

**Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München**

**Analytische und numerische Untersuchungen zum
nichtlinearen Problem der Grundwasserströmung mit
freier Oberfläche**

Jürgen Weber

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grads eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. K. Ritter

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr. J. Edenhofer

2. Univ.-Prof. Dr. G. H. Schmitz (Technische Universität Dresden)

Die Dissertation wurde am 13. Januar 2003 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 13.05.2003 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Die Physik zum Grundwasser-Problem | 7 |
| 2 | Der 2D-Aquifer | 11 |
| 2.1 | Konstruktion einer konformen Transformation | 12 |
| 2.2 | Lösung der Poisson-Gleichung | 15 |
| 2.2.1 | Konforme Transformation der Randwertaufgabe | 15 |
| 2.2.2 | Lösung des homogenen Problems | 16 |
| 2.2.3 | Lösung des inhomogenen Problems | 17 |
| 2.3 | Transformation der Oberflächenrandbedingung - Druckfreie Formulierung . . | 20 |
| 3 | Der unendlich tiefe 2D-Aquifer | 23 |
| 3.1 | Formeln für den unendlich tiefen 2D-Aquifer | 23 |
| 3.2 | Ein Lösungsnachweis beim unendlich tiefen 2D-Aquifer | 27 |
| 3.3 | Beispiele exakter stationärer Lösungen beim unendlich tiefen 2D-Aquifer . . | 30 |
| 3.4 | Stationäres Problem ohne Quellen beim unendlich tiefen 2d-Aquifer | 33 |
| 3.4.1 | Berechnung des Grundwasserspiegels f | 34 |
| 3.4.2 | Berechnung der konformen Abbildung und die Darstellung der Isobaren | 35 |
| 3.4.3 | Berechnung von Stromlinien | 37 |
| 3.5 | Stationäres Problem mit Quellen beim unendlich tiefen 2D-Aquifer | 41 |
| 3.5.1 | Punktquellen | 42 |
| 3.5.2 | Vorgabe der Quell-Positionen in A | 43 |
| 3.5.3 | Modifikation der Isobaren-Berechnung | 44 |
| 3.5.4 | Modifikation der Stromlinien-Berechnung | 44 |
| 3.6 | Inverses Grundwasserproblem beim unendlich tiefen 2D-Aquifer | 46 |
| 4 | Der endlich tiefe 2D-Aquifer | 51 |
| 4.1 | Formeln für den endlich tiefen Aquifer, die Grundwasserkorrespondenz . . . | 53 |
| 4.1.1 | Asymptotik | 53 |
| 4.1.2 | Korrespondenzen zwischen $\hat{\mathcal{N}}$, \hat{f} und \bar{x} -id | 54 |
| 4.1.3 | Das Formelwerk für das stationäre Problem | 56 |
| 4.1.4 | Die Grundwasserstufe | 58 |
| 4.2 | Stationäres Problem ohne Quellen beim endlich tiefen 2D-Aquifer | 60 |
| 4.2.1 | Berechnung von $\hat{\mathcal{N}}$ aus der Bewässerungsgleichung | 61 |
| 4.2.2 | Berechnung des Grundwasserspiegels f | 63 |
| 4.2.3 | Berechnung der Isobaren und Stromlinien | 64 |
| 4.3 | Stationäres Problem mit Quellen beim endlich tiefen 2D-Aquifer | 66 |
| 4.3.1 | Berechnung von $\hat{\mathcal{N}}$ | 66 |
| 4.3.2 | Berechnung von Isobaren und Stromlinien | 68 |
| 4.4 | Zusammenfassung und Ausblick | 69 |
| 5 | Anhang zu Standardrechnungen | 71 |
| 5.1 | Eine konforme Transformation | 71 |
| 5.2 | Lösung der Poisson-Gleichung | 74 |
| 5.2.1 | Lösung des homogenen Problems | 74 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.2.2 | Umrechnung der Formeln von \hat{f} auf $\hat{\mathcal{N}}$ | 77 |
| 6 | Anhang zur Berechnung spezieller Funktionen | 80 |
| 6.1 | Polygon-Approximation | 80 |
| 6.2 | Polygon-Addition | 81 |
| 6.3 | Implizit definierte Funktionen | 82 |
| 6.4 | Zeta-Reihen | 88 |
| 7 | Anhang zu Hauptwertintegralen | 90 |
| 7.1 | Hilbert-Transformation | 90 |
| 7.2 | Die Grundwasserkorrespondenz | 95 |
| 7.3 | Partielle Integration singulärer Integrale | 99 |
| 8 | Anhang zu Tabellen und Formeln | 100 |
| 8.1 | Sätze aus der Funktionalanalysis und Funktionentheorie | 100 |
| 8.2 | Ab- und Aufleitungen einiger elementarer Funktionen | 104 |
| 8.3 | Winkel- und Hyperbelfunktionen | 105 |
| 8.4 | Zerlegungen in Real- und Imaginärteil; spezielle Integrale | 106 |
| 8.5 | Symbol-Verzeichnis | 110 |

Leseplan

In dieser Dissertation werden stationäre und instationäre Zusammenhänge zwischen dem freien Grundwasserspiegel, der oberflächlichen Be-/Entwässerung, der inneren Be-/Entwässerung (Drainage) und der Druckfunktion in einer wasserführenden Schicht (Aquifer) behandelt. Weitere Ergebnisse sind Isobare, Stromlinien und qualitative Aussagen über den Grundwasserspiegel, die man recht einfach berechnen kann (Grundwasserstufe).

Die Theorie ist in das Programm Surface.exe eingegangen, mit dem der Wasserbauingenieur seine Berechnungen ausführen kann.

Im Kapitel 1 formulieren wir die physikalischen Zusammenhänge und stellen die Bestimmungsgleichungen auf. Hierbei handelt es sich um ein freies Randwertproblem mit einer nichtlinearen Randbedingung. Wir klären dann, auf welche Fragen der Wasserbau-Ingenieur Antworten haben will.

Im Kapitel 2 behandeln wir die in der Praxis sehr wichtigen 2D-Aquifere (endlicher Tiefe), wie sie z.B. auf landwirtschaftlich benutzten Feldern mit Bewässerungskanälen oder mit Drainage auftreten. Das oben erwähnte freie Randwertproblem für die Druckfunktion können wir dabei auf eine direkte Beziehung zwischen dem freien Grundwasserspiegel und der Bewässerung zurückführen.

Praktisch ebenfalls sehr wichtig sind sehr tiefe 2D-Aquifere. Deshalb spezialisieren wir im Kapitel 3 auf unendlich tiefe 2D-Aquifere. Die Beziehungen zwischen dem freien Grundwasserspiegel und der Bewässerung nehmen dann eine Form an, sodass stationäre Probleme exakt und explizit gelöst werden können. Insbesondere stellen wir einen Lösungsnachweis für das stationäre Problem vor. Wir demonstrieren weiterhin, wie man Isobare und Stromlinien berechnen kann.

Die Techniken beim unendlich tiefen 2D-Aquifer helfen dann auch den endlich tiefen 2D-Aquifer im Kapitel 4 weiter zu bearbeiten. Die interessierenden Größen werden jetzt implizit gegeben sein. Über Fixpunktverfahren können wir sie aber beliebig genau berechnen. Wir können weiterhin einfache Formeln angeben, mit denen sich ohne viel Rechnung der wesentliche Verlauf des stationären Grundwasserspiegels bestimmen lässt (Grundwasserstufe). Dann wird das nötige Formelwerk zur Programmierung des 2D-Problems bereit gestellt. Ein Ausblick auf weitere Forschungen wird in 4.4 gegeben.

Im Anhang Kapitel 5 geben wir die Herleitungen an, welche zur Lösung des freien Randwertproblems führten.

Der Anhang Kapitel 6 handelt von der Berechnung von Funktionen, welche bei der Realisierung des Programms Surface nötig waren.

Permanent mussten wir uns bei Rechnungen mit singulären Integralen auseinandersetzen, die wir deshalb zum Gegenstand des Anhangs 7 gemacht haben.

Dieser Text soll auch als Arbeitsbuch dienen. Deshalb erscheint auch eine Formelsammlung und die Aufzählung einiger Sätze aus der Funktionalanalysis im Anhang 8 gerechtfertigt.

1 Die Physik zum Grundwasser-Problem

In diesem Abschnitt werden sehr komprimiert die Bestimmungsgleichungen für das Grundwasserproblem physikalisch motiviert und später verwendete Bezeichnungen eingeführt.

Wir betrachten in einer gesättigten wasserführenden Schicht A (*Aquifer*) ein Volumenelement dV an der Stelle $\mathbf{r} = (x, y, z)^t$ zum Zeitpunkt t mit dem Wasservolumen $n \cdot dV$. Die dimensionslose Konstante n ($0 < n < 1$) heisst *Porosität* und beschreibt den Wasseranteil in dV . Ist ρ die Wasserdichte, so enthält dV die Wassermasse $dm = \rho \cdot n \cdot dV$.

Sie unterliegt der Erdbeschleunigung $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$. Die z -Achse beschreibe die Vertikale. Der *Wasserdruck* sei \mathbf{p} . Damit ergibt sich die potentielle Energie dE des Wassers in dV als

$$\begin{aligned} dE &= dm \cdot g \cdot z + \mathbf{p} \cdot n \cdot dV = \rho \cdot n \cdot dV \cdot g \cdot z + \mathbf{p} \cdot n \cdot dV \\ &= (\rho \cdot g \cdot z + \mathbf{p}) \cdot n \cdot dV . \end{aligned} \quad (1)$$

Φ bezeichne die *Energiedichte* in Einheiten von ρg und p bezeichne das *Druckpotential* :

$$\Phi := \frac{1}{n\rho g} \cdot \frac{dE}{dV} = z + \frac{1}{\rho g} \mathbf{p} = z + p \quad \boxed{\mathbf{p} = \rho g \cdot p} \quad (2)$$

Nach dem *Darcy-Gesetz* gilt für die *Volumen-Stromdichte* \mathbf{q} mit der *Konduktivität* K , dem *Leitwert* des homogenen isotropen Mediums:

$$\boxed{\mathbf{q} = -K \cdot \mathbf{grad} \Phi = -K (\mathbf{e}_z + \mathbf{grad} p)} \quad (\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)^t = \nabla z) \quad (3)$$

Die *Massen-Stromdichte* \mathbf{j} entsteht aus \mathbf{q} , wenn mit der Dichte ρ multipliziert wird:

$$\boxed{\mathbf{j} := \rho \mathbf{q} = -\rho K (\mathbf{e}_z + \mathbf{grad} p)} \quad (4)$$

Der *Massen-Strom* I_A durch eine Fläche A ist dann

$$\boxed{I_A = \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = \int_A \rho \mathbf{q} \cdot d\mathbf{A}} . \quad (5)$$

Quellen/Senken beschreiben wir durch die *Volumen-Quellstromdichte* Q (auch *innere Bewässerung*, *Quellstärke*), bzw. durch den *Massen-Quellstrom* I_V im Volumen V . Sie sind verknüpft über

$$\boxed{I_V = \int_V \rho Q dV'} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{Q = \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{I_V}{|V| \rho}} \quad (6)$$

Wir zeigen die *Kontinuitäts-Gleichung* (9):

Sei m die Wassermasse in einem Volumen V mit der Oberfläche ∂V .

$$m = \int_V n\rho dV' \quad (7)$$

Diese Wassermasse m kann sich nur ändern, wenn es Quellen/Senken im Innern von V gibt oder wenn Wasser durch die Oberfläche ∂V hinein/heraus fließt.

$$\frac{\partial}{\partial t} m = I_V + I_{\partial V} = \int_V \rho Q dV' - \int_{\partial V} \rho \mathbf{q} \cdot d\mathbf{A} = \int_V (\rho Q - \text{div}(\rho \mathbf{q})) dV' \quad (8)$$

Der Vergleich der Beziehungen (7) und (8) für ein beliebiges Volumen V liefert dann:

$$\boxed{\frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = \rho Q - \operatorname{div}(\rho \mathbf{q})} \quad (9)$$

Im Weiteren nehmen wir die *Inkompressibilität* von Wasser und die Konstanz der Porosität n sowie des Leitwerts K innerhalb des Aquifers A an.

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(n\rho)}{\partial t} = Q - \operatorname{div} \mathbf{q} = Q + K \cdot \Delta \Phi = Q + K \Delta p$$

Das Druckpotential p genügt also im Aquifer A der *Poisson-Gleichung*:

$$\boxed{\Delta p = \frac{-Q}{K}} \quad (10)$$

Lösungen der Gleichung (10) werden durch Randbedingungen eingeschränkt:

Berechnet werden soll der *freie Grundwasserspiegel* f , der die Oberfläche S des Aquifers A als Höhe $z = f(x, y; t)$ beschreibt. Dabei wird ein scharfer Übergang vom wassergesättigten in den wasserfreien Bereich angenommen. Auf an der Oberfläche S verschwindet der Druck:

$$\boxed{\rho g \cdot p|_{z=f} = 0} \quad (11)$$

Eine weitere Randbedingung entsteht durch einen *wasserundurchlässigen Grund* G , den wir einfachst möglich als Ebene bei $z = -d$ ($d > 0$) annehmen. Am Grund gibt es keine vertikalen Strömungen; es gilt also $0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{e}_z = \Phi_z$:

$$\boxed{0 = \Phi_z|_{z=-d} = 1 + p_z|_{z=-d}} \quad (12)$$

Beim 3-dimensionalen Problem nehmen wie eine Lokalisierung der Be-/Entwässerung im Bereich des Koordinaten-Ursprungs an, sodass es fern davon ebenfalls keine vertikalen Ströme mehr gibt. Um hingegen das 2-dimensionale Problem zu bearbeiten, sollen die Größen von y unabhängig sein. Dann fordern wir nur fern von $x = 0$ das Verschwinden vertikaler Ströme.

$$3D : \quad \boxed{0 = \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \Phi_z = 1 + \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} p_z} \quad (13)$$

$$2D : \quad \boxed{0 = \lim_{x^2 \rightarrow \infty} \Phi_z = 1 + \lim_{x^2 \rightarrow \infty} p_z} \quad (14)$$

Ferner betrachten wir die Wirkung einer oberflächlichen Bewässerung:

Die mittlere Geschwindigkeit \mathbf{v} des Wassers im Volumenelement dV ergibt sich aus

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{n_e} \cdot \mathbf{q} . \quad (15)$$

Dabei tritt die *effektive Porosität* n_e auf, welche der Ungleichung $0 < n_e < n < 1$ genügt, da nicht das gesamte Wasservolumen $n \cdot dV$ sondern nur $n_e \cdot dV$ zur Strömung beiträgt. Da nur dynamische Prozesse betrachtet werden, dürfen wir $n_e = n$ annehmen. Die Differenz $n - n_e$ ist für dynamische Prozesse nicht zugänglich.

Nun betrachten wir die Bahnlinie eines Volumen-Elements dV auf der Oberfläche S . Es hat die Koordinaten $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t), t))$ und es gilt $p(\mathbf{r}(t), t) = 0$.

$$0 = \frac{dp}{dt} = \mathbf{grad} p \cdot \dot{\mathbf{r}} + p_t \Big|_{z=f} \quad (16)$$

An der Oberfläche S wird von außen bewässert mit der Volumen-Stromdichte $\mathbf{N} = -N\mathbf{e}_z$. Wir bezeichnen N als *Oberflächen-Bewässerung*. Im Innern des Aquifers A fließt \mathbf{q} . Damit wird die Geschwindigkeit des Volumen-Elements dV bei $\mathbf{r}(t)$ nach (3) zu:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{n_e}(\mathbf{q} - \mathbf{N}) \Big|_{z=f} = \frac{-1}{n_e} \left(K \cdot \mathbf{grad} p + (K - N)\mathbf{e}_z \right) \Big|_{z=f} \quad (17)$$

Setzt man diesen Ausdruck für $\dot{\mathbf{r}}$ in (16) ein, so ergibt sich die *Oberflächenrandbedingung*:

$$\boxed{p_t \Big|_{z=f} = \frac{K}{n_e} \left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \left(1 - \frac{N}{K} \right) p_z \right) \Big|_{z=f}} \quad \text{vgl. [Bear][Formel 5-48]} \quad (18)$$

Diese nicht lineare Randbedingung an der Grundwasser-Oberfläche kann mit der Kettenregel umgeformt werden. Der gemeinsame Faktor $p_z \Big|_{z=f}$ wird dabei gekürzt.

$$\begin{aligned} p(x, y, f(x, y, t); t) = 0 &\Rightarrow p_x \Big|_{z=f} = -p_z \Big|_{z=f} \cdot f_x \\ &\Rightarrow p_y \Big|_{z=f} = -p_z \Big|_{z=f} \cdot f_y \\ &\Rightarrow p_t \Big|_{z=f} = -p_z \Big|_{z=f} \cdot f_t \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{N - n_e f_t}{K} = 1 + (1 + f_x^2 + f_y^2) p_z \Big|_{z=f}} \end{aligned} \quad (19)$$

Im Aquifer $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -d < z < f(x, y, t)\}$ ist also folgendes System zu lösen:

$$\boxed{\begin{aligned} K \cdot \Delta p &= -Q, \quad p(\cdot; t) \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^1(\bar{A}) \\ p \Big|_{z=f} &= 0 \\ p_z \Big|_{z=-d} &= -1 \\ \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} p_z &= -1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x^2 \rightarrow \infty} p_z = -1 \\ \frac{N - n_e f_t}{K} &= 1 + (1 + f_x^2 + f_y^2) p_z \Big|_{z=f}, \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \end{aligned}} \quad (20)$$

Dabei seien die Konduktivität $K > 0$, die effektive Porosität $1 > n_e > 0$, die Grundtiefe $d > 0$, sowie die innere Bewässerung $Q \in \mathcal{L}^1(A)$ gegeben. Q soll einen kompakten Träger in A besitzen. Wir realisieren dabei Quellen sowieso nur auf Punkten oder Linien.

Bei vorgegebener Bewässerungsfunktion N wollen wir stets voraussetzen, dass diese einen kompakten Träger in \mathbb{R} hat, sowie integrierbar und beschränkt ist (entsprechend den praktischen Anforderungen).

Die Regularität weiterer Eingangsdaten ergibt sich an betreffender Stelle.

Wir unterscheiden nun zwischen 3 Problemstellungen.

Gesucht wird in allen Fällen das Druckpotential p .

a) Instationäres GW-Problem:

Gegeben sei für $t \geq t_0$ die oberflächliche Bewässerung $N(\cdot, \cdot; t)$ und als Anfangsbedingung der Grundwasserspiegel $f(\cdot, \cdot; t_0)$.

Gesucht wird $f(\cdot, \cdot; t)$ für $t > t_0$.

b) Inverses GW-Problem:

Gegeben ist der Grundwasserspiegel f für alle $t \geq t_0$.

Gesucht wird die oberflächliche Bewässerung N , welche diesen Grundwasserspiegel f bewirkt.

c) Stationäres GW-Problem

Gegeben ist die zeitlich konstante Bewässerung N .

Gesucht wird der sich einstellende stationäre Grundwasserspiegel f .

Bei stationären Problemen gilt $f_t = 0$. Dann setzen wir formal $n_e = 0$.

Die Lösungs-Strategie für (20) ist:

1. Lösen der Poisson-Gleichung $K\Delta p = -Q$, $p|_{z=f} = 0$, $p_z|_{z=-d} = -1$ zu einem (bis auf hinreichende Regularität) frei vorgebbaren Grundwasser-Spiegel f . Dazu werden konforme 2D-Transformationen eingeführt, welche den Aquifer A gerade biegen und die Poisson-Gleichung in eine noch handhabbare Form bringen.
2. Die Drucklösung p wird in die Oberflächenrandbedingung (19) eingesetzt. Letztere definiert dann zum Zeitpunkt t Relationen zwischen der Bewässerung N , der Quellfunktion Q , dem Grundwasserspiegel f und dessen zeitlicher Änderung f_t .
Je nach Fragestellung kann man dann N oder f berechnen.
Alle anderen Größen, wie z.B. das Druckpotential p , ergeben sich daraus.
3. Beim *instationären Grundwasserproblem* wird aus $N(\cdot, \cdot; t_0)$ und $f(\cdot, \cdot; t_0)$ zunächst $f_t(\cdot, \cdot; t_0)$ und damit $f(\cdot, \cdot; t_0 + \Delta t)$ numerisch berechnet.
4. Bei *inversen Problemen* ist f (und damit auch f_t) zu allen Zeiten bekannt und man kann N berechnen.
5. Beim *stationären Problem* ($f_t \equiv 0$) wird schließlich aus der zeitlich konstanten Bewässerung N der stationäre Grundwasserspiegel f berechnet.
6. Prinzipiell wollen wir auch (hydrostatische) Druck- bzw. Durchfluss-Randbedingungen berücksichtigen, wie sie z.B. bei Flüssen auftreten. Dies kann durch Positionierung entsprechender (Linien-) Quellen (durch die Funktion Q) an diesen Rändern geschehen.

Stand der Dinge:

Das obige Grundwasserproblem (20) wurde schon in vielfältiger Weise untersucht. Bis auf einen Spezialfall [Deempter] wurde das Problem nur in linearisierter Form behandelt. Wir setzen die Entwicklungen von [Edenhofer-1] und [Schmitz-2] fort, wo zum ersten Mal für eine ganze Klasse von Bewässerungen exakte stationäre Lösungen beim unendlich tiefen Aquifer gefunden wurden.

2 Der 2D-Aquifer

In diesem Abschnitt wird das System (20) für den praktisch sehr wichtigen 2D-Aquifer behandelt. Es gelingt dabei den Druck aus den Bestimmungsgleichungen zu eliminieren. Man erhält so Gleichungen, mit denen das Grundwasserproblem teilweise exakt gelöst werden kann oder das man über den Fixpunktsatz auch numerisch sicher beherrschen kann.

Weil das Problem nicht von der y -Koordinate abhängt, kann man die Theorie der holomorphen Funktionen anwenden. Wir unterscheiden dann nicht zwischen einem zweikomponentigen Vektor (x, z) und der zugeordneten komplexen Zahl $x + iz$.

Viele der weiteren Formeln werden Hauptwertintegrale enthalten. Damit diese definiert sind, fordern wir, dass gewisse Funktionen in $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{C}^{n,\alpha}$ liegen ($1 \leq p < \infty$; $n \in \mathbb{N}$; $0 < \alpha < 1$). Gemeint sind dabei die p -Lebesgue-integrierbaren Funktionen die n -mal differenzierbar sind und alle i -ten Ableitungen ($i=0, \dots, n$) noch α -hölderstetig (vgl. 7.1) sind.

Wir bearbeiten zunächst das instationäre Problem, bei dem für $t \geq t_0$ die Oberflächen-Bewässerung $x \mapsto N(x; t)$, die Quell-Bewässerung $(x, z) \mapsto Q(x, z; t)$ und für $t = t_0$ die Höhe des Grundwasserspiegels als $x \mapsto z = f(x; t_0)$ bekannt sind und daraus zunächst $x \mapsto f_t(x; t_0)$ berechnet werden soll. Die Zeit t spielt im weiteren meist die Rolle eines Parameters, den wir unterdrücken oder vermöge eines Semikolons von den anderen Variablen abtrennen.

Der Aquifer A zum Zeitpunkt t wird durch die Oberfläche S und den Grund G begrenzt.

$$\begin{aligned}
 A &:= \{(x, z) \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ -d < z < f(x; t)\} \quad (d > 0) \\
 S &:= \{(x, z) \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ z = f(x; t)\} \\
 G &:= \{(x, z) \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ z = -d\} \\
 \bar{A} &= A \cup S \cup G
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Für das Druckpotential $p = p(x, z; t)$ zum Zeitpunkt $t \geq t_0$ ist folgendes System zu lösen:

$$\begin{aligned}
 K \cdot (p_{xx} + p_{zz}) &= -Q \quad p \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^1(\bar{A}) \quad (K > 0, Q \in \mathcal{L}^1(A), \text{supp } Q \subset A) \\
 p|_{z=f} &= 0 \\
 p_z|_{z=-d} &= -1 \\
 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p_z(x, z; t) &= -1
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

In konkreten Rechnungen wird die Quellstärke Q eine endliche Summe von Dirac-Funktionen (Punktquellen in A) sein, sodass dann die Poisson-Gleichung $p_{xx} + p_{zz} = \frac{-Q}{K}$ distributionell zu verstehen ist.

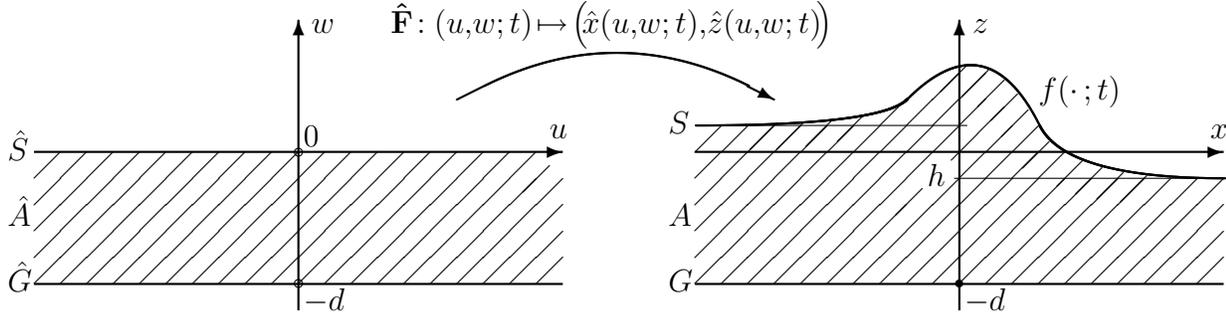
Im Abschnitt 2.1 wird dazu der Aquifer A konform transformiert („gerade gebogen“), sodass in 2.2 das obige Gleichungssystem für p gelöst werden kann. In 2.3 bearbeiten wir die *Oberflächenrandbedingung*

$$\frac{N - n_e f_t}{K} = 1 + (1 + f_x^2) p_z|_{z=f}, \tag{23}$$

aus der das Druckpotential p eliminiert wird. Daraus ergeben sich die wesentlichen Ergebnisse: Gleichungen, welche die Beziehungen zwischen N , Q , f und f_t festlegen.

2.1 Konstruktion einer konformen Transformation

Um das System (22) zunächst ohne Quellen ($Q = 0$) zu lösen, wenden wir eine Transformation an, welche die Laplace-Gleichung nicht verändert und den Aquifer A gerade biegt. Das ist eine konforme Abbildung $\hat{\mathbf{F}}$ zwischen dem Gebiet $\hat{A} := \{(u, w) \mid u \in \mathbb{R} \text{ \& } -d < w < 0\}$ und A .



Der zum Zeitpunkt t_0 gegebene Grundwasserspiegel $f(\cdot; t_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soll glatt sein, schnell abflachen und oberhalb des Grundes bei $z = -d$ liegen:

$$\boxed{f(\cdot; t_0) \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}) \text{ \& } f'(\cdot; t_0) \in \mathcal{L}^1 \text{ \& } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x; t_0) = \pm h \text{ \& } \exists \varepsilon > 0 \mid f(\cdot; t_0) \mid \leq d - \varepsilon} \quad (24)$$

Die dritte Bedingung definiert auch die *Nulllage*, bezüglich der die Grundtiefe $d > 0$ gemessen wird, sowie die *halbe Grundwasserstufe* h ($\mid h \mid < d$).

Wenn man die Existenz einer solchen Transformation $\hat{\mathbf{F}}$ annimmt, die auf den oberen Rand $\hat{S} = \{(u, 0) \mid u \in \mathbb{R}\}$ stetig differenzierbar fortsetzbar ist und wo $\hat{x}_u|_{w=0} > 0$ von Null weg beschränkt ist, dann genügt auch der transformierte Grundwasserspiegel \hat{f}

$$\boxed{\hat{f}(u; t) := f(\hat{x}(u; t); t) \quad (u \in \mathbb{R})} \quad (25)$$

denselben Bedingungen wie f . Wir unterschlagen im folgenden den Parameter t .

Im Anhang (5.1) haben wir die konforme Abbildung $\hat{\mathbf{F}}$ konstruiert. Mit den Abkürzungen

$$\boxed{\rho := \frac{\pi(r-u)}{2d}, \quad d\rho = \frac{\pi dr}{2d}, \quad \sigma := \frac{\pi(s-u)}{2d}, \quad d\sigma = \frac{\pi ds}{2d}, \quad \omega := \frac{\pi w}{2d} \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)} \quad (26)$$

lautet das Ergebnis:

Satz 2.1 Sei $d > 0$ und $1 > \alpha > 0$. Die Funktion \hat{f} genüge der Bedingung:

$$\boxed{\hat{f} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}) \text{ \& } \hat{f}' \in \mathcal{L}^1 \text{ \& } \exists h \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(u) = \pm h \text{ \& } \exists \varepsilon > 0 \mid \hat{f} \mid \leq d - \varepsilon} \quad (27)$$

Dann ist die Abbildung $\hat{\mathbf{F}}: \hat{A} \rightarrow \mathcal{C}$ mit $\hat{A} := \mathbb{R} + i] - d, 0[$ und

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}(u+iw) &= \hat{x}(u, w) + i \hat{z}(u, w) = u + iw - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \cdot \frac{1}{\tanh(\rho - i\omega)} - h \right) d\rho \\ \hat{x}(u, w) &= u - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \cdot \frac{\sinh \rho \cosh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} - h \right) d\rho \\ \hat{z}(u, w) &= w - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \cdot \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho \end{aligned}} \quad (28)$$

wohldefiniert, holomorph und konform (injektiv und $\hat{\mathbf{F}}' \neq \mathbf{0}$). $\hat{\mathbf{F}}$ und ihre Ableitung

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}'(u+iw) &= \hat{x}_u(u, w) + i\hat{z}_u(u, w) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \cdot \frac{1}{\tanh(\rho-i\omega)} d\rho \\ \hat{x}_u(u, w) &= \hat{z}_w(u, w) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \cdot \frac{\sinh \rho \cosh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho \\ \hat{z}_u(u, w) &= -\hat{x}_w(u, w) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \cdot \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho \end{aligned} \quad (29)$$

lassen sich stetig auf den Rand von \hat{A} fortsetzen. Die Fortsetzungen auf dem Rand sind noch α -hölderstetig. (\mathcal{P} vor den Integralen symbolisiere die Hauptwertbildung).

$$\begin{aligned} \bar{x}(u) + i\bar{z}(u) &:= \lim_{w \searrow 0} \hat{\mathbf{F}}(u+iw) = u - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \cdot \frac{1}{\tanh \rho} - h \right) d\rho + i\hat{f}(u) \\ \bar{x}_u(u) + i\bar{z}_u(u) &= \lim_{w \searrow 0} \hat{\mathbf{F}}'(u+iw) = 1 - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \cdot \frac{1}{\tanh \rho} d\rho + i\hat{f}'(u) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \lim_{w \searrow -d} \hat{\mathbf{F}}(u+iw) &= u - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \cdot \tanh \rho - h \right) d\rho - id \\ \lim_{w \searrow -d} \hat{\mathbf{F}}_u(u+iw) &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \cdot \tanh \rho d\rho \end{aligned} \quad (31)$$

Ferner gilt für die stetig differenzierbare Randabbildung \bar{x} :

$$\bar{x}_u \geq \frac{\varepsilon}{d} > 0 \quad (32)$$

Das Bild von $\hat{\mathbf{F}}$ ist einfach zusammenhängend und lässt sich mit $f := \hat{f} \circ \bar{x}^{-1}$ beschreiben als:

$$A := \hat{\mathbf{F}}(\hat{A}) = \{x+iz \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ -d < z < f(x)\} \quad (33)$$

Beweis:

Die Integrale in (28) und (29) konvergieren auf kompakten Teilmengen von \hat{A} gleichmäßig, weil die zu integrierenden Funktionen im Unendlichen hinreichend schnell verschwinden. Damit darf z.B. die Differentiation mit der Integration vertauscht werden und man kann die *Cauchy-Riemannschen Gleichungen* $\hat{x}_u = \hat{z}_w$ und $\hat{x}_w = -\hat{z}_u$ nachrechnen, woraus sich die Holomorphie ergibt. Mit der Identität (296) können die Real- und Imaginärteile der Formeln (28) und (29) zusammenfasst werden.

Wir zeigen $\hat{x}_u \geq \frac{\varepsilon}{d}$:

$$\begin{aligned} |\hat{x}_u(u, w) - 1| &= \left| \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \cdot \left(\frac{\sinh \rho \cosh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} - h \right) d\rho \right| \\ &\leq \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(r)| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\sinh \rho \cosh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} \right| d\rho \\ &\leq \frac{d-\varepsilon}{2d} \cdot \left(\int_{-\infty}^u \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{-\sinh \rho \cosh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho + \int_u^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\sinh \rho \cosh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho \right) = 1 - \frac{\varepsilon}{d} \end{aligned}$$

Weil der Parallelstreifen \hat{A} konvex ist, folgt aus dem Lemma (8.7) die Injektivität der Funktion $\hat{\mathbf{F}}$. Damit ist die Funktion $\hat{\mathbf{F}}$ konform und das Bild $A := \hat{\mathbf{F}}(\hat{A})$ einfach zusammenhängend.

Die stetig-differenzierbare Fortsetzbarkeit der Funktion $\hat{\mathbf{F}}$ auf den unteren Rand $w = -d$ prüft man leicht.

Für die stetige Fortsetzung von $\hat{\mathbf{F}}$ bzw. $\hat{\mathbf{F}}'$ auf den oberen Rand $w = 0$ benutzen wir die *Formeln von Sochozki & Plemelj* aus 7.1, denn die Funktion $\rho \mapsto \frac{1}{\tanh(\rho-i\omega)}$ hat im Limes $\omega \rightarrow 0$ einen einfachen Pol bei $\rho=0$. Wir führen die Technik exemplarisch für $\hat{\mathbf{F}}$ aus.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}(u+iw) &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} u+iw - \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \underbrace{\left(\frac{\hat{f}(r)}{\tanh(\rho-i\omega)} - h - \frac{\hat{f}(r)}{\rho-i\omega} \right)}_{\text{regulär}} d\rho - \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\hat{f}(r)}{r-(u+iw)} dr \\ &\xrightarrow{w \searrow 0} u - \frac{1}{\pi} \int_{-R}^R \left(\frac{\hat{f}(r)}{\tanh \rho} - h - \frac{\hat{f}(r)}{\rho} \right) d\rho - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-R}^R \frac{\hat{f}(r)}{r-u} dr + i \hat{f}(u) \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} u - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hat{f}(r)}{\tanh \rho} - h \right) d\rho + i \hat{f}(u) \end{aligned}$$

Der Limes $w \searrow 0$ ist gleichmäßig für u aus einer kompakten Teilmenge von \mathbb{R} und darf deshalb mit dem Limes $R \rightarrow \infty$ vertauscht werden.

Die α -Hölderstetigkeit der Fortsetzung folgt mit dem *Satz von Plemelj & Privalov* aus 7.1.

Aus $\hat{x}_u \geq \frac{\varepsilon}{d}$ und der stetig-differenzierbaren Fortsetzbarkeit von $\hat{\mathbf{F}}$ ergibt sich auch $\bar{x}_u > \frac{\varepsilon}{d}$. Das Bild von $\hat{\mathbf{F}}$ lässt sich daher in angegebener Weise beschreiben. \square

Wir notieren noch die Ableitungen der Umkehrfunktion von $\hat{\mathbf{F}}$:

$$\boxed{\check{\mathbf{F}} := \check{u} + i\check{v} := \hat{\mathbf{F}}^{-1}} \quad (34)$$

$$\boxed{\check{\mathbf{F}}' = \check{u}_x + i\check{v}_x = \check{v}_z - i\check{u}_z = \frac{\hat{x}_u - i\hat{z}_u}{\hat{x}_u^2 + \hat{z}_u^2}} \quad (35)$$

Die Funktion f ist mit der Randtransformation \bar{x} verknüpft über:

$$\boxed{\bar{x}_u(u) = 1 - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f'(\bar{x}(r)) \cdot \bar{x}'(r)}_{= \hat{f}'(r)} \cdot \frac{1}{\tanh \rho} d\rho} \quad \left(\rho = \frac{\pi(r-u)}{2d}, \quad d\rho = \frac{\pi dr}{2d} \right) \quad (36)$$

Anhand dieser Gleichung kann man untersuchen, ob zu gegebenem f die Abbildung \bar{x} existiert, bis auf eine Integrationskonstante eindeutig bestimmt ist und ob sie die geforderte Regularität hat, also ob $\bar{x} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}$ gilt und $\bar{x}_u > 0$ von Null weg beschränkt ist.

Die in (24) formulierten Bedingungen sind dafür wohl nicht hinreichend.

2.2 Lösung der Poisson-Gleichung

Wir berechnen jetzt (zum nicht notierten Zeitpunkt $t \geq t_0$) das Druckpotential $p = p^h + p^i$ für das System (22). Dabei sei p^h die Lösung der (homogenen) Laplace-Gleichung ($Q = 0$) zu den gegebenen Randbedingungen, und p^i löse die (inhomogene) Poisson-Gleichung zu den 0-Randbedingungen.

Vermöge der konformen Transformation aus dem Kapitel 2.1 schreiben wir das homogene bzw. das inhomogene Problem für p^h bzw. p^i um und lösen dann separat.

2.2.1 Konforme Transformation der Randwertaufgabe

Wir wenden die konforme Transformation $(u, w) \mapsto (\hat{x}, \hat{z})$ auf die zwei PDGlen an:

$$\begin{array}{lcl} \Delta p^h & = & 0 \quad p^h \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^1(\bar{A}) \\ p^h|_{z=f} & = & 0 \\ p_z^h|_{z=-d} & = & -1 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p_z^h & = & -1 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} K \cdot \Delta p^i & = & -Q \\ p^i|_{z=f} & = & 0 \\ p_z^i|_{z=-d} & = & 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p_z^i & = & 0 \end{array} \quad (37)$$

$$\begin{array}{l} \hat{p}^h(u, w) := p^h(\hat{x}(u, w), \hat{z}(u, w)) \\ \hat{p}^i(u, w) := p^i(\hat{x}(u, w), \hat{z}(u, w)) \\ \hat{Q}(u, w) := Q(\hat{x}(u, w), \hat{z}(u, w)) \end{array} \quad (38)$$

Wir transformieren als erstes den Laplace-Operator:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{uu} &= p_{xx}\hat{x}_u^2 + 2p_{xz}\hat{x}_u\hat{z}_u + p_{zz}\hat{z}_u^2 + p_x\hat{x}_{uu} + p_z\hat{z}_{uu} \\ \hat{p}_{ww} &= p_{xx}\hat{x}_w^2 + 2p_{xz}\hat{x}_w\hat{z}_w + p_{zz}\hat{z}_w^2 + p_x\hat{x}_{ww} + p_z\hat{z}_{ww} \\ \hat{p}_{uu} + \hat{p}_{ww} &= p_{xx}(\underbrace{\hat{x}_u^2 + \hat{x}_w^2}_{=\hat{x}_u^2 + \hat{x}_w^2}) + 2p_{xz}(\underbrace{\hat{x}_u\hat{z}_u + \hat{x}_w\hat{z}_w}_{=0}) + p_{zz}(\underbrace{\hat{z}_u^2 + \hat{z}_w^2}_{=\hat{z}_u^2 + \hat{z}_w^2}) + p_x(\underbrace{\hat{x}_{uu} + \hat{x}_{ww}}_{=0}) + p_z(\underbrace{\hat{z}_{uu} + \hat{z}_{ww}}_{=0}) \\ &= (\hat{x}_u^2 + \hat{z}_u^2) \cdot (p_{xx} + p_{zz}) \end{aligned}$$

Trivialerweise verschwinden die Druckfunktionen \hat{p}^h und \hat{p}^i am oberen Rand von \hat{A} :

$$\hat{p}^h(u, 0)|_{w=0} = \hat{p}^i|_{w=0} = 0$$

Kommen wir zur Transformation von $p_z^h|_{z=-d} = -1$ bzw. $p_z^i|_{z=-d} = 0$.

Für $w = -d$ gilt nach den Gleichungen in (31):

$$\begin{aligned} \hat{x}_u(u, -d) &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \tanh \rho \, d\rho = 1 - \frac{1}{\pi} \underbrace{[\hat{f}(r) \tanh \rho]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \frac{1}{\cosh^2 \rho} \, d\rho \\ \hat{z}_u(u, -d) &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt kann $p_z|_{z=-d}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} -1 &= p_z|_{z=-d} = \hat{p}_u \cdot u_z + \hat{p}_w \cdot w_z|_{w=-d} = \hat{p}_w \cdot \frac{\hat{x}_u}{\hat{x}_u^2 + 0^2} \Big|_{w=-d} \\ &= \hat{p}_w \cdot \frac{1}{\hat{x}_u} \Big|_{w=-d} \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

Seien $K, d > 0$, $\hat{A} = \mathbb{R} + i] - d, 0[$. Zum Zeitpunkt $t \geq t_0$ sind für $\hat{Q} \in \mathcal{L}^1(\hat{A})$, $\text{supp } Q \subset \hat{A}$ folgende Randwertprobleme zu lösen:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \hat{p}_{uu}^h + \hat{p}_{ww}^h & = 0 & \hat{p}^h \in \mathcal{C}^2(\hat{A}) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\hat{A}}) & K \cdot (\hat{p}_{uu}^i + \hat{p}_{ww}^i) = -(\hat{x}_u^2 + \hat{x}_w^2) \cdot \hat{Q} \\ \hat{p}^h|_{w=0} & = 0 & & \hat{p}^i|_{w=0} = 0 \\ \hat{p}_w^h|_{w=-d} & = -1 - \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \frac{1}{\cosh^2 \rho} d\rho & & \hat{p}_w^i|_{w=-d} = 0 \\ \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{p}_w^h & = -1 & & \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{p}_w^i = 0 \end{array}} \quad (39)$$

Die Systeme (22), (37) und (39) sind äquivalent, unter den Voraussetzungen des Satzes 2.1.

2.2.2 Lösung des homogenen Problems

Wir haben im Kapitel 5.2.1 die Lösung des homogenen Problems ermittelt. Das Ergebnis ist erstaunlich einfach:

Satz 2.2 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.1 ist eine Lösung des homogenen Problems aus (39) gegeben durch*

$$\boxed{\hat{p}^h(u, w) = -w - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \cdot \frac{\sin \omega}{\cosh \rho + \cos \omega} d\rho.} \quad (40)$$

Zum **Beweis**, dass (40) eine Lösung darstellt, notieren wir die Ableitungen:

$$\hat{p}_u^h(u, w) = \frac{-1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \cdot \frac{\sin \omega \sinh \rho}{(\cosh \rho + \cos \omega)^2} d\rho \quad (41)$$

$$\hat{p}_w^h(u, w) = -1 - \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \cdot \frac{1 + \cos \omega \cosh \rho}{(\cosh \rho + \cos \omega)^2} d\rho \quad (42)$$

$$= -1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \cdot \frac{\sinh \rho}{\cosh \rho + \cos \omega} d\rho \quad (43)$$

$$\hat{p}_{ww}^h(u, w) = \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \frac{\sin \omega \sinh \rho}{(\cosh \rho + \cos \omega)^2} d\rho = -\hat{p}_{uu}^h(u, w) \quad (44)$$

Das berechnete \hat{p}^h erfüllt also nach (44) die Laplace-Gleichung und die Randbedingungen können leicht aus (40) bzw. (42) berechnet werden. \square

Schließlich kann man \hat{p}^h als Imaginärteil einer analytischen Funktion darstellen. Dazu wird die Identität (293) benutzt. Der Realteil \hat{q}^h heißt *homogenes Strompotential*.

$$\boxed{\begin{aligned} (\hat{q}^h + i \hat{p}^h)(u + iw) + u + iw &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \tanh \frac{\rho - i\omega}{2} - h \right) d\rho \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \frac{\sinh \sigma - i \sin \omega}{\cosh \sigma + \cos \omega} - h \right) d\rho \end{aligned}} \quad (45)$$

2.2.3 Lösung des inhomogenen Problems

In diesem Abschnitt motivieren wir, wie man die Lösung des inhomogenen Problems (39) berechnen kann, geben das Ergebnis an und prüfen die Richtigkeit.

Es gilt, für $(u_0, w_0) \in \hat{A}$ eine Greenfunktion $\hat{G}(\cdot, \cdot, u_0, w_0)$ zu bestimmen. Das ist eine Funktion, welche dem System

$$\begin{aligned} \hat{G}_{uu} + \hat{G}_{ww} &= -\delta_{(u_0, w_0)}^2 \quad \text{in } \hat{A} \quad (\text{Dirac} - \delta) \\ \hat{G}|_{w=0} &= 0 \\ \hat{G}_w|_{w=-d} &= 0 \\ \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{G}_w &= 0 \end{aligned} \tag{46}$$

genügt. Bekanntlich ist

$$(u, w) \mapsto \hat{g}(u, w, u_0, w_0) := \frac{-1}{4\pi} \ln \left((u - u_0)^2 + (w - w_0)^2 \right) \tag{47}$$

eine Grundlösung, d.h. es gilt $\hat{g}_{uu} + \hat{g}_{ww} = -\delta_{(u_0, w_0)}^2$.

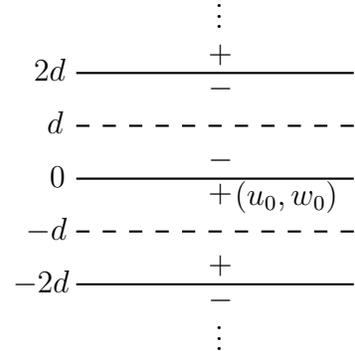
Durch Spiegelung an der Achse $w=0$ kann sofort eine Greenfunktion \hat{G}^∞ für den unendlich tiefen Aquifer ($d=\infty$), d.h. für $\hat{A} = \{(u, w) \in \mathbb{R}^2 \mid w < 0\}$ angegeben werden:

$$\boxed{(u, w) \mapsto \hat{G}^\infty(u, w, u_0, w_0) = \frac{-1}{4\pi} \ln \frac{(u - u_0)^2 + (w - w_0)^2}{(u - u_0)^2 + (w + w_0)^2}} \tag{48}$$

Man kann leicht nachprüfen, dass in der unteren Halbebene $\{(u, w) \in \mathbb{R}^2 \mid w < 0\}$ die Funktion \hat{G}^∞ eine Grundlösung ist und $\hat{G}^\infty|_{w=0} = 0$, $\lim_{w \rightarrow -\infty} \hat{G}_w^\infty = 0$ sowie $\lim_{u \rightarrow -\infty} \hat{G}_w^\infty = 0$ gilt.

Eine Lösungsmethode für den endlich tiefen Aquifer ist ebenfalls das Spiegelungsprinzip. Es werden (unendlich viele) Ladungen mit der Periode $4d$ so verteilt werden, so dass sich die Randbedingungen für das Potential \hat{G} aus Symmetrie-Gründen ergeben müssen. Die Reihendarstellung für \hat{G} kann dann ausgerechnet werden.

$$\hat{G}(u, w, u_0, w_0) = \frac{-1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{(u - u_0)^2 + (w - w_0 + 2nd)^2}{(u - u_0)^2 + (w + w_0 + 2nd)^2}$$



Wir verfolgen die sich ergebenden Umformungen nicht weiter und geben das Ergebnis an.

Satz 2.3 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.1 ist*

$$\boxed{\hat{G}(u, w, u_0, w_0) := \frac{-1}{4\pi} \ln \left(\frac{\cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} - \cos \frac{\pi(w-w_0)}{2d}}{\cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \cos \frac{\pi(w-w_0)}{2d}} \cdot \frac{\cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \cos \frac{\pi(w+w_0)}{2d}}{\cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} - \cos \frac{\pi(w+w_0)}{2d}} \right)} \tag{49}$$

eine Greenfunktion für das Druckpotential des inhomogenen Problems (39). Die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems ist gegeben durch

$$\boxed{\hat{p}^i(u, w) = \int_A \hat{G}(\hat{u}(\xi, \eta), \hat{w}(\xi, \eta), u, w) \cdot \frac{Q(\xi, \eta)}{K} d\xi d\eta}, \tag{50}$$

wobei $(x, z) \mapsto (\tilde{u}(x, z), \tilde{w}(x, z))$ die Inverse der konformen Abbildung $\hat{\mathbf{F}}$ aus Satz 2.1 sei.

Für den **Beweis** kann man leicht nachprüfen, dass obige Funktion \hat{G} die Randbedingungen erfüllt und $\Delta_{u,w} G(u, w, u_0, w_0) = 0$ gilt auf $\hat{A} \setminus \{(u_0, w_0)\}$. Ferner ist die Funktion \hat{G} eine Grundlösung. Letzteres folgert man aus $\lim_{(u,w) \rightarrow (u_0, w_0)} (G - G^\infty) = 0$.

Damit ist bekanntlich die allgemeine inhomogene Lösung gegeben als

$$\hat{p}^i(u, w) = \int_{\hat{A}} \hat{G}(\tilde{u}, \tilde{w}, u, w) \cdot \underbrace{\left(\hat{x}_u^2(\tilde{u}, \tilde{w}) + \hat{x}_w^2(\tilde{u}, \tilde{w}) \right)}_{=|\det \hat{\mathbf{F}}'(\tilde{u}, \tilde{w})|} \cdot \frac{\hat{Q}(\tilde{u}, \tilde{w})}{K} d\tilde{u}d\tilde{w}.$$

Die Transformationsformel für Mehrfachintegrale liefert dann die Behauptung. \square

Diese Greenfunktion für das Druckpotential ist der Imaginärteil einer holomorphen Funktion. Ein Realteil \hat{H} kann über die Cauchy-Riemann-DGL berechnet werden:

$$(u, w) \in \hat{A} \ \& \ u \neq u_0: \ \hat{H}(u, w, u_0, w_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\arctan \frac{\sin \frac{\pi(w-w_0)}{2d}}{\sinh \frac{\pi(u-u_0)}{2d}} - \arctan \frac{\sin \frac{\pi(w+w_0)}{2d}}{\sinh \frac{\pi(u-u_0)}{2d}} \right) \quad (51)$$

Wir bezeichnen \hat{H} als *Greenfunktion des Strompotentials*. Sie ist auf den nach oben geschlitzten Parallelstreifen $\mathbb{R}+i] - d, 0[\setminus \{u_0+iw : w_0 \leq w < 0\}$ analytisch fortsetzbar:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{H}(u_0 \pm \varepsilon, w, u_0, w_0) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} & w_0 < w < 0 \\ 0 & w_0 > w \end{cases} \quad (52)$$

Diese Stammfunktion \hat{H} kann daher analytisch auf einer Riemannschen Fläche definiert werden. Als zu \hat{p}^i gehörender Realteil setzen wir (bis auf eine Konstante) das *Quellstrom-Potential*:

$$\hat{q}^i(u, w) := \int_{\hat{A}} \hat{H}(u, w, \tilde{u}(\xi, \eta), \tilde{w}(\xi, \eta)) \cdot \frac{Q(\xi, \eta)}{K} d\xi d\eta \quad (53)$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.1 ist die (transformierte) Druckfunktion \hat{p} gegeben als Imaginärteil der auf \hat{A} meromorphen Funktion:

$$\hat{q} + i \hat{p} = (\hat{q}^h + \hat{q}^i) + i (\hat{p}^h + \hat{p}^i) \quad (54)$$

Die Funktion $\hat{q}^h + i \hat{p}^h$ ist durch (45) gegeben, der Realteil $\hat{q}^i + i \hat{p}^i$ durch (49)-(53).

Ferner notieren wir noch die Ableitungen von \hat{H} und \hat{G} :

$$\begin{aligned} \hat{H}_u(u, w, u_0, w_0) &= \hat{G}_w(u, w, u_0, w_0) \\ &= \frac{\cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d}}{4d} \left(\frac{-\sin \frac{\pi(w-w_0)}{2d}}{\sinh^2 \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \sin^2 \frac{\pi(w-w_0)}{2d}} + \frac{\sin \frac{\pi(w+w_0)}{4d}}{\sinh^2 \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \sin^2 \frac{\pi(w+w_0)}{2d}} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_w(u, w, u_0, w_0) &= -\hat{G}_u(u, w, u_0, w_0) \\ &= \frac{\sinh \frac{\pi(u-u_0)}{2d}}{4d} \left(\frac{\cos \frac{\pi(w-w_0)}{2d}}{\sinh^2 \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \sin^2 \frac{\pi(w-w_0)}{2d}} - \frac{\cos \frac{\pi(w+w_0)}{4d}}{\sinh^2 \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \sin^2 \frac{\pi(w+w_0)}{2d}} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

Zudem benötigen wir noch folgende Quell-Funktion:

$$\hat{Q}(u) := - \int_{-\infty}^u \hat{p}_w^i(r, 0) dr = \frac{1}{\pi} \int_A \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sinh \frac{\pi(u-\tilde{u}(\xi, \eta))}{2d}}{\sin \frac{\pi\tilde{w}(\xi, \eta)}{2d}} \right) \cdot \frac{Q(\xi, \eta)}{K} d\xi d\eta \quad (57)$$

Um die letzte Gleichung zu verifizieren, geben wir auf dem Parallelstreifen $\mathbb{R}+i]-|w_0|, |w_0|[[$ einen zu (51) alternativen Realteil \tilde{H} an:

$$|w| < |w_0| : \tilde{H}(u, w, u_0, w_0) = \frac{-1}{2\pi} \left(\arctan \frac{\sinh \frac{\pi(u-u_0)}{2d}}{\sin \frac{\pi(w-w_0)}{2d}} - \arctan \frac{\sinh \frac{\pi(u-u_0)}{2d}}{\sin \frac{\pi(w+w_0)}{2d}} \right) \quad (58)$$

Diese alternative Stammfunktion ist jetzt um die reelle Achse ($w=0$) analytisch.

$$\begin{aligned} \hat{Q}(u) &= - \int_{-\infty}^u \hat{p}_w^i(r, 0) dr = - \int_A \int_{-\infty}^u \hat{G}_w(r, 0, \tilde{u}(\xi, \eta), \tilde{w}(\xi, \eta)) dr \cdot \frac{Q(\xi, \eta)}{K} d\xi d\eta \\ &= - \int_A \int_{-\infty}^u \hat{H}_u(r, 0, \tilde{u}(\xi, \eta), \tilde{w}(\xi, \eta)) dr \cdot \frac{Q(\xi, \eta)}{K} d\xi d\eta \\ &= - \int_A \int_{-\infty}^u \left[\tilde{H}(r, 0, \tilde{u}(\xi, \eta), \tilde{w}(\xi, \eta)) \right]_{-\infty}^u \cdot \frac{Q(\xi, \eta)}{K} d\xi d\eta \\ &= - \int_A \left[\frac{1}{\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi(r-\tilde{u}(\xi, \eta))}{2d}}{\sin \frac{\pi\tilde{w}(\xi, \eta)}{2d}} \right]_{r=-\infty}^u \cdot \frac{Q(\xi, \eta)}{K} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_A \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sinh \frac{\pi(u-\tilde{u}(\xi, \eta))}{2d}}{\sin \frac{\pi\tilde{w}(\xi, \eta)}{2d}} \right) \cdot \frac{Q(\xi, \eta)}{K} d\xi d\eta \end{aligned}$$

Das letzte Ergebnis dieses Abschnitts ergibt sich wegen $-d < \hat{w}(\xi, \eta) < 0$ für $(\xi, \eta) \in A$:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \hat{Q}(u) = - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_w^i(r, 0) dr = \frac{1}{K} \int_A Q(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (59)$$

2.3 Transformation der Oberflächenrandbedingung - Druckfreie Formulierung

Gegenstand des Kapitels 2.1 war eine konforme Transformation, vermöge der in 2.2 der Druck im Aquifer angegeben werden konnte. Sowohl die konforme Transformation als auch der Druck enthalten als Unbekannte den freien Grundwasserspiegel f .

Mit diesen Ergebnissen kann jetzt die Oberflächenrandbedingung bearbeitet werden. So erhält man Bestimmungsgleichungen zwischen N, Q, f , welche den Druck p nicht enthalten und die grundlegend sind für alle späteren Untersuchungen.

Es ist noch die Oberflächenrandbedingung aus (23) zu transformieren:

$$\boxed{\frac{N - n_e f_t}{K} = 1 + (1 + f_x^2) p_z|_{z=f}}$$

Bei $w=0$ gilt nach (30) und nach Anwendung der Kettenregel auf $\hat{f}(u; t) = f(\bar{x}(u; t); t)$:

$$\begin{aligned}\bar{x}_u &= \hat{x}_u|_{w=0} = \hat{z}_w|_{w=0} \\ \hat{f}_u &= \hat{z}_u|_{w=0} = -\hat{x}_w|_{w=0} = f_x|_{x=\bar{x}} \cdot \bar{x}_u\end{aligned}$$

Aus (41) ergibt sich $\hat{p}_u^h|_{w=0} = 0$. Hat die Quellfunktion Q ihren Träger im Innern von \hat{A} , so kann man aus (50) und (56) auch $\hat{p}_u^i|_{w=0} = 0$ folgern. Es gilt also:

$$\hat{p}_u|_{w=0} = \hat{p}_u^h + \hat{p}_u^i|_{w=0} = 0 \quad (60)$$

Damit berechnen wir $p_z|_{z=f}$ vermöge $\hat{p}(u, w; t) = p(\hat{x}(u, w; t), \hat{z}(u, w; t); t)$:

$$\begin{aligned}0 &= \hat{p}_u|_{w=0} = p_x \bar{x}_u + p_z \hat{f}_u|_{x=\bar{x}, z=\hat{f}} \\ \hat{p}_w|_{w=0} &= -p_x \hat{f}_u + p_z \hat{x}_u|_{x=\bar{x}, z=\hat{f}} \\ \Rightarrow \hat{p}_w|_{w=0} \bar{x}_u &= p_z|_{x=\bar{x}, z=\hat{f}} \cdot (\bar{x}_u^2 + \hat{f}_u^2)\end{aligned}$$

Aus der Multiplikation der Oberflächenrandbedingung mit \bar{x}_u ergibt sich:

$$\frac{(N \circ \bar{x}) - n_e (f_t \circ \bar{x})}{K} \cdot \bar{x}_u = \bar{x}_u + \left(1 + \frac{\hat{f}_u^2}{\bar{x}_u^2}\right) \frac{\hat{p}_w|_{w=0} \bar{x}_u^2}{\bar{x}_u^2 + \hat{f}_u^2} = \bar{x}_u + \hat{p}_w|_{w=0} = \bar{x}_u + \hat{p}_w^h + \hat{p}_w^i|_{w=0}$$

Nach (30) und (43) lauten die Darstellungen von \bar{x} und $\hat{p}_w|_{w=0}$:

$$\begin{aligned}\bar{x}_u(u) &= 1 - \frac{1}{2d} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_r(r) \cdot \frac{1}{\tanh \rho} dr \\ \hat{p}_w^h(u, 0) &= -1 + \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_r(r) \cdot \frac{\sinh \rho}{\cosh \rho + 1} \cdot \frac{\cosh \rho - 1}{\cosh \rho - 1} dr \\ &= -1 + \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_r(r) \cdot \left(\frac{1}{\tanh \rho} - \frac{1}{\sinh \rho} \right) dr\end{aligned}$$

Die Addition der zwei Größen führt auf die Gleichung

$$\frac{\hat{N}(\bar{x}(u)) - n_e f_t(\bar{x}(u))}{K} \bar{x}_u(u) = \frac{-1}{2d} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_u(r) \cdot \frac{1}{\sinh \rho} dr + \hat{p}_w^i(u, 0),$$

die wir vermöge $\int_{u_0}^u du'$ bestimmt integrieren und die vermöge $\xi := \bar{x}(u')$ substituiert wird:

$$\int_{\bar{x}(u_0)}^{\bar{x}(u)} \frac{N(\xi) - n_e f_t(\xi)}{K} d\xi = \frac{-1}{2d} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(r)}{\sinh \frac{\pi(r-u)}{2d}} dr + \underbrace{\frac{1}{2d} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(r)}{\sinh \frac{\pi(r-u_0)}{2d}} dr}_{=:I} + \int_{u_0}^u \hat{p}_w^i(u', 0) du'$$

Die Integrationskonstante I auf der rechten Seite wird berechnet über die Limites $u \rightarrow \pm\infty$. Wir benutzen dabei, dass die Randtransformation \bar{x} umkehrbar ist.

$$\begin{aligned} \bar{x}_u > 0 \ \& \ \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \bar{x}(u) = \pm\infty \\ u \rightarrow +\infty : \quad & \int_{\bar{x}(u_0)}^{\infty} \frac{N(\xi) - n_e f_t(\xi)}{K} d\xi = I + \int_{u_0}^{\infty} \hat{p}_w^i(u', 0) du' \\ u \rightarrow -\infty : \quad & \int_{\bar{x}(u_0)}^{-\infty} \frac{N(\xi) - n_e f_t(\xi)}{K} d\xi = I + \int_{u_0}^{-\infty} \hat{p}_w^i(u', 0) du' \end{aligned}$$

Durch Ersetzen von I vermöge der ersten Identität für $u \rightarrow +\infty$ entsteht die *transformierte Oberflächenrandbedingung*:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\bar{x}(u,t)} \frac{N(\xi;t) - n_e f_t(\xi;t)}{K} d\xi}_{=: \mathcal{N}(\bar{x}(u;t);t)} = \frac{-1}{2d} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(r;t)}{\sinh \frac{\pi(r-u)}{2d}} dr + \underbrace{\int_{-\infty}^u \hat{p}_w^i(u', 0; t) du'}_{=: -\hat{Q}(u) \text{ (vgl.(57))}} \quad (61)$$

Der Subtraktion der Identitäten $u \rightarrow \pm\infty$ liefert eine *Bilanz-Gleichung*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (N(\xi) - n_e f_t(\xi)) d\xi = K \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}_w^i(u', 0) du' \stackrel{\text{vgl.(59)}}{=} - \int_A Q(x, z) dx dz \quad (62)$$

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Satz 2.4 Seien $0 < \alpha < 1$, die *Konduktivität* $K > 0$, die *effektive Porosität* $1 > n_e > 0$ und die *Aquifertiefe* $d > 0$. Zum *Zeitpunkt* $t \geq t_0$ sei der *Grundwasserspiegel* gegeben als $z = f(x; t)$ mit den *Eigenschaften*:

$$\boxed{f(\cdot; t) \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}) \ \& \ f'(\cdot; t) \in \mathcal{L}^1 \ \& \ \exists h \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x; t) = \pm h \ \& \ \exists \varepsilon > 0 \ |f(\cdot; t)| \leq d - \varepsilon} \quad (63)$$

Die Transformationsgleichung

$$\boxed{\bar{x}(u; t) - u = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{f(\bar{x}(r; t); t)}_{=: \hat{f}(r;t)} \cdot \frac{1}{\tanh \rho} - h \right) d\rho + \text{const.}} \quad \left(\rho = \frac{\pi(r-u)}{2d} \right) \quad (64)$$

sei *eindeutig nach \bar{x} lösbar* mit $\exists \varepsilon > 0 \ \bar{x}_u(\cdot; t) \geq \varepsilon$ (von Null weg beschränkt).

Die *oberflächliche Bewässerung* $N(\cdot; t) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ sei α -*hölderstetig* und *integrierbar*. Schließlich sei die *innere Bewässerung* $Q(\cdot, \cdot; t) \in \mathcal{L}^1(A)$ *integrierbar* und habe *kompakten Träger* im *Innern* des *Aquifers* $A = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid -d < z < f(x; t)\}$.

Dann ergibt sich mit den Abkürzungen

$$\mathcal{N}(x; t) := \int_{-\infty}^x \frac{N(\xi; t) - n_e f_t(\xi; t)}{K} d\xi \quad (65)$$

$$\hat{Q}(u; t) := \frac{1}{\pi} \int_A \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sinh \frac{\pi(u-\bar{u}(\xi, \eta; t))}{2d}}{\sin \frac{\pi \bar{w}(\xi, \eta; t)}{2d}} \right) \cdot \frac{Q(\xi, \eta; t)}{K} d\xi d\eta \quad (66)$$

$$\hat{\mathcal{N}}(u; t) := \mathcal{N}(\bar{x}(u; t); t) + \hat{Q}(u; t) \quad (67)$$

die transformierte Oberflächenrandbedingung zu:

$$\hat{\mathcal{N}}(u; t) = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r; t) \cdot \frac{1}{\sinh \rho} d\rho = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_r(r; t) \cdot \ln \left| \tanh \frac{\rho}{2} \right| dr \quad (68)$$

Es gilt $\hat{\mathcal{N}}(\cdot; t) \in \mathcal{C}^{1,\alpha} \cap \mathcal{L}^1$ und $f_t(\cdot; t) \in \mathcal{C}^{0,\alpha} \cap \mathcal{L}^1$.

Ferner ist die folgende Bilanzgleichung erfüllt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (N(\xi; t) - n_e f_t(\xi; t)) d\xi + \int_A Q(x, z; t) dx dz = 0 \quad (69)$$

Der **Beweis** ist im wesentlichen gezeigt. Die Regularität von $\hat{\mathcal{N}}(\cdot; t)$ folgt aus dem Satz 7.4. Die Regularität von $f_t(\cdot; t)$ ergibt sich dann aus der Regularität von $\hat{\mathcal{N}}(\cdot; t)$, $N(\cdot; t)$ und $Q(\cdot, \cdot; t)$. \square

Mit diesem Formelwerk kann das instationäre Problem folgendermaßen gelöst werden:

Bei gegebenem Anfangswert $f(\cdot; t_0)$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ lässt sich aus (64) die Randtransformation $\bar{x}(\cdot; t_0)$ und $\hat{f}(\cdot; t_0)$ berechnen. Damit erhält man aus (68) die Funktion $\hat{\mathcal{N}}(\cdot; t_0)$. Wenn keine Quellen vorliegen ($Q \equiv 0$), kann aus (65) die Funktion $f_t(\cdot; t_0)$ ermittelt werden. Hieraus lässt sich ein numerisches Verfahren zur Berechnung von $f(\cdot; t_0 + \Delta t)$ konstruieren.

In analoger Weise lässt sich das inverse Problem lösen:

Bei gegebenem f kann aus (64) wieder \bar{x} und somit \hat{f} berechnet werden (Im Gegensatz zum instationären Problem ist jetzt f zu jedem Zeitpunkt $t \geq t_0$ gegeben, und nicht nur ein Anfangswert). Damit erhält man wieder aus (68) die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ und weiterhin die Bewässerung N aus (65).

Um hingegen das stationäre Problem zu lösen, die Berechnung des stationären Grundwasserspiegels f aus einer zeitlich konstanten Bewässerung N , muss das obige Formelwerk umgestellt werden.

Es können die Gleichungen (64) und (68) nach der Funktion \hat{f} aufgelöst und gleichgesetzt werden. Aus der sich ergebenden direkten Beziehung zwischen \bar{x} und $\hat{\mathcal{N}}$ kann man jetzt die Randtransformation \bar{x} und schließlich die Funktion \hat{f} berechnen. Die Grundwasseroberfläche ist dann zumindest in der Parameterform $u \mapsto (\bar{x}(u), \hat{f}(u))$ gegeben.

3 Der unendlich tiefe 2D-Aquifer

Wir diskutieren den Spezialfall des unendlich tiefen Grundes ($d \rightarrow \infty$), bevor im Kapitel 4 die Theorie des endlich tiefen Aquifers fortgesetzt wird.

Als erstes notieren wir in 3.1 die benötigten Formeln. Dann führen wir in 3.2 einen Lösungsnachweis durch. In 3.3 geben wir ein paar Beispiele von exakten stationären Lösungen an, mit denen so manche interessante Grundwassersituation studiert werden kann. Wie man zu einer ganzen Klasse von Bewässerungen die stationären Lösungen berechnet, bearbeiten wir in 3.4. In 3.5 bauen wir Quellen ein und in 3.6 gehen wir inverse und instationäre Probleme an.

Das hier behandelte und exakt gelöste Problem besitzt Modellcharakter. So wie z.B. die Poisson-Formel das Dirichlet-Problem für ein Kreisgebiet löst, so erhält man hier eine analytische Lösung des freien Randwertproblems der Laplace-Gleichung bei Bewässerung eines Halbraums von oben durch eine (bis auf mathematische Bedingungen) beliebige Bewässerungsfunktion. Der freie Rand ergibt sich aus einer nichtlinearen Randbedingung auf dem oberen Rand. Trotz der Nichtlinearität des Problems erhält man exakte, einfache Lösungsformeln (Satz 3.1). Die Herleitung dieser Formeln ist sehr langwierig. Ihre Gültigkeit wird daher in 3.2 direkt nachgewiesen.

Für praktische Belange ist es völlig ausreichend, die Bewässerungsfunktion N als stetigen Polygonzug zu wählen. Die sich dann ergebenden Formeln sind in 3.4 hergeleitet. Man hat damit eine hervorragende Möglichkeit, numerische Verfahren zu testen.

3.1 Formeln für den unendlich tiefen 2D-Aquifer

Wir stellen die benötigten Formeln für den unendlich tiefen 2D-Aquifer zusammen. Dazu bilden wir bei den entsprechenden Formeln zum Aquifer mit endlich tiefem Grund den Limes $d \rightarrow \infty$. Die Rechnungen sind elementar und seien dem Leser erspart. Generell vereinfachen sich die Gleichungen bei unendlich tiefem Grund.

Für den Grundwasserspiegel f sind die Voraussetzungen zu modifizieren, denn es kann sich keine Grundwasserstufe bilden, d.h. es gilt $h = 0$, wie wir noch in 4.1.4 zeigen.

$$\boxed{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{R}) \quad \& \quad f' \in \mathcal{L}^2} \quad (70)$$

Die konforme Transformation $\hat{\mathbf{F}} = \hat{x} + i\hat{z}$ berechnen wir aus den Gleichungen (28/263). (Die aus (263) abgeleiteten Formeln kann man auch direkt berechnen.)

$$\boxed{\hat{x}(u, w; t) - u = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r; t) \frac{r - u}{(r - u)^2 + w^2} dr = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(r; t) \frac{-w}{(r - u)^2 + w^2} dr \quad (w < 0)} \quad (71)$$

$$\boxed{\hat{z}(u, w; t) - w = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r; t) \frac{-w}{(r - u)^2 + w^2} dr = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(r; t) \frac{r - u}{(r - u)^2 + w^2} dr} \quad (72)$$

Das homogene Strom-Druckpotential $\hat{q}^h + i\hat{p}^h = -(u + iw)$ aus (45) nimmt eine sehr einfache Form an. Aus den Gleichungen (50) und (53) ergibt sich insgesamt:

$$(\hat{u}, \hat{w}) = \tilde{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}^{-1} = (\hat{x}, \hat{w})^{-1}$$

$$\hat{q}(u, w; t) + u = \frac{1}{2\pi} \int_A \left(\arctan \frac{w - \check{w}(\xi, \eta; t)}{u - \check{u}(\xi, \eta; t)} - \arctan \frac{w + \check{w}(\xi, \eta; t)}{u - \check{u}(\xi, \eta; t)} \right) \cdot \frac{Q(\xi, \eta; t)}{K} d\xi d\eta \quad (73)$$

$$\hat{p}(u, w; t) + w = \frac{-1}{4\pi} \int_A \ln \frac{(u - \check{u}(\xi, \eta; t))^2 + (w - \check{w}(\xi, \eta; t))^2}{(u - \check{u}(\xi, \eta; t))^2 + (w + \check{w}(\xi, \eta; t))^2} \cdot \frac{Q(\xi, \eta; t)}{K} d\xi d\eta \quad (74)$$

Die Bilanz-Gleichung (69) bleibt unverändert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (N(\xi; t) - n_e f_t(\xi; t)) d\xi + \int_A Q(\xi, \eta; t) d\xi d\eta = 0 \quad (75)$$

Die Vereinfachung der Grundwassergleichungen (68-64) zu

$$\mathcal{N}(x; t) := \int_{-\infty}^x \frac{N(\xi; t) - n_e f_t(\xi; t)}{K} d\xi \quad (76)$$

$$\hat{Q}(u; t) := \frac{1}{\pi} \int_A \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{u - \check{u}(\xi, \eta; t)}{\check{w}(\xi, \eta; t)} \right) \cdot \frac{Q(\xi, \eta; t)}{K} d\xi d\eta \quad (77)$$

$$\hat{\mathcal{N}}(u; t) := \mathcal{N}(\bar{x}(u; t); t) + \hat{Q}(u; t) = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r; t) \frac{1}{r - u} dr \quad (78)$$

$$\bar{x}(u; t) - u = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r; t) \frac{1}{r - u} dr \quad , \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \bar{x}_u(\cdot; t) \geq \varepsilon \quad (79)$$

hat eine besondere Konsequenz, denn der Vergleich von (78) mit (79) liefert direkt die Formel zur Berechnung der Transformation \bar{x} .

$$\bar{x}(u; t) - u = \mathcal{N}(\bar{x}(u; t); t) + \hat{Q}(u; t) \quad (80)$$

Ferner kann mit dem Satz (7.2) die Gleichung (79) nach \hat{f} aufgelöst werden:

$$\hat{f}(u; t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(r; t) - r}{r - u} dr \quad (81)$$

Damit ist der Grundwasserspiegel zum Zeitpunkt t in der Parameterform $u \mapsto (\bar{x}(u; t), \hat{f}(u; t))$ bekannt, wenn man auch die Randtransformation \bar{x} kennt.

Die (äußere) Bewässerungsfunktion N hat in praktischen Anwendungen einen kompakten Träger. Wir werden sie als Polygonzug mit den Stützstellen $(x_i, N(x_i))$ ansetzen. Im stationären Fall ($f_t = 0$) oder wenn die Funktion f_t (beliebig genau) durch eine Polygonzug approximiert werden kann, ist die Funktion \mathcal{N} ein Parabelzug, sodass nach \bar{x} aufgelöst werden kann.

$$\bar{x}(u) \in [x_i, x_{i+1}] : \alpha_i \bar{x}^2(u) + \beta_i \bar{x}(u) + \gamma_i = \bar{x}(u) - \mathcal{N}(\bar{x}(u)) = u + \hat{\mathcal{Q}}(u) \quad (82)$$

Das Wurzel-Vorzeichen beim Lösen der Quadratischen Gleichung wird festgelegt durch die Bedingung $\bar{x}_u > 0$. Differenziert man die Gleichung (80) nach u und benutzt, dass die Funktionen \mathcal{N}' und $\hat{\mathcal{Q}}'$ für grosse Argumente verschwinden, dann ergeben sich Ungleichungen, denen \mathcal{N}' und $\hat{\mathcal{Q}}'$ genügen müssen (von Null weg beschränkt).

$$\bar{x}_u - 1 = \mathcal{N}' \bar{x}_u + \hat{\mathcal{Q}}' \Rightarrow 0 < \underbrace{(1 - \mathcal{N}')}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\bar{x}_u}_{> 0} = \underbrace{1 + \hat{\mathcal{Q}}'}_{\rightarrow 1 > 0}$$

$$\boxed{\exists \varepsilon \quad 0 < \varepsilon \leq 1 - \mathcal{N}'(x) = 1 - \frac{N(x)}{K} = 2\alpha_i x + \beta_i \quad x \in [x_i, x_{i+1}]} \quad (83)$$

$$\boxed{\exists \varepsilon \quad 0 < \varepsilon \leq 1 + \hat{\mathcal{Q}}'(u)} \quad (84)$$

Die Fallunterscheidung $\alpha_i = 0 / \alpha_i \neq 0$ in der Lösungsformel kann beseitigt werden:

$$\bar{x}(u) = \frac{2(u + \hat{\mathcal{Q}}(u) - \gamma_i)}{\beta_i + \sqrt{\beta_i^2 + 4\alpha_i(u + \hat{\mathcal{Q}}(u) - \gamma_i)}} \quad (85)$$

$$\bar{x}'(u) = \frac{1 + \hat{\mathcal{Q}}'(u)}{\sqrt{\beta_i^2 + 4\alpha_i(u + \hat{\mathcal{Q}}(u) - \gamma_i)}} > 0 \quad (86)$$

Alternativ kann man die zu \bar{x} inverse Randtransformation \bar{u} benutzen:

$$\boxed{\bar{x}(r) = \xi \Leftrightarrow r = \bar{u}(\xi)} \quad (87)$$

Die Größen in (73) und (74) für das Strom- und Druckpotential bleiben unverändert. Die anderen relevanten Formeln schreiben sich wie folgt:

$$\boxed{\bar{u}(x) = x - \mathcal{N}(x) - \hat{\mathcal{Q}}(\bar{u}(x))} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(u, w) - u &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \frac{-w}{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u}_\xi(\xi) - 1) \arctan \frac{\bar{u}(\xi) - u}{-w} d\xi \end{aligned} \quad (w < 0) \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \hat{z}(u, w) - w &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \frac{\bar{u}(\xi) - u}{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u}_\xi(\xi) - 1) \ln \sqrt{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} d\xi \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \frac{1}{\bar{u}(\xi) - \bar{u}(x)} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u}_\xi(\xi) - 1) \cdot \ln |\bar{u}(\xi) - \bar{u}(x)| d\xi \end{aligned} \quad (91)$$

Ist der Quellterm $\hat{Q} = 0$ (keine Quellen/Senken im Aquifer A) oder lässt sich aus (88) die Randtransformation \bar{u} berechnen, so ist im stationären Fall ($f_t = 0$) die Gestalt der Grundwasser Oberfläche vermöge (91) bis auf eine Integration explizit für beliebige Bewässerungsfunktionen N (die nur noch notwendigen mathematischen Forderungen genügen müssen) bekannt.

Wir fassen die Lösung des stationären Problems bei unendlich tiefem Aquifer in folgendem Satz zusammen:

Satz 3.1 *Gegeben sei die Konduktivität $K > 0$, sowie die Oberflächen-Bewässerung $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit*

$$\boxed{N < K \quad \& \quad \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi) d\xi = 0 \quad \& \quad N \in \mathcal{C}_0^{0,\alpha}} \quad (92)$$

d.h. N sei nach oben durch K beschränkt, genüge einer Bilanzgleichung, sei α -hölderstetig und habe einen kompakten Träger. Die Kompaktheitsvoraussetzung kann abgeschwächt werden, ist aber für praktische Anwendungen immer gegeben.

Die Lösung des freien Randwertproblems

$$\boxed{A := \{(x, z) \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ z < f(x)\}} \quad (93)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_{xx} + p_{zz} = 0 \quad , \quad p \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^1(\bar{A}) \\ p|_{z=f} = 0 \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} p_z(x, z) = -1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p_z(x, z) = -1 \quad \text{für alle } z \leq 0 \end{array}} \quad \text{vgl. (22)} \quad (94)$$

$$\boxed{\frac{N}{K} = 1 + (1 + f_x^2) p_z|_{z=f}} \quad \text{vgl. (23)} \quad (95)$$

ist gegeben durch die Formeln

$$\boxed{\bar{u}(x) = x - \mathcal{N}(x) = x - \int_{-\infty}^x \frac{N(\xi)}{K} d\xi} \quad (96)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \frac{1}{\bar{u}(\xi) - \bar{u}(x)} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi} \quad (97)$$

$$\boxed{\hat{x}(u, w) - u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \frac{-w}{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi} \quad (w < 0) \quad (98)$$

$$\boxed{\hat{z}(u, w) - w = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \frac{\bar{u}(\xi) - u}{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi} \quad (99)$$

$$\boxed{p : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R} \quad p(x, z) := -\check{w}(x, z)} \quad , \quad (100)$$

wobei $\check{u} + i\check{w}$ die Umkehrfunktion von $\hat{x} + i\hat{z}$ ist.

3.2 Ein Lösungsnachweis beim unendlich tiefen 2D-Aquifer

Weil die Herleitung der Formeln (73),(74) und (88)-(91) sehr langwierig war, soll hier der Nachweis ihrer Gültigkeit für $Q = 0$ im stationären Zustand direkt erbracht werden.

Gegeben sei die Konduktivität $K > 0$ sowie die Bewässerung $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\boxed{N < K \quad \& \quad \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi) d\xi = 0 \quad \& \quad N \in \mathcal{C}_0^{0,\alpha}} \quad (101)$$

d.h. N sei nach oben durch K beschränkt, genüge einer Bilanzgleichung, sei α -hölderstetig und habe einen kompakten Träger. Die Kompaktheitsvoraussetzung kann abgeschwächt werden, ist aber für praktische Anwendungen immer gegeben. Die Funktion

$$\bar{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{u}(x) := x - \int_{-\infty}^x \frac{N(\xi)}{K} d\xi \quad \bar{u} - \text{id} \in \mathcal{C}_0^{1,\alpha}(\mathbb{R}) \quad (102)$$

ist differenzierbar, ihre Ableitung α -hölderstetig und wegen

$$\exists \varepsilon \quad \bar{u}_x = 1 - N/K \geq \varepsilon > 0$$

auch umkehrbar. Die Umkehrfunktion sei \bar{x} . Es gilt $\bar{x} - \text{id} \in \mathcal{C}_0^{1,\alpha}(\mathbb{R})$.

Die Hölderstetigkeit von $0 < \bar{x}_u = \frac{1}{\bar{u}_x \circ \bar{x}} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ ergibt sich aus der Hölderstetigkeit von \bar{u}_x :

$$\frac{|\bar{x}'(u) - \bar{x}'(v)|}{|u - v|^\alpha} = \frac{|\bar{u}'(\bar{x}(v)) - \bar{u}'(\bar{x}(u))|}{|u - v|^\alpha \cdot |\bar{u}'(\bar{x}(u))| \cdot |\bar{u}'(\bar{x}(v))|} \leq \frac{k |\bar{x}(u) - \bar{x}(v)|^\alpha}{|u - v|^\alpha \varepsilon^2} \stackrel{\text{MWS}}{=} \frac{k |\bar{x}'(\xi)|^\alpha}{\varepsilon^2} \leq \frac{k}{\varepsilon^{2+\alpha}}$$

Wir fassen den Real- und den Imaginärteil der Funktion $\hat{\mathbf{F}} = \hat{x} + i \hat{z}$ aus (89) und (90) zusammen und substituieren vermöge $r = \bar{u}(\xi) \Leftrightarrow \xi = \bar{x}(r)$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}(u+iw) &:= \hat{x}(u, w) + i \hat{z}(u, w) \\ &= (u+iw) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \frac{\bar{u}(\xi) - u + iw}{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi \\ &= (u+iw) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \frac{1}{\bar{u}(\xi) - (u+iw)} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi \\ &= (u+iw) + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(r) - r}{r - (u+iw)} dr \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_u(u+iw) &= \hat{x}_u(u, w) + i \hat{z}_u(u, w) \\ &= 1 + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}_r(r) - 1}{r - (u+iw)} dr \end{aligned} \quad (104)$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x}_r(r) - 1) \frac{-w}{(r-u)^2 + w^2} dr + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x}_r(r) - 1) \frac{r-u}{(r-u)^2 + w^2} dr \quad (105)$$

Man kann leicht nachprüfen, dass die Abbildung $\hat{\mathbf{F}}$ auf der unteren Halbebene

$$\hat{A} = \{u+iw \mid u, w \in \mathbb{R} \ \& \ w < 0\}$$

holomorph ist.

Die Injektivität der Funktion $\hat{\mathbf{F}}$ wird gezeigt mit Hilfe von Lemma 8.7:

\hat{A} ist konvex und für den Realteil $\Re \hat{\mathbf{F}}' = \Re \hat{\mathbf{F}}'_u = \hat{x}_u = \hat{z}_w$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{x}_u = \hat{z}_w &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x}_r(r) - 1) \cdot \frac{-w}{(r-u)^2 + w^2} dr \\ &= 1 - \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w}{(r-u)^2 + w^2} dr}_{=\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\bar{x}_r(r)}_{\geq 1/\varepsilon} \cdot \underbrace{\frac{-w}{(r-u)^2 + w^2}}_{\geq 0} dr \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0. \end{aligned}$$

Wir definieren die Funktion

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}(u) := \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(r) - r}{r - u} dr \quad \hat{f} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}) \quad (106)$$

$$\text{bzw. } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \hat{f}(\bar{u}(x)) \quad f \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}), \quad (107)$$

deren Regularität sich auch dem Satz von Plemelj & Privalov aus 7.1 ergibt.

Nun kann man zeigen, dass sich die Funktion $\hat{\mathbf{F}}$ stetig-differenzierbar auf den Rand von \hat{A} fortsetzen lässt. Dazu werden die Formeln von Sochozki & Plemelj aus 7.1 verwendet:

$$\begin{aligned} \lim_{w \searrow 0} \hat{\mathbf{F}}(u + iw) &= \lim_{w \searrow 0} (\hat{x}(u, w) + i \hat{z}(u, w)) \\ &= u + \frac{i}{\pi} \lim_{w \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(r) - r}{r - (u + iw)} dr \\ &= u + \frac{i}{\pi} \left(\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(r) - r}{r - u} dr - i \pi (\bar{x}(u) - u) \right) \\ &= \bar{x}(u) + i \hat{f}(u) = \bar{x}(u) + i f(\bar{x}(u)) \end{aligned} \quad (108)$$

Analog ermittelt man $\lim_{w \searrow 0} \hat{\mathbf{F}}_u$.

Die stetige Fortsetzbarkeit von $\hat{\mathbf{F}}$ auf $\partial \hat{A} = \mathbb{R}$ hat insbesondere erbracht, dass der Aquifer $A := \hat{\mathbf{F}}(\hat{A})$ nach oben begrenzt wird durch die Kurve $\partial A = \{x + if(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Daher lässt sich der Aquifer beschreiben als

$$A = \hat{\mathbf{F}}(\hat{A}) = \{x + iz \mid x, z \in \mathbb{R} \ \& \ z < f(x)\}. \quad (109)$$

Die Funktion $\hat{\mathbf{F}} = \hat{x} + i\hat{z} : \hat{A} \rightarrow A$ ist also biholomorph, ihre Umkehrfunktion sei $\check{\mathbf{F}} = \check{u} + i\check{w}$. Sie lässt sich ebenfalls stetig-differenzierbar auf den Rand von A fortsetzen. Es gilt:

$$\lim_{z \rightarrow f(x)} \check{w}(x, z) = 0 \quad (110)$$

$$\lim_{z \rightarrow f(x)} \check{u}(x, z) = \bar{u}(x) \quad (111)$$

Letzteres ergibt sich aus der Beziehung

$$x = \hat{x}(\check{u}(x, z), \check{w}(x, z)) \xrightarrow{z \rightarrow f(x)} \bar{x}(\check{u}(x, f(x))) = \bar{u}^{-1}(\check{u}(x, f(x))).$$

Jetzt kann direkt nachgewiesen werden, dass die oben definierte Funktion f zusammen mit der Funktion

$$p : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R} \quad p(x, z) := -\check{w}(x, z) \quad (112)$$

eine Lösung der gestellten freien Randwertaufgabe ist:

$$\boxed{\begin{array}{l} p_{xx} + p_{zz} = 0 \quad , \quad p \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^1(\bar{A}) \\ p|_{z=f} = 0 \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} p_z(x, z) = -1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p_z(x, z) = -1 \quad \text{für alle } z \leq 0 \end{array}} \quad \text{vgl. (22)} \quad (113)$$

$$\boxed{\frac{N}{K} = 1 + (1 + f_x^2) p_z|_{z=f}} \quad \text{vgl. (23)} \quad (114)$$

Wir erinnern an die Beziehungen zwischen \check{u}, \check{w} und \hat{x}, \hat{z} aus (34), die sich ganz allgemein aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen $\hat{x}_u = \hat{z}_w$, $\hat{x}_w = -\hat{z}_u$ und der Kettenregel ergeben:

$$\check{u}_x + i\check{w}_x = \check{w}_z - i\check{u}_x = \frac{1}{\hat{x}_u + \hat{z}_u} = \frac{\hat{x}_u - i\hat{z}_u}{\hat{x}_u^2 + \hat{z}_u^2}$$

Damit erhalten wir die Laplace-Gleichung für p :

$$\Delta p = (-\check{w})_{xx} + (-\check{w})_{zz} = (-\check{w}_x)_x + (-\check{w}_z)_z = (\check{u}_z)_x + (-\check{u}_x)_z = 0$$

Aus (110) folgt sofort $p|_{z=f} = -\check{w}|_{z=f} = 0$.

Für die Neumann-Bedingungen benutzt man die Beziehung

$$p_z = -\check{w}_z = \frac{-\hat{x}_u}{\hat{x}_u^2 + \hat{z}_u^2} \Big|_{u=\check{u}, w=\check{w}}$$

und bildet dann in (105) die Limites $u \rightarrow \pm\infty$ bzw. $w \rightarrow \infty$. mit dem Ergebnis:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p_z(x, z) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{-\hat{x}_u}{\hat{x}_u^2 + \hat{z}_u^2} = \frac{-1}{1^2 + 0^2} = -1$$

Für die Oberflächenrandbedingung bilden wir den Limes $z \xrightarrow{\leq} f(x)$. Ferner gilt $f_x = \hat{f}_u \cdot \bar{u}_x$:

$$\lim_{z \xrightarrow{\leq} f(x)} p_z(x, z) = \frac{-\bar{x}_u}{\bar{x}_u^2 + \hat{f}_u^2} \Big|_{u=\bar{u}} = \frac{-1/\bar{u}_x}{1/\bar{u}_x^2 + (f_x/\bar{u}_x)^2} = \frac{-\bar{u}_x}{1 + f_x^2}$$

Damit ergibt sich die Oberfläche $z = f(x)$:

$$1 + (1 + f_x^2) \cdot p_z = 1 - \bar{u}_x = \frac{N}{K} \quad \square$$

3.3 Beispiele exakter stationärer Lösungen beim unendlich tiefen 2D-Aquifer

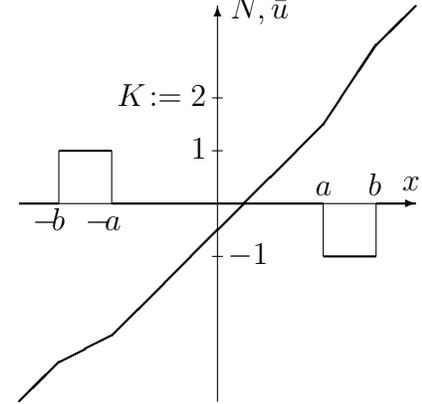
Wir wollen analytische Lösungen berechnen. Dabei lassen wir auch nichtstetige Bewässerungen zu, um die Auswirkungen der fehlenden Regularität zu testen.

Das folgende Beispiel liefert Ergebnisse, die vom wasserbaulichen Standpunkt aus gesehen sehr plausibel erscheinen. Da aber Grundwasseroberflächen mit Steigung unendlich an einzelnen Punkten auftreten, ist vom Standpunkt des Mathematikers zumindest die Oberflächenrandbedingung (19) neu zu interpretieren.

Die stationären Bestimmungs-Gleichungen im Fall des unendlich tiefen Grunds ohne Quellen sind:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x) &= x - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^x N(\xi) d\xi \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi) d\xi = 0 \\ f(x) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u}'(\xi) - 1) \cdot \ln |\bar{u}(\xi) - \bar{u}(x)| d\xi = \frac{-1}{K\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi) \cdot \ln |\bar{u}(\xi) - \bar{u}(x)| d\xi\end{aligned}$$

Als (nicht stetige) Bewässerungsfunktion wählen wir für $0 < a < b$:

$$N(x) := \begin{cases} 0 & x \in]-\infty, -b[\\ 1 & x \in [-b, -a] \\ 0 & x \in]-a, a[\\ -1 & x \in [a, b] \\ 0 & x \in]b, \infty[\end{cases}$$


$$K \cdot \bar{u}(x) = \begin{cases} Kx & x \in]-\infty, -b[\\ (K-1)x - b & x \in [-b, -a] \\ Kx + a - b & x \in]-a, a[\\ (K+1)x - b & x \in [a, b] \\ Kx & x \in]b, \infty[\end{cases}$$

Zu beachten ist, dass der Wert von K grösser ist als der Maximalwert von N . Hier muss also $K > 1$ gelten. Mit der *charakteristischen Funktion* χ_A ,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},$$

können wir die Bewässerung N und die Funktionen \bar{u} bzw. \bar{u}_x leichter beschreiben. Wegen

$$K \cdot (\bar{u}_x - 1) = -N = \chi_{[a,b]} - \chi_{[-b,-a]}$$

vereinfachen sich die Integrale:

$$\begin{aligned}K\pi \cdot f(x) &= \mathcal{P} \left(\int_a^b \ln |\bar{u}(\xi) - \bar{u}(x)| d\xi - \int_{-b}^{-a} \ln |\bar{u}(\xi) - \bar{u}(x)| d\xi \right) \\ &= \mathcal{P} \int_a^b \left(\ln K + \ln |\bar{u}(\xi) - \bar{u}(x)| - \ln K - \ln |\bar{u}(-\xi) - \bar{u}(x)| \right) d\xi \\ &= \mathcal{P} \int_a^b \left(\ln |(K+1)\xi - b - K\bar{u}(x)| - \ln |-(K-1)\xi - b - K\bar{u}(x)| \right) d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{(K+1)\xi - b - K\bar{u}(x)}{K+1} \cdot (\ln|(K+1)\xi - b - K\bar{u}(x)| - 1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(K-1)\xi + b + K\bar{u}(x)}{K-1} \cdot (\ln|(K-1)\xi + b + K\bar{u}(x)| - 1) \right]_{\xi=a}^b \\
&= \left[\frac{(K+1)\xi - b - K\bar{u}(x)}{K+1} \cdot \ln|(K+1)\xi - b - K\bar{u}(x)| \right. \\
&\quad \left. - \frac{(K-1)\xi + b + K\bar{u}(x)}{K-1} \cdot \ln|(K-1)\xi + b + K\bar{u}(x)| \right]_{\xi=a}^b
\end{aligned}$$

Für $a^2 \neq b^2$ gilt $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Es ergibt sich das folgende asymptotische Verhalten:

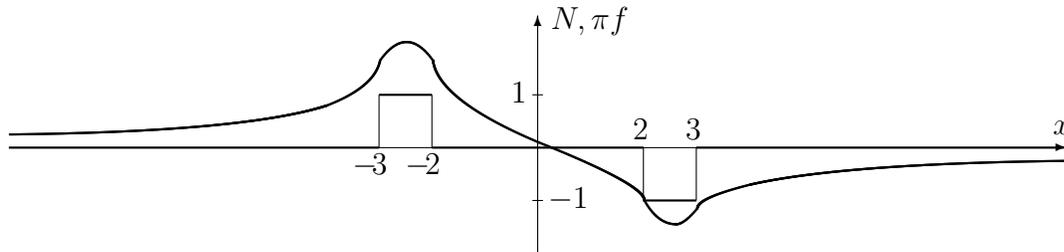
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot f(x) = \frac{a^2 - b^2}{\pi K} \quad (115)$$

Diese Bewässerungsfunktion N (mit $0 < a < b$) bewirkt einen Strom von links nach rechts. Insbesondere liegt keine (Punkt-) Symmetrie beim Grundwasserspiegel f vor, obwohl die Bewässerung N punktsymmetrisch ist.

Die Funktion f hat an den Sprungstellen der Bewässerung N senkrechte Tangenten.

Für $K := 2$, $a := 2$ und $b := 3$ geben wir den Graphen von $\pi \cdot f$ an

| | | | | | | | | | | | |
|-------------|---------|--------|----------|--------|-----------|--------|-----------|--------|----------|--------|--------|
| x | -10.000 | -4.000 | -3.000 | -2.525 | -2.000 | 0.000 | 2.000 | 2.573 | 3.000 | 4.000 | 10.000 |
| $\pi f(x)$ | 0.262 | 0.807 | 1.674 | 2.000 | 1.624 | 0.095 | -1.021 | -1.454 | -1.172 | -0.691 | -0.250 |
| $\pi f'(x)$ | 0.028 | 0.325 | ∞ | 0.000 | $-\infty$ | -0.410 | $-\infty$ | 0.000 | ∞ | 0.231 | 0.025 |



Wir berechnen die zugehörige konforme Transformation $\hat{\mathbf{F}} = \hat{x} + i \hat{z}$:

$$\begin{aligned}
K\pi(\hat{x}(u,w)-u) &= \int_{-\infty}^{\infty} K \cdot (\bar{u}_{\xi}(\xi) - 1) \arctan \frac{\bar{u}(\xi) - u}{-w} d\xi \\
&= \int_a^b \arctan \frac{(K+1)\xi - b - Ku}{-Kw} d\xi - \int_{-b}^{-a} \arctan \frac{(K-1)\xi - b - Ku}{-Kw} d\xi \\
&= \int_a^b \left(\arctan \frac{(K+1)\xi - b - Ku}{-Kw} + \arctan \frac{(K-1)\xi + b + Ku}{-Kw} \right) d\xi \\
K\pi(\hat{z}(u,w)-w) &= \int_{-\infty}^{\infty} K \cdot (\bar{u}_{\xi}(\xi) - 1) \ln \sqrt{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} d\xi \\
&= \int_a^b \ln \sqrt{((K+1)\xi - b - Kw)^2 + (Kw)^2} d\xi - \int_{-b}^{-a} \ln \sqrt{((K-1)\xi - b - Kw)^2 + (Kw)^2} d\xi \\
&= \int_a^b \left(\ln \sqrt{((K+1)\xi - b - Kw)^2 + (Kw)^2} - \ln \sqrt{((K-1)\xi + b + Kw)^2 + (Kw)^2} \right) d\xi
\end{aligned}$$

Die obigen Integrale können elementar berechnet werden. Dabei sind folgende Stammfunktionen zu verwenden:

$$\int \arctan t \, dt = t \arctan t - \ln \sqrt{1+t^2} \quad , \quad \int \ln \sqrt{1+t^2} \, dt = t \ln \sqrt{1+t^2} - t + \arctan t$$

Man kann auch analytische Ergebnisse erhalten, wenn man sich die Funktion \hat{f} vorgibt und dann die Transformation \bar{x} , sowie die Bewässerung N berechnet. Dazu ist die Tabelle (7.1) hilfreich. Wir beschränken uns auf ein einfaches Beispiel:

$$\hat{f}(u) := \frac{\alpha u + \beta}{u^2 + 1} \quad (116)$$

$$\bar{x}(u) - u = \mathcal{N}(\bar{x}(u)) := -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(r)}{r-u} \, dr = \frac{\beta u - \alpha}{u^2 + 1} \quad (117)$$

Als notwendiges Kriterium für die Umkehrbarkeit von \bar{x} fordern wir $\bar{x}' > 0$.

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad 0 < \bar{x}'(u) = \frac{u^4 + (2 - \beta)u^2 + 2\alpha u + \beta + 1}{(u^2 + 1)^2} \quad (118)$$

Dies ist erfüllt, genau wenn $\alpha^2 < 4$, $-1 < \beta < 8$ und $\beta^3 - 15\beta^2 + 48\beta + 64 - 27\alpha^2 > 0$ gilt. Aus (117) entsteht eine kubische Gleichung für $u = \bar{u}(x)$,

$$u^3 - xu^2 + (\beta + 1)u - \alpha - x = 0 \quad , \quad (119)$$

aus der dann zu jedem x eindeutig der (reelle) Funktionswert $\bar{u}(x) = u$ berechnet werden kann. Die Ableitung wird aus

$$\bar{u}'(x) = \frac{u^2 + 1}{3u^2 - 2xu + \beta + 1} \Big|_{u=\bar{u}(x)} = \frac{(u^2 + 1)^2}{u^4 + (2 - \beta)u^2 + 2\alpha u + \beta + 1} \Big|_{u=\bar{u}(x)} \quad (120)$$

ermittelt, und wenn keine Quellen vorliegen, so ist die Bewässerung gegeben als:

$$N(x) = K \cdot \frac{d}{dx} \mathcal{N}(\bar{u}(x)) = K \cdot \mathcal{N}'(\bar{u}(x)) \cdot \bar{u}'(x) \quad (121)$$

Wir verzichten auf die Auswertung der Integrale, welche zur Bestimmung der konformen Transformation $\hat{x} + i\hat{z}$ nötig sind.

Eine nicht uninteressante Lösung bei vorgegebener Quellfunktion Q ist

$$\begin{aligned} f &= 0 \\ N &= -KQ' \quad , \end{aligned}$$

mit der man Druck- und Stromlinien untersuchen kann. Die konforme Transformation ist dann die Identität.

3.4 Stationäres Problem ohne Quellen beim unendlich tiefen 2d-Aquifer

Wir wollen eine ganze Klasse von exakten stationären ($f_t = 0$) Lösungen im quellfreien Spezialfall ($Q = 0$) angeben. Genauer: die Bewässerungsfunktion N wird als Polygonzug mit kompakten Träger gewählt. Damit lassen sich viele der praktisch wichtigen Bewässerungs-Probleme exakt oder näherungsweise lösen.

Im stationären Fall ohne Quelle ist nach (76) und (88) die Randtransformation \bar{u} explizit bekannt.

$$\bar{u}(x) = x - \frac{1}{K} \int_{-\infty}^x N(\xi) d\xi \quad (122)$$

Es ergibt sich die schon in (83) geforderte Bedingung an die Bewässerungsfunktion N :

$$0 < \bar{u}'(x) = 1 - \frac{1}{K} N(x) \quad (123)$$

In praktischen Anwendungen erstrecken sich Bewässerungen nicht bis ins Unendliche. Es gibt Zahlen $a < b$, sodass gilt:

$$N(x) = 0 \quad \text{für } x \leq a \text{ oder } b \leq x$$

Diese Bewässerung N setzen wir als Polygonzug an. Das Intervall $[a, b]$ wird zerlegt.

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Die Stützstellen des Polygonzugs seien $(x_i, N(x_i))$, $i = 1, \dots, n$.

Aus (122) ergibt sich die stetig differenzierbare Funktion \bar{u} zu:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \alpha_i x^2 + \beta_i x + \gamma_i & \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ x & \text{für } x \leq a \text{ oder } b \leq x \end{cases} \quad (124)$$

Die Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ können nach folgendem Schema berechnet werden:

$$\begin{array}{l} \Sigma := 0 \\ \text{For } i := 1 \text{ to } n-1 \text{ do} \\ \quad m := \frac{N(x_{i+1}) - N(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\ \quad \alpha_i := -\frac{2K}{m} \\ \quad \beta_i := 1 + \frac{m \cdot x_i - N(x_i)}{K} \\ \quad \gamma_i := \frac{(2N(x_i) - m \cdot x_i) \cdot x_i - \Sigma}{2K} \\ \quad \Sigma := \Sigma + (N(x_{i+1}) - N(x_i)) \cdot (x_{i+1} - x_i) \\ \text{If } \Sigma \neq 0 \text{ then ERROR} \end{array} \quad (125)$$

Die Bilanz-Gleichung $\Sigma = 2 \int_a^b N(\xi) d\xi = 0$ muss erfüllt sein! Wird eine Bewässerungsfunktion N eingegeben, dann gleichen wir (falls nötig) die Bilanz aus. Dazu führen wir Ausgleichsintervalle links (um L) und rechts (um R) des Trägers von N ein und legen N auf diesen Intervallen als Dreieckspolygone geeignet fest. Die Wahl des Ausgleichs beeinflusst natürlich das Ergebnis!

3.4.1 Berechnung des Grundwasserspiegels f

Wir berechnen den Grundwasserspiegel f zum Polygon-Ansatz aus der Gleichung (91):

$$\eta(\xi) := \bar{u}(\xi) - \bar{u}(x) = \alpha_i \xi^2 + \beta_i \xi + \gamma_i - \bar{u}(x) \quad \text{für } \xi \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{u}'(\xi) - 1) \cdot \ln |\bar{u}(\xi) - \bar{u}(x)| d\xi \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\eta'(\xi) - 1) \ln |\eta(\xi)| d\xi}_{=: f_i(x)} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left[\eta(\xi) \cdot (\ln |\eta(\xi)| - 1) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{- \mathcal{P} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \ln |\alpha_i \xi^2 + \beta_i \xi + \gamma_i - \bar{u}(x)| d\xi}_{=: h_i(x)} \end{aligned} \quad (126)$$

1. Fall $\alpha_i = 0$: Wegen $u' > 0$ dürfen wir $\beta_i > 0$ annehmen.

$$h_i(x) = \frac{-1}{\beta_i} \left[\eta(\xi) \cdot (\ln |\eta(\xi)| - 1) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (127)$$

2. Fall $\alpha_i \neq 0$:

$$\begin{aligned} h_i(x) &= - \mathcal{P} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\ln |\alpha_i| + \ln \left| \underbrace{\left(\xi + \frac{\beta_i}{2\alpha_i} \right)^2}_{=: \xi_i(\xi) =: \xi_i} + \underbrace{\frac{\gamma_i - \bar{u}(x)}{\alpha_i} - \left(\frac{\beta_i}{2\alpha_i} \right)^2}_{=: D(x)} \right) d\xi \\ &= - \left[\xi \ln |\alpha_i| \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \mathcal{P} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \ln |\xi_i^2 + D(x)| d\xi \end{aligned}$$

2.a Fall $\alpha_i \neq 0$ & $D(x) \leq 0$: $d := d(x) := \sqrt{-D(x)}$.

$$\begin{aligned} h_i(x) &= - \left[\xi \ln |\alpha_i| \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \mathcal{P} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\ln |\xi_i + d| + \ln |\xi_i - d| \right) d\xi \\ &= - \left[\xi \ln |\alpha_i| + (\xi_i + d) (\ln |\xi_i + d| - 1) + (\xi_i - d) (\ln |\xi_i - d| - 1) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \end{aligned} \quad (128)$$

2.b. Fall $\alpha_i \neq 0$ & $D(x) > 0$: $d := d(x) := \sqrt{+D(x)}$

$$\begin{aligned} h_i(x) &= - \left[\xi \ln |\alpha_i| \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 \cdot \ln (\xi_i^2 + d^2) d\xi \\ &= \dots \\ &= - \left[\xi \ln |\alpha_i| + \xi_i \cdot (\ln (\xi_i^2 + d^2) - 2) + 2d \arctan \frac{\xi_i}{d} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \end{aligned} \quad (129)$$

Damit ist die Oberfläche f des Grundwasserspiegels explizit bekannt.

Wir haben das asymptotische Verhalten der einzelnen Summanden πf_i von $\pi \cdot f$ mit dem Programm **MAPLE** untersucht, welches die mehrfache Anwendung der *L'Hospital-Regel* und aufwendiges, aber doch elementares Rechnen erspart. Das Ergebnis ist die folgende Entwicklung:

$$\begin{aligned} \pi f_i(x) &= -A_i \cdot \ln|x| + \frac{3A_i(\bar{u}(x_{i+1}) + \bar{u}(x_i)) - \alpha_i(x_{i+1} - x_i)^3}{6} \cdot \frac{1}{x} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ A_i &:= \frac{(x_{i+1} - x_i) \cdot (N(x_{i+1}) + N(x_i))}{2K} \end{aligned} \quad (130)$$

Die Größe A_i ist bis auf den Faktor K genau die Fläche zwischen x_i und x_{i+1} unter dem Bewässerungs-Polygonzug N . Bei ausgeglichener Bewässerung gilt:

$$\boxed{0 = \frac{1}{K} \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \Rightarrow f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)} \quad (131)$$

3.4.2 Berechnung der konformen Abbildung und die Darstellung der Isobaren

Die Gleichung (74) zeigt, wie die Isobaren zu berechnen sind, wenn es keine Quellen/Senken im Aquifer gibt ($Q = 0$): Man gibt das Druckpotential $p_0 > 0$ vor, woraus sich w aus

$$\boxed{0 < p_0 = \text{const.} = \hat{p}(u, w) = -w} \quad (132)$$

ergibt, lässt u variieren und berechnet dann $x = \hat{x}(u, -p_0)$, $z = \hat{z}(u, -p_0)$ über die Formeln (89), (90). Praktisch geht es nur darum, aus dem Polygonansatz für N direkt die konforme Transformation zu berechnen.

$$\begin{aligned} \hat{x}(u, w) - u &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \cdot \frac{-w}{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi \\ \hat{z}(u, w) - w &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \bar{u}(\xi)) \cdot \frac{\bar{u}(\xi) - u}{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} \bar{u}_\xi(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{u}_\xi(\xi) - 1}{2} \cdot \ln\left((\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2\right) d\xi \end{aligned}$$

Für unser Vorhaben werden die nächsten elementaren Integrale benötigt:

$$\begin{aligned} \int \frac{w}{\eta^2 + w^2} d\eta &= \arctan \frac{\eta}{w} \\ \int \frac{\eta}{\eta^2 + w^2} d\eta &= \frac{1}{2} \ln(\eta^2 + w^2) \\ \int \arctan \frac{\eta}{w} d\eta &= \eta \arctan \frac{\eta}{w} - \frac{w}{2} \ln(\eta^2 + w^2) \\ \int \frac{1}{2} \ln(\eta^2 + w^2) d\eta &= \frac{\eta}{2} \ln(\eta^2 + w^2) + w \arctan \frac{\eta}{w} - \eta \end{aligned}$$

Im Polygon-Ansatz können wir jetzt auch die Integrale (89) und (90) für $w \neq 0$ auswerten:

$$\eta := \eta(\xi) := \bar{u}(\xi) - u = \alpha_i \xi^2 + \beta_i \xi + \gamma_i - u \quad \text{für } \xi \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(u, w) - u &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{w \cdot (\eta + u - \xi)}{\eta^2 + w^2} \eta' d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{w}{2} \ln(\eta^2 + w^2) + u \cdot \arctan \frac{\eta}{w} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{w \xi}{\eta^2 + w^2} \eta' d\xi}_{=: g_i(u, w)} \end{aligned} \quad (133)$$

$$\begin{aligned} \hat{z}(u, w) - w &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\eta' - 1}{2} \ln(\eta^2 + w^2) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\eta}{2} \ln(\eta^2 + w^2) + w \cdot \arctan \frac{\eta}{w} - \eta \right]_{x_i}^{x_{i+1}} - \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2} \ln(\eta^2 + w^2) d\xi}_{=: h_i(u, w)} \end{aligned} \quad (134)$$

1. Fall $\alpha_i = 0$: $\eta' = \bar{u}'(\xi) = \beta_i > 0$

$$g_i(u, w) = \frac{-1}{\beta_i} \left[\frac{w}{2} \ln(\eta^2 + w^2) + (u - \gamma_i) \arctan \frac{\eta}{w} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (135)$$

$$h_i(u, w) = \frac{-1}{\beta_i} \left[\frac{\eta}{2} \ln(\eta^2 + w^2) + w \arctan \frac{\eta}{w} - \eta \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (136)$$

2. Fall $\alpha_i \neq 0$: Zur Berechnung der Integrale wird das Polynom $\eta^2 + w^2 = (\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2$ in zwei reelle Faktoren zerlegt.

$$\frac{\eta}{\alpha_i} = \frac{\bar{u}(\xi) - u}{\alpha_i} = \underbrace{\left(\xi + \frac{\beta_i}{2\alpha_i} \right)^2}_{=: \xi_i} + \underbrace{\frac{\gamma_i - u}{\alpha_i} - \frac{\beta_i^2}{4\alpha_i^2}}_{=: D} = \xi_i^2 + D$$

$$R := \sqrt{D^2 + \frac{w^2}{\alpha_i^2}} > |D|$$

$$c^2 := \frac{R - D}{2} > 0 \quad (\text{Das Vorzeichen von } c \text{ ist beliebig})$$

$$s := \frac{w}{2c\alpha_i} \quad (s^2 + c^2 = R, \quad s^2 - c^2 = D)$$

$$\xi_{\pm} := \xi + \frac{\beta_i}{2\alpha_i} \pm c \quad (\xi'_{\pm} = 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta^2 + w^2}{\alpha_i^2} &= (\xi_i^2 + D)^2 + \frac{w^2}{\alpha_i^2} = \xi_i^4 + 2D \xi_i^2 + R^2 \\ &= (\xi_i^2 + 2c \xi_i + R) \cdot (\xi_i^2 - 2c \xi_i + R) \\ &= (\xi_+^2 + s^2) \cdot (\xi_-^2 + s^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_i(u, w) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-w \xi (2\alpha_i \xi + \beta_i)}{\eta^2 + w^2} d\xi \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-4 c s \xi \xi_i}{(\xi_i^2 + 2c \xi_i + R) \cdot (\xi_i^2 - 2c \xi_i + R)} d\xi \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{s \xi}{\xi_i^2 + 2c \xi_i + R} - \frac{s \xi}{\xi_i^2 - 2c \xi_i + R} \right) d\xi \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{s \xi_+ + s (\xi - \xi_+)}{\xi_+^2 + s^2} - \frac{s \xi_- + s (\xi - \xi_-)}{\xi_-^2 + s^2} \right) d\xi \\
&= \left[\frac{s}{2} \ln \frac{\xi_+^2 + s^2}{\xi_-^2 + s^2} + (\xi - \xi_+) \arctan \frac{\xi_+}{s} - (\xi - \xi_-) \arctan \frac{\xi_-}{s} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (137)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_i(u, w) &= -\frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\ln \alpha_i^2 + \ln (\xi_+^2 + s^2) + \ln (\xi_-^2 + s^2) \right) d\xi \\
&= -\left[\xi (\ln |\alpha_i| - 2) + \frac{\xi_+}{2} \ln (\xi_+^2 + s^2) + \frac{\xi_-}{2} \ln (\xi_-^2 + s^2) + s \left(\arctan \frac{\xi_+}{s} + \arctan \frac{\xi_-}{s} \right) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (138)
\end{aligned}$$

3.4.3 Berechnung von Stromlinien

Die Gleichung (4) beschreibt den Zusammenhang zwischen der Stromdichte \mathbf{j} und dem Druck-Gradienten $p^t = \mathbf{grad} p$. Zu einer Stromlinie Γ wählen wir zunächst die Parametrisierung γ mit $\dot{\gamma} = \mathbf{j} \circ \gamma$.

$$\dot{\gamma} = \mathbf{j} = -\rho K (\mathbf{e}_z + p^t) \quad (139)$$

Um eine Stromlinie Γ mit der Parametrisierung $(x, z)^t = \gamma$ im A -Raum zu berechnen, konstruieren wir die zugehörige Stromlinie $\hat{\Gamma}$ mit der Parametrisierung $(u, w)^t = \hat{\gamma} := \check{\mathbf{F}} \circ \gamma$ im \hat{A} -Raum.

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{F}}' &= \hat{\mathbf{F}}'^{-1} = \frac{1}{\hat{z}_u^2 + \hat{z}_w^2} \hat{\mathbf{F}}'^t = \frac{1}{\hat{z}_u^2 + \hat{z}_w^2} \begin{pmatrix} \hat{x}_u & \hat{x}_w \\ \hat{z}_u & \hat{z}_w \end{pmatrix}^t \quad (\text{vgl. (34)}) \\
\hat{p}' &= p' \cdot \hat{\mathbf{F}}' \quad (\hat{p} = p \circ \hat{\mathbf{F}}) \\
\dot{\hat{\gamma}} &= \check{\mathbf{F}}' \cdot \dot{\gamma} = \frac{1}{\hat{z}_u^2 + \hat{z}_w^2} \hat{\mathbf{F}}'^t \cdot \mathbf{j} = \frac{-\rho K}{\hat{z}_u^2 + \hat{z}_w^2} (\hat{\mathbf{F}}'^t \mathbf{e}_z + (p' \cdot \hat{\mathbf{F}}')^t) = \frac{-\rho K}{\hat{z}_u^2 + \hat{z}_w^2} (\hat{z}^t + \hat{p}^t) \\
&= \frac{-\rho K}{\hat{z}_u^2 + \hat{z}_w^2} \cdot \mathbf{grad} (\hat{z} + \hat{p})
\end{aligned}$$

Da es uns nicht auf den tatsächlichen Strom, sondern auf den Verlauf der Stromlinien ankommt, können wir den skalaren Vorfaktor weglassen, wobei das Vorzeichen die Richtung der Parametrisierung beschreibt. Es gilt also eine gekoppelte DGL 1. Ordnung zu lösen:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{z}_u(u, w) + \hat{p}_u(u, w) \\ \hat{z}_w(u, w) + \hat{p}_w(u, w) \end{pmatrix}} \quad (140)$$

Um diese DGL zu lösen, überschieben wir sie mit $(-\dot{w}, \dot{u})^t$. Wenn keine Quellen vorliegen, so ist die Funktion $\hat{z} + \hat{p} = \hat{z} + \hat{p}^h$ harmonisch. Über die Cauchy-Riemann-DGL kann dann die Gleichung integriert werden,

$$\begin{aligned} 0 &= -\left((\hat{z} + \hat{p}^h)_u \cdot (-\dot{w}) + (\hat{z} + \hat{p}^h)_w \cdot \dot{u}\right) \\ &= -\left(-(\hat{x} + \hat{q}^h)_w \cdot (-\dot{w}) + (\hat{x} + \hat{q}^h)_u \cdot \dot{u}\right) \\ &= -\frac{d}{d\lambda}(\hat{x} + \hat{q}^h), \end{aligned}$$

wobei $\hat{q}^h(u, w) = -u$ das homogene Strömungspotential ist. Implizit sind die Stromlinien $\lambda \mapsto (u, w)^t$ damit vermöge

$$q_0 = \text{const.} = (\hat{x} + \hat{q}^h)(u, w) = \hat{x}(u, w) - u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(r) \cdot \frac{-w}{(r-u)^2 + w^2} dr \quad (141)$$

definiert. Die Integrationskonstante q_0 berechnet man aus dem Limes $w \xrightarrow{\leq 0} 0$ unter Benutzung der zu (248) verwandten Dirac-Eigenschaft:

$$\begin{aligned} K(r, w) &:= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-w}{r^2 + w^2} \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0 && \text{(gleichmäßig für } |r| \geq \varepsilon) \\ \forall w < 0 \quad K(\cdot, w) &\geq 0 \quad \& \int_{-\infty}^{\infty} K(r, w) dr = 1 \end{aligned} \quad (142)$$

Dabei bezeichne $(x_0, f(x_0)) = \hat{\mathbf{F}}(u_0, 0)$ einen Stromlinienpunkt an der Oberfläche von A .

$$q_0 = \lim_{w \leq 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(r) \cdot \frac{-w}{(r-u(w))^2 + w^2} dr = \hat{\mathcal{N}}(u_0) = \mathcal{N}(x_0) \quad (143)$$

Im Abschnitt 6.3 beschreiben wir, wie man implizit definierte Kurven konstruiert. Dazu werden neben der Funktion $(u, w) \mapsto \hat{x}(u, w) - u$ auch deren partielle Ableitungen benötigt. Im Polygon-Ansatz können wir diese Ableitungen wieder exakt berechnen.

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &:= \bar{u}(\xi) - u = \alpha_i \xi^2 + \beta_i \xi + \gamma_i - u \quad \text{für } \xi \in [x_i, x_{i+1}] \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ \hat{z}_w(u, w) - 1 = \hat{x}_u(u, w) - 1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x}_r(r) - 1) \frac{-w}{(r-u)^2 + w^2} dr \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \bar{u}_\xi(\xi)) \frac{-w}{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1 - \eta'(\xi)) \frac{-w}{\eta^2(\xi) + w^2} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\arctan \frac{\eta(\xi)}{w} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-w}{\eta^2(\xi) + w^2} d\xi}_{=: g_i(u, w)} \end{aligned} \quad (144)$$

$$\begin{aligned}
-\hat{x}_w(u, w) = \hat{z}_u(u, w) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x}_r(r) - 1) \frac{r - u}{(r - u)^2 + w^2} dr \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \bar{u}_\xi(\xi)) \frac{\bar{u}(\xi) - u}{(\bar{u}(\xi) - u)^2 + w^2} d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1 - \eta'(\xi)) \frac{\eta(\xi)}{\eta^2(\xi) + w^2} d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{-1}{2} \ln(\eta^2(\xi) + w^2) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\eta(\xi)}{\eta^2(\xi) + w^2} d\xi}_{=: h_i(u, w)} \quad (145)
\end{aligned}$$

1. Fall $\alpha_i = 0$: $\eta'(\xi) = \bar{u}'(\xi) = \beta_i > 0$

$$g_i(u, w) = \frac{-1}{\beta_i} \left[\arctan \frac{\eta(\xi)}{w} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (146)$$

$$h_i(u, w) = \frac{1}{2\beta_i} \left[\ln(\eta^2(\xi) + w^2) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (147)$$

2. Fall $\alpha_i \neq 0$: Zur Berechnung der Integrale benutzen wir wieder die oben konstruierte reelle Faktorisierung von $\eta^2(\xi) + w^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{\eta(\xi)}{\alpha_i} &= \left(\xi + \frac{\beta_i}{2\alpha_i} \right)^2 + \frac{\gamma_i - u}{\alpha_i} - \frac{\beta_i^2}{4\alpha_i^2} = \xi_i^2 + D \\
R &= \sqrt{D^2 + \frac{w^2}{\alpha_i^2}} \\
c^2 &= \frac{R - D}{2} \quad s^2 = \frac{R + D}{2} \quad s = \frac{w}{2c\alpha_i} \\
\xi_{\pm} &= \xi_i \pm c = \xi + \frac{\beta_i}{2\alpha_i} \pm c \quad (\xi'_{\pm} = 1) \\
\frac{\eta^2(\xi) + w^2}{\alpha_i^2} &= (\xi_i^2 + 2c\xi_i + R) \cdot (\xi_i^2 - 2c\xi_i + R) = (\xi_+^2 + s^2) \cdot (\xi_-^2 + s^2)
\end{aligned}$$

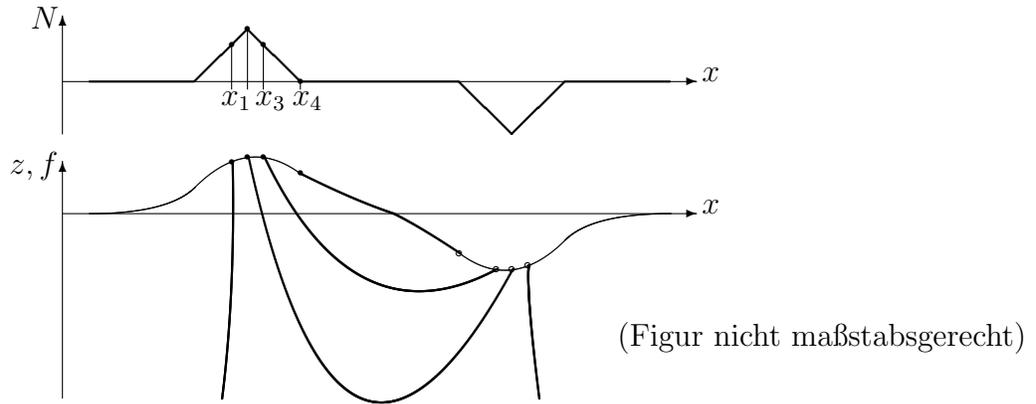
Mit dieser Faktorisierung des Nenners zerlegen wir in Partialbrüche.

$$\begin{aligned}
g_i(u, w) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-w/\alpha_i^2}{(\xi_i^2 + 2c\xi_i + R) \cdot (\xi_i^2 - 2c\xi_i + R)} d\xi \\
&= \frac{-w}{4cR\alpha_i^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\xi_i + 2c}{\xi_+^2 + s^2} + \frac{-\xi_i + 2c}{\xi_-^2 + s^2} \right) d\xi \\
&= \frac{-s}{2R\alpha_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\xi_+ + c}{\xi_+^2 + s^2} + \frac{-\xi_- + c}{\xi_-^2 + s^2} \right) d\xi \\
&= \frac{-1}{2R\alpha_i} \left[\frac{s}{2} \ln \frac{\xi_+^2 + s^2}{\xi_-^2 + s^2} + c \left(\arctan \frac{\xi_+}{s} + \arctan \frac{\xi_-}{s} \right) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (148)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_i(u, w) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(\xi_i^2 + D)/\alpha_i}{(\xi_i^2 + 2c\xi_i + R) \cdot (\xi_i^2 - 2c\xi_i + R)} d\xi \\
&= \frac{1}{4cR\alpha_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{-(R-D)\xi_i + 2cD}{\xi_+^2 + s^2} + \frac{(R-D)\xi_i + 2cD}{\xi_-^2 + s^2} \right) d\xi \\
&= \frac{1}{2R\alpha_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{-c\xi_+ + s^2}{\xi_+^2 + s^2} + \frac{c\xi_- + s^2}{\xi_-^2 + s^2} \right) d\xi \\
&= \frac{-1}{2R\alpha_i} \left[\frac{c}{2} \ln \frac{\xi_+^2 + s^2}{\xi_-^2 + s^2} - s \left(\arctan \frac{\xi_+}{s} + \arctan \frac{\xi_-}{s} \right) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (149)
\end{aligned}$$

Damit haben wir alle Bestimmungsgleichungen für die Stromlinien.

Zwei benachbarte Stromlinien begrenzen einen Bereich, in dem eine vorgebbare Wassermenge ΔI fließt. Stromlinien starten an der Oberfläche bei Punkten $(x, f(x)) \in A$ mit $N(x) \geq 0$ und enden wieder an der Oberfläche bei Punkten $(x, f(x)) \in A$ mit $N(x) \leq 0$.



Zur konkreten Berechnung gehen wir wie folgt vor:

1. Schritt: Berechnung der Startpunkte aller Stromlinien.

Wir summieren bei $-\infty$ beginnend nur die positive Fläche unter N auf, bis der Betrag ΔI (erstmal) erreicht ist und haben dann einen neuen Startpunkt $\check{\mathbf{F}}(x_{i+1}, f(x_{i+1})) = (\bar{u}(x_{i+1}), 0) \in \hat{A}$ an der Oberfläche im transformierten Aquifer berechnet.

$$(x_0, f(x_0)) := (-\infty, 0) \quad \boxed{\Delta I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \max \{0, N(x)\} dx} \quad (150)$$

2. Schritt: Zu gegebenem Startpunkt berechnen wir die zugehörige Stromlinie in \hat{A} als Polygonzug mit einem Newtonverfahren, welches wir im Kapitel 6.3 beschreiben.

Die Stromlinien enden wieder an der Oberfläche bei $(u, 0) \in \hat{A}$, wo $N(\bar{x}(u)) \leq 0$ gilt.

3. Schritt: Abbildung des Polygonzugs von \hat{A} nach A vermöge der konformen Transformation $\hat{\mathbf{F}}$.

3.5 Stationäres Problem mit Quellen beim unendlich tiefen 2D-Aquifer

Wir berechnen jetzt stationäre Grundwasserlösungen bei Vorliegen von Quellen. Zulässig ist auch eine äußere Bewässerung N . Wir können das im letzten Kapitel 3.4 berechnete Formelwerk weitgehend übernehmen. Modifikationen werden bei der Berechnung der Transformation \bar{u} , der Isobaren $\hat{p}(u, w) = \text{const.}$ und der Stromlinien nötig sein.

Als erstes klären wir, wie man aus der Gleichung (88)

$$\bar{u}(x) = x - \mathcal{N}(x) - \hat{\mathcal{Q}}(\bar{u}(x))$$

beliebige Funktionswerte von \bar{u} berechnen kann. Dies wollen wir über das *Newton-Verfahren* tun und betrachten dazu die Funktion T :

$$T(u, x) := u - x + \mathcal{N}(x) + \hat{\mathcal{Q}}(u) \stackrel{!}{=} 0 \quad (151)$$

Weil deren Ableitung nach u wegen (84) nie verschwindet und von Null weg beschränkt ist,

$$\exists \varepsilon \quad T_u(u, x) = 1 + \hat{\mathcal{Q}}'(u) \geq \varepsilon > 0 \quad (152)$$

hat für jedes $x \in \mathbb{R}$ die stetige und streng monotone Funktion $u \mapsto T(u, x)$ genau eine Nullstelle. Das Verfahren

$$\begin{aligned} u^{(0)} &:= x \\ u^{(k+1)} &:= u^{(k)} - \frac{T(u^{(k)}, x)}{T_u(u^{(k)}, x)} \end{aligned} \quad (153)$$

wird daher gegen den Funktionswert $\bar{u}(x)$ konvergieren. Die genaueren Verhältnisse sind mit dem Banachschen Fixpunktsatz (8.1) zu untersuchen. Wir kennen also die Transformation \bar{u} beliebig genau. Durch Differenzieren der Gleichung (88) berechnet man \bar{u}' (von Null weg beschränkt nach (83):

$$\exists \varepsilon \quad \bar{u}'(x) = \frac{1 - N(x)/K}{1 + \hat{\mathcal{Q}}'(\bar{u}(x))} \geq \varepsilon > 0 \quad (154)$$

Um die Theorie aus dem letzten Kapitel verwenden zu können, sollte \bar{u} als Parabelzug approximiert werden. Die Idee ist, die Wirkung der Quellen als äußere Bewässerung zu beschreiben und diese in einen Polygonzug zu entwickeln.

$$\tilde{N}(x) := K \cdot \frac{d}{dx} (\mathcal{N}(x) + \hat{\mathcal{Q}}(\bar{u}(x))) = N(x) + K \hat{\mathcal{Q}}'(\bar{u}(x)) \cdot \bar{u}'(x) = \frac{N(x) + K \hat{\mathcal{Q}}'(\bar{u}(x))}{1 + \hat{\mathcal{Q}}'(\bar{u}(x))} \quad (155)$$

Aus diesem virtuellen Bewässerungspolygonzug kann nach dem Verfahren des letzten Kapitels sofort \bar{u} als Polygonzug dargestellt werden. Normalerweise zerstört die Polygonzug-Approximation die Bilanzgleichung $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}(\xi) d\xi = 0$ (wenn auch nur minimal). Wir subtrahieren deshalb von \tilde{N} eine „Dreiecksfunktion“ mit passender Fläche:

$$A := \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{N}(\xi) d\xi, \quad [a, b] \supset \text{supp } \tilde{N} : \quad \tilde{N}(x) := \tilde{N}(x) - \begin{cases} \frac{4A}{b-a}(x-a) & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ \frac{4A}{b-a}(b-x) & \frac{a+b}{2} < x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (156)$$

3.5.1 Punktquellen

Bisher haben wir nur formal mit Quellen gearbeitet. Um konkret mit ihnen rechnen zu können, betrachten wir Punktquellen.

Über Dirac- δ definieren wir die Quellfunktion Q .

$$\boxed{Q(x, z) = \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \delta^2(x - x_j, z - z_j)} \quad (157)$$

Beim inversen und instationären Problem ist die Bilanzgleichung automatisch richtig. Bei stationären Rechnungen muss sie bei der Eingabe erfüllt werden:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} N(x) dx + \sum_{j=1}^m Q_j = 0} \quad (158)$$

Mit den Abkürzungen $u_j := \check{u}(x_j, z_j)$, $w_j := \check{w}(x_j, z_j) < 0$ und den Gleichungen (77), (73) und (74) sind dann die für uns interessanten Funktionen bekannt:

$$\boxed{\hat{Q}(u) = \frac{1}{\pi K} \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{u - u_j}{w_j} \right)} \quad (159)$$

$$\boxed{\hat{Q}'(u) = \frac{-1}{\pi K} \sum_{j=1}^m \frac{Q_j \cdot w_j}{(u - u_j)^2 + w_j^2} > -1 + \varepsilon} \quad (160)$$

$$\boxed{\hat{q}(u, w) + u = \frac{1}{2\pi K} \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \left(\arctan \frac{w - w_j}{u - u_j} - \arctan \frac{w + w_j}{u - u_j} \right), \quad u \notin \{u_1, \dots, u_m\}} \quad (161)$$

$$\boxed{\hat{p}(u, w) + w = \frac{-1}{4\pi K} \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \ln \frac{(u - u_j)^2 + (w - w_j)^2}{(u - u_j)^2 + (w + w_j)^2}, \quad (u, w) \notin \{(u_1, w_1), \dots, (u_m, w_m)\}} \quad (162)$$

Eine Punktquelle

Bei genau einer Quelle ($m = 1$) ist die Bedingung $1 + \hat{Q}' > 0$ äquivalent zu

$$Q_1 > \pi K w_1, \quad (163)$$

und dies zur Existenz eines Sattelpunktes (u_s, w_s) von \hat{p} im Innern von \hat{A} :

$$\hat{p}(u, w) = -w - \frac{Q_1}{4\pi K} \cdot \ln \frac{(u - u_1)^2 + (w - w_1)^2}{(u - u_1)^2 + (w + w_1)^2}$$

$$\hat{p}_u(u, w) = \frac{-Q_1(u - u_1)}{2\pi K} \cdot \frac{(w + w_1)^2 - (w - w_1)^2}{((u - u_1)^2 + (w - w_1)^2) \cdot ((u - u_1)^2 + (w + w_1)^2)}$$

$$\hat{p}_u(u_s, w_s) = 0 \Leftrightarrow u_s = u_1$$

$$\hat{p}_w(u, w) = -1 - \frac{Q_1}{2\pi K} \cdot \left(\frac{w - w_1}{(u - u_1)^2 + (w - w_1)^2} - \frac{w + w_1}{(u - u_1)^2 + (w + w_1)^2} \right)$$

$$\hat{p}_w(u_s, w_s) = 0 \Leftrightarrow w_s^2 = \frac{1}{\pi K} \underbrace{w_1}_{<0} \underbrace{(\pi K w_1 - Q_1)}_{<0} > 0$$

$$\hat{p}_{uu}(u_s, w_s) = -\hat{p}_{ww}(u_s, w_s) = \frac{-2Q_1 w_1 w_s}{\pi K (w_s - w_1)^2 (w_s + w_1)^2} \neq 0$$

$$\hat{p}_{uw}(u_s, w_s) = \hat{p}_{wu}(u_s, w_s) = 0 \quad \square$$

Die Kurven $\hat{p}(u, w) = p_0 = \text{const.}$ können explizit beschrieben werden:

$$0 < c(w) := e^{-\frac{4\pi K}{Q_1}(p_0+w)} = \frac{(u - u_1)^2 + (w - w_1)^2}{(u - u_1)^2 + (w + w_1)^2} < 1$$

Diese Gleichung wird zu

$$(u - u_1)^2 + \left(w - \frac{1 + c(w)}{1 - c(w)} w_1 \right)^2 = c(w) \cdot \left(\frac{2w_1}{1 - c(w)} \right)^2$$

umgeformt. Die Isobare zu einem vorgegebenen Druck p durchläuft nicht jeden Wert von w . Der obige Exponent muss negativ sein:

$$\frac{p_0 + w}{Q_1} > 0 \quad (164)$$

Die p -Isobare durchläuft bei einer Quelle ($Q_1 > 0$) nur Werte $w > -p_0$ (nicht alle: es ist noch eine Wurzel zu ziehen!) und bei einer Senke ($Q_1 < 0$) nur Werte $w < -p_0$.

3.5.2 Vorgabe der Quell-Positionen in A

Man möchte natürlich die Quellpositionen im A -Raum angeben. Die Quellfunktionen sind aber erst definiert, wenn die Positionen im \hat{A} -Raum bekannt sind. Wir bereinigen dieses Problem iterativ. Dabei wird formal nur eine Quelle an der Stelle (x, z) betrachtet.

Eine erste Näherung der Quellposition in \hat{A} ist:

$$\boxed{(u^{(0)}, w^{(0)}) := (x, z)} \quad (165)$$

Mit einer Approximation $(u^{(n)}, w^{(n)})$ kennen wir auch eine Näherung $\hat{\mathbf{F}}^{(n)}$ der konformen Transformation $\hat{\mathbf{F}} = (\hat{x}, \hat{z})$. Implizit ist dann eine neue Approximation $(u^{(n+1)}, w^{(n+1)})$ gegeben durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \hat{x}^{(n)}(u^{(n+1)}, w^{(n+1)}) \\ \hat{z}^{(n)}(u^{(n+1)}, w^{(n+1)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad (166)$$

die mit dem Newton-Verfahren gelöst werden kann. Wir begnügen uns mit dem ersten Newtonschritt, wobei wir mit $(u^{(n)}, w^{(n)})$ starten.

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{pmatrix} u^{(n+1)} \\ w^{(n+1)} \end{pmatrix} &:= \mathbf{T}^{(n)}(u^{(n)}, w^{(n)}) \\ \mathbf{T}^{(n)}(u, w) &:= \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{x}_u^{(n)}(u, w) & -\hat{z}_u^{(n)}(u, w) \\ \hat{z}_u^{(n)}(u, w) & \hat{x}_u^{(n)}(u, w) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x}^{(n)}(u, w) - x \\ \hat{z}^{(n)}(u, w) - z \end{pmatrix} \end{aligned}} \quad (167)$$

Liegt Konvergenz vor, dann kann man den Fehler über die Determinante der Matrix abschätzen.

Ob dieses Verfahren bei einer gegebenen Konstellation von Quellen konvergiert, bedarf noch genauerer Untersuchung. Wir haben bei konkreten Rechnungen mit dem Programm Surface festgestellt, dass Senken nahe der Oberfläche problematisch sind, da wir die Quellstärke vorgeben.

Will man die Quellstärke abhängig vom lokal vorherrschenden Druck machen, so ist eine weitere Iteration erforderlich. Zudem fehlt eine sinnvolle Definition des lokalen Drucks um eine Punktquelle: Der Druck hat in der Punktquelle einen Pol.

3.5.3 Modifikation der Isobaren-Berechnung

Die Berechnung der Drucklinien im Abschnitt 3.4.2 war deshalb sehr einfach, weil ohne Quellen die p_0 -Isobare in \hat{A} durch die Gleichung

$$0 < p_0 = \text{const.} = \hat{p}(u, w) = -w$$

festgelegt ist. Die Linien $w = -p_0$ wurden dann einfach mit der konformen Transformation nach A abgebildet. Analog wollen wir auch verfahren, wenn Quellen vorliegen. Dann ist die p_0 -Isobare in \hat{A} nach (162) implizit festgelegt durch die Gleichung:

$$0 < p_0 = p(u, w) = -w - \frac{1}{4\pi K} \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \ln \frac{(u-u_j)^2 + (w-w_j)^2}{(u-u_j)^2 + (w+w_j)^2}$$

Mit dem Newton-Verfahren aus 6.3 lässt sich die p_0 -Isobare $\lambda \mapsto u(\lambda) + iw(\lambda) \in \hat{A}$ berechnen.

3.5.4 Modifikation der Stromlinien-Berechnung

Im Kapitel 3.4.3 konnten wir ohne Quellen die Differentialgleichung (140)

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \hat{z}_u(u, w) + \hat{p}_u(u, w) \\ \hat{z}_w(u, w) + \hat{p}_w(u, w) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\hat{x}_w(u, w) - \hat{q}_w(u, w) \\ \hat{x}_u(u, w) + \hat{q}_u(u, w) \end{pmatrix}$$

für eine Stromlinie $\lambda \mapsto (u(\lambda), w(\lambda))$ direkt integrieren, weil es eine Stammfunktion $\hat{q} = \hat{q}^h$ auf \hat{A} gibt ($\hat{q}^h(u+iw) = -u$). Das Ergebnis aus (141) war

$$q_0 = \text{const.} = (\hat{x} + \hat{q}^h)(u, w)$$

Wenn Punkt-Quellen vorliegen, dann gibt es auf der Halbebene $\hat{A} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}_{<0}$ keine Stammfunktion \hat{q} . Man kann natürlich die Differentialgleichung (140) numerisch lösen. Wir wollen aber an deren integrierter Form (141) festhalten. Praktisch muss dazu das Strompotential \hat{q} auf einer Riemannschen Fläche definiert werden. Es gilt:

$$\lim_{u \rightarrow u_k \pm \varepsilon} \left(\arctan \frac{w-w_k}{u-u_k} - \arctan \frac{w+w_k}{u-u_k} \right) = \begin{cases} \pm\pi & w_k < w < 0 \\ 0 & w_k > w \end{cases} \quad (168)$$

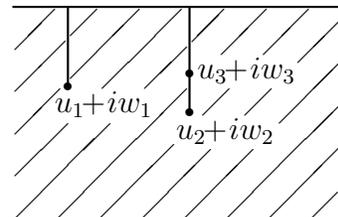
Daher lässt sich das Strompotential aus (161)

$$\hat{q}(u, w) = -u + \frac{1}{2\pi K} \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \left(\arctan \frac{w-w_j}{u-u_j} - \arctan \frac{w+w_j}{u-u_j} \right), \quad u \notin \{u_1, \dots, u_m\}$$

auf die noch einfach zusammenhängende, mehrfach nach oben geschlitzte Halbebene

$$D(\hat{q}) := \mathbb{R} + i\mathbb{R}_{<0} \setminus \bigcup_{j=1}^m \{u_j + iw : w_j \leq w < 0\}$$

stetig fortsetzen.



Für $u_k \in \{u_1, \dots, u_m\}$ und $w \notin \{w_j : u_j = u_k\}$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{q}(u_k \pm \varepsilon, w) = -u_k + \sum_{\{j: u_j \neq u_k\}} \frac{Q_j}{2\pi K} \cdot \left(\arctan \frac{w-w_j}{u_k-u_j} - \arctan \frac{w+w_j}{u_k-u_j} \right) \pm \sum_{\{j: u_j = u_k \& w > w_j\}} \frac{Q_j}{2K} \quad (169)$$

Damit ist im Punkt (u_k, w) für $w < \min\{w_j : u_j = u_k\}$ die stetige Fortsetzung von \hat{q} gegeben.

Um die implizit definierte Stromlinie $\lambda \mapsto (u(\lambda), w(\lambda))$ zu berechnen, führen wir die Funktion $\lambda \mapsto (u(\lambda), w(\lambda), c(\lambda))$ ein und lösen die Gleichung

$$q_0 + c(\lambda) = (\hat{x} + \hat{q})(u(\lambda), w(\lambda)) \quad (170)$$

mit dem im Abschnitt 6.3 beschriebenen Verfahren.

Will man die Stromlinie durch einen gegebenen Punkt

$$(u_0, w_0) \in \hat{A} \setminus \{(u_j, w_j) : j = 1, \dots, m\}$$

ermitteln, so wird $u(0) + iw(0) := u_0 + iw_0$, $c(0) := 0$ und $q_0 := (\hat{x} + \hat{q})(u_0, w_0)$ gesetzt. Dann werden Stromlinienpunkte für $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$ berechnet.

Kommt die Stromlinie einer Quelle oder Senke oder der Oberfläche $w = 0$ sehr nahe, dann beginnt oder endet sie dort.

Solange die Kurve $\lambda \mapsto u(\lambda) + iw(\lambda)$ ganz in $D(\hat{q})$ verläuft, ändert sich $c(\lambda)$ nicht.

Überquert sie aber eine Ausschlussstrecke bei (u_k, w) , so springt die Funktion $\lambda \mapsto c(\lambda)$. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt:

$$\begin{array}{l} \leftarrow + : \quad u(\lambda) > u_k > u(\lambda \pm \delta) \quad \Rightarrow \quad c(\lambda \pm \delta) = c(\lambda) + \frac{1}{K} \sum_{\{j: u_j = u_k \& w(\lambda) > w_j\}} Q_j \\ \rightarrow + : \quad u(\lambda) < u_k < u(\lambda \pm \delta) \quad \Rightarrow \quad c(\lambda \pm \delta) = c(\lambda) - \frac{1}{K} \sum_{\{j: u_j = u_k \& w(\lambda) > w_j\}} Q_j \end{array} \quad (171)$$

Schließlich wird die Stromlinie $\lambda \mapsto u(\lambda) + iw(\lambda) \in \hat{A}$ durch die konforme Transformation nach A transferiert.

3.6 Inverses Grundwasserproblem beim unendlich tiefen 2D-Aquifer

Bisher wurde aus einer Bewässerung N bzw. Q der Grundwasserspiegel f berechnet. Zu gegebenem $f(\cdot, t_0)$ wollen wir jetzt die Transformation $\bar{x}(\cdot, t_0)$ ermitteln. Damit lassen sich alle anderen Größen zum Zeitpunkt t_0 berechnen, insbesondere $f_t(\cdot, t_0)$, womit auch instationäre Probleme angegangen werden können. Bei der Berechnung von $\bar{x}(\cdot, t_0)$ aus $f(\cdot, t_0)$ spielt die Zeit t_0 nur die Rolle eines Parameters, der im Folgenden nicht notiert wird.

Die Transformation \bar{x} ist mit dem Grundwasserspiegel f über

$$\boxed{\bar{x}(u) = u - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\bar{x}(r))}{r - u} dr = u + i(H(f \circ \bar{x}))(u) =: (T\bar{x})(u)} \quad (172)$$

verknüpft, wo H der lineare *Hilbert-Operator* aus 7.2 ist.

Wir wenden den *Fixpunktsatz* 8.1 auf den Operator T an und setzen:

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(0)} &:= \text{id} \\ \bar{x}^{(k+1)} &:= T\bar{x}^{(k)} \end{aligned}$$

Den vorgegebenen Grundwasserspiegel f (zum Zeitpunkt t_0) nehmen wir als zweimal-stetig differenzierbar mit kompaktem Träger an: $f \in \mathcal{C}_0^2$ (es genügt $f \in \mathcal{H}^2$).

Nach 7.2 ist H eine Isometrie in $\mathcal{C}^{0,\alpha} \cap \mathcal{L}^2$:

$$\boxed{g \in \mathcal{C}^{0,\alpha} \cap \mathcal{L}^2 \quad \|Hg\|_{\mathcal{L}^2} = \|g\|_{\mathcal{L}^2}}$$

Mit dieser Formel und dem *Mittelwertsatz* (MWS) wird die Operatornorm abgeschätzt:

$$x - \text{id}, y - \text{id} \in \mathcal{C}_0^2 \text{ \& } \exists \varepsilon x', y' \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow f \circ x, f \circ y \in \mathcal{C}_0^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \|Tx - Ty\|_{\mathcal{L}^2} &= \|H(f \circ x - f \circ y)\|_{\mathcal{L}^2} \\ &= \|f \circ x - f \circ y\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq \|f'\|_{\mathcal{L}^\infty} \cdot \|x - y\|_{\mathcal{L}^2} \end{aligned}} \quad (173)$$

Für $\|f'\|_{\mathcal{L}^\infty} =: L < 1$ konvergiert das Verfahren also, womit auch die *Existenz und Eindeutigkeit* von Lösungen der Integralgleichung (172) gesichert sind. (Wir können $\hat{f}, \bar{x} \in \mathcal{C}^1$ zeigen. Ein Kriterium, damit $\bar{x}_u \geq \varepsilon > 0$ erfüllt ist, haben wir nicht.)

Wenn die Iteration modifiziert wird durch eine Näherung $\hat{f}_*^{(k)} \approx \hat{f}^{(k)} := f \circ \bar{x}^{(k)}$, wo $f_*^{(k)}$ hinreichend regulär sei, dann gelten folgende Fehlerabschätzungen:

$$\boxed{\begin{aligned} (1-L)\|\bar{x} - \bar{x}^{(k+1)}\|_{\mathcal{L}^2} &\leq L\|\bar{x}^{(k+1)} - \bar{x}^{(k)}\|_{\mathcal{L}^2} + \|\hat{f}^{(k)} - \hat{f}_*^{(k)}\|_{\mathcal{L}^2} \\ (1-L)\|\bar{x}' - \bar{x}^{(k+1)'}\|_{\mathcal{L}^2} &\leq L\|\bar{x}^{(k+1)'} - \bar{x}^{(k)'}\|_{\mathcal{L}^2} + \|f''\|_{\mathcal{L}^\infty} \|\bar{x}^{(k)}\|_{\mathcal{L}^\infty} \|\bar{x} - \bar{x}^{(k)}\|_{\mathcal{L}^2} + \|\hat{f}^{(k)'} - \hat{f}_*^{(k)'}\|_{\mathcal{L}^2} \end{aligned}} \quad (174)$$

Werden die Funktionen $\hat{f}^{(k)}$ durch $\hat{f}_*^{(k)}$ bzgl. der \mathcal{H}^2 -Norm (vgl. Satz 8.6) approximiert, so konvergiert auch $\bar{x}^{(k)} \rightarrow \bar{x}$ bzgl. derselben Norm. Aus dem *Sobolevschen Einbettungssatz* (8.6) folgt dann sogar gleichmäßige Konvergenz: $\hat{f}_*^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \hat{f}$, $\bar{x}^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \bar{x}$, $\hat{f}_*^{(k)'} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \hat{f}'$, $\bar{x}^{(k)'} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \bar{x}'$.

Wenn wir die Funktion $\bar{x}^{(k)}$ kennen, müssen wir $T\bar{x}^{(k)}$ bestimmen. Um Rundungsfehler bei der Berechnung des Hauptwertintegrals zu minimieren, entwickeln wir $\hat{f}^{(k)} := f \circ \bar{x}^{(k)}$ in einen Spline, also in eine zweimal stetig-differenzierbare Funktion $\hat{f}_* := \hat{f}_*^{(k)}$, die auf den Intervallen $[r_i^{(k)}, r_{i+1}^{(k)}]$ mit den kubischen Polynomen $\hat{f}_i := \hat{f}_i^{(k)}$ übereinstimmt. Die Stützstellen

$$r_i := r_i^{(k)} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (n := n^{(k)})$$

sind geeignet zu wählen. Insbesondere muss zu einem kleinen $\varepsilon > 0$

$$|\hat{f}^{(k)}(r)|, |\hat{f}^{(k)'}(r)| \leq \varepsilon \quad \text{für } r \leq r_1 \text{ und } r_n \leq r$$

gelten, damit wir $\hat{f}_*(r_1) = 0 = \hat{f}_*(r_n)$ und $\hat{f}_*'(r_1) = 0 = \hat{f}_*'(r_n)$ setzen dürfen.

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(k)}(r) &\approx \hat{f}_*(r) := \hat{f}_i(r) \quad \text{für } r \in [r_i, r_{i+1}] \\ \hat{f}_i(r) &:= \hat{f}^{(k)}(r_i) + \beta_i(r - r_i) + \gamma_i(r - r_i)^2 + \delta_i(r - r_i)^3 \quad (r \in \mathbb{R}; i = 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Im Weiteren lassen wir den Index (k) weg und kürzen vermöge $u_i := u - r_i$ ab.

$$\begin{aligned} (T\bar{x}^{(k)})(u) &= u - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}^{(k)}(r)}{r - u} dr \approx (T_*\bar{x}^{(k)})(u) := u - \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_n} \frac{\hat{f}_*(r)}{r - u} dr \\ &= u - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\hat{f}_i(r)}{r - u} dr \\ &= u - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\hat{f}_i(u)}{r - u} dr - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{\hat{f}_i(r) - \hat{f}_i(u)}{(r - r_i) - u_i} dr \\ &= u - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \hat{f}_i(u) \left[\ln |u - r| \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\delta_i \frac{(r - r_i)^3}{3} + (\delta_i u_i + \gamma_i) \frac{(r - r_i)^2}{2} + (\delta_i u_i^2 + \gamma_i u_i + \beta_i) (r - r_i) \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \end{aligned} \quad (175)$$

Auch die Ableitung der Lösung \bar{x} ist damit bekannt:

$$\begin{aligned} \bar{x}'(u) = (T_*\bar{x})'(u) &= 1 - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\hat{f}_i'(u) \ln |u - r| + \hat{f}_i(u) \frac{1}{u - r} \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\delta_i \frac{(r - r_i)^2}{2} + (2\delta_i u_i + \gamma_i) (r - r_i) \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \end{aligned} \quad (176)$$

Die Singularitäten in (175) und (176) für $u = r_j$ heben sich, weil die Spline-Kurve \hat{f}_* stetig-differenzierbar ist und wegen $\hat{f}_*(r_1) = \hat{f}_*(r_n) = 0 = \hat{f}_*'(r_1) = \hat{f}_*'(r_n)$.

Interessant ist wieder das asymptotische Verhalten der Lösung \bar{x} :

$$\bar{x}(u) = (T_*\bar{x})(u) = u + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{dr_i^4}{4} \delta_i + \frac{dr_i^3}{3} \gamma_i + \frac{dr_i^2}{2} \beta_i + dr_i \hat{f}(r_i) \right) \cdot \frac{1}{u} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad (177)$$

Zu gegebenem Grundwasserspiegel $f \in \mathcal{C}_0^2$ sind damit der transformierte Grundwasserspiegel \hat{f} und die Randtransformation \bar{x} bzgl. der \mathcal{H}^2 -Norm beliebig genau bekannt.

Berechnung der konformen Transformation $\hat{\mathbf{F}}$

Wir gehen davon aus, dass der transformierte Grundwasserspiegel als Spline $\hat{f}_* \in \mathcal{C}_0^2$ mit den obigen Bezeichnungen bekannt sei. Aus den Gleichungen (71) und (72) werden die zwei Komponenten der Abbildung $\hat{\mathbf{F}} = \hat{x} + i \hat{z}$ zum Zeitpunkt t_0 berechnet.

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{f}_i(r) - \hat{f}_i(u)}{r - u} &= \delta_i((r-u)^2 + w^2) + (3\delta_i u_i + \gamma_i)(r - u) + \delta_i(3u_i^2 - w^2) + 2\gamma_i u_i + \beta_i \\
-\pi(\hat{x}(u, w) - u) &\approx \int_{r_1}^{r_n} \hat{f}_*(r) \frac{r - u}{(r-u)^2 + w^2} dr = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\hat{f}_i(u) \frac{(r-u)}{(r-u)^2 + w^2} + \frac{\hat{f}_i(r) - \hat{f}_i(u)}{r - u} - \delta_i w^2 - \frac{\frac{\hat{f}_i(r) - \hat{f}_i(u)}{r-u} - \delta_i((r-u)^2 + w^2)}{(r-u)^2 + w^2} w^2 \right) dr \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\hat{f}_i(u) - (3\delta_i u_i + \gamma_i) w^2 \right) \left[\ln \sqrt{(r-u)^2 + w^2} \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\delta_i \frac{(r-r_i)^3}{3} + (\delta_i u_i + \gamma_i) \frac{(r-r_i)^2}{2} + (\delta_i(u_i^2 - w^2) + \gamma_i u_i + \beta_i)(r-r_i) \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_i(3u_i^2 - w^2) + 2\gamma_i u_i + \beta_i \right) w \left[\arctan \frac{r-u}{w} \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \tag{178}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_i(r) - \hat{f}_i(u) &= \left(\delta_i(r-r_i) + 2\delta_i u_i + \gamma_i \right) ((r-u)^2 + w^2) \\
&\quad + \left(\delta_i(3u_i^2 - w^2) + 2\gamma_i u_i + \beta_i \right) (r-u) - (3\delta_i u_i + \gamma_i) w^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\pi(\hat{z}(u, w) - w) &\approx \int_{r_1}^{r_n} \hat{f}_*(r) \frac{w}{(r-u)^2 + w^2} dr \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\hat{f}_i(u) \frac{w}{(r-u)^2 + w^2} + (\hat{f}_i(r) - \hat{f}_i(u)) \frac{w}{(r-u)^2 + w^2} \right) dr \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\hat{f}_i(u) - (3\delta_i u_i + \gamma_i) w^2 \right) \left[\arctan \frac{r-u}{w} \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\delta_i \frac{(r-r_i)^2}{2} + (2\delta_i u_i + \gamma_i)(r-r_i) \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\delta_i(3u_i^2 - w^2) + 2\gamma_i u_i + \beta_i \right) w \left[\ln \sqrt{(r-u)^2 + w^2} \right]_{r_i}^{r_{i+1}} \tag{179}
\end{aligned}$$

Mit \hat{f}_* kennen wir auch die konforme Abbildung $\hat{\mathbf{F}}$ beliebig genau. (Wir verzichten an dieser Stelle auf die offensichtliche Fehlerabschätzung.)

Berechnung der Bewässerung N (inverses Problem)

Zu allen Zeiten t sei der Grundwasserspiegel $f(\cdot; t) \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$ gegeben und nach der Zeit t stetig differenzierbar, sodass wir auch f_t kennen. Ferner sei auch die Quellfunktion $Q(\cdot, \cdot; t) \in \mathcal{L}^1(A)$ bekannt und habe kompakten Träger.

Gesucht ist in dieser Situation die Bewässerungsfunktion N .

Zu jedem Zeitpunkt t kann nach früherem die Randtransformation $\bar{x}(\cdot; t)$ beliebig genau (bzgl. der \mathcal{H}^2 -Norm) berechnet werden. Damit ist die konforme Transformation $\hat{\mathbf{F}}$ und auch die Funktion $\hat{Q}(\cdot; t)$ gegeben.

Um nun $N(\cdot; t)$ zu bestimmen, differenzieren wir die Formel (80)

$$\boxed{\bar{x}(u; t) - u = \mathcal{N}(\bar{x}(u; t); t) + \hat{Q}(u; t)}$$

nach u ,

$$\begin{aligned} \bar{x}_u(u; t) - 1 &= \mathcal{N}_x(\bar{x}(u; t); t) \cdot \bar{x}_u(u; t) + \hat{Q}'(u; t) \\ &= \frac{N(\bar{x}(u; t); t) - n_e f_t(\bar{x}(u; t); t)}{K} \cdot \bar{x}_u(u; t) + \hat{Q}'(u; t), \end{aligned}$$

und lösen nach $N(\bar{x}(u; t))$ auf:

$$N(\bar{x}(u; t)) = n_e f_t(\bar{x}(u; t); t) + K \cdot \frac{\bar{x}_u(u; t) - 1 - \hat{Q}'(u; t)}{\bar{x}_u(u; t)}$$

Damit kennen wir auch den Bewässerungsgraphen zum Zeitpunkt t :

$$\boxed{u \mapsto \begin{pmatrix} \bar{x}(u; t) \\ N(\bar{x}(u; t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}(u; t) \\ n_e f_t(\bar{x}(u; t); t) + K \cdot \frac{\bar{x}_u(u; t) - 1 - \hat{Q}'(u; t)}{\bar{x}_u(u; t)} \end{pmatrix}} \quad (180)$$

Will man die Funktion $x \rightarrow N(x; t)$ beschreiben, so ist es nötig, die Umkehrfunktion $\bar{u}(\cdot; t)$ zu $\bar{x}(\cdot; t)$ hinreichend genau und effektiv zu berechnen. Einzelne Funktionswerte kann man wieder beliebig genau über das Newton-Verfahren aus der Gleichung

$$T(x, u) := \bar{x}(u; t) - x \stackrel{!}{=} 0$$

berechnen, wenn

$$\exists \varepsilon T_u(x, u) = \bar{x}_u(u; t) \geq \varepsilon > 0$$

gilt.

Dann können wir auch die Funktion $\bar{u}(\cdot; t)$ als Polygonzug (vgl. Kapitel 6.1) annähern.

Instationäre Probleme

Zu jedem Zeitpunkt t sei die Bewässerungsfunktion $N(\cdot; t) \in \mathcal{C}_0^1$ gegeben. Quellen oder Senken mögen nicht vorliegen ($Q=0$). Ferner sei eine Anfangsbedingung $f(\cdot; t_0) = f_0 \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R})$ bekannt. Jetzt soll die Funktion $f(\cdot; t)$ für alle $t > t_0$ berechnet werden. Aus dem Gegebenen wird zuerst die Funktion $f_t(\cdot; t_0)$ bestimmt.

Wir gehen wie beim inversen Problem vor, wobei jetzt $N(\cdot; t_0)$ bekannt ist und $f_t(\cdot; t_0)$ berechnet werden soll. Die Randtransformation $\bar{x}(\cdot; t_0) \in \mathcal{C}^2$ können wir wieder beliebig genau (in \mathcal{H}^2) ermitteln. Wenn das Kriterium $\exists \varepsilon \bar{x}_u(u; t_0) \geq \varepsilon > 0$ erfüllt ist, kennen wir auch die Umkehrfunktion $\bar{u}(\cdot; t_0) \in \mathcal{C}^2$.

Wird die Gleichung (88) nach x differenziert, ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$\boxed{n_e f_t(x, t_0) = N(x, t_0) - K + K \bar{u}_x(x; t_0)} \quad (181)$$

Mit dem *Cauchy-Polygon-Verfahren* wird ein Zeitschritt ausgeführt und damit ein neuer Anfangswert berechnet.

$$\boxed{f(x, t_0 + \Delta t) := f(x, t_0) + \Delta t \cdot f_t(x, t_0)} \quad (182)$$

Alle bekannten Strategien der Schrittweitensteuerung oder Verfahren höherer Ordnung (z.B. das *implizite Euler-Cauchy-Verfahren*) können angewendet werden.

Die Funktionen $f(\cdot; t_0)$, $f_t(\cdot; t_0)$ und $N(\cdot; t_0)$ realisieren wir als Polygonzüge (mit kompaktem Träger), führen den Cauchy-Schritt aus und erhalten $f_t(\cdot; t_0 + \Delta t)$ wieder als Polygonzug. Die Anzahlen der Stützstellen werden sich dabei praktisch addieren.

Für die Berechnung von $\bar{x}(\cdot; t_0 + \Delta t)$ benötigen wir jedoch eine höhere Regularität. Deshalb approximieren wir das Polygon $f(\cdot; t_0 + \Delta t)$ vermöge eines Splines $f_*(\cdot; t_0 + \Delta t)$ und ermitteln damit die Randtransformation.

Für den nächsten Cauchy-Schritt benutzen wir nicht das Polygon $f(\cdot; t_0)$, sondern nähern den Spline $f_*(\cdot; t_0 + \Delta t)$ durch einen neuen Polygonzug an, der dann benutzt wird. Damit wird einerseits die Stützstellenzahl wieder reduziert und andererseits eine Glättung der iterierten Funktionen erreicht.

Das oben beschriebene Verfahren verläuft in der Realisierung sehr stabil und liefert interessante Ergebnisse. Insbesondere wird bei zeitlich konstanter, (Bilanz-) ausgeglichener Bewässerung N die stationäre Lösung $f(\cdot; \infty)$ zu beliebigen Anfangspolygonen f_0 gleichmäßig approximiert. Interessanterweise spielt die Fläche unter f_0 dabei (abgesehen von der Konvergenzgeschwindigkeit) keine Rolle, denn die stationäre Lösung $f(\cdot; \infty) \in \mathcal{L}^2$ ist meist nicht integrierbar ($f(\cdot; \infty) \notin \mathcal{L}^2$). Allgemein ist eine Glättung von $f(\cdot; t)$ für wachsendes t zu beobachten.

Über die Qualität dieses Verfahrens entscheiden Fehlerabschätzungen der benutzten Numerik und vor allem eine Existenz- und Eindeutigkeits-theorie des instationären Problems, welche wir hier nicht liefern können.

4 Der endlich tiefe 2D-Aquifer

Wir setzen das Kapitel 2 über den Aquifer endlicher Tiefe $d > 0$ fort.

Es lässt sich auch im stationären Fall keine explizite Lösungsformel für die Oberfläche f und für das Druckpotential p mehr finden.

Bisher waren bei Kenntnis von \hat{f} die anderen Größen $\hat{\mathcal{N}}, \hat{x}, \hat{z}, \hat{p}, \hat{q}$ explizit berechenbar. Wir können das Formelwerk soweit umschreiben, sodass bei Kenntnis von $\hat{\mathcal{N}}$ ebenfalls die anderen Größen $\hat{f}, \hat{x}, \hat{z}, \hat{p}, \hat{q}$ explizit gegeben sind. Daher reduziert sich die Aufgabe auf die Berechnung von \hat{f} oder $\hat{\mathcal{N}}$.

Beim inversen bzw. instationären Problem ist zu allen Zeiten $t \geq t_0$ bzw. zu einem Zeitpunkt t_0 der Grundwasserspiegel f gegeben. Aus der *Transformationsgleichung* (64) kann man dann über ein Fixpunktverfahren \hat{f} berechnen.

Diese Gleichung und auch die *transformierte Oberflächenrandbedingung* (68) kann nach \hat{f} aufgelöst werden. Wie erhalten so eine (bis auf additive Konstante) eineindeutige Beziehung zwischen $\bar{x} - \text{id}, \hat{f}$ und $\hat{\mathcal{N}}$, die wir *Grundwasserkorrespondenz* nennen.

Damit ist auch ein direkter Zusammenhang (ohne \hat{f}) zwischen \bar{x} und $\hat{\mathcal{N}}$ gegeben, den wir als *Bewässerungskorrespondenz* bezeichnen. Es kann jetzt das stationäre Problem gelöst werden. Bei gegebener oberflächlicher Bewässerung N und innerer Bewässerung Q wird aus dieser Bewässerungskorrespondenz die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ wieder über Fixpunktverfahren ermittelt.

Außerdem tritt beim endlich tiefen Grund ein völlig neues physikalisches Phänomen zu Tage, welches bisher nicht im Wasserbau bekannt war:

Im stationären Fall bildet sich sogar bei einer Bewässerung N mit kompaktem Träger zwischen $+\infty$ und $-\infty$ ein Höhenunterschied

$$2 \cdot h := f(\infty) - f(-\infty) \quad (\text{genauer : } h = f(\infty) = -f(-\infty))$$

im Grundwasserspiegel aus, welchen wir im Folgenden als *Grundwasserstufe* bezeichnen. Liegen keine Quellen ($Q = 0$) vor, dann kann diese Stufe $2 \cdot h$ direkt aus der gegebenen Bewässerung N berechnet werden, ohne die oben erwähnte Fixpunktgleichung (die Bewässerungskorrespondenz) zu lösen.

Damit ist das Wesentliche im Verlauf des stationären Grundwasserspiegels bekannt.

Als Ausgangspunkt der Untersuchungen dienen uns die *Transformationsgleichung* (64)

$$\bar{x}(u; t) - u = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{f(\bar{x}(r; t); t)}_{=\hat{f}(r; t)} \cdot \frac{1}{\tanh \rho} - h \right) d\rho + \text{const.} \quad \left(\rho = \frac{\pi(r-u)}{2d} \right)$$

und die *transformierte Oberflächenrandbedingung* (68):

$$\hat{\mathcal{N}}(u; t) = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r; t) \cdot \frac{1}{\sinh \rho} d\rho = \frac{2d}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_r(r; t) \cdot \ln \left| \tanh \frac{\rho}{2} \right| d\rho$$

Die Definition der Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ entnehme man aus (65) bis (67).

An f (eigentlich an \hat{f}) stellen wir die Voraussetzungen des Satzes 2.4.

Im Abschnitt 4.1 untersuchen wir zunächst die asymptotischen Zusammenhänge zwischen den Funktionen \bar{x} , \hat{f} und $\hat{\mathcal{N}}$. Dann können die Formeln (64) und (68) nach dem transformierten Grundwasserspiegel \hat{f} aufgelöst werden. Wir erhalten so die *Grundwasserkorrespondenz* zwischen $\bar{x} - \text{id}$, \hat{f} , $\hat{\mathcal{N}}$ und ferner die *Bewässerungskorrespondenz* zwischen $\bar{x} - \text{id}$, $\hat{\mathcal{N}}$.

Damit bekommen wir auch das Formelwerk für das stationäre Problem und können die *Grundwasserstufe* $2 \cdot h$ berechnen.

Im Abschnitt 4.2 beschreiben wir die Realisierung des stationäre Problems ohne Quellen. Die Quellen werden dann im Kapitel 4.3 berücksichtigt.

Im Abschnitt 4.4 zeigen wir Möglichkeiten für weitere Untersuchungen und offene Probleme auf.

4.1 Formeln für den endlich tiefen Aquifer, die Grundwasserkorrespondenz

Die Grundwassergleichungen (64) und (68) beschreiben die Beziehungen zwischen $\bar{x} - \text{id}$, \hat{f} und $\hat{\mathcal{N}}$, der *Grundwasserkorrespondenz*, denn die Formeln können nach \hat{f} aufgelöst werden. Wird dann aus diesem System der transformierte Grundwasserspiegel \hat{f} eliminiert, so erhält man die *Bewässerungskorrespondenz* zwischen \bar{x} und $\hat{\mathcal{N}}$.

Im Abschnitt 4.1.1 untersuchen wir das asymptotische Verhalten von \bar{x} , \hat{f} und $\hat{\mathcal{N}}$.

Damit lassen sich im Abschnitt 4.1.2 die *Grundwasserkorrespondenz* und die *Bewässerungskorrespondenz* angeben.

Im Abschnitt 4.1.3 geben wir das Formelwerk für das stationäre Problem an. Als eine Anwendung diskutieren wir im Abschnitt 4.1.4 beim stationären Problem die *Grundwasserstufe*, welche erstaunlich einfach zu bestimmen ist und doch weitreichende Aussagen über den Grundwasserverlauf macht.

Die Zeit t spielt wieder nur die Rolle eines Parameters und wird weggelassen.

4.1.1 Asymptotik

Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.4 kann aus der Gleichung (68) unmittelbar aus der Bewässerungsfunktion $\hat{\mathcal{N}}$ die *Grundwasserstufe* $2 \cdot h = f(\infty) - f(-\infty) = \hat{f}(\infty) - \hat{f}(-\infty)$ berechnet werden, wie auch die „Grundwasserfläche“ a unter \hat{f} :

$$2h := \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_u(u) du = \frac{-1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du \quad (183)$$

$$a := - \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \hat{f}_u(u) du = \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \hat{\mathcal{N}}(u) du \quad (184)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du &= \frac{-2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_r(r) \cdot \ln \left| \tanh \frac{\pi(r-u)}{4d} \right| \frac{\pi dr}{2d} du \\ &= \frac{-2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_r(r+u) du \cdot \ln \left| \tanh \frac{\pi r}{4d} \right| \frac{\pi dr}{2d} \\ &= \left(\hat{f}(\infty) - \hat{f}(-\infty) \right) \cdot \underbrace{\frac{-2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| \tanh \frac{\rho}{2} \right| d\rho}_{=1} = 2h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \hat{\mathcal{N}}(u) du &= \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \hat{f}_r(r) \cdot \ln \left| \tanh \frac{\rho}{2} \right| d\rho du \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (r+u-r) \cdot \hat{f}_r(r+u) du \cdot \ln \left| \tanh \frac{\pi r}{4d} \right| \frac{\pi dr}{2d} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u \hat{f}_u(u) du \cdot \underbrace{\frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left| \tanh \frac{\rho}{2} \right| d\rho}_{=-1} - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_u(u) du \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \rho \ln \left| \tanh \frac{\rho}{2} \right| d\rho}_{=0} \end{aligned}$$

Das letzte Integral verschwindet aus Symmetriegründen. Das vorletzte Integral wird partiell integriert und auf (297) zurückgeführt. \square

Die Differentiation von (64) nach u (unter Beachtung, wie Faltungen differenziert werden) liefert folgendes asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \bar{x}_u(u) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_r(r) \cdot \frac{1}{\mp 1} \frac{\pi dr}{2d} = 1 \pm \frac{h}{d} > 0 \quad (185)$$

4.1.2 Korrespondenzen zwischen $\hat{\mathcal{N}}$, \hat{f} und \bar{x} -id

Mit der Umkehrrelation (283)

$$f(u) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(r)}{\sinh(r-u)} dr \iff g(u) = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{\tanh(r-u)} dr$$

aus dem Satz 7.4 wollen wir die Transformationsgleichung (64) und die transformierte Oberflächenrandbedingung (68) nach \hat{f} auflösen.

An \hat{f} stellen wir wie bisher die Bedingungen aus (27):

$$\hat{f} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}) \ \& \ \hat{f}' \in \mathcal{L}^1 \ \& \ \exists h \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(u) = \pm h \ \& \ \exists \varepsilon > 0 \ |\hat{f}| \leq d - \varepsilon$$

Die Oberflächenrandbedingung kann man bereits nach \hat{f} auflösen. Um Entsprechendes mit der Transformationsgleichung auszuführen, muss sie zuerst nach u differenziert werden. Dann genügt auch $\hat{f}_u \in \mathcal{C}^{0,\alpha} \cap \mathcal{L}^1$ den erforderlichen Bedingungen. Nach \hat{f}_u aufgelöst wird dann die Gleichung wieder als Faltung integriert.

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(s) - s}{\sinh \sigma} d\sigma + \underbrace{\text{const.}}_{=0} \quad \left(\sigma = \frac{\pi(s-u)}{2d}, \ d\sigma = \frac{\pi ds}{2d} \right) \quad (186)$$

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\tanh \sigma} d\sigma \quad (187)$$

Wird die Gleichung (186) partiell integriert und die Asymptotik (185) von \bar{x}_u verwendet, so zeigt sich, dass die Integrationskonstante der ersten Gleichung (186) tatsächlich Null ist:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(u) &= \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x}(s+u) - (s+u)) \cdot \frac{1}{\sinh \frac{\pi s}{2d}} \frac{\pi ds}{2d} \\ &= - \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{x}_s(s+u) - 1) \cdot \ln \left| \tanh \frac{1}{2} \frac{\pi s}{2d} \right| ds \\ &= - \frac{2d}{\pi^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\pm \frac{h}{d} \right) \cdot \ln \left| \tanh \frac{\sigma}{2} \right| d\sigma \\ &= \pm h \cdot \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\sinh \sigma} d\sigma = \pm h \quad (\text{vgl. (297)}) \quad \square \end{aligned}$$

Jetzt sind Bedingungen an $\hat{\mathcal{N}}$ zu stellen, damit sich die Regularität von \hat{f} nach Satz 7.4 ergibt.

$$\hat{\mathcal{N}} \in \mathcal{C}^{1,\alpha} \cap \mathcal{L}^1 \quad \& \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall u \quad \left| \frac{1}{2d} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{N}(s)}{\tanh \frac{\pi(s-u)}{2d}} ds \right| \leq d - \varepsilon \quad (188)$$

Das Ergebnis (186) wird in (68) eingesetzt

$$\hat{\mathcal{N}}(u) = \frac{-1}{\pi^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sinh \rho} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}(s) - s}{\sinh(\sigma - \rho)} d\sigma d\rho,$$

und nach (285) umgeformt. Dies liefert eine Methode, aus einer gegebenen Transformation \bar{x} die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ zu berechnen:

$$\hat{\mathcal{N}}(u) = \bar{x}(u) - u - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\sinh \sigma} \cdot (\bar{x}(s) - s) d\sigma \quad (189)$$

Bildet man den Limes $d \rightarrow \infty$ in dieser Gleichung, so verschwindet das Integral (man beachte die Definition von σ), und es ergibt sich in Übereinstimmung zum Kapitel 3:

$$d \rightarrow \infty : \hat{\mathcal{N}}(u) = \bar{x}(u) - u \quad (190)$$

Wenn in (189) zu \bar{x} noch eine Konstante addiert wird, so ändert sich die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ nicht.

Soll aus einer zeitlich konstanten Bewässerung (N und Q) der stationäre Grundwasserspiegel f berechnet werden, so ist die *Bewässerungsgleichung* geeigneter:

$$\bar{x}(u) - u = \hat{\mathcal{N}}(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\tanh \sigma} \cdot \hat{\mathcal{N}}(s) d\sigma + \underbrace{\text{const.}}_{:=0} \quad (191)$$

(Die Integrationskonstante spielt keine Rolle, sodass wir sie Null gesetzt haben.)

(191) entsteht, wenn die Gleichung (187) nach u differenziert und in die (ebenfalls nach u differenzierte) Gleichung (64) eingesetzt wird. Dann kann nach der Formel (284) umgeformt und anschließend wieder integriert werden:

$$\bar{x}_u(u) - 1 = -\frac{1}{\pi^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tanh \rho} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_s(s)}{\tanh(\sigma - \rho)} d\sigma d\rho = \hat{\mathcal{N}}_u(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\tanh \sigma} \cdot \hat{\mathcal{N}}_s(s) d\sigma$$

Aus der letzten Formel (191) kann man das asymptotische Verhalten von \bar{x} für große/kleine u ablesen. Wegen der Bilanzgleichung gilt $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) = 0$.

$$\begin{aligned} u \rightarrow \pm\infty : \quad \bar{x}(u) - u &= -\frac{1}{2d^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r - u}{\mp 1} \cdot \hat{\mathcal{N}}(r) dr \\ &= \pm \left(\frac{1}{2d^2} \int_{-\infty}^{\infty} r \hat{\mathcal{N}}(r) dr + \frac{-u}{2d^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(r) dr \right) \\ &= \pm \left(\frac{a}{2d} + \frac{h}{d} \cdot u \right) \quad (\text{asymptotisch}) \end{aligned} \quad (192)$$

4.1.3 Das Formelwerk für das stationäre Problem

Wir geben die Bestimmungsgleichungen für das stationäre Problem an. Gegeben sei die oberflächliche Bewässerung N und die innere Bewässerung Q .

Es gilt, aus dem System

$$\mathcal{N}(x) := \int_{-\infty}^x \frac{N(\xi)}{K} d\xi \quad \left(\mathcal{N}' = \frac{N}{K} < 1, N \in \mathcal{C}_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}) \right) \quad (193)$$

$$\hat{Q}(u) := \frac{1}{\pi} \int_A \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sinh \frac{\pi(u-\tilde{u}(\xi,\eta))}{2d}}{\sin \frac{\pi\tilde{w}(\xi,\eta)}{2d}} \right) \cdot \frac{Q(\xi,\eta)}{K} d\xi d\eta \quad (Q \in \mathcal{L}^1(A)) \quad (194)$$

$$\hat{\mathcal{N}}(u) := \mathcal{N}(\bar{x}(u)) + \hat{Q}(u) \quad (195)$$

$$\bar{x}(u) - u = \hat{\mathcal{N}}(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\tanh \sigma} \cdot \hat{\mathcal{N}}(s) d\sigma \quad \left(\sigma = \frac{\pi(s-u)}{2d} \right) \quad (196)$$

die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ zu berechnen. Dabei ist $\tilde{u}+i\tilde{w}$ die Umkehrfunktion von $\hat{x}+i\hat{z}$.

Ferner muss die *Bilanzgleichung* erfüllt sein:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(\xi) d\xi + \int_A Q(x,z) dx dz = 0 \quad (197)$$

Die Berechnung kann nur iterativ erfolgen. Im Kapitel 4.2 bearbeiten wir dieses Problem zunächst ohne Quellen, die wir dann im Kapitel 4.3 berücksichtigen.

Wenn wir $\hat{\mathcal{N}}$ kennen, dann lassen sich die anderen Größen explizit berechnen aus (187):

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\tanh \sigma} d\sigma$$

Die Ersetzung von \hat{f} durch $\hat{\mathcal{N}}$ vermöge (187) liefert folgende Ergebnisse, die wir in 5.2.2 nachgerechnet haben:

$$\begin{aligned} (\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u+iw) &= -(u+iw) + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{\sigma - i\omega}{\tanh(\sigma - i\omega)} d\sigma \\ \hat{q}^h(u+iw) &= -u + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{\sigma \sinh \sigma \cosh \sigma - \omega \sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma \\ \hat{p}^h(u+iw) &= -w + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{\sigma \sin \omega \cos \omega - \omega \sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma \end{aligned} \quad (198)$$

$$\begin{aligned} (\hat{x} + i\hat{z})(u+iw) &= -(\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u+iw) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \frac{i}{\tanh(\sigma - i\omega)} d\sigma \\ \hat{x}(u,w) &= -\hat{q}^h(u,w) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \frac{-\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma \\ \hat{z}(u,w) &= -\hat{p}^h(u,w) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \frac{\sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma \end{aligned} \quad (199)$$

Sehr interessant ist es in den letzten Formeln für $\hat{q}^h + i\hat{p}^h$ und $\hat{x} + i\hat{z}$ den Limes $w \xrightarrow{\leq 0} 0$ zu bilden. Der erste Grenzwert ist einfach zu berechnen, für den zweiten benutzen wir wieder die Formeln von Sochozki & Plemelj aus dem Satz 7.1:

$$\lim_{w \xrightarrow{\leq 0} 0} (\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u+iw) = -u + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\tanh \sigma} \hat{\mathcal{N}}(s) d\sigma \quad (200)$$

$$\lim_{w \xrightarrow{\leq 0} 0} (\hat{x} + i\hat{z})(u+iw) = \underbrace{u + \hat{\mathcal{N}}(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\tanh \sigma} \hat{\mathcal{N}}(s) d\sigma}_{=\hat{x}(u)} + i \underbrace{\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\tanh \sigma} d\sigma}_{=f(u)} \quad (201)$$

$$\lim_{w \xrightarrow{\leq 0} 0} (\hat{x} + \hat{q}^h)(u+iw) = \hat{\mathcal{N}}(u) \quad (202)$$

Damit sind die Formeln konsistent.

Am unteren Grund ($w = -d$ bzw. $\omega = \frac{-\pi}{2}$) ergibt sich:

$$(\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u-id) = -u + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \sigma \tanh \sigma d\sigma + i \left(d + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \tanh \sigma d\sigma \right) \quad (203)$$

$$(\hat{x} + i\hat{z})(u-id) = u - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \sigma \tanh \sigma d\sigma - id \quad (204)$$

Für Konvergenzüberlegungen ist die Gleichung (203) sehr aussagekräftig:

Die iterative Berechnung von $\hat{\mathcal{N}}$ aus den Bewässerungen N und Q konvergiert mitunter nicht. Ein Grund dafür ist ein Leerlaufen des Aquifers, wenn lokal zu stark entwässert wird. Es kann sich kein hinreichend großer Druckunterschied aufbauen, sodass Wasser aus den anderen Teilen des Aquifers nachfließen könnte.

Physikalisch motiviert fordern wir, dass am Aquifergrund das Druckpotential $\hat{p}(\cdot, -d) > 0$ von Null weg beschränkt ist. Das stellt eine Bedingung an $\hat{\mathcal{N}}$:

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \forall u \quad \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \tanh \frac{\pi(s-u)}{2d} ds \geq -d + \varepsilon} \quad (205)$$

Eine ähnliche Bedingung ergibt sich aus der Forderung $|f| < d$:

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \forall u \quad d - \varepsilon \geq \frac{1}{2d} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{1}{\tanh \frac{\pi(s-u)}{2d}} ds \geq -d + \varepsilon} \quad (206)$$

Weitere Bedingungen kann man aus der Forderung $\hat{x}_u > 0$ ableiten.

Das Problem, welche Bedingungen an N und Q zu stellen sind, damit $\hat{\mathcal{N}}$ existiert und die entsprechende Regularität hat, ist sehr schwierig. Wir können jedoch ein notwendiges Kriterium angeben, wenn keine Quellen ($Q=0$) vorliegen:

4.1.4 Die Grundwasserstufe

Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit des stationären Problems ist die Bedingung $h > -d$. Die halbe Grundwasserstufe h ergibt sich aus (183) zu:

$$h = \frac{-1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du \quad (\hat{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \circ \bar{x} + \hat{Q}) \quad (207)$$

Aus dieser Gleichung folgt insbesondere, dass die Grundwasserstufe h beim unendlich tiefen Aquifer ($d \rightarrow \infty$) verschwindet.

Selbst bei gegebener Bewässerung N, Q ist $\hat{\mathcal{N}}$ wie auch \bar{x} nicht bekannt. Interessanterweise verändert aber die Transformation die Momente von $\hat{\mathcal{N}}$ nicht, es gilt z.B.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(\bar{u}(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du \quad (208)$$

Zum **Beweis** benützen wir die Gleichung (191), sowie diese Gleichung nach u differenziert:

$$\begin{aligned} \bar{x}(u) &= u + \hat{\mathcal{N}}(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{\tanh \rho} \hat{\mathcal{N}}(r) dr & \bar{x}'(u) &= 1 + \hat{\mathcal{N}}'(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{\tanh \rho} \hat{\mathcal{N}}'(r) dr \\ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(\bar{u}(x)) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) \bar{x}'(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) \hat{\mathcal{N}}'(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) \frac{-2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{\tanh \rho} \hat{\mathcal{N}}'(r) \frac{\pi dr}{2d} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) \hat{\mathcal{N}}'(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}'(r) \underbrace{\frac{-2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\rho}{\tanh(-\rho)} \hat{\mathcal{N}}(u) \frac{\pi du}{2d} dr}_{\bar{x}(r) - r - \hat{\mathcal{N}}(r)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}'(r) \cdot (\bar{x}(r) - r) dr \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du + \underbrace{\left[\hat{\mathcal{N}}(r) \cdot (\bar{x}(r) - r) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(r) \cdot (\bar{x}'(r) - 1) dr \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(\bar{u}(x)) dx \quad \square \end{aligned}$$

Wenn es keine Quellen gibt ($Q = 0$), so folgt somit aus (208) die *Stufenformel*

$$h = \frac{-1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(u) du = \frac{-1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{\mathcal{N}}(\bar{x}(u))}_{=\mathcal{N}(x)} dx = \frac{-1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(x) dx = \frac{-1}{2dK} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x \mathcal{N}(\xi) d\xi dx \quad (209)$$

Aus der Bedingung $h > -d$ erhalten wir somit ein notwendiges Kriterium für die Lösbarkeit des stationären Problems ohne Quellen:

$$Q=0 : \quad \boxed{2d^2K > \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x N(\xi) d\xi dx} \quad (210)$$

Einen Spezialfall dieser Formel interpretieren wir physikalisch: An der Oberfläche bei $-l/2$ passiere der Wasserfluss $-N_0$ und bei $l/2$ der Fluss N_0 (N_0 in $\frac{m^3}{m \text{ day}}$).

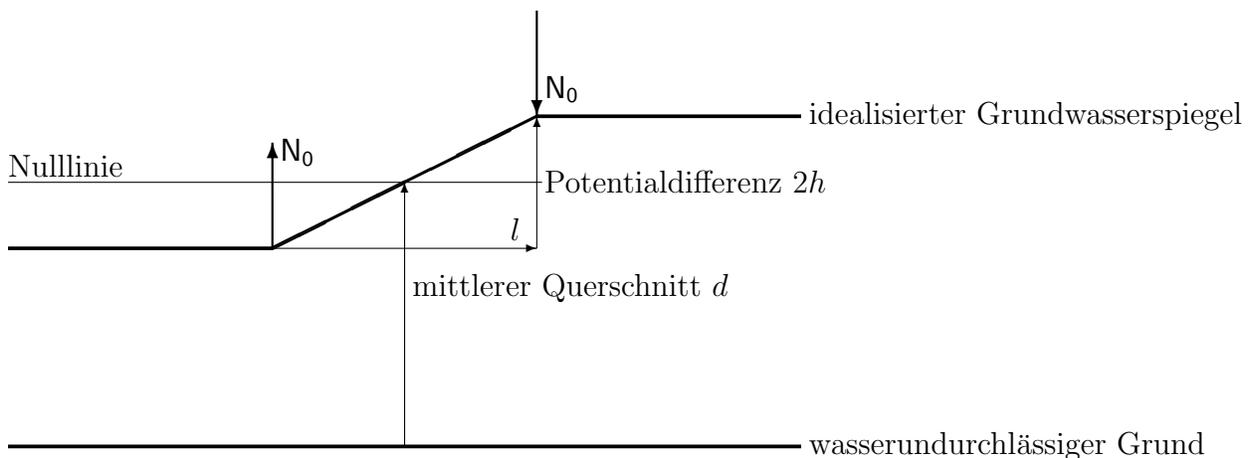
$$\begin{aligned} N(x) &:= N_0(\delta(x-l/2) - \delta(x+l/2)) && (\text{Dirac} - \delta) \\ \mathcal{N}(x) &= -\frac{N_0}{K} \cdot \chi_{[-l/2; l/2]} \\ h &= \frac{-1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(\xi) d\xi = \frac{N_0 l}{2dK} \end{aligned} \quad (211)$$

Die letzte Formel kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\boxed{N_0 = d \cdot K \cdot \frac{2h}{l}} \quad (212)$$

In dieser Form können wir den Sachverhalt physikalisch interpretieren:

Der Druckunterschied von rechts nach links beträgt $2h$. Als mittlerer Druckgradient ergibt sich $\frac{2h}{l}$. Wird diese Größe mit der Konduktivität K multipliziert, so ergibt sich die (Volumen-) Stromdichte q und wenn noch mit der mittleren Tiefe d multipliziert wird, entsteht der (Volumen-) Strom N_0 (pro Länge senkrecht zur sichtbaren Ebene).



4.2 Stationäres Problem ohne Quellen beim endlich tiefen 2D-Aquifer

Beim stationären Problem soll zu vorgegebener, zeitlich konstanter Bewässerung durch N und Q der sich einstellende stationäre Grundwasserspiegel f berechnet werden. Wir bearbeiten dieses Problem zunächst ohne Quellen. Im nächsten Abschnitt 4.3 werden sie dann berücksichtigt.

Im Gegensatz zum unendlich tiefen Aquifer können wir aus der oberflächlichen Bewässerung N nicht explizit die Randtransformation \bar{x} berechnen. Wir bekommen aber die Funktion \mathcal{N} durch ein Fixpunktverfahren beliebig genau. Daher haben wir in den Formeln für das Strom-Druckpotential $\hat{q}+i\hat{p}$ und der konformen Transformation $\hat{x}+i\hat{z}$ die Funktion \hat{f} durch $\hat{\mathcal{N}}$ ersetzt vermöge der Gleichung (187):

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\tanh \sigma} d\sigma$$

Der große Vorteil bei diesem Verfahren ist, dass die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ einen kompakten Träger hat. Wenn Punktquellen vorliegen, dann wird die Funktion $\hat{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \circ \bar{x} + \hat{Q}$ im Unendlichen immerhin noch sehr schnell (exponentiell) abfallen.

In dem so gewonnenen Formelwerk treten Faltungsintegrale, insbesondere auch Hauptwertintegrale auf. Beim inversen Problem für den unendlich tiefen Aquifer in 3.6 konnten wir vergleichbare Integrale noch exakt über kubische Splines berechnen. Nun können selbst unter Verwendung von exponentiellen Splines die jetzt auftretenden Integrale so nicht mehr exakt berechnet werden.

Wir haben daher einen anderen Weg zur Quadratur beschritten, welcher auf partieller Integration beruht und bei dem die nötigen Stammfunktionen über Exponentialreihen beliebig genau berechnet werden können.

Im [Abschnitt 4.2.1](#) beschreiben wir iterative Berechnung von $\hat{\mathcal{N}}$.

Mit der Kenntnis $\hat{\mathcal{N}}$ kann im [Abschnitt 4.2.2](#) der Grundwasserspiegel f berechnet werden, wie die auftretenden Integrale berechnet werden. Diese Techniken kann man auch beim inversen und instationären Problem verwenden.

Abschließend wiederholen wir im [Abschnitt 4.2.3](#) die Techniken aus dem Kapitel 3.4, wie man Isobare und Stromlinien erhält.

4.2.1 Berechnung von $\hat{\mathcal{N}}$ aus der Bewässerungsgleichung

In diesem Abschnitt wird das Fixpunktverfahren beschrieben, mit dem wir aus der Oberflächenbewässerung N die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ approximieren.

N genüge dabei folgenden Bedingungen:

$$\boxed{N \in \mathcal{C}_0^{0,\alpha} \quad \& \quad N < K \quad \& \quad \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi) d\xi = 0 \quad \& \quad -d < h := \frac{-1}{2dK} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x N(\xi) d\xi dx} \quad (213)$$

Die ersten drei Bedingungen wurden so auch beim unendlich tiefen Aquifer gefordert. Die letzte ergibt sich aus der Stufenformel (209). Sie verhindert ein Leerlaufen des Aquifers im Unendlichen. Diese Bedingungen sind jedoch nicht hinreichend für die Lösbarkeit des stationären Problems, denn bei einer ausgedehnten oder lokal starken Entwässerung kann mitunter nicht mehr genug Wasser aus dem restlichen Aquifer nachfließen.

Wenn wir zu einer gegebenen Bewässerung N die eindeutige Lösbarkeit des stationären Problems unterstellen, dann beschreiben die Formeln (193)-(196), wie die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ implizit festgelegt ist:

$$\boxed{\mathcal{N}(x) := \int_{-\infty}^x \frac{N(\xi)}{K} d\xi} \quad \boxed{\bar{x}(u) - u = \underbrace{\mathcal{N}(\bar{x}(u))}_{=\hat{\mathcal{N}}(u)} - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{\tanh \rho} \cdot \mathcal{N}(\bar{x}(r)) d\rho} \quad (214)$$

Aus der letzten Gleichung wird mit dem Fixpunktverfahren die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ approximiert: Die erste Näherung sei

$$\hat{\mathcal{N}}^{(0)} := \mathcal{N}. \quad (215)$$

Mit der iterierten $\hat{\mathcal{N}}^{(k)}$ berechnen wir $\bar{x}^{(k+1)}$ vermöge

$$\bar{x}^{(k+1)}(u) := u + \hat{\mathcal{N}}^{(k)}(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{\tanh \rho} \cdot \hat{\mathcal{N}}^{(k)}(r) d\rho, \quad (216)$$

und erhalten schließlich

$$\hat{\mathcal{N}}^{(k+1)}(u) := \mathcal{N}(\bar{x}^{(k+1)}(u)). \quad (217)$$

Integrale berechnen wir, indem $\hat{\mathcal{N}}^{(k)}$ als Polygonzug approximiert wird.

$$\boxed{\hat{\mathcal{N}}^{(k)}(r) = \alpha_i + \beta_i(r - u_i) \quad (u_i \leq r \leq u_{i+1}, \text{ supp } \hat{\mathcal{N}}^{(k)} \subset [u_1, u_n])} \quad (218)$$

Als Konvergenzkriterium nehmen wir

$$\|\hat{\mathcal{N}}^{(k+1)} - \hat{\mathcal{N}}^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon. \quad (219)$$

Glattere Ansätze, z.B. $\hat{\mathcal{N}}^{(k)}$ als Spline, lassen sich ebenfalls mit dieser Methode leicht auswerten. Dann macht auch ein schärferes Konvergenzkriterium Sinn:

$$\|\hat{\mathcal{N}}^{(k+1)} - \hat{\mathcal{N}}^{(k)}\|_{\infty} + \|\hat{\mathcal{N}}^{(k+1)'} - \hat{\mathcal{N}}^{(k)'}\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Wenn man die Integrale berechnen kann, dann kennen wir die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ als Polygonzug beliebig genau und auch die Randtransformation \bar{x} ist als Funktion gegeben.

Wir beschreiben die Berechnung der auftretenden Integrale.

Es soll eine Funktion L berechnet werden mit

$$L : \mathbb{R}+i] - \pi, \pi[\rightarrow \mathcal{C} \quad \& \quad L_{xx}(z) = L''(z) = \frac{z}{\tanh z}. \quad (220)$$

Die Existenz diese Funktion ist gesichert, weil $z \mapsto \frac{z}{\tanh z}$ im einfach zusammenhängenden Parallelstreifen analytisch ist. Jetzt können wir exakt integrieren:

$$\begin{aligned} \frac{-2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{\tanh \rho} \hat{\mathcal{N}}(r) d\rho &= \frac{-1}{\pi d} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \hat{\mathcal{N}}(r) \cdot L''\left(\frac{\pi(r-u)}{2d}\right) dr \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \hat{\mathcal{N}}'(r) \cdot L'\left(\frac{\pi(r-u)}{2d}\right) dr \\ &= \frac{4d}{\pi^3} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \cdot \left[L\left(\frac{\pi(r-u)}{2d}\right) \right]_{r=u_i}^{u_{i+1}} \end{aligned} \quad (221)$$

Wir berechnen $L(z)$ zunächst nur für $x = \Re(z) > 0$. Es wird L'' in eine e -Reihe entwickelt, die integriert werden kann.

Dabei führen wir Zetafunktionen ein, deren Auswertung im Anhang 6.4 beschrieben ist.

$$\boxed{\zeta_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n^k} \quad \zeta'_{k+1}(z) = -\zeta_k(z) \quad (\Re(z) > 0, k \in \mathbb{N})} \quad (222)$$

Wegen $L''(-\bar{z}) = L''(z)$ und $L''(\bar{z}) = \overline{L''(z)}$, erhält man damit die Funktion L auch für $\Re(z) < 0$. Dabei sind die Integrationskonstanten richtig zu wählen:

$$\begin{aligned} L''(-\bar{z}) &= \overline{L''(z)} \\ -L'(-\bar{z}) &= \overline{L'(z)} \Leftrightarrow \Re(L'(0)) = 0 \\ L(-\bar{z}) &= \overline{L(z)} \Leftrightarrow \Im(L(0)) = 0 \end{aligned} \quad (223)$$

Es sei also $\Re(z) > 0$ (für $\Re(z) = 0$ betrachte man den rechtsseitigen Limes):

$$\begin{aligned} \overline{L''(-\bar{z})} = L''(z) &= \frac{z}{\tanh(z)} = z \cdot \left(1 + \frac{2e^{-2z}}{1 - e^{-2z}}\right) \\ &= z + \sum_{n=1}^{\infty} 2z e^{-2nz} \\ -\overline{L'(-\bar{z})} = L'(z) &= \frac{z^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z e^{-2nz}}{n} + \frac{e^{-2nz} - 1}{2n^2} \right) \\ &= \frac{z^2}{2} - z \zeta_1(2z) - \frac{\zeta_2(2z)}{2} + \frac{\pi^2}{12} \end{aligned} \quad (224)$$

$$\begin{aligned} \overline{L(-\bar{z})} = L(z) &= \frac{z^3}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z(e^{-2nz} + 1)}{2n^2} + \frac{e^{-2nz}}{2n^3} \right) \\ &= \frac{z^3}{6} + \frac{z}{2} \left(\zeta_2(2z) + \frac{\pi^2}{6} \right) + \frac{\zeta_3(2z)}{2} \end{aligned} \quad (225)$$

4.2.2 Berechnung des Grundwasserspiegels f

Die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ sei als Polygonzug (218) bekannt. Damit sind auch die Randtransformationen \bar{x} aus der Bewässerungsgleichung und $\bar{u} = \bar{x}^{-1}$ z.B. mit einem Newtonverfahren gegeben. Ist schließlich \hat{f} bekannt, so lässt sich auch der Grundwasserspiegel $f = \hat{f} \circ \bar{u}$ bestimmen. Die Funktion \hat{f} berechnen wir aus (187):

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\tanh \sigma} d\sigma$$

Um das \hat{f} -Hauptwertintegral auszuwerten, integrieren wir die analytische Funktion

$$F'' : \mathbb{R} + i]0, \pi[\ni z \mapsto \frac{1}{\tanh z} \quad (226)$$

mit derselben Technik wie im letzten Abschnitt die Funktion $z \mapsto \frac{z}{\tanh z}$ und setzen F auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig fort. Bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten muss $F(z)$ wieder nur für $\Re(z) > 0$ ermittelt werden.

$$\begin{aligned} -\overline{F''(-\bar{z})} = F''(z) &= \frac{1}{\tanh z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-2nz} \\ \forall 0 < y < \pi \quad \Im(F'(iy)) = 0 : \quad \overline{F'(-\bar{z})} = F'(z) &= z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2nz}}{n} - i \frac{\pi}{2} \\ &= z - \zeta_1(2z) - i \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (227)$$

$$\begin{aligned} \forall 0 < y < \pi \quad \Re(F(iy)) = 0 : \quad -\overline{F(-\bar{z})} = F(z) &= \frac{z^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2nz} - 1}{2n^2} - i \frac{\pi}{2} z \\ &= \frac{1}{2} \left(z^2 + \zeta_2(2z) - \frac{\pi^2}{6} - i \pi z \right) \end{aligned} \quad (228)$$

Um die Integrationskonstanten richtig zu wählen, haben wir folgende Reihen benutzt:

$$0 < y < \pi : \quad \Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i2ny}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2ny)}{n} = y - \frac{\pi}{2} \quad ([\text{Forster}][p.148]) \quad (229)$$

$$\Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i2ny} - 1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2ny) - 1}{2n^2} = \frac{y^2}{2} - \frac{\pi}{2} y \quad ([\text{Forster}][p.172]) \quad (230)$$

Zwei Eigenschaften der Realteile von F bzw. F' benützen wir,

$$\Re F'(-x) = \Re F'(x) \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 0} \Re F(x) = 0 \quad , \quad (231)$$

um die nächste partielle Integration vereinfachen zu können:

$$\begin{aligned} \hat{f}(u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2d} \int_{|r-u| \geq \varepsilon} \hat{\mathcal{N}}(r) \cdot \Re F'' \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) dr \quad \left(\Re F''(x) = \frac{1}{\tanh x}, \quad x \neq 0 \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\underbrace{\left[\frac{1}{\pi} \hat{\mathcal{N}}(r) \cdot \Re F' \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) \right]_{u+\varepsilon}^{u-\varepsilon}}_{\rightarrow 0, \text{ da } \Re F'(-x) = \Re F'(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{|r-u| \geq \varepsilon} \hat{\mathcal{N}}(r) \cdot \Re F' \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) dr \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_0 &:= \max\{i | u_i \leq u\} & u \vee v &:= \min\{u, v\} & u \wedge v &:= \max\{u, v\} \\
&= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left(\sum_{i \leq i_0} \int_{u_i}^{u_{i+1} \vee (u-\varepsilon)} \hat{\mathcal{N}}'(r) \cdot \Re F' \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) dr + \sum_{i \geq i_0} \int_{u_i \wedge (u+\varepsilon)}^{u_{i+1}} \hat{\mathcal{N}}'(r) \cdot \Re F' \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) dr \right) \\
&= -\frac{2d}{\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{i \leq i_0} \beta_i \left[\Re F \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) \right]_{u_i}^{u_{i+1} \vee (u-\varepsilon)} + \sum_{i \geq i_0} \beta_i \left[\Re F \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) \right]_{u_i \wedge (u+\varepsilon)}^{u_{i+1}} \right) \\
&= -\frac{2d}{\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \left[F \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) \right]_{u_i}^{u_{i+1}} - \beta_{i_0} \underbrace{\left[F \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) \right]_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon}}_{\rightarrow 0, \text{ da } \lim_{x \rightarrow 0} \Re F(x) = 0} \right) \\
&= -\frac{2d}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \left[F \left(\frac{\pi(r-u)}{2d} \right) \right]_{r=u_i}^{u_{i+1}} \tag{232}
\end{aligned}$$

4.2.3 Berechnung der Isobaren und Stromlinien

Die wesentliche Arbeit zur Berechnung der Isobaren und Stromlinien ist bereits getan.

Isobare zum Druck $\rho g p_0$ und Stromlinien zu q_0 sind im Parallelstreifen $\hat{A} = \mathbb{R} + i] - d, 0[$ implizit durch die Gleichungen

$$\boxed{
\begin{aligned}
\hat{p}^h(u_p(\lambda), w_p(\lambda)) &= p_0 \\
(\hat{x} + \hat{q}^h)(u_q(\lambda), w_q(\lambda)) &= q_0
\end{aligned}
} \tag{233}$$

festgelegt. Die Gleichung für Stromlinien hatten wir bereits im Kapitel 3.4.3 gezeigt. Wenn keine Quellen vorliegen, dann beginnen und enden die Stromlinien an der Oberfläche. Ist z.B. $(u_0, 0) \in \partial \hat{A}$ bzw. bei $(x_0, f(x_0)) \in \partial A$ ein Stromlinien-Endpunkt, so liefert die Gleichung (202) den Wert:

$$q_0 = \hat{\mathcal{N}}(u_0) = \mathcal{N}(x_0) \tag{234}$$

Im Anhang 6.3 ist ein Newtonverfahren beschrieben, wie die implizit definierten Kurven $\lambda \mapsto (u_p + i w_p)(\lambda) \in \hat{A}$ und $\lambda \mapsto (u_q + i w_q)(\lambda) \in \hat{A}$ aus den letzten Gleichungen als Polygonzug approximiert werden können. Neben den Funktionen \hat{p}^h und $\hat{x} + \hat{q}^h$ werden dazu auch noch die ersten partiellen Ableitungen \hat{p}_u^h , \hat{p}_w^h , $(\hat{x} + \hat{q}^h)_u$, $(\hat{x} + \hat{q}^h)_w$ benötigt.

Mit der konformen Transformation $\hat{x} + i\hat{z}: \hat{A} \rightarrow A$ bekommen wir sofort die zugehörigen Isobaren und Stromlinien im Aquifer A . Dabei werden nur die Stützstellen der Polygonzüge von \hat{A} nach A abgebildet. Es ist zu beachten, dass die konforme Abbildung die Polygonzüge prinzipiell verbiegt. Daher sollten benachbarte Stützstellen in \hat{A} einen maximalen Abstand nicht überschreiten.

Die Aufgabe besteht also nur darin, die Funktionen $\hat{q}^h + i\hat{p}^h$ und $\hat{x} + i\hat{z}$ zu berechnen. Aus den Formeln (198) und (199) kennen wir die Funktionen $\hat{q}^h + i\hat{p}^h$ und $\hat{x} + i\hat{z}$ in Abhängigkeit von $\hat{\mathcal{N}}$ und diese Funktion ist beim stationären Problem als Polygonzug (218) beliebig

genau bekannt. Es wird wieder partiell integriert, wobei die Stammfunktionen L, F auch schon berechnet wurden.

$$\begin{aligned} (\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u+iw) &= -(u+iw) + \frac{1}{\pi d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{\frac{\pi(s-(u+iw))}{2d}}{\tanh \frac{\pi(s-(u+iw))}{2d}} ds \\ &= -(u+iw) - \frac{4d}{\pi^3} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \cdot \left[L\left(\frac{\pi(s-(u+iw))}{2d}\right) \right]_{s=u_i}^{u_{i+1}} \end{aligned} \quad (235)$$

$$\begin{aligned} (\hat{p}^h - i\hat{q}^h)_w(u+iw) &= (\hat{q}^h + i\hat{p}^h)_u(u+iw) \\ &= -1 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \cdot \left[L'\left(\frac{\pi(s-(u+iw))}{2d}\right) \right]_{s=u_i}^{u_{i+1}} \end{aligned} \quad (236)$$

$$\begin{aligned} (\hat{x} + \hat{q}^h + i(\hat{z} + \hat{p}^h))(u+iw) &= \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{i}{\tanh \frac{\pi(s-(u+iw))}{2d}} ds \\ &= \frac{-2id}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \cdot \left[F\left(\frac{\pi(s-(u+iw))}{2d}\right) \right]_{s=u_i}^{u_{i+1}} \end{aligned} \quad (237)$$

$$\begin{aligned} (\hat{z} + \hat{p}^h - i(\hat{x} + \hat{q}^h))_w(u+iw) &= (\hat{x} + \hat{q}^h + i(\hat{z} + \hat{p}^h))_u(u+iw) \\ &= \frac{i}{\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \cdot \left[F'\left(\frac{\pi(s-(u+iw))}{2d}\right) \right]_{s=u_i}^{u_{i+1}} \end{aligned} \quad (238)$$

Wir spalten noch die Funktionen L, L', F und F' in Real- und Imaginärteil auf ($z = x + iy$):

$$\begin{aligned} \overline{L(-\bar{z})} = L(z) \quad x \geq 0 & \quad \frac{1}{2} \left(x \left(\frac{x^2}{3} - y^2 + \Re\zeta_2(2z) + \frac{\pi^2}{6} \right) - y \Im\zeta_2(2z) + \Re\zeta_3(2z) \right) \\ & \quad + \frac{i}{2} \left(y \left(x^2 - \frac{y^2}{3} + \Re\zeta_2(2z) + \frac{\pi^2}{6} \right) + x \Im\zeta_2(2z) + \Im\zeta_3(2z) \right) \\ -\overline{L'(-\bar{z})} = L'(z) \quad x \geq 0 & \quad \frac{x^2 - y^2 - \Re\zeta_2(2z) + \pi^2/6}{2} - x \Re\zeta_1(2z) + y \Im\zeta_1(2z) \\ & \quad + i \left(x(y - \Im\zeta_1(2z)) - y \Re\zeta_1(2z) - \frac{\Im\zeta_2(2z)}{2} \right) \\ -\overline{F(-\bar{z})} = F(z) \quad x \geq 0 & \quad \frac{1}{2} \left(x^2 - y^2 + \Re\zeta_2(2z) - \frac{\pi^2}{6} + \pi y \right) + \frac{i}{2} \left(2xy + \Im\zeta_2(2z) - \pi x \right) \quad (0 \leq y \leq \pi) \\ \overline{F'(-\bar{z})} = F'(z) \quad x \geq 0 & \quad \left(x - \Re\zeta_1(2z) \right) + i \left(y - \Im\zeta_1(2z) - \frac{\pi}{2} \right) \quad (0 \leq y \leq \pi) \end{aligned}$$

4.3 Stationäres Problem mit Quellen beim endlich tiefen 2D-Aquifer

Ohne Quellen konnten wir im letzten Abschnitt 4.2 aus der oberflächlichen Bewässerung N die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ berechnen. Dieses Verfahren funktioniert so auch, wenn wir zu einer gegebenen Quellstromdichte $Q \in \mathcal{L}^1(A)$ die Funktion $\hat{\mathcal{Q}}$ kennen.

Spezialisiert man auf Punktquellen, dann ergibt sich aus den Positionen $(u_j, w_j) \in \hat{A}$ der Quellen/Senken bereits die Funktion $\hat{\mathcal{Q}}$. Das Problem, dass man die Quellpositionen (x_j, z_j) im realen Aquifer A festlegen will, aber zur Rechnung die zugehörigen Positionen $(u_j, w_j) = \tilde{\mathbf{F}}(x_j, z_j)$ im Parallelstreifen benötigt, bearbeiten wir genau, wie in 3.5.2 beschrieben.

Mit der Kenntnis von $\hat{\mathcal{N}}$ können die Formeln für $\bar{x}, \hat{f}, \hat{p}^h + i\hat{q}^h$ sowie $\hat{x} + i\hat{z}$ aus dem letzten Kapitel direkt übernehmen werden.

Auch die Strategien zur Berechnung der Druck- und Stromlinien sind völlig identisch, wie sie in den Abschnitten 3.4.3, 3.5.3 und 3.5.4 erläutert wurden.

4.3.1 Berechnung von $\hat{\mathcal{N}}$

Gegeben sei die Quellstromdichte Q als:

$$Q(x, z) = \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \delta^2(x - x_j, z - z_j) \quad (239)$$

An die oberflächliche Bewässerung N stellen wir die Forderungen:

$$N \in \mathcal{C}_0^{0,\alpha} \quad \& \quad N < K \quad \& \quad \int_{-\infty}^{\infty} N(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^m Q_j = 0$$

Da wir den sich einstellenden stationären Grundwasserspiegel f und folglich den Aquifer A aus den Daten N und Q erst berechnen wollen, ist die Vorgabe der Quellpositionen $x_j + iz_j$ problematisch, denn sie müssen innerhalb des Aquifers A liegen. Senken schneiden den Grundwasserspiegel nach unten ein, sodass deren Position mitunter sehr nahe an der Oberfläche liegt. Durch Verringern der z -Koordinate der Quellposition kann dieses Problem beseitigt werden. Eine Alternative ist das Erhöhen von Q_j , d.h. die Senke entfernt weniger Wasser. Die Rückkopplung der Quellstärke Q_j auf den sich in der Umgebung von $x_j + iz_j$ einstellenden Druck ist prinzipiell möglich. Es fehlt jedoch eine physikalisch einwandfreie Interpretation, welchen Druck man einer Punktquelle zuordnen soll.

Wie bisher benutzen wir die Abkürzung:

$$\mathcal{N}(x) := \int_{-\infty}^x \frac{N(\xi)}{K} d\xi$$

Die iterative Berechnung der Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ verläuft nun wie folgt:

1. Die ersten Quellpositionen und Quellstärken seien

$$u_j^{(0)} + iw_j^{(0)} = x_j + iz_j, \quad Q_j^{(0)} := 0 \quad (j=1, \dots, m),$$

und als erste Näherung für die gesuchte Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ setzen wir

$$\hat{\mathcal{N}}^{(0)} = \mathcal{N}.$$

2. Mit dem Polygonzug $\hat{\mathcal{N}}^{(n)}$ kennt man eine Approximation der konformen Abbildung:

$$\left(\hat{x}^{(n)} + i\hat{z}^{(n)}\right)(u + iw) := u + iw + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}^{(n)}(s)}{\tanh(\sigma - i\omega)} d\sigma - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma - i\omega}{\tanh(\sigma - i\omega)} \hat{\mathcal{N}}^{(n)}(s) d\sigma$$

Die Integrale berechne man wie in 4.2.3 beschrieben.

3. Mit $\hat{x}^{(n)} + i\hat{z}^{(n)}$ ist eine neue Näherung der Quellpositionen $u_j + w_j$ bekannt (vgl. 3.5.2):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_j^{(n+1)} \\ w_j^{(n+1)} \end{pmatrix} &:= \mathbf{T}_j^{(n)}(u_j^{(n)}, w_j^{(n)}) \\ \mathbf{T}_j^{(n)}(u, w) &:= \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{x}_u^{(n)}(u, w) & -\hat{z}_u^{(n)}(u, w) \\ \hat{z}_u^{(n)}(u, w) & \hat{x}_u^{(n)}(u, w) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{x}^{(n)}(u, w) - x_j \\ \hat{z}^{(n)}(u, w) - z_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn $-d < w_j^{(n+1)} < 0$ gilt für alle $j=1, \dots, n$, dann iteriere man weiter.

4. Aus einem gemitteltem Druck um $u_j^{(n+1)} + iw_j^{(n+1)}$ könnte hier die Rückkopplung zur Quellstärke $Q_j^{(n+1)}$ erfolgen. Wir setzen aber immer $Q_j^{(n+1)} := Q_j$.

Jetzt ist eine neue Näherung der Funktion $\hat{\mathcal{Q}}$ durch (194) und (239) gegeben:

$$\hat{\mathcal{Q}}^{(n+1)}(u) := \frac{1}{\pi K} \sum_{j=1}^m Q_j^{(n+1)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sinh \frac{\pi(u - u_j^{(n+1)})}{2d}}{\sin \frac{\pi w_j^{(n+1)}}{2d}} \right)$$

5. Mit dem Polygonzug $\hat{\mathcal{N}}^{(n)}$ ist eine Näherung für \bar{x} aus (196) bekannt:

$$\bar{x}^{(n)}(u) := u + \hat{\mathcal{N}}^{(n)}(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\tanh \sigma} \hat{\mathcal{N}}^{(n)}(s) d\sigma$$

Das Integral kann wie in 4.2.1 berechnet werden.

6. Aus (195) bekommen wir die Funktion

$$u \mapsto \mathcal{N}\left(\bar{x}^{(n)}(u)\right) + \hat{\mathcal{Q}}^{(n+1)}(u),$$

die als Polygonzug $\hat{\mathcal{N}}^{(n+1)}$ approximiert wird.

7. Wir begnügen uns mit der Näherung $\hat{\mathcal{N}}^{(n+1)}$, falls

$$\|\hat{\mathcal{N}}^{(n+1)} - \hat{\mathcal{N}}^{(n)}\|_{\infty} < \varepsilon$$

gilt. Andernfalls setze man $n := n + 1$ und fahre bei 2. fort.

Dieser Algorithmus beschreibt nur rudimentär den Ablauf der Iteration. Um die Konvergenz zu verbessern, lassen wir u.a. die vorgegebenen Quellpositionen $x_j + iz_j$ zu Beginn noch geeignet variieren. Man kann auch an mehreren Stellen Tests einbauen, um die Konvergenz zu kontrollieren oder Divergenzgründe zu analysieren, wie z.B. das Leerlaufen des Aquifers.

4.3.2 Berechnung von Isobaren und Stromlinien

Wir setzen voraus, dass die Funktion $\hat{\mathcal{N}}$ als Polygonzug hinreichend genau approximiert wurde und dass die Quellpositionen $u_j + iw_j \in \hat{A}$ und Quellstärken Q_j ($j = 1, \dots, m$) ebenfalls gut angenähert sind.

Die Berechnung der Druck- und Stromlinien erfolgt wie in 3.4.3, 3.5.3 und 3.5.4. Sie werden zuerst im Parallestreifen \hat{A} aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 < p_0 &= \hat{p}(u, w) = \hat{p}^h(u, w) + \hat{p}^i(u, w) \\ q_0 + c &= \hat{x}(u, w) + \hat{q}(u, w) = \hat{x}(u, w) + \hat{q}^h(u, w) + \hat{q}^i(u, w) \end{aligned} \quad (240)$$

mit dem Newtonverfahren aus 6.3 bestimmt und dann vermöge $\hat{\mathbf{F}} = \hat{x} + i\hat{z}$ in den Aquifer A abgebildet. Die Funktionen $\hat{q}^h + \hat{p}^h$ und $\hat{x} + \hat{z}^h$ sind durch (198) und (199) gegeben und können wie in (4.2.3) ermittelt werden.

Der von Quellen herrührende Druckanteil \hat{p}^i ist durch (50), (50) und (239) festgelegt:

$$\hat{p}^i(u + iw) = \frac{-1}{4\pi K} \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \ln \left(\frac{\cosh \frac{\pi(u-u_j)}{2d} - \cos \frac{\pi(w-w_j)}{2d}}{\cosh \frac{\pi(u-u_j)}{2d} + \cos \frac{\pi(w-w_j)}{2d}} \cdot \frac{\cosh \frac{\pi(u-u_j)}{2d} + \cos \frac{\pi(w+w_j)}{2d}}{\cosh \frac{\pi(u-u_j)}{2d} - \cos \frac{\pi(w+w_j)}{2d}} \right) \quad (241)$$

für $u + iw \notin \{u_1 + iw_1, \dots, u_m + iw_m\}$

Das Strompotential \hat{q}^i entsteht aus (51-53) und (239):

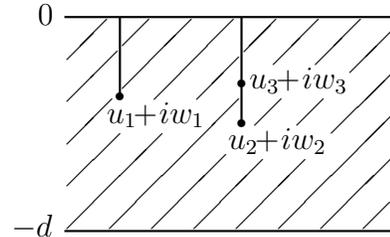
$$\hat{q}^i(u + iw) = \frac{1}{2\pi K} \sum_{j=1}^m Q_j \cdot \left(\arctan \frac{\sin \frac{\pi(w-w_j)}{2d}}{\sinh \frac{\pi(u-u_j)}{2d}} - \arctan \frac{\sin \frac{\pi(w+w_j)}{2d}}{\sinh \frac{\pi(u-u_j)}{2d}} \right) \quad (242)$$

für $w \notin \{u_1, \dots, u : m\}$

Die Funktion q^i lässt sich auf den einfach zusammenhängenden, mehrfach nach oben geschlitzten Parallestreifen

$$D(\hat{q}) := \mathbb{R} + i] - d, 0[\setminus \bigcup_{j=1}^m \{u_j + iw : w_j \leq w < 0\}$$

stetig fortsetzen.



Für $u_k \in \{u_1, \dots, u_m\}$ und $w \notin \{w_j : u_j = u_k\}$ ergibt sich:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{q}(u_k \pm \varepsilon, w) = -u_k + \sum_{\{j: u_j \neq u_k\}} \frac{Q_j}{2\pi K} \cdot \left(\arctan \frac{\sin \frac{\pi(w-w_j)}{2d}}{\sinh \frac{\pi(u_k-u_j)}{2d}} - \arctan \frac{\sin \frac{\pi(w+w_j)}{2d}}{\sinh \frac{\pi(u_k-u_j)}{2d}} \right) \pm \sum_{\{j: u_j = u_k \& w > w_j\}} \frac{Q_j}{2K} \quad (243)$$

Wie in 3.5.4 gilt:

$$\begin{aligned} \leftarrow + : u(\lambda) > u_k > u(\lambda \pm \delta) &\Rightarrow c(\lambda \pm \delta) = c(\lambda) + \frac{1}{K} \sum_{\{j: u_j = u_k \& w(\lambda) > w_j\}} Q_j \\ \rightarrow + : u(\lambda) < u_k < u(\lambda \pm \delta) &\Rightarrow c(\lambda \pm \delta) = c(\lambda) - \frac{1}{K} \sum_{\{j: u_j = u_k \& w(\lambda) > w_j\}} Q_j \end{aligned} \quad (244)$$

4.4 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit sind die Zusammenhänge zwischen Grundwasserspiegel, Druck, Strömung, oberflächlicher und innere Bewässerung diskutiert, deren Bestimmungsgleichungen aufgestellt und die Fragestellungen stationär, invers, instationär formuliert worden.

Für den in der Anwendung sehr wichtigen 2D-Aquifer haben wir dann die Bestimmungsgleichungen soweit umgeformt, dass Lösungen eines nichtlinearen Randwertproblems beliebig genau berechnet werden konnten. Im Spezialfall des unendlich tiefen 2D-Aquifers gelang es sogar eine grosse Klasse von exakten Lösungen explizit zu berechnen und einen Lösungsnachweis zu geben. Mathematisch interessant sind die bisher nicht diskutierten Korrespondenzen, die bei den Grundwassergleichungen auftreten.

Als Weiterentwicklung des 2D-Problems wird die inverse und instationäre Situation wohl schnell realisiert werden können. Besonders wichtig erscheint uns auch eine Rückkopplung der Quellstromdichte mit dem lokal vorherrschenden Druck im Aquifer. Über linienförmig verteilte Quellen/Senken lassen sich zudem weitere Randbedingungen simulieren, wie sie z.B. an Flüssen auftreten. Einen allgemeineren wasserundurchlässigen Grund kann man sicherlich berücksichtigen.

Weitere Entwicklungen könnten die Berechnung von Fließzeiten und der Einbau der (Schadstoff-) Diffusion sein. Eine zu große Herausforderung ist es wohl, die Theorie auf nicht gesättigte Aquifere zu erweitern.

Wir haben auch nicht die Hoffnung aufgegeben, dreidimensionale Probleme zu lösen. Allerdings stehen dann nicht mehr die Mittel der Funktionentheorie zur Verfügung. Für rotationssymmetrische Probleme (Brunnenformeln) müssen wohl auch ganz andere Techniken entwickelt werden.

5 Anhang zu Standardrechnungen

In diesem Anhang notieren wir Standardrechnungen, die im Hauptteil der Arbeit unangebracht sind, die wir aber dennoch nicht unterschlagen wollen.

5.1 Eine konforme Transformation

Wir demonstrieren, wie die Abbildung $\hat{\mathbf{F}}$ aus (2.1) konstruiert wurde.

$\hat{\mathbf{F}} : \hat{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{A}$ soll eine biholomorphe Funktion zwischen dem Parallelstreifen $\hat{A} = \{u+iw \mid u \in \mathbb{R} \ \& \ -d < w < 0\}$ und dem Aquifer $A = \{x+iz \mid x \in \mathbb{R} \ \& \ -d < z < f(x)\}$ sein, die auch noch stetig differenzierbar auf den Rand von \hat{A} fortsetzbar sei, insbesondere auf den oberen Rand von \hat{A} : $\lim_{w \searrow 0} \hat{\mathbf{F}} =: \bar{x} + i\bar{z}$.

Neben noch festzulegenden Bedingungen sollte die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daher einmal stetig-differenzierbar sein und natürlich über dem Grund liegen:

$$\boxed{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \& \quad f > -d}$$

Als holomorphe Funktion gelten für $\hat{\mathbf{F}} = \hat{x} + i\hat{z}$ die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*:

$$\hat{x}_u = \hat{z}_w \quad \& \quad \hat{x}_w = -\hat{z}_u \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{z}_{uu} + \hat{z}_{ww} = 0}$$

Zu dieser Laplace-Gleichung für \hat{z} wählen wir folgende Randbedingungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{z}(u, 0) &= f(\hat{x}(u, 0)) =: \hat{f}(u) & (u \in \mathbb{R}) \\ \hat{z}(u, -d) &= -d & (u \in \mathbb{R}) \\ \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{z}_w(u, w) &= 1 & (-d < w < 0) \end{aligned}} \quad (245)$$

Der **Ansatz** $\hat{z}(u, w) - w = U(u) \cdot W(w)$ in $\hat{z}_{uu} + \hat{z}_{ww} = 0$ eingesetzt liefert

$$\begin{aligned} U'' + c^2 \cdot U &= 0 \\ W'' - c^2 \cdot W &= 0, \quad W(-d) = 0 \quad \left(\text{wegen } 0 = \hat{z}(\cdot, -d) + d = U \cdot W(-d) \right) \end{aligned}$$

für eine Zahl c . Die Lösung ist:

$$U(u) \cdot W(w) = \left(a_1 \cos(cu) + a_2 \sin(cu) \right) \cdot \sinh(c(w+d))$$

Eine allgemeinere Lösung des Randwertproblems ergibt sich aus der Linearkombination für verschiedene $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$$\hat{z}(u, w) - w = \int_0^\infty \left(a_1(c) \sin(cu) + a_2(c) \cos(cu) \right) \cdot \sinh(c(w+d)) \, dc,$$

wobei noch die Randbedingung $\hat{f} = \hat{z}|_{w=0}$ zu erfüllen ist:

$$\hat{f}(u) = \hat{z}(u, 0) = \int_0^\infty \left(a_1(c) \sinh(cd) \cdot \sin(cu) + a_2(c) \sinh(cd) \cdot \cos(cu) \right) \, dc$$

Falls $\hat{f} \in \mathcal{L}^2$ gilt, können diese Fourier-Koeffizienten a_1, a_2 berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_1(c) \sinh(cd) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \sin(cr) dr \\ a_2(c) \sinh(cd) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \cos(cr) dr \quad (\text{vgl. Kapitel 8.4}) \end{aligned}$$

Setzen wir diese Ergebnisse in die Formel für \hat{z} ein:

$$\begin{aligned} \hat{z}(u, w) - w &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \underbrace{(\sin(cr) \sin(cu) + \cos(cr) \cos(cu))}_{=\cos(cr-cu)} dr \cdot \frac{\sinh(c(w+d))}{\sinh(cd)} dc \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \int_0^{\infty} \frac{\sinh(c(w+d))}{\sinh(cd)} \cdot \cos(c(r-u)) dc dr \\ &= \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \frac{\sin \frac{\pi(w+d)}{d}}{\cosh \frac{\pi(r-u)}{d} + \cos \frac{\pi(w+d)}{d}} dr \quad (|w+d| < d, \text{ Integral (308)}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \frac{-\sin \frac{\pi w}{d}}{\cosh \frac{\pi(r-u)}{d} - \cos \frac{\pi w}{d}} \frac{\pi dr}{d} \end{aligned}$$

Die letzte Formel für \hat{z} ist auch wohldefiniert, wenn \hat{f} im Unendlichen nicht zu schnell wächst, z.B. wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ existiert. Im letzten Fall wählen wir gleich die Nulllage geeignet, sodass gilt:

$$\boxed{h := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} \quad (246)$$

Ist ferner $\bar{x}' > 0$ von Null weg beschränkt, dann überträgt sich diese Eigenschaft von f auch auf \hat{f} .

$$(\exists \varepsilon > 0 \quad \bar{x}' \geq \varepsilon) \Rightarrow \boxed{\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(x) = \pm h} \quad (247)$$

Die Funktion \hat{z} ist harmonisch und erfüllt die Randbedingungen $\hat{z}|_{w=-d} = -d$ und $\hat{z}|_{w=0} = \hat{f}$. Zum Beweis des Letzteren betrachtet man den Kern des Integrals, der für $w \xrightarrow{\leq} 0$ eine Dirac-Folge darstellt:

$$\boxed{\begin{aligned} K_\omega(\rho) &:= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-\sin \omega}{\cosh \rho - \cos \omega} \geq 0, \quad K_\omega \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{L}^1 \quad \text{für } -\pi \leq \omega < 0 \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \int_{|\rho| > \varepsilon} K_\omega(\rho) d\rho &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} K_\omega(\rho) d\rho &= \frac{\omega}{\pi} + 1 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1 \end{aligned}} \quad (248) \quad (\text{Integral (304)})$$

Mit den Abkürzungen aus (26), $\rho = \frac{\pi(r-u)}{2d}$ und $\omega = \frac{\pi w}{2d}$, schreibt sich \hat{z} als:

$$\begin{aligned}\hat{z}(u, w) &= w - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \frac{\sin(2\omega)}{\cosh(2\rho) - \cos(2\omega)} d\rho \\ &= w - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho \\ &= w - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \cdot \arctan \frac{\tanh \rho}{\tan \omega} d\rho + \underbrace{\left[\hat{f}(r) \cdot \arctan \frac{\tanh \rho}{\tan \omega} \right]_{r=-\infty}^{\infty}}_{=0, \text{ falls } \lim_{u \rightarrow \pm\infty} = \pm h}\end{aligned}$$

Nun kann \hat{x} über die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen berechnet werden.

$$\begin{aligned}\hat{x}_u(u, w) = \hat{z}_w(u, w) &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \frac{\sinh \rho \cosh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho \\ \hat{z}_u(u, w) = -\hat{x}_w(u, w) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}'(r) \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho\end{aligned}\tag{249}$$

Eine Alternative liefert die Zerlegung (294) in Real- und Imaginärteil:

$$\frac{1}{\tanh(\sigma - i\omega)} = \frac{\sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} + i \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega}$$

Der Realteil \hat{x} ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Damit die Integrale definiert sind, haben wir die halbe Grundwasserstufe h unter dem Integral abgezogen:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}}(u+iw) &= (\hat{x} + i\hat{z})(u+iw) \\ &= u+iw - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \frac{1}{\tanh(\rho - i\omega)} - h \right) d\rho + \underbrace{\text{const.}}_{\in \mathbb{R}} \\ \hat{x}(u, w) &= u - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \frac{\sinh \rho \cosh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} - h \right) d\rho + \underbrace{\text{const.}}_{\in \mathbb{R}} \\ \hat{z}(u, w) &= w - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho\end{aligned}\tag{250}$$

5.2 Lösung der Poisson-Gleichung

Zum Zeitpunkt t sind die Randwertprobleme

$$\begin{array}{ll}
 \hat{p}_{uu}^h + \hat{p}_{ww}^h & = 0 & \hat{p}_{uu}^i + \hat{p}_{ww}^i & = -(\hat{x}_u^2 + \hat{x}_w^2) \cdot \frac{\dot{Q}}{K} \\
 \hat{p}^h|_{w=0} & = 0 & \hat{p}^i|_{w=0} & = 0 \\
 \hat{p}_w^h|_{w=-d} & = -1 - \frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \frac{1}{\cosh^2 \rho} d\rho & \hat{p}_w^i|_{w=-d} & = 0 \\
 \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{p}_w^h & = -1 & \lim_{u \rightarrow \pm\infty} \hat{p}_w^i & = 0
 \end{array} \tag{251}$$

zu lösen. Für das homogene Druckpotential fordern wir dabei $\hat{p}^h \in \mathcal{C}^2(A) \cap \mathcal{C}^1(\bar{A})$. Die Regularität von \hat{p}^i lassen wir noch offen. Insbesondere wollen wir Punktquellen zulassen, sodass die Poisson-Gleichung für \hat{p}^i dann distributionell zu verstehen ist.

5.2.1 Lösung des homogenen Problems

Wir bearbeiten das homogene Problem mit dem **Ansatz** $\hat{p}^h(u, w) + w = U(u) \cdot W(w)$. Die Funktionen U, W genügen mit einer Konstanten c den Differential-Gleichungen

$$\begin{aligned}
 U'' + c^2 \cdot U &= 0 \\
 W'' - c^2 \cdot W &= 0, \quad W(0) = 0 \quad (\text{wegen } 0 = \hat{p}(\cdot, 0) - 0 = U \cdot W(0)) .
 \end{aligned}$$

Für ein festes c ergibt sich:

$$U(u) \cdot W(w) = (a_1 \cos(cu) + a_2 \sin(cu)) \cdot \sinh(cw)$$

Wiederum ist die allgemeine Lösung eine unendliche Linearkombination dieser Lösung:

$$\hat{p}^h(u, w) + w = \int_0^\infty (a_1(c) \cos(cu) + a_2(c) \sin(cu)) \cdot \sinh(cw) dc$$

Daraus leiten wir eine weitere Darstellung für $\hat{p}_w^h(u, -d)$ ab:

$$\hat{p}_w^h(u, -d) + 1 = \int_0^\infty (a_1(c) c \cosh(cd) \cdot \cos(cu) + a_2(c) c \cosh(cd) \cdot \sin(cu)) dc$$

Wie schon bei der Konstruktion der konformen Abbildung können wir auch diese Integration über die Fourier-Transformation (vgl. 8.3) umkehren.

$$\begin{aligned}
 a_1(c) c \cosh(cd) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{p}_w^h(s, -d) + 1) \cdot \cos(cs) ds \\
 a_2(c) c \cosh(cd) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{p}_w^h(s, -d) + 1) \cdot \sin(cs) ds
 \end{aligned}$$

Wir setzen diese Relationen für a_1, a_2 ein und benutzen wieder ein Additionstheorem. Danach wird die Integration vertauscht, sodass eine Integration ausgeführt werden kann:

$$\hat{p}^h(u, w) + w = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{p}_w^h(s, -d) + 1) \underbrace{(\cos(cs) \cos(cu) + \sin(cs) \sin(cu))}_{=\cos(cs-cu)} \frac{\sinh(cw)}{c \cosh(cd)} ds dc$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{p}_w^h(s, -d) + 1) \int_0^{\infty} \frac{\sinh(cw)}{c \cosh(cd)} \cos(c(s-u)) dc ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{p}_w^h(s, -d) + 1) \ln \frac{\cosh \frac{\pi(s-u)}{2d} + \sin \frac{\pi w}{2d}}{\cosh \frac{\pi(s-u)}{2d} - \sin \frac{\pi w}{2d}} ds \quad (|w| < d, \text{ vgl. (309)}) \\
&= \frac{d}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{p}_w^h(s, -d) + 1) \ln \frac{\cosh \sigma + \sin \omega}{\cosh \sigma - \sin \omega} d\sigma \tag{252}
\end{aligned}$$

Bei der vorletzten Umformung wurde die Gleichung (309) verwendet und bei der letzten die Abkürzungen aus (26).

Mit der letzten Formel (252) kann man - wenn auch etwas aufwendig - die wesentlichen Ergebnisse aus dem Kapitel 2.3 ableiten. Wir formen weiter um und gelangen zu einer erstaunlich einfachen Darstellung von \hat{p}^h .

Dazu wird $p_w^h(\cdot, -d) + 1$ vermöge der unteren Randbedingung aus (251) ersetzt, die Integration vertauscht und partiell integriert.

$$\begin{aligned}
\hat{p}^h(u, w) + w &= \frac{-1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh^2(\sigma - \rho)} \cdot \ln \left(\frac{\cosh \sigma + \sin \omega}{\cosh \sigma - \sin \omega} \right) d\sigma d\rho \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \int_{-\infty}^{\infty} \tanh(\sigma - \rho) \cdot \frac{-2 \sin \omega \sinh \sigma}{\cosh^2 \sigma - \sin^2 \omega} d\sigma d\rho \\
&= \frac{\sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh \rho - \tanh \sigma}{1 - \tanh \rho \tanh \sigma} \cdot \frac{\sinh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \cos^2 \omega} d\sigma d\rho
\end{aligned}$$

Der Integrand ist rational in den Hyperbel-Funktionen von σ . In solchen Situationen wird vermöge $t := \tanh \frac{\sigma}{2}$ substituiert:

$$\int R(\sinh \sigma, \cosh \sigma, \tanh \sigma, \coth \sigma) d\sigma = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1+t^2}{2t}\right) \frac{2 dt}{1-t^2}$$

Diese Methode wenden wir nun an und beseitigen durch Erweitern die Nenner $1 \pm t^2$:

$$\hat{p}^h(u, w) + w = \frac{2 \sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \int_{-1}^1 \frac{(1+t^2) \sinh \rho - 2t \cosh \rho}{(1+t^2) \cosh \rho - 2t \sinh \rho} \cdot \frac{2t}{4t^2 + (1-t^2)^2 \cos^2 \omega} dt d\rho$$

Ein wohlüberlegter Ansatz vereinfacht eine erste Partialbruch-Zerlegung:

$$\hat{p}^h(u, w) + w = \frac{2 \sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \int_{-1}^1 \left(\frac{A \cosh \rho}{(1+t^2) \cosh \rho - 2t \sinh \rho} + \frac{-A(1+t^2) \cos^2 \omega - 2Bt}{4t^2 \sin^2 \omega + (1+t^2)^2 \cos^2 \omega} \right) dt d\rho$$

Das durch Koeffizientenvergleich entstehende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
2t(1+t^2) &: A \sinh \rho \cos^2 \omega - B \cosh \rho = \sinh \rho \\
4t^2 &: A \cosh \rho \sin^2 \omega + B \sinh \rho = -\cosh \rho
\end{aligned}$$

ist für $\cos^2\omega \neq 1$ eindeutig lösbar. Wir berechnen mit der Cramerschen Regel den Koeffizienten A . Wegen der Symmetrie liefert die Integration über den B -Term nichts.

$$A = \frac{\sinh \rho^2 - (-\cosh \rho)^2}{\sinh \rho \cos^2\omega \cdot \sinh \rho + \cosh \rho \sin^2\omega \cdot \cosh \rho} = \frac{-1}{\cosh^2\rho - \cos^2\omega} = \frac{-1}{\sinh^2\rho + \sin^2\omega}$$

Die verbleibenden zwei Integrale lassen sich elementar berechnen, wenn vermöge $t = \tanh \frac{\sigma}{2}$ zurück substituiert wird.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2)\cosh \rho - 2t \sinh \rho} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh(\sigma - \rho)} d\sigma = \frac{\pi}{2} \quad (253)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+t^2) \cos^2\omega}{4t^2 + (1-t^2)^2 \cos^2\omega} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \sigma \cos^2\omega}{\sinh^2\sigma + \cos^2\omega} d\sigma = \frac{\pi}{2} |\cos \omega| \quad (254)$$

Damit ergibt sich noch ein sehr einfaches Ergebnis:

$$\begin{aligned} \hat{p}^h(u, w) + w &= \frac{2 \sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \cdot \frac{-1}{\cosh^2\rho - \cos^2\omega} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cosh \rho - \frac{\pi}{2} \cos \omega \right) d\rho \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \cdot \frac{-\sin \omega}{\cosh \rho + \cos \omega} d\rho \quad \left(-\frac{\pi}{2} < w < 0 \right) \end{aligned} \quad (255)$$

Schließlich kann man \hat{p}^h als Imaginärteil einer analytischen Funktion darstellen. Dazu wird die Zerlegung in Real- und Imaginärteil (293) benutzt:

$$\tanh \frac{\sigma - i\omega}{2} = \frac{\sinh \sigma - i \sin \omega}{\cosh \sigma + \cos \omega}$$

Der Realteil \hat{q}^h heiße *homogenes Strompotential*. Er ist bis auf eine Konstante eindeutig festgelegt. Die Gre h ist wieder die halbe Grundwasserstufe.

$$\begin{aligned} (\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u + iw) &= -(u + iw) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \tanh \frac{\rho - i\omega}{2} - h \right) d\rho + \underbrace{\text{const.}}_{\in \mathbb{R}} \\ \hat{q}^h(u + iw) &= -u + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \frac{\sinh \sigma}{\cosh \sigma + \cos \omega} - h \right) d\rho + \underbrace{\text{const.}}_{\in \mathbb{R}} \\ \hat{p}^h(u + iw) &= -w + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(r) \frac{-\sin \omega}{\cosh \sigma + \cos \omega} - h \right) d\rho \end{aligned} \quad (256)$$

5.2.2 Umrechnung der Formeln von \hat{f} auf $\hat{\mathcal{N}}$

Um das stationäre Problem beim endlich tiefen Aquifer zu bearbeiten, ist es sinnvoll, die Formeln für das Strom-Druckpotential und die konforme Abbildung $\hat{\mathbf{F}}$ umzuformen. Dabei wird deren Abhängigkeit von \hat{f} vermöge der Identität

$$\boxed{\hat{f}(u) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\tanh \sigma} d\sigma} \quad \left(\sigma = \frac{\pi(s-u)}{2d} \right) \quad (187)$$

auf die Abhängigkeit von $\hat{\mathcal{N}}$ zurückgeführt. Die Umformungen sind elementare Substitutionen und Partialbruchzerlegungen. Leider kann man diese Umformungen nur teilweise mit dem Computer-Algebra-System Maple nachvollziehen, sodass wir die Berechnung angeben.

Formeln für das homogene Strom- und Druckpotential

Im Druckpotential \hat{p}^h aus (256) wird die \hat{f} -Abhängigkeit durch die $\hat{\mathcal{N}}$ -Abhängigkeit ersetzt.

$$\begin{aligned} \hat{p}^h(u,w)+w &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \cdot \frac{\sin \omega}{\cosh \rho + \cos \omega} d\rho = \frac{-1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s) d\sigma}{\tanh(\sigma-\rho)} \cdot \frac{\sin \omega}{\cosh \rho + \cos \omega} d\rho \\ &= \frac{-\sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \tanh \sigma \tanh \rho}{\tanh \sigma - \tanh \rho} \cdot \frac{1}{\cosh \rho + \cos \omega} d\rho d\sigma \\ &\quad t := \tanh \frac{\rho}{2} \\ &= \frac{-\sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{1 - \tanh \sigma \frac{2t}{1+t^2}}{\tanh \sigma - \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1+t^2}{1-t^2} + \cos \omega} \frac{2dt}{1-t^2} d\sigma \\ &= \frac{-\sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{(1+t^2) \cosh \sigma - 2t \sinh \sigma}{(1+t^2) \sinh \sigma - 2t \cosh \sigma} \cdot \frac{1}{\frac{1+\cos \omega}{2} + \frac{1-\cos \omega}{2} t^2} dt d\sigma \\ &= \frac{-\sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} \mathcal{P} \int_{-1}^1 \left(\frac{At + B}{(1+t^2) \sinh \sigma - 2t \cosh \sigma} + \frac{Ct + D}{\cos^2 \frac{\omega}{2} + t^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}} \right) dt d\sigma \\ &\quad A = 2 \sinh \sigma \cos \omega \quad , \quad B = 2 \cosh \sigma (1 - \cos \omega) \\ &\quad C = -\cos \omega (1 - \cos \omega) \quad , \quad D = \sinh \sigma \cosh \sigma \end{aligned}$$

Der Term zu C liefert nichts. Die restlichen Terme lassen sich elementar integrieren:

$$\mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{At + B}{(1+t^2) \sinh \sigma - 2t \cosh \sigma} dt = \frac{-A \sigma}{\sinh \sigma} \quad (257)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{2} + t^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}} dt = \frac{2\omega}{\sin \omega} \quad (\omega \in (-\pi, \pi)) \quad (258)$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \hat{p}(u,w)+w &= \frac{-\sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} \left(\frac{-2\sigma}{\sinh \sigma} \sinh \sigma \cos \omega + \frac{2\omega}{\sin \omega} \sinh \sigma \cosh \sigma \right) d\sigma \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{\sigma \sin \omega \cos \omega - \omega \sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma \quad (259) \end{aligned}$$

Das homogene Druckpotential \hat{p}^h ist der Imaginärteil einer holomorphen Funktion. Das homogene Strompotential \hat{q}^h ist als zugehöriger Realteil bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Mit der Zerlegung (296)

$$\frac{\sigma - i\omega}{\tanh(\sigma - i\omega)} = \frac{\sigma \sinh \sigma \cosh \sigma - \omega \sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} + i \frac{\sigma \sin \omega \cos \omega - \omega \sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u + iw) &= -(u + iw) + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{\sigma - i\omega}{\tanh(\sigma - i\omega)} d\sigma + \underbrace{\text{const.}}_{\in \mathbb{R}} \\ \hat{q}^h(u, w) &= -u + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{\sigma \sinh \sigma \cosh \sigma - \omega \sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma + \underbrace{\text{const.}}_{\in \mathbb{R}} \\ \hat{p}^h(u, w) &= -w + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{\sigma \sin \omega \cos \omega - \omega \sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma \end{aligned} \quad (260)$$

Formeln für die konforme Transformation

Wir kennen nach dem letzten Abschnitt die Funktion $\hat{q}^h + i\hat{p}^h$.

Um die Abhängigkeit der konforme Transformation $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{z}}$ von \hat{f} auf $\hat{\mathcal{N}}$ zu übersetzen ist es günstig, erst den Imaginärteil $\hat{z} + \hat{p}^h$ zu bearbeiten. Der Realteil $\hat{x} + \hat{q}^h$ ergibt sich dann wieder aus der üblichen Zerlegung.

In (250) ist die Funktion \hat{z} und in (256) der Druck \hat{p}^h in Abhängigkeit von \hat{f} gegeben:

$$\begin{aligned} (\hat{z} + \hat{p}^h)(u, w) &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r) \left(\frac{\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} + \frac{\sin \omega}{\cosh \rho + \cos \omega} \cdot \frac{\cosh \rho - \cos \omega}{\cosh \rho - \cos \omega} \right) d\rho \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\tanh(\sigma - \rho)} d\sigma \frac{\cosh \rho \sin \omega}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho \\ &= \frac{-\sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \tanh \sigma \tanh \rho}{\tanh \sigma - \tanh \rho} \cdot \frac{\cosh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} d\rho d\sigma \\ &\quad t = \tanh \frac{\rho}{2} \\ &= \frac{-\sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{(1+t^2) \cosh \sigma - 2t \sinh \sigma}{(1+t^2) \sinh \sigma - 2t \cosh \sigma} \cdot \frac{2(1+t^2)}{4t^2 \cos^2 \omega + (1+t^2)^2 \sin^2 \omega} dt d\sigma \\ &= \frac{-2 \sin \omega}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\mathcal{N}}(s)}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} \mathcal{P} \int_{-1}^1 \left(\frac{\cosh \sigma}{(1+t^2) \sinh \sigma - 2t \cosh \sigma} + \frac{\sinh \sigma \cosh \sigma (1+t^2) + 2t \cos^2 \omega}{4t^2 \cos^2 \omega + (1+t^2)^2 \sin^2 \omega} \right) dt d\sigma \end{aligned}$$

Der dritte Summand im Integral ist ungerade, weshalb er nichts bei der Integration beiträgt. Auch die (Hauptwert-) Integration über den ersten Summanden liefert Null. Dazu wird vermöge $t = \tanh \frac{\rho}{2}$ zurück substituiert:

$$\mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2) \sinh \sigma - 2t \cosh \sigma} dt = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\sinh(\rho - \sigma)} \frac{d\rho}{2} = 0$$

Der zweite Summand wird ebenfalls durch die Rücktransformation berechnet:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+t^2) |\sin \omega|}{4t^2 + (1-t^2)^2 \sin^2 \omega} dt d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \rho |\sin \omega|}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \omega} \frac{d\rho}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (261)$$

Wegen $-d < w < 0$ gilt $|\sin \omega| = -\sin \omega$ und $\hat{z} + \hat{p}$ ergibt sich als:

$$(\hat{z} + \hat{p}^h)(u, w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \frac{\sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma \quad (262)$$

Über die Zerlegung

$$\frac{i}{\tanh(\sigma - i\omega)} = \frac{-\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} + i \frac{\sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega}$$

bekommen wir - bis auf eine additive Konstante - auch den Realteil $\hat{x} + \hat{q}^h$:

$$\begin{aligned} (\hat{x} + i\hat{z})(u + iw) &= -(\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u + iw) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \frac{i}{\tanh(\sigma - i\omega)} d\sigma \\ \hat{x}(u, w) &= -\hat{q}^h(u, w) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \frac{-\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma \\ \hat{z}(u, w) &= -\hat{p}^h(u, w) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \frac{\sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} d\sigma \end{aligned} \quad (263)$$

Formeln für den unendlich tiefen Aquifer

Wir wollen die \mathcal{N} -Formeln von $\hat{q}^h + i\hat{p}^h$ bzw. $\hat{x} + i\hat{z}$ für den unendlich tiefen Aquifer berechnen und bilden daher in (260) und (263) den Limes $d \rightarrow \infty$:

$$(\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u + iw) = -(u + iw) + \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \underbrace{\frac{\frac{\pi(s-u-iw)}{2d}}{\tanh \frac{\pi(s-u-iw)}{2d}}}_{\xrightarrow{d \rightarrow \infty} 1} \frac{\pi ds}{2d} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} -(u + iw) \quad (264)$$

$$\begin{aligned} (\hat{x} + i\hat{z})(u + iw) &= -(\hat{q}^h + i\hat{p}^h)(u + iw) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \underbrace{\frac{i \frac{\pi(s-u-iw)}{2d}}{\tanh \frac{\pi(s-u-iw)}{2d}}}_{\xrightarrow{d \rightarrow \infty} i} \frac{ds}{s-u-iw} \\ &\xrightarrow{d \rightarrow \infty} u + iw + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{N}}(s) \cdot \frac{-w + i(s-u)}{(s-u)^2 + w^2} ds \end{aligned} \quad (265)$$

Man kann diese Formeln für den unendlich tiefen Grund auch leichter berechnen, wenn zuerst in (28), (45) und (187) der Limes $d \rightarrow \infty$ gebildet wird und erst dann die \hat{f} -Abhängigkeit durch $\hat{\mathcal{N}}$ ersetzt wird.

6 Anhang zur Berechnung spezieller Funktionen

6.1 Polygon-Approximation

Gegeben sei eine stetige Funktion f mit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, welche durch einen Polygonzug (x_i, y_i) , $(x_1 < \dots < x_n)$ bis auf ein $\varepsilon > 0$ approximiert werden soll, wobei gewisse Stützstellen $\bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_{\bar{n}}$, $(0 \leq \bar{n})$ vorgegeben seien. Genauer soll gelten:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 && \& \quad |f(x_1)| < \varepsilon \\ y_n &= 0 && \& \quad |f(x_n)| < \varepsilon \\ y_i &= f(x_i) && \quad (i = 2, \dots, n-1) \\ \varepsilon &> \left| \frac{y_i + y_{i+1}}{2} - f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \right| && \quad (i = 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

Wir geben dazu eine Prozedur an:

Procedure PgnApprox

Input $f, \bar{x}, \bar{n}, \varepsilon$;

$z := \bar{x}_2 - \bar{x}_1$; (* links von \bar{x}_1 erforschen *)

Repeat

$z := 2 \cdot z$;

$l := \bar{x}_1 - z$;

until $|f(l)| < \varepsilon$;

$z := \bar{x}_{\bar{n}} - \bar{x}_{\bar{n}-1}$; (* rechts von $\bar{x}_{\bar{n}}$ erforschen *)

Repeat

$z := 2 \cdot z$;

$r := \bar{x}_{\bar{n}} + z$;

until $|f(r)| < \varepsilon$;

$m := 1$; $\xi_m := r$; $\eta_m := 0$; (* Stützstellen – Vorgabe *)

For $i := \bar{n}$ *downto* 1 *do*

$m := m + 1$; $\xi_m := \bar{x}_i$; $\eta_m := f(\xi_m)$;

$m := m + 1$; $\xi_m := l$; $\eta_m := 0$

$n := 1$; $x_n := \xi_m$; $y_n := \eta_m$; $m := m - 1$; (* erste Stützstelle übernehmen *)

Repeat

$\xi_{m+1} := \frac{x_n + \xi_m}{2}$; (* neue Stützstelle zwischen $x_n < \xi_m$ berechnen *)

$\eta_{m+1} := f(\xi_{m+1})$;

If $\left| \frac{y_n + \eta_m}{2} - \eta_{m+1} \right| < \varepsilon$ *then*

$n := n + 1$; $x_n := \xi_m$; $y_n := \eta_m$; $m := m - 1$; (* Stützstelle übernehmen *)

else $m := m + 1$; (* neue Stützstellen – Vorgabe *)

until $m = 0$;

Output x, y, n ;

6.2 Polygon-Addition

Gegeben seien zwei Polygonzüge p, q durch die Stützstellen $(x_i, p_i)_{i=1, \dots, m}$, $(y_j, q_j)_{j=1, \dots, n}$.

$$m > 0 \ \& \ \forall i \ x_i < x_{i+1} \ \& \ n > 0 \ \& \ \forall j \ y_j < y_{j+1}$$

Links von x_1 bzw. y_1 und rechts von x_m bzw. y_n seien die zugehörigen Polygon-Funktionen p, q konstant und stetig fortgesetzt. Wir wollen diese Funktionen linear kombinieren. Dazu wird ein Polygonzug r mit den Stützstellen $(z_k, r_k)_{k=1, \dots, l}$ berechnet:

$$l > 0 \ \& \ \forall k \ z_k < z_{k+1} \ \& \ r = \alpha p + \beta q$$

Der folgende Algorithmus liefert das Gewünschte:

Procedure PgnAdd

Input $\alpha, x, p, m, \beta, y, q, n;$

$i := 1; j := 1; k := 0;$

While $i \leq m$ *or* $j \leq n$ *do*

$k := k + 1;$

If $j > n$ *then*

$z_k := x_i;$

$r_k := \alpha \cdot p_i + \beta \cdot q_n;$

$i := i + 1;$

else If $i > m$ *then*

$z_k := y_j;$

$r_k := \alpha \cdot p_m + \beta \cdot q_j;$

$j := j + 1;$

else If $x_i = y_j$ *then*

$z_k := x_i;$

$r_k := \alpha \cdot p_i + \beta \cdot q_j;$

$i := i + 1; j := j + 1;$

else If $x_i < y_j$ *then* $(* \Rightarrow j = 1 \ \dot{\vee} \ y_{j-1} \leq x_i < y_j *)$

$z_k := x_i;$

If $j = 1$ *then* $r_k := \alpha \cdot p_i + \beta \cdot q_1$

else $r_k := \alpha \cdot p_i + \beta \cdot \left(\frac{q_j - q_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} (x_i - y_{j-1}) + q_{j-1} \right);$

$i := i + 1;$

else If $x_i > y_j$ *then* $(* \Rightarrow i = 1 \ \dot{\vee} \ x_{i-1} \leq y_j < x_i *)$

$z_k := y_j;$

If $i = 1$ *then* $r_k := \beta \cdot q_j + \alpha \cdot p_1$

else $r_k := \beta \cdot q_j + \alpha \cdot \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (y_j - x_{i-1}) + p_{i-1} \right);$

$j := j + 1;$

$l := k;$

Output $z, r, l;$

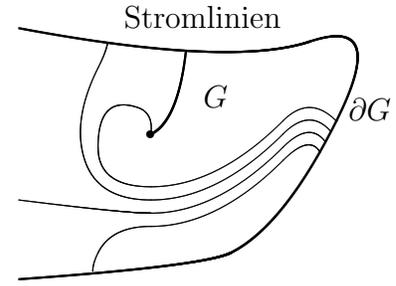
6.3 Implizit definierte Funktionen

Gegeben sei eine auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ definierte stetig-differenzierbare Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Punkt $(x_0, y_0) \in G$.

Gesucht wird ein (nicht konstanter) Weg $t \mapsto (x(t), y(t)) \in G$ mit $f(x, y) = f(x_0, y_0) =: c$. Wir wählen dabei die Parametrisierung nach der Bogenlänge, d.h. es gelte $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$.

Nach dem *Satz über implizit definierte Funktionen* ist lokal die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Funktion $t \mapsto (x(t), y(t))$ gesichert, falls $f'(x_0, y_0) \neq 0$. Sie ist stetig-differenzierbar.

Ist f' lokal Lipschitz-stetig und $f'(x, y) \neq 0$ für alle Punkte $(x, y) \in G$, dann ist die Kurve \mathcal{C} dieses Weges eine Restriktion einer eindeutig bestimmten maximalen Kurve, die von Rand zu Rand verläuft oder geschlossen ist (vgl. [Walter][Seite 79, Satz 10.VI]). G und ∂G können auch unendlich ferne Punkte enthalten. *Singularitäten*, also Punkte (x, y) mit $f'(x, y) = 0$, entfernen wir aus G .



Wir führen die Berechnung einer solcher Kurve im Wesentlichen auf das numerische Lösen der DGL

$$f_x(x, y) \cdot \dot{x} + f_y(x, y) \cdot \dot{y} = 0 \quad \& \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 \quad (266)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \begin{pmatrix} -f_y(x, y) \\ f_x(x, y) \end{pmatrix}} \quad (267)$$

mit der Anfangsbedingung $f(x_0, y_0) = c$ zurück. Da wir aber die Funktion f als bekannt voraussetzen, können wir globale Fehler der Numerik durch lokale begrenzen.

Konkret sollen Druck-, Strom- und Aquipotentiallinien berechnet werden.

Modifikation des Druckpotentials

Das Druckpotential \hat{p}^i wird nur in isolierten Quell- oder Senkenpunkten nicht definiert sein. Wir schneiden daher die unendlich hohen oder niedrigen Spitzen der Greenfunktion \hat{G} ab:

$$\begin{aligned} \hat{G}(u, w, u_0, w_0) &= \frac{-1}{4\pi} \ln \left(\frac{\cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} - \cos \frac{\pi(w-w_0)}{2d}}{\cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \cos \frac{\pi(w-w_0)}{2d}} \cdot \frac{\cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \cos \frac{\pi(w+w_0)}{2d}}{\cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} - \cos \frac{\pi(w+w_0)}{2d}} \right) \\ &\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\leftarrow} \frac{-1}{4\pi} \ln \left(\frac{\varepsilon + \cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} - \cos \frac{\pi(w-w_0)}{2d}}{\varepsilon + \cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \cos \frac{\pi(w-w_0)}{2d}} \cdot \frac{\varepsilon + \cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} + \cos \frac{\pi(w+w_0)}{2d}}{\varepsilon + \cosh \frac{\pi(u-u_0)}{2d} - \cos \frac{\pi(w+w_0)}{2d}} \right) \end{aligned} \quad (268)$$

Beim endlich tiefen Aquifer ist der Druckanteil \hat{p}^h noch für $-2d < w < 2d$ definiert, obwohl wir nur den Druck für $-d \leq w \leq 0$ beschreiben wollen. Damit ist das modifizierte Druckpotential $\hat{p} = \hat{p}^h + \hat{p}^i$ auf dem hinreichend großen Parallelstreifen $\mathbb{R} + i[-2d + \varepsilon, 2d - \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$ stetig-differenzierbar definiert.

Wir nutzen sogar die zusätzlichen Möglichkeiten, um Drucklinien unterhalb des wasserundurchlässigen Grundes bei $w = -d$ zu verfolgen.

Modifikation des Strompotentials

Das Strömungspotential \hat{q}^h ist im hinreichend großen Parallelstreifen $\mathbb{R} + i[-2d + \varepsilon, 2d - \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$ stetig-differenzierbar definiert.

Die Definitionslücken des Strömungspotentials \hat{q}^i an den isolierten Quell- und Senkenstellen können und wollen wir nicht beseitigen. Wir weiten sie sogar aus und nutzen das Erreichen dieser undefiniertheitsstellen als Abbruchkriterium, wo dann Stromlinien beginnen oder enden. An den Sprungstellen setzen wir von rechts kommend stetig fort. Es genügt, die Greenfunktion \hat{H} abzuändern ($w_0 < 0$):

$$\hat{H}(u, w, u_0, w_0) \stackrel{\varepsilon \geq 0}{\longleftarrow} \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \arctan \frac{\sin \frac{\pi(w-w_0)}{2d}}{\sinh \frac{\pi(u-u_0)}{2d}} - \arctan \frac{\sin \frac{\pi(w+w_0)}{2d}}{\sinh \frac{\pi(u-u_0)}{2d}} & u \neq u_0 \wedge (u-u_0)^2 + (w \pm w_0)^2 \geq \varepsilon^2 \\ 0 & u = u_0 \wedge (w-w_0 \leq \varepsilon \vee w+w_0 \geq \varepsilon) \\ \pi & u = u_0 \wedge (w-w_0 \geq \varepsilon \wedge w+w_0 \leq \varepsilon) \end{cases} \quad (269)$$

$$\lim_{\delta \geq 0} \left(\hat{H}(u_0 + \delta, w, u_0, w_0) - \hat{H}(u_0 - \delta, w, u_0, w_0) \right) = \begin{cases} 0 & w - w_0 \leq \varepsilon \vee w + w_0 \geq \varepsilon \\ 1 & w - w_0 \geq \varepsilon \wedge w + w_0 \leq \varepsilon \end{cases} \quad (270)$$

Wenn (x_0, y_0) ein Stromlinienpunkt und (x_1, y_1) eine Schätzung für einen weiteren ist, dann kann man zuerst vermöge der Verbindungsgeraden zwischen den zwei Punkten entscheiden, ob ein nicht definierter Bereich überschritten wurde. Wenn nicht, dann kennen wir den Wert Δc des Sprungs von \hat{q}^i (wenn es denn einen gegeben hat). Die Bestimmungsgleichung für eine Stromlinie mit der Konstanten $c := q_0$ und der Funktion $f := q^h + \hat{q}^i$ wird dann modifiziert. Zur Konstante c in

$$f(x, y) = c$$

wird eben dieser Sprungwert Δc addiert.

Berechnung von Kurvenpunkten mit einem Newton-Verfahren

Wenn (x, y) eine Schätzung für einen Kurvenpunkt ist, dann soll daraus ein Kurvenpunkt (\bar{x}, \bar{y}) möglichst nahe bei diesem Startpunkt konstruiert werden.

Der Gradient von f beschreibt die Richtung des größten Anstiegs. Zur Ableitung eines Verfahrens suchen wir zunächst auf der mit der Richtung $f'(x, y) \neq 0$ definierten Geraden durch (x, y) einen Kurvenpunkt. Es gilt also ein \bar{t} zu finden mit

$$g(\bar{t}) := f(x + \bar{t}f_x, y + \bar{t}f_y) - c = 0.$$

Wenn $t_0 := 0$ als Startzeit gewählt wird, so liefert der erste Newton-Schritt den Wert

$$t_1 = t_0 - \frac{g(t_0)}{g'(t_0)} = - \frac{f(x, y) - c}{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}.$$

Daraus kann man ein *Newton-Verfahren* mit Startpunkt $(x_0, y_0) := (x, y)$ konstruieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &:= \mathbf{T}(x_n, y_n) \\ \mathbf{T}(x, y) &:= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{f(x, y) - c}{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (271)$$

Wir berechnen $\mathbf{T}'(\bar{x}, \bar{y})$ und kürzen vermöge $\bar{f}_x := f_x(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{f}_y := f_y(\bar{x}, \bar{y})$ ab:

$$\mathbf{T}'(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\bar{f}_x^2 + \bar{f}_y^2} \begin{pmatrix} \bar{f}_y^2 & -\bar{f}_x \bar{f}_y \\ -\bar{f}_y \bar{f}_x & \bar{f}_x^2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte 0 und 1 zu den Eigenvektoren

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\bar{f}_y \\ \bar{f}_x \end{pmatrix}.$$

Da wir in der Richtung von \mathbf{e}_0 iterieren und genau diese Richtungsableitung von \mathbf{T} im Punkt (\bar{x}, \bar{y}) verschwindet, kann man die Konvergenz mit dem *Fixpunktsatz* beschreiben.

Die nachfolgende Prozedur berechnet bei Termination einen Punkt (x, y) , für den bei fehlerfreier Ausführung $|f(x, y) - c| \leq \varepsilon$ gilt. Andernfalls wird nahe eines singulären Punktes abgebrochen, wenn die Schrittweite $\frac{|f - c|}{|f'|}$ größer als $\frac{|f - c|}{\varepsilon} \cdot h$ und somit größer h würde.

Durch die Zeile $(x, y) \mapsto (f, f_x, f_y)$ werde dabei eine Prozedur aufgerufen, welche $f(x, y)$, $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ berechne.

Procedure Newton

Input $\varepsilon, c, h, x, y;$

$(x, y) \mapsto (f, f_x, f_y);$

While $|f - c| > \varepsilon$ *do*

$df^2 := f_x^2 + f_y^2;$

If $df^2 > (\varepsilon/h)^2$ *then*

$(x, y) := (x, y) - (f - c) \cdot (f_x, f_y) / df^2;$

$(x, y) \mapsto (f, f_x, f_y);$

else ERROR (singular case);

Output $x, y, f, f_x, f_y;$

Diese Prozedur reicht aus, um Drucklinienpunkte zu bestimmen. Bei der Ermittlung von Stromlinienpunkten haben wir Definitionslücken und Sprungstellen.

Daher wird die letzte Prozedur ergänzt. Um Sprünge zu berücksichtigen, brauchen wir die Vorgeschichte (x_0, y_0) sodass dann mit der Schätzung (x_1, y_1) gearbeitet werden kann. Die Zeile $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (f, f_x, f_y, \Delta c, defined)$ rufe dabei eine Prozedur auf, welche $f(x_1, y_1)$, $f_x(x_1, y_1)$, $f_y(x_1, y_1)$ und den Sprungwert Δc berechne oder *defined* = *false* setzt.

Bei Termination ist (x_1, y_1) eine Approximation eines Kurvenpunktes, nahe eines singulären Punktes oder f ist in (x_1, y_1) nicht definiert:

Procedure Newton

Input $\varepsilon, c, h, x_0, y_0, x_1, y_1;$

$(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (f, f_x, f_y, \Delta c, defined); \quad (f := f(x_1, y_1))$

$c := c + \Delta c;$

While defined and $|f - c| > \varepsilon$ do
 $df^2 := f_x^2 + f_y^2;$
 If $df^2 > (\varepsilon/h)^2$ then
 $(x_0, y_0) := (x_1, y_1);$
 $(x_1, y_1) := (x_0, y_0) - (f - c) \cdot (f_x, f_y) / df^2;$
 $(x_0, y_0, x_1, y_1) \mapsto (f, f_x, f_y, \Delta c); \quad (f := f(x_1, y_1))$
 $c := c + \Delta c;$
 else *ERROR (singular case);*
 Output $x_0, y_0, x_1, y_1, f, f_x, f_y, c;$

Die Kurve \mathcal{C} soll durch eine Funktion parametrisiert und diese durch einen Polygonzug approximiert werden. Wir wollen also eine nach der Parametrisierung geordnete Auflistung von Kurvenpunkten haben.

Startpunkte für die Newton-Iteration sollten deshalb schon gute Approximationen der parametrisierten Kurvenpunkte sein. Ist (\bar{x}, \bar{y}) ein Kurvenpunkt, so benötigen wir eine sinnvolle *Schrittweite* h und eine sinnvolle *Richtung* (\bar{x}_t, \bar{y}_t) , um den nächsten Startpunkt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{y}_t \end{pmatrix}$$

für die Newton-Iteration zu bekommen. Es sei also ein parametrisierter Kurvenpunkt (\bar{x}, \bar{y}) bekannt, sowie die letzte Richtung, mit der dieser Punkt konstruiert wurde.

Berechnung der Kurve in regulären Bereichen

Die Funktion f sei in einer h -Umgebung \bar{U}_h des Punktes $(\bar{x}, \bar{y}) = (x(\bar{t}), y(\bar{t}))$ *regulär*, d.h.:

$$\forall (x, y) \in \bar{U}_h \quad f'(x, y) \neq 0$$

Die Parametrisierung der Kurve wird bestimmt durch:

$$\begin{aligned} f(x(t), y(t)) &= c \\ x_t(t)^2 + y_t(t)^2 &= 1 \quad (\text{Parametrisierung nach der Bogenlänge}) \end{aligned}$$

Wir bilden die Ableitung der ersten Gleichungen zum Zeitpunkt \bar{t} . Die Überstreichungen deuten an, dass die Funktionen zum Zeitpunkt \bar{t} auszuwerten sind:

$$\begin{aligned} \bar{f}_x \bar{x}_t + \bar{f}_y \bar{y}_t &= 0 \\ \bar{x}_t^2 + \bar{y}_t^2 &= 1 \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen können die uns interessierenden Größen berechnet werden:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{y}_t \end{pmatrix} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\bar{f}_x^2 + \bar{f}_y^2}} \begin{pmatrix} \bar{f}_y \\ -\bar{f}_x \end{pmatrix} \quad (272)$$

Die zwei möglichen Vorzeichen bei \bar{x}_t, \bar{y}_t rühren daher, dass der Kurvenpunkt (\bar{x}, \bar{y}) in zwei Richtungen durchlaufen werden kann. Wenn die Einlauf-Richtung, mit der (\bar{x}, \bar{y}) berechnet wurde bekannt ist, so kann man wegen der Stetigkeit auf das Vorzeichen der Auslauf-Richtung schließen.

In der nächsten Routine wird die Differentialgleichung (272) numerisch mit Schrittweitensteuerung gelöst, um eine Schätzung für den nächsten Kurvenpunkt zu erhalten. Diese Schätzung wird mit dem Newton-Verfahren verbessert, womit wir globale Fehler durch lokale begrenzen können.

Ein fehlerhafter Abbruch findet statt, wenn die Schrittrichtung auch nach mehrfacher Verkleinerung der Schrittweite h nicht eindeutig bestimmt werden kann, also $|f'|$ sehr klein wird (singulärer Fall) oder wenn der Winkel α zwischen Einlauf- und Auslaufrichtung zu groß würde.

Definitionslücken der Funktion f sind berücksichtigt. Dort lassen wir die Kurve \mathcal{C} enden.

Procedure Step

Input $\varepsilon, c, h_{\min}, h_{\max}, h, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_t, \bar{y}_t;$

$(x_2, y_2) := (\bar{x}, \bar{y}) + h \cdot (\bar{x}_t, \bar{y}_t);$

Repeat

$(x_1, y_1) := (x_2, y_2);$

$h := h/2;$

$(x_2, y_2) := (\bar{x}, \bar{y}) + h/2 \cdot (\bar{x}_t, \bar{y}_t);$

$(\bar{x}, \bar{y}, x_2, y_2) \mapsto (f, f_x, f_y, \Delta c, \text{defined}); \quad (f := f(x_2, y_2))$

$df := \sqrt{f_x^2 + f_y^2};$

If defined and $|x_t f_y - y_t f_x| > df \cdot \cos \alpha$ then (z.B. $\alpha = \pi/6$)

If $x_t f_y > y_t f_x$ then $(x_3, y_3) := (x_2, y_2) + h \cdot (f_y, -f_x)/df$

else $(x_3, y_3) := (x_2, y_2) - h \cdot (f_y, -f_x)/df;$

else $(x_3, y_3) := (x_2, y_2);$

until not defined or $|(x_1, y_1) - (x_3, y_3)| < h \cdot \varepsilon$ or $h < h_{\min};$

$c := c + \Delta c;$

Newton $(\varepsilon, c, h, x_2, y_2, x_3, y_3, f, f_x, f_y, \text{defined});$

If defined then

$(\bar{x}, \bar{y}) := (x_3, y_3);$

$df := \sqrt{f_x^2 + f_y^2};$

If $x_t f_y > y_t f_x$ then $(\bar{x}_t, \bar{y}_t) := +(f_y, -f_x)/df$

else $(\bar{x}_t, \bar{y}_t) := -(f_y, -f_x)/df;$

$h := 4 \cdot h;$ *If $h > h_{\max}$ then $h := h_{\max};$*

Output $h, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_t, \bar{y}_t, c, \text{defined};$

Die Kurve nahe singulärer Punkte

Wenn (\bar{x}, \bar{y}) ein isolierter singulärer Punkt von f ist, d.h.

$$f'(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \& \quad \forall (x, y) \in \bar{U}_h \setminus \{(\bar{x}, \bar{y})\} \quad f'(x, y) \neq 0,$$

so kann die *Hesse-Matrix* $\bar{f}'' := f''(\bar{x}, \bar{y})$ noch vernünftige Richtungen definieren. Die Schrittweite ist dann minimal zu wählen.

Ist \bar{f}'' indefinit, d.h. die Matrix hat einen positiven und einen negativen Eigenwert λ_{\pm} , so liegt bekanntlich ein Sattelpunkt von f vor und die (zueinander orthogonalen) Eigenvektoren \mathbf{e}_{\pm} beschreiben Richtungen des maximalen Anstiegs bzw. Abfalls:

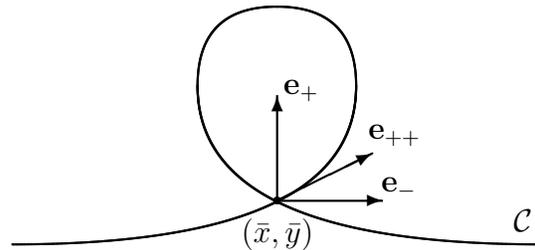
$$0 \stackrel{!}{=} \det \begin{pmatrix} \bar{f}_{xx} - \lambda & \bar{f}_{xy} \\ \bar{f}_{xy} & \bar{f}_{yy} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\bar{f}_{xx} + \bar{f}_{yy})\lambda + \bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} - \bar{f}_{xy}^2$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{\bar{f}_{xx} + \bar{f}_{yy} \pm \sqrt{(\bar{f}_{xx} - \bar{f}_{yy})^2 + 4\bar{f}_{xy}^2}}{2}$$

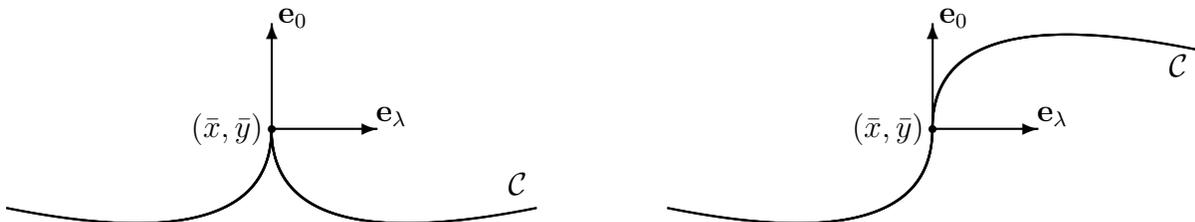
Wir bilden die Linearkombination $\mathbf{e} := \alpha \mathbf{e}_+ + \beta \mathbf{e}_-$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, für die gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \langle \mathbf{e}, \bar{f}'' \mathbf{e} \rangle = \alpha^2 \lambda_+ + \beta^2 \lambda_- \Rightarrow \alpha_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{-\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-}} \quad \& \quad \beta_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-}}$$

Aus diesen 4 Richtungen $\mathbf{e}_{\pm\pm} = \alpha_{\pm} \mathbf{e}_+ + \beta_{\pm\pm} \mathbf{e}_-$ wählen wir diejenige aus, welche noch am ehesten zur Einlaufrichtung (die letzte Richtung, mit der (\bar{x}, \bar{y}) konstruiert wurde) passt.



Ist die Hesse-Matrix semidefinit, d.h. sie hat Eigenvektoren \mathbf{e}_0 zum Eigenwert 0 und \mathbf{e}_{λ} zu $\lambda \neq 0$, so bedarf es weiterer Untersuchungen, welches Vorzeichen bei $\pm \mathbf{e}_0$ eine sinnvolle Richtung beschreibt. Liegt ein Terrassenpunkt vor (Bild links), so hat \mathcal{C} eine Ecke. Es besteht die Gefahr, den gekommenen Weg wieder zurück zu laufen. Liegt (\bar{x}, \bar{y}) auf einem *Gratpunkt* (Bild rechts), so ist \mathcal{C} glatt. Es gibt noch weitere Fälle.



Wenn die Hesse-Matrix definit ist, dann hat f in (\bar{x}, \bar{y}) ein lokales Extremum. Die Kurve \mathcal{C} entartet zu einem Punkt.

Wir benutzen die Routinen nur für nicht konstante harmonische Funktionen f . Dann gibt es allenfalls isolierte Singularitäten und diese sind Sattelpunkte.

6.4 Zeta-Reihen

Bei den Formeln zum endlich tiefen Aquifer traten die ζ_k -Reihen auf. Wir geben an, wie man Funktionswerte effektiv berechnen kann.

$$\zeta_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n^k} \quad (\Re(z) > 0, k \in \mathbb{N}) \quad x := \Re(z), y := \Im(z) \quad (273)$$

Zunächst berechnen wir ζ_1 und stellen dann ζ_2, ζ_3, \dots als Summe von ζ_1 und schnell konvergierenden Reihen dar.

Weil die Reihe von ζ_1' über die geometrische Reihe ($|e^{-z}| < 1 \Leftrightarrow \Re(z) > 0$) vereinfacht und dann wieder integriert werden kann (mit passender Integrationskonstante), ergibt sich eine Darstellung von ζ_1 , welche man effektiv berechnen kann:

$$\zeta_1'(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz} = - \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-z})^n = - \frac{1}{1-e^{-z}} - 1 = - \frac{e^{-z}}{1-e^{-z}} = - \frac{d}{dz} \ln(1-e^{-z})$$

$$\zeta_1(z) = - \ln(1-e^{-z}) = \frac{-1}{2} \ln \left((1-e^{-x} \cos y)^2 + (e^{-x} \sin y)^2 \right) - i \arctan \frac{e^{-x} \sin y}{1-e^{-x} \cos y} \quad (274)$$

Ein Algorithmus zur Berechnung der $\zeta_k(z)$ für ($k > 1$) ist:

$$\begin{aligned} \Re_k &:= \mathbf{c}_n := \mathbf{c} := e^{-x} \cdot \cos(-y); \\ \Im_k &:= \mathbf{s}_n := \mathbf{s} := e^{-x} \cdot \sin(-y); \\ \text{For } n &:= 2 \text{ to } \dots \text{ do} \\ &\quad \tilde{\mathbf{c}}_n := \mathbf{c}_n; \\ &\quad \mathbf{c}_n := \tilde{\mathbf{c}}_n \cdot \mathbf{c} - \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{s}; \\ &\quad \mathbf{s}_n := \tilde{\mathbf{c}}_n \cdot \mathbf{s} + \mathbf{s}_n \cdot \mathbf{c}; \\ &\quad \Re_k := \Re_k + \frac{\mathbf{c}_n}{n^k}; \\ &\quad \Im_k := \Im_k + \frac{\mathbf{s}_n}{n^k}; \end{aligned}$$

Für große $\Re(z) > 0$ konvergiert die ζ_k -Reihe schnell, für kleine $\Re(z) > 0$ nicht, wegen $|e^{-z}| \approx 1$. Zudem soll der Fehler bzgl. z gleichmäßig (d.h. unabhängig von z) geschätzt werden. Dazu nützt uns folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^k} &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{m^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{m}\right)^k} \\ &= \frac{1}{m^k} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{0}{m}\right)^k} + \dots + \frac{1}{\left(1 + \frac{m-1}{m}\right)^k} + \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{m}\right)^k} + \dots + \frac{1}{\left(1 + \frac{3m-1}{m}\right)^k} + \dots \right) \\ &\leq \frac{1}{m^k} \left(\frac{1m}{(1+0)^k} + \frac{2m}{(1+1)^k} + \frac{4m}{(1+3)^k} + \frac{8m}{(1+7)^k} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{m^{k-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n \cdot (k-1)}} \\ &= \frac{1}{m^{k-1}} \cdot \frac{2^{k-1}}{2^{k-1} - 1} \quad (k > 1) \end{aligned} \quad (275)$$

Die Konvergenz wird nun verbessert, indem ähnliche aber exakt bekannte Reihen abgezogen werden, sodass sich der Exponent $k-1$ (die Ordnung des Verfahrens) in der Abschätzung erhöht.

Wir begnügen uns mit Verfahren der Ordnung 3, sodass nur die Berechnungen von $\zeta_2(z)$ und $\zeta_3(z)$ modifiziert werden müssen:

($\mathbf{e} = e^{-x}$, $\mathbf{c} = e^{-x} \cos(-y)$, $\mathbf{s} = e^{-x} \sin(-y)$, $\mathbf{c}_n = e^{-nx} \cos(-ny)$, $\mathbf{s}_n = e^{-nx} \sin(-ny)$ wie oben)

$$\begin{aligned}
\zeta_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{n+2}{n(n+1)^2} + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \right) e^{-nz} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-nz}}{n^2(n+1)^2} + \left(\frac{2e^{-nz}}{n} - \frac{2e^{-(n+1)z}}{n+1} + \frac{2e^{-(n+1)z}}{n+1} (1-e^z) - \frac{e^{-(n+1)z}}{(n+1)^2} e^z \right) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n^2(n+1)^2} + 2e^{-z} + 2(\zeta_1(z) - e^{-z})(1-e^z) - (\zeta_2(z) - e^{-z})e^z \\
&= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n^2(n+1)^2} + 2(1-e^z)\zeta_1(z) - e^z\zeta_2(z) \\
&= \frac{1}{1+e^z} \left(3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n^2(n+1)^2} + 2(1-e^z)\zeta_1(z) \right) \\
&= \frac{1}{\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{c} + 1} \left((\mathbf{e}^2 + \mathbf{c} + i\mathbf{s}) \cdot \left(3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}_n + i\mathbf{s}_n}{n^2(n+1)^2} \right) + 2(\mathbf{e}^2 - 1 + 2i\mathbf{s})\zeta_1(z) \right) \quad (276)
\end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{1+e^z} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n^2(n+1)^2} \right| \leq \frac{4}{7} \frac{e^{-mx}}{m^3} \quad (277)$$

$$\begin{aligned}
\zeta_3(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2(n+1)} + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2} \right) \right) e^{-nz} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-nz}}{n^3(n+1)} + \left(-\frac{e^{-nz}}{n} + \frac{e^{-(n+1)z}}{n+1} + \frac{e^{-(n+1)z}}{n+1} (e^z - 1) + \frac{e^{-nz}}{n^2} \right) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n^3(n+1)} - e^{-z} + (\zeta_1(z) - e^{-z})(e^z - 1) + \zeta_2(z) \\
&= \zeta_2(z) - 1 + (e^z - 1)\zeta_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n^3(n+1)} \\
&= \zeta_2(z) - 1 + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{e}^2 - i\mathbf{s}}{\mathbf{e}^2} \zeta_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{c}_n + i\mathbf{s}_n}{n^3(n+1)} \quad (278)
\end{aligned}$$

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} \frac{e^{-nz}}{n^3(n+1)} \right| \leq \frac{8}{7} \frac{e^{-mx}}{m^3} \quad (279)$$

7 Anhang zu Hauptwertintegralen

7.1 Hilbert-Transformation

Satz 7.1 (Sochozki, Plemelj, Privalov) Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ eine glatte, doppelpunktsfreie, orientierte Kurve endlicher Länge L mit den Endpunkten $a, b \in \bar{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{C}$.

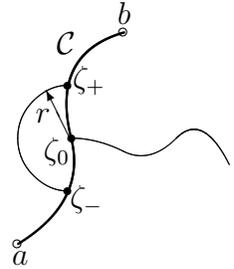
Die Funktion $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ sei α -hölderstetig, d.h.

$$0 < \alpha \leq 1 \quad \& \quad \exists k \forall \zeta, \zeta_0 \in \mathcal{C} \quad |f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq k \cdot |\zeta - \zeta_0|^\alpha,$$

dann gilt:

- a) Für alle $\zeta_0 \in \mathcal{C}$ existiert der *Cauchysche Hauptwert* und es gilt:

$$\begin{aligned} F(\zeta_0) &:= \mathcal{P} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta := \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\zeta \in \mathcal{C} \wedge |\zeta - \zeta_0| \geq r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + i\pi f(\zeta_0) + (\ln(b - \zeta_0) - \ln(a - \zeta_0)) f(\zeta_0) \end{aligned}$$

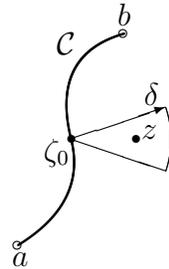


Dabei sei $z \mapsto \ln(z - \zeta_0)$ eine Stammfunktion von $z \mapsto 1/(z - \zeta_0)$ auf der bzgl. \mathcal{C} nach rechts geschlitzten komplexen Ebene, welche $\mathcal{C} \setminus \{\zeta_0\}$ enthält.

Ist die Kurve \mathcal{C} sogar einfach geschlossen, dann gilt: $F(\zeta_0) = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + i\pi f(\zeta_0)$

- b) Streben die Zahlen $z \in \mathcal{C}$ gegen $\zeta_0 \in \mathcal{C}$ derart, dass es eine Zahl h gibt mit $|z - \zeta_0| \leq h \cdot \text{dist}(z, \mathcal{C})$, dann gilt:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta$$



Diese Konvergenz ist sogar gleichmäßig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall h > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}, \quad \zeta_0 \in \mathcal{C} \quad (|\zeta_0 - a|, |\zeta_0 - b| \geq \varepsilon)$$

$$|z - \zeta_0| < \delta \quad \& \quad |z - \zeta_0| \leq h \cdot \text{dist}(z, \mathcal{C}) \Rightarrow \left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \right| < \varepsilon$$

- c) Streben die Zahlen $z \in \mathcal{C}$ bzgl. der Kurve \mathcal{C} von links (+) bzw. von rechts (-) gegen $\zeta_0 \in \mathcal{C}$ derart, dass es eine Zahl h mit $|z - \zeta_0| \leq h \cdot \text{dist}(z, \mathcal{C})$ gibt, dann existieren die Grenzwerte $F^+(\zeta_0)$ bzw. $F^-(\zeta_0)$ des Cauchyschen Integrals und es gelten die *Formeln von Sochozki & Plemelj*:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0^\pm} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = F(\zeta_0) \pm i\pi f(\zeta_0) =: F^\pm(\zeta_0)$$

Diese Konvergenz ist ebenfalls gleichmäßig wie bei b).

- d) Die Funktion $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ist stetig. Für $\alpha < 1$ ist F wieder α -hölderstetig auf jeder kompakten Teilmenge von \mathcal{C} (*Satz von Plemelj-Privalov*).

Wir skizzieren den **Beweis**, weil dessen Ausführung z.B. [Muschelischwili][Seite 45 ff.] schwierig nachzuvollziehen ist.

- a) Für hinreichend kleines $r > 0$ seien $\mathcal{C}_r := \{\zeta \in \mathcal{C} : |\zeta - \zeta_0| \geq r\}$ und $\zeta_{\pm} \in \mathcal{C}$ die zwei Punkte mit $|\zeta_{\pm} - \zeta_0| = r$. Damit rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta &= \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + f(\zeta_0) \int_{\mathcal{C}_r} \frac{d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \\ &= \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta + f(\zeta_0) \left(\ln(b - \zeta_0) \underbrace{-\ln(\zeta_+ - \zeta_0) + \ln(\zeta_- - \zeta_0)}_{\rightarrow i\pi \text{ für } r \rightarrow 0} - \ln(a - \zeta_0) \right) \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite konvergiert absolut und gleichmäßig für $r \rightarrow 0$ wegen der Hölderstetigkeit f . In der Rechnung sei die Kurve \mathcal{C} vermöge der Bogenlänge s parametrisiert: $\zeta :]0, L[\rightarrow \mathcal{C}$, $|d\zeta(s)| = ds$

$$\left| \int_{\mathcal{C}_r} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \right| \leq \int_{\mathcal{C}_r} \frac{|f(\zeta) - f(\zeta_0)|}{|\zeta - \zeta_0|} |d\zeta| \leq k \int_{\mathcal{C}_r} |\zeta - \zeta_0|^{\alpha-1} |d\zeta| \leq k \int_0^L s^{\alpha-1} ds = \frac{k \cdot L^\alpha}{\alpha}$$

Die Logarithmus-Summe ergibt $i\pi$ für $r \rightarrow 0$, weil die Kurve \mathcal{C} glatt ist.

- b) Zur Vereinfachung der Darstellung nehmen wir $\zeta_0 = 0$ und $f(0) = 0$ an. (Andernfalls betrachte man die Funktion $z \mapsto f(z + \zeta_0) - f(\zeta_0)$ auf der Kurve $\mathcal{C} - \zeta_0$, welche ebenfalls α -Hölderstetig ist.) Sei weiter $r > 0$ hinreichend klein und $|z| \leq r/2$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right| &\leq \int_{\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_r} \underbrace{\frac{|z|}{|\zeta - z|}}_{\leq h} \cdot \underbrace{\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|}}_{\leq k|\zeta|^{\alpha-1}} |d\zeta| + \int_{\mathcal{C}_r} \frac{|z| \cdot |f(\zeta)|}{|\zeta - z| \cdot |\zeta|} |d\zeta| \\ &\leq \underbrace{h \cdot k \int_{\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_r} |\zeta|^{\alpha-1} |d\zeta|}_{\rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{|z|}{r/2 \cdot r} \int_{\mathcal{C}_r} |f(\zeta)| |d\zeta|}_{\rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow 0 \text{ (} r \text{ fest)}} \end{aligned}$$

- c) Mit dem Vorigen beweisen wir die Formeln von Sochozki & Plemelj.

Wir brauchen dazu eine einfach geschlossene Kurve \mathcal{C}' , die in positiver Richtung durchlaufen werde. Ist die Kurve \mathcal{C} nicht schon einfach geschlossen, dann können wir sie (weil doppelpunktfrei) zu einer einfach geschlossenen Kurve \mathcal{C}' erweitern, wobei links (+) das (beschränkte) Innere und rechts (-) das Äußere der Kurve bedeute. Auf $\mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}$ setzen wir $f := 0$. (Es wird nur die Hölderstetigkeit von f auf \mathcal{C} benötigt.)

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \zeta_0} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \lim_{z \rightarrow \zeta_0} \oint_{\mathcal{C}'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \lim_{z \rightarrow \zeta_0} \oint_{\mathcal{C}'} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z} d\zeta + f(\zeta_0) \lim_{z \rightarrow \zeta_0} \oint_{\mathcal{C}'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \oint_{\mathcal{C}'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta - i\pi f(\zeta_0) + f(\zeta_0) \begin{cases} 2i\pi & (+) \\ 0 & (-) \end{cases} \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta \pm i\pi f(\zeta_0) \end{aligned}$$

- d) Der Stetigkeit von F ergibt sich aus der gleichmäßigen Konvergenz in b). Für die α -Hölderstetigkeit von F verweisen wir auf [Muschelischwili][Seite 55 ff.] \square

Corollar 7.2 (Hilbert-Transformation) Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ eine glatte, einfach geschlossene Kurve, die in positiver Richtung durchlaufen werde und $0 < \alpha < 1$. Dann ist die Abbildung

$$\boxed{\begin{array}{ccc} H : \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathcal{C}) & \rightarrow & \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathcal{C}) \\ f & \mapsto & \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \cdot} d\zeta \end{array}}$$

eine wohldefinierte Isometrie in $\mathcal{L}^2(\mathcal{C})$ mit $\boxed{H = H^{-1} = H^*}$.

Beweis:

Alle Integrale sind geschlossen. Wir notieren dies nur an den Stellen, wo es gebraucht wird. Die Wohldefiniertheit der Abbildung ergibt sich aus dem letzten Satz.

Wir zeigen zuerst $H^* = H$. Dabei wird die Vertauschbarkeit der Integration klar, welche dann auch für den zweiten Teil des Beweises benötigt wird.

$$\begin{aligned} \langle Hf, g \rangle_{\mathcal{L}^2} &= \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta \right) \cdot \overline{g(\xi)} d\xi \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{i\pi} \int_{\mathcal{C}, |\zeta - \xi| \geq r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta \right) \cdot \overline{g(\xi)} d\xi \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}} \bar{f}(\xi) \cdot \left(\frac{1}{i\pi} \int_{\mathcal{C}, |\zeta - \xi| \geq r} \frac{\overline{g(\xi)}}{\zeta - \xi} d\xi \right) d\zeta \\ &= \int_{\mathcal{C}} \bar{f}(\xi) \cdot \overline{\frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \oint_{\mathcal{C}} \frac{g(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi} d\zeta \\ &= \langle f, Hg \rangle_{\mathcal{L}^2} \end{aligned}$$

Wir zeigen $H^2 = \text{id}$. Sei $\eta \in \mathcal{C}$ beliebig.

Es werden (zweimal) die Formeln von Sochozki & Plemelj benutzt: Die Punkte $w \in \mathcal{C}$ mögen in geeigneter Weise von rechts (also von außen) gegen den Punkt z streben.

Die Vertauschbarkeit der Integrationen ist gewährleistet.

Schließlich werden die Integrale über den Cauchyschen Integralsatz und mit den Formeln von Sochozki & Plemelj berechnet:

$$\begin{aligned} -\pi^2(H^2 f)(\eta) &= \mathcal{P} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\xi - \eta} \left(\mathcal{P} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta \right) d\xi \\ &\stackrel{w \rightarrow \eta}{\leftarrow} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\xi - w} \left(\mathcal{P} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta \right) d\xi + i\pi \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta + (i\pi)^2 f(\eta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} f(\zeta) \left(\mathcal{P} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{(\xi - w) \cdot (\zeta - \xi)} d\xi \right) d\zeta + i\pi \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta - \pi^2 f(\eta) \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} \left(\underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\xi - w} d\xi}_{=0} + \underbrace{\mathcal{P} \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\zeta - \xi} d\xi}_{=-i\pi} \right) d\zeta + i\pi \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta - \pi^2 f(\eta) \\ &= -\pi^2 f(\eta) \quad \square \end{aligned}$$

Corollar 7.3 Die letzten zwei Sätze 7.1 und 7.2 lassen sich weitgehend auch auf unbeschränkte Kurven erweitern. Wie diskutieren nur den Spezialfall $\mathcal{C} = \mathbb{R}$. Die Funktion f muss neben der α -Hölderstetigkeit noch quadrat-integrierbar sein:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C} \quad \& \quad f \in \mathcal{C}^{0,\alpha} \cap \mathcal{L}^2$$

a) Für alle $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ existiert der *Cauchysche Hauptwert*:

$$F(\zeta_0) := \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta := \lim_{r \rightarrow 0} \int_{|\zeta - \zeta_0| \geq r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta$$

b) Streben die Zahlen $z \in \mathcal{C}$ auf der komplexen Ebene von oben ($\Im(z) > 0$) bzw. von unten ($\Im(z) < 0$) gegen $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass es eine Zahl h gibt mit $|z - \zeta_0| \leq h \cdot |\Im(z)|$, dann existieren die Grenzwerte $F^+(\zeta_0)$ bzw. $F^-(\zeta_0)$ des Cauchyschen Integrals und es gelten die *Formeln von Sochozki & Plemelj*:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0^\pm} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = F(\zeta_0) \pm i\pi f(\zeta_0) =: F^\pm(\zeta_0)$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in $z \in \mathcal{C}$ und in ζ_0 auf jeder kompakten Teilmenge von \mathbb{R} .

- c) Die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ ist stetig und quadrat-integrierbar. Für $\alpha < 1$ ist F wieder α -hölderstetig auf jeder kompakten Teilmenge von \mathbb{R} (*Satz von Plemelj-Privalov*).
- d) *Hilbert-Transformation*: Sei $0 < \alpha < 1$. Dann ist die Abbildung

$$H : \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \cdot} d\zeta \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\mathbb{R})$$

eine wohldefinierte Isometrie in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mit $H = H^{-1} = H^*$.

Den Faktor i lässt man meist weg. Wir benutzen das Ergebnis als Umkehrrelation:

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \xi} d\zeta \iff \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi = g(\zeta) \quad (280)$$

Im **Beweis** muss gezeigt werden, dass für hinreichend kleine $a < 0$ und hinreichend große $b > 0$ die Integrationen über $[A, B] \setminus [a, b]$ für beliebige A, B mit $A \leq a, b \leq B$ nichts Wesentliches mehr beiträgt, sodass die letzten Sätze anwendbar sind. Sei $z \in \mathcal{C}$ mit $|z| \leq \frac{a}{2}, \frac{b}{2}$:

$$\left| \int_b^B \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \stackrel{CS}{\leq} \int_b^B |f(\zeta)|^2 d\zeta \cdot \int_b^B \frac{1}{|\zeta - z|^2} d\zeta \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 \cdot \int_b^B \frac{1}{(\zeta - \frac{b}{2})^2} d\zeta \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 \cdot \frac{2}{b} \rightarrow 0 \quad \square$$

Die Eigenschaften der Hilbert-Transformation ergeben sich ebenfalls aus dem Vorigen. Wegen des schnellen Abfallans des Integranden kann man den wesentlichen Integrationsweg $[a, b]$ durch einen harmlosen Bogen in der oberen komplexen Halbebene schließen und f darauf geeignet fortsetzen. Alternativ kann man das Integral $\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi - w) \cdot (\zeta - \xi)}$ im Beweis des letzten Satzes auch direkt ausrechnen. \square

Die wichtigsten Eigenschaften der Hilbert-Transformation (ohne i) sind in der nächsten Tabelle zusammen gestellt. Man kann sie zum Teil in [Vachenauer][Seite 337 ff.] nachschlagen.

| | | |
|--|---|-------|
| $f(r)$ | $F(u) := \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{r-u} dr$ | |
| $F(r)$ | $-f(u)$ | |
| $(af + bg)(r)$ | $(aF + bG)(u)$ | |
| $f(r + a)$ | $F(u + a)$ | |
| $f(-r)$ | $-F(-r)$ | |
| $f(ar) \quad (a > 0)$ | $F(au)$ | |
| $f'(r)$ | $F'(u)$ | |
| $rf(r)$ | $uF(u) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dr$ | |
| $(f * g)(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot g(r-s) ds$ | $(f * G)(u) = (F * g)(u) \quad (\text{Faltungsregel})$ | (281) |
| $\chi_{[a,b]}(r) \quad (a < b)$ | $\frac{1}{\pi} \ln \left \frac{u-a}{u-b} \right \quad (u \neq a, b)$ | |
| $\pi \cdot \begin{cases} \frac{r-a}{b-a} & a \leq r \leq b \\ \frac{r-c}{b-c} & b < r \leq c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ | $\frac{(u-a)\ln u-a }{b-a} + \frac{(u-c)\ln u-c }{c-b} - \frac{(c-a)(u-b)\ln u-b }{(b-a)(c-b)}$ | |
| $\delta(r-a) \quad (a \in \mathbb{R})$ | $\frac{1}{\pi} \frac{1}{u-a}$ | |
| $\frac{1}{r^2 + c^2} \quad (\Re(c) > 0)$ | $\frac{u/c}{u^2 + c^2}$ | |
| $\sin r$ | $-\cos u$ | |
| $\frac{\sin r}{r}$ | $\frac{1 - \cos u}{u}$ | |

Wir wollen weitere Hauptwertintegrale berechnen, bei denen anstatt $r \mapsto \frac{1}{r}$ mit den Funktionen $r \mapsto \frac{1}{\sinh r}$ und $r \mapsto \frac{1}{\tanh r}$ gearbeitet wird. Wegen der konkreten Anwendung in dieser Arbeit bezeichnen wir die zugehörigen Abbildungen als *Grundwasser-Korrespondenz*.

7.2 Die Grundwasserkorrespondenz

Wir benutzen die Sätze des letzten Kapitels 7.1, um die bisher nicht bekannte *Grundwasserkorrespondenz* zu beschreiben.

Notation: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha \leq 1$. Wir benötigen einige Räume von α -Hölderstetigen Funktionen, die zudem im Unendlichen stark abflachen:

$$\mathcal{C}^{n,\alpha} := \{f \in \mathcal{C}^n \mid \exists k \forall i=0, \dots, n \forall x, y \quad |f^{(i)}(x) - f^{(i)}(y)| \leq k \cdot |x - y|^\alpha\}$$

$$\mathcal{C}_\pm^{n,\alpha} := \{f \in \mathcal{C}^{n,\alpha} \mid \exists h \quad f - h \cdot \tanh \in \mathcal{L}^1\}$$

Satz 7.4 (Grundwasserkorrespondenz) Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha < 1$ sind die Abbildungen

$$\begin{array}{l} \mathcal{T} : \mathcal{C}^{n,\alpha} \cap \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{C}_\pm^{n,\alpha} \quad (\mathcal{T}f)(u) := \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{\tanh(r-u)} dr \\ \mathcal{S} : \mathcal{C}_\pm^{n,\alpha} \rightarrow \mathcal{C}^{n,\alpha} \cap \mathcal{L}^1 \quad (\mathcal{S}g)(u) := \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(r)}{\sinh(r-u)} dr \end{array} \quad (282)$$

wohldefiniert und $-\mathcal{S}, \mathcal{T}$ zueinander invers:

$$\boxed{f(u) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(r)}{\sinh(r-u)} dr \iff g(u) = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{\tanh(r-u)} dr} \quad (283)$$

Für $n \geq 1$ gilt $\mathcal{T}f' = (\mathcal{T}f)'$ und $\mathcal{S}g' = (\mathcal{S}g)'$.

Beweis:

Wegen des gleichmäßigen (und schnellen) Abfallens der Funktionen $\frac{f}{\tanh}, \frac{g}{\sinh}$ im Unendlichen, ist praktisch nur über ein endliches Intervall $]A, B[$ zu integrieren:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall a < b \quad \exists A < a, b < B \quad \forall u \in [a, b] \quad \int_{-\infty}^A \left| \frac{f(r)}{\tanh(r-u)} \right| dr + \int_B^{\infty} \left| \frac{f(r)}{\tanh(r-u)} \right| dr < \varepsilon,$$

Das Argument u nimmt dabei nur Werte im Intervall $[a, b] \subset]A, B[$ an.

Damit sind die Hauptwertintegrale wegen der Hölderstetigkeit von f, g definiert und die *Formeln von Sochozki & Plemelj* aus (7.1) anwendbar:

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f(r)}{\tanh(r-u)} dr \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \left(\frac{-f(r)}{\tanh(r-u)} + \frac{f(r)}{r-u} \right) dr - \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{r-u} dr \\ & \xrightarrow{w \rightarrow \pm 0} \int_{-R}^R \left(\frac{-f(r)}{\tanh(r-(u+iw))} + \frac{f(r)}{r-(u+iw)} \right) dr - \int_{-R}^R \frac{f(r)}{r-(u+iw)} dr \pm i\pi f(u) \\ & = \int_{-R}^R \frac{-f(r)}{\tanh(r-(u+iw))} dr \pm i\pi f(u) \\ & \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f(r)}{\tanh(r-(u+iw))} dr \pm i\pi f(u) \end{aligned}$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig bzgl. $w \in \mathbb{R}$ und $u \in [a, b] \subset]-R, R[$. Mit dem Satz von Plemelj & Privalov aus 7.1 folgt die Hölderstetigkeit von $\mathcal{T}f$ auf jeder kompakten Teilmenge von \mathbb{R} . Aus der gleichmäßigen Konvergenz in den Formeln von Sochozki & Plemelj ergibt sich - falls f differenzierbar ist - auch die Differenzierbarkeit von $\mathcal{T}f$ und es gilt $\mathcal{T}f' = (\mathcal{T}f)'$. Dasselbe gilt auch für $\mathcal{S}g$.

Wir zeigen $\mathcal{T}f - h \cdot \tanh \in \mathcal{L}^1$ für $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha} \cap \mathcal{L}^1$ und $h := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dr$.

Die gleichmäßige Konvergenz für $w \rightarrow \pm 0$ in den Formeln von Sochozki & Plemeli wird jetzt symmetrisch benutzt, sodass sich der Imaginärteil weghebt. Aus (294) bekommen wir den Realteil von $1/\tanh$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}f)(u) - h \tanh u &\xrightarrow{w \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f(r) dr}{\tanh(r - (u + iw))} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-f(r) dr}{\tanh(r - (u - iw))} - \tanh u \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dr \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \cdot \underbrace{\frac{\sinh(u-r) \cosh(u-r) - \tanh u (\sinh^2(u-r) + \sin^2 w)}{\sinh^2(u-r) + \sin^2 w}}_{\in \mathcal{L}^1} dr \end{aligned}$$

In analoger Weise zeigt man $\mathcal{S}g \in \mathcal{L}^1$ für $g \in \mathcal{C}_{\pm}^{0,\alpha}$.

Es gelte $g - h \tanh \in \mathcal{L}^1$. Den Realteil von $1/\sinh$ liest man aus (295) ab. Das Hauptwertintegral $\mathcal{S}(\tanh)$ kann über die Formeln von Sochozki & Plemelj entschärft und dann z.B. mit einer Partialbruchzerlegung berechnet werden. Es ist in der Tabelle (286) aufgeführt.

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}g)(u) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-g(r) + h \tanh r}{\sinh(r-u)} dr - \frac{h}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tanh r}{\sinh(r-u)} dr \\ &\xrightarrow{w \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (g(r) - h \tanh r) \cdot \underbrace{\frac{\sinh(u-r) \cos w}{\sinh^2(u-r) + \sin^2 w}}_{\in \mathcal{L}^1} dr - \underbrace{\frac{h}{\cosh u}}_{\in \mathcal{L}^1} \end{aligned}$$

Abschließend beweisen wir $\mathcal{T}\mathcal{S}g = -g$ für $g \in \mathcal{C}_{\pm}^{0,\alpha}$. Analog prüft man $\mathcal{S}\mathcal{T}f = -f$ für $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha} \cap \mathcal{L}^1$. Dazu werden die Formeln von Sochozki & Plemelj wieder symmetrisch im Limes $w \rightarrow \pm 0$ benutzt, sodass sich die Imaginärteile heben. Ein Integral berechnen wir über Partialbruchzerlegung und verwenden dann die Dirac-Eigenschaft vermöge des Satzes 8.2. Ferner werden die Abkürzungen $\rho = r - u$ und $\sigma = s - u$ benutzt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}\mathcal{S}g)(u) &= \frac{1}{\pi^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tanh \rho} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s) ds}{\sinh(\sigma - \rho)} dr \\ &\xrightarrow{w \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \rho \sinh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 w} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s) ds}{\sinh(\sigma - \rho)} dr \\ &= \frac{-1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sinh \rho \cosh \sigma - \cosh \rho \sinh \sigma} \cdot \frac{\cosh \rho \sinh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 w} dr ds \\ &\quad t := \tanh \frac{\sigma}{2} \\ &= \frac{-1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{1}{\frac{2t}{1-t^2} \cosh \sigma - \frac{1+t^2}{1-t^2} \sinh \sigma} \cdot \frac{\frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2x}{1-t^2}}{\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 + \sin^2 w} \frac{2dt}{1-t^2} ds \\ &= \frac{-2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1+t^2) \sinh \sigma - 2t \cosh \sigma} \cdot \frac{-2t(1+t^2)}{4t^2 + (1-t^2)^2 \sin^2 w} dt ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \mathcal{P} \int_{-1}^1 \left(\frac{-A \sinh \rho}{(1+t^2) \sinh \sigma - 2t \cosh \sigma} + \frac{A(1+t^2) \sin^2 w - 2Bt}{4t^2 \cos^2 w + (1+t^2)^2 \sin^2 w} \right) dt ds \\
&= \frac{-2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{A(1+t^2) \sin^2 w}{4t^2 \cos^2 w + (1+t^2)^2 \sin^2 w} dt ds \\
&= \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(s) \frac{\cosh(s-u) |\sin w|}{\sinh^2(s-u) + \sin^2 w} ds \\
&\xrightarrow{w \rightarrow 0} -g(u)
\end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass die Partialbruchzerlegung mit

$$A = \frac{\cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 w} \quad \text{und} \quad B = \frac{\sinh \sigma \cos^2 w}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 w}$$

gelingt. Aus den Integralen (300) und (298) ergibt sich, dass die Integration über den ersten Summanden wie auch zum B -Term nichts beiträgt. Der verbleibende Term liefert $A \cdot \frac{\pi}{2} |\sin w|$.

Für letzten Limes $w \rightarrow 0$ prüfen wir die Dirac-Eigenschaft zum Satz 8.2:

- a) $0 \leq f_w(\sigma) := \frac{|\sin w|}{\pi} \cdot \frac{\cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 w}$, $f_w \in \mathcal{L}^1$
- b) $f_w(\sigma) \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0$ gleichmäßig für $|\sigma| \geq \varepsilon$
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} f_w(\sigma) d\sigma = \frac{|\sin w|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \sigma d\sigma}{\sinh^2 \sigma + |\sin w|^2} = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \frac{\sinh \sigma}{|\sin w|} \right]_{-\infty}^{\infty} = 1 \quad \square$

Unter Verwendung der letzten Umkehrrelation lassen sich weitere Integrale berechnen. Wir notieren noch zwei wichtige Ergebnisse:

Satz 7.5 *Mit den Bezeichnungen aus dem letzten Satz 7.4 gilt:*

$$-(\mathcal{T}\mathcal{T}f)(u) = \frac{-1}{\pi^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tanh(r-u)} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s) ds}{\tanh(s-r)} dr = f(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s-u}{\tanh(s-u)} f(s) ds \quad (284)$$

$$-(\mathcal{S}\mathcal{S}g)(u) = \frac{-1}{\pi^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sinh(r-u)} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s) ds}{\sinh(s-r)} dr = g(u) - \frac{2}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s-u}{\sinh(s-u)} f(s) ds \quad (285)$$

Wir haben einige Eigenschaften der Grundwasserkorrespondenz zusammengestellt:

| | | | |
|--|---|--|-------|
| $(\mathcal{S}f)(u) = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r) dr}{\sinh(r-u)}$ | $f(r), f \in \mathcal{C}^{0,\alpha} \cap \mathcal{L}^1$ | $(\mathcal{T}f)(u) = \frac{-1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r) dr}{\tanh(r-u)}$ | |
| $\mathcal{N}(u) \quad \left(d = \frac{\pi}{2}\right)$ | $\hat{f}(r)$ | $\bar{x}(u) - u \quad \left(d = \frac{\pi}{2}\right)$ | |
| $(\alpha \mathcal{S}f + \beta \mathcal{S}g)(u)$ | $(\alpha f + \beta g)(r)$ | $(\alpha \mathcal{T}f + \beta \mathcal{T}g)(u)$ | |
| $(\mathcal{S}f)(u+a)$ | $f(r+a)$ | $(\mathcal{T}f)(u+a)$ | |
| $-(\mathcal{S}f)(-u)$ | $f(-r)$ | $-(\mathcal{T}f)(-u)$ | |
| $-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{a \cdot \sinh \frac{r-au}{a}} dr$ | $f(a \cdot u) \quad (a > 0)$ | $-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(r)}{a \cdot \tanh \frac{r-au}{a}} dr$ | |
| $(\mathcal{S}f)'(u)$ | $f'(r)$ | $(\mathcal{T}f)'(u)$ | |
| $u \cdot (\mathcal{S}f)(u) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \frac{(r-u) dr}{\sinh(r-u)}$ | $r \cdot f(r)$ | $u \cdot (\mathcal{T}f)(u) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) \frac{(r-u) dr}{\tanh(r-u)}$ | (286) |
| $(\mathcal{S}f * g)(u)$ | $(f * g)(r) = (g * f)(u)$ | $(\mathcal{T}f * g)(u)$ | |
| $\delta(u) \quad (\text{Dirac-}\delta)$ | $\frac{-1}{\pi} \frac{1}{\tanh r}$ | $\delta(u) - \frac{2}{\pi^2} \frac{u}{\tanh u} + \infty$ | |
| $\delta(u) - \frac{2}{\pi^2} \frac{u}{\sinh u}$ | $\frac{-1}{\pi} \frac{1}{\sinh r}$ | $\delta(u)$ | |
| $\frac{-1}{\cosh u}$ | $\tanh r$ | $\frac{2}{\pi} u \tanh u - \infty$ | |
| $\frac{2}{\pi} \frac{u^2 - \frac{\pi^2}{4}}{\pi \cosh u}$ | $\frac{2}{\pi} \frac{r}{\cosh r}$ | $\frac{-1}{\cosh u}$ | |
| $\frac{2}{\pi} \frac{-u}{\sinh u}$ | $\tanh \frac{r}{2} = \frac{\cosh r - 1}{\sinh r}$ | $\frac{2}{\pi} \frac{u}{\tanh u} - \infty$ | |
| ?? | $\frac{2}{\pi} \frac{r^2}{\pi \sinh r}$ | $\frac{2}{\pi} \frac{-u}{\sinh u}$ | |

7.3 Partielle Integration singulärer Integrale

In dieser Arbeit treten ständig Hauptwert-Integrale der Form

$$\mathcal{P}\int_a^b f(x)g_{x_0}(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)g_{x_0}(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)g_{x_0}(x) dx \right) \quad (x_0 \in (a, b))$$

$$f = \sum_{i=1}^n \chi_{[x_i, x_{i+1}]} f_i \in \mathcal{C}^{0, \alpha}[a, b] \quad \& \quad f_i \in \mathcal{C}^2(x_i, x_{i+1})$$

auf, wo f eine α -hölderstetige und stückweise zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. Wenn es eine Funktion G gibt mit

1. : $G \in \mathcal{C}^2(a, x_0) \cap \mathcal{C}^2(x_0, b)$
2. : $G'' = g_{x_0}$ in $(a, x_0) \cup (x_0, b)$
3. : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (G'(x_0 + \varepsilon) - G'(x_0 - \varepsilon)) = 0$
4. : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha G'(x_0 \pm \varepsilon) = 0$
5. : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha-1} G(x_0 \pm \varepsilon) = 0$ (\Leftrightarrow 4. & $G(0) = 0$),

so lässt sich obiges Cauchy-Hauptwert-Integral zweimal partiell integrieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\int_a^b f(x)G''(x) dx &= \left[f(x)G'(x) \right]_a^b - \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[f(x)G'(x) \right]_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}}_{=0 \text{ wegen 3. \& 4.}} - \mathcal{P}\int_a^b f'(x)G'(x) dx \\ &= \left[f(x)G'(x) \right]_a^b - \sum_{i=1}^n \left[f'(x)G(x) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[f'(x)G(x) \right]_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}}_{=0 \text{ wegen 5.}} + \mathcal{P}\int_a^b f''(x)G(x) dx \end{aligned}$$

Wir haben ein paar Funktionen mit diesen Eigenschaften zusammengestellt:

| $g(x)$ | $\mathcal{P}\int g(x)$ | $\mathcal{P}\int \mathcal{P}\int g(x)$ |
|------------------------------------|---------------------------|--|
| $\frac{1}{x} \quad x \neq 0$ | $\ln x $ | $x \ln x - x$ |
| $\frac{1}{\sinh x} \quad x \neq 0$ | $\ln \tanh \frac{ x }{2}$ | $2 \operatorname{sign}(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1) x } - 1}{(2n+1)^2}$ |
| $\frac{1}{\tanh x} \quad x \neq 0$ | $\ln \sinh x $ | $\frac{\operatorname{sign}(x)}{2} \left(x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2n x } - 1}{n^2} \right)$ |

(287)

8 Anhang zu Tabellen und Formeln

8.1 Sätze aus der Funktionalanalysis und Funktionentheorie

Satz 8.1 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ eine nicht leere, abgeschlossene Teilmenge und $T : \mathcal{B} \supset \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$ eine Kontraktion, d.h.

$$\exists L < 1 \quad \forall x, y \in \mathcal{D} \quad \|T(x) - T(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| ,$$

dann gilt:

a) Die Abbildung T hat genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in \mathcal{D}$, d.h.

$$\boxed{\exists \bar{x} \in \mathcal{D} \quad T(\bar{x}) = \bar{x}}$$

b) Ist $x_0 \in \mathcal{D}$ ein beliebiger Punkt, dann konvergiert die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n+1} := T(x_n)$ für $n \geq 0$ gegen den Fixpunkt $\bar{x} \in \mathcal{D}$. Es gilt die Fehlerabschätzung:

$$\boxed{\|x_n - \bar{x}\| \leq \frac{L^n}{1 - L} \cdot \|x_1 - x_0\|}$$

Einen **Beweis** findet man z.B. in [Walter][Seite 45 ff.].

Satz 8.2 (Dirac-Folgen) Als Dirac-Folge bezeichnen wir eine Familie von Funktionen $(f_n)_n$, wenn gilt:

$$a) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \wedge \quad f_n \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{L}^1$$

$$b) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq \varepsilon} f_n(x) dx = 0$$

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1$$

Dirac-Folgen werden mitunter reell indiziert als $(f_c)_{c \rightarrow c_0}$, wobei die Scharparametermenge für c den Häufungspunkt c_0 hat und entsprechend die Limites für $c \rightarrow c_0$ zu bilden sind.

Ist $(f_n)_n$ eine Dirac-Folge, dann gilt:

$$\boxed{\forall h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \in \mathcal{C}^0 \cap \mathcal{L}^\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_n(x) dx = h(0)}$$

Weil die Voraussetzungen im Vergleich zum Üblichen verallgemeinert wurden, **beweisen** wir diesen Satz:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f_n(x) dx - h(0) \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - h(0)| \cdot f_n(x) dx + |h(0)| \cdot \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx - 1 \right| \\ &\leq \underbrace{\max_{|x| \leq \delta} |h(x) - h(0)|}_{\rightarrow 0 \text{ für } \delta \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\int_{|x| \leq \delta} f_n(x) dx}_{\rightarrow 1 \text{ für } n \rightarrow \infty} + \underbrace{\max_{|x| \geq \delta} |h(x) - h(0)|}_{\leq 2\|h\|_{\mathcal{L}^\infty}} \cdot \underbrace{\int_{|x| \geq \delta} f_n(x) dx}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} + \underbrace{|h(0)|}_{\leq \|h\|_{\mathcal{L}^\infty}} \cdot \underbrace{\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx - 1 \right|}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} \quad \square \end{aligned}$$

Satz 8.3 (Fourier-Transformation) Die Zuordnung

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \ni u \rightarrow \hat{u} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \hat{u}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx$$

ist eine wohldefinierte unitäre Abbildung, d.h. es gilt:

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \quad \langle u, u \rangle_{\mathcal{L}^2} = \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle_{\mathcal{L}^2}} \quad (288)$$

Einen **Beweis** findet man z.B. in [Renardy & Rogers][Seite 154 ff.].

Nachfolgend die wichtigsten Eigenschaften der Fourier-Transformation (vgl. [Vachenaer]):

| | | |
|--|--|-------|
| $f(x)$ $F(x)$ | $F(\xi) := (\mathcal{F}f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$ $2\pi f(-\xi)$ | |
| $af(x) + g(x)$ $\overline{f(x)}$ | $aF(\xi) + G(\xi)$ $\overline{F(\xi)}$ | |
| $f(x+a) \quad (a \in \mathbb{R})$ $f(ax) \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ | $e^{ia\xi} F(\xi)$ $\frac{1}{ a } F\left(\frac{\xi}{a}\right)$ | |
| $x^n f(x) \quad (n \in \mathbb{N})$ $\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$ $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ | $\left(i \frac{d}{d\xi}\right)^n F(\xi)$ $(i\xi)^n F(\xi)$ $\frac{F(\xi)}{i\xi} + \pi F(0)\delta(\xi)$ | |
| $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy$ $(f \cdot g)(x)$ | $(F \cdot G)(\xi) \quad (\text{Faltungssatz})$ $\frac{1}{2\pi} \cdot (F * G)(\xi)$ | (289) |
| 1 $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $\delta(x)$ | $2\pi \delta(\xi) \quad (\text{Dirac-}\delta)$ $\frac{1}{i\xi} + \pi\delta(\xi)$ 1 | |
| $\frac{1}{x^n}$ | $\frac{\pi(-i)^n}{(n-1)!} \xi^{n-1} \text{sign}(\xi)$ | |
| $\frac{\alpha + i\beta x}{1 + x^2}$ | $\pi e^{- \xi } (\alpha + \beta \text{sign}(\xi))$ | |
| $\alpha \cos x + i\beta \sin x$ $\frac{\alpha}{\cosh x} + \frac{i\beta}{\sinh x}$ $\frac{\sin x}{\pi x}$ $\alpha \frac{\sinh(ax)}{\sinh(\pi x)} + \beta \frac{\cosh(ax)}{\cosh(\pi x)} \quad (0 < a < \pi)$ | $\alpha \pi (\delta(\xi+1) + \delta(\xi-1)) - \beta \pi (\delta(\xi+1) - \delta(\xi-1))$ $\alpha \frac{\pi}{\cosh \frac{\pi\xi}{2}} + \beta \pi \tanh \frac{\pi\xi}{2}$ $\chi_{[-1,1]}(\xi)$ $\alpha \frac{\sin a}{\cosh \xi + \cos a} + \beta \frac{2 \cos \frac{a}{2} \cosh \frac{\xi}{2}}{\cosh \xi + \cos a}$ | |

Corollar 8.4 (Fourier-Sinus, Cosinus-Transformation) Für $v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ sei:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_c v)(\xi) &:= \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \cos(x\xi) dx = (\mathcal{F}_c v)(-\xi) \\ (\mathcal{F}_s v)(\xi) &:= \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \sin(x\xi) dx = -(\mathcal{F}_s v)(-\xi) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\boxed{\mathcal{F}_c \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s \mathcal{F}_c, \quad \mathcal{F} = (\mathcal{F}_c - i \mathcal{F}_s), \quad \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^* = (\mathcal{F}_c + i \mathcal{F}_s)} \quad (290)$$

$$\boxed{v(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ((\mathcal{F}_c v)(\xi) \cos(y\xi) + (\mathcal{F}_s v)(\xi) \sin(y\xi)) d\xi} \quad (291)$$

Definition & Satz 8.5 (Faltung) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \ni (f, g) &\mapsto f * g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \\ (g * f)(x) = (f * g)(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(x-y) dy \end{aligned}$$

heißt Faltung der Funktion f mit g . Deren Wohldefiniertheit ergibt sich aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung:

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \cdot |g(x-y)| dy \stackrel{CS}{\leq} \|f\|_{\mathcal{L}^2} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}^2}$$

Für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit $f, f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ und $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ist auch $f * g$ stetig-differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{(f * g)' = f' * g} \quad (292)$$

Satz 8.6 (Sobolevscher Einbettungssatz) Seien $m, n, k \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und $m \geq 1$. Den Raum der n -mal stetig-differenzierbaren Funktionen auf dem \mathbb{R}^m bezeichnen wir mit \mathcal{C}^n und versehen ihn mit der Pseudo-Norm:

$$\mathcal{C}^n \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{C}^n} := \sum_{i=0}^n \|f^{(i)}\|_{\infty} \in [0, \infty] \quad \left(f \in \mathcal{C}^0: \|f\|_{\infty} := \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^m\} \right)$$

Unterräume von \mathcal{C}^k sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_b^n &:= \{f \in \mathcal{C}^n : \|f\|_{\mathcal{C}^n} < \infty\} \\ \mathcal{C}_0^n &:= \{f \in \mathcal{C}^n : \text{supp}(f) \text{ beschränkt}\} \subset \mathcal{C}_b^n \quad \left(\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \neq 0\}} \right) \end{aligned}$$

Für $1 \leq p < \infty$ erhält man weitere Normen auf \mathcal{C}_0^n :

$$\mathcal{C}_0^n \ni f \mapsto \|f\|_{n,p} := \sum_{i=0}^n \|f^{(i)}\|_p \in [0, \infty[\quad \left(\|f\|_p^p := \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^p dx \right)$$

Als Sobolev-Raum wird die Vervollständigung des Raums \mathcal{C}_0^n bzgl. der $\|\cdot\|_{n,p}$ bezeichnet:

$$\mathcal{W}^{n,p} := \overline{\mathcal{C}_0^n}^{\|\cdot\|_{n,p}} \quad \mathcal{H}^n := \mathcal{W}^{n,2}$$

Eine Form des Sobolevschen Einbettungssatzes besagt: Wenn $p \cdot n > m$ gilt, dann kann man die Funktionen in $\mathcal{W}^{p,n+k}$ mit Funktionen in \mathcal{C}_b^k identifizieren und diese Einbettung ist stetig bzgl. der jeweiligen Normen:

$$n > \frac{m}{p} \Rightarrow \mathcal{W}^{n+k,p} \hookrightarrow \mathcal{C}_b^k \quad \& \quad \exists c \quad \|\cdot\|_{\mathcal{C}^k} \leq c \cdot \|\cdot\|_{n+k,p}$$

Einen **Beweis** findet man z.B. in [Renardy & Rogers][Seite 215 ff.].

Es gilt noch eine Verschärfung in Bezug auf die Hölderstetigkeit. Sei $0 < \alpha \leq 1$:

$$\mathcal{C}^n \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{C}^{n,\alpha}} := \|f\|_{\mathcal{C}^n} + \sup \left\{ \frac{|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)|}{|x-y|^\alpha} : x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y \right\}$$

$$\mathcal{C}_b^{n,\alpha} := \{f \in \mathcal{C}^n : \|f\|_{\mathcal{C}^{n,\alpha}} < \infty\}$$

$$n > \frac{m}{p} + \alpha \Rightarrow \mathcal{W}^{n+k,p} \hookrightarrow \mathcal{C}_b^{k,\alpha} \quad \& \quad \exists c \quad \|\cdot\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}} \leq c \cdot \|\cdot\|_{n+k,p}$$

Man vergleiche hierzu [Alt][Seite 217 ff.].

Bei einer stetig-differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ folgt aus der Bedingung $f' \neq 0$, dass die Funktion f injektiv ist. Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig-differenzierbar, sodass für alle $x \in G$ noch $\det f'(x) \neq 0$ gilt, so folgt aus dem *Satz über implizit definierte Funktionen* immerhin noch die lokale Injektivität.

Aus [Pommerenke][Seite 15 ff.] haben wir folgendes Lemma entnommen:

Lemma 8.7 (Injektivitäts-Kriterium) *Das Gebiet $H \subset \hat{\mathcal{C}}$ sei konvex und die Funktion $f : H \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ holomorph. Wenn gilt*

$$\forall z \in H \quad \Re f'(z) \neq 0,$$

dann ist die Funktion f injektiv.

Im erstaunlich einfachen **Beweis** nehmen wir $\Re f' > 0$ an. Seien $z_1, z_2 \in H$ zwei verschiedene Punkte, so ist deren Verbindungsstrecke ganz in H enthalten und aus

$$\Re \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \int_0^1 \Re f'(z_1 + t(z_2 - z_1)) dt > 0$$

folgt dann $f(z_1) \neq f(z_2)$. \square

8.2 Ab- und Ableitungen einiger elementarer Funktionen

| $f'(x)$ | $f(x)$ | $\int f(x) dx$ |
|---|--|---|
| $\alpha x^{\alpha-1}$ | $x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (\alpha \notin \mathbb{N}: 0 < x)$ | $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x \quad (x \neq 0)$ | $x \ln x - x$ |
| e^x | e^x | e^x |
| $\cos x$ | $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ | $-\cos x$ |
| $-\sin x$ | $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ | $\sin x$ |
| $\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ | $\csc x = \frac{1}{\sin x} \quad (0 < x < \pi)$ | $-\operatorname{artanh} \cos x = \ln \tan \frac{x}{2}$ |
| $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ | $\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ | $\operatorname{artanh} \sin x$ |
| $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ | $-\ln \cos x$ |
| $-(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ | $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (0 < x < \pi)$ | $\ln \sin x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x \quad (-1 < x < 1)$ | $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ |
| $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \quad (-1 < x < 1)$ | $x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ | $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ |
| $\frac{-1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ | $x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ |
| $\cosh x$ | $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ | $\cosh x$ |
| $\sinh x$ | $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ | $\sinh x$ |
| $\frac{-\cosh x}{\sinh^2 x}$ | $\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \quad (x \neq 0)$ | $\ln \tanh \frac{ x }{2} = \ln \frac{e^{ x }-1}{e^{ x }+1}$ |
| $\frac{-\sinh x}{\cosh^2 x}$ | $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ | $\arctan \sinh x$ |
| $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$ | $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ | $\ln \cosh x$ |
| $1 - \coth^2 x = \frac{-1}{\sinh^2 x}$ | $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \quad (x \neq 0)$ | $\ln \sinh x $ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ | $x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (1 < x)$ | $x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$ | $x \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$ |
| $\frac{-1}{x^2-1}$ | $\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (1 < x)$ | $x \operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2} \ln(x^2-1)$ |
| $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$ | $\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$ |
| $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\sqrt{x^2-1} \quad (1 < x)$ | $\frac{1}{2}(-\operatorname{arcosh} x + x\sqrt{x^2-1})$ |
| $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\sqrt{x^2+1}$ | $\frac{1}{2}(\operatorname{arsinh} x + x\sqrt{x^2+1})$ |
| $\frac{x}{1+x^2}$ | $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ | $\frac{x}{2} \ln(1+x^2) - x + \arctan x$ |
| $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ | $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ | $\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$ |
| $-2 \sin x \cos x$ | $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ | $\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$ |
| $2 \sinh x \cosh x = \sinh(2x)$ | $\sinh^2 x = \frac{-1+\cosh(2x)}{2}$ | $\frac{1}{2}(-x + \sinh x \cosh x)$ |
| $2 \sinh x \cosh x$ | $\cosh^2 x = \frac{1+\cosh(2x)}{2}$ | $\frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x)$ |

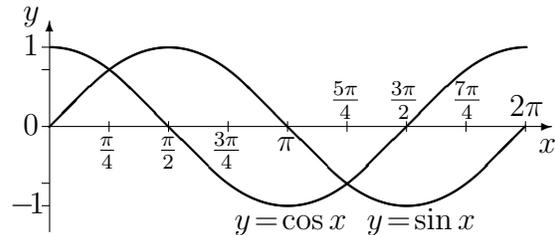
8.3 Winkel- und Hyperbelfunktionen

Relationen

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} & \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \sinh(ix) &= i \sin x \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \cosh(ix) &= \cos x \\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} & \tanh(ix) &= i \tan x \\ \cos^2 + \sin^2 &= 1 & \cosh^2 - \sinh^2 &= 1 & & \end{aligned}$$

Funktionswerte

| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|----------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ∞ |



Symmetrie, Periodizität, Komplement ($x \in \mathbb{R}$, $r \in (-1, 1)$)

$$\begin{aligned} -\sin(-x) &= \sin x = -\sin(x \pm \pi) = \cos(x - \frac{\pi}{2}) & -\sinh(-x) &= \sinh x \\ \cos(-x) &= \cos x = -\cos(x \pm \pi) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) & \cosh(-x) &= \cosh x \\ -\tan(-x) &= \tan x = \tan(x \pm \pi) & -\tanh(-x) &= \tanh x \\ \arcsin r + \arcsin(-r) &= 0 \\ \arccos r + \arccos(-r) &= \pi \\ \arctan x + \arctan(-x) &= 0 & \arctan x + \arctan \frac{1}{x} &= \text{sign}(x) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Additionstheoreme ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \sinh(x + y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cosh(x + y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} & \tanh(x + y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} \end{aligned}$$

Produkttheoreme ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} 2 \sin x \sin y &= \cos(x - y) - \cos(x + y) & 2 \sinh x \sinh y &= \cosh(x + y) - \cosh(x - y) \\ 2 \sin x \cos y &= \sin(x - y) + \sin(x + y) & 2 \sinh x \cosh y &= \sinh(x + y) + \sinh(x - y) \\ 2 \cos x \cos y &= \cos(x - y) + \cos(x + y) & 2 \cosh x \cosh y &= \cosh(x + y) + \cosh(x - y) \end{aligned}$$

Substitutionen

$$\begin{aligned} \int_a^b R(\sin x, \cos x) dx &= \int_{\tan \frac{a}{2}}^{\tan \frac{b}{2}} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2} \\ \int_a^b R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx &= \int_{\tan a}^{\tan b} R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2} \\ \int_a^b R(\sinh x, \cosh x) dx &= \int_{\tanh \frac{a}{2}}^{\tanh \frac{b}{2}} R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \frac{2 dt}{1-t^2} \\ \int_a^b R(\sinh^2 x, \cosh^2 x) dx &= \int_{\tanh a}^{\tanh b} R\left(\frac{t^2}{1-t^2}, \frac{1}{1-t^2}\right) \frac{dt}{1-t^2} \end{aligned}$$

8.4 Zerlegungen in Real- und Imaginärteil; spezielle Integrale

Wir benutzen in dieser Arbeit ständig elementare Umformungen und Integrale, die wir jetzt zusammenstellen.

Zerlegungen in Real- und Imaginärteil:

$$\tanh \frac{\sigma - i\omega}{2} = \frac{\sinh \sigma - i \sin \omega}{\cosh \sigma + \cos \omega} \quad (293)$$

$$\frac{1}{\tanh(\sigma - i\omega)} = \frac{\sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} + i \frac{\sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} \quad (294)$$

$$\frac{1}{\sinh(\sigma - i\omega)} = \frac{\sinh \sigma \cos \omega + i \cosh \sigma \sin \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} \quad (295)$$

$$\frac{\sigma - i\omega}{\tanh(\sigma - i\omega)} = \frac{\sigma \sinh \sigma \cosh \sigma - \omega \sin \omega \cos \omega}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} + i \frac{\sigma \sin \omega \cos \omega - \omega \sinh \sigma \cosh \sigma}{\sinh^2 \sigma + \sin^2 \omega} \quad (296)$$

Bestimmte Integrale

$$-\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \ln \left| \tanh \frac{\rho}{2} \right| d\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho}{\sinh \rho} d\rho = \frac{\pi^2}{2} \quad (297)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+t^2) \sin^2 \omega}{(1+t^2)^2 \sin^2 \omega + 4t^2 \cos^2 \omega} dt = \frac{\pi}{2} |\sin \omega| \quad (298)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(1-t^2) \sin^2 \omega}{(1+t^2)^2 \sin^2 \omega + 4t^2 \cos^2 \omega} dt = \frac{\pi}{2} |\tan \omega| - \omega \tan \omega \quad \left(\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (299)$$

$$\mathcal{P} \int_{-1}^1 \frac{at + b}{(1+t^2) \sinh \rho \pm 2t \cosh \rho} dt = \frac{\pm a \rho}{\sinh \rho} \quad (300)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{at + b}{(1+t^2) \cosh \rho \pm 2x \sinh \rho} dt = \pm a (\rho - \tanh \rho) + \frac{\pi}{2} b \quad (301)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(at + b) \sin \omega dt}{(1+t^2) \cosh \rho \pm 2t \sinh \rho + (1-t^2) \cos \omega} = \pm a \frac{\rho \sin \omega - \omega \sinh \rho}{\cosh \rho - \cos \omega} + b \omega \quad \left(\omega \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (302)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\cosh \rho + \cos \omega} d\rho = \frac{\omega}{\pi} \quad (\omega \in (-\pi, \pi)) \quad (303)$$

$$\frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\cosh \rho - \cos \omega} d\rho = \frac{\omega}{\pi} - \text{sign}(\omega) \quad (\omega \in (-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)) \quad (304)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\cosh \mu \pm \cos \omega} = \frac{2}{\sinh \mu} \arctan \frac{\sinh \mu}{\cosh \mu \pm 1} \quad (\mu \neq 0) \quad (305)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(1 \pm \frac{\cos \omega}{\cosh \mu} \right) d\omega = \pi \ln \frac{\cosh \mu + \sinh \mu}{2 \cosh \mu} \quad (\mu \neq 0) \quad (306)$$

Fourier-Transformierte

$$|\Re(\beta)| < \Re(\gamma)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cosh(\beta x)}{\cosh(\gamma x)} \cos(\alpha x) dx = \frac{\pi}{\gamma} \frac{\cosh \frac{\pi\alpha}{2\gamma} \cos \frac{\pi\beta}{2\gamma}}{\cosh \frac{\pi\alpha}{\gamma} + \cos \frac{\pi\beta}{\gamma}} \quad [\text{Gradshteyn}][3.981.10] \quad (307)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh(\beta x)}{\sinh(\gamma x)} \cos(\alpha x) dx = \frac{\pi}{2\gamma} \frac{\sin \frac{\pi\beta}{\gamma}}{\cosh \frac{\pi\alpha}{\gamma} + \cos \frac{\pi\beta}{\gamma}} \quad [\text{Gradshteyn}][3.981.5] \quad (308)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh(\beta x)}{x \cdot \cosh(\gamma x)} \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cosh \frac{\pi\alpha}{2\gamma} + \sin \frac{\pi\beta}{2\gamma}}{\cosh \frac{\pi\alpha}{2\gamma} - \sin \frac{\pi\beta}{2\gamma}} \right) \quad [\text{Gradshteyn}][4.114.2] \quad (309)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh(\beta x)}{x \cdot \sinh(\gamma x)} \sin(\alpha x) dx = \arctan \left(\tanh \frac{\pi\alpha}{2\gamma} \tan \frac{\pi\beta}{2\gamma} \right) \quad [\text{Gradshteyn}][4.114.1] \quad (310)$$

Literatur

- [Alt] H. W. Alt: Lineare Funktionalanalysis
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokio, 1985
- [Bear] J. Bear: Hydraulics of Groundwater
McGraw-Hill New York, 1979
- [Deempter] J.J. van Deemter: Theoretische en numerieke behandeling van waterings-
infiltratie-stromingsproblemen
Versl. Landb. Onderz. No 56.7, p.1-67, 1950
- [Edenhofer-1] J. Edenhofer and G. H. Schmitz: Pressure Distribution in a Semi-Infinite
Horizontal Aquifer with Steep Gradients Due to Steady Recharge and/or Drainage:
The Exact Explicit Solution.
Transport in Porous Media **45**, 347-366, 2001
- [Erdélyi] Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi: Tables of Integral Transforms
McGraw-Hill, New York, 1954
- [Forster] Otto Forster: Analysis 1
Vieweg Verlagsgesellschaft mbH Braunschweig, 1983
- [Gradshteyn] I. S. Gradshteyn/I. M. Ryzhik: Table of Integrals, Series and Products
Academic Press Inc. New York, 1965
- [Jänich] Klaus Jänich: Einführung in die Funktionentheorie
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980
- [Lawrentjew] Lawrentjew/Schabat: Methoden der Komplexen Funktionentheorie
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1967
- [Pan] Dongfeng Pan: Semi-analytische Behandlung einer partiellen Differentialgleichung
Diplomarbeit, betreut von J.Edenhofer, TU München, November 1988
- [Pommerenke] Ch. Pommerenke: Boundary Behaviour of Conformal Maps
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992
- [Muschelischwili] N.I. Muschelischwili: Singuläre Integralgleichungen
Akademie-Verlag GmbH Berlin, 1965
- [Schmitz-1] G. Schmitz and J. Edenhofer: Semi-analytical solutions for the groundwater
mound problem
Adv. Water Resources, 11, 21-24, 1988
- [Schmitz-2] G. Schmitz and J. Edenhofer: Exact closed-form solutions of the two-dimen-
sional Laplace equation for steady groundwater flow with nonlinearized free-surface
boundary condition
Water Resources Research, vol. 36, no. 7, pages 1975-1980, July 2000

[Renardy & Rogers] Renardy & Rogers: An Introduction to Partial Differential Equations
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1996

[Vachenauer] L. Råde, B. Westergren, P. Vachenauer: Springers Mathematische Formeln
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000

[Walter] W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1986

8.5 Symbol-Verzeichnis

| | | |
|--|---|--|
| \hat{A}, A | = | Parallelstreifen $\mathbb{R} + i] - d, 0[$, Aquifer (wassergesättigter Bereich) |
| a | = | untere Intervallgrenze, $-\int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \hat{f}_u(u) du$ („ f -Fläche“) |
| b | = | obere Intervallgrenze |
| d | = | Tiefe einer wasserführenden Schicht in m , Differential dx, dy, \dots |
| E | = | (potentielle) Energie in $J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$ |
| $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ | = | Einheitsvektor in x, y -Richtung (horizontal) |
| \mathbf{e}_z | = | Einheitsvektor in z -Richtung (vertikal) |
| $\hat{\mathbf{F}}, \check{\mathbf{F}}$ | = | konforme Transformation zwischen den Aquiferen \hat{A} und A |
| f, \hat{f} | = | Höhen-Funktion des Grundwasserspiegels |
| G | = | Grund eines Aquifers A |
| \hat{G} | = | Greenfunktion für das Druckpotential |
| g, \mathbf{g} | = | $9.81 \frac{m}{s^2}$ = Erdbeschleunigung ($\mathbf{g} = -g \cdot \mathbf{e}_z$) |
| H | = | Hilbert-Operator |
| \hat{H} | = | Greenfunktion für das Strompotential |
| h | = | $\frac{f(+\infty) - f(-\infty)}{2}$ (f -Stufe) |
| I | = | (Massen-) Strom durch eine Fläche in $\frac{kg}{s}$ |
| i | = | komplexe Einheit, Laufindex |
| j | = | Lauf-Index |
| \mathbf{j} | = | Vektor der (Massen-) Stromdichte in $\frac{kg}{m^2 \cdot s}$ |
| K | = | Leitwert für Wasser im wasserführenden Medium in $\frac{m}{s}$ |
| k | = | natürliche Zahl, Lauf-Index |
| L_b | = | Raum der beschränkten Homomorphismen |
| m | = | Masse in kg , natürliche Zahl |
| N, \mathbf{N} | = | Oberflächen-Bewässerungs-Stromdichte in $\frac{m}{s}$ ($\mathbf{N} = -N\mathbf{e}$) |
| n | = | natürliche Zahl, Indexgrenze, Porosität $\in]0, 1[$ |
| n_e | = | effektive Porosität $\in]0, n[$ |
| p | = | Wasser-Druck in $\frac{kg}{m \cdot s^2} = \frac{N}{m^2} = \frac{bar}{10\,000}$ |
| p | = | $\frac{p}{\rho g}$ = Druckpotential, ($\rho g = 9810 \frac{kg}{m^2 \cdot s^2} = 0.0981 \frac{bar}{m}$), \mathcal{L}^p -Index |
| q | = | Strompotential |
| \mathbf{q} | = | Vektor der Volumen-Stromdichte in $\frac{m}{day}$ |
| Q | = | Quell-Bewässerungs-Stromdichte in $\frac{1}{day}$ |
| \mathbf{r} | = | Ortsvektor in m |
| S | = | Oberfläche eines Aquifers A |
| T | = | (affiner) Operator, Funktion. Anwendung des Fixpunktsatzes |
| t | = | Zeit in day |
| u, \check{u} | = | u -Koordinate in \hat{A} , Realteil von $\check{\mathbf{F}}$ |
| V | = | Volumen in m^3 |
| w, \check{w} | = | w -Koordinate in \hat{A} , Realteil von $\check{\mathbf{F}}$ |
| x, \hat{x} | = | Realteil einer komplexen Zahl z , x -Koordinate in A , Realteil von $\hat{\mathbf{F}}$ |
| y | = | Imaginärteil einer komplexen Zahl z , y -Koordinate in A |
| z, \hat{z} | = | komplexe Zahl, z -Koordinate in A , Imaginärteil von $\hat{\mathbf{F}}$ |

| | | |
|------------------------------|---|--|
| \mathcal{C} | = | Bezeichnung von Kurven |
| \mathcal{C}^n | = | Raum der n -mal stetig-differenzierbaren Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) |
| $\mathcal{C}^{n,\alpha}$ | = | $\{f \in \mathcal{C}^n \mid \exists k \forall i=0, \dots, n \forall x, y \mid f^{(i)}(x) - f^{(i)}(y) \leq k \cdot x - y ^\alpha\}$ ($0 < \alpha \leq 1$) |
| $\mathcal{C}_\pm^{n,\alpha}$ | = | $\{f \in \mathcal{C}^{n,\alpha} \mid \exists h \ f - h \tanh \in \mathcal{L}^1\}$ |
| \mathcal{F} | = | Fourier-Transformation |
| \mathcal{F}_c | = | Fourier-Cosinus-Transformation |
| \mathcal{F}_s | = | Fourier-Sinus-Transformation |
| \mathcal{H}^n | = | $\mathcal{W}^{n,2}$ |
| \mathcal{L}^p | = | Raum der p -Lebesgue-integrierbaren Funktionen ($1 \leq p < \infty$) |
| \mathcal{N} | = | Stammfunktion von $\frac{N-ft}{K}$ |
| $\hat{\mathcal{N}}$ | = | $\hat{\mathcal{N}}(u) = \mathcal{N}(\bar{x}(u)) + \hat{\mathcal{Q}}(u)$ |
| \mathcal{O} | = | Groß-O-Fehlerfunktion: $f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \iff \exists C > 0 \mid f(x) < C \cdot g(x) $ |
| \mathcal{P} | = | deutet die Hauptwertbildung eines Integrals an |
| $\hat{\mathcal{Q}}$ | = | Quellfunktion |
| \mathcal{S}^n | = | $\{f \in \mathcal{C}^n \mid \forall i=0, \dots, n \forall k \in \mathbb{N} \mid u ^k f^{(i)}(u) \xrightarrow{ u \rightarrow \infty} 0\}$ |
| \mathcal{S}_\pm^n | = | $\{f \mid \exists h \ f - h \tanh \in \mathcal{S}^n\}$ |
| $\mathcal{W}^{n,p}$ | = | Sobolev-Raum mit der Norm $g \mapsto \sum_{i=0}^n \ g^{(i)}\ _{\mathcal{L}^p}$ |
| \mathcal{C} | = | Menge aller komplexen Zahlen |
| \mathbb{N} | = | Menge aller natürlichen Zahlen ($0 \in \mathbb{N}$) |
| \mathbb{R} | = | Menge aller reellen Zahlen |
| δ | = | Dirac- δ |
| α | = | Hölderexponent $\in]0, 1]$ |
| α_i | = | 0-ter Polynom-Koeffizient |
| β_i | = | 1-ter Polynom-Koeffizient |
| γ_i | = | 2-ter Polynom-Koeffizient |
| δ_i | = | 3-ter Polynom-Koeffizient |
| ζ | = | komplexe Zahl |
| η | = | komplexe Zahl |
| ξ | = | komplexe Zahl |
| ρ | = | $\frac{\pi(r-u)}{2d}$, $d\rho = \frac{\pi}{2d} d\rho$; Wasserdichte= $1000 \frac{kg}{m^3}$ |
| σ | = | $\frac{\pi(s-u)}{2d}$, $d\sigma = \frac{\pi}{2d} d\sigma$ |
| ω | = | $\frac{\pi w}{2d}$ |
| Δ | = | Laplace-Operator |
| Φ | = | Potential, Energiedichte in $\frac{kg}{m \cdot s^2} \cdot \frac{1}{\rho g}$ |

Index

- h , Grundwasserstufe, 11
- $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{C}^{n,\alpha}$, 10
- Additionstheoreme, 103
- Aquifer A , 6
- Banach, 98
- Bewässerung, Oberflächen- N , 8
- Bewässerungsgleichung, 54
- Bewässerungskorrespondenz, 50, 51, 53
- Bilanz-Gleichung, 21
- Cauchy, 88
- Cauchy-Hauptwert, 88, 91
- Cauchy-Schwarz, 100
- charakteristische Funktion, 29
- CS, 100
- Darcy-Gesetz, 6
- Dichte ρ , 6
- Dirac-Folge, 98
- Druck p , 6
- Druckpotential p , 6
- Druckpotential, homogenes \hat{p}^h , 14
- Druckpotential, Quell- \hat{p}^i , 14
- Einbettungssatz, 100
- Energiedichte Φ , 6
- Erdbeschleunigung g , 6
- Faltung, 100
- Fixpunktsatz, 45, 98
- Formeln von Sochozki & Plemelj, 88
- Fourier-Cosinus-Transformation, 100
- Fourier-Sinus-Transformation, 100
- Fourier-Transformation, 99
- Greenfunktion des Druckpotentials, 16
- Greenfunktion des Strompotentials, 17
- Grundwasserfläche a , 52
- Grundwasserkorrespondenz, 50–53, 93
- Grundwasserspiegel, 7
- Grundwasserstufe, 50
- Grundwasserstufe $2h$, 52
- hölderstetig, 88
- Hilbert-Transformation, 90, 92
- Hyperbelfunktionen, 103
- Injektivitäts-Kriterium, 101
- innere Bewässerung Q , 6
- instationäres Problem, 9
- inverses Problem, 9, 48
- Konduktivität K , 6
- konform, 11
- Kontinuitätsgleichung, 6
- Leitwert K , 6
- Masse m , 6
- Newton-Verfahren, 81
- Nulllage, 11
- Oberflächenrandbedingung, 8
- Plemelj, 88
- Polygon-Addition, 79
- Polygon-Approximation, 78
- Porosität n , 6
- Porosität, effektive n_e , 7
- Privalov, 88
- Produkttheoreme, 103
- Quelle, 6
- Quellstärke Q , 6
- Randabbildung \bar{x} , 12
- Satz über implizite Funktionen, 80, 101
- Satz von Plemelj & Privalov, 88, 91
- Satz von Sochozki & Plemelj, 91
- Senke, 6
- Singularität, 80
- Sobolev, 45, 100
- Sochozki, 88
- stationäres Problem, 9
- Strom, Massen- I_A , 6
- Strom, Quell- I_V , 6

- Stromdichte, Massen- \mathbf{j} , 6
- Stromdichte, Quell- Q , 6
- Stromdichte, Volumen- \mathbf{q} , 6
- Strompotential, homogenes \hat{q}^h , 15, 74
- Strompotential, Quell- \hat{q}^i , 17
- Stufenformel, 57

- transform. Oberflächenrandbedingung, 21
- Transformationsgleichung, 20

- unitäre Abbildung, 99

- Winkelfunktionen, 103