

**Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München**

**Neue Methoden zur Bestimmung
expliziter Schranken von
Kazhdan-Konstanten**

Markus Neuhauser

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. Jürgen Scheurle

Prüfer der Dissertation:

1. apl. Prof. Dr. G. Schlichting
2. Prof. Dr. M. el B. Bekka, Univ. de Metz/Frankreich
3. Univ.-Prof. Dr. R. Lasser

Die Dissertation wurde am 6. März 2001 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 21. Juli 2001 angenommen.

Einleitung

D. A. Kazhdan führte 1967 in dem Artikel „Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups“ [31] eine neue, bemerkenswerte Klasse lokalkompakter Gruppen ein. Er nannte sie Gruppen mit der Eigenschaft (T). Sie werden durch eine Eigenschaft ihrer unitären Darstellungen definiert (siehe Definition 0.0.2 unten). Diese Gruppen haben inzwischen Anwendung gefunden in der Ergodentheorie (siehe z. B. [51]) und in der Graphentheorie (siehe z. B. [35]), sowie in der Geometrie und der Theorie der Operatoralgebren. Beispiel einer solchen Gruppe ist $SL(n, \mathbf{Z})$ für $n \geq 3$. Mit Hilfe der Eigenschaft (T) erhält man schnell Information über die Struktur der betrachteten Gruppe. So ist jede diskrete Gruppe mit der Eigenschaft (T) automatisch endlicherzeugt und ihre Kommutatoruntergruppe hat endlichen Index. Diese Tatsache wurde von Kazhdan entdeckt und begründete gerade sein Interesse an der Eigenschaft (T). Es ist i. A. schwierig nachzuweisen, daß eine gegebene lokalkompakte Gruppe die Eigenschaft (T) besitzt, sofern sie nicht kompakt ist (es ist leicht zu sehen, daß kompakte Gruppen die Eigenschaft (T) besitzen).

Das von D. A. Kazhdan in [31] erzielte Resultat sagt aus, daß für einen lokalen Körper K die Gruppe $G(K)$ der K -rationalen Punkte einer einfachen algebraischen Gruppe G definiert über K eine Gruppe mit der Eigenschaft (T) ist, falls G einen K -Rang ≥ 2 besitzt. Insbesondere sind also $SL(n, K)$ für $n \geq 3$ und $Sp(n, K)$ für $n \geq 2$ Gruppen mit der Eigenschaft (T). Die Eigenschaft (T) vererbt sich auch auf Gitter in $G(K)$, also diskrete Untergruppen mit endlichem Kovolumen. Dabei besitzt Γ endliches Kovolumen, wenn der homogene Raum $G(K)/\Gamma$ ein $G(K)$ -invariantes nichttriviales endliches Maß besitzt. Also ist $SL(n, \mathbf{Z})$ als Gitter in $SL(n, \mathbf{R})$ für $n \geq 3$ eine Gruppe mit der Eigenschaft (T).

Zur Definition der Eigenschaft (T)

Vor der Definition der Eigenschaft (T) erfolgt die Fixierung des hier verwendeten Begriffs einer Darstellung.

0.0.1 Definition. Eine *starkstetige unitäre Darstellung* einer topologischen Gruppe G auf einem Hilbert-Raum H ist ein Gruppenhomomorphismus π von G in die Gruppe der unitären Operatoren auf H derart, daß die Abbildung von $G \times H$ nach H , wobei (g, ξ) abgebildet wird auf $\pi(g)\xi$, stetig ist.

Die Verwendung des Begriffs Darstellung geschieht hier und im folgenden immer im Sinn starkstetiger unitärer Darstellungen, auch wenn dies nicht jedesmal ausdrücklich erwähnt wird. Der zur Darstellung π gehörige Hilbert-Raum wird mit H_π bezeichnet.

0.0.2 Definition. Sei G eine topologische Gruppe.

- (a) Sei $\varepsilon > 0$ und $Q \subset G$ eine kompakte Teilmenge. Eine starkstetige unitäre Darstellung π von G auf H_π besitzt (ε, Q) -invariante Vektoren, falls es ein $\xi \in H_\pi$ gibt derart, daß $\|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\|$ für alle $g \in Q$ ist.
- (b) Die Darstellung besitzt *fastinvariante Vektoren*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder kompakten Teilmenge Q der Gruppe (ε, Q) -invariante Vektoren gibt.
- (c) Die Gruppe G ist eine *Kazhdan-Gruppe* oder eine Gruppe mit *Eigenschaft (T)* oder *Kazhdans Eigenschaft (T)*, wenn jede Darstellung π der Gruppe G mit fastinvarianten Vektoren einen nichttrivialen invarianten Vektor besitzt, d. h. es gibt ein $\xi \in H_\pi \setminus \{0\}$ derart, daß $\pi(g)\xi = \xi$ für alle $g \in G$.
- (d) Die *Kazhdan-Konstante einer Darstellung* π von G auf H_π und einer kompakten Menge $Q \subset G$ ist erklärt durch

$$K(\pi, G, Q) = \inf_{\substack{\xi \in H_\pi \\ \xi \neq 0}} \|\xi\|^{-1} \sup_{g \in Q} \|\pi(g)\xi - \xi\|$$

und die *Kazhdan-Konstante* relativ zu dieser kompakten Menge Q durch $K(G, Q) = \inf_{\pi \in \Pi} K(\pi, G, Q)$, wobei Π die Menge aller Äquivalenzklassen der Darstellungen von G bezeichne, die die triviale Darstellung nicht enthalten.

- (e) Eine Konstante $\varepsilon > 0$ und eine kompakte Teilmenge Q bilden ein *Kazhdan-Paar* (ε, Q) , falls jede Darstellung der Gruppe mit (ε, Q) -invarianten Vektoren bereits nichttriviale invariante Vektoren besitzt.

Ist (ε, Q) ein Kazhdan-Paar, so gilt $\varepsilon \leq K(G, Q)$. Aus einem Kazhdan-Paar erhält man demnach eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante.

Ist Q ein kompaktes Erzeugendensystem einer lokalkompakten Gruppe G , so ist G genau dann eine Kazhdan-Gruppe, wenn $K(G, Q) > 0$ ist. Für einen Beweis siehe [26, Seite 14].

Der unitäre Dual \widehat{G} einer lokalkompakten Gruppe G ist die Menge aller Äquivalenzklassen irreduzibler unitärer Darstellungen von G . Der Dualraum trägt eine natürliche Topologie, die sogenannte Fell-Topologie. Dabei ist eine Darstellung π im Abschluß einer Teilmenge Π des Duals, wenn es möglich ist, die Matrixkoeffizienten von π gleichmäßig auf kompakten Mengen durch Summen von Matrixkoeffizienten von Darstellungen aus Π zu approximieren. Eine lokalkompakte Gruppe ist genau dann eine Kazhdan-Gruppe, wenn die triviale Darstellung isoliert ist in \widehat{G} bezüglich der Fell-Topologie. Dies ist eine äquivalente Definition der Eigenschaft (T). Es war die ursprüngliche Definition der Eigenschaft (T) von D. A. Kazhdan in [31, Seite 63]. Einen Überblick zur Eigenschaft (T) erhält man in [26] und [48].

Für Teilmengen des unitären Duals \widehat{G} läßt sich folgende relative Eigenschaft (T) definieren, vergleiche auch [35, Seite 24]. Dies findet auf verschiedene Weise Verwendung. In Kapitel 1 für die Teilmenge der Äquivalenzklassen derjenigen Darstellungen, deren Kern ein Normalteiler von endlichem Index ist, und in Kapitel 2 für die Teilmenge der Äquivalenzklassen derjenigen Darstellungen, deren Einschränkung auf eine bestimmte Untergruppe nicht die triviale Darstellung enthält.

0.0.3 Definition. Sei G eine lokalkompakte Gruppe und $\Pi \subset \widehat{G}$ eine Teilmenge des unitären Duals, dann besitzt G die *Eigenschaft (T) relativ Π* , falls die triviale Darstellung χ_0 in $\Pi \cup \{\chi_0\}$ isoliert ist.

Die gewöhnliche Eigenschaft (T) ist also in dieser Terminologie die Eigenschaft (T) relativ \widehat{G} .

Zusammenfassung

Thema der Arbeit sind Methoden zur Abschätzung von Kazhdan-Konstanten. Die Hauptergebnisse liefern Schranken der Kazhdan-Konstanten dreier verschiedener Typen von Gruppen.

Der erste Teil handelt von Kazhdan-Konstanten diskreter Gruppen. Einerseits erhält man aus einer diskreten Kazhdan-Gruppe, ihrem Erzeugendensystem und einer Familie von Normalteilern mit endlichem Index expandierende Graphen. Margulis konstruierte in [37] mit der Eigenschaft (T) relativ einer Menge Π sogar die ersten explizit angebbaren Beispiele dafür. In Zusammenhang dazu steht auch ein Eigenwert eines Laplace-Operators auf den Graphen. Es ist möglich, diesen Eigenwert, wie die zu den expandierenden Graphen gehörige Konstante, unabhängig für eine Familie expandierender Graphen nach unten zu beschränken. Abschnitt 1.1 stellt einige Aussagen dazu vor. Dabei sind expandierende Graphen z. B. in der Konstruktion von Telekommunikationsnetzwerken von Bedeutung. Denn sie erfüllen die Voraussetzungen dafür, daß sich Informationen schnell in dem Netz ausbreiten, aber dabei auch die Anzahl an Verbindungen zwischen den Knotenpunkten nicht übermäßig groß wird.

Andererseits liefert ein Ergebnis von A. Żuk eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine diskrete Gruppe eine Kazhdan-Gruppe ist, siehe 1.2. A. Żuk erzielte in [53] folgendes Ergebnis. Ein symmetrisches Erzeugendensystem der diskreten Gruppe erzeugt einen Graphen, indem zwei Elemente des Erzeugendensystems genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn man das eine Element durch Multiplikation des anderen von rechts mit einem Element des Erzeugendensystems erhält. Ist nun der zweitkleinste Eigenwert eines Laplace-Operators auf diesem Graphen $> 1/2$, so sagt der Satz von A. Żuk aus, daß die diskrete Gruppe eine Kazhdan-Gruppe ist.

Eine Anwendung dieses Satzes, die auch in [53] erscheint, ist folgende. Dabei erfolgte die Betrachtung der Klasse der sogenannten \widetilde{A}_2 -Gruppen. Das sind Gruppen, die kokompakt auf einem Gebäude vom Typ \widetilde{A}_2 operieren. Primzahlpotenzen k liefern eine Parametrisierung dieser Gruppen. Der Satz

von A. Żuk ergibt $(2/\sqrt{3}) \left(1 - \sqrt{k}/(k+1 - \sqrt{k})\right)$ als untere Schranke der Kazhdan-Konstante.

Der Beweis des Satzes von A. Żuk hier vermeidet die explizite Behandlung der Kohomologiegruppen wie im Originalbeweis. Dadurch ist der Beweis hier auch kürzer. Zusätzlich ist es möglich den aus dem Erzeugendensystem konstruierten Graphen sogar mit Gewichten zu versehen, die bestimmten Bedingungen genügen. Das Resultat für gewöhnliche Graphen stammt von A. Żuk und ergibt eine explizite Schranke für die Kazhdan-Konstante. Das Resultat und die Beweise dazu findet man in 1.2.

Abschnitt 1.3 enthält die Bestimmung von Erzeugendensystemen der Gruppen $SL(2, \mathbf{Z})$ und $SL(3, \mathbf{Z})$. Der Satz von A. Żuk läßt sich jedoch nicht auf das Erzeugendensystem von $SL(3, \mathbf{Z})$ anwenden, da der Eigenwert des dazugehörigen Laplace-Operators die Bedingung nicht erfüllt. Es ist jedoch nicht gelungen, ein Erzeugendensystem zu konstruieren, das einen größeren Eigenwert besitzt. Durch den Graphen, der aus einem Erzeugendensystem von $SL(2, \mathbf{Z})$ entstanden ist, erhält man ein weiteres Beispiel dafür, daß es nicht möglich ist die Voraussetzung im Satz von A. Żuk abzuschwächen.

Abschnitt 1.4 untersucht das Verhalten des Eigenwerts des Laplace-Operators bei der Entfernung von Kanten aus dem Graphen. Gute Aussagen erhält man für Kanten, deren Anfangs- und Endknoten jeweils viele Nachbarn besitzen. Für Graphen, die aus Erzeugendensystemen diskreter Gruppen definiert durch Erzeugende und Relationen konstruiert werden, entspricht das Entfernen von Relationen gerade dem Entfernen bestimmter Kanten. Die ursprüngliche Gruppe ist dann eine Faktorgruppe der durch weniger Relationen definierten Gruppe. Für entsprechend große Eigenwerte erlauben die Aussagen über das Verhalten des Eigenwerts aus der Eigenschaft (T) der ursprünglichen Gruppe auf die Eigenschaft (T) der neuen Gruppe mit weniger Relationen zu schließen.

Da die Konstruktion geeigneter Erzeugendensysteme von diskreten Kazhdan-Gruppen schwierig ist, behandelt Abschnitt 1.5 einen anderen Ansatz. Es wird versucht, zu einem gegebenen Graphen eine entsprechende Gruppe und ein entsprechendes Erzeugendensystem zu finden, das genau diesen Graphen erzeugt. Dies ist natürlich nicht für jeden beliebigen Graphen möglich. Für Graphen mit wenigen Knoten war es möglich diejenigen zu klassifizieren, die aus endlichen Erzeugendensystemen diskreter Gruppen entstehen. Man erhält Aussagen über die Struktur dieser Graphen. Zwei Bedingungen an die

Graphen werden angegeben. Die erste Bedingung betrifft die Grade, also die Anzahl der Nachbarn der Knoten. Zum anderen erhält man eine Aussage über diejenigen endlichen Untergruppen, die bis auf das neutrale Element schon in der Knotenmenge enthalten sein müssen. Die Anzahl der Elemente, die in solchen endlichen Untergruppen enthalten sind, ist also durch die Anzahl der Knoten beschränkt. Eine Liste der Spektren der Graphen für kleine Knotenzahlen findet man in Anhang A. Die Graphen, die aus Erzeugendensystemen entstehen können, mit den dazugehörigen Gruppen enthält Anhang B. Diejenigen Gruppen, die dabei aufgetreten sind und für die die Eigenschaft (T) aus dem Resultat von A. Žuk folgt, sind jedoch alle endlich. Die nichtendlichen Gruppen, die dabei aufgetreten sind, sind auch keine Kazhdan-Gruppen. Bei einer Fortsetzung dieses Verfahrens kann man sich also auf Graphen mit mehr Knoten beschränken.

Als nächste Klasse werden in Kapitel 2 einfache Lie-Gruppen betrachtet, insbesondere $SL(n, \mathbf{R})$ und $Sp(n, \mathbf{R})$. Der Hauptschritt im Beweis der Eigenschaft (T) für einfache Lie-Gruppen mit \mathbf{R} -Rang ≥ 2 , ist der Beweis dieser Eigenschaft für die Gruppen $SL(3, \mathbf{R})$ und $Sp(2, \mathbf{R})$. Für gewöhnlich liegt diesen Beweisen die Betrachtung der irreduziblen Darstellungen einer Untergruppe zugrunde, die isomorph ist zu $SL(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ bzw. $SL(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$, siehe z. B. [35] und [38], wobei $S^2(\mathbf{R}^2)$ den Vektorraum der symmetrischen 2×2 -Matrizen bezeichne. In [26] findet man einen alternativen Beweis, der auf dem sogenannten Lemma von Furstenberg beruht. Einen elementaren Beweis von M. B. Bekka und M. Mayer für die Eigenschaft (T) von $SL(3, K)$ für lokale Körper K findet man in [4].

Abschnitt 2.1 enthält die Bestimmung eines Erzeugendensystems für die symplektische Gruppe. Der Beweis dazu ist elementar. Dieses Erzeugendensystem findet im folgenden auf verschiedene Weise Verwendung. Danach wird die Eigenschaft (T) von $Sp(2, K)$, K ein lokaler Körper, behandelt. Dies entspricht im wesentlichen der mit M. B. Bekka verfaßten Version [5]. Ein wichtiger Schritt ist es zu zeigen, daß die Gruppe $SL(2, K) \times S^2(K^2)$ die Eigenschaft (T) relativ zu den Darstellungen besitzt, deren Einschränkung auf $S^2(K^2)$ die triviale Darstellung nicht enthält. Dies folgt aus der Tatsache, daß auf der dualen Gruppe von $S^2(K^2)$ keine nichttrivialen $SL(2, K)$ -invarianten Mittel existieren. Allgemein gilt für eine Gruppe G mit einem abelschen Normalteiler N , auf dessen Dual \widehat{N} nur dieses triviale G -invariante Mittel existiert, daß G die Eigenschaft (T) relativ zu den Äquivalenzklassen der Darstellungen, deren Einschränkung auf N die triviale Darstellung nicht enthalten, besitzt. Im Fall, daß der Körper die Charakteristik 2 besitzt, ergibt sich die Besonderheit, daß dies für $SL(2, K) \times (S^2(K^2))^*$ nicht gilt.

Abschnitt 2.3 enthält die Betrachtung eines geeigneten Laplace-Operators in der universellen einhüllenden Algebra der Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(2, \mathbf{R})$. Der Laplace-Operator einer endlichdimensionalen Lie-Algebra mit der Basis X_1, \dots, X_n ist definiert durch $\Delta = -\sum_{k=1}^n X_k^2$. Nach M. B. Bekka und M. Mayer, siehe [4], ist eine zusammenhängende Lie-Gruppe genau dann eine Kazhdan-Gruppe, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt so, daß das Spektrum des Laplace-Operators unter allen Darstellungen ohne nichttriviale invariante Vektoren in $[\varepsilon, \infty[$ enthalten ist.

Für die Abschätzung des Spektrums des Laplace-Operators unter diesen Darstellungen war es notwendig, eine geeignete Menge in der dualen Gruppe von $S^2(\mathbf{R}^2)$ zu bestimmen, für die es möglich war das Spektralmaß zu bestimmen und unter der Operation einer Einparametergruppe abzuschätzen. M. B. Bekka und M. Mayer behandelten den Fall $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ in [4].

Die Abschnitte 2.4 und 2.5 behandeln die Übertragung dieses Ergebnisses auf $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ für $n \geq 3$ bzw. $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ für $n \geq 4$. Dies geschieht durch die Bestimmung einer geeigneten bezüglich der Killing-Form orthogonalen Basis der Lie-Algebra von $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ bzw. $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$. Eine rekursive Definition neuer Basiselemente, die dann im Laplace-Operator auftreten, ermöglicht eine Abschätzung der Kazhdan-Konstante. Dabei zeigt eine Anwendung der Induktion, daß jeweils drei geeignete Basiselemente eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebra aufspannen, die in einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ bzw. $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Lie-Unteralgebra enthalten ist. Im Fall $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ wird das Ergebnis aus 2.3 verwendet und im Fall $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ ein Ergebnis von M. B. Bekka und M. Mayer aus [4].

In 2.6 wird die Asymptotik der Matrixkoeffizienten von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ auf elementare Weise bestimmt. Die Betrachtung der Matrixkoeffizienten erfolgt zuerst für Darstellungen von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ ohne $S^2(\mathbf{R}^2)$ -invariante Vektoren. Abhängig von der Funktion Ξ von Harish-Chandra liefert dies eine quantitative Abschätzungen der Matrixkoeffizienten von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$. Damit ist es möglich die Eigenschaft (T) für $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ mit $n \geq 2$ zu zeigen. Dies geschieht durch die Bestimmung einer unteren Schranke für die Kazhdan-Konstante. Dabei ist die kompakte Teilmenge von einem Parameter δ , $0 < \delta < 1$, abhängig. Diese enthält immer eine maximalkompakte Untergruppe. Eine untere Schranke der zugehörigen Kazhdan-Konstante ist $(8/25)\sqrt{2\delta}$. Den Fall $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ behandelt [27].

In Abschnitt 2.7 steht die Loopgruppe $\mathrm{Loop}(\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C}))$ von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$, d. h. die Gruppe aller stetigen Abbildungen des Einheitskreises nach $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ mit

der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, im Vordergrund. Es wird gezeigt, daß $\text{Loop}(\text{Sp}(n, \mathbf{C}))$ Kazhdans Eigenschaft (T) besitzt. Den Fall der Loopgruppe von $\text{SL}(n, \mathbf{C})$ wird von Y. Shalom in [44] behandelt. Dies sind die ersten Beispiele von Kazhdan-Gruppen, die nicht lokalkompakt und nicht endlichdimensional sind. Die Loopgruppe von $\text{Sp}(n, \mathbf{C})$ ist ein Spezialfall der Gruppe $\text{Sp}(n, R)$, wobei R ein topologischer Ring mit dichtem endlicherzeugten Unterring. In diesem Abschnitt erfolgt die Untersuchung dieser Gruppen und die Bestimmung einer unteren Schranke für die Kazhdan-Konstante. Diese ist abhängig von der minimalen Anzahl ν , die nötig ist, um jedes beliebige Element von $\text{Sp}(n, R)$ als Produkt aus ν elementaren symplektischen Matrizen zu beschreiben. Die untere Schranke gilt natürlich nur für Ringe für die diese Anzahl endlich ist. Sie ist insbesondere dann endlich, wenn der Ring ein Körper ist. Für die Loopgruppe von $\text{Sp}(n, \mathbf{C})$ folgt die Endlichkeit aus dem Satz von Stone–Weierstraß, da sie kanonisch isomorph zu $\text{Sp}(n, R)$ ist, wobei R der Ring der stetigen Funktionen des Einheitskreises nach \mathbf{C} . Für die Loopgruppe von $\text{Sp}(n, \mathbf{C})$ erhält man die untere Schranke $274^{-5} (3n^2 + 4n)^{-1}$ der Kazhdan-Konstante. Die zugehörige Menge im Kazhdan-Paar besteht aus den Matrizen, deren Diagonaleinträge 1 sind und die genau einen Eintrag $\neq 0$ außerhalb der Diagonale besitzen. Dieser ist die konstante Funktion 1.

Der dritte Teil behandelt untere Schranken der Kazhdan-Konstanten für kompakte Gruppen, insbesondere also auch für endliche Gruppen. Es gibt einige Berechnungen der Kazhdan-Konstanten kompakter Gruppen z. B. für die symmetrischen Gruppen. Nach Bacher und de la Harpe, siehe [3], besitzt die symmetrische Gruppe S_n die Kazhdan-Konstante $K(S_n, Q) = \sqrt{24/(n^3 - n)}$, wobei $Q = \{(1, 2), \dots, (n-1, n)\}$. Für das Erzeugendensystem bestehend aus allen 2-Zyklen erhält man in 3.4 eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante. Deutsch und Valette bestimmten in [17] die Kazhdan-Konstanten $K(G, G) = \sqrt{2n/(n-1)}$ für eine endliche Gruppe der Ordnung n und $K(G, G) = \sqrt{2}$ für eine unendliche kompakte Gruppe. Hier ist die kompakte Gruppe selbst das Erzeugendensystem.

Das Hauptergebnis dieses Kapitels liefert eine nichttriviale untere Schranke der Kazhdan-Konstante für eine Konjugiertenklasse abhängig von den nichttrivialen irreduziblen Charakteren der kompakten Gruppe, siehe 3.2. Die Bestimmung der unteren Schranke geschieht mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen von Schur. Danach folgt die Anwendung dieses Resultats auf verschiedene Klassen kompakter Gruppen. Für zyklische Gruppen liefert die untere Schranke sogar die exakte Kazhdan-Konstante. Auch für Grup-

pen von Lie-Typ erhält man durch das Ergebnis eine untere Schranke für die Kazhdan-Konstante. Den Abschluß dieses Abschnitts bildet die Bestimmung einer oberen Schranke für die Kazhdan-Konstante einer Darstellung. Eine Anwendung dieses Ergebnisses liefert in 3.5 eine obere Schranke der Kazhdan-Konstante der irreduziblen Darstellungen von $SU(n)$.

Abschnitt 3.3 enthält das Ergebnis, daß diese untere Schranke nicht trivial ist, wenn die Konjugiertenklasse die Gruppe erzeugt. Andererseits wird dort auch gezeigt, daß die Kazhdan-Konstante 0 ist, falls eine kompakte Teilmenge, beispielsweise eine Konjugiertenklasse, keine dichte Untergruppe erzeugt. Ein analoges Resultat gilt auch für diskrete Gruppen. Für beliebige Kazhdan-Gruppen ist es jedoch nicht richtig. Ein Teilschritt des Beweises liefert noch eine andere untere Schranke für die Kazhdan-Konstante, die davon abhängt, wieviele Elemente eines Erzeugendensystems höchstens nötig sind, damit deren Produkt ein vorgegebenes beliebiges Element der Gruppe ergibt. Für kompakte Gruppen ist diese Anzahl stets beschränkt und liefert eine weitere untere Schranke für die Kazhdan-Konstante. Dadurch erhält man untere Schranken für Kazhdan-Konstanten der alternierenden Gruppe und der projektiven speziellen linearen Gruppe eines endlichen Vektorraums. Für einfache nichtabelsche endliche Gruppen ergibt sich auch eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante, die nur von der Ordnung der Gruppe abhängt. Durch Betrachtung von Produkten aus Konjugiertenklassen erhält man für die spezielle unitäre Gruppe ebenfalls eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante. Diese wird jedoch, wie in 3.5 erläutert, noch verbessert.

Abschnitt 3.4 behandelt für die symmetrische Gruppe die Bestimmung einer unteren Schranke der Kazhdan-Konstante. Dies geschieht mit Hilfe einer Aussage, die es ermöglicht aus Schranken einer Untergruppe Schranken der Gruppe selbst zu erhalten unter Betrachtung einiger zusätzlicher Charaktere der Gruppe. Für die Kazhdan-Konstante sind das gerade diejenigen, deren Einschränkung auf die Untergruppe die triviale Darstellung enthält. Dieses Ergebnis ermöglicht die Bestimmung einer unteren Schranke der Kazhdan-Konstante der symmetrischen Gruppe bezüglich der Konjugiertenklasse der 2-Zyklen.

Abschnitt 3.5 enthält schließlich die Anwendung der unteren Schranke aus 3.2 für die Kazhdan-Konstante auf die spezielle unitäre Gruppe. Ausgangspunkt ist die Bestimmung einer unteren Schranke der Kazhdan-Konstante für $SU(2)$. Das liefert auch untere Schranken für $SO(3)$ und $U(2)$. Aus dem Resultat für $U(2)$ läßt sich dann durch Induktion eine untere Schranke für $SU(n)$ bestimmen. Dies geschieht durch Betrachtung der Charaktere der

irreduziblen Darstellungen und Abschätzung der normalisierten Charaktere von $SU(n)$ durch normalisierte Charaktere von $SU(n-1)$.

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bedanken bei Herrn Prof. Dr. G. Schlichting und Herrn Prof. Dr. M. B. Bekka. Beide ließen mir eine gute Betreuung zukommen und wiesen mich auf interessante Fragestellungen hin. Mein Dank gilt auch Prof. P. de la Harpe für das Problem, aus dem sich Kapitel 3 entwickelte.

Bei Dr. Hartmut Führ möchte ich mich dafür bedanken, daß er immer ansprechbar war, und für seine Vorschläge und Anregungen.

Meine Aufenthalte in Metz wurden finanziell unterstützt durch das Bayerisch-Französische Hochschulzentrum.

Inhaltsverzeichnis

1	Graphen und Kazhdans Eigenschaft (T)	1
1.1	Expandierende Graphen	2
1.2	Kazhdan-Konstanten für diskrete Gruppen	10
1.3	Beispiele für Graphen aus Erzeugendensystemen	18
1.4	Teilgraphen und Relationen	22
1.5	Zu Erzeugendensystemen assoziierte Graphen	26
2	Kazhdans Eigenschaft (T) für einfache Lie-Gruppen	38
2.1	Ein Erzeugendensystem für die symplektische Gruppe	39
2.2	Die Eigenschaft (T) für die symplektische Gruppe über lokalen Körpern	42
2.3	Kazhdan-Konstanten assoziiert mit einem Laplace-Operator	53
2.4	Kazhdan-Konstanten der symplektischen Gruppen mit höhe- rem Rang	75
2.5	Kazhdan-Konstanten der speziellen linearen Gruppen mit hö- herem Rang	87
2.6	Asymptotik der Matrixkoeffizienten	98
2.7	Kazhdan-Konstanten von Loopgruppen	111

3 Kazhdan-Konstanten kompakter Gruppen	129
3.1 Die Eigenschaft (T) für kompakte Gruppen	129
3.2 Kazhdan-Konstanten relativ zu einer Konjugiertenklasse . . .	130
3.3 Nichttrivialität der unteren Schranke	135
3.4 Die symmetrische Gruppe	142
3.5 Die spezielle unitäre Gruppe	145
A Das Spektrum zusammenhängender Graphen	154
B Graphen aus Erzeugendensystemen von Gruppen	157
Literaturverzeichnis	161

Graphen und Kazhdans Eigenschaft (T)

Dieses Kapitel behandelt den Zusammenhang zwischen bestimmten Graphen und der Eigenschaft (T). Einerseits lieferten diskrete Kazhdan-Gruppen nach Margulis [37] die erste explizite Konstruktion sogenannter expandierender Graphen, die z. B. in der Konstruktion von Telekommunikationsnetzwerken wichtig sind. Diese Graphen charakterisiert auch ein Eigenwert des Laplace-Operators auf den Graphen. Andererseits zeigt ein Resultat von A. Żuk, siehe [53], daß ein anderer Graph, den man aus einem Erzeugendensystem einer diskreten Gruppe erhält und dessen zweitkleinster Eigenwert eines Laplace-Operators auf dem Graphen $> 1/2$ ist, die Eigenschaft (T) für die Gruppe impliziert. Der Beweis dieser Aussage hier vermeidet die explizite Behandlung der Kohomologiegruppen und gilt sogar für gewichtete Graphen. Wie durch das Resultat von A. Żuk erhält man für die Kazhdan-Konstante eine konkrete Abschätzung, die abhängig ist vom Eigenwert. Für solche Graphen, die aus Erzeugendensystemen entstehen, wurden einige Eigenschaften bestimmt. Diese ermöglichen eine Klassifikation dieser Graphen und der zugehörigen Gruppen samt Erzeugendensystem für kleine Knotenzahlen. Diejenigen Graphen, die hierbei aufgetreten sind und auf die sich der Satz von A. Żuk anwenden läßt, sind jedoch alle aus endlichen Gruppen entstanden. Die nichtendlichen Gruppen, die hierbei aufgetreten sind, besitzen allerdings nicht die Eigenschaft (T).

Es gibt auch einen Satz von A. Żuk für Gruppen, die auf Polyedern operieren, siehe [52]. Dieser liefert eine hinreichende Bedingung durch einen Eigenwert des Laplace-Operators eines zugehörigen Graphen für die Eigenschaft (T) und eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante.

1.1 Expandierende Graphen

Hier werden die grundlegenden Definitionen für Graphen angegeben und die Beziehung zwischen expandierenden Graphen und der Eigenschaft (T) dargestellt. Dabei spielt auch ein Eigenwert eines Laplace-Operators auf den Graphen eine wichtige Rolle. Es ist derselbe Eigenwert, der auch im nächsten Abschnitt im Satz von A. Żuk eine Rolle spielt. Eine weitere Größe, die hierzu in Zusammenhang steht, ist die sogenannte Cheeger-Konstante für Graphen. Der wichtigste Satz dieses Abschnitts ist Satz 1.1.15, der für eine Familie von Normalteilern einer diskreten Gruppe von endlichem Index die Äquivalenz zeigt zwischen einer abgeschwächten Eigenschaft (T) und der gleichmäßigen Beschränktheit des Eigenwerts, der Cheeger-Konstante bzw. der Expansionskonstante einer zugehörigen Familie von Cayley-Graphen.

Nun zu den Definitionen für Graphen.

1.1.1 Definition. (a) Ein *Graph* ist ein Paar (S, K) bestehend aus einer Menge S von Knoten und einer Menge $K \subset S \times S$ von Kanten. Der Graph wird als *endlich* bezeichnet, wenn die Knotenmenge S endlich ist.

(b) Zwei Knoten $x, y \in S$, die durch eine Kante verbunden sind, werden als *benachbart* bezeichnet. Der *Grad* $N(x)$ eines Knotens $x \in S$ ist die Anzahl der Nachbarn, also

$$N(x) = |\{y \in S : (x, y) \in K\}| = |K \cap (\{x\} \times S)|.$$

(c) Graphen, in denen jeder Knoten genau k Nachbarn besitzt, werden als *k-regulär* bezeichnet.

(d) Ein Graph ist *vollständig*, wenn jeder Knoten zu jedem anderen Knoten – außer sich selbst – benachbart ist.

(e) Er ist *zusammenhängend*, wenn je zwei Knoten durch einen geschlossenen Weg über Kanten verbunden sind.

Graphen, die hier auftreten, sind stets ungerichtet, d. h. ist $(x, y) \in K$, so ist auch $(y, x) \in K$, und kein Knoten ist mit sich selbst verbunden, d. h. $(x, x) \notin K$ für alle $x \in S$. Sie sind auch alle endlich.

Den Vektorraum der Funktionen $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ bezeichne \mathbf{C}^S . Auf ihm sind nachstehende Operatoren angegeben in der kanonischen Basis von Bedeutung.

1.1.2 Definition. Sei (S, K) ein endlicher Graph mit Knotenmenge $S = \{s_1, \dots, s_n\}$.

- (a) Die *Adjazenzmatrix* ist die reelle Matrix $A = (a_{j,k})_{j,k=1,\dots,n}$ mit den Einträgen $a_{j,k} \in \{0, 1\}$, wobei $a_{j,k} = 1$ genau dann, wenn $(s_j, s_k) \in K$ ist.
- (b) Sei B die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $N(s_1), \dots, N(s_n)$, dann ist $\Delta = I - B^{-1}A$ der *Laplace-Operator* auf dem Graphen.

Da die hier betrachteten Graphen ungerichtet sind, ist die Adjazenzmatrix A symmetrisch bezüglich der kanonischen Basis. Ohne sich auf die kanonische Basis zurückzuziehen gilt für den Laplace-Operator

$$(\Delta f)(s) = f(s) - \frac{1}{N(s)} \sum_{(s,t) \in K} f(t).$$

Bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, f' \rangle = \sum_{s \in S} f(s) \overline{f'(s)} N(s)$ ist der Laplace-Operator positiv und somit diagonalisierbar mit nichtnegativen reellen Eigenwerten. Der zweitkleinste Eigenwert λ wird im folgenden eine bedeutende Rolle spielen. Der kleinste Eigenwert des Laplace-Operators ist immer 0, da der Vektor, bei dem alle Einträge konstant 1 sind, ein Eigenvektor ist. Der Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn 0 ein einfacher Eigenwert von Δ ist, also $\lambda > 0$. Die Eigenwerte werden mit Vielfachheit gezählt, d. h. ist der zweitkleinste Eigenwert $\lambda = 0$, so ist der Graph nicht zusammenhängend. Die Literatur behandelt für gewöhnlich den Laplace-Operator $\Delta' = B - A = B\Delta$. Für einen Überblick über diesen Laplace-Operator siehe z. B. [14]. Eine ausführliche Behandlung des Laplace-Operators Δ findet man in [11]. Zwischen den Eigenwerten von Δ' und Δ besteht im allgemeinen nur dann eine einfache Beziehung, wenn der Graph k -regulär ist; dann gilt $\Delta' = k\Delta$.

Expandierende Graphen finden z. B. Anwendung in der Konstruktion von effizienten Kommunikationsnetzwerken mit dem Ziel, daß sich Informationen in einem als Graphen dargestellten Netz möglichst schnell ausbreiten. Die

verschiedenen Knoten des Graphen geben die Information jeweils nur an ihre Nachbarn weiter. Denkt man sich die Zeit in diskrete Abschnitte unterteilt so, daß ein Knoten die Nachricht an seine Nachbarn in einem Zeitabschnitt weitergibt, so möchte man die Anzahl der Zeitschritte minimieren, in der die Nachricht allen Knoten bekannt ist. Dazu ist es nötig, daß jeder Knoten möglichst viele Nachbarn besitzt. Beispielsweise ist in einem vollständigen Graphen, in dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten verbunden ist, die Nachricht in nur einem Zeitschritt jedem anderen Knoten bekannt.

Gleichzeitig möchte man ebenso die Gesamtlänge der Verbindungen zwischen den Knoten minimieren. Zur Vereinfachung des Modells habe jede Kante im Graphen dieselbe Länge. Ein effizientes Kommunikationsnetzwerk ist somit ein Graph mit einer geringen Anzahl Kanten so, daß dessen Knoten viele verschiedene Nachbarn besitzen. Dazu ist der Begriff des Randes einer Teilmenge von Knoten wichtig.

1.1.3 Definition. Ist (S, K) ein Graph, so definiert man für eine Teilmenge $M \subset S$ den *Rand von M* als die Menge

$$\partial M = \{x \in S \setminus M : \exists y \in M \text{ mit } (x, y) \in K\}.$$

Vor den expandierenden Graphen werden sogenannte vergrößernde Graphen betrachtet. Für folgende Definition siehe z. B. [6, Seite 6].

1.1.4 Definition. Der Graph (S, K) mit $n = |S|$ Knoten und maximalem Grad $k = \max_{x \in S} N(x)$ ist (n, k, c) -*vergrößernd*, falls für jede Teilmenge $M \subset S$, die höchstens die Hälfte aller Knoten enthält, d. h. $|M| \leq \frac{n}{2}$ (oder $|M| < \infty$, falls $n = \infty$), gilt $|\partial M| \geq c|M|$, d. h. der Rand von M enthält mindestens c -mal so viele Knoten wie M .

Dabei besteht Interesse daran das maximale c in der Definition zu bestimmen. Hier sind jedoch nur positive untere Schranken für dieses maximale c wichtig. Ist (S, K) ein vollständiger Graph, so ist er $(n, n-1, 1)$ -vergrößernd, da $|\partial M| = n - |M| \geq |M|$ für $|M| \leq n/2$ ist. Ist (S, K) nicht zusammenhängend, so ist $c = 0$. Für einen endlichen Graphen gibt es immer ein c so, daß der Graph (n, k, c) -vergrößernd ist. Dabei ist $0 \leq c \leq 1$, falls n gerade ist, bzw. $0 \leq c \leq \frac{n+1}{n-1}$, falls n ungerade ist. Wäre nämlich im Fall n gerade $c > 1$, so würde für eine Menge $M \subset S$ mit $|M| = \frac{n}{2}$

gelten $\frac{n}{2} < c\frac{n}{2} = c|M| \leq |\partial M| \leq |S \setminus M| = \frac{n}{2}$, und wäre im Fall n ungerade $c > \frac{n+1}{n-1}$, würde für eine Menge $M \subset S$ mit $|M| = \frac{n-1}{2}$ gelten $\frac{n+1}{2} < c\frac{n-1}{2} = c|M| \leq |\partial M| \leq |S \setminus M| = \frac{n-1}{2}$. Man erhielte also beide Male einen Widerspruch.

Das folgende untersucht nun die Beziehung der Konstante c zum zweitkleinsten Eigenwert des Laplace-Operators. Da in der Literatur scheinbar nur der Zusammenhang zu Δ' bekannt ist, werden zuerst Schranken von λ' abhängig von λ betrachtet. Dies ist auch in dem Fall möglich, daß der Graph nicht regulär ist. Der Operator Δ' ist bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, f' \rangle' = \sum_{x \in S} f(x) \overline{f'(x)}$ für $f, f' : S \rightarrow \mathbf{C}$ symmetrisch. Damit ist $\langle f, f' \rangle = \langle Bf, f' \rangle'$ und insbesondere $\langle \Delta' f, f' \rangle' = \langle \Delta f, f \rangle$.

1.1.5 Lemma. Für die zweitkleinsten Eigenwerte λ, λ' von Δ bzw. $\Delta' = B\Delta$ auf einem zusammenhängenden Graphen gilt

$$\lambda \min_{x \in S} N(x) \leq \lambda' \leq \lambda \max_{x \in S} N(x).$$

Beweis. Sei $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ ein Eigenvektor von Δ zum Eigenwert λ , dann gilt $\langle f, 1 \rangle = 0$, wobei 1 für die Funktion steht, die konstant 1 ist. Sei $f' : S \rightarrow \mathbf{C}$ definiert durch $f' = f - \langle f, 1 \rangle' / \langle 1, 1 \rangle'$, dann ist $\langle f', 1 \rangle' = 0$. Also gilt

$$\lambda' \langle f', f' \rangle' \leq \langle \Delta' f', f' \rangle' = \langle \Delta f', f' \rangle' = \langle \Delta f, f \rangle = \lambda \langle f, f \rangle.$$

Da $\langle f, f \rangle = \langle f, f' \rangle \leq \|f\| \|f'\|$, folgt

$$\langle f, f \rangle \leq \langle f', f' \rangle = \sum_{x \in S} |f'(x)|^2 N(x) \leq \max_{x \in S} N(x) \langle f', f' \rangle'.$$

Somit ist $\lambda' \leq \lambda \max_{x \in S} N(x)$.

Sei umgekehrt $f' : S \rightarrow \mathbf{C}$ der Eigenvektor zum Eigenwert λ' und $f = f' - \langle f', 1 \rangle' / \langle 1, 1 \rangle'$, dann gilt $\langle f, 1 \rangle = 0$ und

$$\lambda \langle f, f \rangle \leq \langle \Delta f, f \rangle = \langle B\Delta f, f' \rangle' = \langle \Delta' f, f' \rangle' = \langle \Delta' f', f' \rangle' = \lambda' \langle f', f' \rangle'.$$

Nun ist $\langle f', f' \rangle' = \langle f, f' \rangle' \leq \|f\|' \|f'\|'$, also folgt $\langle f', f' \rangle' \leq \langle f, f' \rangle'$ und $\sum_{x \in S} |f(x)|^2 (\min_{x \in S} N(x)) \leq \langle f, f' \rangle'$. Damit ist $\lambda (\min_{x \in S} N(x)) \leq \lambda'$. \square

Folgende Beziehung besteht zwischen vergrößernden Graphen und dem Eigenwert λ . Man erhält sie aus den Aussagen in [1, Seite 85–86] für Δ' und der Beziehung zwischen λ und λ' aus dem obigen Lemma.

1.1.6 Satz. Sei (S, K) ein zusammenhängender endlicher Graph mit n Knoten, $k = \max_{x \in S} N(x)$ und λ der zweitkleinste Eigenwert des Laplace-Operators.

- (a) Der Graph ist (n, k, c) -vergrößernd mit $c = \lambda(\lambda + k/2)^{-1}$.
- (b) Falls der Graph (n, k, c) -vergrößernd ist, gilt $\lambda \geq c^2(2kc^2 + 4k)^{-1}$.

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} c &= \lambda(\lambda + k/2)^{-1} = 1 - (k/2)(\lambda + k/2)^{-1} \\ &\leq 1 - (k/2)(\lambda' + k/2)^{-1} = c' \end{aligned}$$

mit dem zweitkleinsten Eigenwert λ' von Δ' nach Lemma 1.1.5 und, da der Graph (n, k, c') -vergrößernd ist nach [1, Seite 85], ist er erst recht (n, k, c) -vergrößernd.

- (b) Nach [1, Seite 86] gilt $\lambda' \geq c^2(2c^2 + 4)^{-1}$. Mit $\lambda \geq \lambda'k^{-1}$ aus Lemma 1.1.5 folgt also die Behauptung.

□

Vor der Definition expandierender Graphen erfolgt noch die Definition der Cheeger-Konstante wie in [11, Seite 24]. Wie die Konstante c oben liefert auch sie obere und untere Schranken für den zweitkleinsten Eigenwert λ . Die Cheeger-Konstante ist ein Faktor, der für eine Teilmenge von Knoten mit weniger als der Hälfte aller Knoten einen Schluß auf die minimale Anzahl an Kanten erlaubt, die die Menge mit ihrem Komplement verbindet.

1.1.7 Definition. Sei (S, K) ein endlicher Graph, dann wird die *Cheeger-Konstante* von (S, K) definiert durch

$$h(S, K) = \min_{\emptyset \neq M \subsetneq S} \frac{|(M \times (S \setminus M)) \cap K|}{\min\{\text{vol}(M), \text{vol}(S \setminus M)\}},$$

wobei $\text{vol}(M) = \sum_{x \in M} N(x)$ und $(M \times (S \setminus M)) \cap K$ gerade die Menge der Kanten ist, die Knoten aus M mit Knoten aus $S \setminus M$ verbinden.

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen dem zweitkleinsten Eigenwert λ und der Cheeger-Konstante. Für einen Beweis siehe z. B. [11, Seite 25–28].

1.1.8 Satz. Sei (S, K) ein endlicher zusammenhängender Graph und $h = h(S, K)$ die Cheeger-Konstante, dann ist $2h \geq \lambda > 1 - \sqrt{1 - h^2}$.

Nun folgt die Definition expandierender Graphen wie in [35, Seite 1].

1.1.9 Definition. Sei (S, K) ein endlicher k -regulärer Graph mit n Knoten, dann ist (S, K) ein (n, k, c) -*expandierender Graph*, falls für jede Teilmenge $M \subset S$ gilt $|\partial M| \geq c(n - |M|)|M|/n$.

Das Ziel ist nun die Konstruktion von Familien expandierender Graphen mit festem k und c und $n \rightarrow \infty$.

Eine erste Konsequenz ist, daß jeder expandierende Graph auch vergrößernd ist, wobei folgende Beziehung zwischen den Konstanten c besteht, die in den beiden Definitionen auftreten.

1.1.10 Lemma. Ein endlicher k -regulärer, (n, k, c) -expandierender Graph (S, K) ist $(n, k, c/2)$ -vergrößernd.

Beweis. Für $M \subset S$ mit $|M| \leq n/2$ gilt die Ungleichung

$$|\partial M| \geq c(n - |M|)|M|/n \geq c \frac{n}{2} |M|/n = \frac{c}{2} |M|.$$

Also ist (S, K) ein $(n, k, c/2)$ -vergrößernder Graph nach Definition 1.1.4. \square

Für einen Beweis des folgenden Satzes siehe z. B. [35, Seite 30]. Er ermöglicht die Konstruktion von Familien expandierender Graphen. Der Konstruktion der Graphen liegen diskrete Kazhdan-Gruppen zugrunde. Die Graphen besitzen folgende spezielle Form.

1.1.11 Definition. Sei G eine Gruppe mit symmetrischem Erzeugendensystem $S = S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$. Der *Cayley-Graph* ist der Graph (G, K_S) wobei $K_S = \{(g, h) \in G \times G : g^{-1}h \in S\}$.

1.1.12 Satz. Sei Γ eine endlicherzeugte diskrete Kazhdan-Gruppe. Sei L eine Familie von Normalteilern mit endlichem Index in Γ und S ein endliches symmetrisches Erzeugendensystem von Γ . Dann gibt es ein festes $c > 0$ und ein festes $k = |S|$ so, daß die Familie der Cayley-Graphen der endlichen Gruppen Γ/N für $N \in L$ eine Familie $(|\Gamma/N|, k, c)$ -expandierender Graphen ist.

Zum Beweis von Satz 1.1.12 würde schon eine schwächere Eigenschaft als die Eigenschaft (T) ausreichen und dies ermöglichte folgende erste explizite Konstruktion expandierender Graphen nach Margulis, siehe [37]. Für einen Beweis siehe z. B. [35, Seite 32].

1.1.13 Satz. Sei (S_m, K_m) der Graph, der wie folgt definiert wird. Sei $S_m = (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$ und ein Element $(a, b) \in S_m$ ist genau mit den Elementen $\sigma_1(a, b) = (a + 1, b)$, $\sigma_2(a, b) = (a, b + 1)$, $\sigma_3(a, b) = (a, a + b)$ und $\sigma_4(a, b) = (-b, a)$ verbunden. Dann ist (S_m, K_m) eine Familie expandierender Graphen.

Der Beweis benutzt die Eigenschaft (T) relativ der Menge aller Äquivalenzklassen der Darstellungen von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}) \ltimes \mathbf{Z}^2$, deren Einschränkung auf \mathbf{Z}^2 die triviale Darstellung nicht enthält. Man vergleiche hierzu auch Definition 2.2.1.

Nun folgt die Definition einer abgeschwächten Version der Eigenschaft (T) wie in [35, Seite 49]. Der folgende Satz zeigt, daß diese Eigenschaft zur gleichmäßigen Beschränktheit der Expansionskonstante, der Cheeger-Konstante bzw. des zweitkleinsten Eigenwerts der Laplace-Operatoren der zugehörigen Familie der Cayley-Graphen äquivalent ist.

1.1.14 Definition. Sei Γ eine endlicherzeugte Gruppe, L eine Familie von Normalteilern der Gruppe Γ mit endlichem Index und

$$\Pi = \left\{ \pi \in \widehat{\Gamma} : \exists N \in L \text{ mit } N \subset \ker \pi \right\}.$$

- (a) Die Gruppe Γ besitzt die *Eigenschaft* (τ) bezüglich L , wenn die triviale Darstellung isoliert ist in der Menge Π .
- (b) Die Gruppe Γ besitzt die *Eigenschaft* (τ) , wenn sie diese Eigenschaft bezüglich der Familie aller Normalteiler von Γ mit endlichem Index besitzt.

Diese Definition entspricht Definition 0.0.3 der Eigenschaft (T) relativ Π . Da hier jedoch größeres Interesse an den Normalteilern in L besteht als an der Teilmenge Π des unitären Duals, wird diese neue Bezeichnung gewählt.

Kazhdan-Gruppen besitzen also insbesondere die Eigenschaft (τ) . Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Denn die Gruppe $SL(2, \mathbf{Z}[1/p])$ besitzt beispielsweise die Eigenschaft (τ) , aber nicht die Eigenschaft (T). Für einen Beweis siehe z. B. [35, Seite 52].

Für Familien von Graphen $(\Gamma/N, K_S)$ für ein Erzeugendensystem S von Γ besteht nun der folgende Zusammenhang. Für einen Beweis siehe [35, Seite 49].

1.1.15 Satz. Sei Γ eine von einer endlichen symmetrischen Menge S erzeugte Gruppe und L eine Familie von Normalteilern mit endlichem Index, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) Die Gruppe Γ hat die Eigenschaft (τ) bezüglich L .
- (b) Es gibt ein $\varepsilon_1 > 0$ so, daß für alle $N \in L$ der Cayley-Graph $(\Gamma/N, K_S)$ ein $(|\Gamma/N|, |S|, \varepsilon_1)$ -expandierender Graph ist.
- (c) Es gibt ein $\varepsilon_2 > 0$ so, daß $h(\Gamma/N, K_S) \geq \varepsilon_2$ für alle $N \in L$.
- (d) Es gibt ein $\varepsilon_3 > 0$ so, daß $\lambda(\Gamma/N, K_S) \geq \varepsilon_3$ für alle $N \in L$.

Einige Implikationen lassen sich mit den vorher aufgeführten Ergebnissen beweisen. So folgt die Äquivalenz von 1.1.15c und 1.1.15d aus Satz 1.1.8 und die Implikation von 1.1.15b nach 1.1.15d aus Satz 1.1.6 und Lemma 1.1.10. Für die Implikation 1.1.15a nach 1.1.15b betrachtet man die quasiregulären Darstellungen auf $L^2(\Gamma/N)$ eingeschränkt auf den Teilraum orthogonal zu

den konstanten Funktionen und benutzt dann die Eigenschaft (τ) . Die Implikation 1.1.15d nach 1.1.15a folgt aus der Tatsache, daß eine Darstellung aus Π durch einen endlichen Quotienten Γ/N faktorisiert. Die Gruppenalgebra $\mathbf{C}[\Gamma/N]$ kann also mit $L^2(\Gamma/N)$ identifiziert werden. Der Laplace-Operator wirkt nun auf der Gruppenalgebra und dies steht in Beziehung zur rechtsregulären Darstellung. Diese enthält die ursprüngliche Darstellung und damit folgt aus der gleichmäßigen Beschränktheit von λ die Eigenschaft (τ) .

1.2 Kazhdan-Konstanten für diskrete Gruppen

Dieser Abschnitt untersucht den Zusammenhang zwischen dem Spektrum des Laplace-Operators auf Graphen und der Eigenschaft (T). Hauptresultat ist Satz 1.2.6 zuerst von A. Żuk gezeigt. Der Beweis hier vermeidet die explizite Behandlung der Kohomologiegruppen wie im Originalbeweis. Die Schranke der Kazhdan-Konstante, die man erhält, ist etwas schlechter. Durch einen etwas aufwendigeren Beweis ließe sich die bessere Schranke auch hier zeigen. Siehe hierzu die Bemerkung vor Satz 1.2.4. An der qualitativen Aussage, daß die Gruppe dann eine Kazhdan-Gruppe ist, würde das nichts ändern. Der Beweis des Satzes von A. Żuk gilt hier sogar für gewichtete Graphen. Bei der Konstruktion der Graphen aus Erzeugendensystemen kann man dadurch Gewichte auf den Kanten definieren. Bis auf eine Bedingung ist es möglich die Gewichte frei zu wählen.

Zuerst zur Definition gewichteter Graphen und der entsprechenden Begriffe wie für gewöhnliche Graphen.

- 1.2.1 Definition.** (a) Sei S eine endliche Menge und $w : S \times S \rightarrow [0, \infty[$ eine Gewichtsfunktion mit der Eigenschaft, daß $w(s, t) = w(t, s)$ für alle $(s, t) \in S \times S$, dann ist (S, w) ein *endlicher gewichteter Graph*.
- (b) Zu gegebener Gewichtsfunktion ist $K = w^{-1}(]0, \infty[)$ die Menge der *Kanten*.
- (c) Der Graph ist *zusammenhängend*, wenn der gewöhnliche Graph (S, K) zusammenhängend ist.
- (d) Der *Grad* eines Knotens ist $N(s) = \sum_{t \in S} w(s, t)$.

- (e) Für einen zusammenhängenden Graphen ist $N(s) > 0$ für alle Knoten und der *Laplace-Operator* gegeben durch

$$\Delta f(s) = f(s) - \frac{1}{N(s)} \sum_{t \in S} f(t) w(s, t),$$

wobei $f \in \mathbf{C}^S$.

Sei (S, w) ein endlicher gewichteter Graph und $f \in \mathbf{C}^S$. Der Operator $D : \mathbf{C}^K \rightarrow \mathbf{C}^S$ ist definiert durch $(Df)(s, t) = f(s) - f(t)$. Auf \mathbf{C}^K betrachtet man das Skalarprodukt $\langle f, f' \rangle = \sum_{k \in K} f(k) \overline{f'(k)} w(k)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle Df, Df' \rangle &= \sum_{(s,t) \in K} (f(s) - f(t)) \overline{(f'(s) - f'(t))} w(s, t) \\ &= 2 \sum_{s \in S} \left(\sum_{t \in S} (f(s) - f(t)) w(s, t) \right) \overline{f'(s)} \\ &= 2 \sum_{s \in S} \left(f(s) - \frac{1}{N(s)} \sum_{t \in S} f(t) w(s, t) \right) \overline{f'(s)} N(s) \\ &= 2 \langle \Delta f, f' \rangle \end{aligned}$$

für $f, f' \in \mathbf{C}^S$. Also ist $D^*D = 2\Delta$ und Δ ist somit symmetrisch bezüglich des Skalarprodukts auf \mathbf{C}^S , das wie für gewöhnliche Graphen definiert ist.

Sei Γ eine diskrete Gruppe und S ein symmetrisches Erzeugendensystem von Γ , dann betrachtet man folgenden zu S gehörigen gewichteten Graphen (S, w) , wobei $w(s, t) = 0$ sei, falls $s^{-1}t \notin S$ ist, und $w(s, t) = w(s^{-1}, s^{-1}t)$, falls $s^{-1}t \in S$ ist. Die Gewichtsfunktion ist bis auf diese zwei Bedingungen frei wählbar. Damit gilt für die Gradfunktion folgendes.

1.2.2 Lemma. Für $s \in S$ gilt $N(s) = N(s^{-1})$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} N(s) &= \sum_{t \in S} w(s, t) = \sum_{t \in S \cap (sS)} w(s, t) = \sum_{t \in S \cap (sS)} w(s^{-1}, s^{-1}t) \\ &= \sum_{t \in (s^{-1}S) \cap S} w(s^{-1}, t) = \sum_{t \in S} w(s^{-1}, t) = N(s^{-1}). \end{aligned}$$

□

Die Menge der Kanten $K = w^{-1}(]0, \infty[)$ besitzt die wichtige Eigenschaft, daß $(s, t) \in K$ ist genau dann, wenn $(s^{-1}, s^{-1}t) \in K$ ist. Der Graph ohne Gewichte ist (S, K) . Er ist ungerichtet, da $t^{-1}s = (s^{-1}t)^{-1} \in S$ für $s^{-1}t \in S$ gilt.

Der Vorteil gewichteter Graphen ist folgender. Wird eine diskrete Gruppe Γ mit Erzeugendensystem S durch Erzeugende und Relationen definiert, so erhält man durch Hinzufügen von Relationen einen Graphen mit mehr Kanten. Sei N der von den neuen Relationen erzeugte Normalteiler von Γ . Eine Annahme dabei ist, daß durch die neuen Relationen keine Identifikation zweier Erzeugender erfolgt, d. h. es gilt $sN \neq tN$ für $s, t \in S$ und $s \neq t$. Erfüllt nun die ursprüngliche Gruppe das Kriterium im Satz von A. Żuk, siehe Satz 1.2.6, so erhält man durch $w(s, t) = 0$ für $s^{-1}tN \in SN = \{sN : s \in S\}$ aber $s^{-1}t \notin S$ denselben Graphen wie für die ursprüngliche Gruppe Γ . Damit folgt auch für die neu definierte Gruppe Γ/N die Eigenschaft (T) mit derselben unteren Schranke für die Kazhdan-Konstante. Dies ist deshalb wichtig, da nicht allgemein durch Hinzufügen von Kanten der zweitkleinste Eigenwert größer wird, siehe Anhang A. Es könnte durchaus möglich sein, daß der gewöhnliche neue Graph das Kriterium nicht erfüllt, obwohl es der ursprüngliche Graph erfüllte.

Auf verschiedenen Hilbert-Räumen werden nun Operatoren betrachtet. Man betrachtet zum gewöhnlichen Skalarprodukt $\langle \xi, \eta \rangle$ für $\xi, \eta \in H_\pi$ noch das äquivalente mit $m = \sum_{s \in S} N(s)$ gewichtete Skalarprodukt $\langle \xi, \eta \rangle_0 = \langle \xi, \eta \rangle m$ auf H_π . Man definiert H_π^S als die Menge aller Funktionen $f : S \rightarrow H_\pi$. Mit dem Skalarprodukt $\langle f, f' \rangle_1 = \sum_{s \in S} \langle f(s), f'(s) \rangle N(s)$ für $f, f' \in H_\pi^S$ ist H_π^S ein Hilbert-Raum, da S endlich. Mittels der konstanten Funktionen $s \mapsto \xi$ für $s \in S$ und festes $\xi \in H_\pi$ kann man H_π als Teilraum von H_π^S identifizieren. Man betrachtet nun die lineare Abbildung $F_\pi : H_\pi \rightarrow H_\pi^S$ definiert durch $(F_\pi \xi)(s) = \pi(s)\xi - \xi$ für $\xi \in H_\pi$ und $s \in S$. Dabei ist F_π stetig und besitzt eine Operatornorm ≤ 2 , da

$$\|F_\pi \xi\|_1^2 = \sum_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 N(s) \leq 4m \|\xi\|^2 = 4 \|\xi\|_0^2.$$

Im folgenden wird F_π als surjektive Abbildung von H_π auf $B_\pi = F_\pi(H_\pi)$ betrachtet. Analog zu H_π^S ist H_π^K die Menge aller Funktionen $f : K \rightarrow H_\pi$. Mit dem Skalarprodukt $\langle f, f' \rangle_2 = \sum_{k \in K} \langle f(k), f'(k) \rangle w(k)$ für $f, f' \in H_\pi^K$ wird H_π^K ein Hilbert-Raum, da auch K endlich.

Das erste Lemma gibt nun eine Bedingung für die Invertierbarkeit eines Operators an. Dies findet Verwendung im nächsten Satz. Im Beweis von A. Żuk

tritt dieses Lemma nur implizit im Beweis auf. Es ist jedoch von grundlegender Bedeutung für das folgende. A. Żuk verwendete nicht explizit, daß der Operator dann invertierbar ist. Dadurch ist jedoch der Beweis des nächsten Satzes kürzer.

1.2.3 Lemma. Seien H_0, H_1 Hilbert-Räume, $F : H_0 \rightarrow H_1$ ein stetiger injektiver Operator, $B = F(H_0)$ und für ein festes $c > 0$ sei $\|F^*f\|_0 \geq c\|f\|_1$ für alle $f \in B$, dann ist B abgeschlossen und $F : H_0 \rightarrow B$ invertierbar.

Beweis. Sei \overline{B} der Abschluß von B in H_1 , dann ist das Bild von $FF^*(\overline{B})$ abgeschlossen in H_1 . Denn, ist $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchy-Folge in $FF^*(\overline{B})$, dann gibt es $f'_n \in \overline{B}$ mit $f_n = FF^*f'_n$. Wegen der vorausgesetzten Ungleichung ist $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchy-Folge in \overline{B} . Denn es gilt

$$\|FF^*\tilde{f}\|_1 \|\tilde{f}\|_1 \geq \left| \langle FF^*\tilde{f}, \tilde{f} \rangle_1 \right| = \langle F^*\tilde{f}, F^*\tilde{f} \rangle_0 \geq c^2 \|\tilde{f}\|_1^2$$

für $\tilde{f} \in B$. Damit erhält man die Ungleichung $\|FF^*\tilde{f}\|_1 \geq c^2 \|\tilde{f}\|_1$. Da nun B dicht in \overline{B} liegt, gilt die Ungleichung auch für $\tilde{f} \in \overline{B}$. Damit ist f'_n als Cauchy-Folge konvergent in \overline{B} , da \overline{B} als abgeschlossene Menge des Hilbert-Raums H_1 vollständig ist. Also konvergiert $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in \overline{B} gegen ein $f' \in \overline{B}$ und die Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert dann gegen $f = FF^*f'$ wegen der Stetigkeit von F^* . Somit ist das Bild $FF^*(\overline{B})$ abgeschlossen.

Sei $\xi \in H_0$ orthogonal zu $F^*(B)$, dann ist insbesondere $0 = \langle F^*F\xi, \xi \rangle_0 = \langle F\xi, F\xi \rangle_1$ und damit $F\xi = 0$. Wegen der Injektivität von F ist $\xi = 0$. Also liegt $F^*(B)$ dicht in H_0 und damit $FF^*(B)$ dicht in $B = F(H_0)$ wegen der Stetigkeit von F . Da $FF^*(B) \subset FF^*(\overline{B}) \subset B \subset H_1$, ist $FF^*(\overline{B})$ dicht in B und abgeschlossen in H_1 . Damit ist B abgeschlossen in H_1 . Da $F : H_0 \rightarrow B$ bijektiv, besitzt F eine stetige inverse Abbildung. \square

Den folgenden Satz zeigte zuerst A. Żuk für gewöhnliche Graphen in [53]. Der Beweis ist jedoch dadurch, daß es nach dem vorigen Lemma direkt möglich ist die Invertierbarkeit des Operators F_π zu benutzen, etwas kürzer. Die Bestimmung einer Abschätzung für die Kazhdan-Konstante ergibt die folgende Bedingung dafür, daß eine diskrete Gruppe Γ eine Kazhdan-Gruppe ist. Durch eine genauere Abschätzung der Operatornorm von $F_\pi^* : B_\pi \rightarrow H_\pi$ ließe sich im folgenden Satz $c/2$ sogar durch $c/\sqrt{3}$ ersetzen. Dies zeigte A. Żuk in [53] auch so.

1.2.4 Satz. Existiert für alle Darstellungen π von Γ auf H_π ohne nichttriviale invariante Vektoren ein festes $c > 0$ mit $\|F_\pi^* f\|_0^2 \geq c \|f\|_1^2$ für alle $f \in B_\pi = F_\pi(H_\pi)$, so ist $c/2$ eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante.

Beweis. Sei π eine Darstellung von Γ auf H_π ohne nichttriviale invariante Vektoren und π besitze einen $(c/2, S)$ -invarianten Vektor $\xi \in H_\pi$. Nach Voraussetzung gilt $\|F_\pi^* f\|_0 \geq \sqrt{c} \|f\|_1$ für alle $f \in B_\pi$. Nach Lemma 1.2.3 ist damit B_π abgeschlossen und $F_\pi : H_\pi \rightarrow B_\pi$ invertierbar, da π keine nichttrivialen invarianten Vektoren besitzt und somit F_π injektiv ist. Mit F_π ist auch $F_\pi^* : B_\pi \rightarrow H_\pi$ invertierbar. Es gilt $\|F_\pi F_\pi^* f\|_1 \|f\|_1 \geq |\langle F_\pi F_\pi^* f, f \rangle_1| = \langle F_\pi^* f, F_\pi^* f \rangle_0 \geq c \langle f, f \rangle_1$. Also ist $\|F_\pi F_\pi^* f\|_1 \geq c \|f\|_1$ für alle $f \in B_\pi$ nach Voraussetzung und damit ist $\|(F_\pi F_\pi^*)^{-1}\| \leq c^{-1}$.

Für $f = F_\pi \xi$ gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_1^2 &= \sum_{s \in S} \|f(s)\|^2 N(s) = \sum_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 N(s) \\ &< \sum_{s \in S} (c/2)^2 \|\xi\|^2 N(s) = (c/2)^2 \|\xi\|^2 m = (c/2)^2 \|\xi\|_0^2 \end{aligned}$$

und damit ist $\|f\|_1 < (c/2) \|\xi\|_0$. Da F_π invertierbar ist, würde folgen $\xi = F_\pi^{-1} f = F_\pi^* (F_\pi F_\pi^*)^{-1} f$ und damit $\|\xi\|_0 \leq \|F_\pi^*\| c^{-1} \|f\|_1$. Es gilt $\|F_\pi^*\| \leq 2$, da $\|F_\pi^*\| \leq \|F_\pi\| \leq 2$. Somit wäre

$$\|\xi\|_0 < 2c^{-1} (c/2) \|\xi\|_0 = \|\xi\|_0.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also gibt es keinen $(c/2, S)$ -invarianten Vektor. \square

Ist umgekehrt Γ eine Kazhdan-Gruppe, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für alle Darstellungen π von Γ auf H_π ohne nichttriviale invariante Vektoren gilt $\max_{s \in S} \|F_\pi \xi(s)\| = \max_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\| \geq \varepsilon \|\xi\|$ für alle $\xi \in H_\pi$. Damit gilt

$$\|F_\pi \xi\|_1^2 = \sum_{s \in S} \|F_\pi \xi(s)\|^2 N(s) \geq \varepsilon^2 \min_{s \in S} N(s) \|\xi\|^2 = \varepsilon^2 \min_{s \in S} N(s) \|\xi\|_0^2 / m$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \|F_\pi^* F_\pi \xi\|_0 \|\xi\|_0 &\geq |\langle F_\pi^* F_\pi \xi, \xi \rangle_0| = \langle F_\pi \xi, F_\pi \xi \rangle_1 \\ &\geq \varepsilon \sqrt{\min_{s \in S} N(s) / m} \|F_\pi \xi\|_1 \|\xi\|_0. \end{aligned}$$

Also ist $\|F_\pi^* F_\pi \xi\|_0^2 \geq c \|F_\pi \xi\|_1^2$ mit $c = \varepsilon^2 \min_{s \in S} N(s) / m > 0$.

Nun folgt der Beweis der zweiten Aussage, die für $\lambda > 1/2$ gerade die Voraussetzung des vorhergegangenen Satzes liefert. Solche Gruppen sind dann Kazhdan-Gruppen. Diese Aussage enthält der nächste Satz. A. Żuk zeigte in [53] für gewöhnliche Graphen ein allgemeineres Lemma. Zum Beweis von Satz 1.2.6 ist dies jedoch nicht nötig.

1.2.5 Lemma. Sei S ein endliches symmetrisches Erzeugendensystem der Gruppe Γ so, daß der Graph (S, w) zusammenhängend ist, und π eine Darstellung von Γ auf H_π ohne nichttriviale invariante Vektoren, dann gilt

$$\|F_\pi^* f\|_0^2 \geq 2 \left(2 - \frac{1}{\lambda}\right) \|f\|_1^2$$

für alle $f \in B_\pi = F_\pi(H_\pi)$, falls auf dem Graphen (S, w) der zweitkleinste Eigenwert des Laplace-Operators $\lambda > 1/2$ ist.

Beweis. Für $s \in S$ bezeichne $\delta_s : \mathbf{C}^S \rightarrow \mathbf{C}$ die Funktion, für die $\delta_s(t) = \delta_{s,t}$ gilt. Nun ist $H_\pi^S \cong \mathbf{C}^S \otimes H_\pi$ durch die Abbildung $f \mapsto \sum_{s \in S} \delta_s \otimes (f(s))$. Der Laplace-Operator Δ operiere durch $\Delta \otimes \text{id}$ auf H_π^S . Ebenso ist $H_\pi^K \cong \mathbf{C}^K \otimes H_\pi$ durch die Abbildung $f \mapsto \sum_{k \in K} \delta_k \otimes (f(k))$, wobei hier $\delta_k : \mathbf{C}^K \rightarrow \mathbf{C}$ analog definiert durch $\delta_k(k') = \delta_{k,k'}$. Dadurch operiert D auf H_π^K durch $D \otimes \text{id}$.

Das Spektrum von $\Delta \otimes \text{id}$ auf H_π^S ist damit gleich dem Spektrum von Δ . Da $(s, t) \in K$ gilt genau dann, wenn $(s^{-1}, s^{-1}t) \in K$ gilt, und $w(s, t) = w(s^{-1}, s^{-1}t)$ ist, ist

$$\begin{aligned} 2 \langle \Delta f, f \rangle_1 &= \|Df\|_2^2 = \sum_{(s,t) \in K} \|f(s) - f(t)\|^2 w(s, t) \\ &= \sum_{(s,t) \in K} \|f(s^{-1}t)\|^2 w(s, t) = \sum_{(s,t) \in K} \|f(t)\|^2 w(s, t) \\ &= \sum_{t \in S} \|f(t)\|^2 N(t) = \|f\|_1^2 \end{aligned}$$

für $f \in B_\pi$, da dann $f(s) - f(t) = -\pi(s) f(s^{-1}t)$. Ist nun $f \in H_\pi^S$ orthogonal zu den konstanten Funktionen in H_π^S , so folgt $\langle \Delta f, f \rangle_1 \geq \lambda \|f\|_1^2$.

Für die duale Abbildung $F_\pi^* : B_\pi \rightarrow H_\pi$ und $f = F_\pi \xi$ hat man

$$\langle F_\pi^* f, \eta \rangle_0 = \langle F_\pi^* F_\pi \xi, \eta \rangle_0 = \langle F_\pi \xi, F_\pi \eta \rangle_1$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s \in S} \langle \pi(s) \xi - \xi, \pi(s) \eta - \eta \rangle N(s) \\
&= \sum_{s \in S} \langle \xi - \pi(s^{-1}) \xi - \pi(s) \xi + \xi, \eta \rangle N(s) \\
&= \left\langle -2 \sum_{s \in S} (\pi(s) \xi - \xi) N(s), \eta \right\rangle = \left\langle -2 \sum_{s \in S} f(s) N(s), \eta \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{2}{m} \sum_{s \in S} f(s) N(s), \eta \right\rangle m = \left\langle -\frac{2}{m} \sum_{s \in S} f(s) N(s), \eta \right\rangle_0
\end{aligned}$$

für alle $\eta \in H_\pi$ und damit ist $F_\pi^* f = -2m^{-1} \sum_{s \in S} f(s) N(s)$ für $f = F_\pi \xi \in B_\pi$.

Da

$$\begin{aligned}
\langle f, \eta \rangle_1 &= \sum_{s \in S} \langle f(s), \eta \rangle N(s) = \left\langle \sum_{s \in S} f(s) N(s), \eta \right\rangle = \left\langle -\frac{m}{2} F_\pi^* f, \eta \right\rangle \\
&= \sum_{s \in S} \left\langle -\frac{1}{2} F_\pi^* f, \eta \right\rangle N(s) = \left\langle -\frac{1}{2} F_\pi^* f, \eta \right\rangle_1,
\end{aligned}$$

ist $s \mapsto f(s) + 2^{-1} F_\pi^* f$ orthogonal zu den konstanten Funktionen. Damit ist

$$\begin{aligned}
\langle \Delta f, f \rangle_1 &\geq \lambda \left\| f + \frac{1}{2} F_\pi^* f \right\|_1^2 = \lambda \left\langle f + \frac{1}{2} F_\pi^* f, f \right\rangle_1 \\
&= \lambda \left(\|f\|_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{s \in S} \langle F_\pi^* f, f(s) \rangle N(s) \right) \\
&= \lambda \left(\|f\|_1^2 - \frac{m}{4} \|F_\pi^* f\|^2 \right) = \lambda \left(\|f\|_1^2 - \frac{1}{4} \|F_\pi^* f\|_0^2 \right)
\end{aligned}$$

für $f \in B_\pi$. Somit gilt

$$\|f\|_1^2 = 2 \langle \Delta f, f \rangle_1 \geq \lambda \left(2 \|f\|_1^2 - \frac{1}{2} \|F_\pi^* f\|_0^2 \right)$$

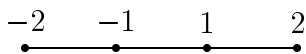
und damit $\|F_\pi^* f\|_0^2 \geq 2(2 - \lambda^{-1}) \|f\|_1^2$. \square

Nun ist es möglich den Satz von A. Żuk für gewichtete Graphen zu zeigen. Hätte man im vorigen Satz gezeigt, daß $c/\sqrt{3}$ eine Kazhdan-Konstante wäre, so hätte man hier auch im Fall der gewichteten Graphen die Aussage, daß sogar $(2/\sqrt{3})(2 - \lambda^{-1})$ eine Kazhdan-Konstante ist, wie im Originalbeweis von A. Żuk.

1.2.6 Satz. Falls (S, w) zusammenhängend und $\lambda > 1/2$ ist, so ist Γ eine Kazhdan-Gruppe und $2 - \lambda^{-1}$ eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante.

Beweis. Nach Lemma 1.2.5 gilt für alle Darstellungen π von Γ auf H_π ohne nichttriviale invariante Vektoren $\langle F_\pi^* f, F_\pi^* f \rangle_0 \geq 2(2 - \lambda^{-1}) \langle f, f \rangle_1$ für alle $f \in B_\pi$. Nach Satz 1.2.4 ist also $2 - \lambda^{-1}$ eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante. \square

Die Bedingung $\lambda > 1/2$ im letzten Satz ist bestmöglich. Denn für \mathbf{Z} mit dem Erzeugendensystem $S = \{\pm 1, \pm 2\}$ zeigt folgende Abbildung den Graphen (S, T) ohne Gewichte. Dabei ist $T = \{(s, t) \in S \times S : s^{-1}t \in S\}$.



Graph des Erzeugendensystems $S = \{\pm 1, \pm 2\}$ von \mathbf{Z}

Der zugehörige Laplace-Operator ist bezüglich der kanonischen Basis

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und das charakteristische Polynom $X(X-2)(X-1/2)(X-3/2)$. Also ist $\{0, 1/2, 3/2, 2\}$ das Spektrum von Δ und der zweitkleinste Eigenwert $1/2$.

Das einzige nichtendliche Beispiel, das bis jetzt in der Literatur bekannt zu sein scheint und auf das das Kriterium von A. Żuk anwendbar ist, ist die Klasse der sogenannten \tilde{A}_2 -Gruppen. Allerdings wäre dafür schon die Version des Satzes von A. Żuk für Polyeder aus [52] ausreichend. Auch die Untersuchung der Graphen mit geringer Knotenzahl in 1.5 erbrachte keine neuen nichtendlichen Beispiele. Bei einer Fortsetzung dieses Verfahrens kann man sich also auf Graphen mit mehr Knoten beschränken. Die \tilde{A}_2 -Gruppen sind Gruppen, die kokompakt auf Gebäuden vom Typ \tilde{A}_2 operieren. Es ist möglich sie durch eine Primzahlpotenz k zu parametrisieren. Diese Gruppen wurden in [9] untersucht und ihre Kazhdan-Konstante wurde bestimmt als

$\sqrt{2 - 2\frac{k+\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1}}}$. Der zweitkleinste Eigenwert des zugehörigen Erzeugendensystems, das dort betrachtet wurde, wurde in [18], [24] und [7] berechnet als $1 - \frac{\sqrt{k}}{k+1}$. Als untere Schranke erhält man also $1 - \frac{\sqrt{k}}{k+1-\sqrt{k}}$.

1.3 Beispiele für Graphen aus Erzeugendensystemen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß es Erzeugendensysteme der Gruppen $SL(2, \mathbf{Z})$ und $SL(3, \mathbf{Z})$ gibt, deren zweitkleinster Eigenwert des Laplace-Operators auf dem zugehörigen Graphen $1/2$ ist. Für $SL(2, \mathbf{Z})$ ist dies also ein weiteres Beispiel dafür, daß die Bedingung im Satz von A. Żuk bestmöglich ist. Für $SL(3, \mathbf{Z})$ ist es jedoch nicht gelungen ein Erzeugendensystem zu finden und daraus einen Graphen mit größerem zweitkleinsten Eigenwert zu konstruieren, für den der Satz von A. Żuk eine Kazhdan-Konstante ergibt.

Zuerst wird $\Gamma = SL(2, \mathbf{Z}) = \{\gamma \in GL(2, \mathbf{Z}) : \det \gamma = 1\}$ untersucht.

Für die Beweisidee für folgenden elementaren Beweis siehe z. B. [33, Seite 85].

1.3.1 Lemma. Die Elemente $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugen die Gruppe Γ .

Beweis. Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ mit $ad - bc = 1$, $G = \langle u, \omega \rangle$ und angenommen es ist $|a| \geq |c| + 1$ und $|d| \geq |b| + 1$, dann gilt

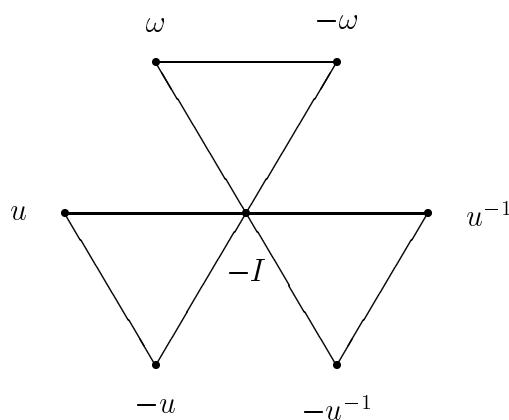
$$1 = |ad - bc| \geq |ad| - |bc| \geq (|c| + 1)(|b| + 1) - |bc| = |b| + |c| + 1.$$

Also gilt $b = 0 = c$ und damit $ad = 1$, d. h. $|a| = 1 = |d|$. In diesem Fall ist offensichtlich $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, denn es gilt $\gamma = I$ oder $\gamma = \omega^2$.

In den anderen Fällen ist $|a| \leq |c|$ oder $|d| \leq |b|$. Falls $|a| \leq |c|$ und $a = 0$, so ist $\gamma \in G$. Ist $a \neq 0$, so gibt es $q \in \mathbf{Z}$ und $0 \leq r \leq |a| - 1$ mit $c = aq + r$, dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ r & -qb + d \end{pmatrix}$ und $|a| \geq r + 1$. Es gelte $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, falls $|b'| \leq |b|$ und $|c'| \leq |c|$, und $\gamma' < \gamma$, falls

$\gamma' \leq \gamma$ und $\gamma' \not\geq \gamma$ ist. Also gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ r & -qb+d \end{pmatrix} < \gamma$, da $r < |a| \leq |c|$ ist. Falls $|d| \leq |b|$ und $d = 0$, so ist $\gamma \in G$. Ist $d \neq 0$, so gibt es wieder ein $q \in \mathbf{Z}$ und $0 \leq r \leq |d| - 1$ mit $b = dq + r$. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} a - qc & r \\ c & d \end{pmatrix} < \gamma$, da $r < |d| \leq |c|$ ist. Es gibt also Matrizen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ mit $\gamma > \gamma_1 > \dots > \gamma_n > \dots$ und, da es nur endlich viele ganze Zahlen b', c' mit $|b'| \leq |b|$ und $|c'| \leq |c|$ gibt und nur endlich viele zugehörige $a', d' \in \mathbf{Z}$ mit $a'd' - b'c' = 1$ gibt, da die ganze Zahl $b'c' + 1$ nur endlich viele Teiler besitzt, gibt es auch nur endlich viele zugehörige Matrizen $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ mit $\gamma' < \gamma$. Also ist nach endlich vielen Schritten bei obiger Konstruktion kein Schritt mehr anwendbar. Dann gilt jedoch $|a| \geq |c| + 1$ und $|d| \geq |b| + 1$, d. h. $|a| = 1 = |d|$ und damit $\gamma \in G$. Also ist $G = \text{SL}(2, \mathbf{Z})$, da jeweils $\gamma_{k+1}\gamma_k^{-1} \in G$. \square

Man hat also $\text{SL}(2, \mathbf{Z}) = \langle u, \omega \rangle$. Ein symmetrisches Erzeugendensystem von $\text{SL}(2, \mathbf{Z})$ erhält man durch die Menge $S = \{-I, \omega, -\omega, u, -u, u^{-1}, -u^{-1}\}$. Folgende Abbildung zeigt den Graphen (S, T) .



Der Graph eines Erzeugendensystems für $\text{SL}(2, \mathbf{Z})$

Betrachtet man Δ auf (S, T) bezüglich der Basis δ_s für $s \in S$, so gilt

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Folgendes Lemma bestimmt den zweitkleinsten Eigenwert als $\frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2}$.

1.3.2 Lemma. Sei $A \in M_{p,p}(\mathbf{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbf{R})$, $C \in M_{q,p}(\mathbf{R})$, $D \in M_{q,q}(\mathbf{R})$, $n = p + kq - 1$ und $m = p + q - 1$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \cdots & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \cdots & -\frac{1}{m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \cdots & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{m} & \cdots & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & \cdots & -\frac{1}{m} & 1 \end{pmatrix},$$

dann hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & B & B & \cdots & B & B \\ C & D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C & 0 & D & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ C & 0 & 0 & & D & 0 \\ C & 0 & 0 & \cdots & 0 & D \end{pmatrix} \in M_{n+1, n+1}(\mathbf{R})$$

die Eigenwerte 0, einfach, $\frac{p}{m}$, $k-1$ -fach, $\frac{n+1}{n}$, $p-1$ -fach, $\frac{m+1}{m}$, $k(q-1)$ -fach, $\frac{kq}{n} + \frac{p}{m}$, einfach, und $\frac{p}{m}$ ist der zweitkleinste Eigenwert.

Beweis. Der Vektor, der konstant 1 ist, ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Die $p-1$ Vektoren $(1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$, wobei je 0, 1, \dots , $p-2$ Einträge

0 sind zwischen 1 und -1 , sind die $p - 1$ Eigenvektoren zum Eigenwert $\frac{n+1}{n}$. Die $k(q - 1)$ Vektoren $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$, wobei die ersten je $p, p + q, \dots, p + (k - 1)q$ Einträge 0 sind, der $p + 1, p + q + 1, \dots$ bzw. $p + (k - 1)q + 1$ -te Eintrag eine 1 ist und je $0, 1, \dots, q - 2$ Einträge 0 sind zwischen 1 und -1 , sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\frac{m+1}{m}$. Die $k - 1$ Vektoren $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$, wobei die ersten p Einträge 0 sind, die Einträge an der $p + 1$ -ten bis $p + q$ -ten Stelle 1 sind, dann die Einträge an der $p + q + 1$ -ten bis $p + jq$ -ten Stelle 0 sind und die an der $p + jq + 1$ -ten bis $p + (j + 1)q$ -ten Stelle -1 sind, sind Eigenvektoren zum Eigenwert $\frac{p}{m}$. Der Vektor $(\frac{kq}{n}, \dots, \frac{kq}{n}, -\frac{p}{m}, \dots, -\frac{p}{m})$, der an den ersten p Stellen den Eintrag $\frac{kq}{n}$ besitzt und an den restlichen den Eintrag $-\frac{p}{m}$, ist Eigenvektor zum Eigenwert $\frac{kq}{n} + \frac{p}{m}$. Da $\frac{n+1}{n} > 1$, $\frac{m+1}{m} > 1$ und $\frac{kq}{n} + \frac{p}{m} \geq \frac{p}{m}$ ist für $k \geq 0$, ist $\frac{p}{m} \leq 1$ der zweitkleinste Eigenwert. \square

Bei dem Laplace-Operator oben ist also

$$A = 1, B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

mit $p = 1$ und $q = 2$. Der zweitkleinste Eigenwert ist damit $\frac{1}{1+2-1} = 1/2$.

Die Gruppe $SL(3, \mathbf{Z})$ erzeugen die Elemente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

siehe z. B. [13, Seite 85]. Sei $S = (\langle A \rangle \{B, I, B^{-1}\} \langle A \rangle) \setminus \{I\}$, dann gilt $s = A^j B^k A^\ell$ für $s \in S$, wobei $j, k, \ell \in \{-1, 0, 1\}$ ist und $j \neq 0$, $k \neq 0$ oder $\ell \neq 0$. Sei $s = A^j B^k A^\ell$, $t = A^{j'}$, dann ist $s^{-1}t = A^{-\ell} B^{-k} A^{j'-j} \in S$ für alle j', j, k, ℓ mit $k \neq 0$ oder $\ell + j \neq j'$. Sei $s = A^j B^k A^\ell$, $t = A^j B^k A^{\ell'}$, dann ist $s^{-1}t = A^{\ell'-\ell} \in S$ für alle j, k, ℓ, ℓ' mit $\ell \neq \ell'$. Sei $s = A^j B^k A^\ell$, $t = A^{j'} B^{k'} A^{\ell'}$ und $k \neq 0$, $k' \neq 0$ und $j \neq j' \pmod{3}$ oder $k' \neq k$, dann gilt $s^{-1}t = A^{-\ell} B^{-k} A^{j'-j} B^{k'} A^{\ell'} \notin \langle A \rangle \{B, I, B^{-1}\} \langle A \rangle \supset S$. Denn es ist $B^{-k} A^{j'-j} B^{k'} \notin \langle A \rangle \{B, I, B^{-1}\} \langle A \rangle$.

Also ist $s^{-1}t \in S$ genau dann, wenn gilt $s \neq t$, $s \in \{A^{\pm 1}\}$ oder $t \in \{A^{\pm 1}\}$ oder $s, t \in A^j B^k \langle A \rangle$ mit $k = \pm 1$. Somit erhält man als Laplace-Operator eine Matrix wie in dem Lemma mit $p = 2$, $q = |\langle A \rangle| = 3$ und $k = 6$. Der zweitkleinste Eigenwert dieser Matrix ist also $\frac{2}{2+3-1} = 1/2$.

1.4 Teilgraphen und Relationen

Betrachtet man eine diskrete Gruppe beschrieben durch Erzeugende und Relationen, so entspricht dem Entfernen von Relationen das Entfernen von Kanten im Graphen. Das Entfernen von Relationen liefert nun eine Gruppe, von der die ursprüngliche Gruppe eine Faktorgruppe ist. Besitzt nun der Laplace-Operator auf dem ursprünglichen Graphen einen zweitkleinsten Eigenwert $> 1/2$ ist, so folgt aus Aussagen über den zweitkleinsten Eigenwert eines Teilgraphen in bestimmten Fällen, daß auch dieser Eigenwert $> 1/2$ ist. Mit dem Satz von A. Żuk ist dann auch diese Gruppe eine Kazhdan-Gruppe.

Man kann nun für Teilgraphen Aussagen darüber machen, wie sich der Eigenwert λ bei der Entfernung von Kanten verändert. Korollar 1.4.7 gibt für einen Teilgraphen, der dieselben Knoten besitzt wie der Graph, obere und untere Schranken an für den zweitkleinsten Eigenwert des Graphen in Abhängigkeit des zweitkleinsten Eigenwerts des Teilgraphen und der Grade in den jeweiligen Graphen. Dabei gilt die obere Schranke sogar für beliebige Teilgraphen, die nicht notwendigerweise dieselbe Knotenmenge wie der Graph besitzen. Für das Entfernen einer Kante eines Knotens, der nur eine geringe Anzahl an Nachbarn besitzt, ergibt die obere Schranke keine guten Ergebnisse. Im Gegensatz dazu besitzt ein Graph, dessen jeder Knoten viele Nachbarn besitzt, einen relativ großen Eigenwert λ .

Folgendes Lemma liefert eine einfache Schranke für den Eigenwert λ . Für einen Beweis siehe z. B. [11, Seite 6–7].

1.4.1 Lemma. Sei (S, K) ein Graph mit $n = |S| \geq 2$ Knoten. Dann gilt folgendes.

- (a) Für den zweitkleinsten Eigenwert gilt $\lambda \leq \frac{n}{n-1}$.
- (b) Ist (S, K) ein nichtvollständiger Graph, so gilt $\lambda \leq 1$.

Nun zur Definition eines Teilgraphen.

1.4.2 Definition. Ein Graph (S, K) ist ein *Teilgraph* von (S', K') , falls $S \subset S'$ und $K \subset K' \cap (S \times S)$, und ein *induzierter Teilgraph*, falls $K = K' \cap (S \times S)$.

Sei (S, K) ein Teilgraph von (S', K') . Auf den jeweiligen Graphen betrachtet man die entsprechenden Gradfunktionen N und N' . Damit erhält man auf \mathbf{C}^S und $\mathbf{C}^{S'}$ die Skalarprodukte $\langle f, f' \rangle$ für $f, f' : S \rightarrow \mathbf{C}$ bzw. $\langle f, f' \rangle'$ für $f, f' : S' \rightarrow \mathbf{C}$.

1.4.3 Lemma. Seien (S', K') und (S, K) zwei endliche zusammenhängende Graphen mit Eigenwerten λ' bzw. λ und (S, K) ein induzierter Teilgraph von (S', K') , dann gilt

$$\lambda' \leq \max_{x \in S} \frac{N(x)}{N'(x)} \left(\lambda + \max_{x \in S} \frac{N'(x)}{N(x)} - 1 \right).$$

Ist (S', K') nur ein beliebiger Teilgraph von (S, K) , so gilt nur

$$\lambda' \leq \max_{x \in S} \frac{N(x)}{N'(x)} \left(\lambda + 2 \left(\max_{x \in S} \frac{N'(x)}{N(x)} - 1 \right) \right).$$

Beweis. Sei $f : S \rightarrow \mathbf{C}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und $f' : S' \rightarrow \mathbf{C}$ definiert durch

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) - c & x \in S \\ -c & x \in S' \setminus S \end{cases}$$

mit $c = \langle f', 1 \rangle' / \langle 1, 1 \rangle'$, dann gilt $\langle f', 1 \rangle' = \sum_{x \in S'} f'(x) N'(x) = 0$. Es ist $\langle f, f' \rangle' \leq \max_{x \in S} \frac{N'(x)}{N(x)} \|f\|^2$ und $\langle f, f' \rangle = \langle f, f' \rangle' \leq \|f\| \|f'\|$, womit folgt

$$\langle f, f' \rangle \leq \sum_{x \in S} |f'(x)|^2 N(x) \leq \max_{x \in S} \frac{N(x)}{N'(x)} \sum_{x \in S'} |f'(x)|^2 N'(x).$$

Ist $(x, y) \in K'$ und $x, y \in S' \setminus S$, so gilt $|f'(x) - f'(y)| = 0$, ist $x \in S' \setminus S$ und $y \in S$, so gilt $|f'(x) - f'(y)| = |f(y)|$, und sind $x, y \in S$, so gilt $|f'(x) - f'(y)| = |f(x) - f(y)|$. Ist $y \in S$, so gibt es von den $x \in S' \setminus S$ genau $N'(y) - N(y)$ mit $(x, y) \in K'$. Also ist

$$\begin{aligned} \langle D'f', D'f' \rangle' &= \sum_{(x,y) \in K'} |f'(x) - f'(y)|^2 \\ &= \sum_{(x,y) \in K} |f(x) - f(y)|^2 + 2 \sum_{y \in S} |f(y)|^2 (N'(y) - N(y)) \\ &= \langle Df, Df \rangle + 2 \langle f, f' \rangle' - 2 \langle f, f \rangle. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\lambda' &\leq \frac{\langle D'f', D'f' \rangle'}{2\langle f', f' \rangle'} = \frac{\langle Df, Df \rangle + 2\langle f, f \rangle' - 2\langle f, f \rangle}{2\langle f', f' \rangle'} \\
&\leq \max_{x \in S} \frac{N(x)}{N'(x)} \frac{\langle Df, Df \rangle + 2\langle f, f \rangle' - 2\langle f, f \rangle}{2\langle f, f \rangle} \\
&\leq \max_{x \in S} \frac{N(x)}{N'(x)} \left(\lambda + \max_{x \in S} \frac{N'(x)}{N(x)} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{(x,y) \in K' \setminus K} |f(x) - f(y)|^2 \\
&\leq 2 \sum_{(x,y) \in K' \setminus K} |f(x)|^2 + |f(y)|^2 \\
&= 2 \sum_{(x,y) \in K'} |f(x)|^2 + |f(y)|^2 - 2 \sum_{(x,y) \in K} |f(x)|^2 + |f(y)|^2 \\
&= 4 \sum_{x \in S} N'(x) |f(x)|^2 - 4 \sum_{x \in S} N(x) |f(x)|^2 \\
&= 4\langle f, f \rangle' - 4\langle f, f \rangle.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\lambda' &\leq \frac{\langle Df', Df' \rangle'}{2\langle f', f' \rangle'} \leq \frac{\langle Df, Df \rangle + 4\langle f, f \rangle' - 4\langle f, f \rangle}{2\langle f', f' \rangle'} \\
&= \max_{x \in S} \frac{N(x)}{N'(x)} \left(\lambda + 2 \left(\max_{x \in S} \frac{N'(x)}{N(x)} - 1 \right) \right).
\end{aligned}$$

□

Wählt man nun in obigem Lemma (S', K') als vollständigen Graphen, so erhält man folgendes.

1.4.4 Korollar. Sei (S, K) ein endlicher zusammenhängender Graph mit $n = |S| \geq 2$ Knoten, dann gilt

$$\lambda \geq \frac{n}{\max_{x \in S} N(x)} - 2 \left(\frac{n-1}{\min_{x \in S} N(x)} - 1 \right).$$

Beweis. Mit dem vorigen Lemma gilt

$$\frac{n}{n-1} \leq \frac{\max_{x \in S} N(x)}{n-1} \left(\lambda + 2 \left(\frac{n-1}{\min_{x \in S} N(x)} - 1 \right) \right)$$

und damit

$$\lambda \geq \frac{n}{\max_{x \in S} N(x)} - 2 \left(\frac{n-1}{\min_{x \in S} N(x)} - 1 \right).$$

□

Dies ermöglicht nun eine Aussage über den zweitkleinsten Eigenwert des Laplace-Operators auf Graphen, deren Knoten viele Nachbarn besitzen. Allerdings bleibt die Frage offen, ob Gruppen, die Erzeugendensysteme besitzen, die solche Graphen erzeugen, nicht möglicherweise alle endlich sind, da viele Nachbarn eines Knotens viele Relationen in der Gruppe implizieren.

1.4.5 Korollar. Sei (S, K) ein endlicher zusammenhängender Graph mit $n = |S| \geq 2$ Knoten und $\min_{x \in S} N(x) \geq \frac{4}{5}n - 1$, so gilt $\lambda > 1/2$.

Beweis. Sei $\min_{x \in S} N(x) \geq \frac{4}{5}n - 1$, dann folgt mit Korollar 1.4.4

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \frac{n}{\max_{x \in S} N(x)} - 2 \left(\frac{n-1}{\min_{x \in S} N(x)} - 1 \right) \\ &\geq \frac{n}{n-1} - 2 \left(\frac{n-1}{\frac{4}{5}n-1} - 1 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{3n-5}{(n-1)(4n-5)} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

für $n \geq 2$.

□

Für den zweitkleinsten Eigenwert des Laplace-Operators eines Graphen hat man mit Lemma 1.4.3 eine untere Schranke für den Eigenwert eines Teilgraphen. Folgendes Lemma bestimmt eine obere Schranke für den Eigenwert, falls nur Kanten aus dem Graphen entfernt werden, aber keine Knoten, d. h. die Knotenmenge bleibt gleich. Dies ist ein Spezialfall eines Satzes in [11, Seite 68–71].

1.4.6 Lemma. Sei (S, K) ein zusammenhängender Teilgraph des zusammenhängenden Graphen (S, K') , λ', λ der zweitkleinste Eigenwert von (S, K') bzw. (S, K) und $a = \min_{x \in S} N(x)/N'(x)$, dann ist $\lambda' \geq a\lambda$.

Beweis. Sei f' ein Eigenvektor zum Eigenwert λ' und $f = f' - \langle f', 1 \rangle / \langle 1, 1 \rangle$, dann ist $\langle f, 1 \rangle = 0$ und damit $\lambda \leq 2^{-1} \langle Df, Df \rangle / \langle f, f \rangle$. Es gilt

$$\langle Df, Df \rangle = \sum_{(x,y) \in K} |Df(x,y)|^2 \leq \sum_{(x,y) \in K'} |D'f'(x,y)|^2 = \langle D'f', D'f' \rangle$$

und

$$\langle f', f' \rangle' = \langle f', f \rangle' \leq \|f'\|' \|f\|'.$$

Da $\langle f, f \rangle' = \sum_{x \in S} |f(x)|^2 N'(x) \leq \max_{x \in S} N'(x) / N(x) \|f\|^2$, ist $\|f'\|' \leq a^{-1/2} \|f\|$ und $\lambda \leq (2a)^{-1} \langle D'f', D'f' \rangle' / \langle f', f' \rangle' = \lambda' / a$. \square

Daraus erhält man nun Schranken für den zweitkleinsten Eigenwert des Laplace-Operators eines Graphen durch den eines Teilgraphen mit den gleichen Knoten. Die obere Abschätzung ist jedoch nur für den Fall gut, daß das Verhältnis der Anzahl der Nachbarn im Teilgraphen zu der der Nachbarn im Graphen nicht zu klein wird.

1.4.7 Korollar. Sei (S, K) ein zusammenhängender Teilgraph des zusammenhängenden Graphen (S, K') , λ', λ der zweitkleinste Eigenwert von (S, K') bzw. (S, K) und $a = \min_{x \in S} N(x) / N'(x)$, dann ist $a\lambda \leq \lambda' \leq \lambda + 2(a^{-1} - 1)$.

Im Hinblick auf Lemma 1.4.1 ist die obere Schranke für nichtvollständige Graphen nur sinnvoll, wenn $a > 2/3$, denn für $a \leq 2/3$ ist $2(a^{-1} - 1) \geq 1$. Im Teilgraphen sollte also jeder Knoten mindestens $2/3$ der Nachbarn besitzen, die er schon im Graphen besitzt. Falls der Eigenwert λ groß ist, ist dies auch schon zu wenig, denn abhängig von λ sollte genauer $a > 2(3 - \lambda)^{-1}$ sein, sonst ist $\lambda + 2(a^{-1} - 1) \geq 1$. Die untere Schranke ist natürlich unabhängig davon für jedes a sinnvoll.

1.5 Zu Erzeugendensystemen assoziierte Graphen

Da es schwierig ist für eine Kazhdan-Gruppe ein geeignetes Erzeugendensystem zu konstruieren, folgt nun die Betrachtung des Problems zu entscheiden, ob ein gegebener Graph aus einem Erzeugendensystem einer Gruppe entstanden sein kann. Dafür werden zwei notwendige Bedingungen angegeben. Die eine ist eine Bedingung an die Grade des Graphen. Dadurch ist es schon

möglich eine große Zahl von Graphen auszuschließen. Die andere ist eine Bedingung an das Erzeugendensystem, also die Knotenmenge des Graphen. Sie liefert für Graphen mit vollständigen Teilgraphen Aussagen über endliche Untergruppen, die, bis auf das neutrale Element, im Erzeugendensystem enthalten sein müssen. Die Anzahl der Elemente im Erzeugendensystem entspricht der Knotenzahl, die Anzahl der Elemente dieser endlichen Untergruppen ist durch die Knotenzahl beschränkt. Um eine Abschätzung zu erhalten, wird ein Lemma gezeigt, das für paarweise verschiedene endliche Untergruppen eine Mindestanzahl an Elementen bestimmt, die in der Vereinigung dieser Untergruppen enthalten sein müssen.

Nach dem Beweis dieser beiden Bedingungen ist es möglich für kleine Knotenzahlen die Graphen anzugeben, die aus dem Erzeugendensystem einer Gruppe entstanden sind. Die Benutzung dieser Bedingungen ermöglicht es Graphen auszuschließen, die keinesfalls durch Gruppen entstanden sein können. Die Gruppen, die dabei aufgetreten sind und für die man mit dem Satz von A. Żuk die Eigenschaft (T) folgern kann, sind jedoch alle endlich. Die nichtendlichen sind keine Kazhdan-Gruppen.

Im folgenden ist wieder (S, T) der Graph, den man aus dem Erzeugendensystem S erhält. Das Erzeugendensystem ist hier immer symmetrisch und enthält nicht das neutrale Element, d. h. $S = S^{-1}$ und $1 \notin S$. Die Elemente aus S sind also die Knoten und zwischen $s, t \in S$ ist genau dann eine Kante, falls $s^{-1}t \in S$. Durch die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ auf S und $y \mapsto x^{-1}y$ für die Nachbarn y eines Knotens x erhält man folgendes.

1.5.1 Lemma. Sei S ein endliches Erzeugendensystem einer Gruppe Γ und (S, T) der davon erzeugte Graph, dann gilt folgendes.

- (a) Ein Element der Ordnung 2 besitzt geraden Grad.
- (b) Ein Element der Ordnung 3 besitzt mindestens 2 Nachbarn, falls (S, T) zusammenhängend und $|S| \geq 3$.

Beweis. (a) Sei $s \in S$ und $s^2 = 1$, dann ist $(s, x) \in T$ genau dann, wenn $(s, sx) \in T$ für $x \in S$ gilt. Durch Multiplikation von links mit s hat man also eine Permutation der Nachbarn von s . Diese Abbildung hat Ordnung 2 und keinen Fixpunkt. Also besitzen die Bahnen dieser Abbildung alle die Länge 2 und die Anzahl der Nachbarn ist damit gerade.

- (b) Ein Element s der Ordnung 3 hat immer s^{-1} als Nachbarn. Da der Graph zusammenhängend ist und $|S| \geq 3$, besitzt s bzw. s^{-1} mindestens noch ein anderes Element als Nachbarn. Damit ist $N(s) = N(s^{-1}) \geq 2$.

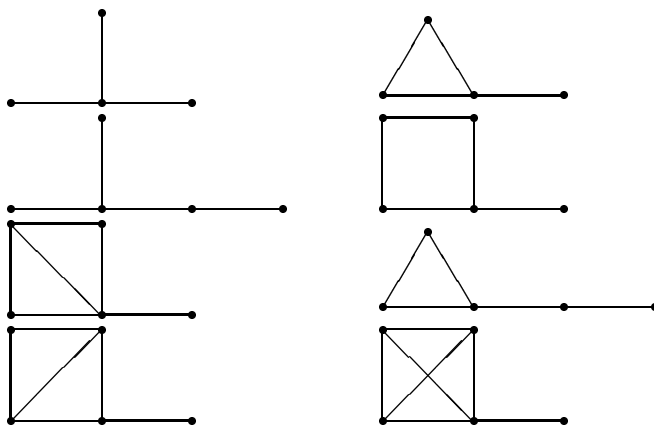
□

Daraus erhält man folgende Bedingung an die Grade.

1.5.2 Satz. Sei $M_k = \{x \in S : N(x) = k\}$, dann gilt $k |M_k| \equiv 0 \pmod{2}$.

Beweis. Sei $k \equiv 1 \pmod{2}$, dann enthält M_k kein Element z der Ordnung 2, denn sonst wäre $N(z) = k \equiv 0 \pmod{2}$ nach 1.5.1a. Mit $x \in M_k$ ist auch $x^{-1} \in M_k$ und $x \neq x^{-1}$. Die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ der Ordnung 2 operiert also ohne Fixpunkt auf M_k , damit ist $|M_k| \equiv 0 \pmod{2}$. □

Für einen Graphen, den man durch ein Erzeugendensystem einer Gruppe erhält, muß also die im Satz angegebene Gradbedingung erfüllt sein. Dadurch lassen sich schon Graphen ausschließen, die auf keinen Fall aus einem Erzeugendensystem entstehen. Beispiele dafür sind in folgender Abbildung angegeben.



Graphen, die die Gradbedingung nicht erfüllen

Nun zur zweiten Bedingung. Aus einem Korollar zu folgendem Satz erhält man eine Mindestanzahl endlicher Untergruppen, die bis auf das neutrale Element im Erzeugendensystem enthalten sein müssen. Dabei gilt folgende Beziehung zwischen vollständigen Teilgraphen mit r Knoten und endlichen Untergruppen der Ordnung $r + 1$.

1.5.3 Satz. Sei S ein Erzeugendensystem der Gruppe Γ , c_r die Anzahl der vollständigen Teilgraphen mit r Knoten und $k_0^{(r)}$ die Anzahl der Untergruppen der Ordnung $r + 1$ von Γ , die in $S \cup \{1\}$ enthalten sind. Dann ist $c_r = k_0^{(r)} + \sum_{j=1}^m k_j p_j$, wobei $k_j \geq 0$ und p_1, \dots, p_m die Primteiler von $r + 1$ sind.

Beweis. Sei M die Menge der Knotenmengen der vollständigen Teilgraphen mit r Knoten und $M_1 = \{C \cup \{1\} : C \in M\}$,

$$\begin{aligned} A &= \{(s_1, \dots, s_r) : \{s_1, \dots, s_r\} \in M\}, \\ A_1 &= \{(s_1, \dots, s_{r+1}) : \{s_1, \dots, s_{r+1}\} \in M_1\}, \end{aligned}$$

dann operiert die symmetrische Gruppe S_{r+1} auf A_1 durch

$$\sigma(s_1, \dots, s_{r+1}) = (s_{\sigma 1}, \dots, s_{\sigma(r+1)}).$$

Die Abbildung $P : A_1 \rightarrow A$ sei definiert durch

$$P(s_1, \dots, s_{r+1}) = (s_{r+1}^{-1} s_1, \dots, s_{r+1}^{-1} s_r).$$

Über die Abbildung P operiert S_{r+1} auf A durch

$$\sigma(P(s_1, \dots, s_{r+1})) = P(\sigma(s_1, \dots, s_{r+1})).$$

Dies ist wohldefiniert, denn falls $P(s_1, \dots, s_{r+1}) = P(t_1, \dots, t_{r+1})$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} &P(\sigma(s_1, \dots, s_r, s_{r+1})) \\ &= \left(s_{\sigma(r+1)}^{-1} s_{\sigma 1}, \dots, s_{\sigma(r+1)}^{-1} s_{\sigma r} \right) \\ &= \left((s_{r+1}^{-1} s_{\sigma(r+1)})^{-1} s_{r+1}^{-1} s_{\sigma 1}, \dots, (s_{r+1}^{-1} s_{\sigma(r+1)})^{-1} s_{r+1}^{-1} s_{\sigma r} \right) \\ &= \left((t_{r+1}^{-1} t_{\sigma(r+1)})^{-1} t_{r+1}^{-1} t_{\sigma 1}, \dots, (t_{r+1}^{-1} t_{\sigma(r+1)})^{-1} t_{r+1}^{-1} t_{\sigma r} \right) \\ &= P(\sigma(t_1, \dots, t_r, t_{r+1})). \end{aligned}$$

Betrachtet man S_r als Untergruppe von S_{r+1} , dann gilt

$$P(\sigma(s_1, \dots, s_{r+1})) = (s_{r+1}^{-1} s_{\sigma 1}, \dots, s_{r+1}^{-1} s_{\sigma r}) \neq P(s_1, \dots, s_{r+1})$$

für $\sigma \in S_r \setminus \{1\}$. Auf der Bahn $S_{r+1}V$ für $V \in A$ operiert nun S_r . Jede Bahn unter S_r hat Länge $r!$ und damit ist $r!$ ein Teiler von $|S_{r+1}V|$.

Sei $B \subset A$ ein Vertretersystem so, daß $A = \bigcup_{V \in B} S_{r+1}V$ eine disjunkte Zerlegung in Bahnen ist, dann ist $r!c_r = |A| = \sum_{V \in B} |S_{r+1}V|$. Falls $|S_{r+1}V| \neq r!$ ist, gibt es einen Primteiler p_j von $r+1$ derart, daß $r!p_j$ ein Teiler von $|S_{r+1}V|$ ist, da $|S_{r+1}V|$ ein Teiler von $(r+1)!$ ist. Ist $V = (s_1, \dots, s_r)$ und $|S_{r+1}V| = r!$, so ist $U = \{1, s_1, \dots, s_r\}$ eine Untergruppe der Ordnung $r+1$, da $s^{-1}t \in U$ gilt für alle $s, t \in U$. Also gilt $c_r = k_0^{(r)} + \sum_{j=1}^m k_j p_j$ mit $k_j \geq 0$. \square

1.5.4 Bemerkung. Den Transpositionen $\sigma_k = (k, r+1)$, $k = 1, \dots, r$, entsprechen die Abbildungen $\Phi_k : A \rightarrow A$,

$$\begin{aligned} & \Phi_k(s_1, \dots, s_{k-r}, s_k, s_{k+1}, \dots, s_r) \\ &= (s_k^{-1} s_1, \dots, s_k^{-1} s_{k-1}, s_k^{-1}, s_k^{-1} s_{k+1}, \dots, s_k^{-1} s_r) \end{aligned}$$

und es gilt $\Phi_k P = P \sigma_k$.

Die nächsten beiden Folgerungen liefern Aussagen über Elemente der Ordnung 2 bzw. 3 in S durch die Anzahl der Knoten bzw. Kanten. Das erste Korollar behandelt vollständige Teilgraphen mit 1 Knoten, d. h. gerade die Knoten des Graphen.

1.5.5 Korollar. Sei $k_0^{(1)}$ die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in S , dann ist $|S| \equiv k_0^{(1)} \pmod{2}$.

Betrachtet man die vollständigen Teilgraphen mit 2 Knoten, d. h. die Teilgraphen, die aus einer Kante und den dazugehörigen Endknoten bestehen, so erhält man durch die Kanten eine Aussage über Untergruppen der Ordnung 3.

1.5.6 Korollar. Sei $k_0^{(2)}$ die Anzahl der Untergruppen der Ordnung 3 in S , dann ist $|T|/2 \equiv k_0^{(2)} \pmod{3}$.

Aus dem letzten Satz läßt sich auch sofort eine untere Schranke für die Anzahl $k_0^{(r)}$ angeben.

1.5.7 Korollar. Sei S ein Erzeugendensystem der Gruppe Γ , c die Anzahl der vollständigen Teilgraphen mit r Knoten und $k_0^{(r)}$ minimal bezüglich der Zerlegung $c = k_0^{(r)} + \sum_{j=1}^m k_j p_j$, wobei $k_j \geq 0$ und p_1, \dots, p_m die Primteiler von $r+1$ sind, dann gibt es mindestens $k_0^{(r)}$ Untergruppen der Ordnung $r+1$ von Γ enthalten in $S \cup \{1\}$.

Eine Folgerung daraus ist nun, daß vollständige Graphen mit n Knoten gerade aus Gruppen der Ordnung $n+1$ entstehen. Insbesondere können zwei verschiedene Gruppen denselben Graphen erzeugen, d. h. die Graphen aus den Erzeugendensystemen charakterisieren die Gruppe nicht eindeutig.

1.5.8 Korollar. Sei Γ eine Gruppe, S ein Erzeugendensystem von Γ und (S, T) der von S erzeugte Graph. Ist (S, T) vollständig, so ist Γ eine Gruppe der Ordnung $|S| + 1$.

Beweis. Es gibt genau $c = 1$ vollständige Teilgraphen mit $|S|$ Knoten und $k_0 = 1$ ist minimal in der Zerlegung $c = k_0 + \sum_{j=0}^m k_j p_j$, wobei $k_j \geq 0$ und p_1, \dots, p_m die Primteiler von $|S| + 1$ sind. \square

Zu einem gegebenen Graphen kann man mit Korollar 1.5.7 eine Mindestanzahl an Untergruppen bestimmen, die, bis auf die 1, in der Knotenmenge enthalten sein müssen. Die Anzahl der Elemente in der Vereinigung dieser Untergruppen ist beschränkt durch die Knotenzahl.

1.5.9 Satz. Sei S das Erzeugendensystem einer Gruppe Γ und $S \cup \{1\}$ enthalte die paarweise verschiedenen endlichen Untergruppen U_1, \dots, U_q mit $|U_k| \geq 2$ für alle $1 \leq k \leq q$, dann ist

$$|S| \geq \sum_{k=1}^q |U_k| + \frac{q(q-3)}{2} - \sum_{j=2}^q \sum_{k=1}^{j-1} P(|U_j|, |U_k|),$$

wobei $P(u, v) = \text{ggT}(u, v)$ ist, falls $u \neq v$ ist, und $P(u, v) = u/p$, falls $u = v$ ist und p der kleinste Primteiler von u ist.

Beweis. Gezeigt wird, daß für die Untergruppen

$$\left| \bigcup_{k=1}^q U_k \right| \geq \sum_{k=1}^q |U_k| + \frac{(q-1)(q-2)}{2} - \sum_{j=2}^q \sum_{k=1}^{j-1} P(|U_k|, |U_j|)$$

gilt. Daraus folgt mit $|S| \geq |\bigcup_{k=1}^q U_k \setminus \{1\}| = |\bigcup_{k=1}^q U_k| - 1$ die Behauptung.

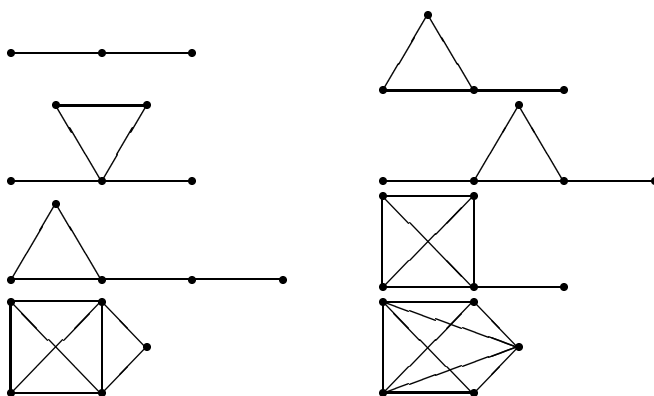
Für $q = 1$ ist die Behauptung offensichtlich erfüllt.

Mit Induktion folgt die Behauptung. Sei dafür nun also $q \geq 2$, dann ist $|\bigcup_{k=1}^q U_k| = |\bigcup_{k=1}^{q-1} U_k| + |U_q| - |\bigcup_{k=1}^{q-1} U_k \cap U_q|$. Mit

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{k=1}^{q-1} U_k \cap U_q \right| &= 1 + \left| \bigcup_{k=1}^{q-1} U_k \cap U_q \setminus \{1\} \right| \leq 1 + \sum_{k=1}^{q-1} (|U_k \cap U_q| - 1) \\ &\leq 2 - q + \sum_{k=1}^{q-1} P(|U_k|, |U_q|) \end{aligned}$$

und durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $|\bigcup_{k=1}^{q-1} U_k|$ folgt die Behauptung. \square

Graphen, die diese Untergruppenbedingung nicht erfüllen, können nicht aus Erzeugendensystemen von Gruppen entstanden sein. Folgende Abbildung zeigt einige Beispiele.



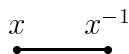
Graphen, die die Untergruppenbedingung nicht erfüllen

Diese beiden Bedingungen ermöglichen nun für zusammenhängende Graphen mit höchstens fünf Knoten die Bestimmung derjenigen, die aus Erzeugendensystemen entstehen, und der zugehörigen Gruppen. Die Gruppen werden dabei durch Erzeugende und Relationen angegeben. Dabei bezeichne $\Gamma = \langle s_1, \dots, s_n : r_1, \dots, r_m \rangle$ die Gruppe beschrieben durch Erzeugende und Relationen, also die Faktorgruppe der freien Gruppe mit Erzeugenden s_1, \dots, s_n und des Normalteilers erzeugt von den r_1, \dots, r_m , wobei r_1, \dots, r_m Elemente der freien Gruppe sind. Die Graphen, die man hier erhält, befinden sich in Anhang B zusammengefaßt in einer Liste.

Für Graphen mit höchstens fünf Knoten folgt die Bestimmung der zugehörigen Gruppen. Die Behandlung des Falls mit fünf Knoten ist hier nicht vollständig, da zu viele Fallunterscheidungen zu berücksichtigen wären. Die entsprechenden Graphen wurden jedoch bestimmt und sind auch in der Liste in Anhang B zu finden. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die aufgetretenen Graphen, auf die sich das Ergebnis von A. Żuk anwenden ließe, alle aus Erzeugendensystemen endlicher Gruppen entstanden sind. Die nichtendlichen Gruppen, die dabei aufgetreten sind, sind jedoch alle keine Kazhdan-Gruppen. Möchte man also dieses Verfahren fortsetzen, kann man sich auf Graphen mit mehr als fünf Knoten beschränken.

Die Vorgehensweise ist nun die folgende. Ausgehend von der Anzahl der Knoten und der Anzahl der Kanten liefern kombinatorische Erwägungen Relationen. Falls möglich, erhält man für einen gegebenen Graphen ein Erzeugendensystem einer Gruppe mit Erzeugenden und Relationen, das den Graphen erzeugt. Man muß dabei jedesmal darauf achten, die Identifikation zweier Knoten durch die Relationen auszuschließen, d. h. für zwei verschiedene Knoten x, y darf nicht die Relation $x = y$ gelten. Dies wird jedoch nicht jedesmal erwähnt.

Sei $|S| = 2$, dann ist der einzige zusammenhängende ungerichtete Graph der vollständige Graph. Die von S erzeugte Gruppe Γ ist damit eine Gruppe der Ordnung $|S| + 1 = 3$. Also ist $\Gamma \cong \langle x : x^3 \rangle \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ und man erhält folgenden Graphen.



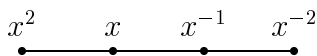
Sei nun $|S| = 3$, dann ist $2 \leq |K|/2 \leq 3$. Wäre $|K|/2 = 2$, so gäbe es mindestens 4 Elemente der Ordnung 3. Da $|S| = 3$, ist das nicht möglich.

Also ist $|K|/2 = 3$ und somit (S, K) der vollständige Graph. Damit ist $|\Gamma| = 4$ und somit $\Gamma \cong \langle x : x^4 \rangle \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ oder $\Gamma \cong \langle x, y : x^2, y^2, (xy)^2 \rangle \cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Das Erzeugendensystem von Γ ist jeweils $S = \Gamma \setminus \{1\}$. Die Graphen sehen also folgendermaßen aus.

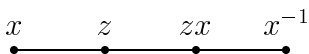


Sei nun $|S| = 4$, dann ist $3 \leq |K|/2 \leq 6$. Ist $|K|/2 = 3$, so besitzt S kein Element der Ordnung 3. Sonst hätte S sogar 6 Elemente der Ordnung 3 im Widerspruch zu $|S| = 4$. Seien $x, y \in S$ und $(x, y) \in K$, dann ist auch $(x^{-1}, x^{-1}y), (y^{-1}, y^{-1}x) \in K$ und $x^{-1}y \notin \{x^{-1}, y\}, y^{-1}x \notin \{y^{-1}, x\}$.

Besitzt S kein Element der Ordnung 2, so ist $x^{-1}y \in \{x, y^{-1}\}$, also ist $y = x^2$ oder $x = y^2$. O. E. sei $y = x^2$, dann ist $S = \{x^{-2}, x^{-1}, x, x^2\}$ und somit gilt $\Gamma \cong \mathbf{Z}$. Auch die Faktorgruppen $\Gamma \cong \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ mit $k \geq 7$ erzeugen denselben Graphen mit folgender Gestalt.

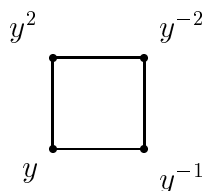


Besitzt S ein Element der Ordnung 2, so gibt es davon mindestens 2. Angenommen es sind genau zwei, so sind noch zwei andere Elemente $x, x^{-1} \in S$. O. E. sei $(z, x) \in K$, damit ist dann auch $(z, zx), (x^{-1}, x^{-1}z) \in K$. Da $x^{-1}z \notin \{z, x^{-1}\}$, ist $x^{-1}z = x$ und damit $z = x^2$ oder $(x^{-1}z)^2 = 1$. Falls $z = x^2$, so ist $x^4 = 1$ und damit $(x, x^{-1}), (x, z), (z, x^{-1}) \in K$. Ein Widerspruch zum Zusammenhang von (S, K) , da $|S| = 4$ und $|K|/2 = 3$ ist. Also ist $(x^{-1}z)^2 = 1$. Damit gilt $x^{-1}z = zx$ und $S = \{x, x^{-1}, z, zx\}$. Somit ist $\Gamma \cong \langle x, z : z^2 = 1, (zx)^2 = 1 \rangle = D_\infty$ bzw. $\Gamma \cong \langle x, z : z^2 = 1, (zx)^2 = 1, x^k = 1 \rangle = D_k$ mit $k \geq 4$, wobei D_k die Diedergruppe bezeichne. Der Graph besitzt folgende Gestalt.

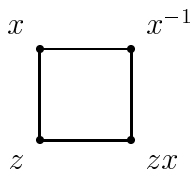


Hätten alle Elemente von S Ordnung 2, so wäre mit $x, y, xy \in S$ auch $(x, y), (x, xy), (y, xy) \in K$ im Widerspruch zum Zusammenhang von (S, K) .

Sei nun $|K|/2 = 4$, dann gibt es mindestens zwei Elemente $x, x^{-1} \in S$ der Ordnung 3. Es sind auch genau zwei Elemente, da es sonst 8 Elemente der Ordnung 2 gäbe. Angenommen die anderen Elemente haben nicht die Ordnung 2, dann ist $S = \{x, x^{-1}, y, y^{-1}\}$. O. E. sei $(x, y) \in K$, dann ist $(x^{-1}, x^{-1}y), (y^{-1}, y^{-1}x) \in K$ und $x^{-1}y \notin \{x, x^{-1}, y\}$. Also ist $x^{-1}y = y^{-1}$ und damit $x = y^2$. Somit ist $\Gamma \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, da $S = \{y^{-2}, y^{-1}, y, y^2\}$ ist, und der Graph hat folgende Gestalt.

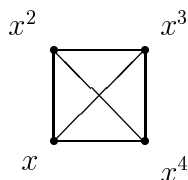


Besitzt S noch zwei Elemente der Ordnung 2, dann gilt für eines davon $(z, x) \in K$ und damit ist $(z, zx), (x^{-1}, x^{-1}z) \in K$. Damit ist $x^{-1}z = zx$ das vierte Element in S , da $x^{-1}z, zx \notin \{x, x^{-1}, z\}$ ist. Also ist $(zx)^2 = 1$ und $S = \{x, x^{-1}, z, zx\}$. Damit ist $\Gamma \cong \langle x, z : x^3 = 1, z^2 = 1, (zx)^2 = 1 \rangle = D_3$ mit folgendem Graphen.



Sei nun $|K|/2 = 5$, dann haben alle Elemente in S die Ordnung 3. Dies ist nicht möglich. Denn falls $(x, y) \in K$ eine Kante mit $y \neq x^{-1}$ ist, so gilt $(x^{-1}, x^{-1}y) \in K$ mit $x^{-1}y \in \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$. Aber es ist $x^{-1}y \neq x^{-1}$, $x^{-1}y \neq x$ wegen $y \neq x^2$, $x^{-1}y \neq y$ und $x^{-1}y \neq y^{-1}$ wegen $x \neq y^2$, da mit der Ordnung 3 von x und y sonst folgen würde $x^2 = x^{-1} = y^{-2} = y$.

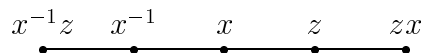
Sei nun $|K|/2 = 6$, dann ist (S, K) der vollständige Graph mit vier Knoten und somit ist $|\Gamma| = 5$, d. h. es gilt $\Gamma \cong \langle x : x^5 \rangle \cong \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ und der Graph sieht folgendermaßen aus.



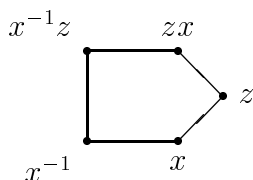
Sei nun $|S| = 5$, dann gilt $4 \leq |K|/2 \leq 10$. Hier sind nur die Fälle für $|K|/2 \leq 5$ aufgeführt. Die entsprechenden Graphen für $|K|/2 \geq 6$ findet man ohne Beweise in Anhang B. Die Beweise für die entsprechenden Graphen in diesen Fällen werden hier nicht geführt, da zu viele Fallunterscheidungen zu berücksichtigen wären.

Sei also nun zuerst $|K|/2 = 4$, dann enthält S genau zwei Elemente x, x^{-1} der Ordnung 3, denn es sind mindestens zwei und wären es mehr als zwei, so gäbe es acht. Da $|S| = 5$ ist, gibt es auch mindestens ein Element z der Ordnung 2. Dieses Element hat eine gerade Anzahl von Nachbarn.

Also hat z vier oder zwei Nachbarn. Hätte z vier Nachbarn, so hätte jedes von z verschiedene Element genau z als Nachbarn, da es nur vier Kanten gibt. Aber x hat auch $x^{-1} \neq z$ als Nachbarn. Dies ist ein Widerspruch. Also besitzt z genau zwei Nachbarn. Nach dem obigen Lemma ist die Anzahl der Nachbarn von x gleich der Anzahl der Nachbarn von x^{-1} und $N(x) \geq 2$. Es gilt $N(z) = 2$ und für die Elemente $y \in S \setminus \{x^{\pm 1}, z\}$ gilt jedenfalls $N(y) \geq 1$. Damit ist $8 = |K| = \sum_{s \in S} N(s) \geq 3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$. Also ist $N(x) = N(x^{-1}) = 2$ und $N(y) = 1$ für $y \in S \setminus \{x^{\pm 1}, z\}$. Somit ist $S = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z\}$, da y nicht die Ordnung 2 besitzt wegen $N(y) = 1$. Da y und y^{-1} nur einen Nachbarn besitzen und der Graph zusammenhängend sein muß, besitzt z je eine Kante zu x bzw. x^{-1} und eine zu y bzw. y^{-1} . O. E. sei z mit x verbunden, dann besitzt der Graph die Knoten $S = \{x, x^{-1}, z, zx, x^{-1}z\}$. Die zugehörige Gruppe ist $\Gamma \cong \langle x, z : z^2 = 1, x^3 = 1 \rangle \cong \text{PSL}(2, \mathbf{Z}) \cong \text{SL}(2, \mathbf{Z}) / \{\pm I\}$. Auch die Faktorgruppen $\Gamma \cong \langle x, z : z^2 = 1, x^3 = 1, (zx)^k = 1 \rangle \cong \text{PSL}(2, \mathbf{Z}/k\mathbf{Z})$ mit $k \geq 4$ von $\text{PSL}(2, \mathbf{Z})$ besitzen denselben, nämlich nachstehenden, Graphen.



Sei nun $|K|/2 = 5$, dann gibt es 4 Elemente $x^{\pm 1}, y^{\pm 1}$ der Ordnung 3 in S und das fünfte Element besitzt Ordnung 2, da $|S| = 5$ ungerade ist. Die Anzahl der Nachbarn von z ist wieder 2, denn wenn z vier Nachbarn hätte, gäbe es sechs Kanten, da je zwei der vier Elemente der Ordnung 3 miteinander verbunden sind. Da x bzw. y die Ordnung 3 besitzt, ist z wieder je mit x bzw. x^{-1} und y bzw. y^{-1} verbunden. O. E. sei z wieder mit x verbunden. Daraus erhält man das Erzeugendensystem $S = \{x, x^{-1}, z, zx, x^{-1}z\}$. Die zugehörige Gruppe ist also $\Gamma \cong \langle x, z : z^2 = 1, x^3 = 1, (zx)^3 = 1 \rangle \cong \text{PSL}(2, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$. Der zugehörige Graph besitzt folgende Gestalt.



Kazhdans Eigenschaft (T) für einfache Lie-Gruppen

Ein Hauptschritt im Beweis der Eigenschaft (T) für einfache Lie-Gruppen mit \mathbf{R} -Rang ≥ 2 , ist der Beweis dieser Eigenschaft für $SL(3, \mathbf{R})$ und $Sp(2, \mathbf{R})$. Den ersten Fall $SL(3, \mathbf{R})$ behandelten M. B. Bekka und M. Mayer in [4]. Hier steht besonders der zweite Fall im Vordergrund. Allgemeiner wird sogar die Eigenschaft (T) für $Sp(2, K)$ für einen lokalen Körper K gezeigt. Die Darstellung dieses Ergebnisses hier unterscheidet sich nur wenig von der mit M. B. Bekka erstellten Version [5]. Ferner wird für den Laplace-Operator der universellen einhüllenden Algebra der Lie-Algebra $sp(2, \mathbf{R})$ eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante bestimmt. Dies liefert, nach einem Resultat aus [4, Seite 94], die Eigenschaft (T) für $Sp(2, \mathbf{R})$. Es war hier auch möglich eine untere Schranke für die Lie-Gruppen $Sp(n, \mathbf{R})$, $n \geq 3$, und $SL(n, \mathbf{R})$, $n \geq 4$, mit höherem Rang zu bestimmen.

Danach wird einem Ansatz aus [27] für $SL(n, \mathbf{R})$ folgend die Asymptotik der Matrixkoeffizienten von $Sp(n, \mathbf{R})$ bestimmt. Die wichtigste Anwendung hier ist wiederum der Beweis der Eigenschaft (T) von $Sp(n, \mathbf{R})$ für $n \geq 2$. Dies geschieht wiederum durch die Bestimmung einer unteren Schranke der Kazhdan-Konstante.

Schließlich wird noch die zu $Sp(n, \mathbf{C})$ gehörige Loopgruppe $\text{Loop}(Sp(n, \mathbf{C}))$ für $n \geq 2$ betrachtet, d. h. die Gruppe aller stetigen Abbildungen $\mathbf{T} \rightarrow Sp(n, \mathbf{C})$. Für sie wird ebenfalls eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante bestimmt. Zum Beweis wird mit den Methoden aus [44] für $SL(n, R)$ eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante für $Sp(n, R)$ bestimmt, wobei R ein topologischer Ring ist, der einen dichten endlicherzeugten Unterring enthält.

2.1 Ein Erzeugendensystem für die symplektische Gruppe

Dieser Abschnitt enthält einen elementaren Beweis dafür, daß ein System zu $SL(2, K)$ isomorpher Untergruppen $Sp(n, K)$ erzeugt. Dieses Ergebnis findet an einigen Stellen Verwendung. Dabei ist

$$Sp(n, K) = \{g \in GL(2n, K) : g^{\text{tr}} = Jg^{-1}J^{-1}\},$$

wobei $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ und I die $n \times n$ Einheitsmatrix ist.

Sei $E_{p,q} \in M(n, K)$ die Matrix, die an der Stelle (p, q) den Wert 1 besitzt und sonst überall 0 ist. So ergeben sich die zu $SL(2, K)$ isomorphen Untergruppen $G_{r,s}$ bestehend aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} I + (a-1)(E_{r,r} + E_{s,s}) & b(E_{r,s} + E_{s,r}) \\ c(E_{r,s} + E_{s,r}) & I + (d-1)(E_{r,r} + E_{s,s}) \end{pmatrix}$$

für $ad - bc = 1$ und $r \neq s$, $G_{r,r}$ bestehend aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} I + (a-1)E_{r,r} & bE_{r,r} \\ cE_{r,r} & I + (d-1)E_{r,r} \end{pmatrix}$$

für $ad - bc = 1$ und $\tilde{G}_{r,s}$ bestehend aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{\text{tr}^{-1}} \end{pmatrix}$$

mit $g = I + (a-1)E_{r,r} + bE_{r,s} + cE_{s,r} + (d-1)E_{s,s}$ und $ad - bc = 1$ für $r \neq s$ von $Sp(n, K)$.

2.1.1 Lemma. Die Untergruppen $G_{r,s}$ und $\tilde{G}_{r,s}$ mit $r, s = 1, \dots, n$ erzeugen die Gruppe $Sp(n, K)$.

Beweis. Sei $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2n, K)$ mit

$$\begin{aligned} a &= (a_{p,q})_{p,q=1,\dots,n}, & b &= (b_{p,q})_{p,q=1,\dots,n}, \\ c &= (c_{p,q})_{p,q=1,\dots,n}, & d &= (d_{p,q})_{p,q=1,\dots,n}. \end{aligned}$$

Dann gibt es ein $p \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_{p,1} \neq 0$ oder $c_{p,1} \neq 0$. Indem man nötigenfalls g von links mit

$$\begin{pmatrix} I - (E_{1,1} + E_{p,p}) & E_{1,p} + E_{p,1} \\ -(E_{1,p} + E_{p,1}) & I - (E_{1,1} + E_{p,p}) \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{1,p} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{1,p} \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{\omega}_{1,p} = I - E_{1,1} - E_{1,p} + E_{p,1} - E_{p,p}$ multipliziert, kann man $a_{1,1} \neq 0$ annehmen. Durch Multiplikation mit

$$\begin{pmatrix} I + (a_{1,1}^{-1} - 1) E_{1,1} & 0 \\ 0 & I + (a_{1,1} - 1) E_{1,1} \end{pmatrix}$$

kann man $a_{1,1} = 1$ annehmen. Nun multipliziert man g von links mit

$$\begin{pmatrix} I - a_{p,1} E_{p,1} & 0 \\ 0 & I + a_{1,p} E_{1,p} \end{pmatrix}$$

für $p = 2, \dots, n$ und

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -c_{p,1} (E_{p,1} + E_{1,p}) & I \end{pmatrix}$$

für $p = 1, \dots, n$. Man kann also annehmen, daß die Matrix g die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & a^{(1,2)} & b^{(1,1)} & b^{(1,2)} \\ 0 & a^{(2,2)} & b^{(2,1)} & b^{(2,2)} \\ 0 & c^{(1,2)} & d^{(1,1)} & d^{(1,2)} \\ 0 & c^{(2,2)} & d^{(2,1)} & d^{(2,2)} \end{pmatrix} \text{ hat.}$$

Nun fährt man mit Induktion fort. Sei $g = \begin{pmatrix} a^{(1,1)} & a^{(1,2)} & b^{(1,1)} & b^{(1,2)} \\ 0 & a^{(2,2)} & b^{(2,1)} & b^{(2,2)} \\ 0 & c^{(1,2)} & d^{(1,1)} & d^{(1,2)} \\ 0 & c^{(2,2)} & d^{(2,1)} & d^{(2,2)} \end{pmatrix}$

mit einer oberen Dreiecksmatrix $a^{(1,1)} \in M(r, K)$, deren Diagonaleinträge 1 sind, und r Spalten unter $a^{(1,1)}$, die 0 sind, dann gilt $c^{(1,2)} = 0$. In der Tat, da $g \in \text{Sp}(n, K)$ ist, ist

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & a^{(1,1)\text{tr}} c^{(1,2)} \\ 0 & a^{(1,2)\text{tr}} c^{(1,2)} + a^{(2,2)\text{tr}} c^{(2,2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{(1,1)\text{tr}} & 0 \\ a^{(1,2)\text{tr}} & a^{(2,2)\text{tr}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^{(1,2)} \\ 0 & c^{(2,2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^{(1,2)\text{tr}} & c^{(2,2)\text{tr}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1,1)} & a^{(1,2)} \\ 0 & a^{(2,2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^{(1,2)\text{tr}} a^{(1,1)} & c^{(1,2)\text{tr}} a^{(1,2)} + c^{(2,2)\text{tr}} a^{(2,2)} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

da $a^{\text{tr}}c = c^{\text{tr}}a$ gilt für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Sp}(n, K)$. Für diese Relation siehe z. B. [21, Seite 171]. Also ist $c^{(1,2)} = 0$, da $a^{(1,1)}$ invertierbar ist. Damit hat g die

Gestalt $\begin{pmatrix} a^{(1,1)} & a^{(1,2)} & b^{(1,1)} & b^{(1,2)} \\ 0 & a^{(2,2)} & b^{(2,1)} & b^{(2,2)} \\ 0 & 0 & d^{(1,1)} & d^{(1,2)} \\ 0 & c^{(2,2)} & d^{(2,1)} & d^{(2,2)} \end{pmatrix}$. Da g invertierbar ist, ist insbesondere der Vektor $(a_{1,1}^{(2,2)}, \dots, a_{n-r,1}^{(2,2)}, c_{1,1}^{(2,2)}, \dots, c_{n-r,1}^{(2,2)})^{\text{tr}} \neq 0$. Es ist somit ein Eintrag dieses Vektors $\neq 0$. Man kann also $a_{1,1}^{(2,2)} \neq 0$ annehmen, ansonsten multipliziert man g mit

$$\begin{pmatrix} I - (E_{r+1,r+1} + E_{p,p}) & E_{r+1,p} + E_{p,r+1} \\ -(E_{r+1,p} + E_{p,r+1}) & I - (E_{r+1,r+1} + E_{p,p}) \end{pmatrix}$$

von links bzw.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{r+1,p} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{r+1,p} \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{\omega}_{r+1,p} = I - E_{r+1,r+1} - E_{r+1,p} + E_{p,r+1} - E_{p,p}$ mit einem geeigneten p , wobei $r+1 \leq p \leq n$. Man kann sogar $a_{1,1}^{(2,2)} = 1$ annehmen, sonst wird g noch mit

$$\begin{pmatrix} I + (a_{1,1}^{(2,2)-1} - 1) E_{r+1,r+1} & 0 \\ 0 & I + (a_{1,1}^{(2,2)} - 1) E_{r+1,r+1} \end{pmatrix}$$

multipliziert. Nun multipliziert man g von links mit

$$\begin{pmatrix} I - a_{p-r,1}^{(2,2)} E_{p,r+1} & 0 \\ 0 & I + a_{1,p-r}^{(2,2)} E_{p,r+1} \end{pmatrix}$$

für $p = r+2, \dots, n$ und

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ c_{p-r,1}^{(2,2)} (E_{r+1,p} + E_{p,r+1}) & I \end{pmatrix}$$

für $p = r+1, \dots, n$. Dadurch erhält man die nächste 0-Spalte.

Nach n Schritten erhält man somit eine Matrix $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{\text{tr}^{-1}} \end{pmatrix}$ mit einer oberen Dreiecksmatrix a , deren Diagonaleinträge 1 sind. Man kann nun annehmen, daß die Einträge $a_{1,2}, \dots, a_{1,n}$ alle 0 sind, ansonsten multipliziert man von rechts mit $\begin{pmatrix} I + (-a_{1,p} - 1)E_{1,p} & 0 \\ 0 & I + (a_{p,1} - 1)E_{p,1} \end{pmatrix}$ für $p = 2, \dots, n$. Man hat also $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b^{(1,1)} & b^{(1,2)} \\ 0 & a & b^{(2,1)} & b^{(2,2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{\text{tr}^{-1}} \end{pmatrix}$ mit einer oberen Dreiecksmatrix a , deren Diagonaleinträge 1 sind.

Nun führe man wieder eine Induktion durch. Sei $g = \begin{pmatrix} I & 0 & b^{(1,1)} & b^{(1,2)} \\ 0 & a & b^{(2,1)} & b^{(2,2)} \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{\text{tr}^{-1}} \end{pmatrix}$ mit einer oberen Dreiecksmatrix $a \in M(n-r, K)$, deren Diagonaleinträge 1 sind. Man kann nun wieder annehmen, daß $a_{1,2}, \dots, a_{1,r} = 0$, sonst multipliziert man g von rechts mit $\begin{pmatrix} I - a_{1,p-r}E_{r+1,p} & 0 \\ 0 & I + a_{p-r,1}E_{p,r+1} \end{pmatrix}$. Also folgt mit Induktion $g = \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix}$ mit $b = b^{\text{tr}}$. Man kann jedoch auch $b = 0$ annehmen, ansonsten multipliziert man g von rechts oder links mit $\begin{pmatrix} I & -b_{p,q}(E_{p,q} + E_{q,p}) \\ 0 & I \end{pmatrix}$ für $1 \leq p < q \leq n$ und $\begin{pmatrix} I & -b_{p,p}E_{p,p} \\ 0 & I \end{pmatrix}$ für $1 \leq p \leq n$. Dadurch hat man also g durch Multiplikation von rechts und links mit Elementen aus $\tilde{G}_{r,s}$ und $G_{r,s}$ auf die Einheitsmatrix zurückgeführt und somit erzeugen die Untergruppen $\tilde{G}_{r,s}$ und $G_{r,s}$ mit $r, s = 1, \dots, n$ die Gruppe $\text{Sp}(n, K)$. \square

2.2 Die Eigenschaft (T) für die symplektische Gruppe über lokalen Körpern

Dieser Abschnitt beinhaltet die Ergebnisse der mit M. B. Bekka verfaßten Version [5].

Im folgenden sei K ein lokaler Körper, d. h. ein nichtdiskreter lokalkompakter Körper. Es wird gezeigt, daß $\text{Sp}(2, K)$ für jeden lokalen Körper K

eine Kazhdan-Gruppe ist. Den Fall $SL(3, K)$ behandelten M. B. Bekka und M. Mayer in [4]. Die Eigenschaft (T) für $Sp(2, K)$ wurde zuerst in [15] und [49] gezeigt.

Ein wichtiger Schritt des Beweises ist, daß $(SL(2, K) \times S^2(K^2), S^2(K^2))$ die relative Eigenschaft (T) besitzt. Dies geschieht in Satz 2.2.6. Dabei ist $S^2(K^2)$ der Vektorraum der symmetrischen Matrizen und die relative Eigenschaft (T) folgendermaßen definiert.

2.2.1 Definition. Sei U eine abgeschlossene Untergruppe der topologischen Gruppe G . Das Paar (G, U) besitzt die *relative Eigenschaft (T)*, falls jede Darstellung von G mit fastinvarianten Vektoren nichttriviale U -invariante Vektoren besitzt.

Für eine lokalkompakte Gruppe ist diese relative Eigenschaft (T) äquivalent zur Eigenschaft (T) relativ $\Pi = \left\{ \pi \in \widehat{G} : 1 \not\prec \pi|_U \right\}$. Dabei bezeichne $\sigma < \pi$ für zwei Darstellungen σ und π , daß σ eine Teildarstellung von π ist.

Der Beweis der relativen Eigenschaft (T) für $(SL(2, K) \times S^2(K^2), S^2(K^2))$ vermeidet hier die Bestimmung der irreduziblen Darstellungen des semidirekten Produkts $SL(2, K) \times S^2(K^2)$ nach Mackey. Sie wurde z. B. benutzt in [38, Seite 129], [51, Seite 146] oder in [15] und [49], siehe auch [26] für eine Beweisskizze dieser Aussage basierend auf dem sogenannten Lemma von Furstenberg.

Der Beweis der relativen Eigenschaft (T) von $(SL(2, K) \times S^2(K^2), S^2(K^2))$ benutzt hier, daß für eine lokalkompakte Gruppe und einen abelschen Normalteiler N von G das Paar (G, N) die relative Eigenschaft (T) besitzt, falls das Dirac-Maß am trivialen Charakter in \widehat{N} das einzige unter G invariante Mittel auf \widehat{N} ist. Dies wurde in [46, Seite 3405] gezeigt. Dafür erscheint hier ein kürzerer Beweis.

2.2.2 Definition. Ein *Mittel* auf einem Ring von Teilmengen einer Menge X ist ein endlichadditives Maß μ mit $\mu(X) = 1$.

Die Gruppe $GL(2, K)$ operiert auf $S^2(K^2)$ durch $b \mapsto g \cdot b = gb g^{\text{tr}}$ für $b \in S^2(K^2)$ und $g \in GL(2, K)$. Durch $(x, y, z)^{\text{tr}} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ identifiziert

man K^3 mit $S^2(K^2)$. Über die Bilinearform $(v, w) \mapsto v^{\text{tr}}w$ für $v, w \in K^3$ identifiziert man $(S^2(K^2))^*$ mit K^3 . Die Operation auf K^3 , die der Operation auf $S^2(K^2)$ entspricht, ist wie folgt gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2x + 2aby + b^2z & cax + cby + ady + dbz \\ cax + cby + ady + dbz & c^2x + 2cdy + d^2z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also ist

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ca & cb + ad & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Die duale Darstellung ρ^* auf $(S^2(K^2))^*$ ist für $v \in K^3 \cong (S^2(K^2))^*$ und $w \in K^3 \cong S^2(K^2)$ definiert durch

$$(\rho^*(g)v)^{\text{tr}}w = v^{\text{tr}}(\rho(g^{-1})w) = \left((\rho(g^{-1}))^{\text{tr}}v \right)^{\text{tr}}w,$$

also $\rho^*(g) = (\rho(g^{-1}))^{\text{tr}}$. Für $g \in \text{SL}(2, K)$ und $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $g^{\text{tr}} = \omega g^{-1} \omega^{-1}$. Also ist die Darstellung ρ' definiert durch $\rho'(g) = (\rho(g^{\text{tr}}))^{\text{tr}}$ äquivalent zur Darstellung ρ^* .

2.2.3 Satz. Sei K ein lokaler Körper, dann ist das Dirac-Maß im Punkt 0 das einzige $\text{SL}(2, K)$ -invariante Mittel auf den Borel-Mengen von $(S^2(K^2))^*$.

Beweis. Im folgenden wird statt ρ^* die äquivalente Darstellung ρ' betrachtet.

Zuerst sei die Charakteristik $\text{char } K \neq 2$. Sei $\mu : B(K^3) \rightarrow [0, \infty[$ ein $\text{SL}(2, K)$ -invariantes Mittel auf den Borel-Mengen $B(K^3)$ von K^3 . Sei $|\cdot|$ ein Betrag auf K . Zu $s = |2| + |2|^{-1}$ betrachtet man die Menge

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\} : |y| \leq s|z| \right\}.$$

Nun sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $|b_1| > |2|^{-1}s$ und $|b_{n+1}| > |b_n| + 2|2|^{-1}s$

für alle $n \in \mathbf{N}$. Sei $u_n = \begin{pmatrix} 1 & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, K)$, dann ist

$$\rho'(u_n) = \begin{pmatrix} 1 & b_n & b_n^2 \\ 0 & 1 & 2b_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\rho'(u_n)\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\} : |y - 2b_n z| \leq s|z| \right\}.$$

Es gilt

$$|y| \leq |2b_n z| + |y - 2b_n z| \leq (|2b_n| + s)|z|$$

und

$$|y| \geq |2b_n z| - |y - 2b_n z| \geq (|2b_n| - s)|z|,$$

also ist

$$\rho'(u_n)\Omega \subset \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\} : \frac{|y|}{|2b_n| + s} \leq |z| \leq \frac{|y|}{|2b_n| - s} \right\}.$$

Die Mengen $\rho'(u_n)\Omega$ sind paarweise disjunkt, da gilt $\frac{1}{|2b_n| - s} < \frac{1}{|2b_m| + s}$ für $n > m$. Also ist $n\mu(\Omega) = \sum_{j=1}^n \mu(\rho'(u_j)\Omega) \leq \mu(K^3) = 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$, da $\mu(\rho'(u_j)\Omega) = \mu(\Omega)$ ist, und somit folgt $\mu(\Omega) \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und damit ist $\mu(\Omega) = 0$. Für ω gilt

$$\rho'(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\rho'(\omega)\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\} : |y| \leq s|x| \right\}$. Sei $(x, y, z)^{\text{tr}} \in K^3$ mit $(|4| + 1)|y| \leq s|4x - z|$. Angenommen es gilt $|y| > s|z|$ und $|y| > s|x|$, dann ist

$$s|4x - z| \leq s(|4x| + |z|) < (|4| + 1)|y|.$$

Somit wäre $(|4| + 1)|y| > s|4x - z|$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Also ist $\Omega \cup (\rho'(\omega)\Omega) \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\} : (|4| + 1)|y| \leq s|4x - z| \right\}$.

Sei $r = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 2^{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\rho'(r) = \begin{pmatrix} 4^{-1} & 4^{-1} & 4^{-1} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit ist

$$\rho'(r^{-1})(\Omega \cup (\rho'(\omega)\Omega)) \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\} : (|4| + 1)|x - z| \leq s|2y| \right\}.$$

Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\}$ mit $2|y| \leq s|x - z|$. Angenommen $|y| > s|z|$ und $|y| > s|x|$, dann ist

$$s|x - z| \leq s(|x| + |z|) < 2|y|.$$

Somit wäre $2|y| > s|x - z|$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist

$\Omega \cup (\rho'(\omega)\Omega) \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\} : 2|y| \leq s|x - z| \right\}$. Sei $(x, y, z)^{\text{tr}} \in K^3 \setminus \{0\}$ mit $(|4| + 1)|x - z| > s|2y|$ und $2|y| > s|x - z|$, dann ist

$$|y| > \frac{s}{2}|x - z| > \frac{s^2|2|}{2(|4| + 1)}|y|.$$

Daraus würde folgen

$$2(|2| + |2|^{-1}) > s^2 = (|2| + |2|^{-1})^2,$$

ein Widerspruch, da $2 \leq |2| + |2|^{-1}$. Also ist

$$(\rho'(r^{-1})(\Omega \cup (\rho'(\omega)\Omega))) \cup (\Omega \cup (\rho'(\omega)\Omega)) \supseteq K^3 \setminus \{0\}$$

und $\mu(K^3 \setminus \{0\}) \leq 4\mu(\Omega) = 0$.

Nun sei $\text{char } K = 2$ und

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\} : |x| \leq |z|, |y| \leq |z| \right\}.$$

Mit obiger Notation gilt

$$\rho'(u_n) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + b_n y + b_n^2 z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3$. Falls $|b_n| > 1$, ist $|x| < |b_n^2 z|$ und $|b_n y| < |b_n^2 z|$. Man wählt ein Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K mit $|b_{n+1}| > |b_n| > 1$, dann ist

$$(\rho'(u_n)\Omega) \cap (\rho'(u_m)\Omega) = \emptyset$$

für alle $n \neq m$, da $|x + b_n y + b_n^2 z| = |b_n^2 z|$ ist, falls $|x| < |b_n^2 z|$ und $|b_n y| < |b_n^2 z|$ ist. In der Tat, der Betrag erfüllt in K die ultrametrische Ungleichung

$$|x + b_n y| \leq \max\{|x|, |b_n y|\} < |b_n^2 z|$$

und somit $|x + b_n y + b_n^2 z| \leq |b_n^2 z|$. Genauso gilt

$$|b_n^2 z| \leq \max\{|x + b_n y + b_n^2 z|, |x + b_n y|\} \leq |b_n^2 z|.$$

Sei μ ein invariantes Mittel auf $B(K^3)$, dann gilt wieder $\mu(\Omega) = 0$.

Es ist

$$\rho'(\omega)\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 \setminus \{0\} : |z| \leq |x|, |y| \leq |x| \right\}.$$

Für $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\rho'(u_0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und $|x + y + z| = |y|$, wenn $|x| < |y|$ und $|z| < |y|$ ist. Also ist

$$\rho'(u_0)\rho'(\omega)\Omega \supseteq \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3 : |x| < |y|, |z| < |y| \right\}$$

und damit

$$\Omega \cup (\rho'(\omega)\Omega) \cup (\rho'(u_0\omega)\Omega) \supseteq K^3 \setminus \{0\}.$$

Daraus folgt $\mu(K^3 \setminus \{0\}) = 0$ und damit ist $\mu = \delta_0$. □

Für den Beweis der relativen Eigenschaft (T) benutzen wir folgende zwei Lemmata.

2.2.4 Lemma. Sei G eine lokalkompakte Gruppe und π eine unitäre Darstellung von G auf H_π mit fastinvarianten Vektoren, dann gibt es einen Ad G -invarianten Zustand auf der C^* -Algebra $L(H_\pi)$ aller beschränkten Operatoren auf H_π , d. h. eine positive Linearform f auf $L(H_\pi)$ mit $f(\text{id}_{H_\pi}) = 1$ und $f(\pi(g)T\pi(g)^{-1}) = f(T)$ für alle $g \in G$ und $T \in L(H_\pi)$.

Für einen Beweis siehe [4].

Die folgende allgemeine Aussage stammt aus [46, Seite 3405]. Der Beweis hier verwendet eine andere Idee.

2.2.5 Lemma. Sei G eine lokalkompakte Gruppe, N ein abelscher Normalteiler und \widehat{N} die duale Gruppe von N . Das Dirac-Maß am trivialen Charakter von N sei das einzige Mittel auf den Borel-Mengen von \widehat{N} , das invariant unter der dualen Operation von G auf \widehat{N} ist, gegeben durch die Konjugation. Dann hat (G, N) die relative Eigenschaft (T).

Beweis. Sei π eine unitäre Darstellung von G auf H_π mit fastinvarianten Vektoren und

$$E : B(\widehat{N}) \rightarrow L(H_\pi)$$

das Spektralmaß auf \widehat{N} assoziiert mit der unitären Darstellung $\pi|_N$ der abelschen Gruppe N . Man hat

$$\pi(g)E(W)\pi(g)^{-1} = E(g \cdot W)$$

für alle $W \in B(\widehat{N})$ und $g \in G$, wobei

$$(g \cdot \chi)(n) = \chi(g^{-1}ng)$$

für $n \in N$ und $\chi \in \widehat{N}$ die duale Operation von $g \in G$ auf \widehat{N} ist. Nach obigem Lemma gibt es einen Ad G -invarianten Zustand f auf der C^* -Algebra aller beschränkten linearen Operatoren auf H_π . Man definiert

$$\mu(W) = f(E(W))$$

für alle $W \in B(\widehat{N})$, dann ist μ ein G -invariantes Mittel auf $B(\widehat{N})$. Also ist μ das Dirac-Maß am trivialen Charakter χ_0 von \widehat{N} . Somit ist $E(\{\chi_0\}) \neq 0$. Dies zeigt, daß $\pi|_N$ einen nichttrivialen Fixvektor und (G, N) die relative Eigenschaft (T) besitzt. \square

Der Beweis des folgenden Satzes basiert auf Satz 2.2.3. Es ist der entscheidende Schritt, die Eigenschaft (T) von $\mathrm{Sp}(2, K)$ zu zeigen. Man betrachtet dabei eine zu $\mathrm{SL}(2, K) \rtimes S^2(K^2)$ isomorphe Untergruppe von $\mathrm{Sp}(2, K)$ und benutzt dann den folgenden Satz. Eine analoge Vorgehensweise wird auch später noch einige Male auftreten. D. h. Resultate für Untergruppen werden gezeigt und dann auf Untergruppen der Gruppe angewendet. Die Untergruppen sind dabei jeweils so gewählt, daß sich das Resultat auf die ganze Gruppe übertragen läßt.

2.2.6 Satz. Das Paar $(\mathrm{SL}(2, K) \rtimes S^2(K^2), S^2(K^2))$ besitzt die relative Eigenschaft (T) für jeden lokalen Körper K .

Beweis. Die duale Gruppe von $S^2(K^2)$ kann wie folgt mit $(S^2(K^2))^*$ identifiziert werden, vergleiche z. B. [50, Seite 40]. Für einen festen nichttrivialen Charakter χ der additiven Gruppe von K wird für jedes $b \in (S^2(K^2))^*$ ein Charakter χ_b von $S^2(K^2)$ definiert durch

$$\chi_b(c) = \chi(b(c))$$

für alle $c \in S^2(K^2)$. Die Abbildung $b \mapsto \chi_b$ ist ein Isomorphismus zwischen der additiven Gruppe $(S^2(K^2))^*$ und der dualen Gruppe von $S^2(K^2)$. Der Operation von $\mathrm{SL}(2, K)$ auf der dualen Gruppe entspricht die Operation von $\mathrm{SL}(2, K)$ auf $(S^2(K^2))^*$ durch ρ^* . Nun folgt der Satz mit Satz 2.2.3 und Lemma 2.2.5. \square

Nun folgt die Betrachtung der drei folgenden zu $\mathrm{SL}(2, K)$ isomorphen Untergruppen von $\mathrm{Sp}(2, K)$. Sei

$$G_1 = G_{1,1} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : ad - bc = 1 \right\},$$

$$G_2 = G_{2,2} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{array} \right) : ad - bc = 1 \right\}$$

und

$$G_3 = G_{1,2} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{array} \right) : ad - bc = 1 \right\}$$

mit den entsprechenden Untergruppen

$$N_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : b \in K \right\},$$

$$N_2 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : b \in K \right\}$$

und

$$N_3 = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : b \in K \right\}.$$

2.2.7 Lemma. Sei π eine Darstellung von $G = \mathrm{Sp}(2, K)$ auf H_π und $\xi \in H_\pi$ invariant unter N_1, N_2 und N_3 , dann ist ξ invariant unter G .

Beweis. Da ξ invariant unter N_1, N_2 und N_3 , ist ξ invariant unter G_1, G_2 und G_3 . Für einen Beweis dieser Aussage siehe z. B. [38, Seite 88]. Betrachtet man nun

$$G_4 = \tilde{G}_{1,2} = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & -b & a \end{array} \right) : ad - bc = 1 \right\},$$

so gilt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \in G_2, \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G_3.$$

Damit ist der invariante Vektor ξ auch unter G_4 invariant. Also ist der Vektor unter ganz $\text{Sp}(2, K)$ invariant, da G_1, G_2, G_3 und G_4 nach Lemma 2.1.1 die Gruppe $\text{Sp}(2, K)$ erzeugen. \square

2.2.8 Bemerkung. Für den Fall $K = \mathbf{R}$ wird im Beweis zu Satz 2.6.3 eine allgemeinere Aussage gezeigt.

Nun ist es möglich die Eigenschaft (T) für $\text{Sp}(2, K)$ zu zeigen. Dabei findet Satz 2.2.6 Verwendung für eine zu $\text{SL}(2, K) \times S^2(K^2)$ isomorphe Untergruppe. Lemma 2.2.7 erlaubt dies auf ganz $\text{Sp}(2, K)$ zu übertragen. Eine analoge Vorgehensweise findet auch später in ähnlichen Fällen statt.

2.2.9 Satz. Die Gruppe $\text{Sp}(2, K)$ ist eine Kazhdan-Gruppe für jeden lokalen Körper K .

Beweis. Man betrachtet die folgenden Untergruppen von $\text{Sp}(2, K)$

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{\text{tr}-1} \end{pmatrix} : a \in \text{SL}(2, K), ab^{\text{tr}} = ba^{\text{tr}} \right\}, \\ N &= \left\{ \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix} : b^{\text{tr}} = b \right\}. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\text{tr}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{\text{tr}-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & aba^{\text{tr}} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

und $N \cong S^2(K^2)$, ist die Gruppe P isomorph zu $\text{SL}(2, K) \times S^2(K^2)$.

Sei π eine irreduzible Darstellung von $\text{Sp}(2, K)$ auf H_π mit fastinvarianten Vektoren, dann gibt es nach Satz 2.2.6 einen Vektor $\xi \in H_\pi$, $\xi \neq 0$, der unter N fest bleibt. Da ξ unter den Untergruppen N_1 , N_2 und N_3 fest bleibt, folgt nach Lemma 2.2.7, daß ξ unter ganz $\text{Sp}(2, K)$ fest bleibt. \square

Falls $\text{char } K \neq 2$ ist, besitzt auch $(\text{SL}(2, K) \times (S^2(K^2))^*, (S^2(K^2))^*)$ die relative Eigenschaft (T), da die natürlichen zueinander dualen Operationen von $\text{SL}(2, K)$ auf $S^2(K^2)$ und $(S^2(K^2))^*$ dann äquivalent sind. Dies sieht man leicht anhand der Darstellungen ρ und ρ^* bzw. ρ' . Im Fall $\text{char } K = 2$ erhält man das folgende überraschende Resultat. Es benutzt die äquivalente Definition der relativen Eigenschaft (T).

2.2.10 Satz. Sei K ein lokaler Körper der Charakteristik 2, dann besitzt das Paar $(\text{SL}(2, K) \times (S^2(K^2))^*, (S^2(K^2))^*)$ *nicht* die relative Eigenschaft (T).

Beweis. Der lokale Körper K habe die Charakteristik 2. Die zu $N = (S^2(K^2))^*$ duale Gruppe wird mit $S^2(K^2)$ identifiziert. Nun besitzt jedoch $\text{SL}(2, K)$ außer 0 weitere Fixpunkte in $S^2(K^2)$. In der Tat, da $\text{char } K = 2$, gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\text{tr}} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, K)$. Also bleiben die Elemente $b_y = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}$ mit $y \in K$ fest unter der Operation von $\text{SL}(2, K)$. Die zu den b_y gehörigen Charaktere χ_y von N können zu Charakteren $\widetilde{\chi}_y$ von $G = \text{SL}(2, K) \times N$ fortgesetzt werden, definiert durch

$$\widetilde{\chi}_y(h, n) = \chi_y(n)$$

für alle $h \in \text{SL}(2, K)$ und $n \in N$.

Für $y \rightarrow 0$ konvergiert $\widetilde{\chi}_y$ gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen die triviale Darstellung von G , jedoch ist $\chi_y = \widetilde{\chi}_y|_N$ für jedes $y \neq 0$ verschieden von der trivialen Darstellung auf N . Somit besitzt (G, N) nicht die relative Eigenschaft (T) (siehe die Bemerkung nach Definition 2.2.1). \square

2.3 Kazhdan-Konstanten assoziiert mit einem Laplace-Operator

Für $SL(3, \mathbf{R})$ bestimmten M. B. Bekka und M. Mayer in [4] eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante assoziiert mit einem Laplace-Operator. Dieser Abschnitt behandelt den Fall $Sp(2, \mathbf{R})$. Für eine Darstellung π von $Sp(2, \mathbf{R})$ wird wieder die Einschränkung auf $SL(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ betrachtet. Zur abelschen Untergruppe $N = S^2(\mathbf{R}^2)$ erhält man ein zu $\pi|_N$ gehöriges Spektralmaß auf der dualen Gruppe \widehat{N} . Das Hauptproblem ist hier eine Menge $W \subset \widehat{N}$ zu finden, deren Spektralmaß man bestimmen und unter der Operation einer Einparametergruppe abschätzen kann. Dies ermöglicht die Bestimmung einer unteren Schranke für die Kazhdan-Konstante assoziiert mit einem Laplace-Operator im Fall $Sp(2, \mathbf{R})$.

Zuerst einige allgemeine Bemerkungen.

2.3.1 Definition. Sei K eine kompakte Untergruppe der Lie-Gruppe G und π eine Darstellung von G auf H_π .

- (a) Ein Vektor $\xi \in H_\pi$ ist K -endlich, falls der von $\{\pi(g)\xi : g \in K\}$ aufgespannte Teilraum endlichdimensional ist.
- (b) Ein Vektor $\xi \in H_\pi$ ist ein C^∞ -Vektor, falls $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \eta \rangle$ eine C^∞ -Funktion auf G ist für jedes $\eta \in H_\pi$.

Den Raum aller K -endlichen C^∞ -Vektoren bezeichne $H_{\pi, K}^\infty$.

Sei X_1, \dots, X_n eine Basis der endlichdimensionalen Lie-Algebra von G und $\Delta = -\sum_{k=1}^n X_k^2$ der assoziierte Laplace-Operator in der universellen einhüllenden Algebra.

Zu jeder Darstellung π von G auf H_π gehört eine Darstellung $d\pi$ der Lie-Algebra von G , definiert durch

$$\langle d\pi(X)\xi, \eta \rangle = \left. \frac{d}{dt} \langle \pi(\exp(tX))\xi, \eta \rangle \right|_{t=0}$$

für alle C^∞ -Vektoren $\xi, \eta \in H_\pi$. Diese Darstellung setzt sich fort auf die universelle einhüllende Algebra. Der folgende Satz aus [4] zeigt, daß man die Eigenschaft (T) durch Spektraleigenschaften des Laplace-Operators charakterisieren kann.

2.3.2 Satz. Eine zusammenhängende Lie-Gruppe G besitzt genau dann die Eigenschaft (T), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß $\langle d\pi(\Delta)\xi, \xi \rangle \geq \varepsilon$ für alle Darstellungen π ohne nichttriviale invariante Vektoren von G auf H_π und alle K -endlichen Einheitsvektoren $\xi \in H_\pi$ einer kompakten Untergruppe K .

2.3.3 Definition. Im Hinblick auf den letzten Satz nennt man die von Δ abhängige positive Zahl

$$\inf \{ \langle d\pi(\Delta)\xi, \xi \rangle : \xi \in H_{\pi, K}^\infty, \|\xi\| = 1, \pi \not\asymp 1 \} \in]0, \infty[$$

die infinitesimale Kazhdan-Konstante von Δ .

Diese Definition stammt aus [4, Seite 100]. Im Fall $G = \mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$ liefert hier Satz 2.3.9 eine untere Schranke für diese Konstante.

Man betrachtet die Untergruppe

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{\mathrm{tr}-1} \end{pmatrix} : a \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R}), ab^{\mathrm{tr}} = ba^{\mathrm{tr}} \right\} \cong \mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2).$$

Sei π eine starkstetige unitäre Darstellung von $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$ auf H_π . Ist ξ ein Vektor, der unter der Untergruppe

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & y & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbf{R} \right\} \cong \mathbf{R}^3$$

fest bleibt, dann bleibt ξ nach Lemma 2.2.7 unter ganz $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$ fest.

Man kann also annehmen, daß π keinen nichttrivialen Vektor besitzt, der unter N fest bleibt. Sei E das Spektralmaß von \widehat{N} . Dann gilt $\pi|_N = \int_{\widehat{N}} \chi dE(\chi)$ und $E(\{0\}) = 0$. Für die Borel-Mengen $W \subset \widehat{N}$ gilt $E(a \cdot W) = \pi(a)E(W)\pi(a)^{-1}$ für alle $a \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$.

Identifiziert man nun den dualen Vektorraum N^* mit N über die Bilinearform $(b, c) \mapsto \text{Spur}(bc)$ für $b, c \in S^2(\mathbf{R}^2)$, kann man $\widehat{N} \cong N^*$ mit N identifizieren. Wie in 2.2 gilt $a^{\text{tr}} = \omega a^{-1} \omega^{-1}$ für $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $a \in \text{SL}(2, \mathbf{R})$. Damit ist die duale Operation von $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ auf \widehat{N} gerade äquivalent zur gewöhnlichen Operation auf N , da $\text{Spur}(ba^{\text{tr}}ca) = \text{Spur}(aba^{\text{tr}}c)$ für $a \in \text{SL}(2, \mathbf{R})$ und $b, c \in N$.

Als Basis von $S^2(\mathbf{R}^2)$ kann man $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wählen. Unter dem Isomorphismus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto xs_1 + ys_2 + zs_3 = \begin{pmatrix} x+y & z \\ z & x-y \end{pmatrix}$$

kann man nun $\widehat{N} \cong N \cong S^2(\mathbf{R}^2)$ und \mathbf{R}^3 identifizieren. Wir können deshalb von jetzt an annehmen, daß das Spektralmaß E auf \mathbf{R}^3 definiert ist.

Für einen Winkel $0 < \vartheta < \pi$ und $h \in \mathbf{R}$ sei $S_h^+(\vartheta)$ definiert durch

$$S_h^+(\vartheta) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ hx + y \cos \beta \\ y \sin \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\}.$$

Für $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$S_h^+(\vartheta) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\}.$$

Sei $g_0(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) & -\sin(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) & \cos(\alpha/2) \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} g_0(\alpha) s_1 g_0(\alpha)^{\text{tr}} &= g_0(\alpha) g_0(\alpha)^{-1} = s_1, \\ g_0(\alpha) s_2 g_0(\alpha)^{\text{tr}} &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = s_2 \cos \alpha + s_3 \sin \alpha, \\ g_0(\alpha) s_3 g_0(\alpha)^{\text{tr}} &= \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} = -s_2 \sin \alpha + s_3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Damit operiert $g_0(\alpha)$ auf \mathbf{R}^3 durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Also ist

$$\begin{aligned} g_0(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \cos \beta \\ y \sin \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ y (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \cos(\alpha + \beta) \\ y \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$g_0(\alpha) \cdot S_0^+(\vartheta) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \cos \beta \\ y \sin \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, y > 0, -\vartheta + \alpha < \beta \leq \vartheta + \alpha \right\}.$$

Daraus folgt, daß $g_0(2\vartheta) \cdot S_0^+(\vartheta)$ und $S_0^+(\vartheta)$ disjunkt sind.

Sei ξ ein Eigenvektor des Bildes $\pi(K)$, dann ist $\pi(g_0(\alpha))\xi = e^{in\alpha/2}\xi$ für ein $n \in \mathbf{Z}$. Da $g_0(\alpha) \in \text{SL}(2, \mathbf{R})$, gilt mit der obigen Gleichung

$$\begin{aligned} \pi(g_0(\alpha)) E(S_0^+(\vartheta)) \xi &= \pi(g_0(\alpha)) E(S_0^+(\vartheta)) \pi(g_0(\alpha))^{-1} \pi(g_0(\alpha)) \xi \\ &= E(g_0(\alpha) \cdot S_0^+(\vartheta)) \pi(g_0(\alpha)) \xi \\ &= e^{in\alpha/2} E(g_0(\alpha) \cdot S_0^+(\vartheta)) \xi \end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \|E(S_0^+(\vartheta)) \xi\| &= \|\pi(g_0(\alpha)) E(S_0^+(\vartheta)) \xi\| \\ &= \|E(g_0(\alpha) \cdot S_0^+(\vartheta)) \xi\|. \end{aligned}$$

Andererseits sind $S_0^+(\vartheta)$ und $g_0(\alpha) \cdot S_0^+(\vartheta)$ disjunkt für $2\vartheta \leq \alpha \leq 2\pi - 2\vartheta$. Also ist $E(S_0^+(\vartheta)) E(g_0(\alpha) \cdot S_0^+(\vartheta)) = 0$, damit sind $E(S_0^+(\vartheta)) \xi$ und $E(g_0(\alpha) \cdot S_0^+(\vartheta)) \xi$ orthogonal zueinander.

Sei nun $n \geq 2$, $\vartheta = \pi/n$ und $\alpha_j = 2\pi j/n$ für $0 \leq j \leq n-1$, dann erhält man die disjunkte Vereinigung

$$\bigcup_{j=0}^{n-1} g_0(\alpha_j) \cdot S_0^+(\vartheta) = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Damit gilt $\sum_{j=0}^{n-1} E(g_0(\alpha_j) \cdot S_0^+(\vartheta)) = \text{id}_{H_\pi}$. Man erhält also eine orthogonale Zerlegung $\xi = \sum_{j=0}^{n-1} E(g_0(\alpha_j) \cdot S_0^+(\vartheta)) \xi$ in Vektoren gleicher Länge. Ist ξ ein Einheitsvektor, so gilt deshalb

$$\|E(S_0^+(\vartheta)) \xi\|^2 = 1/n = \vartheta/\pi.$$

Diese Gleichung gilt für alle $\vartheta = r\pi$ mit $r \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[$ und damit auch für alle $r \in]0, 1[$, da

$$\left\| E \left(\bigcup_{r \in \mathbf{Q} \cap]0, \vartheta/\pi[} S_0^+(r\pi) \right) \xi \right\| = \frac{\vartheta}{\pi} = \left\| E \left(\bigcap_{r \in \mathbf{Q} \cap]\vartheta/\pi, 1[} S_0^+(r\pi) \right) \xi \right\|$$

und

$$\bigcup_{r \in \mathbf{Q} \cap]0, \vartheta/\pi[} S_0^+(r\pi) \subset S_0^+(\vartheta) \subset \bigcap_{r \in \mathbf{Q} \cap]\vartheta/\pi, 1[} S_0^+(r\pi).$$

Sei $g_1(t) = \begin{pmatrix} \exp(t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-t/2) \end{pmatrix}$, dann ist

$$\begin{aligned} g_1(t) s_1 g_1(t)^{\text{tr}} &= \begin{pmatrix} \exp t & 0 \\ 0 & \exp(-t) \end{pmatrix} = s_1 \cosh t + s_2 \sinh t, \\ g_1(t) s_2 g_1(t)^{\text{tr}} &= \begin{pmatrix} \exp t & 0 \\ 0 & -\exp(-t) \end{pmatrix} = s_1 \sinh t + s_2 \cosh t, \\ g_1(t) s_3 g_1(t)^{\text{tr}} &= s_3. \end{aligned}$$

Damit operiert $g_1(t)$ durch $\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf \mathbf{R}^3 . Also ist

$$\begin{aligned} g_1(t) \cdot S_1^+(\vartheta) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \cosh t + (x+y) \sinh t \\ x \sinh t + (x+y) \cosh t \\ y \tan \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} xe^t + y \sinh t \\ xe^t + y \cosh t \\ y \tan \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\} \end{aligned}$$

für $0 < \vartheta < \pi/2$. Da $x \in \mathbf{R}$ beliebig, kann man x durch $e^{-t}(x - y \sinh t)$ ersetzen. Man erhält für die erste Koordinate x und für die zweite gilt $x - y \sinh t + y \cosh t = x + ye^{-t}$. Also ist

$$g_1(t) \cdot S_1^+(\vartheta) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x + ye^{-t} \\ y \tan \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\}.$$

Durch Ersetzen von y durch ye^t erhält man

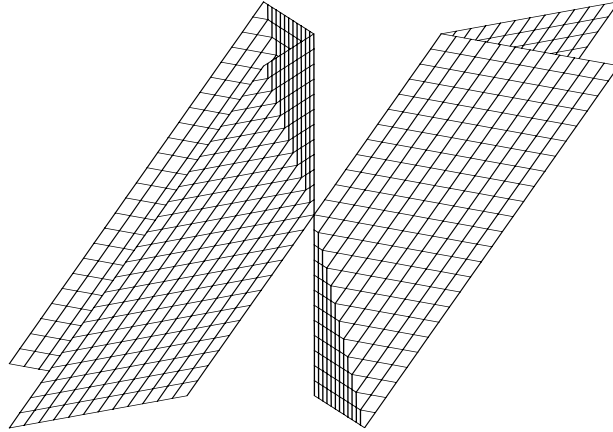
$$\begin{aligned} g_1(t) \cdot S_1^+(\vartheta) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ ye^t \tan \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\} \\ &= S_1^+(\arctan(e^t \tan \vartheta)). \end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned} S_h^-(\vartheta) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ hx + y \cos \beta \\ y \sin \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, y < 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\} \\ &= g_0(\pi) \cdot S_{-h}^+(\vartheta), \end{aligned}$$

dann ist $\|E(S_0^-(\vartheta))\xi\|^2 = \|E(S_0^+(\vartheta))\xi\|^2 = \vartheta/\pi$.

Sei $S_0(\vartheta) = S_0^+(\vartheta) \cup S_0^-(\vartheta)$, $W^+(\vartheta) = S_1^+(\vartheta) \cap S_0^+(2\vartheta)$, $W^-(\vartheta) = S_1^-(\vartheta) \cap S_0^-(2\vartheta)$ und $W(\vartheta) = W^-(\vartheta) \cup W^+(\vartheta)$ für $0 < \vartheta < \pi/2$. Folgende Abbildung zeigt eine solche Menge $W(\vartheta)$.



Ausschnitt des Randes der Menge $W(\vartheta)$

Das nächste Lemma ist der entscheidende Schritt bei der Bestimmung einer infinitesimalen Kazhdan-Konstante für Δ . Durch eine geeignete Zerlegung der Menge $W(\vartheta)$ in sechs Teile wird gezeigt, daß das Spektralmaß von $W(\vartheta)$ gleich dem von $S_0(\vartheta)$ ist.

2.3.4 Lemma. Es ist $\|E(W(\vartheta))\xi\|^2 = 2\vartheta/\pi$.

Beweis. Die Vereinigung $W(\vartheta) = W^-(\vartheta) \cup W^+(\vartheta)$ ist disjunkt und es ist

$$\begin{aligned} W(\vartheta) \cap S_0(\vartheta) &= (W^+(\vartheta) \cup W^-(\vartheta)) \cap S_0(\vartheta) \\ &= (W^+(\vartheta) \cap S_0(\vartheta)) \cup (W^-(\vartheta) \cap S_0(\vartheta)) \\ &= (W^+(\vartheta) \cap S_0^+(\vartheta)) \cup (W^-(\vartheta) \cap S_0^-(\vartheta)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} W(\vartheta) \setminus S_0(\vartheta) &= (W^+(\vartheta) \cup W^-(\vartheta)) \setminus S_0(\vartheta) \\ &= (W^+(\vartheta) \setminus S_0(\vartheta)) \cup (W^-(\vartheta) \setminus S_0(\vartheta)) \\ &= (W^+(\vartheta) \setminus S_0^+(\vartheta)) \cup (W^-(\vartheta) \setminus S_0^-(\vartheta)). \end{aligned}$$

Somit ist $\|E(W(\vartheta))\xi\|^2 = \|E(W(\vartheta) \cap S_0(\vartheta))\xi\|^2 + \|E(W(\vartheta) \setminus S_0(\vartheta))\xi\|^2$,

$$\begin{aligned} &\|E(W(\vartheta) \cap S_0(\vartheta))\xi\|^2 \\ &= \|E(W^+(\vartheta) \cap S_0^+(\vartheta))\xi\|^2 + \|E(W^-(\vartheta) \cap S_0^-(\vartheta))\xi\|^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\|E(W(\vartheta) \setminus S_0(\vartheta))\xi\|^2 \\ &= \|E(W^+(\vartheta) \setminus S_0^+(\vartheta))\xi\|^2 + \|E(W^-(\vartheta) \setminus S_0^-(\vartheta))\xi\|^2. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} W^\pm(\vartheta) \setminus S_0^\pm(\vartheta) &= (S_1^\pm(\vartheta) \cap S_0^\pm(2\vartheta)) \setminus S_0^\pm(\vartheta) \\ &= S_1^\pm(\vartheta) \cap (S_0^\pm(2\vartheta) \setminus S_0^\pm(\vartheta)) \end{aligned}$$

und

$$S_0^\pm(2\vartheta) \setminus S_0^\pm(\vartheta) = g_0\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^\pm\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cup g_0\left(-\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^\pm\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

und die Vereinigung ist wieder disjunkt. Man hat

$$\begin{aligned} &g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot \left(S_1^-(\vartheta) \cap g_0\left(-\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\ &\subset g_0\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \subset S_0^+(\vartheta) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} & g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot \left(S_1^-(\vartheta) \cap g_0\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\ & \subset g_0\left(-\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \subset S_0^+(\vartheta). \end{aligned}$$

Genauso ist

$$\begin{aligned} & g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot \left(S_1^+(\vartheta) \cap g_0\left(-\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\ & \subset g_0\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \subset S_0^-(\vartheta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot \left(S_1^+(\vartheta) \cap g_0\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\ & \subset g_0\left(-\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \subset S_0^-(\vartheta). \end{aligned}$$

Es gilt $S_1^+(\vartheta) \cap g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot S_1^-(\vartheta) = \emptyset$, da

$$\begin{aligned} & g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot S_1^-(\vartheta) \\ & = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ -\cos(2\vartheta)(x+y) - \sin(2\vartheta)y \tan \beta \\ \sin(2\vartheta)(x+y) - \cos(2\vartheta)y \tan \beta \end{array} \right) : \begin{array}{l} x \in \mathbf{R}, y < 0, \\ -\vartheta < \beta \leq \vartheta \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ist und für $-\cos(2\vartheta)(x+y) - \sin(2\vartheta)y \tan \beta - x > 0$ folgt

$$\begin{aligned} & \frac{(x+y) \sin(2\vartheta) - y \cos(2\vartheta) \tan \beta}{-(x+y) \cos(2\vartheta) - y \sin(2\vartheta) \tan \beta - x} \\ & = -\frac{2x \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \beta + y \sin(2\vartheta - \beta)}{2x \cos^2 \vartheta \cos \beta + y \cos(2\vartheta - \beta)} \\ & = -\tan \vartheta + \frac{y \tan \vartheta \cos(2\vartheta - \beta) - y \sin(2\vartheta - \beta)}{2x \cos^2 \vartheta \cos \beta + y \cos(2\vartheta - \beta)} \\ & = -\tan \vartheta + \frac{y \sin(-\vartheta + \beta)}{2x \cos^3 \vartheta \cos \beta + y \cos \vartheta \cos(2\vartheta - \beta)} \leq -\tan \vartheta, \end{aligned}$$

da $\sin(-\vartheta + \beta) \leq 0$ ist für $-\vartheta < \beta \leq \vartheta$. Analog ist auch $S_1^+(\vartheta) \cap g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot S_1^-(\vartheta) = \emptyset$, da gilt

$$\begin{aligned} & g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot S_1^-(\vartheta) \\ & = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ -\cos(2\vartheta)(x+y) + \sin(2\vartheta)y \tan \beta \\ -\sin(2\vartheta)(x+y) - \cos(2\vartheta)y \tan \beta \end{array} \right) : \begin{array}{l} x \in \mathbf{R}, y < 0, \\ -\vartheta < \beta \leq \vartheta \end{array} \right\} \end{aligned}$$

und für $-\cos(2\vartheta)(x+y) + \sin(2\vartheta)y \tan \beta - x > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{-(x+y)\sin(2\vartheta) - y\cos(2\vartheta)\tan\beta}{-(x+y)\cos(2\vartheta) + y\sin(2\vartheta)\tan\beta - x} \\
&= \frac{-2x\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\beta - y\sin(2\vartheta + \beta)}{-2x\cos^2\vartheta\cos\beta - y\cos(2\vartheta + \beta)} \\
&= \tan\vartheta + \frac{-y\tan\vartheta\cos(2\vartheta + \beta) + y\sin(2\vartheta + \beta)}{2x\cos^2\vartheta\cos\beta + y\cos(2\vartheta + \beta)} \\
&= \tan\vartheta + \frac{y\sin(\vartheta + \beta)}{2x\cos^3\vartheta\cos\beta + y\cos\vartheta\cos(2\vartheta - \beta)} > \tan\vartheta,
\end{aligned}$$

da $\sin(\vartheta + \beta) > 0$ ist für $-\vartheta < \beta \leq \vartheta$. Genauso ist

$$\begin{aligned}
& S_1^-(\vartheta) \cap g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot S_1^+(\vartheta) \\
&= g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot (S_1^+(\vartheta) \cap g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot S_1^-(\vartheta)) = \emptyset
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& S_1^-(\vartheta) \cap g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot S_1^+(\vartheta) \\
&= g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot (S_1^+(\vartheta) \cap g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot S_1^-(\vartheta)) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot \left(g_0\left(-\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) &= g_0\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \\
g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot \left(g_0\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) &= g_0\left(-\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\left(g_0\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \cap \left(g_0\left(-\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) = \emptyset.$$

Nun wird gezeigt, daß

$$\begin{aligned}
S_0^+(\vartheta) &= (W^+(\vartheta) \cap S_0^+(\vartheta)) \\
&\cup g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot \left(S_1^-(\vartheta) \cap g_0\left(-\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\
&\cup g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot \left(S_1^-(\vartheta) \cap g_0\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right).
\end{aligned}$$

Wie oben ausgeführt, ist diese Vereinigung disjunkt. Die Gültigkeit der Darstellung von $S_0^+(\vartheta)$ als Vereinigung erhält man aus folgenden Gleichungen

für die drei Mengen. Nun folgt der Beweis, daß

$$W^+(\vartheta) \cap S_0^+(\vartheta) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} : x > 0, y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\} \\ \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} : x \leq 0, y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\},$$

$$g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot \left(S_1^-(\vartheta) \cap g_0\left(-\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ hx+y \\ y \tan \vartheta \end{pmatrix} : x > 0, 0 \leq h < 1, y > 0 \right\}$$

und

$$g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot \left(S_1^-(\vartheta) \cap g_0\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ hx+y \\ -y \tan \vartheta \end{pmatrix} : x > 0, 0 < h \leq 1, y > 0 \right\}$$

gilt. Denn für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} \in S_0^+(\vartheta)$ und $0 < \beta \leq \vartheta$ ist $y = y(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) + y \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}$ mit $0 < \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta} \leq 1$. Falls $y(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) < x$ gilt, so ist $y(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) = hx$ für $0 \leq h < 1$ und damit $y = hx + y \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}$. Für $y(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) \geq x$ ist $y = y(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) + y \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta} > y(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) \geq x$, also gilt $\tan \vartheta \geq \frac{y \tan \beta}{y-x} > 0$. Ist $-\vartheta < \beta \leq 0$, dann ist $y = y(1 + \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) + y \frac{-\tan \beta}{\tan \vartheta}$ mit $-1 < \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta} \leq 0$. Falls gilt $y(1 + \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) \leq x$, so ist $y(1 + \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) = hx$ für $0 < h \leq 1$ und damit $y = hx + y \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}$. Für $y(1 + \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) > x$ ist $y = y(1 + \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) + y \frac{-\tan \beta}{\tan \vartheta} \geq y(1 + \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}) > x$, also gilt $-\tan \vartheta < \frac{y \tan \beta}{y-x} \leq 0$.

Sei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} \in S_0^+(\vartheta)$ mit $x \leq 0, y > 0$ und $-\vartheta < \beta \leq \vartheta$, dann ist $y > x$ und somit ist $-\tan \vartheta < \frac{y \tan \beta}{y-x} \leq 0$ für $-\vartheta < \beta \leq 0$ bzw. $0 < \frac{y \tan \beta}{y-x} \leq \tan \vartheta$ für $0 < \beta \leq \vartheta$. Also gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} \in W^+(\vartheta)$. Ist $x > 0$ und

$\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} \in W^+(\vartheta)$ mit $y > 0$, dann ist $x+y > y > 0$ und für $0 < \beta \leq \vartheta$ ist $0 < \frac{y \tan \beta}{x+y} < \tan \vartheta$ und für $-\vartheta < \beta \leq 0$ ist $-\tan \vartheta < \frac{y \tan \beta}{x+y} \leq 0$. Also gilt

$\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} \in S_0^+(\vartheta)$. Sei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \cos \beta \\ y \sin \beta \end{pmatrix} \in S_1^-(\vartheta) \cap g_0(-3\vartheta/2) \cdot S_0^-(\vartheta/2)$

mit $y < 0$ und $-2\vartheta < \beta \leq -\vartheta$, dann gibt es ein $z < 0$ und $-\vartheta < \alpha \leq \vartheta$ mit $x+z = y \cos \beta$ und $z \tan \alpha = y \sin \beta$. Da $\beta < 0$ ist, ist auch $\alpha < 0$ und, falls $x \leq 0$ wäre, wäre auch $-\cot \vartheta \leq \cot \beta = \frac{x+z}{z \tan \alpha} \leq \cot \alpha < -\cot \vartheta$.

Dies ergibt einen Widerspruch. Also ist $x > 0$. Sei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} \in$

$g_0(\pi+2\vartheta) \cdot S_1^-(\vartheta) \cap g_0(\vartheta/2) \cdot S_0^+(\vartheta/2)$, dann ist $x, y > 0$ und $0 < \beta \leq \vartheta$. Es gilt

$$\begin{aligned} g_0(\pi+2\vartheta)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ -y \cos(2\vartheta) - y \tan \beta \sin(2\vartheta) \\ y \sin(2\vartheta) - y \tan \beta \cos(2\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ -y \frac{\cos(\beta-2\vartheta)}{\cos \beta} \\ -y \frac{\sin(\beta-2\vartheta)}{\cos \beta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es gibt ein $z > 0$ und $-\vartheta < \alpha \leq \vartheta$ mit $-y \frac{\cos(\beta-2\vartheta)}{\cos \beta} = x-z$ und $-y \frac{\sin(\beta-2\vartheta)}{\cos \beta} = -z \tan \alpha$. Da $\sin(\beta-2\vartheta) < 0$ ist, ist auch $\tan \alpha < 0$. Es gilt $y = y \left(1 - \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}\right) + y \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta} = y \frac{\sin(\vartheta-\beta)}{\sin \vartheta \cos \beta} + y \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}$ und

$$\begin{aligned} y \frac{\sin(\vartheta-\beta)}{\cos \beta} &= (x-z) \sin \vartheta - z \tan \alpha \cos \vartheta \\ &= \sin \vartheta \left(x - z \left(1 + \frac{\tan \alpha}{\tan \vartheta}\right) \right) \end{aligned}$$

und damit ist $y \frac{\sin(\vartheta-\beta)}{\sin \vartheta \cos \beta} = x - z \left(1 + \frac{\tan \alpha}{\tan \vartheta}\right)$. Da nun $-\vartheta < \alpha < 0$ gilt, ist $-1 < \frac{\tan \alpha}{\tan \vartheta} < 0$ und somit ist $0 \leq y \frac{\sin(\vartheta-\beta)}{\sin \vartheta \cos \beta} = x - z \left(1 + \frac{\tan \alpha}{\tan \vartheta}\right) < x$. Also gibt es ein $0 \leq h < 1$ mit $y \frac{\sin(\vartheta-\beta)}{\sin \vartheta \cos \beta} = hx$ und es ist damit $y = hx + y \frac{\tan \beta}{\tan \vartheta}$. Somit ist

$$g_0(\pi+2\vartheta) \cdot \left(S_1^-(\vartheta) \cap g_0\left(-\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right)$$

$$\subset \left\{ \begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ y \tan \vartheta \end{pmatrix} : x > 0, 0 \leq h < 1, y > 0 \right\}.$$

Für $\begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ y \tan \vartheta \end{pmatrix}$ mit $x > 0$, $0 \leq h < 1$ und $y > 0$ gilt $0 < \frac{y \tan \vartheta}{hx + y} \leq \tan \vartheta$.

Also ist $\begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ y \tan \vartheta \end{pmatrix} \in g_0(\vartheta/2) \cdot S_0^+(\vartheta/2)$. Es gilt

$$\begin{aligned} g_0(\pi + 2\vartheta)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ y \tan \vartheta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ -(hx + y) \cos(2\vartheta) - y \tan \vartheta \sin(2\vartheta) \\ (hx + y) \sin(2\vartheta) - y \tan \vartheta \cos(2\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ -hx \cos(2\vartheta) - y \\ hx \sin(2\vartheta) + y \tan \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und $-hx \cos(2\vartheta) - y - x < 0$. Also ist

$$\begin{aligned} 0 &> \frac{hx \sin(2\vartheta) + y \tan \vartheta}{-hx \cos(2\vartheta) - y - x} \\ &= -\tan \vartheta + \frac{(h \cos(2\vartheta) + 1)x \tan \vartheta - hx \sin(2\vartheta)}{(h \cos(2\vartheta) + 1)x + y} \\ &= -\tan \vartheta + \frac{x \tan \vartheta - hx \tan \vartheta}{(h \cos(2\vartheta) + 1)x + y} \\ &= \left(-1 + \frac{(1-h)x}{(h \cos(2\vartheta) + 1)x + y} \right) \tan \vartheta \\ &> -\tan \vartheta \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &g_0(\pi + 2\vartheta) \cdot \left(S_1^-(\vartheta) \cap g_0\left(-\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ y \tan \vartheta \end{pmatrix} : x > 0, 0 \leq h < 1, y > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Analog gibt es für $\begin{pmatrix} x \\ y \cos \beta \\ y \sin \beta \end{pmatrix} \in S_1^-(\vartheta) \cap g_0(3\vartheta/2) \cdot S_0^-(\vartheta/2)$ mit $y < 0$ und $\vartheta < \beta \leq 2\vartheta$ ein $z < 0$ und $-\vartheta < \alpha \leq \vartheta$ mit $x + z = y \cos \beta$ und

$z \tan \alpha = y \sin \beta$. Da $\beta > 0$ ist, ist auch $\alpha > 0$ und, falls $x \leq 0$ ist, ist $-x \geq 0$ und damit wäre $\cot \vartheta > \cot \beta = \frac{-x-z}{-z \tan \alpha} \geq \cot \alpha \geq \cot \vartheta$. Dies ergibt einen Widerspruch. Also ist $x > 0$.

Sei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} \in g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot S_1^-(\vartheta) \cap g_0(-\vartheta/2) \cdot S_0^+(\vartheta/2)$, dann ist $x, y > 0$ und $-\vartheta < \beta \leq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} g_0(\pi - 2\vartheta)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ -y \cos(2\vartheta) + y \tan \beta \sin(2\vartheta) \\ -y \sin(2\vartheta) - y \tan \beta \cos(2\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ -y \frac{\cos(2\vartheta + \beta)}{\cos \beta} \\ -y \frac{\sin(2\vartheta + \beta)}{\cos \beta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es gibt ein $z < 0$ und $-\vartheta < \alpha \leq \vartheta$ mit $-y \frac{\cos(\beta + 2\vartheta)}{\cos \beta} = x + z$ und $-y \frac{\sin(\beta + 2\vartheta)}{\cos \beta} = z \tan \alpha$. Da $\sin(\beta + 2\vartheta) > 0$ ist, ist auch $\tan \alpha > 0$. Es gilt $y = y \frac{\sin(\vartheta + \beta)}{\sin \vartheta \cos \beta} + y \frac{\tan \beta}{-\tan \vartheta}$ und

$$\begin{aligned} y \frac{\sin(\beta + \vartheta)}{\cos \beta} &= (x + z) \sin \vartheta - z \tan \alpha \cos \vartheta \\ &= \sin \vartheta \left(x + z \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \vartheta} \right) \right) \end{aligned}$$

und damit ist $y \frac{\sin(\vartheta + \beta)}{\sin \vartheta \cos \beta} = x + z \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \vartheta} \right)$. Da nun $0 < \frac{\tan \alpha}{\tan \vartheta} \leq 1$ ist, ist $0 < y \frac{\sin(\vartheta + \beta)}{\sin \vartheta \cos \beta} = x + z \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \vartheta} \right) \leq x$. Also gibt es ein $0 < h \leq 1$ mit $y \frac{\sin(\vartheta + \beta)}{\sin \vartheta \cos \beta} = hx$ und es ist damit $y = hx + y \frac{\tan \beta}{-\tan \vartheta}$. Somit ist

$$\begin{aligned} &g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot \left(S_1^-(\vartheta) \cap g_0\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^-\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right) \\ &\subset \left\{ \begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ -y \tan \vartheta \end{pmatrix} : x > 0, 0 < h \leq 1, y > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Für $\begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ -y \tan \vartheta \end{pmatrix}$ mit $x > 0, 0 < h \leq 1$ und $y > 0$ ist $0 > \frac{-y \tan \vartheta}{hx + y} \geq -\tan \vartheta$.

Also ist $\begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ -y \tan \vartheta \end{pmatrix} \in g_0(-\vartheta/2) \cdot S_0^+(\vartheta/2)$. Es gilt

$$\begin{aligned} & g_0(\pi - 2\vartheta)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ hx + y \\ -y \tan \vartheta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ -(hx + y) \cos(2\vartheta) - y \tan \vartheta \sin(2\vartheta) \\ -(hx + y) \sin(2\vartheta) + y \tan \vartheta \cos(2\vartheta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ -hx \cos(2\vartheta) - y \\ -hx \sin(2\vartheta) - y \tan \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und $-hx \cos(2\vartheta) - y - x < 0$. Somit ist

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{-hx \sin(2\vartheta) - y \tan \vartheta}{-x(h \cos(2\vartheta) + 1) - y} \\ &= \tan \vartheta + \frac{-x(h \cos(2\vartheta) + 1) \tan \vartheta + hx \sin(2\vartheta)}{x(h \cos(2\vartheta) + 1) + y} \\ &= \tan \vartheta + \frac{-x \tan \vartheta + hx \tan \vartheta}{x(h \cos(2\vartheta) + 1) + y} \\ &= \left(1 - \frac{(1-h)x}{x(h \cos(2\vartheta) + 1) + y}\right) \tan \vartheta \\ &\leq \tan \vartheta \end{aligned}$$

und damit $\begin{pmatrix} x \\ xh + y \\ -y \tan \vartheta \end{pmatrix} \in g_0(\pi - 2\vartheta) \cdot S_1^-(\vartheta)$.

Eine analoge Aussage gilt für $S_0^-(\vartheta)$.

Nun wird $W(\vartheta)$ entsprechend zerlegt und zu $S_0(\vartheta)$ wieder zusammengesetzt. Mit den vorherigen Rechnungen gilt

$$\begin{aligned} \|E(W(\vartheta))\xi\|^2 &= \|E(W^+(\vartheta) \cap S_0^+(\vartheta))\xi\|^2 \\ &\quad + \left\| E\left(W^+(\vartheta) \cap g_0\left(\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)\xi \right\|^2 \\ &\quad + \left\| E\left(W^+(\vartheta) \cap g_0\left(-\frac{3\vartheta}{2}\right) \cdot S_0^+\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)\xi \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| E \left(W^- (\vartheta) \cap S_0^- (\vartheta) \right) \xi \right\|^2 \\
& + \left\| E \left(W^- (\vartheta) \cap g_0 \left(\frac{3\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^- \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2 \\
& + \left\| E \left(W^- (\vartheta) \cap g_0 \left(-\frac{3\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^- \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2
\end{aligned}$$

und wegen der Invarianz unter K hat man

$$\begin{aligned}
& \left\| E \left(W^+ (\vartheta) \cap g_0 \left(\frac{3\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^+ \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2 \\
= & \left\| E \left(g_0 (\pi - 2\vartheta) \cdot \left(S_1^+ (\vartheta) \cap g_0 \left(\frac{3\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^+ \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \right) \xi \right\|^2 \\
= & \left\| E \left(g_0 (\pi - 2\vartheta) \cdot S_1^+ (\vartheta) \cap g_0 \left(-\frac{\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^- \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
& \left\| E \left(W^+ (\vartheta) \cap g_0 \left(-\frac{3\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^+ \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2 \\
= & \left\| E \left(g_0 (\pi + 2\vartheta) \cdot S_1^+ (\vartheta) \cap g_0 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^- \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2, \\
& \left\| E \left(W^- (\vartheta) \cap g_0 \left(\frac{3\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^- \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2 \\
= & \left\| E \left(g_0 (\pi - 2\vartheta) \cdot S_1^- (\vartheta) \cap g_0 \left(-\frac{\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^+ \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2, \\
& \left\| E \left(W^- (\vartheta) \cap g_0 \left(-\frac{3\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^- \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2 \\
= & \left\| E \left(g_0 (\pi + 2\vartheta) \cdot S_1^- (\vartheta) \cap g_0 \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \cdot S_0^+ \left(\frac{\vartheta}{2} \right) \right) \xi \right\|^2.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\|E(W(\vartheta))\xi\|^2 & = \|E(S_0^+(\vartheta))\xi\|^2 + \|E(S_0^-(\vartheta))\xi\|^2 \\
& = 2 \|E(S_0^+(\vartheta))\xi\|^2 = \frac{2\vartheta}{\pi}.
\end{aligned}$$

□

Nun folgt die Untersuchung des Verhaltens von $W(\vartheta)$ unter der Einparametergruppe $g_1(t)$. Es gilt $g_1(t) \cdot S_1^\pm(\vartheta) = S_1^\pm(\arctan(e^t \tan \vartheta))$ und man hat

also

$$\begin{aligned} g_1(t) \cdot W^\pm(\vartheta) &= g_1(t) \cdot (S_1^\pm(\vartheta) \cap S_0^\pm(2\vartheta)) \\ &= (g_1(t) \cdot S_1^\pm(\vartheta)) \cap (g_1(t) \cdot S_0^\pm(2\vartheta)) \\ &= S_1^\pm(\arctan(e^t \tan \vartheta)) \cap (g_1(t) \cdot S_0^\pm(2\vartheta)). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$g_1(t) \cdot S_0^\pm(\vartheta) = \left\{ \begin{pmatrix} x \cosh t + y \cos \beta \sinh t \\ x \sinh t + y \cos \beta \cosh t \\ y \sin \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, \pm y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\}.$$

Da $x \in \mathbf{R}$ beliebig ist, kann man x durch $\frac{x - y \cos \beta \sinh t}{\cosh t}$ ersetzen. Man erhält für die erste Koordinate x und für die zweite gilt $(x - y \cos \beta \sinh t) \tanh t + y \cos \beta \cosh t = x \tanh t + \frac{y \cos \beta}{\cosh t}$. Also ist

$$\begin{aligned} g_1(t) \cdot S_0^\pm(\vartheta) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \tanh t + \frac{y \cos \beta}{\cosh t} \\ y \sin \beta \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, \pm y > 0, -\vartheta < \beta \leq \vartheta \right\} \\ &= S_{\tanh t}^\pm \left(\operatorname{arccot} \left(\frac{\cot \vartheta}{\cosh t} \right) \right). \end{aligned}$$

Das folgende bestimmt nun abhängig von t und ϑ ein ϑ' derart, daß $W(\vartheta')$ in $g_1(t) \cdot W(\vartheta)$ enthalten ist. Der Korollar danach liefert daraus sofort eine Abschätzung des Spektralmaßes von $g_1(t) \cdot W(\vartheta)$, da bereits das vorige Lemma das Spektralmaß von $W(\vartheta')$ liefert.

2.3.5 Lemma. Es ist $g_1(t) \cdot W(\vartheta) \supseteq W(\arctan(e^t \tan \vartheta))$ für $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ und $t > 0$.

Beweis. Dies gilt genau dann, wenn

$$W^\pm(\vartheta) \supseteq g_1(-t) \cdot W^\pm(\arctan(e^t \tan \vartheta)).$$

Dazu ist zu zeigen, daß

$$S_1^\pm(\vartheta) \cap S_0^\pm(2\vartheta) \supseteq S_1^\pm(\vartheta) \cap S_{-\tanh t}^\pm \left(\operatorname{arccot} \left(\frac{\cot(2\arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t} \right) \right)$$

ist. Sei also

$$\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} \in S_1^+(\vartheta) \cap S_{-\tanh t}^+ \left(\operatorname{arccot} \left(\frac{\cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t} \right) \right)$$

mit $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$ und $-\vartheta < \beta \leq \vartheta$, dann gibt es $z > 0$ und α mit

$$-\operatorname{arccot} \left(\frac{\cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t} \right) < \alpha \leq \operatorname{arccot} \left(\frac{\cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t} \right)$$

so, daß $x + y = -x \tanh t + z \cos \alpha$ und $y \tan \beta = z \sin \alpha$. Falls $x \geq 0$ ist, ist $x + y > 0$, da $y > 0$ ist. Damit ist $0 < \frac{y \tan \beta}{x+y} \leq \tan \beta \leq \tan \vartheta$ für $0 < \beta \leq \vartheta$ und $0 \geq \frac{y \tan \beta}{x+y} \geq \tan \beta > -\tan \vartheta$ für $-\vartheta < \beta \leq 0$. Also ist

$$\begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} \in S_0^+(2\vartheta). \text{ Falls } x < 0 \text{ ist, ist } x + y = -x \tanh t + z \cos \alpha > 0.$$

$$\text{Also ist } \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix} \in S_0^+(2\vartheta). \text{ Falls } 0 < \beta \leq \vartheta \text{ und } y \tan \beta \geq -x \sin(2\vartheta)$$

ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{y \tan \beta} &= \frac{x}{y \tan \beta} + \cot \beta \geq -\frac{1}{\sin(2\vartheta)} + \cot \beta \geq -\frac{1}{\sin(2\vartheta)} + \cot \vartheta \\ &= -\frac{1}{2 \sin \vartheta \cos \vartheta} + \cot \vartheta = \frac{-1 + 2(\cos \vartheta)^2}{\sin(2\vartheta)} = \cot(2\vartheta). \end{aligned}$$

Falls $-\vartheta < \beta < 0$ und $y \tan \beta \leq x \sin(2\vartheta)$ ist, gilt analog

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{y \tan \beta} &= \frac{-x}{-y \tan \beta} + \cot \beta \leq \frac{1}{\sin(2\vartheta)} + \cot \beta < \frac{1}{\sin(2\vartheta)} - \cot \vartheta \\ &= \frac{1}{2 \sin \vartheta \cos \vartheta} - \cot \vartheta = \frac{1 - 2(\cos \vartheta)^2}{\sin(2\vartheta)} = -\cot(2\vartheta). \end{aligned}$$

Es ist $\arctan(e^t \tan \vartheta) > \vartheta$ und damit $\cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta)) < \cot(2\vartheta) < \cosh t \cot(2\vartheta)$. Für $0 < \alpha \leq \operatorname{arccot} \left(\frac{\cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t} \right)$ und $z > 0$ mit

$$z \sin \alpha \leq -x \frac{\sinh t}{\cosh t \cot(2\vartheta) - \cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}$$

ist

$$\frac{-x \tanh t + z \cos \alpha}{z \sin \alpha} = \frac{-x \tanh t}{z \sin \alpha} + \cot \alpha$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\tanh t}{\frac{\sinh t}{\cosh t \cot(2\vartheta) - \cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}} + \cot \alpha \\
&= \frac{\cosh t \cot(2\vartheta) - \cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t} + \cot \alpha \\
&= \cot(2\vartheta) - \frac{\cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t} + \cot \alpha \\
&\geq \cot(2\vartheta).
\end{aligned}$$

Für $-\arccot\left(\frac{\cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t}\right) < \alpha < 0$ und $z > 0$ mit

$$z \sin \alpha \geq x \frac{\sinh t}{\cosh t \cot(2\vartheta) - \cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}$$

ist analog

$$\begin{aligned}
\frac{-x \tanh t + z \cos \alpha}{z \sin \alpha} &= -\frac{x \tanh t}{z \sin \alpha} + \cot \alpha \\
&\leq -\frac{\tanh t}{\frac{\sinh t}{\cosh t \cot(2\vartheta) - \cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}} + \cot \alpha \\
&= -\frac{\cosh t \cot(2\vartheta) - \cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t} + \cot \alpha \\
&= -\cot(2\vartheta) + \frac{\cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))}{\cosh t} + \cot \alpha \\
&< -\cot(2\vartheta).
\end{aligned}$$

Da $\cot(2\vartheta') = \frac{(\cot \vartheta')^2 - 1}{2 \cot \vartheta'}$ ist für $0 < \vartheta' < \pi/2$ und $\cot(\arctan a) = a^{-1}$ für $a > 0$, ist

$$\begin{aligned}
\cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta)) &= \frac{(\cot(\arctan(e^t \tan \vartheta)))^2 - 1}{2 \cot(\arctan(e^t \tan \vartheta))} \\
&= \frac{(e^{-t} \cot \vartheta)^2 - 1}{2e^{-t} \cot \vartheta} = \frac{e^{-t} \cot \vartheta - e^t \tan \vartheta}{2} \\
&= \frac{e^{-t} (\cos \vartheta)^2 - e^t (\sin \vartheta)^2}{\sin(2\vartheta)}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
&\cosh t \cot(2\vartheta) - \cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta)) \\
&= \frac{\cosh t \cos(2\vartheta) - e^{-t} (\cos \vartheta)^2 + e^t (\sin \vartheta)^2}{\sin(2\vartheta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\cosh t - e^{-t})(\cos \vartheta)^2 + (e^t - \cosh t)(\sin \vartheta)^2}{\sin(2\vartheta)} \\
&= \frac{(\cos \vartheta)^2 \sinh t + (\sin \vartheta)^2 \sinh t}{\sin(2\vartheta)} = \frac{\sinh t}{\sin(2\vartheta)}
\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\sinh t}{\cosh t \cot(2\vartheta) - \cot(2 \arctan(e^t \tan \vartheta))} = \sin(2\vartheta).$$

$$\text{Also ist } \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \tan \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \tanh t + z \\ z \tan \alpha \end{pmatrix} \in S_0^+(2\vartheta).$$

Die Inklusion $g_1(t) \cdot W^-(\vartheta) \supseteq W^-(\arctan(e^t \tan \vartheta))$ gilt analog. Damit ist $g_1(t) \cdot W(\vartheta) \supseteq W(\arctan(e^t \tan \vartheta))$. \square

Zusammen mit Lemma 2.3.4 erhält man daraus sofort folgendes.

2.3.6 Korollar. Für $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ und $t > 0$ ist

$$\|E(g_1(t) \cdot W(\vartheta)) \xi\|^2 \geq \frac{2}{\pi} \arctan(e^t \tan \vartheta).$$

Nun ist eine Abschätzung von $\|d\pi(Y_1) \xi\|$ mit $Y_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ für einen glatten SO(2)-endlichen Vektor ξ gesucht. Man beachte dabei, daß $g_1(t) = \exp(tY_1)$ ist.

2.3.7 Lemma. Sei π eine Darstellung von $SL(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ ohne nicht-triviale $S^2(\mathbf{R}^2)$ -invariante Vektoren, dann gilt

$$\|d\pi(Y_1) \xi\| \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(2\vartheta)}{\sqrt{\vartheta}}$$

für jeden glatten SO(2)-Eigenvektor ξ mit $\|\xi\| = 1$.

Beweis. Für ξ erhält man

$$\begin{aligned}
\|E(g_1(t) \cdot W(\vartheta)) \xi\| &= \|\pi(g_1(t)) E(W(\vartheta)) \pi(g_1(-t)) \xi\| \\
&= \|E(W(\vartheta)) \pi(g_1(-t)) \xi\|
\end{aligned}$$

und differenzieren bei $t = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \|E(g_1(t) \cdot W(\vartheta)) \xi\|^2 \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \|E(W(\vartheta)) \pi(g_1(-t)) \xi\|^2 \right|_{t=0} \\ &= -\langle d\pi(Y_1) \xi, E(W(\vartheta)) \xi \rangle - \langle E(W(\vartheta)) \xi, d\pi(Y_1) \xi \rangle. \end{aligned}$$

Für eine am Nullpunkt differenzierbare reelle Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$ ist die Ableitung $f'(x) \geq 0$. Zusammen mit Korollar 2.3.6 folgt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \|E(g_1(t) \cdot W(\vartheta)) \xi\|^2 \right|_{t=0} \\ & \geq \frac{2}{\pi} \left. \frac{d}{dt} \arctan(e^t \tan \vartheta) \right|_{t=0} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + (\tan \vartheta)^2} \tan \vartheta \\ & = \frac{2}{\pi} (\cos \vartheta)^2 \tan \vartheta = \frac{2}{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta = \frac{1}{\pi} \sin(2\vartheta). \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} 2 \|d\pi(Y_1) \xi\| \sqrt{\frac{2\vartheta}{\pi}} & \geq -\langle d\pi(Y_1) \xi, E(W(\vartheta)) \xi \rangle - \langle E(W(\vartheta)) \xi, d\pi(Y_1) \xi \rangle \\ & = \left. \frac{d}{dt} \|E(g_1(t) \cdot W(\vartheta)) \xi\|^2 \right|_{t=0} \\ & \geq \frac{1}{\pi} \sin(2\vartheta). \end{aligned}$$

Also ist

$$\|d\pi(Y_1) \xi\| \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(2\vartheta)}{\sqrt{\vartheta}}$$

für alle glatten K -Eigenvektoren ξ der Norm 1. \square

Für $Y_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt dieselbe

Ungleichung. Zusammen mit $Y_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist Y_0, Y_1, Y_2 eine bezüglich der Killing-Form orthogonale Basis der Lie-Algebra von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Der zugehörige Casimir-Operator ist $C = \frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2 - Y_0^2)$ und der zugehörige Laplace-Operator $\Delta = -Y_1^2 - Y_2^2 - Y_0^2 = -2C_1 - 2Y_0^2$. Der folgende Satz spielt auch für die höherdimensionalen Gruppen $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ mit $n \geq 3$ eine entscheidende Rolle.

2.3.8 Satz. Sei π eine Darstellung von $SL(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ ohne nichttriviale $S^2(\mathbf{R}^2)$ -invariante Vektoren, dann gilt

$$\langle d\pi(\Delta)\eta, \eta \rangle \geq \frac{1}{4\pi} \sup_{0 < \vartheta < \pi/2} \frac{(\sin(2\vartheta))^2}{\vartheta}$$

für jeden glatten $SO(2)$ -endlichen Einheitsvektor η .

Beweis. Sei $\eta = \sum_{k=1}^r \xi_k$ die orthogonale Zerlegung von η in $d\pi(Y_0)$ -Eigenvektoren, dann folgt unter Beachtung, daß C mit Y_0 vertauscht,

$$\begin{aligned} \langle d\pi(\Delta)\eta, \eta \rangle &= \langle d\pi(-2Y_0^2)\eta, \eta \rangle + \langle d\pi(-2C)\eta, \eta \rangle \\ &= \sum_{k=1}^r \langle d\pi(-2Y_0^2)\xi_k, \xi_k \rangle + \langle d\pi(-2C)\xi_k, \xi_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^r \langle d\pi(\Delta)\xi_k, \xi_k \rangle \\ &\geq \sum_{k=1}^r 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(2\vartheta)}{\sqrt{\vartheta}} \right)^2 \|\xi_k\|^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin^2(2\vartheta)}{\vartheta} \|\eta\|^2. \end{aligned}$$

□

Nun wird eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(2, \mathbf{R})$ angegeben, die Y_1 und Y_2 entsprechende Elemente enthält. Man kann die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(2, \mathbf{R})$ zerlegen in $\mathfrak{sp}(2, \mathbf{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(4, \mathbf{R}) \cap \mathfrak{sp}(2, \mathbf{R})$ und $\mathfrak{p} = S^2(\mathbf{R}^4) \cap \mathfrak{sp}(2, \mathbf{R})$. Mit

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ X_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$X_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_8 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_9 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

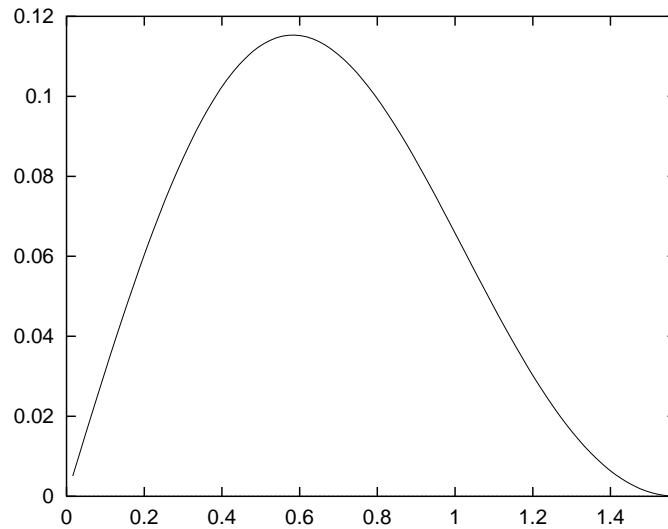
gilt

$$C = 2 (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 - (X_7^2 + X_8^2 + X_9^2 + X_0^2)).$$

Dabei bilden X_0, X_7, X_8 und X_9 eine Basis von k und X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 und X_6 eine Basis von p . Sei η ein glatter $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R}) \cap \mathrm{SO}(4)$ -endlicher Einheitsvektor, dann ist

$$\langle d\pi(\Delta)\eta, \eta \rangle \geq \langle d\pi(\Delta_1)\eta, \eta \rangle,$$

mit $\Delta_1 = -X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 = -2X_0^2 - 2C_1$, wobei $C_1 = \frac{1}{2}(-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2)$ der Casimir-Operator einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphen Lie-Unteralgebra. Nach Satz 2.3.8 ist $\langle d\pi(\Delta)\eta, \eta \rangle \geq (4\pi)^{-1} (\sin(2\vartheta))^2 / \vartheta$ für jeden glatten $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R}) \cap \mathrm{SO}(4)$ -endlichen Einheitsvektor η einer Darstellung π ohne nichttriviale unter $S^2(\mathbf{R}^2)$ invariante Vektoren.



Graph der Funktion $\vartheta \mapsto (4\pi)^{-1} (\sin(2\vartheta))^2 / \vartheta$

Also gilt folgendes.

2.3.9 Satz. Für jeden glatten $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R}) \cap \mathrm{SO}(4)$ -endlichen Einheitsvektor η und jede Darstellung π von $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$ ohne nichttriviale invariante Vektoren gilt

$$\langle d\pi(\Delta)\eta, \eta \rangle \geq \frac{1}{4\pi} \sup_{0 < \vartheta < \pi/2} \frac{(\sin(2\vartheta))^2}{\vartheta} > 0, 11532.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$ eine Kazhdan-Gruppe.

Beweis. Die Funktion $(\sin(2\vartheta))^2 / \vartheta$ nimmt ihr Maximum näherungsweise bei $\vartheta \approx 0,582781$ an und somit ist

$$\frac{1}{4\pi} \sup_{0 < \vartheta < \pi/2} \frac{(\sin(2\vartheta))^2}{\vartheta} \approx 0,115325 > 0,11532.$$

Satz 2.3.2 zeigt nun, daß dies die Eigenschaft (T) von $\mathrm{Sp}(2, \mathbf{R})$ impliziert. \square

2.4 Kazhdan-Konstanten der symplektischen Gruppen mit höherem Rang

Dieser Abschnitt behandelt den Fall $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ für $n \geq 3$. Dazu werden geeignete orthogonale Basen der Lie-Algebra $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ bestimmt. Je drei geeignete Basiselemente spannen eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ auf. Zuerst wird der Zusammenhang der Spurform und der Killing-Form untersucht. Da $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ eine einfache Lie-Algebra ist, unterscheiden sich diese nur um ein konstantes Vielfaches. Danach folgt die Bestimmung einer Basis der Lie-Algebra und ausgehend von dieser die rekursive Definition neuer Basen. Das Ziel ist möglichst viele zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebren in $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ unterzubringen, die bezüglich der Killing-Form orthogonal sind. Dabei müssen diese Lie-Unteralgebren immer in einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ isomorphen Lie-Unteralgebra enthalten sein. Für jede dieser zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphen Lie-Unteralgebren erhält man aus Satz 2.3.8 eine Abschätzung des Laplace-Operators für Darstellungen ohne nichttriviale $S^2(\mathbf{R}^2)$ -invariante Vektoren. Der Laplace-Operator auf $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ ist nun eine Summe solcher Laplace-Operatoren mit einem gewissen Rest. Dies liefert eine Abschätzung des Laplace-Operators für Darstellungen ohne nichttriviale

invariante Vektoren und somit eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante. Damit die Übertragung der Ergebnisse auf Kopien von $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \rtimes S^2(\mathbf{R}^2)$ in $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ möglich ist, wird der nächste Satz benötigt. Zum Beweis sei an folgende Definition erinnert.

2.4.1 Definition. Eine Folge in einem topologischen Raum X geht gegen ∞ , wenn sie keinen Häufungspunkt in X besitzt. Eine komplexwertige Funktion auf X verschwindet im Unendlichen, wenn für jede Folge $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$, die gegen ∞ geht, $\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = 0$.

2.4.2 Satz. Sei π eine Darstellung von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, $n \geq 2$, auf H_π ohne nichttriviale invariante Vektoren. Sei P eine abgeschlossene zu $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \rtimes S^2(\mathbf{R}^2)$ isomorphe Untergruppe von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, dann besitzt auch die Einschränkung von π auf die zu $S^2(\mathbf{R}^2)$ isomorphe Untergruppe von P keine nichttrivialen invarianten Vektoren.

Beweis. Wie wir später sehen werden (siehe Satz 2.6.3), verschwinden die Matrixkoeffizienten von π in ∞ . Also verschwinden auch die Matrixkoeffizienten der Einschränkung von π auf die zu $S^2(\mathbf{R}^2)$ isomorphe Untergruppe von P in ∞ . Da $S^2(\mathbf{R}^2)$ nicht kompakt ist, besitzt die Darstellung keine nichttrivialen $S^2(\mathbf{R}^2)$ -invarianten Vektoren. \square

Nun zur Bestimmung der Basis für die Lie-Algebra. Für die Lie-Algebra von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ gilt

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^{\mathrm{tr}} \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}), B = B^{\mathrm{tr}}, C = C^{\mathrm{tr}} \right\},$$

siehe z. B. [21] oder [39]. Es gilt $\mathrm{Spur} \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^{\mathrm{tr}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$. Die Matrizen $\begin{pmatrix} E_{r,s} & 0 \\ 0 & -E_{s,r} \end{pmatrix}$ mit $E_{r,s} = (\delta_{r,u} \delta_{s,v})_{u,v=1,\dots,n}$ bilden eine Basis der zu $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ isomorphen Lie-Unteralgebra $\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^{\mathrm{tr}} \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \right\}$ von $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$. Sei

$$X_{r,s}^+ = \begin{pmatrix} E_{r,s} + E_{s,r} & 0 \\ 0 & -E_{r,s} - E_{s,r} \end{pmatrix}, X_{r,s}^- = \begin{pmatrix} E_{r,s} - E_{s,r} & 0 \\ 0 & E_{r,s} - E_{s,r} \end{pmatrix}$$

für $1 \leq r, s \leq n$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur } X_{r,s}^+ X_{u,v}^+ &= 2 \text{Spur} (\delta_{s,u} E_{r,v} + \delta_{r,u} E_{s,v} + \delta_{s,v} E_{r,u} + \delta_{r,v} E_{s,u}) \\ &= 4 (\delta_{s,u} \delta_{r,v} + \delta_{r,u} \delta_{s,v}) = 4 \delta_{r,u} \delta_{s,v} \end{aligned}$$

für $1 \leq s < r \leq n$ und $1 \leq v < u \leq n$. Also ist $\text{Spur } X_{r,s}^+ X_{u,v}^+ = 0$, falls $(r, s) \neq (u, v)$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} \text{Spur } X_{r,s}^+ X_{u,v}^- &= 2 \text{Spur} (\delta_{s,u} E_{r,v} + \delta_{r,u} E_{s,v} - \delta_{s,v} E_{r,u} - \delta_{r,v} E_{s,u}) = 0, \\ \text{Spur } X_{r,s}^- X_{u,v}^- &= 2 \text{Spur} (\delta_{s,u} E_{r,v} - \delta_{r,u} E_{s,v} - \delta_{s,v} E_{r,u} + \delta_{r,v} E_{s,u}) \\ &= 4 (\delta_{s,u} \delta_{r,v} - \delta_{r,u} \delta_{s,v}) = -4 \delta_{r,u} \delta_{s,v}. \end{aligned}$$

Also ist $\text{Spur } X_{r,s}^- X_{u,v}^- = 0$, falls $(r, s) \neq (u, v)$. Sei $H_r = \begin{pmatrix} E_{r,r} & 0 \\ 0 & -E_{r,r} \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur } H_r H_s &= 2 \delta_{r,s}, \\ \text{Spur } X_{r,s}^+ H_u &= 2 \text{Spur} (\delta_{s,u} E_{r,u} + \delta_{r,u} E_{s,u}) = 0, \\ \text{Spur } X_{r,s}^- H_u &= 2 \text{Spur} (\delta_{s,u} E_{r,u} - \delta_{r,u} E_{s,u}) = 0 \end{aligned}$$

für $1 \leq s < r \leq n$. Es gilt

$$[E_{v,v}, E_{r,s}] = \delta_{v,r} E_{v,s} - \delta_{s,v} E_{r,v} = (\delta_{v,r} - \delta_{s,v}) E_{r,s}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left[H_{v,v}, \begin{pmatrix} E_{r,s} & 0 \\ 0 & -E_{s,r} \end{pmatrix} \right] &= (\delta_{v,r} - \delta_{s,v}) \begin{pmatrix} E_{r,s} & 0 \\ 0 & -E_{s,r} \end{pmatrix}, \\ \left[H_{v,v}, \begin{pmatrix} 0 & E_{r,s} + E_{s,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= (\delta_{v,r} + \delta_{v,s}) \begin{pmatrix} 0 & E_{r,s} + E_{s,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \left[H_{v,v}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{r,s} + E_{s,r} & 0 \end{pmatrix} \right] &= -(\delta_{v,r} + \delta_{v,s}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{r,s} + E_{s,r} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Killing-Form gilt also

$$\begin{aligned} \kappa(H_v, H_v) &= \text{Spur} (\text{ad } H_v \text{ ad } H_v) \\ &= \sum_{r,s=1}^n (\delta_{v,r} - \delta_{s,v})^2 + 2 \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^r (\delta_{v,r} + \delta_{v,s})^2 \\ &= \sum_{r,s=1}^n \delta_{v,r} - 2 \delta_{v,r} \delta_{s,v} + \delta_{s,v} + 2 \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^r \delta_{v,r} + 2 \delta_{v,r} \delta_{s,v} + \delta_{s,v} \\ &= 2n - 2 + 2(v + 2 + n - v + 1) = 2(n - 1 + n + 3) \\ &= 4(n + 1). \end{aligned}$$

Somit ist $\kappa(X, Y) = 2(n+1) \text{Spur}(XY)$, da $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ eine einfache Lie-Algebra. Für einen Beweis siehe z. B. [28, Seite 118]. Sei

$$Y_{r,s}^+ = \begin{pmatrix} 0 & E_{r,s} + E_{s,r} \\ E_{r,s} + E_{s,r} & 0 \end{pmatrix}, Y_{r,s}^- = \begin{pmatrix} 0 & -E_{r,s} - E_{s,r} \\ E_{r,s} + E_{s,r} & 0 \end{pmatrix}$$

für $1 \leq s, r \leq n$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur } Y_{r,s}^+ Y_{u,v}^+ &= 2 \text{Spur} (\delta_{s,u} E_{r,v} + \delta_{r,u} E_{s,v} + \delta_{s,v} E_{r,u} + \delta_{r,v} E_{s,u}) \\ &= 4 (\delta_{s,u} \delta_{r,v} + \delta_{r,u} \delta_{s,v}) = 4 \delta_{r,u} \delta_{s,v}, \\ \text{Spur } Y_{r,s}^+ Y_{u,v}^- &= 0, \\ \text{Spur } Y_{r,s}^- Y_{u,v}^- &= -4 (\delta_{s,u} \delta_{r,v} + \delta_{r,u} \delta_{s,v}) = -4 \delta_{r,u} \delta_{s,v} \end{aligned}$$

für $1 \leq s < r \leq n$ und $1 \leq v < u \leq n$. Damit gilt für den Casimir-Operator

$$C = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n H_r^2 + \frac{1}{4} \sum_{s=1}^n \sum_{r=s+1}^n X_{r,s}^{+2} + Y_{r,s}^{+2} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^n \sum_{r=s+1}^n X_{r,s}^{-2} + Y_{r,s}^{-2}.$$

Statt H_r kann man auch $H_r^- = H_{2r-1} - H_{2r}$ und $H_r^+ = H_{2r-1} + H_{2r}$ für $1 \leq r \leq n/2$ betrachten. Dafür gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur } H_r^- H_s^- &= 2 (\delta_{2r-1,2s-1} - \delta_{2r-1,2s} - \delta_{2r,2s-1} + \delta_{2r,2s}) = 4 \delta_{r,s}, \\ \text{Spur } H_r^- H_s^+ &= 2 (\delta_{2r-1,2s-1} + \delta_{2r-1,2s} - \delta_{2r,2s-1} - \delta_{2r,2s}) = 0, \\ \text{Spur } H_r^+ H_s^+ &= 2 (\delta_{2r-1,2s-1} + \delta_{2r-1,2s} + \delta_{2r,2s-1} + \delta_{2r,2s}) = 4 \delta_{r,s} \end{aligned}$$

und man erhält den Casimir-Operator

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{n/2} H_r^{+2} + H_r^{-2} \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=s+1}^n X_{r,s}^{+2} + Y_{r,s}^{+2} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=s+1}^n X_{r,s}^{-2} + Y_{r,s}^{-2}, \\ C &= \frac{1}{4} \left(\sum_{r=1}^{(n-1)/2} H_r^{+2} + H_r^{-2} + H_n^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=s+1}^n X_{r,s}^{+2} + Y_{r,s}^{+2} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=s+1}^n X_{r,s}^{-2} + Y_{r,s}^{-2} \end{aligned}$$

abhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist. Die Elemente $H_r^\pm, X_{2r-1,2r}^\pm$ für $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ erzeugen eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebra

von $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$. Die zugehörige zu $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Untergruppe ist Teil eines semidirekten Produktes, das isomorph zu $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \ltimes S^2(\mathbf{R}^2)$ ist. Nach Satz 2.4.2 besitzt die Darstellung π keine nichttrivialen unter $S^2(\mathbf{R}^2)$ invarianten Vektoren. Für eine Darstellung π von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ ohne nichttriviale unter $S^2(\mathbf{R}^2)$ invariante Vektoren gilt damit

$$\langle d\pi(\Delta_r)\xi, \xi \rangle \geq \frac{(\sin(2\vartheta))^2}{\pi\vartheta}$$

für den Laplace-Operator

$$\Delta_r = -(H_r^-)^2 - (X_{2r-1,2r}^+)^2 - (X_{2r-1,2r}^-)^2$$

und alle K -endlichen glatten Einheitsvektoren ξ . Sei

$$\begin{aligned} \Delta &= -\frac{1}{4} \sum_{r=1}^{n/2} H_r^{+2} + H_r^{-2} - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=s+1}^n X_{r,s}^{+2} + Y_{r,s}^{+2} + X_{r,s}^{-2} + Y_{r,s}^{-2}, \\ \Delta &= -\frac{1}{4} \left(\sum_{r=1}^{(n-1)/2} H_r^{+2} + H_r^{-2} + H_n^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=s+1}^n X_{r,s}^{+2} + Y_{r,s}^{+2} + X_{r,s}^{-2} + Y_{r,s}^{-2} \end{aligned}$$

abhängig davon, ob n gerade oder ungerade ist. Daraus erhält man eine erste Abschätzung.

2.4.3 Satz. Für alle Darstellungen π von $G = \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ ohne nichttriviale invariante Vektoren ist

$$\begin{aligned} \langle d\pi(\Delta)\xi, \xi \rangle &\geq \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{4} \sup_{0 < \vartheta < \pi/2} \frac{(\sin(2\vartheta))^2}{\pi\vartheta} \geq \frac{n-1}{8} \sup_{0 < \vartheta < \pi/2} \frac{(\sin(2\vartheta))^2}{\pi\vartheta} \\ &> 0,057662(n-1) \end{aligned}$$

für alle glatten $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R}) \cap \mathrm{SO}(2n)$ -endlichen Einheitsvektoren ξ .

Beweis. Für $\vartheta \approx 0,582781$ gilt $(8\pi)^{-1}(\sin(2\vartheta))^2/\vartheta \approx 0,0576627$. Dort liegt näherungsweise das Maximum dieser Funktion. \square

Wählt man eine andere Basis von $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$, so kann man diese Abschätzung verbessern. Zuerst werden die Kommutatoren der Elemente H_v und $X_{r,s}^\pm$ betrachtet. Mit Induktion folgt für die rekursiv definierten Elemente, daß diese dieselben Relationen erfüllen. Für jeweils drei geeignete Elemente wird ebenfalls mit Induktion gezeigt, daß sie eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebra aufspannen. Es ist

$$\begin{aligned} [E_{r,s} + E_{s,r}, E_{u,v} - E_{v,u}] &= \delta_{s,u}E_{r,v} + \delta_{r,u}E_{s,v} - \delta_{s,v}E_{r,u} - \delta_{r,v}E_{s,u} \\ &\quad - \delta_{v,r}E_{u,s} - \delta_{v,s}E_{u,r} + \delta_{u,r}E_{v,s} + \delta_{u,s}E_{v,r} \\ &= \delta_{s,u}(E_{r,v} + E_{v,r}) + \delta_{r,u}(E_{s,v} + E_{v,s}) \\ &\quad - \delta_{s,v}(E_{r,u} + E_{u,r}) - \delta_{r,v}(E_{s,u} + E_{u,s}) \end{aligned}$$

und damit $[X_{r,s}^+, X_{u,v}^-] = \delta_{s,u}X_{r,v}^+ + \delta_{r,u}X_{s,v}^+ - \delta_{s,v}X_{r,u}^+ - \delta_{r,v}X_{s,u}^+$. Analog folgt aus

$$\begin{aligned} [E_{v,v}, E_{r,s} + E_{s,r}] &= \delta_{v,r}E_{r,s} + \delta_{v,s}E_{s,r} - \delta_{s,v}E_{r,s} - \delta_{r,v}E_{s,r} \\ &= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s})E_{r,s} - (\delta_{v,r} - \delta_{v,s})E_{s,r} \\ &= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s})(E_{r,s} - E_{s,r}), \end{aligned}$$

daß $[H_v, X_{r,s}^+] = (\delta_{v,r} - \delta_{v,s})X_{r,s}^-$, und

$$\begin{aligned} [E_{v,v}, E_{r,s} - E_{s,r}] &= \delta_{v,r}E_{r,s} - \delta_{v,s}E_{s,r} - \delta_{s,v}E_{r,s} + \delta_{r,v}E_{s,r} \\ &= \delta_{v,r}(E_{r,s} + E_{s,r}) - \delta_{v,s}(E_{s,r} + E_{r,s}) \\ &= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s})(E_{r,s} + E_{s,r}) \end{aligned}$$

impliziert $[H_v, X_{r,s}^-] = (\delta_{v,r} - \delta_{v,s})X_{r,s}^+$. Zu jeder Zweierpotenz nimmt man statt der H_r^\pm die Elemente

$$\begin{aligned} H_r^{(-1)} &= H_r^-, H_r^{(1)} = H_r^+, \\ H_r^{(-s)} &= H_{2r-1}^{(s-1)} - H_{2r}^{(s-1)}, H_r^{(s)} = H_{2r-1}^{(s-1)} + H_{2r}^{(s-1)} \end{aligned}$$

für $2 \leq s \leq \log_2 n$ und $1 \leq r \leq 2^{-s}n$. Sei

$$\begin{aligned} X_{r,s}^{(1)} &= X_{r,s}^+, X_{r,s}^{(v)} = X_{2r-1,2s}^{(v-1)} + X_{2r,2s-1}^{(v-1)}, \\ X_{r,s}^{(-1)} &= X_{r,s}^-, X_{r,s}^{(-v)} = X_{2r-1,2s}^{(-v+1)} + X_{2r,2s-1}^{(-v+1)}, \\ Y_{r,s}^{(1)} &= X_{r,s}^+, Y_{r,s}^{(v)} = Y_{2r-1,2r-1}^{(v-1)} + Y_{2r,2r}^{(v-1)}, \end{aligned}$$

dann gilt

$$[H_v^{(u-1)}, X_{r,s}^{(u)}] = \left[H_{2v-1}^{(u-2)} + H_{2v}^{(u-2)}, X_{2r-1,2s}^{(u-1)} + X_{2r,2s-1}^{(u-1)} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta_{2v-1,2r-1} - \delta_{2v-1,2s} + \delta_{2v,2r-1} - \delta_{2v,2s}) X_{2r-1,2s}^{(-u+1)} \\
&\quad + (\delta_{2v-1,2r} - \delta_{2v-1,2s-1} + \delta_{2v,2r} - \delta_{2v,2s-1}) X_{2r,2s-1}^{(-u+1)} \\
&= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s}) X_{2r-1,2s}^{(-u+1)} + (-\delta_{v,s} + \delta_{v,r}) X_{2r,2s-1}^{(-u+1)} \\
&= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s}) X_{r,s}^{(-u)}, \\
[H_v^{(u-1)}, X_{r,s}^{(-u)}] &= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s}) X_{r,s}^{(u)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
[X_{r,s}^{(w)}, X_{u,v}^{(-w)}] &= [X_{2r-1,2s}^{(w-1)} + X_{2r,2s-1}^{(w-1)}, X_{2u-1,2v}^{(-w+1)} + X_{2u,2v-1}^{(-w+1)}] \\
&= \delta_{r,u} Y_{2s,2v}^{(w-1)} - \delta_{s,v} Y_{2r-1,2u-1}^{(w-1)} + \delta_{s,u} Y_{2r,2v}^{(w-1)} - \delta_{r,v} Y_{2s-1,2u-1}^{(w-1)} \\
&\quad + \delta_{s,u} Y_{2r-1,2v-1}^{(w-1)} - \delta_{r,v} Y_{2s,2u}^{(w-1)} + \delta_{r,u} Y_{2s-1,2v-1}^{(w-1)} - \delta_{s,v} Y_{2r,2u}^{(w-1)} \\
&= \delta_{r,u} Y_{s,v}^{(w)} - \delta_{s,v} Y_{r,u}^{(w)} + \delta_{s,u} Y_{r,v}^{(w)} - \delta_{r,v} Y_{s,u}^{(w)}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
[H_r^{(-s)}, X_{2r,2r-1}^{(s)}] &= [H_{2r-1}^{(s-1)} - H_{2r}^{(s-1)}, X_{2r,2r-1}^{(s)}] \\
&= (\delta_{2r-1,2r} - \delta_{2r-1,2r-1} - \delta_{2r,2r} + \delta_{2r,2r-1}) X_{2r,2r-1}^{(-s)} \\
&= -2X_{2r,2r-1}^{(-s)}, \\
[H_r^{(-s)}, X_{2r,2r-1}^{(-s)}] &= [H_{2r-1}^{(s-1)} - H_{2r}^{(s-1)}, X_{2r,2r-1}^{(-s)}] = -2X_{2r,2r-1}^{(s)}, \\
[X_{2r,2r-1}^{(s)}, X_{2r,2r-1}^{(-s)}] &= Y_{2r-1,2r-1}^{(s)} - Y_{2r,2r}^{(s)} = 2H_r^{(-s)},
\end{aligned}$$

da $X_{r,r}^+ = 2H_{r,r}$ und $Y_{r,r}^{(s)} = Y_{2r-1,2r-1}^{(s-1)} + Y_{2r,2r}^{(s-1)} = 2H_{2r-1}^{(s-2)} + 2H_{2r}^{(s-2)} = 2H_r^{(s-1)}$ gilt. Also erzeugt $H_r^{(-s)}, X_{2r,2r-1}^{(\pm s)}$ eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$.

Nun ist noch zu zeigen, daß es Elemente gibt, die $H_r^{(-s)}$ und $X_{2r,2r-1}^{(\pm s)}$ zu einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ isomorphen Lie-Unteralgebra ergänzen. Für H_v und $X_{u,v}^\pm$ spielen diese Rolle geeignete Elemente Q_r und $R_{r,s}$. Durch eine rekursive Definition erhält man geeignete Elemente für $H_r^{(-s)}$ und $X_{2r,2r-1}^{(\pm s)}$. Mit Induktion folgt dann wieder, daß diese Elemente die Relationen einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ isomorphen Lie-Unteralgebra erfüllen.

Sei nun $Q_r = \begin{pmatrix} 0 & E_{r,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $R_{r,s} = \begin{pmatrix} 0 & E_{r,s} + E_{s,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$[H_v, Q_r] = \begin{pmatrix} 0 & 2\delta_{v,r} E_{r,r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\delta_{v,r} Q_r,$$

$$\begin{aligned}
[H_v, R_{r,s}] &= \begin{pmatrix} 0 & \delta_{v,r}E_{v,s} + \delta_{v,s}E_{v,r} + \delta_{s,v}E_{r,v} + \delta_{r,v}E_{s,v} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (\delta_{v,r} + \delta_{v,s})R_{r,s}, \\
[Q_v, Q_r] &= 0, [Q_v, R_{r,s}] = 0, [R_{u,v}, R_{r,s}] = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
[X_{u,v}^+, Q_r] &= \delta_{v,r}R_{u,r} + \delta_{u,r}R_{v,r} = (\delta_{v,r} + \delta_{u,r})R_{u,v}, \\
[X_{u,v}^-, Q_r] &= \delta_{v,r}R_{u,r} - \delta_{u,r}R_{v,r} = (\delta_{v,r} - \delta_{u,r})R_{u,v}, \\
[X_{u,v}^+, R_{r,s}] &= \delta_{v,r}R_{u,s} + \delta_{u,r}R_{v,s} + \delta_{v,s}R_{u,r} + \delta_{u,s}R_{v,r}, \\
[X_{u,v}^-, R_{r,s}] &= \delta_{v,r}R_{u,s} - \delta_{u,r}R_{v,s} + \delta_{v,s}R_{u,r} - \delta_{u,s}R_{v,r}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
[H_r^{(-1)}, Q_{2r-1}] &= [H_{2r-1} - H_{2r}, Q_{2r-1}] = 2(\delta_{2r-1,2r-1} - \delta_{2r,2r-1})Q_{2r-1} \\
&= 2Q_{2r-1}, \\
[H_r^{(-1)}, Q_{2r}] &= [H_{2r-1} - H_{2r}, Q_{2r}] = 2(\delta_{2r-1,2r} - \delta_{2r,2r})Q_{2r} = -2Q_{2r}, \\
[H_r^{(-1)}, R_{2r,2r-1}] &= [H_{2r-1} - H_{2r}, R_{2r,2r-1}] \\
&= (\delta_{2r-1,2r} + \delta_{2r-1,2r-1} - \delta_{2r,2r} - \delta_{2r,2r-1})R_{2r,2r-1} = 0, \\
[Q_{2r-1}, Q_{2r}] &= 0, [Q_{2r-1}, R_{2r,2r-1}] = 0, [Q_{2r}, R_{2r,2r-1}] = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
[X_{2r,2r-1}^+, Q_{2r-1}] &= (\delta_{2r-1,2r-1} + \delta_{2r,2r-1})R_{2r,2r-1} = R_{2r,2r-1}, \\
[X_{2r,2r-1}^+, Q_{2r}] &= (\delta_{2r-1,2r} + \delta_{2r,2r})R_{2r,2r-1} = R_{2r,2r-1}, \\
[X_{2r,2r-1}^-, Q_{2r-1}] &= (\delta_{2r-1,2r-1} - \delta_{2r,2r-1})R_{2r,2r-1} = R_{2r,2r-1}, \\
[X_{2r,2r-1}^-, Q_{2r}] &= (\delta_{2r-1,2r} - \delta_{2r,2r})R_{2r,2r-1} = -R_{2r,2r-1}, \\
[X_{2r,2r-1}^+, R_{2r,2r-1}] &= R_{2r-1,2r-1} + R_{2r,2r} = 2Q_{2r-1} + 2Q_{2r}, \\
[X_{2r,2r-1}^-, R_{2r,2r-1}] &= -R_{2r-1,2r-1} + R_{2r,2r} = -2Q_{2r-1} + 2Q_{2r}.
\end{aligned}$$

Dies liefert die definierenden Relationen einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ isomorphen Lie-Unteralgebra. Es wird gezeigt, daß auch für $H_r^{(-s)}$, $X_{2r,2r-1}^{(\pm s)}$ geeignete $Q_{2r-1}^{(s)}$, $Q_{2r}^{(s)}$ und $R_{2r,2r-1}^{(s)}$ existieren, die diese Relationen erfüllen.

Nun folgt die rekursive Definition der Elemente $Q_r^{(s)}$, $R_{r,s}^{(w)}$ und $S_{r,s}^{(w)}$, wobei $S_{r,s}^{(w)}$ nur zum Beweis nötig ist. Sei also

$$\begin{aligned}
Q_r^{(1)} &= Q_r, Q_r^{(s)} = Q_{2r-1}^{(s-1)} + Q_{2r}^{(s-1)}, \\
R_{r,s}^{(1)} &= R_{r,s}, R_{r,s}^{(w)} = R_{2r-1,2s}^{(w-1)} + R_{2r,2s-1}^{(w-1)}, \\
S_{r,s}^{(1)} &= R_{r,s}, S_{r,s}^{(w)} = S_{2r-1,2s-1}^{(w-1)} + S_{2r,2s}^{(w-1)},
\end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned}
[X_{u,v}^{(w)}, Q_r^{(w)}] &= [X_{2u-1,2v}^{(w-1)} + X_{2u,2v-1}^{(w-1)}, Q_{2r-1}^{(w-1)} + Q_{2r}^{(w-1)}] \\
&= (\delta_{v,r} + \delta_{u,r}) R_{2u-1,2v}^{(w-1)} + (\delta_{u,r} + \delta_{v,r}) R_{2u,2v-1}^{(w-1)} \\
&= (\delta_{v,r} + \delta_{u,r}) (R_{2u-1,2v}^{(w-1)} + R_{2u,2v-1}^{(w-1)}) = (\delta_{v,r} + \delta_{u,r}) R_{u,v}^{(w)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
[X_{u,v}^{(-w)}, Q_r^{(w)}] &= [X_{2u-1,2v}^{(-w+1)} + X_{2u,2v-1}^{(-w+1)}, Q_{2r-1}^{(w-1)} + Q_{2r}^{(w-1)}] \\
&= (-\delta_{u,r} + \delta_{v,r}) R_{2u-1,2v}^{(w-1)} + (\delta_{v,r} - \delta_{u,r}) R_{2u,2v-1}^{(w-1)} \\
&= (\delta_{v,r} - \delta_{u,r}) (R_{2u-1,2v}^{(w-1)} + R_{2u,2v-1}^{(w-1)}) = (\delta_{v,r} - \delta_{u,r}) R_{u,v}^{(w)}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
[X_{u,v}^{(w)}, R_{r,s}^{(w)}] &= [X_{2u-1,2v}^{(w-1)} + X_{2u,2v-1}^{(w-1)}, R_{2r-1,2s}^{(w-1)} + R_{2r,2s-1}^{(w-1)}] \\
&= \delta_{u,r} S_{2v,2s}^{(w-1)} + \delta_{v,s} S_{2u-1,2r-1}^{(w-1)} + \delta_{v,r} S_{2u-1,2s-1}^{(w-1)} + \delta_{u,s} S_{2v,2r}^{(w-1)} \\
&\quad + \delta_{v,r} S_{2u,2s}^{(w-1)} + \delta_{u,s} S_{2v-1,2r-1}^{(w-1)} + \delta_{u,r} S_{2v-1,2s-1}^{(w-1)} + \delta_{v,s} S_{2u,2r}^{(w-1)} \\
&= \delta_{u,r} (S_{2v,2s}^{(w-1)} + S_{2v-1,2s-1}^{(w-1)}) + \delta_{v,s} (S_{2u-1,2r-1}^{(w-1)} + S_{2u,2r}^{(w-1)}) \\
&\quad + \delta_{v,r} (S_{2u-1,2s-1}^{(w-1)} + S_{2u,2s}^{(w-1)}) + \delta_{u,s} (S_{2v,2r}^{(w-1)} + S_{2v-1,2r-1}^{(w-1)}) \\
&= \delta_{u,r} S_{v,s}^{(w)} + \delta_{v,s} S_{u,r}^{(w)} + \delta_{v,r} S_{u,s}^{(w)} + \delta_{u,s} S_{v,r}^{(w)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
[X_{u,v}^{(-w)}, R_{r,s}^{(w)}] &= [X_{2u-1,2v}^{(-w+1)} + X_{2u,2v-1}^{(-w+1)}, R_{2r-1,2s}^{(w-1)} + R_{2r,2s-1}^{(w-1)}] \\
&= -\delta_{u,r} S_{2v,2s}^{(w-1)} + \delta_{v,s} S_{2u-1,2r-1}^{(w-1)} + \delta_{v,r} S_{2u-1,2s-1}^{(w-1)} - \delta_{u,s} S_{2v,2r}^{(w-1)} \\
&\quad + \delta_{v,r} S_{2u,2s}^{(w-1)} - \delta_{u,s} S_{2v-1,2r-1}^{(w-1)} - \delta_{u,r} S_{2v-1,2s-1}^{(w-1)} + \delta_{v,s} S_{2u,2r}^{(w-1)} \\
&= -\delta_{u,r} (S_{2v,2s}^{(w-1)} + S_{2v-1,2s-1}^{(w-1)}) + \delta_{v,s} (S_{2u-1,2r-1}^{(w-1)} + S_{2u,2r}^{(w-1)}) \\
&\quad + \delta_{v,r} (S_{2u-1,2s-1}^{(w-1)} + S_{2u,2s}^{(w-1)}) - \delta_{u,s} (S_{2v,2r}^{(w-1)} + S_{2v-1,2r-1}^{(w-1)}) \\
&= -\delta_{u,r} S_{v,s}^{(w)} + \delta_{v,s} S_{u,r}^{(w)} + \delta_{v,r} S_{u,s}^{(w)} - \delta_{u,s} S_{v,r}^{(w)}.
\end{aligned}$$

Desweiteren ist

$$\begin{aligned}
[H_v^{(w-1)}, Q_r^{(w)}] &= [H_{2v-1}^{(w-2)} + H_{2v}^{(w-2)}, Q_{2r-1}^{(w-1)} + Q_{2r}^{(w-1)}] \\
&= 2\delta_{v,r} Q_{2r-1}^{(w-1)} + 2\delta_{v,r} Q_{2r}^{(w-1)} = 2\delta_{v,r} Q_r^{(w)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
[H_v^{(w-1)}, R_{r,s}^{(w)}] &= [H_{2v-1}^{(w-2)} + H_{2v}^{(w-2)}, R_{2r-1,2s}^{(w-1)} + R_{2r,2s-1}^{(w-1)}] \\
&= (\delta_{v,r} + \delta_{v,s}) R_{2r-1,2s}^{(w-1)} + (\delta_{v,s} + \delta_{v,r}) R_{2r,2s-1}^{(w-1)} \\
&= (\delta_{v,r} + \delta_{v,s}) R_{r,s}^{(w)}, \\
[Q_v^{(w)}, Q_r^{(w)}] &= 0, [Q_v^{(w)}, R_{r,s}^{(w)}] = 0, [R_{u,v}^{(w)}, R_{r,s}^{(w)}] = 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
[X_{2r,2r-1}^{(w)}, Q_{2r-1}^{(w)}] &= (\delta_{2r,2r-1} + \delta_{2r-1,2r-1}) R_{2r,2r-1}^{(w)} = R_{2r,2r-1}^{(w)}, \\
[X_{2r,2r-1}^{(w)}, Q_{2r}^{(w)}] &= (\delta_{2r,2r} + \delta_{2r-1,2r}) R_{2r,2r-1}^{(w)} = R_{2r,2r-1}^{(w)}, \\
[X_{2r,2r-1}^{(-w)}, Q_{2r-1}^{(w)}] &= (-\delta_{2r,2r-1} + \delta_{2r-1,2r-1}) R_{2r,2r-1}^{(w)} = R_{2r,2r-1}^{(w)}, \\
[X_{2r,2r-1}^{(-w)}, Q_{2r}^{(w)}] &= (-\delta_{2r,2r} + \delta_{2r-1,2r}) R_{2r,2r-1}^{(w)} = -R_{2r,2r-1}^{(w)}
\end{aligned}$$

und, da $S_{r,r}^{(w)} = S_{2r-1,2r-1}^{(w-1)} + S_{2r,2r}^{(w-1)} = 2Q_{2r-1}^{(w-1)} + 2Q_{2r}^{(w-1)} = 2Q_r^{(w)}$ gilt, ist

$$\begin{aligned}
[X_{2r,2r-1}^{(w)}, R_{2r,2r-1}^{(w)}] &= S_{2r-1,2r-1}^{(w)} + S_{2r,2r}^{(w)} = 2Q_{2r-1}^{(w)} + 2Q_{2r}^{(w)} = 2Q_r^{(w+1)}, \\
[X_{2r,2r-1}^{(-w)}, R_{2r,2r-1}^{(w)}] &= -S_{2r-1,2r-1}^{(w)} + S_{2r,2r}^{(w)} = -2Q_{2r-1}^{(w)} + 2Q_{2r}^{(w)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
[H_r^{(-w)}, Q_{2r-1}^{(w)}] &= [H_{2r-1}^{(w-1)} - H_{2r}^{(w-1)}, Q_{2r-1}^{(w)}] = 2Q_{2r-1}^{(w)}, \\
[H_r^{(-w)}, Q_{2r}^{(w)}] &= [H_{2r-1}^{(w-1)} - H_{2r}^{(w-1)}, Q_{2r}^{(w)}] = -2Q_{2r}^{(w)}, \\
[H_r^{(-w)}, R_{2r,2r-1}^{(w)}] &= [H_{2r-1}^{(w)} - H_{2r}^{(w)}, R_{2r,2r-1}^{(w)}] = 0.
\end{aligned}$$

Damit gilt folgendes.

2.4.4 Lemma. Für jedes w , $1 \leq w \leq \log_2 n$, und jedes r , $1 \leq r \leq 2^{-w}n$, ist $H_r^{(w)}, X_{2r,2r-1}^{(w)}, X_{2r,2r-1}^{(-w)}, Q_{2r-1}^{(w)}, Q_{2r}^{(w)}, R_{2r,2r-1}^{(w)}$ die Basis einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ isomorphen Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$.

Nun folgt die Bestimmung des Casimir- und des Laplace-Operators. Mit Induktion kann man zeigen, daß

$$\text{Spur } H_r^{(w)} H_s^{(w)} = 2^{w+1} \delta_{r,s},$$

$$\begin{aligned}
\text{Spur } H_r^{(-u)} H_s^{(u)} &= 0, \\
\text{Spur } H_r^{(-u)} H_s^{(-u)} &= 2^{u+1} \delta_{r,s}, \\
\text{Spur } X_{r,s}^{(w)} X_{u,v}^{(w)} &= 2^{w+1} \delta_{r,u} \delta_{s,v}, \\
\text{Spur } X_{r,s}^{(w)} X_{u,v}^{(-w)} &= 0, \\
\text{Spur } X_{r,s}^{(-w)} X_{u,v}^{(-w)} &= -2^{w+1} \delta_{r,u} \delta_{s,v}.
\end{aligned}$$

Denn

$$\begin{aligned}
\text{Spur } H_r^{(u)} H_s^{(u)} &= 2^u (\delta_{2r-1,2s-1} + \delta_{2r,2s}) = 2^{u+1} \delta_{r,s}, \\
\text{Spur } H_r^{(-u)} H_s^{(-u)} &= 2^u (\delta_{2r-1,2s-1} + \delta_{2r,2s}) = 2^{u+1} \delta_{r,s}, \\
\text{Spur } H_r^{(-u)} H_s^{(u)} &= 2^u (\delta_{2r-1,2s-1} - \delta_{2r,2s}) = 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\text{Spur } X_{r,s}^{(w)} X_{u,v}^{(w)} &= \text{Spur} \left(\left(X_{2r-1,2s}^{(w-1)} + X_{2r,2s-1}^{(w-1)} \right) \left(X_{2u-1,2v}^{(w-1)} + X_{2u,2v-1}^{(w-1)} \right) \right) \\
&= 2^w \delta_{r,u} \delta_{s,v} + 2^w \delta_{r,u} \delta_{s,v} = 2^{w+1} \delta_{r,u} \delta_{s,v}, \\
\text{Spur } X_{r,s}^{(w)} X_{u,v}^{(-w)} &= 0, \\
\text{Spur } X_{r,s}^{(-w)} X_{u,v}^{(-w)} &= \text{Spur} \left(\left(X_{2r-1,2s}^{(-w+1)} + X_{2r,2s-1}^{(-w+1)} \right) \left(X_{2u-1,2v}^{(-w+1)} + X_{2u,2v-1}^{(-w+1)} \right) \right) \\
&= -2^w \delta_{r,u} \delta_{s,v} - 2^w \delta_{r,u} \delta_{s,v} = -2^{w+1} \delta_{r,u} \delta_{s,v}
\end{aligned}$$

für $1 \leq s < r \leq 2^{-w}n$ und $1 \leq v < u \leq 2^{-w}n$. Damit gilt für den Casimir-Operator

$$C = \sum_{s=1}^l 2^{-s-1} \sum_{r=1}^{\lfloor 2^{-s}n \rfloor} (H_r^{(-s)})^2 + (X_{2r,2r-1}^{(s)})^2 - (X_{2r,2r-1}^{(-s)})^2 + R^+ - R^-$$

und für den Laplace-Operator gilt

$$\Delta = - \sum_{s=1}^l 2^{-s-1} \sum_{r=1}^{\lfloor 2^{-s}n \rfloor} (H_r^{(-s)})^2 + (X_{2r,2r-1}^{(s)})^2 + (X_{2r,2r-1}^{(-s)})^2 - R^+ - R^-$$

mit $l = \lfloor \log_2 n \rfloor$, wobei R^+ der Rest ist, den man beim Ergänzen von $H_r^{(s)}$ und $X_{2r,2r-1}^{(s)}$ für $1 \leq s \leq \log_2 n$ und $1 \leq r \leq 2^{-s}n$ zu einer orthogonalen Basis von p erhält, und R^- entsprechend der Rest, den man durch Ergänzen von $X_{2r,2r-1}^{(s)}$ für $1 \leq s \leq \log_2 n$ und $1 \leq r \leq 2^{-s}n$ zu einer orthogonalen Basis von k erhält.

Für $\Delta_r^{(s)} = -\left(H_r^{(s)}\right)^2 - \left(X_{2r,2r-1}^{(s)}\right)^2 - \left(X_{2r,2r-1}^{(-s)}\right)^2$ ist also $\left\langle d\pi\left(\Delta_r^{(s)}\right)\xi, \xi \right\rangle \geq \pi^{-1}(\sin(2\vartheta))^2/\vartheta$ und damit folgt

$$\left\langle d\pi(\Delta)\xi, \xi \right\rangle \geq \frac{(\sin(2\vartheta))^2}{\pi\vartheta} \sum_{s=1}^l 2^{-s-1} \lfloor 2^{-s}n \rfloor$$

für eine Darstellung ohne nichttriviale invariante Vektoren unter Verwendung von Satz 2.4.2.

Es ist $2^l \leq n \leq 2^{l+1} - 1$ und damit $n = \sum_{r=0}^l q_r 2^r$ mit $q_r \in \{0, 1\}$. Es gilt $\lfloor 2^{-s}n \rfloor = \left\lfloor \sum_{r=0}^l q_r 2^{r-s} \right\rfloor = \sum_{r=s}^l q_r 2^{r-s}$ und somit ist

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^l 2^{-s} \lfloor 2^{-s}n \rfloor &= \sum_{s=1}^l \sum_{r=s}^l q_r 2^{r-2s} = \sum_{r=1}^l q_r \sum_{s=1}^r 2^{r-2s} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{r=1}^l q_r (-2^{-r} + 2^r) = \frac{1}{3} \sum_{r=0}^l q_r (-2^{-r} + 2^r) \\ &= \frac{1}{3} \left(n - \sum_{r=0}^l q_r 2^{-r} \right) \geq \frac{1}{3} (n - 2 + 2^{-l}) \\ &\geq \frac{1}{3} \left(n - 2 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3} \frac{(n-1)^2}{n}. \end{aligned}$$

Durch eine Fallunterscheidung läßt sich diese Abschätzung noch etwas verbessern.

Für $n = 2^{l+1} - 1 = \sum_{r=0}^l 2^r$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^l 2^{-s} \lfloor 2^{-s}n \rfloor &= \frac{1}{3} \left(n - \sum_{r=0}^l 2^{-r} \right) = \frac{1}{3} (n - 2 + 2^{-l}) \\ &= \frac{1}{3} \left(n - 2 + \frac{2}{n+1} \right) = \frac{1}{3} n \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Für $2^l \leq n \leq 2^{l+1} - 2$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^l q_r 2^{-r} &= 2^{-l} + \sum_{r=0}^{l-1} q_r 2^{-r} \leq 2^{-l} + \sum_{r=0}^{l-2} 2^{-r} = 2^{-l} + 2 - 2^{-l+2} = 2 - \frac{3}{2^l} \\ &\leq 2 - \frac{3}{n} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^l 2^{-s} \lfloor 2^{-s} n \rfloor &= \frac{1}{3} \left(n - \sum_{r=1}^l q_r 2^{-r} \right) \geq \frac{1}{3} \left(n - 2 + \frac{3}{n} \right) \\ &> \frac{1}{3} \left(n - 2 + \frac{2}{n+1} \right) = \frac{1}{3} n \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Also erhält man folgendes.

2.4.5 Satz. Für jede Darstellung π von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, $n \geq 2$, ohne nichttriviale invariante Vektoren und alle glatten $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R}) \cap \mathrm{SO}(2n)$ -endlichen Einheitsvektoren ist

$$\begin{aligned} \langle d\pi(\Delta) \xi, \xi \rangle &\geq \frac{1}{3} \sup_{0 < \vartheta < \pi/2} \frac{(\sin(2\vartheta))^2}{\pi\vartheta} (n-1) \frac{n}{n+1} \\ &> 0,15376 (n-1) \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt $(3\pi)^{-1} (\sin(2\vartheta))^2 / \vartheta \approx 0,153767$ für $\vartheta \approx 0,582781$, wo die Funktion näherungsweise ihr Maximum annimmt. \square

Hier erfolgte die Normalisierung des Casimir- und damit auch des Laplace-Operators bezüglich der Spurform. Bezüglich der Killing-Form hätte der Laplace-Operator die Gestalt $\Delta' = (2(n+1))^{-1} \Delta$ und damit wäre

$$\langle d\pi(\Delta') \xi, \xi \rangle \geq \frac{1}{3} \sup_{0 < \vartheta < \pi/2} \frac{(\sin(2\vartheta))^2}{\pi\vartheta} \frac{(n-1)n}{2(n+1)^2}.$$

2.5 Kazhdan-Konstanten der speziellen linearen Gruppen mit höherem Rang

Dieser Abschnitt behandelt die Übertragung des Resultats für die Kazhdan-Konstante der Gruppe $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ von M. B. Bekka und M. Mayer aus [4] auf die Gruppen $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ für $n \geq 4$. Dabei ist zu bemerken, daß die Basis der Lie-Algebra in [4] nicht wie dort angegeben orthogonal ist. Dies halbiert folglich die untere Schranke dort, da man nur eine Kopie einer zu

$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Lie-Unteralgebra zur Verfügung hat und nicht zwei. Hier wird nun allgemein eine geeignete orthogonale Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ bestimmt. Jeweils drei geeignete Elemente spannen eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebra auf. Die Vorgehensweise ist analog zu der im vorigen Abschnitt. Da auch $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ eine einfache Lie-Algebra ist, ist es möglich statt mit der Killing-Form wieder mit der Spurform zu rechnen, da sich beide nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Danach folgt ausgehend von einer Basis von $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ die rekursive Definition neuer Basis-elemente, die zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebren aufspannen und in einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Lie-Unteralgebra enthalten sind. Der Beweis benutzt wieder Induktion. Vor der Bestimmung der Basis der Lie-Algebra wird noch folgendes gezeigt, das die Übertragung des Ergebnisses von M. B. Bekka und M. Mayer aus [4] erlaubt. Dies ist analog zu Satz 2.4.2 im Fall $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$.

2.5.1 Satz. Sei π eine Darstellung von $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$, $n \geq 3$, ohne nichttriviale invariante Vektoren. Sei P eine abgeschlossene zu $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphe Untergruppe, dann besitzt die Einschränkung von π auf die zu \mathbf{R}^2 isomorphe Untergruppe von P keine nichttrivialen invarianten Vektoren.

Beweis. Die Matrixkoeffizienten von π verschwinden bei ∞ . Für einen elementaren Beweis hierzu siehe [27, Seite 212]. Also verschwinden auch die Matrixkoeffizienten von π eingeschränkt auf die zu \mathbf{R}^2 isomorphe Untergruppe von P bei ∞ . Damit besitzt auch die Einschränkung von π auf \mathbf{R}^2 keinen nichttrivialen invarianten Vektor. \square

Nun zu den Berechnungen für die Basis der Lie-Algebra von $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$. Sei $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) : \mathrm{Spur} X = 0\}$, $p = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) : X = X^{\mathrm{tr}}\}$, $k = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) : X = -X^{\mathrm{tr}}\}$, $E_{r,s} = (\delta_{r,u}\delta_{s,v})_{u,v=1,\dots,n}$ und $H_r = E_{r,r} - \frac{1}{n}I$ für $r = 1, \dots, n$, dann ist $E_{r,s}$ mit $1 \leq r, s \leq n$, $r \neq s$ und H_r mit $1 \leq r \leq n-1$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$. Sei $X_{r,s}^+ = E_{r,s} + E_{s,r}$ und $X_{r,s}^- = E_{r,s} - E_{s,r}$ für $1 \leq s, r \leq n$, dann erhält man durch $X_{r,s}^+$ mit $1 \leq s < r \leq n$ und H_r mit $1 \leq r \leq n-1$ eine Basis von p und durch $X_{r,s}^-$ mit $1 \leq s < r \leq n$ erhält man eine Basis von k .

Es gilt

$$[H_v, E_{r,s}] = [E_{v,v}, E_{r,s}] = \delta_{v,r}E_{v,s} - \delta_{s,v}E_{r,v} = (\delta_{v,r} - \delta_{s,v})E_{r,s}$$

und

$$\begin{aligned} X_{r,s}^+ X_{u,v}^+ &= \delta_{s,u} E_{r,v} + \delta_{r,u} E_{s,v} + \delta_{s,v} E_{r,u} + \delta_{r,v} E_{s,u}, \\ X_{r,s}^+ X_{u,v}^- &= \delta_{s,u} E_{r,v} + \delta_{r,u} E_{s,v} - \delta_{s,v} E_{r,u} - \delta_{r,v} E_{s,u}, \\ X_{r,s}^- X_{u,v}^- &= \delta_{s,u} E_{r,v} - \delta_{r,u} E_{s,v} - \delta_{s,v} E_{r,u} + \delta_{r,v} E_{s,u} \end{aligned}$$

für $1 \leq r, s \leq n$ und $1 \leq u, v \leq n$. Also ist $\text{Spur } X_{r,s}^+ X_{u,v}^+ = 2(\delta_{r,u} \delta_{s,v})$, $\text{Spur } X_{r,s}^+ X_{u,v}^- = 0$, $\text{Spur } X_{r,s}^- X_{u,v}^- = -2(\delta_{r,u} \delta_{s,v})$ für $1 \leq s < r \leq n$ und $1 \leq v < u \leq n$. Da $\text{Spur } E_{r,s} = 0$ ist für $1 \leq s < r \leq n$, ist $\text{Spur } H_r X_{u,v}^\pm = 0$ für $1 \leq r \leq n-1$ und $1 \leq v < u \leq n$. Es ist

$$\text{Spur } H_r H_s = \text{Spur} \left(\delta_{r,s} E_{r,s} - \frac{1}{n} E_{r,r} - \frac{1}{n} E_{s,s} + \frac{1}{n^2} E \right) = \delta_{r,s} - \frac{1}{n}.$$

Für die Killing-Form κ erhält man

$$\begin{aligned} \kappa(H_v, H_v) &= \text{Spur}(\text{ad } H_v \text{ ad } H_v) = \sum_{r \neq s} (\delta_{v,r} - \delta_{s,v})^2 \\ &= \sum_{r \neq s} \delta_{v,r} - 2\delta_{s,v} \delta_{v,r} + \delta_{s,v} = 2(n-1) \end{aligned}$$

und, da $\text{Spur } H_v^2 = 1 - n^{-1} = (2n)^{-1} \kappa(H_v, H_v)$ ist, folgt $\text{Spur } XY = (2n)^{-1} \kappa(X, Y)$, da $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ eine einfache Lie-Algebra ist. Für einen Beweis siehe z. B. [28, Seite 118]. Sei $H_r^{(-1)} = H_{2r-1} - H_{2r}$ und $H_r^{(1)} = H_{2r-1} + H_{2r}$ für $1 \leq r \leq n/2$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Spur } H_r^{(-1)} H_s^{(-1)} &= \text{Spur} (H_{2r-1} H_{2s-1} - H_{2r-1} H_{2s} - H_{2r} H_{2s-1} + H_{2r} H_{2s}) \\ &= 2 \left(\delta_{r,s} - \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{n} = 2\delta_{r,s}, \end{aligned}$$

$$\text{Spur } H_r^{(-1)} H_s^{(1)} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Spur } H_r^{(1)} H_s^{(1)} &= \text{Spur} (H_{2r-1} H_{2r-1} + H_{2r-1} H_{2r} + H_{2r} H_{2r-1} + H_{2r} H_{2r}) \\ &= 2 \left(\delta_{r,s} - \frac{1}{n} \right) - \frac{2}{n} = 2\delta_{r,s} - \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

Ergänzt man nun die $H_r^{(-1)}$ mit $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$ und $X_{r,s}^+$ mit $1 \leq s < r \leq n$ zu einer orthogonalen Basis von \mathfrak{p} , so erhält man den Casimir-Operator

$$C = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (H_r^{(-1)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{r=s+1}^n (X_{r,s}^+)^2 - (X_{r,s}^-)^2 + R$$

und den Laplace-Operator

$$\Delta = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (H_r^{(-1)})^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^n \sum_{r=s+1}^n (X_{r,s}^+)^2 + (X_{r,s}^-)^2 \right) - R,$$

wobei R den Rest der orthogonalen Basis enthält. Sei $\Delta_r = -\left(H_r^{(-1)}\right)^2 - \left(X_{2r,2r-1}^+\right)^2 - \left(X_{2r,2r-1}^-\right)^2$ für $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$, dann gilt $\langle d\pi(\Delta_r)\xi, \xi \rangle \geq \frac{(\sin \vartheta)^2}{\pi \vartheta}$ nach [4] für jeden $\text{SO}(n)$ -endlichen Einheitsvektor ξ und eine Darstellung π ohne nichttriviale invariante Vektoren. Denn für $n \geq 4$ ist die zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebra mit der Basis $H_r^{(-1)}, X_{2r,2r-1}^\pm$ immer in einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Lie-Unteralgebra enthalten. Nach Satz 2.5.1 besitzt die Darstellung eingeschränkt auf die zugehörige zu $\text{SL}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphe Untergruppe ebenfalls keine nichttrivialen unter \mathbf{R}^2 invarianten Vektoren. Daß die von $H_r^{(-1)}, X_{2r,2r-1}^\pm$ erzeugte Lie-Unteralgebra wirklich in einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Lie-Unteralgebra enthalten ist, wird dann bei der Bestimmung einer etwas besseren Schranke gezeigt. Damit gilt folgendes.

2.5.2 Satz. Für $n \geq 3$, jede Darstellung π von $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ ohne nichttriviale invariante Vektoren und alle glatten $\text{SO}(n)$ -endlichen Einheitsvektoren ξ gilt

$$\begin{aligned} \langle d\pi(\Delta)\xi, \xi \rangle &\geq \frac{1}{2} \sup_{0 < \vartheta < \pi} \frac{(\sin \vartheta)^2}{\pi \vartheta} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \sup_{0 < \vartheta < \pi} \frac{(\sin \vartheta)^2}{\pi \vartheta} \frac{n-1}{4} \\ &> 0,057662(n-1). \end{aligned}$$

Beweis. Für $\vartheta \approx 1,16556$ gilt $\frac{(\sin \vartheta)^2}{4\pi \vartheta} \approx 0,0576627 > 0,057662$. Dort liegt annähernd das Maximum dieser Funktion. \square

Das folgende zeigt einen Weg, wie sich diese Schranke noch verschärfen läßt. Dazu werden rekursiv die Basiselemente definiert und es wird gezeigt, daß jeweils drei geeignete dieser eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ aufspannen und in einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ enthalten sind. Für $s \geq 2$ sei

$$\begin{aligned} H_r^{(s)} &= H_{2r-1}^{(s-1)} + H_{2r}^{(s-1)}, \\ H_r^{(-s)} &= H_{2r-1}^{(s-1)} - H_{2r}^{(s-1)} \end{aligned}$$

für $1 \leq r \leq 2^{-s}n$, dann gilt

$$\begin{aligned}
& \text{Spur } H_r^{(v)} H_s^{(v)} \\
&= \text{Spur} \left(H_{2r-1}^{(v-1)} H_{2s-1}^{(v-1)} + H_{2r-1}^{(v-1)} H_{2s}^{(v-1)} + H_{2r}^{(v-1)} H_{2s-1}^{(v-1)} + H_{2r}^{(v-1)} H_{2s}^{(v-1)} \right) \\
&= 2 \left(2^{v-1} \delta_{r,s} - \frac{4^{v-1}}{n} \right) - 2 \frac{4^{v-1}}{n} = 2^v \delta_{r,s} - \frac{4^v}{n}, \\
& \text{Spur } H_r^{(-v)} H_s^{(-v)} \\
&= \text{Spur} \left(H_{2r-1}^{(v-1)} H_{2s-1}^{(v-1)} - H_{2r-1}^{(v-1)} H_{2s}^{(v-1)} - H_{2r}^{(v-1)} H_{2s-1}^{(v-1)} + H_{2r}^{(v-1)} H_{2s}^{(v-1)} \right) \\
&= 2 \left(2^{v-1} \delta_{r,s} - \frac{4^{v-1}}{n} \right) + 2 \frac{4^{v-1}}{n} = 2^v \delta_{r,s}, \\
& \text{Spur } H_r^{(-v)} H_s^{(v)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned}
X_{r,s}^{(1)} &= X_{r,s}^+, X_{r,s}^{(w)} = X_{2r-1,2s}^{(w-1)} + X_{2r,2s-1}^{(w-1)}, \\
X_{r,s}^{(-1)} &= X_{r,s}^-, X_{r,s}^{(-w)} = X_{2r-1,2s}^{(-w+1)} + X_{2r,2s-1}^{(-w+1)}
\end{aligned}$$

für $w \geq 2$ und $1 \leq s < r \leq 2^{-w+1}n$, dann gilt $\text{Spur } X_{r,s}^{(w)} X_{u,v}^{(w)} = 2^w \delta_{r,u} \delta_{s,v}$ und $\text{Spur } X_{r,s}^{(-w)} X_{u,v}^{(-w)} = -2^w \delta_{r,u} \delta_{s,v}$, da

$$\begin{aligned}
\text{Spur } X_{r,s}^{(w)} X_{u,v}^{(w)} &= \text{Spur} \left(\left(X_{2r-1,2s}^{(w-1)} + X_{2r,2s-1}^{(w-1)} \right) \left(X_{2u-1,2v}^{(w-1)} + X_{2u,2v-1}^{(w-1)} \right) \right) \\
&= 2^{w-1} \delta_{r,u} \delta_{s,v} + 2^{w-1} \delta_{r,u} \delta_{s,v} = 2^w \delta_{r,u} \delta_{s,v}, \\
\text{Spur } X_{r,s}^{(-w)} X_{u,v}^{(-w)} &= \text{Spur} \left(\left(X_{2r-1,2s}^{(-w+1)} + X_{2r,2s-1}^{(-w+1)} \right) \left(X_{2u-1,2v}^{(-w+1)} + X_{2u,2v-1}^{(-w+1)} \right) \right) \\
&= -2^{w-1} \delta_{r,u} \delta_{s,v} - 2^{w-1} \delta_{r,u} \delta_{s,v} = -2^w \delta_{r,u} \delta_{s,v}
\end{aligned}$$

ist. Da

$$\begin{aligned}
[H_v, X_{r,s}^+] &= [E_{v,v}, E_{r,s} + E_{s,r}] = \delta_{v,r} E_{v,s} - \delta_{s,v} E_{r,v} + \delta_{v,s} E_{v,r} - \delta_{r,v} E_{s,v} \\
&= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s}) X_{r,s}^-, \\
[H_v, X_{r,s}^-] &= [E_{v,v}, E_{r,s} - E_{s,r}] = \delta_{v,r} E_{v,s} - \delta_{s,v} E_{r,v} - \delta_{v,s} E_{v,r} + \delta_{r,v} E_{s,v} \\
&= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s}) X_{r,s}^+
\end{aligned}$$

gilt, ist mit Induktion

$$\begin{aligned}
[H_v^{(u-1)}, X_{r,s}^{(u)}] &= \left[H_{2v-1}^{(u-2)} + H_{2v}^{(u-2)}, X_{2r-1,2s}^{(u-1)} + X_{2r,2s-1}^{(u-1)} \right] \\
&= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s}) X_{2r-1,2s}^{(-u+1)} + (-\delta_{v,s} + \delta_{v,r}) X_{2r,2s-1}^{(-u+1)} \\
&= (\delta_{v,r} - \delta_{v,s}) X_{r,s}^{(-u)}
\end{aligned}$$

und analog $[H_v^{(u-1)}, X_{r,s}^{(-u)}] = (\delta_{v,r} - \delta_{v,s}) X_{r,s}^{(u)}$. Also ist

$$[H_r^{(-s)}, X_{2r,2r-1}^{(s)}] = [H_{2r-1}^{(s-1)} - H_{2r}^{(s-1)}, X_{2r,2r-1}^{(s)}] = -2X_{2r,2r-1}^{(-s)}$$

und

$$[H_r^{(-s)}, X_{2r,2r-1}^{(-s)}] = -2X_{2r,2r-1}^{(s)}.$$

Da

$$\begin{aligned} [X_{r,s}^+, X_{u,v}^-] &= [E_{r,s} + E_{s,r}, E_{u,v} - E_{v,u}] \\ &= \delta_{s,u} E_{r,v} + \delta_{r,u} E_{s,v} - \delta_{s,v} E_{r,u} - \delta_{r,v} E_{s,u} \\ &\quad - \delta_{v,r} E_{u,s} - \delta_{v,s} E_{u,r} + \delta_{u,r} E_{v,s} + \delta_{u,s} E_{v,r} \\ &= \delta_{s,u} (E_{r,v} + E_{v,r}) + \delta_{r,u} (E_{s,v} + E_{v,s}) \\ &\quad - \delta_{s,v} (E_{r,u} + E_{u,r}) - \delta_{r,v} (E_{s,u} + E_{u,s}) \\ &= \delta_{s,u} X_{r,v}^+ + \delta_{r,u} X_{s,v}^+ - \delta_{s,v} X_{r,u}^+ - \delta_{r,v} X_{s,u}^+, \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} [X_{r,s}^+, X_{r,s}^-] &= \delta_{s,r} X_{r,s}^+ + \delta_{r,r} X_{s,s}^+ - \delta_{s,s} X_{r,r}^+ - \delta_{r,s} X_{s,r}^+ = X_{s,s}^+ - X_{r,r}^+ \\ &= 2(H_s - H_r). \end{aligned}$$

Sei $Y_{r,s}^{(1)} = X_{r,s}^+$ und $Y_{r,s}^{(w)} = Y_{2r-1,2s-1}^{(w-1)} + Y_{2r,2s}^{(w-1)}$, dann ist

$$\begin{aligned} &[X_{r,s}^{(w)}, X_{u,v}^{(-w)}] \\ &= [X_{2r-1,2s}^{(w-1)} + X_{2r,2s-1}^{(w-1)}, X_{2u-1,2v}^{(-w+1)} + X_{2u,2v-1}^{(-w+1)}] \\ &= \delta_{r,u} Y_{2s,2v}^{(w-1)} - \delta_{s,v} Y_{2r-1,2u-1}^{(w-1)} + \delta_{s,u} Y_{2r,2v}^{(w-1)} - \delta_{r,v} Y_{2s-1,2u-1}^{(w-1)} \\ &\quad + \delta_{s,u} Y_{2r-1,2v-1}^{(w-1)} - \delta_{r,v} Y_{2s,2u}^{(w-1)} + \delta_{r,u} Y_{2s-1,2v-1}^{(w-1)} - \delta_{s,v} Y_{2r,2u}^{(w-1)} \\ &= \delta_{r,u} (Y_{2s,2v}^{(w-1)} + Y_{2s-1,2v-1}^{(w-1)}) - \delta_{s,v} (Y_{2r-1,2u-1}^{(w-1)} + Y_{2r,2u}^{(w-1)}) \\ &\quad + \delta_{s,u} (Y_{2r,2v}^{(w-1)} + Y_{2r-1,2v-1}^{(w-1)}) - \delta_{r,v} (Y_{2s-1,2u-1}^{(w-1)} + Y_{2s,2u}^{(w-1)}) \\ &= \delta_{r,u} Y_{s,v}^{(w)} - \delta_{s,v} Y_{r,u}^{(w)} + \delta_{s,u} Y_{r,v}^{(w)} - \delta_{r,v} Y_{s,u}^{(w)} \end{aligned}$$

und, da

$$\begin{aligned} Y_{r,r}^{(v)} - Y_{s,s}^{(v)} &= Y_{2r-1,2r-1}^{(v-1)} + Y_{2r,2r}^{(v-1)} - Y_{2s-1,2s-1}^{(v-1)} - Y_{2s,2s}^{(v-1)} \\ &= 2 \left(H_{2r-1}^{(v-2)} + H_{2r}^{(v-2)} - H_{2s-1}^{(v-2)} - H_{2s}^{(v-2)} \right) \\ &= 2 \left(H_r^{(v-1)} - H_s^{(v-1)} \right) \end{aligned}$$

gilt, ist

$$\left[X_{2r,2r-1}^{(s)}, X_{2r,2r-1}^{(-s)} \right] = Y_{2r-1,2r-1}^{(s)} - Y_{2r,2r}^{(s)} = 2 \left(H_{2r-1}^{(s-1)} - H_{2r}^{(s-1)} \right) = 2H_r^{(-s)}.$$

Die Elemente $H_r^{(-s)}$, $X_{2r,2r-1}^{(\pm s)}$ bilden damit die Basis einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphen Lie-Unteralgebra.

Das folgende zeigt nun, daß fast jede solche Basis bestehend aus diesen drei Elementen in einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Lie-Algebra enthalten ist. Zuerst werden die definierenden Relationen bestimmt. Danach werden rekursiv die entsprechenden Elemente definiert, die zur Ergänzung nötig sind. Mit Induktion folgt, daß diese die definierenden Relationen erfüllen.

Es ist $H_r^{(-1)}$, $X_{2r,2r-1}^+$, $X_{2r,2r-1}^-$, $E_{2r-1,2r+1}$, $E_{2r,2r+1}$ die Basis einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Lie-Algebra, denn es gilt

$$\begin{aligned} [H_r^{(-1)}, E_{2r-1,2r+1}] &= [H_{2r-1} - H_{2r}, E_{2r-1,2r+1}] = E_{2r-1,2r+1}, \\ [H_r^{(-1)}, E_{2r,2r+1}] &= [H_{2r-1} - H_{2r}, E_{2r,2r+1}] = -E_{2r,2r+1}, \\ [E_{2r-1,2r+1}, E_{2r,2r+1}] &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [H_v, E_{r,s}] &= (\delta_{v,r} - \delta_{s,v}) E_{r,s}, \\ [X_{r,s}^+, E_{u,v}] &= [E_{r,s} + E_{s,r}, E_{u,v}] = \delta_{s,u} E_{r,v} - \delta_{v,r} E_{u,s} + \delta_{r,u} E_{s,v} - \delta_{v,s} E_{u,r}, \\ [X_{r,s}^-, E_{u,v}] &= [E_{r,s} - E_{s,r}, E_{u,v}] = \delta_{s,u} E_{r,v} - \delta_{v,r} E_{u,s} - \delta_{r,u} E_{s,v} + \delta_{v,s} E_{u,r}, \\ [E_{r,s}, E_{u,v}] &= \delta_{s,u} E_{r,v} - \delta_{v,r} E_{u,s}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} [X_{2r,2r-1}^+, E_{2r-1,2r+1}] &= E_{2r,2r+1}, \\ [X_{2r,2r-1}^-, E_{2r-1,2r+1}] &= E_{2r,2r+1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [X_{2r,2r-1}^+, E_{2r,2r+1}] &= E_{2r-1,2r+1}, \\ [X_{2r,2r-1}^-, E_{2r,2r+1}] &= -E_{2r-1,2r+1}. \end{aligned}$$

Nun folgen die rekursiven Definitionen und der Beweis, daß die entsprechenden Elemente die definierenden Relationen einer zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Lie-Algebra erfüllen. Sei also

$$\begin{aligned} Q_{r,s}^{(1)} &= E_{r,s}, Q_{r,s}^{(v)} = Q_{2r-1,2s-1}^{(v-1)} + Q_{2r,2s-1}^{(v-1)}, \\ R_{r,s}^{(1)} &= E_{r,s}, R_{r,s}^{(v)} = R_{2r-1,2s}^{(v-1)} + R_{2r,2s}^{(v-1)}, \end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned}
[H_u^{(v-1)}, Q_{r,s}^{(v)}] &= \left[H_{2u-1}^{(v-2)} + H_{2u}^{(v-2)}, Q_{2r-1,2s-1}^{(v-1)} + Q_{2r,2s-1}^{(v-1)} \right] \\
&= (\delta_{u,r} - \delta_{s,u}) Q_{2r-1,2s-1}^{(v-1)} + (-\delta_{s,u} + \delta_{u,r}) Q_{2r,2s-1}^{(v-1)} \\
&= (\delta_{u,r} - \delta_{s,u}) Q_{r,s}^{(v)}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
[X_{r,s}^{(w)}, Q_{u,v}^{(w)}] &= \left[X_{2r-1,2s}^{(w-1)} + X_{2r,2s-1}^{(w-1)}, Q_{2u-1,2v-1}^{(w-1)} + Q_{2u,2v-1}^{(w-1)} \right] \\
&= -\delta_{v,r} R_{2u-1,2s}^{(w-1)} + \delta_{r,u} Q_{2s,2v-1}^{(w-1)} + \delta_{s,u} Q_{2r,2v-1}^{(w-1)} - \delta_{v,s} R_{2u-1,2r}^{(w-1)} \\
&\quad - \delta_{v,r} R_{2u,2s}^{(w-1)} + \delta_{s,u} Q_{2r-1,2v-1}^{(w-1)} + \delta_{r,u} Q_{2s-1,2v-1}^{(w-1)} - \delta_{v,s} R_{2u,2r}^{(w-1)} \\
&= -\delta_{v,r} \left(R_{2u-1,2s}^{(w-1)} + R_{2u,2s}^{(w-1)} \right) + \delta_{r,u} \left(Q_{2s,2v-1}^{(w-1)} + Q_{2s-1,2v-1}^{(w-1)} \right) \\
&\quad + \delta_{s,u} \left(Q_{2r,2v-1}^{(w-1)} + Q_{2r-1,2v-1}^{(w-1)} \right) - \delta_{v,s} \left(R_{2u-1,2r}^{(w-1)} + R_{2u,2r}^{(w-1)} \right) \\
&= -\delta_{v,r} R_{u,s}^{(w)} + \delta_{r,u} Q_{s,v}^{(w)} + \delta_{s,u} Q_{r,v}^{(w)} - \delta_{v,s} R_{u,r}^{(w)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&[X_{r,s}^{(-w)}, Q_{u,v}^{(w)}] \\
&= \left[X_{2r-1,2s}^{(-w+1)} + X_{2r,2s-1}^{(-w+1)}, Q_{2u-1,2v-1}^{(w-1)} + Q_{2u,2v-1}^{(w-1)} \right] \\
&= -\delta_{v,r} R_{2u-1,2s}^{(w-1)} - \delta_{r,u} Q_{2s,2v-1}^{(w-1)} + \delta_{s,u} Q_{2r,2v-1}^{(w-1)} + \delta_{v,s} R_{2u-1,2r}^{(w-1)} \\
&\quad - \delta_{v,r} R_{2u,2s}^{(w-1)} + \delta_{s,u} Q_{2r-1,2v-1}^{(w-1)} - \delta_{r,u} Q_{2s-1,2v-1}^{(w-1)} + \delta_{v,s} R_{2u,2r}^{(w-1)} \\
&= -\delta_{v,r} \left(R_{2u-1,2s}^{(w-1)} + R_{2u,2s}^{(w-1)} \right) - \delta_{r,u} \left(Q_{2s,2v-1}^{(w-1)} + Q_{2s-1,2v-1}^{(w-1)} \right) \\
&\quad + \delta_{s,u} \left(Q_{2r,2v-1}^{(w-1)} + Q_{2r-1,2v-1}^{(w-1)} \right) + \delta_{v,s} \left(R_{2u-1,2r}^{(w-1)} + R_{2u,2r}^{(w-1)} \right) \\
&= -\delta_{v,r} R_{u,s}^{(w)} - \delta_{r,u} Q_{s,v}^{(w)} + \delta_{s,u} Q_{r,v}^{(w)} + \delta_{v,s} R_{u,r}^{(w)}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
[Q_{r,s}^{(w)}, Q_{u,v}^{(w)}] &= \left[Q_{2r-1,2s-1}^{(w-1)} + Q_{2r,2s-1}^{(w-1)}, Q_{2u-1,2v-1}^{(w-1)} + Q_{2u,2v-1}^{(w-1)} \right] \\
&= \delta_{s,u} Q_{2r-1,2v-1}^{(w-1)} - \delta_{v,r} Q_{2u-1,2s-1}^{(w-1)} + \delta_{s,u} Q_{2r,2v-1}^{(w-1)} - \delta_{v,r} Q_{2u,2s-1}^{(w-1)} \\
&= \delta_{s,u} \left(Q_{2r-1,2v-1}^{(w-1)} + Q_{2r,2v-1}^{(w-1)} \right) - \delta_{v,r} \left(Q_{2u-1,2s-1}^{(w-1)} + Q_{2u,2s-1}^{(w-1)} \right) \\
&= \delta_{s,u} Q_{r,v}^{(w)} - \delta_{v,r} Q_{u,s}^{(w)}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\left[H_r^{(-s)}, Q_{2r-1,2r+1}^{(s)} \right] = \left[H_{2r-1}^{(s-1)} - H_{2r}^{(s-1)}, Q_{2r-1,2r+1}^{(s)} \right] = Q_{2r-1,2r+1}^{(s)}$$

und

$$\left[H_r^{(-s)}, Q_{2r,2r+1}^{(s)} \right] = \left[H_{2r-1}^{(s-1)} - H_{2r}^{(s-1)}, Q_{2r,2r+1}^{(s)} \right] = -Q_{2r,2r+1}^{(s)}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \left[X_{2r,2r-1}^{(s)}, Q_{2r-1,2r+1}^{(s)} \right] &= Q_{2r,2r+1}^{(s)}, \\ \left[X_{2r,2r-1}^{(s)}, Q_{2r,2r+1}^{(s)} \right] &= Q_{2r-1,2r+1}^{(s)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left[X_{2r,2r-1}^{(-s)}, Q_{2r-1,2r+1}^{(s)} \right] &= Q_{2r,2r+1}^{(s)}, \\ \left[X_{2r,2r-1}^{(-s)}, Q_{2r,2r+1}^{(s)} \right] &= -Q_{2r-1,2r+1}^{(s)}. \end{aligned}$$

Es gilt $\left[Q_{2r-1,2r+1}^{(s)}, Q_{2r,2r+1}^{(s)} \right] = 0$. Damit spannen $H_r^{(-s)}$, $X_{2r,2r-1}^{(s)}$, $X_{2r,2r-1}^{(-s)}$, $Q_{2r-1,2r+1}^{(s)}$, $Q_{2r,2r+1}^{(s)}$ eine zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphe Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ auf für $1 \leq s \leq \log_2(n-1)$, $1 \leq r < 2^{-s}n$. Für $r = 2^{-s}n$ kann man analog zeigen, daß auch $H_r^{(-s)}$, $X_{2r,2r-1}^{(\pm s)}$, $R_{2r-1,2r-1}$, $R_{2r,2r-1}$ eine solche Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ aufspannen. Für $n = 5$ erhält man beispielsweise folgende Untergruppen

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccccc} a & b & x & 0 & 0 \\ c & d & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : \begin{array}{l} ad - bc = 1, \\ x, y \in \mathbf{R} \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & x \\ 0 & 0 & c & d & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : \begin{array}{l} ad - bc = 1, \\ x, y \in \mathbf{R} \end{array} \right\}$$

und

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccccc} a & 0 & 0 & b & x \\ 0 & a & b & 0 & x \\ 0 & c & d & 0 & y \\ c & 0 & 0 & d & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : \begin{array}{l} ad - bc = 1, \\ x, y \in \mathbf{R} \end{array} \right\}.$$

Es gibt eine orthogonale Basis, die die orthogonalen Elemente $H_r^{(-s)}$, $X_{2r,2r-1}^{(\pm s)}$ für $1 \leq s \leq \log_2(n-1)$, $1 \leq r \leq 2^{-s}n$ enthält. Sei $l = \lfloor \log_2(n-1) \rfloor$, dann

hat der Casimir-Operator die Form

$$C = \sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^{\lfloor 2^{-s}n \rfloor} 2^{-s} \left((H_r^{(-s)})^2 + (X_{2r,2r-1}^{(s)})^2 - (X_{2r,2r-1}^{(-s)})^2 \right) + R^+ - R^-,$$

wobei R^+ der Rest ist, den man nach Ergänzen von $H_r^{(-s)}$, $X_{2r,2r-1}^{(s)}$ mit $1 \leq s \leq l$ und $1 \leq r \leq 2^{-s}n$ zu einer orthogonalen Basis von p erhält und R^- entsprechend der Rest, den man nach Ergänzen von $X_{2r,2r-1}^{(-s)}$ mit $1 \leq s \leq l$ und $1 \leq r \leq 2^{-s}n$ erhält.

Nach [4] gilt $\langle d\pi(\Delta_r^{(s)})\xi, \xi \rangle \geq \pi^{-1}(\sin \vartheta)^2 / \vartheta$ mit $\Delta_r^{(s)} = -\left(H_r^{(-s)}\right)^2 - \left(X_{2r,2r-1}^{(s)}\right)^2 + \left(X_{2r,2r-1}^{(-s)}\right)^2$ für jeden glatten $\text{SO}(n)$ -endlichen Einheitsvektor ξ , wobei die Darstellung π von $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ keine nichttrivialen invarianten Vektoren besitzt. Nach Satz 2.5.1 besitzt also auch die Einschränkung von π auf die zur Lie-Unteralgebra gehörigen zu $\text{SL}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ isomorphen Untergruppe, deren zugehörige zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Lie-Unteralgebra $H_r^{(-s)}$, $X_{2r,2r-1}^{(\pm s)}$ aufspannen, keine unter \mathbf{R}^2 invarianten Vektoren. Sei

$$\Delta = -\sum_{s=1}^l \sum_{r=1}^{\lfloor 2^{-s}n \rfloor} 2^{-s} \left((H_r^{(-s)})^2 + (X_{2r,2r-1}^{(s)})^2 + (X_{2r,2r-1}^{(-s)})^2 \right) - R^+ - R^-,$$

dann gilt

$$\langle d\pi(\Delta)\xi, \xi \rangle \geq \frac{(\sin \vartheta)^2}{\pi \vartheta} \sum_{s=1}^l 2^{-s} \lfloor 2^{-s}n \rfloor.$$

Sei $2^l + 1 \leq n \leq 2^{l+1} - 1$ und $n = \sum_{r=0}^l q_r 2^r$ mit $q_r \in \{0, 1\}$, dann ist $\lfloor 2^{-s}n \rfloor = \left\lfloor \sum_{r=0}^l q_r 2^{r-s} \right\rfloor = \sum_{r=s}^l q_r 2^{r-s}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^l 2^{-s} \lfloor 2^{-s}n \rfloor &= \sum_{s=1}^l \sum_{r=s}^l q_r 2^{r-2s} = \sum_{r=1}^l q_r \sum_{s=1}^r 2^{r-2s} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{r=1}^l q_r (-2^{-r} + 2^r) = \frac{1}{3} \sum_{r=0}^l q_r (-2^{-r} + 2^r) \\ &= \frac{1}{3} \left(n - \sum_{r=0}^l q_r 2^{-r} \right) > \frac{n-2}{3}. \end{aligned}$$

Durch eine Fallunterscheidung läßt sich dies etwas verbessern. Für $n = 2^{l+1} - 1 = \sum_{r=0}^l 2^r$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^l 2^{-s} [2^{-s}n] &= \frac{1}{3} \left(n - \sum_{r=0}^l 2^{-r} \right) = \frac{1}{3} (n - 2 + 2^{-l}) \\ &= \frac{1}{3} \left(n - 2 + \frac{2}{n+1} \right) = \frac{1}{3} n \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Für $2^l + 1 \leq n \leq 2^{l+1} - 2$ ist $q_r = 0$ für mindestens ein r mit $0 \leq r \leq l-1$. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^l q_r 2^{-r} &= 2^{-l} + \sum_{r=0}^{l-1} q_r 2^{-r} \leq 2^{-l} + \sum_{r=0}^{l-2} 2^{-r} = 2^{-l} + 2 - 2^{-l+2} = 2 - \frac{3}{2^l} \\ &\leq 2 - \frac{3}{n-1} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^l 2^{-s} [2^{-s}n] &= \frac{1}{3} \left(n - \sum_{r=0}^l q_r 2^{-r} \right) \geq \frac{1}{3} \left(n - 2 + \frac{3}{n-1} \right) \\ &> \frac{1}{3} \left(n - 2 + \frac{2}{n+1} \right) = \frac{1}{3} n \frac{n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Für $n = 2^{l+1}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^l 2^{-s} [2^{-s}n] &= \sum_{s=1}^l 2^{l+1-2s} = \frac{1}{3} (2^{l+1} - 2^{-l+1}) = \frac{1}{3} \left(n - \frac{4}{n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(n - 2 + \frac{2n-4}{n} \right) > \frac{1}{3} \left(n - 2 + \frac{2}{n+1} \right) = \frac{1}{3} n \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

für $n \geq 3$. Also gilt folgendes.

2.5.3 Satz. Sei $n \geq 3$, π eine Darstellung von $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ ohne nichttriviale invariante Vektoren und ξ ein glatter $\mathrm{SO}(n)$ -endlicher Einheitsvektor, dann ist

$$\langle d\pi(\Delta)\xi, \xi \rangle \geq \frac{1}{3} \sup_{0 < \vartheta < \pi} \frac{(\sin \vartheta)^2}{\pi \vartheta} n \frac{n-1}{n+1} > \sup_{0 < \vartheta < \pi} \frac{(\sin \vartheta)^2}{\pi \vartheta} \frac{n-2}{3}.$$

Die Funktion $\pi^{-1}(\sin \vartheta)^2 / \vartheta$ nimmt ihr Maximum näherungsweise für $\vartheta \approx 1,16556$ an. Dafür gilt $(3\pi)^{-1}(\sin \vartheta)^2 / \vartheta \approx 0,0768837 > 0,076883$ und daraus folgt $\langle d\pi(\Delta)\xi, \xi \rangle > 0,076883(n-1)n/(n+1) > 0,076883(n-2)$ für $n \geq 3$.

Die Betrachtung des Casimir- und Laplace-Operators erfolgte hier wieder bezüglich der Spurform. Bezüglich der Killing-Form würde gelten $\Delta' = (2n)^{-1}\Delta$ und damit

$$\langle d\pi(\Delta')\xi, \xi \rangle \geq \frac{1}{6} \sup_{0 < \vartheta < \pi} \frac{(\sin \vartheta)^2}{\pi \vartheta} \frac{n-1}{n+1}.$$

2.6 Asymptotik der Matrixkoeffizienten

Einem Ansatz in [27, Seite 203–242] für $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ folgend wird hier die Asymptotik der Matrixkoeffizienten von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ bestimmt. Die Hauptanwendung davon ist hier der Beweis der Eigenschaft (T) für $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, $n \geq 2$. Dies geschieht durch die Bestimmung einer unteren Schranke der Kazhdan-Konstante von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$. Hierbei ist die Vorgehensweise die folgende. Zur Bestimmung einer Abschätzung für die Asymptotik der Matrixkoeffizienten von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ für eine Darstellung ohne nichttriviale invariante Vektoren wird die Asymptotik der Matrixkoeffizienten von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ bestimmt und dann auf entsprechende Untergruppen von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ angewendet. Für eine geeignete abelsche Untergruppe wird dazu zuerst gezeigt, daß jede Darstellung von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, deren Matrixkoeffizienten nicht in ∞ verschwinden, einen nichttrivialen unter dieser abelschen Untergruppe invarianten Vektor besitzt. Danach folgt der Beweis, daß dieser Vektor bereits unter ganz $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ invariant ist.

Sei

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R}) \cap \mathrm{SO}(2n) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2n, \mathbf{R}) : ab^{\mathrm{tr}} = ba^{\mathrm{tr}}, aa^{\mathrm{tr}} + bb^{\mathrm{tr}} = I \right\}, \\ N &= \left\{ \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix} : b \in S^2(\mathbf{R}^n) \right\}, \\ A &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n), a_j > 0, j = 1, \dots, n \right\}, \end{aligned}$$

$$A^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 1 \right\}.$$

Dabei sind K , N und A Untergruppen von $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$. Jedes Element $g \in \text{Sp}(n, \mathbf{R})$ läßt sich zerlegen in $g = k_1 h k_2$ mit $k_1, k_2 \in K$ und $h \in A$. Für diese Zerlegung siehe z. B. [32, Seite 126]. Man kann sogar $h \in A^+$ annehmen. Denn falls $a_j^{-1} > a_j$ ist für $h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in A$ mit $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, so lassen sich diese Diagonaleinträge durch Konjugation mit den Permutationsmatrizen $\omega_{j,j} = \begin{pmatrix} I - E_{j,j} & -E_{j,j} \\ E_{j,j} & I - E_{j,j} \end{pmatrix} \in K$ vertauschen, wobei $E_{r,s} = (\delta_{r,p} \delta_{s,q})_{p,q=1, \dots, n}$ ist. Man kann also annehmen, daß $h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ mit $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ und $a_j^{-1} \leq a_j$. Die Diagonaleinträge der Diagonalmatrix a lassen sich durch Konjugation mit den Permutationsmatrizen $k = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{r,s} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{r,s} \end{pmatrix} \in K$ mit $\tilde{\omega}_{r,s} = I - E_{r,r} - E_{s,s} + E_{r,s} + E_{s,r}$ vertauschen.

2.6.1 Lemma. Sei π eine Darstellung von $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$ auf H_π derart, daß ein Matrixkoeffizient in ∞ nicht verschwindet, dann gibt es $\xi, \eta \in H_\pi$ und eine Folge $(g_m)_{m \in \mathbf{N}}$ mit $g_m \in A^+$ so, daß $(\langle \pi(g_m) \xi, \eta \rangle)_{m \in \mathbf{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es $h_m \in \text{Sp}(n, \mathbf{R})$ und $\xi', \eta' \in H_\pi$ so, daß $(\langle \pi(h_m) \xi', \eta' \rangle)_{m \in \mathbf{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert. Da $\text{Sp}(n, \mathbf{R}) = K A^+ K$ ist, gibt es zu h_m ein $g_m \in A^+$ und $k_{1,m}, k_{2,m} \in K$ mit $h_m = k_{1,m} g_m k_{2,m}$. Da K kompakt ist, kann man annehmen, daß die Folgen $(\pi(k_{1,m}^{-1}) \eta')_{m \in \mathbf{N}}$ und $(\pi(k_{2,m}) \xi')_{m \in \mathbf{N}}$ gegen η bzw. ξ konvergieren. Sonst betrachtet man eine Teilfolge. Damit ist

$$\begin{aligned} & |\langle \pi(h_m) \xi', \eta' \rangle - \langle \pi(g_m) \xi, \eta \rangle| \\ &= |\langle \pi(g_m) \pi(k_{2,m}) \xi', \pi(k_{1,m}^{-1}) \eta' \rangle - \langle \pi(g_m) \xi, \eta \rangle| \\ &\leq |\langle \pi(g_m) \pi(k_{2,m}) \xi', \pi(k_{1,m}^{-1}) \eta' - \eta \rangle| + |\langle \pi(g_m) (\pi(k_{2,m}) \xi' - \xi), \eta \rangle| \\ &\leq \|\xi'\| \|\pi(k_{1,m}^{-1}) \eta' - \eta\| + \|\pi(k_{2,m}) \xi' - \xi\| \|\eta\|. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Folge $(\langle \pi(h_m) \xi', \eta' \rangle)_{m \in \mathbf{N}}$ genau dann gegen 0, wenn die Folge $(\langle \pi(g_m) \xi, \eta \rangle)_{m \in \mathbf{N}}$ gegen 0 konvergiert. \square

Man betrachtet die Untergruppe

$$N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & y^{\text{tr}} \\ 0 & I & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^{n-1} \right\}$$

von $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$. Das folgende Lemma zeigt, daß eine Darstellung von $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$, die einen Matrixkoeffizienten besitzt, der nicht in ∞ verschwindet, einen nichttrivialen unter N_1 invarianten Vektor besitzt. Der nachfolgende Satz zeigt, daß der Vektor dann schon unter ganz $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$ invariant ist.

2.6.2 Lemma. Sei π eine starkstetige unitäre Darstellung von $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$ auf H_π und ein Matrixkoeffizient von π verschwinde nicht in ∞ , dann gibt es einen nichttrivialen Vektor, der unter N_1 invariant ist.

Beweis. Nach Lemma 2.6.1 gibt es eine Folge $(g_m)_{m \in \mathbf{N}}$, die gegen Unendlich konvergiert, mit $g_m \in A^+$ und ein $\xi \in H_\pi$ so, daß die Folge $(\pi(g_m)\xi)_{m \in \mathbf{N}}$ nicht schwach gegen 0 konvergiert. Nach Übergang zu einer Teilfolge, kann man annehmen, daß $(\pi(g_m)\xi)_{m \in \mathbf{N}}$ in der schwachen Topologie gegen $\eta \neq 0$ konvergiert, da $\pi(g_m)$ unitär und die Einheitskugel kompakt in der schwachen Topologie ist.

Sei $g_m = \begin{pmatrix} a_m & 0 \\ 0 & a_m^{-1} \end{pmatrix}$ mit

$$a_m = \text{diag}(a_{m,1}, \dots, a_{m,n}), a_{m,1} \geq \dots \geq a_{m,n} \geq 1.$$

Da $a_m \rightarrow \infty$ gilt, muß $a_{m,1}^{-1} \rightarrow 0$ gelten. Also konvergiert $g_m^{-1}h g_m$ gegen I für $m \rightarrow \infty$ und $h \in N_1$, da

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & a^{-1}ba^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

ist mit a diagonal und $b \in S^2(\mathbf{R}^n)$,

$$\begin{pmatrix} a_{m,1}^{-1} & 0 \\ 0 & d_m^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y^{\text{tr}} \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{m,1}^{-1} & 0 \\ 0 & d_m^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{m,1}^{-2}x & a_{m,1}^{-1}y^{\text{tr}}d_m^{-1} \\ a_{m,1}^{-1}d_m^{-1}y & 0 \end{pmatrix}$$

mit $d_m = \text{diag}(a_{m,2}, \dots, a_{m,n})$ und somit gilt $a_{m,1}^{-2}x \rightarrow 0$ und $a_{m,1}^{-1}d_m^{-1}y \rightarrow 0$ wegen $a_{m,j} \geq 1$ für alle j .

Nun folgt der Beweis, daß $\eta \in H_\pi$ invariant unter N_1 ist. Sei $h \in N_1$ mit $h = \begin{pmatrix} I & b \\ 0 & I \end{pmatrix}$, dann ist

$$\begin{aligned} |\langle \pi(h)\eta - \eta, \zeta \rangle| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |\langle \pi(h)\pi(g_m)\xi - \pi(g_m)\xi, \zeta \rangle| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} |\langle \pi(g_m)(\pi(g_m^{-1}hg_m)\xi - \xi), \zeta \rangle| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi(g_m)(\pi(g_m^{-1}hg_m)\xi - \xi)\| \|\zeta\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\pi(g_m^{-1}hg_m)\xi - \xi\| \|\zeta\| = 0 \end{aligned}$$

für alle $\zeta \in H_\pi$ wegen der starken Stetigkeit von π . Somit ist $\pi(h)\eta = \eta$. \square

Im folgenden ist der Beweis im Fall $\mathrm{Sp}(1, \mathbf{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ analog wie in [27, Seite 212]. Er gilt allgemein für alle einfachen Lie-Gruppen.

2.6.3 Satz. Sei π eine starkstetige unitäre Darstellung von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, die die triviale Darstellung nicht enthält, dann verschwinden die Matrixkoeffizienten von π in ∞ .

Beweis. Sei $n = 1$, dann gilt $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Angenommen ein Matrixkoeffizient verschwinde nicht in ∞ , dann gibt es nach Lemma 2.6.2 einen Vektor ξ , der unter $N = N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbf{R} \right\}$ invariant ist.

Für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a \neq 0$ gilt $g \begin{pmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix}$ und, falls $a = 0$ ist, gilt $\begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Also ist wegen der Invarianz des Vektors ξ unter N der Wert von $\pi(g)\xi$ schon durch $(a, c) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ bestimmt.

Sei $\varphi_{\xi, \xi}(g) = \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle$, dann gilt $\varphi_{\xi, \xi}(hg) = \langle \pi(g)\xi, \pi(h^{-1})\xi \rangle = \varphi_{\xi, \xi}(g)$ für $h \in N$. Für $c \neq 0$ ist $\begin{pmatrix} 1 & -a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & d \end{pmatrix}$. Also ist für festes $c \neq 0$ der Wert von $\varphi_{\xi, \xi}(g)$ konstant für $a \in \mathbf{R}$. Wegen der Stetigkeit des Matrixkoeffizienten $\varphi_{\xi, \xi}$ ist damit auch $\varphi_{\xi, \xi}(g)$ für $c = 0$ und $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ konstant. Also ist $\varphi_{\xi, \xi}(g) = \|\xi\|^2$ für alle $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ und für alle diese g gilt somit $\pi(g)\xi = \xi$.

Für $c \neq 0$ ist $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & (ac)^{-1} \end{pmatrix}$. Damit ist der Wert $\varphi_{\xi, \xi} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für $c \neq 0$ konstant $\varphi_{\xi, \xi} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen der Stetigkeit folgt, daß $\varphi_{\xi, \xi}(g)$ auch für $c = 0$ und $a \neq 0$ konstant ist. Also ist $\varphi_{\xi, \xi}(g) = \|\xi\|^2$ für alle $g \in \text{SL}(2, \mathbf{R})$. Damit ist $\xi \neq 0$ unter ganz $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ invariant.

Sei nun $n \geq 2$ und der Matrixkoeffizient verschwinde nicht in ∞ , dann gibt es ein $\xi \neq 0$ nach Lemma 2.6.2 so, daß ξ invariant unter $\pi(N_1)$ ist. Wegen des ersten Falls mit $n = 1$ ist dieser Vektor auch invariant unter den zu $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ isomorphen Untergruppen

$$G_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} I + (a-1)E_{1,1} & bE_{1,1} \\ cE_{1,1} & I + (d-1)E_{1,1} \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}$$

und $G_{1,j}$, der Untergruppe aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} I + (a-1)(E_{1,1} + E_{j,j}) & b(E_{1,j} + E_{j,1}) \\ c(E_{1,j} + E_{j,1}) & I + (d-1)(E_{1,1} + E_{j,j}) \end{pmatrix}$$

mit $ad - bc = 1$, von $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$ für $j \geq 2$. Sei G die von diesen Untergruppen erzeugte Gruppe. Es wird gezeigt, daß $G = \text{Sp}(n, \mathbf{R})$ ist. Dazu sei

$$\begin{aligned} \omega_{1,j} &= \begin{pmatrix} I - E_{1,1} - E_{j,j} & -E_{1,j} - E_{j,1} \\ E_{1,j} + E_{j,1} & I - E_{1,1} - E_{j,j} \end{pmatrix}, \\ g_{1,1} &= \begin{pmatrix} I + (a-1)E_{1,1} & bE_{1,1} \\ cE_{1,1} & I + (d-1)E_{1,1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\omega_{1,j} g_{1,1} \omega_{1,j}^{-1} = \begin{pmatrix} I + (d-1)E_{j,j} & -cE_{j,j} \\ -bE_{j,j} & I + (a-1)E_{j,j} \end{pmatrix}.$$

Somit ist auch

$$G_{j,j} = \left\{ \begin{pmatrix} I + (a-1)E_{j,j} & bE_{j,j} \\ cE_{j,j} & I + (d-1)E_{j,j} \end{pmatrix} : ab - bc = 1 \right\} \subset G.$$

Sei

$$\begin{aligned} \omega_{1,1} &= \begin{pmatrix} I - E_{1,1} & -E_{1,1} \\ E_{1,1} & I - E_{1,1} \end{pmatrix}, \\ g_{1,j} &= \begin{pmatrix} I + (a-1)(E_{1,1} + E_{j,j}) & b(E_{1,j} + E_{j,1}) \\ c(E_{1,j} + E_{j,1}) & I + (d-1)(E_{1,1} + E_{j,j}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dann ist

$$\omega_{1,1} g_{1,j} \omega_{1,1}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{g} & 0 \\ 0 & (\tilde{g}^{\text{tr}})^{-1} \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{g} = I + (d-1)E_{1,1} + (a-1)E_{j,j} - cE_{1,j} - bE_{j,1}$. Also sind auch die Gruppen $\tilde{G}_{1,j} \subset G$. Sei

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1,l} &= I - E_{1,1} - E_{l,l} - E_{1,l} + E_{l,1}, \\ \tilde{g}_{1,j} &= I + (a-1)E_{1,1} + bE_{1,j} + cE_{j,1} + (d-1)E_{j,j}, \end{aligned}$$

dann ist

$$\tilde{\omega}_{1,l} \tilde{g}_{1,j} \tilde{\omega}_{1,l}^{-1} = I + (a-1)E_{l,l} + bE_{l,j} + (d-1)E_{j,j} + cE_{j,l}$$

mit $2 \leq l \leq n$ und $l \neq j$. Also ist auch $\tilde{G}_{j,l} \subset G$. Es gilt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{1,l} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{1,l} \end{pmatrix} g_{1,j} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{1,l}^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_{1,l}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I + (a-1)(E_{l,l} + E_{j,j}) & c(E_{j,l} + E_{l,j}) \\ b(E_{j,l} + E_{l,j}) & I + (d-1)(E_{l,l} + E_{j,j}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also sind auch die Gruppen $G_{j,l} \subset G$ und damit ist $G = \text{Sp}(n, \mathbf{R})$ nach Lemma 2.1.1. Somit ist ξ unter $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$ invariant. \square

Durch Betrachten geeigneter Mengen in der dualen Gruppe von $S^2(\mathbf{R}^2)$ unter der dualen Operation von $\text{SL}(2, \mathbf{R})$ ist es möglich eine Abschätzung für die Asymptotik der Matrixkoeffizienten der Darstellungen von $\text{SL}(2, \mathbf{R}) \rtimes S^2(\mathbf{R}^2)$ zu bestimmen, die keine nichttrivialen unter $S^2(\mathbf{R}^2)$ invarianten Vektoren besitzen. Die Verwendung geeigneter Untergruppen von $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$ erlaubt dies danach auf $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$ zu übertragen.

2.6.4 Satz. Sei π eine Darstellung von $\text{SL}(2, \mathbf{R}) \rtimes S^2(\mathbf{R}^2)$ auf einem Hilbert-Raum H_π , der keine nichttrivialen unter $S^2(\mathbf{R}^2)$ invarianten Vektoren enthält, dann gilt für die dichte Menge der K -endlichen Vektoren $H_{\pi,K}$

$$|\varphi_{\xi,\eta}(g_0(\alpha)g_1(t)g_0(\beta))| = |\langle \pi(g_0(\alpha)g_1(t)g_0(\beta))\xi, \eta \rangle| \leq c_{\xi,\eta} e^{-t/2}$$

für $\xi, \eta \in H_{\pi,K}$ und $c_{\xi,\eta}$ ist eine Konstante, die nur von ξ und η abhängig ist.

Beweis. Man identifiziert wieder \mathbf{R}^3 mit $\widehat{S^2(\mathbf{R}^2)}$ wie in 2.3. Sei

$$X_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x \in \mathbf{R}, s^{-2} < y^2 + z^2 < s^2 \right\},$$

dann gilt $\bigcup_{s>1} X_s = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$. Da π keine nichttrivialen unter $S^2(\mathbf{R}^2)$ invarianten Vektoren besitzt, konvergiert $E(X_s)\eta$ gegen η für $\eta \in H_\pi$, wobei E das zu $\pi|_{S^2(\mathbf{R}^2)}$ assoziierte Spektralmaß. Es reicht also die Aussage für Eigenvektoren $\xi, \eta \in E(X_s)H_\pi$ von $\pi(K)$ zu zeigen, da die Matrixkoeffizienten sesquilinear in ξ und η sind. Sei $t > 2 \ln s$, dann gilt für den Matrixkoeffizienten

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi, \eta}(g_1(t)) &= \langle \pi(g_1(t))\xi, \eta \rangle = \langle \pi(g_1(t))E(X_s)\xi, E(X_s)\eta \rangle \\ &= \langle E(g_1(t) \cdot X_s)\pi(g_1(t))\xi, E(X_s)\eta \rangle \\ &= \langle \pi(g_1(t))\xi, E((g_1(t) \cdot X_s) \cap X_s)\eta \rangle. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt also

$$|\varphi_{\xi, \eta}(g_1(t))| \leq \|\xi\| \|E((g_1(t) \cdot X_s) \cap X_s)\eta\|.$$

Da

$$(-x \sinh t + (x+y) \cosh t) - (x \cosh t - (x+y) \sinh t) = ye^t$$

gilt, ist

$$\begin{aligned} g_1(t) \cdot X_s &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z \end{pmatrix} : s^{-2} < e^{2t}y^2 + z^2 < s^2 \right\} \\ &\subset \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z \end{pmatrix} : |y| < e^{-t}s \right\}. \end{aligned}$$

Da

$$(g_1(t) \cdot X_s) \cap X_s \subset \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z \end{pmatrix} : y^2 + z^2 > s^{-2}, |y| < e^{-t}s \right\}$$

gilt, ist $|y| \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right)^{-1} < e^{-t}s (s^{-1})^{-1} = e^{-t}s^2$. Mit $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ gilt also $y = r \cos \beta$, wobei $|\cos \beta| < e^{-t}s^2$ ist. Sei $\vartheta = \arccos(e^{-t}s^2)$, dann gilt dies

für $-\pi < \beta < \pi$ genau dann, wenn $-\pi < \beta < -\vartheta$ oder $\vartheta < \beta < \pi$. Mit den Definitionen von $S_h(\vartheta)$ und $W(\vartheta)$, siehe 2.3, folgt

$$\begin{aligned} |\varphi_{\xi,\eta}(g_1(t))| &\leq \sqrt{1 - \|E(S_1(\vartheta))\xi\|^2} \leq \sqrt{1 - \|E(W(\vartheta))\xi\|^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{2}{\pi} \arccos(e^{-t}s^2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \arcsin(e^{-t}s^2)} \\ &\leq se^{-t/2}. \end{aligned}$$

Für $t \leq 2 \ln s$ gilt schließlich $|\varphi_{\xi,\eta}(g_1(t))| \leq 1 \leq se^{-t/2}$. \square

Die Einschränkung dieser Matrixkoeffizienten des letzten Satzes auf $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ ist $L^{2+\varepsilon}$ -integrierbar wie in [27, Seite 225] für $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^2$ statt $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$.

2.6.5 Korollar. Seien die Voraussetzungen wie im vorigen Satz, dann ist $\varphi_{\xi,\eta}|_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})} \in L^{2+\varepsilon}(\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}))$ für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\xi, \eta \in H_{\pi,K}$, dem dichten Teilraum der K -endlichen Vektoren.

Beweis. Nach dem letzten Satz gilt $|\varphi_{\xi,\eta}(g_1(t))| \leq c_{\xi,\eta}e^{-t/2}$ für $\xi, \eta \in H_{\pi,K}$. Es gilt

$$\begin{aligned} &\int_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})} |\varphi_{\xi,\eta}(g)|^{2+\varepsilon} dg \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\varphi_{\xi,\eta}(g_0(\alpha)g_1(t)g_0(\beta))|^{2+\varepsilon} d\alpha \sinh t dt d\beta \\ &\leq c_{\xi,\eta}^{2+\varepsilon} \int_0^\infty e^{-t-\varepsilon t/2} \sinh t dt \leq \frac{c_{\xi,\eta}^{2+\varepsilon}}{2} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t/2} dt = \frac{c_{\xi,\eta}^{2+\varepsilon}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Also ist $\varphi_{\xi,\eta}|_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})} \in L^{2+\varepsilon}(\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}))$. \square

Für die reguläre Darstellung von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ erhält man in [27, Seite 217] eine Abschätzung der Matrixkoeffizienten. Diese ist abhängig von der Funktion Ξ von Harish-Chandra. Diese Funktion ist definiert als der Matrixkoeffizient einer Darstellung von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Für $t \in \mathbf{R}$ gilt

$$\Xi(g_1(t)) = (2\pi)^{-1} e^{-t/2} \int_0^{2\pi} |e^{-2t} (\cos \vartheta)^2 + (\sin \vartheta)^2|^{-1/2} d\vartheta.$$

Für eine Herleitung dieser Gleichung siehe z. B. [27, Seite 215]. Zum Beweis der Abschätzung im folgenden sind die Darstellungen der komplementären Serie von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ nötig. Diese werden auch in [27] angegeben.

2.6.6 Satz. Sei π eine Darstellung von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ ohne nichttriviale $S^2(\mathbf{R}^2)$ -invariante Vektoren, dann erfüllt für je zwei Vektoren $\xi, \eta \in H_\pi$ der Matrixkoeffizient $\varphi_{\xi, \eta}$ die punktweise Abschätzung

$$|\varphi_{\xi, \eta}(g_1(t))| \leq \|\xi\| \|\eta\| \sqrt{\dim \langle \pi(K)\xi \rangle \dim \langle \pi(K)\eta \rangle} \Xi(g_1(t)),$$

wobei $\langle \pi(K)\xi \rangle$ der von der Menge $\pi(K)\xi$ aufgespannte Teilraum.

Beweis. Man betrachtet das Tensorprodukt π_α der auf $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ eingeschränkten Darstellung $\pi|_{\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})}$ und einer Darstellung der komplementären Serie zum Parameter $0 \leq \alpha < 1$. Sei H_α der Darstellungsraum, dann ist $\varphi_{\xi \otimes \xi', \eta \otimes \eta'}(g) = \varphi_{\xi, \eta}(g) \varphi_{\xi', \eta'}(g)$ für Vektoren $\xi \otimes \xi', \eta \otimes \eta' \in H_\alpha$. Da der Matrixkoeffizient $t \mapsto \varphi_{\xi', \eta'}(g_1(t))$ wie $t \mapsto e^{-(1-\alpha)t/2}$ fällt, fällt $t \mapsto \varphi_{\xi \otimes \xi', \eta \otimes \eta'}(g_1(t))$ wie $t \mapsto e^{-t/2} e^{-(1-\alpha)t/2} = e^{-(1-\alpha/2)t}$ für die Vektoren ξ, η, ξ' und η' . Wie im Beweis zu Korollar 2.6.5 kann man nun zeigen, daß $\varphi_{\xi \otimes \xi', \eta \otimes \eta'} \in L^2(\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}))$ ist. Die Darstellung π_α ist somit unitär äquivalent zu einer Teildarstellung der regulären Darstellung von $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Für einen Beweis siehe z. B. [27, Seite 208].

Man wählt nun die Vektoren ξ' und η' als K -invariante Vektoren mit $\|\xi'\| = 1 = \|\eta'\|$, dann gilt $\dim \langle \pi_\alpha(K)(\xi \otimes \xi') \rangle = \dim \langle \pi(K)\xi \rangle$ und analog für $\eta \otimes \eta'$. Es ist auch $\|\xi \otimes \xi'\| = \|\xi\| \|\xi'\| = \|\xi\|$ und analog für $\eta \otimes \eta'$. Also folgt

$$\begin{aligned} & |\varphi_{\xi, \eta}(g_1(t))| |\varphi_{\xi', \eta'}(g_1(t))| \\ = & |\varphi_{\xi \otimes \xi', \eta \otimes \eta'}(g_1(t))| \leq \|\xi\| \|\eta\| \sqrt{\dim \langle \pi(K)\xi \rangle \dim \langle \pi(K)\eta \rangle} \Xi(g_1(t)) \end{aligned}$$

nach [27, Seite 217], da π_α eine Teildarstellung der regulären Darstellung. Läßt man nun α gegen 1 konvergieren, so konvergiert $\varphi_{\xi', \eta'}(g_1(t))$ gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen die Funktion, die konstant 1 ist. Für einen Beweis siehe z. B. [27, Seite 217]. \square

Somit ist es möglich die Asymptotik der Matrixkoeffizienten der Darstellungen ohne nichttriviale invariante Vektoren von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ zu zeigen.

2.6.7 Satz. Sei $K = \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R}) \cap \mathrm{SO}(2n)$ eine maximalkompakte Untergruppe von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ und π eine starkstetige unitäre Darstellung von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$, $n \geq 2$, ohne nichttriviale invariante Vektoren, dann gilt

$$|\varphi_{\xi, \eta}(g)| \leq \|\xi\| \|\eta\| \sqrt{\delta(\xi) \delta(\eta)} \Xi(g_1(\ln(a_1 a_2)))$$

für zwei K -endliche Vektoren ξ, η , wobei $\delta(\xi) = \dim \langle \pi(K)\xi \rangle$ und $\delta(\eta) = \dim \langle \pi(K)\eta \rangle$ und $g = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}) \in A^+$.

Beweis. Man hat die zu $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ isomorphe Untergruppe

$$\tilde{G}_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{\mathrm{tr}-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} : a \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \right\}$$

und die zu $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R}) \times S^2(\mathbf{R}^2)$ isomorphe Untergruppe

$$P_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{\mathrm{tr}-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} : a \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R}), ab^{\mathrm{tr}} = ba^{\mathrm{tr}} \right\}$$

von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$.

Sei π eine Darstellung von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ ohne nichttriviale invariante Vektoren, dann besitzt auch die Darstellung $\pi_{1,2} = \pi|_{P_{1,2}}$ keine nichttrivialen $S^2(\mathbf{R}^2)$ -invarianten Vektoren, da die Matrixkoeffizienten von π und damit auch die von $\pi_{1,2}$ in ∞ gegen 0 gehen nach Satz 2.6.3.

Auf $\tilde{G}_{1,2} \subset \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ wendet man die Abschätzung aus Satz 2.6.6 an. Sei

$$K_{1,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} : a \in \mathrm{SO}(2, \mathbf{R}) \right\}$$

eine maximalkompakte Untergruppe von $\tilde{G}_{1,2}$.

Sei $\omega = \begin{pmatrix} I - E_{2,2} & -E_{2,2} \\ E_{2,2} & I - E_{2,2} \end{pmatrix} \in K$, dann gilt

$$\omega g \omega^{-1} = \mathrm{diag}(a_1, a_2^{-1}, a_3, \dots, a_n, a_1^{-1}, a_2, a_3^{-1}, \dots, a_n^{-1}).$$

Nun ist $\begin{pmatrix} \sqrt{a_1 a_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_1 a_2}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a_1/a_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_1/a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} \end{pmatrix}$. Sei

$$\tilde{g} = \text{diag} \left(\sqrt{a_1 a_2}, \sqrt{a_1 a_2}^{-1}, 1, \dots, 1, \sqrt{a_1 a_2}^{-1}, \sqrt{a_1 a_2}, 1, \dots, 1 \right),$$

$$h = \text{diag} \left(\sqrt{a_1/a_2}, \sqrt{a_1/a_2}, a_3, \dots, a_n, \sqrt{a_2/a_1}, \sqrt{a_2/a_1}, a_3^{-1}, \dots, a_n^{-1} \right),$$

dann gilt

$$\begin{aligned} |\varphi_{\xi, \eta}(g)| &= |\langle \pi(g) \xi, \eta \rangle| = |\langle \pi(\tilde{g}) \pi(h\omega) \xi, \pi(\omega) \eta \rangle| \\ &\leq \|\xi\| \|\eta\| \sqrt{\delta(\xi) \delta(\eta)} \Xi \begin{pmatrix} \sqrt{a_1 a_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_1 a_2}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nach Satz 2.6.6, da π unitär,

$$\begin{aligned} \dim \langle \pi(K_{1,2}) \pi(h\omega) \xi \rangle &= \dim \langle \pi(h) \pi(K_{1,2}) \pi(\omega) \xi \rangle \\ &= \dim \langle \pi(K_{1,2}) \pi(\omega) \xi \rangle \end{aligned}$$

und $K_{1,2}\omega \subset K$ ist. □

2.6.8 Bemerkung. Mit einem ähnlichen Argument wie in Korollar 2.6.5 kann man zeigen, daß es ein $p > 0$ gibt derart, daß für jede Darstellung π von $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$, $n \geq 2$, die die triviale Darstellung nicht enthält, alle K -endlichen Matrixkoeffizienten von π in $L^p(\text{Sp}(n, \mathbf{R}))$ liegen.

Nun folgt die Bestimmung einer unteren Schranke der Kazhdan-Konstante für $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$ unter Benutzung des vorigen Ergebnisses. Für Ξ erhält man folgende Abschätzung. Eine Herleitung findet man z. B. in [27, Seite 216]. Es gilt

$$\begin{aligned} \Xi(g_1(t)) &\leq (2\pi)^{-1} e^{-t/2} \left(4(1 - e^{-2t})^{-1/2} + 2\pi(\ln(\pi/2) + t) \right) \\ &= \sqrt{2}/\pi (\sinh t)^{-1/2} + e^{-t/2} (\ln(\pi/2) + t) \\ &\leq (\sinh t)^{-1/2} \left(\sqrt{2}/\pi + \ln(\pi/2) + t \right) \end{aligned}$$

für $t > 0$. Für $0 < \delta < 1$ gibt es also ein t_0 so, daß $\Xi(g_1(t)) < 1 - \delta$ für $|t| > t_0$. Damit ist die Menge aller t mit $\Xi(g_1(t)) \geq 1 - \delta$ kompakt.

Für $g \in \text{Sp}(n, \mathbf{R})$ gibt es $k_1, k_2 \in K$ und

$$h = \text{diag} (a_1, a_2, \dots, a_n, a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}) \in A^+$$

so, daß $g = k_1 h k_2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} |\varphi_{\xi, \eta}(g)| &= |\langle \pi(h) \pi(k_2) \xi, \pi(k_1)^{-1} \eta \rangle| \\ &\leq \|\xi\| \|\eta\| \sqrt{\delta(\xi) \delta(\eta) \Xi(g_1(\ln(a_1 a_2)))}. \end{aligned}$$

Die Funktion Ψ sei nun definiert durch $\Psi(g) = \Xi(g_1(\ln(a_1 a_2)))$.

2.6.9 Satz. Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $\delta = (4 \sin(\frac{\arcsin \varepsilon}{2}) + \varepsilon)^2 / 2 < 1$, so ist ε eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante bezüglich $\Psi^{-1}([1 - \delta, 1])$.

Beweis. Die Menge $\Psi^{-1}([1 - \delta, 1])$ ist kompakt und enthält $K = \text{Sp}(n, \mathbf{R}) \cap \text{SO}(2n)$. Sei π eine unitäre Darstellung von $\text{Sp}(n, \mathbf{R})$, die keine invarianten Vektoren besitzt, die nicht trivial sind. Es gebe einen Vektor ξ , der die Norm 1 besitzt und $(\varepsilon, \Psi^{-1}([1 - \delta, 1]))$ -invariant ist. Sei $\eta = \int_K \pi(k) \xi dk$, wobei die Integration bez. des Haar-Maßes erfolgt, das so normiert ist, daß K das Maß 1 besitzt, dann gilt

$$\|\xi - \eta\| = \left\| \int_K (\xi - \pi(k) \xi) dk \right\| \leq \int_K \|\xi - \pi(k) \xi\| dk < \varepsilon.$$

Sei o. E. $\varepsilon \leq 1$, dann ist $\|\eta\| > 1 - \varepsilon$ und damit $\neq 0$. Sei $\zeta = \frac{\eta}{\|\eta\|}$, dann ist

$$\begin{aligned} \|\xi - \zeta\|^2 &= 2 - 2 \text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle = 2(1 - \cos \arccos \text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle) \\ &= 4 \sin^2 \left(\frac{\arccos \text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle}{2} \right) \end{aligned}$$

und

$$\arccos \text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle = \arcsin \sqrt{1 - (\text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle)^2},$$

da $\text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle = \|\eta\|^{-1} \text{Re} \langle \xi, \eta \rangle > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$. Wegen

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle - \|\eta\|)^2 = (\text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle)^2 - 2 \text{Re} \langle \xi, \eta \rangle + \|\eta\|^2 \\ &= (\text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle)^2 - 1 + \|\xi - \eta\|^2 < (\text{Re} \langle \xi, \zeta \rangle)^2 - 1 + \varepsilon^2 \end{aligned}$$

ist $\|\xi - \zeta\| < 2 \sin \frac{\arcsin \varepsilon}{2}$.

Nach Konstruktion ist ζ invariant unter K . Nach Satz 2.6.7 gilt also

$$\|\pi(g) \zeta - \zeta\| = \sqrt{2 - 2 \text{Re} \varphi_{\zeta, \zeta}(g)} \geq \sqrt{2 - 2\Psi(g)}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \|\pi(g)\xi - \xi\| = \|\pi(g)(\xi - \zeta) + \pi(g)\zeta - \zeta + \zeta - \xi\| \\
&\geq \|\pi(g)\zeta - \zeta\| - 2\|\xi - \zeta\| \\
&> \sqrt{2 - 2\Psi(g)} - 4\sin\left(\frac{\arcsin\varepsilon}{2}\right) = \sqrt{2\delta} - 4\sin\left(\frac{\arcsin\varepsilon}{2}\right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

für ein g mit $\Psi(g) = 1 - \delta$. Dies ergibt einen Widerspruch. \square

Zu gegebenem δ ist es möglich den Wert ε im letzten Satz abzuschätzen und dies ergibt folgende Vereinfachung.

2.6.10 Korollar. Sei $0 < \delta < 1$, dann ist $\varepsilon = (8/25)\sqrt{2\delta}$ eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante für $\Psi^{-1}([1 - \delta, 1])$.

Beweis. Sei zuerst $0 < \varepsilon < 1$ beliebig. Da

$$\begin{aligned}
4\sin((\arcsin\varepsilon)/2) &= 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\
&\geq 2\sqrt{2}\sqrt{1 - (1 - \varepsilon^2/2)} = 2\varepsilon
\end{aligned}$$

für $0 < \varepsilon < 1$ gilt, ist $4\sin((\arcsin\varepsilon)/2) + \varepsilon \geq 3\varepsilon \geq \sqrt{2}$ für $\varepsilon \geq \sqrt{2}/3$. Also reicht es $\varepsilon < \sqrt{2}/3$ zu betrachten. Nun gilt $\sqrt{1+x} \leq 1 + x/2$ für $x \geq -1$ und damit ist

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1 - \frac{x}{1+x}}^{-1} \geq \left(1 - \frac{x}{2+2x}\right)^{-1} = 1 + \frac{x}{2+x}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\
&\leq \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2 - \varepsilon^2}\right)} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{1 - \varepsilon^2/2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2/2}{1 - \varepsilon^2/2}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\varepsilon^2/2}{2 - \varepsilon^2}\right) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{4\varepsilon^{-2} - 2}\right) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\frac{17}{16}
\end{aligned}$$

für $0 < \varepsilon < \sqrt{2}/3$ und damit $4\sin((\arcsin\varepsilon)/2) + \varepsilon < (17/8 + 1)\varepsilon = (25/8)\varepsilon$. Nun sei $0 < \varepsilon = (8/25)\sqrt{2\delta} < \sqrt{2}/3$, dann gilt $4\sin((\arcsin\varepsilon)/2) + \varepsilon < \sqrt{2\delta}$ und nach dem letzten Satz ist ε untere Schranke der Kazhdan-Konstante. \square

2.7 Kazhdan-Konstanten von Loopgruppen

Dieser Abschnitt behandelt die Bestimmung einer unteren Schranke einer Kazhdan-Konstante für die Gruppe $\mathrm{Sp}(n, R)$, wobei R ein topologischer kommutativer Ring mit Eins, der einen dichten endlicherzeugten Unterring enthält. Dabei ist für einen kommutativen Ring mit Eins die Gruppe $\mathrm{Sp}(n, R)$ definiert durch $\mathrm{Sp}(n, R) = \{g \in \mathrm{GL}(2n, R) : g^{-1} = Jg^{\mathrm{tr}}J^{-1}\}$ wie für einen Körper, wobei $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Die Hauptanwendung ist der Fall, in dem R der Ring der stetigen Funktionen $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$, wobei $\mathbf{T} = \{x \in \mathbf{C} : |x| = 1\}$ der eindimensionale Torus ist. Den Fall $\mathrm{SL}(n, R)$ behandelt [44]. Dies befindet sich nicht in der veröffentlichten Version [45]. Loopgruppen und ihre Darstellungen behandeln z. B. [30] und [40].

Die Vorgehensweise hier ist die folgende. Die Darstellung orientiert sich an [44] im Fall $\mathrm{SL}(n, R)$. Das Ziel ist die Bestimmung einer unteren Schranke der Kazhdan-Konstante für die Loopgruppe $\mathrm{Loop}(\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C}))$. Dies ist die Gruppe der stetigen Abbildungen von \mathbf{T} nach $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ versehen mit punktwiser Addition und Multiplikation und der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Die hier behandelten Darstellungen sind wieder starkstetig und unitär. Beispiele solcher Darstellungen erhält man wie folgt: Sei π eine Darstellung von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$, sei $x \in \mathbf{T}$ fest, dann ist $g \mapsto \pi_x(g) = \pi(g(x))$ eine Darstellung von $\mathrm{Loop}(\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C}))$. Allgemeiner erhält man durch endlich viele $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{T}$ und endlich viele Darstellungen π_1, \dots, π_n von $\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C})$ die folgende Darstellung π definiert durch $\pi(g) = \bigotimes_{k=1}^n \pi_k(g(x_k))$ für $g \in \mathrm{Loop}(\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C}))$. Es ist sogar möglich geeignete unendliche Tensorprodukte zu betrachten, siehe z. B. [30, Seite 60–65].

Eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante für diese Gruppe wird allgemein für $\mathrm{Sp}(n, R)$ bestimmt, wobei R ein topologischer Ring, der einen dichten endlicherzeugten Unterring enthält. Man beachte, daß $\mathrm{Loop}(\mathrm{Sp}(n, \mathbf{C}))$ kanonisch isomorph zu $\mathrm{Sp}(n, R)$ ist, wobei R der Ring der stetigen Funktionen von \mathbf{T} nach \mathbf{C} . Die untere Schranke der Kazhdan-Konstante ist abhängig von einer ganzen Zahl $\nu_n(R)$, die wie folgt definiert ist.

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $\mathrm{Sp}(n, R)$ die Gruppe der symplektischen $2n \times 2n$ -Matrizen über R . Eine elementare $n \times n$ -Matrix $E_{j,k}$ für $1 \leq j, k \leq n$ ist eine Matrix mit dem Koeffizienten 1 an der Stelle (j, k) und 0 an allen anderen Stellen. Eine elementare symplektische Matrix ist von der

Form

$$\begin{aligned} a_{j,k}(t) &= \begin{pmatrix} I + tE_{j,k} & 0 \\ 0 & I - tE_{k,j} \end{pmatrix}, \\ b_{j,k}(t) &= \begin{pmatrix} I & t(E_{j,k} + E_{k,j}) \\ 0 & I \end{pmatrix}, \\ c_{j,k}(t) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ t(E_{j,k} + E_{k,j}) & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $j \neq k$ oder

$$b_{j,j}(t) = \begin{pmatrix} I & tE_{j,j} \\ 0 & I \end{pmatrix}, c_{j,j}(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ tE_{j,j} & I \end{pmatrix}.$$

2.7.1 Definition. Die Gruppe $\mathrm{Sp}(n, R)$ heißt *beschränkt elementar erzeugt*, wenn es ein $\nu = \nu_n(R) < \infty$ gibt so, daß sich jede Matrix in $\mathrm{Sp}(n, R)$ als Produkt aus höchstens ν elementaren symplektischen Matrizen schreiben läßt.

Für einen Körper K ist $\nu_n(K) < \infty$. Siehe hierzu den Beweis zu Lemma 2.1.1. Dabei ist zu beachten, daß

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 - a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-2} - a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um nun eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante für $\mathrm{Sp}(n, R)$ zu bestimmen, ist es notwendig untere Schranken der relativen Kazhdan-Konstante für das Paar $(\mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2), S^2(R^2))$ zu bestimmen. Diese sind wie folgt definiert.

2.7.2 Definition. Sei G eine topologische Gruppe und U eine abgeschlossene Untergruppe, dann bildet ein $\varepsilon > 0$ eine *untere Schranke der relativen Kazhdan-Konstante* bezüglich einer kompakten Menge $Q \subset G$, falls die Einschränkung jeder Darstellung von G mit (ε, Q) -invarianten Vektoren auf U einen nichttrivialen invarianten Vektor besitzt.

Die gesuchte untere Schranke folgt aus einem Satz, der eine untere Schranke in dem Spezialfall bestimmt, daß R der Ring der Polynome über \mathbf{Z} in m Variablen. Dies geschieht durch Induktion unter Verwendung eines Satzes der für einen Ring R zum Ring $R[t]$ übergeht, d. h. der für eine untere Schranke der relativen Kazhdan-Konstante von $(\mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2), S^2(R^2))$ für eine geeignete Menge Q_t eine untere Schranke der relativen Kazhdan-Konstante von $(\mathrm{SL}(2, R[t]) \times S^2((R[t])^2), S^2((R[t])^2))$ bestimmt. Für den Induktionsanfang ist es nötig auch für $(\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}) \times S^2(\mathbf{Z}^2), S^2(\mathbf{Z}^2))$ eine solche untere Schranke zu bestimmen. Der Beweis verwendet folgendes erste Lemma, vgl. Satz 2.2.3 für $K = \mathbf{R}$.

2.7.3 Lemma. Sei μ ein Mittel definiert auf den Borel-Mengen von $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, dann gibt es eine Borel-Menge $W \subset \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ und $g \in \{u_{\pm 1}, u_{\pm 1}^{\mathrm{tr}}\}$ mit $u_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ derart, daß $|\mu(gW) - \mu(W)| \geq \frac{1}{12}$.

Beweis. Sei

$$A^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 < y \leq 2x \right\},$$

$$\hat{A}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq 2x < y \right\},$$

dann ist $u_{-1} \cdot (A^+ \cup \hat{A}^+) \subset \hat{A}^+$, da $u_{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + y \\ x + y + z \end{pmatrix}$ und $2x + y > 2x \geq 0$. Würde nun die Aussage nicht gelten, so wäre

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} &> \mu(A^+ \cup \hat{A}^+) - \mu(u_{-1} \cdot (A^+ \cup \hat{A}^+)) \geq \mu(A^+ \cup \hat{A}^+) - \mu(\hat{A}^+) \\ &= \mu(A^+). \end{aligned}$$

Analog gilt $u_{-1} \cdot (A^- \cup \hat{A}^-) \subset \hat{A}^-$ für

$$A^- = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 > y \geq 2x \right\},$$

$$\hat{A}^- = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 \geq 2x > y \right\}.$$

Also wäre auch $\mu(A^-) < \frac{1}{12}$. Es gilt $u_1 \cdot (B^+ \cup \hat{B}^+) \subset \hat{B}^+$ für

$$B^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq -y < 2x \right\},$$

$$\hat{B}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 < 2x \leq -y \right\},$$

da $u_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x + y \\ x - y + z \end{pmatrix}$ und $2x - y \geq 2x > 0$ ist. Damit wäre $\mu(B^+) < \frac{1}{12}$. Analog ist $u_1 \cdot (B^- \cup \hat{B}^-) \subset \hat{B}^-$ für

$$B^- = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq y < -2x \right\},$$

$$\hat{B}^- = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 < -2x \leq y \right\}$$

und damit wäre $\mu(B^-) < \frac{1}{12}$.

Sei wieder $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann erhält man für die transponierten Matrizen $u_{\pm 1}^{\text{tr}} = \omega u_{\mp 1} \omega^{-1}$ die entsprechenden Aussagen für $\omega \cdot A^\pm$ und $\omega \cdot B^\pm$. Also würde auch $\mu(\omega \cdot A^\pm) < \frac{1}{12}$ und $\mu(\omega \cdot B^\pm) < \frac{1}{12}$ gelten.

Für

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : y > 0, -y \leq 2x < y, -y < 2z \leq y \right\}$$

gilt $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\} = A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \cup C \cup \omega \cdot (A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \cup C)$.

Es ist $u_{-1}^{\text{tr}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y + 2z \\ z \end{pmatrix}$ und $2x + 2y + 2z \geq y + 2z > 0$, da $2x + y \geq 0$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in C$ ist, also wäre $u_{-1}^{\text{tr}} \cdot C \subset A^+$. Damit ist

$\frac{1}{12} > \mu(C) - \mu(u_{-1}^{\text{tr}} \cdot C) \geq \mu(C) - \mu(A^+)$ und somit $\mu(C) < \frac{1}{6}$. Analog ist $\mu(\omega \cdot C) < \frac{1}{6}$.

Daraus würde also folgen

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \cup C \cup \omega \cdot (A^+ \cup A^- \cup B^+ \cup B^- \cup C)) \\ &< \frac{8}{12} + \frac{2}{6} = 1. \end{aligned}$$

□

Für das Paar $(\text{SL}(2, \mathbf{Z}) \rtimes S^2(\mathbf{Z}^2), S^2(\mathbf{Z}^2))$ ist es nun möglich eine untere Schranke der relativen Kazhdan-Konstante zu bestimmen.

2.7.4 Satz. Seien $u_{\pm 1}, u_{\pm 1}^{\text{tr}} \in \text{SL}(2, \mathbf{Z})$ die elementaren Matrizen mit ± 1 ober- und unterhalb der Diagonale,

$$\alpha^{\pm} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^{\pm} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in S^2(\mathbf{Z}^2)$$

und Q die Teilmenge von $\text{SL}(2, \mathbf{Z}) \rtimes S^2(\mathbf{Z}^2)$ bestehend aus diesen 10 Elementen. Sei π eine Darstellung von G auf H_{π} die einen $(\frac{1}{26}, Q)$ -invarianten Vektor enthält, dann enthält H_{π} einen nichttrivialen $S^2(\mathbf{Z}^2)$ -invarianten Vektor.

Beweis. Man betrachtet $\pi|_{S^2(\mathbf{Z}^2)}$ und E bezeichne das dazugehörige Spektralmaß. Sei $\varepsilon = \frac{1}{26}$ und es gebe einen (ε, Q) -invarianten Einheitsvektor $\xi \in H_{\pi}$, aber keinen $S^2(\mathbf{Z}^2)$ -invarianten Vektor ungleich 0. Sei μ_{ξ} das zugehörige Maß auf $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^3 \cong \widehat{S^2(\mathbf{Z}^2)}$, wobei $\mu_{\xi}(B) = \langle E(B)\xi, \xi \rangle$. Nach Annahme ist $\mu_{\xi}(\{0\}) = 0$. Man identifiziert $\widehat{S^2(\mathbf{Z}^2)}$ mit $] -1/2, 1/2]^3$, wobei $(x, y, z) \in] -1/2, 1/2]^3$ dem Charakter $\chi(n_1, n_2, n_3) = e^{2\pi i(xn_1 + yn_2 + zn_3)}$ entspricht. Sei $W =] -1/6, 1/6[^3$.

Es gilt $\langle \pi(z)\xi, \xi \rangle = \int \chi(z) d\mu_{\xi}(\chi)$ für $z \in S^2(\mathbf{Z}^2)$. Mit der Identifikation von $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^3$ und $] -1/2, 1/2]^3$ ist also

$$\begin{aligned} \int_{]-1/2, 1/2]^3} |e^{\pm 2\pi i x} - 1|^2 d\mu_{\xi}(x, y, z) &= \|\pi(\alpha^{\pm})\xi - \xi\|^2 \leq \varepsilon^2, \\ \int_{]-1/2, 1/2]^3} |e^{\pm 2\pi i y} - 1|^2 d\mu_{\xi}(x, y, z) &= \|\pi(\beta^{\pm})\xi - \xi\|^2 \leq \varepsilon^2, \\ \int_{]-1/2, 1/2]^3} |e^{\pm 2\pi i z} - 1|^2 d\mu_{\xi}(x, y, z) &= \|\pi(\gamma^{\pm})\xi - \xi\|^2 \leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Da $|e^{\pm 2\pi it} - 1| = |e^{\pi it} - e^{-\pi it}| = 2|\sin(\pi t)| \geq 1$ für $1/6 \leq |t| \leq 1/2$, folgt

$$\begin{aligned}\mu_\xi(\{(x, y, z) : |x| \geq 1/6\}) &\leq \varepsilon^2, \\ \mu_\xi(\{(x, y, z) : |y| \geq 1/6\}) &\leq \varepsilon^2, \\ \mu_\xi(\{(x, y, z) : |z| \geq 1/6\}) &\leq \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Also ist $\mu_\xi(W) \geq 1 - 3\varepsilon^2$.

Für alle meßbaren $B \subset (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^3$ und $g \in \{u_{\pm 1}, u_{\pm 1}^{\text{tr}}\}$ gilt

$$|\mu_\xi(gB) - \mu_\xi(B)| \leq 2\varepsilon,$$

denn:

$$\begin{aligned}& |\mu_\xi(gB) - \mu_\xi(B)| \\ &= |\langle \pi(g) E(B) \pi(g^{-1}) \xi, \xi \rangle - \langle E(B) \xi, \xi \rangle| \\ &\leq |\langle \pi(g) E(B) \pi(g^{-1}) \xi, \xi \rangle - \langle \pi(g) E(B) \xi, \xi \rangle| \\ &\quad + |\langle \pi(g) E(B) \xi, \xi \rangle - \langle E(B) \xi, \xi \rangle| \\ &= |\langle \pi(g) E(B) (\pi(g^{-1}) \xi - \xi), \xi \rangle| + |\langle E(B) \xi, (\pi(g^{-1}) \xi - \xi) \rangle| \\ &\leq \|\pi(g) E(B)\| \|\pi(g^{-1}) \xi - \xi\| + \|E(B)\| \|\pi(g^{-1}) \xi - \xi\| \leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Nun sei μ^W auf $] -1/2, 1/2[$ definiert durch $\mu^W(B) = \mu_\xi(B \cap W)$, dann folgt $0 \leq \mu_\xi(B) - \mu^W(B) \leq 3\varepsilon^2$.

Für die Borel-Mengen B und $g \in \{u_{\pm 1}, u_{\pm 1}^{\text{tr}}\}$ gilt nun

$$\begin{aligned}& \mu^W(gB) - \mu^W(B) \\ &= \mu^W(gB) - \mu_\xi(gB) + \mu_\xi(gB) - \mu_\xi(B) + \mu_\xi(B) - \mu^W(B) \\ &\leq 0 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Sei $\mu = (\mu^W(W))^{-1} \mu^W$, dann gilt für jedes meßbare B und $g \in \{u_{\pm 1}, u_{\pm 1}^{\text{tr}}\}$

$$|\mu(gB) - \mu(B)| \leq \frac{2\varepsilon + 3\varepsilon^2}{1 - 3\varepsilon^2} = \frac{55}{673} < \frac{1}{12}.$$

Da für jedes solche g gilt $gW \subset] -1/2, 1/2[$, kann man μ als Maß auf \mathbf{R}^3 betrachten und erhält so einen Widerspruch zu Lemma 2.7.3. \square

Nun folgt die Untersuchung der Struktur der dualen Gruppe $\widehat{R[t]}$ für einen diskreten Ring R wie in [44]. Sei R ein diskreter Ring betrachtet als abelsche Gruppe und \widehat{R} die duale Gruppe, also die Menge aller Charaktere. Man identifiziert nun \mathbf{T} mit \mathbf{R}/\mathbf{Z} und betrachtet Charaktere $\chi : R \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ mit $\chi(r+s) = \chi(r) + \chi(s)$. Da R diskret ist, ist \widehat{R} kompakt in der Topologie der punktweisen Konvergenz. Für einen Beweis siehe z. B. [22, Seite 89]. Es konvergiert also $\chi_k \rightarrow \psi$, falls $\chi_k(r) \rightarrow \psi(r)$ für alle $r \in R$.

Sei X die Gruppe der formalen Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} \chi_k t^{-k}$, $\chi_k \in \widehat{R}$, dann ist X eine abelsche Gruppe. Man versieht X mit der Produkttopologie bezüglich der Identifikation $X \cong \prod_{k=0}^{\infty} \widehat{R}$. Dadurch wird X kompakt.

Man bettet X in $\widehat{R[t]}$ ein durch $\chi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(r_k) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, wobei $\chi = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k t^{-k}$ mit $\chi_k \in \widehat{R}$ und $r = \sum_{k=0}^{\infty} r_k t^k \in R[t]$. Bei r sind nur endlich viele $r_k \neq 0$.

2.7.5 Lemma. Die Abbildung von $X \rightarrow \widehat{R[t]}$ ist ein topologischer Gruppenisomorphismus.

Beweis. Falls $\chi(r) = 0$ ist für alle $r \in R[t]$, so gilt $\chi_k(r_k) = 0$, indem man $r = r_k t^k$ wählt. Also ist $\chi_k = 0$ für alle $k \geq 0$. Die Abbildung ist auch stetig, denn konvergiert $\chi^{(j)} \rightarrow 0$ in X , so gilt $\chi^{(j)}(r) \rightarrow 0$ für $j \rightarrow \infty$ und alle $r \in R$. Also ist das Bild von X in $\widehat{R[t]}$ kompakt und damit abgeschlossen. Unter Verwendung der Pontrjagin-Dualität reicht es zu zeigen, daß aus $\chi(r) = 0$ für alle $\chi \in X$ für ein $r \in R[t]$ schon $r = 0$ folgt, da dann das Bild dicht ist. Denn falls $r = \sum_{k=0}^{\infty} r_k t^k$ und für alle $\chi = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k t^{-k}$ gilt $\chi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(r_k) = 0$, dann gilt notwendigerweise $r_k = 0$. Da das für alle $k \geq 0$ gilt, ist $r = 0$. \square

Also ist es möglich den Dual $\widehat{R[t]}$ mit X zu identifizieren. Im folgenden ist es einfacher mit einer größeren Gruppe \tilde{X} zu arbeiten. Dabei soll \tilde{X} alle formalen Reihen $\sum_{k=m}^{\infty} \chi_k t^{-k}$ mit $m \in \mathbf{Z}$ beinhalten. Der Vorteil dabei ist, daß ein Element aus \tilde{X} multipliziert mit t wieder in \tilde{X} liegt. Die Gruppe X kann man wieder in \tilde{X} einbetten. Man erhält einen Endomorphismus von \tilde{X} auf $\widehat{R[t]}$ wie oben für X . Dabei ist $\chi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(r_k)$ wie oben. Man identifiziert nun $\widehat{R[t]}$ mit \tilde{X} , indem zwei Elemente χ und ψ als gleich betrachtet werden, falls $\chi_k = \psi_k$ für alle $k \geq 0$.

Folgendes Lemma ist das zu 2.7.3 analoge Lemma für $R[t]$.

2.7.6 Lemma. Sei R ein diskreter Ring und μ ein Mittel definiert auf den Borel-Mengen von $\tilde{X}^3 \setminus \{0\}$. Sei Q eine endliche Teilmenge von $\text{SL}(2, R[t])$ mit $u_{\pm 1}, u_{\pm t}, u_{\pm 1}^{\text{tr}}, u_{\pm t}^{\text{tr}} \in Q$, dann gibt es ein $g \in Q$ und eine Borel-Menge $W \subset \tilde{X}^3 \setminus \{0\}$ mit $|\mu(gW) - \mu(W)| \geq \frac{1}{34}$.

Beweis. Für ein Element $\chi = \sum_{n=m}^{\infty} \chi_n t^{-n}$ definiert man $v(\chi) = m$, falls $\chi_m \neq 0$, dann gilt $v(t\chi) = v(\chi) - 1$ und $v(\chi + \psi) \geq \min\{v(\chi), v(\psi)\}$, wobei für $v(\chi) \neq v(\psi)$ sogar Gleichheit gilt. Im Fall $\chi = 0$ sei $v(\chi) = \infty$; im folgenden sei $\infty - \infty = 0$ und $\text{sgn}(\infty) = 1$, $\text{sgn}(-\infty) = -1$.

Sei nun

$$A_{s_1, s_2} = \left\{ \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \in \tilde{X}^3 \setminus \{0\} : \begin{array}{l} \text{sgn}(v(2\chi_1) - v(\chi_2)) = s_1 \\ \text{sgn}(v(\chi_2) - v(2\chi_3)) = s_2 \end{array} \right\},$$

dann gilt $u_{-1}^{\text{tr}} \cdot (A_{-1,1} \cup A_{0,1} \cup A_{1,1}) \subset A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0}$, da

$$u_{-1}^{\text{tr}} \cdot \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \\ \chi_2 + 2\chi_3 \\ \chi_3 \end{pmatrix}$$

und $v(2\chi_3) < v(\chi_2)$, also $v(\chi_2 + 2\chi_3) = v(2\chi_3)$ ist. Da gilt

$$u_{-t}^{\text{tr}} \cdot \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1 + t\chi_2 + t^2\chi_3 \\ \chi_2 + 2t\chi_3 \\ \chi_3 \end{pmatrix},$$

ist $u_{-t}^{\text{tr}} \cdot (A_{1,1} \cup A_{1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{0,1}) \subset A_{-1,-1}$. Denn es gilt $v(2t\chi_3) < v(\chi_2)$ und $v(t\chi_2) < v(2\chi_1)$, also ist $v(\chi_2 + 2t\chi_3) < v(2\chi_3)$ und $v(t\chi_2 + 2t^2\chi_3) < v(2\chi_1 + t\chi_2)$ und damit $v(2(\chi_1 + t\chi_2 + t^2\chi_3)) < v(\chi_2 + 2t\chi_3)$. Analog gilt $u_{-t} \cdot (A_{-1,-1} \cup A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{0,-1}) \subset A_{1,1}$ und $u_{-1} \cdot (A_{1,-1} \cup A_{1,0} \cup A_{1,1}) \subset A_{0,-1} \cup A_{0,0} \cup A_{0,1}$. Sei $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$u_{-1} u_1^{\text{tr}} u_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \omega$$

und es ist jeweils $\omega \cdot A_{s_1, s_2} = A_{-s_2, -s_1}$, da

$$\omega \cdot \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_3 \\ -\chi_2 \\ \chi_1 \end{pmatrix}.$$

Angenommen es gibt kein g und W mit $|\mu(W) - \mu(gW)| \geq \frac{1}{34}$, so gilt

$$\begin{aligned} \mu(A_{1,1} \cup A_{0,1} \cup A_{-1,1}) &< \frac{1}{34} + \mu(A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0}), \\ \mu(A_{1,1} \cup A_{0,1} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0}) &< \frac{1}{34} + \mu(A_{-1,-1}), \\ \mu(A_{-1,-1} \cup A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{0,-1}) &< \frac{1}{34} + \mu(A_{1,1}), \\ \mu(A_{1,-1} \cup A_{1,0} \cup A_{1,1}) &< \frac{1}{34} + \mu(A_{0,-1} \cup A_{0,0} \cup A_{0,1}), \\ \mu(A_{s_1, s_2}) &< \frac{3}{34} + \mu(A_{-s_2, -s_1}), \end{aligned}$$

da $\omega = u_{-1}u_1^{\text{tr}}u_{-1}$ ist, und damit erhält man

$$\begin{aligned} \mu(A_{0,1} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0}) &= \mu(A_{1,1} \cup A_{0,1} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0}) - \mu(A_{1,1}) \\ &< \frac{1}{34} + \mu(A_{-1,-1}) - \mu(A_{1,1}) < \frac{2}{17}, \\ \mu(A_{-1,0} \cup A_{0,-1}) &\leq \mu(A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{0,-1}) \\ &= \mu(A_{-1,-1} \cup A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{0,-1}) - \mu(A_{-1,-1}) \\ &< \frac{1}{34} + \mu(A_{1,1}) - \mu(A_{-1,-1}) < \frac{2}{17}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mu(A_{-1,1}) &\leq \mu(A_{0,1} \cup A_{-1,1}) \leq \mu(A_{1,1} \cup A_{0,1} \cup A_{-1,1}) - \mu(A_{1,1}) \\ &< \frac{1}{34} + \mu(A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0}) - \mu(A_{1,1}) \\ &= \frac{1}{34} + \mu(A_{-1,0} \cup A_{0,0}) + \mu(A_{1,0}) - \mu(A_{1,1}) \\ &< \frac{2}{17} + \mu(A_{-1,0} \cup A_{0,0}) + \mu(A_{0,-1}) - \mu(A_{1,1}) \\ &= \frac{2}{17} + \mu(A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{0,-1}) - \mu(A_{1,1}) \\ &\leq \frac{2}{17} + \mu(A_{-1,-1} \cup A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{0,-1}) - \mu(A_{1,1}) \\ &< \frac{5}{34} \end{aligned}$$

und analog $\mu(A_{1,-1}) < \frac{5}{34}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu(A_{1,1}) &\leq \mu(A_{1,1} \cup A_{0,1} \cup A_{-1,1}) < \frac{1}{34} + \mu(A_{-1,0} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0}) \\ &= \frac{1}{34} + \mu(A_{-1,0}) + \mu(A_{0,0} \cup A_{1,0}) \\ &< \frac{2}{17} + \mu(A_{0,1}) + \mu(A_{0,0} \cup A_{1,0}) = \frac{2}{17} + \mu(A_{0,1} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0}) \\ &< \frac{4}{17} \end{aligned}$$

und analog $\mu(A_{-1,-1}) < \frac{4}{17}$. Mit

$$\begin{aligned} &\mu(A_{0,1} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0} \cup A_{-1,0} \cup A_{0,-1} \cup A_{-1,1} \cup A_{1,-1} \cup A_{1,1} \cup A_{-1,-1}) \\ &= \mu(A_{0,1} \cup A_{0,0} \cup A_{1,0}) + \mu(A_{-1,0} \cup A_{0,-1}) + \mu(A_{-1,1}) + \mu(A_{1,-1}) \\ &\quad + \mu(A_{1,1}) + \mu(A_{-1,-1}) \\ &< \frac{4}{17} + \frac{5}{17} + \frac{8}{17} = 1 \end{aligned}$$

erhält man einen Widerspruch. \square

Unter Verwendung des letzten Lemmas erhält man eine untere Schranke der relativen Kazhdan-Konstante von $(\mathrm{SL}(2, R[t]) \times S^2((R[t])^2), S^2((R[t])^2))$ aus der unteren Schranke für $(\mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2), S^2(R^2))$. Dies wird im Induktionsschritt im Beweis von Satz 2.7.8 benutzt, um eine untere Schranke für $(\mathrm{SL}(2, R_m) \times S^2(R_m^2), S^2(R_m^2))$ zu bestimmen, wobei R_m der Ring der Polynome über \mathbf{Z} in m Variablen ist.

2.7.7 Satz. Sei R ein diskreter Ring. Für ein $\varepsilon > 0$ und eine endliche Menge $Q \subset \mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2)$ bilde ε eine untere Schranke für die relative Kazhdan-Konstante bezüglich Q und Q enthalte die vier elementaren Matrizen von $\mathrm{SL}(2, R)$ mit ± 1 außerhalb der Diagonale. Der Ring R sei kanonisch eingebettet in $R[t]$, wodurch man eine Einbettung von $\mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2)$ in $\mathrm{SL}(2, R[t]) \times S^2((R[t])^2)$ erhält.

Sei $0 < \delta < \varepsilon/\sqrt{2}$ so, daß $(\delta + 4\delta/\varepsilon) / (1 - \sqrt{2}\delta/\varepsilon) \leq \frac{1}{68}$, dann ergibt δ bezüglich Q_t eine untere Schranke der relativen Kazhdan-Konstante des Paares $(\mathrm{SL}(2, R[t]) \times S^2((R[t])^2), S^2((R[t])^2))$, wobei Q_t die Vereinigung von Q mit der Menge der vier elementaren Matrizen in $\mathrm{SL}(2, R[t])$ mit $\pm t$ außerhalb der Diagonale und allen Elementen aus Q , bei denen der $S^2(R^2)$ -Anteil jeweils mit t multipliziert wird.

Beweis. Das semidirekte Produkt $\mathrm{SL}(2, R) \ltimes S^2((Rt)^2)$ ist isomorph zu $\mathrm{SL}(2, R) \ltimes S^2(R^2)$. Sei Q' die Q entsprechende Menge, wobei jeweils der $S^2(R^2)$ -Anteil mit t multipliziert ist, dann ist ε eine untere Schranke der relativen Kazhdan-Konstante von $(\mathrm{SL}(2, R) \ltimes S^2((Rt)^2), S^2((Rt)^2))$ bezüglich Q' .

Sei nun π eine Darstellung von $\mathrm{SL}(2, R[t]) \ltimes S^2((R[t])^2)$ auf H_π , $\xi \in H_\pi$ ein Einheitsvektor, der (δ, Q_t) -invariant ist, $H_0 \subset H_\pi$ der Raum der $S^2((R + Rt)^2)$ -invarianten Vektoren und H_1 das orthogonale Komplement von H_0 im Raum der $S^2(R^2)$ -invarianten Vektoren, H_2 das orthogonale Komplement von H_0 im Raum der $S^2((Rt)^2)$ -invarianten Vektoren und H_3 das orthogonale Komplement zu $H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$ in H_π , dann ist $H_0 \oplus H_1$ und $H_2 \oplus H_3$ invariant unter $\mathrm{SL}(2, R) \ltimes S^2(R^2)$ und $H_0 \oplus H_2$ und $H_1 \oplus H_3$ invariant unter $\mathrm{SL}(2, R) \ltimes S^2((Rt)^2)$. Damit hat man die entsprechende orthogonale Zerlegung $\xi = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$. Also gilt

$$\begin{aligned} \delta^2 &\geq \|\pi(g)\xi - \xi\|^2 \\ &= \|\pi(g)(\xi_0 + \xi_1) - (\xi_0 + \xi_1)\|^2 + \|\pi(g)(\xi_2 + \xi_3) - (\xi_2 + \xi_3)\|^2 \end{aligned}$$

für alle $g \in Q$ und entsprechend

$$\delta^2 \geq \|\pi(g)(\xi_0 + \xi_2) - (\xi_0 + \xi_2)\|^2 + \|\pi(g)(\xi_1 + \xi_3) - (\xi_1 + \xi_3)\|^2$$

für alle $g \in Q'$. Da es in $H_2 \oplus H_3$ keine $S^2(R^2)$ -invarianten Vektoren gibt, gibt es ein $g_1 \in Q$ mit $\varepsilon \|\xi_2 + \xi_3\| \leq \|\pi(g_1)(\xi_2 + \xi_3) - (\xi_2 + \xi_3)\| \leq \delta$. Also ist $\|\xi_2 + \xi_3\| \leq \delta/\varepsilon$. Genauso gibt es ein $g_2 \in Q'$ derart, daß $\varepsilon \|\xi_1 + \xi_3\| \leq \|\pi(g_2)(\xi_1 + \xi_3) - (\xi_1 + \xi_3)\| \leq \delta$. Also ist auch $\|\xi_1 + \xi_3\| \leq \delta/\varepsilon$ und damit

$$\|\xi_0\|^2 = \|\xi\|^2 - \|\xi_1 + \xi_3\|^2 - \|\xi_2 + \xi_3\|^2 + \|\xi_3\|^2 \geq 1 - 2(\delta/\varepsilon)^2,$$

$$\text{d. h. } \|\xi_0\| \geq \sqrt{(1 - \sqrt{2}\delta/\varepsilon)(1 + \sqrt{2}\delta/\varepsilon)} > 1 - \sqrt{2}\delta/\varepsilon.$$

Für alle $g \in Q_t$ ist

$$\begin{aligned} \|\pi(g)\xi_0 - \xi_0\| &\leq \|\pi(g)\xi - \xi\| + 2\|\xi_1 + \xi_2 + \xi_3\| \\ &\leq \delta + \|\xi_1 + \xi_2\| + \|\xi_2 + \xi_3\| + \|\xi_1 + \xi_3\| \leq \delta + 4\delta/\varepsilon. \end{aligned}$$

Für $\eta = \xi_0/\|\xi_0\|$ folgt also

$$\|\pi(g)\eta - \eta\| < \frac{\delta + 4\delta/\varepsilon}{1 - \sqrt{2}\delta/\varepsilon} \leq \frac{1}{68}$$

für alle $g \in Q_t$ nach der Wahl von δ .

Sei E das zur Einschränkung von π auf $S^2((R[t])^2)$ gehörige Spektralmaß auf der dualen Gruppe von $S^2((R[t])^2)$ und $\mu_\eta(B) = \langle E(B)\eta, \eta \rangle$ definiert auf $X^3 \cong S^2(\widehat{(R[t])^2})$, dann ist $(t^{-2}X)^3$ der Träger von μ_η . Gäbe es keine $S^2((R[t])^2)$ -invarianten Vektoren in H_π , so wäre $\mu_\eta(\{0\}) = 0$.

Wie im Beweis zu Satz 2.7.4 folgt aus der $\frac{1}{68}$ -Invarianz von η , daß für alle meßbaren $B \subset X^3$ gilt $|\mu_\eta(gB) - \mu_\eta(B)| < \frac{1}{34}$. Da $gB \subset X^3$ für $B \subset (t^{-2}X)^3$ und $g \in \{u_{\pm 1}, u_{\pm 1}^{\text{tr}}, u_{\pm t}, u_{\pm t}^{\text{tr}}\}$, ergibt dies jedoch einen Widerspruch zu Lemma 2.7.6. \square

2.7.8 Satz. Sei $m \geq 0$, R_m der Ring $\mathbf{Z}[x_1, \dots, x_m]$ der Polynome über \mathbf{Z} in m Variablen. Sei $Q \subset \text{SL}(2, R_m) \rtimes S^2(R_m^2)$ die Teilmenge bestehend aus $\alpha^\pm x_{j_1} \cdots x_{j_k}, \beta^\pm x_{j_1} \cdots x_{j_k}, \gamma^\pm x_{j_1} \cdots x_{j_k} \in S^2(R_m^2)$, $0 \leq k \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m$, und den $4(m+1)$ elementaren Matrizen in $\text{SL}(2, R_m)$ mit $\pm 1, \pm x_1, \dots, \pm x_m$ auf der Nebendiagonale, dann enthält jede Darstellung von $\text{SL}(2, R_m) \rtimes S^2(R_m^2)$ mit einem $(2 \times 274^{-m-2}, Q)$ -invarianten Vektor einen $S^2(R_m^2)$ -invarianten Vektor ungleich 0.

Beweis. Der Fall $m = 0$ folgt aus Satz 2.7.4. Danach folgt mit Induktion und Satz 2.7.7 die Behauptung. Denn es gilt

$$\frac{\delta + 4\delta/\varepsilon}{1 - \sqrt{2}\delta/\varepsilon} = \frac{2 \times 274^{-m-2} + 4}{274 - \sqrt{2}} \leq \frac{2 \times 274^{-2} + 4}{274 - \sqrt{2}} < \frac{1}{68}$$

für $\varepsilon = 2 \times 274^{-m-2}$ und $\delta = 2 \times 274^{-m-3}$. \square

Der folgende Korollar liefert nun eine untere Schranke des Durchmessers der Bahn des $S^2(R^2)$ -Anteils.

2.7.9 Korollar. Sei R ein topologischer kommutativer Ring mit Eins. Es gebe $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in R$, die einen dichten Unterring $D \subset R$ erzeugen. Sei $Q \subset \text{SL}(2, R) \rtimes S^2(R^2)$ die Teilmenge aus Satz 2.7.8, wobei α_j jeweils die Variable x_j ersetzt. Für eine unitäre Darstellung π von $G = \text{SL}(2, R) \rtimes S^2(R^2)$ auf H_π und einen Einheitsvektor $\xi \in H_\pi$, der $(274^{-m-2}\varepsilon, Q)$ -invariant ist für ein $\varepsilon > 0$, gilt $\|\pi(g)\xi - \xi\| \leq \varepsilon$ für jedes $g \in S^2(R^2)$.

Beweis. Die Abbildung von $1, x_1, \dots, x_m \in R_m$ auf $1, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in D \subset R$ ist kanonisch zu einem Ringepimorphismus fortsetzbar, der einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : \mathrm{SL}(2, R_m) \times S^2(R_m^2) \rightarrow \mathrm{SL}(2, D) \times S^2(D^2) \subset \mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2)$$

induziert.

Sei $H_0 \subset H_\pi$ der Teilraum der $S^2(R^2)$ -invarianten Vektoren und $H_1 \subset H_\pi$ sein orthogonales Komplement, dann gibt es zu $\xi \in H_\pi$ eindeutige $\xi_0 \in H_0$ und $\xi_1 \in H_1$ mit $\xi = \xi_0 + \xi_1$. Da D dicht in R liegt, gibt es keine nichttrivialen $S^2(D^2)$ -invarianten Vektoren für die Darstellung π auf H_1 und somit auch für die Darstellung $\pi \circ \Phi$ der Gruppe $\mathrm{SL}(2, R_m) \times S^2(R_m^2)$. Also folgt aus Satz 2.7.8, daß es ein $g_0 \in Q$ gibt, für das $2 \times 274^{-m-2} \|\xi_1\| \leq \|\pi(g_0)\xi_1 - \xi_1\|$ ist. Andererseits gilt nach Annahme

$$\begin{aligned} \|\pi(g_0)\xi_0 - \xi_0\|^2 + \|\pi(g_0)\xi_1 - \xi_1\|^2 &= \|\pi(g_0)\xi - \xi\|^2 \\ &\leq (274^{-m-2}\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

und somit $2 \times 274^{-m-2} \|\xi_1\| \leq 274^{-m-2}\varepsilon$ oder $\|\xi_1\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Schließlich ergibt die Invarianz des Vektors ξ_0 unter $S^2(R^2)$, daß für alle $g \in S^2(R^2)$ gilt $\|\pi(g)\xi - \xi\| = \|\pi(g)\xi_1 - \xi_1\| \leq 2\|\xi_1\| \leq \varepsilon$. \square

Um nun eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante von $\mathrm{Sp}(n, R)$ bestimmen zu können, sind noch zwei Aussagen nötig. Die erste zeigt, daß es möglich ist zu einer elementaren symplektischen Matrix eine zu $\mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2)$ isomorphe Untergruppe zu finden derart, daß diese Matrix im Normalteiler $S^2(R^2)$ enthalten ist. Die zweite gibt eine Bedingung an den Durchmesser der Bahn $\pi(G)\xi$ einer Darstellung π an für die Existenz eines invarianten Vektors. Hier spielen wieder die Untergruppen $G_{j,k}$ und $\tilde{G}_{j,k}$ eine Rolle. Diese zu $\mathrm{SL}(2, R)$ isomorphen Untergruppen sind definiert wie für einen Körper. Dabei ist $\tilde{G}_{j,k}$ die zu $\mathrm{SL}(2, R)$ isomorphe Untergruppe bestehend aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{\mathrm{tr}-1} \end{pmatrix}$$

mit $g = I + (a-1)E_{j,j} + bE_{j,k} + cE_{k,j} + (d-1)E_{k,k}$ und $ad - bc = 1$ und $G_{j,k}$ bestehend aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} I + (a-1)(E_{j,j} + E_{k,k}) & b(E_{j,k} + E_{k,j}) \\ c(E_{j,k} + E_{k,j}) & I + (d-1)(E_{j,j} + E_{k,k}) \end{pmatrix}$$

mit $ad - bc = 1$.

2.7.10 Lemma. Sei $n \geq 2$, dann gibt es zu jeder elementaren symplektischen Matrix in $\mathrm{Sp}(n, R)$ ein Exemplar einer zu $S^2(R^2)$ isomorphen Untergruppe, die kanonisch in einem zu $\mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2)$ isomorphen semidirekten Produkt enthalten ist. Dabei ist der $\mathrm{SL}(2, R)$ -Anteil gerade ein $\tilde{G}_{k, k+1}$ oder ein $G_{k, k+1}$ mit $1 \leq k \leq n-1$.

Beweis. Für $n = 2$ gibt es vier natürliche Einbettungen von $\mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2)$, wobei die Vereinigung der $S^2(R^2)$ -Anteile jede elementare symplektische Matrix enthält. Die Untergruppen bestehen aus folgenden Matrizen mit $x, y, z \in R$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & y & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & y & 1 & 0 \\ y & z & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & -y & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 & z \\ x & 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Induktion folgt nun durch Einbettungen von $\mathrm{Sp}(n-1, R)$ in $\mathrm{Sp}(n, R)$ die Behauptung. \square

Für eine allgemeinere Version des folgenden siehe [26, Seite 37].

2.7.11 Lemma. Sei π eine Darstellung von G auf H_π und für einen Einheitsvektor $\xi \in H_\pi$ sei $\|\pi(g)\xi - \xi\| \leq 1$ für alle $g \in G$, dann gibt es einen G -invarianten Einheitsvektor in H_π .

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\eta - \zeta_1\|^2 + \|\eta - \zeta_2\|^2 &= 2\|\eta\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle \eta, \zeta_1 + \zeta_2 \rangle + \|\zeta_1\|^2 + \|\zeta_2\|^2 \\ &= 2\left\| \eta - \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) \right\|^2 + \frac{1}{2}\|\zeta_1 - \zeta_2\|^2 \end{aligned}$$

für alle $\eta, \zeta_1, \zeta_2 \in H_\pi$. Sei $f(\zeta) = \sup_{\eta \in \pi(G)\xi} \|\eta - \zeta\|$, dann ist

$$\frac{1}{2}\|\zeta_1 - \zeta_2\|^2 \leq (f(\zeta_1))^2 + (f(\zeta_2))^2 - 2\left\| \eta - \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2) \right\|^2.$$

Dies gilt für alle $\eta \in \pi(G)\xi$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\zeta_1 - \zeta_2\|^2 &\leq (f(\zeta_1))^2 + (f(\zeta_2))^2 - 2 \left(f \left(\frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2) \right) \right)^2 \\ &\leq (f(\zeta_1))^2 + (f(\zeta_2))^2 - 2r^2, \end{aligned}$$

wobei $r = \inf_{\zeta \in H_\pi} f(\zeta)$.

Sei $(\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in H_π so, daß $(f(\zeta_j))_{j \in \mathbb{N}}$ gegen r konvergiert, dann ist $(\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in H_π . Also gibt es einen Grenzwert $\zeta_0 \in H_\pi$ und dieser ist unabhängig von der Wahl der Folge. Da $f(0) = 1$ und $f(\xi) \leq 1$, kann 0 nicht der eindeutige Vektor sein, für den f minimal ist. Also ist $\zeta_0 \neq 0$. Aus der Eindeutigkeit folgt auch, daß ζ_0 invariant unter $\pi(G)$ ist. \square

Nun ist es möglich eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante für einen topologischen Ring R zu bestimmen, der einen dichten endlicherzeugten Unterring enthält und für den $\mathrm{Sp}(n, R)$ beschränkt elementar erzeugt ist.

2.7.12 Satz. Sei $n \geq 2$, R ein kommutativer topologischer Ring mit Eins und $\nu_n(R) < \infty$. Für $1 \leq m < \infty$ gebe es Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in R$, die einen dichten Unterring erzeugen. Sei $Q_1 \subset \mathrm{Sp}(n, R)$ die Menge der elementaren symplektischen Matrizen mit 1 außerhalb der Diagonale und Q_2 die Menge der elementaren symplektischen Matrizen $a_{k,k+1}(\alpha_r)$ mit $1 \leq k \leq n-1$ und $1 \leq r \leq m$ und der elementaren symplektischen Matrizen $b_{j,k}(\alpha_{r_1} \cdots \alpha_{r_p})$, $c_{j,k}(\alpha_{r_1} \cdots \alpha_{r_p})$ mit $1 \leq j, k \leq n$, $0 \leq p \leq m$ und $1 \leq r_1 < \dots < r_p \leq m$, dann ist $\mathrm{Sp}(n, R)$ eine Kazhdan-Gruppe mit $\varepsilon = 274^{-m-2} (\nu_n(R))^{-1}$ als unterer Schranke der Kazhdan-Konstante für die Menge $Q_1 \cup Q_2$. Gibt es in jeder Umgebung der $0 \in R$ solche $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ für festes m , dann ist Q_1 eine Kazhdan-Menge für $\mathrm{Sp}(n, R)$ mit derselben unteren Schranke der Kazhdan-Konstante.

Beweis. Da $\|\pi(h)\xi - \xi\| = \|\pi(h^{-1})\xi - \xi\|$ ist, genügt es die Aussage zu zeigen, wenn Q symmetrisch ist. Man ersetzt also Q durch $Q \cup Q^{-1}$. Sei nun $\xi \in H_\pi$ ein $(274^{-m-2} (\nu_n(R))^{-1}, Q)$ -invarianter Vektor und $h \in \mathrm{Sp}(n, R)$ eine elementare symplektische Matrix, dann gibt es nach Lemma 2.7.10 eine zu $\mathrm{SL}(2, R) \times S^2(R^2)$ isomorphe Untergruppe so, daß $h \in S^2(R^2)$ ist. Nach Korollar 2.7.9 ist also $\|\pi(h)\xi - \xi\| \leq (\nu_n(R))^{-1}$.

Sei $\nu = \nu_n(R)$, $g \in \mathrm{Sp}(n, R)$ und $g = g_0 g_1 \cdots g_\nu$, wobei $g_0 = I$ und g_1, \dots, g_ν elementare symplektische Matrizen sind, dann gilt

$$\pi(g)\xi - \xi = \sum_{j=0}^{\nu-1} \pi(g_0 g_1 \cdots g_{\nu-j})\xi - \pi(g_0 g_1 \cdots g_{\nu-j-1})\xi$$

und

$$\begin{aligned} \|\pi(g)\xi - \xi\| &\leq \sum_{j=0}^{\nu-1} \|\pi(g_0 g_1 \cdots g_{\nu-j})\xi - \pi(g_0 g_1 \cdots g_{\nu-j-1})\xi\| \\ &= \sum_{j=0}^{\nu-1} \|\pi(g_{\nu-j})\xi - \xi\| \leq \nu\nu^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.7.11 gibt es also einen G -invarianten Vektor $\neq 0$.

Sei π eine Darstellung von $\mathrm{Sp}(n, R)$ auf H_π ohne nichttriviale invariante Vektoren, $\xi \in H_\pi$ ein Einheitsvektor und U eine Umgebung der $0 \in R$ so, daß $\|\pi(g(t))\xi - \xi\| < \varepsilon = 274^{-m-2} (\nu_n(R))^{-1}$ ist für jede elementare symplektische Matrix $g(t)$ mit $t \in U$, dann gibt es ein $g \in Q_1$ mit $\|\pi(g)\xi - \xi\| \geq \varepsilon$. \square

Nun ist noch zu zeigen, daß $\mathrm{Sp}(n, R)$ für den Ring R aller stetigen Funktionen von \mathbf{T} nach \mathbf{C} beschränkt elementar erzeugt ist. Dazu benötigen wir noch folgendes Lemma.

2.7.13 Lemma. Seien $f, \tilde{f} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$ zwei stetige Funktionen mit keiner gemeinsamen Nullstelle. Dann gibt es eine stetige Funktion $\Phi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T} \subset \mathbf{C}$ derart, daß $\tilde{f} + \Phi f$ keine Nullstelle besitzt.

Beweis. Sei $A = \left\{ x \in \mathbf{T} : |f(x)| = \left| \tilde{f}(x) \right| \right\}$, dann ist A abgeschlossen. Sei $\Phi(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{f(x)} \in \mathbf{T}$ für $x \in A$. Falls $A \neq \mathbf{T}$ ist, gibt es eine stetige Funktion $\tilde{\Phi} : A \rightarrow \mathbf{R}$ derart, daß $\Phi(x) = \exp(i\tilde{\Phi}(x))$ für $x \in A$ gilt. Da A kompakt und $\tilde{\Phi}$ stetig ist, ist auch $\tilde{\Phi}(A)$ kompakt und insbesondere in einem beschränkten Intervall $[a, b]$ enthalten. Nun läßt sich $\tilde{\Phi}$ und damit Φ auf ganz \mathbf{T} stetig fortsetzen nach einer allgemeineren Version des Lemmas von Urysohn. Für einen Beweis siehe z. B. [43, Seite 80].

Mit diesem Φ ist $\tilde{f}(x) + \Phi(x)f(x) \neq 0$, denn es ist $|f(x)| \neq |\tilde{f}(x)|$ für $x \notin A$ und somit $|\tilde{f}(x) + \Phi(x)f(x)| \geq \left| |f(x)| - |\tilde{f}(x)| \right| > 0$. Für $x \in A$ ist $\tilde{f}(x) + \Phi(x)f(x) = 2\tilde{f}(x) \neq 0$. \square

Nun ist es möglich eine Abschätzung für $\nu_n(R)$ zu zeigen.

2.7.14 Satz. Für $n \geq 2$ gilt $\nu_n(R) \leq 3n^2 + 4n$.

Beweis. Sei $g \in \text{Sp}(n, R)$ beliebig, R der Ring der stetigen Funktionen $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$ und (f_1, \dots, f_{2n}) die erste Spalte der Matrix g , dann haben die Funktionen f_1, \dots, f_{2n} keine gemeinsame Nullstelle, da g invertierbar ist. Also haben insbesondere die Funktionen $\tilde{f} = f_1$ und $f = |f_2|^2 + \dots + |f_{2n}|^2$ keine gemeinsame Nullstelle. Sei $\Phi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$ wie in Lemma 2.7.13, dann addiert man zur ersten Zeile das $\overline{\Phi f_2}$ -fache der zweiten usw. bis zum $\overline{\Phi f_{2n}}$ -fachen der letzten Zeile. Nach diesen $2n - 1$ Operationen ist der Eintrag in der ersten Zeile und ersten Spalte eine Funktion ohne Nullstelle. Weitere vier Operationen liefern die Funktion, die konstant 1 ist, in diesem Eintrag. Dann wird in $2n - 1$ Operationen jeweils der zweite bis $2n$ -te Eintrag zur Nullfunktion. Für die erste Spalte ergeben sich also insgesamt $4n + 2 = 2(2n - 1) + 4$ Operationen.

Entsprechend erhält man für die nächsten $n - 1$ Spalten je $4(n + 1 - k) + 2$ Operationen in der k -ten Spalte. Insgesamt also $\sum_{k=1}^n (4(n + 1 - k) + 2) = 2n^2 + 4n$. Es bleiben noch $\sum_{k=1}^n (k - 1) = (n^2 - n)/2$ und $\sum_{k=1}^n k = (n^2 + n)/2$ Operationen, siehe den Beweis zu Lemma 2.1.1. Man hat also im gesamten $3n^2 + 4n = 2n^2 + 4n + (n^2 - n)/2 + (n^2 + n)/2$ Operationen. \square

Die Funktionen $x \mapsto x$, $x \mapsto \bar{x}$ und $x \mapsto \sqrt{2} + i$ erzeugen einen dichten Unterring von R , da $\sqrt{2} + i$ einen dichten Unterring von \mathbf{C} erzeugt und nach dem Satz von Stone–Weierstraß, siehe z. B. [12, Seite 145], erzeugt \mathbf{C} mit den beiden anderen Funktionen eine dichte Unteralgebra der stetigen Funktionen auf \mathbf{T} . Daß $\sqrt{2} + i$ einen dichten Unterring erzeugt, sieht man folgendermaßen: Es gilt $(\sqrt{2} + i)^3 = -\sqrt{2} + 5i$ und damit ist $6\sqrt{2}, 6i \in \mathbf{Z}[\sqrt{2} + i]$. Also ist $\mathbf{Z}[6\sqrt{2}, 6i] \subset \mathbf{Z}[\sqrt{2} + i]$ und $\mathbf{Z}[6\sqrt{2}, 6i]$ ist dicht in \mathbf{C} . Wählt man die Funktionen $x \mapsto n^{-1}x$, $x \mapsto n^{-1}\bar{x}$ und $x \mapsto n^{-1}(\sqrt{2} + i)$, so

sieht man, daß sogar die letzte Aussage von Satz 2.7.12 gilt. Damit erhält man folgende untere Schranke.

2.7.15 Korollar. Die Gruppe $\text{Loop}(\text{Sp}(n, \mathbf{C}))$ ist eine Kazhdan-Gruppe für $n \geq 2$ und $\varepsilon = 274^{-5} (3n^2 + 4n)^{-1}$ ist eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante für die Menge Q der Abbildungen, die als Werte jeweils eine konstante elementare symplektischen Matrix annehmen.

Kazhdan-Konstanten kompakter Gruppen

In diesem Kapitel wird für eine Konjugiertenklasse Q in einer kompakten Gruppe G eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante bestimmt. Die untere Schranke der Kazhdan-Konstante hängt nur von den nichttrivialen irreduziblen Charakteren ab. Als erste Anwendung erhält man eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante endlicher zyklischer Gruppen. Ferner erhält man eine untere Schranke endlicher Gruppen von Lie-Typ. Danach folgt ein Beweis, daß die untere Schranke nicht trivial ist, falls die Konjugiertenklasse die Gruppe erzeugt. Ein Ergebnis, das für den Beweis dieser Aussage nötig ist, liefert noch andere Abschätzungen für die Kazhdan-Konstanten. Das Hauptergebnis wird angewendet auf die symmetrische Gruppe und die spezielle unitäre Gruppe.

3.1 Die Eigenschaft (T) für kompakte Gruppen

Es ist einfach zu zeigen, daß kompakte Gruppen Kazhdan-Gruppen sind. Sei π eine unitäre Darstellung der kompakten Gruppe G auf H_π mit fastinvarianten Vektoren, $\varepsilon = 1$ und $Q = G$, dann gibt es einen (ε, Q) -invarianten Vektor ξ , o. E. sei $\|\xi\| = 1$. Es gilt also $\|\pi(g)\xi - \xi\| < 1$ für alle $g \in G$. Sei $\eta = \int_G \pi(g)\xi dg$, dann ist $\|\eta - \xi\| \leq \int_G \|\pi(g)\xi - \xi\| dg < 1$ bei Integration bezüglich des normierten Haar-Maßes. Also ist η ein nichttrivialer invarianter Vektor.

In der Literatur werden einige Berechnungen von Kazhdan-Konstanten kompakter Gruppen durchgeführt, insbesondere für endliche Gruppen. In [17] wurde die Kazhdan-Konstante $K(G, G)$ kompakter Gruppen G bestimmt. Es gilt $K(G, G) = \sqrt{2}$, falls die Gruppe nicht endlich ist, und $K(G, G) =$

$\sqrt{\frac{2n}{n-1}}$ für endliche Gruppen der Ordnung $n = |G|$. In [10] wurden Kazhdan-Konstanten für Diedergruppen bestimmt. Ebenso in [3] für ein anderes Erzeugendensystem. Dort wurde auch gezeigt, daß $K(S_n, Q) = \sqrt{24/(n^3 - n)}$ für die symmetrische Gruppe S_n der Ordnung $n!$ relativ zum Erzeugendensystem $Q = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$.

3.2 Kazhdan-Konstanten relativ zu einer Konjugiertenklasse

Sei G eine kompakte Gruppe, Q eine Konjugiertenklasse in G und π eine Darstellung in G . Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen von Schur wird eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante bestimmt.

3.2.1 Lemma. Sei G eine kompakte Gruppe, Q eine Konjugiertenklasse von G , π eine Darstellung von G auf H_π und Z die Menge der irreduziblen Charaktere χ von G assoziiert mit den irreduziblen Komponenten der Darstellung π , dann ist

$$K(\pi, G, Q) \geq \inf_{\chi \in Z} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(Q)}.$$

Beweis. Da G kompakt ist, gibt es irreduzible Darstellungen π_r von G auf H_r derart, daß $H_\pi = \bigoplus_r H_r$, $\pi = \bigoplus_r \pi_r$ und $\chi_r = \operatorname{Spur} \pi_r \in Z$. Sei $g \in Q$, dann gilt

$$\|\pi(g)\xi - \xi\|^2 = \sum_r \|\pi_r(g)\xi_r - \xi_r\|^2,$$

wobei $\xi = \sum_r \xi_r$ mit $\xi_r \in H_r$ für alle r und $\xi \in H_\pi$.

Sei q ein Vertreter der Konjugiertenklasse Q und $m_r = \dim H_r$, dann gibt es eine orthonormale Basis $e_{r,1}, \dots, e_{r,m_r}$ von H_r so, daß $\pi_r(q)$ diagonal bezüglich dieser Basis ist, da $\pi_r(q)$ unitär ist. Für $g = h^{-1}qh \in Q$ gilt

$$\begin{aligned} \|\pi_r(g)\xi_r - \xi_r\|^2 &= \|\pi_r(q)\pi_r(h)\xi_r - \pi_r(h)\xi_r\|^2 \\ &= \sum_{s=1}^{m_r} |\langle (\pi_r(q) - I)\pi_r(h)\xi_r, e_{r,s} \rangle|^2 \\ &= \sum_{s=1}^{m_r} |\langle \pi_r(h)\xi_r, (\pi_r(q) - I)^* e_{r,s} \rangle|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^{m_r} |\langle e_{r,s}, (\pi_r(q) - I)^* e_{r,s} \rangle \langle \pi_r(h) \xi_r, e_{r,s} \rangle|^2 \\
&= \sum_{s=1}^{m_r} \|(\pi_r(q) - I) e_{r,s}\|^2 |\langle \pi_r(h) \xi_r, e_{r,s} \rangle|^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\sup_{g \in Q} \|\pi(g) \xi - \xi\|^2 &= \sup_{g \in Q} \sum_r \|\pi_r(g) \xi_r - \xi_r\|^2 \\
&= \sup_{h \in G} \sum_r \sum_{s=1}^{m_r} \|(\pi_r(q) - I) e_{r,s}\|^2 |\langle \pi_r(h) \xi_r, e_{r,s} \rangle|^2 \\
&\geq \int_G \sum_r \sum_{s=1}^{m_r} \|(\pi_r(q) - I) e_{r,s}\|^2 |\langle \pi_r(h) \xi_r, e_{r,s} \rangle|^2 dh.
\end{aligned}$$

Nun gilt $\int_G |\langle \pi_r(h) \xi_r, e_{r,s} \rangle|^2 dh = m_r^{-1} \|\xi_r\|^2$ nach den Orthogonalitätsrelationen von Schur und damit

$$\sup_{g \in Q} \|\pi(g) \xi - \xi\|^2 \geq \sum_r \sum_{s=1}^{m_r} \|(\pi_r(q) - I) e_{r,s}\|^2 m_r^{-1} \|\xi_r\|^2.$$

Da

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{m_r} \|(\pi_r(q) - I) e_{r,s}\|^2 &= \sum_{s=1}^{m_r} \langle (\pi_r(q) - I)^* (\pi_r(q) - I) e_{r,s}, e_{r,s} \rangle \\
&= \text{Spur} (2I - \pi_r(q) - \pi_r(q)^*) \\
&= 2m_r - 2 \text{Re } \chi_r(q)
\end{aligned}$$

ist, folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{g \in Q} \|\pi(g) \xi - \xi\|^2 &\geq \sum_r \left(2 - \frac{2}{m_r} \text{Re } \chi_r(q) \right) \|\xi_r\|^2 \\
&\geq \inf_r \left(2 - \frac{2}{m_r} \text{Re } \chi_r(q) \right) \|\xi\|^2.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$K(\pi, G, Q) = \inf_{\xi \neq 0} \|\xi\|^{-1} \sup_{g \in Q} \|\pi(g) \xi - \xi\| \geq \inf_{\chi \in Z} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \text{Re } \chi(q)}.$$

□

Seien Q_t für $t \in T$ Konjugiertenklassen und $Q \subset G$ eine beliebige Teilmenge derart, daß gilt $\bigcup_{t \in T} Q_t \subset Q$, dann gilt $K(\pi, G, Q) \geq K(\pi, G, Q_t)$ für eine irreduzible Darstellung π von G für alle $t \in T$, da $Q_t \subset Q$ ist. Damit folgt

$$K(\pi, G, Q) \geq \sup_{t \in T} K(\pi, G, Q_t) \geq \sup_{t \in T} \inf_{\chi \in Z} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(Q_t)}.$$

Aus dem vorigen Lemma erhält man eine Schranke für die Kazhdan-Konstante der Gruppe.

3.2.2 Satz. Sei G eine kompakte Gruppe und Q eine Konjugiertenklasse von G , dann gilt

$$K(G, Q) \geq \inf_{\chi \in Z} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(Q)},$$

wobei Z die Menge aller nichttrivialen irreduziblen Charaktere von G und $m_\chi = \chi(1)$ der Grad von χ ist.

Beweis. Da $K(\pi, G, Q) \geq \inf_{\chi \in Z} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(Q)}$ für alle Darstellungen π von G ohne invariante Vektoren gilt, folgt dies aus Lemma 3.2.1. \square

3.2.3 Bemerkung. Sei $Q = \bigcup_{t \in T} Q_t$ eine Vereinigung von Konjugiertenklassen, dann gilt $K(G, Q) \geq K(G, Q_t)$ für alle $t \in T$. Also ist

$$K(G, Q) \geq \sup_{t \in T} K(G, Q_t) \geq \sup_{t \in T} \inf_{\chi \in Z} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(Q_t)}.$$

Für die zyklische Gruppe $C_n \subset \mathbf{T}$ der Ordnung n erhält man die irreduziblen Darstellungen $\chi_m(g) = g^m$ für $0 \leq m \leq n-1$. Damit ist $K(\chi_m, C_n, \{g\}) \geq \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi m/n)} = 2 \sin(\pi m/n)$ für das erzeugende Element $g = e^{2\pi i/n}$ und es gilt

$$K(C_n, \{g\}) \geq 2 \inf_{1 \leq m \leq n-1} \sin(\pi m/n) = 2 \sin(\pi/n).$$

Es gilt sogar $K(C_n, \{g\}) = 2 \sin(\pi/n)$, da $K(\chi_1, C_n, \{g\}) = |e^{2\pi i/n} - 1| = |e^{\pi i/n} - e^{-\pi i/n}| = 2 \sin(\pi/n)$ ist. Für dieses Ergebnis siehe auch [26, Seite 16] oder [16, Seite 19].

Nichttriviale obere Schranken des Ausdrucks $\sup_{\chi \in Z} m_\chi^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q)$ ergeben untere Schranken der Kazhdan-Konstante. Gewöhnlich betrachtet die Literatur obere Schranken für $m_\chi^{-1} |\chi(Q)|$ für irreduzible Charaktere vom Grad ≥ 2 . Solche oberen Schranken für die symmetrische Gruppe findet man z. B. in [20] und [41], für endliche Gruppen von Lie-Typ in [25]. Falls es solche oberen Schranken für die nichttrivialen Charaktere gibt, ist zusätzlich nur noch nötig die nichttrivialen Charaktere vom Grad 1 zu betrachten, wenn es welche gibt, da $\operatorname{Re} \chi(Q) \leq |\chi(Q)|$ ist. Wenn alle Werte der irreduziblen Charaktere einer Gruppe bekannt sind, kann man genauso durch Berechnung des Supremums von $m_\chi^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q)$ für die nichttrivialen irreduziblen Charaktere eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante bestimmen. In [23] und [29] erfolgte zum Beispiel die Bestimmung einiger Werte der Charaktere der symmetrischen Gruppe.

Wir wenden uns zunächst den Gruppen von Lie-Typ zu. Für die Definition solcher Gruppen siehe [8].

Das folgende Lemma wird in [25] bewiesen.

3.2.4 Lemma. Sei G eine quasieinfache, einfachzusammenhängende Gruppe von Lie-Typ über einem endlichen Körper mit k Elementen, Q die Konjugiertenklasse eines unipotenten Elements $\neq 1$, χ ein irreduzibler Charakter vom Grad ≥ 2 , dann ist $m_\chi^{-1} |\chi(Q)| \leq (\sqrt{k} - 1)^{-1}$, falls $k \geq 5$, und $m_\chi^{-1} |\chi(Q)| \leq 3/4$, falls $k \leq 4$.

Dabei heißt eine endliche Gruppe *quasieinfach*, wenn die Faktorgruppe von G nach dem Zentrum einfach ist und die Kommutatoruntergruppe gleich der Gruppe selbst ist.

Eine halbeinfache Gruppe ist *einfachzusammenhängend*, falls jedes abstrakte Gewicht ein Charakter ist, wobei hier ein Charakter ein Homomorphismus des maximalen Torus in die multiplikative Gruppe des zugrundeliegenden Körpers ist.

Beispiele für solche Gruppen sind $\operatorname{SL}(n, k)$ und $\operatorname{Sp}(n, k)$ für endliche Körper mit k Elementen mit Ausnahme von $\operatorname{SL}(2, k) = \operatorname{Sp}(1, k)$ für $k = 2, 3$ und $\operatorname{Sp}(2, 2)$. Die unipotenten Elemente g sind gerade diejenigen, für die $g - I$ eine nilpotente lineare Abbildung auf dem endlichen Vektorraum ist.

Dies ergibt die folgenden unteren Schranken der Kazhdan-Konstante.

3.2.5 Satz. Sei G eine quasieinfache, einfachzusammenhängende Gruppe von Lie-Typ über einem endlichen Körper mit k Elementen und Q eine Konjugiertenklasse eines unipotenten Elements $\neq 1$, dann gilt

$$K(G, Q) \geq \sqrt{2 \frac{\sqrt{k} - 2}{\sqrt{k} - 1}}$$

für $k \geq 5$ und

$$K(G, Q) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

für $k \leq 4$.

Beweis. Da die Kommutatoruntergruppe einer quasieinfachen Gruppe die Gruppe selbst ist und damit der einzige Charakter vom Grad 1 der triviale Charakter ist. Damit folgt die Behauptung aus obigem Lemma und Satz 3.2.2. \square

Es ist auch möglich, eine obere Schranke für die Kazhdan-Konstante einer Darstellung anzugeben.

3.2.6 Lemma. Sei Q eine Konjugiertenklasse der kompakten Gruppe G und $q \in Q$ ein Vertreter von Q . Sei U der Abschluß der Untergruppe, die q erzeugt. Für eine Darstellung π von G auf H_π gilt dann

$$K(\pi, G, Q) \leq \sup_{\chi < \pi|_U} |\chi(q) - 1|,$$

wobei $\chi < \pi|_U$ die irreduziblen Charaktere von U bezeichnet, die in $\pi|_U$ enthalten sind.

Beweis. Sei $\xi \in H_\pi$ mit $\|\xi\| = 1$, dann ist

$$\begin{aligned} \sup_{g \in Q} \|\pi(g)\xi - \xi\| &= \sup_{h \in G} \|\pi(q)\pi(h)\xi - \pi(h)\xi\| \\ &\leq \sup \{ \|\pi(q)\eta - \eta\| : \eta \in H_\pi, \|\eta\| = 1 \} \\ &= \sup_{\chi < \pi|_U} |\chi(q) - 1|. \end{aligned}$$

Somit folgt $K(\pi, G, Q) \leq \sup_{\chi < \pi|_U} |\chi(q) - 1|$. \square

3.3 Nichttrivialität der unteren Schranke

Dieser Abschnitt zeigt, daß die untere Schranke aus Satz 3.2.2 nicht 0 ist, sofern die Konjugiertenklasse die Gruppe erzeugt. Wir zeigen auch, daß – umgekehrt – die Kazhdan-Konstante 0 ist, falls die kompakte Teilmenge eine Untergruppe erzeugt, die nicht dicht liegt in G .

3.3.1 Lemma. Sei G eine kompakte Gruppe und Q eine kompakte Teilmenge von G , die eine Untergruppe von G erzeugt, die nicht dicht ist in G , dann ist $K(G, Q) = 0$.

Beweis. Die kompakte Teilmenge Q ist in einer abgeschlossenen Untergruppe $U \neq G$ enthalten. Sei π die von der trivialen Darstellung auf U induzierte Darstellung von G . Die Darstellung ist nicht trivial, da $U \neq G$. Somit enthält π eine irreduzible Darstellung $\sigma \neq 1$. Nach dem Reziprozitätsgesetz von Frobenius, siehe z. B. [22, Seite 160–162], enthält die Einschränkung $\sigma|_U$ die triviale Darstellung. Somit ist $K(G, Q) = 0$. \square

3.3.2 Bemerkung. Nach [46, Seite 3409] gibt es positive Kazhdan-Konstanten für endliche Teilmengen von kompakten Gruppen. Betrachtet man Lemma 3.3.1, so müssen diese eine dichte Untergruppe erzeugen.

Das obige Lemma bleibt richtig für diskrete Gruppen. Der Beweis hier verläuft analog zum Beweis oben für kompakte Gruppen. Man hat dabei das Reziprozitätsgesetz von Frobenius durch eine schwache Form nach G. W. Mackey zu ersetzen.

3.3.3 Lemma. Sei Γ eine diskrete Gruppe und Q eine endliche Teilmenge von Γ , die eine Untergruppe $U \neq \Gamma$ erzeugt, dann ist $K(\Gamma, Q) = 0$.

Beweis. Sei π die von der trivialen Darstellung von U induzierte Darstellung, dann gibt es eine in π enthaltene Darstellung σ , die die triviale Darstellung nicht enthält. Nach dem schwachen Reziprozitätsgesetz von Frobenius, siehe [36, Seite 158], enthält die Einschränkung $\sigma|_U$ die triviale Darstellung und damit ist $K(\Gamma, Q) = 0$. \square

3.3.4 Bemerkung. Allgemein ist die obige Aussage jedoch falsch. Für $G = \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$, $n \geq 3$, sei Q die Menge bestehend aus den zwei Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$. Nach [45, Seite 835] gilt $K(G, Q) > 0$. Offensichtlich erzeugen diese beiden Matrizen eine echte Untergruppe von G .

Lemma 3.3.1 zeigt, daß in Satz 3.2.2 die untere Schranke trivial ist, falls die Konjugiertenklasse Q keine dichte Untergruppe erzeugt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Betrachtet man den Torus \mathbf{T} , so erzeugt ein Element $q = e^{2\pi it}$ mit $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ eine dichte Untergruppe von \mathbf{T} . Für die duale Gruppe gilt $\widehat{\mathbf{T}} = \{\chi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ mit $\chi_n(c) = c^n$ für $c \in \mathbf{T}$. Damit ist $\inf_{n \neq 0} \sqrt{2 - 2 \operatorname{Re} \chi_n(q)} = \inf_{n \neq 0} \sqrt{2 - 2 \cos(2\pi nt)} = 0$. Es gibt jedoch eine Umkehrung, falls Q die Gruppe G erzeugt (siehe Satz 3.3.9).

Seien Q' und Q Teilmengen einer Gruppe G , dann bezeichne $Q'Q$ die Menge aller Produkte $q'q$ der Elemente $q' \in Q'$ und $q \in Q$ und man definiert $Q^0 = \{1\}$, $Q^{n+1} = Q^n Q$ für nichtnegative ganze Zahlen n . Genauso sei Q^{-1} die Menge aller q^{-1} für $q \in Q$ und $Q^{-n} = (Q^{-1})^n$. Wie für Erzeugendensysteme wird die Menge als symmetrisch bezeichnet, falls $Q = Q^{-1}$ ist.

Für einen Beweis des folgenden siehe z. B. [19, Seite 235].

3.3.5 Lemma. Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit Haar-Maß μ und Q eine meßbare symmetrische Teilmenge von G mit positivem Maß, dann ist Q^2 eine Umgebung des neutralen Elements in G .

3.3.6 Lemma. Sei Q ein meßbares symmetrisches Erzeugendensystem der lokalkompakten Gruppe G mit $1 \in Q$, dann gibt es für jede kompakte Teilmenge C eine natürliche Zahl ν derart, daß $Q^\nu \supset C$.

Beweis. Sei μ das Haar-Maß auf G . Da Q die Gruppe G erzeugt, gibt es eine ganze Zahl n so, daß $\mu(Q^n) > 0$. Nun enthält Q^{2n} eine offene Umgebung U der 1 nach Lemma 3.3.5. Die Mengen UQ^j für $j = 1, 2, \dots$ sind eine offene Überdeckung von C . Wegen der Kompaktheit überdecken C schon endlich viele und somit gibt es ein k so, daß $C \subset UQ^k \subset Q^{2n+k}$, da $Q^j \subset Q^{j+1}$ für alle j ist. \square

3.3.7 Definition. Sei G eine lokalkompakte Gruppe, $Q \subset G$ eine meßbare Teilmenge, die die Gruppe erzeugt, und C eine kompakte Teilmenge von G . Dann sei $\nu(Q, C)$ die kleinste natürliche Zahl ν derart, daß $C \subset (Q^{-1} \cup \{1\} \cup Q)^\nu$ ist. Falls G kompakt ist, setzen wir $\nu(Q) = \nu(Q, G)$.

Das folgende liefert ein explizites Beispiel einer Menge Q mit $\mu(Q) = 0$ und $\mu(Q^2) > 0$. Betrachtet man $\mathbf{T} \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, so erhält man ein Beispiel eines meßbaren Erzeugendensystems von \mathbf{R}/\mathbf{Z} mit Maß 0.

3.3.8 Lemma. Sei Q die Cantor-Menge, dann ist $Q + Q = [0, 2]$, wobei

$$Q = \left\{ x \in \mathbf{R} : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}, a_n \in \{0, 2\} \right\}.$$

Beweis. Sei $z \in [0, 2]$, dann ist $z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n 3^{-n}$ mit $c_0 \in \{0, 1\}$ und $c_n \in \{0, 1, 2\}$ für $n \in \mathbf{N}$. Man definiert nun $u_0 = c_0$ und rekursiv $u_n \in \{0, 1\}$ mit $u_n \equiv u_{n-1} + c_n \pmod{2}$ und $a_n, b_n \in \{0, 2\}$ mit $a_n + b_n \equiv 3u_{n-1} + c_n - u_n \pmod{6}$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Es gilt also $3u_{n-1} + c_n = a_n + b_n + u_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x + y &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) 3^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (3u_{n-1} + c_n - u_n) 3^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1} 3^{-n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} u_n 3^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n 3^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} u_n 3^{-n} = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n 3^{-n} = z \end{aligned}$$

für $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$ und $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 3^{-n}$. □

Mit Lemma 3.3.6 ist es nun möglich den nächsten Satz zu beweisen. Man erhält die Aussage, daß die untere Schranke für die Kazhdan-Konstante nicht trivial ist, falls die Konjugiertenklasse die kompakte Gruppe erzeugt.

3.3.9 Satz. Sei G eine kompakte Gruppe und Q eine Konjugiertenklasse, die G erzeugt, dann gilt

$$\inf_{\chi \in Z} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(Q)} \geq \frac{1}{\nu(Q)} > 0,$$

wobei Z die Menge aller nichttrivialen irreduziblen Charaktere von G ist.

Beweis. Sei $\nu = \nu(Q)$ und π eine nichttriviale irreduzible Darstellung mit Charakter χ , dann gilt, da es zu jedem $g \in G$ Elemente $q_1, \dots, q_\nu \in Q^{-1} \cup \{1\} \cup Q$ gibt mit $g = q_1 \cdots q_\nu$,

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(g) &= \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \operatorname{Spur}(I - \pi(g)) \\ &\leq \frac{2}{m_\chi} \sum_{k=1}^{\nu} |\operatorname{Spur}(\pi(q_1 \cdots q_{k-1})(I - \pi(q_k)))| \\ &\leq \frac{2}{m_\chi} \sum_{k=1}^{\nu} \sqrt{m_\chi} \sqrt{\operatorname{Spur}((I - \pi(q_k))^* (I - \pi(q_k)))} \\ &= 2\nu \sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(Q)} \end{aligned}$$

nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Somit gilt

$$\sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(Q)} \geq \nu^{-1} \int_G 1 - m_\chi^{-1} \operatorname{Re} \chi(g) dg = \nu^{-1} > 0.$$

□

3.3.10 Bemerkung. Die Frage, ob die untere Schranke 0 sein kann und die Kazhdan-Konstante > 0 , bleibt offen.

Für endliche Gruppen erhält man aus Satz 3.3.9 das folgende.

3.3.11 Korollar. Für eine endliche Gruppe G und eine Konjugiertenklasse Q von G sind nachstehende Aussagen äquivalent.

- (a) Q erzeugt G
- (b) $\inf_{\chi \in Z} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\chi} \operatorname{Re} \chi(Q)} > 0$
- (c) $K(G, Q) > 0$

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 3.3.9, Satz 3.2.2 und Lemma 3.3.3. \square

Sei für den Moment G eine allgemeine lokalkompakte Gruppe. Sei Q eine beliebige kompakte Teilmenge von G , die G erzeugt, und sei C eine beliebige kompakte Teilmenge. Das folgende Lemma gibt eine untere Schranke von $K(G, Q)$ durch $K(G, C)$ an.

3.3.12 Lemma. Sei G eine lokalkompakte Gruppe, C und Q beliebige kompakte Teilmengen von G derart, daß Q die Gruppe G erzeugt, und $\nu = \nu(Q, C)$, dann ist $K(G, Q) \geq \nu^{-1} K(G, C)$.

Beweis. Sei π eine Darstellung von G auf H_π ohne nichttriviale invariante Vektoren. Zu jedem $g \in C$ gibt es $q_1, \dots, q_\nu \in Q^{-1} \cup \{1\} \cup Q$ so, daß $g = q_1 \cdots q_\nu$ ist. Nun gilt

$$\|\pi(g)\xi - \xi\| \leq \sum_{k=1}^{\nu} \|\pi(q_k)\xi - \xi\| \leq \nu \sup_{q \in Q} \|\pi(q)\xi - \xi\|$$

für $\xi \in H_\pi$. Somit ist

$$\nu^{-1} K(\pi, G, C) \leq K(\pi, G, Q).$$

\square

Das folgende liefert eine weitere Schranke für Kazhdan-Konstanten einer kompakten Gruppe bezüglich beliebiger kompakter Mengen.

3.3.13 Korollar. Sei G eine kompakte Gruppe, Q ein beliebiges kompaktes Erzeugendensystem und $\nu = \nu(Q)$, dann gilt $K(G, Q) \geq \nu^{-1} \sqrt{2}$. Ist $|G| = n$ sogar endlich, so gilt $K(G, Q) \geq \nu^{-1} \sqrt{2n/(n-1)}$.

Beweis. Das folgt mit Lemma 3.3.12 aus $K(G, G) = \sqrt{2}$ für eine kompakte Gruppe mit unendlich vielen Elementen und $K(G, G) = \sqrt{2n/(n-1)}$ für eine endliche Gruppe. Dies ist ein Ergebnis aus [17]. \square

Ist G eine einfache nichtabelsche endliche Gruppe, dann erzeugt jede nichttriviale Konjugiertenklasse G . Für diese Gruppen wird die kleinste natürliche Zahl n so, daß $Q^n = G$ für jede Konjugiertenklasse $Q \neq \{1\}$, als Überdeckungszahl $\text{cn}(G)$ definiert. Offensichtlich ist $\nu(Q) \leq \text{cn}(G)$ für jede nichttriviale Konjugiertenklasse $Q \subset G$.

Es gibt einige Berechnungen der Überdeckungszahl für einfache nichtabelsche endliche Gruppen, z. B. in [2] und [34]. Unter Verwendung von Korollar 3.3.13 erhält man daraus die folgenden unteren Schranken der Kazhdan-Konstanten.

3.3.14 Satz. (a) Für die alternierende Gruppe A_n , $n \geq 6$, ist für jede Konjugiertenklasse $Q \neq \{1\}$ die Kazhdan-Konstante $K(A_n, Q) > 2\sqrt{2}/n$.

(b) Sei $G = \text{PSL}(n, k)$, die projektive spezielle lineare Gruppe eines Vektorraums der Dimension $n \geq 2$ über einem endlichen Körper mit $k \geq 4$ Elementen, dann ist $K(G, Q) > \sqrt{2}/\max\{3, n\}$ für jede Konjugiertenklasse $Q \neq \{1\}$

Beweis. (a) Nach [2] ist für die alternierende Gruppe A_n mit $n \geq 6$ die Überdeckungszahl $\text{cn}(A_n)$ die größte natürliche Zahl $\leq \frac{n}{2}$.

(b) Nach [2, Seite 240] gilt $\text{cn}(G) = 3$ für $n = 2$ und $k \geq 4$ und nach [34] gilt $\text{cn}(G) = n$, falls $n \geq 3$ und $k \geq 4$. Eine Kombination dieser Ergebnisse zeigt $\text{cn}(G) = \max\{3, n\}$.

\square

Für einfache nichtabelsche endliche Gruppen gilt auch folgende allgemeine Schranke.

3.3.15 Satz. Sei G eine einfache nichtabelsche endliche Gruppe der Ordnung $n = |G|$ und Q eine nichttriviale Konjugiertenklasse, dann gilt

$$K(G, Q) \geq \frac{(2 - \sqrt{3}) \sqrt{2n}}{(n-1) \ln(n-1)}.$$

Beweis. Nach [42, Seite 538] gilt $\text{cn}(G) \leq (2 - \sqrt{3})^{-1} \sqrt{n-1} \ln(n-1)$. \square

Sei $G = \text{SU}(2)$, dann erhält man mit dieser Methode eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante. Die Konjugiertenklassen Q_t von G sind durch den Parameter $t \in [0, \pi]$ definiert, wobei $q_t = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$ ein Vertreter der Konjugiertenklasse.

Es gilt $Q_{\pi-t} = -Q_t$, da $q_{\pi-t} = \begin{pmatrix} e^{i(\pi-t)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\pi-t)} \end{pmatrix} = -q_t = -q_t^{-1}$. Also ist $Q_{\pi-t}^n = (-1)^n Q_t^n$ und insbesondere $Q_{\pi-t}^n = G$, falls $Q_t^n = G$. Es reicht also Q_t für $0 \leq t \leq \pi/2$ zu betrachten.

3.3.16 Satz. Für $0 < t \leq \pi/2$ gilt $K(G, Q_t) \geq \sqrt{2}/n$, wobei $n = \lceil \pi/t \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geq \pi/t$.

Beweis. Ist $g \in G$ und $\text{Spur}(g) = 2 \cos t$, so ist $g \in Q_t$. Sei nun $g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in G$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} & \text{Spur}(gq_t g^{-1} q_s) \\ &= \text{Spur} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{is} & 0 \\ 0 & e^{-is} \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Spur} \left(\begin{pmatrix} ae^{it} & be^{-it} \\ -\bar{b}e^{it} & \bar{a}e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}e^{is} & -be^{-is} \\ \bar{b}e^{is} & ae^{-is} \end{pmatrix} \right) \\ &= 2(|a|^2 \cos(t+s) + |b|^2 \cos(t-s)) \end{aligned}$$

Da $|a|^2 + |b|^2 \leq 1$, ist $2 \cos(t+s) \leq \text{Spur}(gq_t g^{-1} q_s) \leq 2 \cos(t-s) = 2 \cos(|t-s|)$. Für $0 \leq t \leq \pi/n$ und $k \leq n$ ist also

$$Q_t^k = Q_t \bigcup_{0 \leq s \leq kt-t} Q_s = \bigcup_{0 \leq s \leq kt-t} \bigcup_{|t-s| \leq r \leq t+s} Q_r = \bigcup_{0 \leq r \leq kt} Q_r$$

und somit ist $Q_t^n = G$, falls $t = \pi/n$.

Für $t = \pi/2$ gilt offenbar $Q_t^2 = G$ und damit ist $K(G, Q_t) \geq \sqrt{2}^{-1}$. Für $\frac{\pi}{n} \leq t < \frac{\pi}{n-1}$ gilt $Q_t^n = Q_t \bigcup_{0 \leq s \leq nt-t} Q_s \supset Q_t \bigcup_{0 \leq s \leq \pi-t} Q_s$, da $\pi \leq nt$. Also folgt $Q_t^n \supset \bigcup_{0 \leq s \leq \pi-t} \bigcup_{|t-s| \leq r \leq s+t} Q_r = \bigcup_{0 \leq r \leq \pi} Q_r = G$. Für $\frac{\pi}{n} \leq t < \frac{\pi}{n-1}$ ist also $K(G, Q_t) \geq n^{-1} \sqrt{2}$. \square

Wir werden in 3.5 die untere Schranke verbessern.

3.4 Die symmetrische Gruppe

In manchen Fällen genügt es nur irreduzible Charaktere einer Untergruppe zusammen mit einigen Charakteren der Gruppe zu betrachten. Dadurch ist die Übertragung von Schranken für Untergruppen auf Schranken der Gruppe möglich. Dies wird hier gezeigt und zur Bestimmung einer unteren Schranke für die Kazhdan-Konstante der symmetrischen Gruppe bezüglich der Konjugiertenklasse der 2-Zyklen benutzt. Es ist nur nötig zusätzlich die Charaktere zu betrachten, deren Einschränkung auf die Untergruppe die triviale Darstellung enthält.

Eine untere Schranke für den Realteil der normalisierten Charaktere einer kompakten Gruppe G wird bestimmt aus einer unteren Schranke einer Untergruppe U von G , die nichttrivialen Schnitt mit einer Konjugiertenklasse Q von G hat. Danach folgt die Aufführung einiger Ergebnisse in Zusammenhang mit den Darstellungen und Charakteren der symmetrischen Gruppe.

3.4.1 Lemma. Sei G eine kompakte Gruppe, Q eine Konjugiertenklasse und U eine abgeschlossene Untergruppe von G derart, daß $Q \cap U \neq \emptyset$, dann ist $Q \cap U = \bigcup_{t \in T} V_t$ eine Vereinigung von Konjugiertenklassen V_t von U . Sei Z eine Menge irreduzibler Charaktere von G , Z' eine Menge irreduzibler Charaktere von U und $E \subset Z$ die Menge aller nichttrivialen Charaktere $\chi \in Z$ so, daß die Einschränkung $\chi|_U$ einen irreduziblen Charakter, der nicht in Z' liegt, enthält, dann ist

$$\sup_{\chi \in Z} m_{\chi}^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q) \leq \max \left\{ \sup_{\chi \in E} m_{\chi}^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q), \inf_{t \in T} \sup_{\chi \in Z'} m_{\chi}^{-1} \operatorname{Re} \chi(V_t) \right\},$$

wobei $m_{\chi} = \chi(1)$ der Grad von χ ist.

Beweis. Sei $\chi \in Z \setminus E$, dann gibt es $\psi_1, \dots, \psi_n \in Z'$ so, daß $\chi|_U = \sum_{s=1}^n \psi_s$. Damit ist

$$\begin{aligned} m_{\chi}^{-1} \operatorname{Re} \chi(u) &= \sum_{s=1}^n \frac{m_{\psi_s}}{m_{\chi}} m_{\psi_s}^{-1} \operatorname{Re} \psi_s(u) \leq \sup_{s=1, \dots, n} m_{\psi_s}^{-1} \operatorname{Re} \psi_s(u) \\ &\leq \sup_{\psi \in Z'} m_{\psi}^{-1} \operatorname{Re} \psi(u). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dies für $u \in V_t$ und somit ist

$$m_\chi^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q) \leq \inf_{t \in T} \sup_{\psi \in Z'} m_\psi^{-1} \operatorname{Re} \psi(V_t).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sup_{\chi \in Z} m_\chi^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q) &= \max \left\{ \sup_{\chi \in E} m_\chi^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q), \sup_{\chi \in Z \setminus E} m_\chi^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{\chi \in E} m_\chi^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q), \inf_{t \in T} \sup_{\psi \in Z'} m_\psi^{-1} \operatorname{Re} \psi(V_t) \right\}. \end{aligned}$$

□

Die Verwendung des Ergebnisses ermöglicht nun eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante der symmetrischen Gruppe bezüglich der Konjugiertenklasse aller 2-Zyklen zu bestimmen.

Es ist möglich die Äquivalenzklassen der Darstellungen von S_n durch die Partitionen der natürlichen Zahl n zu parametrisieren. Eine Partition ist eine Folge ganzer Zahlen $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_r \geq 1$ so, daß $\sum_{k=1}^r b_k = n$, und (b_1, b_2, \dots, b_r) bezeichne eine solche Partition. Die Gruppe S_{n-1} ist in natürlicher Weise eine Untergruppe von S_n . Die Notation $F' \triangleleft F$ für Partitionen F' von $n-1$ und F von n bezeichne $b'_s \leq b_s$ für $1 \leq s \leq r'$, wobei $F = (b_1, \dots, b_r)$ und $F' = (b'_1, \dots, b'_{r'})$ ist (für das obige sowie für das nächste Lemma siehe z. B. [47, Seite 95–120]).

3.4.2 Lemma. Die Einschränkung der Darstellung π_F von S_n auf S_{n-1} ist

$$\pi_F|_{S_{n-1}} \cong \bigoplus_{F' \triangleleft F} \pi_{F'}.$$

Die triviale Darstellung von S_n entspricht gerade der Partition $F = (n)$. Dies zeigt, daß die triviale Darstellung genau dann in $\pi_F|_{S_{n-1}}$ enthalten ist, wenn $(n-1) = F' \triangleleft F$ gilt. Das ist aber nur dann der Fall, wenn $F = (n)$ oder $F = (n-1, 1)$ ist.

Die Konjugiertenklassen von S_n sind durch die Zyklenstruktur ihrer Elemente bestimmt. Das bedeutet, daß eine Konjugiertenklasse aus allen Permutationen besteht, deren Anzahl an 1-Zyklen gleich k_1 ist, die Anzahl an 2-Zyklen

gleich k_2 ist und so weiter bis zur Anzahl der n -Zyklen k_n , wenn die Permutation durch disjunkte Zyklen gegeben ist. Dafür gilt dann $\sum_{j=1}^n j k_j = n$ und $1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$ bezeichne die Konjugiertenklasse.

Die Zusammenfassung der Lemmata 3.4.1 und 3.4.2 ergibt folgendes.

3.4.3 Korollar. Sei $n \geq 3$, Z die Menge aller nichttrivialen Charaktere von S_n , Z' die Menge aller nichttrivialen Charaktere von S_{n-1} und $Q = 1^{k_1} 2^{k_2} \dots (n-1)^{k_{n-1}}$ mit $k_1 \geq 1$, dann ist

$$V = S_{n-1} \cap Q = 1^{k_1-1} 2^{k_2} \dots (n-1)^{k_{n-1}}$$

und

$$\sup_{\chi \in Z} m_{\chi}^{-1} \operatorname{Re} \chi(Q) \leq \max \left\{ m_{\chi_{(n-1,1)}}^{-1} \operatorname{Re} \chi_{(n-1,1)}(Q), \sup_{\chi \in Z'} m_{\chi}^{-1} \operatorname{Re} \chi(V) \right\},$$

wobei $\chi_{(n-1,1)} = \operatorname{Spur} \pi_{(n-1,1)}$.

Für die Partition $F = (n-1, 1)$ gilt folgendes.

3.4.4 Lemma. Die Werte des Charakters, der zur Partition $F = (n-1, 1)$ gehört, sind

$$\chi_{(n-1,1)}(1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}) = k_1 - 1.$$

Nun ist es möglich die Aussage über die untere Schranke der Kazhdan-Konstante für die 2-Zyklen zu beweisen.

3.4.5 Satz. Für $n \geq 2$ und die Konjugiertenklasse $Q = 1^{n-2} 2^1$ der 2-Zyklen gilt

$$K(S_n, Q) \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

Beweis. Sei $n = 2$, dann gilt $S_2 \cong C_2$ und die Bemerkung in 3.2 zeigt, daß $K(S_2, Q) = 2$. Nun ergibt Induktion zusammen mit Lemma 3.4.4 und Korollar 3.4.3

$$K(S_n, Q) \geq \min \left\{ \sqrt{2 - 2 \frac{n-3}{n-1}}, \frac{2}{\sqrt{n-2}} \right\} = \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

□

3.4.6 Bemerkung. Für eine Konjugiertenklasse Q von S_n mit $\text{sgn } Q = -1$ gilt allgemein $K(S_n, Q) \geq 2/\sqrt{n-1}$. Dies folgt mit einem Ergebnis, das in [20, Seite 167] dargelegt ist und besagt, daß $m_\chi^{-1} |\chi(Q)| \leq \frac{n-3}{n-1}$ ist für jeden Charakter χ mit $m_\chi \geq 2$ und jede Konjugiertenklasse $Q \neq \{1\}$. In [20, Seite 167] erscheint jedoch nur das Ergebnis und der Beweis ist nur in einem nicht veröffentlichten Manuskript enthalten.

Die untere Schranke aus Satz 3.4.5 ist besser als die, die aus einem Ergebnis aus [3] folgt. Dort erfolgte die Bestimmung der exakten Kazhdan-Konstante von S_n relativ zu $\{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$ als $\sqrt{24/(n^3-n)}$. Da die Konjugiertenklasse aller 2-Zyklen diese Menge enthält, gilt offensichtlich

$$K(S_n, Q) \geq \sqrt{\frac{24}{n^3-n}} = \sqrt{\frac{6}{n^2+n}} \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

und $\sqrt{6/(n^2+n)} < 1$ für $n \geq 3$.

3.5 Die spezielle unitäre Gruppe

In diesem Abschnitt steht die Gruppe $G = \text{SU}(n)$ aller unitären $n \times n$ Matrizen g mit Determinante 1 im Vordergrund. Ziel ist die Bestimmung einer unteren Schranke der Kazhdan-Konstante. Zuerst wird die untere Schranke, die man aus Satz 3.2.2 im Fall $\text{SU}(2)$ erhält, nach unten abgeschätzt. Dies ergibt auch eine untere Schranke für die Kazhdan-Konstante von $\text{SO}(3)$. Auf ähnliche Weise wie für $\text{SU}(2)$ ist es auch möglich eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante von $U(2)$ zu bestimmen.

Anschließend folgt die Lösung eines Problems von P. de la Harpe. Dies beinhaltet die Bestimmung der Kazhdan-Konstante einer Darstellung von $\text{SU}(2)$. Es zeigt dann, daß man eine echte untere Schranke erhält und nicht wie im Fall der zyklischen Gruppen, die untere Schranke gleich der Kazhdan-Konstante ist. Danach wird der Fall $n \geq 3$ betrachtet. Dies geschieht durch die Abschätzung der normalisierten Charaktere der nichttrivialen Darstellungen von $\text{SU}(n)$ durch die normalisierten Charaktere der nichttrivialen Darstellungen von $\text{SU}(n-1)$. Mit Induktion erhält man daraus eine untere Schranke der Kazhdan-Konstante von $\text{SU}(n)$.

Im ersten Teil ist nun $n = 2$. Sei $G = \text{SU}(2)$, Q_t die Menge aller $g \in G$ mit Eigenwerten $e^{\pm it}$ und $q_t = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$, dann gilt $Q_t = \{h^{-1}q_t h : h \in G\}$.

Zu jeder nichtnegativen ganzen Zahl m gibt es genau eine Äquivalenzklasse irreduzibler Darstellungen, siehe z. B. [22, Seite 143]. Die homogenen Polynome e_0, \dots, e_m mit $e_r(z, w) = \sqrt{\frac{(m+1)!}{r!(m-r)!}} z^r w^{m-r}$ für $r = 0, \dots, m$ bilden eine orthonormale Basis des Darstellungsraums zu einer solchen Darstellung π_m und $\pi_m(q_t)$ operiert darauf diagonal. Denn es gilt

$$\pi_m(q_t) e_r(z, w) = e_r(q_t^{-1}(z, w)) = e_r(e^{-it}z, e^{it}w) = e^{i(m-2r)t} e_r(z, w).$$

Das folgende ist eine Konsequenz aus Lemma 3.2.1 und Satz 3.2.2.

3.5.1 Satz. Sei $G = \text{SU}(2)$, π_m die irreduzible Darstellung von G auf H_m vom Grad $m+1$ und Q_t die Konjugiertenklasse von $q_t = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$, dann gilt

$$2 \max_{0 \leq r \leq m} |\sin((m/2 - r)t)| \geq K(\pi_m, G, Q_t) \geq \sqrt{2 - \frac{2}{m+1} \frac{\sin((m+1)t)}{\sin t}}$$

und

$$K(G, Q_t) \geq |\sin t|.$$

Beweis. Lemma 3.2.6 zeigt, daß

$$K(\pi_m, G, Q_t) \leq \sup_{0 \leq r \leq m} |e^{i(m-2r)t} - 1| = 2 \max_{0 \leq r \leq m} |\sin((m/2 - r)t)|$$

gilt, da genau die Charaktere $\psi_{m-2r} < \pi_m|_{U_t}$ sind, wobei U_t der Abschluß der Untergruppe ist, die q_t erzeugt, und $\psi_{m-2r}(q_t) = e^{i(m-2r)t}$ ist.

Für den Charakter $\chi_m = \text{Spur } \pi_m$ gilt

$$\chi_m(q_t) = \sum_{r=0}^m e^{i(m-2r)t} = \frac{e^{i(m+1)t} - e^{-i(m+1)t}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{\sin((m+1)t)}{\sin t}.$$

Also gilt

$$K(\pi_m, G, Q_t) \geq \sqrt{2 - \frac{2}{m+1} \frac{\sin((m+1)t)}{\sin t}}.$$

Es gilt $2(m+1) - 2 \operatorname{Re} \chi(q_t) = \sum_{r=0}^m |1 - e^{i(m-2r)t}|^2$, wobei

$$|1 - e^{i(m-2r)t}| = |e^{-i(m/2-r)t} + e^{i(m/2-r)t}| = 2 |\sin((m-2r)t/2)|.$$

Für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ist $t \mapsto (\sin t)^2$ monoton steigend und damit sind alle Funktionen $t \mapsto (\sin((m-2r)t/2))^2$ monoton steigend für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{m}$. Also ist

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2}{m+1} \operatorname{Re} \chi(q_t) &= \frac{4}{m+1} \sum_{r=0}^m (\sin((m-2r)t/2))^2 \\ &\geq 4 (\sin(t/2))^2 \geq (2 \sin(t/2) \cos(t/2))^2 \\ &= (\sin t)^2. \end{aligned}$$

Für $\arcsin(2/(m+1)) \leq t \leq \pi - \arcsin(2/(m+1))$ gilt

$$2 - \frac{2}{m+1} \frac{\sin((m+1)t)}{\sin t} \geq 2 - \frac{2}{(m+1)\sin t} \geq 1 \geq (\sin t)^2.$$

Es ist $\left| \frac{\sin((m+1)(\pi-t))}{\sin(\pi-t)} \right| = \left| \frac{\sin((m+1)t)}{\sin t} \right|$ und damit

$$2 - \frac{2}{m+1} \frac{\sin((m+1)t)}{\sin t} \geq 2 - \frac{2}{m+1} \left| \frac{\sin((m+1)t)}{\sin t} \right| \geq (\sin t)^2$$

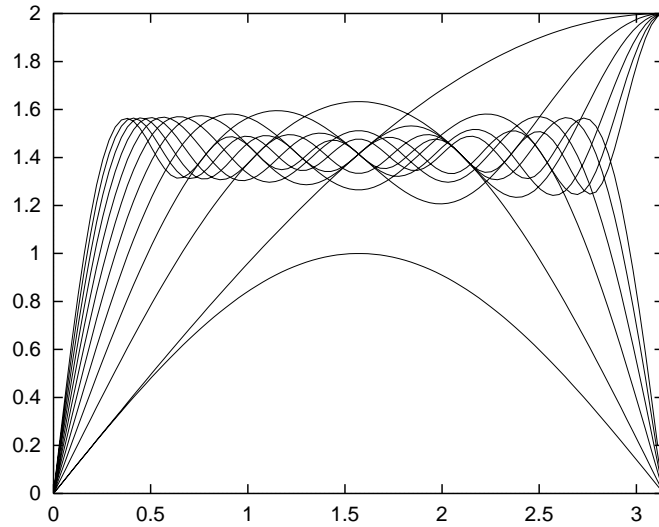
für $\pi - \frac{\pi}{m} \leq t \leq \pi$.

Da $\arcsin(2/(m+1)) \leq \frac{\pi}{m+1} \leq \frac{\pi}{m}$, ist $2 - \frac{2}{m+1} \frac{\sin((m+1)t)}{\sin t} \geq (\sin t)^2$ und damit

$$K(G, Q) \geq \sin t$$

für $0 \leq t \leq \pi$. □

Die folgende Abbildung zeigt die unteren Schranken von $K(\pi_m, G, Q)$ für $m = 1, \dots, 11$ und von $K(G, Q)$.



Untere Schranken von $K(\pi_m, G, Q)$ für $m = 1, \dots, 11$ und $K(G, Q)$

Für $G = \text{SO}(3)$ erhält man $\text{Ad}(\text{SU}(2)) = G$ bzw. $G \cong \text{SU}(2) / \{\pm I\}$ und die irreduziblen Darstellungen ρ_m vom Grad $2m + 1$, wobei $\rho_m \circ \text{Ad} = \pi_{2m}$. Für eine Herleitung siehe z. B. [22, Seite 146]. Damit folgt entsprechend

$$K(\rho_m, G, Q_t) \geq \sqrt{2 - \frac{2}{2m+1} \frac{\sin((2m+1)t)}{\sin t}}$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \text{ und } K(G, Q_t) \geq |\sin t|.$$

Für $G = U(2)$ erhält man $\rho_{m,n}$ mit $m \geq 0$, $n \in \mathbf{Z}$ und $m \equiv n \pmod{2}$ als Vertreter der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen. Für eine Herleitung siehe z. B. [22, Seite 147]. Sie sind definiert durch $\rho_{m,n}(e^{i\theta} h) = e^{in\theta} \pi_m(h)$ für $h \in \text{SU}(2)$.

3.5.2 Korollar. Sei $G = U(2)$ und Q_t die Konjugiertenklasse von $q_t = \begin{pmatrix} e^{it_1} & 0 \\ 0 & e^{it_2} \end{pmatrix}$, dann gilt

$$K(\rho_{m,n}, G, Q_t) \geq \sqrt{2 - \frac{2}{m+1} \cos(n(t_1 + t_2)/2) \frac{\sin((m+1)(t_1 - t_2)/2)}{\sin t}}$$

und

$$K(G, Q_t) \geq |\sin((t_1 - t_2)/2)|.$$

Beweis. Es gilt $\text{Spur } \rho_{m,n}(g) = e^{in(t_1+t_2)/2} \frac{\sin((m+1)(t_1-t_2)/2)}{\sin((t_1-t_2)/2)}$ für $g = q_t = \begin{pmatrix} e^{it_1} & 0 \\ 0 & e^{it_2} \end{pmatrix} = e^{i(t_1+t_2)/2} \begin{pmatrix} e^{i(t_1-t_2)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i(t_1-t_2)/2} \end{pmatrix}$. Also gilt

$$K(\rho_{m,n}, G, Q_t) \geq \sqrt{2 - \frac{2}{m+1} \cos(n(t_1+t_2)/2) \frac{\sin((m+1)(t_1-t_2)/2)}{\sin((t_1-t_2)/2)}}$$

für die Konjugiertenklasse Q_t von q_t und, da

$$\begin{aligned} K(\rho_{m,n}, G, Q_t) &\geq \sqrt{2 - \frac{2}{m+1} \left| \frac{\sin((m+1)(t_1-t_2)/2)}{\sin((t_1-t_2)/2)} \right|} \\ &\geq |\sin((t_1-t_2)/2)| \end{aligned}$$

ist, ist auch $K(G, Q_t) \geq |\sin((t_1-t_2)/2)|$. \square

Der folgende Satz bestimmt den exakten Wert der Kazhdan-Konstante für die Darstellung π_2 von $SU(2)$ und zeigt, daß im allgemeinen die untere Schranke aus Satz 3.2.2 nicht den exakten Wert liefert ist. Die Bestimmung dieser Kazhdan-Konstante wurde von P. de la Harpe als Problem gestellt.

3.5.3 Satz. Für die Darstellung $\pi = \pi_2$ von $G = SU(2)$ gilt

$$K(\pi, G, Q_t) = 2 |\sin t|.$$

Beweis. Sei P die Projektion auf den von den Basisvektoren e_0 und e_2 aufgespannten Raum, dann gilt

$$\begin{aligned} K(\pi, G, Q_t)^2 &= \inf_{\xi \neq 0} \|\xi\|^{-2} \sup_{h \in G} \|\pi(q_t)\pi(h)\xi - \pi(h)\xi\|^2 \\ &= |e^{2it} - 1|^2 \inf_{\xi \neq 0} \|\xi\|^{-2} \sup_{h \in G} \|P\pi(h)\xi\|^2. \end{aligned}$$

Also gilt $\sup_{h \in G} \|P\pi(h)\xi\|^2 = \|\xi\|^2 - \inf_{h \in G} \|P_1\pi(h)\xi\|^2$ für die orthogonale Projektion $P_1 = P^\perp$ auf e_1 . Für $h = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ gilt $P_1\pi(h)\xi = (-\sqrt{2}a\bar{b}\xi_0 + (|a|^2 - |b|^2)\xi_1 + \sqrt{2}\bar{a}b\xi_2)e_1$, wobei $\xi = \xi_0e_0 + \xi_1e_1 + \xi_2e_2$. Falls $\xi_1 = 0$ ist, setzt man $a = 1, b = 0$, dann ist $P_1\pi(h)\xi = 0$. Um nun für $\xi_1 \neq 0$ zu zeigen, daß es ein h gibt mit $P_1\pi(h)\xi = 0$, kann man

annehmen, daß $\xi_1 = 1$ ist. Ansonsten dividiert man die Gleichung durch ξ_1 .
Damit folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(-\sqrt{2} \bar{a} b \xi_0 + |a|^2 - |b|^2 + \sqrt{2} \bar{a} b \xi_2 \right) &= \sqrt{2} \operatorname{Im} (-\bar{a} b \xi_0 + \bar{a} b \xi_2) \\ &= -\sqrt{2} \operatorname{Im} (\bar{a} b (\xi_0 + \bar{\xi}_2)). \end{aligned}$$

Damit der Imaginärteil 0 wird, muß gelten $\bar{a} b = |ab| e^{-i\vartheta}$, falls $\xi_0 + \bar{\xi}_2 = e^{i\vartheta} |\xi_0 + \bar{\xi}_2|$ ist. Für geeignete $|a|$ und $|b|$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left(-\sqrt{2} \bar{a} b \xi_0 + |a|^2 - |b|^2 + \sqrt{2} \bar{a} b \xi_2 \right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{Re} (-\bar{a} b \xi_0 + \bar{a} b \xi_2) + |a|^2 - |b|^2 \\ &= -\sqrt{2} \operatorname{Re} (\bar{a} b (\xi_0 - \bar{\xi}_2)) + |a|^2 - |b|^2 \\ &= -\sqrt{2} |ab| \operatorname{Re} (e^{-i\vartheta} (\xi_0 - \bar{\xi}_2)) + |a|^2 - |b|^2 = 0. \end{aligned}$$

Also gibt es ein $h \in \operatorname{SU}(2)$ so, daß $P_1 \pi(h) \xi = 0$ ist. Somit ist $K(\pi, G, Q_t) = |1 - e^{2it}| = |e^{-it} - e^{it}| = 2 |\sin t|$, da $\inf_{h \in G} \|P_1 \pi(h) \xi\|^2 = 0$. \square

Damit ist $K(\pi_2, G, Q_t) > \sqrt{2 - \frac{2 \sin(3t)}{3 \sin t}}$ für $0 < t < \pi$, da

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2 \sin(3t)}{3 \sin t} &= 2 - \frac{4}{3} (\cos t)^2 - \frac{2}{3} \cos(2t) = 2 - 2 (\cos t)^2 + \frac{2}{3} (\sin t)^2 \\ &= \frac{8}{3} (\sin t)^2 < 4 (\sin t)^2. \end{aligned}$$

Nun folgt die Betrachtung des allgemeinen Falls $n \geq 2$. Sei $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ein Vektor ganzer Zahlen μ_s mit $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$, dann wird definiert $\chi_\mu(x) = \det M_\mu(x) / \det M_0(x)$, wobei $M_\mu(x)$ die Matrix mit den Koeffizienten $x_r^{\mu_s + n - s}$ bezeichne für $r, s = 1, \dots, n$ und $x \in \mathbf{T}^n$. Die Matrix $M_0(x)$ ist eine Vandermonde-Matrix und damit ist $\det M_0(x) = \prod_{1 \leq r < s \leq n} (x_r - x_s)$. Es ist möglich die Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $\operatorname{SU}(n)$ durch Vektoren nichtnegativer ganzer Zahlen $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n)$ zu parametrisieren mit $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0$ und der Wert des Charakters von $g \in \operatorname{SU}(n)$, der zum Parameter μ gehört, ist $\chi_\mu(x)$, wobei x_1, \dots, x_n die Eigenwerte der Matrix g sind, siehe z. B. [47, Seite 237].

3.5.4 Lemma. Sei $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$, dann gilt

$$\frac{\det M_\mu(x)}{\prod_{r=1}^{n-1} (x_r - x_n)} = \sum_{\kappa_1 = \mu_2}^{\mu_1} \cdots \sum_{\kappa_{n-1} = \mu_n}^{\mu_{n-1}} x_n^{\mu_1 + \dots + \mu_n - \kappa_1 - \dots - \kappa_{n-1}} \det M_\kappa(y).$$

Beweis. Sei $\lambda_s = \mu_s - \mu_n$ für $s = 1, \dots, n-1$, dann erhält man durch elementare Umformung

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} x_1^{\mu_1+n-1} & \cdots & x_1^{\mu_{n-1}+1} & x_1^{\mu_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1}^{\mu_1+n-1} & \cdots & x_{n-1}^{\mu_{n-1}+1} & x_{n-1}^{\mu_n} \\ x_n^{\mu_1+n-1} & \cdots & x_n^{\mu_{n-1}+1} & x_n^{\mu_n} \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \cdots x_n)^{\mu_n} \det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} - x_n^{\lambda_1+n-1} & \cdots & x_1^{\lambda_{n-1}+1} - x_n^{\lambda_{n-1}+1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n-1}^{\lambda_1+n-1} - x_n^{\lambda_1+n-1} & \cdots & x_{n-1}^{\lambda_{n-1}+1} - x_n^{\lambda_{n-1}+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit ist der Wert von $(x_1 \cdots x_n)^{-\mu_n} \det M_\mu(x) / \prod_{r=1}^{n-1} (x_r - x_n)$ gleich

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} \sum_{\kappa=0}^{\lambda_1+n-2} x_1^\kappa x_n^{\lambda_1+n-2-\kappa} & \cdots & \sum_{\kappa=0}^{\lambda_{n-1}} x_1^\kappa x_n^{\lambda_{n-1}-\kappa} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\kappa=0}^{\lambda_1+n-2} x_{n-1}^\kappa x_n^{\lambda_1+n-2-\kappa} & \cdots & \sum_{\kappa=0}^{\lambda_{n-1}} x_{n-1}^\kappa x_n^{\lambda_{n-1}-\kappa} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \sum_{\kappa=\lambda_2+n-2}^{\lambda_1+n-2} x_1^\kappa x_n^{\lambda_1+n-2-\kappa} & \cdots & \sum_{\kappa=0}^{\lambda_{n-1}} x_1^\kappa x_n^{\lambda_{n-1}-\kappa} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\kappa=\lambda_2+n-2}^{\lambda_1+n-2} x_{n-1}^\kappa x_n^{\lambda_1+n-2-\kappa} & \cdots & \sum_{\kappa=0}^{\lambda_{n-1}} x_{n-1}^\kappa x_n^{\lambda_{n-1}-\kappa} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Multilinearität der Determinante zusammen mit $\mu_s = \lambda_s + \mu_n$ ergibt obige Formel. \square

Dieses Lemma liefert eine Rekursionsformel für $\chi_\mu(x)$. Es zeigt auch, daß $\chi_\mu(x)$ für alle x definiert ist und nicht nur für diejenigen mit $\det M_0(x) \neq 0$. Insbesondere ist der Wert für $x = (1, \dots, 1)$ gleich

$$m_\mu = \sum_{\kappa_1=\mu_2}^{\mu_1} \sum_{\kappa_2=\mu_3}^{\mu_2} \cdots \sum_{\kappa_{n-2}=\mu_{n-1}}^{\mu_{n-2}} \sum_{\kappa_{n-1}=\mu_n}^{\mu_{n-1}} m_{\kappa'}.$$

Sei im folgenden $N_n = \{\mu \in \mathbf{Z}^n : \mu_1 \geq 1, \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0\}$, dann gilt $n \leq \inf_{\mu \in N_n} m_\mu$. Denn es ist $2 = \inf_{\mu \in N_2} m_\mu$ und für $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned} \inf_{\mu \in N_n} m_\mu &\geq 1 + \inf_{\mu \in N_n} ((\mu_1 - \mu_2 + 1) \cdots (\mu_{n-1} - \mu_n + 1) - 1) \inf_{\kappa \in N_{n-1}} m_\kappa \\ &\geq 1 + n - 1 = n, \end{aligned}$$

da für $\kappa' = (\kappa_1 - \kappa_{n-1}, \dots, \kappa_{n-2} - \kappa_{n-1}, 0)$ gilt $m_{\kappa'} = m_\kappa$. Allgemeiner gilt sogar $|\chi_{\kappa'}(y)| = |\chi_\kappa(y)|$ für $y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{T}^{n-1}$.

3.5.5 Lemma. Sei $n \geq 3$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{T}^n$ und $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$, dann gilt

$$\sup_{\mu \in N_n} m_\mu^{-1} |\chi_\mu(x)| \leq \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \sup_{\kappa \in N_{n-1}} m_\kappa^{-1} |\chi_\kappa(y)|.$$

Beweis. Das vorige Lemma zeigt, daß

$$|\chi_\mu(x)| \leq \sum_{\kappa_1=\mu_2}^{\mu_1} \sum_{\kappa_2=\mu_3}^{\mu_2} \cdots \sum_{\kappa_{n-2}=\mu_{n-1}}^{\mu_{n-2}} \sum_{\kappa_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}} |\chi_\kappa(y)|$$

ist. Ist $\mu_2 = \mu_{n-1}$, dann gilt

$$\begin{aligned} m_\mu^{-1} |\chi_\mu(x)| &\leq \frac{1}{m_\mu} + \frac{m_\mu - 1}{m_\mu} \sum_{\kappa_1=\mu_2}^{\mu_1} \cdots \sum_{\kappa_{n-1}=0}^{\min\{\mu_{n-1}, \kappa_1-1\}} \frac{m_\kappa}{m_\mu - 1} m_\kappa^{-1} |\chi_\kappa(y)| \\ &\leq \frac{1}{m_\mu} + \frac{m_\mu - 1}{m_\mu} \sup_{\kappa \in N_{n-1}} m_\kappa^{-1} |\chi_\kappa(y)| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \sup_{\kappa \in N_{n-1}} m_\kappa^{-1} |\chi_\kappa(y)|, \end{aligned}$$

da $n \leq \inf_{\mu \in N_n} m_\mu$. Ist nun $\mu_2 > \mu_{n-1}$, dann ist

$$\begin{aligned} m_\mu^{-1} |\chi_\mu(x)| &\leq \sum_{\kappa_1=\mu_2}^{\mu_1} \sum_{\kappa_2=\mu_3}^{\mu_2} \cdots \sum_{\kappa_{n-2}=\mu_{n-1}}^{\mu_{n-2}} \sum_{\kappa_{n-1}=0}^{\mu_{n-1}} \frac{m_\kappa}{m_\mu} m_\kappa^{-1} |\chi_\kappa(y)| \\ &\leq \sup_{\kappa \in N_{n-1}} m_\kappa^{-1} |\chi_\kappa(y)| \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \sup_{\kappa \in N_{n-1}} m_\kappa^{-1} |\chi_\kappa(y)|. \end{aligned}$$

□

3.5.6 Korollar. Sei $n \geq 2$ und $x_r = e^{it_r}$ für $r = 1, \dots, n$, dann gilt

$$\inf_{\mu \in N_n} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\mu} |\chi_\mu(x)|} \geq \sqrt{\frac{2}{n}} |\sin((t_1 - t_2)/2)|.$$

Beweis. Für $n = 2$ folgt dies aus Korollar 3.5.2.

Sei $n \geq 3$, dann folgt für $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$ aus Lemma 3.5.5

$$\begin{aligned} \inf_{\mu \in N_n} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\mu} |\chi_\mu(x)|} &\geq \inf_{\kappa \in N_{n-1}} \sqrt{2 - 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} m_\kappa^{-1} |\chi_\kappa(y)| \right)} \\ &= \sqrt{\frac{n-1}{n}} \inf_{\kappa \in N_{n-1}} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\kappa} |\chi_\kappa(y)|}. \end{aligned}$$

Mit Induktion und Korollar 3.5.2 folgt

$$\begin{aligned} \inf_{\mu \in N_n} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\mu} |\chi_\mu(x)|} &\geq \sqrt{\frac{2}{n}} \inf_{\kappa \in N_2} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\kappa} |\chi_\kappa(x_1, x_2)|} \\ &\geq \sqrt{\frac{2}{n}} |\sin((t_1 - t_2)/2)|. \end{aligned}$$

□

Nun ist es möglich folgende untere Schranke für die Kazhdan-Konstante von $SU(n)$ zu bestimmen.

3.5.7 Satz. Für $G = SU(n)$ und die Konjugiertenklasse Q_t mit den Eigenwerten $e^{it_1}, \dots, e^{it_n}$ gilt

$$K(G, Q_t) \geq \sqrt{\frac{2}{n}} \max_{1 \leq r, s \leq n} |\sin((t_r - t_s)/2)|.$$

Beweis. Sei $x_r = e^{it_r}$ für $r = 1, \dots, n$, dann folgt nach obigem Korollar

$$\begin{aligned} K(G, Q_t) &\geq \inf_{\mu \in N_n} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\mu} \operatorname{Re} \chi_\mu(x)} \geq \inf_{\mu \in N_n} \sqrt{2 - \frac{2}{m_\mu} |\chi_\mu(x)|} \\ &\geq \sqrt{\frac{2}{n}} |\sin((t_1 - t_2)/2)|. \end{aligned}$$

Da eine Permutation der Eigenwerte x_1, \dots, x_n die Konjugiertenklasse Q_t nicht ändert, folgt

$$K(G, Q_t) \geq \sqrt{\frac{2}{n}} \max_{1 \leq r, s \leq n} |\sin((t_r - t_s)/2)|.$$

□

Das Spektrum zusammenhängender Graphen

Dieser Anhang enthält eine Liste der Spektren ungerichteter Graphen mit bis zu fünf Knoten.

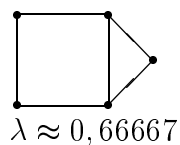
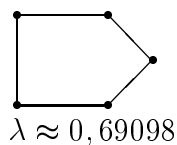
Die Werte mit weniger als vier Stellen sind exakt, d. h. 0,5 bedeutet wirklich $1/2$, die anderen sind auf fünf Stellen gerundet.


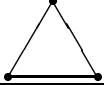

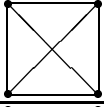
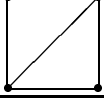
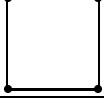
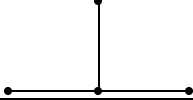
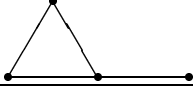

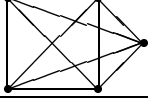

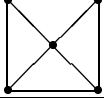
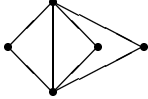
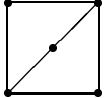
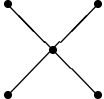
Die Eigenwerte sind der Größe nach geordnet mit Vielfachheiten angegeben ohne $\lambda_1 = 0$ jedesmal aufzuführen.

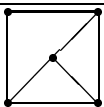
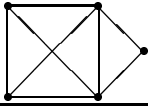
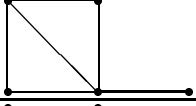
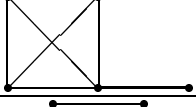
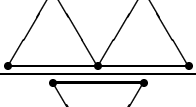
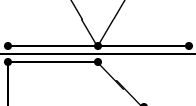
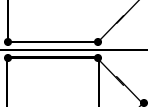
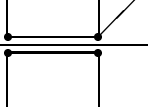
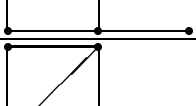
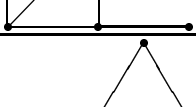
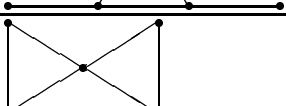
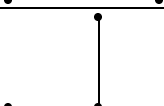
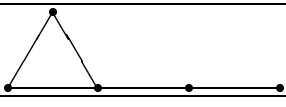
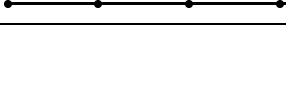

Die folgenden beiden Graphen liefern ein Beispiel dafür, daß die Graphen nicht durch ihr Spektrum eindeutig bestimmt sind. Das Spektrum ist beide Male $\{0, 1, 2\}$, wobei der Eigenwert 1 jeweils mit Vielfachheit 2 auftritt.



Hinzugefügte Kanten vergrößern auch den zweitkleinsten Eigenwert $\lambda = \lambda_2$ nicht notwendigerweise, wie die folgenden beiden Graphen zeigen.

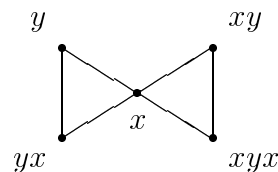


Graph	Spektrum			
	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
	2			
	1, 5	1, 5		
	1	2		
	1, 3, 3, 3, 3	1, 3, 3, 3, 3	1, 3, 3, 3, 3	
	1	1, 3, 3, 3, 3	1, 6, 6, 6, 7	
	1	1	2	
	1	1	2	
	0, 7, 7, 1, 2, 9	1, 5	1, 7, 2, 8, 7	
	0, 5	1, 5	2	
	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 2, 5
	1	1, 2, 5	1, 2, 5	1, 5
	1	1	1, 3, 3, 3, 3	1, 6, 6, 6, 7
	1	1	1, 2, 5	1, 7, 5
	1	1	1	2
	1	1	1	2

Graph	Spektrum			
	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
	0,86193	1	1,3333	1,8047
	0,85233	1,25	1,3333	1,5643
	0,77129	1	1,5	1,7287
	0,72571	1,3333	1,3333	1,6076
	0,72571	1,1667	1,5	1,6076
	0,69098	1	1,5	1,8090
	0,69098	0,69098	1,8090	1,8090
	0,66667	1	1,5	1,8333
	0,59175	1	1,4082	2
	0,56574	1,3333	1,3333	1,7676
	0,56574	1	1,6667	1,7676
	0,5	1,5	1,5	1,5
	0,42265	1	1,5774	2
	0,34594	1,2975	1,5	1,8566
	0,29289	1	1,7071	2

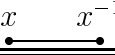
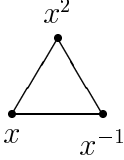
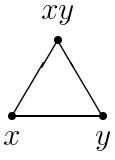
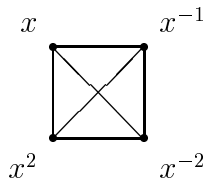
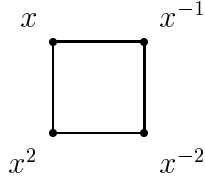
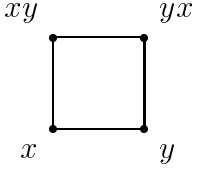
Graphen aus Erzeugendensystemen von Gruppen

Dieser Anhang enthält eine Liste der Graphen mit bis zu fünf Knoten samt den Erzeugendensystemen, aus denen sie entstehen, und den dazugehörigen Gruppen. Dabei ist zu beachten, daß nur jeweils die größten Gruppen aufgeführt sind, in dem Sinn, daß auch Faktorgruppen der angegebenen Gruppe mit entsprechendem Erzeugendensystem denselben Graphen erzeugen können. Beispielsweise erzeugt folgender Graphen mit dem Erzeugendensystem $S = \{x, y, xy, yx, xyx\}$ nicht nur $\Gamma = \langle x, y : x^2, y^2 \rangle \cong D_\infty$, sondern auch $\Gamma = \langle x, y : x^2, y^2, (xy)^k \rangle \cong D_k$ mit $k \geq 4$.

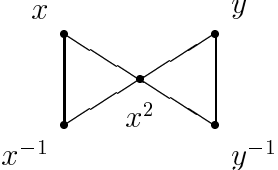
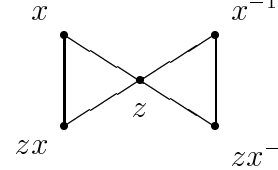
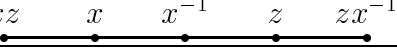
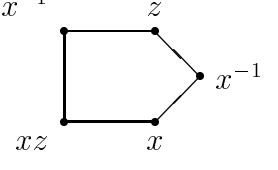
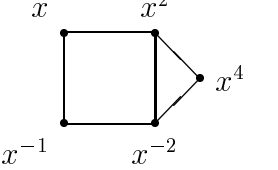
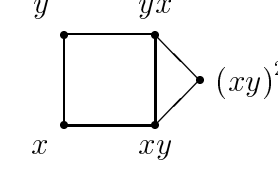


Abschnitt 1.5 enthält für die dort bestimmten Graphen auch die entsprechenden Faktorgruppen.

Durch Vergleich mit den Spektren in Anhang A läßt sich feststellen, daß jene Graphen, auf die sich das Kriterium von A. Żuk anwenden ließe, endliche Gruppen erzeugen. Alle unendlichen Gruppen in folgender Liste sind auch keine Kazhdan-Gruppen, denn $D_\infty = \langle x, y : x^2, y^2 \rangle$ ist keine Kazhdan-Gruppe, da sie eine zu \mathbf{Z} isomorphe Untergruppe mit Index 2 enthält. Die Gruppe $\text{PSL}(2, \mathbf{Z})$ ist ebenfalls keine Kazhdan-Gruppe. Die beiden Gruppen $\langle x, y : x^4, y^2, (yx^2)^2 \rangle$ und $\langle x, y : x^4, y^4, x^2y^2 \rangle$ besitzen jeweils eine Faktorgruppe isomorph zu D_∞ und sind damit auch keine Kazhdan-Gruppen.

Gruppe	Graph
$\Gamma = \langle x : x^3 \rangle \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ $S = \{x^{\pm 1}\}$	
$\Gamma = \langle x : x^4 \rangle \cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ $S = \{x^{\pm 1}, x^2\}$	
$\Gamma = \langle x, y : x^2, y^2, (xy)^2 \rangle \cong D_2$ $\cong \langle x : x^2 \rangle \times \langle y : y^2 \rangle$ $\cong (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ $S = \{x, y, xy\}$	
$\Gamma = \langle x : x^5 \rangle \cong \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ $S = \{x^{\pm 1}, x^{\pm 2}\}$	
$\Gamma = \langle x : x^6 \rangle \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ $S = \{x^{\pm 1}, x^{\pm 2}\}$	
$\Gamma = \langle x, y : x^2, y^2, (xy)^3 \rangle \cong D_3$ $S = \{x, y, xy, yx\}$	

Gruppe	Graph
$\Gamma = \langle x \rangle \cong \mathbf{Z}$ $S = \{x^{\pm 1}, x^{\pm 2}\}$	
$\Gamma = \langle x, y : x^2, y^2 \rangle \cong D_\infty,$ $S = \{x, y, xy, yx\}$	
$\Gamma = \langle x : x^6 \rangle \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ $S = \{x^{\pm 1}, x^{\pm 2}, x^3\}$	
$\Gamma = \langle x, y : x^2, y^2, (xy)^3 \rangle \cong D_3$ $S = \{x, y, xy, yx, xyx\}$	
$\Gamma = \langle x, y : x^2, y^2 \rangle \cong D_\infty$ $S = \{x, y, xy, yx, xyx\}$	
$\Gamma = \langle x, y, z : x^2, y^2, z^2, (zx)^2, (zy)^2 \rangle$ $\cong \langle x, y : x^2, y^2 \rangle \times \langle z : z^2 \rangle$ $\cong D_\infty \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ $S = \{x, y, z, zx, zy\}$	
$\Gamma = \langle x, y : x^4, y^2, (yx^2)^2 \rangle$ $S = \{x^{\pm 1}, x^2, y, yx^2\}$	

Gruppe	Graph
$\Gamma = \langle x, y : x^4, y^4, x^2y^2 \rangle$ $S = \{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, x^2\}$	
$\Gamma = \langle x, z : z^2, zxzx^{-1} \rangle$ $\cong \langle x \rangle \times \langle z : z^2 \rangle$ $\cong \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ $S = \{x^{\pm 1}, z, zx, zx^{-1}\}$	
$\Gamma = \langle x, z : x^3, z^2 \rangle \cong \text{PSL}(2, \mathbf{Z})$ $S = \{x^{\pm 1}, z, xz, zx^{-1}\}$	
$\Gamma = \langle x, z : x^3, z^2, (xz)^3 \rangle$ $\cong \text{PSL}(2, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ $S = \{x^{\pm 1}, z, xz, zx^{-1}\}$	
$\Gamma = \langle x : x^8 \rangle \cong \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ $S = \{x^{\pm 1}, x^{\pm 2}, x^4\}$	
$\Gamma = \langle x, y : x^2, y^2, (xy)^4 \rangle \cong D_4$ $S = \{x, y, xy, yx, (xy)^2\}$	

Literaturverzeichnis

1. Alon, Noga:
Eigenvalues and expanders.
Combinatorica **6**, Nr. 2, Seite 83–96, 1986.
2. Arad, Zvi, David Chillag und Gadi Moran:
Groups with small covering number.
In: Arad, Zvi und Marcel Herzog, (Hgs.): Products of conjugacy classes in groups, Seite 222–244, Berlin: 1985. (Lecture notes in mathematics 1112)
3. Bacher, Roland und Pierre de la Harpe:
Exact values of Kazhdan constants for some finite groups.
Journal of Algebra **163**, Seite 495–515, 1994.
4. Bekka, M. B. und M. Mayer:
On Kazhdan's property (T) and Kazhdan constants associated to a Laplacian for $SL(3, \mathbb{R})$.
Journal of Lie Theory **10**, Seite 93–105, 2000.
5. Bekka, M. B. und M. Neuhauser:
On Kazhdan's property (T) for $Sp_2(k)$.
Erscheint im Journal of Lie Theory.
6. Bien, Frederic:
Construction of telephone networks by group representations.
Notices of the American Mathematical Society **36**, Nr. 1, Seite 5–22, Januar 1989.
7. Borel, Armand:
Cohomologie de certains groupes discretes et laplacien p-adique (d'apres H. Garland).
In: Séminaire Bourbaki, 26e année (1973/1974), Exp. No. 437, Seite 12–35, Berlin: 1975. (Lecture notes in math. 431)

8. Carter, Roger William:
Finite groups of Lie type.
Conjugacy classes and complex characters.
Chichester: 1985.
(Pure and applied mathematics)
9. Cartwright, D. I., W. Młotkowski und T. Steger:
Property (T) and \tilde{A}_2 groups.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble **44**, Nr. 1, Seite 213–248, 1993.
10. Cherix, Pierre-Alain:
Property (T) and expanding constants for semidirect products.
Linear and Multilinear Algebra **39**, Seite 153–160, 1995.
11. Chung, Fan R. K.:
Spectral graph theory.
Providence, Rhode Island: 1997.
(Regional conference series in mathematics 92)
12. Conway, John B.:
A course in functional analysis.
New York: ²1990.
(Graduate texts in mathematics 96)
13. Coxeter, H. S. M. und W. O. J. Moser:
Generators and relations for discrete groups.
With 54 figures.
Berlin: ³1972.
14. Cvetković, Dragoš M., Michael Doob und Hans Sachs:
Spectra of graphs.
Theory and applications.
Heidelberg: 3rd revised and enlarged edition 1995.
15. Delaroche, C. und A. Kirillov:
Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses
sous-groupes fermés.
Séminaire Bourbaki 343, 1967/68.
16. Deutsch, Annabel:
Kazhdan's property (T) and related properties of locally compact groups.
Ph. D. thesis, University of Edinburgh, 1992.

17. Deutsch, Annabel und Alain Valette:
On diameters of orbits of compact groups in unitary representations.
J. Austral. Math. Soc. (Series A) **59**, Seite 308–312, 1995.
18. Feit, Walter und Graham Higman:
The nonexistence of certain generalized polygons.
Journal of Algebra **1**, Nr. 2, Seite 114–131, 1964.
19. Fell, James Michael Gardner und Robert S. Doran:
Representations of $*$ -algebras, locally compact groups, and Banach $*$ -
algebraic bundles.
Volume 1. Basic representation theory of groups and algebras.
Boston: 1988.
(Pure and applied mathematics 125)
20. Flatto, L., A. M. Odlyzko und D. B. Wales:
Random shuffles and group representations.
The Annals of Probability **13**, Nr. 1, Seite 154–178, 1985.
21. Folland, Gerald B.:
Harmonic analysis in phase space.
Princeton, New Jersey: 1989.
(Annals of mathematics studies 122)
22. Folland, Gerald B.:
A course in abstract harmonic analysis.
Boca Raton: 1995.
(Studies in advanced mathematics)
23. Frobenius, Ferdinand Georg:
Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe.
In: Serre, J-P., (Hg.): Ferdinand Georg Frobenius, Seite 148–166, Berlin:
1968.
24. Garland, Howard:
 p -adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p -adic
groups.
Ann. of Math. (2) **97**, Seite 375–423, 1973.
25. Gluck, David:
Sharper character value estimates for groups of Lie type.
Journal of Algebra **174**, Seite 229–266, 1995.

26. de la Harpe, Pierre und Valette Alain:
La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.
Paris: 1989.
(Astérisque 175)
27. Howe, Roger und Eng Chye Tan:
Non-Abelian harmonic analysis.
Applications of $SL(2, \mathbb{R})$.
New York: 1992.
(Universitext)
28. Humphreys, James E.:
Introduction to Lie algebras and representation theory.
New York: Seventh corrected printing 1997.
(Graduate texts in mathematics 9)
29. Ingram, R. E.:
Some characters of the symmetric group.
Proc. Amer. Math. Soc. **1**, Seite 358–369, 1950.
30. Ismagilov, Rais Salmanovich:
Representations of infinite-dimensional groups.
Translated by D. Deart from an original Russian manuscript.
Providence, Rhode Island: 1996.
(Translations of mathematical monographs 152)
31. Kazhdan, D. A.:
Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups.
Funct. Anal. Appl. **1**, Seite 63–65, 1967.
32. Knapp, Anthony W.:
Representation theory of semisimple groups.
An overview based on examples.
Princeton, New Jersey: 1986.
33. Leutbecher, Armin:
Zahlentheorie.
Eine Einführung in die Algebra.
Berlin: 1996.
(Grundwissen Mathematik)

34. Lev, Arieh:
The covering number of the group $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F})$.
Journal of Algebra **182**, Seite 60–84, 1996.
35. Lubotzky, Alexander:
Discrete groups, expanding graphs and invariant measures.
Appendix by Jonathan D. Rogawski.
Basel: 1994.
(Progress in mathematics 125)
36. Mackey, George Whitelaw:
The theory of unitary group representations.
Chicago: 1976.
(Chicago lectures in mathematics)
37. Margulis, G. A.:
Explicit construction of expanders.
Problems of Information Transmission 9 (1973), no. 4 , Seite 325–332,
1975.
38. Margulis, Gregori Aleksandrovitch:
Discrete subgroups of semisimple Lie groups.
Berlin: 1991.
(Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge 17)
39. Neuhauser, Markus:
Zur metaplektischen Darstellung.
Diplomarbeit, Technische Universität München, 1998.
40. Pressley, Andrew und Graeme Segal:
Loop groups.
Oxford: 1992.
(Oxford mathematical monographs)
41. Roichman, Yuval:
Upper bounds on the characters of the symmetric group.
Invent. math. **125**, Seite 451–485, 1996.
42. Roichman, Yuval:
Characters of the symmetric groups: Formulas, estimates and applications.
In: Hejhal, D. A., J. Friedman, M. C. Gutzwiller und A. M. Odlyzko,
(Hgs.): Emerging applications of number theory, Seite 525–545, 1999.
(The IMA volumes in mathematics and its applications 109)

43. Schubert, Horst:
Topologie.
Eine Einführung.
Stuttgart: ⁴1975.
44. Shalom, Yehuda:
Explicit Kazhdan constants for representations of semisimple and arithmetic groups.
Preprint.
45. Shalom, Yehuda:
Explicit Kazhdan constants for representations of semisimple and arithmetic groups.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble **50**, Nr. 3, Seite 833–863, 2000.
46. Shalom, Yehuda:
Invariant measures for algebraic actions, Zariski dense subgroups and Kazhdan's property (T).
Transactions of the American Mathematical Society **351**, Nr. 8, Seite 3387–3412, 1999.
47. Simon, Barry:
Representations of finite and compact groups.
Providence, Rhode Island: 1996.
(Graduate studies in mathematics 10)
48. Valette, Alain:
Old and new about Kazhdan's property (T).
In: Baldoni, Velleda und Massimo A. Picardello, (Hgs.): Representations of Lie groups and quantum groups, Seite 271–333, 1994. (Pitman research notes in mathematics series 311)
49. Vasershtein, L. N.:
On groups possessing property T.
Functional Anal. Appl. **2**, Seite 86, 1968.
50. Weil, André:
Basic number theory.
Reprint of the 1973 Edition.
Berlin: 1995.
(Classics in mathematics)

51. Zimmer, Robert J.:
Ergodic theory and semisimple groups.
Boston: 1984.
(Monographs in mathematics 81)
52. Żuk, Andrzej:
La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres.
Comptes Rendus l'Academie des Sciences. Series I. Mathematique **323**,
Nr. 5, Seite 453–458, 1996.
53. Żuk, Andrzej:
Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups.
Preprint.