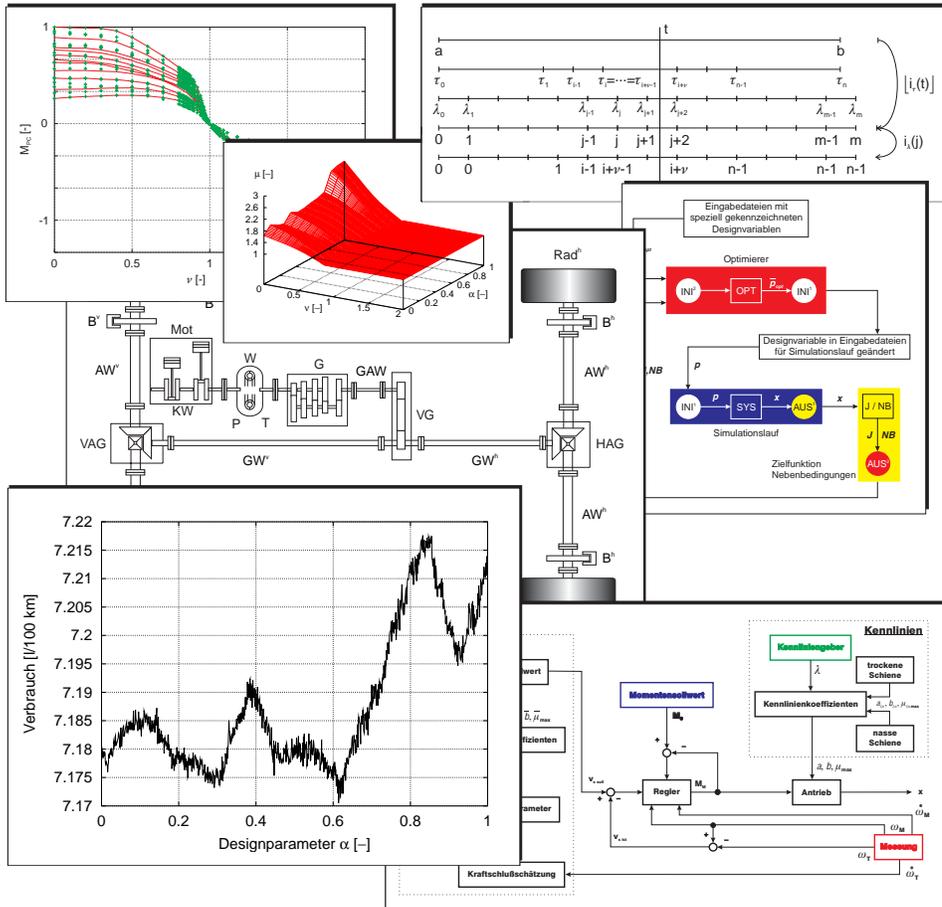


# Optimale Auslegung des Antriebsstrangs von Kraftfahrzeugen

## Modellbildung, Simulation und Optimierung

Dietmar Tscharnuter





Zentrum Mathematik  
Technische Universität München

**Optimale Auslegung  
des Antriebsstrangs von Kraftfahrzeugen  
Modellbildung, Simulation und Optimierung**

*Dietmar Tscharnuter*

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Oswald Giering, em.

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Roland Bulirsch, em.
2. Univ.-Prof. Dr. Hans Josef Pesch, Universität Bayreuth

Die Dissertation wurde am 30.06.2000 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 22.11.2002 angenommen.



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl M2 für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik der Technischen Universität München im Rahmen des Transferprojekts TP9 *Optimierungsverfahren zur verbrauchsoptimalen Auslegung des Kfz-Antriebsstrangs* des *Bayerischen Forschungsverbundes für technisch-wissenschaftliches Hochleistungsrechnen* (FORTWIHR) sowie während meiner Tätigkeit als Doktorand in der Abteilung EB-24 der BMW AG.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Roland Bulirsch, dem Projektleiter, für seine stete Förderung und Unterstützung dieser Arbeit und Herrn Dipl.-Math. Karl-Josef Plitt, dem Projektleiter seitens des Industriepartners BMW AG.

Für die zahlreichen anregenden Diskussionen und wertvollen Hinweise bin ich Herrn Dr. Oskar von Stryk und allen Kolleginnen und Kollegen der Arbeitsgruppe M2 zu herzlichem Dank verpflichtet. Bei Frau Christina Bandel bedanke ich mich für die Erstellung der Abbildung 1.9 auf Seite 31.

Für die fruchtbare Zusammenarbeit bei Modellierung und Simulation von Fahrleistung und Verbrauch in der Fahrzeugtechnik danke ich den Mitarbeitern des Teams bei EB-24, im speziellen Herrn Dipl.-Ing. Hans-Hermann Heckes und Herrn Dr.-Ing. Jürgen Krause sowie Herrn Dr.-Ing. Dirk Dennin von der Abteilung EA-71 der BMW AG.

Für die Überlassung der Programme IFAHRDY und LABORAUTO für die Untersuchungen in dieser Arbeit danke ich den Herren Dr.-Ing. Dirk Dennin und Dr.-Ing. Elias Pankiewicz. Für die Freischaltung einer SIMPACK-Lizenz und die Bereitstellung von Meßdaten zur Durchführung der Machbarkeitsstudie beim Test der Programmschnittstelle von OPTIMA danke ich Herrn Dr.-Ing. Andreas Raith von der Abteilung EG-310 der BMW AG.

München, im Juni 2000

Dietmar Tscharnuter



# Inhaltsverzeichnis

<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Algorithmenverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Fahrdynamikmodelle zur Auslegung des Antriebsstrangs</b>	<b>6</b>
1.1 Aufgabenstellungen in der Fahrdynamik . . . . .	6
1.2 Modellierung des Gesamtfahrzeuges . . . . .	8
1.3 Bewegungsgleichungen . . . . .	10
1.3.1 Allgemeine mathematische Modellformulierung . . . . .	11
1.3.2 Mehrkörpersysteme mit Baumstruktur . . . . .	11
1.3.3 Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen . . . . .	13
1.4 Beispiele für Fahrdynamikmodelle landgestützter Fahrzeuge . . . . .	13
1.5 Modellierung komplexer Bauteile mit Kennfeldern . . . . .	15
1.5.1 Kennfelder des Motormoments und Verbrauchs . . . . .	16
1.5.2 Kennlinien des Automatikgetriebes . . . . .	17
1.5.3 Reifenkennlinien zur Berechnung der äußeren Momente . . . . .	25
1.5.4 Regler . . . . .	27
1.6 Fahrdynamikmodelle in der Verbrauchsrechnung . . . . .	30
<b>2 Mathematische Modellierung von Kennlinien</b>	<b>36</b>
2.1 Parametrisierte Modelle für Kennlinien . . . . .	36
2.1.1 Aufwandreduzierte Berechnung von Splines . . . . .	42
2.1.2 Berechnung der Spline-Koeffizienten . . . . .	48
2.1.3 2D-Splines auf Tensorproduktgittern . . . . .	49
2.2 Parametrisierungen von Kennlinien . . . . .	51
2.2.1 Parametrisierungen in der Literatur . . . . .	51
2.2.2 Bogenlänge als Parameter . . . . .	53
2.2.3 Berechnung der Parametrisierung nach der Bogenlänge . . . . .	56
2.3 Einbettung von Kennlinien . . . . .	60

2.3.1	Konvexe Linearkombination . . . . .	62
2.3.2	Kennlinie als ebene Kurve im $\mathbb{E}^2$ . . . . .	63
2.3.3	Ein Algorithmus zur Einbettung von Kennlinien . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Mathematische Formulierung der Optimierungsprobleme bei der Auslegung des Antriebsstrangs</b>	<b>69</b>
3.1	Kennlinien als optimale Steuerung . . . . .	70
3.2	Kennlinienoptimierung als Parameteroptimierung . . . . .	72
3.2.1	Allgemeine Formulierung . . . . .	73
3.2.2	Notwendige und hinreichende Bedingungen . . . . .	76
3.2.3	Numerische Behandlung . . . . .	77
3.3	Optimierung nichtglatter Zielfunktionen . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Anwendung des Optimierungskonzepts zur optimalen Auslegung des Antriebsstrangs</b>	<b>86</b>
4.1	Optimale Auslegung des Antriebsstrangs . . . . .	86
4.1.1	Bestimmung optimaler Reglerparameter . . . . .	86
4.1.2	Verbrauchsoptimale Auslegung des Wandlers . . . . .	87
4.1.3	Auslegung der Hinterachsübersetzung . . . . .	89
4.1.4	Auslegung der Getriebeübersetzungen . . . . .	89
4.1.5	Parameteridentifikation bei Schwingungsmodellen . . . . .	90
4.2	Sensitivitätsuntersuchung . . . . .	91
4.3	Ergebnisse . . . . .	98
4.3.1	Auslegung des Geschwindigkeitsreglers beim LABORAUTO . . . . .	98
4.3.2	Optimierung von Verbrauch und Fahrleistung mit IFAHRDY . . . . .	99
4.3.3	Parameteridentifikation mit SIMPACK . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>106</b>
<b>A</b>	<b>Beispiele</b>	<b>109</b>
A.1	Achsgetriebe . . . . .	109
A.2	Ebenes Antriebsmodell einer Lokomotive . . . . .	111
A.3	Mathematisches Pendel . . . . .	122
A.4	Ebenes Lastwagenmodell . . . . .	123
<b>B</b>	<b>Implementierung</b>	<b>124</b>
B.1	Einfachschießverfahren für Optimierung . . . . .	124
B.2	Schnittstelle . . . . .	129
B.3	Erweiterungen zur Spline-Interpolation . . . . .	133
<b>C</b>	<b>Iterationslisten zu NPSOL</b>	<b>136</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>139</b>



# Tabellenverzeichnis

1.1	Beispiele zum Einsatz der Simulation bei unterschiedlichen Fragestellungen . . . . .	7
1.2	Parameter des Motors . . . . .	17
1.3	Parameter der Reibkupplung . . . . .	21
1.4	Äußere Kräfte und deren Parameter . . . . .	26
1.5	Fahrerregler des Längsdynamikmodells . . . . .	27
1.6	Mechanische Grundelemente für die Längsdynamikmodellierung . . .	32
1.7	Differentialgleichungen der Modelle zur Verbrauchsberechnung . . .	33
4.0	Nebenbedingungen zur Bestimmung optimaler Reglerparameter . . .	87
4.1	Datenblatt der Simulation zur Optimierung mit Highway-Zyklus . . .	100
4.2	Datenblatt der Simulation zur Optimierung mit ECE-Zyklus . . . . .	101
4.3	Datenblatt der Simulation zur Optimierung mit FTP-Zyklus . . . . .	102
4.4	Datenblatt der Simulation zur Optimierung mit Japan-Zyklus . . . . .	103
A.1	Drehmassen eines Achsgetriebes . . . . .	110
A.2	Das mathematische Pendel . . . . .	122
B.1	Spezielle Kennzeichnung der Parameter . . . . .	130

# Abbildungsverzeichnis

1	Einsatz der Berechnungsmodelle in Abhängigkeit von Aufwand und Entwicklungsstand des Fahrzeuges . . . . .	2
2	Schematische Darstellung des Simulationskreislaufes . . . . .	3
3	Aufbau der vorliegenden Arbeit . . . . .	5
1.1	Hierarchieebenen des Laborfahrzeuges . . . . .	14
1.2	Aufbau des Drehmomentwandler . . . . .	18
1.3	Darstellung der Arbeitsweise des Drehmomentwandler . . . . .	19
1.4	Baugruppen der Reibkupplung . . . . .	20
1.5	Typische Wandlerkennlinien . . . . .	21
1.6	Graphische Darstellung des Momenten- und Drehzahlflusses zwischen Getriebe und Motor . . . . .	23
1.7	Darstellung der äußeren Kräfte und Momente . . . . .	25
1.8	Typische Anforderungsprofile . . . . .	28
1.9	Aufbau eines allradgetriebenen Kraftfahrzeuges . . . . .	31
2.1	$\mathcal{B}$ -Splines mit 11 inneren Punkten . . . . .	37
2.2	Graphische Darstellung der Abbildungen $[i_{\tau}(t)]$ und $i_{\lambda}$ für einfachen Knotenvektor $\tau$ . . . . .	45
2.3	Graphische Darstellung der Abbildungen $[i_{\tau}(t)]$ und $i_{\lambda}$ für Knotenvektor $\tau$ mit $\nu$ -fachem Knoten $\tau_i$ . . . . .	47
2.4	Tensorproduktgitter . . . . .	50
2.5	Konstruktion der Knoten nach Čebyšev . . . . .	52
2.6	Graphische Darstellung eines Parameterwechsels . . . . .	54
2.7	Graphische Darstellung der Parametertransformation . . . . .	59
2.8	Wandlerschar . . . . .	62
2.9	Kennlinien zu realen Wandlern und synthetisch erzeugte Kennlinien . . . . .	64
2.10	Einbettung der Wandlerkennlinie $\mu(\nu)$ . . . . .	68
2.11	Einbettung der Wandlerkennlinie $M_{PC}(\nu)$ . . . . .	68
3.1	Darstellung des Verbrauchs in Abhängigkeit der Wandlerkennlinien . . . . .	73
3.2	Graphische Darstellung der KKT-Bedingung . . . . .	76
3.3	Optimierung nichtglatter Zielfunktionen, Abhängigkeit des Verbrauchs von Wandlerverhalten . . . . .	79

4.1	Komponentenaufteilung der Abweichung . . . . .	90
4.2	Sensitivitätsuntersuchungen. Abhängigkeit des Verbrauchs vom Wandlerverhalten . . . . .	92
4.3	Darstellungen der verschiedenen Kriterien zur Beurteilung der Fahrleistung . . . . .	93
4.4	Sensitivitätsuntersuchungen mit US-Highway-Zyklus . . . . .	94
4.5	Sensitivitätsuntersuchungen mit ECE-Zyklus . . . . .	95
4.6	Sensitivitätsuntersuchungen mit FTP 75 . . . . .	96
4.7	Sensitivitätsuntersuchungen mit JAPAN-Zyklus . . . . .	97
4.8	Laborfahrzeug als dynamisches Modell bei der Optimierung . . . . .	98
4.9	Darstellungen der gewichteten Zielfunktionen . . . . .	99
A.1	Schematische Darstellung eines Achsgetriebes . . . . .	109
A.2	Schematische Darstellung eines Drehgestells . . . . .	111
A.3	Schematische Darstellung einer Antriebsachse . . . . .	112
A.4	Zwei charakteristische Kennlinien . . . . .	112
A.5	Kraftschlußkennlinien . . . . .	115
A.6	Blockschaltbild des Gesamtmodells . . . . .	117
A.7	Integration mit Schaltereignissen . . . . .	118
A.8	Geregeltes System ohne und mit Störgrößen . . . . .	120
A.9	Geregeltes System mit Störgrößen . . . . .	121
A.10	Mathematisches Pendel . . . . .	122
A.11	Schematische Darstellung der Geometrie und der Kräfte des ebenen Lastwagenmodells . . . . .	123
B.1	Schematische Darstellung des Optimierungsablaufes mit ausführbarem Programm OPTIMA . . . . .	125
B.2	Graphische Darstellung des Datenaustausches zwischen Oberfläche, Simulationskern IFAHRDY und Optimierer OPTIMA . . . . .	126

# Algorithmenverzeichnis

2.1	Indexsuche mit Intervallschachtelung . . . . .	43
2.2	Indexbestimmung mit Aufwand 2 . . . . .	48
2.3	Knotenvektor nach Tiller . . . . .	49
2.4	Bogenlänge als Parameter . . . . .	57
2.5	Initialisierung für Kennliniendarstellungen . . . . .	60
2.6	Initialisierung für Kennfelddarstellungen auf Tensorproduktgitter . . .	60
2.7	Kennlinien- und Kennfelddarstellung . . . . .	60
2.8	konvexe Linearkombination . . . . .	63
2.9	Einbettungsparameter . . . . .	66
2.10	Einbettung . . . . .	67

# Einleitung

Eine vorrangige Rolle bei der Entwicklung moderner Kraftfahrzeuge spielt die Senkung des Kraftstoffverbrauches und somit die Reduktion der Abgasemissionen. In diesem Zusammenhang sind Begriffe wie emissionsfreie oder emissionsarme Fahrzeuge in den Entwicklungsabteilungen der Automobilhersteller immer wieder zu hören. Eine drastische Reduktion des Kraftstoffverbrauches erwartet man durch nichtkonventionelle Antriebskonzepte wie zum Beispiel hybride Antriebe [80, 145] bzw. durch Verringerung des Gesamtgewichts und optimale Auslegung des Antriebsstranges. Der Kraftstoffverbrauch als Gütekriterium steht jedoch im Zielkonflikt mit der geforderten Fahrleistung, die das Fahrzeug „sportlich“ und „agil“ macht. Die Ergebnisse der systematischen Optimierung zeigen jedoch, daß durch eine optimierte Auslegung von Wandler und Getriebeübersetzungen beide Ziele, d. h. eine Verbesserung der Fahrleistung bei weniger Kraftstoffverbrauch, durchaus möglich sind.

**Motivation zur numerischen Simulation.** In der Automobilindustrie ist die Verkürzung der Entwicklungszeit eines neuen Fahrzeuges ein vorrangiges Ziel, um schneller auf Änderungen der Marktanforderungen reagieren zu können. Ferner sollen die Entwicklungskosten drastisch gesenkt werden. Gleichzeitig ist aber sicherzustellen, daß die bereits erreichte Qualität des Produkts erhalten bleibt. Mit Hilfe der heutzutage sehr leistungsfähigen Rechner und Programme können einige zeitintensive und kostspielige Versuche am realen Bauteil durch Berechnung und rechnergestützte *numerische Simulation* ersetzt werden. Beim sogenannten *Digital mock-up*<sup>1</sup> werden CAD-Modelle aufgebaut, um Fahrzeuge virtuell bewerten zu können. Aus diesen Modellen erzeugt man durch Vernetzung zum einen FE-Modelle für die Berechnung im Bereich der Strukturmechanik, Akustik und Strömungsmechanik, zum anderen extrahiert man MKS-Modelle für Berechnungen im Bereich des Fahrverhaltens [29, 101, 125, 141]. Die Modellierungstiefe und Datengenauigkeit ist bei der Interpretation der berechneten Ergebnisse zu beachten. Sie sind stark vom Entwicklungsstand des Fahrzeuges abhängig (s. Abb. 1). In der frühen Entwicklungsphase, der sogenannten Konzeptphase, sind die Daten ungenau, da zum einen das Fahrzeugkonzept noch nicht feststeht und zum anderen einige Bauteile nicht bis zur Serienreife entwickelt sind. Es wird vielmehr erst in dieser Phase bestimmt, welche Bauteile neu bzw. weiter entwickelt

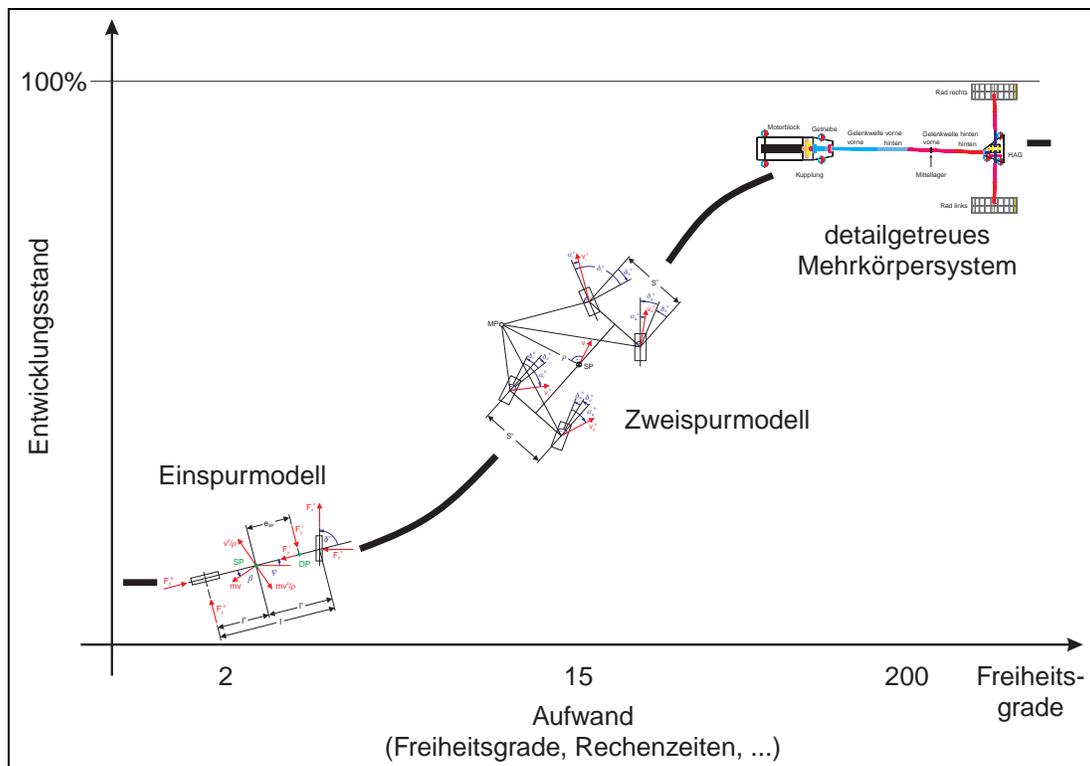
---

<sup>1</sup> Der Begriff *Mock-up* kommt aus dem englischen Sprachraum und steht für 1:1-Modelle eines Flugzeuges, Automobils usw. aus Holz. *Digital mock-up* ist ein virtuelles Modell auf dem Rechner.

werden. Man versucht trotzdem, so weit wie möglich die Berechnung bereits in der frühen Phase einzusetzen, da hier Dauer und Kosten der Entwicklung des neuen Fahrzeuges drastisch reduziert werden können.

**Stand der Technik.** Für die Berechnung von Fahrleistung und Verbrauch eines Kraftfahrzeuges werden Längsdynamikmodelle, die einen kompletten Antriebsstrang mit all seinen Komponenten umfassen, eingesetzt [3, 57, 59, 60, 71, 77, 80]. Diese Modelle sind nach dem Baukastenprinzip aus einzelnen parametrisierten Modulen aufgebaut. Sie resultieren in Systemen gewöhnlicher oder differential-algebraischer Gleichungen. Ein technischer Fahrerregler gibt Fahr- und Bremspedalstellung vor, so daß das virtuelle Fahrzeug in der Simulation einen Testzyklus fahren kann.

Die verwendeten Längsdynamikmodelle sind in unterschiedlicher Modelltiefe für verschiedene Aufgabenanforderungen in Form von Rechenprogrammen umgesetzt und validiert. Berechnungen von Fahrleistung und Verbrauch können beispielsweise bei der BMW AG mit Hilfe der Methoden von CRUISE [59], FALKE [60] oder IFAHRDY [37, 71] durchgeführt werden. Diese Programme unterscheiden sich in Modellierung, Kennfelddarstellung und numerischer Integrationsmethode.

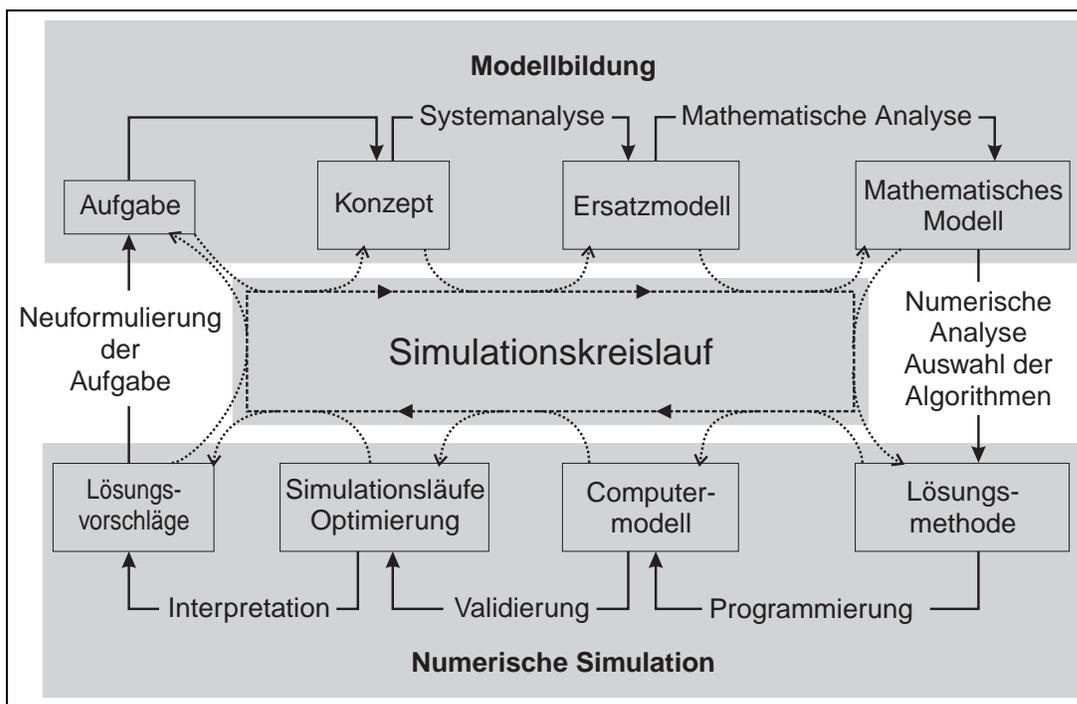


**Abb. 1:** Einsatz der Berechnungsmodelle in Abhängigkeit von Aufwand und Entwicklungsstand des Fahrzeuges. Mit zunehmendem Entwicklungsstand des Fahrzeuges steigt der Aufwand der Modellbildung und Simulation in Hinblick auf Freiheitsgrade, Anzahl und Genauigkeit der Daten und Rechenzeiten der numerischen Simulation.

**Ziel und Aufbau der Arbeit.** Die Optimierung einzelner Parameter oder ganzer Bauteile im Modell für das Gesamtfahrzeug ist erst anhand validierter Teilmodelle und validierter Daten sinnvoll. Innerhalb eines zuvor festgelegten Gültigkeitsbereichs, der die Umsetzbarkeit des virtuellen Ergebnisses in einen realen Prototypen sicherstellt, können die Daten variiert werden. Ziel der Arbeit ist daher die Bereitstellung eines Gesamtkonzepts für den Simulationskreislauf von der mathematischen Modellbildung bis hin zur Optimierung (s. Abb. 2 und 3). Dies wird am Beispiel der optimalen Auslegung des Wandlers durchgeführt. Für Modellierung und Berechnung werden eigenständige Programme verwendet, die aus der Sicht der Optimierung als gegebene Funktionsauswertung zu betrachten sind. Es kommen für die Optimierung in erster Linie solche Verfahren in die engere Auswahl, die nur auf Funktionsauswertungen zurückgreifen und den Gradienten gegebenenfalls numerisch approximieren.

Die vorliegende Arbeit ist in 3 Kapitel gegliedert (s. Abb. 3):

1. Mathematische Modellierung des zugrundeliegenden mechanischen Modells,
2. Entwicklung geeigneter Methoden zur Darstellung der Kennlinien und ihrer Einbettung,
3. Entwicklung und Anwendung von Methoden zur Kennlinien- und Parameteroptimierung bei nichtglatten Zielfunktionen.



**Abb. 2:** Schematische Darstellung des Simulationskreislaufes. Die durchgezogenen Pfeile geben das sequentielle Vorgehen der einzelnen Schritte im Simulationskreislauf an. Über die strichlierten Pfeile laufen stets Iterationsschleifen zur Verifikation jedes Einzelschritts [136].

Ein wesentlicher Teil des Simulationskreislaufs ist die mathematische Beschreibung des Simulationsmodells. Daher werden in **Kapitel 1** dieser Arbeit Methoden der Modellierung, die in der Fahrzeugtechnik Anwendung finden, zusammengestellt. Im speziellen wird auf Techniken der problemangepaßten Modellbildung in der zu untersuchenden Verbrauchsberechnung eingegangen. Im Abschnitt 1.5 über *Modellierung komplexer Bauteile mit Kennfeldern* werden die wesentlichen Komponenten mit hochgradig nichtlinearem Übertragungsverhalten, wie Motor und Drehmomentwandler, beschrieben. Es wird ein komplettes Längsdynamikmodell zur Berechnung von Fahrleistung und Verbrauch eines Kraftfahrzeugs vorgestellt. Die im Abschnitt 1.6 benutzte Schreibweise, die im Zusammenhang mit der Verbrauchsberechnung erstmals verwendet wird, ermöglicht eine kompakte, einheitliche Darstellung der Bewegungsgleichungen mit Strukturumschaltung.

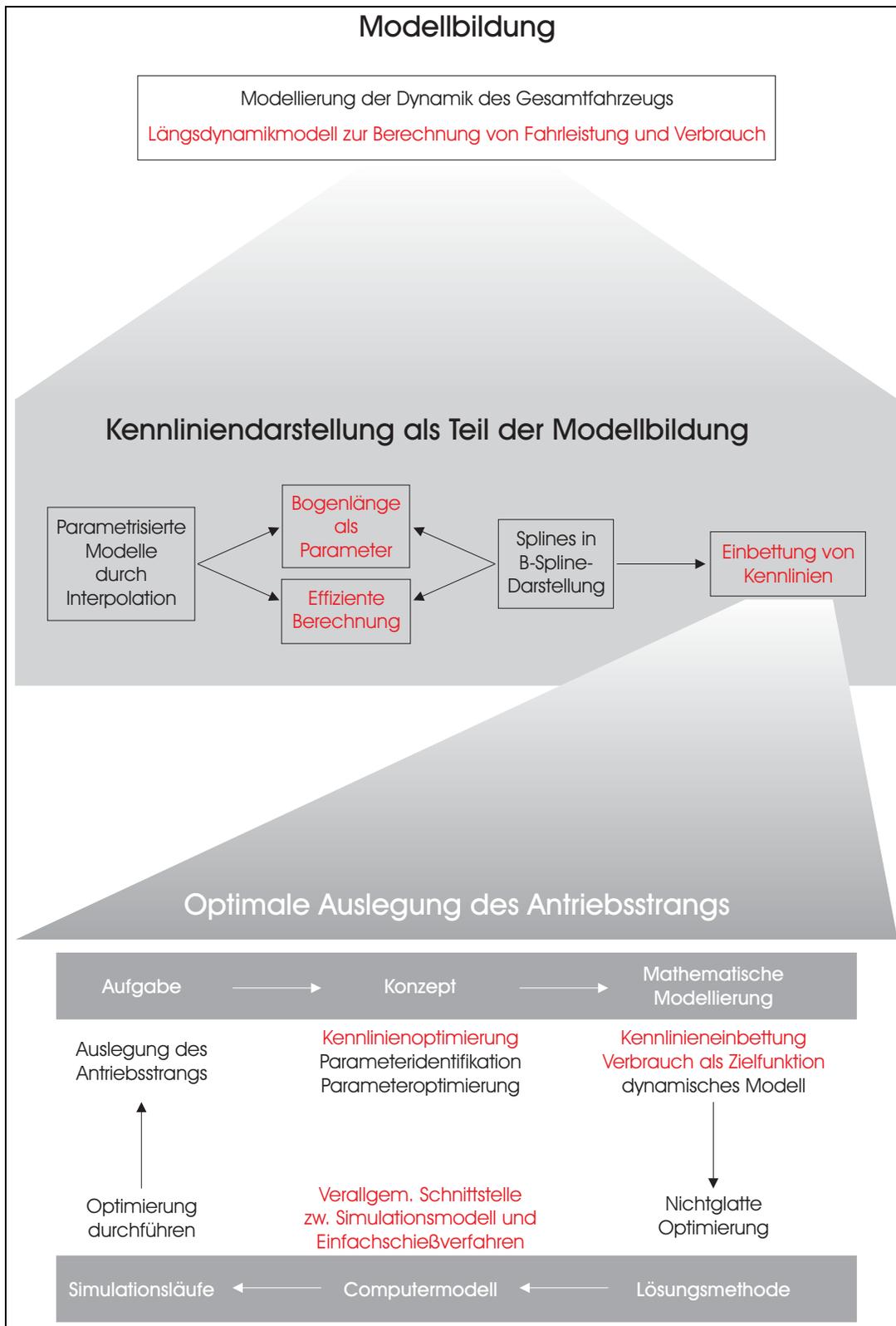
Im Gesamtfahrzeugmodell werden verschiedene Kennlinien bzw. -felder für die echtzeitfähige Modellierung ganzer Komponenten mit kompliziertem dynamischem Verhalten eingesetzt. Als mathematisches Modell für Kennlinien werden in dieser Arbeit Splines in  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung eingesetzt, auf die in **Kapitel 2** näher eingegangen wird. Um die schnelle Auswertung dieser Kennfelder zu gewährleisten, wird eine neue, rechenzeitoptimierte Methode zur Lokalisierung des aktuellen Punktes, an dem das Kennfeld auszuwerten ist, vorgestellt. Dadurch kann die Eigenschaft des lokalen Trägers der  $\mathcal{B}$ -Splines optimal ausgenutzt werden. Bei der Interpolation mit  $\mathcal{B}$ -Splines werden die gegebenen Daten parametrisiert. In Abschnitt 2.2 wird eine neue Methode vorgeschlagen, mit der die Bogenlänge als Parameter eingeführt werden kann. Der Einsatz von Splines in  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung zur Beschreibung der Kennlinien erfolgt in der Verbrauchsberechnung zum ersten Mal.

Ein allgemeines *Verfahren zur Einbettung von Kennlinien* in eine Fläche für die anschließende Optimierung des Systems wird vorgestellt. Durch diese Einbettung wird die Kennlinienoptimierung auf eine Parameteroptimierung zurückgeführt. Die Kennlinien, die das Übertragungsverhalten des Wandlers beschreiben, stehen im Mittelpunkt der Untersuchungen.

Eine allgemeine mathematische Beschreibung der bei der Auslegung des Antriebsstrangs auftretenden Optimierungsaufgaben wird in **Kapitel 3** formuliert. Im kontinuierlichen Fall liegen *Optimalsteuerungsaufgaben* vor, oder nach geeigneter Parametrisierung sogenannte *parametrisierte Optimalsteuerungsaufgaben*. Sie können daher — so wie im diskreten Fall — als Parameteroptimierungsaufgabe beschrieben werden. Mit Hilfe des im Kapitel 2 eingeführten Einbettungsalgorithmus können erstmals Kennlinien, d. h. ganze Komponenten, als Freiheitsgrad für die mathematische Optimierung betrachtet werden, ohne daß zusätzliche Nebenbedingungen an die Kennlinien, die in der Praxis oft nicht angegeben werden können, eingeführt werden müssen.

Das Gesamtkonzept der robusten Optimierung nichtglatter Zielfunktionen findet in **Kapitel 4** anhand der optimalen Auslegung des Antriebsstrangs von Kraftfahrzeugen Anwendung. Fahrleistung und Verbrauch konnten erheblich verbessert werden.

Die verallgemeinerte Schnittstelle des Optimierungsverfahrens, welches als eigenständiges Programm konzipiert ist, sowie Aspekte der Implementierung werden im **Anhang B** behandelt. Die Schnittstelle wird anhand verschiedener Beispiele aus der dynamischen Simulation von Fahr- und Längsdynamik und der Schwingungsanalyse im Frequenzbereich getestet.



**Abb. 3:** Aufbau der vorliegenden Arbeit. Beiträge, die in dieser Arbeit neu sind bzw. die nicht dem üblichen Vorgehen bei der Auslegung von Antriebssträngen entsprechen, sind rot gekennzeichnet. Die Verzahnung der Abschnitte untereinander ist mit Pfeilen dargestellt.

# Kapitel 1

## Fahrdynamikmodelle zur Auslegung des Antriebsstrangs

Bei der Entwicklung moderner, sogenannter landgestützter Fahrzeuge, d. h. Kraftfahrzeuge, Schienenfahrzeuge usw., spielt die Simulation durch numerische Berechnung neben dem Versuch eine wesentliche Rolle [110, 119]. Für die realitätsnahe Berechnung der Bewegungen eines mechanischen Systems sind mathematische Modelle erforderlich, die einerseits möglichst einfach gehalten werden, andererseits aber so aussagekräftig sind, daß die wesentlichen Eigenschaften des zu untersuchenden Systems vollständig und ausreichend genau wiedergegeben werden. Mit Hilfe solcher Modelle können zahlreiche Parameterstudien durchgeführt werden, noch bevor ein einziger Prototyp zusammengebaut wird. Bei Voraussagen über das Systemverhalten durch Simulation ist aber folgendes zu beachten: *Die Qualität der erreichbaren Aussagen über das Systemverhalten — häufig sind dies Voraussagen — ist nur so gut wie das zugrundeliegende Modell* (Zitat,[110]). Der verstärkte Einsatz der Berechnung in der frühen Phase ermöglicht eine größere Variantenvielfalt und verkürzt die Entwicklungszeiten.

In den folgenden Abschnitten 1.1–1.5 werden Techniken zur problemangepaßten Modellierung vorgestellt. Ein Längsdynamikmodell für Kraftfahrzeuge zur Berechnung von Fahrleistung und Verbrauch wird in Abschnitt 1.6 aufgebaut. Dieses komplexe Modell dient als Motivation zur Weiterentwicklung und Anwendung der Kennliniendarstellung durch  $\beta$ -Splines in Kapitel 2 und bildet die Grundlage der numerischen Simulation und Optimierung in den Kapiteln 3 und 4.

### 1.1 Aufgabenstellungen in der Fahrdynamik

Der erste Schritt der Modellierung und Simulation ist die Wahl eines Ersatzsystems für das zu untersuchende mechanische System. Es ist bereits durch die gegebene Fragestellung bestimmt und soll die wesentlichen Eigenschaften des Systems hinreichend genau widerspiegeln. Während in der Crash-Simulation oder für den Nachweis der Festigkeit eines Bauteils Methoden aus der Strukturmechanik verwendet werden — es

**Tab. 1.1:** Beispiele zum Einsatz der Simulation bei unterschiedlichen Fragestellungen.

Fragestellung	Ersatzsystem	Berechnung
Fahrdynamik	MKS	Fahrverhalten Fahrleistung und Verbrauch
Schwingungsverhalten	MKS	Schwingungen bis 100 Hz
Festigkeitsnachweis	FEM	Haltbarkeit der Bauteile
Außenumströmung	FEM	$c_w$ -Wert
plastische Deformation	FEM	Crash-Simulation Steifigkeiten der Bauteile
Akustik	FEM	Schwingungen bis 1000 Hz

sind Methoden der finiten Elemente (FEM) —, setzt man für die Berechnung der Fragestellungen, die Fahrdynamik betreffend, Mehrkörpersysteme (MKS) ein. Ihre mathematische Beschreibung unterscheidet sich in der Modellierung recht deutlich. Einige Beispiele sind in Tab. 1.1 aufgezählt. Folgenden Aufgabenstellungen in der Fahrdynamik liegen dynamische Systeme in Form von Mehrkörpersystemen zugrunde:

- **Fahrleistung:** Die Fahrleistung eines Fahrzeuges wird nach Höchstgeschwindigkeit, Steigfähigkeit und Beschleunigungsvermögen beurteilt. Bei der Interpretation der berechneten Lösungen spielen also ausschließlich Longitudinalbewegungen eine Rolle. Somit kommen hier reine Längsdynamikmodelle zum Einsatz. Elastische Modelle werden mit Differentialgleichungen beschrieben, quasistationäre Modelle mit algebraischen Gleichungen [37, 59, 60, 93, 110].
- **Verbrauch:** Für die Berechnung des Verbrauchs werden, so wie bei der Simulation der Fahrleistung, Längsdynamikmodelle eingesetzt [3, 37, 59, 60, 71, 93]. Die Verbrauchsberechnung spielt bei der Getriebeauslegung eine wichtige Rolle.
- **Fahrstabilität:** Der entscheidende Punkt bei der Beurteilung der Fahrstabilität ist die Spurtreue eines Fahrzeuges. Um sie durch die Ergebnisse der Berechnung darstellen zu können, benötigt man ein ebenes Modell, das Bewegungen in Längs- und Querrichtung berücksichtigt. Zur Untersuchung der Fahrstabilität kommen Methoden aus der Stabilitätstheorie zum Tragen [110]. Da nichtlineare Modelle betrachtet werden, ist Stabilität im Sinne von Ljapunow zu untersuchen. [58, 84, 89, 137, 146].
- **Fahrkomfort, Fahrsicherheit:** Das Fahrwerk eines Fahrzeuges steht hier im Mittelpunkt der Untersuchungen, denn die Krafteinleitung von Fahrbahnebenenheiten in den Fahrzeugaufbau ist das wesentliche Kriterium bei der Beurteilung

des Fahrkomforts und der Fahrsicherheit. Brems- und Seitenführungskräfte zwischen Fahrbahn und Reifen spielen bei plötzlichen Lastwechseln eine große Rolle. Die Dynamik des Reifens muß daher genau nachgebildet werden. Zum Einsatz kommen daher dreidimensionale Mehrkörpermodelle [4, 6, 7, 19, 29, 92, 90, 94, 101, 119, 140, 139, 142]. Mit Hilfe dieser Modelle können für die Berechnung des Festigkeitsnachweises und der Lebensdauer von Bauteilen dynamische Lasten bereitgestellt werden.

## 1.2 Modellierung des Gesamtfahrzeuges

Für die Untersuchung des Kraftstoffverbrauches eines neu zu entwickelnden Kraftfahrzeuges benötigt man ein Modell des Gesamtfahrzeuges. Die Auswahl und Durchführung der Modellierung erfolgt mit größter Sorgfalt, da die Modellgüte entscheidend für die Auswahl der numerischen Methode ist und die Aussagekraft der Ergebnisse stark beeinflußt. Um zu einem späteren Zeitpunkt verschiedene Varianten und Konfigurationen des Fahrzeuges leichter untersuchen zu können, wird beim Aufbau des Modells das Konzept der Modularisierung mit standardisierten Schnittstellen verfolgt. Die Teilmodelle Fahrzeug, Fahrsystem, Fahrweg, welche sich wiederum aus mehreren Modulen zusammensetzen, werden zu einem Gesamtfahrzeugmodell verbunden.

Anforderungen, die an das Modell gestellt werden, variieren mit der gestellten Aufgabe. Bei der Untersuchung des Verbrauches werden

- detaillierte Nachbildung des Antriebssystems,
- nichtlineare, zum Teil auch dynamische Beschreibung von Kraftelementen,
- dynamische Reifenkräfte,
- minimale Rechenzeiten

gefordert. Dies wird durch die Entwicklung spezieller Simulationsprogramme, bestehend aus Modellierung, Implementierung und Numerik ermöglicht [37, 59, 60]. Es eröffnen sich weitere Anwendungsgebiete dieser Simulationsprogramme:

- Numerische Simulation in Echtzeit durch schnelle Antwortzeiten,
- Einsatz der Modelle am Prüfstand für *Hardware in the loop*<sup>1</sup> (HIL),
- rasche Durchführung von Parameteroptimierungen.

Die Modellierung wird üblicherweise in drei Schritten sequentiell abgearbeitet:

---

<sup>1</sup> *Hardware in the loop* bezeichnet das Wechselspiel zwischen einem realen Bauteil (Hardware) und einem virtuellen Modell (Software).

1. Im ersten Schritt, dem Übergang vom realen System zum physikalischen Modell, werden Idealisierungen durchgeführt: Körper, die mit Hilfe von Kraftelementen und kinematischen Bindungen miteinander verbunden sind, werden als starr und undeformierbar angenommen. Da solche Modelle aus mehreren Körpern zusammengesetzt werden, bezeichnet man sie als Mehrkörpersysteme (MKS). Aufgrund des Einsatzes leichter, weicher Materialien (z. B. Aluminium) zur Reduktion des Fahrzeuggewichts kann die Deformation einiger Körper nicht mehr vernachlässigt werden. Solche flexiblen Körper werden dann mit der Finiten-Elemente-Methode (FEM) beschrieben und an das MKS angekoppelt. Die Idealisierungen legen also die Modellgüte fest [121, 127].
2. Der Verlauf der Bewegungen des mechanischen Systems wird mathematisch mittels nichtlinearer gekoppelter Differentialgleichungen beschrieben. Die mathematische Beschreibung eines Modells legt die Methoden aus der numerischen Mathematik, die zur Lösung der Differentialgleichungen verwendet werden, fest und beeinflusst somit die Rechenzeiten.
  - **MKS:** Unter Belastung verformen sich die Körper so wenig, daß die Verformungsenergie vernachlässigt werden kann. Die Starrkörper werden mit Hilfe von Kraftelementen und kinematischen Bindungen gemäß der Topologie des zu beschreibenden Systems miteinander verknüpft. Bei der Modellierung mit Starrkörpern werden alle Elastizitäten auf die Bindungen reduziert. Dies erfordert neben einer genauen Verifikation des Modells eine Parameteridentifikation. MKS-Modelle zur Berechnung des Fahrverhaltens werden durch differential-algebraische Gleichungen beschrieben.
  - **Elastische MKS:** Elastische Verformungen oder strömungsmechanische Vorgänge (z. B. hydrodynamische Drehmomentwandler) können durch die Kopplung von MKS mit Finite-Elemente-Modellen berücksichtigt werden. Für die dynamische Simulation eines Gesamtfahrzeugmodells bedeutet eine solche Beschreibung von Komponenten einen sehr hohen Rechenaufwand. Um das Simulationsmodell echtzeitfähig zu machen, wird das dynamische Verhalten komplexer Bauteile mit Kennlinien (z. B. Drehmomentwandler und Reifen) oder Kennfeldern (z. B. Motor) beschrieben. Ein Problem stellt dabei die Datenbeschaffung dar.
3. Die Lösung der Bewegungsgleichungen wird durch numerische Integration bestimmt. Die Methoden der numerischen Mathematik stellen eine Vielzahl von Algorithmen zur Verfügung, mit denen die bei der Modellierung gewonnenen Differentialgleichungen gelöst werden können. Moderne Algorithmen, die bei sehr großen Systemen Anwendung finden, nützen oft die spezielle Struktur der Bewegungsgleichungen aus, um dadurch kostbare Rechenzeit zu sparen [48, 116].

### 1.3 Bewegungsgleichungen

Die in dieser Arbeit verwendeten Modelle sind Mehrkörpersysteme, die sich mit Hilfe gewöhnlicher Differentialgleichungen beschreiben lassen. Zur Bestimmung von Lage und Orientierung eines Körpers im Raum benötigt man 6 Freiheitsgrade, 3 kartesische Koordinaten  $(x, y, z)$  für die Lage des Schwerpunktes und 3 Winkel, z. B. die Eulerwinkel<sup>2</sup>  $(\varphi, \psi, \theta)$  oder die Kardanwinkel<sup>2</sup>  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , für die Orientierung des Körpers. Ein System von  $N$  Körpern im Raum kann maximal  $n_{\bar{p}} := 6N$  Freiheitsgrade

$$\bar{p} = (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)}, \alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}, \dots, x^{(N)}, y^{(N)}, z^{(N)}, \alpha^{(N)}, \beta^{(N)}, \gamma^{(N)}) \in \mathbb{R}^{n_{\bar{p}}} \quad (1.1)$$

haben. Die Anzahl  $n_q$  der unabhängigen Größen, deren Angabe zur eindeutigen Bestimmung der Lage des Systems notwendig ist, ist die Zahl  $n_f$  der Freiheitsgrade des Systems ( $n_q = n_f$ ). Das zugrundeliegende Koordinatensystem muß nicht immer ein kartesisches sein; die Wahl des Koordinatensystems hängt vielmehr von den Bedingungen der Aufgabenstellung ab. Die Lage eines Systems mit  $n_q$  Freiheitsgraden kann mit Hilfe der sogenannten verallgemeinerten Koordinaten

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{n_q}) \in \mathbb{R}^{n_q} \quad (1.2)$$

vollständig charakterisiert werden. Der mechanische Zustand des Systems ist jedoch erst mit der gleichzeitigen Angabe der verallgemeinerten Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n_q}) \in \mathbb{R}^{n_q} \quad (1.3)$$

bestimmt. Die Verknüpfung der Beschleunigungen

$$\ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{n_q}) \in \mathbb{R}^{n_q} \quad (1.4)$$

mit den Koordinaten und Geschwindigkeiten in den Bewegungsgleichungen, den Differentialgleichungen 2. Ordnung für die Funktionen  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ , erlaubt durch Integration eine Vorhersage der zukünftigen Bewegung des Systems. Die Bewegungsgleichungen erhält man wahlweise aus

- dem Prinzip der kleinsten Wirkung,
- dem Schnittprinzip,
- dem Prinzip von D'Alembert,
- dem Prinzip von Jourdain.

Näheres zu den einzelnen Methoden der Modellierung ist in der Literatur bei [85, 86, 110, 119, 121, 127, 144] beschrieben.

<sup>2</sup> Eulerwinkel beschreiben Drehungen um die Achsen  $z - x' - z''$ , Kardanwinkel um die Achsen  $x - y' - z''$ , wobei  $(x', y', z')$  das Koordinatensystem nach der ersten und  $(x'', y'', z'')$  nach der zweiten Drehung bezeichnet.

### 1.3.1 Allgemeine mathematische Modellformulierung

Im obigen Abschnitt sind die bei der Modellierung üblichen Vorgehensweisen mit einem entsprechenden Verweis auf die Literatur erwähnt. Die gewonnenen Differentialgleichungen können o.B.d.A. als implizit gegebene Differentialgleichungssysteme

$$F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

aufgefaßt werden. Gesetzt den Fall, die Jacobimatrix  $F_{\dot{\mathbf{x}}}$  ist regulär, dann läßt sich (1.5) nach  $\dot{\mathbf{x}}$  auflösen. Dadurch erhält man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dies trifft dann zu, wenn die Topologie des mechanischen Systems Baumstruktur hat, und für die Modellierung verallgemeinerte Koordinaten verwendet wurden (z. B. sechssachsiger Roboter, [131]). Ist die Matrix aber singulär, dann kann man nur nach einigen Komponenten von  $\dot{\mathbf{x}}$  auflösen. Die restlichen Gleichungen werden in algebraische Gleichungen, die geometrische Zwangsbedingungen beschreiben, transformiert. Das durch diese Transformation gewonnene Differentialgleichungssystem wird *differential-algebraisches Gleichungssystem* genannt.

Kennzeichnend für differential-algebraische Systeme ist der *Index*, den Gear [50] erstmals eingeführt hat. Der Index ist hier die Anzahl der Differentiationsschritte, die nötig sind, um das System differential-algebraischer Gleichungen in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen umzuformen. Man spricht auch vom sogenannten *Differentiationsindex*. Weitere Indexdefinitionen sind in [128] angegeben. Mechanische Systeme haben oft den Index 3. Durch dreimaliges Ableiten der Lage-Nebenbedingungen erhält man daher ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem für die Zustände und die Lagrangeparameter. Die erste totale Ableitung der Lage-Nebenbedingung nach der Zeit liefert die Geschwindigkeitsnebenbedingung und nochmaliges Ableiten ergibt die Beschleunigungsnebenbedingung. Durch diese *Indexreduktion* können die Zwangsbedingungen stets eliminiert werden. Die numerische Behandlung derartiger Gleichungssysteme fordert eine Stabilisierung [13, 48, 101, 125].

Werden Relativkoordinaten zur Beschreibung eines Systems verwendet, erhält man durch Indexreduktion ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem in Zustandsform. Die Massenmatrix ist voll besetzt und zustandsabhängig. Die generalisierten Kräfte sind hingegen insbesondere bei Systemen mit Baumstruktur einfach, was die Elimination der Zwangskräfte erleichtert.

Bei der Wahl redundanter Absolutkoordinaten ist die positiv definite Massenmatrix einfach strukturiert, während die generalisierten Kräfte komplizierte Ausdrücke aufweisen. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 1. Art haben eine übersichtliche Struktur, erfordern aber im Falle geschlossener Topologien für die numerische Integration spezielle Lösungsmethoden [48].

### 1.3.2 Mehrkörpersysteme mit Baumstruktur

Die Topologie eines mechanischen Systems ist entscheidend für die Wahl der Koordinaten. Im Falle einer Baumstruktur, die dadurch charakterisiert ist, daß zu je-

dem Körper in einer Kette ein eindeutig bestimmter Vorgänger gehört, können stets Minimalkoordinaten verwendet werden. Die Bewegungsgleichungen sind nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

mit	den verallgemeinerten Lagekoordinaten	$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_q},$
	den verallgemeinerten Geschwindigkeiten	$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n_q},$
	den verallgemeinerten Beschleunigungen	$\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n_q},$
	den Steuerungen	$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u},$
	der positiv definiten Massenmatrix	$M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q},$
	den eingepprägten und äußeren Kräften	$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^{n_q},$
	den dynamischen Kraftgesetzen (Regler)	$\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^{n_u}.$

Bei Entwurf und Auslegung von Regelkonzepten liegen Mehrschwingersysteme mit vielen linearen Feder-Dämpfer-Elementen und nichtlinearen Kraftelementen oder Kontaktkräften zugrunde (s. Anhang A, Bsp. A.2 auf S. 111). In der obigen Formulierung (1.6) kann die zu bestimmende Steuerung  $\mathbf{u}$  ebenso linear oder nichtlinear angesetzt werden. Bei Entkopplungsreglern beschreibt der Steuerungsvektor  $\mathbf{u}$  den linearen Zusammenhang der Spalten der Eingangs- bzw. Durchschaltmatrix des Systems im Zustandsraum in der Form [90]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

mit	dem Zustandsvektor	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x},$
	dem Steuervektor	$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u},$
	dem Ausgangsvektor	$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_u},$
	der Systemmatrix	$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times 1},$
	der Eingangsmatrix	$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u},$
	der Ausgangsmatrix	$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_u \times 1},$
	der Durchschaltmatrix	$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}.$

Für den Entwurf des Reglers wird die Zahl der Ein- und Ausgänge gleichgesetzt. Es liegt somit ein nichtlineares autonomes Differentialgleichungssystem in Zustandsdarstellung mit zustandsabhängiger Systemmatrix, Ein- und Ausgangsmatrix und Durchschaltmatrix vor.

Im Zentrum der Untersuchungen stehen Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und Stabilität der sogenannten Regelstrecke [79]. Bei der Untersuchung der Steuerbarkeit möchte man herausfinden, wie die Steuer- und Störgrößen das dynamische Verhalten des Systems beeinflussen. Die Beobachtbarkeit liefert anhand von Meßgrößen Informationen über den Systemzustand. Die wichtigste Eigenschaft jedes dynamischen Systems ist die Stabilität. Jedes mechanische System soll stabiles Verhalten zeigen,

d. h. nach einer Störung oder einem Steuerungseingriff sollen die Auswirkungen auf den Systemzustand wieder abklingen. Als Beispiel aus der Fahrzeugtechnik sei an dieser Stelle der Einsatz semi-aktiver Stoßdämpfer zur Verbesserung der Fahrsicherheit erwähnt [69].

### 1.3.3 Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen

In vielen mechanischen Systemen der Fahrzeugtechnik kommen eine oder sogar mehrere kinematische Schleifen vor. Zur Beschreibung geschlossener Topologien wählt man redundante Absolutkoordinaten; die überzähligen Freiheitsgrade werden durch Zwangsbedingungen gesperrt, so daß die Bewegung des Systems durch nichtlineare differential-algebraische Gleichungen beschrieben wird. In der sogenannten *Deskriptorform* lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) - \mathbf{G}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

mit	den verallgemeinerten Lagekoordinaten	$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n_q}$ ,
	den verallgemeinerten Geschwindigkeiten	$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n_q}$ ,
	den verallgemeinerten Beschleunigungen	$\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n_q}$ ,
	den Lagrangeparametern	$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$ ,
	den Steuerungen	$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ ,
	der positiv definiten Massenmatrix	$M(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_q}$ ,
	den Zwangsbedingungen	$\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_\lambda}$ ,
	der Zwangsmatrix	$\mathbf{G}^T(\mathbf{q}) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n_q \times n_\lambda}$ ,
	den eingprägten und äußeren Kräften	$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^{n_q}$ ,
	den dynamischen Kraftgesetzen (Regler)	$\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ .

Folgende Begriffe werden bei mechanischen Systemen verwendet, die mit differential-algebraischen Gleichungen beschrieben werden:

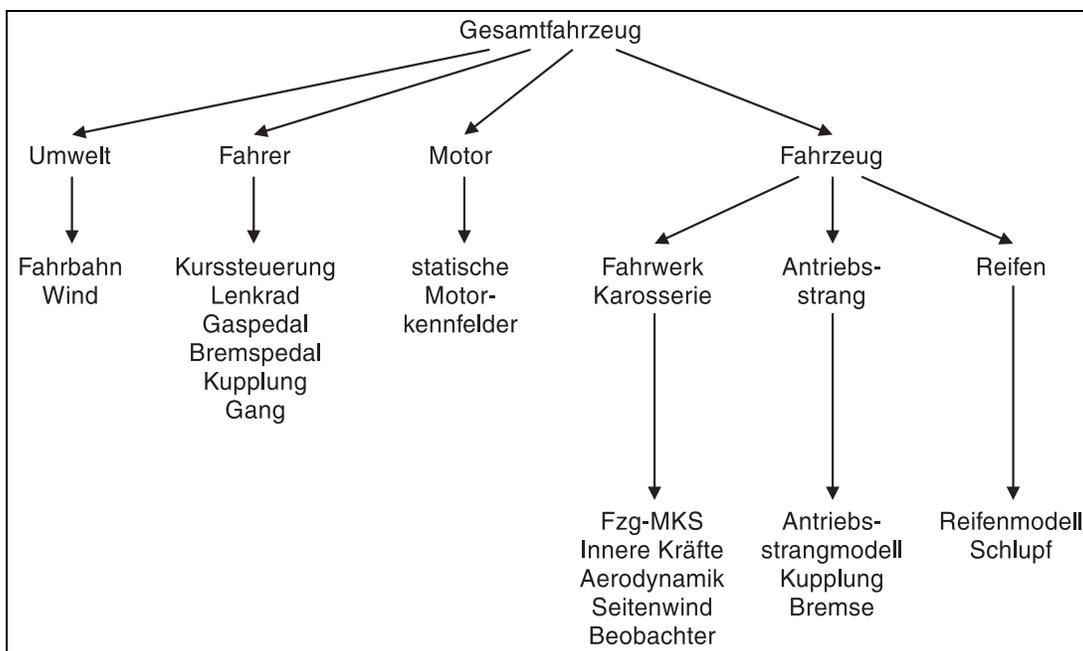
- Die Anzahl der Zustände wird Dimension genannt:  $n = 2n_q + n_\lambda$ .
- Die Anzahl der Freiheitsgrade ist  $n_f := n_q - n_\lambda$ .

## 1.4 Beispiele für Fahrdynamikmodelle landgestützter Fahrzeuge

Das *Fahrdynamikmodell von Rill* [119] setzt sich aus einem Hauptmodell, bestehend aus Aufbau und vier Rädern, und den Teilmodellen für Lenkung, Antrieb und Rei-

fen, welche die Kraftübertragung zwischen Reifen und Fahrbahn halbempirisch beschreiben, zusammen. Das Modell betrachtet die Längs- und Querdynamik des Gesamtfahrzeuges und kann zur Simulation instationärer Fahrmanöver, z. B. Lenken und Lastwechsel, eingesetzt werden. Eine spezielle Integrationsmethode, ein semiimplizites Euler-Verfahren, stellt die Echtzeitfähigkeit der Simulation sicher.

Das *Fahrdynamikmodell von Pankiewicz* [101] ist ein elastisches Modell des Gesamtfahrzeuges in 4 Hierarchieebenen (s. Abb. 1.1). Es ist ein linearisiertes MKS des Antriebsstrangs, das auch elastische Körper berücksichtigen kann. Die differentialalgebraischen Gleichungen werden durch Indexreduktion auf ein System von etwa 70 gewöhnlichen Differentialgleichungen transformiert. Um die Stabilität der numerischen Integration sicherzustellen, verwendet Pankiewicz die Stabilisierung nach Baumgarte [13]. Das Modell des Antriebsstrangs wurde mit Hilfe von ADS-NUBEMM [4, 6] automatisch generiert und ist in ACSL [91] programmiert. Inzwischen wurde das Gesamtfahrzeugmodell nach SIMULINK portiert [19] und das Teilmodell des Antriebsstranges durch das Modell von Rill ersetzt. Da das Modell durch Indexreduktion auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt wird, muß kein spezielles Integrationsverfahren verwendet werden. Die numerische Integration erfolgt



**Abb. 1.1:** Hierarchieebenen des Laborfahrzeuges [19, 101]. Das Modell des Gesamtfahrzeuges ist modular aufgebaut. Es besteht aus einem Modul, das die für die Fahrdynamik wesentlichen Eigenschaften des Fahrwerks, Antriebsstrangs und der Reifen beschreibt, einem zweiten Modul mit den charakteristischen Motorkennlinien, einem dritten, das stellvertretend für den Fahrer die Steuerung der Eingangsgrößen in Form eines technischen Reglers übernimmt, und einem Umweltmodul, in dem die Störgrößen, beispielsweise die Fahrbahnbeschaffenheit, modelliert sind. Je genauer ein Teil modelliert ist, desto mehr Hierarchiestufen gibt es.

durch das explizite Verfahren von Heun [132].

Das *Fahrdynamikmodell von Dennin* (IFAHRDY) [37] ist speziell für die Berechnung des Kraftstoffverbrauchs entwickelt worden. Der mechanische Teil des quasistationären Modells ist ein Längsdynamikmodell des Antriebsstrangs und geht auf Arbeiten von [71] und [3] zurück. Es ist ein torsionsdynamischer Zwei-Massenschwinger, der mit Hilfe gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben wird. Das Modell ist für den Einsatz auf dem Prüfstand entwickelt worden. Um die Echtzeitfähigkeit sicherzustellen, werden einige Komponenten, die ein hochgradig nichtlineares Übertragungsverhalten haben, mit tabellarisch gegebenen Kennfeldern beschrieben. Die Kennfelder werden bilinear interpoliert. Für die numerische Integration wird das explizite Verfahren von Euler verwendet.

Das *Simulationsprogramm zur Berechnung von Fahrleistung, Kraftstoffverbrauch und Emissionen von Heckes* [60] ist ein quasistationäres Längsdynamikmodell. Anhand eines Geschwindigkeitsprofils, auch Testzyklus genannt, werden in Abhängigkeit des eingelegten Ganges und des Zustandes der Wandlerüberbrückungskupplung (WÜK) bei Automatikgetriebenen Motordrehmoment und Motordrehzahl berechnet. Diese Rückwärtsrechnung erfolgt iterativ, da die Gangwahl und der Zustand der WÜK von der Motorlast und der Drehzahl der Getriebeabtriebswelle abhängen. Nach der Bestimmung von Drehmoment und Drehzahl des Motors werden aus dem Motorkennfeld die Verbrauchsdaten interpoliert. Eine Weiterentwicklung des Programms ist das Programmpaket CRUISE [59].

Ein Beispiel eines *Längsdynamikmodells eines angetriebenen Schienenfahrzeuges mit nichtlinearem Schlupfregler* wurde von Tscharnuter entwickelt [138]. Das Fahrdynamikmodell ist ein elastisches, teillineares Modell. Der Antrieb wird linear modelliert, der Kraftschluß zwischen Rad und Schiene wird mit Hilfe nichtlinearer Kennlinien beschrieben. Für die Kennlinien liegt ein parametrisiertes analytisches Modell vor. Zur Untersuchung des neu entwickelten Schlupfreglers wurden die Kennlinien zu einem Kennfeld, abhängig von Schlupf und Schienenzustand, erweitert, um zufällige Änderungen des Schienenzustandes in Betracht ziehen zu können. Die numerische Integration erfolgt durch ein spezielles implizites Verfahren von Euler mit Schaltpunktbestimmung.

## 1.5 Modellierung komplexer Bauteile mit Kennfeldern

Das nichtlineare dynamische Verhalten einiger komplexer Bauteile kann für Echtzeitberechnungen nicht mittels eines vollständigen Modells wiedergegeben werden. Die Simulation eines genauen Modells würde dann zuviel Rechenzeit in Anspruch nehmen [141]. In den echtzeitfähigen Modellen, die in der Verbrauchsberechnung üblicherweise verwendet werden, wird das nichtlineare dynamische Verhalten dieser Komponenten mit Hilfe von Kennfeldern approximiert, die in Tabellenform vorliegen. Es sind statische Kennfelder, welche man aus Messungen extrahiert. Das Bauteil wird auf einen Prüfstand gestellt, und anschließend werden Meßreihen, die aus einer Folge von

Lasten und Drehzahlen bestehen, durchgeführt. Immer dann, wenn der vorgeschriebene Betriebspunkt eingestellt ist, erfolgen mehrfach Messungen, die gemittelt und in einer Tabelle als Kennfeld gespeichert werden. Die Auswertung dieser Kennfelder erfolgt während der Simulation durch Interpolation. Der Darstellung der Kennlinien und Kennfelder, sowie der Einbettung von Kennlinien in eine Fläche ist das Kapitel 2 gewidmet. Die allgemeine mathematische Formulierung solcher Modelle durch gewöhnliche Differentialgleichungen lautet in Minimalkoordinaten unter Berücksichtigung kinematischer Schleifen und parametrisierter Kennlinien:

$$\begin{aligned}
 M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{k}, t) - \mathbf{G}^T(\mathbf{q}) \boldsymbol{\lambda} \\
 \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t) \\
 \mathbf{k} &= \mathbf{s}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t, \mathbf{p}) \\
 \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{q})
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

### 1.5.1 Kennfelder des Motormoments und Verbrauchs

In den Zylindern des Motors entsteht durch Verbrennung von Kraftstoff ein Druck, der durch Kolben und Pleuel auf die Kurbelwelle eine Kraft ausübt und dabei ein Drehmoment erzeugt. Das so entstandene Motordrehmoment hängt wegen strömungsmechanischer und thermodynamischer Zusammenhänge neben der Last auch von der Motordrehzahl ab. Der Fahrer regelt die Leistungsabgabe des Motors, indem er über das Fahrpedal eine Last vorgibt. Die Umsetzung bei Ottomotoren erfolgt mittels der Drosselklappe, welche die Luftzufuhr begrenzt, und bei Dieselmotoren über die Treibstoffmenge, die eingespritzt wird. Zu jedem Motor gehört daher ein Kennfeld, aus dem in Abhängigkeit von Motordrehzahl und Last folgende Größen interpoliert werden: Motormoment, Drosselklappenwinkel, Verbrauch sowie Emissionen von  $CO$ ,  $NO_x$  und  $HC$ .

Das an der Kurbelwelle tatsächlich wirkende Motormoment hängt noch von vielen weiteren Parametern ab (s. Tab. 1.2): Umgebungstemperatur, Höhe über dem Meeresspiegel, Luftdruck bzw. -dichte und -feuchtigkeit. Von diesen Größen wird der Sauerstoffgehalt der vom Motor angesaugten Luft beeinflusst. Das Motormoment muß im Modell noch mit einem Reduktionsfaktor nach EG-Richtlinie 195/88 versehen werden [3, 5, 71]. Das Motormoment wird mit der effektiven Arbeit  $\omega_e$ , die aus dem Motorkennfeld abgelesen wird, berechnet durch [12, 71].

$$M_d(n_{\text{Mot}}, \alpha) = \frac{1000 \omega_e(n_{\text{Mot}}, \alpha) V_{\text{Hub}} i}{2 \pi}, \tag{1.10}$$

$$M_{\text{Mot}} = M_{\text{Mot}}(n_{\text{Mot}}, \alpha) = F_{\text{red}} M_d(n_{\text{Mot}}, \alpha). \tag{1.11}$$

Vom Motordrehmoment werden die Verlustmomente der Aggregate, z. B. der Ölpumpe, die wiederum durch ein drehzahl- und lastabhängiges Kennfeld beschrieben werden, abgezogen

$$M_{\text{Agg}} = M_{\text{Agg}}(n_{\text{Mot}}, \alpha). \tag{1.12}$$

**Tab. 1.2:** Parameter des Motors [3, 5, 12]. In der oberen Tabelle sind die Parameter angegeben, die zur Berechnung des Motormoments notwendig sind. Einige Parameterwerte und Formeln sind in der unteren Tabelle aufgeführt.

$\omega_e$	effektive Arbeit	[kJ/l]	$V_{\text{Hub}}$	Hubvolumen	[l]
$M_d$	Motordrehmoment	[Nm]	$\alpha$	Last	[%]
$n_{\text{Mot}}$	Motordrehzahl	[1/min]	$T$	Ansauglufttemperatur	[K]
$P_{\text{Kf}}$	Luftdruck während Motorkennfeldmessung	[mbar]	$R_F$	relative Luftfeuchtigkeit	[%]
$P_\infty$	barometrischer Luftdruck	[mbar]	$i$	Taktzahl	[-]
				$i = \frac{1}{2}$ bei 4-Takt-Motor	

Luftdichte	[kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_L = 1.2929$
Referenzdruck	[mbar]	$p_0 = 1013$
Referenztemperatur	[K]	$T_0 = 293.15$
Erdbeschleunigung	[m/s <sup>2</sup> ]	$g = 9.80665$
Sättigungsdruck des reinen Wasserdampfes	[mbar]	$P_D = 981 \cdot e^{14.346 - \frac{5305.778}{T}}$
reduzierter Luftdruck	[mbar]	$P_{\text{red}} = P_\infty \left(1 - \frac{R_F P_D}{P_\infty}\right)$
Reduktionsfaktor	[-]	$F_{\text{red}} = \left(\frac{P_{\text{Kf}}}{P_{\text{red}}}\right)^{1.2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0.6}$

## 1.5.2 Kennlinien des Automatikgetriebes

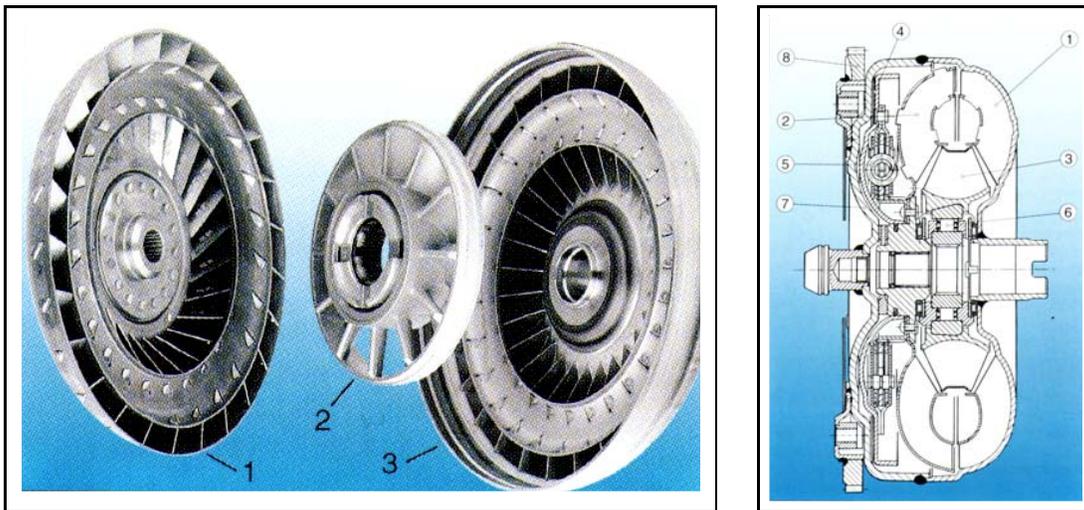
Das Automatikgetriebe besteht aus einem lastschaltbaren Stufengetriebe und einem hydrodynamischen Drehmomentwandler, der auch Föttinger- oder Trilokwandler genannt wird. Er überträgt das Motordrehmoment durch Strömungskräfte eines flüssigen Mediums, z. B. Öl. Er hat die Aufgabe, Drehzahldifferenzen zwischen Motor und Triebstrang zu überbrücken. Zusätzlich bietet er beim Anfahrvorgang eine Momentenüberhöhung, so daß in diesem Betriebszustand am Wandlerausgang mehr Drehmoment zur Verfügung steht, als der Motor abgibt.

Der hydrodynamische Drehmomentwandler besteht aus Pumpenrad, Turbinenrad und Leitrad (s. Abb. 1.2). Das Pumpenrad ist fest mit der Kurbelwelle verbunden und wandelt die mechanische Energie vom Motor in Strömungsenergie um. Diese Strömungsenergie im Wandleröl wird durch das Turbinenrad, das mit dem Getriebeingang starr verbunden ist, wieder in mechanische Energie gewandelt. Das Leitrad lenkt dabei die strömende Flüssigkeit für den Wiedereintritt in das Pumpenrad um. Es

liegt zwischen Pumpen- und Turbinenrad und stützt sich über den Freilauf am Gehäuse ab. Dadurch ist es möglich, daß das vom Wandler abgegebene Moment höher ist als das vom Motor (s. Abb. 1.3). Diese sogenannte Drehmomentenüberhöhung

$$\mu(\nu) = \frac{M_T}{M_P} \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{n_T}{n_P}$$

fällt um so stärker aus, je größer die Drehzahldifferenz zwischen Pumpen- und Turbinenrad ist. Bei festgebremster Turbine ( $\nu = 0$ ) ist die Momentenüberhöhung am größten und fällt annähernd linear mit steigender Turbinendrehzahl auf das Momentenverhältnis 1:1 im sogenannten Kupplungspunkt ab. Das Leitrad bleibt stehen, und der Freilauf verhindert die Umkehrung seiner Drehrichtung. Dadurch bleibt das Momentenverhältnis für  $\nu$  größer als der Kupplungspunkt konstant. Dieses dynamische Übertragungsverhalten des hydrodynamischen Drehmomentwandlers wird mit Hilfe einer stationären Kennlinie  $\mu(\nu)$  beschrieben (s. Abb. 1.5). Neuere Untersuchungen haben im Rahmen der Validierung des Modells ergeben, daß die Anfahrtdynamik mit der Kennlinie der Momentenüberhöhung nur unzufriedenstellend wiedergegeben wird. Es werden vielmehr dynamische  $\mu$ -Kurven benötigt. Solche Modelle wurden von Herbertz [63], Anderson [2] und Rath [113] entwickelt. Andritzky vergleicht diese Modelle in [3] mit empirischen Ansätzen, bei denen die stationäre  $\mu$ -Kennlinie modifiziert wird



**Abb. 1.2:** Aufbau des Drehmomentwandlers [33]. Links ist der nach dem Trilok-Prinzip aufgebaute Drehmomentwandler mit Turbinen- (1), Leit- (2) und Pumpenrad (3) dargestellt. Der Wandler ist mit Öl gefüllt, das zur Kühlung stets zugeführt wird. Das Öl steht unter Druck, um die Bildung von Luftblasen zu vermeiden. Rechts sind die typischen Baugruppen eines modernen, hydrodynamischen Drehmomentwandlers näher bezeichnet: Pumpen- (1) und Turbinen- (2) sowie Leitrad (3) sowie Wandlerüberbrückungskupplung (4), Torsionsdämpfer (5), Leitradfreilauf (6), Wandlerdeckel (7) und Anlasserkranz (8).

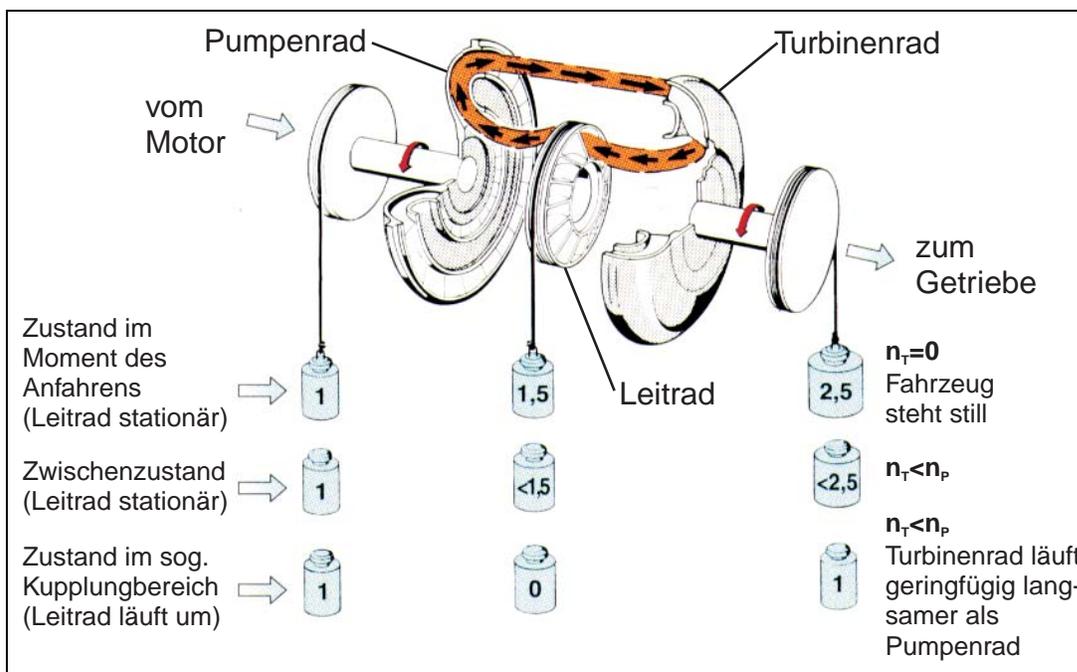
$$\mu_{\text{dyn}}(\nu, n_T, \dot{\omega}_{\text{Mot}}) = \left[ 1 - \left( 1 + \frac{n_T}{F_{\text{dyn}}^C} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{F_{\text{dyn}}^A}{F_{\text{dyn}}^A + \dot{\omega}_{\text{Mot}}^{F^B}} \right) \right] \mu_{\text{stat}}(\nu). \quad (1.13)$$

Die zweite stationäre Kennlinie ist das Pumpenaufnahmement  $M_{P_{2000}}$ . Sie gibt das Moment, das die Pumpe bei konstanter Motordrehzahl von  $n_{PC} = 2000 \text{ U/min}$  aufnehmen kann, an und verläuft annähernd quadratisch (s. Abb. 1.5).

Ein wesentlicher Punkt bei der Auslegung des Drehmomentwandlers ist das Wechselspiel zwischen Motor und Wandler. Dies spiegelt sich in den folgenden Auslegungskriterien wider: Verbrauch, Fahrleistung, Kühlung, Akustik. Die ersten drei Größen können mit Hilfe von Berechnungsmodellen simuliert werden, die Akustik hingegen wird ausschließlich im Versuch erprobt.

Von der Konstruktion des Drehmomentwandlers her gibt es viele Konstruktionsparameter, die sein Übertragungsverhalten beeinflussen. Dazu gehören

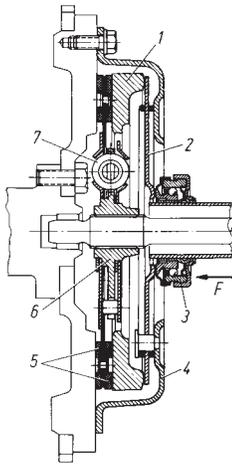
- die Form des Leitrades, insbesondere die Breite der Schaufeln,



**Abb. 1.3:** Darstellung der Arbeitsweise des Drehmomentwandlers [33]. Der Motor treibt das Pumpenrad an und beschleunigt dadurch das Wandleröl. Die Beschaukelung ist so angeordnet, daß das Öl im Pumpenrad von innen nach außen fließt und das Turbinenrad von außen nach innen durchströmt. Dabei wird es beschleunigt und somit auch das Getriebe. Das dazwischenliegende Leitrad hat die Aufgabe, die Strömungsrichtung des Öls umzulenken.

- die Form jeder einzelnen Aus- und Eingangsschaufel, so daß pro Schaufel mindestens zwei Parameter als Freiheitsgrade auftreten.

Im Rahmen einer genaueren Simulation des Wandlers ist eine mathematische Optimierung dieser vielen Parameter sinnvoll. Für das Modell des Wandlers ist ein 3D Strömungsmodell mit zäher Flüssigkeit und ein Turbulenzmodell mit Ablösung vom Rand notwendig. Ein solch kompliziertes Modell ist aber nur mit einem sehr hohen Zeitaufwand rechenbar. Da das Modell des Drehmomentwandlers für die Berechnung des Verbrauchs jedoch echtzeitfähig sein muß, reduziert man den Einfluß dieser vielen Parameter auf die Kennlinien der Momentenüberhöhung und des Pumpenaufnahmemoments. Bei der optimalen Auslegung des Antriebsstrangs werden diese Kennlinien systematisch variiert (s. Kapitel 2, 3 und 4). Aus jahrelanger Erfahrung ist aufgrund von Messungen folgendes bekannt: Die Momentenüberhöhung  $\mu$  spielt ausschließlich in der Anfahrphase eine wichtige Rolle. Ihr Einfluß kann im normalen Betrieb, d. h. bei Drehzahlverhältnissen  $\nu > 0.6$  vernachlässigt werden. Für den Verbrauch ist also die  $M_{P_{2000}}$ -Kennlinie wesentlich. Eine systematische, mathematische Untersuchung wird in Abschnitt 4 durchgeführt und bestätigt diesen Erfahrungswert.



**Abb. 1.4:** Baugruppen der Reibkupplung [14]. Druckplatte (1), Membranfeder (2), Ausrücklager (3), Kupplungsdeckel (4), Reibbelege (5), Scheibennabe (6) und Schraubenfedern (7).

Die Wandlerüberbrückungskupplung verhält sich wie eine Reibungskupplung (s. Abb. 1.4) oder kurz Reibkupplung, die im Falle eines Handschaltgetriebes eingesetzt wird. Das Arbeitsprinzip einer Reibkupplung funktioniert folgendermaßen: Mitnehmerscheibe bzw. Kupplungsscheibe sind motor- bzw. getriebeseitig torsionsfest fixiert und werden mit einer Feder aneinandergedreht. In Abhängigkeit der Anpreßkraft kann so ein Drehmoment übertragen werden. Charakteristisch für eine Reibkupplung ist ihr maximal übertragbares Moment, das zusätzlich von Fläche und Reibkoeffizient des Kupplungsbelags abhängt. Es gilt mit den in Tab. 1.3 angegebenen Parametern

Um den Wirkungsgrad des Trilok-Wandlers bei gleichen Drehzahlen der Turbine und der Pumpe zu verbessern, wird in Abhängigkeit der Getriebeabtriebsdrehzahl und der vorgegebenen Last die sogenannte Wandlerüberbrückungskupplung (WÜK) geschlossen, so daß eine quasistarre Verbindung zwischen Motor und Antriebsrädern entsteht. Der Übergang vom offenen zum geschlossenen Betriebszustand erfolgt kontinuierlich über einen Regelmechanismus, der zwischen Turbine und Pumpe einen vorgegebenen Schlupf einstellt. Die WÜK kennt somit die folgenden 3 Betriebszustände: offen, geregelt, geschlossen. Da im geschlossenen Betriebszustand ein mechanischer Freiheitsgrad verloren geht, kommt es auch im Modell an dieser Stelle zu einer Strukturumschaltung.

Die Wandlerüberbrückungskupplung verhält sich wie eine Reibungskupplung (s. Abb. 1.4) oder kurz Reibkupplung, die im Falle eines Handschaltgetriebes eingesetzt wird. Das Arbeitsprinzip einer Reibkupplung funktioniert folgendermaßen: Mitnehmerscheibe bzw. Kupplungsscheibe sind motor- bzw. getriebeseitig torsionsfest

**Tab. 1.3:** Parameter der Reibkupplung. Das von der Reibkupplung übertragene Moment wird mit Hilfe dieser Parameter beschrieben.

$M_K^{\max}$	max. übertragbares Moment	[Nm]
$r \in [r_i, r_a]$	Radius der Trockenkupplung	[m]
$\mu_{KB}$	Reibkoeffizient des Kupplungsbelags	[-]
$F_F$	Federkraft	[N]
$F_P$	Pedalkraft ( $F_P \leq F_F$ )	[N]
$F_A = F_F - F_P$	Anpreßkraft	[N]
$A_{KB} = \pi(r_a^2 - r_i^2)$	Fläche des Kupplungsbelags	[m <sup>2</sup> ]
$p = \frac{F_A}{A_{KB}}$	Flächendruck	[N/m <sup>2</sup> ]

$$M_K^{\max} = \int_{r_i}^{r_a} 2\pi r^2 p \mu_{KB} dr = \frac{2}{3} F_A \mu_{KB} \frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2}.$$

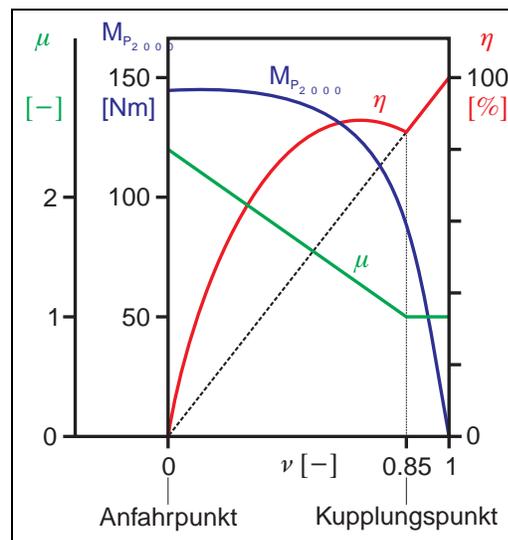
Das Schnittmoment zwischen Turbine und Pumpe wird in einen hydraulischen Anteil, der mit Hilfe der Kennlinien aus

$$M_P^{\text{hydr}} = M_{P_C}(\nu) \left( \frac{n_P}{n_{P_C}} \right)^2,$$

$$M_T^{\text{hydr}} = \mu(\nu) M_P^{\text{hydr}}$$

berechnet wird, und einen mechanischen Anteil für die WÜK, der sich aus den Bilanz-

**Abb. 1.5:** Typische Wandlerkennlinien. Das Übertragungsverhalten des Wandlers wird abhängig vom Drehzahlverhältnis  $\nu$  durch zwei Kennlinien beschrieben: dem Pumpenaufnahmement  $M_{P_C}(\nu)$  und der Momentenüberhöhung, dem Momentenverhältnis  $\mu(\nu)$ . Der Wirkungsgrad  $\eta(\nu)$  ist gegeben durch das Produkt von Momenten- und Drehzahlverhältnis.



gleichungen ergibt, aufgespalten:

$$\begin{aligned} M_P &= M_P^{\text{mech}} + M_P^{\text{hydr}}, \\ M_T &= M_T^{\text{mech}} + M_T^{\text{hydr}}. \end{aligned}$$

Der Wirkungsgrad des Drehmomentwandlers ist dann

$$\eta = \frac{P_T}{P_P} = \frac{M_T n_T}{M_P n_P} = \mu\nu.$$

Bei offener WÜK verschwindet der mechanische Anteil des Schnittmoments. Somit sind die Momente an Pumpe und Turbine gegeben durch

$$\begin{aligned} M_P &= M_P^{\text{hydr}}, \\ M_T &= M_T^{\text{hydr}}. \end{aligned}$$

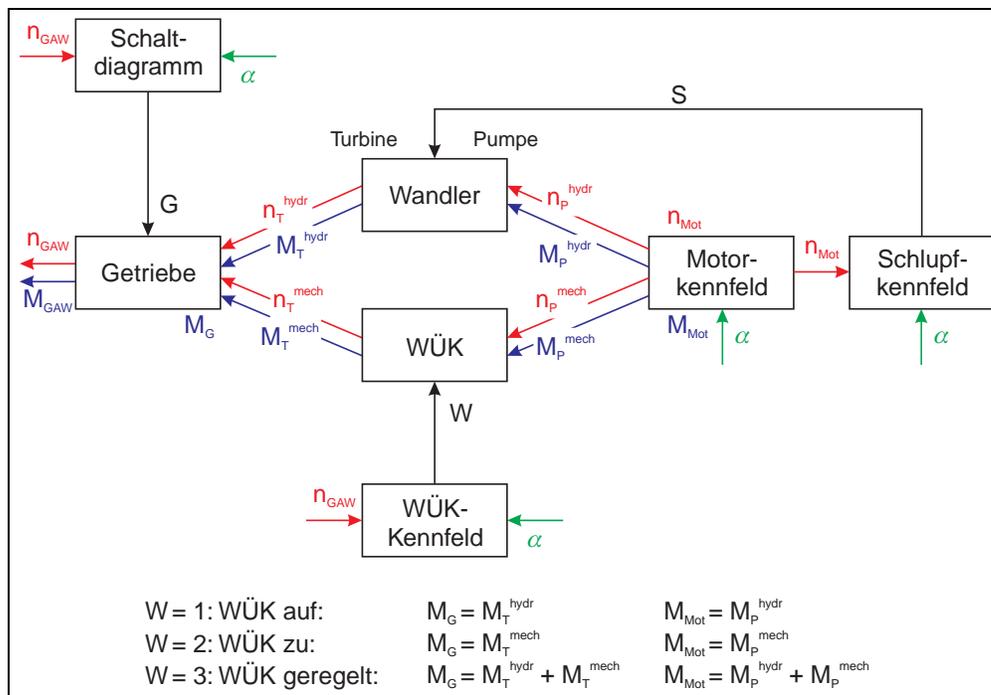
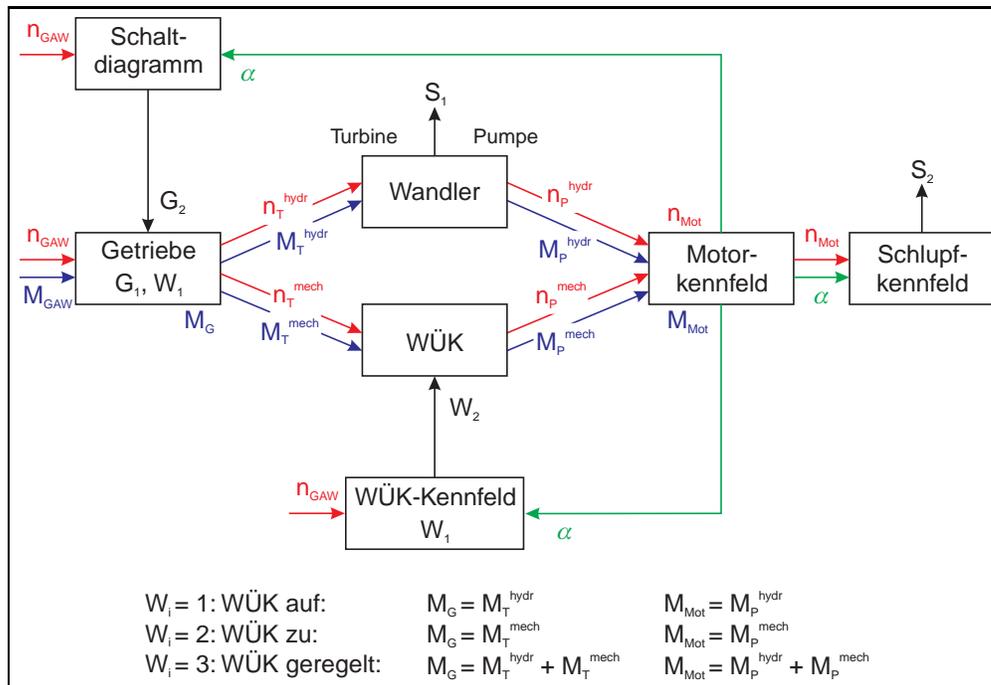
Im geschlossenen Zustand liegt eine quasistarre Verbindung zwischen Turbine und Pumpe vor. Die Drehzahlen der beiden Körper gleichen sich an, wodurch die Strömung des Wandleröls zum Erliegen kommt. Dementsprechend verschwinden die hydraulischen Anteile des Schnittmoments, und es gilt

$$\begin{aligned} M_P &= M_P^{\text{mech}} = M_K \quad (\leq M_K^{\text{max}}), \\ M_T &= M_T^{\text{mech}} = M_K \quad (\leq M_K^{\text{max}}). \end{aligned}$$

Aufgrund der starren Verbindung reduziert sich die Anzahl der mechanischen Freiheitsgrade des Gesamtsystems um 1, so daß es im Modell zu einer Strukturumschaltung kommt. Das Schnittmoment  $M_K$  wird wiederum aus den Bilanzgleichungen berechnet.

Die geregelte Phase der Wandlerüberbrückungskupplung ist in der Modellierung bei FALKE und IFAHRDY grundlegend verschieden umgesetzt:

- Bei FALKE wird die Momentenaufteilung, ausgehend von Getriebeabtriebsdrehzahl und -moment, auf der Seite der Turbine geregelt. Da man aber noch keine Information über das Lastsignal  $\alpha$  hat, wird zunächst ein Gang  $G_1$  gewählt, der im folgenden noch bestimmt werden muß. Anschließend wird das Moment auf der Turbinenseite des Wandlers in ein mechanisches und ein hydraulisches unterteilt. Dadurch wird der Schlupf im Wandler, der die Regelgröße darstellt, festgelegt. In jedem Zeitschritt wird erst  $W_1 = 1$  gesetzt, was einer offenen WÜK entspricht. Nach dieser Momentenaufteilung lassen sich über die Wandlerkennlinien der Zustand der Pumpe und somit auch das Lastsignal, das aus dem Motorkennfeld in Abhängigkeit von Motordrehzahl und -moment abgelesen wird,



**Abb. 1.6:** Graphische Darstellung des Momenten- und Drehzahlflusses zwischen Getriebe und Motor. Oben: Bei der Rückwärtsrechnung (FALKE, [60]) wird der Gang  $G$ , der Zustand der WÜK  $W$  und der Schlupf  $S$  im Wandler iterativ bestimmt. Unten: Drehzahlen sind Zustände, die mit Hilfe von Differentialgleichungen beschrieben werden, und die Last  $\alpha$  ist die geregelte Eingangsgröße (IFAHRDY, [37]).

berechnen. Erst jetzt können die Annahmen über Gangwahl und WÜK verifiziert und gegebenenfalls iterativ bestimmt werden, bis die Bedingungen

$$\begin{aligned} G_1 &= G_2 && \text{für den Gang,} \\ W_1 &= W_2 && \text{für die WÜK,} \\ S_1 &= S_2 && \text{für den Schlupf} \end{aligned}$$

erfüllt sind (s. Abb. 1.6 oben). Die Schlupfbedingung wird nur dann gefordert, wenn die Kupplung geregelt wird.

- Das zugrundeliegende Modell bei IFAHRDY wird durch Differentialgleichungen repräsentiert. Durch die Vorwärtsintegration sind zu jedem Zeitpunkt alle Drehzahlen und Momente bekannt (s. Abb. 1.6 unten). Zustandsabhängige Größen können aus Kennlinien und -feldern abgelesen werden. Somit sind aber auch die Zustände von Automatikgetriebe und WÜK bestimmt, und die Iterationen, die für die Bestimmung von Gang und Momentenaufteilung im Falle der Rückwärtsrechnung notwendig sind, entfallen. Die Regelung der WÜK erfolgt durch einen klassischen PID-Regler (s. Abschnitt 1.5.4, S. 27).

### Wandlerüberbrückungskupplung-Kennliniendiagramm

Aus diesem Kennliniendiagramm wird in Abhängigkeit der momentanen Getriebeabtriebsdrehzahl, vorgegebenen Last und dem eingelegten Gang der Zustand der Wandlerüberbrückungskupplung abgelesen:

$$W = W(n_{\text{GAW}}, \alpha, G) \quad \text{mit} \quad W = \begin{cases} -1 & \text{geregelt,} \\ 0 & \text{offen,} \\ 1 & \text{geschlossen.} \end{cases}$$

Der Wert ändert sich immer dann, wenn eine Kennlinie des Diagramms überschritten wird. Dabei schaltet die Struktur der Differentialgleichung um. Somit können im mathematischen Modell diese Kennlinien als Schaltfunktionen interpretiert werden.

### Schlupfkennfelder

Die Sollgröße des Reglers der Wandlerüberbrückungskupplung wird aus den sogenannten Schlupfkennfeldern abgelesen. Zu jedem Gang  $G$  gehört ein solches Kennfeld, welches zur momentanen Motordrehzahl und der vorgegeben Last den Sollwert des Schlupfes zwischen Pumpe und Turbine liefert, der im geregelten Zustand der WÜK eingestellt werden soll:

$$S^{\text{soll}} = S^{\text{soll}}(n_{\text{Mot}}, \alpha, G).$$

### Schaltkennliniendiagramm

Bei Handschaltgetrieben wird der Gang vom Fahrer eingelegt, wodurch er die Getriebeübersetzung bestimmt. Automatikgetriebe erledigen dies abhängig von der momentanen Getriebeabtriebsdrehzahl und dem gegebenen Lastsignal selbsttätig, ohne daß ein Eingriff des Fahrers notwendig ist. Das Steuergerät des Getriebes bestimmt den Gang aus den sogenannten Schaltkennlinien, welche als Diagramm gespeichert sind, leitet den Schaltvorgang ein und steuert ihn:

$$G_{\text{SR}} = G_{\text{SR}}(n_{\text{GAW}}, \alpha, G, W) \quad \text{mit} \quad G_{\text{SR}} = \begin{cases} -1 & \text{für Hinaufschalten,} \\ 0 & \text{für Gang halten,} \\ +1 & \text{für Hinunterschalten.} \end{cases}$$

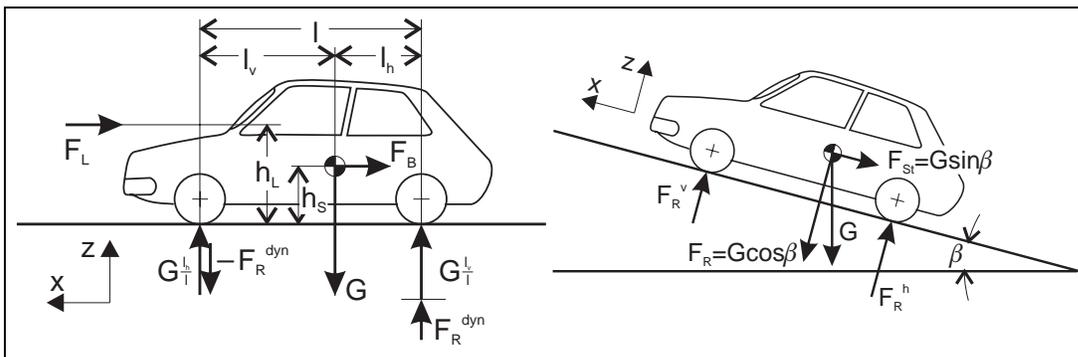
### 1.5.3 Reifenkennlinien zur Berechnung der äußeren Momente

Die dynamischen Eigenschaften des Reifens, die in die Berechnung des Verbrauchs eingehen, sind der dynamische Reifenradius  $r_{\text{dyn}}$  und der Rollwiderstandsbeiwert  $f_{\text{roll}}$ . Beide Größen hängen von der momentanen Fahrzeuggeschwindigkeit ab und werden aus einer Tabelle interpoliert

$$r_{\text{dyn}}(v_{\text{Fzg}}) \quad \text{und} \quad f_{\text{roll}}(v_{\text{Fzg}}).$$

Mit Hilfe dieser dynamischen Größen wird die Gesamtwiderstandskraft, welche sich aus Luft- und Steigungs- und Rollwiderstandskraft zusammensetzt, berechnet. Die in Tab. 1.4 aufgeführten Widerstandskräfte werden mit dem dynamischen Rollradius  $r_{\text{dyn}}$  multipliziert, um ein Moment zu erhalten

$$M_{\text{Wid}} = F_{\text{Wid}} r_{\text{dyn}}.$$



**Abb. 1.7:** Graphische Darstellung der an einem Fahrzeug wirkenden äußeren Kräfte und Momente. Bezeichnungen der Größen siehe Tab. 1.4.

Tab. 1.4: Äußere Kräfte (oben) und deren Parameter (unten).

Kraft	Formel
Luftwiderstandskraft	$F_L = \frac{1}{2} A c_w \rho_L v_{Fzg}^2$
Steigungswiderstandskraft	$F_{St} = mg \sin \beta = G \sin \beta$ $= \frac{G p}{\sqrt{100^2 + p^2}}$
Rollwiderstandskraft	$F_{roll} = F_R f_{roll}$
Gesamtwiderstandskraft	$F_{Wid} = F_L + F_{St} + F_{roll}$
Trägheitskraft	$F_T = m a_{Fzg}$

$v_{Fzg}$	Fahrzeuggeschwindigkeit	[m/s]	$A$	Fahrzeugstirnfläche	[m <sup>2</sup> ]
$a_{Fzg}$	Fahrzeugbeschleunigung	[m/s <sup>2</sup> ]	$m$	Masse	[kg]
$g$	Erdbeschleunigung	[m/s <sup>2</sup> ]	$G$	Gewichtskraft	[N]
$\rho_L$	Luftdichte	[kg/m <sup>3</sup> ]	$\beta$	Steigungswinkel	[°]
$c_w$	Luftwiderstandsbeiwert	[-]	$p$	Steigung	[%]
$f_{roll}$	Rollwiderstandsbeiwert	[-]	$h_s$	Schwerpunkthöhe	[m]
$l_v$	Abstand: Schwerpunkt zur Vorderachse	[m]	$l_h$	Abstand: Schwerpunkt zur Hinterachse	[m]
$l$	Radstand ( $l = l_v + l_h$ )	[m]	$h_L$	Höhe des Angriffspunk- tes der Luftwiderstands- kraft	[m]
$F_R$	Radlast	[N]	$\Delta F_z$	dynamische Radlast	[N]
$F_R^v$	Radlast vorne	[N]	$F_R^h$	Radlast hinten	[N]
$F_R^{stat}$	statische Radlast	[N]	$F_R^{dyn}$	dynamische Radlast	[N]

Zur Bestimmung der Radlasten  $F_R^v$  und  $F_R^h$  an den Vorder- und Hinterrädern wird die Radlast  $F_R$  in einen statischen und dynamischen Anteil

$$F_R = F_R^{stat} + F_R^{dyn}$$

zerlegt. Aus deren Kräftebilanz in  $z$ -Richtung und Momentenbilanz um die  $y$ -Achse (s. Abb. 1.7) ergeben sich die gesuchten Größen

$$F_R^h = \frac{(F_{St} + F_T) h_s + F_R l_v}{l},$$

$$F_R^v = F_R - F_R^h.$$

**Tab. 1.5:** Fahrerregler des Längsdynamikmodells. Gas- und Bremspedal werden mit Hilfe von PID-Reglern gesteuert. Daraus ergeben sich Beschleunigungen und Verzögerungen.

	Beschleunigung	Verzögerung	Stillstand
Regeldifferenz	$\Delta v \geq 0$	$\Delta v < 0$	
Regler	$d_{1,2} = k_P^{(1,2)} \Delta v + k_I^{(1,2)} \int \Delta v dt + k_D^{(1,2)} \Delta \dot{v}$		
Last	$\alpha = \max(d_1, 0)$ $\alpha = \min(\alpha, \alpha_{KD})$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0$
Bremsmoment	$M_B = 0$	$M_B = \max(d_2, 0)$ $M_B = \min(M_B, M_B^{\max})$	$M_B = M_{BH}$

### Bremsmoment

Auch zur Bestimmung der Bremsmomente benötigt man die Reifenkennlinien. Die Summe der Bremsmomente wird mit dem Faktor  $\varepsilon_{BK}$  auf die Vorder- und Hinterräder verteilt.

$$M_B^{\text{ges}} = M_B^v + M_B^h$$

$$M_B^v = \frac{1}{1 + \varepsilon_{BK}} M_B^{\text{ges}}$$

$$M_B^h = \frac{\varepsilon_{BK}}{1 + \varepsilon_{BK}} M_B^{\text{ges}}$$

Es ist zu berücksichtigen, daß nur dann Bremsmomente in den Antriebsstrang eingeleitet werden können, wenn sich die Bremsscheibe dreht, d. h.  $n_{BS} \neq 0$ . Die Haltemomente  $M_{BH}^v$  und  $M_{BH}^h$ , die an den Bremsscheiben aufgebracht werden müssen, um das Fahrzeug im Stillstand zu halten, setzen sich auf der Seite des Triebstranges aus dem Turbinenmoment  $M_T$  und auf der Seite des Fahrzeugaufbaus aus dem Gesamtwiderstandmoment  $M_{wid}$  zusammen. Beide an den Bremsscheiben anliegenden Momente werden unter Berücksichtigung der Getriebeübersetzungen und Wirkungsgrade aus  $M_T$  und  $M_{wid}$  berechnet.

### 1.5.4 Regler

Im Simulationsmodell berechnet ein technischer Fahrerregler das Lastsignal bzw. das Bremsmoment mit dem Ziel, die Abweichung der momentanen Fahrzeuggeschwindigkeit von der Sollgeschwindigkeit, die als Anforderungsprofil in km/h gegeben ist,

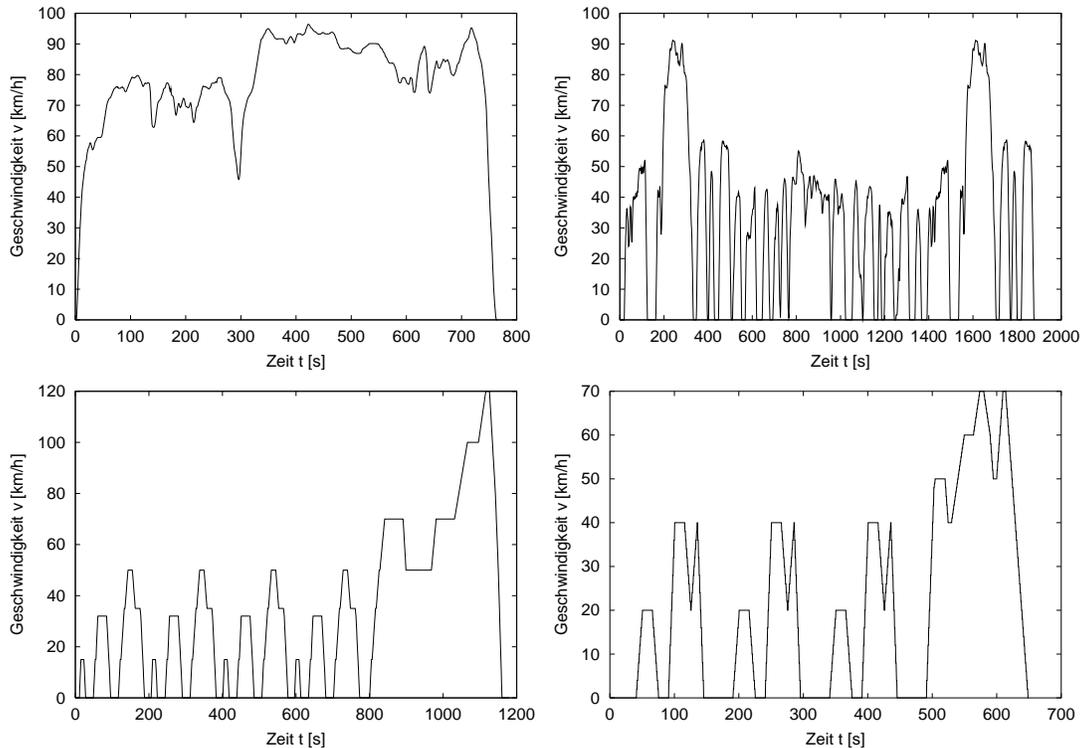
möglichst klein zu halten (s. Abb. 1.8). Aus der Differenz

$$\Delta v = v^{\text{soll}} - v^{\text{ist}}$$

$$v^{\text{soll}} = v^{\text{soll}}(t)$$

$$v^{\text{ist}} = 3.6 \omega_{\text{Fz}} r_{\text{dyn}}$$

ergibt sich mit Hilfe eines Standard-PID-Reglers je nach Vorzeichen von  $\Delta v$  das Last-signal bzw. die Bremsmomente (s. Tab. 1.5). Beide Größen sind nach unten durch Null



Bezeichnung	Land	Bemerkungen
Highway	USA	Überland (Heißtest)
FTP 75	USA	Stadt (Kalttest)
MVEG (KV96)	EU	Stadt- und Überland (Kalttest)
ECE	EU	Stadt (Einhaltungstoleranz $\pm 2$ km/h) (Heißtest)
10•15-Mode	Japan	Stadt- und Überland (Heißtest)

**Abb. 1.8:** Typische Anforderungsprofile, die zur Berechnung des Kraftstoffverbrauches eines Kraftfahrzeuges verwendet werden.

Links oben: Highway-Zyklus.

Rechts oben: Federal Test Procedure (FTP 75).

Links unten: ECE/EG-Testzyklus (MVEG).

Rechts unten: 10•15-Mode-Zyklus.

begrenzt, denn negative Lasten entsprechen Bremsmomenten und negative Bremsmomente einer Beschleunigung. Das Lastsignal ist nach oben in der Regel durch 100 % beschränkt. Bei Fahrzeugen mit Automatikgetrieben gilt dies jedoch nicht. Hier sind auch Werte, die über die 100 %-Schranke hinausgehen, zugelassen. Sie geben das Signal des sogenannten Kickdowns, der gegebenenfalls einen Schaltvorgang einleitet, wieder. Im Falle einer Verzögerung bis zum Stillstand des Fahrzeugs (vgl. Abb. 1.8, rechts oben und unten), reicht das Bremsmoment, das der PID-Regler liefert, nicht aus. Es müssen zusätzlich die Haltemomente berücksichtigt werden. Dies wird mit Hilfe eines Vorgrößenreglers realisiert [43, 124].

Die Entscheidung für den gewünschten Gang wird aus dem direkten Vergleich der momentanen Drehzahl der Getriebeabtriebswelle und der im Schaltkennliniendiagramm gespeicherten Drehzahlen gefällt. Zu jedem Zeitpunkt werden die Schaltkennlinien ausgewertet. Dies liefert zum momentan eingelegten Gang, zur vorgegebenen Last und Getriebeabtriebsdrehzahl den Wert  $n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} n_{\text{GAW}} > n(n_{\text{GAW}}, \alpha, G) = n_{+1} &\rightarrow G_{\text{SR}} = +1 && \text{für Hinaufschalten,} \\ n_{-1} < n_{\text{GAW}} < n_{+1} &\rightarrow G_{\text{SR}} = 0 && \text{für Gang halten,} \\ n_{\text{GAW}} < n(n_{\text{GAW}}, \alpha, G) = n_{-1} &\rightarrow G_{\text{SR}} = -1 && \text{für Hinunterschalten.} \end{aligned}$$

Der neue Gang kann nur dann eingelegt werden, wenn der Unterschied der Motordrehzahl und der Getriebeabtriebsdrehzahl im Wandler überbrückt werden kann, d. h. die WÜK offen ist. Die Differenz der Drehzahlen von Turbine  $n_T$  und Pumpe  $n_P$  bildet den Schlupf  $S := n_T - n_P$ , der nur im Kupplungsbereich ( $\nu \in [0.85, 1]$ ) geregelt wird, denn nur hier liegen an Turbine und Pumpe gleiche Schnittmomente

$$\begin{aligned} M_P^{\text{hydr}} &= M_T^{\text{hydr}}, \\ M_P^{\text{mech}} &= M_T^{\text{mech}} \end{aligned}$$

an. Durch rasches Schließen und Öffnen der WÜK kann der Schlupf bei Änderungen der Drehzahlen  $n_T$  und  $n_P$  etwa konstant gehalten werden. Es wird also am mechanischen Anteil gerade so viel Moment aufgebracht, daß die Winkelbeschleunigungen  $\dot{\omega}_P$  und  $\dot{\omega}_T$  gleich sind. Damit wird in Summe das Moment

$$M_W^{\text{ges}} = M_P^{\text{mech}} + M_P^{\text{hydr}} = M_T^{\text{mech}} + M_T^{\text{hydr}} = M_W^{\text{starr}}$$

übertragen, das einer starren Verbindung entspricht.

Die mathematischen Beschreibungen des Reglers unterscheiden sich bei den unterschiedlichen Modellierungen des Gesamtfahrzeugs:

- Bei der Rückwärtsrechnung (s. Abb. 1.6 oben) erfolgt die Regelung über die Aufteilung des Moments in den mechanischen und hydraulischen Anteil. Analog zur Berechnung der Schnittmomente ist hier das einzustellende Drehzahlverhältnis implizit gegeben.

- Bei der Vorwärtsrechnung (s. Abb. 1.6 unten) wird für die Schlupfregelung ein klassischer PID-Regler eingesetzt. Aus der Schlupfdifferenz

$$\Delta S = S^{\text{sol}} - S^{\text{ist}}$$

$$S^{\text{sol}} = S^{\text{sol}}(n_{\text{Mot}}, \alpha, G)$$

$$S^{\text{ist}} = n_{\text{T}} - n_{\text{P}}$$

wird ein Moment berechnet, das zum bestehenden Eingangsmoment hinzuaddiert wird.

$$M_{\text{W}}^{\text{ges}} = M_{\text{ein}} + d_3$$

$$d_3 = k_{\text{P}}^{(3)} \Delta S + k_{\text{I}}^{(3)} \int \Delta S \, dt + k_{\text{D}}^{(3)} \Delta \dot{S}$$

- Eine weitere Möglichkeit, die Regelung des Schlupfes  $S$  zu modellieren, ist die folgende: Durch die Aufteilung des Schnittmoments zwischen Pumpe und Turbine in einen mechanischen und einen hydraulischen Anteil ist das Gesamtmoment stets gegeben durch die Summe

$$M_{\text{W}}^{\text{ges}} = M_{\text{T}}^{\text{mech}} + M_{\text{T}}^{\text{hydr}}$$

Es ist bekannt, daß im geschlossenen Zustand der WÜK das zu übertragene Gesamtmoment einer starren Verbindung zwischen Turbine und Pumpe entspricht

$$M_{\text{W}}^{\text{ges}} = M^{\text{mech}} = M^{\text{starr}} \left( = M_{\text{T}}^{\text{mech}} = M_{\text{P}}^{\text{mech}} = k M_{\text{W}} \right) \quad \text{mit} \quad k = 1.$$

Der mechanische Teil ist äquivalent zu einer Reibkupplung, die lineares Übertragungsverhalten zeigt, und der hydraulische Teil des Wandlers liefert keinen Betrag zum Gesamtmoment, da  $\nu = 1$  (s. Abb. 1.5). Wird die Wandlerüberbrückungskupplung durch den Regelmechanismus geöffnet, wird im Wandler langsam Schlupf aufgebaut. Das bedeutet: Der hydraulische Teil des Wandlers fügt zusätzlich ein Moment hinzu. Ist die WÜK schließlich vollständig offen ( $k = 0$ ), dann verschwindet das mechanische Moment, so daß gilt

$$M_{\text{W}}^{\text{ges}} = M^{\text{hydr}} \left( = M_{\text{T}}^{\text{hydr}} = M_{\text{P}}^{\text{hydr}} \right) \quad \text{mit} \quad \nu = 1.$$

Der Schlupf wird also mit Hilfe des Parameters  $k$  variiert. Diese Aufgabe kann ein klassischer PID-Regler übernehmen:

$$k = k_{\text{ist}} + d_3 \quad \text{mit} \quad k \in [0, 1]$$

$$d_3 = k_{\text{P}}^{(3)} \Delta S + k_{\text{I}}^{(3)} \int \Delta S \, dt + k_{\text{D}}^{(3)} \Delta \dot{S}$$

Der Vorteil dieser Formulierung liegt darin, daß sich die Struktur der Modellgleichungen nur an einer Stelle ändert — beim Übergang von offen auf geregelt (und umgekehrt). Die Formulierung der Strukturänderung entfällt. Für die numerische Integration müssen hier keine Schaltfunktionen bereitgestellt werden.

## 1.6 Fahrdynamikmodelle in der Verbrauchsrechnung

Für die Entwicklung moderner Fahrzeuge werden viele Fahrdynamikmodelle und entsprechende Implementierungen eingesetzt. Eine wesentliche Anforderung an Modell und Berechnungsverfahren ist die Echtzeitfähigkeit des Programms, da sie nicht nur für reine Simulationsläufe am Rechner, sondern auch in Verbindung mit einem HIL<sup>3</sup>-Prüfstand eingesetzt werden sollen. Dies bedeutet für die Modellierung, daß das Übertragungsverhalten komplexer Bauteile, z. B. Motor, hydrodynamischer Drehmomentwandler und Reifen, mit Kennfeldern beschrieben wird. Ein Gesamtfahrzeugmodell für die Untersuchung des Fahrverhaltens ist in Rill [119] ausführlich beschrieben. Es berücksichtigt die Längs- und Querdynamik des Kraftfahrzeuges. Das hier eingesetzte Gesamtfahrzeugmodell wurde von Pankiewicz [101] entwickelt. Es ist ein kinematisches Fahrzeugmodell auf der Basis von Automotive Dynamic Simulation (ADS) [6], Advanced Continuous Simulation Language (ACSL) [91] und NUBEMM [4] mit 4 Hierarchieebenen (s. Abb. 1.1 auf S. 14). Dieses Modell wurde so erweitert, daß auch Verbrauchsberechnungen durchgeführt werden können (s. Abschnitt 4).

In der Verbrauchsrechnung werden derzeit nur quasistationäre Längsdynamikmodelle eingesetzt. Einflüsse der Querdynamik werden vernachlässigt. Diese Idealisierung ist insofern gerechtfertigt, als für die standardisierte Berechnung des Verbrauches eines Fahrzeuges nur Geschwindigkeitsprofile, sogenannte Zyklen, vorgeschrieben sind. Diese Geschwindigkeitsprofile müssen innerhalb vorgeschriebener Schranken eingehalten werden. Einige Testzyklen sind in Abb. 1.8 dargestellt (s. 28).

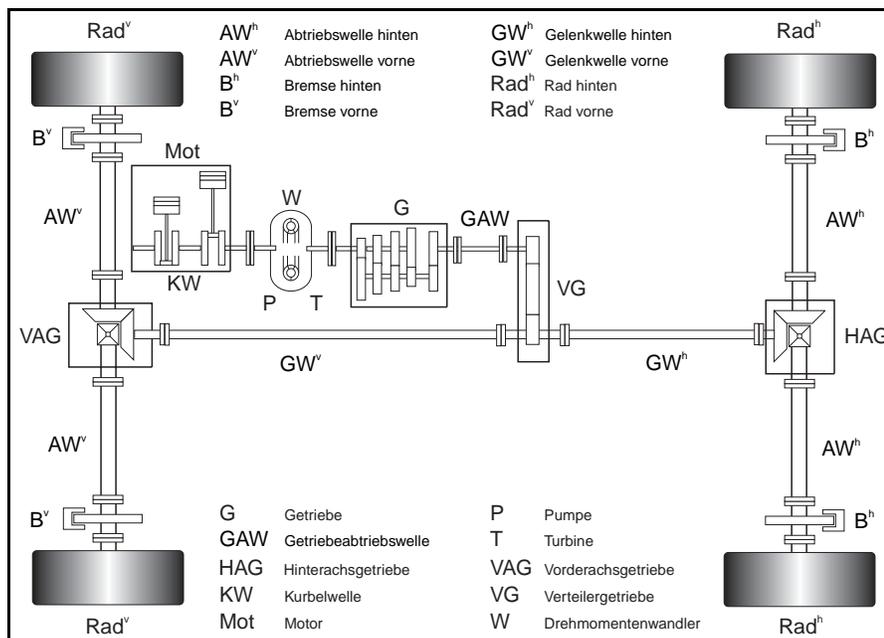
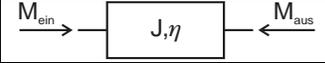
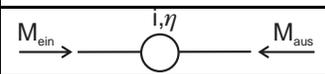
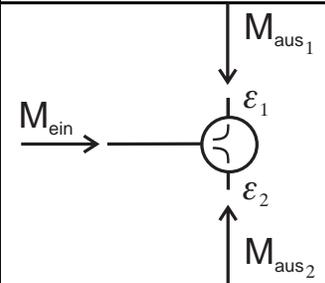
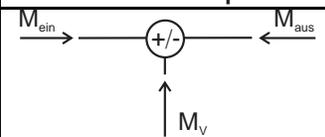


Abb. 1.9: Aufbau eines allradgetriebenen Kraftfahrzeuges.

<sup>3</sup> Hardware in the loop (vgl. Abschnitt 1.2).

Tab. 1.6: Mechanische Grundelemente für die Längsdynamikmodellierung.

Bezeichnung	Symbol	Formel
Rotationsmasse		$M_{\text{aus}} = M_{\text{ein}} \eta - J\dot{\omega}$
starre Verbindung		$M_{\text{aus}} = M_{\text{ein}}$
Getriebe		$M_{\text{aus}} = M_{\text{ein}} \eta i$
Momentenaufteilung		$M_{\text{aus1}} = M_{\text{ein}} \epsilon_1$ $M_{\text{aus2}} = M_{\text{ein}} \epsilon_2$ $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 1$
Momenteneinleitung		$M_{\text{aus}} = M_{\text{ein}} - M_v$

Als Gesamtfahrzeug wird in den Längsdynamikmodellen der Antriebsstrang mit allen Komponenten möglichst genau abgebildet. Der typische Aufbau des Antriebsstranges eines allradgetriebenen Fahrzeuges ist in Abb. 1.9 dargestellt. Für die Auslegung benötigt man genaue Angaben über Drehzahlen, Drehmomente und Winkelbeschleunigungen der einzelnen Körper. Daher werden die Massen als Rotationsmassen mit einem Freiheitsgrad dargestellt, so daß die Massenträgheiten der Körper zu berücksichtigen sind. Alle translatorischen Massen — im wesentlichen der Fahrzeugaufbau — faßt man zu einem Körper zusammen und berechnet das dazugehörige Trägheitsmoment mit

$$J_{\text{Fzg}} = m_{\text{Fzg}} r_{\text{dyn}}^2. \quad (1.14)$$

Die Drehzahlen der einzelnen Körper sind proportional zu deren Drehgeschwindigkeit

$$n_k = \omega_k \frac{60}{2\pi} \quad \text{mit} \quad k = \text{KW, PT, } \dots \quad (1.15)$$

Im Gegensatz zu Berechnungen aus den Bereichen Schwingungen und Akustik [141] kann hier auf elastische Verbindungen der Einzelmassen durch Feder-Dämpfer-Elemente verzichtet werden [71]. Die Rechenergebnisse mit dieser Idealisierung im Modell halten der Validierung mit Meßdaten stand [3]. Einige mechanische Grundelemente, die für den Modellaufbau benötigt werden, und deren formelmäßige Beschreibung sind in Tab. 1.6 aufgelistet.

Das Ersatzmodell des Gesamtfahrzeuges in der Verbrauchsrechnung hat zwei mechanische Freiheitsgrade, die durch die Kupplung oder den Drehmomentenwandler

gekoppelt werden. Daher wird das Modell genau an dieser Stelle nach dem Schnittprinzip zerlegt. Der motorseitige Teil besteht aus Kurbelwelle und Pumpe, und auf der Seite des Antriebs liegen Turbine, Antriebswelle, Verteilergetriebe, hintere und vordere Gelenkwellen und Abtriebswellen, Räder und Fahrzeugaufbau.

Das dynamische Verhalten des Gesamtsystems wird durch ein Differentialgleichungssystem, das die Momentenbilanzen beschreibt, repräsentiert (s. Tab. 1.7). Als

**Tab. 1.7:** Differentialgleichungen der Modelle zur Verbrauchsberechnung.

$J_{KW} \dot{\omega}_{KW} = M_{Mot} \eta_{KW}$	–	$M_1$
$J_P \dot{\omega}_P = (M_1 - M_{Agg}) \eta_P$	–	$M_P^{hydr} - kM_W$
$J_T \dot{\omega}_T = (M_T^{hydr} + kM_W) \eta_T$	–	$M_2$
$J_{GAW} \dot{\omega}_{GAW} = M_2 \eta_G i_G \eta_{GAW}$	–	$M_3$
$J_{GW}^h \dot{\omega}_{GW}^h = M_3 \varepsilon_{VG}^h \eta_{VG}^h i_{VG}^h \eta_{GW}^h$	–	$M_4^h$
$J_{GW}^v \dot{\omega}_{GW}^v = M_3 \varepsilon_{VG}^v \eta_{VG}^v i_{VG}^v \eta_{GW}^v$	–	$M_4^v$
$J_{AW}^h \dot{\omega}_{AW}^h = M_4^h \eta_{AG}^h i_{AG}^h \eta_{AW}^h$	–	$M_5^h$
$J_{AW}^v \dot{\omega}_{AW}^v = M_4^v \eta_{AG}^v i_{AG}^v \eta_{AW}^v$	–	$M_5^v$
$J_R^h \dot{\omega}_R^h = (M_5^h - M_B^h) \eta_R$	–	$M_6^h$
$J_R^v \dot{\omega}_R^v = (M_5^v - M_B^v) \eta_R$	–	$M_6^v$
$J_{Fzg} \dot{\omega}_{Fzg} = \left[ (M_6^h - M_{roll}^h) + (M_6^v - M_{roll}^v) \right] \eta_{Fzg}$	–	$M_{Wid}$

äußere Momente treten  $M_{Mot}$ ,  $M_{Agg}$ ,  $M_P$ ,  $M_T$ ,  $M_B^v$ ,  $M_B^h$ ,  $M_{roll}^v$ ,  $M_{roll}^h$  und  $M_{Wid}$  auf, die oben näher beschrieben sind. Wegen der starren Verbindung zwischen den einzelnen Massen gelten für die Beschleunigungen die Bedingungen:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_P &= \dot{\omega}_{KW} \\
 \dot{\omega}_T &= \dot{\omega}_{Fzg} i_{AG}^h i_{VG}^h i_G = c_1 \dot{\omega}_{Fzg} & \dot{\omega}_{AW}^v &= \dot{\omega}_{Fzg} \\
 \dot{\omega}_{GAW} &= \dot{\omega}_{Fzg} i_{AG}^h i_{VG}^h = c_2 \dot{\omega}_{Fzg} & \dot{\omega}_{AW}^h &= \dot{\omega}_{Fzg} \\
 \dot{\omega}_{GW}^v &= \dot{\omega}_{Fzg} i_{AG}^v = c_3 \dot{\omega}_{Fzg} & \dot{\omega}_R^v &= \dot{\omega}_{Fzg} \\
 \dot{\omega}_{GW}^h &= \dot{\omega}_{Fzg} i_{AG}^h = c_4 \dot{\omega}_{Fzg} & \dot{\omega}_R^h &= \dot{\omega}_{Fzg}
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Das System hat bei offener Kupplung die 2 mechanischen Freiheitsgrade  $\dot{\omega}_{KW}$  und  $\dot{\omega}_{Fzg}$  und bei geregelter bzw. geschlossener Kupplung nur einen, denn es gilt die zusätzliche Beziehung

$$\dot{\omega}_P = \dot{\omega}_T. \tag{1.17}$$

Für die Bestimmung der Schnittmomente und Beschleunigungen muß ein Gleichungssystem aufgelöst werden, das man erhält, indem man (1.16) in die Differentialgleichungen (s. Tab. 1.7) einsetzt. Faßt man nun die unbekanntenen Größen zum Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{cases} (M_1, \dot{\omega}_{\text{KW}}, M_2, M_3, M_4^v, M_4^h, M_5^v, M_5^h, M_6^v, M_6^h, \dot{\omega}_{\text{FzG}})^T & \text{für } W = 0, \\ (M_1, M_{\text{W}}, M_2, M_3, M_4^v, M_4^h, M_5^v, M_5^h, M_6^v, M_6^h, \dot{\omega}_{\text{FzG}})^T & \text{für } |W| = 1 \end{cases}$$

und die äußeren Momente zum Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} M_{\text{Mot}} \eta_{\text{KW}} \\ - (M_{\text{Agg}} \eta_{\text{P}} + M_{\text{P}}^{\text{hydr}}) \\ M_{\text{T}}^{\text{hydr}} \eta_{\text{T}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_{\text{B}}^h \\ -M_{\text{B}}^v \\ - (M_{\text{roll}}^h + M_{\text{roll}}^v) \eta_{\text{FzG}} - M_{\text{Wid}} \end{pmatrix}$$

zusammen, dann lautet die Systemmatrix für  $W = 0$  — WÜK ist offen —

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cc} 1 & J_{\text{KW}} \\ -d_1 & J_{\text{P}} \end{array} \\ \hline \end{array} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{array}{|cccccc|} \hline \begin{array}{cccc} 1 & 0 & & \\ -d_2 & 1 & 0 & \\ 0 & -d_3^h & 1 & 0 \\ -d_3^v & 0 & 1 & 0 \\ & -d_4^h & 0 & 1 & 0 \\ & & -d_4^v & 0 & 1 & 0 \\ & & & -d_5^h & 0 & 1 & 0 \\ & & & & -d_5^v & 0 & 1 \\ & & & & & -d_6 & -d_6 \end{array} & \begin{array}{l} c_4 J_{\text{T}} \\ c_3 J_{\text{GAW}} \\ c_2 J_{\text{GW}}^h \\ c_1 J_{\text{GW}}^v \\ J_{\text{AW}}^h \\ J_{\text{AW}}^v \\ J_{\text{R}}^h \\ J_{\text{R}}^v \\ J_{\text{FzG}} \end{array} \\ \hline \end{array} \end{pmatrix}$$

und für  $|W| = 1$  — WÜK ist geregelt oder geschlossen,  $k > 0$  —

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
 1 & 0 & & & & & & & & & c_4 J_{\text{KW}} \\
 -d_1 & k & 0 & & & & & & & & c_4 J_{\text{P}} \\
 0 & -k \eta_{\text{T}} & 1 & 0 & & & & & & & c_4 J_{\text{T}} \\
 & 0 & -d_2 & 1 & 0 & & & & & & c_3 J_{\text{GAW}} \\
 & & 0 & -d_3^{\text{h}} & 1 & 0 & & & & & c_2 J_{\text{GW}}^{\text{h}} \\
 & & & -d_3^{\text{v}} & 0 & 1 & 0 & & & & c_1 J_{\text{GW}}^{\text{v}} \\
 & & & & -d_4^{\text{h}} & 0 & 1 & 0 & & & J_{\text{AW}}^{\text{h}} \\
 & & & & & -d_4^{\text{v}} & 0 & 1 & 0 & & J_{\text{AW}}^{\text{v}} \\
 & & & & & & -d_5^{\text{h}} & 0 & 1 & 0 & J_{\text{R}}^{\text{h}} \\
 & & & & & & & -d_5^{\text{v}} & 0 & 1 & J_{\text{R}}^{\text{v}} \\
 & & & & & & & & -d_6 & -d_6 & J_{\text{FzG}}
 \end{pmatrix},$$

wobei die Faktoren des  $i$ -ten Schnittmoments mit  $d_i$  und diejenigen der Drehbeschleunigungen mit  $c_i$  bezeichnet werden.  $d_i$  ist ein Produkt aus Wirkungsgrad, Übersetzung und Verteilungsfaktor (vgl. Tab. 1.7).  $c_i$  ist die Gesamtübersetzung der Drehzahlen zwischen eines Bauteils und der Räder (1.16).

Anhand der Blockstruktur der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  erkennt man den Strukturwechsel im Modell. Nach Auflösen des Gleichungssystems  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$  erhält man alle Schnittmomente und die Differentialgleichungen für die Drehfreiheitsgrade. Somit steht für die numerische Berechnung von Fahrleistung und Verbrauch ein Modell eines Kraftfahrzeuges zur Verfügung. Für die Validierung des Modells sei auf [3] verwiesen. Dort wurden umfangreiche Messungen für den Vergleich mit Rechenergebnissen durchgeführt. Bezugnehmend auf die Beschreibung des Simulationskreislaufs, ist an dieser Stelle mit dem Vorliegen des *mathematischen Modells* die Phase der Modellbildung abgeschlossen (s. Abb. 2 auf S. 3, rechts oben). Im anschließenden Abschnitt werden Methoden zur Darstellung und Einbettung von Kennlinien vorgestellt.

# Kapitel 2

## Mathematische Modellierung von Kennlinien

In diesem Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, die es gestattet, Kennlinien und Kennfelder effizient darzustellen und sehr schnell, unabhängig von der Datenmenge, auszuwerten. Die tabellarisch gegebenen Stützpunkte werden mit Hilfe einer parametrisierten Kurve interpoliert. Die Bestimmung der Parameterwerte zu den vorliegenden Punkten kann mit Verfahren, die aus der Literatur bekannt sind, erfolgen. Die im Abschnitt 2.2.2 vorgestellte Methode liefert die Bogenlänge als Parameter.

Die systematische Variation einer Kennlinie im Laufe der Optimierung, wie sie beispielsweise im Abschnitt 4 durchgeführt wird, erfordert die Einbettung eindimensionaler Kennlinien in eine 2D-Fläche. Ein Algorithmus, der dies leistet, wird in Abschnitt 2.3 entwickelt.

### 2.1 Parametrisierte Modelle für Kennlinien

Eine Beschreibung der tabellarisch gegebenen Kennlinien durch eine Funktion in geschlossener Form ist in der Praxis eher die Ausnahme. Oft können Daten nicht einmal stückweise in geschlossener Form dargestellt werden. Man greift daher auf die Interpolation — in technischen Anwendungen meist die Polynominterpolation — zurück. Um starkes Oszillieren des Interpolationspolynoms zu vermeiden, wird der Grad sehr niedrig angesetzt ( $k - 1 \leq 3$ ). Es werden die gegebenen Daten aus folgenden Gründen oft nur linear interpoliert:

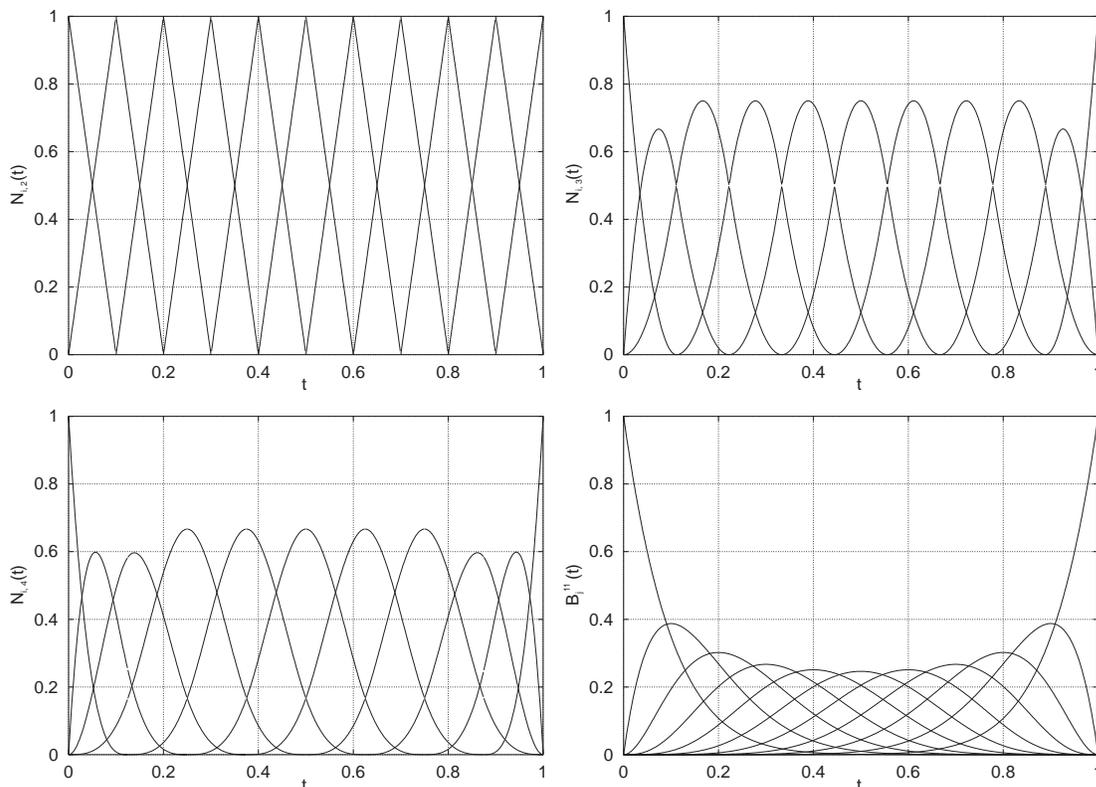
- Monotonieeigenschaften bleiben erhalten,
- einfach zu implementieren,
- sehr schnelle Auswertung.

Dem stehen folgende Nachteile der Interpolation durch Polygonzüge gegenüber:

- Unstetigkeiten in der ersten Ableitung machen bei der Integration mit Verfahren höherer Ordnung die besseren Konvergenzeigenschaften zunichte.
- Für die sinnvolle Anwendung effizienter Integrationsverfahren höherer Ordnung müssen Schaltfunktionen implementiert werden.

Bei der Berechnung von Fahrleistung und Verbrauch werden Kennlinien und Kennfelder, die in Form von Tabellen vorliegen, linear oder kubisch interpoliert. Die Verwendung von Spline-Funktionen in  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung ist für diesen Zweck aus folgenden Gründen besonders günstig [34, 35, 36, 42]:

- Splines haben einen lokalen Träger, so daß sich lokale Fehler in den Daten auch nur lokal auf die Spline-Funktion auswirken.
- Die Basisvektoren ( $\mathcal{B}$ -Splines) sind auch Splines, und haben daher ebenso lokale Träger. Diese Eigenschaft wird beim Aufstellen des Gleichungssystems zur Bestimmung der Spline-Koeffizienten und der Spline-Funktion selbst ausgenützt.
- $\mathcal{B}$ -Splines bilden im Gegensatz zu Monomen und abgebrochenen Potenzfunktionen eine „gut konditionierte“ Basis des Raumes  $\mathcal{S}_\tau^k$  der Spline-Funktionen der



**Abb. 2.1:**  $\mathcal{B}$ -Splines mit 11 inneren Punkten.  $\mathcal{B}$ -Splines 2. Ordnung sind *Hut-* oder *Chapeau-*Funktionen (links oben).  $\mathcal{B}$ -Splines 3. Ordnung (rechts oben).  $\mathcal{B}$ -Splines 4. Ordnung (links unten).  $\mathcal{B}$ -Splines ohne innere Punkte sind *Bernstein-Polynome* 11. Ordnung (rechts unten).

Ordnung  $k$  (vom Grade  $k - 1$ ) zur Unterteilung  $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_m)$  des betrachteten Intervalls  $[a, b]$ .

- Das Gleichungssystem zur Berechnung der  $\mathcal{B}$ -Spline-Koeffizienten, die auch de Boor-Punkte genannt werden, läßt sich mittels der Gauß-Elimination ohne Pivot-Suche lösen (vgl. (2.5)). Wegen der speziellen Struktur — Bandmatrix mit maximaler Bandbreite  $k$  — muß das Gleichungssystem nicht explizit aufgestellt werden, wodurch besonders bei großen Datenmengen eine effiziente Speicher-verwaltung möglich ist.
- Mit den Rekursionsformeln von de Boor und Cox lassen sich die  $\mathcal{B}$ -Splines und bei gegebenen de Boor-Punkten die Spline-Kurve numerisch stabil und schnell berechnen.
- Unstetigkeiten der Kennlinie oder höherer Ableitungen lassen sich durch koinzidente Knoten berücksichtigen. Die stückweise Definition der  $\mathcal{B}$ -Splines ermöglicht die stückweise Darstellung der resultierenden  $\mathcal{B}$ -Spline-Kurve.

Zunächst werden einige Begriffe eingeführt, die im Zusammenhang der Interpolation mit  $\mathcal{B}$ -Splines als Basisfunktionen grundlegend sind.

**Definition 2.1** Knoten (Trägerwert), Knotenvektor (Trägervektor), koinzident, einfach. Die geordneten Parameterwerte  $\tau_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) mit  $\tau_0 \leq \dots \leq \tau_i \leq \dots \leq \tau_m$  werden Knoten oder Trägerwerte genannt. Faßt man diese Knoten als Komponenten des Vektors  $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_m)$  auf, heißt  $\tau$  Knotenvektor oder Trägervektor. Der Knoten  $\tau_i$  heißt einfach, wenn  $\tau_{i-1} < \tau_i < \tau_{i+1}$ , zusammenfallende Knoten  $\tau_i = \tau_{i+1}$  bezeichnet man als koinzident. Besteht ein Knotenvektor nur aus einfachen Knoten, wird er einfacher Knotenvektor genannt.

**Definition 2.2** normalisierte  $\mathcal{B}$ -Spline(-Funktion), (nicht-)uniforme  $\mathcal{B}$ -Splines. Gegeben sei der Knotenvektor  $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{n+k})$ . Folgende rekursiv gebildeten Funktionen  $N_{i,k}(t)$  werden als normalisierte  $\mathcal{B}$ -Spline-Funktionen, oder kurz  $\mathcal{B}$ -Splines, der Ordnung  $k$  (vom Grade  $k - 1$ ) bezeichnet:

$$k = 1 : \quad N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$k > 1 : \quad N_{i,k}(t) = \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{\tau_{i+k} - t}{\tau_{i+k} - \tau_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t).$$

Wählt man den Knotenvektor äquidistant, erhält man uniforme  $\mathcal{B}$ -Splines wie sie in Abb. 2.1 zu sehen sind, anderenfalls nicht-uniforme  $\mathcal{B}$ -Splines.

Die normalisierten  $\mathcal{B}$ -Spline-Funktionen haben folgende Eigenschaften:

$$\text{Nichtnegativität:} \quad N_{i,k}(t) \geq 0 \quad \forall t \quad (2.1)$$

$$\text{lokaler Träger:} \quad N_{i,k}(t) = 0 \quad \forall t \notin [\tau_i, \tau_{i+k}] \quad (2.2)$$

$$\text{Normierung:} \quad \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) = 1 \quad \forall t \quad (2.3)$$

$$\text{Randwerte:} \quad N_{i,k}^{(\nu)}(\tau_i) = N_{i,k}^{(\nu)}(\tau_{i+k}) = 0 \quad \nu = 0, \dots, k-2 \quad (2.4)$$

Wegen der Eigenschaften (2.1) – (2.3) bilden die  $\mathcal{B}$ -Splines eine lokale *Zerlegung der Eins* [36] und wegen (2.3) spricht man von *normalisierten  $\mathcal{B}$ -Splines*. Verzichtet man auf die zuletzt genannte Eigenschaft, so können auch *nicht-normalisierte  $\mathcal{B}$ -Splines*  $M_{i,k}(t)$  verwendet werden, für welche gilt:

$$k = 1 : \quad M_{i,1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_{i+1} - \tau_i}, & \text{falls } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, \dots, n; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$k > 1 : \quad M_{i,k}(t) = \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} M_{i,k-1}(t) + \frac{\tau_{i+k} - t}{\tau_{i+k} - \tau_i} M_{i+1,k-1}(t).$$

Sie können aber auch direkt aus den normalisierten  $\mathcal{B}$ -Splines berechnet werden, denn es gilt die Beziehung

$$N_{i,k}(t) = (\tau_{i+1} - \tau_i) M_{i,k}(t).$$

De Boor [34, 35, 36] und Dierckx [42] führen die  $\mathcal{B}$ -Spline-Funktionen, ausgehend von den abgeschnittenen Potenzfunktionen, mit Hilfe von Differenzenschemata ein und geben die Rekursion in obiger Definition für die numerische Auswertung der  $\mathcal{B}$ -Splines an.

Setzt sich der Trägervektor aus jeweils  $k$  koinzidenten Anfangs- und Endknoten zusammen — es liegen keine inneren Knoten vor! — reduzieren sich die  $\mathcal{B}$ -Splines auf die *Bernstein-Polynome* (s. Abb. 2.1)

$$N_{i,k}(t) = B_i^{k-1} \left( \frac{t-a}{b-a} \right), \quad i = 0, \dots, k-1$$

$$\text{mit} \quad B_j^k(t) = \binom{k}{j} (1-t)^{k-j} t^j, \quad t \in [0, 1].$$

Fallen im Knotenvektor  $l$  Parameterwerte zusammen, so vermindert sich an dieser Stelle die Differentiationsordnung von  $\mathcal{C}^{k-2}([a, b])$  auf  $\mathcal{C}^{k-l-1}([a, b])$ . Gleichzeitig ändert sich dadurch auch die Länge des Trägerintervalls von  $k$  auf  $k - (l - 1)$ , auf der die  $\mathcal{B}$ -Spline-Funktion von Null verschieden ist. Diese Eigenschaft der  $\mathcal{B}$ -Spline-Funktionen ermöglicht die Behandlung von Unstetigkeiten in den Spline-Kurven. Es gilt stets  $l \leq k$ .

**Definition 2.3** Spline-Funktion, Spline-Kurve.

Die Menge der Polynome der Ordnung  $k$  (vom Grade  $k - 1$ ) wird mit  $\mathcal{P}_{k-1}$  bezeichnet. Es sei  $\tau$  ein einfacher Knotenvektor und  $k \in \mathbb{N}$ . Die Funktion  $\varsigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , heißt Spline-Funktion der Ordnung  $k$  (vom Grade  $k - 1$ ), wenn

1.  $\varsigma$  auf jedem nichtleeren Teilintervall  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  ein Polynom vom Grade  $k - 1$  ist:

$$\varsigma|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} \in \mathcal{P}_{k-1}, \quad i = 0, \dots, n - 1 \quad \text{und}$$

2.  $\varsigma$  und ihre Ableitungen bis zur Ordnung  $k - 2$  alle stetig auf  $[a, b]$  sind. Somit ist  $\varsigma$   $(k - 2)$ -mal stetig differenzierbar, also

$$\varsigma \in \mathcal{C}^{k-2}([a, b]).$$

Die Punktmenge  $\varsigma(I) := \{\varsigma(t) \in \mathbb{R}^{n_\varsigma} \mid t \in [a, b]\}$  heißt Spline-Kurve im  $\mathbb{R}^{n_\varsigma}$  mit  $n_\varsigma = 1, 2, 3$ .

Die Spline-Funktionen der Ordnung  $k > 1$  mit dem Knotenvektor  $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{n-k+1})$  bilden den Vektorraum  $\mathcal{S}_\tau^k$  mit der Dimension  $n$ . Die Monome bis zum Grad  $k - 1$  zusammen mit den  $(k - 1)$ -ten abgebrochenen Potenzfunktionen bilden eine Basis des Vektorraumes. Jede Spline-Funktion  $\varsigma \in \mathcal{S}_\tau^k$  kann daher in dieser Basis dargestellt werden. Für numerische Zwecke ist sie jedoch nicht geeignet, da mit wachsendem Grad der Rechenaufwand für Konstruktion und Auswertung zu teuer und die Kondition zu schlecht wird [114]. Für die praktische Anwendung ist die Verwendung der  $\mathcal{B}$ -Splines wegen ihrer oben erwähnten Eigenschaften weitaus günstiger. Jede Spline-Funktion  $\varsigma$  besitzt in der Basis der  $\mathcal{B}$ -Splines die eindeutige Darstellung

$$\varsigma(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i N_{i,k}(t) \quad \text{mit} \quad \varsigma(t), \mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^{n_\varsigma}, n_\varsigma = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

Die Koeffizienten  $\mathbf{d}_i$  werden auch als de Boor-Punkte bezeichnet. In [34] gibt de Boor die Rekursion für die  $\nu$ -te Ableitung

$$\varsigma^{(\nu)}(t) = \prod_{i=1}^{\nu} (k - i) \sum_{i=\nu}^n \mathbf{d}_i^{(\nu)} N_{i,k-\nu}(t) \quad \text{mit} \quad \varsigma^{(\nu)}, \mathbf{d}_i^{(\nu)} \in \mathbb{R}^{n_\varsigma}, n_\varsigma = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

mit den folgenden Koeffizienten an

$$\mathbf{d}_i^{(j)} = \begin{cases} \mathbf{d}_i, & \text{falls } j = 0; \\ \frac{\mathbf{d}_i^{(j-1)} - \mathbf{d}_{i-1}^{(j-1)}}{\tau_{i+k-j} - \tau_i}, & \text{falls } j > 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

**Bemerkung:**

Werden die Komponenten der Kurve mit Splines von demselben Grad interpoliert, so ist diese kompakte vektorielle Schreibweise möglich. Im allgemeinen können die Interpolationspolynome für die einzelnen Komponenten verschiedene Ordnungen besitzen.

Wegen des lokalen Trägers der  $\mathcal{B}$ -Splines liefern bei der Auswertung von  $\varsigma(t)$  im halboffenen Intervall  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  ( $i \geq k$ ) nur die de Boor-Punkte  $\mathbf{d}_{i-k+1}, \dots, \mathbf{d}_i$  einen Beitrag. Daraus folgt die Bandstruktur bei der Berechnung der de Boor-Punkte aus den gegebenen Stützwerten. Sind die Koeffizienten  $\mathbf{d}_i$  bekannt, geben de Boor und Cox in [32, 34] eine numerisch stabile Rekursion zur Auswertung der Spline-Funktion an. Sie lautet für  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\begin{aligned} \varsigma(t) &:= \mathbf{d}_i^{[k-1]}(t) \quad \text{mit} \\ \mathbf{d}_i^{[j]}(t) &= \begin{cases} \mathbf{d}_i, & \text{falls } j = 0; \\ \frac{(t - \tau_i) \mathbf{d}_i^{[j-1]} + (\tau_{i+k-j} - t) \mathbf{d}_{i-1}^{[j-1]}}{\tau_{i+k-j} - \tau_i}, & \text{falls } j > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Besteht der Knotenvektor  $\boldsymbol{\tau}$  aus  $n - k + 3$  einfachen Knoten, dann spannen die linear unabhängigen  $\mathcal{B}$ -Splines  $N_{i,k}(t)$  der Ordnung  $k$  mit  $i = 0, \dots, n - 2k + 3$  einen Vektorraum der Dimension  $n - 2k + 4$  auf. Es fehlen somit für eine Basis des  $\mathcal{S}_\tau^k$  mit der Dimension  $n + 2$  noch  $2(k - 1)$  linear unabhängige  $\mathcal{B}$ -Splines. Durch die Hinzunahme beliebiger Knoten außerhalb des betrachteten Intervalls  $[a, b]$  erhält man eine vollständige Basis. Soll eine offene Kurve interpoliert werden, macht man sich die Eigenschaft zunutze, daß  $\mathcal{B}$ -Splines auch für koinzidente Knoten definiert sind. Man wählt  $k$ -fach Randwerte

$$\begin{aligned} \tau_{-k+1} &= \dots = \tau_0 = a \\ \tau_{n-k+2} &= \dots = \tau_{n+1} = b. \end{aligned}$$

Numeriert man nun die Knoten entsprechend der Definition 2.1 um, erhält man den Knotenvektor

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_0 = \tau_1 = \dots = \tau_{k-1}, \tau_k, \dots, \tau_n, \tau_{n+1} = \dots = \tau_{n+k}). \quad (2.9)$$

Durch diese Wahl der fehlenden Knoten, werden die  $\mathcal{B}$ -Spline-Koeffizienten  $\mathbf{d}_0$  und  $\mathbf{d}_n$  interpoliert. Bei der Interpolation geschlossener Kurven mit Hilfe von  $\mathcal{B}$ -Splines werden die Knoten zyklisch fortgesetzt, um so periodische Splines zu bekommen, bei denen am Rand neben den Funktionswerten auch die Ableitungen bis zur  $(k - 2)$ -ten Ordnung übereinstimmen.

Mit den  $\mathcal{B}$ -Splines sind auch Spline-Funktionen in  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung für koinzidente Knoten  $\tau_i$  definiert. Fallen  $l$  Knoten des Knotenvektors  $\boldsymbol{\tau}$  zusammen, dann

reduziert sich wie bei den  $\mathcal{B}$ -Splines an den entsprechenden Knoten die Differentiationsordnung. Für  $l = k$  ist die  $\mathcal{B}$ -Spline-Funktion in diesem Punkt unstetig und die Sprunghöhe berechnet sich aus der Differenz der de Boor-Punkte. Auch hier gilt immer  $l \leq k$ .

### Bemerkungen:

- Eine besondere Bedeutung kommt den  $\mathcal{B}$ -Splines in der Computergraphik zu, u. a. auch zur graphischen Darstellung von Kurven für Autokarosserieteile. Dort werden sie in der allgemeinen Form der nichtuniforme rationale  $\mathcal{B}$ -Splines (NURBS) verwendet. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß in der Computergraphik die Linearkombination

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i N_{i,k}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}(t), \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^{n_c}, n_c = 1, 2, 3$$

oft als  $\mathcal{B}$ -Spline der Ordnung  $k$  bezeichnet wird. Die Koeffizienten  $\mathbf{p}_i$  werden Kontrollpunkte genannt [70].

- Bei der Verwendung der Bernsteinpolynome  $B_i^{k-1}(t)$  als Basisfunktionen nennt man die Linearkombination

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{b}_i B_i^{k-1}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}(t), \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{n_c}, n_c = 1, 2, 3$$

Bézier-Kurven oder für  $n_c = 1$  Bézier-Polynome vom Grad  $k - 1$ . Die Koeffizienten  $\mathbf{b}_i$  werden als Bézier-Punkte bezeichnet.

## 2.1.1 Aufwandreduzierte Berechnung von Splines

Zur Auswertung der Spline-Funktion  $\zeta$  an einer beliebigen Stelle  $t$  muß der Index  $i$  so gewählt werden, daß  $t$  im Intervall  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  liegt. Eine Möglichkeit wäre, alle Teilintervalle der Reihe nach zu betrachten, bis man den passenden Index gefunden hat. Dies ist aber rechenzeitintensiv, wenn sehr viele Knoten verwendet werden und  $\zeta$  oft ausgewertet werden muß. Eine Reduktion des Aufwandes kann mit Hilfe des Algorithmus 2.1 erreicht werden.

Der Aufwand zur Bestimmung des Teilintervalls kann noch weiter reduziert werden. Der Satz 2.5 auf Seite 46 liefert bei gegebenem Parameter  $t$  den Index des Intervalls, in dem  $t$  liegt, unabhängig von der Dimension des Knotenvektors  $\boldsymbol{\tau}$  mit dem Aufwand 2. Für den Beweis des Satzes wird folgendes Lemma 2.4 benötigt.

**Lemma 2.4** *Gegeben seien ein endliches Intervall  $[a, b]$  und der einfache Knotenvektor  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , d. h.  $\tau_i \neq \tau_j$  für  $i \neq j$ , mit  $\tau_0 = a$  und  $\tau_n = b$ . Ferner sei  $|\boldsymbol{\tau}| := \min_{i=1}^n \Delta\tau_i$  mit  $\Delta\tau_i := \tau_i - \tau_{i-1}$ . Dann gibt es einen „äquidistanten“ einfachen Knotenvektor  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$  mit folgenden Eigenschaften:*

**Algorithmus 2.1:** Indexsuche mit Intervallschachtelung**Schritt 0:** Initialisierung:  $i := 0, \quad i_1 := N - 1 \quad (\tau \in \mathbb{R}^N)$ **Schritt 1:** Rekursion  $j = 1, \dots, N - 1$ :

$$\begin{aligned}
 \text{if } (i_1 - i = 1) &: \quad \text{STOP!} \\
 & \quad \quad \quad l = i + \left\lfloor \frac{i_1 - i}{2} \right\rfloor \\
 \text{if } (t \geq \tau_l) &: \quad i = l \\
 \text{if } (t < \tau_l) &: \quad i_1 = l
 \end{aligned}$$

**Bemerkung:**  $\lfloor u \rfloor := \max \{n \in \mathbb{Z}, n \leq u\}$ 

1.  $\lambda_0 = a \quad \text{und} \quad \lambda_m \geq b,$
2.  $\lambda_m = b \quad \iff \quad \frac{b - a}{|\tau|} \in \mathbb{N},$
3.  $m \geq n,$
4.  $m = n \quad \iff \quad \tau \text{ ist äquidistant},$
5.  $\Delta\lambda = |\tau| \quad \text{mit} \quad \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0.$

**Beweis:** Der Vektor  $\lambda$  wird folgendermaßen definiert. Mit

$$m^* := \frac{b - a}{|\tau|}, \quad (2.10)$$

$$\lfloor m^* \rfloor = \max \{i \in \mathbb{Z}, i \leq m^*\} \quad (2.11)$$

$$m = \begin{cases} m^*, & \text{falls } m^* \in \mathbb{N}; \\ \lfloor m^* \rfloor + 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.12)$$

sind die Komponenten des Vektors  $\lambda$ 

$$\lambda_j := a + j |\tau| \quad j = 0, \dots, m \quad (2.13)$$

äquidistant und  $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ . Da die Komponenten geordnet sind, ist  $\lambda$  ein Knotenvektor. Laut Voraussetzung ist

$$\begin{aligned}
 a &= \tau_0 \\
 b &= \tau_n = \tau_0 + \sum_{i=1}^n \Delta\tau_i.
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

ad 1. Es folgt direkt aus der Definition (2.13) mit (2.12)

$$a = a + 0 |\tau| = \lambda_0$$

$$b = a + \frac{b-a}{|\tau|} |\tau| = a + m^* |\tau| \leq a + m |\tau| = \lambda_m$$

ad 2. „ $\Leftarrow$ “: Wenn  $\frac{b-a}{|\tau|} = m^* \in \mathbb{N}$ , dann ist nach (2.12)  $m = m^*$  und es folgt:

$$\lambda_m = a + m |\tau| = a + m^* |\tau| = a + \frac{b-a}{|\tau|} |\tau| = b$$

„ $\Rightarrow$ “: Aus der Definition der  $\lambda_j$  folgt unmittelbar

$$b = \lambda_m = a + m |\tau| \implies m = \frac{b-a}{|\tau|} \in \mathbb{N}$$

ad 3. Unter Verwendung des Punktes 1 und der Definition der  $\lambda_j$  in (2.13) gilt:

$$\lambda_m = a + m |\tau| \geq b \implies m \geq \frac{b-a}{|\tau|} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta\tau_i}{|\tau|} \geq \frac{n |\tau|}{|\tau|} = n.$$

ad 4. „ $\Leftarrow$ “: Es sei  $\tau$  äquidistant, dann ist  $|\tau| = \Delta\tau_i = \tau_1 - \tau_0$ . Es gilt wegen (2.10) – (2.12), (2.14):

$$m^* = \frac{b-a}{|\tau|} = \frac{a+n|\tau|-a}{|\tau|} = n \in \mathbb{N} \implies m = m^* = n$$

„ $\Rightarrow$ “: Nun sei  $m = m^* = n$  vorausgesetzt. Der Beweis, daß  $\lambda$  dann äquidistant ist, erfolgt indirekt: Angenommen  $\lambda$  sei nicht äquidistant, dann existiert ein Index  $l$  mit der Eigenschaft  $\Delta\tau_l > |\tau|$ . Damit gilt

$$\tau_n - \tau_0 = \sum_{i=1}^n \Delta\tau_i > \sum_{i=1}^n |\tau| = n |\tau| = m |\tau|.$$

Daraus folgt  $\tau_n > \tau_0 + m |\tau| = a + m |\tau| = \lambda_m$ . Dies steht aber im Widerspruch zu  $\tau_n = b \leq \lambda_m$  (Punkt 1).

ad 5. Aus (2.13) folgt:  $\Delta\lambda = \lambda_j - \lambda_{j-1} = a + j |\tau| - (a + (j-1) |\tau|) = |\tau|$  ■

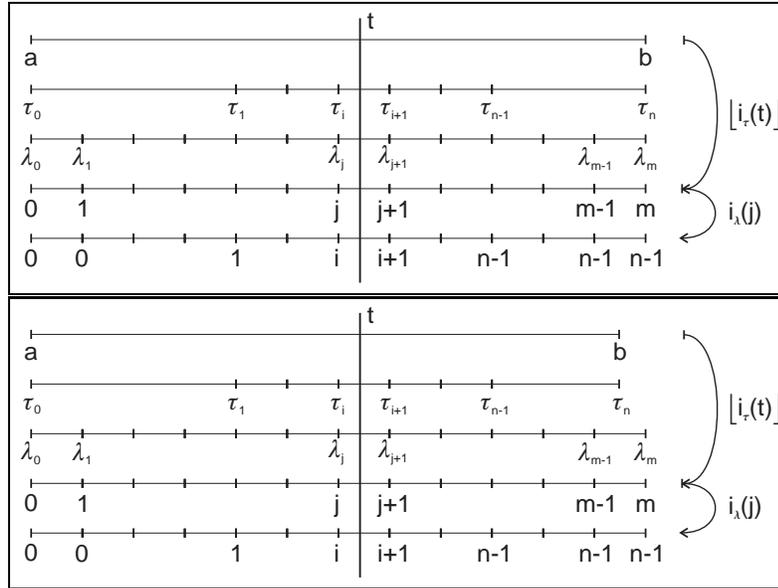
Durch eine Translation und Skalierung des Intervalls  $[\lambda_0, \lambda_m]$  auf  $[0, m]$  mit Hilfe der Funktion

$$i_\tau(\lambda_j) := \frac{\lambda_j - a}{|\tau|} = j$$

wird der Knoten  $\lambda_j$  auf seinen Index  $j$  abgebildet. Für  $t \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$  gilt die Ungleichung

$$j = i_\tau(\lambda_j) = \frac{\lambda_j - a}{|\tau|} \leq \underbrace{\frac{t - a}{|\tau|}}_{i_\tau(t)} \leq \frac{\lambda_{j+1} - a}{|\tau|} = i_\tau(\lambda_{j+1}) = j + 1. \quad (2.15)$$

Somit liefert die Funktion  $[i_\tau(t)]$  für ein beliebiges  $t \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$  den Index  $j$  des Teilintervalls aus dem äquidistanten einfachen Knotenvektor  $\lambda$ . In Abbildung 2.2 ist sie graphisch dargestellt.



**Abb. 2.2:** Graphische Darstellung der Abbildungen  $[i_\tau(t)]$  und  $i_\lambda$  für einfachen Knotenvektor  $\tau$ . Oben gilt  $b = \tau_n = \lambda_m$ , unten  $b = \tau_n < \lambda_m$ . Das Intervall  $[a, b]$  wird durch den Knotenvektor  $\tau$  beliebig und durch  $\lambda$  äquidistant überdeckt.  $[i_\tau]$  bildet  $[a, b]$  auf den Index der äquidistanten Zerlegung  $\lambda$  ab. Die Abbildung  $i_\lambda$  liefert den gesuchten Index des Knotenvektors  $\tau$ .

Da die halboffenen Teilintervalle  $[\lambda_j, \lambda_{j+1})$  das Intervall  $[a, b]$  überdecken, folgt

$$t \in [a, b] \implies \exists j < m : t \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}).$$

Der Index  $j$  ist sogar eindeutig bestimmt, denn die Teilintervalle sind disjunkt. Somit liefert die surjektive Abbildung  $[i_\tau]$  den Index  $j$  des äquidistanten Knotenvektors  $\lambda$

$$\begin{aligned} [i_\tau] : [a, b] &\mapsto J := \{0, \dots, m - 1\} \\ t &\mapsto j \quad \text{mit} \quad \lambda_j \leq t < \lambda_{j+1}, \\ t = b &\mapsto m - 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Gesucht ist jedoch das Intervall  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  aus dem gegebenen einfachen Knotenvektor  $\tau$ . Den Index  $i$  liefert nun die surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} i_\lambda : J &\mapsto I := \{0, \dots, n-1\} \\ j &\mapsto i \quad \text{mit} \quad \tau_i \leq \lambda_j < \tau_{i+1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Für jedes  $j \in J$  gibt es ein eindeutig bestimmtes  $i \in I$ , da auch die Teilintervalle  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  disjunkt sind und deren Vereinigung  $[a, b]$  überdeckt. Setzt man nun die Funktionen (2.16) und (2.17) zusammen, so folgt

$$i_\lambda \circ [i_\tau](t) = i_\lambda([i_\tau(t)]) = i_\lambda(j) = i.$$

**Satz 2.5** Gegeben seien ein endliches Intervall  $[a, b]$  und der einfache Knotenvektor  $\tau \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\tau_0 = a$ ,  $\tau_n = b$  sowie die Indexmenge  $I := \{0, \dots, n\}$ . Die Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ , gegeben durch  $\varphi := i_\lambda \circ [i_\tau]$  mit  $t \mapsto i_\lambda([i_\tau(t)])$ , liefert für jedes  $t \in [a, b]$  den Index  $i$  des Teilintervalls  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ , in dem  $t$  liegt, mit dem Aufwand 2.

**Beweis:** Aus  $[a, b] = \bigcup_{i=0}^n T_i \subset \bigcup_{j=0}^m \Lambda_j$  mit

$$\begin{aligned} T_{i-1} &:= [\tau_{i-1}, \tau_i) & i = 1, \dots, n & \quad \Lambda_{j-1} &:= [\lambda_{j-1}, \lambda_j) & j = 1, \dots, m \\ T_n &:= \{\tau_n\} & & \quad \Lambda_m &:= \{\lambda_m\} \\ T_i \cap T_l &= \emptyset, \quad i \neq l & & \quad \Lambda_j \cap \Lambda_k &= \emptyset, \quad j \neq k \end{aligned}$$

$$\text{folgt: } t \in [a, b] \implies \begin{cases} \exists i \in I & \text{mit } t \in T_i, \\ \exists j \in J & \text{mit } t \in \Lambda_j. \end{cases}$$

Somit ist wegen (2.15) – (2.17)  $[i_\tau(t)] = j$  und  $i_\lambda(j) = i$  und  $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ . Der Aufwand zur Bestimmung des Teilintervalls  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  bei gegebenem  $t \in [a, b]$  beträgt eine Addition und eine Multiplikation, also 2 Operationen, zur Auswertung von

$$i_\tau(t) = \frac{t - a}{|\tau|}. \quad \blacksquare$$

Der Satz 2.5 liefert den zweiteiligen Algorithmus 2.2, bei dem der Schnitt 1 nur einmal in der Initialisierungsphase ausgeführt wird.

Für Spline-Funktionen mit Sprüngen in den Ableitungen werden an den Sprungstellen koinzidente Knoten eingeführt. Daher muß die Voraussetzung, daß die Knoten paarweise verschieden sind, im Lemma 2.4 und Satz 2.5 abgeschwächt werden.

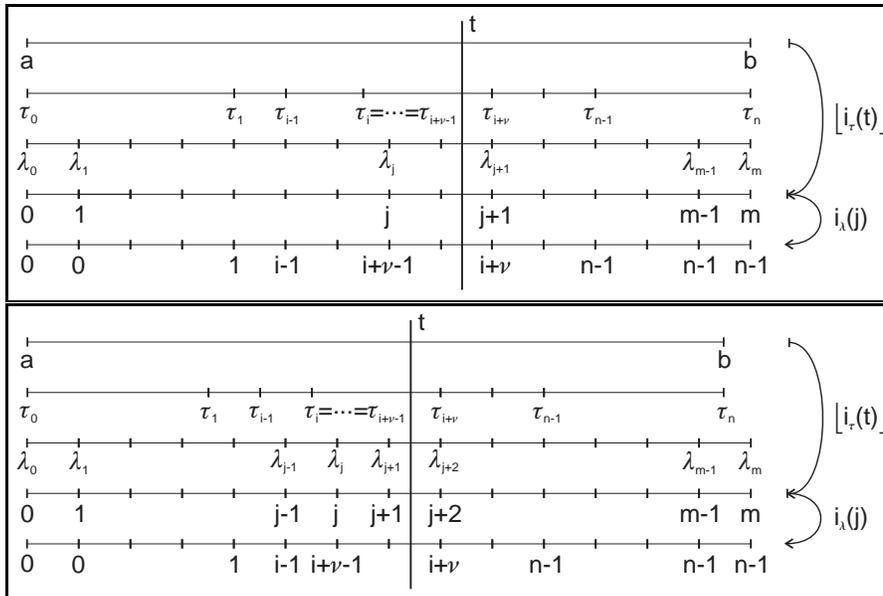
**Lemma 2.6** Gegeben seien ein endliches Intervall  $[a, b]$  und der beliebige Knotenvektor  $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , mit  $\tau_0 = a$  und  $\tau_n = b$ . Seien  $n^*$  die Anzahl der verschiedenen Knoten und  $\tau^* \in \mathbb{R}^{n^*}$  der Knotenvektor aller einfach gezählten Knoten aus  $\tau$ .

Ferner sei  $|\tau^*| := \min_{i=1}^n \Delta\tau_i^*$  mit  $\Delta\tau_i^* := \tau_i^* - \tau_{i-1}^*$ . Dann gibt es einen äquidistanten einfachen Knotenvektor  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $m \geq n^*$ ,
2.  $m = n^* \iff \tau^*$  ist äquidistant,
3.  $\Delta\lambda = |\tau^*|$  mit  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ ,
4.  $\lambda_0 = a$  und  $\lambda_m = b$ ,
5.  $\lambda_m = b \iff \frac{b-a}{|\tau^*|} \in \mathbb{N}$ .

**Satz 2.7** Gegeben seien ein endliches Intervall  $[a, b]$  und der beliebige Knotenvektor  $\tau \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\tau_0 = a$  und  $\tau_n = b$  sowie die Indexmenge  $I := \{0, \dots, n\}$ . Die Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ , gegeben durch  $\varphi := i_\lambda \circ [i_\tau]$  mit  $t \mapsto i_\lambda([i_\tau(t)])$ , liefert für jedes  $t \in [a, b]$  den Index  $i$  des Teilintervalls, in dem  $t$  liegt, mit dem Aufwand 2.

Die Beweise zu 2.6 und 2.7 verlaufen analog zu 2.4 und 2.5. Zur Veranschaulichung sei auf die Abbildungen 2.2 und 2.3 verwiesen.



**Abb. 2.3:** Graphische Darstellung der Abbildungen  $[i_\tau(t)]$  und  $i_\lambda$  für Knotenvektor  $\tau$  mit  $\nu$ -fachem Knoten  $\tau_i$ . Darstellung und Prinzip sind analog zu Abb. 2.2.

**Algorithmus 2.2:** Indexbestimmung mit Aufwand 2**Schritt 0:** Initialisierungsphase (Teil I)

$$\Delta\tau_i := \tau_i - \tau_{i-1} > 0 \quad |\boldsymbol{\tau}| := \min_{i=1}^n \Delta\tau_i$$

$$m^* := \frac{b-a}{|\boldsymbol{\tau}|} \quad m := \begin{cases} m^*, & \text{falls } m^* \in \mathbb{N}; \\ \lfloor m^* \rfloor + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\lambda_j := \tau_0 + j |\boldsymbol{\tau}| \quad j = 0, \dots, m-1$$

$$i_\lambda(j) := \begin{cases} n-1 & \text{für } j = m; \\ i & \text{für } \tau_i \leq \lambda_j < \tau_{i+1} \quad j = 0, \dots, m-1. \end{cases}$$

**Schritt 1:** Indexbestimmung (Teil II)

$$h := \frac{t-a}{|\boldsymbol{\tau}|} \quad j := \lfloor h \rfloor \quad i := i_\lambda(j)$$

**2.1.2 Berechnung der Spline-Koeffizienten**

Die Koeffizienten  $\boldsymbol{d}_j = (d_j^x, d_j^y, d_j^z)$  der parametrisierten Kurve  $\boldsymbol{\zeta}(t)$  in  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung (2.5) werden so bestimmt, daß an noch frei wählbaren Parameterwerten  $t_i$  die gegebenen Stützwerte  $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$  mit  $i = 0, \dots, n$  angenommen werden. Die Interpolationsbedingung lautet komponentenweise

$$x_i = \sum_{j=0}^n d_j^x N_{j,k}(t_i), \quad y_i = \sum_{j=0}^n d_j^y N_{j,k}(t_i), \quad z_i = \sum_{j=0}^n d_j^z N_{j,k}(t_i).$$

Wegen des lokalen Trägers der  $\mathcal{B}$ -Splines verkürzt sich die Summe für  $t_i \in [\tau_\nu, \tau_{\nu+1})$  ( $\nu \geq k$ ) auf

$$x_i = \sum_{j=\nu-k+1}^{\nu} d_j^x N_{j,k}(t_i), \quad y_i = \sum_{j=\nu-k+1}^{\nu} d_j^y N_{j,k}(t_i), \quad z_i = \sum_{j=\nu-k+1}^{\nu} d_j^z N_{j,k}(t_i). \quad (2.18)$$

Daher hat die Matrix  $(N_{j,k}(t_i))_{i,j}$  Bandstruktur mit der maximalen Bandweite  $k$  und ist nach dem Satz von Schoenberg-Whitney invertierbar [35]. Unter der Voraussetzung, daß in jedem Teilintervall des Knotenvektors ein Datenpunkt vorliegt, ist die Lösbarkeit des Gleichungssystems sichergestellt. Für die numerische Berechnung der Spline-Koeffizienten  $\boldsymbol{d}_j$  aus (2.18) eignet sich die Elimination nach Gauß ohne Pivot-Suche. Da die Matrix Bandstruktur besitzt, wird sie nicht explizit aufgestellt. Es werden immer nur Blöcke mit  $k$  Spalten pro Zeile betrachtet. Statt einer Matrix der Dimension

$(n, n)$  mit sehr vielen Null-Einträgen wird also nur eine Matrix der Größe  $(n, k)$  verwendet. Bei kubischen Splines ist  $k = 4$ , während  $n$  groß sein kann, z. B.  $n > 2000$ .

Um die Auflösbarkeit der Gleichung für die de Boor-Koeffizienten sicherzustellen, muß bei gegebener Parametrisierung  $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_n)$  der Knotenvektor  $\boldsymbol{\tau}$  der  $\mathcal{B}$ -Splines so gewählt werden, daß die Parameterwerte  $t_i$  gleichmäßig auf den Knotenvektor verteilt sind. Häufen sich Parameterwerte  $t_i$  in einigen Intervallen  $[\tau_j, \tau_{j+1})$ , so können in anderen Lücken entstehen. Dann ist die Matrix des Interpolationsproblems singulär, und das Gleichungssystem wäre unlösbar [42, 70]. Ermittelt man den Knotenvektor nach dem Algorithmus 2.3 von Tiller [107], so ist das Gleichungssystem (2.18) stets lösbar.

**Algorithmus 2.3:** Knotenvektor nach Tiller [70, 107]

**Schritt 0:** Parametrisierung der Stützstellen  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$  durch  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n+1}$  (s. Abschnitt 2.2)

**Schritt 1:** Rekursion für den Knotenvektor  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n+k+1}$ :

$$\tau_j = t_0 \quad j = 0, \dots, k-1$$

$$\tau_j = \frac{1}{k} \sum_{i=j-k+1}^j t_i \quad j = k, \dots, n$$

$$\tau_j = t_n \quad j = n+1, \dots, n+k$$

Je nach der Wahl der Parametrisierung  $\mathbf{t}$  (s. Abschnitt 2.2), erhält man verschiedene Koeffizienten und somit auch unterschiedliche Kurven (vgl. [70]). Ziel wird es sein, eine Parametrisierung zu finden, die der Bogenlänge der gesuchten Spline-Kurve entspricht.

**Definition 2.8** Bogenlänge einer Kurve.

Seien  $\mathbf{c} \in \mathcal{C}^1([a, b])$  eine Abbildung  $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $t_0 \in [a, b]$ . Dann heißt

$$s(t) = L_{t_0}^t[\mathbf{c}] := \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{c}}(\tau)\|_2 \, d\tau \quad (2.19)$$

die Bogenlänge von  $\mathbf{c}$ .

### 2.1.3 2D-Splines auf Tensorproduktgittern

Mit Splines in  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung können neben Kurven im  $\mathbb{R}^n$  mit  $n = 1, 2, 3$  auch Flächen auf Tensorproduktgittern (siehe unten) dargestellt werden [42]. Für die In-

terpolation von Kennfeldern werden im Prinzip zweidimensionale Spline-Funktionen benötigt. Sie lassen sich jedoch als 2 eindimensionale Spline-Funktionen, die nacheinander auszuwerten sind, anschreiben (2.21). In Hinblick auf die Einbettung der Kennlinien in eine Fläche für die anschließende Optimierung ist die Verwendung von Tensorprodukten als Gitter durchaus zweckmäßig. Zunächst folgen einige grundlegende Definitionen.

**Definition 2.9** Tensorproduktgitter.

Gegeben sei ein rechteckiges Gebiet  $\mathcal{R} = \left\{ (u, v) \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d \right\}$

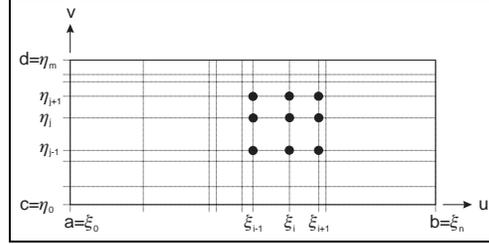
und die einfachen Knotenvektoren  $\xi \in \mathbb{R}^n$

und  $\eta \in \mathbb{R}^m$  mit den geordneten Knoten

$$\xi := (a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = b)$$

$$\eta := (c = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_{m-1} < \eta_m = d).$$

Die Punktepaare  $(\xi_i, \eta_j)$  ( $i = 0, \dots, n$ ,  $j = 0, \dots, m$ ) bilden ein Tensorproduktgitter.



**Abb. 2.4:** Tensorproduktgitter.

**Definition 2.10** 2D Spline-Funktion auf einem Tensorproduktgitter, Spline-Fläche.

Es seien das rechteckige Gebiet  $\mathcal{R}$ , die einfachen Knotenvektoren  $\xi \in \mathbb{R}^n$  und  $\eta \in \mathbb{R}^m$  sowie  $k, l \in \mathbb{N}$  gegeben. Die Funktion  $\varsigma : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , heißt 2D Spline-Funktion der Ordnung  $k$  (vom Grade  $k - 1$ ) in  $u$ -Richtung und der Ordnung  $l$  (vom Grade  $l - 1$ ) in  $v$ -Richtung, wenn

1.  $\varsigma$  auf jedem Teilgebiet  $\mathcal{R}_{ij} := [\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$  ein Polynom vom Grade  $k - 1$  in  $u$  und vom Grade  $l - 1$  in  $v$  ist:

$$\varsigma|_{\mathcal{R}_{ij}} \in \mathcal{P}_{k-1} \otimes \mathcal{P}_{l-1}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m, \quad \text{und}$$

2.  $\varsigma$  und ihre partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $k - 2$  in  $u$  und  $l - 2$  in  $v$  alle stetig auf  $\mathcal{R}$  sind:

$$\frac{\partial^{\nu+\mu} \varsigma}{\partial u^\nu \partial v^\mu} \in \mathcal{C}(\mathcal{R}), \quad \nu = 0, \dots, k - 2, \quad \mu = 0, \dots, l - 2.$$

Die Punktmenge  $\varsigma(\mathcal{R}) := \{ \varsigma(u, v) \in \mathbb{R} \mid (u, v) \in \mathcal{R} \}$  heißt 2D Spline-Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

Durch Einführung koinzidenter Randpunkte erhält man analog zu (2.9) die Knotenvektoren

$$\xi = (\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_{k-1}, \xi_k, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n = \dots = \xi_{n+k}),$$

$$\eta = (\eta_0 = \eta_1 = \dots = \eta_{l-1}, \eta_l, \dots, \eta_{m-1}, \eta_m = \dots = \eta_{m+k}).$$

Somit kann jede Spline-Fläche  $\varsigma(\mathcal{R})$  in der Basis der normalisierten  $\mathcal{B}$ -Splines eindeutig dargestellt werden

$$\varsigma(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m d_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v). \quad (2.20)$$

Auf Tensorproduktgittern können zweidimensionale Spline-Funktionen als gestaffelte Spline-Kurven berechnet werden [42]:

$$\varsigma(u, v) = \begin{cases} \sum_{i=0}^n a_i N_{i,k}(u), & a_i = \sum_{j=0}^m d_{ij} N_{j,l}(v) \quad \text{für } l \leq k, \\ \sum_{j=0}^m b_j N_{j,k}(v), & b_j = \sum_{i=0}^n d_{ij} N_{i,k}(u) \quad \text{für } k < l. \end{cases} \quad (2.21)$$

Ist der Interpolationsgrad  $l$  kleiner als  $k$ , werden für die Berechnung von  $\varsigma(\xi, \eta)$  zuerst die  $\mathcal{B}$ -Splines in  $v$ -Richtung mit den Koeffizienten  $d_{i,j}$  zu den Kurven  $a_i = a_i(v)$  mit  $i = 0, \dots, n$  kombiniert und an der gegebenen Stelle  $v = \eta$  ausgewertet. Anschließend wird der Punkt der Spline-Fläche ermittelt, indem die Spline-Kurve in  $u$ -Richtung mit den  $a_i$  als Koeffizienten an der gegebenen Stelle  $u = \xi$  berechnet wird. Für  $k < l$  werden im Punkt  $(u, v) = (\xi, \eta)$  zuerst die  $b_j = b_j(\xi)$  und dann  $\varsigma(\xi, \eta)$  bestimmt. Um weitere Rechenzeit zu sparen, nützt man auch hier wiederum die Eigenschaft des lokalen Trägers der  $\mathcal{B}$ -Splines aus.

## 2.2 Parametrisierungen von Kennlinien

Bei der Beschreibung der Kennlinien und Kennfelder mit Hilfe von Spline-Funktionen werden die Ansätze (2.5) und (2.20) als parametrisierte Modelle aufgefaßt. Jedem in der Tabelle gegebenen Punkt  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{n_p}$  ( $n_p = 1, 2, 3$ ) mit  $i = 0, \dots, n$  wird ein Parameterwert  $t_i \in I_a^b = [a, b]$  ( $a < b$ ) zugeordnet, an dem die Funktion den Stützwert interpolieren muß. Dabei können diese Parameterwerte willkürlich gewählt werden. Aus der Literatur zur geometrischen Datenverarbeitung [70] sind folgende Parametrisierungsstrategien bekannt, wobei hier das Intervall  $I_a^b$  auf  $I_0^1$  transformiert ist. Im folgenden wird der Einfachheit halber statt  $I_a^b$  kurz  $I$  geschrieben.

### 2.2.1 Parametrisierungen in der Literatur

In der Literatur sind folgende Parametrisierungen zu finden [70]:

1. Äquidistant: Die Daten  $\mathbf{P}_i, i = 0, \dots, n$  werden in äquidistanten Abständen auf das Parameterintervall verteilt:

$$t_i = \frac{i}{n};$$

2. Chordal: Es werden rekursiv die Abstände  $\Delta_i, i = 0, \dots, n$  der Punkte  $P_i$  berechnet und dann die Länge  $s^*$  des Polygonzuges bestimmt. Die chordale Parametrisierung kann als Näherung der Bogenlänge interpretiert werden.

$$\Delta_0 = 0, \quad \Delta_j = \|P_j - P_{j-1}\|_2, \quad s^* = \sum_{j=0}^n \Delta_j, \quad t_i = \frac{1}{s^*} \sum_{j=0}^i \Delta_j;$$

3. Zentripetal: Analog zur chordalen Parametrisierung werden hier die  $t_i$  ermittelt. Der einzige Unterschied liegt in der Definition der  $\Delta_j$  [87].

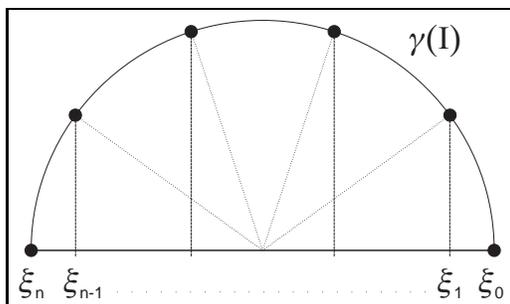
$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \Delta_0 = 0, \quad \Delta_j = \|P_j - P_{j-1}\|_2^\alpha, \quad s^* = \sum_{j=0}^n \Delta_j, \quad t_i = \frac{1}{s^*} \sum_{j=0}^i \Delta_j.$$

Mit  $\alpha \in [0, 1]$  stellt die zentripetale Parametrisierung eine Verallgemeinerung der chordalen dar.

4. Geometrisch: Hier sind die Parameterwerte das geometrische Mittel aus äquidistanter und chordaler Parametrisierung.

Für ebene Kurven geben Foley und Nielson in [47, 96] noch weitere Parametrisierungen an. Bei der affin invarianten Parametrisierung definiert die Koeffizientenmatrix, die den gegebenen Daten zugeordneten Ausgleichskegelschnitt beschreibt, eine Metrik zur Berechnung der  $\Delta_j$ . Eine weitere Parametrisierung, bei der sowohl Abstände zwischen den gegebenen Punkten als auch Winkeländerungen in den Interpolationspunkten berücksichtigt werden, gibt Foley in [47] an.

In der klassischen Polynominterpolation nach Lagrange und Newton haben sich die Čebyšev-Knoten (s. Abb. 2.5) als besonders zweckmäßig erwiesen, um allzu starke Oszillationen der Interpolierenden am Rande des Interpolationsintervalls zu vermeiden. Auch hier, bei Interpolation mittels  $\mathcal{B}$ -Splines, kann die Strategie der Parametrisierung durch Čebyšev-Knoten verfolgt werden. Die Parameterwerte sind dann die  $x$ -Komponenten der  $n + 1$  Punkte, die man folgendermaßen ermittelt:



**Abb. 2.5:** Konstruktion der Knoten nach Čebyšev.

Der Halbkreis als parametrisierte Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

wird in  $n$  gleichgroße Bögen zerlegt. Die  $x$ -Komponenten der Zerlegungspunkte  $\gamma\left(\frac{i}{n}\right)$  sind dann die gesuchten Parameterwerte

$$\xi_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right) \quad i = 0, \dots, n.$$

## 2.2.2 Bogenlänge als Parameter

Im weiteren werden nun Bedingungen hergeleitet, die erfüllt sein müssen, wenn die Kurve nach der *Bogenlänge* parametrisiert werden soll. Dazu werden folgende Begriffe aus der Differentialgeometrie [10, 20] benötigt. Zu den Beweisen der unten angegebenen Sätzen sei auf [20] verwiesen.

**Definition 2.11**  $C^r(I)$ -Weg,  $C^r(I)$ -Kurve.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Parameterintervall. Durch die Abbildung  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  wird ein  $C^r(I)$ -Weg festgelegt.  $r$  gibt dabei die Differentiationsklasse an. Im allgemeinen ist  $r \geq 1$ . Die Punktmenge  $c(I) := \{\mathbf{c}(u) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in I\}$  wird als  $C^r(I)$ -Kurve bezeichnet.

**Definition 2.12** Doppelpunkt, doppelpunktfrei.

Sei  $\mathbf{c} \in C^r(I)$  ( $r \geq 1$ ).  $\mathbf{P}$  heißt *Doppelpunkt* der Kurve  $c(I)$ , wenn es Parameterwerte  $t_1 \neq t_2 \in I$  gibt mit  $\mathbf{P} = \mathbf{c}(t_1) = \mathbf{c}(t_2)$ . Eine Kurve ohne Doppelpunkte wird auch *doppelpunktfrei* genannt.  $\mathbf{c}$  ist dann *injektiv*.

**Definition 2.13** regulär, singulär, einfach,  $C^r(I)$ -Immersion.

Sei  $\mathbf{c}$  ein  $C^r(I)$ -Weg ( $r \geq 1$ ). Der Punkt  $t_0$  heißt *regulär*, falls

$$\dot{\mathbf{c}} := \frac{d\mathbf{c}}{dt}$$

in einer Umgebung des Punktes  $t_0$  injektiv ist ( $\dot{\mathbf{c}}(t_0) \neq \mathbf{0}$ ), anderenfalls *singulär*. Ein regulärer  $C^r(I)$ -Weg ( $r \geq 1$ ), d. h.  $\dot{\mathbf{c}} \neq \mathbf{0}$  auf ganz  $I$ , wird  $C^r(I)$ -Immersion genannt.  $c(I)$  heißt dann *reguläre Kurve*. Ist eine reguläre Kurve doppelpunktfrei, heißt sie *einfach*.

**Definition 2.14** Wendepunkt, wendepunktfrei.

Sei  $\mathbf{c} \in C^r(I)$  ( $r \geq 2$ ). Der Punkt  $\mathbf{P} = \mathbf{c}(t_0)$  der  $C^r(I)$ -Kurve  $c(I)$  heißt *Wendepunkt* genau für  $\ddot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{0}$ .  $C^r(I)$ -Kurven, die keine Wendepunkte besitzen, werden als *wendepunktfrei* bezeichnet.

**Definition 2.15** Tangentenvektor, Tangente.

Sei  $\mathbf{c}$  ein  $C^r(I)$ -Weg ( $r \geq 1$ ). Für einen Parameterwert  $t_0 \in I$  heißt  $\dot{\mathbf{c}}(t_0)$  *Tangentenvektor* der Kurve im Punkt  $t_0$ . Die in einem regulären Punkt durch  $\dot{\mathbf{c}}(t_0)$  bestimmte Gerade wird als *Tangente* bezeichnet.

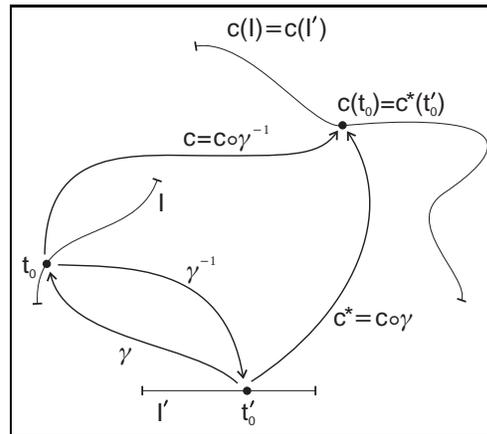
Die Wahl der Parametrisierung eines  $C^r(I)$ -Wegs  $\mathbf{c}$  ( $r \geq 1$ ) ist nicht eindeutig, da durch geeignete Transformationen immer ein Wechsel des Parameters durchgeführt werden kann (s. Abb. 2.6). Um die Differentiationsordnung zu erhalten, werden nur  $C^r(I)$ -Diffeomorphismen als Parameterwechsel zugelassen:

**Definition 2.16**  $C^r(I)$ -Diffeomorphismen (zulässiger Parameterwechsel).

Seien  $I, I' \subset \mathbb{R}$  und  $\gamma : I' \rightarrow I$  gegeben. Ist die Abbildung  $\gamma$  bijektiv sowie  $\gamma \in C^r(I')$  und  $\gamma^{-1} \in C^r(I)$  ( $r \geq 1$ ), dann heißt sie  $C^r(I')$ -Diffeomorphismus. Hinreichende Bedingungen sind:

1.  $\gamma$  ist global und surjektiv,
2.  $\gamma \in C^r(I')$  mit  $r \geq 1$ ,
3.  $\frac{d\gamma}{dt'} \neq 0$  auf ganz  $I'$  (Injektivität).

Seien  $c$  ein  $C^r(I)$ -Weg und  $c^*$  ein  $C^r(I')$ -Weg mit  $c = c^* \circ \gamma$  dann heißen die Wege äquivalent und  $\gamma$  zulässiger Parameterwechsel. (s. Abb. 2.6, Abb. 2.7)



**Abb. 2.6:** Graphische Darstellung eines Parameterwechsels.

Neben der Differentiationsklasse bleiben auch die Begriffe regulär, einfach und Tangente gegenüber zulässigen Parametertransformationen erhalten. Oft ist es zweckmäßig durch eine Transformation die Bogenlänge als neuen Parameter einzuführen. Zu jeder  $C^r(I)$ -Immersion  $c$  mit  $r \geq 1$  existiert stets ein normierter  $C^r(I')$ -Weg  $c^*$  ( $\|c^{*'}\|_2 = 1$ ), denn es gilt der folgende Satz.

**Satz 2.17** Es sei  $c$  ein  $C^r(I)$ -Weg mit  $r \geq 1$ . Für den  $C^r(I')$ -Weg  $c^*(s) = c \circ \gamma(s)$  gilt:

1. Die Abbildung  $\gamma : s \rightarrow \gamma(s) = t$  ist eine  $C^r(I)$ -Parametertransformation.

2. Für  $a, b \in I$  ist  $L_a^b[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\|_2 dt = s(b) - s(a)$ .

3. Mit  $c^{*'} := \frac{dc^*}{ds}$  gilt:  $\|c^{*'}\|_2 = 1$ .

Der Raum in dem eine  $C^r(I)$ -Kurve liegt kann mit Hilfe der sogenannten Begleitbasis, die als mitgeführtes Koordinatensystem interpretiert werden kann, aufgespannt werden. Im  $\mathbb{R}^3$  spricht man auch vom begleitenden Dreibein, welches ein orthonormiertes Rechtssystem ist. Für reguläre, wendepunktfreie  $C^2(I)$ -Wege läßt sich das begleitende Dreibein nur aus der Kenntnis des Wegs und seiner Ableitungen bestimmen.

**Definition 2.18** Begleitendes Dreibein (orthonormiertes Rechtssystem).

Sei  $c$  ein regulärer, wendepunktfreier  $C^2(I)$ -Weg und der von den Ableitungsvektoren

$\dot{c}$  und  $\ddot{c}$  aufgespannte Raum zweidimensional, dann ist in jedem Punkt das begleitende Dreibein  $\{\mathbf{c}; \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  definiert durch

$$\text{den Tangentenvektor:} \quad \mathbf{t} := \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|_2} \quad (2.22)$$

$$\text{den Binormalenvektor:} \quad \mathbf{b} := \frac{\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|_2} \quad (2.23)$$

$$\text{den Hauptnormalenvektor:} \quad \mathbf{n} := \mathbf{b} \times \mathbf{t} \quad (2.24)$$

Das Tripel  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  bildet ein orthonormiertes Rechtssystem.

Das begleitende Dreibein genügt nach dem folgenden Satz den Frenetschen Ableitungsgleichungen.

**Satz 2.19** Frenetsche Formeln, Krümmung, Torsion.

Sei  $c$  ein regulärer, wendepunktfreier  $\mathcal{C}^3(I)$ -Weg, dann gelten folgende Ableitungsgleichungen von Frenet:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{c}}\|_2^{-1} \dot{\mathbf{t}} &= \kappa \mathbf{n} \\ \|\dot{\mathbf{c}}\|_2^{-1} \dot{\mathbf{n}} &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \|\dot{\mathbf{c}}\|_2^{-1} \dot{\mathbf{b}} &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Für die Krümmung  $\kappa$  und die Torsion  $\tau$  gilt:

$$\kappa := \frac{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|_2}{\|\dot{\mathbf{c}}\|_2^3} = \|\mathbf{c}^{*''}\|_2, \quad (2.26)$$

$$\tau := \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})}{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|_2^2} = \frac{\det(\mathbf{c}^{*'}, \mathbf{c}^{*''}, \mathbf{c}^{*'''})}{\|\mathbf{c}^{*''}\|_2^2}. \quad (2.27)$$

**Satz 2.20** Hauptsatz der Kurventheorie.

Sind auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $\kappa(s)$  mit  $\kappa(s) \geq 0$  und eine  $\mathcal{C}^0$ -Funktion  $\tau(s)$  gegeben, so gibt es bis auf eigentliche Bewegungen genau eine reguläre, wendepunktfreie  $\mathcal{C}^3(I)$ -Kurve  $c(I)$  mit der Bogenlänge  $s$ , der Krümmung  $\kappa(s)$  und der Torsion  $\tau(s)$ .

Für reguläre  $\mathcal{C}^3(I)$ -Kurven gilt:

1.  $c(I)$  ist geradlinig genau für  $\kappa(s) \equiv 0$ .
2.  $c(I)$  ist eben genau für  $\tau(s) \equiv 0$ .

**Eigenschaften und Bemerkungen:**

- Das Bild kubischer Spline-Funktionen ist eine Kurve mit minimaler Krümmung.
- Nach dem Hauptsatz der Kurventheorie und der Definitionen von Krümmung (2.26) und Torsion (2.27) können Raumkurven im  $\mathbb{R}^3$  mit Hilfe kubischer Spline-Funktionen dargestellt werden.
- Zur Untersuchung des Fahrverhaltens eines Fahrzeugs durch numerische Simulation wird in den eingesetzten Straßenmodellen die Mittellinie als eine reguläre, wendepunktfreie  $C^3$ -Kurve im Raum, dargestellt, z. B. die BMW-Teststrecke in Aschheim [94].

**2.2.3 Berechnung der Parametrisierung nach der Bogenlänge**

Werden nun die als  $(x_i, y_i = f(x_i))$ -Paare ( $i = 0, \dots, n$ ) gegebenen Kennlinien durch parametrisierte Spline-Funktionen  $\zeta \in C^3(I)$  mit der Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\zeta}(\tau)\| \, d\tau \quad (2.28)$$

interpoliert, dann entspricht nach Satz 2.17 (s. Seite 54) der Parameter  $t$  der Bogenlänge genau für  $s(t) \equiv t$ . Das Residuum

$$r(t) := t - s(t) = \int_0^t (1 - \|\dot{\zeta}(\tau)\|) \, d\tau \quad (2.29)$$

muß für alle  $t$  verschwinden und somit auch die erste Ableitung  $\dot{r}(t) = 1 - \|\dot{\zeta}(t)\|$ . Für beliebige Parametrisierungen  $t$  ist aber  $r(t) \neq 0$ . Es gilt die Abschätzung

$$r_1(t) := \int_0^t (\dot{r}(\tau))^2 \, d\tau \geq 0, \quad (2.30)$$

wobei die Gleichheit gilt, wenn  $t$  die Bogenlänge ist. Die Ungleichung (2.30) gilt insbesondere für die gesuchten Parameterwerte  $t_i$ , an denen die Spline-Funktion die Stützwerte interpoliert. Umgekehrt erhält man die Parametrisierung nach der Bogenlänge als Lösung der Minimierungsaufgabe

$$F(t_i) := \int_0^{t_i} (\dot{r}(\tau))^2 \, d\tau \longrightarrow \text{minimal!} \quad (2.31)$$

**Algorithmus 2.4:** Bogenlänge als Parameter**Schritt 0:** Initialisierung:

1.  $n + 1$  Punktepaare  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$
2. Ordnungen für  $x$ - und  $y$ -Richtung:  $k = 4, l = 4$  (kubisch)
3. Toleranzschranke  $TOL$

**Schritt 1:** Chordale Parametrisierung  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n+1}$  der Stützwerte  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ **Schritt 2:** Ermittle Knotenvektor  $\boldsymbol{\tau}, \in \mathbb{R}^{n+k+1}$  nach Alg. 2.3**Schritt 3:** Initialisierungsphase des Alg. 2.2 zur Indexbestimmung für  $\boldsymbol{\tau}$ **Schritt 4:** Ansatz der Spline-Funktionen nach (2.5) und (2.6) für $x = \zeta_x(t), y = \zeta_y(t)$  und deren 1. Ableitung;

Bestimmung der de Boor-Punkte

**Schritt 5:** Für  $i = 0, \dots, n$ :

- Berechnung der Bogenlänge  $s(t) \big|_{t=t_i}$
- Residuum  $\mathbf{r} = (r(t_i))_i$  nach (2.29)
- Löse Minimierungsaufgabe (2.31)

Da  $t_i$  Komponente eines Knotenvektors ist, also stets  $t_i \leq t_{i+1}$ , können die Parameterwerte  $t_i$  sukzessive bestimmt werden. Die Zielfunktion ist wegen (2.30) nach unten durch Null beschränkt und das Minimum wird für  $C^r(I)$ -Immersionen  $\zeta$  mit  $r \geq 1$  wegen Satz 2.17 auch angenommen. Die Optimierungsaufgabe (2.31) ist für reguläre  $C^r(I)$ -Wege lösbar. Die Parametrisierung nach der Bogenlänge kann mit Hilfe folgender Iteration bestimmt werden:

1. Setze  $it = 0$  und wähle eine Parametrisierung  $\mathbf{t}^{(it)} = (t_0^{(it)}, \dots, t_{n+k}^{(it)})$ , z. B. die chordale. Berechne die  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung  $\boldsymbol{\zeta}^{(it)}$  von der Ordnung  $k \geq 3$  (mindestens vom Grade 2) zu den gegebenen Daten und der ersten Ableitung  $\dot{\boldsymbol{\zeta}}^{(it)}$ .
2. Berechne zu jedem Parameter  $t_i^{(it)}$  die Bogenlänge  $s_i^{(it)} = s(t_i^{(it)})$ ,  $i = 0, \dots, n$ , nach (2.28).
3. Berechne die Residuen  $\mathbf{r}^{(it)}$  mit  $r_i^{(it)} := s_i^{(it)} - t_i^{(it)}$ ,  $i = 0, \dots, n$ .
4. Prüfe die Abbruchbedingungen mit  $\hat{r}_1 := \|\mathbf{r}^{(it)}\|_2$ ; wenn  $it = 0$ , dann  $\hat{r}_0 = \hat{r}_1$ :
  - (a)  $\hat{r} < TOL$ ,
  - (b)  $\hat{r}_0 < \hat{r}_1$ ,
  - (c)  $it = it_{\max}$ .

5. Setze die neue Parametrisierung  $\mathbf{t}^{(it+1)} = \mathbf{t}^{(it)} - \mathbf{r}^{(it)}$ . Bestimme den Knotenvektor nach Algorithmus 2.3 und die de Boor-Punkte. Setze  $it = it + 1$  und gehe zu Punkt 1.

Ein streng mathematischer Konvergenzbeweis liegt zur Zeit noch nicht vor. Es ist jedoch lineare Konvergenz mit einem gutmütigen Konvergenzfaktor zu erwarten. Als Beispiele folgen die Parametrisierungen von 6 bzw. 12 Punkten der Kubikwurzel und des Kreises, der Komponentenweise durch Sinus und Cosinus beschrieben wird. Hier sind die Listen der notwendigen Iterationen:

- Kubikwurzel:  $x(t) = \sqrt[3]{t}$

6 Punkte		12 Punkte	
Iteration	Residuum	Iteration	Residuum
1	5.59672E-01	1	5.63941E-01
2	2.94454E-04	2	1.38169E-04
3	1.83539E-05	3	6.69556E-06
4	1.13672E-06	4	3.29391E-07
5	7.03872E-08	5	1.62184E-08
6	4.35853E-09	6	7.98597E-10
7	2.69848E-10	7	3.93058E-11
8	1.66887E-11	8	1.92775E-12
9	1.01467E-12	9	1.20486E-13
10	7.52758E-14		
11	5.58557E-14		

- Kreis:  $x(t) = \cos t$  und  $y(t) = \sin t$

6 Punkte		12 Punkte	
Iteration	Residuum	Iteration	Residuum
1	2.69863E+00	1	2.67214E+00
2	1.24855E-03	2	2.50936E-05
3	2.25847E-04	3	2.86949E-07
4	4.08626E-05	4	1.54683E-08
5	7.39416E-06	5	7.98960E-10
6	1.33796E-06	6	3.97509E-11
7	2.42094E-07	7	1.96904E-12
8	4.38037E-08	8	1.01895E-13
9	7.92552E-09	9	6.12747E-15
10	1.43396E-09	10	1.54317E-15
11	2.59442E-10		
12	4.69403E-11		
13	8.49182E-12		
14	1.53660E-12		
15	2.77341E-13		
16	5.09699E-14		
17	9.19408E-15		
18	1.53012E-15		

Die Parametrisierung der gegebenen Punkte nach einer der oben angegebenen Strategien entspricht einem Parameterwechsel (s. Abb. 2.7). In der Praxis kann man die

$x$ -Komponente beispielsweise als lineare Funktion in  $t$  beschreiben. Die Umkehrfunktion kann dann leicht angegeben werden. In diesem Fall gilt:

$$\gamma(x) = \frac{t_{i+1} - t_i}{x_{i+1} - x_i} x + \frac{x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} t_i + \left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}\right) t_{i+1},$$

$$\gamma^{-1}(t) = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} t + \frac{t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i} x_i + \left(1 - \frac{t_{i+1}}{t_{i+1} - t_i}\right) x_{i+1}$$

mit den Ableitungen

$$\frac{d\gamma}{dx}(x) = \frac{t_{i+1} - t_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \frac{d\gamma^{-1}}{dt}(t) = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}.$$

Mit der Identität als zulässigem Parameterwechsel  $t = \gamma(x) = x$  gilt

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\gamma^{-1}}{dt} = 1.$$

Die  $y$ -Komponente wird stückweise mit kubischen Spline-Kurven  $\zeta_y(t) = c(t) = c \circ \gamma(x) = f(x)$  dargestellt (s. Abb. 2.7). Für die Ableitungen der Kennlinien gilt dann:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dc}{dt} \frac{d\gamma}{dx} \quad \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2c}{dt^2} \left(\frac{d\gamma}{dx}\right)^2 + \frac{dc}{dt} \frac{d^2\gamma}{dx^2}.$$

Die Vorgehensweise zur Darstellung von Kennlinien und Kennfeldern mit Hilfe der  $\beta$ -Spline-Interpolation ist noch einmal als Algorithmen 2.5 – 2.7 zusammengefasst.

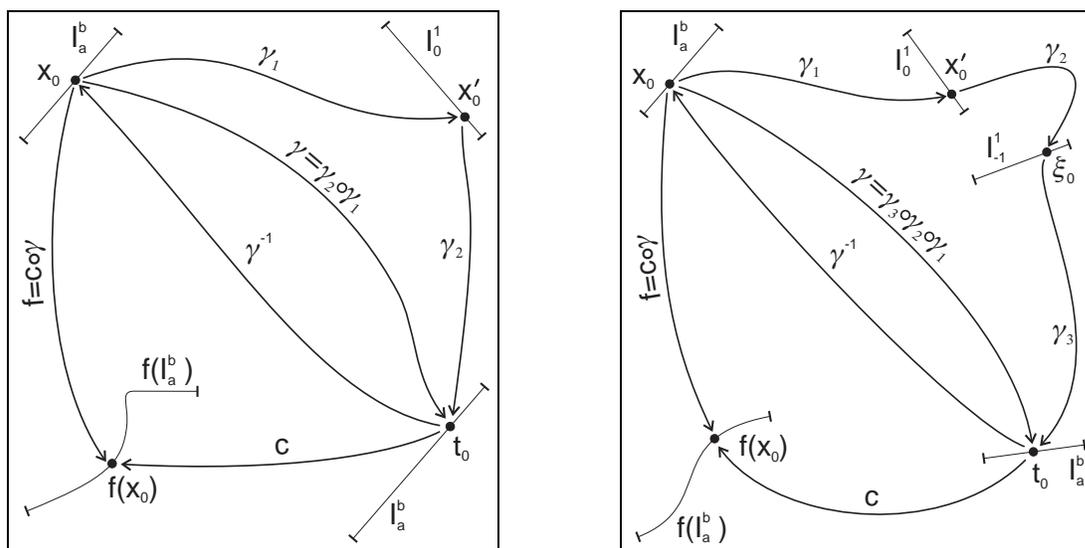


Abb. 2.7: Graphische Darstellung der Parametertransformation.

**Algorithmus 2.5:** Initialisierung für Kennliniendarstellungen**Schritt 0:** *Initialisierung:*

1.  $n + 1$  Punktepaare  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$
2. die Ordnungen  $k$  und  $l$  für  $x$ - und  $y$ -Komponente

**Schritt 1:** *Wahl einer Parametrisierung  $t \in \mathbb{R}^{n+1}$  der Stützwerte  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$* **Schritt 2:** *Ermittle die Knotenvektoren  $\tau_x, \tau_y \in \mathbb{R}^{n+k+1}$  nach Alg. 2.3***Schritt 3:** *Initialisierungsphase des Alg. 2.2 zur Indexbestimmung für  $\tau_x, \tau_y$* **Schritt 4:** *Ansatz der Spline-Funktionen  $x = \varsigma_1(t)$  und  $y = \varsigma_2(t)$ ;  
Bestimmung der de Boor-Punkte***Algorithmus 2.6:** Initialisierung für Kennfelddarstellungen  
auf Tensorproduktgitter**Schritt 0:** *Initialisierung:*

1. Tensorproduktgitter generieren
2.  $(n + 1)(m + 1)$  Stützwerte  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (x_i, y_j, z_{ij})_{i=0, \dots, n}^{j=0, \dots, m}$
3. die Ordnungen  $k$  und  $l$

**Schritt 1:** *Wahl der Parametrisierungen  $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$  der Stützwerte  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$* **Schritt 2:** *Ermittle die Knotenvektoren  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n+k+1}$  nach Alg. 2.3***Schritt 3:** *Initialisierungsphase des Alg. 2.2 zur Indexbestimmung in  $u$ - und  $v$ -Richtung***Schritt 4:** *Ansatz der Spline-Funktionen  $\varsigma(u, v), a_i(v), b_j(u)$  nach (2.21) und  
Bestimmung der de Boor-Punkte  $d_{ij}$* **Algorithmus 2.7:** Kennlinien- und Kennfelddarstellung**Schritt 0:** *Initialisierung mit Alg. 2.5 oder Alg. 2.6***Schritt 1:** *Bestimme Teilintervall des Knotenvektors***Schritt 2:** *Spline  $\varsigma(t)$  bzw.  $\varsigma(u, v)$  mit Hilfe des Algorithmus von de Boor  
(2.8) auswerten; im 2D Fall nach (2.21)*

## 2.3 Einbettung von Kennlinien

Hier kommt der Einsatz der Simulation in der Entwicklungsphase besonders zum Tragen, denn dadurch steht ein kosten- und zeitsparendes Werkzeug zur Verfügung, das es gestattet, aus dem Modell eines realen Bauteils, basierend auf Kennlinien, eine Viel-

zahl von Bauteilen zu erzeugen. Diese Varianten erhält man durch künstliche Änderungen der Kennlinien, wobei nichtlineare Nebenbedingungen einzuhalten sind, um das charakteristische Verhalten des Bauteils wiederzugeben. Da alles rein virtuell auf dem Rechner durchgeführt werden kann, hilft der Einsatz der Simulation zum einen Kosten und Zeit zu sparen und zum anderen die Entwicklung einer ganzen Komponente bereits zu einem sehr frühen Entwicklungszeitpunkt eines Fahrzeuges zu spezifizieren und zielorientiert in die Wege zu leiten.

Der „Lösungsraum“ der Designparameter für die Optimierung des Übertragungsverhaltens eines Bauteils, das mit Hilfe von Kennlinien modelliert wird, hängt von der parametrisierten Darstellung der Kennlinien ab:

1. Betrachtet man die  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung der Kennlinien als parametrisiertes Modell, dann sind die dabei auftretenden Koeffizienten als Designgrößen anzusehen. Bei der Variation der Parameter ist aber darauf zu achten, daß die entstehende Kennlinie stets die charakteristischen Eigenschaften (s. Abschn. 1.5.2) behält. Für die Optimierung müssen daher Nebenbedingungen formuliert werden, die die Form der Kennlinie erhalten. Der „Lösungsraum“ der zu optimierenden Parameter wird dadurch eingeschränkt.
2. Anstatt die Daten einer einzigen Kennlinie als Ausgangsinformation für die Optimierung zu verwenden, können mehrere Kennlinien zu einem parametrisierten Modell zusammengefügt werden. Dies kann beispielsweise die *konvexe Linearkombination* von Kennlinien sein [138]. Dabei werden Kennlinien zu verschiedenen Bauteilen gleichen Typs gewichtet und linear kombiniert. Für jede weitere Kennlinie, die man berücksichtigen möchte, wird ein zusätzlicher Parameter eingeführt, so daß man bei  $N$  vorliegenden Kennlinien  $N$  Freiheitsgrade bei der Optimierung bestimmen muß. Die Nebenbedingung für die Konvexität der Linearkombination ist stets aktiv und kann eliminiert werden. Die Anzahl der Optimierungsparameter wird dadurch um 1 reduziert. Der Vorteil dieser Methode ist die Formerhaltung der Kennlinien, so daß keine weiteren Nebenbedingungen angegeben werden müssen.
3. Durch die Einbettung der Kennlinien verschiedener vermessener Wandler in eine 2D-Fläche reduziert sich der Freiheitsgrad der Optimierung auf einen Einbettungsparameter, der den Übergang von einer Kennlinie zur anderen beschreibt. Für jeden festen Einbettungsparameter erhält man dann eine konkrete Kennlinie, entweder eine gegebene (reales Bauteil) oder eine interpolierte (synthetisches, virtuelles Bauteil). Bei dieser Vorgehensweise werden jeweils zwei vermessene Kennlinien stetig ineinander übergeführt. Es wird eine Schar von möglichen Kennlinien erzeugt, aus der durch ein Optimierungsverfahren diejenige Kennlinie bestimmt wird, die das gegebene Zielfunktional minimiert (s. Kap. 3). Durch die Einführung von Nebenbedingungen kann sichergestellt werden, daß die qualitative Form der Kennlinien erhalten bleibt.

**Bemerkung:**

Synthetisch erzeugte Kennlinien können in der Regel nicht unmittelbar in die Form eines Prototypen umgesetzt werden, aber die neu berechneten Kennlinien können als Zielvorgabe für die Neu- und Weiterentwicklung einer Komponente dienen.

**2.3.1 Konvexe Linearkombination**

Für die *konvexe Linearkombination von Kennlinien* benötigt man ein parametrisiertes Modell der Kennlinie und die Parameter, die das charakteristische Verhalten der gegebenen Kennlinien wiedergeben. Ist die Kennlinie durch eine analytische Funktion, die von mehreren Parametern abhängt, gegeben, dann liefert eine konvexe Linearkombination der Parameter keine zulässige Kennlinie, da die Parameter im analytischen Modell der Kennlinie nichtlinear auftreten [138].

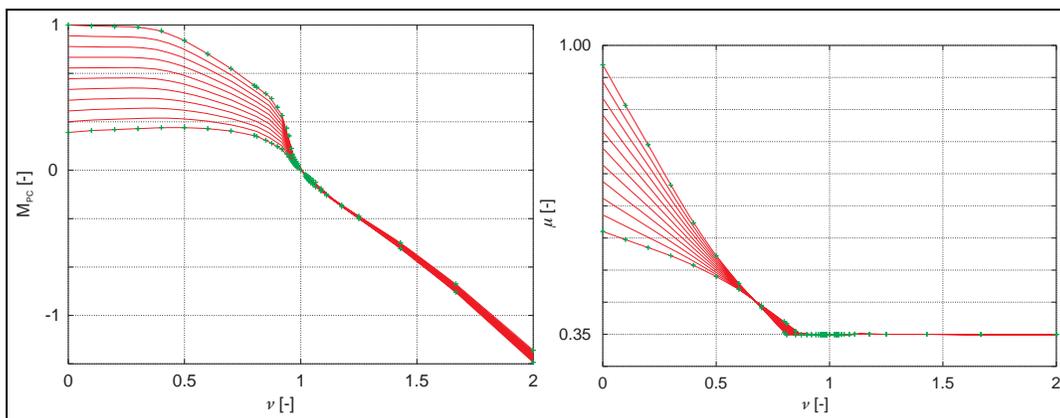
Parametrisierte Modelle  $k_i(x)$ , die linear und konvex kombiniert werden können, findet man hingegen durch Interpolation. Deren konvexe Linearkombination

$$k(x, \alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i(x), \quad (2.32)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad (2.33)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

liefert eine formerhaltende Einbettung der einzelnen Kennlinien  $k_i(x)$ . Die Bedingung (2.33) ist eine aktive Nebenbedingung und kann in eine allgemeine Nebenbedingung



**Abb. 2.8:** Einbettung zweier Wandlerkennlinien in eine Kennlinienschar durch konvexe Linearkombination.

**Algorithmus 2.8:** konvexe Linearkombination**Schritt 0:** Initialisierung der Stützstellen der  $k_i(x)$   $i = 1, \dots, n$ **Schritt 1:** Erzeuge Tensorproduktgitter**Schritt 2:**  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung der Kennlinien  $k_i(x)$   $i = 1, \dots, n$ : Berechnung der Koeffizienten  $d_{ij}$ , so daß gilt

$$k_i(x) = \sum_j d_{ij} N_{jk}(x)$$

**Schritt 3:** Wähle  $\alpha_i$  mit  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  für  $i = 1, \dots, n$ , so daß (2.37) und (2.38) erfüllt sind.**Schritt 4:** Werte (2.36) auf dem Tensorproduktgitter aus

transformiert werden, indem man die Gleichung nach einem  $\alpha_i$  auflöst. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade um 1. Die Boxbedingung (2.34) bleibt bestehen. Es kann o.B.d.A. der Koeffizient  $\alpha_n$  aus (2.34) eliminiert werden. Es gilt:

$$\alpha_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \quad (2.35)$$

Dadurch geht (2.32) – (2.34) über in

$$k(x, \alpha) = k_n(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (k_i(x) - k_n(x)). \quad (2.36)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \leq 1 \quad (2.37)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.38)$$

Daraus ergibt sich der Algorithmus 2.8. Als Beispiel für eine konvexe Linearkombination ist in Abb. 2.8 eine Kennlinienschar, die aus den zwei äußeren Wandlerkennlinien erzeugt wird, dargestellt. Durch den stetigen Übergang bleibt die Form der Kurven erhalten. dazu vergleiche man die Kurven der Abbildung 2.8 mit den typischen Wandlerkennlinien in Abb. 1.3 auf der Seite 19.

### 2.3.2 Kennlinie als ebene Kurve im $\mathbb{E}^2$

Kennlinien können nach den im Abschnitt 2.2 beschriebenen Methoden linear mit  $k_i(x) \in \mathcal{C}^0(I)$  oder kubisch mit  $k_i(x) \in \mathcal{C}^2(I)$  modelliert werden (s. Abb. 2.9).

Es gilt mit der Spline-Darstellung (2.5) auf S. 40

$$k_i(x) = \sum_{j=0}^{n_i} a_{ij} N_{j,k}(x) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{h}(x), \quad \mathbf{a}_i, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{n_i+1}, \quad i = 0, \dots, m \quad (2.39)$$

wobei als Basisfunktionen  $\mathbf{h}(x)$  die  $\mathcal{B}$ -Splines der Ordnung  $k$  verwendet werden. Fügt man nun  $m$  gegebene Kennlinien eines Bauteils gleichen Typs zu einer Fläche zusammen, indem man mit dem Parameter  $\alpha$  eine weitere Dimension einführt, dann erhält man nach (2.20) auf S. 51 für die resultierende Fläche folgende Darstellung

$$k(x, \alpha) = \sum_{i=0}^m k_i(x) N_{i,l}(\alpha) = \mathbf{k}^T(x) \mathbf{g}(\alpha) \quad \text{mit} \quad (2.40)$$

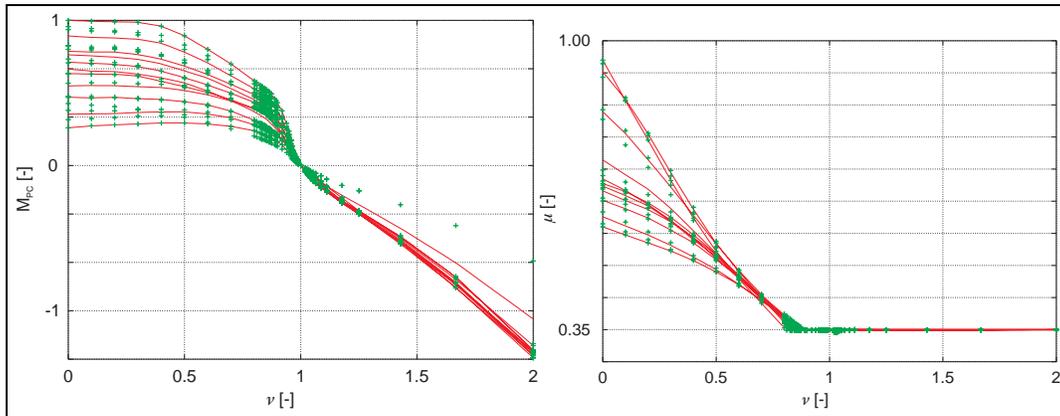
$$\mathbf{k}(x) = (k_i(x))_i \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad \mathbf{g}(\alpha) = (N_{i,l}(\alpha))_i \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Ohne Einschränkung gilt  $\alpha \in I_0^1$ . Längs  $\alpha$  gehen die  $m$  Kennlinien stetig ineinander über, wodurch zwischen den Kennlinien zu realen Bauteilen viele neue synthetische erzeugt werden. Jede einzelne ist als Funktion von  $x$  für einen festen Parameterwert  $\alpha = \text{const.}$  gegeben und kann als ebene Kurve des  $\mathbb{E}^2$  aufgefaßt werden:

$$k_i(x) = k(x, \alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_i}. \quad (2.41)$$

Als Beispiel sind in Abb. 2.9 ideelle Wandlerkennlinien dargestellt. Die aus der Messung resultierenden Punkte der realen Wandler, die vermessen wurden, sind als Punkte eingezeichnet.

Vor dem Aufbau der Fläche können die  $\alpha_i \in I_0^1$  beliebig gewählt werden. Durchläuft  $\alpha$  das gesamte Intervall, so erhält man für die gewählten Parameterwerte die gegebenen Kennlinien, wodurch eine Reihenfolge unter ihnen definiert ist. Hat



**Abb. 2.9:** Kennlinien zu realen Wandlern und synthetisch erzeugte Kennlinien. Kennlinien von Wandlern, die vermessen worden sind, sind als Punkte eingezeichnet. Dazwischen verlaufen die ideellen Kennlinien. Sie werden in eine Fläche eingebettet. Links ist das Pumpenaufnahmemoment  $M_{Pc}$  und rechts die Momentenüberhöhung  $\mu$  zu sehen.

man sich einmal für eine feste Anordnung der Kennlinien entschieden, dann entspricht die Wahl des Parameterwerts  $\alpha_i$  genau dem Problem der Parametrisierung, wie sie in Abschnitt 2.2 behandelt wird. Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied: die Reihenfolge der Stützwerte  $(x_\nu, y_\nu)$  ist durch die geordneten Werte der  $x$ -Komponente definiert, und die Parametrisierung durch  $t$  entspricht einem Parameterwechsel. Bei der Einbettung hingegen wird durch die Einführung eines neuen Parameters die Dimension erhöht: aus einer Kurve wird eine Fläche. Wie die Fläche aussieht, hängt von der Parametrisierung durch  $\alpha_i$  ab.

Bei dieser Methode der Einbettung sind folgende Punkte zu beachten:

1. Bei linearer Interpolation in  $\alpha$ -Richtung werden jeweils zwei benachbarte Kennlinien stetig ineinander übergeführt (s. Abb. 2.8). Dadurch ist die Formerhaltung der Kennlinien stets gewährleistet.
2. Die resultierende Einbettungsfläche ist von der Reihenfolge der Kennlinien abhängig. Der Algorithmus 2.9 auf der Seite 66 liefert Einbettungsparameterwerte, so daß die Fläche nur von den ersten 2 Kennlinien abhängt und von der Reihenfolge aller weiteren Kennlinien unabhängig ist. Als Resultat des Algorithmus erhält man
  - die Einbettungsparameter der gegebenen Kennlinien,
  - die  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung aller gegebenen Kennlinien,
  - die  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung der Einbettung.

### 2.3.3 Ein Algorithmus zur Einbettung von Kennlinien

In diesem Abschnitt wird eine Methode vorgestellt, die es erlaubt,  $m + 1$  Kennlinien zu einer Fläche zu verbinden (s. Abb. 2.10 und 2.11). Dabei sind von der  $i$ -ten Kennlinie  $k_i(x)$  die Stützwerte  $(x_\nu^i, y_\nu^i)$  in Tabellen gegeben. Sei  $n_i$  die Anzahl der gegebenen Daten zur  $i$ -ten Kennlinie, dann gilt

$$\begin{aligned}
 k_0(x) &= \sum_{j=0}^{n_0} a_{0j} N_{j,k}(x) = \mathbf{a}_0^T \mathbf{h}_0(x) \\
 &\vdots \\
 k_m(x) &= \sum_{j=0}^{n_m} a_{mj} N_{j,k}(x) = \mathbf{a}_m^T \mathbf{h}_m(x)
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Mit Hilfe dieser  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung der Kennlinien können die gegebenen Daten zu einem Tensorproduktgitter erweitert werden. Dazu ordnet man jeder Kennlinie  $k_i(x)$  einen Parameterwert  $\alpha_i$  zu, z. B. mit dem Algorithmus 2.9. Das Tensorproduktgitter ist

dann gegeben durch

$$(x, \alpha) = (\xi_\nu, \eta_\mu) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \xi_\nu &\in \bigcup_{i=0}^m \{x_l^i \mid l = 0, \dots, n_i\} & \nu = 0, \dots, n, \\ \eta_\mu &\in \{\alpha_i \mid i = 0, \dots, m\} & \mu = 0, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.43)$$

**Algorithmus 2.9:** Einbettungsparameter

**Schritt 0:** *Initialisierung (Daten der  $m + 1$  Kennlinien,  $l = 0$ ,  $\alpha_{\max} = 1$ ,  $TOL = 0, \dots$ )*

**Schritt 1:** *Tensorproduktgitter generieren: Diskretisierung der*

$$\begin{aligned} x - \text{Richtung:} & \quad x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ \alpha - \text{Richtung:} & \quad \alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_m \mid \alpha_i \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

**Schritt 2:**  *$\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung der Kennlinien  $k_i(x)$  für  $i = 0, \dots, n$*

**Schritt 3:** *lineare Kombination der ersten beiden Kennlinien:*

$$\begin{aligned} k(x, \alpha) &= \mathbf{g}^T(\alpha) \mathbf{A} \mathbf{h}(x) \\ l = 0 : \quad \alpha_0 = 0 : \quad k(x, 0) &= k_0(x) \\ l = 1 : \quad \alpha_1 = 1 : \quad k(x, 1) &= k_1(x) \end{aligned}$$

**Schritt 4:**  $l := l + 1$

*Bestimme Parameter  $\alpha^*$  aus Minimierungsproblem:*

$$\min_{\alpha} F(\alpha) = \min_{\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^n \left( \frac{k(x_i, \alpha) - k_l(x_i)}{\omega_i} \right)^2 \right\}, \quad 0 \leq \alpha$$

**Schritt 5:** *Einbettungsparameter  $\alpha_l \in [0, 1]$  setzen:*

$$\begin{aligned} \text{if } (\alpha^* \in [0, 1]) &\rightarrow \alpha_l = \alpha^* \\ \text{if } (\alpha^* \in (1, \infty)) &\rightarrow \alpha_l = 1 \\ \alpha_i &:= \frac{\alpha_{\max}}{\alpha^*} \alpha_i \quad i = 0, \dots, l - 1, \\ \alpha_{\max} &= \alpha^* \end{aligned}$$

**Schritt 6:** *Residuum:  $TOL = \max(TOL, F(\alpha^*))$ ,  
Wenn  $l < n$ , gehe zu Schritt 4*

Dabei sind  $n + 1$  bzw.  $m + 1$  die Mächtigkeiten der Vorratmengen für  $\xi_\nu$  bzw.  $\eta_\mu$ . Es gilt  $n_0 = \dots = n_m = n$ , und (2.42) läßt sich folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (k_0(x), \dots, k_m(x))^T \in \mathbb{R}^{m+1} \\ \mathbf{k}(x) &= \mathbf{A} \mathbf{h}(x) \quad \text{mit} \quad \mathbf{h} = (N_{0,k}(x), \dots, N_{n,k}(x))^T \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathbf{A} &\in \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Setzt man nun (2.44) in die Flächendarstellung (2.40) ein, dann folgt:

$$k(x, \alpha) = \mathbf{k}^T(x) \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{h}^T(x) \mathbf{A}^T \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{g}^T(\alpha) \mathbf{A} \mathbf{h}(x). \quad (2.45)$$

Wegen (2.41) und (2.43) erhält man die gegebenen Kennlinien aus

$$k(x, \alpha) \Big|_{\alpha=\eta_\mu} = k_\mu(x) = \mathbf{g}^T(\eta_\mu) \mathbf{A} \mathbf{h}(x), \quad \mu = 0, \dots, m. \quad (2.46)$$

Mit der Matrix

$$\mathbf{G} := \begin{pmatrix} \mathbf{g}^T(\eta_0) \\ \vdots \\ \mathbf{g}^T(\eta_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0(\eta_0) & \cdots & g_m(\eta_0) \\ \vdots & & \vdots \\ g_0(\eta_m) & \cdots & g_m(\eta_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)} \quad (2.47)$$

und  $\overline{\mathbf{G}} := \mathbf{G} \mathbf{A}$  geht (2.46) über in

$$\mathbf{k}(x) = \overline{\mathbf{G}} \mathbf{h}(x). \quad (2.48)$$

Wertet man nun diese Gleichung an den Punkten  $x = \xi_\nu$  des Tensorproduktgitters aus, dann erhält man mit den Matrizen

$$\mathbf{F} := \begin{pmatrix} k_0(\xi_0) & \cdots & k_m(\xi_0) \\ \vdots & & \vdots \\ k_0(\xi_n) & \cdots & k_m(\xi_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (m+1)} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{H} := \begin{pmatrix} h_0(\xi_0) & \cdots & h_n(\xi_0) \\ \vdots & & \vdots \\ h_0(\xi_n) & \cdots & h_n(\xi_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \quad (2.50)$$

#### Algorithmus 2.10: Einbettung

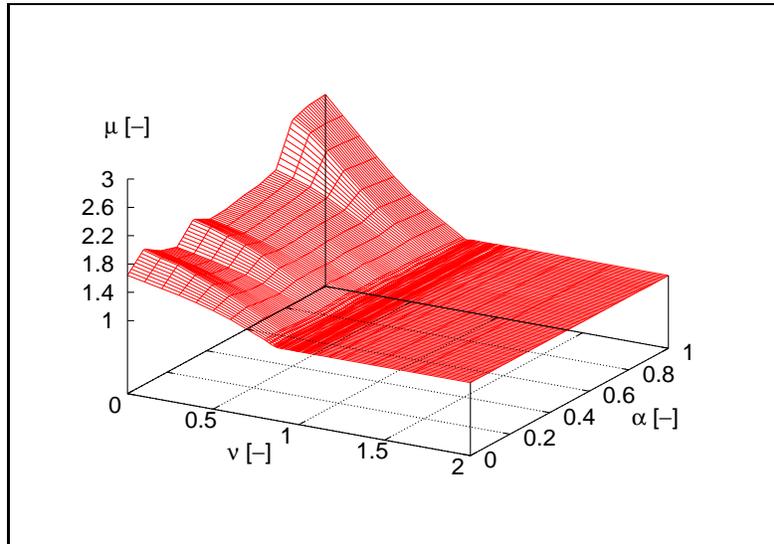
**Schritt 0:** Initialisierungen der  $m + 1$  Kennlinien:  $(x_\nu^i, y_\nu^i)$  mit  $\nu = 0, \dots, n_i$  und  $i = 0, \dots, m$ .

**Schritt 1:** B-Spline-Darstellung jeder einzelnen Kennlinie  $k_i(x)$

**Schritt 2:** Tensorproduktgitter generieren nach (2.43)

**Schritt 3:** Matrizen  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  erzeugen

**Schritt 4:** Gleichungssysteme (2.52) lösen



**Abb. 2.10:** Einbettung der Wandlerkennlinie  $\mu(\nu)$ .

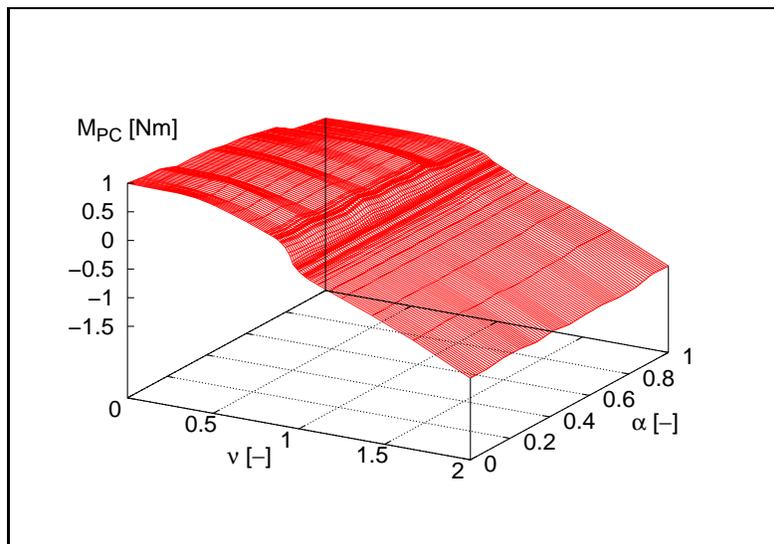
für die Koeffizienten  $\overline{\mathbf{G}}$  die Gleichung

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} \overline{\mathbf{G}}^T. \quad (2.51)$$

Aufgrund der Konstruktion sind  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{G}$  invertierbar, so daß

$$\overline{\mathbf{G}}^T := \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F} \quad \mathbf{A} := \mathbf{G}^{-1} \overline{\mathbf{G}}^T. \quad (2.52)$$

Somit können aus den gegebenen Daten die de Boor-Punkte für die  $\mathcal{B}$ -Spline-Darstellung der Kennlinien und der Einbettungsfläche berechnet werden (s. Alg. 2.10).



**Abb. 2.11:** Einbettung der Wandlerkennlinie  $M_{PC}(\nu)$ .

# Kapitel 3

## Mathematische Formulierung der Optimierungsprobleme bei der Auslegung des Antriebsstrangs

Viele Fragestellungen aus den Ingenieurwissenschaften führen auf Optimierungsaufgaben. Frei wählbare, konstante Parameter  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}$  eines mechanischen Systems — sie werden auch *Designparameter* genannt — sollen so bestimmt werden, daß eine gegebene Gütefunktion  $F : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}$  ihren minimalen Wert annimmt. Diese Zielfunktion stellt ein Gütemaß des Parametersatzes dar. Aufgrund a priori vorgeschriebener Beschränkungen sind jedoch nicht alle Parametersätze zugelassen. Das System unterliegt vielmehr Restriktionen, die den Lösungsraum des Optimierungsproblems einschränken. Dabei unterscheidet man grundsätzlich zwischen *Boxbeschränkungen*, *linearen* und *nichtlinearen Beschränkungen*.

Sind die Designparameter nicht konstant, sondern zeitveränderliche Funktionen  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ , dann werden die zu bestimmenden Funktionen *Steuerungen* genannt. Man spricht dann von *Optimalsteuerungsproblemen*. Hier wird ein Zielfunktional über der Funktionenklasse stückweise stetiger Funktionen  $C_{n_u}^s$  minimiert. Als Nebenbedingungen treten neben Anfangs-, End- und Innere-Punkt-Bedingungen auch Differentialgleichungen sowie Steuerungs- und Zustandsbeschränkungen auf. Es handelt sich also um ein unendlichdimensionales Optimierungsproblem.

Kennlinien sind zustandsabhängige Funktionen  $\mathbf{k}(\mathbf{x})$  und können daher als Steuerungen  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}(t)) \in \mathbb{R}^{n_u}$  interpretiert werden. In diesem Fall führt die optimale Auslegung von Kennlinien auf ein Variationsproblem, das dem Optimalsteuerungsproblem entspricht.

In den folgenden Abschnitten werden zwei Vorgehensweisen zur Optimierung von Kennlinien vorgestellt: Optimalsteuerung und Parameteroptimierung. Letztere Methodik erweist sich in der praktischen Anwendung als sehr günstig, da durch die in Kapitel 2 eingeführte Einbettung von tabellarisch gegebenen Kennlinien in eine zweidimensionale Fläche allgemeine Gültigkeit besitzt und ohne weitere Kenntnisse über den qualitativen Verlauf der Kennlinien auskommt.

Die zur optimalen Auslegung des Antriebsstrangs verwendeten Zielkriterien führen auf nichtglatte Optimierungsaufgaben. Numerische Verfahren zu deren Lösung werden in Abschnitt 3.3 kurz vorgestellt. Es sei an dieser Stelle insbesondere auf das Verfahren des *impliziten Filterns* hingewiesen. Im Abschnitt 4.1 werden Kriterien, Designparameter und Nebenbedingungen vorgestellt, die in die Optimierung des Antriebsstrangs eingehen.

### 3.1 Kennlinien als optimale Steuerung

Klassische Aufgaben, die in die Klasse der Optimalsteuerungsprobleme fallen, haben folgende charakteristischen Merkmale gemeinsam: Gegeben ist ein mathematisches Modell eines dynamischen Systems, das durch Differentialgleichungen repräsentiert wird. Über Steuerungen soll nun dieses System so manipuliert werden, daß es aus der Anfangskonfiguration gemäß den Bewegungsgleichungen in einen vorgegebenen Endzustand übergeführt wird. Dabei soll der Eingriff der Steuergrößen so erfolgen, daß ein Gütefunktional seinen minimalen Wert annimmt. Der zulässige Zustandsraum des Systems bzw. die Steuerungen werden durch Restriktionen eingeschränkt. Aus dem Variationsprinzip ergeben sich notwendige Bedingungen an die Lösung. Mathematisch werden sie mit Hilfe von Randwertproblemen formuliert [17, 22, 23, 24, 64, 109]. Typische Anwendungen sind die Bahnoptimierung von Robotern [100, 143] und die Bestimmung optimaler Flugbahnen in der Luft- und Raumfahrt [15, 25, 30, 62, 82, 104, 105].

**Allgemeine mathematische Formulierung.** Die in der Optimalsteuerung betrachtete Problemklasse kann in der allgemeinsten Form folgendermaßen angeschrieben werden. Gesucht sind Steuerfunktionen  $\mathbf{u}(t)$  aus der Klasse stückweise stetiger Funktionen

$$\mathcal{C}_{n_u}^s := \left\{ \mathbf{u} \mid \mathbf{u} : I_0^{t_f} := [0, t_f] \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}, \mathbf{u} \text{ stückweise stetig} \right\}, \quad (3.1)$$

die ein gegebenes Zielfunktional unter Nebenbedingungen minimiert:

$$\text{Zielfunktional} \quad I[\mathbf{u}] := \varphi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (3.2)$$

#### Dynamisches Modell

$$\text{Differentialgleichung} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (3.3)$$

$$\text{Anfangsbedingung} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n_x} \quad (3.4)$$

$$\text{Randbedingung} \quad \psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

### Beschränkungen für die Optimierung

$$\text{Steuerbeschränkung} \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_C} \quad (3.6)$$

$$\text{Innere-Punkt-Bedingung} \quad \mathbf{N}(\mathbf{x}(t_I), t_I) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N} : \mathbb{R}^{n_x} \times \overset{\circ}{I}_0^{t_f} \rightarrow \mathbb{R}^{n_N} \quad (3.7)$$

$$\text{Zustandsbeschränkung} \quad \mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{S} : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_S} \quad (3.8)$$

**Numerische Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben.** Zur numerischen Lösung der resultierenden Randwertprobleme gibt es verschiedene Verfahren, die in zwei große Gruppen eingeteilt werden:

1. Bei *indirekten Verfahren* werden die Differentialgleichungen für die adjungierten Variablen aufgestellt und unter Berücksichtigung der Schaltstruktur numerisch integriert. Dazu gehören die sogenannten Schießverfahren [132]. Verfahren, die auf der Basis der Mehrzielmethode [23] beruhen, wurden insbesondere von Bulirsch (BOUNDSOL, OPTSOL, [23]), Deufhard (DLOPTR, [39]), Oberle (BOUNDSCO, [99]), Hiltmann (MUMUS, [66]) und Callies (JANUS, [26]) neu- und weiterentwickelt. Sie berechnen hochgenaue Lösungen, wie sie beispielsweise in der Luft- und Raumfahrt erforderlich sind.
2. Bei *direkten Verfahren* unterscheidet man zwischen:
  - *Direkten Schießverfahren*: Die Steuerungen werden diskretisiert, und die Zustände durch numerische Integration bestimmt. Auf der Mehrzielmethode beruhende Verfahren wurden von Bock, Plitt (MUSCOD, [18]) und Heim (PAREST, [61]) entwickelt.
  - *Direkten Kollokationsverfahren*: Sowohl die Steuerungen als auch die Zustände werden diskretisiert. An den Gitterpunkten werden die Differentialgleichungen durch Kollokation erfüllt. Man erhält ein hochdimensionales, strukturiertes nichtlineares Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen, das mit SQP-Verfahren [52] gelöst werden kann. Ein auf Kollokation beruhendes Verfahren hat von Stryk (DIRCOL, [143]) entwickelt.

Diese Methoden können auch zur Optimierung von Kennlinien herangezogen werden. Dazu sind jedoch zustandsabhängige Nebenbedingungen an die Kennlinie zu formulieren, so daß ihre Form unter den Variationen erhalten bleibt. Im Falle des vorliegenden Beispiels der optimalen Auslegung des Wandlers können Bedingungen an die Krümmung der Kennlinien angegeben werden. Dieses Vorgehen ist in der Praxis für den allgemeinen Fall aus folgenden Gründen schwierig umzusetzen:

1. Allgemeiner Spline-Ansätze, mittels deren Kennlinien interpoliert werden, sind für die Optimierung ideal. Die Dimension der Freiheitsgrade ist hoch, so daß

der Freiraum, in dem die Kennlinien variieren dürfen, groß ist. In der Praxis unterliegen die Kennlinien aber zusätzlichen qualitativen Eigenschaften, die als Nebenbedingungen formuliert werden müssen. Diese Bedingungen sind jedoch nicht immer bekannt. Am Beispiel des Wandlers spricht die Umsetzbarkeit der ideellen, virtuell erzeugten Kennlinien in die Konstruktion eines realen Wandler gegen dieses Vorgehen. Daher wird die Methode der Einbettung verfolgt, die zwar nur relativ kleine Variationen der Kennlinien zuläßt, aber dafür realisierbare Kennlinien liefert.

2. Das dynamische Übertragungsverhalten des Bauteils wird mit Hilfe stationärer Kennlinien approximiert. Dies ist eine starke Idealisierung in der Modellierung und liefert daher nicht für alle Betriebszustände hinreichend genaue Ergebnisse, z. B. in der Anfahrphase. Durch die geschickte, drehzahlabhängige Korrektur der Kennlinie (s. Abschnitt 1.5.2, (1.13) auf S. 18) wird das Modell verfeinert. Dadurch fließen weitere Parameter in das Wandlermodell ein, die aus den stationären Kennlinien ein dynamisches Modell des Wandlers machen.
3. Die tabellarisch gegebenen Kennlinien sind bereits Approximationen der Meßdaten. Ihr Verlauf unterliegt einem nicht näher dokumentierten Approximationsfehler.
4. Die Ableitungen der adjungierten Gleichungen ist bei einem so komplizierten Modell, in das eine Vielzahl von linear interpolierten Kennlinien und somit auch viele Unstetigkeiten eingehen, nicht zielführend. Folglich kommen als numerische Lösungsverfahren nur direkte Verfahren in die engere Auswahl. Man kann sich sogar auf direkte Einzelschießverfahren beschränken, da parametrisierte, stationäre Kennlinien variiert werden. Das Problem der Kennlinienoptimierung wird vom Ansatz her als Parameteroptimierungsaufgabe formuliert. Dies erfolgt im anschließenden Abschnitt.

## 3.2 Kennlinienoptimierung als Parameteroptimierung

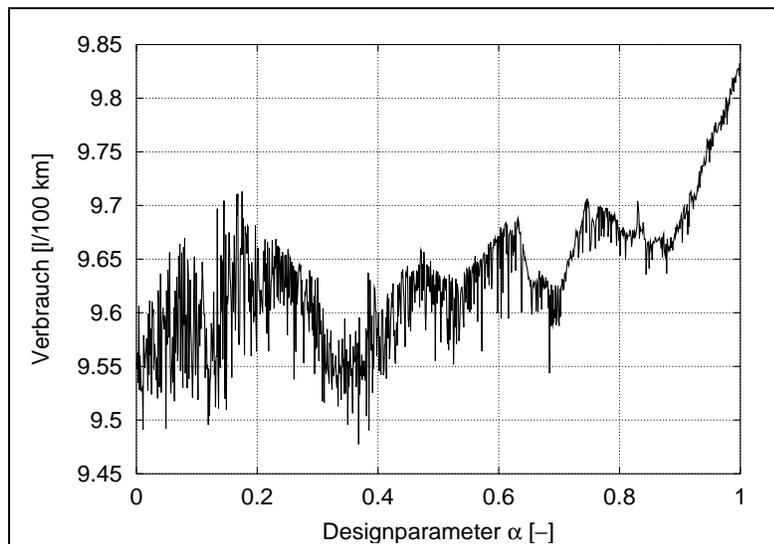
In ein Modell, das das dynamische Verhalten eines technischen Systems beschreibt, gehen verschiedene Parameter ein. Viele von ihnen sind physikalischer Natur. Einige können innerhalb einer gewissen Genauigkeit, die vom Meßverfahren begrenzt ist, angegeben werden, andere werden aus den Messungen zusätzlich bestimmt. Mit Hilfe einer Parameteridentifikation können diese Werte innerhalb der gegebenen Bandbreite so bestimmt werden, daß Messung und Simulationsergebnis gut übereinstimmen. Die Identifikation von Parametern fällt unter die Klasse der nichtlinearen Optimierung, wobei die Summe der Quadrate der Abweichungen von den Messdaten als Zielfunktion angesetzt wird mit dem nichtlinearen System als Nebenbedingung. Oft ist es zweckmäßig, die Quadrate zu gewichten, um so den Einfluß einzelner Meßwerte zu verstärken oder abzuschwächen.

Andere Parameter wiederum sind mathematische Parameter, weil sie aus Gründen der Modellbildung in das Modell eingeflossen sind, z. B. durch Diskretisierung der Steuerung, Regler, Interpolation der Kennlinien oder Ansätze analytischer Funktionen zur Beschreibung des Übertragungsverhaltens eines Bauteils. Diese Parameter haben oft keine physikalische Bedeutung, sind aber entweder a priori bestimmt, z. B. im Falle der Interpolation, oder werden mit Hilfe einer Parameteroptimierung berechnet.

Sind sowohl die Zielfunktion als auch die Nebenbedingungen linear, dann spricht man von *linearer Optimierung*, anderenfalls von *nichtlinearer Optimierung*. Der Spezialfall der quadratischen Optimierung spielt in der nichtlinearen Optimierung zur Bestimmung der Suchrichtungen, die als Lösung einer quadratischen Minimierungsaufgabe gegeben sein kann, eine wichtige Rolle (z. B. SQP-Verfahren<sup>1</sup> [123]). Eine Klassifikation verschiedener Optimierungsaufgaben und dazugehöriger Verfahren sind in [45, 52, 102] angegeben.

### 3.2.1 Allgemeine Formulierung

Das dynamische Verhalten des zugrundeliegenden, mechatronischen Systems wird mit Hilfe von Differentialgleichungen beschrieben (s. Abschnitt 1). Neben den Bewegungsgleichungen des mechanischen Teils wird auch die Reglerlogik modelliert. Komplexe Bauteile gehen in Form von Kennlinien und Kennfeldern ein, deren Differenzierbarkeitsordnung von der verwendeten Spline-Darstellung abhängt (s. Abschnitt 2).



**Abb. 3.1:** Darstellung des Verbrauchs in Abhängigkeit der Wandlernkennlinien. Die Zielfunktion ist nichtglatt. Neben den vielen lokalen Minima des überlagerten Rauschens gibt es mehrere Minima.

Die Zielfunktion ist gegebenenfalls über ein Kennfeld bestimmt, wodurch eine Aus-

<sup>1</sup> Sequential Quadratic Programming

sage über die Differenzierbarkeit an dieser Stelle noch nicht getroffen werden kann. Erst im Zusammenhang mit einem konkreten Modell und der verwendeten Kennliniendarstellung kann die Differenzierbarkeitsordnung angegeben werden. Durch die lineare Interpolation der Kennlinien und Kennfelder sowie durch Änderungen der Getriebeübersetzungen bei Schaltvorgängen werden Unstetigkeiten in das dynamische System eingeführt. Sie haben Auswirkungen auf die Zielfunktion. Am Beispiel der Variation der Wandlerkennlinien (s. Abb. 3.1) ist die Zielfunktion nichtglatt. Dadurch ist der Einsatz von SQP-Verfahren, die die Stetigkeit der zweiten Ableitung fordern, nicht zielführend. Es müssen Verfahren eingesetzt werden, die ausschließlich auf Funktionsauswertungen zurückgreifen. Im Abschnitt 3.2.3 wird dies anhand eines Beispiels demonstriert.

Die hier zu untersuchende Optimierungsaufgabe wird in allgemeiner Form folgendermaßen angeschrieben:

$$\text{Zielfunktion} \quad \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F(\mathbf{p}) \quad : \quad \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}$$

### Dynamisches Modell

$$\text{Dynamik} \quad M(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{k}, \mathbf{p}, t)$$

$$\text{Regler} \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{d}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t)$$

$$\text{Kennlinien} \quad \mathbf{k} = \mathbf{s}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t)$$

### Beschränkungen für Optimierung

$$\text{Boxbeschränkung} \quad \mathbf{p}_l \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_u$$

$$\text{nichtlineare Gleichungsbeschränkung} \quad \mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$$

$$\text{nichtlineare Ungleichungsbeschränkung} \quad \mathbf{c}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}.$$

mit der Zielfunktion	$F$	$: \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R},$
den Designparametern	$\mathbf{p}$	$\in \mathbb{R}^{n_p},$
den unteren Schranken von $\mathbf{p}$	$\mathbf{p}_l$	$\in \mathbb{R}^{n_p},$
den oberen Schranken von $\mathbf{p}$	$\mathbf{p}_u$	$\in \mathbb{R}^{n_p},$
den verallgem. Koordinaten	$\mathbf{q}$	$\in \mathbb{R}^{n_q},$
den verallgem. Geschwindigkeiten	$\dot{\mathbf{q}}$	$\in \mathbb{R}^{n_q},$
den verallgem. Beschleunigungen	$\ddot{\mathbf{q}}$	$\in \mathbb{R}^{n_q},$
den Steuergrößen	$\mathbf{u}$	$\in \mathbb{R}^{n_u},$
den Kennlinien	$\mathbf{k}$	$\in \mathbb{R}^{n_k},$
der Zeit	$t$	$\in I_0^{t_f} := [0, t_f],$
der Endzeit	$t_f$	$\in \mathbb{R}_+,$
der Massenmatrix (pos. def.)	$M$	$\in \mathbb{R}^{n_q \times n_q},$
der einwirkenden Kräfte	$\mathbf{f}$	$: \mathbb{R}^{2n_p + n_u + n_k + n_p + 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_q},$
der Regelgesetze	$\mathbf{d}$	$: \mathbb{R}^{2n_p + n_u + n_p + 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_q},$

$$\begin{array}{ll}
\text{der Kennliniendarstellung} & \mathbf{s} : \mathbb{R}^{2n_p+n_u+n_p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_q}, \\
\text{der nichtlinearen Beschränkungen} & \mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_g} \text{ und} \\
& \mathbf{c} : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}.
\end{array}$$

Wie schon oben erwähnt, wird der *Zulässigkeitsbereich*  $\mathcal{Z}$  der Designparameter durch die Nebenbedingungen bestimmt. Der Parameterbereich ist

$$\mathcal{Z} := \left\{ \mathbf{p} \mid \mathbf{p}_l \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_u, \quad \mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0} \right\}, \quad (3.9)$$

und somit ist jeder Punkt  $\mathbf{p} \in \mathcal{Z}$  zulässig. Die Gütefunktion  $F(\mathbf{p})$  besitzt im Punkt  $\bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{Z}$  ein *lokales Minimum*, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
\exists \varepsilon > 0 : \quad & F(\bar{\mathbf{p}}) \leq F(\mathbf{p}) \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{S}_\varepsilon(\bar{\mathbf{p}}) \subset \mathcal{Z} \\
\text{mit} \quad & \mathcal{S}_\varepsilon(\bar{\mathbf{p}}) := \left\{ \mathbf{p} \mid \mathbf{p} \in \mathcal{Z}, \quad \|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}\| \leq \varepsilon \right\}.
\end{aligned}$$

Gilt sogar  $F(\bar{\mathbf{p}}) < F(\mathbf{p})$ , dann ist  $\bar{\mathbf{p}}$  *striktes lokales Minimum*. Ein striktes lokales Minimum in  $\bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{Z}$  heißt *optimaler Punkt*.

### Bemerkungen:

- Für die Auswertung der Zielfunktion ist ein kompletter Simulationslauf des dynamischen Modells erforderlich.
- Ohne Einschränkung können die Nebenbedingungen als nichtlinear interpretiert werden und deswegen zu einer Bedingung  $\mathbf{c}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}$  zusammengefaßt werden. Grundsätzlich unterscheidet man an jedem zulässigen Punkt zwischen aktiven Nebenbedingungen  $\mathbf{c}^a : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{c^a}}$ , für die  $\mathbf{c}^a(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  gilt, und inaktiven Nebenbedingungen  $\mathbf{c}^i : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{c^i}}$ , für die die strikte Ungleichung  $\mathbf{c}^i(\mathbf{p}) < \mathbf{0}$  erfüllt ist mit  $n_c = n_{c^a} + n_{c^i}$ . Durch die Einführung zusätzlicher Designparameter, den sogenannten Schlupfvariablen  $\mathbf{z}$ , können alle Ungleichungsnebenbedingungen mit

$$c_j^a(\mathbf{p}, z_j) = c_j^i(\mathbf{p}) + z_j^2 = 0 \quad (3.10)$$

durch Gleichungsnebenbedingungen ersetzt werden.

- Bei bilinearer Interpolation des Verbrauchskennfelds, das in die Zielfunktion eingehen wird, ist  $F(\mathbf{p})$  nur stückweise differenzierbar.
- Gilt  $F \in \mathcal{C}^0$  mit vielen lokalen Minima, also nichtglatter Zielfunktion, dann benötigt man für die Bestimmung optimaler Parameter  $\mathbf{p}$  ein Verfahren der globalen Optimierung [102].
- Gilt  $F \in \mathcal{C}^2$ , z. B. bei Parameteridentifikationen, werden zur Bestimmung optimaler Parameter SQP-Verfahren (NPSOL, SNOPT, [51, 52]) eingesetzt bzw. speziell angepaßte Verfahren wie die Gauß-Newton-Methode (NLSCON, [98]) oder der Levenberg-Marquardt-Algorithmus (LMDER, MINPACK-1).

### 3.2.2 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Notwendige Bedingungen für ein reguläres lokales Minimum einer Funktion unter Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen sind mit den Namen Karush, Kuhn und Tucker eng verbunden. Mit der verallgemeinerten *Lagrange-Funktion*

$$L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) := F(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n_c} \lambda_i c_i(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n_b} \mu_i g_i(\mathbf{p}) \quad (3.11)$$

und der unten angegebenen Qualifikationbedingung für aktive Nebenbedingungen lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\text{Zulässigkeit:} \quad \mathbf{p} \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{p}_l \leq \mathbf{p} < \mathbf{p}_u; \\ \mathbf{g}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}; \\ \mathbf{c}(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3.12)$$

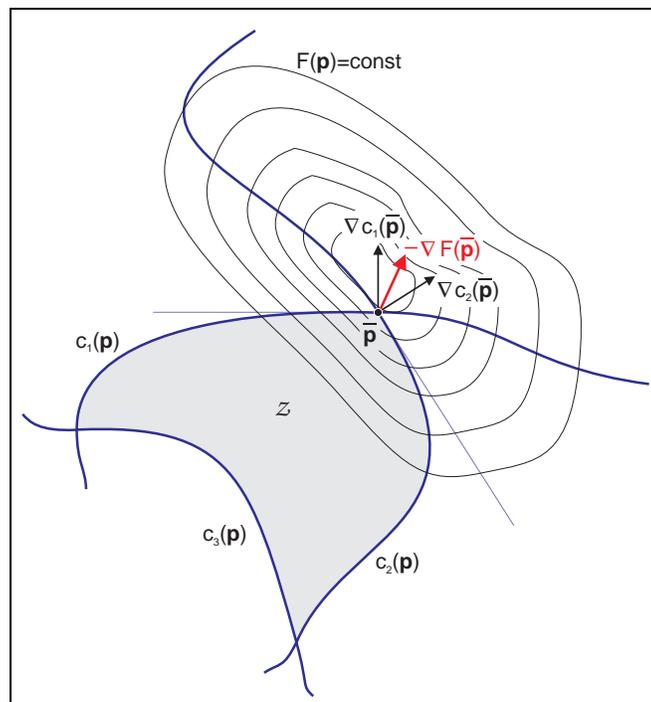
$$\text{Kegelbedingung:} \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

$$\text{Komplementarität:} \quad \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{c}(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.14)$$

Sie sind in Abb. 3.2 graphisch dargestellt. Für ein Minimum muß im Extrempunkt zusätzlich die Hessematrix der Lagrange-Funktion  $L_{\mathbf{p}\mathbf{p}}$  positiv semidefinit sein. Hinreichend für ein lokales Minimum sind die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT)

**Abb. 3.2:** Graphische Darstellung der KKT-Bedingung.

Das Höhenprofil der Zielfunktion ist mit Hilfe der Niveaulinien  $F(\mathbf{p}) = \text{const}$  angedeutet. Der zulässige Parameterbereich wird von den drei nichtlinearen Funktionen  $c_1(\mathbf{p})$ ,  $c_2(\mathbf{p})$  und  $c_3(\mathbf{p})$  berandet. Im Schnittpunkt  $\bar{\mathbf{p}}$  der Funktionen  $c_1$  und  $c_2$  liegt im Zulässigkeitsbereich und ist optimaler Punkt. In diesem Punkt sind die Gradienten der aktiven nichtlinearen Nebenbedingung eingetragen. Der negative Gradient  $-\nabla F(\bar{\mathbf{p}})$  der Niveaulinie der Zielfunktion durch den Punkt  $\bar{\mathbf{p}}$  liegt in der konvexen Hülle, dem Kegel, von  $\nabla c_1(\bar{\mathbf{p}})$  und  $\nabla c_2(\bar{\mathbf{p}})$ .



mit der strikt positiven Definitheit der zweiten Ableitung  $L_{pp}$ . Das heißt, in einer Umgebung des Minimums muß die Lagrange-Funktion konvex sein. Für konvexe Funktionen gilt mit  $p_0, p_1 \in \mathcal{Z}$

$$F(p_0 + \alpha(p_1 - p_0)) \leq F(p_0) + \alpha(F(p_1) - F(p_0)) \quad (3.15)$$

**Definition 3.1** Qualifikationbedingung.

Sei  $p \in \mathcal{Z}$  mit  $c^a(p) = 0$  und  $c^i(p) < 0$ . Die Qualifikationbedingung ist im Punkt  $p$  erfüllt, wenn die Gradienten der aktiven Nebenbedingungen  $c^a$  linear unabhängig sind.

### 3.2.3 Numerische Behandlung

Es gibt zahlreiche numerische Verfahren, die speziell auf bestimmte Optimierungsprobleme zugeschnitten sind, je nachdem ob die Zielfunktion linear, quadratisch oder nichtlinear, beschränkt oder unbeschränkt ist. Einen Überblick über Methoden zur Lösung glatter Zielfunktionen findet man in [52]. Die verwendeten iterativen Verfahren haben folgende vereinfachte Struktur gemeinsam:

1. Setze den Iterationsindex  $l = 0$  und wähle einen Startpunkt  $p^{(l)}$
2. Bestimme eine Abstiegsrichtung als Suchrichtung  $s^{(l)}$
3. Bestimme eine Schrittweite  $\sigma^{(l)} > 0$  durch Lösung der eindimensionalen Liniensucheoptimierung

$$\min_{\sigma > 0} F(p^{(l)} + \sigma s^{(l)}) \quad (3.16)$$

4. Setze neuen Punkt  $p^{(l+1)} = p^{(l)} + \sigma^{(l)} s^{(l)}$
5. Prüfe Abbruchkriterium; wenn erfüllt, dann STOP!
6. Starte neue Iteration  $l := l + 1$ , gehe nach 2

Die Verfahren unterscheiden sich in der Bestimmung der Abstiegsrichtung  $s^{(l)}$ , z. B. steilster Abstieg oder quadratische Approximation der Zielfunktion, und der Schrittweite  $\sigma^{(l)} > 0$  durch Liniensuchmethoden. Besonders bei der Vorgabe von Nebenbedingungen ist darauf zu achten, daß der neu berechnete Punkt wieder innerhalb des Zulässigkeitsbereichs liegt. Bei der Vorgabe von Gleichungsnebenbedingungen führt dies beispielsweise auf *reduzierte Gradienten*.

Wie im Abschnitt 3.2.1 bereits erwähnt, wird an dieser Stelle gezeigt, daß die im Kapitel 4 auftretenden Optimierungsprobleme mit speziellen Verfahren der nichtglatten Optimierung gelöst werden müssen: Wandler und Getriebeübersetzungen werden im Hinblick auf Reduktion von Verbrauch und Verbesserung der Fahrleistung nach

den Einzelkriterien (4.3) – (4.7), welche im folgenden Kapitel näher beschrieben werden, ausgelegt. Sie führen auf nichtglatten Zielfunktion der Form (4.12) auf Seite 104 (vgl. Abb. 4.9). Bei dem Versuch, die optimalen Parameterwerte mit dem SQP-Verfahren NPSOL von Gill, Murray und Wright [51, 52] zu berechnen, ist das Ergebnis nicht zufriedenstellend: Anhand der Tabelle der Iteration (s. Anhang C) ist zwar die Verbesserung der Zielfunktion zu sehen, die Norm des reduzierten Gradienten, welche gegen Null konvergieren sollte, ist aber nicht monoton und wird auch nicht hinreichend klein. Sie geht jedoch in das zweite der drei Abbruchkriterien ein:

$$\alpha \|s\|_2 \leq \sqrt{r} (1 + \|p\|_2), \quad (3.17)$$

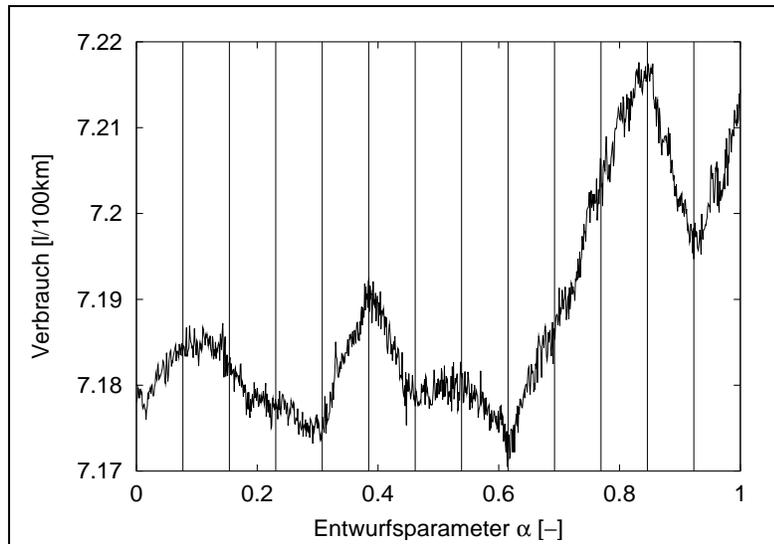
$$\|Z^T g\|_2 \leq \sqrt{r} (1 + \max(1 + |F(p)|, \|g_{FR}\|_2)), \quad (3.18)$$

$$|v_j| \leq ftol \quad \forall j \quad (3.19)$$

mit den Designparametern	$p \in \mathbb{R}^{n_p}$ ,
der Suchrichtung	$s \in \mathbb{R}^{n_p}$ ,
der Suchschrittweite	$\alpha \in \mathbb{R}_+$ ,
der Optimalitätsschranke	$r \in \mathbb{R}_+$ ,
dem Gradienten von $F(p)$	$g_{FR} \in \mathbb{R}^{n_p}$ ,
dem reduzierten Gradienten	$Z^T g \in \mathbb{R}^{n_p}$ ,
der Verletzung der $j$ -ten nichtlinearen Beschränkung	$v_j \in \mathbb{R}$ ,
nichtlineare Zulässigkeitstoleranz	$ftol \in \mathbb{R}_+$ .

### 3.3 Optimierung nichtglatter Zielfunktionen

In der Abbildung 3.3 ist die Abhängigkeit des Verbrauchs von der Wahl des Wandlers graphisch dargestellt. Die Kennlinien der realen Wandler werden äquidistant nach aufsteigendem Pumpenaufnahmement geordnet und in eine Fläche eingebettet. Sie definieren so eine Mannigfaltigkeit. Die Verbrauchswerte zu den gegebenen Wandlerkennlinien sind in Abb. 3.3 durch senkrechte Striche markiert. Wie man am Kurvenverlauf deutlich erkennt, kann die Zielfunktion als glatte Grundfunktion mit einer hochfrequenten, nichtdifferenzierbaren Störfunktion kleiner Amplitude interpretiert werden. Zur Anschauung sei auf die Abbildungen 4.4 und 4.5 links unten bzw. rechts oben verwiesen (s. S. 94 und 95). Mehrere lokale Minima werden durch die Anordnung der berücksichtigten Wandlerkennlinien bestimmt. Die hochfrequenten Überlagerungen liegen bereits im Bereich der Datengenauigkeit, da die Kennlinien der Wandler nur auf 3 Stellen genau angegeben sind. Der Fehler, der durch diese Datengenauigkeit gemacht wird, pflanzt sich bis in das Simulationsergebnis fort und wird durch die Integration mit konstanter Schrittweite sogar noch verstärkt. Hinzu kommt die lineare Interpolation der Kennlinien und Kennfelder und zahlreiche Unstetigkeiten durch bedingte Verzweigungen. Letztere werden durch die Schaltvorgänge im Getriebe und



**Abb. 3.3:** Optimierung nichtglatter Zielfunktionen. Abhängigkeit des Verbrauchs von Wandlerverhalten. Der Verbrauch verhält sich wie eine glatte Funktion mit überlagerter, hochfrequenter und nichtdifferenzierbarer Störung kleiner Amplitude. Die lokalen Minima der Grundfunktion werden durch die äquidistante Anordnung der gegebenen Wandlerkennlinien — sie sind mit den senkrechten Linien markiert — nach aufsteigendem Pumpenaufnahmement erzeugt. Die überlagerte Störung wird durch Unstetigkeiten, lineare Interpolation der Kennlinien und Integration mit konstanter Schrittweite verursacht. Der Verbrauch wurde anhand des US-Testzyklus Highway berechnet. Zur Darstellung wurde der Entwurfparameter mit der Schrittweite  $10^{-3}$  variiert.

den Übergang zwischen den drei verschiedenen Betriebszuständen der Wandlerüberbrückungskupplung verursacht.

Die Optimierung nichtglatter Zielfunktionen fällt in der Literatur vielfach unter globale Optimierung, da die Zielfunktion mehrere lokale Minima aufweist. Im hier vorliegenden Fall ist die hochfrequente Überlagerung mit niedriger Amplitude nicht einmal differenzierbar. Daher können zur Lösung dieser Optimierungsaufgaben nur robuste Verfahren benutzt werden, die nur auf die Information der Zielfunktion selbst zurückgreifen:

- Implizites Filtern [27, 28, 53, 54],
- Bundle-Trust-Methoden [1],
- Multidirektionale Suchmethode<sup>2</sup> [88, 135],
- Simuliertes Ausglühen<sup>3</sup> [31, 72, 102],
- genetische Algorithmen [73].

<sup>2</sup> Im englischen Sprachraum unter „pattern search algorithm“ bekannt.

<sup>3</sup> Im englischen Sprachraum auch unter „simulated annealing“ bekannt.

**Implizites Filtern** Voraussetzung für den Einsatz des impliziten Filterns ist eine glatte Grundfunktion  $f_s(\mathbf{p})$  mit überlagerter hochfrequenter Störfunktion  $\Phi(\mathbf{p})$ . Die Designparameter unterliegen einer Boxbeschränkung [54]:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathcal{Z}} F : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{Z} := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p} \mid p_{li} \leq p_i \leq p_{ui}, i = 1, \dots, n_p \right\} \quad (3.20)$$

$$\text{und} \quad F(\mathbf{p}) = f_s(\mathbf{p}) + \Phi(\mathbf{p}). \quad (3.21)$$

Das Rauschen  $\Phi(\mathbf{p})$  muß kleine Amplituden haben, d. h.

$$\max_{x, y \in \mathcal{Z}} |\Phi(x) - \Phi(y)| \ll \max_{x, y \in \mathcal{Z}} |f_s(x) - f_s(y)|. \quad (3.22)$$

Es muß aber nicht zwingend differenzierbar sein. Aus diesem Grund ist das *Implizite Filtern* für die Lösung der hier vorliegenden Optimierungsaufgaben bestens geeignet.

Das implizite Filtern basiert auf der Methode des steilsten Abstiegs. Es ist ein projizierter Quasi-Newton-Algorithmus, bei dem die numerische Approximation des Gradienten zur Berechnung der Suchrichtung mittels zentralen Differenzenquotienten

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \right)_i = (\nabla_h F)_i \approx \frac{F(\mathbf{p} + h\mathbf{e}_i) - F(\mathbf{p} - h\mathbf{e}_i)}{2h} \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n_p \quad (3.23)$$

erfolgt. Nur am Rand der Boxbeschränkungen werden einseitige Differenzenquotienten berechnet. Die Genauigkeit des Gradienten wird über die Schrittweite  $h$  gesteuert, beginnend mit einer großen Schrittweite für die globale Approximation der Zielfunktion. Im Laufe der „äußeren“ Iterationen wird  $h$  immer kleiner, so daß die Approximation des Gradienten immer genauer wird. Das Verfahren geht dann in der Nähe der Lösung in ein Quasi-Newton-Verfahren über. So können die guten Konvergenzeigenschaften ausgenutzt werden.

Um die Folge der Quasi-Newton-Schritte innerhalb des Zulässigkeitsbereiches  $\mathcal{Z}$  zu halten, wird die neue Näherung der optimalen Lösung durch eine Gradientenprojektion auf die Hyperbox  $\mathcal{Z}$  auf den neuen Parametersatz transformiert:

$$\mathbf{p}_{k+1} = P(\mathbf{p}_k - \alpha \nabla_h F(\mathbf{p}_k)) \quad \text{mit} \quad (3.24)$$

$$P_i(\mathbf{p}) = \begin{cases} p_{li}, & \text{wenn } p_i \leq p_{li}; \\ p_i, & \text{wenn } p_{li} \leq p_i \leq p_{ui}; \\ p_{ui}, & \text{wenn } p_{ui} \leq p_i. \end{cases} \quad i = 1, \dots, n_p \quad (3.25)$$

Die Schrittweite  $\alpha$  wird bei der Liniensuche, der „inneren“ Iteration, so bestimmt, daß ein Absteigen der Zielfunktion garantiert wird mit hinreichend kleinem  $\sigma$  ( $\sigma = 10^{-4}$ )

$$F(\mathbf{p}_k) - F(\mathbf{p}_{k+1}) \geq \frac{\sigma}{\alpha} \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k+1}\|_2. \quad (3.26)$$

Ist der Wert  $\alpha$  kleiner als eine vorgegebene untere Schranke, dann wird die Liniensuche als erfolglos abgebrochen. Die Schrittweite  $h$  zur Berechnung der Differenzenquotienten wird halbiert und es folgt ein neuer Makroschritt.

Die zweiten Ableitungen sind in der Regel analytisch nicht zugänglich. Die Hessematrix  $\mathbf{H}$  wird mittels symmetrischem Rang-1-Update nach Broyden-Fletcher, Goldfarb, Shanno (BFGS) approximiert [97]:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{\mathbf{y} \mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T \mathbf{s}} - \frac{(\mathbf{B}_k \mathbf{s})(\mathbf{B}_k \mathbf{s})^T}{\mathbf{s}^T \mathbf{B}_k \mathbf{s}} \quad \text{mit} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{s} := -\mathbf{B}_k^{-1} \nabla_h F(\mathbf{p}_k) \quad \text{und} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{y} := \nabla_h F(\mathbf{p}_{k+1}) - \nabla_h F(\mathbf{p}_k). \quad (3.30)$$

Der Algorithmus hat folgende grobe Struktur:

1. Initialisierungsphase:  $h = h_{\max}$ , Translation der Parameter:  $p_i \in [0, 1]$  für  $i = 1, \dots, n_p$
2. Setze  $k = 0$  und berechne die Approximation des Differenzenquotienten mit aktueller Schrittweite  $h$ . Grundsätzlich werden zentrale Differenzenquotienten verwendet. Nur wenn die Boxbedingung verletzt würde, approximiert der einseitige Differenzenquotient den Gradienten. Die  $i$ -te Komponente des Gradienten wird Null gesetzt, wenn die  $i$ -te Bedingung aktiv ist und der Gradient nach außen zeigt.
3. Prüfe Abbruchkriterium:
  - (a) Berechne die Projektion des steilsten Abstiegs auf den Zulässigkeitsbereich.
  - (b) Halbiere die Schrittweite  $h$ . Wenn Schrittweite zu klein, dann STOP!
4. Berechne den negativen Quasi-Newton-Schritt: Im ersten Schritt ist die Suchrichtung der steilste Abstieg, und die Hessematrix wird durch die Einheitsmatrix approximiert. In den weiteren Iterationsschritten wird die Matrix mit dem reduzierten symmetrischen Rang-1-Update erneuert. Ist sie nicht positiv definit, dann ist der steilste Abstieg die Suchrichtung, anderenfalls wird die Quasi-Newton-Gleichung gelöst.
5. Starte die Liniensuche mit der Schrittweite  $\alpha = 1$ . Halbiere  $\alpha$ , wenn eine aktive Boxbeschränkung hinzukommt, anderenfalls bestimme die neue Schrittweite  $\alpha$  aus einem kubischen Modell der Zielfunktion. Nur im ersten Schritt wird statt des kubischen Modells das quadratische verwendet. Berechne die neuen Entwurfparameter durch Projektion des neuen Iterationspunktes auf den Zulässigkeitsbereich. Der neue Parametersatz wird akzeptiert, falls die Zielfunktion abnimmt. War die Liniensuche erfolgreich, erhöhe den Iterationszähler und gehe zu Schritt 2.

Der Einsatz der Sekante anstelle des Gradienten versetzt das Verfahren in die Lage, lokale Minima gezielt zu überspringen.

**Bundle-Trust-Methode** Bei der Bundle-Methode [1] werden die Gradienten durch sogenannte Subgradienten [97, 108] ersetzt. Er ist ein Element des sogenannten Subdifferentials, welches folgendermaßen definiert ist:

$$\partial f(\mathbf{p}) := \left\{ \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n_p} \mid \mathbf{g}^T (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \leq f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_p} \right\}. \quad (3.31)$$

Sie finden Anwendung, wenn die Zielfunktion mehrere separierte lokale Minima aufweist. Ihr Einsatz zur Lösung der hier vorliegenden Problemklasse ist daher nicht zielführend, da sehr viele Nichtdifferenzierbarkeitsstellen vorliegen. Eine grobe Darstellung der Bundle-Trust-Methode ist die folgende:

1. Initialisiere die Schranken  $\varepsilon > 0$  und  $\eta > 0$  (klein).
2. Setze den Zähler der Iterationen  $k = 1$ , wähle einen Startwert  $\mathbf{p}_k$ , werte die Zielfunktion an dieser Stelle aus und bestimme einen beliebigen Subgradienten. Setze den Linearisierungsfehler  $\alpha_k^1 = 0$ .
3. Löse ein quadratisches Optimierungsproblem mit  $l_2$ -Norm der konvexen Hülle der Subgradienten mit der Nebenbedingung, daß die Linearkombination der Linearisierungsfehler unter der vorgegebenen Schranke liegt:

$$\min_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^k} \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{g}_i \right\|_2^2 \quad (3.32)$$

$$\text{unter der NB: } \boldsymbol{\lambda} \in \lambda^k \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i^k \leq \varepsilon. \quad (3.33)$$

Dabei sind

$$\lambda^k := \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^k \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\} \quad \text{und} \quad (3.34)$$

$$\alpha_i^k := f(\mathbf{p}_k) - f(\mathbf{p}_i) + \mathbf{g}^T(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k) \quad i = 1, \dots, k \quad (3.35)$$

4. Die negative Suchrichtung ist gegeben durch gewichtete Summe der Subgradienten

$$\mathbf{s}_k := \sum_{i=1}^k \lambda_i^k \mathbf{g}_i. \quad (3.36)$$

5. Nach erfolgreicher Liniensuche schließt ein sogenannter „Serious-Step“ an, in dem die neuen Parameterwerte berechnet werden. Die Zielfunktion wird an dieser Stelle ausgewertet und ein neuer Subgradient aus dem Subdifferential des aktuellen Punktes bestimmt. Der Linearisierungsfehler  $\alpha_i^{k+1}$  muß ebenfalls aktualisiert werden.

Konnte in der Liniensuche kein besserer Parametersatz gefunden werden, so folgt ein sogenannter „Null-Step“: Zum unveränderten Parameter werden ein neuer Subgradient und der zugehörige Linearisierungsfehler berechnet.

**Suchmethoden** Nachteil einiger Suchmethoden ist ihre meist sehr langsame Konvergenzgeschwindigkeit. Die Simplexmethode von Nelder und Mead [95] ist z. B. für höherdimensionale Optimierungsprobleme praktisch unbrauchbar, da die Konvergenz überhaupt nicht sichergestellt ist [78]. Zur Zeit gewinnen aber direkte Suchverfahren wie die Multidirektionale Suchmethode von Dennis und Torczon an Bedeutung, da ein Konvergenzbeweis auch für den mehrdimensionalen Fall vorliegt und das Verfahren sehr gut parallelisiert werden kann. Es kommt auf Rechnern mit mehreren Prozessoren oder vernetzten Rechnern zum Einsatz [88, 134, 135].

In der globalen Optimierung finden ableitungsfreie Methoden, wie das *simulierte Ausglühen* und *genetische Algorithmen* [73] Anwendung. Mit Hilfe dieser Verfahren kann das globale Minimum eines Optimierungsproblems gefunden werden. Der Vorteil dieser Methoden liegt in ihrer Robustheit und Parallelisierbarkeit. Nachteile der heuristischen Verfahren ist ihre schlechte Konvergenzeigenschaft. Die langsame Konvergenzgeschwindigkeit hat folgende Ursache: Der Parameterraum wird komplett abgesucht, es müssen sehr viele Auswertungen der Zielfunktion erfolgen. Ist eine Funktionsauswertung teuer, dann steigt die Rechenzeit beträchtlich an. Nur teilweise kann einiges an Rechenzeit durch Parallelisierung wieder gutgemacht werden. Es besteht keine Möglichkeit, Nebenbedingungen effizient zu behandeln.

**Simplexmethoden** Während der Algorithmus von Nelder und Mead mit einfachen Simplexes arbeitet, verwendet der von Dennis und Torczon Doppelsimplexes. Es werden jeweils die Werte der Zielfunktion an den Eckpunkten der geometrischen Körper betrachtet und verglichen. Nach Nelder und Mead wird der Eckpunkt mit dem „schlechtesten“ Wert der Zielfunktion in drei Schritten geändert:

1. *Reflexion*: Der Eckpunkt mit dem größten Wert der Zielfunktion wird durch den Schwerpunkt der restlichen Ecken gespiegelt.
2. *Expansion*: Hat sich nach der Reflexion der Wert der Zielfunktion verbessert, wird die Gütefunktion an einem zweiten Punkt, der noch weiter entfernt in derselben Richtung liegt, geprüft.

3. *Kontraktion*: Liegt der Wert der Zielfunktion nach der Reflexion zwischen den beiden „schlechtesten“ Eckpunkten, dann wird der „schlechteste“ am „zweischlechtesten“ gespiegelt.
4. *Erneuerung*: Wird die Zielfunktion an jedem neu berechneten Punkt größer, wird ausgehend vom Eckpunkt mit dem kleinsten Wert der Zielfunktion durch Halbierung der Seitenlängen ein neues, kleineres Simplex aufgebaut.

Als Abbruchkriterium dient die Größe des Simplex.

Dennis und Torczon verwenden bei der *multidirektionalen Suchmethode* zur Generierung neuer Gitterpunkte ebenfalls Reflexion, Expansion und Kontraktion. Der Unterschied liegt darin, daß bei jedem Schritt um den Eckpunkt mit dem besten Wert der Zielfunktion das gesamte Simplex gespiegelt wird, so daß ein Doppelsimplex entsteht. Beide Methoden sind Spezialfälle der sogenannten *Pattern search algorithms* [135]. Auch die Suche in Richtung der Koordinatenrichtungen nach Hooke und Jeeves [68] kann mit Hilfe der Methode des *Pattern search* abstrahiert werden.

**Simuliertes Ausglühen** Das simulierte Ausglühen ahmt einen physikalischen Prozeß nach: Erhitzt man Spinglas, dann wird es flüssig. Die Partikel bewegen sich sehr stark und sie bilden keine Struktur. Durch langsames Abkühlen wird dem heißen Spinglas Energie entzogen und die Partikel ordnen sich an. Sie bilden im Energieminimum ein strukturiertes Kristallgitter. Erfolgt jedoch die Abkühlung zu abrupt, dann kann sich das Gitter nicht ausbilden. Die Partikel werden in einem Zwischenzustand eingefroren. In einem solchen unvollständigen Kristallgitter liegt ein lokales Minimum der Energie vor. Dieser physikalische Prozeß wird mit Hilfe der vier Funktionen

- $g_{WKD}(\mathbf{p})$ , der Wahrscheinlichkeitsdichte für den Parameter,
- $h_{WKD}(\mathbf{p})$ , der Wahrscheinlichkeitsdichte für Akzeptanz der Parameter,
- $T(k)$ , dem Schema zum Absenken der Temperatur in der  $k$ -ten Iteration,
- $f(\mathbf{p})$ , der Zielfunktion,

folgendermaßen in einen iterativen Algorithmus übertragen:

1. Startwert der Parameter und (hohe) Referenztemperatur setzen.
2. Neuen Parametersatz anhand von  $g_{WKD}(\mathbf{p})$  berechnen.
3. Energiedifferenz der Parametersätze mit Hilfe der Zielfunktion.  $f(\mathbf{p})$  berechnen.
4. Akzeptanz des neuen Parametersatzes aufgrund von  $h_{WKD}(\mathbf{p})$  berechnen.
5. Absenken der Referenztemperatur nach dem Reduktionsschema  $T(k)$ .

Durch die Wahl der Wahrscheinlichkeitsdichte  $g_{WKD}(\mathbf{p})$  und des Reduktionsschemas für die Temperatur, kann die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens variiert werden: Beim Algorithmus *Boltzmann annealing* (BA) werden neue Parameter nach der Gauß-Verteilung bestimmt. Das globale Minimum kann gefunden werden, wenn die Temperatur mit der Rate  $T(k) = T_0 / \ln k$  oder langsamer fällt. *Fast annealing* (FA) verwendet die Cauchy-Verteilung, um neue Parameterwerte zu erzeugen. Mit einem Temperaturschema  $T(k) = T_0/k$  konvergiert das System gegen das globale Minimum. Neue Parameter werden beim *Very Fast Simulated Reannealing* (VFSR) mit einer temperaturabhängigen Verteilung generiert. Die Rate, mit der die Temperatur fällt, wird periodisch durch eine Sensitivitätsanalyse der Zielfunktion von den Designparametern skaliert.

**Genetische Algorithmen** Die Idee der genetische Algorithmen hat, wie der Name schon verrät, ihre Wurzeln in der Biologie. Der biologische Prozeß, der hier die globale Minimierung zum Ziel hat, ist der Entwicklungsprozeß durch Fortpflanzung. Eine Bevölkerung besteht aus mehreren Parametersätzen, welche Individuen genannt werden. Letztere setzen sich aus einer Folge binärer Zahlen, den Chromosomen, zusammen, die im Lauf der Optimierung variiert werden. Ein Maß der Anpassung eines Individuums  $\mathbf{p}_i$  aus der Bevölkerung  $\mathbf{p}_j, j = 1, \dots, N$  ist gegeben durch

$$F(\mathbf{p}_i) = \frac{f(\mathbf{p}_i)}{\sum_{j=1}^N f(\mathbf{p}_j)}. \quad (3.37)$$

Biologische Begriffe, die im unten stehenden Algorithmus mathematisch umgesetzt werden, sind:

- *Selektion*: Bewertung eines Individuums mit Wahrscheinlichkeit, die proportional seinem Maß der Anpassung ist.
- *Rekombination*: Zwei beliebige Individuen einer Bevölkerung werden übereinandergelegt. Der Kreuzpunkt des Chromosomentausches wird stochastisch bestimmt. Bei verteilten genetischen Algorithmen sind nur Paarungen mit benachbarten Individuen erlaubt.
- *Mutation*: Mit relativ geringer Wahrscheinlichkeit werden Chromosomen geändert.

Der Algorithmus hat die folgende Struktur: Ausgehend von einer Startkonfiguration der Bevölkerung werden durch iterative Selektion und genetische Manipulation die Individuen verändert bis ein lokales oder gar globales Minimum gefunden ist.

# Kapitel 4

## Anwendung des Optimierungskonzepts zur optimalen Auslegung des Antriebsstrangs

### 4.1 Optimale Auslegung des Antriebsstrangs

Bei der Auslegung des Antriebsstrangs gibt es eine Vielzahl von Kriterien, die eingehalten werden müssen, um die Anforderungen an Fahrleistung, Verbrauch und Komfort zu erfüllen. Besonders die Senkung des Verbrauchs bei gleicher Fahrleistung steht im Mittelpunkt des Interesses bei Konstruktion und Auslegung moderner Fahrzeuge. Als Beispiel hierzu sei auf die folgenden Abschnitte verwiesen. Dort werden Wandler und Hinterachsgetriebe optimal ausgelegt. Zur Verbesserung des Komforts werden umfangreiche Untersuchungen durch numerische Simulation von Schwingungsmodellen durchgeführt. Es sind Modal- und Frequenzganganalysen des Antriebsstrangs mit charakteristischen Anregungen, die durch den Motor verursacht werden. Zur Verifikation des Modells wird eine Parameteridentifikation der Massenträgheiten, Steifigkeiten und Dämpfungsparameter durchgeführt.

#### 4.1.1 Bestimmung optimaler Reglerparameter

Bevor einzelne Parameter des physikalischen Modells oder Kennlinien, die das Übertragungsverhalten ganzer Bauteile beschreiben (s. Abschnitt 1.5), systematisch variiert und eine Kombination aus Verbrauch und Fahrleistung optimiert werden kann, müssen die Parameter des Reglers, der dafür Sorge trägt, daß der gewählte Fahrzyklus (s. Abb. 1.8) im Rahmen vorgegebener Schranken durchfahren wird, optimal angepaßt werden. Im Falle des Zweispurmodells von Pankiewicz [101] übernimmt ein spezieller PI-Regler mit zwei frei wählbaren Parametern diese Rolle. Die Bestimmung der Reglerparameter ist in der klassischen Regelungstechnik eine Standardaufgabe, wobei

als Zielfunktionen beispielsweise

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} \int_0^{t_f} |v^{\text{ist}} - v^{\text{soll}}| dt \quad \text{oder} \quad \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} \int_0^{t_f} (v^{\text{ist}} - v^{\text{soll}})^2 dt \quad (4.1)$$

eingesetzt werden. Zeitgewichtete Regelflächen als Zielfunktionen [43] sind für die hier vorliegenden dynamischen Modelle nicht zielführend. Es macht nur dann Sinn, Abweichungen zu einem späteren Zeitpunkt stärker zu gewichten, wenn ein stationärer Zustand erreicht werden soll. Dies liegt hier jedoch nicht vor. Die Reglerpara-

**Tab. 4.0:** Nebenbedingungen zur Bestimmung optimaler Reglerparameter.

Boxbeschränkungen	$\mathbf{p}_l \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_u$
Abweichung vom Sollwert	$(\varepsilon v^{\text{soll}})^2 - (v^{\text{ist}} - v^{\text{soll}})^2 \leq 0$

meter müssen darüberhinaus einige Nebenbedingungen erfüllen (s. Tab. 4.0). Die Abweichungen vom Sollwert muß beschränkt werden, da das Reglerverhalten mit einer Schwingung um den Führungssollwert antworten wird. Das Überschwingen ist durch die Einführung der Nebenbedingungen zu beschränken.

Umfangreiche Untersuchungen haben ergeben, daß ein deutlich besseres Ergebnis erzielt werden kann, wenn man den Verbrauch, bezogen auf die zurückgelegte Strecke, minimiert. Die neue Zielfunktion lautet somit

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F_1^*(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} \frac{\text{Verbrauch}(t_f)}{\text{Strecke}(t_f)}. \quad (4.2)$$

Mit dieser Zielfunktion werden Parametersätze bevorzugt, für die der Regler die Abweichung vom Sollwert kompensieren kann und die Schwingungen um diesen Wert nur geringfügig ausgeprägt sind.

### 4.1.2 Verbrauchsoptimale Auslegung des Wandlers

Wie im Abschnitt 1.5.2 bereits ausführlich dargelegt, wird das Übertragungsverhalten des Wandlers mit Hilfe von 2 stationären Kennlinien approximiert. Bei der Bestimmung der optimalen Auslegung des Wandlers werden diese Kennlinien gezielt variiert. Dabei sind jedoch folgende Punkte zu beachten:

- Die Wandlerkennlinien haben eine *charakteristische Form*, die unbedingt erhalten bleiben muß.
- Um die Konstruktion des Wandlers sicherzustellen werden nur *kleine Variationen* zugelassen.

- Ideelle Wandlerkennlinien werden mit Hilfe der *Einbettung* (s. Abschn. 2.3.2) erzeugt. Somit ist das Problem der Kennlinienoptimierung auf eine *Parameteroptimierung* zurückgeführt. Durch die Einbettung der Wandlerkennlinien in eine 2D-Fläche stehen im wesentlichen zwei Möglichkeiten offen, die Designparameter zu wählen:

Fall 1: Die Reihenfolge der  $N$  existierenden Wandler wird festgelegt und die zugehörigen Einbettungsparameter  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) werden willkürlich aus dem Intervall  $[0, 1]$  gewählt, so daß mit den in Kapitel 2 durch Interpolation eine Fläche aufgebaut werden kann. Als Freiheitsgrad steht dann der Einbettungsparameter  $\alpha$ , der die aktuelle Wandlerkennlinien repräsentiert, zur Verfügung. Kriterien zur Anordnung der Wandlerkennlinien sind

1. aufsteigendes Pumpenaufnahmement,
2. aufsteigende Momentenüberhöhung,
3. aufsteigender Verbrauch,
4. aufsteigende Fahrleistung,
5. Algorithmus 2.9 Einbettungsparameter (s. S. 66).

Fall 2: Es sei umgekehrt der Einbettungsparameter  $\alpha = 0.5$  fest, und die Parameter  $\alpha_i$  durch die Optimierung zu bestimmen. In diesem Fall wird bei jeder Änderung der Parameter eine neue Fläche erzeugt. In die Simulation geht aber immer die Kennlinie ein, die man für denselben Parameterwert  $\alpha = 0.5$  erhält. In diesem Fall ist darauf zu achten, daß die  $\alpha_i$  alle verschieden sind.

- Die Aufgabenstellung kann als Optimalsteuerungsproblem mit den Wandlerkennlinien als Steuerung interpretiert werden. In diesem Fall müssen viele Nebenbedingungen an die Steuerung formuliert werden, um die oben bereits angesprochene Formerhaltung zu gewährleisten. Das Problem hierbei ist jedoch, daß die Nebenbedingungen nicht vollständig bekannt sind.

Anhand des Modells zur Berechnung des Verbrauchs eines Fahrzeugs, das beispielsweise in den Abschnitten 1.5 und 1.6 angegeben ist, erfolgt die Optimierung des Wandlers. Die Zielfunktion ist eine lineare Gewichtung aus verbrauchs- und fahrleistungsoptimalen Kriterien (4.3) – (4.7). Der Kraftstoffverbrauch wird aus einem Kennfeld bilinear interpoliert, weshalb die Gütefunktion lediglich als stetige Funktion der Klasse  $C^0$  angenommen werden kann. Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, den Verbrauch auf die zurückgelegte Strecke zu beziehen. Man betrachtet ihn pro 100 km. Dadurch werden Parametersätze begünstigt, für die das Fahrzeug bei annähernd gleichem Verbrauch eine weitere Strecke zurücklegt:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F_1(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} 100 \frac{\text{Verbrauch}(t_f)}{\text{Strecke}(t_f)}. \quad (4.3)$$

Folgende Kriterien sind an die Fahrleistung gestellt:

1. Der in den ersten 4 s zurückgelegte Weg soll maximal sein

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F_2(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} s(t = 4 \text{ s}). \quad (4.4)$$

2. Die ersten 400 m sollen möglichst schnell zurückgelegt werden

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F_3(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} t(s = 400 \text{ m}). \quad (4.5)$$

3. Die Beschleunigung 0 – 100 km/h soll zeitminimal erfolgen

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F_4(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} t(v^{\text{ist}} = 100 \text{ km/h}). \quad (4.6)$$

4. Im 5. Gang soll die Elastizität, die Beschleunigung 80 – 120 km/h, zeitminimal sein

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F_5(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} \left( t(v^{\text{ist}} = 120 \text{ km/h}) - t(v^{\text{ist}} = 80 \text{ km/h}) \right). \quad (4.7)$$

### 4.1.3 Auslegung der Hinterachsübersetzung

Um den Verbrauch noch weiter zu reduzieren wird ein weiterer Freiheitsgrad eingeführt. Die Übersetzung des Hinterachsgetriebes ist der neue Designparameter, der innerhalb der Boxbeschränkung

$$p_l = 0.5 \leq p = i_{AG}^h \leq p_u = 5.0$$

variieren darf, wobei wiederum der Verbrauch pro 100 km (4.3) zu minimieren ist. Weitere Nebenbedingungen werden nicht gefordert. Eine Änderung der Getriebeübersetzung in der Hinterachse zieht eine Skalierung der Schaltkennlinien des Automatikgetriebes nach sich, da sich durch die höhere Maximalgeschwindigkeit auch die Drehzahlen am Getriebeausgang drastisch ändern.

### 4.1.4 Auslegung der Getriebeübersetzungen

Die Fahrleistung eines Kraftfahrzeuges kann durch die optimale Wahl der Getriebeübersetzungen weiter verbessert werden. Neue Freiheitsgrade sind alle Übersetzungen bis auf den 4. Gang ( $i_{G_4} = 1$ ) des Automatikgetriebes. Die Getriebeübersetzungen werden innerhalb des Bandes

$$p = i_G \pm 20\%$$

variieren. Die Fahrleistung (4.4) – (4.6) ist zu maximieren. Weitere Nebenbedingungen müssen nicht gefordert werden. Die Bandbreiten für die einzelnen Parameter sind disjunkt gewählt, so daß die Übersetzungen, den Gängen entsprechend, geordnet bleiben.

### 4.1.5 Parameteridentifikation bei Schwingungsmodellen

Ein wichtiges Beurteilungskriterium für ein modernes Kraftfahrzeug ist der Fahr- und Federungskomfort. Durch höhere Ordnungen der Motorcharakteristik werden Schwingungen im Antriebsstrang angeregt und über Lager auf den Fahrzeugaufbau übertragen. Für die optimale Auslegung des Antriebsstrangs in bezug auf den Komfort sind umfangreiche numerische Simulationen im Frequenzbereich mit Hilfe linearer Mehrkörper-Simulationsmodelle notwendig. Dazu müssen die in das Modell eingehenden Massenträgheiten, Steifigkeiten und Dämpfungsgrößen so bestimmt werden, daß die Berechnung mit der Messung gut übereinstimmt. Es liegt ein Parameteridentifikationsproblem vor mit der quadratischen Zielfunktion (vgl. Abb. 4.1)

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left( \frac{(r_{ij} - l_{ij})^2}{(\omega_1)_{ij}^2} + \frac{(s_{ij}^2 - l_{ij}^2)}{(\omega_2)_{ij}^2} \right) \quad (4.8)$$

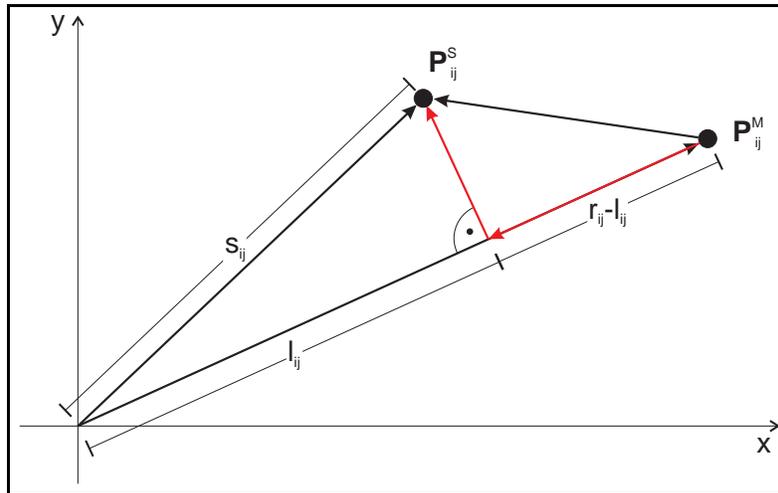
mit

$$r_{ij}^2 = \|\mathbf{P}_{ij}^M\|_2^2, \quad s_{ij}^2 = \|\mathbf{P}_{ij}^S\|_2^2, \quad l_{ij} = (\mathbf{P}_{ij}^S)^T \mathbf{P}_{ij}^M / r_{ij}$$

und

$$\mathbf{P}_{ij}^M = \varphi_i(f_j) \begin{pmatrix} \cos \vartheta_i(f_j) \\ \sin \vartheta_i(f_j) \end{pmatrix} \Big|_{\text{Messung}}, \quad \mathbf{P}_{ij}^S = \varphi_i(f_j) \begin{pmatrix} \cos \vartheta_i(f_j) \\ \sin \vartheta_i(f_j) \end{pmatrix} \Big|_{\text{Simulation}}$$

Als Meßdaten liegen Verdrehwinkel  $\varphi$  und Phase  $\vartheta$  zu diskreten Eingangsfrequenzen  $f_i$  vor, wobei die Phasen relativ zu einem ausgezeichneten Körper — im vorliegendem Fall ist dies die Kurbelwelle — angegeben sind. Die Phase, die durch die Frequenzganganalyse des linearisierten Schwingungsmodells eines Antriebsstrangs berechnet



**Abb. 4.1:** Komponentenaufteilung der Abweichung. Die Abweichung der Simulationsdaten von den Messungen wird in zwei orthogonale Komponenten zerlegt: in den radialen Anteil  $\frac{l_{ij} - r_{ij}}{r_{ij}} \mathbf{P}_{ij}^M$  und den darauf senkrecht stehenden Anteil  $\mathbf{P}_{ij}^S - \frac{l_{ij}}{r_{ij}} \mathbf{P}_{ij}^M$ .

wird, muß aus diesem Grund ebenfalls relativ zur Kurbelwelle angegeben werden. Dabei ist zu beachten, daß der berechnete relative Wert zwischen  $\pm 180^\circ$  liegt. In der Regel werden die berechneten Werte zur Auswertung der Zielfunktion nicht an denselben Frequenzen vorliegen wie die Meßdaten. Sie müssen mit Hilfe der in Kapitel 2 angegebenen Verfahren interpoliert werden. Zur Berechnung der Zielfunktion wird der Differenzvektor zwischen Simulationsergebnis  $P^S$  und Messung  $P^M$  in 2 Komponenten zerlegt. Parallel zum Vektor  $P^M$  liegt die radiale Komponente, die aus der orthogonalen Projektion von  $P^S$  in Richtung  $P^M$  mit Hilfe des Skalarprodukts berechnet wird. Die andere Komponente steht orthogonal darauf (vgl. Abb. 4.1).

## 4.2 Sensitivitätsuntersuchung

Bevor die ersten Optimierungsläufe durch eine systematische Variation der Wandlerkennlinien durchgeführt werden, ist eine Untersuchung der Sensitivität des Verbrauchs in Abhängigkeit des Wandlerübertragungsverhaltens von Interesse. Besonders anschaulich erfolgt dies graphisch. Wesentlich dazu ist ein Parameterraum niedriger Dimension. Im Fall 1 auf der Seite 88, bei dem eine feste Anordnung der Kennlinien vorgeschlagen wird, hat der Parameterraum die Dimension 1 und erfüllt daher die gewünschte Eigenschaft. In Abbildung 4.2 ist der Verbrauch zu den vier Geschwindigkeitsprofilen Highway-, FTP-, ECE-Zyklus und 10•15-Mode über dem Designparameter  $\alpha$ , dem Einbettungsparameter für die Wandlerkennlinien, graphisch dargestellt. Die Einbettung der Kennlinien erfolgt jeweils äquidistant nach aufsteigendem Pumpenaufnahmement. Das bereits im Abschnitt 3.3 angesprochene hochfrequente Rauschen liegt im Bereich der Datengenauigkeit. Die Berechnungen sind mit dem Simulationsprogramm IFAHRDY durchgeführt worden.

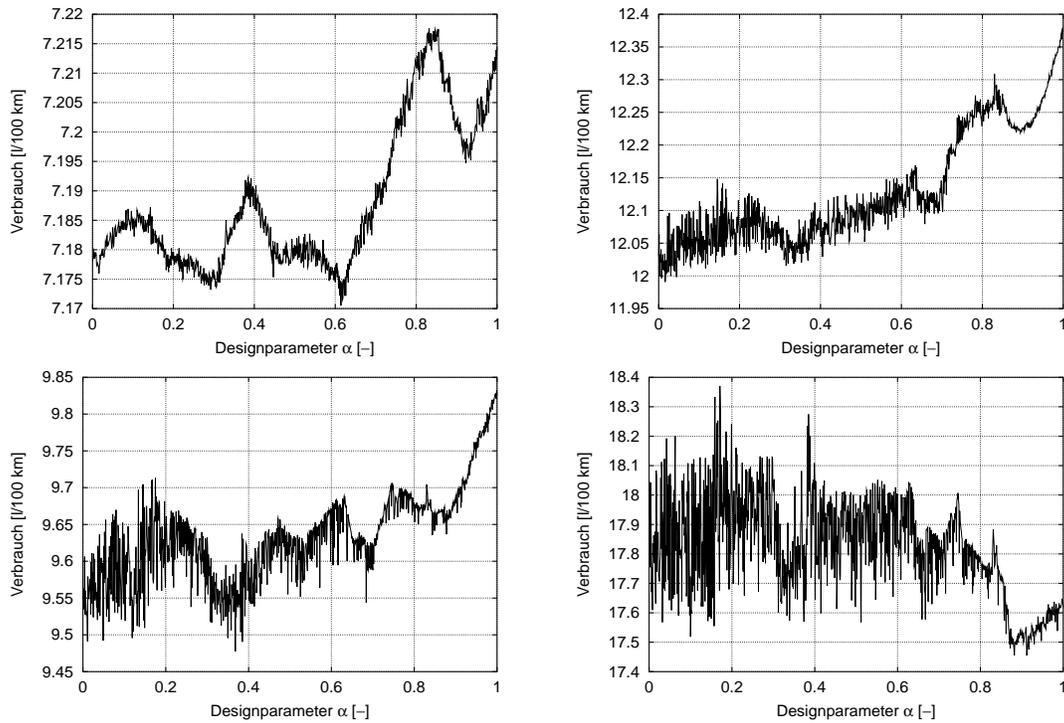
Der US-Zyklus ist ein Überlandzyklus, bei dem die durchschnittliche Fahrgeschwindigkeit bei etwa 70 km/h liegt, die zu 90 % im 4. und 5. Gang gefahren wird. In diesem Geschwindigkeitsbereich ist der Wandler überbrückt, die Wandlerüberbrückungskupplung im geregelten Zustand. Daher geht hier die Eigenschaft der Momentenüberhöhung, die ausschließlich in der Anfahrphase eine wichtige Rolle spielt, nicht ein. Für die Optimierung des Verbrauchs anhand des US-Zyklus bedeutet dies, daß der Gewinn durch die verbrauchsoptimale Wahl des Wandlers nur gering ausfallen kann (0.4 – 1.5 %).

Der ECE-Zyklus, ein Stadtzyklus mit Überlandanteil, hingegen beschreibt wiederholtes Anfahren und Anhalten im Stadtgebiet. Der Verbrauch fällt im Vergleich zum US-Highway-Zyklus um 2 – 2.5 l/100 km höher aus. Die Momentenüberhöhung wirkt sich stärker auf den Verbrauch aus, so daß hier bei der verbrauchsoptimalen Auslegung mehr Gewinn gegenüber der Referenzkonfiguration erzielt werden kann (4 – 5 %).

Der Wandler kann auch anhand des Geschwindigkeitsprofil 10•15-Mode ausgelegt werden. Es ist ein Stadtzyklus, der mit dem ECE-Zyklus vergleichbar ist.

Besonders geeignet zur Berechnung optimaler Getriebeübersetzungen und zur optimalen Auslegung des Wandlers ist der FTP-Zyklus. Wegen des wiederholten Anfahrens und Beschleunigens auf 50 km/h bzw. 80 km/h und des Abbremsens bis

zum Stillstand des Fahrzeugs gehen alle Betriebszustände von Wandler und Überbrückungskupplung zur Bewertung des Verbrauchs, bezogen auf 100 km, ein. Ein Vergleich der Ergebnisse im Abschnitt 4.3.2 bekräftigt diese Annahme.



**Abb. 4.2:** Sensitivitätsuntersuchungen. Abhängigkeit des Verbrauchs vom Wandlerverhalten. Der Verbrauch wurde zu verschiedenen Geschwindigkeitsprofile berechnet: US-Highway-Zyklus (links oben), Federal Test Procedure (rechts oben), ECE/EG-Testzyklus (links unten) und 10•15-Mode (rechts unten). Zur Darstellung wurde der Designparameter mit der Schrittweite  $10^{-3}$  variiert.

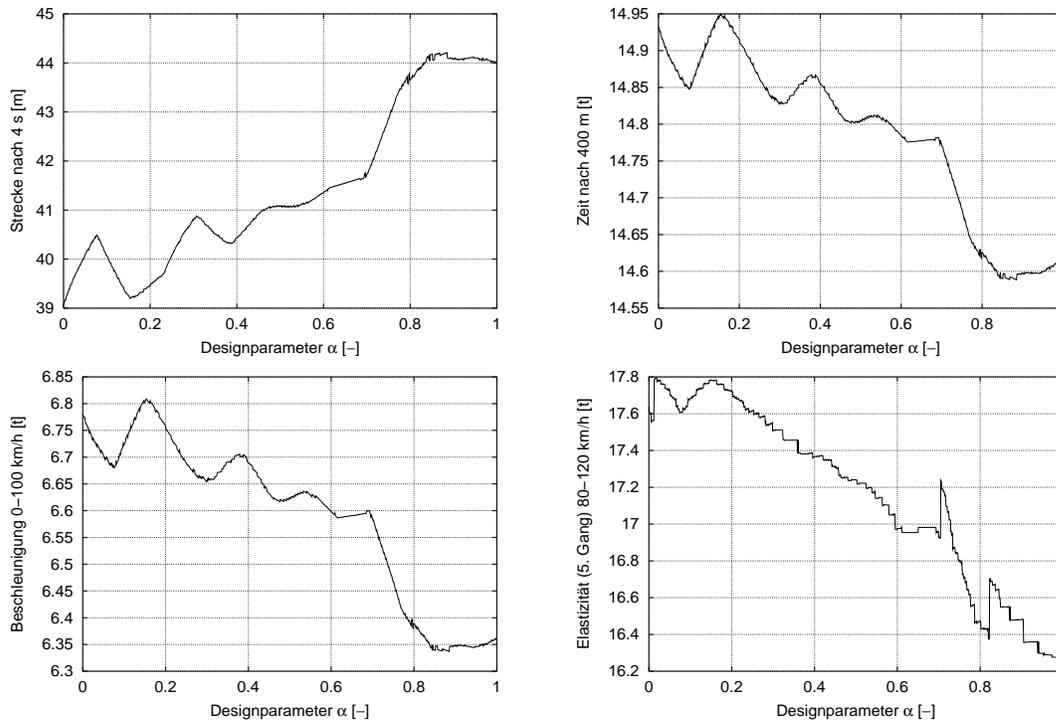
Um das dynamische Verhalten des Drehmomentenwandlers in der Anfahrphase in die Optimierung einzubringen, werden auch Kriterien der Fahrleistung in der Zielfunktion berücksichtigt. Die Zielfunktionen zur Bewertung der Fahrleistung über dem Einbettungsparameter  $\alpha$ , der verschiedene Wandler beschreibt, sind in Abb. 4.3 zu sehen. Obwohl eine Korrelation zwischen den Gütefunktionen zur Optimierung der Fahrleistung erkennbar ist, werden alle Terme in der gemischten Zielfunktion berücksichtigt. Die Gewichtung der einzelnen Terme erfolgt so, daß sie ungefähr gleiche Größenordnungen haben. Die gemischte Zielfunktion hat folgende Form:

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} \frac{1}{3} \{c_1 F_1(\mathbf{p}) - c_2 F_2(\mathbf{p}) + c_3 F_3(\mathbf{p}) + c_4 F_4(\mathbf{p}) + c_5 F_5(\mathbf{p})\}$$

$$\text{mit den Koeffizienten } c_1 = 0.139, \quad c_2 = -0.024, \quad c_3 = 0.067, \\ c_4 = 0.152, \quad c_5 = 0.058.$$

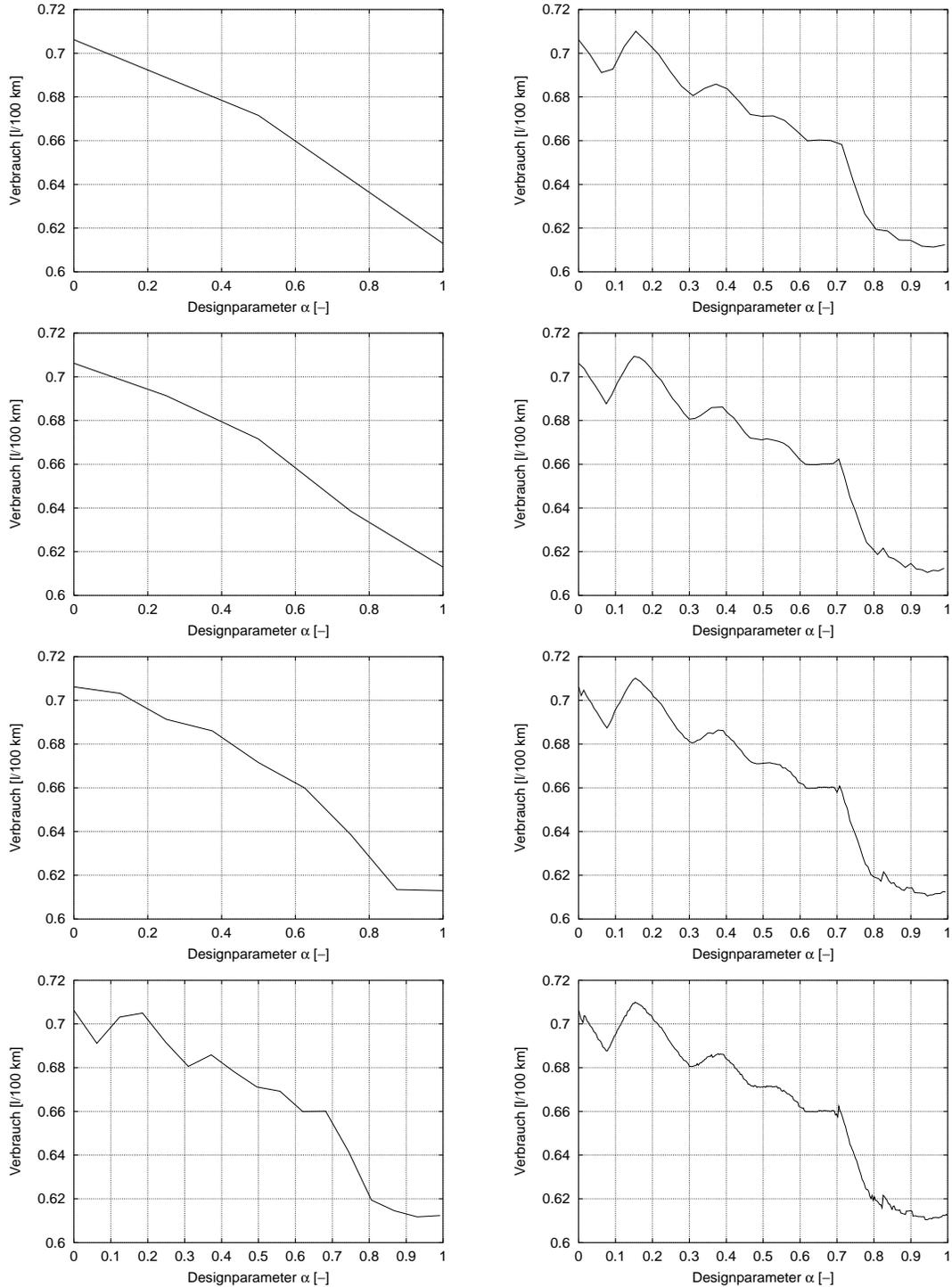
An den eindimensionalen Darstellungen der Zielfunktionen in Abb. 4.2 und Abb. 4.3 ist deutlich zu erkennen, daß der Wandler verbrauchsoptimal anders ausgelegt werden

muß als bei der Optimierung der Fahrleistung. Werden jedoch Wandler und Getriebeübersetzungen simultan variiert und nach der gewichteten Summe der Einzelkriterien optimiert, wird sich zeigen, daß sowohl der Verbrauch gesenkt als auch die Fahrleistung verbessert werden kann. Ergebnisse sind im folgenden Abschnitt zu finden.

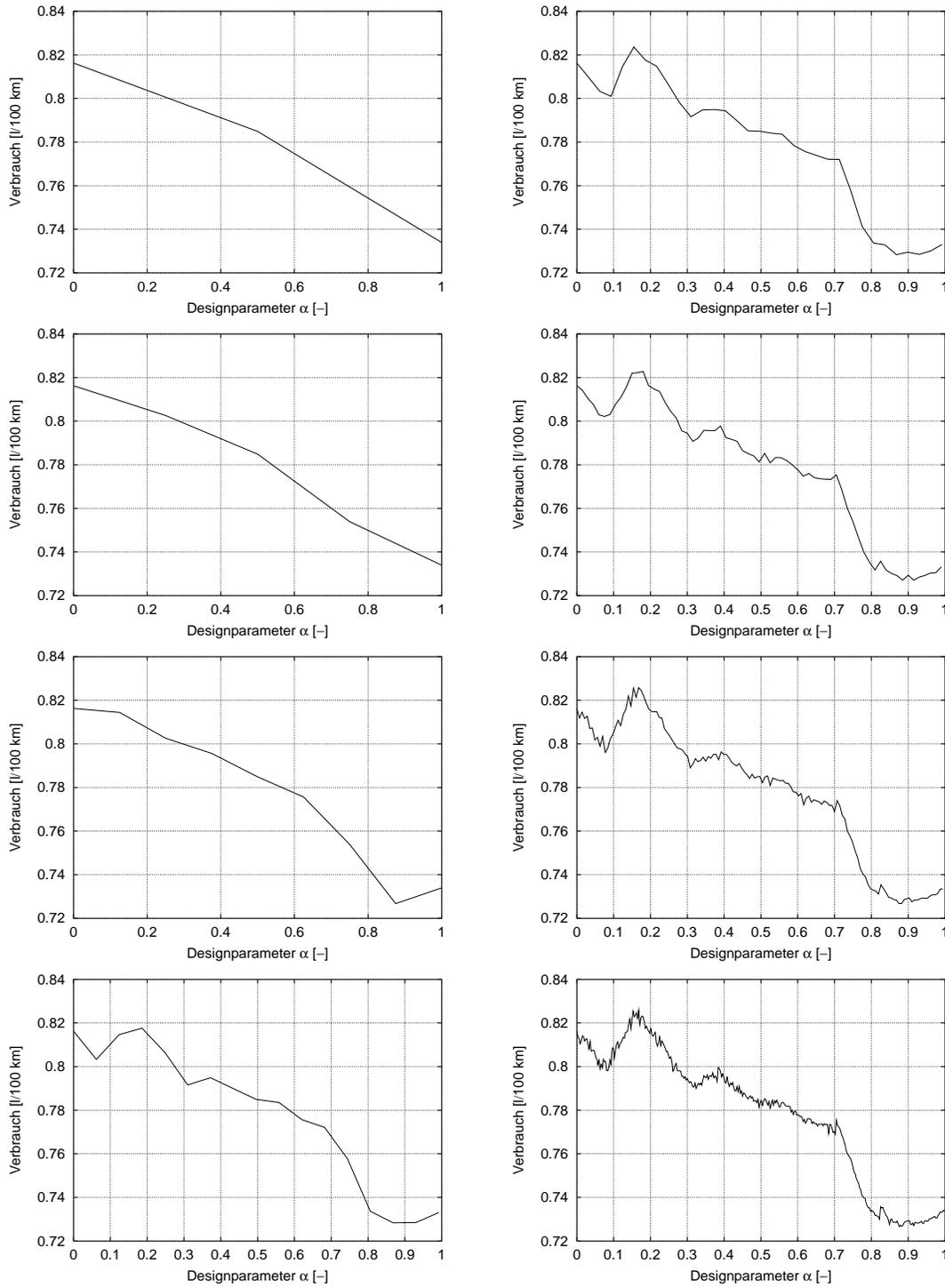


**Abb. 4.3:** Darstellungen der verschiedenen Kriterien zur Beurteilung der Fahrleistung. Die vier Paneele zeigen die Verläufe der Kriterien zur Optimierung der Fahrleistung. Es ist die in den ersten 4 s zurückgelegte Strecke (links oben), die nach 400 m verstrichene Zeit (rechts oben), die Beschleunigung von 0 auf 100 km/h und die Elastizität im 5. Gang, welche an der Zeit für die Beschleunigung von 80 auf 120 km/h gemessen wird.

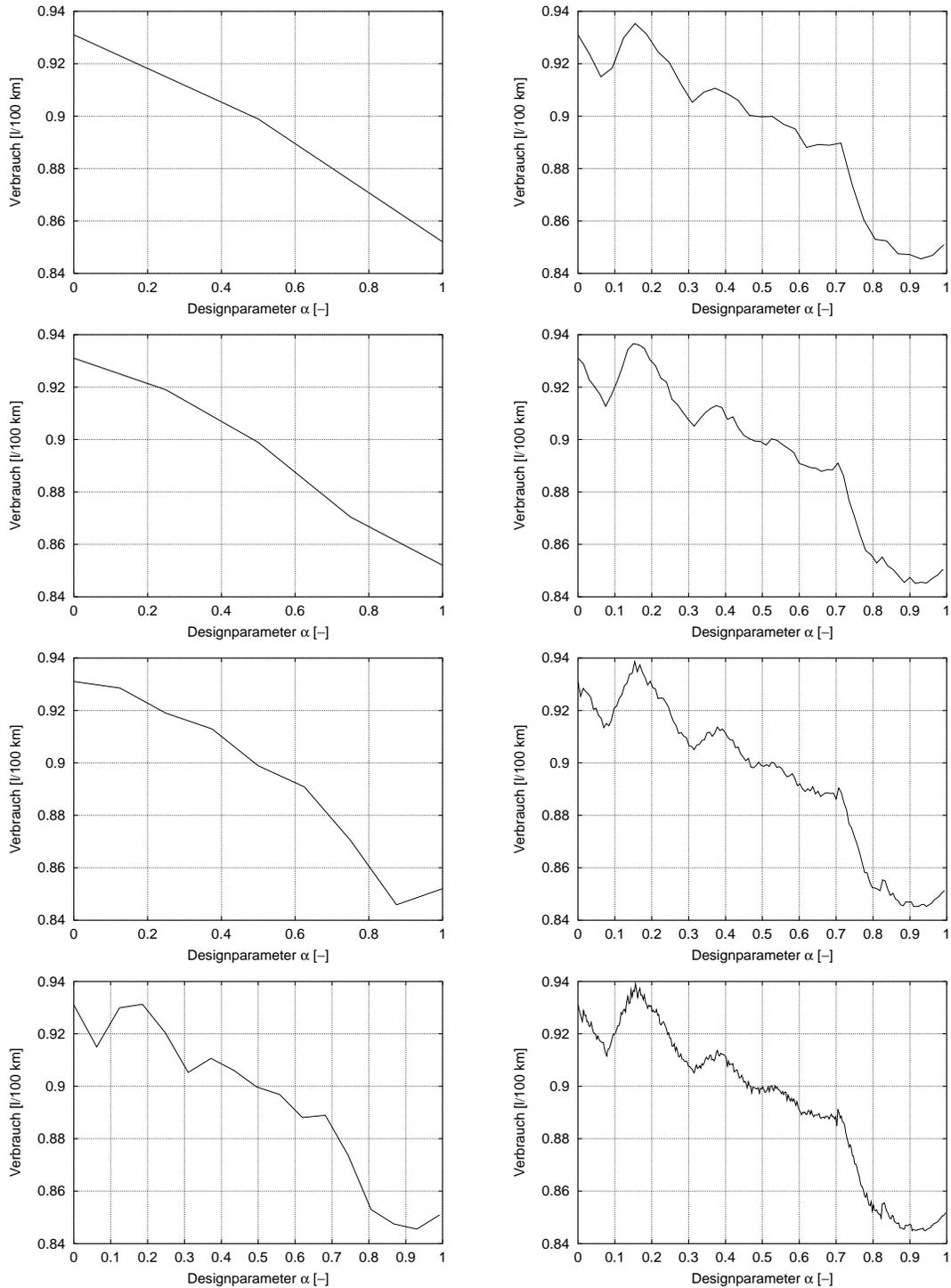
Wie bereits im oberen Abschnitt 3.3 über die *Optimierung nichtglatter Zielfunktionen* erwähnt, verwendet das Verfahren des impliziten Filterns verschiedene Schrittweiten zur Approximation der Gradienten. Dieses Vorgehen ist mit der hierarchischen Approximation der Zielfunktion zu vergleichen, beginnend mit einer groben, globalen Approximation: der Gradient wird durch die Normale auf die Sekante ersetzt. Im Laufe der Iterationsschritte geht die Sekante in eine gute Approximation der Tangente über, so daß schließlich lokal eine genaue Näherung der Zielfunktion vorliegt. Diese Entwicklung ist in den Abbildungen 4.4 – 4.7 graphisch dargestellt: Links oben wird Zielfunktion mit der Schrittweite  $h = 1/2$  in den 2 äquidistanten Intervallen linear approximiert. Durchläuft die Schrittweite die Folge  $h = 1/n$  mit  $n = 2, 4, 8, \dots$ , so entstehen die einzelnen Graphen. Es ist gut zu erkennen, wie aus der „glatte“ Approximation links oben immer mehr lokale Minima in der Zielfunktion entstehen. Erst bei sehr kleinen Schrittweiten werden die hochfrequenten Anteile erkennbar.



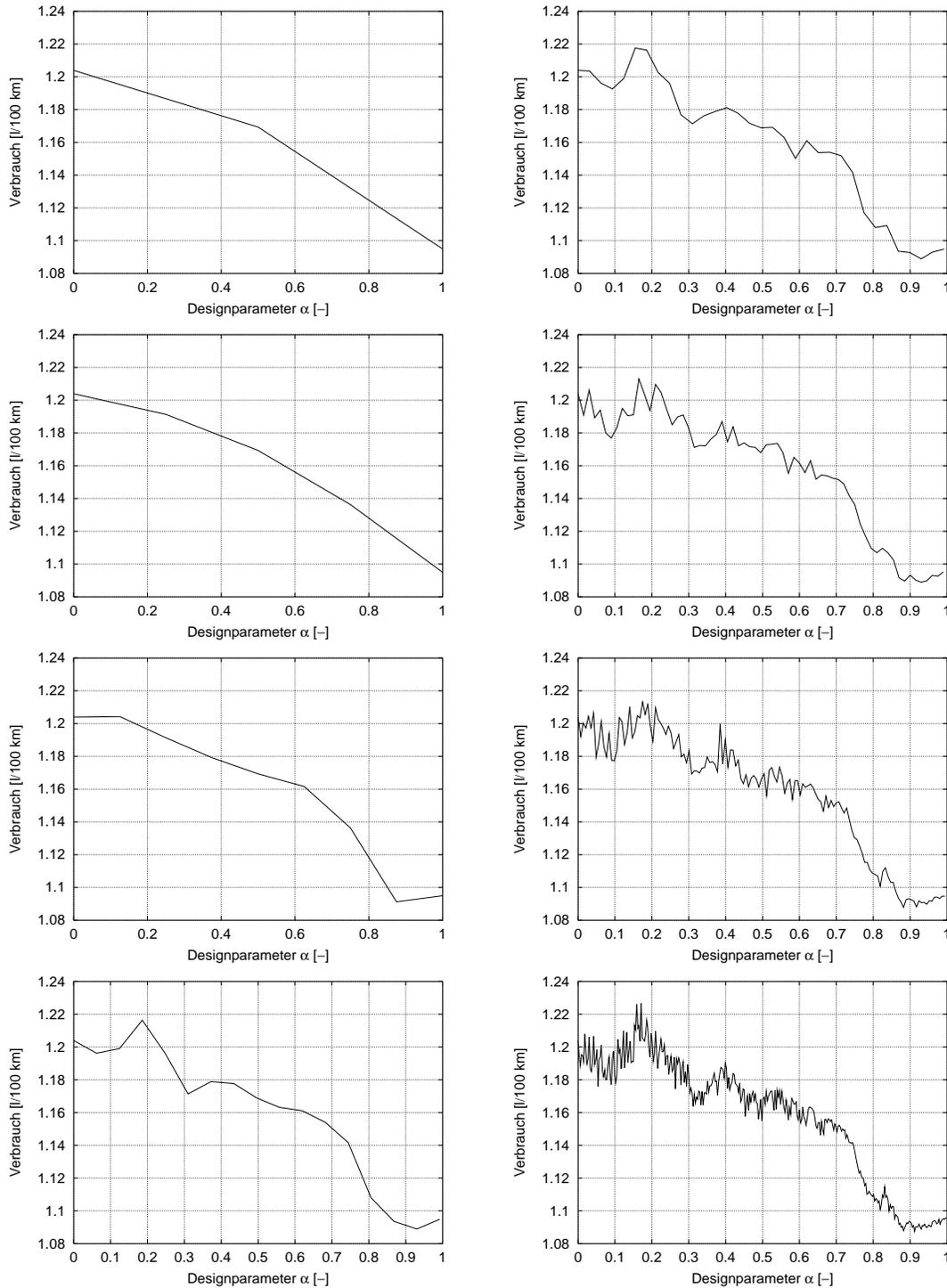
**Abb. 4.4:** Sensitivitätsuntersuchungen mit den Schrittweiten  $h = \frac{1}{n}$ ,  $n = 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ . Die Berechnung erfolgte mit IFAHRDY anhand des US-Highway-Zyklus.



**Abb. 4.5:** Sensitivitätsuntersuchungen mit den Schrittweiten  $h = \frac{1}{n}$ ,  $n = 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ . Die Berechnung erfolgte mit IFAHRDY anhand des ECE-Zyklus.



**Abb. 4.6:** Sensitivitätsuntersuchungen mit den Schrittweiten  $h = \frac{1}{n}$ ,  $n = 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ . Die Berechnung erfolgte mit IFAHRDY anhand des FTP 75.



**Abb. 4.7:** Sensitivitätsuntersuchungen mit den Schrittweiten  $h = \frac{1}{n}$ ,  $n = 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ . Die Berechnungen erfolgten mit IFAHRDY anhand des JAPAN-Zyklus.

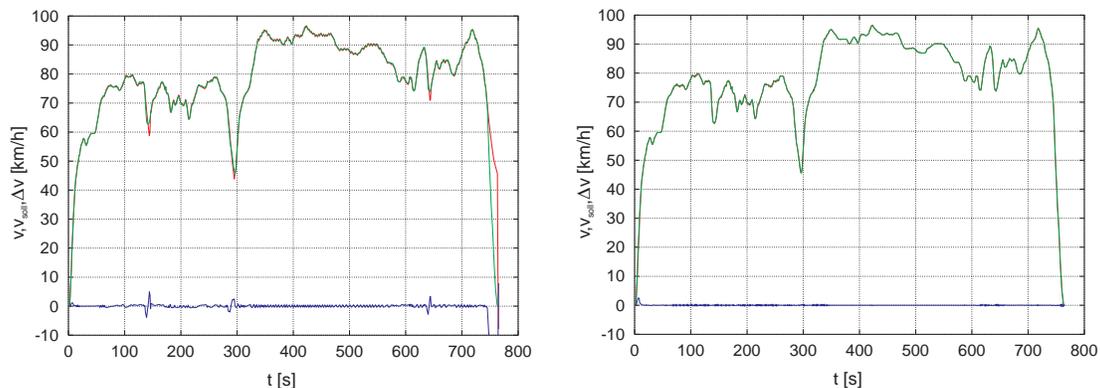
## 4.3 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden einige Ergebnisse zu den in den Abschnitten 4.1.1–4.1.5 vorgestellten Optimierungsaufgaben besprochen. Die Parameter der im Anhang A.2 vorgestellten Schlupfregelung wurden ebenfalls mit dem hier implementiertem Optimierungskonzept berechnet. Ziel ist die minimale Regelabweichung. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen A.8 und A.9 auf den Seiten 120 und 121 dargestellt.

Zur Verbesserung der Fahrleistung im 5. Gang müssen zusätzliche Nebenbedingungen formuliert werden. Die Ergebnisse sind als Datenblätter in den Tabellen 4.2 und 4.1 übersichtlich dargestellt.

### 4.3.1 Auslegung des Geschwindigkeitsreglers beim LABORAUTO

Das entwickelte Einfachschießverfahren (s. Anhang B) wurde zunächst anhand des Laborautos [4, 6, 19, 101] getestet. Die Freiheitsgrade für die Optimierung sind die Reglerparameter eines erweiterten klassischen PI-Reglers mit Abschaltung des I-Gliedes. Um den Geschwindigkeitszyklus genau fahren zu können, wurde zusätzlich eine heuristische Bremsstrategie entwickelt und implementiert. Die Abbildungen Abb. 4.8 zei-



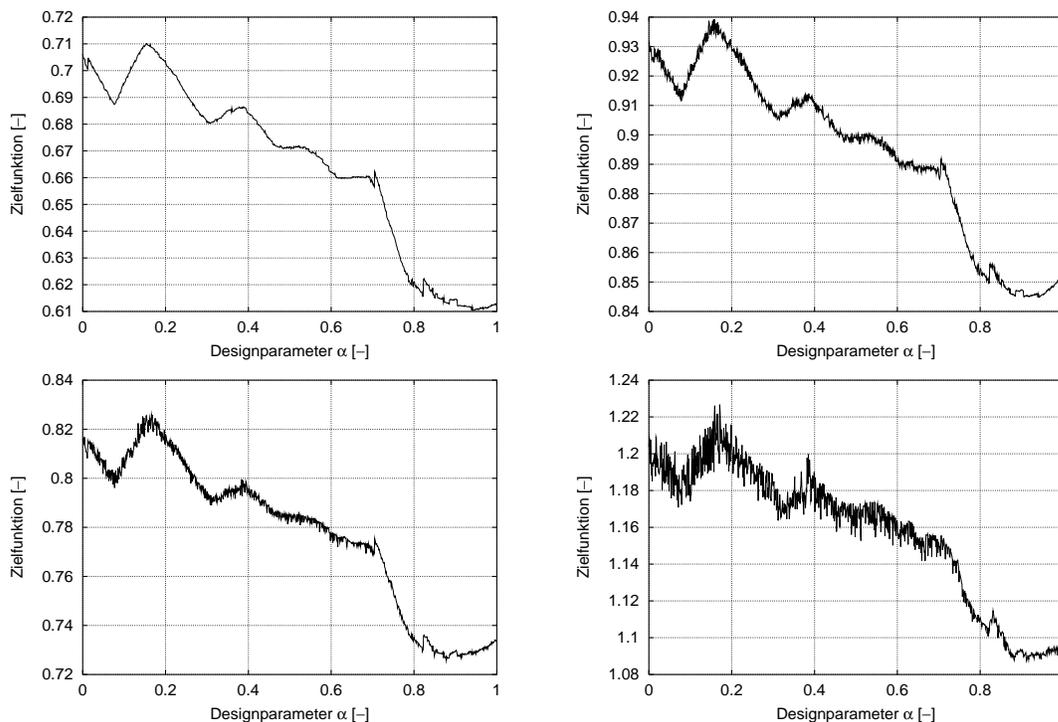
**Abb. 4.8:** Laborfahrzeug als dynamisches Modell bei der Optimierung. Das Gesamtfahrzeugmodell von Pankiewicz wurde durch eine neue Bremsstrategie erweitert (links). Die Parameter des PI-Reglers mit abschaltbarem I-Glied wurden optimiert. Die besten Ergebnisse wurden mit dem Verbrauch pro 100 km als Gütefunktion erzielt. Aufgrund des Wechselspiels zwischen Verbrauch und technischem Fahrerregler muß die Regelabweichung als Nebenbedingung nicht eingeführt werden.

gen links das Ergebnis einer Simulation der Ausgangskonfiguration und rechts das um die neue Bremsstrategie erweiterte Modell, nachdem die Reglerparameter mit der Gütefunktion (4.2) optimiert worden sind. Das Bremsmoment wird so eingestellt, daß die starke Verzögerung am Ende des Zyklus nun eingehalten werden kann. Des weiteren wird die Sollgeschwindigkeit insgesamt exakter eingehalten. Die Zielfunktion (4.2) lieferte bei der Optimierung im Vergleich zu (4.1) die besten Ergebnisse.

### 4.3.2 Optimierung von Verbrauch und Fahrleistung mit IFAHRDY

Die Parameter des technischen PID-Reglers, der im speziellen Längsdynamikmodell (IFAHRDY) zur Berechnung des Verbrauchs die gegebene Sollgeschwindigkeit einstellt, wurden ebenfalls so bestimmt, daß der Verbrauch pro 100 km minimal wird. Im zweiten Schritt erfolgte eine Kennlinienoptimierung. Es wurden die Wandlerkennlinien systematisch variiert. Als Ausgangskonfiguration dient ein *weicher* Wandler, ein Wandler mit niedrigem Pumpenaufnahmement. Das Resultat der Optimierung des Übertragungsverhaltens des Wandlers durch gezielte Variation der Kennlinien bekräftigt das aus der Erfahrung gewonnene Ergebnis: Ein *harter* Wandler reduziert den Kraftstoffverbrauch, während ein *weicher* Wandler beim Beschleunigungsvorgang die notwendige Fahrleistung liefert. Aus den absoluten Werten des Verbrauchs ist festzustellen, das der Einfluß des Wandlers nur gering ist, wenn die restliche Konfiguration des Fahrzeugs unverändert bleibt. Daher wurde im nächsten Schritt zusätzlich die Übersetzung des Hinterachsgetriebes optimiert. Der Verbrauch konnte um 4.58 % reduziert werden, wie man an der folgenden Tabelle erkennt:

$\alpha$	$i_{AG}^h$	$F$ [ l/100 km]	%	Verbesserung
1.00000	2.93	7.21	100.00	—
0.00000	2.93	7.18	99.58	0.42
0.61998	2.93	7.17	99.45	0.55
0.61998	2.53	6.88	95.42	4.58



**Abb. 4.9:** Darstellungen der gewichteten Zielfunktionen. Der Anteil des Verbrauchs ist anhand des US-Highway-Zyklus (links oben) und der Federal Test Procedure (rechts oben) berechnet worden. Den unten dargestellten Zielfunktionen liegen der ECE-Zyklus (links) und der 10•15-Mode (rechts) zur Bewertung des Verbrauchs zugrunde.

Es stellt sich nun folgende Frage: Wie verhalten sich Verbrauch und Fahrleistung bei der simultanen Optimierung von Wandler und Getriebeübersetzungen? Können Getriebeübersetzungen gefunden werden, so daß der Verbrauch noch weiter gesenkt werden kann? Gibt es eine Konfiguration bei der das Fahrzeug sparsamer und gleichzeitig agiler ist? Wie man anhand der Daten in den Tabellen 4.1 – 4.4 sieht, gibt es solche Auslegungen. Um die Resultate mit Hilfe mathematischer Optimierung zu erzielen, müssen aber noch weitere Nebenbedingungen zu formulieren.

**Tab. 4.1:** Datenblatt der Simulation zur Optimierung mit Highway-Zyklus. Die optimierten Wandlerkennlinien entsprechen denjenigen eines existierenden Wandlers.

Bezeichnung		vorher	nachher	Verbesserung
Motorbauart		V8		
Hubraum	[cm <sup>3</sup> ]	4398		
Leergewicht	[kg]	1840		
Radstand	[mm]	2930		
Bereifung		235/60 R16 W		
Kraftübertragung				
Hinterradantrieb		2.93	2.97	
Fünfganggetriebe		3.571/2.200/	4.285/2.508/	
Automatik		1.505/1/0.804	1.520/1/0.757	
Wandler		W260S300	W260S247	
Fahrleistung				
0 – 100 km/h	[s]	6.78	6.16	9.16 %
400 m steh. Start		14.93	14.49	2.97 %
Elastizität (5. Gang)	[s]	17.60	16.45	6.46 %
Höchstgeschwindigkeit	[km/h]	250	250	
Verbrauch	[l/100 km]			
US-Highway		7.18	7.07	1.49 %
ECE (gesamt)		9.52	9.95	-4.47 %
FTP 75		12.05	12.32	-2.31 %
10•15-Mode		17.61	20.83	-18.25 %
Verbesserung der gewichteten Zielfunktion 12 %.				
Nebenbedingungen sind zu 99.9 % erfüllt.				

Verwendet man den US-Highway-Zyklus zur Berechnung des Verbrauchs, dann erkennt man anhand der Werte in obiger Tabelle, daß der Einfluß des Wandlers auf die Zielfunktion im Vergleich zum Hinterachsgetriebe relativ gering ist. Dies hat folgenden Grund: Der Wandler ist bei diesem Geschwindigkeitsprofil immer überbrückt, da die Kupplung (WÜK) im geregelten Zustand arbeitet. Dieser Umstand kann vermieden werden, indem man den ECE-Stadtzyklus, der sich aus mehreren Anfahrphasen zusammensetzt, zur Berechnung des Verbrauch heranzieht (s. Tab. 4.2). Zusätzlich werden Kriterien, nach denen die Fahrleistung des Fahrzeugs bewertet wird, in der Zielfunktion berücksichtigt: Es sind die Beschleunigung vom Stand auf 100 km/h, die

ersten 400 m mit stehendem Start und die gefahrene Strecke nach 4 s. Alle drei Kriterien können nach einer Simulation der Beschleunigung auf die Maximalgeschwindigkeit unter Vollast ausgewertet werden. Obwohl sie korrelieren, gehen sie, mit verschiedenen Gewichtungsfaktoren versehen, in die Gütefunktion ein. Zur Auswertung der Elastizität, der Beschleunigung 80 – 120 km/h, ist ein eigener Simulationslauf notwendig, bei dem das virtuelle Fahrzeug aus dem Stand auf 80 km/h und nach 10 s auf 120 km/h beschleunigt wird.

**Tab. 4.2:** Datenblatt der Simulation zur Optimierung mit ECE-Zyklus. Die optimierten Wandlerkennlinien sind ideale Kennlinien. Die Bezeichnung des Wandlers ist daher in Klammern gesetzt.

Bezeichnung		vorher	nachher	Verbesserung
Motorbauart		V8		
Hubraum	[cm <sup>3</sup> ]	4398		
Leergewicht	[kg]	1840		
Radstand	[mm]	2930		
Bereifung		235/60 R16 W		
Kraftübertragung				
Hinterradantrieb		2.93	2.90	
Fünfganggetriebe		3.571/2.200/	4.285/2.257/	
Automatik		1.505/1/0.804	1.411/1/0.777	
Wandler		W260S300	(W260S288)	
Fahrleistung				
0 – 100 km/h	[s]	6.78	6.33	6.68 %
400 m steh. Start		14.93	14.64	1.98 %
Elastizität (5. Gang)	[s]	17.60	17.83	1.29 %
Höchstgeschwindigkeit	[km/h]	250	250	
Verbrauch	[l/100 km]			
US-Highway		7.18	7.04	1.95 %
ECE (gesamt)		9.52	9.46	0.70 %
FTP 75		12.05	11.80	2.07 %
10•15-Mode		17.61	20.09	-14.06 %
Verbesserung der gewichteten Zielfunktion 8.9 %.				
Nebenbedingungen sind zu 99.9 % erfüllt.				

Durch Variation der Getriebeübersetzungen können Fahrleistung und Verbrauch noch erheblich verbessert werden. Deshalb werden die Gänge 1, 2, 3 und 5 als Designparameter in der Optimierung freigegeben. Der 4. Gang entspricht der „Direkten“ und seine Übersetzung  $i_{G4} = 1$  bleibt unverändert. Die Boxbedingungen an die Parameter sind so gewählt, daß die Ordnung der Gänge stets erhalten bleibt. Die Ergebnisse der Berechnungen haben gezeigt, daß der 5. Gang als Schongang zu stark untersetzt wird (vgl. Tab. 4.1). Die Höchstgeschwindigkeit von ca. 260 km/h wird im 4. Gang erreicht und geht im 5. Gang auf unter 245 km/h zurück. Der günstigere Verbrauch bei

**Tab. 4.3:** Datenblatt der Simulation zur Optimierung mit FTP-Zyklus. Die optimierten Wandlerkennlinien sind ideale Kennlinien. Die Bezeichnung des Wandlers ist daher in Klammern gesetzt.

Bezeichnung		vorher	nachher	Verbesserung
Motorbauart		V8		
Hubraum	[cm <sup>3</sup> ]	4398		
Leergewicht	[kg]	1840		
Radstand	[mm]	2930		
Bereifung		235/60 R16 W		
Kraftübertragung				
Hinterradantrieb		2.93	2.68	
Fünfganggetriebe		3.571/2.200/	4.285/2.307/	
Automatik		1.505/1/0.804	1.392/1/0.817	
Wandler		W260S300	(W260S108)	
Fahrleistung				
0 – 100 km/h	[s]	6.78	6.27	7.58 %
400 m steh. Start		14.93	14.54	2.61 %
Elastizität (5. Gang)	[s]	17.60	17.89	1.63 %
Höchstgeschwindigkeit	[km/h]	250	250	
Verbrauch	[l/100 km]			
US-Highway		7.18	6.99	2.60 %
ECE (gesamt)		9.52	9.44	0.82 %
FTP 75		12.05	11.73	2.64 %
10•15-Mode		17.61	18.96	-7.62 %
Verbesserung der gewichteten Zielfunktion 17.3 %.				
Nebenbedingungen sind zu 99.9 % erfüllt.				

hohen Geschwindigkeiten wird auf Kosten der Fahrleistung erzielt. Um nun auf die Fahrleistung im 5. Gang in der mathematischen Optimierung gezielt Einfluß nehmen zu können, wird die zurückgelegte Strecke maximiert

$$\max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F_6(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} s(t_f) \quad (4.9)$$

und die Nebenbedingung

$$v(t_f) = v_{\max} \quad (= 260 \text{ km/h}) \quad (4.10)$$

hinzugenommen. Sie geht als Strafterm

$$F_s = c_s \left( 1 - e^{-\left\{ \ln \left[ \left( \frac{v(t_f)}{v_{\max}} \right)^{d_s} \right] \right\}^2} \right) \quad (4.11)$$

mit den zwei Parametern  $c_s$  und  $d_s$  in die Zielfunktion ein. Die konvexe Straffunktion ist folgendermaßen gewählt: Ist die Nebenbedingung erfüllt, dann liefert sie keinen Beitrag in der Zielfunktion. Abweichungen der Form  $v(t_f) < v_{\max}$  werden stärker bestraft als Überschreitungen der vorgegebenen Höchstgeschwindigkeit im Falle  $v(t_f) > v_{\max}$ . Die Singularität des Logarithmus bei  $v(t_f) = 0$  wird nie angenommen, da am Ende der Beschleunigung die Fahrzeuggeschwindigkeit echt positiv ist.

**Tab. 4.4:** Datenblatt der Simulation zur Optimierung mit Japan-Zyklus. Die optimierten Wandlernennlinien sind ideale Kennlinien. Die Bezeichnung des Wandlers ist daher in Klammern gesetzt.

Bezeichnung		vorher	nachher	Verbesserung
Motorbauart		V8		
Hubraum	[cm <sup>3</sup> ]	4398		
Leergewicht	[kg]	1840		
Radstand	[mm]	2930		
Bereifung		235/60 R16 W		
Kraftübertragung				
Hinterradantrieb		2.93	1.65	
Fünfganggetriebe		3.571/2.200/	3.758/2.345/	
Automatik		1.505/1/0.804	1.464/1/0.822	
Wandler		W260S300	(W260S102)	
Fahrleistung				
0 – 100 km/h	[s]	6.78	6.55	3.46 %
400 m steh. Start		14.93	14.88	0.34 %
Elastizität (5. Gang)	[s]	17.60	14.73	16.32 %
Höchstgeschwindigkeit	[km/h]	250	250	
Verbrauch	[l/100 km]			
US-Highway		7.18	8.30	-15.70 %
ECE (gesamt)		9.52	9.89	-3.83 %
FTP 75		12.05	12.52	-3.97 %
10•15-Mode		17.61	14.32	18.70 %
Verbesserung der gewichteten Zielfunktion 21 %.				
Nebenbedingungen sind zu 99 % erfüllt.				

Ohne den Parameter  $c_s$  liegt der Strafterm immer im Intervall  $[0, 1)$ . Er wird so gewählt, daß der Strafterm stets innerhalb des Einzugsbereichs bleibt, wenn sich die Endgeschwindigkeit durch Variation der Designparameter ändert. Hier konnte der Gewichtungsfaktor  $c_s = 1$  gesetzt werden.

Der frei wählbare Parameter  $d_s$  gibt an, wie rasch der Strafterm bei Verletzungen der Gleichungsnebenbedingung ansteigt. Mit  $d_s$  kann der Bereich, in dem der Strafterm sensitiv auf Änderungen der Endgeschwindigkeit  $v(t_f)$  reagiert, variiert werden. Im vorliegenden Beispiel wurde  $d_s = 10$  gewählt, so daß die Straffunktion bei

200 km/h schon sehr nahe bei 1 liegt. Das bedeutet: Für Werte außerhalb des Bereichs  $190 < v(t_f) < 340$  ändert sich  $f_s$  bei kleinen Variationen von  $v(t_f)$  kaum.

Der Term der zurückgelegten Strecke  $F_6(\mathbf{p})$  wird mit einem sehr kleinen Gewichtungsfaktor versehen, weil die Strecke in Meter gemessen wird. Daher ist er drei Zehnerpotenzen größer als die restlichen Einzelkriterien. Die verwendete Zielfunktion hat nun folgende Gestalt (s. Abb. 4.9):

$$\min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} F(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} \frac{1}{3} \{c_1 F_1(\mathbf{p}) - c_2 F_2(\mathbf{p}) + c_3 F_3(\mathbf{p}) + c_4 F_4(\mathbf{p}) + \quad (4.12)$$

$$c_5 F_5(\mathbf{p}) + c_6 F_6(\mathbf{p}) + F_s(\mathbf{p})\} \quad (4.13)$$

mit den Koeffizienten  $c_1 = 0.139$ ,  $c_2 = -0.024$ ,  $c_3 = 0.067$ ,  
 $c_4 = 0.152$ ,  $c_5 = 0.058$ ,  $c_6 = -0.125 \cdot 10^{-3}$ .

Im vorliegenden Fall wird die Gleichungsnebenbedingung an die Endgeschwindigkeit im 5. Gang auf 99.9 % erfüllt (s. Tab. 4.1). Die Verbesserung von Fahrleistung beträgt 9 % bei gleichzeitiger Reduktion des Verbrauchs, der anhand des US-Highway-Zyklus berechnet wurde, um 1.49 %. Alle anderen Zyklen absolviert das virtuelle Fahrzeug mit der neuen Konfiguration jedoch mit einem etwas höheren Kraftstoffverbrauch.

Im Anhang B.1 auf Seite 127 ist eine Liste der Iterationen, die das Konvergenzverhalten des Impliziten Filtern dokumentiert, angegeben. Im Anschluß an die detaillierte Darstellung des Ergebnisses zur Auswertung des Optimierungslaufes sind auf Seite 129 Rechenzeiten angegeben. Sie sind auf einen 2-Prozessor-Pentium mit 400 MHz zu beziehen.

Eine bessere Abstimmung des Antriebsstrangs in bezug auf den Verbrauch kann mit Hilfe der Optimierung anhand des ECE- oder FTP-Zyklus erreicht werden (s. Tab. 4.2 und 4.3). Das Wechselspiel zwischen Motor und Automatikgetriebe mit Trilokwandler und geregelter Überbrückungskupplung kommt hier am besten zur Geltung. Bei drei von vier Zyklen verbraucht das optimierte Fahrzeug zwischen 0.7 % und 2.64 % weniger Kraftstoff als dasselbe Fahrzeug mit der Ausgangskonfiguration. Eine Ausnahme stellt der japanische Stadtzyklus dar. Hier ist nur dann eine Verbesserung möglich, wenn er bei der Optimierung als Grundlage der Berechnung des Verbrauchs dient. Dann fällt der Gewinn mit 18,7 % — das entspricht 3 l — deutlich höher aus (s. Tab. 4.4). Die Konfiguration wirkt sich bei allen anderen Zyklen vom Verbrauch her jedoch ungünstig aus. Daher ist der japanische Stadtzyklus zur Berechnung der optimalen Auslegung des Antriebsstrangs nicht geeignet. Im weiteren sind nur die Tabellen 4.2 und 4.3 von Interesse, da nur hier der Verbrauch unabhängig vom Zyklus verbessert werden kann. Betrachtet man in den relevanten Tabellen die Daten zur Fahrleistung, so ist in allen Fällen eine Verbesserung zu sehen. Gemessen an der Beschleunigung vom Stand auf 100 km liegen die neuen Werte um 6.68 % bis 7.58 % unter der Ausgangssituation vor der Optimierung.

Anhand der Daten des optimierten Wandler ist anhand der Tabellen 4.2 und 4.3 deutlich zu erkennen, daß bei der Auslegung mit dem ECE-Zyklus die Änderung der Wandlerkennlinien kleiner ausfallen als bei der Optimierung mit dem FTP-Zyklus. Analoges gilt auch für das Hinterachsgetriebe. Die Übersetzungen des Automatikgetriebes fällt je nach Gang unterschiedlich aus. Lediglich die Übersetzung des 1. Gangs fällt immer gleich aus. Für kraftvolles Anfahren ist eine möglichst hohe Übersetzung notwendig.

### 4.3.3 Parameteridentifikation mit SIMPACK

Da dieses Beispiel — eine Parameteridentifikation eines Schwingungsmodells vom Antriebsstrang eines Kraftfahrzeuges mit Automatikgetriebe — als Machbarkeitsstudie zum Test der allgemeinen Schnittstelle von OPTIMA durchgeführt wurde, werden hier keine konkreten Ergebnisse präsentiert. Es wurde aber eine Vorgehensweise zur Bestimmung der optimalen Parameter mit Hilfe von OPTIMA erarbeitet. Die Aufgabenstellung lautet: man bestimme die optimalen Parameter des Schwingungsmodells mit  $\pm 25$  bis  $\pm 50$  % gestörten Anfangswerten.

Der Versuch, alle 30 Parameter nach einer Störung von  $\pm 25$  bis  $\pm 50$  % in einem einzigen Optimierungslauf zu bestimmen, scheiterte. Der Konvergenzbereich war bei so vielen Parametern mit großem Zulässigkeitsbereich sehr klein. Daher wurden die Parameter erst in einer Bandbreite von  $\pm 5$  % um den gestörten Startwert variiert. Am Ende des Optimierungslauf waren einige Boxbeschränkungen aktiv. Dies sollte nicht sein, weshalb eine weitere Rechnung mit OPTIMA erfolgte. Die Ergebnisse aus dem ersten Lauf dienten als neue Startwerte und der Parameterbereich wurde an der aktiven Bedingung um 5 % vergrößert. Auf diese Weise konnten durch wiederholte OPTIMA-Läufe die von Hand bestimmten Ausgangswerte der gesuchten Parameter automatisch reproduziert werden.

# Kapitel 5

## Zusammenfassung

Zur Reduktion des Verbrauchs und zur Verbesserung der Fahrleistung werden in der Automobilindustrie differentialgleichungsbasierte Simulationsmodelle zur Untersuchung verschiedener Entwurfsvarianten des Antriebsstrangs eingesetzt. Da in der Vergangenheit die Anwendung mathematischer, gradientenbasierter Optimierungsverfahren für diese Problemklasse häufig scheiterte bzw. unbefriedigende Ergebnisse lieferte, werden derzeit in der Automobilindustrie bevorzugt robuste aber langsame, heuristische Suchverfahren zur systematischen Optimierung von Entwurfsparametern eingesetzt.

In dieser Arbeit werden die Ursachen dieses Scheiterns erläutert, die in der Nichtdifferenzierbarkeit der Zielfunktionen sowie der potentiellen Existenz vieler lokaler Minima liegen. Die Nichtdifferenzierbarkeit der Zielfunktion ist bedingt durch Implementierungsdetails (Fallunterscheidungen, linear interpolierte tabellarische Daten, konstante Integrationsschrittweiten etc.) der über Jahre hinweg gewachsenen Simulationsmodelle und kann als Überlagerung einer glatten Grundfunktion mit einer hochfrequenten nichtdifferenzierbaren Störungsfunktion mit niedriger Amplitude interpretiert werden. Die Anwendung eines projizierten Gradientenverfahrens mit implizitem Filtern ermöglicht es nun, diesen Schwierigkeiten erfolgreich zu begegnen.

Bevor jedoch eine Optimierung überhaupt durchgeführt werden kann, ist die mathematische Modellierung der meist nur verbal beschriebenen Optimierungsprobleme beim Antriebsstrang, d. h. die Modellierung von Zielfunktion, Freiheitsgraden und Nebenbedingungen, notwendig. Ausgehend von der Untersuchung der Grundlagen differentialgleichungsbasierter Simulationsmodelle des Antriebsstrangs werden verschiedene Gütekriterien zur Bewertung von Verbrauch und Fahrleistung vorgestellt. Die Zielfunktion ergibt sich als gewichtete Summe verschiedener Teilkriterien.

Durch Optimierung zu berechnende Freiheitsgrade bzw. Variablen sind einerseits reelle Parameter wie Getriebeübersetzungen andererseits Kennlinien oder Kennfelder, die das funktionale Verhalten eines Bauteils wie des Wandlers darstellen, das im Detail von Zulieferfirmen nach Funktionalitätsangaben konstruiert wird. Für den Automobilhersteller ist daher nur die Funktionalität der Kennlinien und Kennfelder von Interesse. Die Problemstellung optimaler Kennlinien führt auf Variations- oder Opti-

malsteuerungsprobleme, deren Lösungen jedoch starke Einschränkungen an die charakteristische Form, Funktionalität und Realisierbarkeit erfüllen müssen. Daher werden effiziente Parametrisierungen zulässiger Kennlinien mit wenigen Freiheitsgraden untersucht und entwickelt. Dazu werden Parametrisierungen von Kennlinien nach der Bogenlänge, Einbettungen in zweidimensionale Mannigfaltigkeiten und ein neuer Algorithmus zur schnellen Indexbestimmung vorgestellt. In der numerischen Optimalsteuerung entspricht dies einem direkten Einfachschießverfahren mit speziellen Ansatzfunktionen.

All diese Überlegungen wurden in einem Gesamtkonzept zur robusten Optimierung differentialgleichungsbasierter Antriebsstrangmodelle implementiert, das die Optimierung unter direkter Verwendung der in der Automobilindustrie eingesetzten Simulationsprogramme ermöglicht.

Die Methodik konnte auf mehrere Problemstellungen erstmalig erfolgreich angewendet werden:

- Kennlinienoptimierung für einen Drehmomentenwandler und Parameteroptimierung der Übersetzung eines Stufenautomatik- und eines Hinterachsgetriebes anhand eines Längsdynamikmodells des Antriebsstrangs (Dennin [37]),
- Optimierung der Parameter des Fahrgeschwindigkeitsreglers eines allgemeinen dreidimensionalen Gesamtfahrzeugmodells (Pankiewicz [4, 101]) beschrieben durch 70 nichtlineare Differentialgleichungen,
- Optimierung der Parameter des Fahrgeschwindigkeitsreglers eines zur Verbrauchsberechnung eingesetzten Längsdynamikmodells (Dennin [37]),
- Berechnung optimaler Parameter des Schlupfreglers für ein Schienenfahrzeug (Tscharnuter [138])
- Parameteridentifizierung eines vereinfachten Antriebsstrangmodells eines allgemeinen Mehrkörpersimulationsprogramms ([122]) beschrieben durch 18 linearisierte Differentialgleichungen. Dabei war zur Auswertung der Zielfunktion eine Frequenzganganalyse des dynamischen Modells erforderlich.

Zur optimalen Auslegung des Antriebsstrangs wurden erstmals die Wandlerkennlinien systematisch variiert und einer mathematischen Optimierung unterzogen. Bei dem Versuch den Verbrauch eines Fahrzeugs anhand des US-Highway-Zyklus durch Variation der Wandlerkennlinien zu verbessern, zeigte sich, daß der Wandler zu einem sehr hohen Anteil überbrückt ist und somit keinen wesentlichen Einfluß auf den Verbrauch hat. Daher wurde auch der ECE-Zyklus als Geschwindigkeitsprofil zur verbrauchsoptimalen Auslegung verwendet. Der Wandler bietet jedoch insbesondere in der Anfahrphase durch die Momentenüberhöhung große Vorteile gegenüber der Reibkupplung. Um in der Optimierung dieser Eigenschaft des Wandler gerecht zu werden, wurden gemischte Zielfunktionen, die Fahrleistung und Verbrauch bewerten, verwendet. Durch

zusätzliche Optimierung der Getriebe- und Achsübersetzungen konnten weitere Verbesserungen erzielt werden. So konnten Auslegungen berechnet werden, für die sowohl Fahrleistung als auch Verbrauch erheblich verbessert werden.

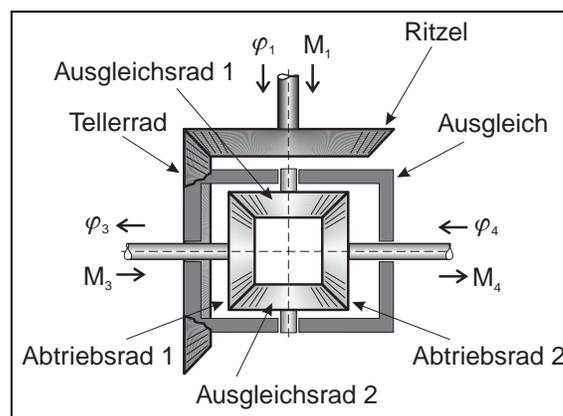
# Anhang A

## Beispiele

### A.1 Achsgetriebe

Bei Kraftfahrzeugen werden Achsgetriebe eingesetzt, die folgende Aufgaben haben: Zum einen sollen sie Drehzahlunterschiede, die in Kurvenfahrten zwangsläufig auftreten, ausgleichen, zum anderen stellen sie zwei zusätzliche Möglichkeiten für Drehzahlübersetzungen zur Verfügung. Denn zwischen Ritzel und Tellerrad bzw. Abtriebs- und Ausgleichsrad bestehen die festen Drehzahlübersetzungen  $i_1$  bzw.  $i_2$ . Das Modell eines Achsgetriebes setzt sich aus 6 Massen zusammen (s. Tab. A.1), deren topologische Anordnung in Abb. A.1 graphisch dargestellt ist. Des weiteren sind die wesentlichen Drehwinkel und Momente eingezeichnet. Am Ritzel, dessen Lage mit dem Drehwinkel  $\varphi_1$  bezeichnet wird, liegt das antreibende Moment  $M_1$  an und an den Abtriebsrädern, deren dynamisches Verhalten von Interesse ist, die Lastmomente  $M_2$  und  $M_3$ .

Das mechanische System hat zwei Freiheitsgrade: die Drehwinkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der beiden Abtriebsräder. Es ist daher zweckmäßig sie als verallgemeinerte Koordinaten



**Abb. A.1:** Schematische Darstellung eines Achsgetriebes.

zu verwenden und alle anderen Drehwinkel unter der Berücksichtigung der Übersetzungsverhältnisse  $i_1$  und  $i_2$  durch sie darzustellen:

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi_3 & q_2 &= \varphi_4 & q_3 &= \varphi_2 = \frac{1}{2} (q_1 + q_2), \\ q_4 &= \varphi_1 = i_1 q_3 & q_5 &= \varphi_5 = i_2 (q_1 - q_2) & q_6 &= \varphi_6 = i_2 (q_2 - q_1). \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen erkennt man unmittelbar, daß bei Geradeausfahrten, d.h.  $\varphi_3 = \varphi_4$ , die Ausgleichsräder keine Eigendrehbewegungen durchführen. In diesem Fall drehen sich Tellerrad und die Abtriebsräder gleich schnell, und ihre Drehwinkel sind durch das Übersetzungsverhältnis  $i_1$  gegeben:

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{\varphi_1}{i_1}.$$

Da hier nur Rotationsbewegungen untersucht werden, werden die Körper als Rotationsmassen interpretiert. Somit lautet die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 I_i \dot{\varphi}_i^2 & \text{mit} & & c_1 &= \frac{1}{4} I_1 i_1^2 + \frac{1}{4} I_2 + I_3 + 2 I_5 i_2^2 \\ &= \frac{1}{2} c_1 (\dot{\varphi}_3^2 + \dot{\varphi}_4^2) - c_2 (\dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4) & c_2 &= \frac{1}{4} I_1 i_1^2 + \frac{1}{4} I_2 & - 2 I_5 i_2^2. \end{aligned}$$

Anstelle der Bestimmung der potentiellen Energie  $U$  geht man über zur virtuellen Arbeit  $\delta A$  und berechnet die verallgemeinerten Kräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  aus

$$\delta A = M_1 \delta \varphi_1 - M_3 \delta \varphi_3 - M_4 \delta \varphi_4 = \underbrace{\left( M_1 \frac{i_1}{2} - M_3 \right)}_{Q_1} \delta \varphi_3 + \underbrace{\left( M_1 \frac{i_1}{2} - M_4 \right)}_{Q_2} \delta \varphi_4$$

und die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} (c_1^2 - c_2^2) \ddot{\varphi}_3 &= \frac{1}{2} M_1 i_1 (c_1 - c_2) - M_3 c_1 + M_4 c_2 \\ (c_1^2 - c_2^2) \ddot{\varphi}_4 &= \frac{1}{2} M_1 i_1 (c_1 - c_2) - M_4 c_1 + M_3 c_2. \end{aligned}$$

Zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Minimalkoordinaten  $\varphi_3$  und  $\varphi_4$  beschreiben den Bewegungszustand eines Achsgetriebes vollständig. Im stationären Geradeauslauf ist  $\ddot{\varphi}_3 = \ddot{\varphi}_4 = 0$  und somit  $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_4 = c$  konstant. Anhand der Differentialgleichungen erkennt man mit der Bedingung  $M_3 = M_4$  unmittelbar, daß  $M_3 = M_4 = \frac{1}{2} M_1 i_1$  ist. Im Falle eines plötzlichen Lastwechsels, z. B. einer Momentenverzögerung am Abtriebsrad 1 um  $\Delta M_3$ , ergibt sich eine Beschleunigung dieses Rades und gleichzeitig eine Verzögerung des Abtriebsrades 2

$$(c_1^2 - c_2^2) \Delta \ddot{\varphi}_3 = c_1 \Delta M_3 \quad \text{und} \quad (c_1^2 - c_2^2) \Delta \ddot{\varphi}_4 = -c_2 \Delta M_4.$$

**Tab. A.1:** Drehmassen eines Achsgetriebes.

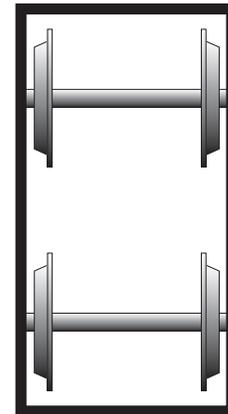
Drehmasse	Trägheit	Winkel
Ritzel	$I_1$	$\varphi_1$
Tellerrad+Ausgleich	$I_2$	$\varphi_2$
Abtriebsrad 1	$I_3$	$\varphi_3$
Abtriebsrad 2	$I_4$	$\varphi_4$
Ausgleichsrad 1	$I_5$	$\varphi_5$
Ausgleichsrad 2	$I_6$	$\varphi_6$

## A.2 Ebenes Antriebsmodell einer Lokomotive

Bei Lokomotiven, insbesondere schweren Güterzuglokomotiven, ist es sehr wichtig, die Zugkraft so einzustellen, daß möglichst viel Kraft vom Rad auf die Schiene übertragen wird. Man möchte zum einen große Lasten transportieren, zum anderen darf die Lokomotive bei Steigungen bis zu 30‰ nicht hängen bleiben.

Bei der Simulation des mechanischen Modells zeigt sich, daß z. B. bei extrem trockener Schiene jede Zugkraftvorgabe in die Beschleunigung des Zuges umgesetzt werden kann. Bei extrem nasser Schiene hingegen kann die maximal mögliche Zugkraft nicht übertragen werden. Die Erhöhung der Umlaufgeschwindigkeit der Räder kann dann nicht vollständig in eine Beschleunigung der Lokomotive umgesetzt werden. Damit die Schlupfgeschwindigkeit, d. i. die Differenz zwischen der Umlaufgeschwindigkeit der Räder und der Fahrgeschwindigkeit, nicht zu groß wird, ist eine Regelung des *Luftspaltmomentes* am Läufer der Asynchronmaschine notwendig. Dadurch soll ein *Schleudern* verhindert werden.

Eine weitere Einschränkung ist die stärkere Beanspruchung des Materials bei zu hohem Schlupf, da dabei der Schienenoberkopf abgetragen wird und aufgrund der hohen Temperaturen Risse an den Rädern entstehen. Auftretende Torsionsschwingungen können mit Hilfe eines Standard-Schlupfreglers nicht verhindert werden. Sie entstehen insbesondere dann, wenn das linke und das rechte Rad jeweils unterschiedliche Schienenzustände vorfinden. Es kann beispielsweise passieren, daß ein Rad den Arbeitspunkt im stabilen Bereich der Differenzgeschwindigkeit zwischen Rad und Schiene, das andere jedoch den Arbeitspunkt im instabilen Bereich einstellt. Ziel der Regelung ist es nun, eine Schlupfgeschwindigkeit einzustellen, die im stabilen Bereich nahe dem Kraftschlußmaximum liegt. Bei der Simulation sind daher zufällige Störungen, die in das Modell in Form von unterschiedlichen Schienenzuständen eingehen<sup>1</sup>, von besonderem Interesse.



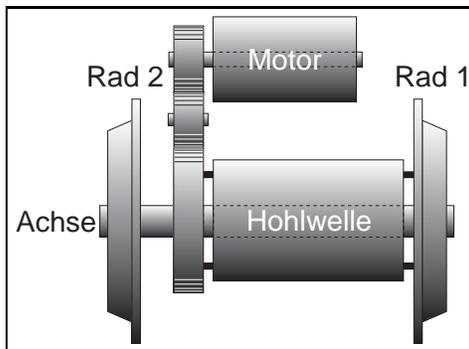
**Abb. A.2:** Schematische Darstellung eines Drehgestells.

Eine Lokomotive mit elektrischem Antrieb steht auf zwei Drehgestellen, zu denen je zwei Achsen gehören (s. Abb. A.2). Jede Achse ist eine Antriebsachse. Es sind also alle Achsen mit einem Motor, einer Asynchronmaschine, versehen. Der Aufbau eines solchen Antriebes ist in der Abb. A.3 schematisch dargestellt. Der Motorblock ist über das Getriebe, das sich aus einem Zwischenrad und einem Großrad zusammensetzt, und der Kardanholzwelle mit dem direkt angetriebenen Rad 1 verbunden. Über die Achse ist das indirekt angetriebene Rad 2 mit dem Rad 1 gekoppelt.

Der Rad-Schiene-Kontakt geht in das Modell nichtlinear in der Form von Kraftschlußbeiwerten ein. Aus praktischen Gründen wird motorseitig gemessen. Einerseits ist dort die Verschmutzung geringer als an den Rädern, andererseits spielt die Realisier-

<sup>1</sup> z. B. Tunnelleinfahrt bzw. Tunnelausfahrt bei Regenwetter.

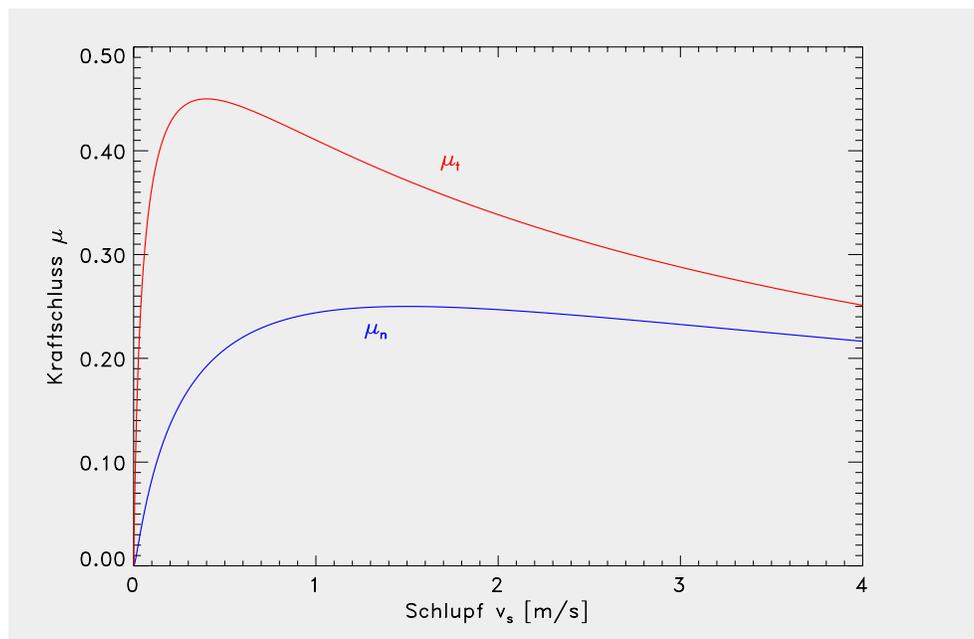
barkeit in der Praxis eine wesentliche Rolle. Ein weiterer Aspekt ist, daß die Steuerung ebenfalls auf der Seite des Motors in Form eines elektromagnetisch erzeugten Drehmomentes, des sogenannten Luftspalmmomentes, am Läufer der Asynchronmaschine in das System eingeht.



**Abb. A.3:** Schematische Darstellung einer Antriebsachse.

Daher erfolgen die Rechnungen bei der Simulation motorseitig. Dies hat zur Folge, daß alle Parameter entsprechend der Getriebeübersetzung reduziert werden müssen. Alle Parameter, in deren Dimension eine Längeneinheit vorkommt, müssen durch die Getriebeübersetzung  $i$  dividiert werden<sup>2</sup>. Physikalisch besteht ein hochgradig nichtlinearer Zusammenhang zwischen dem Kraftschlußbeiwert und der Schlupfgeschwindigkeit. Er ist abhängig von Material und Oberflächenbeschaffenheit des Rades und der Schiene, von der momentanen Temperatur usw. Da diese Abhängigkeit sehr

komplex ist, kann sie nicht in geschlossener Form dargestellt werden. Es können zwar die Kontaktkräfte zwischen Rad und Schiene bei starren Rädern ermittelt wer-



**Abb. A.4:** Kraftschlußkennlinien. Rot: trockene Schiene. Blau: extrem nasse Schiene.

den [110], bei deformierbaren Rädern jedoch ist dies nicht der Fall. Es sind deshalb Rolltheorien entwickelt worden, z. B. die sogenannte *Kalkersche Theorie*, die jedoch

<sup>2</sup> z. B. der Radradius:  $r_{\text{motorseitig}} = r_{\text{radseitig}}/i$ .

nur für kleine Schlupfwerte Gültigkeit haben [75, 76]. Für die Simulation des Antriebes geht man aus diesem Grunde anders vor: Man *mißt* den Kraftschluß zwischen Rad und Schiene und approximiert anschließend die Meßdaten mittels Kennlinien. Die Messung des Kraftschlusses ist sehr schwierig, da die gemessenen Werte erheblich streuen: Einerseits sind die verwendeten Materialien nicht homogen, andererseits tritt durch den erhöhten Schlupf der sogenannte „Putzeffekt“ auf, d. h. Verunreinigungen (Wasser- oder Ölfilme) auf dem Schienenoberkopf verdampfen aufgrund der durch die Reibung zwischen Rad und Schiene erzeugten Wärme praktisch instantan.

Die Kraftschlußkennlinien sind Funktionen, die von der momentanen Achslast und dem vorhandenen Schlupf abhängen, wobei deren Verlauf in erster Linie von der Oberflächenbeschaffenheit bestimmt wird. Zwei Kennlinien, die den typischen Verlauf wiedergeben, sind in Abb. A.4 dargestellt. Die obere Linie  $\mu_t$  beschreibt den Kraftschluß bei trockener Schiene, die untere Kennlinie  $\mu_n$  ist für den Kraftschluß bei extrem nasser Schiene charakteristisch. Der Übergang von trockener zu nasser Schiene ist stetig, so daß zwischen den abgebildeten Kennlinien eine ganze Schar gleichförmiger Kennlinien existiert, die für große Schlupfgeschwindigkeiten zusammenlaufen (s. Abb. A.5). Bei ölverschmierter Schiene ist der Verlauf der Kennlinie noch flacher als bei extrem nasser Schiene, so daß das Maximum, welches bei höheren Schlupfgeschwindigkeiten angenommen wird, wenig ausgeprägt ist. Im Gegensatz dazu liegt bei trockener Schiene oder bei trockener Schiene mit Sand das Maximum bei kleinen Schlupfgeschwindigkeiten und ist sehr gut ausgeprägt. In diesen Fällen fällt die Kennlinie nach dem Kraftschlußmaximum jedoch stärker ab.

Den Bereich der Schlupfgeschwindigkeit nach dem Kraftschlußmaximum bezeichnet man als instabilen Bereich. Hier werden zum einen Torsionsschwingungen angeregt, zum anderen wird in kurzer Zeit nach dem Überschreiten des Kraftschlußmaximums beim unregelmäßigen System praktisch keine Kraft mehr vom Rad auf die Schiene übertragen, d. h. die Beschleunigung der Räder bleibt ohne Auswirkung auf die Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive. Um diese unerwünschte Eigenschaft des mechanischen Systems zu vermeiden, benötigt man eine Schlupfregelung, die ein allzu heftiges Durchdrehen der Räder verhindert, indem sie einen vorgegebenen Schlupfsollwert stationär genau einstellt.

Das mechanische Modell mit dem noch willkürlichen Eingangparameter, dem Motormoment  $M_M$ , wird nun um zwei Gleichungen erweitert. Hinzu kommen die algebraische Gleichung, die die Differenzgeschwindigkeit zwischen der Umlaufgeschwindigkeit des Motors und der Fahrgeschwindigkeit der Lokomotive auf der Seite des direkt angetriebenen Rades beschreibt,

$$v_{sM} = (\omega_M - \omega_T) \cdot \frac{r_{R1}}{i},$$

und eine Gleichung für den Regler, der zunächst als PI-Regler angesetzt wird

$$u = k_P (v_s^{\text{soll}} - v_{sM}) + \int_0^t k_I (v_s^{\text{soll}} - v_{sM}) dt$$

mit der variablen Führungsgröße  $v_s^{\text{soll}}$ , die den Schlupfsollwert darstellt. Die Parameter  $k_P$  und  $k_I$ , die so gewählt werden müssen, daß der Regler den geforderten

Schnelligkeits- und Dämpfungsansprüchen genügt, sind konstant und haben die Dimensionen  $[\text{Nm s}]$  bzw.  $[\text{Nm}]$ . Durch das Einführen der sogenannten Nachstellzeit  $T_n$  kann der Parameter  $k_I$  folgendermaßen angesetzt werden

$$k_I = \frac{k_P}{T_n}.$$

Es wird  $T_n$  der Einfachheit halber so gewählt, daß die dominante Verzögerungszeit der Regelstrecke durch die Nachstellzeit des Reglers kompensiert wird. Dadurch muß nur noch der Proportionalbeiwert  $k_P$  bestimmt werden [43].

Nun werden die Reglerkonstanten  $k_P$  und  $k_I$  durch Systemgrößen entsprechender Dimension ersetzt, damit der Regler stärker an den Zustand des Systems gekoppelt ist. Anstelle dieser Parameter treten dann dimensionslose Parameter  $k_P^*$  und  $k_I^*$ , die optimal bzgl. eines Gütekriteriums gewählt werden müssen.

$$\begin{aligned} k_P &\longrightarrow k_P^* (J_M \omega_M), \\ k_I &\longrightarrow k_I^* (M^{\text{soll}} - u) - k_P^* (J_M \dot{\omega}_M). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für den Regler die Integralgleichung

$$\begin{aligned} u &= k_P^* (J_M \omega_M) (v_s^{\text{soll}} - v_{sM}) \\ &\quad + \int_0^t [k_I^* (M^{\text{soll}} - u) - k_P^* (J_M \dot{\omega}_M)] (v_s^{\text{soll}} - v_{sM}) dt \\ &= k_P^* \left[ (J_M \omega_M) (v_s^{\text{soll}} - v_{sM}) - \int_0^t (J_M \dot{\omega}_M) (v_s^{\text{soll}} - v_{sM}) dt \right] \\ &\quad + k_I^* \int_0^t (M^{\text{soll}} - u) (v_s^{\text{soll}} - v_{sM}) dt \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

und durch einmaliges Ableiten nach der Zeit die Differentialgleichung

$$\dot{u} = k_P^* (J_M \omega_M) (\dot{v}_s^{\text{soll}} - \dot{v}_{sM}) + k_I^* (M^{\text{soll}} - u) (v_s^{\text{soll}} - v_{sM}). \quad (\text{A.2})$$

Das Proportional-Glied des PI-Reglers, dessen Ausgang eine Verstärkung der Regelabweichung darstellt, hängt jetzt vom Drehimpuls ( $J_M \omega_M$ ) des Motors ab. Für sehr kleine Umlaufgeschwindigkeiten  $\omega_M$  ist der Einfluß des P-Gliedes gering, während erst bei größerem  $\omega_M$  das Proportionalglied wirksam wird. Der Parameter des Integralgliedes des PI-Reglers wird durch eine Funktion ersetzt, die vom Drehmoment ( $J_M \dot{\omega}_M$ ) des Motors und von der Abweichung des Reglerausganges vom vorgegebenem Sollmoment abhängt. Durch die Rückkopplung dieser Differenz wird der Regler nichtlinear, so daß direkte Stabilitätsaussagen über das Regelverhalten nicht unmittelbar möglich sind [138].

Für die Simulation wird zunächst eine Methode entwickelt, mit der zum einen jede beliebige Kennlinie zwischen derjenigen für trockene Schienen  $\mu_t$  bzw. nasse Schienen  $\mu_n$  (vgl. Abb. A.4 auf S. 112) approximiert, zum anderen der Schlupfsollwert bestimmt werden kann.

Der Kraftschluß zwischen Rad und Schiene wird mit Hilfe von Kennlinien approximiert, wobei als Modell des Kraftschlusses in geraden Streckenabschnitten die analytische Funktion (R. Schreiber und R. Kögel, ABB Forschungszentrum Heidelberg, private Mitteilung)

$$\mu(v_s) = \mu_{\max} \exp\left(-\left[\ln\left(\frac{v_s}{a}\right)\right]^2 b\right) \quad (\text{A.3})$$

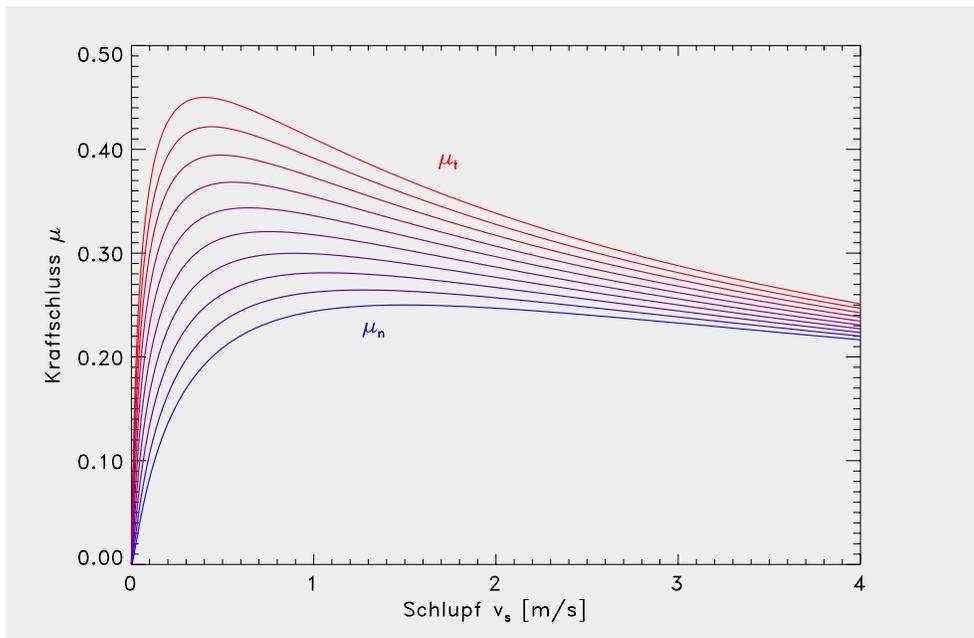
mit den konstanten Parametern  $\mu_{\max}$ ,  $a$  und  $b$  dient. Der Parameter  $\mu_{\max}$  gibt das Maximum des Kraftschlusses an, und der Parameter  $a$  ist jener Wert der Schlupfgeschwindigkeit  $v_s$ , an dem das Kraftschlußmaximum  $\mu_{\max}$  angenommen wird. Der Verlauf der Kennlinie ist durch den Parameter  $b$  charakterisiert.

Für die fehlenden Kraftschlußkennlinien zwischen den extremen Schienenzuständen wird die punktweise konvexe Hülle gebildet, d. h.

$$\mu_a(v_s) = \lambda \mu_n(v_s) + (1 - \lambda) \mu_t(v_s). \quad (\text{A.4})$$

Es liegt also die Kennlinie des Kraftschlusses bei trockener Schiene für  $\lambda = 0$  und bei nasser Schiene für  $\lambda = 1$  vor. Für alle Kennlinien  $\mu_a$  soll jedoch das obige Modell (A.3) gültig sein. Die Parameter  $\mu_{\max}$ ,  $a$  und  $b$  sind daher in Abhängigkeit des Hüllparameters  $\lambda$  zu bestimmen. Dies geschieht auf folgende Weise: Zuerst definiert man die Funktion

$$f(v_s) = \begin{cases} \mu_n'(v_s) + \frac{1-\lambda}{\lambda} \mu_t' & : \quad \lambda > \frac{1}{2}, \\ \mu_t'(v_s) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \mu_n' & : \quad \lambda \leq \frac{1}{2}, \end{cases}$$



**Abb. A.5:** Kraftschlußkennlinien. Rot: trockene Schiene. Blau: extrem nasse Schiene.

wobei  $\mu_t'$  und  $\mu_n'$  die Ableitungen von  $\mu_t$  und  $\mu_n$  nach der Schlupfgeschwindigkeit  $v_s$  sind. Mit dem Bisektionsverfahren berechnet man die Nullstelle dieser Funktion im Intervall  $[a_t, a_n]$ . Der Parameter  $a$  ist damit eindeutig bestimmt, da wegen des Ansatzes (A.4) genau eine Nullstelle in diesem Intervall liegt. Den Parameter  $\mu_{\max}$  erhält man durch Einsetzen in (A.4), weil der Kraftschluß für  $v_s = a$  maximal sein soll. Der noch fehlende Parameter  $b$  ist Nullstelle der Hilfsfunktion

$$h(b) = \mu_a(v_{s_0}) - \mu(b; \mu_{\max}, a, v_{s_0}),$$

mit den schon berechneten Werten für  $\mu_{\max}$  und  $a$ . Für den festen, aber beliebigen Parameter  $v_{s_0}$  ist ein Wert größer  $a_n$  einzusetzen, weil sonst  $b$  nicht für jedes  $a \in [a_t, a_n]$  eindeutig ist. Für ein  $a$ , das in der Nähe von  $v_s$  liegt, geht der Exponent gegen Null, und der Parameter  $b$  kann dann beliebig gewählt werden. Dies hat bei der numerischen Berechnung der Nullstelle von  $h$  mit Hilfe des Newton-Verfahrens

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{b_n + b_t}{2} \\ b_{i+1} &= b_i - \frac{h(b_i)}{h'(b_i)} \\ &= b_i - \left( \frac{\mu_a(v_{s_0})}{\mu(b_i; \mu_{\max}, a, v_{s_0})} - 1 \right) \frac{1}{\left[ \ln\left(\frac{v_{s_0}}{a}\right) \right]^2} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

eine schlechte Konvergenz der Iteration (A.5) zur Folge. Man wählt daher ein  $v_{s_0} > a_n$  (z. B.  $v_{s_0} = 8$ ) und hat nach ungefähr 4 Iterationen den Parameter  $b$  zur Verfügung.

In Abbildung Abb. A.5 sind zwischen der Kennlinie für die trockene Schiene (rot) und derjenigen für die nasse Schiene (blau) einige Kraftschlußkennlinien für äquidistante Hüllenparameter dargestellt.

In [126] wird ein Verfahren vorgestellt, wie der Kraftschluß auf der Basis der Steigung der Kraftschlußkennlinie optimal ausgenutzt werden kann. In diesem Abschnitt wird nun eine Methode zur Schätzung der momentanen Kraftschlußkennlinie vorgestellt.

Der Schlupfollwert kann folgendermaßen gewählt werden: Durch Bestimmung der Beschleunigung der Lokomotive kann man den Kraftschluß unter der Vereinfachung, daß er am linken und rechten Rad gleich groß sei, aus der Gleichung für die Fahrgeschwindigkeit schätzen

$$\bar{\mu}(v_s^{\text{ist}}) \approx \frac{J_T \dot{\omega}_T}{2 k_T}. \quad (\text{A.6})$$

Setzt man nun diesen Schätzwert in die Gleichung (A.4) ein, dann kann man den Hüllenparameter  $\bar{\lambda}$  bestimmen.

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\mu}(v_s^{\text{ist}}) - \mu_t(v_s^{\text{ist}})}{\mu_n(v_s^{\text{ist}}) - \mu_t(v_s^{\text{ist}})}. \quad (\text{A.7})$$

Jetzt können Schätzungen  $\bar{\mu}_{\max}$ ,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  für die Parameter  $\mu_{\max}$ ,  $a$  und  $b$  nach dem oben angegebenen Verfahren ausgerechnet werden. Der Parameter  $a$  kann dann als Schlupfollwert herangezogen werden. Er muß jedoch gegebenenfalls, z. B. bei trockenen

Schienenverhältnissen, korrigiert werden, damit der Regler auch tatsächlich diesen Sollwert einstellen kann.

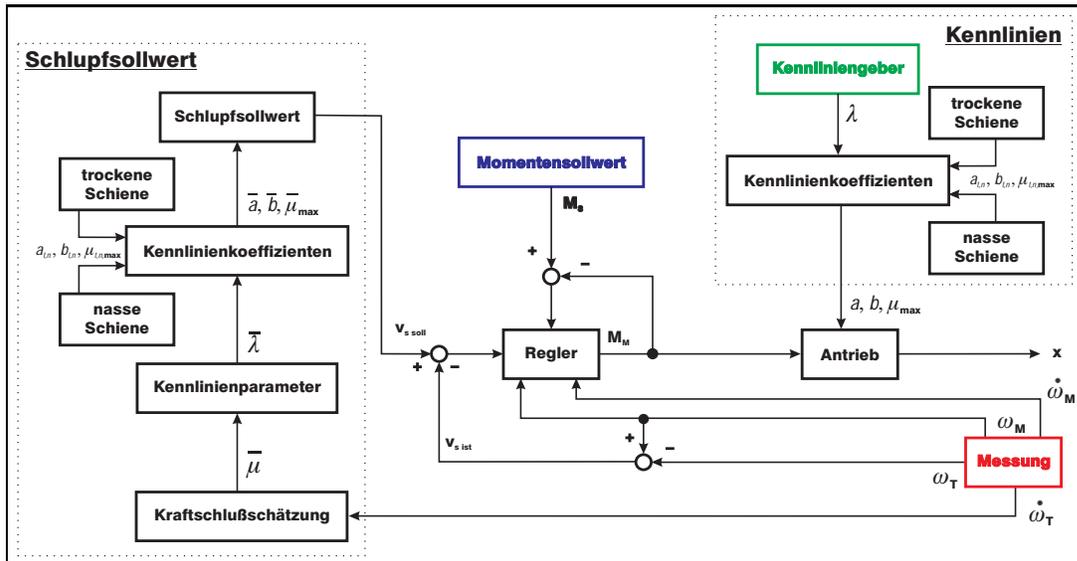


Abb. A.6: Blockschaltbild des Gesamtmodells.

Um den in der Praxis auftretenden Fall jedoch nachbilden zu können, muß das vorliegende mechanische Modell verfeinert werden: Der Parameter  $k_T$  ist in diesem Modell als konstant angenommen, obwohl er Schwankungen in der Achslast unterliegt, die bis zu 20 % betragen können. Die Beschleunigung der Lokomotive  $\dot{\omega}_T$  ist abhängig von der gezogenen Masse. In die Differentialgleichung für die Fahrgeschwindigkeit müssen die von der Lokomotive gezogenen Waggonen in der Form einer entgegenwirkenden Kraft eingehen. Dabei benötigt man die Trägheitsmomente der Wagen und den Kraftschluß zwischen Wagenrad und Schiene, der nach der Rolltheorie von Kalker [75, 76] berechnet werden kann. Ebenso sind Kraftschluß- und Massenänderungen, die durch Bergauf- und Bergabfahrten hervorgerufen werden, zu berücksichtigen.

Unter der ursprünglichen Annahme, daß man die Gesamtmasse des Zuges kennt und die Achslast konstant ist, wird (A.6) einen Wert für den Kraftschluß zwischen Rad und Schiene liefern, der ungefähr dem tatsächlichen Schienenzustand entspricht. Läßt man jedoch eine Streuung in der Achslast zu, so erhält man zwar einen Wert für den Kraftschluß, er hat aber mit dem Istzustand der Schiene unmittelbar nichts zu tun. Ist die Achslast erhöht, dann beschleunigt das System bei gleichem Kraftschluß und konstanter Masse schneller. Das System reagiert in gleicher Weise bei konstanter Achslast und Masse bei entsprechend trockenerem Schienenzustand. Die Kraftschlußschätzung (A.6) liefert daher bei erhöhter Achslast einen Wert für trockenere Schienen und bei verringerter Achslast einen Wert für nasseren Schienenzustand als der Istzustand. Dem entsprechend wird ein Schlupfsollwert vorgegeben, der etwas kleiner bzw. größer ist.

Die Gleichung (A.6) für die Schätzung des Kraftschlusses geht bei Achslast-

schwankungen von 20% über in

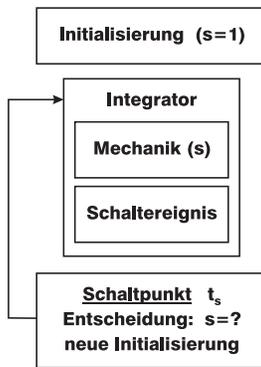
$$\bar{\mu}(v_s^{\text{ist}}) \approx \frac{J_T \dot{\omega}_T}{2 (1 \pm 0.2) k_T}. \quad (\text{A.8})$$

Durch eine einfache Umformung der Gleichung erkennt man sofort, daß die Achslastschwankungen als Abweichungen der Schätzung des Schienenzustandes vom tatsächlichen Schienenzustand interpretiert werden können. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} (1 \pm 0.2) \bar{\mu}(v_s^{\text{ist}}) &= (1 \pm 0.2) \bar{\mu}_{\text{max}} \exp\left(-\left[\ln\left(\frac{v_s}{\bar{a}}\right)\right]^2 \bar{b}\right) \\ &\approx \frac{J_T \dot{\omega}_T}{2 k_T}, \end{aligned}$$

und mit der Definition  $\bar{\mu}^*_{\text{max}} := (1 \pm 0.2) \bar{\mu}_{\text{max}}$  erhält man als Schätzung des Kraftschlusses

$$\bar{\mu}^*(v_s^{\text{ist}}) \approx \frac{J_T \dot{\omega}_T}{2 k_T}. \quad (\text{A.9})$$



**Abb. A.7:** Schematischer Verlauf der numerischen Integration mit Schaltereignissen.

Die Kraftschlußschätzung bei Änderungen in der Achslast fällt in dieser Form wieder mit (A.6) zusammen. Es ist daher bei Achslastschwankungen für die Bestimmung des Schlupfsollwertes die Kraftschlußschätzung nach (A.6) ausreichend. Dies wird durch die Simulation bestätigt (s. Abb. A.8).

Das Gesamtmodell ist als Blockschaltbild in Abb. A.6 veranschaulicht. In die Regelstrecke, d. h. in den Antrieb, gehen die Kraftschlußkennlinien als Störgrößen ein. Die Steuervariable ist der vom Regler reduzierte Momentensollwert, der vom Lokomotivführer vorgegeben wird, so daß der Schlupf einem Sollwert folgt.

Die Führungsgröße  $v_s^{\text{soil}}$  wird mit Hilfe des oben angegebenen Verfahrens aus der Beschleunigung der Lokomotive über die Schätzung des momentanen Kraftschlusses und der dazugehörigen Kennlinie bestimmt. Am Beginn der Simulation wird der Sollwert mit der Schlupfgeschwindigkeit für das Kraftschlußmaximum bei nasser Schiene initialisiert und dann als stückweise konstante Funktion angesetzt. Während der Simulation wird der Sollwert alle 100 ms neu vorgegeben. Die Taktung der Störgrößen liegt bei 10 ms, d. h. nach 10 ms ändert sich der Schienenzustand und somit der Kraftschluß zwischen Rad und Schiene. Für die numerische Integration bedeutet dies, daß an allen Unstetigkeiten der Integrator angehalten und neu initialisiert werden muß (s. Abb. A.7).

Die Integration mit Hilfe eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens erfordert lange Rechenzeiten und bleibt bei manchen Konfigurationen sogar stecken, z. B. bei schnell

eingestelltem Regler. Als Integrationsmethode wird daher ein implizites Mehrschrittverfahren gewählt [65, 67, 106]. Auf einer SUN SPARC 10/54 betragen dann die typischen Rechenzeiten einer Simulation für 25 Sekunden durchweg 1 Minute.

Da der Regler auf der Beschränkung  $M_M = M^{\text{soll}}$  nicht aktiv ist, wird er dort abgeschaltet. Die Schaltpunkte müssen vom Integrator im Rahmen einer gewissen Genauigkeit bestimmt werden. Dazu werden Schaltfunktionen benötigt, die so gewählt sind, daß sie ihre Vorzeichen im Schaltpunkt wechseln. Hat der Integrator ein Schaltereignis lokalisiert, dann bricht er mit einer entsprechenden Meldung im Schaltpunkt ab. Nun wird außerhalb die gewünschte Entscheidung, ob der Regler ein- oder ausgeschaltet wird, getroffen. Der Integrator wird dann entsprechend initialisiert und wieder aufgerufen (s. Abb. A.7) [49].

Die Schaltfunktion  $\theta$  wird so gewählt, daß sie positive Werte annimmt, falls der Regler aktiv ist, und negative Werte, wenn der Regler abgeschaltet ist, d. h. wenn das vom Lokführer vorgegebene Moment ohne Reduktion durch den Schlupfregler auf die Schiene übertragen werden kann. Ein Vorzeichenwechsel in der Funktion  $\theta$  bestimmt somit die Schaltpunkte. Im Anfangspunkt  $t = 0$  ist der Regler ausgeschaltet und die Schaltfunktion wird  $\theta = -1$  gesetzt. Der Regler wird erst dann aktiv, wenn die Funktion

$$\theta = - \left( \dot{M}^{\text{soll}} + \dot{u} \right) \quad (\text{A.10})$$

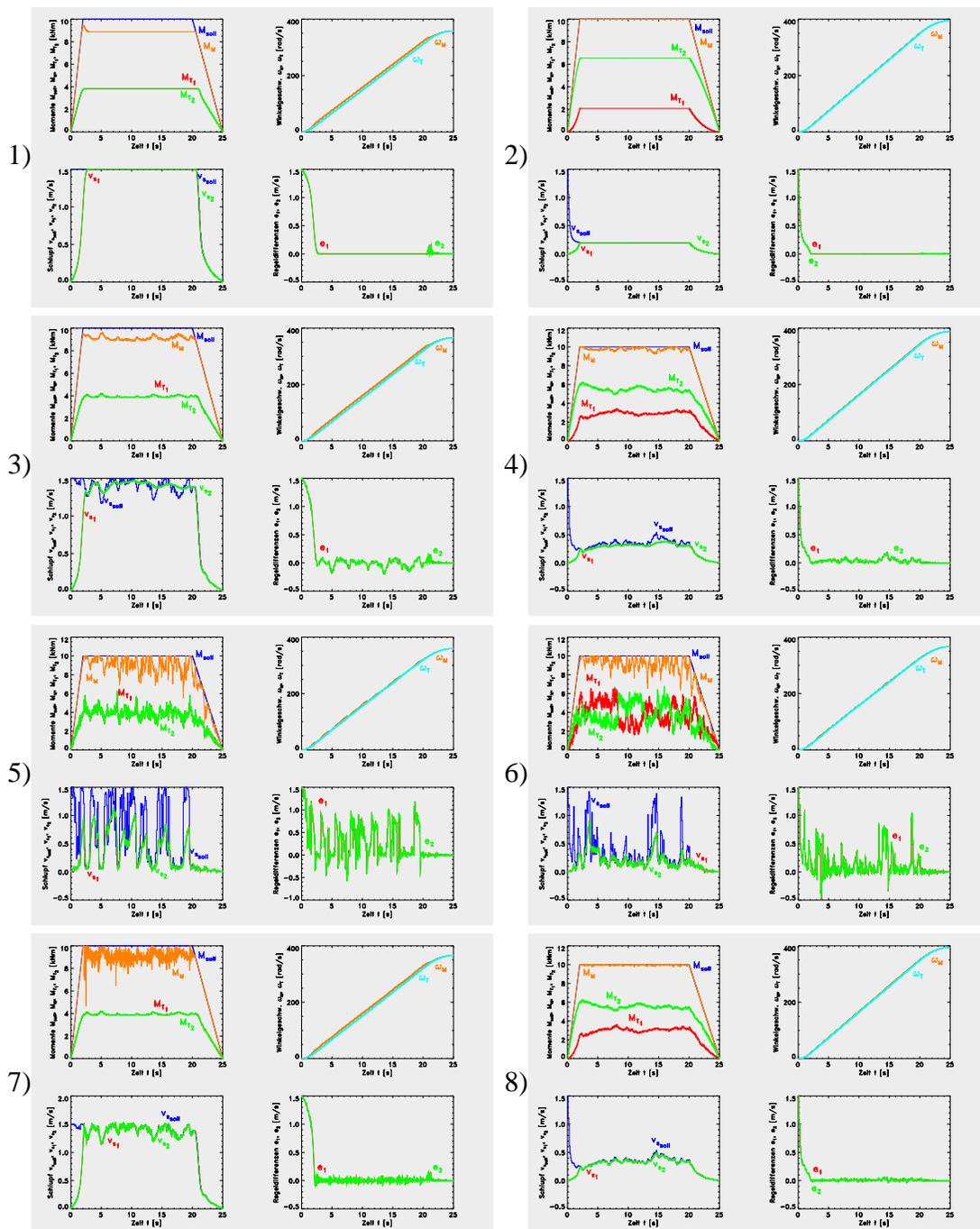
eine Nullstelle hat, wenn also die Änderung des Reglerausganges die Änderung des vorgegebenen Moments kompensiert. Die Funktion  $\theta$  ist die zeitliche Ableitung der negativen Summe von Momentenvorgabe und Regler und verschwindet genau dann, wenn diese Summe ein lokales Minimum besitzt. Der Regler wird ausgeschaltet, wenn der Absolutbetrag der Differenz von der Momentenvorgabe und des Reglerausganges verschwindet:

$$\theta = \frac{|M^{\text{soll}} - u|}{M^{\text{soll}}}. \quad (\text{A.11})$$

Die folgenden Simulationen (s. Abb. A.8) beziehen sich auf die Fahrt einer modernen Lokomotive ohne angehängte Masse in einem Geradenstück.

Der erste Test für den Regler und die Schaltfunktionen ist das Fahren auf nasser Schiene. In der Abbildung Abb. A.8 oben links sind die Simulationsergebnisse abgebildet. Es ist sehr deutlich zu erkennen, daß der Regler nach ungefähr 2 Sekunden aktiv wird und das vorgegebene Moment  $M^{\text{soll}}$  auf das übertragbare Moment  $M_M$  reduziert. Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Simulation des unregulierten Systems, dann erkennt man sofort, daß jetzt die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_T$  und  $\omega_M$  nicht auseinanderlaufen. Die Vorgabe des Schlupfollwertes bleibt während der ersten 20 Sekunden der Simulation konstant. Die Schätzung des Kraftschlusses nach (A.6) ist also zufriedenstellend. Anhand der Regeldifferenzen sieht man, daß der Regler nach 2.5 Sekunden den Sollwert — ohne überzuschwingen — eingestellt hat.

In der Abbildung Abb. A.8 oben rechts sind die Simulationsergebnisse zu unterschiedlichen Kennlinien dargestellt. Bei diesem Versuch läuft das direkt angetriebene Rad auf einer extrem nassen Schiene und das indirekt angetriebene Rad auf einer



**Abb. A.8:** Geregtes System mit Kennlinien für nasse Schienen (links) und unterschiedlichen Schienenzuständen (rechts). Geregtes System ohne Störgrößen (obersten Paneele). Geregtes System mit Störgrößen (Pannele 3–8). Von oben nach unten: Mittlere (Pannele 3/4) und starke (Pannele 5/6) Variation des Schienenzustandes. Mittlerer Streuung der Störgrößen mit sehr schneller Reglereinstellung (Pannele 7/8). Farblegende: blau ... Sollwert, orange ... Motor, rot ... Rad 1, grün ... Rad 2, cyan ... Lokomotive.

trockenen Schiene. Dies erkennt man anhand der Traktionsmomente  $M_{T1}$  und  $M_{T2}$ , da der Kraftschluß am Rad 1 viel kleiner ist als am Rad 2. Diese Simulation dient als Test der Bestimmung des Schlupfsollwertes. Für die Berechnung der Führungsgröße nach (A.8) wird angenommen, daß beide Räder den gleichen Kraftschluß haben, eine Annahme, die hier bewußt nicht erfüllt wird. Dennoch wird ein Sollwert vorgegeben, der innerhalb des stabilen Bereichs der trockenen Kennlinie liegt. Die graphische Darstellung der Regeldifferenzen veranschaulicht wieder das qualitative Verhalten des Reglers.

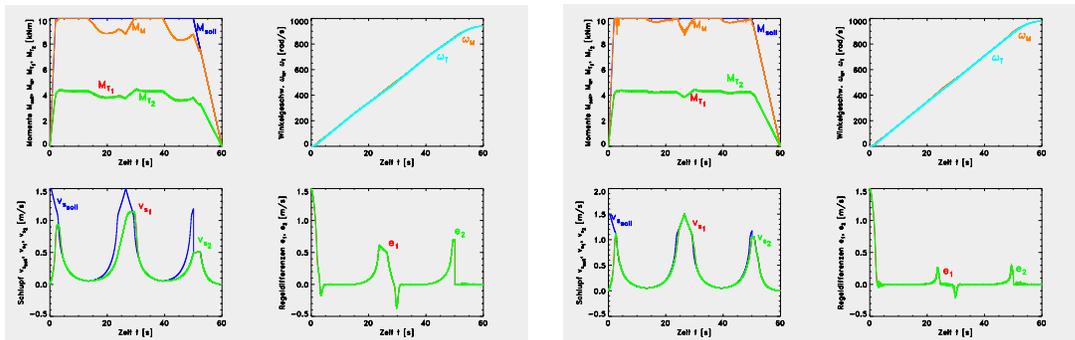


Abb. A.9: Geregtes System mit Störgrößen. Farblegende wie in Abb. A.8.

Mit vier weiteren Simulationen wird das Verhalten des Gesamtkomplexes, bestehend aus Regler und Berechnung der Führungsgröße, unter Berücksichtigungen von unterschiedlichen Störungen im Schienenzustand getestet.

Die Ergebnisse von zwei Simulationen, bei denen zwischen Schiene und linkem bzw. rechtem Rad derselbe Kraftschluß vorliegt, sind in Abb. A.8 auf der linken Seite dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Traktionsmomente  $M_{T1}$  und  $M_{T2}$  jeweils zusammenfallen. Sowohl bei einer mittleren Variation der Störungen (2. von oben) als auch bei einer großen Streuung der Störgrößen (2. von unten) folgen die Regelgrößen  $v_{s1}$  und  $v_{s2}$  dem Sollwert  $v_s^{\text{soll}}$  derart, daß die resultierende Regeldifferenz innerhalb eines Streifens um Null bleibt. Dies ist ein starker Hinweis auf die Stabilität des Reglers.

Bei den folgenden zwei Simulationen werden zusätzlich noch verschiedene Schienenzustände am Rad 1 und Rad 2 zugelassen. Die Störungen im Kraftschluß sind dabei unabhängig voneinander (s. Abb. A.8 rechts). Auch hier wird der Schlupfsollwert so vorgegeben, daß der Regler der Führungsgröße folgen kann und die Winkelgeschwindigkeiten nahezu übereinstimmen.

In der Abbildung Abb. A.8 ganz unten ist der Regler so ausgelegt, daß er sehr schnell den Schlupfsollwert einstellt.

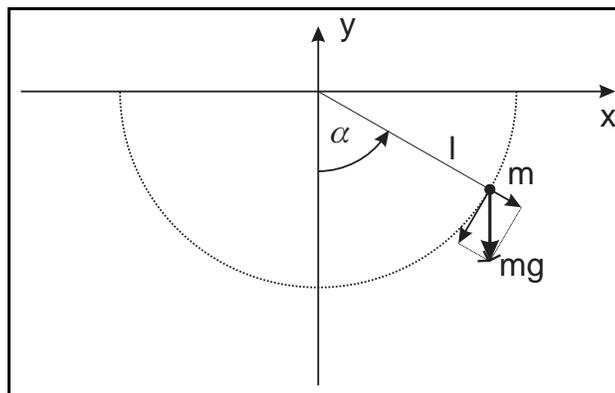
Die Ergebnisse einer Simulation über 60 Sekunden sind in Abb. A.9 graphisch dargestellt. Dabei kam es darauf an, das Verhalten des Reglers bei hohen Geschwindigkeiten zu testen.

### A.3 Mathematisches Pendel

Das ebene mathematische Pendel besteht aus einer Masse  $m$ , die im Koordinatensprung an einem masselosen Faden der Länge  $l$  aufgehängt ist (s. Abb. A.10). Dieses einfache mechanische System hat einen Freiheitsgrad, den Auslenkungswinkel  $\alpha$ . Je nach Wahl der Koordinaten sehen die Differentialgleichungen, die die Bewegung der Masse  $m$  beschreiben, völlig unterschiedlich aus (s. Tab. A.2).

**Tab. A.2:** Das mathematische Pendel.

	Minimalkoordinaten	Redundante Koordinaten
Dimensionen	$n_q = 1$	$n_p = 2$
Zwangsbedingungen	$n_\lambda = 0$	$n_\lambda = 1$
Freiheitsgrade	$n_f = 1$	$n_f = 1$
Koordinaten	$\mathbf{q} = \alpha$	$\mathbf{p} = (x, y)$
Koordinatentransformation	$\alpha = -\arctan \frac{x}{y}$	$x = +l \sin \alpha$ $y = -l \cos \alpha$
potentielle Energie	$U(\mathbf{q}) = -mgl \cos \alpha$	$U(\mathbf{p}) = mgy$
kinetische Energie	$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\alpha}^2$	$T(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$
Zwangsbedingung	—	$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = x^2 + y^2 - l^2$
Bewegungsgleichung	$l\ddot{\alpha} = -g \sin \alpha$  gew. Diffgl. (ODE)	$m\ddot{x} = -2x\lambda$ $m\ddot{y} = -mg - 2y\lambda$ $0 = x^2 + y^2 - l^2$ diff.-alg. Gl. (DAE)



**Abb. A.10:** Mathematisches Pendel.

## A.4 Ebenes Lastwagenmodell

Das ebene Lastwagenmodell von Führer und Simeon [130] ist ein Beispiel aus der Fahrzeugdynamik für ein Mehrkörpersystem. Es bildet die wesentlichen Eigenschaften und Effekte zur Untersuchung des Fahrkomforts und dynamischer Radlasten ab.

Die Geometrie und die wirkenden Kräfte des ebenen Lastwagenmodells sind in Abb. A.11 dargestellt. Die Bewegungen der Körper werden in Minimalkoordinaten beschrieben und sind durch ein differential-algebraisches Gleichungssystem vom Differentiationsindex 3 charakterisiert. Das Drehgelenk zwischen Aufbau (Körper 3) und Ladung (Körper 7) wird mit einer Zwangsbedingung modelliert. Eine vollständige Beschreibung des Modells und Simulationsergebnisse sind in [130] zu finden. Eine Variante des Modells wird in [44] besprochen.

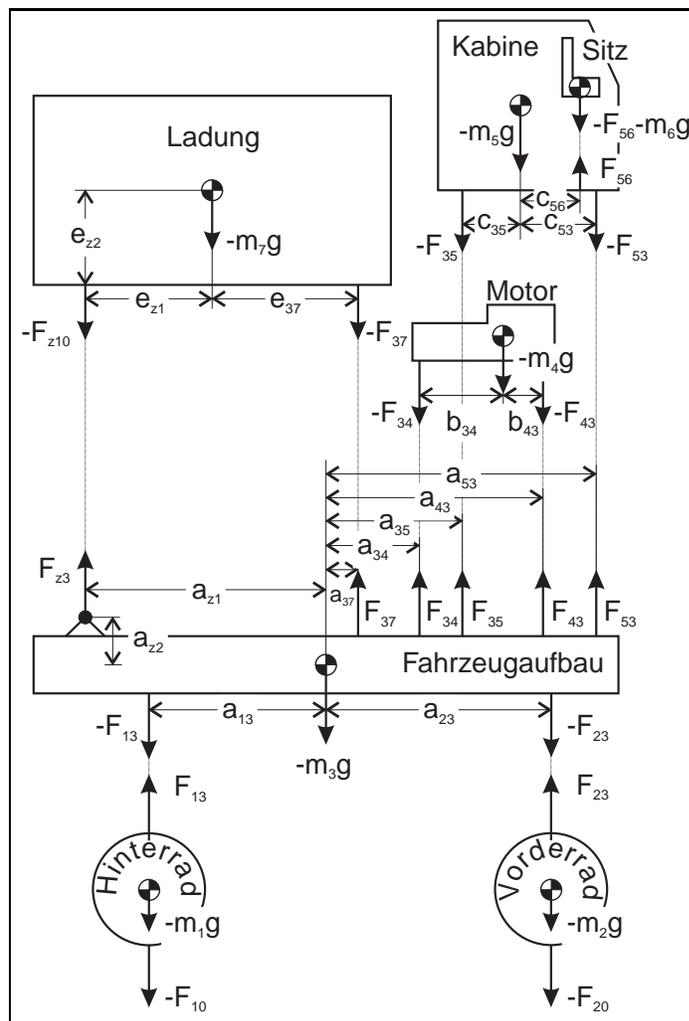


Abb. A.11: Schematische Darstellung der Geometrie und der Kräfte des ebenen Lastwagenmodells [128].

# Anhang B

## Implementierung

Das gesamte Optimierungskonzept zur Kennlinienoptimierung wurde in FORTRAN90 als ausführbares Programm mit einer allgemeinen Schnittstelle zum Datenaustausch mit anderen Simulationsprogrammen implementiert. In Abb. B.1 ist das Zusammenspiel der einzelnen Programme mit dem dazugehörigen Datenaustausch graphisch dargestellt. Die Ergebnisse eines Simulationslaufs dienen als Eingang zur Berechnung der Zielfunktion und der Nebenbedingungen und aller weiteren Informationen, auf deren Basis das Optimierungsverfahren die Designparameter gezielt variiert. Die Schnittstelle zwischen den Programmen erfolgt über Ein- und Ausgabedateien im ASCII-Format. Insbesondere die Schnittstelle vom Optimierer zum Simulationsprogramm verwendet als Schablonen Kopien der Eingabedateien mit speziell gekennzeichneten Parametern, die zur Optimierung freigegeben sind. Im folgenden wird diese Schnittstelle näher beschrieben. Das Ablaufschema der Optimierung wird benützt, wenn der Simulationslauf von einem in sich abgeschlossenen System, z. B. SIMPACK, durchgeführt wird.

Zur Kopplung des Optimierungsverfahren mit einem offenen, über eine Oberfläche gesteuerten Programm, z. B. IFAHRDY von Dennin, werden alle benötigten Unterprogramme zur  $\mathcal{B}$ -Spline-Interpolation, Kennlinieneinbettung und Optimierung auch als *dynamic link library*<sup>1</sup> mit gemeinsamer Speicherverwaltung zur Verfügung gestellt. Dies trifft insbesondere für das oben bereits erwähnte Verbrauchsberechnungsprogramm IFAHRDY von Dennin zu. Über eine in Visual Basic programmierte Oberfläche werden die Eingaben, Berechnungen und graphischen Ausgaben gesteuert. Ein mögliche Kopplung des in dieser Arbeit entwickelten Optimierungskonzepts mit der graphischen Oberfläche von IFAHRDY wird in Abb. B.2 als Diagramm vorgeschlagen. Die erwähnte Parallelisierung dient zur Verkürzung der Rechenzeit.

### B.1 Einfeldschießverfahren für Optimierung

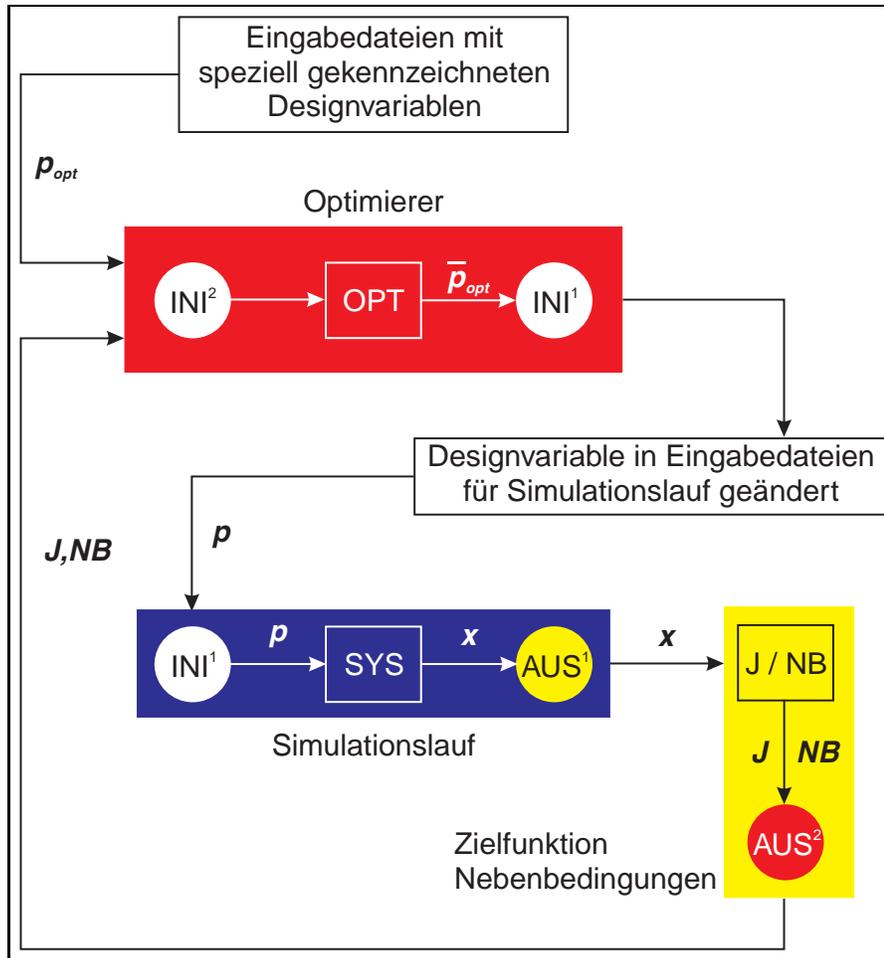
Zur Lösung der Aufgaben der Kennlinienoptimierung wurde ein *Einfeldschießverfahren* entwickelt und implementiert. Es wurde aus zwei Gründen dieses Verfahren

---

<sup>1</sup> Eine *dynamic link library* (DLL) wird erst zur Laufzeit des Programms in den Speicher geladen.

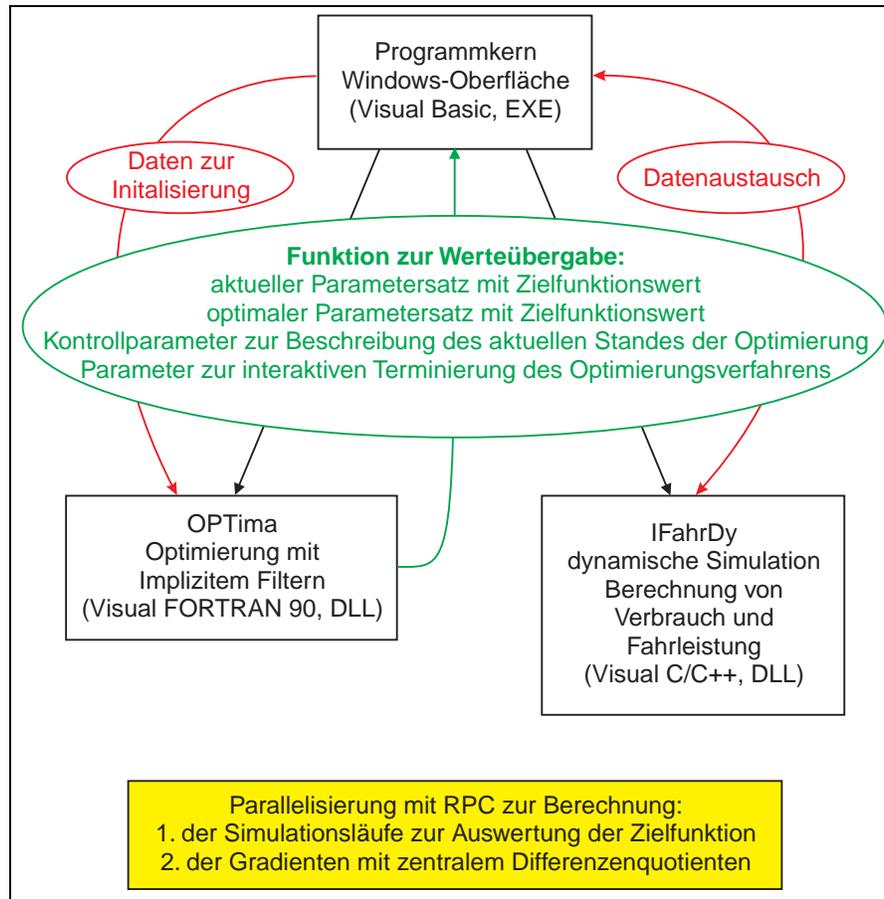
gegenüber dem Mehrfeldschießenverfahren bevorzugt:

1. Hinter der Auswertung der Zielfunktion steht ein kompletter Simulationslauf eines dynamischen Systems mit einem unabhängigen, geschlossenen Programmpaket (z. B. IFAHRDY [37], SIMPACK [122]).
2. Die Kennlinienoptimierung ist mit Hilfe der Einbettung der Kennlinien in eine Fläche auf eine Parameteroptimierung zurückgeführt. Vor jedem Simulationslauf liegt eine Variation der stationären Kennlinien vor, die während der numerischen Integration nicht mehr verändert werden darf.



**Abb. B.1:** Schematische Darstellung des Optimierungsablaufes mit ausführbarem Programm OPTIMA.

Bei der Optimierung steht die Robustheit des Verfahrens vor der Rechenzeit an erster Stelle. Dennoch soll es bei glatten Zielfunktionen auf Informationen des Gradienten zurückgreifen können, um den Parameterbereich gezielt abzusuchen und Rechenzeit zu sparen. Bei nichtglatten Zielfunktionen muß das Verfahren jedoch sehr



**Abb. B.2:** Graphische Darstellung des Datenaustausches zwischen Oberfläche, Simulationskern IFAHRDY und Optimierer OPTIMA.

robust sein. Daher wird das Einfeldschießverfahren intern mit dem impliziten Filtern [53, 54] versehen.

Die Eingabedatei mit den Parametern zum Optimierungsverfahren, den Gewichtungsfaktoren der gemischten Zielfunktion und den zur Einbettung der Kennlinien berücksichtigten Wandler sind in der Konfigurationsdatei angegeben. Sie hat folgende Form:

```
[OPTIMIERUNG]
VERFAHREN = IMPLIZITES_FILTERN

[IMPLIZITES_FILTERN]
MAXIT      = 200
IRESTART   = 0
IWRIT      = 2
NCUTS      = 10
TOL        = 1.0
RMAXH      = 0.5
RMINH      = 0.0001
FSCALE     = 1.0

[GEWICHTUNG]
c_f = 0.139
```

```

c_f = -0.024
c_f = 0.067
c_f = 0.152
c_f = 1.
c_f = -0.125e-3
c_f = 0.058

[MODELL]
IFAHRDY_PFAD = ..\modelle\ifahrdy
SCHABLONE_VERBRAUCH = ..\ein\fmcalc.verbrauch.ini
AUSGABE_VERBRAUCH = ..\aus\fmcalc.verbrauch.ini
SCHABLONE_FAHRLEISTUNG = ..\ein\fmcalc.fahrleistung.ini
AUSGABE_FAHRLEISTUNG = ..\aus\fmcalc.fahrleistung.ini
SCHABLONE_ELASTIZITAET = ..\ein\fmcalc.elastizitaet.ini
AUSGABE_ELASTIZITAET = ..\aus\fmcalc.elastizitaet.ini
SCHABLONE = ..\ein\falke.fzg
AUSGABE = ..\aus\falke.fzg
SCHABLONE = ..\daten\falke\reifen\w2356016.rei
AUSGABE = ..\aus\falke.rei
SCHABLONE = ..\daten\falke\kennfeld\m6244a38.mot
AUSGABE = ..\aus\falke.mot
SCHABLONE = ..\daten\falke\vollast\m6244a38.vll
AUSGABE = ..\aus\falke.vll
SCHABLONE = ..\ein\falke.wdl
AUSGABE = ..\aus\wandler.wdl
SCHABLONE = ..\ein\falke.get
AUSGABE = ..\aus\falke.get
SCHABLONE = ..\daten\falke\getriebe\5hp24.wgk
AUSGABE = ..\aus\falke.wgk
SCHABLONE = ..\daten\falke\skl\5hp24\se\bsec01xe.fsd
AUSGABE = ..\aus\falke.fsd
SCHABLONE = ..\daten\falke\zyklus\highway.zkl
AUSGABE = ..\aus\falke.zkl

```

```

[WANDLER]
FALKE_PFAD = ..\daten\falke
WDL = w260s300
WDL = w260s287
WDL = w260s281
WDL = w260s248
WDL = w260s247
WDL = w260s240
WDL = w260s220
WDL = w260s212
WDL = w260s190
WDL = w260s170
WDL = w260s143
WDL = w260s114
WDL = w260s095
WDL = w260s078

```

Als Ausgabe wird in eine Datei die Liste der Iterationsschritte geschrieben. Das Konvergenzverhalten des Verfahren bei der optimalen Auslegung des Wandlers und der Getriebeübersetzungen nach dem US-Highway-Zyklus wird durch folgende Iterationsliste dokumentiert :

```

No restarts will be done.
Function scale      ==> 1.000   Tolerance      ==> 1.000
Maximum iterations ==> 200     Ncuts          ==> 10
Maximum scale      ==> 0.5000  Minimum scale  ==> 1.0000E-004
All data is for the scaled problem.
  K   = iteration counter for given scale.
  | X | = two norm of current point.
  F   = function value at current point.

```

| GF | = two norm of the gradient at the current point.  
 H = current scale being used.  
 CUTS = number of cutbacks in the line search.  
 Convergence - The current point satisfies the termination criteria  
 at the current scale.  
 Line search (LS) failed - The line search algorithm was unable to  
 find an acceptable new  
 point using the current scale.

K	X	F	GF	H	CUTS
0	4.5644D-01	6.7946D-01	3.2083D-01	5.0000D-01	Convergence
0	4.5644D-01	6.7946D-01	9.3217D-02	2.5000D-01	Convergence
0	4.5644D-01	6.7946D-01	8.1801D-02	1.2500D-01	Convergence
0	4.5644D-01	6.7946D-01	1.2628D-01	6.2500D-02	0
1	4.7786D-01	6.6375D-01	2.1413D-01	6.2500D-02	1
2	5.1331D-01	6.3952D-01	1.2078D-01	6.2500D-02	0
3	5.4193D-01	6.2972D-01	5.7693D-02	6.2500D-02	Convergence
0	5.4193D-01	6.2972D-01	8.0643D-02	3.1250D-02	1
1	5.5596D-01	6.2585D-01	1.2337D-01	3.1250D-02	0
2	5.6982D-01	6.1716D-01	3.3552D-02	3.1250D-02	1
3	5.7936D-01	6.1376D-01	8.9736D-02	3.1250D-02	0
4	5.9607D-01	6.0867D-01	1.5337D-01	3.1250D-02	2
5	5.9277D-01	6.0413D-01	3.6591D-02	3.1250D-02	0
6	6.1093D-01	5.9958D-01	4.9170D-02	3.1250D-02	1
7	6.2530D-01	5.9864D-01	1.0078D-01	3.1250D-02	1
8	6.2545D-01	5.9807D-01	3.2709D-02	3.1250D-02	0
9	6.2953D-01	5.9769D-01	5.5463D-02	3.1250D-02	8
10	6.3299D-01	5.9745D-01	4.8792D-02	3.1250D-02	3
11	6.3416D-01	5.9724D-01	4.7189D-02	3.1250D-02	1
12	6.4052D-01	5.9654D-01	6.2460D-03	3.1250D-02	Convergence
0	6.4052D-01	5.9654D-01	1.8702D-02	1.5625D-02	1
1	6.4194D-01	5.9594D-01	1.8053D-02	1.5625D-02	LS failed
0	6.4194D-01	5.9594D-01	2.6886D-02	7.8125D-03	2
1	6.4172D-01	5.9582D-01	2.8392D-02	7.8125D-03	2
2	6.4149D-01	5.9564D-01	2.0409D-02	7.8125D-03	3
3	6.4142D-01	5.9564D-01	2.0401D-02	7.8125D-03	LS failed
0	6.4142D-01	5.9564D-01	3.3384D-02	3.9062D-03	LS failed
0	6.4142D-01	5.9564D-01	4.4458D-02	1.9531D-03	LS failed
0	6.4142D-01	5.9564D-01	1.1010D-01	9.7656D-04	6
1	6.4140D-01	5.9562D-01	1.1198D-01	9.7656D-04	LS failed
0	6.4140D-01	5.9562D-01	1.3525D-01	4.8828D-04	4
1	6.4166D-01	5.9550D-01	3.0029D-01	4.8828D-04	4
2	6.4171D-01	5.9546D-01	2.7984D-01	4.8828D-04	6
3	6.4171D-01	5.9546D-01	2.7972D-01	4.8828D-04	LS failed
0	6.4171D-01	5.9546D-01	3.3310D-02	2.4414D-04	LS failed
0	6.4171D-01	5.9546D-01	1.0503D-01	1.2207D-04	LS failed

Number of function evaluations : 528

Final nonlinear objective value: 0.595458158555651

Anhand der Daten in der dritten Spalte ist eine stete Verbesserung der Zielfunktion deutlich erkennenbar. Die Norm der Approximation des Gradienten dagegen schwankt zwischen  $10^{-3}$  und  $3 \cdot 10^{-1}$ . Aufgrund der zentralen Idee, die Robustheit des Optimierungsverfahrens zu steigern, indem der Gradienten zuerst nur grob und im Laufe der Iterationen immer genauer in Abhängigkeit der Schrittweite  $h$  (vgl. Spalte 5) approximiert wird, konvergiert die Norm nicht gegen Null. Dies wäre eine typische Eigenschaft von Gradientenverfahren wie das SQP-Verfahren. Die Abbruchkriterien des Impliziten Filtern sind nicht durch den Gradienten definiert, sondern durch den minimalen Wert der Schrittweite  $h$ .

Die Ergebnisse des Optimierungslaufs sind in der Ausgabedatei zusammengefaßt :

No.	Parameter (ini)	untere Schranke	obere Schranke
1	2.93000000000000E+00	1.46500000000000E+00	4.39500000000000E+00
2	0.00000000000000E+00	0.00000000000000E+00	1.00000000000000E+00
3	3.57100000000000E+00	2.85680000000000E+00	4.28520000000000E+00
4	2.20000000000000E+00	1.76000000000000E+00	2.64000000000000E+00
5	1.50500000000000E+00	1.20400000000000E+00	1.80600000000000E+00
6	8.04000000000000E-01	6.43200000000000E-01	9.64800000000000E-01

No.	Parameter (opt)
1	2.9722742913959E+00
2	2.8747122558352E-01
3	4.28520000000000E+00
4	2.5082183393137E+00
5	1.5202232066940E+00
6	7.5672945622123E-01

Auswertung

			ini	opt	Verbesserung [%]
f	Zielfunktion		0.67946	0.59546	12.36310137052
rm_f0	Verbrauch	L/100km	7.17799	7.07138	1.48530073222
rm_f1	Strecke	s(4sek)	39.07000	43.48000	-11.28743281290
rm_f2	Zeit	t(400m)	14.93234	14.48813	2.97482920986
rm_f3	Zeit	t(100km/h)	6.78000	6.15909	9.15795119335
rm_f4	Endgeschwindigkeit	v(tf)	0.01015	3.33027E-05	99.67203790190
rm_f5	Strecke	s(tf)	8045.13000	8021.82000	0.28974050140
rm_f6	Elastizitaet	t(80-120km/h)	16.25484	16.25484	0.00000000000

```

Start : 05.06.2000 15:14:22.296 +0200
Time of operation was 529.6094 seconds
Program has used 529.6406 seconds of CPU time.
This includes 404.9687 seconds of user time and 124.6719
seconds of system time.
Ende : 05.06.2000 16:58:09.156 +0200

```

## B.2 Schnittstelle

Zwischen dem Optimierungsverfahren und dem Simulationsprogramm müssen immer wieder Daten ausgetauscht werden. Das Optimierungsverfahren liefert Variationen der Parameter, die als Eingabedaten der Simulation bereitgestellt werden müssen. Umgekehrt werden aus den Ergebnisdaten nach einem Simulationslauf Zielfunktion und Nebenbedingungen ausgewertet und dem Optimierungsverfahren zur Verfügung gestellt: Ausgehend von einer Anfangskonfiguration erfolgt ein Simulationslauf. Das Optimierungsverfahren variiert dann aufgrund der Änderungen der Zielfunktion den Parametersatz, der anschließend wieder als Eingabe dem Simulationsprogramm bereitgestellt werden muß. Dieser Kreislauf ist in Abb. B.1 gut zu erkennen. Das spezifische Eingabeformat zur Kennzeichnung der Designparameter ist in Form einer Kopie der Eingabedateien des Simulationsprogramms mit den speziell gekennzeichneten Parameterwerten gegeben. Zusammen mit den aktuellen Parametern werden darin zusätzlich die

**Tab. B.1:** Spezielle Kennzeichnung der Parameter.

<code>\$OPT\$PAR[ <i>F</i>.<i>x</i>.<i>x</i>  pw <i>xxx</i> %- <i>xxx</i> %+ <i>xxx</i> ]</code>	
<code>\$OPT\$PAR[ <i>E</i>.<i>x</i>.<i>x</i>  pw <i>xxx</i>  w- <i>xxx</i>  w+ <i>xxx</i> ]</code>	
<code>\$OPT\$PAR[ <i>F</i>.<i>x</i>.<i>x</i>  pw <i>xxx</i>  wu <i>xxx</i>  wo <i>xxx</i> ]</code>	
<code>\$OPT\$PAR[...]</code>	Kennzeichnung: hier ist ein Designparameter
<i>F</i> . <i>x</i> . <i>x</i>	<i>F</i> -Format, mit dem der Parameter geschrieben werden soll
<i>E</i> . <i>x</i> . <i>x</i>	<i>E</i> -Format, mit dem der Parameter geschrieben werden soll
<i>xxx</i>	eine beliebige reelle Zahl
pw	Kennzeichen für den Startwert
- ,  +	Kennzeichen für untere und obere Schranke des Parameterwerts in Prozent relativ zum Startwert angegeben
w- ,  w+	Kennzeichen für untere und obere Schranke des Parameterwerts relativ zum Startwert angegeben
wu ,  wo	Kennzeichen für untere und obere Schranke des Parameterwerts

Startwerte, untere und obere Schranken der Parameter vorgeschrieben (s. Tab. B.1).

Mit den folgenden Unterprogrammen können Schablone, die Eingabedateien mit den gekennzeichneten Designparametern, gelesen, interpretiert und umgesetzt werden:

- SUBROUTINE `schablonen_lesen ( n, err )`  
Die Schablonen werden gelesen, die Designparameter erkannt, gezählt und der entsprechenden Eingabedatei zugeordnet.  
Ausgabevariable: `n, err`
- SUBROUTINE `schablonen_init ( n, p, pl, pu, err )`  
Die Designparameter werden aus den Schablonen gelesen. Die zugehörigen unteren und oberen Schranken werden ebenfalls gelesen bzw. berechnet.  
Eingabevariable: `n`  
Ausgabevariable: `p, pl, pu, err`
- SUBROUTINE `schablonen_umsetzen ( n, p, err )`  
Die Schablonen werden in die Eingabedateien umgesetzt. Dazu werden die Schablonen komplett gelesen. Die gekennzeichneten Stellen der Designparameter werden erkannt und dort werden die neuen Werte der Parameter im vorgegebenen Format schreiben. Im Falle einer Kennlinie wird die neue Kennlinie berechnet und zugehörige Daten in die entsprechende Eingabedatei geschrieben.  
Eingabevariable: `n, p, pl, pu`  
Ausgabevariable: `err`

Die Variablen sind, wie folgt, bezeichnet:

n	INTEGER. Ein- und Ausgabevariable. Dimension der Variablen p, p1, pu. Parameter Anzahl der Freiheitsgrade des Optimierungsproblems.
p(n)	REAL(KIND(1.0D0)). Ein- und Ausgabevariable. Vektor der Länge n. Designparameter.
p1(n)	REAL(KIND(1.0D0)). Ein- und Ausgabevariable. Vektor der Länge n. Untere Schranke der Designparameter.
pu(n)	REAL(KIND(1.0D0)). Ein- und Ausgabevariable. Vektor der Länge n. Obere Schranke der Designparameter.
err	INTEGER-Typ. Ausgabevariable. Fehlerparameter.

Die zur Optimierung der Wandlerkennlinien und der Getriebeübersetzungen verwendeten Schablonen haben folgende Gestalt:

- Für die Variation der Wandlerkennlinien muß die gesamte Datei mit den Daten der neuen Kennlinien geschrieben werden. In der Schablonen ist nicht jeder einzelne Eintrag der Tabelle speziell markiert. Stattdessen sind im Kommentarblock der Anfangswert, untere und obere Schranke angegeben. Die zur Einbettung verwendeten Wandler sind in der Konfigurationsdatei des Optimierungsverfahrens festgelegt.

```

<----- WANDLER-DATEN ----->< DATUM >< MEMBER >
<                                     ><                                     >
-----
Wandleroptimierung: alpha = $OPT$PAR[F5.2 |pw 0 |wu 0 |wo 1 ]
Die Kennlinien des optimierten Wandlers stehen unter .\aus\wandler.wdl
*****
< variierter > WANDLER-----
-----
< > THETA-PUMPE (KG M**2) FV MASSENTRAEGHEITSMOMENT PUMPE
< > THETA-TURB (KG M**2) FV MASSENTRAEGHEITSMOMENT TURBINE
<2000.> NPC (1/MIN) FV KONSTANTDREHZAH L F. PUMPENAUFNAHME
*****
I LFD. I NUE I MUE I MPC XX
I NUMMER I (-) I (-) I (NM) XX MAXIMAL 100 PUNKTE
I-----I-----I-----I-----XX-----
I I I I I XX

```

- Das Hinterachsgetriebe gehört zu den Daten der Fahrzeugs:

```

<----- FAHRZEUGDATEN ----->< DATUM >< MEMBER >
<                                     ><         ><         >
-----
< variierter > Fahrzeugtyp -----
-----
< >< >< >< >< > FV Leergewicht(e) (92/21/EWG) (kg)
< >< >< >< >< > > F Fzg.Gewicht(e) (Fahrl.Rechn.) (kg)
< >< >< >< >< > > F stat. Hinterachslast(en) (kg)
< > G-RAD VORN (kg) F Radgewicht pro Achse vorn
< > G-RAD HINTEN (kg) F Radgewicht pro Achse hinten
< > L (mm) F Radstand
< > S (mm) F Hhe Schwerpunkt ber Fahrbahn
< > THETA ACHSE V (kg m**2) F Massentrghheitsmom. Vorderachse
< > THETA ACHSE H (kg m**2) FV Massentrghheitsmom. Hinterachse
< > THETA KARDAN (kg m**2) FV Massentrghheitsmom. Kardanwelle
< $OPT$PAR[F5.2|pw2.93|%-50|%+50]><><><> FV Achsgetriebe-bersetzung(en)(-)
< > ETA-ACHSE (DEFAULT=1.0) FV Achsgetriebe-Wirkungsgrad (-)
< > ETA-LAGER (DEFAULT=1.0) FV Wirkungsgrad Lager + Gelenke (-)
-----
-----
< >< >< >< >< > > FV Luftwiderstandsbeiwert(e) cx (-)
< >< >< >< >< > > F Auftriebsbeiwert(e) cZ (-)
< >< >< >< >< > > F Nickmomentenbeiwert(e) cM (-)
< > A-WIND (m**2) FV Windschattenflche
< > P-LUFT (mbar) FV Umgebungs-Luftdruck
< > T-LUFT (Celsius) FV Umgebungs-Lufttemperatur
< > P-WSDF (mbar) F Wasserdampfdruck
< > V-WIND (km/h) F Windgeschwindigkeit
=====
Darstellung des Fahrwiderstandes durch Polynom 2. Grades (falls cW = 0.)
< > KOEF. A (N) V Fahrwiderstandskoeffizient A
< > KOEF. B (N/(km/h)) V Fahrwiderstandskoeffizient B
< > KOEF. C (N/((km/h)**2)) V Fahrwiderstandskoeffizient C
-----
-----

```

- Die Kenngrößen des Automatikgetriebes sind in einer eigenen Datei abgelegt. Dort werden die Übersetzungen zur Variation freigegeben:

```

<----- GETRIEBEDATEN ----->< DATUM >< MEMBER >
<                                     ><         ><         >
-----
< variiertes > GETRIEBE-----
-----
< > THETA GETEI (kg m**2) FV Massentrghheitsm. Getriebe-Eingang
< > THETA GETAU (kg m**2) FV Massentrghheitsm. Getriebe-Ausgang
< > ETA LAGER (-) FV Wirkungsgrad Getriebebelager
<4.095> IGETR(R) (-) bersetzung Rckwrtsgang
-----
-----
X GANG I BERSETZUNGSVERHLTNIS I VERZAHNUNGS-WIRKUNGSGRAD X
X-----I-----I-----I-----I-----X
X 1 I IGETR (1)=$OPT$PAR[F5.3 |pw3.571|%-20|%+20] -- I ETAG (1)=1.000 -- X
X 2 I IGETR (2)=$OPT$PAR[F5.3 |pw2.200|%-20|%+20] -- I ETAG (2)=1.000 -- X
X 3 I IGETR (3)=$OPT$PAR[F5.3 |pw1.505|%-20|%+20] -- I ETAG (3)=1.000 -- X
X 4 I IGETR (4)=1.000 -- I ETAG (4)=1.000 -- X
X 5 I IGETR (5)=$OPT$PAR[F5.3 |pw0.804|%-20|%+20] -- I ETAG (5)=1.000 -- X
-----
-----

```

## B.3 Erweiterungen zur Spline-Interpolation

Zur Berechnung der  $\beta$ -Spline-Interpolierten aus den tabellarisch gegebenen Daten und zur Einbettung der Kennlinien in eine zweidimensionale Fläche wurde die im Kapitel 2 ausführlich besprochenen Algorithmen in Unterprogramme umgesetzt und als *dynamic link library* bereitgestellt. Auch hier diente FORTRAN90 als höhere Programmiersprache.

Folgenden Unterprogramme werden bei der Optimierung der Wandlerkennlinien benützt:

- SUBROUTINE `ini_neuer_wandler_parameter`  
Alle tabellarisch gegebenen Wandlerkennlinien werden mit dem  $\beta$ -Spline-Ansatz interpoliert. Die de Boor-Punkte der Einbettungsfläche auf dem Tensorproduktgitter werden berechnet.
- SUBROUTINE `set_neuer_wandler_kennlinie (alpha)`  
Die neuen, ideellen Kennlinien zu einem virtuellen Wandler werden berechnet.  
Eingabevariable: alpha
- SUBROUTINE `writewandlerdatei`  
Die berechneten Daten der ideellen Wandlerkennlinien werden in die entsprechende Eingabedatei des Simulationsprogramms geschrieben.

Bezeichnung der Variablen:

alpha	REAL(KIND(1.0D0)). Ein- und Ausgabevariable. Einbettungsparameter der Wandlerkennlinien.
-------	---------------------------------------------------------------------------------------------

Die  $\beta$ -Spline-Interpolation ist mit Hilfe folgender Unterprogramme realisiert:

- SUBROUTINE `parametrisierung (lda,n,ken,t,typ)`  
Berechnung der Parametrisierung der Kennlinien mit Hilfe der gegebenen Daten.  
Eingabevariable: lda, n, ken, typ  
Ausgabevariable: t
- SUBROUTINE `knotenvektor_get (k,n,t,tau)`  
Berechnung des Knotenvektors zur gewählten Parametrisierung.  
Eingabevariable: k, n, t  
Ausgabevariable: tau
- SUBROUTINE `deboor_punkte_get (k,n,t,tau,lda,ken,d,aus)`  
Berechnung der de Boor-Punkte durch Lösen des Gleichungssystems.  
Eingabevariable: k, n, t, tau, lda, ken, aus  
Ausgabevariable: d

- SUBROUTINE `tensorproduktgitter` (`wtpg`)  
Setzen des Tensorproduktgitters und Berechnung der fehlenden Daten durch Interpolation der Kennlinien.  
Ein- Ausgabevariable: `wtpg`
- SUBROUTINE `spline` (`u,k,ldx,n,d,tau,s`)  
Auswertung der Splines.  
Eingabevariable: `u, k, ldx, n, d, tau`  
Ausgabevariable: `s`
- SUBROUTINE `knotenvektoren_get` (`kx,nx,tx,taux,ky,ny,ty,tauy`)  
Berechnung der Knotenvektoren zu den gewählten Parametrisierungen in  $x$ -Richtung und  $y$ -Richtung.  
Eingabevariable: `kx, nx, tx, ky, ny, ty`  
Ausgabevariable: `taux, tauy`
- SUBROUTINE `indizes_bestimmung_init` (`kx,nx,taux,ky,ny,tauy`)  
Schnelle Indexbestimmung der Teilintervalle des Knotenvektoren in  $x$ -Richtung und  $y$ -Richtung.  
Eingabevariable: `kx, nx, tx, taux, ky, ny, ty, tauy`
- SUBROUTINE `deboor_2d_punkte_get` (`kx,nx,tx,taux,koefX,ky,ny,ty,tauy,koefY,nz,koefZ,aus`)  
Berechnung der de Boor-Punkte.  
Eingabevariable: `kx, nx, tx, taux, ky, ny, ty, tauy, nz, aus`  
Ausgabevariable: `koefX, koefY, koefZ`
- SUBROUTINE `spline_2d` (`kx,nx,u,taux,koefX,ky,ny,v,tauy,koefY,nz,koefZ,xt,yt,zt`)  
Auswertung der Spline-Fläche.  
Eingabevariable: `kx, nx, u, taux, koefX, ky, ny, v, tauy, koefY, nz, koefZ`  
Ausgabevariable: `xt, yt, zt`

Bezeichnung der Variablen:

<code>lda</code>	INTEGER. Eingabevariable. Anzahl der gegeben Kennlinien.
<code>n</code>	INTEGER. Eingabevariable. Anzahl der Datenpunkte pro Kennlinie.

ken	REAL(KIND(1.0D0)). Eingabevariable. Datenpunkte der Kennlinien.
t, tx, ty	REAL(KIND(1.0D0)). Ein- und Ausgabevariable. Parametrisierung der Datenpunkte.
typ	CHARACTER(LEN=*). Eingabevariable. Option für die Parametrisierung der Daten.
k, kx, ky	INTEGER. Eingabevariable. k ist der Grad der Interpolation der Kennlinien. kx und ky bezeichnen den Grad der Interpolation der Kennfelder jeweils in <i>x</i> -Richtung und <i>y</i> -Richtung.
tau, taux, tauy	REAL(KIND(1.0D0)). Ein- und Ausgabevariable. Knotenvektor zur Parametrisierung.
d	REAL(KIND(1.0D0)). Ein- und Ausgabevariable. De Boor-Punkte der Kennlinien.
aus	LOGICAL. Eingabevariable. Option zur Ausgabe der Struktur der Matrix des Gleichungssystem zur Berechnung der de Boor-Punkte.
wtpg	TYP. Ein- und Ausgabevariable. Tensorproduktgitter und Daten der Einbettung.
u, v	REAL(KIND(1.0D0)). Eingabevariable. Parameterwerte, an denen die Kennlinie bzw. das Kennfeld ausgewertet werden soll.
s	REAL(KIND(1.0D0)). Ausgabevariable. $\beta$ -Spline-Interpolierte der Kennlinien.
nx, ny, nz	INTEGER. Ein- und Ausgabevariable. nx und ny geben die Anzahl der Datenpunkte pro Kennfeld in <i>x</i> -Richtung und <i>y</i> -Richtung an. nz ist die Anzahl der Kennfelder.
koefX, koefY, koefZ	REAL(KIND(1.0D0)). Ein- und Ausgabevariable. De Boor-Punkte der Kennfelder.
xt, yt, zt	REAL(KIND(1.0D0)). Ausgabevariable. $\beta$ -Spline-Interpolierte der Kennfelder.

# Anhang C

## Iterationslisten zu NPSOL

NPSOL --- Version 5.0-2      Sept 1995  
=====

Difference intervals to be computed.

Computation of the finite-difference intervals  
-----

j	x(j)	Forward dx(j)	Central dx(j)	Error est.
1	2.93E+00	9.090030E-08	1.278377E-02	2.458109E-02
2	0.00E+00	6.369571E-12	6.369571E-11	4.798182E+02
3	3.57E+00	1.150390E-09	1.150390E-08	2.762217E-05
4	2.20E+00	8.343987E-08	1.040918E-02	2.375429E-02
5	1.50E+00	5.833206E-08	8.148435E-03	3.804805E-02
6	8.04E-01	6.387513E-08	5.868174E-03	2.285137E-02

Majr	Minr	Step	Fun	Objective	Norm gZ	nZ	Bnd	Lin	CondHz	Cond	T	Conv
0	3	0.0E+00	1	8.16241511E-01	2.5E-01	4	2	0	1.E+00	0.E+00	F	FF
Minor itn      9.      Central-differences computed.      QP re-solved.												
1	12	1.0E-01	3	7.99022443E-01	4.3E-01	4	2	0	7.E+03	0.E+00	F	FF c
2	7	2.3E-02	9	7.98845791E-01	3.9E-01	6	0	0	7.E+03	0.E+00	F	FT c
3	1	4.3E-02	12	7.98813933E-01	6.5E-01	6	0	0	7.E+03	0.E+00	F	FT c
4	2	1.0E+00	13	7.96528254E-01	3.3E-01	5	1	0	7.E+03	0.E+00	F	FFm c
5	1	6.1E-04	28	7.95791125E-01	7.9E-01	5	1	0	7.E+03	0.E+00	F	FFm c
6	1	1.3E-05	43	7.95116122E-01	2.4E-01	5	1	0	8.E+05	0.E+00	T	FF c

Exit NP phase. Inform = 6    Majits = 7    nfun = 56    ngrad = 7

Exit NPSOL - Current point cannot be improved upon.

Final nonlinear objective value = 0.7951161

NPSOL --- Version 5.0-2      Sept 1995  
 =====

## Parameters

-----

```

cold start.....          Crash tolerance..... 0.10E-01
Infinite bound size.... 1.00E+20  Minor Optimality tol... 1.72E-13
Infinite step size..... 1.00E+20  Linear feasibility tol. 1.00E-06
Step limit.....          2.00E+00

Optimality tolerance... 1.00E-02  Function precision.... 1.00E-04
Nonlinear feasibility.. 1.00E+00  Unit round-off..... 1.11E-16
Line search tolerance.. 9.00E-01  Print file..... 9
Verify level.....       -1    Summary file..... 6

```

Difference intervals to be computed.

## Computation of the finite-difference intervals

-----

j	x(j)	Forward dx(j)	Central dx(j)	Error est.
1	2.93E+00	3.254121E-02	3.254121E-01	2.776012E-02
2	0.00E+00	3.753802E-02	3.753802E-01	6.410801E-02
3	3.57E+00	9.663745E-02	9.142000E-01	4.421558E-02
4	2.20E+00	1.314377E-01	6.984253E-01	1.826018E-02
5	1.50E+00	7.543689E-02	5.010000E-01	3.976447E-02
6	8.04E-01	9.134762E-02	3.608000E-01	1.952977E-02

Majr	Minr	Step	Fun	Objective	Norm gZ	nZ	Bnd	Lin	CondHz	Cond	T	Conv
0	2	0.0E+00	1	1.25836946E+00	4.7E-01	4	2	0	1.E+00	0.E+00	F	FF
Minor itn 2. Central-differences computed. QP re-solved.												
1	2	0.0E+00	4	1.25836946E+00	3.8E-01	5	1	0	1.E+00	0.E+00	T	FF c
2	3	6.4E-02	8	1.25520281E+00	3.0E-01	5	1	0	6.E+00	0.E+00	T	FF c
3	1	1.7E-01	11	1.25501178E+00	2.7E-01	5	1	0	6.E+00	0.E+00	T	FFm c
4	1	5.2E-02	26	1.25223209E+00	2.3E-01	5	1	0	6.E+00	0.E+00	T	FFm c
5	3	1.0E+00	27	1.25131886E+00	1.5E-01	5	1	0	6.E+00	0.E+00	T	TFm c
6	1	1.0E+00	28	1.24436010E+00	1.0E+00	5	1	0	1.E+01	0.E+00	T	FT c
7	1	1.0E+00	29	1.24040274E+00	1.1E+00	5	1	0	1.E+01	0.E+00	T	FTm c
8	3	1.0E+00	30	1.19232341E+00	6.6E-01	3	3	0	9.E+00	0.E+00	T	FF c
9	2	1.0E+00	31	1.18487951E+00	1.2E-01	4	2	0	1.E+01	0.E+00	F	TT c
10	4	1.1E+00	46	1.16726959E+00	2.6E-02	3	3	0	9.E+00	0.E+00	T	TF c
11	2	7.9E-04	61	1.16593778E+00	2.6E-02	2	4	0	9.E+00	0.E+00	T	TFm c

Exit NP phase. Inform = 6 Majits = 12 nfun = 66 ngrad = 11

Exit NPSOL - Current point cannot be improved upon.

Final nonlinear objective value = 1.165938

NPSOL --- Version 5.0-2      Sept 1995  
 =====

Parameters  
 -----

cold start.....		Crash tolerance.....	0.10E-01
Infinite bound size....	1.00E+20	Minor Optimality tol...	1.72E-13
Infinite step size....	1.00E+20	Linear feasibility tol.	1.00E-01
Step limit.....	2.00E+00		
Optimality tolerance...	1.00E-02	Function precision....	1.00E-04
Nonlinear feasibility..	5.43E-06	Unit round-off.....	1.11E-16
Line search tolerance..	9.00E-01	Print file.....	9
Verify level.....	-1	Summary file.....	6

Difference intervals to be computed.

The user sets 0 out of 6 objective gradient elements.  
 Each iteration, 6 gradient elements will be estimated numerically.

Computation of the finite-difference intervals  
 -----

j	x(j)	Forward dx(j)	Central dx(j)	Error est.
1	2.93E+00	3.254121E-02	3.254121E-01	2.776012E-02
2	0.00E+00	3.753802E-02	3.753802E-01	6.410801E-02
3	3.57E+00	9.663745E-02	9.142000E-01	4.421558E-02
4	2.20E+00	1.314377E-01	6.984253E-01	1.826018E-02
5	1.50E+00	7.543689E-02	5.010000E-01	3.976447E-02
6	8.04E-01	9.134762E-02	3.608000E-01	1.952977E-02

Majr	Minr	Step	Fun	Objective	Norm gZ	nZ	Bnd	Lin	CondHz	Cond	T	Conv
0	2	0.0E+00	1	1.25836946E+00	4.7E-01	4	2	0	1.E+00	0.E+00	F	FF
Minor itn      2.      Central-differences computed.      QP re-solved.												
1	2	0.0E+00	4	1.25836946E+00	3.8E-01	5	1	0	1.E+00	0.E+00	T	FF c
2	2	6.4E-02	8	1.25520281E+00	3.0E-01	6	0	0	6.E+00	0.E+00	T	FT c
3	1	1.7E-03	23	1.25260165E+00	2.9E-01	6	0	0	6.E+00	0.E+00	T	FTm c
4	1	1.2E-01	26	1.25197677E+00	2.7E-01	6	0	0	6.E+00	0.E+00	T	FTm c
5	2	4.5E-01	28	1.25115865E+00	2.2E-01	5	1	0	6.E+00	0.E+00	T	TFm c
6	1	4.9E-01	30	1.24909128E+00	2.1E-01	5	1	0	6.E+00	0.E+00	T	TT c

Exit NP phase. Inform = 0 Majits = 6 nfun = 30 ngrad = 6

Exit NPSOL - Optimal solution found.

Final nonlinear objective value = 1.249091

# Literaturverzeichnis

- [1] ACHTZIGER, W.; ZOWE, J.: *Nichtglatte Optimierung*. Vorlesungsskript, Institut f. Angewandte Mathematik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 1996.
- [2] ANDERSON, S.: *On Hydrodynamic Torque Converters, Transactions of Machine Elements Division*, Dissertation, Lund Technical University, Sweden, 1992.
- [3] ANDRITZKY, B.: *Verifikation und Erweiterung des konfigurierbaren Berechnungskerns zur Simulation der Längsdynamik und zur Antriebsstrangauslegung von PKW mit Automatikgetrieben*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Lehrstuhl B für Mechanik, 1996.
- [4] ANONYMOUS: *Programm NUBEMM zur Erstellung der skalaren, linearisierten, numerischen Bewegungsgleichungen mechanischer Mehrkörpersysteme, BMW-Entwicklungsbericht Nr. 09/80*. München: BMW AG, 1980.
- [5] ———, *Amtsblatt der Europäischen Gemeinschaft Nr. 1 92/56*, April 1988.
- [6] ———: *BMW-Programmdokumentation ADS Automobil-Dynamik-Simulation*. München: BMW AG, 1990.
- [7] ———: *ve-DYNA User's Guide*. TESIS DYNAware GmbH, München, 1997.
- [8] ARNOLD, M.; NETTER, H.: *The Approximation of Contact Conditions in the Dynamical Simulation of Wheel-Rail Systems*, Techn. Rep. IB 515-96-08, German Aerospace Research Establishment, 1996.
- [9] ———: *Approximation of Contact Geometry in the Dynamical Simulation of Wheel-Rail Systems*, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, (1998).
- [10] AUMANN, G.; SPITZMÜLLER, K.: *Computerorientierte Geometrie*, Nr. 89 in Reihe Informatik, Wissenschaftsverlag, 1993.
- [11] BAUER, C.: *Ansätze zur Verbesserung der Konvergenzeigenschaften direkter Suchmethoden vom Nelder-Mead-Typ*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Institut für Angewandte Mathematik und Statistik, 1995.
- [12] BAUER, H.; ROBERT BOSCH GMBH, Eds.: *Kraftfahrtechnisches Taschenbuch / Bosch*, VDI-Verlag, 22. Auflage, 1995.
- [13] BAUMGARTE, J.: *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems*, Comp. Meth. in Appl. Mechanics, 1 (1972).
- [14] BEITZ, W.; KÜTTNER, K.-H., Eds.: *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau*, Springer, 18. Auflage, 1995.
- [15] BERKMANN, P.: *Optimales Durchstarten von Flugzeugen bei unterschiedlichen Scherwinden*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1993.
- [16] BIRNBAUM, H.; DENKMANN, N.: *Taschenbuch der Technischen Mechanik*, Verlag Harri Deutsch, 1997.

- [17] BLISS, G.: *Lectures on the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, 1945.
- [18] BOCK, H.-G.; PLITT, K.-J.: *A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems*, IFAC 9th World Congress, Budapest, Hungary, (1984).
- [19] BRANGS, P.: *HIL-Fahrzeug-Modell (ADS)*. München: BMW AG, September 1997.
- [20] BRAUNER, H.: *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- [21] BRENT, R. P.: *Algorithms for Minimization without Derivatives*, Prentice-Hall, 1973.
- [22] BRYSON, A. E.; HO, Y.-C.: *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975.
- [23] BULIRSCH, R.: *Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung*, Report der Carl-Cranz-Gesellschaft, DLR Oberpfaffenhofen, Deutschland, 1971. Nachdruck: Mathematisches Institut, Technische Universität München (1985,1993).
- [24] BÜSKENS, C.: *Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustands-Beschränkungen*, Dissertation, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1998.
- [25] CALLIES, R.: *Optimale Flugbahnen einer Raumsonde mit Ionentriebwerken*, Dissertation, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1990.
- [26] ———: *Entwurfsoptimierung und optimale Steuerung. Differential-algebraische Systeme, Mehrgitter-Mehrzielansätze und numerische Realisierung*, Habilitationsschrift, Technische Universität München, Zentrum Mathematik M2, 1999. eingereicht 1999.
- [27] CHOI, T.; GILMORE, P.; ESLINGER, O. J.; KELLER, C.; PATRICK, A.; GABLONSKY, J.: *IFFCO, Implicit Filtering for Constrained Optimization, Version 2*, Techn. Rep., Center for Research in Scientific Computation, North Carolina State University, Raleigh, Juli 1999.
- [28] CHOI, T.; KELLEY, C.: *Superlinear Convergence and Implicit Filtering*, Techn. Rep. CRSC-TR99-14, Center for Research in Scientific Computation, North Carolina State University, Raleigh, march 1999. To appear in SIAM J. on Optimization.
- [29] CHUCHOŁOWSKI, C.; VÖGEL, M.; STRYK, O. VON; WOLTER, T.-M.: *Real Time Simulation and Online Control for Virtual Test Drives of Cars*, in High Performance Scientific and Engineering Computing, Hans-Joachim Bungartz, C. Z., Franz Durst, Ed., Nr. 8 in Lecture Notes in Computational Science and Engineering 8, Munich, march 1998, International FORTWIHR Conference on HPSEC, Springer.
- [30] CHUDEJ, K.: *Optimale Steuerung des Aufstiegs eines zweistufigen Hyperschall-Raumtransporters*, Dissertation, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1994.
- [31] COHN, H.; FIELDING, M.: *Simulated Annealing: Searching for an optimal Temperature Schedule*, SIAM J. Optim., (1999).
- [32] COX, M.: *The numerical evaluation of B-Splines*, Techn. Rep. DNAC 4, National Physical Laboratory Report, Aug. 1971.
- [33] DACH, H.; KÖPF, P.: *Pkw-Automatikgetriebe: sicher, komfortabel und wirtschaftlich fahren*. Verlag Moderne Industrie, ZF-Getriebe, 1994.
- [34] DE BOOR, C.: *On Calculating with B-Splines*, Journal of Approximation Theory, 6 (1972).
- [35] ———: *A Practical Guide to Splines*, Applied Mathematical Sciences 27, Springer, 1978.
- [36] ———: *Splinefunktionen*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, 1990.

- [37] DENNIN, D.: IFAHRDY-NT. München: BMW AG, Januar 1999.
- [38] DENNIS, JR., J. E.; SCHNABEL, R. B.: *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, 1996.
- [39] DEUFLHARD, P.: *A modified Newton method for the solution of ill-conditioned systems of nonlinear equations with application to multiple shooting*, Num. Math., 22 (1974).
- [40] DEUFLHARD, P.; BORNEMANN, F.: *Numerische Mathematik II — Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen*, de Gruyter, 1994.
- [41] DEUFLHARD, P.; HOHMANN, A.: *Numerische Mathematik I — Eine algorithmisch orientierte Einführung*, de Gruyter, 2. Auflage, 1993.
- [42] DIERCKX, P.: *Curve and Surface Fitting with Splines*, Clarendon Press, 1993.
- [43] DÖRRSCHEIDT, F.; LATZEL, W.: *Grundlagen der Regelungstechnik*, B.G. Teubner Stuttgart, 1993.
- [44] EICH-SOELLNER, E.; FÜHRER, C.: *Numerical Methods in Multibody Dynamics*, Teubner, 1998.
- [45] FLETCHER, R.: *Practical Methods of Optimization*, John Wiley and Sons, 1987.
- [46] FOELLINGER, O.; ROPPENECKER, G.: *Optimierung dynamischer Systeme*, R. Oldenbourg Verlag, 1988.
- [47] FOLEY, T. A.; NIELSON, G. M.: *Knot Selection for Parametric Spline Interpolation*, Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, (1989).
- [48] FÜHRER, C.: *Differential-algebraische-Gleichungssysteme in mechanischen Mehrkörpersystemen. Theorie, numerische Ansätze und Anwendungen*, Dissertation, Mathematisches Institut der Technischen Universität München, 1988.
- [49] ———: *Numerische Methoden in der Mehrkörperdynamik*. Vorlesung im WS 1995/96, Mathematisches Institut der Technischen Universität München, 1995.
- [50] GEAR, C. W.: *Differential-algebraic equation index transformations*, SIAM J. Sci. Stat. Comp., 9 (1988).
- [51] GILL, P. E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M. A.; WRIGHT, M. H.: *User's Guide for NPSOL 5.0: A FORTRAN Package for nonlinear programming*. Report SOL 94-?, Department of Operations Research, Stanford University, 1995.
- [52] GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H.: *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- [53] GILMORE, P.: IFFCO, *Implicit Filtering for Constrained Optimization*, Techn. Rep. CRSC-TR93-7, Center for Research in Scientific Computation, North Carolina State University, Raleigh, Mai 1993.
- [54] GILMORE, P.; KELLEY, C.: *An implicit filtering algorithm for optimization of functions with many local minima*, SIAM J. Optim., 5 (1995).
- [55] GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V.: *Matrix Computation*, The Johns Hopkins University Press, 2<sup>nd</sup> ed., 1989.
- [56] GROSSMANN, C.; TERNO, J.: *Numerik der Optimierung*, Teubner, 1993.
- [57] GÜHRER, A.: *Beitrag zur Optimierung von Antriebssträngen bei Fahrzeugen*, Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Maschinenelemente und Gestaltungslehre, 1985.
- [58] HAHN, W.: *Stability of Motion*, Band 138 der Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

- [59] HASEWEND, W.: *AST 1b Software zur Fahrleistungs- und Verbrauchsrechnung — Pflichtenheft*. Graz: AVL List GmbH, Dezember 1996.
- [60] HECKES, H.-H.; MAIDL, J.: *Benutzerdokumentation Programmsystem FALKE — FAhrLeistung, KRAFTstoffverbrauch und Emissionen*. München: BMW AG, Oktober 1994.
- [61] HEIM, A.: *Parameteridentifikation in differential-algebraischen Gleichungssystemen*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1992.
- [62] ———: *Modellbildung, Simulation und optimale Bahnplanung bei Industrierobotern*, Dissertation, Technische Universität München, Zentrum Mathematik, 1997.
- [63] HERBERTZ, R.: *Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Föttinger-Getrieben*, Dissertation, Technische Universität Hannover, Fakultät für Maschinenwesen, 1973.
- [64] HESTENES, M. R.: *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Wiley and Sons, New York, 1966.
- [65] HIEBERT, K.; SHAMPINE, L.: *Implicitly Defined Output Points for Solutions of ODE-s*, Techn. Rep., Sandia Report, Feb. 1980.
- [66] HILTMANN, P.: *Numerische Lösung von Mehrpunktrandwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung mit Steuerfunktionen über endlichdimensionalen Räumen*, Dissertation, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1989. Nachdruck: Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft: Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Report Nr. 14, Mathematisches Institut, Technische Universität München.
- [67] HINDMARSH, A. C.: *Odepack — a systematized collection of ode solvers, in scientific computing*, in al., R. S. S. et, Ed., North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [68] HOOKE, R.; JEEVES, T. A.: „Direct search“ solution of numerical and statistical problems, J. Assoc. Comput. Mach., 8 (1961).
- [69] HOPPE, R. H.; MAZURKEVITCH, G.; RETTIG, U.; STRYK, O. VON: *Modeling, simulation, and control of electrorheological fluid devices*, Techn. Rep., Technische Universität München und Universität Augsburg, Sep. 1999. Preprint SFB-438-9917.
- [70] HOSCHEK, J.; LASSER, D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, Teubner, 1992.
- [71] HÜLSMANN, W.: *Entwicklung eines konfigurierbaren Berechnungskerns zur Simulation der Fahrzeuglängsdynamik und Antriebsstrangauslegung*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Lehrstuhl B für Mechanik, 1995.
- [72] INGBER, L.: *Very fast simulated re-annealing*, Mathl. Comput. Modelling, 12 (1989).
- [73] INGBER, L.; ROSEN, B.: *Genetic algorithms and very fast simulated reannealing: A comparison*, Mathematical and Computer Modelling, 16 (1992).
- [74] IOFFE, A. D.; TICHOMIROV, V. M.: *Theorie der Extremalaufgaben*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1979.
- [75] JASCHINSKI, A.: *Anwendung der Kalkerschen Rolltheorie zur dynamischen Simulation von Schienenfahrzeugen*, Techn. Rep. DFVLR-FB87-07, DFVLR, 1987.
- [76] ———: *On the Application of Similarity Laws to a Scaled Railway Bogie Model*, Techn. Rep. DLR-FB90-06, DLR, 1990.
- [77] JAUCH, F.: *Optimierung des Antriebsstranges von Kraftfahrzeugen durch Fahrsimulation*, Dissertation, Universität Stuttgart, Fakultät für Konstruktions- und Fertigungstechnik, 1989.
- [78] KELLEY, C.: *Detection and remediation of stagnation in the Nelder-Mead algorithm using a sufficient decrease condition*, SIAM J. Optim., 10 (1999).

- [79] KORTÜM, W.; LUGNER, P.: *Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen*, Springer, 1994.
- [80] KRAUSE, J.: *Simulation hybrider Fahrzeugkonzepte mit rechnergestützt erzeugten Antriebsstrangmodellen*, Dissertation, Technische Universität München, Lehrstuhl für Verbrennungskraftmaschinen und Kraftfahrzeuge, 1996.
- [81] KREGEL, B.; ENDRISS, W.: *Formeln, Tabellen und Schaltzeichen für kraftfahrzeugtechnische Berufe*, Dähmlow Verlag Neuss Köln, 1995.
- [82] KUGELMANN, B.: *Ein paralleles Rückkopplungsverfahren zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen*, Habilitationsschrift, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1994.
- [83] KÜNTSCHER, V.: *Kraftfahrzeugmotoren — Auslegung und Konstruktion*, Verlag Technik Berlin, 3., stark bearbeitete Auflage, 1995.
- [84] LA SALLE, S.; LEFSCHETZ, J.: *Die Stabilitätstheorie von Lyapunow — Die direkte Methode mit Anwendungen*, B.I. Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1967.
- [85] LANDAU, L.; LIFSCHITZ, E.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band I: Mechanik*, Akademie Verlag, 1990.
- [86] ———: *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band VII: Elastizitätstheorie*, Akademie Verlag, 1991.
- [87] LEE, E. T. Y.: *Choosing nodes in parametric curve interpolation*, Computer-aided design, 21 (1989).
- [88] LEWIS, R. M.; TORCZON, V.: *Pattern Search Algorithm for Bound Constrained Minimization*, SIAM J. Optim., 9 (1999).
- [89] LIAPOUNOFF, A.: *Problème général de la stabilité du mouvement*, Annals of mathematics studies, (1952). Princeton University Press.
- [90] MAYER, R.: *Verfahren zur Bahnfolgeregelung für ein automatisch geführtes Fahrzeug*, Dissertation, Universität Dortmund, Fakultät für Elektrotechnik, 1991.
- [91] MITSCHHELL, E.; GAUTHIER, J.: *Advanced Continuous Simulation Language ACSL*. Reference Manual, Concord MA, 1991.
- [92] MITSCHKE, M.: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Springer, 2. Aufl., 1990. Band C: Fahrverhalten.
- [93] ———: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Springer, 3. Aufl., 1995. Band A: Antrieb und Bremsung.
- [94] MODER, T.: *Optimale Steuerung eines Kfz im fahrdynamischen Grenzbereich*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1994.
- [95] NELDER, J.; MEAD, R.: *A simplex method for function minimization*, Comput. J., (1965).
- [96] NIELSON, G. M.; FOLEY, T. A.: *A survey of Applications of an Affine Invariant Metric*, Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, (1989).
- [97] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J.: *Numerical Optimization*, Springer Series in Operations Research, Springer, 1999.
- [98] NOWAK, U.; WEIMANN, L.: *A Family of Newton Codes for Systems of Highly Nonlinear Equations*, Techn. Rep., Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, ZIB, 1991. Bericht TR-91-10.
- [99] OBERLE, H. J.: *Numerische Berechnung optimaler Steuerungen von Heizung und Kühlung für ein realistisches Sonnenhausmodell*, Habilitationsschrift, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1982. Report TUM-MATH-8310, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1983).

- [100] OLBRICH, M.: *Ein strukturausnützendes Verfahren zur Bahnoptimierung bei Robotern*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1995.
- [101] PANKIEWICZ, E.: *Anwendung rechnergestützter Verfahren zur Generierung der Bewegungsgleichungen im Kraftfahrzeugbau*, Dissertation, Universität Stuttgart, Institut B für Mechanik, 1985.
- [102] PAPAGEORGIOU, M.: *Optimierung: Statische, dynamische und stochastische Verfahren für die Anwendung*, R. Oldenbourg Verlag München Wien, 2. Aufl., 1996.
- [103] PESCH, H. J.: *Numerische Berechnung Optimaler Flugbahnkorrekturen in Echtzeit-Rechnung*, Techn. Rep., Technische Universität München, Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik, München, Deutschland, 1978. Bericht TUM-MATH-7820.
- [104] ———: *Real-time Computation of Feedback Controls for Constrained Optimal Control Problems Part I: Neighboring Extremals, Part II: A Correction Method Based on Multiple Shooting*, Optimal Control Applications and Methods, 10 (1989).
- [105] ———: *Optimization methods for control and guidance*, in Proc. 2nd Space Course on Low Earth Orbit Transportation, München, 1993.
- [106] PETZOLD, L. R.: *Automatic selection of methods for solving stiff and nonstiff systems of ordinary differential equations*, in J. Sci. Stat. Comput. 4, SIAM, 1983.
- [107] PIEGL, L.: *On NURBS: A Survey*, IEEE Computer Graphics & Applications, 11 (1991).
- [108] POLAK, E.: *Optimization — Algorithms and Consistent Approximations*, Band 124 der Applied Mathematical Science, Springer, 1997.
- [109] PONTRJAGIN, L.; BOLTJANSKIJ, V.; GAMKRELIDZE, R.; MISCENKO, E.: *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*, Oldenburg München, 1964.
- [110] POPP, K.; SCHIEHLEN, W.: *Fahrzeugdynamik*, B.G. Teubner Stuttgart, 1993.
- [111] POWELL, M.: *A Fast Algorithm for Nonlinearly Constrained Optimization Calculation*, Lecture Notes in Mathematics, (1978).
- [112] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, 1992.
- [113] RATH, M.: *Abbildung hydrodynamischer Kopplungen in Antriebssystemen*, Dissertation, RWTH Aachen, 1992.
- [114] REINSCH, C.: *Skriptum zur Vorlesung: Numerische Mathematik 1 und 2*. TUM-MATH Nov. 1995, Mathematisches Institut, Technische Universität München, 1995.
- [115] RENTROP, P.: *Numerische Probleme in der Fahrzeugtechnik*, in Proc. of the Workshop Road-Vehicle-System and Related Mathematics, Neunzert, H., Ed., Teubner, 1985.
- [116] RENTROP, P.; STREHMEL, K.; WEINER, R.: *Ein Überblick über Einschrittverfahren zur numerischen Integration in der technischen Simulation*, GAMM Mitteilungen, 19 (1996). Heft 1.
- [117] RICHTER, M.: *Algorithmen zur Konstruktion und Anwendung multivariater B-Splines*, Dissertation, Technische Universität München, Institut für Mathematik, 1996.
- [118] RIEDMÜLLER, B.; RITTER, K.: *Lineare und Quadratische Optimierung*. Skriptum zur Vorlesung, Institut f. Angewandte Mathematik und Statistik, Technische Universität München, 1986.
- [119] RILL, G.: *Simulation von Kraftfahrzeugen*, Vieweg, 1994.
- [120] RITTER, K.; KREDLER, C.: *Nichtlineare Optimierung*. Skriptum zur Vorlesung, Institut f. Angewandte Mathematik und Statistik, Technische Universität München, 2. Auflage, 1992.

- [121] ROBERSON, R. E.; SCHWERTASSEK, R.: *Dynamics of multibody systems*, Springer, 1988.
- [122] RULKA, W.: SIMPACK, *ein Rechenprogramm zur Simulation von Mehrkörpersystemen mit großen Bewegungsgleichungen*, in In Proc. Finite Elemente in der Praxis, Computergestütztes Berechnung und Konstruieren, sT-Programm Reutlingen, 1989.
- [123] SCHITTKOWSKI, K.: *On the Convergence of a Sequential Quadratic Programming Method with an Augmented Lagrangian Line Search Function*, Math. Operationsforsch. u. Stat., Ser. Optimization, 14 (1983).
- [124] SCHLITT, H.: *Regelungstechnik*, Vogel Buchverlag, 1993.
- [125] SCHMID, W. T.: *Ein Simulationsverfahren für nichtlinear gekoppelte Fahrzeuggespanne*, Dissertation, Universität Karlsruhe, Fakultät für Maschinenbau, 1988.
- [126] SCHREIBER, R.; KÖGEL, R.; HÄSE, P.; HILDENBRAND, P.: *Regelung zur optimalen Kraftschlußausnutzung bei Drehstromlokomotiven auf der Basis der Steigung der Kraftschlußkennlinien*, in Elektrische Bahnen — Antriebstechnik, Oldenbourg-Verlag, 1995.
- [127] SCHWERTASSEK, R.; WALLRAPP, O.: *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*, Springer, 1999.
- [128] SIMEON, B.: *Numerische Integration mechanischer Mehrkörpersysteme: Projizierende Deskriptorform, Algorithmen und Rechenprogramme*, Band 130 der Fortschritt-Berichte VDI Reihe 20: Rechnerunterstützte Verfahren, VDI Verlag, 1994.
- [129] SIMEON, B.; FÜHRER, C.; RENTROP, P.: *Differential-algebraic equations in vehicle system dynamics*, Surveys on Mathematics for Industry, (1991).
- [130] SIMEON, B.; GRUPP, F.; FÜHRER, C.; RENTROP, P.: *A Nonlinear Truck Model and its Treatment as a Multibody System*, Techn. Rep., Technische Universität München, Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik, München, Deutschland, Mai 1992. Bericht TUM-M9204.
- [131] SPONG, M. W.; VIDYASAGAR, M.: *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, 1989.
- [132] STOER, J.; BULIRSCH, R.: *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, 2<sup>nd</sup> ed., 1993.
- [133] TOLLE, H.: *Optimierungsverfahren*, Springer, 1971.
- [134] TORCZON, V.: *On the Convergence of the Multidirectional Search Algorithm*, SIAM J. Optim., 1 (1991).
- [135] ———: *On the Convergence of Pattern Search Algorithms*, SIAM J. Optim., 7 (1997).
- [136] TROCH, I.: *Modellbildung und Simulation*. Skriptum zur Vorlesung, Institut f. Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik, Technische Universität Wien, 1991.
- [137] TSCHARNUTER, D.: *Charakterisierung des Einzugsbereichs der Ruhelage eines Differentialgleichungssystems*, Diplomarbeit, Technische Universität Wien, Institut für Analysis, Technische Mathematik und Versicherungsmathematik, 1994.
- [138] ———: *Eine Regelung für Antrieb und Schlupf bei Lokomotiven*, Techn. Rep., Technische Universität München, Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik, München, Deutschland, Juli 1996. Bericht TUM-M9612.
- [139] ———: *Numerical Simulation of Vibration for the Design of a Rear Axle*, in High Performance Scientific and Engineering Computing, Hans-Joachim Bungartz, C. Z., Franz Durst, Ed., Nr. 8 in Lecture Notes in Computational Science and Engineering 8, Munich, march 1998, International FORTWIHR Conference on HPSEC, Springer.
- [140] ———: *Study of rear axle with rigid multibody formulation versus elastic multibody formulation*, EUCAR, I.T.I.A. International Project INVEC, Task 1.5, (1998).

- [141] TSCHARNUTER, D.; STRYK, O. VON; BULIRSCH, R.: *Zur Problematik der Antriebsstrangsimulation mit den Programmpaketen ADAMS, DADS und SIMPACK*, Techn. Rep., Technische Universität München, Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik, München, Deutschland, Dez. 1996. Studie für BMW AG.
- [142] VÖGEL, M.: *Fahrbahnmodellierung und Kursregelung für ein echtzeitfähiges Fahrdynamikprogramm*, Diplomarbeit, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1997.
- [143] STRYK, O. VON: *Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen*, Dissertation, Technische Universität München, Mathematisches Institut, 1994.
- [144] ZIEGLER, F.: *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper*, Springer, 1992.
- [145] ZOELCH, U.: *Ein Beitrag zu optimaler Auslegung und Betrieb von Hybridfahrzeugen*, Dissertation, Technische Universität München, Lehrstuhl für Elektrische Antriebstechnik, 1998.
- [146] ZUBOV, V. I.: *Methods of A.M. Lyapunov and their Application*, The Netherlands, 1964. (ed. L.F. Boron), P. Noordhoff Ltd., Groningen.

# Notation

$\cdot$	Platzhalter
$\ \cdot\ _2$	Euklidische Norm, $l_2$ -Norm
$\delta \cdot$	1. Variation, virtuelle Verrückung
$\Delta \cdot$	Differenz
$\cdot_i$	$i$ -te Komponente eines Vektors
$\cdot^{(k)}$	Größe des $k$ -ten Körpers

## Kapitel 1 (Modellierung)

### Mathematische Größen

$t$	Zeit, die unabhängige Variable
$t_i$	$i$ -ter Zeitpunkt
$(x, y, z)$	kartesische Koordinaten (translatorische Freiheitsgrade)
$(\varphi, \psi, \theta)$	Eulerwinkel (rotatorische Freiheitsgrade)
$(\alpha, \beta, \gamma)$	Kardanwinkel (rotatorische Freiheitsgrade)
$N$	Anzahl der Körper
$n_{\bar{p}} := 6N$	Anzahl der redundanten Koordinaten (maximale Anzahl der Freiheitsgrade)
$n_q$	Anzahl der verallgemeinerte Koordinaten (Minimalkoordinaten)
$n_\lambda$	Anzahl der Zwangsbedingungen
$n_f := n_q - n_\lambda$	Anzahl der Freiheitsgrade
$n_x, n := 2n_q + n_\lambda$	Anzahl der Zustände, Dimension des Modells
$n_u$	Anzahl der Steuerungen
$n_k$	Anzahl der Kennlinien und -felder
$n_p$	Anzahl der Parameter

$\bar{\mathbf{p}}^{(k)} = (x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, \gamma^{(k)})$	Freiheitsgrade des $k$ -ten Starrkörpers im Raum
$\bar{\mathbf{p}} = (\bar{\mathbf{p}}^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{p}}^{(N)})$ $= (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n_{\bar{p}}})$	redundante Koordinaten von $N$ Starrkörpern im Raum
$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{n_q})$	verallgemeinerte Koordinaten (Minimalkoordinaten)
$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n_q})$	verallgemeinerte Geschwindigkeiten
$\ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{n_q})$	verallgemeinerte Beschleunigungen
$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n_\lambda})$	Lagrangeparameter
$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n_u})$	Steuerungen
$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n_k})$	Kennlinien und Kennfelder
$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{n_p})$	Parameter
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsgrößen
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	Ableitungen der Zustandsgrößen nach der Zeit
$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{0}$	implizite Differentialgleichung
$\mathbf{M}, \mathbf{M}(\mathbf{q})$	Massenmatrix
$\mathbf{f}(\cdot)$	rechte Seite der Differentialgleichung
$\mathbf{s}(\cdot)$	Kennlinienmodelle
$\mathbf{d}(\cdot)$	Reglergesetze
$\mathbf{y}(\cdot)$	Ausgangsvektor
$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	Systemmatrix
$\mathbf{B}(\mathbf{x})$	Eingangsmatrix
$\mathbf{C}(\mathbf{x})$	Ausgangsmatrix
$\mathbf{D}(\mathbf{x})$	Durchgangsmatrix
$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$	geometrische Zwangsbedingungen
$\mathbf{G}^T(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q})$	Zwangsmatrix

## Modellgrößen

Notation	Zuordnung	Notation	Zuordnung
$\cdot^h$	hinten	$\cdot^v$	vorne
$\cdot^{ges}$	gesamt	$\cdot^{starr}$	starre Verbindung

Notation	Zuordnung	Notation	Zuordnung
•soll	Sollwert	•ist	Istwert
•hydr	hydraulisch	•mech	mechanisch
•max	maximal	•red	reduziert
•aus	am Ausgang	•ein	am Eingang
•dyn	dynamisch	•stat	stationär
•Fzg	Fahrzeug	•Mot	Motor
•KW	Kurbelwelle	•Agg	Aggregat
•V	Verbraucher	•K	Kupplung
•P	Pumpe	•T	Turbine
•W	Wandler	•GAW	Getriebeabtriebswelle
•G	Getriebe	•SR	Schaltrichtung
•KD	Kick down	•VG	Verteilergetriebe
•GW	Gelenkwelle	•AW	Abtriebswelle
•R	Rad	•B	Bremse
•BS	Bremsscheibe	•BK	Bremskraft
$n$	Drehzahl	$\omega$	Winkelgeschwindigkeit
$\varphi$	Drehwinkel	$\dot{\omega}$	Winkelbeschleunigung
$m$	Masse	$n_{PC} = 2000$	Drehzahl bei der Messung des Pumpenaufnahmemoments
$J$	Trägheitsmoment	$M_{PC}, M_{P2000}$	Pumpenaufnahmemoment
$i$	Übersetzung	$S$	Schlupf im Wandler
$G$	Gang	$k_P, k_I, k_D$	Parameter des PID-Reglers
$M$	Moment	$W$	Zustand der Wandlerüberbrückungskupplung (WÜK)
$P$	Leistung	$F_{dyn}^A, F_{dyn}^B, F_{dyn}^C$	Faktoren der dynamischen Drehmomentenüberhöhung
$r$	Radius	$f_{roll}$	Rollwiderstandsbeiwert
$\eta$	Wirkungsgrad	$\alpha$	Last
$\nu = \frac{n_T}{n_P}$	Drehzahlverhältnis	$\mu = \frac{M_T}{M_P}$	Drehmomentenverhältnis (Drehmomentenüberhöhung)
$\varepsilon_{BK}$	Bremskraftverteilung	$c_W$	$c_W$ -Wert (Luftwiderstandsbeiwert)

## Kapitel 2 (Kennlinien und Kennfelder)

### Kennlinien

$n + 1$	Anzahl der Stützstellen für eine Kennlinie
$(x_i, y_i)_{i=0, \dots, n}$	$n + 1$ Stützstellen einer Kennlinie
$I_a^b = [a, b]$	Interpolationsintervall
$\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \dots, \tau_{n_\tau})$	Zerlegung von $I_a^b$ , Knotenvektor für eindimensionale Splines
$T_i := [\tau_i, \tau_{i+1}] \subset I_a^b$	Teilintervall des Knotenvektors $\boldsymbol{\tau}$
$t \in I_a^b$	Parameter
$t_i \in I_a^b, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n+1}$	Parametrisierung eindimensionaler Kennlinien
$k, (k - 1)$	Ordnung (Grad)
$\mathcal{P}_{k-1}$	Raum der Polynome der Ordnung $k$ (vom Grade $k - 1$ )
$S_{\boldsymbol{\tau}}^k$	Raum der eindimensionalen Spline-Funktionen der Ordnung $k$ mit dem Knotenvektor $\boldsymbol{\tau}$
$\varsigma(t) \in S_{\boldsymbol{\tau}}^k$	eindimensionale Spline-Funktion
$\varsigma^{(\nu)}(t) \in S_{\boldsymbol{\tau}}^k$	$\nu$ -te Ableitung einer eindimensionalen Spline-Funktion
$\boldsymbol{\varsigma}(t) \in \mathbb{R}^{n_\varsigma}$	Spline-Funktion im $\mathbb{R}^{n_\varsigma}$ , $n_\varsigma = 1, 2, 3$
$B_j^{k-1}(\cdot)$	Bernsteinpolynome vom Grad $k - 1$
$N_{i,k}(\cdot)$	normalisierte $\mathcal{B}$ -Splines der Ordnung $k$ (vom Grade $k - 1$ )
$M_{i,k}(\cdot)$	nichtnormalisierte $\mathcal{B}$ -Splines der Ordnung $k$ (vom Grade $k - 1$ )
$N_{i,k}^\nu(\cdot)$	$\nu$ -te Ableitung der normalisierten $\mathcal{B}$ -Splines der Ordnung $k$ (vom Grade $k - 1$ )
$\mathbf{d}_i = (d_i^x, d_i^y, d_i^z)$	de Boor-Punkte, Spline-Koeffizienten
$\mathbf{d}_i^{(\nu)}$	de Boor-Punkte der $\nu$ -ten Ableitung einer Spline-Funktion
$\mathbf{d}_i^{[j]}$	$j$ -te Iteration des de Boor-Algorithmus
$\mathbf{p}_i$	Kontrollpunkte
$\mathbf{b}_i$	Bézier-Punkte

### Kennfelder

$(n + 1)(m + 1)$	Anzahl der Stützstellen für ein Kennfeld
$(x_i, y_j, z_{ij})_{i=0, \dots, n}^{j=0, \dots, m}$	$(n + 1)(m + 1)$ Stützstellen eines Kennfelds

$\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$	Interpolationsgebiet
$\mathcal{R}_{ij} \subset \mathcal{R}$	Teilgebiet
$(u, v) \in \mathcal{R}$	Parameter
$(u_i, v_j) \in \mathcal{R}_{ij}$	Tensorproduktgitter
$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{m+1}$	Parametrisierung zweidimensionaler Kennfelder
$k, \quad (k-1)$	Ordnung (Grad) in $u$ -Richtung
$l, \quad (l-1)$	Ordnung (Grad) in $v$ -Richtung
$\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \dots, \xi_{n_\xi})$	Knotenvektor für $u$ -Komponente bei zweidimensionalen Splines
$\boldsymbol{\eta} = (\eta_0, \dots, \eta_{n_\eta})$	Knotenvektor für $v$ -Komponente bei zweidimensionalen Splines
$S_{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}}^{k,l}$	Raum der zweidimensionalen Spline-Funktionen der Ordnung $k$ mit dem Knotenvektor $\boldsymbol{\xi}$ in $u$ -Richtung und der Ordnung $l$ mit dem Knotenvektor $\boldsymbol{\eta}$ in $v$ -Richtung
$\varsigma(u, v) \in S_{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}}^{k,l}$	zweidimensionale Spline-Funktion
$a_j(v) \in S_{\boldsymbol{\eta}}^k$	eindimensionale Spline-Funktion
$b_i(u) \in S_{\boldsymbol{\xi}}^k$	eindimensionale Spline-Funktion
$d_{ij}$	de Boor-Punkte, Spline-Koeffizienten

## Zur Indexbestimmung

$m^*$	Hilfsgröße
$m + 1$	Dimension von $\boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_m)$	äquidistanter (einfacher) Knotenvektor
$\Delta\lambda := \lambda_1 - \lambda_0$	Länge eines Teilintervalls von $\boldsymbol{\lambda}$
$\Lambda_i := [\lambda_i, \lambda_{i+1})$	Teilintervall des äquidistanten einfachen Knotenvektors $\boldsymbol{\lambda}$
$\Delta\tau_i := \tau_i - \tau_{i-1}$	Länge des $i$ -ten Teilintervalls von $\boldsymbol{\tau}$
$ \boldsymbol{\tau}  := \min_{i=0}^n \Delta\tau_i$	Länge des kürzesten Teilintervalls von $\boldsymbol{\tau}$
$I := \{0, \dots, n-1\}$	Indexmenge
$J := \{0, \dots, m-1\}$	Indexmenge
$i_{\boldsymbol{\tau}} : [a, b] \rightarrow J$	Abbildung des Interpolationsintervalls auf die Indexmenge $J$
$i_{\boldsymbol{\lambda}} : J \rightarrow I$	Abbildung der Indexmenge $J$ auf die Indexmenge $I$

## Aus der Differentialgeometrie

$I, I'$	Intervalle
$\mathcal{C}^r(I)$	Raum der auf dem Intervall $I$ $r$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen ( $r \geq 1$ )
$\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$	$\mathcal{C}^r(I)$ -Weg
$c(I)$	$\mathcal{C}^r(I)$ -Kurve
$s = s(t) = L_0^t[\mathbf{c}]$	Bogenlänge eines Wegs $\mathbf{c}$
$\dot{\mathbf{c}}$	Ableitung eines $\mathcal{C}^r(I)$ -Wegs $\mathbf{c}$ nach dem Parameter $t \in I$
$\mathbf{c}'$	Ableitung eines $\mathcal{C}^r(I)$ -Wegs $\mathbf{c}$ nach der Bogenlänge $s$
$\gamma : I' \rightarrow I$	$\mathcal{C}^r(I)$ -Diffeomorphismus, Parameterwechsel
$\mathbf{t}$	Tangentenvektor
$\mathbf{n}$	Hauptnormalenvektor
$\mathbf{b}$	Binormalenvektor
$(\mathbf{c}; \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$	begleitendes Dreibein
$\kappa$	Krümmung
$\tau$	Torsion

## Zur Einbettung

$k$	Kennlinie
$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$	Koeffizienten der konvexen Linearkombination
$\alpha$	Einbettungsparameter

## Kapitel 3 (Optimierung)

$t$	Zeit, unabhängige Variable
$t_f$	Endpunkt
$I_0^{t_f} = [0, t_f]$	betrachtetes Zeitintervall
$\overset{\circ}{I}_0^{t_f} = (0, t_f)$	Inneres des Zeitintervalls
$f(\cdot)$	rechte Seite der Differentialgleichungen

### Zur Optimalsteuerung

$t_I$	innerer Punkt
$\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$	Zustandsvariable
$\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}$	Steuervariable
$f(\cdot)$	rechte Seite der Differentialgleichungen
$\mathcal{C}_{n_u}^s$	Funktionenklasse der Steuervariablen
$I : \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}$	Zielfunktional
$L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	Lagrangefunktion
$\varphi(\mathbf{x}(t_f), t_f)$	Mayersche Anteil der Zielfunktion
$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0}$	Randbedingungen
$\mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{0}$	Steuerbeschränkung
$\mathbf{N}(\mathbf{x}(t_I), t_I) = \mathbf{0}$	Innere-Punkt-Bedingung
$\mathbf{S}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathbf{0}$	Zustandsbeschränkung

### Zur Parameteroptimierung

$F : \mathbb{R}^{n_p} \rightarrow \mathbb{R}$	Zielfunktion, Gütekriterium
$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{n_p})$	Designparameter
$\mathbf{p}_l, \mathbf{p}_u$	untere und obere Schranke der Designparameter
$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{n_q})$	verallgemeinerte Koordinaten
$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n_q})$	verallgemeinerte Geschwindigkeiten
$\ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_{n_q})$	verallgemeinerte Beschleunigungen
$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n_u})$	Steuerungen
$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n_k})$	Kennlinien und Kennfelder

$M$	Massenmatrix
$s(\cdot)$	Kennlinienmodelle
$d(\cdot)$	Reglergesetze
$g(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$	nichtlineare Gleichungsbeschränkung
$c(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}$	nichtlineare Ungleichungsbeschränkung
$Z$	Zulässigkeitsbereich
$c^a(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$	aktive Nebenbedingungen der $c(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}$
$c^i(\mathbf{p}) < \mathbf{0}$	inaktive Nebenbedingungen der $c(\mathbf{p}) \leq \mathbf{0}$
$\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n_{ci}})$	Schlupfvariable
$\alpha$	Skalar
$\mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{p})$	abgeschlossene $\varepsilon$ -Kugel um den Punkt $\mathbf{p}$
$\mathbf{p}^{(l)}$	Punkt der $l$ -ten Iteration
$\mathbf{s}^{(l)}$	Suchrichtung der $l$ -ten Iteration
$\sigma^{(l)}$	Suchschrittweite der $l$ -ten Iteration