

Lehrstuhl für Thermodynamik
Technische Universität München

Hybrides Berechnungsverfahren
für thermoakustische Instabilitäten
von Mehrbrennersystemen

Christian Pankiewitz

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen
der Technischen Universität München
zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTOR – INGENIEURS
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Heinz Ulbrich
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Rainer Friedrich

Die Dissertation wurde am 15.03.2004 bei der Technischen
Universität München eingereicht und durch die Fakultät für
Maschinenwesen am 24.05.2004 angenommen.

Für Katja und Frida

Vorwort

Diese Dissertation entstand in meiner Zeit als Assistent am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München. Ausdrücklich danken möchte ich deshalb dem Lehrstuhlinhaber, Herrn Professor Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer, für die hervorragende Betreuung und die Übernahme des Hauptreferats. Er gab mir die Anregung für das Thema und half stets, die wissenschaftlichen Fähigkeiten zu erwerben und zu fördern, die für die Bearbeitung nötig waren. Gleichzeitig bewies er starkes Vertrauen, indem er mir große Freiheit bei der Ausgestaltung lies. Umso mehr freut es mich, dass es aufbauend auf den Ergebnissen der Arbeit gelungen ist Forschungsvorhaben zu initiieren, die nun neue Mitarbeiter des Lehrstuhls zur Promotion führen werden.

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Rainer Friedrich danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferats und die überaus aufmerksame Würdigung der Arbeit. Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Heinz Ulbrich gilt mein Dank für den Vorsitz bei der mündlichen Prüfung.

Mein Dank geht auch ausnahmslos an alle Kolleginnen und Kollegen des Lehrstuhls, vom Sekretariat über die Werkstatt bis hin zu den wissenschaftlichen Mitarbeitern. Sie zeichnen verantwortlich für die ausgesprochen angenehme und freundschaftliche Atmosphäre und waren stets zur tatkräftigen Unterstützung bereit, wo immer diese auch nötig war. Dasselbe gilt für die Studierenden, die durch ihre Hilfe zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Besonders erwähnen möchte ich unter den Mitarbeitern oder ehemaligen Mitarbeitern des Lehrstuhls diejenigen, die mir mit der Zeit mehr als Kollegen waren, die ich in freundschaftlicher Erinnerung behalte und zu denen ich den Kontakt auch in Zukunft keinesfalls verlieren möchte: die Herren Dr.-Ing. Markus Rothenwöhler, Dr.-Ing. Martin Kröner, Dr.-Ing. Jassin Fritz, Thomas Lex, Marcus Pöschl und Fabian Hoseit.

Möglich geworden wäre diese Arbeit letztendlich auch nicht ohne meine Eltern. Sie haben mir immer die Freiheit gelassen meinen eigenen Weg zu gehen und mir dabei dennoch jegliche Unterstützung gegeben. So verdanke ich ihnen zu einem wesentlichen Teil die Ausbildung, die mich dahin gebracht hat, diese Zeilen schreiben zu können. Dafür ein herzliches „Vergelts Gott“!

Zum Schluss gilt mein ganz besonderer Dank aber meiner geliebten Frau Katja. Sie hat meinen Bemühungen für diese Arbeit einen neuen Sinn hinzugefügt. Sie war mir in einer Zeit, die vielfältige persönliche Veränderungen mit sich gebracht hat, Antrieb und Rückhalt zugleich. Und sie war bereit, auf eigene Bedürfnisse zu verzichten, um mir die Fertigstellung der Arbeit zu ermöglichen. Diese Unterstützung werde ich immer in dankbarer Erinnerung behalten.

Stuttgart, im August 2004

Christian Pankiewitz

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Verbrennungsschwingungen	1
1.1.1	Begriff und Mechanismus	1
1.1.2	Bedeutung in der Technik	5
1.1.3	Berechnungsverfahren	8
1.2	Zielsetzung der Arbeit	16
2	Akustische Grundlagen	19
2.1	Ausbreitung von Störungen	19
2.1.1	Allgemeines	19
2.1.2	Linearisierte Störungsgleichungen	21
2.2	Akustische Grundgleichungen	30
2.2.1	Vorbemerkung	30
2.2.2	Wellengleichung für den Schalldruck	32
2.2.3	Harmonische Wellen und Helmholtz-Gleichung	34
2.3	Wellenausbreitung in einer Dimension	37
2.3.1	Ebene Wellen	37
2.3.2	Akustische Netzwerke und Transfermatrizen	40
2.3.3	Nicht ebene Moden	42
3	Numerische Verfahren	49
3.1	Simulationsumgebung	49
3.1.1	Anforderungen	49
3.1.2	Auswahl und Eigenschaften	52
3.2	Partielle Differentialgleichungen	54
3.2.1	Stationäre Probleme	54
3.2.2	Schwache Formulierung	57
3.2.3	Zeitabhängige Probleme	60
3.2.4	Wellengleichungen	61
3.3	Methode der finiten Elemente	62
3.3.1	Vernetzung der Geometrie	62
3.3.2	Ansatzfunktionen	63
3.3.3	Diskretisierung des Problems	66
3.3.4	Lösungsverfahren	70

3.4	Numerische Fehler	71
3.4.1	Allgemeines	71
3.4.2	Testkonfiguration	73
3.4.3	Dispersion	76
3.4.4	Numerische Dämpfung	79
3.4.5	Bewertung	85
4	Simulation im Zeitbereich	87
4.1	Beschreibung der Methode	87
4.1.1	Ansatz und Grundgleichung	87
4.1.2	Kopplung des Flammenverhaltens	90
4.1.3	Anfangsbedingung	92
4.1.4	Randbedingungen	94
4.1.5	Ablauf der Berechnung	97
4.2	Einbindung von Flammenmodellen	98
4.2.1	Flammentransferfunktion	98
4.2.2	Sättigung	100
4.2.3	Analytische Modelle	103
4.2.3.1	Algebraische Modelle	103
4.2.3.2	Differentialgleichungen	105
4.2.4	Frequenzgänge	107
4.2.4.1	Parametrisierte Modelle	107
4.2.4.2	Zeitdiskrete Form	110
4.3	Methoden zur Auswertung	117
4.3.1	Auswertung von Zeitreihen	117
4.3.2	Nutzung des analytischen Signals	118
4.3.2.1	Analytisches Signal	118
4.3.2.2	Anfachungsrate und Frequenz	120
5	Simulation einer Modell-Ringbrennkammer	123
5.1	Vorbemerkung	123
5.2	Modell	124
5.2.1	Geometrie	124
5.2.2	Mittlere und dimensionslose Größen	128
5.2.3	Randbedingungen	131

5.2.4	Akustische Eigenmoden	134
5.2.5	Flammenmodell	137
5.2.6	Numerische Aspekte	140
5.3	Ergebnisse	142
5.3.1	Entwicklung von Störungen	142
5.3.2	Grenzzyklen	145
5.3.3	Stabilität und Eigenmoden	154
6	Zusammenfassung und Ausblick	168
	Anhang A: Ersatzbeziehung für die Energiegleichung	173
	Anhang B: Simulation von Transfermatrizen	175
B.1	Allgemeines und Motivation	175
B.2	Beschreibung der Methode	176
B.2.1	Bestimmung von Transfermatrizen	176
B.2.2	Simulationsverfahren	182
B.2.2.1	Grundlage	182
B.2.2.2	Randbedingungen	183
B.2.2.3	Flammentransferfunktion	184
B.2.2.4	Ablauf der Berechnung	185
B.2.2.5	Verifikation	186
B.3	Anwendung	188
B.3.1	Beispielkonfiguration	188
B.3.2	Finite-Element-Modell	190
B.3.3	Ergebnisse	192
B.3.3.1	Isotherme Strömung	192
B.3.3.2	Reagierende Strömung	195
B.4	Schlussfolgerungen	198
	Anhang C: Parametrisiertes Flammenmodell	200
C.1	Vorbemerkung	200
C.2	Identifizierung des Modells	200
C.3	Verwendung im Zeitbereich	202
	Literatur	205

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

A	$[m^2]$	Fläche
A		präexponentieller Faktor
a_l		Parameter in zeitdiskretem Flammenmodell
b_k		Parameter in zeitdiskretem Flammenmodell
C		Konstante
c	$[m/s]$	Schallgeschwindigkeit
c_g	$[m/s]$	Gruppengeschwindigkeit
c_p	$[J/kg\ K]$	spezifische Wärmekapazität
c_{ph}	$[m/s]$	Phasengeschwindigkeit
D		Konstante
$F(\omega)$		Transferfunktion
f	$[1/s]$	Frequenz
h	$[J/kg]$	spezifische Enthalpie
i		imaginäre Einheit
J_m		Besselsche Funktion erster Art m -ter Ordnung
J'_m		erste Ableitung von J_m
K	$[m/Pa\ s]$	Konstante für akustische Randbedingung
k	$[1/m]$	Wellenzahl
L	$[m]$	Länge
\mathbf{n}		Normalenvektor
p	$[Pa]$	Druck
q	$[J/kg]$	spezifische Wärmemenge
\dot{q}	$[W/kg]$	spezifischer Wärmestrom
P	$[Pa]$	Druckamplitude, Welle
P	$[W]$	Leistung
R	$[J/kg\ K]$	spezifische Gaskonstante
R	$[-]$	Reflexionskoeffizient
R	$[m]$	Radius
r	$[m]$	Radius

s	[J/kg K]	spezifische Entropie
s	[m]	Wegkoordinate
\mathbf{T}		Transfermatrix
\mathbf{T}^*		Transfermatrix in Riemann-Invarianten
T_{ij}		Transfermatrixelement
T	[T]	Temperatur
T	[s]	Schwingungsdauer, $T = 1/f$
t	[s]	Zeit
\mathbf{u}	[m/s]	Geschwindigkeitsvektor, $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$
u	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente
V	[m ³]	Volumen
v	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente
w	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente
\mathbf{x}	[m]	Ortsvektor, $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$
X_n	[Pa]	Ansatzfunktion für Druckverteilung (axial)
x	[m]	Raumkoordinate
Y_m		Besselsche Funktion zweiter Art m -ter Ordnung
Y'_m		erste Ableitung von Y_m
y	[m]	Raumkoordinate
Z	[Pa s/m]	Impedanz
z	[m]	Raumkoordinate
z	[–]	Variable der z -Transformation

Griechische Buchstaben

α_l		Parameter in Flammenmodell
α_k		Eigenwert
β_k		Parameter in Flammenmodell
γ_m		Parameter in Flammenmodell
δ	[Np/m]	Dämpfungskonstante
ϵ	[–]	Fehlertoleranz
η	[kg/m s]	dynamische Viskosität
η	[–]	inkrementelles Amplitudenwachstum
Δ		Differenz, Inkrement

κ	[-]	Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten
λ	[m]	Wellenlänge
λ	[W/m K]	Wärmeleitfähigkeit
μ	[-]	Sättigungsparameter im Flammenmodell
ω	[1/s]	Vorticity
Ω		Gebiet
$\partial\Omega$		Gebietsrand
ω	[1/s]	Kreisfrequenz, $\omega = 2\pi f$
ω_0	[1/s]	Eckfrequenz des Tiefpassfilters
$\omega_{e,n}$	[1/s]	Eckfrequenz (Ausbreitung nicht ebener Moden)
Ψ_{mn}		Ansatzfunktion für Druckverteilung
ρ	[kg/m ³]	Dichte
σ	[1/s]	Wachstums- oder Abklingrate
τ	[s]	Totzeit
θ	[rad]	Winkel
Ξ		Spektrum des Zeitsignals
ξ		Zeitsignal
ζ	[-]	Druckverlustbeiwert
ϕ	[m ² /s]	akustisches Potential
ϕ	[rad]	Phase

Indizes

∞	Umgebung
0	Anfangswert; charakteristische Größe
<i>a</i>	bezüglich akustischer Mode
<i>a</i>	außen
<i>abs</i>	absolut
<i>B</i>	bezüglich Brenner
<i>D</i>	dynamischer Anteil
<i>d</i>	stromab
<i>e</i>	bezüglich Entropie-Mode
<i>G</i>	Gemischzufuhr

<i>ges</i>	gesamt
<i>i</i>	innen
<i>lR</i>	linker Rand
<i>max</i>	maximal
<i>n</i>	in Normalenrichtung
<i>rel</i>	relativ
<i>rR</i>	rechter Rand
<i>T</i>	bezüglich einer Schwingungsdauer
<i>u</i>	stromauf
<i>V</i>	volumetrisch
<i>v</i>	bezüglich Vorticity-Mode
<i>W</i>	Wand
<i>z</i>	bezüglich <i>z</i> -Transformation
τ	bezüglich Totzeitverhalten

Kopfzeiger

–	Mittelwert
'	Schwankungsgröße
^	komplexe Amplitude
~	Hilbert-Transformierte
+	rechtslaufend; mathematisch positiv drehend
–	linkslaufend; mathematisch negativ drehend
A	analytisches Signal
a	akustisch
c	Cosinus-Anteil
r	Restterm
s	Sinus-Anteil
T	transponiert

Dimensionslose Kennzahlen

<i>M</i>	$ \bar{u} /\bar{c}$ Mach-Zahl
----------	-------------------------------

Operatoren

\Im	Imaginärteil
\Re	Realteil
\mathcal{L}	Operator (allgemein)
\mathcal{F}	Fourier-Transformation
\mathcal{H}	Hilbert-Transformation
\mathcal{Z}	z -Transformation
Δ	Laplace-Operator
∇	Nabla-Operator
$\ \ $	normiert mit dem Maximum einer Größe

Hinweise

Die in den Abschnitten 3.2 und 3.3 verwendeten Formelzeichen sind rein mathematisch zu verstehen und nicht mit den übrigen hier aufgeführten Größen zu verwechseln. Ihre jeweilige Bedeutung ist dort erklärt.

Abweichend von der im Deutschen üblichen Schreibweise wird als Dezimaltrenner der Punkt verwendet.

Kapitel 1

Einführung

1.1 Verbrennungsschwingungen

1.1.1 Begriff und Mechanismus

In der Energie- und Antriebstechnik spielen chemische Reaktionen, Verbrennungsvorgänge, Wärmeübertragung und Wärmeleitung eine wichtige Rolle. Sie können auf unterschiedliche Weise mit der Akustik einer technischen Einrichtung in Wechselwirkung treten. Derartige Phänomene werden als thermoakustische Vorgänge bezeichnet.

Nach den zu Grunde liegenden physikalischen Mechanismen lassen sich zwei Klassen von Effekten unterscheiden. Rein strömungsmechanisch bedingte Fluktuationen induzieren in Zonen mit Wärmeübertragung oder in Flammen Druckschwankungen und wirken damit als akustische Quellen. Der breitbandige turbulente Verbrennungslärm ist hier einzuordnen genauso wie tonaler Lärm, der durch kohärente Strukturen in der Strömung verursacht wird und sich durch eine ausgeprägte Frequenz im Lärmspektrum äußert.

Hiervon zu unterscheiden sind Vorgänge, bei denen es zu einer Rückkopplung zwischen der Akustik des Systems und der Wärmeübertragung oder Flamme kommt. Auch hierbei können kohärente Strukturen eine Rolle spielen, wenn sie durch die Akustik getriggert werden. Dem stehen selbsterregte Instabilitäten gegenüber. Zu ihnen gehören die Verbrennungsschwingungen, welche im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen. Kennzeichnend für die Rückkopplungsmechanismen ist der selbstverstärkende Charakter, der zu klar definierten tonalen Komponenten im Lärmspektrum führt.

Verbrennungsschwingungen stellen prinzipiell eine Sonderform

selbsterregter thermoakustischer Instabilitäten dar. Diese lassen sich allgemein dadurch definieren, dass in einem eingeschlossenen Raum eine thermische Expansion mit der Akustik des Raumes in Wechselwirkung tritt und dadurch anfänglich vorhandene kleine Störungen zu einer Schwingung endlicher Amplitude aufklingen. Die Existenz solcher Phänomene wurde bereits sehr früh erkannt. Higgins [1] berichtete schon 1777 von den so genannten „singenden Flammen“. Er ließ eine Wasserstoffflamme innerhalb eines Glasrohrs brennen (Abb. 1.1) und stellte fest, dass sich je nach Position der Flamme ein deutlich hörbarer Ton ausbildete. Hier findet sich demnach auch das erste dokumentierte Beispiel für eine Verbrennungsschwingung.

Nun muss nicht notwendigerweise eine Flamme und damit ein Verbrennungsvorgang den Antriebsmechanismus für die thermoakustische Schwingung darstellen. Rijke [2] zeigte etwa zur Mitte des 19. Jahrhunderts, dass ein in dem Glasrohr angebrachtes beheiztes Drahtgitter ebenfalls zur Entstehung einer akustischen Schwingung merklicher Amplitude führen kann. In eine ähnliche Richtung zielte die Arbeit von Sondhauss [3].

Das später nach Rijke benannte Rijke-Rohr erlaubt einen grundsätzlichen Zugang zum Verständnis des Mechanismus, der die Entwicklung selbsterregter thermoakustischer Schwingungen bestimmt. Eine Literaturübersicht hierzu findet sich bei Feldmann [4]. Das Rijke-Rohr wird auf Grund des Auftriebs der am Heizgitter erwärmten Luft durchströmt. Am Heizgitter selbst kommt es in Folge der Strömung zu einem konvektiven Wärmeübergang vom Heizgitter an das Fluid.

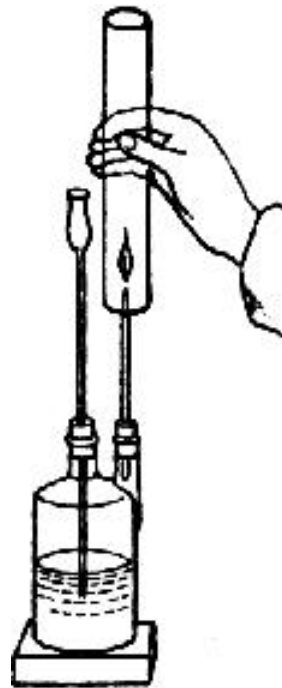


Abbildung 1.1: Higgins Experiment zu den „singenden Flammen“.

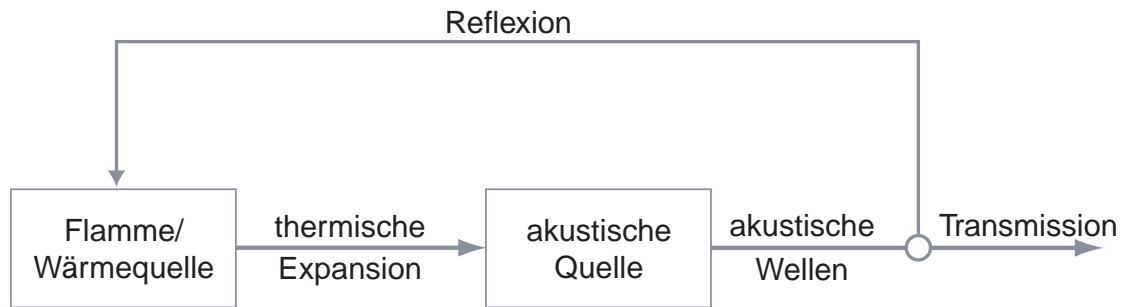


Abbildung 1.2: Prinzipielle Darstellung des Rückkopplungsmechanismus thermoakustischer Instabilitäten (vergleiche hierzu später auch Abbildung 2.1 auf Seite 27).

Schwankungen der Strömungsgeschwindigkeit führen über die Beeinflussung der Grenzschicht und damit des Wärmeübergangskoeffizienten zu Schwankungen der übertragenen Wärmeleistung. Diese wiederum bedingt über die thermische Expansion die Entstehung von Druckfluktuationen, die sich im Rohr als akustische Wellen ausbreiten und an dessen Enden zumindest teilweise reflektiert werden. Bei einer periodischen Anregung bildet sich somit ein stehendes Wellenfeld aus, das selbst wieder über die Schallschnelle Geschwindigkeitsschwankungen am Heizgitter induziert. Über diesen Mechanismus findet eine Rückkopplung statt. Stellt sich die Phasenbeziehung zwischen den Druck- und Wärmefreisetzungsfluktuationen am Heizgitter derart dar, dass ein erhöhter Wärmeübergang mit steigendem Druck zusammenfällt, kann es zu einer gegenseitigen Anfachung kommen. Anfänglich vorhandene zufällige Fluktuationen klingen dann zu einer Schwingung auf, die in ihrer Amplitude erst durch nichtlineare Effekte begrenzt wird. Schematisch ist der Rückkopplungsmechanismus in Abbildung 1.2 dargestellt.

Diese Zusammenhänge erkannte und beschrieb zuerst Rayleigh [5,6]. Auf ihn geht das so genannte Rayleigh-Kriterium zurück, das eine notwendige, allerdings nicht hinreichende, Bedingung für die Entstehung selbsterregter thermoakustischer Schwingungen darstellt. Es lässt sich in der zuvor bereits getroffenen Feststellung zusammenfassen, die als Voraussetzung für eine Instabilität eine gleiche Phasenla-

ge von Druck- und Wärmezufuhrschwankungen nennt. Das ist allerdings nicht im exakten Sinn zu verstehen, vielmehr muss im Verlauf einer Periode der Schwingung mehr Energie in Form von Wärme zugeführt als entzogen werden. Verschiedene Autoren wie Putnam und Dennis [7, 8] oder Chu [9, 10] haben hierfür quantitative Formulierungen geliefert. In sehr allgemeiner Form lassen sie sich zu der Aussage zusammenfassen, dass das Produkt aus der volumetrischen Wärmezufuhr \dot{q}_V und den Druckschwankungen p' , gemittelt über eine Schwingungsdauer und integriert über den Bereich der Wärmezufuhr, einen positiven Wert annehmen muss:

$$\int_V \overline{p' \dot{q}_V} dV > 0. \quad (1.1)$$

Damit bei Erfüllung dieses Kriteriums aber tatsächlich eine Instabilität auftritt, muss die durch die Wärme zugeführte Schwingungsenergie die Verluste durch Abstrahlung an den Rändern des Systems und durch Dissipation innerhalb des Systems übersteigen.

Das bisher Gesagte impliziert eine schwankende Wärmezufuhr als treibende Kraft der thermoakustischen Schwingungen. Bei Verbrennungsschwingungen ist diese Betrachtungsweise streng genommen nicht korrekt, da eine Verbrennung keinen Wärmeübertragungsvorgang, sondern vielmehr einen Stoffumwandlungsprozess darstellt. Dieser ist jedoch ebenfalls mit einer thermischen Expansion verbunden. In der Technik ist es daher üblich, eine Verbrennung durch eine gedachte Wärmezufuhr oder Wärmefreisetzung zu modellieren und die Stoffumwandlung durch eine rein thermodynamische Zustandsänderung zu ersetzen. Mit dieser Annahme lassen sich die oben gemachten Aussagen über den Mechanismus selbsterregter thermoakustischer Schwingungen verallgemeinern und auf Verbrennungsschwingungen übertragen. Meist sind aber die Vorgänge, die die Auswirkungen von Fluktuationen im Strömungsfeld auf den Verbrennungsprozess und damit die thermische Expansion bestimmen, wesentlich komplexer als beispielsweise der Wärmeübertragungsmechanismus im Fall des Rijke-Rohrs. Dies gilt insbesondere für die in der Technik dominierende turbulente Verbrennung. Hierin liegt

ein wesentlicher Grund dafür, dass das Auftreten von Verbrennungsschwingungen in technischen Einrichtungen zwar oft im Grundsatz verstanden wird, es aber dennoch nicht gelingt, exakte oder auch nur annähernd genaue Werte für die Stabilitätsgrenzen zu finden.

1.1.2 Bedeutung in der Technik

Verbrennungsschwingungen treten in Haushalts- und Industrieheizungen, in Raketenantrieben, in Flugzeugtriebwerken oder in stationären Gasturbinen auf. Abgesehen von Sonderanwendungen wie der bewusst eingesetzten pulsierenden Verbrennung [11–14] sind sie ein unerwünschtes Phänomen, das oft erhebliche technische Probleme mit sich bringt. Die Gründe hierfür sind vielfältig. Verbrennungsschwingungen verhindern, eine Anlage stationär in dem ihr zugeordneten Auslegungspunkt zu betreiben. Sie können damit die Ursache sein, wenn Spezifikationen wie Leistung oder Abgasemissionen nicht eingehalten werden. Sie sind auch verantwortlich für inakzeptable Geräusch- und Lärmemissionen. Flugtriebwerke beispielsweise müssen bestimmte Lärmstandards einhalten und dürfen den Passagieren in keinem Betriebspunkt das Gefühl geben, das Triebwerk verhalte sich anormal. Auch bei Heizungsburnern wird eine mit einem lauten Ton verbundene Verbrennung vom Anwender nicht akzeptiert. Nicht zuletzt aber bergen Verbrennungsschwingungen auf Grund der oftmals hohen Druckamplituden die Gefahr, zu einer Schädigung der Struktur und damit Zerstörung einer technischen Einrichtung zu führen.

Dementsprechend beschäftigt die Thematik Forschung und Wissenschaft seit Jahrzehnten, ohne an Aktualität verloren zu haben. Bereits 1956 findet sich bei Putnam und Dennis und später dann nochmals bei Putnam [15, 16] eine Übersicht über Verbrennungsinstabilitäten in industriellen Verbrennungssystemen. Besondere Bedeutung erlangte das Problem in dieser Zeit für die Verbrennung in Raketenantrieben. Ausführlich beschäftigten sich hiermit beispielsweise Crocco und Cheng, Yang und Anderson oder Culick und Yang [17–19].

Die Arbeiten von Langhorne, Bloxside et al. oder Macquisten und Dowling [20–22] zeigen, dass die Problematik auch für Nachbrenner von Strahltriebwerken von Interesse war.

Seit etwa 10 Jahren spielen Verbrennungsschwingungen eine immer bedeutendere Rolle bei Gasturbinen. Auch wenn hiervon zu einem gewissen Grad Flugtriebwerke mit betroffen sind, bezieht sich diese Aussage vor allem auf stationäre Maschinen im Kraftwerksbereich. Berichte hierüber finden sich beispielsweise bei Boehm et al., Scarinci und Halpin, Hobson et al. oder Krebs et al. [23–26]. Begründet ist diese Entwicklung durch den verstärkten Einsatz neuer Brennverfahren, der in Folge höherer Anforderungen an die Minimierung von Abgasemissionen notwendig geworden ist. Insbesondere immer niedrigere Grenzwerte für Stickoxide haben der Niedertemperaturverbrennung mit Hilfe der mager vorgemischten (und im Falle von Flüssigbrennstoffen vorverdampften) Verbrennung zum Durchbruch verholfen. Ihr fehlt allerdings ein wichtiger, die Wärmefreisetzung räumlich stabilisierender Mechanismus, während bei nicht-vorgemischten Flammen das Mischungsfeld die Flammenlage weitgehend fixiert. Die Vormischverbrennung zeigt daher eine besonders hohe Schwingungsanfälligkeit. Verstärkt wird der Effekt durch die Tendenz zu höheren Leistungsdichten. Kompaktere Flammen stellen effektivere akustische Quellen dar, weil sie die mit den Wärmefreisetzungsschwankungen verbundenen thermischen Expansionseffekte auf einen kleineren Raum konzentrieren.

Bei Flugtriebwerken ist der Einsatz der Magerbrennverfahren noch nicht so weit fortgeschritten. Aus Sicherheitsgründen haben stabil brennende Flammen absolute Priorität, gerade auch im Bezug auf das Löschverhalten. Die aus den gerade angeführten Gründen stabilisierend wirkende nicht-vorgemischte oder teil-vorgemischte Verbrennung wird deshalb bevorzugt. Somit sind Verbrennungsschwingungen bei den aktuellen Triebwerken nicht in gleichem Maße ein Thema wie bei den stationären Gasturbinen. Dass sie aber dennoch nicht vollständig von dieser Problematik frei sind, beweist beispielsweise der Bericht von Konrad et al. [27]. Da die Emissionsanforderun-

gen an Flugtriebwerke immer strenger werden und damit der Einsatz neuer Verbrennungstechniken unvermeidlich wird, werden Verbrennungsschwingungen und ihre Vermeidung in Zukunft auch in diesem Bereich zu einem Kernproblem der Entwicklung werden. Deutliches Anzeichen hierfür sind die spürbar gestiegenen Forschungsaktivitäten mit flugtriebwerkstypischen Konfigurationen, wie sie beispielsweise in den Arbeiten von Hassa et al. oder Eckstein et al. zu finden sind [28, 29].

Parallel zum vermehrten Auftreten von Verbrennungsschwingungen haben sich Techniken zu deren Unterdrückung entwickelt. Besondere Bedeutung hatte – zumindest für eine gewisse Zeit – die aktive Instabilitätskontrolle gewonnen. Heckl [30] hatte an einem Rijke-Rohr demonstriert, wie sich ein Regelkreis zur Unterdrückung der Schwingungen aufbauen lässt. Ein Mikrofon detektiert die Druckfluktuationen in dem Rohr, dieses Signal treibt über einen Regler einen Lautsprecher so, dass es zu einer deutlichen Absenkung der Schwingungsamplituden im Rijke-Rohr kommt. Dieses Prinzip wurde später auf technische Systeme übertragen. Inzwischen existiert eine reichhaltige Literatur zur Theorie der aktiven Kontrolle und zu deren Anwendung [31–41]. Bei Gasturbinen dient heute als Stellgröße üblicherweise der Brennstoffmassenstrom, der mit Hilfe schneller Servo-Ventile moduliert wird. Bemerkenswert ist, dass mit dieser Technik die Dämpfung von Verbrennungsschwingungen auch in realen Maschinen hoher Leistung gelingt. In den dort eingesetzten Ringbrennkammern muss auf Grund der Vielzahl der Brenner und der Komplexität der akustischen Moden ein hoher Aufwand in Bezug auf Sensoren, Regler und Aktuatoren getrieben werden [42].

Neben der aktiven Kontrolle kommen zur Schwingungsunterdrückung auch passive Maßnahmen, also konstruktive Veränderungen oder Ergänzungen zum Einsatz. So lassen sich die Eigenfrequenzen, bei denen eine Verbrennungsinstabilität auftritt, durch die Anbringung von Helmholtz-Resonatoren oder Lambda-Viertel-Rohren dämpfen [43–45]. Zielführend sind auch Modifikationen am Brenner, die das Antwortverhalten der Flamme auf die akustischen Fluktua-

tionen verändern und damit das Gesamtsystem so verstimmen, dass sich kein Selbsterregungsmechanismus mehr ausbildet [26, 46].

Die Wichtigkeit aktiver und passiver Maßnahmen zur Unterdrückung von Instabilitäten zeigt: Verbrennungsschwingungen sind ein Problem, das sich offenbar von vornherein nur schwer vermeiden lässt. Die Vorhersage von Instabilitäten bereits in der Entwicklungsphase einer (von Grund auf neu entworfenen) Brennkammer ist bis heute praktisch unmöglich. Dieser Zustand ist natürlich äußerst unbefriedigend, weil spätere Nachbesserungsmaßnahmen einen enormen Kostenfaktor darstellen. Dies macht deutlich, welche Bedeutung der Entwicklung verlässlicher Berechnungsverfahren für selbsterregte thermoakustische Schwingungen zukommt.

1.1.3 Berechnungsverfahren

Obwohl, wie oben ausgeführt, selbsterregte thermoakustische Schwingungen schon früh entdeckt wurden und auch der ihnen zu Grunde liegende Mechanismus bald zumindest grundsätzlich verstanden war, fehlte lange Zeit eine Grundlage für die Berechnung. Das Rayleigh-Kriterium stellt ja nur eine – nicht einmal hinreichende – Bedingung für die Existenz einer Instabilität dar, ohne zu erklären, unter welchen Voraussetzungen diese Bedingung überhaupt erfüllt wird. Erst durch die Arbeiten von Putnam und Dennis [7, 8] und Chu [9, 10] gelang es, das Rayleigh-Kriterium quantitativ zu beschreiben. Vor allem Merk aber schuf eine umfassende und allgemeingültige Grundlage für die Analyse thermoakustischer Schwingungen [47]. Er definiert eine Transferfunktion, die die Abhängigkeit der Wärmefreisetzungsschwankungen als Funktion der fluktuierenden Fluideigenschaften darstellt und damit den Kernaspekt thermoakustischer Phänomene in eine mathematische Form fasst. Bei Kenntnis der Transferfunktion lässt sich die Stabilität des Gesamtsystems berechnen. Merk demonstriert dies mit Berechnungen für das Rijke-Rohr und für vorgemischte Flammen [48–51]. Dieses Konzept ist bis heute von enormer Bedeutung und findet sich in vielen Arbeiten wieder.

Vor allem im Zuge der Untersuchung von Raketentriebwerken ist das Galerkin-Verfahren häufig eingesetzt worden. Stellvertretend für eine Vielzahl von Arbeiten seien hier die von Jahnke und Culick und Culick et al. erwähnt [52, 53]. Beim Galerkin-Verfahren wird das akustische Feld durch eine endliche Summe orthogonaler Basisfunktionen approximiert. Dadurch werden die Erhaltungsgleichungen in ein leichter lösbares gewöhnliches Differentialgleichungssystem übergeführt. Dieser Ansatz erweist sich als besonders vorteilhaft, um den durch Nichtlinearitäten auftretenden Energietransfer zwischen verschiedenen Moden zu beschreiben. Er wird damit vor allem Verbrennungsschwingungen in Raketenantrieben gerecht, die häufig zu solch hohen Druckamplituden führen, dass der Bereich der linearen Akustik verlassen wird. Eine umfassende Übersicht zu dieser Thematik gibt wiederum Culick [54].

Immer wieder gab und gibt es auch Ansätze, spezielle Probleme mit analytischen oder halbanalytischen Methoden anzugehen [55–59]. Dies setzt aber in aller Regel vereinfachende Annahmen vor allem über die Geometrie und den Wärmefreisetzungsmechanismus voraus, um exakte oder asymptotische Lösungen der Erhaltungsgleichungen angeben zu können. Andererseits erlaubt diese Vorgehensweise nicht selten einen tieferen Einblick in die physikalischen Wirkmechanismen. Sie eignet sich aber nicht als generelle Methode zur Analyse technischer Systeme.

Aus der technischen Akustik stammt die Idee, ein komplexes System in ein Netzwerk einfacher Elemente aufzuspalten [60]. Dies ist dann problemlos möglich, wenn sich das akustische Feld an den Schnittstellen zwischen den Elementen durch ebene Wellen beschreiben lässt. In diesem Fall charakterisiert eine Transfermatrix die Beziehung der Größen Schalldruck und Schallschnelle zwischen Eingang und Ausgang des Elements. Die Übertragung dieses Prinzips auf thermoakustische Fragestellungen bei Gasturbinen-Brennkammern stellt Deuker dar [61]. Für die Stabilitätsanalyse des akustischen Netzwerks stehen regelungstechnische Werkzeuge zur Verfügung. Sie sind teilweise für die speziellen Fragestellungen bei thermoakustischen Systemen

erweitert worden [62, 63]. Inzwischen finden sich vielfältige Beispiele für die Anwendung der Netzwerkmethod zur thermoakustischen Untersuchung von Verbrennungssystemen [64–67]. Sie zeichnet sich durch einen geringen Rechenzeitbedarf aus, leidet aber teilweise unter den notwendigen Vereinfachungen, die die Modellierung komplexer Systeme erschwert.

Entscheidend für die Qualität des Verfahrens ist die korrekte Beschreibung des Flammenverhaltens. Letztendlich wird auch die Flamme als ein Element innerhalb des akustischen Netzwerks betrachtet. Grundsätzlich lässt sich ihre Transfermatrix durch akustische Messungen direkt experimentell ermitteln [68–70] und hierauf aufbauend auch modellieren [71]. Allerdings stellt sich dieser Weg auf Grund der Fehleranfälligkeit des Messverfahrens oft schwierig dar.

Oftmals wird daher zur Beschreibung der Flamme auf die so genannte Flammentransferfunktion zurückgegriffen. Sie setzt die schwankende Wärmefreisetzungsrate direkt in Beziehung zu der sie modulierenden fluktuierenden Größe des Fluids, typischerweise der Schallschnelle an einem repräsentativen Ort im Brenner. Auf diese Weise wird der Umweg über rein akustische Größen zur Charakterisierung der Flamme vermieden, was vor allem unter experimentellen Gesichtspunkten eine wesentliche Erleichterung gegenüber Transfermatrixmessungen bedeutet. Beispiele für gemessene Flammentransferfunktionen finden sich bei einer Reihe von Autoren [72–76]. In diesen Experimenten wird die Reaktion der Flamme auf eine akustische Anregung beispielsweise über die Chemilumineszenz erfasst. Das Prinzip lässt sich auf transiente numerische Strömungssimulationen übertragen, so dass auch die CFD¹-Technik Flammentransferfunktionen liefert [72, 74, 77, 78]. Es existieren auch theoretische und analytische Überlegungen zum Verhalten der Flammen, zum Beispiel bei Dowling oder Lieuwen [79, 80], jedoch haben diese Ansätze eher generischen Charakter und sind auf technische Anwendungen nur begrenzt übertragbar.

¹Computational Fluid Dynamics

Ein wichtiger Aspekt sind Nichtlinearitäten in der Antwort der Flamme auf Fluktuationen im Fluid. Der Anregungsmechanismus, der selbsterregten thermoakustischen Schwingungen zu Grunde liegt, würde bei einem rein linearen Verhalten des Systems zu einem unbegrenzten exponentiellen Wachstum der Schwingungsamplituden führen. In der Realität stellt sich aber durch nichtlineare Effekte immer ein Grenzyklus ein, der sich durch eine limitierte Amplitude auszeichnet. Bei Verbrennungsschwingungen in Gasturbinen-Brennkammern sind im Gegensatz zu Instabilitäten in Raketentriebwerken die Druckamplituden in aller Regel aber zu klein, um nichtlineares Verhalten auf die Akustik zurückführen zu können. Vielmehr spielt hier die Flamme die entscheidende Rolle, indem sie auf beliebig große Schwankungen beispielsweise der Fluidgeschwindigkeit nicht mit beliebig großen Wärmefreisetzungsschwankungen reagieren kann. Die Quantifizierung dieses als Sättigung bezeichneten Effekts ist eine wesentliche Voraussetzung, um bei der Berechnung von Verbrennungsschwingungen die zu erwartenden Amplituden vorherzusagen zu können. Allerdings bietet die Literatur hierfür nur wenige Anhaltspunkte. Dowling [81] beispielsweise trifft die Annahme, dass die Flamme zwar prinzipiell linear auf Fluktuationen der Strömungsgeschwindigkeit reagiert, allerdings nur bis zu einem gewissen Grenzwert, ab dem die Amplitude der Wärmefreisetzungsschwankung konstant bleibt. Mit einer Simulation im Zeitbereich kann sie damit das Aufklingen einer Störung zu einer Grenzyklus-Schwingung zeigen. Peracchio und Proscia [82] benützen ein auf experimentelle Daten gestütztes nichtlineares Flammenmodell in einem Galerkin-Verfahren zur Analyse thermoakustischer Instabilitäten in einem Vormischbrenner.

Neben den bisher aufgeführten Ansätzen werden in letzter Zeit vermehrt Anstrengungen unternommen, Verbrennungsschwingungen direkt mit Hilfe der numerischen Simulation der reagierenden Strömung zu berechnen. Dieses Vorgehen unterscheidet sich insoweit von den anderen Verfahren, als die wechselseitige Kopplung zwischen Akustik und Reaktionsschwankungen nicht mehr modelliert werden muss, sondern sich implizit aus der Lösung der Er-

haltungsgleichungen ergibt. Dies gilt aber nur unter gewissen Einschränkungen, da auch in den CFD-Verfahren mit Turbulenz- und Verbrennungsmodellen Annahmen getroffen werden. Die Grobstruktursimulation (Large Eddy Simulation, LES) führt nur geringe Vereinfachungen ein. Murota und Ohtsuka [83] haben sie erfolgreich zur Simulation von Verbrennungsschwingungen in einem Vormischbrenner eingesetzt. Meist wird jedoch auf die Lösung der reynoldsgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen in Verbindung mit Turbulenzmodellen zurückgegriffen [84–86]. Hantschk und Vortmeyer [87, 88] konnten zeigen, dass sogar mit einem kommerziellen CFD-Code die Simulation von Verbrennungsschwingungen eines einfachen technischen Brenners möglich ist. Die CFD-Techniken sind zwar unter dem Gesichtspunkt attraktiv, dass sie im Vergleich zu anderen Ansätzen nur geringe Vereinfachungen der maßgeblichen physikalischen Prozesse vornehmen. Allerdings bedingen sie einen sehr hohen numerischen Aufwand, der ihren Einsatz als echtes Entwicklungswerkzeug in absehbarer Zeit nicht realistisch erscheinen lässt.

Ein Aspekt ist bis hierher außer Acht geblieben. Die besprochenen Berechnungsverfahren betrachten das thermoakustische Verhalten *einer* Wärmequelle oder *einer* Flamme, dazu meist in schlanken, langgestreckten Geometrien, die oftmals durch eine eindimensionale Akustik beschreibbar sind. Moderne Gasturbinen-Brennkammern werden aber als Ringbrennkammern mit einer Vielzahl von Brennern ausgeführt. Dadurch verkompliziert sich die thermoakustische Analyse in zweierlei Hinsicht: statt einer treten mehrere Flammen mit der Akustik in Interaktion, und die Akustik selbst wird mehrdimensional.

Die Berücksichtigung dieser Effekte fällt heute noch schwer. Verschiedene Arbeiten erfassen zunächst nur die akustischen Eigenschaften von Ringbrennkammern über eine Analyse der Eigenmoden [89–91]. Zur Stabilitätsanalyse wird hauptsächlich versucht, die akustischen Netzwerkmodelle zu adaptieren. Beispielsweise existieren Ansätze, die aus der eindimensionalen Akustik bekannten Elemente zu übernehmen und Umfangskomponenten durch einfache Verzweigungen

des Netzwerks zu modellieren [92, 93]. Die Korrektheit dieses Verfahrens ist allerdings zu bezweifeln. Die Ausbreitung nicht ebener Moden erfolgt nämlich anders als die ebener Wellen, deren Theorie den Netzwerkmodellen zu Grunde liegt. Stow und Dowling [94, 95] sowie Evesque und Polifke [96] formulieren daher explizit die Beziehungen für die axiale Ausbreitung höherer akustischer Moden. Eine Ringbrennkammer lässt sich damit wieder in ein unverzweigtes eindimensionales Netzwerk zerlegen, dessen Elemente nun aber annulare Teilstücke repräsentieren. Allerdings bestehen hier relativ starke Restriktionen im Hinblick auf die mögliche Komplexität der Geometrie und damit auch für die technische Einsetzbarkeit. Eine Erweiterung und Verbesserung der Netzwerkmodelle kommt von Schuermans et al. [97, 98]. Sie beschreiben das System aus regelungstechnischer Sicht im Zustandsraum. Die einzelnen Elemente sind durch mehrere Eingangs- und Ausgangsgrößen gekoppelt (MIMO²-System). Ihr Übertragungsverhalten lässt sich beispielsweise durch den Einsatz von Finite-Element-Codes auch für komplexe Geometrien angeben. Krebs et al. [99] zeigen prinzipiell, wie das Galerkin-Verfahren für die Stabilitätsanalyse von Ringbrennkammern genutzt werden kann.

Eine systematische Einteilung der zuvor geschilderten Vielzahl an Berechnungsverfahren kann anhand von Abb. 1.3 geschehen. Thermoakustische Vorgänge werden grundsätzlich durch die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie vollständig beschrieben. Die numerische Lösung dieser Gleichungen mit CFD-Methoden wie der Direkten Numerischen Simulation (DNS), Large Eddy Simulation (LES) oder der instationären Berechnung der reynoldsgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (URANS, Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes) ist daher wie gezeigt grundsätzlich möglich, in der Regel für technische Anwendungen aber nicht praktikabel.

Alle anderen Modellierungsansätze führen deshalb Vereinfachungen ein, die die Komplexität des Problems dadurch zu reduzieren suchen, dass sie sich auf die Beschreibung lediglich der dominierenden physikalischen Mechanismen beschränken. Bei selbsterregten Verbren-

²Multiple Input Multiple Output

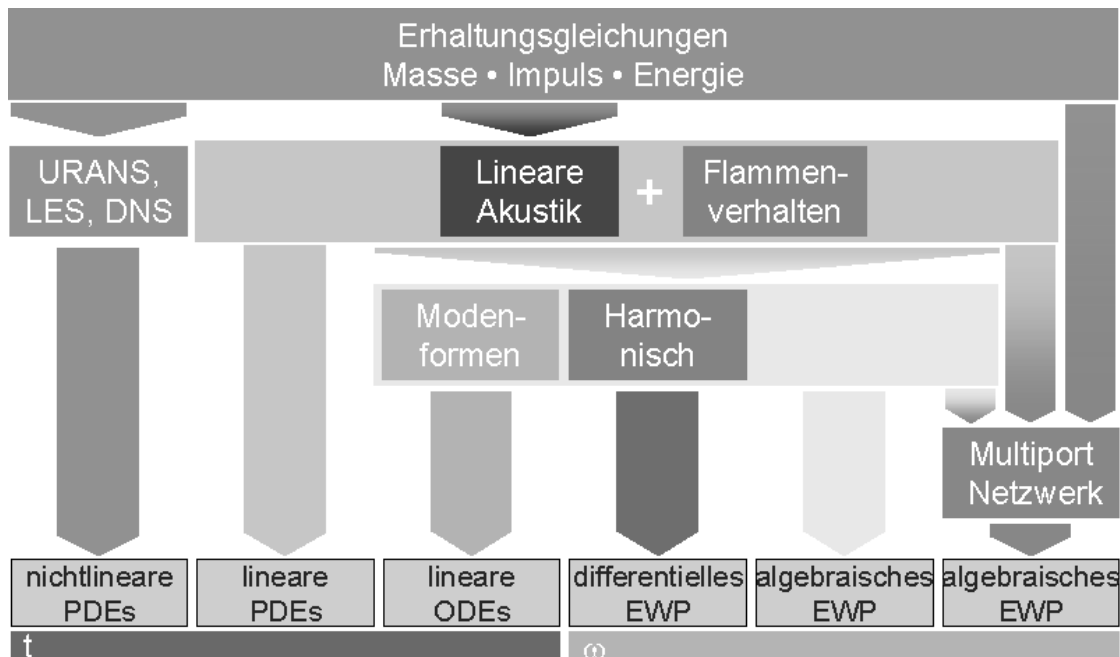


Abbildung 1.3: Einteilung der Berechnungsverfahren für Verbrennungsschwingungen (PDE = Partial Differential Equation, partielle Differentialgleichung; ODE = Ordinary Differential Equation, gewöhnliche Differentialgleichung; EWP = Eigenwertproblem).

nungsschwingungen stellt die Ausbreitung der Druck- und Geschwindigkeitsstörungen ein akustisches Phänomen dar, das gut durch lineare akustische Gleichungen beschreibbar ist. Dann ist es aber nötig, die Kopplung zwischen der Akustik und der Dynamik der Reaktionszonen explizit durch Modelle für das Flammenverhalten zu berücksichtigen. Da das resultierende Gleichungssystem im Gegensatz zu den ursprünglichen, nichtlinearen Erhaltungsgleichungen aus linearen partiellen Differentialgleichungen besteht, ist seine Lösung bereits mit einer wesentlichen Verringerung des numerischen Aufwands verbunden.

Eine weitere Vereinfachung folgt, wenn das akustische Feld wie im Galerkin-Verfahren durch eine Basis bekannter Moden beschreibbar ist. Das System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen lässt sich zwar prinzipiell durch Integration im Zeitbereich lösen, bei größeren Modenbasen wird es jedoch schnell so groß, dass dieser Weg in-

effizient wird. Mit der Annahme, dass die Lösungsvariablen in der Zeit harmonisch fluktuieren, kann das Problem in den Frequenzraum übertragen werden. Die Lösung des sich ergebenden algebraischen Eigenwertproblems liefert die komplexen Eigenfrequenzen, deren Realteil die Schwingungsfrequenzen und deren Imaginärteil die Anfachungs- bzw. Abklingraten der zugehörigen Moden angeben.

Der Ansatz einer zeitharmonischen Lösung ohne Vorgabe der Modenformen führt zu einem differentiellen Eigenwertproblem. Ein Beispiel hierfür ist die Helmholtz-Gleichung, deren Lösung die Eigenmoden und Eigenfrequenzen rein akustischer Systeme liefert. Bei thermoakustischen Systemen wird mit der Wärmefreisetzungszone beziehungsweise Flamme jedoch ein Quellterm eingeführt, der selbst in komplexer Weise von den Eigenwerten abhängt. Daher sind Standardverfahren zur Berechnung von Eigenwertproblemen nicht einsetzbar. Die thermoakustische Stabilitätsanalyse ist auf diesem Weg bis heute nicht möglich.

Die Netzwerkmodelle schließlich basieren letztendlich wieder auf der Annahme bestimmter Moden in ihren Elementen und einer zeitharmonischen Lösung. Die Verknüpfung der Elemente resultiert deshalb ebenfalls in einem algebraischen Eigenwertproblem, das aber der Behandlung durch regelungstechnische Methoden zugänglich ist. Das Übertragungsverhalten der Elemente kann abhängig von ihrer Art direkt aus den Erhaltungsgleichungen, aus den akustischen Gleichungen, aus anderen Modellen oder den Lösungen anderer vereinfachter akustischer Probleme abgeleitet werden.

Zusammenfassend zeigt sich in dem Gebäude der möglichen Berechnungsverfahren in Abb. 1.3 von links nach rechts ein steigender Modellierungsgrad. Dieser ist einerseits mit dem Vorteil des sinkenden Berechnungsaufwands verbunden, andererseits bringt er auch wachsende Vereinfachungen im Hinblick auf die darunter liegende Physik mit sich. Die schnellsten und effizientesten Verfahren müssen deshalb nicht notwendigerweise zu den besten Lösungen führen.

1.2 Zielsetzung der Arbeit

Weiter oben wurde schon ausgeführt, dass bis heute verlässliche Methoden fehlen, um selbsterregte Verbrennungsschwingungen bereits in der Entwicklungsphase von Verbrennungseinrichtungen im Allgemeinen und Gasturbinen-Brennkammern im Besonderen vorhersagen zu können. Dies wäre die Voraussetzung für frühzeitige Maßnahmen zu ihrer Vermeidung. Um so kritischer erscheint dieser Umstand, als die Forderungen nach immer geringeren Emissionen und immer höheren Leistungsdichten die Problematik in Zukunft eher noch verschärfen werden.

Diese Arbeit will deshalb einen Beitrag zur Weiterentwicklung der Berechnungsmethoden für Verbrennungsschwingungen liefern. Vor dem Hintergrund der technischen Anwendungen ergeben sich hierbei einige besondere Anforderungen. Das Berechnungsverfahren soll prinzipiell die Voraussetzungen mitbringen, für beliebig komplexe Geometrien einsetzbar zu sein. Dies beinhaltet die korrekte Wiedergabe der dreidimensionalen Akustik und ihrer Wechselwirkung mit mehreren Flammen. Der Wunsch nach Einsetzbarkeit im Entwicklungsprozess verbietet allerdings einen Ansatz, der exzessiv lange Rechenzeiten mit sich bringt.

Aus diesem Grund scheidet der unmittelbare Einsatz der CFD-Methoden für eine Simulation auf Basis der vollständigen Erhaltungsgleichungen kurz- und mittelfristig aus, auch wenn sich hiermit die volle Komplexität des Problems direkt umsetzen ließe. Daher ist eine mehr oder weniger große Modellierungstiefe mit entsprechenden Vereinfachungen unvermeidbar. Zu große Vereinfachungen können allerdings auch unüberwindbare Beschränkungen bedeuten. Beispielsweise sind die akustischen Netzwerkmodelle wegen ihrer minimalen Rechenanforderungen sicherlich sehr attraktiv. Es darf aber auch bezweifelt werden, ob sich auf ihrer Basis Beschreibungen für beliebig komplexe multi-dimensionale Probleme finden lassen.

Als Alternative wird in dieser Arbeit ein hybrider Berechnungsan-

satz vorgeschlagen. Entsprechend ihrer unterschiedlichen Bedeutung für den Wirkmechanismus des thermoakustischen Systems werden für die verschiedenen Einflussgrößen unterschiedliche Modellierungsstrategien gewählt. Der für die Ausbildung von Verbrennungsinstabilitäten notwendige Rückkopplungsmechanismus kommt durch einen Informationstransport in Form von Störungsausbreitungen zustande. Dieser Mechanismus lässt sich gut durch Störungsgleichungen beschreiben, eine vollständige Lösung der Erhaltungsgleichungen ist nicht nötig. Der andere wichtige Faktor für das Systemverhalten sind die Flammen, die die Quellen der Störungen darstellen. Da hier nicht von turbulentem Lärm, sondern von wenigen tonalen, eher langwelligen Komponenten die Rede ist, erfordert ihre Beschreibung wiederum keine aufwändige Modellierung des Verbrennungsvorganges.

Das hier vorgestellte Verfahren setzt deshalb auf eine Kopplung zweier Methoden. Die Formulierung von Störungsgleichungen, oder spezieller von akustischen Gleichungen, in grundsätzlich beliebigen dreidimensionalen Geometrien mit Hilfe eines entsprechenden numerischen Verfahrens stellt die Basis dar. Sie wird verbunden mit einer vereinfachten Charakterisierung der Flammen als akustische Quellen in Form von Flammentransferfunktionen, die vorab aus Experimenten oder CFD-Rechnungen gewonnen werden können. Für das in dieser Weise gekoppelte System wird die Entwicklung von Störungen durch eine Simulation im Zeitbereich verfolgt und damit eine Stabilitätsanalyse möglich gemacht. Entsprechend dem Schema aus Abbildung 1.3 lässt sich dieser Ansatz in die Reihe von Verfahren einordnen, die über eine Kopplung linearer akustischer Gleichungen mit Modellen für das Flammenverhalten zu linearen partiellen Differentialgleichungen führen.

Mit diesem Ansatz betritt diese Arbeit trotz der vielfältigen Modellierungsbemühungen im Feld der Thermoakustik weitestgehend Neuland. Sie kann deshalb nicht das fertige Werkzeug liefern, das nur noch in der Entwicklung eingesetzt zu werden braucht. Vielmehr geht es zunächst darum, die grundsätzliche Tauglichkeit des Verfahrens nachzuweisen. In diesem ersten Schritt werden die Ver-

einfachungen in der Modellierung auch größer sein, als es für einen späteren Einsatz nötig und wünschenswert ist. Gerade deshalb soll hier auch gezeigt werden, wo die Vereinfachungen zu spürbaren Auswirkungen auf das Systemverhalten führen. Von Seiten der Numerik steht zuerst die möglichst leichte Implementierbarkeit des Ansatzes im Vordergrund, unter Inkaufnahme gewisser Einschränkungen hinsichtlich Effizienz und Genauigkeit.

Im folgenden Kapitel werden zunächst grundlegende akustische Zusammenhänge dargestellt, die für das Verständnis thermoakustischer Systeme wichtig sind und die die Basis des Berechnungsverfahrens bilden. Das dritte Kapitel beschreibt das eingesetzte numerische Verfahren und untersucht auch seine Eigenschaften insbesondere im Hinblick auf die Akustiksimulation. Die eigentliche Methode, die den Kern der Arbeit bildet, wird im darauffolgenden Kapitel detailliert beleuchtet. Demonstriert wird das Verfahren schließlich am Beispiel eines Ringbrennkammer-Modells. Hierbei sind dann nicht zuletzt auch interessante Einblicke in die Physik von Verbrennungsschwingungen in Systemen mit mehreren Flammen und mehrdimensionalen akustischen Moden möglich.

Kapitel 2

Akustische Grundlagen

2.1 Ausbreitung von Störungen

2.1.1 Allgemeines

Selbsterregte Verbrennungsschwingungen stellen einen Rückkopplungsmechanismus dar. Er entsteht dadurch, dass instationäre Verbrennungsprozesse Schwankungen der Feldgrößen des Fluids wie Druck, Dichte oder Geschwindigkeit hervorrufen. Diese Fluktuationen breiten sich im Medium aus und wirken nach Reflexion wieder auf die Verbrennung zurück. Eine wesentliche Aufgabe der Berechnung von Verbrennungsschwingungen ist demnach die Beschreibung der Entstehung und Ausbreitung der genannten Schwankungsgrößen.

Um hierfür geeignete Gleichungen herzuleiten, gelten im Rahmen dieser Arbeit folgende Annahmen:

- Störungen sind so klein, dass eine lineare Betrachtungsweise zulässig ist. Dies ist in aller Regel für Verbrennungsschwingungen in Gasturbinen-Brennkammern gegeben. Druck- und Dichtefluktuationen sind also klein gegenüber dem mittleren Druck und der mittleren Dichte des Fluids, $p' \ll \bar{p}$, $\rho' \ll \bar{\rho}$, die Geschwindigkeitsschwankungen klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit, $u' \ll c$.
- Zähigkeitskräfte können bei der Ausbreitung der Störungen vernachlässigt werden. Ein dem Fluid immanentes Längenmaß ist der Quotient aus kinematischer Viskosität und der Schallgeschwindigkeit ν/c , das der freien Weglänge zwischen den Molekülen proportional ist (für Luft liegt es etwa bei $0,5 \cdot 10^{-7}$ m).

Wird ein für die Störungen typisches Längenmaß $1/k$ (gebildet mit der Wellenzahl k der Störungen) hierzu ins Verhältnis gesetzt, ergibt sich eine Knudsen-Zahl Kn für die Störungen, die gleich dem Verhältnis von Mach-Zahl zu Reynolds-Zahl der Störungen ist: $Kn = k\nu/c = M/Re$. Ist sie klein, dominieren demnach Trägheitseffekte gegenüber Zähigkeitseffekten (und Wärmeleitung) [100]. Dies ist für Fluktuationen in Verbindung mit thermoakustischen Schwingungen sicher der Fall, da diese Wellenlängen in der Größenordnung der geometrischen Abmessungen oder geringfügig darunter aufweisen.

- Auf Grund des geringen Einflusses von Zähigkeitseffekten kann auch die vereinfachte Randbedingung abgeleitet werden, dass Geschwindigkeitsfluktuationen an starren Wänden nur normal zur Wand verschwinden, nicht aber parallel dazu (Rutschbedingung). Die akustische Grenzschicht, in der die Geschwindigkeitsfluktuationen von ihrem Wert in der freien Strömung auf Null direkt an der Wand abfallen, hat in Folge der niedrigen Viskosität eine vernachlässigbare Dicke gegenüber den geometrischen Abmessungen und kann daher unberücksichtigt bleiben.
- Es wirken keine Volumenkräfte.
- Das Fluid wird als ideales Gas behandelt, das zumindest stückweise eine einheitliche Zusammensetzung mit konstanter Gaskonstante und konstanten Wärmekapazitäten aufweist.
- Die Effekte auf Grund der Verbrennung werden durch eine externe Wärmezufuhr modelliert³.

³Es ist auch ein anderes Vorgehen denkbar: Poinot und Veynante [101] berücksichtigen in ihrer Herleitung der akustischen Gleichungen für reagierende Strömungen in der Energiegleichung zunächst explizit die Enthalpien der einzelnen Spezies und die Reaktionswärme für eine adiabate Verbrennung. Sie treffen sodann aber die Annahme gleicher Molmassen für alle Spezies und damit eines konstanten Verhältnisses der spezifischen Wärmekapazitäten. Das Ergebnis stellt letztendlich eine analoge Formulierung zu dem hier gewählten Ansatz dar.

2.1.2 Linearisierte Störungsgleichungen

Ausgangspunkt für die Herleitung der Ausbreitungsgleichungen der Störungen sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie, die unter den im vorangegangenen Abschnitt getroffenen Voraussetzungen durch die Euler-Gleichungen gegeben sind. Die Gleichung für die Massenerhaltung lautet somit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

oder unter Verwendung der substantiellen Ableitung $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

Die Impulserhaltung wird durch die vektorielle Gleichung (für dreidimensionale Fälle besteht sie aus drei skalaren Gleichungen)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (2.3)$$

oder

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (2.4)$$

wiedergegeben. Zur Beschreibung der Energiebilanz ist es vorteilhaft, neben Druck, Geschwindigkeit und Dichte noch die spezifische Entropie s als weitere unabhängige Variable einzuführen. Damit lässt sich folgende Beziehung angeben, deren Herleitung im Anhang A zu finden ist:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\rho}{c_p} \frac{Ds}{Dt}. \quad (2.5)$$

Hierbei stellt c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck und c die lokale Schallgeschwindigkeit dar. Gleichung (2.5) kann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (2.2) noch in eine andere Form übergeführt werden, bei der die substantielle Zeitableitung der Dichte eliminiert ist:

$$\frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\rho}{c_p} \frac{Ds}{Dt}. \quad (2.6)$$

Die substantielle Ableitung der Entropie in dieser Gleichung stellt einen Quellterm dar. Da in den Euler-Gleichungen Zähigkeitseffekte und damit Dissipation unberücksichtigt bleiben, existieren keine Entropieänderungen auf Grund von Irreversibilitäten. Der Quellterm beschreibt demnach nur eine Wärmezufuhr oder Wärmeabfuhr, die durch

$$dq = T ds \quad (2.7)$$

gegeben ist. Unter Berücksichtigung der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$p = \rho RT, \quad (2.8)$$

des Zusammenhangs

$$\frac{c_p}{R} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \quad (2.9)$$

sowie der Schallgeschwindigkeit für ideale Gase

$$c^2 = \kappa RT = \kappa \frac{p}{\rho} \quad (2.10)$$

bekommt Gleichung (2.6) die Form

$$\frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\kappa - 1}{c^2} \dot{q}_V. \quad (2.11)$$

Hierbei repräsentiert die Größe $\dot{q}_V = \rho \dot{q}$ den *volumetrischen* Wärmestrom mit der Einheit $[W/m^3]$, also die dem Fluid pro Zeit- und Volumeneinheit zugeführte Wärmemenge.

Aus den Gleichungen (2.2), (2.4) und (2.11) lassen sich nun die linearisierten Störungsgleichungen herleiten. Dazu wird das Strömungsfeld in ein mittleres stationäres Feld $\bar{\rho}$, $\bar{\mathbf{u}}$, \bar{p} usw. und diesem überlagerte kleine Schwankungen ρ' , \mathbf{u}' , p' usw. aufgespalten. Die durch Einsetzen dieser Zerlegung in die Erhaltungsgleichungen entstehenden Beziehungen bestehen aus Termen, die entweder nur mittlere Größen, eine Schwankungsgröße oder Produkte von Schwankungsgrößen enthalten. Die mittleren Größen repräsentieren die stationäre Lösung. Sie allein müssen daher die Erhaltungsgleichungen erfüllen und können aus dem resultierenden System abgezogen werden. Produkte von Schwankungsgrößen stellen Terme höherer Ordnung dar,

die sehr klein sind und vernachlässigt werden. Übrig bleibt unter Zuhilfenahme von Gleichung (2.10) folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \rho' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \frac{\nabla p'}{\bar{\rho}} - \frac{(\nabla \bar{p}) \rho'}{\bar{\rho}^2} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla p' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{p} + \kappa \bar{p} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \kappa p' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = (\kappa - 1) \dot{q}'_V. \quad (2.14)$$

Jede Störung, deren Ausbreitung durch diese Gleichungen beschrieben wird, kann als Überlagerung dreier verschiedener Moden verstanden werden [100, 102]: einer akustischen Mode, einer Vorticity-Mode (Wirbelbewegung) und einer Entropie-Mode⁴. In einem homogenen mittleren Feld ohne Wärmequellen würden sich diese Moden voneinander entkoppelt entwickeln, abgesehen von Vorgängen an den Rändern des Strömungsgebiets. Mit jeder Mode ist dann eine typische Klasse fluiddynamischer Prozesse verbunden:

- Die akustische Mode beschreibt die Ausbreitung von Druckwellen in einem kompressiblen Medium. Das damit verbundene Geschwindigkeitsfeld ist wirbelfrei.
- Die Vorticity-Mode beschreibt Produktion und Transport von Wirbelfluktuationen in einem inkompressiblen Medium. Sie verursacht keinerlei Schwankungen der thermodynamischen Zustandsgrößen, insbesondere des Drucks.
- Die Entropie-Mode beschreibt Produktion und Transport von Gebieten unterschiedlicher Temperatur beziehungsweise Dichte. Sie ist frei von Druckschwankungen und nur mit einem schwachen wirbelfreien Geschwindigkeitsfeld verbunden. Bei Berücksichtigung von Reibung und Wärmeleitung stellt die Entropie-Mode allerdings nur einen Teil des fluktuierenden Entropiefeldes

⁴Häufig finden sich in diesem Zusammenhang auch die Bezeichnungen akustische Wellen, Vorticity-Wellen und Entropie-Wellen. Da sich aber die Störungen von Vorticity und Entropie, wie nachfolgend gezeigt, konvektiv ausbreiten und damit im Gegensatz zu Wellen an einen Materietransport gebunden sind, wird hierfür im Rahmen dieser Arbeit der Begriff „Wellen“ vermieden. Er ist allein der akustischen Mode vorbehalten.

dar. In diesem Fall liefert auch die akustische Mode einen Beitrag zu den Entropieschwankungen.

Durch Gradienten der mittleren Größen in inhomogenen mittleren Feldern und durch Wärmequellen tritt eine Kopplung der Moden auf. Hierauf wird weiter unten noch genauer eingegangen.

Zu den Gleichungen (2.12) bis (2.14) existiert ein äquivalentes Differentialgleichungssystem, in dem jede Gleichung genau einer der beschriebenen Moden zugeordnet ist. Seine Herleitung wird von Ewert und Schröder und Ewert et al. demonstriert [103, 104]. Der Ansatz beruht auf einer Zerlegung der Variablen. So lassen sich die Dichteschwankungen in einen isentropen (akustischen) Anteil und einen Restanteil aufteilen, der der Entropie-Mode zugeordnet ist (die Vorticity-Mode bewirkt, wie gesagt, keine Schwankungen der thermodynamischen Zustandsgrößen und damit auch nicht der Dichte):

$$\rho' = \rho^a + \rho^r . \quad (2.15)$$

Da lediglich die akustische Mode mit Druckfluktuationen verbunden ist, gilt folgender Zusammenhang:

$$p' = \bar{c}^2 \rho^a . \quad (2.16)$$

Die Geschwindigkeitsschwankungen wiederum können in einen wirbelfreien Anteil und einen Restanteil zerlegt werden. Das wirbelfreie Geschwindigkeitsfeld ergibt sich zunächst allgemein als Gradient eines Potentials ϕ , so dass

$$\mathbf{u}' = \nabla \phi + \mathbf{u}^r . \quad (2.17)$$

Diese Zerlegung ist nicht eindeutig, da \mathbf{u}^r nicht notwendigerweise als quellenfrei angenommen werden muss⁵. Daher kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass sich die Druckfluktuationen über

$$p' = -\bar{\rho} \frac{\bar{D}\phi}{Dt} \quad (2.18)$$

⁵Nach dem Helmholtz'schen Zerlegungssatz lässt sich jedes Vektorfeld *eindeutig* nur in einen *rotationsfreien* (wirbelfreien) und einen *divergenzfreien* (quellenfreien) Anteil zerlegen. Dazu müssen auch noch bestimmte Bedingungen am Rand erfüllt sein.

ausschließlich durch das Potential ϕ ausdrücken lassen [105], wobei $\bar{D}/Dt = \partial/\partial t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla$ ⁶. Auf Grund der Verknüpfung mit den Druckfluktuationen wird ϕ als akustisches Potential bezeichnet. Unter Verwendung der Beziehungen (2.15) bis (2.18) geht das Gleichungssystem (2.12) bis (2.14) in die Form

$$\left[\frac{\bar{D}}{Dt} \left(\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\bar{D}}{Dt} \right) - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \nabla) \right] \phi = f_a(\mathbf{u}^r, \rho^r), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^r + (\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = f_v(\phi, \rho^r), \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \rho^r}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho^r + \rho^r \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = f_e(\phi, \mathbf{u}^r, \dot{q}_V) \quad (2.21)$$

über. Die Quellterme f_a , f_v und f_e sind durch

$$f_a(\mathbf{u}^r, \rho^r) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho^r}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho^r + \rho^r \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^r \bar{\rho}) \right), \quad (2.22)$$

$$f_v(\phi, \rho^r) = -\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \nabla \phi + \frac{\nabla \bar{p}}{\bar{\rho}^2} \rho^r, \quad (2.23)$$

$$f_e(\phi, \mathbf{u}^r, \dot{q}_V) = (\nabla \bar{p} - \bar{c}^2 \nabla \bar{\rho}) \cdot (\nabla \phi + \mathbf{u}^r) - \bar{\rho} \left((\kappa - 1) \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \frac{2}{\bar{c}} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{c} \right) \frac{\bar{D} \phi}{Dt} - \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \dot{q}_V \quad (2.24)$$

gegeben, mit $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \times \bar{\mathbf{u}}$ als Vorticity des mittleren Strömungsfelds. Gleichung (2.19) beschreibt die Ausbreitung akustischer Störungen mit einem konvektiven Wellenoperator für das akustische Potential ϕ . Fluktuierende Wirbel werden durch Gleichung (2.20), nicht isentrope Dichteschwankungen durch Gleichung (2.21) erfasst.

Das Gleichungssystem (2.19), (2.20) und (2.21) ermöglicht einen interessanten Einblick in die Physik der Ausbreitung von Störungen. Aus den Navier-Stokes-Gleichungen, die das Verhalten von viskosen Fluiden ohne die Einschränkungen der Euler-Gleichungen beschrei-

⁶Wäre die Zerlegung nach Gleichung (2.17) bereits eindeutig, wäre damit auch das Potential bereits eindeutig festgelegt. Da dies aber nicht der Fall ist, besteht die Freiheit, das Potential ϕ mit den Druckfluktuationen p' zu verknüpfen. Dabei sind lediglich die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichung zu erfüllen. Dies allein führt wiederum noch nicht zu einem eindeutigen Zusammenhang, so dass Gleichung (2.18) nur eine mögliche, allerdings besonders vorteilhafte Form darstellt. Für ihre Herleitung sei auf Pierce verwiesen [105].

ben, lassen sich nichtlineare Störungsgleichungen herleiten, deren linke Seite identisch mit dem gezeigten Gleichungssystem ist. Die Einflüsse von Zähigkeit und Nichtlinearitäten finden sich in den Quelltermen auf der rechten Seite wieder. Das lässt die Interpretation zu, dass die Gleichungen (2.19) bis (2.21) bei entsprechender Formulierung der Quellterme ganz allgemein die Ausbreitung von Störungen beschreiben, die durch (nichtlineare) Quellen angefacht werden.

Insbesondere ist es zulässig, für das mittlere Strömungsfeld beispielsweise eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen vorzugeben. Auf diese Weise ließen sich dann etwa die Einflüsse viskoser Effekte auf die Störungsausbreitung erfassen. Für allgemeine, nicht gleichförmige, mittlere Felder sind die drei Störungsgleichungen nämlich über die Quellterme (2.22) bis (2.24) miteinander gekoppelt. So erzeugen akustische Schwankungen Wirbel, die selbst wiederum eine akustische Quelle darstellen können. Die mittlere Strömung bewirkt somit einen wechselseitigen Energietransfer zwischen der akustischen Mode, der Vorticity-Mode und der Entropie-Mode.

Durch diese Wechselwirkung sind die für Verbrennungsschwingungen maßgeblichen Mechanismen komplexer und vielseitiger, als es die prinzipielle Darstellung in der Einführung und die schematische Darstellung in Abbildung 1.2 auf Seite 3 wiedergeben können. Dem trägt das modifizierte Schema in Abbildung 2.1 Rechnung. In ihm sind von den vielen möglichen Kopplungen der drei Störungsmoden diejenigen aufgenommen, die vor allem im Hinblick auf Verbrennungsschwingungen von Bedeutung sind. Schwankungen des zugeführten Luftmassenstroms, welche durch die Reflexion akustischer Wellen bedingt sind, bewirken bei konstanter Brennstoffzufuhr Luftzahlschwankungen, die in der Flamme Dichte- und damit Entropiefluktuationen generieren. Sie verlassen das System teilweise konvektiv, können aber über die Kopplung durch das mittlere Strömungsfeld auch neue akustische Wellen erzeugen. Die akustischen Wellen wiederum werden durch die Wechselwirkung mit dem mittleren Feld teilweise in Wirbel- und Entropiefluktuationen umgewandelt. Durch deren konvektiven Transport aus dem System heraus entsteht somit zusätzlich zur akustischen

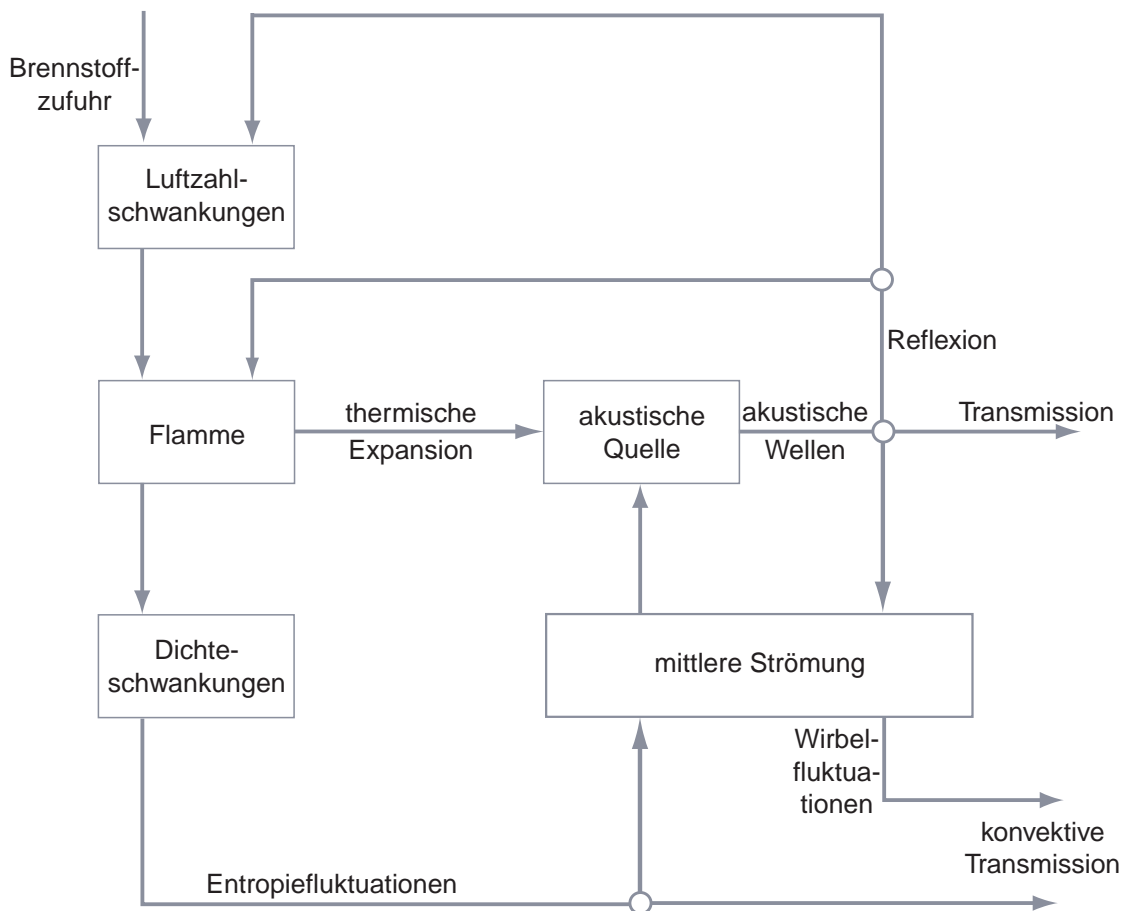


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des Rückkopplungsmechanismus von Verbrennungsschwingungen unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen akustischer Mode, Vorticity-Mode und Entropie-Mode.

Abstrahlung an den Rändern eine weitere Senke für die akustische Energie.

Diese Interaktion sei anhand zweier Beispiele verdeutlicht. Abbildung 2.2 zeigt schematisch die Wechselwirkung einer akustischen Schwankung mit dem mittleren Strömungsfeld. Ein Fluidteilchen bewegt sich in einer drehungsbehafteten Strömung, die durch das mittlere Geschwindigkeitsfeld $\bar{\mathbf{u}}$ beschrieben wird. Gleichzeitig ist es der akustischen Schnelle v^a ausgesetzt, die hier der Einfachheit halber parallel zum mittleren Geschwindigkeitsgradienten angenommen sei. Das Teilchen befindet sich zu einem Zeitpunkt „0“ auf einer bestimmten Stromlinie des mittleren Feldes. Durch die Schallschnel-

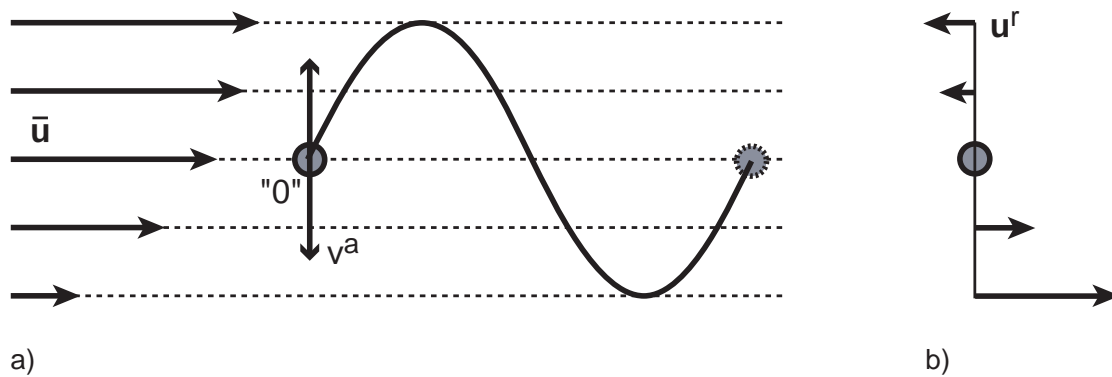


Abbildung 2.2: Interaktion einer akustischen Fluktuation mit dem mittleren Strömungsfeld.

le wird es aus dieser Position ausgelenkt und beschreibt qualitativ die in Abbildung 2.2a) dargestellte Bahn. Auf Grund der Trägheit behält das Teilchen seine Geschwindigkeit in Strömungsrichtung bei, die aber außerhalb seiner „Ursprungsstromlinie“ von der mittleren Geschwindigkeit abweicht. Gegenüber der mittleren Strömung wird daher das in Abbildung 2.2b) dargestellte fluktuierende Geschwindigkeitsfeld u^r induziert. Wird das Teilchen „nach oben“ ausgelenkt, ist seine Geschwindigkeit in Strömungsrichtung geringer als die des mittleren Feldes. Der mittleren Strömung wird hier also eine negative fluktuierende Komponente überlagert. Analog erzeugt eine Auslenkung „nach unten“ eine positive Fluktuation. Offensichtlich erzeugen die akustischen Schwankungsbewegungen im Zusammenwirken mit der mittleren Strömung Wirbel, die selbst wieder durch das mittlere Strömungsfeld stromab konvektiert werden. Dieser Mechanismus ist verantwortlich für den Verlust von akustischer Energie beispielsweise in Rezirkulationsgebieten oder in der Grenzschicht einer Strömung. Selbst Wände, die in einem ruhenden Fluid senkrecht einfallende akustische Wellen perfekt reflektieren (akustisch „hart“ sind), tragen also bei Durchströmung des Systems über die Ausbildung einer Grenzschicht zur akustischen Dämpfung bei.

Das andere Beispiel ist die Erzeugung akustischer Druckwellen durch Dichte- bzw. Temperaturinhomogenitäten, also durch Entropiefluk-

tuationen, in einer kritisch durchströmten Düse, wie sie unter anderem von Marble und Candel beschrieben wird [106]. Der konvektive Transport von Gebieten unterschiedlicher Dichte ist mit Massenstromschwankungen verbunden, die den (nicht isentropen) Dichtefluktuationen proportional sind, $\dot{m}' \propto \rho'$. Da die Ausbreitung der Entropie-Mode ohne Druckschwankungen erfolgt, gilt für ein ideales Gas $\rho'T' = \text{const.}$. Gleichzeitig ist wegen Gleichung (2.10) die Schallgeschwindigkeit zur Wurzel der Temperaturschwankungen proportional, $c' \propto \sqrt{T'}$, so dass in Gebieten höherer Dichte sowohl die Temperatur als auch die Schallgeschwindigkeit niedriger als die Mittelwerte sind. Muss nun eine positive Massenstromschwankung durch eine kritisch durchströmte Düse durchgesetzt werden, würde die negative Fluktuation der Schallgeschwindigkeit dem entgegenwirken. Um den erforderlichen Massendurchsatz zu gewährleisten, muss daher eine entsprechende Druckänderung induziert werden. Auf diese Weise wirkt die Düse als Quelle für die akustische Mode. Der beschriebene Mechanismus spielt bei einer unter dem Begriff „Rumble“ bekannten Art niederfrequenter Verbrennungsschwingungen als Begleiterscheinung eine gewisse Rolle in Brennkammern oder Nachbrennern von Flugtriebwerken. Zu den Entropieschwankungen kommt es dort auf Grund von akustisch getriggerten Brennstoffinhomogenitäten, als kritisch durchströmte Düse wirken der Turbineneintritt (1. Leitschaufelreihe) oder die Schubdüse.

Im Gegensatz zum allgemeinen Fall sind gleichförmige mittlere Felder rotationsfrei ($\bar{\omega} = 0$) und haben keine Gradienten in den mittleren Größen. In diesem Fall verschwinden alle Beiträge zu den Quelltermen f_v und f_e in den Gleichungen (2.23) und (2.24) bis auf die fluktuierende Wärmefreisetzung. Es werden keine Schwankungen der Vorticity produziert, Entropieschwankungen entstehen nur in der Wärmefreisetzungszone. Der Quellterm f_a für die akustische Mode, Gleichung (2.22), enthält mit den ersten drei Termen in der Klammer exakt die linke Seite der Transportgleichung für die Entropie-Mode, Gleichung (2.21), und im vierten Term eine Kopplung zur Vorticity-Mode. Letzterer verschwindet, wenn, wie soeben erläutert, keine Schwankungen der Vorticity produziert werden. Damit wirkt

sich bei gleichförmigen mittleren Feldern nur noch die schwankende Wärmefreisetzung auf die akustische Mode aus, ansonsten sind die Gleichungen (2.19) bis (2.21) voneinander entkoppelt.

2.2 Akustische Grundgleichungen

2.2.1 Vorbemerkung

Der vorangegangene Abschnitt hat verdeutlicht, dass die Ausbreitung von Störungen grundsätzlich als Problem verschiedener gekoppelter Ausbreitungsmodi zu verstehen ist. Dennoch wird sich diese Arbeit bei der Modellierung von Verbrennungsschwingungen auf die Beschreibung der rein akustischen Phänomene beschränken und die Effekte der Vorticity-Mode und der Entropie-Mode unberücksichtigt lassen. Diese Festlegung scheint zunächst willkürlich. Sie bedarf daher einer Begründung und einer Bewertung der damit verbundenen Vereinfachungen.

Der entscheidende Punkt ist zunächst, dass der für selbsterregte Verbrennungsschwingungen nötige Rückkopplungsmechanismus nur über die akustische Mode zustande kommen kann. Da Vorticity- und Entropiefluktuationen konvektiv transportiert werden, können sie in einem durchströmten System nicht mehr direkt auf den Ort zurück wirken, an dem sie produziert wurden. Akustische Schwankungen dagegen haben Wellencharakter und können sich in alle Richtungen ausbreiten. Insbesondere ist es möglich, dass Informationen über Reflexionen an ihren Entstehungsort zurückgelangen. Selbst bei dem vorher beschriebenen Phänomen der durch Entropieschwankungen getriebenen Verbrennungsschwingungen findet die Rückkopplung letztendlich über die Akustik statt. Die konvektierten Dichteinhomogenitäten wirken als akustische Quelle und sind somit nur mittelbar am Selbsterregungsmechanismus beteiligt. Verbrennungsschwingungen sind also ohne Akustik nicht denkbar, wohl aber ohne die Ausbreitung von Störungen über die Vorticity-Mode und die Entropie-Mode.

Die Frage ist demnach, inwieweit es zulässig ist, die Wechselwirkung der Akustik mit Schwankungen von Vorticity und Entropie unberücksichtigt zu lassen. Hier ist keine einheitliche Antwort möglich. „Rumble“ beispielsweise ist typischerweise mit dem Auftreten der Entropie-Mode verknüpft. Allerdings zeigen neueste Ergebnisse von Eckstein et al. [107], dass selbst in diesem Fall die rein thermoakustischen Mechanismen die dominierende Rolle spielen und allein für die Entstehung von Instabilitäten ausreichend sind. Die Entropie-Fluktuationen werden durch Dispersion stark gedämpft und können bestenfalls bei extrem niedrigen Frequenzen eine spürbare Wirkung zeigen. Gasturbinentypische Verbrennungsschwingungen sind daher gut ohne Einbeziehung der Entropieschwankungen beschreibbar. In extern perfekt vorgemischten Systemen treten sogar überhaupt keine Entropieinhomogenitäten auf, da diese ein konstantes Brennstoff-Luft-Verhältnis aufweisen.

Die Interaktion zwischen Akustik und instationären Wirbeln führt in erster Linie zu einem Verlust an akustischer Energie. Wie stark er ist, hängt vom mittleren Strömungsfeld ab und lässt sich allgemein nur schwer quantifizieren. Wie Gleichung (2.23) zeigt, ist die Produktion von Vorticity-Fluktuationen proportional der Vorticity der mittleren Strömung und dem Gradienten des akustischen Potentials, also den Geschwindigkeitsschwankungen. Letztere sind klein gegenüber den mittleren Größen. Wenn die Drehung im mittleren Feld moderat ist und sich in derselben Größenordnung bewegt, ist die Vorticity-Produktion nur zweiter Ordnung. Bei Vernachlässigung der Vorticity-Mode sind dann keine zu großen Fehler und insbesondere keine grundsätzlichen qualitativen Unterschiede zu erwarten.

Die Beschränkung auf rein akustische Phänomene bei der Modellierung von Verbrennungsschwingungen stellt also sicherlich eine Vereinfachung dar, die aber in vielen Fällen als erste Näherung aufgefasst werden darf. Wichtig ist, dass der wesentliche Mechanismus für die Entstehung der selbsterregten Instabilitäten erfasst wird. Ein Berechnungsverfahren, das hierzu in der Lage ist, kann prinzipiell um Gleichungen für die Beschreibung der Vorticity-Mode und der

Entropie-Mode und um die mit ihnen verbundenen Quellterme erweitert werden. Der in dieser Arbeit beschrittene Weg kann deshalb trotz der beschriebenen Einschränkungen als allgemeiner Ansatz verstanden werden.

2.2.2 Wellengleichung für den Schalldruck

Um Beziehungen für die Beschreibung rein akustischer Phänomene zu erhalten, wird im Folgenden angenommen, dass das mittlere Geschwindigkeitsfeld gleichförmig, also ohne Gradienten sei. Ebenso soll das mittlere Druckfeld gradientenfrei sein. Wie auf Seite 29 bereits erläutert, verschwinden in diesem Fall die Quellterme (2.22) bis (2.24) bis auf den Einfluss der Wärmequelle, und die Gleichungen (2.19) und (2.21) lassen sich zu einer inhomogenen Wellengleichung für das akustische Potential ϕ zusammenfassen:

$$\left[\frac{\bar{D}}{Dt} \left(\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\bar{D}}{Dt} \right) - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \nabla) \right] \phi = -\frac{\kappa - 1}{\bar{\rho} \bar{c}^2} \dot{q}'_V. \quad (2.25)$$

Diese Darstellung hat den Nachteil, dass das akustische Potential eine abstrakte Größe darstellt und erst durch die Definition (2.18) eine Verbindung zu physikalischen Größen hergestellt wird. Insbesondere kann die Formulierung von Randbedingungen, die üblicherweise durch Vorgaben für den Schalldruck p' oder die Schallschnelle \mathbf{u}' festgelegt sind, über das akustische Potential problematisch sein [105]. Es ist daher vorteilhaft, eine Beschreibung in einer physikalischen Variablen zu finden. Hierzu wird Gleichung (2.25) zunächst unter Verwendung von Gleichung (2.18) in

$$\frac{\bar{D}}{Dt} \left(\frac{1}{\bar{\rho} \bar{c}^2} p' \right) + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \nabla \phi) = \frac{\kappa - 1}{\bar{\rho} \bar{c}^2} \dot{q}'_V \quad (2.26)$$

umgeformt. Wegen der Annahme eines gradientenfreien Druckfelds ist mit $\bar{c}^2 = \kappa \bar{p} / \bar{\rho}$ auch der Ausdruck $\bar{\rho} \bar{c}^2$ zeitlich und örtlich konstant und kann vor die substantielle Ableitung in Gleichung (2.26) gezogen werden. Eine nochmalige Anwendung der substantiellen Zeitableitung auf die Gleichung unter Berücksichtigung der Voraussetzung

eines gleichförmigen Geschwindigkeitsfelds erlaubt die vollständige Elimination des akustischen Potentials und führt auf eine Wellengleichung für den Schalldruck in konvektiver Form,

$$\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\bar{D}^2 p'}{Dt^2} - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \frac{\bar{D} \dot{q}'_V}{Dt}, \quad (2.27)$$

oder in anderer Schreibweise

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + 2\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right) + \bar{\mathbf{u}} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) (\nabla p') \right) - \\ - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial \dot{q}'_V}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \dot{q}'_V \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

In Strömungen mit niedriger Mach-Zahl $M = |\bar{\mathbf{u}}|/\bar{c}$ sind die konvektiven Ableitungen von zweiter Ordnung klein im Vergleich zu den Zeitableitungen [101], so dass die substantielle Ableitung $\frac{\bar{D}}{Dt}$ durch die lokale Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t}$ ersetzt werden kann⁷. Gleichung (2.27) vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \frac{\partial \dot{q}'_V}{\partial t}. \quad (2.30)$$

Die Gleichungen (2.27) bzw. (2.30) stellen die Basis für das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren zur Berechnung von selbsterregten Verbrennungsschwingungen dar. Der Einfluss der Flammen wird dabei über die als Volumenquelle wirkende fluktuierende Wärmefreisetzungsrates \dot{q}'_V modelliert.

In diesem Ansatz zeigt sich eine Parallelität zu den in der Aeroakustik verwendeten akustischen Analogien. Bekanntester und ältester Vertreter ist die Lighthill-Analogie [108], die inzwischen eine Reihe von Veränderungen und Erweiterungen erfahren hat. Die akusti-

⁷Für eine harmonisch schwingende Größe in einer Dimension $f = e^{ikx - i\omega t}$ gilt beispielsweise wegen $k = \omega/\bar{c}$ und $M = \bar{u}/\bar{c}$:

$$\frac{\bar{D}f}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial f}{\partial x} = (-i\omega + \bar{u}ik)f = -i\omega(1 - M)f. \quad (2.29)$$

Für kleine Mach-Zahlen ist also die konvektive Ableitung vernachlässigbar.

schen Analogien beschreiben strömungsmechanisch bedingte Schallentstehung und Schallausbreitung. Dazu werden die Navier-Stokes-Gleichungen so umgeformt, dass sie auf der linken Seite eine Wellengleichung darstellen. Dieser Teil beschreibt die Ausbreitung der Schallwellen. Auf der rechten Seite verbleiben Terme, die die akustischen Quellen repräsentieren. Sie beschreiben beispielsweise über „fluktuierende Reynoldsspannungen“ den Einfluss der Turbulenz auf die Schallentstehung.

Der wesentliche Unterschied des thermoakustischen Modells aus den Gleichungen (2.27) bzw. (2.30) zu den akustischen Analogien besteht in der Art und Einbindung der Quelle. Rein strömungsmechanisch bedingte Schallentstehung wird allein durch die Strömungseigenschaften gesteuert. Die dabei wichtigen turbulenten Schwankungen können eine sehr geringe Stärke aufweisen und sehr kleinskalig sein. Sie wirken zudem als reine Fremderregung, eine Rückkopplung zur Akustik wird nicht betrachtet. Demgegenüber ist die fluktuierende Wärmefreisetzung als thermoakustische Quelle meist sehr stark und über ein größeres Gebiet verteilt⁸. Vor allem aber entfaltet sie ihre Wirkung erst durch die Rückkopplung mit dem akustischen Feld. Die Erfassung dieses Rückkopplungsmechanismus ist daher zentrale Aufgabe bei der Modellierung thermoakustischer Instabilitäten.

2.2.3 Harmonische Wellen und Helmholtz-Gleichung

Unter der Annahme, dass eine akustische Störung mit konstanter Frequenz schwingt, lässt sie sich als harmonische Welle darstellen. Die Feldvariablen schwanken dann in der Zeit sinusförmig. Der Schalldruck beispielsweise ist in komplexer Schreibweise allgemein durch

$$p' = \Re(\hat{p} e^{-i\omega t}) \quad (2.31)$$

gegeben. Dabei ist $\hat{p} = \hat{p}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) e^{i\phi(\mathbf{x})}$ die komplexe Druckamplitude, die die räumliche Verteilung der Amplitude P und der Phase ϕ des Schalldrucks wiedergibt.

⁸Hiervon zu unterscheiden ist der turbulente Flammenlärm, bei dem die Turbulenz mehr oder weniger kleinskalig über lokale Veränderungen der Reaktionsrate zur Schallentstehung beiträgt.

Auch für Schwingungen, die nicht durch eine einzige Frequenz gekennzeichnet sind, ist die Darstellung durch harmonische Wellen bedeutsam. Mit den Mitteln der Fourier-Transformation kann jedes Signal in harmonische Komponenten konstanter Frequenz zerlegt werden, die die Form von Gleichung (2.31) haben. Im linearen Bereich sind diese Komponenten unabhängig voneinander, so dass jede von ihnen isoliert betrachtet werden kann und die akustischen Grundgleichungen erfüllen muss.

Unter Verwendung des Ansatzes harmonischer Wellen werden die im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Wellengleichungen vom Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert. Beispielsweise ergibt sich für Gleichung (2.30) nach Einsetzen von (2.31) zunächst

$$\Re \left[\left(-\frac{\omega^2}{\bar{c}^2} \hat{p} - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \hat{p} \right) \right) e^{-i\omega t} \right] = \Re \left[\left(-i\omega \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \hat{q}_V \right) e^{-i\omega t} \right]. \quad (2.32)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass

1. die Bildung der zeitlichen und örtlichen Ableitung mit der Bildung des Realteils eines Ausdrucks kommutativ ist,
2. das Produkt einer reellen Zahl mit dem Realteil einer komplexen Zahl gleich dem Realteil des Produkts ist und
3. die Summe der Realteile mehrerer komplexer Zahlen gleich dem Realteil der Summe ist [102].

Gleichung (2.32) ist genau dann erfüllt, wenn

$$k^2 \hat{p} + \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \hat{p} \right) = i\omega \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \hat{q}_V, \quad (2.33)$$

wobei $k = \omega/\bar{c}$ als Wellenzahl bezeichnet wird. Diese Beziehung stellt eine Differentialgleichung für die komplexe Druckamplitude \hat{p} dar. Bei einer Anregung des Systems mit einer bestimmten Frequenz, entweder durch Vorgabe der komplexen Amplitude für die fluktuierende Wärmefreisetzungsrates \hat{q}_V oder durch eine entsprechende Randbedingung, beschreibt ihre Lösung die Verteilung der Amplituden und

Phasen der Druckschwingung, die sich als Reaktion auf die Anregungen einstellt. Ergibt sich die Wärmefreisetzungsschwankung aber selbst als Reaktion auf das akustische Feld, das heißt $\hat{q}_V = f(\hat{p})$, und fehlt auch eine äußere Anregung, stellt Gleichung (2.33) ein Eigenwertproblem dar. Eine Lösung ist dann nur für bestimmte Werte der Wellenzahl k , die Eigenwerte, möglich. Die Lösungen für \hat{p} sind die dazugehörigen Eigenmoden. Die Eigenwerte sind im Allgemeinen komplex. Aus ihrem Realteil bestimmt sich die Frequenz der Schwingung, der Imaginärteil legt fest, ob die Amplitude mit der Zeit zunimmt oder abnimmt⁹.

Entsprechend dem gerade gezeigten Vorgehen lassen sich auch die anderen Grundgleichungen in den Frequenzbereich übertragen. Formal wird dies dadurch erreicht, dass in den jeweiligen Gleichungen die fluktuierenden Größen durch ihre komplexen Amplituden (z.B. p' durch \hat{p}) und die partiellen Zeitableitungen $\partial/\partial t$ durch $-i\omega$ ersetzt werden. Die Wellengleichung für den Fall mit gleichförmiger mittlerer Strömung, Gleichung (2.28), wird so zu

$$k^2 \hat{p} + 2i \frac{k}{\bar{c}} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{p} - \frac{1}{\bar{c}^2} \bar{\mathbf{u}} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)(\nabla \hat{p}) + \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \hat{p} \right) = \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \left(i\omega \hat{q}_V - \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \hat{q}_V \right). \quad (2.34)$$

Für den Sonderfall eines ruhenden Fluids ohne Wärmequelle und mit konstanter Dichte ergibt sich die bekannte Helmholtz-Gleichung,

$$k^2 \hat{p} + \Delta \hat{p} = 0, \quad (2.35)$$

die unter den genannten Voraussetzungen die rein akustischen Eigenmoden eines Systems liefert.

⁹Ist $\omega = \Re(\omega) + i\Im(\omega)$ eine komplexe Zahl, gilt mit der Definition (2.31) : $p' = e^{-\Im(\omega)t} \Re(\hat{p} e^{-i\omega t})$. Die Schwingung klingt also für $\Im(\omega) \neq 0$ exponentiell auf oder ab.

2.3 Wellenausbreitung in einer Dimension

2.3.1 Ebene Wellen

In bestimmten Fällen lässt sich die Ausbreitung akustischer Wellen als eindimensionales Problem darstellen. Dies ist beispielsweise für langgestreckte Kanäle wie in Abbildung 2.3 dargestellt der Fall. Unter der Annahme, dass die akustischen Größen über den Kanalquerschnitt konstant sind und die Wellenausbreitung nur in axialer Richtung erfolgt, also $p'(x, y, z, t) = p'(x, t)$, vereinfacht sich die Wellengleichung (2.28) zu

$$\left[\frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] p' = 0. \quad (2.36)$$

Hierbei ist zusätzlich vorausgesetzt, dass das Medium homogen ist (also keine Dichteunterschiede aufweist), lediglich in axialer Richtung mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} strömt und keine Wärmequellen vorhanden sind. Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung ist die Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen:

$$p' = P^+ \left(t - \frac{x}{\bar{c} + \bar{u}} \right) + P^- \left(t + \frac{x}{\bar{c} - \bar{u}} \right). \quad (2.37)$$

Mit Verwendung der linearisierten Impulsgleichung (2.13) ergibt sich für die Schallschnelle

$$u' = \frac{1}{\rho \bar{c}} \left(P^+ \left(t - \frac{x}{\bar{c} + \bar{u}} \right) - P^- \left(t + \frac{x}{\bar{c} - \bar{u}} \right) \right). \quad (2.38)$$

P^+ bzw. P^- sind prinzipiell beliebige Funktionen, die sich mit den Geschwindigkeiten $\bar{c} + \bar{u}$ nach rechts (in positiver x -Richtung) bzw. $\bar{c} - \bar{u}$ nach links (in negativer x -Richtung) bewegen, dabei aber als Invarianten ihre Gestalt beibehalten. Da sie über den Querschnitt konstante Werte aufweisen, werden sie als ebene Wellen bezeichnet. In einem ruhenden Medium mit $\bar{u} = 0$ breitet sich eine Störung in beide Richtungen gleich schnell aus. Dies kann näherungsweise auch bei kleinen mittleren Strömungsgeschwindigkeiten $\bar{u} \ll \bar{c}$ angenommen werden. Für den Zusammenhang zwischen Schalldruck und

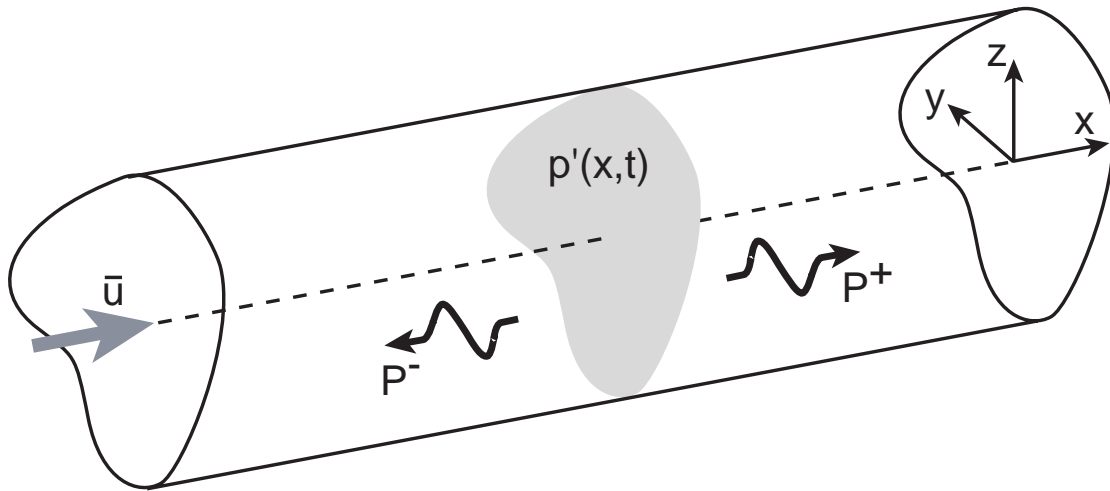


Abbildung 2.3: Ausbreitung ebener Wellen in einem Kanal konstanten Querschnitts.

Schallschnelle gilt für die rechtslaufende Welle $p' = \bar{\rho} \bar{c} u'$ und für die linkslaufende Welle $p' = -\bar{\rho} \bar{c} u'$. Die Konstante $Z_0 = \bar{\rho} \bar{c}$ ist die so genannte charakteristische Impedanz des Fluids.

Das Konzept der ebenen Wellen lässt sich auch auf harmonische Wellen entsprechend Gleichung (2.31) übertragen. Die komplexe Druckamplitude stellt sich dann ebenfalls als Überlagerung zweier komplexer Druckamplituden dar, die jeweils der rechtslaufenden und der linkslaufenden Welle zugeordnet sind:

$$\begin{aligned} \hat{p}(x) &= \hat{p}^+(x) + \hat{p}^-(x) = \hat{p}_0^+ e^{-i \frac{\omega}{\bar{c} + \bar{u}} x} + \hat{p}_0^- e^{i \frac{\omega}{\bar{c} - \bar{u}} x} = \\ &= \hat{p}_0^+ e^{-ik^+ x} + \hat{p}_0^- e^{ik^- x} . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die beiden gegenläufigen Wellen sind also nicht nur in ihrem zeitlichen Verlauf, sondern auch in ihrer örtlichen Verteilung sinusförmig. Analog zur Gleichung (2.38) gilt für die komplexe Schallschnelle

$$\hat{u}(x) = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{c}} (\hat{p}^+(x) - \hat{p}^-(x)) . \quad (2.40)$$

Das akustische Feld in einem Kanal ist eindeutig bestimmt, wenn in einem Querschnitt die komplexe Druckamplitude \hat{p} und die komplexe Schallschnelle \hat{u} bekannt sind. Zur Charakterisierung der Beziehung

zwischen diesen beiden Größen dient die Impedanz

$$Z(x) = \frac{\hat{p}(x)}{\hat{u}(x)}. \quad (2.41)$$

Sie ist insbesondere geeignet, Randbedingungen zu definieren, die üblicherweise durch bestimmte Vorgaben für Schalldruck und Schallschnelle gegeben sind. Eng mit der Impedanz verbunden ist der Reflexionskoeffizient R , der die rechtslaufende Schalldruckwelle zur linkslaufenden ins Verhältnis setzt:

$$R(x) = \frac{\hat{p}^+(x)}{\hat{p}^-(x)}. \quad (2.42)$$

Er ist demnach ein Maß dafür, welcher Anteil der in die eine Richtung laufenden Welle an der Stelle x in die andere Richtung reflektiert wird. Dieser Darstellung liegt das Prinzip zu Grunde, dass sich das an die Stelle x anschließende akustische System durch eine Randbedingung ersetzen lässt, die durch eine Impedanz oder einen Reflexionskoeffizienten ausgedrückt wird. Zwischen Z und R besteht wegen der Gleichungen (2.39) und (2.40) der Zusammenhang

$$R = \frac{Z/Z_0 + 1}{Z/Z_0 - 1} \quad (2.43)$$

mit der auf Seite 38 definierten charakteristischen Impedanz Z_0 . Für einige wichtige idealisierte Randbedingungen lassen sich Z und R direkt angeben. Am rechten (in positiver x -Richtung gelegenen) Rand eines Kanals gilt¹⁰:

- Ist der Kanal durch ein Plenum konstanten Drucks begrenzt, müssen die Druckfluktuationen am Rand verschwinden. Das ist der Fall, wenn $\hat{p}^+ = -\hat{p}^-$. Die rechtslaufende Druckwelle wird also vollständig gegenphasig reflektiert, es gilt $R = -1$ und $Z = 0$. Diese Randbedingung wird als offenes oder akustisch weiches Ende bezeichnet.

¹⁰An einem linken Rand sind die Bedeutung der rechtslaufenden und linkslaufenden Welle vertauscht, deshalb ergeben sich hier teilweise andere Ergebnisse.

- Ist der Kanal durch eine feste Wand begrenzt, müssen die Geschwindigkeitsfluktuationen am Rand verschwinden. Das ist der Fall, wenn $\hat{p}^+ = \hat{p}^-$. Die rechtslaufende Druckwelle wird also vollständig gleichphasig reflektiert, es gilt $R = 1$ und $Z \rightarrow \infty$. Diese Randbedingung wird als geschlossenes oder akustisch hartes Ende bezeichnet.
- Ist der Kanal durch ein nicht reflektierendes Ende begrenzt, gibt es keine linkslaufende Druckwelle, $\hat{p}^- = 0$. Es gilt demnach $R \rightarrow \infty$ und $Z = Z_0$. Diese Randbedingung wird als akustisch angepasstes Ende bezeichnet.

In der Realität wird die mit den beschriebenen Randbedingungen verbundene vollständige Reflexion oder Transmission der Wellen bestenfalls nur näherungsweise erreicht. Am Rand geht daher immer ein Teil der akustischen Energie durch Transmission verloren, ein anderer Teil bleibt dem System auf Grund von Reflexion erhalten.

2.3.2 Akustische Netzwerke und Transfermatrizen

Die Ausführungen des vorangegangenen Abschnitts beziehen sich auf gerade Kanäle mit konstantem Querschnitt. Die dabei eingeführten Konzepte sind aber teilweise auf komplexere Systeme übertragbar. Dies ist die Grundlage für die Theorie der akustischen Netzwerke.

Betrachtet wird ein beliebiges akustisches Element, wie es schematisch in Abbildung 2.4 gezeigt ist. Sein akustisches Feld sei so gear- tet, dass in der Eintrittsfläche A_1 und der Austrittsfläche A_2 immer über dem Querschnitt konstante Schalldrücke \hat{p}_1 und \hat{p}_2 sowie zu den Flächen normale Schallschnellen \hat{u}_1 und \hat{u}_2 herrschen. Dann ist die Kenntnis der Vorgänge in seinem Inneren unnötig. Das Element ist ein akustisches Zweitor und wirkt als „Black Box“, die in Bezug auf eine Wegkoordinate s ein ebenes akustisches Wellenfeld in charakteristischer Weise modifiziert. Dieses Verhalten lässt sich durch eine so genannte Transfermatrix \mathbf{T} quantifizieren, die Schalldruck und

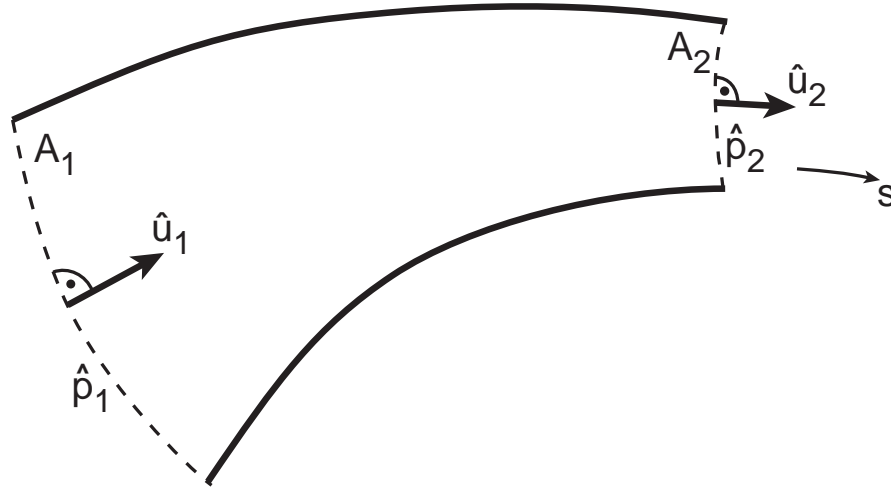


Abbildung 2.4: Schema eines akustischen Zweitors.

Schallschnelle am Eingang und Ausgang des Elements zueinander in Beziehung setzt:

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_2/Z_0 \\ \hat{u}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \hat{p}_1/Z_0 \\ \hat{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_1/Z_0 \\ \hat{u}_1 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Durch die Skalierung des Schalldrucks mit der charakteristischen Impedanz Z_0 werden alle Elemente der Transfermatrix dimensionslos. Die Transfermatrix ist im Allgemeinen eine Funktion der Kreisfrequenz ω , was das unterschiedliche Übertragungsverhalten akustischer Elemente für verschiedene Frequenzen widerspiegelt.

Ein komplexes akustisches System, das durch die eindimensionale Ausbreitung ebener Wellenfelder in der beschriebenen Art gekennzeichnet ist, lässt sich nun als Verkettung von Zweitoren verstehen (Abbildung 2.5). Die Transfermatrix des gesamten Netzwerks ist das Produkt der Transfermatrizen der einzelnen Elemente:

$$\mathbf{T}_{\text{sys}} = \prod_i \mathbf{T}_i. \quad (2.45)$$

Damit sind die Eigenfrequenzen des Systems oder seine Antwort auf eine akustische Anregung berechenbar, wenn zusätzlich die Impedanzen am Anfang Z_A und Ende Z_E als Randbedingungen bekannt sind. Der damit verbundene Rechenaufwand ist meist gering, weshalb die

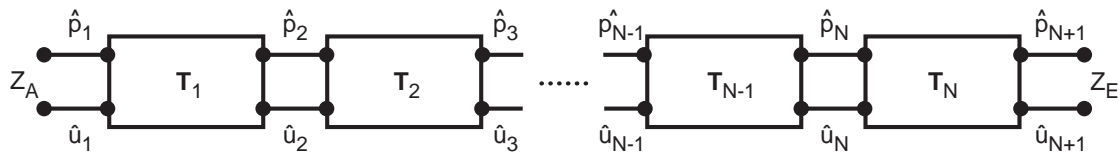


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung eines akustischen Netzwerks, das aus N Zweitoren besteht.

akustischen Netzwerke für die Stabilitätsanalyse thermoakustischer Systeme eine große Bedeutung erlangt haben.

Für einfache Zweitore wie gerade Kanäle oder Flächensprünge können die Transfermatrizen auf analytische oder halbempirische Weise bestimmt werden. Komplexere Elemente müssen entweder auf diese Beziehungen zurückgeführt werden oder experimentell charakterisiert werden. Ein Verfahren zur numerischen Berechnung von Transfermatrizen in beliebigen Geometrien, auch unter der Berücksichtigung von Wärmefreisetzungszonen, auf Basis einer dreidimensionalen Akustiksimulation findet sich bei Pankiewitz et al. [109, 110] und ist im Anhang B beschrieben.

2.3.3 Nicht ebene Moden

Im Abschnitt 2.3.1 wurde die Ausbreitung ebener Wellen behandelt. Die dabei getroffene Annahme, dass die akustischen Größen über den Kanalquerschnitt konstant seien, ist zunächst willkürlich. Hier soll deshalb noch der allgemeine Fall einer auch über den Querschnitt beliebigen Schalldruckverteilung untersucht werden. Die Darstellung orientiert sich an Pierce [102].

Betrachtet wird eine harmonische Welle in einem Kanal beliebigen Querschnitts analog dem in Abbildung 2.3 dargestellten. Für ihre komplexe Schalldruckamplitude lässt sich dann mit einer Separation der Variablen der Ansatz

$$\hat{p}_n(x, y, z) = \hat{P}_n X_n(x) \Psi_n(y, z) \quad (2.46)$$

treffen. Das akustische Feld wird also in zwei Anteile zerlegt, die

einerseits die axiale Abhängigkeit und andererseits die Verteilung über den Querschnitt angeben. $\hat{P}_n = P_n e^{i\phi}$ ist eine ortsunabhängige komplexe Amplitude. In einem ruhenden¹¹ homogenen Medium ohne Wärmequellen muss dieser Ansatz die Helmholtz-Gleichung (2.35) erfüllen. Einsetzen führt zunächst zu

$$k^2 + \frac{1}{X_N} \frac{\partial^2 X_n}{\partial x^2} + \frac{1}{\Psi_N} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_n = 0. \quad (2.47)$$

Der dritte Summand in dieser Gleichung muss eine Konstante sein, da er nur von y und z abhängt, die ersten beiden Summanden aber von y und z unabhängig sind. Wird die Konstante zu $-\alpha_n^2$ gewählt, ergibt sich für die Schalldruckverteilung über den Querschnitt die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_n + \alpha_n^2 \Psi_n = 0. \quad (2.48)$$

Analog ergibt sich für die axiale Verteilung

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} + (k^2 - \alpha_n^2) X_n = 0. \quad (2.49)$$

Zusammen mit der Randbedingung, dass die Geschwindigkeit und damit der Druckgradient normal zur Kanalwand verschwinden sollen ($\nabla \Psi_n \cdot \mathbf{n} = 0$), stellt Gleichung (2.48) ein differentielles Eigenwertproblem dar. Die Ψ_n sind die Eigenfunktionen, die α_n^2 die dazugehörigen diskreten reellen und positiven Eigenwerte¹². Gleichung (2.49) lässt Lösungen der Form $X_n(x) = e^{\pm i(k^2 - \alpha_n^2)^{1/2} x}$ zu, so dass der Schalldruck im Kanal durch

$$p'_n(x, y, z, t) = \Re \left(\hat{P}_n e^{-i\omega t} e^{i(k^2 - \alpha_n^2)^{1/2} x} \Psi_n(y, z) \right) \quad (2.50)$$

beschrieben wird. Die Ausbreitung der Eigenmoden Ψ_n in axialer Richtung ist wesentlich durch ihre Eigenwerte α_n^2 bestimmt. Für $\alpha_n^2 < k^2$ ist die axiale Verteilung des Schalldrucks sinusförmig,

¹¹Die Übertragung der nachfolgenden Herleitung auf ein gleichförmig strömendes Medium ist problemlos möglich, wird hier aber im Hinblick auf die Klarheit der Darstellung nicht gezeigt.

¹²Die Aussage, dass die Eigenwerte reell und positiv sein müssen, folgt aus der zusätzlichen Bedingung, dass die Eigenfunktionen orthogonal zueinander sein sollen [102].

die Moden breiten sich also dann wellenförmig aus. Der Ausdruck $(k^2 - \alpha_n^2)^{1/2}$ kann als axiale Wellenzahl verstanden werden, so dass die Phasengeschwindigkeit $c_{ph} = \omega / (k^2 - \alpha_n^2)^{1/2}$ die axiale Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Mode darstellt¹³. Ist allerdings $\alpha_n^2 > k^2$ und damit $(k^2 - \alpha_n^2)^{1/2} = i|k^2 - \alpha_n^2|^{1/2}$, nimmt eine durch Gleichung (2.50) gegebene Störung exponentiell in x -Richtung ab. Schalldruck und axiale Komponente der Schallschnelle sind in diesem Fall um 90° phasenverschoben, so dass im Mittel keine akustische Energie in axialer Richtung transportiert wird. Die Mode wird als quergedämpft bezeichnet.

Aus dem Gesagten folgt, dass zu jeder Eigenmode Ψ_n eine so genannte Eckfrequenz $\omega_{e,n}$ existiert, die überschritten werden muss, um eine axiale Ausbreitung der Mode zu ermöglichen. Aus der Bedingung $\alpha_n^2 < k^2$ errechnet sie sich unter Berücksichtigung von $k = \omega / \bar{c}$ zu

$$\omega_{e,n} = \bar{c} \alpha_n. \quad (2.51)$$

Es gibt immer eine Mode, für die $\alpha_n = 0$ und $\Psi_n = \text{const.}$, nämlich die im Abschnitt 2.3.1 bereits beschriebene ebene Mode. Sie breitet sich für alle Frequenzen axial aus, und zwar immer mit der Schallgeschwindigkeit \bar{c} . Moden mit $\alpha_n \neq 0$ weisen im Gegensatz hierzu eine frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit auf. Wird eine Mode also an einem Ort gleichzeitig mit verschiedenen Frequenzen angeregt, breiten sich diese Frequenzen unterschiedlich schnell aus. Mit wachsender axialer Entfernung laufen die Wellen auseinander, sie sind dispersiv.

Ein im Rahmen dieser Arbeit besonders interessantes Beispiel nicht ebener Moden sind die Eigenmoden in einem Ringspalt mit dem in Abbildung 2.6 dargestellten Querschnitt, weil sie einen ersten Eindruck der in einer Ringbrennkammer grundsätzlich möglichen Schwingungsformen geben. Für diese Geometrie ist eine Formulierung in Polarkoordinaten (r, θ) sinnvoll. Dann ist eine weitere Sepa-

¹³Die Definition der Phasengeschwindigkeit eingesetzt in Gleichung (2.50) ergibt eine Schalldruckabhängigkeit der Form $p' \propto \Re(e^{-i\omega(t-x/c_{ph})})$. Der Begriff Phasengeschwindigkeit rührt daher, dass der Ausdruck $\omega(t-x/c_{ph})$ für die Phase des Schalldrucks die scheinbare Wanderung eines Punktes mit konstanter Phase in x -Richtung mit der Geschwindigkeit c_{ph} beschreibt.

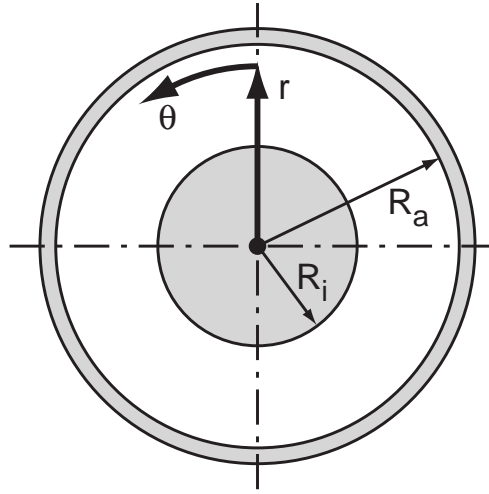


Abbildung 2.6: Querschnitt eines Ringspalts.

ration der Eigenfunktion in einen Umfangsanteil (Moden-Index m) und einen radialen Anteil (Moden-Index n) möglich, und es ergibt sich als eine mögliche Lösung [111,112]

$$\Psi_{mn}^{\pm}(r, \theta) = C_{mn} \left[J_m(\alpha_{mn}r) - \frac{J'_m(\alpha_{mn}R_i)}{Y'_m(\alpha_{mn}R_i)} Y_m(\alpha_{mn}r) \right] e^{\pm im\theta}. \quad (2.52)$$

Hier ist C_{mn} eine Normalisierungskonstante, J_m ist die Besselsche Funktion erster Art m -ter Ordnung und Y_m ist die Besselsche Funktion zweiter Art m -ter Ordnung. Die Umfangskomponente findet sich im Term $e^{\pm im\theta}$ wieder. Aus Gründen der Stetigkeit muss m ganzzahlig sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei weiter $m \geq 0$. Die beiden Vorzeichen deuten an, dass alle Moden mit Umfangskomponente ($m \neq 0$) zweifach entartet sind, also zu jedem Eigenwert zwei gleichwertige Eigenfunktionen gehören. Unter Verwendung der Gleichungen (2.31) und (2.46) sind die dazugehörigen Schalldrücke durch

$$p'^{\pm} = \Re(\hat{P}_n^{\pm} X_n(x) \Psi_{mn}^{\pm}(y, z) e^{-i\omega t}) \quad (2.53)$$

gegeben, weshalb sich ihr zeitlicher Verlauf in einem Term $e^{-i\omega(t \mp \theta/\omega)}$ wiederfindet. Die Funktion Ψ_{mn}^{+} beschreibt demnach eine mit der Kreisfrequenz ω nach links (mathematisch positiv) rotierende Mode, die Funktion Ψ_{mn}^{-} eine mit gleicher Frequenz nach rechts drehende

Mode.¹⁴ Jede denkbare Schalldruckverteilung lässt sich als Kombination dieser beiden Moden darstellen. Von besonderem Interesse sind zwei Grenzfälle. Ist die Amplitude der einen Mode gleich Null (z.B. $\hat{P}_n^- = 0$), ergibt sich ein mit der Frequenz $f = 2\pi\omega$ in Umfangsrichtung rein drehendes Schalldruckfeld. Sind die Amplituden beider Moden gleich ($\hat{P}_n^+ = \hat{P}_n^-$), ist eine in Umfangsrichtung stehende Schalldruckverteilung zu beobachten. Alternativ ist daher jedes Schalldruckfeld auch in einen stehenden und einen mit der genannten Frequenz rotierenden Anteil zerlegbar [113].

Neben der Lösung aus Gleichung (2.52), die auf rotierenden Eigenmoden basiert, ist auch die Wahl von Eigenfunktionen gebräuchlich, die in Umfangsrichtung stationäre Knotenlinien aufweisen. In diesem Fall gilt

$$\Psi_{mn}^c(r, \theta) = D_{mn} \left[J_m(\alpha_{mn}r) - \frac{J'_m(\alpha_{mn}R_i)}{Y'_m(\alpha_{mn}R_i)} Y_m(\alpha_{mn}r) \right] \cos(m\theta) \quad (2.54)$$

und

$$\Psi_{mn}^s(r, \theta) = D_{mn} \left[J_m(\alpha_{mn}r) - \frac{J'_m(\alpha_{mn}R_i)}{Y'_m(\alpha_{mn}R_i)} Y_m(\alpha_{mn}r) \right] \sin(m\theta). \quad (2.55)$$

Auch diese beiden Funktionen spannen einen zweidimensionalen Funktionenraum auf, in dem sich jede beliebige Schalldruckverteilung darstellen lässt. Welches Schalldruckfeld im konkreten Fall tatsächlich beobachtet wird, hängt von den Randbedingungen ab.

Die zu den Eigenfunktionen gehörenden Eigenwerte α_{mn} sind durch die Bestimmungsgleichung

$$\frac{J'_m(\alpha_{mn}R_i)}{Y'_m(\alpha_{mn}R_i)} = \frac{J'_m(\alpha_{mn}R_a)}{Y'_m(\alpha_{mn}R_a)} \quad (2.56)$$

gegeben. Für eine vorgegebene Ordnung m der Umfangskomponente ist α_{mn} die $(n + 1)$ -te Nullstelle dieser Gleichung zugeordnet, wenn

¹⁴Die Kopfeizer + und - beziehen sich hier also auf die Drehrichtung. Jede der beiden Moden ist weiterhin, wie oben beschrieben, in eine rechtslaufende und eine linkslaufende Welle zerlegbar. Moden mit Umfangsanteil lassen sich somit als Überlagerung von insgesamt vier helikalen Wellen darstellen.

		$R_i/R_a = 0$		$R_i/R_a = 0.25$		$R_i/R_a = 0.50$		$R_i/R_a = 0.75$	
n		0	1	0	1	0	1	0	1
m									
0		0	3.83	0	4.55	0	6.39	0	12.6
1		1.84	5.33	1.64	5.00	1.35	6.56	1.15	12.7
2		3.05	6.71	3.01	6.36	2.68	7.06	2.29	12.8
3		4.20	8.02	4.19	7.87	3.96	7.84	3.44	13.1

Tabelle 2.1: Eigenwerte $\alpha_{mn}R_a$ der ersten Eigenmoden (m, n) in einem Ringspalt für verschiedene Verhältnisse des Innenradius zum Außenradius ($R_i/R_a = 0$ bezeichnet einen reinen Kreisquerschnitt).

$n \geq 0$ definiert wird. Mit $m = n = 0$ ergibt sich $\alpha_{mn} = \alpha_{00} = 0$, die zugehörige Eigenfunktion ist die ebene Mode $\Psi_{00} = \text{const.}$. Allgemein lässt sich mit (m, n) eine Mode m -ter Ordnung in Umfangsrichtung und n -ter Ordnung in radialer Richtung bezeichnen.

In Tabelle 2.1 sind exemplarisch die Eigenwerte der ersten Eigenmoden für vier Werte des Verhältnisses R_i/R_a dargestellt. Es zeigt sich, dass im Allgemeinen die ersten reinen Umfangsmoden niedrigere Eigenwerte aufweisen als Moden mit radialer Komponente, so dass erstere bereits bei niedrigeren Frequenzen ausbreitungsfähig sind. Dies trifft insbesondere auf schmale Ringspalte (große R_i/R_a) zu.

Abbildung 2.7 zeigt zusätzlich für einen Ringspalt mit $R_i/R_a = 0.25$ die zu den sechs kleinsten Eigenwerten gehörenden Eigenfunktionen. Dargestellt ist jede Mode $\Psi_{mn}^{c,s}$ bezogen auf ihren jeweiligen Maximalwert. Gewählt wurde die Darstellungsform entsprechend den Gleichungen (2.54) und (2.55), um eine definierte Lage der Knotenlinien zu erhalten. Wie bereits erwähnt, existieren für Moden mit $m \neq 0$ zwei entartete Eigenlösungen. In dem betrachteten Beispiel gehören lediglich zum ersten Eigenwert (ebene Mode) und fünften Eigenwert (erste Radialmode) Eigenfunktionen ohne Umfangskomponente.

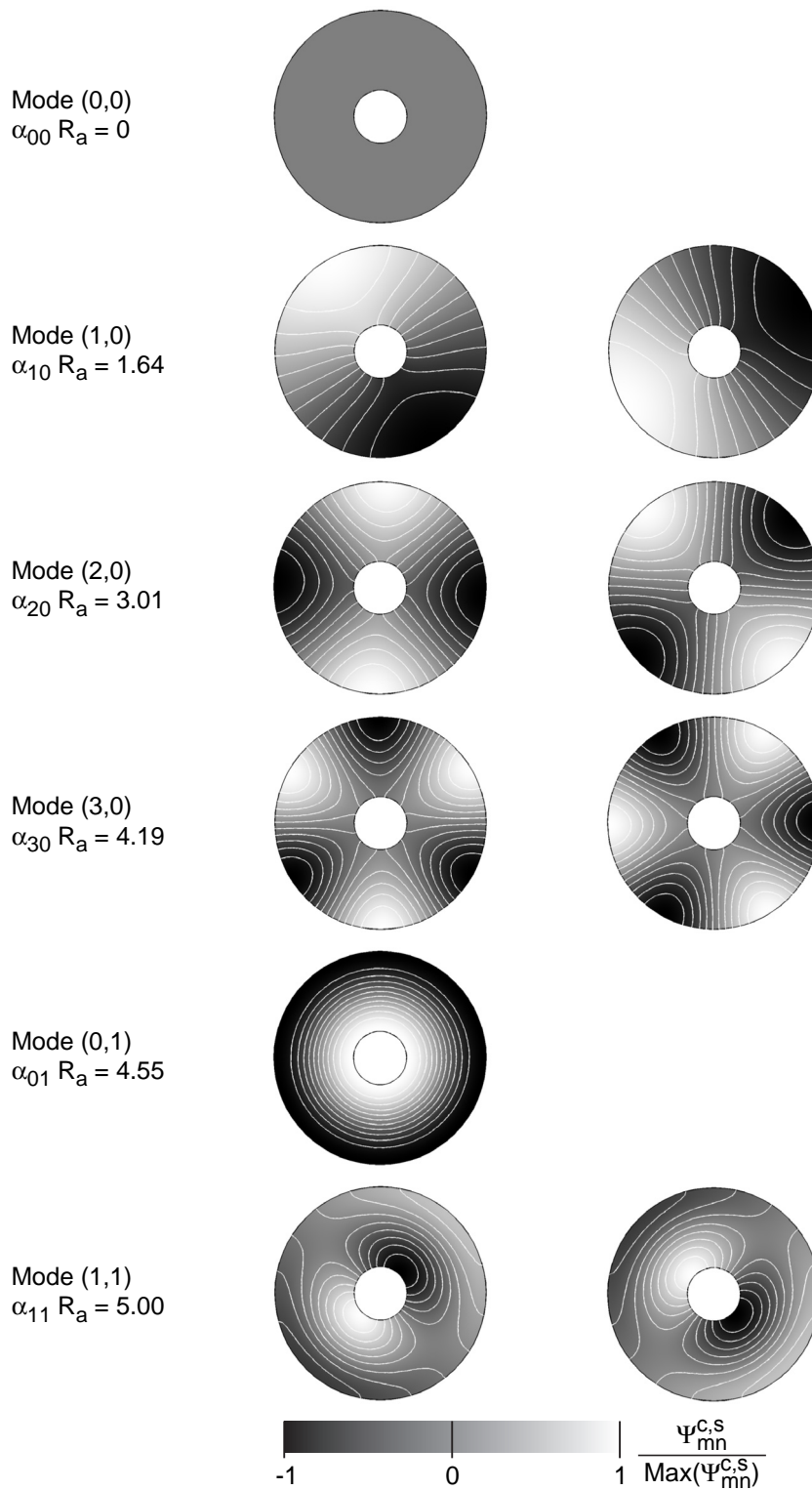


Abbildung 2.7: Die ersten Eigenmoden $\Psi_{mn}^{c,s}$ eines Ringspalts mit $R_i/R_a = 0.25$ (jeweils skaliert mit ihrem Maximum).

Kapitel 3

Numerische Verfahren

3.1 Simulationsumgebung

3.1.1 Anforderungen

Diese Arbeit hat zum Ziel, selbsterregte Verbrennungsschwingungen auf Basis der im Abschnitt 2.2 hergeleiteten Gleichungen numerisch zu berechnen. Die Anforderungen an ein hierfür geeignetes Verfahren werden zum einen durch die besonderen physikalischen Eigenheiten dieser Art thermoakustischer Probleme bestimmt, zum anderen durch den Wunsch, die Grundlagen für ein allgemein nutzbares Entwicklungswerkzeug zu legen.

Die Simulation akustischer Vorgänge im Zusammenhang mit Strömungsvorgängen stellt im Allgemeinen aus numerischer Sicht eine sehr anspruchsvolle Aufgabe dar. Vor diesem Hintergrund hat sich mit „Computational Aeroacoustics“ (CAA) ein eigenständiges Gebiet innerhalb der Fluidodynamik entwickelt, das sich mit der Entwicklung und Optimierung numerischer Methoden für den Einsatz in der Akustik beschäftigt.

Die Schwierigkeiten bei der Berechnung sind auf verschiedene Ursachen zurückzuführen. Folgende Punkte sind hier neben anderen in erster Linie zu nennen [114]:

- Akustische Phänomene wie die Lärmentstehung und Lärmausbreitung weisen ein breites Spektrum relevanter Frequenzen auf, wobei auch sehr hohe Frequenzen zu berücksichtigen sind (das menschliche Gehör kann Schall im Bereich von etwa 20 Hz bis etwa 20 kHz wahrnehmen). Demgegenüber sind die rein

strömungsmechanischen Prozesse durch sehr niedrige Frequenzen gekennzeichnet.

- Aeroakustische Fragestellungen zeichnen sich durch stark unterschiedliche Längenskalen aus. Kleinskalige turbulente Fluktuationen strahlen akustische Wellen gleicher Frequenz, aber mit deutlich höheren Wellenlängen ab. Die Schallausbreitung muss deshalb auf einem wesentlich größeren Gebiet als die Schallentstehung erfasst werden. Zudem ist eine für die Beschreibung der Ausbreitung der akustischen Wellen ausreichende Gitterauflösung zu grob für die Auflösung der turbulenten Quellen.
- Numerische Verfahren sind dispersiv. Aus diesem Grund werden nicht alle Wellenzahlen korrekt abgebildet. Insbesondere können unphysikalische höherfrequente Komponenten generiert werden, die die Lösung verfälschen. Numerische Verfahren sind zudem dissipativ und führen so zu einer künstlichen Dämpfung¹⁵. Für aeroakustische Fragestellungen sind die richtige Wiedergabe sowohl von Amplitude als auch Phase der akustischen Wellen entscheidend. Der Einsatz nicht dissipativer numerischer Verfahren geringstmöglicher Dispersion ist deshalb essentiell. Dies verbietet meist den Einsatz einfacher numerischer Schemata, wie sie beispielsweise für die Lösung rein strömungsmechanischer Probleme auf Basis der reynoldsgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt werden.
- Ein zusätzliches Problem bei der Betrachtung gekoppelter akustischer und strömungsmechanischer Phänomene stellen die im Vergleich zu den mittleren Größen relativ kleinen akustischen Schwankungsgrößen dar, die deshalb sogar durch die begrenzte Rechengenauigkeit numerisch ausgelöscht werden können [88].

Aus den genannten Gründen bedürfen aeroakustische Phänomene in der Regel spezieller numerischer Methoden.

¹⁵Vergleiche hierzu auch die Untersuchungen in den Abschnitten 3.4.3 und 3.4.4.

Die selbsterregten Verbrennungsschwingungen unterscheiden sich jedoch von den beschriebenen Problemen in einigen wesentlichen Punkten. Sie zeichnen sich durch eine oder einige wenige tonale Komponenten aus und weisen nur ein eng begrenztes Frequenzspektrum auf. Dies hängt damit zusammen, dass die Flamme als akustischer Treiber im Wesentlichen nur auf niederfrequente Fluktuationen der Strömungsgrößen reagiert und höherfrequenten Schwankungen auf Grund der fluiddynamischen und chemischen Trägheit nicht folgen kann. Die Instabilitäten zeigen üblicherweise Frequenzen im Bereich der ersten rein akustischen Eigenmoden des Systems. Die akustischen Längenskalen haben somit eine vergleichbare Größenordnung wie die geometrischen Abmessungen. Eine Diskretisierung der Geometrie ist folglich mit einem moderaten Aufwand in Bezug auf die Feinheit des numerischen Gitters möglich. Es ist lediglich sicherzustellen, dass die relevanten Wellenlängen ausreichend genau aufgelöst werden. Dadurch wird auch deren dispersionsarme Abbildung gewährleistet. Da höherfrequente¹⁶ Anteile für die Verbrennungsschwingungen keine Rolle spielen, können selbst einfachere numerische Schemata verwendet werden, die im Bereich hoher Wellenzahlen stärker dispersiv werden.

Des Weiteren werden die thermoakustischen Instabilitäten hier als Ausbreitungsphänomen der Schwankungsgrößen verstanden, getrieben durch eine akustische Quelle in Form einer Flamme oder Wärme-freisetzungszone. Die Lösung der Ausbreitungsgleichungen ist entkoppelt von der eventuellen Berechnung eines mittleren Strömungsfelds, so dass numerische Auslöschungsprobleme nicht auftreten können.

Die Anforderungen an die Simulationsumgebung sind deshalb für diese Arbeit zunächst nicht durch rein numerische Gesichtspunkte bestimmt. Vielmehr stehen folgende Punkte im Hinblick auf die an-

¹⁶Unter „hochfrequent“ ist hier zu verstehen, dass die Wellenlänge klein gegen die geometrischen Abmessungen wird. Beispielsweise treten in kleineren Raketenschubkammern Verbrennungsschwingungen mit einigen tausend Hertz auf, die trotzdem lediglich die ersten Transversalmoden der Schubkammer darstellen. Die in diesem Absatz gemachten Ausführungen gelten deshalb für derartige Fälle gleichermaßen.

gestrebte Modellierungsstrategie im Vordergrund:

- Die Implementierung eines Verfahrens im Zeitbereich muss möglich sein. Wie im einleitenden Abschnitt 1.1.3 auf den Seiten 13 ff. erläutert wurde, lässt sich auf diesem Weg abseits der direkten Simulation der vollständigen Erhaltungsgleichungen eine möglichst geringe Modellierungstiefe erreichen. Insbesondere können bei der Berücksichtigung nichtlinearen Flammenverhaltens Grenzyklen vorhergesagt werden.
- Das Verhalten der Flamme muss in Form eines extern vorhandenen Modells leicht eingebunden werden können.
- Die zu lösenden Grundgleichungen sollen nicht starr vorgegeben sein, sondern grundsätzlich an verschiedene Modellierungskonzepte anpassbar sein.
- Es darf keine prinzipielle Beschränkung auf primitive Geometrien geben, auch komplexe Berechnungsgebiete sollen darstellbar sein.
- Die Simulation soll einen akzeptablen Rechenaufwand mit sich bringen.

Gefordert sind für das einzusetzende Verfahren also in erster Linie eine hohe Flexibilität und gut implementierbare Schnittstellen.

3.1.2 Auswahl und Eigenschaften

Um die gerade genannten Anforderungen zu erfüllen, wurde FEM-LAB als Umgebung für die Umsetzung des Berechnungsverfahrens ausgewählt. Hierbei handelt es sich um einen Code, der die Finite-Elemente-Methode (FEM) zur Lösung weitgehend beliebiger Systeme partieller Differentialgleichungen einsetzt. FEMLAB setzt dabei auf die weit verbreitete numerische Programmierumgebung MATLAB auf.

Die Formulierung der zu lösenden partiellen Differentialgleichungen ist in FEMLAB sehr allgemein gehalten, wie weiter unten noch gezeigt wird. Hierdurch bietet sich dem Anwender große Freiheit bei der Modellbildung. Er kann sie seinem speziellen physikalischen Problem anpassen, da er nicht auf vordefinierte Modelle in Form fest vorgegebener Gleichungen angewiesen ist. Durch die Implementierung als MATLAB-Anwendung bietet der Code eine zusätzliche Schnittstelle zur Einbindung eigener Programme.

FEMLAB verfügt über eine Umgebung zur Definition und Vernetzung der Geometrien. Die modellierten Objekte können sich in eine, zwei oder alle drei Raumdimensionen erstrecken. Für zweidimensionale Probleme erfolgt die Triangulation (Diskretisierung der Geometrie durch Unterteilung in Elemente) mit Hilfe von Dreiecken, für dreidimensionale Probleme mit Hilfe von Tetraedern. Dadurch ist die Realisierung auch relativ komplexer Strukturen möglich.

Der Code bietet also fraglos die geforderte Flexibilität. Dieser Umstand wird allerdings auch mit Nachteilen erkaufte. Die allgemein gehaltene Implementierung der Differentialgleichungen erschwert es oder macht es unmöglich, numerische Lösungsverfahren einzusetzen, die auf spezielle Probleme abgestimmt sind und dadurch eine Effizienzsteigerung erreichen. Zudem ergibt sich ein teilweise sehr hoher Speicherbedarf. Er begrenzt die mögliche Komplexität der zu simulierenden Systeme letztendlich trotz der vorhandenen Freiheiten. Da diese Arbeit aber ihr Ziel vor allem in der Demonstration der grundsätzlichen Aspekte eines Verfahrens zur Berechnung von Verbrennungsschwingungen sieht, wird diese Einschränkung in Kauf genommen. Dies geschieht im Bewusstsein, dass eine spätere Nutzung der Methode für Anwendungsfälle unter Umständen einen Wechsel der Simulationsplattform notwendig machen könnte.

Der Einsatz der Methode der finiten Elemente für die Lösung der Differentialgleichungen ist nicht zwingend. Es ist zunächst genauso denkbar, auf Finite-Differenzen-Verfahren (FD) oder Finite-Volumen-Verfahren (FV) zurückzugreifen. Die Finite-Element-

Methode unterscheidet sich von den FD-Verfahren dadurch, dass sie im Gegensatz zu diesen nicht die Differentialoperatoren, sondern die Lösungsfunktionen diskretisiert. Dies erlaubt eine wesentlich leichtere Anpassung an komplexe Geometrien und unstrukturierte Gitter. Die FV-Verfahren werden allerdings inzwischen genauso mit unstrukturierten Netzen erfolgreich eingesetzt und dominieren vor allem im Bereich der klassischen Fluidodynamik auf Grund ihrer oft besseren numerischen Eigenschaften und inhärenten Konservativität (implizite Erfüllung der integralen Erhaltungssätze). Ein klarer Vorteil der Methode der finiten Elemente ist allerdings, dass sie so genannte schwache Lösungen liefert (der Begriff wird weiter unten genauer erläutert) und dadurch unstete Fluidparameter (z.B. Dichtesprünge) erlaubt.

Nicht zuletzt bietet aber gerade die Finite-Element-Methode die Voraussetzungen, ein generelles numerisches Verfahren zur Lösung ganz allgemeiner partieller Differentialgleichungssysteme zu formulieren und damit die mehrfach angesprochene Flexibilität zu realisieren. In den folgenden Abschnitten soll daher anhand der Implementierung in FEMLAB [115] die Formulierung der Gleichungen, ihre Diskretisierung und numerische Lösung beschrieben werden. Dabei handelt es sich nur um einen prinzipiellen Einblick in die Methode der finiten Elemente, der die grundlegenden Zusammenhänge erläutern will. Für eine detaillierte Beschäftigung mit der recht komplexen Theorie der FEM sei auf die entsprechende Literatur verwiesen, beispielsweise Johnson [116].

3.2 Partielle Differentialgleichungen

3.2.1 Stationäre Probleme

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist eine möglichst allgemeine Formulierung von partiellen Differentialgleichungssystemen, zunächst allerdings nur für stationäre Probleme. Grund hierfür ist, dass die Methode der finiten Elemente im verwendeten Programm nur für die

räumliche Diskretisierung verwendet wird, während die zeitliche Dimension in anderer Weise behandelt wird. Hierauf wird weiter unten noch genauer eingegangen.

Betrachtet wird eine n -dimensionale Geometrie, durch die ein Gebiet Ω (für eine dreidimensionale Geometrie also ein Volumen) mit seinem Rand $\partial\Omega$ (für die dreidimensionale Geometrie also Flächen) beschrieben ist. Es seien \mathbf{u} der Vektor der N abhängigen Variablen u_k , $k = 1, 2, \dots, N$, und \mathbf{n} der nach außen gerichtete Normalenvektor auf $\partial\Omega$. Dann lassen sich Systeme partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung zusammen mit den Randbedingungen allgemein folgendermaßen als Randwertproblem schreiben¹⁷:

$$\nabla \cdot (-c_{lk} \nabla u_k - \alpha_{lk} u_k + \gamma_l) + \beta_{lk} \cdot \nabla u_k + a_{lk} u_k = f_l \quad \text{in } \Omega, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{n} \cdot (c_{lk} \nabla u_k + \alpha_{lk} u_k - \gamma_l) + q_{lk} u_k = g_l - h_{ml} \mu_m \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (3.2)$$

$$h_{mk} u_k = r_m \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.3)$$

Der Index l kann als Gleichungsnummer verstanden werden und durchläuft die Anzahl der abhängigen Variablen, $l = 1, 2, \dots, N$. Die Anzahl der so genannten Zwangsbedingungen (hierzu gleich noch mehr) seien $M \leq N$, dann bezeichnet der Index m , $m = 1, 2, \dots, M$, die Nummer der jeweiligen Zwangsbedingung. Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention, das heißt die Gleichungen enthalten implizite Summierungen über Produkte, in denen ein Index doppelt auftaucht.

Die Gleichungen (3.2) und (3.3) stellen die Randbedingungen des Problems dar. Dabei handelt es sich bei Gleichung (3.2) um eine verallgemeinerte Neumann-Randbedingung. Im Gegensatz zur klassischen Neumann-Randbedingung, für die $q = 0$ gelten würde, enthält sie nicht nur den Fluss in Normalenrichtung über den Rand, son-

¹⁷Die in diesem Kapitel in den Abschnitten 3.2 und 3.3 verwendeten Symbole sind ausschließlich rein mathematisch zu verstehen. Auf Grund der Vielzahl der benötigten Größen ist es nicht zu vermeiden, Symbole zu verwenden, die in den anderen Teilen dieser Arbeit mit einer anderen, physikalischen Bedeutung belegt sind. Beispielsweise bedeutet u hier allgemein eine abhängige Variable, während in den anderen Kapiteln mit u eine Geschwindigkeitskomponente bezeichnet wird.

den lässt auch eine Verknüpfung mit dem Wert der abhängigen Variablen auf dem Rand selbst zu. Gleichung (3.3) ist eine Dirichlet-Randbedingung, durch die der Wert der unabhängigen Variablen auf dem Rand festgelegt wird. Sie wird deshalb auch als Zwangsbedingung bezeichnet. Die Anzahl der Zwangsbedingungen kann die Anzahl der Differentialgleichungen nicht übersteigen, da das Randwertproblem sonst überstimmt wäre.

Üblicherweise muss als Randbedingung wahlweise eine Neumann-Randbedingung *oder* eine Dirichlet-Randbedingung vorgegeben werden. Insofern ist die hier gewählte Formulierung ungewöhnlich, da sie beide Möglichkeiten in einem Gleichungssystem vereint. Dies gelingt durch die Einführung der Lagrange-Multiplikatoren μ_m , die als zusätzliche unbekannte Funktionen in die Gleichungen eingehen¹⁸.

Die in den Gleichungen (3.1) bis (3.3) auftretenden Koeffizienten können Konstanten oder Funktionen der Ortskoordinaten sein, für nichtlineare Probleme auch Funktionen der abhängigen Variablen u_k und deren Ableitungen, sie dürfen zudem komplexwertig sein. Trotz der allgemeinen Formulierung des Differentialgleichungssystems lässt sich ihnen durch Interpretation als Transportproblem eine allgemeine physikalische Bedeutung zuordnen. Die c_{lk} sind die Diffusionskoeffizienten, die α_{lk} und β_{lk} die Konvektionskoeffizienten, die a_{lk} sind Absorptionskoeffizienten und die γ_l und f_l stellen Quellterme dar. Die Koeffizienten c_{lk} , a_{lk} , f_l , q_{lk} , g_l , h_{mk} und r_m sind Skalare, α_{lk} , β_{lk} und γ_l sind Vektoren mit N Komponenten. Außerdem kann c_{lk}

¹⁸Die Verbindung zur üblichen Formulierung mit entweder einer Neumann-Randbedingung oder einer Dirichlet-Randbedingung sei an zwei Beispielen für eine abhängige Variable, $N = 1$, verdeutlicht. Die gewöhnliche Dirichlet-Randbedingung lautet $u = r$, das bedeutet $h = 1$. Dann wird die Neumann-Randbedingung zu

$$\mathbf{n} \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + qu = g - \mu. \quad (3.4)$$

Hierdurch ergibt sich keinerlei Einschränkung für u , da sich immer eine Funktion μ finden lässt, so dass die Gleichung erfüllt ist. Die Neumann-Randbedingung kann also eliminiert werden, es bleibt die reine Dirichlet-Randbedingung übrig.

Andererseits verschwindet für $h = r = 0$ die Dirichlet-Randbedingung und es bleibt die reine Neumann-Randbedingung

$$\mathbf{n} \cdot (c\nabla u + \alpha u - \gamma) + qu = g \quad (3.5)$$

übrig.

auch eine $n \times n$ Matrix sein und so einen anisotropen Diffusionskoeffizienten repräsentieren.

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es sinnvoll, die Gleichungen (3.1) bis (3.3) in einer allgemeineren Form zu schreiben, um die Zahl der Koeffizienten zu reduzieren. Hierfür dienen die Substitutionen

$$\mathbf{\Gamma}_l = (-c_{lk} \nabla u_k - \boldsymbol{\alpha}_{lk} u_k + \gamma_l) , \quad (3.6)$$

$$F_l = f_l - \boldsymbol{\beta}_{lk} \cdot \nabla u_k - a_{lk} u_k , \quad (3.7)$$

$$G_l = g_l - q_{kl} u_k , \quad (3.8)$$

$$R_m = r_m - h_{mk} u_k . \quad (3.9)$$

Damit ergibt sich folgende Formulierung des Randwertproblems:

$$\nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_l = F_l \quad \text{in } \Omega , \quad (3.10)$$

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Gamma}_l = G_l + \frac{\partial R_m}{\partial u_l} \mu_m \quad \text{auf } \partial\Omega , \quad (3.11)$$

$$R_m = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega . \quad (3.12)$$

3.2.2 Schwache Formulierung

Die Methode der finiten Elemente basiert auf der so genannten schwachen Formulierung des Randwertproblems. Um sie zu erhalten, sind allgemein folgende Schritte notwendig:

1. Multiplikation der partiellen Differentialgleichung mit einer Testfunktion und Integration des Ergebnisses über das gesamte Gebiet,
2. Überführung der zweiten Ableitung der abhängigen Variablen in die Testfunktion durch partielle Integration und
3. Einsetzen der Neumann-Randbedingung.

Daraus ergibt sich eine Funktionalgleichung, also eine Bedingung, die für alle ausreichend glatten Testfunktionen erfüllt werden muss. Derartige Funktionalgleichungen folgen übrigens als Variationsaufgaben auch direkt aus fundamentalen physikalischen Prinzipien. Deshalb hat die schwache Formulierung eine ganz grundsätzliche Bedeutung und ist oft natürlicher als die zugehörige so genannte starke Formulierung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung. Im Rahmen dieser Arbeit bietet die schwache Formulierung den Vorteil, auch unetstetige Modellparameter einsetzen zu können. Hierauf wird weiter unten noch eingegangen.

Im Folgenden sei nun die Herleitung der schwachen Formulierung des Randwertproblems aus dem vorangegangenen Abschnitt gezeigt. Dafür werden beliebige Testfunktionen w_j eingeführt. Durch Multiplikation der Gleichungen (3.10) mit diesen Testfunktionen und anschließende Integration über das räumliche Gebiet Ω ergibt sich die Beziehung

$$\int_{\Omega} w_j \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_l dV = \int_{\Omega} w_j F_l dV. \quad (3.13)$$

Hier bezeichnet dV für eine dreidimensionale Geometrie das Volumenelement, über das integriert wird. Partielle Integration der linken Seite liefert zunächst

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (w_j \mathbf{\Gamma}_l) dV - \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \mathbf{\Gamma}_l dV = \int_{\Omega} w_j F_l dV. \quad (3.14)$$

Das erste Volumenintegral in dieser Gleichung lässt sich nun mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Oberflächenintegral mit dem Oberflächenelement dA überführen:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (w_j \mathbf{\Gamma}_l) dA - \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \mathbf{\Gamma}_l dV = \int_{\Omega} w_j F_l dV. \quad (3.15)$$

Das Oberflächenintegral kann durch Verwendung der Neumann-Randbedingung aus Gleichung (3.11) weiter umgeformt werden. Dar-

aus ergibt sich eine einzige Beziehung,

$$\int_{\Omega} (\nabla w_j \cdot \mathbf{\Gamma}_l + w_j F_l) dV + \int_{\partial\Omega} w_j \left(G_l + \frac{\partial R_m}{\partial u_l} \mu_m \right) dA = 0, \quad (3.16)$$

die zusammen mit den Zwangsbedingungen der Dirichlet-Randbedingungen

$$R_m = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.17)$$

die schwache Formulierung des Randwertproblems darstellt.

Die Lösungen für die abhängigen Variablen u_k sind dadurch festgelegt, dass Gleichung (3.16) unter den Einschränkungen von Gleichung (3.17) für alle gedachten Testfunktionen w_j aus einem geeignet gewählten Funktionenraum W erfüllt sein muss. Es lässt sich durch Umkehrung der soeben durchgeführten Herleitung zeigen, dass die u_k und μ_m auch die ursprünglichen partiellen Differentialgleichungen erfüllen, wenn sie eine Lösung der schwachen Formulierung sind. Dazu müssen sie und die Koeffizienten aber ausreichend glatt sein. Bei unstetigen Stoffeigenschaften beispielsweise kann es eine Lösung der schwachen Form geben, während die starke Form keine sinnvolle Beschreibung liefert. Hierher rührt auch die Verwendung der Begriffe „schwach“ und „stark“: die schwache Formulierung bedeutet eine schwächere Bedingung für die Lösung als die starke Formulierung.

Dieses Konzept hat große Bedeutung für die Methode der finiten Elemente. Es hat zur Konsequenz, dass geringere Anforderungen an die Regelmäßigkeit der Flussvektoren $\mathbf{\Gamma}_l$ gestellt werden können. In Gleichung (3.10) tauchen die Gradienten dieser Flussvektoren auf, so dass sie zumindest einmal differenzierbar sein müssen. Unstetige Diffusionskoeffizienten beispielsweise sind daher nicht möglich oder bedürfen einer besonderen Behandlung durch Kopplungsbedingungen. Die Lösung für die abhängigen Variablen u_k muss sogar zweifach differenzierbar sein. In der schwachen Formulierung von Gleichung (3.16) dagegen ist die Gradientenbildung zu den Testfunktionen w_j hin verschoben. Die Koeffizienten in den Flussvektoren dürfen daher Unstetigkeiten enthalten und die Lösungsfunktionen müssen nur noch einfach differenzierbar sein.

3.2.3 Zeitabhängige Probleme

Die Beschreibung zeitabhängiger Probleme lässt sich aus den bisher gezeigten Beziehungen für stationäre Probleme rein formal einfach durch Hinzufügen eines Terms für die ersten Zeitableitungen der abhängigen Variablen herleiten. Gleichungen (3.1) bis (3.3) lauten dann:

$$d_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial t} + \nabla \cdot (-c_{lk} \nabla u_k - \alpha_{lk} u_k + \gamma_l) + \beta_{lk} \cdot \nabla u_k + a_{lk} u_k = f_l \quad \text{in } \Omega, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{n} \cdot (c_{lk} \nabla u_k + \alpha_{lk} u_k - \gamma_l) + q_{lk} u_k = g_l - h_{ml} \mu_m \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (3.19)$$

$$h_{mk} u_k = r_m \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.20)$$

Dabei besteht innerhalb FEMLAB die Einschränkung, dass die Zeitableitungen linear eingehen müssen und auch die Zwangsbedingungen linear zu sein haben. Die Koeffizienten d_{lk} dürfen daher von den Ortskoordinaten und der Zeit abhängen, nicht jedoch von den abhängigen Variablen u_k .

In der allgemeinen Formulierung mit den Definitionen der Gleichungen (3.6) bis (3.9) haben die zeitabhängigen Probleme folgende Gestalt:

$$d_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma_l = F_l \quad \text{in } \Omega, \quad (3.21)$$

$$-\mathbf{n} \cdot \Gamma_l = G_l + \frac{\partial R_m}{\partial u_l} \mu_m \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (3.22)$$

$$R_m = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.23)$$

Auch die schwache Form ergibt sich in einfacher Weise, indem nun noch zusätzlich die Terme mit den Zeitableitungen mit den Testfunk-

tionen multipliziert und über das Gebiet integriert werden:

$$\int_{\Omega} w_j d_{lk} \frac{\partial u_k}{\partial t} dV + \int_{\Omega} (\nabla w_j \cdot \mathbf{\Gamma}_l + w_j F_l) dV + \int_{\partial\Omega} w_j \left(G_l + \frac{\partial R_m}{\partial u_l} \mu_m \right) dA = 0. \quad (3.24)$$

$$R_m = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.25)$$

3.2.4 Wellengleichungen

Wellengleichungen sind durch Zeitableitungen zweiter Ordnung gekennzeichnet. Sie haben die allgemeine Form

$$d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = F \quad (3.26)$$

mit dazugehörigen Randbedingungen. Eine Wellengleichung besitzt lediglich eine skalare abhängige Variable¹⁹, deshalb ist hier u_k durch u und d_{lk} durch d ersetzt.

Für die numerische Behandlung ist es notwendig, die Wellengleichung in eine Formulierung überzuführen, die nur erste Zeitableitungen enthält. Dies gelingt mit Hilfe einer Variablensubstitution:

$$u_1 := u, \quad (3.27)$$

$$u_2 := \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (3.28)$$

$$d \frac{\partial u_2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = F. \quad (3.29)$$

Gleichungen (3.28) und (3.29) stellen ein gekoppeltes System zweier instationärer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung dar, das genau die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Form besitzt. Eine wichtige Erkenntnis ist, dass eine Wellengleichung den

¹⁹Diese Wellengleichung könnte aber natürlich über zusätzliche Gleichungen mit weiteren abhängigen Variablen gekoppelt sein.

numerischen Aufwand für zwei Gleichungen mit sich bringt. Diese Aussage lässt sich verallgemeinern. Eine Differentialgleichung mit Ableitungen n -ter Ordnung ist einem System mit n Differentialgleichungen erster Ordnung gleichwertig.

3.3 Methode der finiten Elemente

3.3.1 Vernetzung der Geometrie

Die numerische Lösung von Differentialgleichungen beruht auf einer Diskretisierung des zu untersuchenden Problems. Damit ist eine Approximation des eigentlich kontinuierlichen Problems durch eine endliche Zahl von Parametern gemeint, die die Lösungen beschreiben. Im Rahmen der Methode der finiten Elemente bedeutet dies, dass die Lösungsfunktionen durch eine Überlagerung vorgegebener Funktionen angenähert werden, deren Form durch ihre Funktionswerte an einzelnen festen Stellen des betrachteten Gebiets eindeutig beschrieben ist²⁰.

Erster Schritt ist daher, das Berechnungsgebiet in eine Anzahl kleinerer Elemente zu unterteilen, auf denen die die Lösung annähernden so genannten Ansatzfunktionen definiert werden können. Dieser Vorgang wird als Vernetzung der Geometrie bezeichnet. Die Form der Elemente ist dabei zunächst willkürlich, mit ihrer Wahl ist aber eng die Formulierung der Ansatzfunktionen verknüpft. Weit verbreitet und üblich ist aber die Verwendung von Dreiecken für zweidimensionale Geometrien und Tetraedern für dreidimensionale Geometrien. Die mit ihnen erzeugten unstrukturierten Netze haben die positive Eigenschaft, sich sehr gut auch an komplexere, gekrümmte Geometrien anpassen zu lassen.

Die Funktionswerte werden auf den Knoten des Netzes gespeichert. Natürlicherweise sind dies die Eckpunkte der Elemente. Je nach Typ

²⁰Die FEM diskretisiert also die Lösungsfunktionen. Im Gegensatz hierzu diskretisieren Finite-Volumen-Verfahren und Finite-Differenzen-Verfahren die in den Differentialgleichungen vorkommenden Differentialquotienten.

der Ansatzfunktionen kann ein Element aber noch weitere Knoten innerhalb oder an seinen Rändern aufweisen.

Die Art der Vernetzung hat Auswirkungen auf die Qualität der Lösung und die Geschwindigkeit des numerischen Lösungsverfahrens. Unter diesem Gesichtspunkt gibt es einige allgemeine Regeln, die bei der Netzerstellung berücksichtigt werden sollen. Die räumliche Auflösung, das heißt die Anzahl der Knoten oder Elemente je Längen-, Flächen- oder Volumeneinheit muss ausreichend groß sein, um den Verlauf der Lösung gut repräsentieren zu können. Aus numerischen Gründen sollten die Elemente keine zu starke Verzerrung aufweisen, das heißt nicht in eine Richtung eine deutlich höhere Ausdehnung besitzen als in eine andere. Es sollten innerhalb eines Netzes auch keine zu hohen Größenunterschiede zwischen dem kleinsten und größten Element bestehen.

3.3.2 Ansatzfunktionen

Aus mathematischer Sicht stellen die Lösungsfunktionen eines gegebenen Problems Elemente von Funktionenräumen dar, die die Eigenschaften von Vektorräumen besitzen. Funktionenräume beschreiben bestimmte Klassen von Funktionen, beispielsweise die unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen. Wie Vektorräume werden sie durch Basen aufgespannt. Jedes Element des Funktionenraums (also jede Funktion mit den geforderten Eigenschaften) lässt sich als Linearkombination dieser Basen darstellen. Hier besteht nun aber ein wichtiger Unterschied zu den üblicherweise aus der linearen Algebra bekannten Vektorräumen. Letztere besitzen eine endliche Zahl von Basisvektoren²¹. Dagegen sind die Basen von Funktionenräumen unendlichdimensional. Wenn also der Lösungsraum durch die beliebigen Basisfunktionen

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots \quad (3.30)$$

²¹Beispielsweise bilden die drei Einheitsvektoren \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z eine Basis der Vektoren im kartesischen Koordinatensystem.

aufgespannt sein soll, ergibt sich die Lösung u als Linearkombination mit Koeffizienten U_i :

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \phi_i. \quad (3.31)$$

Offensichtlich ist ein derartiger Ansatz mit einer unendlichen Anzahl von Parametern nicht für eine numerische Analyse geeignet. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit der Approximation der Summe in Gleichung (3.31) durch eine Summe bezüglich einer endlichdimensionalen Basis:

$$u^* = \sum_{i=1}^P U_i \phi_i. \quad (3.32)$$

Die Funktion u^* ist nun aber nur noch eine Näherung für die „wahre“ Lösung u .

Die Methode der finiten Elemente realisiert diese Approximation durch Definition spezieller so genannter Ansatzfunktionen ϕ_i , die in Bezug auf die durch die Vernetzung entstandenen Elemente besondere Eigenschaften aufweisen. Durch die Festlegung dieser Eigenschaften kann eine Reihe unterschiedlicher finiter Elemente und Ansatzfunktionen konstruiert werden. Große Bedeutung haben und in dieser Arbeit ausschließlich verwendet werden Lagrange-Elemente. An ihrem Beispiel lässt sich die Methodik auch weiter gut verfolgen. Lagrange-Elemente sind durch folgende Bedingungen definiert:

1. Auf dem i -ten Knoten des Netzes gilt $\phi_i = 1$.
2. Auf allen anderen Knoten des Netzes gilt $\phi_i = 0$.
3. Innerhalb der Elemente, zu denen der i -te Knoten des Netzes gehört, ist ϕ_i ein Polynom bestimmter Ordnung.

Durch diese Vorschriften ist der Verlauf der Ansatzfunktionen eindeutig festgelegt. Die Ordnung der Polynome ergibt sich durch die Anzahl der Knoten innerhalb eines Elements. Besitzt das Element nur Knoten an seinen Ecken, erfordert die Eindeutigkeit einen linearen Verlauf der Ansatzfunktionen. Wird zwischen den Eckknoten

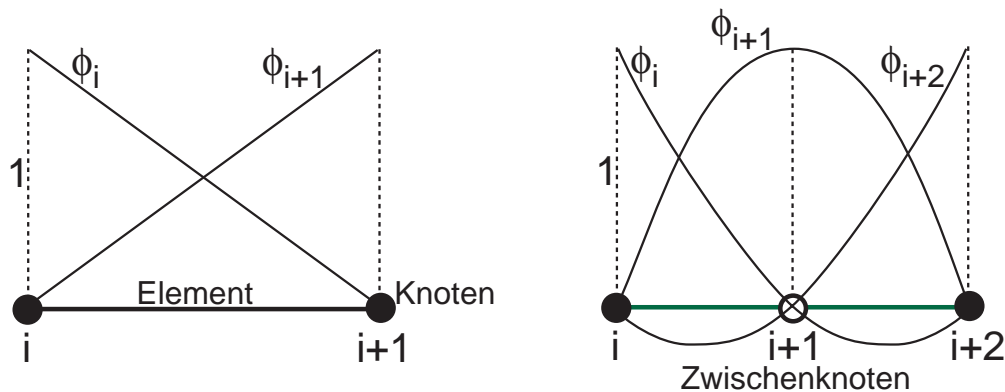


Abbildung 3.1: Eindimensionales finites Element mit linearen (links) und quadratischen (rechts) Ansatzfunktionen.

jeweils ein Zwischenknoten eingefügt, sind quadratische Polynome für die ϕ_i nötig. Entsprechend lässt sich die Ordnung durch weitere Zwischenknoten erhöhen. Die genannten Prinzipien sind in Abbildung 3.1 an einem eindimensionalen finiten Element verdeutlicht²².

Die genannten Eigenschaften der Lagrange-Elemente in Verbindung mit Gleichung (3.32) bedeuten, dass die Näherung für die Lösungsfunktion auf einem Knoten des Netzes den Wert des jeweiligen Koeffizienten U_i aufweist und zwischen den Knoten einen durch die Ansatzfunktionen genau definierten Verlauf nimmt. Für ein eindimensionales Beispiel ist das schematisch in Abbildung 3.2 dargestellt. Die Aufgabe, die unbekannte Lösungsfunktion u zu finden, ist nun dahingehend abgeändert, die unbekannt Parameter U_i zu bestimmen. Sie werden als die Freiheitsgrade des Problems bezeichnet.

Bei einer abhängigen Variablen ist die Zahl der Freiheitsgrade mit der Anzahl der Knoten des Netzes P identisch. Sind jedoch N abhängige Variablen vorhanden, beträgt die Zahl der Freiheitsgrade $N \cdot P$. Die

²²Für ein eindimensionales Problem besteht das Berechnungsgebiet lediglich aus einer Strecke. Durch die Vernetzung wird es in einzelne Streckenabschnitte unterteilt, die die finiten Elemente darstellen. Knoten sind ihre jeweiligen Endpunkte und gegebenenfalls Zwischenpunkte.

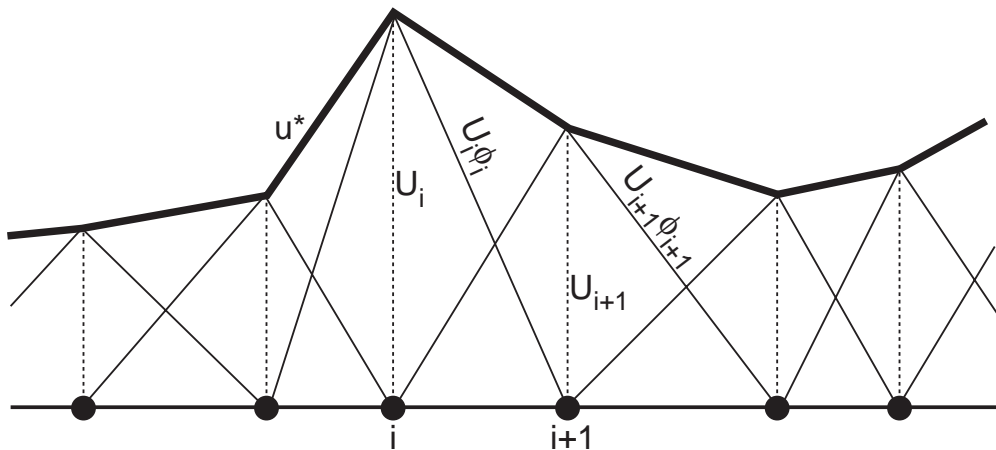


Abbildung 3.2: Beispiel für die Approximation einer Lösungsfunktion auf einer eindimensionalen Geometrie durch lineare Ansatzfunktionen.

approximierten Lösungsfunktionen sind dann durch

$$u_k^* = \sum_{i=1}^P U_{i+(k-1)P} \phi_i, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3.33)$$

gegeben. Durch diese Definition sind alle Freiheitsgrade in dem Lösungsvektor $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_{NP})^T$ zusammengefasst.

Der numerische Aufwand zur Lösung eines Problems ist stark durch die Zahl der Freiheitsgrade, also Unbekannten, beeinflusst. Dies limitiert die Möglichkeit, beliebig Ansatzfunktionen höherer Ordnung zu verwenden, die eine bessere Approximation der Lösungsfunktion ermöglichen würden. Beispielsweise bedeutet der Übergang von linearen zu quadratischen Lagrange-Elementen für eine dreidimensionale Geometrie bei fester Elementzahl eine Verachtfachung der Freiheitsgrade.

3.3.3 Diskretisierung des Problems

Da nun eine diskretisierte Form der Lösungsfunktionen mit den Freiheitsgraden als Unbekannten vorliegt, gilt es die durch die Gleichungen (3.16) beziehungsweise (3.24) gegebenen schwachen Formulierun-

gen des Problems so zu nutzen, dass ein algebraisches Gleichungssystem eben für die Freiheitsgrade entsteht. Allerdings stellen die ursprünglichen Gleichungen nur Gleichungssysteme aus N Gleichungen (das ist die Zahl der abhängigen Variablen) dar, während der Lösungsvektor, wie soeben gezeigt, $N \cdot P$ Unbekannte enthält. Hier lassen sich nun die Testfunktionen w_j zu Nutze machen. Die schwache Form der partiellen Differentialgleichungen muss ja für alle beliebig gewählten Testfunktionen erfüllt sein. Also können die Gleichungen (3.16) und (3.24) auch für exakt P linear unabhängige Testfunktionen w_j , $j = 1, 2, \dots, P$, ausgewertet werden, wodurch gerade die benötigte Anzahl an Gleichungen entsteht.

Es bietet sich an, für die Testfunktionen genau die gleichen Funktionen zu verwenden, die auch als Ansatzfunktionen der Lösungsfunktionen dienen:

$$w_j = \phi_j. \quad (3.34)$$

Dieser Ansatz ist als Galerkin-Verfahren bekannt. Da die Ansatzfunktionen eine Basis bezüglich des Lösungsraumes darstellen, ist auch die lineare Unabhängigkeit der Testfunktionen gewährleistet.

Die Auswertung der schwachen Form der Differentialgleichungen unter Verwendung dieses Ansatzes sei nun zuerst für das stationäre Problem, Gleichung (3.16), schrittweise erläutert. Die Integrale in dieser Gleichung enthalten die Terme $\mathbf{\Gamma}_l(u_k)$, $F_l(u_k)$, $G_l(u_k)$ und $R_m(u_k)$, die im Allgemeinen linear oder nichtlinear von den abhängigen Variablen u_k abhängen. Zunächst werden nur die Beiträge der ersten drei Terme, $\mathbf{\Gamma}$, F und G betrachtet. Die in ihnen enthaltenen abhängigen Variablen u_k werden durch die Approximation aus Gleichung (3.33) ersetzt. Die Berechnung der Integrale für alle P Testfunktionen liefert dann einen Vektor \mathbf{S} mit $N \cdot P$ Komponenten, der folgende Elemente enthält:

$$\begin{aligned} S_{j+(l-1)P} = & \int_{\Omega} (\nabla \phi_j \cdot \mathbf{\Gamma}_l(u_k^*) + \phi_j F_l(u_k^*)) dV + \\ & + \int_{\partial\Omega} \phi_j G_l(u_k^*) dA. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Da die Testfunktionen immer nur auf den zum j -ten Knoten gehörenden Elementen von Null verschieden sind, beschränken sich die Integrationen jeweils auf diese Elemente. Dort werden sie numerisch mit Hilfe von Quadraturformeln wie beispielsweise der Gauß'schen Quadratur durchgeführt.

Nächster Schritt ist die Diskretisierung der Zwangsbedingungen aus Gleichung (3.17). Dies geschieht durch Auswertung dieser Bedingung auf den Q Randknoten des Netzes. Dadurch entsteht ein Vektor \mathbf{T} mit $M \cdot Q$ Komponenten, der als Elemente die Werte der Koeffizienten R_m auf den Randknoten enthält,

$$T_{h+(m-1)M} = R_m(\mathbf{x}_h), \quad (3.36)$$

wobei \mathbf{x}_h , $h = 1, 2, \dots, Q$, die Koordinaten des h -ten Randknoten bezeichnet.

Für das noch fehlende Integral in Gleichung (3.16), das die unbekanntenen Lagrange-Multiplikatoren μ_m enthält, lässt sich nun folgende Approximation durch die Anwendung der P Testfunktionen angeben:

$$\int_{\partial\Omega} w_j \frac{\partial R_m}{\partial u_l} \mu_m dA = \left(\frac{\partial T_{h+(m-1)M}}{\partial U_{j+(l-1)P}} \right)^T \Lambda_{h+(m-1)M}. \quad (3.37)$$

Dabei wird davon Gebrauch gemacht, dass sich das Differential $\partial R_m / \partial u_l$ auf den Randknoten direkt durch die diskretisierten Lösungsfunktionen und Zwangsbedingungen in der Form der Jacobi-Matrix $\partial \mathbf{T} / \partial \mathbf{U}$ ausdrücken lässt. Die Ortsabhängigkeit der Integranden steckt dann nur noch in den Test- und Ansatzfunktionen und den Lagrange-Multiplikatoren. Da letztere aber ohnehin unbekannt Funktionen darstellen, können die zugehörigen Integrale in einem Vektor $\mathbf{\Lambda}$ mit Unbekannten $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{MQ}$ zusammengefasst werden, die quasi eine diskretisierte Form der Lagrange-Multiplikatoren darstellen.

Durch gemeinsame Verwendung der Gleichungen (3.35), (3.36) und (3.37) ist nun folgende diskretisierte Form der schwachen Formulie-

zung des Problems, Gleichung (3.16), entstanden:

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) + \left(\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{0}, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}. \quad (3.39)$$

Das ist ein algebraisches (lineares oder nichtlineares) Gleichungssystem mit $N \cdot P + M \cdot Q$ Gleichungen für die $N \cdot P$ Freiheitsgrade im Lösungsvektor \mathbf{U} und die $M \cdot Q$ diskretisierten Lagrange-Multiplikatoren im Vektor $\boldsymbol{\Lambda}$.

Für zeitabhängige Probleme, die durch Gleichung (3.24) beschrieben werden, läuft die Herleitung der Diskretisierung weitestgehend identisch ab. Lediglich das Integral, das die Zeitableitung enthält, ist zusätzlich noch auf analoge Weise auszuwerten. In dem dabei entstehenden Vektor der Länge $N \cdot P$ tauchen die Zeitableitungen der Freiheitsgrade linear auf²³. Damit lässt sich das diskretisierte Problem so schreiben:

$$\mathbf{D}(\mathbf{U}, t) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\mathbf{S}(\mathbf{U}, t) - \left(\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{U}} \right)^T \boldsymbol{\Lambda}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}, t) = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

Hierbei ist \mathbf{D} als $N \cdot P \times N \cdot P$ Matrix so definiert, dass sich durch Multiplikation mit dem Vektor $\partial \mathbf{U} / \partial t$ gerade die diskretisierte Form des erwähnten Integrals mit den Zeitableitungen ergibt.

Die Gleichungen (3.40) und (3.41) bilden für gegebene Anfangswerte der Freiheitsgrade und Zwangsbedingungen, $\mathbf{U}(t = 0) = \mathbf{U}_0$ und $\mathbf{T}(t = 0) = \mathbf{T}_0$, ein Gleichungssystem für $\partial \mathbf{U} / \partial t$. Damit lassen sich durch numerische Integration dieses Ausdrucks, beispielsweise mit Hilfe finiter Differenzen, die Lösungsvektoren für alle $t > 0$ berechnen. Dieses Verfahren wird als „Method of Lines“ bezeichnet: die Finite-Elemente-Methode liefert eine räumliche Diskretisierung, das dadurch entstehende System schreitet dann Schritt für Schritt in der Zeit voran.

²³Im Abschnitt 3.2.3 auf Seite 60 wurde die Einschränkung gemacht, dass die Zeitableitungen der abhängigen Variablen nur linear auftreten dürfen.

3.3.4 Lösungsverfahren

Die diskretisierten Gleichungen (3.38) und (3.39) beziehungsweise (3.40) und (3.41) können mit Hilfe üblicher numerischer Verfahren gelöst werden. Je nach Typ der Gleichungen kommen unterschiedliche Methoden zum Einsatz.

Für lineare stationäre Probleme lassen sich die Gleichungen (3.38) und (3.39) ganz allgemein in eine Form $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ bringen, wobei \mathbf{y} der Vektor der Unbekannten ist. Die Matrix \mathbf{A} und der Vektor \mathbf{b} sind von \mathbf{y} unabhängig. Ein lineares algebraisches Gleichungssystem dieser Art lässt sich mit direkten Methoden lösen, beispielsweise durch Gauß'sche Elimination.

Bei nichtlinearen Problemen hängen \mathbf{A} und/oder \mathbf{b} selbst vom Lösungsvektor ab, so dass eine direkte Auflösung nach \mathbf{y} nicht mehr möglich ist. Hier kommen iterative Lösungsverfahren zum Einsatz. Ausgehend von einer Näherung \mathbf{y}_0 wird aus dem Gleichungssystem $\mathbf{A}(\mathbf{y}_0)\delta\mathbf{y} = \mathbf{b}(\mathbf{y}_0)$ eine Schätzung $\delta\mathbf{y}$ für den Fehler in \mathbf{y}_0 ermittelt und damit eine neue Näherung $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \epsilon \cdot \delta\mathbf{y}$ für den Lösungsvektor berechnet. Der Unterrelaxationsfaktor ϵ , $0 < \epsilon \leq 1$, beschränkt aus numerischen Stabilitätsgründen die Höhe der Korrektur. Diese iterative Prozedur wird so lange wiederholt, bis eine aus $\delta\mathbf{y}$ berechnete Fehlernorm einen vorgegebenen Wert unterschreitet.

Bei instationären Problemen hat das Gleichungssystem die Form $\mathbf{A}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{b}(\mathbf{y})$. Zur Lösung stehen prinzipiell zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Explizite Verfahren berechnen aus einer zum Zeitpunkt t_0 gegebenen Lösung \mathbf{y}_0 aus dem Gleichungssystem zunächst auf direktem Weg $\dot{\mathbf{y}} = \partial\mathbf{y}/\partial t$. Damit ergibt sich dann \mathbf{y}_1 für den nächsten Zeitschritt $t_1 = t_0 + \Delta t$ aus $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \dot{\mathbf{y}} \cdot \Delta t$. Diese Methode weist einen geringen Rechenaufwand pro Zeitschritt auf, allerdings müssen die Zeitschritte aus Stabilitätsgründen unter Umständen sehr klein gewählt werden. Hier sind die impliziten Verfahren von Vorteil, die für die Auswertung von $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ und $\mathbf{b}(\mathbf{y})$ nicht den bekannten Lösungsvektor \mathbf{y}_0 , sondern den für den neuen Zeitschritt zu berech-

nenden Lösungsvektor \mathbf{y}_1 heranziehen. Das erfordert ein iteratives und damit deutlich aufwändigeres Rechenverfahren. Dieser Nachteil wird jedoch oft durch die gegenüber expliziten Verfahren auf Grund der besseren Stabilitätseigenschaften möglichen größeren Zeitschritte aufgewogen.

Diese Darstellung der Zeitschrittverfahren stellt nur eine sehr einfache, grundsätzliche Klassifizierung dar. In der Praxis existieren sehr viele im Detail unterschiedliche Methoden, die Kombinationen oder Abwandlungen der beschriebenen Verfahren darstellen. MATLAB beispielsweise stellt für unterschiedliche Anwendungsfälle verschiedene explizite und implizite Löser zur Verfügung, die auch innerhalb von FEMLAB zum Einsatz kommen. Einen sehr guten Einblick in die Implementierung dieser Löser geben Ashino et al. [117].

3.4 Numerische Fehler

3.4.1 Allgemeines

Jedes numerische Verfahren stellt nur eine aus einer Diskretisierung resultierende Approximation der kontinuierlichen Wirklichkeit dar und ist daher mit Fehlern behaftet, die die erzielbare Genauigkeit der Lösung begrenzen. Für die Methode der finiten Elemente seien im Folgenden die wesentlichen Einflussgrößen für diese Fehler genannt.

Werte für die Lösung werden nur auf den Knoten des Finite-Elemente-Netzes berechnet. Zwischen den Knoten ist die Lösung nur durch die Ansatzfunktionen der finiten Elemente angenähert, dadurch entsteht ein Interpolationsfehler. Die Auswertung der schwachen Form der Differentialgleichungen erfordert weiter die Auswertung von Integralen, wozu üblicherweise numerische Quadraturformeln für die einzelnen Elemente eingesetzt werden. Die berechneten Werte der Integrale sind im Allgemeinen nicht exakt, wodurch ein Integrationsfehler in die Lösung eingeht.

Die Dirichlet-Randbedingungen, die Werte für die abhängigen Varia-

blen auf bestimmten Teilstücken des Gebietsrandes vorgeben, können auch nur auf einzelnen Knoten erfüllt werden, die auf dem Rand liegen. Dies bringt einen zusätzlichen Fehler durch die Interpolation der Dirichlet-Randbedingungen mit sich. Außerdem kann der Gebietsrand, wenn er gekrümmt ist, durch eine Triangulation mit finiten Elementen nicht exakt abgebildet werden. Auch diese fehlerhafte Repräsentation des Rechengebiets äußert sich in der Lösung durch einen Fehler.

Hinzu kommt, dass im Falle nichtlinearer Systemgleichungen auch das durch die Diskretisierung entstehende algebraische Gleichungssystem nichtlinear und damit nicht direkt durch Elimination lösbar ist. Die notwendige iterative Lösung erfordert dann die Vorgabe eines Abbruchkriteriums mit der Folge eines Abbruchfehlers in der Lösung. Auch das Zeitschrittverfahren ist durch die Approximation der Zeitableitung durch finite Differenzen mit einem Diskretisierungsfehler behaftet.

Außer durch diese Fehler, die allgemein als Verfahrensfehler zusammengefasst werden können, kann die Lösung auch durch die begrenzte Genauigkeit der Darstellung von Zahlen auf einem Rechner beeinflusst werden. Sie kann zu Zusatzfehlern durch Rundung, Auslöschung führender Stellen (beispielsweise bei der Subtraktion zweier Zahlen gleicher Größenordnung) oder Bereichsüberschreitung (beispielsweise bei Division durch eine sehr kleine Zahl) führen [118].

Die quantitative Kenntnis oder Abschätzung des Verfahrensfehlers ist wichtig, um die Aussagekraft numerischer Ergebnisse beurteilen und allgemein die Eignung eines numerischen Verfahrens für eine bestimmte Problemstellung bewerten zu können. Nachfolgend wird daher der in dieser Arbeit eingesetzte Finite-Elemente-Löser unter diesem Gesichtspunkt untersucht. Hintergrund ist dabei die angestrebte Lösung der Wellengleichung im Zeitbereich, die Grundlage des im Kapitel 4 beschriebenen und im Kapitel 5 am Beispiel demonstrierten Verfahrens zur Berechnung von Verbrennungsschwingungen ist.

3.4.2 Testkonfiguration

Untersucht wird ein beidseitig geschlossenes Rohr der Länge $L = 1$ m mit einem kreisförmigen Querschnitt, der den Durchmesser $D = 0.1$ m aufweist. In diesem Rohr werden Schalldruckverteilungen als Anfangsbedingung vorgegeben, die den akustischen Eigenmoden des Rohrs entsprechen, um danach die zeitliche Entwicklung der Schwingungen in Form von stehenden Wellen zu verfolgen. Die Betrachtung ist auf ebene Moden beschränkt, so dass sich die Anfangsbedingung als

$$p'(x, t = 0) = p'_0 \sin(k_0 x), \quad \left. \frac{\partial p'}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (3.42)$$

schreiben lässt, wenn x die Koordinate längs der Rohrachse bezeichnet, $k_0 = \omega_0/\bar{c}_0 = 2\pi f_0/\bar{c}_0$ die Wellenzahl der Eigenmode und p'_0 ihre Amplitude ist. Um keine nichtebenen Moden anzuregen, darf die Wellenzahl der Anfangsbedingung oder entsprechend die Frequenz der Schwingung nicht zu hoch gewählt werden. Für das betrachtete Rohr beträgt die Grenzfrequenz für die erste nichtebene Mode nach Gleichung (2.51) auf Seite 44 und Tabelle 2.1 auf Seite 47 unter atmosphärischen Bedingungen ($\bar{c}_0 = 340$ m/s) knapp 2000 Hz. Damit sind die erste (170 Hz) bis sechste (1700 Hz) Eigenmode mögliche Anfangsbedingungen. Die zugehörigen Schalldruckverteilungen sind in Abbildung 3.3 für eine Amplitude von $p'_0 = 1$ hPa dargestellt.

Das so definierte Problem wird nun für den Finite-Elemente-Löser diskretisiert, wobei die homogene Wellengleichung (Gleichung (2.30) auf Seite 33 mit zu Null gesetzter rechter Seite) die zu lösende Differentialgleichung ist. Als finite Elemente kommen Tetraeder mit linearen Ansatzfunktionen zum Einsatz. Untersucht werden drei Diskretisierungsvarianten mit unterschiedlichen Elementgrößen, und zwar ein grobes Netz mit 695 Knoten und 2361 Elementen, ein mittleres Netz mit 1259 Knoten und 4694 Elementen und ein feines Netz mit 2562 Knoten und 9567 Elementen (vergleiche Abbildung 3.4). Die Knotendichte in Achsrichtung beträgt für diese Netze in etwa 29, 40 beziehungsweise 65 Knoten bezogen auf die gesamte Rohrlänge. Sie ist für die Beurteilung der Ergebnisse besonders interessant, da sich

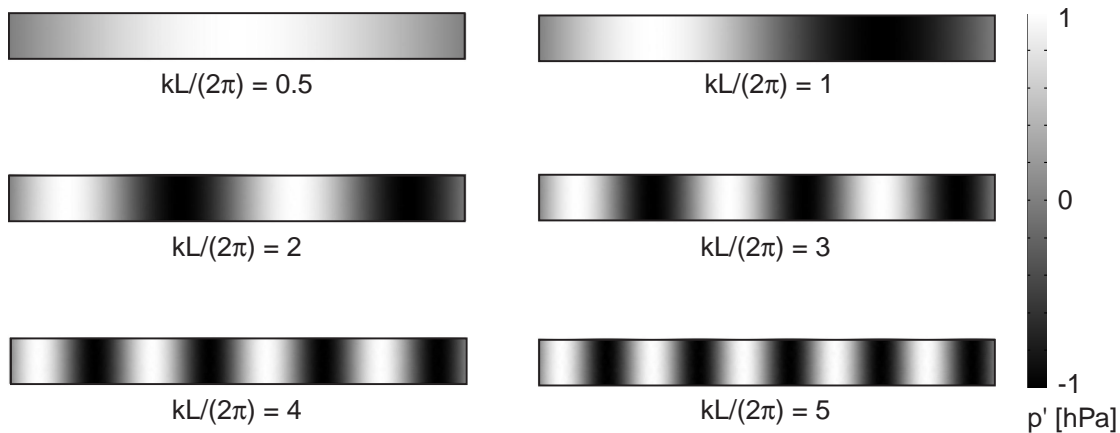


Abbildung 3.3: Schalldruckverteilungen der untersuchten Anfangsbedingungen.

durch die Vorgabe ebener Moden die Druckgradienten entlang der achsparallelen Koordinate ausbilden.

Als Zeitschrittverfahren wird eine BDF-Methode²⁴ zweiter Ordnung mit automatischer Schrittweitenkontrolle eingesetzt, also ein implizites Verfahren. Explizite Verfahren haben sich in Voruntersuchungen als nicht geeignet für die Lösung der Wellengleichung mit dem eingesetzten Finite-Elemente-Löser erwiesen, da sich sehr leicht numerische Instabilitäten mit der Folge rascher Divergenz auf einzelnen Knoten ausgebildet haben. Zur Kontrolle des BDF-Lösers werden als Abbruchkriterium ein maximal zulässiger lokaler relativer Fehler ϵ_{rel} und absoluter Fehler ϵ_{abs} festgelegt. Sofern nicht anders erwähnt, betragen hier $\epsilon_{rel} = 0.001$ und $\epsilon_{abs} = \epsilon_{rel} \cdot p'_0$.

Als exakte Lösung des oben definierten Problems würde sich eine Schwingung konstanter Amplitude mit der Eigenfrequenz der entsprechenden Mode ergeben, also

$$p'(x, t) = p'(x, t = 0) \cos(k_0 \bar{c}_0 t). \quad (3.43)$$

Sie ist also nur von der Zeit und der Anfangsbedingung abhängig. Die fehlerbehaftete numerische Lösung lässt sich nun mit dieser exakten Lösung vergleichen, indem die zeitliche Entwicklung des Schalldrucks beispielsweise in einem Schalldruckbauch verfolgt wird. Ab-

²⁴BDF = backward differentiation formula

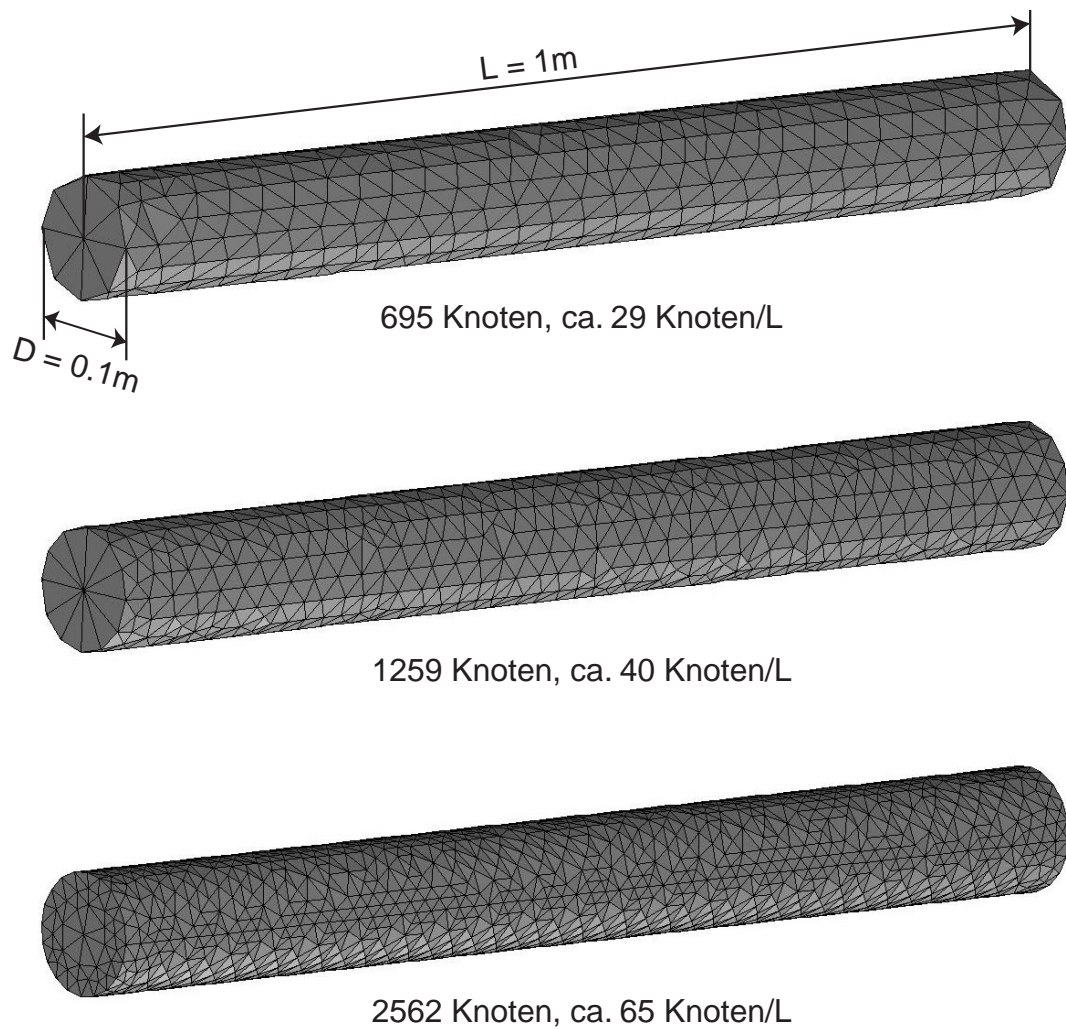


Abbildung 3.4: Die drei untersuchten Varianten des Finite-Elemente-Netzes.

bildung 3.5 zeigt dies anhand eines der untersuchten Beispiele. Sofort erkennbar ist, dass die Amplitude, anstatt konstant zu bleiben, mit der Zeit abnimmt²⁵. Neben diesem als numerische Dämpfung bezeichneten Fehler treten auch noch weitere Fehler auf, die im Folgenden näher untersucht werden sollen.

²⁵In dem gezeigten Beispiel wurde eine sehr hohe Fehlertoleranz zugelassen, um eine hohe numerische Dämpfung zu erzielen und damit das Abklingverhalten überzeichnet darstellen zu können.

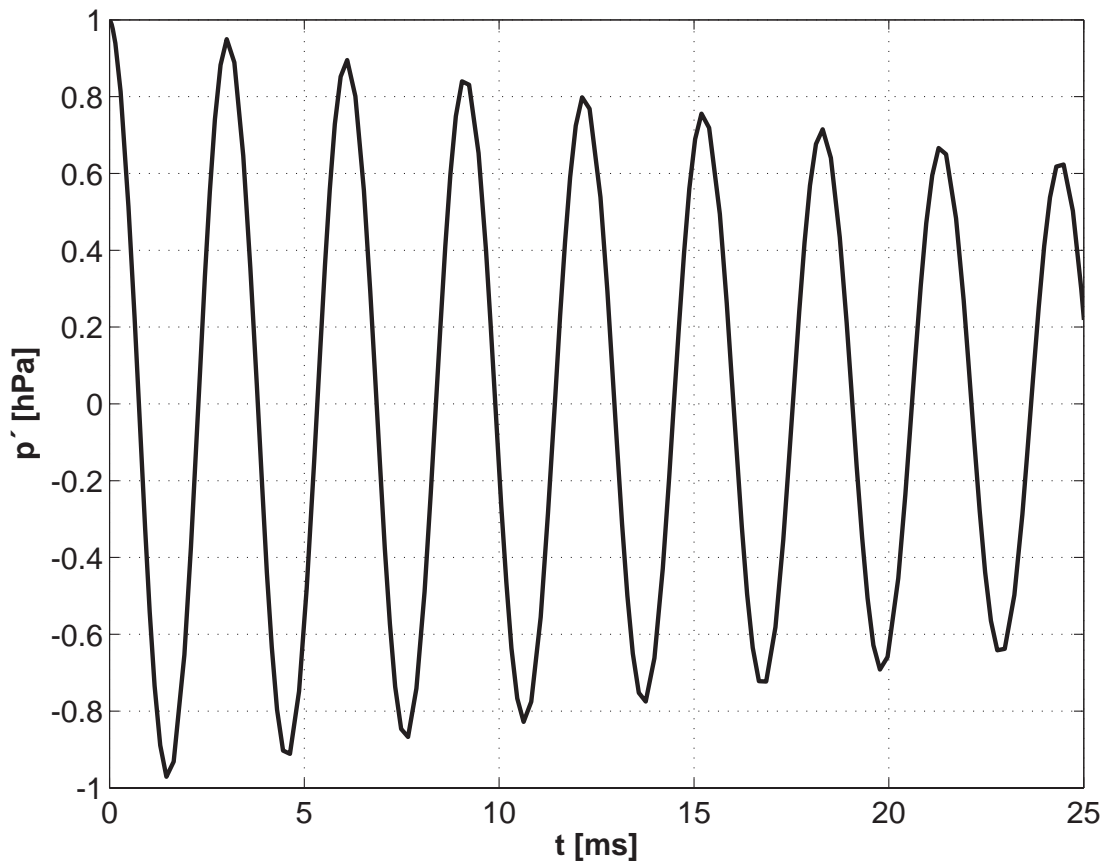


Abbildung 3.5: Beispiel für den Verlauf des Schalldrucks in einem Schalldruckbauch in der numerischen Lösung.

3.4.3 Dispersion

Die exakte Lösung des Problems liefert eine reine harmonische, also sinusförmige Schwingung. In der numerischen Lösung ist dies nicht mehr der Fall. Durch numerische Fehler kommt es zu einer „Verschmierung“ oder einem „Auseinanderlaufen“ der Wellen. Aus der Fourier-Analyse ist bekannt, dass das Spektrum eines diskreten harmonischen Signals ein Seitenband aufweist, dessen Breite von der Auflösung des Signals abhängt. Die Diskretisierung generiert somit Lösungsbestandteile, die von der harmonischen Lösung abweichende Wellenzahlen haben. In einem dispersiven System breiten sich diese Komponenten mit unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten aus.

Hierdurch erfährt auch die so genannte Gruppengeschwindigkeit²⁶ des Wellenzugs eine Abweichung von der Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem nicht dispersiven System, die dort gleich der Schallgeschwindigkeit \bar{c}_0 ist. In der Simulation äußert sich dieser Effekt dadurch, dass die Schwingung eine Frequenz aufweist, die von der Eigenfrequenz der als Anfangsbedingung vorgegebenen Mode abweicht.

Das ist in Abbildung 3.6 zu sehen. Die aus der Simulation erhaltenen Frequenzen sind hier, normiert mit \bar{c}_0/L , als Funktion der Wellenzahl der Anfangsbedingung gegeben. Letztere ist mit dem Wert $L/(2\pi)$ normiert und liefert damit eine sehr anschauliche Größe: sie sagt aus, wie viele Wellenzüge innerhalb einer Rohrlänge L liegen. Abbildung 3.6 zeigt für zunehmende Wellenzahlen eine zunehmende Abweichung der numerischen von den exakten Ergebnissen hin zu höheren Werten. Der Fehler nimmt außerdem systematisch mit abnehmender Knotenzahl des verwendeten Finite-Elemente-Netzes zu, wobei dieser Effekt aus der hier gezeigten Abbildung allerdings schwer zu erkennen ist.

Dieses Ergebnis legt die Vermutung nahe, dass die Höhe der Frequenzverschiebung von der Qualität der räumlichen Diskretisierung abhängt, da diese sowohl bei höheren Wellenzahlen als auch geringeren Knotenzahlen abnimmt. Beide Effekte lassen sich in einer Größe zusammenfassen, wenn die Wellenzahl auf die mit dem Finite-Elemente-Netz maximal darstellbare Wellenzahl k_{max} bezogen wird. Diese ergibt sich aus dem Abtasttheorem, nach dem zur Diskretisierung von n Wellenzügen mindestens $2n$ Knoten nötig sind. In dem Netz mit einer Knotendichte von 40 Knoten pro Rohrlänge in axialer Richtung ergibt sich deshalb beispielsweise $k_{max} \cdot L/(2\pi) = 20$. Wird nun die relative Frequenzverschiebung, ausgedrückt durch $\Delta f L/\bar{c}_0 = (f - \frac{k_0 \bar{c}_0}{2\pi}) L/\bar{c}_0$, über k_0/k_{max} aufgetragen, ergibt sich die Darstellung von Abbildung 3.7. Dabei kann k_0/k_{max} als Maß für die räumliche Auflösung der Schwingung durch das Finite-Elemente-Netz aufge-

²⁶Überlagern sich mehrere Wellen, so wird mit Gruppengeschwindigkeit die Geschwindigkeit bezeichnet, mit der sich das durch die Überlagerung entstandene Wellenpaket ausbreitet. Dies ist gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit der in ihm gespeicherten Energie. Sie ergibt sich zu $c_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_g}$, wenn k_g die mittlere Wellenzahl des Wellenpakets ist.

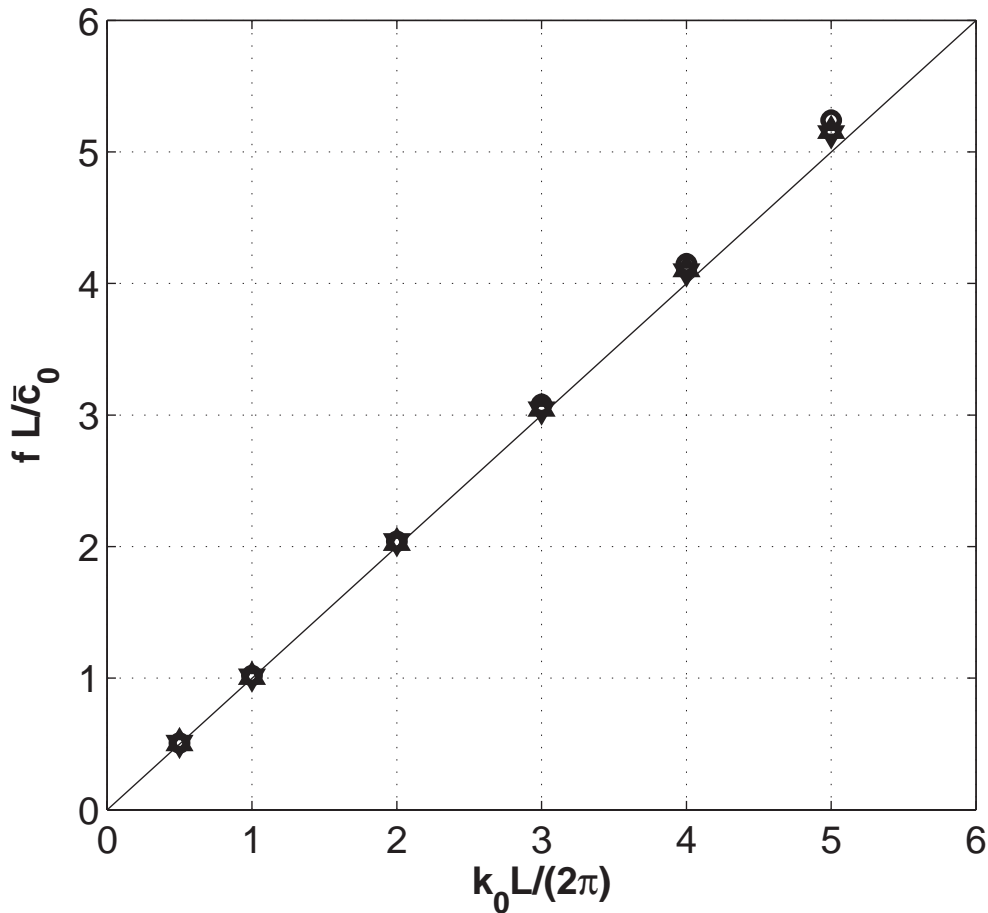


Abbildung 3.6: Normierte Frequenz der Schwingung der stehenden Welle als Funktion der normierten Wellenzahl der Anfangsbedingung. Knotendichte: \circ 29 Knoten/ L , \triangle 40 Knoten/ L , ∇ 65 Knoten/ L ; — exaktes theoretisches Ergebnis.

fasst werden; kleinere Werte bedeuten eine bessere Auflösung.

Die Abbildung bestätigt den vermuteten Zusammenhang. Mit abnehmender räumlicher Auflösung nimmt der Frequenzfehler quadratisch zu. Dieses Ergebnis kann umgekehrt dazu genutzt werden, Anforderungen an die räumliche Auflösung abzuleiten. Beispielsweise dürfte, damit der Frequenzfehler nicht größer als 3% wird, k_0/k_{max} höchstens 0.2 werden. Die höchstfrequente relevante Komponente in der Lösung müsste in diesem Fall also mit mindestens 10 Knoten pro Wellenlänge aufgelöst werden.

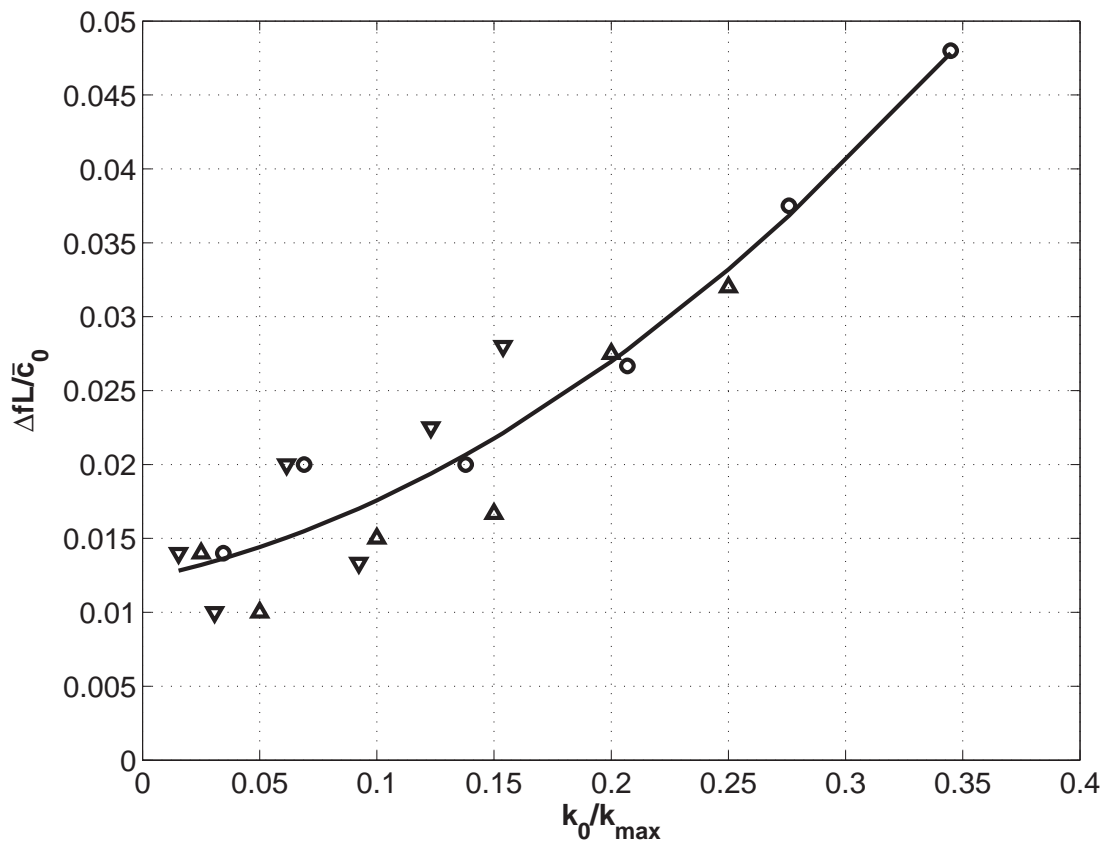


Abbildung 3.7: Relativer Fehler in der Frequenz als Funktion der räumlichen Auflösung der Schwingung durch das Finite-Elemente-Netz. Knotendichte: \circ 29 Knoten/L, \triangle 40 Knoten/L, ∇ 65 Knoten/L; — quadratische Ausgleichskurve.

3.4.4 Numerische Dämpfung

Ein sehr offensichtlicher Effekt der numerischen Fehler ist, wie bereits bemerkt, eine künstliche Dämpfung, die zu einem allmählichen Abklingen der Schwingung führt. Dies ist insbesondere für den Energiehaushalt der Schwingung von Bedeutung, der so durch eine in der Realität nicht vorhandene Verlustquelle verfälscht wird.

Die Dämpfung äußert sich in einer exponentiellen Abnahme der Schalldruckamplitude. Statt der exakten Lösung aus Gleichung (3.43) folgt der Schalldruck also der Beziehung

$$p'(x, t) = p'(x, t = 0)e^{-\sigma t} \cos(k\bar{c}t), \quad (3.44)$$

wobei $\sigma > 0$ mit der Einheit [1/s] die Abklingrate darstellt. In der Akustik ist es üblich, verlustbehaftete akustische Vorgänge durch eine Dämpfungskonstante zu charakterisieren, die im Gegensatz zur gerade gegebenen Darstellung die exponentielle Abnahme der Amplitude einer Schallwelle *entlang ihres Weges* beschreibt. Das lässt sich als

$$p'(x, t) = p'(x = 0, t)e^{-\delta x} \cos(k(x - \bar{c}t)) \quad (3.45)$$

für eine ebene Welle schreiben, die sich ungehindert (ohne Reflexionen) in x -Richtung ausbreiten kann. Dabei ist δ die angesprochene Dämpfungskonstante mit der Einheit [Np/m]²⁷. Zwischen ihr und der Abklingrate σ besteht der einfache Zusammenhang

$$\sigma = \bar{c}\delta, \quad (3.46)$$

da eine akustische Information in der Zeit t den Weg $x = \bar{c}t$ zurücklegt²⁸. Somit lassen sich zu den in der Simulation erhaltenen Schalldruckverläufen die zugehörigen Dämpfungskonstanten bestimmen.

Die Dämpfungskonstante in Folge der numerischen Dämpfung ist in Abbildung 3.8 für die in der Simulation untersuchten Konfigurationen in doppelt-logarithmischer Darstellung wiedergegeben. Hier wurden dimensionsbehaftete Größen gewählt, um nachfolgend einen Vergleich mit Dämpfungskonstanten echter physikalischer Vorgänge zu erleichtern. Deutlich ist eine starke Zunahme der Dämpfung mit der Frequenz erkennbar. Dieser Effekt wird weiter unten noch näher untersucht. Die Knotendichte des Finite-Elemente-Netzes zeigt hingegen keinen wesentlichen Einfluss. Zwar sind die Unterschiede zwischen den drei Netzen bei höheren Frequenzen tendentiell größer, jedoch ist hier kein systematischer Zusammenhang zu erkennen.

Eine Bewertung des Einflusses der numerischen Dämpfung wird durch einen Vergleich mit realen verlustbehafteten Prozessen

²⁷Np = Neper; diese Einheit wird verwendet, wenn angedeutet werden soll, dass sich Vorgänge exponentiell mit der Basis $1/e$ entwickeln, ähnlich dem Bel, das auf die Basis 10 verweist [102].

²⁸Die Ausbildung einer stehenden Welle in der Testkonfiguration, die mit dem Exponenten σ in der Zeit abklingt, kann letztlich auch als Überlagerung zweier gleichartiger rechts- und linkslaufender Wellen verstanden werden, die an den Rohrenden wiederholt reflektiert werden und auf ihrem Weg mit dem Exponenten δ abgeschwächt werden.

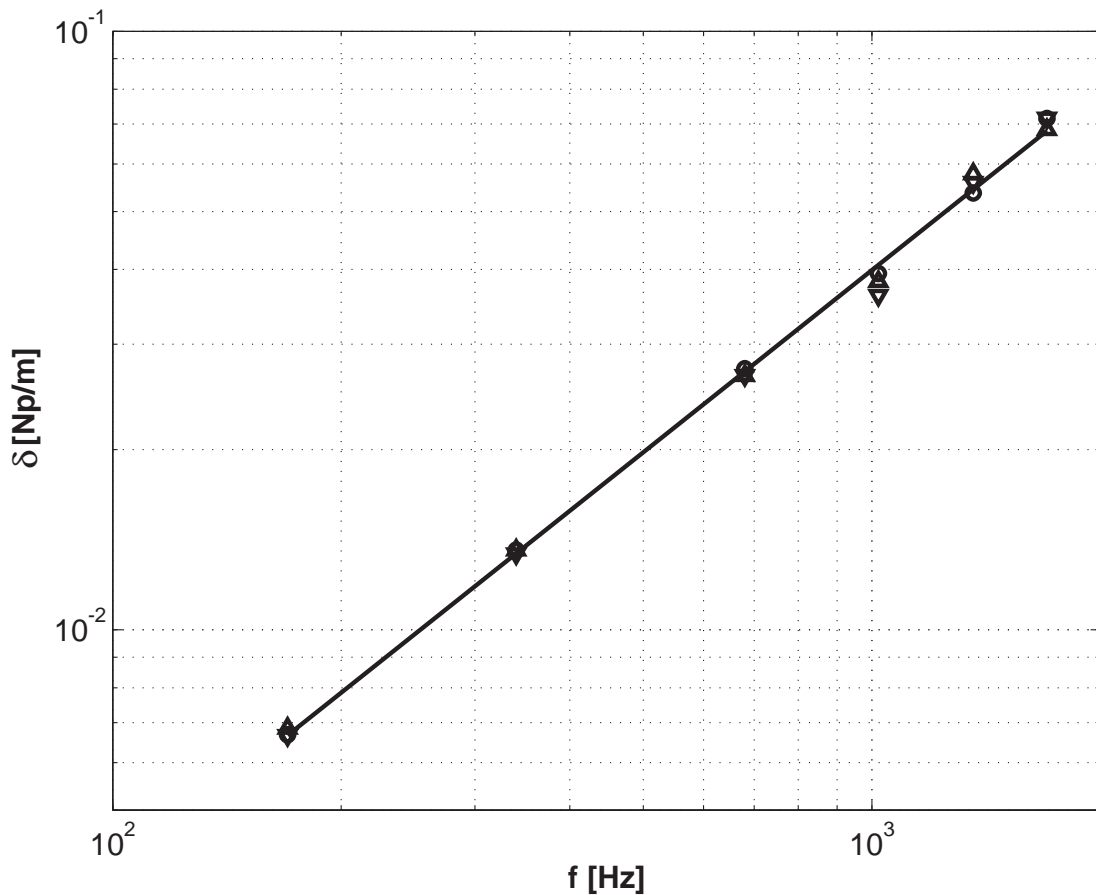


Abbildung 3.8: Dämpfungskonstante auf Grund numerischer Dämpfung als Funktion der Frequenz. Knotendichte: \circ 29 Knoten/L, \triangle 40 Knoten/L, ∇ 65 Knoten/L; — Ausgleichsgerade.

möglich. So beträgt die Dämpfungskonstante für die Absorption von Schall in Luft auf Grund Viskosität und molekularer Vorgänge unter Normalbedingungen etwa 10^{-4} Np/m bei 100 Hz und etwa 10^{-3} Np/m bei 1000 Hz und liegt damit fast zwei Größenordnungen unter der numerischen Dämpfung [102]. Das eingesetzte numerische Verfahren ist damit sicherlich nicht für Probleme geeignet, in denen solche Absorptionseffekte eine wesentliche Rolle spielen.

Ein weiteres Beispiel liefert die Dämpfung der Wellenausbreitung in einem Rohr auf Grund viskoser Effekte in der Grenzschicht an der Rohrwand. So liegt die Dämpfungskonstante für ein Rohr mit einem Durchmesser von 0.1 m, wie in der Testkonfiguration angenommen,

etwa bei $8 \cdot 10^{-3}$ Np/m bei 200 Hz und etwa $3 \cdot 10^{-2}$ Np/m bei 1000 Hz²⁹. Diese Werte weisen dieselbe Größenordnung auf wie die zuvor ermittelte numerische Dämpfung. Nun werden bei akustischen Betrachtungen aber gerade Effekte wie beispielsweise die Grenzschichtdämpfung in Rohren mit gutem Grund vernachlässigt, weil die tatsächlich relevanten Verluste akustischer Energie durch andere Effekte, wie die Abstrahlung an den Rändern, zu Stande kommen [101]. Daher darf der Schluss gezogen werden, dass die Höhe der numerischen Dämpfung des untersuchten Verfahrens für die hier interessierende Fragestellung akzeptabel ist.

Wie in Abbildung 3.8 zu sehen war, nimmt die numerische Dämpfung (wie übrigens auch die Dämpfung in der Realität) ausgedrückt in der Dämpfungskonstanten mit der Frequenz stark zu. Andererseits sinken mit steigender Frequenz auch die Schwingungsdauer beziehungsweise die Wellenlänge. Daher ist es von Interesse, wie die Dämpfung die Schalldruckamplitude beispielsweise während einer Periode verändert. Dies ist in Abbildung 3.9 zu erkennen, die die relative Abnahme der Schalldruckamplitude während einer Schwingungsdauer $(\Delta p'/p')_T = (p'(t+T) - p'(t))/p'(t)$ darstellt. Es zeigt sich, dass dieser Wert praktisch eine von der Frequenz und der Netzfeinheit unabhängige Konstante darstellt. Während jeder Schwingungsdauer nimmt die Amplitude um ungefähr 1.3% ab. Das entspricht einem Verlust akustischer Energie von etwa 2.6%, da diese quadratisch von Schalldruck und Schallschnelle abhängt. Gerade im Hinblick auf Verbrennungsschwingungen, bei denen der Schwingung über die Flamme während jedes Zyklus ein bestimmter Energiebetrag zugeführt oder entzogen wird, ist dies ein sehr anschauliches Dämpfungsmaß. Es wird deutlich, dass die Zunahme der Dämpfungskonstanten mit der Frequenz aus energetischer Sicht ein neutrales Verhalten darstellt,

²⁹Für ein Rohr mit Durchmesser D lässt sich die Dämpfungskonstante nach Kingsler und Frey [119] mit der Formel

$$\delta = \frac{2}{Dc} \left(\sqrt{\frac{\eta\omega}{2\rho}} + (\kappa - 1) \sqrt{\frac{\lambda\omega}{2\rho c_p}} \right)$$

ermitteln, wobei η die dynamische Viskosität, λ die Wärmeleitfähigkeit und c_p die spezifische Wärmekapazität des Fluids bei konstantem Druck sind.

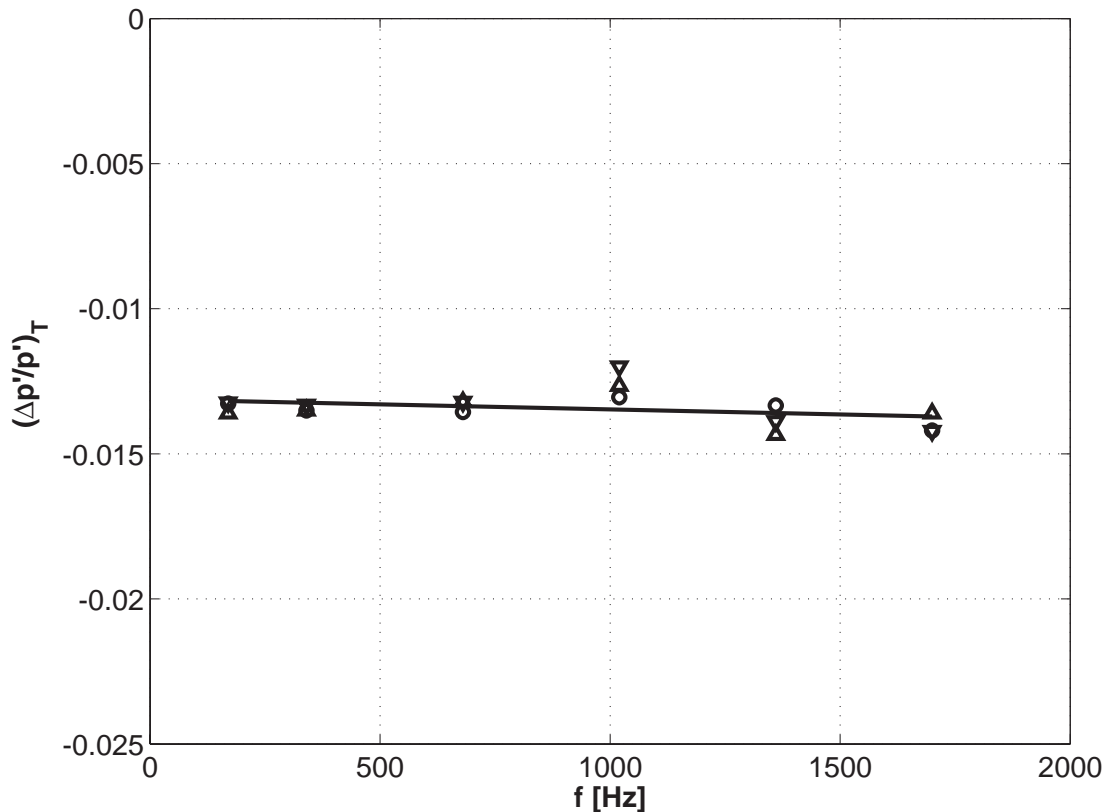


Abbildung 3.9: Relative Abnahme der Schalldruckamplitude während einer Schwingungsdauer. Knotendichte: \circ 29 Knoten/ L , \triangle 40 Knoten/ L , ∇ 65 Knoten/ L ; — Ausgleichsgerade.

solange an den Rändern des Systems pro Zyklus die gleiche Druck- und Volumenänderungsarbeit verrichtet und damit die gleiche Menge akustischer Energie abgestrahlt wird³⁰.

Die bisher vorgestellten Ergebnisse beziehen sich alle auf einen festgelegten Wert für die zulässigen Fehlertoleranzen im Zeitschrittverfahren, wie weiter oben auf Seite 74 ausgeführt wurde. Es zeigt sich, dass diese Vorgabe klar mit dem mittleren Zeitschritt³¹ korreliert ist, der sich in den Simulationen ergibt. In Bruchteilen der jeweili-

³⁰Das ist gleichbedeutend mit einer frequenzunabhängigen Impedanz und gilt insofern sicherlich nur in einem bestimmten Frequenzbereich.

³¹Auf Grund der automatischen Zeitschrittwahl variiert der Zeitschritt während der Simulation. Unter mittlerem Zeitschritt wird hier der Mittelwert aus allen Zeitschritten während eines Berechnungslaufs verstanden.

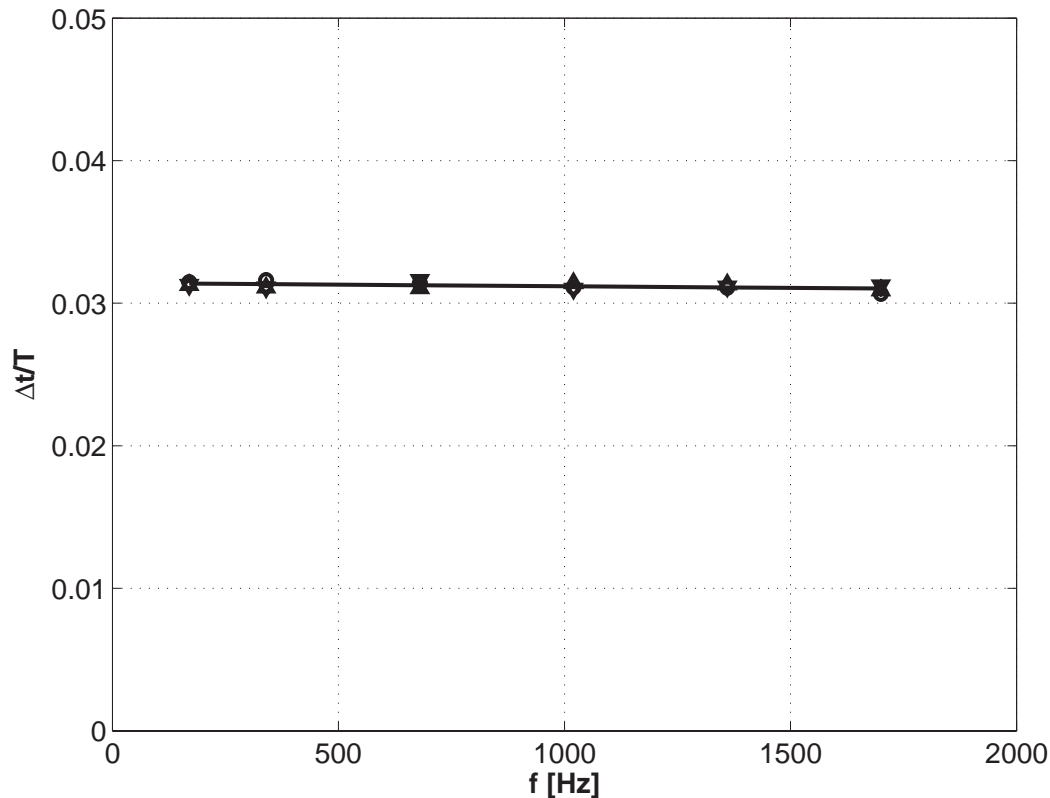


Abbildung 3.10: Mittlerer Zeitschritt als Bruchteil der Schwingungsdauer für die verschiedenen Testfälle. $\epsilon_{rel} = 0.001$, $\epsilon_{abs} = \epsilon_{rel} \cdot p'_0$. Knotendichte: \circ 29 Knoten/ L , \triangle 40 Knoten/ L , ∇ 65 Knoten/ L ; — Ausgleichsgerade.

gen Schwingungsdauer ist er eine von Frequenz und Netzauflösung unabhängige Konstante, wie in Abbildung 3.10 zu sehen ist.

Offensichtlich ist eine bestimmte Anforderung an die Genauigkeit mit einer entsprechenden zeitlichen Auflösung der Schwingungen verbunden. Um dies zu zeigen, wurden weitere Beispielrechnungen für eine Konfiguration durchgeführt. Als Finite-Elemente-Netz kam das mittlere mit 2562 Knoten zum Einsatz, betrachtet wurde die Anfangsbedingung mit der normierten Wellenzahl $k_0 \cdot L / (2\pi) = 1$. Durch Variation der Fehlertoleranz für das Zeitschrittverfahren zwischen $\epsilon_{rel} = 1 \cdot 10^{-4}$ und $\epsilon_{rel} = 1 \cdot 10^{-2}$ ergeben sich unterschiedliche mittlere Zeitschritte. Abhängig hiervon ändert sich auch die Dämpfungskonstante. Das ist in Abbildung 3.11 dargestellt. Es gilt näherungsweise $\delta \propto \Delta t^{2.4}$. Die Abhängigkeit der numerischen Dämpfung vom

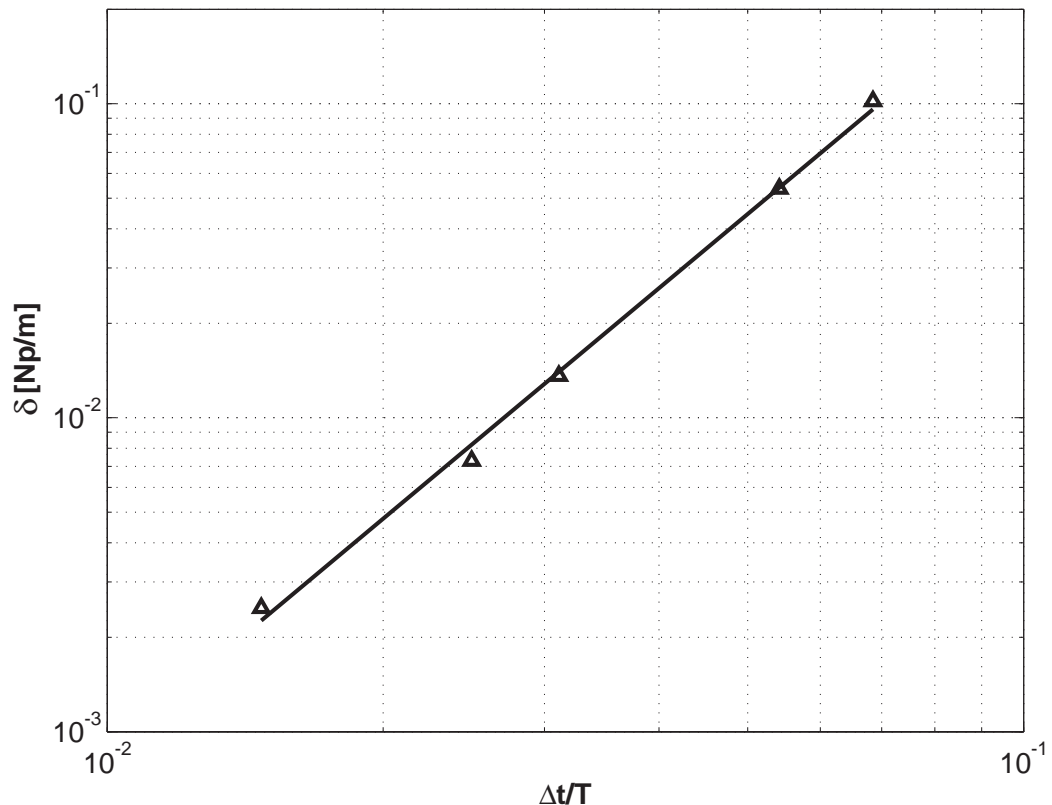


Abbildung 3.11: Dämpfungskonstante als Funktion des mittleren Zeitschritts (angegeben in Bruchteilen der Schwingungsdauer). Betrachtete Konfiguration: Netz mit 2562 Knoten (Knotendichte 40 Knoten/ L), normierte Wellenzahl $k \cdot L/(2\pi) = 1$.

Zeitschritt in Form eines Potenzgesetzes ist typisch für numerische Verfahren. Somit ist gegenüber den vorher genannten Dämpfungswerten noch eine erhebliche Reduzierung möglich. Allerdings sind hierzu auch deutlich kleinere Zeitschritte notwendig, die eine Simulation schnell ineffizient werden lassen können.

3.4.5 Bewertung

Für die Größe der numerischen Fehler gibt es als Ergebnis der vorgestellten Untersuchungen zwei wesentliche Einflussgrößen: die räumliche Auflösung, ausgedrückt durch die Knotendichte des Finite-Elemente-Netzes im Verhältnis zur Wellenzahl, und die zeitliche

Auflösung der Schwingung durch den Zeitschritt im Verhältnis zur Periodendauer. Im Bereich sinnvoll realisierbarer Werte für diese Einflussgrößen zeigen sich klar nachweisbare numerische Fehler, die sich in Frequenzverschiebung und Dämpfung äußern.

Die Höhe und Art der Fehler verbieten den Einsatz des untersuchten Verfahrens für Problemstellungen, die hohe Genauigkeitsanforderungen stellen. Gedacht sei hier insbesondere an Fragestellungen aus der Aeroakustik wie beispielsweise die Lärmausbreitung. Hier sind eine geringe numerische Dämpfung, vor allem aber auch eine niedrige Dispersion für die Erfassung eines breiten Wellenzahlbereichs essentielle Anforderungen.

Für die hier gestellte Aufgabe, die Modellierung von Verbrennungsschwingungen, stellt sich der Ansatz aber durchaus als geeignet dar. Da der Bereich der aufzulösenden Wellenlänge von vornherein auf die ersten Eigenmoden des Systems beschränkt ist, lassen sich bereits mit einer moderaten Knotendichte befriedigende Ergebnisse produzieren.

Die numerische Dämpfung stellt im Rahmen dieser Arbeit keine beschränkende Größe dar, da sie sich auf die Größenordnung von viskosen akustischen Verlusten in Wandgrenzschichten absenken lässt. Diese werden üblicherweise als irrelevant für den Energiehaushalt von Verbrennungsschwingungen angesehen. Eine exakte Wiedergabe des Energiehaushalts des Systems ist durch die Beschränkung auf die Wellengleichung und die damit verbundene Vernachlässigung realer Verlustmechanismen ohnehin nicht möglich. Die numerische Dämpfung stellt eine Senke für die akustische Energie dar, die aber in allen Frequenzbereichen und damit auch in Bezug auf akustisch getriggerte Wärmefreisetzungsschwankungen der Flamme gleich stark wirkt.

Für eine Weiterentwicklung des in dieser Arbeit vorgeschlagenen Simulationsverfahrens, das auch Verlustmechanismen miteinbezieht, wird allerdings auch eine Anpassung der Numerik notwendig sein. Die numerische Dämpfung muss dann soweit reduziert werden, dass reale Dämpfungseffekte im Wesentlichen unverfälscht wiedergegeben werden können.

Kapitel 4

Simulation im Zeitbereich

4.1 Beschreibung der Methode

4.1.1 Ansatz und Grundgleichung

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Berechnungsverfahren für thermoakustische Instabilitäten zu entwickeln. Das Augenmerk liegt dabei darauf, eine Stabilitätsanalyse für technische Verbrennungssysteme, insbesondere Gasturbinenbrennkammern, im Hinblick auf das Auftreten von selbsterregten Verbrennungsschwingungen zu ermöglichen.

Der Wunsch nach einer Stabilitätsuntersuchung legt zunächst den Ansatz nahe, im Frequenzbereich zu arbeiten. Eine Modalanalyse würde die Eigenwerte des Systems und damit Frequenzen und Anfachungs- beziehungsweise Abklingraten der zugehörigen Schwingungsformen liefern. Leider ergibt sich durch die Kopplung des akustischen Systems mit den Flammen ein differentielles Eigenwertproblem, das numerischen Lösungsverfahren nicht direkt zugänglich ist³².

Akustische Netzwerkmodelle umgehen dieses Problem, indem sie auf bekannte Lösungen für einfache Basisgeometrien aufsetzen. Dies macht jedoch eine Anpassung an reale Geometrien schwierig. Problematisch ist für diese Verfahren, die meist eine eindimensionale Akustik verwenden, auch die Kombination mehrdimensionaler Akustik und mehrerer Wärmefreisetzungszonen respektive Flammen. Dieser

³²Ein normales Eigenwertproblem hat mathematisch gesehen die Form $\mathcal{L}\{u\} = \lambda u$, d.h. die Anwendung eines (Differential-)Operators \mathcal{L} auf die Größe u liefert gerade ein Vielfaches von u (der Faktor λ ist der Eigenwert). Ein thermoakustisches System, das beispielsweise durch Gleichung (2.34) beschrieben wird, hat jedoch die Form $\mathcal{L}\{u\} = \lambda u + f(\lambda)$, es taucht also zusätzlich ein in komplexer Weise vom Eigenwert abhängiger Quellterm auf. Dieses System ist daher den bekannten Methoden für differentielle Eigenwertprobleme im Allgemeinen nicht zugänglich.

Punkt ist vor allem für Gasturbinenbrennkammern, die heute üblicherweise als Ringbrennkammern ausgeführt werden, von Bedeutung.

Diese Arbeit verfolgt daher einen anderen Ansatz. Ziel ist es, die Entwicklung von Störungen im Zeitbereich zu verfolgen und zu beobachten, ob sich eine selbsterregte Schwingung ausbildet. Die numerische Lösung der vollständigen Erhaltungsgleichungen (Navier-Stokes-Gleichungen) inklusive der Vorgänge in der Flamme ist allerdings für komplexere Systeme wegen des enormen Rechenaufwands nicht zu bewältigen.

Notwendig ist daher die Einführung bestimmter Modellierungsebenen, die das Problem auf die wesentlichen physikalischen Vorgänge reduzieren. Diese sind zum einen die Ausbreitung (akustischer) Störungen, zum anderen die Wechselwirkungen der Flammen mit der Akustik. Die detaillierten Abläufe der Verbrennungsvorgänge sind dabei zweitrangig. Entscheidenden Einfluss haben vielmehr die durch schwankende Reaktionsraten bedingten Schwankungen in der Volumenproduktion, die die Flammen als akustische Quellen wirken lassen.

Eine geeignete Beschreibung des akustischen Systems auf der geschilderten Ebene liefern die Wellengleichungen, die im Abschnitt 2.2.2 auf den Seiten 32 ff. hergeleitet wurden. Sie seien hier als Grundlage für das nachfolgend beschriebene Simulationsverfahren nochmals wiederholt. In einem System mit konstanter mittlerer Strömung lautet die Wellengleichung für den Schalldruck p'

$$\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\bar{D}^2 p'}{Dt^2} - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \frac{\bar{D} \dot{q}'_V}{Dt}. \quad (4.1)$$

Fehlt die mittlere Strömung oder kann sie vernachlässigt werden, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \frac{\partial \dot{q}'_V}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Ziel ist nun eine numerische Simulation des Systemverhaltens im Zeitbereich auf Basis einer dieser beiden Gleichungen. Als Simula-

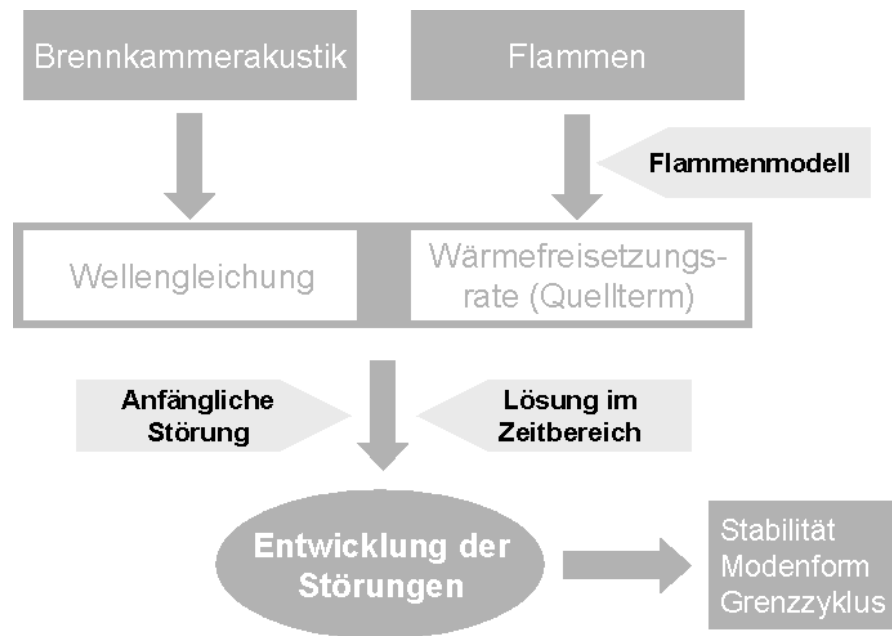


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Modellierungskonzepts.

tionsumgebung kommt das im vorhergehenden Kapitel beschriebene Finite-Elemente-Verfahren zum Einsatz. Folgende Punkte stellen Kernelemente der Implementierung der Methode dar:

- die Formulierung der Zusammenhänge, aus denen sich der Quellterm der Wellengleichung ermitteln lässt, um das Flammenverhalten einbeziehen zu können;
- die Formulierung einer geeigneten Anfangsbedingung, die die Beobachtung der Entwicklung von Störungen zulässt;
- die Formulierung geeigneter Randbedingungen, die das (passive) akustische Verhalten des Systems wesentlich festlegen.

Abbildung 4.1 stellt das Modellierungskonzept, das dem Berechnungsverfahren zu Grunde liegt, schematisch dar. Die nachfolgenden Abschnitte erläutern detailliert die Aspekte, die zu seiner Umsetzung nötig sind.

4.1.2 Kopplung des Flammenverhaltens

Das Flammenverhalten geht als Schwankung der Wärmefreisetzungsrates über einen Quellterm in die Simulation ein, der sich auf der rechten Seite der Gleichung (4.1) oder (4.2) findet. Die Fluktuationen der Reaktionsrate sind das Ergebnis von Fluktuationen bestimmter akustischer Größen innerhalb des Systems. Ganz allgemein lässt sich dieser Zusammenhang folgendermaßen formulieren:

$$\dot{q}'_V(\mathbf{x}, t) = \dot{q}'_V(p(\mathbf{x}, t - \tau(\mathbf{x})), \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t - \tau(\mathbf{x}))). \quad (4.3)$$

Diese Gleichung beinhaltet verschiedene Aspekte. Die Wärmefreisetzungsschwankungen können örtlich sowohl im Betrag als auch in der Phase variieren, was besonders bei nicht kompakten Flammen mit einer größeren Ausdehnung relevant ist. Als treibende Ursache kommen zunächst sowohl der Schalldruck als auch die Schallschnelle in Betracht, wobei der Ort der Ursache und der Wirkung im Allgemeinen nicht zusammenfallen³³. Zusätzlich tritt die Wirkung in der Flamme mit einer gewissen Totzeit τ gegenüber der auslösenden akustischen Fluktuation ein. Grund hierfür ist, dass die maßgeblichen physikalischen Prozesse, beispielsweise der konvektive Transport des Brennstoffgemischs bis an die Flamme, bestimmte Zeitintervalle in Anspruch nehmen. Hieraus ergibt sich eine wichtige Konsequenz für die kausalen Zusammenhänge. Wegen der Existenz der Totzeiten ist \dot{q}'_V für einen Zeitpunkt eindeutig und ausschließlich durch das akustische Feld und seine Entwicklung *in der Vergangenheit* bestimmt. In der Simulation kann daher die Wärmefreisetzungsschwankung für einen Rechenschritt vorab ermittelt werden und dann als Quellterm für die Lösung der akustischen Gleichung vorgegeben werden. Gleichung (4.3) ist daher jeweils von der aktuellen Lösung entkoppelt, was die numerische Behandlung wesentlich erleichtert³⁴.

³³Beispielsweise könnte eine Geschwindigkeitsschwankung im Brenner zu einem schwankenden Gemisch- bzw. Brennstoffmassenstrom führen. Der äußert sich dann in einer Änderung der Wärmefreisetzungsrates in der Brennkammer. Dort könnte wiederum gerade ein Schnelleknoten liegen, also keine Geschwindigkeitsschwankung beobachtbar sein.

³⁴Würde eine derartige Kopplung bestehen, sind die relevanten Gleichungen prinzipiell aber auch gekoppelt lösbar. Alle bisherigen Untersuchungen haben aber gezeigt, dass die Totzeiten ein wesentliches Element in den Rückkopplungsmechanismen thermoakustischer Systeme sind.

In Gasturbinenbrennkammern sind die Wärmefreisetzungsfrequenzen üblicherweise durch Schwankungen der Zufuhr von Brennstoff oder Brennstoff-Luft-Gemisch bedingt. Sie lassen sich daher meist auf die akustische Schnelle, oft an einem einzelnen charakteristischen Ort innerhalb des Brenners, zurückführen. Die Kenntnis der Schnelle ist daher für das Simulationsverfahren unverzichtbar. Die Gleichungen (4.1) und (4.2) liefern allerdings nur den Schalldruck. Ein bekanntes Schalldruckfeld erlaubt jedoch auch die Berechnung des Schnellefeldes. Einen möglichen Weg hierfür liefert das akustische Potential. Gleichung (2.17) auf Seite 24 zeigt, dass sich die Schnelle \mathbf{u}' für den rein akustischen Fall ($\mathbf{u}^r = \mathbf{0}$) direkt als Gradient des akustischen Potentials ϕ ergibt. Dieses wiederum kann bei bekanntem Schalldruckfeld p' durch Integration der Differentialgleichung (2.18) ermittelt werden. Dazu ist wegen der substantiellen Ableitung im Allgemeinen die Kenntnis der Rand- und Anfangsbedingungen notwendig, falls eine mittlere Strömung vorliegt. Die Gleichung muss dann auf dem ganzen Gebiet gelöst werden.

Wesentlich einfacher stellt sich die Situation dar, wenn wie in dieser Arbeit nur die isentrope Störungsausbreitung in einem gleichförmigen mittleren Strömungsfeld betrachtet wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die mittlere Geschwindigkeit in Richtung der x -Achse angenommen werden³⁵. Dann reduzieren sich die Impulsgleichungen (2.13) zu folgenden drei Gleichungen für die drei Koordinatenrichtungen:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (4.6)$$

Gleichzeitig gilt wegen der Energiegleichung, Gleichung (2.14), in den

³⁵Das Koordinatensystem lässt sich bei gleichförmiger mittlerer Strömung immer so festlegen, dass die x -Achse in die Richtung der Komponente der mittleren Geschwindigkeit zeigt.

Gebieten außerhalb der Flamme

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial p'}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{c}^2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) = 0. \quad (4.7)$$

Gleichungen (4.5) und (4.6) stellen nun bei bekanntem Schalldruckfeld ein lokales Anfangswertproblem dar, das ohne Randbedingungen lösbar ist. Damit können die Gradienten $\partial v'/\partial y$ und $\partial w'/\partial z$ und unter nachfolgender Anwendung von Gleichung (4.7) auch $\partial u'/\partial x$ ermittelt werden. Durch Einsetzen dieses Ergebnisses wird Gleichung (4.4) ebenfalls zu einem reinen Anfangswertproblem. Damit lassen sich alle drei Komponenten der Geschwindigkeitsfluktuation, u' , v' und w' , an beliebigen Orten durch Integration in der Zeit bestimmen, ohne für das gesamte Schnellefeld lösen zu müssen.

Bei bekanntem p' und \mathbf{u}' stellt nun die Auswertung der Gleichung (4.3) den Quellterm für die Lösung der Wellengleichung bereit. Mit eben dieser Prozedur beschäftigt sich weiter unten noch einmal detaillierter der Abschnitt 4.2, insbesondere im Hinblick auf die in der Praxis sehr wichtigen Flammentransferfunktionen.

4.1.3 Anfangsbedingung

Die Anfangsbedingung soll ein ausreichend breitbandiges Spektrum an kleinen Störungen vorgeben. Für den Fall, dass das System zu einer selbsterregten Instabilität neigt, werden die dazugehörigen Störungskomponenten zunehmend verstärkt werden, während die anderen Störungsanteile immer mehr abklingen. Aus der anfänglich ungeordneten Verteilung bildet sich dann eine definierte Schwingungsform aus. Ist das System dagegen stabil, werden alle anfänglich vorhandenen Störungen vollständig abklingen.

In dem Simulationsprogramm wird die Anfangsbedingung aus einer Zufallsverteilung erzeugt. Erster Schritt ist die Generierung eines strukturierten kartesischen Gitters, das das eigentliche FEM-Berechnungsgebiet vollständig überdeckt. Auf den Gitterpunkten werden Zufallswerte aus dem Intervall $[-1, 1]$ erzeugt. Aus dieser

Verteilung lässt sich dann durch lineare Interpolation auf die Knoten des FEM-Netzes und Skalierung auf die gewünschten (kleinen) Amplituden die Anfangsbedingung für das Schalldruckfeld $p'_0(\mathbf{x})$ gewinnen. Dieses Feld weist jedoch zunächst im Allgemeinen noch einen von Null verschiedenen räumlichen Mittelwert auf. Dies widerspricht der Annahme, dass der Schalldruck p' kleine Störungen um einen konstanten mittleren Druck \bar{p} repräsentieren soll. Aus diesem Grund wird in einem weiteren Schritt von der Anfangsbedingung noch der Mittelwert abgezogen, so dass letztendlich eine Integration über das gesamte Gebiet den Wert Null ergibt:

$$\int_{\Omega} p'_0(\mathbf{x}) dV = 0. \quad (4.8)$$

Durch Veränderung der Gitterweite des Gitters, auf dem die Zufallsverteilung erzeugt wird, lässt sich steuern, welches Spektrum an Wellenzahlen in der Anfangsbedingung abgebildet ist. Je kleiner die Gitterweite ist, desto höhere Frequenzen sind in p'_0 enthalten. Letztendlich spielt diese Frage in den meisten Fällen aber nur eine untergeordnete Rolle. Ein Verbrennungssystem ist oft dadurch gekennzeichnet, dass die Flamme die hochfrequenten Fluktuationen dämpft. Mischungsprozesse und chemische Reaktionen laufen innerhalb bestimmter Zeitskalen ab. Ist die Frequenz der die Flamme erreichenden Schwankungen deutlich höher, als es diesen Zeitskalen entspricht, werden die genannten Vorgänge in der Flamme nur noch schwach oder gar nicht mehr beeinflusst. Anfänglich im Schalldruckfeld vorhandene kurzweilige Komponenten klingen daher mit der Zeit ohnehin ab. Die bei selbsterregten Verbrennungsschwingungen interessierenden Vorgänge haben typische Längenmaße in der Größenordnung der geometrischen Abmessungen. Die Anfangsbedingung muss also nur sicherstellen, dass dieser Bereich abgedeckt ist.

Für die Berechnung der Wärmefreisetzungsraten ist wegen der Totzeiten im System, wie oben geschildert, die Kenntnis bestimmter Größen aus der Vergangenheit nötig. Als Anfangsbedingung werden dazu für $t < 0$ (also für alle Zeitpunkte vor dem Beginn der Simula-

tion) sämtliche akustischen Schwankungswerte zu Null gesetzt. Die Störung wird erst durch die anfängliche Druckverteilung eingebracht. In den Wärmefreisetzungsfuktuationen beginnt sie sich somit erst nach Ablauf der Totzeit auszuwirken. Im Falle von Totzeitverteilungen, bei denen die Wärmefreisetzungsschwankungen vom akustischen Feld nicht nur zu einem Zeitpunkt in der Vergangenheit sondern innerhalb eines gewissen Intervalls in der Vergangenheit abhängen, ist hierfür entsprechend die kürzeste Totzeit des Systems zu nehmen.

4.1.4 Randbedingungen

Die Randbedingungen legen nicht nur direkt das Verhalten des Schalldruckfelds an den Rändern fest, sondern nehmen hierüber auch Einfluss auf den akustischen Energieinhalt des Systems. Abhängig von der Randbedingung kommt es zu einer idealen Reflexion der akustischen Wellen mit vollständiger Erhaltung der in ihnen enthaltenen Energie, oder zu einer teilweisen oder vollständigen Transmission oder Absorption mit Verringerung der Energie.

Eine vollständige Reflexion kann in guter Näherung an harten (nicht nachgiebigen) Wänden angenommen werden. Dort müssen die Geschwindigkeitsschwankungen in Normalenrichtung zur Wand $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'$ verschwinden. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass der Gradient des akustischen Potentials und damit auch des Schalldrucks in dieser Richtung verschwindet:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p' = 0. \quad (4.9)$$

Eine vollständige Reflexion ergibt sich aber auch, wenn an einem offenen Rand durch Aufprägung des konstanten Umgebungsdrucks die Druckschwankungen zu Null werden:

$$p' = 0. \quad (4.10)$$

In der Realität sind die Vorgänge an Rändern, die eine Verbindung zur Umgebung darstellen, mit dem Verlust akustischer Energie verbunden. Dieser Verlust kommt durch die Verrichtung von Druck-

und Volumenänderungsarbeit an der Grenze zur Umgebung zu Stande und tritt dann auf, wenn Geschwindigkeitsfluktuationen zur Produktion von gleichphasigen Druckfluktuationen führen. Dieser Mechanismus lässt sich mit dem fluiddynamischen Druckverlust in Zusammenhang bringen, der beim Einströmen in das oder Ausströmen aus dem System auftritt [58]. Entsteht er innerhalb eines kleinen Volumenbereichs (ist in idealisierter Betrachtung also auf die Eintritts- bzw. Austrittsebenen konzentriert denkbar), können instationäre Speicherterme vernachlässigt werden. Die Bernoulli-Gleichung liefert dann für den Druckverlust

$$|p - p_\infty| = \frac{\rho}{2} \zeta u_n^2. \quad (4.11)$$

Hierbei ist p_∞ der Umgebungsdruck, u_n die am Rand nach außen gerichtete Geschwindigkeitskomponente und ζ ein Verlustkoeffizient. Aus dieser Beziehung lässt sich nun eine akustische Randbedingung ableiten. Die Linearisierung von Gleichung (4.11) um die stationären Mittelwerte \bar{p} und \bar{u}_n führt auf

$$p' = \bar{\rho} \zeta |\bar{u}_n| u_n' + \rho' \zeta \bar{u}_n^2. \quad (4.12)$$

Da $p' = \bar{c}^2 \rho'$, ergibt sich mit der Mach-Zahl $M_n = \bar{u}_n / \bar{c}$ nach Umformung

$$p' = \frac{\bar{\rho} \zeta |\bar{u}_n|}{1 - \zeta M_n^2} u_n'. \quad (4.13)$$

Die Druckschwankungen sind also den Geschwindigkeitsschwankungen proportional. Es ist auch zu erkennen, dass für den Grenzfall einer verlustfreien Abströmung ($\zeta = 0$) Gleichung (4.13) in die idealisierte Randbedingung (4.10) übergeht.

Die Beziehung (4.13) lässt sich wie nachfolgend gezeigt so umformen, dass die Schnelle durch den Schalldruck ausgedrückt wird. Die Impulsgleichung in Normalenrichtung am Rand ergibt sich, ausgehend von Gleichung (2.13), für ein gleichförmiges mittleres Strömungsfeld zu

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{n} \cdot \nabla p'. \quad (4.14)$$

Durch Einsetzen von u'_n aus der Randbedingung (4.13), unter Berücksichtigung von $u_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$, folgt hieraus mit der Abkürzung $K = (1 - \zeta M_n^2)/(\bar{\rho} \zeta \bar{u}_n)$ die Beziehung

$$\frac{\partial u'_n}{\partial t} + K \bar{u}_n \mathbf{n} \cdot \nabla p' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{n} \cdot \nabla p'. \quad (4.15)$$

Diese Gleichung lässt sich wiederum in die partiell nach der Zeit differenzierte Gleichung (4.13) einsetzen. Daraus folgt schließlich die Formulierung der Randbedingung, die für die Verwendung mit der Wellengleichung benötigt wird:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p' = -\frac{K}{K \bar{u}_n + \frac{1}{\bar{\rho}}} \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (4.16)$$

Die bisher vorgestellten Randbedingungen sind direkt aus physikalischen Prinzipien abgeleitet und stellen algebraische Gleichungen oder Differentialgleichungen dar, die in eine Simulation im Zeitbereich leicht eingebunden werden können. In der Akustik liegen Informationen über Randbedingungen aber auch oft in Form von komplexwertigen, frequenzabhängigen Impedanzen \hat{p}/\hat{u}_n vor. Ihre Einbindung in eine Simulation ist deutlich schwieriger. Eine Möglichkeit besteht darin, aus dem Frequenzverlauf der Impedanz eine Differentialgleichung abzuleiten, die genau diesen Frequenzgang produziert, und dann diese Differentialgleichung als Randbedingung zu nutzen. Einen anderen Weg haben Özörük und Long [120] aufgezeigt. Durch Approximation des Frequenzverlaufs der Impedanz durch eine gebrochene rationale Funktion und anschließende inverse z-Transformation lässt sich direkt eine zeitdiskrete Formulierung der Randbedingung erhalten. Beide Methoden werden in dieser Arbeit nicht eingesetzt, da sie eine sehr aufwändige numerische Behandlung erfordern. Das Verfahren von Özörük und Long ist aber auch die Basis für eine mögliche Übertragung von Flammentransferfunktionen aus dem Frequenz- in den Zeitbereich und wird in diesem Zusammenhang im Abschnitt 4.2.4 noch näher erläutert.

4.1.5 Ablauf der Berechnung

Unter Berücksichtigung der zuvor erläuterten Teilaspekte stellt sich der vollständige Ablauf einer Simulation folgendermaßen dar:

1. Problemdefinition: Modellierung der Geometrie, Festlegung der Systemparameter und Randbedingungen.
2. Vernetzung der Geometrie durch finite Elemente.
3. Generierung der Anfangsbedingung für $t = 0$.
4. Berechnung des Schalldruckfelds zum Zeitpunkt $t + \Delta t$; dieser Schritt besteht aus folgenden Unterpunkten
 - (a) Berechnung des Quellterms der Wellengleichung (Wärmefreisetzungsschwankungen) aus den um die Totzeiten τ früher ermittelten akustischen Größen. Ist $t + \Delta t - \tau \leq 0$, werden p' und \mathbf{u}' hierfür zu Null gesetzt.
 - (b) Lösung der Wellengleichung unter Vorgabe des soeben berechneten Quellterms.
 - (c) Nach gegebenenfalls nötiger Berechnung Speicherung der für die Ermittlung zukünftiger Quellterme benötigten akustischen Größen.
5. Wiederholung des 4. Schritts so lange, bis eine festgelegte Problemzeit erreicht ist.
6. Analyse der Simulationsergebnisse.

Für die Berechnung der Schalldruckfelder zu den verschiedenen Zeitpunkten (4. Schritt) kommt ein numerisches Zeitschrittverfahren zum Einsatz, wie es im Abschnitt 3.4 untersucht wurde. Der Zeitschritt Δt solcher Verfahren ist üblicherweise variabel. Die Löser verfügen über adaptive Verfahren zur automatischen Zeitschrittwahl in Abhängigkeit der angestrebten Fehlertoleranz, so dass hier ein expliziter Eingriff nicht nötig ist. Allerdings müssen die Zeitschritte so

klein sein, dass im Intervall $[t - \tau, t]$ genügend Simulationspunkte liegen, um auch das dynamische Flammenverhalten richtig wiedergeben zu können. Da die Berechnung des Quellterms nicht direkt mit der Lösung der Wellengleichung gekoppelt ist, kann sie sich auch nicht auf die Zeitschrittwahl des Löser auswirken. Aus diesem Grund sollte der maximale Zeitschritt auf einen Bruchteil der kleinsten im System auftretenden Totzeit begrenzt werden.

Die Abschätzung der nötigen Simulationsdauer ist am Anfang unter Umständen schwer. Für eine reine Stabilitätsbetrachtung reicht unter Umständen schon eine relativ kurze Berechnung, bis erkennbar ist, ob sich aus der Anfangsbedingung eine in der Amplitude anwachsende selbsterregte Schwingung ausbildet oder ob die Fluktuationen stetig abklingen. Gegebenenfalls kann auch mit einer Fortsetzung der Simulation auf einem Zwischenergebnis aufgesetzt werden. Ist für einen instabilen Fall die Kenntnis des Grenzzyklus gewünscht, ist die Berechnung solange fortzusetzen, bis sich eine Schwingungsform mit konstanter Amplitude einstellt.

4.2 Einbindung von Flammenmodellen

4.2.1 Flammentransferfunktion

Im Abschnitt 4.1.2 wurde bereits prinzipiell die Einbindung des dynamischen Flammenverhaltens in die Simulation besprochen. Dabei galt ganz allgemein eine Abhängigkeit der Wärmefreisetzungsschwankungen von beliebigen akustischen Größen (Schalldruck oder Schallschnelle) an beliebigen Stellen des Systems. Damit lassen sich letztendlich die unterschiedlichsten Klassen von thermoakustischen Systemen beschreiben.

Bei Gasturbinenbrennern können die Wärmefreisetzungsschwankungen häufig auf Massenstromschwankungen im Brenner zurückgeführt werden. Diese bewirken eine Modulation der Menge an Brennstoff-Luft-Gemisch, die der Flamme zugeführt wird. Bei nicht oder teil-

weise vorgemischten Systemen haben Fluktuationen des Luftmassenstroms bei konstanter Brennstoffzufuhr³⁶ zudem Schwankungen der Luftzahl zur Folge. Dies führt zu schwankenden Wärmefreisetzungsraten pro Volumeneinheit, die als akustische Quelle wirken, und gegebenenfalls zu Entropiefluktuationen.

Die Massenstromschwankungen lassen sich oft direkt mit einer typischen Geschwindigkeit \mathbf{u}_B an einem bestimmten Ort \mathbf{x}_B innerhalb des Brenners korrelieren. Letztendlich können damit auch die Wärmefreisetzungsschwankungen als Funktion der Schnelle (Betrag von \mathbf{u}_B) an diesem Ort angegeben werden:

$$\dot{q}'_V(\mathbf{x}) = f(u'_B, \mathbf{x}). \quad (4.17)$$

Im regelungstechnischen Sinne stellt die Flamme eine Strecke dar, die auf Schwankungen der Brennergeschwindigkeit als Eingangsgröße mit Schwankungen der Wärmefreisetzungsrates als Ausgangsgröße antwortet. Die Funktion f in Gleichung (4.17) beschreibt in dieser Sichtweise das Übertragungsverhalten der Strecke.

Die Flamme reagiert auf unterschiedliche Frequenzinhalte im Eingangssignal u'_B im Allgemeinen auch unterschiedlich. Dieser Sachverhalt wird durch Übertragung der Gleichung (4.17) in den Frequenzbereich mittels einer Fouriertransformation deutlich. Sie liefert die Beziehung

$$\hat{q}'_V(\omega, \mathbf{x}) = F(\omega, \mathbf{x}) \cdot \hat{u}_B(\omega), \quad (4.18)$$

wobei die durch $\hat{}$ gekennzeichneten Größen die komplexen Amplituden der Schwankungsgrößen darstellen und $F(\omega, \mathbf{x})$ als Flammen-transferfunktion bezeichnet wird. Hinter der Gleichung steckt allerdings noch die zusätzliche Annahme, dass die Flammentransferfunktion linear ist, also nicht von der Amplitude \hat{u}_B abhängt. Dieser Aspekt wird im nachfolgenden Abschnitt im Zusammenhang mit dem Thema Sättigung noch näher beleuchtet werden. Für $\omega \rightarrow 0$, also im niederfrequenten Bereich, nähert sich $F(\omega)$ dem Wert \bar{q}'_V/\bar{u}_B , die

³⁶Dies kann bei ausreichend hohem Druck in der Brennstoffzufuhr angenommen werden, da dann der Druckabfall in den Brennstoffdüsen eine kritische Durchströmung bewirkt und damit der Brennstoffmassenstrom vom Gegenruck im Brenner unabhängig ist.

Flamme verhält sich hier praktisch stationär. Bei sehr hohen Frequenzen wird der Betrag der Flammentransferfunktion sehr klein, weil die Flamme auf Grund der Trägheit der in ihr ablaufenden Prozesse den Geschwindigkeitsfluktuationen nicht mehr folgen kann. Im Bereich dazwischen zeigt sich je nach Typ der Flamme oft ein sehr unterschiedliches Verhalten.

Das Konzept der Flammentransferfunktion hat für die Modellierung thermoakustischer Probleme eine wesentliche Bedeutung gewonnen. Es reduziert die komplexen Verhaltenseigenschaften einer Flamme auf die Kopplung zweier einzelner Größen. Dies erlaubt die direkte Integration in regelungstechnische Modelle thermoakustischer Systeme und erleichtert die experimentelle oder analytische Charakterisierung von Flammen. Eine entsprechend reichhaltige Literatur findet sich zu den Flammenmodellen [72–77, 79, 121–123], die aus Messungen oder theoretischen Überlegungen abgeleitete Beschreibungen des dynamischen Flammenverhaltens in Form von Flammentransferfunktionen sind.

4.2.2 Sättigung

Die Annahme einer linearen Flammentransferfunktion hat in der Realität ihre Grenzen. Ein wesentlicher Grund hierfür sind Sättigungseffekte. Damit sind in der Regelungstechnik Vorgänge gemeint, die den Betrag einer Ausgangsgröße auf ein bestimmtes Maximum limitieren, auch wenn die Eingangsgröße beliebig hohe Werte annehmen kann.

Für eine Flamme ist die Existenz von Sättigung offensichtlich. Nach unten hin ist die Wärmefreisetzungsrateselbst in einer idealisierten Betrachtung auf den Wert Null begrenzt, da die Flamme bestenfalls verlöschen, nicht aber noch Wärme aufnehmen kann. Auch in Richtung hoher Reaktionsraten wird sich eine Grenze ergeben, da die Flamme ein wachsendes Angebot an Brennstoff-Luft-Gemisch ab einer bestimmten Menge nicht mehr vollständig umsetzen kann.

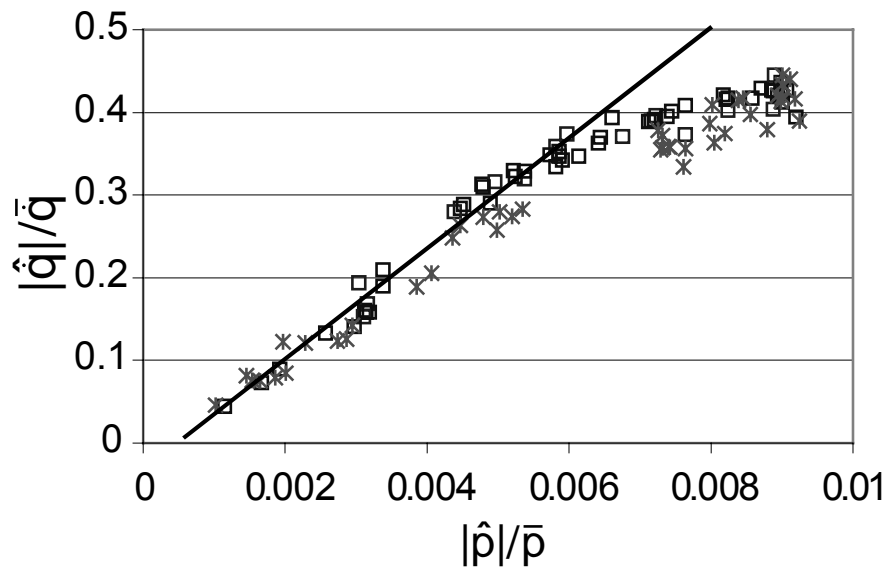


Abbildung 4.2: Sättigungseffekte in einer Flamme (nach [124]): Wärmefreisetzungsschwankungen als Funktion akustischer Fluktuationen (hier des Drucks), jeweils auf die Mittelwerte bezogen. Experimentelle Chemilumineszenz-Daten für akustische Anregung bei einer bestimmten Frequenz.

Experimentelle Untersuchungen an einem Gasturbinenbrenner von Harper et al. [124] zeigen beispielsweise, dass für kleine Amplituden durchaus ein linearer Zusammenhang zwischen den Amplituden der akustischen Fluktuationen und der Wärmefreisetzungsschwankungen besteht. Erreichen letztere aber eine Größenordnung von 30% bis 40% der mittleren Wärmefreisetzungsrate, ist das Einsetzen von Sättigung deutlich erkennbar, und die Pulsationen der Flamme nehmen auch bei wachsender akustischer Anregung nicht mehr weiter zu (vgl. Abbildung 4.2). In der in Kapitel 5 vorgestellten Simulation einer Modellringbrennkammer wurden für die Sättigung etwa doppelt so hohe Werte für die Wärmefreisetzungsschwankungen angenommen, was aber zu offensichtlich zu hohen Grenzamplituden der Druckschwingungen führte. Die hier genannten Werte erscheinen unter diesem Gesichtspunkt zumindest nicht unrealistisch. Inwieweit ihnen aber eine allgemeinere Gültigkeit zugebilligt werden kann, muss hier offen bleiben.

In den CFD-Simulationen von Hantschk [88] zeigen sich Nichtli-

nearitäten in der globalen Wärmefreisetzungsratesogar schon bei Schwankungen, die nur wenige Prozent des Mittelwerts betragen. Allerdings ist dort die Flamme relativ lang, so dass Gebieten mit starken und daher nichtlinearen Fluktuationen einer bestimmten Phasenlage andere Gebiete ähnlicher Stärke, aber abweichender Phase gegenüber stehen. Das führt in Summe durch Kompensationseffekte zwar zu einer in der Amplitude moderaten, aber dennoch nichtlinearen Wärmefreisetzungsschwankung.

Der Einfluss der Nichtlinearitäten in der Flamme auf das thermoakustische System ist differenziert zu bewerten. Die Entstehung von selbsterregten Schwingungen erfolgt ausgehend von kleinen Störungen und wird daher korrekt durch eine lineare Theorie beschrieben. Die Sättigung limitiert jedoch den Energieeintrag durch die Flamme in das akustische System und stellt damit einen wesentlichen Faktor für die Ausbildung eines Grenzyklus dar. Ein Modell, das auch auf die Vorhersage der Grenzamplituden abzielt, kann diesen Aspekt daher nicht unberücksichtigt lassen.

Für die Modellierung der Sättigung bietet sich ein einfacher Ansatz an. Solange die akustischen Fluktuationen eine bestimmte Amplitude nicht überschreiten, wird direkt der lineare Ansatz entsprechend Gleichung (4.18) verwendet. Über einem Grenzwert wird die Flammentransferfunktion nicht mehr für die tatsächliche Amplitude der Schnelle ausgewertet, sondern für deren Grenzwert:

$$\hat{q}_V(\omega) = \begin{cases} F(\omega, \mathbf{x}) \cdot \hat{u}_B(\omega) & \text{falls } |\hat{u}_B(\omega)| \leq \mu \bar{u}_B, \\ F(\omega, \mathbf{x}) \cdot \hat{u}_B(\omega) \frac{\mu \bar{u}_B}{|\hat{u}_B(\omega)|} & \text{falls } |\hat{u}_B(\omega)| > \mu \bar{u}_B. \end{cases} \quad (4.19)$$

Der Grenzwert für das Auftreten von Sättigung wird hier mit dem Parameter μ als Bruchteil der mittleren Geschwindigkeit festgelegt. Der Verlauf der Funktion aus Gleichung (4.19) zur Modellierung der Sättigungseffekte ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

Das hier beschriebene Sättigungsmodell hat den großen Vorteil, dass es beliebig mit Flammenmodellen aus linearen Untersuchungen kombiniert werden kann und trotzdem die wesentliche Nichtlinearität des Systems erfasst. Die eigentliche Flammendynamik kann daher durch

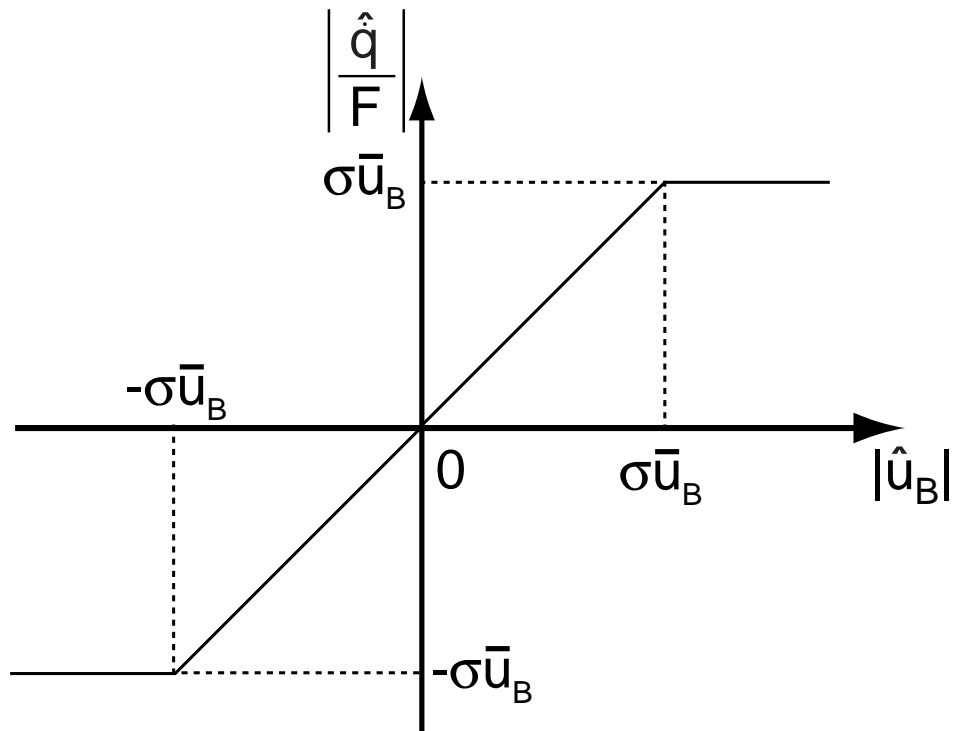


Abbildung 4.3: Verlauf der Funktion zur Modellierung von Sättigungseffekten.

lineare Modelle wiedergegeben werden, die in den nachfolgenden Abschnitten beschrieben sind.

4.2.3 Analytische Modelle

4.2.3.1 Algebraische Modelle

Eine Möglichkeit zur Darstellung von Flammentransferfunktionen sind analytische Modelle, also geschlossene Darstellungen durch mathematische Beziehungen. Solche Modelle lassen sich teilweise aus grundlegenden physikalischen Zusammenhängen direkt herleiten, meist unter vereinfachenden Annahmen, sind oft aber auch das Ergebnis der Interpretation experimenteller Daten.

Im einfachsten Fall lässt sich ein algebraischer Zusammenhang zwischen den akustischen Fluktuationen und den Wärmefreisetzungs-

schwankungen angeben. In diese Klasse von Modellen gehört beispielsweise das bekannte n - τ -Modell, das von Crocco und Cheng [17] bereits 1956 vorgeschlagen wurde. Ihm liegt die Annahme zu Grunde, dass die Schwankung der Reaktionsrate in der Flamme proportional (mit einem als Interaktionsindex n bezeichneten Proportionalitätsfaktor) zu einer Geschwindigkeitsfluktuation an einem bestimmten Ort zu einer um einen Zeitverzug τ früheren Zeit ist:

$$\dot{q}'_V = \frac{\bar{q}_V}{\bar{u}_B} \cdot u'_B(t - \tau). \quad (4.20)$$

Das Verhältnis der mittleren Wärmefreisetzungsrates zur mittleren Geschwindigkeit übernimmt hier die Rolle des Interaktionsindex. Diese einfache Beziehung ermöglicht bereits die Erklärung grundlegender thermoakustischer Phänomene und betont insbesondere die Bedeutung der Totzeit τ als wesentlichem Parameter für die Frage, ob eine stabile oder instabile Rückkopplung zwischen Akustik und Flamme besteht.

Eine Implementierung algebraischer Modelle für eine Simulation im Zeitbereich ist prinzipiell einfach, da aus der bekannten Zeitreihe von u'_B die Wärmefreisetzungsschwankungen explizit ohne Umweg berechnet werden können. Allerdings weisen die Modelle die unphysikalische Eigenschaft auf, dass der Betrag ihrer Transferfunktion für alle Frequenzen gleich ist. Dies ist im Bode-Diagramm des n - τ -Modells, beispielhaft dargestellt in Abbildung 4.4, gut zu erkennen. In der Realität lassen Speichereffekte, Mischung, Laufzeitverteilungen auf Grund von Dispersion, Trägheit und Dämpfung die Prozesse in einer Form ablaufen, bei der das System im Bereich hoher Frequenzen der Eingangsgröße nicht mehr folgen kann, also ein globales Tiefpassverhalten zeigt. Unter numerischen Gesichtspunkten ist das vorteilhaft, weil die Anforderungen für die gleichzeitige Berechnung hoch- und tieffrequenter Anteile auf Grund der Steifheit der resultierenden Systeme wesentlich höher sind. Da den einfachen algebraischen Flammenmodellen die dämpfende Eigenschaft für kurzweilige Komponenten aber fehlt, können sich in der Simulation numerische Probleme ergeben. Dies äußert sich dann beispielsweise durch nume-

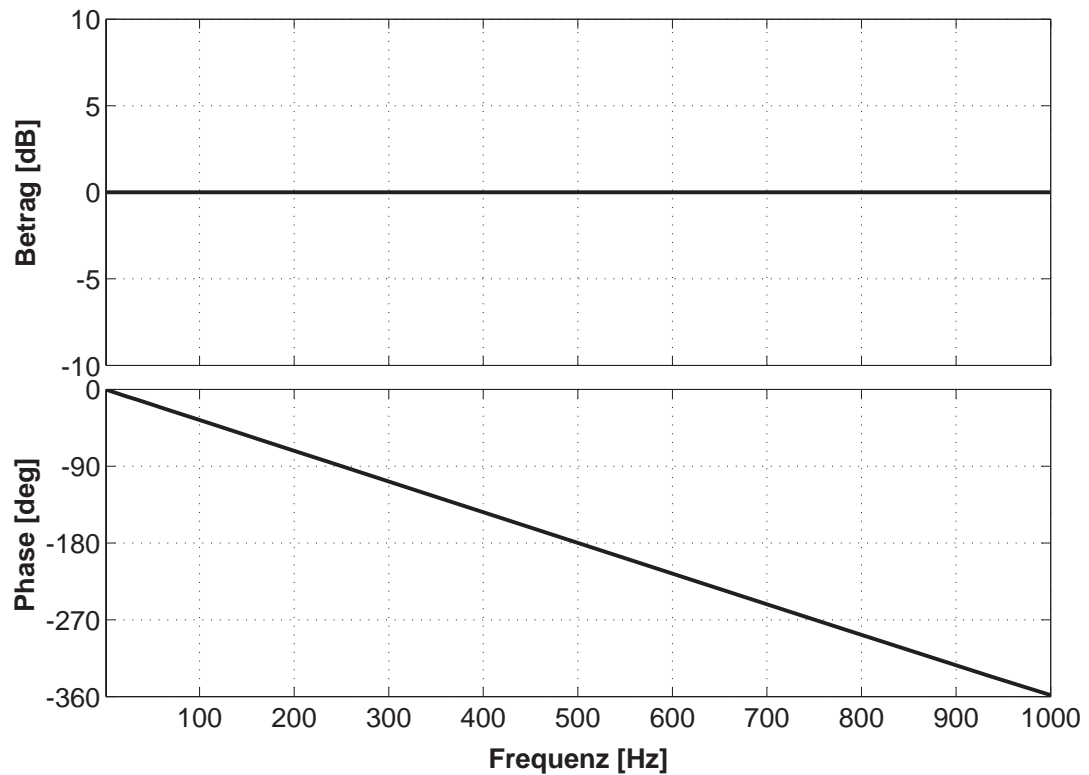


Abbildung 4.4: Bode-Diagramm des n - τ -Modells nach Gleichung (4.20) für eine Totzeit $\tau = 1$ ms. Betrag normiert mit dem Betrag der Transferfunktion für $\omega \rightarrow 0$. Die Totzeit führt zu einer Phasendrehung, die linear mit der Frequenz zunimmt. Der Verstärkungsfaktor hat den konstanten Wert 1.

rische Instabilitäten oder Oszillationen in der Lösung, die im realen Problem nicht beobachtet werden.

4.2.3.2 Differentialgleichungen

Um das dynamische Verhalten der Flamme abbilden zu können, ist die Berücksichtigung der Zeitableitungen der Einflussgrößen notwendig. Dadurch fließen auch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Größen in das Flammenmodell ein. Allerdings resultieren hieraus keine leicht auszuwertenden algebraischen Beziehungen mehr, sondern Differentialgleichungen. Ein einfaches Modell, wie es von Bloxsidge et

al. [21] aus experimentellen Beobachtungen hergeleitet wurde, lautet

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{d\dot{q}'_V}{dt} + \dot{q}'_V = \frac{\bar{q}'_V}{\bar{u}_B} u'_B(t - \tau). \quad (4.21)$$

Bei langsamen Vorgängen, bei denen die Zeitableitung klein wird, geht dieses Modell in das algebraische Zeitverzugsmodell aus Gleichung (4.20) über. Bei schnelleren Änderungen jedoch nimmt die Amplitude von \dot{q}'_V mit der Frequenz stetig ab. Abhängig von der Eckfrequenz ω_0 macht sich dieses Verhalten schon bei niedrigeren oder erst bei höheren Frequenzen deutlich bemerkbar.

Für die Implementierung dieser Art von Flammenmodellen in der Zeitbereichssimulation ergibt sich nun ein zusätzlicher Aufwand. Für jeden Zeitschritt muss zur Berechnung der Wärmefreisetzungsschwankungen eine eigene Differentialgleichung oder bei komplexeren Modellen sogar ein System von Differentialgleichungen gelöst werden. Dies erfordert den Einsatz eines gesonderten numerischen Löser innerhalb des Lösungsverfahrens für die akustischen Gleichungen.

Flammenmodelle in Differentialgleichungsform lassen sich im Allgemeinen auch leicht in den Frequenzbereich übertragen. Dazu sind lediglich die Rechenregeln für die Fourier-Transformation zu beachten. Beispielsweise ergibt sich für das Modell aus Gleichung (4.21) die Darstellung

$$\hat{q}'_V(\omega) = F(\omega) \hat{u}_B(\omega) = e^{-i\omega\tau} \frac{\bar{q}'_V/\bar{u}_B}{1 + i\omega/\omega_0} \hat{u}_B(\omega) \quad (4.22)$$

im Frequenzraum. In dieser Form ist besonders gut erkennbar, dass der Betrag der Flammentransferfunktion mit zunehmender Kreisfrequenz ω abnimmt und damit das Flammenmodell das beschriebene Tiefpassverhalten zeigt. Das zeigt auch das Bode-Diagramm in Abbildung 4.5.

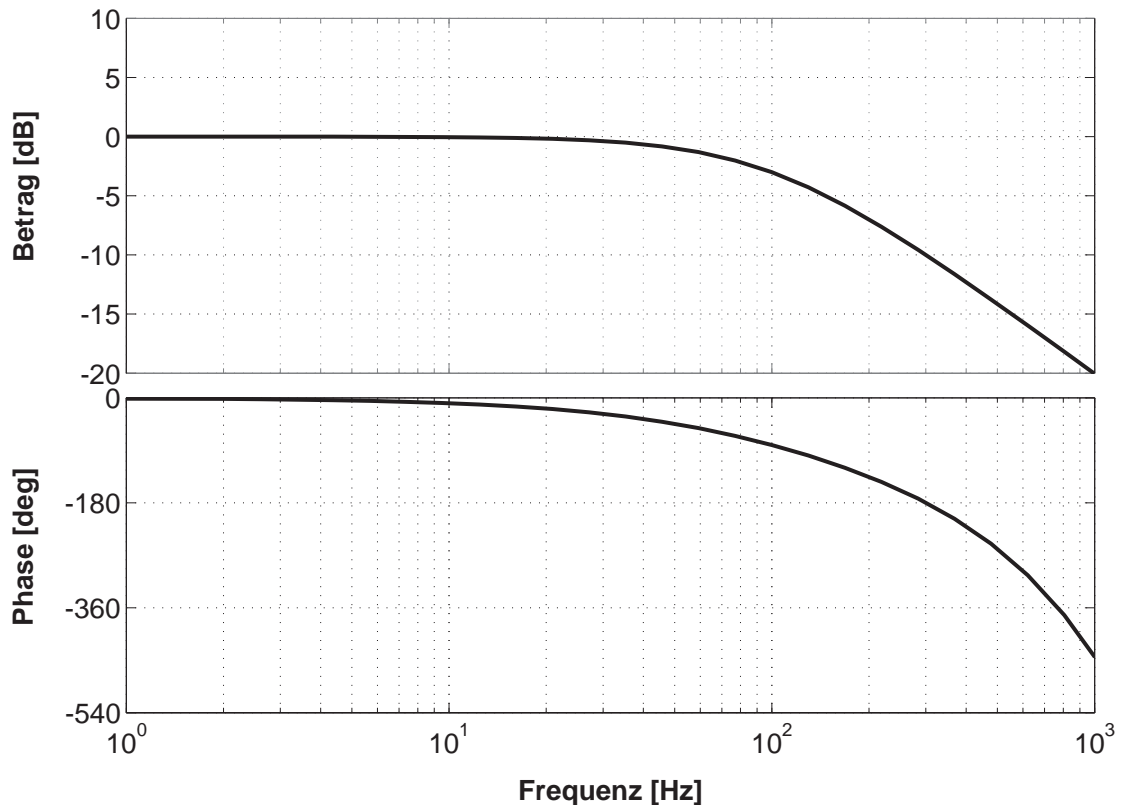


Abbildung 4.5: Bode-Diagramm des Flammenmodells nach Gleichung (4.22) für eine Totzeit $\tau = 1 \text{ ms}$ und eine Eckfrequenz $\omega_0 = 2\pi \cdot 100 \text{ s}^{-1}$. Betrag normiert mit dem Betrag der Transferfunktion für $\omega \rightarrow 0$.

4.2.4 Frequenzgänge

4.2.4.1 Parametrisierte Modelle

Technische Flammen weisen meist ein komplexes Verhalten auf, das zunächst nur experimentell charakterisierbar ist. Das Ergebnis sind gemessene Flammentransferfunktionen, die dann für diskrete Frequenzwerte nach Betrag und Phase vorliegen. Messtechnisch lassen sich derartige Frequenzgänge beispielsweise durch direkte Schnellmessungen im Brenner mittels Hitzdrahtanemometrie und Korrelation der Wärmefreisetzungsschwankungen mit Chemilumineszenzmessungen in der Flamme ermitteln, wie das unter anderem in der Arbeit von Fischer [125] gezeigt wird.

Diese Daten existieren im Frequenzbereich, können also nicht direkt für eine Simulation im Zeitbereich verwendet werden. Daher ist aus dem Frequenzgang zunächst ein geeignetes Flammenmodell abzuleiten, das sich auch im Zeitbereich repräsentieren lässt.

Eine grundsätzliche Möglichkeit hierzu besteht darin, die maßgeblichen Differentialgleichungen zu identifizieren, die das beobachtete Flammenverhalten beschreiben. Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, besteht über die Fourier-Transformation ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Darstellungen der Flammentransferfunktion im Zeit- und Frequenzbereich, so dass bei besonders charakteristischen Frequenzgängen die zugehörigen Differentialgleichungen unter Umständen direkt erkennbar sind. Allerdings kann diese Aufgabe bei komplexeren Systemen schnell sehr schwer werden. Auch stellt ein eventuell größeres Differentialgleichungssystem nicht unbedingt die ideale Darstellungsform für eine Implementierung in einer Zeitbereichssimulation dar, da seine Lösung mit nicht unerheblichem numerischen Aufwand verbunden sein kann.

Hier soll deshalb ein Verfahren vorgeschlagen werden, durch das sich gemessene Flammentransferfunktionen in einer parametrisierten Form darstellen und ausgehend hiervon auch direkt diskretisierbar in den Zeitbereich übertragen lassen. Ausgangspunkt ist ein allgemeiner Ansatz für die Flammentransferfunktion mit zunächst freien Parametern, die dann durch einen Optimierungsalgorithmus so angepasst werden, dass sich eine möglichst gute Übereinstimmung mit den Messdaten ergibt.

Dem Ansatz für die Flammentransferfunktion liegen folgende Überlegungen zu Grunde:

- Zwischen den Geschwindigkeitsschwankungen im Brenner als Ursache und den Wärmefreisetzungsschwankungen im Brenner als Wirkung besteht auf Grund konvektiver Effekte ein Zeitverzug. Allerdings soll hier nicht notwendigerweise eine einzelne Totzeit τ maßgeblich sein. Infolge von Verschmierungseffekten kann es vielmehr zu einer Überlagerung von Totzeiten aus einem

Intervall $\tau \pm \Delta\tau$ kommen. Nach Sattelmayer [67] ist dabei eine gute Annahme, dass die Anteile der einzelnen wirkenden Zeitverzögerungen innerhalb dieses Intervalls kontinuierlich gleichverteilt sind. Eine Transferfunktion, die das entsprechende Totzeitverhalten wiedergibt, hat die Form

$$F_\tau(\omega) = e^{-i\omega\tau} \frac{i\omega e^{i\omega\Delta\tau} - i\omega e^{-i\omega\Delta\tau}}{2\Delta\tau(i\omega)^2}. \quad (4.23)$$

- Das dynamische Verhalten der Flamme lässt sich durch gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben, wobei die Zeitableitungen sowohl der Ausgangsgröße (Wärmefreisetzungsschwankung) bis zur Ordnung N_α als auch der Eingangsgröße (Schnelle im Brenner) bis zur Ordnung N_β auftreten dürfen. Die Fourier-Transformation liefert als Transferfunktion hierfür eine gebrochen-rationale Funktion der Form

$$F_D(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{N_\beta} \beta_k (i\omega)^k + 1}{\sum_{l=1}^{N_\alpha} \alpha_l (i\omega)^l + 1}. \quad (4.24)$$

- In der Flamme wirken unter Umständen mehrere Mechanismen parallel, für die aber ganz unterschiedliche Zeitverzögerungen und Dynamikparameter gelten können. Die Gesamtflammentransferfunktion stellt sich daher als Überlagerung dieser Mechanismen in der Form

$$F(\omega) = \sum_{m=1}^M (\gamma_m \cdot F_{\tau,m} \cdot F_{D,m}) \quad (4.25)$$

dar, wobei die einzelnen Terme $F_{\tau,m}$ und $F_{D,m}$ entsprechend den Gleichungen (4.23) und (4.24) definiert sind. Zusätzlich folgt noch aus der Bedingung, dass für $\omega \rightarrow 0$ die Flammentransferfunktion das stationäre Verhalten der Flamme wiedergeben muss, dass

$$\sum_{m=1}^M \gamma_m = \frac{\bar{q}_V}{\bar{u}_B}. \quad (4.26)$$

Für einen gegebenen Frequenzgang stellen nun die Gleichungen (4.25) und (4.26) die Bestimmungsgleichungen für die Parameter τ_m , $\Delta\tau_m$, $\alpha_{k,m}$, $\beta_{l,m}$ und γ_m unter der Bedingung dar, dass die Summe der Fehlerquadrate zwischen Daten und Ansatz minimiert werden soll³⁷. Diese Aufgabe stellt ein Optimierungsproblem dar, das sich mit numerischen Standardmethoden, beispielsweise dem Levenberg-Marquardt-Verfahren lösen lässt. Für eine wirkungsvolle Optimierung sollte die Anzahl der zu bestimmenden Parameter möglichst klein sein. Es empfiehlt sich daher, die Ordnung der auftretenden Polynome zunächst niedrig zu wählen und erst bei unbefriedigendem Ergebnis auf eine höhere Ordnung überzugehen.

4.2.4.2 Zeitdiskrete Form

Durch die Parametrisierung des Frequenzganges liegt eine standardisierte Darstellung der Flammentransferfunktion dar. Auf dieser Basis lässt sich nun allgemein ein Verfahren für die Übertragung in eine diskrete Form für die Verwendung in einem Zeitschrittverfahren herleiten. Dabei werden für die beiden Anteile der Transferfunktion (Totzeitverhalten und dynamischer Anteil) unterschiedliche Strategien verfolgt³⁸:

- Das Totzeitglied $F_\tau(\omega)$ nach Gleichung (4.23) hat eine klare Bedeutung im Zeitbereich: Für die Berechnung der Ausgangsgröße \dot{q}'_V zu einem bestimmten Zeitpunkt t ist als Eingangsgröße nicht u'_B zum aktuellen Zeitpunkt zu verwenden. Hierfür werden vielmehr die u'_B aus dem Intervall $[t - \tau - \Delta\tau, t - \tau + \Delta\tau]$ herangezogen.

³⁷Da die Transferfunktion komplexwertig ist, wird als Fehler der Betrag der Differenz zwischen Daten und Ansatzfunktion definiert.

³⁸In der hier vorgestellten Form impliziert der Ansatz, dass bei örtlich verteilten Wärmefreisetzungszonen an jedem Ort der Flamme dieselbe Totzeitverteilung anzunehmen ist. Dies könnte bei längeren Flammen eine unerwünschte Einschränkung darstellen. Das Verfahren lässt sich aber problemlos dahingehend erweitern, dass die Flamme in mehrere Segmente zerlegt gedacht wird, für die separate Flammentransferfunktionen definiert werden. Jede dieser Transferfunktionen ist dann mit den hier vorgestellten Methoden behandelbar. Auch ist zu bedenken, dass zumindest bei kompakten Flammen schon die Totzeitverteilung an sich unterschiedliche Phasenlagen der Transferfunktion in der Flamme auf Grund von Laufzeitunterschieden widerspiegelt.

- Für den dynamischen Anteil $F_D(\omega)$ nach Gleichung (4.24) wird eine Beziehung hergeleitet, die eine Berechnung aus diskreten Wertefolgen der Eingangs- und Ausgangsgröße erlaubt. Dieses Verfahren wird nachfolgend erläutert.

Die Methode ist angelehnt an einen Vorschlag von Özörük und Long [120] zur Implementierung frequenzabhängiger Impedanz-Randbedingungen im Zeitbereich. Prinzipielles Ziel ist die Überführung des Frequenzgangs in die Darstellungsform einer z -Transformation. Ihr entspricht eine diskrete Signalfolge im Zeitbereich, die durch Rücktransformation abgeleitet werden kann. Die theoretischen Grundlagen hierzu kommen aus dem Bereich der Systemidentifikation und Signalverarbeitung und können beispielsweise bei Ljung [126] oder Åström und Wittenmark [127] nachgelesen werden. Hier wird eine vereinfachte Darstellung wiedergeben.

Die Transferfunktion $F_D(\omega)$ besitzt nach Gleichung (4.24) Zähler und Nenner, die Polynome in $(i\omega)$ darstellen. Aus der Sicht der Fourier-Transformation stellt $(i\omega)$ den Differentiations-Operator dar:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\}. \quad (4.27)$$

Liegt eine Funktion im Zeitbereich nur in diskretisierter Form zu den Zeitpunkten t_j vor, wie das bei numerischen Verfahren immer der Fall ist, ergibt sich die Ableitung durch Approximation mit finiten Differenzen. Beispielsweise ist im einfachsten Fall bei Anwendung des Eulerverfahrens

$$\frac{d}{dt}f(t_j) \approx \frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = \frac{f(t_j + \Delta t_j) - f(t_j)}{\Delta t_j}. \quad (4.28)$$

Die Transformation einer diskreten Wertefolge in den Bildbereich erfolgt mit Hilfe der z -Transformation. Angewendet auf die Approximation aus Gleichung (4.28) liefert sie

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{f(t_j + \Delta t_j) - f(t_j)}{\Delta t_j}\right\} = \frac{z - 1}{\Delta t_j} \mathcal{Z}\{f(t_j)\}. \quad (4.29)$$

Der Term $(z - 1)/\Delta t_j$ kann somit als diskrete Approximation des Differentiations-Operators aufgefasst werden. Rein formal ergibt sich nun auch eine diskrete Approximation der Transferfunktion $F_D(\omega)$ im Bildbereich der z -Transformation dadurch, dass $(i\omega)$ durch $(z - 1)/\Delta t_j$ ersetzt wird:

$$F_D(\omega) \rightarrow F_D \left(\frac{1}{i} \frac{z - 1}{\Delta t_j} \right) =: F_{D,z}(z). \quad (4.30)$$

Die Approximation der Ableitung mit dem Eulerverfahren hat den Nachteil, dass ein stabiles zeitkontinuierliches System auf ein instabiles zeitdiskretes System abgebildet werden kann³⁹. Aus diesem Grund sind auch andere Approximationen gebräuchlich. Bei Verwendung von Rückwärtsdifferenzen ergibt sich

$$F_D(\omega) \rightarrow F_D \left(\frac{1}{i} \frac{z - 1}{z \Delta t_j} \right) =: F_{D,z}(z), \quad (4.31)$$

was alle stabilen kontinuierlichen Systeme auf stabile diskrete Systeme überführt, unter Umständen aber auch instabile. Besonders vorteilhaft ist die Formel von Tustin, die der Trapezregel der numerischen Integration entspricht:

$$F_D(\omega) \rightarrow F_D \left(\frac{1}{i} \frac{2}{\Delta t_j} \frac{z - 1}{z + 1} \right) =: F_{D,z}(z). \quad (4.32)$$

Sie bildet die Stabilitätseigenschaften des kontinuierlichen Systems exakt auf die des diskreten Systems ab.

Die diskretisierte Transferfunktion lässt sich durch algebraische Umformung auf die Form

$$F_{D,z}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N_b} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{l=1}^{N_a} a_l z^{-l}} \quad (4.33)$$

bringen. Dabei sind die Koeffizienten a_l und b_k Funktionen der Koeffizienten α_l und β_k aus Gleichung (4.24) und des Zeitschritts Δt_j . Aus dieser Darstellung erfolgt nun mit den Regeln der z -Transformation

³⁹Aus der Numerik ist bekannt, dass die beim Eulerverfahren verwendeten Vorwärtsdifferenzen zu numerischen Instabilitäten führen können, wenn die Zeitschritte zu groß gewählt werden.

besonders leicht die Rücktransformation in den diskreten Zeitbereich. Es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der Wertefolge der Eingangsgröße (Schnelle u'_B) und Ausgangsgröße (Wärmefreisetzungsschwankung \dot{q}'_V)⁴⁰:

$$\begin{aligned} \dot{q}'_{V,j} = & b_0 u'_{B,\tau,j} + b_1 u'_{B,\tau,j-1} + \dots + b_{N_b} u'_{B,\tau,j-N_b} \\ & + a_1 \dot{q}'_{V,j-1} + \dots + a_{N_a} \dot{q}'_{V,j-N_a}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Der Wert von \dot{q}'_V zu einem Zeitpunkt t_j lässt sich also aus N_a bekannten Werten der Wärmefreisetzungsschwankung und $N_b + 1$ bekannten Werten der Schnelle berechnen, die jeweils in äquidistanten Wertefolgen der Zeitschrittweite Δt_j vorliegen. Das in der Simulation der akustischen Gleichungen verwendete Zeitschrittverfahren verwendet üblicherweise variable Zeitschritte, so dass im Allgemeinen keine Werte von \dot{q}'_V und u'_B in äquidistanten Abständen vorliegen. Diese müssen daher zuerst noch durch Interpolation aus den vorhandenen Zeitreihen erzeugt werden.

Somit lässt sich folgender Algorithmus zur Berechnung von \dot{q}'_V für einen bestimmten Zeitpunkt t_j formulieren, zunächst unter der Annahme, dass nur eine feste Totzeit τ ohne Verzugszeitverteilung vorliegt:

1. Ermittlung des aktuellen Zeitschritts Δt_j (ist durch übergeordnete Akustiksimulation vorgegeben).
2. Berechnung der Koeffizienten a_l und b_k (Gleichung (4.33)) aus dem in Form von Gleichung (4.24) gegebenen dynamischen Anteil der Flammentransferfunktion und der Approximation der Ableitung (beipielsweise Gleichung (4.32)) unter Verwendung des aktuellen Zeitschritts Δt_j .
3. Interpolation der Werte $\dot{q}'_V(t_j - \Delta t_j), \dots, \dot{q}'_V(t_j - N_a \Delta t_j)$ aus der vorhandenen Zeitreihe von \dot{q}'_V .

⁴⁰Der Zusatz τ im Index von $u'_{B,\tau,j}$ soll andeuten, dass gegebenenfalls nicht die auf den Zeitpunkt t_j bezogenen Schnellewerte zu verwenden sind, sondern die auf eine um die Totzeit frühere Zeit $t_j - \tau$ bezogenen. Diese Schnellewerte entsprechen der Ausgangsgröße der Transferfunktion F_τ .

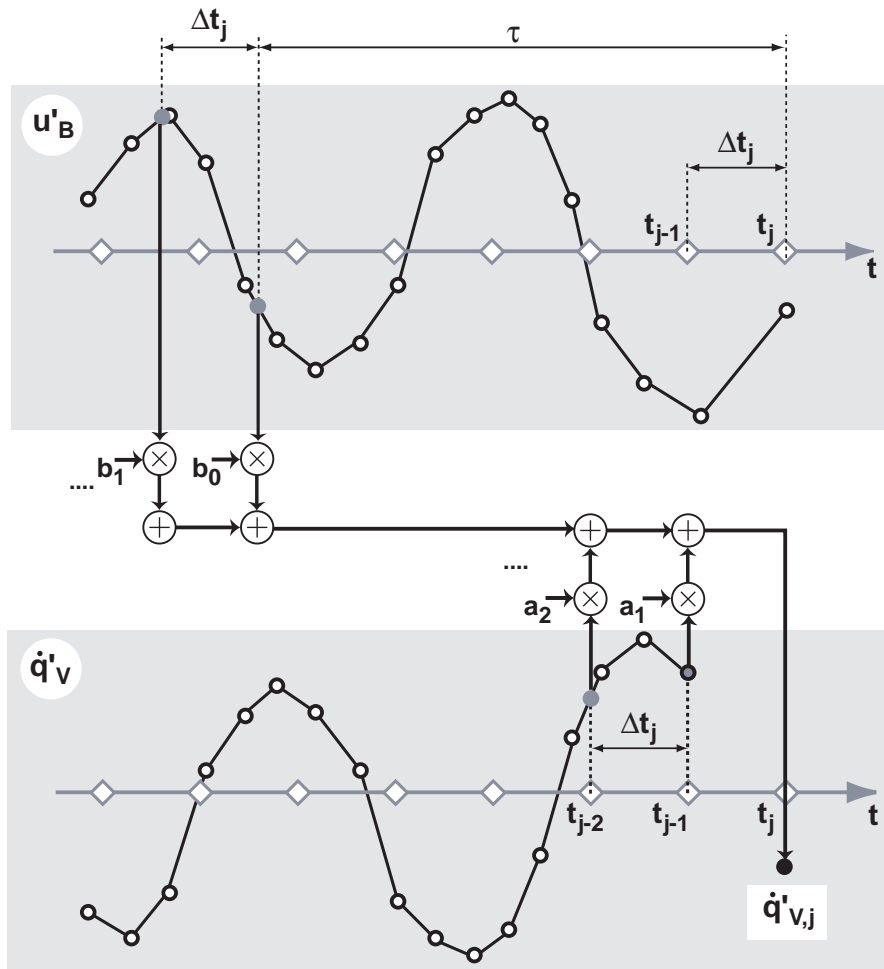


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung der Berechnung der Wärmefreisetzungsschwankung aus den Zeitreihen von u'_B und \dot{q}'_V bei fester Totzeit τ .

4. Interpolation der Werte $u'_B(t_j - \tau), \dots, u'_B(t_j - \tau - N_b \Delta t_j)$ aus der vorhandenen Zeitreihe von u'_B .
5. Berechnung von $\dot{q}'_{V,j}$ aus Gleichung (4.34).

Zur Verdeutlichung dieser Prozedur findet sich eine schematische Darstellung in Abbildung 4.6.

Ist statt einer festen Totzeit τ ein gleichverteiltes Spektrum an Zeitverzügen innerhalb des Intervalls $[\tau - \Delta\tau, \tau + \Delta\tau]$ zu berücksichtigen, ergibt sich der Einfluss der Eingangsgröße u'_B durch Mittelung der Einflüsse der Werte von u'_B zu allen Zeitpunkten innerhalb dieses

Intervalls. Dies entspricht einer Integration, so dass sich folgende Modifikation der Gleichung (4.34) ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{q}'_{V,j} = & \frac{1}{2\Delta\tau} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[b_0 u'_B(t_j - \tau^*) + b_1 u'_B(t_j - \Delta t_j - \tau^*) + \right. \\ & \left. + \dots + b_{N_b} u'_B(t_j - N_b \Delta t_j - \tau^*) \right] d\tau^* + \\ & + a_1 \dot{q}'_V(t_j - \Delta t_j) + \dots + a_{N_a} \dot{q}'_V(t_j - N_a \Delta t_j). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Da die Koeffizienten b_k während eines Zeitschritts Konstanten sind, lässt sich die Integration auf die Schnellewerte beschränken. Das bedeutet, dass in Gleichung (4.34) die Werte der $u'_{B,\tau}$ durch gemittelte Werte ersetzt werden müssen:

$$\begin{aligned} \dot{q}'_{V,j} = & b_0 \overline{u'}_{B,\tau,j} + b_1 \overline{u'}_{B,\tau,j-1} + \dots + b_{N_b} \overline{u'}_{B,\tau,j-N_b} \\ & + a_1 \dot{q}'_{V,j-1} + \dots + a_{N_a} \dot{q}'_{V,j-N_a}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Hierbei sind

$$\overline{u'}_{B,\tau,j-k} = \frac{1}{2\Delta\tau} \int_{\tau-\Delta\tau}^{\tau+\Delta\tau} u'_B(t_j - k\Delta t_j - \tau^*) d\tau^* \quad (4.37)$$

jeweils die innerhalb der Verteilung der Totzeiten gemittelten Schnellewerte. Da für u'_B nur eine diskrete Zeitreihe vorliegt, muss die Integration mit Hilfe numerischer Quadraturformeln erfolgen. Im gerade beschriebenen Algorithmus ersetzt diese numerische Mittelung den 4. Schritt⁴¹. Im 5. Schritt erfolgt die Berechnung von $\dot{q}'_{V,j}$ nun nach Gleichung (4.36) mit den im 4. Schritt berechneten Mittelwerten. Diese Modifikationen finden sich auch in dem geänderten Schema in Abbildung 4.7 wieder.

Besteht die Flammentransferfunktion entsprechend Gleichung (4.25) aus mehreren Anteilen, werden die geschilderten Berechnungen getrennt für diese Anteile durchgeführt und dann die Ergebnisse mit den Gewichtungsfaktoren γ_m überlagert.

⁴¹Das eigentliche Quadraturverfahren führt dann aber an den Stützstellen wieder eine Interpolation in u'_B durch.

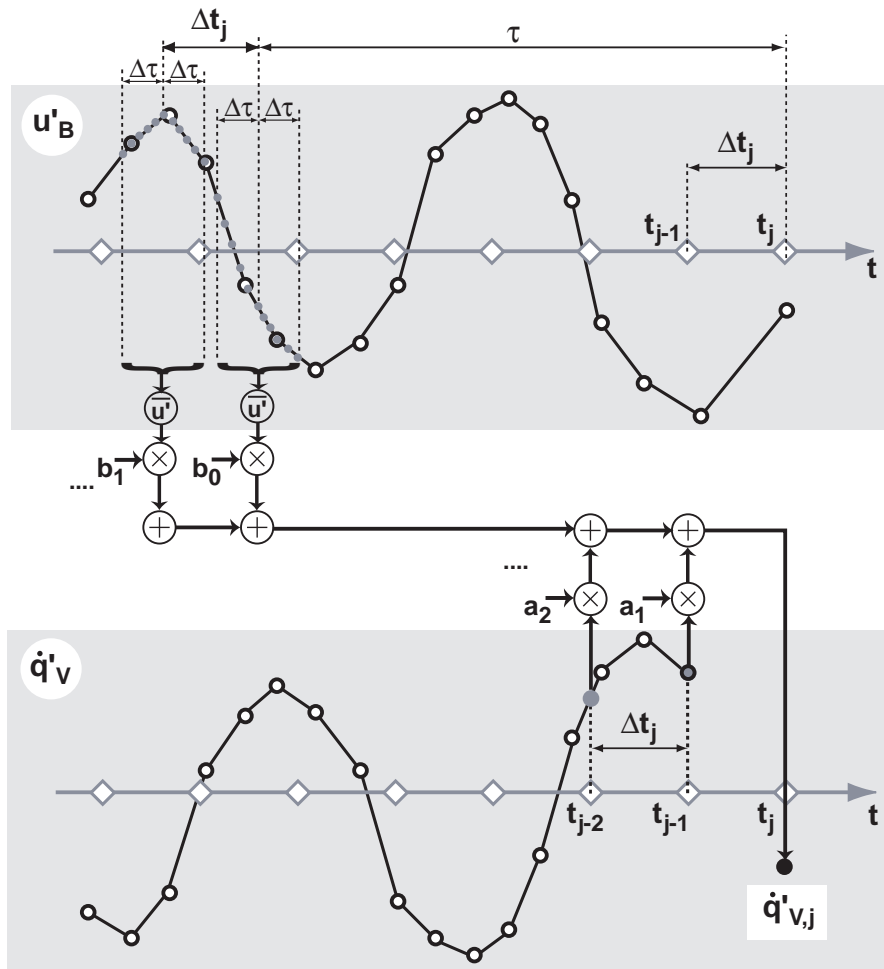


Abbildung 4.7: Schematische Darstellung der Berechnung der Wärmefreisetzungsschwankung aus den Zeitreihen von u'_B und q'_V bei einer Totzeitverteilung im Intervall $[\tau - \Delta\tau, \tau + \Delta\tau]$.

Anhang C zeigt an einem konkreten Beispiel mit einer gemessenen Flammentransferfunktion die Identifikation eines Flammenmodells mit dem im Abschnitt 4.2.4.1 beschriebenen Ansatz und validiert die soeben beschriebene Methode zur Übertragung des Modells in den Zeitbereich.

4.3 Methoden zur Auswertung

4.3.1 Auswertung von Zeitreihen

Vorrangiges Ziel der Analyse thermoakustischer Systeme ist die Bestimmung ihrer Stabilitätseigenschaften. Gegenstand der Betrachtung ist dabei immer das Schwingungsverhalten. Während Verfahren, die im Frequenzbereich arbeiten, direkt die komplexen Eigenwerte und damit sowohl Schwingungsfrequenz als auch Wachstums- bzw. Abklingrate liefern, sind aus einer Simulation im Zeitbereich quantitative Informationen nicht unmittelbar ablesbar.

Die Beurteilung des Ergebnisses der Simulation erfolgt typischerweise durch Beobachtung der Entwicklung einzelner Systemgrößen an bestimmten Orten, beispielsweise von Schnellewerten oder Schalldrücken. Qualitativ ist in den Zeitreihen dieser Größen das Systemverhalten sofort zu erkennen: stabile Systeme zeigen sich durch abklingende, instabile durch anwachsende Amplituden. In einem Grenzyklus bleibt die Amplitude konstant.

Die Frequenz einer Schwingung kann, zumindest für harmonische Signale mit nur einer Schwingungskomponente, aus dem Zeitsignal durch „Abmessen“ der Schwingungsdauer T und Nutzung der Beziehung $f = 2\pi/T$ bestimmt werden. Dieses Verfahren ist jedoch dann schnell schwierig zu handhaben, wenn die Schwingung mehrere unterschiedliche Frequenzanteile enthält. Einen tieferen Einblick liefert in diesem Fall eine Fourier-Analyse der Zeitreihe, die in einem Spektrum den Anteil der einzelnen Frequenzkomponenten erkennen lässt.

Von besonderem Interesse hinsichtlich der Stabilität eines Systems ist eine Größe, die ein Maß für das Wachstum oder das Abklingen der Schwingung darstellt. Für Prozesse, die einen exponentiellen Verlauf der Form

$$\xi(t) = A e^{(i2\pi f + \sigma)t} \quad (4.38)$$

zeigen⁴², ist dies die Anfachungsrate σ . Sie ist allerdings nicht direkt aus dem Zeitsignal erkennbar. Eine Möglichkeit besteht darin, die Änderung der Amplitude während einer Schwingungsdauer zu bestimmen und auf die aktuelle Amplitude zu beziehen:

$$\eta = \frac{\xi(t+T) - \xi(t)}{\xi(t)}. \quad (4.39)$$

Im Grenzfall unendlich kleiner Amplituden ($\xi(t) \rightarrow 0$) besteht zwischen diesem Maß und der Anfachungsrate der Zusammenhang

$$\eta = e^{\sigma/f} - 1. \quad (4.40)$$

In dieser Einschränkung zeigt sich aber auch das Problem für die Anwendung. Aus den Zeitreihen der Systemgrößen können immer nur endliche Amplituden herausgelesen werden. Um dabei den Fehler möglichst klein zu halten, müssen die Amplituden eine gewisse Mindestgröße haben. Die Berechnung von η kann deshalb nur eine Näherung für die Anfachungsrate liefern.

Einen wesentlich exakteren Weg zur Gewinnung des Wachstumsmaßes bietet die Ermittlung der Steigung der Kurve, die die Einhüllende des Zeitsignals darstellt. Eine sehr elegante und einfache Methode zur Berechnung dieser Einhüllenden findet sich im so genannten analytischen Signal. Seine Definition und Bestimmung wird nachfolgend prinzipiell erläutert.

4.3.2 Nutzung des analytischen Signals

4.3.2.1 Analytisches Signal

Der Begriff des analytischen Signals stammt aus der Signaltheorie und tritt beispielsweise im Zusammenhang mit der Aufgabe der Demodulation amplitudenmodulierter Signale auf. Ein wesentlicher Schritt in der Bestimmung des analytischen Signals ist die Hilbert-Transformation eines Zeitsignals. Auf ihre komplizierte, exakte mathematische Definition soll hier verzichtet werden. Vielmehr wird ein

⁴² ξ sei eine beliebige den Prozess kennzeichnende Größe, f die Schwingungsfrequenz.

Schema zu ihrer Ermittlung gezeigt, das auch als Basis für numerische Algorithmen dient.

Wenn $\xi(t)$ ein reelles Zeitsignal darstellt, soll unter $\Xi(\omega) = \mathcal{F}\{\xi(t)\}$ sein durch Fourier-Transformation entstandenes Spektrum verstanden werden. Weiter wird mit $\tilde{\xi}(t) = \mathcal{H}\{\xi(t)\}$ die Hilbert-Transformation des Zeitsignals und mit $\tilde{\Xi}(\omega) = \mathcal{F}\{\tilde{\xi}(t)\}$ ihr Spektrum bezeichnet. Dann gilt, dass das (komplexe) Spektrum der Hilbert-Transformierten $\tilde{\Xi}(\omega)$ aus dem (komplexen) Spektrum des Ursprungssignals $\Xi(\omega)$ durch Drehung der positiven Frequenzen um $-\pi$ und der negativen Frequenzen um $+\pi$ in der komplexen Ebene hervorgeht. Damit ergibt sich folgender Algorithmus zur Berechnung der Hilbert-Transformation:

1. Fourier-Transformation des Zeitsignals liefert sein Spektrum:
 $\Xi(\omega) = \mathcal{F}\{\xi(t)\}$.
2. Drehung des linksseitigen Spektrums um $+\pi$ und des rechtsseitigen Spektrums um $-\pi$ liefert das Spektrum der Hilbert-Transformierten: $\tilde{\Xi}(\omega) = -i \cdot \text{sign}(\omega) \cdot \Xi(\omega)$
3. Inverse Fourier-Transformation (Rücktransformation) des Spektrums der Hilbert-Transformierten liefert die Hilbert-Transformierte: $\tilde{\xi}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{\Xi}(\omega)\}$

Das Hilbert-transformierte Signal ist wieder ein reelles Zeitsignal. Ist das Ursprungssignal harmonisch, weist es dessen Amplitude und Frequenz auf und ist gerade um π zu diesem phasenverschoben.

Unter Verwendung der Hilbert-Transformation wird nun das analytische Signal durch

$$\xi^A(t) = \xi(t) + i \cdot \tilde{\xi}(t) \quad (4.41)$$

definiert. Das analytische Signal ist also ein komplexes Zeitsignal, dessen Realteil das Ursprungssignal und dessen Imaginärteil die Hilbert-Transformierte bildet. Für ein harmonisches Signal $\xi(t)$ lässt sich dieser Sachverhalt sehr anschaulich darstellen, wie in Abbildung 4.8 gezeigt. Wird das analytische Signal als Zeiger in der kom-

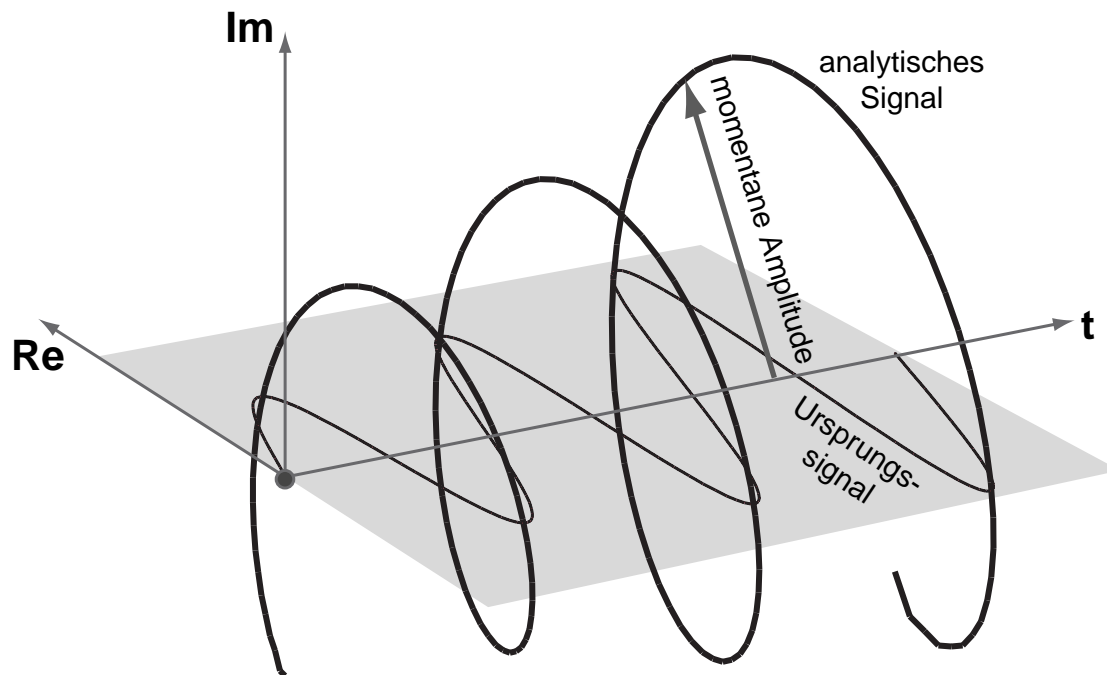


Abbildung 4.8: Veranschaulichung des analytischen Signals für ein harmonisches Ursprungssignal.

plexen Ebene interpretiert, so dreht sich dieser Zeiger mit fortschreitender Zeit in schraubenförmiger Weise. Im Laufe einer Schwingungsperiode beträgt die Drehung dabei gerade 2π . Die Länge des Zeigers, also der Betrag des analytischen Signals, variiert dabei nicht mit dem Wert des Ursprungssignals, sondern mit dessen Amplitude.

4.3.2.2 Anfachungsrate und Frequenz

Das analytische Signal bietet somit die Möglichkeit, Momentanwerte globaler Größen eines Zeitsignals (Amplitude und Frequenz) zu bestimmen. Der Betrag $|\xi^A(t)|$ stellt die momentane Amplitude dar. Sie kann auch als die Einhüllende des Zeitsignals verstanden werden. Das ist in Abbildung 4.9 am Beispiel der Entwicklung der Schnelle an einem Ort in einem instabilen thermoakustischen System gezeigt.

In Abbildung 4.10 ist zusätzlich die Einhüllende allein in halblogarithmischer Darstellung gezeigt. Das exponentielle Wachstum der

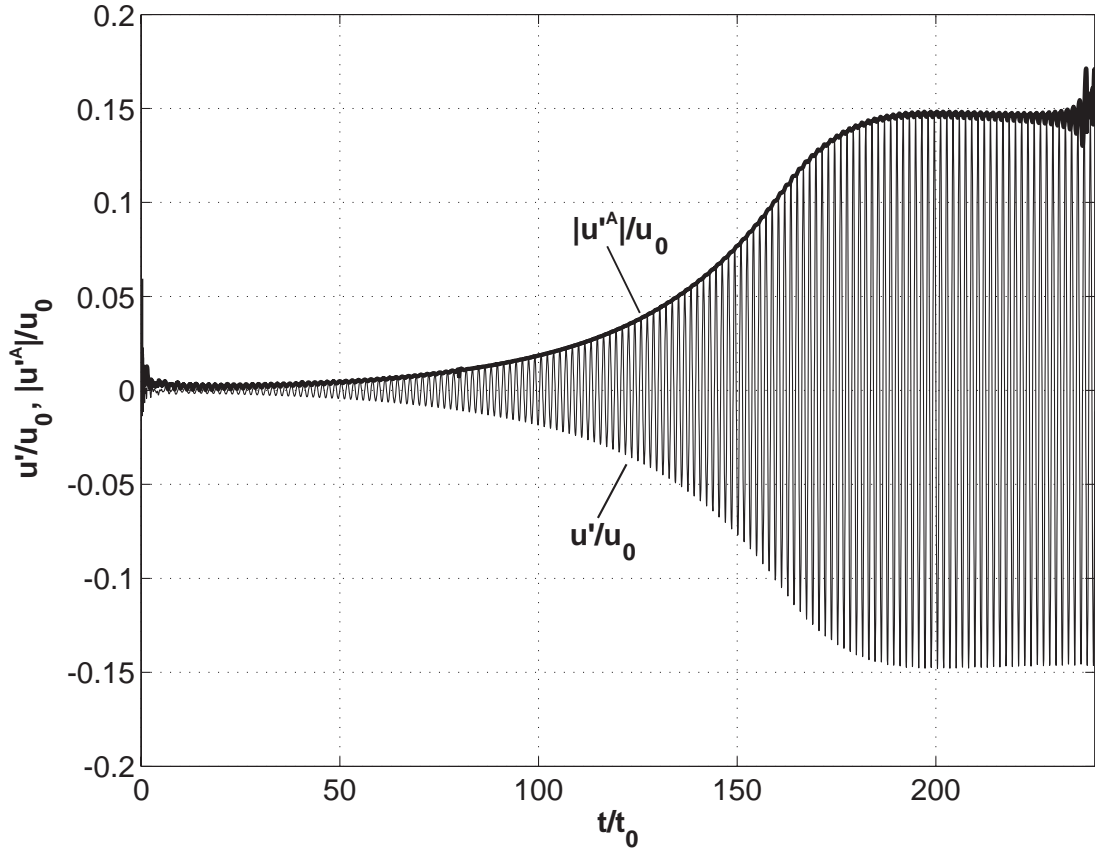


Abbildung 4.9: Zeitsignal und Einhüllende für die Entwicklung der Schnelle in einem instabilen thermoakustischen System (dimensionslose Darstellung).

Schwingungsamplitude ist hier gut erkennbar. Die momentane Amplitude verläuft in dieser Darstellung linear. Aus der Steigung der Geraden lässt sich deshalb direkt die Anfachungsrate ermitteln:

$$\sigma = \frac{d}{dt} \ln(|\xi^A(t)|). \quad (4.42)$$

Auch die momentane Frequenz der Schwingung ist aus dem analytischen Signal ableitbar. Wie kurz vorher veranschaulicht wurde, dreht sich der Zeiger, der $\xi^A(t)$ in der komplexen Ebene repräsentiert, während einer Schwingungsdauer gerade um 2π . Seine Drehgeschwindigkeit entspricht also genau der Kreisfrequenz. Anders ausgedrückt:

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg(\xi^A(t)). \quad (4.43)$$

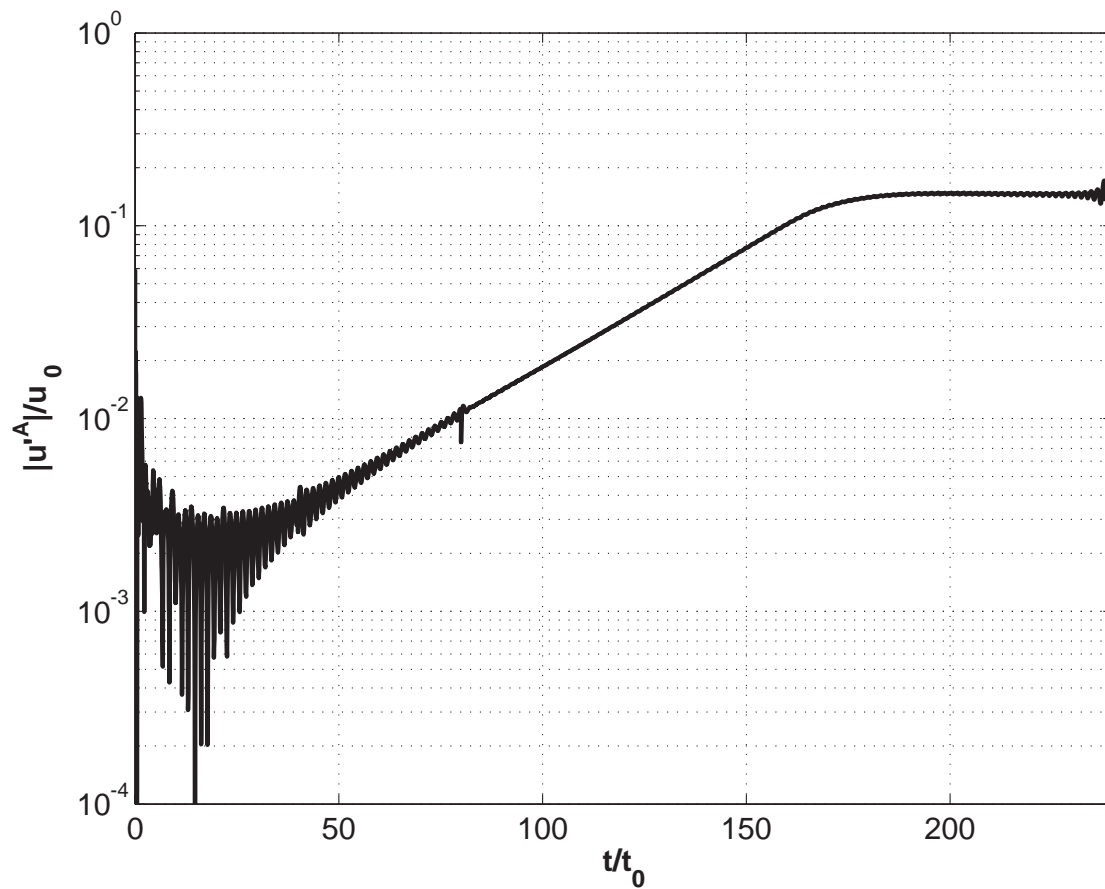


Abbildung 4.10: Halblogarithmische Darstellung der Einhüllenden (momentanen Amplitude) aus Abbildung 4.9.

Mit Hilfe des analytischen Signals gelingt es somit auf einfache Weise, direkt aus den in einer Simulation gewonnenen Zeitreihen quantitative Parameter für die Stabilitätsanalyse eines Systems zu gewinnen.

Kapitel 5

Simulation einer Modell-Ringbrennkammer

5.1 Vorbemerkung

Ziel der in den folgenden Abschnitten vorgestellten Arbeit ist, die Eignung des im Kapitel 4 erläuterten Simulationsverfahrens für die Berechnung von selbsterregten Verbrennungsschwingungen in Ringbrennkammern zu zeigen. Gegenüber vielen anderen Modellierungsansätzen für thermoakustische Probleme wesentlich neue Punkte sind hier:

- die Kopplung mehrerer Flammen mit der Akustik,
- die dreidimensionale Ausbreitung der akustischen Störung und damit die Möglichkeit der Existenz unterschiedlicher Moden,
- die Nichtlinearität des Flammenverhaltens in Form von Sättigung und in Folge die Ausbildung von Grenzzyklen, sowie
- der Lösungsansatz in Form einer Simulation im Zeitbereich.

Gegenstand der Berechnungen war eine Modell-Ringbrennkammer mit einer einfachen, idealisierten Geometrie und ebenfalls idealisierten Annahmen für die mittleren Fluidgrößen [128, 129]. Die Simulationen wurden mit einem üblichen Arbeitsplatzrechner (PC) durchgeführt. Hierdurch und durch die Wahl der Entwicklungsumgebung bestand eine klare Limitierung im Hinblick auf Speicherverfügbarkeit und Rechengeschwindigkeit. Die Modellierung komplexerer Geometrielemente, insbesondere eine detaillierte Abbildung der Brenner, war somit nicht möglich.

Diese Arbeit will daher nicht den Anspruch erheben, für ein reales technisches System exakte quantitative Ergebnisse zu liefern. Vielmehr geht es darum zu zeigen, dass das Verfahren die Mechanismen für die Entstehung selbsterregter Verbrennungsschwingungen mit vertretbarem Aufwand richtig erfasst und damit grundsätzlich sinnvoll auf technische Anwendungen übertragen werden kann.

Dennoch lehnt sich das hier verwendete Modell an eine reale Versuchs-Ringbrennkammer an, die von Kunze [130] für experimentelle Untersuchungen konzipiert und eingesetzt wurde. Sie ist in Abbildung 5.1 gezeigt. Die Orientierung an diesem Versuchsstand bietet den Vorteil, bei der Festlegung der Hauptparameter realistische Vorgaben zu haben. Dies erleichtert danach auch die Einordnung der Ergebnisse. Aus den zuvor genannten Gründen sind aber sicherlich Abstriche an die Genauigkeit der Modellierung zu machen. Schwierigkeiten ergeben sich beispielsweise auch im Hinblick auf die akustischen Randbedingungen. An das Plenum sind Bypassschläuche für das Brennstoff-Luft-Gemisch angeschlossen, die einen nicht unerheblichen Querschnitt aufweisen. Dies verbietet dort die Annahme einer akustischen harten Randbedingung. Eine Möglichkeit zur Berücksichtigung dieses Problems wird weiter unten im Abschnitt 5.2.3 beschrieben.

Die Simulation verwendet die im Kapitel 4 erläuterten Grundlagen und Techniken. Insbesondere stellt die Wellengleichung, Gleichung (4.1) bzw. (4.2), die Basis für die Berechnungen dar. In den folgenden Abschnitten werden zusätzlich noch die Aspekte näher erläutert, die für das Ringbrennkammer-Modell spezifisch sind.

5.2 Modell

5.2.1 Geometrie

Die Versuchs-Ringbrennkammer, wie sie in Abbildung 5.1 dargestellt ist, besteht auf der Zufuhrseite aus einem Ringraum konstanten mitt-

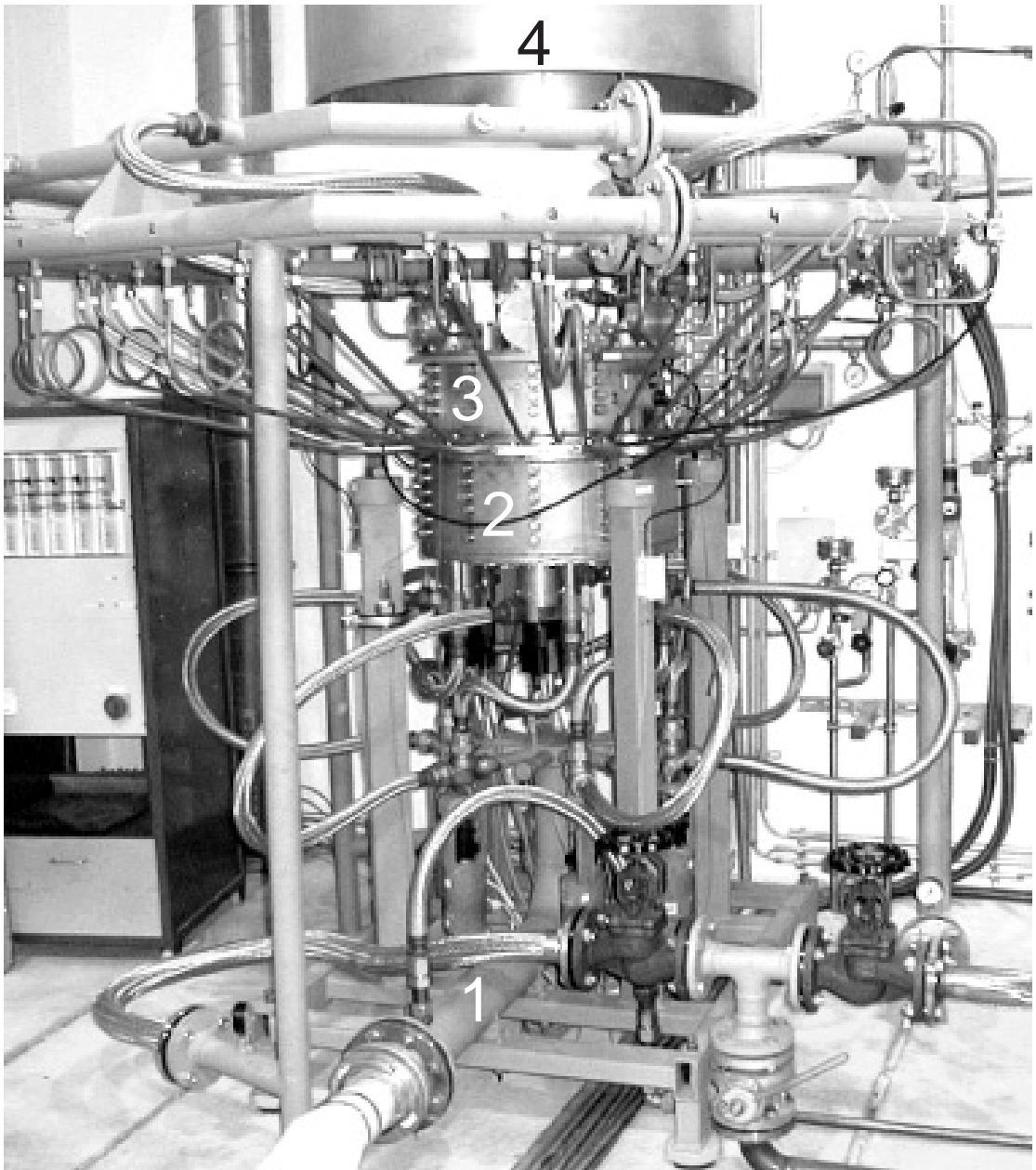


Abbildung 5.1: Versuchsstand mit der Ringbrennkammer, die als Basis für das Berechnungsmodell herangezogen wurde. 1: Vormischeinrichtung, 2: Vorkammer, 3: eigentliche Brennkammer, 4: Abgaskamin.

leren Durchmessers ($D = 0.437\text{ m}$) und konstanter Höhe. Die eigentliche Brennkammer stellt einen ebensolchen Ringraum dar. Diese beiden Räume sind durch 12 einzelne Brenner (Drallerzeuger) miteinander verbunden. Der Versuchsstand wird voll vorgemischt mit

einem Erdgas-Luft-Gemisch betrieben. Dadurch treten keine Brennstoffinhomogenitäten und damit auch keine Entropie-Fluktuationen auf. Die Entstehung von Instabilitäten ist deshalb auf die mit der akustischen Mode verbundenen Mechanismen beschränkt. Das heiße Abgas verlässt die Brennkammer über 12 einzelne Düsen. Dies erlaubt einen Betrieb mit einem gegenüber atmosphärischen Bedingungen leicht erhöhten Druck, so dass bei kritischer Durchströmung der Abgas-Düsen ein akustisch hartes Ende (praktisch vollständige Reflexion) geschaffen werden kann⁴³.

Das Berechnungsmodell verzichtet, wie bereits angedeutet, auf eine detaillierte Rekonstruktion der Geometrien der Brenner, Abgas-Düsen und Zufuhrffnungen. Lediglich die Hauptabmessungen wurden übernommen. Dadurch ergibt sich das einfache in Abbildung 5.2 im Schnitt dargestellte Modell. Einlass und Auslass werden durch jeweils eine Ebene repräsentiert, die mit entsprechend angepassten Randbedingungen versehen sind, wie weiter unten im Abschnitt 5.2.3 erläutert. Die Brenner sind durch 12 kurze Rohrstücke idealisiert, die den ringförmigen Zufuhrraum und die ringförmige Brennkammer miteinander verbinden. Dies stellt einerseits eine wesentliche Vereinfachung gegenüber der realen Geometrie der Drallerzeuger dar. Andererseits erfasst auch dieses einfache Modell die wesentliche Eigenschaft der Brenner, als Versperrung zwischen den beiden Ringräumen zu wirken und damit deren teilweise akustische Entkopplung zur Folge zu haben.

Kunze [130] verwendet zur Berechnung der akustischen Eigenmoden der Versuchsbrennkammer ebenfalls ein ähnlich vereinfachtes FEM-Modell wie hier und erzielt damit eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen. Er modelliert die Brenner allerdings als Kegelstümpfe, so dass sich sowohl am Übergang vom Plenum zu den Brennern als auch von den Brennern zur Brennkammer die richtigen Querschnittssprünge ergeben. Dieser Ansatz stellt sicherlich eine Verbesserung gegenüber den Rohrstücken dar, zeigt aber gleichzeitig

⁴³Dies entspricht in einer realen Gasturbine der ersten Leitschaufelreihe der Turbine, die als Versperrung wirkt.

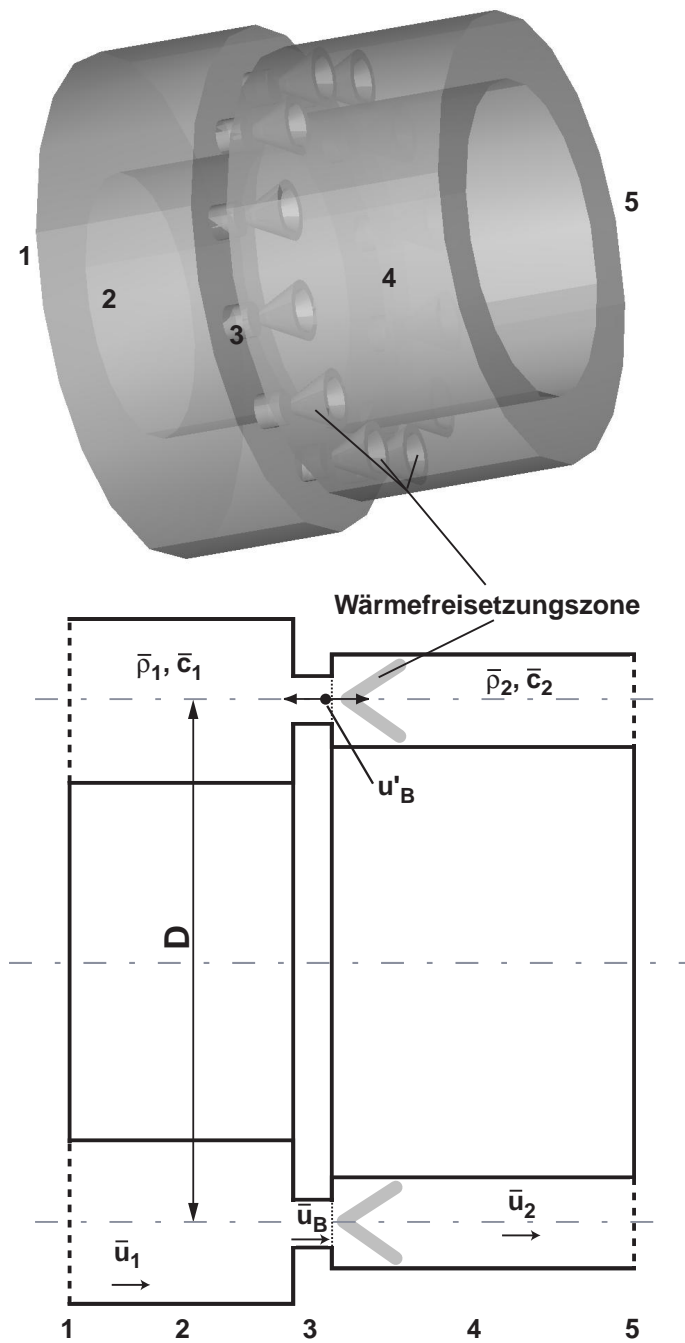


Abbildung 5.2: Geometrie der in der Simulation betrachteten Modell-Ringbrennkammer. 1: Eintrittsebene, 2: Vorkammer, 3: Bereich der Brenner (Drallerzeuger), 4: Brennkammer, 5: Austrittsebene.

die Validität der starken Vereinfachungen.

Gleichzeitig legt eine Analyse der aktuellen Ergebnisse von Fischer [125] nahe, dass das vereinfachte Modell der Drallbrenner sogar grundsätzlich eine gute Näherung darstellen könnte. Das Drallregister, das das geometrisch komplexeste Element der Brenner darstellt, lässt sich demnach in einem Netzwerkmodell gut durch ein Rohrstück abbilden. Zusätzlich wären die Brennerdüsen durch entsprechende Kegelstümpfe zu modellieren. Bei Beachtung der von Fischer angegebenen Modellierungsregeln ist somit auch unter Verwendung einfacher geometrischer Elemente eine hohe Modellierungsqualität der Brenner zu erwarten.

Nicht berücksichtigt sind in dem Finite-Elemente-Modell Verluste, für die Fischer eigene Verlustmodelle in das Netzwerkmodell des Brenners einführt. Der im Anhang B dargestellte Vergleich von Transfermatrizen des Brenners aus FEM-Simulationen und Experimenten legt nahe, dass Verlusteffekte das akustische Übertragungsverhalten in einem gewissen Rahmen beeinflussen. Allerdings sind die Abweichungen so moderat, dass keine wesentliche Änderung des Gesamtsystems in Bezug auf seine akustischen Eigenmoden zu erwarten ist.

5.2.2 Mittlere und dimensionslose Größen

Die Versuchs-Ringbrennkammer läuft im nicht vorgeheizten Betrieb, das heißt das Brennstoff-Luft-Gemisch wird mit Umgebungstemperatur zugeführt. Im Versuch zeigte sich aber, dass dieser Betrieb in Verbindung mit der akustisch harten Abschlussbedingung durch die Düsen in jedem Fall zu einer axialen thermoakustischen Instabilität führte. Damit war eine Untersuchung der gerade bei Ringbrennkammern interessanten selbsterregten Umfangsschwingungen ebenso wenig möglich wie Untersuchungen mit externer akustischer Anregung. Parallel durchgeführte Simulationen mit vergleichbaren Hauptparametern bestätigten diese Beobachtung (vergleiche hierzu

die Ausführungen im Abschnitt 5.3.3 auf Seite 162). Kunze [130] konnte später nachweisen, dass in der Versuchsbrennkammer selbst-erregte Umfangsschwingungen und auch stabile Betriebsbereiche auftreten, wenn durch Entfernen der Endplatte mit den Düsen ein akustisch offenes Ende geschaffen wird. In der Simulation wurde diese Konfiguration aber nicht mehr untersucht.

Dafür erwies sich eine andere Maßnahme als hilfreich, um selbsterregte Umfangsmoden auch in der Simulation untersuchen zu können. Es wurde davon Abstand genommen, die Hauptparameter aus dem Experiment vollständig zu übernehmen. Statt dessen fanden die Berechnungen unter der fiktiven Annahme statt, dass die Brennkammer mit einem vorgeheizten Brennstoff-Luft-Gemisch betrieben würde. Hierdurch ergibt sich als positiver Nebeneffekt noch eine stärkere Analogie zu den Bedingungen in einer realen Gasturbine, in der nach dem Verdichteraustritt auch bereits eine erhöhte Temperatur herrscht. Aus akustischer Sicht besteht der wesentliche Unterschied zum nicht vorgeheizten Fall darin, dass sich bei Vorheizung höhere Schallgeschwindigkeiten und auch kleinere Differenzen der Schallgeschwindigkeiten zwischen Zufuhrseite und Verbrennungsraum ergeben.

Der Simulation liegen damit folgende Annahmen über die mittleren Größen als Hauptparameter zu Grunde:

- Die Vorheiztemperatur und damit mittlere Temperatur auf der Zufuhrseite beträgt $\bar{T}_1 = 770$ K. Daraus ergibt sich in diesem Bereich eine mittlere Schallgeschwindigkeit von $\bar{c}_1 = 556$ m/s und eine mittlere Dichte von $\bar{\rho}_1 = 0.45$ kg/m³ (Spezifische Gaskonstante $R_1 = 287$ J/kg K, Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten $\kappa_1 = 1.4$).
- Die thermische Leistung beträgt $P_B = 85$ kW je Brenner oder $P_{ges} = 1020$ kW für die gesamte Brennkammer bei Verbrennung von Erdgas mit einer Luftzahl von 1.4.
- Das heiße Abgas habe eine spezifische Gaskonstante von $R_2 =$

310 J/kg K und ein Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten von $\kappa_2 = 1.33$. Damit ergibt sich eine mittlere Abgastemperatur von $\bar{T}_2 = 2164$ K, mittlere Dichte von $\bar{\rho}_2 = 0.15$ kg/m³ und eine mittlere Schallgeschwindigkeit von $\bar{c}_2 = 945$ m/s.

- Aus dem der thermischen Leistung entsprechenden Massenstrom und den Querschnittsflächen der Brennkammer ergeben sich folgende gemittelte Geschwindigkeiten: $\bar{u}_1 = 6.30$ m/s zu-fuhrseitig, $\bar{u}_2 = 33.6$ m/s im Verbrennungsraum und $\bar{u}_B = 77.7$ m/s in den die Brenner repräsentierenden Rohrstücken.
- Die Brennkammer wird unter atmosphärischen Bedingungen be-trieben, der mittlere Druck beträgt $\bar{p} = 1.0 \cdot 10^5$ Pa.

Aus numerischen Gesichtspunkten ist es günstig, statt der genannten dimensionsbehafteten Größen mit dimensionslosen Größen zu rechnen. Dadurch erhalten zum einen Größen, die mit Einheiten behaf-tet stark unterschiedlich große Zahlenwerte aufweisen, eine ähnl-iche Größenordnung. Zum anderen können Erfahrungen, die mit be-stimmten Einstellungen von numerischen Parametern wie beispiels-weise maximalen Zeitschritten gewonnen wurden, leichter auf ver-schiedene Anwendungsfälle übertragen werden, wenn diese durch die dimensionslose Darstellung ähnlich formuliert sind.

Für das Ringbrennkammer-Modell dienen drei Grundgrößen dazu, um charakteristische Größen für alle Parameter abzuleiten: der mitt-lere Durchmesser der Brennkammer $D = 0.437$ m als charakte-ristische Länge L_0 , die Schallgeschwindigkeit auf der Zufuhrseite $\bar{c}_1 = 556$ m/s als charakteristische Geschwindigkeit u_0 , sowie die cha-rakteristische Impedanz auf der Zufuhrseite $Z_0 = \bar{\rho}_1 \bar{c}_1 = 250$ Pa s/m. Damit ergeben sich folgende weitere charakteristische Größen:

Charakteristische Größe	Formel	Wert
Zeit	$t_0 = L_0/u_0$	$7.86 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
Frequenz	$f_0 = u_0/L_0$	1273 Hz
Druck	$p_0 = Z_0 u_0$	$1.40 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
Dichte	$\rho_0 = Z_0/u_0$	0.45 kg/m^3
Volum. Wärmefreisetzungsrate	$\dot{q}_{V,0} = Z_0 u_0^2/L_0$	$1.78 \cdot 10^8 \text{ W/m}^3$

Nun lassen sich alle dimensionsbehafteten Größen durch Beziehen auf diese charakteristischen Größen dimensionslos machen. Damit bekommen die Hauptparameter der Ringbrennkammer folgende Werte⁴⁴:

$$\begin{array}{llll} \bar{c}_1 = 1 & \bar{\rho}_1 = 1 & \bar{u}_1 = 0.001 & \bar{u}_B = 0.14 \\ \bar{c}_2 = 1.7 & \bar{\rho}_2 = 0.33 & \bar{u}_2 = 0.06 & \end{array}$$

Diese Größen sind jeweils als abschnittsweise konstante Größen zu verstehen. Beispielsweise ist im Zufuhrraum und in den Brennern die Schallgeschwindigkeit in jedem Punkt gleich \bar{c}_1 , im Verbrennungsraum gleich \bar{c}_2 . Dies bringt an den Grenzen der einzelnen Bereiche unstetige Änderungen der Modellparameter mit sich. Hier erweist sich die Verwendung des Finite-Elemente-Verfahrens als Simulationswerkzeug besonders vorteilhaft. Wie im Kapitel 3 erläutert wurde, ist die Methode der finiten Elemente durch Übergang auf die schwache Formulierung der Differentialgleichungen tolerant gegenüber solchen Unstetigkeiten. Es wird implizit gewährleistet, dass die Systemgrößen und Flüsse an den Gebietsgrenzen korrekt berechnet werden.

5.2.3 Randbedingungen

Die Formulierung der Randbedingung erfolgt grundsätzlich mit Hilfe der im Abschnitt 4.1.4 auf den Seiten 94 ff. hergeleiteten Beziehungen. Für die das Berechnungsgebiet begrenzenden Wände wird angenommen, dass sie akustisch hart sind und entsprechend durch die einfache Neumann-Randbedingung aus Gleichung (4.9) modelliert

⁴⁴Aus Gründen der Einfachheit wird auf die Einführung neuer Symbole für die dimensionslosen Größen verzichtet. Im Folgenden sind alle Größen, wenn nicht explizit mit Einheiten angegeben, als dimensionslose Größen zu verstehen.

werden können. Dies impliziert die vereinfachende Annahme, dass keine Transmissionsverluste auftreten. Angesichts der weiteren Vereinfachungen, die im Modell gemacht werden (beispielsweise den fehlenden Verlusten in der akustischen Grenzschicht) ist dies durchaus gerechtfertigt. Eine Überschlagsrechnung zeigt, dass etwa in der Zufuhrkammer weniger als 0.5% der Energie einer ebenen Welle durch Transmission verloren gehen, wenn diese bei einer Frequenz von 500 Hz senkrecht auf eine 3 mm starke Stahlwandung trifft⁴⁵.

Als wesentlich bedeutsamer sind dagegen die Verluste durch Transmission akustischer Energie durch die Eintritts- und Austrittsöffnungen einzuschätzen. Problematisch dabei ist, dass weder die Eintritts- noch die Austrittsebene ein homogenes Gebilde darstellen, sondern mit den Anschlüssen für die Gemischzufuhr beziehungsweise mit den Austrittsdüsen durchsetzte Wände sind. Diese Wände weisen somit lokal unterschiedliche akustische Eigenschaften auf. Um diese im Modell nicht im Einzelnen auflösen zu müssen, wurden Ersatz-Randbedingungen hergeleitet. Sie ersetzen die Wände am Eintritt und Austritt durch gedachte Ebenen mit einer einheitlichen Impedanz.

Ziel bei der Formulierung dieser Impedanzen war es, die Transmission akustischer Energie korrekt abzubilden. Dies sei am Beispiel der Eintrittsebene verdeutlicht. Ihre Gesamtfläche A setzt sich aus der Fläche der akustisch harten Wand A_W und den Öffnungen für die Gemischzufuhr mit der Fläche A_G zusammen ($A = A_W + A_G$). Durch letztere erfolgt die Transmission, wobei sich ihre Impedanz aus Gleichung (4.13) ableiten lässt. Dabei strömt das Gemisch mit der Geschwindigkeit \bar{u}_n zu, was in Folge des Druckverlustbeiwerts ζ mit einem Druckverlust Δp verbunden ist. Wird die Zuströmung nun über die gesamte Fläche A verteilt gedacht, ergibt sich bei gleichem Massenstrom eine verringerte Zuströmgeschwindigkeit $\bar{u}_n^* = \bar{u}_n A_G/A$.

⁴⁵Allgemein ist die Abschätzung der Transmissionsverluste sehr schwer, da sie unter anderem von den Materialeigenschaften der Wand, ihrer mechanischen Lagerung und dem Einfallswinkel der akustischen Wellen abhängen. Der hier genannte Richtwert basiert auf einem einfachen, bei Pierce [102] beschriebenen Modell, das die Wand als vollkommen nachgiebige Platte behandelt und ihre Impedanz damit allein ihrer trägen Masse zuschreibt. Insofern dürfte die Abschätzung sogar noch konservativ sein.

Nun wird angenommen, dass diese fiktive Zuströmung denselben Druckverlust hervorruft wie im realen Fall. Dazu muss wegen Gleichung (4.11) ein fiktiver höherer Druckverlustbeiwert $\zeta^* = \zeta(A/A_G)^2$ vorgegeben werden. Ist also in der Realität eine Druckschwankung p' mit der Geschwindigkeitsschwankung u'_n verbunden, hat mit der idealisierten Randbedingung dieselbe Druckschwankung nach Gleichung (4.13) die Geschwindigkeitsschwankung $u'_n{}^* = u'_n A_G/A$ zur Folge. Im ersteren Fall ist die durch Druck- und Volumenänderungsarbeit abgestrahlte akustische Leistung gleich $p'u'_n A_G$, im letzteren Fall gleich $p'u'_n{}^* A = p'u'_n A_G$. Die vereinfachte Randbedingung ist also der realen bezüglich der Transmission akustischer Energie gleichwertig. Sie führt in unmittelbarer Wandnähe zwar zu einer Verfälschung des akustischen Felds, wobei der Fehler mit zunehmendem Abstand aber stark abnimmt.

Aus dem Versuchsstand sind die Druckverluste am Einlass und Auslass und die Zuström- und Abströmgeschwindigkeiten bekannt [131]. Hieraus lassen sich die Druckverlustbeiwerte berechnen. Unter der Annahme, dass im vorgeheizten Fall die gleichen Druckverlustbeiwerte herrschen, können nun die für die Formulierung der Randbedingung nach Gleichung (4.16) benötigten Werte für K ermittelt werden⁴⁶. In dimensionsloser Darstellung beträgt die Konstante $K_1 = 0.1$ für die Randbedingung am Eintritt und $K_2 = 0.2$ für die Randbedingung am Austritt. Ein Wert von $K = 0$ würde einer akustisch harten Wand, ein Wert von $K = 1$ einer akustischen angepassten Randbedingung (vollständige Transmission) und ein Wert von $K \rightarrow \infty$ einer akustisch offenen Randbedingung entsprechen. Die nahe bei Null liegenden Werte im konkreten Fall spiegeln also das akustisch harte Verhalten der Wände wieder, die Transmission durch die Öffnungen der Gemischzufuhr und die Austrittsdüsen äußert sich in der Abweichung von Null.

⁴⁶Allerdings stellen die Schläuche, über die im Versuchsstand die Gemischzufuhr erfolgt, keine kompakten Elemente dar, wie sie bei der Herleitung der akustischen Randbedingung vorausgesetzt wurden. In der Realität auftauchende Trägheitseffekte, die die Dynamik in den Schläuchen und damit deren Impedanz beeinflussen, werden hier also nicht erfasst.

5.2.4 Akustische Eigenmoden

Für die spätere Analyse der Ergebnisse aus den Simulationen ist es hilfreich, die rein akustischen Eigenmoden des Ringbrennkammer-Modells zu kennen. Hierunter sollen die Eigenmoden verstanden werden, die sich bei Vorgabe der zuvor genannten mittleren Größen ergeben, wenn die Flammendynamik, also der Rückkopplungsmechanismus zwischen Akustik und Wärmefreisetzung, unberücksichtigt bleibt.

Die mathematische Beschreibung für dieses Problem ist im Frequenzbereich durch Gleichung (2.33) (Seite 35) für den Fall ohne mittlere Strömung beziehungsweise Gleichung (2.34) für den Fall mit mittlerer Strömung gegeben, wenn die rechte Seite jeweils zu Null gesetzt wird. Damit liegen gewöhnliche Eigenwertprobleme vor, die mit üblichen numerischen Eigenwertlösern (beispielsweise auch auf Basis der Finite-Elemente-Methode) gelöst werden können.

Die numerische Berechnung der Eigenlösungen liefert für das Ringbrennkammer-Modell als erste vier Eigenmoden folgende Modenformen mit den dazugehörigen dimensionsbehafteten und dimensionslosen Frequenzen f beziehungsweise dimensionslosen Schwingungsdauern $T = 1/f$:

Mode (l, m, n)	$(0, 1, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(1, 1, 0)$	$(0, 2, 0)$
f [Hz]	449	496	835	850
f	0.353	0.390	0.656	0.668
T	2.83	2.56	1.53	1.50

Hierbei ist unter der Mode (l, m, n) eine Mode mit einem axialen Anteil der Ordnung l , Umfangsanteil der Ordnung m und radialen Anteil der Ordnung n zu verstehen (der Umfangsanteil und radiale Anteil entsprechen grundsätzlich den auf den Seiten 45 ff. beschriebenen Eigenmoden eines Ringspalts, wobei es durch die Querschnittssprünge und den Bereich mit den diskreten Rohrstücken zu Modifikationen kommt). Die Rechnung zeigt, dass sich für die Fälle ohne und mit mittlerer Strömung im Rahmen der angegebenen Genauigkeit keine

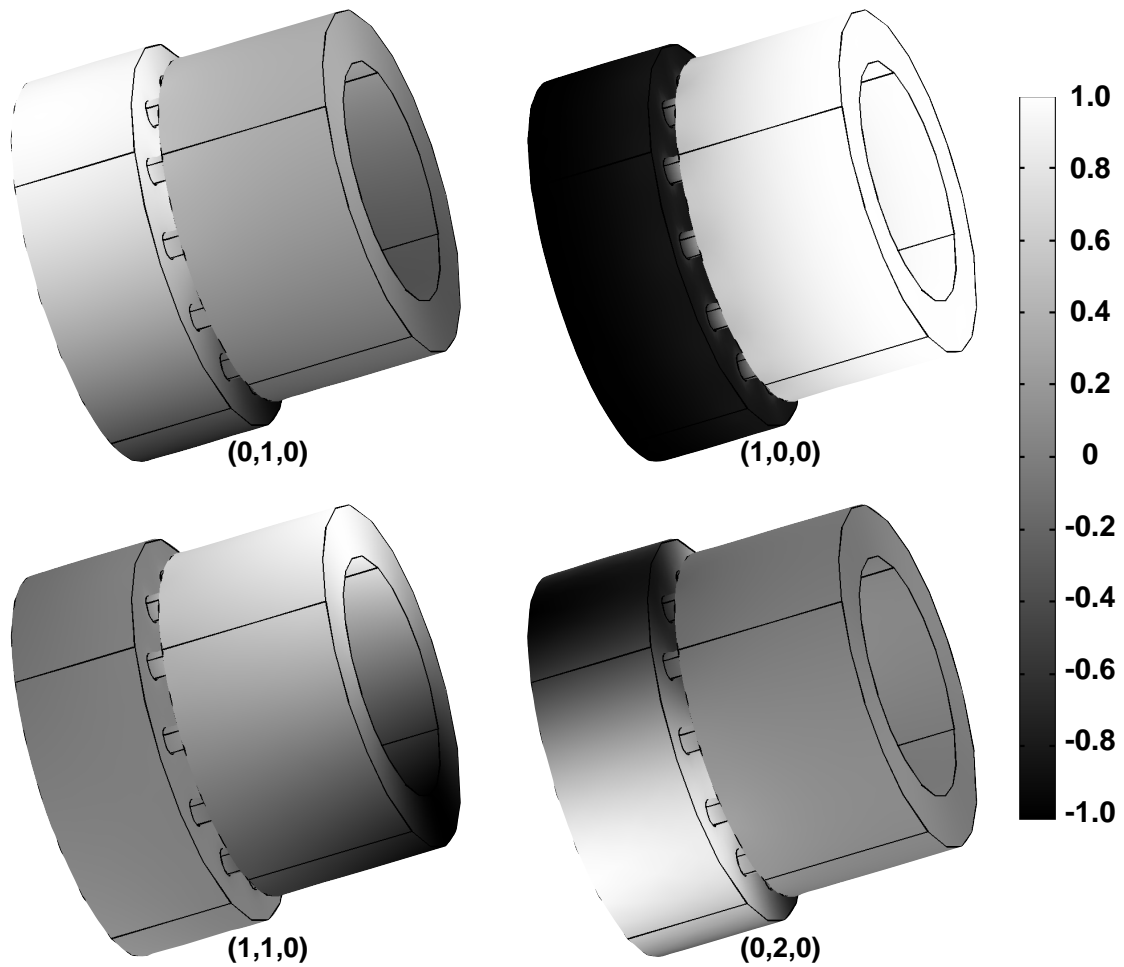


Abbildung 5.3: Die ersten vier rein akustischen Eigenmoden des Ringbrennkammer-Modells (Druckverteilung, jeweils skaliert mit dem Maximalwert).

Unterschiede bei den Eigenfrequenzen ergeben, weshalb die oben angegebenen Werte für beide Fälle gelten. Dies ist auf die sehr geringen Mach-Zahlen zurückzuführen, die auf der Zufuhrseite 0.011, in den Rohrstücken 0.14 und im Verbrennungsraum 0.035 betragen. Das ist ein erster Hinweis darauf, dass die mittlere Strömung im Hinblick auf die Ausbreitung akustischer Störungen für den betrachteten Fall vernachlässigt werden kann⁴⁷.

⁴⁷Daraus darf aber nicht der Schluss gezogen werden, die mittlere Strömung habe überhaupt keinen Einfluss. Sie spielt sicherlich eine Rolle für die Verluste akustischer Energie; dieser Mechanismus wird aber im Rahmen dieser Arbeit wegen der Beschränkung auf die Lösung der Wellengleichung nicht erfasst.

Die Druckverteilungen für die genannten ersten vier Eigenmoden sind in Abbildung 5.3 gezeigt. Wie im Abschnitt 2.3.3 gezeigt wurde, existieren für jede Mode mit Umfangskomponente eigentlich zwei entartete Lösungen. Da diese sich jedoch lediglich durch eine Drehung um $\pi/(2m)$ um die Brennkammerachse unterscheiden, ist auch in diesen Fällen jeweils nur eine Mode dargestellt.

Bei den Moden mit Umfangskomponente zeigt sich eine mehr oder weniger starke Entkopplung der Druckschwingungen im Zufuhrraum und in der Brennkammer. Dies wird durch die unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten in den beiden Bereichen verursacht, die auch keine ganzzahligen Vielfachen voneinander sind. Da die Wellenlänge λ einerseits durch den Umfang der Brennkammer festgelegt ist und andererseits mit der Frequenz über $\lambda = c/f$ verknüpft ist, ergibt sich für eine bestimmte Frequenz jeweils nur auf einer Seite eine Übereinstimmung. Die andere Seite schwingt lediglich passiv mit deutlich geringerer Amplitude mit. So finden sich bei den ersten beiden reinen Umfangsmoden hohe Amplituden auf der Zufuhrseite, bei der ersten gemischten Umfangsmode mit axialem Anteil dagegen auf der Seite des Verbrennungsraums.

Die genannten Ergebnisse beziehen sich auf die Konfiguration mit Vorheizbetrieb für die im Abschnitt 5.2.2 wiedergegebenen Hauptparameter. Zum Vergleich sind hier auch die Werte der Eigenmoden für einen Fall ohne Vorheizung angegeben⁴⁸:

Mode (l, m, n)	(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)	(0, 2, 0)
f [Hz]	215	252	330	503
f	0.277	0.324	0.427	0.647
T	3.61	3.09	2.34	1.55

Es werden zwei wesentliche Unterschiede deutlich. Zum einen ist hier nicht die erste reine Umfangsmode, sondern die reine Axialmode die Eigenmode mit der niedrigsten Frequenz. Zum anderen kommt es

⁴⁸Wegen der in diesem Fall geringeren Schallgeschwindigkeit im Plenum, die als charakteristische Geschwindigkeit dient, ist die charakteristische Frequenz mit $f_0 = 778$ Hz hier niedriger als im vorgeheizten Fall. Das ist bei der Bewertung der dimensionslosen Frequenzen zu berücksichtigen.

durch die geringeren Schallgeschwindigkeiten vor allem bei den Moden mit Axialanteil zu einer Verschiebung der Eigenfrequenzen hin zu niedrigeren Werten. Beide Effekte werden später zur Erklärung dafür dienen, weshalb im nicht vorgeheizten Betrieb keine selbsterregt schwingenden Umfangsmoden beobachtet wurden.

Kunze [130] gibt in seiner Arbeit für die Frequenzen der ersten Umfangsmode 266 Hz und der zweiten Umfangsmode 502 Hz als Ergebnis seiner FE-Rechnungen an und zeigt die gute Übereinstimmung mit Messergebnissen von der Versuchsbrennkammer. Diese Daten beziehen sich auf eine im kalten Fall (ohne Verbrennung) untersuchte Konfiguration. Dennoch zeigt sich eine große Nähe zu den hier angegebenen Werten von 252 Hz und 503 Hz, denen in der Brennkammer die Bedingungen bei Verbrennung zu Grunde liegen. Erklären lässt sich diese Übereinstimmung durch den Umstand, dass die beiden Moden im Plenum dominant sind, in dem sowohl im Fall ohne als auch mit Verbrennung die gleiche Schallgeschwindigkeit herrscht.

Ein Vergleich der Eigenfrequenzen der Moden mit axialem Anteil mit den Messergebnissen in der Arbeit von Kunze ist nicht möglich. Dort herrschte durch das Entfernen der Endplatte mit den Düsen eine akustisch weitgehend offene Randbedingung, die zu ganz anderen axialen Druckverteilungen führt als die hier untersuchte, eher geschlossene Konfiguration. Zudem bedingen bei axialen Moden unterschiedliche Schallgeschwindigkeiten für eine kalte und eine heiße Brennkammer auf jeden Fall unterschiedliche Wellenlängen und damit Frequenzen.

5.2.5 Flammenmodell

Im Abschnitt 4.2.1 wurden die grundsätzlichen Möglichkeiten zur Einbindung des Flammenverhaltens in die Simulation aufgezeigt. Für die Berechnungen am Ringbrennkammer-Modell soll das Flammenmodell folgenden Annahmen und Anforderungen genügen:

- Die Wärmefreisetzungszone ist ein festgelegter Bereich konstan-

ten Volumens hinter dem Austritt des Brenners. Es findet keine Flammenbewegung statt. Jedem Brenner ist ein derartiger Bereich zugeordnet.

- Die momentane volumetrische Wärmefreisetzungsrates hängt von der Brenneraustrittsgeschwindigkeit u_B des zugehörigen Brenners (und keines anderen Brenners) ab. Hierbei ist eine einzelne, feste Totzeit τ wirksam.
- Die Stärke der Antwort der Flamme auf Geschwindigkeitsfluktuationen nimmt mit wachsender Frequenz zunehmend ab.
- Die Stärke der Wärmefreisetzungsschwankungen ist limitiert, es treten also Sättigungseffekte auf.

Mit diesem sicherlich stark vereinfachten Modell sind wesentliche Eigenschaften des dynamischen Verhaltens von Flammen beschrieben. Technische Flammen zeigen häufig noch die Eigenschaft, bei bestimmten Frequenzen mit Amplitudenüberhöhungen, also verstärkten Wärmefreisetzungsschwankungen, zu reagieren. Auf die Nachbildung dieses Effekts wird hier bewusst verzichtet, um die Zahl der freien Parameter des Flammenmodells möglichst gering zu halten und damit durch gezielte Variation *eines* Parameters unterschiedliche thermoakustische Zustände erzeugen zu können. Angesichts des Ziels, in erster Linie die Möglichkeiten des Simulationsverfahrens auszutesten, erscheint dies zulässig, zumal die Implementierung komplexerer Flammenmodelle kein grundsätzliches Problem darstellt.

Ein den Anforderungen entsprechendes Modell wurde bereits mit Gleichung (4.21) auf Seite 106 vorgestellt. Die Sättigungseffekte werden entsprechend Gleichung (4.19) auf Seite 102 beziehungsweise Abbildung 4.3 nachgebildet. Zusätzlich ist lediglich zu berücksichtigen, dass die entsprechenden Beziehungen für jede der 12 Flammen einzeln formuliert werden. Damit lässt sich das Flammenmodell in der

Form

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{d\dot{q}'_{V,j}}{dt} + \dot{q}'_{V,j} = \frac{\bar{q}_V}{\bar{u}_B} \cdot \begin{cases} u'_{B,j}(t - \tau) & \text{falls } |u'_{B,j}(t - \tau)| \leq \mu \bar{u}_B, \\ \text{sign}(u'_{B,j}(t - \tau)) \mu \bar{u}_B & \text{falls } |u'_{B,j}(t - \tau)| > \mu \bar{u}_B \end{cases}, \quad (5.1)$$

$$j = 1, \dots, 12,$$

darstellen, wenn mit dem Index j die Brenner nummeriert werden. Dieses Modell weist also drei Parameter auf, die Totzeit τ , die Eckfrequenz des Tiefpassfilters ω_0 und die Konstante μ , durch die das Sättigungsniveau festgelegt wird.

Zum Zeitpunkt der Berechnungen lagen keine gesicherten Erkenntnisse über einen sinnvollen Wert für μ vor. Deshalb wurde mehr oder weniger willkürlich $\mu = 0.75$ für alle Berechnungen gesetzt. Wie bereits im Abschnitt 4.2.2 angedeutet, wäre beispielsweise nach den Untersuchungen von Harper et al. [124] dieser Wert eher bei 0.3 bis 0.4 anzusiedeln. Die später folgende Analyse der Grenzamplituden legt tatsächlich nahe, μ niedriger zu wählen als hier geschehen.

Die Formulierung der Sättigung in Gleichung (5.1) hat als Nebeneffekt eine mit steigender Frequenz abnehmende Sättigungsamplitude zur Folge, da die Limitierung nicht erst auf die Ausgangsgröße (\dot{q}'_V), sondern bereits auf die Eingangsgröße (u'_B) wirkt. Dieses Verhalten stimmt mit den experimentellen Beobachtungen von Harper et al. überein.

Die Wärmefreisetzungszonen der einzelnen Flammen sind verglichen mit den Wellenlängen der erwarteten Instabilitäten klein. Deshalb und weil in jedem Punkt der Flamme ohnehin eine einheitliche Totzeit zwischen den Wärmefreisetzungsschwankungen und den auslösenden Geschwindigkeitsschwankungen im Brennermund angenommen wird, ist die tatsächliche örtliche Verteilung der Wärmefreisetzungsrates von untergeordneter Bedeutung⁴⁹. Die Flammen werden daher, wie das in Abbildung 5.2 angedeutet ist, stark vereinfacht

⁴⁹In einer langen Flamme verliert diese Annahme unter Umständen ihre Gültigkeit. Der Schalldruck weist üblicherweise im Bereich der Flamme eine weitgehend konstante Phase, gegebenen-

durch konische Bereiche modelliert, um die Form drallstabilisierter Flammen anzudeuten. Die Wärmefreisetzungsrate ist in diesen Gebieten gleich verteilt.

5.2.6 Numerische Aspekte

Das Ringbrennkammer-Modell wird für die Durchführung der Simulationen durch ein Finite-Elemente-Netz diskretisiert, das in Abbildung 5.4 gezeigt ist. Das Netz weist 75176 Tetraeder-Elemente und 16427 Knoten auf und ist im Bereich der Flammen lokal verfeinert. Die ersten Eigenmoden werden durch mindestens 20 Knoten pro Wellenlänge aufgelöst, was nach den Ergebnissen aus Abschnitt 3.4 (Seite 71 ff.) eine ausreichende Genauigkeit gewährleistet.

Die Simulation läuft nach dem im Abschnitt 4.1.5 wiedergegebenen Schema ab. Als Zeitschrittverfahren wird die schon im Abschnitt 3.4 bei der Untersuchung der numerischen Fehler verwendete BDF-Methode zweiter Ordnung mit automatischer Schrittweitenkontrolle eingesetzt, so dass die dort gewonnenen Ergebnisse herangezogen werden können. Die maximale Zeitschrittweite ist auf 5% der charakteristischen Zeit $t_0 = L_0/u_0$ begrenzt. Sowohl die Schwingungsdauern der ersten Eigenmoden als auch die untersuchten Totzeiten liegen in der Größenordnung dieser charakteristischen Zeit. Durch die Zeitschrittbegrenzung ist damit eine gute zeitliche Auflösung auf jeden Fall sichergestellt, und auch die numerische Dämpfung wird auf ein im Rahmen des Möglichen akzeptables Maß beschränkt.

Zu jedem Zeitschritt werden außerdem zur Ermittlung des Quellterms der Wellengleichungen die Differentialgleichungen des Flammenmodells, Gleichung (5.1), numerisch gelöst. Hierfür hat sich eine

falls einen Phasensprung auf. Bei Annahme einer festen Totzeit wirken dann nach dem Rayleigh-Kriterium alle Teile der Flamme in Bereichen gleicher Schalldruckphase gleichermaßen anregend oder dämpfend. Eine lange Flamme wird aber auf Grund von Laufzeitunterschieden lokal unterschiedliche Totzeiten aufweisen. Damit können, auch bei konstanter Phasenlage des Schalldrucks, gleichzeitig anregende und dämpfende Bereiche der Flamme entstehen. Dominieren die dämpfenden Bereiche, würde sich eine stabile Situation ergeben, während die Annahme einer festen Totzeit eventuell zu einer Instabilität führt. Bei langen Flammen wäre daher eine Berücksichtigung der Totzeitverteilung wichtig.

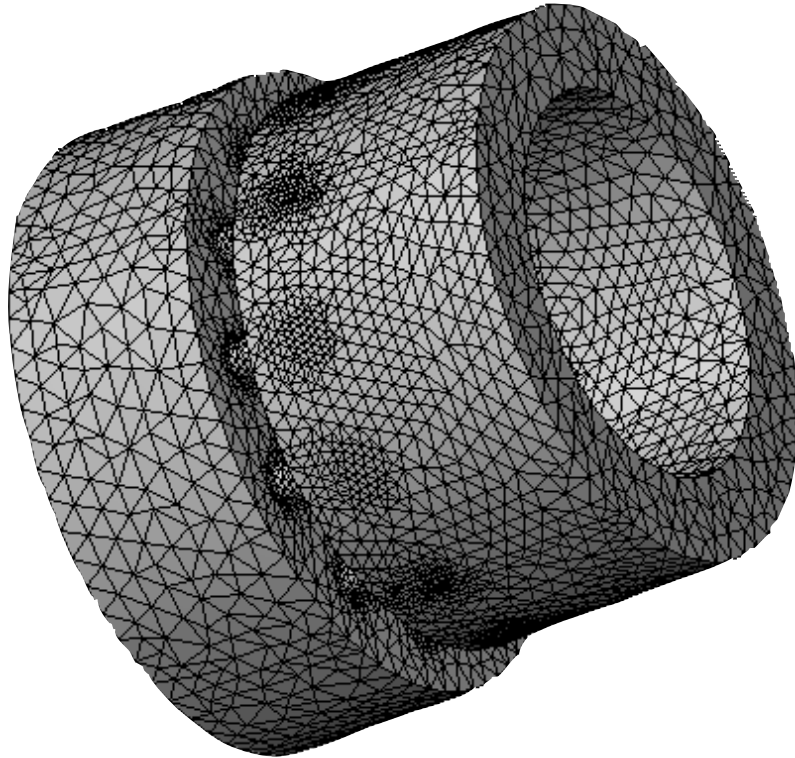


Abbildung 5.4: Vernetzung des Ringbrennkammer-Modells.

Kombination zweier Runge-Kutta-Verfahren fünfter beziehungsweise vierter Ordnung⁵⁰ als geeignet erwiesen.

Die nachfolgend gezeigten Simulationen wurden auf einem PC mit einem mit 1.2 GHz getakteten Prozessor und 1 GB Arbeitsspeicher durchgeführt. Die Rechenzeit betrug, falls selbsterregte Schwingungen auftraten, bis zum Erreichen des Grenzyklus je nach Anfachungsrate typischerweise zwischen ein und zwei Tagen. Eine reine Beurteilung der Stabilität (Auf- oder Abklingen der anfänglich vorhandenen Störungen) war jedoch schon nach wesentlich kürzerer Zeit möglich.

⁵⁰Dormand-Prince-Paar; das Verfahren höherer Ordnung wird zur Berechnung der Lösung zum neuen Zeitpunkt herangezogen, das niedrigerer Ordnung zur Fehlerabschätzung und in Folge Schrittweitensteuerung.

5.3 Ergebnisse

5.3.1 Entwicklung von Störungen

Ausgangspunkt der Simulation ist eine zufällige Schalldruckverteilung innerhalb des Ringbrennkammer-Modells, durch die ein breites Spektrum an Störungen eingebracht wird. Eine derartige Anfangsbedingung ist in Abbildung 5.5 in der Darstellung des Schalldrucks für den Zeitpunkt $t = 0$ zu sehen. Abhängig von den Werten der Modellparameter klingt diese anfängliche Störung entweder kontinuierlich ab, oder es bildet sich eine selbsterregte Schwingung mit wachsender Amplitude aus.

Die Entwicklung einer Instabilität läuft prinzipiell in zwei Phasen ab. Das ist in Abbildung 5.5 zu erkennen, in der die Schalldruckverteilung für verschiedene Zeitpunkte einer Simulation gezeigt ist. Zu beachten ist in dieser Darstellung die teilweise unterschiedliche Skalierung der Schalldruckwerte, die nötig ist, um die Verteilungen auch bei kleinen Amplituden qualitativ gut erkennen zu können. In einer ersten Phase bilden sich die starken lokalen Druckspitzen, die in der Anfangsbedingung vorhanden sind, zunächst zurück, die Amplitude nimmt also ab. Dieser Vorgang ist aber gleichzeitig damit verbunden, dass die anfänglich ungeordnete Struktur in eine geordnete übergeht und sich eine klar definierte Schwingungsmode ausbildet. In einer zweiten Phase wächst diese Mode nun in der Amplitude. Die anfänglichen Störungen sind verschwunden, statt dessen zeigt sich deutlich die selbsterregte Instabilität.

Dieser Prozess lässt sich auch durch die Beobachtung der zeitlichen Entwicklung einer einzelnen akustischen Größe an einem bestimmten Ort verfolgen. Beispielhaft ist in Abbildung 5.6 der Verlauf der Schnelle u'_B bezogen auf die mittlere Brennergeschwindigkeit \bar{u}_B im Austritt eines der Brenner (Rohrstücke) über der Zeit zu sehen. Auch hier ist erkennbar, dass die zunächst zufälligen Fluktuationen schwächer werden und dabei in eine periodische Schwingung übergehen. Die Schwingungsamplitude wächst dann im weiteren Verlauf

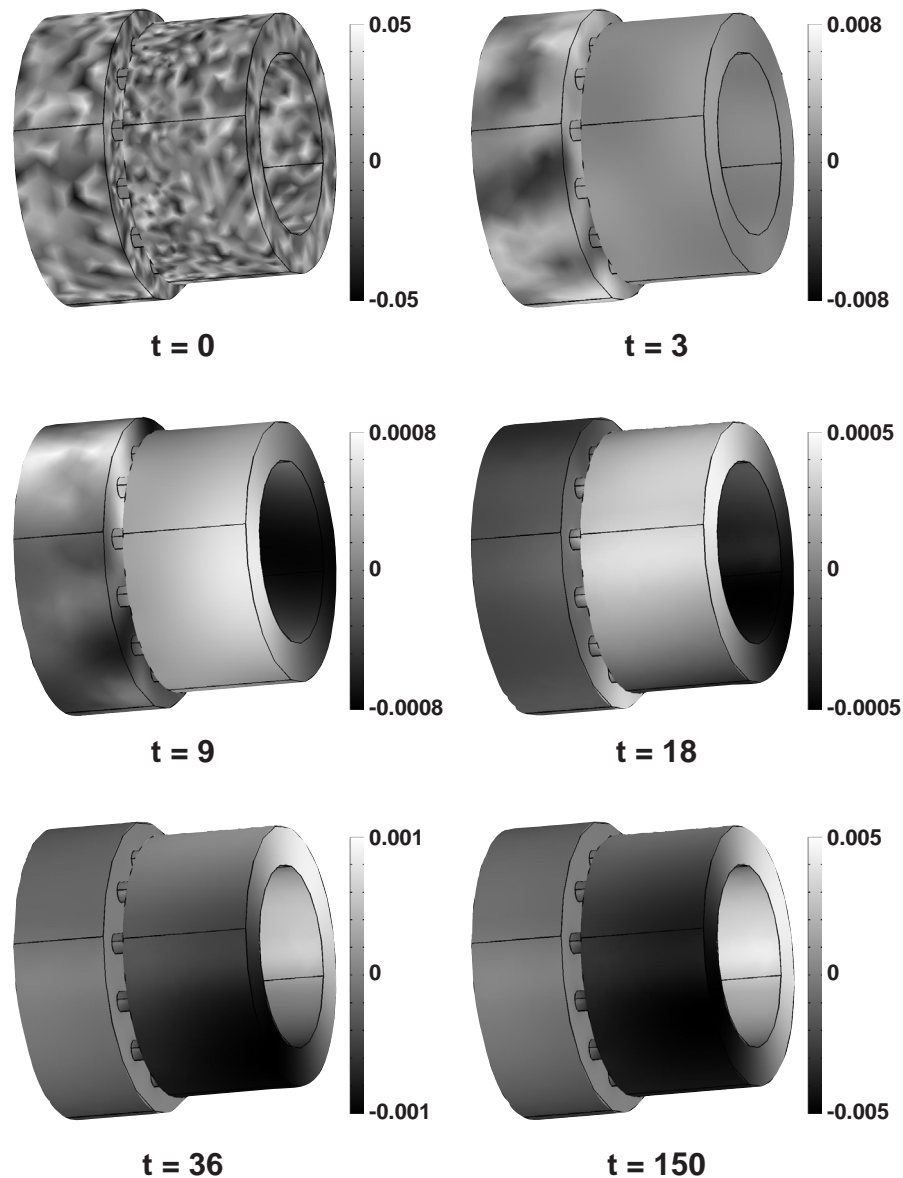


Abbildung 5.5: Entwicklung der dimensionslosen Schalldruckverteilung aus einer anfänglichen Zufallsverteilung.

exponentiell an, bis die Sättigungseffekte in den Flammen die Energiezufuhr an die Schwingung verlangsamen. Die Amplitude nimmt nun langsamer zu, bis sie schließlich konstant bleibt. Zu diesem Zeitpunkt ist der Grenzyklus erreicht.

Sind die Modellparameter so gewählt, dass sich keine selbsterregte Instabilität ausbilden kann, nimmt die Amplitude der Störungen ste-

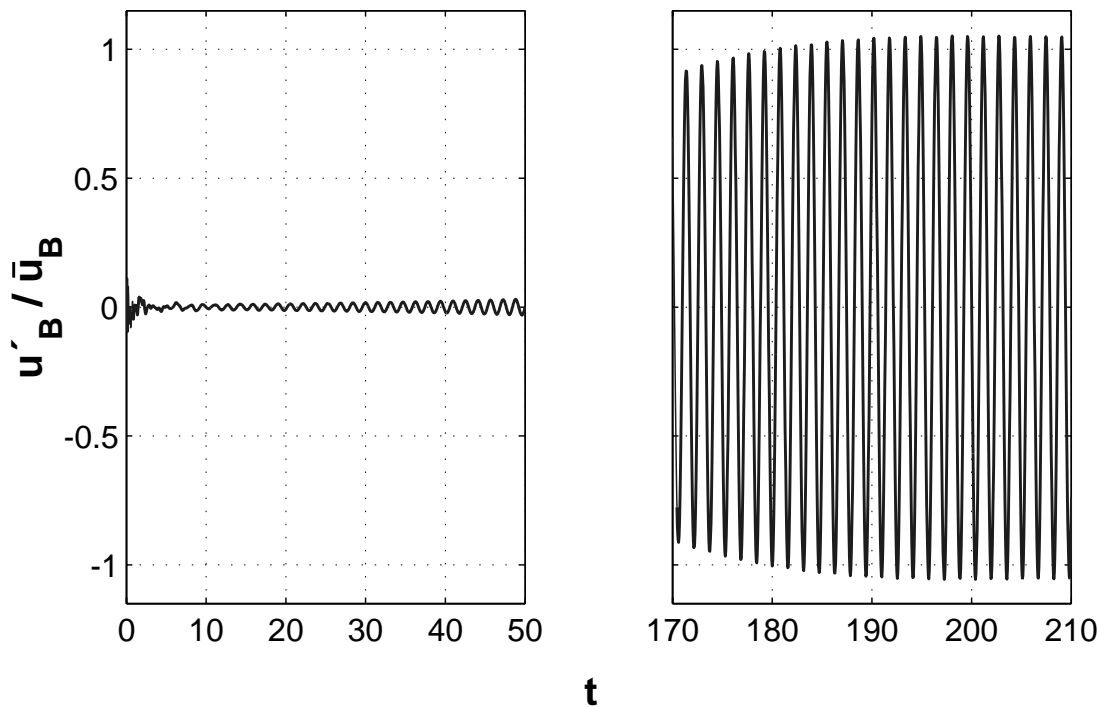


Abbildung 5.6: Zeitlicher Verlauf der Schnelle in einem Brenner bei der Entwicklung einer selbsterregten Instabilität. Die Schnellewerte sind mit der mittleren Geschwindigkeit in den Brennern normiert.

tig ab. Ein Beispiel für eine derartige Situation ist in Abbildung 5.7 wieder anhand der Entwicklung der Schnelle in einem Brenner dargestellt. Neben dem exponentiellen Abklingen der Fluktuationen ist auch hier erkennbar, wie sich aus den zufälligen Schwankungen eine geordnete periodische Schwingung herausbildet. Die Schalldruckverteilung (hier nicht wiedergegeben) zeigt eine ganz ähnliche Entwicklung, wie sie in Abbildung 5.5 bereits für einen instabilen Fall vorgestellt wurde. Offensichtlich ist diese Ausbildung klar definierter Moden unabhängig davon, ob das System stabil oder instabil ist. Vielmehr hängt umgekehrt die Stabilität davon ab, ob den sich vorrangig entwickelnden Moden ausreichend Energie zugeführt wird, um ein Wachstum der Amplituden gewährleisten zu können. Diese Zusammenhänge werden weiter unten im Abschnitt 5.3.3 noch genauer beleuchtet werden.

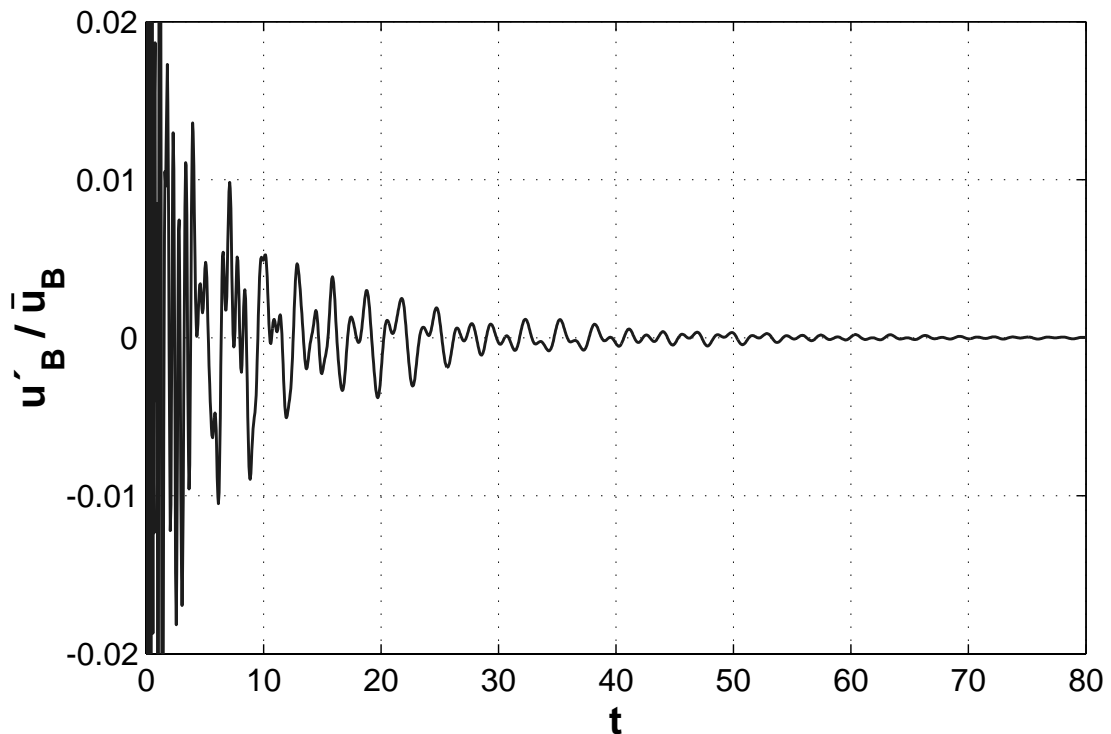


Abbildung 5.7: Zeitlicher Verlauf der Schnelle in einem Brenner für eine stabile Konfiguration. Die Schnellewerte sind mit der mittleren Geschwindigkeit in den Brennern normiert.

5.3.2 Grenzyklen

Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, gehen im instabilen Fall die selbsterregten Schwingungen nach dem Anwachsen der Amplituden in einen Grenzyklus über, der sich durch eine konstante Amplitude auszeichnet. Ein Ausschnitt eines solchen Grenzyklus ist in Abbildung 5.8 zu sehen. Neben dem Verlauf der Schnelle im Brenneraustritt sind hier zusätzlich die Schwankungen der Wärme-freisetzungsrates am entsprechenden Brenner als auch die des Drucks im Schwerpunkt der Flamme dargestellt. Alle Werte sind auf die Mittelwerte der entsprechenden Größen bezogen.

Zu erkennen ist, dass die Amplitude der Wärmefreisetzungsschwankungen knapp unter dem Wert von $0.75 \bar{q}_V$ liegt, der über den Parameter μ als Schwellenwert für das Auftreten von Sättigung festgelegt

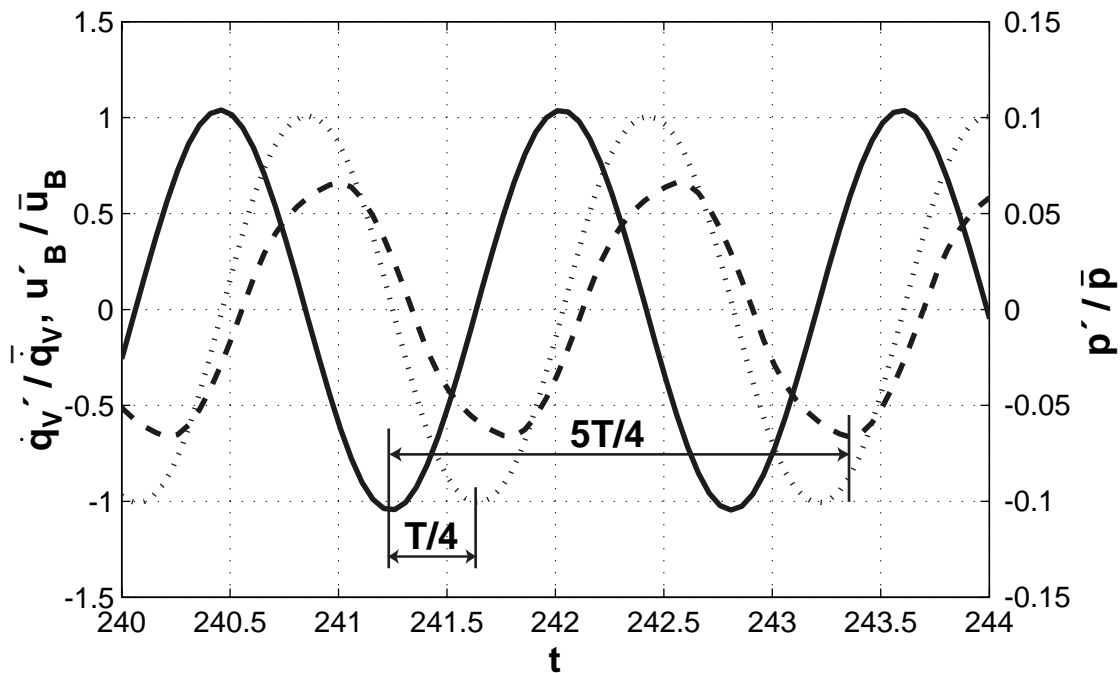


Abbildung 5.8: Zeitlicher Verlauf der Schnelle in einem Brenner (—), des Schalldrucks im Flammenschwerpunkt (···) und der Wärmefreisetzungsrates im Grenzyklus (---). Alle Werte sind mit entsprechenden Werten des mittleren Strömungsfelds normiert.

wurde. Auf Grund des Tiefpass-Verhaltens des Flammenmodells liegt die tatsächliche Sättigungsamplitude geringfügig darunter. Die Geschwindigkeitsschwankungen am Brenneraustritt überschreiten dagegen deutlich $0.75 \bar{u}_B$ und treiben die Flamme damit eindeutig in den Bereich der Sättigung. Sie erreichen sogar eine Amplitude, die knapp über der mittleren Brennergeschwindigkeit liegt. Das impliziert, dass sich in einer kurzen Phase der Schwingung am Brenner ein Zustand der Rückströmung einstellt.

Die Amplitude des Schalldrucks im Flammenschwerpunkt erreicht etwa 10% des statischen Brennkammerdrucks. Dieser Wert erscheint zunächst unrealistisch hoch und bedarf einer genauen Bewertung. Umgerechnet bedeutet er einen lokalen Schalldruckpegel von etwa 170 dB. An einer industriellen Gasturbine wurden zwar auch Schalldruckpegel von bis zu 177 dB gemessen [42], allerdings unter realem und damit erhöhtem Brennkammerdruck, so dass unter atmosphäri-

schen Bedingungen die Schwingungen deutlich niedriger ausfallen müssten. Andererseits sind die Ergebnisse der Simulation konsistent mit experimentellen Untersuchungen von für Nachbrenner typischen Verbrennungsschwingungen unter atmosphärischen Bedingungen [20,22]. Dort wurden teilweise ähnlich hohe Schalldruckpegel gemessen und gleichzeitig Geschwindigkeitsfluktuationen beobachtet, die teilweise eine Rückströmung bewirken.

Letztlich sind derartig starke Effekte bei den relativ stabilen Flammen moderner Gasturbinen nicht zu erwarten. Deutlich niedrigere Schalldruckamplituden kann die Simulation wie die Realität aber nur liefern, wenn der Grenzyklus so früh erreicht wird, dass die Geschwindigkeitsfluktuationen weit geringer als die mittlere Geschwindigkeit sind. Die Gründe, warum dies in den durchgeführten Simulationen nicht der Fall ist, werden am Ende dieses Abschnitts nach einer energetischen Analyse der Entstehung des Grenzyklus erläutert.

Abbildung 5.8 lässt neben der Beurteilung der Amplituden der dargestellten Größen auch ihr gegenseitiges Zusammenwirken erkennen und verdeutlicht damit den Mechanismus, der der thermoakustischen Instabilität zu Grunde liegt. Der Schalldruck bleibt gegenüber der Schnelle am Brenneraustritt ziemlich genau um $T/4$ zurück, wobei $T \approx 1.6$ die Schwingungsdauer ist. Gleichzeitig sind die Fluktuationen der Wärmefreisetzungsrates durch die Totzeit, die in diesem Fall zu $\tau = 1.9$ gewählt wurde, um etwa $5/4T$ gegenüber der Schnelle verschoben. Dadurch sind sie aber mit den Druckfluktuationen fast vollständig in Phase. Deshalb ist das Rayleigh-Kriterium erfüllt und die Schwingung wird angeregt beziehungsweise im Grenzyklus erhalten.

Bei genauem Hinsehen ist in Abbildung 5.8 auch zu sehen, dass die Wärmefreisetzungsschwankung keine reine harmonische Schwingung darstellt, sondern in der Nähe ihrer Maxima und Minima leicht deformiert ist. Dieser Effekt ist auf die Sättigung zurückzuführen, die als Nichtlinearität höhere harmonische Komponenten erzeugt. Das ist deutlich im Spektrum in Abbildung 5.9 zu erkennen. Neben ei-

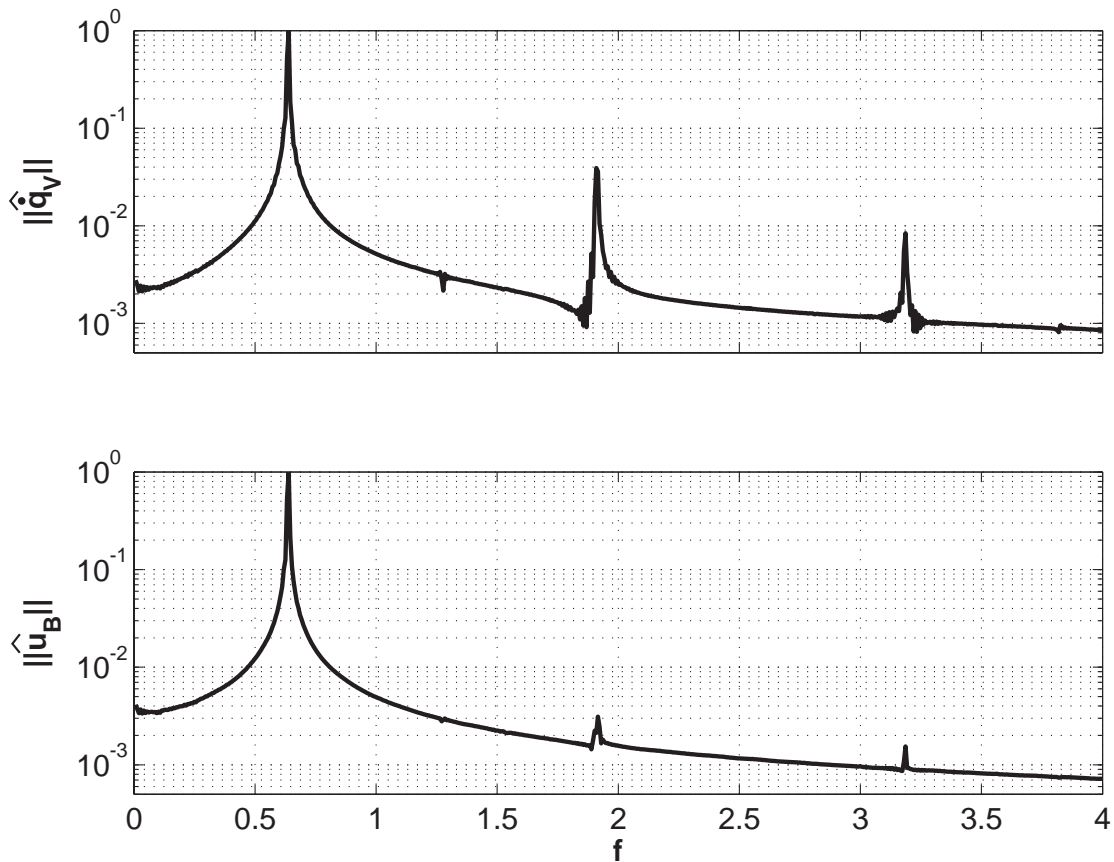


Abbildung 5.9: Frequenzspektren von Wärmefreisetzungsschwankung (oben) und Schnelle im Brenner (unten) im Grenzyklus, jeweils normiert mit den Maximalwerten.

ner starken Komponente bei der Grundfrequenz treten auch Komponenten bei den ungeraden Vielfachen dieser Frequenz auf, deren Betrag mit der Frequenz stark abnimmt. Da die Flammen als akustische Quelle wirken, sind die höherfrequenten Komponenten auch in Schalldruck und Schallschnelle wiederzufinden, allerdings mit geringerem Anteil.

Nun wird nicht selten argumentiert, dass durch die nichtlineare Sättigung ein Energietransfer von der Grundschiwingung zu den höheren Harmonischen erfolgt und damit mit wachsenden Schwingungsamplituden immer weniger Energie für die Anregung eben der Grund-

schwingung zur Verfügung steht⁵¹. Allerdings dürfte die Relevanz dieses Effekts für den Energiehaushalt der selbsterregten Schwingung eher gering sein. Die der Schwingung in der Flamme zugeführte oder entnommene Energie ist proportional zu dem Produkt aus den Wärmefreisetzungsschwankungen und den Druckschwankungen, wie bereits in Gleichung (1.1) gezeigt wurde. Mit den niedrigen Amplituden, wie sie in Abbildung 5.9 zu sehen sind, können die höherfrequenten Komponenten daher nur einen geringen energetischen Beitrag liefern.

Der wesentliche Einfluss der Sättigung liegt vielmehr darin, dass sie den Gesamtbetrag der Leistungsfreisetzung, die als möglicher Beitrag für die Erhöhung der akustischen Energie zur Verfügung steht, verringert, und zwar unabhängig von der spektralen Verteilung. Dies macht folgende Überlegung anschaulich. Ein denkbarer Sättigungsmechanismus ist, dass die Flamme das ihr zugeführte Brennstoff-Luft-Gemisch ab einem bestimmten Massenstrom (also einer dementsprechend hohen positiven Geschwindigkeitsfluktuation im Brenner) nicht mehr vollständig in der Primärzone umsetzen kann. Das nicht umgesetzte Gemisch reagiert dann stromab in der Masse zu Ende, ohne Fluktuationen mit der Frequenz der Instabilität zu zeigen. Dieser für eine thermoakustische Anfachung fehlende Anteil ist maßgeblich für die Entwicklung des Energieinhalts der selbsterregten Schwingung. Die in der Wärmefreisetzungsschwankung vorhandenen Beiträge höherer harmonischer Komponenten dürften demgegenüber von untergeordneter Bedeutung sein.

Allerdings ist hiermit die Entstehung des Grenzyklus noch nicht vollständig erklärbar. Um dies zu verdeutlichen, wurde eine Simulation durchgeführt, bei der die Randbedingungen für die Einlass- und Auslassebene so verändert wurden, dass sie wie die übrigen Ränder eine akustisch harte, vollständig reflektierende Wand darstellten. In dem System existieren damit keine Ränder mehr, über die akustische

⁵¹Vergleiche beispielsweise Hantschk [88]; in dem dort gezeigten Beispiel einer selbsterregten Verbrennungsschwingung eines Diffusionsbrenners beträgt die Amplitude der ersten Harmonischen der Wärmefreisetzungsschwankungen etwa 5% der Amplitude der Grundschwingung und liegt damit in derselben Größenordnung wie in dieser Arbeit.

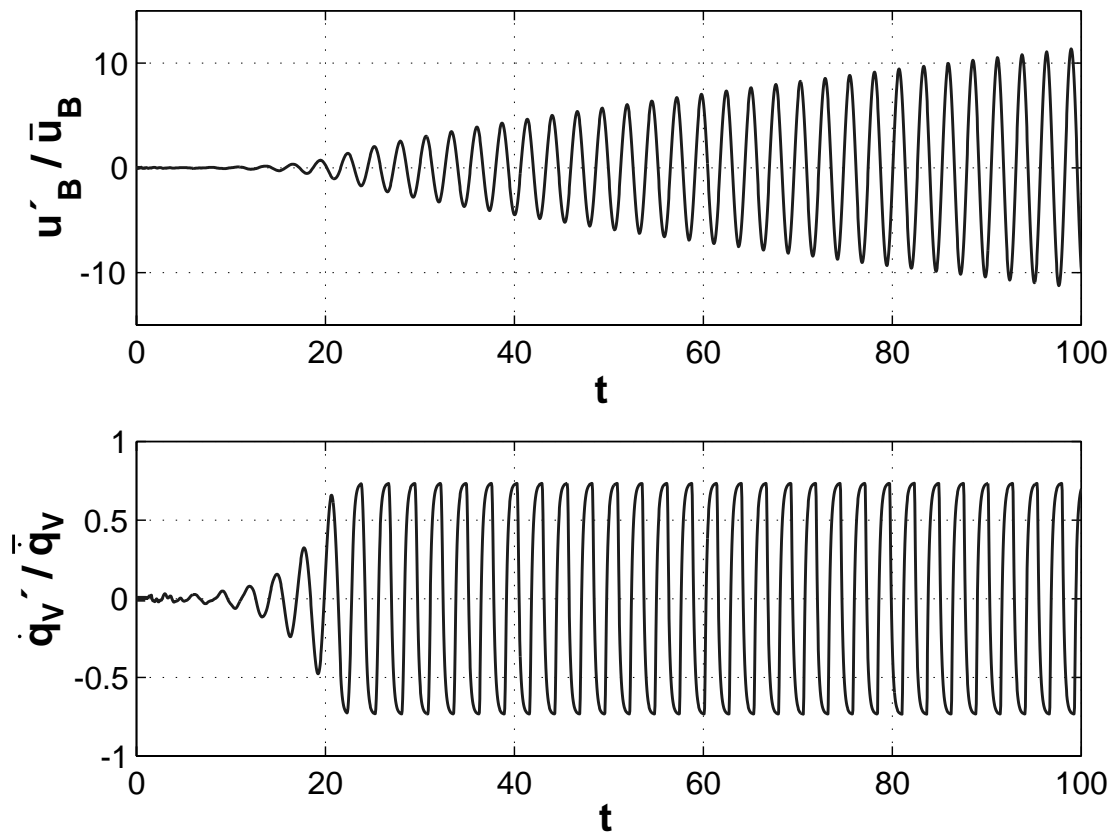


Abbildung 5.10: Entwicklung einer selbsterregten Instabilität in einem System mit Sättigung, aber ohne Verluste. Oben: Schnelle in einem Brenner normiert mit der mittleren Geschwindigkeit im Brenner; unten: Wärmefreisetzungsschwankung normiert mit der mittleren Wärmefreisetzungsrate.

Energie abgestrahlt werden kann. Es fehlen also bis auf numerische Effekte Energiesenken. Abbildung 5.10 zeigt für eine derartige Konfiguration die Entwicklung einer selbsterregten Instabilität anhand der Schnelle in einem Brenner und der dazugehörigen Wärmefreisetzungsschwankung. Deutlich ist die Limitierung der Leistungsfreisetzung auf ihre Sättigungsamplitude zu erkennen. Dennoch wachsen die akustischen Größen, hier repräsentiert durch die Schnelle, offensichtlich unbegrenzt weiter. Allerdings verläuft dieser Anstieg nicht mehr exponentiell, sondern nur noch linear. Eindeutig ist aber, dass die Sättigungseffekte der Flamme alleine nicht die Entstehung eines Grenzyklus bewirken können.

Dieser Umstand wird durch einige energetische Betrachtungen klarer. Der der akustischen Schwingung momentan durch die Leistungsfreisetzung der Flamme zugeführte Energiestrom kann folgendermaßen formuliert werden (vergleiche beispielsweise Heckl [30]):

$$\dot{E}_{zu} = \frac{\kappa - 1}{\bar{\rho}\bar{c}^2} \int_{\Omega_F} p' \dot{q}'_V dV. \quad (5.2)$$

Dabei bezeichnet Ω_F das Gebiet der Flamme, in dem die Wärmefreisetzung stattfindet. Sind also Schalldruck und Wärmefreisetzungsrate (weitgehend) in Phase, wird der akustischen Schwingung gemittelt über eine Schwingungsperiode Energie zugeführt. Insbesondere ist der zugeführte Energiebetrag für den Fall, dass die Amplitude von \dot{q}'_V konstant ist, proportional zum Schalldruck. Im Bereich der Sättigung der Flamme steigt die Schwingungsenergie deshalb weiterhin an, wenn keine Energiesenken vorhanden sind. Schalldruck und Schallschnelle nehmen linear zu. Interessant ist, dass wegen Gleichung (5.2) der zugeführte Energiestrom linear und damit der Energieinhalt der Schwingung immer noch quadratisch wächst.

Eine Grenzyklusschwingung, die sich durch einen im Mittel konstanten Energieinhalt auszeichnet, kann erst dann entstehen, wenn auch Energieverluste berücksichtigt werden. Sie setzen sich zusammen aus der Abstrahlung akustischer Energie an den Rändern \dot{E}_T (Transmission) und dissipativer Verluste \dot{E}_D :

$$\dot{E}_{ab} = \dot{E}_T + \dot{E}_D. \quad (5.3)$$

Die Verluste durch Abstrahlung entstehen dadurch, dass die akustische Schwingung an den Rändern $\partial\Omega$ des Gebiets Arbeit an der Umgebung verrichtet:

$$\dot{E}_T = \int_{\partial\Omega} p' u' dA. \quad (5.4)$$

Sie sind also quadratisch in den akustischen Größen⁵². Die dissipativen Verluste werden hier nicht genauer angegeben, sind aber ebenfalls

⁵²Der Betrag von u' ist proportional zum Betrag des Gradienten von p' und damit, bei gegebener Frequenz und Wellenlänge, auch zum Betrag von p' selbst.

quadratisch in den akustischen Größen.

Ein Grenzzzyklus ist dann erreicht, wenn sich im Mittel über mehrere Schwingungsdauern die zugeführte Energie und die Energieverluste die Waage halten:

$$\overline{\dot{E}}_{zu} = \overline{\dot{E}}_{ab}. \quad (5.5)$$

Die Entwicklung einer selbsterregten Schwingung bis zum Grenzzzyklus aus energetischer Sicht ist schematisch in Abbildung 5.11 dargestellt. Zu Beginn, im linearen Regime, wachsen sowohl der durch die Leistungsfreisetzung der Flamme zugeführte Energiestrom als auch die Verluste (jeweils über eine oder mehrere Perioden gemittelt) quadratisch mit den akustischen Größen an. Eine selbsterregte Schwingung kann überhaupt nur entstehen, wenn in dieser Phase der Energiegewinn die Verluste übersteigt. Ab einem bestimmten Zeitpunkt setzt die Sättigung der Flamme ein. Der durch die Wärmefreisetzung zugeführte Energiestrom nimmt dann nur noch linear mit den akustischen Größen zu, im Gegensatz zu den Verlusten, die weiterhin eine quadratische Abhängigkeit zeigen. Somit kann schließlich das für die Ausbildung des Grenzzzyklus nötige Gleichgewicht der Energieströme erreicht werden.

Aus den beschriebenen Mechanismen wird auch deutlich, welche Faktoren den Betrag der Amplitude der Grenzzyklusschwingung beeinflussen. Der Grenzzzyklus kann erst entstehen, wenn die Schwingungen die für das Auftreten von Sättigung benötigte Amplitude zumindest in einer Flamme erreichen. Dieser Wert stellt das Minimum der Grenzamplitude dar. Wie weit die Instabilität von diesem Wert aus noch weiter anwächst, hängt dann davon ab, wie viel niedriger die Energieverluste in diesem Moment sind als der Energiegewinn in der Flamme. Diese Differenz wiederum ist aber eine direkte Folge der Anfachungsrate der Instabilität im linearen Regime. Bei hohen Wachstumsraten nimmt die Energiezufuhr in der Flamme wesentlich schneller zu als die Verluste an den Rändern. Bei Erreichen der Sättigung ist deshalb noch ein großes Potential für eine weitere Amplitudenzunahme vorhanden. Bei sehr geringen Wachstumsraten dagegen, etwa in Nähe der Grenzstabilität, sind an der Sättigungsgrenze die

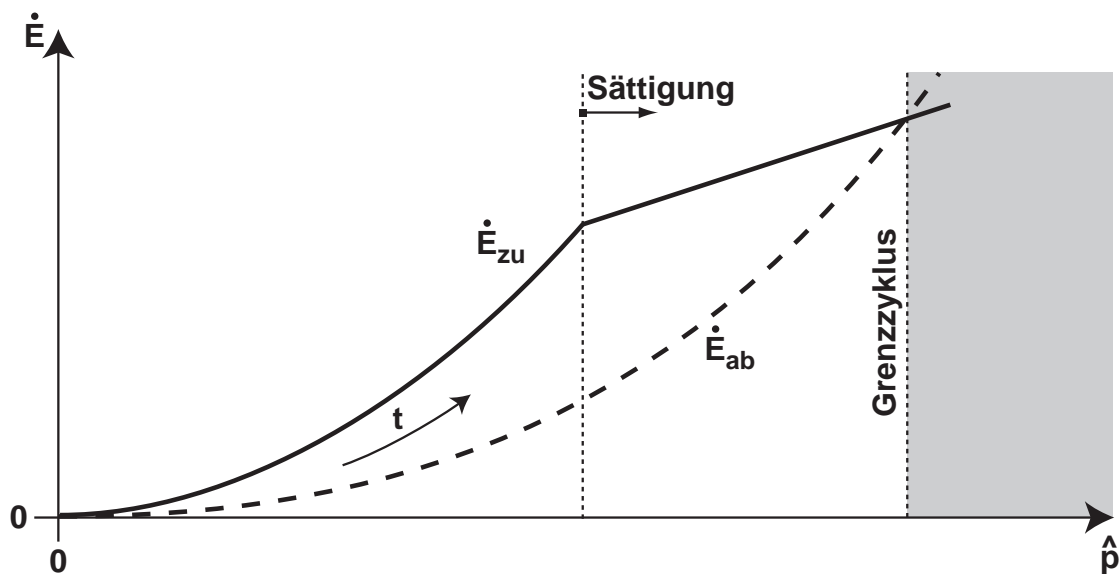


Abbildung 5.11: Schema der Entwicklung einer selbsterregten Instabilität aus energetischer Sicht.

Energieverluste fast gleich den Gewinnen. Hier wird die Grenzamplitude kaum über der Sättigungsamplitude liegen. Die soeben geschilderten Zusammenhänge sind in der schematischen Darstellung in Abbildung 5.12 noch einmal verdeutlicht.

Nun ist auch ein besseres Verständnis der in der Simulation beobachteten hohen Grenzamplituden möglich. Wie aus Abbildung 5.8 zu erkennen war, erreicht die Schnelle im Brenner für den dort dargestellten Fall in etwa den Wert der mittleren Geschwindigkeit, während die Sättigung bereits bei 75% dieses Werts einsetzt. Höhere Verluste im System könnten, solange sie noch eine Instabilität zulassen, die Grenzamplitude also um maximal 25% absenken. Auch dieser Wert scheint im Hinblick auf realistische Bedingungen noch hoch. Deutlich niedrigere Amplituden im Grenzyklus sind nur bei einer entsprechend abgesenkten Sättigungsamplitude denkbar. Hieraus kann geschlossen werden, dass der für den Parameter μ gewählte Wert von 0.75 tatsächlich unrealistisch hoch liegt.

Als Ergebnis dieser Überlegungen ergibt sich generell die Schlussfolgerung, dass einerseits die Berücksichtigung der Verlustmechanismen

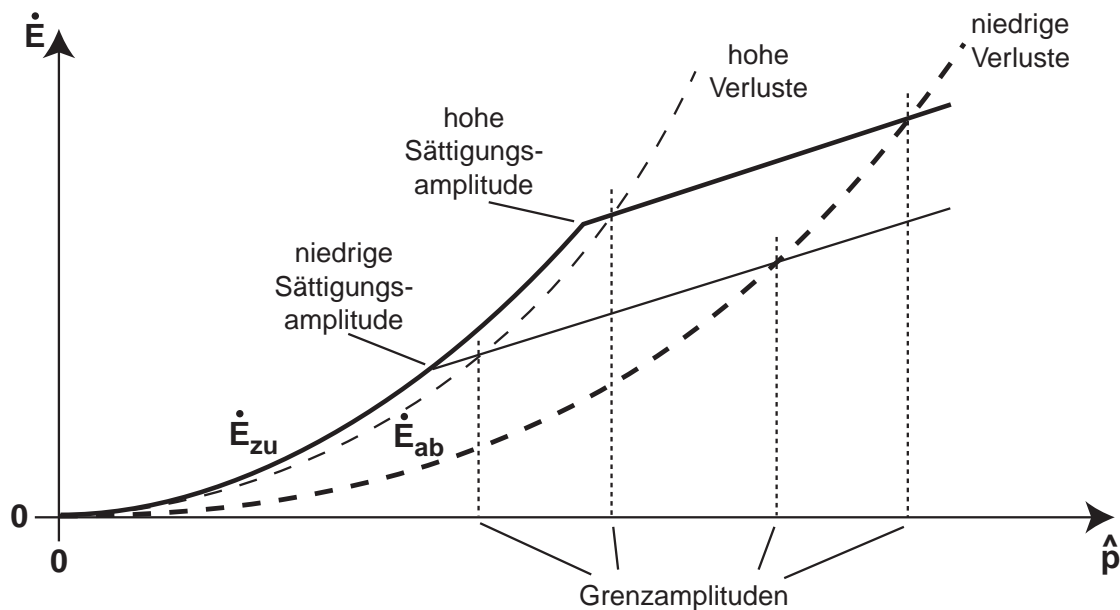


Abbildung 5.12: Einfluss der Sättigungsgrenze und der Verluste auf die Höhe der Grenzamplitude.

für die Beurteilung der Stabilität eines thermoakustischen Systems und gegebenenfalls der Amplituden der Grenzzyklen von großer Bedeutung ist. Eine sorgfältige Analyse wird dabei nicht nur die Transmissionsverluste an den Rändern, sondern auch die dissipativen Verluste möglichst genau erfassen müssen. Andererseits spielt die Kenntnis des Flammenverhaltens inklusive der Sättigungsvorgänge gerade im Hinblick auf die Grenzamplituden eine genauso wichtige Rolle. Solange eine Quantifizierung beider Effekte nicht möglich ist, muss sich eine Betrachtung daher vor allem auf qualitative Aspekte beschränken.

5.3.3 Stabilität und Eigenmoden

Die bisherigen Betrachtungen beschreiben die grundsätzlichen Mechanismen der Entstehung von selbsterregten Instabilitäten, ohne die dabei auftretenden Modenformen und die Frage näher zu untersuchen, unter welchen Umständen die Instabilitäten überhaupt auftreten. Diese Aspekte sollen Gegenstand der nachfolgenden Ausführun-

gen sein.

Die thermoakustische Stabilität eines Verbrennungssystems wird im Allgemeinen von mehreren Parametern abhängen. Hierbei kann an ganz unterschiedliche Größen wie geometrische Abmessungen, die mittlere Leistungsfreisetzung der Flammen, die Luftzahl oder andere gedacht werden. Für unterschiedliche Parameterkombinationen wird sich entweder stabiles oder instabiles Verhalten zeigen, gegebenenfalls mit unterschiedlichen Eigenmoden.

Um dieses Verhalten zu demonstrieren, wird in der Simulation der Modell-Ringbrennkammer der Einfluss der Variation eines wesentlichen Stabilitätsparameters untersucht, nämlich der Totzeit τ im Flammenmodell. Je nach Wahl des Werts dieses Parameters zeigen die Berechnungen zwei unterschiedliche Modenformen, falls sich eine selbsterregte Instabilität ausbildet. Die Änderung der Schalldruckverteilung während einer Periode des Grenzyklus ist für beide Eigenmoden in den Abbildungen 5.13 und 5.14 dargestellt. Im einen Fall handelt es sich um eine rein axial schwingende Mode, die also zu jedem Zeitpunkt für eine bestimmte axiale und radiale Koordinate über den Umfang einen konstanten Schalldruckwert zeigt. Dabei sind die Schalldrücke in der Vorkammer und in der Brennkammer fast homogen, aber gegenphasig. Der Bereich der Brennerrohre fungiert somit als schwingende Masse zwischen zwei Druckspeichern. Die zweite mögliche Schwingungsform stellt die erste gemischte Umfangsmode mit axialem Anteil dar. Die Umfangsmode zeigt sich in diesem Fall als rotierende Mode, das heißt es gibt keine stationären Schalldruckknotenlinien. Vielmehr drehen sich diese während einer Schwingungsdauer genau einmal um den Umfang. Es besteht eine Phasendifferenz zwischen den Schwankungen an den Brennern und dem Brennkammerende. Zu erkennen ist dieser Effekt daran, dass die Knotenlinien nicht parallel zur Achse, sondern schief liegen. Beträgt der Abstand von den Brennern zum Brennkammerende L , benötigt eine Information die Zeit $t = L/\bar{c}$ für die Fortpflanzung über diese Strecke, wenn \bar{c} die herrschende Schallgeschwindigkeit ist. Die Rotationsdauer der Mode ist gleich der Schwingungsdauer T , so dass die

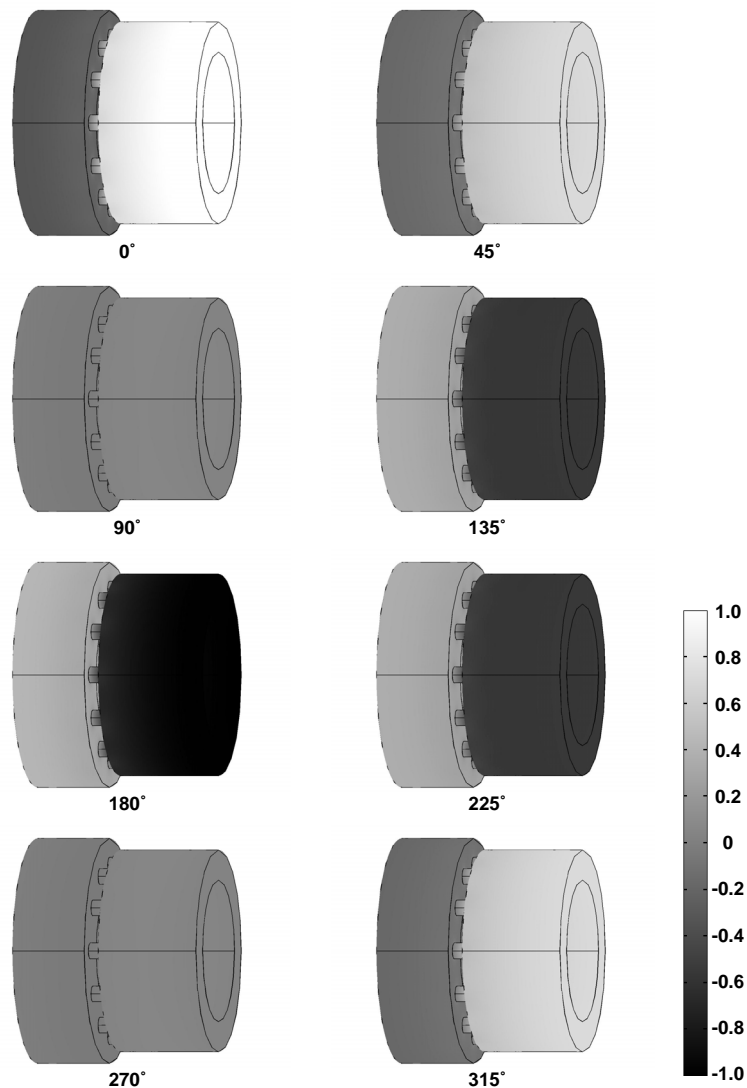


Abbildung 5.13: Schalldruckverteilung der axialen Mode zu verschiedenen Phasenwinkeln während einer Periode des Grenzyklus, normiert mit dem Maximum des Schalldrucks.

angesprochene Phasendifferenz $2\pi L/(\bar{c}T)$ beträgt.

Um den Einfluss der Totzeit τ auf das Stabilitätsverhalten quantifizieren zu können, wurde sie im Bereich von $\tau = 1.0$ bis $\tau = 2.5$ für einen festen Wert der Eckfrequenz $\omega_0 = 5$ variiert und dabei für die simulierten Fälle jeweils die Anfachungs- oder Abklingrate der Schwingungen (entsprechend Gleichung (4.38)), deren Frequenz und die Modenform bestimmt. Abbildung 5.15 zeigt die Wachstumsrate

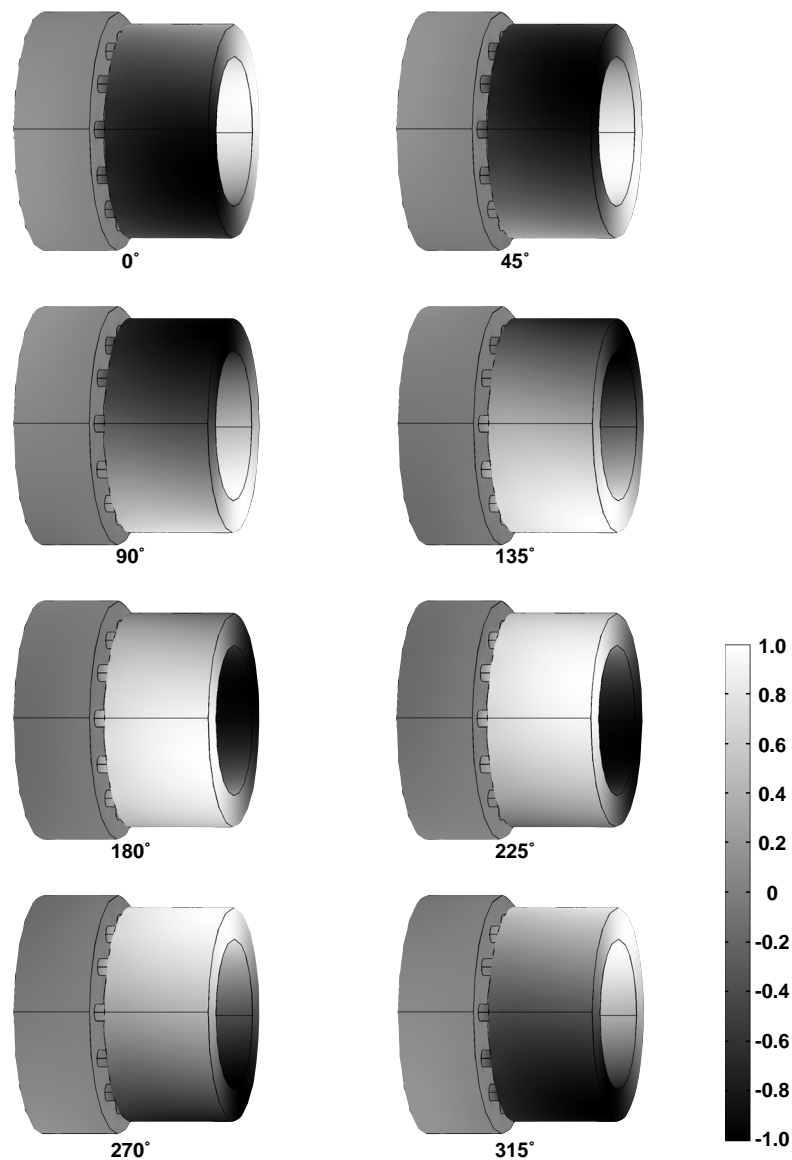


Abbildung 5.14: Schalldruckverteilung der rotierenden gemischten Umfangsmode zu verschiedenen Phasenwinkeln während einer Periode des Grenzzyklus, normiert mit dem Maximum des Schalldrucks.

in Abhängigkeit von τ . Positive Werte bedeuten eine selbsterregte Instabilität, negative eine stabile Konfiguration. Klar ist der deutliche Einfluss von τ auf die thermoakustische Stabilität der Modell-Ringbrennkammer zu erkennen. Für $\tau = 1.9$ sind zusätzlich auch zwei Werte für geringere Eckfrequenzen, $\omega_0 = 4$ und $\omega_0 = 3$, angegeben, um zu verdeutlichen, dass die Stabilität grundsätzlich von

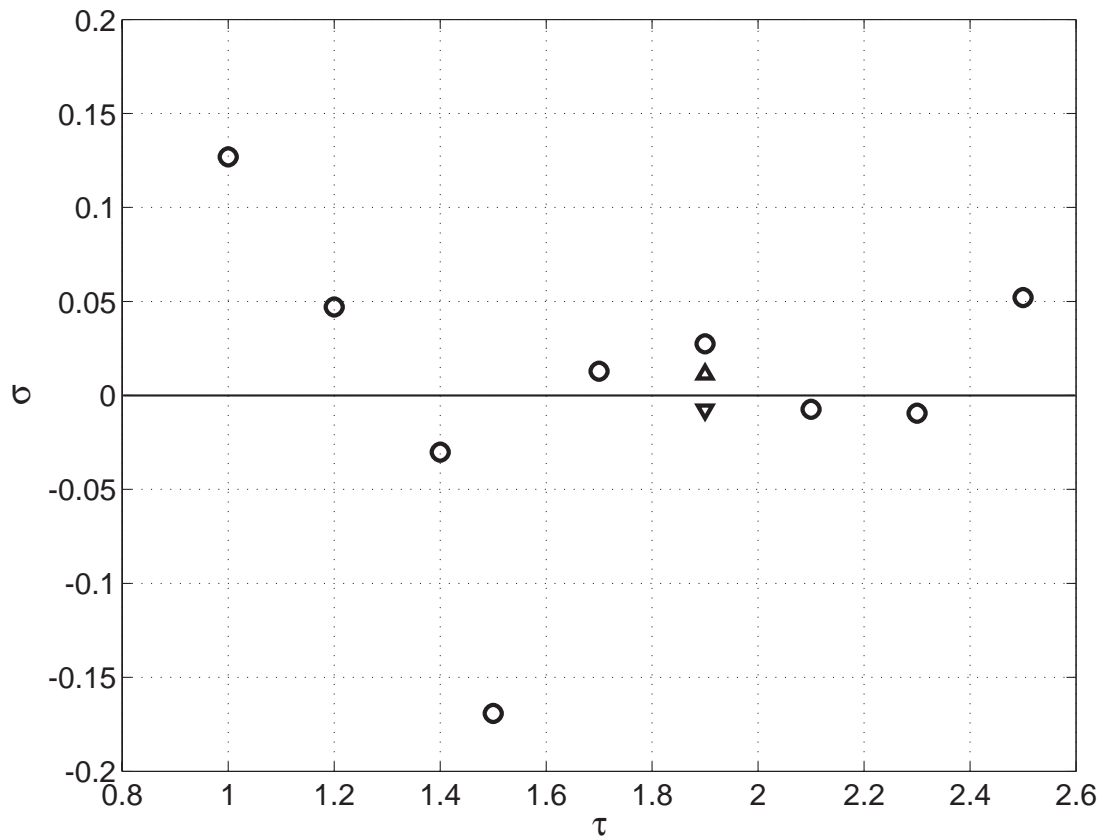


Abbildung 5.15: Wachstumsraten σ für verschiedene Totzeiten τ des Flammenmodells. Eckfrequenzen des Tiefpassfilters im Flammenmodell: \circ $\omega_0 = 5$, \triangle $\omega_0 = 4$, ∇ $\omega_0 = 3$.

mehreren Parametern abhängig ist. Die niedrigeren Eckfrequenzen erhöhen das Dämpfungsverhalten der Flamme und heben damit das Stabilitätsniveau an.

Die präsentierten Ergebnisse gelten sowohl für die Fälle ohne als auch mit mittlerer Strömung. Hier ist kein Einfluss auf die Stabilität festzustellen. Dies war nach den Ergebnissen für die rein akustischen Eigenmoden, die im Abschnitt 5.2.4 auf den Seiten 134 ff. gezeigt wurden, bereits zu erwarten. Auf Grund der niedrigen Mach-Zahlen ergeben sich auch bei Berücksichtigung der mittleren Strömung keine merklichen Auswirkungen auf die Ausbreitung der akustischen Größen⁵³.

⁵³Durch die Verwendung von Drallbrennern wird in Realität in die Brennkammer auch ein

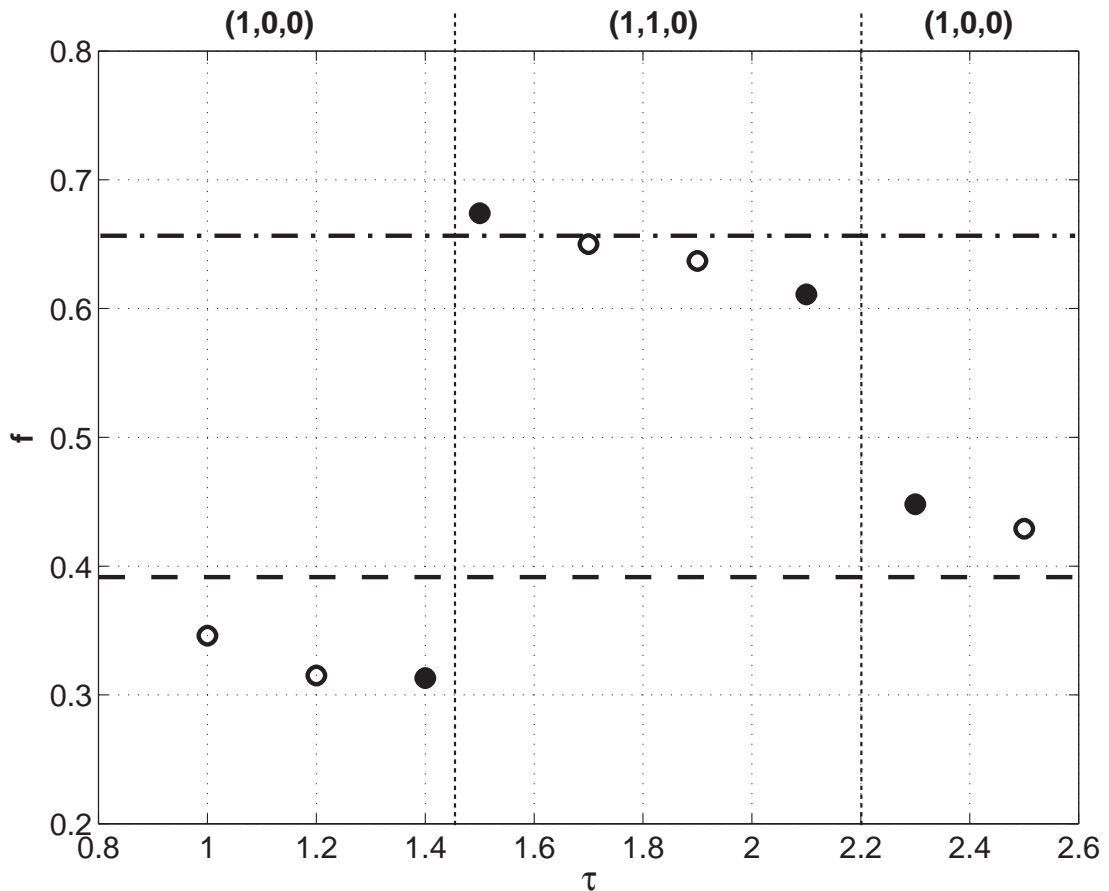


Abbildung 5.16: Eigenfrequenzen und zugehörige Eigenmoden für verschiedene Totzeiten des Flammenmodells; ○ instabile Moden, ● stabile Moden. Zusätzlich gezeigt sind die Eigenfrequenzen der rein akustischen (1,0,0)-Mode (– –) und (1,1,0)-Mode (– · –).

Einen tieferen Einblick in das Stabilitätsverhalten liefert eine Darstellung der Eigenfrequenzen und Eigenmoden als Funktion des Stabilitätsparameters τ , wie sie in Abbildung 5.16 zu sehen ist. Wie bereits weiter oben erwähnt, gibt es Bereiche für den Wert von τ , in denen sich entweder die rein axiale Mode oder die gemischte Umfangsmode einstellt. Die zugehörigen Eigenfrequenzen ändern sich

Drehimpuls eingebracht, der sich in einem rotierenden Anteil in der mittleren Strömung äußert. Dieser Einfluss wurde in der Simulation nicht untersucht, weil das damit verbundene Geschwindigkeitsfeld nicht gleichförmig ist und damit von den verwendeten Grundgleichungen nicht abgedeckt ist. Eine Abschätzung hatte aber ohnehin gezeigt, dass die Mach-Zahl der rotierenden Grundströmung etwa bei 0.06 liegen würde. Eine Auswirkung auf die Akustik ist damit analog den Ergebnissen für die axiale mittlere Strömung nicht zu erwarten.

mit τ . Sie liegen zwar in der Nähe der (ebenfalls dargestellten) rein akustischen Eigenfrequenzen, die Abweichungen sind aber grundsätzlich deutlich nachweisbar und können nicht vernachlässigt werden. Dies verdeutlicht, dass das System durch die Dynamik der Flammen klar verändert wird und sich, wenn auch ähnliche, so doch andere Eigenmoden einstellen als im rein akustischen Fall.

An den Grenzen der Bereiche von τ , in denen jeweils einer der beiden Eigenmoden auftritt, zeigt sich das System stabil. Bei der untersuchten Modell-Ringbrennkammer trennen also Zonen mit Stabilität Bereiche voneinander, in denen selbsterregte Instabilitäten mit unterschiedlichen Modentypen auftreten. An dieser Stelle lohnt sich eine Überlegung, inwieweit sich dieses Ergebnis verallgemeinern lässt.

Im linearen Regime, das für die Entwicklung der Instabilitäten maßgeblich ist, können die einzelnen Moden unabhängig voneinander betrachtet werden. Damit lässt sich jeder Mode getrennt eine Wachstumsrate in Abhängigkeit eines bestimmten Stabilitätsparameters ähnlich der Darstellung in Abbildung 5.15 zuordnen (wobei andere Stabilitätsparameter konstant gehalten werden). Für zwei konkurrierende Moden sind dann innerhalb eines bestimmten Bereichs des Stabilitätsparameters eine Reihe von unterschiedlichen Kombinationen ihres Stabilitätsverhaltens möglich. Einige in Abbildung 5.17 veranschaulichte Situationen seien hier erläutert⁵⁴:

1. Beide Moden haben negative Wachstumsraten. Das System ist im ganzen Parameterbereich stabil.
2. Eine Mode hat in einem Teil des Parameterbereichs eine positive Wachstumsrate. Das System ist hier instabil, es bildet sich die entsprechende Mode aus. Im übrigen Bereich ist das System stabil.
3. In einem Bereich hat eine Mode eine positive Wachstumsrate, in einem anderen die andere Mode. Diese beiden instabilen Zonen,

⁵⁴Diese Überlegungen lassen sich prinzipiell auf ein System, in dem mehr als zwei Moden eine Rolle spielen, übertragen.

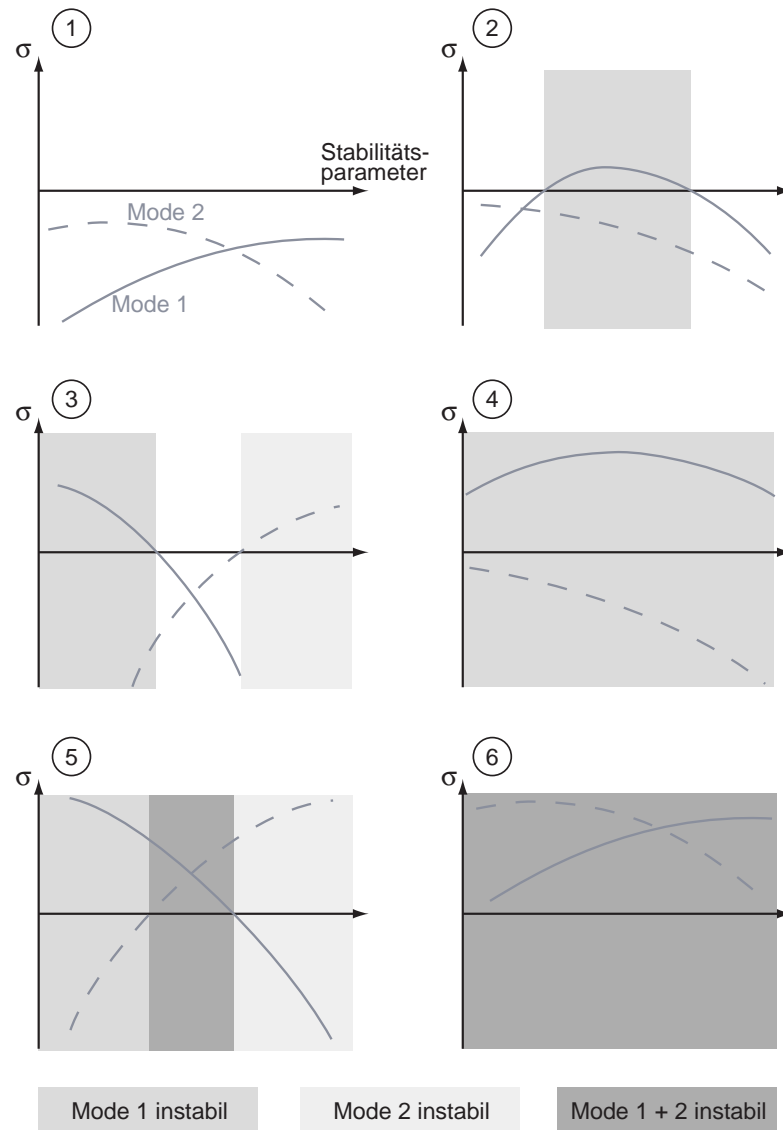


Abbildung 5.17: Schematische Darstellung einiger möglicher Kombinationen des Stabilitätsverhaltens bei Betrachtung von zwei Moden.

in denen sich die jeweilige Mode ausbildet, sind durch einen stabilen Parameterbereich getrennt.

4. Eine Mode hat eine positive Wachstumsrate, die andere eine negative. Das System ist im gesamten Parameterbereich instabil, wobei nur eine Modenform auftritt.
5. In einem Bereich hat eine Mode eine positive Wachstumsrate,

in einem anderen die andere Mode. Diese Bereiche überschneiden sich. Das System ist im gesamten Parameterbereich instabil. Dort, wo die Wachstumsrate einer Mode negativ ist, tritt nur die jeweils andere Mode auf. In der Übergangszone findet eine Überlagerung der beiden Moden statt.

6. Beide Moden haben positive Wachstumsraten. Das System ist im gesamten Parameterbereich instabil. Es zeigt sich eine Überlagerung der beiden Moden.

In den Simulationen der Modell-Ringbrennkammer liegt nach diesem Schema die im 3. Beispiel geschilderte Situation vor, wobei mehrere solcher Zonen aneinandergereiht sind. Es gibt Bereiche von τ , in denen beide beobachteten Moden und damit das gesamte System stabil sind. Ansonsten zeigt sich immer eine Instabilität einer der beiden Schwingungsformen.

Wie weiter oben bereits berichtet wurde, zeigten erste Rechnungen unter der Annahme eines nicht vorgeheizten Betriebs der Modell-Ringbrennkammer, dass in diesem Fall lediglich eine Instabilität mit einer rein axialen Mode zu beobachten wäre. Grund hierfür ist die gegenüber dem vorgeheizten Fall deutlich niedrigere Eigenfrequenz der Axialmode, die bereits im rein akustischen Fall (vergleiche Abschnitt 5.2.4) erkennbar ist. Da die Flamme aufgrund ihres Tiefpassverhaltens bei dieser niedrigeren Frequenz eine deutlich stärkere Antwort zeigt als bei den Frequenzen der anderen Moden, ist die Wachstumsrate der Axialmode entsprechend hoch⁵⁵. Dies entspricht nach Abbildung 5.17 einer im 2. oder 4. Beispiel dargestellten Situation. Denkbar ist auch eine Überlagerung der Axialmode mit einer anderen Mode entsprechend dem 5. Beispiel, wobei dann die Wachstumsrate der zweiten Mode wesentlich geringer sein müsste, weil sie im Schalldruckfeld nicht klar sichtbar ist.

Eine erkennbare Überlagerungen zweier Moden konnte dagegen ex-

⁵⁵Danach sollte es gelingen, prinzipiell jede Mode gezielt anzuregen, wenn die Flammentransferfunktion bei der Eigenfrequenz ein ausreichend hohes Amplitudenverhältnis bei geeigneter Phasenlage aufweist. Entsprechende Flammen für höhere Frequenzen zu realisieren, dürfte aber in der Praxis schwer fallen.

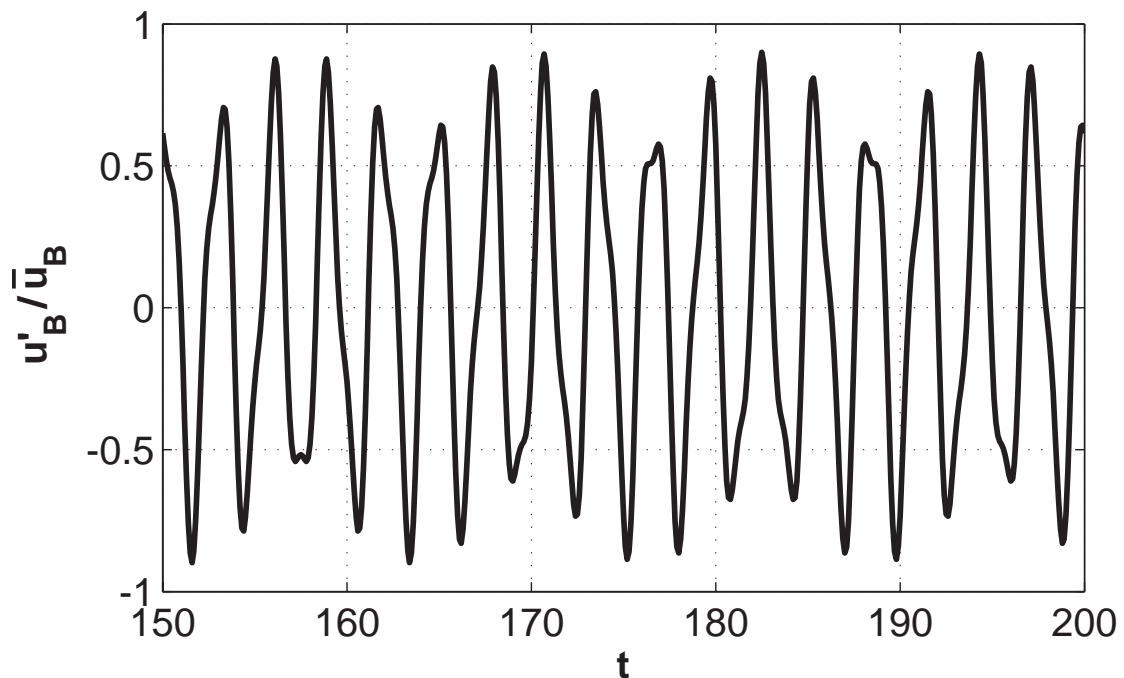


Abbildung 5.18: Zeitlicher Verlauf der Schnelle in einem Brenner im Grenzzzyklus bei Überlagerung zweier instabiler Moden.

emparisch durch eine Simulation mit veränderten Hauptparametern nachgewiesen werden. Über eine größere mittlere Wärmefreisetzungsrate wurde die potentielle Energiezufuhr an die Schwingung erhöht und damit das Stabilitätsniveau insgesamt abgesenkt. In Abbildung 5.18 ist zu erkennen, wie der Verlauf der Schnelle in einem Brenner durch die Existenz einer zweiten, höherfrequenten Mode modifiziert wird. Die Koexistenz zweier Moden unterschiedlicher Frequenz wird besonders im Spektrum deutlich, das in Abbildung 5.19 dargestellt ist. Die höherfrequente Komponente ist einer gemischten Umfangsschwingung zugeordnet und stellt damit sicherlich keine Harmonische der dominanten Instabilität dar, die zu einer rein axialen Mode gehört.

Das Phänomen der Modenüberlagerung erscheint zunächst ungewöhnlich. Da die instabilen Moden im Allgemeinen mit unterschiedlichen Anfachungsraten exponentiell anwachsen, müsste die Amplitude der Mode mit der größten Anfachungsrate wesentlich

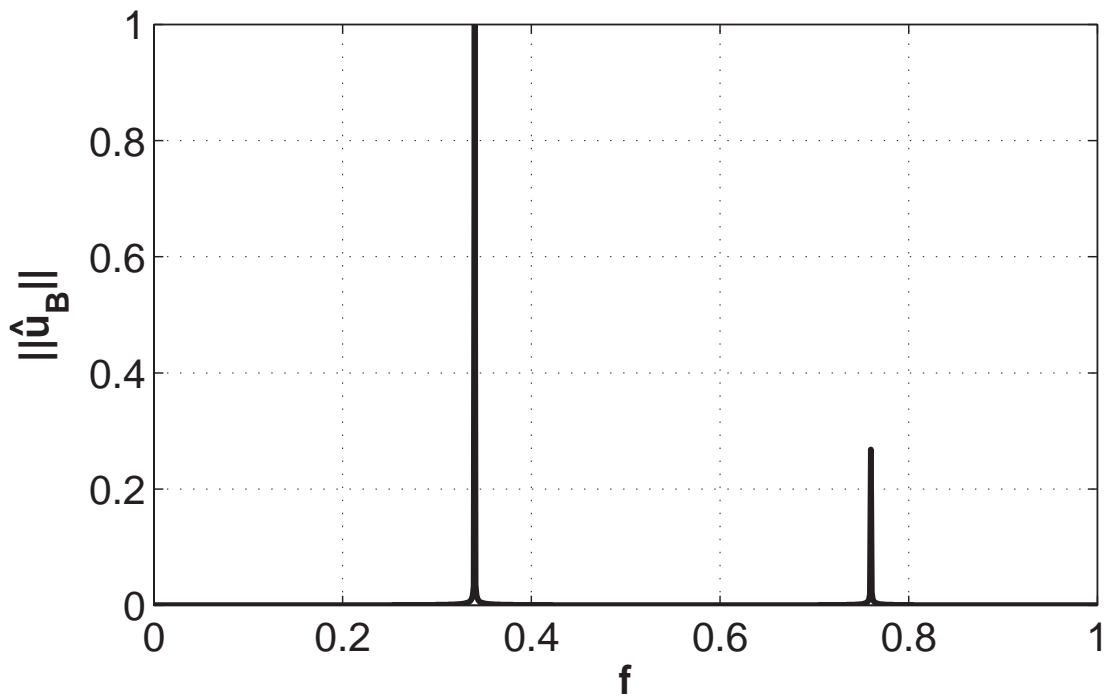


Abbildung 5.19: Spektrum der Schnelle in einem Brenner im Grenzyklus bei Überlagerung zweier instabiler Moden, normiert mit dem Maximum.

stärker zunehmen, so dass die anderen Moden nach gewisser Zeit nicht mehr nachweisbar wären. Das gilt aber nur bei unbegrenzt linearem Verhalten. Auf Grund der Sättigung in der Flamme ist dieses allerdings nicht gegeben. Vielmehr wird bei Erreichen der Sättigung ein endliches Amplitudenverhältnis zwischen den instabilen Moden eingefroren. Außerdem findet über die Nichtlinearitäten ein Energieaustausch und damit eine Kopplung der Moden statt.

Abschließend soll noch ein Aspekt in Bezug auf die Modenformen erläutert werden, der sich als Besonderheit von Umfangsschwingungen ergibt. Im Abschnitt 2.3.3 wurde im Hinblick auf die Eigenmoden in Ringspalten auf den Seiten 45 ff. bereits erläutert, dass es für Moden mit Umfangskomponente zwei entartete, gleichberechtigte Lösungen gibt und jede Überlagerung dieser Lösungen auch wieder eine mögliche Eigenmode darstellt. Aus diesem Grund können Umfangsschwingungen auch in einen rotierenden und stehenden Anteil zerlegt gedacht werden. In Abbildung 5.14 war für die Modell-

Ringbrennkammer die instabile gemischte Umfangsmode schon in einer Form zu sehen, die als rotierend erscheint. Die Rotationsfrequenz ist dabei, wie im Abschnitt 2.3.3 erläutert, gleich der Schwingungsfrequenz⁵⁶. Abbildung 5.20 zeigt für identische Modellparameter dieselbe Mode mit gleicher Wachstumsrate und Frequenz, aber in einer offensichtlich stehenden Form mit achsparallelen Knotenlinien. Der Unterschied in der Lösung hat sich lediglich durch Verwendung einer anderen Anfangsbedingung ergeben.

Die Ergebnisse legen die Vermutung nahe, dass sich die Schwingungsform auf Grund der Gleichwertigkeit der zwei entarteten Eigenlösungen rein zufällig einstellt und dass sie damit letztlich nur von der Anfangsbedingung abhängt. Allerdings wäre es dann erstaunlich, wenn die beiden gezeigten Lösungen genau eine rein rotierende und eine rein stehende Mode darstellen würden. Dass dies nicht der Fall ist, ist in Abbildung 5.21 zu erkennen. Sie zeigt die Amplitude der Geschwindigkeitsfluktuationen an den 12 Umfangspositionen der Brenner für die beiden Fälle. Bei einer rein rotierenden Mode müsste sie in allen Brennern gleich sein. Dies ist offensichtlich nicht der Fall, so dass auch in der hier als scheinbar rotierend bezeichneten Umfangsschwingung ein stehender Anteil vorhanden ist. Umgekehrt ist in der scheinbar stehenden Mode auch ein rotierender Anteil existent, was aus dem Umstand geschlossen werden kann, dass sich in der Schalldruckverteilung zu keinem Phasenwinkel eine über den Umfang exakt konstante Verteilung ergibt (das ist allerdings aus der abgedruckten Abbildung 5.20 kaum erkennbar).

Diese Analyse zeigt, dass die beiden gezeigten Fälle allgemeine Beispiele für Umfangsmoden sind, die einen rotierenden und einen stehenden Anteil aufweisen. Auf Grund der Dominanz einer Komponente erscheinen sie nur vordergründig rein rotierend oder stehend. Wie Evesequé et al. [113] gezeigt haben, treten bei einer symmetrischen

⁵⁶In realen Maschinen wird allerdings oft eine Rotation des Schalldruckfelds beobachtet, die meist mit einer wesentlich niedrigeren Frequenz erfolgt und eher als Drift der Knotenlinien aufgefasst werden kann. Vermutlich sind hierfür sich zeitlich ändernde Randbedingungen verantwortlich, die die Modenlage beeinflussen. Dabei könnte auch die durch den Drall der Brenner induzierte mittlere Querströmung eine Rolle spielen. Auf Grund der zeitlich konstanten symmetrischen Randbedingungen werden solche Effekte in den gezeigten Simulationen nicht erfasst.

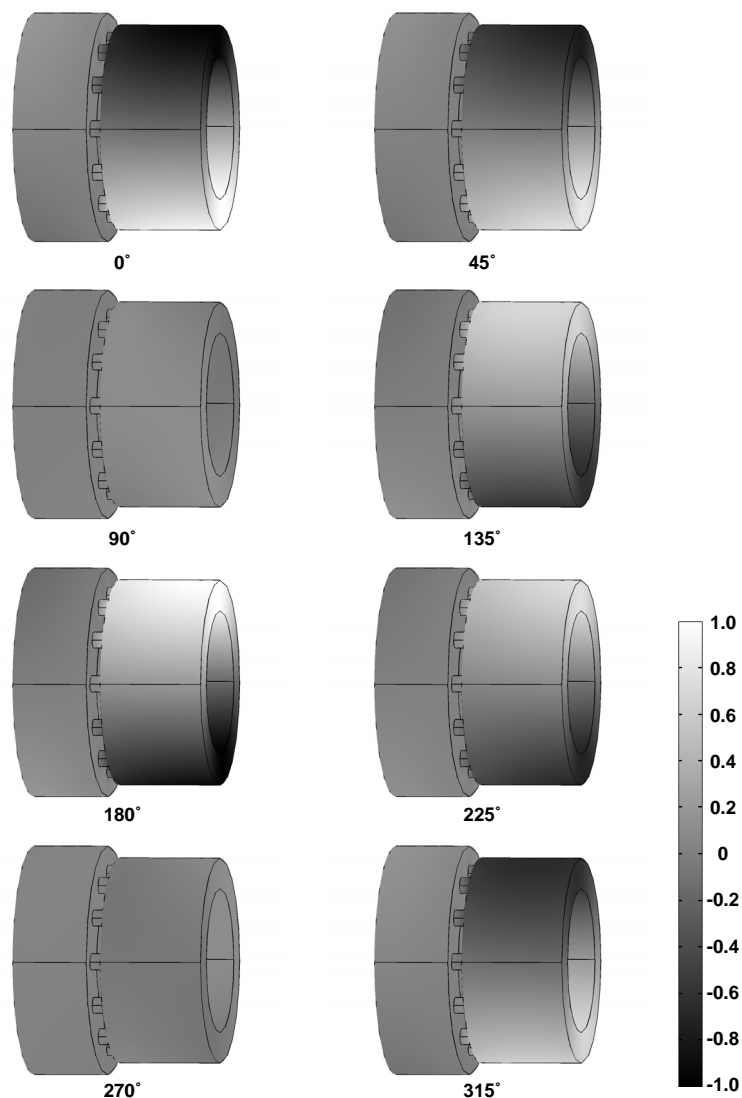


Abbildung 5.20: Schalldruckverteilung der stehenden gemischten Umfangsmode zu verschiedenen Phasenwinkeln während einer Periode des Grenzyklus, normiert mit dem Maximum des Schalldrucks.

Konfiguration wie der hier untersuchten tatsächlich die unterschiedlichsten Modenkombinationen auf.

Abbildung 5.21 macht noch einen weiteren Punkt deutlich. Während in der rotierenden Mode die Schnelle in allen Brennern so groß ist, dass diese dadurch in die Sättigung getrieben werden, ist dies in der stehenden Mode nur für wenige Brenner der Fall. Obwohl die Flammen einiger Brenner also noch das Potential zu höheren Schwin-

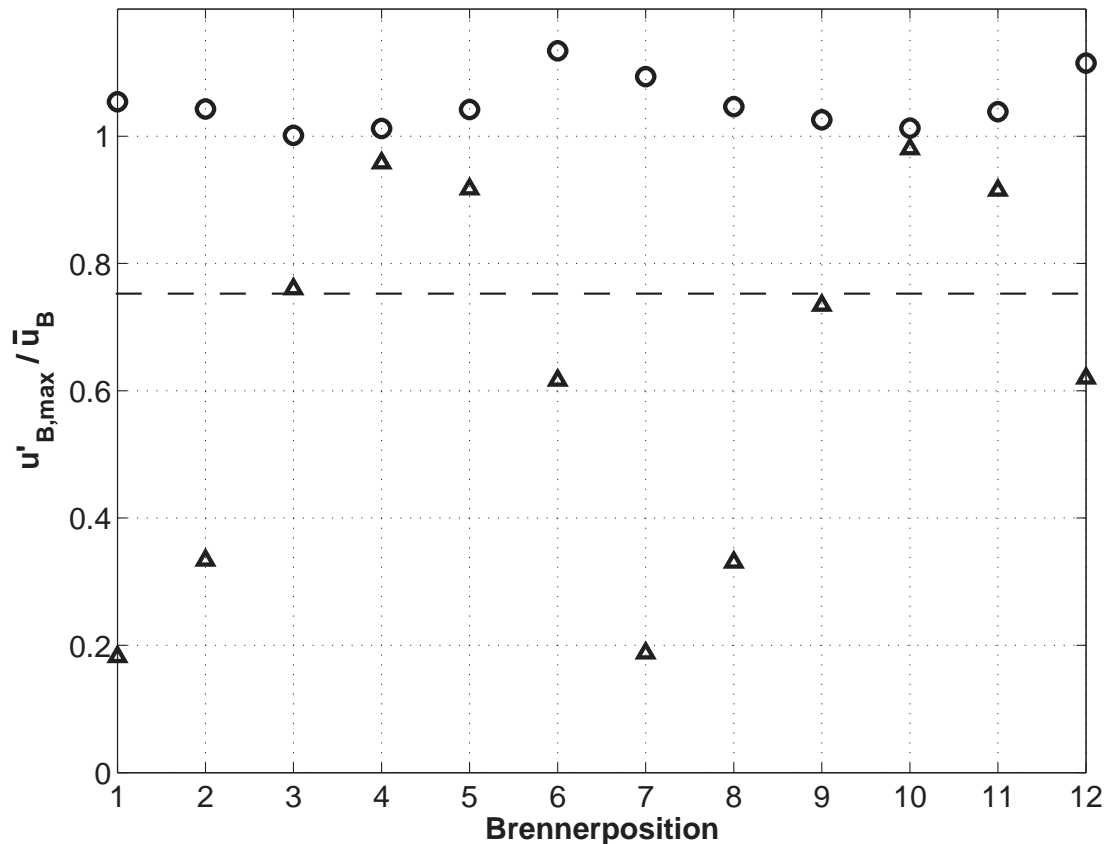


Abbildung 5.21: Amplituden der Schnelle in den einzelnen Brennern für die rotierende (○) und die stehende (△) gemischte Umfangsmode. Zusätzlich ist die Amplitude gezeigt, bei der Sättigung einsetzt (—).

gungsamplituden hätten, findet keine Umwandlung der stehenden in die rotierende Mode statt. Im Gegensatz zu einem reinen Ringspalt besitzt die Modell-Ringbrennkammer durch die 12 diskreten Brenner nur noch eine endliche Anzahl von Symmetrieebenen. Eine bestimmte Verteilung der akustischen Größen ist damit nicht mehr für jede Umfangsposition gleich wahrscheinlich. Dies ist eine mögliche Erklärung für die Fixierung der stehenden Mode, wie sie in der Simulation zu beobachten ist.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Vor dem Hintergrund der Bedeutung der Problematik von Verbrennungsschwingungen im Bereich der Gasturbinen hat diese Arbeit einen neuartigen Berechnungsansatz vorgestellt. Die Vorhersage von Verbrennungsinstabilitäten für technische Systeme ist bis heute nicht befriedigend möglich. Der Entwicklung neuer Modellierungsmethoden kommt daher eine besondere Bedeutung zu.

Das vorgeschlagene Berechnungsverfahren kann als hybrider Ansatz verstanden werden. Das Verbrennungssystem wird gedanklich zerlegt in einen passiven akustischen Teil, in der Simulation beschrieben durch Störungsgleichungen, und in aktive akustische Quellen in Form der Flammen, die durch Flammentransferfunktionen charakterisierbar sind und als Quellterme in die Simulation eingehen. Dadurch wird angestrebt, der Berechnung nur die aus Sicht der Thermoakustik entscheidenden Wirkmechanismen zu Grunde zu legen und eine weitergehende Detaillierung zu vermeiden, um den Rechenaufwand in vertretbaren Grenzen zu halten.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Ansatz unter Verwendung der akustischen Wellengleichung so umgesetzt, dass durch eine Simulation im Zeitbereich die Störungsentwicklung beobachtet werden kann und darauf aufbauend eine Stabilitätsanalyse möglich ist. Die Formulierung auf Basis der Wellengleichung bedeutet eine Beschränkung dahingehend, dass die Ausbreitung von Störungen lediglich in der akustischen Mode, nicht aber der Vorticity-Mode und der Entropie-Mode beschrieben wird. Das ist insofern zulässig, als zunächst der Informationsfluss über den akustischen Zweig den Rückkopplungsmechanismus steuert, der den thermoakustischen Instabilitäten zu Grunde liegt. Dieser Mechanismus ist essentiell und wird durch andere Ausbreitungsmodi der Störungen lediglich modifiziert. Das so realisierte Modell erfasst die wesentlichen Eigenschaften eines ther-

moakustischen Systems, kann aber Vereinfachungen nicht vermeiden.

Durch Gradienten im mittleren Strömungsfeld kommt es zu einer Umwandlung akustischer Schwankungen in fluktuierende Wirbel, die mit der Strömung wegtransportiert werden. Dies bedeutet einen Verlust akustischer Energie über den Weg der Vorticity-Mode. Eine korrekte Beschreibung des Energiehaushalts der Störungsentwicklung, die für eine quantitativ exakte Stabilitätsanalyse notwendig ist, wird deshalb diesen Effekt nicht unberücksichtigt lassen können. Generell gilt es die Mechanismen zu erfassen, die über eine Wechselwirkung mit der akustischen Mode die thermoakustische Stabilität beeinflussen können. Gedacht sei hier beispielsweise an konvektierte Entropiefluktuationen als Folge von Brennstoffinhomogenitäten, die bei Beschleunigung auf hohe Mach-Zahlen vor allem im niederfrequenten Bereich als akustische Quellen wirken.

Auch wenn die konkrete Implementierung des Berechnungsansatzes derartige Vorgänge nicht wiedergeben kann, erlaubt die allgemeine Formulierung der Methode prinzipiell einen Übergang auf andere Typen von Störungsgleichungen, die die für die jeweilige Anwendung benötigte Komplexität aufweisen. Diese Arbeit kann daher als grundlegende Darstellung der Berechnungsmethode verstanden werden, die zwar anhand einer möglichst einfachen Umsetzung erläutert wird, im Grunde aber die Basis für eine ganze Klasse von Modellen bildet.

Die numerische Umsetzung der Simulationsmethode bedient sich des Finite-Elemente-Codes FEMLAB. Ausschlaggebend für diese Wahl war in erster Linie die hohe Flexibilität, die der Code im Hinblick auf die Formulierung der das System beschreibenden Gleichungen bietet. Dadurch war eine relativ schnelle Implementierung des Ansatzes realisierbar, ohne allzu großes Augenmerk auf numerische Aspekte legen zu müssen. Gangbar ist dieser Weg, da thermoakustische Instabilitäten Eigenschaften haben, die ihre numerische Behandlung wesentlicher einfacher macht als die vieler klassischer akustischer Phänomene. Hierzu zählt insbesondere, dass Verbrennungsschwingungen durch wenige, klar definierte Moden gekennzeichnet sind, die

darüber hinaus auch noch Wellenlängen lediglich in der Größenordnung der geometrischen Abmessungen des Systems aufweisen. Dies erlaubt die Verwendung numerischer Verfahren mit einer moderaten räumlichen Auflösung und mit nicht zu hohen Anforderungen an eine geringe Dispersion über einen weiten Wellenzahlbereich.

Der verwendete Finite-Elemente-Code wurde auf die Größe der numerischen Fehler bei der Akustiksimulation untersucht. Als wesentlicher Effekt zeigte sich hier die numerische Dämpfung. Sie ist gering genug, um die Systemeigenschaften nicht grundsätzlich zu verfälschen, insbesondere weil sie aus energetischer Sicht über den ganzen interessierenden Frequenzbereich gleich stark wirkt. Sie weist allerdings eine ähnliche Größenordnung auf, wie sie beispielsweise bei der Abschwächung akustischer Wellen in Rohren durch die akustische Wandgrenzschicht zu beobachten ist. Für diese Arbeit war das unkritisch, da durch die Festlegung auf die Wellengleichung reale Dämpfungseffekte nicht erfasst werden konnten und damit eine korrekte Beschreibung des Energiehaushalts ohnehin nicht möglich war. Für eine Simulation, die auch diese Effekte quantitativ richtig beschreiben will, wird aber eine Reduzierung der numerischen Dämpfung notwendig sein. Durch eine Reduzierung der Zeitschrittweiten ist das zwar prinzipiell möglich, hier sind aber im Hinblick auf die Rechendauer Grenzen gesetzt. Eine Weiterentwicklung des Verfahrens wird sich daher auch über den Einsatz besserer numerischer Methoden Gedanken machen müssen.

Für die Simulation von Verbrennungsschwingungen spielt die Einbindung des dynamischen Flammenverhaltens eine entscheidende Rolle. In dieser Hinsicht zeigt sich das Berechnungsverfahren sehr flexibel. Die Kopplung erfolgt über Flammentransferfunktionen. Hiermit gelingt es, typische Flammenmodelle darzustellen, die beispielsweise in Form von Differentialgleichungen vorliegen. Es konnte aber auch ein Verfahren entwickelt werden, um beliebige durch gemessene Frequenzgänge vorgegebene Flammentransferfunktionen in eine diskrete Form im Zeitbereich zu transformieren und damit direkt für die Simulation nutzbar zu machen.

Ausgangspunkt und Motivation für diese Arbeit waren Verbrennungsschwingungen in Ringbrennkammern, die sich wegen ihrer komplexen Eigenschaften mit vielen vorhandenen thermoakustischen Berechnungsmethoden nicht beschreiben lassen. Zur Demonstration der Fähigkeiten des vorgeschlagenen neuen Ansatzes wurde daher eine Modell-Ringbrennkammer untersucht. Die Ergebnisse zeigen, dass sich alle wesentlichen Phänomene von Verbrennungsschwingungen in einer derartigen Geometrie darstellen lassen. Ausgehend von einer anfänglichen zufälligen Verteilung von Störungen entwickelt sich je nach Wahl der Parameter eine Instabilität, aus der sich ein Grenzzyklus bildet, oder die Störungen klingen ab. Instabilitäten weisen wiederum parameterabhängig unterschiedliche Modenformen auf. Dabei treten Umfangsschwingungen sowohl in rotierender, in stehender als auch in kombinierter Form auf.

Die Ausbildung eines Grenzzyklus wird wesentlich durch Sättigungseffekte in der Flammentransferfunktion bestimmt, die die maximale Wärmefreisetzungsschwankung begrenzen. Es konnte aber gezeigt werden, dass erst die zusätzliche Berücksichtigung der Verluste akustischer Energie im System, beispielsweise durch Transmission an den Rändern, einen Grenzzyklus tatsächlich möglich macht. Die Grenzamplitude hängt von der Sättigungsamplitude der Wärmefreisetzungsschwankung und der Summe der Verluste akustischer Energie ab. In der Simulation der Ringbrennkammer wurden unrealistisch hohe Schwingungsamplituden festgestellt. Dies ist zum Teil auf eine zu hoch gewählte Sättigungsamplitude zurückzuführen, zum Teil auf zu gering berechnete Verluste. Dies war nicht anders zu erwarten, da mit der Wellengleichung beispielsweise die Effekte des Energietransfers über die mittlere Strömung nicht berücksichtigt werden können.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass mit der in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungsmethode ein wirkungsvolles Verfahren zur Modellierung von Verbrennungsschwingungen in komplexen Systemen geschaffen wurde. In der vorliegenden Form kann es aber noch nicht direkt als Entwicklungswerkzeug eingesetzt werden. Wesentliche Aufgabe der Weiterentwicklung muss es daher sein, eine For-

mulierung zu implementieren, die zu einer korrekten Beschreibung aller relevanten energetischen Aspekte führt und damit verlässliche quantitative Aussagen erlaubt.

Anhang A

Ersatzbeziehung für die Energiegleichung

Für ein ideales Gas lässt sich jede Zustandsgröße über eine Zustandsfunktion durch zwei andere Zustandsgrößen darstellen. Beispielsweise kann die Dichte als Funktion des Drucks und der spezifischen Entropie angegeben werden:

$$\rho = \rho(p, s). \quad (\text{A.1})$$

Die substantielle Zeitableitung der Dichte lässt sich dann mit Hilfe der Kettenregel zu

$$\frac{D\rho}{Dt} = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \frac{Dp}{Dt} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_p \frac{Ds}{Dt} \quad (\text{A.2})$$

angeben. Durch Vergleich mit der Definition der Schallgeschwindigkeit ist leicht zu erkennen, dass

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s = \frac{1}{c^2}. \quad (\text{A.3})$$

Größere Schwierigkeiten bereitet die Auswertung der partiellen Ableitung $\left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_p$. Hierzu ist ein Umweg über die spezifische Enthalpie h nötig, die sich als Funktion von Temperatur und Druck schreiben lässt, $h = h(T, p)$. Dann gilt für das totale Differential

$$dh = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p dT + \left. \frac{\partial h}{\partial p} \right|_T dp. \quad (\text{A.4})$$

Gleichzeitig liefert die Gibbs'sche Fundamentalgleichung

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho}. \quad (\text{A.5})$$

Aus einem Vergleich der Summanden der Gleichungen (A.4) und (A.5) folgt

$$\left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p dT = T ds. \quad (\text{A.6})$$

Mit der Definition für die spezifische Wärmekapazität $c_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p$ und der Zustandsgleichung für ideale Gase $p = \rho RT$ wird Gleichung (A.6) zu

$$c_p d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho} ds \quad (\text{A.7})$$

oder

$$c_p \frac{d\left(\frac{p}{\rho}\right)}{ds} = \frac{p}{\rho}. \quad (\text{A.8})$$

Mit $d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} dp - \frac{p}{\rho^2} d\rho$ ergibt sich nach Einsetzen in Gleichung (A.8) für Zustandsänderungen bei konstantem Druck (das heißt $\left. \frac{d}{ds} \right|_p$ wird durch $\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_p$ ersetzt):

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_p = -\frac{\rho}{c_p}. \quad (\text{A.9})$$

Die beiden Beziehungen (A.3) und (A.9) liefern zusammen mit Gleichung (A.2) den gesuchten Zusammenhang:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{c^2} \frac{Dp}{Dt} - \frac{\rho}{c_p} \frac{Ds}{Dt}. \quad (\text{A.10})$$

Er stellt eine Alternative zu einer Formulierung der Energieerhaltung beispielsweise durch eine Transportgleichung für die Enthalpie oder die Temperatur dar. Nützlich ist dieser Ansatz, wenn sich der Energiehaushalt einer Strömung leicht über die Entropie beschreiben lässt. Das ist bei einer isentropen Strömung oder bei einer Strömung mit externer Wärmezufuhr gegeben.

Anhang B

Simulation von Transfermatrizen

B.1 Allgemeines und Motivation

Wie im Abschnitt 2.3.2 auf den Seiten 40 f. erläutert wurde, spielen Netzwerke aus akustischen Zweitoren zur Beschreibung akustischer Systeme im Allgemeinen und für die thermoakustische Stabilitätsanalyse im Besonderen eine wichtige Rolle. Sie sind insbesondere wegen ihrer hohen Effizienz geschätzt und können überall dort gut eingesetzt werden, wo sich die akustischen Vorgänge auf die Beschreibung einer eindimensionalen Ausbreitung von Moden zurückführen lässt. Voraussetzung ist, dass für alle Systemelemente eine Charakterisierung durch ihre Transfermatrizen vorliegt.

Für einfache Elemente wie gerade Rohrstücke sind leicht analytische Beziehungen für die Transfermatrix zu finden. In komplexeren Situationen gelingt dies jedoch meist nicht. Dann kommen experimentelle Methoden zum Einsatz, die aus Druckmessungen an mehreren Orten mit Hilfe der Fourier-Analyse eine Modenzerlegung mit nachgeschalteter Berechnung der Transfermatrix erlauben. Im Bereich der klassischen Rohrakustik wurden diese Methoden schon seit langem entwickelt und erfolgreich eingesetzt [132–137].

Eine Adaption dieser Verfahren für thermoakustische Fragestellungen in technischen Verbrennungssystemen gestaltet sich jedoch schwierig. Die Transfermatrix der Flamme, deren Kenntnis für die Berechnung von Verbrennungsschwingungen mit Netzwerkmodellen essentiell ist, ist einer direkten messtechnischen Bestimmung nur schwer zugänglich. Der Grund hierfür liegt in der hohen Sensitivität der erwähnten Messmethoden gegenüber Fehlereinflüssen, die bei einer Verbrennungseinrichtung auf Grund des turbulenten Flammenlärms und der inhomogenen Temperaturverteilung kaum zu ver-

meiden sind. Daher existieren nur wenige Veröffentlichungen, die befriedigende Ergebnisse für die Flammentransfermatrix eines technischen Brenners zeigen. Wenn dies wie beispielsweise bei Paschereit et al. [70] dennoch gelingt, ist der dahinter stehende Aufwand meist sehr hoch.

Wesentlich leichter als die Transfermatrix kann die Transferfunktion der Flamme gemessen werden, da sie nur zwei Größen (typischerweise die Fluktuationen der Brenneraustrittsgeschwindigkeit und der Wärmefreisetzungsrate) und nicht vier (Druck- und Geschwindigkeitsfluktuationen stromauf und stromab der Flamme) miteinander koppelt. Auch ist deren Messung weniger kritisch im Hinblick auf Fehlereinflüsse.

Die folgenden Abschnitte beschreiben ein Verfahren, das basierend auf Simulationen des akustischen Feldes im Frequenzbereich die Berechnung von Transfermatrizen erlaubt. Es stützt sich dabei zum wesentlichen Teil auf die gleichen Algorithmen, die auch den messtechnischen Verfahren zu Grunde liegen. Zusätzlich bietet es die Möglichkeit, vorhandene Flammentransferfunktionen in die Simulation mit einzubeziehen und auf diesem Weg auch Flammentransfermatrizen zu erhalten. Dieses Verfahren stellt somit nicht nur eine effiziente Alternative zur Transfermatrixmessung für rein akustische Systeme dar, sondern zeigt auch einen vielversprechenden Weg zur akustischen Charakterisierung von Verbrennungssystemen auf.

B.2 Beschreibung der Methode

B.2.1 Bestimmung von Transfermatrizen

Die (experimentelle) Bestimmung von Transfermatrizen beruht auf der Idee, das zu untersuchende Element so in ein akustisches Feld einzubringen, dass es an seinen Rändern ebenen Wellen ausgesetzt ist. Gelingt es dann, jeweils Schallschnelle und Schalldruck an den beiden Grenzen zu bestimmen, ist die Transfermatrix festgelegt. Die-

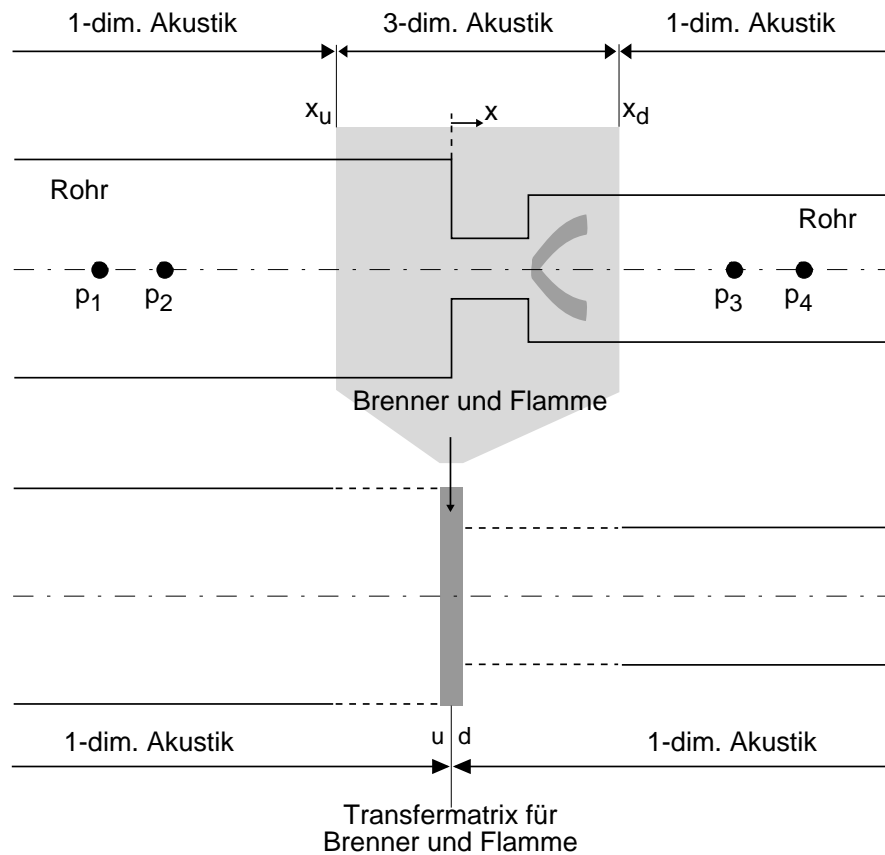


Abbildung B.1: Schema der Transfermatrix-Bestimmung für einen Brenner mit Flamme.

ses Konzept ist für die Transfermatrixmessung eines Brenners mit Flamme schematisch in Abbildung B.1 dargestellt. Mit den in dieser Skizze gewählten Bezeichnungen für die Elementgrenzen⁵⁷ beschreibt die Transfermatrix \mathbf{T} den Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_d \\ \hat{u}_d \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \hat{p}_u \\ \hat{u}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_u \\ \hat{u}_u \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Das zu untersuchende Testelement befindet sich zwischen zwei Rohren konstanten Querschnitts. Bei einer akustischen Anregung des Systems an seinen Rändern durch einen Lautsprecher oder eine Sirene mit einer festen Frequenz unterhalb der Grenzfrequenz der Roh-

⁵⁷Dabei steht u für die stromauf gelegene Ebene vom englischen „upstream“, d für die stromab gelegene Ebene vom englischen „downstream“.

re für nicht ebene Moden bildet sich in den Rohren ein rein eindimensionales akustisches Feld aus. An einem beliebigen Punkt mit der axialen Koordinate x_i ist dieses Feld nach Gleichung (2.39) in die stromab und die stromauf laufende Druckwelle (die Riemann-Invarianten) zerlegbar,

$$\hat{p}_i = \hat{p}_i^+ + \hat{p}_i^-, \quad (\text{B.2})$$

wobei die Ausbreitung dieser Wellen in Kanälen konstanten Querschnitts beim Fehlen einer mittleren Strömung durch

$$\hat{p}_i^\pm = \hat{p}_0^\pm e^{\mp i\omega x_i/\bar{c}}, \quad (\text{B.3})$$

beschrieben wird, mit den komplexen Amplituden \hat{p}_0^+ und \hat{p}_0^- der Riemann-Invarianten an der Stelle $x = 0$. Die Annahme, dass keine mittlere Strömung herrscht, ist für viele Anwendungen eine akzeptable Vereinfachung. Die Mach-Zahlen sind dann so klein, dass sich nur geringe Fehler ergeben. Im Übrigen ergibt sich hieraus keine allgemeine Einschränkung. Die nachfolgend hergeleiteten Beziehungen lassen sich problemlos auf unterschiedliche Wellenzahlen k^+ und k^- für die stromab und stromauf laufenden Wellen entsprechend Gleichung (2.39) erweitern. Dies unterbleibt hier, um eine klarere Darstellung zu erhalten.

Sind die komplexen Schalldruckamplituden \hat{p}_i und \hat{p}_j an zwei beliebigen Stellen x_i und x_j innerhalb eines Rohrs bekannt, erlauben die Gleichungen (B.2) und (B.3) nach Umformung eine Berechnung der Riemann-Invarianten⁵⁸:

$$\hat{p}_0^\pm = \frac{\hat{p}_i e^{\pm i\omega x_j/\bar{c}} - \hat{p}_j e^{\pm i\omega x_i/\bar{c}}}{e^{\pm i\omega(x_j-x_i)/\bar{c}} - e^{\pm i\omega(x_i-x_j)/\bar{c}}}. \quad (\text{B.4})$$

Dies lässt sich sowohl für das stromauf als auch das stromab liegende Rohr durchführen, womit sich die Riemann-Invarianten $\hat{p}_{0,u}^\pm$ und $\hat{p}_{0,d}^\pm$ ergeben. Mit Gleichung (B.3) wiederum ist deren Ausbreitung bis zu den Positionen x_u und x_d beschreibbar, die als Referenzebenen für die Transfermatrix dienen. Diese Referenzebenen müssen übrigens nicht

⁵⁸Dies gilt auch für den Fall, dass an einer der Stellen x_i und x_j ein Schalldruckknoten zu liegen kommt. Der Ansatz ist in dieser Hinsicht allgemein gültig.

mit den wahren Grenzen des untersuchten akustischen Elements zusammenfallen. Die Ausbreitung der Riemann-Invarianten kann fiktiv bis zu jedem willkürlich gedachten Ort fortgesetzt werden. So ist es insbesondere möglich, wie in Abbildung B.1 angedeutet, die Referenzebenen an einer Stelle zusammenfallen zu lassen und damit Brenner und Flamme als kompaktes Element zu behandeln.

Unter Verwendung der Gleichungen (B.2) und (B.3) sind die komplexen Schalldruckamplituden an diesen Orten gegeben,

$$\begin{aligned}\hat{p}_u &= \hat{p}_{0,u}^+ e^{-i\omega x_u/\bar{c}_u} + \hat{p}_{0,u}^- e^{i\omega x_u/\bar{c}_u}, \\ \hat{p}_d &= \hat{p}_{0,d}^+ e^{-i\omega x_d/\bar{c}_d} + \hat{p}_{0,d}^- e^{i\omega x_d/\bar{c}_d}.\end{aligned}\tag{B.5}$$

Analog können mit Hilfe von Gleichung (2.40) auch die komplexen Amplituden der Schallschnellen berechnet werden:

$$\begin{aligned}\hat{u}_u &= \frac{1}{\bar{\rho}_u \bar{c}_u} \left(\hat{p}_{0,u}^+ e^{-i\omega x_u/\bar{c}_u} - \hat{p}_{0,u}^- e^{i\omega x_u/\bar{c}_u} \right), \\ \hat{u}_d &= \frac{1}{\bar{\rho}_d \bar{c}_d} \left(\hat{p}_{0,d}^+ e^{-i\omega x_d/\bar{c}_d} - \hat{p}_{0,d}^- e^{i\omega x_d/\bar{c}_d} \right).\end{aligned}\tag{B.6}$$

Diese Gleichungen berücksichtigen, dass in den beiden Rohren unterschiedliche Schallgeschwindigkeiten \bar{c}_u und \bar{c}_d herrschen können.

Aus der Bestimmung der komplexen Schalldruckamplituden \hat{p}_1 und \hat{p}_2 stromauf und \hat{p}_3 und \hat{p}_4 stromab für einen akustischen Anregungszustand (*I*) resultieren also die Schalldrücke und Schallschnellen an den Referenzpositionen x_u und x_d . Durch Einsetzen des Ergebnisses in die Definitionsgleichung der Transfermatrix, Gleichung (B.1), ergeben sich zwei Gleichungen, wobei die vier Elemente der Transfermatrix die Unbekannten darstellen. Eine Wiederholung der geschilderten Prozedur für einen zweiten, linear unabhängigen Anregungszustand (*II*) führt dann zu einem bestimmten linearen Gleichungs-

system,

$$\begin{aligned}
 \hat{p}_d^I &= T_{11} \hat{p}_u^I + \bar{\rho} \bar{c} T_{12} \hat{u}_u^I, \\
 \hat{u}_d^I &= T_{21} \hat{p}_u^I / (\bar{\rho} \bar{c}) + T_{22} \hat{u}_u^I, \\
 \hat{p}_d^{II} &= T_{11} \hat{p}_u^{II} + \bar{\rho} \bar{c} T_{12} \hat{u}_u^{II}, \\
 \hat{u}_d^{II} &= T_{21} \hat{p}_u^{II} / (\bar{\rho} \bar{c}) + T_{22} \hat{u}_u^{II},
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

dessen Lösung die gesuchte Transfermatrix für die Frequenz des Anregungssignals liefert. Um die Transfermatrix für einen bestimmten Bereich zu erhalten, muss das Verfahren entsprechend für verschiedene Anregungsfrequenzen durchgeführt werden⁵⁹. Um die Lösbarkeit des Gleichungssystems sicherzustellen, muss die lineare Unabhängigkeit der Anregungszustände gewährleistet sein. Dies ist notwendigerweise immer dann gegeben, wenn einmal auf der Seite stromauf und das zweite Mal auf der Seite stromab angeregt wird [138].

Dieses Verfahren zur Transfermatrizenbestimmung zeigt teilweise eine hohe Sensitivität gegenüber Fehlern in der Schallgeschwindigkeit, der Frequenz oder der Position der Druckmessstellen oder auch den gemessenen Schalldruckamplituden, die als Parameter in die Berechnung eingehen. Ausführlich wird diese Thematik in der Arbeit von Fischer [125] diskutiert. Eine anschauliche Erklärung liefert folgende Überlegung. In dem angeregten System bildet sich im Allgemeinen ein stehendes Wellenfeld aus. Zumindest für bestimmte Frequenzen liegen dann die Referenzpositionen x_u und x_d in der Nähe von Knoten des Schalldrucks oder der Schallschnelle, das heißt wenigstens einer dieser Werte wird vom Betrag her sehr klein. Dann können auch kleine absolute Fehler bei den Messgrößen zu großen relativen Fehlern führen, die sich bis zu den Werten für die Transfermatrix fortpflanzen.

Unter diesem Gesichtspunkt ist eine Betrachtung der Riemann-

⁵⁹Alternativ kann im Experiment mit einer breitbandigen Anregung gearbeitet werden. Eine Fourier-Analyse liefert dann die Informationen für einen ganzen Frequenzbereich, allerdings ist diese Methode empfindlicher im Hinblick auf Fehlereinflüsse. Für das in diesem Abschnitt beschriebene Berechnungsverfahren ist sie nicht anwendbar, da die Simulation im Frequenzbereich wie nachfolgend gezeigt die Vorgabe einer diskreten Frequenz erfordert.

Invarianten interessant. Sie haben entsprechend Gleichung (B.3) die Eigenschaft, sich in Kanälen konstanten Querschnitts mit konstanter Amplitude auszubreiten und dabei nur die Phase zu drehen. Fehler, die in ihrer Bestimmung an einem Ort gemacht werden, äußern sich daher an einem anderen Ort in einem identischen Betragsfehler und einem Phasenfehler von der gleichen Größenordnung der ihn verursachenden Fehler. Die Riemann-Invarianten sind also deutlich weniger problematisch hinsichtlich ihrer Transformation zwischen zwei Positionen als die zugehörigen physikalischen Größen Schalldruck und Schallschnelle. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, eine alternative Definition der Transfermatrix einzuführen, die eben gerade die Riemann-Invarianten stromab zu denen stromauf in Beziehung setzt:

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_d^+ \\ \hat{p}_d^- \end{pmatrix} = \mathbf{T}^* \begin{pmatrix} \hat{p}_u^+ \\ \hat{p}_u^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{p}_u^+ \\ \hat{p}_u^- \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Diese Formulierung hat die Eigenschaft, dass kleine Unterschiede oder Fehler in den Parametern des akustischen Systems zu wesentlich ähnlicheren Transfermatrizen führen als mit der ursprünglichen Definition nach Gleichung (B.1). Sie stellt daher unter Umständen eine bessere Basis für die Interpretation eines Systems dar, die aber lediglich auf einer unterschiedlichen Betrachtungsweise beruht. Beide Transfermatrixdefinitionen lassen sich ineinander überführen. Die Beziehungen zur Berechnung der Elemente der Transfermatrix in der Notation in Riemann-Invarianten aus denen der Notation in Schalldruck und Schallschnelle lauten

$$\begin{aligned} T_{11}^* &= \frac{1}{2} \left(T_{11} + T_{12} \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{\bar{\rho}_u\bar{c}_u} + T_{21} \frac{\bar{\rho}_d\bar{c}_d}{\bar{\rho}\bar{c}} + T_{22} \frac{\bar{\rho}_d\bar{c}_d}{\bar{\rho}_u\bar{c}_u} \right), \\ T_{12}^* &= \frac{1}{2} \left(T_{11} - T_{12} \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{\bar{\rho}_u\bar{c}_u} + T_{21} \frac{\bar{\rho}_d\bar{c}_d}{\bar{\rho}\bar{c}} - T_{22} \frac{\bar{\rho}_d\bar{c}_d}{\bar{\rho}_u\bar{c}_u} \right), \\ T_{21}^* &= \frac{1}{2} \left(T_{11} + T_{12} \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{\bar{\rho}_u\bar{c}_u} - T_{21} \frac{\bar{\rho}_d\bar{c}_d}{\bar{\rho}\bar{c}} - T_{22} \frac{\bar{\rho}_d\bar{c}_d}{\bar{\rho}_u\bar{c}_u} \right), \\ T_{22}^* &= \frac{1}{2} \left(T_{11} - T_{12} \frac{\bar{\rho}\bar{c}}{\bar{\rho}_u\bar{c}_u} - T_{21} \frac{\bar{\rho}_d\bar{c}_d}{\bar{\rho}\bar{c}} + T_{22} \frac{\bar{\rho}_d\bar{c}_d}{\bar{\rho}_u\bar{c}_u} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Hierbei muss sorgfältig zwischen den unterschiedlichen charakteristischen Impedanzen unterschieden werden. Die Größe $\bar{\rho}\bar{c}$ kommt

aus Gleichung (B.1), dient der Skalierung der Druckwerte und kann prinzipiell beliebig aus den unter Umständen unterschiedlichen charakteristischen Impedanzen innerhalb des Systems gewählt werden. Dagegen beziehen sich die Größen $\bar{\rho}_u \bar{c}_u$ und $\bar{\rho}_d \bar{c}_d$ entsprechend Gleichung (B.6) direkt auf die Rohre stromauf und stromab des Testelements und müssen mit den dort herrschenden Werten belegt werden.

B.2.2 Simulationsverfahren

B.2.2.1 Grundlage

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Methode hat ihren Ursprung in der experimentellen Bestimmung von Transfermatrizen aus Schalldruckmessungen. Genauso kann ein akustisches Feld aber auch in einer numerischen Simulation berechnet werden, woraus sich dann in völlig analoger Weise die Transfermatrix extrahieren lässt. Grundlage hierfür ist die inhomogene Helmholtz-Gleichung (2.33), die hier der Übersichtlichkeit wegen nochmals wiedergeben ist:

$$\frac{\omega^2}{\bar{c}^2} \hat{p} + \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \hat{p} \right) = -i\omega \frac{\kappa - 1}{\bar{c}^2} \hat{q}_V. \quad (\text{B.10})$$

Durch die Formulierung im Frequenzbereich ergeben sich einige Auswirkungen auf die Simulation:

- Die Kreisfrequenz ω stellt einen Parameter für die Simulation dar. Eine Rechnung liefert also nur die Ergebnisse für eine diskrete Frequenz. Um eine Transfermatrix für ein ganzes Frequenzband zu erhalten, sind entsprechend mehrere Rechenläufe für unterschiedliche Frequenzen durchzuführen.
- Als Ergebnis der Simulation sind an den „Messstellen“ x_1 bis x_4 direkt die komplexen Schalldruckamplituden vorhanden. Daher müssen die Betrags- und Phaseninformationen nicht mehr in aufwändiger Weise durch Fourier-Analyse aus Zeitreihen abgeleitet werden. Ohnehin ergibt sich gegenüber einer Berechnung im Zeitbereich ein deutlicher Rechenzeitvorteil.

- Die Einbindung einer gemessenen Flammentransferfunktion über den Quellterm auf der rechten Seite gestaltet sich sehr einfach, da diese Daten von vornherein im Frequenzbereich vorliegen. Dies wird weiter unten noch genauer ausgeführt.

B.2.2.2 Randbedingungen

Bei einer Simulation im Frequenzbereich können an den Rändern in einfacher Weise akustische Impedanzen $Z(\omega) = \hat{p}(\omega)/\hat{u}_n(\omega)$ vorgegeben werden, wenn u_n die zum Rand normale Geschwindigkeitskomponente ist und angenommen wird, dass die zum Rand parallelen Geschwindigkeitsschwankungen unbeeinflusst bleiben. Solche Randbedingungen lassen sich durch eine Transformation der Impulsgleichung, Gleichung (2.3), in Randnormalenrichtung in den Frequenzraum formulieren. Das Verfahren hierzu wurde im Abschnitt 2.2.3 auf den Seiten 34 ff. vorgestellt. In einem ruhenden oder langsam strömenden Medium ergibt sich die Beziehung

$$i\omega\hat{u}_n = -\frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{n} \cdot \nabla \hat{p}. \quad (\text{B.11})$$

Der Normalenvektor \mathbf{n} zeigt genauso wie \hat{u}_n nach außen aus dem Berechnungsgebiet heraus. Wenn nun die Impedanz auf dem Rand,

$$Z = \frac{\hat{p}}{\hat{u}_n} \text{ auf } \partial\Omega, \quad (\text{B.12})$$

gegeben ist, muss demnach die Randbedingung

$$i\omega\frac{\hat{p}}{Z} + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{n} \cdot \nabla \hat{p} = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (\text{B.13})$$

erfüllt werden, die nun wie die Grundgleichung, Gleichung (B.10), nur noch die komplexe Schalldruckamplitude als Unbekannte enthält.

Für akustisch perfekt reflektierende Wände gilt $Z \rightarrow \infty$, so dass die wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuationen verschwinden. Dies stellt für die meisten Anwendungsfälle eine gute Näherung dar. Natürlich lassen sich aber, sofern bekannt, auch die tatsächlichen Impedanzen verwenden.

Über die Randbedingungen muss auch die für die Transfermatrizenberechnung essentielle akustische Anregung am Einlass (linker Rand, lR) beziehungsweise Auslass (rechter Rand, rR) modelliert werden. Dies geschieht über die Vorgabe einer anregenden randnormalen Geschwindigkeitsfluktuation $\hat{u}_{n,a} \neq 0$ an einem der beiden Ränder, während der andere passiv wirkt ($\hat{u}_{n,a} = 0$). Die Geschwindigkeitsanregung stellt eine Impulsquelle dar. Gleichung (B.13) nimmt daher die modifizierte Form

$$i\omega \frac{\hat{p}}{Z_{lR/rR}} + \frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{n} \cdot \nabla \hat{p} = i\omega \hat{u}_{n,a,lR/rR} \quad \text{auf } \partial\Omega_{lR/rR} \quad (\text{B.14})$$

an. Durch den Wechsel der Anregung von der Seite stromauf zur Seite stromab bei gleicher Frequenz ergeben sich, wie bereits erwähnt, auf jeden Fall zwei linear unabhängige Testzustände. Die Impedanz am anregenden und am passiven Ende beeinflussen zwar für den einzelnen Fall die Gestalt des akustischen Felds, die sich aus zwei Rechnungen ergebende Transfermatrix ist dadurch jedoch unbeeinflusst. Die Impedanzen Z_{lR} und Z_{rR} am Einlass und Auslass können daher weitgehend willkürlich gewählt werden. Allerdings sollte der Betrag der Impedanz der Anregung nicht zu nah bei Null sein, damit eine endliche Amplitude der Geschwindigkeitsanregung zu ausreichend hohen Druckamplituden führt⁶⁰.

B.2.2.3 Flammentransferfunktion

Durch die inhomogene Form der zu lösenden akustischen Grundgleichung (B.10) ist es möglich, auch die Effekte einer als Wärmefreisetzungquelle modellierten Flamme in der Transfermatrizenberechnung zu berücksichtigen. Dies ist besonders einfach, wenn die Flamme durch eine Transferfunktion $F(\omega)$ beschrieben ist. Typischerweise setzt eine derartige Transferfunktion die Schwankungen der Wärmefreisetzungsrates \dot{q}'_V zu den Schwankungen einer charakteristischen Brennergeschwindigkeit u'_B an einer bestimmten Stelle \mathbf{x}_B in Beziehung, die repräsentativ für Fluktuationen des Brennstoffmas-

⁶⁰ $Z \rightarrow 0$ bedingt, wie Gleichung (B.13) zeigt, $\hat{p} \rightarrow 0$. In diesem Fall wird keine akustische Energie in das System eingetragen, es baut sich kein Schalldruckfeld auf.

senstroms, der Luftzahl oder der Strömungsform sind:

$$\hat{q}_V(\omega, \mathbf{x}) = F(\omega, \mathbf{x}) \cdot \hat{u}_B(\omega). \quad (\text{B.15})$$

Um diese Beziehung für eine numerische Simulation basierend auf Gleichung (B.10) zu nutzen, ist es erforderlich, die Schwankungsgeschwindigkeit \hat{u}_B aus dem Schalldruckfeld zu bestimmen. Das ist mit Hilfe der Impulsgleichung

$$i\omega\hat{u} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\hat{p}. \quad (\text{B.16})$$

möglich, die sich an der Stelle \mathbf{x}_B ausgewertet zu

$$u_B = \frac{i}{\omega} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \mathbf{e}_B \cdot \nabla \hat{p} \right)_{\mathbf{x}_B} \quad (\text{B.17})$$

umformen lässt⁶¹. Dabei ist \mathbf{e}_B der Einheitsvektor mit der Richtung von \hat{u}_B . Durch Einsetzen der Gleichungen (B.15) und (B.17) in Gleichung (B.10) ergibt sich schließlich

$$\bar{\rho}\nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla\hat{p} \right) + \frac{\omega^2}{\bar{c}^2}\hat{p} = -\frac{\kappa-1}{\bar{c}^2}F(\omega, \mathbf{x}) \left(\frac{1}{\bar{\rho}}\mathbf{e}_B \cdot \nabla\hat{p} \right)_{\mathbf{x}_B}. \quad (\text{B.18})$$

Zusammen mit den Randbedingungen, Gleichungen (B.13) und (B.14), stellt diese Gleichung die vollständige Beschreibung des akustischen Systems unter Einbeziehung der Flammendynamik dar und kann so für die numerische Simulation zur Transfermatrixberechnung genutzt werden.

B.2.2.4 Ablauf der Berechnung

Gleichung (B.18) ist eine stationäre partielle Differentialgleichung der in Abschnitt 3.2.1 durch Gleichung (3.1) dargestellten Form. Sie kann mit den dort gezeigten Methoden durch den Finite-Element-Code FEMLAB gelöst werden. Das Ergebnis wird anschließend einer

⁶¹Auf diese Weise könnten auch jeweils an einem Ort stromauf und stromab sowohl der komplexe Schalldruck als auch die komplexe Schallschnelle und daraus direkt die Riemann-Invarianten bestimmt werden. Dadurch ließe sich jeweils eine Ebene für die Bestimmung des Schalldrucks einsparen. Der Aufwand ist durch die zusätzlich nötige Berechnung der Schallschnelle aber vergleichbar mit dem zuvor beschriebenen Verfahren.

weiteren Auswertung zugeführt, die der Berechnung der Transfermatrix dient.

Im Einzelnen ergeben sich für den Berechnungsprozess folgende Schritte:

1. Modellierung der Geometrie, dabei Erweiterung des zu untersuchenden Elements um Rohrstücke konstanten Querschnitts stromauf und stromab.
2. Vernetzung der Geometrie.
3. Numerische Lösung der Gleichung (B.18) für
 - eine vorgegebene Frequenz,
 - dem zu dieser Frequenz gehörenden Wert der Flammtransferfunktion und
 - die Vorgabe einer Anregung auf der Seite stromauf.
4. Abspeichern der komplexen Schalldruckamplituden an den Positionen x_1 bis x_4 .
5. Wiederholung der Punkte 3. und 4. für die Vorgabe einer Anregung stromab.
6. Wiederholung der Punkte 3. bis 5. für alle interessierenden Frequenzen.
7. Berechnung der Transfermatrix entsprechend Abschnitt B.2.1 aus den gespeicherten Schalldruckamplituden für alle untersuchten Frequenzen.

B.2.2.5 Verifikation

Zur Verifikation der korrekten Implementierung des Transfermatrizen-Berechnungsverfahrens bietet sich der Vergleich mit einer analytischen Lösung für einen einfachen Testfall an. Dieses rein hypothetische Beispiel ist in Abbildung B.2 dargestellt. In einem Kanal konstanten Querschnitts befinde sich ein Medium, das überall eine

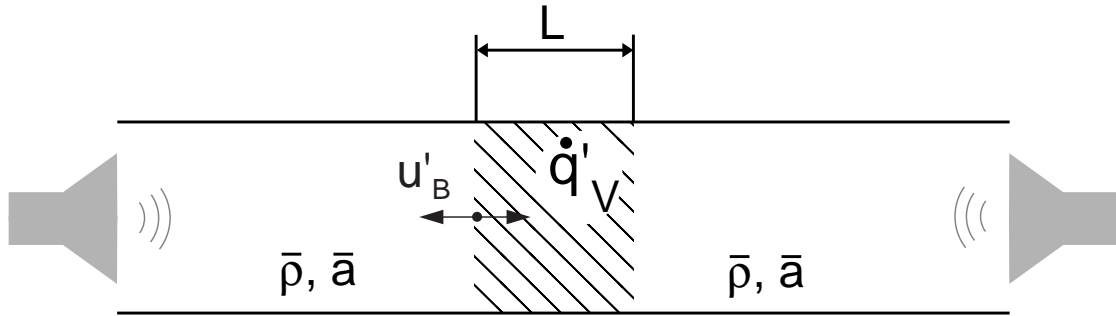


Abbildung B.2: Testbeispiel zur Verifikation des Berechnungsverfahrens.

konstante Dichte und konstante Schallgeschwindigkeit aufweise. In einem Abschnitt der Länge L befinde sich eine Wärmefreisetzungsquelle⁶². Ihre Schwankungen sollen proportional zu den Geschwindigkeitsfluktuationen am Beginn der Wärmefreisetzungszone sein:

$$\hat{q}_V = C \cdot \hat{u}_B, \quad C = \text{const.} \quad (\text{B.19})$$

Die Transferfunktion der Wärmequelle, die die Flammentransferfunktion repräsentiert, ist hier also lediglich eine Konstante.

Die analytische Lösung für die Transfermatrix dieses Beispiels lässt sich direkt aus den Erhaltungsgleichungen herleiten. Durch gemeinsame Integration der Impulsgleichung

$$i\omega \hat{u} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\hat{p}}{dx} = 0 \quad (\text{B.20})$$

und der Energiegleichung

$$i\omega \hat{p} + \bar{\rho} \bar{c}^2 \frac{d\hat{u}}{dx} = (\kappa - 1) \hat{q} \quad (\text{B.21})$$

über die Länge L der Wärmequelle ergeben sich zwei Beziehungen, die die Werte von Schalldruck \hat{p}_d und Schallschnelle \hat{u}_d am Ende der Wärmefreisetzungszone als Funktion derer an ihrem Beginn (\hat{p}_u und

⁶²Die mittlere Wärmefreisetzungsrate soll also so gering angenommen werden, dass die Annahme einer überall konstanten Dichte in guter Näherung gerechtfertigt ist.

\hat{u}_u) ausdrücken:

$$\hat{p}_d = \frac{1}{\omega} \left[(i(\kappa - 1)C\hat{u}_u + \omega\hat{p}_u) \cos\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right) - i \left((\kappa - 1)C + \bar{\rho}\bar{c}\omega \sin\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right) \right) \hat{u}_u \right] \quad (\text{B.22})$$

$$\hat{u}_d = \hat{u}_u \cos\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right) + \frac{((\kappa - 1)C\hat{u}_u - i\omega\hat{p}_u) \sin\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right)}{\bar{\rho}\bar{c}\omega}. \quad (\text{B.23})$$

Hieraus lassen sich durch einen Vergleich mit Gleichung (B.1) nun direkt die Elemente der Transfermatrix ablesen:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \cos\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right) \\ T_{12} &= i \left(\frac{(\kappa - 1)C (\cos\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right) - 1)}{\bar{\rho}\bar{c}\omega} - \sin\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right) \right) \\ T_{21} &= -i \sin\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right) \\ T_{22} &= \cos\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right) + \frac{(\kappa - 1)C \sin\left(\frac{L\omega}{\bar{c}}\right)}{\bar{\rho}\bar{c}\omega}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

In Abbildung B.3 ist diese Lösung für eine willkürliche Wahl der Werte von L und C zusammen mit der Lösung aus dem numerischen Simulationsverfahren gezeigt. Die Übereinstimmung ist offensichtlich. Der Ansatz zur Berechnung der Transfermatrizen erweist sich somit im Hinblick auf die korrekte Einbindung einer Flammentransferfunktion als tauglich.

B.3 Anwendung

B.3.1 Beispielkonfiguration

Zur Demonstration des vorgestellten Simulationsverfahrens dient als Beispiel der in der Arbeit von Fischer [125] verwendete Versuchsstand, von dem experimentelle Daten zu Transfermatrizen und

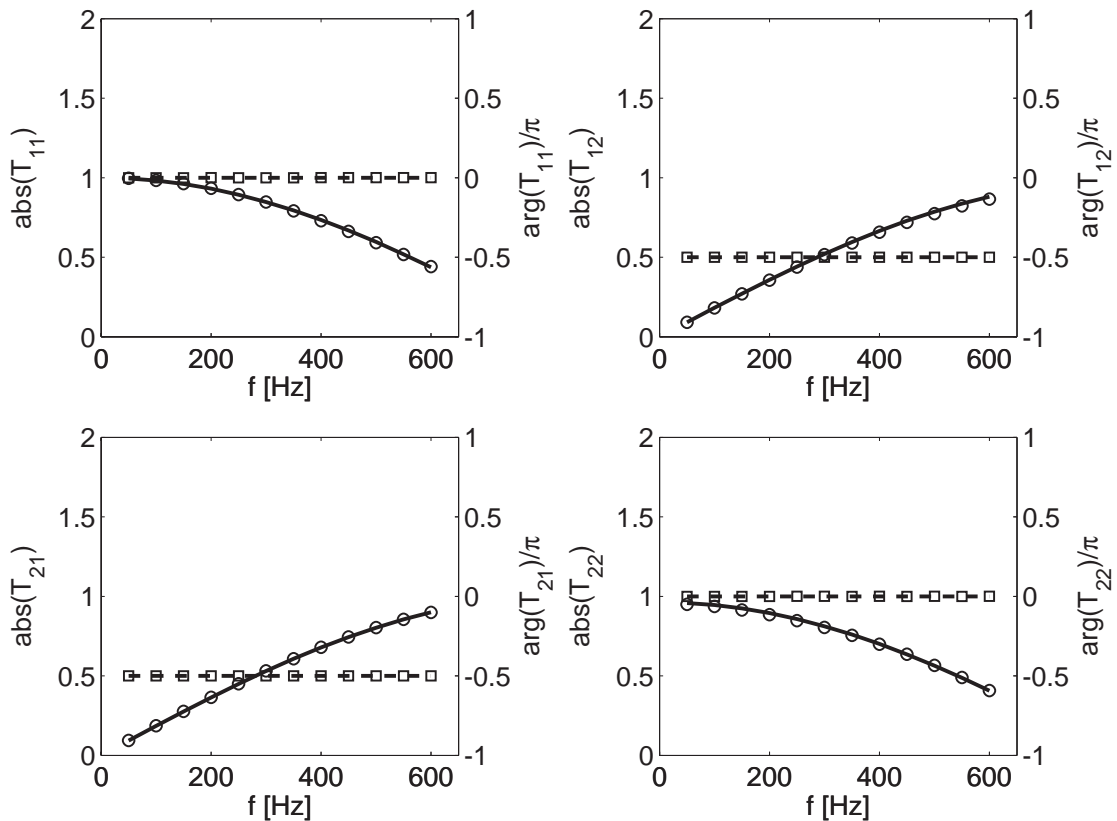


Abbildung B.3: Transferfunktion der Wärmequelle in einem Kanal. — Betrag, - - - Phase der analytischen Lösung. ○ Betrag, □ Phase der numerischen Lösung.

Flammentransferfunktionen vorliegen. Er ist schematisch in Abbildung B.4 dargestellt. Bei dem eingesetzten Brenner handelt es sich um einen Versuchs-Drallbrenner, der mit einem extern perfekt vorge-mischten Erdgas-Luft-Gemisch betrieben wird. Das System lässt sich durch Sirenen sowohl auf der Zufuhr- als auch der Brennkammer-seite akustisch anregen. Als Instrumentierung sind zum einen mehrere Mikrofone vorhanden, die eine messtechnische Bestimmung der Transfermatrix auf Basis des im Abschnitt B.2.1 erläuterten Wegs er-lauben. Des Weiteren ist eine Messung der Flammentransferfunktion möglich. Hierzu können die Schwankungen der Geschwindigkeit im Brennermund mit einer Hitzdrahtsonde gemessen werden. Als Maß für die Wärmefreisetzung wird mit einer Photodiode über einen op-

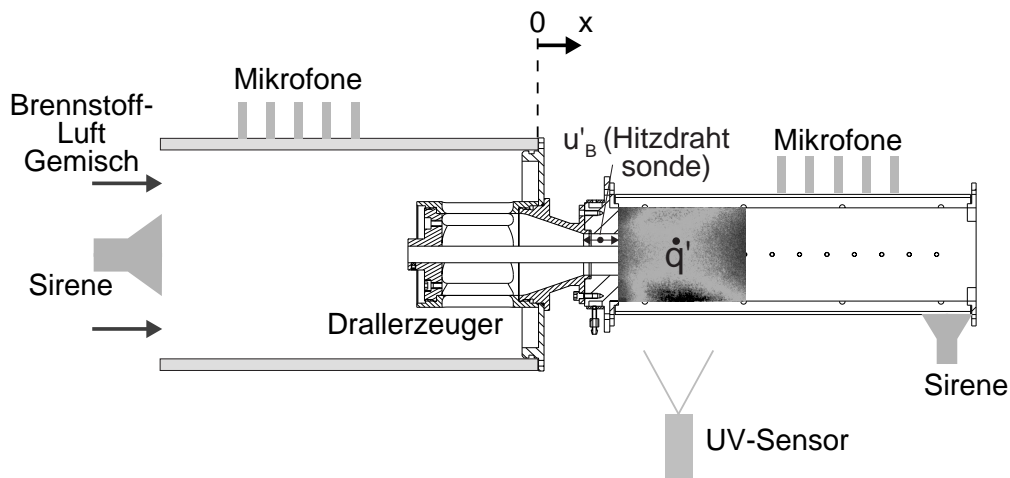


Abbildung B.4: Schematische Darstellung des Drallbrenner-Versuchsstands.

tischen Zugang die Chemilumineszenz des OH^* -Radikals gemessen⁶³. Die Photodiode liefert allerdings nur einen integralen Wert, so dass eine örtlich aufgelöste Flammentransferfunktion nicht zur Verfügung steht, das heißt $F(\omega, \mathbf{x}) = F(\omega)$. Für detailliertere Informationen zum Versuchsaufbau und Brenner sei auf Fischer [125] verwiesen.

B.3.2 Finite-Element-Modell

Die geometrischen Daten des Brenners und des Versuchsstands bilden den Ausgangspunkt für die Erstellung des Finite-Element-Modells. Abbildungen B.5 und B.6 zeigen die vernetzte Geometrie und einen Ausschnitt im Bereich des Brenners. Gut ist zu erkennen, wie auch die komplexe Geometrie des Drallerzeugers in ihren Details aufgelöst wird. Das Netz besteht aus etwa 20000 Elementen. Zur Untersuchung des Einflusses der Elementgröße auf die Genauigkeit wurde auch ein verfeinertes Netz mit etwa 80000 Elementen eingesetzt. Mit diesem Netz ergeben sich keine signifikanten Änderungen der Ergebnisse, weshalb bereits die mit dem gröberen Netz berechnete Lösung als netzunabhängig angesehen werden kann.

⁶³Nähere Untersuchungen hatten gezeigt, dass diese Größe auf Grund der externen Vormischung tatsächlich linear mit der Wärmefreisetzungsrate korreliert.

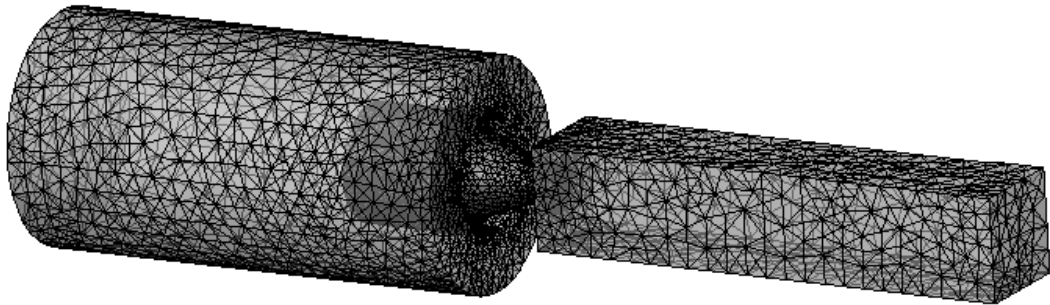


Abbildung B.5: Finite-Element-Modell des Drallbrenner-Versuchsstands.

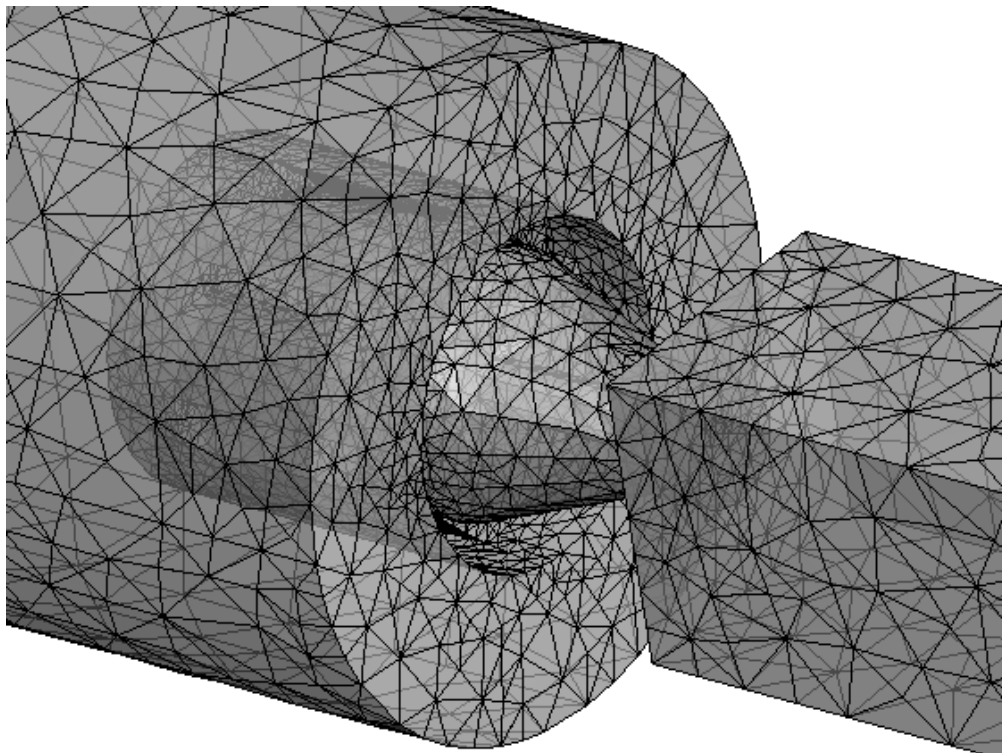


Abbildung B.6: Ausschnitt aus dem Finite-Element-Modell des Drallbrenner-Versuchsstands im Bereich des Brenners.

Die mittlere Dichte $\bar{\rho}$ und die mittlere Schallgeschwindigkeit \bar{c} werden in den Bereichen des Zufuhrrohrs einschließlich des Drallerzeugers und in der Brennkammer jeweils als stückweise konstant angenommen. Für die Schallgeschwindigkeit, die einen wesentlichen Parameter im Auswertalgorithmus darstellt, liegen aus den Experimenten

gemessene Werte vor, die so direkt in die Simulation übernommen wurden.

B.3.3 Ergebnisse

B.3.3.1 Isotherme Strömung

Gegenstand der Untersuchungen ist zunächst das isotherm durchströmte, also kalte System ohne Flamme. Hieraus lässt sich das Berechnungsverfahren im Hinblick auf die rein passiven akustischen Effekte bewerten. Beispielhaft ist in Abbildung B.7 der Schalldruckverlauf entlang der Achse der Versuchsanordnung für eine Anregung am Einlass mit einer Frequenz von 300 Hz zu sehen, dargestellt durch Amplitude und Phase. Gegenübergestellt ist dem Ergebnis aus der Finite-Element-Simulation der (hypothetische) Verlauf, der zu dem eindimensionalen ebenen Wellenfeld gehört, das die an den Positionen $x_1 = -0.30$ m, $x_2 = -0.25$ m, $x_3 = 0.25$ m und $x_4 = 0.30$ m aus der Simulation ermittelten komplexen Schalldruckamplituden aufweist. Offensichtlich wird das reale Schalldruckfeld in weiten Teilen der Rohre sehr gut durch die 1D-Theorie wiedergegeben. In einem Bereich von etwa $x = -0.15$ m bis $x = 0.1$ m stellt sich die Akustik jedoch dreidimensional dar, was zu deutlichen Abweichungen führt. Es ist wichtig, die „Messstellen“ x_1 bis x_4 nicht in diesen Bereich zu legen, da dann die Voraussetzungen für die Analyse auf Basis ebener Wellen nicht mehr gegeben ist.

Aus dem 1D-Druckverlauf lässt sich nun auf die in Abschnitt B.2.1 beschriebene Weise die Transfermatrix des Brenners berechnen. Die beiden Referenzebenen x_u stromauf und x_d sind so gewählt, dass sie bei $x = 0$ zusammenfallen. Das Ergebnis, zusammen mit den Werten aus dem Experiment, findet sich in Abbildung B.8. Zunächst fallen die relativ starken Unterschiede zwischen experimentellen und numerischen Ergebnissen in den Beträgen der Elemente T_{11} und T_{21} auf, im Gegensatz zu den Elementen T_{12} und T_{22} . Diese Beobachtung relativiert sich jedoch bei einer genaueren Betrachtung der Gesamt-

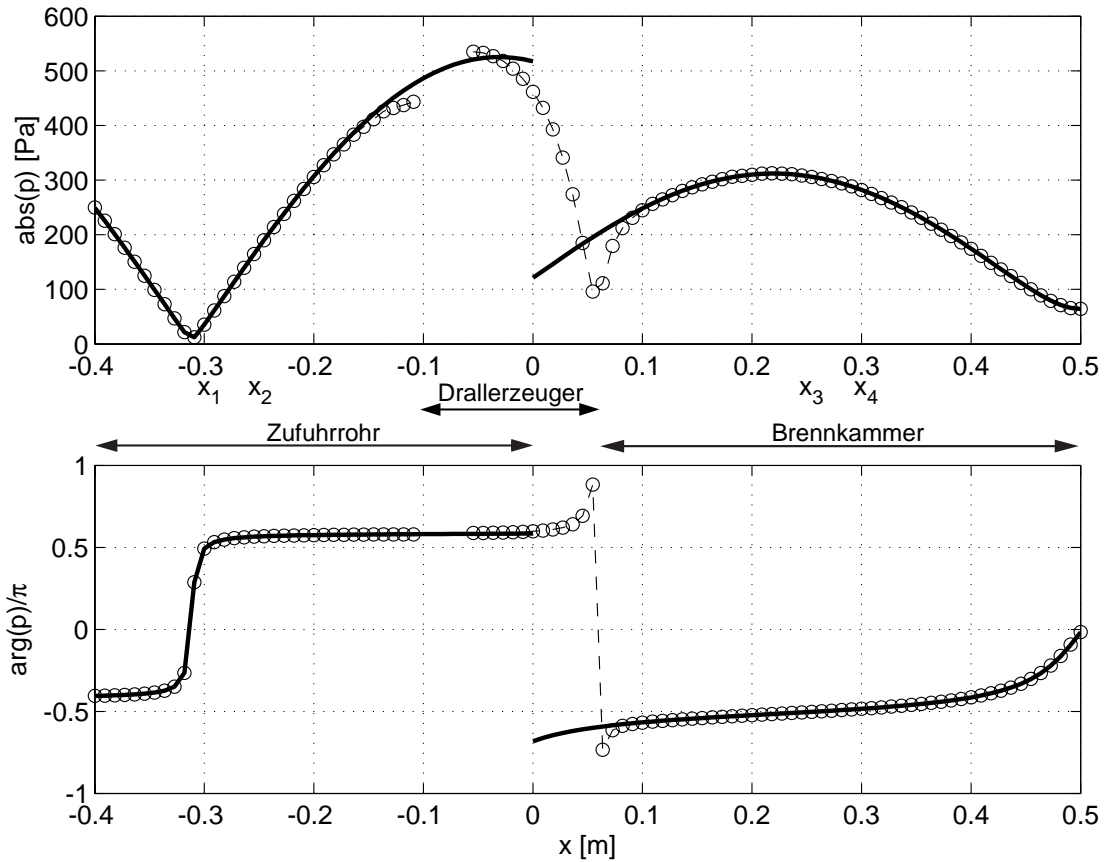


Abbildung B.7: Schalldruckverlauf entlang der Achse bei isothermer kalter Strömung und Anregung am Einlass mit 300 Hz. $-\circ-$ Werte aus der 3D-Simulation (fehlende Werte sind auf die Versperrung durch den Drallerzeuger zurückzuführen), $-$ 1D-Akustik.

situation. Die akustischen Größen stromab berechnen sich aus denen stromauf wie folgt:

$$\hat{p}_d = T_{11} \hat{p}_u + \bar{\rho} \bar{c} T_{12} \hat{u}_u, \quad (\text{B.25})$$

$$\hat{u}_d = T_{21} \hat{p}_u / (\bar{\rho} \bar{c}) + T_{22} \hat{u}_u. \quad (\text{B.26})$$

Da die Elemente T_{11} und T_{21} gegenüber T_{12} und T_{22} vor allem für höhere Frequenzen etwa eine Größenordnung kleiner sind, wirken sich die Fehler in den erstgenannten Elementen bei Anwendung der Transfermatrix deutlich abgeschwächt aus.

Der soeben beschriebene Sachverhalt ist ein Beispiel dafür, dass die Darstellung der Transfermatrix in den physikalischen Größen Schall-

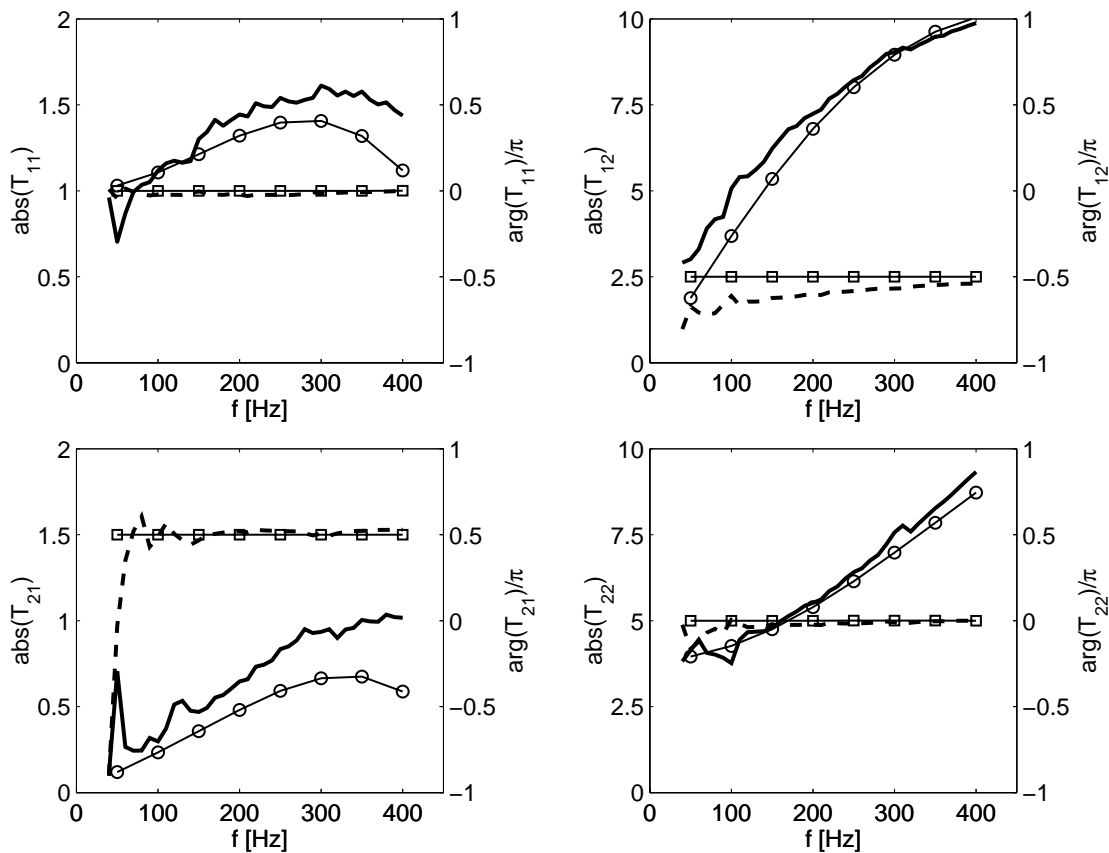


Abbildung B.8: Transfermatrix des Brenners bei isothermer kalter Strömung. — Betrag, - - Phase des experimentellen Ergebnisses. \circ Betrag, \square Phase der numerischen Lösung.

druck und Schallschnelle ungünstig und irreführend sein kann. Abbildung B.9 zeigt zum Vergleich genau dasselbe Ergebnis bei Verwendung der Notation in Riemann-Invarianten. Die Abweichung der numerischen von den experimentellen Werten verteilt sich nun mehr oder weniger auf alle Transfermatrixelemente und ist insgesamt kleiner. Diese Darstellungsform erweist sich also für die Analyse als günstiger.

Auch wenn sich die Übereinstimmung nun als gut erweist, sind Abweichungen in Form einer Verschiebung der Betragskurven erkennbar. Vermutlich sind hierfür Effekte verantwortlich, die zu Verlusten akustischer Energie führen und in der numerischen Simulation auf Basis der Wellengleichung nicht erfasst werden, beispielsweise die

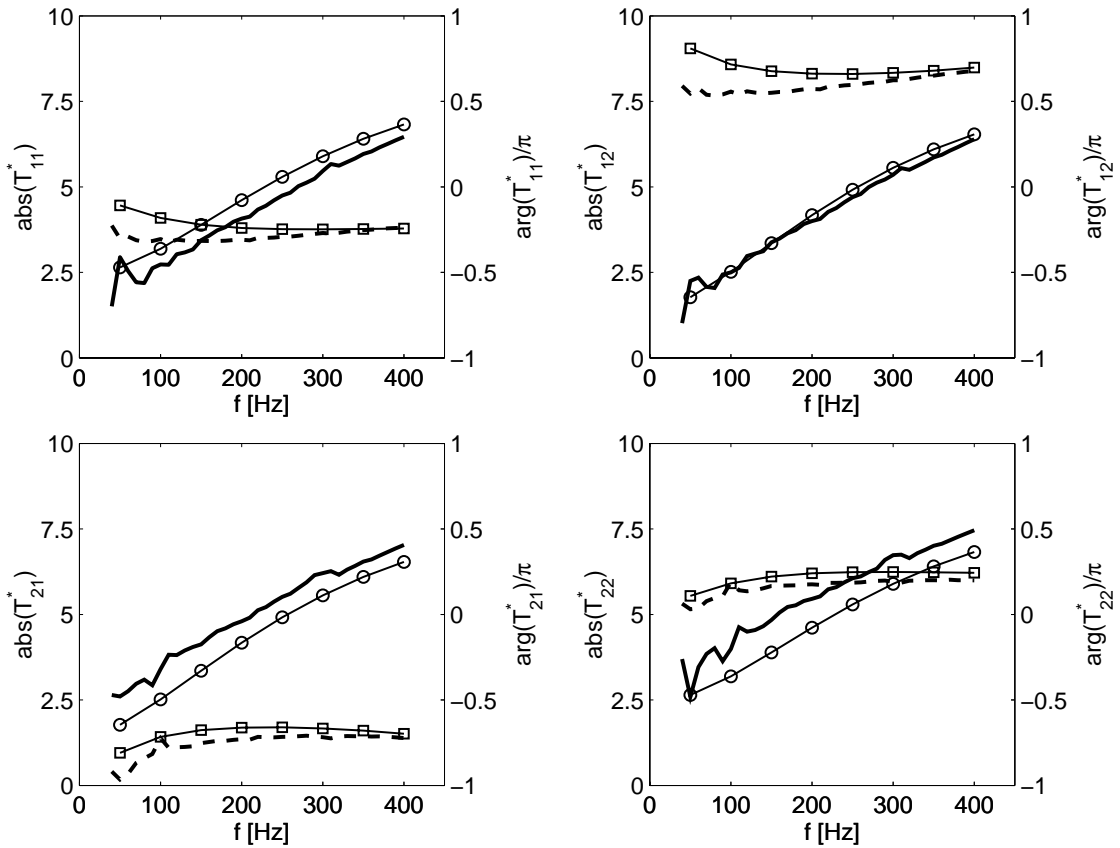


Abbildung B.9: Transfermatrix des Brenners bei isothermer kalter Strömung, Darstellung in Riemann-Invarianten. — Betrag, - - Phase des experimentellen Ergebnisses. ○ Betrag, □ Phase der numerischen Lösung.

Umwandlung akustischer Energie in Vorticity-Fluktuationen in Rezirkulationsgebieten nach Querschnittsprüngen. Dennoch kann mit dem numerischen Transfermatrizen-Berechnungsverfahren die Akustik so komplexer Elemente wie des Drallerzeugers offensichtlich sowohl qualitativ als auch quantitativ in guter Näherung richtig erfasst werden.

B.3.3.2 Reagierende Strömung

Auf Basis der ermutigenden Werte, die das Berechnungsverfahren für das Verhalten im rein akustischen Fall zeigt, ist es nun möglich, auch die Wechselwirkungen der Akustik mit den Schwankungen der Wärmefreisetzungsrate über die experimentell bestimmte Flammen-

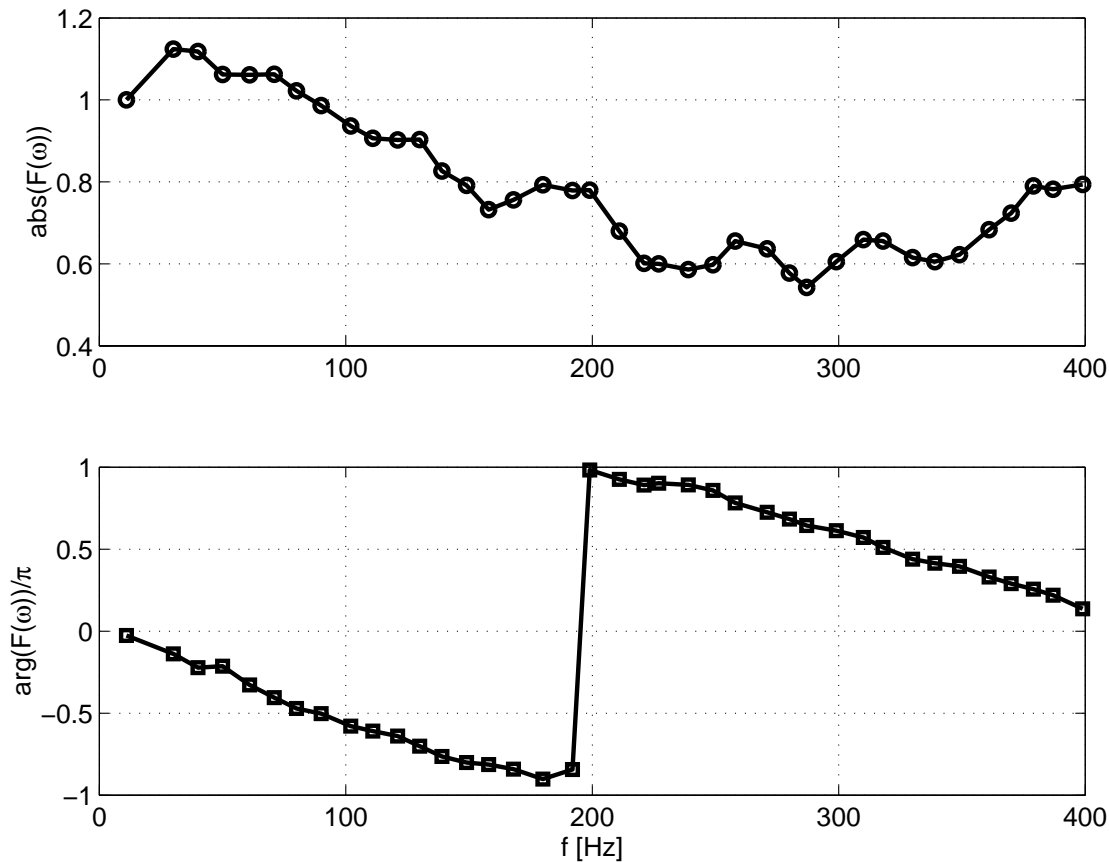


Abbildung B.10: Experimentell bestimmte Flammentransferfunktion. Oben: Betrag, skaliert mit \bar{q}/\bar{u}_B . Unten: Phase.

transferfunktion miteinzubeziehen. Für die untersuchte Brennerkonfiguration ist diese Transferfunktion in Abbildung B.10 zu sehen. Da sie keine örtlich aufgelösten Informationen sondern nur einen integralen Wert liefert, wird in der Simulation die Wärmefreisetzungsrates als gleichmäßig über die Länge der Flamme verteilt angenommen. Das ist natürlich eine Vereinfachung, die aber auf der Besonderheit des Beispiels beruht. Grundsätzlich erlaubt das Verfahren durchaus die Verwendung ortsabhängiger Transferfunktionen.

In Abbildung B.11 ist die daraus resultierende Transfermatrix dargestellt, die das Verhalten des Brenners zusammen mit der Flamme beinhaltet. Auf Grund der weiter oben gemachten Beobachtungen ist lediglich die Darstellungsform in Riemann-Invarianten wiederge-

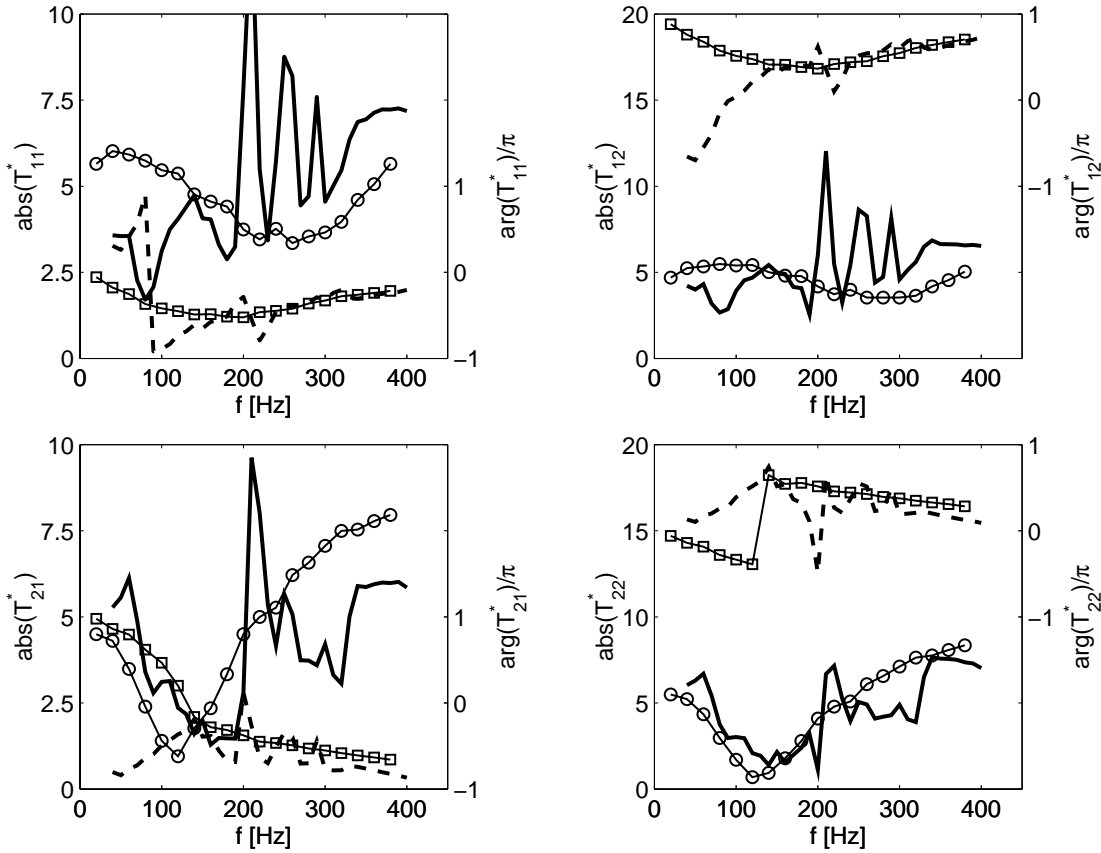


Abbildung B.11: Transfermatrix des Brenners bei reagierender Strömung mit Flamme, Darstellung in Riemann-Invarianten. — Betrag, - - Phase des experimentellen Ergebnisses. \circ Betrag, \square Phase der numerischen Lösung.

geben. Dennoch fällt zunächst die große Streuung in den experimentellen Daten auf, die wesentlich größer als für den kalten Fall ist. Fischer [125] erläutert die vielfältigen Probleme, die sich bei der Messung der Transfermatrix in der heißen Umgebung und unter Einfluss des turbulenten Verbrennungslärms ergeben. Diese Ergebnisse sollen hier daher weniger zur Validierung des numerischen Verfahrens dienen als vielmehr die Motivation für den Einsatz dieser Berechnungsmethode verdeutlichen.

Das Simulationsverfahren führt zu deutlich glatteren Daten. Die Streuung ist lediglich von der Größenordnung, die bereits in den Daten der Flammentransferfunktion vorhanden ist. In gewissen Bereichen der Transfermatrix-Elemente ist sogar trotz der fraglichen

Datenbasis eine qualitative Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation erkennbar.

B.4 Schlussfolgerungen

Die vorgestellten Beispiele zeigen die Tauglichkeit des Simulationsverfahrens für die Berechnung von Transfermatrizen. Für rein passive akustische Fälle ist die Methode durch Vergleich mit experimentellen Daten validiert. Eine gewisse systematische Abweichung ist auf die Vernachlässigung dämpfender Effekte zurückzuführen. Hier bietet sich ein wesentlicher Ansatzpunkt für Weiterentwicklungen und Verbesserungen.

Denkbar ist beispielsweise, die Wellengleichung um einen Dämpfungsterm (erste Zeitableitung) zu erweitern. Der Dämpfungsfaktor müsste lokal so variiert werden, dass die Verluste akustischer Energie an den richtigen Stellen im richtigen Maß wiedergegeben werden. Die Ermittlung der hierfür geeigneten Verteilung des Dämpfungsfaktors könnte allerdings sehr problematisch und wahrscheinlich nur empirisch lösbar sein.

Abzuklären wäre auch, ob die Umwandlung akustischer Energie in Vorticity-Fluktuationen durch Einbeziehung der Gleichung (2.20) in einer Formulierung im Frequenzbereich möglich ist. Dann könnten die relevanten Effekte nach einer Berechnung des mittleren Geschwindigkeitsfelds mit einem Navier-Stokes-Verfahren sehr genau erfasst werden. Schwer abschätzbar ist allerdings, welche numerischen Schwierigkeiten sich gegebenenfalls durch eine gekoppelte Lösung der Gleichungen für die akustische Mode und die Vorticity-Mode ergeben.

Eine befriedigende Validierung des Transfermatrizen-Simulationsverfahrens war wegen der nicht ausreichenden Qualität der bisher vorliegenden experimentellen Daten nicht möglich. In Bezug auf die Einbindung der Flammentransferfunktion ist die korrekte Implementierung aber anhand einer analytischen Lösung verifiziert. Gleichzei-

tig verlief die Validierung der Berechnung der Transfermatrizen für den kalten Fall ohne Verbrennung positiv. Aus diesen beiden Ergebnissen darf der Schluss gezogen werden, dass der Ansatz auch bei der Simulation der Transfermatrizen von Brennern zusammen mit ihrer Flamme richtige Resultate liefern wird.

Das numerische Berechnungsverfahren für Transfermatrizen kann im Wesentlichen zwei Dinge leisten:

- Bestimmung von Transfermatrizen mehr oder weniger beliebiger akustischer Elemente ohne experimentellen Aufwand.
- Bestimmung von Flammentransfermatrizen mit Verwendung experimentell verhältnismäßig leicht messbarer Flammentransferfunktionen unter Vermeidung des fehleranfälligen direkten Messverfahrens.

Die Methode stellt damit ein nützliches Hilfsmittel in vielen Bereichen der Akustik im Allgemeinen und der Thermoakustik im Besonderen dar, in denen Ansätze mit Transfermatrizen eine Rolle spielen.

Anhang C

Parametrisiertes Flammenmodell

C.1 Vorbemerkung

Im Kapitel 4 im Abschnitt 4.2.4 auf den Seiten 107 ff. wurde ein Verfahren zur Identifizierung von Flammenmodellen aus gemessenen Flammentransferfunktionen und zur nachfolgenden Umsetzung im Zeitbereich vorgestellt. Auch wenn ein derartiges Flammenmodell in den Simulationsrechnungen dieser Arbeit nicht eingesetzt wurde, ist diesem Ansatz grundsätzlich eine hohe Bedeutung beizumessen. In diesem Anhang sollen deshalb die vorgestellten Methoden anhand eines konkreten Beispiels verdeutlicht und validiert werden.

C.2 Identifizierung des Modells

Grundlage der Untersuchungen ist eine der Flammentransferfunktionen eines extern vollständig vorgemischt betriebenen Experimental-Drallbrenners, die Fischer [125] im Rahmen seiner Arbeit gemessen hat⁶⁴. Diese Transferfunktion weist den in Abbildung C.1 durch die Messpunkte wiedergegebenen Verlauf auf, wobei der Betrag mit dem Mittelwert des Verhältnisses von Wärmefreisetzungsrate und Brenneraustrittsgeschwindigkeit \bar{q}_V/\bar{u}_B normiert ist. In dieser Abbildung ist auch bereits der durch die Anpassung eines parametrisierten Modells erzeugte Frequenzgang zu sehen, der eine hervorragende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zeigt.

Ausgangspunkt für die Modellidentifizierung sind die Gleichungen (4.23) bis (4.26). Dabei sind nachfolgend genannte Überlegungen

⁶⁴Betrachtet wird eine Konfiguration mit einer Nennleistung von 60 kW bei einer Luftzahl von 1.25. Die geometrischen Brenner-Parameter sind durch einen Austrittsdüsendurchmesser von 40 mm und eine offene Schlitzlänge von 16 mm gegeben, siehe Fischer [125].

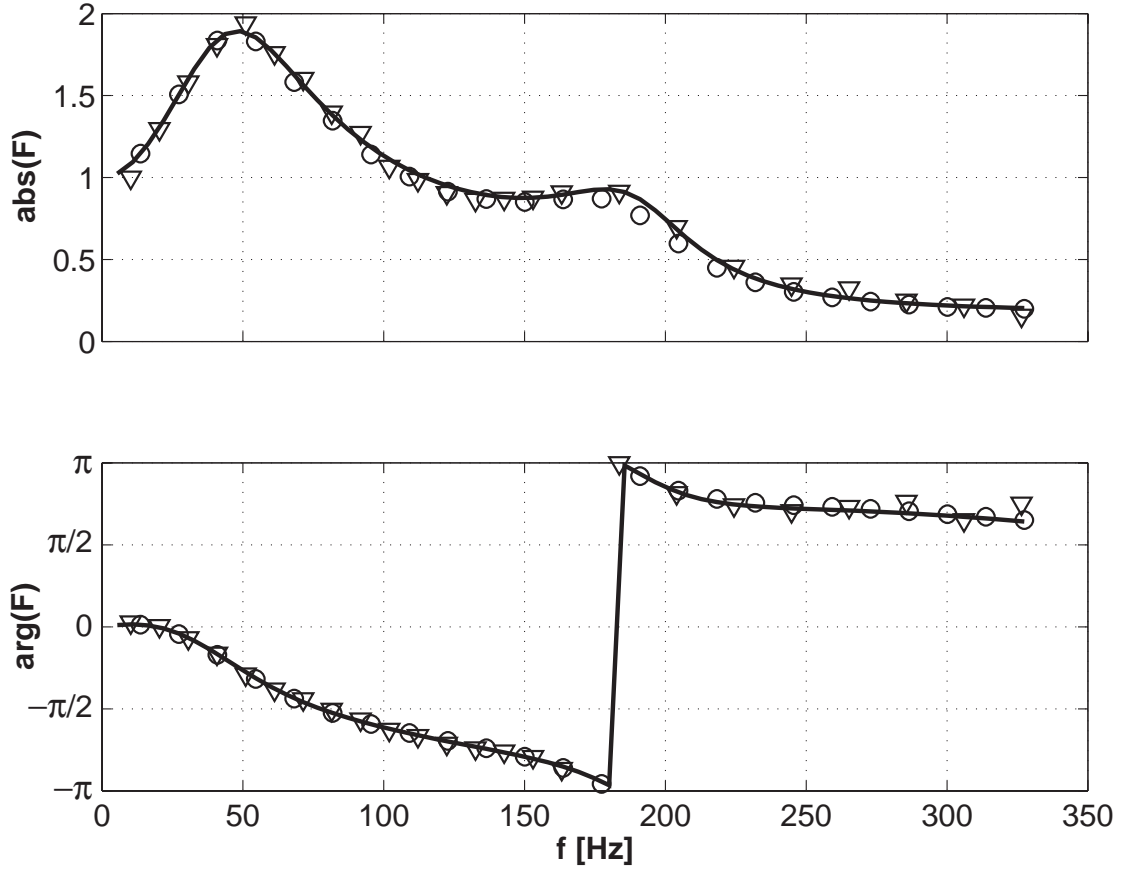


Abbildung C.1: Gemessene Flammentransferfunktion eines Experimentalbrenners (∇), darauf angepasstes parametrisiertes Modell (—) und aus der Zeitbereichssimulation rekonstruierte Werte der Flammentransferfunktion (\circ). Betrag der Flammentransferfunktion normiert mit \bar{q}_V/\bar{u}_B .

zielführend. Die Flammentransferfunktion zeigt zwei deutliche Resonanzüberhöhungen. Es ist naheliegend, jede dieser Überhöhungen durch jeweils ein Verzögerungsglied zweiter Ordnung zu modellieren, also $M = 2$ zu wählen und in den beiden gebrochen-rationalen Funktionen $F_{D,m}$ die Ordnung des Nennerpolynoms durch $N_\alpha = 2$ festzulegen. Bereits mit Zählerpolynomen erster Ordnung, $N_\beta = 1$, und zusätzlicher Berücksichtigung der Totzeitverteilungen in den Termen $F_{\tau,m}$ lässt sich dann durch eine Parameteroptimierung die gewünschte Übereinstimmung zwischen Modell und gemessenen Daten erzielen.

γ_1	0.954	[-]	γ_2	0.046	[-]
τ_1	1.36	[ms]	τ_2	2.84	[ms]
$\Delta\tau_1$	0.238	[ms]	$\Delta\tau_2$	0.363	[ms]
$\alpha_{1,1}$	3.54	[ms]	$\alpha_{1,2}$	0.229	[ms]
$\alpha_{2,1}$	9.37	[ms ²]	$\alpha_{2,2}$	0.690	[ms ²]
$\beta_{1,1}$	6.06	[ms]	$\beta_{1,2}$	1.96	[ms]

Tabelle C.1: Werte der Parameter im Flammenmodell.

Die Modell-Flammentransferfunktion hat demnach folgende Form:

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \gamma_1 \cdot F_{\tau,1} \cdot F_{D,1} + \gamma_2 \cdot F_{\tau,2} \cdot F_{D,2} = \\
 &= \gamma_1 \cdot e^{-i\omega\tau_1} \frac{i\omega e^{i\omega\Delta\tau_1} - i\omega e^{-i\omega\Delta\tau_1}}{2\Delta\tau_1(i\omega)^2} \cdot \frac{\beta_{1,1}i\omega + 1}{\alpha_{2,1}(i\omega)^2 + \alpha_{1,1}i\omega + 1} + \\
 &+ \gamma_2 \cdot e^{-i\omega\tau_2} \frac{i\omega e^{i\omega\Delta\tau_2} - i\omega e^{-i\omega\Delta\tau_2}}{2\Delta\tau_2(i\omega)^2} \cdot \frac{\beta_{1,2}i\omega + 1}{\alpha_{2,2}(i\omega)^2 + \alpha_{1,2}i\omega + 1}.
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

Die Parameter dieses Modells nehmen dabei die in Tabelle C.1 gegebenen Werte an, wenn $F(\omega)$ in der mit \bar{q}_V/\bar{u}_B normierten Form dargestellt wird.

C.3 Verwendung im Zeitbereich

Um das identifizierte Flammenmodell für eine Simulation im Zeitbereich verwenden zu können, wird nun das im Abschnitt 4.2.4.2 beschriebene Verfahren angewendet. Dazu sind zunächst die dynamischen Anteile $F_{D,1}$ und $F_{D,2}$ in den Bildbereich der z -Transformation zu übertragen, um daraus eine zeitdiskrete Signalfolge ableiten zu können. Dies geschieht rein formal, unter Anwendung der Diskretisierungsformel von Tustin, durch die Substitution

$$i\omega \rightarrow \frac{2}{\Delta t} \frac{z - 1}{z + 1} \tag{C.2}$$

in den entsprechenden Termen aus Gleichung (C.1), wobei Δt den Zeitschritt in der zu generierenden Signalfolge darstellt. Durch alge-

braische Umformung ergibt sich dann

$$F_{D,m,z} = \frac{b_{0,m} + b_{1,m}z^{-1} + b_{2,m}z^{-2}}{1 + a_{1,m}z^{-1} + a_{2,m}z^{-2}}, \quad (\text{C.3})$$

wobei sich die Koeffizienten dieser Darstellung in folgender Weise aus den Parametern des Flammenmodells berechnen:

$$a_{1,m} = \frac{2(\Delta t^2 - 4\alpha_{2,m})}{\Delta t^2 + 2\Delta t\alpha_{1,m} + 4\alpha_{2,m}}, \quad (\text{C.4})$$

$$a_{2,m} = \frac{\Delta t^2 + 2\Delta t\alpha_{1,m} + 4\alpha_{2,m}}{\Delta t^2 + 2\Delta t\alpha_{1,m} + 4\alpha_{2,m}}, \quad (\text{C.5})$$

$$b_{0,m} = \frac{\Delta t^2 + 2\beta_{1,m}\Delta t}{\Delta t^2 + 2\Delta t\alpha_{1,m} + 4\alpha_{2,m}}, \quad (\text{C.6})$$

$$b_{1,m} = \frac{2\Delta t^2}{\Delta t^2 + 2\Delta t\alpha_{1,m} + 4\alpha_{2,m}}, \quad (\text{C.7})$$

$$b_{2,m} = \frac{\Delta t^2 - 2\beta_{1,m}\Delta t}{\Delta t^2 + 2\Delta t\alpha_{1,m} + 4\alpha_{2,m}}. \quad (\text{C.8})$$

Soll nun die Wärmefreisetzungsschwankung $\dot{q}'_{V,j}$ zum Zeitpunkt t_j bestimmt werden, und sind die Signalfolgen der Wärmefreisetzungsschwankung der Schnelle im Brenner bis zum Zeitpunkt $t_{j-1} = t_j - \Delta t_j$ bekannt, gilt nach Gleichung (4.36)

$$\begin{aligned} \dot{q}'_{V,j,1} = & b_{0,1}\bar{u}'_B(t_j - \tau_1) + b_{1,1}\bar{u}'_B(t_j - \Delta t_j - \tau_1) + \\ & + b_{2,1}\bar{u}'_B(t_j - 2\Delta t_j - \tau_1) + \\ & + a_{1,1}\dot{q}'_V(t_j - \Delta t_j) + a_{2,1}\dot{q}'_V(t_j - 2\Delta t_j) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

und

$$\begin{aligned} \dot{q}'_{V,j,2} = & b_{0,2}\bar{u}'_B(t_j - \tau_2) + b_{1,2}\bar{u}'_B(t_j - \Delta t_j - \tau_2) + \\ & + b_{2,2}\bar{u}'_B(t_j - 2\Delta t_j - \tau_2) + \\ & + a_{1,2}\dot{q}'_V(t_j - \Delta t_j) + a_{2,2}\dot{q}'_V(t_j - 2\Delta t_j) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

und nach Gleichung (4.25)

$$\dot{q}'_{V,j} = \gamma_1 \dot{q}'_{V,j,1} + \gamma_2 \dot{q}'_{V,j,2}. \quad (\text{C.11})$$

Die über die Totzeitverteilung gemittelten Schnelleschwankungen

$$\overline{u}'_B(t_j - k\Delta t_j - \tau_m) = \frac{1}{2\Delta\tau_m} \int_{\tau_m - \Delta\tau_m}^{\tau_m + \Delta\tau_m} u'_B(t_j - k\Delta t_j - \tau^*) d\tau^* \quad (\text{C.12})$$

sind dabei vorab aus der Signalfolge für u'_B durch numerische Quadratur zu berechnen.

Die dargestellten Schritte zeigen, dass sich eine im Prinzip beliebige Flammentransferfunktion für die Simulation im Zeitbereich durch eine einfache Abfolge algebraischer Berechnungen repräsentieren lässt. Um den Ansatz zu validieren, wurde die Flammentransferfunktion aus Gleichung (C.1) mit den Parametern nach Tabelle C.1 entsprechend dem vorgestellten Schema diskretisiert. Als Eingangssignal wurden sodann aus reinen Sinusschwingungen mit Frequenzen zwischen 0 Hz und 350 Hz diskrete Wertefolgen für u'_B generiert. Die Stützstellen auf der Zeitachse wurden innerhalb eines gewissen Bereichs in zufälligen Abständen festgelegt, um eine variable Zeitschrittweite vorzugeben. Aus den berechneten Zeitreihen der Wärme-freisetzungsschwankungen lassen sich über eine Fourier-Analyse Betrag und Phase von \dot{q}'_V bestimmen und zu den entsprechenden Größen der Schnelleschwankungen in Beziehung setzen. Damit ist ein Vergleich der durch die Simulation im Zeitbereich tatsächlich produzierten Transferfunktion mit dem als Vorgabe hinterlegten parametrisierten Modell und der ursprünglich gemessenen Flammentransferfunktion möglich. Abbildung C.1 zeigt die hervorragende Übereinstimmung aller drei Verläufe. Die vorgeschlagene Methode zur Implementierung von Flammentransferfunktionen im Zeitbereich erweist sich somit als tragfähig.

Literatur

- [1] B. Higgins. On the sound produced by a current of hydrogen passing through a tube. *Journal of natural philosophy, chemistry and the arts*, 1:129–131, 1802.
- [2] P. L. Rijke. Notiz über eine neue Art, die in einer an beiden Enden offenen Röhre enthaltene Luft in Schwingungen zu versetzen. *Annalen der Physik und Chemie*, 107:339–343, 1859.
- [3] C. Sondhauss. Über die Schallschwingungen der Luft in erhitzten Glasröhren und in gedeckten Pfeifen von ungleicher Weite. *Annalen der Physik und Chemie*, 79:1–34, 1850.
- [4] K. T. Feldman, Jr. Review of the literature on Rijke thermoacoustic phenomena. *Journal of Sound and Vibration*, 7(1):83–89, 1968.
- [5] J. W. S. Rayleigh. The explanation of certain acoustical phenomena. *Nature*, 18:319–312, 1878.
- [6] J. W. S. Rayleigh. *The Theory of Sound*. Macmillan, London, 1896.
- [7] A. A. Putnam und W. R. Dennis. A study of burner oscillations of the organ-pipe type. *Transactions of the ASME*, 75(3):15–28, 1953.
- [8] A. A. Putnam und W. R. Dennis. Burner oscillations of the gauze-tone type. *Journal of the Acoustical Society of America*, 26(5):716–725, 1954.
- [9] B.-T. Chu. Stability of systems containing a heat source — the Rayleigh criterion. *NACA Research Memorandum NACA RM 56D27*, 1956.
- [10] B.-T. Chu. On the energy transfer to small disturbances in fluid flow (Part I). *Acta Mechanica*, 1:215–234, 1965.

- [11] F. H. Reynst. *Pulsating combustion – The collected publications*. Oxford, 1961.
- [12] A. A. Putnam, F. E. Belles und J. A. C. Kentfield. Pulse combustion. *Progress in Energy and Combustion Science*, 12:43–79, 1986.
- [13] B. T. Zinn. Pulse combustion: Recent applications and research issues. *24th International Symposium on Combustion*, Seiten 1297–1305, 1992.
- [14] P. K. Barr, M. E. Gunn Jr., J. A. Kezerle, T. T. Bramlette, J. O. Keller und T. R. Roose. Special issue on pulsating combustion – preface. *Combustion Science and Technology*, 94:I–IX, 1993.
- [15] A. A. Putnam und W. R. Dennis. Survey of organ-pipe oscillations in combustion systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28:246–259, 1956.
- [16] A. A. Putnam. *Combustion Driven Oscillations in Industry*. American Elsevier Publishers, New York, 1971.
- [17] L. Crocco und S. I. Cheng. Theory of combustion instability in liquid propellant rocket motors. *AGARD Monograph No. 8*, 1956.
- [18] V. Yang und W. Anderson, Herausgeber. *Liquid Rocket Combustion Instability*. AIAA, Cambridge, MA, 1995.
- [19] F. E. C. Culick und V. Yang. Overview of combustion instabilities in liquid-propellant rocket engines. In *Liquid Rocket Combustion Instability*, Seiten 3–37. AIAA, 1995.
- [20] P. J. Langhorne. Reheat buzz: an acoustically coupled combustion instability. Part 1. Experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 193:417–443, 1988.
- [21] G. J. Bloxsidge, A. P. Dowling und P. J. Langhorne. Reheat buzz: an acoustically coupled combustion instability. Part 2. Theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 193:445–473, 1988.

- [22] M. A. Macquisten und A. P. Dowling. Low-frequency combustion oscillations in a model afterburner. *Combustion and Flame*, 94:253–264, 1993.
- [23] W. Boehm, D. Raake, J. Seume und K. Terjung. Testing the model V84.3A gas turbine – experimental techniques and results. *ASME Paper No. 96-TA-26*, 1996.
- [24] T. Scarinci und J. L. Halpin. Industrial Trent combustor – combustion noise characteristics. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 122:280–286, 2000. Ursprünglich veröffentlicht als ASME Paper No. 99-GT-9.
- [25] D. E. Hobson, J. E. Fackrell und G. Hewitt. Combustion instabilities in industrial gas turbines – measurements on operating plant and thermoacoustic modelling. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 122:420–428, 2000. Ursprünglich veröffentlicht als ASME Paper No. 99-GT-110.
- [26] W. Krebs, P. Flohr, B. Prade und S. Hoffmann. Thermoacoustic stability chart for high-intensity gas turbine combustor systems. *Combustion Science and Technology*, 174(7):99–128, 2002.
- [27] W. Konrad, B. Brehm, F. Kameier, C. Freeman und I. J. Day. Combustion instability investigations on the BR710 jet engine. *ASME Paper No. 96-TA-36*, 1996.
- [28] C. Hassa, J. Heinze und K. Stursberg. Investigation of the response of an air blast atomizer combustion chamber configuration on forced modulation of air feed at realistic operation conditions. *ASME Paper No. GT-2002-30059*, 2002.
- [29] J. Eckstein, E. Freitag, C. Hirsch, T. Sattelmayer, R. von der Bank und T. Schilling. Forced low-frequency spray characteristics of a generic airblast swirl diffusion burner. *ASME Paper No. GT-2003-38646*, 2003.

- [30] M. A. Heckl. Active control of the noise from a Rijke tube. *Journal of Sound and Vibration*, 124(1):117–133, 1988.
- [31] S. Gleis, D. Vortmeyer und W. Rau. Experimental investigations on the transition from stable to unstable combustion by means of active instability control. *AGARD Conference Proceedings No. 479*, 1990.
- [32] K. R. McManus, T. Poinsot und S. M. Candel. A review of active control of combustion instabilities. *Progress in Energy and Combustion Science*, 19:1–29, 1992.
- [33] J. Hermann, S. Gleis und D. Vortmeyer. Aktive Dämpfung selbsterregter Brennkammerschwingungen (AIC) bei Druckzerstäuberbrennern durch Modulation der flüssigen Brennstoffzufuhr. *16. Deutscher Flammentag*, 1993. VDI-Bericht Nr. 1090, pp. 615-624.
- [34] J. Hermann, S. Gleis und D. Vortmeyer. Active instability control (AIC) of spray combustors by modulation of the liquid fuel flow rate. *Combustion Science and Technology*, 118:1–25, 1996.
- [35] C.-C. Hantschk, J. Hermann und D. Vortmeyer. Active instability control with direct-drive servo valves in liquid-fueled combustion systems. *26th International Symposium on Combustion*, Seiten 2835–2841, 1996.
- [36] J. Hermann. *Anregungsmechanismen und aktive Dämpfung selbsterregter Verbrennungsschwingungen in Flüssigkraftstoffsystemen*. Nr. 364 in Fortschritt-Berichte VDI Reihe 6. VDI-Verlag, 1997.
- [37] J. M. Cohen, N. M. Rey, C. A. Jacobson und T. J. Anderson. Active control of combustion instability in a liquid-fueled low-nox-combustor. *ASME Paper No. 98-GT-267*, 1998.

- [38] C. O. Paschereit, E. Gutmark und W. Weisenstein. Control of combustion driven oscillations by equivalence ratio modulations. *ASME Paper No. 99-GT-118*, 1999.
- [39] J. R. Hibshman, J. M. Cohen, A. Banaszuk, T. J. Anderson und H. A. Alholm. Active control of combustion instability in a liquid-fueled sector combustor. *ASME Paper No. 99-GT-215*, 1999.
- [40] A. M. Annaswamy, O. M. El Rifai, M. Fleifil, J. P. Hathout und A. F. Ghoniem. A model-based self-tuning controller for thermoacoustic instability. *Combustion Science and Technology*, 135:213–240, 1998.
- [41] S. S. Sattinger, Y. Neumeier, A. Nabi, B. T. Zinn, D. J. Amos und D. D. Darling. Sub-scale demonstration of the active feedback control of gas-turbine combustion instabilities. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 122:262–268, 2000.
- [42] J. Hermann, C.-C. Hantschk, P. Zangl, S. Gleis, D. Vortmeyer, J. Seume, N. Vortmeyer, W. Krause und A. Orthmann. Aktive Stabilitätskontrolle an einer 170 MW Gasturbine. 18. *Deutsch-Niederländischer Flammentag*, 1997. VDI-Bericht Nr. 1313, pp. 337-344.
- [43] D. L. Gysling, G. S. Copeland, D. C. McCormick und W. M. Proscia. Combustion system damping augmentation with Helmholtz resonators. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 122:269–274, 2000.
- [44] V. Bellucci, C. O. Paschereit, P. Flohr und F. Magni. On the use of Helmholtz resonators for damping acoustic pulsations in industrial gas turbines. *ASME Paper No. 2001-GT-0039*, 2001.
- [45] G. J. M. Sims, R. W. Copplestone und J. R. Tilston. Performance studies fo passive damping techniques used to suppress combustion oscillations in LPP combustors. *ASME Paper No. GT-2003-38194*, 2003.

- [46] R. C. Steele, L. H. Cowell, S. M. Cannon und C. E. Smith. Passive control of combustion instability in lean premixed combustors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 122:412–419, 2000.
- [47] H. J. Merk. Analysis of heat-driven oscillations of gas flows. I. General considerations. *Applied Scientific Research*, A6:317–336, 1956/57.
- [48] H. J. Merk. Analysis of heat-driven oscillations of gas flows. II. On the mechanism of the Rijke-tube phenomenon. *Applied Scientific Research*, A6:402–420, 1956/57.
- [49] H. J. Merk. Analysis of heat-driven oscillations of gas flows. III. Characteristic equation for flame-driven oscillations of the organ-pipe type. *Applied Scientific Research*, A7:175–191, 1957/58.
- [50] H. J. Merk. Analysis of heat-driven oscillations of gas flows. IV. Discussion of the theoretical results concerning flame-driven oscillations. *Applied Scientific Research*, A7:192–204, 1957/58.
- [51] H. J. Merk. Analysis of heat-driven oscillations of gas flows. V. Influence of heat transfer in the burner ports on the stability of combustion of premixed gases. *Applied Scientific Research*, A8:1–27, 1958/59.
- [52] C. C. Jahnke und F. E. C. Culick. Application of dynamical systems theory to nonlinear combustion instabilities. *Journal of Propulsion and Power*, 10(4):508–517, 1994.
- [53] F. E. C. Culick, V. Burnley und G. Swenson. Pulsed instabilities in solid-propellant rockets. *Journal of Propulsion and Power*, 11(4):657–665, 1995.
- [54] F. E. C. Culick. Some recent results for nonlinear acoustics in combustion chambers. *AIAA Journal*, 32(1):146–169, 1994.

- [55] J. J. Keller. Nonlinear self-excited acoustic oscillations within fixed boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 123:267–281, 1982.
- [56] A. P. Dowling. The calculation of thermoacoustic oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 180(4):557–581, 1995.
- [57] O. M. Umurhan. Exploration of fundamental matters of acoustic instabilities in combustion chambers. Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, 1999.
- [58] S. Akamatsu und A. P. Dowling. Three dimensional thermoacoustic oscillation in a premix combustor. *ASME Paper No. 2001-GT-0034*, 2001.
- [59] J. E. García-Schäfer und A. Linñán. Longitudinal acoustic instabilities in slender propellant rockets: linear analysis. *Journal of Fluid Mechanics*, 437:229–254, 2001.
- [60] M. L. Munjal. *Acoustics of Ducts and Mufflers*. Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [61] E. Deuker. *Ein Beitrag zur Vorausberechnung des akustischen Stabilitätsverhaltens von Gasturbinen-Brennkammern mittels theoretischer und experimenteller Analyse von Brennkammerschwingungen*. Nr. 317 in Fortschritt-Berichte VDI Reihe 6. VDI-Verlag, 1995.
- [62] W. Polifke, C. O. Paschereit und T. Sattelmayer. A universally applicable stability criterion for complex thermo-acoustic systems. 18. *Deutsch-Niederländischer Flammentag*, 1997. VDI-Bericht Nr. 1313, pp. 455-460.
- [63] T. Sattelmayer und W. Polifke. A novel method for the computation of the linear stability of combustors. *Combustion Science and Technology*, 175(3):477–497, 2003.
- [64] S. Hubbard und A. P. Dowling. Acoustic instabilities in premix burners. *AIAA Paper No. AIAA-98-2272*, 1998.

- [65] J. A. Lovett und K. T. Uznanski. Prediction of combustion dynamics in a staged premixed combustor. *ASME Paper No. GT-2002-30646*, 2002.
- [66] W. Polifke, C. O. Paschereit und K. Döbbeling. Constructive and destructive interference of acoustic and entropy waves in a premixed combustor with a choked exit. *International Journal of Acoustics and Vibration*, 6(3):135–146, 2001.
- [67] T. Sattelmayer. Influence of the combustor aerodynamics on combustion instabilities from equivalence ratio fluctuations. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125:11–19, 2003. Ursprünglich veröffentlicht als ASME Paper No. 2000-GT-0082.
- [68] W. Polifke und C. O. Paschereit. Determination of thermoacoustic transfer matrices by experiment and computational fluid dynamics. *ERCRAFTAC Bulletin*, 38, 1998.
- [69] C. O. Paschereit und W. Polifke. Investigation of the thermoacoustic characteristics of a lean premixed gas turbine burner. *ASME Paper No. 98-GT-582*, 1998.
- [70] C. O. Paschereit, B. Schuermans, W. Polifke und O. Mattson. Measurement of transfer matrices and source terms of premixed flames. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124:239–247, 2002. Ursprünglich veröffentlicht als ASME Paper No. 99-GT-133.
- [71] B. Schuermans und W. Polifke. Modeling transfer matrices of premixed flames and comparison with experimental results. *ASME Paper No. 99-GT-132*, 1999.
- [72] S. A. Klein und J. B. W. Kok. Acoustic instabilities in syn-gas fired combustion chambers. *ASME Paper No. 99-GT-355*, 1999.
- [73] D. L. Straub, G. A. Richards, W. T. Baumann und W. R. Saunders. Measurement of dynamic flame response in a lean

- premixed single-can combustor. *ASME Paper No. 2001-GT-0038*, 2001.
- [74] B. Varoquié, J. P. Légier, F. Lacas, D. Veynante und T. Poinsot. Experimental analysis and large eddy simulation to determine the response of a non premixed flame submitted to acoustic forcing. *21st Symposium on Combustion, Sapporo*, 2002.
- [75] W. S. Cheung, G. J. M. Sims, R. W. Coplestone, J. R. Tilston, C. W. Wilson, S. R. Stow und A. P. Dowling. Measurement and analysis of flame transfer function in a sector combustor under high pressure conditions. *ASME Paper No. 2003-GT-38219*, 2003.
- [76] M. Lohrmann, H. Büchner, N. Zarzalis und W. Krebs. Flame transfer function characteristics of swirl flames for gas turbine applications. *ASME Paper No. GT-2003-38113*, 2003.
- [77] M. Zhu, A. P. Dowling und K. N. C. Bray. Study of flame transfer function with three dimensional calculations. *ASME Paper No. GT-2003-38409*, 2003.
- [78] K. Truffin, B. Varoquie und T. Poinsot. Measurements of transfer functions using large eddy simulations: Theoretical framework and first tests. In *Tenth International Congress on Sound and Vibration*, Seiten 785–793, Stockholm, Sweden, 2003.
- [79] A. P. Dowling. A kinematic model of a ducted flame. *Journal of Fluid Mechanics*, 394:51–72, 1999.
- [80] T. C. Lieuwen. Theoretical investigation of unsteady flow interactions with a premixed planar flame. *Journal of Fluid Mechanics*, 435:289–303, 2001.
- [81] A. P. Dowling. Nonlinear self-excited oscillations of a ducted flame. *Journal of Fluid Mechanics*, 346:271–290, 1997.
- [82] A. A. Peracchio und W. M. Proscia. Nonlinear heat-release/acoustic model for thermoacoustic instability in lean

- premix combustors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 121(3), 1999. Ursprünglich veröffentlicht als ASME Paper No. 98-GT-269.
- [83] T. Murota und M. Ohtsuka. Large-eddy simulation of combustion oscillation in the premixed combustor. *ASME Paper No. 99-GT-274*, 1999.
- [84] S. J. Brookes, R. S. Cant und A. P. Dowling. Modelling combustion instabilities using computational fluid dynamics. *ASME Paper No. 99-GT-112*, 1999.
- [85] M. Zhu, A. P. Dowling und K. N. C. Bray. Self-excited oscillations in combustors with spray atomizers. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123:779–786, 2001.
- [86] S. J. Brookes, R. S. Cant, I. D. J. Dupere und A. P. Dowling. Computational modelling of self-excited combustion instabilities. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123(1):322–326, 2001. Ursprünglich veröffentlicht als ASME Paper No. 2000-GT-0104.
- [87] C.-C. Hantschk und D. Vortmeyer. Numerical simulation of self-excited combustion oscillations in a non-premixed burner. *Combustion Science and Technology*, 174:189–204, 2002.
- [88] C.-C. Hantschk. *Numerische Simulation selbsterregter thermoakustischer Schwingungen*. Nr. 441 in Fortschritt-Berichte VDI Reihe 6. VDI-Verlag, 2000.
- [89] P. J. M. Cronemyr, C. J. Hulme und C. Toger. Coupled acoustic-structure analysis of an annular DLE combustor. *ASME Paper No. 98-GT-502*, 1998.
- [90] G. Walz, W. Krebs, S. Hoffmann und H. Judith. Detailed analysis of the acoustic mode shapes of an annular combustion chamber. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 124(3), 2002. Ursprünglich veröffentlicht als ASME Paper No. 99-GT-113.

- [91] G. Walz, W. Krebs, P. Flohr und S. Hoffmann. Modal analysis of annular combustors: Effect of burner impedance. *ASME Paper No. 2001-GT-0042*, 2001.
- [92] U. Krüger, J. Hüren, S. Hoffmann, W. Krebs und D. Bohn. Prediction of thermoacoustic instabilities with focus on the dynamic flame behavior of the 3A-series gas turbine of Siemens KWU. *ASME Paper No. 99-GT-111*, 1999.
- [93] U. Krüger, J. Hüren, S. Hoffmann, W. Krebs, P. Flohr und D. Bohn. Prediction and measurement of thermoacoustic improvements in gas turbines with annular combustion systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 123:557–566, 2001. Ursprünglich veröffentlicht als ASME Paper No. 00-GT-095.
- [94] S. R. Stow und A. P. Dowling. Thermoacoustic oscillations in an annular combustor. *ASME Paper No. 2001-GT-0037*, 2001.
- [95] S. R. Stow und A. P. Dowling. Modelling circumferential modal coupling due to helmholtz resonators. *ASME Paper No. 2003-GT-38168*, 2003.
- [96] S. Evesque und W. Polifke. Validation of low-order acoustic modelling for annular combustors. *ASME Paper No. GT-2002-30064*, 2002.
- [97] B. Schuermans, V. Bellucci, D. Nowak und C. O. Paschereit. Modelling of complex thermoacoustic systems: a state-space approach. *Ninth International Congress on Sound and Vibration*, 2002.
- [98] B. Schuermans, V. Bellucci und C. O. Paschereit. Thermoacoustic modeling and control of multi burner combustion systems. *ASME Paper No. 2003-GT-38688*, 2003.
- [99] W. Krebs, G. Walz und S. Hoffmann. Thermoacoustic analysis of annular combustor. *AIAA Paper No. AIAA-99-1971*, 1999.

- [100] B.-T. Chu und L. S. G. Kovásznyay. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 3:494–514, 1957/58.
- [101] T. Poinso und D. Veynante. *Theoretical and Numerical Combustion*. Edwards, 2001.
- [102] A. D. Pierce. *Acoustics*. McGraw-Hill Book Company, 1981.
- [103] R. Ewert und W. Schröder. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *Journal of Computational Physics*, 188:365–398, 2003.
- [104] R. Ewert, Q. Zhang, W. Schröder und J. Delfs. Computation of trailing edge noise of a 3d lifting airfoil in turbulent subsonic flow. *AIAA Paper No. AIAA-2003-3114*, 2003.
- [105] A. D. Pierce. Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87(6):2292–2299, 1990.
- [106] F. E. Marble und S. M. Candel. Acoustic disturbance from gas non-uniformities convected through a nozzle. *Journal of Sound and Vibration*, 55(2):225–243, 1977.
- [107] J. Eckstein, E. Freitag, C. Hirsch und T. Sattelmayer. Experimental study on the role of entropy waves in low-frequency oscillations for a diffusion burner. *ASME Paper No. GT2004-54163*, 2004.
- [108] M. J. Lighthill. On sound generated aerodynamically. *Proceedings of the Royal Society of London, Series a*, 211:564–587, 1952.
- [109] C. Pankiewicz, A. Fischer, C. Hirsch und T. Sattelmayer. Computation of transfer matrices for gas turbine combustors including acoustics/flame interaction. *AIAA Paper No. AIAA-2003-3295*, 2003.

- [110] C. Pankiewitz und T. Sattelmayer. Hybrid methods for modeling combustion instabilities. *Tenth International Congress on Sound and Vibration*, Seiten 727–734, 2003.
- [111] M. Åbom. Modal decomposition in ducts based on transfer function measurements between microphone pairs. *Journal of Sound and Vibration*, 135(1):95–114, 1989.
- [112] M. Salikuddin und R. Ramakrishnan. Acoustic power measurement for single and annular stream duct-nozzle systems utilizing a modal decomposition scheme. *Journal of Sound and Vibration*, 113(3):441–472, 1987.
- [113] S. Evesque, W. Polifke und C. Pankiewitz. Spinning and azimuthally standing acoustic modes in annular combustors. *AIAA Paper No. AIAA-2003-3182*, 2003.
- [114] M. Ihme. Computational aeroacoustics at low mach number using LES. Master’s thesis, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2002.
- [115] COMSOL AB. FEMLAB Reference Manual, Version 2.2, 2001.
- [116] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, 1990.
- [117] R. Ashino, M. Nagase und R. Vaillancourt. Behind and beyond the MATLAB ODE suite. Technical Report CRM-2651, Centre de recherches mathématiques (CRM), Université de Montral, 2000.
- [118] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1991.
- [119] L. E. Kinsler und A. R. Frey. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley, New York, 1982.
- [120] Y. Özyörük und L. N. Long. A time-domain implementation of surface acoustic impedance condition with and without flow. *Journal of Computational Acoustics*, 5(3):277–296, 1997.

- [121] M. Fleifil, A. M. Annaswamy, Z. A. Ghoniem und A. F. Ghoniem. Response of a laminar premixed flame to flow oscillations: A kinematic model and thermoacoustic instability results. *Combustion and Flame*, 106:487–510, 1996.
- [122] M. Ohtsuka, S. Yoshida, S. Inage und N. Kobayashi. Combustion oscillation analysis of premixed flames at elevated pressures. *ASME Paper No. 98-GT-581*, 1998.
- [123] J. H. Cho und T. C. Lieuwen. Modeling the response of premixed flames to mixture ratio perturbations. *ASME Paper No. GT-2003-38089*, 2003.
- [124] J. Harper, C. Johnson, Y. Neumeier, T. C. Lieuwen und B. T. Zinn. Experimental investigation of the nonlinear flame response to flow disturbances in a gas turbine combustor. *AIAA Paper No. AIAA-01-0486*, 2001.
- [125] A. Fischer. *Hybride, thermoakustische Charakterisierung von Drallbrennern*. Dissertation, Technische Universität München, 2004.
- [126] L. Ljung. *System identification*. Prentice-Hall, 1987.
- [127] K. J. Åström und B. Wittenmark. *Computer controlled systems: theory and design*. Prentice-Hall, 1990.
- [128] C. Pankiewitz und T. Sattelmayer. Time domain simulation of combustion instabilities in annular combustors. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 125:677–685, 2003. Ursprünglich veröffentlicht als ASME Paper No. 2002-GT-30063.
- [129] C. Pankiewitz, S. Evesque, W. Polifke und T. Sattelmayer. Stability analysis of annular gas turbine combustors. *LECT Workshop on Instabilities in Aero-Engine Combustors, Stuttgart*, 2001.
- [130] K. Kunze. *Untersuchung des thermoakustischen Flammenübertragungsverhaltens in einer Ringbrennkammer*. Dissertation, Technische Universität München, 2004.

- [131] K. Kunze. Persönliche Mitteilungen, 2001. Technische Universität München.
- [132] C. W. S. To und A. G. Doige. A transient testing technique for the determination of matrix parameters of acoustic systems, I: Theory and principles. *Journal of Sound and Vibration*, 62(2):207–222, 1979.
- [133] C. W. S. To und A. G. Doige. A transient testing technique for the determination of matrix parameters of acoustic systems, II: Experimental procedures and results. *Journal of Sound and Vibration*, 62(2):223–233, 1979.
- [134] C. W. S. To und A. G. Doige. The application of a transient testing method to the determination of acoustic properties of unknown systems. *Journal of Sound and Vibration*, 71(4):545–554, 1980.
- [135] J. Y. Chung und D. A. Blaser. Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68(3):907–913, 1980.
- [136] J. Y. Chung und D. A. Blaser. Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. II. Experiment. *Journal of the Acoustical Society of America*, 68(3):914–921, 1980.
- [137] M. L. Munjal und A. G. Doige. Theory of a two source-location method for direct experimental evaluation of the four pole parameters of an aeroacoustic element. *Journal of Sound and Vibration*, 141(2):323–333, 1990.
- [138] M. Åbom. A note on the experimental determination of acoustical two-port matrices. *Journal of Sound and Vibration*, 155(1):185–188, 1992.