

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
FACHGEBIET STRÖMUNGSMECHANIK

# Transport passiver Skalare in wandgebundener und isotroper kompressibler Turbulenz

HOLGER FOYSI

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen  
Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Th. Sattelmayer

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. R. Friedrich
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr. h.c., Dr.-Ing. E.h. N. Peters  
Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen

Die Dissertation wurde am 27.10.2004 bei der Technischen Universität München  
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 10.02.2005 angenommen.



## Zusammenfassung

Direkte numerische Simulationen von supersonischen Kanalströmungen mit Skalartransport und deren physikalische Analyse, sowie Simulationen kompressibler isotroper nichtabklingender Turbulenz mit Skalartransport wurden durchgeführt.

Die globalen Machzahlen der Kanalströmungen variieren zwischen  $M_b = 0.3$  und  $M_b = 3.5$ . Die Reynoldszahlen, basierend auf der Schubspannungsgeschwindigkeit liegen zwischen  $Re_\tau = 180$  und  $Re_\tau = 1030$ . Die Simulationen bestätigen, dass sich Kompressibilitätseffekte hauptsächlich in den großen Variationen der Dichte- und Temperatur aufgrund der gekühlten Wände manifestieren. Um die Kompressibilitätseffekte zu analysieren, wurden Skalierungen der turbulenten Spannungen und Skalarflüsse, sowie deren Bilanzen im Mitten- und Wandbereich bestimmt. Dabei zeigte sich eine Änderung der Anisotropie der turbulenten Spannungen aufgrund der Variation von Dichte und Temperatur. Entscheidend dafür ist die Rolle der Druckscherkorrelation, die eine starke Reduktion in kompressiblen Kanalströmungen gegenüber vergleichbaren inkompressiblen Simulationen erfährt. Eine Analyse der Druckfluktuationen mit Hilfe der Green-Funktion für die Druckfluktuationen zeigt, dass auch hierfür die Dichtevariation verantwortlich ist. Die Anisotropie der Turbulenten Spannungen spiegelte sich auch im Verhalten der turbulenten Skalarflüsse wider. Hier stiegen die Skalarflüsse in Strömungsrichtung mit steigender Machzahl, während die wandnormale Komponente absank. Eine physikalischere Begründung für dieses Verhalten wurde zusätzlich geliefert.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurden direkte numerische Simulationen kompressibler isotroper Turbulenz mit vorgegebenem mittleren Skalargradienten, bei einer Reynoldszahl von etwa 55, basierend auf dem Taylorschen Mikrolängenmass, und turbulenten Machzahlen zwischen  $M_t = 0.05$  und  $M_t = 0.63$  berechnet. Um die Turbulenz am Abklingen zu hindern, wurde ein solenoidaler Kraftterm zur Impulsgleichung addiert. Der in bisherigen Publikationen beobachtete Anstieg der inneren Energie, wurde durch einen Wärmesenkenterm in der Druck- und Entropiegleichung kompensiert, wodurch die Bildung statistischer Mittelwerte, bei im statistischen Sinne gleichen Reynolds- und Machzahlen, möglich ist. Ziel war es, die Abhängigkeit des Skalargradienten von der Verzerrungsrate, der Wirbelstärke und den thermodynamischen Größen, sowie deren Auswirkung auf die Ausrichtung des Skalargradienten zu untersuchen. Dazu wurden Transportgleichungen für den Betrag des Skalargradienten, die Eigenvektoren des Verzerrungstensors und den Winkel zwischen dem Skalargradienten und den Eigenvektoren des Verzerrungstensors im kompressiblen Fall abgeleitet und analysiert. Zum Vergleich wurde die Analyse auch für die gerechneten supersonischen Kanalströmungen durchgeführt. Kompressibilitätseffekte auf die Ausrichtung des fluktuierenden Skalargradienten bezüglich der Hauptachsen des kompressiblen und inkompressiblen Anteils des Verzerrungstensors wurden analysiert und erklärt. Insgesamt konnte man nur einen schwachen Einfluss der Kompressibilität auf die Ausrichtung des Skalargradienten, sowohl in der kompressiblen isotropen Turbulenz, als auch in der supersonischen Kanalströmung, erkennen. Die DNS-Ergebnisse zeigten allerdings, dass mit zunehmender Machzahl die Wahrscheinlichkeit für hohe Skalargradienten in Regionen einer stabilen Fokus/Dehnungstopologie zunimmt.



## Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Fluidmechanik/Fachgebiet Strömungsmechanik, im Rahmen des Verbundprojektes der "Interdisziplinären Turbulenzinitiative", gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Die Rechnungen wurden auf der Hitachi SR8000-F1 des Leibnitz-Rechenzentrums München, durchgeführt.

An dieser Stelle möchte ich gerne Prof. Dr.-Ing. R. Friedrich dafür danken, dass er mir als Physiker die Chance gab, am Lehrstuhl für Fluidmechanik zu promovieren. Seine Tür stand für Fragen und Diskussionen jederzeit offen. Für die gewährte Bewegungsfreiheit sowie die Förderung und das große Interesse am Fortgang meiner Arbeit gilt Prof. Dr.-Ing. R. Friedrich mein besonderer Dank.

Herrn Prof.Dr.-Ing.T.Sattelmayer gilt mein Dank für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes, Herrn Prof.Dr.-Ing.Dr.h.c.N.Peters danke ich für die bereitwillige Übernahme des Koreferats.

Vielen Dank auch an Prof. S. Sarkar (San Diego), von dem ich viel über wissenschaftliches Arbeiten während seines Aufenthalts an unserem Institut lernte, sowie an Prof. J. Mathew (Bangalore), Prof. J. Riley (Seattle), Prof. T. Sengupta (Kanpur), Prof. M. Mannhart und Dr. Sesterhenn für die Zusammenarbeit und die zahlreichen stimulierenden Diskussionen.

Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des Fachgebiets Strömungsmechanik, insbesondere meinem Zimmerkollegen Dipl.-Ing. J. Kreuzinger, für die gute Zusammenarbeit.

Schließlich möchte ich ganz besonders meiner Frau und meinen Eltern für die Unterstützung und Geduld, die sie während meiner Promotion aufbrachten, danken.

Garching, September 2004

Holger Foyssi



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Numerische Berechnung kompressibler Strömungen idealer Gase</b>	<b>7</b>
2.1	Grundgleichungen . . . . .	7
2.2	Diskretisierung, Stabilitätsanalyse und Randbedingungen . . . . .	8
2.2.1	Stabilität der räumlichen Diskretisierung . . . . .	11
2.2.2	Stabilität der Zeitintegration . . . . .	15
2.2.3	Stabilität der Konvektions-Diffusionsgleichung . . . . .	19
2.3	Wahl der Zeitschrittgröße . . . . .	21
2.4	Parallelisierung und Optimierung . . . . .	28
2.5	Optimierung des Löser . . . . .	34
2.6	Rand- und Anfangsbedingungen der Kanalsimulationen . . . . .	37
2.6.1	Skalartransport . . . . .	40
2.7	Verifikation der Gebietsgröße und Auflösung im Kanal . . . . .	41
2.7.1	Leistungsdichtespektren . . . . .	43
2.7.2	Zweipunktkorrelationen . . . . .	44
2.8	Transport statistisch gemittelter Felder . . . . .	53
2.8.1	Mittelungsverfahren . . . . .	53
2.8.2	Gemittelte Transportgleichungen . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Überschallkanalströmungen</b>	<b>56</b>
3.1	Skalierung der mittleren Grössen . . . . .	60
3.1.1	Viskose Unterschicht . . . . .	61
3.1.2	Vollturbulente Schicht . . . . .	63
3.2	Geschwindigkeits- und Skalarfluktuationen . . . . .	68
3.3	Turbulente Spannungen und Skalarflüsse . . . . .	78
3.4	Skalar- und Geschwindigkeitskorrelationen . . . . .	87
3.4.1	Korrelationskoeffizienten . . . . .	87
3.4.2	Streaks . . . . .	89
3.5	Bilanzen der Einpunktkorrelationen . . . . .	106
3.5.1	Äussere Skalierung der Bilanzgleichungen . . . . .	108
3.5.2	Innere Skalierung der Bilanzen . . . . .	116
3.6	Analyse der Druck-Scherkorrelation . . . . .	132
3.6.1	Korrelationskoeffizienten und RMS-Werte der Ableitungen der Skalar- und Geschwindigkeitsfluktuationen . . . . .	132
3.6.2	Lösung durch Green-Funktion . . . . .	140
3.6.3	Wo bleibt die Physik . . . . .	147
3.6.4	Gegenüberstellung von kompressiblen Kanalströmungen und inkomp- pressiblen Kanalströmungen mit Polymeren . . . . .	148

---

<b>4</b>	<b>Isotrope Turbulenz</b>	<b>153</b>
4.1	Anfangsbedingungen . . . . .	153
4.1.1	Energiezufuhr . . . . .	153
4.1.2	Grundgleichungen . . . . .	155
4.1.3	Startfelder . . . . .	158
4.2	Mittelwerte . . . . .	160
4.3	Analyse des Skalargradienten . . . . .	167
4.3.1	Transportgleichung für die Skalargradientenausrichtung . . . . .	169
4.3.2	Topologie der Mikrostruktur des Skalars . . . . .	184
4.3.3	Einfluss von Kompressibilitätstermen und des mittleren Skalargradienten auf die Mikrostruktur des Skalars . . . . .	186
4.4	Mikrostruktur des Skalars in supersonischer Kanalströmung . . . . .	192
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>212</b>
<b>A</b>	<b>Poissongleichung für die Druckfluktuationen</b>	<b>220</b>
<b>B</b>	<b>Zur Herleitung der Transportgleichung für <math>g</math></b>	<b>221</b>

## Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich der Anzahl und Größe der zu sendenden Pakete im Transpose- und Chained-Algorithmus. . . . .	34
2.2	Simulationsparameter (1/2) . . . . .	40
2.3	Simulationsparameter (2/2) . . . . .	40
3.4	Vergleich von Komponenten der Reynoldsspannungen bei $x_2^* = 20$ für die Fälle M0.3 und M3.0. Die Differenz gibt die Änderung des Betrags der jeweiligen Komponente an. . . . .	123
4.5	Koeffizienten des impliziten Filters 6.Ordnung (Lele (1992)) . . . . .	158
4.6	Übersicht der gerechneten Fälle. . . . .	160
4.7	Mittelwerte der Reynoldsspannungen, turbulenten Skalarflüsse und $\theta_{rms}$ . . . . .	164
4.8	Verhältnis der Fluktuationen der thermodynamischen Variablen zu deren Mittelwerten. . . . .	164
4.9	Gemittelte Werte der Schiefe und des Flachheitsgrades der Ableitungen. . . . .	165
4.10	Terme der Bilanz von $\overline{\rho u_3'' \theta''}$ (obere Hälfte), normiert mit $\bar{\rho} u_{rms}^2  \mathbf{g} $ und der Bilanz der Skalarvarianz (untere Hälfte), normiert mit $\bar{\rho} u_{rms}  \mathbf{g} ^2 L_{x_1}$ . . . . .	167
4.11	Quotient des kompressiblen und solenoidalen Anteils der Produktionsrate in Gleichung (4.29). . . . .	178

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Realteil der modifizierten Wellenzahl (Dispersion) . . . . .	13
2.2	Imaginärteil der modifizierten Wellenzahl (Dissipation) . . . . .	13
2.3	Pseudoeigenwerte des kompakten Verfahrens von Lele (1992) für $N = 61$ . $\square, \epsilon = 0 \triangle, \epsilon = 0.01 \odot, \epsilon = 1 \cdot 10^{-4} \square, \epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$ . . . . .	15
2.4	Pseudoeigenwerte des kompakten Verfahrens von Lele (1992) für $N = 221$ . $\square, \epsilon = 0 \triangle, \epsilon = 0.01 \odot, \epsilon = 1 \cdot 10^{-4} \square, \epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$ . . . . .	16
2.5	Pseudoeigenwerte des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996) für $N = 61$ . $\square, \epsilon = 0 \triangle, \epsilon = 0.01 \odot, \epsilon = 1 \cdot 10^{-4} \square, \epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$ . . . . .	16
2.6	Pseudoeigenwerte des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996) für $N = 221$ . $\square, \epsilon = 0 \triangle, \epsilon = 0.01 \odot, \epsilon = 1 \cdot 10^{-4} \square, \epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$ . . . . .	17
2.7	Modifizierte Wellenzahl der 2.Ableitung für $N = 221$ . . . . .	20
2.8	Pseudospektren der 2.Ableitung für $N = 221$ . . . . .	20
2.9	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Lele (1992), für $N = 61$ und $CFL = 0.8$ . . . . .	22
2.10	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Lele (1992), für $N = 221$ und $CFL = 0.8$ . . . . .	22

2.11	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Lele (1992), für $N = 61$ und $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	23
2.12	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Lele (1992), für $N = 221$ und $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	23
2.13	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für $N = 61$ und $CFL = 0.8$ . . . . .	24
2.14	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für $N = 221$ und $CFL = 0.8$ . . . . .	24
2.15	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für $N = 61$ und $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	25
2.16	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für $N = 221$ und $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	25
2.17	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektions-Diffusionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für $N = 61$ und $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	26
2.18	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektions-Diffusionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für $N = 61$ und $CFL = 0.6$ , $C_d = 0.3$ . . . . .	26
2.19	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektions-Diffusionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für $N = 221$ und $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ . . . . .	27
2.20	Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektions-Diffusionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für $N = 221$ und $N = 61$ und $CFL = 0.6$ , $C_d = 0.3$ . . . . .	27
2.21	Beispiel einer Gebietszerlegung für 4 Prozessoren . . . . .	29
2.22	Ablauf des Pipelined-Thomas-Algorithmus . . . . .	30
2.23	Abfall der kinetischen Energie des Taylor-Green-Wirbels. . . . .	33
2.24	Ablauf des Transpose Algorithmus . . . . .	34
2.25	Speedup des Chained-Algorithmus. —, Linearer Speedup; □, Code mit 3.700.000 Gitterpunkten . . . . .	36
2.26	Speedup des Transpose-Algorithmus. —, Linearer Speedup; □, Code mit 3.700.000 Gitterpunkten . . . . .	36

2.27	Skizze des Rechengebiets der Kanalströmung (Abmessungen sind normiert mit der halben Kanalhöhe) . . . . .	37
2.28	Zeitlicher Verlauf der (a) Reynoldszahl $Re_\tau$ und (b) turbulenten kinetischen Energie, von Beginn der Simulation an . . . . .	41
2.29	$\overline{\rho u_2'' \theta''} / \chi_w - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \stackrel{!}{=} 1$ als Kriterium für die vollständige Entwicklung des passiven Skalars. . . . .	42
2.30	Falschfarbenbild des passiven Skalars in einer wandnormalen Ebene für den Fall M3.0. . . . .	42
2.31	Eindimensionale Leistungsdichtespektren bei $z^* = 10$ (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; - - - - , M3.0; - - - - - , M1.5; - · - · - · , M0.3. Zum Vergleich: ····· , $Re_\tau = 180$ ; ····· , $Re_\tau = 595$ Moser <i>et al.</i> (1999). Die Gerade ist proportional zu $k_x^{-5/3}$ . . . . .	45
2.32	Eindimensionale Leistungsdichtespektren bei $z^* = 10$ (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; - - - - , M3.0; - - - - - , M1.5; - · - · - · , M0.3. Zum Vergleich: ····· , $Re_\tau = 180$ ; ····· , $Re_\tau = 595$ Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	46
2.33	Eindimensionale Leistungsdichtespektren bei $z^* = 10$ (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; - - - - , M3.0; - - - - - , M1.5; - · - · - · , M0.3. Zum Vergleich: ····· , $Re_\tau = 180$ ; ····· , $Re_\tau = 595$ Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	47
2.34	Vergleich der Kanalsimulation M0.3 (Symbole) mit der Simulation von del Alamo & Jimenez (2001) (Linien). (a) RMS-Werte der Geschwindigkeiten (b) Dissipation der turbulenten kinetischen Energie. . . . .	48
2.35	Zweipunktkorrelationen bei $z^* = 5$ (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit $L_{x_1}$ . . . . .	49
2.36	Zweipunktkorrelationen bei $z^* = 5$ (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit $L_{x_{1,3}}$ . . . . .	50
2.37	Zweipunktkorrelationen bei $z^* = 5$ (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit $L_{x_3}$ . . . . .	51
2.38	Zweipunktkorrelationen bei $z^* = 5$ (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit $L_{x_3}$ . . . . .	52
3.1	Mittlerer Druck $\bar{P}$ , normiert mit $P_w$ . . . . .	56
3.2	Variation der mittleren Viskosität und Dichte, normiert mit den jeweiligen Wandwerten. . . . .	57
3.3	Lokale Reynoldszahl $Re_\tau^* = \bar{\rho} u_\tau^* H / \bar{\mu}$ mit $u_\tau^* = u_\tau \sqrt{\rho_w / \bar{\rho}}$ . Die Symbole zeigen die Beziehung $Re_\tau^* \approx Re_\tau (\bar{T} / T_w)^{-1.2}$ . . . . .	57
3.4	Lokale Machzahl $M^* = \bar{u} / \bar{c}$ . . . . .	59
3.5	Verlauf der turbulenten Machzahl $M_t = \sqrt{2k} / \bar{c}$ . . . . .	59
3.6	Verlauf der Gradientenmachzahl . . . . .	60

3.7	Viskositätstransformierte Geschwindigkeit in $x_1$ -Richtung (Gl. (3.5)). . . . .	62
3.8	Viskositätstransformierter Skalar in $x_1$ -Richtung (Gl. (3.9)). . . . .	62
3.9	'Van Driest' transformierte Geschwindigkeit in $x_1$ -Richtung (Gl. (3.12)). . . . .	64
3.10	Favre-gemittelter Skalar, normiert mit dem Wandwert $\Theta_w$ . . . . .	66
3.11	'Van Driest'-transformierter Skalar. . . . .	67
3.12	Quotient von $\bar{\mu}/\mu_w$ mit $\sqrt{\bar{\rho}/\rho_w\kappa_\Theta}x_2^+$ , um den Einfluss des viskosen Terms in (3.18) abzuschätzen. . . . .	67
3.13	Profil von $\{u_1\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau$ über $x_2/H$ . . . . .	69
3.14	Profil von $\{u_1\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau^*$ über $x_2/H$ . . . . .	69
3.15	Profil von $\{u_1\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau$ über $x_2^+$ . . . . .	70
3.16	Profil von $\{u_1\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau^*$ über $x_2^*$ . . . . .	70
3.17	Profil von $\{u_2\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau$ über $x_2/H$ . . . . .	71
3.18	Profil von $\{u_2\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau^*$ über $x_2/H$ . . . . .	71
3.19	Profil von $\{u_2\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau$ über $x_2^+$ . . . . .	72
3.20	Profil von $\{u_2\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau^*$ über $x_2^*$ . . . . .	72
3.21	Profil von $\{u_3\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau$ über $x_2/H$ . . . . .	73
3.22	Profil von $\{u_3\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau^*$ über $x_2/H$ . . . . .	73
3.23	Profil von $\{u_3\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau$ über $x_2^+$ . . . . .	74
3.24	Profil von $\{u_3\}_{rms}$ normiert mit $u_\tau^*$ über $x_2^*$ . . . . .	74
3.25	Profil von $\{\theta\}_{rms}$ normiert mit $\theta_c - \theta_w$ , aufgetragen über $x_2/h$ . . . . .	75
3.26	Profil von $\{\theta\}_{rms}$ normiert mit $\theta_\tau$ , aufgetragen über $x_2/h$ . In der Simulation von Seki <i>et al.</i> (inkompressible Kanalströmung mit $Re_\tau = 180$ ) wurde ein konstanter Skalarfluss als Wandrandbedingung verwendet. . . . .	75
3.27	$\{\theta\}_{rms}$ normiert mit $\chi_w/u_\tau^*/\bar{\rho}$ , aufgetragen über $x_2^*$ . . . . .	77
3.28	Äussere Skalierung der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ . . . . .	80
3.29	Äussere Skalierung der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ . . . . .	80
3.30	Äussere Skalierung der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ . . . . .	81
3.31	Äussere Skalierung der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ . . . . .	81
3.32	Äussere Skalierung des stromabgerichteten turbulenten Skalarflusses $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ . . . . .	82
3.33	Äussere Skalierung des wandnormalen turbulenten Skalarflusses $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ . . . . .	82
3.34	Variation der lokalen Reynoldszahl $Re_\tau^* = \bar{\rho} u_\tau^* h / \bar{\mu}$ . . . . .	83
3.35	Innere Skalierung der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ . . . . .	83
3.36	Innere Skalierung der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ . . . . .	84
3.37	Innere Skalierung der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ . . . . .	84
3.38	Innere Skalierung der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ . . . . .	85
3.39	Komponente $b_{11}$ des Anisotropietensors (3.26) für die kompressiblen Fälle, im Vergleich zu den Ergebnissen von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	85
3.40	Komponente $b_{22}$ des Anisotropietensors (3.26) für die kompressiblen Fälle, im Vergleich zu den Ergebnissen von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	86

3.41	Komponente $b_{33}$ des Anisotropietensors (3.26) für die kompressiblen Fälle, im Vergleich zu den Ergebnissen von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	86
3.42	$b_{12}$ aus Gleichung (3.26). Vergleich mit der DNS von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	87
3.43	Innere Skalierung des stromabgerichteten turbulenten Skalarflusses $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ . . . . .	88
3.44	Innere Skalierung des wandnormalen turbulenten Skalarflusses $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ . . . . .	88
3.45	Kreuzkorrelationskoeffizient $R_{u_1 \theta}$ . . . . .	90
3.46	Kreuzkorrelationskoeffizient $R_{u_2 \theta}$ . . . . .	90
3.47	Kreuzkorrelationskoeffizient $R_{u_1 \theta}$ . . . . .	91
3.48	Kreuzkorrelationskoeffizient $R_{u_2 \theta}$ . . . . .	91
3.49	Zweipunktkorrelationen bei $z^* = 5$ (a,c) und $z^* = 20$ (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; ---, M3.0; -----, M1.5; ---, M0.3. Zum Vergleich: ·····, $Re_\tau = 180$ ; ·····, $Re_\tau = 595$ Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	94
3.50	Zweipunktkorrelationen bei $z^* = 5$ (a,c) und $z^* = 20$ (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; ---, M3.0; -----, M1.5; ---, M0.3. Zum Vergleich: ·····, $Re_\tau = 180$ ; ·····, $Re_\tau = 595$ Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	95
3.51	Konturplot der Fluktuationen von $u_1$ und des passiven Skalars bei $x_2^* = 5$ für Fall M0.3. . . . .	96
3.52	Konturplot der Fluktuationen von $u_1$ und des passiven Skalars bei $x_2^* = 20$ für Fall M0.3. . . . .	97
3.53	Konturplot der Fluktuationen von $u_1$ und des passiven Skalars bei $x_2^* = 70$ für Fall M0.3. . . . .	98
3.54	Konturplot der Fluktuationen von $u_1$ und des passiven Skalars in der Kanalmitte für Fall M0.3. . . . .	99
3.55	Konturplot der Fluktuationen von $u_1$ und des passiven Skalars bei $x_2^* = 5$ für Fall M3.0. . . . .	100
3.56	Konturplot der Fluktuationen von $u_1$ und des passiven Skalars bei $x_2^* = 20$ für Fall M3.0. . . . .	101
3.57	Konturplot der Fluktuationen von $u_1$ und des passiven Skalars bei $x_2^* = 70$ für Fall M3.0. . . . .	102
3.58	Konturplot der Fluktuationen von $u_1$ und des passiven Skalars in der Kanalmitte für Fall M3.0. . . . .	103
3.59	Quotient aus dem turbulenten Zeitmass $\overline{\rho q^2} / \overline{\rho \omega_i' \omega_i'}$ und dem der mittleren Verzerrung $S^{-1} = 2(du/dx_2)^{-1}$ . . . . .	104
3.60	Quotient $Q_s^{-1}$ aus $\{\rho (u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3})\}_{rms}$ und $\{\partial p / \partial x_1\}_{rms}$ . . . . .	104
3.61	Skalar $-\theta + 1$ (Linien) und Geschwindigkeit $U_1$ (Symbole), normiert mit $u_\tau$ und $\theta_\tau$ . . . . .	105
3.62	Viskositätstransformierter Skalar (Linien) und Geschwindigkeit $U_1$ (Symbole). . . . .	105

3.63 Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Komponente der turbulenten Spannungen für Fall M3.0, normiert mit $u_{av} \tau_w / H$ . . . . .	111
3.64 Bilanz der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Komponente der turbulenten Spannungen für Fall M3.0, normiert mit $u_{av} \tau_w / H$ . . . . .	111
3.65 Bilanz der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Komponente der turbulenten Spannungen für Fall M3.0, normiert mit $u_{av} \tau_w / H$ . . . . .	112
3.66 Bilanz der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Komponente der turbulenten Spannungen für Fall M3.0, normiert mit $u_{av} \tau_w / H$ . . . . .	112
3.67 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Druckscherkorrelation der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz. . . . .	113
3.68 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Druckscherkorrelation der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Bilanz. . . . .	113
3.69 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Druckscherkorrelation der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Bilanz. . . . .	113
3.70 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Druckscherkorrelation der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz. . . . .	113
3.71 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz. . . . .	114
3.72 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Bilanz. . . . .	114
3.73 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Bilanz. . . . .	114
3.74 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz. . . . .	114
3.75 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Produktion der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz. . . . .	115
3.76 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz. . . . .	115
3.77 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf den turbulenten Transport der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz. . . . .	115
3.78 Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf den turbulenten Transport der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz. . . . .	115
3.79 Bilanz der $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Komponente des turbulenten Skalarflusses für den Fall M3.0, normiert mit $\tau_w \theta_w / h$ . . . . .	117
3.80 Bilanz der $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Komponente des turbulenten Skalarflusses für den Fall M3.0, normiert mit $\tau_w \theta_w / h$ . . . . .	117
3.81 Einfluss der Machzahl auf die Bilanz der Varianz des Skalars für Fall M3.0, normiert mit $\chi_w \theta_w / h$ . . . . .	118
3.82 Einfluss der Machzahl auf die Produktion der $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w u_{av} / h$ . . . . .	119
3.83 Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w u_{av} / h$ . . . . .	119
3.84 Einfluss der Machzahl auf die Druck-Skalargradientenkorrelation der $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w u_{av} / h$ . . . . .	119
3.85 Einfluss der Machzahl auf den Transport der $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w u_{av} / h$ . . . . .	119

3.86	Einfluss der Machzahl auf die Produktion der $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w u_{av}/h$ . . . . .	120
3.87	Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w u_{av}/h$ . . . . .	120
3.88	Einfluss der Machzahl auf die Druck-Skalargradientenkorrelation der $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w u_{av}/h$ . . . . .	120
3.89	Einfluss der Machzahl auf die Diffusion der $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w u_{av}/h$ . . . . .	120
3.90	Einfluss der Machzahl auf die Produktion der $\overline{\rho \theta'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \theta_w/h$ . . . . .	121
3.91	Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der $\overline{\rho \theta'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \theta_w/h$ . . . . .	121
3.92	Einfluss der Machzahl auf die Diffusion der $\overline{\rho \theta'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \theta_w/h$ . . . . .	121
3.93	Einfluss der Machzahl auf den Transport der $\overline{\rho \theta'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \theta_w/h$ . . . . .	121
3.94	Quotient aus Druckdilatation und inkompressiblem Anteil der Dissipationsrate. . . . .	124
3.95	Vergleich der Druckscherkorrelation der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	125
3.96	Vergleich der Druckscherkorrelation der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	125
3.97	Vergleich der Druckscherkorrelation der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	125
3.98	Vergleich der Druckscherkorrelation der $\overline{\rho u_1'' u_3''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	125
3.99	Vergleich der Dissipation der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	126
3.100	Vergleich der Dissipation der $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	126
3.101	Vergleich der Dissipation der $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	126
3.102	Vergleich der Dissipation der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	126
3.103	Vergleich der Produktion der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	127

3.104	Vergleich der Produktion der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	127
3.105	Vergleich des turbulenten Transports der $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	127
3.106	Vergleich des turbulenten Transports der $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser <i>et al.</i> (1999). . . . .	127
3.107	Einfluss der Machzahl auf die Produktion der $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	129
3.108	Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	129
3.109	Einfluss der Machzahl auf die Druck-Skalargradientenkorrelation der $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	129
3.110	Einfluss der Machzahl auf den Transport der $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	129
3.111	Einfluss der Machzahl auf die Produktion der $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	130
3.112	Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	130
3.113	Einfluss der Machzahl auf die Druck-Skalargradientenkorrelation der $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	130
3.114	Einfluss der Machzahl auf den Transport der $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	130
3.115	Einfluss der Machzahl auf die Produktion der $\overline{\rho \theta'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w^2 / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	131
3.116	Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der $\overline{\rho \theta'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w^2 / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	131
3.117	Einfluss der Machzahl auf die Diffusion der $\overline{\rho \theta'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w^2 / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	131
3.118	Einfluss der Machzahl auf den Transport der $\overline{\rho \theta'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit $\chi_w^2 / \bar{\mu}$ , als Funktion von $x_2^*$ . . . . .	131
3.119	Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten $R_{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}$ . . . . .	134
3.120	Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten $R_{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}$ . . . . .	134
3.121	Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten $R_{p' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}$ . . . . .	135
3.122	Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten $R_{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_1}}$ . . . . .	135
3.123	Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten $R_{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_2}}$ . . . . .	136
3.124	Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der $x_1$ -Ableitung der Geschwindigkeitsfluktuationen in Stromabrichtung $u_1'$ , normiert mit $\tau_w / \bar{\mu}$ . . . . .	136

3.125	Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der $x_2$ -Ableitung der Geschwindigkeitsfluktuationen in wandnormaler Richtung $u'_2$ , normiert mit $\tau_w/\bar{\mu}$ .	137
3.126	Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der $x_3$ -Ableitung der Geschwindigkeitsfluktuationen in spannweitischer Richtung $u'_3$ , normiert mit $\tau_w/\bar{\mu}$ .	137
3.127	Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der $x_1$ -Ableitung der Skalarfluktuationen, normiert mit $\chi_w/\bar{\mu}$ .	138
3.128	Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der $x_2$ -Ableitung der Skalarfluktuationen, normiert mit $\chi_w/\bar{\mu}$ .	138
3.129	Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die RMS-Werte der Druckfluktuationen über $x_2^*$ , normiert mit $\tau_w$ .	139
3.130	Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die RMS-Werte der Druckfluktuationen über $x_2/h$ , normiert mit $\tau_w$ .	139
3.131	Vergleich der DNS Daten mit Gleichung (3.70):Druck-Skalargradientenkorrelation.	145
3.132	Vergleich der DNS Daten mit Gleichung (3.70):Druckscherkorrelation.	146
3.133	Lösung von Gleichung (3.71) mittels Green-Funktion und D1 als Quellterm.	148
3.134	Vergleich der wandnormalen Zweipunktkorrelationen $R^w(x_2^*, (x_2^e)^*)$ von Fall M0.3 (Symbole) und M3.0 (Linien), für verschiedene Werte von $(x_2^e)^*$ ( $(x_2^e)^* = 10, 20, 70, 145, 170$ ).	150
3.135	Vergleich der wandnormalen Zweipunktkorrelationen $R^w(x_2, x_2^e)$ von Fall M0.3 (Symbole) und M3.0 (Linien), für verschiedene Werte von $x_2^e$ ( $x_2^e = 5, 10, 20, 50, 100$ ).	150
3.136	Verlauf der effektiven Dichten (Gleichung (3.72)) für Fall M1.5 und M3.5.	151
3.137	Innere Skalierung der turbulenten Spannung $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ mit $\bar{\rho}_e u_\tau^{*e} u_\tau^{*e}$ .	152
3.138	Effektive innere Skalierung der Produktion der $\rho u_1'' u_1''$ -Bilanz.	152
4.1	Verlauf des mittleren Drucks (Linie) und der mittleren Temperatur (gestrichelt) bei stationärer isotroper Turbulenz, normiert mit deren Startwerten, ohne zusätzlichen Senkenterm in den Navier-Stokes-Gleichungen.	156
4.2	Verlauf der mittleren Temperatur normiert mit ihrem Startwert (Für die verschiedenen Simulationen siehe Tabelle 4.1.3).	156
4.3	Vergleich der Dämpfungsfunktionen verschiedener Filter.	158
4.4	Zeitliche Entwicklung des Kolmogorovschen Längenmasses $\eta = \left( \frac{(\bar{\mu}/\bar{\rho})^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}$ .	161
4.5	Zeitliche Entwicklung der Dissipation für Fall M1.	162
4.6	Zeitliche Entwicklung der Dissipation für Fall M2.	162
4.7	Zeitliche Entwicklung der Dissipation für Fall M5.	162
4.8	Zeitliche Entwicklung der Dissipation für Fall M6.	162
4.9	Zeitliche Entwicklung des RMS-Wertes der Divergenz $(\Delta \cdot \mathbf{u})_{rms}$ für Fall M1.	163

4.10	Zeitliche Entwicklung des RMS-Wertes der Divergenz $(\Delta \cdot \mathbf{u})_{rms}$ für Fall M2. . . . .	163
4.11	Zeitliche Entwicklung des RMS-Wertes der Divergenz $(\Delta \cdot \mathbf{u})_{rms}$ für Fall M4. . . . .	163
4.12	Zeitliche Entwicklung des RMS-Wertes der Divergenz $(\Delta \cdot \mathbf{u})_{rms}$ für Fall M5. . . . .	163
4.13	Zeitliche Entwicklung der Skalarvarianz und der Skalarflüsse $\overline{u_1 \theta' u_1'}$ und $\overline{u_1 \theta' u_3'}$ für Fall M1. . . . .	168
4.14	Zeitliche Entwicklung der Skalarvarianz und der Skalarflüsse $\overline{u_1 \theta' u_1'}$ und $\overline{u_1 \theta' u_3'}$ für Fall M2. . . . .	168
4.15	Zeitliche Entwicklung der Skalarvarianz und der Skalarflüsse $\overline{u_1 \theta' u_1'}$ und $\overline{u_1 \theta' u_3'}$ für Fall M4. . . . .	168
4.16	Zeitliche Entwicklung der Skalarvarianz und der Skalarflüsse $\overline{u_1 \theta' u_1'}$ und $\overline{u_1 \theta' u_3'}$ für Fall M5. . . . .	168
4.17	Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $s = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$ . Alle Grössen sind mit ihren Mittelwerten normiert. . . . .	171
4.18	Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf den inkompressiblen Anteil von $s = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$ . Alle Grössen sind mit ihren Mittelwerten normiert. . . . .	172
4.19	Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf den kompressiblen Anteil von $s = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$ . Alle Grössen sind mit ihren Mittelwerten normiert. . . . .	172
4.20	Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $\omega = \sqrt{\omega_i \omega_i}$ . Alle Grössen sind mit ihren Mittelwerten normiert. . . . .	172
4.21	Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $s_i \lambda_i^2 / s_\gamma$ . . . . .	179
4.22	Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf den inkompressiblen Anteil von $s_i \lambda_i^2 / s_\gamma$ . . . . .	179
4.23	Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf den kompressiblen Anteil von $s_i \lambda_i^2 / s_\gamma$ . . . . .	179
4.24	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwerts $s_1$ von $S_{ij}$ . . . . .	180
4.25	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwerts $s_2$ von $S_{ij}$ . . . . .	180
4.26	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwerts $s_3$ von $S_{ij}$ . . . . .	180
4.27	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwertes $s_1^C$ des kompressiblen Anteils von $S_{ij}$ . . . . .	180
4.28	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwertes $s_2^C$ des kompressiblen Anteils von $S_{ij}$ . . . . .	181
4.29	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwertes $s_3^C$ des kompressiblen Anteils von $S_{ij}$ . . . . .	181
4.30	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Eigenwerte des inkompressiblen Anteils von $S_{ij}$ . . . . .	181

4.31	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_1^I$ .	182
4.32	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_2^I$ .	182
4.33	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_3^I$ .	182
4.34	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_1^C$ .	182
4.35	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_2^C$ .	183
4.36	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_3^C$ .	183
4.37	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{e}_2$ .	183
4.38	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{e}_3$ .	183
4.39	Q-R Diagramm	187
4.40	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf die zweite Invariante, $Q$ , von $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Der Skalargradient ist mit seinem Mittelwert normiert, $Q$ mit $(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} )^2$ .	187
4.41	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = -2.0 \cdot 10^{-3}$ (Fall M1)	188
4.42	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = -5.3 \cdot 10^{-4}$ (Fall M1)	188
4.43	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = 0$ (Fall M1)	188
4.44	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = 7.7 \cdot 10^{-4}$ (Fall M1)	188
4.45	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = -5.4 \cdot 10^{-2}$ (Fall M4)	189
4.46	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = -8.0 \cdot 10^{-3}$ (Fall M4)	189
4.47	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = 0$ (Fall M4)	189
4.48	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = 2.0 \cdot 10^{-3}$ (Fall M4)	189
4.49	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = -0.27$ (Fall M6)	190
4.50	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = -0.13$ (Fall M6)	190
4.51	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = 0$ (Fall M6)	190
4.52	$\overline{(g D, Q, R)}$ an der Stelle $D/( \boldsymbol{\omega} /2) = 0.3$ (Fall M6)	190
4.53	Schnappschuss der Geschwindigkeits- und Skalarfluktuationen für die Fälle M1 (a,b), M5(c,d) und M6(e,f).	191
4.54	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{e}_1$ und $ \nabla\rho / \overline{ \nabla\rho }$ .	192
4.55	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{e}_1$ und $ \nabla\mu / \overline{ \nabla\mu }$ .	192
4.56	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{e}_1$ und $ \nabla p / \overline{ \nabla p }$ .	193

4.57	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $ \nabla\mu $ .	193
4.58	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $ \nabla\rho $ .	193
4.59	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf die erste Invariante, $D$ , von $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .	193
4.60	Mittelwert von $\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle$ , konditioniert auf $g$ .	194
4.61	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ , an der Stelle $x_2^*=5$ .	196
4.62	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ , an der Stelle $x_2^*=20$ .	196
4.63	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ , an der Stelle $x_2^*=100$ .	196
4.64	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ , an der Stelle $x_2/h=1$ .	196
4.65	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $\omega = \sqrt{\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle}$ , an der Stelle $x_2^*=5$ .	197
4.66	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $\omega = \sqrt{\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle}$ , an der Stelle $x_2^*=20$ .	197
4.67	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $\omega = \sqrt{\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle}$ , an der Stelle $x_2^*=100$ .	197
4.68	Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf $\omega = \sqrt{\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle}$ , an der Stelle $x_2/h=1$ .	197
4.69	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_1$ von $S_{ij}$ für Fall M0.3 an verschiedenen wandnormalen Positionen.	198
4.70	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_1$ von $S_{ij}$ für Fall M1.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.	198
4.71	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_1$ von $S_{ij}$ für Fall M3.0 an verschiedenen wandnormalen Positionen.	198
4.72	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_1$ von $S_{ij}$ für Fall M3.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.	198
4.73	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_2$ von $S_{ij}$ für Fall M0.3 an verschiedenen wandnormalen Positionen.	199
4.74	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_2$ von $S_{ij}$ für Fall M1.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.	199
4.75	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_2$ von $S_{ij}$ für Fall M3.0 an verschiedenen wandnormalen Positionen.	199
4.76	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_2$ von $S_{ij}$ für Fall M3.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.	199
4.77	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_3$ von $S_{ij}$ für Fall M0.3 an verschiedenen wandnormalen Positionen.	200

4.78	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_3$ von $S_{ij}$ für Fall M1.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen. . . . .	200
4.79	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_3$ von $S_{ij}$ für Fall M3.0 an verschiedenen wandnormalen Positionen. . . . .	200
4.80	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts $s_3$ von $S_{ij}$ für Fall M3.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen. . . . .	200
4.81	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_1$ an der Positionen $x_2^* = 5$ . . . . .	201
4.82	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_1$ an der Positionen $x_2^* = 20$ . . . . .	201
4.83	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_1$ an der Positionen $x_2^* = 70$ . . . . .	201
4.84	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_1$ an der Positionen $x_2/h = 1$ . . . . .	201
4.85	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_2$ an der Positionen $x_2^* = 5$ . . . . .	202
4.86	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_2$ an der Positionen $x_2^* = 20$ . . . . .	202
4.87	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_2$ an der Positionen $x_2^* = 70$ . . . . .	202
4.88	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_2$ an der Positionen $x_2/h = 1$ . . . . .	202
4.89	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_3$ an der Positionen $x_2^* = 5$ . . . . .	203
4.90	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_3$ an der Positionen $x_2^* = 20$ . . . . .	203
4.91	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_3$ an der Positionen $x_2^* = 70$ . . . . .	203
4.92	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\mathbf{g}$ und $\mathbf{e}_3$ an der Positionen $x_2/h = 1$ . . . . .	203
4.93	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{e}_1$ an der Positionen $x_2^* = 5$ . . . . .	205
4.94	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{e}_1$ an der Positionen $x_2^* = 20$ . . . . .	205
4.95	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{e}_1$ an der Positionen $x_2^* = 100$ . . . . .	205
4.96	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{e}_1$ an der Positionen $x_2/h = 1$ . . . . .	205
4.97	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\mathbf{e}_2$ an der Positionen $x_2^* = 5$ . . . . .	206

4.98 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_2$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ . . . . . 206

4.99 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_2$  an der Positionen  $x_2^* = 100$ . . . . . 206

4.100 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_2$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ . . . . . 206

4.101 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_3$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ . . . . . 207

4.102 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_3$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ . . . . . 207

4.103 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_3$  an der Positionen  $x_2^* = 100$ . . . . . 207

4.104 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_3$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ . . . . . 207

4.105 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\rho$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ . . . . . 208

4.106 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\rho$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ . . . . . 208

4.107 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\rho$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2^* = 100$ . . . . . 208

4.108 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\rho$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ . . . . . 208

4.109 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\mu$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ . . . . . 209

4.110 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\mu$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ . . . . . 209

4.111 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\mu$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2^* = 100$ . . . . . 209

4.112 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\mu$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ . . . . . 209

4.113 Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\rho$ , an der Stelle  $x_2^*=5$ . 210

4.114 Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\rho$ , an der Stelle  $x_2^*=20$ . 210

4.115 Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\rho$ , an der Stelle  $x_2^*=100$ . . . . . 210

4.116 Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\rho$ , an der Stelle  $x_2/h=1$ . . . . . 210

4.117 Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\mu$ , an der Stelle  $x_2^*=5$ . 211

4.118 Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\mu$ , an der Stelle  $x_2^*=20$ . 211

4.119 Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\mu$ , an der Stelle  $x_2^*=100$ . . . . . 211

4.120 Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\mu$ , an der Stelle  $x_2/h=1$ . . . . . 211

## Abkürzungsverzeichnis

### Lateinische Symbole

$\mathbf{A}, A_{ij}$	: Geschwindigkeitsgradiententensor $A_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$
$b_{ij}$	: Anisotropietensor $b_{ij} = \frac{\overline{u_i'' u_j''}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij}$
$B_q$	: Parameter des Wandwärmestroms $B_q = \frac{q_w}{\rho_w c_p u_\tau T_w}$
$c_p$	: spezifische Wärme bei konstantem Druck
$c_v$	: spezifische Wärme bei konstantem Volumen
$D_{ij}$	: Turbulenter und viskoser Transport der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
$D_{\theta^2}$	: Diffusionsterm in der Bilanz von $\overline{\rho(\theta'')^2/2}$
$D_i^\theta$	: Diffusionsterm in der Bilanz von $\overline{\rho u_i'' \theta''}$
$e$	: innere Energie
$\mathbf{e}_i$	: Eigenvektoren von $S_{ij}$
$\mathbf{E}$	: $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T$
$\mathbf{g}$	: Skalargradient
$\mathbf{g}$	: mittlerer Skalargradient
$h$	: Enthalpie
$H$	: totale Enthalpie $H = h + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$
	: halbe Kanalhöhe
$k$	: turbulente kinetische Energie
	: Wellenzahl
$k^*$	: modifizierte Wellenzahl des numerischen Verfahrens
$l$	: Mischungslänge
	: turbulentes Längenmass
$M$	: Machzahl
$M_g$	: Gradientenmachzahl
$M_t$	: Turbulenzmachzahl
$M_{ij}$	: Turbulenter Massenfluss der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
$\mathbf{n}$	: normierter Skalargradient $\mathbf{g}/ \mathbf{g} $
$p$	: Druck
$P_{ij}$	: Produktionsrate der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
$P_{\theta^2}$	: Produktionsterm in der Bilanz von $\overline{\rho(\theta'')^2/2}$
$P_i^\theta$	: Produktionsrate des turbulenten Skalarflusses $\overline{\rho u_i'' \theta''}$
$Pr$	: Prandtl-Zahl
$\mathbf{q}$	: Wärmestromvektor
$q$	: $\overline{u_i u_i}$
$Re$	: Reynoldszahl

$Re_b$	: Globale Reynoldszahl $Re_b = \frac{\rho_b u_b H}{\mu_w}$
$Re_\lambda$	: Reynoldszahl, gebildet mit dem Taylorschen Mikromaß $\lambda$ , $Re_\lambda = \frac{\rho u_{rms} \lambda}{\mu}$
$Re_\tau$	: Reynoldszahl $Re_\tau = \frac{\rho_w u_\tau H}{\mu_w}$ gebildet mit der Schubspannungsgeschwindigkeit
$S$	: Entropie
$s$	: Verzerrungsrate $s = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}$
$s_i$	: Eigenwert von $S_{ij}$ , $s_1 \leq s_2 \leq s_3$
$\mathbf{S}, S_{ij}$	: Verzerrungstensor
$t$	: Zeit
$T$	: Temperatur
$T_{\theta^2}$	: turbulenter Transport in der Bilanz von $\overline{\rho(\theta'')^2/2}$
$T_i^\theta$	: turbulenter Transport in der Bilanz von $\overline{\rho u_i'' \theta''}$
$\mathbf{u}, u_i$	: Geschwindigkeitsvektor
$u$	: Geschwindigkeit in $x_1$ -Richtung
$u_{av}$	: Volumengemittelte Geschwindigkeit
$u_{VD}$	: Van-Driest transformierte Geschwindigkeit $\int_0^{u^+} \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}} du^+$
$u_\tau$	: Schubspannungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}$
$u^*$	: semilokale Definition von $u_\tau$ : $u_\tau^* = u_\tau \sqrt{\frac{\rho_w}{\bar{\rho}}}$
$U_i$	: Statistischer Mittelwert der Geschwindigkeiten
$v$	: Geschwindigkeit in $x_2$ -Richtung
$w$	: Geschwindigkeit in $x_3$ -Richtung
$x_i$	: Koordinatenrichtungen

## Griechische Symbole

$\gamma$	: Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
$\delta_{ij}$	: Kronecker-Delta
$\bar{\epsilon}$	: Dissipationsrate pro Einheitsvolumen $\overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$
$\epsilon$	: Dissipationsrate pro Einheitsmasse $\bar{\epsilon}/\bar{\rho}$
$\epsilon_{ijk}$	: Levi-Civita-Symbol
$\epsilon_{ij}$	: Dissipation der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
$\epsilon_{\theta^2}$	: Dissipationsterm in der Bilanz von $\overline{\rho(\theta'')^2/2}$
$\epsilon_i^\theta$	: Dissipationsterm in der Bilanz von $\overline{\rho u_i'' \theta''}$
$\eta$	: Kolmogorovsches Längenmass $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$
$\lambda$	: Taylorsches Mikrolängenmass $\lambda = \lambda_{11} = \sqrt{\frac{u_1'^2}{(\partial u_1'/\partial x_1)^2}}$

$\lambda$	: Ausrichtungsvektor des Skalargradienten bezüglich $e_i$
$\mu$	: dynamische Viskosität
$\nu$	: kinematische Viskosität $\nu = \frac{\mu}{\rho}$
$\Pi_{ij}^u$	: Druckscherkorrelation der turbulenten Spannungen $\overline{\rho u_i'' u_j''}$
$\Pi_i^\theta$	: Druckskalargradientenkorrelation in der Bilanz von $\overline{\rho u_i'' \theta''}$
$\rho$	: Dichte
$\tau$	: viskoser Spannungstensor
$\theta$	: Konzentration des passiven Skalars
$\theta', \theta''$	: Reynolds- bzw. Favre-Fluktuation des Skalars
$\bar{\theta}, \tilde{\theta}$	: Reynolds- bzw. Favre-Mittelwert des Skalars
$\tau_w$	: Wandschubspannung
$\omega$	: Wirbelstärkevektor
$\omega$	: $\sqrt{\omega_i \omega_i}$
$\Omega, \Omega_{ij}$	: antisymmetrischer Teil des Geschwindigkeitsgradiententensors
$\Omega'$	: Rotationsrate der Eigenvektoren

## Symbole

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: inneres Produkt
$a_w$	: Wert an der Wand
$a^C$	: rotationsfreier (kompressibler) Anteil
$a^I$	: solenoidaler (inkompressibler) Anteil
$a^+$	: Wert, ausgedrückt in Wandkoordinaten
$a^*$	: Wert, ausgedrückt in semilokalen Koordinaten
$\bar{a}$	: Ensemble- (Reynolds-) Mittelwert
$a'$	: Fluktuation gegenüber Ensemble-Mittelwert
$\tilde{a}$	: Massengewichteter (Favre-) Mittelwert
$a''$	: Fluktuation gegenüber massengewichtetem Mittelwert
$\mathbf{a}$	: Vektor
$\mathbf{A}$	: Tensor
$\mathbf{I}$	: Einheitstensor

# 1 Einleitung

Berichten zufolge sagte der berühmte Physiker Heisenberg an seinem Totenbett, dass er Gott zwei Fragen stellen würde: "Warum Relativität? Und warum Turbulenz? Ich glaube wirklich, dass er eine Antwort auf die erste Frage haben wird."

Noch heute wird die Turbulenz in Fluiden als eines der schwierigsten Probleme der modernen Physik betrachtet.

Seit der Arbeit des Meteorologen Richardson (1922) kennt man numerische Verfahren, die die Bewegungsgleichungen bei gegebenen Anfangs- und Randbedingungen lösen, basierend auf Impuls- und Energiebilanzen. Jedoch stellt die Simulation aller relevanten Längen- und Zeitskalen (Direkte numerische Simulation (DNS)), die über mehrere Größenordnungen variieren können, immense Anforderungen an die Leistungsfähigkeit der Computer und bleibt deshalb auf niedrige Reynoldszahlen beschränkt. Als ein Beispiel für die riesige Skalenseparation sei die Entstehung einer Supernova vom Typ Ia genannt (Ricker (2004)). Diese entsteht vermutlich aus der plötzlichen Emission nuklearer Bindungsenergie von Objekten wie beispielsweise weissen Zwergen. Das Wachstum der Flamme, aus der später die Supernova entsteht, wird unter anderem durch turbulente Verbrennungsvorgänge beschrieben und beinhaltet Phänomene im Bereich von  $10^{-4}cm$  (Flamme) bis zu  $10^8cm$  (Radius des weissen Zwerges). Gleichzeitig laufen die Prozesse auf Zeitskalen im Bereich von Nanosekunden (chemische Reaktionen) ab und produzieren hydrodynamische Effekte auf Zeitskalen von 1/10 Sekunde. Dennoch ist es gerade die DNS, die uns detailliert auf einzelne Strömungsphänomene blicken läßt, um diese zu erforschen und besser zu verstehen.

Zu den großen Herausforderungen innerhalb des Turbulenzproblems gehören sicherlich zum einen kompressible turbulente Strömungen, zum anderen die turbulente Vermischung. Kompressibilitätseffekte sind nicht nur auf hypersonische Strömungen beschränkt, man findet starke Kompressibilitätseffekte beispielsweise in der astrophysikalischen Beschreibung von molekularen Wolken. Dort wird die Wolke zwar als Ganzes durch die Kompressibilität stabilisiert, starke Dichteveränderungen sorgen hier aber für lokale "Jeans Instabilitäten" (Ricker (2003)). Starke Kompressibilitätseffekte findet man unter anderem auch bei der Vermischung von Strömungen unterschiedlicher Dichten und bei reaktiven Strömungen.

Immer mehr in den Blickpunkt rückt auch die geophysikalische und geo-biologische Fluidmechanik. Turbulenz ist bekanntermassen an den verschiedensten Wetterphänomenen beteiligt, und spielt auch, beispielsweise bei turbulenten Mischungsprozessen in Seen und Meeren eine entscheidende Rolle, da dort Turbulenz nicht nur Impuls und Wärme transportiert, sondern auch eine Vielzahl von Indikatoren, wie Nährstoffe, gelöstes und partikuläres organisches Material, Sediment und Schadstoffe. Wärme wird dadurch in tiefere Regionen gebracht und Nährstoffe in die oberen Schichten, ein Kreislauf der damit Ressourcen für das Phytoplankton bereitstellt (MacIntyre (1998)). Größen, die von der

Turbulenz zwar mittransportiert werden, diese jedoch nicht selbst beeinflussen, heißen passive Skalare. Ein besseres Verständnis der Physik passiver Skalare ist von großer Bedeutung und hilft dabei kompliziertere Phänomene zu verstehen, wie beispielsweise reaktive Skalare und die turbulente Verbrennung. Dort ist die Vermischung auf kleinen Skalen von erheblicher Bedeutung, ausserdem ist bekannt, dass in Hochgeschwindigkeits-Scherströmungen die Vermischung auf großen Skalen unterdrückt wird (Pantano & Sarkar (2002)). Von großem Interesse ist es auch, ein besseres Verständnis des Einflusses der Kompressibilität auf die Vermischung bei kleinen Skalen zu erlangen. Dies würde bei der Entwicklung von Turbulenzmodellen helfen und zeigen, ob inkompressible Modelle nur leicht modifiziert werden müssen, oder aber die Entwicklung vollkommen neuer Modelle erforderlich ist.

Um Kompressibilitätseffekte auf den Transport passiver Skalare besser zu verstehen, wurden in dieser Arbeit Simulationen von supersonischen Kanalströmungen mit gekühlten Wänden, sowie Simulationen von kompressibler isotroper Turbulenz mit Energiezufuhr, durchgeführt. Die Wahl dieser "einfachen" Geometrien erfolgt aus dem Grund, dass andere komplizierte Phänomene, wie Strömungsseparation und Stöße die Analyse verschiedener kompressibler Effekte nur unnötig erschweren. Ausserdem zeigen beide Simulationen unterschiedliche Arten von Kompressibilitätseffekten. Während in den supersonischen Kanalströmungen die Kompressibilität hauptsächlich über die, aufgrund der Wandkühlung, auftretenden Gradienten von Dichte und Temperatur (und damit auch der Viskosität) wirkt, liegen in Gegensatz dazu intrinsische Kompressibilitätseffekte in der isotropen Turbulenz (ohne Verbrennung) vor.

Im folgendem soll kurz auf die bisher erschienene Literatur zu diesen zwei Strömungstypen eingegangen werden. Bis zu diesem Zeitpunkt sind dem Autor keine Arbeiten bekannt, die den Skalartransport in kompressiblen Kanalströmungen untersuchen. Die folgende Diskussion muss sich aus diesem Grund auf inkompressible Kanalströmungen mit, sowie supersonische Kanalströmungen ohne Skalartransport beschränken.

### *Supersonische Kanalströmung*

Coleman *et al.* (1995) führten erstmals DNS von kompressiblen Kanalströmungen, bei Machzahlen von  $M_b = \tilde{u}_1/\bar{c} = 1.5$  und 3 durch. Die verschiedenen Parameter in diesen Simulationen wurden in der Absicht gewählt, den Unterschied im lokalen Reynoldszahlverlauf zu minimieren. Abbildung 8b in Coleman *et al.* (1995) weist allerdings größere Unterschiede nahe der Wand auf, wo sich die Kompressibilitätseffekte hauptsächlich abspielen. Dies zeigt, dass weitere Simulationen nötig sind, um Coleman *et al.*'s Ergebnisse zu bestätigen oder zu präzisieren. In seinen Simulationen zeigte er, dass die sogenannte Van-Driest-Transformation des Geschwindigkeitsprofils den beobachteten Unterschied im logarithmischen Gesetz der gemittelten Geschwindigkeit gegenüber den inkompressiblen Fällen reduziert. Ausserdem wandte er Morkovins Hypothese erfolg-

reich auf die DNS-Daten an und fand einen starken Einfluss der Dichte- und Temperaturgradienten auf die Strömung, wogegen er zeigen konnte, dass akustische Störungen hauptsächlich im Mittenbereich des Kanals vorkommen, die Physik der Turbulenz im Wandbereich allerdings kaum beeinflussen. Im Wandbereich stellten Coleman *et al.* (1995) zusätzlich eine "Erhöhung der Kohärenz" der Strukturen in der viskosen Unterschicht fest.

Huang *et al.* (1995) untersuchten die Bilanz der turbulenten kinetischen Energie (unter Verwendung der Datensätze von Coleman *et al.* (1995)), die sie mit  $\tau_w u_{av}/h$  normierten, jedoch ohne detaillierten Vergleich mit inkompressiblen Simulationen. Die Wahl der verwendeten Normierung wurde mit der Tatsache begründet, dass diese gleich  $-q_w/h$  ist, eine Konsequenz des Gleichgewichts aus der totalen Arbeit des Drucks und dem Wärmestrom in die Wände und damit direkt proportional zur Dissipation der turbulenten kinetischen Energie. Reine Kompressibilitätsterme, wie die Druckdilatation und die kompressible Dissipationsrate, waren in den Simulationen sehr klein, im Gegensatz zu Resultaten in homogener Scherturbulenz. Da die starke Reynoldsanalogie für nichtadiabate Wände in den kompressiblen Kanalsimulationen nicht gültig war, ersetzten Huang *et al.* (1995) diese durch eine erweiterte Form. Gleichzeitig zeigten sie, dass die Einführung semilokaler Skalierungen, die die Schubspannungsgeschwindigkeit und viskosen Längenmasse durch Versionen ersetzen, die auf dem lokalen Dichte- und Viskositätsverlauf basieren, erfolgreich sind. Dies zeigt sich darin, dass die kompressiblen und inkompressiblen Kurven nahezu aufeinander abgebildet werden und die Positionen der Maxima in Wandnähe ähnlich sind.

Lechner (2001) zeigte Bilanzen der turbulenten Spannungen für eine Machzahl von  $M = 1.5$  und eine Reynoldszahl von  $Re_\tau = 221$  und verglich dies mit den Simulationen von Moser *et al.* (1999) unter Verwendung derselben Normierung. Der Unterschied der lokalen Reynoldszahlen zwischen diesen Simulationen ist allerdings groß und macht die Unterscheidung zwischen Mach- und Reynoldszahleffekten schwierig.

Morinishi *et al.* (2004) simulierten supersonische Kanalströmungen mit einer isothermen und einer adiabaten Wand für eine Machzahl von  $M_b = 1.5$ . Auch sie bestätigten für diese Machzahl, dass die Van-Driest transformierten Geschwindigkeitsprofile eine gute Übereinstimmung nahe der isothermen Wand mit den inkompressiblen Profilen zeigten. Die geringere Variation der Temperatur und Dichte nahe der adiabaten Wand führte darüberhinaus zu einer noch besseren Übereinstimmung mit den inkompressiblen Profilen. Sie zeigten ausserdem, dass Unterschiede in der Reynolds- und Favre-Mittelung, angewandt auf die turbulenten Spannungen, kaum bestanden. Morinishi *et al.* (2004) analysierten ausserdem die Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie  $k$  im Detail. Eine interessante Beobachtung bestand hier darin, dass die Korrelation zwischen der Stromabkomponente der Geschwindigkeits- und der Dichtefluktuationen an der isothermen Wand positiv, and der adiabaten Wand negativ ist. Dieser Unterschied äussert sich darin, dass die dominanten kompressiblen Anteile der Bilanzgleichung von  $k$  an der

isothermen Wand für einen Transfer von turbulenter kinetischer Energie zur mittleren Strömung sorgen, während an der adiabaten Wand die mittlere Strömung kinetische Energie an die turbulente Strömung in Wandnähe abgibt.

#### *Kanalströmung mit Skalartransport*

Aufgrund der Vielzahl an Publikationen über den Skalartransport in inkompressiblen Kanalströmungen, werden im folgenden einige wenige, für diese Arbeit relevante, herausgegriffen.

Kim & Moin (1987) zeigten erstmals Simulationen von inkompressiblen Kanalströmungen mit Skalartransport bei einer Reynoldszahl von  $Re_\tau = 180$ . Als Randbedingungen für den Skalar benutzten Sie zum einen den Fall konstanter Temperatur an den Wänden, zum anderen führten sie den durch eine Volumenkraft generierten Skalar an den Wänden wieder ab. Nahe der Wand wurde eine hohe Korrelation des Skalars mit der Stromabkomponente der Geschwindigkeit  $u'_1$  festgestellt. Damit wiesen die Skalarfluktuationen nahezu die gleichen Strukturen ("streaky structures") in der viskosen Unterschicht auf, wie  $u'_1$ .

In der Simulation von Johansson & Wikström (1999) wurde die Skalarkonzentration an den Wänden konstant gehalten, bei einer Reynoldszahl von  $Re_\tau = 265$ . Sie präsentierten Bilanzen der turbulenten Skalarflüsse und der Skalarvarianz, sowie deren Dissipationsrate, um anschliessend statistische Modelle für die turbulenten Skalarflüsse zu entwickeln.

Kawamura *et al.* (1999) und Seki *et al.* (2003) untersuchten den Effekt von Reynolds- und Prandtl-Zahl auf den Wärmetransport (im inkompressiblen ein passiver Skalar), bei Reynoldszahlen von  $Re_\tau = 180$  und  $Re_\tau = 395$  sowie Prandtl-Zahlen von  $Pr = 0.025, 0.2, 0.71$ . Als Randbedingung für den Skalar hielten Kawamura *et al.* (1999) den Skalarfluss an den Wänden konstant, während in Seki *et al.* (2003) Simulationen mit konstanten Werten des Skalars an den Wänden mit Simulationen verglichen wurden, die einen konstanten Skalarfluss vorgaben. Interessant ist, dass die Simulationen mit konstanten Skalarkonzentrationen an den Wänden zu einem nichtverschwindendem Skalargradienten in der Kanalmitte führten, wodurch auch die Produktion der Skalargradienten in der Kanalmitte von Null verschieden war. Die Varianz der Skalarfluktuationen zeigte dort auch neben dem lokalen Maximum in Wandnähe ein globales Maximum in der Kanalmitte, das, normiert mit Wandwerten, mit steigender Reynoldszahl stieg, während das lokale Maximum nahe der Wand absank. Unterschiede fanden sich auch in den Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen in der Kanalmitte, die von Gausschem Verhalten abwich. Während man bei Vorgabe eines konstanten Skalarflusses an der Wand einen negativen Wert für die Schiefe, sowie einen positiven für den Flachheitsgrad erhielt, war letzterer bei den DNS mit konstanten Skalarkonzentrationen an den Wänden negativ, die Schiefe dagegen Null. Ein Vergleich der mittleren Skalarprofile von Kawamura *et al.* (2000) für dieselben Fälle, zeigte für die Simulationen mit vorgegebenen

Skalarflüssen an der Wand ein logarithmisches Wandgesetz mit derselben Van Karmann-Konstante wie für die Geschwindigkeit, dagegen lieferten die Simulationen mit konstanter Skalarkonzentration an der Wand kein eindeutiges logarithmisches Gesetz, da abhängig von der Reynoldszahl unterschiedliche Steigungen vorlagen, bzw. kein logarithmischer Bereich festzustellen war. Nahe der Wand waren zwischen den Simulationen keine nennenswerten Unterschiede aufgrund der unterschiedlichen Randbedingungen festzustellen. Die Autoren zeigten zusätzlich die Bilanzen der turbulenten Skalarflüsse und der Skalarvarianz.

#### *Kompressible isotrope Turbulenz mit Skalartransport*

Kida & Orszag (1990) waren die ersten, die kompressible isotrope Turbulenz mit Energiezufuhr simulierten, um die Turbulenz statistisch stationär zu halten. Sie verwendeten einen Kraftterm der aus einer Linearkombination von Kosinus- und Sinustermen bestand, mit Gausschen Zufallsvariablen als Koeffizienten, um ausschließlich den größten Skalen Energie zuzuführen. Sie fanden, dass kompressible Turbulenz nicht nur von der Mach- und Reynoldszahl, sondern beispielsweise auch von der Art des Kraftterms abhängt, d.h. wie stark kompressible und solenoidale Komponenten der Strömung angeregt werden. Durch den Transfer der kinetischen Energie in den großen Skalen hin zu immer kleineren Skalen und anschließender Dissipation in Wärme, steigt die innere Energie mit der Zeit. Die Addition eines Kraftterm ähnlich wie in inkompressiblen Strömungen führt darum nur zu einer Quasigleichgewichtsströmung statt einer statistisch stationären Strömung. Sie zeigten, dass der Hauptteil der Energie, die in die rotationsfreien oder solenoidalen kompressiblen Komponenten gepumpt wird, im Mittel direkt in die innere Energie transferiert wird. Eine Reihe anderer Autoren verwendeten dasselbe Verfahren zur Energiezufuhr um quasistationäre, kompressible isotrope Turbulenz mit passivem oder aktivem Skalartransport zu simulieren. Bis zum jetzigen Zeitpunkt sind allerdings nur wenige Simulationen dieses Typs mit passivem Skalartransport durchgeführt worden, der Großteil der Arbeiten konzentriert sich auf reaktive Strömungen. Dazu gehört die Arbeit von Cai *et al.* (1998), die, unter Annahme von  $\rho D = const$  isotrope kompressible Turbulenz mit passivem Skalartransport und verschieden großem kompressiblen Energieinhalt simulierten. Die Fähigkeit der kompressiblen Moden, die Varianz des Skalarfeldes von großen zu kleinen Skalen advektiv zu transportieren, wurde als weniger effektiv befunden als die der solenoidalen Moden, aufgrund der reduzierten integralen Längenmasse der kompressiblen Moden. Miller (2000), Lou & Miller (2001) und Lou & Miller (2004) führten dagegen Simulationen kompressibler quasistationärer isotroper Turbulenz mit aktiven Skalaren oder Verbrennung, unter superkritischen Drücken durch. Sie untersuchten den Einfluss des Verhältnisses der Molekulargewichte sowie der Mach- und Reynoldszahl auf den Massenanteil, sowie die Bedeutung von Soret- und Dufourefekten. In all den obigen Simulationen verändern sich, wie oben beschrieben, die Mach- und Reynoldszahlen allerdings mit der Zeit, was eine Unterscheidung der Reynolds- und

Machzahleffekte schwierig macht.

Eine detaillierte Untersuchung des Skalargradienten und dessen Ausrichtung bezüglich der Hauptachsen des Verzerrungstensors  $\mathbf{S}$  in kompressiblen Strömungen wie dies im inkompressiblen Fall unter anderem von Ashurst *et al.* (1987), Dresselhaus & Tabor (1991) oder Brethouwer *et al.* (2003) getan wurde, fehlt bisher. Jaberi *et al.* (2000) zeigten in kompressibler abklingender reaktiver isotroper Turbulenz, dass der Skalargradient dazu neigt sich in Richtung des Eigenvektors auszurichten, der zum negativen (kompressiven) Eigenwert von  $\mathbf{S}$  gehört, der Wirbelstärkevektor stattdessen in Richtung von  $\mathbf{e}_2$ , dem zum mittleren Eigenwert gehörigen Eigenvektor.

### *Ziele dieser Arbeit*

Die kurze Diskussion der bisher erschienenen, für diese Arbeit relevanten Literatur, zeigt, dass die bisherigen Simulationen der supersonischen Kanalströmung aufgrund der gleichzeitigen Variation der lokalen Mach- und Reynoldszahlen weitere Simulationen nötig machen, um Kompressibilitätseffekte eindeutig zu identifizieren. Durch die Wahl geeigneter Skalierungen der Bilanzen der turbulenten Spannungen für den Mitten- und Wandbereich, die bisher für supersonische Kanalströmungen kaum untersucht wurden, sollten Reynolds- und Machzahleffekte besser unterschieden werden können. Kompressibilitätseffekte auf den passiven Skalar können über die Betrachtung der turbulenten Skalarflüsse, der Varianz und deren Bilanzen untersucht werden. Interessant ist, ob auch hier die Variationen der Dichte und Temperatur die Hauptrolle spielen und inwieweit sich eine mögliche Änderung der Anisotropie der Reynoldsspannungen auf die turbulenten Skalarflüsse und deren Bilanzen auswirkt. Wichtig wird in diesem Zusammenhang sein, ob auch in Kanalströmungen eine vergrößerte Dekorrelation zu einer Reduktion der Druckkorrelationen führt, wie dies in Scherschichten von Pantano & Sarkar (2002) gefunden wurde. Interessant ist ferner, inwieweit sich Skalierungen mittlerer Größen, wie beispielsweise die Van Driest-Transformation des mittleren Geschwindigkeitsfeldes, auf die mittleren Skalarfelder übertragen lassen.

In Fortführung der Arbeit von Ashurst *et al.* (1987), Dresselhaus & Tabor (1991) und Brethouwer *et al.* (2003) in inkompressiblen Scherströmungen oder isotroper Turbulenz, wird nichtabklingende kompressible isotrope Turbulenz bei verschiedenen Machzahlen und gleicher Reynoldszahl mit vorgegebenem mittleren Skalargradienten simuliert. Ziel ist es, die Machzahlabhängigkeit der Ausrichtung des Skalargradienten bezüglich der Hauptachsen des Verzerrungstensors, sowie die Abhängigkeit des Skalargradienten von verschiedenen Strömungsgrößen zu untersuchen. Durch die Wahl eines geeigneten Quellterms (als Wärmesenke) wird gleichzeitig versucht, den Anstieg der inneren Energie zu verhindern, damit stationäre Turbulenz vorherrscht und eine Statistikbildung über mehrere integrale Zeitmasse bei gleicher Mach- und Reynoldszahl möglich ist. Neben den die isotrope Turbulenz ohne Verbrennung bestimmenden intrinsischen Kompressibi-

liätseffekten, ist natürlich auch die Auswirkung von Kompressibilitätseffekten aufgrund von fluktuierenden Dichte- und Temperaturgradienten auf den Skalargradienten interessant. Die wichtigsten Ergebnisse der isotropen Turbulenz werden deshalb mit Ergebnissen aus supersonischen Kanalströmungen bei verschiedenen Reynolds- und Machzahlen verglichen.

## 2 Numerische Berechnung kompressibler Strömungen idealer Gase

### 2.1 Grundgleichungen

Dichtefluktuationen in kompressibler Turbulenz idealer Gase können im allgemeinen als die Folge von Geschwindigkeits-, Druck- und Entropiefluktuationen angesehen werden. Der hohe Grad an Nichtlinearität der Navier-Stokesgleichungen bewirkt, dass die Transportgleichungen für die Varianzen dieser Fluktuationen gekoppelt sind und die zugehörigen Effekte sich gegenseitig beeinflussen (Chassaing *et al.* (2002)). Folgt man Kovasznay (1953), dann ist es möglich, kleine Fluktuationen in Wirbelstärke-, akustische (Druck) und Entropie-Moden zu separieren, nachdem die Navier-Stokes Gleichungen um einen Referenz-Zustand linearisiert wurden. In erster Näherung sind die Fluktuationen voneinander entkoppelt, falls Randbedingungen unberücksichtigt bleiben. Diese Überlegungen legen es nahe, die Navier-Stokes Gleichungen in einer Druck- Geschwindigkeits- Entropieform darzustellen und numerisch zu lösen. Nach Sesterhenn (2001) wird deswegen folgende Form der Gleichungen gelöst:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\rho c}{2} \sum_{i=1}^3 (\chi_i^+ + \chi_i^-) - \frac{R}{C_v} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \Phi \right) \\
 \frac{\partial u_i}{\partial t} &= -\frac{1}{2} (\chi_i^+ - \chi_i^-) - \sum_{j=1}^2 \chi_{ij}^c + \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\
 \frac{\partial s}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^3 \chi_i^s + \frac{R}{p} \left( -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \Phi \right) \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^3 \chi_i^\theta - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \chi_j,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei (ohne Summation)

$$\begin{aligned}
 \chi_i^\pm &:= (u_i \pm c) \left( \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial x_i} \pm \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right), & \chi_{ij}^c &:= u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (j \neq i), \\
 \chi_i^s &:= u_i \frac{\partial s}{\partial x_i}, & \chi_i^\theta &:= u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i}.
 \end{aligned}$$

Die Größe  $\Phi$  bezeichnet hier die Dissipation

$$\Phi = \tau : \nabla \mathbf{u} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

$\mathbf{q}$  die Wärmestromdichte, berechnet nach dem Fourierschen Wärmeleitgesetz  $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$  und  $\chi$  bezeichnet die Skalarstromdichte (Ficksches Gesetz)  $\chi = -\rho D \nabla \theta$ . Die Diffusivität  $D$  kann für binäre Mischungen vereinfacht in der Form  $D = \nu / Sc$  dargestellt werden, mit der kinematischen Viskosität  $\nu$  und der Schmidtzahl  $Sc$ . Für die Skalarstromdichte schreibt man daher auch

$$\chi = \frac{\mu}{Sc} \nabla \theta.$$

Die thermodynamischen Variablen  $\rho$  und  $T$  sind über die ideale Gasgleichung und die Gibbssche Fundamentalgleichung mit dem Druck  $p$  gekoppelt, und werden unter Voraussetzung konstanter spezifischer Wärmen wie folgt berechnet

$$\rho = p^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{s}{C_V \kappa}}, \quad T = p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{s/C_p},$$

mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\gamma = C_P/C_V$ . Die Gleichungen (2.1) liegen laut Sesterhenn (2001) in "charakteristischer Form" vor, da der hyperbolische Teil der Navier-Stokes Gleichungen unter Benutzung der Eigenwerte der quasilinearen Eulergleichungen umgeschrieben wurde. Im eindimensionalen, reibungsfreien und isentropen Fall bezeichnen deshalb die Terme  $\chi_i^\pm$  die Amplituden ebener Wellen, die sich entlang der Charakteristiken ausbreiten. Im mehrdimensionalen Fall ist eine Entkopplung der Wellen mithilfe der Methode der Charakteristiken selbst für die Eulergleichungen nicht möglich.

## 2.2 Diskretisierung, Stabilitätsanalyse und Randbedingungen

Der hyperbolische Anteil der Gleichungen (2.1) wurde entsprechend des Vorzeichens der Eigenwerte der quasilinearen Eulergleichungen,  $u_i \pm c$ , bzw.  $u$ , mit kompakten Upwind-Verfahren fünfter Ordnung (Adams & Shariff (1996)), die Reibungs-, Wärmeleitungs- und Skalarflussterme mit zentralen kompakten Verfahren sechster Ordnung (Lele (1992)) diskretisiert. Die im allgemeinen benutzten Spektralverfahren oder zentralen kompakten Verfahren besitzen keine, oder nur eine geringe numerische Dissipation. Dadurch können entstehende numerische Instabilitäten aufgrund unzureichender Auflösung der hohen Wellenzahlen nicht ausreichend gedämpft werden. Die dann bei Differenzenverfahren auftretenden numerischen Wellen besitzen eine der physikalisch korrekten Gruppengeschwindigkeit entgegengesetzte Gruppengeschwindigkeit. Dies ist leicht an der modifizierten Wellenzahl des Verfahrens zu erkennen, da (siehe unten), zu einer modifizierten Wellenzahl  $k^*$  des numerischen Verfahrens zwei physikalische Wellenzahlen  $k$  gehören (Vichnevetsky & Bowles (1982)). Abhilfe von unphysikalischem Verhalten

bieten Dealiasing-Methoden für die Spektralverfahren oder Filterung der Lösung nach einigen Zeitschritten für kompakte Verfahren, um die Instabilitäten zu dämpfen. Das hier verwendete Upwind-Schema ist dagegen so konstruiert, dass numerische Dissipation bei hohen Wellenzahlen vorliegt und die entstehenden Instabilitäten dort gedämpft werden, eine Filterung der Lösung ist deshalb nicht notwendig.

Kompakte Verfahren zur Diskretisierung der räumlichen Ableitungen haben sich als Alternative zu den spektralen Verfahren (siehe beispielsweise Canuto *et al.* (1987)) in den letzten Jahren behauptet. Sie bieten über einen großen Wellenzahlenbereich eine fast spektrale Auflösung, bei weitaus geringerem Aufwand und können darüberhinaus auch bei komplexen Geometrien effizient eingesetzt werden. Die Approximation  $\tilde{u}^{(\sigma)}$  der Ableitung  $u^{(\sigma)} = d^\sigma u/dx^\sigma$  einer  $\mathcal{C}^{r+\sigma+1}$ -Funktion  $u$ , mit  $r, \sigma \in \mathbb{N}$  auf einem äquidistanten Gitter  $\{x_j\} = \{x_1, \dots, x_N\}$  mit Gitterabstand  $h$  kann an der Stelle  $x_i$  geschrieben werden als (Adams & Shariff (1996), Zhong & Tatineni (2003))

$$\sum_{\mu=-\mu_l}^{\mu_r} \alpha_\mu \tilde{u}_{i+\mu}^{(\sigma)} = \frac{1}{h^\sigma} \sum_{\nu=-\nu_l}^{\nu_r} a_\nu \tilde{u}_{i+\nu} \quad (2.2)$$

oder in Matrixschreibweise als

$$\mathbf{L}\tilde{u}^\sigma = \frac{1}{h^\sigma} \mathbf{R}\tilde{u}. \quad (2.3)$$

Sind die Koeffizienten  $\alpha_{+\mu}$  und  $\alpha_{-\mu}$  sowie  $a_{+\nu}$  und  $a_{-\nu}$  gleich, so spricht man von zentralen kompakten Verfahren, ansonsten von Upwind-Verfahren. Die Ordnung des Verfahrens erhält man nach Taylorreihenentwicklung der linken und rechten Seite um den Punkt  $x_i$  und anschließendem Koeffizientenvergleich.

Für den Fall periodischer Randbedingungen sind die zu invertierenden Matrizen des zentralen kompakten Verfahrens sechster Ordnung zirkulant und diagonaldominant.

Die implizite Gleichung zur Bestimmung der Ableitungen erster Ordnung,  $u'_i$ , kann nach (2.2) folgendermaßen dargestellt werden

$$\begin{aligned} \alpha_1 u'_{i-2} + \alpha_2 u'_{i-1} + \alpha_3 u'_i + \alpha_4 u'_{i+1} + \alpha_5 u'_{i+2} = \\ a_1 u_{i-3} + a_2 u_{i-2} + a_3 u_{i-1} + a_4 u_i + a_5 u_{i+1} + a_6 u_{i+2} + a_7 u_{i+3}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

oder in Vektorschreibweise,

$$\mathbf{L}\mathbf{u}' = \frac{1}{h} \mathbf{R}\mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Die Zeitintegration erfolgt in dieser Arbeit über ein “low-storage” Runge-Kutta Verfahren (Williamson (1980)). Um die Stabilität der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung zusammen mit den Randbedingungen zu testen, sind geeignete Testverfahren erforderlich. In der Literatur sind zwei Gruppen von Kriterien üblich. Zur ersten Kategorie

gehören Kriterien, die die Stabilität für einen festen Zeitpunkt  $t$  und für Gitterpunkte  $N \rightarrow \infty$  untersuchen. Ein Vertreter davon ist die Lax-Stabilität, die für die Konvergenz eines konsistenten Verfahrens, angewandt auf ein Cauchy-Problem, notwendig und hinreichend ist. Einfach ausgedrückt erfordert sie, dass eine Konstante  $K > 1$  für einen festen Zeitpunkt  $t_n$  existiert, so dass für eine beliebige Anfangsbedingung  $u(t=0)$  gilt,

$$\|u(t_n)\| \leq K \|u(t=0)\| \quad t_n = n\Delta t, \quad n > 0, \quad 0 \leq t_n \leq T.$$

$\|\cdot\|$  bezeichne hier die  $L_2$ -Norm. Ein hinreichendes Kriterium für die Lax-Stabilität wird auch durch die sogenannte GKS-Stabilität gewährleistet (Carpenter *et al.* (1993)). Ein Problem bei beiden Methoden besteht allerdings darin, dass diese Kriterien das Anwachsen nichtphysikalischer Störungen für  $t \rightarrow \infty$  zulassen. Aus diesem Grund benötigt man als zusätzliche Bedingung die asymptotische Stabilität der Verfahren, um dem Anwachsen von Störungen in der Zeit vorzubeugen. Dieses zur zweiten Kategorie gehörende Kriterium untersucht die Stabilität für eine feste Anzahl von Gitterpunkten  $N$ , für  $t \rightarrow \infty$ . Asymptotische Stabilität erzwingt jedoch keine Lax-Stabilität, da Störungswachstum bei endlichen Zeiten für nichtnormale Matrizen nicht ausgeschlossen werden kann (eine beliebige Matrix  $A$  heisst normal, falls für sie und ihre Adjungierte gilt:  $AA^\dagger = A^\dagger A$ , sie besitzt damit einen vollständigen Satz paarweise orthogonaler Eigenvektoren). Ein Beispiel dazu findet sich in dem Buch von Schmid & Henningson (2001), in dem gezeigt wird, dass die Linearkombination zweier exponentiell in der Zeit abklingender, nichtorthogonaler Eigenvektoren, für kurze Zeiten algebraisches Wachstum aufweisen kann.

Für periodische Probleme mit Matrizen mit konstanten Koeffizienten und festen Gitterweiten stellt die Fourier-Analyse der Diskretisierung (von Neumann-Analyse) ein einfaches Testverfahren dar, um das Anwachsen von Moden in der Zeit zu untersuchen und ist auch ein notwendiger Bestandteil der GKS-Stabilität. Sie kann aber nicht auf Probleme mit variablen Koeffizienten angewendet werden und liefert deswegen keine Information über die numerischen Randschemata und deren Kopplung mit den inneren Schemata. Nur im Fall von normalen Matrizen und periodischen Randbedingungen ist die von Neumann-Analyse notwendig und hinreichend (Gustafsson *et al.* (1995)).

Abhilfe von den oben genannten Problemen schafft nach Trefethen (1996) das Pseudospektren-Konzept, welches ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Stabilität auch von nichtnormalen Matrizen darstellt.

Im folgenden werden für die verwendeten Verfahren anhand einer linearen Modellgleichung die Stabilität des Cauchy-Problems, sowie die Pseudospektren der räumlichen, und kombinierten räumlichen und zeitlichen Diskretisierung gezeigt. Es sei dazu auch auf die Arbeit von Adams & Shariff (1996) verwiesen, in der für die Upwind-Verfahren die Pseudospektren untersucht werden.

### 2.2.1 Stabilität der räumlichen Diskretisierung

Da die Navier-Stokes-Gleichungen nichtlinear und daher zu kompliziert sind, um die Stabilität der Diskretisierung in Raum und Zeit zu überprüfen, ist es üblich, die Stabilität an einem linearen Modellproblem zu testen. Als Modell für den hyperbolischen Anteil der Navier-Stokes Gleichungen dient die eindimensionale lineare Konvektionsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= c \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0, t) &= g(t) \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

mit zwei beliebigen Funktionen  $g \in \mathbb{C}, \forall t \in [0, T]$  und  $f \in \mathbb{C}, \forall x \in [0, 1]$ . Für das Cauchy-Anfangswertproblem wird statt der Randbedingungen die Quadratintegrierbarkeit der Funktion  $u$  gefordert. Es ist nicht notwendig, zu einem Gleichungssystem überzugehen, da die Stabilität der numerischen Diskretisierung der skalaren Gleichung die Stabilität des Gleichungssystems nach sich zieht, falls die Randbedingungen in charakteristischer Form aufgeprägt werden (Carpenter *et al.* (1993) und Literaturangaben). Die allgemeine Lösung dieses Problems erhält man nach Integration der Semidiskretisierung auf dem Gitter  $\{x_j\} = \{x_1, \dots, x_N\}$  mit Gitterabstand  $h$  ( $\mathbf{u}(t) = \{u_j(t)\}$ )

$$\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{c}{h} \mathbf{R} \mathbf{u}, \tag{2.7}$$

zu

$$\mathbf{u}(t) = e^{\frac{c}{h} \mathbf{C} t} \mathbf{f}, \tag{2.8}$$

mit  $\mathbf{C} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}$ . Durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einer Matrix  $\mathbf{T}$  kann  $\mathbf{C}$  in ihre Jordan-Normalform  $\Lambda$  gebracht werden und die Lösung lautet dann

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{T} e^{\frac{1}{h} \Lambda t} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{f}.$$

Ist die Matrix  $\mathbf{C}$  normal, dann besitzt sie  $N$  unterschiedliche Eigenwerte  $\lambda_i$  mit  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  und ihre  $L_2$ -Norm stimmt mit dem spektralen Radius  $\rho(\lambda)$  überein. Haben die Eigenwerte einen negativen Realteil, dann ist leicht einzusehen, dass die Semidiskretisierung für  $t \rightarrow \infty$  asymptotisch stabil ist. Da ausserdem die  $L_2$ -Norm für normale Matrizen dem spektralen Radius entspricht, ist damit gleichzeitig die Lax-Stabilität erfüllt, denn  $\|\mathbf{u}\| = \|e^{\frac{c}{h} \mathbf{C} t}\| \|f\| \leq e^{\frac{c}{h} \rho(\mathbf{C}) \lambda t} \|f\|$ . Daran erkennt man, dass die von Neumann-Bedingung<sup>1</sup> notwendig und hinreichend für die Stabilität des Cauchy-Problems ist. Die hier betrachteten Matrizen sind im allgemeinen nicht normal, eine reine

---

<sup>1</sup>Eine notwendige Bedingung für die Stabilität der Semidiskretisierung 2.7 des Cauchy-Problems ist, dass der Realteil der Eigenwerte von  $\mathbf{C}$  durch eine Konstante  $K \in \mathbb{R}$  beschränkt ist (Gustafsson *et al.* (1995))

Eigenwertanalyse gibt deswegen nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für Stabilität ab.

### Modifizierte Wellenzahl für periodische Randbedingungen

Zur Untersuchung der Stabilität des Cauchy-Problems wird die Periodizität ausgenutzt und das Eigenwertproblem (EWP)  $L\lambda u = Ru$  zur Gleichung  $Lu' = Ru$  fouriertransformiert. Man erhält nach Auflösung auf  $\lambda$  und Vergleich mit der exakten Ableitung<sup>2</sup> die sogenannte modifizierte Wellenzahl  $k^*$  (Vichnevetsky & Bowles (1982)) des Verfahrens

$$k^* = -i\lambda = k_r^* + ik_i^* = \frac{1}{h} \left( \frac{R_i L_r - R_r L_i}{L_r^2 + L_i^2} - i \frac{R_r L_r + R_i L_i}{L_r^2 + L_i^2} \right) \quad (2.9)$$

mit

$$\begin{aligned} L_r &= (\alpha_1 + \alpha_5) \cos(2kh) + (\alpha_2 + \alpha_4) \cos(kh) + \alpha_3 \\ L_i &= (\alpha_5 - \alpha_1) \sin(2\pi k(2kh)) + (\alpha_4 - \alpha_2) \sin(kh) \\ R_r &= (a_1 + a_7) \cos(3kh) + (a_2 + a_6) \cos(2kh) + (a_3 + a_5) \cos(kh) + a_4 \\ R_i &= (a_7 - a_1) \sin(3kh) + (a_6 - a_2) \sin(2kh) + (a_5 - a_3) \sin(kh). \end{aligned}$$

Für das benutzte zentrale kompakte Verfahren und das Upwind-Schema sind Real- (Dispersion) und Imaginärteil (Dissipation) von  $k^*h$  in den Abbildungen 2.1 und 2.2 zu sehen. Zur Berechnung wurde OCTAVE benutzt, ein frei erhältliches Mathematikpaket unter Linux. Abbildung 2.2 zeigt, dass das von Neumann-Stabilitätskriterium erfüllt ist, da  $\mathcal{R}(\lambda) = -k_i^* \leq 0$  und damit kein Wachstum der Moden stattfindet, das Cauchy-Problem ist deswegen stabil. Anhand der modifizierten Wellenzahl sieht man ausserdem, dass Moden existieren, für die die Gruppengeschwindigkeit  $\frac{c\partial(k^*h)}{\partial(kh)}$  verschwindet. Für nichtnormale Matrizen kann man nun besser verstehen, warum die Fourieranalyse nicht hinreichend ist (Zingg (1997)), denn ein Wellenpaket, das aus einer modulierten Funktion an dieser Wellenzahl besteht, kann nicht durch das Gitter zum Rand propagieren. Sind solche Moden instabil, liegt keine asymptotische Stabilität vor. Andererseits können instabile Moden mit positiver Gruppengeschwindigkeit zum Ausflussrand propagieren und das Gebiet verlassen, obwohl sie innerhalb des Gebiets exponentiell anwachsen. Daher kann ein solches instabiles Schema zwar asymptotisch stabil, für einen festen Zeitpunkt aber nicht GKS- oder Lax-stabil sein.

### Pseudospektren

Liegt kein periodisches Problem mit konstanten Koeffizienten in den Ableitungsmatrizen vor, dann kann zur Untersuchung der Stabilität das GKS-Kriterium (Carpenter *et al.*

<sup>2</sup>Für einen beliebigen Summanden in einer Zeile des EWPs gilt:  $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} u_{(l\pm j)} e^{-i2\pi kl/N} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u_m e^{-i2\pi k(\mp j)} e^{i2\pi km/N} = \{\cos(2\pi kj/N) \pm i \sin(2\pi kj/N)\} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u_m e^{-i2\pi km/N}$

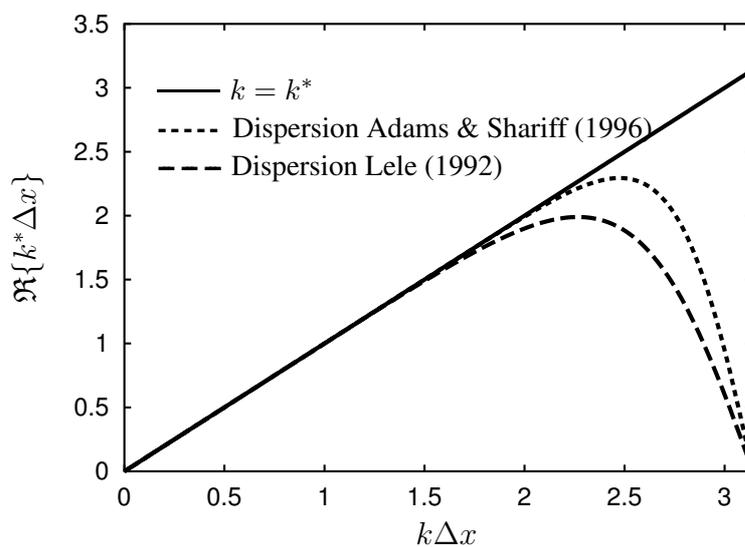


Abbildung 2.1: Realteil der modifizierten Wellenzahl (Dispersion)

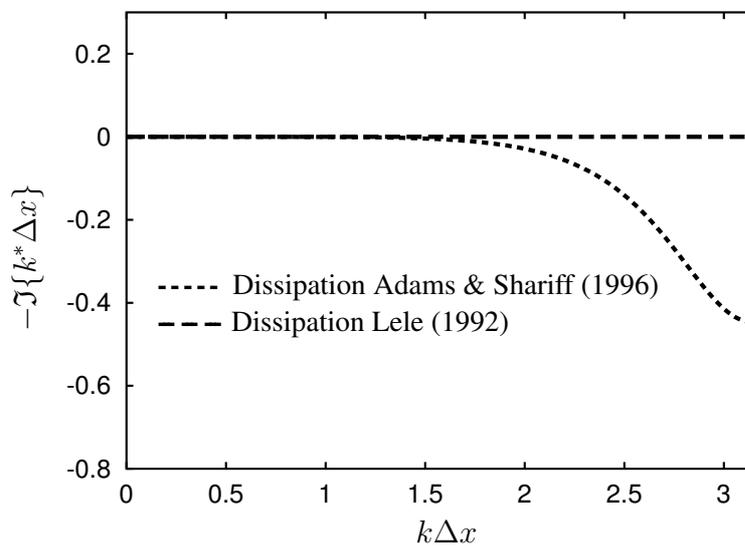


Abbildung 2.2: Imaginärteil der modifizierten Wellenzahl (Dissipation)

(1993)) oder die Pseudospektrenanalyse herangezogen werden. Laut Trefethen (1996) gilt folgende Definition:

**Definition 1.** Ist ein  $\epsilon > 0$  vorgegeben, dann ist eine Zahl  $\lambda_\epsilon \in \mathbb{C}$  ein  $\epsilon$ -Pseudo-eigenwert einer Matrix  $\mathbf{C}$ , falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i)  $\|(\lambda_\epsilon \mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\| \geq \epsilon^{-1}$

(ii)  $\lambda_\epsilon$  ist ein Eigenwert von  $\mathbf{C} + \mathbf{E}$  für ein  $\mathbf{E} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  mit  $\|\mathbf{E}\| \leq \epsilon$ .

Das  $\epsilon$ -Pseudospektrum  $\Lambda_\epsilon(\mathbf{C})$  ist die Vereinigung aller Mengen ihrer  $\epsilon$ -Eigenwerte.

Bekanntlich ist eine Matrix genau dann stabil, wenn der Realteil ihrer Eigenwerte in der linken Halbebene liegt. Für die Pseudospektra folgt laut Trefethen (1996))

$$\mathcal{R}(\lambda_\epsilon) \leq K\epsilon \tag{2.10}$$

mit einer Konstanten  $K > 0$ . Da sowohl räumliche und zeitliche Diskretisierungen untersucht werden sollen, ist es erforderlich, auch Aussagen über Potenzen von Matrizen zu machen. Das liegt daran, dass die zeitliche Diskretisierung von  $\partial u / \partial t = Au$  im  $n$ -ten Zeitschritt auf die Beziehung  $u^{n+1} = Gu^n = G^n u^0$  führt ( $G$  Verstärkungsfaktor). Trefethen bewies deshalb eine Modifikation des bekannten Kreiss-Matrixtheorems für die kombinierte räumliche und zeitliche Diskretisierung,

**Theorem 1.** Ist  $\mathbf{C}$  eine Matrix der Dimension  $N$ , dann gilt für eine beliebige Konstante  $K$ , falls  $\|\mathbf{C}^n\| \leq K, \forall n \geq 0$ ,

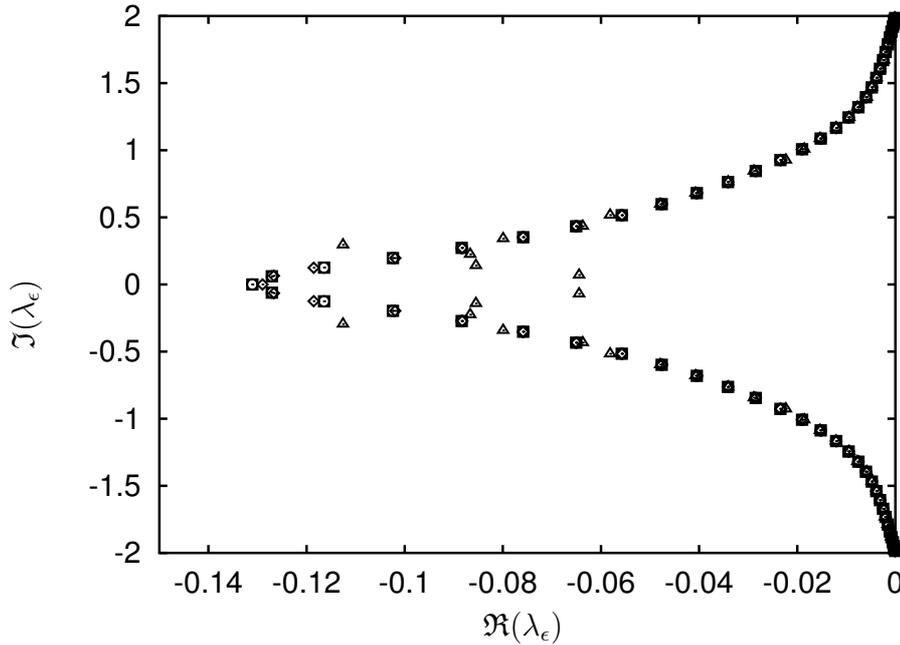
$$|\lambda_\epsilon| \leq 1 + K\epsilon.$$

Die Pseudoeigenwerte der kombinierten räumlichen und zeitlichen Diskretisierung müssen also innerhalb eines Kreises mit Radius  $1 + K\epsilon$  in der komplexen Ebene liegen. Ausgehend von der Lax-Richtmyer Stabilitätstheorie, zeigte Trefethen ausserdem für die sogenannte "Method of Lines" (Semidiskretisierung einer partiellen Differentialgleichung)

**Theorem 2.** Die "Method of Lines"-Diskretisierung von  $\frac{\partial u}{\partial t} = Gu$  ist dann und nur dann stabil, wenn die Pseudoeigenwerte  $\lambda_\epsilon \in \Lambda(G)$  in einer  $\epsilon$ -Umgebung der Stabilitätsgrenze des Zeitintegrationsverfahrens liegen, für  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Wird in Gleichung (2.7) die Randbedingung  $u(0, t) = 0$  aufgeprägt, dann sind die Ableitungen am Punkt  $x_0$  in der Matrix  $\mathbf{L}$  zu eliminieren, die Koeffizienten vor  $u_0$  können weggelassen werden, da sie mit Null multipliziert werden. Schematisch erhält man

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & 0 & 0 & \cdots \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & 0 & \cdots \\ 0 & l_{32} & l_{33} & l_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \mathbf{u}' = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{33} & 0 & \cdots \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 & \cdots \\ 0 & r_{32} & r_{33} & r_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \mathbf{u}$$



**Abbildung 2.3:** Pseudoeigenwerte des kompakten Verfahrens von Lele (1992) für  $N = 61$ .  $\square$ ,  $\epsilon = 0$   $\triangle$ ,  $\epsilon = 0.01$   $\odot$ ,  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$   $\square$ ,  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$

$$\begin{array}{c}
 2.\text{Zeile} \times \frac{l_{11}}{l_{21}} \Downarrow -1.\text{Zeile} \\
 \left[ \begin{array}{cccc}
 \frac{l_{22}}{l_{21}} l_{11} - l_{12} & \frac{l_{23}}{l_{21}} l_{11} - l_{22} & 0 & \cdots \\
 l_{32} & l_{33} & l_{34} & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \right] \mathbf{u}' = \left[ \begin{array}{cccc}
 \frac{r_{22}}{l_{21}} l_{11} - r_{12} & \frac{r_{23}}{l_{21}} l_{11} - r_{13} & 0 & \cdots \\
 r_{32} & r_{33} & r_{34} & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array} \right] \frac{\mathbf{u}}{h}
 \end{array}$$

und damit ein System der Ordnung  $N - 1$ . Die Abbildungen 2.3 bis 2.6 zeigen die Pseudospektren der verwendeten kompakten Ableitungsoperatoren für verschieden grosse Normen von  $\mathbf{E}$  und für  $N = 61$  und  $N = 221$  Punkte. Zur Berechnung wurde die Matrix  $\mathbf{E}$  mit Zahlen aus einem Zufallszahlengenerator belegt und anschliessend derart skaliert, dass die  $L_2$ -Norm der Matrix einen Wert  $\leq \epsilon$  annahm. Die Spektren der Matrix  $\mathbf{C} + \mathbf{E}$  wurden anschliessend mit Hilfe einer LAPACK-Routine ermittelt. Nach der Definition des Pseudoeigenwertspektrums wäre die Auswertung für alle Möglichkeiten von  $\mathbf{E}$  erforderlich, wird hier aufgrund praktischer Gesichtspunkte allerdings nur für eine begrenzte Anzahl von  $\epsilon$  durchgeführt, der Trend der Ergebnisse ist eindeutig erkennbar. Man sieht, dass die Bedingung (2.10),  $\mathcal{R}(\lambda_\epsilon) \leq K\epsilon$ , erfüllt, die räumliche Diskretisierung damit stabil ist.

### 2.2.2 Stabilität der Zeitintegration

Nachdem die Stabilität der verwendeten kompakten Ableitungsschemata gezeigt ist, soll zusätzlich noch die Stabilität der kompletten Diskretisierung mittels der Pseudospektren und Theorem 1 gezeigt werden.

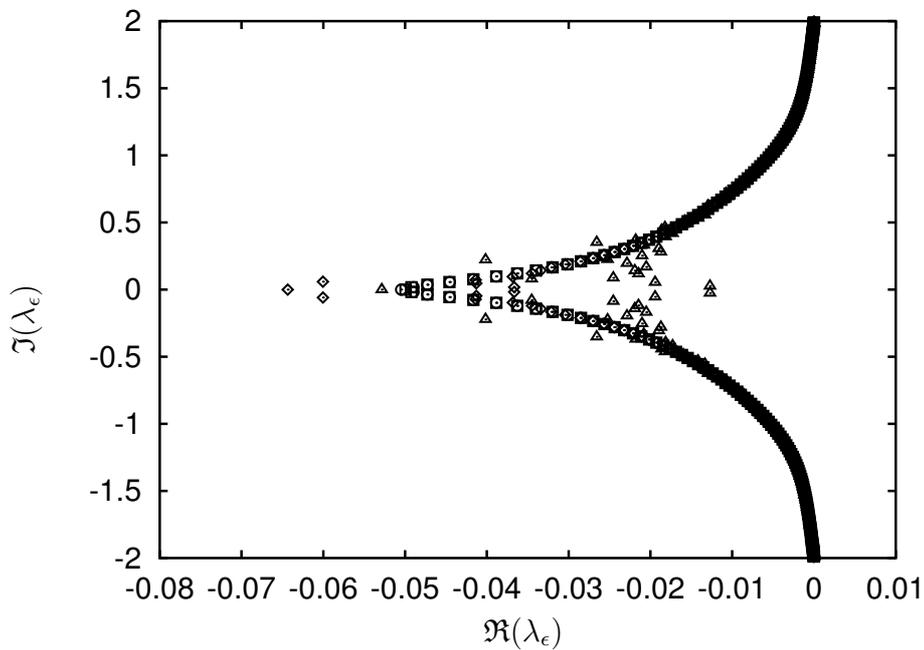


Abbildung 2.4: Pseudoeigenwerte des kompakten Verfahrens von Lele (1992) für  $N = 221$ .  $\square$ ,  $\epsilon = 0$   $\triangle$ ,  $\epsilon = 0.01$   $\odot$ ,  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$   $\square$ ,  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$

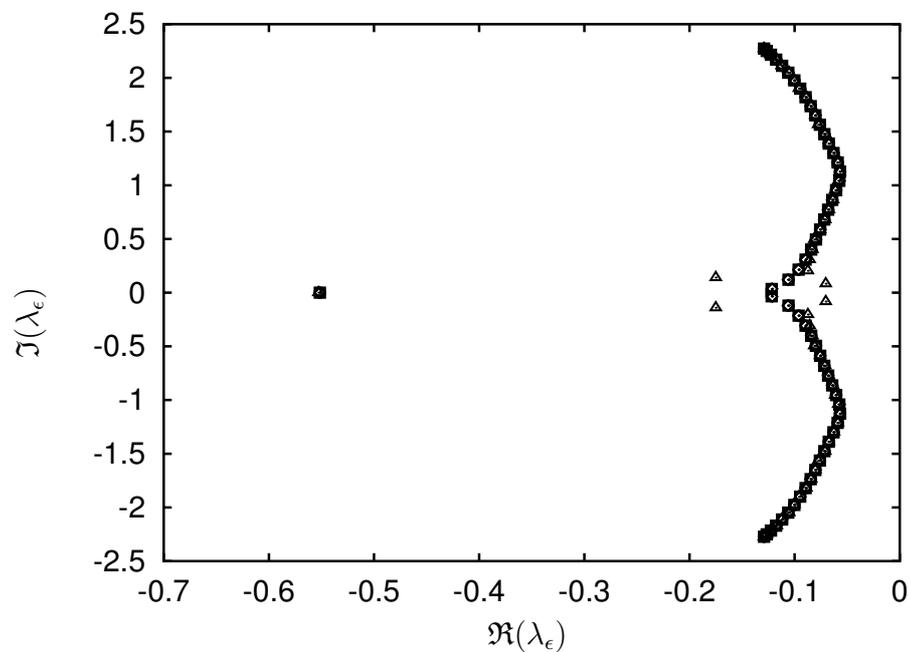
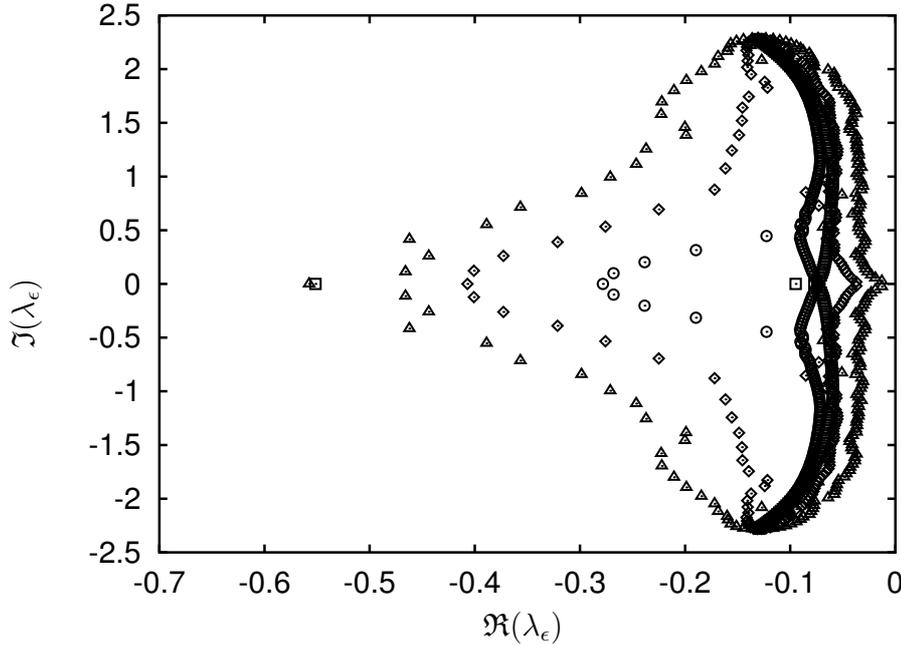


Abbildung 2.5: Pseudoeigenwerte des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996) für  $N = 61$ .  $\square$ ,  $\epsilon = 0$   $\triangle$ ,  $\epsilon = 0.01$   $\odot$ ,  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$   $\square$ ,  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$



**Abbildung 2.6:** Pseudoeigenwerte des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996) für  $N = 221$ .  $\square$ ,  $\epsilon = 0$   $\triangle$ ,  $\epsilon = 0.01$   $\odot$ ,  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$   $\square$ ,  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$

Die Zeitintegration der Navier-Stokes-Gleichungen erfolgte über ein explizites “low-storage” Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung nach Williamson (1980). Allgemein gilt für eine Gleichung  $\dot{u}(t) = f(t, u)$  und einen Runge-Kutta-Verfahren N-ter Ordnung mit Zeitschrittgröße  $\Delta t$  und dem Zeitschrittindex  $n$  ( $t^n = n\Delta t$ )

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{i=1}^N b_i f(t^n + c_i \Delta t, k_i)$$

mit 
$$k_i = u^n + \Delta t \sum_{j=1}^N a_{ij} f(t^n + c_j \Delta t, k_j) \quad (2.11)$$

und 
$$a_{ij} = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq n.$$

Für ein Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung erhält man beispielsweise

$$\begin{aligned} k_1 &= u^n \\ k_2 &= u^n + \frac{1}{2} \Delta t f \left( t^n + \frac{1}{2} \Delta t, k_1 \right) \\ k_3 &= u^n + \Delta t \left( -f \left( t^n + \frac{1}{2} \Delta t, k_1 \right) + 2f(t^n + \Delta t, k_2) \right) \\ u^{n+1} &= u^n + \Delta t \frac{1}{6} (f(k_1) + 4f(k_2) + f(k_3)), \end{aligned} \quad (2.12)$$

und für die Konvektionsgleichung (2.7) als Modellgleichung gilt nach Verwendung des kompakten Ableitungsverfahrens (2.7)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{c}{h} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{u} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = i c k^* \hat{u}_i, \quad (2.13)$$

nach räumlicher Fouriertransformation unter Verwendung der modifizierten Wellenzahl für die räumliche Ableitung, falls periodische Randbedingungen vorliegen. Die Anwendung des Runge-Kutta-Zeitschritts liefert nach Einsetzen mit  $\text{CFL} = \frac{c\Delta t}{h}$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \left( \mathbf{I} + \text{CFL} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} + \frac{(\text{CFL} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R})^2}{2!} + \frac{(\text{CFL} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R})^3}{3!} \right) \mathbf{u}^n, \quad \text{oder} \quad (2.14)$$

$$\hat{u}_i^{n+1} = \left( 1 + i \text{CFL} k_i^* h + \frac{(i \text{CFL} k_i^* h)^2}{2!} + \frac{(i \text{CFL} k_i^* h)^3}{3!} \right) \hat{u}_i^n. \quad (2.15)$$

Das sind gerade die ersten drei Terme der Taylorreihenentwicklung der exakten Lösung (2.8) der Semidiskretisierung von (2.13). Durch Vergleich mit einem Lösungsansatz der Form  $\exp(i\omega t) \mathbf{v}$  erhält man die Kreisfrequenz  $\tilde{\omega}$  der Semidiskretisierung zu

$$\tilde{\omega} = i \frac{c}{h} \frac{\{[\mathbf{L}^{-1} \mathbf{R}] \mathbf{v}\}_{(i)}}{v_{(i)}} \quad (2.16)$$

und für das Runge-Kutta-Verfahren

$$\tilde{\omega}_{RK} = -\frac{i}{\Delta t} \ln \left\{ \mathbf{I} + i \tilde{\omega} \Delta t + \frac{(\tilde{\omega} \Delta t)^2}{2!} + i \frac{(\tilde{\omega} \Delta t)^3}{3!} \right\} \quad (2.17)$$

oder mit  $\omega = c k^*$  im periodischen Fall unter Verwendung der modifizierten Wellenzahl

$$\omega_{RK}^* = -\frac{i}{\Delta t} \ln \left\{ 1 + i \omega \Delta t + \frac{(i \omega \Delta t)^2}{2} + \frac{(i \omega \Delta t)^3}{3} \right\}. \quad (2.18)$$

Die Größe

$$\mathbf{G} = \left( \mathbf{I} + \text{CFL} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R} + \frac{(\text{CFL} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R})^2}{2!} + \frac{(\text{CFL} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{R})^3}{3!} \right)$$

bezeichnet man als die Verstärkungsmatrix,  $G_i = \hat{u}_i^{n+1} / \hat{u}_i^n$  als Verstärkungsfaktor. Letzterer ergibt sich mit (2.15) und (2.18) zu

$$G_i = |G_i| \exp(i\Phi) = \left( 1 + i \omega \Delta t + \frac{(i \omega \Delta t)^2}{2!} + \frac{(i \omega \Delta t)^3}{3!} \right). \quad (2.19)$$

Für den allgemeinen Fall der Konvektionsgleichung mit der aufgeprägten physikalischen Randbedingung  $u(0, t) = 0$  sind in den Abbildungen 2.9 bis 2.16 die Pseudospektren der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{G}$  dargestellt. Für  $N = 61$  und  $N = 221$  sind jeweils die

CFL-Zahl und die Norm der Matrix  $E$  variiert worden, um zu sehen, ob das erweiterte Kreiss-Matrixtheorem (Theorem 1) erfüllt ist. Man erkennt, dass sowohl für das Upwind-Verfahren, als auch für das zentrale kompakte Verfahren, die Variation von  $\epsilon$  bei festgehaltener *CFL – Zahl* keine Verletzung des Theorems hervorruft. Durch Variation der CFL-Zahl wird deutlich, dass die komplette Diskretisierung für die lineare Konvektionsgleichung für  $CFL \leq 0.8$  stabil bleibt.

### 2.2.3 Stabilität der Konvektions-Diffusionsgleichung

Die lineare Konvektions-Diffusionsgleichung auf dem Intervall  $x \in [0, 1]$  lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -c \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0,1} &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Der Realteil der modifizierten Wellenzahl für das in den homogenen Richtungen verwendete zentrale kompakte Verfahren für die zweite Ableitung (für die Koeffizienten siehe Anhang A) ist in Abbildung 2.7 zu sehen, der Imaginärteil ist Null. Daraus erkennt man wiederum, mit derselben Argumentation wie oben, dass das Cauchy-Problem stabil ist. Die Pseudospektren des Operators der zweiten Ableitung,  $\{\mathbf{L}_z^{-1} \mathbf{R}_z\} \{\mathbf{L}_z^{-1} \mathbf{R}_z\} / h^2$ , sind für verschiedene Werte von  $\epsilon$  in Abbildung 2.8 dargestellt. Als Randbedingung wurde  $u(x, t)|_{x=0,1} = \partial u(x, t) / \partial x|_{x=0,1} = 0$  aufgeprägt. Man erkennt deutlich, dass mit größer werdendem  $\epsilon$  die Instabilität des Operators zunimmt. Das instabile Verhalten der Diskretisierung der zweiten Ableitung in der Konvektions-Diffusionsgleichung kann jedoch stark eingedämmt werden, falls die erste Ableitung durch den Ableitungsoperator von Adams & Shariff (1996),  $\mathbf{L}_u^{-1} \mathbf{R}_u / h$ , erfolgt. Die numerische Dissipation der Upwind-Diskretisierung bei hohen Wellenzahlen dämpft die instabilen Moden. Zusammen mit der Zeitintegration erhält man dann analog, wie oben für die Konvektionsgleichung durchgeführt,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{M} + \frac{\mathbf{M}\mathbf{M}}{2!} - \frac{\mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{M}}{3!} \right) \mathbf{u}^n. \tag{2.21}$$

unter Verwendung von

$$\mathbf{M} = CFL \mathbf{L}_u^{-1} \mathbf{R}_u + C_d \{\mathbf{L}_z^{-1} \mathbf{R}_z\} \{\mathbf{L}_z^{-1} \mathbf{R}_z\}$$

und der viskosen Stabilitätszahl  $C_d = \frac{\nu \Delta t}{h^2}$ . In den Abbildungen 2.17 bis 2.20 sind die Pseudospektren der Verstärkungsmatrix  $\mathbf{I} + \mathbf{M} + \frac{\mathbf{M}\mathbf{M}}{2!} - \frac{\mathbf{M}\mathbf{M}\mathbf{M}}{3!}$  dargestellt, wiederum für die Gitterpunktzahlen  $N = 61$ ,  $N = 221$  und für verschiedene  $\epsilon$ . Aus den Abbildungen erkennt man, dass das Stabilitätskriterium des Theorems 1 für  $CFL = C_d = 0.5$  erfüllt ist. Aufgrund der numerischen Dissipation des kompakten Upwind-Verfahrens für

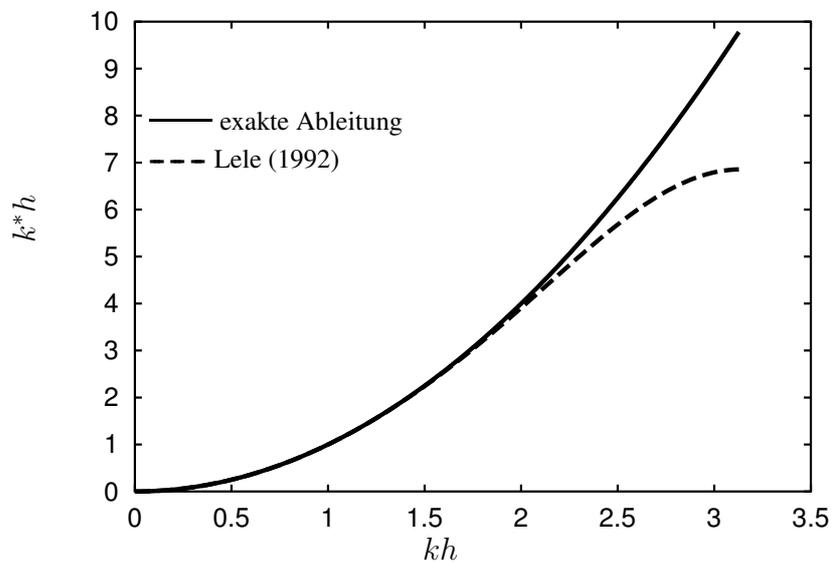


Abbildung 2.7: Modifizierte Wellenzahl der 2.Ableitung für  $N = 221$

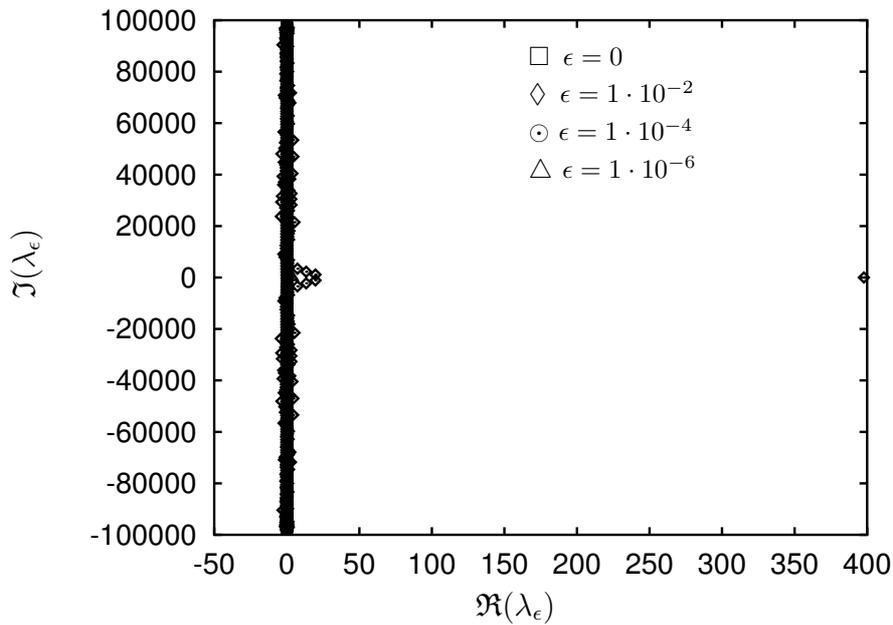


Abbildung 2.8: Pseudospektren der 2.Ableitung für  $N = 221$

hohe Wellenzahlen ist zu erwarten, dass im mehrdimensionalen Fall die CFL-Zahl höher gewählt werden kann, ausserdem stellt die eindimensionale Konvektions-Diffusionsgleichung eine zu einfache Näherung dar, um den Zeitschritt zu bestimmen.

### 2.3 Wahl der Zeitschrittgröße

Die Berechnung der Zeitschrittgröße erfolgt nach der Arbeit von Müller (1990). Ausgehend von den dreidimensionalen linearisierten kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in krummlinigen Koordinaten,  $x_1, x_2, x_3$ , gab er nach Fouriertransformation und Einsetzen der maximalen modifizierten Wellenzahl der räumlichen Ableitung, die folgenden Zeitschrittkriterien für den hyperbolischen und parabolischen Teil der Navier-Stokes-Gleichungen an:

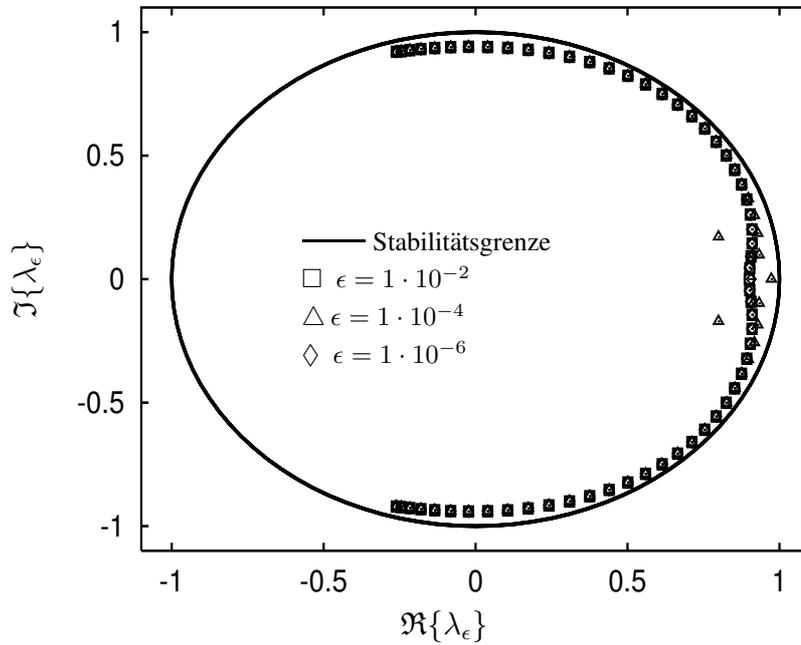
$$\Delta t_k^{max} = \frac{1.7320}{\max(|u_1 + c| \cdot |\xi_1| \frac{k_1^*}{\Delta x_1} + |u_2 + c| \cdot |\eta_2| \frac{k_2^*}{\Delta x_2} + |u_3 + c| \cdot |\zeta_3| \frac{k_3^*}{\Delta x_3})} \quad (2.22)$$

$$\Delta t_d^{max} = \frac{2.5 \cdot \rho}{\max \left[ \left( \frac{(\xi_1)^2 k d_1^*}{\Delta x_1^2} + \frac{(\eta_2)^2 k d_2^*}{\Delta x_2^2} + \frac{(\zeta_3 k_3^*)^2}{\Delta x_3^2} \right) \cdot A + \left( \frac{\xi_1 \eta_2 k_1^* k_2^*}{\Delta x_1 \Delta x_2} + \frac{\xi_1 \zeta_3 k_1^* k_3^*}{\Delta x_1 \Delta x_3} + \frac{\eta_2 \zeta_3 k_2^* k_3^*}{\Delta x_2 \Delta x_3} \right) \frac{\mu}{3} \right]} \quad (2.23)$$

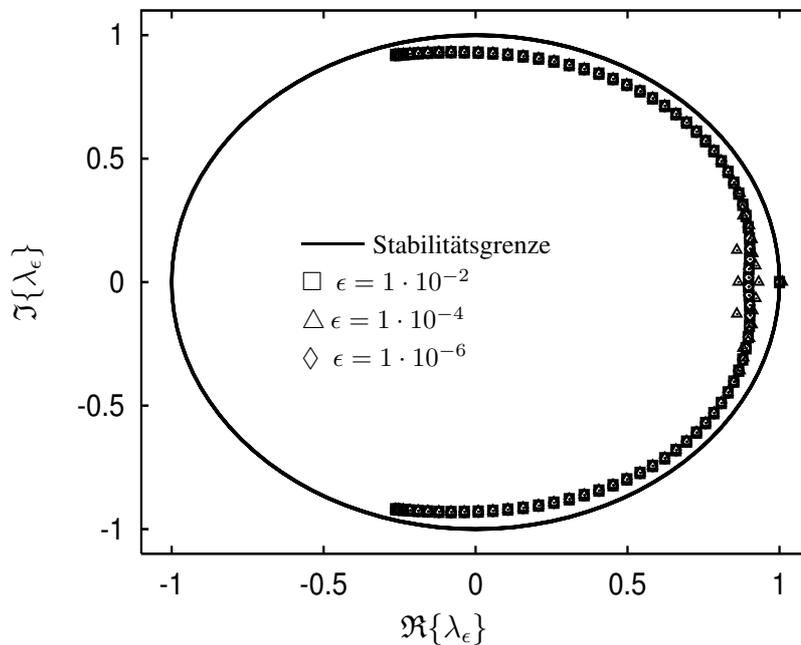
Hier ist  $A$  definiert als

$$A = \max \left( \max \left( \frac{4}{3} \mu \right), \max \left( \frac{\mu}{Pr} \right) \right).$$

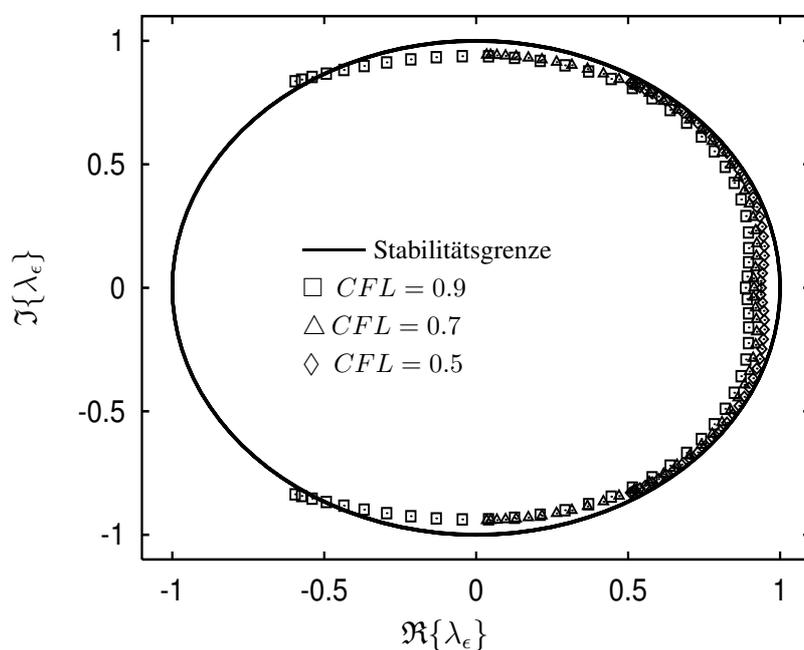
$(\xi_1, \eta_2, \zeta_3) = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta}{\partial x_2}, \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \right)$  resultiert aus der Transformation von  $(x_1, x_2, x_3)$  in den Rechenraum  $(\xi, \eta, \zeta)$  und  $k_i^*, kd_i^*$  bezeichnen die Maxima der modifizierten Wellenzahlen für die ersten und zweiten Ableitungen, wobei im Fall des konvektiven Zeitschrittkriteriums die modifizierten Wellenzahlen des kompakten Upwind-Schemas von Adams & Shariff (1996), für das diffusive Zeitschrittkriterium die modifizierten Wellenzahlen des kompakten Schemas von Lele (1992) benutzt werden. Das Minimum der beiden Kriterien bestimmt den maximalen Zeitschritt, die Extremwerte in obigen Gleichungen sind dabei immer über alle Zellen zu nehmen. Simulationen von kompressiblen Kanalströmungen und Taylor-Green-Wirbeln wurden zum Test mit verschiedenen Zeitschrittgrößen gerechnet. Eine maximale CFL-Zahl von  $0.75 CFL^{max}$  ergab stabile Berechnungen, darüber wurden für Maschenweiten, die größer als das Kolmogorovsche Längenmaß waren, Instabilitäten beobachtet.



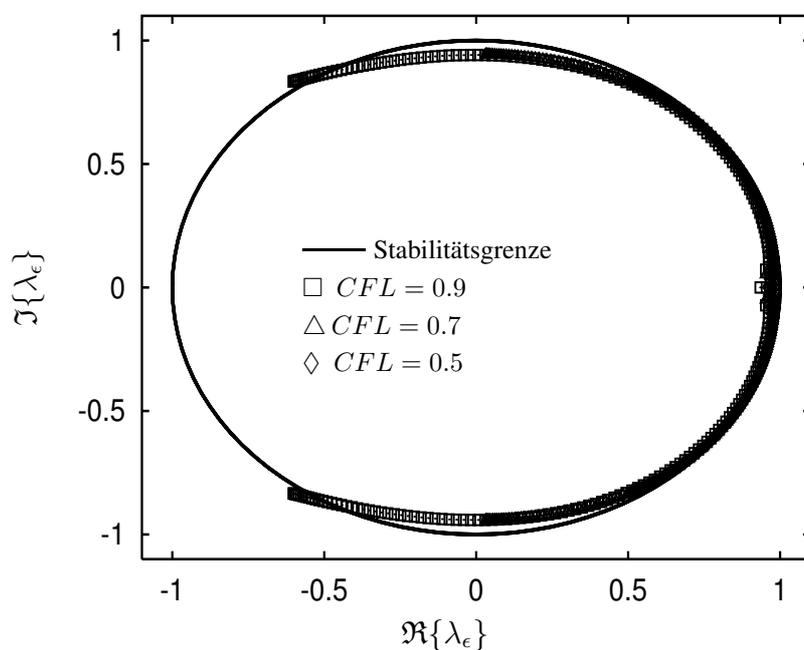
**Abbildung 2.9:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Lele (1992), für  $N = 61$  und  $CFL = 0.8$



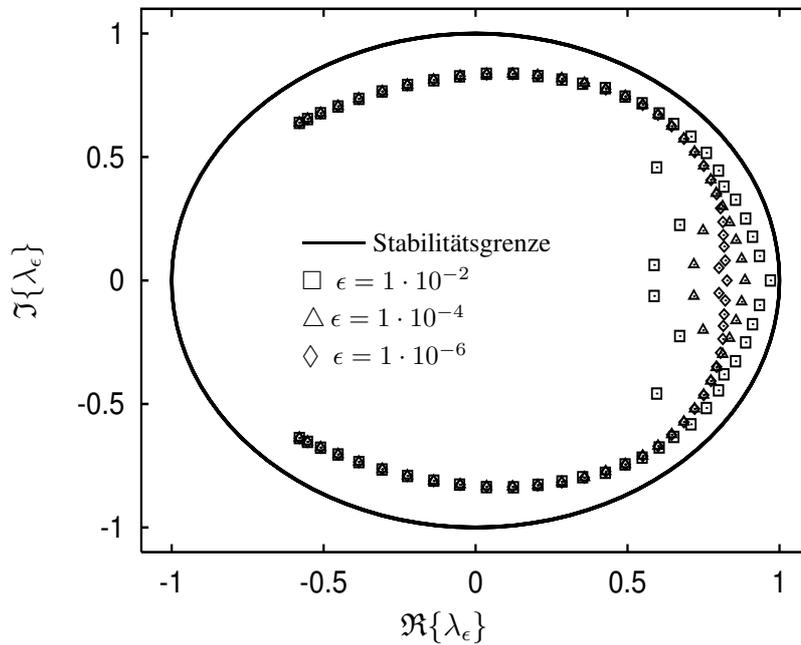
**Abbildung 2.10:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Lele (1992), für  $N = 221$  und  $CFL = 0.8$



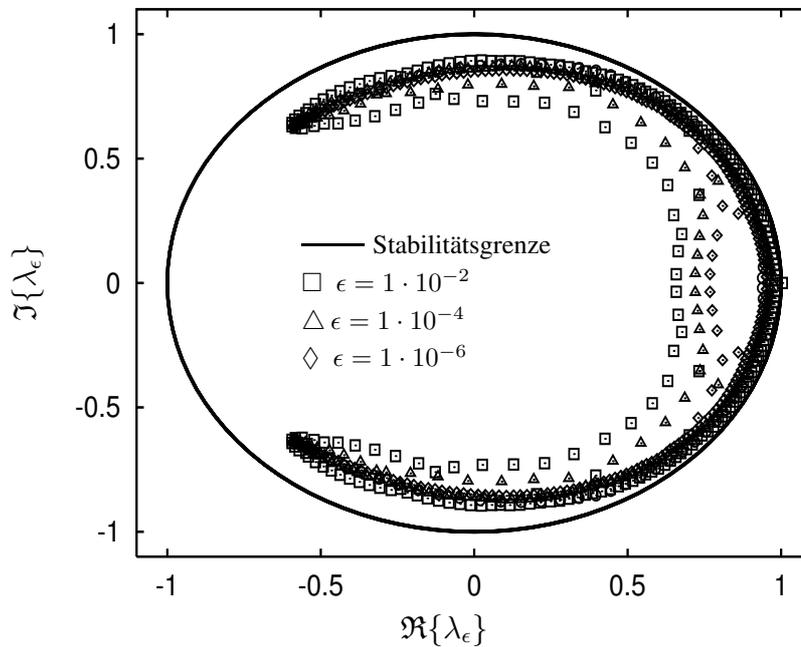
**Abbildung 2.11:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Lele (1992), für  $N = 61$  und  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$



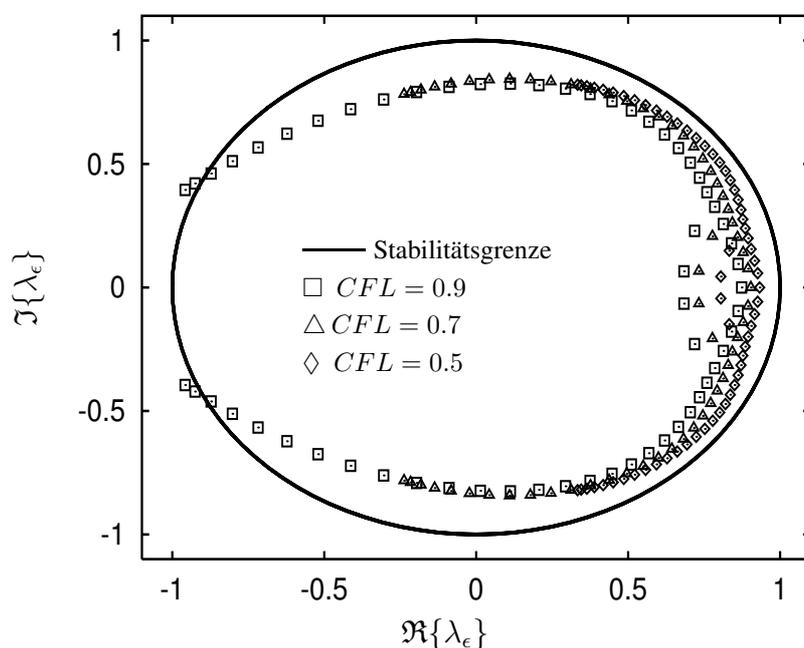
**Abbildung 2.12:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Lele (1992), für  $N = 221$  und  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$



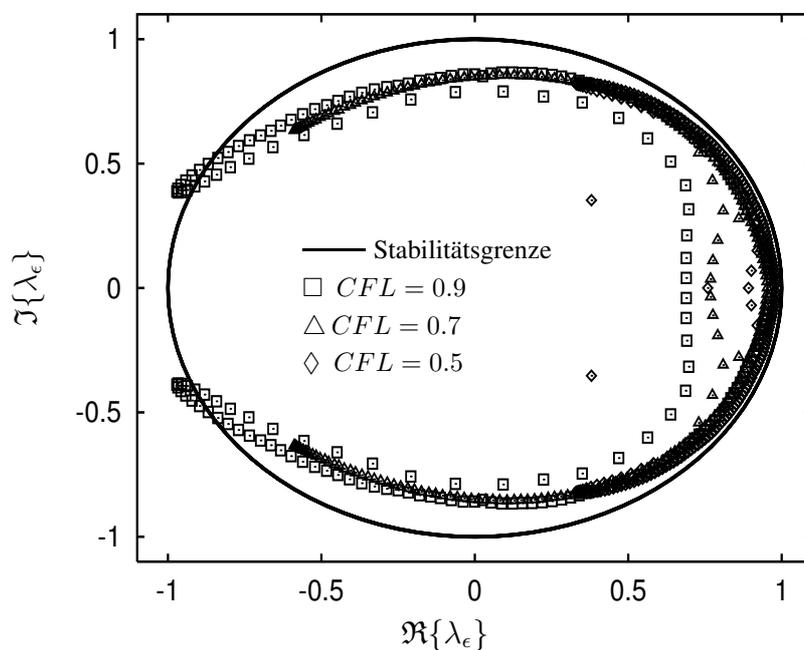
**Abbildung 2.13:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für  $N = 61$  und  $CFL = 0.8$



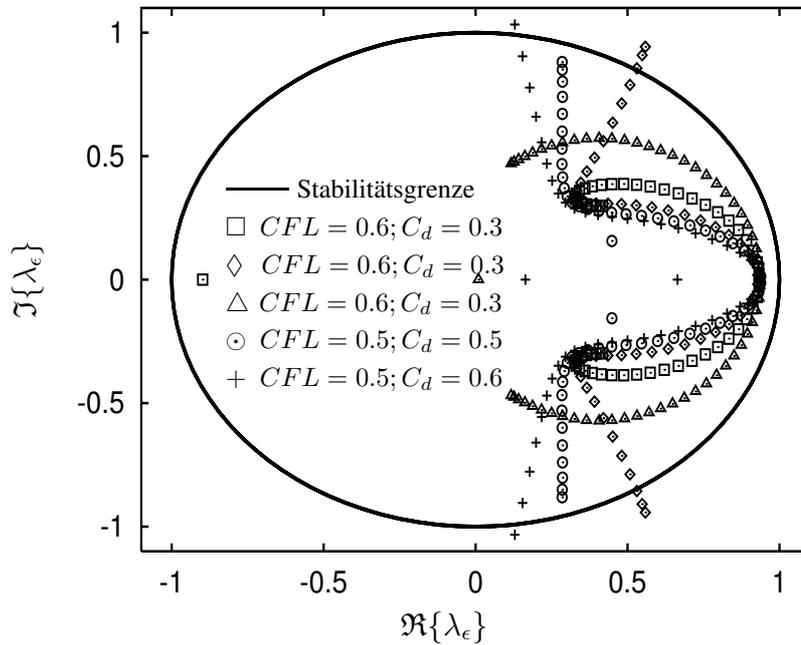
**Abbildung 2.14:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für  $N = 221$  und  $CFL = 0.8$



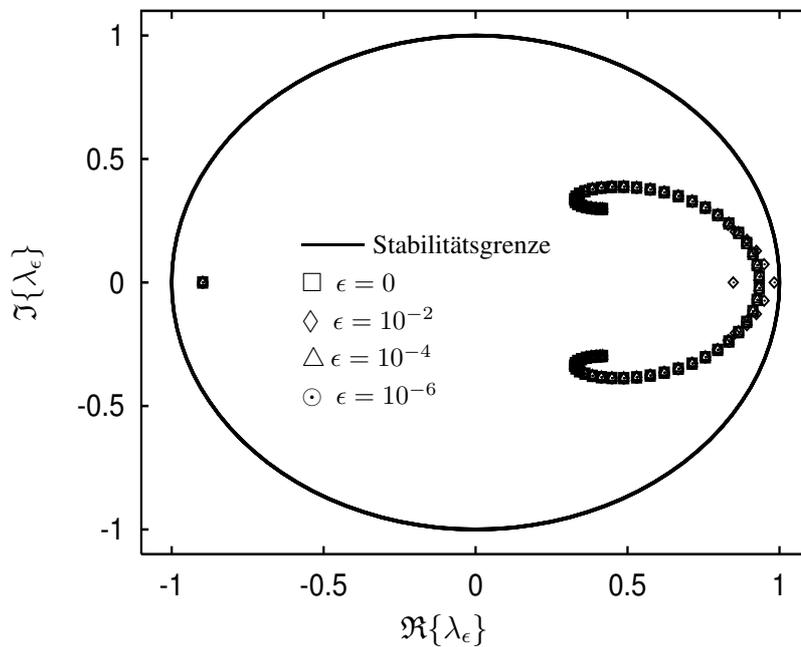
**Abbildung 2.15:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für  $N = 61$  und  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$



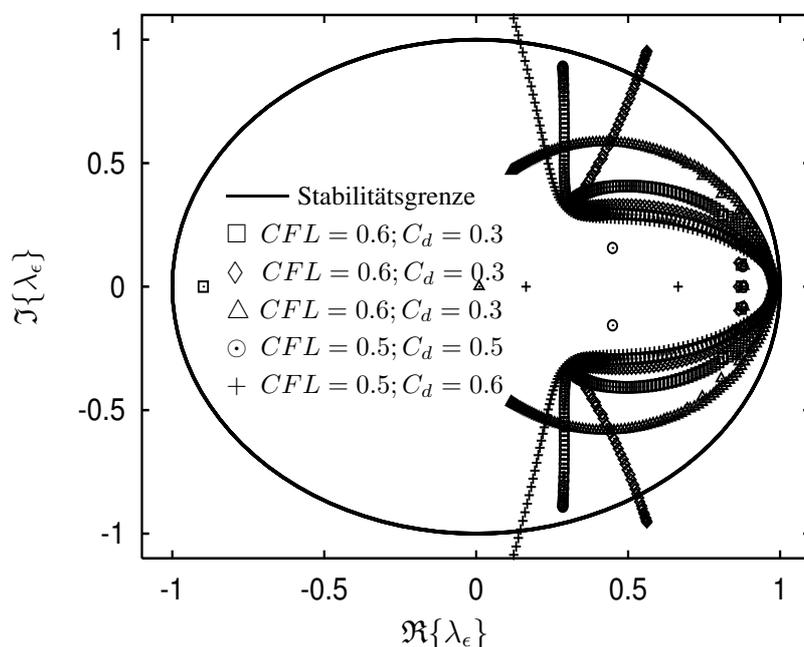
**Abbildung 2.16:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für  $N = 221$  und  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$



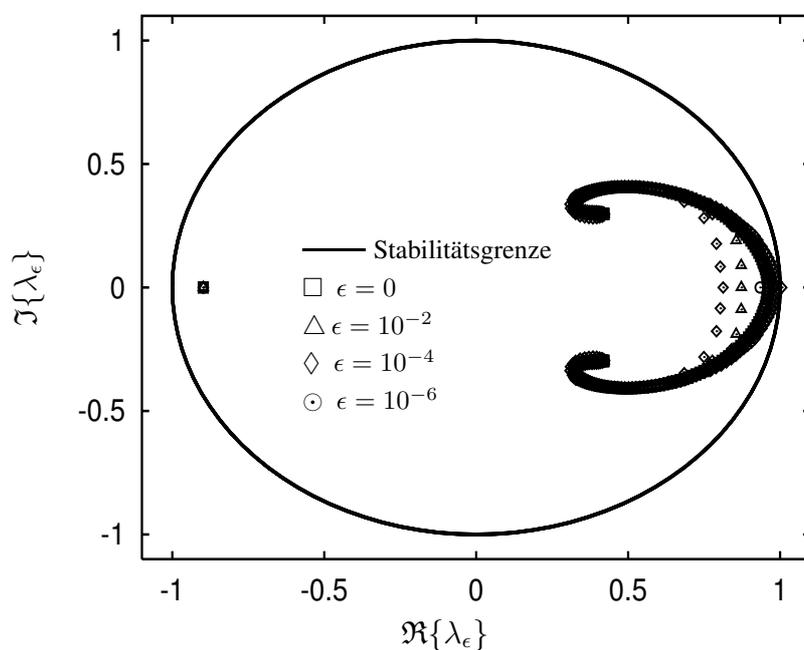
**Abbildung 2.17:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektions-Diffusionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für  $N = 61$  und  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$



**Abbildung 2.18:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektions-Diffusionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für  $N = 61$  und  $CFL = 0.6, C_d = 0.3$



**Abbildung 2.19:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektions-Diffusionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für  $N = 221$  und  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$



**Abbildung 2.20:** Pseudoeigenwerte des Runge-Kutta-Verfahrens, angewandt auf die Konvektions-Diffusionsgleichung, unter Benutzung des kompakten Verfahrens von Adams & Shariff (1996), für  $N = 221$  und  $N = 61$  und  $CFL = 0.6$ ,  $C_d = 0.3$

## 2.4 Parallelisierung und Optimierung

Die Berechnung von Strömungsproblemen mit hohen Reynoldszahlen  $Re$  macht aufgrund der großen Anzahl an Gitterpunkten, die zur Aulösung der kleinsten im Gebiet vorkommenden Strukturen notwendig sind, eine Parallelisierung des Navier-Stokes-Lösers unumgänglich. Zur Abschätzung: will man in einem Gebiet der Grösse  $L^3$  das kleinste Längenmass  $l_k$  eines Turbulenzfeldes auflösen, so benötigt man etwa  $(L/l_k)^3 \approx 27Re^{(9/4)}$  Punkte (Pope (2000)).

Die hier vorgenommene Parallelisierung macht Gebrauch von der freien Bibliothek MPI, über die die Kommunikation der Prozessoren untereinander geregelt wird. Mittels einer einfachen Gebietszerlegung wurde das Rechengebiet in Teilgebiete zerlegt, deren Daten jeweils einem Prozessor zugänglich sind. Abbildung 2.21 zeigt eine Gebietszerlegung für den Fall von 4 Prozessoren. Sind Rechenoperationen über die Gebietsgrenzen hinaus erforderlich, müssen die Daten an den Grenzen über einen Sendeprozess ausgetauscht werden. In den Ableitungsrouitinen werden deshalb in jedem Prozessor zusätzliche Arrays (“Ghostcells”) allokiert, in denen die benötigten Daten der benachbarten Prozessoren gespeichert werden. Die Bestimmung der benachbarten Prozessoren erfolgt auf einfache Weise über die Funktion **MPI\_CART\_SHIFT**. Die Prozessoren wurden zuvor über die Funktion **MPI\_CART\_CREATE** in einem zweidimensionalen Prozessgitter angeordnet und können anschliessend einfach über Koordinaten angesprochen werden. Da sich die Koeffizienten der Ableitungsschemata nicht ändern, sind die zu sendenden Pakete immer gleich groß, wodurch immer die gleichen MPI-Datentypen benutzt werden können, über die die Größe und Art der zu verschickenden Daten festgelegt wird. Ein typisches Beispiel eines benutzerdefinierten Datentyps, der aus einem Array der Dimension  $2, n2, n3$  ein kleineres Array mit der Dimension  $2, n2, n3$  ausschneidet, ist in dem Pseudocode 2.1 zu sehen.

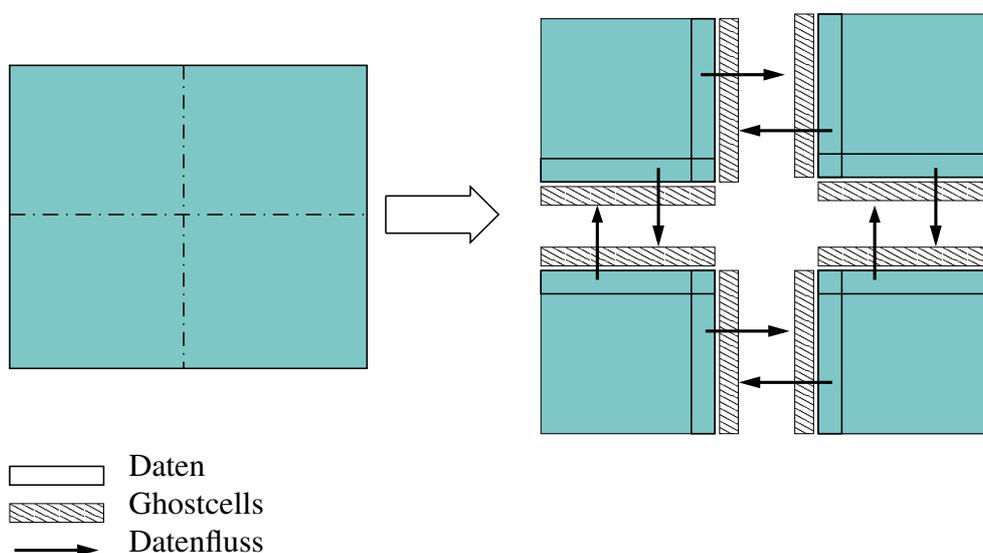
### Algorithmus 2.1: MPI-DATENTYP(*Datentyp*)

```

MDP = MPI_DOUBLE_PRECISION
MPI_TYPE_EXTENT(MDP, sizeofdouble, ...) !Bitgröße
MPI_TYPE_VECTOR(2, 1, 1, MDP, ...)
MPI_TYPE_HVECTOR(n2, 1, 2 * sizeofdouble, ...)
MPI_TYPE_HVECTOR(n3, 1, 2 * n2 * sizeofdouble, ..., Datentyp)
MPI_TYPE_COMMIT(Datentyp, ...) !Bekanntmachen

```

Die im Code verwendeten kompakten Differenzenschemata erfordern die parallele Lösung linearer tridiagonaler und pentadiagonaler Gleichungssysteme. Als Wahlmöglichkeiten stehen iterative oder direkte Löser (z.B. Divide and Conquer, Zyklische Reduktion, Gauss-Elimination) zur Verfügung. In einem Übersichtsartikel von I. A. Duff (1999) wird



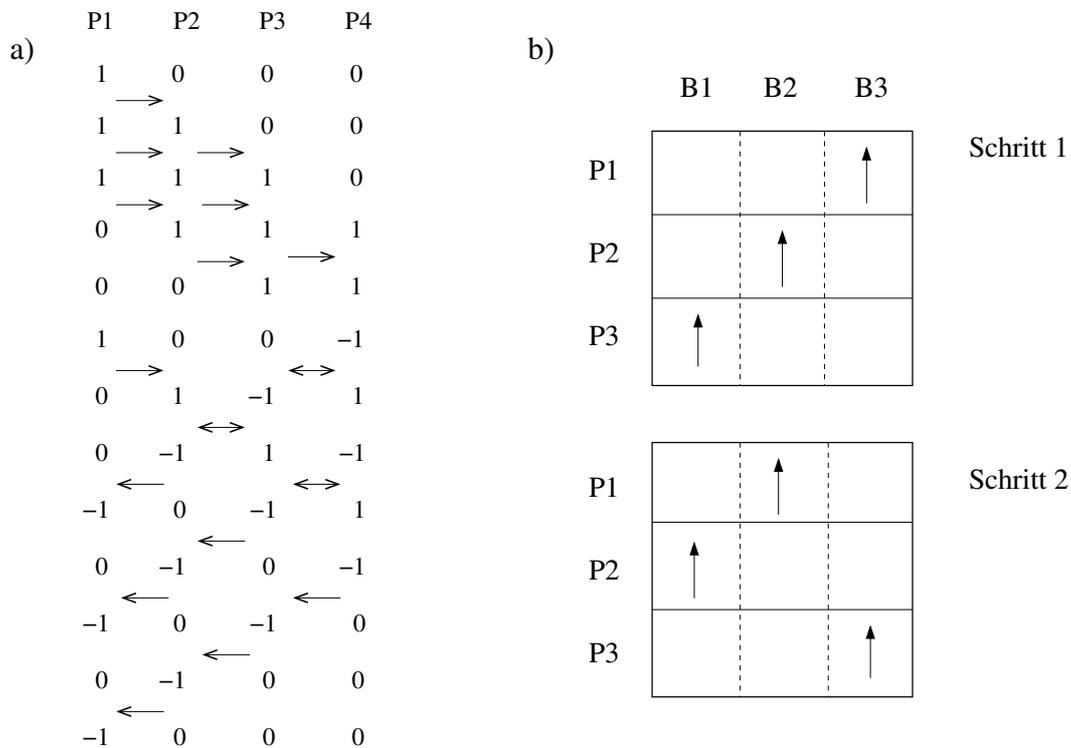
**Abbildung 2.21:** Beispiel einer Gebietszerlegung für 4 Prozessoren

die parallele Performance iterativer Löser im Vergleich zu direkten Lösern mit schwach besetzten und direkten Lösern mit voll besetzten Matrizen als 1:5:10 angegeben, wobei die meisten verwendeten Algorithmen erst bei sehr großen Bandmatrizen eine gute parallele Effizienz zeigen. Es wurde deshalb ein paralleler Gleichungslöser, basierend auf dem Thomas-Algorithmus (eine Variante des Gausschen Eliminationsverfahrens) und dessen Verallgemeinerung auf pentadiagonale Systeme, implementiert. Dieser zeichnet sich durch einen äußerst geringen numerischen Aufwand aus ( $O(N)$  bei  $N$  Gitterpunkten), im Gegensatz zu anderen direkten Algorithmen, z.B. dem weit verbreiteten "Divide and Conquer"-Verfahren. Die zu lösenden Gleichungssysteme besitzen außerdem, bis auf die Randpunkte, diagonaldominante Matrizen ( $\forall i = 1, \dots, N \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq a_{ii}$ ), damit liegt immer numerische Stabilität vor. Im einzelnen wurden für nichtperiodische Probleme ein direkter tridiagonaler Löser von Povitsky (1998), für Probleme mit periodischen Randbedingungen ein direkter tridiagonaler Löser von T. Eidson (1995) ("chained"-Algorithmus) sowie ein Transpose-Algorithmus, der unabhängig von der Struktur des Gleichungssystem ist, implementiert. Povitskys Löser (2.22a) basiert auf der Parallelisierung des Pipelined-Thomas-Algorithmus, der sich für kompakte Differenzenschemata mit konstanten Koeffizienten der Form

$$a_{k,l}x_{k-1,l} + b_{k,l}x_{k,l} + c_{k,l}x_{k+1,l} = f_{k,l}, \quad k = 1, \dots, N; \quad l = 1, \dots, L$$

aus einer einmal durchgeführten LU-Zerlegung

$$d_{1,l} = b_{1,l}, \quad d_{k,l} = b_{k,l} - a_{k,l} \frac{c_{k-1,l}}{d_{k-1,l}}, \quad k = 2, \dots, N,$$



**Abbildung 2.22:** a) Ablauf des Pipelined-Thomas-Algorithmus für 4 Prozessoren (1, -1, 0 sind Vorwärts-, Rückwärtsschritt, Warten, → senden). b) Zwei Schritte des periodischen Lösers fuer 3 Prozessoren. Die unabhängige Richtung wird in 3 Blöcke B1, B2, B3 geteilt.(P1, P2, P3, P4 Prozessoren)

einer Vorwärtselimination

$$g_{1,l} = \frac{f_{1,l}}{d_{1,l}}, \quad g_{k,l} = \frac{-a_{k,l}g_{k-1,l} + f_{k,l}}{d_{k,l}}, \quad k = 2, \dots, N,$$

und im zweiten Schritt einer Rückwärtselimination

$$x_{N,l} = g_{N,l}, \quad x_{k,l} = g_{k,l} - x_{k+1,l} \frac{c_{k,l}}{d_{k,l}}, \quad k = N - 1, \dots, 1$$

zusammensetzt. Ein guter Speedup wird erreicht, wenn die Wartezeit der Prozessoren auf Daten reduziert wird, also Vor- und Rückwärtselimination inklusive Kommunikation die gleiche Zeit benötigen. Dazu werden jeweils unterschiedlich viele Linien  $l$  (Daten der nichtparallelen Richtung) berechnet und der Ablauf zwischen Berechnung und Kommunikation in einem Steuerungsalgorithmus geregelt. Wie aus der Abbildung jedoch ersichtlich ist, ist es unvermeidbar, dass sich die Prozessoren teilweise im Wartezustand befinden (gekennzeichnet durch eine 0) und damit wertvolle Rechenzeit verloren geht. T. Eidson (1995) macht sich die Periodizität des Problems zu Nutze, um eine hohe parallele Effizienz zu erreichen und Wartezeiten zu umgehen. Dies ist in Abbildung 2.22b

für den Fall dreier Prozessoren ( $P_1, P_2, P_3$ ) veranschaulicht: die Daten jedes Prozessors werden, um besseres Load-Balancing zu erhalten, in genauso viele "virtuelle" Blöcke unterteilt, wie Prozessoren vorhanden sind ( $B_1, B_2, B_3$ ). Die einzelnen Prozessoren beginnen anschließend die Berechnung in unterschiedlichen Blöcken und senden nach Fertigstellung die Daten an den angrenzenden Prozessor weiter. Aufgrund der Periodizität ist das für  $P_3$  beispielsweise wieder  $P_1$ . Nach Erhalt der Daten des vorherigen Prozessors, wird die Berechnung in dem Block fortgesetzt, in dem die empfangenen Daten berechnet wurden. Die einzelnen Prozessoren müssen deshalb nicht auf die Daten warten, sondern berechnen immer einen fertig werdenden Satz von Linien. Auf diese Weise erreicht man besonders bei großen Prozessorzahlen ( $> 64$ ) eine bessere Performance als mit den oft verwendeten Transpose-Algorithmen (T. Eidson (1995)), die Implementierung erweist sich dagegen als aufwendiger. Der Pseudocode des Algorithmus ist in (2.2) gezeigt. Er beginnt mit der Erstellung einer Tabelle, *sched*, in der der Ablauf der Berechnung festgelegt wird. Die Anzahl der zu berechnenden Linien, *nblock*, der unabhängigen Richtung ergibt sich aus deren Punktezahl  $n_1$  geteilt durch die Anzahl der Prozessoren, *nproc*. Die Berechnung erfolgt anschließend von Index  $is = Sched(step)$  bis Index  $is + nblock$ , wie oben beschrieben.

In Abbildung 2.23 ist als erster Testfall der Verlauf der kinetischen Energie des Taylor-Green-Wirbels im Vergleich zur analytischen Lösung zu sehen, berechnet bis zur Maschinengenauigkeit. Dieser Fall wurde mit 4 Prozessoren auf der Hitachi SR8000-F1 gerechnet und bei  $128^3$  Gitterpunkten eine maximale Performance von 2.21 GFlops erreicht.

Ein Problem der Lösung von Gleichungssystemen mit nichtzyklischen Matrizen durch den Lösungsalgorithmus von Povitsky sind die Wartezeiten der Prozessoren. Um bessere parallele Effizienz zu bekommen, wurde zusätzlich ein sogenannter Transpose-Algorithmus implementiert. Dieser erreicht durch Umverteilung der Daten über die Prozessoren, dass die Lösung des Gleichungssystems für Teile der unabhängigen Dimension lokal auf einem Prozessor durchgeführt werden kann. Abbildung 2.24 gibt einen Eindruck der Funktionsweise, für drei Prozessoren ( $P_1, P_2, P_3$ ), wieder. Die Daten (I) werden in genauso viele Blöcke unterteilt wie Prozessoren vorhanden sind ( $B_1, B_2, B_3$ , gestrichelte Linie in (II)). Anschliessend erfolgt, ähnlich einer Matrixtransposition, der Austausch der Daten mit den benachbarten Prozessoren. Ein ursprünglich über mehrere Prozessoren verteilter Block liegt jetzt lokal auf einem Prozessor, und man ist in der Lage, einen seriellen Gleichungslöser zu verwenden. Der Pseudocode des Transpose-Algorithmus ist in 2.3 dargestellt. Die intrinsische Funktion *ieor* bestimmt anhand der Koordinate des Prozessors *coord* und der Prozessornummer *NProc* mit welchem Prozessor die Daten ausgetauscht werden müssen, anschliessend werden die Felder für jeden Block auf ein Hilfsarray kopiert, gesendet, und nach Empfang nochmals auf jedem Prozessor lokal transponiert. Aufgrund der besseren Performance wurden in dieser Arbeit ausschliesslich der Chained- und der Transpose-Algorithmus verwendet. Für eine zweidimensionale Gebietszerlegung, mit  $N$  Gitterpunkten und  $P$  Prozessoren in jeder Richtung, sind Anzahl

und Größe der zu sendenden Pakete nach T. Eidson (1995) für diese zwei Algorithmen in Tabelle 2.4 zusammengefasst.

**Algorithmus 2.2:** CHAINED( $u, udiff, n1, n2, coord, nproc$ )

```

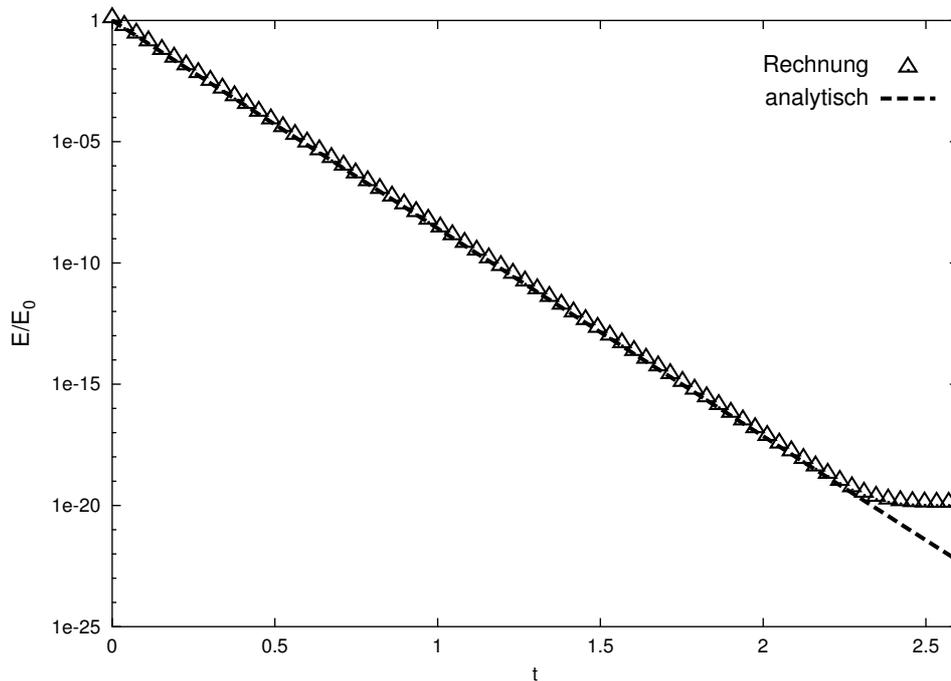
nblock = n1/nproc
comment: Schedule belegen

for step ← 1 to nproc
  is = (coord) - step + 1
  if (is ≤ 0) is = is + nproc
  Sched(step) = is
endfor

for step ← 1 to nproc
  is = Sched(step)
  for i ← nblock * (is - 1) + 1 to nblock * is
    rechne Vorwärtselimination
  endfor
  sende nblock Linien von  $ISD * (Sched(step - 1) - 1) + 1$ ,
  empfangen nblock Linien auf  $ISD * (Pl(step) - 1) + 1$ 
  auf/von Prozessor mit Koordinate coord + 1
endfor

for step ← nproc to 1
  is = Sched(step)
  for i ← nblock * (is - 1) + 1 to nblock * is
    rechne Rückwärtselimination
  endfor
  sende nblock Linien von  $ISD * (Sched(step - 1) - 1) + 1$ ,
  empfangen nblock Linien auf  $ISD * (Pl(step) - 1) + 1$ 
  von/auf Prozessor mit Koordinate coord - 1
endfor

```



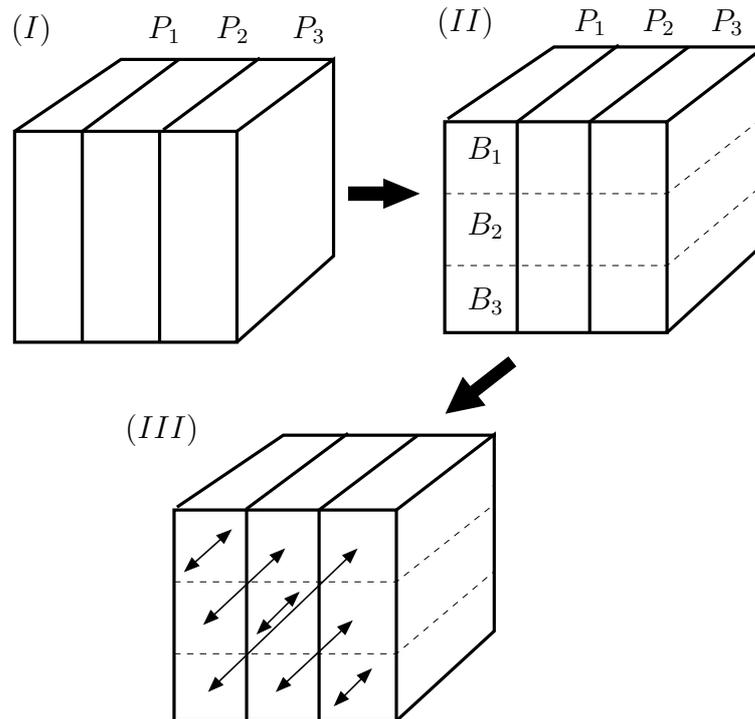
**Abbildung 2.23:** Testfall Taylor-Green Wirbel: Abfall der kinetischen Energie als Funktion der Zeit, gerechnet auf 4 Prozessoren und mit  $128^3$  Gitterpunkten.

**Algorithmus 2.3:**  $\text{TRANSPOSE}(u, utrans, n1, n2, coord, NProc)$

```

for Proc  $\leftarrow$  1 to NProc - 1
  Ziel =  $\text{ieor}[coord, Proc]$ 
  nblock =  $n2/NProc$ 
  for j  $\leftarrow$  1 to nblock
    for i  $\leftarrow$  1 to n1
       $temp1[i, j] = u[i, Ziel * nblock + j]$ 
    endfor
  endfor
  sende Array temp1 zu Prozessor Ziel
  empfangen Array temp2 von Prozessor Ziel
  for j  $\leftarrow$  1 to n1
    for i  $\leftarrow$  1 to nblock
       $utrans[i, j + Ziel * n1] = temp2[j, i]$ 
    endfor
  endfor
endfor

```



**Abbildung 2.24:** Ablauf des Transpose-Algorithmus: Das Rechengebiet (I) wird wie in (II) gezeigt für die Prozessoren  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  virtuell in Blöcke  $B_1, B_2, B_3$  unterteilt (gestrichelte Linien). Der Datenfluss findet anschliessend, wie in (III) gezeigt, statt.

	Anzahl der Pakete	Größe des Pakets
Chained	$8P^{3/2}$	$N^2/P$
Transpose	$4P^{3/2}$	$N^3/P^{3/2}$

**Tabelle 2.1:** Vergleich der Anzahl und Größe der zu sendenden Pakete im Transpose- und Chained-Algorithmus.

## 2.5 Optimierung des Löses

Die Architektur der HITACHI SR8000-F1 machte eine grundlegende Neustrukturierung des Codes notwendig. Es stellte sich heraus, dass der Compiler mit den Fortran90-Befehlen kaum optimieren konnte. Statische Allokation von Arrays, sowie die Behandlung der Schleifen in F77-Syntax ergaben gute Performance. Ein besonderes Problem stellte das sogenannte Cache-Trashing auf der Hitachi dar (Hitachi Tuning Manual (2000)). Der Hauptspeicher der Hitachi besteht aus 512 Hauptspeicherbänken, denen aufeinanderfolgende Adressen periodisch zugewiesen werden. Die Performance ist dann gut, wenn der Zugriff auf jede der Speicherbänke gleich erfolgt. Ist beispielsweise die Adressendifferenz zwischen Datenströmen auf die zugegriffen wird, ein Vielfaches von 4096 bytes ( $512 * 8\text{byte}$ ), dann konkurrieren die Datenströme um den Speicherzugriff.

Der Cache der SR8000 besteht aus vier Sätzen zu je 128kB, die so angelegt sind, dass Datenströme mit Adressdifferenzen von 32kB in demselben Satz abgespeichert werden. Sollen mehr als vier Datenströme in einem Satz gespeichert werden, tritt das sogenannte “cache trashing” auf und die Performance sinkt dramatisch. Der Grund dafür ist, dass bevor ein Satz Daten von 128kB Länge im Cache komplett genutzt werden kann, bereits neue Daten im Cache abgelegt werden. Dies tritt beispielsweise dann auf, wenn auf viele Arrays in den Schleifen (ein typischer Fall ist die Berechnung der Dissipation und des Reynoldsschen Spannungstensors) oder wenn in mehrdimensionalen Arrays auf verschiedene Speicherbereiche desselben Arrays zugegriffen wird. Um “cache trashing” zu vermeiden, wurden deshalb die Arrays größer als notwendig mit einer ungeraden Zahl an Gitterpunkten allokiert und die Schleifen in mehrere Schleifen mit möglichst wenigen Arrays aufgespalten. Der Pseudoalgorithmus 2.4 zeigt ein Beispiel einer Implementierung im Code, mit maximal vier Arrays (Datenströmen) auf der rechten Seite. Auf diese Weise konnte die Performance in Routinen von 50Mflops auf bis zu 700MFlops gesteigert werden. Im Schnitt wurden auf der Hitachi etwa 2GFlops pro Knoten erreicht.

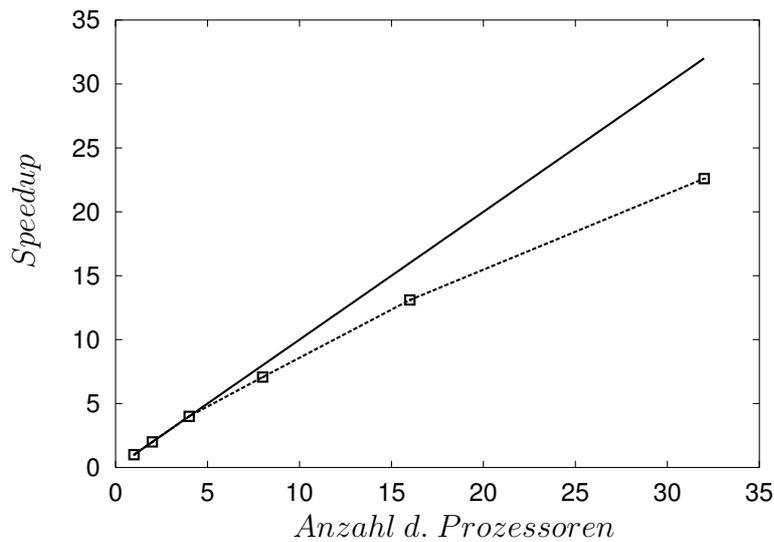
**Algorithmus 2.4:** LOOP( $S, tmp1, tmp2, tmp3, tmp4, \dots, ng$ )

```

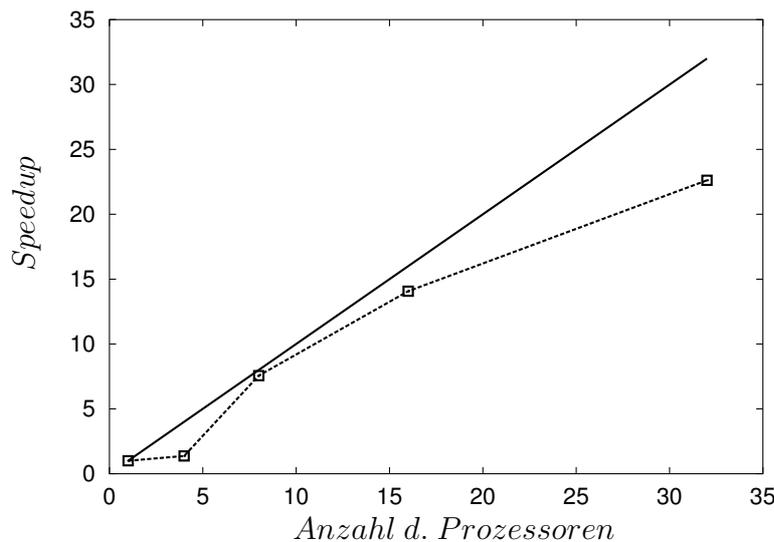
real(kind = rk), dimension(1 : ng + 217) :: S, tmp1, tmp2, tmp3, tmp4
*voption vec
for  $l \leftarrow 1$  to  $ng$ 
     $tmp1(l) = up(l) * Sx(l, 5) + um(l) * Sx_m(l, 5)$ 
endfor
*voption vec
for  $l \leftarrow 1$  to  $ng$ 
     $tmp2(l) = vp(l) * Sy(l, 5) + vm(l) * Sy_m(l, 5)$ 
endfor
*voption vec
for  $l \leftarrow 1$  to  $ng$ 
     $tmp3(l) = wp(l) * Sz(l, 5) + wm(l) * Sz_m(l, 5)$ 
endfor
*voption vec
for  $l \leftarrow 1$  to  $ng$ 
     $tmp4(l) = -(tmp1(l) + tmp2(l) + tmp3(l))$ 
endfor
*soption unroll(8)
*voption vec
for  $l \leftarrow 1$  to  $ng$ 
     $S(l) = tmp4(l) + Visc(l) * R/p(l)$ 
endfor

```

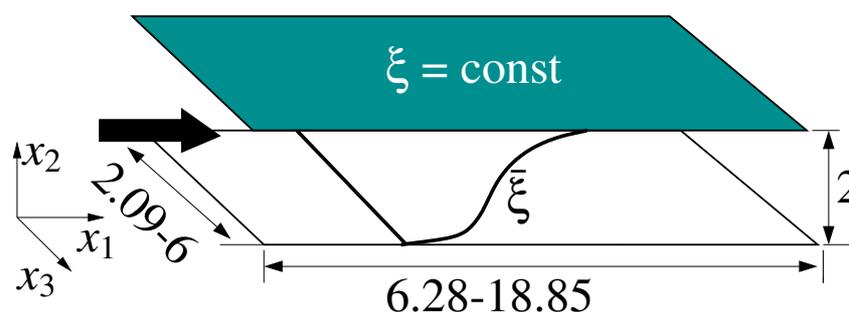
Abbildungen 2.25 und 2.26 zeigen den Geschwindigkeitsgewinn gegenüber einer seriellen Rechnung für bis zu 32 Prozessoren. Da die Größe der zu versendenden Pakete im Algorithmus von T. Eidson (1995) mit der Punktzahl im Quadrat skaliert (Tabelle 2.4), zeigt dieser auch bei kleinen Prozessorenzahlen eine gute Performance. Hier erkennt man deutlich, dass der Transpose-Algorithmus, der die kompletten Daten eines Prozessors verschicken muss, erst ab etwa 8 Prozessoren effizient arbeitet, mit etwa demselben Speedup wie beim Chained-Algorithmus.



**Abbildung 2.25:** Speedup des Chained-Algorithmus. —, Linearer Speedup; □, Code mit 3.700.000 Gitterpunkten



**Abbildung 2.26:** Speedup des Transpose-Algorithmus. —, Linearer Speedup; □, Code mit 3.700.000 Gitterpunkten



**Abbildung 2.27:** Skizze des Rechengebiets der Kanalströmung (Abmessungen sind normiert mit der halben Kanalhöhe)

## 2.6 Rand- und Anfangsbedingungen der Kanalsimulationen

Die um einen beliebigen Referenzzustand linearisierten Navier-Stokesgleichungen stellen ein unvollständig parabolisches System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung dar (siehe bspw. Sutherland & Kennedy (2003)). Die Anzahl der Randbedingungen setzt sich entsprechend aus der Summe der gebietseinwärts gerichteten Charakteristiken des hyperbolischen und der Dimension des parabolischen Untersystems (Raumdimension + 1) zusammen (Stiller (1995)). Da die charakteristischen Variablen im allgemeinen Fall für die Navier-Stokes-Gleichungen nur in Ausnahmen existieren, wird in der Literatur oftmals nur der hyperbolische Teil der Gleichungen lokal verwendet und die viskosen Terme und Wärmeleiterteile für die Randbedingungen entweder nicht in die Betrachtung einbezogen oder artifiziell modifiziert (Poinsot & Lele (1992), Baum *et al.* (1994), Sesterhenn (2001), Sutherland & Kennedy (2003)). Die differentielle Form der charakteristischen Variablen für quasilineare Systeme besitzt jedoch weiterhin ihre Gültigkeit, die zeitliche Änderung der Variablen kann deshalb vorgeschrieben werden (Stiller (1995)).

Für den Fall der in Kapitel 3 betrachteten Kanalströmung, mit periodischen Randbedingungen in  $x_1$ - und  $x_3$ -Richtung (siehe Abbildung 2.27), müssen nur die Randbedingungen an den Wänden spezifiziert werden. Der weitaus schwierigere Fall von freien Rändern, an denen beispielsweise nichtreflektierende charakteristische Randbedingungen gesetzt werden, entfällt. Alle durchgeführten Simulationen besitzen isotherme Randbedingungen und Haftbedingungen für die Geschwindigkeit an den Wänden, das heißt  $\partial u_i / \partial t|_{y=0, L_y} = 0$ . Da die Temperatur nicht Teil des Lösungsvektors ist, wurde mit Hilfe der thermodynamischen Potentiale eine Beziehung zwischen dem Druck und der Entropie abgeleitet, denn es gilt unter Benutzung der Enthalpie eines idealen Gases und

$$\partial T / \partial t = 0$$

$$\begin{aligned} dh &= c_p dT = T ds + \frac{1}{\rho} dp \\ \implies \frac{\partial T}{\partial t} &= 0 = \frac{T}{C_p} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \implies \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{p}{R} \frac{\partial s}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aus den Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) ergibt sich für die zeitliche Ableitung des Drucks, nach Kombination der ersten und fünften Gleichung

$$\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_{x_2=0} = -\frac{\rho c}{2} (\chi_2^+ + \chi_2^-) \Big|_{x_2=0} + \frac{R}{C_v} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \Phi \right) \Big|_{x_2=0} \quad (2.25)$$

$$= -\frac{\rho c}{2} (\chi_2^+ + \chi_2^-) \Big|_{x_2=0} + \frac{p}{C_v} \frac{\partial s}{\partial t} \Big|_{x_2=0} \quad (2.26)$$

$$\stackrel{(2.24)}{\implies} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\rho c}{2\gamma} (\chi_2^+ + \chi_2^-) \quad (2.27)$$

$$\stackrel{(2.24)}{\implies} \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{R}{2\gamma c} (\chi_2^+ + \chi_2^-). \quad (2.28)$$

In den Simulationen von Lechner (2001) wurde ein leichter Anstieg der Wandtemperatur in der Zeit festgestellt, da die Zeitableitungen von Druck und Entropie aus Größen während der Simulation bestimmt werden. Damit sind Druck und Entropie, folglich auch die Temperatur, nur bis auf eine Konstante bestimmt und numerische Fehler bewirken ein Driften dieser Größen und machen eine Korrektur der Wandtemperatur erforderlich (Poinot & Lele (1992)). In jedem Zeitschritt wird deshalb zusätzlich die Entropie an der Wand über die Beziehung

$$S_w = C_v \exp \left( \frac{(RT_w)^\gamma}{p^{\gamma-1}} \right)$$

fixiert.

In turbulenter kompressibler Kanalströmung muss der mittlere Druckgradient in Strömungsrichtung durch eine Volumenkraft  $f_1$  ersetzt werden, die die Strömung treibt und gleichzeitig die Verwendung periodischer Randbedingungen ermöglicht. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Druck über die ideale Gasgleichung gegeben ist. Druckgradienten bedingen Dichte- und Temperaturgradienten und würden die axiale Homogenitätsbedingung verletzen. Man erhält  $f_1$  durch Integration der gemittelten Impulsgleichung in Strömungsrichtung von der unteren Wand zur Kanalmitte. Die gemittelte Impulsbilanz lautet für vollentwickelte Turbulenz

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \bar{\tau}_{12} - \overline{\rho u_1'' u_2''} \right) + f_1, \quad (2.29)$$

und liefert nach Integration von 0 bis  $H$  (Symmetrie liefert  $\tau_{12}(H) = 0$ )

$$0 = -\tau_w + f_1 \cdot H \quad \implies f_1 = \frac{\tau_w}{H} \quad (2.30)$$

Es liegt damit ein Gleichgewicht zwischen der auf die Wände wirkenden Wandschubspannung und der auf das gesamte Strömungsfeld wirkenden Volumenkraft vor. Durch Variation der Volumenkraft kann wie in inkompressiblen Kanalströmungen die Reynoldszahl  $Re_\tau$  eingestellt werden. Die Berechnung der Volumenkraft in dieser Arbeit weicht von der Berechnung in den Arbeiten von Coleman *et al.* (1995) und Lechner (2001) ab. Beide steuerten die Strömung über den Massenstrom im Kanal, indem sie den eigentlich verschwindenden Term  $\frac{\partial \widetilde{\rho u}}{\partial t}$  dazu benutzten, über die Volumenkraft den Massenfluß im Kanal konstant zu halten. Mit  $\frac{\partial \widetilde{\rho u}}{\partial t} \approx (\widetilde{\rho u}^{n+1} - \widetilde{\rho u}^n)/\Delta t$  ergibt sich dadurch

$$f_1 = \left( \frac{\int_0^H \widetilde{\rho u}^{n+1} dx_2 - \int_0^H \widetilde{\rho u}^n dx_2}{\Delta t} + \frac{\bar{\tau}_w}{H} \right).$$

Lechner (2001) führte zusätzlich Simulationen mit einer in wandnormaler Richtung homogenen Volumenkraft durch (er ersetzte  $-\partial p/\partial x$  durch  $f$ ) während Coleman's Volumenkraft nicht homogen in wandnormaler Richtung war ( $-\partial p/\partial x = \frac{\bar{p}}{\rho_m} \frac{\tau_w}{H}$ ). Die Ergebnisse unterschieden sich nur unwesentlich (Lechner (2001)), deshalb wurde in dieser Arbeit die homogene Form der Volumenkraft verwendet. Die Simulationen wurden nach dem Einlaufen der Strömung für weitere 10 bis 20 charakteristische Zeitmasse  $t_c = H/u_\tau$ , abhängig von der Gebietslänge statistisch ausgewertet ( $u_\tau$  ist von derselben Größenordnung wie die Geschwindigkeitsfluktuationen,  $H/u_\tau$  entspricht deshalb in etwa der Zeit, die das Fluid benötigt, um eine Strecke der halben Kanalhöhe zurückzulegen). Um eine höhere Reynoldszahl zu erreichen, wurde zuerst der Massenstrom variiert und die resultierende Wandschubspannung anschliessend als Volumenkraft verwendet. Tabellen 2.2 und 2.3 zeigen eine Übersicht über die Simulationen und die verwendeten Parameter. Zusätzlich werden zum Vergleich die DNS-Daten der inkompressiblen Kanalströmungen von Moser *et al.* (1999) herangezogen, abgekürzt mit I1 ( $Re_\tau = 180$ ), I2 ( $Re_\tau = 390$ ) und I3 ( $Re_\tau = 590$ ). Basierend auf Fall M0.3 wurden von J. Kreuzinger kompressible Kanalsimulationen mit Skalartransport bei Reynoldszahlen von  $Re_\tau = 590$  gerechnet. Diese Daten werden im Verlaufe dieser Arbeit mit der Abkürzung M0.4 aufgeführt.

Abbildungen 2.28a und 2.28b zeigen einen typischen Zeitschrieb der Reynoldszahl  $Re_\tau$  und der turbulenten kinetischen Energie im Abstand  $x_2^+ = 12$  und in der Kanalmitte, hier für Fall M1.5. Man erkennt, dass diese Simulation ab etwa  $t_c = 23$  eingelaufen ist und zur Statistikbildung herangezogen werden kann.

Case	M	Re <sub>τ</sub>	Re	$\frac{L_{x1}}{h}$	$\frac{L_{x2}}{h}$	$\frac{L_{x3}}{h}$	N <sub>x1</sub>	N <sub>x2</sub>	N <sub>x3</sub>
M0.3	0.3	181	2820	9.6 H	6 H	2 H	192	160	129
M1.5	1.5	221	3000	4π H	4π/3 H	2 H	192	128	151
M2.5	2.5	455	5000	2π H	2π/3 H	2 H	256	128	201
M3.0a	3.0	560	6000	2π H	2π/3 H	2 H	256	128	221
M3.0b	3.0	560	6000	4π H	4π/3 H	2 H	512	256	221
M3.5	3.5	1030	11310	6π H	2π H	2 H	512	256	301

Tabelle 2.2: Simulationsparameter (1/2)

Case	$\Delta x_1^+$	$\Delta x_{2\min}^+$	$\Delta x_{2\max}^+$	$\Delta x_3^+$	$\tau_w$	$\rho_w$	$\mu_w$	$T_w$
M0.3	9.12	1.02	4.21	6.84	7.56	1.210	0.0502	293
M1.5	14.46	0.84	5.02	7.23	30.99	0.023	1.91e-5	500
M2.5t	11.16	0.91	7.46	7.44	79.71	0.035	1.91e-5	500
M3.0	13.65	0.89	9.38	8.91	106.99	0.042	1.91e-5	500
M3.0t	13.37	0.97	8.91	8.82	110.16	0.041	1.91e-5	500
M3.5	37.89	1.27	13.35	16.85	192.34	0.080	1.91e-5	500

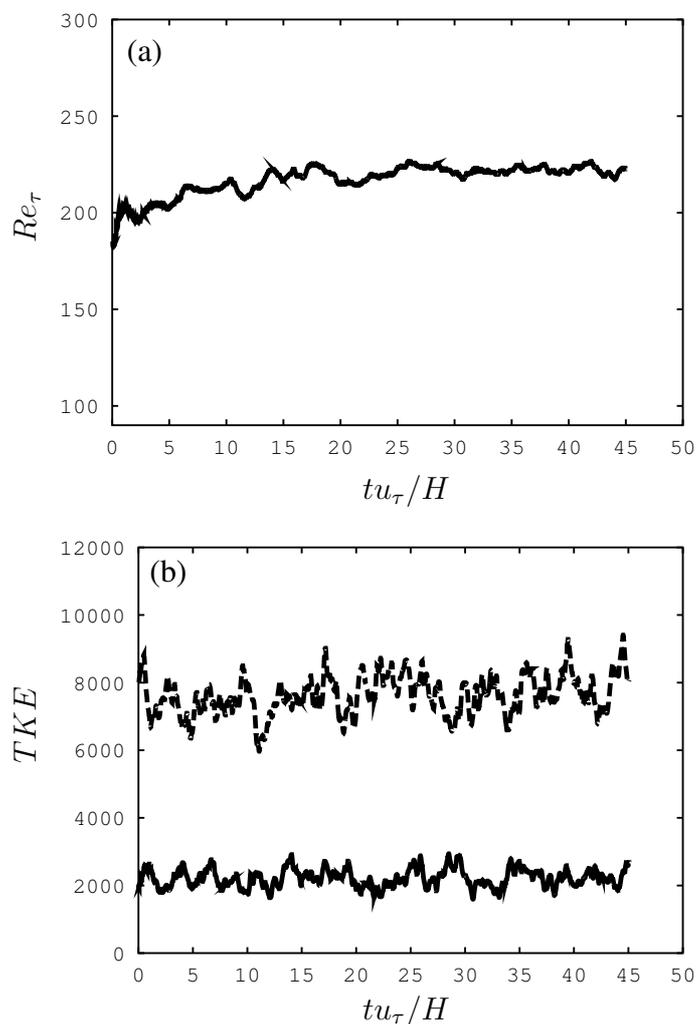
Tabelle 2.3: Simulationsparameter (2/2)

### 2.6.1 Skalartransport

Als Randbedingung für den Transport des passiven Skalars im Kanal wurde eine konstante Konzentration unterschiedlichen Vorzeichens an den Wänden vorgeschrieben, was einer Zugabe des Stoffes an der einen und einer Entfernung an der anderen Wand entspricht. Um Sprünge in der Anfangskonzentration zu vermeiden, ist eine kontinuierliche Verteilung vorgegeben worden, wie sie auch von Johansson & Wikström (1999) verwendet wurde.

$$\theta(x_1, x_2, x_3, 0) = \log_{10} \left\{ \frac{z_0 + x_2}{z_0 - x_2} \right\} / \log_{10} \left\{ \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right\}, \quad z_0 = 1.007. \quad (2.31)$$

Die Werte der Konzentration an den Wänden sind damit  $\theta(x_1, \pm 1, x_3, t) = \mp 1$ . Als Kriterium für die vollständige Entwicklung des passiven Skalars wird die Bedingung herangezogen, dass die Summe der normierten Skalarflüsse in einer vollentwickelten turbulenten Kanalströmung gleich 1 ergibt (siehe Gleichung (3.6)). Abbildung 2.29 zeigt, dass dieses Kriterium für die Fälle M0.3 bis M3.5 mit einem maximalen Fehler von etwa 1% sehr gut erfüllt ist. Abbildung 2.30 verdeutlicht die Zu- und Abgabe des Skalars (Farbverlauf von Gelb ( $\theta = 1$ ) bis Dunkelblau ( $\theta = -1$ )). Deutlich erkennt man die sogenannten "plateaux", d.h. Regionen in denen effektive Mischung stattgefunden hat und damit die Konzentration nahezu gleich ist und die Skalarfluktuationen schwach sind. Diese sind durch Fronten (auch "cliffs" oder "sheets" genannt), die sehr grosse Skalargradienten aufweisen, von anderen "plateaux" getrennt. Diese "ramp-and-cliff" Strukturen



**Abbildung 2.28:** Zeitlicher Verlauf der (a) Reynoldszahl  $Re_\tau$  und (b) turbulenten kinetischen Energie, von Beginn der Simulation an

sind typisch für Strömungen mit passivem Skalartransport (siehe beispielsweise Celani *et al.* (2003)).

## 2.7 Verifikation der Gebietsgröße und Auflösung im Kanal

Zur Verifikation der Gebietsgrößen und Auflösungen, die in den verschiedenen Fällen benutzt wurden, sind die eindimensionalen Leistungsdichtespektren der Strömungsgrößen, sowie deren Zweipunktkorrelationen, in verschiedenen wandnormalen Ebenen ausgewertet worden. Als erster Anhaltspunkt für die Gebietsgrößen dienten die Simulationen von Coleman *et al.* (1995), Kim *et al.* (1987) und Moser *et al.* (1999). Die Zweipunktkorrelationen und das Leistungsdichtespektrum sind Fouriertransformpaare, wie man folgendermassen leicht sehen kann: Sei  $q_{klm}^\alpha(z) = q^\alpha(x_0 + l\Delta x + k\delta x, y_0 + m\Delta y, z)$  eine beliebige

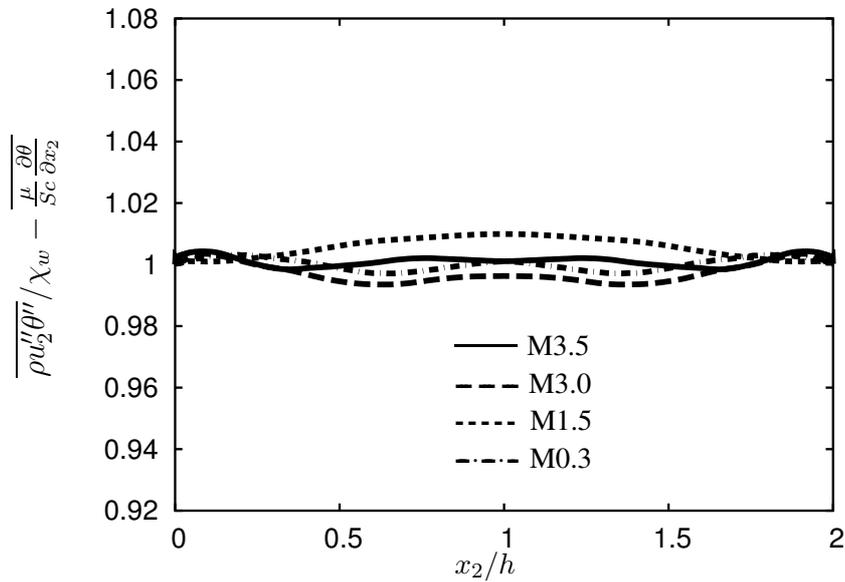


Abbildung 2.29:  $\overline{\rho u_2'' \theta''} / \chi_w - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \stackrel{!}{=} 1$  als Kriterium für die vollständige Entwicklung des passiven Skalars.

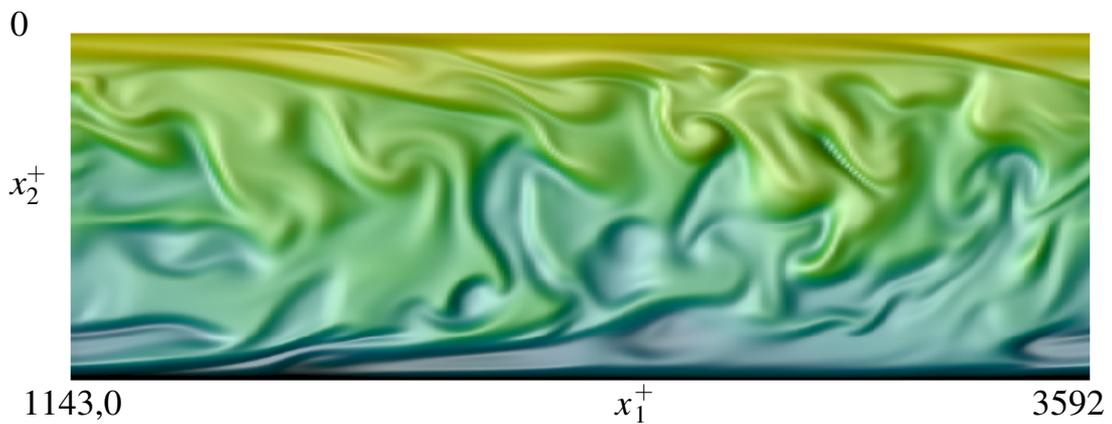


Abbildung 2.30: Falschfarbenbild des passiven Skalars in einer wandnormalen Ebene für den Fall M3.0.

Funktion, definiert an den Gitterpunkten mit Indizes  $l, m$  in wandparallelen Ebenen,

dann gilt für die Zweipunktkorrelation

$$\begin{aligned}
R_k^{\alpha\alpha}(z) &= \overline{q_{klm}^{\alpha}(z)q_{0lm}^{\alpha}(z)} \\
&= \frac{1}{N_x N_y} \sum_{l,m} \sum_{r=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{s=-N_y/2}^{N_y/2-1} \hat{q}_{rs}^{\alpha}(z) e^{i2\pi\left(\frac{rl}{N_x} + \frac{ms}{N_y}\right)} \\
&\quad \cdot \sum_{r'=-N_x/2}^{N_x/2-1} \sum_{s'=-N_y/2}^{N_y/2-1} \hat{q}_{r's'}^{\alpha}(z) e^{i2\pi\left(\frac{lr'}{N_x} + \frac{ms'}{N_y}\right)} e^{i2\pi\left(\frac{rk\delta x}{L_x}\right)} \\
&= \sum_{r=-N_x/2}^{N_x/2-1} \underbrace{\left( \sum_{s=-N_y/2}^{N_y/2-1} \hat{q}_{rs}^{\alpha}(z) (\hat{q}_{rs}^{\alpha}(z))^* \right)}_{=: E_r^{\alpha\alpha}(z)} e^{i2\pi\left(\frac{rk\delta x}{L_x}\right)}, \tag{2.32}
\end{aligned}$$

mit dem eindimensionalen Leistungsdichtespektrum  $E_r^{\alpha\alpha}(z)$ . Die letzte Relation folgt mit Hilfe der Orthogonalitätsbeziehung der Fouriertransformation

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{i2\pi\frac{l(r+r')}{N_x}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } r \neq r' \\ N_x & \text{falls } r = r' \end{cases}.$$

Damit erhält man die Zweipunktkorrelation durch Fouriertransformation des Leistungsdichtespektrums.

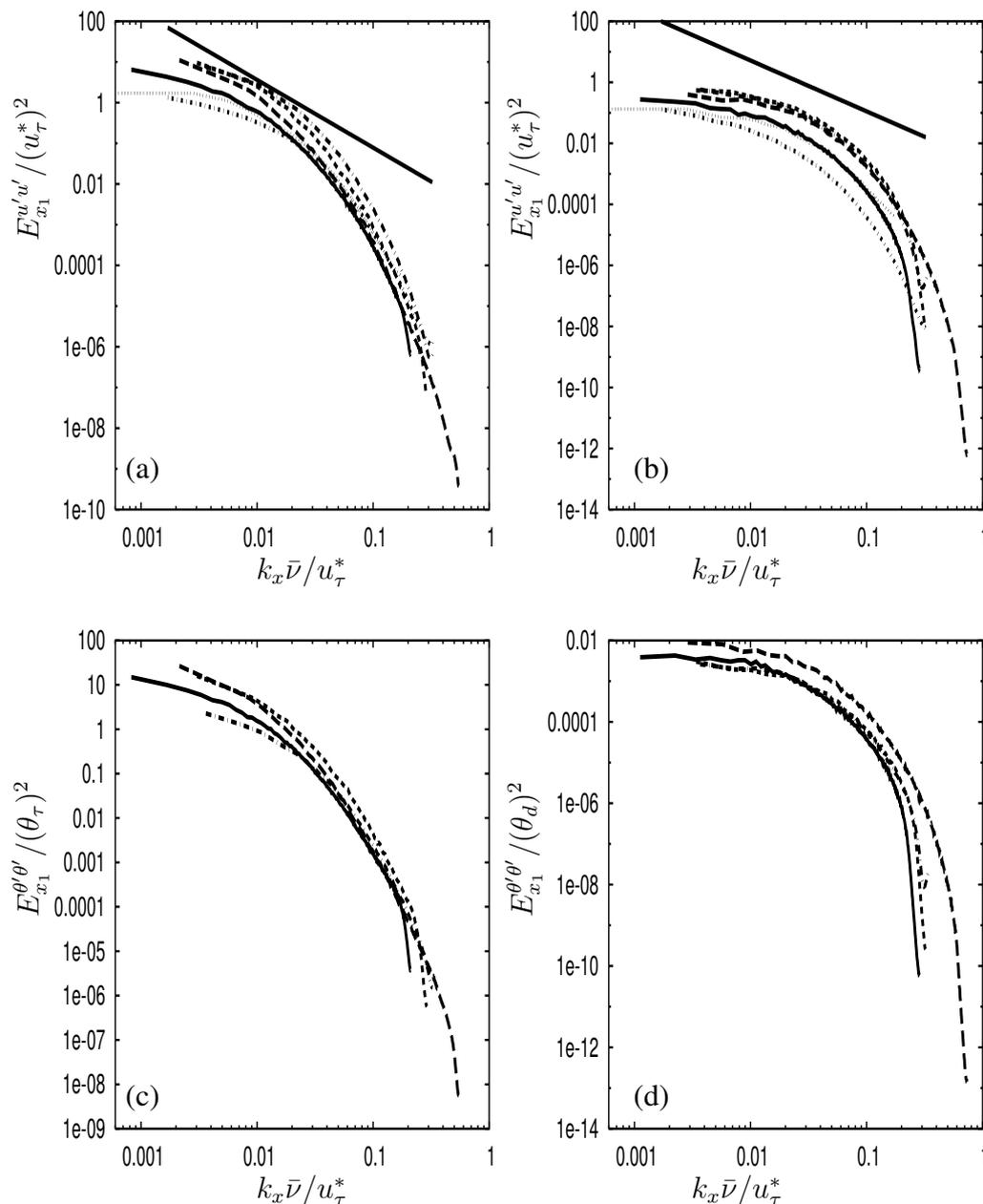
### 2.7.1 Leistungsdichtespektren

Als Kriterium für eine ausreichende Auflösung der Simulationen wird ein Abfall der Leistungsdichtespektren für hohe Wellenzahlen von mindestens drei Größenordnungen gefordert. Anhand der Spektren der Skalarfluktuationen, der Geschwindigkeitsfluktuationen in  $x_1$ -Richtung und  $x_2$ -Richtung, soll dies überprüft werden, wobei letztere in den Simulationen von Kim *et al.* (1987), Coleman *et al.* (1995) und Lechner (2001) den geringsten Abfall zeigten. Aus den Abbildungen 2.31(a-d), 2.32(a-d) und 2.33(a-d) wird ersichtlich, dass die hier mit  $u_{\tau}^*$ ,  $\bar{v}$  normierten Geschwindigkeitsfluktuationen und die mit  $\theta_{\tau}$ ,  $\theta_w$  normierten Skalarfluktuationen, stark abfallen (zur Definition von  $u_{\tau}^*$  und  $\theta_{\tau}$  siehe Gleichung (3.8) und (3.1)). Ausserdem ist kein "spectral blocking" (Aliasing) bei hohen Wellenzahlen zu erkennen, wie es beispielsweise bei Lechner (2001) zu sehen ist. Im Vergleich der Spektren der Geschwindigkeitsfluktuationen mit den Daten von Moser *et al.* (1999) erkennt man, dass die Simulationen in dieser Arbeit genau so gut, in den meisten Fällen jedoch besser aufgelöst sind. Ausserdem ist festzustellen, dass die Reynoldszahlen zu niedrig sind, um eine Skalierung mit  $k^{-(5/3)}$  aufzuweisen.

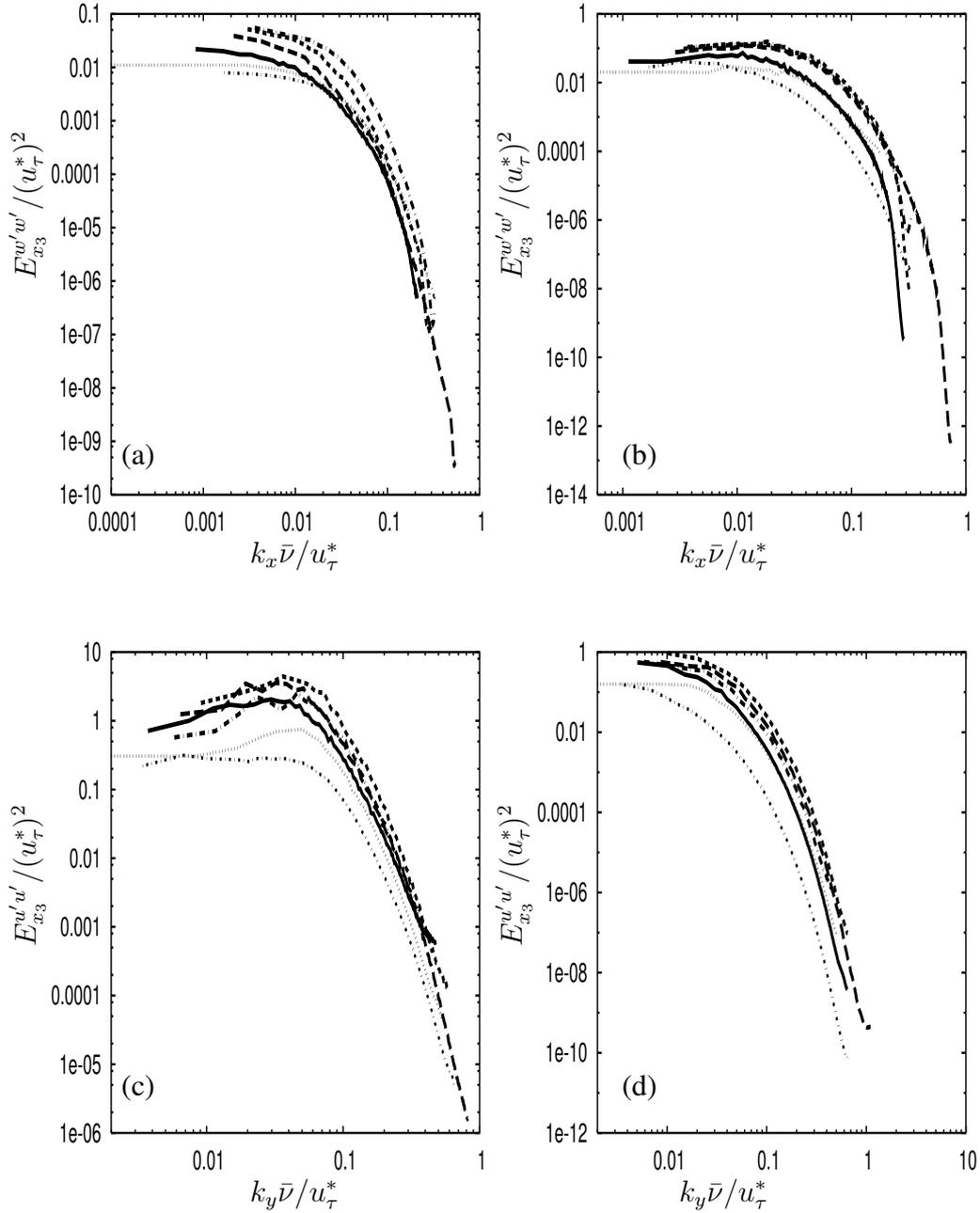
### 2.7.2 Zweipunktkorrelationen

Ein allgemein akzeptiertes Kriterium für die notwendige Größe der numerischen Box ist das Abfallen der Zweipunktkorrelationen innerhalb der Hälfte der betrachteten Richtung auf Null (hier die zwei homogenen Richtungen). Obwohl die Simulationen von Moser *et al.* (1999) dieses Kriterium erfüllen, zeigten Jimenez (1998) und del Alamo & Jimenez (2001), dass trotzdem noch viel Energie (bis 30% der Gesamtenergie) in Strukturen steckt, die nicht in das Rechengebiet passen. Jimenez nannte diese Strukturen VLAS (very large anisotropic structures), und zeigte, dass diese im Mittenbereich des Kanals existieren (die längsten bei  $x_2 = 0.5H$ ), dass deren Größe mit  $H$  skaliert (etwa  $5H$ ) und, dass sie eine Weite der Größenordnung  $2H$  erreichen können. del Alamo & Jimenez (2001) rechneten deshalb die Kanalsimulationen von Moser *et al.* (1999) in Boxen der Größe bis zu  $12\pi \times 4\pi$ , mit bis zu  $1536 \times 257 \times 1536$  Punkten, um festzustellen, dass die VLAS immer noch nicht vollständig in dem Rechengebiet lagen. Eine Simulation kompressibler supersonischer Kanalströmung dieser Größe ist jedoch aufgrund der immensen Anforderungen an Computerressourcen und aufgrund des sehr kleinen Zeitschritts ( $\propto \Delta x_i / (u_i + \sqrt{\gamma RT})$ ), der in kompressiblen Strömungen zusätzlich durch die starke Variation der Temperatur verkleinert wird, nicht denkbar. Aus diesem Grund wird der Abfall der Zweipunktkorrelationen als Kriterium für die Gebietsgröße verwendet. Ausserdem zeigen die Abbildungen 2.34(a-b) anhand der RMS-Werte der Geschwindigkeitsfluktuationen und der Dissipation der turbulenten kinetischen Energie, im direkten Vergleich der Simulation von del Alamo & Jimenez (2001) mit Fall M0.3, dass für die in dieser Arbeit betrachteten Größen nur ein äusserst geringer Unterschied auszumachen ist. In den Abbildungen 2.35(a-d) bis 2.38(a-d) sind die Zweipunktkorrelationen verschiedener Strömungsgrößen in wandparallelen Ebenen bei  $z^* = 5$  und in der Kanalmitte zu sehen. Mit Ausnahme des Drucks, fallen die Korrelationen innerhalb von  $L_{x_i}/2$  auf Null ab. In Coleman *et al.* (1995) wurde gezeigt, dass akustische Effekte, für die hohe Korrelationen von Druck und Dichte in der Kanalmitte typisch sind, die Simulationsergebnisse nicht beeinflussen. Zu Testzwecken wurden zuerst turbulente Kanalströmungen (Fall M2.5t und M3.0t) mit einer Gebietsgröße von  $2\pi H$  in  $x_1$ -Richtung und  $2\pi H/3$  in  $x_3$ -Richtung, Fall M3.0t ansonsten aber mit denselben Parametern wie Simulation M3.0 gerechnet. Mit dieser Gebietsgröße hatten bereits Moser *et al.* (1999) bei einer Reynoldszahl von  $Re_\tau = 590$ , für inkompressible Kanalströmungen gearbeitet. Die Zweipunktkorrelationen dieser Simulationen fielen jedoch in Wandnähe nicht auf Null ab. Im Vergleich der Resultate zwischen den Fällen M3.0 und M3.0t, wurde festgestellt, dass besonders die Extrema der Reynoldsspannungen  $\bar{\rho}R_{11}$  in Wandnähe, sowie die Favre-Fluktuationen der Geschwindigkeiten in Simulation M3.0t zu hoch waren. Die Druck-Scherkorrelationen und Mittelwerte der Strömungsgrößen zeigten jedoch nur minimale Unterschiede. Aus diesem Grund werden in Kapitel 3 dieser Arbeit ausschließlich Ergebnisse der Simulationen M0.3, M1.5, M3.0 und M3.5 gezeigt. Die Simulationen von Coleman *et al.* (1995) zeigen eine größere Kohärenz der Strukturen in Wandnähe

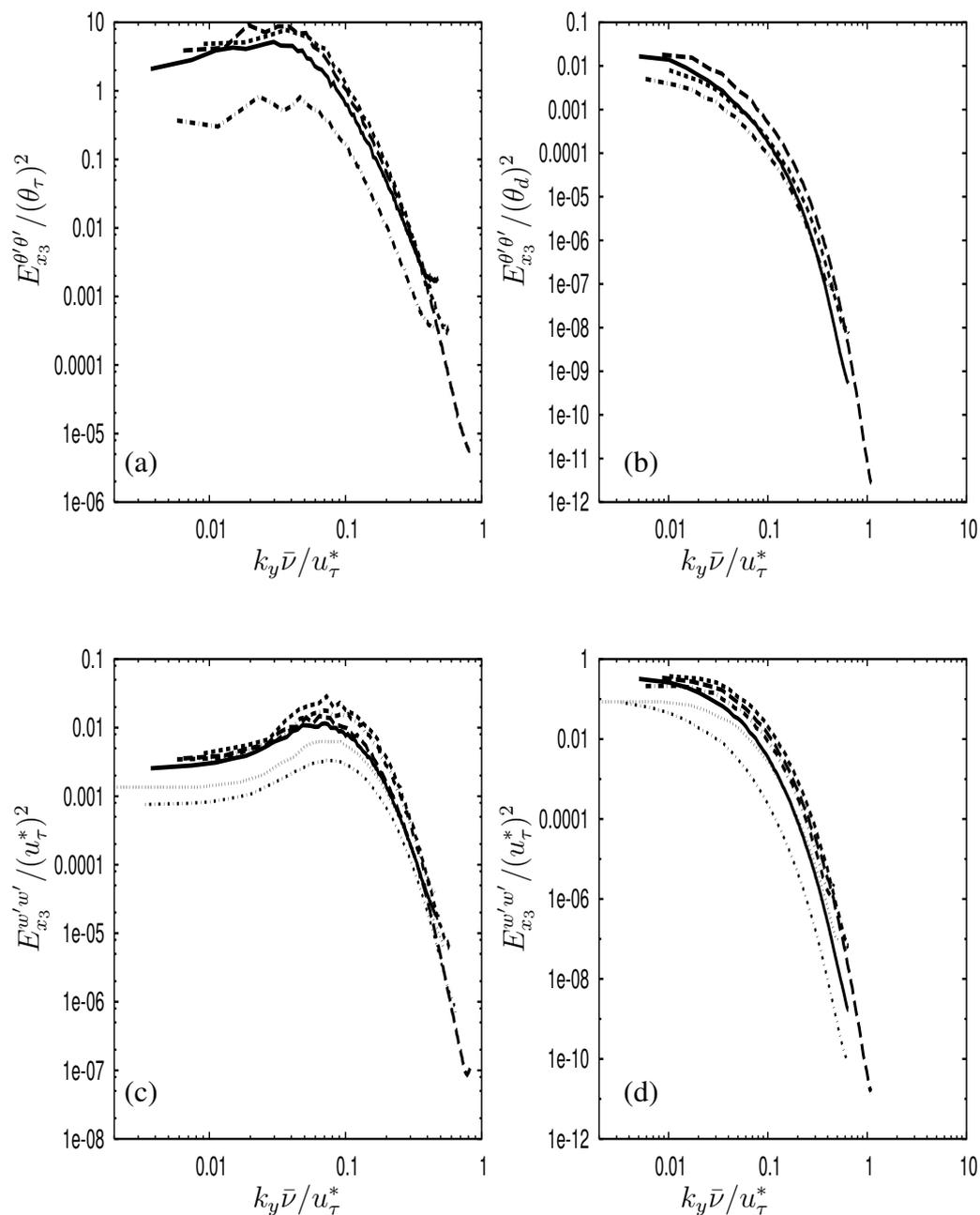
bei höheren Machzahlen, wodurch ein längeres Rechengebiet für diese Fälle notwendig wäre. Auf diesen Aspekt wird genauer in Abschnitt 3.4.2 eingegangen.



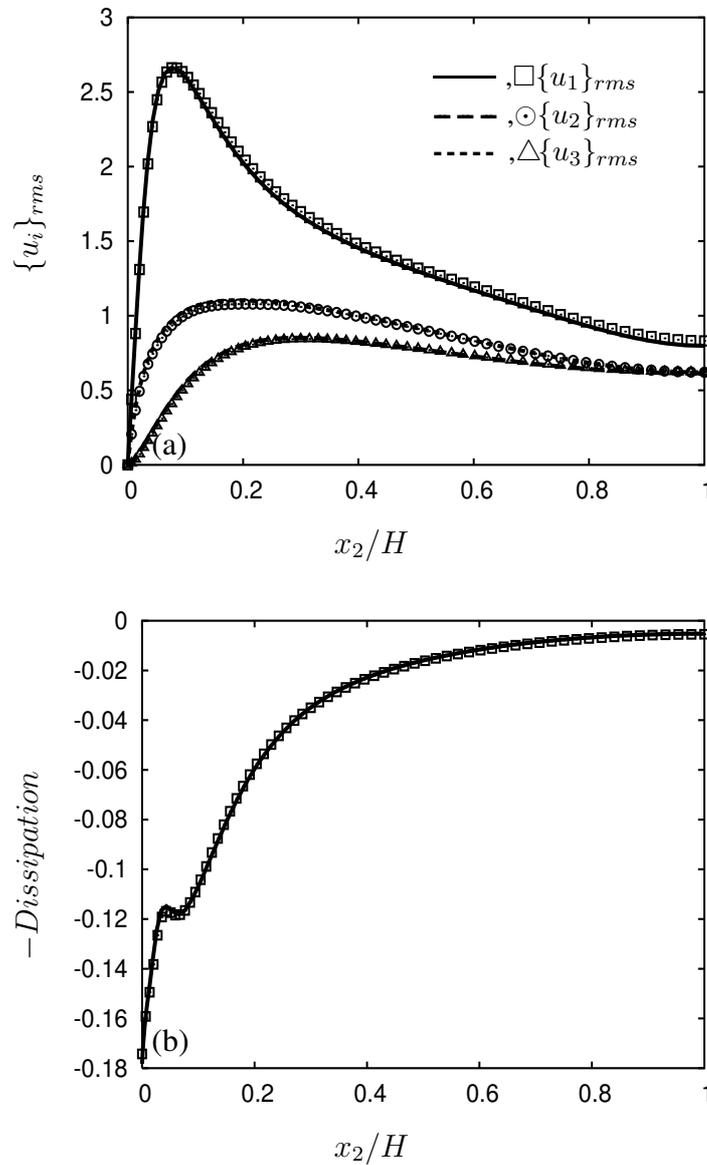
**Abbildung 2.31:** Eindimensionale Leistungsdichtespektren bei  $z^* = 10$  (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; ---, M3.0; - - - -, M1.5; - · - · - ·, M0.3. Zum Vergleich: ·····,  $Re_\tau = 180$ ; ······,  $Re_\tau = 595$  Moser *et al.* (1999). Die Gerade ist proportional zu  $k_x^{-5/3}$ .



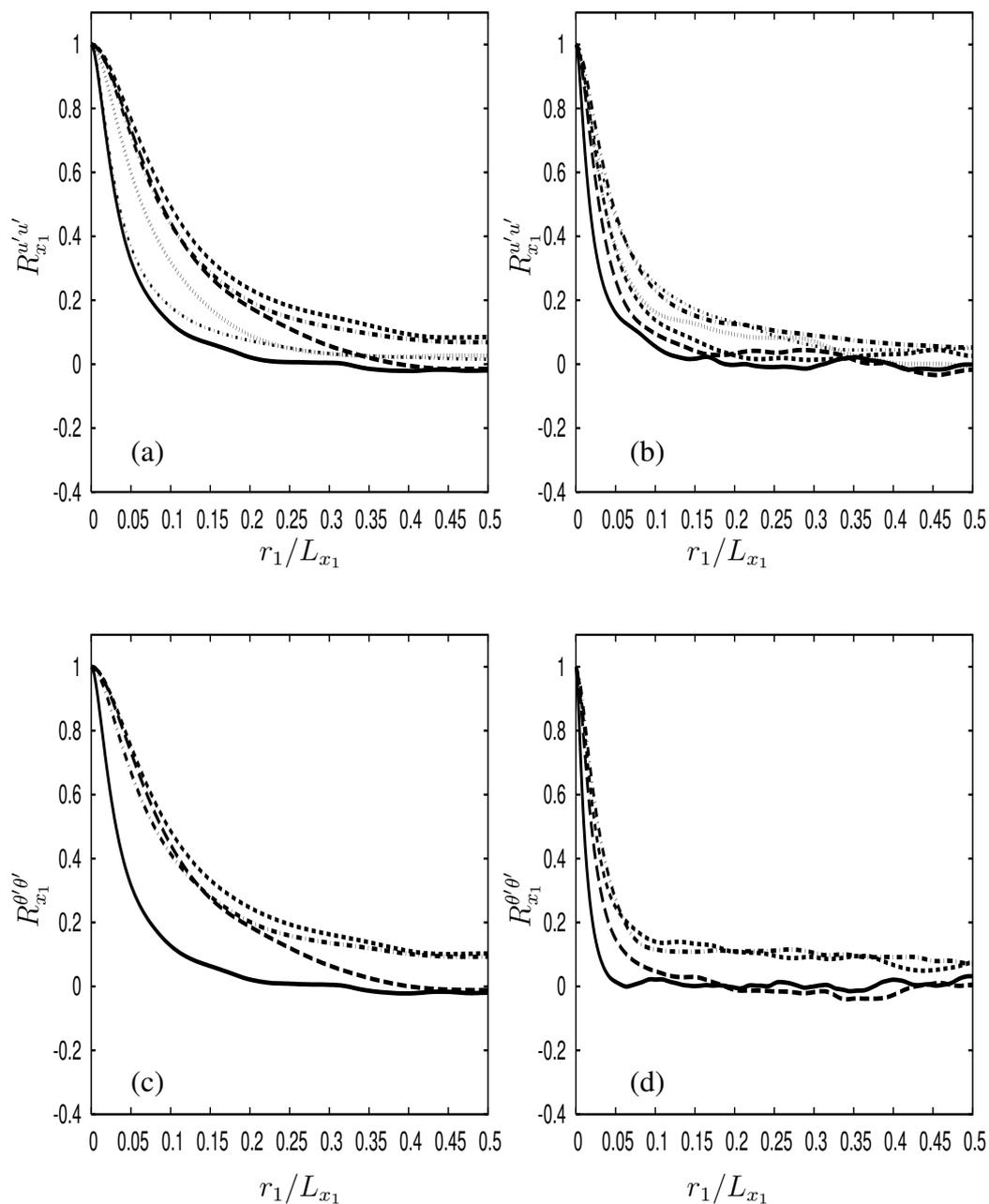
**Abbildung 2.32:** Eindimensionale Leistungsdichtespektren bei  $z^* = 10$  (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; ---, M3.0; ·····, M1.5; -·-·-, M0.3. Zum Vergleich: ·····,  $Re_\tau = 180$ ; -·-·-,  $Re_\tau = 595$  Moser *et al.* (1999).



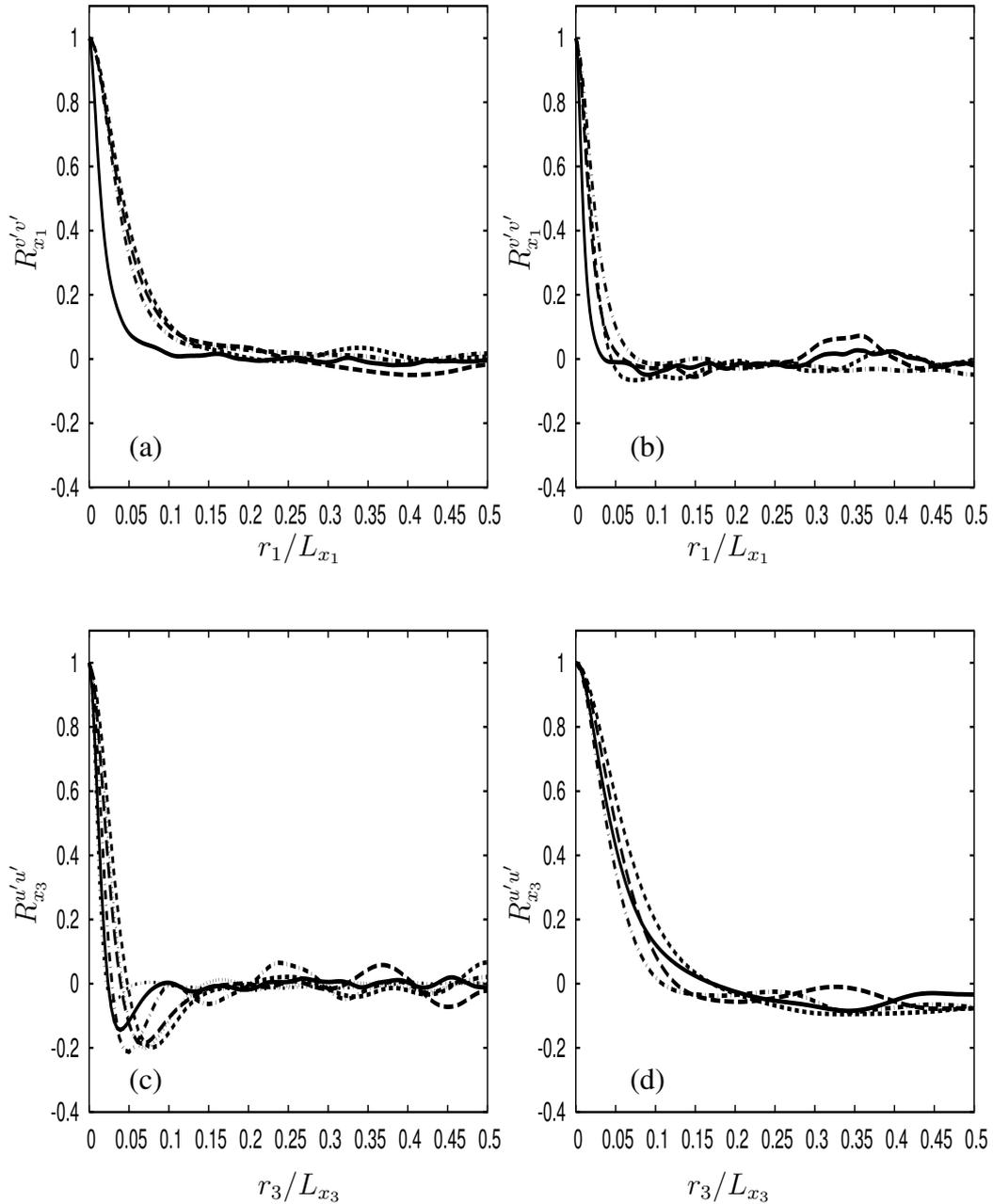
**Abbildung 2.33:** Eindimensionale Leistungsdichtespektren bei  $z^* = 10$  (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; ---, M3.0; ·····, M1.5; -·-·-, M0.3. Zum Vergleich: ·····,  $Re_\tau = 180$ ; -·-·-,  $Re_\tau = 595$  Moser *et al.* (1999).



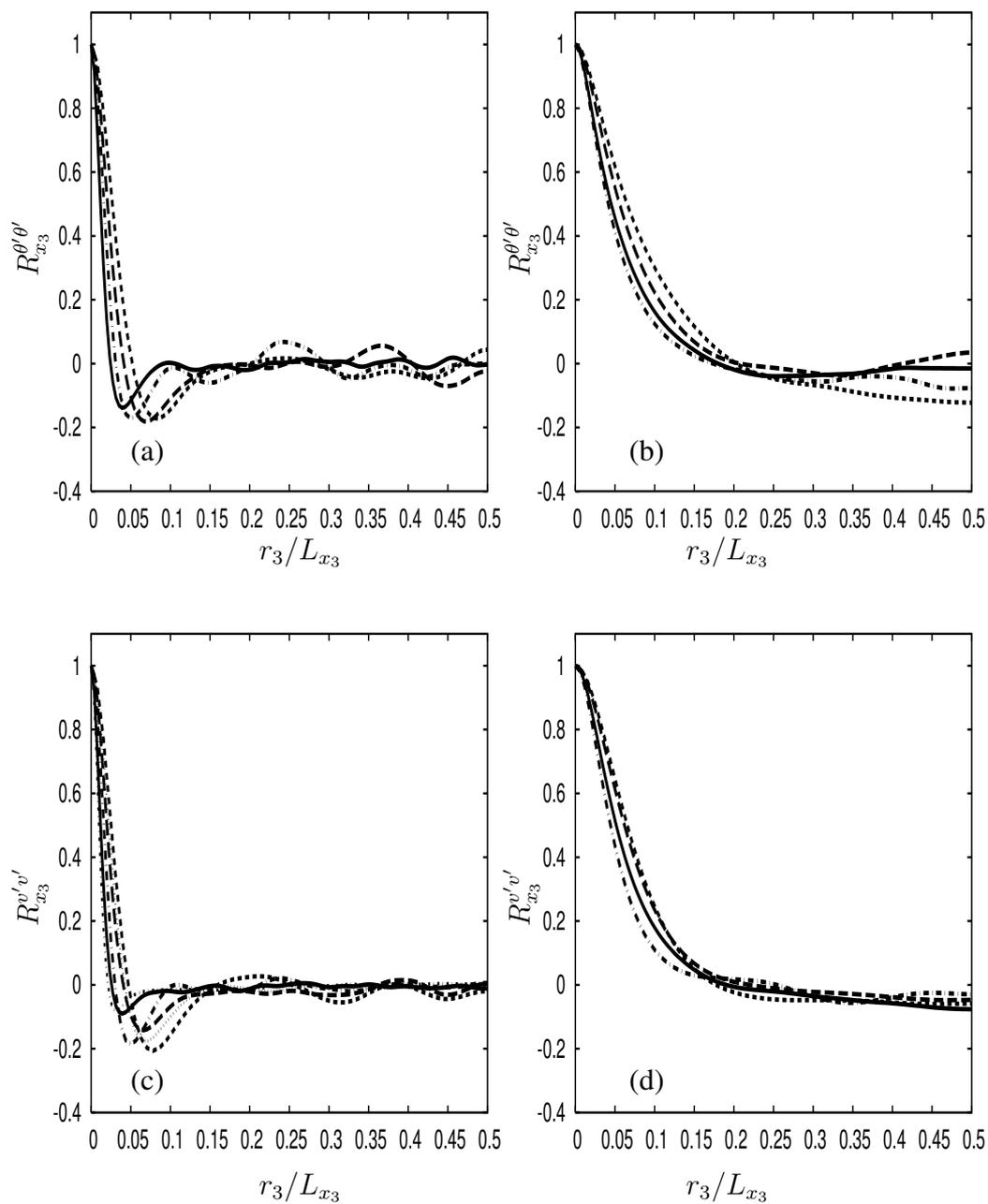
**Abbildung 2.34:** Vergleich der Kanalsimulation M0.3 (Symbole) mit der Simulation von del Alamo & Jimenez (2001) (Linien). (a) RMS-Werte der Geschwindigkeiten (b) Dissipation der turbulenten kinetischen Energie.



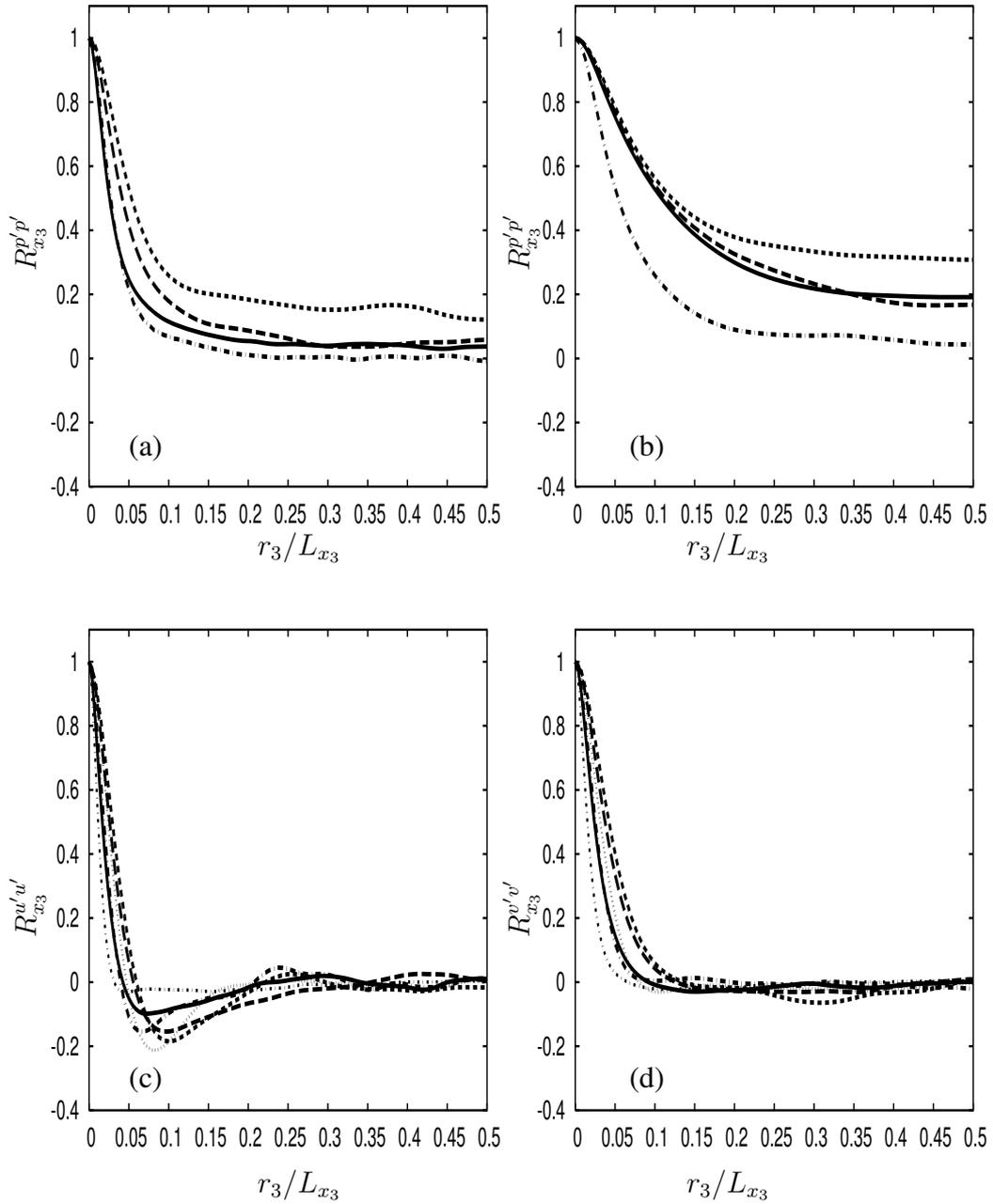
**Abbildung 2.35:** Zweipunktkorrelationen bei  $z^* = 5$  (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit  $L_{x_1}$ . —, M3.5; ---, M3.0; - - - -, M1.5; - · - · -, M0.3. Zum Vergleich: ·····,  $Re_\tau = 180$ ; ······,  $Re_\tau = 595$  Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 2.36:** Zweipunktkorrelationen bei  $z^* = 5$  (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit  $L_{x_{1,3}}$ . —, M3.5; ---, M3.0; - - - -, M1.5; - · - · - ·, M0.3. Zum Vergleich: ·····,  $Re_\tau = 180$ ; ······,  $Re_\tau = 595$  Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 2.37:** Zweipunktkorrelationen bei  $z^* = 5$  (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit  $L_{x_3}$ . —, M3.5; ---, M3.0; ·····, M1.5; -·-·-, M0.3. Zum Vergleich: ·····,  $Re_\tau = 180$ ; -·-·-,  $Re_\tau = 595$  Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 2.38:** Zweipunktkorrelationen bei  $z^* = 5$  (a,c) und in der Kanalmitte (b,d), normiert mit  $L_{x_3}$ . —, M3.5; ---, M3.0; - · - · - ·, M1.5; · · · · ·, M0.3. Zum Vergleich: ·····,  $Re_\tau = 180$ ; ······,  $Re_\tau = 595$  Moser *et al.* (1999).

## 2.8 Transport statistisch gemittelter Felder

### 2.8.1 Mittelungsverfahren

Die Berechnung der statistischen Grössen erfolgt durch Mittelung über die homogenen Richtungen der vollentwickelten Kanalströmung, sobald ein statistisch stationärer Zustand erreicht ist. Der räumliche Mittelwert (Reynoldsmittelwert) einer beliebigen Grösse  $f$  ist damit definiert als

$$\bar{f}(x_2, t) = \frac{1}{L_{x_1} L_{x_3}} \int_{L_{x_1}} \int_{L_{x_3}} f(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_3.$$

Nach der Ergodenhypothese erhält man einen mit dem Ensemble-Mittelwert übereinstimmenden Wert durch Zeitmittelung. Für die vollentwickelte Kanalströmung wird deshalb zusätzlich eine Zeitmittelung vorgenommen. Ausserdem wird die Symmetrie des Kanals in wandnormaler Richtung ausgenutzt, indem über beide Hälften nochmals gemittelt wird.

In kompressiblen Strömungen ist es üblich, massgewichtete Mittelwerte zu bestimmen, die sogenannten Favre-Mittelwerte. Sie sind definiert als  $f = \tilde{f} + f'' = \overline{\rho f} / \bar{\rho} + f''$ , mit den Favre Fluktuationen  $f''$ . In dieser Arbeit werden alle Grössen, die in Verbindung mit der Dichte vorkommen, nach Favre aufgespalten. Man erhält damit eine kompaktere Darstellung der Transportgleichungen. Im allgemeinen gilt  $\bar{f}'' \neq 0$  und zwischen den Favreschen und Reynoldsschen Fluktuationen besteht der Zusammenhang

$$\overline{f''} = -\overline{\rho f'} / \bar{\rho} \quad \overline{\rho f''} = 0,$$

$\overline{f''}$  symbolisiert damit einen turbulenten Massenfluss.

### 2.8.2 Gemittelte Transportgleichungen

Um die gemittelten Transportgleichungen für vollentwickelte Kanalströmungen mit Skalartransport formulieren zu können, werden die Variablen  $u, v, w, \theta, T$  in Favre-Mittelwerte und Schwankungen, sowie die Grössen  $\rho, p$  in Reynoldssche Mittelwerte und Schwankungen aufgespalten und man erhält:

*Massenerhaltung:*

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.33)$$

*Impulstransport:*

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{U}_j \tilde{U}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \bar{\rho} R_{ik}) \quad (2.34)$$

Innere Energie:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_j} = -\gamma \bar{P} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_j} + (\gamma - 1)(\bar{\phi} - \Pi) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{p' u'_j} - (\gamma - 1) \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \quad (2.35)$$

Skalartransport:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{\Theta})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{U}_j\tilde{\Theta})}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \bar{\rho}\tilde{\theta''}u'_j - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_j} \right) \quad (2.36)$$

mit den Komponenten des turbulenten Spannungstensors  $\bar{\rho}R_{ij} = \overline{\rho u'_i u'_j}$  und der Druck-Dilatation  $\Pi = \overline{p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}$ . Der Tensor der viskosen Spannungen und die Dissipationsrate wurden nach Huang *et al.* (1995) aufgespalten. Für den gemittelten und fluktuierenden Anteil der viskosen Spannungen erhält man

$$\bar{\tau}_{ij} = \left[ \bar{\mu} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] + \left[ \overline{\mu' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu' \frac{\partial u'_l}{\partial x_l} \delta_{ij}} \right] \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{ij} = & \left[ \mu' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu' \frac{\partial u'_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] - \left[ \mu' \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu' \frac{\partial u'_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] \\ & + \left[ \bar{\mu} \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \bar{\mu} \frac{\partial u'_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] + \left[ \mu' \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu' \frac{\partial \bar{U}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die mittlere Dissipationsrate ist definiert als

$$\bar{\phi} = \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}, \quad (2.39)$$

wobei die turbulente Dissipation  $\overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$  mit  $\bar{\epsilon}$  bezeichnet wird und die folgende Aufspaltung üblich ist (Huang *et al.* (1995)):

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_s + \epsilon_d + \epsilon_I + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (2.40)$$

mit dem solenoidalen,  $\epsilon_s$ , kompressiblen,  $\epsilon_d$  und inhomogenen Anteil  $\epsilon_I$

$$\epsilon_s = 2\bar{\mu} \overline{\omega'_{ij} \omega'_{ij}} \quad \text{with} \quad \omega'_{ij} = \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) / 2 \quad (2.41)$$

$$\epsilon_d = \frac{4}{3} \bar{\mu} \overline{\frac{\partial u'_l}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_k}} \quad (2.42)$$

$$\epsilon_I = 2\bar{\mu} \left( \overline{\frac{\partial^2 u'_i u'_j}{\partial x_i \partial x_j}} - 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\left( u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right)} \right), \quad (2.43)$$

sowie

$$\epsilon_2 = \overline{2\mu' S_{ij}^{D'} S_{ij}^{D'}}, \quad \epsilon_3 = \overline{2\mu' S_{ij}^{D'} S_{ij}^D}. \quad (2.44)$$

$S_{ij}^D$  bezeichnet hier den deviatorischen Teil von  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ . Für vollentwickelte statistisch stationäre turbulente Kanalströmungen verschwinden die Ableitungen der Mittelwerte in den homogenen Richtungen und die gemittelten Transportgleichungen vereinfachen sich zu:

*Kontinuitätsgleichung:*

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_2}{\partial x_2} = 0 \quad (2.45)$$

*Impulstransport:*

$$0 = f_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\rho u_1'' u_2''} + \frac{\partial \bar{\tau}_{12}}{\partial x_2} \quad (2.46)$$

$$0 = - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\rho u_2'' u_2''} + \frac{\partial \bar{\tau}_{22}}{\partial x_2} \quad (2.47)$$

$$0 = - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\rho u_3'' u_2''} + \frac{\partial \bar{\tau}_{32}}{\partial x_2} \quad (2.48)$$

*Innere Energie:*

$$0 = -\bar{U}_1 f_1 - \bar{U}_2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} - \gamma \bar{p} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} - (\gamma - 1) \overline{p' \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{p' u_2'} + (\gamma - 1) \left( \bar{\phi} - \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial x_2} \right). \quad (2.49)$$

*Skalartransport:*

$$0 = - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \overline{\bar{\rho} \theta'' u_2''} - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_2} \right) \quad (2.50)$$

### 3 Überschallkanalströmungen

Die Physik der Überschallkanalströmung unterscheidet sich grundlegend von derjenigen im inkompressiblen Fall. Die Temperatur von Luft steigt von der Wand weg an, unabhängig davon, ob es sich um adiabate oder isotherme Wände handelt. Der Grund liegt in der Produktion von Wärme aufgrund der durch Reibung verursachten Dissipation der kinetischen Energie. Die Folge davon ist ein grosser Temperaturgradient an der Wand und damit verbunden eine Zone mit starken Änderungen von Viskosität und Dichte. Da der mittlere Druck über den Kanal in guter Näherung als konstant angesehen werden kann (siehe Abbildung 3.1), sinkt die Dichte zur Kanalmitte hin mit  $\bar{\rho} \propto 1/\bar{T}$  ab, während die Viskosität mit  $\mu \propto T^{0.7}$  steigt. Abbildung 3.2 zeigt für die gerechneten Fälle die Variation der mittleren Dichte und der dynamischen Viskosität.

Aufgrund dieser großen Temperaturänderungen und den damit verbundenen Dichte- und Viskositätsänderungen ist es schwierig, der Strömung eine einzige Reynoldszahl zuzuordnen, die sie vollständig beschreibt. Bildet man die Reynoldszahl  $Re_\tau^* = \bar{\rho} u_\tau^* H / \bar{\mu}$  mit der lokalen Dichte und Temperatur und der semilokalen Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau^* = u_\tau \sqrt{\rho_w / \bar{\rho}}, \quad (3.1)$$

dann erhält man aufgrund von  $\bar{\rho} / \rho_w \approx T_w / \bar{T}$  und  $\bar{\mu} / \mu_w \approx (\bar{T} / T_w)^{0.7}$  die Beziehung  $Re_\tau^* \approx Re_\tau (\bar{T} / T_w)^{-1.2}$ , mit  $Re_\tau = \rho_w u_\tau H / \mu_w$  und  $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho_w}$ . Abbildung 3.3 zeigt die Variation der lokalen Reynoldszahl bis zur Kanalmitte. In Wandnähe erkennt

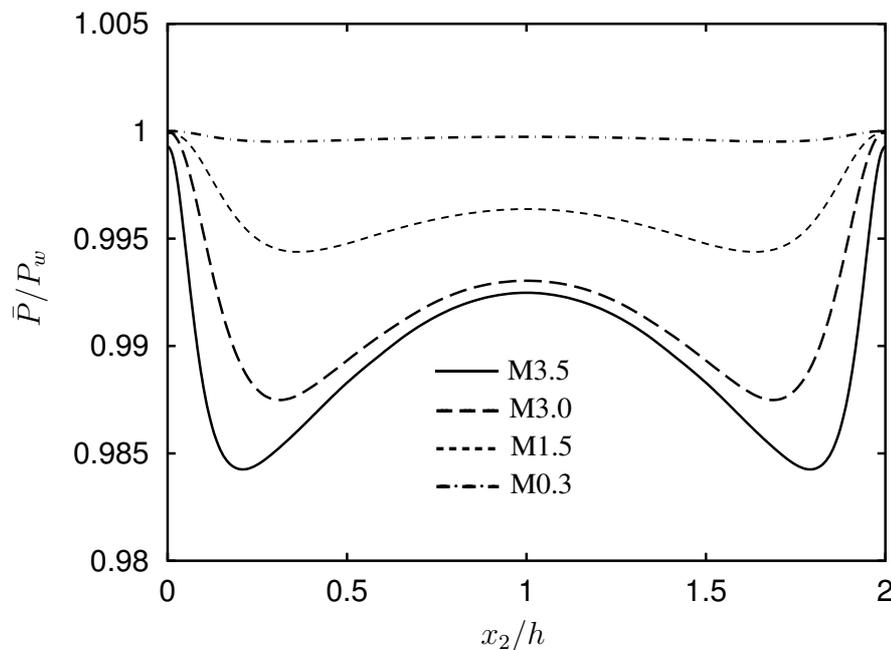


Abbildung 3.1: Mittlerer Druck  $\bar{P}$ , normiert mit  $P_w$ .

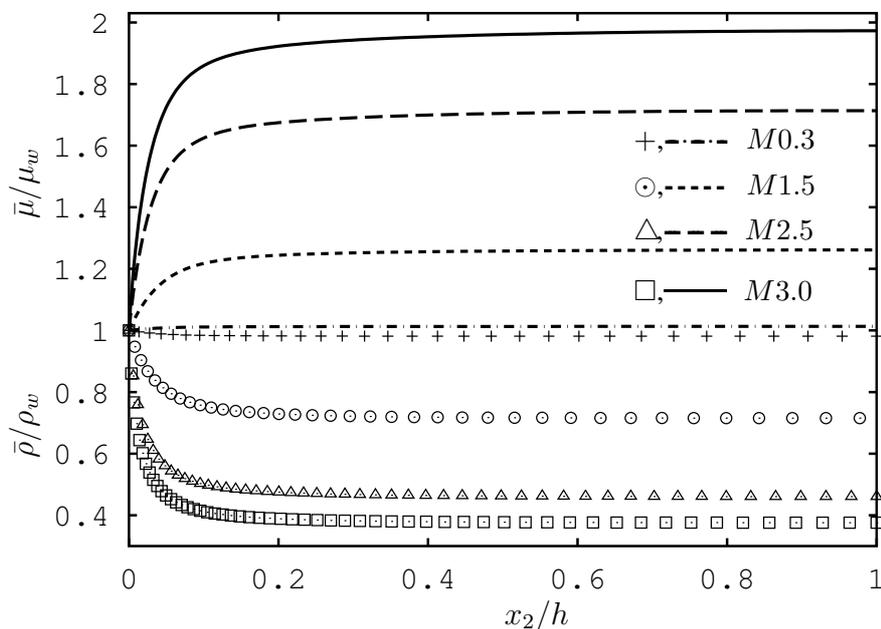


Abbildung 3.2: Variation der mittleren Viskosität und Dichte, normiert mit den jeweiligen Wandwerten.

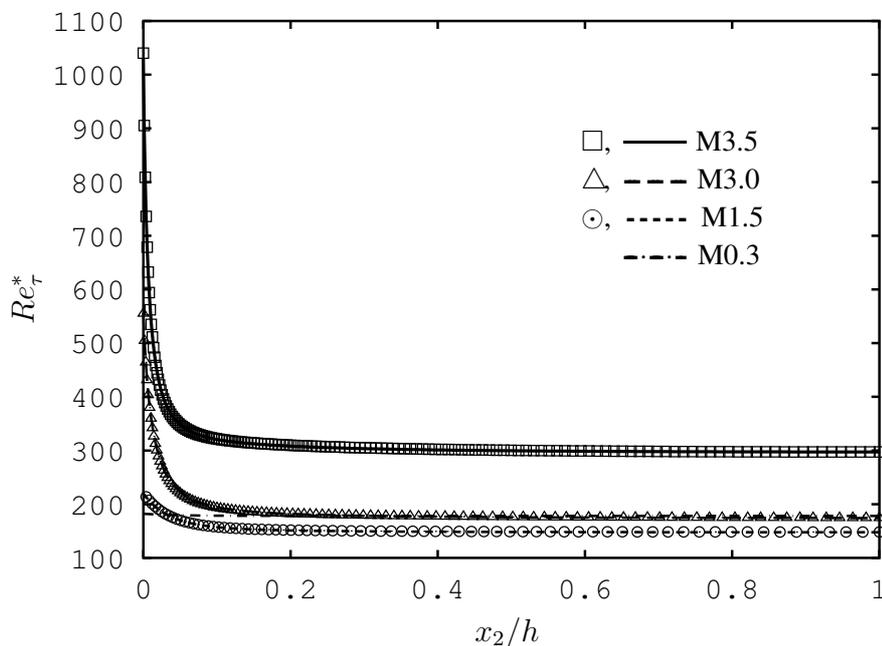


Abbildung 3.3: Lokale Reynoldszahl  $Re_\tau^* = \bar{\rho}u_\tau^*H/\bar{\mu}$  mit  $u_\tau^* = u_\tau\sqrt{\rho_w/\bar{\rho}}$ . Die Symbole zeigen die Beziehung  $Re_\tau^* \approx Re_\tau(\bar{T}/T_w)^{-1.2}$ .

man deutlich einen durch den Temperaturgradienten hervorgerufenen starken Abfall, der durch das Potenzgesetz hervorragend beschrieben wird. Im Vergleich zum subsonischen Fall hat man hier also eine zusätzliche Komplikation (Smits & Dussauge (1996)), denn die viskose Längenskala in Wandnähe verändert sich nicht nur mit dem Wandabstand, sondern auch mit den Eigenschaften des Fluids, die eine Funktion des wandnormalen Abstands sind. Damit ändert sich die relative Dicke der viskosen Unterschicht nicht nur mit der Reynoldszahl, sondern auch mit der Machzahl und dem Wandwärmestrom, da diese die Fluideigenschaften beeinflussen. Die Dicke  $l$  dieser wandnahen Schicht im Vergleich zur Längsabmessung  $L$  einer charakteristischen Turbulenzstruktur lässt sich leicht abschätzen. Dazu setzt man im stationären Fall Gleichgewicht zwischen Konvektion der Struktur und xDissipation voraus und erhält

$$\frac{(u_\tau^*)^2}{L} = \frac{\bar{\mu} u_\tau^*}{\bar{\rho} l^2} \implies \frac{l}{L} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{\bar{\rho} u_\tau^* L}} \propto (Re_\tau^*)^{-0.5} \propto (Re_\tau)^{-0.5} \left(\frac{T}{T_w}\right)^{1.7}. \quad (3.2)$$

Gegenüber einer inkompressiblen Strömung erhält man also mit steigender Temperaturdifferenz zwischen Wand und Kanalmitte eine Aufweitung der viskosen Unterschicht, proportional zu  $(\bar{T}/T_w)^{1.7}$ . Die Verläufe der lokalen Machzahl  $\bar{u}/\bar{c}$ , der turbulenten Machzahl  $M_t = \sqrt{2k}/\bar{c}$  ( $k$  bezeichnet die turbulente kinetische Energie) und der Gradientenmachzahl, definiert als  $M_g = \frac{l_u}{\bar{c}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x_2}$  mit der Mischungslänge  $l_u = \kappa x_2$ , sind in den Abbildungen 3.4 bis 3.6 gezeigt. Letztere kann als der Quotient aus einem akustischen Zeitmass  $l_u/\bar{c}$  und dem Zeitmass der mittleren Scherrate  $1/(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x_2})$  angesehen werden. Ihr maximaler Wert wird in Wandnähe angenommen, ist jedoch sehr klein. Auch die turbulente Machzahl ist gering. Intrinsische Kompressibilitätseffekte im Kanal sind aus diesem Grund vernachlässigbar und werden von Kompressibilitätseffekten aufgrund der variablen Dichte und Viskosität dominiert. Coleman *et al.* (1995) versuchten den lokalen Reynoldszahlverlauf ihrer Simulationen so anzugleichen, dass sie die Kompressibilitätseffekte vergleichen konnten. Der unterschiedliche Verlauf in Wandnähe erfordert aber zusätzliche Simulationen und Vergleiche mit inkompressiblen Kanalströmungen, um die Effekte eindeutig zu identifizieren. In der Diskussion der turbulenten Spannungen und Skalarflüsse, sowie deren Bilanzgleichungen, wird dies anhand der in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen versucht.

Um die Grösse intrinsischer Kompressibilitätseffekte abzuschätzen, sei kurz auf die Divergenz von kleinen Störungen der Geschwindigkeit  $u'_i$  eingegangen, die sich unter Vernachlässigung von Termen höherer als zweiter Ordnung in den Fluktuationen folgendermassen schreiben lässt (Smits & Dussauge (1996)):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u}' = & -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{d(\ln P)'}{dt} - u'_i \frac{\partial (\ln P)'}{\partial x_i} \right) - \frac{T'/\bar{T} + \rho'/\bar{\rho}}{\bar{T}\bar{\rho}} \frac{\bar{\epsilon}}{C_p} - \frac{T'}{\bar{T}} \frac{2\bar{\epsilon}_\theta}{\gamma\bar{T}^2} \\ & + \frac{\epsilon'}{C_p\bar{\rho}\bar{T}} + \frac{\epsilon'_\theta}{\gamma\bar{T}^2} + \frac{1}{\bar{\rho}C_p} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T'/\bar{T}}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

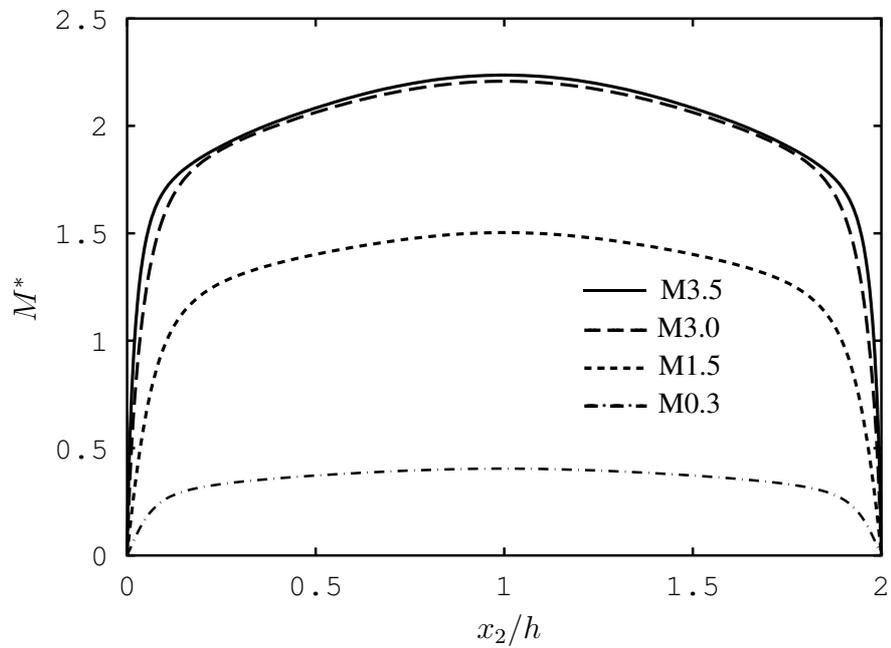


Abbildung 3.4: Lokale Machzahl  $M^* = \bar{u}/\bar{c}$ .

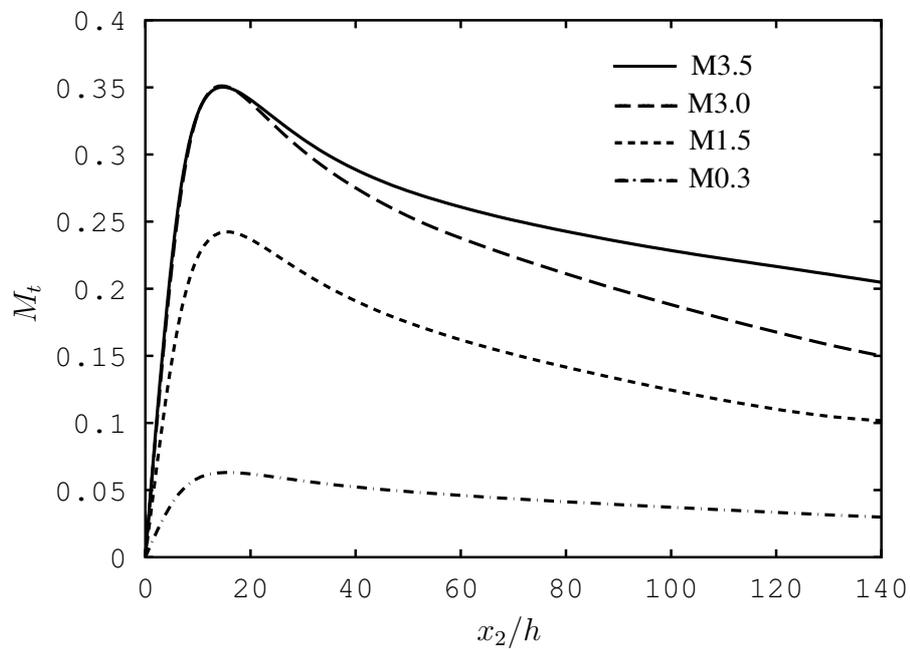


Abbildung 3.5: Verlauf der turbulenten Machzahl  $M_t = \sqrt{2k}/\bar{c}$ .

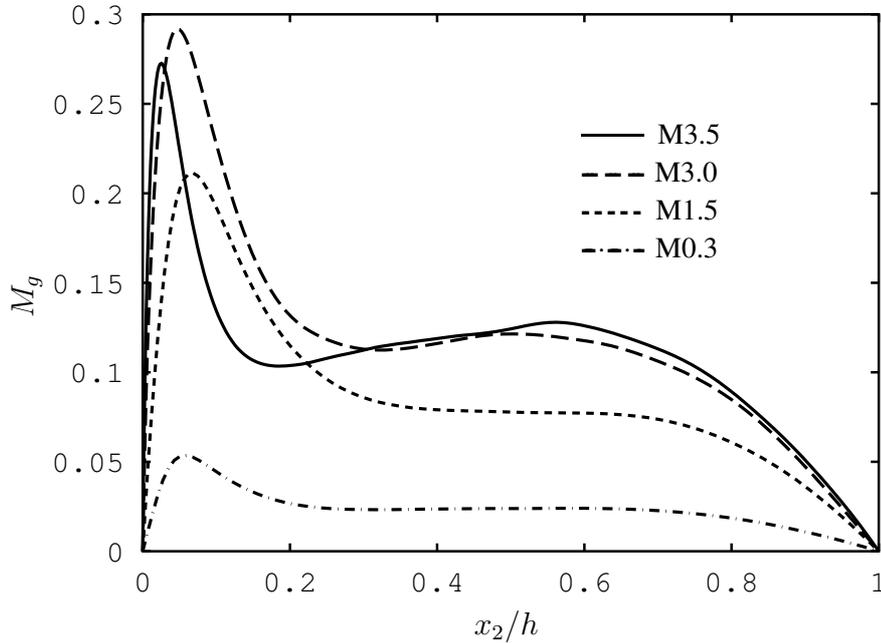


Abbildung 3.6: Verlauf der Gradientenmachzahl

mit  $\epsilon_\theta = \overline{k(\partial T'/\partial x_i)^2}/(\bar{\rho}C_v)$ . Divergenz-Fluktuationen werden somit durch Druckfluktuationen, lokale Quellterme und Wärmeströme verursacht. Falls keine Stöße auftreten, ist der erste Term auf der rechten Seite vernachlässigbar und es kann gezeigt werden (Smits & Dussauge (1996)), dass zur normierten Divergenz der Geschwindigkeitsfluktuationen  $\nabla \cdot \mathbf{u}'/(|u'|/l)$  die Dissipationsterme mit  $\propto M_t^2$  und der Wärmeleitungsterm mit  $\propto (T'/\bar{T})/Re_\tau$  beitragen. Für die hier durchgeführten Simulationen gilt  $M_t < 1$ ,  $T'/\bar{T} < 1$  und damit  $\nabla \cdot \mathbf{u}'/(|u'|/l) \ll 1$ . Huang *et al.* (1995) untersuchten für kompressible Kanalströmungen bis  $M = 3$  bereits charakteristische Größen, anhand derer sich Kompressibilitätseffekte quantifizieren lassen. Sie stellten so zum Beispiel fest, dass das Verhältnis von kompressibler zu solenoidaler Dissipation  $\epsilon_d/\epsilon_s$  oder die Druckdilatation nicht von Bedeutung sind. Aufgrund dieser einfachen Abschätzung sind bei den hier vorliegenden Machzahlen hauptsächlich Kompressibilitätseffekte aufgrund der variablen Fluideigenschaften zu erwarten.

### 3.1 Skalierung der mittleren Größen

Die gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich nur unter starken Vereinfachungen und Annahmen lösen, deshalb sind Skalengesetze interessant, die ausserdem die Möglichkeit bieten, das so erworbene Wissen auf unbekannte Fälle zu übertragen. So boten die Untersuchungen an inkompressiblen Grenzschichten niedriger Reynoldszahl einen guten Einblick in die Physik wandgebundener Strömungen. Da sich der Kompress-

sibilitätseffekt, wie oben beschrieben, zum grössten Teil durch die starke Variation der Fluideigenschaften manifestiert, versuchten Huang *et al.* (1995) für kompressible turbulente Kanalströmungen unter Einbeziehung der lokalen Grössen ähnliche Skalierungen herzuleiten wie im inkompressiblen Fall. Über die Einführung sogenannter semi-lokaler Skalierungen, die von der lokalen Dichte und Viskosität abhängen, wurde eine neue Wandkoordinate  $x_2^*$  gebildet. Diese ist definiert als  $x_2^* = x_2 l_\nu^*$ , mit der viskosen Längenskala  $l_\nu^* = \bar{\mu} / \bar{\rho} u_\tau^*$  und der Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_\tau^* = \sqrt{\tau_w / \bar{\rho}}$ .

### 3.1.1 Viskose Unterschicht

**Impulstransport** In der viskosen Unterschicht werden üblicherweise die konvektiven Terme gegenüber viskosen Termen, sowie der Druckgradient ( $\propto 1/Re_\tau$ ) und Korrelationen der Viskositätsfluktuationen vernachlässigt. Die Integration der gemittelten Transportgleichung für die  $x_1$ -Richtung (2.46) von der Wand bis zu einer Position  $x_2$  liefert

$$\tau_w = \frac{\tau_w x_2}{h} + \bar{\mu} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} - \overline{\rho u_1'' u_2''}. \quad (3.4)$$

Unter Berücksichtigung der gerade gemachten Annahmen ergibt sich

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \frac{d\bar{U}_1^+}{dx_2^+} = 1 \quad \implies \quad U_\mu^+ := \int_0^{U_1^+} \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} dU_1^+ = x_2^+. \quad (3.5)$$

Abbildung 3.7 zeigt die viskositätstransformierte Geschwindigkeit für die gerechneten Fälle. Man erkennt deutlich die hervorragende Übereinstimmung in der viskosen Unterschicht bis zu  $x_2^+ \leq 10$  für alle Profile, die wie im inkompressiblen Fall mit  $x_2^+$  skalieren.

**Skalartransport** Integriert man die gemittelte Transportgleichung für den passiven Skalar von der Wand bis zu einer Position  $x_2^+$ , erhält man die Gleichung

$$\chi_w = \frac{\bar{\mu}}{Sc} \frac{d\bar{\Theta}}{dx_2} - \overline{\rho u_2'' \theta''} \quad (3.6)$$

unter Vernachlässigung der Korrelation von Viskositätsfluktuationen.  $\chi_w$  bezeichnet hier den Skalarfluss an der Wand

$$\chi_w = \left. \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right|_w \quad (3.7)$$

Analog zur Schubspannungsgeschwindigkeit wird nun eine Grösse  $\theta_\tau$  definiert,

$$\theta_\tau = \frac{\chi_w}{\rho_w u_\tau}, \quad (3.8)$$

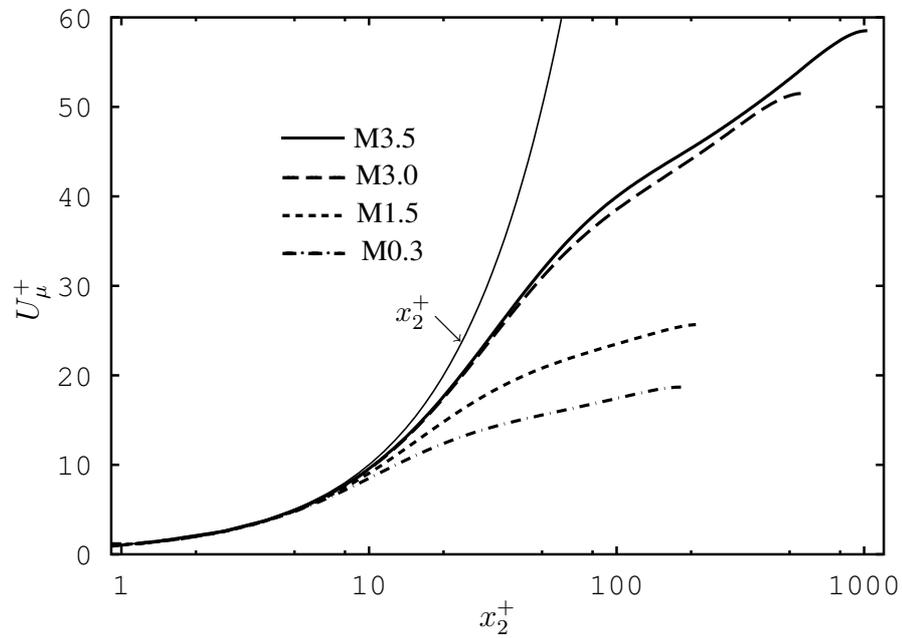


Abbildung 3.7: Viskositätstransformierte Geschwindigkeit in  $x_1$ -Richtung (Gl. (3.5)).

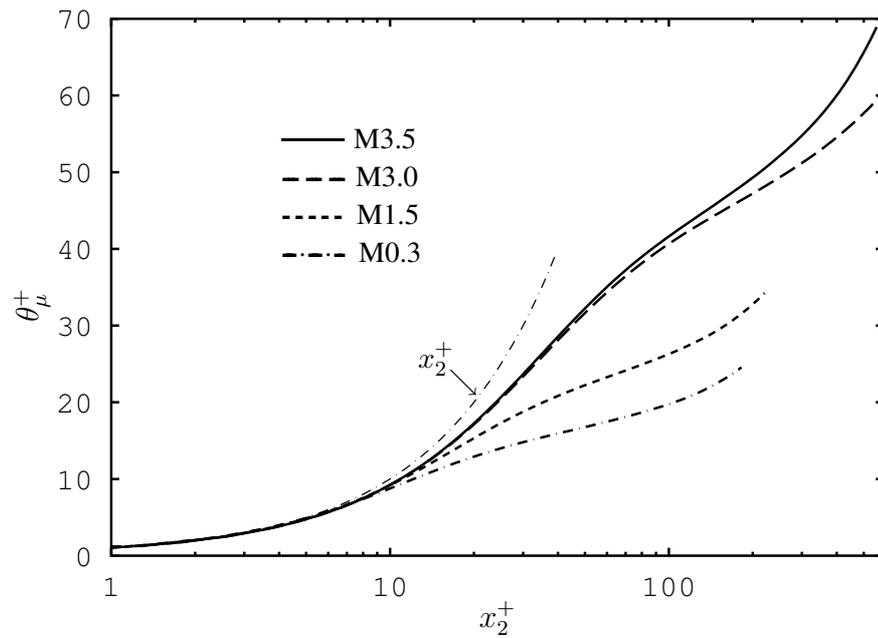


Abbildung 3.8: Viskositätstransformierter Skalar in  $x_1$ -Richtung (Gl. (3.9)).

die zur Normierung des Skalars benutzt wird:  $\bar{\Theta}^+ = \bar{\Theta}/\theta_\tau$ . Benutzt man diese Definitionen, dann ergibt sich nach gleicher Vorgehensweise wie für  $U_\mu^+$

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \frac{d\bar{\Theta}^+}{dx_2^+} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Theta_\mu^+ := \int_0^{\Theta^+} \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} d\Theta'^+ = x_2^+. \quad (3.9)$$

Abbildung 3.8 zeigt, dass auch für den Skalar mit dieser Transformation eine hervorragende Übereinstimmung in der viskosen Unterschicht erzielt wird.

### 3.1.2 Vollturbulente Schicht

**Impulstransport** In der vollturbulenten Schicht ( $x_2^+ > 30$ ) gewinnen die turbulenten Spannungen an Bedeutung, während die viskosen Terme als klein angenommen und vernachlässigt werden dürfen. Wendet man diese Annahmen und Prandtls Mischungslängentheorie auf Gleichung (3.4) an und vernachlässigt, wie von Huang *et al.* (1995) durchgeführt, den Druckterm, dann erhält man

$$\tau_w = -\overline{\rho u_1'' u_2''} = \bar{\rho} l_u^2 \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \left| \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} \right| \Longrightarrow \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2^+} = \frac{1}{\kappa_u x_2^+} \sqrt{\frac{\rho_w}{\bar{\rho}}}. \quad (3.10)$$

mit der Mischungsweglänge  $l_u := \kappa_u x_2$ ,  $\kappa_u$  bezeichnet hier eine verallgemeinerte Von-Kármán Konstante. Daraus gewinnt man wie im inkompressiblen Fall ein logarithmisches Gesetz

$$U_{VD}^+ = \frac{1}{\kappa_u} \ln x_2^+ + C, \quad (3.11)$$

falls die Geschwindigkeit, wie von Van Driest vorgeschlagen, folgendermassen definiert wird

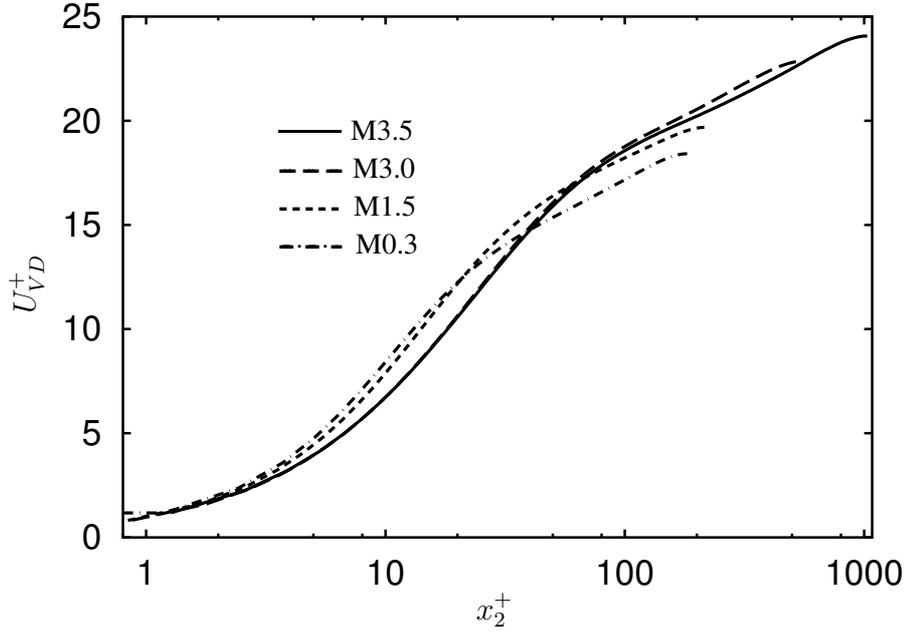
$$U_{VD}^+ = \int_0^{\bar{U}_1^+} \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}} d\bar{U}_1^+. \quad (3.12)$$

In ähnlicher Weise ist man in der Lage, für die Temperatur mithilfe von (3.10) die Relation (Huang & Coleman (1994))

$$T^+ = C_w - Pr_t B_q U_1^+ - \frac{(\kappa - 1)}{2} Pr_t M_\tau^2 U_1^{+2} \quad (3.13)$$

anzugeben, mit einer Konstanten  $C_w$ ,  $T^+ = T/T_w$ ,  $B_q = q_w/(\rho_w C_p u_\tau T_w)$ ,  $M_\tau = u_\tau/c_w$  und der turbulenten Prandtl-Zahl  $Pr_t$  und erhält nach Einsetzen in (3.12) die Beziehung

$$U_{VD}^+ \approx \frac{1}{C_R} \left[ \arcsin \left( \frac{R(U_1^+ + C_H)}{C_D} \right) - \arcsin \left( \frac{C_R C_H}{C_D} \right) \right]. \quad (3.14)$$



**Abbildung 3.9:** 'Van Driest' transformierte Geschwindigkeit in  $x_1$ -Richtung (Gl. (3.12)).

Die Konstanten sind definiert als  $C_R = M_\tau \sqrt{(\gamma - 1)Pr_t/2}$ ,  $C_H = B_q/[(\gamma - 1)M_\tau^2]$  und  $C_D = \sqrt{1 + C_R^2 C_H^2}$ . Abbildung 3.9 zeigt die 'Van Driest' transformierte Geschwindigkeit für die gerechneten Fälle. Die Profile für die kompressiblen Simulationen liegen nach der Transformation nahe bei dem für inkompressible Strömungen geltenden logarithmischen Gesetz. Im Gegensatz zu supersonischen Grenzschichtströmungen, insbesondere mit adiabaten Wänden und ohne Druckgradient ist die Übereinstimmung allerdings nicht so gut, wie in dem Buch von Smits & Dussauge (1996) zusammenfassend dargestellt wurde. Benutzt man die Beziehung

$$\bar{U}_1^+ = \frac{C_D}{C_R} \sin \left[ \ln \left( \frac{x_2^+}{\exp(-\kappa_u C)} \right) / \frac{\kappa_u}{C_E} \right]$$

(siehe White (1991), Smits & Dussauge (1996)) in Gleichung (3.14), dann erhält man für adiabate Wände ( $B_q = 0$ ) für  $U_{VD}^+$  und  $\bar{U}_1^+$  genau das inkompressible logarithmische Gesetz. Morinishi *et al.* (2004) demonstrierten dies in ihrer DNS einer kompressiblen Kanalströmung zwischen einer adiabaten und einer isothermen Wand. Im hier vorliegenden Fall mit starken Temperaturgradienten infolge der Wandkühlung, sieht man aber bei genauer Betrachtungsweise von Abbildung 3.9 grössere Unterschiede für die Profile im logarithmischen Bereich. Fasst man Gleichung (3.4) nach Benutzung der Prandtlschen Mischungslängentheorie, wie oben durchgeführt, als quadratische Gleichung für  $\sqrt{\bar{\rho}/\rho_w} dU_1^+/dx_2^+$  auf, bekommt man

$$U_{VD}^+ = \int \frac{\frac{\bar{\rho}}{\mu_w} \sqrt{\frac{\rho_w}{\bar{\rho}}} \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{\rho}}{\mu_w}\right)^2 \frac{\rho_w}{\bar{\rho}} + 4\kappa^2 (x_2^+)^2 \left(1 - \frac{x_2^+}{Re_\tau}\right)}}{2\kappa^2 (x_2^+)^2} dx_2^+ + C \quad (3.15)$$

Würde man den von der Reynoldszahl abhängigen Term und den viskosen Anteil vernachlässigen, erhielte man das oben angegebene logarithmische Gesetz, bei Vernachlässigung des viskosen Anteils ergäbe sich

$$\sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}} \frac{\partial \bar{U}_1^+}{\partial x_2^+} = \frac{1}{\kappa_u x_2^+} \sqrt{1 - \frac{x_2^+}{Re_\tau}}, \quad (3.16)$$

oder nach Integration

$$U_{VD}^+ = \frac{1}{\kappa_u} \left\{ 2 \sqrt{1 - \frac{x_2^+}{Re_\tau}} + \ln \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{x_2^+}{Re_\tau}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{x_2^+}{Re_\tau}} + 1} \right] \right\} + C. \quad (3.17)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich stark von Gleichung 3.11 und hat von der Reynolds- und Machzahl abhängige Konstanten. Gleichung 3.15 zeigt aber, dass der Quotient

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \sqrt{\frac{\rho_w}{\bar{\rho}}} \propto \left( \frac{\bar{T}}{T_w} \right)^{1.2},$$

der zwar gegenüber den Termen, die  $x_2^+$  enthalten, klein sein kann, als integraler Beitrag jedoch zu den beobachteten Abweichungen in Abbildung 3.9 führt. Ein universelles Skalenverhalten ist aus diesem Grund, zumindest bei diesen niedrigen Reynoldszahlen, nicht zu erwarten.

**Skalartransport** In inkompressibler Kanalströmung mit passivem Skalartransport und konstanter Temperatur an beiden Wänden, konnte bisher kein universelles logarithmisches Gesetz nachgewiesen werden (siehe Kawamura *et al.* (2000), für Reynoldszahlen von  $Re_\tau = 180$  und  $Re_\tau = 395$ ). Betrachtet man das mittlere Skalarprofil in Abbildung 3.10, dann erkennt man, dass der Skalargradient über den gesamten Kanal von Null verschieden ist, der viskose Term in Gleichung (3.6) wird damit gegenüber dem viskosen Term in der Impulsgleichung (der wandnormale Gradient der Geschwindigkeit  $\bar{U}_1$  verschwindet in der Kanalmitte), zusätzlich an Bedeutung gewinnen. Wird nun in Gleichung (3.6) die Prandtlsche Mischungslängentheorie auf den turbulenten Skalarfluss angewendet, und ersetzt man den Geschwindigkeitsgradienten durch (3.16), erhält man

$$1 = \frac{\bar{\mu}}{Sc \mu_w} \frac{d\bar{\Theta}^+}{dx_2^+} + \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}} x_2^+ \kappa_\Theta \frac{\partial \Theta^+}{\partial x_2^+} \sqrt{1 - \frac{x_2^+}{Re_\tau}} \quad (3.18)$$

mit einer Konstante  $\kappa_\Theta$ , die aus der Mischungslänge kommt. Der erste Term auf der rechten Seite wird in der Literatur üblicherweise vernachlässigt und die Integration ergibt im kompressiblen Fall ein logarithmisches Gesetz für den ‘‘Van Driest’-transformierten

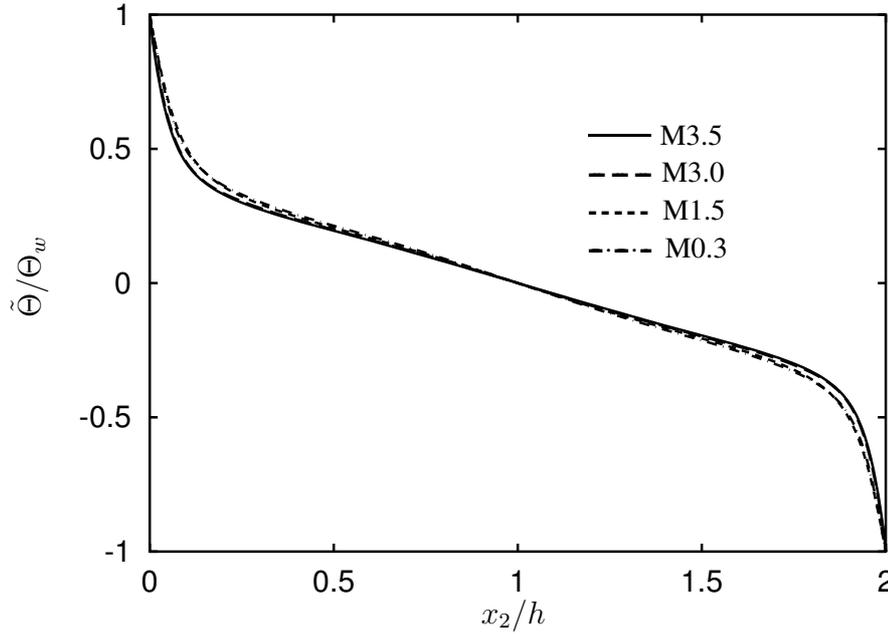


Abbildung 3.10: Favre-gemittelter Skalar, normiert mit dem Wandwert  $\Theta_w$ .

Skalar''

$$\Theta_{VD} = \int_0^{\bar{\Theta}^+} \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_w}} d\bar{\Theta}^+ = \frac{1}{\kappa_\Theta} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{x_2^+}{Re_\tau}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{x_2^+}{Re_\tau}} + 1} \right] + C_\Theta, \quad (3.19)$$

mit einer Konstanten  $C_\Theta$ . Abbildung 3.11 zeigt Profile des 'Van Driest'-transformierten Skalars. Ein logarithmischer Bereich ist kaum vorhanden, darüberhinaus weisen die Profile verschiedene Steigungen auf und zeigen große Unterschiede in der Übergangsschicht. Genau wie beim Impulstransport liegt der Grund für die Abweichungen von einem universellen logarithmischen Gesetz wiederum an den Dichte- und Viskositätsänderungen, da aus (3.18)

$$\Theta_{VD}^+ = \int \frac{1}{\frac{1}{Sc} \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \sqrt{\frac{\rho_w}{\bar{\rho}}} + \kappa_\Theta x_2^+ \sqrt{1 - \frac{x_2^+}{Re_\tau}}} dx_2^+ + C_\Theta \quad (3.20)$$

folgt. Eine einfache Abschätzung zeigt, dass für  $x_2^+ \approx 100$  und Fall M3.0, der erste Term im Nenner etwa 8% des zweiten Terms ausmacht und somit die beobachteten Abweichungen erklärt. Abbildung 3.12 bestätigt die Abschätzung anhand des Quotienten der beiden Terme im Nenner von Gleichung (3.20) für eine Schmidtzahl von 1. Man erkennt deutlich, dass mit steigender Machzahl und damit grösserem Temperatur- und Viskositätsgradienten, der Term  $(\bar{\mu}/\mu_w)\partial\Theta^+/x_2^+$  im Bereich  $40 \leq x_2^+ \leq 200$ , in dem das 'Van Driest'-transformierte Skalarprofil einen annähernd linearen Bereich aufweist, an Bedeutung gewinnt. Dadurch wird die Ausbildung eines universellen Skalarprofils

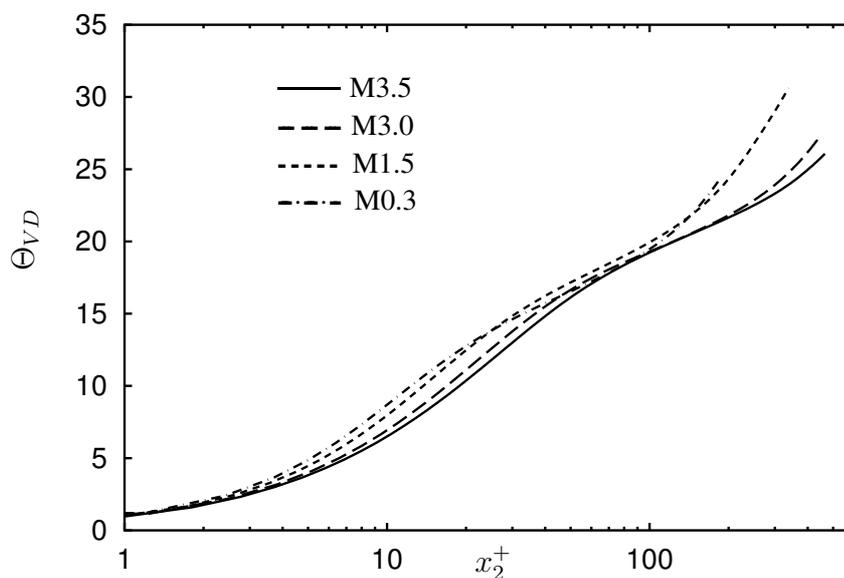


Abbildung 3.11: 'Van Driest'-transformierter Skalar.

verhindert. Simulationen von Kawamura *et al.* (2000) von inkompressibler Kanalströmung mit Skalartransport, bei denen der Skalarfluss an den Wänden festgehalten wurde, zeigten sehr wohl ein logarithmisches Gesetz, ähnlich dem des Geschwindigkeitsprofils. Allerdings gibt es zum jetzigen Zeitpunkt noch keine Simulationen mit

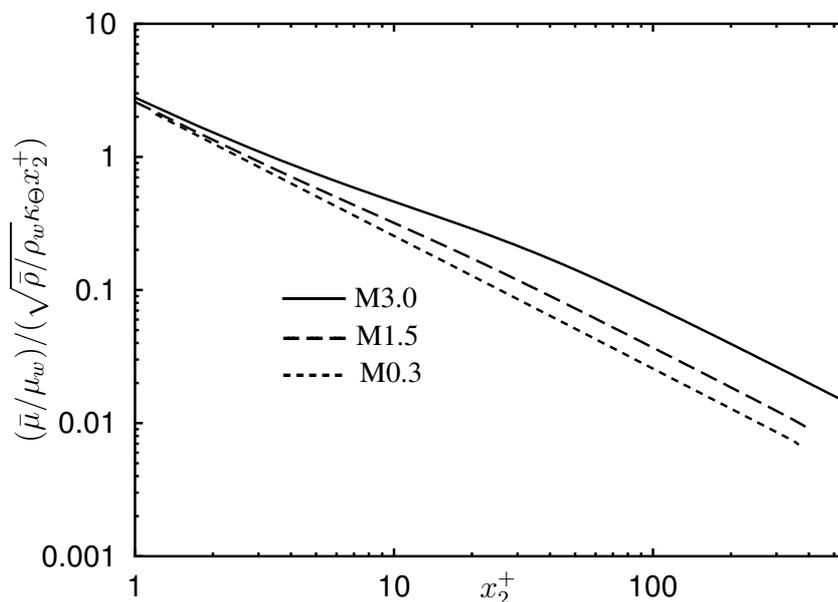


Abbildung 3.12: Quotient von  $\bar{\mu}/\mu_w$  mit  $\sqrt{\bar{\rho}/\rho_w \kappa_\Theta x_2^+}$ , um den Einfluss des viskosen Terms in (3.18) abzuschätzen.

diesen Randbedingungen für kompressible Kanalströmungen, um auch dort dieses Verhalten überprüfen zu können.

### 3.2 Geschwindigkeits- und Skalarfluktuationen

Einer der großen Vorteile der von Huang *et al.* (1995) verwendeten semilokalen Skalierung zeigte sich in der Skalierung der RMS-Werte der Geschwindigkeitsfluktuationen. Obwohl die Normierung von  $\{u_i\}_{rms}$  mit  $u_\tau^*$  schon lange vorher bei supersonischen Grenzschichten angewendet wurde (Smits & Dussauge (1996)) erreichten Huang *et al.* (1995) durch die Ersetzung der viskosen Längenskala  $l^+ = \nu_w/u_\tau$  durch  $l_\nu^* = \bar{\mu}/(\bar{\rho}u_\tau^*)$  auch eine bessere Übereinstimmung der Positionen der Maxima in Wandnähe. Die Abbildungen 3.13 und 3.14 zeigen deutlich, dass die Skalierung mit  $u_\tau^*$  die kompressiblen und inkompressiblen Fälle in der Kanalmitte aufeinander abbildet und *nicht* die im inkompressiblen Fall verwandte Skalierung mit  $u_\tau$ . Verwendet man zusätzlich die semi-lokalen Koordinaten  $x_2^*$ , dann liegen auch die Maxima in Wandnähe an derselben Stelle, wie im Vergleich der Abbildungen 3.15 und 3.16 zu sehen ist. Dieselben Aussagen treffen auch auf die spannweitigen und wandnormalen Werte der Geschwindigkeitsfluktuationen zu, die in den Abbildungen 3.13 bis 3.24 dargestellt sind. Bei Auftragung über  $x_2^*$  und  $x_2^+$  sieht man deutlich einen Reynoldszahleffekt, der sich in unterschiedlichen Niveaus der RMS-Werte mit zunehmenden Abstand von der Wand äussert.

Abbildung 3.25 zeigt den RMS-Wert des Skalars normiert mit dem Betrag der Skaldifferenz zwischen Wand und Kanalmitte. Im Gegensatz zu den Geschwindigkeitsfluktuationen erkennt man zwei Extremwerte, einen nahe der Wand, den anderen in der Kanalmitte. Die Situation erinnert an den Vergleich der RMS-Werte der Geschwindigkeiten in einer reinen Kanalströmung mit denen einer Couetteströmung. In letzterer sinken die RMS-Werte der stromabwärtsgerichteten Geschwindigkeiten von einem wandnahen Maximum kurz ab und bleiben dann annähernd konstant, während die spannweitigen und wandnormalen Komponenten von Null ansteigen und anschliessend einen konstanten Wert annehmen. Ganz im Gegensatz zur Kanalströmung, in der alle Komponenten zur Kanalmitte hin absinken. In der Couette-Strömung verschwindet die Produktion der Varianz der Geschwindigkeitsfluktuationen in der Kanalmitte nicht, genau wie dies in diesen Simulationen für die Varianz der Skalarfluktuationen der Fall ist. Diese Beobachtungen lassen darauf schliessen, dass das zweite Maximum seine Ursache in der nichtverschwindenden Produktion der Skalarfluktuationen in der Skalarvarianzbilanz (Skalargradient in der Kanalmitte ungleich Null) hat. In der Tat weisen Simulationen mit vorgegebenem diffusiven Skalarfluss an der Wand von Seki *et al.* (2003), im Gegensatz zu den hier durchgeführten Simulationen mit konstanter Skalkonzentration an der Wand, kein lokales Maximum in der Kanalmitte auf. Abbildung 3.26 verdeutlicht dies anhand eines Vergleichs der Simulationen dieser Arbeit mit einer inkompressiblen Kanalströmung mit Skalartransport und vorgegebenem diffusiven Skalarfluss von Seki *et al.* (2003). Die Simulationen von Seki *et al.* (2003) zeigen ausserdem, dass, falls die RMS-Werte des Skalars mit  $\theta_\tau = \chi_w/(u_\tau \rho_w)$  normiert werden, das wandnahe Extremum mit steigender Reynoldszahl abnimmt, das Extremum in Kanalmitte dagegen zunimmt. Ein Vergleich der Fälle M0.3 und M0.4, sowie M3.0 und M3.5 in Abbildung

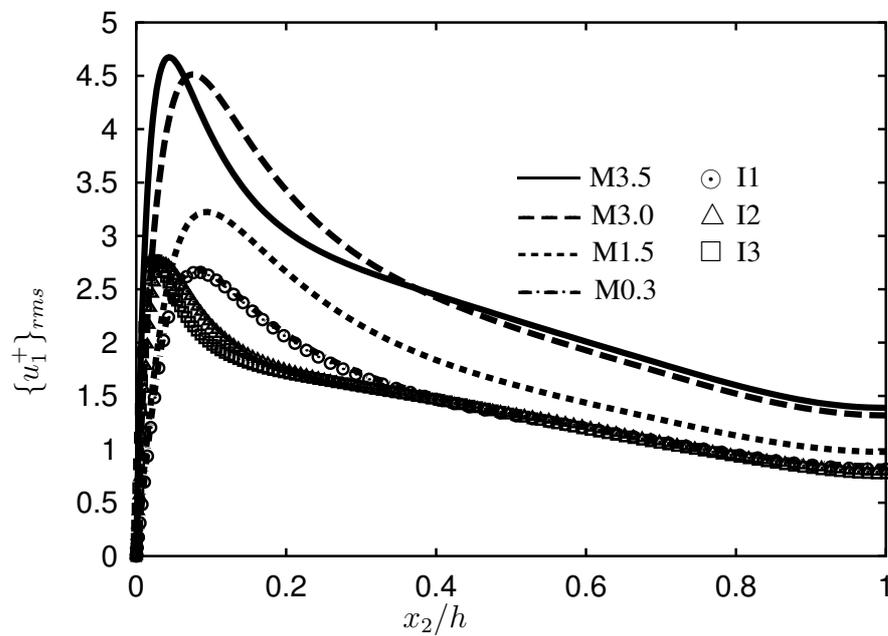


Abbildung 3.13: Profil von  $\{u_1^+\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau$  über  $x_2/H$ .

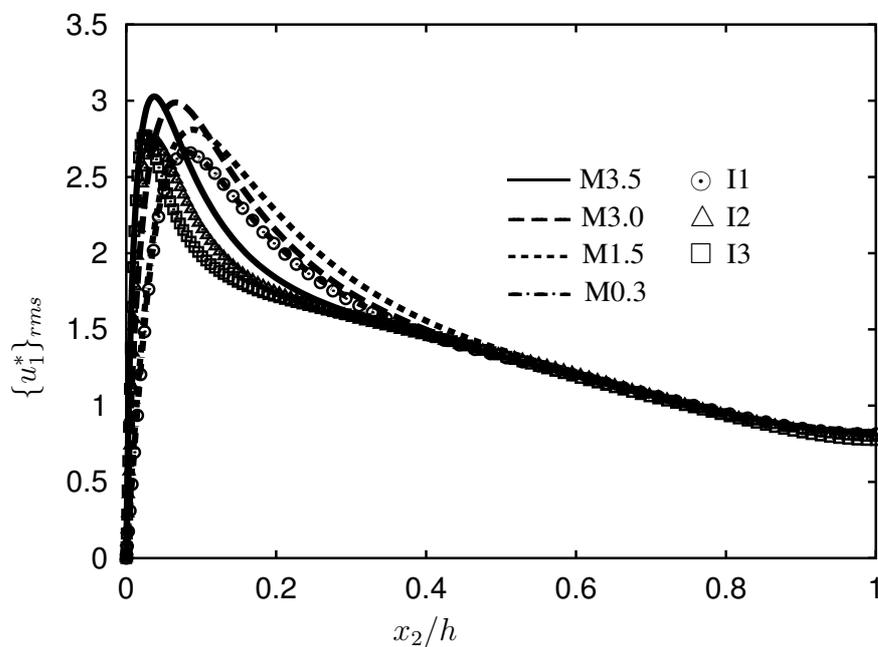


Abbildung 3.14: Profil von  $\{u_1^*\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau^*$  über  $x_2/H$ .

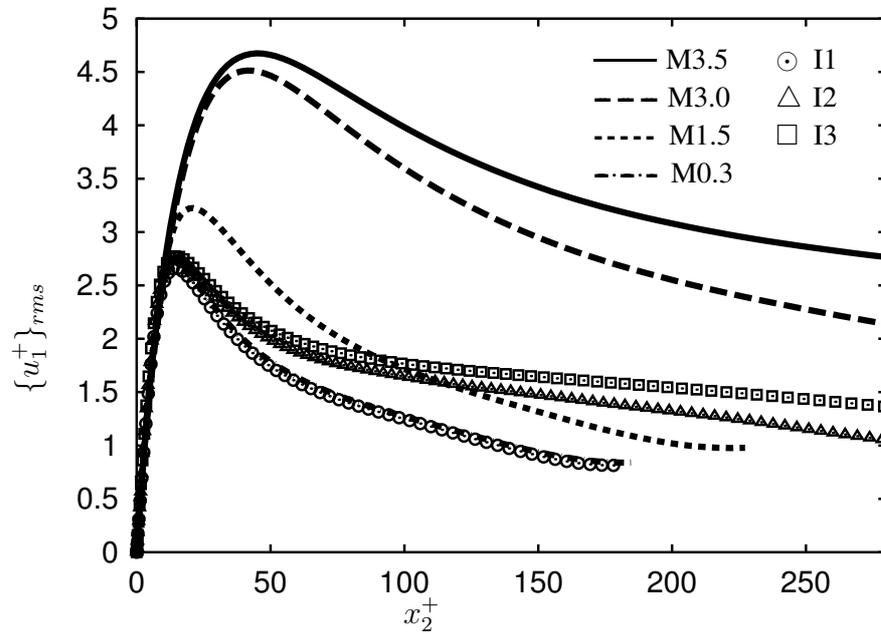


Abbildung 3.15: Profil von  $\{u_1\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau$  über  $x_2^+$ .

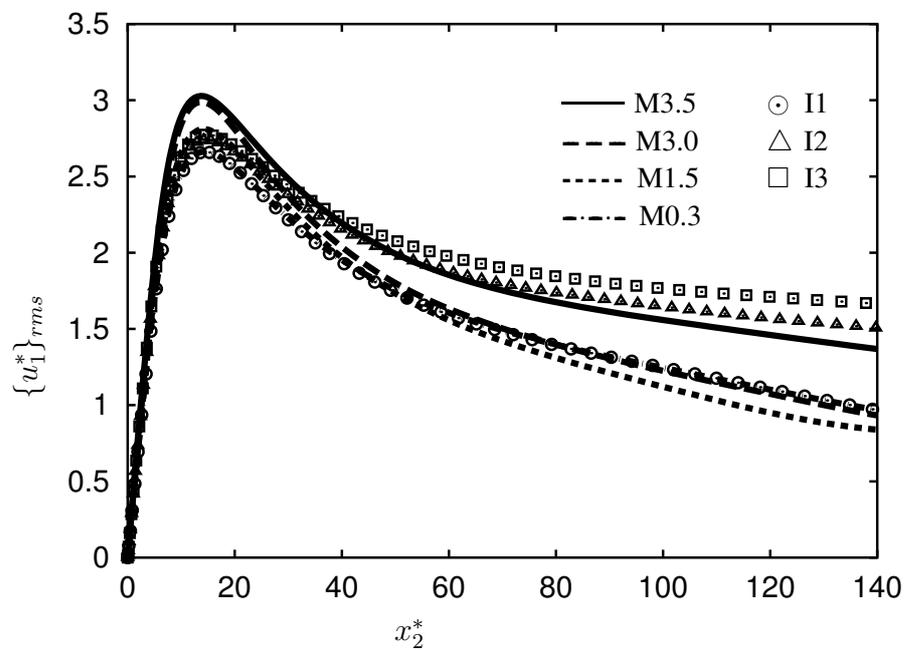


Abbildung 3.16: Profil von  $\{u_1\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau^*$  über  $x_2^*$ .

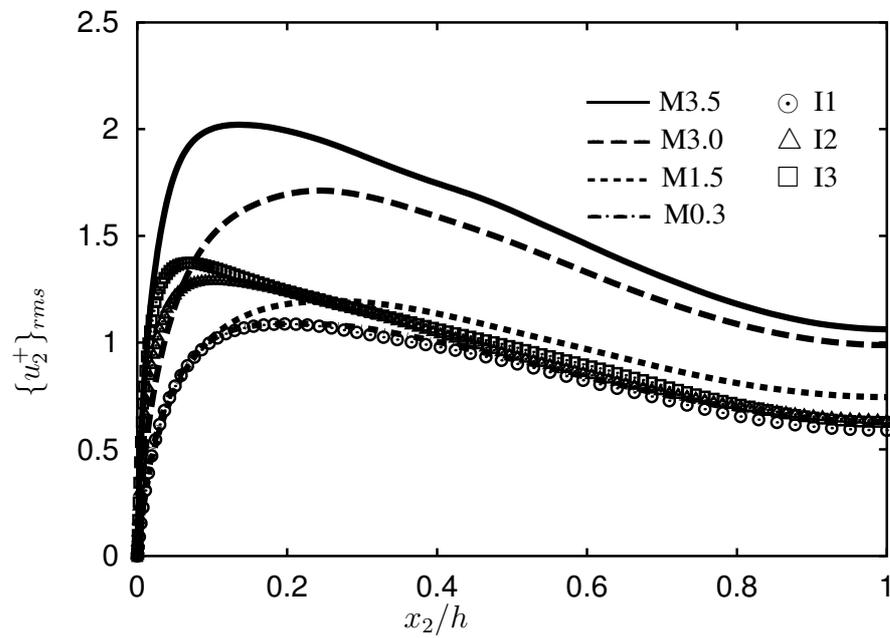


Abbildung 3.17: Profil von  $\{u_2\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau$  über  $x_2/H$ .

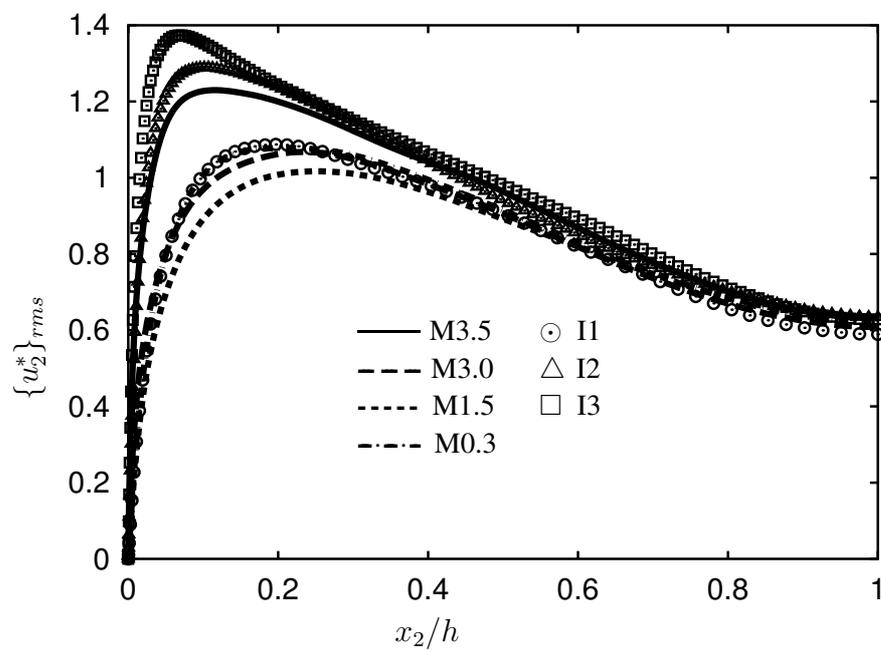


Abbildung 3.18: Profil von  $\{u_2\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau^*$  über  $x_2/H$ .

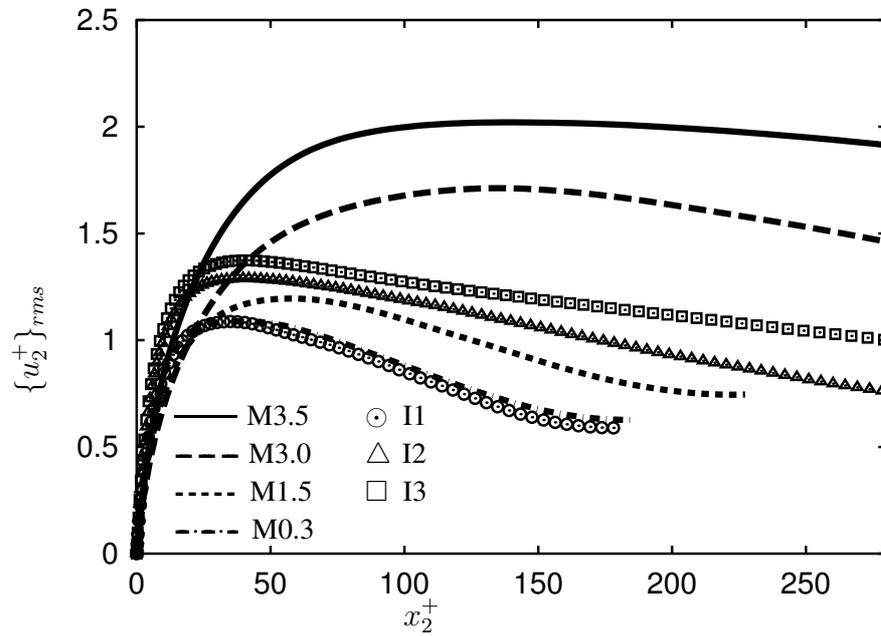


Abbildung 3.19: Profil von  $\{u_2^+\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau$  über  $x_2^+$ .

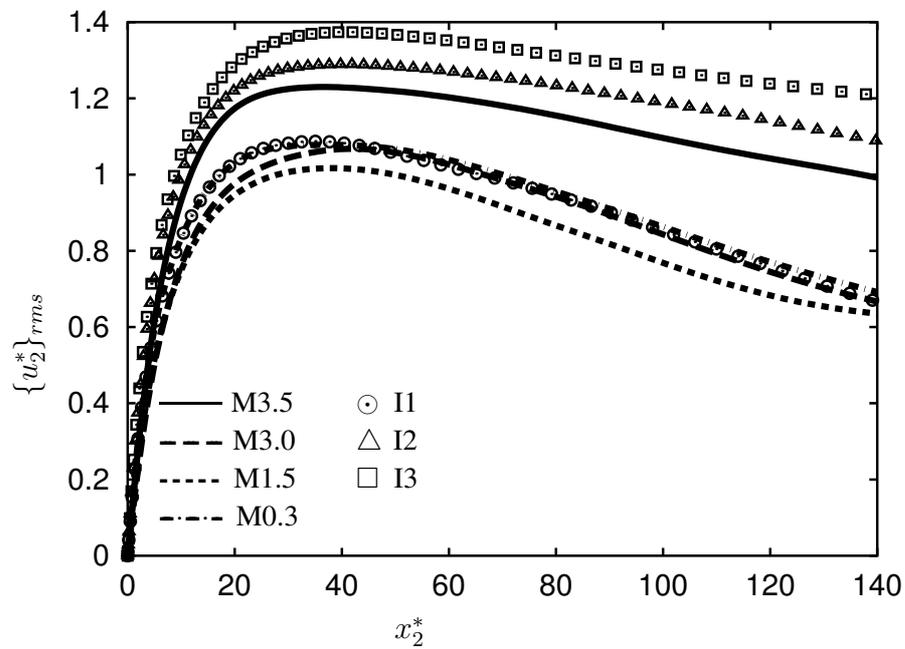


Abbildung 3.20: Profil von  $\{u_2^*\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau^*$  über  $x_2^*$ .

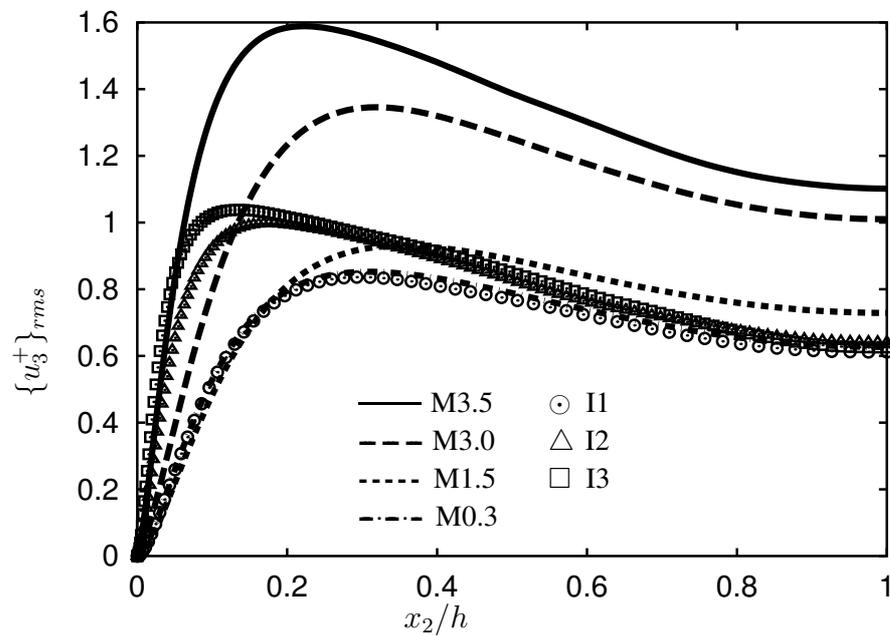


Abbildung 3.21: Profil von  $\{u_3^+\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau$  über  $x_2/H$ .

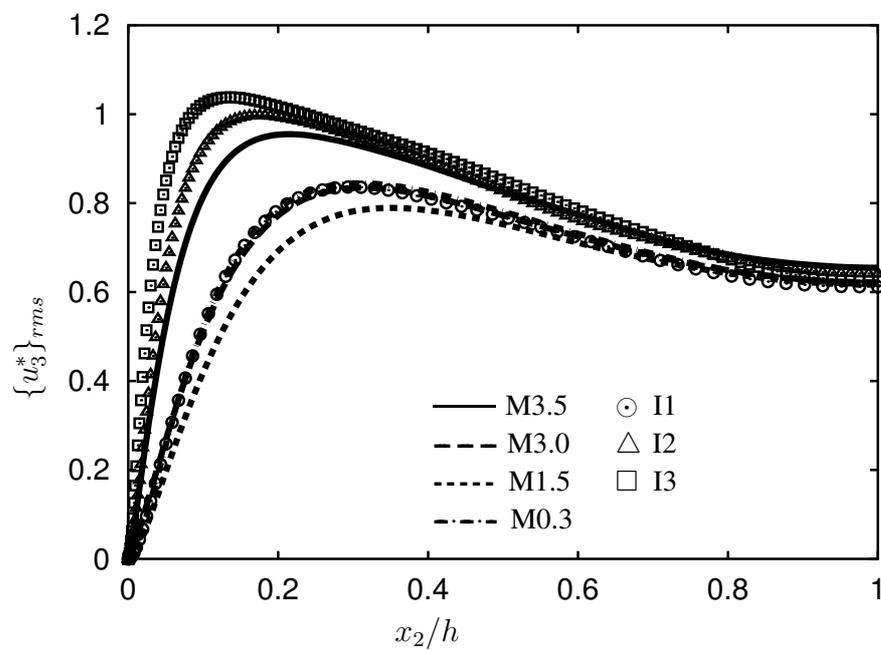


Abbildung 3.22: Profil von  $\{u_3^*\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau^*$  über  $x_2/H$ .

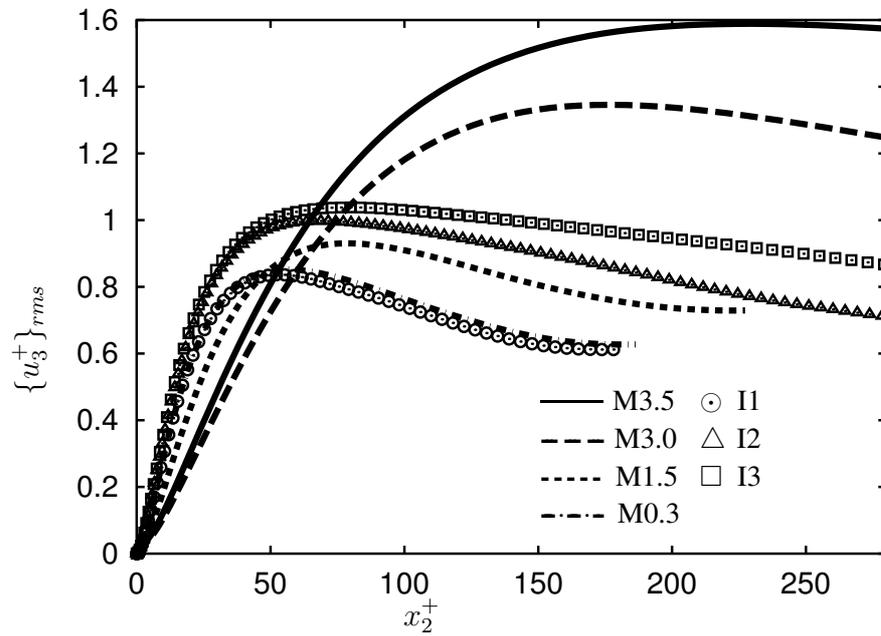


Abbildung 3.23: Profil von  $\{u_3\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau$  über  $x_2^+$ .

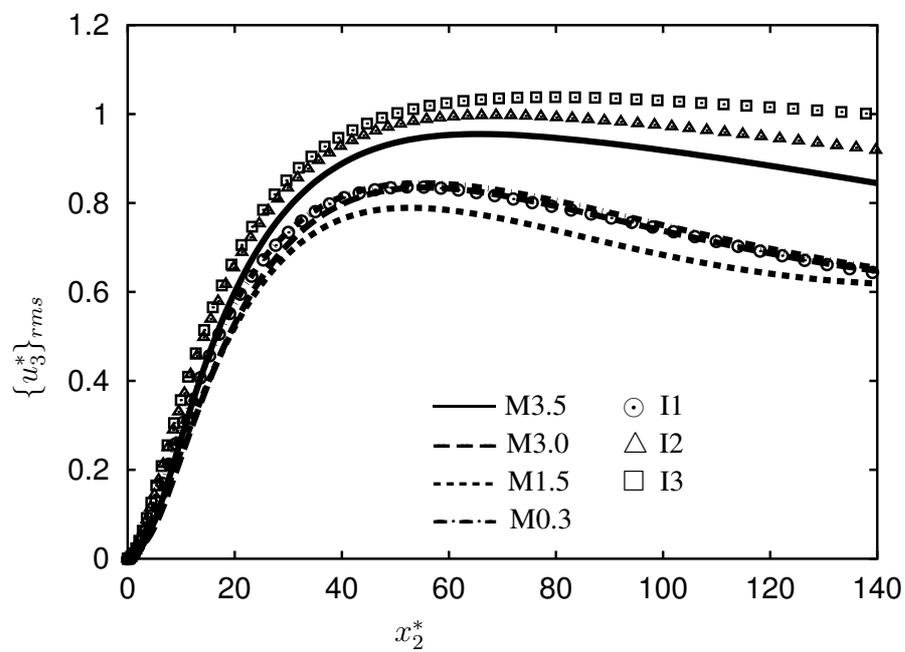


Abbildung 3.24: Profil von  $\{u_3\}_{rms}$  normiert mit  $u_\tau^*$  über  $x_2^*$ .

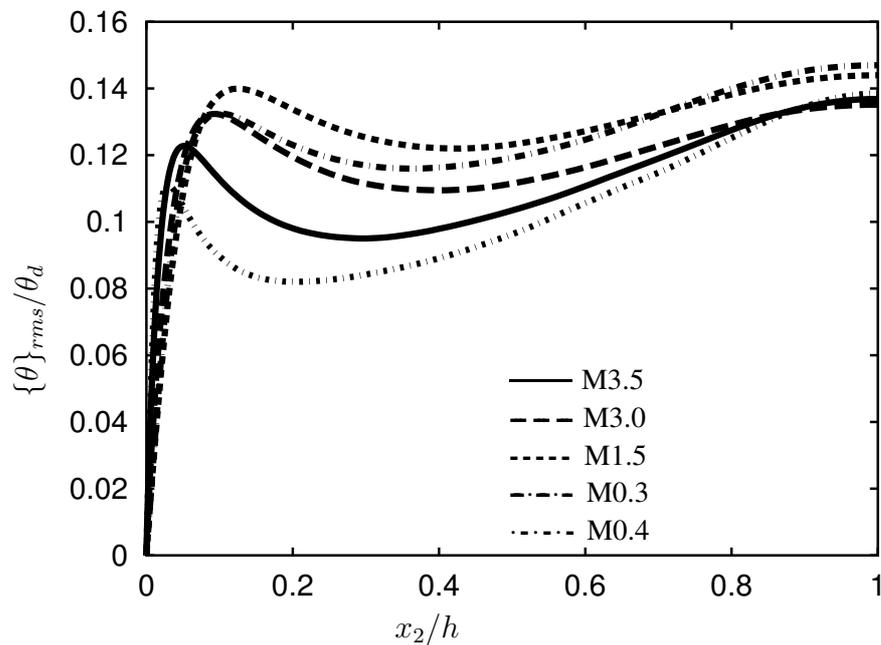


Abbildung 3.25: Profil von  $\{\theta\}_{rms}$  normiert mit  $\theta_c - \theta_w$ , aufgetragen über  $x_2/h$

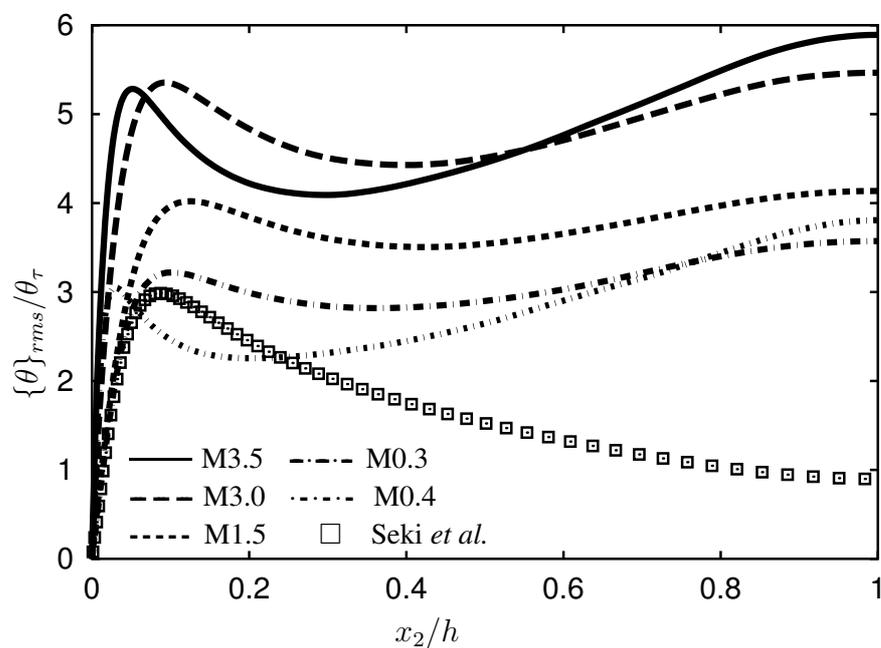


Abbildung 3.26: Profil von  $\{\theta\}_{rms}$  normiert mit  $\theta_\tau$ , aufgetragen über  $x_2/h$ . In der Simulation von Seki *et al.* (inkompressible Kanalströmung mit  $Re_\tau = 180$ ) wurde ein konstanter Skalarfluss als Wandrandbedingung verwendet.

3.26 bestätigt dieses Ergebnis. Interessant ist, dass die Skalarvarianz in einer Couette-Strömung, mit konstanter Skalardifferenz an den Wänden, einen höheren Wert in der Kanalmitte besitzt als die Varianz in den Fällen mit konstanten Skalarflussrandbedingungen. Es wird in ersterem Fall allerdings kein Maximum in der Kanalmitte eingenommen (Seki *et al.* (2003) und Literaturangaben, Debusschere & Rutland (2004)), im Gegensatz zu den Kanalströmungen. Debusschere & Rutland (2004) erklären diesen Unterschied mit einer höheren Produktion in der Bilanz der Skalarvarianz in Kanalströmungen, da der mittlere Skalargradient dort in etwa doppelt so hoch ist, wie in Couetteströmungen. Für Strömungen mit konstantem Wandwärmestrom ist die Produktion in der Kanalmitte jedoch Null, trotzdem findet man endliche Werte für die Skalarvarianz vor. Um der Sache genauer auf den Grund zu gehen, wird die Transportgleichung für die turbulenten Skalarfluktuationen betrachtet,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \theta''}{\partial t} + \rho \tilde{u}_j \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j'' \theta''}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{\mu}}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} \right) = \\ - \rho' \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_j} - \rho u_j'' \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_j} + \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu' \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Wird, wie im inkompressiblen Fall von Hamba (2004) durchgeführt, eine Greenfunktion  $g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  definiert, dann gilt

$$\begin{aligned} \theta''(\mathbf{x}, t) = - \int d\mathbf{x}' \int_0^t dt' g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \left\{ \rho(\mathbf{x}', t')' \tilde{u}_j(\mathbf{x}', t') \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_j'}(\mathbf{x}', t') + \rho u_j'' \frac{\partial \tilde{\Theta}(\mathbf{x}', t')}{\partial x_j'} \right. \\ \left. - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial x_j'} \left( \frac{\mu'(\mathbf{x}', t')}{Sc} \frac{\partial \tilde{\Theta}(\mathbf{x}', t')}{\partial x_j'} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

mit der Bestimmungsgleichung für die Greenfunktion

$$\rho \frac{\partial g}{\partial t} + \rho \tilde{u}_j \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j'' g}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{\mu}}{Sc} \frac{\partial g}{\partial x_j} \right) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (3.23)$$

$g$  erfüllt dieselben Randbedingungen wie die Skalarfluktuationen, Periodizität in der  $x_1, x_3$ -Richtung und  $g = 0$  an der Wand. Die Form der Randbedingungen geht damit allenfalls indirekt in die Skalarfluktuationen über die mittleren Skalargradienten ein, da die Quellterme in Gleichung 3.22 an der Wand keine Beiträge liefern (die Fluktuationen sind Null). Ausnutzung der homogenen Richtungen liefert für den RMS-Wert

$$\begin{aligned} \{\theta''\}_{rms}^2 = \int d\mathbf{x}' \int d\mathbf{x}'' \int dt' \int dt'' \overline{g(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') g(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}'', t'')} \\ \times \left\{ \rho u_2'' \frac{\partial \tilde{\Theta}(x_2')}{\partial x_2'} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial x_2'} \left( \mu'(\mathbf{x}', t') \frac{\partial \tilde{\Theta}(x_2')}{\partial x_2'} \right) \right\} \\ \times \left\{ \rho u_2'' \frac{\partial \tilde{\Theta}(x_2'')}{\partial x_2''} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial x_2''} \left( \mu'(\mathbf{x}'', t'') \frac{\partial \tilde{\Theta}(x_2'')}{\partial x_2''} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

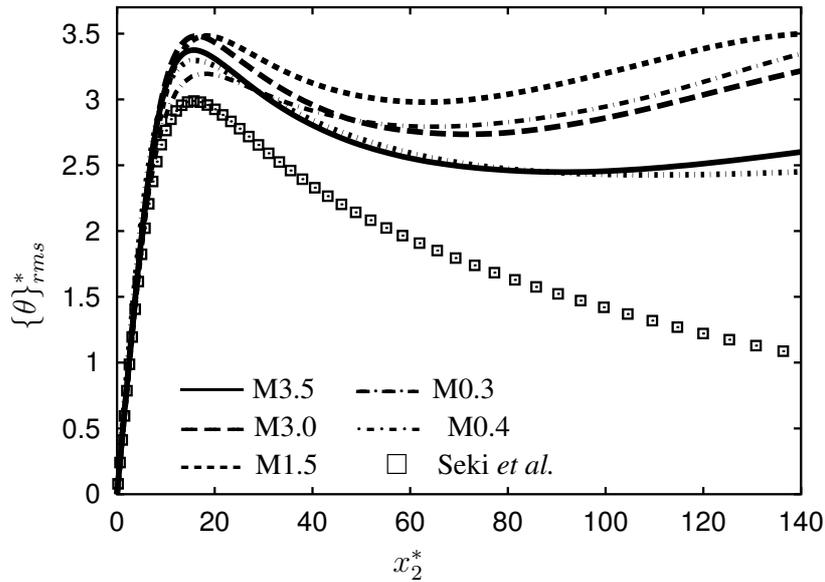


Abbildung 3.27:  $\{\theta\}_{rms}^*$  normiert mit  $\chi_w/u_\tau^*/\bar{\rho}$ , aufgetragen über  $x_2^*$ .

Die Analyse von Hamba (2004) zeigt, dass die Integrale über die Greenfunktion ein Maximum bei  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$  liefern und anschliessend zu beiden Seiten scharf abfallen. Für den Fall von konstanten viskosen Skalarflüssen als Randbedingung ist der mittlere Skalargradient in der Kanalmitte Null und in unmittelbarer Umgebung nur von geringem Wert (Seki *et al.* (2003)). Dies erklärt, warum  $\{\theta''\}_{rms}$  zur Mitte abfällt, aber nicht verschwindet, da die Nichtlokalität in Form von Gleichung (3.24) einen Beitrag liefert. Der Skalargradient der in dieser Arbeit gerechneten Fälle ist über den gesamten Kanal ungleich Null, liefert also höhere Beiträge zum Integral als im Fall mit konstanten viskosen Skalarflüssen als Randbedingung. Eine genaue Aussage darüber, warum die Fluktuationen in der Kanalmitte ein Maximum aufweisen, kann allerdings nur nach Lösung der Bestimmungsgleichung für die Greenfunktion gemacht werden und wird in dieser Arbeit nicht durchgeführt. Die Nichtlokalität zeigt jedoch, dass es unmöglich ist, eine Normierung, bestehend aus konstanten oder lokalen Größen zu finden, die die inkompressiblen und kompressiblen RMS-Werte aufeinander abbildet. Interessant ist, dass Viskositäts- und Dichteveränderungen einmal in die Greenfunktion direkt einfließen und zum anderen über den Quellterm wirken. Der Anstieg der Skalarfluktuationen mit steigender Machzahl (siehe Abbildung 3.26) sollte deshalb durch Benutzung einer semilokalen Normierung  $\theta_\tau^* = \chi_w/(\bar{\rho}u_\tau^*)$  in Wandnähe deutlich reduziert werden. Abbildung 3.27 zeigt die RMS-Werte des Skalars nach Normierung mit  $\theta_\tau^*$ , die in der viskosen Unterschicht eine hervorragende Übereinstimmung mit den inkompressiblen Fällen aufweisen. Der große Unterschied in den Niveaus der wandnahen Extrema ist stark verkleinert, für grössere  $x_2^*$ -Werte erkennt man ausserdem, wie für die Geschwindigkeitsfluktuationen, einen Reynoldszahleffekt in dieser Auftragung.

### 3.3 Turbulente Spannungen und Skalarflüsse

In diesem Kapitel wollen wir die turbulenten Spannungen und Skalarflüsse und deren Skalierungen untersuchen. Aus den gemittelten Transportgleichungen für die Geschwindigkeit  $u_1$  und den Skalar,

$$\begin{aligned}\bar{\mu} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} - \overline{\rho u_1'' u_2''} &= \tau_w \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) \\ \frac{\bar{\mu}}{Sc} \frac{d\bar{\Theta}}{dx_2} - \overline{\rho u_2'' \theta''} &= \chi_w,\end{aligned}\tag{3.25}$$

folgt, dass die Scherspannung im vollturbulenten Bereich des Kanals mit  $\tau_w$  und der wandnormale Skalarfluss mit  $\chi_w$  skalieren sollten. Es liegt nahe, diese Skalierung auch auf die spannweitigen und wandnormalen Komponenten anzuwenden. Die Abbildungen 3.28 bis 3.31 bestätigen  $\tau_w$  als die korrekte Skalierung der turbulenten Spannungen, *unabhängig* von der Mach- und Reynoldszahl. Auch die Stromabkomponente des Skalarflusses, zu sehen in Abbildung 3.32, zeigt eine gute Übereinstimmung der Kurven im Mittenbereich des Kanals. Beim wandnormalen Skalarfluss dagegen, zu sehen in Abbildung 3.33, macht sich der Einfluss des diffusiven Skalarflusses  $-\frac{\bar{\mu}}{Sc} \frac{d\bar{\Theta}}{dx_2}$  bemerkbar. Man erkennt keine Übereinstimmung der Daten in der Kanalmitte. Für genügend große Reynoldszahlen und damit geringeren Einfluss der Viskosität, sowie der Voraussetzung von Schmidtzahlen  $\gg 1$ , kann dagegen ein universelles Verhalten des turbulenten Skalarflusses erwartet werden.

Eine genaue Betrachtung der turbulenten Spannungen und Skalarflüsse erweckt den Eindruck, dass die Beträge der Extrema in Wandnähe der Stromabkomponenten mit steigender Machzahl anwachsen, die Beträge der spannweitigen und wandnormalen Komponenten dagegen gedämpft werden. Da die lokale Reynolds- und Machzahl für die verschiedenen Fälle, wie oben gezeigt, stark über  $x_2$  variieren, muss zur genaueren Untersuchung eine Betrachtung in semilokalen Koordinaten durchgeführt werden, um die Dichte- und Viskositätseffekte zu berücksichtigen. Idealerweise sollten die Unterschiede zwischen den kompressiblen und inkompressiblen Fällen durch diese Skalierung reduziert und Machzahleffekte deutlich werden. Dazu sind in Abbildung 3.34 die lokale Reynoldszahl  $Re_\tau^*$  und in den Abbildungen 3.35 bis 3.44 die turbulenten Spannungen und Skalarflüsse als Funktion von  $x_2^*$  zu sehen. Die Normierung der turbulenten Spannungen unter Verwendung semilokaler Grössen stimmt, aufgrund von  $\bar{\rho}(u_\tau^*)^2 = \tau_w$ , mit der für den inneren Bereich des Kanals verwendeten Normierung überein. Gleichzeitig sieht man in Abbildung 3.34, dass die lokale Reynoldszahl für die Fälle M3.0 und M0.3 für  $x_2^* > 25$  identisch ist, bei einer sich stark verändernden lokalen Machzahl (Abbildung 3.4). Die Fälle M3.5 und M3.0 weisen dagegen nach Abbildung 3.4 fast den gleichen Machzahlverlauf auf, jedoch einen stark unterschiedlichen Reynoldszahlverlauf. Diese Beobachtung macht es uns möglich, zwischen den Mach- und Reynoldzahleffekten in den turbulenten Spannungen und Skalarflüssen zu unterscheiden. Wie aus den Abbildungen 3.35 bis 3.38, durch Vergleich der inkompressiblen Simulationen

und der Fälle M3.5 und M3.0 ersichtlich ist, liegen die Absolutwerte der Komponenten der turbulenten Spannungen, normiert mit  $\tau_w$ , mit steigender Reynoldszahl über denjenigen mit niedrigerer Reynoldszahl. Gleichzeitig erkennt man, dass trotz niedrigerer lokaler Reynoldszahlen der kompressiblen Fälle für die  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Komponente im Bereich  $10 < x_2^* < 40$ , die Maximalwerte deutlich über denen der inkompressiblen Simulationen liegen, ein klarer Machzahleffekt! Betrachtet man stattdessen die spannweitigen und wandnormalen Komponenten im Bereich  $x_2^* < 40$ , dann kommt man durch Vergleich der Fälle M3.0 und M0.3 zu dem Ergebnis, dass, obwohl die lokale Reynoldszahl von Fall M3.0 zur Wand hin steigt, die Profile unterhalb derer von Fall M0.3 liegen, wiederum ein deutlicher Machzahleffekt. Für die Schubspannungskomponente scheinen sich die Reynolds- und Machzahleffekte gerade aufzuheben. Man sieht ausserdem, dass für alle Komponenten in der semilokalen Auftragung für  $x_2^* > 40$  keine Machzahleffekte, sondern ausschliesslich Reynoldzahleffekte auftreten, in Analogie zu den drei inkompressiblen Simulationen. Damit ist eindeutig gezeigt, dass durch die mit steigender Machzahl an Bedeutung gewinnenden variablen Fluideigenschaften, die Anisotropie der turbulenten Spannungen geändert wird: Stromabkomponenten werden angeregt, spannweitige und wandnormale Komponenten werden gedämpft. Die Komponenten des Anisotropietensors

$$b_{ij} = \frac{\overline{\rho u_i'' u_j''}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (3.26)$$

in den Abbildungen 3.39 bis 3.41, bestätigen diese Behauptung. Man sieht für die Normalkomponenten im Bereich  $x_2^* > 30$  bei Vergleich von Fall M0.3 und M3.0 eine Zunahme der Anisotropie mit steigender Machzahl, gleichzeitig zeigt sich bei Vergleich von Fall M3.0 und M3.5 ein Absinken der Anisotropie mit steigender Reynoldszahl. Dieser Reynoldzahleffekt existiert sowohl für die inkompressiblen, als auch für die kompressiblen Fälle. Im Bereich  $x_2^* < 30$  zeigt beispielsweise der Vergleich von Fall M3.5 mit I3, dass trotz einer höheren lokalen Reynoldszahl als im inkompressiblen Fall, die Anisotropie steigt. Die Komponente  $b_{12}$  zeigt genau das entgegengesetzte Verhalten zu den Normalkomponenten. Man erkennt also, dass die Turbulenzstruktur durch den Effekt der variablen Fluideigenschaften stark verändert wird. Um die Ursache für dieses Verhalten herauszufinden, ist die Analyse der Bilanzen der Reynoldsspannungen erforderlich, ein Punkt der im nächsten Kapitel in Angriff genommen wird.

Inwieweit hat die Änderung der Anisotropie nun Auswirkungen auf den passiven Skalar? Aus den Abbildungen 3.43 und 3.44 lassen sich nun ähnliche Schlussfolgerungen für die turbulenten Skalarflüsse ziehen, wie für die turbulenten Spannungen: Die innere Skalierung der turbulenten Skalarflüsse erfolgt wiederum mit  $\chi_w$ , da bei Verwendung semilokaler Grössen gilt:  $\overline{\rho u_\tau^* \theta_\tau^*} = \overline{\rho u_\tau^*} \chi_w / (\overline{\rho u_\tau^*}) = \chi_w$ . Wiederum erkennt man hier dasselbe Verhalten wie für  $\{\theta\}_{RMS}$ , nämlich eine Reduktion des Betrags des wandnahen Extremums mit steigender  $Re_\tau$  (vergleiche Fälle M3.0 und M3.5 oder M0.3 und M0.4). Gleichzeitig tritt ein den Reynoldzahleffekt deutlich überwiegender Machzahleffekt auf. Dies wird in dem starken Anstieg des Betrags des Extremums von Fall M3.0

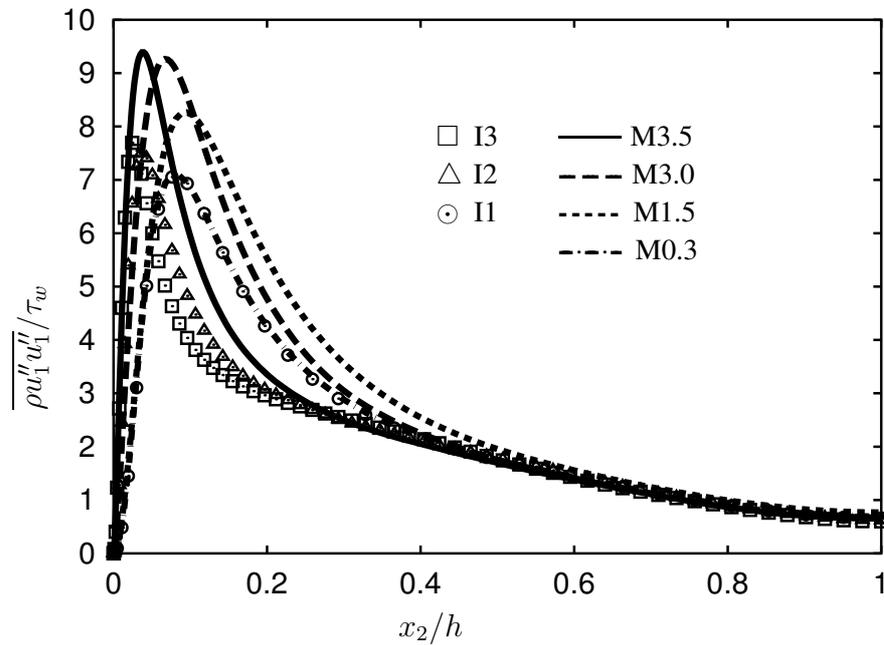


Abbildung 3.28: Äussere Skalierung der turbulenten Spannung  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ .

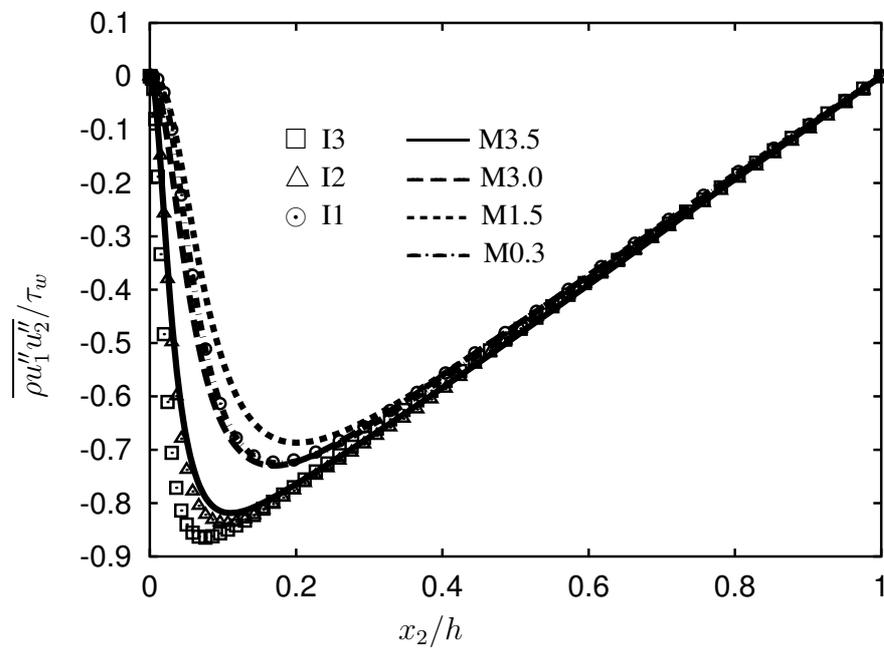


Abbildung 3.29: Äussere Skalierung der turbulenten Spannung  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ .

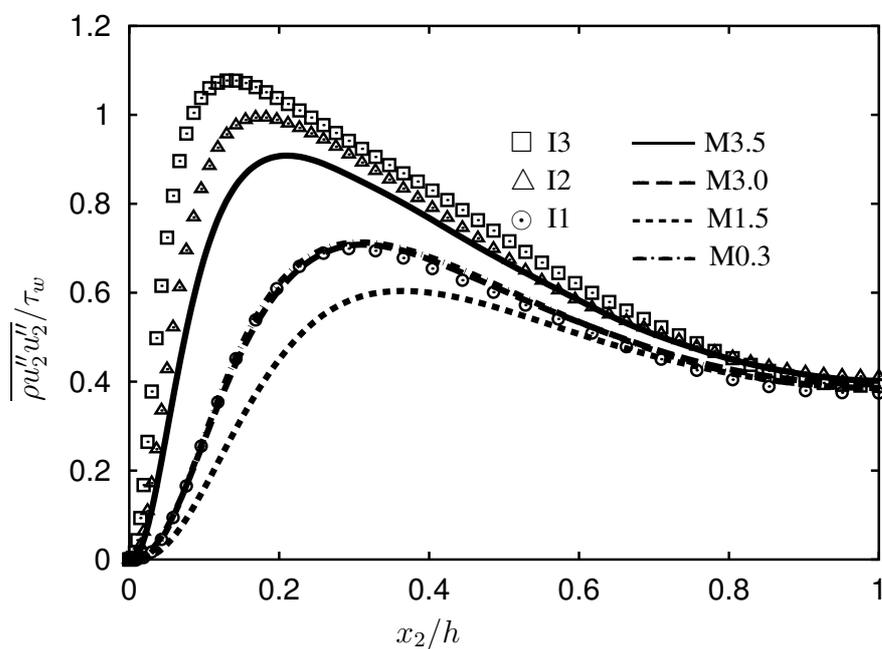


Abbildung 3.30: Äussere Skalierung der turbulenten Spannung  $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ .

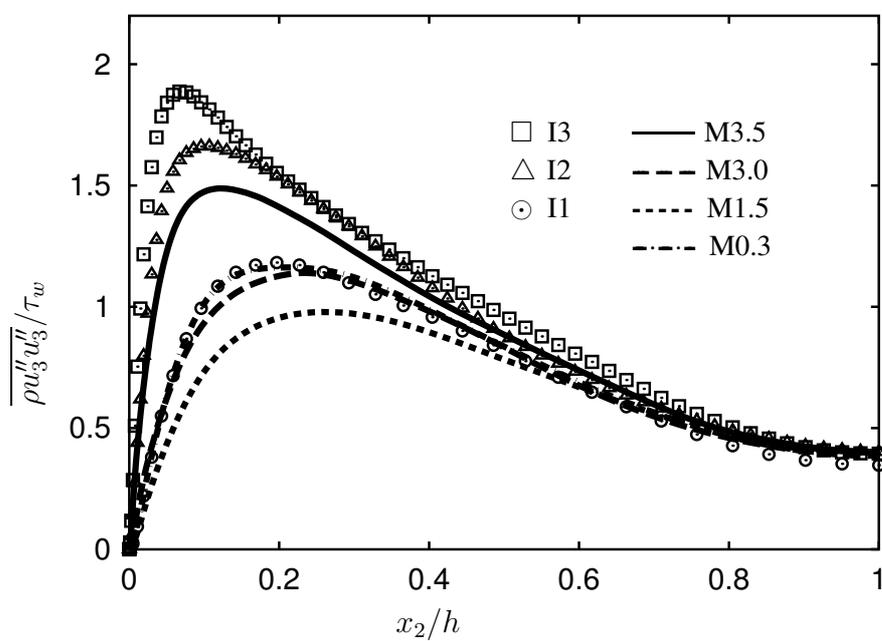


Abbildung 3.31: Äussere Skalierung der turbulenten Spannung  $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ .

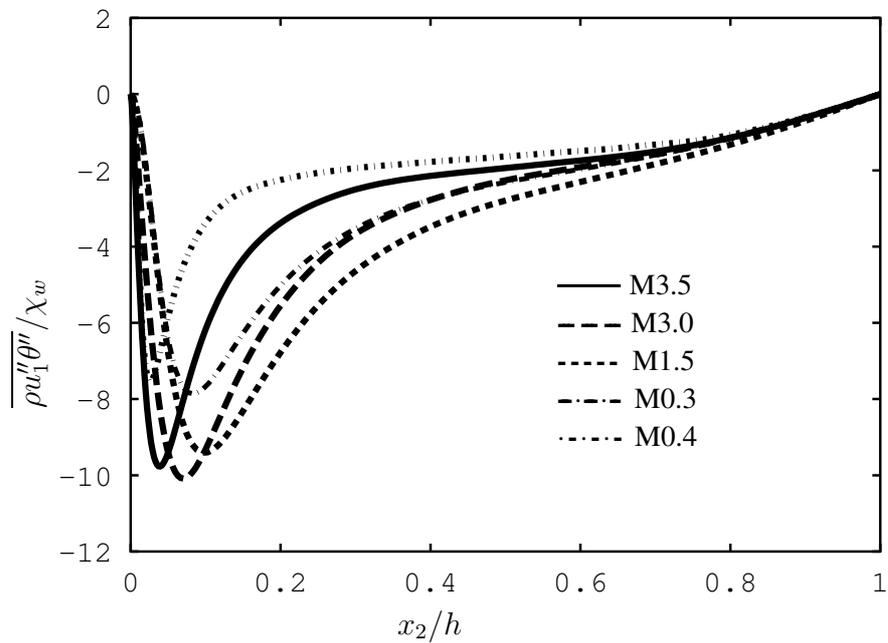


Abbildung 3.32: Äussere Skalierung des stromabgerichteten turbulenten Skalarflusses  $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ .

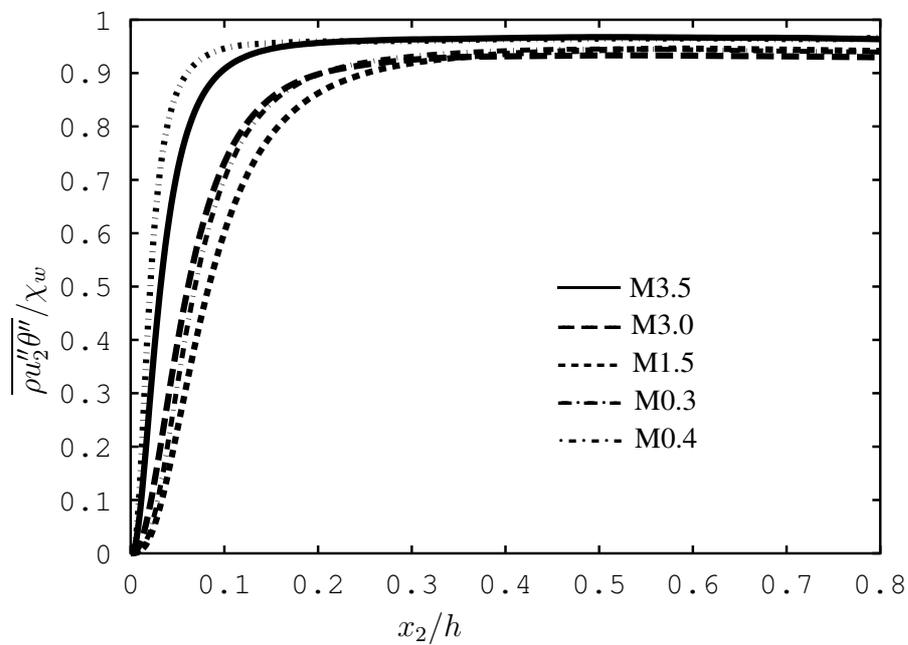


Abbildung 3.33: Äussere Skalierung des wandnormalen turbulenten Skalarflusses  $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ .

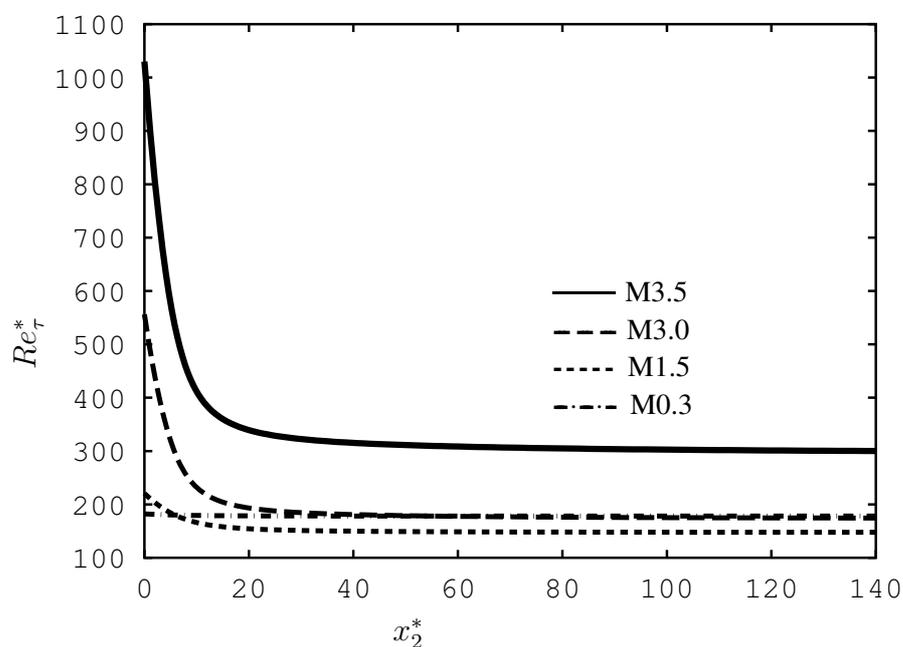


Abbildung 3.34: Variation der lokalen Reynoldszahl  $Re_\tau^* = \bar{\rho} u_\tau^* h / \bar{\mu}$ .

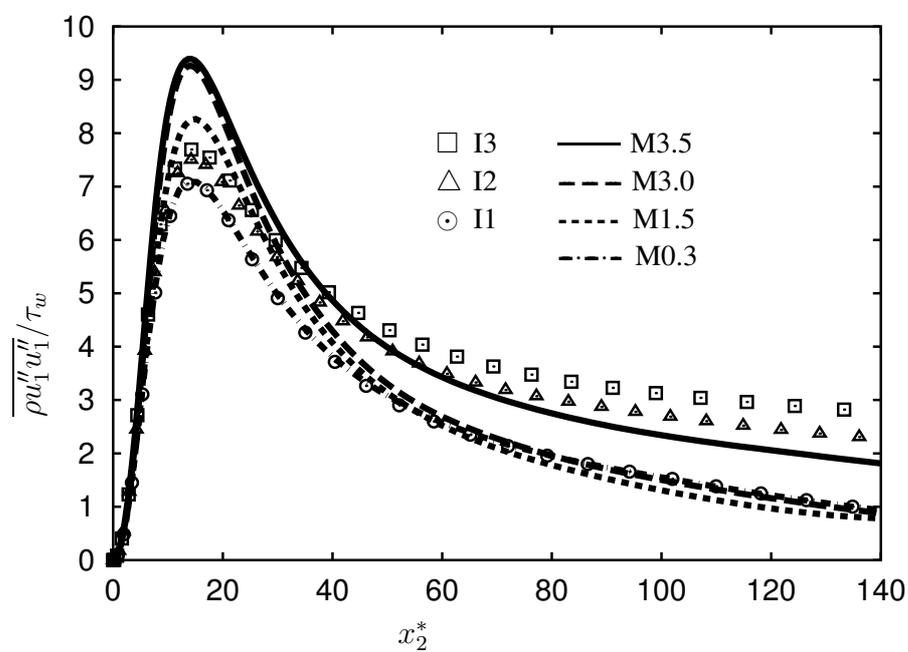


Abbildung 3.35: Innere Skalierung der turbulenten Spannung  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ .

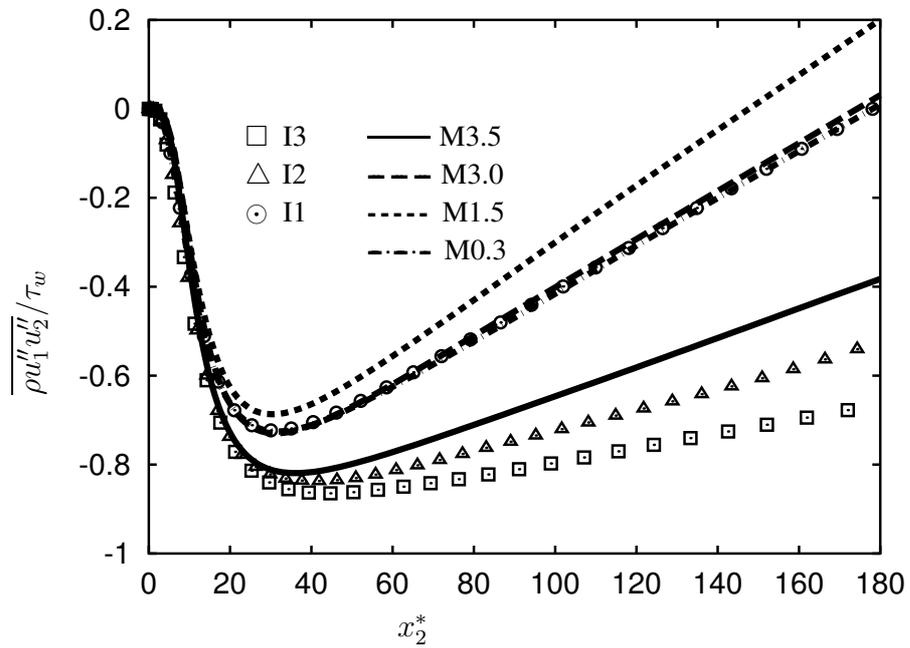


Abbildung 3.36: Innere Skalierung der turbulenten Spannung  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ .

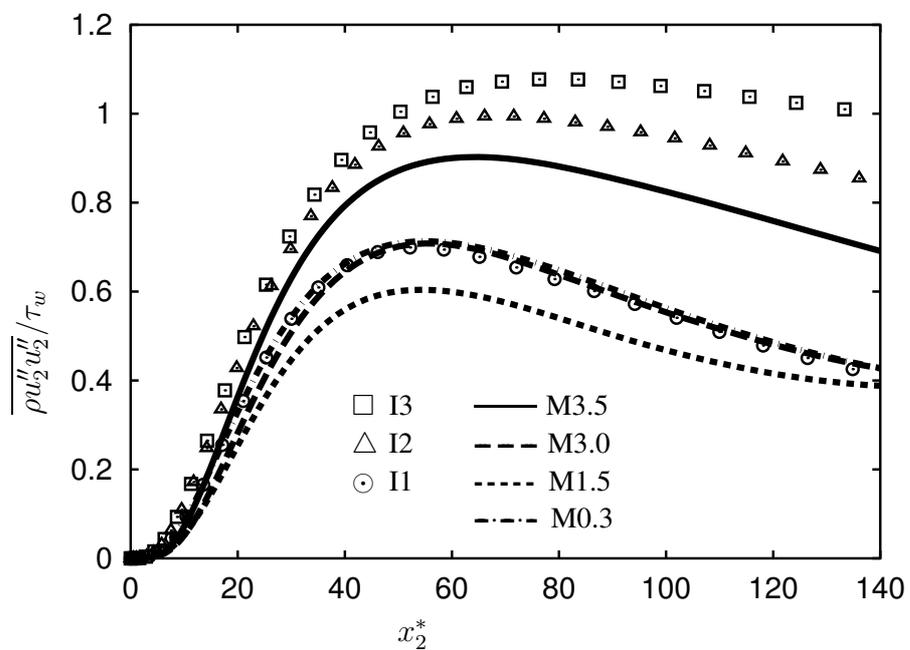


Abbildung 3.37: Innere Skalierung der turbulenten Spannung  $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ .

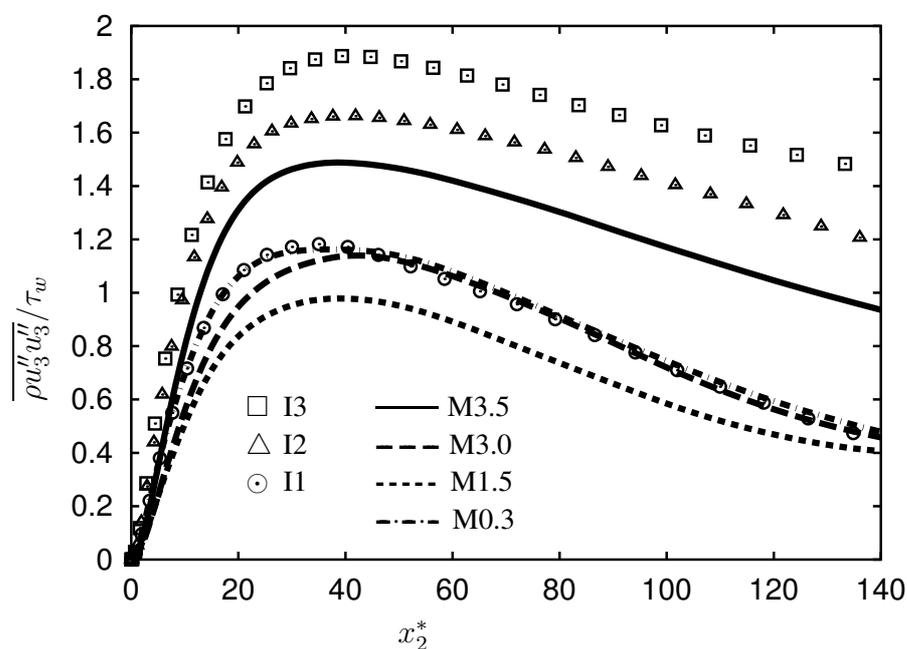


Abbildung 3.38: Innere Skalierung der turbulenten Spannung  $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ .

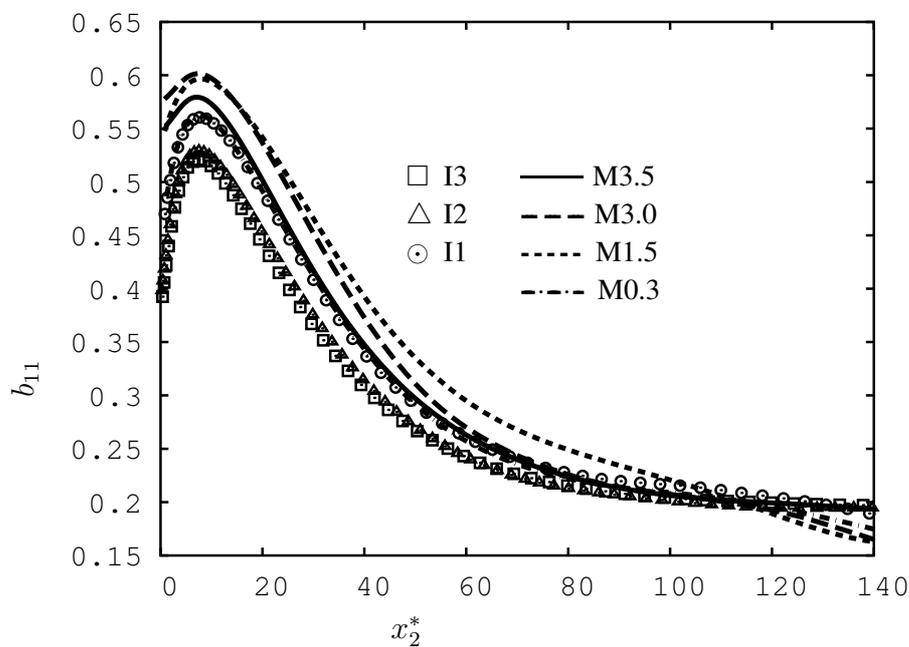
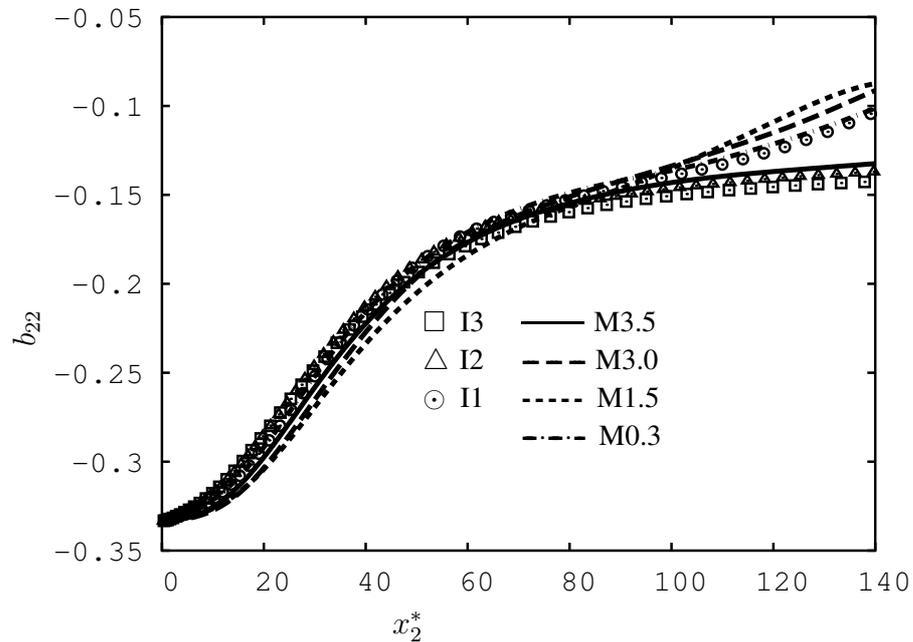
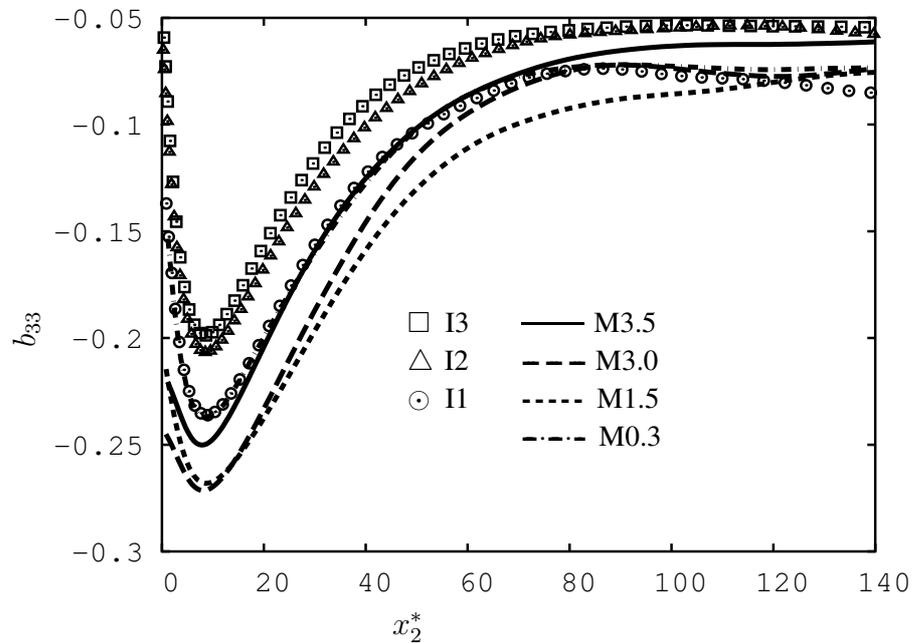


Abbildung 3.39: Komponente  $b_{11}$  des Anisotropietensors (3.26) für die kompressiblen Fälle, im Vergleich zu den Ergebnissen von Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 3.40:** Komponente  $b_{22}$  des Anisotropietensors (3.26) für die kompressiblen Fälle, im Vergleich zu den Ergebnissen von Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 3.41:** Komponente  $b_{33}$  des Anisotropietensors (3.26) für die kompressiblen Fälle, im Vergleich zu den Ergebnissen von Moser *et al.* (1999).

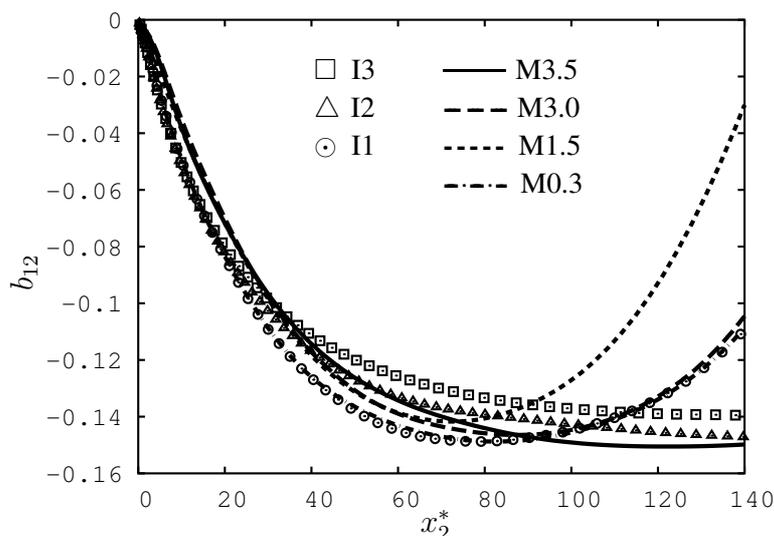


Abbildung 3.42:  $b_{12}$  aus Gleichung (3.26). Vergleich mit der DNS von Moser *et al.* (1999).

gegenüber Fall M0.3 deutlich, trotz der zur Wand hin steigenden lokalen Reynoldszahl, die diesem Anstieg entgegenwirkt. Im Gegensatz zur wandnormalen turbulenten Spannung erkennt man für  $\overline{\rho u_2'' \theta''} / \chi_w$  in der semilokalen Darstellung kaum einen Unterschied der Kurven in Wandnähe für  $x_2^* < 20$ . Der Grund hierfür ist der diffusive Skalarfluss in Gleichung (3.25), der mit steigender Machzahl den Term  $\overline{\rho u_2'' \theta''} / \chi_w$  reduziert. Die semilokale Auftragung berücksichtigt die Effekte der Dichte- und Viskositätsänderungen, so dass die Kurven unabhängig von Machzahleffekten aufeinanderfallen. Dieser Effekt wird aber gerade in der semilokalen Auftragung erfasst und damit rückgängig gemacht. Für  $x_2^* > 20$  kann ein schwacher Machzahleffekt bei Vergleich von Fall M0.3 und M3.0 ausgemacht werden, der sich in einer Reduktion des wandnormalen turbulenten Skalarflusses äussert. Die Anisotropie zeigt sich damit auch in den turbulenten Skalarflüssen: in einer Vergrößerung der Stromab- und einer Reduktion der wandnormalen Komponenten.

## 3.4 Skalar-und Geschwindigkeitskorrelationen

### 3.4.1 Korrelationskoeffizienten

Das in Wandnähe ähnliche Verhalten der stromabgerichteten Komponenten der turbulenten Spannungen und Skalarflüsse impliziert eine starke Korrelation zwischen den Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung und den Skalarfluktuationen. Abbildung 3.45 zeigt die Kreuzkorrelation (Korrelationskoeffizient) zwischen  $u_1'$  und  $\theta'$ ,

$$R_{u_1\theta} = \frac{\overline{u_1' \theta'}}{\{u_1\}_{rms} \{\theta\}_{rms}}, \quad (3.27)$$

und bestätigt diese Vermutung. In Wandnähe nimmt die Kreuzkorrelation einen Maximalwert von nahezu 1 an, bevor aufgrund der Antisymmetrie des turbulenten Skalarflusses in der Kanalmitte der Wert Null erreicht wird. Im Bereich  $0.1 < x_2/h < 0.4$  erkennt

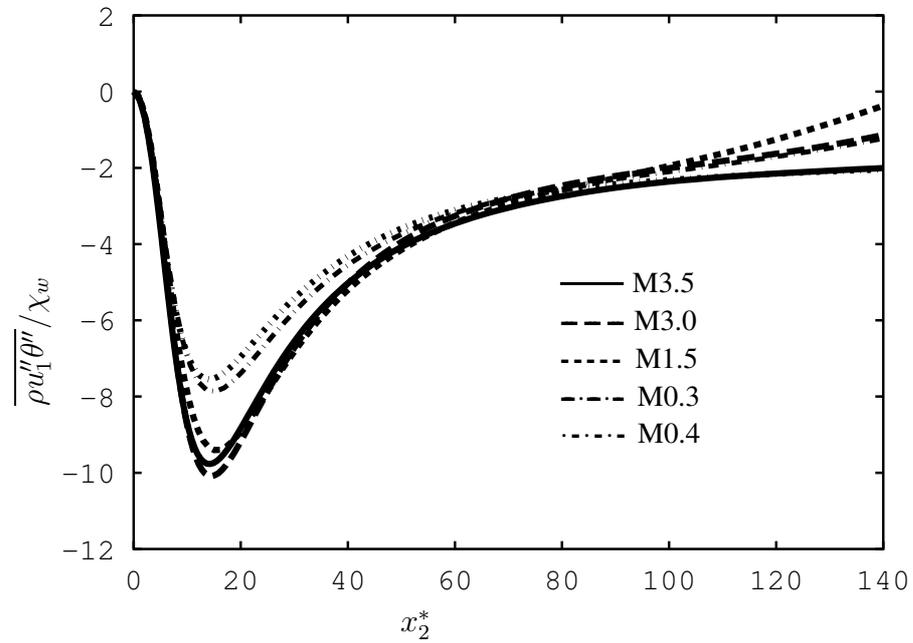


Abbildung 3.43: Innere Skalierung des stromabgerichteten turbulenten Skalarflusses  $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ .

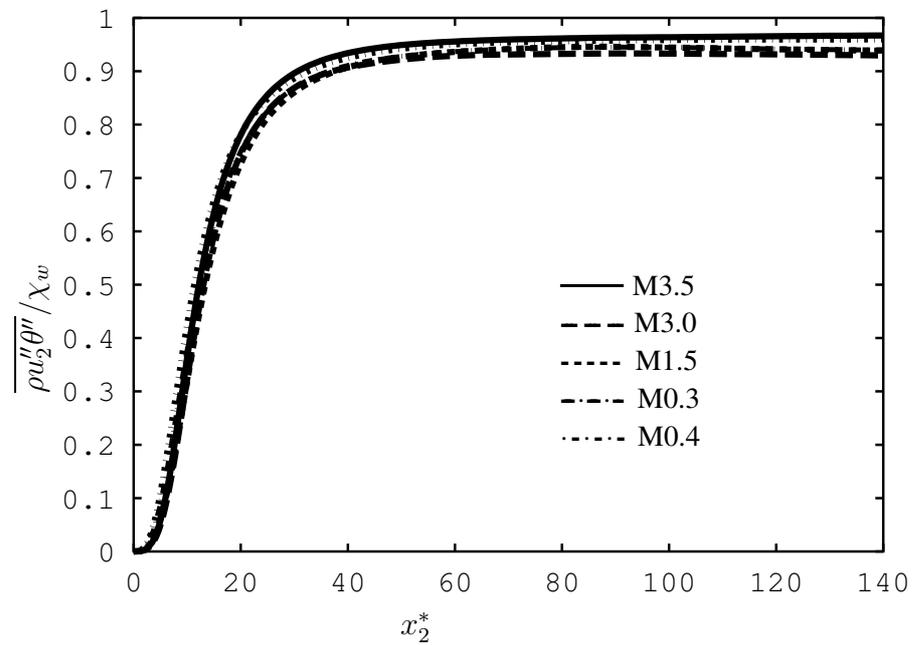


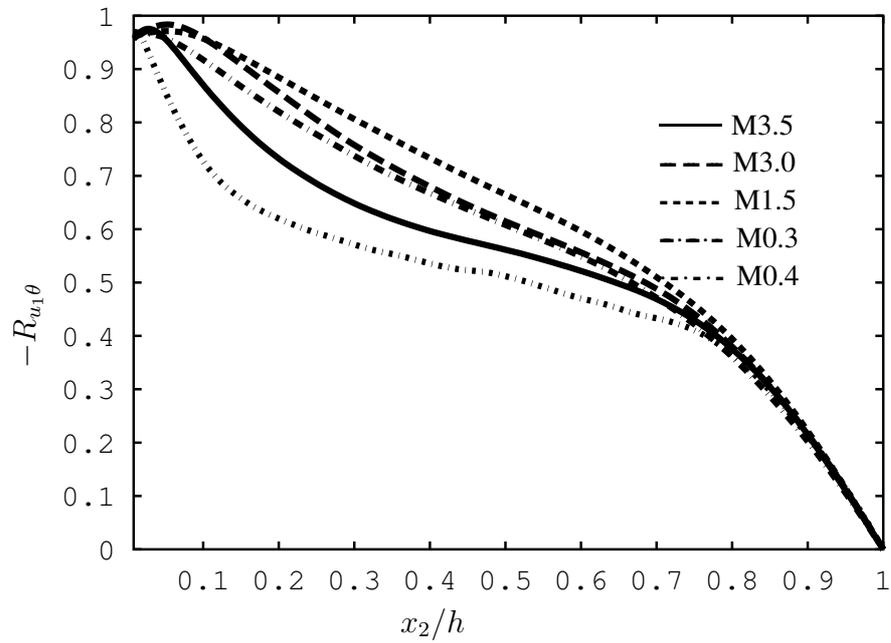
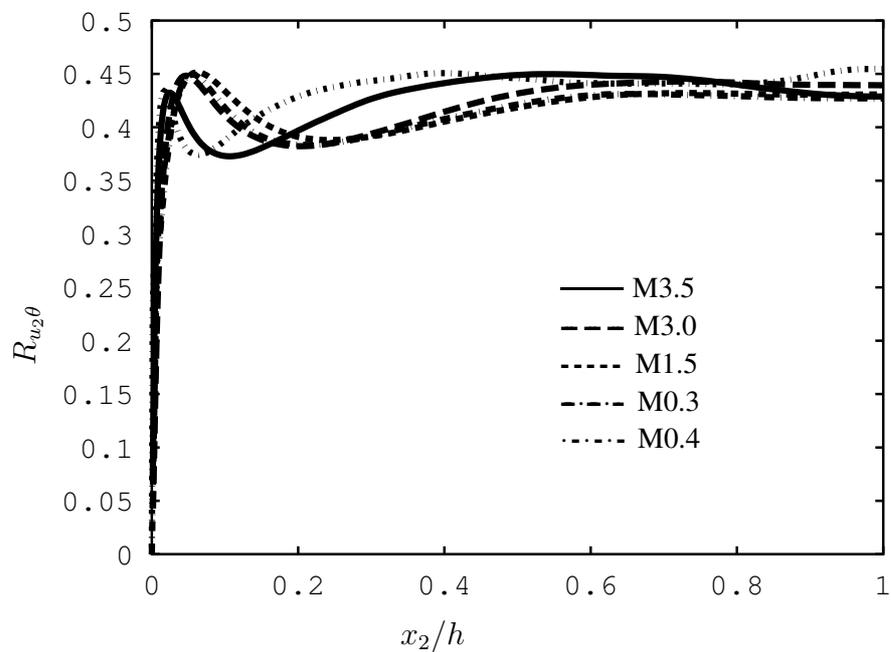
Abbildung 3.44: Innere Skalierung des wandnormalen turbulenten Skalarflusses  $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ .

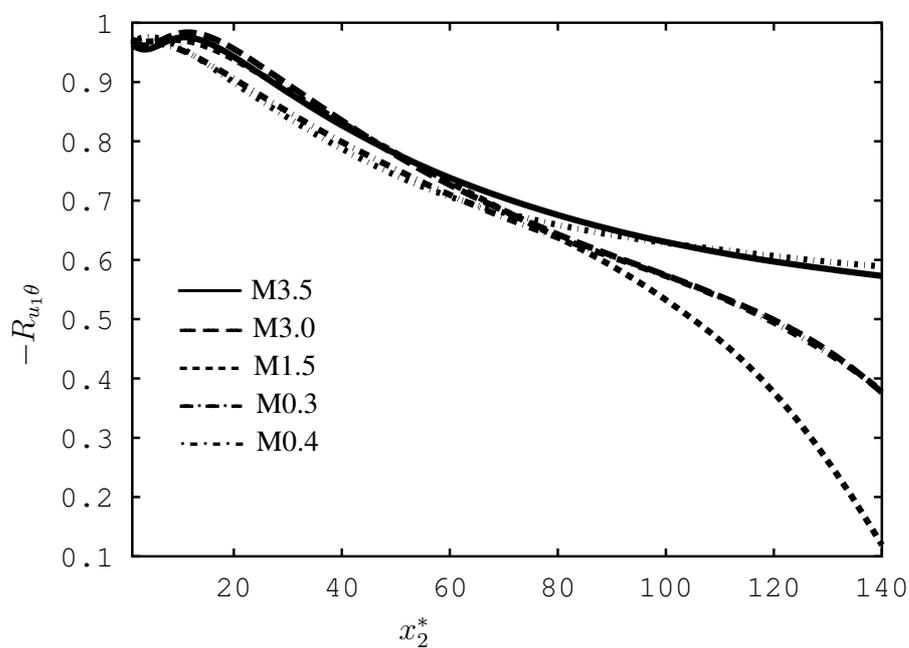
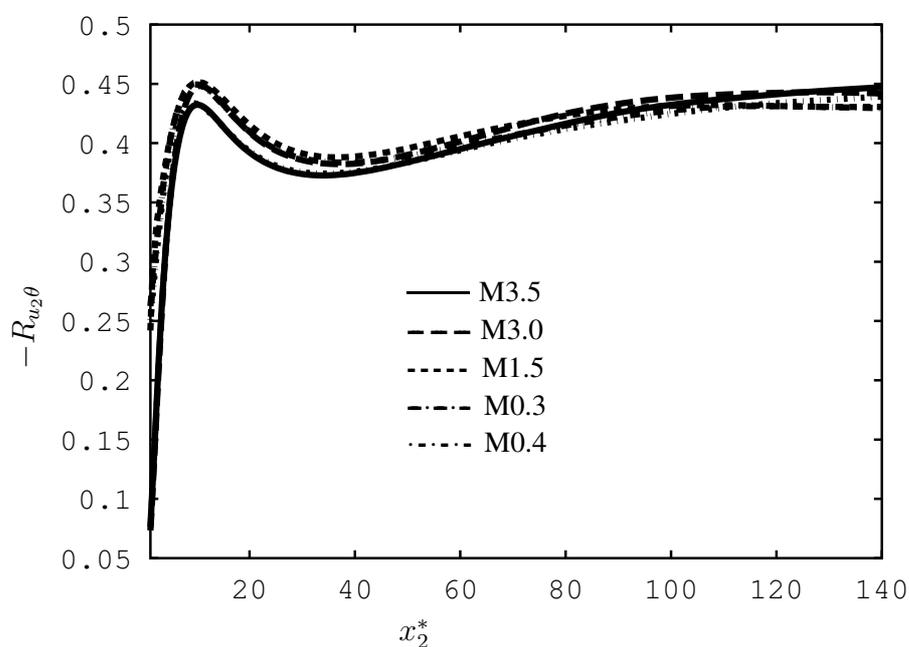
man deutlich eine Reduktion der Kreuzkorrelation mit steigender Reynoldszahl. Dasselbe Verhalten wurde auch von Seki *et al.* (2003) für inkompressible Kanalströmungen mit Skalartransport beobachtet. Gleichzeitig steigt die Kreuzkorrelation mit größer werdender Machzahl in diesem Bereich, wie man durch Vergleich von Fall M3.0 und M0.3 leicht erkennen kann. Eine Auftragung über  $x_2^*$  (Abbildung 3.47) bestätigt die Beobachtung im Bereich  $x_2^* < 60$ . Der in der Auftragung über  $x_2/h$  zu beobachtende große Unterschied ist in der semilokalen Auftragung aufgrund der unterschiedlichen Streckung der  $x_2^*$  Koordinate in Wandnähe stark reduziert und deutet damit auf einen durch die variablen Fluideigenschaften verursachten Effekt hin.

Die Kreuzkorrelation zwischen der wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuation  $u_2'$  und  $\theta'$  (Abbildung 3.46) weist ein Maximum in Wandnähe auf, welches mit steigender Reynoldszahl näher zur Wand rückt. Zur Kanalmitte hin steigt die Kreuzkorrelation, nach kurzzeitigem Absinken vom wandnahen Maximum weg, wieder an. Sowohl in der Auftragung über  $x_2/h$  als auch in der semilokalen Koordinatendarstellung ist kein Machzahleffekt zu erkennen (Abbildung 3.48). Es ist allerdings denkbar, dass sich die Effekte, die einerseits zu einer Reduktion des Korrelationskoeffizienten aufgrund einer steigenden lokalen Reynoldszahl (vergleiche Fälle M3.0 mit M3.5 und M0.3 mit M0.4), andererseits zu einem Anstieg aufgrund der höheren Machzahl führen (beispielsweise Fall M3.0 gegenüber M0.3), gerade aufheben. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass sich die Korrelationskoeffizienten nur schwach mit steigender Machzahl verändern, ganz im Gegensatz zu den Simulationen einer kompressiblen axisymmetrischen Mischungsschicht von Freund (1997). Seine Simulationen zeigten große Veränderungen der Korrelationskoeffizienten, wobei  $R_{u_1\theta}$  mit größer werdender konvektiver Machzahl anstieg die anderen Korrelationskoeffizienten dagegen abnahmen. Die Trends in den hiesigen Simulationen und denen von Freund (1997) sind jedoch gleich. Die hohe Korrelation in Wandnähe, zwischen der Stromabkomponente der Geschwindigkeitsfluktuationen und den Skalarfluktuationen, deutet auf ein ähnliches Verhalten der turbulenten Strukturen in Wandnähe hin und wird im folgenden näher untersucht.

### 3.4.2 Streaks

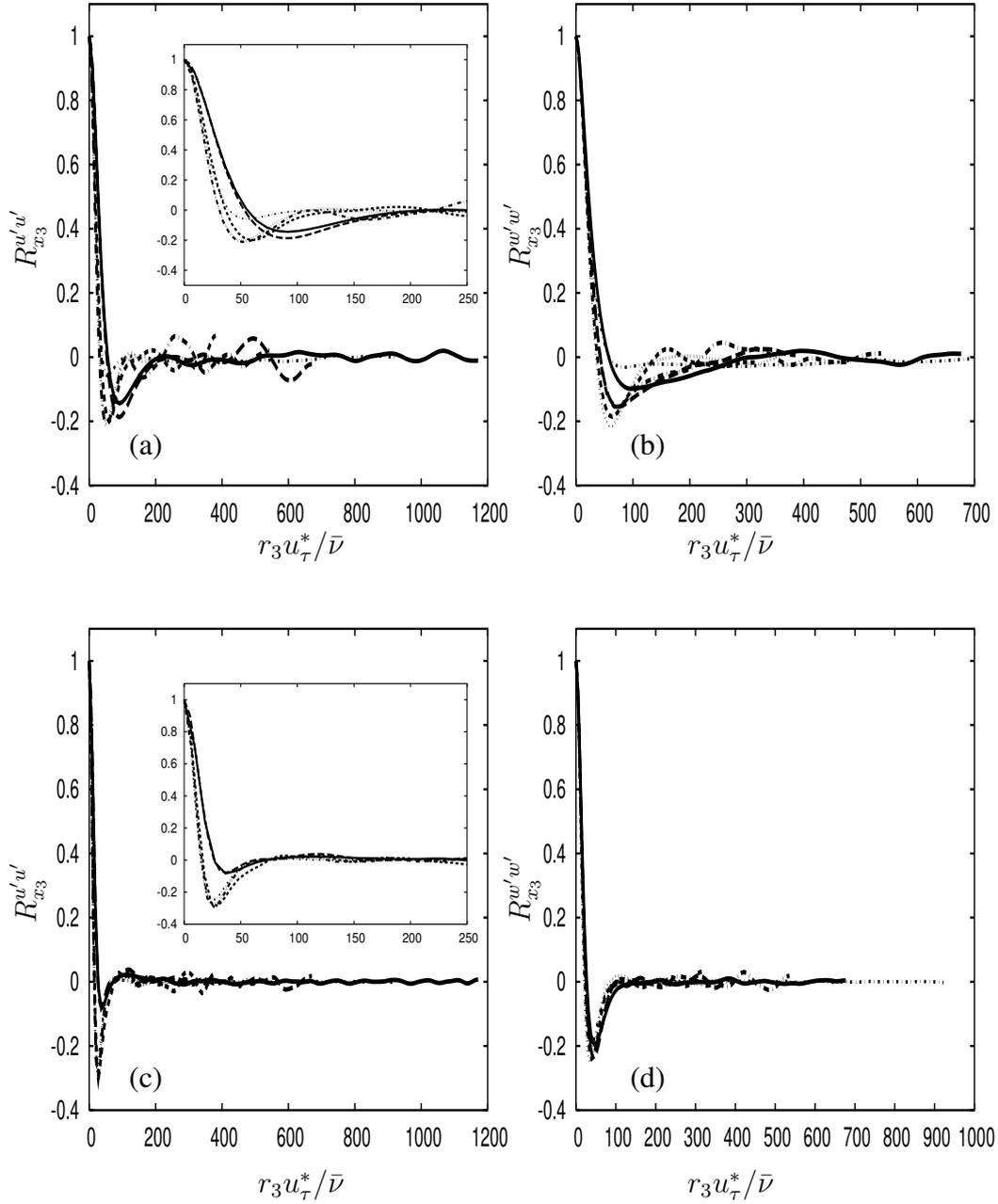
Eine grundlegende Eigenschaft wandgebundener Strömungen ist die Ausbildung von kohärenten Strukturen in der viskosen Unterschicht und Übergangsschicht, die in Strömungsrichtung ausgerichtet sind, wobei sich Strukturen mit alternierend hoher oder niedriger Geschwindigkeit in spannwitiger Richtung fortsetzen. Der Abstand dieser Strukturen, Streaks genannt, beträgt, unabhängig von der Reynoldszahl 100 Wandeinheiten (Smits & Dussauge (1996)) im Bereich  $x_2^+ < 10$  und kann durch den zweifachen Abstand des Minimums der spannwitigen Zweipunktkorrelationen der  $u_1'$ -Fluktuationen bestimmt werden. Eine mögliche Erklärung für dieses universelle Verhalten gibt die "Generalisierte optimale Störungstheorie", der um die mittlere Geschwindigkeit lineari-

Abbildung 3.45: Kreuzkorrelationskoeffizient  $R_{u_1\theta}$ .Abbildung 3.46: Kreuzkorrelationskoeffizient  $R_{u_2\theta}$ .

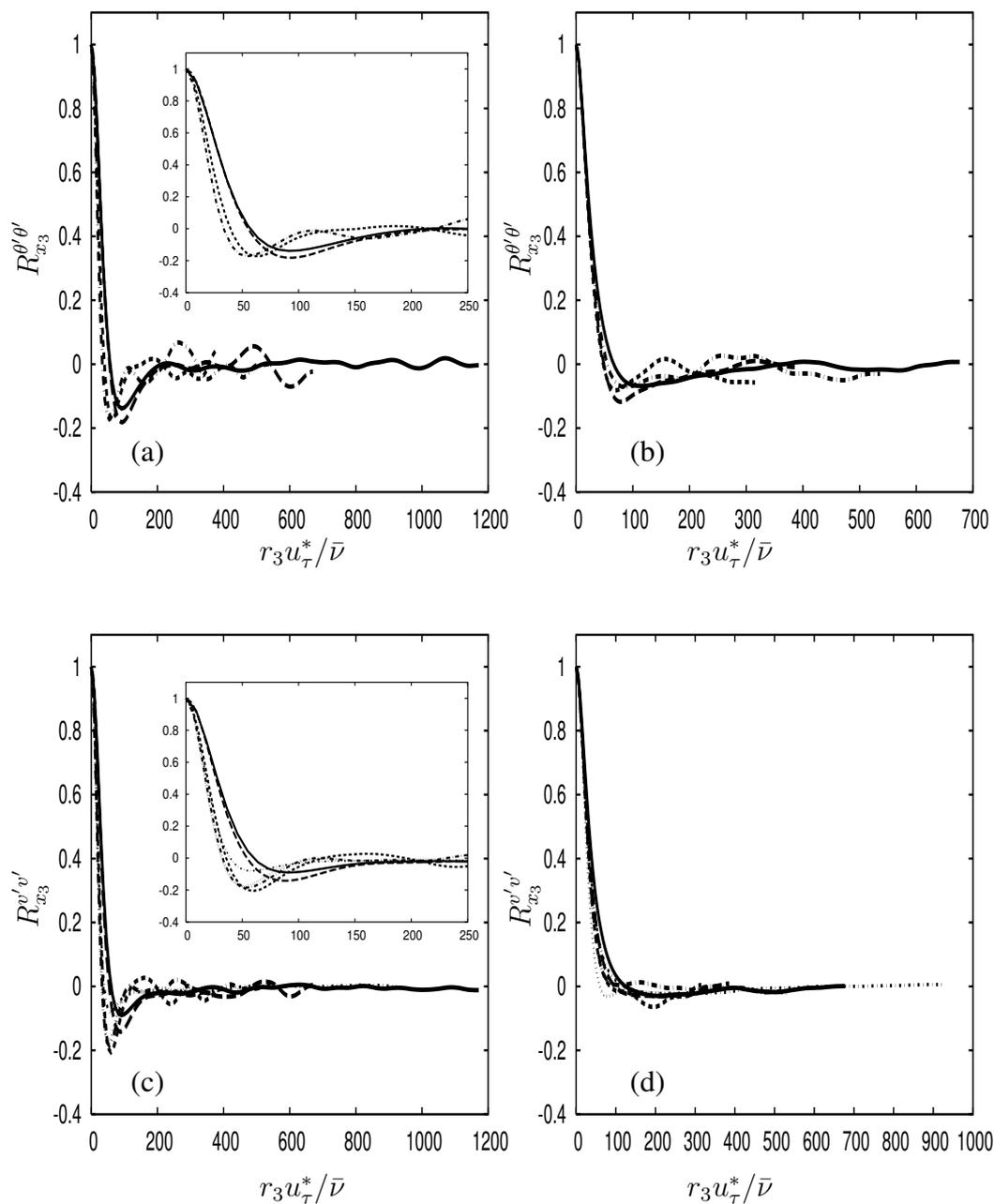
Abbildung 3.47: Kreuzkorrelationskoeffizient  $R_{u_1\theta}$ .Abbildung 3.48: Kreuzkorrelationskoeffizient  $R_{u_2\theta}$ .

sierten Navier-Stokes-Gleichungen (Chernyshenko & Baig (2003)). Sie liefert die am stärksten favorisierte Struktur der linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen, so dass Chernyshenko & Baig (2003) die Abhängigkeit des Streakabstands von  $x_2$ , in sehr guter Übereinstimmung mit DNS und Experiment, erhielten. Gleichzeitig zeigten sie, dass diese Theorie keine Wirbel in Strömungsrichtung liefert und demonstrierten, dass diese zur Formierung von Streaks nicht notwendig sind. Die Abbildungen 3.49 und 3.50 stellen die Zweipunktkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen und des Skalars bei  $x_2^* = 5$  und  $x_2^* = 20$  dar, als Funktion der Separation normiert mit  $l^*$ , um den Abstand und die Größe der wandnahen Strukturen (Streaks) abzuschätzen. Der wandnahe Bereich wurde, zur besseren Unterscheidung, zusätzlich vergrößert. Man erkennt, dass zum einen die Minima der spannweitigen Autokorrelationen für Fall M3.0 und M3.5 stärker ausgeprägt sind als im inkompressiblen Fall I3, obwohl mit steigender Reynoldszahl eine Abschwächung eintritt (Moser *et al.* (1999)). Zum anderen sind die Minima, ausser für  $R_{x_3}^{v'v'}$ , zu größeren Abständen hin verschoben. Der Streakabstand steigt also mit steigender Machzahl. Coleman *et al.* (1995) haben in diesem Zusammenhang von einer "gesteigerten Kohärenz" der Strukturen mit steigender Machzahl gesprochen. Als Beleg dafür sehen sie einen Anstieg von  $S^*$  an, des Quotienten aus einem turbulenten Zeitmass  $\bar{\rho}q^2/2\bar{\mu}\overline{\omega'_i\omega'_i}$  und dem Zeitmass der mittleren Scherrate  $0.5d\bar{u}_1/dy$  und berufen sich dabei auf die Arbeit von Lee *et al.* (1990). Dieser Quotient steigt in Wandnähe in der Tat mit steigender Machzahl an, wie Abbildung 3.59 zu entnehmen ist (Fall M1.5 und M0.3 haben bei  $x_2^* = 5 - 10$  in etwa dieselbe lokale Reynoldszahl, aber eine stark unterschiedliche Machzahl). Gleichzeitig sinkt das Maximum mit steigender Reynoldszahl, wie der Vergleich von Fall M3.0 und M3.5 zeigt. Der Vergleich der Konturplots (Abbildungen 3.51 und 3.55) von Fall M0.3 mit M3.0 bestätigt im Bereich des Maximums von  $S^*$ , dass die Strukturen "geradliniger" sind. In semilokalen Koordinaten sieht man allerdings einen identischen Verlauf von  $S^*$  für  $x_2^* > 15$ , so dass nur die viskose Unterschicht eine stärkere Kohärenz der Streaks zeigt. Der Unterschied der Abbildungen 3.53 und 3.57 bestätigt das. Der in den Zweipunktkorrelationen beobachtete größere Abstand der Streaks für die Fälle M3.0 und M3.5 zeigt sich auch durch Abmessen in den Abbildungen 3.51 und 3.55 (Fall M3.0 hat 7 Streaks auf einer Breite von 1049 Wandeinheiten  $\implies$  Abstand etwa  $150 z^*$ , gegenüber 100 Wandeinheiten für Fall M0.3). Der Grund für den größeren Abstand der Streaks ist unklar, da jedoch die wandnormalen und spannweitigen Fluktuationen für höhere Machzahlen stark gedämpft werden, die Fluktuationen in Stromabrichtung dagegen stärker werden scheint dieser Effekt mit der sich ändernden Anisotropie einherzugehen. Analoge Beobachtungen wurden von Manhart & Friedrich (1999) und Ptasinski *et al.* (2003) für Polymerströmungen im Kanal gemacht. Auch hier wurden verbunden mit einer Zunahme der Anisotropie, dieselben Effekte aufgrund der Polymere festgestellt, wie hier durch die Kompressibilität (die Physik ist natürlich unterschiedlich). In den Abbildungen der wandnormalen Schnitte 3.53 und 3.54, sowie 3.57 und 3.58 sieht man deutlich den großen Unterschied zwis-

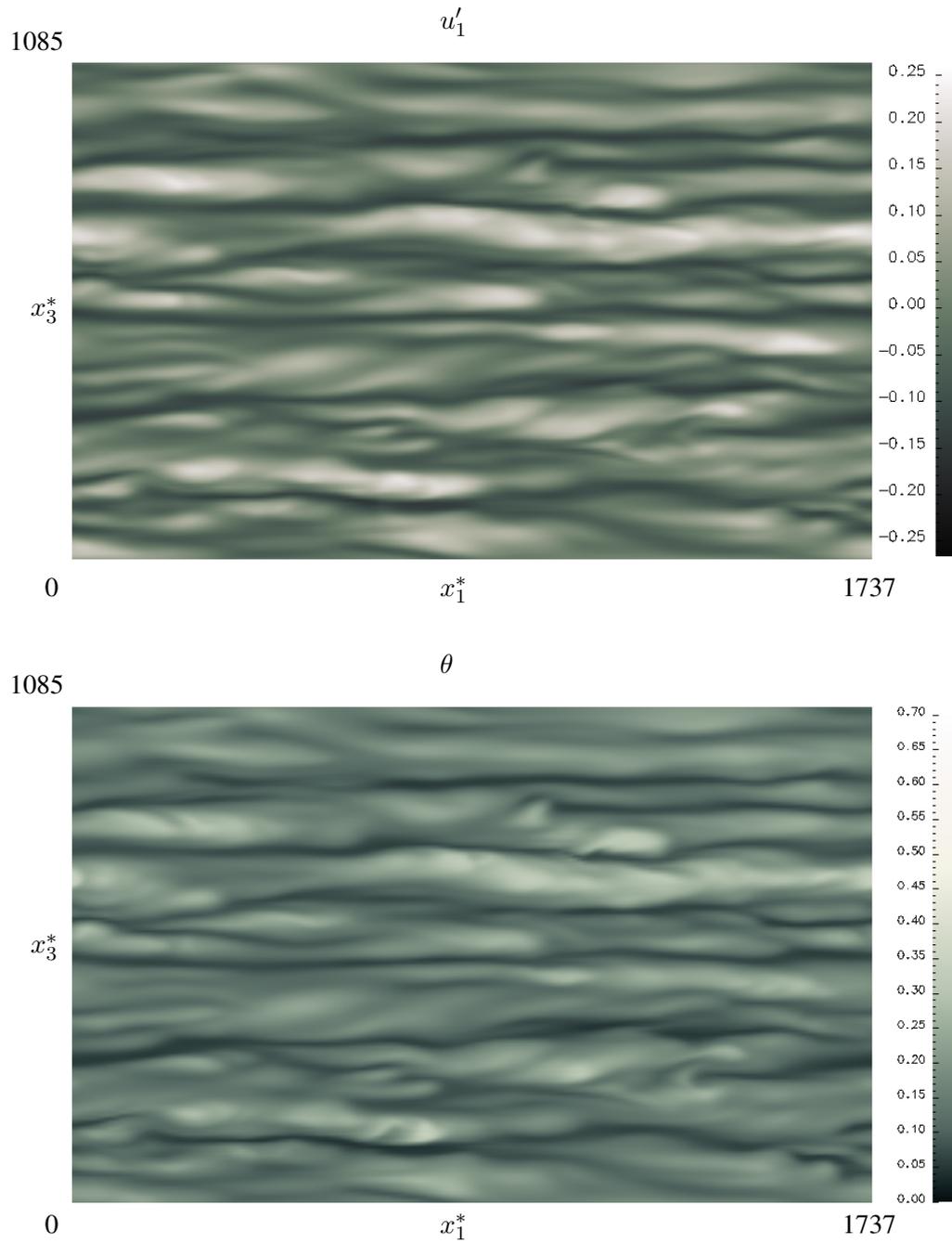
chen den Skalar- und den Geschwindigkeitsfluktuationen für große Abstände zur Wand. Der Skalar zeigt wiederum die starken Gradienten (Fronten), die die gut gemischten Regionen (weiss) von den schwach vermischten Regionen (dunkel) trennen. Wie ist nun die hervorragende Korrelation der Geschwindigkeits- und Skalarfluktuationen in Wandnähe zu erklären? Nach Freund (1997), der zylindrische Mischungsschichten untersuchte, liegt der Grund in der großen Ähnlichkeit der Skalar- und Impulsgleichung, die sich, aufgrund eines gegenüber dem konvektiven Term mit steigender konvektiver Machzahl immer kleiner werdenden Druckgradienten, immer ähnlicher werden. Viskose und diffusive Effekte vernachlässigt er in diesen Betrachtungen, da nur große Skalen in Betracht gezogen werden, wodurch sich der Skalar und das Geschwindigkeitsfeld bei ähnlichen Anfangs- und Randbedingungen auch ähnlich entwickeln sollten. Als Beweis zeigt er das Verhältnis  $Q_s$  zwischen Druckgradienten  $\{\partial p/\partial x_1\}_{rms}$  und konvektivem Term  $\{\rho \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)\}_{rms}$ , das mit steigender konvektiver Machzahl sinkt. Abbildung 3.60 zeigt das Inverse dieses Verhältnisses, um die Singularität an der Wand zu vermeiden. Obwohl  $Q_s^{-1}$  mit steigender Machzahl steigt, werden die höchsten Werte in der Kanalmitte und nicht an der Wand, wo die stärkste Korrelation vorliegt, angenommen. Aufgrund der Haftbedingung an der Wand ist der kleine Wert für  $Q_s^{-1}$  nicht verwunderlich, jedoch ist zweifelhaft, ob die großen Dichte- und Viskositätsänderungen in Wandnähe in dieser Betrachtungsweise vernachlässigt werden können. Chernyshenko & Baig (2003) weisen darauf hin, dass für die Ausbildung von Streaks in Wandnähe der Term  $u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  erforderlich ist, ohne den keine Streaks ausgebildet werden. Gleichzeitig zeigt seine generalisierte, optimale Störungstheorie, dass der Abstand der Streaks von der Form des Geschwindigkeitsprofils in Strömungsrichtung abhängt. Hätten der Skalar und die Stromabgeschwindigkeit ähnliche Profile in Wandnähe, was aufgrund des universellen Verhaltens (z.B. Wandgesetz) anzunehmen ist, dann würde dies die starke Korrelation und den gleichen Streaksabstand erklären. Abbildung 3.61 zeigt in der Tat einen nahezu identischen Verlauf des Skalars (das Profil wurde verschoben um es mit der Geschwindigkeit vergleichen zu können, was aufgrund der Linearität der Skalartransportgleichung zu keiner Änderung der Physik führt) mit der Geschwindigkeit in der viskosen Unterschicht. Die viskositätstransformierten Profile (Abbildung 3.62) fallen sogar unabhängig von Mach und Reynoldszahl aufeinander. Damit sind auch die Terme  $u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  und  $u_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2}$  für die einzelnen Fälle nahezu gleich. Die große Korrelation zwischen Skalar und Längsgeschwindigkeit könnte also dadurch zustandekommen, dass durch die große Ähnlichkeit der Skalar- und  $u_1$ -Geschwindigkeitsfelder derselbe Mechanismus Skalarstreaks generiert mit denselben Abständen und Abmessungen, anstatt über reine Kompressibilitätseffekte, wie dies bei der zylindrischen Mischungsschicht der Fall ist.



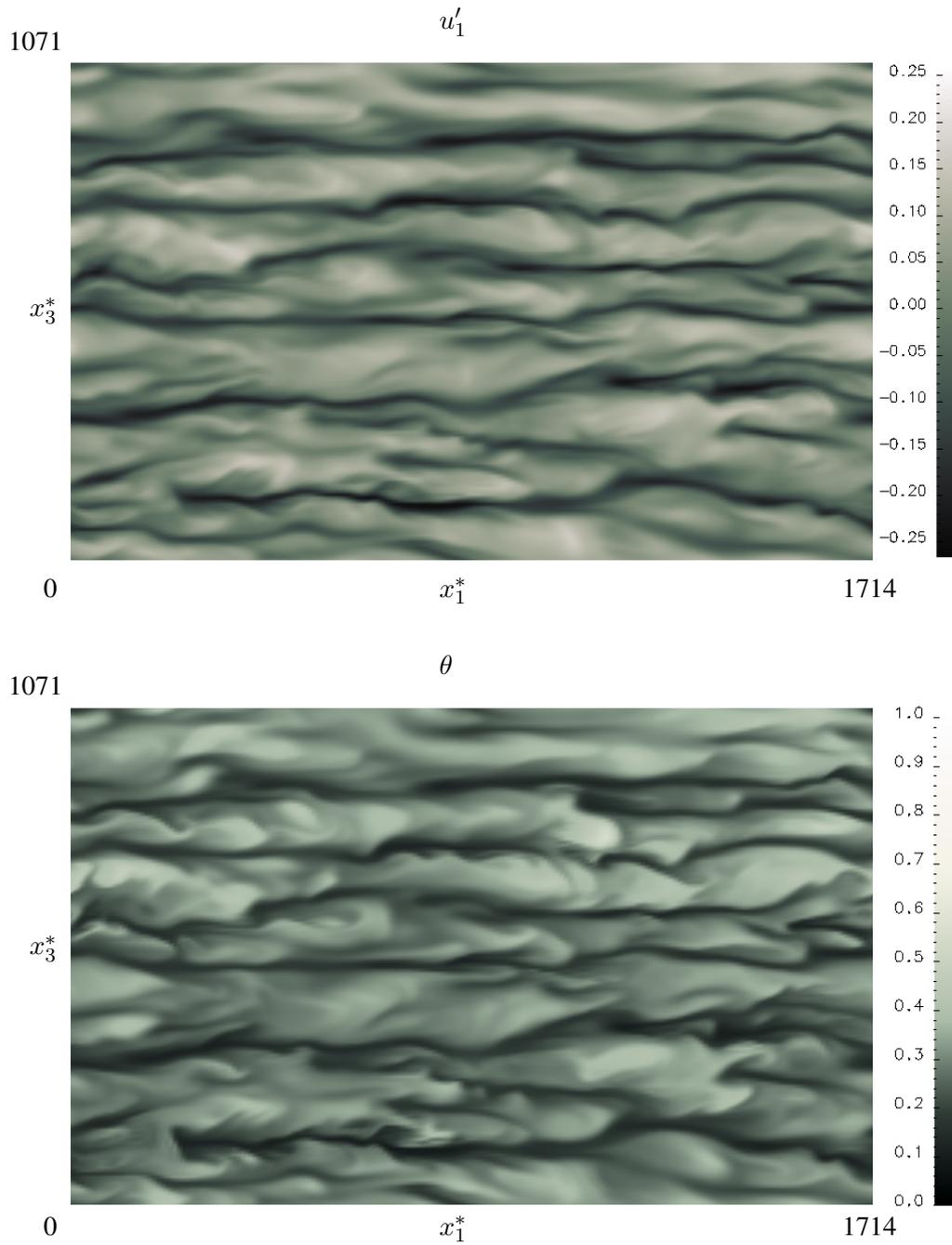
**Abbildung 3.49:** Zweipunktkorrelationen bei  $z^* = 5$  (a,c) und  $z^* = 20$  (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; ---, M3.0; - - - -, M1.5; - · - ·, M0.3. Zum Vergleich: ·····,  $Re_\tau = 180$ ; ······,  $Re_\tau = 595$  Moser *et al.* (1999).



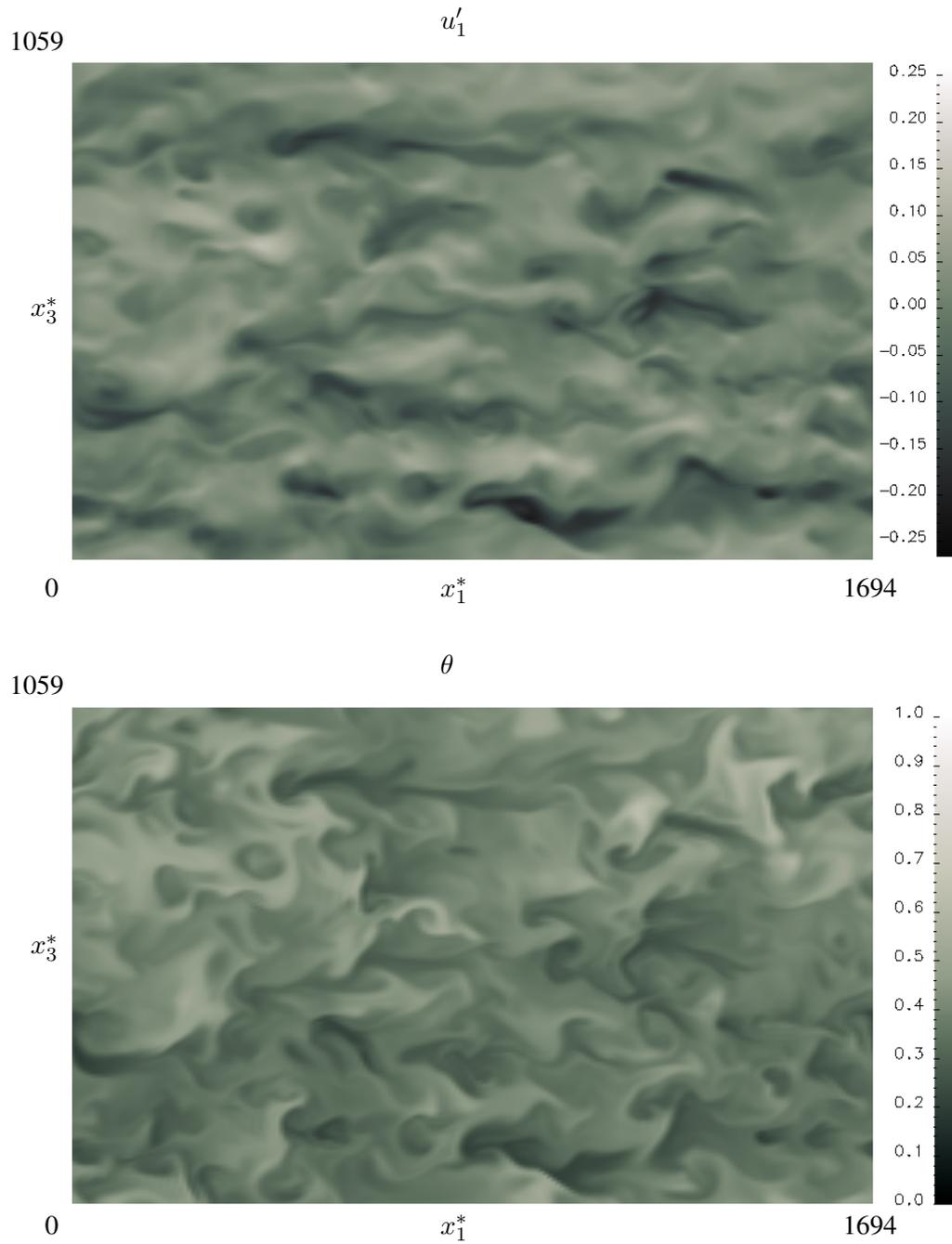
**Abbildung 3.50:** Zweipunktkorrelationen bei  $z^* = 5$  (a,c) und  $z^* = 20$  (b,d), normiert mit den semilokalen Größen. —, M3.5; ---, M3.0; ·····, M1.5; -·-·-, M0.3. Zum Vergleich: ·····,  $Re_\tau = 180$ ; -·-·-,  $Re_\tau = 595$  Moser *et al.* (1999).



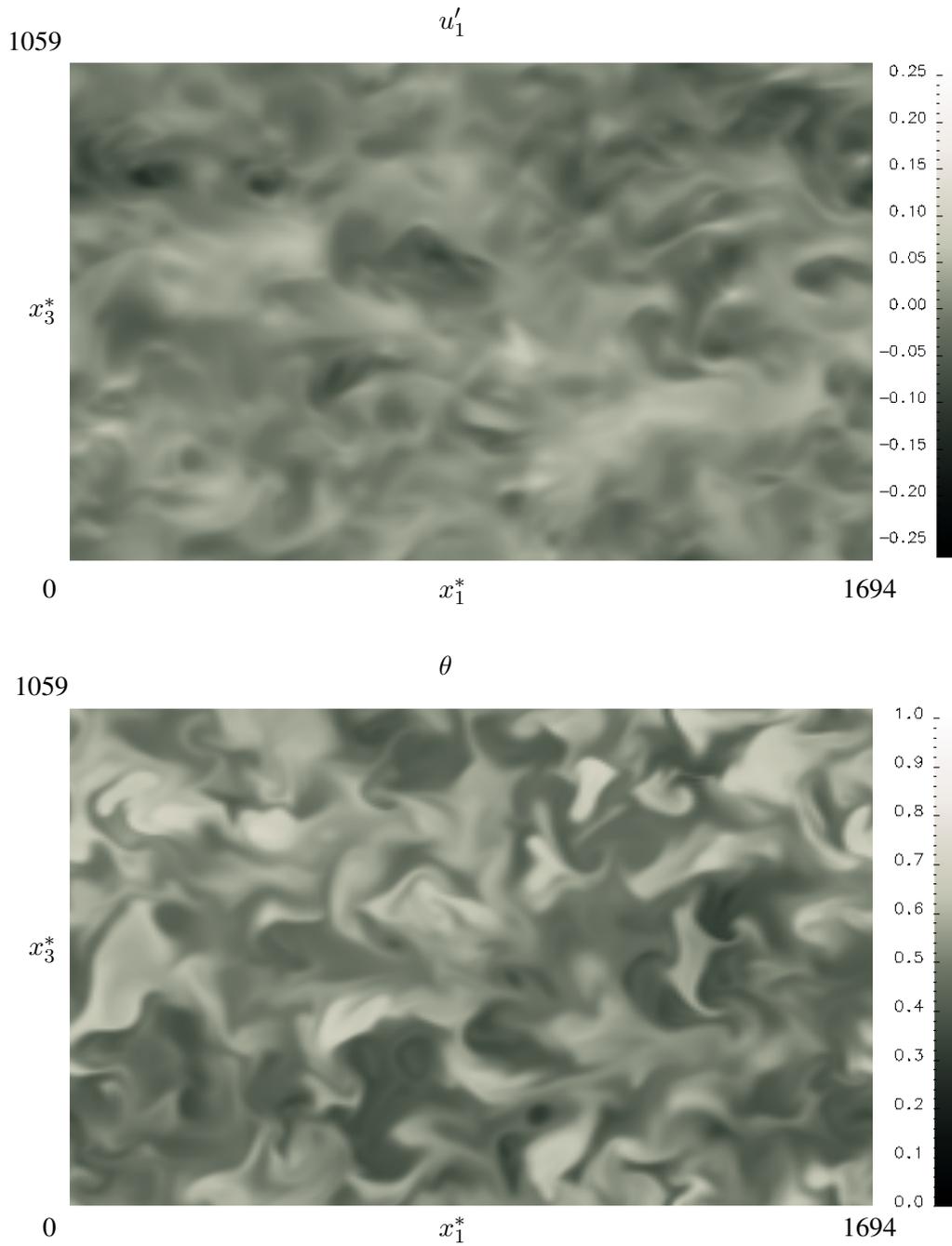
**Abbildung 3.51:** Konturplot der Fluktuationen von  $u_1$  und des passiven Skalars bei  $x_2^* = 5$  für Fall M0.3.



**Abbildung 3.52:** Konturplot der Fluktuationen von  $u_1$  und des passiven Skalars bei  $x_2^* = 20$  für Fall M0.3.



**Abbildung 3.53:** Konturplot der Fluktuationen von  $u_1$  und des passiven Skalars bei  $x_2^* = 70$  für Fall M0.3.



**Abbildung 3.54:** Konturplot der Fluktuationen von  $u_1$  und des passiven Skalars in der Kanalmitte für Fall M0.3.

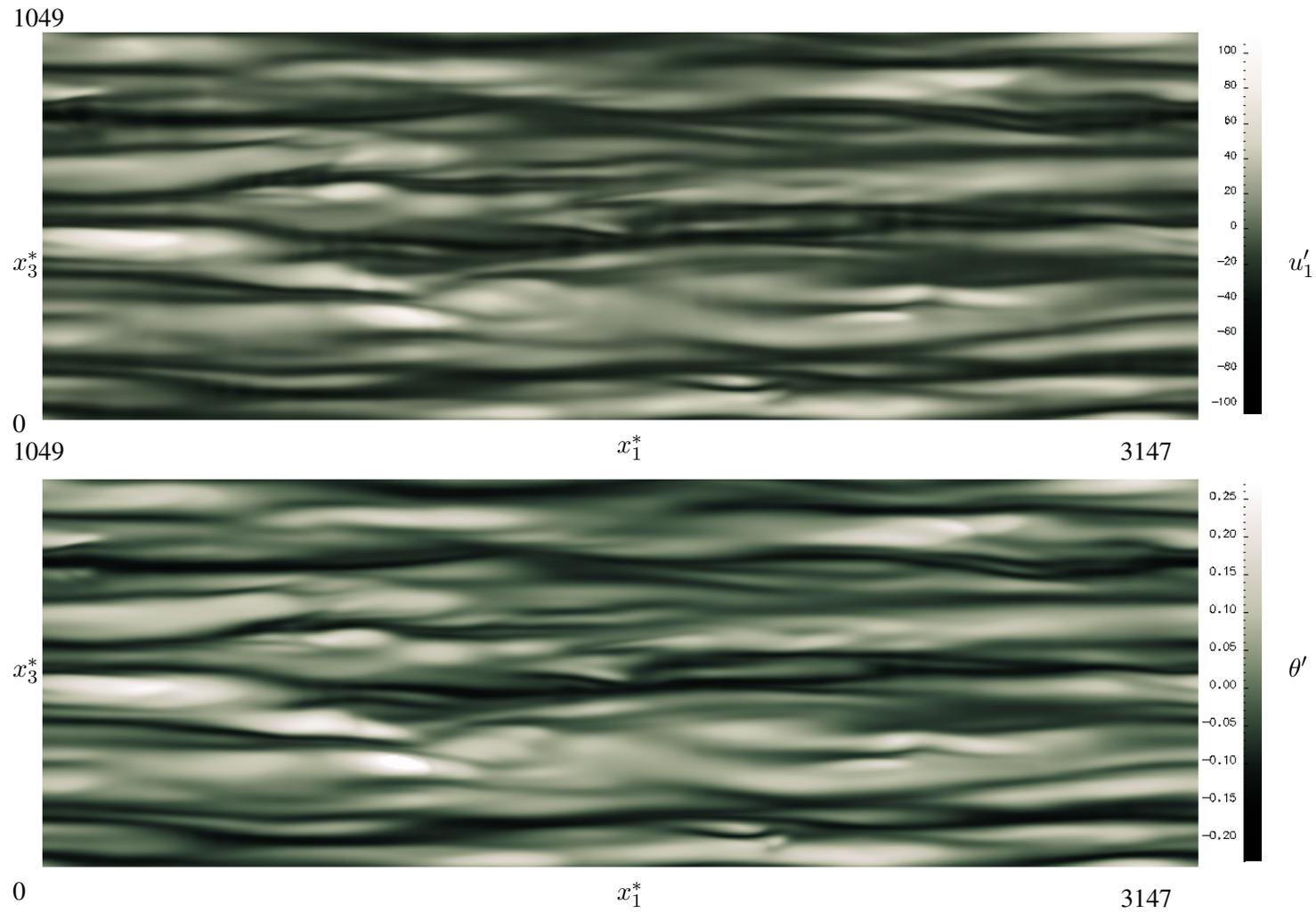


Abbildung 3.55: Konturplot der Fluktuationen von  $u_1$  und des passiven Skalars bei  $x_2^* = 5$  für Fall M3.0.

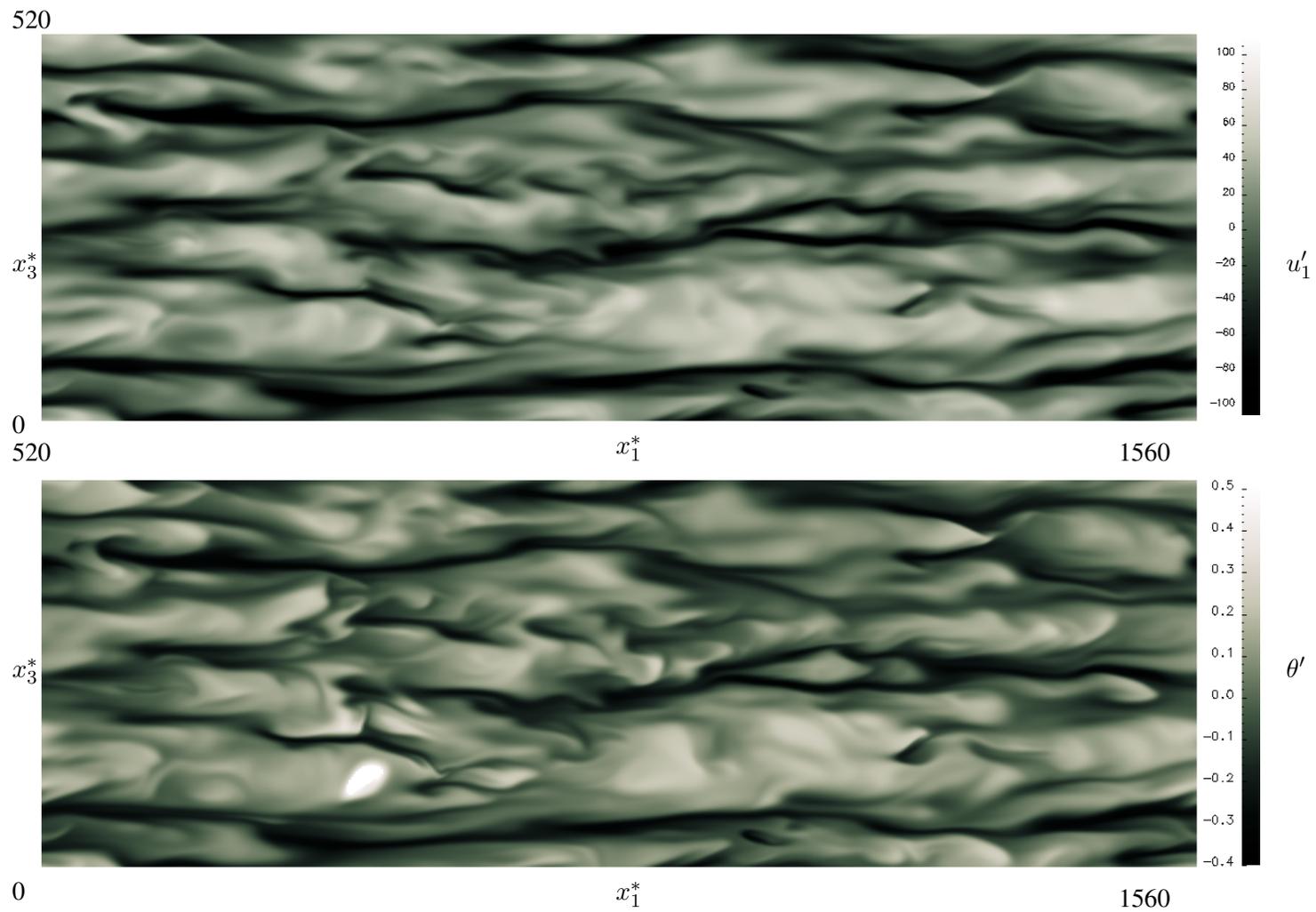


Abbildung 3.56: Konturplot der Fluktuationen von  $u_1$  und des passiven Skalars bei  $x_2^* = 20$  für Fall M3.0.

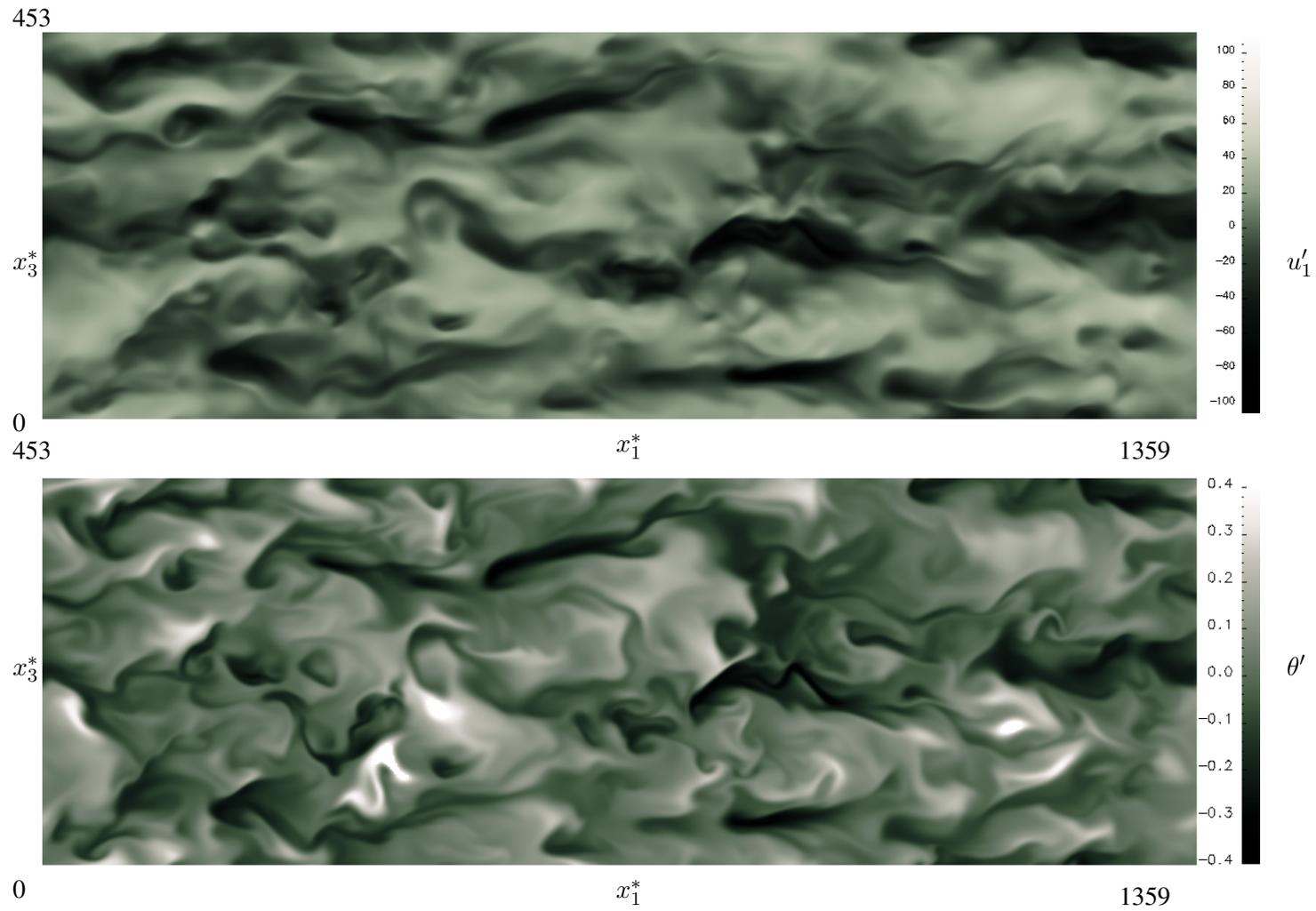
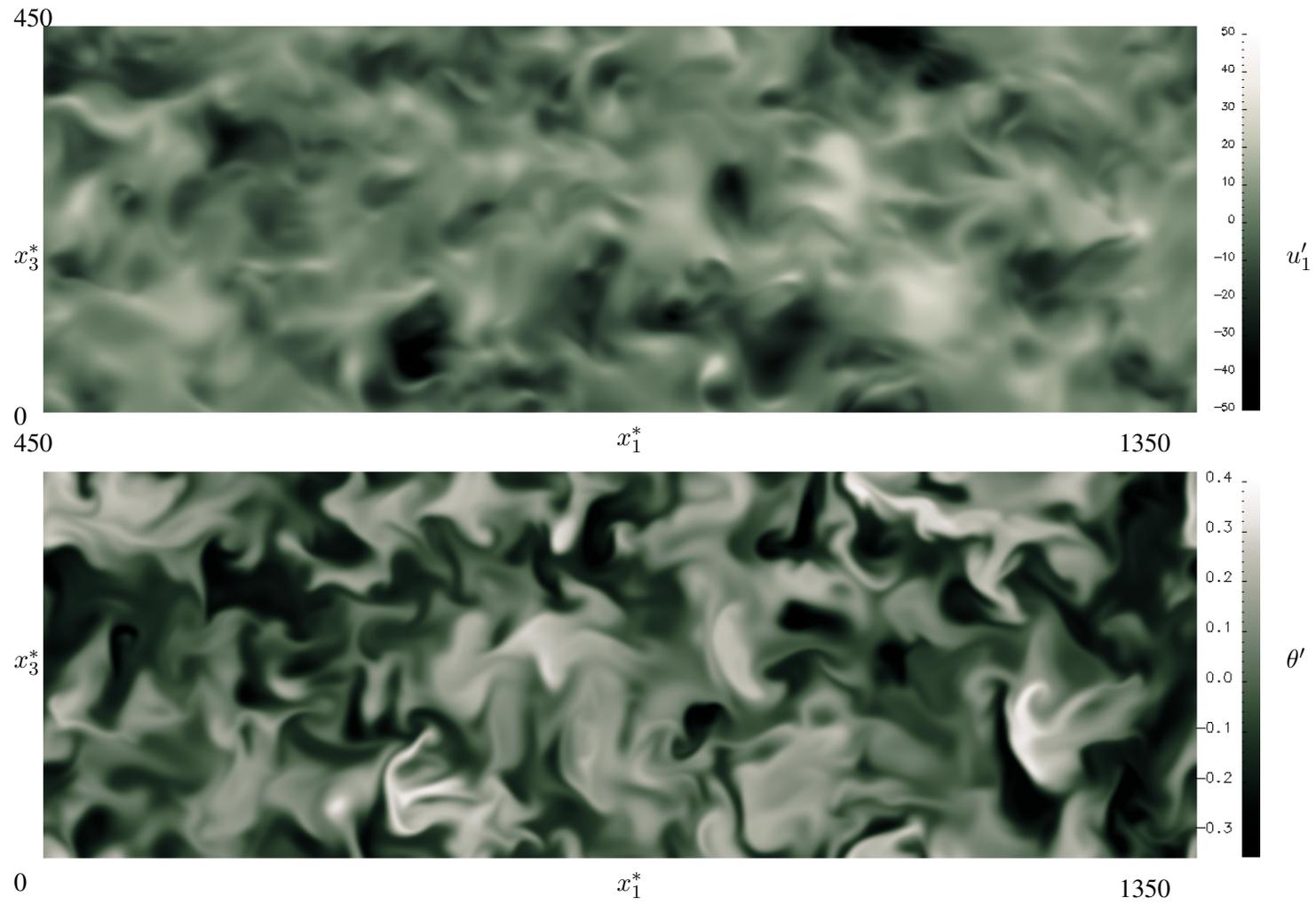
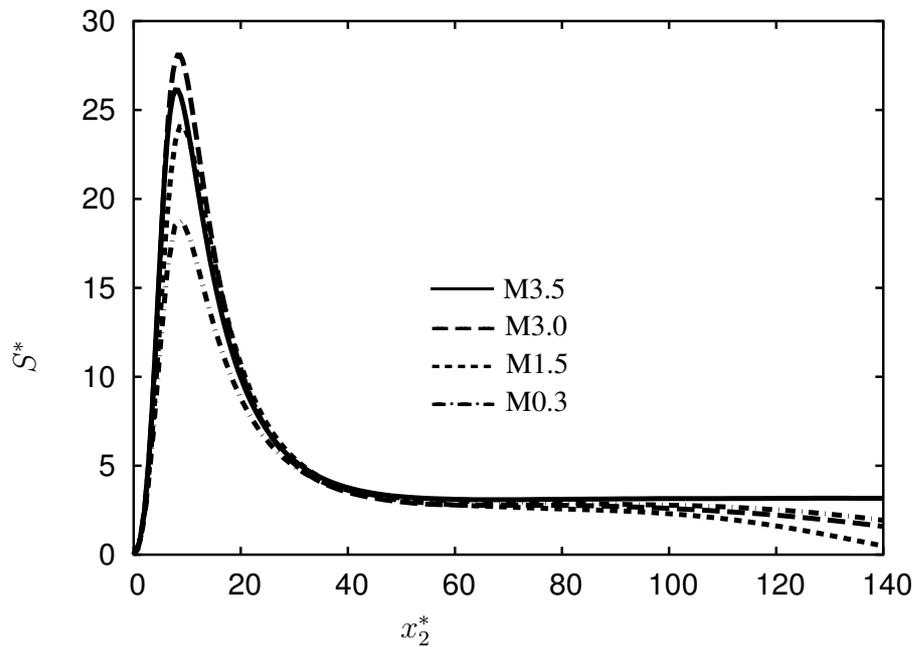


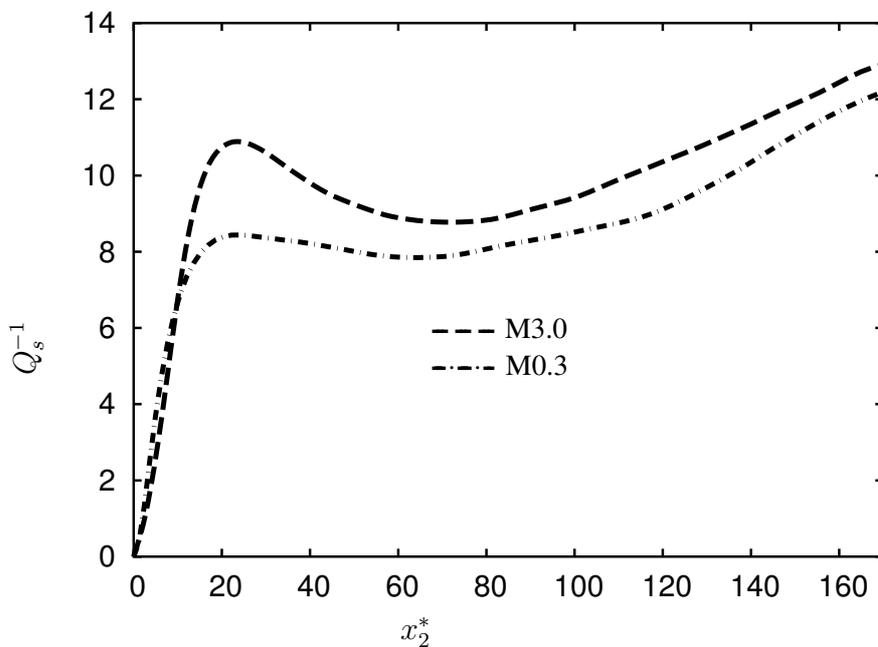
Abbildung 3.57: Konturplot der Fluktuationen von  $u_1$  und des passiven Skalars bei  $x_2^* = 70$  für Fall M3.0.



**Abbildung 3.58:** Konturplot der Fluktuationen von  $u_1$  und des passiven Skalars in der Kanalmitte für Fall M3.0.



**Abbildung 3.59:** Quotient aus dem turbulenten Zeitmass  $\bar{\rho}q^2/\bar{\mu}\omega'_i\omega'_i$  und dem der mittleren Verzerrung  $S^{-1} = 2(du/dx_2)^{-1}$ .



**Abbildung 3.60:** Quotient  $Q_s^{-1}$  aus  $\{\rho(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3})\}_{rms}$  und  $\{\partial p/\partial x_1\}_{rms}$ .

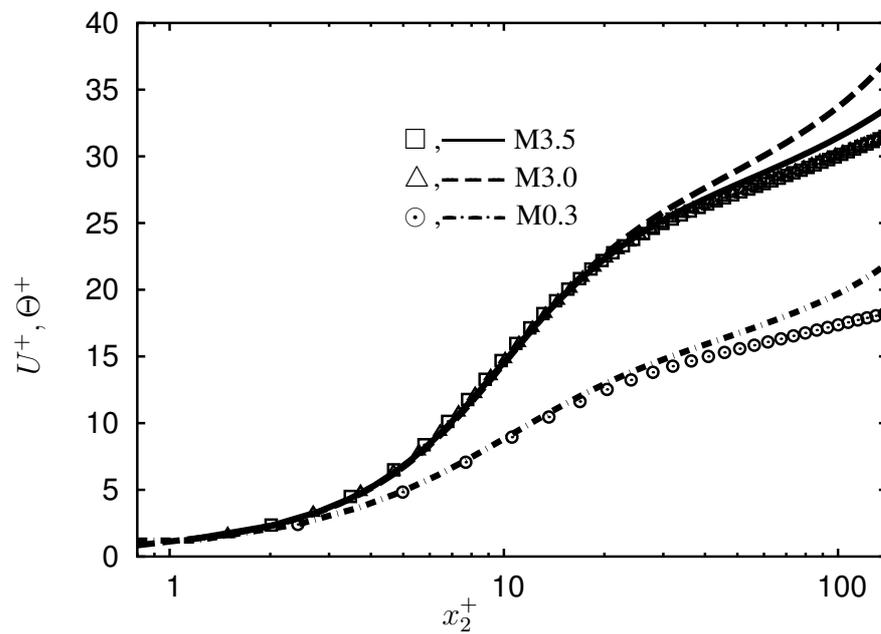


Abbildung 3.61: Skalar  $-\theta + 1$  (Linien) und Geschwindigkeit  $U_1$  (Symbole), normiert mit  $u_\tau$  und  $\theta_\tau$ .

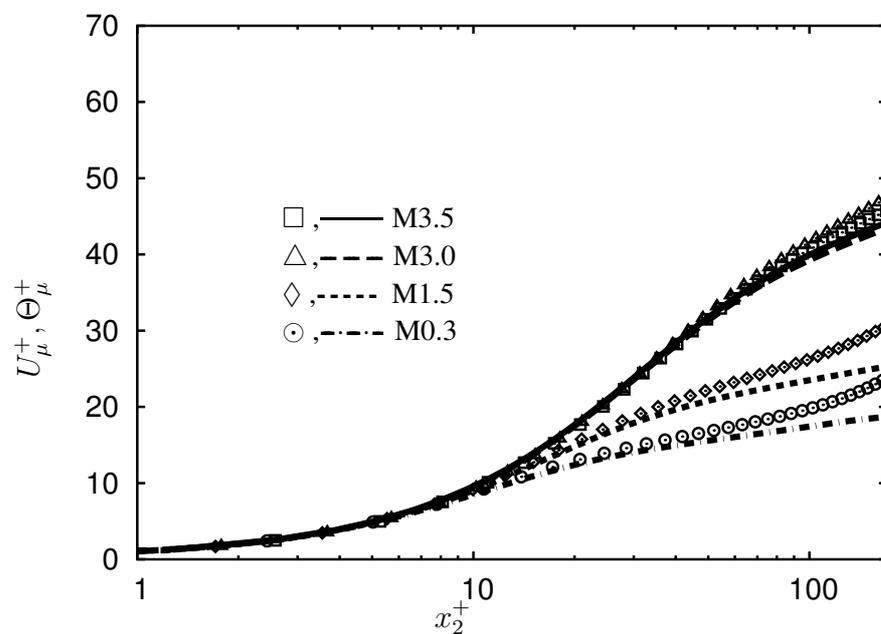


Abbildung 3.62: Viskositätstransformierter Skalar (Linien) und Geschwindigkeit  $U_1$  (Symbole).

### 3.5 Bilanzen der Einpunktkorrelationen

Ein besseres Verständnis der Mach- und Reynoldszahleffekte, die in den Profilen der turbulenten Spannungen und Skalarflüsse zu beobachten waren, erhoffen wir durch die Analyse ihrer Bilanzgleichungen zu erlangen. Die allgemeinen Bilanzgleichungen für die **turbulenten Spannungen**  $\overline{\rho u_i'' u_j''}$  lauten

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}_k \overline{\rho u_i'' u_j''}}{\partial x_k} = \\
 & - \overline{\rho u_i'' u_k'' \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_k}} - \overline{\rho u_j'' u_k'' \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_k}} && \text{Produktion } P_{ij} \\
 & + \overline{p' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} && \text{Druckscherkorrelation } \Pi_{ij}^u \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{p' u_i' \delta_{jk}} + \overline{p' u_j' \delta_{ik}} + \overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} - \overline{\tau_{ik}' u_j'} - \overline{\tau_{jk}' u_i'} \right) && \text{turbulenter und viskoser} \\
 & && \text{Transport } D_{ij} \\
 & + \overline{\tau_{ik}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{jk}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} && \text{Dissipation } \epsilon_{ij} \\
 & - \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} - \overline{u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} + \overline{u_i'' \frac{\partial \bar{\tau}_{jk}}{\partial x_k}} + \overline{u_j'' \frac{\partial \bar{\tau}_{ik}}{\partial x_k}} && \text{turbulenter Massenfluss } M_{ij},
 \end{aligned}$$

für die **Skalarvarianz**  $\overline{\rho \theta''^2} / 2$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \overline{\rho \theta''^2} / 2}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{U}_j \overline{\rho \theta''^2} / 2}{\partial x_j} = \\
 & - \overline{\rho u_j'' \theta'' \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_j}} - \overline{\rho \theta''^2 / 2 \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_j}} && \text{Produktion } P_{\theta^2} \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\rho u_j'' \theta''^2 / 2} && \text{Transport } T_{\theta^2} \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{Sc} \theta'' \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_j} + \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''^2 / 2}{\partial x_j} \right) && \text{Diffusion } D_{\theta^2} \\
 & - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_j} && \text{Dissipation } \epsilon_{\theta^2}.
 \end{aligned}$$

und für den **turbulenten Skalarfluss**  $\overline{\rho u_i'' \theta''}$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \overline{\rho u_i'' \theta''}}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \overline{\rho u_i'' \theta''}}{\partial x_j} = \\
& - \overline{\rho u_i'' \theta''} \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_j} - \overline{\rho u_j'' \theta''} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} \quad \text{Produktion } P_i^\theta \\
& + \overline{p} \frac{\partial \theta''}{\partial x_i} \quad \text{Druck-Skalargradientenkorrelation } \Pi_i^\theta \\
& - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{\rho u_i'' u_j'' \theta''} \right) \quad \text{turbulenter Transport } T_i^\theta \\
& - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{p \theta''} \delta_{ij} - \overline{\tau_{ij} \theta''} - u_i'' \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} \right) \quad \text{Diffusion } D_i^\theta \\
& - \overline{\tau_{ij} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j}} - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \quad \text{Dissipation } \epsilon_i^\theta
\end{aligned}$$

In vollentwickelter turbulenter Kanalströmung reduzieren sich die Gleichungen zu:  
Bilanzen der turbulenten Spannungen:

$\overline{\rho u_1'' u_1''}$  – Bilanz:

$$\begin{aligned}
0 = & - \overline{\rho u_1'' u_2''} \frac{d\tilde{U}_1}{dx_2} - \frac{d}{dx_2} \left( \overline{\rho u_1'' u_1'' u_2''} / 2 - \overline{u_1' \tau_{12}'} \right) \\
& + \overline{u_1''} \left( - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\tau}_{12}}{\partial x_2} \right) + \overline{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} - \overline{\tau_{1j}' \frac{\partial u_1'}{\partial x_j}}
\end{aligned} \quad (3.28)$$

$\overline{\rho u_2'' u_2''}$  – Bilanz:

$$\begin{aligned}
0 = & - \frac{d}{dx_2} \left( \overline{\rho u_2'' u_2'' u_2''} / 2 - \overline{u_2' \tau_{22}'} + \overline{u_2' p'} \right) \\
& + \overline{u_2''} \left( - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{\tau}_{22}}{\partial x_2} \right) + \overline{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} - \overline{\tau_{2j}' \frac{\partial u_2'}{\partial x_j}}
\end{aligned} \quad (3.29)$$

$\overline{\rho u_3'' u_3''}$  – Bilanz:

$$\begin{aligned}
0 = & - \frac{d}{dx_2} \left( \overline{\rho u_3'' u_3'' u_2''} / 2 - \overline{u_3' \tau_{23}'} \right) \\
& + \overline{u_3''} \left( \frac{\partial \bar{\tau}_{23}}{\partial x_2} \right) + \overline{p' \frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} - \overline{\tau_{3j}' \frac{\partial u_3'}{\partial x_j}}
\end{aligned} \quad (3.30)$$

Bilanz der Skalarvarianz:

$$0 = -\overline{\rho u_2'' \theta''} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\rho u_2'' \theta''^2 / 2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \overline{\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''^2}{\partial x_2}} + \overline{\frac{\mu}{Sc} \theta''} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_2} \right) - \overline{\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_2} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_2}} - \overline{\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j}} \quad (3.31)$$

Bilanz des Skalarflusses in  $x_1$ -Richtung:

$$0 = -\overline{\rho u_1'' u_2''} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_2} - \overline{\rho \theta'' u_2''} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\rho u_1'' u_2'' \theta''} - \overline{\theta''} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \overline{u_1'' \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}} + \overline{\theta'' \tau_{13}} \right) - \overline{\tau_{1j} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial u_1''}{\partial x_j}} \quad (3.32)$$

Bilanz des Skalarflusses in  $x_2$ -Richtung:

$$0 = -\overline{\rho u_2''^2} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{\rho u_2''^2 \theta''} - \overline{\theta''} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \overline{u_2'' \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta}{\partial x_2}} + \overline{\theta'' \tau_{22}} \right) - \overline{\tau_{2j} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial u_2''}{\partial x_j}} \quad (3.33)$$

### 3.5.1 Äussere Skalierung der Bilanzgleichungen

#### Die Bilanzen der turbulenten Spannungen

Ein Vergleich der Bilanzen für die unterschiedlichen Fälle ist aufgrund der vielen Terme in den Bilanzgleichungen der besseren Klarheit wegen nur termweise möglich. Um dennoch das Zusammenspiel der einzelnen Terme und ihre jeweilige Bedeutung zu demonstrieren, sind in den Abbildungen 3.63 bis 3.66 die Bilanzen der turbulenten Spannungen für Fall M3.0, normiert mit  $\tau_w u_{av} / h$  dargestellt. Die dominanten Terme in den  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ - und  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanzen sind die Produktion und die Dissipation. In den spannweiten und wandnormalen Bilanzen ist die Produktion Null, die Druck-Scherkorrelation wird dagegen zu einem dominanten Quellterm. Der Grösse der turbulenten Spannungen entsprechend erkennt man, dass die Bilanzterme in Strömungsrichtung in etwa eine Grössenordnung über den Termen der restlichen Bilanzen liegen und damit die Bilanz der turbulenten kinetischen Energie dominieren. Die hier gewählte Normierung wurde bereits von Huang *et al.* (1995) und Lechner (2001) verwendet und folgt aus dem Gleichgewicht zwischen dem Wärmefluss in die Wand  $-q_w$  und der von der Volumenkraft bzw. dem Druckgradienten geleisteten Arbeit. Diese ist aber direkt proportional zur Wandschubspannung und sollte damit die geeignete Skalierung für die Dissipation sein. Morinishi *et al.* (2004) verwendeten dagegen  $\rho_{av} u_{av}^3 / h$ . Eine kleine Rechnung deutet

jedoch darauf hin, dass  $\tau_w u_{av}/h$  die korrekte äussere Skalierung der Terme in der Transportgleichung für die turbulenten Spannungen ist. Dazu sei die Bilanzgleichung der totalen Enthalpie für stationäre Strömungen,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \tilde{U}_j \left\{ \left( \tilde{\epsilon} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\tilde{U}_i^2}{2} + \frac{\tilde{u}_i'^2}{2} \right\} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} \bar{u}_i + \overline{\tau'_{ij} u'_i} - \bar{q}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j'' \tilde{U}_k u_k''} + \overline{\rho u_j'' u_k'' u_k''} + c_p \overline{\rho u_j'' T''}), \quad (3.34)$$

betrachtet. Für vollentwickelte Kanalströmungen lässt sich diese schreiben als

$$0 = -\tilde{U}_1 \frac{\tau_w}{h} + \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{\tau}_{i2} \bar{u}_i + \overline{\tau'_{i2} u'_i} - \bar{q}_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{\rho u_2'' \tilde{U}_k u_k''} + \overline{\rho u_2'' u_k'' u_k''} + c_p \overline{\rho u_2'' T''}). \quad (3.35)$$

Integration dieser Gleichung von der Wand  $x_2 = 0$  zur Kanalmitte  $x_2 = h$  ergibt für den Wandwärmestrom die Abschätzung

$$-q_w \approx \tau_w u_{av}. \quad (3.36)$$

$u_{av}$  bezeichnet wie oben die über das Volumen gemittelte Geschwindigkeit

$$u_{av} = \int_0^1 \bar{u}_1 d(x_2/h). \quad (3.37)$$

Integriert man dagegen die Bilanzgleichung der inneren Energie,

$$-p \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho u_j'' e''}) - \bar{\tau}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{\tau'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = 0, \quad (3.38)$$

von  $x_2 = 0$  zur Kanalmitte  $x_2 = h$ , dann erhält man aufgrund von  $\overline{\tau'_{ik} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \bar{\epsilon} =: \bar{\rho} \epsilon$

$$q_w = \int_0^h \left( \bar{\rho} \epsilon + \bar{\tau}_{ik} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{p \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} \right) dx_2. \quad (3.39)$$

Partielle Integration des zweiten und dritten Terms ergibt unter Benutzung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung die zweite Abschätzung

$$q_w \simeq \int_0^h \bar{\rho} \epsilon dx_2 \stackrel{(Gl.3.36)}{\simeq} \tau_w u_{av}. \quad (3.40)$$

Aus der Bilanz der Reynoldsspannungen (siehe Abbildung 3.63) folgt, dass  $\Pi_{ij} := p'(u'_{i,j} + u'_{j,i})$  und  $\bar{\rho} \epsilon_{ij}$  für  $x_2/h > 0.4$  von derselben Grössenordnung sind. Nimmt man

ausserdem lokal Isotropie in der Kanalmitte an, dann folgt  $\bar{\rho}\varepsilon_{ij} \approx 2/3\bar{\rho}\varepsilon\delta_{ij}$ . Die Dissipation und Druck-Scherkorrelation sollten also eine universelle Funktion  $\tau_w u_{av}/hf(x_2/h)$  von  $x_2/h$  in der Kanalmitte sein. Damit ist ausserdem gezeigt, dass  $\tau_w u_{av}/h$  die geeignete Normierung der verschiedenen Bilanzterme in der Kanalmitte, *unabhängig* von Mach- und Reynoldszahl, darstellt. Um das zu überprüfen, sind in den Abbildungen 3.67 bis 3.78 die Druckscherkorrelationen, die Dissipation, die Produktion und ausgewählte Transportterme der Bilanzgleichung der Reynoldsspannungen für die berechneten Fälle, zusammen mit den inkompressiblen Daten von Moser *et al.* (1999) dargestellt. Die hervorragende Übereinstimmung der kompressiblen und inkompressiblen Kurven für  $x_2/h > 0.5$ , *unabhängig* von den Mach- und Reynoldszahlen der verschiedenen Simulationen ist deutlich erkennbar und bestätigt die verwendete Skalierung. Gleichzeitig zeigen die Abbildungen, dass Mach- und Reynoldszahleffekte, bei Verwendung von  $\tau_w u_{av}/h$  als Normierung der Bilanzterme, ausschliesslich in Wandnähe vorkommen. In dieser Normierung sind ausserdem die Absolutwerte der kompressiblen Terme gegenüber denen der inkompressiblen in Wandnähe stark reduziert, wie durch Vergleich der Fälle M3.5, M3.0 mit den Simulationen I3, I2, I1, beispielsweise in den Abbildungen der Druckscherkorrelationen 3.67 bis 3.70, zu erkennen ist. Die bereits im vorhergehenden Abschnitt über die turbulenten Spannungen und Skalarflüsse gesehene starke Variation der lokalen Reynolds- und Machzahl über den Kanal, erfordert auch hier die Verwendung semi-lokaler Normierungen im Wandbereich, um den Einfluss der variablen Fluideigenschaften zu reduzieren und die Einflüsse der Mach- und Reynoldszahlvariation unterscheiden zu können. Dies wird zusammen mit den Bilanzen für den passiven Skalar später detailliert diskutiert.

### Äussere Skalierung der Bilanzen des passiven Skalars

In den Abbildungen 3.79 bis 3.81 sind die Bilanzen der turbulenten Skalarflüsse, normiert mit  $\tau_w \theta_w/h$ , sowie die Bilanz der Skalarvarianz, normiert mit  $\chi_w \theta_w/h$ , jeweils für Fall M3.0, dargestellt. Im Gegensatz zu den turbulenten Spannungen besitzen beide Bilanzen der turbulenten Skalarflüsse Produktionsterme, die zusammen mit der Dissipation ( $\overline{\rho u_1 \theta''}$ -Bilanz) und der Druckskalargradientenkorrelation ( $\overline{\rho u_3 \theta''}$ -Bilanz) die dominanten Terme darstellen. An der Wand liegt wiederum Gleichgewicht zwischen der Skalardissipation und der Skalardiffusion in der Bilanz von  $\overline{\rho u_1 \theta''}$  und  $\overline{\rho \theta'' \theta''}/2$  vor. In letzterer herrscht ausserdem nahezu Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation, Druck-Skalargradientenkorrelationen kommen hier nicht vor.

Wie bei den Termen in den Bilanzen der Reynoldsspannungen soll auch hier versucht werden, eine Normierung zu finden, die die Terme der verschiedenen Bilanzen, unabhängig von der Mach- und Reynoldszahl, aufeinander abbildet. Einen guten Ausgangspunkt bietet der Produktionsterm, da er die Skalarflüsse und Reynoldsspannungen enthält, deren Skalierung im Aussenbereich des Kanals bekannt sind. Die Normierung für die verschiedenen Terme der Reynoldsspannungen zeigt ausserdem, dass der mitt-

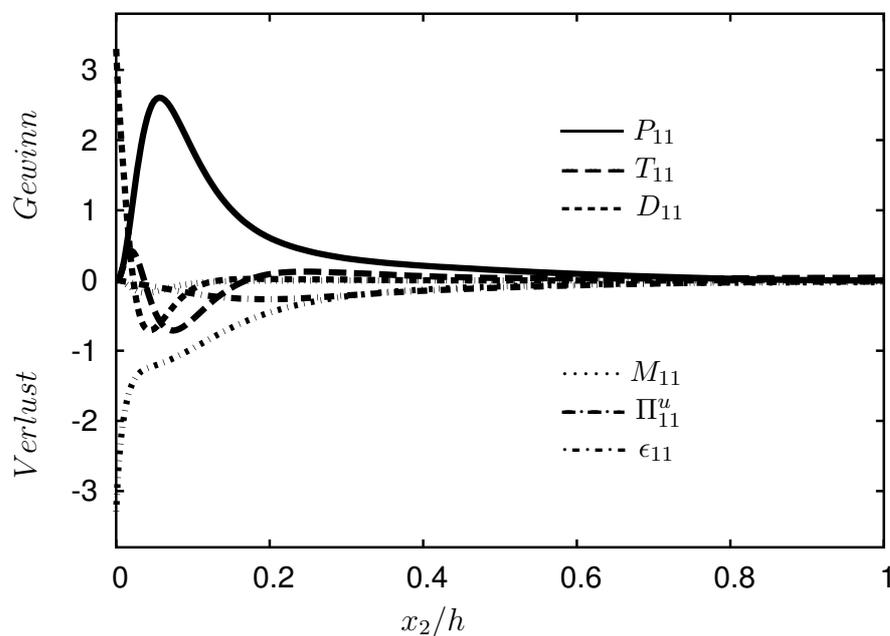


Abbildung 3.63: Bilanz der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Komponente der turbulenten Spannungen für Fall M3.0, normiert mit  $u_{av} \tau_w / H$ .

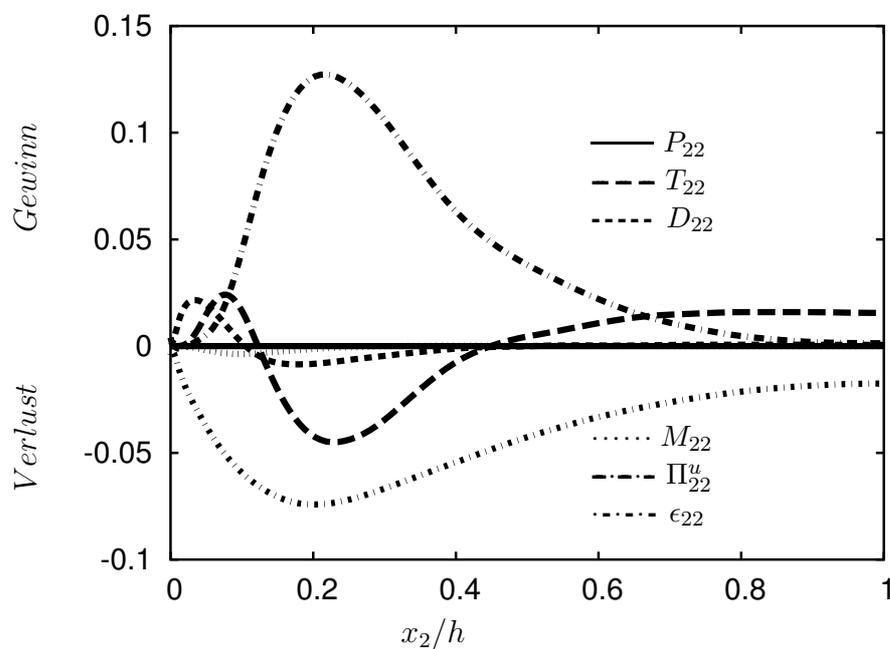


Abbildung 3.64: Bilanz der  $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Komponente der turbulenten Spannungen für Fall M3.0, normiert mit  $u_{av} \tau_w / H$ .

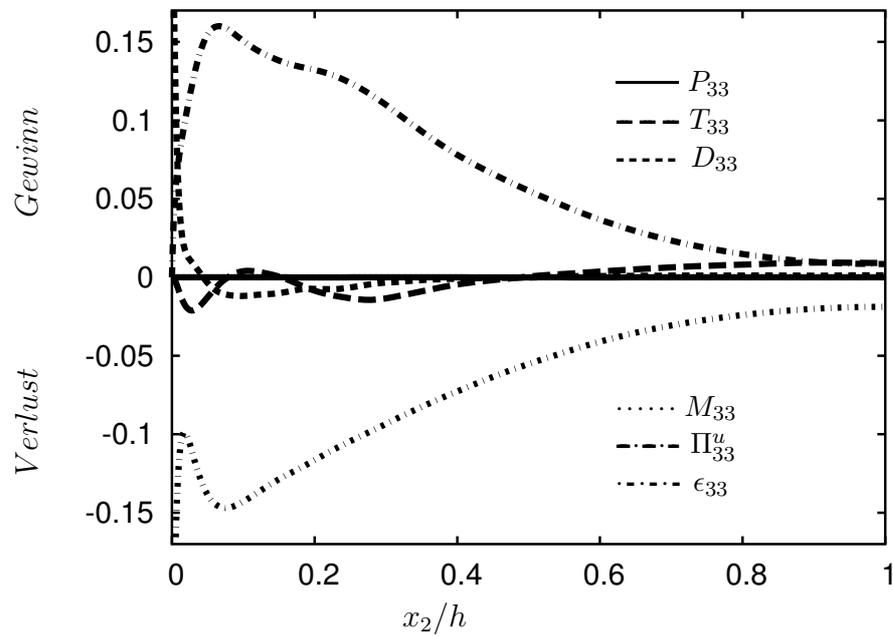


Abbildung 3.65: Bilanz der  $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Komponente der turbulenten Spannungen für Fall M3.0, normiert mit  $u_{av} \tau_w / H$ .

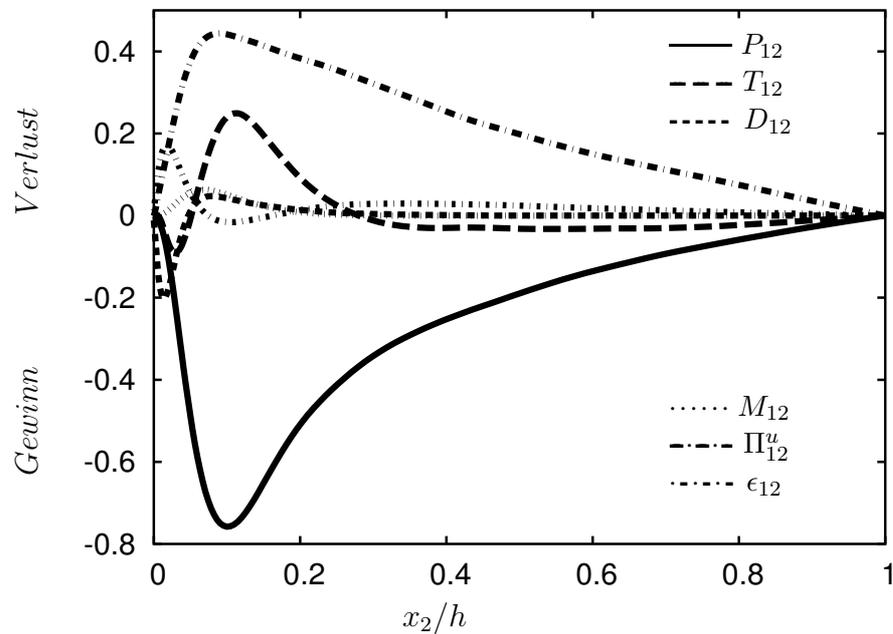
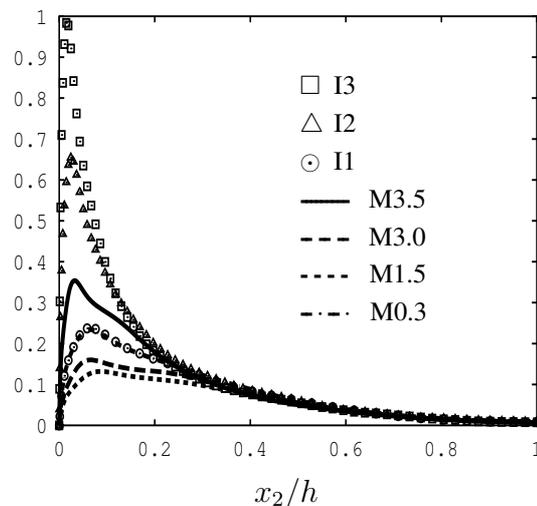
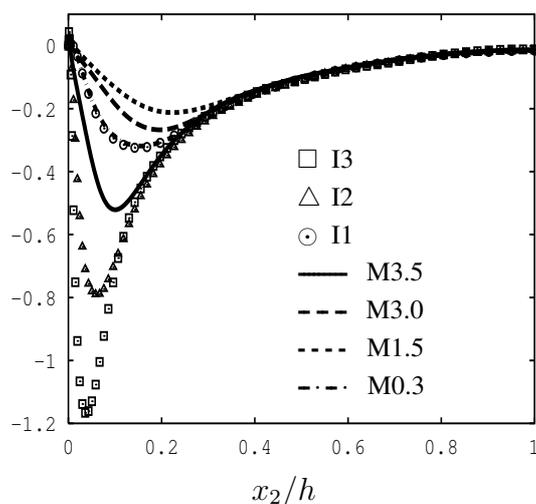
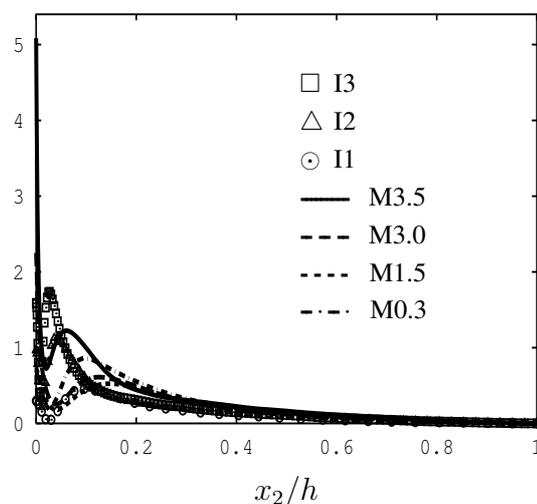
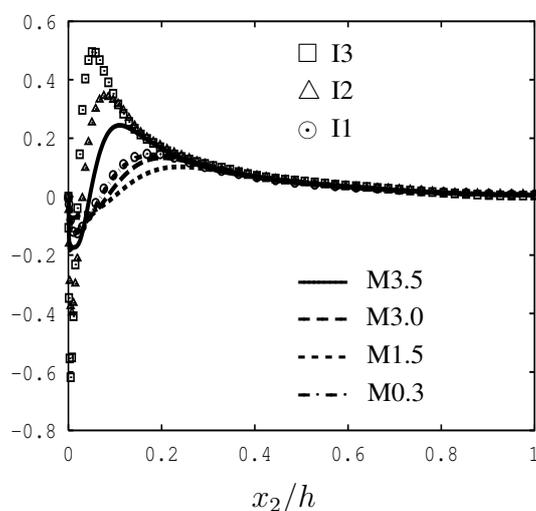


Abbildung 3.66: Bilanz der  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Komponente der turbulenten Spannungen für Fall M3.0, normiert mit  $u_{av} \tau_w / H$ .



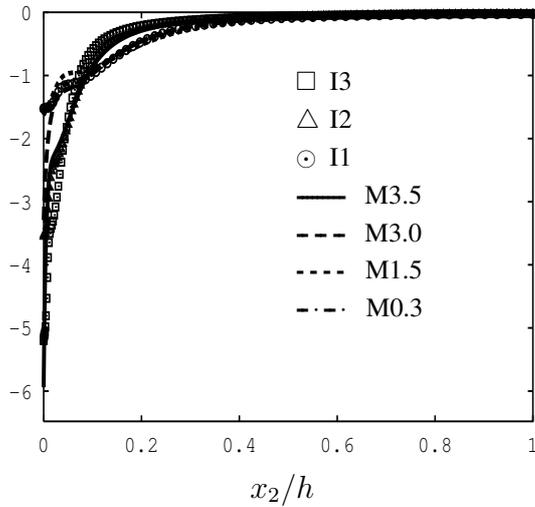
**Abbildung 3.67:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Druckscherkorrelation der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).

**Abbildung 3.68:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Druckscherkorrelation der  $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).

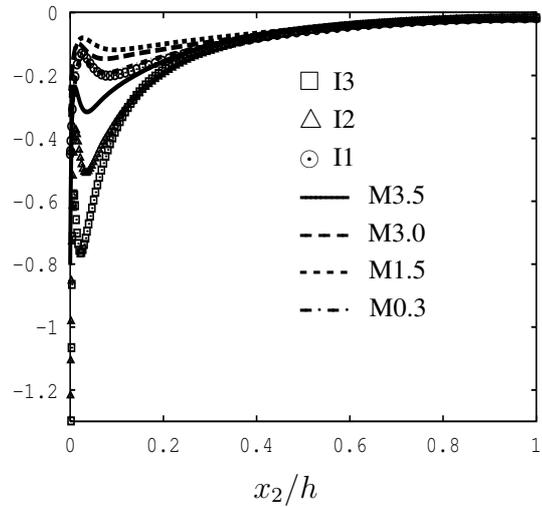


**Abbildung 3.69:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Druckscherkorrelation der  $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).

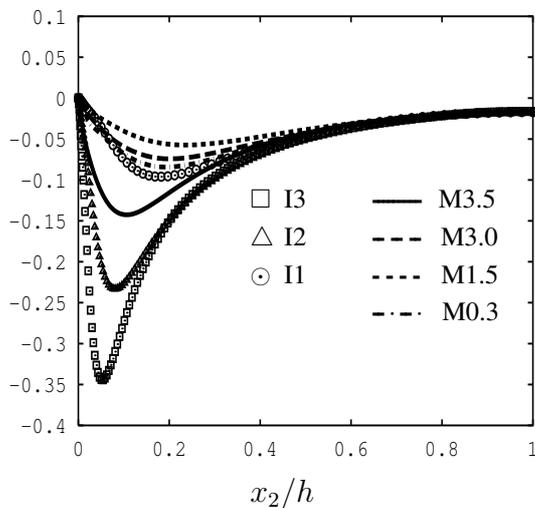
**Abbildung 3.70:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Druckscherkorrelation der  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



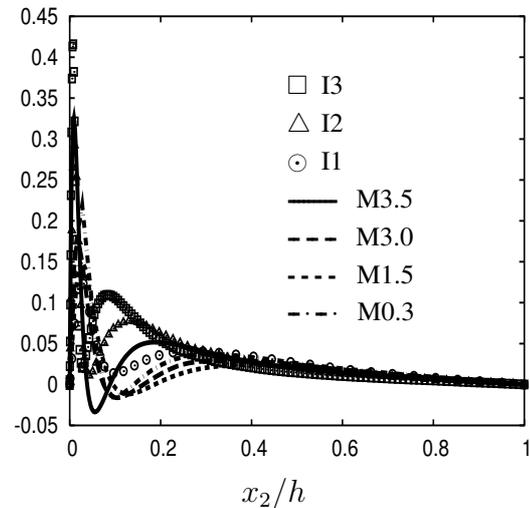
**Abbildung 3.71:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



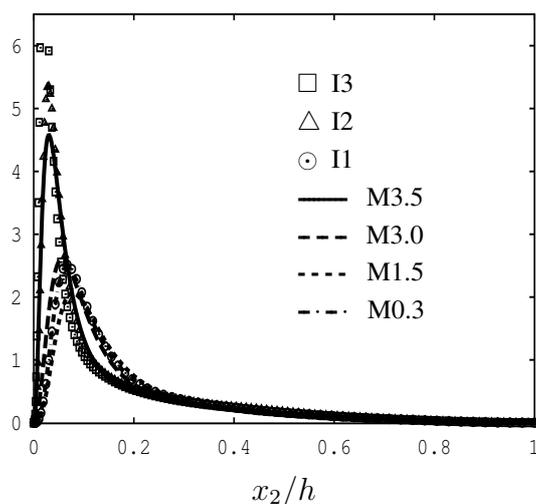
**Abbildung 3.72:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der  $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



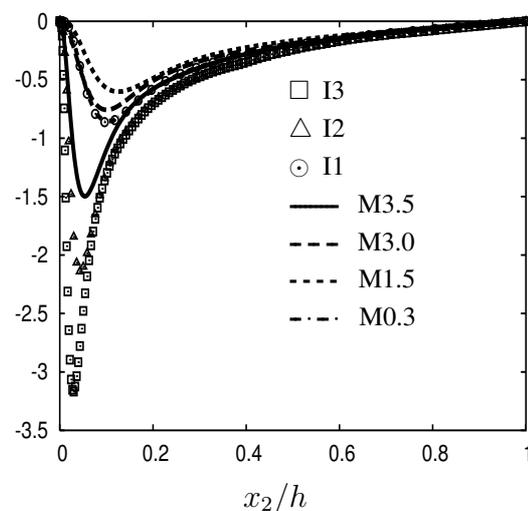
**Abbildung 3.73:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der  $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



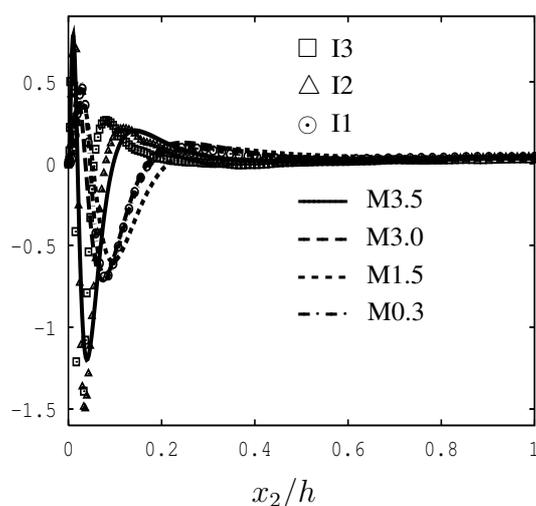
**Abbildung 3.74:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



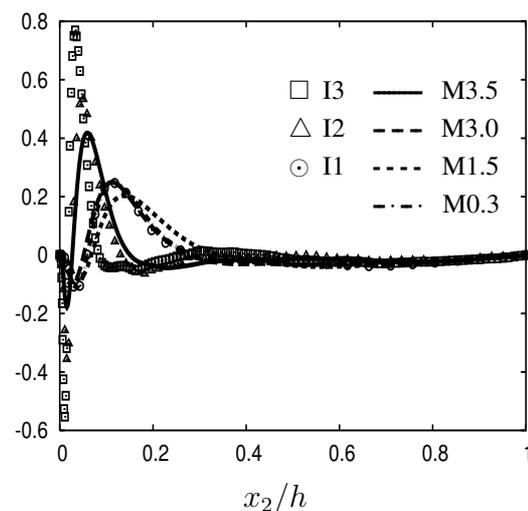
**Abbildung 3.75:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Produktion der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 3.76:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die Dissipation der  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 3.77:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf den turbulenten Transport der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 3.78:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf den turbulenten Transport der  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).

lere Geschwindigkeitsgradient mit  $u_{av}/h$  skaliert, so dass für die Bilanzen der turbulenten Skalarflüsse  $\chi_w u_{av}/h$  geeignet erscheint. Dies wird durch die Abbildungen 3.82 bis 3.89 bestätigt. Sämtliche Bilanzterme fallen im Aussenbereich des Kanals aufeinander, unabhängig von der Mach- und Reynoldszahl. Der Grund für die leichten Abweichungen von Fall M0.4 von Kreuzinger, besonders bei den Druck-Skalargradientenkorrelationen ist auf eine zu geringe Zahl von Stichproben in der Auswertung zurückzuführen. Zur besseren Identifikation von Reynolds- und Machzahleffekten wurde aber beschlossen, diesen Fall in die Abbildungen aufzunehmen. Analoge Überlegungen für die Terme der Bilanz der Skalarvarianz führen auf die Normierung  $\chi_w \theta_d/h$ .  $\theta_d$  stellt die Differenz zwischen der mittleren Skalarkonzentration in der Kanalmitte und an der Wand dar und kann hier gleich dem Wandwert der Konzentration gesetzt werden, da  $\tilde{\Theta}(H) = 0$  ist. Auch hier erkennt man wieder ein universelles Verhalten aller gerechneten Fälle (Abbildungen 3.90 bis 3.93), die im Aussenbereich des Kanals aufeinanderfallen. Wie zu erwarten, treten Kompressibilitätseffekte ausschliesslich in Wandnähe auf und machen eine andere Normierung im Wandbereich notwendig, um die Effekte der Viskositäts- und Dichteänderungen zu berücksichtigen.

### 3.5.2 Innere Skalierung der Bilanzen

Die Notwendigkeit einer inneren Skalierung, basierend auf semilokalen Koordinaten wird deutlich, wenn man das Maximum der Produktion der Skalarvarianz und der Produktion der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz abschätzen will. Aus der Produktion der Skalarvarianz,

$$P_{\theta^2} = \overline{\rho u_3'' \theta''} / \chi_w \frac{\partial \tilde{\Theta}^+}{\partial \bar{x}_2^+} \stackrel{(3.6)}{\simeq} \left( 1 - \frac{1}{Sc} \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \frac{\partial \tilde{\Theta}^+}{\partial \bar{x}_3^+} \right) \frac{\partial \tilde{\Theta}^+}{\partial \bar{x}_2^+}, \quad (3.41)$$

erhält man die Position des Maximums wie üblich durch Differentiation

$$d \left( \frac{-\overline{\rho u_3'' \theta''}}{\chi_w} \frac{\partial \tilde{\Theta}^+}{\partial \bar{x}_2^+} \right) / dx_2^+ = 0. \quad (3.42)$$

Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{1}{Sc} \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \frac{d\tilde{\Theta}^+}{dx_2^+} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{Sc} \frac{d\bar{\mu}/\mu_w}{dx_2^+} \left( \frac{d\tilde{\Theta}^+}{dx_2^+} \right)^2 / \frac{d^2\tilde{\Theta}^+}{dx_2^{+2}} \right). \quad (3.43)$$

Der Term in den Klammern ist immer grösser als eins, da beispielsweise von der unteren Wand ausgehend die Viskosität und die Skalarkonzentration in "+"-Koordinaten steigen, so dass das Produkt der ersten Ableitung der Viskosität und zweiten Ableitung der Skalarkonzentration immer kleiner als Null ist. Damit folgt die Ungleichung

$$\frac{1}{Sc} \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \frac{d\tilde{\Theta}^+}{dx_2^+} > \frac{1}{2} \quad (3.44)$$

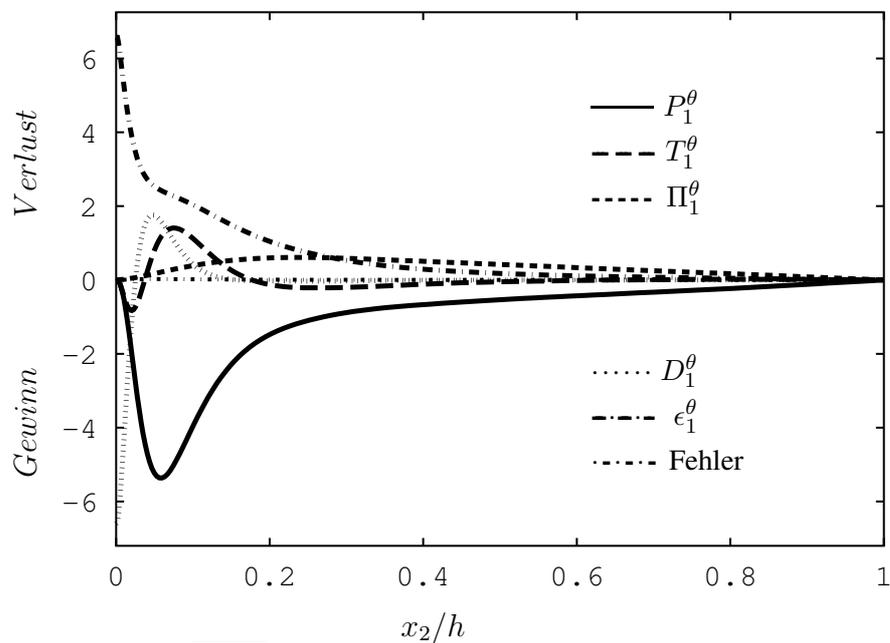


Abbildung 3.79: Bilanz der  $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Komponente des turbulenten Skalarflusses für den Fall M3.0, normiert mit  $\tau_w \theta_w / h$ .

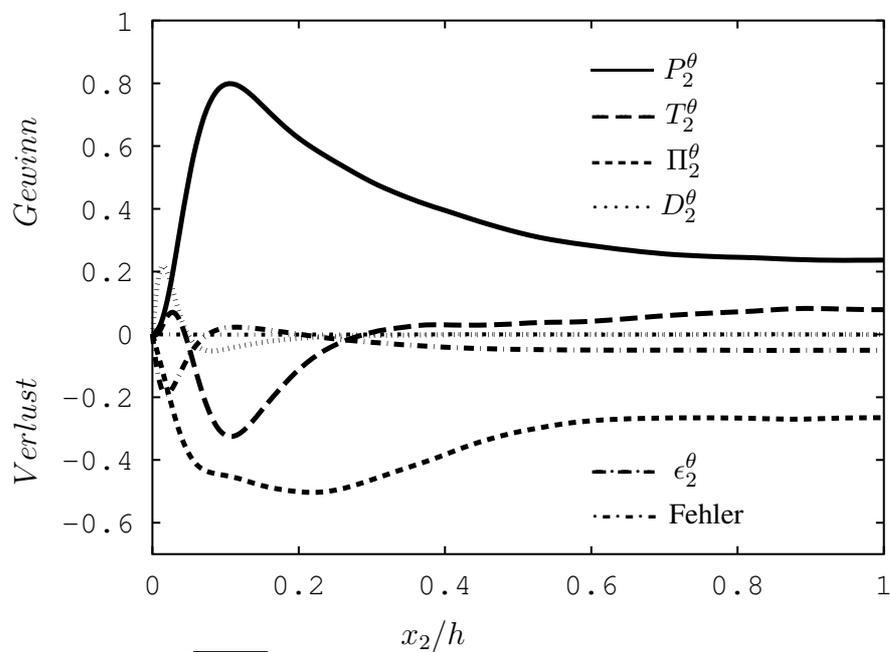
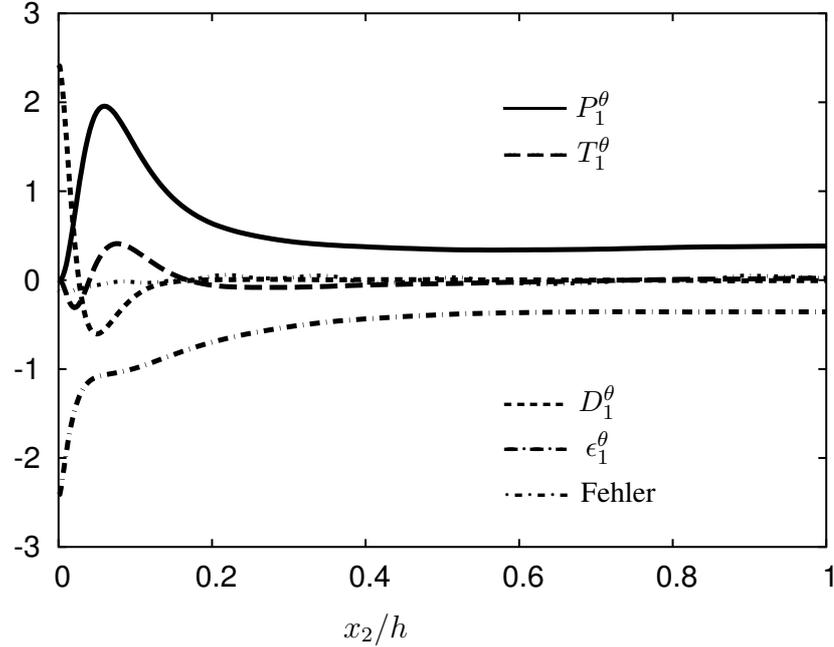


Abbildung 3.80: Bilanz der  $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Komponente des turbulenten Skalarflusses für den Fall M3.0, normiert mit  $\tau_w \theta_w / h$ .



**Abbildung 3.81:** Einfluss der Machzahl auf die Bilanz der Varianz des Skalars für Fall M3.0, normiert mit  $\chi_w \theta_w / h$ .

während man in inkompressiblen Strömungen mit  $\bar{\mu} / \mu_w = 1$  die Gleichung

$$\frac{1}{Sc} \frac{d\tilde{\Theta}^+}{dx_2^+} = \frac{1}{2} \quad (3.45)$$

erhält. Mit Gleichung (3.6) folgt nun die Ungleichung

$$-\frac{\overline{\rho u_3'' \theta''}}{\chi_w} < \frac{1}{2}$$

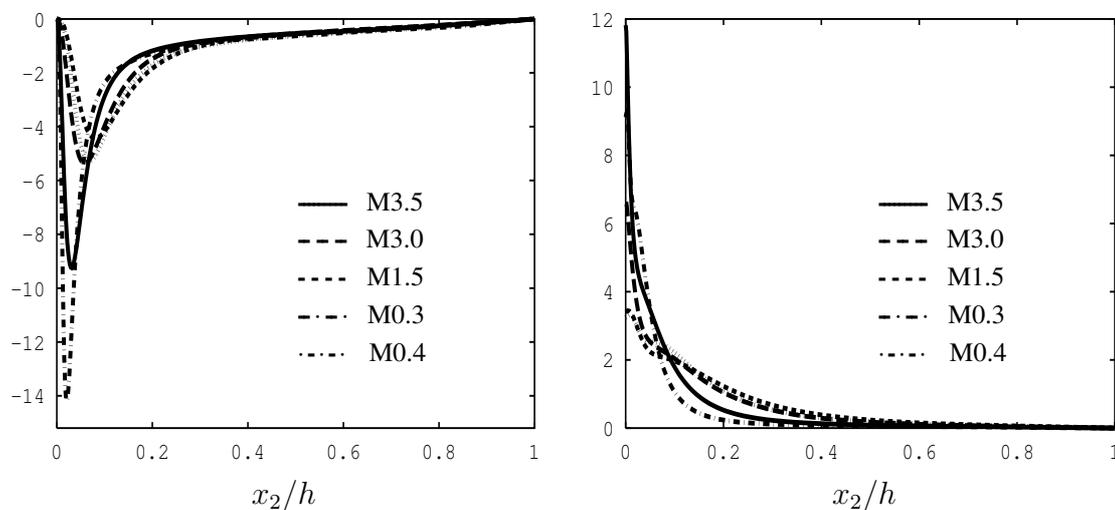
(beachte:  $\chi_w$  ist an der unteren Wand negativ), im inkompressiblen Fall dagegen ist  $-\frac{\overline{\rho u_3'' \theta''}}{\chi_w} = \frac{1}{2}$ . Setzt man (3.43) in (3.41) ein, ergibt sich

$$P_{\theta^2} = \frac{Sc}{4} \underbrace{\frac{\mu_w}{\bar{\mu}}}_{<1} \underbrace{\left( 1 - \left( \frac{1}{Sc} \frac{d\bar{\mu}/\mu_w}{dx_2^+} \left( \frac{d\tilde{\Theta}^+}{dx_2^+} \right)^2 / \frac{d^2\tilde{\Theta}^+}{dx_2^{+2}} \right)^2 \right)}_{<1} < \frac{Sc}{4} \quad (3.46)$$

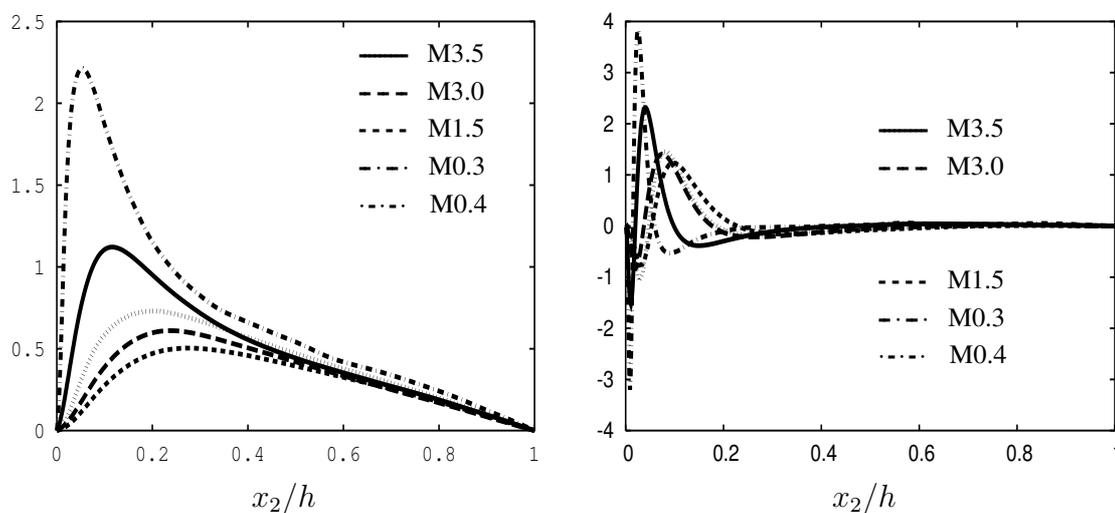
Die maximale Produktionsrate der Skalarfluktuationen in inkompressiblen Strömungen ist  $Sc/4$  und damit grösser als im kompressiblen Fall, Viskositätsänderungen führen also zu einer geringeren Peak-Produktionsrate.

In analoger Weise berechnet man auch eine obere Grenze für die Produktion der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz. Differentiation und Nullsetzen liefert die Bedingung

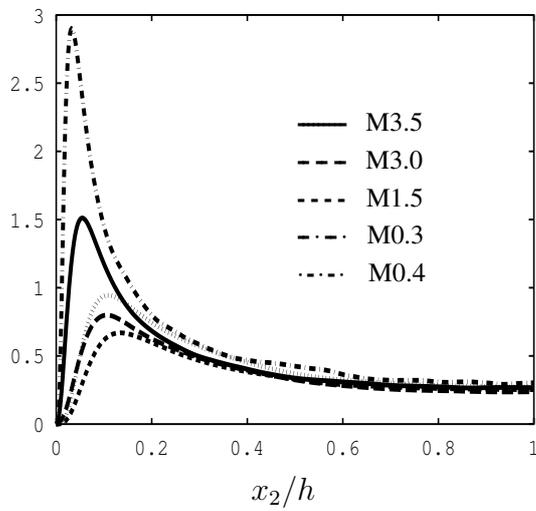
$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \frac{d\bar{u}_1^+}{dx_2^+} = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{d\bar{u}_1^+}{dx_2^+} \right)^2 \frac{d\bar{\mu}/\mu_w}{dx_2^+} / \frac{d^2\bar{u}_1^+}{dx_2^{+2}} \right), \quad (3.47)$$



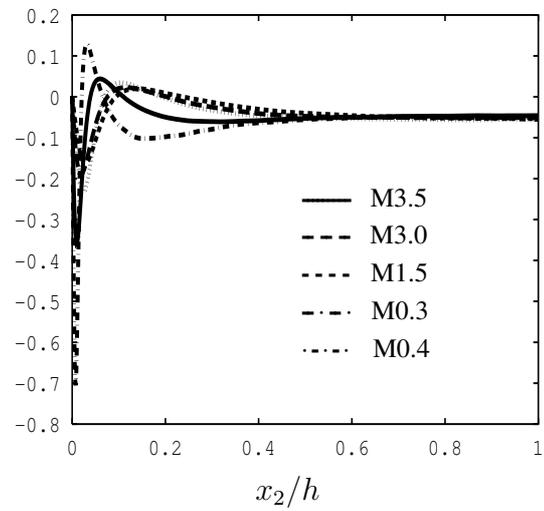
**Abbildung 3.82:** Einfluss der Machzahl auf die Produktion der  $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w u_{av}/h$ . **Abbildung 3.83:** Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der  $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w u_{av}/h$ .



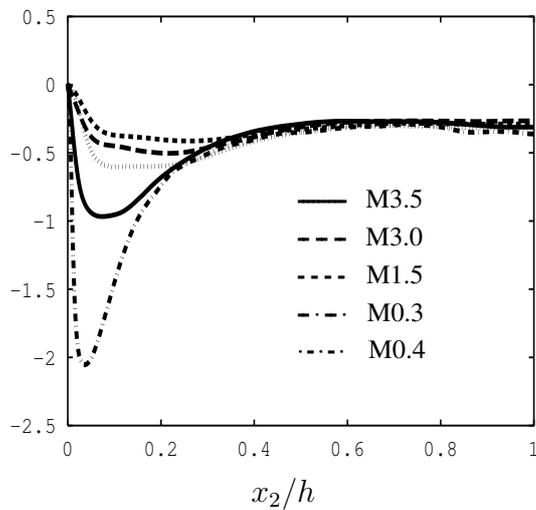
**Abbildung 3.84:** Einfluss der Machzahl auf die Druck-Skalargradientenkorrelation der  $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w u_{av}/h$ . **Abbildung 3.85:** Einfluss der Machzahl auf den Transport der  $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w u_{av}/h$ .



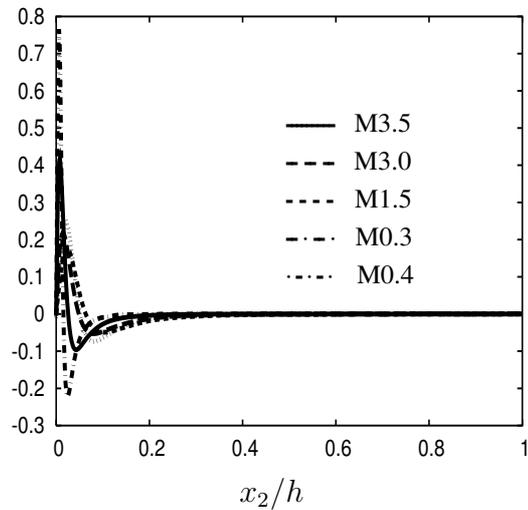
**Abbildung 3.86:** Einfluss der Machzahl auf die Produktion der  $\rho u_2'' \theta''$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w u_{av} / h$ .



**Abbildung 3.87:** Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der  $\rho u_2'' \theta''$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w u_{av} / h$ .



**Abbildung 3.88:** Einfluss der Machzahl auf die Druck-Skalargradientenkorrelation der  $\rho u_2'' \theta''$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w u_{av} / h$ .



**Abbildung 3.89:** Einfluss der Machzahl auf die Diffusion der  $\rho u_2'' \theta''$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w u_{av} / h$ .

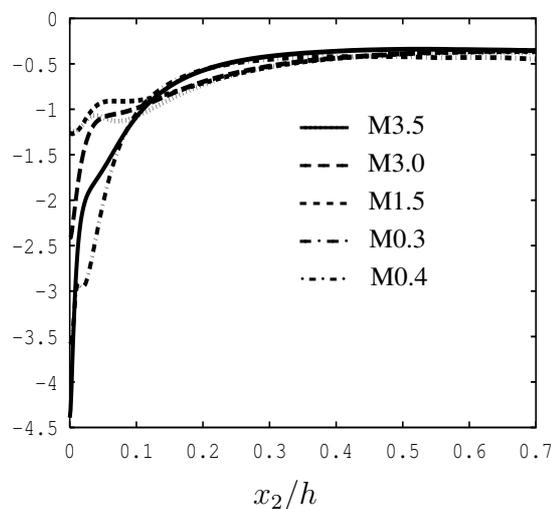
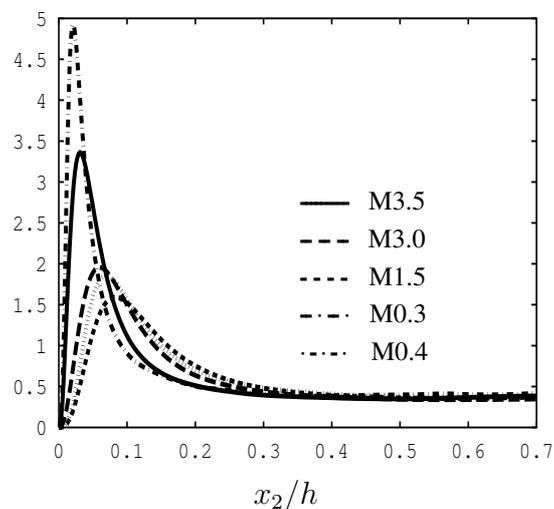


Abbildung 3.90: Einfluss der Machzahl auf die Produktion der  $\overline{\rho\theta''\theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w\theta_w/h$ .

Abbildung 3.91: Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der  $\overline{\rho\theta''\theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w\theta_w/h$ .

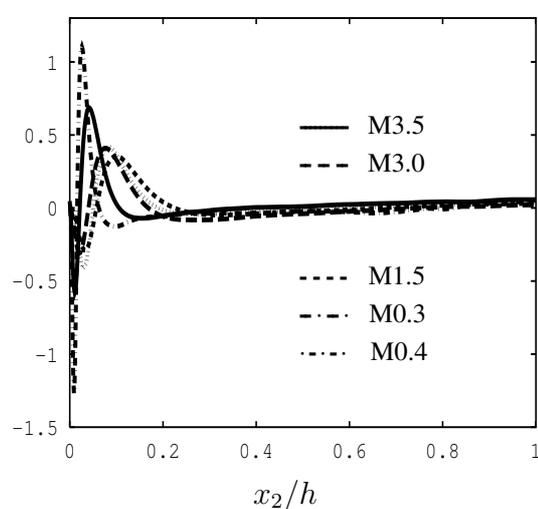
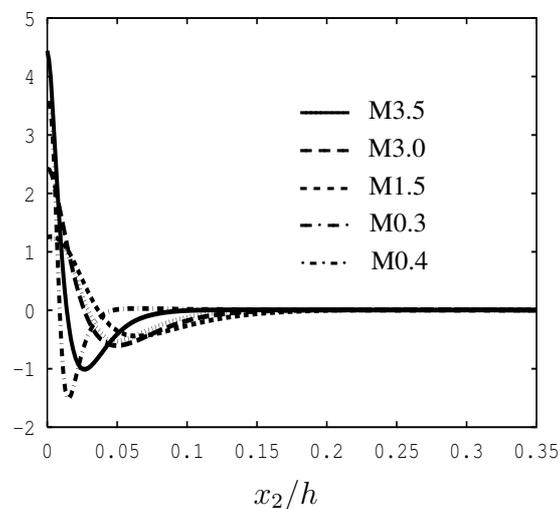


Abbildung 3.92: Einfluss der Machzahl auf die Diffusion der  $\overline{\rho\theta''\theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w\theta_w/h$ .

Abbildung 3.93: Einfluss der Machzahl auf den Transport der  $\overline{\rho\theta''\theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w\theta_w/h$ .

woraus mit  $d(\bar{\mu}/\mu_w)/dx_1^+ > 0$  und  $d^2\bar{u}_1^+/dx_2^{+2} < 0$  die Ungleichung

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \frac{d\bar{u}_1^+}{dx_2^+} > \frac{1}{2} \quad (3.48)$$

folgt. Einsetzen dieser Beziehung in  $P_{11}^u \stackrel{(3.4)}{=} \left(1 - \frac{\bar{\mu}}{\mu_w} \frac{d\bar{u}_1^+}{dx_2^+}\right) \frac{d\bar{u}_1^+}{dx_2^+}$  ergibt nun

$$P_{11}^u = \frac{1}{4} \underbrace{\frac{\mu_w}{\bar{\mu}}}_{<1} \underbrace{\left(1 - \left(\left(\frac{d\bar{u}_1^+}{dx_2^+}\right)^2 \frac{d\bar{\mu}/\mu_w}{dx_2^+} / \frac{d^2\bar{u}_1^+}{dx_2^{+2}}\right)^2\right)}_{<1} < \frac{1}{4}, \quad (3.49)$$

während das Maximum der Produktion im inkompressiblen  $\overline{P_{11}^u} = 1/4$  ist. Damit wird aufgrund der variablen Viskosität die Peak-Produktion der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz, sowie der turbulenten kinetischen Energie reduziert.

In inkompressiblen Stömungen ist es üblich, die Bilanzterme der Reynoldsspannungen mit  $u_\tau^4/\nu$  zu normieren. Eine korrespondierende Skalierung für supersonische Strömungen erhält man nun durch Betrachtung der turbulenten Produktion. Ausserhalb der viskosen Unterschicht wird angenommen, dass  $-\bar{\rho}R_{12} = \tau_w(1 - x_2/h)$  gilt, während die mittlere Scherung als  $\partial\tilde{u}_1/\partial x_2 = u_\tau^*/\kappa x_2$  angenähert wird. Die Produktion in dieser Region ergibt sich damit zu  $P = (\tau_w^2/\bar{\mu}\kappa)(1/x_2^* - 1/h^*)$ , das heisst, die Produktion, normiert mit  $\tau_w^2/\bar{\mu}$ , ist eine Funktion der semilokalen Koordinate  $x_2^*$ . Damit sollten die Bilanzen der turbulenten Spannungen mit  $\tau_w^2/\bar{\mu}$  normiert und die Profile als Funktion der semilokalen Koordinate  $x_2^*$  aufgefasst werden. Diese Skalierung wurde erstmals von Foyi *et al.* (2003) verwendet, später dann auch von Morinishi *et al.* (2004)

Für die Bilanzen der Skalarflüsse und Skalarvarianzen kann ähnlich vorgegangen werden. Ausserhalb der viskosen Unterschicht wird hier angenommen, dass die Skalarflüsse mit  $\chi_w$  und die mittleren Skalgredienten mit  $\partial\tilde{\Theta}/\partial x_2 = \theta_\tau^*/\kappa x_2$  skalieren, die Reynoldsspannungen und mittlere Scherung dagegen wieder wie oben. Die Produktion der turbulenten Skalarflüsse sollte deshalb proportional zu  $P = (\chi_w\tau_w/\bar{\mu}\kappa)1/x_2^*$ , die der Skalarvarianzen proportional zu  $P = (\chi_w^2/\bar{\mu}\kappa)1/x_2^*$  sein. Damit folgt konsequenterweise, dass die Profile der turbulenten Skalarflüsse mit  $\chi_w\tau_w/\bar{\mu}$ , die der Skalarvarianzen mit  $\chi_w^2/\bar{\mu}$  normiert und als Funktion der semilokalen Koordinate  $x_2^*$  aufgefasst werden sollten.

Diese kurze Abschätzung liefert also ein weiteres Argument für die Verwendung von  $x_2^*$  in der semilokalen Skalierung von Huang *et al.* (1995). Jedoch, wie wir gleich sehen werden, macht diese semilokale Skalierung die Profile in Wandnähe nicht unabhängig von der Reynolds- und Machzahl und führt, besonders bei den Druckscher- und Druck-Skalgredientenkorrelationen, zu Unterschieden im wandnahen Verhalten und damit indirekt zu Unterschieden in den turbulenten Spannungen und Skalarflüssen.

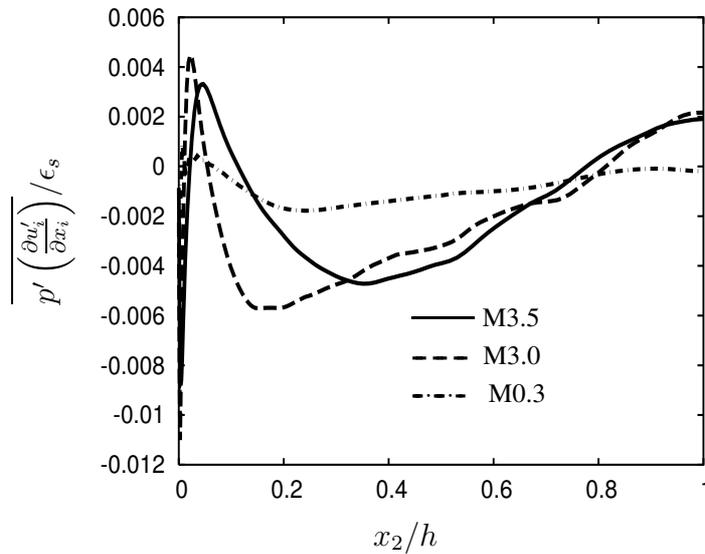
	$\Pi_{11}^u$	$P_{11}$	$\epsilon_{11}$	$T_{11}$	$D_{11}$	
M0.3	-0.027	0.151	-0.079	-0.0041	-0.0045	
M3.0	-0.018	0.164	-0.0875	-0.0048	-0.0095	
Differenz	-0.009	0.013	0.0085	0.007	0.005	
	$\Pi_{22}^u$	$\epsilon_{22}$	$D_{22}$	$\Pi_{33}^u$	$\epsilon_{33}$	$D_{33}$
M0.3	0.0095	0.151	-0.003	0.018	-0.016	-0.0018
M3.0	0.0035	0.164	0	0.014	-0.013	-0.0012
Differenz	-0.0055	0.0015	0.003	-0.004	-0.003	-0.0006

**Tabelle 3.4:** Vergleich von Komponenten der Reynoldsspannungen bei  $x_2^* = 20$  für die Fälle M0.3 und M3.0. Die Differenz gibt die Änderung des Betrags der jeweiligen Komponente an.

### Innere Skalierung der Bilanzen der turbulenten Spannungen

In den Abbildungen 3.95 bis 3.106 sind die Profile ausgewählter Terme der Bilanzen der turbulenten Spannungen dargestellt. Die großen Unterschiede in Wandnähe, die bei Verwendung der äusseren Skalierung auftraten sind deutlich reduziert worden, ausserdem liegen nun die Maxima der Terme fast an derselben Position. Besonders für die gezeigten Terme der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz, die Produktion (Abbildung 3.103), die Dissipation (Abbildung 3.99) und den Transport (Abbildung 3.105) scheint es eine exzellente Übereinstimmung zu geben, während die Druckscherkorrelationen und die Terme in den spannweiten und wandnormalen Bilanzen trotzdem noch Unterschiede zeigen. Die Skalierung trägt deshalb einem Großteil der durch die Dichte- und Viskositätsvariation verursachten Kompressibilitätseffekten Rechnung und bestätigt deren Dominanz gegenüber intrinsischen Kompressibilitätseffekten. Da die Terme der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz, insbesondere die Produktion, die dominanten Terme in der Bilanz der turbulenten kinetischen Energie sind, ist klar, warum Morinishi *et al.* (2004) von einer so guten Übereinstimmung seiner Fälle berichten konnte. Bei der Untersuchung der turbulenten kinetischen Energiebilanz verwendete er die gleiche Normierung und schrieb die Unterschiede der Viskositäts- und Dichteveriation zu. Aufgrund der niedrigen Machzahlen (1 bis 1.5) sind die Effekte in deren Arbeit allerdings sehr gering.

Was ist nun der Grund für die beobachtete Anisotropiezunahme? Um dies genauer zu überprüfen wurden die Änderungen der Bilanzterme an der Stelle  $x_2^* = 20$  protokolliert, da hier die Fälle M0.3 und M3.0, aufgrund derselben lokalen Reynoldszahl, direkt miteinander verglichen werden können. In Tabelle 3.5.2 sind die Werte der Bilanzterme der dominanten Beiträge aufgeführt. Konsistent mit der Erhöhung von  $\overline{\rho u_1'' u_1''} / \tau_w$  steigt die Produktion in der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz. Die erhöhte Produktion bewirkt natürlich eine erhöhte Dissipation, wobei der Unterschied zu gesteigerter Diffusion und Transport führt. Die einzige stark sinkende Komponente ist die Druckscherkorrelation, die die Leistung des Drucks an den Geschwindigkeitsfluktuationen beschreibt. In inkompressibler Strömung sind die Druckscherkorrelationen für die Umverteilung der Energie in der Strömung

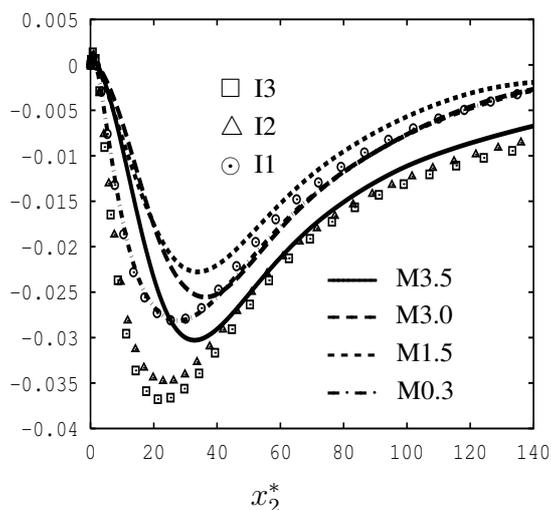


**Abbildung 3.94:** Quotient aus Druckdilatation und inkompressiblem Anteil der Dissipationsrate.

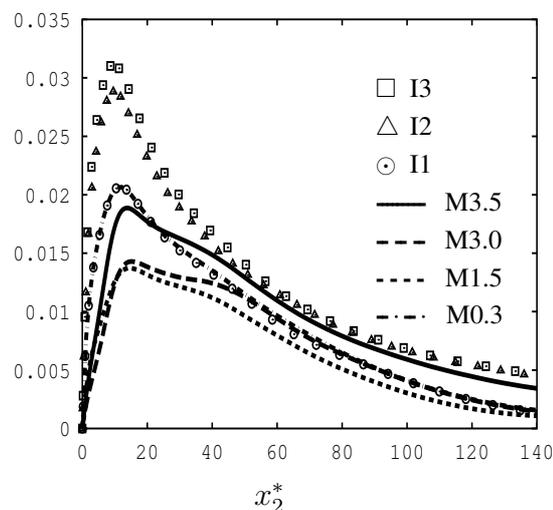
verantwortlich (siehe Pope (2000)), da gilt  $\overline{p' \left( \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_3} \right)} = 0$ . In supersonischen Strömungen ist die Druckdilatation ungleich Null, aber sehr klein, so dass das Umverteilungsargument weiterhin in guter Näherung gültig ist. Abbildung 3.94 zeigt, dass das Verhältnis von Druckdilatation zum inkompressiblen Anteil der Dissipationsrate kleiner als 1% ist. Ein Absinken von  $\Pi_{11}^u$  bedeutet aber einen geringeren Energietransfer in die  $x_2$ - und  $x_3$ -Richtung. Die Druckscherkorrelation in den spannweitigen und wandnormalen Bilanzen ist jedoch hier kein Senkenterm, sondern ein Quellterm (die Produktion ist Null). Die verminderte Umverteilung führt aber zu einer Reduktion dieser Quellterme und damit zu geringeren turbulenten Spannungen. Die Tabelle 3.4 bestätigt diese Argumentation und zeigt, dass alle Bilanzterme der spannweitigen und wandnormalen Bilanzen absinken.

### Innere Skalierung der Bilanzen des passiven Skalars

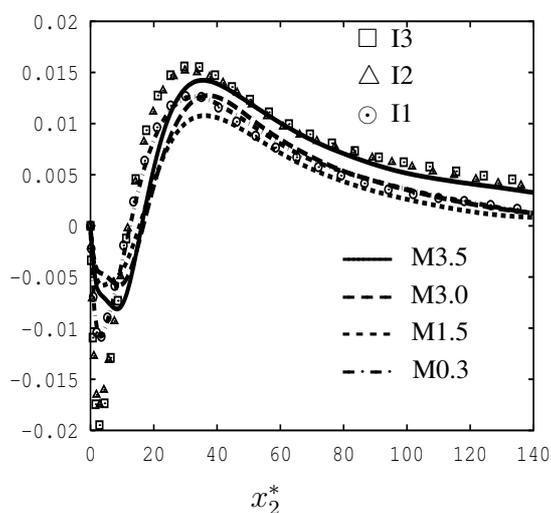
Aufgrund der starken Korrelation der Skalar- und Geschwindigkeitsfluktuationen in  $x_1$ -Richtung ist zu erwarten, dass die semilokale Normierung alle Terme ausser der Druck-Skalargradientenkorrelation in der  $\overline{\rho u'_1 \theta''}$ -Bilanz, unabhängig von Mach- und Reynoldszahl, aufeinander abbildet. Genau das wird von den Abbildungen 3.107 bis 3.110 wiedergegeben. Wie bei der Produktion der turbulenten Spannungen steigt der Betrag des Maximums der Produktion des Skalarflusses von Fall M0.3 (0.46) zu Fall M3.0 (0.47), sowie von Fall M0.4 (0.48) zu Fall M3.5 (0.485). Vergleicht man Fall M0.3 und M3.0, so sieht man, dass die größten Änderungen, relativ zum Maximalwert, wieder bei der Druckkorrelation, einem Senkenterm in dieser Bilanz, im Bereich  $x_2^* < 50$  auftreten. Auch hier re-



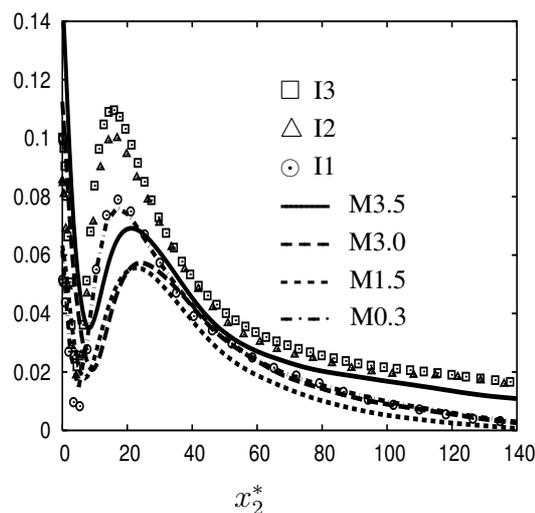
**Abbildung 3.95:** Vergleich der Druckscherkorrrelation der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



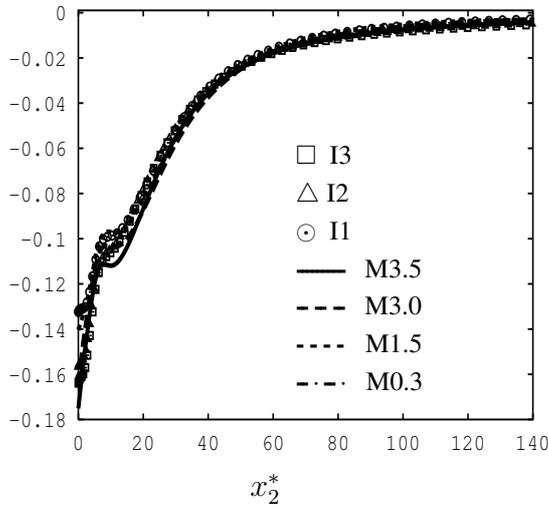
**Abbildung 3.96:** Vergleich der Druckscherkorrrelation der  $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



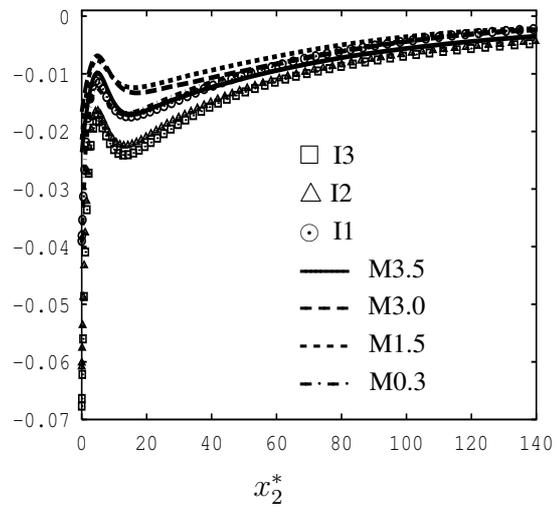
**Abbildung 3.97:** Vergleich der Druckscherkorrrelation der  $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



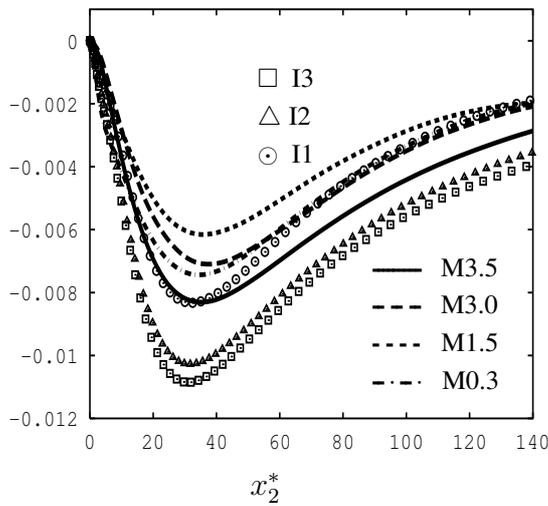
**Abbildung 3.98:** Vergleich des Druckscherkorrrelation der  $\overline{\rho u_1'' u_3''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



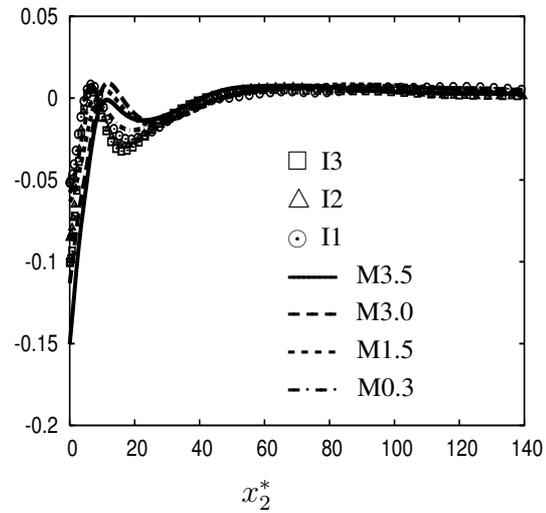
**Abbildung 3.99:** Vergleich der Dissipation der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



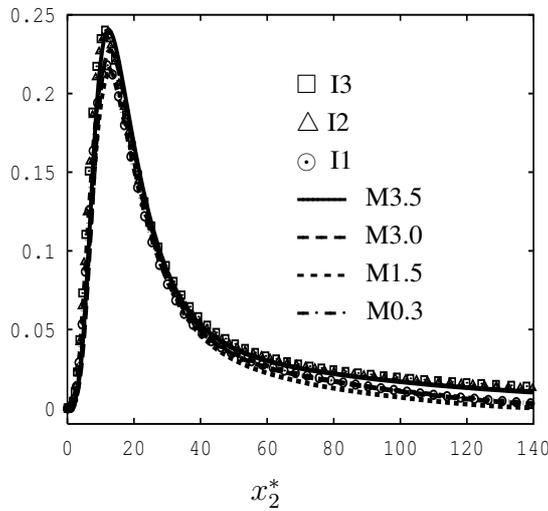
**Abbildung 3.100:** Vergleich der Dissipation der  $\overline{\rho u_3'' u_3''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



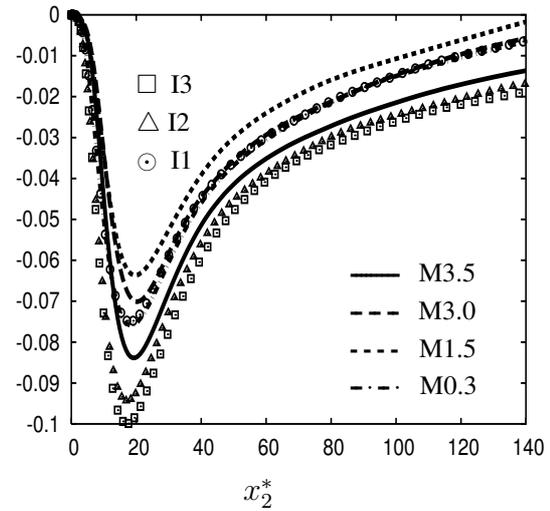
**Abbildung 3.101:** Vergleich der Dissipation der  $\overline{\rho u_2'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



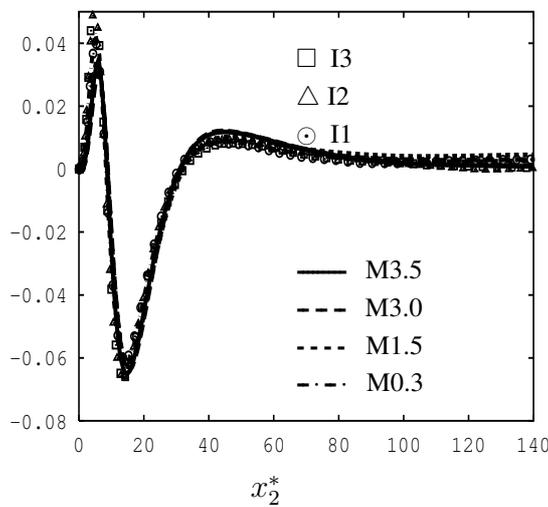
**Abbildung 3.102:** Vergleich der Dissipation der  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



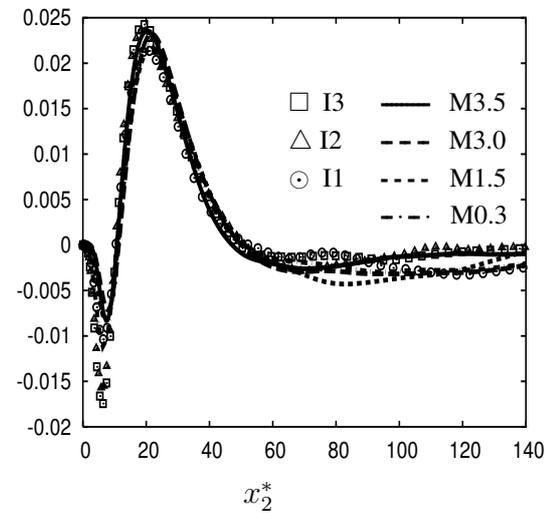
**Abbildung 3.103:** Vergleich der Produktion der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 3.104:** Vergleich der Produktion der  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 3.105:** Vergleich des turbulenten Transports der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).



**Abbildung 3.106:** Vergleich des turbulenten Transports der  $\overline{\rho u_1'' u_2''}$ -Bilanz für die kompressiblen Simulationen und die inkompressiblen Ergebnisse von Moser *et al.* (1999).

duziert sich die Druckkorrelation mit steigender Machzahl. In der viskosen Unterschicht findet man ausserdem einen starken Anstieg der Dissipation und Diffusion, bedingt durch den Anstieg der Viskosität, jedoch auch einen starken Abfall des Transportterms. Auch ausserhalb der viskosen Unterschicht steigt die Dissipation mit steigender Machzahl.

Analog zur wandnormalen Bilanz der turbulenten Spannungen tritt eine Reduktion der Beträge der  $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanzterme (Abbildungen 3.111 bis 3.114) für die kompressiblen Fälle gegenüber den inkompressiblen Fällen im Bereich  $x_2 < 60$  auf. Die Druck-Skalargradientenkorrelation besitzt die Größenordnung des Produktionsterms und wird in etwa um den gleichen Betrag reduziert (0.011 zwischen Fall M0.3 und M3.0) wie die Produktion (0.009 zwischen Fall M0.3 und M3.0).

Fasst man nun die vorherigen Untersuchungen zusammen, so bleibt festzuhalten: Die Bilanzen der turbulenten Spannungen und Skalarflüsse zeigen sich nicht nur durch die starken Änderungen von Dichte und Viskosität beeinflusst, sondern auch durch eine gehemmte Umverteilung der Schwankungsenergie infolge der Kompressibilität. Dies hat direkt eine Vergrösserung der Anisotropie zur Folge, die sich in einer Reduktion der Geschwindigkeitsfluktuationen in spannweitischer und wandnormaler Richtung und einer Vergrösserung der Fluktuationen in Stromabrichtung (und damit auch der turbulenten Spannungen und Skalarflüsse) äussert. Indirekt werden dadurch die Terme in den Bilanzgleichungen des Skalars beeinflusst, da dieser nicht aktiv auf die Strömung wirkt, sondern zum einen durch das mittlere Geschwindigkeitsfeld konvektiert wird, zum anderen die Mischung des Skalars direkt von den Geschwindigkeitsfluktuationen und deren Gradienten auf kleinen Skalen abhängt. Die Reduktion der Druckscherkorrelationen und Druck-Skalargradientenkorrelationen wird im nachfolgenden Kapitel Gegenstand genauerer Untersuchung, sein.

In den Abbildungen 3.115 bis 3.118 sind die Produktion, Dissipation, Diffusion und der Transportterm der Skalarvarianz, normiert mit  $\chi_w^2 / \bar{\mu}$  zu sehen. Die großen Unterschiede in Wandnähe, die bei der äusseren Skalierung auftraten, sind nahezu verschwunden und beweisen den Erfolg dieser Skalierung. Die größten Unterschiede zwischen den Fällen treten im Transportterm und der Dissipation auf. Eine genaue Betrachtung der Kurven zeigt, dass die Änderungen hauptsächlich auf Reynoldszahleffekte zurückzuführen sind. Dies erkennt man besonders einfach in der Dissipation. Hier sinkt die Dissipation von Fall M0.4 gegenüber M0.3, sowie Fall M3.5 gegenüber M3.0 im Bereich  $x_2^* > 20$ , bei nahezu gleicher lokaler Machzahl. Gleichzeitig sieht man keine Unterschiede in diesem Bereich zwischen Fall M0.3 und M3.0, die beide dieselbe Reynoldszahl besitzen. Die Unterschiede sind damit eindeutig durch Reynoldszahleffekte bedingt. In der viskosen Unterschicht ( $x_2^* = 5$ ) steigt die Dissipation mit steigender Reynoldszahl leicht an, sowohl für die inkompressiblen als auch die kompressiblen Kurven. Obwohl die Reynoldszahl der kompressiblen Kurven unterhalb derjenigen von Fall M0.4 an dieser Stelle liegt, besitzt die Dissipation für die kompressiblen Fälle einen größeren Wert. Hier kommt damit zusätzlich ein Machzahleffekt zum Tragen. Der

Anstieg der Dissipation an dieser Stelle wird durch ein Absinken des Transport- und Diffusionsterms gerade kompensiert.

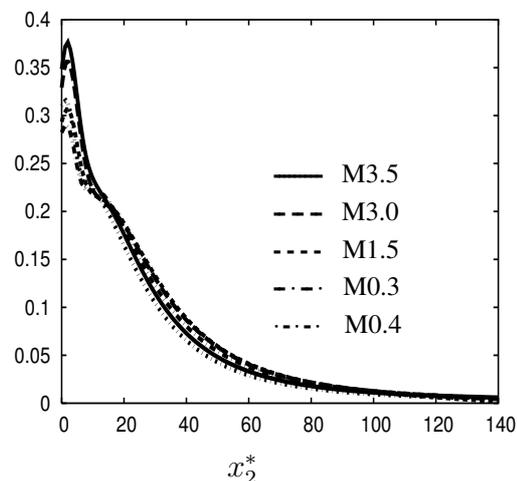
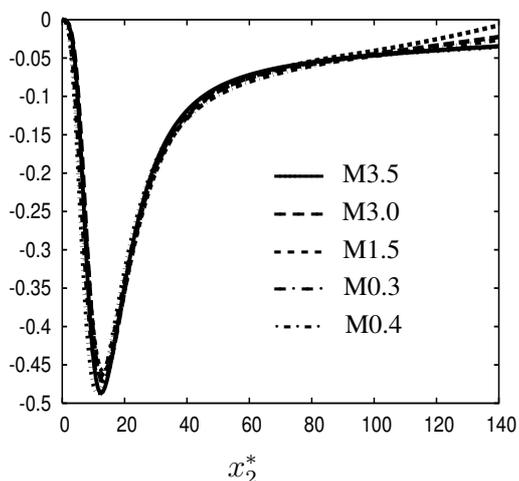


Abbildung 3.107: Einfluss der Machzahl auf die Produktion der  $\rho u_1'' \theta''$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .

Abbildung 3.108: Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der  $\rho u_1'' \theta''$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .

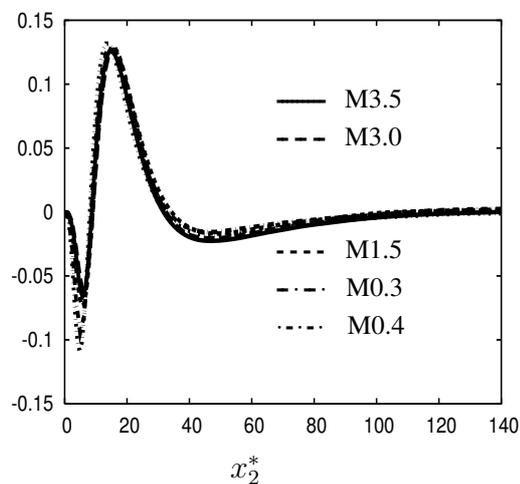
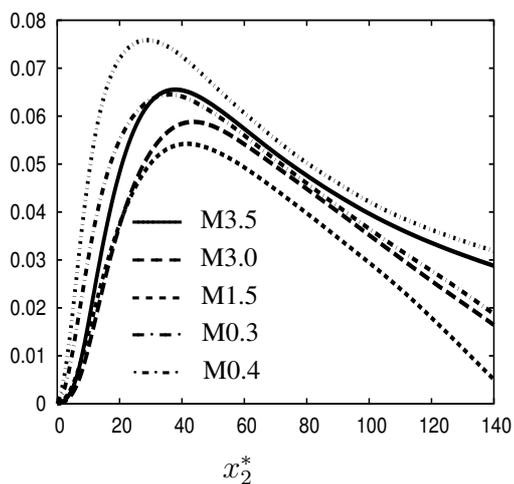
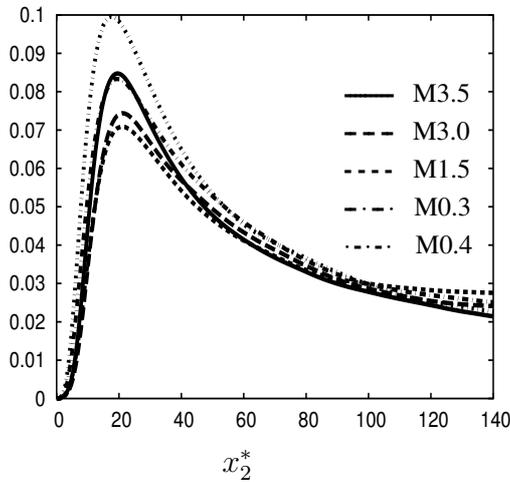
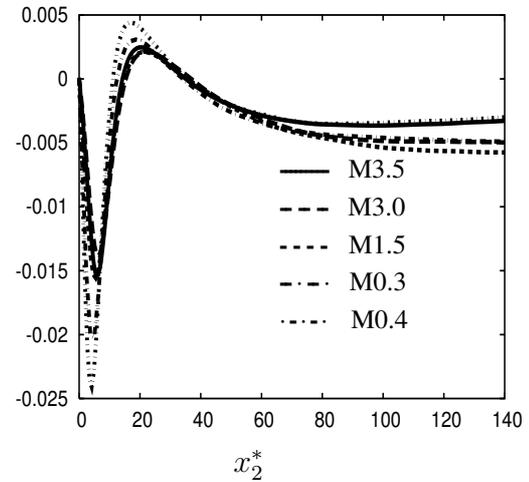


Abbildung 3.109: Einfluss der Machzahl auf die Druck-Skalargradientenkorrelation der  $\rho u_1'' \theta''$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .

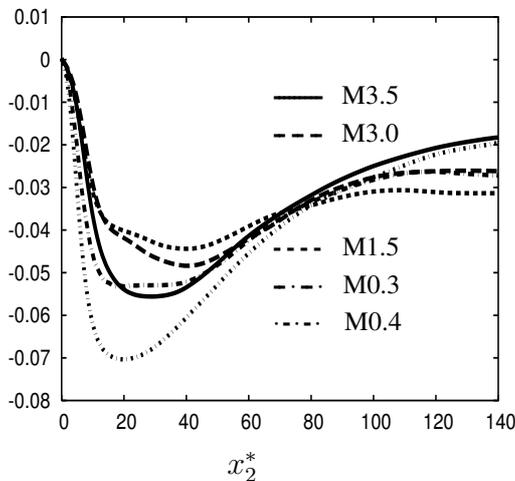
Abbildung 3.110: Einfluss der Machzahl auf den Transport der  $\rho u_1'' \theta''$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .



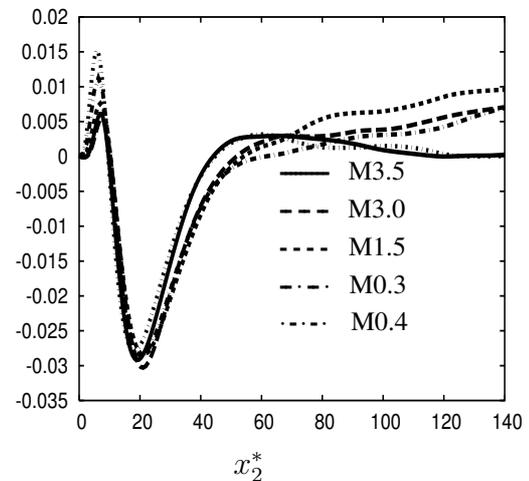
**Abbildung 3.111:** Einfluss der Machzahl auf die Produktion der  $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .



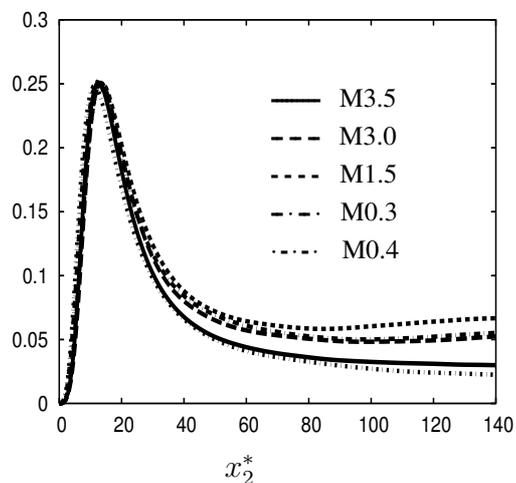
**Abbildung 3.112:** Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der  $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .



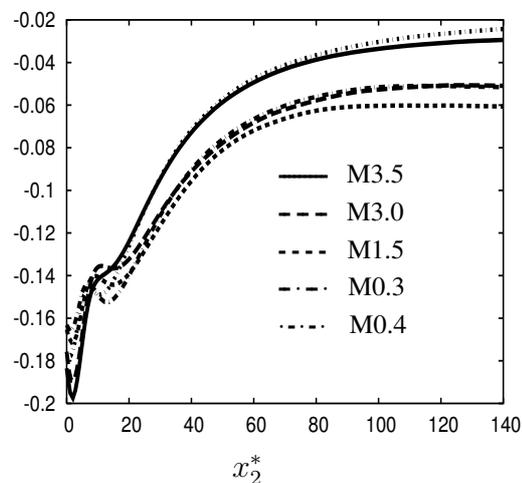
**Abbildung 3.113:** Einfluss der Machzahl auf die Druck-Skalargradientenkorrelation der  $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .



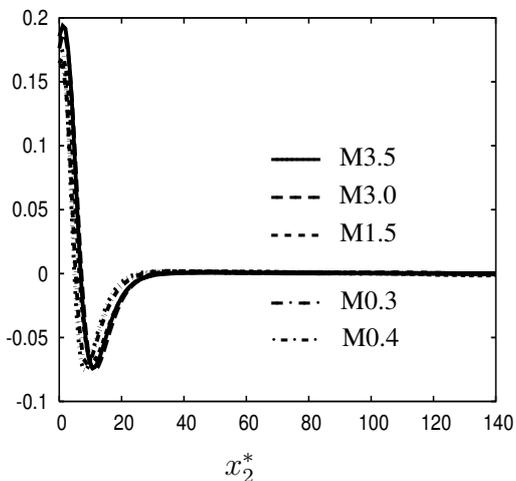
**Abbildung 3.114:** Einfluss der Machzahl auf den Transport der  $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .



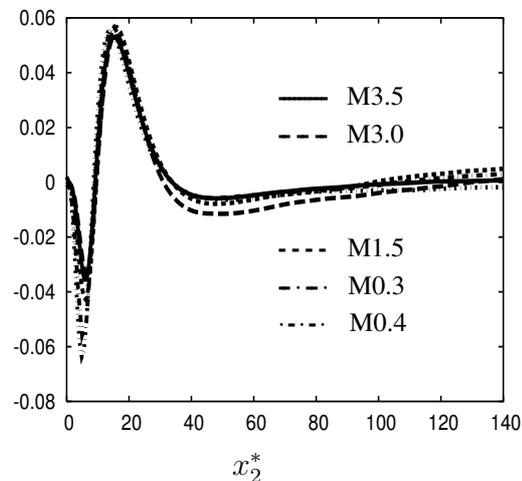
**Abbildung 3.115:** Einfluss der Machzahl auf die Produktion der  $\overline{\rho\theta''\theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w^2/\bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .



**Abbildung 3.116:** Einfluss der Machzahl auf die Dissipation der  $\overline{\rho\theta''\theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w^2/\bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .



**Abbildung 3.117:** Einfluss der Machzahl auf die Diffusion der  $\overline{\rho\theta''\theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w^2/\bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .



**Abbildung 3.118:** Einfluss der Machzahl auf den Transport der  $\overline{\rho\theta''\theta''}$ -Bilanz, normiert mit  $\chi_w^2/\bar{\mu}$ , als Funktion von  $x_2^*$ .

### 3.6 Analyse der Druck-Scherkorrelation

Die Betrachtung der Bilanzen der turbulenten Spannungen im vorangegangenen Kapitel machte die Schlüsselrolle der Druckscherkorrelation, als Ursache der beobachteten Anisotropiezunahme, deutlich. In diesem Kapitel soll nun versucht werden, eine Erklärung für die beobachtete Reduktion der Druckscherkorrelation sowie der Druck-Skalargradientenkorrelation zu finden, wobei wir uns hauptsächlich auf die Normalkomponenten beschränken wollen. Dazu wird zuerst ein Blick auf die Korrelationen der Skalar- und Geschwindigkeitsgradienten geworfen, bevor anschliessend die Druckfluktuationen untersucht werden, da als mögliche Ursachen für die Änderung von Korrelationen, die den Druck enthalten, eine

- Verminderung der Korrelation zwischen den Druckfluktuationen und den Ableitungen der Skalar- und Geschwindigkeitsfluktuationen
- Verminderung der RMS-Werte der Ableitungen von Skalar- und Geschwindigkeitsfluktuationen
- Verminderung der RMS-Werte der Druckfluktuationen
- Verminderung der Druckkorrelationen durch den indirekten Einfluss der Dichteveriation

in Frage kommen können.

#### 3.6.1 Korrelationskoeffizienten und RMS-Werte der Ableitungen der Skalar- und Geschwindigkeitsfluktuationen

*Korrelationskoeffizienten*

In den Abbildungen 3.119 bis 3.121 sind die Korrelationskoeffizienten der Druckscherkorrelation,

$$R_{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}} := \frac{\overline{p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}}}{\{p'\}_{rms} \left\{ \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right\}_{rms}},$$

in den Abbildungen 3.122 und 3.123 die der Druck-Skalargradientenkorrelation

$$R_{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}} := \frac{\overline{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}}}{\{p'\}_{rms} \left\{ \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\}_{rms}},$$

zu sehen. Im Bereich  $x_2^* < 45$ , in dem die Beträge von  $\Pi_i^\theta$  und  $\Pi_{ij}^u$ , wie im vergangenen Kapitel gezeigt, eine Reduktion aufgrund von Machzahleffekten erfuhren, sinkt deren Korrelationskoeffizient mit zunehmender Machzahl. Der Korrelationskoeffizient

der kompressiblen Fälle liegt dort unterhalb von dem des Falles M0.3. Erst ab  $x_2^* > 25$  kommt der Unterschied in den lokalen Reynoldszahlen zum Tragen, wie der Vergleich von Fall M3.0 und M3.5 zeigt. Damit zeigen die Korrelationskoeffizienten, dass die beobachtete Änderung der Druckscherkorrelationen und Druck-Skalargradientenkorrelationen mit einer steigenden Dekorrelation mit grösser werdender Machzahl einhergeht.

#### *RMS- Werte der Geschwindigkeits- und Skalarfluktuationen*

Auch die RMS-Werte der Ableitungen der Geschwindigkeitsfluktuationen (Abbildungen 3.124 bis 3.126) weisen das für die Korrelationskoeffizienten gefundene Verhalten auf. Bis auf Fall M3.5, bei dem ab  $x_2^* > 25$  die hohe lokale Reynoldszahl für grössere RMS-Werte sorgt, sind die kompressiblen Fälle für  $x_2^* < 40$  gegenüber der annähernd inkompressiblen Simulation M0.3 reduziert. Dasselbe gilt auch für die Ableitungen der Skalarfluktuationen in den Abbildungen 3.127 bis 3.128, im Bereich  $x_2^* < 40$ . Im Gegensatz zu den RMS-Werten der Ableitungen der Geschwindigkeitsfluktuationen sinken die RMS-Werte aber für hohe  $x_2^*$ -Werte mit steigender Reynoldszahl. Die Verminderung von  $\left\{ \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right\}_{rms}$  und  $\left\{ \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right\}_{rms}$  ist damit ein weiterer Grund für die Reduktion der Beträge der Druckscher- und Druck-Skalargradientenkorrelationen.

#### *RMS- Wert des Drucks*

Der RMS-Wert des Drucks ist als Funktion von  $x_2^*$  in Abbildung 3.129 und als Funktion von  $x_2/h$  in Abbildung 3.130 zu sehen. Der Vergleich von Fall M0.3 und M3.0 zeigt wiederum einen niedrigeren Verlauf des Falls mit der höheren Machzahl in Wandnähe, im Bereich  $x_2^* < 40$  (3.129). Gleichzeitig liegt ein stark ausgeprägter Reynoldszahleffekt vor, der zu einem starken Anstieg der Druckfluktuation mit steigender Reynoldszahl führt (zur Erinnerung: M0.3 und M3.0 weisen für  $x_2^* > 25$  dieselbe lokale Reynoldszahl auf). Trotz der höheren lokalen Reynoldszahl in Wandnähe von Fall M3.5, liegt  $\{p_{rms}\}$  für diesen Fall unterhalb von  $\{p_{rms}\}$  der Fälle I2 und I3. Nur in der viskosen Unterschicht ist ein mit der Machzahl stärker werdender Anstieg zu erkennen, der vermutlich auf viskose Effekte zurückzuführen ist. Erst für  $x_2^* > 40$  kommen akustische Effekte ins Spiel und führen zu einem höheren Wert der Druckfluktuationen von Fall M3.5 als von Fall I2, trotz einer niedrigeren lokalen Reynoldszahl. Abbildung 3.130 zeigt schliesslich den stärker werdenden Einfluss der Akustik im vollentwickelten Bereich des Kanals (für Details siehe Coleman *et al.* (1995)). Aufgrund dieses Einflusses entstehen bei kompressibler Strömung höhere Druckfluktuationen, als sie bei inkompressibler Strömung von Moser *et al.* (1999) beobachtet wurden.

Die ersten drei oben aufgeführten Punkte tragen damit zur Reduktion der Beträge der Druckscher- und Druck-Skalargradientenkorrelationen bei. Da der Datenbank von Moser *et al.* (1999) allerdings keine Daten über die Korrelationen zwischen dem Druck und den Ableitungen der Skalar-/Geschwindigkeitsfluktuationen, oder den RMS-Werten letzterer vorliegen, ist es schwierig abzuschätzen, welcher der drei Effekte hauptsächlich

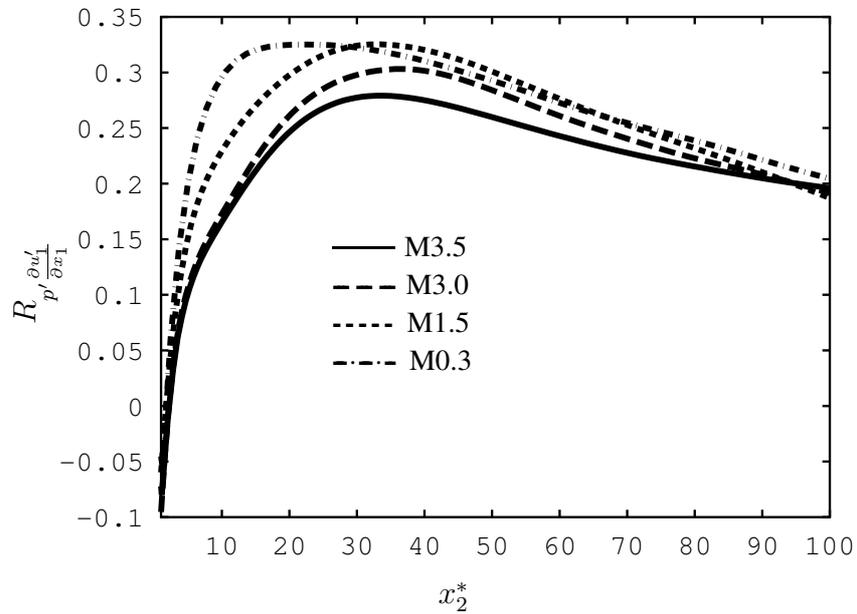


Abbildung 3.119: Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten  $R_{p' \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}$ .

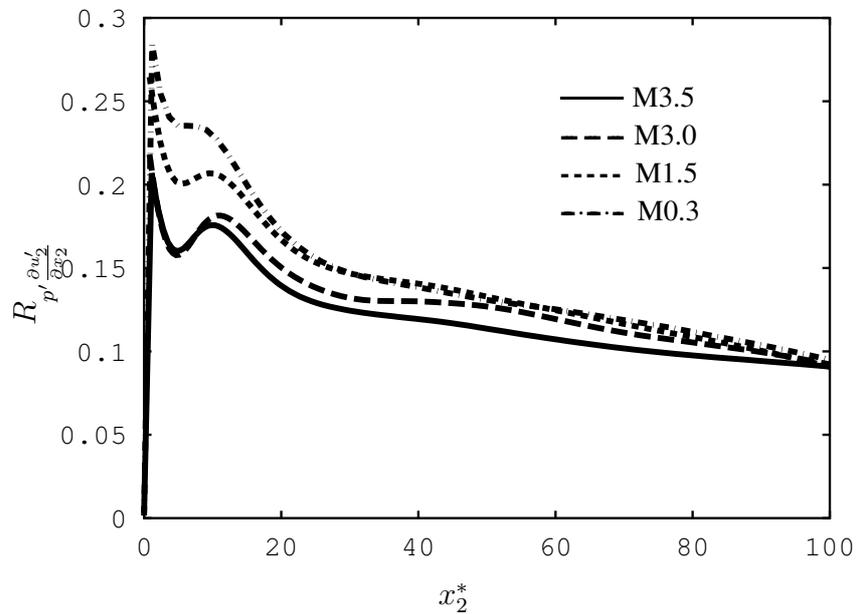


Abbildung 3.120: Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten  $R_{p' \frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}$ .

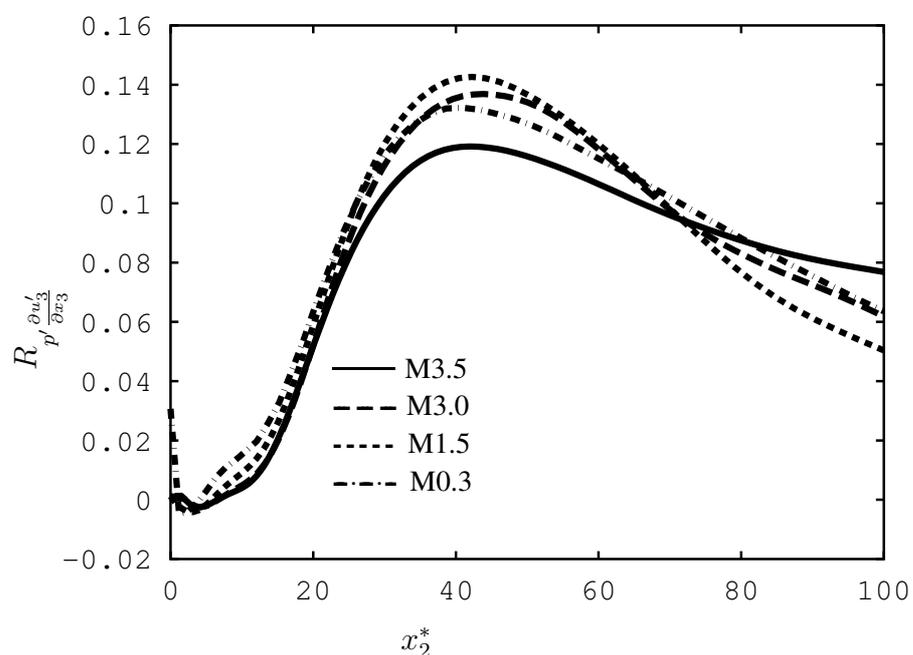


Abbildung 3.121: Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten  $R_{p', \frac{\partial u'_3}{\partial x_3}}$ .

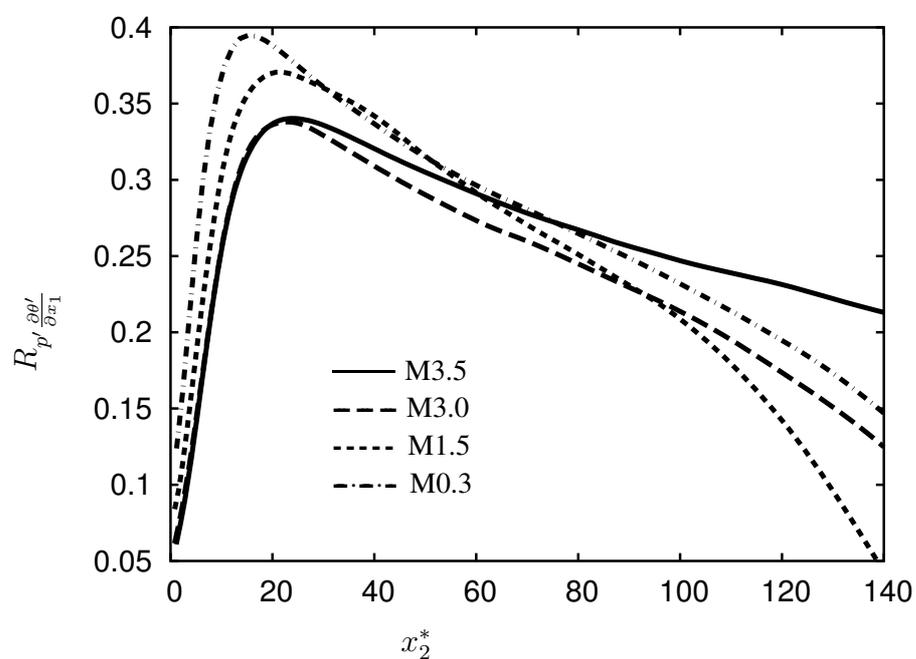


Abbildung 3.122: Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten  $R_{p', \frac{\partial \theta'_1}{\partial x_1}}$ .

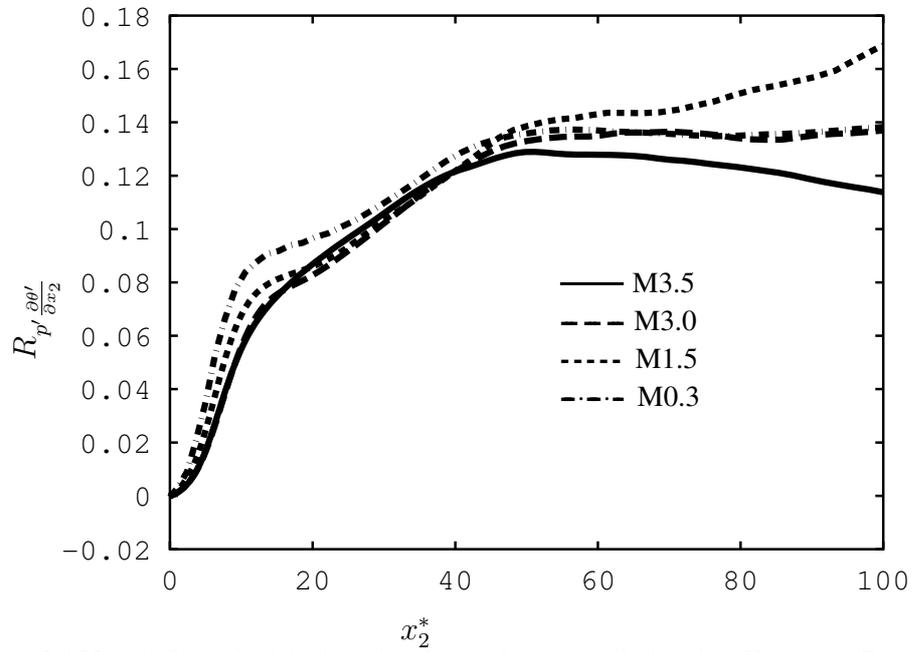


Abbildung 3.123: Einfluss der Machzahl auf den Kreuzkorrelationskoeffizienten  $R_{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_2}}$ .

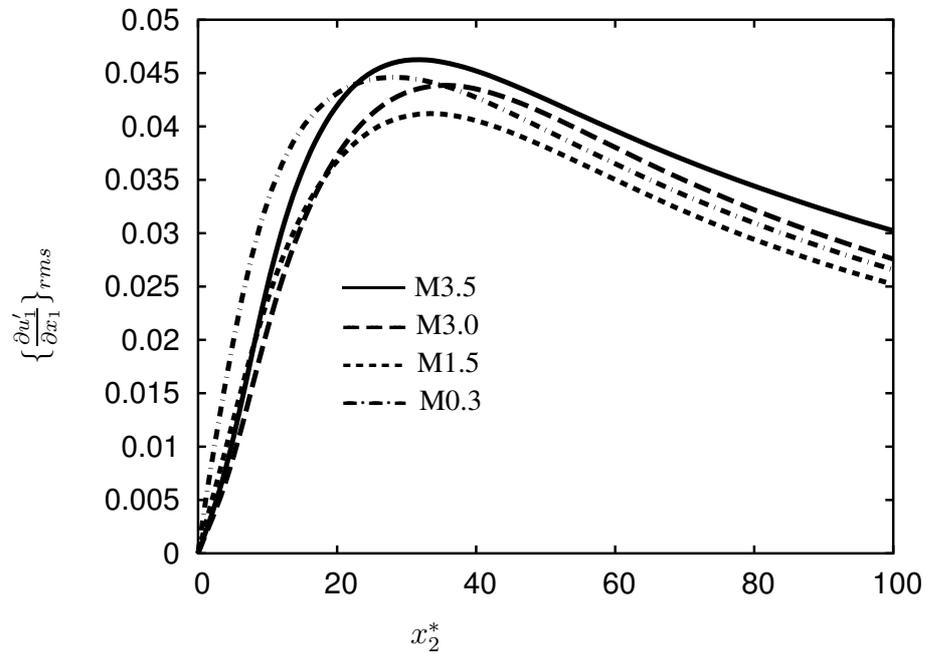
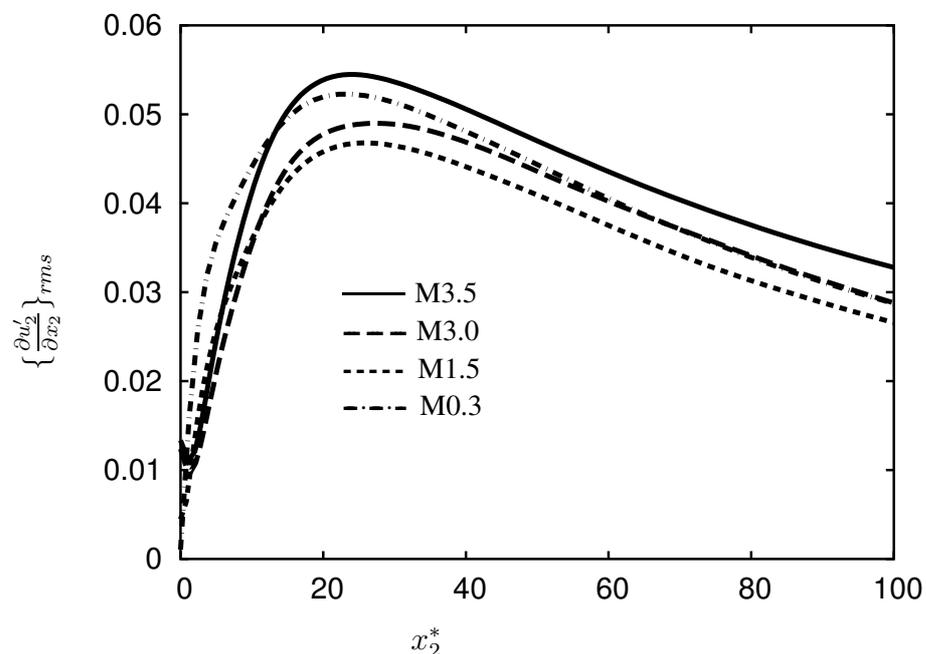
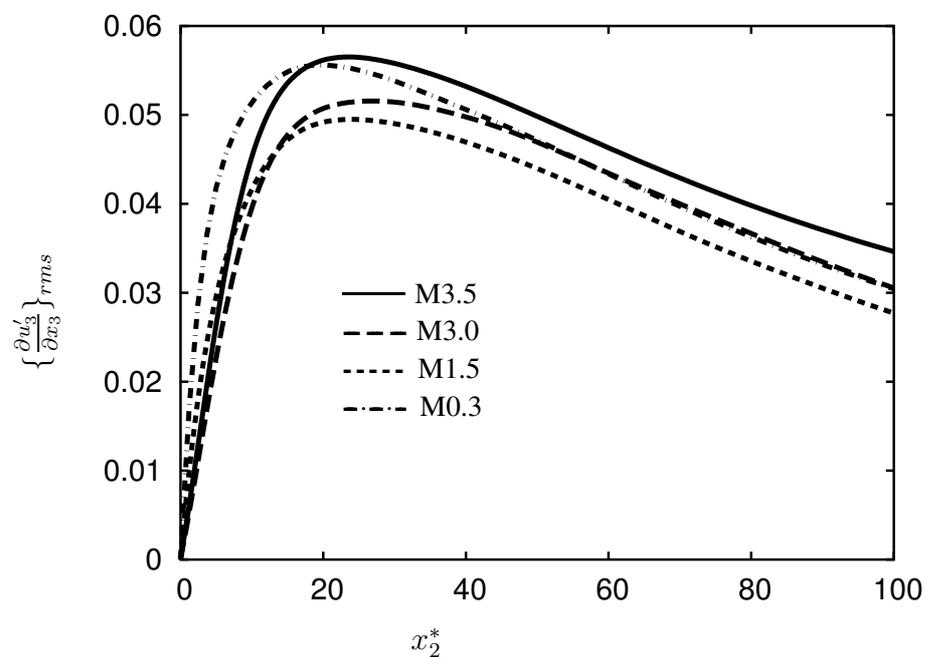


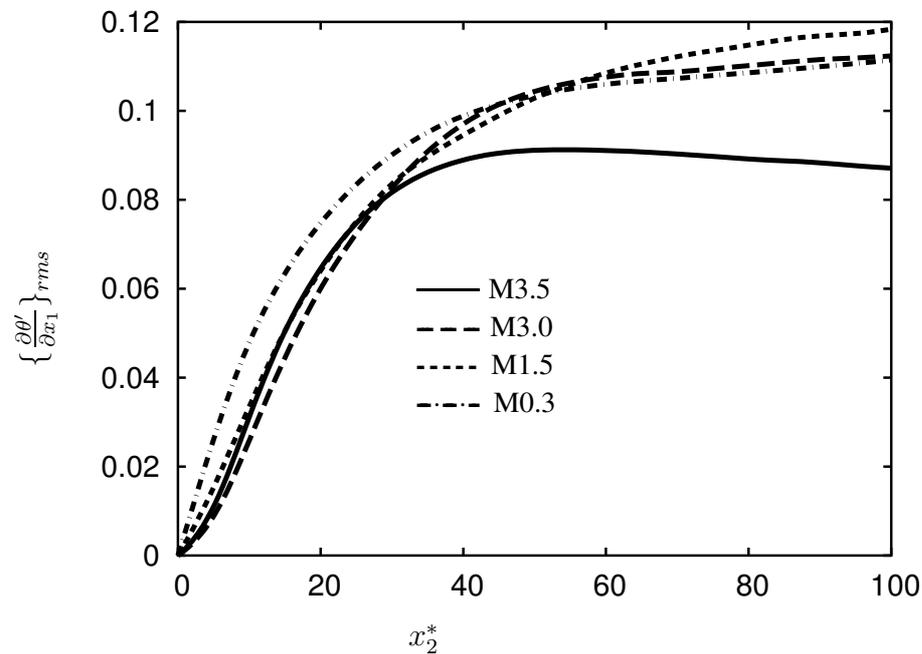
Abbildung 3.124: Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der  $x_1$ -Ableitung der Geschwindigkeitsfluktuationen in Stromabrichtung  $u_1'$ , normiert mit  $\tau_w / \bar{\mu}$ .



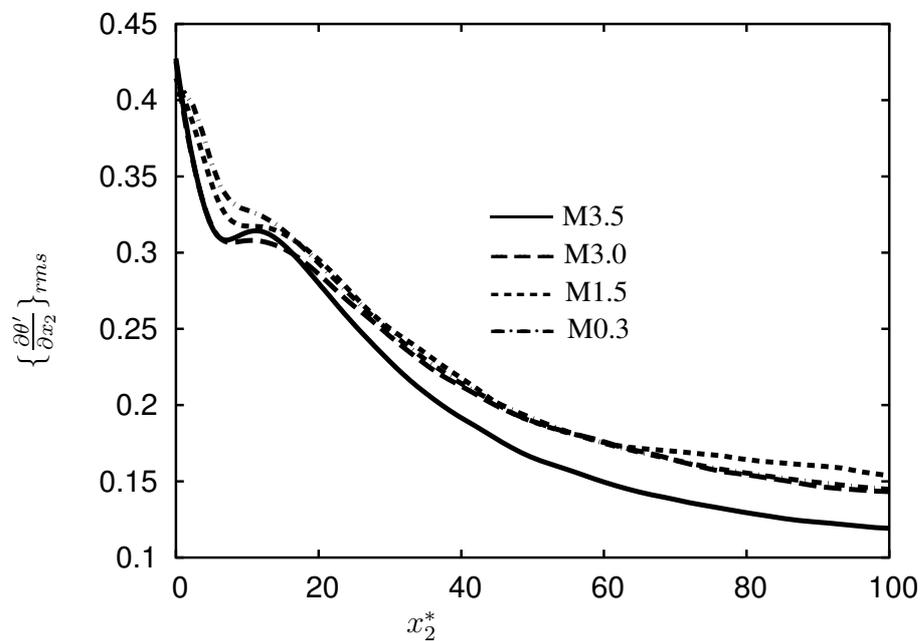
**Abbildung 3.125:** Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der  $x_2$ -Ableitung der Geschwindigkeitsfluktuationen in wandnormaler Richtung  $u'_2$ , normiert mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



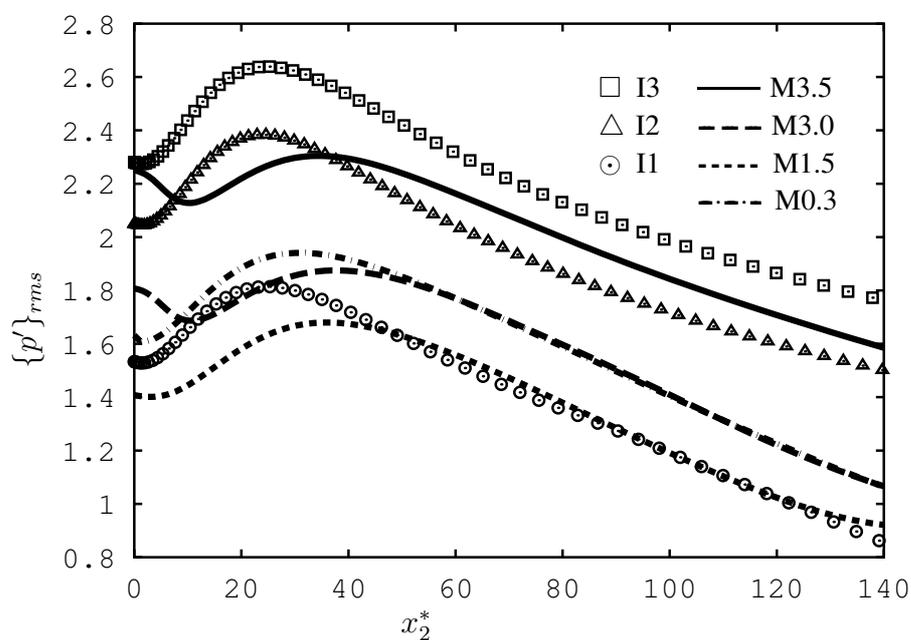
**Abbildung 3.126:** Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der  $x_3$ -Ableitung der Geschwindigkeitsfluktuationen in spannweitischer Richtung  $u'_3$ , normiert mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



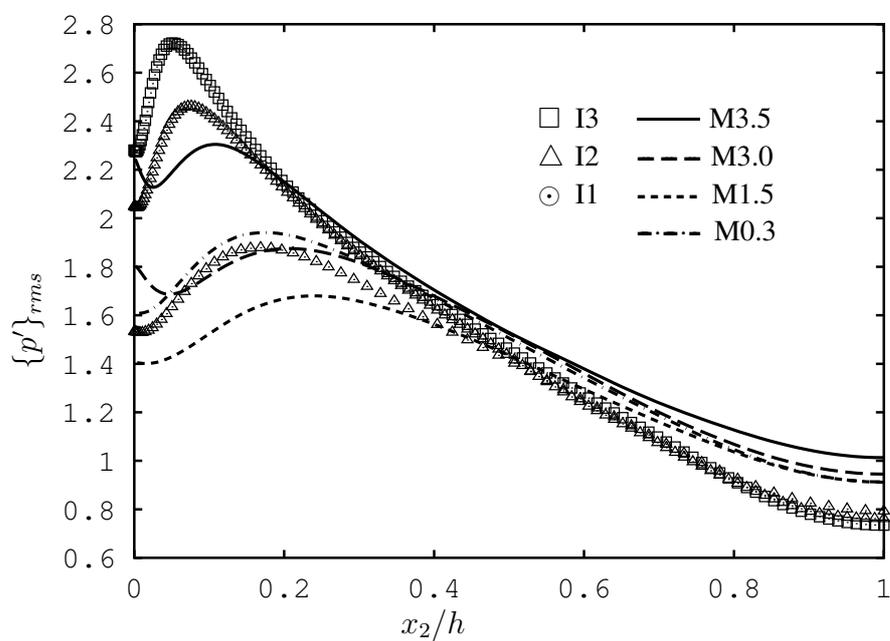
**Abbildung 3.127:** Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der  $x_1$ -Ableitung der Skalarfluktuationen, normiert mit  $\chi_w/\bar{\mu}$ .



**Abbildung 3.128:** Einfluss der Machzahl auf die RMS-Werte der  $x_2$ -Ableitung der Skalarfluktuationen, normiert mit  $\chi_w/\bar{\mu}$ .



**Abbildung 3.129:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die RMS-Werte der Druckfluktuationen über  $x_2^*$ , normiert mit  $\tau_w$ .



**Abbildung 3.130:** Einfluss von Mach- und Reynoldszahl auf die RMS-Werte der Druckfluktuationen über  $x_2/h$ , normiert mit  $\tau_w$ .

für die Reduktion der Druckkorrelation gegenüber den inkompressiblen Fällen verantwortlich ist. Der große Unterschied zwischen den kompressiblen und inkompressiblen Druckfluktuationen lässt vermuten, dass die Druckfluktuationen den stärksten Einfluss besitzen. Aus diesem Grund wird deren Rolle im nächsten Abschnitt genauer analysiert.

### 3.6.2 Lösung durch Green-Funktion

Eine genauere Einsicht in das Verhalten der Druckfluktuationen liefert deren Transportgleichung. Als Ausgangspunkt wird deshalb eine Gleichung hergeleitet, die die Druckfluktuationen sowohl im kompressiblen, als auch im inkompressiblen beschreibt. Nach Anwendung der Divergenz auf die Impulsgleichungen (siehe Anhang B) erhält man eine Transportgleichung zur Bestimmung der Druckfluktuationen die in einer vollentwickelten turbulenten Kanalströmung folgende Form besitzt:

$$\begin{aligned}
 \Delta p' = & \underbrace{-\bar{\rho}(u_i'' u_j'' - \overline{u_i'' u_j''})_{,ij}}_{A1} \underbrace{-2\bar{\rho}\tilde{u}_{1,2}u_{2,1}''}_{A2} \\
 & \underbrace{-2\bar{\rho}_{,2}(u_2'' u_j'' - \overline{u_2'' u_j''})_{,j}}_{B1} \underbrace{-\bar{\rho}_{,22}(u_2''^2 - \overline{u_2''^2})}_{B2} \\
 & \underbrace{-2\tilde{u}_{1,2}(\rho' u_2'')_{,1}}_{C1} \underbrace{-(\rho' u_i'' u_j'' - \overline{\rho' u_i'' u_j''})_{,ij}}_{C2} \underbrace{-D_{tt}\rho'}_{C3} \\
 & \underbrace{+\sigma'_{ij,ij}}_D.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Die einzelnen Beiträge auf der rechten Seite setzen sich aus Termen zusammen, die

- explizit von der mittleren Dichte abhängen: dem in den Geschwindigkeitsfluktuationen nichtlinearen Term A1, sowie Term A2, beide sind die einzigen, die im inkompressiblen Fall nicht verschwinden
- von den Ableitungen der Dichtefluktuationen abhängen (B1, B2)
- ihre Ursache in der räumlichen Variation der Dichtefluktuationen, mit oder ohne direkter Kopplung mit den Geschwindigkeitsfluktuationen (C1,C2), oder in viskosen Effekten besitzen (D)
- die die zeitliche Änderung der Dichtefluktuationen beschreiben (C3).

Da  $\tau_w$  die übliche Normierung für den Druck ist, liegt es nahe, die Transportgleichung für die Druckfluktuationen mit  $\tau_w/h^2$  zu normieren. Die Terme A1 und A2 enthalten anschliessend den Quotienten  $\bar{\rho}/\rho_w$ . Dieser ist in den hier vorliegenden Kanalströmungen mit *gekühlten* Wänden kleiner als eins (Abbildung 3.2) und führt deshalb direkt zu einer Reduktion der Druckfluktuationen und damit der Druckscher- und Druck-Skalargradientenkorrelationen, wie in der DNS gesehen.

Im folgenden sollen die Auswirkungen dieser Dichtevariation genauer untersucht werden, anhand der Green-Funktion der obigen Gleichung, jedoch ohne den Term  $-D_{tt}$ . Der die Zeitableitung enthaltende Term auf der rechten Seite führt im allgemeinen zu einer inhomogenen konvektierten Wellengleichung für die Druckfluktuationen. Da die Druckfluktuationen bei den hier gerechneten Reynolds- und Machzahlen klein gegenüber  $\bar{\rho}$  sind, wird dieser Term in einem ersten Versuch vernachlässigt und man erhält eine Poissongleichung für die Druckfluktuationen.

Die Randbedingungen im inkompressiblen Fall sind  $\partial p'/\partial x_2 = \mu \partial^2 u'_2/\partial x_2^2$ . Da in unserem Fall die Dilatation klein ist, wird als Randbedingung die Beziehung  $\partial p'/\partial x_2 \approx \mu_w \partial^2 u'_2/\partial x_2^2$  gesetzt. Die rechte Seite der Poissongleichung wird im folgenden als  $\bar{\rho} f$  bezeichnet und eine Fouriertransformation in den homogenen Richtungen  $x_1$  und  $x_3$  durchgeführt (zum Beispiel  $p(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \hat{p}(k_1, x_2, k_3)$ ). Zusätzlich führen wir noch eine neue wandnormale Koordinate, mit Ursprung in der Kanalmitte, ein:  $y = (x_2 - L_{x_2}/2)/H$ . Man erhält nun

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \hat{p} = -\bar{\rho} \hat{f} \quad \text{mit} \quad \left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \right|_{y=\pm 1} =: G(\pm 1), \quad (3.51)$$

mit  $G(\pm 1) = \mu_w \partial^2 \hat{u}_2/\partial x_2^2|_{y=\pm 1}$  und  $k^2 = k_1^2 + k_3^2$ . Zur Lösung der Differentialgleichung mittels einer Green-Funktion wird wie in Standardtextbüchern über Differentialgleichungen oder mathematische Physik vorgegangen (siehe zum Beispiel Dennery & Krzywicki (1996) oder King *et al.* (2003)). Die Bestimmungsgleichung für die Green-Funktion erhält man durch Ersetzen des Quellterms mit einer Deltafunktion  $\delta(y - y')$ , wobei  $y'$  die Position der Punktquelle bezeichnet,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \right) \hat{G}(k, y, y') &= \delta(y - y') \quad \text{mit} \quad y, y' \in [-1, 1] \\ \left. \frac{\partial \hat{G}}{\partial y} \right|_{\pm 1} &= G(\pm 1). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Mit Ausnahme des Punktes  $y = y'$  erfüllt die Green-Funktion damit eine homogene Differentialgleichung und man bestimmt deren Lösung jeweils in den Intervallen  $y' \in [-1, y[$  ( $G_{<}$ ) und  $y' \in ]y, 1]$  ( $G_{>}$ ). Zur Ermittlung der auftretenden Konstanten benutzt man nun die Randbedingungen sowie die Bedingungen

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{<}(k, y; y')|_{y=y'-\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{>}(k, y; y')|_{y=y'+\epsilon} \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left. \frac{\partial G_{>}(k, y; y')}{\partial y} \right|_{y=y'+\epsilon} - \left. \frac{\partial G_{<}(k, y; y')}{\partial y} \right|_{y=y'-\epsilon} \right\} &= \frac{1}{q(y)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

$q$  ergibt sich aus der allgemeinen Differentialgleichung zweiter Ordnung,

$$L_y p = a(y) \frac{d^2 p}{dy^2} + b(y) \frac{dp}{dy} + c(y)p = f,$$

die in die Form

$$L_y p = \frac{1}{w(y)} \frac{d}{dy} \left[ q \frac{dp}{dy} \right] p + cp = f$$

gebracht wird, mit

$$q = \frac{1}{a(y)} \exp \left( \int_{y_0}^y dy' \frac{b(y')}{a(y')} \right)$$

und einer Gewichtungsfunktion  $w$ , die hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf 1 gesetzt wurde. Der Vergleich mit (3.51) liefert dann sofort  $q = 1$ .

Ein Ansatz für die Lösung der homogenen Differentialgleichung kann sofort angegeben werden und lautet

$$\begin{aligned} \hat{p}_<(y) &= A \sinh(ky) + B \cosh(ky) & -1 \leq y < y' \\ \hat{p}_>(y) &= C \sinh(ky) + D \cosh(ky) & y' < y \leq 1. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Unter Benutzung der Randbedingungen erhält man für den Fall  $k \neq 0$

$$\begin{aligned} A &= B \tanh(k) + \frac{G_{-1}}{k \cosh(k)} \\ C &= -D \tanh(k) + \frac{G_{+1}}{k \cosh(k)} \end{aligned} \quad (3.55)$$

und damit nach Einsetzen in Ansatz (3.54)

$$\begin{aligned} \hat{p}_<(y) &= B \underbrace{[\tanh(k) \sinh(ky) + \cosh(ky)]}_a + \frac{G_{-1}}{k \cosh(k)} \sinh(ky) \\ \hat{p}_>(y) &= D \underbrace{[-\tanh(k) \sinh(ky) + \cosh(ky)]}_b + \frac{G_{+1}}{k \cosh(k)} \sinh(ky). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Die Anwendung von (3.53) liefert

$$\begin{aligned} p_<(y') - p_>(y') &= \\ Ba + \frac{G_{-1}}{k \cosh(k)} \sinh(ky') - Db - \frac{G_{+1}}{k \cosh(k)} \sinh(ky') &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_>(y)}{\partial y} \Big|_{y=y'} - \frac{\partial p_<(y)}{\partial y} \Big|_{y=y'} &= \\ -B \underbrace{[\tanh(k) \cosh(ky')k + \sinh(ky')k]}_c - \frac{G_{-1}}{\cosh(k)} \cosh(ky') & \\ + D \underbrace{[-\tanh(k) \cosh(ky')k + \sinh(ky')k]}_d + \frac{G_{+1}}{\cosh(k)} \cosh(ky'). & \end{aligned} \quad (3.58)$$

Auflösung dieses Gleichungssystems nach D liefert

$$\begin{aligned} D &= \frac{a}{ad - bc} \left( 1 - (G_{-1} - G_{+1}) \left[ \frac{\sinh(ky')}{k \cosh(k)} \frac{c}{a} - \frac{\cosh(ky')}{\cosh(k)} \right] \right) \\ &= -\frac{\cosh(k(y' + 1))}{2k \sinh(k)} - (G_{-1} - G_{+1}) \frac{1}{2k \sinh(k)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

und mit (3.55)

$$C = \frac{\cosh(k(y' + 1))}{2k \cosh(k)} + \frac{G_{-1}}{2k \cosh(k)} + \frac{G_{+1}}{k} \left[ \frac{1}{2 \cosh(k)} \right], \quad (3.60)$$

nach Zuhilfenahme der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sinh(x \pm y) &= \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y) \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Einsetzen in (3.54) liefert schliesslich mit  $\sinh(2x) = 2 \sinh(x) \cosh(x)$

$$\begin{aligned} G(k, y; y')_{>} &= \frac{G_{+1} \cosh[k(y + 1)]}{k \sinh(2k)} - \frac{G_{-1} \cosh[k(y - 1)]}{k \sinh(2k)} \\ &\quad - \frac{\cosh[(1 + y')k] \cosh[(1 - y)k]}{k \sinh(2k)} \\ &\quad \text{falls } y' < y \leq 1. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Nach analoger Rechnung erhält man für  $G_{<}$

$$\begin{aligned} G(k, y; y')_{<} &= \frac{G_{+1} \cosh[k(y + 1)]}{k \sinh(2k)} - \frac{G_{-1} \cosh[k(y - 1)]}{k \sinh(2k)} \\ &\quad - \frac{\cosh[(1 - y')k] \cosh[(1 + y)k]}{k \sinh(2k)} \\ &\quad \text{falls } -1 \leq y < y'. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Für den Fall  $k = 0$  macht man den Ansatz

$$\begin{aligned} G_{<} &= a + by \quad \text{für } -1 \leq y < y' \\ G_{>} &= c + dy \quad \text{für } y' < y \leq 1. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Geht man wiederum wie oben beschrieben vor, so bekommt man die Lösung

$$\begin{aligned} G_{<}(0, y; y') &= \frac{1}{2}([G_{-1} + G_{+1} - 1]y + y') \quad \text{für } -1 \leq y < y' \\ G_{>}(0, y; y') &= \frac{1}{2}([G_{-1} + G_{+1} + 1]y - y') \quad \text{für } y' < y \leq 1. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Die hier erhaltene Green-Funktion stimmt damit mit der von Kim (1989) überein, jedoch mit zusätzlichen Beiträgen aufgrund der unterschiedlichen Randbedingungen. Kim

(1989) setzte im Gegensatz zu dieser Arbeit die Gradienten der Druckfluktuationen an der Wand zu Null. Die vorliegende Green-Funktion gibt den Einfluss des Quellterms am Ort  $y'$  auf die Druckfluktuation am Ort  $y$  wieder und erlaubt die Angabe der Lösung durch eine einfache Faltung mit dem Quellterm  $\hat{f}$

$$\hat{p}(k_1, k_3, y) = \int_{-1}^1 \hat{G}(k, y; y') \bar{\rho}(y') \hat{f}(k_1, k_3; y') dy' + \hat{B}(k, y), \quad (3.66)$$

wobei für den Bereich  $-1 \leq y < y'$  beispielsweise gilt

$$\hat{B}(k, y) = 2 \frac{G_{+1} \cosh[k(y+1)]}{k \sinh(2k)} - 2 \frac{G_{-1} \cosh[k(y-1)]}{k \sinh(2k)}.$$

Inverse Fouriertransformation liefert nun den Druck im physikalischen Raum

$$p'(x_1, y, x_3) = \int_{-1}^1 \bar{\rho}(y') G * f'(x_1, y, x_3; y') dy' + B'(x_1, y, x_3), \quad (3.67)$$

mit der Faltung  $G * f'$ , der inversen Fouriertransformation von  $\hat{G}\hat{f}$ , also

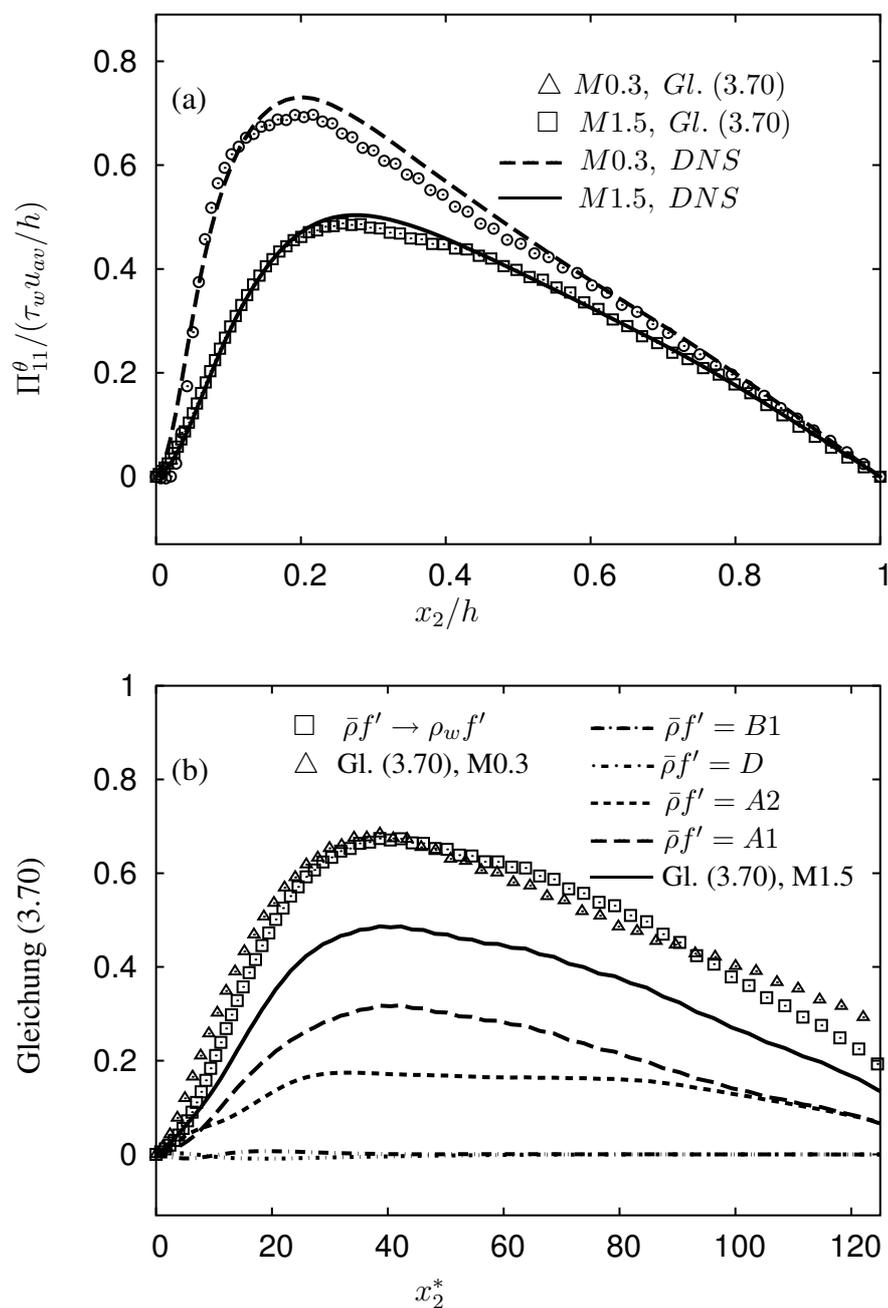
$$G * f'(x_1, y, x_3; y') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \hat{G}(k, y; y') \hat{f}(k_1, k_3; y'). \quad (3.68)$$

Die Druckscher- und Druck-Skalargradientenkorrelation erhält man anschliessend durch Multiplikation der Druckfluktuationen mit  $S_{ij}$ , bzw.  $\partial\theta'/\partial x_i$  und Mittelung, zu

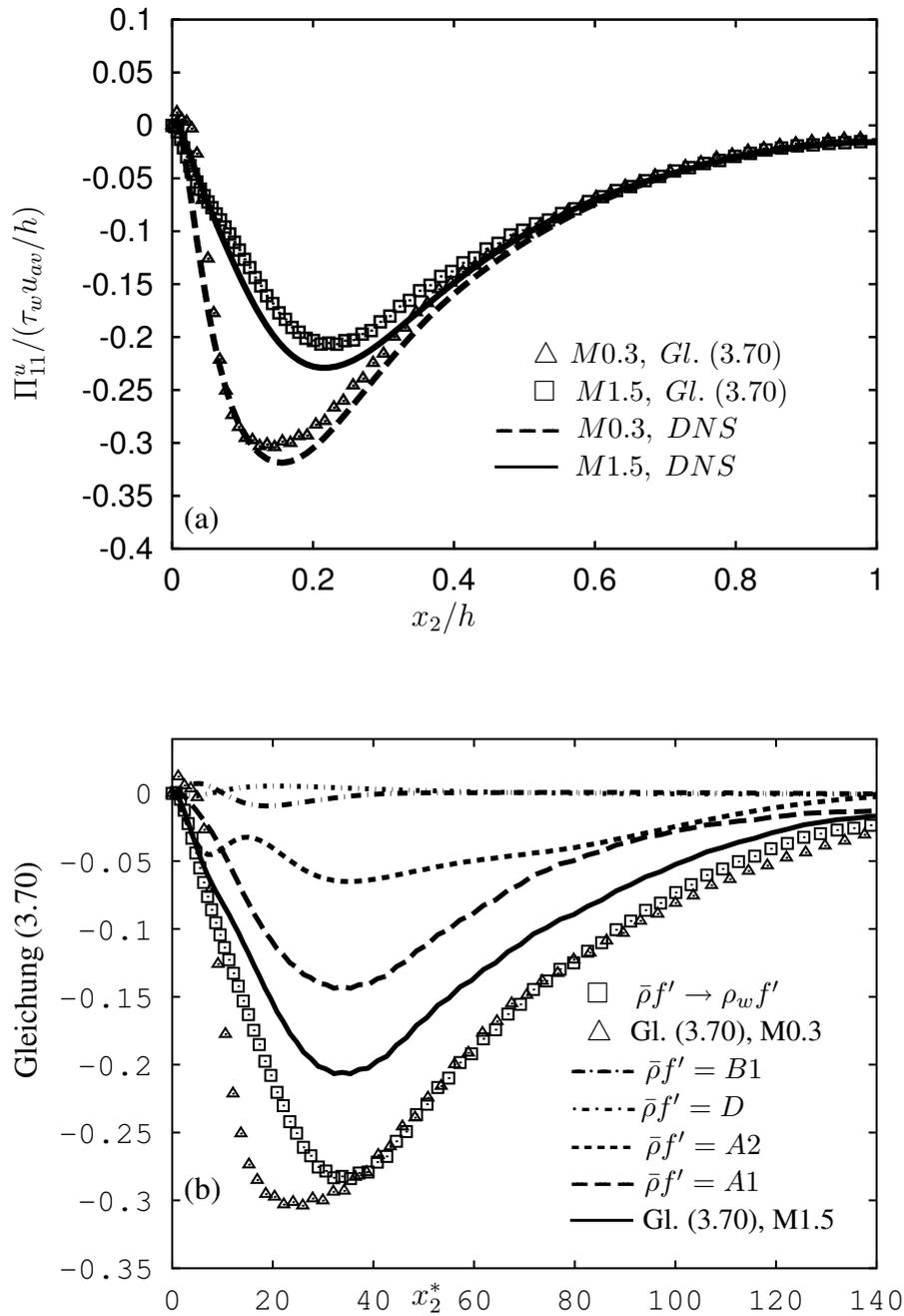
$$\Pi_{ij}^u(y) = \int_{-1}^1 \bar{\rho}(y') \overline{G * f'(x_1, y, x_3; y') S'_{ij}} dy' + \overline{B' S'_{ij}} \quad (3.69)$$

$$\Pi_i^\theta(y) = \int_{-1}^1 \bar{\rho}(y') \overline{G * f'(x_1, y, x_3; y') \frac{\partial\theta'}{\partial x_i}} dy' + \overline{B' \frac{\partial\theta'}{\partial x_i}}. \quad (3.70)$$

Die Auswertung der Green-Funktion erfolgte durch räumliche Mittelung der Faltungsterme  $\overline{G * f'(x_1, y, x_3; y') s'_{ij}}$  und  $\overline{G * f'(x_1, y, x_3; y') \frac{\partial\theta'}{\partial x_i}}$  in den homogenen Richtungen und anschliessender zeitlicher Mittelung von 40 abgespeicherten Datenfeldern für die Fälle M0.3 und M1.5. Die Abbildungen 3.131a und 3.132a zeigen jeweils den Vergleich der Green-Funktionslösung mit den DNS Daten. Die Übereinstimmung ist ausserordentlich gut und rechtfertigt im nachhinein die getroffenen Annahmen, insbesondere die Vernachlässigung der Zeitableitung der Dichte. Der Einfluss der dominanten Quellterme der Poissongleichung ist in den Abbildungen 3.131b und 3.132b zu sehen. Man erkennt deutlich den starken Einfluss von A1, dem dominanten Quellterm an der Position des Maximums der Druckkorrelationen, sowie von A2, der in Wandnähe den grössten Beitrag liefert. Will man nun den Effekt der Dichteveriation untersuchen, so bietet es sich an, den Quotienten  $\bar{\rho}/\rho_w$  in  $\bar{\rho}f'$  durch den inkompressiblen Grenzfall  $\bar{\rho}/\rho_w = 1$  zu ersetzen (Quadrate in den Abbildungen 3.131b und 3.132b). Als Folge davon steigen die



**Abbildung 3.131:** (a) Vergleich der DNS Daten mit Gleichung (3.70) für die Druck-Skalargradientkorrelation. (b) Beitrag der dominanten Quellterme von  $\bar{\rho}f'$ , auf der rechten Seite der Poissongleichung für die Druckfluktuationen zu Gleichung (3.70) für  $\Pi_{11}^\theta$  und Fall M1.5.



**Abbildung 3.132:** (a) Vergleich der DNS Daten mit Gleichung (3.70) für die Druckscherkorrelation. (b) Beitrag der dominanten Quellterme von  $\bar{\rho}f'$ , auf der rechten Seite der Poissongleichung für die Druckfluktuationen zu Gleichung (3.70) für  $\Pi_{11}^u$  und Fall M1.5.

Druckscher- und Druck-Skalargradientenkorrelation stark und nähern sich den Profilen der inkompressiblen Lösung an: der Einfluss der Dichtevariation auf die Druckkorrelationen macht damit den Löwenanteil der Reduktion der Beträge der Druckscher- und Druck-Skalargradientenkorrelation aus.

Eine genaue Betrachtung der Quelltermeinflüsse zeigt, dass der Beitrag des viskosen Anteils zur Wand hin leicht ansteigt. Damit liegt die Vermutung nahe, dass der beobachtete Anstieg von  $\{p'\}_{rms}$  in der viskosen Unterschicht bei den kompressiblen Fällen durch diesen Term verursacht wird. Aus diesem Grund wurden zum Test die Druckfluktuationen über die Green-Funktion berechnet

$$\begin{aligned} p_{rms}^2(y) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\rho}(y') \bar{\rho}(y'') \overline{G * f'(x_1, y, x_3; y') G * f'(x_1, y, x_3; y'')} dy' dy'' \\ &+ \int_{-1}^1 \bar{\rho}(y') \overline{G * f'(x_1, y, x_3; y') B'(x_1, y, x_3)} dy' + \overline{B' B'}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

und nur D1 als Quellterm gesetzt. Der Grund dafür ist, dass die Druckfluktuationen selbst nicht mit Gleichung (3.71) korrekt reproduziert werden konnten. Ursache hierfür dürften die akustischen Wellen sein, die im allgemeinen langwellig sind und damit kleine Wellenzahlen besitzen. Die zeitlokale Green-Funktion, wie oben zu sehen ist, verstärkt aber die niedrigen Wellenzahlen, eine korrekte Lösung für die Druckfluktuationen ist daher nicht zu erwarten. Eine Fouriertransformation des viskosen Terms D1 zeigte jedoch, dass der Beitrag der niedrigen Wellenzahlen sehr viel kleiner ist als beispielsweise in Term A1, so dass die Lösung mit D1 als Quellterm Hinweise auf den Anstieg der Druckfluktuationen in Wandnähe zulässt (S. Sarkar, private communication). Abbildung 3.133 zeigt einen Anstieg des Beitrags dieses Quellterms mit steigender Mach- und Reynoldszahl und untermauert damit die oben gemachte Vermutung, dass der viskose Term D1 zu einem Anstieg der Druckfluktuationen in Wandnähe führt. Interessant ist, dass trotzdem die Druckfluktuationen nicht mittels dieser Green-Funktion aus den Quelltermen korrekt berechnet werden können, die Druckkorrelationen dagegen eine sehr gute Übereinstimmung mit den DNS Daten zeigen.

### 3.6.3 Wo bleibt die Physik

Im vorangegangenen Kapitel konnte anhand der Green-Funktion gezeigt werden, dass selbst die Druckscher- und Druck-Skalargradientenfluktuationen stark von den variablen Fluideigenschaften beeinflusst werden, was auf den ersten Blick nicht ersichtlich ist. Ist es nun möglich, einen "physikalischeren Grund" dafür anzugeben, dass die semilokale Skalierung zwar eine Verbesserung liefert, es aber nicht möglich ist, eine vollständige Übereinstimmung zwischen den inkompressiblen und kompressiblen Kurven zu erreichen?

Dazu sei zuerst einmal auf eine verblüffende Ähnlichkeit, mit inkompressiblen Kanalströmungen bei Zusatz von Polymeren hingewiesen.

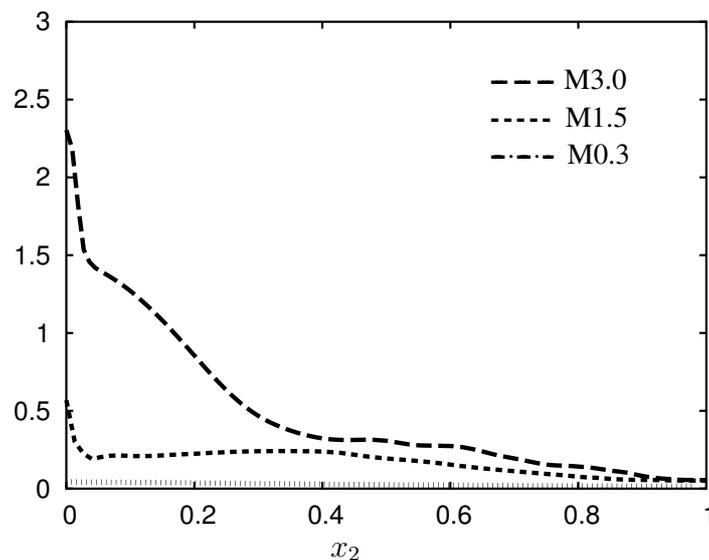


Abbildung 3.133: Lösung von Gleichung (3.71) mittels Green-Funktion und D1 als Quellterm.

### 3.6.4 Gegenüberstellung von kompressiblen Kanalströmungen und inkompressiblen Kanalströmungen mit Polymeren

Eine interessante Ähnlichkeit besteht zwischen den Ergebnissen von turbulenten super-sonischen Kanalströmungen und denen von inkompressiblen Kanalströmungen mit Polymeren (Manhart & Friedrich (1999), Dubief (2003), Ptasinski *et al.* (2003)). Insbesondere die Arbeit von Ptasinski *et al.* (2003) zeigt, dass

- eine Reduktion der spannweiten und wandnormalen RMS-Werte, sowie Vergrößerung der stromabwärtsgerichteten Geschwindigkeitsfluktuationen mit steigender Weissenbergzahl (Quotient aus Relaxationszeit der Polymere und einem Zeitmass der Strömung)
- eine Reduktion der spannweiten und wandnormalen Reynoldsspannungen, sowie Vergrößerung der stromabwärtsgerichteten Reynoldsspannung mit steigender Weissenbergzahl
- eine Reduktion der RMS-Druckfluktuationen mit steigender Weissenbergzahl
- eine Reduktion der Druck-Scherkorrelation in den Bilanzen der Reynoldsspannungen, Identifikation dieses Effekts als Grund für die vergrößerte Anisotropie
- eine Vergrößerung des Abstands der Streaks in Wandnähe (siehe unten)

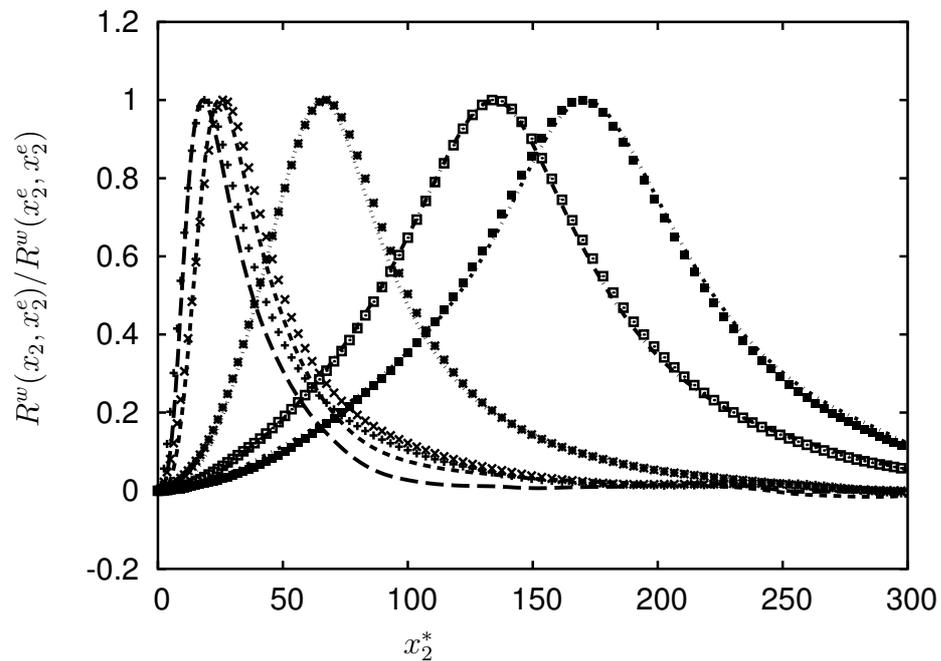
vorliegt, vollkommen analog zu den hier getätigten Beobachtungen, aber natürlich aufgrund eines vollkommen unterschiedlichen physikalischen Effekts. Zur Begründung

gehen die Autoren von den wandnormalen Korrelationen der wandnormalen Geschwindigkeit  $R^w(x_2, x_2^e)$  ( $x_2^e$  Aufpunkt, Position des Peaks), aus. Diese wird mit steigender Weissenbergzahl kleiner, obwohl sie nach Ptasiński *et al.* (2003) bei Normierung mit  $R^w(x_2^e, x_2^e)$ , zumindest bei hohen Reynoldszahlen, einen selbstähnlichen Verlauf haben sollte. Dies deutet nach der Theorie von Hunt & Durbin (1999) auf einen sogenannten *shear sheltering*-Mechanismus hin, der auftritt, da die Polymere am Ende der Buffer-Region stark gestreckt werden und wandnormale Geschwindigkeitsfluktuationen dämpfen. Dadurch werden auf die Wand zulaufende Wirbelstrukturen gedämpft und dringen nicht direkt in die wandnahe Zone ein. Oberhalb dieser Zone treten Kelvin-Helmholtz-Instabilitäten auf und die zerfallenden Wirbel interagieren über viskose Effekte mit dem Wandbereich.

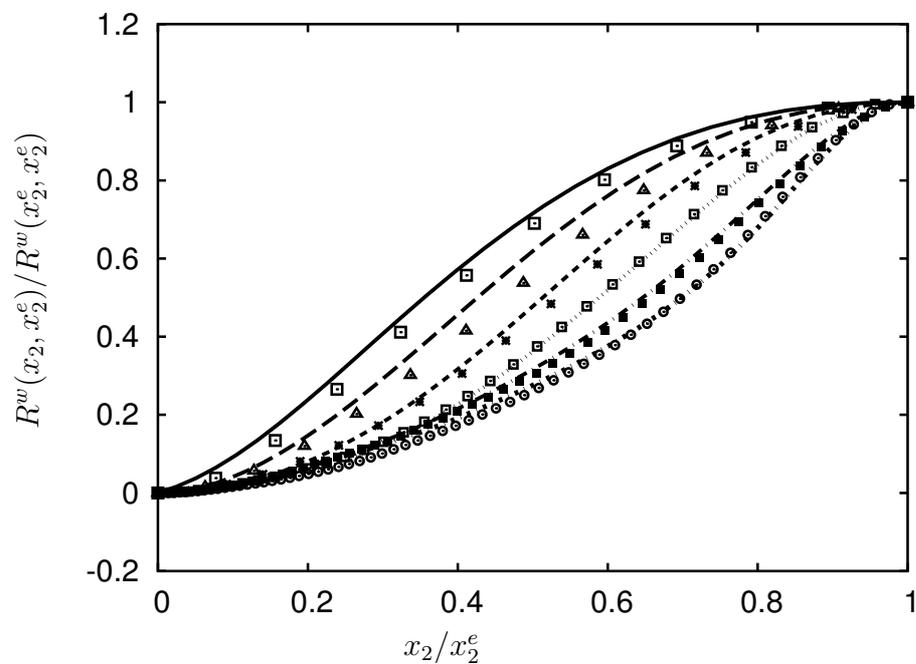
Ist ein ähnlicher Effekt auch in kompressiblen Kanalströmungen erkennbar? Vergleicht man die wandnormalen Zweipunktkorrelationen von Fall M0.3 und M3.0 bei Auftragung über  $x_2^*$ , so sieht man eine sehr gute Übereinstimmung für verschiedene Aufpunkte  $x_2^e$ . (Abbildung 3.134). Bei Auftragung über  $x_2/x_2^e$ , ist auch kein selbstähnliches Verhalten zu sehen und es ist unklar, ob dies auf zu niedrige Reynoldszahlen auf der einen Seite, oder auf Machzahleffekte auf der anderen Seite zurückzuführen ist. Ein auf die Wand zulaufender Wirbel kommt hier in einen Bereich mit stark steigender Dichte und aufgrund der starken Gradienten von Temperatur und Dichte auch stark steigender Dissipation sowie steigender Druckfluktuationen. Auftretende Störungen werden damit durch Dissipation stärker gedämpft. Nichtlokale Effekte aufgrund der endlichen Schallgeschwindigkeit spielen im wandnahen Bereich eher eine untergeordnete Rolle. Coleman *et al.* (1995) zeigten, dass die Physik durch akustische Effekte hauptsächlich in der Kanalmitte beeinflusst wird. Dort wird auch die in Scherströmungen beobachtete Dekorrelation der Strömungsgrößen im Kompressiblen (Pantano & Sarkar (2002)) erwartet. Dagegen spielt im Wandbereich die Nichtlokalität des Drucks, durch die Green-Funktions-Lösung oben erkennbar, und die Viskositäts- und Dichteveränderungen eine Rolle. Denn physikalisch bedeutet diese Nichtlokalität, dass der Druckgradient an einem Ort  $P$  durch den Impuls eines ganzen turbulenten Wirbels ("eddy") am Ort  $P$  bestimmt wird, dessen Abmessungen durch die Zweipunktkorrelationen abgeschätzt werden können. Diese Region "aktiver" Turbulenz wird im Folgenden durch diejenigen zwei Punkte  $y_-$  und  $y_+$  bestimmt, in denen die wandnormale Zweipunktkorrelationen von  $u_2$ , normiert mit deren Maxima, auf 0.1 abgefallen sind. Die effektive Dichte, die dieses Fluidvolumen sieht und über den Druckgradienten auf den Punkt  $P$  wirkt, errechnet sich dann zu

$$\rho_e(x_2) = \frac{1}{y_+(x_2) - y_-(x_2)} \int_{y_-(x_2)}^{y_+(x_2)} \bar{\rho}(y) dy, \quad (3.72)$$

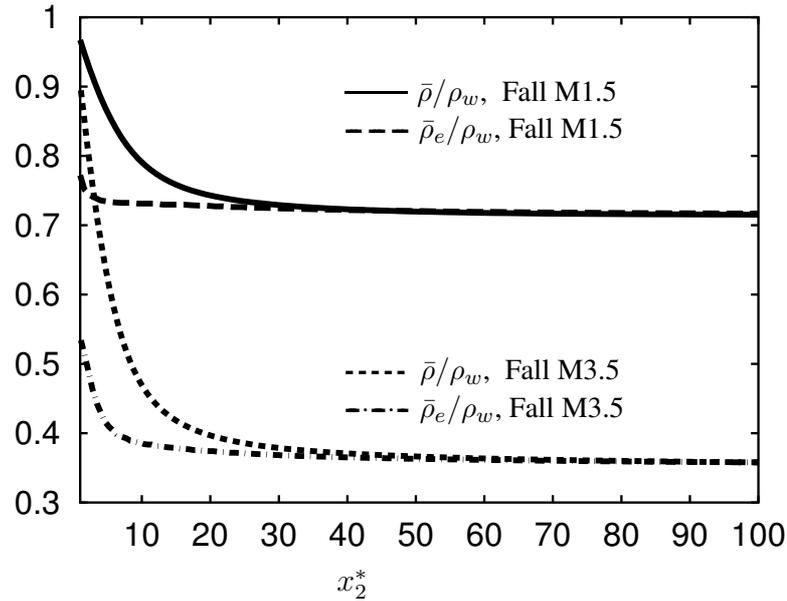
und ist für Fall M1.5 und M3.5 in Abbildung 3.136 dargestellt. Zur Berechnung wurden 40 unabhängige Datensätze verwendet. Aufgrund der großen Änderung von  $\bar{\rho}$  in



**Abbildung 3.134:** Vergleich der wandnormalen Zweipunktkorrelationen  $R^w(x_2^*, (x_2^e)^*)$  von Fall M0.3 (Symbole) und M3.0 (Linien), für verschiedene Werte von  $(x_2^e)^*$  ( $(x_2^e)^* = 10, 20, 70, 145, 170$ ).



**Abbildung 3.135:** Vergleich der wandnormalen Zweipunktkorrelationen  $R^w(x_2, x_2^e)$  von Fall M0.3 (Symbole) und M3.0 (Linien), für verschiedene Werte von  $x_2^e$  ( $x_2^e = 5, 10, 20, 50, 100$ ).



**Abbildung 3.136:** Verlauf der effektiven Dichten (Gleichung (3.72)) für Fall M1.5 und M3.5.

Wandnähe, liegt der Verlauf der effektiven Dichte unterhalb der von  $\bar{\rho}$ , während im Aussenbereich nahezu Übereinstimmung vorliegt. Der Unterschied, der in Wandnähe auftritt, liefert eine zusätzliche Erklärung dafür, warum die innere Skalierung, basierend auf dem lokalen  $\bar{\rho}$ , scheitert. Diese Überlegungen lassen sich analog auf die Temperatur und die Viskosität übertragen, da  $\bar{\rho} \approx 1/\bar{T}$ . Die Abbildung zeigt jedoch auch, dass diese Erklärung hauptsächlich Effekte im Wandbereich betrifft. Um obige Argumentation zu überprüfen, werden die semi-lokalen Skalierungen durch Skalierungen, die die effektiven Grössen beinhalten, ersetzt:

$$u_\tau^e = \sqrt{\frac{\tau_w}{\bar{\rho}_e}} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_e}, \quad l_e^* = \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{\rho}_e u_\tau^e}. \quad (3.73)$$

Die Stromabkomponente der turbulenten Spannungen und deren Produktion sind in den Abbildungen 3.137 bis 3.138 zu sehen. Im Vergleich zur semi-lokalen Skalierung sieht man nun eine signifikante Verbesserung, da die Peaks der Produktion unabhängig von Mach- und Reynoldszahl, in Wandnähe übereinstimmen. Auch die Maxima der turbulenten Spannungen der kompressiblen Fälle stimmen mit den entsprechenden inkompressiblen Fällen hervorragend überein (vergleiche dazu Abbildung 3.35).

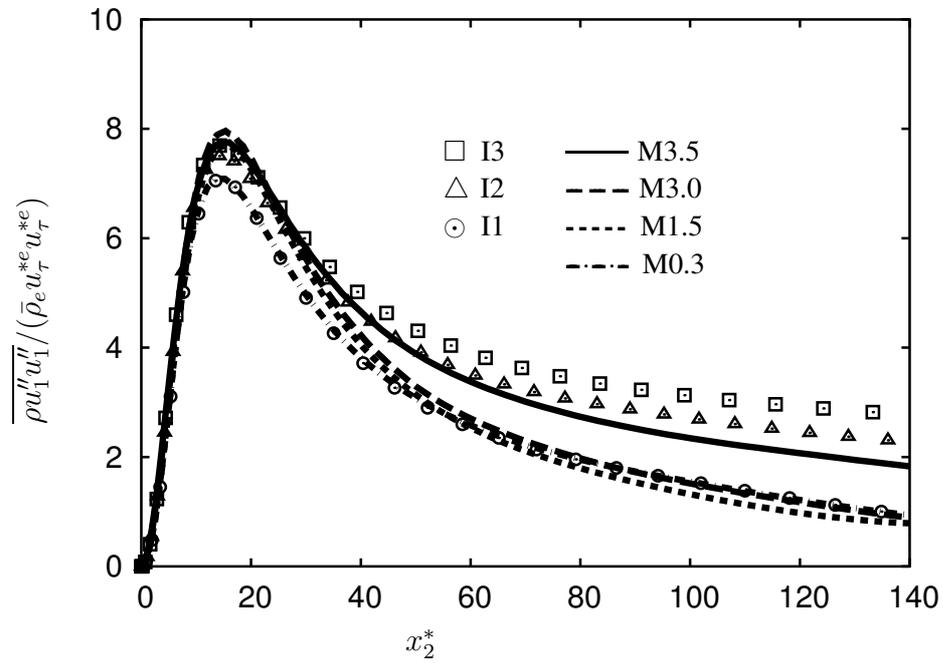


Abbildung 3.137: Innere Skalierung der turbulenten Spannung  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$  mit  $\bar{\rho}_e u_\tau^{*e} u_\tau^{*e}$ .

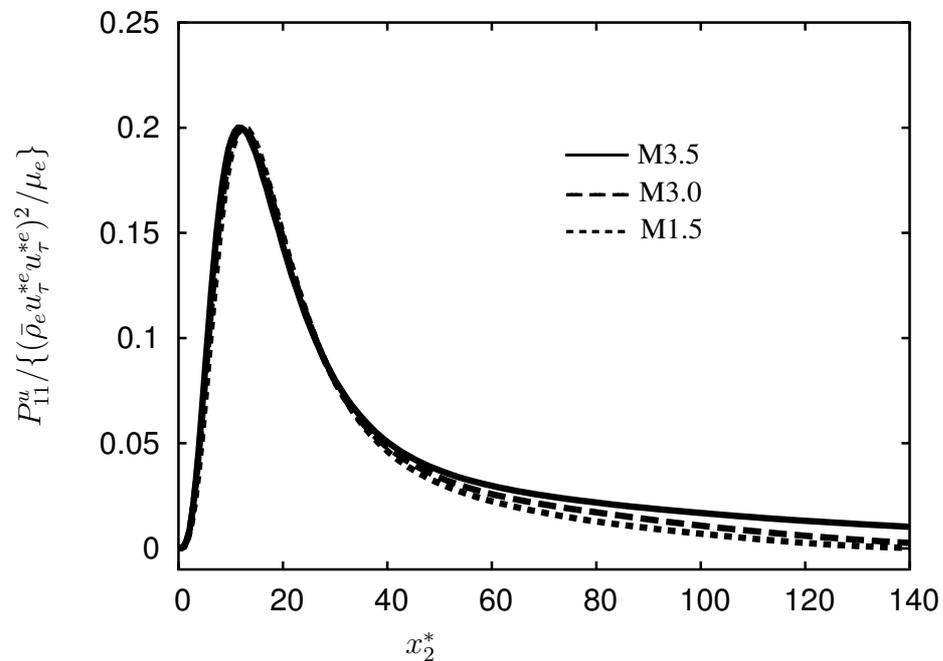


Abbildung 3.138: Innere Skalierung der Produktion der  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$ -Bilanz normiert mit  $\{(\bar{\rho}_e u_\tau^{*e} u_\tau^{*e})^2 / \mu_e\}$ .

## 4 Isotrope Turbulenz

Die vorangegangenen Kapitel waren ganz der supersonischen Kanalströmung gewidmet, und es wurde gezeigt, dass der dominierende Kompressibilitätseffekt durch die Variation der Dichte und Viskosität auf die Strömung wirkt. Die kompressible, isotrope Turbulenz weist dagegen hauptsächlich intrinsische Kompressibilitätseffekte auf, da beheizte oder gekühlte Wände und chemische Reaktionen, etc., fehlen.

### 4.1 Anfangsbedingungen

#### 4.1.1 Energiezufuhr

Fehlen Scherschichten oder Volumenkräfte, dann wird die turbulente Schankungsenergie durch Dissipation abklingen, da für die turbulente kinetische und die innere Energie gilt

$$\frac{d}{dt} e_k = \frac{d}{dt} \overline{\frac{1}{2} \rho u_j'' u_j''} = p \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} - \overline{\bar{\mu} \left( \frac{4}{3} s_{ii} s_{jj} + \omega_j \omega_j \right)} \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} e_i = C_v \frac{d}{dt} \overline{\frac{p}{\gamma - 1}} = -p \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} + \overline{\bar{\mu} \left( \frac{4}{3} s_{ii} s_{jj} + \omega_j \omega_j \right)}, \quad (4.2)$$

ein reiner Produktionsterm wie für die Bilanzen der turbulenten Spannungen im Kanal fehlt. Die totale Energie dagegen, die Summe der internen und kinetischen Energie, bleibt konstant. Um die Turbulenz am Abklingen zu hindern wird üblicherweise der rechten Seite der Impulsgleichungen ein Kraftterm hinzugefügt. Dieser bewirkt einen statistisch stationären Zustand durch das entstehende Gleichgewicht zwischen der Dissipation und dem Energieinput, im Gegensatz zur abklingenden isotropen Turbulenz, die rein instationär ist. Angeregte isotrope Turbulenz ist jedoch ein idealisierter Strömungsfall, da eine vergleichbare Situation in Experimenten kaum erzielt werden kann. Trotzdem bietet sie die Möglichkeit, grundlegende physikalische Mechanismen der Turbulenz im statistischen Gleichgewicht, zu studieren.

Da wir hauptsächlich an den kleinen Skalen interessiert sind, die durch die nichtlineare Kopplung zwischen den Moden verschiedener Skalen angeregt werden, muss der Kraftterm ausschliesslich auf die größten Skalen innerhalb der Rechenbox wirken. In der Literatur findet man verschiedene Möglichkeiten, wie dies zu bewerkstelligen ist, siehe zum Beispiel Vincent & Meneguzzi (1991), Kerr (1985), Kida & Orszag (1990)). In dieser Arbeit wurden drei Varianten getestet:

- Nach Fouriertransformation der Strömungsgrößen bestimmt man die Kraft durch die Beziehung (Mohseni *et al.* (2001))

$$\hat{F}_i = A \frac{\hat{u}_i^I}{\hat{u}_k^I \hat{u}_k^I}, \quad (4.3)$$

für alle Moden innerhalb der Energieschale mit  $|\mathbf{k}| \leq 1$ .  $\hat{F}_i$  und  $\hat{u}_i$  sind die Komponenten im Fourierraum der Kraft und Geschwindigkeitskomponenten,  $\mathbf{k}$  ist der Wellenzahlvektor. Der hochgestellte Index  $I$  kennzeichnet den inkompressiblen Anteil des Geschwindigkeitsfeldes und wird durch eine Helmholtz-Zerlegung erhalten

- Als weitere Möglichkeit wurde das Verfahren von Kida & Orszag (1990) getestet. Die Kraft  $F_i$  wird dort im physikalischen Raum berechnet, mit dem Ziel, nur auf die grössten Skalen zu wirken, nämlich

$$F_i(\mathbf{x}, t) = A_{ij}(t) \sin(2\pi x_j/L) + B_{ij} \cos(2\pi x_j/L). \quad (4.4)$$

$\mathbf{A}(t) = \{A_{ij}\}$  und  $\mathbf{B}(t) = \{B_{ij}\}$  sind Gaussche Zufallsvariablen mit Mittelwert 0. Die zweiten Momente erfüllen die Bedingung

$$\overline{A_{ij}^2} = \overline{B_{ij}^2} = \begin{cases} \frac{2F_C}{3\Delta t} & \text{falls } i = j \\ \frac{F_R}{3\Delta t} & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (4.5)$$

mit beliebigen Konstanten  $F_C$  und  $F_R$ . Diese Form der Energiezufuhr hat den Nachteil, dass durch den Gausschen Prozess große Schwankungen in den Zeitschritten der Strömungsgrößen auftreten, insbesondere bei den Termen in den Bilanzen (siehe Kida & Orszag (1990)). Ausserdem führte dieser Kraftterm bei vielen Testläufen zu einem Flachheitsgrad von 3 und einer Schiefe von 0, also Gausschem Verhalten.

- Eine Modifikation des Verfahrens von Kida & Orszag (1990) besteht darin, die Phase der Kraft als Gausschen Prozess zu beschreiben und die Kraft in der Form

$$F_i = A_{ij} \sin(2\pi x_j/L + \varphi_{ij}^I) + B_{ij} \cos(2\pi x_j/L + \varphi_{ij}^{II}) \quad (4.6)$$

zu berechnen. Um starke Fluktuationen zu vermeiden, wurden die Gausschen Zufallszahlen bei jeder Berechnung zum alten Wert der Phase addiert (Diskussion mit J. Riley (Seattle), J. Mathews (Bangalore) und Prof. Lohse (Twente)).

Die Berechnung von  $F_i$  im physikalischen Raum bietet den Vorteil des geringsten numerischen Aufwands und einer einfachen Steuerung der Simulation. Werden Diagonalelemente von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  weggelassen, so wird die Divergenzfreiheit automatisch erfüllt und keine akustischen Moden direkt durch  $F_i$  angeregt. Aus diesem Grund wurde die letzte Methode zur Berechnung der Kraft in den Simulationen dieser Arbeit verwendet.

### 4.1.2 Grundgleichungen

Die kompressiblen Navier-Stokesgleichungen (2.1) in nichtcharakteristischer Form, lauten unter Einbeziehung des Kraftterms

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( s_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] + F_i \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} &= -\gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + (\gamma - 1) \left( \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i F_i} \right) \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u_j \frac{\partial s}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho T} \left( \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i F_i} \right).\end{aligned}$$

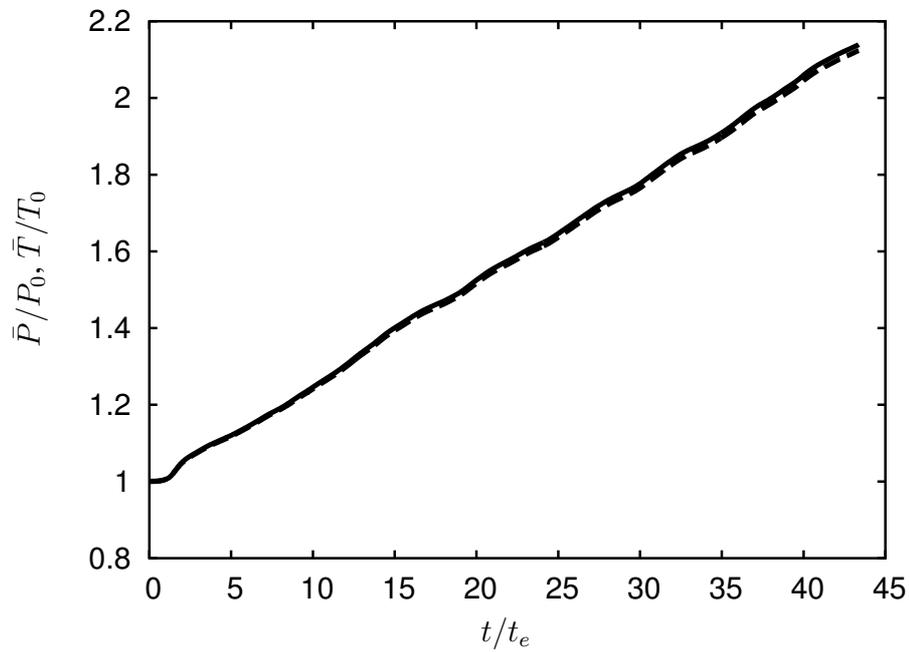
Der Term  $\overline{\rho u_i F_i}$  in diesen Gleichungen bedarf einer zusätzlichen Erklärung. Die Einführung eines Kraftterms in die Impulsbilanz führt zu einer statistisch (nur) quasistationären Turbulenz, denn die totale Energie steigt jetzt mit

$$\frac{dE_t}{dt} = \overline{\rho u_i F_i}. \quad (4.7)$$

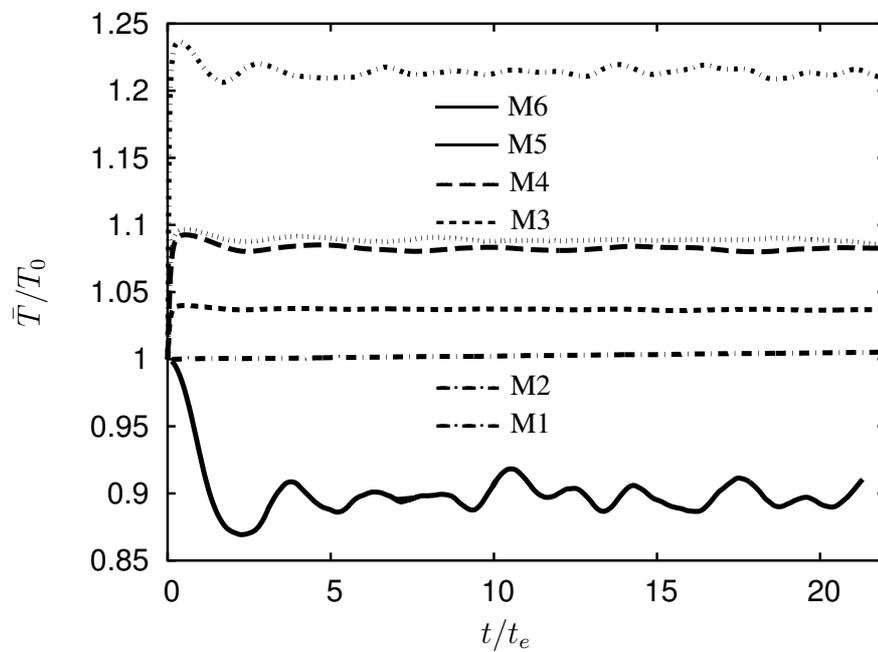
Der Grund liegt im Anwachsen der inneren Energie, da kinetische Energie, die durch den Kraftterm über nichtlineare Wechselwirkungen verschiedener Moden in unterschiedlichen Skalen zu den kleinen Skalen transferiert wird, dort durch viskose Effekte in innere Energie umgewandelt wird. Zusätzlich wandelt die Druckdilatation in (4.2) kinetische Energie in innere Energie um. Als Konsequenz dessen steigen Temperatur, Druck und damit auch die Reynolds- und Machzahl. Eine statistisch stationäre Turbulenz liegt deshalb nicht mehr vor. Im Gegensatz zu den Arbeiten von Kida & Orszag (1990), Cai *et al.* (1998) und Lou & Miller (2001) wird hier aus diesem Grund ein zusätzlicher Term zu der Druck- und Entropiegleichung hinzugefügt, der dem Anstieg der inneren und totalen Energie entgegenwirkt. Der mittlere Anstieg ist nach Gleichung (4.7) aber gerade  $\overline{\rho u_i F_i}$ , so dass dieser wie eine konstante Energiesenke in den Navier-Stokesgleichungen (siehe oben) wirkt. Die Berechnung erfolgte alle drei Zeitschritte. Die Abbildung 4.1 zeigt die Temperatur und den Druck, normiert auf den Anfangswert für einen Testfall mit  $M_t = 0.25$  und  $Re_\lambda = 55$ . Beide zeigen einen starken Anstieg, wodurch die Stationarität der Simulationen nicht mehr gewährleistet wird. In Abbildung 4.2 zeigt sich der Effekt des Senkenterms in der Transportgleichung der inneren Energie, der für alle gerechneten Fälle zu einer im statistischen Sinne konstanten Temperatur führt. Die turbulente, fluktuierende Geschwindigkeit wird definiert als  $u_{rms} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}/3$ . Als integrales Längenmass wird die Grösse

$$L_I = \frac{u_{rms}^3}{\varepsilon}$$

definiert, wobei  $\varepsilon$  wie üblich die Dissipationsrate pro Einheitsmasse bezeichnet. Als integrales Zeitmass ("eddy turn over time") wird  $t_e = k/\bar{\rho}\varepsilon$  gewählt, mit der turbulenten



**Abbildung 4.1:** Verlauf des mittleren Drucks (Linie) und der mittleren Temperatur (gestrichelt) bei stationärer isotroper Turbulenz, normiert mit deren Startwerten, ohne zusätzlichen Senkenterm in den Navier-Stokes-Gleichungen.



**Abbildung 4.2:** Verlauf der mittleren Temperatur normiert mit ihrem Startwert (Für die verschiedenen Simulationen siehe Tabelle 4.1.3).

kinetischen Energie  $k$ . Das Taylorsche Mikrolängenmass und die Taylorsche Reynoldszahl sind definiert als

$$\lambda^2 = \frac{u_{rms}^2}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}, \quad Re_\lambda = \frac{u_{rms}\lambda\bar{\rho}}{\bar{\mu}}. \quad (4.8)$$

Die turbulente Machzahl lautet

$$M_t = \frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}{\bar{c}}. \quad (4.9)$$

Da die Zeitschrittgrösse proportional zur Machzahl ist (siehe 2.24), sind bei niedrigen turbulenten Machzahlen die Zeitschritte äusserst klein und der Rechenaufwand dementsprechend gross. Die Diskretisierung mittels Upwindverfahren für den Euler-Teil der Navier-Stokes-Gleichungen wurde deshalb durch kompakte zentrale Differenzen 6. Ordnung ersetzt (siehe Kapitel 2.2). Der doppelte Aufwand der Berechnung der Upwind-Ableitungen entfällt dadurch, ausserdem sind nur noch tridiagonale anstatt pentadiagonale Gleichungssysteme zu lösen. Da die numerische Dissipation des Upwindverfahrens bei hohen Wellenzahlen entfällt, wird, um Aliasingfehler zu vermeiden, eine Filterung der Strömungsgrössen erforderlich. Die Filterung sollte Energie möglichst aus den höchsten Wellenzahlen entfernen. Standardfilter, wie beispielsweise der kompakte Filter 6. Ordnung von Lele, nehmen dagegen zu viel Energie aus den hohen Wellenzahlen. Eine Möglichkeit dies zu erreichen, besteht in der Optimierung der Transferfunktion, eine andere in der Verwendung der ADM (Approximate Deconvolution Method)-Technik (Stolz & Adams (1999)). Letztere wird der Einfachheit halber angewandt. Sei dazu  $\bar{\mathbf{f}}$  der Vektor der gefilterten Variablen, dann gilt  $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{G}\mathbf{f}$ , mit dem impliziten Filter  $\mathbf{G} = \mathbf{M}_l^{-1}\mathbf{M}_r$  (Lele (1992)) und den tridiagonalen Matrizen  $\mathbf{M}_r$ ,  $\mathbf{M}_l$ . Der mittels ADM konstruierte Filter ist dann

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{M}_l^{-1}\mathbf{M}_r \sum_{n=0}^6 (\mathbf{I} - \mathbf{M}_l^{-1}\mathbf{M}_r)^n, \quad (4.10)$$

oder im Fourierraum für periodische Probleme

$$\hat{\tilde{G}} = \hat{G} \sum_{n=0}^6 (1 - \hat{G})^n, \quad (4.11)$$

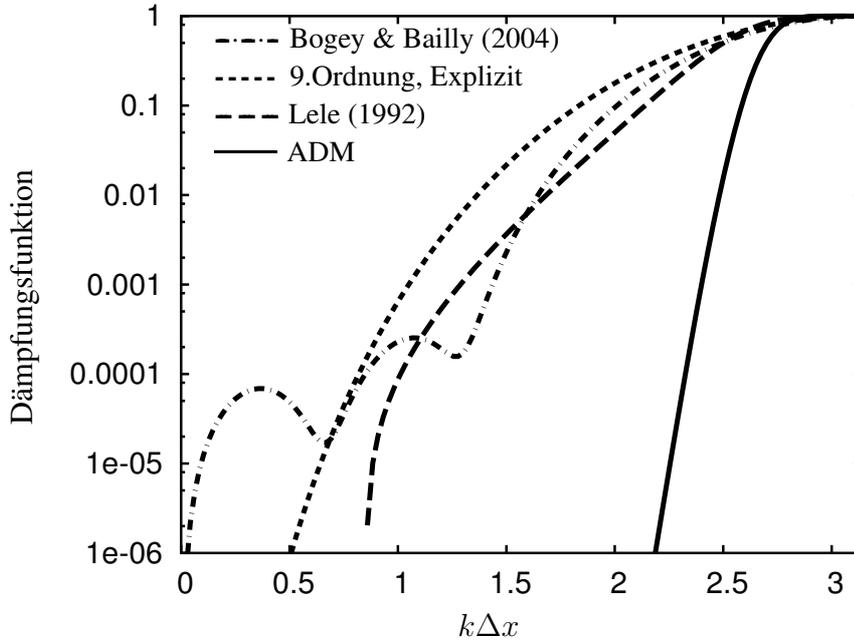
mit

$$\hat{G} = \frac{a + b \cos(k\Delta x) + c \cos(2k\Delta x) + d \cos(3k\Delta x)}{1 + 2\alpha \cos(k\Delta x) + 2\beta \cos(2k\Delta x)}. \quad (4.12)$$

Die Koeffizienten können Tabelle 4.1.2 entnommen werden. Abbildung 4.3 zeigt einen Vergleich der Dämpfungsfunktion  $1 - \hat{\tilde{G}}$  des mittels ADM konstruierten Filters mit verschiedenen Filtern aus der Literatur. Deutlich erkennt man, dass ausschliesslich in den

$\alpha$	$\beta$	a	b	c	d
0.6522474	0.1702929	$\frac{2+3\alpha}{4}$	$\frac{9+16\alpha+10\beta}{16}$	$\frac{\alpha+4\beta}{4}$	$\frac{-1+6\beta}{16}$

**Tabelle 4.5:** Koeffizienten des impliziten Filters 6.Ordnung (Lele (1992))



**Abbildung 4.3:** Vergleich der Dämpfungsfunktionen verschiedener Filter.

hohen Wellenzahlen gedämpft wird, im Bereich des Kolmogoroffschen Längenmasses, da die Maschenweite immer von derselben Grössenordnung oder kleiner gewählt wird. Die Filterung wurde alle 2-5 Zeitschritte durchgeführt.

### 4.1.3 Startfelder

Die Boxgrösse in allen Simulationen war  $[0, \pi/100] \times [0, \pi/100] \times [0, \pi/100]$  mit periodischen Randbedingungen in allen drei Koordinatenrichtungen. Die Simulationen M1 bis M5 wurden durch Vorgabe eines Energiespektrums für die Geschwindigkeitskomponenten gestartet (Schumann (1984)). Dazu wurden im Fourierraum zufällig belegte divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder generiert. Die Divergenzfreiheit wurde durch die Helmholtzzerlegung

$$\hat{u}(k)_i^s = \hat{u}_i - \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}} k_i$$

bewerkstelligt und dabei für den Wellenzahlvektor in der Divergenz  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}}$  die modifizierte Wellenzahl des zentralen kompakten Verfahrens eingesetzt, um mit dem numerischen Verfahren konsistent zu sein. Als Spektrum wurde wie bei Samtaney *et al.* (2000) die

Funktion

$$E(k) = Ak^4 \exp(-2k^2/k_0^2)$$

vorgegeben, mit der Wellenzahl  $k = |\mathbf{k}|$  und der Wellenzahl  $k_0$ , an der das Spektrum ein Maximum besitzt.  $A$  ist eine frei wählbare Konstante, die zur Einstellung der kinetischen Energie am Anfang der Simulation dient. DNS von abklingender isotroper Turbulenz unterliegen einem sogenannten "start up"-Problem, da sich aus den anfangs unkorrelierten Zufallsfeldern erst Korrelationen zwischen den Amplituden und Phasen ausbilden müssen. Dies passiert innerhalb eines kurzen transienten Vorgangs, während dessen die Divergenz und die Geschwindigkeit stark ansteigen. Verschiedene Anfangsbedingungen wurden unter anderem von Samtaney *et al.* (2000) untersucht. Sie beobachteten negative Temperaturen und Drücke bei hohen  $M_t$  und  $Re_\lambda$ , die auf shocklets (kleine Stösse) zurückzuführen waren. Die höchsten  $M_t$  wurden erreicht, falls ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld, sowie keinerlei Fluktuationen in den thermodynamischen Variablen vorgegeben wurden. Bei Testläufen wurden mit dem hier verwendeten Code bei abklingender Turbulenz turbulente Machzahlen in der Grössenordnung 1 erreicht. Sobald allerdings der Kraftterm kontinuierlich Energie in die großen Skalen einbrachte, wurden negative Drücke bei  $M_t \geq 0.4$  registriert. Um dies zu vermeiden, wurden in Simulation M6 das Geschwindigkeitsfeld zu Null gesetzt und konstante thermodynamische Grössen vorgegeben. Die Energiezufuhr durch den Kraftterm bewirkt anschliessend einen langsamen Anstieg der Geschwindigkeiten und der Divergenz, so dass problemlos höhere Machzahlen erreicht werden können.

### Initialisierung der Geschwindigkeitsfelder und thermodynamischen Variablen

Zur Initialisierung der Simulation wurde folgendermassen vorgegangen: Für die Fälle M1 bis M5 wurden die Reynoldszahl  $Re_\lambda$ , der mittlere Druck und die Temperatur vorgegeben, sowie die Geschwindigkeitsfelder mit einer Konstante multipliziert um die gewünschte Machzahl  $M_t$  einzustellen. Aus der Reynoldszahl kann nun die Viskosität berechnet werden und damit die Dissipation  $\epsilon$  aus den vorgegebenen Geschwindigkeitsfeldern. Die Konstanten in der Berechnung der Kraft werden anschliessend gleich

$$A_{ij} = B_{ij} = \frac{\bar{\rho}\epsilon}{\rho\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}} \quad i \neq j, \quad (4.13)$$

ansonsten Null, gesetzt. Im Verlauf der Simulation wurde festgestellt, dass die berechneten Konstanten eine zu große Dissipation hervorrufen, da die aus den inkompressiblen Geschwindigkeitsfeldern berechnete Dissipation naturgemäss nicht mit der in kompressibler Turbulenz übereinstimmt. Eine Multiplikation der Konstanten mit 0.4 brachte eine deutlich bessere Übereinstimmung und beschleunigte den Transitionsvorgang. In Fall M6 wurden die Referenzreynoldszahl  $Re = \bar{\rho}cL/\bar{\mu}$  und wiederum der mittlere Druck

Fall	$M_t$	$Re_\lambda$	$k_{\max}\eta$	$\frac{L_{xi}}{\pi}$	$N_i$	$L_I/L_{x_i}$	$\mathbf{g}$
M1	0.05	51	4.52	0.01	128	0.46	1.0
M2	0.1	55	3.54	0.01	128	0.47	1.0
M3	0.15	56	3.53	0.01	128	0.48	1.0
M4	0.22	58	3.11	0.01	128	0.49	1.0
M5	0.34	49	6.91	0.01	256	0.43	1.0
M6	0.63	47	6.82	0.01	256	0.39	1.0

**Tabelle 4.6:** Übersicht der gerechneten Fälle.

und die Temperatur vorgegeben. Da anfangs noch keine Geschwindigkeiten existieren wurden die  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  gleich

$$A_{ij} = B_{ij} = A \frac{c^2}{L_x/N_x} \quad i \neq j, \quad (4.14)$$

ansonsten Null, gesetzt. Der Wert der Konstanten  $A$  betrug 0.002 und diente zur Einstellung der Endreynoldszahl. Eine Übersicht über die verschiedenen Simulationen findet man in Tabelle 8.6.

### Initialisierung des passiven Skalars

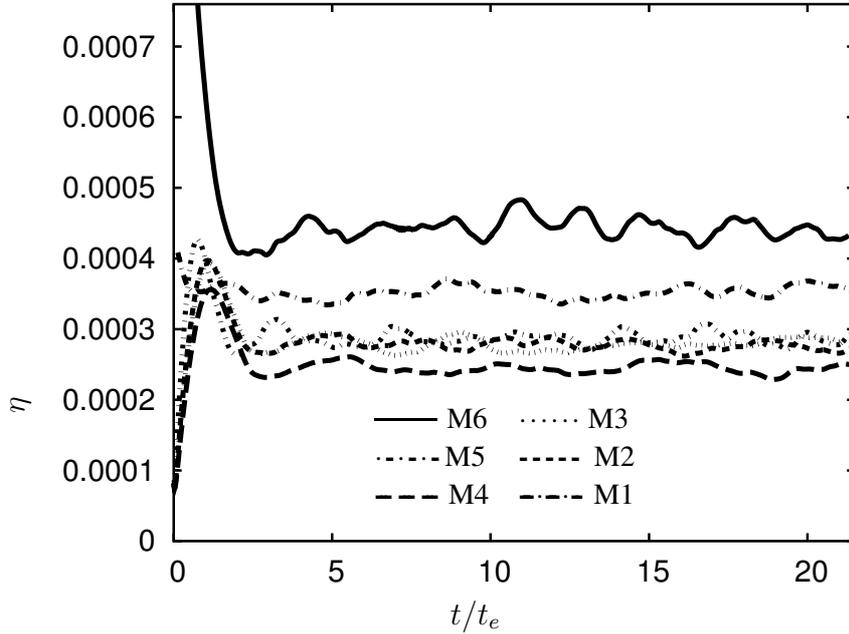
Nach etwa 10 dimensionslosen Zeiten  $t/t_e$  wird die Berechnung des passiven Skalars gestartet, unter Aufprägung eines gemittelten Skalargradienten  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_3$ , in  $x_3$ -Richtung. Dadurch wird sich, nach einiger Zeit, eine anfangs zu Null gesetzte Skalarvarianz zu einem statistisch stationären Wert hinentwickeln. Die Skalartransportgleichung wird durch eine Transportgleichung für die Skalarfluktuationen ersetzt, denn Aufspaltung des Skalars in Schwankung und Mittelwert,  $\theta = \theta'' + \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ , liefert

$$\frac{d\theta''}{dt} = \frac{\partial\theta''}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta'' = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho D \nabla\theta'') + \left( -\mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla(\rho D) \right) \cdot \mathbf{g}. \quad (4.15)$$

Das Hauptaugenmerk der Untersuchung der isotropen Turbulenz liegt auf der Ausrichtung des Skalargradienten bezüglich der Hauptachsen des Verzerrungstensors. Im folgenden sollen jedoch zuvor kurz verschiedene wichtige Strömungsgrößen präsentiert werden.

## 4.2 Mittelwerte

Die Entscheidung darüber, wann die sich entwickelnden Strömungsgrößen einen statistisch stationären Zustand erreicht haben, ist rein subjektiv, da genaue Aussagen darüber für "endliche" Zeitreihen unmöglich sind. Die Ergebnisse hängen deshalb zum großen



**Abbildung 4.4:** Zeitliche Entwicklung des Kolmogorovschen Längenmasses  $\eta = \left( \frac{(\bar{\mu}/\bar{\rho})^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}$ .

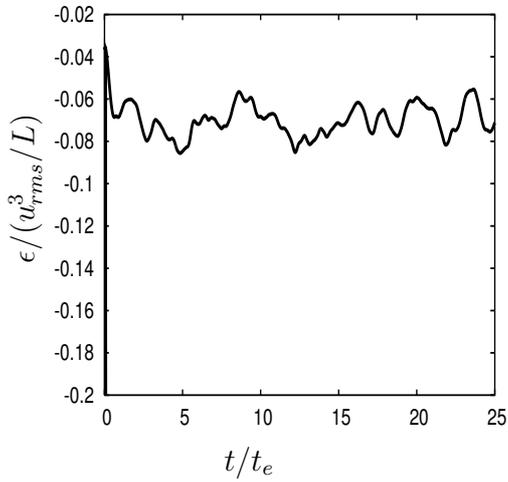
Teil davon ab, über welchen Zeitraum und über wie viele integrale Zeitmasse die Mittelung durchgeführt wurde. In dieser Arbeit wird aus diesem Grund versucht, durch eine starke Machzahlvariation Effekte zu erzielen, die groß genug sind, um sie eindeutig der Kompressibilität zuordnen zu können.

Die Zeitreihen der Entwicklung des Kolmogorovschen Längenmasses sind in Abbildung 4.4 zu sehen. Man erkennt, dass ab  $t/t_e \approx 5$  für alle Fälle die Zeitreihen um einen festen Mittelwert schwanken und deshalb statistische Stationariät angenommen werden kann. Dieselbe Aussage lässt sich auch für die Dissipation machen, zu sehen in den Abbildungen 4.5 bis 4.8. Betrachtet man jedoch den RMS-Wert der Divergenz, logarithmisch aufgetragen in den Abbildungen 4.9 bis 4.12, erkennt man, dass dieser nach einem starken Anstieg für kleine Zeiten rapide absinkt. Für die Fälle M2 und M3 wird aber erst bei  $t/t_e = 26$  bzw.  $t/t_e = 18$  statistische Stationarität erreicht. Für die in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wurde deshalb der Skalar erst nach Erreichen der Stationarität der Divergenz ausgewertet.

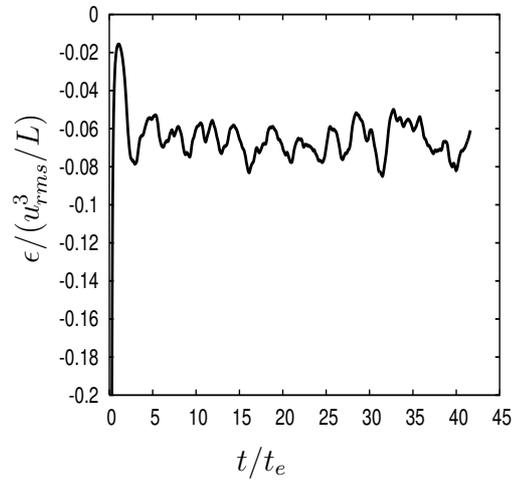
In isotroper Turbulenz vereinfachen sich die gemittelten Bilanzgleichungen (3.5) unter Zuhilfenahme der Bedingungen

$$\bar{U}_i = 0, \quad (\text{isotroper Tensor 1.Stufe ist Nullvektor}) \quad (4.16)$$

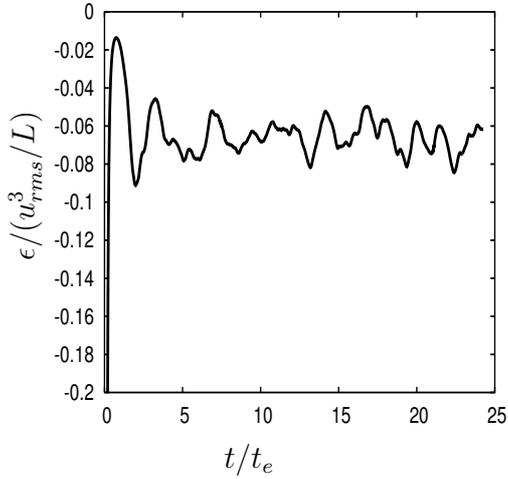
$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} = |\mathbf{g}| \delta_{j3} \quad (4.17)$$



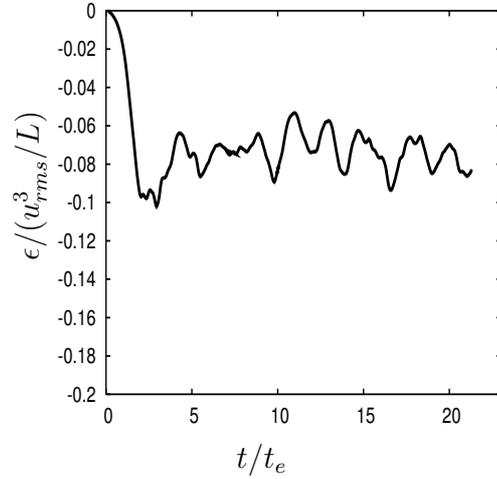
**Abbildung 4.5:** Zeitliche Entwicklung der Dissipation für Fall M1.



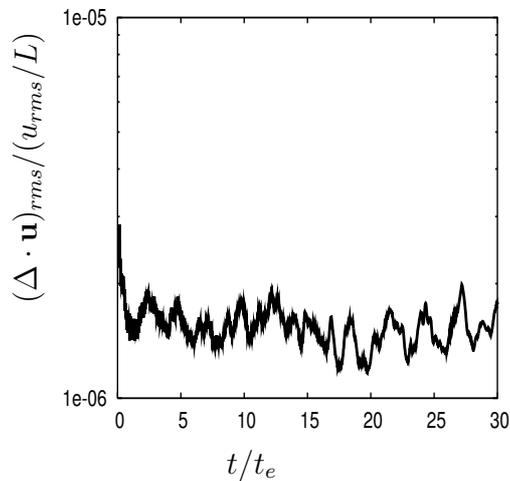
**Abbildung 4.6:** Zeitliche Entwicklung der Dissipation für Fall M2.



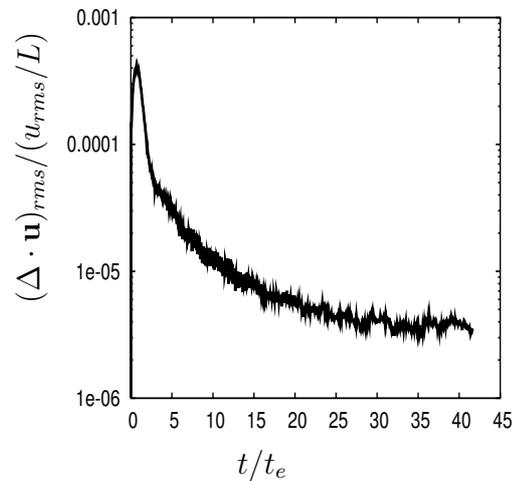
**Abbildung 4.7:** Zeitliche Entwicklung der Dissipation für Fall M5.



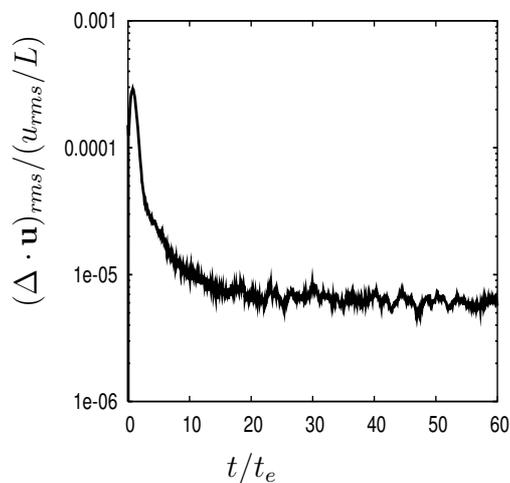
**Abbildung 4.8:** Zeitliche Entwicklung der Dissipation für Fall M6.



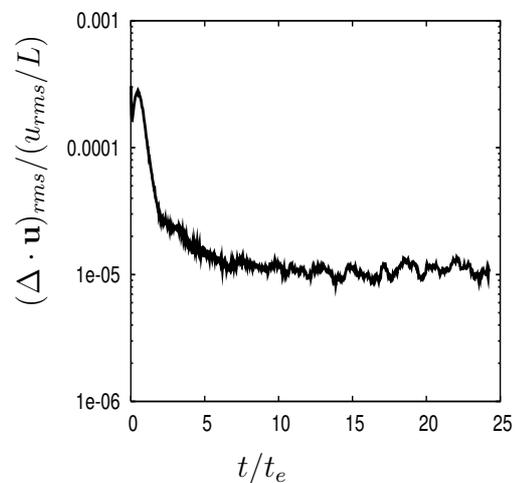
**Abbildung 4.9:** Zeitliche Entwicklung des RMS-Wertes der Divergenz  $(\Delta \cdot \mathbf{u})_{rms}$  für Fall M1.



**Abbildung 4.10:** Zeitliche Entwicklung des RMS-Wertes der Divergenz  $(\Delta \cdot \mathbf{u})_{rms}$  für Fall M2.



**Abbildung 4.11:** Zeitliche Entwicklung des RMS-Wertes der Divergenz  $(\Delta \cdot \mathbf{u})_{rms}$  für Fall M4.



**Abbildung 4.12:** Zeitliche Entwicklung des RMS-Wertes der Divergenz  $(\Delta \cdot \mathbf{u})_{rms}$  für Fall M5.

	M1	M2	M3
$\overline{\rho u_1'' u_1''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$1.001 \pm 0.005$	$1.001 \pm 0.006$	$1.009 \pm 0.005$
$\overline{\rho u_2'' u_2''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$1.03 \pm 0.009$	$1.022 \pm 0.005$	$1.012 \pm 0.005$
$\overline{\rho u_3'' u_3''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$0.977 \pm 0.007$	$0.983 \pm 0.005$	$0.971 \pm 0.005$
$\overline{\rho u_1'' u_2''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$0.148 \pm 0.003$	$0.144 \pm 0.002$	$0.129 \pm 0.002$
$\overline{\rho u_1'' u_3''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$0.099 \pm 0.003$	$0.149 \pm 0.003$	$0.134 \pm 0.003$
$\overline{\rho u_1'' \theta''} / \overline{\rho} u_{rms} \mathbf{g} L$	$-0.039 \pm 0.002$	$-0.035 \pm 0.001$	$-0.040 \pm 0.002$
$\overline{\rho u_2'' \theta''} / \overline{\rho} u_{rms} \mathbf{g} L$	$-0.022 \pm 0.001$	$-0.039 \pm 0.001$	$-0.035 \pm 0.001$
$\overline{\rho u_3'' \theta''} / \overline{\rho} u_{rms} \mathbf{g} L$	$-0.245 \pm 0.003$	$-0.242 \pm 0.002$	$-0.253 \pm 0.002$
$\sqrt{\overline{\theta'^2} - \overline{\theta''^2}} / (\mathbf{g} L)$	$0.316 \pm 0.003$	$0.327 \pm 0.002$	$0.313 \pm 0.002$

	M4	M5	M6
$\overline{\rho u_1'' u_1''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$1.013 \pm 0.005$	$1.016 \pm 0.008$	$0.997 \pm 0.018$
$\overline{\rho u_2'' u_2''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$1.025 \pm 0.005$	$1.022 \pm 0.01$	$0.999 \pm 0.023$
$\overline{\rho u_3'' u_3''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$0.953 \pm 0.005$	$0.949 \pm 0.01$	$0.993 \pm 0.016$
$\overline{\rho u_1'' u_2''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$0.118 \pm 0.002$	$0.132 \pm 0.004$	$0.145 \pm 0.01$
$\overline{\rho u_1'' u_3''} / \overline{\rho} u_{rms}^2$	$0.129 \pm 0.003$	$0.126 \pm 0.005$	$0.171 \pm 1.065$
$\overline{\rho u_1'' \theta''} / \overline{\rho} u_{rms} \mathbf{g} L$	$-0.023 \pm 0.001$	$-0.049 \pm 0.002$	$-0.040 \pm 0.005$
$\overline{\rho u_2'' \theta''} / \overline{\rho} u_{rms} \mathbf{g} L$	$-0.022 \pm 0.001$	$-0.040 \pm 0.002$	$-0.03 \pm 0.003$
$\overline{\rho u_3'' \theta''} / \overline{\rho} u_{rms} \mathbf{g} L$	$-0.252 \pm 0.003$	$-0.285 \pm 0.004$	$-0.341 \pm 0.007$
$\sqrt{\overline{\theta'^2} - \overline{\theta''^2}} / (\mathbf{g} L)$	$0.310 \pm 0.002$	$0.335 \pm 0.003$	$0.342 \pm 0.005$

**Tabelle 4.7:** Mittelwerte der Reynoldsspannungen, turbulenten Skalarflüsse und  $\theta_{rms}$ .

	M1	M2	M3
$\{\rho\}_{rms} / \overline{\rho}$	$0.0008 \pm 0.00002$	$0.005 \pm 0.000$	$0.012 \pm 0.000$
$\{p\}_{rms} / \overline{p}$	$0.0010 \pm 0.000$	$0.006 \pm 0.000$	$0.015 \pm 0.000$
$\{T\}_{rms} / \overline{T}$	$0.0003 \pm 0.000$	$0.002 \pm 0.000$	$0.004 \pm 0.000$

	M4	M5	M6
$\{\rho\}_{rms} / \overline{\rho}$	$0.016 \pm 2e - 5$	$0.032 \pm 0.0001$	$0.132 \pm 0.0009$
$\{p\}_{rms} / \overline{p}$	$0.021 \pm 3e - 5$	$0.041 \pm 0.0002$	$0.181 \pm 0.001$
$\{T\}_{rms} / \overline{T}$	$0.006 \pm 6e - 5$	$0.011 \pm 5e - 5$	$0.054 \pm 0.0003$

**Tabelle 4.8:** Verhältnis der Fluktuationen der thermodynamischen Variablen zu deren Mittelwerten.

	M1	M2	M3
$\frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^3}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}}$	$0.37 \pm 0.001$	$0.413 \pm 0.004$	$0.356 \pm 0.003$
$\frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^4}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}$	$4.14 \pm 0.011$	$4.352 \pm 0.013$	$4.313 \pm 0.02$
$\frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^3}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}}$	$0.130 \pm 0.013$	$0.06 \pm 0.01$	$0.133 \pm 0.002$
$\frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^4}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}$	$8.123 \pm 0.039$	$8.83 \pm 0.025$	$9.431 \pm 0.021$
$\frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^1}{\partial x_1^1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2}$	$-0.316 \pm 0.003$	$-0.328 \pm 0.002$	$-0.346 \pm 0.002$
$\frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2}$	$1.494 \pm 0.005$	$1.579 \pm 0.004$	$1.579 \pm 0.003$
	M4	M5	M6
$\frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^3}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}}$	$0.351 \pm 0.001$	$0.40 \pm 0.005$	$0.31 \pm 0.009$
$\frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^4}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}$	$4.309 \pm 0.009$	$4.310 \pm 0.02$	$3.754 \pm 0.04$
$\frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^3}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}}$	$0.122 \pm 0.001$	$0.120 \pm 0.003$	$0.077 \pm 0.004$
$\frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^4}{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}$	$9.29 \pm 0.011$	$8.761 \pm 0.027$	$7.103 \pm 0.03$
$\frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \frac{\partial^1}{\partial x_1^1} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2}$	$-0.339 \pm 0.002$	$-0.332 \pm 0.004$	$-0.178 \pm 0.0023$
$\frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right)^2}$	$1.567 \pm 0.001$	$1.55 \pm 0.003$	$1.393 \pm 0.011$

**Tabelle 4.9:** Gemittelte Werte der Schiefe und des Flachheitsgrades der Ableitungen.

**Bilanz der Skalarvarianz:**

$$\frac{\overline{\partial \rho \{ \theta'' \}^2 / 2}}{\partial t} = -\overline{\rho u_3'' \theta''} |\mathbf{g}| - \frac{\overline{\mu \partial \theta''}}{Sc \partial x_3} |\mathbf{g}| - \frac{\overline{\mu \partial \theta'' \partial \theta''}}{Sc \partial x_j \partial x_j}, \quad (4.18)$$

**Bilanz der Skalarflüsse:**

$$\frac{\overline{\partial \rho u_i'' \theta''}}{\partial t} = -\overline{\rho u_i'' u_3''} \mathbf{g} + p \frac{\partial \theta''}{\partial x_i} - \tau_{ij} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} - \frac{\overline{\mu \partial u_i''}}{Sc \partial x_j} \left( \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} + \mathbf{g} \delta_{j3} \right) \quad (4.19)$$

Die Bilanz der Skalarvarianz erklärt, warum der mittlere Skalargradient in der Literatur als Quelle von Skalarfluktuationen angesehen wird, da im stationären Fall die Produktion durch den Skalargradienten gleich der Dissipation ist. Die Entwicklung der Skalarvarianz und des Skalarflusses in  $x_1$  (oder  $x_2$ )-Richtung sowie in Richtung des mittleren Skalargradienten ist für die Fälle M1, M2, M4 und M5 in den Abbildungen 4.13 bis 4.16 zu sehen. Als Normierung für den Skalar wurde das Produkt aus dem mittleren Skalargradienten und der Boxgrösse gewählt, welches von der Reynolds- und Machzahl unabhängig ist. Da die Unterschiede in den Reynoldszahlen gering sind, können Differenzen nur aufgrund von Machzahleffekten auftreten. Die Abbildungen zeigen, dass die Zeitschriebe mit steigender Machzahl eine grössere Intermittenz aufweisen. Der Verlauf der Maxima und Minima in der Skalarvarianz spiegelt sich ausserdem im Verlauf des turbulenten Skalarflusses in Richtung des mittleren Skalargradienten wieder. Für die Fälle M1 und M2 ist diese Beobachtung auch für  $\overline{\rho \theta'' u_1'}$  gültig, für die Fälle M4 und M5 jedoch zeigen sich deutliche Unterschiede. Der Grund dafür dürfte der Anstieg der Dichtefluktuationen sein, da mit steigendem  $M_t$  auch die Fluktuationen in den Skalarflüssen zunehmen und die Änderung der Geschwindigkeitsfluktuationen durch Normierung mit  $u_{rms}$  berücksichtigt wird. In Tabelle 4.7 sind zur Übersicht die turbulenten Spannungen, normiert mit  $\overline{\rho} u_{rms}^2$ , die turbulenten Skalarflüsse, normiert mit  $\overline{\rho} u_{rms} \mathbf{g} L$ , sowie die RMS-Werte des Skalars normiert mit  $\mathbf{g} L$  aufgetragen, gemittelt über  $20 t_e$ . Die Reynoldsspannungen ändern sich mit steigender Machzahl nur unwesentlich. Man erkennt, dass der dominante turbulente Skalarfluss in Richtung des mittleren Skalargradienten zeigt, ausserdem steigen die Skalarvarianz und  $\overline{\rho u_3'' \theta''} / \overline{\rho} u_{rms} \mathbf{g} L$  mit zunehmender Machzahl leicht an. Mit steigender Machzahl wachsen auch die Fluktuationen der thermodynamischen Variablen. Tabelle 4.8 zeigt das Verhältnis der RMS-Werte von Temperatur, Dichte und Druck dividiert durch ihren Mittelwert. Da erst für Fall M6 bedeutende Variationen dieser Größen vorliegen, sollte Fall M6 daher im weiteren Verlauf dieser Arbeit deutliche Kompressibilitätseffekte zeigen, während diese für die anderen Fälle höchstwahrscheinlich klein sind. Tabelle 4.9 zeigt zusätzlich noch verschiedene Momente der Geschwindigkeits- und Skalarableitungen. Aus diesen Daten lässt sich nur schwer ein Trend erkennen, allerdings weist Fall M6 deutlich geringere Werte für die verschiedenen Momente auf, diese scheinen also durch die Kompressibilität reduziert zu werden. Tabelle 4.10 zeigt im oberen Teil die Druck-Skalargradientkorrelation und die Dissipation der Bilanz

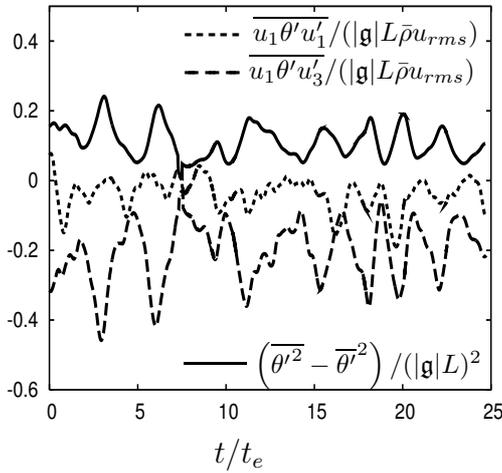
	M1	M2	M3
$\overline{p \frac{\partial \theta''}{\partial x_3}}$	$0.85 \pm 0.003$	$0.88 \pm 0.001$	$0.91 \pm 0.007$
$-\overline{\tau_{3j} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial u_3''}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} +  \mathbf{g}  \right)}$	$-0.26 \pm 0.0024$	$-0.23 \pm 0.003$	$-0.23 \pm 0.002$
$-\overline{\rho u_3'' \theta''  \mathbf{g} }$	$0.245 \pm 0.003$	$0.242 \pm 0.002$	$0.253 \pm 0.002$
$\overline{\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_3}  \mathbf{g}  - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j}}$	$0.247 \pm 0.004$	$0.240 \pm 0.003$	$0.249 \pm 0.006$
	M4	M5	M6
$\overline{p \frac{\partial \theta''}{\partial x_3}}$	$0.88 \pm 0.002$	$0.90 \pm 0.007$	$0.85 \pm 0.009$
$-\overline{\tau_{3j} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial u_3''}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} +  \mathbf{g}  \right)}$	$-0.24 \pm 0.004$	$-0.26 \pm 0.007$	$-0.34 \pm 0.006$
$-\overline{\rho u_3'' \theta''  \mathbf{g} }$	$0.252 \pm 0.004$	$0.285 \pm 0.004$	$0.342 \pm 0.007$
$\overline{\frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_3}  \mathbf{g}  - \frac{\mu}{Sc} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j} \frac{\partial \theta''}{\partial x_j}}$	$0.255 \pm 0.002$	$0.280 \pm 0.006$	$0.335 \pm 0.009$

**Tabelle 4.10:** Terme der Bilanz von  $\overline{\rho u_3'' \theta''}$  (obere Hälfte), normiert mit  $\overline{\rho u_{rms}^2 |\mathbf{g}|}$  und der Bilanz der Skalarvarianz (untere Hälfte), normiert mit  $\overline{\rho u_{rms} |\mathbf{g}|^2 L_{x_1}}$

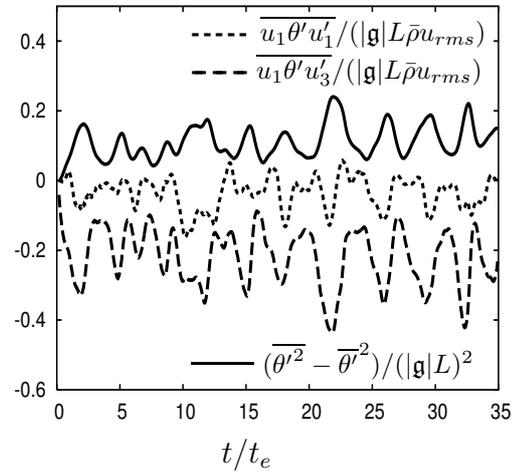
des turbulenten Skalarflusses in Richtung des mittleren Skalargradienten, normiert mit  $\overline{\rho u_{rms}^2 |\mathbf{g}|}$  und gemittelt über  $20t_e$ . Während die Druckkorrelation annähernd konstant bleibt, steigt die Dissipation leicht mit steigender Machzahl. Auch in der Bilanz der Skalarvarianz (untere Hälfte von Tabelle 4.10) steigt die Dissipation und damit auch die Produktion von Fall M1 bis M6, konsistent mit der Erhöhung der Skalarvarianz, an.

### 4.3 Analyse des Skalargradienten

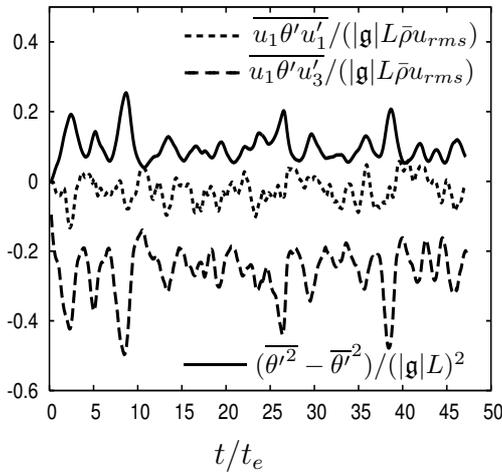
Von großer Bedeutung für den Mischungsprozess ist die Rolle des Skalar- und Geschwindigkeitsfeldes im Bereich kleiner Skalen, wo das Skalarfeld durch die turbulenten kleinskaligen Scher- und Verzerrungsbewegungen verformt wird. Als Folge davon können die Skalargradienten anwachsen und sich die Isoskalarflächen vergrößern, wodurch eine erhöhte Mikrovermischung einsetzen kann (Brethouwer *et al.* (2003)). In diesem Zusammenhang ist deshalb die Ausrichtung des Skalargradienten bezüglich der Hauptachsen des Verzerrungstensors  $S_{ij}$  von Bedeutung. Gleichzeitig ist es in anisotropen Strömungen nützlich, die Fluideigenschaften sowohl in einem ortsfesten, als auch in einem mit dem Fluidelement mitbewegten und rotierenden Koordinatensystem zu untersuchen (für isotrope Strömungen ist diese Unterscheidung natürlich hinfällig). Zur Herleitung einer Transportgleichung für die Ausrichtung des Skalargradienten werden im folgenden Abschnitt die Arbeiten von Dresselhaus & Tabor (1991) und Brethouwer *et al.* (2003), die inkompressible Strömungen untersuchten, auf kompressible Strömungen erweitert.



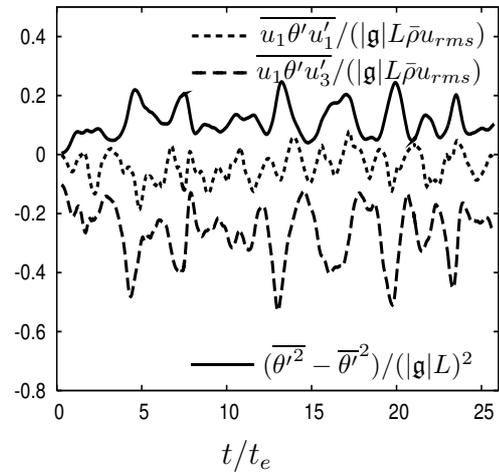
**Abbildung 4.13:** Zeitliche Entwicklung der Skalarvarianz und der Skalarflüsse  $\overline{u_1\theta'u'_1}$  und  $\overline{u_1\theta'u'_3}$  für Fall M1.



**Abbildung 4.14:** Zeitliche Entwicklung der Skalarvarianz und der Skalarflüsse  $\overline{u_1\theta'u'_1}$  und  $\overline{u_1\theta'u'_3}$  für Fall M2.



**Abbildung 4.15:** Zeitliche Entwicklung der Skalarvarianz und der Skalarflüsse  $\overline{u_1\theta'u'_1}$  und  $\overline{u_1\theta'u'_3}$  für Fall M4.



**Abbildung 4.16:** Zeitliche Entwicklung der Skalarvarianz und der Skalarflüsse  $\overline{u_1\theta'u'_1}$  und  $\overline{u_1\theta'u'_3}$  für Fall M5.

### 4.3.1 Transportgleichung für die Skalargradientenausrichtung

Es sei nun mit  $\mathbf{n} = \mathbf{g}/|\mathbf{g}| = \mathbf{g}/g$  der normierte Gradient der Skalarfluktuationen bezeichnet. Die Beziehung zwischen dem Skalargradienten und dem Geschwindigkeitsfeld erhält man nach Differentiation der Skalartransportgleichung (4.15) zu

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{g}}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t} + (\mathbf{u} \otimes \nabla)\mathbf{g} \\
&= -\mathbf{S}\mathbf{g} - \mathbf{S}\mathbf{g} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} + D\Delta\mathbf{g} \\
&\quad - \frac{\nabla\rho}{\rho^2} \langle \nabla(\rho D), \mathbf{g} \rangle + \frac{1}{\rho} \langle \mathbf{g}, \nabla \rangle \nabla(\rho D) + \frac{1}{\rho} \langle \nabla(\rho D), \nabla \rangle \mathbf{g} + \nabla D \langle \nabla, \mathbf{g} \rangle \\
&\quad - \frac{\nabla\rho}{\rho^2} \langle \nabla, \rho D \mathbf{g} \rangle + \frac{1}{\rho} \langle \mathbf{g}, \nabla \rangle \nabla(\rho D)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Terme in der zweiten Zeile sind analog zu den Termen, die man im inkompressiblen Fall findet (Brethouwer *et al.* (2003)), Dichte und Viskositätsvariationen führen dagegen zu zusätzlichen Anteilen, die in den Zeilen drei und vier zu sehen sind. Man erkennt, dass der Skalargradient von den Komponenten des Verzerrungstensors  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  und des Wirbelstärkevektors  $\boldsymbol{\omega}$ , abhängt.

Als eine beliebige Basis, in der  $\mathbf{S}$  diagonal ist, wird im folgenden  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  gewählt. Damit gilt  $\mathbf{S} = \mathbf{E}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{E}$ , mit der Matrix der positiv orientierten, orthonormierten Eigenvektoren in ihren Zeilen,  $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T$  und der Matrix der Eigenwerte  $\mathbf{D} = \text{diag}\{s_1, s_2, s_3\}$ , mit  $s_1 \leq s_2 \leq s_3$ . Im inkompressiblen Fall gilt aufgrund der Inkompressibilitätsbedingung  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ , so dass jeweils ein Eigenwert immer größer und ein Eigenwert kleiner als Null ist. Im hier vorliegenden kompressiblen Fall werden die Eigenwerte, wie im inkompressiblen üblich, als  $s_1 < s_2 < s_3$  angeordnet, allerdings können diese allesamt positiv oder negativ sein. Die Grösse  $\lambda = \mathbf{E}\mathbf{n}$  beschreibt den normierten Skalargradienten, ausgedrückt in der Basis der Eigenvektoren, wobei jedes Element der Projektion des normierten Skalargradienten auf die jeweiligen Eigenvektoren entspricht und damit dem Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_i$ . Für deren zeitliche Entwicklung erhält man nun

$$\frac{d}{dt} \lambda_i = \left\langle \frac{d\mathbf{n}}{dt}, \mathbf{e}_i \right\rangle + \left\langle \mathbf{n}, \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} \right\rangle. \tag{4.21}$$

Für die Auswertung dieser Gleichung werden Transportgleichungen für  $\mathbf{g}$ ,  $g$  und  $\mathbf{e}_i$  benötigt. Gleichung (4.20) liefert bereits den ersten Teil, da

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{n}}{dt} &= \frac{1}{g} \frac{d\mathbf{g}}{dt} - \frac{\mathbf{g}}{g^2} \frac{dg}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\mathbf{g}}{dt} - \mathbf{n} \left\langle \mathbf{n}, \frac{1}{g} \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right\rangle \\
&= \frac{1}{g} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \frac{d\mathbf{g}}{dt},
\end{aligned} \tag{4.22}$$

mit  $\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = \frac{1}{g} \langle \mathbf{n}, \frac{d\mathbf{g}}{dt} \rangle$ . Die Transportgleichung für den Betrag des Skalargradienten folgt damit aus Gleichung (4.20) zu (siehe auch Appendix B)

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = & -s_i \lambda_i^2 - \frac{1}{g^2} \langle \mathbf{g}, \mathbf{S} \mathbf{g} \rangle - \frac{1}{2g^2} \langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} \rangle + \frac{1}{2g^2} (D \Delta g^2 - 2D \nabla \mathbf{g} : \nabla \mathbf{g}) \\ & - \frac{1}{\rho^2} \left\langle \frac{\mathbf{g}}{g}, \nabla \rho \right\rangle \left\langle \nabla(\rho D), \frac{\mathbf{g}}{g} \right\rangle + \frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\mathbf{g}}{g}, \left\{ \left\langle \frac{\mathbf{g}}{g}, \nabla \right\rangle \nabla(\rho D) \right\} \right\rangle \\ & + \frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\mathbf{g}}{g^2}, \langle \nabla(\rho D), \nabla \rangle \mathbf{g} \right\rangle + \left\langle \frac{\mathbf{g}}{g^2}, \nabla D \right\rangle \langle \nabla, \mathbf{g} \rangle - \frac{\langle \mathbf{g}, \nabla \rho \rangle}{(g\rho)^2} \langle \mathbf{g}, \nabla \rangle (\rho D) \\ & + \left\langle \frac{\mathbf{g}}{\rho g^2}, \nabla \{ \langle \nabla, \rho D \mathbf{g} \rangle \} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.23)$$

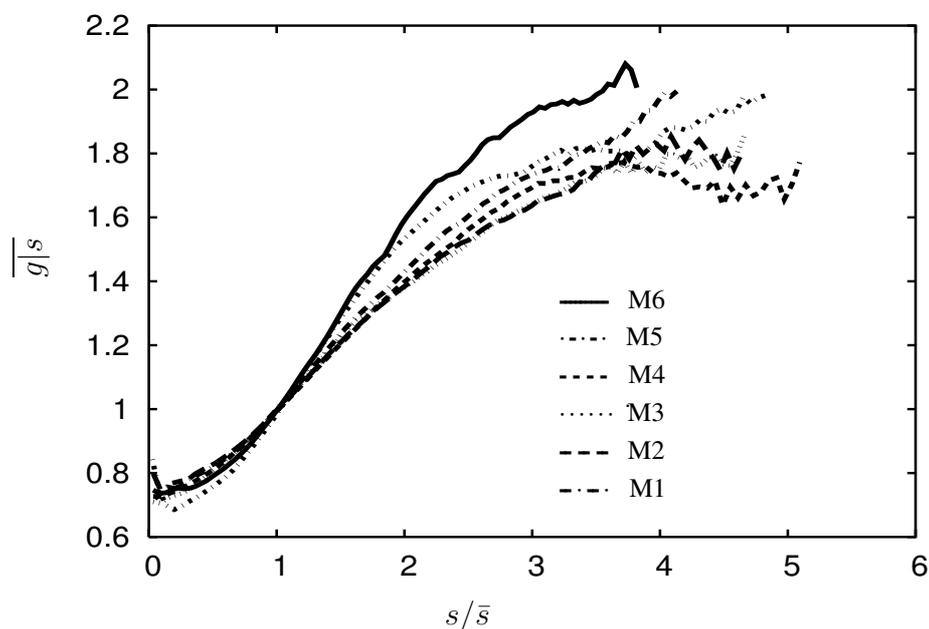
mit  $s_i \lambda_i^2 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{S} \mathbf{n} \rangle$ . Die Terme der ersten Zeile treten wiederum in inkompressiblen als auch in kompressiblen Strömungen auf, wobei die ersten drei als Produktionsterme aufgrund von Verzerrung und Wirbelstärke, der vierte als molekulare Destruktion der fluktuierenden Skalargradienten angesehen werden können. Die ersten beiden Terme sind ausserdem von der Orientierung des Skalargradienten bezüglich der Hauptachsen des Verzerrungstensors abhängig. Der Skalargradient steigt damit an Orten, wo Kompression vorherrscht, falls also ein Eigenwert von  $\mathbf{S}$ , der mit  $s_\gamma$  bezeichnet wird, negativ ist. Da der mittlere Skalargradient in den Simulationen M1-M6 von der Ordnung eins ist, ist an Orten mit Ausrichtung in Richtung  $\mathbf{e}_\gamma$  der erste Term dominant (Brethouwer *et al.* (2003)). In isotropen kompressiblen Strömungen treten zusätzliche Quellterme aufgrund von Gradienten der Dichte- und Temperaturfluktuationen auf. Insbesondere bei Verbrennungsprozessen die eine große Wärmeproduktion hervorrufen können oder wandgebundenen Strömungen, sind diese Terme von Bedeutung. In den Simulationen isotroper Turbulenz in dieser Arbeit, treten starke Dichte- und Temperaturfluktuationen erst bei Machzahlen über  $M_t = 0.3$  auf. Einfache Abschätzungen der DNS-Daten zeigten, dass die Produktionsterme in der ersten Zeile in der kompressiblen isotropen Turbulenz dominant sind.

Die bisher abgeleiteten Beziehungen sind nach einer kleinen Modifikation auch für kompressible Kanalströmungen gültig, falls  $\mathbf{g}$  gleich dem einzig nichtverschwindenden mittleren Skalargradienten  $\partial \tilde{\Theta} / \partial x_2$  gesetzt wird und zusätzlich die zweite Ableitung von  $\tilde{\Theta}$  berücksichtigt wird,

$$\frac{\partial \theta''}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta'' = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho D \nabla \theta'') + \left( -u_2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho D) \right) \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x_2} + (\rho D) \frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial x_2^2}. \quad (4.24)$$

Da in Wandnähe große Gradienten von  $\rho$  und  $\rho D$  in wandnormaler Richtung vorherrschen, kann erwartet werden, dass diese in supersonischen Kanalströmungen die Entwicklung des Skalargradienten im Gegensatz zu der bei isotroper Turbulenz stärker beeinflussen.

In Abbildung 4.17 ist der Mittelwert des fluktuierenden Skalargradienten, konditioniert auf  $s = \sqrt{s_{ij} s_{ij}}$ , zu sehen. Unabhängig von Mach und Reynoldszahl erkennt man



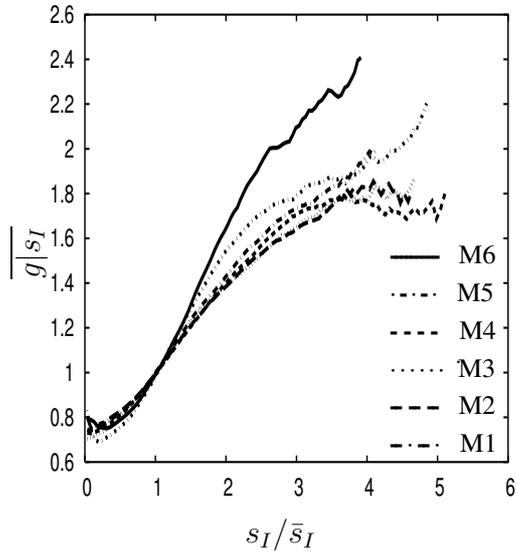
**Abbildung 4.17:** Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ . Alle Größen sind mit ihren Mittelwerten normiert.

einen Anstieg des Gradienten mit steigender Verzerrungsrate. Der Verlauf stimmt mit den Ergebnissen von Brethouwer *et al.* (2003) für inkompressible Kanalströmungen mit Skalartransport überein. Spaltet man mittels einer Helmholtzzerlegung das Geschwindigkeitsfeld in einen inkompressiblen und einen kompressiblen Anteil auf, so findet man, dass der Skalargradient, konditioniert auf den solenoidalen Anteil von  $s$  (Abbildung 4.18) nahezu denselben Verlauf hat wie in Abbildung 4.17. Konditioniert auf den kompressiblen Anteil von  $s$  macht sich ein qualitativer Unterschied im Fall M6 bemerkbar (Abbildung 4.19): der Skalargradient ist hier unabhängig vom rotationsfreien Anteil von  $S_{ij}$ . Der Skalargradient, konditioniert auf die Wirbelstärke (Abbildung 4.20) zeigt, dass die Wirbelstärke im Gegensatz zu  $S_{ij}$  keinen Einfluss auf den Gradienten besitzt. In Regionen mit hoher Wirbelstärke wird sogar ein Absinken des Skalargradienten gegenüber Regionen mit niedriger Wirbelstärke beobachtet.

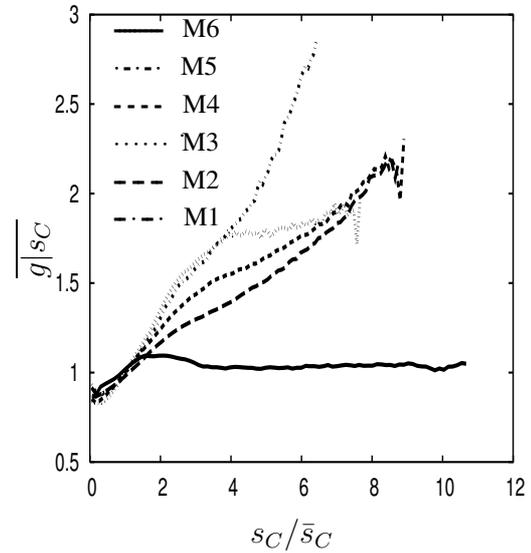
Das oben beobachtete Verhalten des Skalargradienten wird nach der Ableitung der Transportgleichung für die Skalargradientenausrichtung im Detail diskutiert.

Eine Transportgleichung für die Eigenvektoren findet man durch Differentiation der Orthonormalitätsbeziehung der Hauptachsen (Dresselhaus & Tabor (1991)),

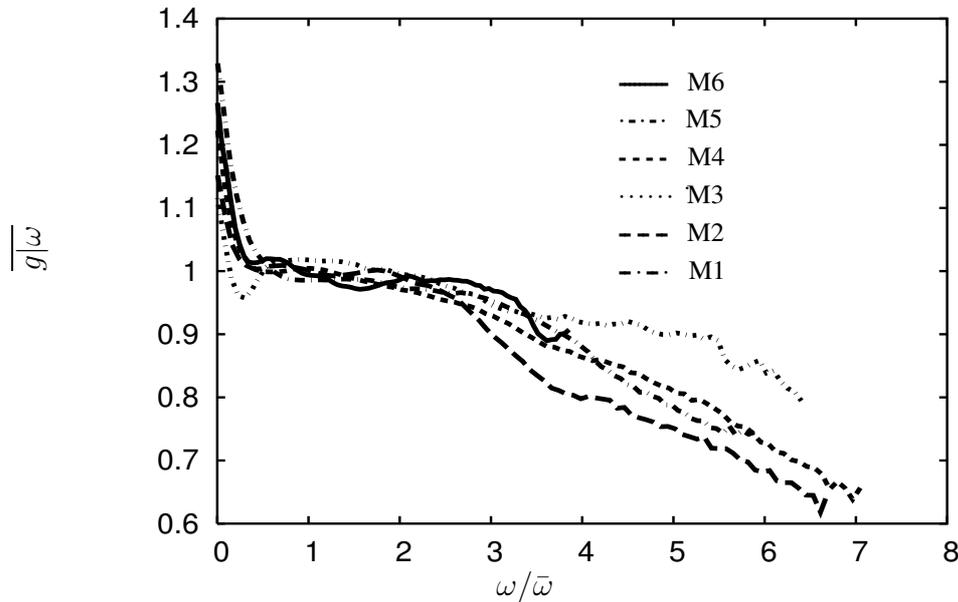
$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij} \implies \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}, \mathbf{e}_i \right\rangle = 0, \quad (4.25)$$



**Abbildung 4.18:** Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf den inkompressiblen Anteil von  $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ . Alle Größen sind mit ihren Mittelwerten normiert.



**Abbildung 4.19:** Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf den kompressiblen Anteil von  $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ . Alle Größen sind mit ihren Mittelwerten normiert.



**Abbildung 4.20:** Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\omega = \sqrt{\omega_i\omega_i}$ . Alle Größen sind mit ihren Mittelwerten normiert.

woraus folgt, dass gilt

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{e}_i, \quad (4.26)$$

für einen beliebigen Vektor  $\boldsymbol{\Omega}'$ . Der Vektor  $\boldsymbol{\Omega}'$  stellt somit die instantane Drehachse für die Hauptachsen des Verzerrungstensors dar. Die Bestimmung dieses Vektors erfolgt über die Differentiation des charakteristischen Eigenwertproblems  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_j = s_j \mathbf{e}_j$  nach der Zeit und anschließender Projektion auf  $\mathbf{e}_i$  sowie Multiplikation mit dem Levi-Civita-Pseudotensor  $\epsilon_{ijk}$ , zu

$$\Omega'_k = \epsilon_{ijk} \frac{\langle \mathbf{e}_i, \dot{\mathbf{S}}\mathbf{e}_j \rangle}{s_i - s_j}. \quad (4.27)$$

Nach Bildung des Gradienten der Impulsgleichung liefert eine längere Rechnung für die zeitliche Ableitung des Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{dt} = & - \{ \mathbf{S}\mathbf{S} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} \} - \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\nabla})p + \nu \Delta \mathbf{S} \\ & + \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\nabla}) [ (\mu_V - \frac{2}{3}\mu) \text{tr} \mathbf{S} ] + \frac{1}{\rho} [ \mathbf{S} (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\nabla}) \mu + \{ \mathbf{S} (\boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{\nabla}) \mu \}^T ] \\ & - \frac{1}{\rho^2} \{ \boldsymbol{\nabla} \rho \otimes [ -\boldsymbol{\nabla} p + \langle \boldsymbol{\nabla}, \tau \rangle ] + (\boldsymbol{\nabla} \rho \otimes [ -\boldsymbol{\nabla} p + \langle \boldsymbol{\nabla}, \tau \rangle ])^T \} \end{aligned} \quad (4.28)$$

mit

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen und Gleichung (4.22) kann nun die Transportgleichung für den Ausrichtungsvektor  $\boldsymbol{\lambda}$  angegeben werden

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = & - \underbrace{\begin{pmatrix} s_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & s_\beta & 0 \\ 0 & 0 & s_\gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\lambda} + (s_i \lambda_i^2 \mathbf{I}) \boldsymbol{\lambda} + \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} - \boldsymbol{\Omega}' \right) \times \boldsymbol{\lambda} \\ & + \mathbf{E}[\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \left( D \frac{\Delta \mathbf{g}}{g} \right) - \mathbf{E}[\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & - \frac{\boldsymbol{\nabla} \rho}{\rho^2} \langle \boldsymbol{\nabla}(\rho D), \mathbf{g} \rangle + \frac{1}{\rho} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\nabla} \rangle \boldsymbol{\nabla}(\rho D) + \frac{1}{\rho} \langle \boldsymbol{\nabla}(\rho D), \boldsymbol{\nabla} \rangle \mathbf{g} \\ & + (\boldsymbol{\nabla} D) \langle \boldsymbol{\nabla}, \mathbf{g} \rangle - \frac{\boldsymbol{\nabla} \rho}{\rho^2} \langle \boldsymbol{\nabla}, \rho D \mathbf{g} \rangle + \frac{1}{\rho} \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\nabla} \rangle \boldsymbol{\nabla}(\rho D). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die ersten vier Terme in Gleichung (4.29) treten sowohl in kompressiblen als auch in inkompressiblen Strömungen auf. Die ersten beiden Terme sind für eine exponentiell schnelle Ausrichtung des Skalargradienten mit derjenigen Hauptachse des Verzerrungstensors verantwortlich, die zum grössten negativen Eigenwert gehört, falls die restlichen Terme vernachlässigt werden können. Denn, falls angenommen wird, dass  $s_1 \leq s_2 \leq s_3$  mit  $s_1 < 0$ , wie im inkompressiblen Fall, dann folgt, dass  $c_1 = s_1(\lambda_1^2 - 1) + s_2\lambda_2^2 + s_3\lambda_3^2 \geq c_2 \geq c_3$  und  $\lambda_1$  wächst monoton gegen  $\pm 1$ , wogegen  $\lambda_3$  auf Null abfällt. Dresselhaus & Tabor (1991) weisen darauf hin, dass über  $\lambda_2$  im inkompressiblen Fall nur bekannt ist, dass dessen Vorzeichen mit dem von  $s_2$  übereinstimmt und aufgrund der Inkompressibilitätsbeziehung  $c_2 \geq 0$  folgt, falls  $s_2 > 0$  ist und umgekehrt. Ohne Rotation bestimmt damit das Vorzeichen von  $s_2$  den Anstieg bzw. das Abklingen von  $\lambda_2$  und damit die Geschwindigkeit, mit der sich die perfekte Ausrichtung bezüglich der zu  $s_1$  gehörigen Hauptachse einstellt. Simulationen inkompressibler Strömungen ergaben bisher, dass die Mittelwerte von  $s_2$  grösser als Null sind (Dresselhaus & Tabor (1991)), so dass keine perfekte Ausrichtung möglich ist. Die Ausrichtung ist in kompressiblen Strömungen von der instantanen Verteilung der Vorzeichen der Eigenwerte und deren relativer Grösse zueinander abhängig. Für schwach kompressible Fälle, in denen die Inkompressibilitätsbedingung kaum verletzt wird, sind deshalb ähnliche Ergebnisse wie für den inkompressiblen Fall zu erwarten.

Ein besseres Verständnis der Gleichung für die Ausrichtung des Skalargradienten erhält man durch Betrachtung einiger idealisierter Sonderfälle (siehe beispielsweise auch Dresselhaus & Tabor (1991)). In Wandnähe einer supersonischen Kanalströmung kann diese näherungsweise als Scherströmung angesehen werden, mit der Annahme  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = a$ . Der Geschwindigkeitsgradiententensor lautet damit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{s}} + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{\Omega}} \quad (4.31)$$

Die Eigenwerte lassen sich leicht zu  $s_1 = -\frac{1}{2}|a|$ ,  $s_2 = 0$  und  $s_3 = \frac{1}{2}|a|$  bestimmen, für die Eigenvektoren folgt

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \quad (4.32)$$

In dem lokalen Hauptachsenkoordinatensystem erhält man damit aufgrund der Stationarität der Eigenvektoren ( $\mathbf{\Omega}' = 0$  aufgrund Gleichung (4.26))  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{\Omega}' = (0, -\frac{1}{2}a, 0)$ , der Wirbelstärkevektor ist damit in Richtung von  $\mathbf{e}_2$  ausgerichtet. Für  $\boldsymbol{\lambda}$  folgt, mit der Annahme, dass einzig die wandnormale Komponente des Skalargradienten ungleich Null, also  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$  ist (in supersonischen Kanalströmungen sind die wandnormalen Gra-

dienten der Strömungsgrößen dominant),

$$\boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right). \quad (4.33)$$

Der Skalargradient schliesst darum in unmittelbarer Wandnähe einen  $45^\circ$ -Winkel mit den Hauptachsen  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_3$  ein.

Einen ersten Eindruck davon, wie Kompressibilität die Ausrichtung beeinflusst, liefert ein idealisiertes zweidimensionales Problem, mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c+a & b+\Omega \\ d-\Omega & e-a \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren des Verzerrungstensors lauten

$$\begin{aligned} s_{\pm} &= \frac{1}{2}(c+e) \pm \frac{1}{2}\gamma \\ \mathbf{e}_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2\gamma(\gamma \mp (a + \frac{c-e}{2}))}} \begin{pmatrix} \frac{d+b}{2} \\ -a - \frac{c-e}{2} \pm \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

mit  $\gamma = \sqrt{\frac{(c-e)^2}{4} + a(c-e) + a^2 + \frac{(b+d)^2}{2}}$ . Im Fall  $a = 0, c = e$  ergibt sich  $c = \frac{1}{2}\langle \nabla, \mathbf{u} \rangle$  und  $\mathbf{e}_{\pm} = (1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})^T$ . Für  $\mathbf{n} = (0, 1)^T$ , beispielsweise normal zu einer Wand, ergeben sich damit wieder 45 Grad für den Winkel zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{e}_{\pm}$ . Gleichzeitig erhält man  $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{x}_3$ , mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{x}_3$  senkrecht zur betrachteten Ebene, und  $\Omega' = 0$ . Ist  $c = e$ , dann sieht man an der Struktur der Eigenvektoren, dass die Kompressibilität nicht zur Eigenvektorrotation beiträgt ( $c$  taucht dann nicht in  $\mathbf{e}_{\pm}$  auf und damit nicht in (4.26)). Die Produktion in der Bilanzgleichung für den Skalargradienten,  $-s_i \lambda_i^2$ , verringert sich in diesem Fall für positive Werte der Divergenz und steigt für negative Werte. Rechnet man nun den Produktionsterm in der Ausrichtungsgleichung (4.29) aus, so findet man dass sich  $c$  herauskürzt und damit die Divergenz keinen Beitrag zur Ausrichtung des Skalargradienten liefert.

Für antisymmetrisches  $\mathbf{A}$  ( $b = d = 0$ ) ergibt sich als Winkel zwischen dem Skalargradienten und dem Eigenvektor des kleineren Eigenwerts 0 Grad, also eine perfekte Ausrichtung.

Die vorangegangene Diskussion dieser idealisierten Strömungsfälle zeigt deutlich die zu erwartenden Grenzfälle in der Kanal- und isotropen Strömung auf. In isotropen Strömungen ohne Auftriebseffekte und chemische Reaktionen (die große Wärmeentwicklungen und damit Temperaturgradienten zur Folge haben), ist die Produktion des Skalargradienten und dessen Ausrichtung durch die Produktions- und Rotationsterme bestimmt. Negative Eigenwerte von  $S_{ij}$  sorgen für größer werdende Skalargradienten über den Term  $-s_i \lambda_i^2$  und gleichzeitig für eine Ausrichtung in Richtung des zugehörigen Eigenvektors. Kanalströmungen können in Wandnähe idealisiert, wie oben getan, als

Scherströmungen betrachtet werden. Für die Ausrichtung des Skalargradienten kann in Wandnähe ein Winkel von 45 Grad zwischen dem Skalargradienten und  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_3$  erwartet werden, der sich zur Kanalmitte hin dem isotropen Wert von 0 Grad zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{e}_1$ , sowie 90 Grad zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{e}_2$  annähert.

Der dritte Term in Gleichung (4.29) beschreibt den Einfluss der Winkelgeschwindigkeit eines Fluidelements und der Rotation der Hauptachsen. Er zeigt, dass der Vektor  $\lambda$  um eine Achse mit der Richtung  $(\omega/2 - \Omega')/|\omega/2 - \Omega'|$  gedreht wird und damit der Ausrichtung des Skalargradienten in Richtung von  $\mathbf{e}_\gamma$  entgegenwirkt. Gleichung (4.27) und (4.28) zeigen ausserdem, dass die Richtung der Drehachse direkt von Kompressibilitätseffekten abhängt, beispielsweise nichtlokalen Effekten (Gradienten von Druckfluktuationen), der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes und viskosen Effekten. Die viskosen Terme und Gradienten der thermodynamischen Variablen sind im allgemeinen nur in Wandnähe supersonischer Strömungen von Bedeutung, der Hauptanteil wird deshalb voraussichtlich von den nichtlinearen Termen  $\mathbf{SS}$  und  $\mathbf{\Omega\Omega}$  ausgehen.

Von den viskosen Termen in unmittelbarer Wandnähe wird kaum ein Einfluss auf die Ausrichtung des fluktuierenden Skalargradienten erwartet, aufgrund folgender Überlegung. Wegen der Dominanz der wandnormalen Gradienten im Bereich  $x_2^* < 40$ , gilt als Abschätzung  $\sigma_2 \gg \sigma_1, \sigma_3$  und  $n_2 \gg n_1, n_3$ , mit  $n_2 \approx 1$  in unmittelbarer Wandnähe. Der Term  $\mathbf{E}(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\sigma$  reduziert sich damit zu  $(1 - n_2^2)((\mathbf{e}_1)_2, (\mathbf{e}_1)_2, (\mathbf{e}_1)_2)^T$  und wäre nahe der Wand aufgrund obiger Annahmen vernachlässigbar. Diese Aussage wird unten anhand der DNS der supersonischen Kanalströmung überprüft.

In kompressibler isotroper Turbulenz, in der keine Wärme aufgrund chemischer Reaktionen freigesetzt wird oder starke Stösse auftreten, ist auch nur ein geringer Beitrag der viskosen Terme zu erwarten. Simulationen von Jaber *et al.* (2000) zeigten, dass die in reaktiver, abklingender kompressibler Turbulenz variierenden Transportkoeffizienten zu einer leichten Änderung der Ausrichtung zwischen dem Wirbelstärkevektor und den Hauptachsen von  $S_{ij}$  führten. Auf die Ausrichtung des Skalargradienten hatte die Wärmefreisetzung allerdings nur einen geringen Einfluss.

Abbildung 4.21 zeigt den Skalargradienten, konditioniert auf  $s_i \lambda_i^2 / s_\gamma$ , einer Grösse die direkt proportional zu der Ausrichtung zwischen  $\mathbf{e}_\gamma$  und  $\mathbf{g}$  ist. Eine perfekte Ausrichtung mit  $\mathbf{e}_\gamma$  entspricht einem Wert von eins, negative Werte weisen auf eine negative Produktionsrate und damit auf eine Reduktion des Skalargradienten hin. Die Fälle mit niedrigen Machzahlen zeigen eindeutig, dass große Skalargradienten mit hohen Werten von  $s_i \lambda_i^2 / s_\gamma$  einhergehen. Die Kurve sinkt jedoch für Fall M5 ab, für Fall M6 erkennt man dass hohe Skalargradienten scheinbar nicht von der Ausrichtung an  $\mathbf{e}_\gamma$  abhängen. Betrachtet man  $s_i \lambda_i^2 / s_\gamma$  nach Aufspaltung des Geschwindigkeitsfeldes in einen kompressiblen und inkompressiblen Anteil mittels einer Helmholtzzerlegung, so sieht man, dass der Skalargradient große Werte annimmt, falls seine Richtung sich der des Eigenvektors  $\mathbf{e}_\gamma^I$ , des inkompressiblen Anteils von  $s_{ij}$ , nähert (Abbildung 4.22). Zwischen dem "kompressiblen Anteil"  $\mathbf{e}_\gamma^C$  und  $\mathbf{g}$  (Abbildung 4.23) besteht dieser Zusammenhang nicht,

folglich scheint Kompressibilität die Ausrichtung von  $\mathbf{g}$  in Richtung  $\mathbf{e}_1$  zu hemmen. Gleichzeitig zeigen die DNS-Daten jedoch eine stark geänderte Verteilung der Eigenwerte im Fall M6, die unnormiert kleinere Werte annehmen, als in den anderen Fällen. Ausserdem ist der Skalargradient direkt von dem Produktionsterm abhängig. Aus diesem Grund ist es von Vorteil, sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ausrichtung des Skalargradienten bezüglich der Eigenvektoren direkt anzuschauen, um genauere Aussagen über dessen Ausrichtung treffen zu können.

Die Abbildungen 4.24 bis 4.26 zeigen die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Eigenwerte des Verzerrungstensors, normiert mit dem Betrag der Verzerrungsrate  $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$ . Die Position des Maximums der PDFs ändert sich für die verschiedenen Fälle kaum, jedoch erkennt man eine Änderung ihrer Flanken, die mit steigender Machzahl, bei gleich bleibender Reynoldszahl (vergleiche Fälle M1, M4 und M6), zu einer kleineren Wahrscheinlichkeit für große negative Werte von  $s_1$  und große positive Werte von  $s_3$  führt. Die Abbildungen 4.27 bis 4.29 zeigen die Eigenwerte des rotationsfreien Anteils von  $S_{ij}$  nach einer Helmholtzzerlegung, normiert mit dem Betrag der kompressiblen Verzerrungsrate  $\sqrt{(s_1^C)^2 + (s_2^C)^2 + (s_3^C)^2}$ . Man erkennt wiederum eine Änderung der Flanken der PDFs, ähnlich der wie für die  $s_i$ , mit Ausnahme von  $s_1^C$ . Die PDF dieses Eigenwerts zeigt eine vergrösserte Wahrscheinlichkeit für hohe negative Werte in Fall M6. Das Verhältnis der Maxima der Mittelwerte der Eigenwerte  $s_i^C$  verändert sich hier mit steigender Machzahl  $M_t$ . Im Gegensatz zu dem in inkompressiblen isotropen Strömungen gefundenen Verhältnis von  $s_1 : s_2 : s_3 = -4 : 1 : 3$  (siehe Sarkar (1995) und dessen Referenzen) hat man beispielsweise für Fall M2 - 1.1:1:0.5, in Fall M6 -6.8:-1:4.2. Die Verteilungen für die  $s_i$  werden insgesamt durch die Kompressibilität nur schwach, durch eine Änderung der Flanken, beeinflusst. Die Änderungen sind jedoch zu klein, um die Unabhängigkeit des Skalargradienten vom kompressiblen Anteil der Verzerrungsrate, dividiert durch  $s_1^C$ , zu erklären. Die lokale Strömungstopologie ("blattartige" Struktur aufgrund der zwei Expansionsrichtungen und einer Kompressionsrichtung, mit einer Ausdehnung parallel zu  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$ ) bleibt damit auch mit großer Wahrscheinlichkeit bestehen. Eine genauere Betrachtung der lokalen Strömungstopologie folgt im nächsten Abschnitt. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Eigenwerte des inkompressiblen Anteils zeigen aufgrund der annähernd gleichen Reynoldszahlen kaum einen Unterschied (Abbildung 4.30) und behalten ihren bevorzugten Verlauf bei. Für deren Maxima findet man wiederum ein Verhältnis von -4:1:3. Zu ähnlichen Ergebnissen kam bereits Sarkar (1995) in Simulationen kompressibler homogener Scherströmungen. Die Autoren wiesen ausserdem darauf hin, dass in den von ihnen untersuchten Datenbasen von Simulationen isotroper kompressibler Turbulenz kaum Regionen mit blattartiger Struktur festgestellt werden konnten, allerdings bei kleineren Reynoldszahlen. Deren Beobachtung wird durch die hier durchgeführten Simulationen nicht bestätigt.

Welche Ausrichtung besitzt nun der Skalargradient bezüglich der Eigenvektoren des

Fall	M1	M3	M5	M6
$\frac{s_l^C(\lambda_l^C)^2}{s_k^I(\lambda_k^I)^2}$	0.013	0.0040	0.0035	0.0028

**Tabelle 4.11:** Quotient des kompressiblen und solenoidalen Anteils der Produktionsrate in Gleichung (4.29).

kompressiblen und inkompressiblen Anteils von  $S_{ij}$ ? Die im inkompressiblen Fall gefundene Ausrichtung von  $\mathbf{n}$  in Richtung  $\mathbf{e}_1$  (Brethouwer *et al.* (2003)) wird durch die Bilder 4.31 und 4.32 bestätigt. Gezeigt ist dort die PDF des Winkels zwischen  $\mathbf{n}$  und den Eigenvektoren des solenoidalen Anteils von  $S_{ij}$ . Die Abbildung 4.31 zeigt eine hohe Wahrscheinlichkeit für Skalargradienten, die in Richtung von  $\mathbf{e}_1^I$  zeigen. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_3^I \rangle$  zeigt allerdings zwei Maxima bei  $\pm 0.5$ . Dies entspricht einer vollkommen isotropen Ausrichtung des Skalargradienten bezüglich  $\mathbf{e}_3^I$  und zeigt, dass sich der Skalargradient mit großer Wahrscheinlichkeit in einer Ebene bewegt, die von  $\mathbf{e}_1^I$  und  $\mathbf{e}_3^I$  aufgespannt wird. Die Vorzugsrichtung ist in Richtung  $\mathbf{e}_1^I$ . Betrachtet man nun dieselben Grössen, diesmal allerdings für die Eigenvektoren des drehungsfreien Anteils von  $S_{ij}$ , so erkennt man eine hohe Wahrscheinlichkeit für die Ausrichtung des Skalargradienten in Richtung von  $\pm \mathbf{e}_3^C$ . Eine geringe, jedoch nicht vernachlässigbare Wahrscheinlichkeit liegt auch für die Ausrichtung von  $\mathbf{n}$  in Richtung von  $\mathbf{e}_1^C$  und  $\mathbf{e}_2^C$  vor. Mit steigender Machzahl sinkt die Wahrscheinlichkeit für die Ausrichtung von  $\mathbf{n}$  in Richtung von  $\mathbf{e}_3^C$ , während sie für die anderen zwei Richtungen steigt. Interessanterweise stimmt die hier gefundene Ausrichtung für den Skalargradienten mit derjenigen des Druckgradienten in homogenen gescherten und isotropen kompressiblen Strömungen überein (Sarkar (1995)). Zerlegt man die Produktion  $-s_i \lambda_i^2$  des Betrags des Skalargradienten in einen kompressiblen und einen inkompressiblen Anteil, dann liefert, wie bereits in inkompressiblen Strömungen bekannt, der solenoidale Anteil  $-s_1^I (\lambda_1^I)^2$  einen positiven Beitrag ( $s_1$  negativ), während  $-s_3^C (\lambda_3^C)^2$  einen negativen Beitrag liefert ( $s_3$  positiv) und somit die Produktion des Skalargradienten vermindert. Das erklärt das Verhalten des Skalargradienten, konditioniert auf den rotationsfreien Anteil des Verzerrungstensors. Insgesamt zeigen die DNS-Ergebnisse mit steigender Machzahl allerdings eine Abnahme des Verhältnisses von  $s_l^C (\lambda_l^C)^2 / [s_k^I (\lambda_k^I)^2]$  (Tabelle 4.11). Aufgrund der großen Wahrscheinlichkeit für eine Ausrichtung in Richtung von  $\mathbf{e}_3^C$  und der Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit für große *positive* Werte von  $s_3^C$  sinkt, sinkt der dominante Term des kompressiblen Anteils des Produktionsterms  $s_3^C (\lambda_3^C)^2$  und erklärt die beobachtete Reduktion. Der Einfluss der Kompressibilität auf die Produktion des Skalargradienten und die Produktion in Gleichung (4.29) ist nach dem oben Gezeigten, für die in dieser Arbeit vorliegenden Machzahlen vernachlässigbar.

Die Abbildungen 4.37 und 4.38 zeigen die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{e}_2$  bzw.  $\mathbf{e}_3$  und  $\boldsymbol{\omega}$ . Unabhängig von Mach- und Reynoldszahl ist die Wahrscheinlichkeit für eine Ausrichtung des Wirbelstärkevektors parallel

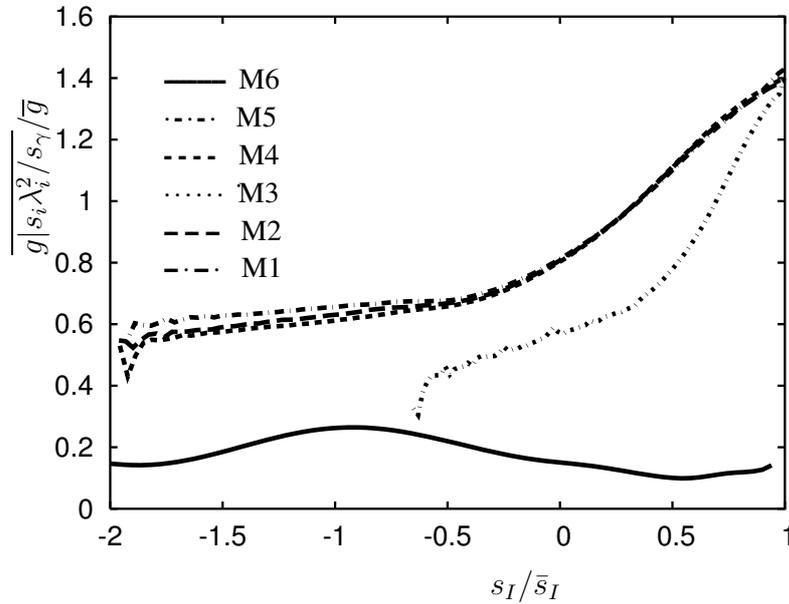


Abbildung 4.21: Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $s_i \lambda_i^2 / s_\gamma$ .

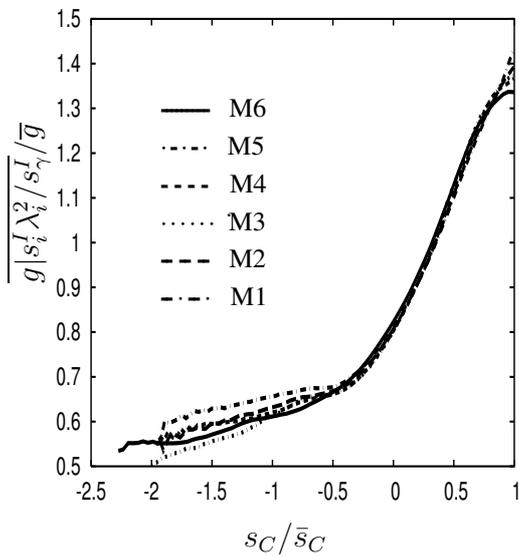


Abbildung 4.22: Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf den inkompressiblen Anteil von  $s_i \lambda_i^2 / s_\gamma$ .

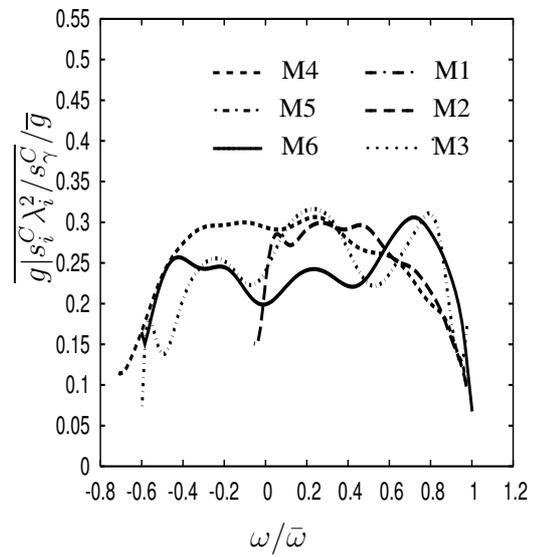


Abbildung 4.23: Der Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf den kompressiblen Anteil von  $s_i \lambda_i^2 / s_\gamma$ . Alle Größen sind mit ihren Mittelwerten normiert.

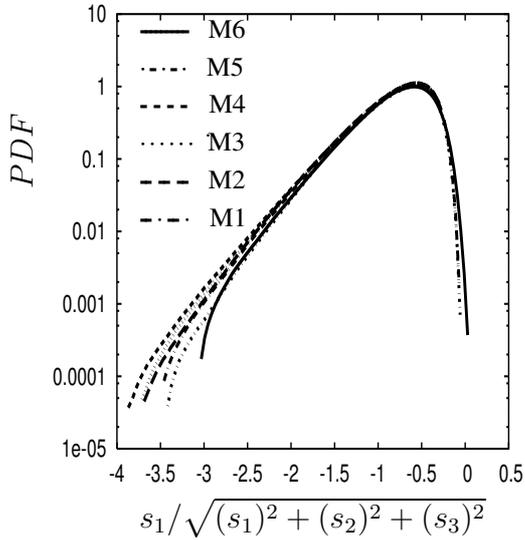


Abbildung 4.24: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwerts  $s_1$  von  $S_{ij}$ .

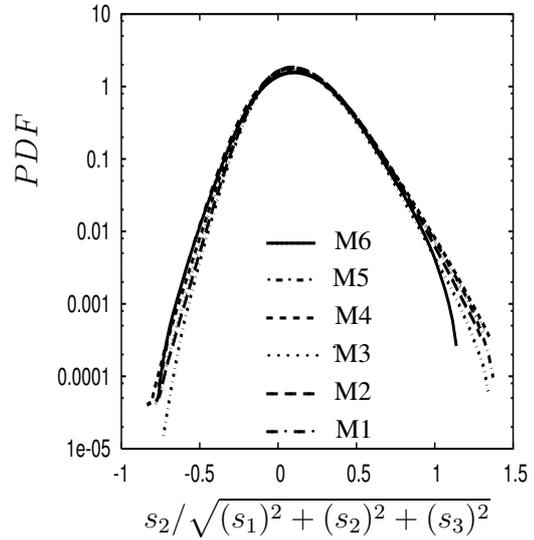


Abbildung 4.25: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwerts  $s_2$  von  $S_{ij}$ .

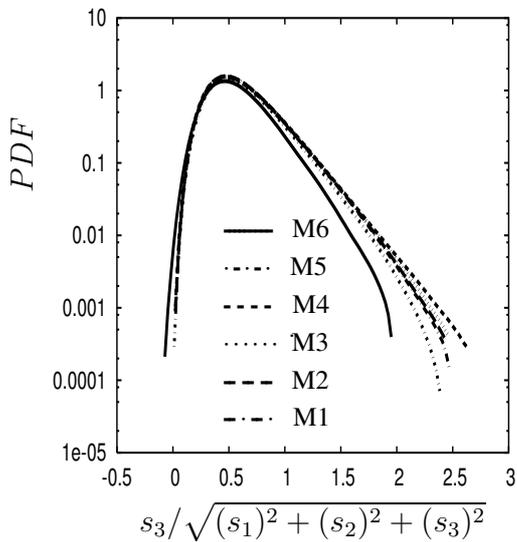


Abbildung 4.26: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwerts  $s_3$  von  $S_{ij}$ .

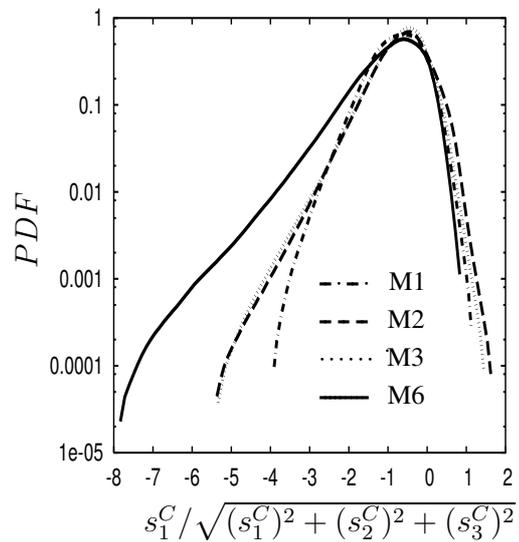


Abbildung 4.27: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwerts  $s_1^C$  des kompressiblen Anteils von  $S_{ij}$ .

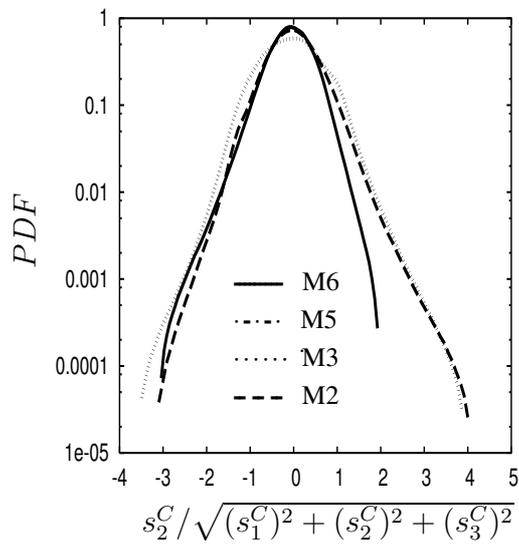


Abbildung 4.28: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwertes  $s_2^C$  des kompressiblen Anteils von  $S_{ij}$ .

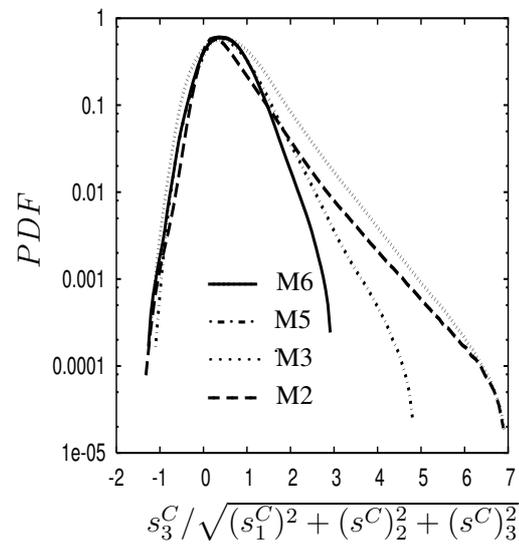


Abbildung 4.29: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Eigenwertes  $s_3^C$  des kompressiblen Anteils von  $S_{ij}$ .

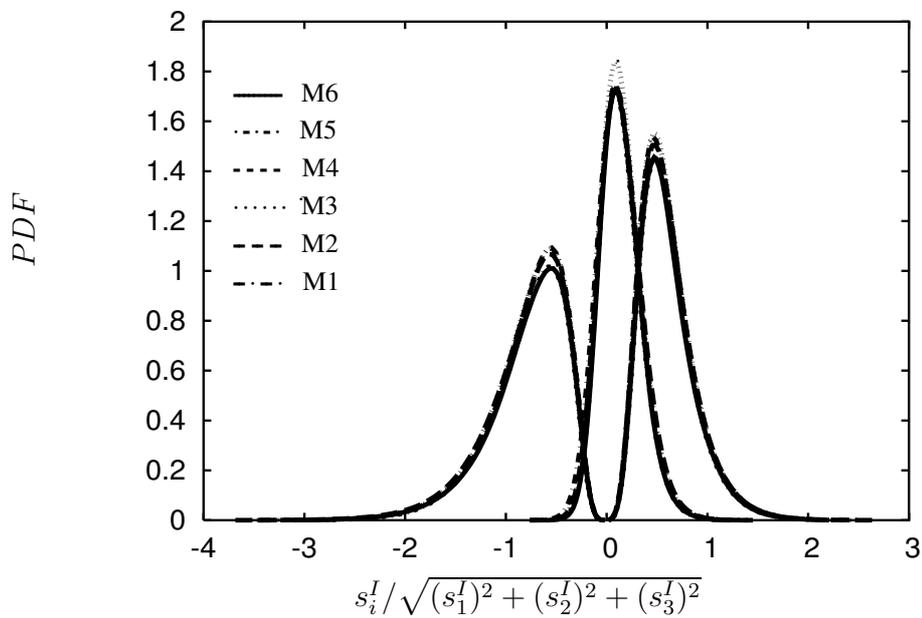
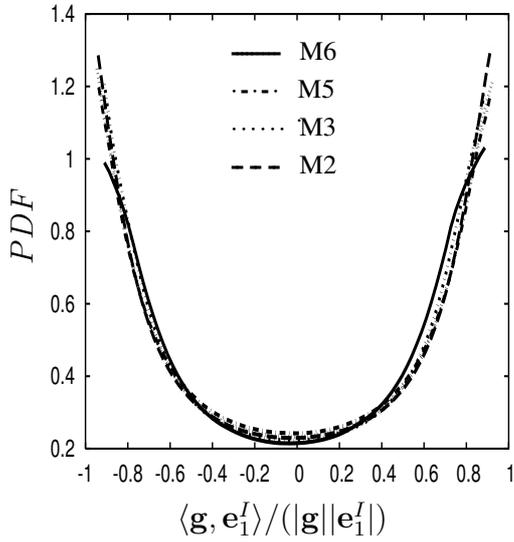
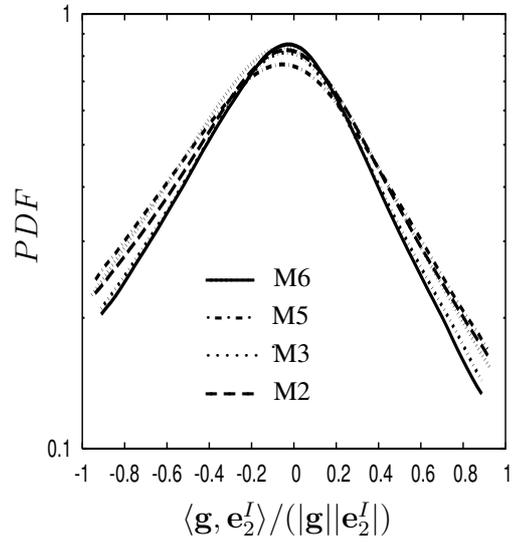


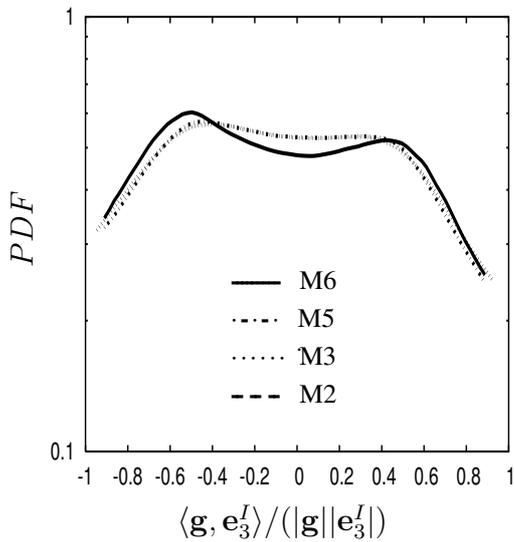
Abbildung 4.30: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Eigenwerte des inkompressiblen Anteils von  $S_{ij}$ .



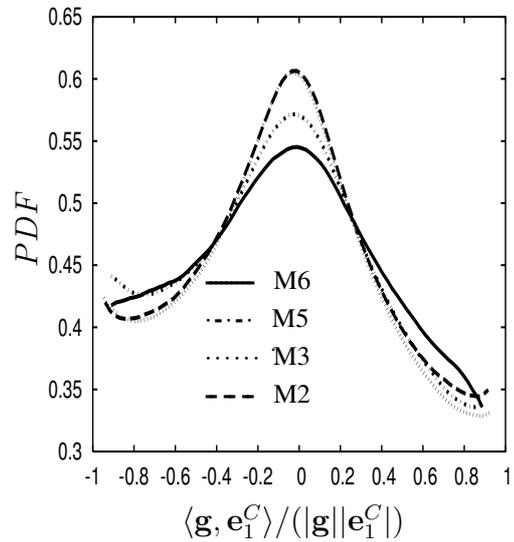
**Abbildung 4.31:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_1^I$ .



**Abbildung 4.32:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_2^I$ .



**Abbildung 4.33:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_3^I$ .



**Abbildung 4.34:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_1^C$ .

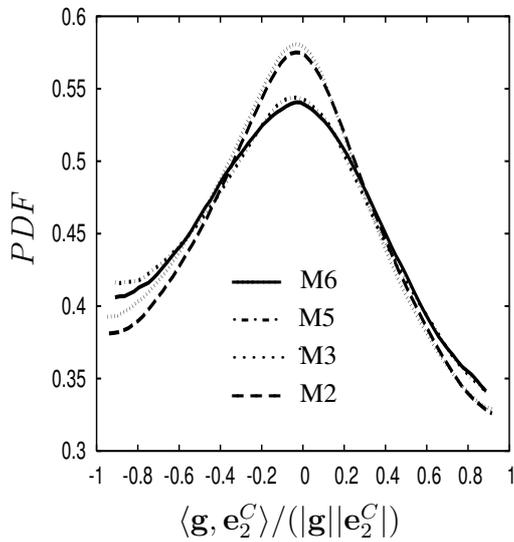


Abbildung 4.35: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_2^C$ .

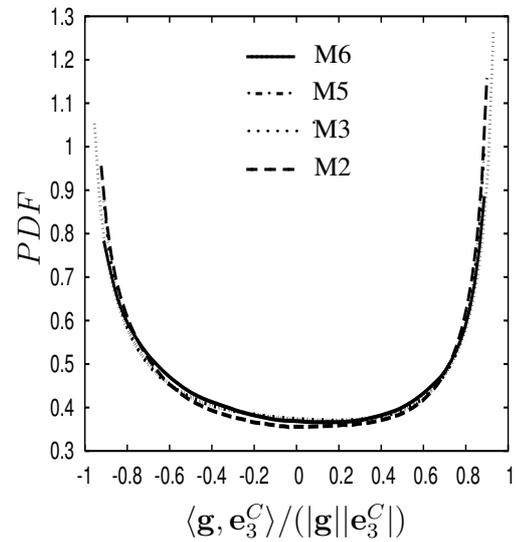


Abbildung 4.36: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_3^C$ .

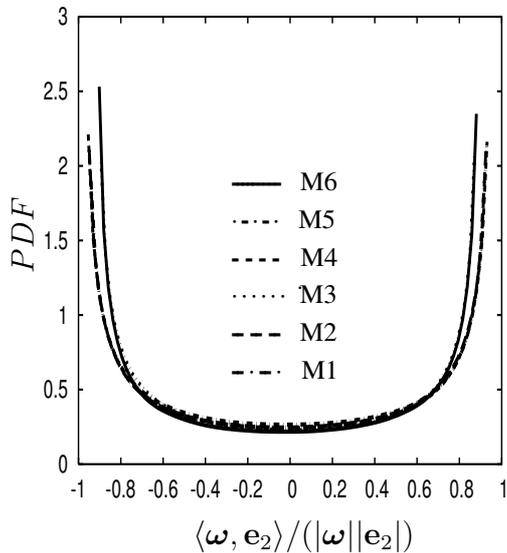


Abbildung 4.37: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $\mathbf{e}_2$ .

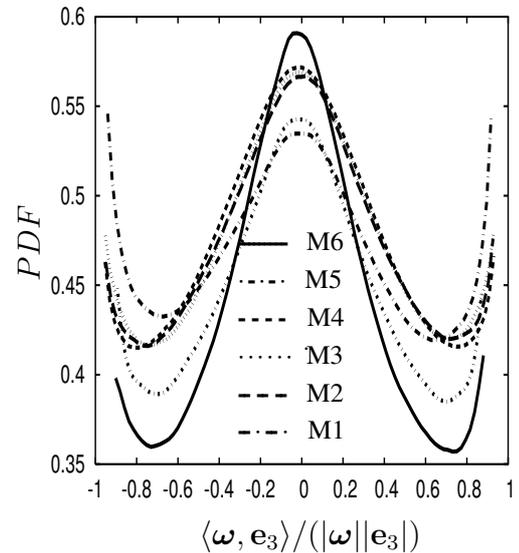


Abbildung 4.38: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $\mathbf{e}_3$ .

und antiparallel zu  $e_2$ , hoch. Gleichzeitig erkennt man einen Anstieg der Wahrscheinlichkeit für die Ausrichtung in Richtung von  $e_2$  mit steigender Machzahl, während die Wahrscheinlichkeit für die Ausrichtung mit  $e_3$  sinkt. Dies impliziert, wie von Brethouwer *et al.* (2003) und Dresselhaus & Tabor (1991) für inkompressible Strömungen gezeigt, dass sich der Wirbelstärkevektor und der Skalargradient mit hoher Wahrscheinlichkeit senkrecht zueinander und in einer Ebene ausrichten, unabhängig von der Machzahl. Für hohe Schmidtzahlen wird in der Literatur ausserdem ein Aufrollen der resultierenden Wirbelschicht an den Enden beobachtet (Brethouwer *et al.* (2003), Gonzalez & Paranthoen (2004)). Laut Gonzalez & Paranthoen (2004) liegt das an den immer dünner werdenden Skalarfronten mit steigender Schmidtzahl, die daraufhin leichter durch die Wirbelstärke verformt werden können. Für Schmidtzahlen in der Grössenordnung von 1, wie in dieser Arbeit, ist ein derartiger Prozess nicht beobachtet worden.

### 4.3.2 Topologie der Mikrostruktur des Skalars

Im folgenden soll der Zusammenhang zwischen dem Skalargradienten und der Topologie des Strömungsfeldes untersucht werden. Nach Chen *et al.* (1990) liefert die Untersuchung der Stabilität der Ruhelagen einer gewöhnlichen Differentialgleichung, die man beispielsweise in der Lagrange'schen Beschreibung der Strömung erhält, lokal einen Zusammenhang zwischen den Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors  $A_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$  und den lokalen Phasenporträts (Stromlinienmuster). Die Eigenwerte von  $A_{ij}$  erfüllen die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 + D\lambda^2 + Q\lambda + R = 0, \quad (4.36)$$

mit den Matrix-Invarianten

$$\begin{aligned} D &= -A_{ii} \\ Q &= -\frac{1}{2}A_{ij}A_{ji} = \frac{1}{4}|\boldsymbol{\omega}|^2 - \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \\ R &= -\frac{1}{3}A_{ij}A_{jk}A_{ki}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die erste Invariante ist in inkompressiblen Strömungen identisch gleich Null. Im  $D - Q - R$ -Raum der Matrix-Invarianten werden die komplexen und reellen Lösungen durch die Fläche

$$L = -D^2Q^2 + 4D^3R + 4Q^3 - 18DQR + 27R^2 = 0 \quad (4.38)$$

(Diskriminante des charakteristischen Polynoms) voneinander getrennt. Für eine detaillierte Diskussion der möglichen Strömungsmuster sei auf Chen *et al.* (1990) und deren Referenzen verwiesen. Da die Divergenz in den vorliegenden Simulationen klein ist, ist eine ähnliche Klassifizierung der Strömungsmuster wie im Inkompressiblen zu

erwarten, es werden deshalb die Daten im  $Q - R$ -Raum, für unterschiedliche Werte von  $D$  dargestellt. Wie im Inkompressiblen unterscheidet man vier Regionen, getrennt durch die  $Q$ -Achse und die Kurve  $L = 0$  die einer spezifischen Strömungstopologie entsprechen. Abbildung 4.39 illustriert dies für den Fall  $D = 0$  (Bild aus Cantwell (2003)). Abbildung 4.40 zeigt den Skalargradienten, konditioniert auf die zweite Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors. Unabhängig von der Machzahl liegen große Skalargradienten für hohe Werte von  $s_{ij}$  vor ( $-Q > 0$ ), während die Wirbelstärke einen vergleichsweise niedrigen Einfluss besitzt ( $-Q < 0$ ). Die Ergebnisse bestätigen also den oben gefundenen großen Einfluss der Verzerrungsrate  $s$  auf den passiven Skalartransport. In den Abbildungen 4.41 bis 4.52 sind der Skalargradient, konditioniert auf  $D, Q$  und  $R$ , erhalten aus den DNS-Daten, für verschiedene Werte von  $D$  und für die Fälle M1, M4 und M6 dargestellt. Der Wert des Skalars wird durch eine Farbskala von Blau (niedrige Werte) über Grün bis Rot (hohe Werte) repräsentiert. Zur Unterscheidung der oben angegebenen vier Teilbereiche, ist die Kurve  $L$  bei festem  $D$  in 'rot' abgebildet. Man erkennt, dass der Mittelwert von  $g$  klein ist, für Werte mit positivem  $Q$  (Wirbelstärke dominiert) und groß für negative  $Q$ -Werte. Für Fall M1, in den Abbildungen 4.41 bis 4.44 folgen die maximalen Werte von  $g$  ausserdem für negative Werte von  $D$  dem rechten Zweig von  $L$ , bei positiven Werten konzentrieren sie sich zunehmend um  $Q = R = 0$ . Die höchsten Werte findet man, wie auch von Brethouwer *et al.* (2003) berichtet, für Regionen mit einer instabilen Knoten/Sattelpunkt./Sattelpunkt.-Topologie, in der eine Kompressionsrichtung und zwei dazu senkrechte Dehnungsrichtungen vorliegen. Auch für Fall M4 (Abbildungen 4.45 bis 4.48) findet man ähnliche Ergebnisse, mit dem Unterschied, dass ein grösserer Teil der hohen Skalargradienten im Quadranten mit  $R < 0$ , oberhalb von  $L = 0$  auftritt, also in einem Bereich mit einer stabilen Fokus/Dehnungstopologie. Diese Beobachtung setzt sich im Fall M6 fort. Hier erkennt man sehr große Werte des Skalargradienten in Regionen mit einer stabilen Fokus/Dehnungstopologie, was auf eine gegenüber Fall M1 leicht modifizierte Turbulenzstruktur schliessen lässt. Zusätzlich zu Regionen, in denen also eine Kompressionsrichtung und zwei dazu senkrechte Dehnungsrichtungen vorherrschen, beobachtet man mit steigender Machzahl auch Regionen mit zwei Kompressionsrichtungen und einer Dehnungsrichtung. Als Folge der zwei Dehnungs- und einer Kompressionsrichtung bilden sich starke Skalargradienten oder "Fronten" aus. Brethouwer *et al.* (2003) zeigten, dass diese Fronten mit Wirbelschichten einhergehen, da der Wirbelvektor in der Ebene liegt, die von  $e_2$  und  $e_1$  aufgespannt wird, mit einer hohen Wahrscheinlichkeit für eine Ausrichtung in Richtung von  $e_2$ .  $\omega$  erfährt aufgrund des zugehörigen positiven Eigenwerts  $s_2$  zusätzlich eine Streckung. Miura (2004) zeigten, dass sich in abklingender kompressibler Turbulenz der Einfluss der Kompressibilität in einer Reduktion der Wirbelstreckung äussert. Dies ist im Einklang mit den Ergebnissen dieser Arbeit, die mit steigender Machzahl vermehrt das Auftreten negativer Werte von  $s_2$  zeigen. Damit ändert Kompressibilität die Struktur von  $S_{ij}$  dahingehend, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten negativer Werte des

mittleren Eigenwerts zunimmt und als Folge davon der Wirbelstreckterm

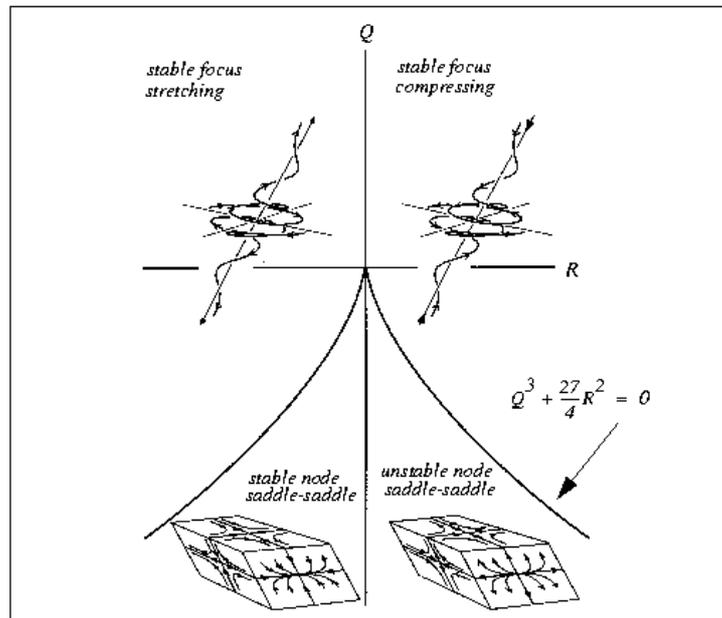
$$\langle \omega, \mathbf{S}\omega \rangle = s_i \hat{\omega}_i^2, \quad \hat{\omega} = \mathbf{E} \frac{\omega}{|\omega|} \quad (4.39)$$

reduziert wird. Es ist daher zu erwarten, dass die Fronten mit steigender Machzahl "geglättet" werden, was durch die oben gezeigten Ergebnisse im Invariantentraum angedeutet wird. In den Abbildungen 4.3.2 bis 4.3.2 sind Momentanbilder der Geschwindigkeits- und Skalarfluktuationen in einer Ebene senkrecht zur  $x_1$ -Koordinatenrichtung gezeigt. Deutlich erkennt man die im Vergleich zu den Geschwindigkeitsfluktuationen im Skalarfeld auftretenden großen Gradienten, die Gebiete mit hoher Konzentration von denen mit niedriger Konzentration trennen. Mit steigender Machzahl sieht man eine Glättung der Mikrostrukturen, die zu deutlich weniger Fronten im Fall M6 führt, wie in Abbildung 4.3.2 deutlich zu sehen ist. Die instantanen Felder bestätigen also die oben gesehenen Änderungen in der Strömungstopologie.

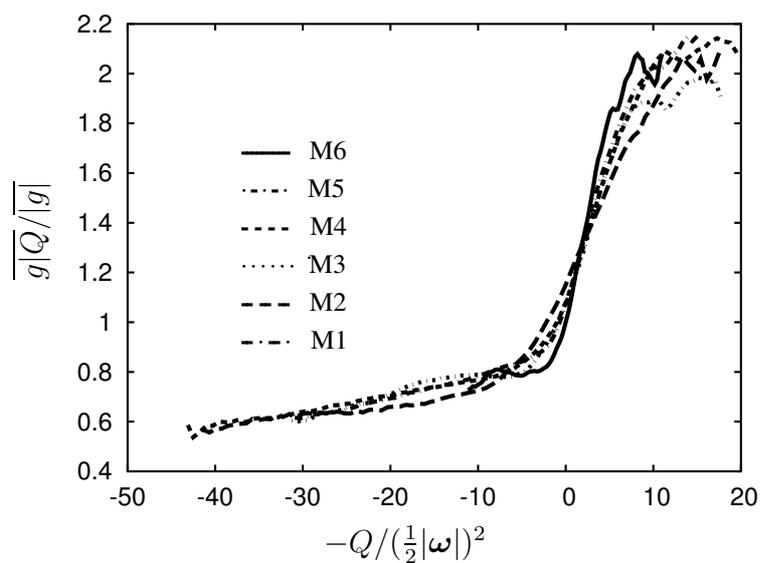
#### 4.3.3 Einfluss von Kompressibilitätstermen und des mittleren Skalargradienten auf die Mikrostruktur des Skalars

In diesem Abschnitt soll kurz der Einfluss der Dichte- Viskositäts und Druckgradienten, die in Gleichung (4.23) auftreten, sowie der ersten Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors (Divergenz) auf den Skalargradienten untersucht werden. Aus den Gleichungen (4.23) und (4.29) wird deutlich, dass die Dichte- und Viskositätsgradienten (hier gilt  $\rho D = \bar{\mu}/Sc$ ) hauptsächlich in Form von Skalarprodukten mit den Skalargradienten auftauchen. Da sich der Skalargradient in Richtung von  $\mathbf{e}_1$  ausrichtet, sind diese Skalarprodukte nur von Bedeutung, falls auch  $\nabla\rho$  und  $\nabla\mu$  in diese Richtung zeigen. In den Abbildungen 4.54 und 4.55 sind die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{e}_1$  und  $\nabla\rho$ , bzw.  $\nabla\mu$ , für die Fälle M4 und M6 zu sehen. Beide Abbildungen zeigen, dass die Dichte- und Viskositätsgradienten tatsächlich mit hoher Wahrscheinlichkeit in Richtung von  $\mathbf{e}_1$  ausgerichtet sind. In Abbildung 4.54 erkennt man ausserdem, dass die Wahrscheinlichkeit hoch ist, dass  $\nabla\rho$  Winkel bis 35 Grad mit  $\mathbf{e}_1$  einnimmt. Fall M6 zeigt dieses Verhalten nicht, die PDF steigt hier zu den Werten  $\pm 1$  steil an. Auch der Druckgradient sollte dasselbe Verhalten aufweisen, wie die Dichte- und Viskositätsgradienten. Das implizieren Simulationen isotroper kompressibler abklingender Turbulenz von Miura (2004), die ergaben, dass der Beitrag des baroklinen Terms  $\langle \nabla\rho \times \nabla p / \rho^2, \omega \rangle$  zur Bilanz der Enstrophie vernachlässigbar ist. Mit großer Wahrscheinlichkeit sind damit  $\omega$  und  $\nabla\rho \times \nabla p$  parallel, eine Vermutung, die durch Abbildung 4.56 bestätigt wird.

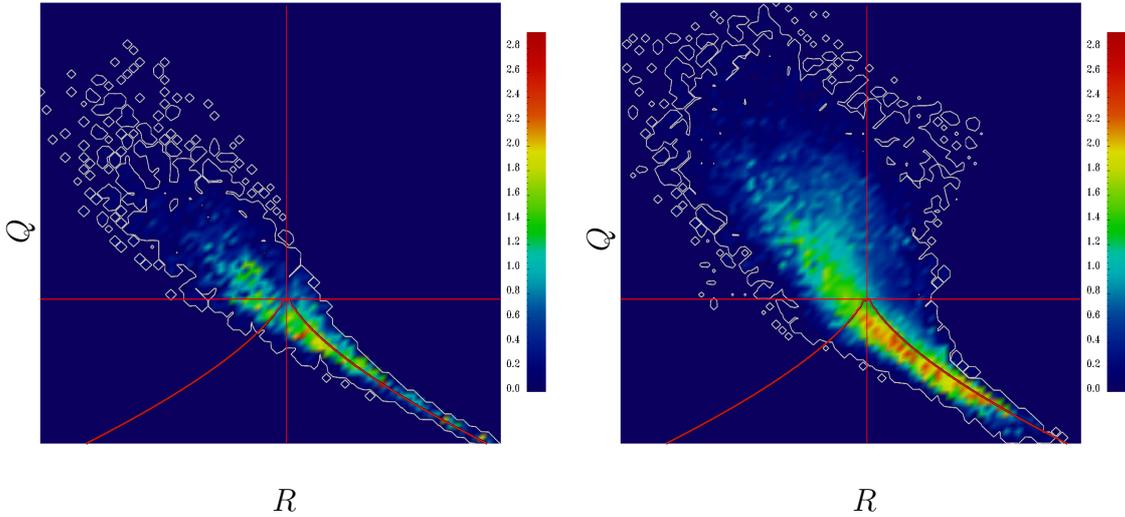
Die Temperatur- und Dichtefluktuationen sind in den hier gerechneten Fällen klein (Tabelle 4.2), auch zeigen die bisherigen Ergebnisse nur schwache Kompressibilitätseffekte. Die Ausrichtung der Dichte- und Viskositätsgradienten in Richtung von  $\mathbf{e}_1$  bewirkt dennoch, dass der Skalargradient, konditioniert auf  $\nabla\rho$  und  $\nabla\mu$ , hohe Werte annimmt,



**Abbildung 4.39:** Q-R Diagramm. Lokale Strömungsmuster, beschrieben durch die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für einen sich mit der Strömung mitbewegenden Beobachter (Abbildung aus Cantwell (2003)).

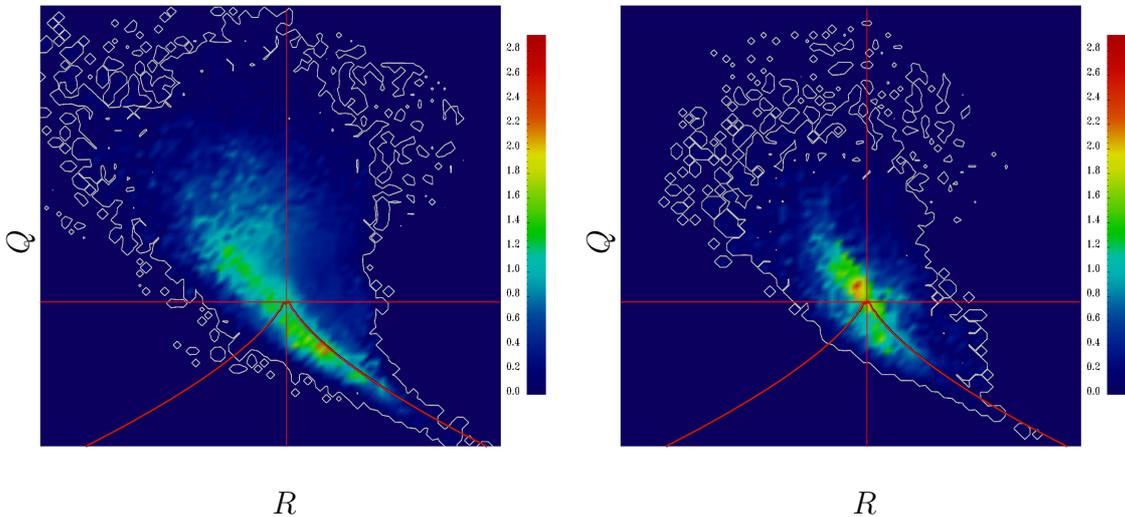


**Abbildung 4.40:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf die zweite Invariante,  $Q$ , von  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Der Skalargradient ist mit seinem Mittelwert normiert,  $Q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$ .



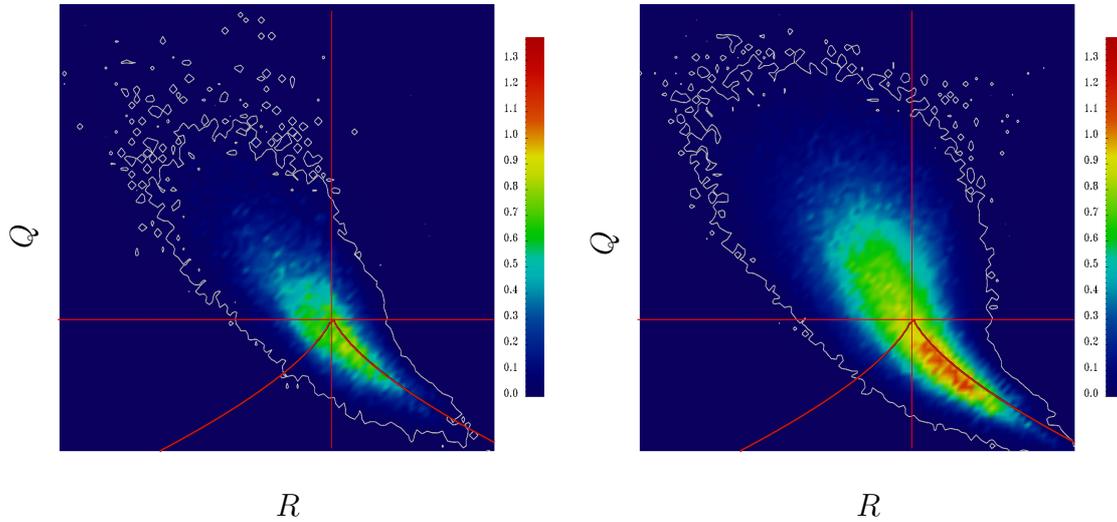
**Abbildung 4.41:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = -2.0 \cdot 10^{-3}$  und Fall M1.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.

**Abbildung 4.42:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = -5.3 \cdot 10^{-4}$  und Fall M1.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.



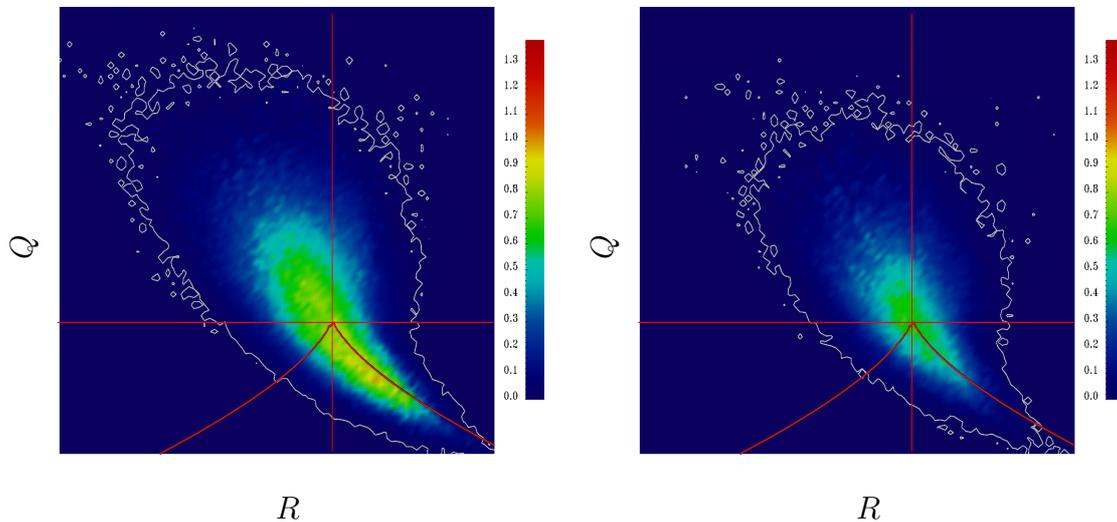
**Abbildung 4.43:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = 0$  und Fall M1.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.

**Abbildung 4.44:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = 7.7 \cdot 10^{-4}$  und Fall M1.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.



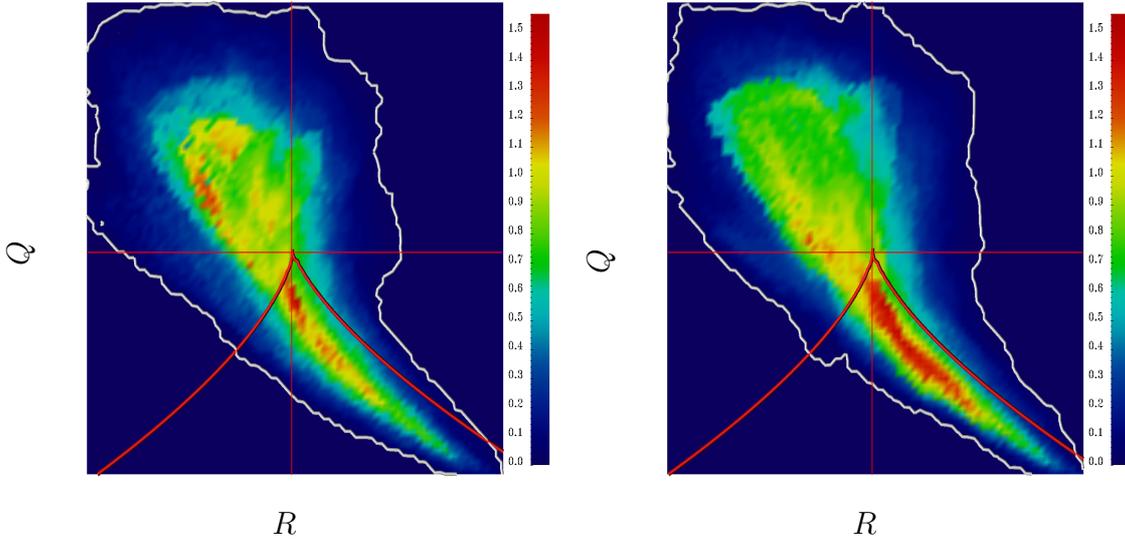
**Abbildung 4.45:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = -5.4 \cdot 10^{-2}$  und Fall M4.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.

**Abbildung 4.46:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = -8.0 \cdot 10^{-3}$  und Fall M4.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.

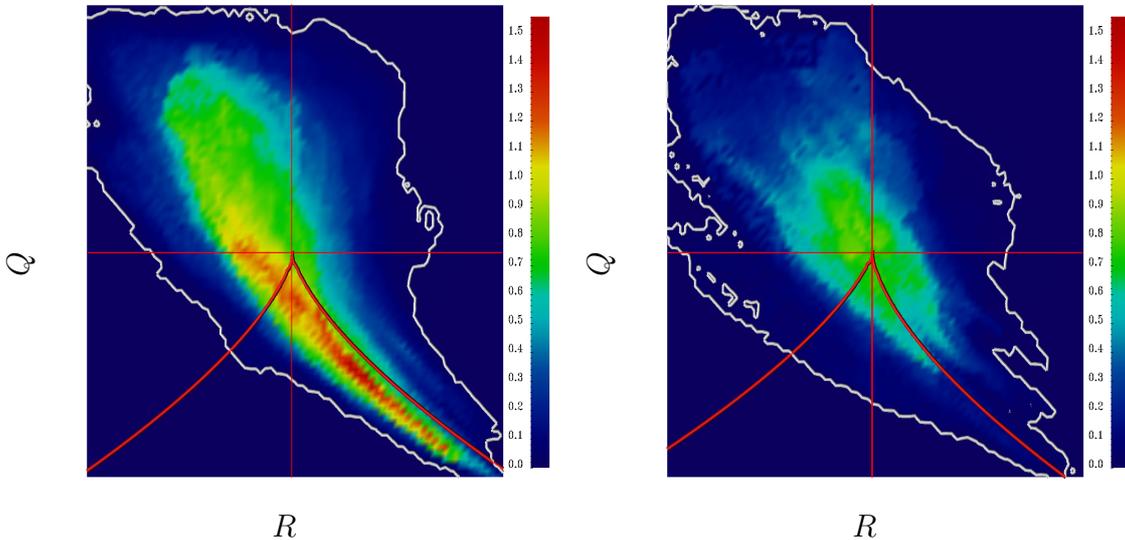


**Abbildung 4.47:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = 0$  und Fall M4.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.

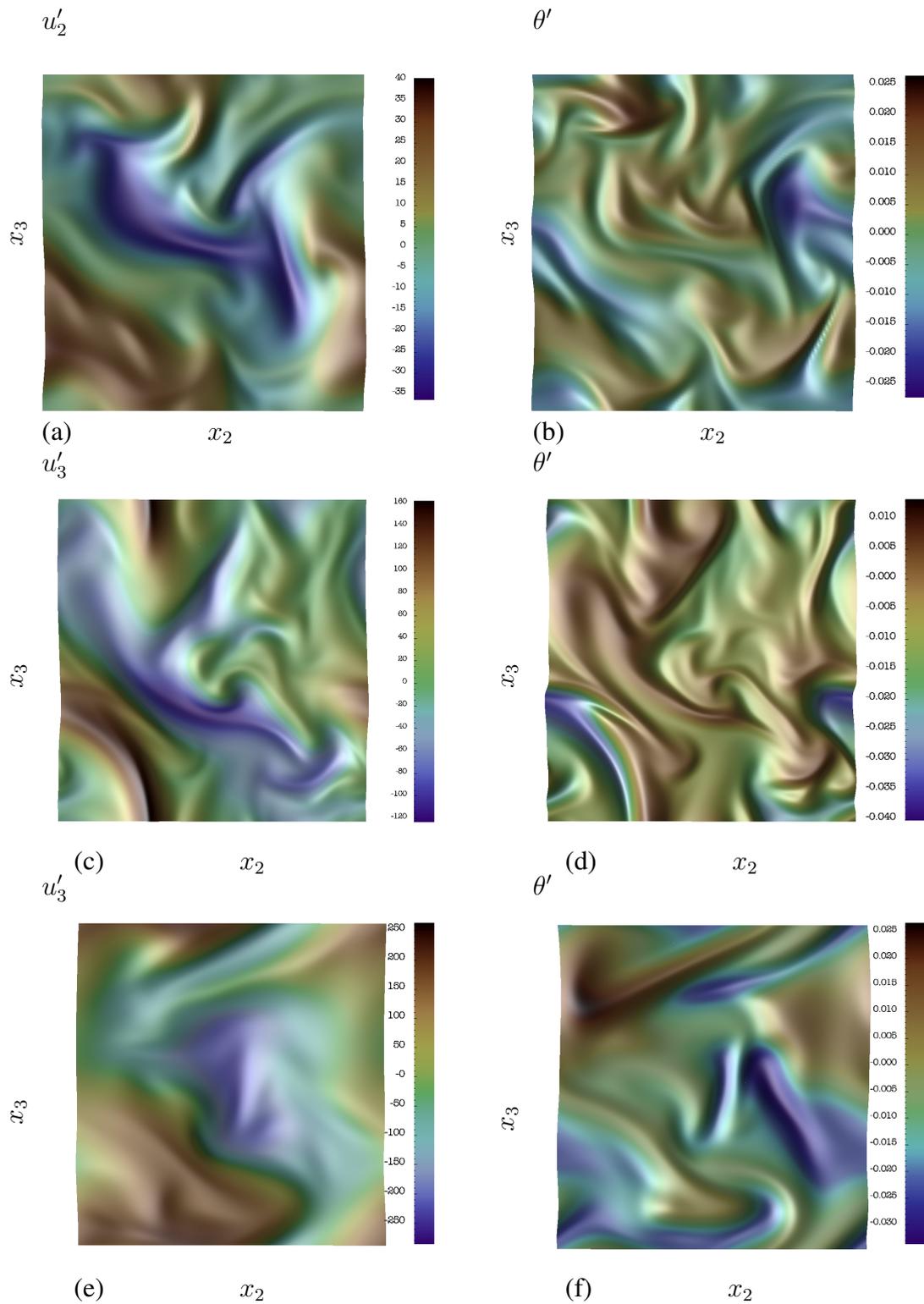
**Abbildung 4.48:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = 2.0 \cdot 10^{-3}$  und Fall M4.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.



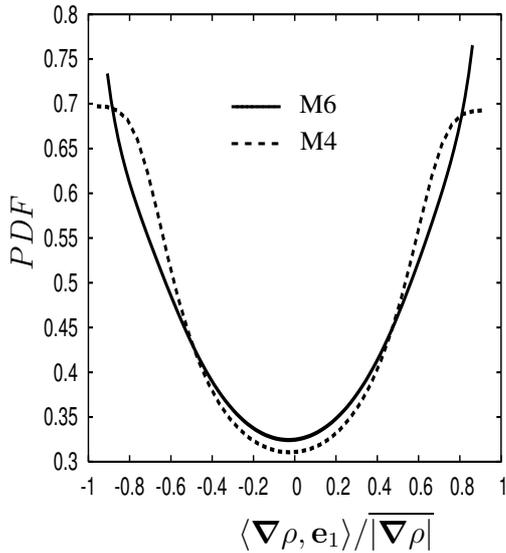
**Abbildung 4.49:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, **Abbildung 4.50:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = -0.33$  und Fall M6.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.



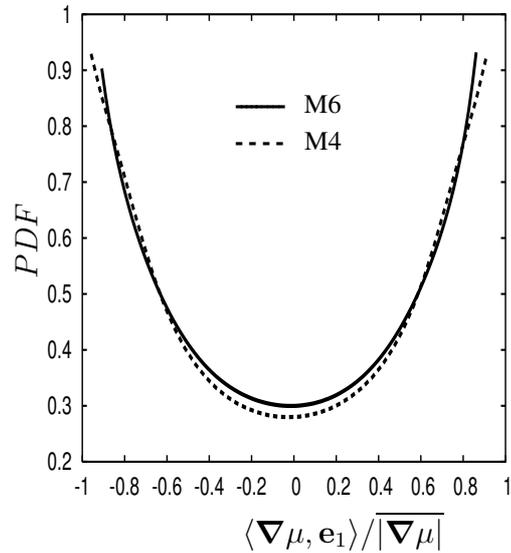
**Abbildung 4.51:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, **Abbildung 4.52:**  $\overline{(g|D, Q, R)}$ : Skalargradient, normiert mit seinem Mittelwert, konditioniert auf die Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors, für  $D/(|\omega|/2) = 0$  und Fall M6.  $d$  ist mit  $\frac{1}{2}|\omega|$ ,  $q$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^2$  und  $R$  mit  $(\frac{1}{2}|\omega|)^3$  normiert.



**Abbildung 4.53:** Schnappschuss der Geschwindigkeits- und Skalarfluktuationen für die Fälle M1 (a,b), M5(c,d) und M6(e,f).



**Abbildung 4.54:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{e}_1$  und  $|\nabla\rho|/|\nabla\rho|$ .



**Abbildung 4.55:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{e}_1$  und  $|\nabla\mu|/|\nabla\mu|$ .

falls  $\nabla\rho$  und  $\nabla\mu$  groß sind (siehe Abbildungen 4.57 und 4.58). Der Skalargradient zeigt damit eindeutig eine Abhängigkeit von den variablen Transportkoeffizienten.

Abbildung 4.59 stellt schließlich den Skalargradienten konditioniert auf die erste Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors, die Divergenz, dar. Hier erkennt man, dass hohe Werte des Skalargradienten in Regionen mit hoher positiver Divergenz auftreten. Einen leichten Anstieg für den konditionierten Skalargradienten findet man auch zu hohen negativen Werten der Divergenz hin.

In welcher Weise beeinflusst nun der mittlere Skalargradient die Mikrostruktur des Skalarfeldes? In isotroper inkompressibler Turbulenz mit vorgegebenem mittleren Skalargradienten stellten Brethouwer *et al.* (2003) fest, dass die Größe  $\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle / |\mathbf{g}|$  für große Werte von  $\mathbf{g}$  maximal ist. Der fluktuierende Skalargradient zeigt damit bevorzugt in Richtung des aufgeprägten mittleren Gradienten  $\mathbf{g}$ . Dies gilt auch für die in dieser Arbeit gerechneten Simulationen, unabhängig von der Machzahl, wie Abbildung 4.60 beweist. Die Mikrostruktur des Skalarfeldes ist damit von den großen Skalen abhängig.

#### 4.4 Mikrostruktur des Skalars in supersonischer Kanalströmung

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse der Analyse der Skalargradienten in kompressibler isotroper Turbulenz denen in supersonischer Kanalströmung gegenübergestellt werden. Für die Berechnung der konditionierten Mittelwerte und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (PDFs) aus 30 unabhängigen Datensätzen, wurden jeweils 50 Intervalle (Bins) verwendet. Für die PDFs erwies sich das als ausreichend, die konditionierten Mittelwerte

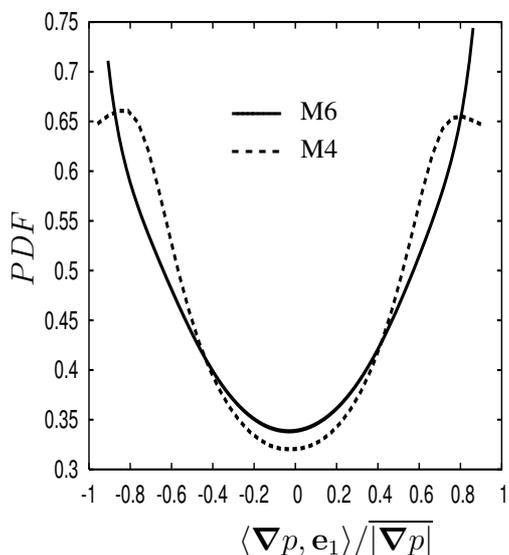


Abbildung 4.56: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen  $e_1$  und dem Skalargradienten, konditioniert auf  $|\nabla p|$ . Alle Größen sind mit ihren Mittelwerten normiert.

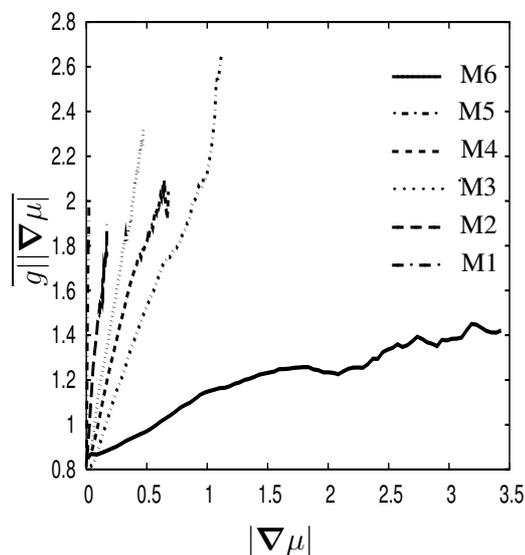


Abbildung 4.57: Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $|\nabla \mu|$ . Alle Größen sind mit ihren Mittelwerten normiert.

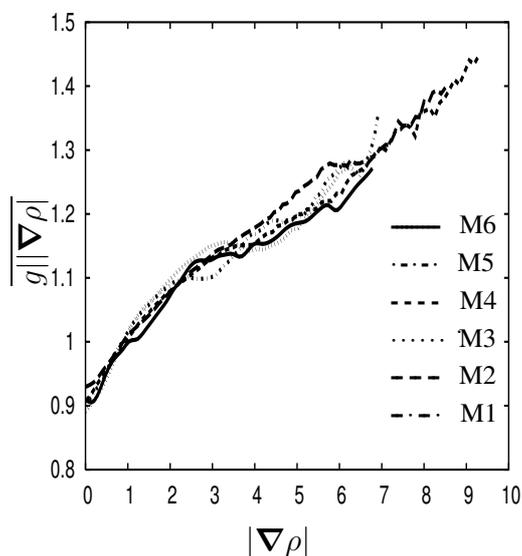


Abbildung 4.58: Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $|\nabla \rho|$ . Alle Größen sind mit ihren Mittelwerten normiert.

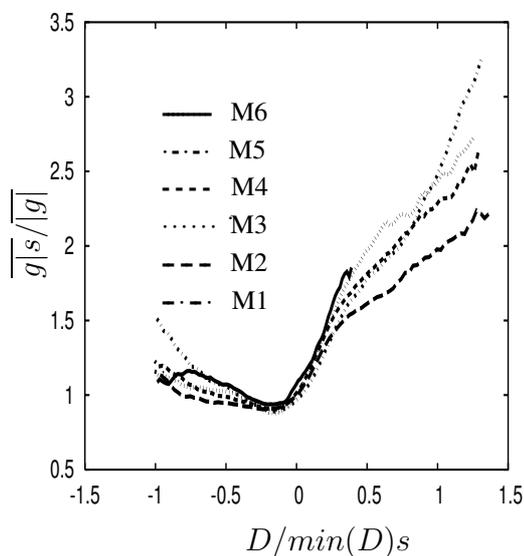
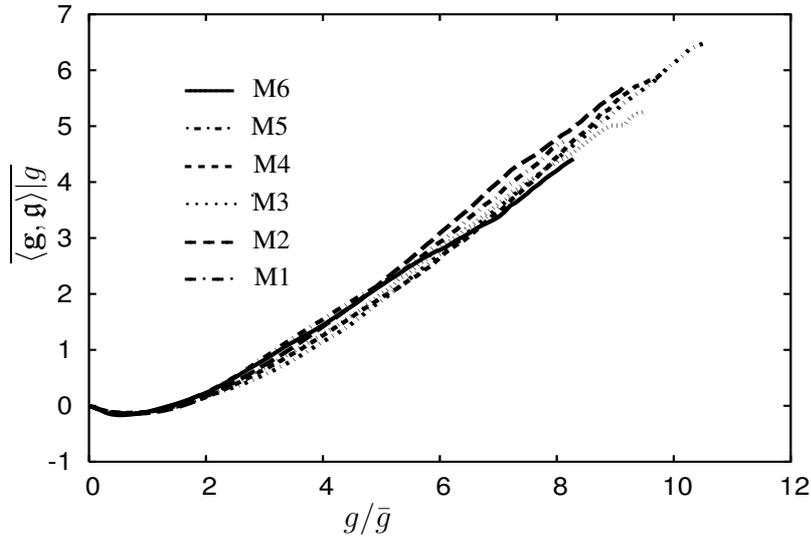


Abbildung 4.59: Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf die erste Invariante,  $D$ , von  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Der Skalargradient ist mit seinem Mittelwert normiert,  $D$  mit dem Minimum.



**Abbildung 4.60:** Mittelwert von  $\overline{\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle}$ , konditioniert auf  $g$ . Alle Grössen sind mit ihren Mittelwerten normiert.

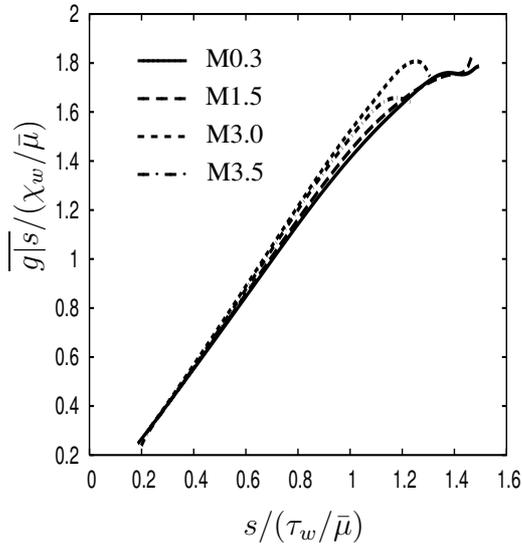
zeigten allerdings in den letzten Bins große Fluktuationen aufgrund einer unzureichenden Zahl an Stichproben. Aus diesem Grund wurden Datensätze mit großen Fluktuationen in den letzten Bins geglättet.

Wie bereits im ersten Teil dieser Arbeit gezeigt, dominieren im Gegensatz zur kompressiblen isotropen Turbulenz in der supersonischen Kanalströmung mit gekühlten Wänden die Gradienten der Dichte und Temperatur gegenüber intrinsischen Kompressibilitäts-effekten da die turbulente und Gradientenmachzahl niedrig ist. Da in Wandnähe die wandnormalen Gradienten dominieren, kann nach Gleichung (4.23) wiederum erwartet werden, dass der fluktuierende Skalargradient nicht nur in scher- und verzerrungsdominierten Richtungen gross ist, sondern auch in Regionen mit großer Wirbelstärke nahe der Wand. Letzteres folgt aus der Tatsache, dass der zum Betrag des fluktuierenden Skalargradienten beitragende Term  $-\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} \rangle / 2g^2$  aufgrund der Nichtparallelität von  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\mathbf{g}$  ungleich Null ist. Um dies zu überprüfen, sind in den Abbildungen 4.61 bis 4.64 der Skalargradient konditioniert auf die Verzerrungsrate  $s$ , in den Abbildungen 4.65 bis 4.68 der Skalargradient konditioniert auf  $\omega = \sqrt{\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle}$  zu sehen, jeweils an den wandnormalen Positionen  $x_2^* = 5, 20, 100, x_2/H = 1$ . Wie erwartet findet man große Werte von  $g$  für große Werte von  $s$ , hier normiert mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ . In der Kanalmitte, in der annähernd isotropes Verhalten angenommen werden kann, liegt keine Abhängigkeit des Skalargradienten, konditioniert auf  $\omega$ , von der Wirbelstärke vor (Abbildung 4.68). Bei Annäherung an die Wand sieht man allerdings, dass in Regionen mit hohem  $\omega$  hohe Werte von  $g$  vorliegen. Im Gegensatz zu isotroper Turbulenz hängt der Skalargradient damit in Wandnähe von der Wirbelstärke ab und weist für hohe Werte von  $\omega$  auch hohe Werte von  $g$  auf.

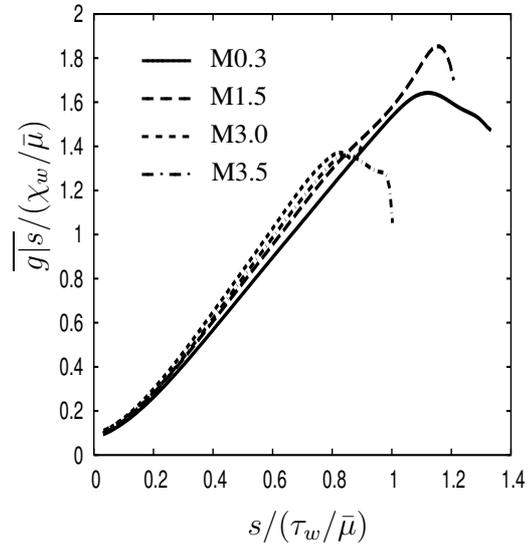
Wie ändern sich nun die Eigenwerte von  $S_{ij}$  und die Ausrichtung des Skalargradienten? Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Eigenwerte normiert mit  $\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$ , für verschiedene wandnormale Positionen, sind in den Abbildungen 4.69, 4.73 und 4.77 für Fall M0.3, in den Abbildungen 4.70, 4.74 und 4.78 für Fall M1.5, in den Abbildungen 4.71, 4.75 und 4.79 für Fall M3.0 und schliesslich in den Abbildungen 4.72, 4.76 und 4.80 für Fall M3.5 zu sehen. Unabhängig von Mach und Reynoldszahl lassen sich folgende Beobachtungen machen: der Betrag der Position des Maximums der PDFs wird mit zunehmendem Abstand von der Wand für  $s_1$  und  $s_3$  kleiner, während er für  $s_2$  steigt. Gleichzeitig steigen bei Annäherung an die Kanalmitte die Flanken der PDFs, womit die Wahrscheinlichkeit für große negative und große positive Werte steigt. Gleichzeitig erkennt man, beispielweise durch Vergleich von Abbildung 4.69 und 4.71 für  $s_1$ , dass der Betrag der Position des Maximums und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Extremwerten mit der Machzahl steigt. Dasselbe gilt für die PDFs der anderen Eigenwerte.

Die Überlegungen im Anschluss an Gleichung (4.29), zeigen, dass in einfachen Scherströmungen  $\omega$  wiederum in Richtung von  $e_2$  ausgerichtet ist. Ausserdem wird eine Ausrichtung des Skalargradienten von 45 Grad bezüglich der Hauptachsen  $e_1$  und  $e_3$  erwartet. In supersonischen Kanalströmungen, die aufgrund der Dominanz von  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$  in Wandnähe als Scherströmung angesehen werden können, ist mit ähnlichen Ergebnissen zu rechnen. Der Kosinus des Winkels zwischen  $e_1$  und  $n$  ist in den Abbildungen 4.81 bis 4.84, berechnet an denselben wandnormalen Positionen wie oben, zu sehen. Der Betrag der Position der Maxima der PDFs an der Stelle  $x_2^* = 5$  liegt, wie vorausgesagt, bei 0.707, was einem Winkel von 45 Grad entspricht. Mit zunehmendem Abstand von der Wand sinkt der Winkel anschliessend, bis in der Kanalmitte, wie in isotroper Turbulenz, eine perfekte Ausrichtung in Richtung von  $e_1$  vorliegt. Ein Vergleich von Fall M0.3 und M3.0 zeigt, dass der Fall mit der höheren Machzahl Maxima bei grösseren Winkeln aufweist, sowie eine geringere Varianz besitzt, der Unterschied ist allerdings klein. Die Abbildungen 4.85 bis 4.85 zeigen, dass der Winkel zwischen  $e_2$  und  $n$  mit grosser Wahrscheinlichkeit 90 Grad beträgt, die PDFs werden zur Kanalmitte hin allerdings breiter und zeigen wieder einen ähnlichen Verlauf wie in isotroper Turbulenz. Auch der Kosinus des Winkels zwischen  $e_3$  und  $n$ , in den Abbildungen 4.89 bis 4.92 zu sehen, weist in Wandnähe einen Wert von 0.707 auf. Die Maxima der PDF wandern mit zunehmendem Abstand von der Wand zusammen, gleichzeitig fällt wieder die geringere Varianz der Fälle mit höherer Machzahl bei etwa  $x_2^* = 70$  auf (vergleiche dazu Fall M0.3 und M3.0). Ausserdem scheint eine grössere Reynoldszahl wiederum zu einer vergrösserten Varianz zu führen, wie man bei Vergleich von Fall M3.0 und M3.5 erkennen kann (Abbildung 4.91). In der Kanalmitte liegt eine unsymmetrische Verteilung der PDFs vor, mit einem Maximum bei etwa 0.5. Die Verteilung ähnelt allerdings derjenigen der kompressiblen isotropen Turbulenz, die in Abbildung 4.33 gezeigt wurde.

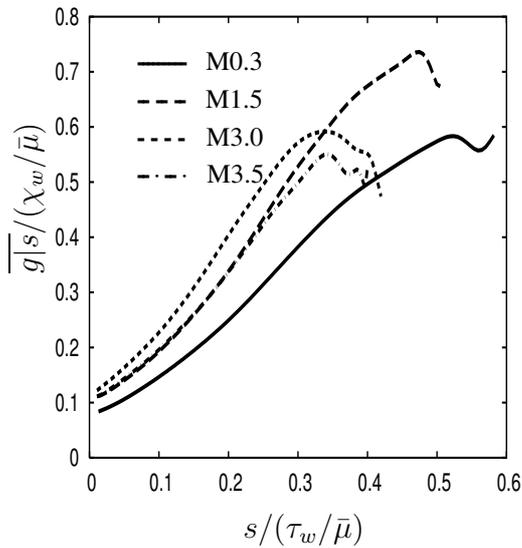
Wie oben erwähnt, sollte der Wirbelstärkevektor wiederum hauptsächlich in Richtung von  $e_2$  ausgerichtet sein. Die Abbildungen 4.93 bis 4.104, in denen die Wahrschein-



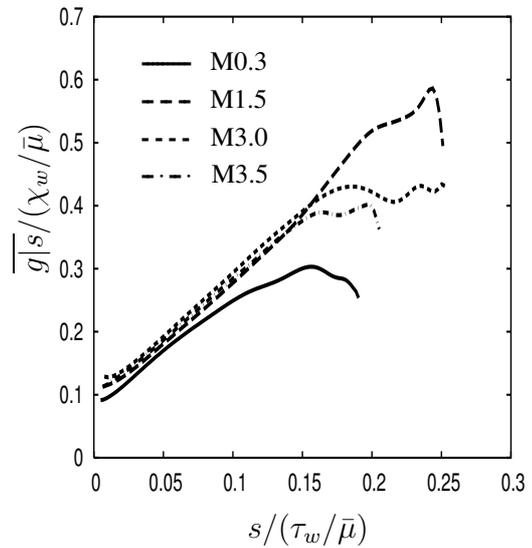
**Abbildung 4.61:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ , an der Stelle  $x_2^*=5$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $s$  mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



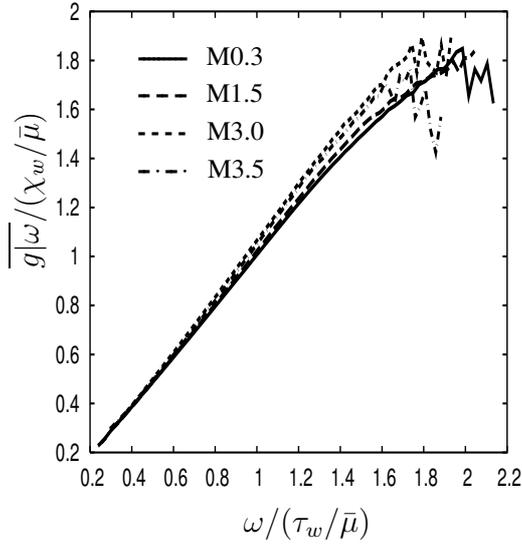
**Abbildung 4.62:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ , an der Stelle  $x_2^*=20$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $s$  mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



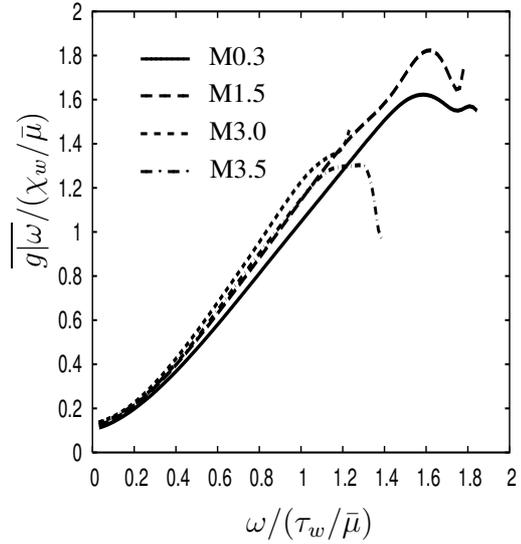
**Abbildung 4.63:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ , an der Stelle  $x_2^*=100$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $s$  mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



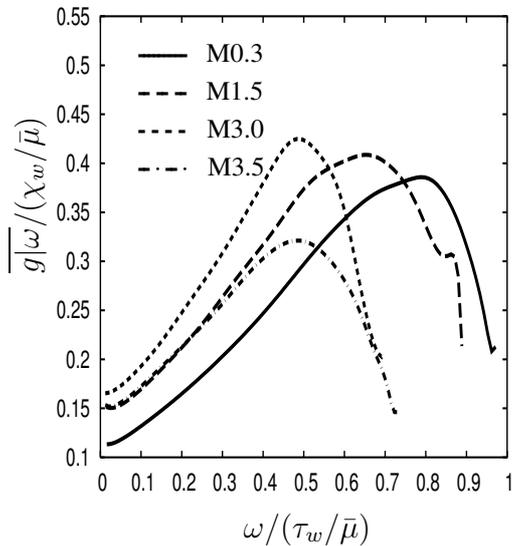
**Abbildung 4.64:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $s = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ , an der Stelle  $x_2/h=1$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $s$  mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



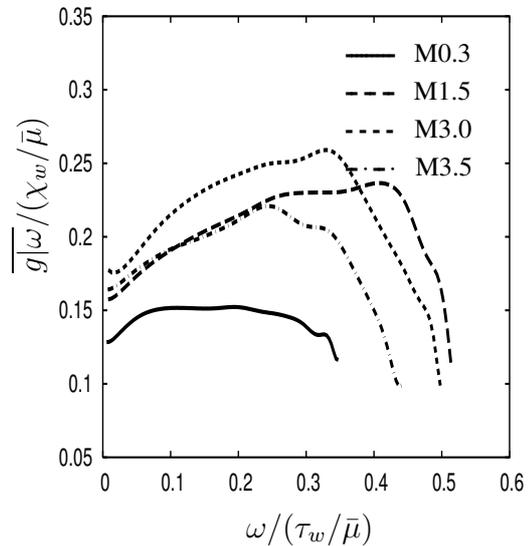
**Abbildung 4.65:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\omega = \sqrt{\langle \omega, \omega \rangle}$ , an der Stelle  $x_2^*=5$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\omega$  mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



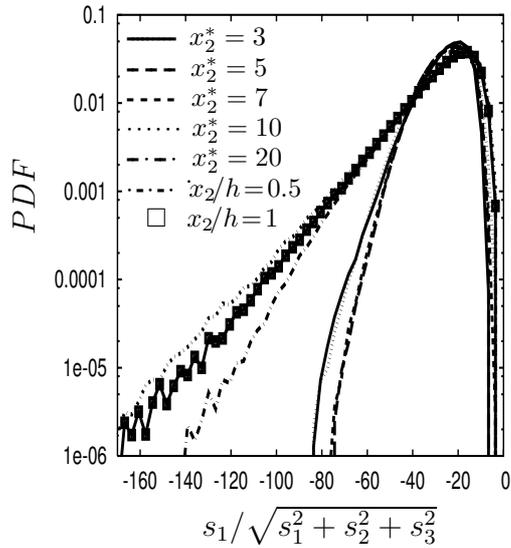
**Abbildung 4.66:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\omega = \sqrt{\langle \omega, \omega \rangle}$ , an der Stelle  $x_2^*=20$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\omega$  mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



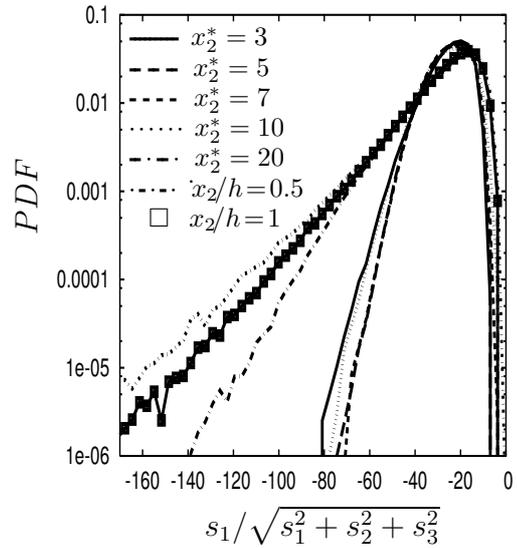
**Abbildung 4.67:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\omega = \sqrt{\langle \omega, \omega \rangle}$ , an der Stelle  $x_2^*=100$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\omega$  mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



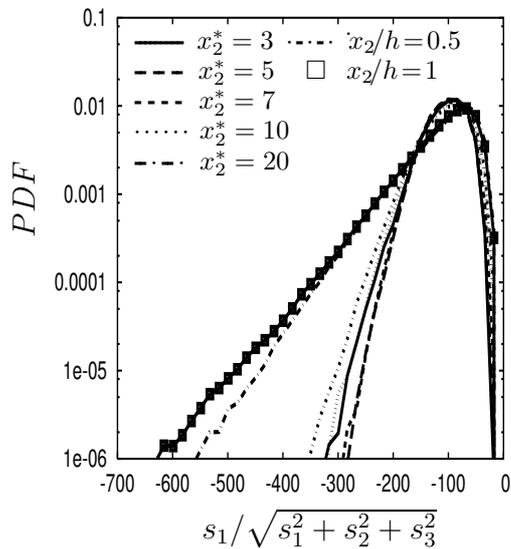
**Abbildung 4.68:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\omega = \sqrt{\langle \omega, \omega \rangle}$ , an der Stelle  $x_2/h=1$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\omega$  mit  $\tau_w/\bar{\mu}$ .



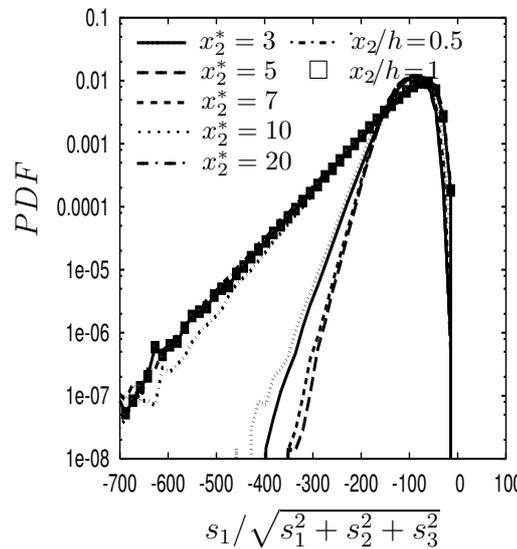
**Abbildung 4.69:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_1$  von  $S_{ij}$  für Fall M0.3 an verschiedenen wandnormalen Positionen.



**Abbildung 4.70:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_1$  von  $S_{ij}$  für Fall M1.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.



**Abbildung 4.71:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_1$  von  $S_{ij}$  für Fall M3.0 an verschiedenen wandnormalen Positionen.



**Abbildung 4.72:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_1$  von  $S_{ij}$  für Fall M3.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.

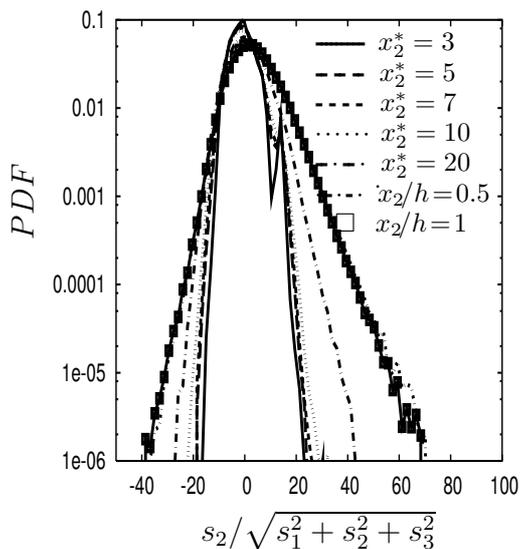


Abbildung 4.73: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_2$  von  $S_{ij}$  für Fall M0.3 an verschiedenen wandnormalen Positionen.

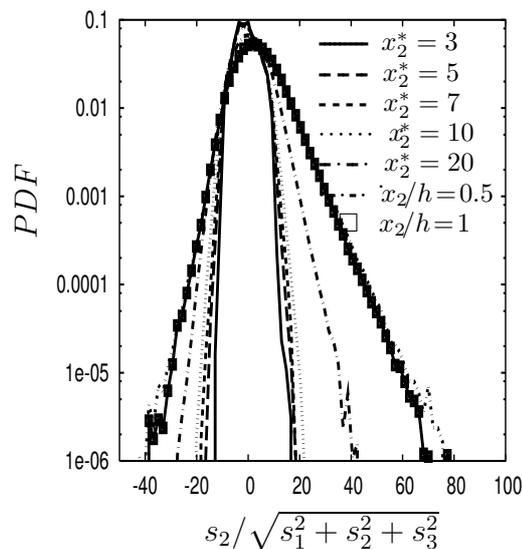


Abbildung 4.74: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_2$  von  $S_{ij}$  für Fall M1.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.

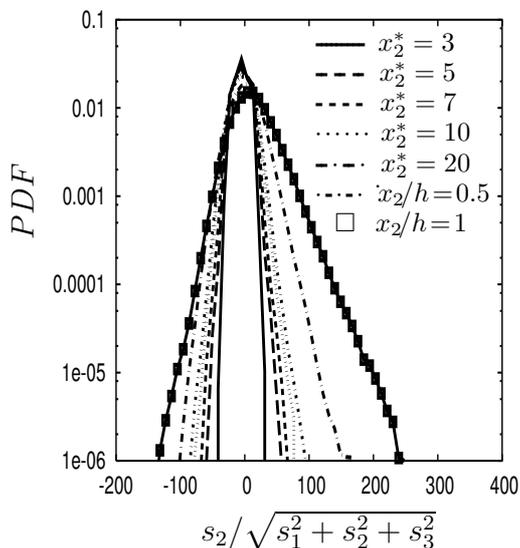


Abbildung 4.75: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_2$  von  $S_{ij}$  für Fall M3.0 an verschiedenen wandnormalen Positionen.

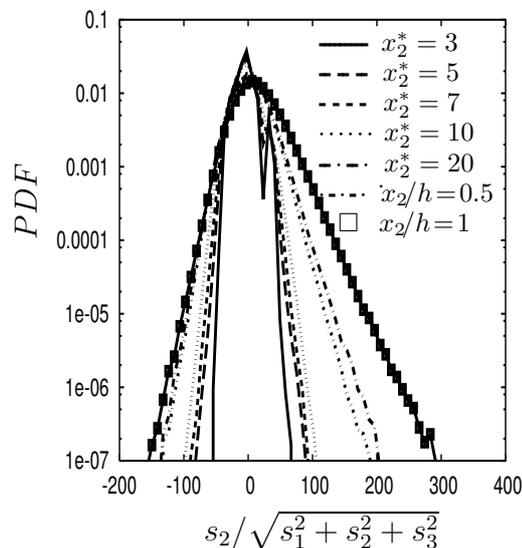
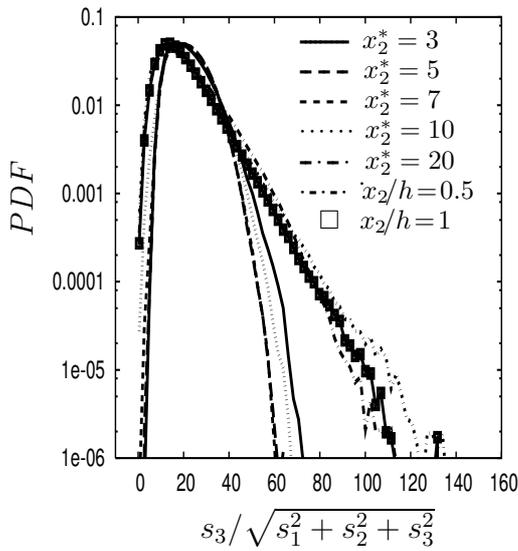
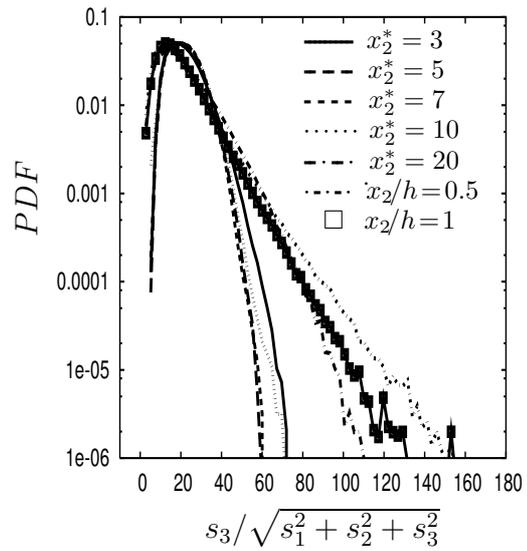


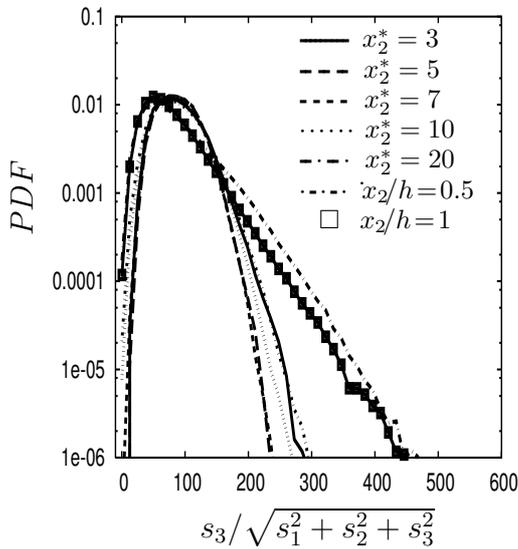
Abbildung 4.76: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_2$  von  $S_{ij}$  für Fall M3.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.



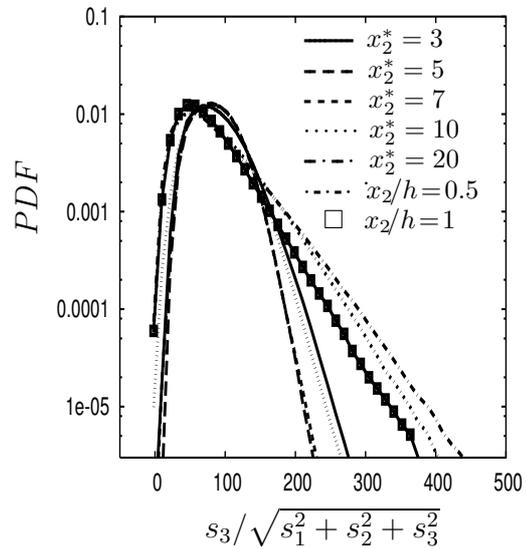
**Abbildung 4.77:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_3$  von  $S_{ij}$  für Fall M0.3 an verschiedenen wandnormalen Positionen.



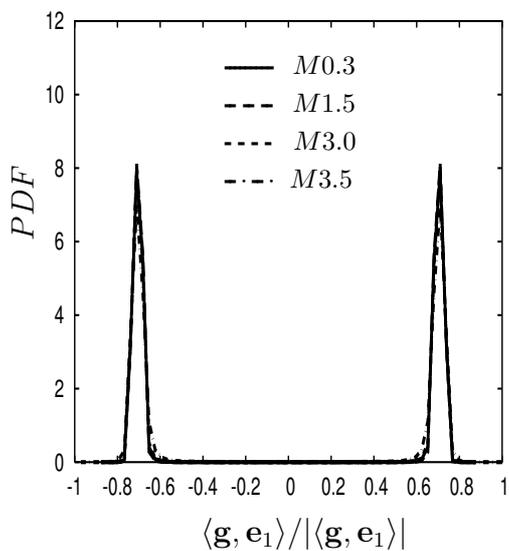
**Abbildung 4.78:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_3$  von  $S_{ij}$  für Fall M1.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.



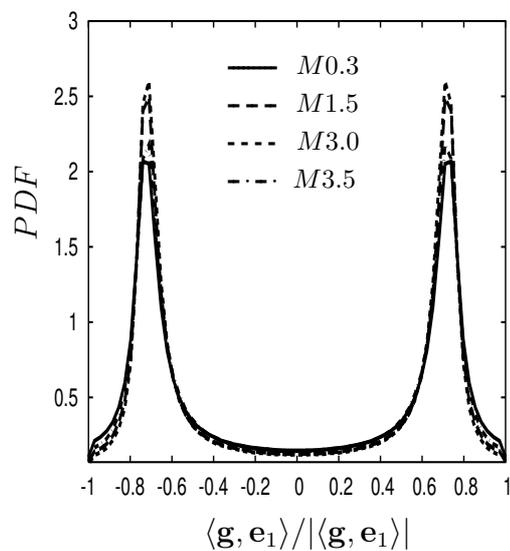
**Abbildung 4.79:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_3$  von  $S_{ij}$  für Fall M3.0 an verschiedenen wandnormalen Positionen.



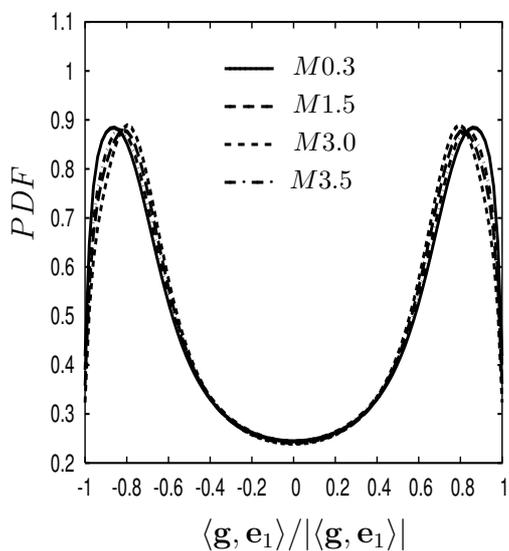
**Abbildung 4.80:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Eigenwerts  $s_3$  von  $S_{ij}$  für Fall M3.5 an verschiedenen wandnormalen Positionen.



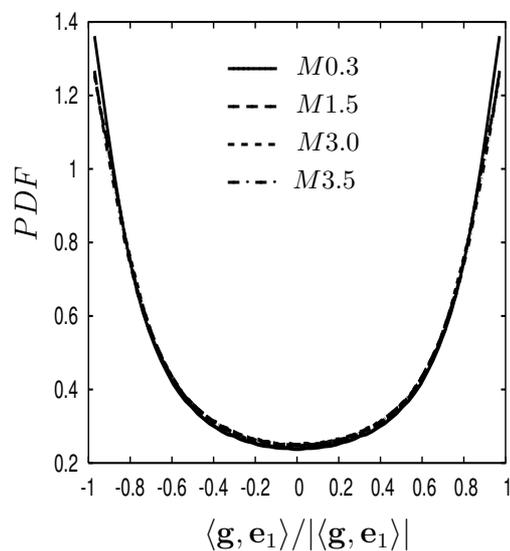
**Abbildung 4.81:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ .



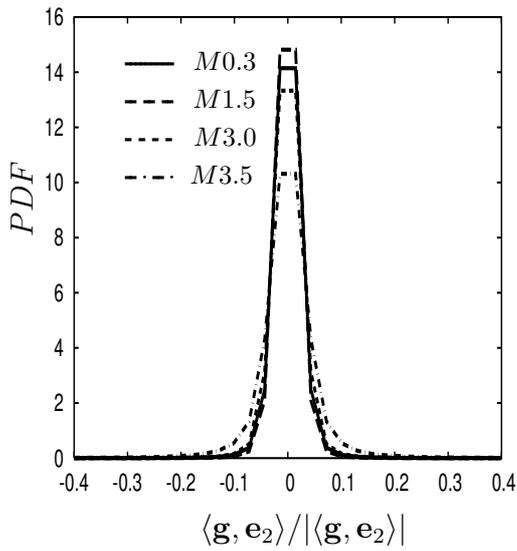
**Abbildung 4.82:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ .



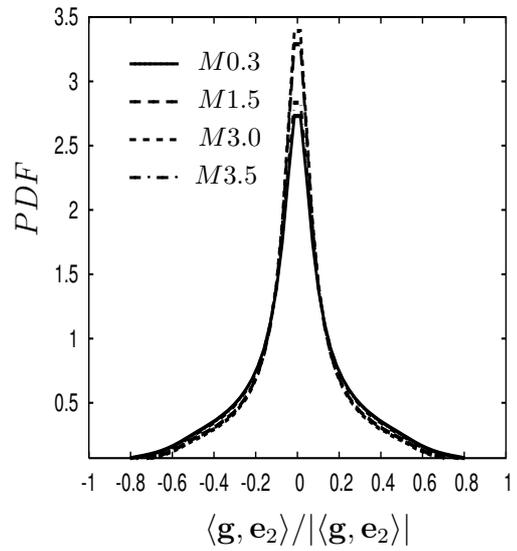
**Abbildung 4.83:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2^* = 70$ .



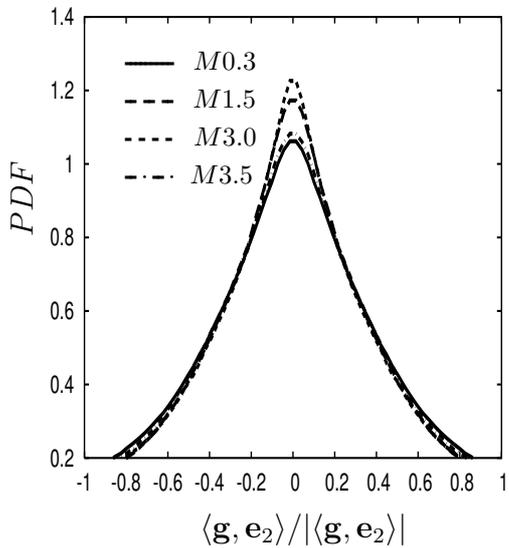
**Abbildung 4.84:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ .



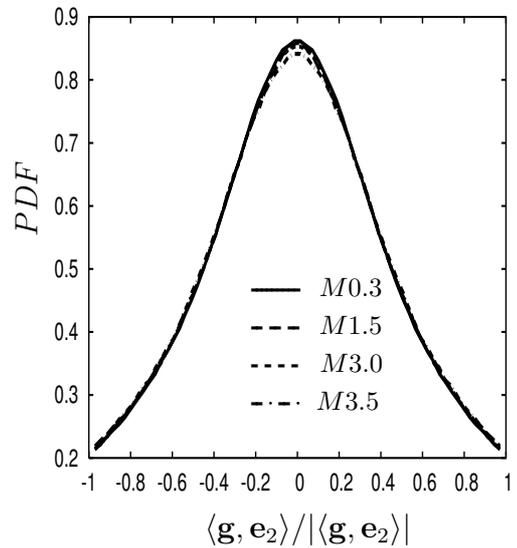
**Abbildung 4.85:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_2$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ .



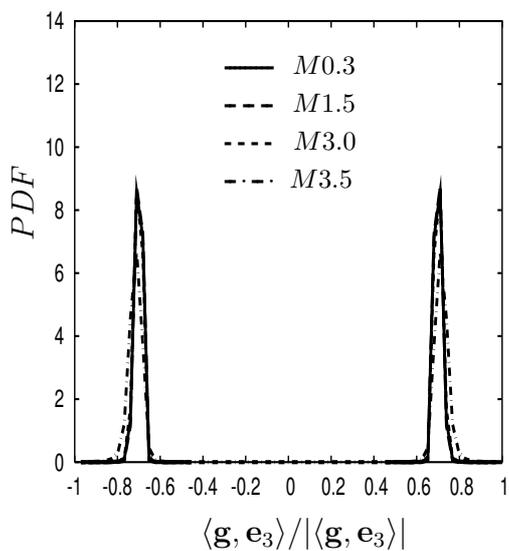
**Abbildung 4.86:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_2$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ .



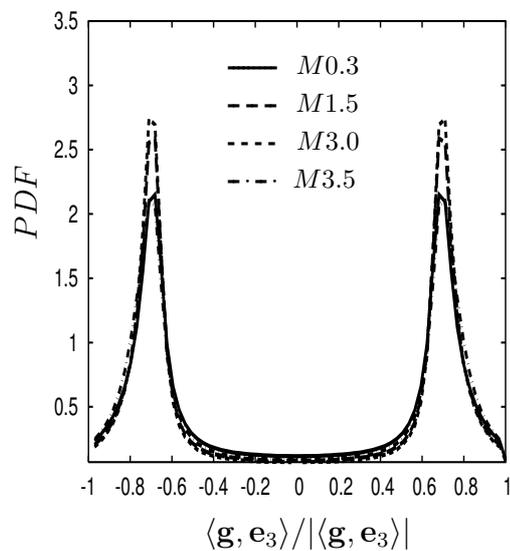
**Abbildung 4.87:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_2$  an der Positionen  $x_2^* = 70$ .



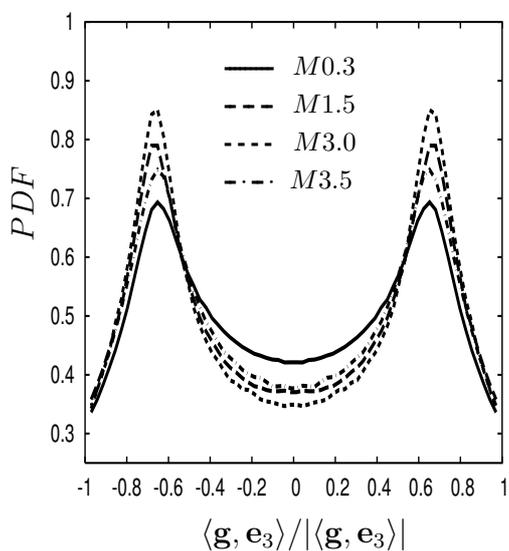
**Abbildung 4.88:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_2$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ .



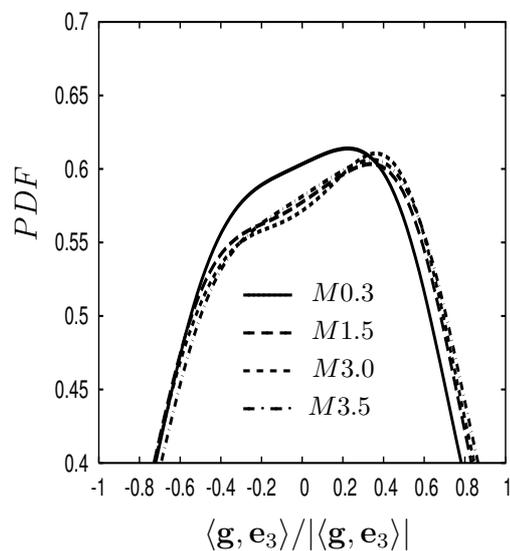
**Abbildung 4.89:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_3$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ .



**Abbildung 4.90:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_3$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ .



**Abbildung 4.91:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_3$  an der Positionen  $x_2^* = 70$ .

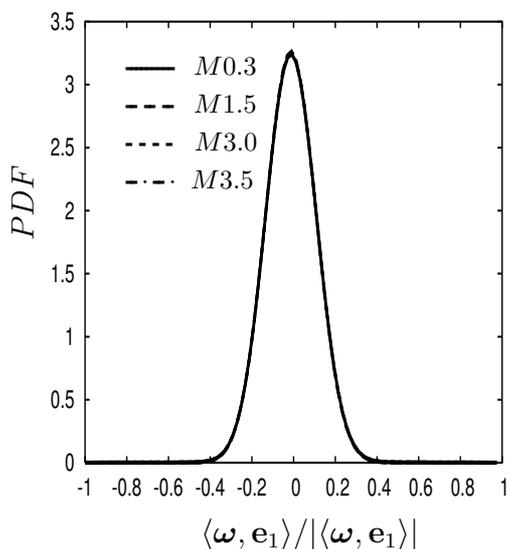


**Abbildung 4.92:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{e}_3$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ .

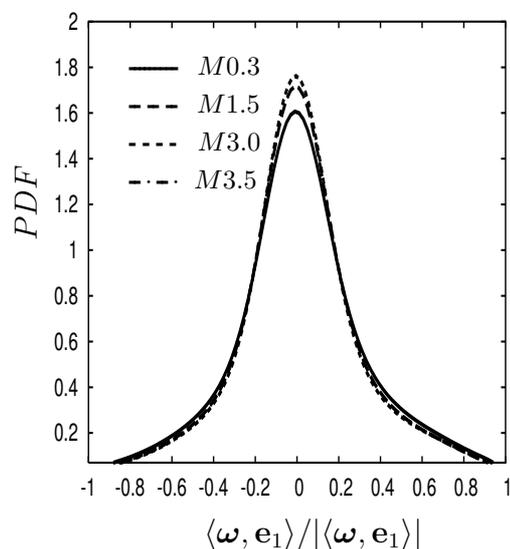
lichkeitsdichtefunktion des Kosinus des Winkels zwischen dem Wirbelstärkevektor und den Eigenvektoren dargestellt ist, bestätigen dies. Wie bereits für die PDFs von  $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{n} \rangle$  festgestellt, steigt die Varianz der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen mit größer werdendem Abstand von der Wand. Direkt an der Wand ( $x_2^* = 5$ ) ist  $\omega$  nahezu perfekt in Richtung von  $\mathbf{e}_2$  ausgerichtet. Die Wahrscheinlichkeit für diese perfekte Ausrichtung sinkt allerdings mit zunehmendem  $x_2^*$ . Besitzt die PDF von  $\langle \mathbf{e}_3, \omega \rangle$  an der Position  $x_2^* = 5$  noch ein Maximum an der Stelle 0, so steigt die Wahrscheinlichkeit für eine Ausrichtung in Richtung von  $\mathbf{e}_3$  mit steigendem  $x_2^*$  zur Kanalmitte hin an, so dass der Wirbelstärkevektor wiederum in der von  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  aufgespannten Ebene liegt. In der Kanalmitte liegt damit die selbe Situation vor wie in der kompressiblen isotropen Turbulenz (siehe Abbildungen 4.37 und 4.38).

Zusammenfassend zeigen die Ergebnisse, dass Kompressibilitätseffekte bei diesen Machzahlen auf die Ausrichtung des Skalargradienten sehr klein sind. Selbst nahe der Wand, wo die grössten Dichte- und Temperaturgradienten vorherrschen, wird die Ausrichtung des Skalargradienten oder des Wirbelstärkevektors von Dichte- und Temperaturvariationen kaum beeinflusst, wie bereits die Abschätzungen nach Gleichung (4.29) andeuteten. Die Varianz der PDFs dagegen zeigt eine leichte Reduktion mit steigender Machzahl im Bereich  $60 < x_2^* < 140$ . Grössen, wie der Skalargradient konditioniert auf die Verzerrungsrate oder  $\omega$  zeigen dasselbe Verhalten unabhängig von Mach- und Reynoldszahl, normiert mit semilokalen Größen haben sie auch nahezu denselben Verlauf. Die beobachteten Änderungen in den PDFs und konditionierten Mittelwerten sind damit in erster Ordnung auf die durch die Existenz der Wände geänderte Physik und nur in zweiter Ordnung auf Kompressibilitätseffekte zurückzuführen.

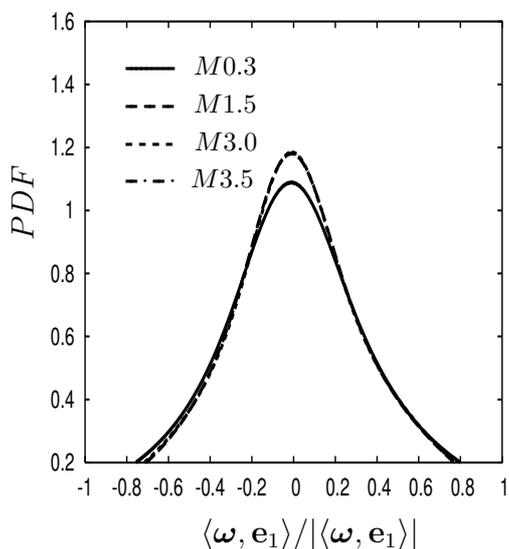
Obwohl Kompressibilitätseinflüsse auf die Ausrichtung des Skalargradienten klein sind, sollte der Skalargradient selbst von Dichte- und Temperaturgradienten abhängen. Wie bei der isotropen Turbulenz seien zuerst die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Ausrichtung der Dichte-, Druck- und Temperaturgradienten bezüglich des Eigenvektors  $\mathbf{e}_1$  betrachtet. Da diese hauptsächlich in Skalarprodukten in Gleichung 4.29 auftauchen, sollte sie in Wandnähe einen Winkel von 45 Grad mit  $\mathbf{e}_1$  einschliessen und in Kanalmitte schliesslich genau in Richtung von  $\mathbf{e}_1$  ausgerichtet sein, um zum Skalargradienten beizutragen. Abbildungen 4.105 bis 4.112 bestätigen dieses Verhalten. Zusätzlich zeigt Abbildung 4.108 in der Kanalmitte für niedrige Machzahlen (hier Fall M0.3) eine geringere Wahrscheinlichkeit für eine perfekte Ausrichtung von  $\nabla \rho$ . Für Fall M0.3 beobachtet man auch, dass Winkel von bis zu 30 Grad bezüglich  $\mathbf{e}_1$  mit hoher Wahrscheinlichkeit möglich sind, genau wie dies für die kompressible isotrope Turbulenz beobachtet wurde (Abbildung 4.54). Über den ganzen Kanal findet man deshalb auch eine starke Abhängigkeit des Skalargradienten von den Dichte- und Viskositätsgradienten, wie die Abbildungen 4.113 bis 4.120 zeigen. In Regionen mit großen Werten für  $\nabla \rho$  und  $\nabla \mu$  sind auch die grössten Skalargradienten aufzufinden.



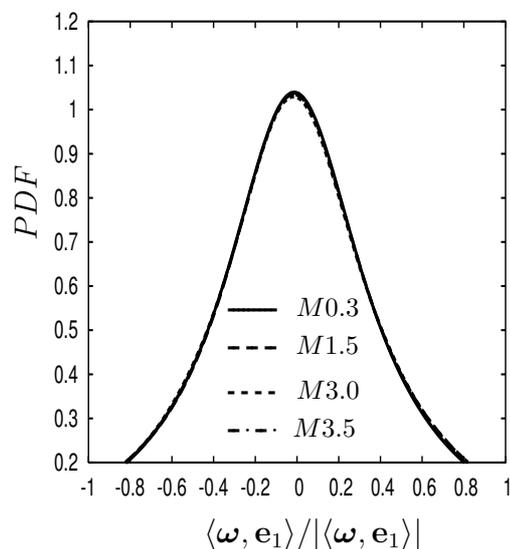
**Abbildung 4.93:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ .



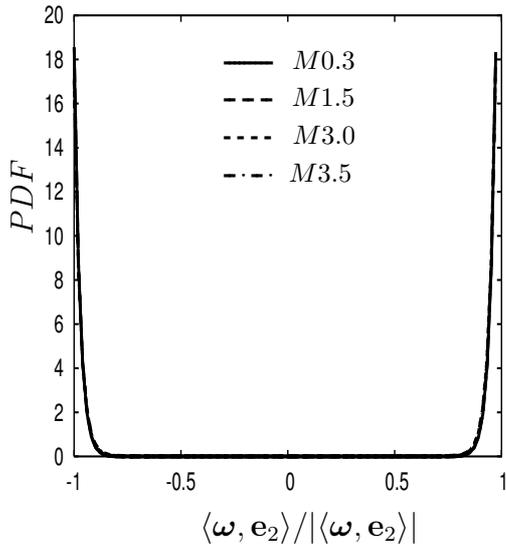
**Abbildung 4.94:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ .



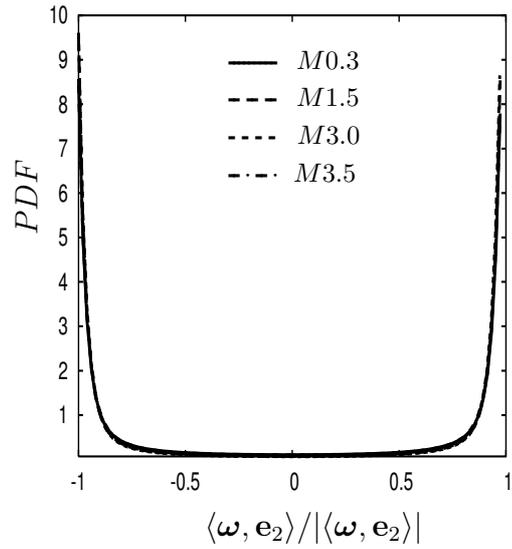
**Abbildung 4.95:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2^* = 100$ .



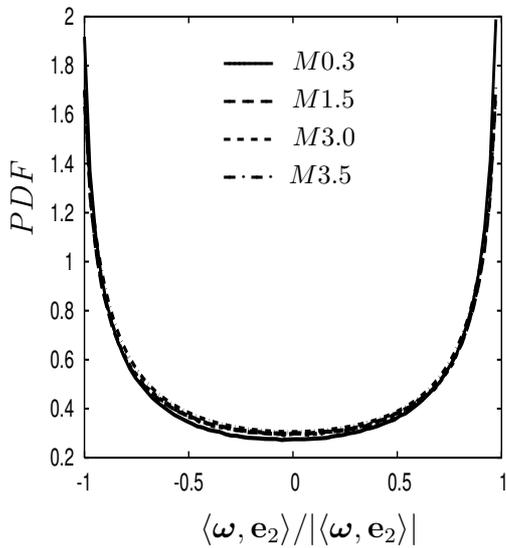
**Abbildung 4.96:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_1$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ .



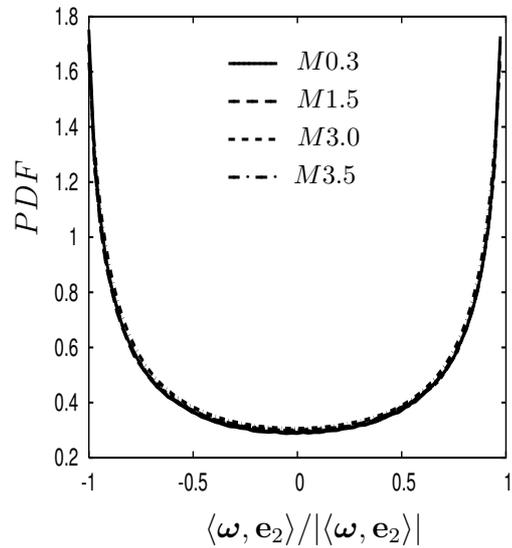
**Abbildung 4.97:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_2$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ .



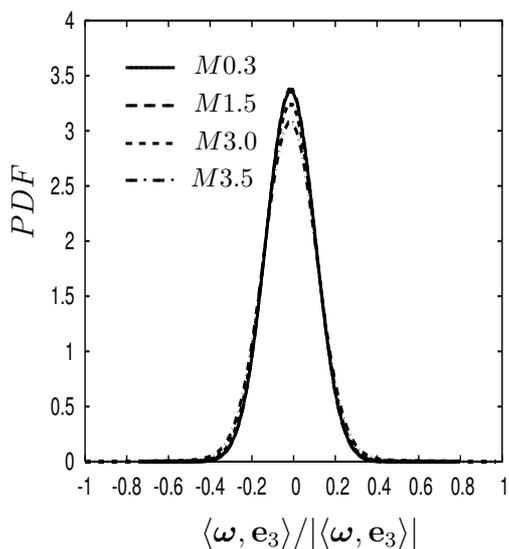
**Abbildung 4.98:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_2$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ .



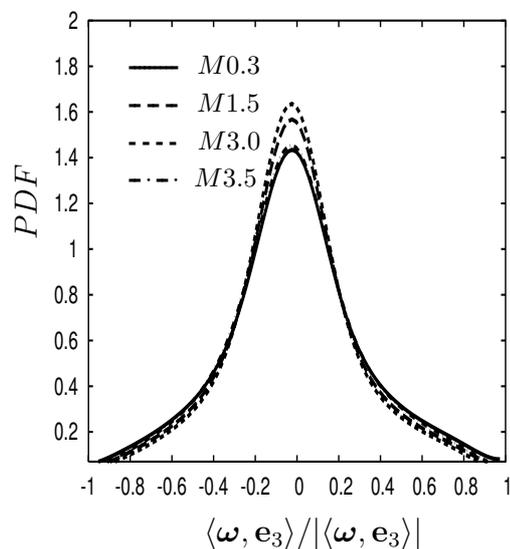
**Abbildung 4.99:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_2$  an der Positionen  $x_2^* = 100$ .



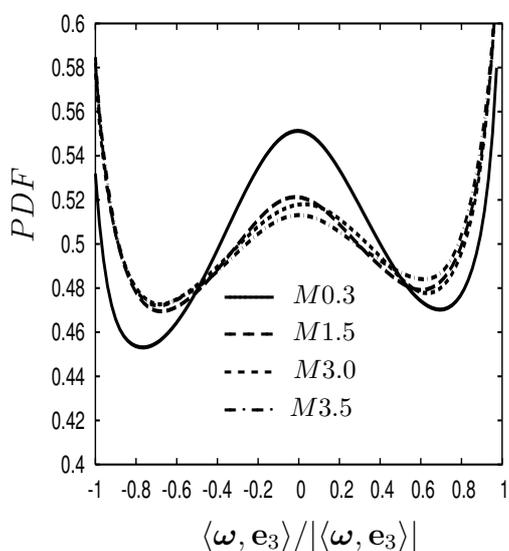
**Abbildung 4.100:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_2$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ .



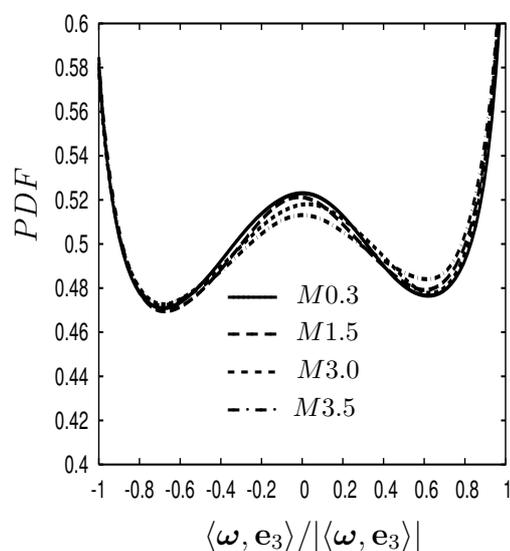
**Abbildung 4.101:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_3$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ .



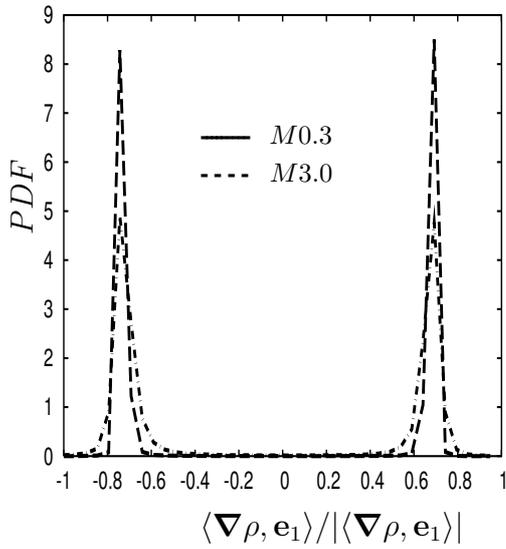
**Abbildung 4.102:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_3$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ .



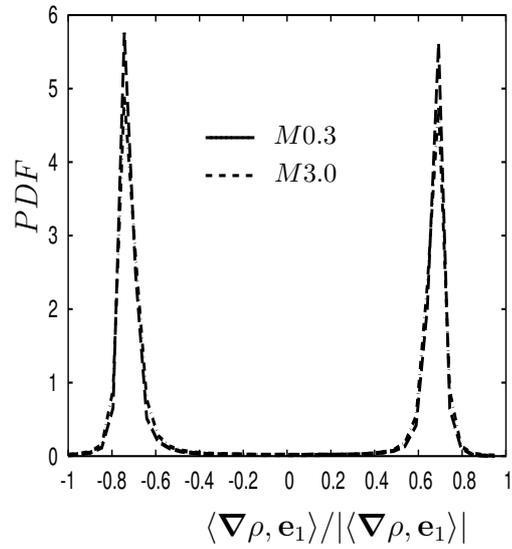
**Abbildung 4.103:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_3$  an der Positionen  $x_2^* = 100$ .



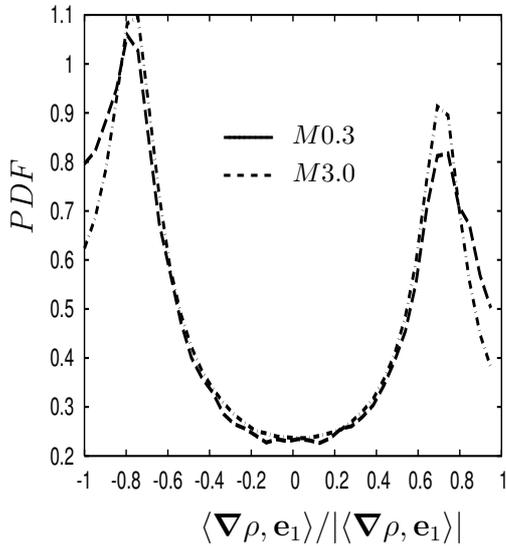
**Abbildung 4.104:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\omega$  und  $e_3$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ .



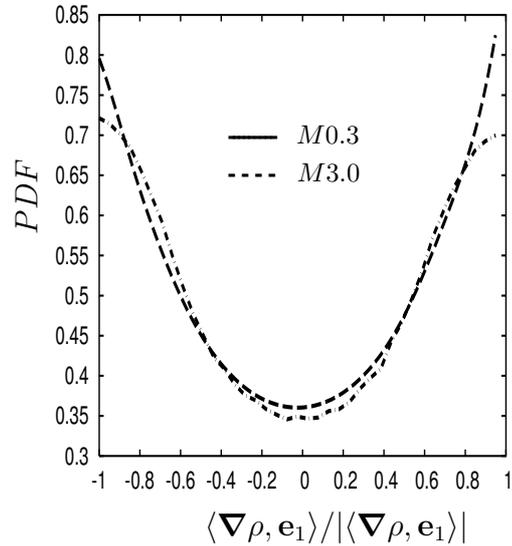
**Abbildung 4.105:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\rho$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ .



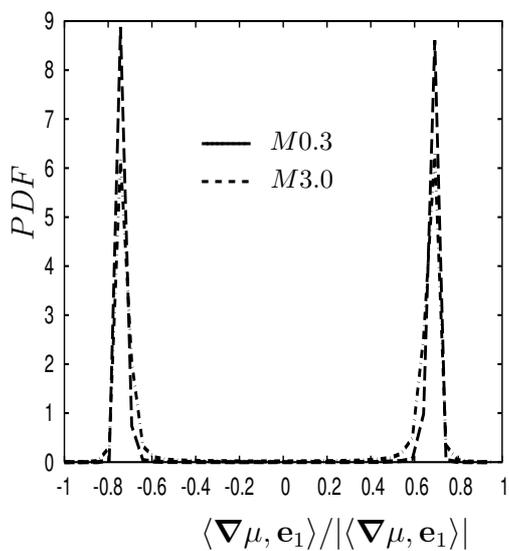
**Abbildung 4.106:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\rho$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ .



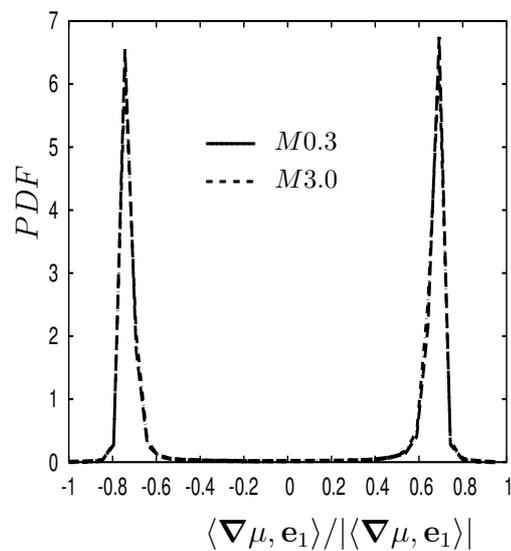
**Abbildung 4.107:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\rho$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2^* = 100$ .



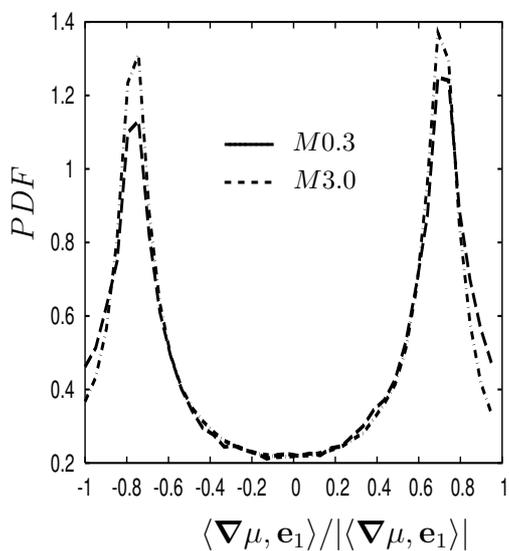
**Abbildung 4.108:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\rho$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ .



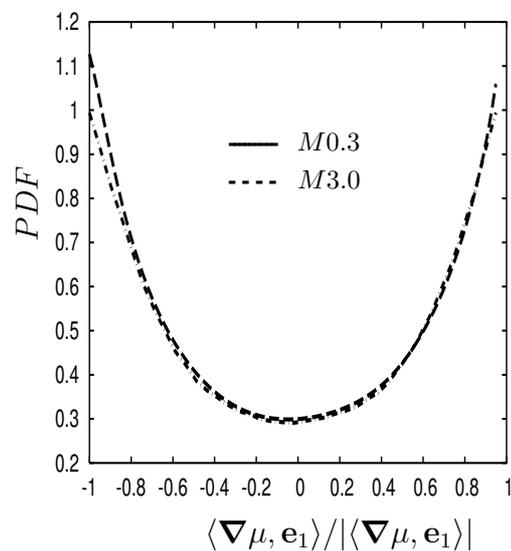
**Abbildung 4.109:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\mu$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2^* = 5$ .



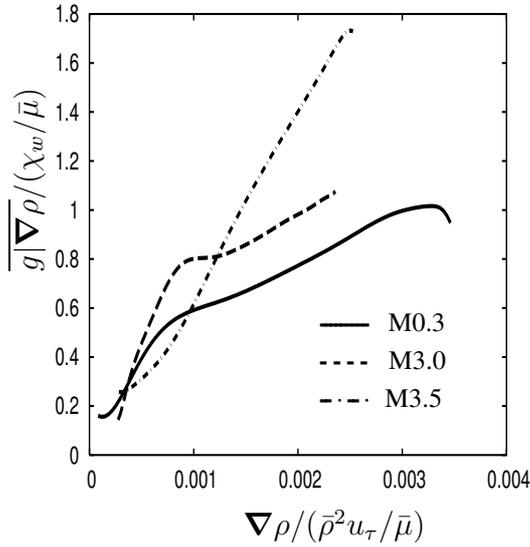
**Abbildung 4.110:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\mu$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2^* = 20$ .



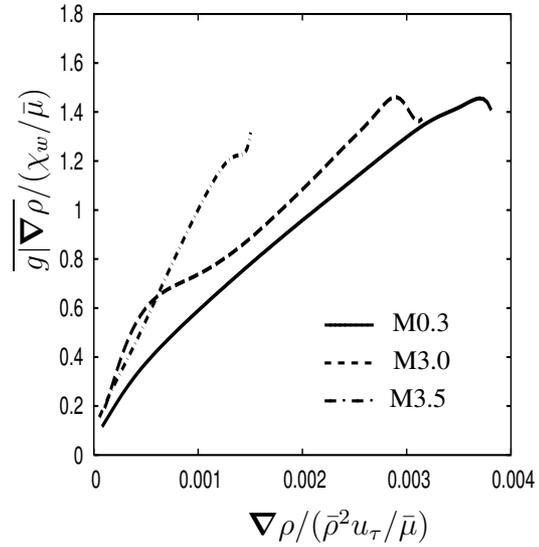
**Abbildung 4.111:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\mu$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2^* = 100$ .



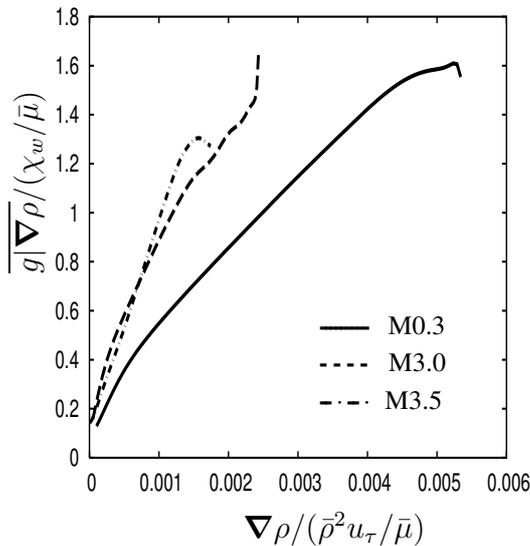
**Abbildung 4.112:** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Kosinus des Winkels zwischen  $\nabla\mu$  und  $\mathbf{e}_1$  an der Positionen  $x_2/h = 1$ .



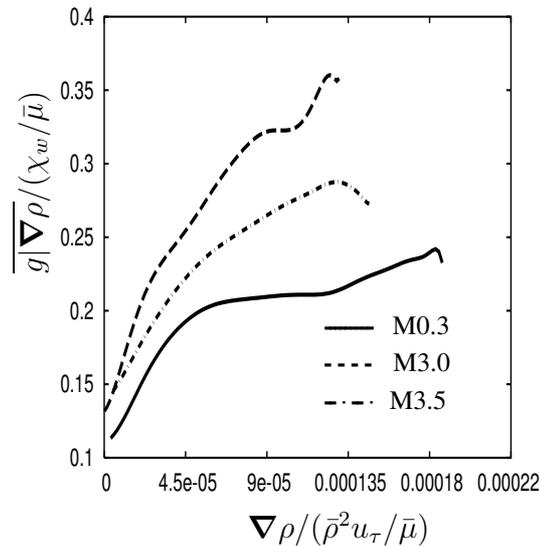
**Abbildung 4.113:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\rho$ , an der Stelle  $x_2^*=5$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\nabla\rho$  mit  $\bar{\rho}^2u_\tau/\bar{\mu}$ .



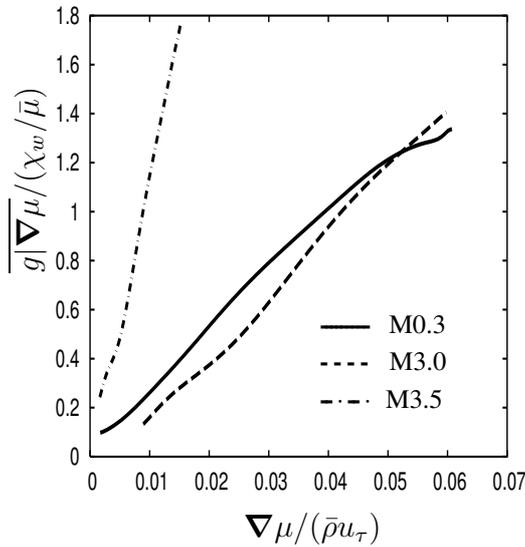
**Abbildung 4.114:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\rho$ , an der Stelle  $x_2^*=20$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\nabla\rho$  mit  $\bar{\rho}^2u_\tau/\bar{\mu}$ .



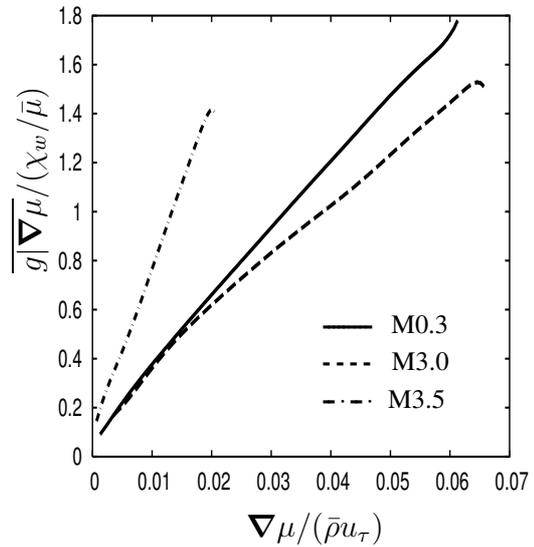
**Abbildung 4.115:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\rho$ , an der Stelle  $x_2^*=100$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\nabla\rho$  mit  $\bar{\rho}^2u_\tau/\bar{\mu}$ .



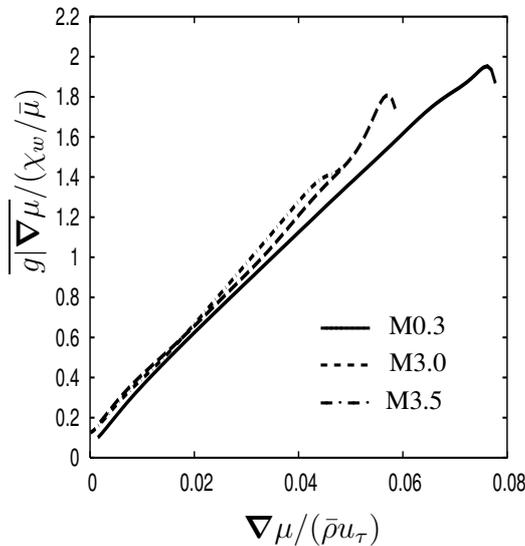
**Abbildung 4.116:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\rho$ , an der Stelle  $x_2/h=1$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\nabla\rho$  mit  $\bar{\rho}^2u_\tau/\bar{\mu}$ .



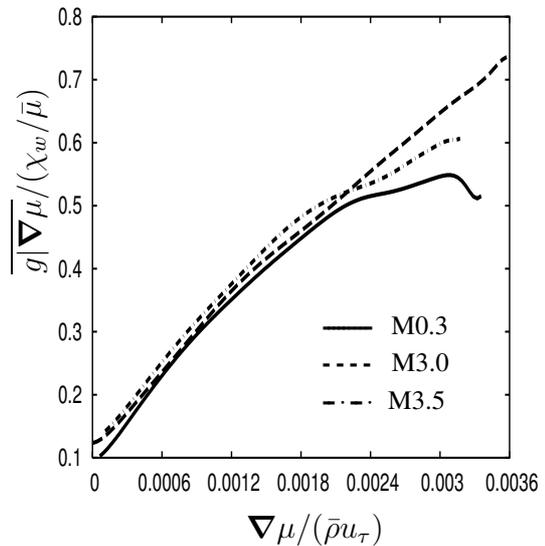
**Abbildung 4.117:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\mu$ , an der Stelle  $x_2^*=5$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\nabla\mu$  mit  $\bar{\rho}u_\tau$ .



**Abbildung 4.118:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\mu$ , an der Stelle  $x_2^*=20$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\nabla\mu$  mit  $\bar{\rho}u_\tau$ .



**Abbildung 4.119:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\mu$ , an der Stelle  $x_2^*=100$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\nabla\mu$  mit  $\bar{\rho}u_\tau$ .



**Abbildung 4.120:** Mittelwert des Skalargradienten, konditioniert auf  $\nabla\mu$ , an der Stelle  $x_2/h=1$ . Der Skalargradient wurde mit  $\chi_w/\bar{\mu}$  normiert,  $\nabla\mu$  mit  $\bar{\rho}u_\tau$ .

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen und beschreibt zum einen direkte numerische Simulationen von supersonischen Kanalströmungen mit Skalartransport und deren physikalische Analyse, zum anderen Simulationen kompressibler isotroper nichtabklingender Turbulenz mit Skalartransport.

Zunächst zu den Kanalströmungen. Die Machzahlen der Kanalströmungen, basierend auf der volumengemittelten Dichte und Geschwindigkeit variieren zwischen  $M_b = 0.3$  und  $M_b = 3.5$ . Die Reynoldszahlen, basierend auf der Schubspannungsgeschwindigkeit liegen zwischen  $Re_\tau = 180$  und  $Re_\tau = 1030$ . Die Simulationsparameter wurden so gewählt, dass die Verläufe der lokalen Mach- und Reynoldszahlen von je zwei Fällen annähernd gleich sind, um die Identifizierung von Mach- oder Reynoldszahleffekten zu erleichtern. Bis zum jetzigen Zeitpunkt sind diese supersonischen Kanalströmungen ausserdem diejenigen mit den höchsten bisher gerechneten Mach- und Reynoldszahlen. Als Randbedingungen wurden isotherme Wände mit Haftbedingung für die Geschwindigkeit sowie eine konstante Skalkonzentration unterschiedlichen Niveaus an den Wänden, vorgegeben. Die Simulationen bestätigen, dass sich Kompressibilitätseffekte hauptsächlich in den großen Variationen der Dichte- und Temperatur (und damit Viskosität) aufgrund der gekühlten Wände manifestieren. In inkompressiblen wandgebundenen Strömungen gilt in der viskosen Unterschicht das Wandgesetz  $\bar{U}_1^+ \propto x_2^+$  und im logarithmischen Bereich das logarithmische Wandgesetz  $\bar{U}_1^+ = c_1 \ln(x_2^+) + c_2$ . Im kompressiblen Fall gelten ähnliche Gesetzmässigkeiten, falls die Viskositäts- und Dichteveränderungen berücksichtigt werden. Das führt für das Geschwindigkeitsfeld zu der Beziehung  $\bar{U}_\mu^+ = \int_0^{x_2^+} \bar{\mu}/\mu_w d\bar{U}_1^+ \propto x_2^+$  im Bereich  $x_2^+ \leq 10$ . Im logarithmischen Bereich wurde gezeigt, dass die Van-Driest-Transformation des Geschwindigkeitsfeldes zwar ein logarithmisches Wandgesetz liefert, die Kurven jedoch aufgrund des Einflusses der viskosen Terme nicht wie im inkompressiblen Fall aufeinanderfallen. Die viskosen Terme sind zwar vorwiegend im Wandbereich von Bedeutung, deren integraler Effekt (siehe Gleichung 3.15) ist allerdings nicht vernachlässigbar. In Kanalströmungen mit einer adiabaten Wand (Morinishi *et al.* (2004)) konnte, aufgrund der geringeren Viskositäts- und Dichteänderungen in Wandnähe, eine weitaus bessere Übereinstimmung mit den inkompressiblen Strömungen gefunden werden. Wird der passive Skalar in der viskosen Unterschicht genauso transformiert wie das Geschwindigkeitsfeld, dann gilt auch für ihn die Proportionalität  $\bar{\Theta}_\mu^+ \propto x_2^+$ . Inkompressible Kanalströmungen mit konstanter Skalkonzentration an der Wand zeigen kein universelles Verhalten des mittleren Skalars im logarithmischen Bereich, ganz im Gegensatz zu Kanalströmungen mit vorgegebenem Skalarfluss an den Wänden, in denen ein logarithmisches Gesetz für den Skalar ähnlich dem der Geschwindigkeit existiert. Die supersonischen Kanalströmungen bestätigten dieses Verhalten. Gründe dafür sind der im Mittenbereich nichtverschwindende mittlere Skalargradient und die starke Variation der Viskosität in Wandnähe, die zu diesem nicht-

tuniversellen Verhalten führen.

Die RMS-Werte der Geschwindigkeit, normiert mit  $u_\tau^*$ , die turbulenten Spannungen, normiert mit  $\tau_w$  und deren Bilanzen, normiert mit  $u_{av}\tau_w/H$ , fallen für  $x_2/h > 0.5$ , unabhängig von Mach- und Reynoldszahl, aufeinander und zeigen dort keinerlei zusätzliche Kompressibilitätseffekte. In Wandnähe sind dagegen große Unterschiede auszumachen, die andere Skalierungen der Größen erforderlich machen, um Kompressibilitäts- und Reynoldszahleffekte unterscheiden zu können.

Die Skalarvarianz weist, wie bereits von Johansson & Wikström (1999) gezeigt, zwei Maxima auf, eines in Wandnähe, das andere in der Kanalmitte. Löst man die Transportgleichung für die Skalarfluktuationen formal mithilfe der Green-Funktion, ähnlich wie dies für inkompressible Kanalströmungen von Hamba (2004) gemacht wurde, dann sieht man direkt den Einfluss des mittleren Skalargradienten auf die Skalarfluktuationen. Dieser ist in den hier durchgeführten Simulationen in der Kanalmitte ungleich Null (im Gegensatz zu Simulationen mit konstantem Skalarfluss an den Wänden als Randbedingung) und erklärt damit den Unterschied. Warum die Simulationen gerade ein zweites Maximum in der Kanalmitte zeigen, ist bis dato unbekannt. Die Bestimmung der Green-Funktion könnte dieses Verhalten erklären, eine Aufgabe, die nach dieser Arbeit in Angriff genommen wird. Die Nichtlokalität zeigt, dass es unmöglich ist, eine einfache Skalierung für die Skalarvarianz in kompressiblen und inkompressiblen Strömungen zu finden. Jedoch erkennt man an dem Quellterm den Einfluss der Dichte und Viskosität auf die Skalarvarianz. Die Normierung der Skalarvarianz mit  $\theta_\tau^* = \chi_w/(\bar{\rho}u_\tau^*)$  reduziert auch tatsächlich den Einfluss der Machzahl in Wandnähe deutlich. Die Maxima nähern sich stark an, in der viskosen Unterschicht liegen die Kurven für alle Machzahlen aufeinander. Wie die Bilanzen der turbulenten Spannungen, so zeigen auch die Bilanzen der Skalarflüsse, normiert mit  $\chi_w u_{av}/h$  und die der Skalarvarianz, normiert mit  $\chi_w \theta_w/h$  keinerlei Machzahleffekte im Mittenbereich des Kanals.

Um die lokale Variation der Dichte und Viskosität in Wandnähe zu berücksichtigen, führten Huang *et al.* (1995) die sogenannten semi-lokalen Skalierungen und Längenmasse, basierend auf den Mittelwerten der Viskosität und Dichte ein. Sie konnten so eine sehr gute Übereinstimmung zwischen kompressiblen und inkompressiblen Größen erreichen (wie beispielsweise bei der Wirbelstärke) und die Unterschiede damit hauptsächlich auf die Dichte- und Temperaturvariation zurückführen. Angewandt auf die RMS-Werte der Geschwindigkeit und die turbulenten Spannungen zeigt sich in dieser Arbeit, dass zwar die Positionen der Maxima, aufgetragen über  $x_2^*$  anstatt  $x_2^+$  nahezu übereinstimmen, in Wandnähe aber dennoch große Unterschiede zwischen den Kurven bleiben. Mit steigender Machzahl wird ausserdem eine Vergrößerung der turbulenten Spannungen in Stromabrichtung festgestellt, während die wandnormalen und spannweitigen turbulenten Spannungen absinken. Diese durch die Kompressibilität verursachte Steigerung der Anisotropie wird durch die Untersuchung des Anisotropietensors bestätigt.

Die Anisotropie der turbulenten Spannungen macht sich auch bei den turbulenten

Skalarflüssen, normiert mit dem diffusiven Skalarfluss an der Wand, bemerkbar. Die Stromabkomponente  $\overline{\rho u_1'' \theta''} / \chi_w$  zeigt eine Vergrößerung, während  $\overline{\rho u_2'' \theta''} / \chi_w$  eine leichte Verkleinerung mit steigender Machzahl erfährt.

Die Ähnlichkeit im Verhalten der Skalar- und Geschwindigkeitsfluktuationen spiegelt sich auch in der hohen Korrelation zwischen  $u_1''$  und  $\theta''$  wider. Der Korrelationskoeffizient ist in Wandnähe fast eins und zeigt einen leichten Anstieg mit steigender Machzahl. Auch die Zweipunktkorrelationen von  $u_1''$  und  $\theta''$  zeigen, aufgetragen über  $x_1^*$  und  $x_2^*$  einen nahezu identischen Verlauf. Der mittlere Abstand der Geschwindigkeits- und Skalar- "streaks" liegt bei den Fällen mit niedriger Machzahl damit wiederum bei etwa 100 *semi-lokalen* Wandeinheiten, ähnlich dem Wert von 100 Wandeinheiten, der in inkompressiblen Strömungen und Grenzschichten mit adiabaten Wänden gefunden wurde. Der Streakabstand scheint sich in den supersonischen Kanalströmungen mit isothermen Wänden mit steigender Machzahl jedoch leicht zu vergrößern, ausserdem ist das Minimum in den Zweipunktkorrelationen stärker ausgeprägt als im inkompressiblen Fall. Der Grund für den grösseren Abstand der Streaks ist unklar, da jedoch die wandnormalen und spannenweitigen Fluktuationen für höhere Machzahlen stark gedämpft werden, die Fluktuationen in Stromabrichtung dagegen größer werden, scheint dieser Effekt mit der sich ändernden Anisotropie einherzugehen.

Die von Coleman *et al.* (1995) beobachtete Vergrößerung der Kohärenz der wandnahen Strukturen wird hier in der viskosen Unterschicht bestätigt. Der von diesen Autoren zur Begründung herangezogene Quotient aus einem turbulenten Zeitmass  $\overline{\rho q^2} / 2 \overline{\mu \omega_i' \omega_i'}$  und dem Zeitmass der mittleren Scherrate  $0.5 d\bar{u}_1 / dy$  steigt an der Stelle  $x_2^* = 10$  an. Die von Freund (1997) bei der Untersuchung von zylindrischen Mischungsschichten propagierte Vermutung, dass die große Ähnlichkeit der Skalar- und reibungsfreien Impulsgleichung, zu der hohen Korrelation zwischen Skalar und  $u_1''$  führt, erwies sich durch Analyse der DNS-Daten als nicht haltbar. In Wandnähe sind zum einen die viskosen Terme nicht vernachlässigbar, zum anderen ist im Gegensatz zu den Mischungsschichten der Druckgradient gegenüber den konvektiven Termen nicht vernachlässigbar. Die viskositätstransformierten Geschwindigkeits- und Skalarprofile zeigen in der viskosen Unterschicht allerdings einen nahezu identischen Verlauf. Chernyshenko & Baig (2003)'s generalisierte 'optimale Störungstheorie' zur Erklärung des Streakabstandes impliziert, dass durch die grosse Ähnlichkeit der Skalar- und  $u_1$ -Geschwindigkeitsfelder derselbe Mechanismus Skalarstreaks generiert mit denselben Abständen und Abmessungen. Dies steht im Gegensatz zu den zylindrischen Mischungsschichten, in denen Kompressibilitätseffekte die hohe Korrelation bewirken.

Um die Anisotropie der turbulenten Spannungen und die beobachteten Kompressibilitätseffekte auf die turbulenten Skalarflüsse zu erklären, wurden deren Bilanzen, normiert mit semilokalen Größen untersucht. Als Normierung für die Bilanzen der turbulenten Spannungen wurde  $\tau_w^2 / \bar{\mu}$  gewählt, für die Bilanzen der turbulenten Skalarflüsse  $\chi_w \tau_w / \bar{\mu}$ . Obwohl die semilokale Skalierung der Bilanzterme besonders für die Produk-

tion und Dissipation der Bilanz in Stromabrichtung funktioniert, liefern besonders die Druckkorrelationen und die Terme in den wandnormalen und spannweitigen Bilanzen große Unterschiede in den einzelnen Simulationen. Der Vergleich der verschiedenen Terme in den Bilanzgleichungen der turbulenten Spannungen und Skalarflüsse zeigt, dass die Druckkorrelationen gemessen an ihrem Betrag die größte Änderung erfahren. In den hier betrachteten supersonischen Kanalströmungen ist die Druckdilatation sehr klein, so dass die Rolle der Druckscherkorrelation, als Umverteiler der turbulenten kinetischen Energie erhalten bleibt. Das Absinken von  $|\Pi_{11}^u|$  hat einen geringeren Energietransfer in die wandnormalen und spannweitigen Komponenten zur Folge. Da in den spannweitigen und wandnormalen Bilanzen der turbulenten Spannungen die Produktion verschwindet und der dominante Quellterm die Druckscherkorrelation ist, führt eine Verkleinerung dieser Komponenten zu reduzierten turbulenten Spannungen und damit Fluktuationen in diesen Richtungen. Die Vergrößerung der Produktion in der Bilanz von  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$  und die verminderte Druckscherkorrelation (ein Senkenterm in dieser Bilanz) sind hauptsächlich für das Anwachsen von  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$  verantwortlich. Das Verhalten der Terme in den Bilanzen der turbulenten Spannungen spiegelt sich in den Termen der Bilanzen der Skalarflüsse wieder. So sinken beispielsweise die Druck-Skalargradientkorrelationen, während die Produktion in der  $\overline{\rho u_1'' \theta''}$ -Bilanz steigt, in der  $\overline{\rho u_2'' \theta''}$ -Bilanz reduziert wird, aufgrund der sinkenden Umverteilung der Schwankungsenergie. Die Schlüsselrolle nimmt damit die Druckscherkorrelation ein.

Die starke Reduktion der Druckkorrelationen mit steigender Machzahl in den Bilanzen der turbulenten Spannungen und Skalarflüsse wurde aus diesem Grund im Detail analysiert. Es zeigte sich, dass die Reduktion auf eine Verminderung der RMS-Werte der Druckfluktuationen, der Skalar- und Geschwindigkeitsgradienten, sowie durch eine erhöhte Dekorrelation, mit steigender Machzahl, zurückzuführen ist. Der große Unterschied zwischen den Druckfluktuationen in kompressiblen und inkompressiblen Kanalströmungen machte eine genauere Untersuchung notwendig. Dazu wurde die Poissongleichung für die Druckfluktuationen über die Green-Funktion gelöst, unter Vernachlässigung der Dichtefluktuationen in den Quelltermen. Diese Vereinfachung ist in den hier betrachteten Strömungen zulässig, da die Green-Funktionslösung für die Druckkorrelationen eine sehr gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten liefert. Der Einfluss der Dichtevariation auf die Druckkorrelation konnte durch Ersetzen von  $\bar{\rho}$  im Quellterm durch  $\rho_w$ , dem inkompressiblen Grenzfall, abgeschätzt werden. Es zeigte sich, dass die Druckkorrelationen des kompressiblen Falls M1.5 nahezu mit denen des inkompressiblen Falls M0.3 übereinstimmten und der Großteil der Reduktion der Druckscher- und Druckskalargradientenkorrelation damit auf die Variation der Dichte in Wandnähe zurückzuführen ist.

Eine physikalischere Begründung für das Scheitern der semi-lokalen Skalierungen in Wandnähe wurde wie folgt geliefert (siehe auch Foysi *et al.* (2004)). Die Nicht-lokalität der Druckfluktuationen hat zur Folge, dass der Druckgradient an einem Ort

$P$  durch den Impuls eines ganzen Wirbels an diesem Ort bestimmt wird. Schätzt man dessen Größe mit Hilfe der wandnormalen Zweipunktkorrelationen ab, dann lässt sich eine effektive Dichte berechnen, die dieses Fluidvolumen sieht. Der Verlauf der effektiven Dichte liegt in Wandnähe unter dem Verlauf der mittleren Dichte und liefert damit eine zusätzliche Begründung dafür, dass die semilokale Skalierung die Effekte der Dichte- und Viskositätsvariation nicht vollständig beschreibt. In diesem Zusammenhang wurden ein viskoses Längenmass und eine Schubspannungsgeschwindigkeit aus der effektiven Dichte konstruiert

$$\begin{aligned} w_\tau^e &= \sqrt{\frac{\overline{\tau_w}}{\bar{\rho}_e} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_e}} \\ l_e^* &= \frac{\bar{\mu}_e}{\bar{\rho}_e w_\tau^e}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Der Unterschied in den Verläufen von beispielsweise  $\overline{\rho u_1'' u_1''}$  und der Produktion in Strömungsrichtung für die einzelnen Simulationen, normiert mit den effektiven Größen konnte in Wandnähe ( $x_2^* < 30$ ) stark reduziert werden und bestätigt damit obige Überlegung.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurden DNS kompressibler isotroper Turbulenz mit vorgegebenem mittleren Skalargradienten, bei einer Reynoldszahl von etwa 55, basierend auf dem Taylorschen Mikrolängenmass, und turbulenten Machzahlen zwischen  $M_t = 0.05$  und  $M_t = 0.63$  berechnet. Um die Turbulenz am Abklingen zu hindern, wurde ein solenoidaler Kraftterm zur Impulsgleichung addiert. Experimente zeigten eine Kombination von Sinus- und Kosinustermen mit einer zufällig gewählten Phase als geeignet. Um den in den bisher erschienenen Arbeiten beobachteten Anstieg der inneren Energie zu verhindern, wurde ein Wärmesenkenterm zu der Druck- und Entropiegleichung addiert, der im Mittel den Anstieg der totalen Energie kompensiert. Damit ist die Bildung von Mittelwerten bei, im statistischen Sinne, gleichen Reynolds- und Machzahlen möglich. Ziel war es, die Abhängigkeit des Skalargradienten von der Verzerrungsrate, der Wirbelstärke und thermodynamischen Größen, sowie deren Auswirkung auf die Ausrichtung des Skalargradienten zu untersuchen. Dazu wurden Transportgleichungen für den Betrag des Skalargradienten, die Eigenvektoren des Verzerrungstensors und den Winkel zwischen dem Skalargradienten und den Eigenvektoren des Verzerrungstensors im kompressiblen Fall abgeleitet. Um den Einfluss der unterschiedlichen Terme zu bestimmen, sind konditionierte Mittelwerte und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen berechnet und für die verschiedenen Fälle verglichen worden. Die durchgeführten Simulationen bestätigen für kleine Machzahlen die Ergebnisse von Brethouwer *et al.* (2003), für inkompressible nichtabklingende Turbulenz mit Skalartransport. Hohe Werte des Skalargradienten findet man in Regionen mit hoher Verzerrungsrate  $s = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}$  unabhängig von der Machzahl. Spaltet man das Geschwindigkeitsfeld mittels einer Helmholtzzerlegung in einen rotationsfreien und einen solenoidalen Anteil auf, so findet man für den solenoidalen Anteil, dass der Skalargradient konditioniert auf  $s$  hohe Werte annimmt, falls auch  $s$  groß ist. Dasselbe gilt für die Fälle mit Machzahlen kleiner  $M_t = 0.6$ .

Für Fall M6 zeigt sich aber ein starker qualitativer Unterschied, der Skalargradient ist hier unabhängig vom kompressiblen Anteil der Verzerrungsrate. Die Untersuchung des Produktionsterms in der Transportgleichung des Skalargradienten und der Ausrichtung des Skalargradienten bezüglich der Eigenvektoren des kompressiblen und inkompressiblen Anteils des Verzerrungstensors klärte dieses Verhalten. Betrachtet man die Ausrichtung des Skalargradienten bezüglich der Eigenvektoren des inkompressiblen Anteils des Verzerrungstensors, so sieht man wie in inkompressiblen Strömungen die Tendenz, sich in Richtung des zur stärksten Stauchung gehörigen Eigenvektors  $e_1^I$  von  $S_{ij}^I$  auszurichten. Gegenüber den Eigenvektoren des kompressiblen Anteils des Verzerrungstensors richtet sich der Skalargradient dagegen in die Richtung von  $e_3$  aus, dem zum größten positiven Eigenwert gehörigen Eigenvektor. Der kompressible Anteil des Produktionsterms ist darum negativ und sorgt somit für das oben beschriebene Verhalten des Skalargradienten konditioniert auf den kompressiblen Anteil der Verzerrungsrate.

Der Skalargradient, konditioniert auf die Wirbelstärke weist in Regionen hoher Wirbelstärke niedrige Werte auf. Gleichzeitig ist der Wirbelstärkevektor mit hoher Wahrscheinlichkeit in Richtung von  $e_2$ , dem zum mittleren Eigenwert gehörigen Eigenvektor, ausgerichtet. Eine niedrigere, mit steigender Machzahl sinkende Wahrscheinlichkeit besteht auch für eine Ausrichtung in Richtung von  $e_3$ .

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Eigenwerte zeigt, dass die Kompressibilität hauptsächlich auf die Flanken der PDF wirkt. Wie im Inkompressiblen ist der Mittelwert für den Eigenwert  $s_1$  negativ, für die anderen beiden Eigenwerte positiv. Mit steigender Machzahl sinkt beispielsweise die Wahrscheinlichkeit für große positive Werte von  $s_2$ , während sie für große negative Werte steigt. Die Eigenwerte des kompressiblen Anteils von  $S_{ij}$  zeigen dasselbe Verhalten, gleichzeitig wird der Mittelwert von  $s_2^C$  mit steigender Machzahl negativ.

Die Ausbildung von Fronten aufgrund der zwei Expansionsrichtungen und einer Kompressionsrichtung bleibt wie im inkompressiblen bestehen, allerdings impliziert das gefundene Verhalten der Eigenwerte, dass sich die lokale instantane Strömungstopologie aufgrund der Kompressibilität ändert. Der Skalargradient, konditioniert auf die drei Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors gibt einen weiteren Hinweis darauf. Er besitzt die grössten Werte in Regionen mit einer instabilen Knoten/Sattelpunkt/Sattelpunkt-Topologie und positiven Werten der Divergenz. Bei negativen Werten der Divergenz konzentrieren sich die größten Skalargradienten im Bereich  $R = Q = 0$ . Die DNS-Ergebnisse zeigten, dass mit zunehmender Machzahl die Wahrscheinlichkeit für hohe Skalargradienten in Regionen einer stabilen Fokus/Dehnungstopologie zunimmt und die Skalarfronten dadurch "geglättet" werden. Visualisierungen des Skalar- und Geschwindigkeitsfeldes zeigten auch tatsächlich, dass die Feinstruktur mit steigender Machzahl abnimmt. Bei den hier untersuchten Machzahlen ist dieser Effekt allerdings schwach, Simulationen mit höherer Machzahl wären interessant, um die hier gefundenen Ergebnisse zu bestätigen oder zu präzisieren. Da der Wirbelstärkevektor in Richtung von

$e_2$  zeigt, erfährt er, abhängig vom Vorzeichen von  $s_2$ , eine Streckung oder Stauchung. Da hier mit steigender Machzahl eine leicht erhöhte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten negativer Werte von  $s_2$ , bzw. eine Reduktion grosser Werte, gefunden wurde, impliziert das eine Reduktion des sogenannten Wirbelstreckterms  $s_i \hat{\omega}_i^2$ . Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der Arbeit von Miura (2004), der in abklingender kompressibler isotroper Turbulenz nachwies, dass sich der Einfluss der Kompressibilität in einer Reduktion der Wirbelstreckung äussert.

Aufgrund der Tendenz der Dichte- und Viskositätsgradienten, sich in Richtung von  $e_1$  auszurichten, ist der Skalargradient direkt von den Dichte- und Viskositätsvariationen abhängig: in Regionen mit hoher Gradienten dieser Größen findet man auch die größten Skalargradienten. Der Skalargradient, konditioniert auf die Divergenz, zeigt dasselbe Verhalten und steigt für große positive Werte der Divergenz stark an.

Der Einfluss des mittleren Skalargradienten auf die Skalarmikrostruktur wurde durch Auswertung der Größe  $\langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle / |\mathbf{g}|$  untersucht. Es zeigte sich, dass der Skalargradient unabhängig von der Machzahl dann große Werte annimmt, wenn er in Richtung des ausgeprägten Skalargradienten  $\mathbf{g}$  zeigt. Wie schon Brethouwer *et al.* (2003) für isotrope inkompressible Turbulenz feststellte, ist die Mikrostruktur des Skalarfeldes dadurch direkt von den großen Skalen beeinflusst.

Dieselben Analysen für die supersonischen Kanalströmungen liefern in der Kanalmitte nahezu die gleichen Ergebnisse wie für die isotrope Turbulenz zuvor. Die Ausrichtung des Skalargradienten in Richtung von  $e_1$  ändert sich allerdings zur Wand hin, bei der schliesslich ein 45 Grad Winkel zwischen  $\mathbf{n}$  und  $e_1$  bzw.  $e_3$  vorliegt. Die Dichte- und Viskositätsgradienten verhalten sich analog, so dass der Skalargradient über den gesamten Kanal in Regionen mit hohen  $\nabla \rho$  und  $\nabla \mu$  maximal ist. Auf die Ausrichtung des Skalargradienten dagegen wurden nur sehr schwache Kompressibilitätseffekte festgestellt. Konditioniert auf die Verzerrungsrate nimmt der Skalargradient über den gesamten Kanal große Werte für hohe Werte von  $s$  an. Interessant ist, dass der Skalargradient konditioniert auf die Wirbelstärke in Wandnähe dasselbe Verhalten zeigt, während sich die Abhängigkeit zur Kanalmitte hin ändert und wieder das Verhalten wie in isotroper Turbulenz auftritt.

Insgesamt erkennt man nur einen äusserst schwachen Einfluss der Kompressibilität auf die Ausrichtung des Skalargradienten sowohl in der kompressiblen isotropen Turbulenz, als auch in der supersonischen Kanalströmung. Mischungsmodelle (ohne Reaktion), die auf der Ausrichtung des Skalargradienten basieren, wie beispielsweise das Modell von Peters & Trouillet (2002), können für ähnliche Strömungstypen in die kompressible Turbulenz übertragen werden. In wandgebundenen Strömungen muss allerdings die sich ändernde Ausrichtung von  $\mathbf{n}$  bezüglich des zur stärksten Stauchung gehörigen Eigenvektors berücksichtigt werden.

Mit fortschreitender Computerperformance sollte es auch möglich sein, hypersonische Kanalströmungen detailliert zu simulieren, um ein besseres Verständnis von Kom-

pressibilitätseffekten im Bereich des Hyperschalls zu erlangen. Gerade in jüngster Zeit ist das Interesse an hypersonischen Passagierflugzeugen wiedererstartet. Die extremen physikalischen Effekte stellen jedoch auch extreme Anforderungen an die Leistungsfähigkeit der Computer-Codes. Allein die Simulation M3.5 dieser Arbeit benötigte fast vier Monate Rechenzeit auf 128 Prozessoren der Hitachi SR8000-F1, einem der schnellsten Rechner Europas.

## A Poissongleichung für die Druckfluktuationen

Zur Herleitung der Poissongleichung für die Druckfluktuationen wird von der Poissongleichung für den Druck ausgegangen, die man nach der Bildung der Divergenz der Impulsgleichung erhält,

$$\Delta p = -(\rho u_i u_j)_{,ij} + \tau_{ij,ij} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}, \quad (\text{A.1})$$

mit der zur Vereinfachung verwendeten Schreibweise  $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Spaltet man die Geschwindigkeit wiederum in Favre- Mittelwerte und Fluktuationen auf  $u_i = \tilde{U}_i + u_i''$  und die Dichte in Reynoldsmittelwert und Fluktuation  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ , dann liefert Einsetzen in die obige Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta p' &= -(\tilde{U}_i \bar{\rho} u_j'' + \tilde{U}_j \bar{\rho} u_i'' + \tilde{U}_i \rho' u_j'' + \tilde{U}_j \rho' u_i'' + \tilde{U}_i \tilde{U}_j \rho' + \bar{\rho} u_i'' u_j'' + \rho' u_i'' u_j'')_{,ij} \\ &\quad + \tau'_{ij,ij} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} + (\overline{\rho u_i'' u_j''})_{,ij} \\ &= -2\tilde{U}_{i,j}(\bar{\rho} u_j'')_{,j} - 2\tilde{U}_{i,i}(\bar{\rho} u_j'')_{,j} - (\bar{\rho} u_i'' u_j'')_{,ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''}_{,ij} \\ &\quad - 2\tilde{U}_{i,ij}(\bar{\rho} u_j'') - \rho'(\tilde{U}_{i,i})^2 - \rho'(\tilde{U}_{i,j} \tilde{U}_{j,i}) \\ &\quad - 2\tilde{U}_{i,j}(\rho' u_j'')_{,i} - 2\tilde{U}_{i,i}(\rho' u_j'')_{,j} - 2\tilde{U}_{i,ij}(\rho' u_j'') \\ &\quad - (\rho' u_i'' u_j'')_{,ij} + \frac{D}{Dt} \frac{D}{Dt} \rho' + \tau'_{ij,ij}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

nach Verwendung von

$$\begin{aligned} 2(\tilde{U}_i \rho u_j'')_{,ij} &= 2\tilde{U}_{i,ij} \bar{\rho} u_j'' + 2\tilde{U}_{i,i}(\bar{\rho} u_j'')_{,j} \\ &\quad + 2\tilde{U}_{i,j}(\bar{\rho} u_j'')_{,i} + 2\tilde{U}_i(\rho u_j'')_{,ij}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} (\tilde{U}_j \tilde{U}_i \rho')_{,ij} &= \rho' \tilde{U}_{i,j} \tilde{U}_{j,i} + \rho'(\tilde{U}_{i,i})^2 + 2\rho' \tilde{U}_i \tilde{U}_{j,i} \\ &\quad + 2\rho'_{,j} \tilde{U}_i \tilde{U}_{j,i} + 2\rho'_{,j} \tilde{U}_{i,i} \tilde{U}_j. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} &:= \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\tilde{U}_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} + \tilde{U}_i \tilde{U}_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \rho' \\ &= \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - 2\tilde{U}_j(\rho u_i'')_{,ij} - 2\tilde{U}_j \rho' \tilde{U}_{i,ij} \\ &\quad - 2\tilde{U}_j \rho'_{,i} \tilde{U}_{i,j} - 2\tilde{U}_j \rho'_{,j} \tilde{U}_{i,i} - \tilde{U}_i \tilde{U}_j \rho'_{,ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Es kann gezeigt werden, dass letzterer Ausdruck Galilei-invariant ist. In einer vollentwickelten turbulenten Kanalströmung ( $x_2$  wandnormale Richtung) erhält man

$$\begin{aligned} \Delta p' &= -\bar{\rho}(u_i'' u_j'' - \overline{u_i'' u_j''})_{,ij} - 2\bar{\rho} \tilde{u}_{1,2} u_{2,1}'' + \sigma'_{ij,ij} - 2\bar{\rho}_{,2}(u_2'' u_j'' - \overline{u_2'' u_j''})_{,j} \\ &\quad - \bar{\rho}_{,22}(u_2''^2 - \overline{u_2''^2}) - 2\tilde{u}_{1,2}(\rho' u_2'')_{,1} - (\rho' u_i'' u_j'' - \overline{\rho' u_i'' u_j''})_{,ij} - D_{tt} \rho' \end{aligned}$$

## B Zur Herleitung der Transportgleichung für $g$

Die Vorgehensweise zur Herleitung von Gleichung (4.23) soll hier kurz skizziert werden. Es gilt

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{g^2} \left\langle \mathbf{g}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{g} \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right\rangle.$$

Differentiation der Skalartransportgleichung ergibt für den konvektiven Term:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\text{linke Seite}) = \frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} g_j + u_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{Dg_i}{Dt} + S_{ij} g_j + \Omega_{ij} g_j,$$

mit  $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k$ , also

$$\frac{D\mathbf{g}}{Dt} + \mathbf{S}\mathbf{g} + \frac{1}{2} \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Die rechte Seite (ohne mittleren Gradienten) liefert:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho D g_j) \right] = \\ & - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \rho D}{\partial x_j} g_j + \rho D \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right) \\ & \quad = - \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \langle \nabla(\rho D), \mathbf{g} \rangle + \rho D \langle \nabla, \mathbf{g} \rangle) \\ & \quad + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial(\rho D)}{\partial x_i} \right] g_j + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho D)}{\partial x_i} \right] \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \\ & \quad \quad \quad \frac{1}{\rho} \langle \mathbf{g}, \nabla \rangle \nabla(\rho D) + \frac{1}{\rho} \nabla(\rho D) \langle \nabla, \mathbf{g} \rangle \\ & \quad + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D)}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} (\rho D) \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial x_j}. \\ & \quad \quad \quad \frac{1}{\rho} \langle \nabla(\rho D), \nabla \rangle \mathbf{g} + D \Delta \mathbf{g} \end{aligned}$$

Die symbolische Schreibweise in den letzten beiden Termen erhält man beispielsweise unter Verwendung von  $\frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 \theta}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j^2}$ . Der zweite Term unter der Klammer der ersten Zeile, sowie ein Teil des zweiten Terms unter der Klammer der zweiten Zeile heben sich auf und ergeben  $\nabla D \langle \nabla, \mathbf{g} \rangle$ .

Für die Terme die  $\mathbf{g}$  enthalten bekommt man dieselben Ergebnisse, die dann unter Verwendung von  $\mathbf{g} = (0, 0, |\mathbf{g}|)$  vereinfacht werden können.

## References

- ADAMS, N. A. & SHARIFF, K. 1996 A high-resolution hybrid compact-ENO scheme for shock-turbulence interaction problems. *J. of Comput. Physics* **127**, 27.
- DEL ALAMO, J. C. & JIMENEZ, J. 2001 Direct numerical simulation of the very large anisotropic scales in a turbulent channel. *Annual Research Briefs 2001* .
- ASHURST, W., KERSTEIN, A., KERR, R. & GIBSON, C. 1987 Alignment of vorticity and scalar gradient with strain rate in simulated Navier-Stokes turbulence. *Phys. Fluids* **30**, 2343–2353.
- BAUM, M., POINSOT, T. & THÉVENIN, D. 1994 Accurate boundary conditions for multicomponent reactive flows. *jcp* **116**, 247–261.
- BOGEY, C. & BAILLY, C. 2004 A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computation. *J. Comput. Physics* **194**, 194–214.
- BRETHOUWER, G., HUNT, J. & NIEUWSTADT, F. 2003 Micro-structure and Lagrangian statistics of the scalar field with a mean gradient in isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mech.* **474**, 193–225.
- CAI, X., O'BRIAN, E. & LADEINDE, F. 1998 Advection of mass fraction in forced, homogeneous, compressible turbulence. *Phys. Fluids* **10(9)**, 2249–2259.
- CANTWELL, B. 2003 *Fundamentals of Compressible Flow*.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M., QUARTERONI, A. & ZANG, T. 1987 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer.
- CARPENTER, M., GOTTLIEB, D. & ABARBANEL, S. 1993 The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes. *jcp* **108**, 272–295.
- CELANI, A., LANOTTE, A., MAZZINO, A. & VERGASSOLA, M. 2003 Fronts in passive scalar turbulence. *arXiv:nlin.CD/0009014v1* pp. 1–17.
- CHASSAING, P., ANTONIA, R., ANSELMET, F., JOLY, L. & SARKAR, S. 2002 *Variable Density Fluid Turbulence*. Kluwer Academic Publishers.
- CHEN, J., CHONG, M., SORIA, J., SONDERGAARD, R., PERRY, A., ROGERS, E. & CANTWELL, B. 1990 A study of the topology of dissipating motions in direct numerical simulations of time-developing compressible and incompressible mixing layers. *Proceedings of the Summer Program, CTR* .

- CHERNYSHENKO, S. & BAIG, M. 2003 The mechanism of streak formation in near-wall turbulence. *submitted to Journal of Fluid Mechanics* .
- COLEMAN, G., KIM, J. & MOSER, R. 1995 Turbulent supersonic isothermal-wall channel flow. *J. Fluid Mech.* **305**, 159–183.
- DEBUSSCHERE, B. & RUTLAND, C. J. 2004 Turbulent scalar transport mechanisms in plane channel and Couette flows . *Int. J. Heat and Mass Transfer* **47**, Issues 8-9, 1771–1781.
- DENNERY, P. & KRZYWICKI, A. 1996 *Mathematics for Physicists*. Dover.
- DRESSELHAUS, E. & TABOR, M. 1991 The kinematics of stretching and alignment of material elements in general flow fields. *Journal of Fluid Mech.* **236**, 415–444.
- DUBIEF, Y. 2003 Numerical simulation of high drag reduction in a turbulent channel with polymer additives. *Center of Turbulence Research, Stanford* .
- FOYSI, H., SARKAR, S. & FRIEDRICH, R. 2003 On Reynolds Stress Anisotropy in Compressible Channel Flow. *Proceedings, Third International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, Sendai, Japan, 2003*, Vol. III, 1103–1108.
- FOYSI, H., SARKAR, S. & FRIEDRICH, R. 2004 Compressibility Effects and Turbulence Scalings in Supersonic Channel Flow. *J. Fluid Mech.* **509**, 207–216.
- FREUND, J. 1997 Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. *Dissertation* .
- GONZALEZ, M. & PARANTHOEN, P. 2004 On the role of vorticity in the microstructure of a passive scalar field. *Phys. of Fluids* **16(1)**, 219–221.
- GUSTAFSSON, B., KREISS, H. & OLIGER, J. 1995 *Time Dependent Problems and Difference Methods*. Wiley.
- HAMBA, F. 2004 Nonlocal expression for scalar flux in turbulent shear flow. *Phys. of Fluids* **16(5)**, 1493–1508.
- HUANG, P. & COLEMAN, G. 1994 Van Driest Transformation and Compressible Wall-Bounded Flows. *aiaa* **32**, 2110–2113.
- HUANG, P., COLEMAN, G. & BRADSHAW, P. 1995 Compressible turbulent channel flows: DNS results and modelling. *J. Fluid Mech.* **305**, 185–218.
- HUNT, J. & DURBIN, P. 1999 Perturbed vortical layers and shear sheltering. *Fluid Dynamics Research* **24**, 375–404.

- I. A. DUFF, H. A. V. D. V. 1999 Developements and Trends in the Parallel Solution of Linear Systems. *Parallel Computing* **25**, 1931–1970.
- JABERI, F., LIVESCU, D. & MADNIA, C. 2000 Characteristics of chemically reacting compressible homogeneous turbulence. *Phys. of Fluids* **12(5)**, 1189–1209.
- JIMENEZ, J. 1998 The largest scales of turbulent wall flows. *Annual Research Briefs 1998*.
- JOHANSSON, A. V. & WIKSTRÖM, P. M. 1999 DNS and Modelling of Passive Scalar Transport in Turbulent Channel Flow with a Focus on Scalar Dissipation Rate Modelling. *Flow, Turbulence and Combustion* **63**, 223–245.
- KAWAMURA, H., ABE, H. & SHINGAI, K. 2000 DNS of Turbulence and Heat Transport in a Channel Flow with Different Reynolds and Prandtl Numbers and Boundary Conditions. *Turbulence, Heat and Mass Transfer* 3 pp. 15–32.
- KAWAMURA, H., HIROYUKI, A. & MATSUO, Y. 1999 DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects. *Heat and Fluid Flow* **20**, 196–207.
- KERR, R. M. 1985 Higher-order derivative correlations and the alignment of small-scale structures in isotropic numerical turbulence. *Journal of Fluid Mech.* **153**, 31–58.
- KIDA, S. & ORSZAG, S. 1990 Energy and Spectral Dynamics in Forced Compressible Turbulence. *J. of Scientific Comp.* **5**, 85–125.
- KIM, J. 1989 On the structure of pressure fluctuations in simulated turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* **205**, 421–451.
- KIM, J. & MOIN, P. 1987 Transport of passive scalars in a turbulent channel flow. In *Proceedings, Sixth Symposium on Turb. Shear Flows, Toulouse, Sept. 1987* (ed. L. Fu-lachier, J. L. Lumley & F. Anselmet).
- KIM, J., MOIN, P. & MOSER, R. D. 1987 Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **177**, 133–166.
- KING, A., BILLINGHAM, J. & OTTO, S. 2003 *Differential Equations*. Cambridge University Press.
- KOVASZNAY, L. 1953 Turbulence in supersonic flow. *J. of the Aeronautical Sci.* **20(10)**, 657–682.
- LECHNER, R. B. 2001 *Kompressible turbulente Kanalströmungen*. VDI Verlag.

- LEE, M., KIM, J. & MOIN, P. 1990 Structure of turbulence at high shear rate. *J. Fluid Mech.* **216**, 561–583.
- LELE, S. K. 1992 Compact Finite Differences Schemes with Spectral-like Resolution. *J. Comput. Phys.* **103**, 16–42.
- LOU, H. & MILLER, R. S. 2001 On the scalar probability density function transport equation for binary mixing in isotropic turbulence. *Phys. Fluids* **13(11)**, 3386–3399.
- LOU, H. & MILLER, R. S. 2004 On ternary species mixing and combustion in isotropic turbulence at high pressure. *Phys. Fluids* **16(5)**, 1423–1438.
- MACINTYRE, S. 1998 Physical Processes in Lakes and Oceans. *Coastal and Estuarine Studies* **54**, 561–590.
- MANHART, M. & FRIEDRICH, R. 1999 Direct numerical simulation of turbulent channel flow of a viscous anisotropic fluid. *Preprint SFB-438-9916* .
- MILLER, R. S. 2000 Long time mass fraction statistics in stationary compressible isotropic turbulence at supercritical pressure. *Phys. Fluids* **12(8)**, 2020–2032.
- MIURA, H. 2004 Excitations of vortex waves in weakly compressible isotropic turbulence. *J. of Turbulence* **5**.
- MOHSENI, K., SHKOLLER, S., KOSOVIC, B. & MARSDEN, J. 2001 Numerical simulations of the lagrangian averaged Navier-Stokes (LANS- $\alpha$ ) equations for forced homogeneous isotropic turbulence . *AIAA* **2001-2645**.
- MORINISHI, Y., TAMANO, S. & NAKABAYASHI, K. 2004 Direct numerical simulation of compressible turbulent channel flow between adiabatic and isothermal walls. *J. Fluid Mech.* **502**, 273–308.
- MOSER, R., KIM, J. & MANSOUR, N. N. 1999 Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$ . *Physics of Fluids* **9**, 943–945.
- MÜLLER, B. 1990 Linear Stability Condition for Explicit Runge-Kutta Methods to Solve the Compressible Navier-Stokes Equations. *Math. Methods i. Appl. Sci.* **12**, 139–151.
- PANTANO, C. & SARKAR, S. 2002 A Study of Compressibility Effects in the High-Speed, Turbulent Shear Layer using Direct Simulation. *J. Fluid Mech.* **451**, 329–371.
- PETERS, N. & TROUILLET, P. 2002 On the Role of Quasi-one-dimensional Dissipation Layers in Turbulent Scalar Mixing. *Center of Turbulence Research, Stanford* .
- POINSOT, T. & LELE, S. 1992 Characteristic boundary conditions. *jcp* **101**, 104.

- POPE, S. B. 2000 *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- POVITSKY, A. 1998 Parallelization of the Pipelined Thomas Algorithm. *ICASE Report 98-48*.
- PTASINSKI, P., BOERSMA, B., NIEUWSTADT, F., HULSEN, M., VAN DEN BRULE, B. & HUNT, J. 2003 Turbulent channel flow near maximum drag reduction: simulations, experiments and mechanisms. *Journal of Fluid Mech.* **490**, 251–291.
- RICHARDSON, L. 1922 *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press .
- RICKER, P. 2003 *Computational Astrophysics and Cosmology. Lecture Notes, University of Illinois* .
- RICKER, P. 2004 homepage. <http://www.astro.uiuc.edu/pmricker/research/type1a/> .
- SAMTANEY, R., PULLIN, D. & KOSOVIC, B. 2000 Direct Numerical Simulation of Decaying Compressible Turbulence. *Center f. Simulation of Dyn. Resp. of Mat., Caltech Technical Report 037*.
- SARKAR, S. 1995 The stabilizing effect of compressibility in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.* **282**, 163–186.
- SCHMID, P. & HENNINGSON, D. 2001 *Stability and Transition in Shear Flows*. Springer.
- SCHUMANN, U. 1984 Generation of random periodic velocity and temperature fields with prescribed correlation spectra. *DLR IB 553 6/84*.
- SEKI, Y., ABE, H. & KAWAMURA, H. 2003 DNS of turbulent heat transfer in a channel flow with different thermal boundary conditions. *6th ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference, March 16-20* pp. 1–8.
- SESTERHENN, J. 2001 A characteristic-type formulation of the Navier–Stokes equations for high order upwind schemes. *Comput. Fluids* **30**, 37.
- SMITS, A. & DUSSAUGE, J. P. 1996 *Turbulent shear layers in supersonic flows*. American Institute of Physics Press.
- STILLER, J. 1995 Zum Randwertproblem für die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. *Institutsbericht I 1505* p. 30.
- STOLZ, S. & ADAMS, N. 1999 An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation. *Phys. Fluids* **11**, 1699–1701.

- SUTHERLAND, J. & KENNEDY, C. 2003 Improved boundary conditions for viscous, reacting, compressible flows. *jcp* **191**, 502–524.
- T. EIDSON, G. E. 1995 Implementation of a fully-balanced periodic tridiagonal solver on a parallel distributed memory architecture. *Concurrency: Practice and Experience* **7 no. 4**.
- TREFETHEN, L. 1996 *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. unpublished text, available at <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/nick.trefethen/pdtext.html>.
- VICHNEVETSKY, R. & BOWLES, J. 1982 *Fourier Analysis of Numerical Approximations of Hyperbolic Equations*. SIAM, Philadelphia.
- VINCENT, A. & MENEGUZZI, M. 1991 The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.* **225**, 1–20.
- WHITE, F. 1991 *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill.
- WILLIAMSON, J. K. 1980 Low-Storage Runge-Kutta Schemes. *J. Comput. Phys.* **35**, 48–56.
- ZHONG, X. & TATINENI, M. 2003 High-order non-uniform grid schemes for numerical simulation of hypersonic boundary-layer stability and transition. *jcp* **190**, 419–458.
- ZINGG, D. 1997 Aspects Of Linear Stability Analysis For Higher-Order Finite-Difference Methods. *AIAA J.* **97-1939**, 1–11.

# Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die der Fakultät für  
Maschinenwesen  
der Technischen Universität München zur Promotionsprüfung  
vorgelegte Arbeit mit dem Titel:

*Transport passiver Skalare in wandgebundener und isotroper kompressibler Turbulenz*

in der Abteilung Strömungsmechanik  
unter der Anleitung und Betreuung durch

Prof. Dr.-Ing. R. Friedrich

ohne sonstige Hilfe erstellt und bei der Abfassung nur die gemäß § 6 Abs. 5  
angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Ich habe die Dissertation in keinem anderen Prüfungsverfahren als Prüfungsleistung  
vorgelegt.

Die vollständige Dissertation wurde in

..... veröffentlicht.

Die Fakultät für ..... hat der Vorveröffentlichung zugestimmt.

Ich habe den angestrebten Doktorgrad noch nicht erworben und bin nicht in einem  
früheren Promotionsverfahren für den angestrebten Doktorgrad endgültig gescheitert.

Ich habe bereits am ..... bei der  
Fakultät für .....

der Hochschule .....

unter Vorlage einer Dissertation mit dem Thema .....

.....

die Zulassung zur Promotion beantragt mit dem Ergebnis:

.....

Die Promotionsordnung der Technischen Universität München ist mir bekannt.

München, den .....

# Curriculum Vitae

Nachname: Foyssi

Vorname: Holger

Staatsangehörigkeit: Deutsch

02.09.1974: Geboren in München, Deutschland

1981-1985: Grundschule in Erding, Deutschland

1985-1994: Gymnasium in Erding, Deutschland,  
Abschluss mit Abitur

1994-1995: Wehrdienst

1995-2000: Techn. Universität München,  
Studium der Physik

2000: Abschluss mit Diplom in Techn. Physik

01.10.2000-  
01.10.2004: Doktorand am Lehrstuhl für Fluidmechanik,  
Fachgebiet Strömungsmechanik, der  
Techn. Universität München