet werden, welches unter den gemachten Voraussetzungen eindeutig lösbar ist.

3.1.2 Zugeordnetes System gewöhnlicher Differentialgleichungen

Bei der Bewegungsgleichung ergibt sich wörtlich das gleiche System wie im letzten Kapitel für alle k und fast alle $t \in [0, T]$:

$$\ddot{a}_k + C_1 a_k (k\pi)^2 + \gamma a_k (k\pi)^4 + \beta \dot{a}_k (k\pi)^2 + k\pi h_{1k} = 0 \quad (3.2)$$

Bei der Temperaturgleichung lautet

$$\|\theta_t - \kappa\theta_{xx} - (\theta + g)\sigma_\theta(u_x, \theta + g)v_x - \beta v_x^2 - g_t + \kappa g_{xx}\|_{H_2^{-2}(\Omega)} = 0$$

für fast alle $t \in [0, T]$ ausgeschrieben

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dot{b}_k}{(k\pi)^2} e_k + \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\pi)^2 b_k}{(k\pi)^2} e_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{2,k}}{(k\pi)^2} e_k \right\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

Dies ist gleichbedeutend zu

$$\frac{\dot{b}_k}{(k\pi)^2} + \kappa \frac{(k\pi)^2 b_k}{(k\pi)^2} + \frac{h_{2,k}}{(k\pi)^2} = 0$$

für alle k und für fast alle $t \in [0, T]$. Multiplikation mit $(k\pi)^2$ ergibt äquivalent

$$\dot{b}_k + \kappa(k\pi)^2 b_k + h_{2,k} = 0 \quad (3.3)$$

Zusammen ergibt sich für alle k folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_k + C_1 a_k (k\pi)^2 + \gamma a_k (k\pi)^4 + \beta \dot{a}_k (k\pi)^2 + k\pi h_{1k} &= 0 \\ \dot{b}_k + \kappa (k\pi)^2 b_k + h_{2,k} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2 Der Existenzsatz

Nach der Festlegung des Lösungsbegriffes kann nun der Existenzsatz angegeben werden:

Satz 3.1 *Existenz von Lösungen des Anfangsrandwertproblems.*

Unter der Voraussetzung (1.5) über die Temperaturdatenfunktion g und einer freien Energie mit den Eigenschaften (1.1) hat das Problem (3.4) in $\Omega \times [0, T]$ für beliebiges T , $\beta > 0$ und $\gamma \geq 0$ eine eindeutige Lösung (u, θ) im Sinne des oben festgelegten Lösungsbegriffs zu Anfangsdaten der Art

$$u_0 \in H_2^2(\Omega), \quad v_0 \in H_2^0(\Omega), \quad \theta_0 \in H_2^{-3/4}(\Omega) \quad (3.5)$$

für $\gamma > 0$ und für

$$u_0 \in H_2^1(\Omega), \quad v_0 \in H_2^0(\Omega), \quad \theta_0 \in H_2^{-3/4}(\Omega) \quad (3.6)$$

im Falle $\gamma = 0$.

Die Lösung hängt stetig von den Anfangsdaten ab.

Der Beweis des Existenzresultats dieses Satzes findet sich im nächsten Abschnitt, die Eindeutigkeit im darauf folgenden.

3.3 Beweis des Existenzsatzes

Für den Beweis des Satzes wird ein Operator S konstruiert, welcher in einem passend gewählten Raum W die Voraussetzungen des Schauderschen Fixpunktsatzes erfüllt und demnach mindestens einen Fixpunkt besitzt. Dabei ist S so beschaffen, daß ein Fixpunkt automatisch Lösung des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist.

3.3.1 Entwicklung eines Lösungsausdrucks

Zu jeder Differentialgleichung für die Koeffizienten b_k notiert man nun den passenden Lösungsausdruck mittels Variation der Konstanten. Man schreibt als Lösung des homogenen Systems

$$b_k(t) = e^{-\kappa(2k\pi)^2 t} b_k(0) \quad (3.7)$$

und als formalen Lösungsausdruck für das inhomogene Problem entsprechend

$$b_k(t) = e^{\lambda_{3,k} t} b_k(0) + \int_0^t e^{\lambda_{3,k}(t-\tau)} h_{2,k}(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

Das unendlichdimensionale System der so erhaltenen Lösungsausdrücke 3.8 in integraler Form wird nun dazu benutzt werden, einen Operator zu konstruieren, dessen Fixpunkt(e) automatisch das Anfangsrandwertproblem lösen.

3.3.2 Der Operator S

Es bezeichne W den Raum

$$W = L_2((0, T); H_2^0(\Omega))$$

mit der üblichen Norm.

Dann bezeichne M den von den Parametern u_0 und v_0 abhängigen Operator, welcher einer Temperaturfunktion $\theta \in W$ die Lösung der Bewegungsgleichungen des Falk-Systems zu den Anfangsdaten u_0 und v_0 zuordnet, siehe (2.21) im Kapitel 2.

Mit den Projektionen

$$\begin{aligned} P^I &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x \\ P^{II} &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto y \end{aligned}$$

steht dann $P^{II}M(\theta)$ für die Lösungskomponente v , und $\frac{d}{dx}P^{II}M(\theta)$ für v_x . Aus der Existenztheorie für die Bewegungsgleichungen und anschließenden Sätzen zur Regularität ist bekannt, daß für $\gamma > 0$ gilt

$$\frac{\beta}{2} \left\| \frac{d}{dx} P^{II} M(\theta) \right\|_{L_2(Q_T)}^2 = \frac{\beta}{2} \|v_x\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq \frac{C_2^2 T}{2\beta} + \frac{\gamma}{2} \|u_0\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u_0\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{H_2^0(\Omega)}^2$$

und für $\gamma = 0$ entsprechend

$$\frac{\beta}{2} \left\| \frac{d}{dx} P^{II} M(\theta) \right\|_{L_2(Q_T)}^2 = \frac{\beta}{2} \|v_x\|_{L_2(Q_T)}^2 \leq \frac{C_2^2 T}{2\beta} + \frac{C_1}{2} \|u_0\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{H_2^0(\Omega)}^2$$

Teilt man durch $\frac{\beta}{2}$ und kürzt die entstehende Summe auf der rechten Seite ab mit \tilde{C} , so ergibt sich

$$\left\| \left(\frac{d}{dx} P^{II} M(\theta) \right)^2 \right\|_{L_1(Q_T)} \leq \tilde{C} \quad (3.9)$$

Dabei ist \tilde{C} von θ unabhängig.

Nun wird der Operator S

$$\begin{aligned} S &: W \rightarrow W \\ \theta &\mapsto S(\theta) \end{aligned}$$

ausgehend von 3.8 definiert durch

$$S(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\lambda_{3,k}t} b_k(0) + \int_0^t h_{2,k}(\tau) e^{\lambda_{3,k}(t-\tau)} d\tau \right) \cdot e_k$$

Dabei steht

$$\begin{aligned} h_{2,k}(t) &= \int_{\Omega} (\theta - g) \sigma_{\theta} \left(\left(\frac{d}{dx} P^I M(\theta) \right), \theta - g \right) \left(\frac{d}{dx} P^{II} M(\theta) \right) \\ &\quad + \beta \left(\frac{d}{dx} P^{II} M(\theta) \right)^2 + g_t - \kappa g_{xx} e_k dx \end{aligned}$$

Mit anderen Worten liefert $S(\theta)$ die Lösung Θ

$$\begin{aligned} \Theta_t &= \kappa \Theta_{xx} + (\theta + g) \sigma_{\theta} \left(\left(\frac{d}{dx} P^I M(\theta) \right), \theta + g \right) \left(\frac{d}{dx} P^{II} M(\theta) \right) + \\ &\quad \beta \left(\frac{d}{dx} P^{II} M(\theta) \right)^2 + g_t - g_{xx} \\ \Theta(x, 0) &= \theta_0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Jetzt wird nachgewiesen, daß S wohldefiniert ist, daß also gilt

$$S : W \longrightarrow W$$

Außerdem wird gezeigt, daß S die Bedingungen des Schauderschen Fixpunktsatzes erfüllt.

3.3.3 Abschätzungen zu S und Existenz von Fixpunkten

Für die Terme $h_{2,k}$ gilt nach der Regularität von θ, u_x, v_x und g , daß sie in der Zeit integrierbare Funktionen sind. Es kann jedoch nicht davon ausgegangen werden, daß es stetige Funktionen sind. Aus diesem Grund liefern die Lösungsausdrücke für die Koeffizienten b_k keine klassischen Lösungen, sondern nur Lösungen, welche die jeweilige Differentialgleichung fast überall in der Zeit erfüllen. Dies reicht jedoch für unsere Zwecke aus, da die benötigten Abschätzungen aus dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Integration über die Zeit entstehen.

Multiplikation der einzelnen Differentialgleichungen mit b_k ergibt fast überall in der Zeit

$$\dot{b}_k b_k + \kappa (k\pi)^2 b_k b_k - h_{2,k} b_k = 0 \tag{3.11}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} b_k^2 + \kappa (k\pi b_k)^2 = h_{2,k} b_k \tag{3.12}$$

Damit erfüllt b_k^2 fast überall die Differentialungleichung

$$\frac{d}{dt} (b_k^2) \leq 2 |h_{2,k}| \sqrt{b_k^2}$$

Fast überall in der Zeit gilt nun entweder $b_k = 0$, oder aber – nach Division dieser Gleichung durch $\sqrt{b_k^2}$ und Ausnutzung von

$$\frac{d}{dt}\sqrt{b_k^2} = \frac{1}{2\sqrt{b_k^2}}\frac{d}{dt}b_k^2$$

die Abschätzung

$$\frac{d}{dt}\sqrt{b_k^2} \leq |h_{2,k}|$$

Integration in der Zeit liefert daraus

$$|b_k|(t) \leq \|h_{2,k}\|_{L_1(0,t)} + |b_k|(0)$$

und weiter

$$|b_k(t) - b_k(0)|(t) \leq \|h_{2,k}\|_{L_1(0,t)} + 2|b_k|(0)$$

Dies wird in die zeitintegrierte Version der Gleichung (3.11)

$$\kappa \int_0^t (k\pi b_k)^2 d\tau = \int_0^t h_{2,k} b_k d\tau - \frac{1}{2}b_k^2(t) + b_k^2(0)$$

eingesetzt und liefert unter Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \kappa \int_0^t (k\pi b_k)^2 d\tau &\leq \|h_{2,k}\|_{L_1(0,t)} \left(\|h_{2,k}\|_{L_1(0,t)} + |b_k|(0) \right) + |b_k|^2(0) \\ &= \|h_{2,k}\|_{L_1(0,t)}^2 + \|h_{2,k}\|_{L_1(0,t)} |b_k|(0) + |b_k|^2(0) \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung von Young ergibt sich daraus weiter

$$\kappa \int_0^t (k\pi b_k)^2 d\tau \leq \frac{3}{2} \left(\|h_{2,k}\|_{L_1(0,t)}^2 + |b_k|^2(0) \right)$$

Aus den Abschätzungen über $h_{2,k}$ ist jedoch bekannt, daß es eine von k und θ unabhängige Konstante $C_a = C_a(u_0, v_0, t)$ gibt mit $\|h_{2,k}\|_{L_1(0,t)} \leq C_a$. Deswegen läßt sich weiter notieren

$$\kappa \int_0^t (k\pi b_k)^2 d\tau \leq \frac{3}{2}C_a^2 + \frac{3}{2}b_k^2(0)$$

Multiplikation dieser Abschätzung mit $(k\pi)^{-3/2}$ ermöglicht es demnach, über alle Abschätzungen zu summieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \kappa \int_0^t (k\pi)^{1/2} b_k^2 d\tau \leq C_a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^{3/2}} + \|\theta_0\|_{H_2^{-3/4}(\Omega)}^2$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist aber per definitionem nichts anderes als eine Norm, wie sie in der nächsten Zeile notiert wird:

$$\kappa \|\Theta\|_{L_2((0,t), H_2^{1/4})}^2 \leq C_a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^{3/2}} + \|\theta_0\|_{H_2^{-3/4}(\Omega)}^2 := C_c < \infty$$

Die Konstante C_c ist dabei von den vorgegebenen Anfangswerten und von t abhängig, nicht aber von θ , dem Argument des Operators S .

Bemerkung:

Betrachtet man das lineare Problem

$$\begin{aligned}\Theta_t &= \kappa\Theta_{xx} + f \\ \Theta(x, 0) &= 0\end{aligned}\tag{3.13}$$

zu einer Inhomogenität $f \in L_1(Q_T)$, so ergibt sich – in Analogie zur obigen Überlegung – wegen $C_a = \|f\|_{L_1(Q_T)}$ die Aussage

$$\|\Theta\|_{L_2((0,t),H_2^{1/4})}^2 \leq \frac{\|f\|_{L_1(Q_T)}^2}{\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^{3/2}} := C_d \|f\|_{L_1(Q_T)}^2\tag{3.14}$$

Daraus liest man ab, daß $\Theta \in W$ stetig von f (bezüglich der $L_1(Q_T)$ -Norm) abhängt.

Beschränktheit und Kompaktheit von S

Weil $\|\Theta\|_{H_2^{1/4}(\Omega)} > \|\Theta\|_{H_2^0(\Omega)}$ gilt, folgt daraus

$$\|\Theta\|_{L_2((0,T);H_2^0(\Omega))} = \|S(\theta)\|_{L_2((0,T);H_2^0(\Omega))} \leq \sqrt{C_c} \quad \forall \theta \in W$$

Damit ist eine notwendige Bedingung zur Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes erfüllt. Weiterhin gilt jedoch sogar, daß $H_2^{1/4}(\Omega)$ kompakt in $H_2^0(\Omega)$ liegt, und damit unter Anwendung von Lemma A.3 die Kompaktheit von $L_2((0,T);H_2^{1/4}(\Omega))$ in $L_2((0,T);H_2^0(\Omega))$.

Damit ist eine weitere notwendige Bedingung des Fixpunktsatzes von Schauder erfüllt.

Stetigkeit von S

Es bleibt noch zu zeigen, daß S ein stetiger Operator ist. Dazu betrachtet man zu gleichen Anfangs- und Randdaten zunächst die Lösungen zweier Bewegungsgleichungen zu zwei verschiedenen Temperaturfunktionen θ_1 und θ_2 jeweils aus W . Differenzenbildung der beiden Lösungen, Abschätzungen und das Lemma von Gronwall liefert daraus die Aussage, daß die Differenz (U, V) der jeweiligen Lösungen $M(\theta_1)$ und $M(\theta_2)$ gegen Null geht, wenn nur $\theta_1 \rightarrow \theta_2$ in W . Präziser gilt:

$$\|U_x\|_{L_2(Q_T)} \rightarrow 0; \quad \|V_x\|_{L_2(Q_T)} \rightarrow 0$$

Weiter zeigt man unter Ausnutzung dieser Tatsache, daß die Differenz zweier rechter Seiten der Temperaturgleichung in der $L_1(Q_T)$ -Norm gegen Null geht, wenn nur $\theta_1 \rightarrow \theta_2$, präziser:

$$\begin{aligned}& \left\| (\theta_1 + g)\sigma_\theta \left(\left(\frac{d}{dx} P^I M(\theta_1) \right), \theta_1 + g \right) \left(\frac{d}{dx} P^{II} M(\theta_1) \right) + \beta \left(\frac{d}{dx} P^{II} M(\theta_1) \right)^2 - \right. \\ & \left. (\theta_2 + g)\sigma_\theta \left(\left(\frac{d}{dx} P^I M(\theta_2) \right), \theta_2 + g \right) \left(\frac{d}{dx} P^{II} M(\theta_2) \right) + \beta \left(\frac{d}{dx} P^{II} M(\theta_2) \right)^2 \right\|_{L_1(Q_T)} \\ & \leq C(u_0, v_0) \cdot \left(\|U_x\|_{L_2(Q_T)} + \|V_x\|_{L_2(Q_T)} + \|\theta_1 - \theta_2\|_W \right)\end{aligned}$$

Wie üblich wird dazu die Differenz in drei Teildifferenzen umgeschrieben, die dann unter Verwendung der Annahmen zur freien Energie abgeschätzt werden können.

Schließlich ergibt sich aus der Bemerkung (3.14) – der stetigen Abhängigkeit der Lösung Θ des Problems (3.13) von der rechten Seite bezüglich der $L_1(Q_T)$ -Norm – die Stetigkeit des Operators S .

Der Operator S besitzt demnach in W mindestens einen Fixpunkt. Der Existenzaussage ist damit abgearbeitet.

3.3.4 Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Die wenig reguläre rechte Seite der Temperaturgleichung macht es sehr schwer, Eindeutigkeitsaussagen über die gefundenen Lösungen zu machen. In diesem Abschnitt wird jedoch gezeigt, daß eine zusätzliche Voraussetzung an die freie Energie die Eindeutigkeit der Lösung wie auch die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten garantiert, nämlich die Einschränkung

$$\frac{|r_\theta|^2}{\beta} \leq \frac{\kappa}{2}$$

Diese Bedingung kann zum Beispiel mit einer Schaltfunktion $\phi(\theta)$ erreicht werden, deren erste Ableitung nach θ betragsmäßig hinreichend klein ist. Physikalisch gesprochen darf sich die zugrundeliegende freie Energie nicht zu schnell mit der Temperatur ändern.

Differenz zweier Lösungen

Es bezeichne

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \tilde{u} - \hat{u} \\ \tilde{v} - \hat{v} \\ \tilde{\theta} - \hat{\theta} \end{pmatrix}$$

die Differenz zweier Lösungen des Falk-Systems. Diese Lösung erfüllt mit

$$u = \tilde{u} - \hat{u} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

fast überall in der Zeit das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\ddot{a}_k + C_1 a_k (k\pi)^2 + \gamma a_k (k\pi)^4 + \beta \dot{a}_k (k\pi)^2 - k\pi (\tilde{h}_{1k} - \hat{h}_{1k}) = 0 \quad (3.15)$$

welches aus Subtraktion der jeweiligen Systeme (3.2) entsteht.

Nach üblicher Vorgehensweise (Multiplikation mit \dot{a}_k , Summation über k , Youngsche Ungleichung) ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right) \leq \|r_\varepsilon\|_\infty^2 \|u\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \|r_\theta\|_\infty^2 \|\theta\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \quad (3.16)$$

Auf analoge Weise geht man auch beim System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Temperaturgleichungen vor. Hier ergibt sich mit

$$\theta = \tilde{\theta} - \hat{\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k$$

als Differenzgleichung

$$\dot{b}_k + \kappa(k\pi)^2 b_k - \left(\tilde{h}_{2,k} - \hat{h}_{2,k} \right) = 0 \quad (3.17)$$

Multiplikation der einzelnen Gleichungen mit $b_k/(k\pi)^{3/2}$ und Summation liefern mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \tilde{w} &:= (\tilde{\theta} + g)\sigma_\theta(\tilde{u}_x, \tilde{\theta} + g) \\ \hat{w} &:= (\hat{\theta} + g)\sigma_\theta(\hat{u}_x, \hat{\theta} + g) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left\| A^{-\frac{3}{4}} \theta(t) \right\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \kappa \left\| A^{\frac{1}{4}} \theta(t) \right\|_{H_2^0(\Omega)}^2 = \\ \int_{\Omega} (\tilde{v}_x (\tilde{w} - \hat{w}) + \hat{w} (\tilde{v}_x - \hat{v}_x) + \beta (\hat{v}_x - \tilde{v}_x) (\hat{v}_x + \tilde{v}_x)) A^{-3/2} \theta dx \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet

$$A^s \theta := \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^s b_k e_k$$

Nun wird termweise abgeschätzt:

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\hat{v}_x - \tilde{v}_x) (\hat{v}_x + \tilde{v}_x)) A^{-3/2} \theta dx &\leq \frac{\beta}{4} \|\hat{v}_x - \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega} (\hat{v}_x + \tilde{v}_x)^2 \left(A^{-3/2} \theta \right)^2 dx \\ &\leq \frac{\beta}{4} \|\hat{v}_x - \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \cdot \left\| \left(A^{-\frac{3}{2}} \theta \right) \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{\beta}{4} \|\hat{v}_x - \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \cdot \left\| A^{-\frac{3}{2}} \theta \right\|_{H_2^{3/4}(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{\beta}{4} \|\hat{v}_x - \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \cdot \left\| A^{-\frac{3}{4}} \theta \right\|_{\Omega}^2 \end{aligned}$$

Als nächstes folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \hat{w} (\tilde{v}_x - \hat{v}_x) A^{-\frac{3}{2}} \theta dx &\leq \frac{\beta}{4} \|\hat{v}_x - \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega} \hat{w}^2 \left(A^{-\frac{3}{2}} \theta \right)^2 dx \\ &\leq \frac{\beta}{4} \|\hat{v}_x - \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 \left\| A^{-\frac{3}{4}} \theta \right\|_{\Omega}^2 \end{aligned}$$

Zuguterletzt ergibt sich mit der Lipschitzstetigkeit von w bezüglich seiner beiden Argumente

$$|\tilde{w} - \hat{w}| \leq C_{Lip} (|u_x| + |\theta|)$$

und der Youngschen Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{v}_x (\tilde{w} - \hat{w}) A^{-\frac{3}{2}} \theta dx &\leq \frac{C}{2} \|\tilde{w} - \hat{w}\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2C} \int_{\Omega} \tilde{v}_x^2 \left(A^{-\frac{3}{2}} \theta \right)^2 dx \\ &\leq \frac{C}{2} \|\tilde{w} - \hat{w}\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2C} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \left\| \left(A^{-\frac{3}{2}} \theta \right) \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \\ &\leq C \cdot C_{Lip}^2 \left(\|u_x\|_{\Omega}^2 + \|\theta\|_{\Omega}^2 \right) + \frac{1}{2C} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \left\| A^{-\frac{3}{4}} \theta \right\|_{\Omega}^2 \end{aligned}$$

Die Konstante C aus der Youngschen Ungleichung wird nun gewählt zu $C = \frac{\kappa}{2C_{Lip}^2}$:

$$\int_{\Omega} \tilde{v}_x(\tilde{w} - \hat{w})A^{-\frac{3}{2}}\theta dx \leq \frac{\kappa}{2} \left(\|u_x\|_{\Omega}^2 + \|\theta\|_{\Omega}^2 \right) + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta \right\|_{\Omega}^2$$

Verwendet man die soeben erbrachten Abschätzungen, folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta(t) \right\|_{\Omega}^2 + \kappa \left\| A^{\frac{1}{4}}\theta(t) \right\|_{\Omega}^2 &\leq \frac{\beta}{4} \|\hat{v}_x - \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \cdot \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta \right\|_{\Omega}^2 \\ &+ \frac{\beta}{4} \|\hat{v}_x - \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta \right\|_{\Omega}^2 + \frac{\kappa}{2} \left(\|u_x\|_{\Omega}^2 + \|\theta\|_{\Omega}^2 \right) + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta \right\|_{\Omega}^2 \\ &= \frac{\beta}{2} \|\hat{v}_x - \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \left(\frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \right) \cdot \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta \right\|_{\Omega}^2 + \frac{\kappa}{2} \left\| A^{\frac{1}{4}}\theta \right\|_{\Omega}^2 \end{aligned}$$

Dies wird zur Abschätzung der Bewegungsgleichungen (3.16) addiert und führt somit zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|v(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u_{xx}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{C_1}{2} \|u_x(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta(t) \right\|_{\Omega}^2 \right) &+ \frac{\beta}{2} \|v_x\|_{\Omega}^2 + \kappa \left\| A^{\frac{1}{4}}\theta(t) \right\|_{\Omega}^2 \leq \\ &\frac{1}{2\beta} \|r_{\varepsilon}\|_{\infty}^2 \|u_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2\beta} \|r_{\theta}\|_{\infty}^2 \|\theta\|_{\Omega}^2 + \frac{\beta}{2} \|v_x\|_{\Omega}^2 + \\ &\left(\frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \right) \cdot \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta \right\|_{\Omega}^2 + \frac{\kappa}{2} \left\| A^{\frac{1}{4}}\theta \right\|_{\Omega}^2 \end{aligned}$$

Kürzt man ab

$$N(t) := \left(\frac{1}{2} \|v(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u_{xx}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{C_1}{2} \|u_x(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta(t) \right\|_{\Omega}^2 \right)$$

ergibt sich daraus weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N(t) + \frac{\kappa}{2} \left\| A^{\frac{1}{4}}\theta(t) \right\|_{\Omega}^2 &\leq \frac{1}{2\beta} \|r_{\varepsilon}\|_{\infty}^2 \|u_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2\beta} \|r_{\theta}\|_{\infty}^2 \|\theta\|_{\Omega}^2 + \\ &\left(\frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \right) \cdot \left\| A^{-\frac{3}{4}}\theta \right\|_{\Omega}^2 \leq \\ &\left(\frac{1}{2\beta} \|r_{\varepsilon}\|_{\infty}^2 + \frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \right) \cdot N(t) + \frac{1}{2\beta} \|r_{\theta}\|_{\infty}^2 \|\theta\|_{\Omega}^2 \leq \\ &\left(\frac{1}{2\beta} \|r_{\varepsilon}\|_{\infty}^2 + \frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \right) \cdot N(t) + \frac{1}{2\beta} \|r_{\theta}\|_{\infty}^2 \left\| A^{\frac{1}{4}}\theta(t) \right\|_{\Omega}^2 \end{aligned}$$

An dieser Stelle kommt die Voraussetzung über $\|r_{\theta}\|_{\infty}^2$ ins Spiel: Fordert man

$$\frac{|r_{\theta}|^2}{\beta} \leq \frac{\kappa}{2}$$

so ergibt sich daraus

$$\frac{d}{dt} N(t) + \frac{\kappa}{4} \left\| A^{\frac{1}{4}}\theta(t) \right\|_{\Omega}^2 \leq \left(\frac{1}{2\beta} \|r_{\varepsilon}\|_{\infty}^2 + \frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_{\Omega}^2 \right) \cdot N(t) \quad (3.18)$$

und weiter

$$\frac{d}{dt}N(t) \leq \left(\frac{1}{2\beta} \|r_\varepsilon\|_\infty^2 + \frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_\Omega^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_\Omega^2 \right) \cdot N(t)$$

Der Ausdruck in Klammern wird mit $G(t)$ abgekürzt und ist nach den Abschätzungen zu \tilde{v}_x bzw. \hat{v}_x eine in der Zeit integrable Funktion. Somit kann das Lemma von Gronwall eingesetzt werden und liefert

$$N(t) \leq N(0) \cdot \int_0^t G(s) ds$$

Integriert man (3.18) in der Zeit und setzt $N(t) \leq N(0) \cdot \int_0^t G(s) ds$ ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{4} \left\| A^{\frac{1}{4}} \theta(t) \right\|_{L_2((0,t); L_2(\Omega))}^2 &\leq N(0) + \\ &\int_0^t \left(\frac{1}{2\beta} \|r_\varepsilon\|_\infty^2 + \frac{1}{\beta} \|\hat{v}_x + \tilde{v}_x\|_\Omega^2 + \frac{1}{\beta} \cdot C_5^2 + \frac{C_{Lip}^2}{\kappa} \|\tilde{v}_x\|_\Omega^2 \right) d\tau \cdot N(0) \cdot \int_0^t G(s) ds \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber nichts anderes als die Eindeutigkeit der Lösung, und darüberhinaus auch die stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten, denn falls $N(0)$ gegen Null geht, so auch $\left\| A^{\frac{1}{4}} \theta \right\|_{L_2((0,t); L_2(\Omega))}^2$ und damit auch $\|\theta\|_{L_2((0,t); L_2(\Omega))}^2$.

Damit sind unter den genannten Bedingungen Existenz, Eindeutigkeit von Lösungen und deren stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten gezeigt. □

3.4 Die induzierte zweiparametrische Evolutionsabbildung

Wie auch schon bei den Bewegungsgleichungen läßt sich mit den vorangegangenen Resultaten für t_1, t_0 eine zweiparametrische Evolutionsabbildung Υ^{t_1, t_0} erklären, und zwar im Raum

$$Y := H_2^2(\Omega) \times H_2^0(\Omega) \times H_2^{-3/4}(\Omega)$$

Zunächst wird eine vom Parameter g und der Zeit $t \geq 0$ abhängige Funktion v_g^t für erklärt durch:

$$\begin{aligned} v_g^t : \quad Y &\rightarrow Y \\ y_0 &\mapsto v_g^t y_0 := (u(t), v(t), \theta(t)) \end{aligned}$$

Diese Funktion ordnet einem Anfangswert $y_0 \in Y$ den Wert der zugehörigen Lösung y zum „Temperatur-Randparameter“ g zum Zeitpunkt t zu. Zu einem beliebig aus \mathbb{R} gewähltem *Startzeitpunkt* t_0 wird die um t_0 *zeitverschobene* Temperaturrendfunktion $L^{t_0} g(t) := g(t + t_0)$ eingeführt. Damit läßt sich für $t_1 \geq t_0$ die zweiparametrische Evolutionsabbildung Υ^{t_1, t_0} erklären durch

$$\begin{aligned} \Upsilon^{t_1, t_0} : \quad Y &\rightarrow Y \\ y &\mapsto \Upsilon^{t_1, t_0} y := v_{L^{t_0} g}^{t_1 - t_0} y \end{aligned}$$

In diesem Sinne bezeichnet Υ^{t_1, t_0} die Lösung zum Zeitpunkt t_1 des Anfangswertproblems (2.2) zu einem vorgegebenem Anfangswert $y(t_0) \in Y$ bei Anfangszeit t_0 ist. Υ^{t_1, t_0} hat aufgrund der Eindeutigkeit der Lösungen für $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ die Eigenschaft

$$\Upsilon^{t_2, t_1} \Psi^{t_1, t_0} y = \Psi^{t_2, t_0} y$$

und außerdem gilt

$$\Upsilon^{t_0, t_0} y = y$$

Auch für $\gamma = 0$ kann auf gleiche Weise eine zweiparametrische Evolutionsabbildung $\tilde{\Upsilon}^{t_1, t_0}$ definiert werden, allerdings im Raum

$$\tilde{Y} := H_2^1(\Omega) \times H_2^0(\Omega) \times H_2^{-3/4}(\Omega)$$

Die zugehörige zweiparametrische Evolutionsabbildung wird bezeichnet durch

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}^{t_1, t_0} : \quad \tilde{Y} &\rightarrow \tilde{Y} \\ y &\mapsto \tilde{\Upsilon}^{t_1, t_0} y \end{aligned}$$

3.4.1 Dynamisches System zu periodischen Randdaten

In den letzten Abschnitten wurden Ergebnisse zusammengetragen, die es ermöglichen, für zeitperiodische Temperaturrenddaten mit Periode T ein diskretes dynamisches System zu definieren.

Dazu betrachtet man im Falle $\gamma > 0$ den Phasenraum

$$Y := H_2^2(\Omega) \times H_2^0(\Omega) \times H_2^{-3/4}(\Omega)$$

mit der Norm

$$\|(u, v, \theta)\|_Y := \|u\|_{H_2^2(\Omega)} + \|v\|_{H_2^0(\Omega)} + \|\theta\|_{H_2^{-3/4}(\Omega)}$$

Gibt man zeitperiodische Temperaturrenddaten der Periode T vor, so erhält man konsequenterweise eine zeitperiodische Funktion g . Die Abbildung Υ^T mit

$$\begin{aligned} \Upsilon^T : \quad Y &\longrightarrow Y \\ y = (u_0, v_0, \theta_0) &\mapsto \Upsilon^T(y) := (u(T), v(T), \theta(T)) \end{aligned}$$

wobei $(u(t), v(t), \theta(t))$ die Lösung des Falk-Systems zu den Anfangswerten (u_0, v_0, θ_0) ist, heißt dann die durch das Falk-System induzierte Zeit- T -Abbildung. Für sie gilt wegen der Eindeutigkeit der Lösung

$$(\Upsilon^T)^n = (u(nT), v(nT), \theta(nT)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Außerdem ist sie aufgrund der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten selbst stetig. Damit wird durch Υ^T auf Y ein diskretes dynamisches System induziert.

Im Falle $\gamma = 0$ induziert die Abbildung Ψ^T ein diskretes dynamisches System auf dem Phasenraum

$$\tilde{Y} := H_2^1(\Omega) \times H_2^0(\Omega) \times H_2^{-3/4}(\Omega)$$

mit der Norm

$$\|(u, v, \theta)\|_Y := \|u\|_{H_2^1(\Omega)} + \|v\|_{H_2^0(\Omega)} + \|\theta\|_{H_2^{-3/4}(\Omega)}$$

3.4.2 Bemerkungen

- Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, daß es zu Beginn so aussieht, als würden die gestellten Randbedingungen nicht ausreichen, um die Eindeutigkeit von Lösungen zu gewährleisten.
Jedoch ist es durch den „Umweg“ über die zugeordneten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen und deren eindeutig bestimmter Lösungen in geeignet gewählten Räumen (mit verhältnismäßig schwachen Normen) dennoch möglich, ein passendes dynamisches System zu finden. Die Menge der Lösungen dieses Systems *beinhaltet als Teilmenge* sogar die Lösungen, deren Regularität ausreicht, um von Randwerten für θ , für u_{xx} und für v zu sprechen. Im nächsten Abschnitt wird dies genauer betrachtet.
- Unter etwas höherem technischen Aufwand ist es prinzipiell möglich, die Einschränkung auf periodische Temperaturranddaten aufzugeben – unter Verwendung der Konzepte eines *nichtautonomen dynamischen Systems* mit einer *zweiparametrischen* Evolutionsabbildung, einem sogenannten *Prozeß* auf Y . Dazu wäre es erforderlich, für die bereits eingeführte zweiparametrische Evolutionsabbildung eine Stetigkeitseigenschaft nachzuweisen. In vorliegender Arbeit soll dies jedoch nicht vertieft werden.

3.5 Regularität der Lösungen zu glatteren Anfangsdaten

Man betrachtet eine Lösung des Falk-Systems zu Anfangsdaten der Regularität

$$u_0 \in H_2^3(\Omega), \quad v_0 := u_{t,0} \in H_2^1(\Omega), \quad \theta_0 \in H_2^0(\Omega)$$

für $\gamma > 0$ bzw.

$$u_0 \in H_2^2(\Omega), \quad v_0 := u_{t,0} \in H_2^1(\Omega), \quad \theta_0 \in H_2^0(\Omega)$$

für $\gamma = 0$. Dann gilt folgender Satz:

Satz 3.2 *Im Falle von $\gamma > 0$ erfüllt die zugehörige Lösung überall in der Zeit die Randbedingungen*

$$u(0, t) = u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0$$

und fast überall in der Zeit die Randbedingungen

$$\theta(0, t) = \theta(1, t) = 0$$

Analog gilt im Falle von $\gamma = 0$ überall in der Zeit

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

und fast überall in der Zeit

$$\theta(0, t) = \theta(1, t) = 0$$

Beweis:

Der Beweis wird zunächst für $\gamma > 0$ notiert; durch Weglassen aller Terme mit γ entsteht der entsprechende Beweis für den Fall $\gamma = 0$.

Multiplikation des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen der Bewegungsgleichung je mit $\dot{a}_k(k\pi)^2$ liefert nach Summation über alle k und Anwendung der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H_2^3(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 \right) + \frac{\beta}{2} \|v(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{1}{2\beta} \left(\|r_\varepsilon\|_\infty^2 \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \|r_\theta\|_\infty^2 \|\theta(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

Ganz ähnlich liefert Multiplikation der Bewegungsgleichung mit θ nach partieller Integration

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\theta(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) + \kappa \|\theta(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} ((\theta + g)\sigma_\theta(u_x, \theta + g)v_x + \beta v_x^2 + g_t - \kappa g_{xx}) \theta dx$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird nun summandenweise passend weiterbehandelt. Zunächst gilt

$$\int_0^t ((\theta + g)\sigma_\theta(u_x, \theta + g)v_x) \theta dx \leq \frac{\beta}{4} \|v(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\beta} C_5^2 \|\theta(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\beta v_x^2) \theta dx &\leq \|v_x\|_{L_\infty(\Omega)} \|\beta v_x \theta\|_{L_1(\Omega)} \leq \\ &\frac{\beta}{4} \|v_{xx}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{\beta} \|\beta v_x \theta\|_{L_1(\Omega)}^2 \leq \frac{\beta}{4} \|v(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \|v_x\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\theta(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Und schließlich ergibt sich

$$\int_{\Omega} (g_t - \kappa g_{xx}) \theta dx \leq \frac{1}{2} \|\theta(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|g_t - \kappa g_{xx}\|_{H_2^0(\Omega)}^2$$

Aufaddieren von Bewegungs- und Temperaturgleichung unter Verwendung dieser drei Abschätzungen liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H_2^3(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\theta(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right) + \kappa \|\theta(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{1}{2\beta} \left(\|r_\varepsilon\|_\infty^2 \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \|r_\theta\|_\infty^2 \|\theta(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right) + \left(\frac{1}{\beta} C_5^2 + \|v_x\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \right) \|\theta(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \\ + \frac{1}{2} \|g_t - \kappa g_{xx}\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Abkürzung von

$$N(t) := \left(\frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H_2^3(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\theta(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \right)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N(t) + \kappa \|\theta(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 &\leq \left(\frac{1}{2\beta} \|r_\varepsilon\|_\infty^2 + \frac{1}{\beta} C_5^2 + \|v_x\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \right) N(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \|g_t - \kappa g_{xx}\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{\|r_\theta\|_\infty^2}{2\beta} \|\theta(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung

$$\frac{|r_\theta|^2}{\beta} \leq \kappa$$

folgt daraus weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) + \frac{\kappa}{2}\|\theta(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 &\leq \left(\frac{1}{2\beta}\|r_\varepsilon\|_\infty^2 + \frac{1}{\beta}C_5^2 + \|v_x\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \right) N(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\|g_t - \kappa g_{xx}\|_{H_2^0(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Der Faktor vor $N(t)$ ist eine in der Zeit integrable Funktion, und deshalb kann das Lemma von Gronwall angewendet werden und liefert

$$\begin{aligned} N(t) &\leq N(0) \cdot \exp\left(\int_0^t \frac{1}{2\beta}\|r_\varepsilon\|_\infty^2 + \frac{1}{\beta}C_5^2 + \|v_x\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}d\tau\right) \\ &\quad + \int_0^t \exp\left(\int_s^t \frac{1}{2\beta}\|r_\varepsilon\|_\infty^2 + \frac{1}{\beta}C_5^2 + \|v_x\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}d\tau\right) \frac{1}{2}\|g_t - \kappa g_{xx}\|_{H_2^0(\Omega)}^2(s)ds \\ &\leq N(0) \cdot \exp\left(\frac{1}{2\beta}\|r_\varepsilon\|_\infty^2 t + \frac{1}{\beta}C_5^2 t + \|v_x\|_{L_2((0,t),L_2(\Omega))}^2 + \frac{t}{2}\right) + \\ &\quad \exp\left(\frac{1}{2\beta}\|r_\varepsilon\|_\infty^2 t + \frac{1}{\beta}C_5^2 t + \|v_x\|_{L_2((0,t),L_2(\Omega))}^2 + \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\|g_t - \kappa g_{xx}\|_{L_2((0,t);H_2^0(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Ungleichung (3.19) ein und integriert über die Zeit, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2}\|\theta(t)\|_{L_2(H_2^1(\Omega))}^2 &\leq N(0) + \\ &\quad \|N(t)\|_{L_\infty((0,t))} \cdot \left(\frac{1}{2\beta}\|r_\varepsilon\|_\infty^2 t + \frac{1}{\beta}C_5^2 t + \|v_x\|_{L_2((0,t),L_2(\Omega))}^2 + \frac{t}{2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\|g_t - \kappa g_{xx}\|_{L_2((0,t);H_2^0(\Omega))}^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Da $N(t) < \infty$ ist damit gezeigt, daß für die Lösung gilt

$$\frac{\kappa}{2}\|\theta(t)\|_{L_2(H_2^1(\Omega))}^2 < \infty \quad (3.21)$$

Dies bedeutet, daß fast überall in der Zeit $\theta(x, t)$ als Funktion von x stetig ist; also gilt für fast alle t , daß die Randbedingungen $\theta(0, t) = \theta(1, t) = 0$ erfüllt sind. Da außerdem für alle t gilt

$$u(t) \in H_2^3(\Omega), \quad v(t) \in H_2^1(\Omega)$$

folgt nach klassischen Einbettungssätzen

$$u_{xx}(t) \in C^0(\Omega), \quad v(t) \in C^0(\Omega)$$

und damit werden die Randwerte

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = v(0, t) = v(1, t) = 0$$

angenommen.

□

Kapitel 4

Eigenschaften von Ψ^{t_1, t_0}

Im zweiten Kapitel wurde die Wohlgestelltheit der Bewegungsgleichungen des Falk-Systems, beziehungsweise des zugeordneten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen gezeigt. Ausgehend davon wurde eine auf Z stetige zweiparametrische Evolutionsabbildung Ψ^{t_1, t_0} eingeführt, welche einem Anfangswert $z_0 = (u_0, v_0) \in Z$ zum Anfangszeitpunkt t_0 die Lösung $z(t_1) = (u(t_1), v(t_1)) \in Z$ zum Zeitpunkt $t_1 \geq t_0$ zuordnet.

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß die zweiparametrische Evolutionsabbildung Ψ^{t_1, t_0} als Abbildung von Z bzw. \tilde{Z} in sich nicht nur stetig, sondern sogar stetig *richtungsdifferenzierbar* ist. Ihr Differential $D\Psi^{t_1, t_0}_{z_0}$ am Punkt z_0 angewandt auf eine Störung ξ_0 ist durch die Lösung des zugeordneten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen der *linearisierten Gleichungen* oder *Variationsgleichungen* entlang der Lösung $z(t)$ zum Anfangswert z_0 gegeben:

$$D\Psi^{t_1, t_0}_{z_0} \cdot \xi_0 = D_{z_0} (\Psi^{t_1, t_0}) \cdot \xi_0 \quad \forall \quad \xi_0 \in Y$$

Dazu wird zunächst mittels eines Kontraktionsargumentes die Wohlgestelltheit der linearisierten Bewegungsgleichungen gezeigt. Im nächsten Schritt wird ausgeführt, daß mit den so entstandenen Lösungen tatsächlich die Ableitung von Ψ^{t_1, t_0} festgelegt ist.

Schließlich wird für den Fall $\beta^2 - 4\gamma > 0$, $\gamma > 0$ die Abbildung Ψ^{t_1, t_0} und deren Differential genauer untersucht. Es zeigt sich, daß es zu jedem Anfangswert z_0 und jedem Startzeitpunkt t_0 einen Untervektorraum E_{z_0, t_0} von Z gibt, so daß Anfangswerte $\xi_0 \in E_{z_0, t_0}$ der Variationsgleichungen Lösungen ξ haben, die in der Zeit exponentiell schnell gegen Null gehen.

Desweiteren gibt es einen endlichdimensionalen Untervektorraum \hat{V}_p von Z , so daß Z als direkte Summe von E_{z_0, t_0} und \hat{V}_p geschrieben werden kann. Anfangswerte $\xi_0 \in \hat{V}_p$ haben Lösungen ξ , die in der Zeit höchstens exponentiell schnell ansteigen können. Die Dimension von \hat{V}_p ist von z_0 und t_0 unabhängig.

4.1 Die linearisierten Bewegungsgleichungen

Die *linearisierte Gleichung* oder *Variationsgleichung* zu den Bewegungsgleichungen entlang einer Lösung $z(t) = (u(t), v(t))$ zu einem Anfangswert z_0 zum Startzeitpunkt t_0 lauten

$$\xi_{2t} = C_1 \xi_{1xx} - \gamma \xi_{1xxx} + \beta \xi_{2xx} + (r_\varepsilon(u_x, \theta) \xi_{1x})_x \quad (4.1)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden sämtliche Argumente (x, t) unterdrückt.

Vollkommen analog zum Vorgehen beim Beweis der Wohlgestelltheit wird nun der Lösungsbegriff

für diese Gleichung gefaßt, und weiterhin das zugeordnete System gewöhnlicher Differentialgleichungen aufgestellt. Mit

$$h_{1,k}(t) = \int_{\Omega} r_{\varepsilon}(u_x(t), \theta(t)) \xi_1 \cdot \cos(k\pi x) dx$$

ergibt sich aus der Lösungseigenschaft

$$\|\xi_{2t}(t) - (C_1 \xi_{1xx}(t) - \gamma \xi_{1xxxx}(t) + \beta \xi_{2xx}(t) + (r_{\varepsilon}(u_x, \theta)(t))_x)\|_{H_2^{-3}(\Omega)} = 0$$

die Gleichung

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ddot{a}_k}{(k\pi)^3} + C_1 \frac{a_k(k\pi)^2}{(k\pi)^3} + \gamma \frac{a_k(k\pi)^4}{(k\pi)^3} + \beta \frac{\dot{a}_k(k\pi)^2}{(k\pi)^3} + \frac{k\pi h_{1,k}}{(k\pi)^3} \right) e_k \right\|_{L_2(\Omega)} = 0$$

Dies ist im $L_2(\Omega)$ aber äquivalent zu

$$\frac{\ddot{a}_k}{(k\pi)^3} + C_1 \frac{a_k(k\pi)^2}{(k\pi)^3} + \gamma \frac{a_k(k\pi)^4}{(k\pi)^3} + \beta \frac{\dot{a}_k(k\pi)^2}{(k\pi)^3} + \frac{k\pi h_{1,k}}{(k\pi)^3} = 0$$

für alle k . Multiplikation mit $(k\pi)^3$ und partielle Integration ergibt

$$\ddot{a}_k + C_1 a_k(k\pi)^2 + \gamma a_k(k\pi)^4 + \beta \dot{a}_k(k\pi)^2 + k\pi h_{1,k} = 0 \quad (4.2)$$

Analoges Vorgehen im Falle $\gamma = 0$ führt auf die Gleichungen

$$\ddot{a}_k + C_1 a_k(k\pi)^2 + \beta \dot{a}_k(k\pi)^2 + k\pi h_{1,k} = 0 \quad (4.3)$$

Jede Lösung der Variationsgleichungen in unserem Lösungssinne erfüllt also in ihren Koeffizientenfunktionen a_k das Differentialgleichungssystem 4.2 bzw. 4.3.

Im folgenden bezeichnen Symbole mit der Tilde den Fall $\gamma = 0$, ohne Tilde den Fall $\gamma > 0$. Es gilt folgender Satz:

Satz 4.1 *Lösungen des zugeordneten Systems der linearisierten Bewegungsgleichungen.*

Zu einer als Parameter vorgegebenen Temperaturfunktion $\theta(x, t)$ mit $\theta \in L_2(\Omega)$ für $t \in \mathbb{R}$ sei eine Lösungskurve $z(t) = (u(t), v(t)) \subset Z$ bzw. $z(t) = (u(t), v(t)) \subset \tilde{Z}$ der Bewegungsgleichungen des Falk-Modells zum Anfangswert $z(t_0) = z_0$ zum Startzeitpunkt t_0 gegeben.

Dann existiert zu vorgegebenem $\xi_0 = (\xi_{1,0}, \xi_{2,0}) \in Z$ bzw. $\xi_0 = (\xi_{1,0}, \xi_{2,0}) \in \tilde{Z}$ eine eindeutige Lösung $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ des zugeordneten Systems (4.2) bzw. (4.3) für $t \in [t_0, \infty)$ mit $\xi(t_0) = \xi_0$. Für diese Lösung gilt nach Konstruktion

$$\|\xi(t)\|_Z \leq C \cdot e^{p_a(t-t_0)}$$

mit hinreichend großem $p_a > 0$ und $C > 0$, die nur von Anfangsdaten und den Annahmen zur Energie abhängen.

Außerdem hängt die Lösung ξ stetig von den Anfangswerten ξ_0 ab.

Der Beweis dieses Satzes geht nach dem gleichen Schema vor der Existenzsatz für die Bewegungsgleichungen. Man konstruiert einen Operator S , der für hinreichend großes p im Raum Z_p kontrahiert, und dessen Fixpunkt gerade das Anfangsrandwertproblem löst. Aus diesem Grund wird der Beweis an dieser Stelle nicht mehr wiederholt.

Man definiert nun im Fall $\gamma > 0$ für $t_0 \leq t_1$ die Evolution $D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0}$ der linearisierten Gleichungen analog zur Evolution der ursprünglichen Gleichungen

$$\begin{aligned} D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0} : \quad Z &\rightarrow Z \\ \xi(t_0) &\mapsto \xi(t_1) = D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0} \cdot \xi(t_0) \end{aligned}$$

beziehungsweise für $\gamma = 0$

$$\begin{aligned} D\tilde{\Psi}_{z_0}^{t_1, t_0} : \quad \tilde{Z} &\rightarrow \tilde{Z} \\ \xi(t_0) &\mapsto \xi(t_1) := D\tilde{\Psi}_{z_0}^{t_1, t_0} \cdot \xi(t_0) \end{aligned}$$

Diese Evolutionsabbildungen hängen von den beiden Zeitparametern t_0 und t_1 ab wie auch von der zugrundeliegenden Lösung der ursprünglichen Gleichungen zum Anfangswert z_0 . Letztgenannte Abhängigkeit wird durch den entsprechenden Subskript ausgedrückt.

4.2 Differenzierbarkeit von Ψ^{t_1, t_0}

Nun wird der Zusammenhang zwischen der Evolution der linearisierten Gleichungen und der der ursprünglichen Gleichungen hergestellt:

Satz 4.2 *Differenzierbarkeit von Ψ^{t_1, t_0}*

Die in Kapitel zwei eingeführte zweiparametrische Evolutionsabbildung Ψ^{t_1, t_0} ist eine richtungsdifferenzierbare Abbildung mit Differential

$$\frac{d}{dz_0}(\Psi^{t_1, t_0} z_0) \cdot \xi = D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0} \cdot \xi \quad \forall \xi \in Z$$

Diese Aussage soll nun bewiesen werden. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird dabei $t_0 = 0$ gesetzt; durch Verschiebung in der Zeit entsteht daraus die Aussage des Satzes.

4.2.1 Differenzen zweier Lösungen bei gleicher Temperatur θ

Im folgenden wird für den Fall $\gamma > 0$ die Differenz zweier Lösungen der Bewegungsgleichungen zu *unterschiedlichen Anfangswerten*, aber bei *gleicher* als Parameter vorgegebener Temperaturfunktion θ untersucht.

Man setzt mit zwei Lösungen \hat{z} und \tilde{z} an und bildet deren Differenz

$$z := \hat{z} - \tilde{z} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$$

Die Anfangswerte der beiden Lösungen seien dabei zu einem beliebig gewählten $\psi \in Z$ gegeben durch

$$\hat{z}(0) = \hat{z}_0, \quad \tilde{z}(0) = \hat{z}_0 + \psi$$

Die Differenz der jeweils zugeordneten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (2.4) bzw. (2.5) wird – wie auch schon in früheren Rechnungen – mit $\dot{a}_k / (k\pi)^2$ multipliziert und darauf über alle k summiert. Mit der Youngschen Ungleichung ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \frac{d}{dt} \|u\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \frac{d}{dt} \|u\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2\beta} \|r(\hat{u}_x, \theta) - r(\tilde{u}_x, \theta)\|_{\Omega}^2$$

Nun könnte man unter der Voraussetzung der Lipschitzstetigkeit von r bezüglich seines ersten Arguments eine Abschätzung von Gronwall-Typ aufstellen – hier aber soll im Hinblick auf das weitere Vorgehen die Differenzierbarkeit bezüglich des ersten Arguments verwendet werden. Aufgrund jener ergibt sich

$$r(\hat{u}_x, \theta) - r(\tilde{u}_x, \theta) = r_\varepsilon(\hat{u}_x, \theta) (\tilde{u}_x - \hat{u}_x) + R_1 = r_\varepsilon(\hat{u}_x, \theta) u_x + R_1$$

mit

$$\|R_1(t)\|_\Omega = o(\|\hat{u}_x(t) - \tilde{u}_x(t)\|_\Omega) = o(\|u_x(t)\|_\Omega)$$

Somit ergibt sich mit Youngscher und Hölderscher Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \frac{d}{dt} \|u\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \frac{d}{dt} \|u\|_{H_2^1(\Omega)}^2 &\leq \\ &\frac{1}{\beta} \left(\|r_\varepsilon(\hat{u}_x, \theta) (\tilde{u}_x - \hat{u}_x)\|_\Omega^2 + \|R_1\|_\Omega^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\beta} \|r_\varepsilon(\hat{u}_x, \theta)\|_\infty^2 \|u_x\|_\Omega^2 + \frac{1}{\beta} \|R_1\|_\Omega^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aufgrund der Abklingeigenschaften des Terms R_1 findet man zu einer beliebig vorgegebenen positiven Konstanten L eine Kugel $B_\varepsilon(0)$ mit Radius $\varepsilon(L)$ um die Null in $L_2(\Omega)$ so, daß

$$u_x \in B_\varepsilon(0) \Rightarrow \|R_1\|_\Omega^2 \leq L \|u_x\|_\Omega^2 \quad (4.5)$$

Daraus ergibt sich für Lösungen *innerhalb dieser Kugeln* die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \frac{d}{dt} \|u\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \frac{d}{dt} \|u\|_{H_2^1(\Omega)}^2 &\leq \left(\frac{C_6^2}{\beta} + L \right) \|u\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{C_1} \left(\frac{C_6^2}{\beta} + L \right) \left(\|v\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \|u\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|u\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

Anwendung des Gronwallschen Lemmas ergibt

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \|u(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|u(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 &\leq \\ &\left(\|v_0\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \|u_0\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|u_0\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right) \cdot \exp \left(t \cdot \frac{1}{C_1} \left(\frac{C_6^2}{\beta} + L \right) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Abschätzung gilt nach obigen Ausführungen nur in dem Zeitintervall, für das $u_x(t) \in B_\varepsilon(0)$ gilt. Die Länge dieses Zeitintervalles läßt sich aber für hinreichend klein gewählte Norm $\|\psi\|_Z$ der Anfangsbedingungen beliebig groß machen.

Außerdem liest man aus dieser Ungleichung ab, daß für jede noch so kleine Wahl von ε bei hinreichend klein gewählter Norm $\|\psi\|_Z$ gilt, daß $u_x(t) \in B_\varepsilon(0)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$. Dies bedeutet: Für $\|\psi\|_Z \rightarrow 0$ gilt

$$\|R_1(t)\|_\Omega^2 \leq L \|u_x(t)\|_\Omega^2 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (4.7)$$

für *jedes noch so kleine positive* L . Mit der Ungleichung (4.6) läßt sich jedoch die rechte Seite $\|u_x(t)\|_\Omega^2$ abschätzen durch die Norm $\|\psi\|_Z$ multipliziert mit einer gewissen Konstante, und es ergibt sich mit einer Konstanten C die Aussage

$$\|R_1(t)\|_\Omega \leq C\sqrt{L} \|\psi\|_Z \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (4.8)$$

für jedes noch so kleine positive L . Daraus liest man ab

$$\lim_{\|\psi\|_Z \rightarrow 0} \frac{\|R_1(t)\|_\Omega}{\|\psi\|_Z} = 0 \quad (4.9)$$

bzw. nach Zeitintegration

$$\lim_{\|\psi\|_Z \rightarrow 0} \frac{\|R_1(t)\|_{Q_t}}{\|\psi\|_Z} = 0 \quad (4.10)$$

Aus der Abschätzung (4.6) liest man bereits ab, daß die Evolution $\Psi^{t_1, t_0} z_0$ Lipschitz-stetig von z_0 abhängt. Die Differenzierbarkeit wird im folgenden Absatz gezeigt.

4.2.2 Differenzierbarkeit

Nachdem Existenz und Eindeutigkeit der linearisierten Gleichungen entlang von Lösungen der Bewegungsgleichungen gezeigt wurde, wird in diesem Abschnitt nachgewiesen, daß die Lösung der linearisierten Gleichungen in der Tat die Ableitung der Evolution nach einer gewissen Anfangsrichtung darstellt.

Dazu wird die Lösung ξ der linearisierten Gleichung entlang der Lösung \hat{z} verglichen mit der bereits im letzten Abschnitt untersuchten Differenz zweier Lösungen $z = \hat{z} - \tilde{z}$, wobei auch bei der linearisierten Gleichung der Anfangswert $\xi_0 = \psi$ vorgeschrieben wird. Wenn die Lösung der besagten linearisierten Gleichung mit

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

bezeichnet wird, die Lösung der Differenzgleichung aus vorangegangenem Absatz ihrerseits mit

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

und deren beider Differenz mit

$$\phi = \xi - z = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 - u \\ \xi_2 - v \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

dann erfüllt ϕ das System

$$\phi_{2t} = C_1 \phi_{1xx} - \gamma \phi_{1xxxx} + \beta \phi_{2xx} + (r_\varepsilon(\hat{u}_x, \theta) + g) \phi_{1x} + R_1)_x$$

im Lösungssinne der Bewegungsgleichungen zum Anfangswert

$$\xi_0 - z_0 = \psi - \psi = 0$$

Wieder werden die Koeffizientengleichungen des zugeordneten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen je mit $\dot{a}_k / (k\pi)^2$ multipliziert und darauf über alle k summiert. Es folgt unter Verwendung der Youngschen Ungleichung

$$\|\phi_2\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \|\phi_1\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|\phi_1\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2\beta} \left(\|r_\varepsilon(\hat{u}_x, \theta)\|_\infty^2 \|\phi_{1x}\|_\Omega^2 + \|R_1\|_\Omega^2 \right)$$

Nun sammelt man die entsprechenden Terme zur Anwendung des Gronwallschen Lemmas auf und kommt unter Berücksichtigung der Energieeigenschaften 1.1 zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|\phi_2\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \|\phi_1\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|\phi_1\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right) \leq \\ \frac{C_6^2}{2\beta C_1} \left(\|\phi_2\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \|\phi_1\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|\phi_1\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right) + \|R_1(t)\|_{\Omega}^2 \end{aligned}$$

Daraus liefert das Gronwallsche Lemma die Aussage

$$\left(\|\phi_2\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \|\phi_1\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|\phi_1\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right) (t) \leq \int_0^t \|R_1(s)\|_{\Omega}^2 \exp((t-s)\bar{C}) ds$$

mit

$$\bar{C} := \frac{C_6^2}{2\beta C_1}$$

Weiter ergibt sich mit der Hölderschen Ungleichung

$$\left(\|\phi_2\|_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 + C_1 \|\phi_1\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|\phi_1\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \right) (t) \leq \|R_1\|_{Q_t}^2 \cdot \exp(\bar{C}t)$$

beziehungsweise mit der Ungleichung von Young

$$\frac{\min(1, C_1)}{2} \|\phi(t)\|_Z^2 \leq \|R_1\|_{Q_t}^2 \cdot \exp(\bar{C}t)$$

Wurzelziehen und Division durch $\|\psi\|_Z$ liefert

$$\frac{\min(1, C_1)}{2} \frac{\|\phi(t)\|_Z}{\|\psi\|_Z} \leq \frac{\|R_1\|_{Q_t}}{\|\psi\|_Z} \cdot \exp(\bar{C}t)$$

Mit (4.10) ergibt sich daraus

$$\lim_{\|\psi\|_Z \rightarrow 0} \frac{\|\phi(t)\|_Z}{\|\psi\|_Z} = 0$$

was nach Einsetzen der Definition von $\phi(t)$ bedeutet

$$\lim_{\|\psi\|_Z \rightarrow 0} \frac{\left\| D\Psi_{\hat{z}_0}^{t_1, t_0} \psi - \Psi^{t_1, t_0} \hat{z}_0 + \Psi^{t_1, t_0}(\hat{z}_0 + \psi) \right\|_Z}{\|\psi\|_Z} = 0$$

Dies war zu zeigen.

Im Falle $\gamma = 0$ führt eine leicht veränderte Argumentation zur entsprechenden Aussage, daß auch $\tilde{\Psi}^{t_1, t_0}$ als Abbildung von \tilde{Z} in sich differenzierbar ist.

4.3 Eigenschaften von Ψ^{t_1, t_0} im Fall $\beta^2 - 4\gamma > 0$, $\gamma > 0$

In diesem Fall kann noch mehr über die Lösungen der linearisierten Bewegungsgleichungen ausgesagt werden. Es gilt folgender Satz:

Satz 4.3 *Eigenschaften der Lösungen der linearisierten Bewegungsgleichungen für $\beta^2 - 4\gamma > 0$, $\gamma > 0$.*

Zu einer Temperaturfunktion $\theta \in Y_\theta$ sei eine Lösungskurve $z(t) = (u(t), v(t)) \subset Z$ der Bewegungsgleichungen zum Anfangswert z_0 und der Startzeit t_0 gegeben.

Dann gibt es $p < 0, p_a > 0$ und dazu eine direkte Zerlegung des Raums Z in zwei Untervektorräume \hat{V}_p und $E(z_0, t_0)$, wobei $E(z_0, t_0)$ – wie durch die Notation angedeutet – vom Anfangswert z_0 und der Startzeit t_0 abhängt und \hat{V}_p endliche, von z_0 und t_0 unabhängige Dimension hat

$$\dim(\hat{V}_p) = m_1 < \infty$$

so daß gilt:

$$\begin{aligned} \xi_0 \in \hat{V}_p &\Rightarrow \|\xi(t - t_0)\|_Z \leq C e^{p_a(t-t_0)} \|\xi_0\|_Z \\ \xi_0 \in E(z_0, t_0) &\Rightarrow \|\xi(t - t_0)\|_Z \leq C e^{p(t-t_0)} \|\xi_0\|_Z \end{aligned}$$

Dabei hängt die Konstante C nur von den Vorgaben zur Energie ab.

Der Satz sagt aus, daß nur Anfangswerte aus dem endlichdimensionalen Raum \hat{V}_p Lösungen haben können, die exponentiell wachsen. Lösungen zu Anfangswerten aus $E(z_0, t_0)$ klingen hingegen exponentiell schnell ab.

4.4 Beweis des Satzes 4.3

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird der Beweis für $t_0 = 0$ ausgeführt; die entsprechenden Aussagen für $t_0 \neq 0$ ergeben sich durch Verschiebung in der Zeit.

Wieder wird das zugeordnete System von gewöhnlichen Differentialgleichungen betrachtet:

$$\ddot{a}_k = -\gamma(2k\pi)^4 a_k - \beta \dot{a}_k (2k\pi)^2 + \int_{\Omega} (\sigma_\varepsilon \xi_{1x})_x e_k dx$$

Mit der Abkürzung

$$h_k(t) = \int_{\Omega} ((\sigma_\varepsilon \xi_{1x})_x e_k dx$$

ergibt sich $\forall k \in \mathbb{N}$ kurz:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma(k\pi)^4 & -\beta(k\pi)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h_k \end{pmatrix} (t) \quad (4.12)$$

Dieses Differentialgleichungssystem ist das den Variationsgleichungen (4.1) zugeordnete System gewöhnlicher Differentialgleichungen, und zwar notiert als System erster Ordnung. Die Anfangswerte $\xi_0 = (\xi_{1,0}, \xi_{2,0})$ übertragen sich zu den Anfangsvorgaben

$$a_k(0) = \int_{\Omega} \xi_{1,0} e_k dx, \quad \dot{a}_k(0) = \int_{\Omega} \xi_{2,0} e_k dx, \quad (4.13)$$

Die Menge Λ aller Eigenwerte der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma(k\pi)^4 & -\beta(k\pi)^2 \end{pmatrix}$$

des linearen Teils der jeweiligen rechten Seiten besteht aus der Vereinigung über alle k der Zahlen

$$\lambda_{1,k} = (k\pi)^2 \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}, \quad \lambda_{2,k} = (k\pi)^2 \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

An dieser Stelle gehen die Voraussetzungen über die Parameter β und γ ein: Durch sie wird sichergestellt, daß es nur reell verschiedene Eigenwerte gibt.

Für den späteren Gebrauch werden noch zwei Konstanten eingeführt, nämlich

$$C_{\Lambda_1} = \frac{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}{k^2} = \pi^2 \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}$$

und

$$C_{\Lambda_2} = \left| \frac{\lambda_{2,k}}{k^2} \right| = \pi^2 \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

Die jeweils zugehörigen Eigenvektoren werden mit

$$v_{1,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix}, \quad v_{2,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,k} \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

4.4.1 Definition von V_p und \hat{V}_p

Es werden folgende – vom Parameter p abhängige – Indexmengen eingeführt:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_{1,k} < p\} \\ I_2 &:= \{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_{2,k} < p\} \\ \hat{I}_1 &:= \{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_{1,k} > p\} \\ \hat{I}_2 &:= \{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_{2,k} > p\} \end{aligned}$$

Mit diesen Mengen werden Untervektorräume von Z definiert:

$$\begin{aligned} V_1 &:= \text{lin}(\{v_{1k}e_k \mid k \in I_1\}) \\ V_2 &:= \text{lin}(\{v_{2k}e_k \mid k \in I_2\}) \\ \hat{V}_1 &:= \text{lin}(\{v_{1k}e_k \mid k \in \hat{I}_1\}) \\ \hat{V}_2 &:= \text{lin}(\{v_{2k}e_k \mid k \in \hat{I}_2\}) \end{aligned}$$

Schließlich werden die Räume V_p und \hat{V}_p im Sinne einer direkten Summe zweier Vektorräume definiert durch

$$\begin{aligned} V_p &:= V_1 + V_2 \\ \hat{V}_p &:= \hat{V}_1 + \hat{V}_2 \end{aligned}$$

Die beiden Untervektorräume V_p und \hat{V}_p werden mit der gleichen Norm versehen wie der Raum Z .

Jeder Punkt z aus dem Raum Z läßt sich damit in eindeutiger Weise als Summe $z = z_1 + z_2$ mit $z_1 \in V_p$ und $z_2 \in \hat{V}_p$ schreiben durch

$$z = \underbrace{\left(\sum_{k \in I_1} b_{1,k} v_{1k} e_k + \sum_{k \in I_2} b_{2,k} v_{2k} e_k \right)}_{\in V_p} + \underbrace{\left(\sum_{k \in \hat{I}_1} b_{1,k} v_{1k} e_k + \sum_{k \in \hat{I}_2} b_{2,k} v_{2k} e_k \right)}_{\in \hat{V}_p}$$

4.4.2 Die Projektionen P_{V_p} und $P_{\hat{V}_p}$

Dies legt die Einführung der Projektionen \mathcal{P}_{V_p} und $\mathcal{P}_{\hat{V}_p}$ von Z auf die Unterräume V_p bzw. \hat{V}_p nahe:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{V_p} : \quad Z &\rightarrow V_p \\ z &\mapsto \mathcal{P}_{V_p} z := \sum_{k \in I_1} b_{1,k} v_{1k} e_k + \sum_{k \in I_2} b_{2,k} v_{2k} e_k \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\hat{V}_p} : \quad Z &\rightarrow \hat{V}_p \\ z &\mapsto \mathcal{P}_{\hat{V}_p} z := \sum_{k \in \hat{I}_1} b_{1,k} v_{1k} e_k + \sum_{k \in \hat{I}_2} b_{2,k} v_{2k} e_k \end{aligned}$$

Die Projektionen der Vektoren $\begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} e_k$ auf die Basisvektoren $v_{1,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix} e_k$ bzw. $v_{2,k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,k} \end{pmatrix} e_k$ in den jeweiligen zweidimensionalen Unterräumen von Z sind durch

$$b_{1,k} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix} e_k + b_{2,k} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,k} \end{pmatrix} e_k = \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} e_k \quad (4.14)$$

beschrieben. Daraus ergibt sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$b_{1,k} = \frac{\dot{a}_k - \lambda_{2,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}; \quad b_{2,k} = \frac{-\dot{a}_k + \lambda_{1,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}}$$

Also schreiben sich die Projektionen auf V_p und \hat{V}_p in folgender Weise

$$\begin{aligned} P_{V_p} : \quad Z &\rightarrow V_p \\ z &\mapsto P_{V_p} z := \sum_{k \in I_1} \frac{\dot{a}_k - \lambda_{2,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} v_{1k} e_k + \sum_{k \in I_2} \frac{-\dot{a}_k + \lambda_{1,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} v_{2k} e_k \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_{\hat{V}_p} : \quad Z &\rightarrow \hat{V}_p \\ z &\mapsto P_{\hat{V}_p} z := \sum_{k \in \hat{I}_1} \frac{\dot{a}_k - \lambda_{2,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} v_{1k} e_k + \sum_{k \in \hat{I}_2} \frac{-\dot{a}_k + \lambda_{1,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} v_{2k} e_k \end{aligned}$$

4.4.3 Norm der Projektionen P_{V_p} und $P_{\hat{V}_p}$

Abschätzung Teil 1

Es hat sich demnach als Projektion von (a_k, \dot{a}_k) auf den von $v_{1,k}$ aufgespannten Unterraum

$$b_{1,k} v_{1,k} = \frac{\dot{a}_k - \lambda_{2,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix}$$

ergeben. Es gelten mit der Ungleichung von Young folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} (k\pi)^2 b_{1,k}^2 &= (k\pi)^2 \left(\frac{\dot{a}_k - \lambda_{2,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} \right)^2 \leq \frac{2(k\pi)^2}{(\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k})^2} (\dot{a}_k^2 + \lambda_{2,k}^2 a_k^2) = \frac{2\pi^2}{k^2 C_{\Lambda_1}^2} (\dot{a}_k^2 + C_{\Lambda_2}^2 k^4 a_k^2) \\ &\leq \frac{2\pi^4}{C_{\Lambda_1}^2} \left(\frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + C_{\Lambda_2}^2 (k\pi)^2 a_k^2 \right) \leq \frac{(1 + C_{\Lambda_2}^2) 2\pi^4}{C_{\Lambda_1}^2} \left(\frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + (k\pi)^2 a_k^2 \right) \end{aligned}$$

und damit

$$k^2 b_{1,k}^2 \leq C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}) \left(\frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + (k\pi)^2 a_k^2 \right) \quad (4.15)$$

Desweiteren ergibt sich analog

$$\frac{1}{(k\pi)^2} \lambda_{1,k}^2 b_{1,k}^2 = (k\pi)^2 \left(\frac{\dot{a}_k - \lambda_{2,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} \right)^2 \leq \frac{C_{\Lambda_2}^2 (1 + C_{\Lambda_2}^2)}{C_{\Lambda_1}^2} \left(\frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + (k\pi)^2 a_k^2 \right)$$

Somit ergibt sich für ein $z \in Z$ der Bauart $z = \sum_k \begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix}$ für die Projektion auf den durch alle $v_{1,k} e_k$ aufgespannten Unterraum

$$\sum_k (k\pi)^2 b_{1,k}^2 \leq \frac{(1 + C_{\Lambda_2}^2) 2\pi^4}{C_{\Lambda_1}^2} \sum_k \left(\frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + (k\pi)^2 a_k^2 \right) = \frac{(1 + C_{\Lambda_2}^2) 2\pi^4}{C_{\Lambda_1}^2} \|z\|_Z^2$$

und

$$\sum_k \frac{1}{(k\pi)^2} \lambda_{1,k}^2 b_{1,k}^2 \leq \frac{C_{\Lambda_2}^2 (1 + C_{\Lambda_2}^2)}{C_{\Lambda_1}^2} \sum_k \left(\frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + (k\pi)^2 a_k^2 \right) = \frac{C_{\Lambda_2}^2 (1 + C_{\Lambda_2}^2)}{C_{\Lambda_1}^2} \|z\|_Z^2$$

Insbesondere folgt

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{1,k} v_{1,k} e_k \right\|_Z \leq \left(\frac{(1 + C_{\Lambda_2}^2) 2\pi^4}{C_{\Lambda_1}^2} + \frac{C_{\Lambda_2}^2 (1 + C_{\Lambda_2}^2)}{C_{\Lambda_1}^2} \right)^{1/2} \|z\|_Z$$

Abschätzung Teil 2

Für die Projektion von (a_k, \dot{a}_k) auf den von $v_{2,k}$ aufgespannten Unterraum gilt

$$b_{2,k} v_{2,k} = \frac{-\dot{a}_k + \lambda_{1,k} a_k}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,k} \end{pmatrix}$$

Nach Rechnung ergibt sich eine ähnliche Reihe von Abschätzungen wie oben, nämlich

$$k^2 b_{1,k}^2 \leq C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}) \left(\frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + (k\pi)^2 a_k^2 \right) \quad (4.16)$$

wie auch

$$\frac{1}{(k\pi)^2} \lambda_{2,k}^2 b_{2,k}^2 \leq C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}) \left(\frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} + (k\pi)^2 a_k^2 \right)$$

Insbesondere folgt

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{2,k} v_{2,k} e_k \right\|_Z \leq C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}) \|z\|_Z$$

Konsequenzen

Für die Projektionen

$$\begin{aligned} P_{1*} : \quad Z &\rightarrow V_p \\ z &\mapsto P_{1*}z := \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{1,k} v_{1k} e_k \end{aligned}$$

bzw. für

$$\begin{aligned} P_{2*} : \quad Z &\rightarrow V_p \\ z &\mapsto P_{2*}z := \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{2,k} v_{2k} e_k \end{aligned}$$

wurde durch die Abschätzungen gezeigt

$$\|P_{1*}z\| \leq C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}) \|z\|_Z, \quad \|P_{2*}z\| \leq C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}) \|z\|_Z$$

Wegen

$$\begin{aligned} \|P_{V_p}z\|_Z &= \left\| \sum_{k \in I_1} b_{1,k} v_{1k} e_k + \sum_{k \in I_2} b_{2,k} v_{2k} e_k \right\|_Z \leq \left\| \sum_{k \in I_1} b_{1,k} v_{1k} e_k \right\|_Z + \left\| \sum_{k \in I_2} b_{2,k} v_{2k} e_k \right\|_Z \\ &\leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{1,k} v_{1k} e_k \right\|_Z + \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{2,k} v_{2k} e_k \right\|_Z \leq \|P_{1*}z\| + \|P_{2*}z\| \leq 2C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}) \|z\|_Z \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|P_{\hat{V}_p}z\|_Z &= \left\| \sum_{k \in \hat{I}_1} b_{1,k} v_{1k} e_k + \sum_{k \in \hat{I}_2} b_{2,k} v_{2k} e_k \right\|_Z \leq \left\| \sum_{k \in \hat{I}_1} b_{1,k} v_{1k} e_k \right\|_Z + \left\| \sum_{k \in \hat{I}_2} b_{2,k} v_{2k} e_k \right\|_Z \\ &\leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{1,k} v_{1k} e_k \right\|_Z + \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{2,k} v_{2k} e_k \right\|_Z \leq \|P_{1*}z\| + \|P_{2*}z\| \leq 2C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}) \|z\|_Z \end{aligned}$$

ergibt sich daraus

$$\|P_{V_p}\| \leq C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}), \quad \|P_{\hat{V}_p}\| \leq C(C_{\Lambda_1}, C_{\Lambda_2}) \quad (4.17)$$

Diese Abschätzungen werden an späterer Stelle gebraucht.

Bemerkung

Die jeweiligen Normen der Projektionen sind eigentlich nur in gewissen Unterräumen größer als Eins, es gilt nämlich

$$\begin{aligned} P_{V_p}z &= z && \text{für } z \in \text{lin} \{v_{1k}, v_{2k}\}_{k \in I_1 \cap I_2} \\ P_{V_p}z &= 0 && \text{für } z \in \text{lin} \{v_{1k}, v_{2k}\}_{k \in \hat{I}_1 \cap \hat{I}_2} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} P_{\hat{V}_p} z &= 0 && \text{für } z \in \text{lin} \{v_{1k}, v_{2k}\}_{k \in I_1 \cap I_2} \\ P_{\hat{V}_p} z &= z && \text{für } z \in \text{lin} \{v_{1k}, v_{2k}\}_{k \in \hat{I}_1 \cap \hat{I}_2} \end{aligned}$$

Nur für z aus der „gemischten Zone“ $\text{lin} \{v_{1k}, v_{2k}\}_{k \in \hat{I}_1 \cap \hat{I}_2}$ können eventuell Normen größer als Eins auftreten.

Die vorangegangenen Normabschätzungen gehen auf diesen Punkt nicht ein; die Resultate sind dennoch ausreichend für den weiteren Gebrauch.

4.4.4 Äquivalente Normen in Z

Für spätere Verwendung wird an dieser Stelle noch eine zweite Norm in Z eingeführt:

Wir betrachten neben der ursprünglich eingeführten Norm $\|\cdot\|_Z$ die Norm $\|\cdot\|_z$, die auf der Darstellung eines Elements z in Z in den $b_{1,k}$ und $b_{2,k}$ nach (4.14) beruht.

Es sei definiert

$$\|z\|_z^2 = \sum_k k^2 (b_{1,k}^2 + b_{2,k}^2)$$

Nun betrachtet man

$$(k\pi)^2 a_k^2 = (k\pi)^2 (b_{1,k} + b_{2,k})^2 \leq 2\pi^2 k^2 (b_{1,k}^2 + b_{2,k}^2)$$

wie auch

$$\frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2} = \frac{(b_{1,k}\lambda_{1,k} + b_{2,k}\lambda_{2,k})^2}{(k\pi)^2} \leq \frac{b_{1,k}^2\lambda_{1,k}^2 + b_{2,k}^2\lambda_{2,k}^2}{(k\pi)^2} \leq \frac{2C_{\Lambda_2}^2}{\pi^2} k^2 (b_{1,k}^2 + b_{2,k}^2)$$

Damit gilt

$$\sqrt{\sum_k (k\pi)^2 a_k^2} \leq \sqrt{2\pi^2} \|z\|_z$$

und auch

$$\sqrt{\sum_k \frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2}} \leq \sqrt{\frac{2C_{\Lambda_2}^2}{\pi^2}} \|z\|_z$$

In Summe ergibt sich

$$\|z\|_Z = \sqrt{\sum_k (k\pi)^2 a_k^2} + \sqrt{\sum_k \frac{\dot{a}_k^2}{(k\pi)^2}} \leq \left(\sqrt{2\pi^2} + \sqrt{\frac{2C_{\Lambda_2}^2}{\pi^2}} \right) \|z\|_z = D_1 \|z\|_z$$

Unter Verwendung der Abschätzungen (4.15) und (4.16) zeigt man entsprechend

$$\|z\|_z \leq D_2 \|z\|_Z$$

Damit sind die beiden Normen auf Z äquivalent.

4.4.5 Die Operatoren S und Q

Zunächst läßt sich als Lösungsausdruck der Differentialgleichung (4.12) angeben:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} (t) = e^{A_k t} \begin{pmatrix} a_k(0) \\ \dot{a}_k(0) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ h_k \end{pmatrix} (\tau) d\tau \quad (4.18)$$

mit

$$e^{A_k t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (e^{\lambda_{1,k} t} + e^{\lambda_{2,k} t}) + D_{1,k} (e^{\lambda_{2,k} t} - e^{\lambda_{1,k} t}) & D_{2,k} (e^{\lambda_{1,k} t} - e^{\lambda_{2,k} t}) \\ D_{3,k} (e^{\lambda_{1,k} t} - e^{\lambda_{2,k} t}) & \frac{1}{2} (e^{\lambda_{1,k} t} + e^{\lambda_{2,k} t}) + D_{1,k} (e^{\lambda_{1,k} t} - e^{\lambda_{2,k} t}) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} D_{1,k} &= \frac{-\beta}{2\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{1,k} + \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} \right) \\ D_{2,k} &= \frac{1}{(k\pi)^2 \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}} = \frac{1}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} \\ D_{3,k} &= \frac{-\gamma(k\pi)^2}{\sqrt{\beta^2 - 4\gamma}} = \frac{\lambda_{1,k} \lambda_{2,k}}{\lambda_{1,k} - \lambda_{2,k}} \end{aligned}$$

Führt man $(b_{1k}, b_{2k})^T$ ein durch

$$\begin{pmatrix} v_{1,k} \\ v_{2,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k(0) \\ \dot{a}_k(0) \end{pmatrix}$$

dann ergibt sich aus (4.18) der Ausdruck

$$\begin{pmatrix} a_k \\ \dot{a}_k \end{pmatrix} (t) = e^{\lambda_{1,k} t} b_{1k} v_{1k} + e^{\lambda_{2,k} t} b_{2k} v_{2k} + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ h_k \end{pmatrix} (\tau) d\tau \quad (4.19)$$

Der Ausdruck (4.19) kann zur Definition eines Lösungsoperators S herangezogen werden mit

$$\begin{aligned} S &: Z_p \rightarrow Z_p \\ \xi &= (\xi_1, \xi_2) \mapsto S(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

mit

$$S(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\lambda_{1,k} t} b_{1k} v_{1k} + e^{\lambda_{2,k} t} b_{2k} v_{2k} + \int_0^t e^{A_k(t-\tau)} \begin{pmatrix} 0 \\ h_k \end{pmatrix} (\tau) d\tau \right) \cdot e_k$$

Für S kann – wie bereits in Satz 4.1 angedeutet – gezeigt werden, daß bei hinreichend großem positiven $p \geq p_a$ eine Kontraktion vorliegt, und damit die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung der linearen Gleichung für beliebige Anfangswerte. Die so erhaltene Lösung ist höchstens exponentiell wachsend.

Um die detaillierteren Aussagen des Satzes 4.3 zeigen zu können, ist allerdings die Verwendung eines *modifizierten* Operator Q nötig, der definiert ist durch die Vorschriften

$$Q(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(\xi)$$

mit

$$Q_k(\xi) := Q_{1k}(\xi) + Q_{2k}(\xi)$$

Dabei stehen

$$Q_{1k}(\xi) = \left(e^{\lambda_{1,k}t} b_{1k} v_{1k} + \int_0^t \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(-e^{\lambda_{1,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix} \right) d\tau \right) \cdot e_k \quad \text{für } p > \lambda_{1,k}$$

und

$$Q_{1k}(\xi) = \left(- \int_t^\infty \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(-e^{\lambda_{1,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix} \right) d\tau \right) \cdot e_k \quad \text{für } p < \lambda_{1,k}$$

analog

$$Q_{2k}(\xi) = \left(e^{\lambda_{2,k}t} b_{2k} v_{2k} + \int_0^t \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(e^{\lambda_{2,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,k} \end{pmatrix} \right) d\tau \right) \cdot e_k \quad \text{für } p > \lambda_{2,k}$$

und

$$Q_{2k}(\xi)u = \left(- \int_t^\infty \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(e^{\lambda_{2,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,k} \end{pmatrix} \right) d\tau \right) \cdot e_k \quad \text{für } p < \lambda_{2,k}$$

Es ist ersichtlich, daß für *positive* p der Operator Q gleich dem Operator S ist.

Im folgenden wird gezeigt, daß es auch *negative* p gibt, so daß der Operator Q in Z_p wohldefiniert ist, kontrahiert und damit einen Fixpunkt besitzt. Dieser Fixpunkt ist Lösung der Variationsgleichung zu gewissen Anfangswerten; für $p > 0$ können alle diese Anfangswerte frei vorgegeben werden, für $p < \lambda_{max}$ können nur gewisse Anfangswerte frei gewählt werden, während die restlichen von dieser Wahl abhängen und durch sie bestimmt sind.

Nach folgender Abschätzung von $h_k(\tau)$ wird vor der Wohldefiniertheit von Q zuerst die Kontraktivität gezeigt, weil dort erbrachte Abschätzungen die Grundlage für die Wohldefiniertheit sind.

Die Abschätzung von $h_k(\tau)$

Wegen der Annahmen 1.1 über die freie Energie

$$|\sigma_\varepsilon(u_x, \theta)| \leq C_1 + C_2 \quad \forall (u_x, \theta) \in \mathbb{R}^2$$

folgt für

$$h_{1,k}(t) = \int_\Omega (\sigma_\varepsilon(u_x, \theta) \xi_{1x})_x e_k dx = - \int_\Omega \sigma_\varepsilon(u_x, \theta) \xi_{1x} e_{kx} dx$$

unter der Annahme $\|\xi\|_{Z_p} = 1$ mit der Ungleichung von Hölder

$$|h_k(\tau)| \leq (C_1 + C_2) k e^{p\tau} \tag{4.20}$$

Diese Abschätzung ist von der zugrundeliegenden Lösung z und der vorgegebenen Temperatur θ unabhängig.

4.4.6 Nachweis der Kontraktion von Q

Um zu zeigen, daß der lineare Operator Q für passende p kontrahiert, betrachtet man die Differenz $Q(\hat{\xi}) - Q(\tilde{\xi})$ mit $\|\hat{\xi} - \tilde{\xi}\|_{Z_p} = 1$. Mit der Abkürzung $\xi = \hat{\xi} - \tilde{\xi}$ ergibt sich

$$Q(\hat{\xi}) - Q(\tilde{\xi}) = \tilde{Q}(\xi)$$

wobei der lineare Operator \tilde{Q} bis auf das Fehlen der Summanden mit den Anfangswerten b_{1k} und b_{2k} das gleiche Aussehen wie Q hat.

Es ergeben sich unter der Voraussetzung $p \notin \Lambda$ folgende drei mögliche Fälle mit zugehörigen Abschätzungen:

- Fall $\lambda_{2,k} < \lambda_{1,k} < p$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k(\xi) &= \int_0^t \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(-e^{\lambda_{1,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix} \right) e_k d\tau + \\ &+ \int_0^t \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(e^{\lambda_{2,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,k} \end{pmatrix} \right) e_k d\tau \end{aligned}$$

Einsetzen von (4.20) und Abschätzung (B.1) ergeben in diesem Fall für die erste Komponente

$$\left| P^I \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) \leq \frac{(C_1 + C_2)k e^{pt}}{|\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}|} \left(\frac{1}{p - \lambda_{2,k}} + \frac{1}{p - \lambda_{1,k}} \right)$$

und für die zweite Komponente

$$\left| P^{II} \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) \leq |\lambda_{2,k}| \frac{(C_1 + C_2)k e^{pt}}{|\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}|} \left(\frac{1}{p - \lambda_{2,k}} + \frac{1}{p - \lambda_{1,k}} \right)$$

- Fall $\lambda_{2,k} < p < \lambda_{1,k}$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k(\xi) &= - \int_t^\infty \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(-e^{\lambda_{1,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix} \right) e_k d\tau \\ &+ \int_0^t \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(e^{\lambda_{2,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,k} \end{pmatrix} \right) e_k d\tau \end{aligned}$$

Einsetzen von (4.20) und die Abschätzungen (B.1, B.2) ergeben in diesem Fall für die erste Komponente

$$\left| P^I \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) \leq \frac{(C_1 + C_2)k e^{pt}}{|\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}|} \left(\frac{1}{p - \lambda_{2,k}} + \frac{1}{\lambda_{1,k} - p} \right)$$

und analog für die zweite

$$\left| P^{II} \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) \leq |\lambda_{2,k}| \frac{(C_1 + C_2)k e^{pt}}{|\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}|} \left(\frac{1}{p - \lambda_{2,k}} + \frac{1}{\lambda_{1,k} - p} \right)$$

- Fall $p < \lambda_{2,k} < \lambda_{1,k}$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k(\xi) &= - \int_t^\infty \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(-e^{\lambda_{1,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix} \right) e_k d\tau \\ &- \int_t^\infty \frac{h_k(\tau)}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(e^{\lambda_{2,k}(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{2,k} \end{pmatrix} \right) e_k d\tau \end{aligned}$$

Einsetzen von (4.20) und Abschätzung (B.2) ergeben in diesem Fall für die erste Komponente

$$\left| P^I \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) \leq \frac{(C_1 + C_2) k e^{pt}}{|\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}|} \left(\frac{1}{|\lambda_{2,k} - p|} + \frac{1}{|\lambda_{1,k} - p|} \right)$$

und für die zweite

$$\left| P^{II} \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) \leq |\lambda_{2,k}| \frac{(C_1 + C_2) k e^{pt}}{|\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}|} \left(\frac{1}{|\lambda_{2,k} - p|} + \frac{1}{|\lambda_{1,k} - p|} \right)$$

Aus diesen Abschätzungen ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} k \cdot \left| P^I \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) &\leq \frac{(C_1 + C_2) k^2 e^{pt}}{\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k}} \left(\frac{1}{|\lambda_{2,k} - p|} + \frac{1}{|\lambda_{1,k} - p|} \right) \\ &= (C_1 + C_2) C_{\Lambda_1} e^{pt} \left(\frac{1}{|\lambda_{2,k} - p|} + \frac{1}{|\lambda_{1,k} - p|} \right) \end{aligned}$$

wobei die Konstante C_{Λ_1} wie oben definiert verwendet ist.

Quadrieren und Anwendung der Youngschen Ungleichung liefert

$$k^2 \cdot \left| P^I \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) \leq (2(C_1 + C_2) C_{\Lambda_1})^2 e^{2pt} \left(\frac{1}{(\lambda_{2,k} - p)^2} + \frac{1}{(\lambda_{1,k} - p)^2} \right)$$

Summation über k und Wurzelziehen macht daraus

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \left| P^I \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) \right)^{1/2} &= \|(P^I \tilde{Q}_k(\xi))(t)\|_{H_2^1(\Omega)} \leq \\ &2(C_1 + C_2) C_{\Lambda_1} e^{pt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{2,k} - p)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{1,k} - p)^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Auch für die zweite Komponente kommt man auf eine ähnliche Abschätzung. Es gilt ja $|\lambda_{1,k}| < |\lambda_{2,k}| \leq C_{\Lambda_2} \cdot k^2$, wie man der Darstellung der Eigenwerte entnimmt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \cdot \left| P^{II} \tilde{Q}_k(\xi) \right| (t) \right)^{1/2} &= \|(P^{II} \tilde{Q}_k(\xi))(t)\|_{H_2^{-1}(\Omega)} \leq \\ &2(C_1 + C_2) C_{\Lambda_2} e^{pt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{2,k} - p)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{1,k} - p)^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Addieren der beiden Abschätzungen liefert

$$\|\tilde{Q}_k(\xi)\|_{Z_p} \leq 2(C_1 + C_2) (C_{\Lambda_1} + C_{\Lambda_2}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{2,k} - p)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{1,k} - p)^2} \right)^{1/2}$$

Satz C.1 im Anhang garantiert zu beliebigem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Folge $(p_q)_{q \in \mathbb{N}}$ mit $p < 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = -\infty$, für deren Folgenglieder gilt, daß

$$f(p) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{2,k} - p_n)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{1,k} - p_n)^2} \leq \varepsilon$$

erfüllt ist.

Man wähle nun eine solche Folge zu einem ε , so daß

$$2(C_1 + C_2)(C_{\Lambda_1} + C_{\Lambda_2})\varepsilon^{1/2} \leq \frac{1}{2}$$

erfüllt ist. Damit die Kontraktivität des Operators Q in Z_p garantiert.

Nun muß noch sichergestellt werden, daß Q in Z_p wohldefiniert ist. Dies geschieht im folgenden Absatz:

4.4.7 Wohldefiniertheit von Q

Der Operator Q läßt sich darstellen durch

$$Q(\xi) = \tilde{Q}(\xi) + \xi_*$$

mit

$$\xi_* = \sum_{k \in I_1} \left(e^{\lambda_{1,k} t} b_{1k} v_{1k} e_k \right) + \sum_{k \in I_2} \left(e^{\lambda_{2,k} t} b_{2k} v_{2k} e_k \right)$$

Im Nachweis der Kontraktivität wurde bereits gezeigt, daß für passend gewähltes p gilt

$$\tilde{Q}(\xi) \in Z_p$$

Auch ξ_* liegt jedoch in Z ; aus der Summen-Darstellung ist ersichtlich, daß jeder einzelne Summand in der Zeit exponentiell schneller als e^{pt} abfällt. Damit gilt insbesondere

$$\|\xi_*(t)\|_Z e^{-pt} \leq \|\xi_*(0)\|_Z$$

Damit folgt aber

$$\xi_* \in Z_p$$

Der Operator Q ist also wohldefiniert. Da seine Kontraktivität bereits nachgewiesen wurde, existiert also in Z_p ein eindeutiger Fixpunkt von Q .

4.4.8 Definition von $E(z_0, t_0)$

Die Konstruktion des Operators Q erlaubt es, die Anfangswerte $b_{1,k}$ mit $k \in I_1$ und $b_{2,k}$ mit $k \in I_2$ frei vorzugeben. Dies entspricht der Vorgabe von Anfangswerten im Raum V_p . Zu jeder dieser Wahl gibt es nach Satz 4.3 einen eindeutigen Fixpunkt ξ von Q , und damit auch einen eindeutigen Wert von $\mathcal{P}_{\hat{V}_p} \xi(0)$ in \hat{V}_p . Für negative p gibt es also – abhängig von den frei vorgegebenen Anfangsdaten in V_p – gewisse Anfangswerte aus \hat{V}_p so, daß die Lösungen der Variationsgleichungen in Z_p liegen, also exponentiell in der Zeit abklingen.

Somit ist eine lineare, von der zugrundeliegenden Lösung $z = z(t)$ des reduzierten Falk-Systems und damit des Anfangswerts z_0 und der Anfangszeit t_0 abhängige Abbildung

$$\begin{aligned} W(z_0, t_0) : \quad V_p &\longrightarrow \hat{V}_p \\ v &\mapsto W(z_0, t_0)v := \sum_{k \in \hat{I}_1} b_{1k} v_{1k} e_k + \sum_{k \in \hat{I}_2} b_{2k} v_{2k} e_k \end{aligned}$$

definiert. Damit läßt sich zu jedem Anfangswert $z_0 \in Z$ bei Startzeit t_0 ein Untervektorraum $E(z_0, t_0)$ angeben durch

$$E(z_0, t_0) := \{ \xi \in Z \mid \xi = (W(z_0, t_0)v + v), \quad v \in V_p \}$$

Die Räume \hat{V}_p und $E(z_0, t_0)$ sind nach Konstruktion linear unabhängig, da bereits \hat{V}_p und V_p linear unabhängig sind.

Als Aufspannendensystem für $E(z_0, t_0)$ ergibt sich demnach die Menge der Vektoren

$$\begin{aligned} w_{1k} &:= v_{1k}e_k + W(z_0, t_0)v_{1k}e_k; & k \in I_1 \\ w_{2k} &:= v_{2k}e_k + W(z_0, t_0)v_{2k}e_k; & k \in I_2 \end{aligned}$$

Da v aus V_p frei gewählt war, liest man ab, daß nur Anfangswerte \hat{v} aus \hat{V}_p Lösungen haben können, welche *nicht* in Z_p liegen, also eventuell exponentiell in der Zeit wachsen könnten. Der Raum \hat{V}_p ist jedoch „nur“ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von Z und besteht gerade aus den „glatten“ Richtungen, d.h. wird von den jeweils glattesten Sinusmoden aufgespannt.

Definition der Projektionen auf \hat{V}_p und $E(z_0, t_0)$

Nach der Erkenntnissen des letzten Abschnitts gibt es zu jedem Punkt $z_0 \in Z$ und jeder Startzeit t_0 zwei Untervektorräume \hat{V}_p und $E(z_0, t_0)$, die in direkter Summe ganz Z aufspannen; mit anderen Worten gilt für jedes $\xi \in Z$ in eindeutiger Weise:

$$\xi = \underbrace{\xi_a}_{\in \hat{V}_p} + \underbrace{\xi_b}_{\in E(z_0, t_0)}$$

Damit lassen sich zwei von den Parametern z_0 und t_0 abhängige lineare Projektionen \mathcal{Q}_{z_0, t_0} und \mathcal{W}_{z_0, t_0} einführen mit

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{z_0, t_0} : \quad Z &\rightarrow \hat{V}_p \\ \xi &\mapsto \mathcal{P}_{\hat{V}_p} \xi - W(z_0, t_0)\mathcal{P}_{V_p} \xi \\ \xi = \xi_a + \xi_b &\mapsto \mathcal{Q}_{z_0, t_0} \xi := \xi_a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{z_0, t_0} : \quad Z &\rightarrow E(z_0, t_0) \\ \xi &\mapsto \mathcal{P}_{V_p} \xi + W(z_0, t_0)\mathcal{P}_{\hat{V}_p} \xi \\ \xi = \xi_a + \xi_b &\mapsto \mathcal{W}_{z_0, t_0} \xi := \xi_b \end{aligned}$$

Diese beiden Projektionen lassen sich jeweils als gestörte Versionen der Projektionen P_{V_p} bzw. $P_{\hat{V}_p}$ betrachten.

□

4.4.9 Eigenschaften der Projektionen

Die Norm des erhaltenen Fixpunkts ξ läßt sich abschätzen. Es gilt für ihn

$$\xi = Q(\xi) = \tilde{Q}(\xi) + \xi_*$$

mit den linearen Operatoren Q bzw. \tilde{Q} .
Dabei ist – wie bereits oben definiert –

$$\xi_* = \sum_{k \in I_1} \left(e^{\lambda_1, k t} b_{1k} v_{1k} e_k \right) + \sum_{k \in I_2} \left(e^{\lambda_2, k t} b_{2k} v_{2k} e_k \right)$$

Für die zur üblichen Norm $\|\cdot\|_Z$ äquivalente Norm $\|\xi_*(t)\|_z$ (siehe 4.4.4) gilt offensichtlich

$$\sup_{t \geq 0} e^{pt} \|\xi_*(t)\|_z \leq \|\xi_*(0)\|_z$$

Damit folgt aber weiter

$$\|e^{pt} \xi_*(t)\|_Z \leq D_1 \|\xi_*(0)\|_z$$

und schließlich ergibt sich daraus

$$\|e^{pt} \xi_*(t)\|_Z \leq D_2 D_1 \|\xi_*(0)\|_Z \quad (4.21)$$

und damit

$$\|\xi_*\|_{Z_p} = D_2 D_1 \|\xi_*(0)\|_Z$$

Unter Verwendung der Neumannschen Reihe folgt für den Fixpunkt

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Q}^n \xi_*$$

Daraus folgt, daß die nicht vorgegebenen Anfangswerte im Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{Q}^n \xi_* \right) (0)$$

stecken. Zu jedem beliebig kleinen positiven $\varepsilon < 1$ kann – wie im Existenzsatz gezeigt – der Parameter p so gewählt werden, daß

$$\|\tilde{Q}\| \leq \varepsilon$$

gilt. Damit folgt weiter

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}^n \xi_* \right\|_{Z_p} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \|\xi_*\|_{Z_p}$$

Insbesondere bedeutet dies, daß für den Anteil $W(z_0, t_0) \xi_*(0)$ der Anfangswerte $\xi(0)$, die nicht frei vorgegeben werden können, gilt

$$\|W(z_0, t_0) \xi_*(0)\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \|\xi_*\|_{Z_p}$$

Mit Ungleichung (4.21) folgt daraus

$$\|W(z_0, t_0) \xi_*(0)\|_Z \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} D_2 D_1 \|\xi_*(0)\|_Z$$

Daraus ist ersichtlich, daß es für jedes (beliebig kleine) $K > 0$ ein ε gibt, so daß

$$\|W(z_0, t_0)\xi_*(0)\|_Z \leq K$$

Dieses Resultat impliziert in Kombination mit den Normabschätzungen (4.17), daß für die Norm der Projektionsabbildung $Q_{z,t}$ mit einer Konstante C gilt

$$\|Q_{z,t}\|_{Z_p} \leq C(1 + K)$$

Außerdem liest man noch aus der Darstellung des Fixpunkts mit der Neumannschen Reihe ab, daß bei $\|\xi_*(0)\|_Z = 1$ für die Lösung ξ gilt:

$$\|\xi(t)\|_Z \leq e^{-pt} \frac{1}{1-\varepsilon} D_2 D_1 \|\xi_*(0)\|_Z = e^{-pt} \frac{1}{1-\varepsilon} D_2 D_1 \quad (4.22)$$

4.4.10 Abhängigkeit der Lösung von z_0 und von θ

Für spätere Zwecke ist es noch nötig, die Abhängigkeit der Lösung ξ sowohl von der zugrundegelegten Lösung $z(t)$ und damit dem Anfangswert z_0 zu studieren, als auch die Abhängigkeit von der als Parameter vorgegebenen Temperaturfunktion θ .

Abhängigkeit der Lösung von z_0

Nach Abschätzung 2.22 ist bekannt, daß für zwei Lösungen \tilde{z}, \hat{z} des reduzierten Falk-Systems mit unterschiedlichen Anfangswerten \tilde{z}_0, \hat{z}_0 gilt

$$\|\tilde{z}(t) - \hat{z}(t)\|_Z \leq \exp\left(\frac{2C_6}{\gamma}t\right) \|\tilde{z}_0 - \hat{z}_0\|_Z$$

Man betrachtet nun die Differenz $\tilde{Q}(\xi) - \hat{Q}(\xi)$, wobei Tilde und Dach kennzeichnen, daß einmal die Lösung \tilde{z} , ein andermal die Lösung \hat{z} in den im Operator vorkommenden Termen h_k vorkommt. Mit analoger Rechnung wie beim Nachweis der Kontraktion oben ergibt sich wegen

$$|r_{\varepsilon\varepsilon}(u_x, \theta)| \leq C_7 \quad \forall (u_x, \theta) \in \mathbb{R}^2$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma_{\varepsilon}(\tilde{u}_x, \theta) - \sigma_{\varepsilon}(\hat{u}_x, \theta)) \xi_{1x} e_{kx} dx &\leq \int_{\Omega} C_7 \exp\left(\frac{2C_6}{\gamma}t\right) \|\tilde{z}_0 - \hat{z}_0\|_Z \xi_{1x} e_{kx} dx \\ &\leq C_7 k \exp\left(\frac{2C_6}{\gamma}t + pt\right) \|\xi\|_{Z_p} \|\tilde{z}_0 - \hat{z}_0\|_Z \end{aligned}$$

und daraus weiter die Abschätzung

$$\|\tilde{Q}(\xi) - \hat{Q}(\xi)\|_{Z_p} \leq \|\tilde{z}_0 - \hat{z}_0\|_Z C(C_{\Lambda_1} + C_{\Lambda_2}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{2,k} - (p + \frac{2C_6}{\gamma}))^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{1,k} - (p + \frac{2C_6}{\gamma}))^2} \right)^{1/2}$$

Nach Satz C.3 sind für hinreichend großes q die Folgenglieder $p_q < 0$ derart beschaffen, so daß obige Reihen konvergieren, und somit

$$\|\tilde{Q}(\xi) - \hat{Q}(\xi)\|_{Z_p} \leq \|\tilde{z}_0 - \hat{z}_0\|_Z C(C_{\Lambda_1} + C_{\Lambda_2}) C\left(p, \frac{2C_6}{\gamma}\right)$$

Dies bedeutet, daß der Operator Q lipschitz-stetig von dem Parameter z_0 abhängt. Damit hängt auch der Fixpunkt ξ_1 , also die Lösung der linearisierten Gleichungen, lipschitz-stetig von z_0 ab. Insbesondere folgt daraus auch die lipschitz-stetige Abhängigkeit der nicht vorgegebenen *Anfangswerte*, also von

$$\begin{aligned} (Q_{1k}\xi)(0) & \quad \text{mit} \quad \lambda_{1k} > p \\ (Q_{2k}\xi)(0) & \quad \text{mit} \quad \lambda_{2k} > p \end{aligned}$$

von z_0 . Damit ist die Abbildung $W(z_0, t_0)$ in z_0 lipschitz-stetig, und mit ihr natürlich auch die Projektionen \mathcal{Q}_{z_0, t_0} und \mathcal{W}_{z_0, t_0} .

Abhängigkeit der Lösung vom Parameter θ

Man zeigt auf ähnliche Weise wie bei der Abhängigkeit von den Anfangsdaten auch die stetige Abhängigkeit des Fixpunktes von der als Parameter vorgegebenen Temperaturfunktion θ aus dem Parameterraum Y_θ , dessen Elemente θ definiert sind durch

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|\theta\|_\Omega \leq \infty$$

mit Norm

$$\|\theta\|_{Y_\theta} = \sup_{t \in [0, \infty)} \|\theta(t)\|_\Omega$$

Wieder setzt man die Differenz $\tilde{Q}(\xi) - \hat{Q}(\xi)$, wobei Tilde und Dach kennzeichnen, daß einmal die Temperaturfunktion $\tilde{\theta}$ und ihre zugehörige Lösung \tilde{u}_x , ein andermal die Temperaturfunktion $\hat{\theta}$ und ihre zugehörige Lösung \hat{u}_x in den im Operator auftretenden Termen h_k vorkommt. Mit den Voraussetzungen

$$|r_{\varepsilon\varepsilon}(u_x, \theta)| \leq C_7 \quad \forall (u_x, \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad |r_{\varepsilon\theta}(u_x, \theta)| \leq C_7 \quad \forall (u_x, \theta) \in \mathbb{R}^2$$

ergibt sich daraus mit der Hölderschen Ungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\sigma_\varepsilon(u_x, \tilde{\theta}) - \sigma_\varepsilon(u_x, \hat{\theta}) \right) \xi_{1x} e_{kx} dx & \leq C_7 k \left(\|\tilde{u}_x - \hat{u}_x\|_\Omega + \|\tilde{\theta} - \hat{\theta}\|_\Omega \right) \|\xi_{1x}\|_\Omega \\ & \leq C_7 k \exp(pt) \|\xi\|_{Z_p} \exp(p_*t) \|\tilde{u}_x - \hat{u}_x\|_{Z_{p_*}} + C_7 k \exp(pt) \|\xi\|_{Z_p} \|\tilde{\theta} - \hat{\theta}\|_{Y_\theta} \end{aligned}$$

wobei p_* eine positive Zahl nach Satz (2.4) ist. Es folgt weiter

$$\|\tilde{Q}(\xi) - \hat{Q}(\xi)\|_{Z_p} \leq \|\tilde{\theta} - \hat{\theta}\|_{Y_\theta} C(C_{\Lambda_1} + C_{\Lambda_2}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{2,k} - p - p_*)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{1,k} - p - p_*)^2} \right)^{1/2}$$

Nach Satz C.3 sind für hinreichend großes q die Folgenglieder $p_q < 0$ derart beschaffen, so daß obige Reihen konvergieren. Dies heißt aber, daß der Operator Q lipschitz-stetig von dem Parameter θ abhängt. Damit hängt auch die Lösung ξ lipschitz-stetig von θ ab.

Insbesondere liest man daraus ab, daß bei *zeitverschobenem* Temperaturparameter $\tilde{\theta}(t) := \theta(t + \tau)$ die Lösung lipschitz-stetig von der Verschiebung τ abhängt. Dies bedeutet nichts anderes als lipschitz-stetige Abhängigkeit von Anfangszeitpunkt t_0 . Dies impliziert die lipschitz-stetige Abhängigkeit der Abbildung $W(z_0, t_0)$ und konsequenterweise der Projektionen \mathcal{Q}_{z_0, t_0} und \mathcal{W}_{z_0, t_0} von t_0 .

4.4.11 Lipschitzstetigkeit von \mathcal{Q}_{z_0, t_0} und \mathcal{W}_{z_0, t_0} bezüglich z_0 und t_0

Die Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte werden in folgendem Satz zusammengefaßt:

Satz 4.4 *Lipschitzstetigkeit der Projektionen*

Die Projektionsabbildungen \mathcal{Q}_{z_0, t_0} und \mathcal{W}_{z_0, t_0} sind bezüglich z_0 und t_0 lipschitz-stetig.

Diese Erkenntnis wird zur Konstruktion sogenannter Fasern und Schichten von Z als Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen im nächsten Kapitel wichtig. Dort folgt daraus die Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite einer gewöhnlichen Differentialgleichung, und damit die Existenz und Eindeutigkeit zugehöriger Lösungen.

Aus ähnlichen Gründen ist die Feststellung auch zur Reduktion des Systems auf ein gewisses endlichdimensionales Differentialgleichungssystem nötig.

Kapitel 5

Konstruktion einer „inertialen Mannigfaltigkeit“

In diesem Kapitel wird für den Fall $\beta^2 - 4\gamma > 0$ und $\gamma > 0$ eine Art von inertialer Mannigfaltigkeit für das System der Bewegungsgleichungen konstruiert, also eine „endlichdimensionale“ Menge aus $Z \times \mathbb{R}$, welche alle Lösungen des Systems exponentiell schnell anzieht.

Während der Begriff einer inertialen Mannigfaltigkeit in der Literatur festgelegt ist als eine *positiv invariante, exponentiell anziehende endlichdimensionale Lipschitz-Mannigfaltigkeit* (vgl. [KS02, KS03b, KS03a]), wird in vorliegender Arbeit die Forderung nach der Lipschitzstetigkeit fallengelassen. Auch ohne diese Eigenschaft ist die konstruierte Menge sehr nützlich, wenn es um die Reduktion des Systems geht.

Gegenüber der Konstruktion von inertialen Mannigfaltigkeiten nach dem Prinzip der erwähnten Zeitschriftenartikel fällt bei der in vorliegender Arbeit benutzten Methode ein endlichdimensionales, nichtautonomes System gewöhnlicher Differentialgleichungen auf einem Untervektorraum $\hat{V}_{p,mod}$ von Z ab, welches bemerkenswerte Eigenschaften hat: Zum einen liegt $\hat{V}_{p,mod}$ „sehr nahe“ an jedem Zeitschnitt der inertialen Mannigfaltigkeit, zum anderen entfernt sich jede Lösung dieses Hilfssystems auf $\hat{V}_{p,mod}$ von der entsprechenden Lösung des ursprünglichen Systems in Z nicht weiter als eine Konstante bezüglich der Norm in Z . Sowohl diese Konstante als auch die Nähe von $\hat{V}_{p,mod}$ zur inertialen Mannigfaltigkeit lassen sich über geeignete Wahl des Parameters p beliebig klein machen.

All dies macht das Hilfssystem zu einer passablen Wahl für ein endlichdimensionales System, welches die Dynamik des ursprünglichen Systems *gleichmäßig gut global in der Zeit* approximiert.

Als Annahme über die freie Energie – beziehungsweise deren Anteil r – wird zu den schon bestehenden Annahmen (1.1) zusätzlich die Beschränktheit der zweiten Ableitungen gefordert:

$$\begin{aligned} |r_{\varepsilon\varepsilon}(u_x, \theta)| &\leq C_7 \quad \forall (u_x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \\ |r_{\varepsilon\theta}(u_x, \theta)| &\leq C_7 \quad \forall (u_x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Darüberhinaus wird als Parameter eine Temperaturfunktion θ vorausgesetzt, die

$$\begin{aligned} \theta &\in C^0(\mathbb{R}, L_2(\Omega)) \\ \theta &\in L_\infty(\mathbb{R}, W_2^2(\Omega)) \end{aligned}$$

erfüllt.

Zunächst werden mit den Resultaten des letzten Kapitels gewisse Teilmengen des Raumes Z , sog. *Schichten*, definiert. Anfangswerte z_0 des ursprünglichen Systems, welche in der gleichen Schicht liegen, haben Lösungen, die sich in der Zeit exponentiell schnell annähern.

Darüberhinaus wird ausgeführt, daß sich die Menge der Schichten durch den endlichdimensionalen Raum \hat{V}_p parametrisieren läßt – es gibt eine Bijektion zwischen den beiden Mengen.

Als nächstes werden diese Resultate auf einen leicht gestörten endlichdimensionalen Raum $\hat{V}_{p,mod}$ übertragen, der dem Problem besser als \hat{V}_p angepaßt ist.

Unter Ausnutzung dieser Sachverhalte wird darauf auf geeignete Weise auf $\hat{V}_{p,mod}$ ein endlichdimensionales nichtautonomes dynamisches System definiert und die dazugehörige invertierbare zweiparametrische Evolutionsabbildung $\Psi_p^{t_1, t_0}$ eingeführt, die einem Anfangswert z_0 zu einer Startzeit t_0 eine eindeutige, für alle Zeiten in \mathbb{R} existierende Lösung z_p zuordnet. Es wird weiter gezeigt, daß sich die Lösung $z_p(t)$ dieses approximierenden Systems nicht weiter als eine feste Schranke von den exakten Lösungen $z(t)$ zum gleichen Anfangswerten in \hat{V}_p entfernen, und diese Schranke kann durch hinreichende Vergrößerung der Dimension von \hat{V}_p , also passender Wahl von p , beliebig klein gemacht werden.

Dies ausnutzend wird zu jeder Lösung z_p des endlichdimensionalen Systems ein *Schattenorbit*, also eine Lösung des Systems der Bewegungsgleichungen konstruiert, die für alle Zeiten in \mathbb{R} existiert und zu jedem Zeitpunkt nicht weiter als eine gewisse Schranke von z_p entfernt ist.

Die Menge aller dieser Schattenorbit-Lösungen stellen schließlich in gewissem Sinne eine *inertiale Mannigfaltigkeit* des Systems dar, denn es wird weitergehend gezeigt, daß sie alle anderen Lösungen z der Bewegungsgleichungen exponentiell schnell attrahiert.

Zuguterletzt wird aus der Schichtung noch gefolgert, daß alle m -dimensionalen Volumenelemente für hinreichend großes m im Verlauf der Dynamik verschwinden, d.h. ihr Volumen gegen Null geht.

5.1 Schichtung von Z für $\beta^2 - 4\gamma > 0$, $\gamma > 0$

Die Erkenntnisse des letzten Kapitels lassen zu jedem Zeitpunkt t in \mathbb{R} eine Einteilung des Raums Z in gewisse Mengen zu. Die Idee besteht darin, durch die exponentiell fallenden Anfangsrichtungen der linearisierten Gleichungen, die durch die Räume $E(z, t)$ gegeben sind, zu festgehaltenem t sogenannte *Fasern*, gewisse Kurven im Raum Z , zu definieren, vgl. dazu Abbildung 5.1. Anfangswerte auf gleichen Fasern haben nach den Resultaten des letzten Kapitels dann Lösungen, die sich in der Zeit exponentiell schnell annähern.

Konsequenterweise werden die Mengen aller Punkte, welche in Z auf gleichen Fasern liegen, die sogenannten *Schichten*, definiert.

Anschaulich gesprochen ist eine Schicht eine glatte Fläche im Raum Z , deren Tangenten-Hyperfläche in einem Punkt z gerade der affine Raum $z + E(z, t)$ ist; vgl. dazu auch Abbildung 5.1.

5.1.1 Bestimmendes DGL-System der Fasern

Man wählt zu gegebenem p und zu fester Startzeit t einen Vektor $\xi_a \in V_p$ aus, und wählt weiter einen Punkt $z \in Z$. Dann wird das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} g_{\xi_a, z, t}(\tau) &= \xi_a + W(t, g_{\xi_a, z, t}(\tau)) \xi_a \\ g_{\xi_a, z, t}(0) &= z \end{aligned} \quad (5.1)$$

betrachtet, das sich durch Projektion auf die Räume V_p und \hat{V}_p äquivalent auch als

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{V_p} \frac{d}{d\tau} g_{\xi_a, z, t}(\tau) &= \xi_a \\ \mathcal{P}_{\hat{V}_p} \frac{d}{d\tau} g_{\xi_a, z, t}(\tau) &= W(t, g_{\xi_a, z, t}(\tau)) \xi_a \\ g_{\xi_a, z, t}(0) &= z \end{aligned}$$

schreiben läßt.

Durch dieses Anfangswertproblem wird für $\tau \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösungskurve $g_{\xi_a, z, t}(\tau)$ festgelegt. Für $g_{\xi_a, z, t}(\tau)$ gilt

$$\mathcal{P}_{V_p} g_{\xi_a, z, t}(\tau) = \mathcal{P}_{V_p} z + \tau \xi_a$$

Dies setzt man in die zweite Differentialgleichung ein, und erhält somit ein endlichdimensionales Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\hat{V}_p} \frac{d}{d\tau} g_{\xi_a, z, t}(\tau) &= W(t, g_{\xi_a, z, t}(\tau)) \xi_a \\ \mathcal{P}_{\hat{V}_p} g_{\xi_a, z, t}(0) &= \mathcal{P}_{\hat{V}_p} z \end{aligned}$$

Nach dem Ergebnis aus dem letzten Kapitel über die lipschitz-stetige Abhängigkeit von $W(t, z)$ von z ist die rechte Seite dieser Differentialgleichung global in z lipschitz-stetig, siehe Satz 4.4. Damit liefert der Satz von Picard-Lindelöf Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (5.1), die in von Rand zu Rand läuft. Diese Kurve wird als *Faser durch z zur Zeit t* bezeichnet.

Eine *Schicht* zur Zeit t , die Menge aller Fasern durch einen Punkt $z \in Z$ zum Zeitpunkt t , wird mit $S_{z, t}$ bezeichnet:

$$S_{z, t} := \left\{ z \in Z \mid z \in \bigcup_{\xi_a \in V_p} g_{\xi_a, z, t} \right\}$$

Durch die Schichtung des Phasenraums Z wird für jedes t eine Äquivalenzrelation in Z induziert, es gilt nämlich für $a, b, c \in Z$

$$\begin{aligned} a &\in S_{a, t} \\ a \in S_{b, t} &\Rightarrow b \in S_{a, t} \\ a \in S_{b, t}, b \in S_{c, t} &\Rightarrow a \in S_{c, t} \end{aligned}$$

Die Menge aller Schichten zum Zeitpunkt t wird mit \mathcal{S}_t abgekürzt:

$$\mathcal{S}_t := \{S_{z, t} \mid z \in Z\}$$

Damit kann $S(z, t)$ auch als Abbildung von Z nach \mathcal{S}_t aufgefaßt werden.

5.1.2 Die Länge von Faserabschnitten

Mit der Abkürzung

$$\xi_a := \mathcal{P}_{V_p}(b - a)$$

läßt sich ein durch $\tau \in [0, 1]$ parametrisierter Faserabschnitt $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\tau)$ zwischen zwei Punkten a, b auf einer Faser schreiben als

$$\mathcal{F}(\tau) = \int_0^\tau \xi_a + W(t, g_{\xi_a, z, t}(s)) \xi_a ds$$

Dementsprechend läßt sich die Differenz zweier Punkte a, b auf einer Faser in Z mit

$$\xi_a := \mathcal{P}_{V_p}(b - a)$$

ausdrücken durch

$$b - a = \int_0^1 \xi_a + W(t, g_{\xi_a, z, t}(\tau)) \xi_a d\tau$$

Auf kanonische Weise läßt sich die Länge \mathcal{L} eines Faserabschnittes zwischen den zwei Punkten auf einer Faser definieren als

$$\mathcal{L}(a, b) = \int_0^1 \|\xi_a + W(t, g_{\xi_a, z, t}(\tau)) \xi_a\|_Z d\tau$$

Zum einen gilt dann

$$\mathcal{L}(a, b) \leq (1 + \varepsilon) \|\xi_a\|_Z$$

zum anderen auch

$$\|\xi_a\|_Z \leq \mathcal{L}(a, b)$$

Für das Bild des Faserabschnittes unter der Evolution $\Psi^{T, t}$ gilt dann

$$\Psi^{T, t} \mathcal{F}(\tau) = \int_0^\tau D\Psi_{\mathcal{F}(\tau)}^{T, t} (\xi_a + W(t, g_{\xi_a, z, t}(s)) \xi_a) ds$$

Da das Argument $\xi_a + W(t, g_{\xi_a, z, t}(s)) \xi_a$ jedoch nach Konstruktion in $E(\mathcal{F}(\tau), t)$ liegt, folgt für die Differenz der Bilder der Endpunkte des Faserstücks die Abschätzung

$$\|\Psi^{T, t} a - \Psi^{T, t} b\|_Z \leq \mathcal{L}(a, b) \cdot K e^{T-t}$$

Also nähern sich Punkte auf gleichen Fasern exponentiell schnell an.

5.1.3 Parametrisierung von \mathcal{S}_t

Nachdem bekannt ist, daß jeder Punkt aus Z auf genau einer Schicht liegt, wird eine handliche Parametrisierung der Menge der Schichten gesucht.

Satz 5.1 *Schnitt der Schichten mit \hat{V}_p .*

Zu jedem Zeitpunkt t hat jede Schicht mit \hat{V}_p genau einen Punkt gemeinsam. Es gibt also eine Bijektion zwischen \hat{V}_p und \mathcal{S}_t .

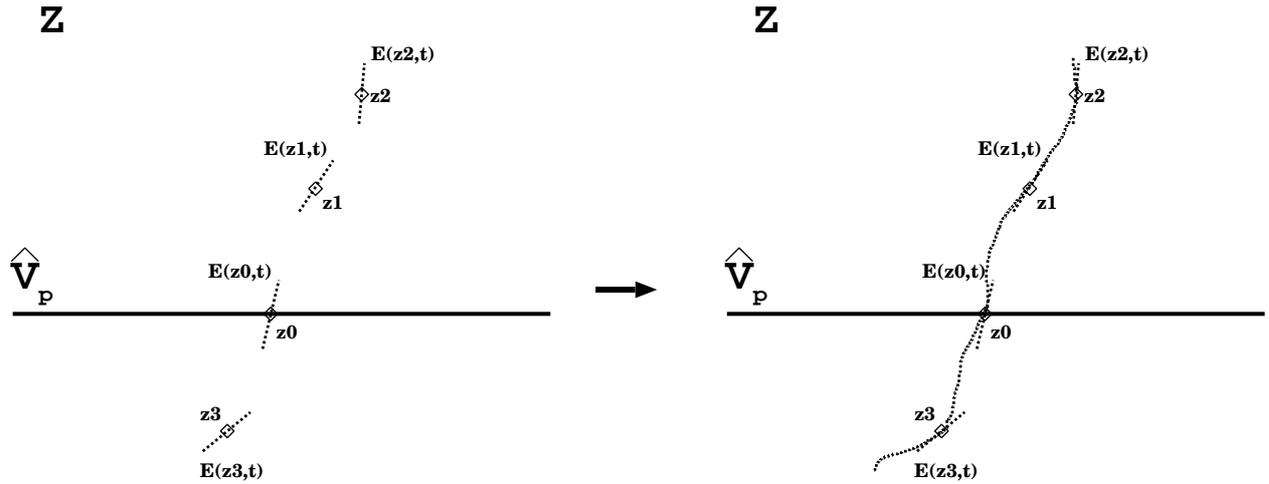


Abbildung 5.1: Interpretation der Fasern zum Zeitpunkt t als Lösung einer Differentialgleichung bzw. als Kurve, deren Tangente an einem Punkt z zur Zeit t im Raum $E(z, t)$ liegt.

Beweis:

Sei $z \in \hat{V}_p$. Betrachte nun zu festem t zu beliebigem $\xi_a \in V_p$ die Faser $g_{\xi_a, z, t}$. Diese hat wegen

$$P_{V_p} g_{\xi_a, z, t}(\tau) = \tau \xi_a$$

nur den Punkt z mit \hat{V}_p gemeinsam. Die Charakterisierung der Schicht $S(z, t)$ als Vereinigungsmenge über alle Fasern liefert dann das Ergebnis.

□

Damit ist gezeigt, daß es für jedes t eine Bijektion \hat{P}_t zwischen \hat{V}_p und \mathcal{S}_t gibt, die einer Schicht aus \mathcal{S}_t ihren Durchstoßpunkt durch \hat{V}_p zuordnet

$$\hat{P}_t : \mathcal{S}_t \longrightarrow \hat{V}_p$$

Die Menge der Schichten kann somit durch den endlichdimensionalen Vektorraum \hat{V}_p parametrisiert werden.

5.2 Modifikation des Raumes \hat{V}_p zu $\hat{V}_{p,mod}$

Es wurde gezeigt, daß für jedes $z \in Z$ und jede Startzeit $t \in \mathbb{R}$ ein Untervektorraum $E(z, t)$ existiert, der zu dem Untervektorraum \hat{V}_p linear unabhängig ist, so daß beide Räume zusammen ganz Z aufspannen. Dabei wird \hat{V}_p wie beschrieben durch die Eigenvektoren der Matrizen A_k aufgespannt, deren zugehörige Eigenwerte vom Betrag des Realteiles her größer sind als das gewählte p .

Zur Konstruktion einer inertialen Mannigfaltigkeit ist es jedoch von großer Bedeutung, mit einem *modifizierten* Unterraum $\hat{V}_{p,mod}$ zu arbeiten, der durch die entsprechenden Eigen- bzw. Hauptvektoren der modifizierten Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma(k\pi)^4 - C_1(k\pi)^2 & -\beta(k\pi)^2 \end{pmatrix}$$

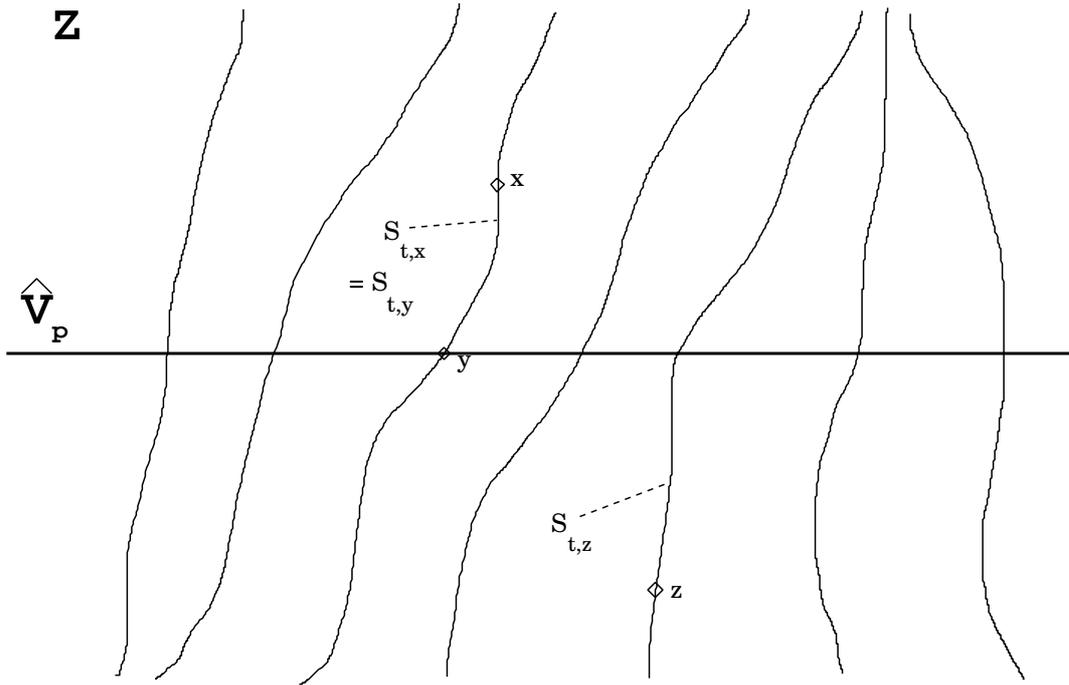


Abbildung 5.2: Skizzenhafte Darstellung der Schichtung des Raumes Z zum Zeitpunkt t . Jede der Schichten – eigentlich Hyperflächen unendlicher Dimension – ist als „krumme“ Linie dargestellt und schneidet \hat{V}_p in genau einem Punkt.

aufgespannt wird. Die modifizierten Eigenwerte lauten

$$\tilde{\lambda}_{1,k} = (k\pi)^2 \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4 \left(\gamma + \frac{C_1}{(k\pi)^2} \right)}}{2}, \quad \tilde{\lambda}_{2,k} = (k\pi)^2 \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4 \left(\gamma + \frac{C_1}{(k\pi)^2} \right)}}{2}$$

und ihre Gesamtheit wird mit $\tilde{\Lambda}$ benannt. Es bezeichne im folgenden

$$Z_k = \text{lin} \{v_{1,k}e_k, v_{2,k}e_k\}$$

den zweidimensionalen Unterraum von Z , der von den zu den Eigenwerten $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}$ gehörenden Eigenvektoren $v_{1,k}, v_{2,k}$ multipliziert mit e_k aufgespannt wird. Offensichtlich sind alle Z_k paarweise linear unabhängig.

Desweiteren bezeichnet die Indexmenge J_1 alle k , so daß gilt $\text{Re}\lambda_{1,k} > p \wedge \text{Re}\lambda_{2,k} > p$, die Indexmenge J_2 alle k mit $\text{Re}\lambda_{2,k} < p < \text{Re}\lambda_{1,k}$.

Damit schreibt sich der Raum \hat{V}_p

$$\hat{V}_p = \sum_{k \in J_1} V_k + \sum_{k \in J_2} \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix} e_k \right\}$$

wobei die auftretenden Summensymbole im Geiste einer direkten Summe aufgefaßt werden: Jedes Element v aus \hat{V}_p hat eine eindeutige Darstellung als Summe der Art

$$v = \sum_{k \in J_1} \underbrace{v_k}_{\in V_k} + \sum_{k \in J_2} \underbrace{v_k}_{\in \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,k} \end{pmatrix} e_k \right\}}$$

Entsprechende Räume \tilde{Z}_k werden auch für $\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,k}$ eingeführt, natürlich unter Verwendung von modifizierten Indexmengen \tilde{J}_1 und \tilde{J}_2 , die nach gleichen Regeln wie oben zum gestörten Spektrum definiert sind.

- Im Falle von komplex konjugierten Eigenwerten $\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,k}$ sei

$$\tilde{Z}_k = \text{lin} \{ \tilde{v}_{1k} e_k, \tilde{v}_{2k} e_k \}$$

als zweidimensionaler Unterraum von Z eingeführt, der durch die gleichen Eigenvektoren $\tilde{v}_{1k} = v_{1,k}, \tilde{v}_{2k} = v_{2,k}$ wie Z_k bestimmt ist.

- Im Falle von zusammenfallenden Eigenwerten $\tilde{\lambda}_{1,k} = \tilde{\lambda}_{2,k}$ wird

$$\tilde{Z}_k = \text{lin} \{ \tilde{v}_{1,k} e_k, \tilde{v}_{2,k} e_k \}$$

als zweidimensionaler Unterraum von Z eingeführt, der abermals durch die gleichen Eigenvektoren $\tilde{v}_{1k} = v_{1,k}, \tilde{v}_{2k} = v_{2,k}$ wie Z_k bestimmt ist.

- Im Falle von reell verschiedenen Eigenwerten $\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,k}$ gilt

$$\tilde{Z}_k = \text{lin} \{ \tilde{v}_{1,k} e_k, \tilde{v}_{2,k} e_k \}$$

Hier werden allerdings wirklich von v_{1k} bzw. v_{2k} verschiedene Eigenvektoren verwendet, nämlich

$$\tilde{v}_{1k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}_{1,k} \end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_{2k} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}_{2,k} \end{pmatrix}$$

Offensichtlich gilt $Z_k = \tilde{Z}_k$, nur die jeweils gewählten Basen sind verschieden.

Für $p \neq \Lambda$ wird mit $\hat{V}_{p,mod}$ der endlichdimensionale Untervektorraum von Z bezeichnet, der im Sinne einer direkten Summe gegeben ist durch

$$\hat{V}_{p,mod} = \sum_{k \in \tilde{J}_1} V_k + \sum_{k \in \tilde{J}_2} \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}_{1,k} \end{pmatrix} e_k \right\}$$

Es gilt der Satz:

Satz 5.2 *Für hinreichend klein gewähltes $p < 0$ sind $\hat{V}_{p,mod}$ und $E(z, t)$ linear unabhängig und spannen ganz Z auf.*

Zunächst ist ersichtlich, daß für $k \rightarrow \infty$ die modifizierten Eigenwerte gegen die entsprechenden ursprünglichen gehen, daß also gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{1,k} - \tilde{\lambda}_{1,k}) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{2,k} - \tilde{\lambda}_{2,k}) = 0$$

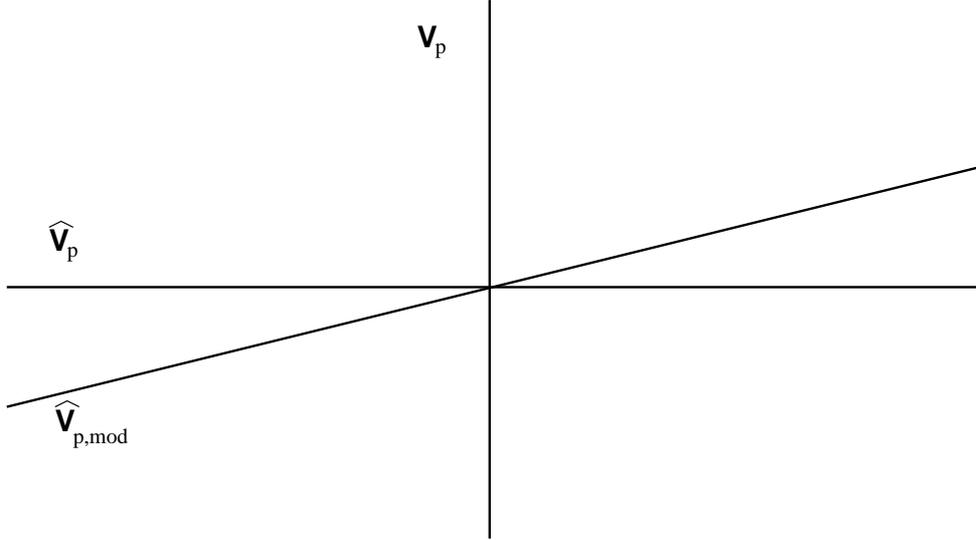


Abbildung 5.3: Skizze von \hat{V}_p und $\hat{V}_{p,mod}$. Durch passende Wahl von $p < 0$ kann erzwungen werden, daß die Differenz der Richtungen der beiden Räume beliebig klein wird. Dadurch wird erreicht, daß jede Schicht nicht nur \hat{V}_p genau einmal schneidet, sondern auch $\hat{V}_{p,mod}$.

Damit ist klar, daß für hinreichend großes k die Eigenwerte reell sind und $\tilde{\lambda}_{1,k} \neq \tilde{\lambda}_{2,k}$. Für kleine k ist es jedoch nicht ausgeschlossen, daß die Eigenwerte zusammenfallen oder komplex konjugiert sind.

Es wird nun ein hinreichend kleines p so gewählt, daß alle zusammenfallenden oder komplex konjugierten Paare von Eigenwerten $\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,k}$ bezüglich ihres Realteils größer als p sind. Die Menge der Indizes k der so charakterisierten Eigenwerte sei mit J bezeichnet.

Desweiteren sei $p < 0$ betragsmäßig so groß gewählt, daß alle Paare von Eigenwerten $\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}$, welche auf verschiedenen Seiten von p liegen, zu beliebig vorgegebenem ε nicht weiter als ε von den ungestörten Eigenwerten entfernt sind:

$$\left| \lambda_{1,k} - \tilde{\lambda}_{1,k} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \lambda_{2,k} - \tilde{\lambda}_{2,k} \right| \leq \varepsilon$$

Die Räume \hat{V}_p und $E(z, t)$ sind linear unabhängig, wie bereits gezeigt wurde. Damit gibt es für jedes $\xi \in Z$ eine eindeutige Darstellung der Art

$$\xi = \sum_{k \in I_1} b_{1k} w_{1k} + \sum_{k \in I_2} b_{2k} w_{2k} + \sum_{k \in \hat{I}_1} b_{1k} v_{1k} + \sum_{k \in \hat{I}_2} b_{2k} v_{2k}$$

In dieser Darstellung sind die w_{1k} und w_{2k} das Aufspannendensystem von $E_{z,t}$. Falls eine Darstellung bezüglich $\hat{V}_{p,mod}$ und $E(z, t)$ existiert, so lautet sie analog

$$\xi = \sum_{k \in I_1} c_{1k} w_{1k} + \sum_{k \in I_2} c_{2k} w_{2k} + \sum_{k \in \hat{I}_1} c_{1k} \tilde{v}_{1k} + \sum_{k \in \hat{I}_2} c_{2k} \tilde{v}_{2k}$$

Sei definiert $I_3 := I_1 \cap I_2$. Dann gilt aufgrund der Unabhängigkeit

$$c_{1k} = b_{1k}, \quad c_{2k} = b_{2k}, \quad k \in I_3$$

und weiter also

$$\begin{aligned}\xi^* &:= \sum_{k \in I_1/I_3} b_{1k} w_{1k} + \sum_{k \in I_2/I_3} b_{2k} w_{2k} + \sum_{k \in \hat{I}_1} b_{1k} v_{1k} + \sum_{k \in \hat{I}_2} b_{2k} v_{2k} = \\ \xi^* &:= \sum_{k \in I_1/I_3} c_{1k} w_{1k} + \sum_{k \in I_2/I_3} c_{2k} w_{2k} + \sum_{k \in \hat{I}_1} c_{1k} \tilde{v}_{1k} + \sum_{k \in \hat{I}_2} \tilde{c}_{2k} v_{2k}\end{aligned}$$

Der „Rest“ ξ^* ist dabei Element des endlichdimensionalen Untervektorraums Z^* von Z , welcher gerade durch die Vektoren

$$w_{1k} \text{ für } k \in I_1/I_3; \quad w_{2k} \text{ für } k \in I_2/I_3; \quad v_{1k} \text{ für } k \in \hat{I}_1; \quad w_{2k} \text{ für } k \in \hat{I}_2$$

aufgespannt wird.

Das endlichdimensionale Gleichungssystem der ersten Zeile werde abgekürzt durch $Ab = \xi^*$, wobei b für alle dort vorkommenden Unbekannten b_{1k}, b_{2k} steht. Die eindeutige Lösbarkeit dieses Systems ist wie erwähnt gesichert.

Analog sei das endlichdimensionale Gleichungssystem der zweiten Zeile abgekürzt durch $(A + F)c = \xi^*$, wobei c für alle dort vorkommenden Unbekannten c_{1k}, c_{2k} steht. Die Lösbarkeit letzteren Gleichungssystems nach den c_{1k}, c_{2k} ist jedoch gegeben, wenn nur die Störung F in einer beliebig gewählten Matrixnorm hinreichend nahe bei der Null liegt (alle Normen sind als Normen auf einem endlichdimensionalen Raum äquivalent)¹. Dies bedeutet, daß der Abstand von v_{1k} zu \tilde{v}_{1k} bzw. der Abstand von v_{2k} zu \tilde{v}_{2k} hinreichend klein sein muß – dieser kann aber wie erwähnt durch passende Wahl von p kontrolliert werden. In diesem Fall gibt es eine eindeutige Lösung, und damit eine eindeutige Darstellung

$$\xi = \sum_{k \in I_1} c_{1k} w_{1k} + \sum_{k \in I_2} c_{2k} w_{2k} + \sum_{k \in \hat{I}_1} c_{1k} \tilde{v}_{1k} + \sum_{k \in \hat{I}_2} c_{2k} \tilde{v}_{2k}$$

Also ist der Satz bewiesen. □

Es gibt also zu jedem Punkt $z \in Z$ und jeder Startzeit t zwei Untervektorräume $\hat{V}_{p,mod}$ und $E(z, t)$, die in direkter Summe ganz Z aufspannen; mit anderen Worten gilt jedes $\xi \in Z$ in eindeutiger Weise:

$$\xi = \underbrace{\xi_a}_{\in \hat{V}_{p,mod}} + \underbrace{\xi_b}_{\in E(z,t)}$$

Damit lassen sich – in Analogie zum Vorgehen bei \hat{V}_p – von den Parametern z und t abhängige lineare Projektionen $\tilde{Q}_{z,t}$ und $\tilde{W}_{z,t}$ einführen mit

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{z,t} : \quad Z &\rightarrow \hat{V}_{p,mod} \\ \xi = \xi_a + \xi_b &\mapsto Q_{z,t}\xi := \xi_a\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{z,t} : \quad Z &\rightarrow E(z, t) \\ \xi = \xi_a + \xi_b &\mapsto W_{z,t}\xi := \xi_b\end{aligned}$$

¹Dies macht man sich am besten dadurch deutlich, indem man mittels der Cramerschen Regel die Lösungen des Gleichungssystems aufschreibt. Die entstehenden Ausdrücke sind in einer gewissen Umgebung stetige Ausdrücke der Matrixelemente und der rechten Seite. Also ist die eindeutige Lösbarkeit stabil gegenüber kleinen Änderungen F der Matrix A .

Diese beiden Projektionen lassen sich als gestörte Versionen der Projektionen $Q_{z,t}$ bzw. $W_{z,t}$ betrachten.

Sie hängen nach den Resultaten zur Lipschitz-stetigen Abhängigkeit von den Anfangsdaten (Abschnitt 4.4.10) und der stetigen Abhängigkeit von der Temperatur-Parameterfunktion (Abschnitt 4.4.10) stetig von z und t ab.

Satz 5.3 Für die Projektion $\tilde{Q}_{z,t}$ gibt es ein positives δ , so daß

$$\left\| \tilde{Q}_{z,t} \right\| \leq (1 + \delta) \|Q_{z,t}\|$$

gilt.

Dazu betrachtet man nochmal das endlichdimensionale lineare Gleichungssystem $(A + F)c = \xi^*$. Es ergibt sich für den Fehler $c - b = (A + F)^{-1} \cdot Fb$ und für die ∞ -Norm dieses Fehlers $\|c - b\|_\infty \leq \|(A + F)^{-1}F\| \|b\|_\infty$. Dabei bezeichnet $\|(A + F)^{-1}F\|$ natürlich die verträgliche Matrixnorm. Insbesondere folgt daraus mit einer Konstanten C für die Norm in Z von

$$\begin{aligned} \left\| W_{z,t}\xi - \tilde{W}_{z,t}\xi \right\|_Z &= \left\| \sum_{k \in I_1/I_3} b_{1k}w_{1k} + \sum_{k \in I_2/I_3} b_{2k}w_{2k} - \sum_{k \in I_1/I_3} c_{1k}w_{1k} + \sum_{k \in I_2/I_3} c_{2k}w_{2k} \right\|_Z \\ &\leq \|(A + F)^{-1}F\| \|b\|_\infty \left(\sum_{k \in I_1/I_3} \|w_{1k}\|_Z + \sum_{k \in I_2/I_3} \|w_{2k}\|_Z \right) \leq C \|(A + F)^{-1}F\| \|b\|_\infty \end{aligned}$$

denn es handelt sich hier um ein Element aus einem endlichdimensionalen Untervektorraum von Z , und damit sind die Normen äquivalent.

Außerdem gilt $\|b\|_\infty \leq C \|z^*\|_Z \leq C \|z\|_Z$, denn auch b steht für ein Element des endlichdimensionalen Unterraumes Z^* von Z . Damit folgt

$$\begin{aligned} \left\| W_{z,t}\xi - \tilde{W}_{z,t}\xi \right\|_Z &\leq C \|(A + F)^{-1}F\| \|z^*\|_Z \\ &\leq C \|(A + F)^{-1}F\| \|z\|_Z \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\left\| W_{z,t} - \tilde{W}_{z,t} \right\| \leq C \|(A + F)^{-1}F\|$$

und damit ebenso

$$\left\| Q_{z,t} - \tilde{Q}_{z,t} \right\| \leq C \|(A + F)^{-1}F\|$$

Daraus ergibt sich schließlich die Aussage

$$\left\| \tilde{Q}_{z,t} \right\| \leq (1 + \delta) \|Q_{z,t}\|$$

mit $\delta = C \|(A + F)^{-1}F\|$.

□

Die hier gemachten Feststellungen sind wichtig zur Reduktion des Systems und zur Konstruktion einer inertialen Mannigfaltigkeit. Dort werden wir nicht mehr mit \hat{V}_p arbeiten, sondern mit $\hat{V}_{p,mod}$, weil dieser Unterraum dem Problem angepaßter ist als \hat{V}_p . Der Raum $\hat{V}_{p,mod}$ ist nämlich invariant unter dem Operator

$$A_{mod} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ \beta v_{xx} + C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} \end{pmatrix}$$

Dieser Operator ist linearer Anteil der rechten Seite

$$F(z, t) := \begin{pmatrix} v \\ C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta) \end{pmatrix}$$

des Systems, und der „nichtlineare Rest“

$$R(z, t) := \begin{pmatrix} 0 \\ r_x(u_x, \theta) \end{pmatrix}$$

ist nach den Annahmen zur freien Energie in der Norm von Z global in z und t beschränkt.

5.3 Reduktion auf endlichdimensionales System $\Psi_p^{t_1, t_0}$

Nach der Einführung des modifizierten Raumes $\hat{V}_{p,mod}$ und den entsprechenden Projektionen in ihn kann man das System der Bewegungsgleichungen auf diesen Raum reduzieren.

Zunächst wird rechte Seite des ursprünglichen Systems – nachdem man das System in kanonischer Weise als System erster Ordnung geschrieben hat – abgekürzt mit

$$F(z, t) := \begin{pmatrix} v \\ C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta) \end{pmatrix}$$

Im allgemeinen kann nicht erwartet werden, daß für alle $z \in \hat{V}_{p,mod}$ gilt $F(z) \in \hat{V}_{p,mod}$. Die Idee liegt darin, für alle $z \in \hat{V}_{p,mod}$ durch Projektion der rechten Seite $F(z)$ des Systems entlang der Richtungen $E(z, t)$ auf $\hat{V}_{p,mod}$ ein System in eben diesem endlichdimensionalen Untervektorraum zu definieren, siehe Abbildung 5.4.

In Formeln schreibt sich dieser Ansatz als

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \tilde{Q}_{z,t} \begin{pmatrix} v \\ C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

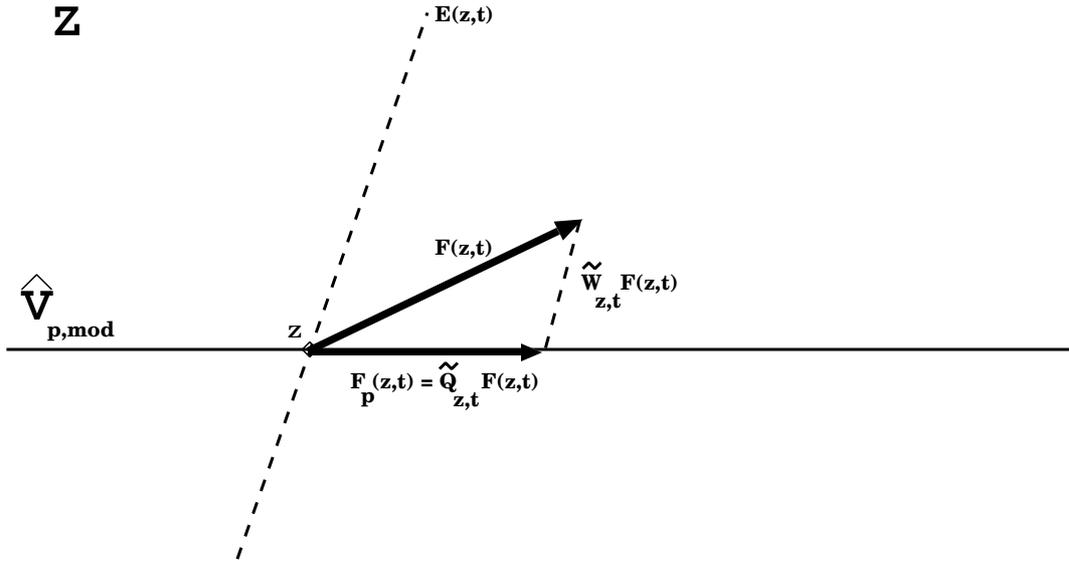
$$z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \hat{V}_{p,mod}$$

Der Raum $\hat{V}_{p,mod}$ ist als lineare Hülle der ersten Eigenvektoren gerade so gewählt, daß gilt

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \hat{V}_{p,mod} \Rightarrow L(z) := \begin{pmatrix} v \\ C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} \end{pmatrix} \in \hat{V}_{p,mod}$$

Somit schreibt sich mit der Abkürzung

$$F_p(z, t) := \begin{pmatrix} v \\ C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} \end{pmatrix} + \tilde{Q}_{z,t} \begin{pmatrix} 0 \\ r_x(u_x, \theta) \end{pmatrix}$$

Abbildung 5.4: Projektion der rechten Seite auf $\hat{V}_{p,mod}$

das System (5.2) weiter um zu

$$\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = F_p(z, t) \quad (5.3)$$

Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung z_p dieses Systems lokal in der Zeit liefert der Satz von Picard-Lindelöf. Der lineare Operator L hat – eingeschränkt auf den invarianten Unterraum $\hat{V}_{p,mod}$ – eine Darstellung als endlichdimensionale invertierbare Matrix, und es gilt für die Operatornormen

$$\|L\| \leq C$$

mit einer von der Lösung $z(t)$ unabhängigen Konstante C . Weiterhin gilt wegen $|r| \leq C_2$

$$\left\| \tilde{Q}_{z,t} r_x(u_x, \theta) \right\|_{H_2^{-1}(\Omega)} \leq C \quad (5.4)$$

wobei die Konstante C ebenfalls nicht von der Lösung z_p abhängt. Also ergibt sich aus (5.2)

$$\|z_t\|_Z \leq C \|z\|_Z + C$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt daraus ohne große Mühe Existenz und Eindeutigkeit auf ganz \mathbb{R} .

Die durch das System (5.2) induzierte Evolution auf \hat{V}_p werde für $t_1 \geq t_0$ mit Ψ_p bezeichnet:

$$\begin{aligned} \Psi_p^{t_1, t_0} : \quad & \hat{V}_p \rightarrow \hat{V}_p \\ & z_0 \mapsto \Psi_p^{t_1, t_0} z_0 = z_p(t_1) \end{aligned}$$

Sie ist – im Gegensatz zur Evolution der vollen Bewegungsgleichungen – invertierbar, und die jeweiligen Inversen werden durch die Vertauschung der Argumente t_0 und t_1 bezeichnet:

$$\Psi_p^{t_0, t_1} \Psi_p^{t_1, t_0} = id_{\hat{V}_{p, mod}}$$

5.4 Der Fehler $\Psi^{t_1, t_0} z_0 - \Psi_p^{t_1, t_0} z_0$

Nachdem nun auf oben geschilderte Weise ein Hilfssystem auf $\hat{V}_{p, mod}$ eingeführt worden ist, wird nun untersucht, wie sich für $t \geq t_0$ eine Lösung dieses Hilfssystems $z_p(t)$ zu einer Lösung des ursprünglichen Systems $z(t)$ zum Anfangswert $z_0 = z_p(t_0)$ verhält.

Die rechte Seite des ursprünglichen Systems wird abgekürzt mit

$$F(z, t) := \begin{pmatrix} v \\ C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} + r_x(u_x, \theta) \end{pmatrix}$$

Satz 5.4 *Globaler Fehler des approximierenden Systems*

Der globale Fehler läßt sich darstellen durch ²

$$\Psi^{t_1, t_0} z_0 - \Psi_p^{t_1, t_0} z_0 = \int_{t_0}^{t_1} D\Psi_{z_p(\tau)}^{t_1, \tau} (F(z_p(\tau), \tau) - F_p(z_p(\tau), \tau)) d\tau$$

Beweis:

Zunächst sei festgestellt, daß die Lösungskurve $z(t) = \Psi^{t_1, t_0} z_0$ aufgrund der Annahmen zur Temperaturfunktion und der freien Energie eine stetig differenzierbare Kurve im Phasenraum Z ist, wie in Satz 2.11 gezeigt wurde.

Es bezeichne $z_p(t)$ die Lösung des approximierenden endlichdimensionalen Systems:

$$z_p(t) = \Psi_p^{t, t_0} z_0$$

Dann gilt wegen der Differenzierbarkeit der Lösungskurven $z(t)$ für $t \geq 0$ und $z_p(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ die asymptotische Aussage

$$\Psi^{t+h, t} z_p(t) - z_p(t+h) = \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) \cdot h + o(h)$$

Diese Darstellung läßt sich aufspalten

$$\begin{aligned} & \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) \cdot h + o(h) = \\ & h \cdot Q_{z_p(t+h), t+h} \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) + h \cdot W_{z_p(t+h), t+h} \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) + o(h) \end{aligned}$$

Wegen $F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \in E_{z_p(t), t}$ gilt mit den stetigen Abhängigkeiten der Projektionen von ihren Parametern z und t und wegen der Stetigkeit von $z_p(t)$ in t

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} Q_{z_p(t+h), t+h} \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} W_{z_p(t+h), t+h} \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) &= F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \end{aligned}$$

Der Transport dieses lokalen Fehlers entlang $\Psi^{t_1, t+h} z_p(t)$ ergibt

²vgl. [DH93] zur Störung der rechten Seite einer Differentialgleichung nach Gröbner und Aleksejew und den dort verwendeten Techniken

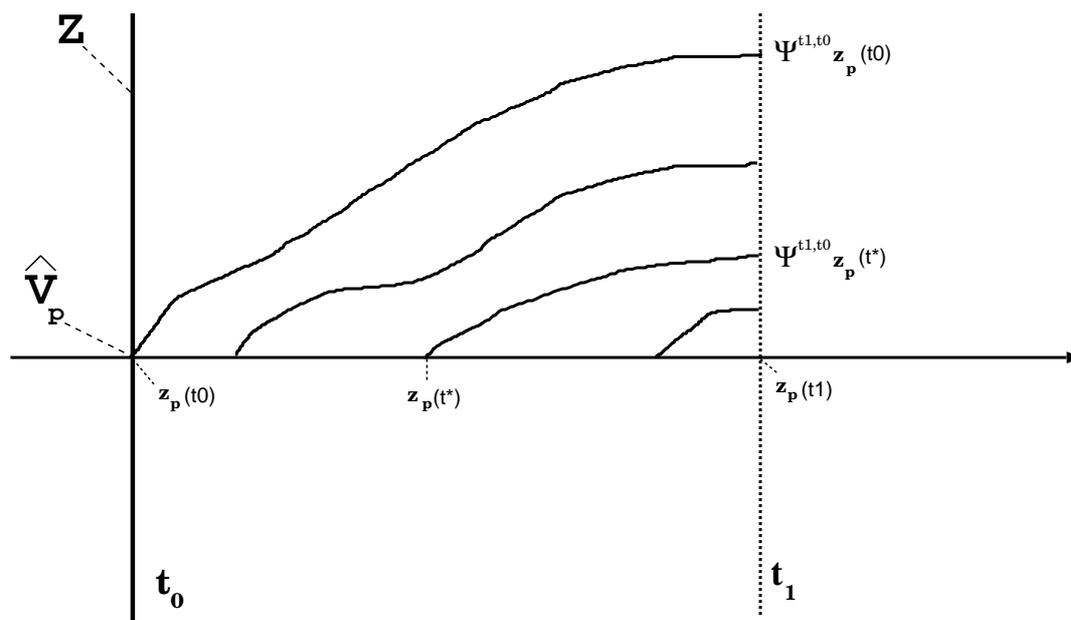


Abbildung 5.5: In der Skizze stehen die beiden vertikalen Linien jeweils für den Raum Z ; einmal zum Zeitpunkt t_0 , einmal zum Zeitpunkt t_1 . Die Dynamik des reduzierten Systems findet in der Skizze nur in der horizontalen Linie statt (darstellungstechnische Gründe). Die „krummen“ Linien deuten im Kontrast dazu Lösungen der nicht reduzierten Bewegungsgleichungen an. Der globale Fehler kann als Integral über gewisse transportierte Einzelfehler dargestellt und abgeschätzt werden. Anschaulich wird dazu der oben eingezeichnete „Fächer“ immer weiter verfeinert, und der Fehler zum Zeitpunkt t_1 durch Summation der Fehler benachbarter Trajektorien ermittelt. Ein Grenzübergang liefert die Integraldarstellung.

$$\begin{aligned}
\Psi^{t_1, t+h} \Psi^{t+h, t} z_p(t) - \Psi^{t_1, t+h} z_p(t+h) &= \\
D\Psi_{z_p(t+h)}^{t_1, t+h} \left(\left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) \cdot h + o(h) \right) & \\
+ o \left(\left\| \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) \cdot h + o(h) \right\|_Z \right) &= \\
h \cdot D\Psi_{z_p(t+h)}^{t_1, t+h} \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) + D\Psi_{z_p(t+h)}^{t_1, t+h} \cdot o(h) + o(h) &
\end{aligned}$$

und demnach

$$-D_t \left(\Psi^{t_1, t} z_p(t) \right) = D\Psi_{z_p(t)}^{t_1, t} \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right)$$

Nun wird über t integriert:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} D_t \left(\Psi^{t_1, t} z_p(t) \right) dt = -z_p(t_1) + \Psi^{t_1, t_0} z_p(t_0) = -\Psi_p^{t_1, t_0} z_p(t_1) + \Psi^{t_1, t_0} z_p(t_0) = \\
\int_{t_0}^{t_1} D\Psi_{z_p(t)}^{t_1, t} \left(F(z_p(t), t) - F_p(z_p(t), t) \right) dt
\end{aligned}$$

Dies war gerade die Behauptung des Satzes. □

Damit ist eine praktische Darstellung des globalen Fehlers gegeben. Betrachtet man den Integranden dieser Darstellung, so liegt die Differenz $F(z_p(\tau), \tau) - F_p(z_p(\tau), \tau)$ nach Konstruktion von F_p gerade im Raum $E(z_p(\tau), \tau)$, und erfüllt darüberhinaus nach den Annahmen zur Energie die Abschätzung

$$\|F(z_p(\tau), \tau) - F_p(z_p(\tau), \tau)\|_Z \leq C_2$$

Daraus läßt sich die Abschätzung

$$\|\Psi^{t_1, t_0} z_0 - \Psi_p^{t_1, t_0} z_0\|_Z \leq \int_{t_0}^{t_1} K e^{-p(t_1-\tau)} C_2 d\tau$$

mit der Konstante K aus (4.22) gewinnen, und weiter

$$\|\Psi^{t_1, t_0} z_0 - \Psi_p^{t_1, t_0} z_0\|_Z \leq \frac{KC_2}{p} \left(1 - e^{-p(t_1-t_0)} \right) \leq \frac{KC_2}{p}$$

Dem entnimmt man, daß jeder Anfangswert $z_p(t_0)$ aus $\hat{V}_{p, mod}$ eine zugehörige Lösung z des Falk-Systems besitzt, die für alle $t_1 \geq t_0$ immer höchstens $\frac{KC_2}{p}$ von $\hat{V}_{p, mod}$ entfernt ist, präziser: von $z_p(t_2)$ nur $\frac{KC_2}{p}$ entfernt ist.

Kombiniert mit den Erkenntnissen bezüglich der Schichtung des Raumes Z ergibt sich, daß alle Lösungen des Systems exponentiell schnell in der Zeit gegen die Teilmenge M des Raumes streben, die aus allen Punkten besteht, die von $\hat{V}_{p, mod}$ höchstens $\frac{KC_2}{p}$ entfernt sind.

Außerdem erkennt man, daß bei passender Wahl von p – also einer hinreichenden Verkleinerung von p und bei hinreichend großem Abstand von p von der Menge Λ der Eigenwerte – diese Differenz beliebig klein gemacht werden kann. Dies bedeutet anschaulich gesprochen, daß durch Vergrößerung der Dimension von $\hat{V}_{p, mod}$ Lösungen zu Anfangswerten aus diesem Raum für alle Zeiten beliebig nahe an der entsprechenden Lösung des approximierenden endlichdimensionalen Systems bleiben. In diesem Sinne kann man davon sprechen, daß der approximierende Orbit auf

$\hat{V}_{p,mod}$ durch den exakten Orbit beschattet wird.
Weiterhin liest man aus

$$\Psi^{t_2, t_1} \Psi^{t_1, t_0} z_0 - \Psi^{t_2, t_1} \Psi_p^{t_1, t_0} z_0 = \int_{t_0}^{t_1} D\Psi^{t_2, \tau} (F(z_p(\tau), \tau) - F_p(z_p(\tau), \tau)) d\tau$$

die Abschätzung

$$\|\Psi^{t_2, t_1} \Psi^{t_1, t_0} z_0 - \Psi^{t_2, t_1} \Psi_p^{t_1, t_0} z_0\|_Z \leq e^{-p(t_2 - t_1)} \frac{CC_2}{p} \quad (5.5)$$

Nach diesen Vorarbeiten kann eine vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige Abbildung definiert werden, mit deren Hilfe die „inertiale Mannigfaltigkeit“ konstruiert wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \quad \hat{V}_p &\longrightarrow Z \\ z_0 &\mapsto \mathcal{R}(z_0) := \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Psi^{t, \tau} \Psi_p^{\tau, t} z_0 \end{aligned}$$

Anschaulich wird für einen beliebigen Punkt $z_0 \in \hat{V}_{p,mod}$ dessen zugehöriger Lösungsorbit z_p bezüglich der Evolution des approximierenden Systems in die „Vergangenheit“ τ mit $\tau < t$ betrachtet. Punkte dieser „Hälfte“ des Orbits z_p werden daraufhin unter Anwendung der Evolution der Bewegungsgleichungen des Falk-Systems wieder in die „Gegenwart“ t zurückgebracht. Diese Methode ist als *pullback*-Technik in der Literatur bekannt, vgl. [KS02].

Die Existenz des Grenzwertes ist gesichert; betrachtet man die Folge $\Psi^{t, \tau} \Psi_p^{\tau, t} z_0$ mit $\tau \in \mathbb{Z}$ für $\tau \rightarrow -\infty$, so ist dies eine Cauchy-Folge. Es gilt nämlich (ohne Einschränkung sei $\tau_1 < \tau_2$) mit Abschätzung (5.5)

$$\begin{aligned} \|\Psi^{t, \tau_1} \Psi_p^{\tau_1, t} z_0 - \Psi^{t, \tau_2} \Psi_p^{\tau_2, t} z_0\|_Z &= \|\Psi^{t, \tau_1} z_p(\tau_1) - \Psi^{t, \tau_2} z_p(\tau_2)\|_Z \\ &= \|\Psi^{t, \tau_2} \Psi^{\tau_2, \tau_1} z_p(\tau_1) - \Psi^{\tau_1, \tau_2} \Psi_p^{t, \tau_2} z_p(\tau_2)\|_Z \leq e^{-p(t - \tau_2)} \frac{CC_2}{p} \end{aligned}$$

für alle τ_1 mit $\tau_1 < \tau_2$. Als Cauchyfolge besitzt die Folge einen eindeutigen Grenzwert.

Mittels der Abbildung \mathcal{R} kann jedem Orbit $z_p = z_p(t)$ des reduzierten Systems 5.2 durch punktweise Anwendung für $t \in \mathbb{R}$ eine Kurve $y = y(t)$ zugeordnet werden.

Eine genauere Untersuchung der Kurve ergibt, daß die Kurve y sogar Lösungsorbit des ursprünglichen Systems ist, also eine Lösung der partiellen Differentialgleichung. Dazu betrachtet man

$$D\Psi_{z_p(\tau)}^{t, \tau} F_p(z_p(\tau), \tau)$$

Nach Definition von F_p gilt jedoch

$$F_p(z_p(\tau), \tau) = F(z_p(\tau), \tau) - W_{z_p(\tau), \tau} F(z_p(\tau), \tau)$$

mit $W_{z_p(\tau), \tau} F(z_p(\tau), \tau) \in E(z(\tau), \tau)$. Konsequenterweise gilt daher

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} D\Psi_{z_p(\tau)}^{t, \tau} F_p(z_p(\tau), \tau) = F(y(t), t)$$

was bedeutet, daß y tatsächlich ein Lösungsorbit der Bewegungsgleichungen des Falk-Systems ist.

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 5.5 *Exakter Orbit*

Jeder Lösungskurve $z_p(t)$ in Z für alle $t \in \mathbb{R}$ des endlichdimensionalen Systems 5.2 kann auf eindeutige Weise eine exakte Lösung $y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ des ursprünglichen Systems der Bewegungsgleichungen des Falk-Modells zugeordnet werden, die zu jedem Zeitpunkt nie weiter als eine gewisse Konstante C von $z_p(t)$ entfernt ist. Diese Konstante C wird bei hinreichend hoher Dimension von \hat{V}_p beliebig klein.

Man spricht in diesem Sinne davon, daß die exakte Lösung $y(t)$ die „Näherungslösung“ $z_p(t)$ beschattet; bzw ist $y(t)$ ein Schattenorbit von $z_p(t)$.

Der so konstruierte Schattenorbit $y(t)$ hat eine weitere wichtige Eigenschaft. Zunächst streben alle Lösungen zu Anfangswerten aus Schichten, die mit $y(t)$ Punkte gemeinsam haben, exponentiell schnell in der Zeit gegen y . Dies ist einfache Konsequenz aus den Eigenschaften der Schichten. Zunächst ist allerdings unklar, ob die Menge aller Schattenorbits wirklich *alle* Lösungen des Systems anzieht.

Außerdem streben jedoch auch alle Lösungen mit Anfangswerten aus Schichten zur Näherungslösung $z_p(t)$ exponentiell schnell gegen $y(t)$, was aus (5.5) klar wird. Die Menge aller Schichten aller Näherungslösungen spannt aber zu jedem Zeitpunkt t den Raum Z vollständig auf, und damit ist klar, daß die Menge aller Schattenorbits *sämtliche andere Lösungen* des Systems in der Zeit exponentiell schnell attrahiert. Aus der Eigenschaft als Menge von Orbits folgt, daß die Menge \mathcal{B} aller Schattenorbits eine unter der Dynamik *invariante* Menge ist. Demnach gilt:

Satz 5.6 *Inertiale Mannigfaltigkeit*

Die Menge \mathcal{B} aller Schattenorbits zur Menge der Orbits des endlichdimensionalen Systems ist in oben beschriebenem Sinne eine endlichdimensionale inertielle Mannigfaltigkeit des vollen Systems der Bewegungsgleichungen.

Anmerkung: Das Konzept eines *nichtautonomen dynamischen Systems* (NDS) und zugehörigen Begriffen wie *nichtautonomen invarianten Mengen*, *nichtautonome inertielle Mannigfaltigkeit* wird in der Literatur schon seit längerem verwendet bzw. untersucht, vgl. dazu zum Beispiel [Tem97] oder [KS03b]. Die dort gebräuchliche Definition einer inertialen Mannigfaltigkeit beinhaltet – und dies geht über die Eigenschaften der in dieser Arbeit konstruierten „inertialen Mannigfaltigkeit“ hinaus – auch die Lipschitzstetigkeit der betrachteten Menge.

5.5 Evolution der Volumenelemente

Nachdem bekannt ist, daß nur endlich viele Anfangsrichtungen der linearisierten Gleichungen *nicht* exponentiell schnell abklingen, liegt die Vermutung nahe, daß es eine Obergrenze $M < \infty$ gibt, so daß nur Volumenelemente der Dimension $m < M$ im Laufe der Dynamik nicht gegen Null gehen. Dies soll in diesem Abschnitt – nach Einführung der nötigen Hilbertraumstruktur – gezeigt werden.

Hilbertraumstruktur und Volumenelemente

Die bisherigen Überlegungen kamen mit der Banachraumstruktur des Phasenraumes Z aus; sollen jedoch Betrachtungen zu Volumenelementen durchgeführt werden, ist es nötig, in einem Hilbertraum zu arbeiten.

Es wird mit $z_1 = (u_1, v_1)$, $z_2 = (u_2, v_2)$ das Skalarprodukt

$$\langle z_1; z_2 \rangle_Z := \langle u_1; u_2 \rangle_{H_2^1} + \langle v_1; v_2 \rangle_{H_2^{-1}}$$

definiert. Damit wird Z zu einem Hilbert-Raum, und es läßt sich für m -dimensionale Parallel-Epipede \mathcal{D}_0 der Form

$$\mathcal{D}_0 := \left\{ z_0 + \sum_{k=1}^m r_k \xi_k \quad \text{mit} \quad \xi_k \in Z; \quad 0 \leq r_k \leq 1 \right\}$$

das m -dimensionale Volumen $V(\mathcal{D}_0)$ angeben zu

$$V(\mathcal{D}_0) := -\det \left(\langle \xi_i, \xi_k \rangle_Z \right)_{i,k}$$

Das Volumen $V(\mathcal{D}_0, t)$ des Bildes $\Psi^{t_1, t_0} \mathcal{D}_0$ des Parallelepipeds unter der Evolution Ψ^{t_1, t_0} läßt sich dann näherungsweise beschreiben durch

$$V(\mathcal{D}_0, t) = -\det \left(\langle D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0} \xi_i, D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0} \xi_k \rangle_Z \right)_{i,k}$$

Es ist nach Satz 4.3 bekannt, daß alle Lösungen der linearisierten Gleichungen höchstens exponentiell in der Zeit wachsen, d.h.

$$\xi_0 \in Z \Rightarrow \|D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0} \xi_0\|_Z \leq C e^{p_a(t_1 - t_0)} \|\xi_0\|_Z$$

mit positivem p_a , und daß darüberhinaus für Elemente aus $E(z_0, t_0)$ gilt

$$\xi_0 \in E(z_0, t_0) \Rightarrow \|D\Psi_{z_0}^{t_1, t_0} \xi_0\|_Z \leq C e^{p(t_1 - t_0)} \|\xi_0\|_Z$$

Da der Raum Z direkt zerlegt werden kann in $E(z_0, t_0)$ und \hat{V}_p und \hat{V}_p nur endliche Dimension $\leq m_1$ hat, kann die Evolution des m -dimensionale Volumens $V(\mathcal{D}_0, t_1)$ zur Zeit t_1 abgeschätzt werden:

$$V_m(\mathcal{D}_0, t) \leq \begin{cases} C \cdot e^{m \cdot p_a t} & \text{für } m \leq m_1 \\ C \cdot e^{(m_1 p_a + (m - m_1) p_b) t} & \text{für } m > m_1 \end{cases}$$

Also gilt für hinreichend großes m der Art

$$m_1 p_a + (m - m_1) p < 0$$

daß das Volumen der m -dimensionalen Volumenelemente gegen Null geht. Also ist gezeigt:

Satz 5.7 *Evolution der Volumenelemente*

Es gibt eine Schranke $M < \infty$, so daß alle m -dimensionalen Volumenelemente mit $m > M$ im Verlauf der Dynamik gegen Null gehen.

Kapitel 6

Attraktoren bei gewissen zeitperiodischen Temperaturfunktionen

Für das volle Falk-Modell ist es sehr problematisch, weitergehende Aussagen über die Dynamik zu machen, weil zum einen das System über die Temperaturgleichung energetisch nicht abgeschlossen ist, zum anderen auf der (nichtautonomen!) rechten Seite der Temperaturgleichung stark nichtlineare Terme stehen. Aus diesen Gründen ist es sehr schwer, Konzepte wie absorbierende Mengen, Kompaktheit oder gar Attraktoren ins Spiel zu bringen.

In diesem Kapitel wird deswegen darauf verzichtet, die Dynamik des vollen Falk-Systems zu untersuchen. Stattdessen widmen wir uns wieder den Bewegungsgleichungen zu *als Parameter vorgegebenen Temperaturfunktionen*. Im Fall $\gamma > 0$, wenn die zugehörige zweiparametrische Evolutionsabbildung Ψ^{t_1, t_0} für $t_1 > t_0$ kompakt ist, kann man zu bestimmten Temperaturfunktionen diesbezüglich einige Aussagen treffen. Insbesondere zeitperiodische Temperaturfunktionen mit Periode T mit zusätzlichen Eigenschaften, die in diesem Kapitel genauer charakterisiert werden, erlauben den Nachweis von Attraktoren der Zeit- T -Abbildung $\Psi^T := \Psi^{T, 0}$ der Bewegungsgleichungen.

Begonnen wird mit der Untersuchung eines einfachen Spezialfalls der Temperaturfunktion.

6.1 Die Dynamik bei zeitlich konstanten Temperaturfunktionen

Es sei als Parameter eine Temperaturfunktion $\theta(x, t)$ vorgegeben, die *bezüglich der Zeit konstant* ist, also

$$\theta(x, t) = \theta_0(x) \in L_2(\Omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

In diesem Fall kann die Dynamik des Systems nicht nur durch die zweiparametrische Evolutionsabbildung Ψ^{t_1, t_0} beschrieben werden, es ist sogar möglich, die Dynamik durch eine einparametrische Halbgruppe zu beschreiben, denn es gilt offensichtlich wegen $\tilde{\theta}(t) = \theta(t - t_1) = \theta(t)$

$$\Psi^{t_1, t_0} = \Psi^{t_1 - t_0, 0} \quad \forall t_1 \geq t_0$$

Man definiert deswegen sinnvollerweise

$$\Psi^t := \Psi^{t, 0}$$

als Halbgruppe auf Z . In diesem Sinne kann man von einem autonomen dynamischen System (Ψ^t, Z) sprechen, und seine Dynamik kann ohne große Schwierigkeiten untersucht werden.

Stationäre Punkte

Mögliche stationäre Punkte erfüllen – bei $v = v_{xx} = 0$ die Gleichung

$$0 = \sigma_x(u_x, \theta) - \gamma u_{xxxx} \quad (6.1)$$

in $H_2^{-3}(\Omega)$, beziehungsweise erfüllt das zugehörige System der Koeffizientenfunktionen a_k für $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ in jeder Komponente a_k die Gleichung

$$C_1 a_k (k\pi)^2 + \gamma a_k (k\pi)^4 - k\pi h_{1,k} = 0$$

Offensichtlich ist $u = 0$ immer Fixpunkt des Systems.

Nach Multiplikation dieser Gleichungen mit $\frac{a_k}{(k\pi)^2}$ und Summation der Resultate über alle k ergibt sich mit der Youngschen Ungleichung

$$C_1 \|u\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|u\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C_1}{2} \|u\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{1}{2C_1} \|r\|_{\Omega}^2$$

und daraus mit den Annahmen 1.1 zur freien Energie bzw. r

$$\frac{C_1}{2} \|u\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \gamma \|u\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C_2^2}{2C_1}$$

und letztendlich

$$\frac{C_1}{2} \|u\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C_2^2}{2C_1} \quad (6.2)$$

Die Abschätzung in dieser Form wird später benötigt.

Aus (6.2) ergibt sich, daß alle möglichen Fixpunkte der Bewegungsgleichungen zu zeitlich konstanter Temperatur in einer beschränkten Menge des Raumes Z liegen.

Energieabschätzungen und Lyapunow-Funktionen

Jetzt soll gezeigt werden, daß die Dynamik der Bewegungsgleichungen zu zeitlich konstanter Temperatur bestimmt ist durch das Streben gegen Fixpunkte.

Dazu werden zunächst Lösungen der Bewegungsgleichungen zu Anfangswerten $u_0 \in H_2^2(\Omega)$ und $v_0 \in H_2^0(\Omega)$ betrachtet. Aus der Existenz- bzw. Regularitätstheorie zu den Bewegungsgleichungen ist bekannt, daß für die zugehörige Lösung fast überall in der Zeit gilt $v(t) \in H_2^1(\Omega)$, und damit auch $v(t) \in C^0(\Omega)$. Damit ist klar, daß fast überall in der Zeit gilt $v(0, t) = v(1, t) = 0$. Durch Multiplikation von

$$\dot{a}_k + C_1 a_k (k\pi)^2 + \gamma a_k (k\pi)^4 + \beta \dot{a}_k (k\pi)^2 - k\pi h_{1,k} = 0$$

mit \dot{a}_k und Summation über alle $k \in \Omega$ folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_2^0}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H_2^1}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(t)\|_{H_2^1}^2 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k k\pi h_{1,k} + \beta \|v(t)\|_{H_2^1}^2 = 0$$

Da aber gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{a}_k k \pi h_{1,k} = \int_{\Omega} r(u_x, \theta) \cdot v_x dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi_2(u_x, \theta) dx$$

liest man ab, daß die Energie

$$E_1 = \frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \Phi_2(u_x, \theta) dx$$

für Lösungen mit Anfangswerten $u_{xx} \in L_2(\Omega), v \in L_2(\Omega)$ in der Zeit nicht wachsen kann und nur für $v = 0$ nicht abnimmt.

Außerdem ist nach den Annahmen zu zur freien Energie, insbesondere $|\Phi_2| \leq C_3$, der Ausdruck E_1 nach unten beschränkt. Dem entnimmt man, daß die betrachteten Lösungen gegen Fixpunkte streben.

Weiterhin ergibt sich mit $|\Phi_2| \leq C_3$ unter Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \Phi_2(u_x, \theta) dx \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} \|v(t)\|_{H_2^0(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2} \|u(t)\|_{H_2^1(\Omega)}^2 \leq E_1 + C_3 \end{aligned}$$

Somit sind die Bereiche U_{E_1} des Raumes Z zu vorgegebener Energie E_1 beschränkt und außerdem kompakt.

Da aber mit Satz 2.10 gilt, daß jeder Anfangswert $z_0 \in Z$ zum Anfangszeitpunkt t_0 eine Lösung besitzt, für die

$$\begin{aligned} \|u(t_1 + \varepsilon)\|_{H_2^2(\Omega)} &\leq C(\varepsilon, \|z_0\|_Z) \\ \|v(t_1 + \varepsilon)\|_{H_2^0(\Omega)} &\leq C(\varepsilon, \|z_0\|_Z) \end{aligned}$$

gilt, gibt es zu jedem $z_0 \in Z$ eine Zeit $T(\|z_0\|, U_{E_1})$ so, daß $z(T(\|z_0\|, U_{E_1}) + t_0) \in U_{E_1}$.

Wählt man nun E_1 so groß, daß in dem entsprechenden Gebiet U_{E_1} alle möglichen Fixpunkte im Inneren enthalten sind, also nach (6.2) zum Beispiel

$$E_1 = 2 \cdot \frac{C_2^2}{2C_1} = \frac{C_2^2}{C_1}$$

dann ist klar, daß U_{E_1} absorbierende Menge des Phasenraums ist. Damit sind alle Voraussetzungen für die Existenz eines Attraktors gegeben, vgl. den Standardsatz aus [Tem97].

Die Attraktoren werden je nach vorgegebener Temperaturfunktion θ_0 mit \mathcal{A}_{θ_0} bezeichnet.

Die Attraktoren in Hoch- und Niedertemperaturphase

Nach den Annahmen über die zugrundeliegende freie Energie $\Phi(u_x, \theta)$ bzw. der Schaltfunktion $\phi(\theta)$ ist diese in den Bereichen $\theta \geq \theta_{end}$ bzw. $\theta \leq \theta_{start}$ bezüglich θ konstant. Diese Bereiche sollen als *Hoch-* bzw. *Niedertemperaturphase* bezeichnet werden.

Die Dynamik in den Phasen wird durch die Attraktoren beschrieben, die – im Sinne des vorangehenden Unterabschnitts – zur freien Energie $\Phi(u_x, \theta_{start})$ bzw. $\Phi(u_x, \theta_{end})$ gehören.

Der Attraktor der Hochtemperaturphase wird abkürzenderweise mit

$$\mathcal{A}_H := \mathcal{A}_{\theta_{end}}$$

bezeichnet, und entsprechend ebenso

$$\mathcal{A}_N := \mathcal{A}_{\theta_{start}}$$

Desweiteren werden mit \mathcal{B}_H und \mathcal{B}_N zwei jeweils zu den entsprechenden Attraktoren gehörigen absorbierende Mengen bezeichnet.

6.2 Dynamik der Bewegungsgleichungen zu einer Klasse von Temperaturfunktionen

Im vorangehenden Abschnitt wurde die Dynamik des Systems in Hoch- und Niedertemperaturphase beschrieben: In beiden ist das Lösungsverhalten die Konvergenz gegen den jeweiligen Attraktor. Dieses Verhalten kann ausgenutzt werden, um zu gewissen *zeitlich veränderlichen* Temperaturfunktionen die Existenz von positiv invarianten Mengen, absorbierenden Mengen und Attraktoren des Systems in geeignetem Sinne zu gewinnen. Es werden Temperaturfunktionen betrachtet, die periodisch zwischen Hoch- und Niedertemperaturphase wechseln. Für diese gilt kurz gesagt: Wenn nur Hoch- und Niedertemperaturphasen im Vergleich zu den Übergangsphasen lang genug sind, bleiben Lösungen zu beschränkten Anfangswerten für alle Zeiten beschränkt.

6.2.1 Eine gewisse Klasse von Temperaturfunktionen θ

Zunächst werde mit R_T die Klasse von zeitperiodischen Temperaturfunktionen mit Periode T bezeichnet:

$$R_T := \{\theta \in C(\mathbb{R}, L_2(\Omega)), \theta(x, t) = \theta(x, t + T) \quad \forall \quad x, t\}$$

In R_T werden insbesondere Funktionen θ_{per} betrachtet, die in gewissen Zeitintervallen der Länge T_a ganz Ω über $\theta_{c,end}$ liegen (Hochtemperatur), nach einer Übergangsphase für ein gewisses Zeitintervall der Länge T_b auf ganz Ω unter θ_{start} (Niedertemperatur), nach einer weiteren Übergangsphase auf ganz Ω wieder komplett über θ_{end} und so fort, siehe Bild 6.1.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei angenommen, daß das Ende der Hochtemperaturphase gerade bei $t = \mathbb{Z}T$ liege.

Die Klasse von Funktionen dieser Eigenschaft werde mit R_{T_1, T_a, T_2, T_b} bezeichnet:

$$\begin{aligned} \theta_{per}(x, t) &< \theta_{start} \quad \forall x \quad \text{für } t \in [T_1, T_1 + T_a] \\ \theta_{per}(x, t) &> \theta_{end} \quad \forall x \quad \text{für } t \in [T_2, T_2 + T_b = T] \end{aligned}$$

Außerhalb der Übergangsphasen der Temperaturfunktion ist das Verhalten der zugehörigen Lösung der Bewegungsgleichung gegeben durch die zwei Spezialfälle der Dynamik in der Hoch- und Niedertemperaturphase: Alle Lösungen streben gegen die jeweils vorliegenden Attraktoren \mathcal{A}_H oder \mathcal{A}_N .

In den Übergangsphasen kann über das Verhalten von Lösungen nur wenig ausgesagt werden. Aus der Existenztheorie ist nur klar, daß es keinen *blow-up* geben kann. Das System ist energetisch nicht abgeschlossen und kann über die Temperatur-Randfunktion Energie aufnehmen.

Allerdings erreicht man durch hinreichend große Wahl von T_b (und damit für hinreichend großes T), daß die aufgenommene Energie wieder dissipiert wird. Dies wird zur Konstruktion einer positiv invarianten Menge der Zeit- T -Abbildung Ψ^T ausgenutzt, und damit auch eines Attraktors \mathcal{A} unter dieser Abbildung.

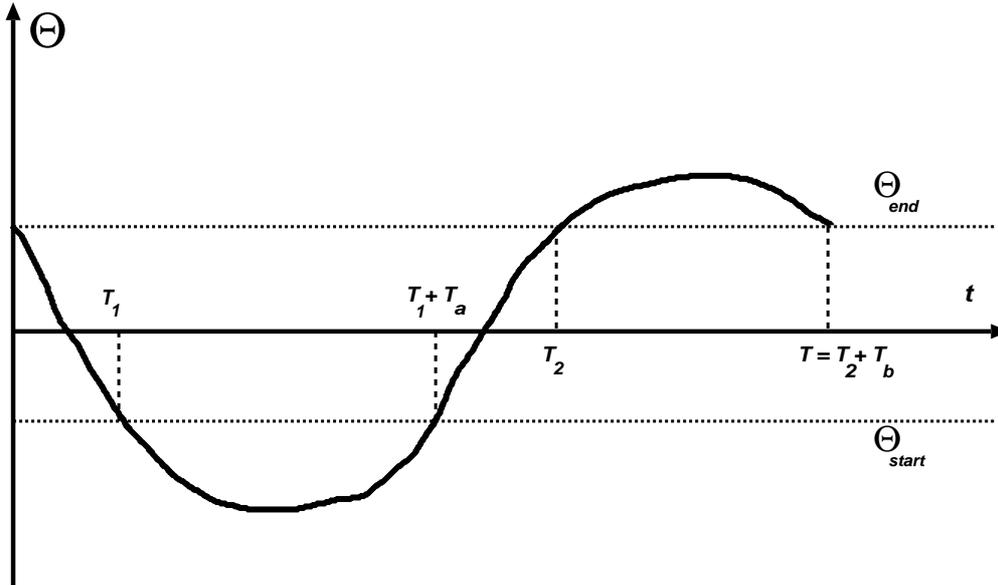


Abbildung 6.1: Skizze einer Funktion aus R_{T_1, T_a, T_2, T_b} ; die Ortsabhängigkeit wurde dabei aus darstellungstechnischen Gründen vernachlässigt.

6.2.2 Positiv invariante beschränkte Mengen \mathcal{B} unter Ψ^T

Es sei eine beschränkte Kugel \mathcal{B} um den Ursprung des Raumes Z gegeben, die die absorbierende Menge \mathcal{B}_H des Attraktors \mathcal{A}_H enthält. Dann gilt:

Satz 6.1 *Positiv invariante Menge \mathcal{B} unter R_{T, T_b}^1 für großes T_b*

Für hinreichend große Zeitdauer T_b bei beliebigen, aber fest vorgegebenen Werten für T_1, T_a, T_2 ist \mathcal{B} positiv invariant unter der Abbildung $\Psi^T \Psi^{T,0} = \Psi^{T_2+T_b, T_2} \Psi^{T_2,0}$.

Für hinreichend großes $T_b = T_b(\mathcal{U})$ gilt sogar für eine beliebige beschränkte Menge \mathcal{U} des Raumes Z mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$

$$\Psi^T \mathcal{U} \subset \mathcal{B}$$

Damit ist \mathcal{B} bezüglich Ψ^T eine absorbierende Umgebung in \mathcal{U} .

Beweis:

Betrachte das Bild $\Psi^{T_2,0} \mathcal{U}$. Dies ist nach dem Existenzsatz eine beschränkte Menge des Phasenraumes Z . Genauer gibt es eine Konstante $C = C(T_1, T_a, T_2, \mathcal{U})$ mit

$$\|\Psi^{T_2,0} \mathcal{U}\|_Z \leq C(T_1, T_a, T_2, \mathcal{U})$$

Für jede beschränkte Menge \mathcal{M} des Phasenraumes Z , insbesondere auch $\Psi^{T_2,0} \mathcal{U}$, gibt es jedoch aufgrund der Eigenschaft der absorbierenden Menge \mathcal{B}_H der Hochtemperaturphase eine Schranke $T_S = T_S(\mathcal{M})$ so, daß für $T_b > T_S$ gilt

$$\Psi^{T_2+T_b, T_2} \mathcal{M} \subset \mathcal{B}_H$$

Dies beendet den Beweis. □

6.2.3 Existenz eines Attraktors

Ohne größere Mühen kann nun die Existenz eines Attraktors \mathcal{A} in \mathcal{B} unter der Abbildung $\Psi^T = \Psi^{T+T_1+T_a, T_1+T_a}$ gefolgert werden.

Da bekannt ist, daß Ψ^T kompakte Abbildung von Z nach Z ist (in der Tat ist sogar schon $\Psi^{t+\delta, t}$ für jedes noch so kleine positive δ kompakt), folgt mit der Existenz einer absorbierenden Menge unter Ψ^T für hinreichend großes T_b und dem Standardsatz zur Existenz eines Attraktors:

Satz 6.2 *Existenz eines Attraktors \mathcal{A}*

Es existiert bezüglich der Zeit- T -Abbildung Ψ^T ein zusammenhängender kompakter Attraktor \mathcal{A} in \mathcal{B} , der dargestellt werden kann als ω -Limesmenge $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$. Der Attraktor ist eine invariante Menge unter Ψ^T und attrahiert alle Mengen aus \mathcal{U} .

Beweis: Anwendung des Standardsatzes zur Existenz von Attraktoren aus [Tem97].

□

6.3 Struktur des Attraktors \mathcal{A} im Fall $\beta^2 - 4\gamma > 0$

Für den Fall $\beta^2 - 4\gamma > 0$ lassen sich noch weitergehende Aussagen über die Struktur des Attraktors \mathcal{A} der Abbildung Ψ^T machen. Es ist aus Abschnitt 5.1 bekannt, daß sich in diesem Fall der Phasenraum Z zu jedem Zeitpunkt t in *Schichten* zerlegen läßt, deren Punkte als Anfangswerte Lösungen haben, die sich in der Zeit exponentiell schnell annähern. Außerdem ist bekannt, daß sich die Menge dieser Schichten \mathcal{S}_t über den endlichdimensionalen Vektorraum \hat{V}_p parametrisieren läßt.

Es sei mit \mathcal{R} die Menge der Schichten bezeichnet, die mit dem Attraktor \mathcal{A} Punkte gemeinsam haben:

$$\mathcal{R} = \hat{P}_0 \mathcal{A}$$

Dabei ist \hat{P}_0 die bijektive Abbildung, die jeder Schicht aus \mathcal{S}_0 ihren Durchstoßpunkt durch \hat{V}_p zuordnet; wie im letzten Kapitel definiert.

Die Menge \mathcal{R} ist eine Teilmenge von \hat{V}_p , und somit ein beschränktes, endlichdimensionales Objekt.

Es gilt folgender Satz:

Satz 6.3 *Approximationen von \mathcal{A}*

Die Folge von Mengen $(\Psi^{nT, 0} \mathcal{R})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in der Hausdorff-Topologie gegen den Attraktor \mathcal{A} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^{nT, 0} \mathcal{R} = \mathcal{A}$$

Beweis: Zunächst gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_1 so, daß $\Psi^{n_1 T, 0} \mathcal{R}$ in einer ε -Umgebung des Attraktors \mathcal{A} liegt. Dies ist aus der Tatsache ersichtlich, daß *jeder* Punkt $x \in \mathcal{R}$ in einer Schicht $S_{x,t}$ liegt, die auch einen Punkt $y \in \mathcal{A}$ des Attraktors enthält: $y \in S_{x,t}$. Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Psi^{nT, 0} x - \Psi^{nT, 0} y) = 0 \tag{6.3}$$

Desweiteren gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_2 so, daß \mathcal{A} in einer ε -Umgebung von $\Psi^{n_2 T, 0} \mathcal{R}$ liegt – denn *jeder* Punkt $y \in \mathcal{A}$ liegt in einer Schicht, die auch einen Punkt $x \in \mathcal{R}$ enthält. Mit (6.3) folgt dann die Aussage.

Kombination der beiden eben erbrachten Teilaussagen liefert dann die Behauptung.

□

Da weiterhin aus Satz 5.7 bekannt ist, daß das Volumen m -dimensionaler Volumenelemente gegen Null geht, ergibt sich außerdem, daß Hausdorff- und fraktale Dimension des Attraktors \mathcal{A} endlich sind; siehe dazu [Tem97], Kapitel V.

Kapitel 7

Numerische Resultate in einer Ortsdimension

In diesem Kapitel werden zunächst numerische Näherungslösungen zum Anfangs-Randwertproblem des vollen Falk-Systems konstruiert. Diese Approximationen beruhen auf *Diskretisierung im Ortsgebiet* $\Omega = [0, 1]$ über einem Gitter G und der Verwendung von *finiten Differenzen* auf diesem Gitter. Aufgrund der stark ausgeprägten Nichtlinearitäten auf der rechten Seite der Temperaturgleichung ist es nicht ohne weiteres möglich, Konvergenzaussagen über diese Näherungslösungen in Bezug auf die Verfeinerung der Diskretisierung zu treffen.

Desweiteren werden auf gleiche Weise auch für das System der Bewegungsgleichungen Näherungslösungen konstruiert. Diese Lösungen konvergieren bei Verfeinerung des Gitterparameters auf dem Gitter gegen exakte Lösungen der Bewegungsgleichungen, sofern diese nur hinreichend regulär sind.

7.1 Näherungslösungen zum vollen Falk-Modell

Die Gleichungen des vollen Falk-System als System erster Ordnung lauten ohne Homogenisierung der Temperaturrandvorgaben

$$\begin{aligned}u_t &= v \\v_t &= r_x(u_x, \theta) + C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} \\ \theta_t &= \kappa \theta_{xx} + \theta \sigma_\theta(u_x, \theta) v_x + \beta v_x^2\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichungen wird mit

$$F(y) = F(u, v, \theta) := \begin{pmatrix} v \\ r_x(u_x, \theta) + C_1 u_{xx} - \gamma u_{xxxx} + \beta v_{xx} \\ \kappa \theta_{xx} + \theta \sigma_\theta(u_x, \theta) v_x + \beta v_x^2 \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Damit schreiben sich die Gleichungen als Evolutionsgleichung in der Form

$$y_t = F(y, t)$$

Ziel ist nun, den Operator $F(y, t)$ durch einen Operator $F_h(y, t)$ in einem endlichdimensionalen Raum zu approximieren und dadurch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu bekommen. Als Mittel zur endlichdimensionalen Approximation werden finite Differenzen über einem Gitter G auf dem Gebiet Ω verwendet.

7.1.1 Das Gitter G

Das äquidistante Orts-Gitter G zum Gitterparameter h bezeichne die Punktmenge

$$G : \quad x \in \Omega = [0; 1] \\ x = j \cdot h \quad \text{mit} \quad j \in 0, \dots, N; \quad h = 1/N$$

Abkürzend wird in Zukunft für Funktionswerte einer Funktion f auf dem Gitter die Schreibweise

$$f_j := f(jh)$$

verwendet, der Vektor aller dieser Werte wird mit

$$f_G := (f_0, f_1, \dots, f_N)^T$$

bezeichnet. Die Einschränkung von f auf das Gitter G sei als Abbildung

$$\mathcal{G} : \quad C^0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ f \mapsto f_G$$

bezeichnet.

Damit lassen sich aus dem Falk-System die Gleichungen an den Gitterpunkten formal notieren zu

$$\begin{aligned} u_{jt} &= v_j \\ v_{jt} &= \sigma_\varepsilon(u_{jx}, \theta_j)u_{jxx} + \sigma_\theta(u_{jx}, \theta_j)\theta_{jx} + C_1u_{jxx} - \gamma u_{jxxxx} + \beta v_{jxx} \\ \theta_{jt} &= \kappa\theta_{jxx} + \theta_j\sigma_\theta(u_{jx}, \theta_j)v_{jx} + \beta v_{jx}^2 \end{aligned} \quad (7.1)$$

7.1.2 Finite Differenzen

Als nächster Schritt werden die auf den Gitterpunkten auftretenden Differentiale in Gleichung (7.1) durch finite Differenzen, also Approximationen der jeweiligen Ableitungen durch Linearkombinationen der Funktionswerte auf dem Gitter verwendet.

Es werden folgende finiten Differenzen verwendet, vgl [For88]:

$$\begin{aligned} \partial_j^1 y &:= \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ \frac{y_{j+1} - y_j}{h} & \text{für } j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{für } j = N \end{cases} \\ \tilde{\partial}_j^1 y &:= \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} & \text{für } j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{für } j = N \end{cases} \\ \partial_j^2 y &:= \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} & \text{für } j = 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{für } j = N \end{cases} \\ \partial_j^4 y &:= \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ \frac{-2y_0 + 5y_1 - 4y_2 + y_3}{h^4} & \text{für } j = 2, \dots, N-2 \\ \frac{y_{j+2} - 4y_{j+1} + 6y_j - 4y_{j-1} + y_{j-2}}{h^4} & \text{für } j = 2, \dots, N-2 \\ \frac{-2y_N + 5y_{N-1} - 4y_{N-2} + y_{N-3}}{h^4} & \text{für } j = 2, \dots, N-2 \\ 0 & \text{für } j = N \end{cases} \end{aligned}$$

Für diese Approximationen gilt für $j = 1, \dots, N - 1$, vgl. [For88]:

$$\begin{aligned} |\partial_j^1 y - y_{jx}| &\leq Ch \left\| y^{(2)} \right\| \\ |\tilde{\partial}_j^1 y - y_{jx}| &\leq Ch^2 \left\| y^{(3)} \right\| \\ |\partial_j^2 y - y_{jxx}| &\leq Ch \left\| y^{(3)} \right\| \\ |\tilde{\partial}_j^4 y - y_{jxxxx}| &\leq Ch \left\| y^{(5)} \right\| \end{aligned}$$

Dabei hängen die jeweiligen Konstanten C weder von h noch von y ab. Den Vektor der jeweiligen finiten Differenzen über alle j kürzt man mit

$$\begin{aligned} \partial^1 y &:= (\partial_j^1 y)_{j=0, \dots, N} \\ \tilde{\partial}^1 y &:= (\tilde{\partial}_j^1 y)_{j=0, \dots, N} \\ \partial^2 y &:= (\partial_j^2 y)_{j=0, \dots, N} \\ \partial^4 y &:= (\partial_j^4 y)_{j=0, \dots, N} \end{aligned}$$

ab.

Die gewählten finiten Differenzen $\partial_j^1, \partial_j^2, \partial_j^4$ haben eine wichtige Eigenschaft: Sie erfüllen ein diskretes Analogon zur partiellen Integration. Betrachtet man zwei Funktionen y und f auf dem Gitter, dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \partial_j^1 y f_j &= - \sum_{j=0}^N \partial_j^1 f y_j \quad \text{falls} \quad f_0 = f_N = 0 \\ \sum_{j=0}^N \partial_j^2 y f_j &= \sum_{j=0}^N \partial_j^2 f y_j \quad \text{falls} \quad f_0 = f_N = y_0 = y_N = 0 \\ \sum_{j=0}^N \partial_j^4 y f_j &= \sum_{j=0}^N \partial_j^2 f \partial_j^2 y \quad \text{falls} \quad f_0 = f_N = 0 \end{aligned}$$

7.1.3 Das diskretisierte System gewöhnlicher Differentialgleichungen

Es wird der Raum

$$Y_h := \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$$

eingeführt. Ersetzt man im Ausdruck für F die Differentiale auf dem Gitter G durch die finiten Differenzen, so ergibt sich zunächst ein Operator F_h mit

$$\begin{aligned} F_h &: Y_h \rightarrow Y_h \\ y \mapsto F_h(y, t) &:= \begin{pmatrix} v_G \\ \partial^1 r(\tilde{\partial}^1 u, \theta_G) + C_1 \partial^2 u - \gamma \partial^4 u + \beta \partial^2 v \\ \kappa \partial^2 \theta + \theta_G + \sigma_\theta(\partial^1 u, \theta_G) * \partial^1 v + \beta(\partial^1 v) * (\partial^1 v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei steht das Symbol $*$ für komponentenweise Multiplikation.

Um die Randbedingungen ins Spiel zu bringen, werden die „Randkomponenten“ dieses Operators entsprechend ersetzt durch

$$v_0 = v_N = \partial_0^1 r(\tilde{\partial}_0^1 u, \theta_G) + C_1 \partial_0^2 u - \gamma \partial_0^4 u + \beta \partial_0^2 v = \partial_N^1 r(\tilde{\partial}_N^1 u, \theta_G) + C_1 \partial_N^2 u - \gamma \partial_N^4 u + \beta \partial_N^2 v = 0$$

beziehungsweise

$$\theta_0 = g_{0,t}(t), \quad \theta_1 = g_{1,t}(t)$$

Um nicht zuviel an Notation einzuführen, wird der so modifizierte Operator wieder mit F_h abgekürzt.

Damit schreibt sich das diskretisierte System als Anfangswertproblem in Y_h in der Form

$$\dot{y}_h = F_h(y_h, t) \quad (7.2)$$

$$y_h(0) = y_{h,0} \in Y_h \quad (7.3)$$

Dies ist ein System von $3(N+1)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei denen die Anfangswerte durch $u(0)_G, v(0)_G, \theta(0)_G$ vorgegeben sind. Existenz lokal in der Zeit und Eindeutigkeit dieses Problems kann leicht eingesehen werden. $F_h(y_h, t)$ ist stetig in t und differenzierbar nach y_h , also auf jedem beschränkten Kompaktum lipschitz-stetig. Der Satz von Picard-Lindelöf liefert dann das Gewünschte.

Somit induziert das Problem – zumindest lokal in der Zeit, also für hinreichend kleines $|t_1 - t_0|$ – eine Evolution der Art

$$\Upsilon_h^{t_1, t_0} : Y_h \rightarrow Y_h \\ y_h(t_1) \mapsto \Upsilon_h^{t_1, t_0} y_h(t_0) = y_h(t_1)$$

7.1.4 Numerische Ergebnisse

Das System (7.2) kann mit Standard-Integratoren für steife Probleme (parabolisches Problem, vgl. [HW96]) numerisch gelöst:

Dabei wurde konkret ein Gitter mit 30 Knoten zugrundegelegt. Die Materialparameter waren gewählt zu

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1/1000, \quad \kappa = 1$$

Als Energie wurde ein Ausdruck der Art

$$\Phi = \Phi(u_x, \theta) = \Phi_1(u_x) + \phi(\theta)\Phi_2(u_x)$$

verwendet. Dabei steht $\phi(\theta)$ für die C^2 -Schaltfunktion

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{für } \theta < \theta_{krit} - d \\ 1 & \text{für } \theta > \theta_{krit} + d \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} \frac{(\theta - \theta_{krit})^5}{d^5} - \frac{10}{8} \frac{(\theta - \theta_{krit})^3}{d^3} + \frac{15}{8} \frac{\theta - \theta_{krit}}{d} + 1 \right) & \text{sonst} \end{cases}$$

Konkret wurde gewählt

$$\theta_{krit} = 1, \quad d = 0.4$$

Die Energien $\Phi_1(u_x)$ und $\Phi_2(u_x)$ haben die Form

$$\Phi_1(u_x) = C_E \cdot (u_x^2 + g(u_x)), \quad \Phi_2(u_x) = -C_E g(u_x)$$

wobei $g(x)$ eine C^2 -Funktion der Bauart

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 0 & \text{für } x > 1 \\ -x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, und C_E ein Skalierungsfaktor mit

$$C_E = 0.005$$

Als Temperatur-Randdaten kamen

$$T_0(t) = T_1(t) = 1 - 0.5 \sin(t/100)$$

zum Einsatz.

Die Anfangsdaten waren

$$u_0 = 0, \quad v_0 = (1/1000) \sin(\pi x)|_G, \quad \theta_0 = 1$$

Das System von 30 gewöhnlichen Differentialgleichungen wurde mit dem Integrator `ode15s` aus dem MATLAB-Programmpaket über dem Zeitintervall $[0, 3600]$ numerisch integriert. Die Ergebnisse des Rechenlaufs sind in der Abbildung (7.1) dargelegt.

7.2 Das reduzierte diskrete System

Will man Konvergenzaussagen bezüglich der Lösung des ursprünglichen Problems und der numerisch erzeugten Näherungen machen, so stellt sich heraus, daß die starken Nichtlinearitäten auf der rechten Seite der Temperaturgleichung sehr problematisch sind. Aus diesem Grunde soll hier, wie auch schon bei der Behandlung der Dynamik, das Konvergenzverhalten allein der Bewegungsgleichungen zu einer als Parameter vorgegebenen Temperaturrandfunktion untersucht werden. Zunächst werden die diskretisierten Versionen der L_2, H_2^1, H_2^2 -Normen eingeführt:

$$\begin{aligned} \|v\|_h &:= \sqrt{h \sum_{j=0}^N v_j^2} \\ \|u\|_{h,1} &:= \sqrt{h \sum_{j=0}^N (\partial_j^1 u)^2} \\ \|u\|_{h,2} &:= \sqrt{h \sum_{j=0}^N (\partial_j^2 u)^2} \end{aligned}$$

Für diese Normen gelten bei finiten Differenzen der Ordnung

$$\begin{aligned} |\partial_j^1 u - u_{jx}| &\leq Ch \|u\|_{C^2} \\ |\partial_j^2 u - u_{jxx}| &\leq Ch \|u\|_{C^3} \end{aligned}$$

die Approximationsaussagen

$$\begin{aligned} \left| \|v\|_h - \|v\|_{L_2} \right| &\leq Ch \|v\|_{C^1} \\ \left| \|u\|_{h,1} - \|u\|_{H_2^1} \right| &\leq Ch \|u\|_{C^2} \\ \left| \|u\|_{h,2} - \|u\|_{H_2^2} \right| &\leq Ch \|u\|_{C^3} \end{aligned}$$

Dabei hängen die jeweiligen Konstanten C weder von h noch von y ab. Nun betrachtet man im Raum

$$Z_h := \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1}$$

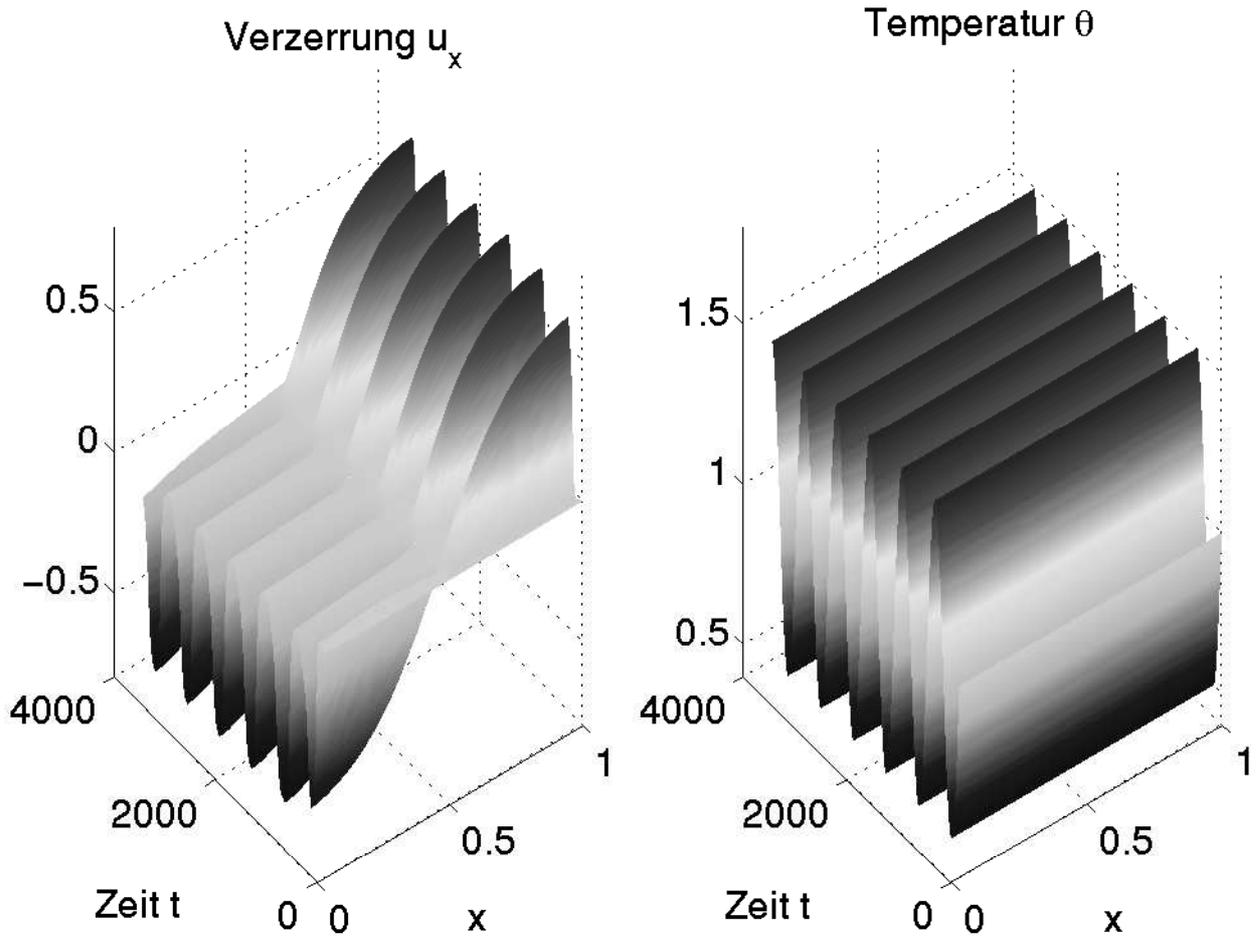


Abbildung 7.1: Ergebnis des Simulationslaufs. Es scheint so, daß der – rechts abgebildete – Verlauf der Temperatur in der Zeit annähernd periodisch ist; die Werte der Temperatur im Inneren des Ortsgebietes weichen zu jedem Zeitpunkt nur wenig von den vorgegebenen Randwerten ab. Auch die links aufgetragene Verzerrung scheint annähernd zeitperiodisches Verhalten aufzuweisen: Bei niedrigen Temperaturen ist eine zum Punkt $x = 1/2$ symmetrische Martensit-Martensit-Konfiguration zu erkennen, die jedoch bei hohen Temperaturen zur Austenit-Konfiguration mit $u_x = 0$ umschlägt.

mit Norm

$$\|z_h\|_{Z_h} := \max \left(\|v\|_h, \|u\|_{h,2} \right)$$

zu einer auf dem Gitter vorgegebenen Temperaturfunktion $\theta_G(t)$ das Anfangswertproblem

$$\dot{z}_h = W_h(z_h, t) \tag{7.4}$$

$$z_h(0) = z_0 \in Z_h \tag{7.5}$$

mit

$$W_h : Z_h \rightarrow Z_h$$

$$y \mapsto W_h(y, t) := \begin{pmatrix} v_G \\ \partial^1 r(\tilde{\partial}^1 u, \theta_G(t)) + C_1 \partial^2 u - \gamma \partial^4 u + \beta \partial^2 v \end{pmatrix}$$

Existenz lokal in der Zeit und Eindeutigkeit von Lösungen zu diesem Anfangswertproblem folgen aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Die Existenz für alle Zeiten kann mit folgender Abschätzung gezeigt werden:

Multiplikation der zweiten Gleichung mit $h \cdot v_j$ und Addition über alle j ergibt

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} h \sum_{j=0}^N v_j^2 = h \sum_{j=0}^N \partial_j^1 (\sigma(\partial_j^1 u, \theta_j)) v_j - h \sum_{j=0}^N \gamma \partial_j^4 u v_j + h \sum_{j=0}^N C_1 \partial_j^2 u v_j + h \sum_{j=0}^N \beta \partial_j^2 v v_j$$

Die verwendeten Differenzenquotienten $\partial^1, \partial^2, \partial^4$ wurden aber gerade so gewählt, daß – analog zur partiellen Integration im kontinuierlichen Falle – auch hier weiter umgeformt werden kann zu

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_h^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{h,2}^2 + \frac{C_1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{h,1}^2 + \beta \|v\|_{h,1}^2 = -h \sum_{j=0}^N (r(\partial_j^1 u, \theta_j)) \partial_j^1 v$$

Daraus ergibt sich mit der Youngschen Ungleichung weiter

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_h^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{h,2}^2 + \frac{C_1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{h,1}^2 + \frac{\beta}{2} \|v\|_{h,1}^2 \leq \frac{1}{2\beta} h \sum_{j=0}^N (r(\partial_j^1 u, \theta_j))^2$$

Wegen $h = 1/N$ und $\|r\|_\infty \leq C_2$ folgt daraus

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_h^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{h,2}^2 + \frac{C_1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{h,1}^2 + \frac{\beta}{2} \|v\|_{h,1}^2 \leq \frac{1}{2\beta} C_2^2$$

und nach Integration über $[0, T]$ und Multiplikation mit 2

$$\begin{aligned} \|v(T)\|_h^2 + \gamma \|u(T)\|_{h,2}^2 + C_1 \|u(T)\|_{h,1}^2 + \beta \int_0^T \|v(t)\|_{h,1}^2 dt \\ \leq \frac{T}{\beta} C_2^2 + \|v(0)\|_h^2 + \gamma \|u(0)\|_{h,2}^2 + C_1 \|u(0)\|_{h,1}^2 \end{aligned}$$

Damit ist die Existenz global in der Zeit gezeigt.

Die durch das System induzierte Evolution in Z_h werde mit Ψ_h bezeichnet:

$$\begin{aligned} \Psi_h^{t_1, t_0} : \quad Z_h &\rightarrow Z_h \\ z_0 &\mapsto \Psi_h^{t_1, t_0} z_0 = z_h(t_1) \end{aligned}$$

7.2.1 Linearisierung des diskreten reduzierten Systems

Als Linearisierung von (7.4) ergibt sich das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \xi_{1jt} &= \xi_{2j} \\ \xi_{2jt} &= \partial_j^1 \left(r_\varepsilon(\partial_j^1 u, \theta_j) \partial_j^1 \xi_1 \right) - \gamma \partial_j^4 u + C_1 \partial_j^2 u + \beta \partial_j^2 v \end{aligned} \quad (7.6)$$

oder kurz

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_h &= DW_h(\xi_h, t) \\ \xi_h(0) &= \xi_0 \in Z_h \end{aligned}$$

Auch hier folgt Existenz lokal in der Zeit und Eindeutigkeit aus Picard-Lindelöf. Im folgenden wird eine Abschätzung hergeleitet, die genauere Information über das Wachstum der Lösung der linearisierten Gleichung ergibt.

Wie auch schon zuvor liefert Multiplikation der zweiten Gleichung mit ξ_{2j} und Addition die Abschätzung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi_2\|_h^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|\xi_1\|_{h,2}^2 + \frac{C_1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi_1\|_{h,1}^2 + \frac{\beta}{2} \|\xi_2\|_{h,1}^2 \leq \frac{C}{2\beta} \|\xi_1\|_{h,1}^2$$

Daraus gewinnt man

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi_2\|_h^2 + \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|\xi_1\|_{h,2}^2 + \frac{C_1}{2} \frac{d}{dt} \|\xi_1\|_{h,1}^2 \leq \frac{2C}{C_1\beta} \left(\frac{1}{2} \|\xi_2\|_h^2 + \frac{C_1}{2} \|\xi_1\|_{h,1}^2 + \frac{\gamma}{2} \|\xi_1\|_{h,2}^2 \right)$$

Anwendung des Gronwallschen Lemmas ergibt daraus

$$\left(\|\xi_2(t)\|_h^2 + C_1 \|\xi_1(t)\|_{h,1}^2 + \gamma \|\xi_1(t)\|_{h,2}^2 \right) \leq e^{\frac{2C}{C_1\beta} T} \left(\|\xi_2(0)\|_h^2 + C_1 \|\xi_1(0)\|_{h,1}^2 + \gamma \|\xi_1(0)\|_{h,2}^2 \right)$$

Damit ist klar, daß für die Evolution der linearisierten Gleichung

$$\begin{aligned} D\Psi_{h,z_{h,0}}^{t_1,t_0} : \quad Z_h &\rightarrow Z_h \\ \xi_0 &\mapsto D\Psi_h^{t_1,t_0} \xi_0 = \xi_h(t_1) \end{aligned}$$

entlang der zum Anfangswert $z(t_0) = z_0$ gehörigen Lösung $z(t)$ die Normabschätzung

$$\left\| D\Psi_{h,z_{h,0}}^{t_1,t_0} \right\| \leq e^{\frac{2C}{C_1\beta}(t_1-t_0)}$$

gilt, wobei C nicht von h abhängt. Diese Abschätzung spielt eine wichtige Rolle bei der Untersuchung zur Konvergenz.

7.2.2 Konvergenz bei Verfeinerung des Gitters

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, eine Lösung $z = (u, v)^T$ der Bewegungsgleichungen des Falk-Systems auf dem Zeitintervall $[0, T]$ zu haben, welche folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} u &\in C^1([0, T]; C^0(\Omega)); & v &\in C^1([0, T]; C^0(\Omega)) \\ u(t) &\in C^5(\Omega) & \forall t \in [0, T] & \text{ für } \gamma > 0 \\ u(t) &\in C^3(\Omega) & \forall t \in [0, T] & \text{ für } \gamma = 0 \\ v(t) &\in C^3(\Omega) & \forall t \in [0, T] & \end{aligned}$$

Eine Lösung mit diesen Eigenschaften ergibt durch Projektion auf das Gitter G in ihren beiden Komponenten u und g eine differenzierbare Kurve z_G im Raum Z_h .

Nun soll untersucht werden, inwieweit diese Kurve z_G in Z_h mithilfe der endlichdimensionalen Evolutionsabbildung $\Psi_h^{T,0}$ approximiert werden kann.

Der globale Fehler

Der globale Fehler

$$e_h(T) := z_G(T) - \Psi_h^{T,0} z_G(0)$$

läßt sich aufgrund der Differenzierbarkeit von $\Psi_h^{t,0}$ in Z_h darstellen durch

$$z_G(T) - \Psi_h^{T,0} z_G(0) = \int_0^T D\Psi_{h,z_G(\tau)}^{T,\tau} \left(F_G(z(\tau), \tau) - W_h(z_G(\tau), \tau) \right) d\tau$$

vgl. dazu auch Satz 5.4 mit der gleichen Beweisidee. Daraus läßt sich die Abschätzung

$$\left\| z_G(T) - \Psi_h^{T,0} z_0 \right\|_{Z_h} \leq \int_0^T e^{\frac{2C}{C_1\beta}(T-\tau)} \|F_G(z(\tau), \tau) - W_h(z_G(\tau), \tau)\|_{Z_h} d\tau$$

gewinnen, und weiter

$$\begin{aligned} \left\| z_G(T) - \Psi_h^{T,0} z_0 \right\|_{Z_h} &\leq \int_0^T e^{\frac{2C}{C_1\beta}(T-\tau)} d\tau \cdot \max_{0 \leq \tau \leq T} \|F_G(z(\tau), \tau) - W_h(z_G(\tau), \tau)\|_{Z_h} \\ &\leq \frac{C_1\beta}{2C} e^{\frac{2C}{C_1\beta}T} \max_{0 \leq \tau \leq T} \|F_G(z(\tau), \tau) - W_h(z_G(\tau), \tau)\|_{Z_h} \end{aligned}$$

Nun sucht man nach einer Abschätzung für $\|F_G(z(\tau), \tau) - W_h(z_G(\tau), \tau)\|_{Z_h}$. An dieser Stelle kommen die Regularitätsannahmen über die Lösung $z(t)$ ins Spiel, nämlich

$$\begin{aligned} u(t) &\in C^5(\Omega) \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{für } \gamma > 0 \\ u(t) &\in C^3(\Omega) \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{für } \gamma = 0 \\ v(t) &\in C^3(\Omega) \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Mit ihnen ist es möglich, das asymptotische Verhalten von $\|F_G(z(\tau), \tau) - W_h(z_G(\tau), \tau)\|_{Z_h}$ für $h \rightarrow 0$ anzugeben.

In der ersten Komponente entsteht kein Fehler, da auf der rechten Seite gerade die exakten Werte von v auf dem Gitter, also die v_j stehen.

In der zweiten Komponente gilt aufgrund der verwendeten Differenzenapproximationen für die linearen Terme

$$\begin{aligned} \left\| u_G^{(4)} - \partial^4 u \right\|_h &\leq C \|u\|_{C^5} h \\ \left\| u_G^{(2)} - \partial^2 u \right\|_h &\leq C \|u\|_{C^3} h \\ \left\| v_G^{(2)} - \partial^2 v \right\|_h &\leq C \|v\|_{C^3} h \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für den nichtlinearen Term

$$\begin{aligned} \left| \partial_j^1 \left(r(\tilde{\partial}_j^1 u, \theta_j) \right) - r_{jx} \right| &\leq \left| \partial_j^1 \left(r(\tilde{\partial}_j^1 u, \theta_j) \right) - \partial_j^1 r \right| + \left| \partial_j^1 r - r_{jx} \right| \\ &\leq \left| \partial_j^1 \left(r(\tilde{\partial}_j^1 u, \theta_j) - r(u_{xj}, \theta_j) \right) \right| + C \|r\|_{C^2} h \\ &\leq \frac{C}{h} \|u\|_{C^3} h^2 + C \|r\|_{C^2} h \\ &\leq Ch \|u\|_{C^3} \end{aligned}$$

Dabei geht die Regularität von r ein, sowie die Regularität von u .

Aus diesen Punkten ergibt sich zusammen:

$$\|F_G(z(\tau), \tau) - W_h(z_G(\tau), \tau)\|_{Z_h} \leq C \left(\|u(\tau)\|_{C^5} + \|v(\tau)\|_{C^3} \right) \cdot h$$

Schlußendlich ergibt sich für die Norm des globalen Fehlers

$$\|e_h(T)\|_{Z_h} \leq \frac{C_1\beta}{2C} e^{\frac{2C}{C_1\beta}T} \left(\max_{0 \leq \tau \leq T} C \left(\|u(\tau)\|_{C^5} + \|v(\tau)\|_{C^3} \right) \cdot h \right)$$

und damit die Konvergenz der numerischen Näherungslösung in der Z_h -Norm gegen die exakte Lösung.

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 7.1 *Konvergenz der Näherungslösungen auf dem Gitter gegen die exakte Lösung.*

Es sei auf dem Zeitintervall $[0, T]$ eine Lösung z des reduzierten Falk-Modells gegeben, welche

$$\begin{aligned} u &\in C^1([0, T]; C^0(\Omega)); & v &\in C^1([0, T]; C^0(\Omega)) \\ u(t) &\in C^5(\Omega) & \forall t \in [0, T] & \text{ für } \gamma > 0 \\ u(t) &\in C^3(\Omega) & \forall t \in [0, T] & \text{ für } \gamma = 0 \\ v(t) &\in C^3(\Omega) & \forall t \in [0, T] & \end{aligned}$$

erfüllt. Dann gilt

$$\left\| z_G(T) - \Psi_h^{T,0} z(0) \right\|_{Z_h} \leq C(T, z) \cdot h$$

wobei $C(T, z)$ eine Konstante bezeichnet, die von T und der exakten Lösung z abhängt, nicht aber von h . Dies bedeutet, daß die Näherungslösung in der Z_h -Norm mindestens linear in h gegen die exakte Lösung konvergiert.

7.3 Quasiplastizität und Pseudoelastizität

Die beiden für Formgedächtnismaterialien typischen Effekte der *Quasiplastizität* und der *Pseudoelastizität* lassen sich auch am numerischen Versuch beobachten. Allerdings reicht es zu diesem Zweck nicht mehr aus, Energien zu verwenden, die nur höchstens zwei Minima aufweisen, sondern man benötigt Energien mit drei Minima, wie zum Beispiel unten angegeben.

7.3.1 Energien und Randdaten

Zu gegebener, in Ort und Zeit konstanter Temperaturfunktion untersucht man das Anfangswertproblem gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{z}_h = \hat{W}_h(z_h, t) \tag{7.7}$$

$$z_h(0) = 0 \tag{7.8}$$

wobei der Operator $\hat{W}_h(z_h, t)$ bis auf die Werte am rechten Rand des Gitters G identisch zu $W_h(z_h, t)$ ist. An besagtem rechten Rand wird die Randbedingung

$$u_{Ntt} = \frac{1}{h} \left(f(t) - \sigma(\hat{\partial}^1 u, \theta) + \gamma \hat{\partial}^3 u - \beta \hat{\partial}^1 v \right)$$

im Operator eingesetzt, vgl. dazu auch die Randvorgaben aus [SZ99]. Die Ausdrücke $\hat{\partial}^1 u$, $\hat{\partial}^3 u$, $\hat{\partial}^1 v$ sind dabei Differenzenapproximationen der jeweiligen Ableitung am rechten Rand, die Funktion $f(t)$ steht für eine Kraft, die am rechten Randpunkt wirkt. Konkret wird

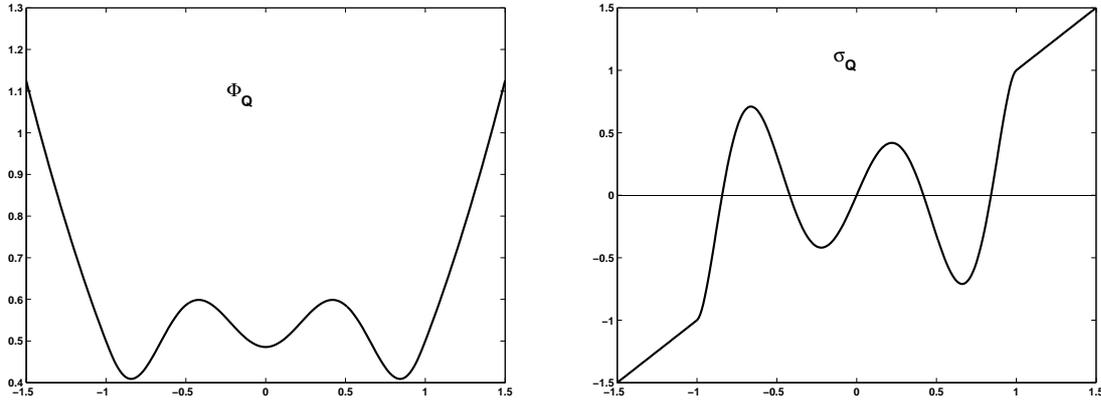
$$f(t) = \frac{3}{2} \sin(t/100)$$

verwendet. Die Materialparameter waren in allen Testrechnungen gewählt zu

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1/1000, \quad \kappa = 1$$

Die freie Energie $\Phi_Q \in C^2$, welche für die Quasiplastizität verwendet wurde, schreibt sich

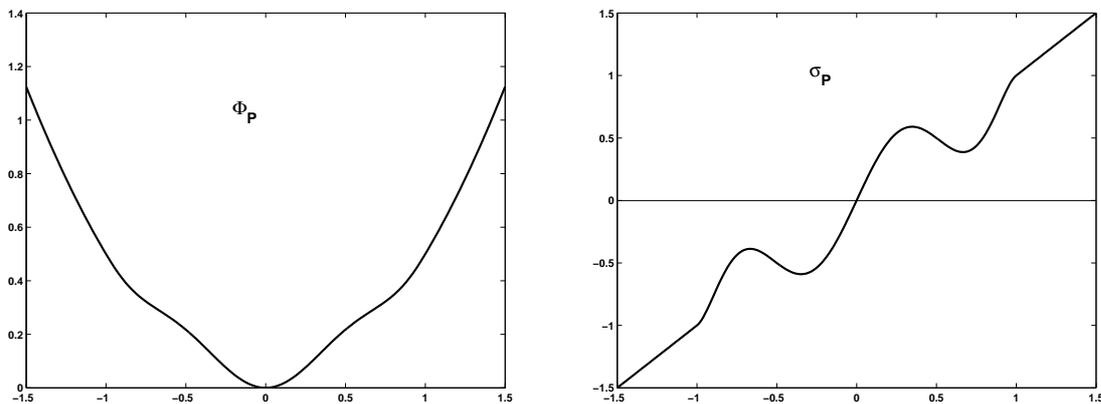
$$\Phi_Q(u_x) := \begin{cases} u_x^2 & \text{für } |u_x| \geq 1 \\ u_x^2 - 2,5u_x^8 + 7u_x^6 - 6u_x^4 + u_x^2 + \frac{1}{2} & \text{für } |u_x| < 1 \end{cases}$$



Freie Energie Φ_Q links und dazugehörige Spannungsfunktion σ

Die freie Energie $\Phi_P \in C^2$, welche für die Pseudoelastizität verwendet wurde, schreibt sich

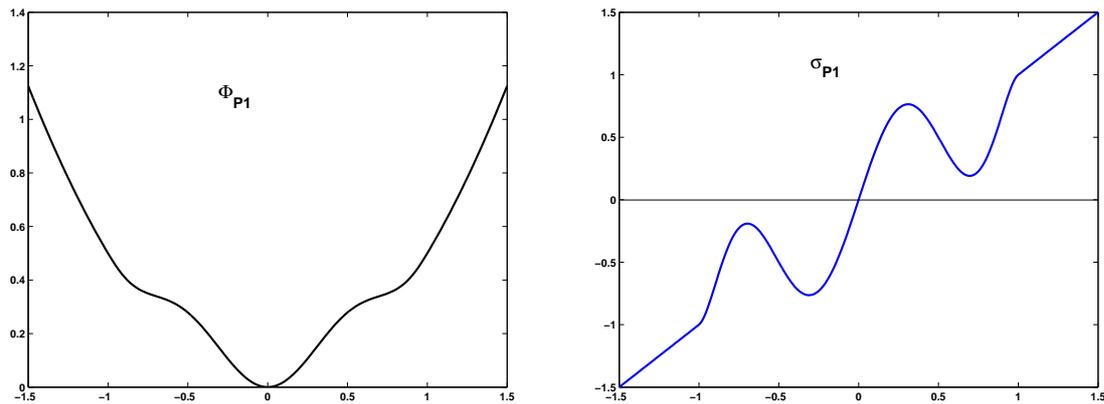
$$\Phi_P(u_x) := \begin{cases} u_x^2 & \text{für } |u_x| \geq 1 \\ u_x^2 + 0,3(-3u_x^8 + 9u_x^6 - 9u_x^4 + -3u_x^2) & \text{für } |u_x| < 1 \end{cases}$$



Freie Energie Φ_P links und dazugehörige Spannungsfunktion σ

Daneben wurden noch zwei weitere Energien Φ_{P1} und Φ_{P2} verwendet, die Resultate qualitativ zwischen den Resultaten der beiden Energien Φ_Q und Φ_P liefern:

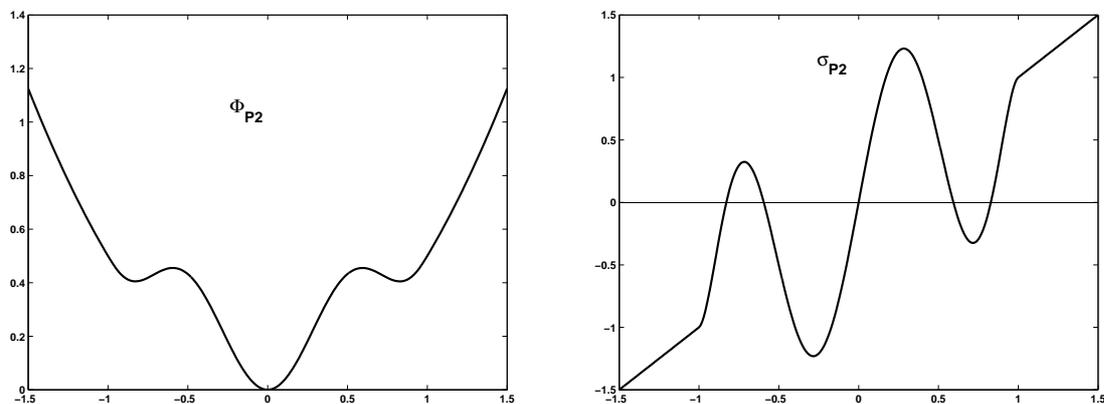
$$\Phi_{P1}(u_x) := \begin{cases} u_x^2 & \text{für } |u_x| \geq 1 \\ u_x^2 + 0,5(-3u_x^8 + 9u_x^6 - 9u_x^4 + -3u_x^2) & \text{für } |u_x| < 1 \end{cases}$$



Freie Energie Φ_{P1} links und dazugehörige Spannungsfunktion σ

und

$$\Phi_{P2}(u_x) := \begin{cases} u_x^2 & \text{für } |u_x| \geq 1 \\ u_x^2 + 1(-3u_x^8 + 9u_x^6 - 9u_x^4 + -3u_x^2) & \text{für } |u_x| < 1 \end{cases}$$



Freie Energie Φ_{P2} links und dazugehörige Spannungsfunktion σ

7.3.2 Resultate

Die vier Abbildungen 7.2, 7.3, 7.4, 7.5 zeigen die Kurven $(u_N(t), f(t))$, also sogenannte *Last-Verzerrungs-Diagramme*. Je nach verwendeter freier Energie ergeben sich Kurven mit zwei kleinen Hysteresisschleifen, einer großen Hysteresisschleife oder Zwischenstufen.

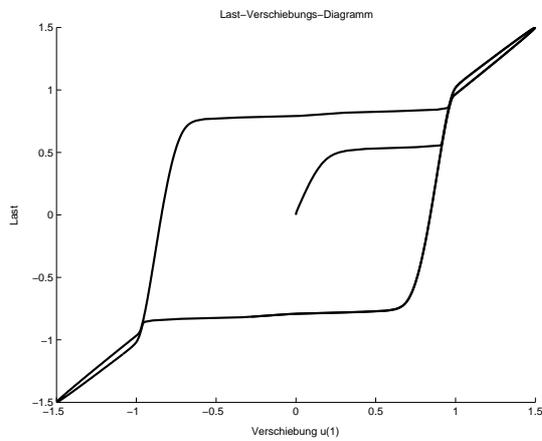


Abbildung 7.2: Quasi-Plastizität. Die freie Energie Φ_Q hat zwei Minima links und rechts der Null, welche tiefer liegen als das Minimum bei Null.

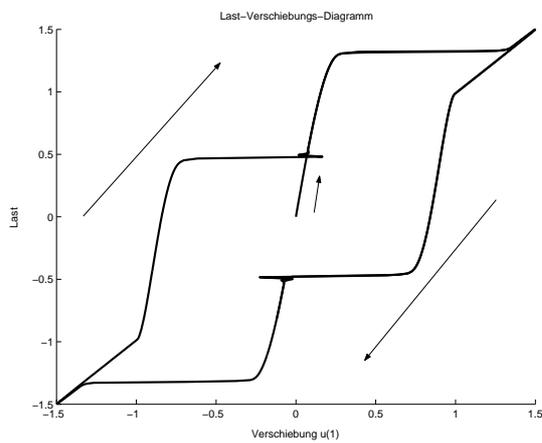


Abbildung 7.3: Zwischenstufe 2. Die freie Energie Φ_{P_2} hat zwei Minima links und rechts der Null, welche höher liegen als das Minimum bei Null.

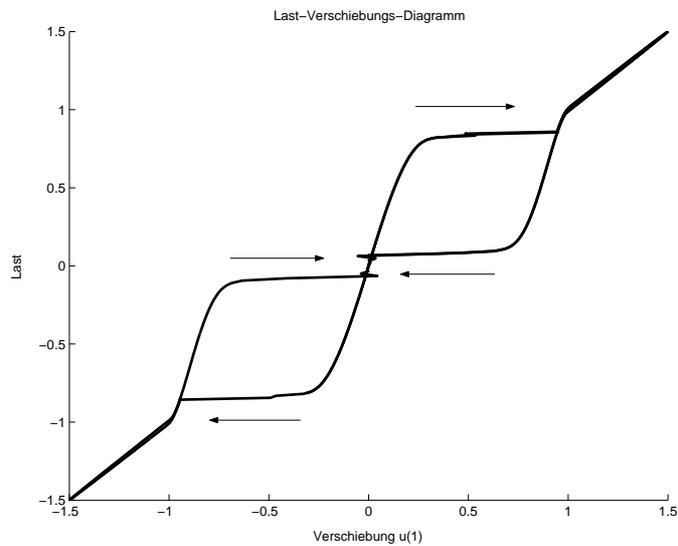


Abbildung 7.4: Zwischenstufe 1. Die freie Energie Φ_{P_1} nur ein Minimum bei Null, ist allerdings nicht konvex.

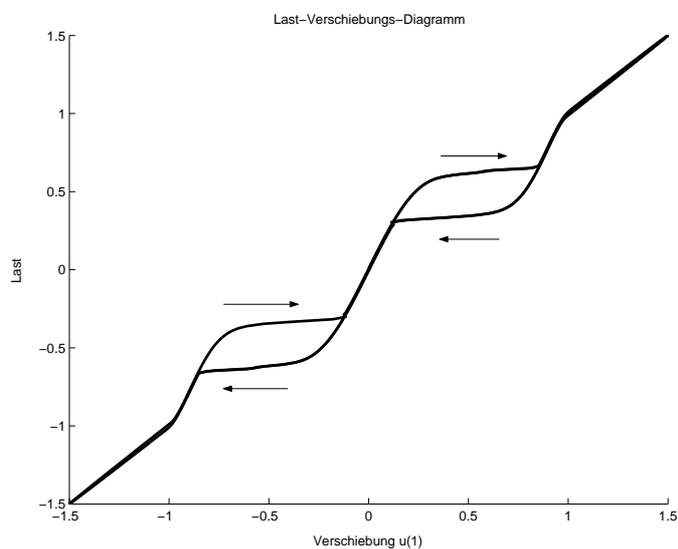


Abbildung 7.5: Pseudoelastizität: Wie in der Zwischenstufe 1 hat die freie Energie Φ_P nur ein Minimum bei Null, ist allerdings nicht konvex. Der lineare Bereich um die Null ist größer als in Zwischenstufe 1.

Kapitel 8

Numerische Resultate in zwei Ortsdimensionen

In diesem Kapitel wird eine mehrdimensionale Erweiterung des Falk-Modells vorgestellt. Für den zweidimensionalen Fall werden Resultate aus numerischen Testrechnungen präsentiert.

8.1 Das Falk-Modell in höheren Ortsdimensionen

Eine Verallgemeinerung des eindimensionalen Falk-Modells lautet:

$$\begin{aligned}\rho u_{tt} &= \operatorname{Div}(\sigma(\nabla u, \theta) + \beta \rho \nabla u_t) - \gamma \Delta^2 u \\ \theta_t &= \kappa \Delta \theta + \theta \sigma_\theta(\nabla u, \theta) : \nabla u_t + \beta \nabla u_t : \nabla u_t\end{aligned}$$

Dabei steht u für die Verschiebung, die aus der Deformation y entsteht durch

$$u(x, t) := y(x, t) - x$$

Im Folgenden werden diese Gleichungen für (t, x) im Zylinder $[0, T] \times \Omega$ betrachtet, wobei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ für die Referenzkonfiguration des betrachteten Materials steht. Die unbekannte Verschiebung u ist eine Funktion

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

während die Temperatur θ eine skalare Funktion

$$\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

ist.

Randbedingungen für die Gleichungen können auf verschiedene Art und Weise vorgeschrieben werden. Hier sollen hinreichend glatte Dirichlet-Randdaten für die Temperatur gewählt werden, und außerdem Dirichlet-Nullranddaten für die Verschiebung u und auch für $\Delta u = 0$.

Als Anfangsbedingungen $u(0), \theta(0)$ seien ebenfalls hinreichend reguläre Funktionen vorgegeben. Das mehrdimensionale Analogon zur Verzerrung $u_x + 1$ im eindimensionalen ist der Verzerrungstensor ∇y mit der Gestalt

$$\nabla y = \begin{pmatrix} y_{11} := \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & y_{12} := \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ y_{21} := \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & y_{22} := \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

8.1.1 Die freie Energie

Wie auch im eindimensionalen Fall werden die materialtypischen Eigenschaften von Formgedächtnismaterialien über eine nicht-konvexe freie Energie $\Phi = \Phi(\nabla u, \theta)$ modelliert.

Die verwendete freie Energie soll einige physikalisch motivierte Eigenschaften besitzen: Zum einen soll sie rahmeninvariant sein, d.h. vom Standpunkt des Betrachters unabhängig. Zum anderen soll sich der Wert der freien Energie bei kristallographisch nicht unterscheidbaren Konfigurationen des Materials nicht unterscheiden.

Diese beiden Bedingungen bedeuten mathematisch, daß $\Phi = \Phi(\nabla u, \theta)$ gewisse Symmetrien erfüllen muß. Um systematisch Energien dieser Bauart zu konstruieren, hat sich die *Orbitraumtheorie* als nützliches Werkzeug erwiesen, vgl. [RS01, Zim04, DZ04]. Mithilfe dieser Theorie faßt man kristallographisch gleiche Konfigurationen des Kristalls zu einem Objekt zusammen und weist der daraus entstandenen Menge eine Funktion zu, welche automatisch die erforderlichen Symmetrien besitzt.

Aus der Forderung der Rahmeninvarianz liest man ab, daß Φ nur von den Einträgen des symmetrischen Tensors

$$C = C(\nabla u) = (\nabla y)^T (\nabla y) - id = (\nabla u + id)^T (\nabla u + id) - id = \begin{pmatrix} e_1 := u_{11}^2 + 2u_{11} + u_{21}^2 & e_3 := (1 + u_{11})u_{12} + u_{21}(1 + u_{22}) \\ e_3 := (1 + u_{11})u_{12} + u_{21}(1 + u_{22}) & e_2 := u_{12}^2 + (1 + u_{22})^2 \end{pmatrix}$$

abhängen darf.

Es soll ein Material mit folgenden Eigenschaften simuliert werden:

- In der Hochtemperaturphase ist nur die tetragonale, unverzerrte Kristallphase stabil; bildlich gesprochen sind quadratische Gitterzellen des Kristalls energetisch am günstigsten.
- In der Niedertemperaturphase sind nur orthorhombische Kristallphasen stabil; bildlich gesprochen ist eine rechteckige Form der Gitterzellen mit unterschiedlichen Seitenlängen energetisch am günstigsten.

Um eine Energie zu konstruieren, welche diese Eigenschaften mit sich bringt, und die auch berücksichtigt, daß die beiden orthorhombischen Varianten energetisch gleichwertig sein müssen, sucht man Polynome in den Einträgen e_1, e_2, e_3 von C , welche unter der Drehung, die eine orthorhombische Variante auf die andere abbildet, invariant sind. Es ergibt sich, daß die drei Polynome

$$\begin{aligned} \rho_1(e_1, e_2, e_3) &= e_1 + e_2 \\ \rho_2(e_1, e_2, e_3) &= e_1^2 + e_2^2 \\ \rho_3(e_1, e_2, e_3) &= e_3^2 \end{aligned}$$

diese Eigenschaft erfüllen, und mit ihnen auch alle aus ihnen gebildeten Polynome. Konsequenterweise setzt man für die freie Energie ein (von θ abhängiges) Polynom $\tilde{\rho}$ in (ρ_1, ρ_2, ρ_3) an. Dieses muß in der Hochtemperaturphase ein Minimum für

$$u_{11} = u_{12} = u_{21} = u_{22} = 0$$

beziehungsweise für

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0$$

haben. In der Niedertemperaturphase liege die optimale Konfiguration bei

$$u_{11} = \alpha, \quad u_{22} = -\alpha, \quad u_{12} = u_{21} = 0$$

für $\alpha \in (-1, 1)$, $\alpha \neq 1$. Daraus ergibt sich für die ausgewählten Kristallvarianten für die Polynome

$$\begin{aligned} \rho_1(e_1, e_2, e_3) &= \alpha^2 + 2\alpha =: C_1 \\ \rho_2(e_1, e_2, e_3) &= \alpha^2 - 2\alpha =: C_2 \\ \rho_3(e_1, e_2, e_3) &= 0 \end{aligned}$$

Wählt die Energien

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 \\ \Phi_2 &= (\rho_1 - C_1)^2 + (\rho_2 - C_2)^2 + \rho_3^2 \end{aligned}$$

und eine Schaltfunktion $\phi(\theta)$ mit

$$\phi(\theta_{c,start}) = 0, \quad \phi(\theta_{c,end}) = 1$$

und innerhalb des Intervalls $[\theta_{c,start}, \theta_{c,end}]$

$$\frac{d}{d\theta}\phi(\theta) \geq 0$$

und setzt diese Funktionen zur Energie

$$\Phi(\nabla u, \theta) = (1 - \phi(\theta))\Phi_2(\nabla u) + \phi(\theta)\Phi_1(\nabla u)$$

zusammen, dann erfüllt $\Phi(\nabla u, \theta)$ diese Eigenschaften.

Aus $\Phi(\nabla u, \theta)$ ergibt sich der Spannungstensor $\sigma(\nabla u, \theta)$ durch Differenzieren nach dem Verzerungstensor

$$\sigma(\nabla u) = \frac{\partial \Phi}{\partial \nabla u}(\nabla u)$$

Für die numerische Implementation günstiger hat sich der gleichwertige Ausdruck

$$\sigma(\nabla u) = \frac{\partial \Phi}{\partial \nabla u}(\nabla u) = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial E}(E(\nabla u)) \cdot \frac{\partial E}{\partial \nabla u}(\nabla u)$$

erwiesen. Dabei ist $\tilde{\Phi}$ die freie Energie in Abhängigkeit von (e_1, e_2, e_3) .

Im konkreten Fall ergibt sich für die Komponenten von $\frac{\partial E}{\partial \nabla u}(\nabla u)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial u_{21}}(\nabla u) &= 2u_{21} & \frac{\partial e_1}{\partial u_{22}}(\nabla u) &= 0 \\ \frac{\partial e_2}{\partial u_{21}}(\nabla u) &= 0 & \frac{\partial e_2}{\partial u_{22}}(\nabla u) &= 2u_{22} + 2 \\ \frac{\partial e_3}{\partial u_{21}}(\nabla u) &= u_{22} + 1 & \frac{\partial e_3}{\partial u_{22}}(\nabla u) &= 2u_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_1}{\partial u_{21}}(\nabla u) &= 2u_{21} & \frac{\partial e_1}{\partial u_{22}}(\nabla u) &= 0 \\ \frac{\partial e_2}{\partial u_{21}}(\nabla u) &= 0 & \frac{\partial e_2}{\partial u_{22}}(\nabla u) &= 2u_{22} + 2 \\ \frac{\partial e_3}{\partial u_{21}}(\nabla u) &= u_{22} + 1 & \frac{\partial e_3}{\partial u_{22}}(\nabla u) &= 2u_{21} \end{aligned}$$

Für die Komponenten der Ableitung der Energie Φ nach e_1, e_2, e_3 ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial e_1}(E(\nabla u)) &= 2(e_1 + e_2 - C_1) + 2(e_1^2 + e_2^2 - C_2) \cdot 2e_1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial e_2}(E(\nabla u)) &= 2(e_1 + e_2 - C_1) + 2(e_1^2 + e_2^2 - C_2) \cdot 2e_2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial e_3}(E(\nabla u)) &= 4e_3^3 \end{aligned}$$

8.2 Numerische Implementierung

Die Vorgehensweise zur Implementierung besteht darin, durch eine Ortsdiskretisierung das System zweier partieller Differentialgleichungen in ein endlichdimensionales System von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen umzuwandeln. Dieses kann dann unter Verwendung von bewährten Integratoren effizient gelöst werden.

8.2.1 Das Gitter

Zur Ortsdiskretisierung wird auf dem betrachteten Gebiet $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ ein äquidistantes Schachbrettgitter G eingeführt.

$$G : (x_1, x_2) \in \Omega \\ (x_1, x_2) = (i \cdot h, j \cdot h) \quad \text{with} \quad i, j \in 0, \dots, N; \quad h = 1/N$$

Der Parameter h steht dabei für die Gitterweite.

Die unbekannt Funktionen u und θ werden auf diesem Gitter durch die endlichdimensionalen Vektoren der jeweiligen Funktionswerte auf dem Gitter $u|_G$ (in jeder der beiden Komponenten von u) und $\theta|_G$ repräsentiert.

8.2.2 Finite Differenzen

Nachdem das Gitter eingeführt ist, werden die auf der rechten Seite auftretenden Differentialausdrücke (Ableitungen im Ort) mittels finiter Differenzen über dem Gitter approximiert. Beispielsweise wird für den Gradienten ∇f einer skalaren Funktion f über dem Gitter die Näherung

$$\nabla_h f(i, j) := \begin{pmatrix} (f|_G(i+1, j) - f|_G(i-1, j))/2h \\ (f|_G(i, j+1) - f|_G(i, j-1))/2h \end{pmatrix} \approx \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}|_G(i, j) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}|_G(i, j) \end{pmatrix}$$

verwendet, der Laplace-Operator Δf wird mit

$$\Delta_h f(i, j) := \\ (f|_G(i+1, j) + f|_G(i-1, j) + f|_G(i, j+1) + f|_G(i, j-1) - 4f|_G(i, j))/h^2 \approx \Delta f|_G(i, j)$$

approximiert. Für nicht-skalare Funktionen u werden die entsprechenden Ausdrücke komponentenweise nach obigen Regeln approximiert.

Die angegebenen Ausdrücke sind am Rand des Gitters nicht definiert; hier müssen asymmetrische Varianten obiger Differenzensterne gewählt werden, die zusätzlich auch kompatibel zu den vorgeschriebenen Randbedingungen sind.

8.2.3 Ortsdiskretisierung

Das Falk-Modell wird nun an den Gitterpunkten betrachtet:

$$\begin{aligned} \rho u_{tt}(i, j) &= \text{Div}(\sigma(\nabla u(i, j), \theta(i, j)) + \beta \rho \nabla u_t(i, j)) - \gamma \Delta^2 u(i, j) \\ \theta_t(i, j) &= \kappa \Delta \theta(i, j) + \theta(i, j) \sigma_\theta(\nabla u(i, j), \theta(i, j)) : \nabla u_t(i, j) + \beta \nabla u_t(i, j) : \nabla u_t(i, j) \end{aligned}$$

für alle (i, j) . Die Differentialausdrücke der rechten Seite werden daraufhin durch die FD-Approximationen ersetzt:

$$\rho u_{tt}(i, j) = \text{Div}_h(\sigma(\nabla_h u(i, j), \theta(i, j))) + \beta \rho \nabla_h u_t(i, j) - \gamma \Delta_h^2 u(i, j) \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \theta_t(i, j) = & \kappa \Delta_h \theta(i, j) + \theta(i, j) \sigma_\theta(\nabla_h u(i, j), \theta(i, j)) : \nabla_h u_t(i, j) + \\ & \beta \nabla_h u_t(i, j) : \nabla_h u_t(i, j) \end{aligned} \quad (8.2)$$

Dies ist ein System von $((1/h) + 1)^2$ gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Anfangswerte sind gerade die Werte der Anfangsdaten auf dem Gitter.

Dieses System kann mit gebräuchlichen Integratoren (z.B. aus MATLAB) gelöst werden.

8.2.4 Ergebnisse

Entsprechend der Vorgehensweise der letzten Abschnitte wurden numerische Lösungen für (8.1) erzeugt.

Dabei wurde ein Gitter mit 9 Knoten in jeder Richtung zugrundegelegt. Die Materialparameter sind gewählt zu

$$\beta = 1, \quad \gamma = 1/1000, \quad \kappa = 10$$

Als Energie wurde der bereits oben beschriebene Ausdruck verwendet, wobei die Parameter der Schaltfunktion gewählt waren zu

$$\theta_{krit} = 1, \quad d = 0.1$$

Als Temperatur-Randdaten kamen

$$T_0(t) = T_1(t) = 1 - 0.5 \sin(t/100)$$

zum Einsatz, vgl. Abbildung (8.2.4). Die Anfangsdaten für Geschwindigkeit und Temperatur waren

$$v_0|_G = 0, \quad \theta_0|_G = 1$$

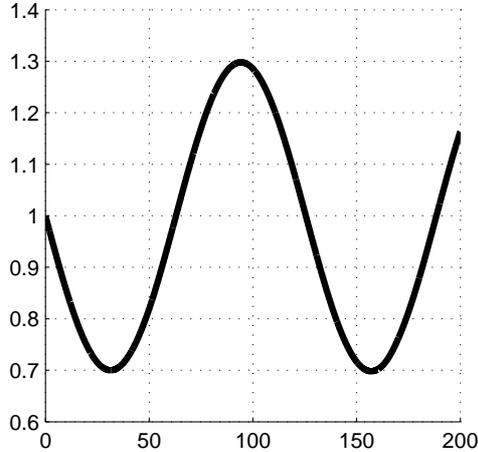


Abbildung 8.1: Temperatur am Rand

Die Anfangswerte für die Verschiebung waren vorgegeben durch eine Funktion, die auf den inneren Punkten des Gitters G zufällige Werte im Bereich $[-1/10; 1/10]$ annimmt, während sie auf den Randpunkten des Gitters entsprechend den Vorgaben gleich Null ist.

Das System von 81 gewöhnlichen Differentialgleichungen wurde mit dem Integrator `ode15s` aus dem

MATLAB-Programmpaket über dem Zeitintervall $[0, 200]$ numerisch integriert. Die Ergebnisse des Rechenlaufs sind in den folgenden Abbildungen dargelegt.

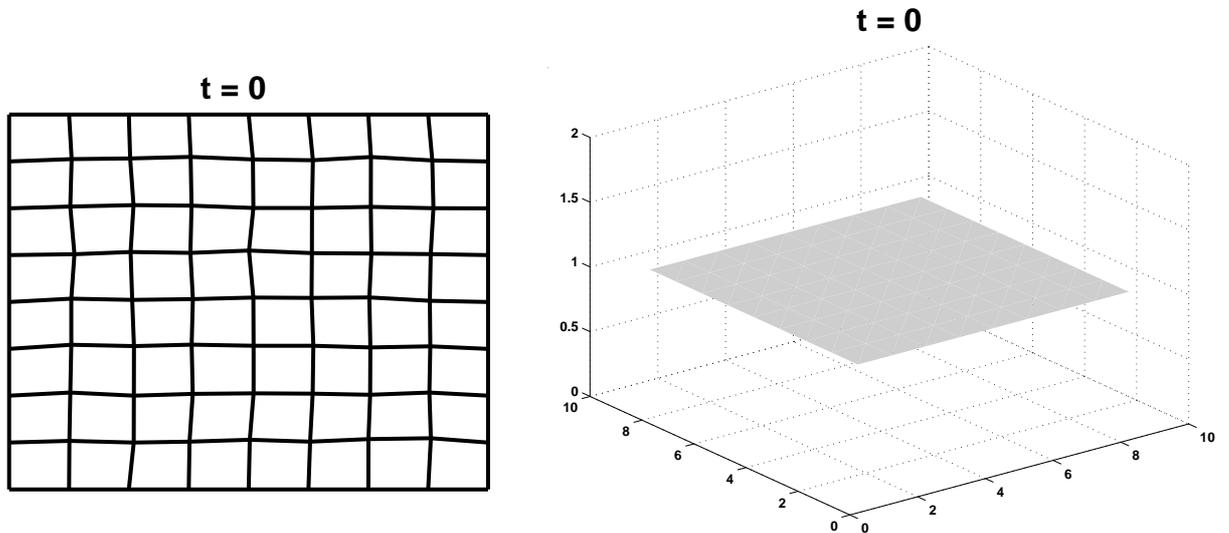


Abbildung 8.2: Der Ausgangszustand des Systems – Die Temperatur liegt bei $\theta = 1$, die Verschiebung ist durch die stochastische Störung auf dem Gitter gegeben

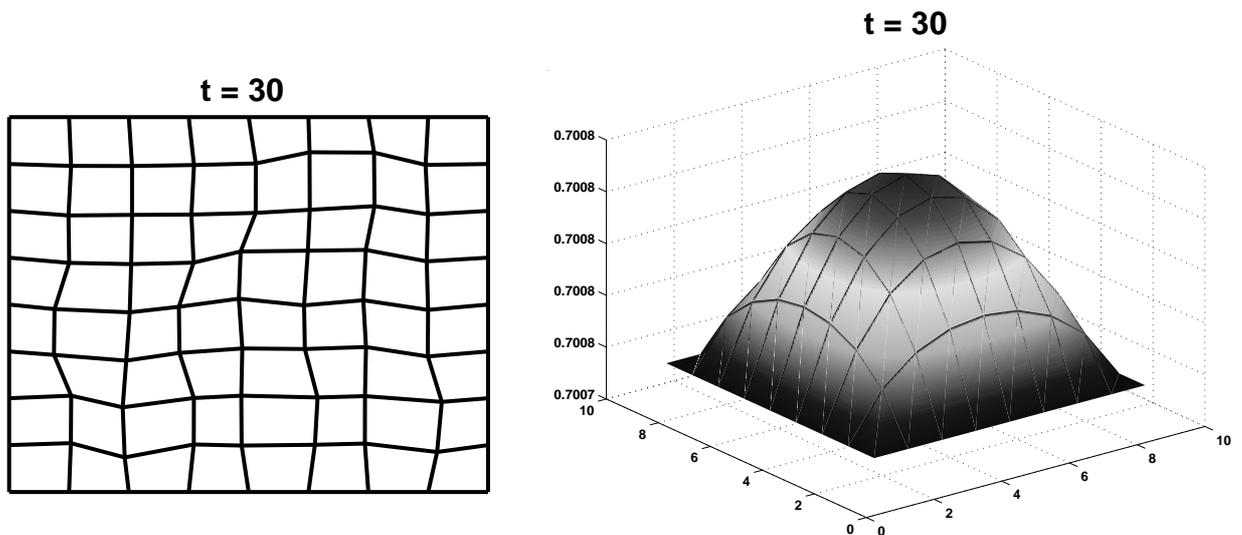


Abbildung 8.3: Bei $t = 30$ ist die Temperatur auf dem Gitter im Bereich von 0.7. Aus der linken Darstellung der Verschiebung ist ersichtlich, daß bereits Verzerrungen $\nabla u \neq 0$ angenommen werden. Dies ist auf den Einfluß der nichtkonvexen freien Energie bei der Temperatur zu diesem Zeitpunkt zurückzuführen.

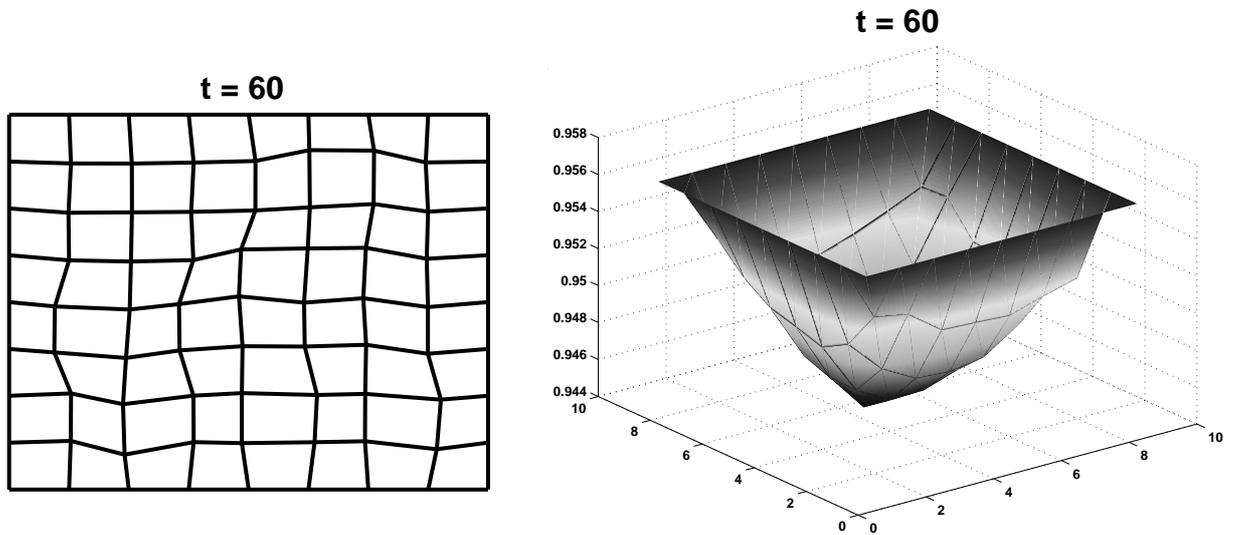


Abbildung 8.4: Bei $t = 60$ ist die Temperatur auf dem Gitter im Bereich von 0.96. Auch hier gibt es noch Verzerrungszustände mit $\nabla u \neq 0$, allerdings steigt die Temperatur entsprechend der Randwerte stetig an, so daß zu erwarten ist, daß die freie Energie konvex wird und damit die Verzerrung auf 0 zurückgeht.

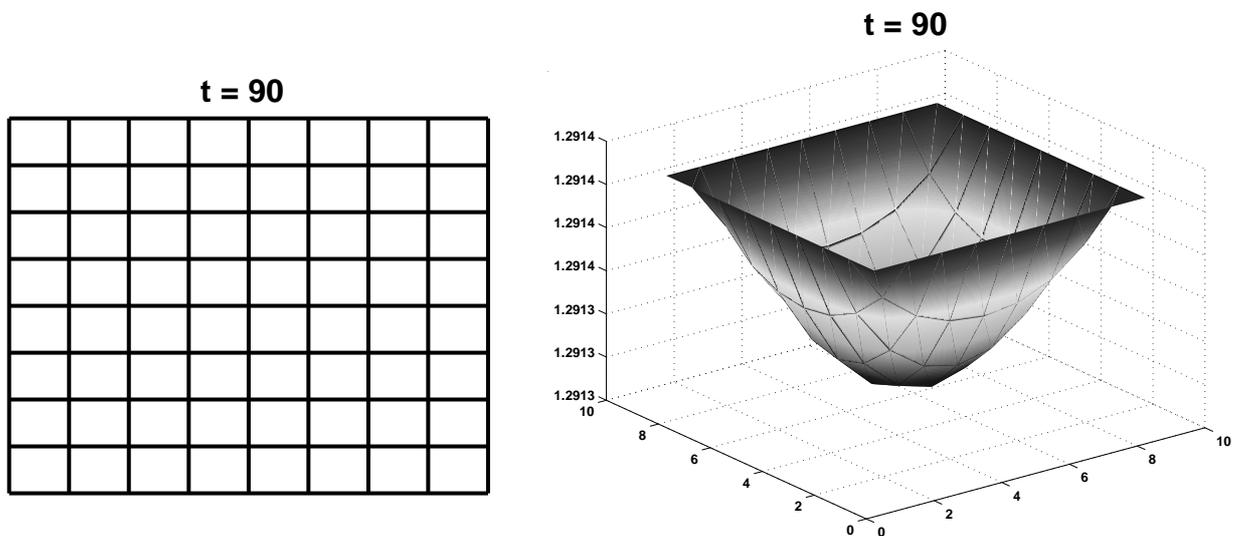


Abbildung 8.5: Bei $t = 90$ ist die Temperatur auf dem Gitter im Bereich von 1.3. Dies bedeutet, daß die freie Energie konvex ist, und nur der Zustand $\nabla u = 0$ stabil ist. Man beobachtet in der Tat das Verschwinden der Verzerrungen der Niedertemperatur.

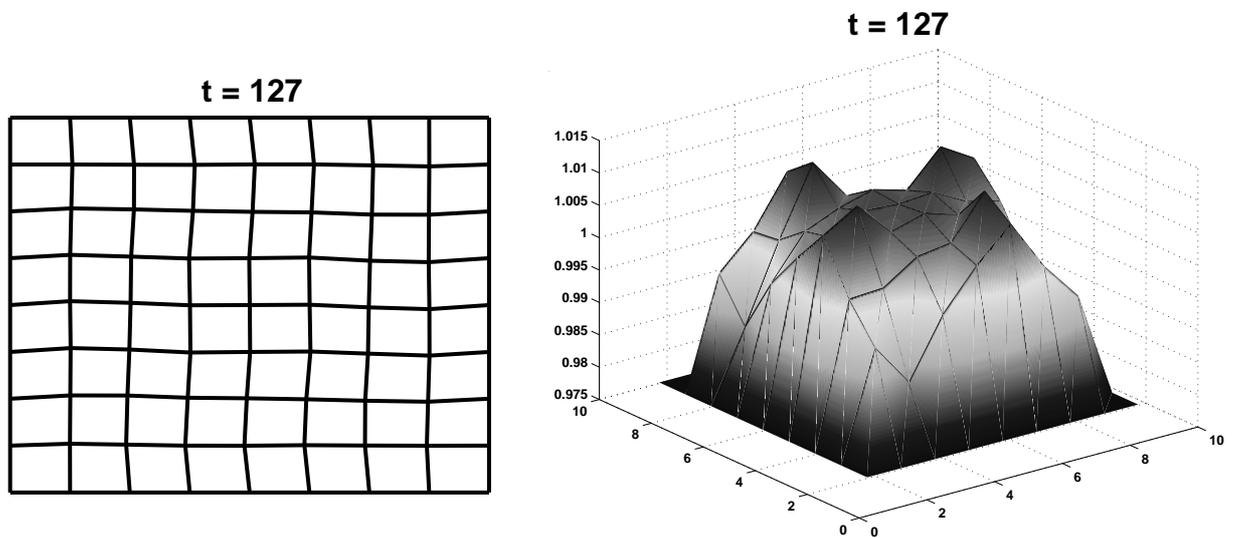


Abbildung 8.6: Bei $t = 127$ ist die Temperatur auf dem Gitter im Bereich von 1 und fällt. Man beobachtet, daß sich das simulierte Material zu verzerren beginnt. Da die Temperatur weiter sinkt, ist eine Verstärkung dieser Verzerrung zu erwarten.

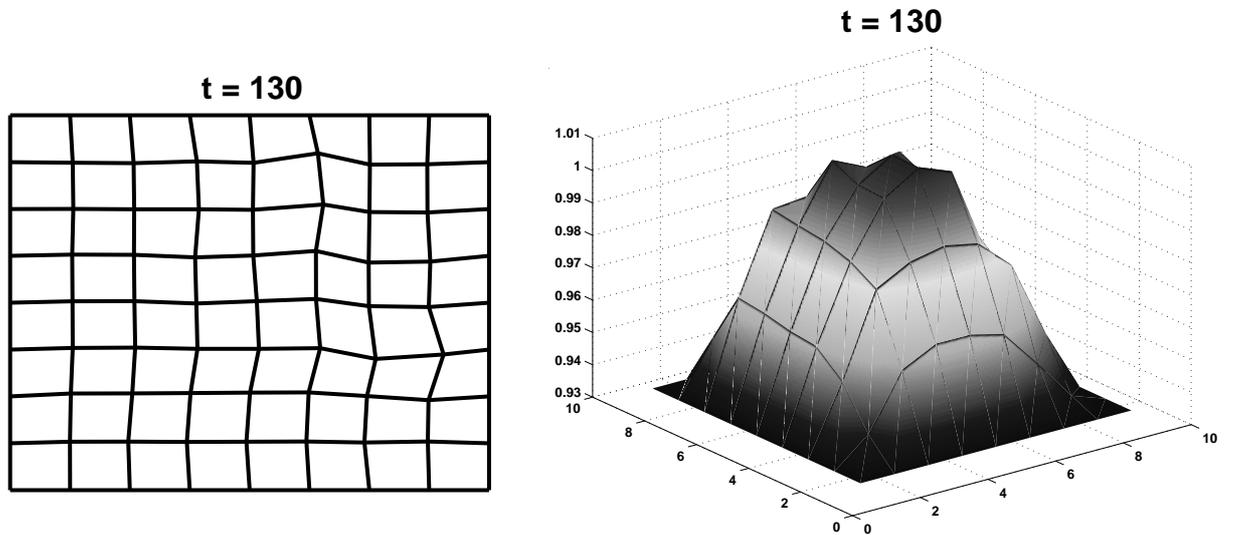


Abbildung 8.7: Bei $t = 130$ liegen bereits deutliche Verzerrungen aus der Normallage vor.

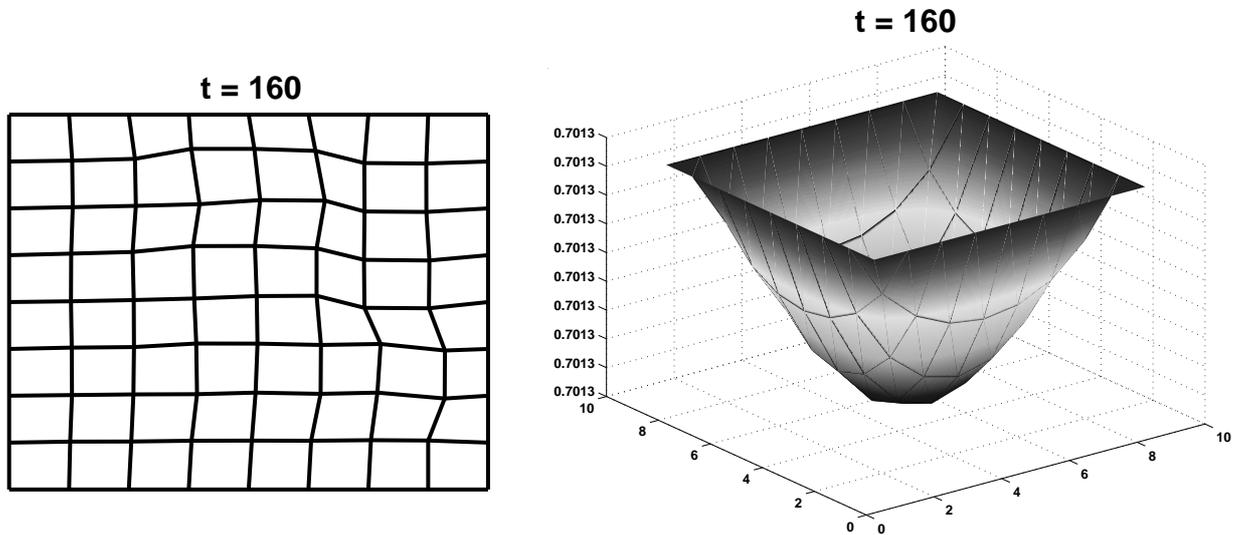


Abbildung 8.8: Bei $t = 160$ sind die Verzerrungen noch immer zu erkennen, weil die Temperatur noch niedrig genug ist.

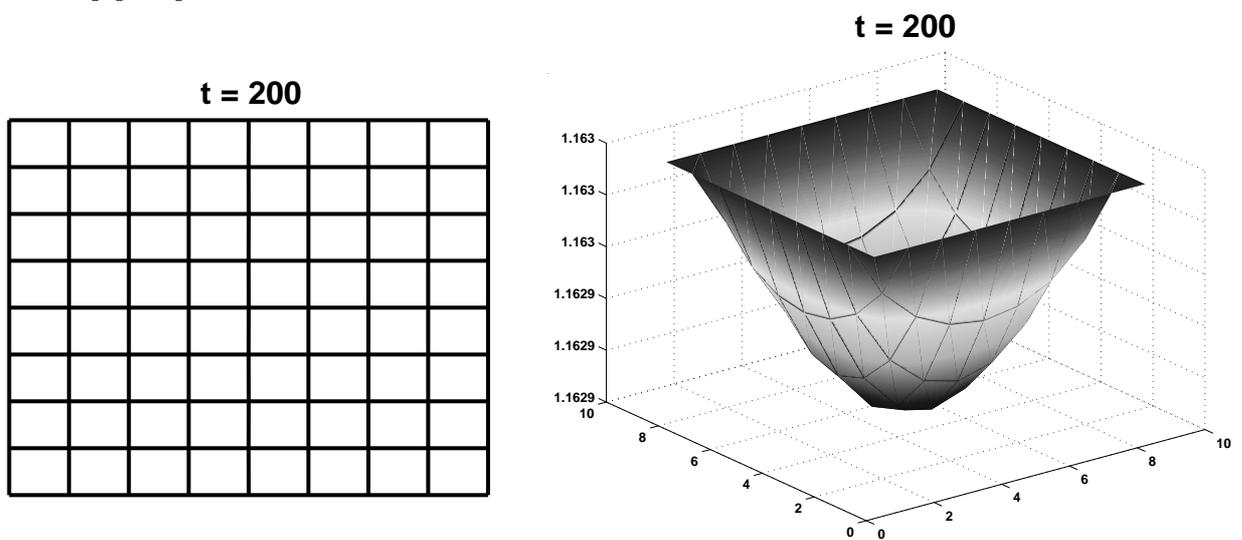


Abbildung 8.9: Bei $t = 200$ schließlich hat die Temperatur den kritischen Wert überschritten. Der Erwartung entsprechend gehen die Verzerrungen zurück und das simulierte Material nimmt die Ausgangskonfiguration ein.

Anhang A

Verwendete Sätze und Lemmata

Satz A.1 Fixpunktsatz von Schauder

Sei M eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte konvexe Teilmenge eines Banach-Raums X , zum Beispiel eine Kugel, und sei $T : M \rightarrow M$ sei ein kompakter Operator. Dann hat T (mindestens) einen Fixpunkt.

Für den Beweis sei auf das Standardwerk [Zei86] verwiesen.

Satz A.2 Fixpunktsatz von Banach, Kontraktionsprinzip

Sei M eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raums (X, d) , und sei $T : M \rightarrow M$ ein Operator mit

$$d(Tx, Ty) \leq k(Tx, Ty) \quad \forall x, y \in M, \quad 0 \leq k < 1$$

Dann hat T genau einen Fixpunkt. Falls der Operator $T = T_p$ lipschitz-stetig von einem Parameter p aus einem metrischen Raum P mit Metrik d_P abhängt und die Kontraktionskonstante $k < 1$ unabhängig von p ist, so hängt auch der jeweilige Fixpunkt lipschitz-stetig von dem Parameter p ab.; genauer gilt für zwei Fixpunkte x_1, x_2 zu verschiedenen Parametern p_1, p_2 die Abschätzung

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{1-k} \cdot C_{Lipschitz} d_P(p_1, p_2)$$

Für den Beweis sei auf das Standardwerk [Zei86] verwiesen.

Lemma A.1 Seien X, X^* zwei Banachräume, wobei X^* der Dualraum von X ist, und seien u und g Funktionen aus

$$u \in L_1((0; T); X), \quad g \in L_1((0; T); X)$$

Dann sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:

- u kann fast überall auf $(0, T)$ dargestellt werden als

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s) ds, \quad \xi \in X$$

- Für jede Testfunktion $\phi \in \mathcal{D}(0, T)$ gilt

$$\int_0^T u(s) \frac{d}{ds} \phi(s) ds = - \int_0^T g(s) \phi(s) ds,$$

- Für alle $\xi \in X^*$ gilt im skalaren Distributionssinne auf $(0, T)$

$$\frac{d}{dt}(u, \xi) = (g, \xi)$$

Sind die Bedingungen erfüllt, gilt insbesondere, daß u nach Veränderung auf einer Nullmenge in $(0, T)$ stetig in X ist:

$$u \in C^0([0; T]; X)$$

Man bezeichnet g als (X -wertige) Distributionsableitung von u .

Der Beweis des Lemmas findet sich in [Tem84].

Lemma A.2 Seien V, H, V^* drei Hilberträume, wobei V^* der Dualraum von V ist und

$$V \subset H \subset V^*$$

stetig eingebettet sind und außerdem jeweils dicht im größeren Raum liegen. Falls

$$u \in L_2((0; T); V), \quad u' \in L_2((0; T); V^*)$$

dann ist u nach Veränderung auf einer Nullmenge in $(0; T)$ eine stetige Funktion in H :

$$u \in C^0([0; T]; H)$$

Der Beweis des Lemmas findet sich in [Tem84] bzw. auch in [Wlo87].

Lemma A.3 Seien X_0, X, X_1 drei Banachräume, und darüberhinaus X_0 und X_1 reflexiv. Wenn die stetigen Einbettungen

$$X_0 \subset X \subset X_1$$

gelten und darüberhinaus die kompakte Einbettung

$$X_0 \subset\subset X$$

gilt, dann liegt für $p > 1$ und beliebiges, aber festes T der Raum

$$Y = \left\{ u \in L_p((0, T); X_0), \quad \frac{du}{dt} \in L_p((0, T); X_1) \right\}$$

kompakt in $L_p((0, T); X)$:

$$Y \subset\subset L_p((0, T); X)$$

Der Beweis des Lemmas findet sich in [Tem84], Kapitel III, Paragraph 2.

Anhang B

Abschätzungen nichtlinearer Terme

B.1 Nichtlineare Terme

Lemma B.1 Sei $\sigma(x, y)$ eine C^k -Funktion von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; seien ε und θ Funktionen aus $L^\infty(\Omega)$. Dann gilt für $0 \leq n \leq k$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^n}{\partial \varepsilon^n \partial \theta^{k-n}} \sigma(\varepsilon, \theta) \in L^\infty(\Omega)$$

Beweis: Einsetzen. □

Lemma B.2 Sei $\sigma(x, y)$ eine C^{k+1} -Funktion von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; seien

$$u \in W_2^{k+1}(\Omega), \quad \theta \in W_2^k(\Omega)$$

Dann gilt

$$\sigma(u, \theta) \in W_2^k(\Omega)$$

Für den Beweis sei auf [Tay97], Kapitel 13, Seite 11 verwiesen (Moser-inequalities). Dort werden sogar noch Abschätzungen der Normen gegeben, in die die Unendlich-Normen der partiellen Ableitungen der nichtlinearen Funktion σ eingehen.

B.2 Elementare Abschätzungen

Integrale über Exponentialfunktionen. Es werden einige Abschätzungen bereitgestellt, die zum Nachweis der Kontraktivität diverser Operatoren benötigt werden.

Für $p > \lambda$ gilt

$$\int_0^t e^{pt} e^{\lambda(t-\tau)} d\tau = \frac{-e^{pt} + e^{\lambda t}}{-p + \lambda} \leq \frac{e^{pt}}{p - \lambda} \quad (\text{B.1})$$

Für $p < \lambda$ gilt

$$\int_t^T e^{pt} e^{\lambda(t-\tau)} d\tau = -\frac{e^{pT+\lambda t-\lambda T} - e^{pt}}{-p + \lambda} \leq \frac{e^{pt}}{\lambda - p} \quad (\text{B.2})$$

Die Youngsche Ungleichung. Es gilt für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Abschätzung

$$|ab| = \left| ac \cdot \frac{b}{c} \right| \leq \frac{|c|^p |a|^p}{p} + \frac{\left| \frac{1}{c} \right|^q |b|^q}{q} \quad (\text{B.3})$$

Der Einbettungssatz von Sobolev. Hier soll die eindimensionale Version angegeben werden:

Sei $u \in H_2^1(\Omega)$ gegeben, wobei $\Omega = [0; 1]$. Dann gilt $u \in C^0(\Omega)$, präziser: Es existiert eine stetige Funktion auf Ω , die fast überall mit f übereinstimmt:

$$u \in H_2^1(\Omega) \Rightarrow u \in C^0(\Omega) \quad (\text{B.4})$$

Die Ungleichung von Poincaré. Es gilt für eine Funktion $u \in H_2^1(\Omega)$ auf einem beschränkten Gebiet Ω die Ungleichung

$$\|u\|_{\Omega} \leq C(\Omega) \|u\|_{H_2^1(\Omega)} \quad (\text{B.5})$$

Dabei hängt die Konstante nur vom Gebiet Ω ab.

Eine verwandte Aussage ist:

Sei eine Funktion $u \in H_2^2(\Omega) \cap H_2^1(\Omega)$ gegeben. Dann gilt

$$\|u_x\|_{\Omega} \leq C(\Omega) \|u_x\|_{H_2^1(\Omega)} \quad (\text{B.6})$$

Auch hier hängt die Konstante nur vom Gebiet Ω ab.

Diese Aussage läßt sich wie die Ungleichung von Poincaré beweisen, wenn man sich klarmacht, daß aufgrund der Sobolevschen Einbettung die Ableitung u_x eine stetige Funktion ist, die eine Nullstelle auf Ω hat (Zwischenwertsatz).

Anhang C

Untersuchung gewisser Reihen

In diesem Abschnitt werden die Reihen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \lambda_{1,k})^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p + C_1 k^2)^2} = \frac{1}{C_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{C_1} + k^2\right)^2} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \lambda_{2,k})^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p + C_2 k^2)^2} = \frac{1}{C_2^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{C_2} + k^2\right)^2}\end{aligned}$$

untersucht. Dabei gilt mit zwei Konstanten $C_1 > C_2 > 0$:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,k} &= -C_1 \cdot k^2 \\ \lambda_{2,k} &= -C_2 \cdot k^2\end{aligned}$$

Es gilt folgender Satz:

Satz C.1 *Abschätzung der Reihen.*

Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unendliche Folge von abgeschlossenen disjunkten Intervallen der negativen reellen Achse, deren Länge streng monoton steigt, so daß für jeden Punkt p aus einem dieser Intervalle gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \lambda_{1,k})^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \lambda_{2,k})^2} \leq \varepsilon$$

Die Folge der Mittelpunkte dieser Folge von Intervallen wird mit p_q bezeichnet.

Beweis:

Zunächst wird der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x + k^2)^2}$$

betrachtet, der in beiden obigen Reihen steckt. Es ist möglich, einen geschlossenen Ausdruck für diese Reihe anzugeben, nämlich

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x + k^2)^2} \\ = \frac{1}{4} \left(-\frac{\Psi^{(1)}(1 - \sqrt{-x})}{x} - \frac{\Psi^{(1)}(1 + \sqrt{-x})}{x} + \frac{\Psi(1 - \sqrt{-x})}{(-x)^{3/2}} - \frac{\Psi(1 + \sqrt{-x})}{(-x)^{3/2}} \right)\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Ψ die Digamma-Funktion, und $\Psi^{(1)}$ deren erste Ableitung, die Trigamma-Funktion. Sei im folgendem angenommen, daß $x < 0$. Die Digamma-Funktion erfüllt folgende Eigenschaften, siehe [Ste84]:

$$\Psi(x+1) - \frac{1}{x} = \Psi(x) \quad \Psi(1-x) = \Psi(x) + \pi \cot(\pi x)$$

Daraus ergibt sich

$$\Psi(1-x) - \Psi(1+x) = \pi \cot(\pi x) - \frac{1}{x}$$

Ähnlich gilt für die Trigammafunktion

$$\Psi^{(1)}(x+1) + \frac{1}{x^2} = \Psi^{(1)}(x) \quad \Psi^{(1)}(1-x) = -\Psi^{(1)}(x) - \pi^2(-1 - \cot^2(\pi x))$$

mit der Konsequenz

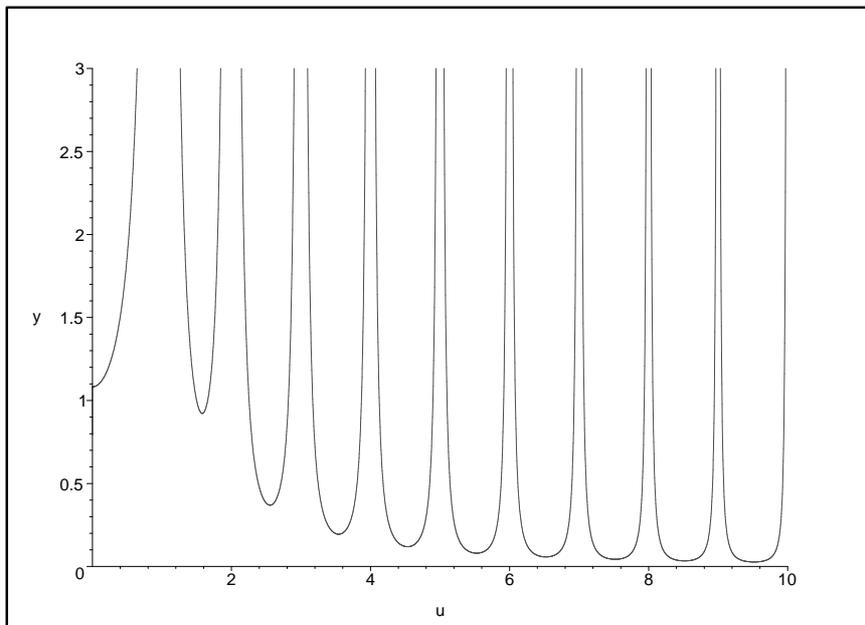
$$\Psi^{(1)}(1-x) + \Psi^{(1)}(1+x) = -\pi^2(-1 - \cot^2(\pi x)) - \frac{1}{x^2}$$

Somit schreibt man

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k^2)^2} = \frac{1}{4(-x)^{3/2}} \left(\pi \cot(\pi\sqrt{-x}) - \frac{1}{\sqrt{-x}} \right) - \frac{1}{4x} \left(\pi^2(1 + \cot^2(\pi\sqrt{-x})) + \frac{1}{x} \right) \quad (\text{C.1})$$

Ausgehend von diesem Ausdruck wird mit der Substitution $u = \sqrt{-x}$ die Funktion f definiert durch

$$f : \quad \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto f(u) := \frac{1}{4u^3} \left(\pi \cot(\pi u) - \frac{1}{u} \right) + \frac{1}{4u^2} \left(\pi^2(1 + \cot^2(\pi u)) - \frac{1}{u^2} \right)$$



Graph von f

Die Funktion f hat aufgrund der Kotangensfunktion Pole bei allen ganzen Zahlen bis auf die Null – dort löschen sich die Singularitäten aus. Wegen der Periodizität des Kotangens

$$\cot(k\pi u) = \cot((k-1)\pi u) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

und des Abklingverhaltens der Vorfaktoren $1/4u^3$ und $1/4u^2$ für $u \rightarrow \infty$ gilt demnach für beliebiges $u^* \in]0, 1[$

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} f(u^* + k) = 0$$

Nach der Substitution von $v = \sqrt{-p}$ definiert man

$$f_1(v) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-v^2 - \lambda_{1,k})^2} = \frac{1}{C_1^2} \cdot f\left(\frac{v}{\sqrt{C_1}}\right)$$

$$f_2(v) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-v^2 - \lambda_{2,k})^2} = \frac{1}{C_2^2} \cdot f\left(\frac{v}{\sqrt{C_2}}\right)$$

Die Funktionen f_1 und f_2 sind linear skalierte Versionen der Funktion f , und dementsprechend gilt für $u_1^* \in (0, \sqrt{C_1})$ bzw. $u_2^* \in (0, \sqrt{C_2})$

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} f(u_1^* + k\sqrt{C_1}) = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} f(u_2^* + k\sqrt{C_2}) = 0 \quad (\text{C.3})$$

Teilt man mit $k \in \mathbb{N}_0$ die reelle Achse \mathbb{R} in die offenen Intervalle

$$I_k^1 := \left(k\sqrt{C_1}; (k+1)\sqrt{C_1}\right)$$

$$I_k^2 := \left(k\sqrt{C_2}; (k+1)\sqrt{C_2}\right)$$

ein, erkennt man, daß es aufgrund $\sqrt{C_1} > \sqrt{C_2}$ zwei streng monoton steigende Teilfolgen R und $S = S(R)$ aus den natürlichen Zahlen gibt, so daß die offenen Intervalle I_r^2 für $r \in R$ komplett in einem der offenen Intervalle $I_{s(r)}^1$ mit $s(r) \in S$ liegt:

$$I_r^2 \subset I_{s(r)}^1$$

Nun wird für ein reelles $\delta > 0$ mit $4\delta < \sqrt{C_2}$ die Folge von abgeschlossenen Intervallen \hat{I}_r^2 für $r \in R$ definiert durch

$$\hat{I}_{s(r)}^1 \subset I_{s(r)}^1; \quad \hat{I}_{s(r)}^1 := \left[s(r)\sqrt{C_1} + \delta; (s(r)+1)\sqrt{C_1} - \delta\right] \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{I}_r^2 \subset I_r^2; \quad \hat{I}_r^2 := \left[r\sqrt{C_2} + \delta; (r+1)\sqrt{C_2} - \delta\right] \quad (\text{C.5})$$

Weil $I_r^2 \subset I_{s(r)}^1$ gilt folgt auch $\hat{I}_r^2 \subset \hat{I}_{s(r)}^1$.

Mit (C.2) und (C.3) ergibt sich, daß die Funktionen f_1 und f_2 jeweils auf den Intervallen $\hat{I}_{s(r)}^1$ und \hat{I}_r^2 für $r \rightarrow \infty$ sogar *gleichmäßig* gegen Null gehen.

Damit kann man aber eine Teilfolge Q von R finden, so daß für $q \in Q$ gilt:

$$v \in \hat{I}_q^2 \Rightarrow f_1(v) + f_2(v) \leq \varepsilon$$

Macht man die Transformation $v^2 = -p$ rückgängig, erhält man damit eine Folge von Intervallen

$$\begin{aligned}\tilde{I}_q^1 &:= \left[- \left(s(q)\sqrt{C_1} + \delta \right)^2 ; - \left((s(q) + 1)\sqrt{C_1} - \delta \right)^2 \right] \\ \tilde{I}_q^2 &:= \left[- \left(q\sqrt{C_2} + \delta \right)^2 ; - \left((q + 1)\sqrt{C_2} - \delta \right)^2 \right]\end{aligned}$$

so daß für $p \in \tilde{I}_q^2$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \lambda_{1,k})^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \lambda_{2,k})^2} \leq \varepsilon$$

Die Folge der Mittelpunkte der Intervalle \tilde{I}_q^2 wird mit p_q bezeichnet. Nach Konstruktion ist klar, daß sie von den Menge Λ aller Eigenwerte $\lambda_{1,k}$ und $\lambda_{2,k}$ mindestens den Abstand q hat.

□

Betrachtet man die Mitte der Intervalle \tilde{I}_q^2 , so ist nach Konstruktion klar, daß sie von den Menge Λ aller Eigenwerte $\lambda_{1,k}$ und $\lambda_{2,k}$ mindestens den Abstand q hat. Diese Erkenntnis ist Grundlage des folgenden Satzes:

Satz C.2 *Reihe zu gestörten Eigenwerten*

Es seien gestörte Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{i,k}$ gegeben, die nicht weiter als eine Konstante $C > 0$ von den ungestörten entfernt sind:

$$\left| \tilde{\lambda}_{i,k} - \lambda_{i,k} \right| \leq C \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}; \quad i = 1, 2$$

Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $q \in \mathbb{N}$ so, daß für p gleich der Intervallmitte von \tilde{I}_q^2 gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \tilde{\lambda}_{1,k})^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \tilde{\lambda}_{2,k})^2} \leq \varepsilon$$

Beweis:

Betrachte zunächst für jeden Summanden das Verhältnis

$$\frac{1}{(p - \tilde{\lambda}_{i,k})^2} \cdot (p - \lambda_{i,k})^2 = \left(\frac{1}{1 + \frac{K_{i,k}}{p - \lambda_{i,k}}} \right)^2$$

wobei $K_{i,k} = \tilde{\lambda}_{i,k} - \lambda_{i,k}$ ist. Durch die Wahl von p als Mittelpunkt von \tilde{I}_q^2 für hinreichend großes q und mit $|K_{i,k}| < C$ ergibt sich für beliebig kleines $\delta > 0$, daß

$$\left| \frac{K_{i,k}}{p - \lambda_{i,k}} \right| \leq \delta \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}; \quad i = 1, 2$$

Damit folgt für das Verhältnis

$$\frac{1}{(p - \tilde{\lambda}_{i,k})^2} \cdot (p - \lambda_{i,k})^2 \leq \left(\frac{1}{1 - \delta} \right)^2$$

Dies bedeutet nichts anderes, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \tilde{\lambda}_{1,k})^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \tilde{\lambda}_{2,k})^2} \leq \left(\frac{1}{1 - \delta} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \lambda_{1,k})^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(p - \lambda_{2,k})^2} \right)$$

Die rechte Seite der Abschätzung geht aber nach vorhergehendem Satz gegen Null, wenn nur q hinreichend groß gewählt ist. Damit ist der Satz bewiesen.

□

Ein weiterer Satz beschäftigt sich mit den Reihen zu „verschobenem“ p . Es gilt folgender Satz:

Satz C.3 *Verschobene Reihen*

Es sei p_a eine feste reelle Zahl. Dann konvergieren die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{((p + p_a) - \lambda_{1,k})^2}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{((p + p_a) - \lambda_{2,k})^2}$$

wenn nur p als Mittelpunkt des Intervalles \tilde{I}_q^2 für hinreichend großes q gewählt wird.

Beweis:

Für hinreichend großes q liegt nicht nur trivialerweise der Mittelpunkt p des Intervalls in \tilde{I}_q^2 , sondern ebenso der Punkt $p + p_a$, denn die Länge $2q + 1$ von \tilde{I}_q^2 steigt linear mit q . Damit gilt aber nach Satz C.1, daß beide Reihen konvergieren. Der Satz ist bewiesen.

□

Literaturverzeichnis

- [AB82] G. Andrews and J. M. Ball, *Asymptotic behaviour and changes of phase in one-dimensional nonlinear viscoelasticity*, J. Differential Equations **44** (1982), no. 2, 306–341, Special issue dedicated to J. P. LaSalle. MR MR657784 (83m:73046)
- [And80] Graham Andrews, *On the existence of solutions to the equation $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$* , J. Differential Equations **35** (1980), no. 2, 200–231. MR MR561978 (81d:35073)
- [Ant95] Stuart S. Antman, *Nonlinear problems of elasticity*, Applied Mathematical Sciences, vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1995. MR MR1323857 (96c:73001)
- [CH94] Zhi Ming Chen and K.-H. Hoffmann, *On a one-dimensional nonlinear thermoviscoelastic model for structural phase transitions in shape memory alloys*, J. Differential Equations **112** (1994), no. 2, 325–350. MR MR1293474 (95f:35254)
- [DH93] Peter Deuffhard and Andreas Hohmann, *Numerische Mathematik. I*, second ed., de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook], Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993, Eine algorithmisch orientierte Einführung. [An algorithmically oriented introduction]. MR MR1270205 (94m:65001)
- [DZ04] Patrick W. Dondl and Johannes Zimmer, *Modeling and simulation of martensitic phase transitions with a triple point*, J. Mech. Phys. Solids **52** (2004), no. 9, 2057–2077. MR MR2085646
- [Fal80a] F. Falk, *Model free energy, mechanics and thermodynamics of shape memory alloys*, Acta Metallurgica **28** (1980), no. 12, 1773–1780.
- [Fal80b] ———, *Wie hängt die freie Energie einer Memory-Legierung von der Verzerrung und der Temperatur ab?*, ZAMM **60** (1980), T118–T120.
- [FM98] M. Fremond and S. Miyazaki, *Shape memory alloys*, Springer, Wien, 1998.
- [For88] Bengt Fornberg, *Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids*, Math. Comp. **51** (1988), no. 184, 699–706. MR MR935077 (89b:65055)
- [Hel01] D. Helm, *Formgedächtnislegierungen: Experimentelle Untersuchung, phänomenologische Modellierung und numerische Simulation der thermomechanischen Materialeigenschaften*, Ph.D. thesis, Universität Kassel, 2001.
- [HL98] L. Hsiao and Tao Luo, *Large-time behavior of solutions to the equations of one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity*, Quart. Appl. Math. **56** (1998), no. 2, 201–219. MR MR1622554 (99h:73039)

- [HW96] E. Hairer and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. II*, second ed., Springer Series in Computational Mathematics, vol. 14, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Stiff and differential-algebraic problems. MR MR1439506 (97m:65007)
- [HŽ92] K.-H. Hoffmann and A. Žochowski, *Existence of solutions of some nonlinear thermoelastic systems with viscosity*, Math. Methods Appl. Sci. **15** (1992), no. 3, 187–204. MR MR1152708 (93d:73013)
- [KS02] Norbert Koksich and Stefan Siegmund, *Pullback attracting inertial manifolds for nonautonomous dynamical systems*, J. Dynam. Differential Equations **14** (2002), no. 4, 889–941. MR MR1940107 (2003j:37131)
- [KS03a] ———, *Cone invariance and squeezing properties for inertial manifolds for nonautonomous evolution equations*, Evolution equations (Warsaw, 2001), Banach Center Publ., vol. 60, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2003, pp. 27–48. MR MR1993056 (2004d:37130)
- [KS03b] ———, *Inertial manifolds for nonautonomous evolution equations*, Progress in analysis, Vol. I, II (Berlin, 2001), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2003, pp. 545–553. MR MR2032724 (2004j:37148)
- [MS01] I. Müller and S. Seelecke, *Thermodynamic aspects of shape memory alloys*, Math. Comput. Modelling **34** (2001), no. 12–13, 1307–1355, Topics in the mathematical modelling of smart materials. MR MR1868407 (2002k:74060)
- [PŻ00] Irena Pawłow and Antoni Żochowski, *Nonlinear thermoelastic system with viscosity and nonlocality*, Free boundary problems: theory and applications, I (Chiba, 1999), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., vol. 13, Gakkōtoshō, Tokyo, 2000, pp. 251–265. MR MR1793039 (2001i:74023)
- [Qin01] Yuming Qin, *Global existence and asymptotic behaviour of the solution to the system in one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity*, Quart. Appl. Math. **59** (2001), no. 1, 113–142. MR MR1811097 (2001k:74051)
- [Rou00] T. Roubíček, *Dissipative evolution of microstructure in shape memory alloys*, Lectures on applied mathematics (Munich, 1999), Springer, Berlin, 2000, pp. 45–63. MR MR1767763 (2001b:74044)
- [RS01] Matthias Rumberger and Jürgen Scheurle, *The orbit space method: theory and application*, Ergodic theory, analysis, and efficient simulation of dynamical systems, Springer, Berlin, 2001, pp. 649–689. MR MR1850325 (2003b:58012)
- [RZ97] Reinhard Racke and Songmu Zheng, *Global existence and asymptotic behavior in nonlinear thermoviscoelasticity*, J. Differential Equations **134** (1997), no. 1, 46–67. MR MR1429091 (98a:35127)
- [Spi95] Ruben D. Spies, *A state-space approach to a one-dimensional mathematical model for the dynamics of phase transitions in pseudoelastic materials*, J. Math. Anal. Appl. **190** (1995), no. 1, 58–100. MR MR1314107 (95k:73013)
- [Ste84] Irene A. Stegun (ed.), *Pocketbook of mathematical functions*, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1984, Abridged edition of *Handbook of mathematical functions* edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, Material selected by Michael Danos and Johann Rafelski. MR MR768931 (85j:00005b)

- [SZ98] Jürgen Sprekels and Songmu Zheng, *Maximal attractor for the system of a Landau-Ginzburg theory for structural phase transitions in shape memory alloys*, Phys. D **121** (1998), no. 3-4, 252–262. MR MR1645431 (99g:35122)
- [SZ99] ———, *On the asymptotic behaviour of a Landau-Ginzburg model for the martensitic phase transitions in shape memory alloys*, Topics in nonlinear analysis, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 35, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 673–689. MR MR1725590 (2000j:35257)
- [SZZ98] Jürgen Sprekels, Songmu Zheng, and Peicheng Zhu, *Asymptotic behavior of the solutions to a Landau-Ginzburg system with viscosity for martensitic phase transitions in shape memory alloys*, SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), no. 1, 69–84 (electronic). MR MR1617175 (2000f:35138)
- [Tay97] Michael E. Taylor, *Partial differential equations. III*, Applied Mathematical Sciences, vol. 117, Springer-Verlag, New York, 1997, Nonlinear equations, Corrected reprint of the 1996 original. MR MR1477408 (98k:35001)
- [Tem84] Roger Temam, *Navier-Stokes equations*, third ed., Studies in Mathematics and its Applications, vol. 2, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984, Theory and numerical analysis, With an appendix by F. Thomasset. MR MR769654 (86m:76003)
- [Tem97] ———, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1997. MR MR1441312 (98b:58056)
- [Wat00] Stephen J. Watson, *Unique global solvability for initial-boundary value problems in one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. **153** (2000), no. 1, 1–37. MR MR1772535 (2001e:74038)
- [Wlo87] J. Wloka, *Partial differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, Translated from the German by C. B. Thomas and M. J. Thomas. MR MR895589 (88d:35004)
- [Zei86] Eberhard Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I*, Springer-Verlag, New York, 1986, Fixed-point theorems, Translated from the German by Peter R. Wad-sack. MR MR816732 (87f:47083)
- [Zim00] J. Zimmer, *Mathematische Modellierung und Analyse von Formgedächtnismaterialien in mehreren Raumdimensionen*, Ph.D. thesis, Technische Universität München, Zentrum Mathematik, 2000.
- [Zim04] Johannes Zimmer, *Stored energy functions for phase transitions in crystals*, Arch. Ration. Mech. Anal. **172** (2004), no. 2, 191–212. MR MR2058163