

**Grobstruktursimulation
der abgelösten Strömung
um ein angestelltes Tragflügelprofil**

Gary S. Evans

Fachgebiet Strömungsmechanik
Technische Universität München

**Grobstruktursimulation
der abgelösten Strömung
um ein angestelltes Tragflügelprofil**

Gary S. Evans

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades
eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Wolfgang H. Polifke, Ph.D. (CCNY)

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Rainer Friedrich
2. apl. Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing. habil. Hans Wengle

Die Dissertation wurde am 7.1.2004 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 27.5.2004
angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strömungsmechanik der Technischen Universität München und wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Transition“, Themenkreis 5 finanziell gefördert. Vorstudien wurden durch den Bayerischen Forschungsverbund für Technisch-Wissenschaftliches Hochleistungsrechnen (FORTWIHR) unterstützt. Neben der notwendigen finanziellen Förderung habe ich bei der Durchführung meiner Promotion auch viel Hilfe und Unterstützung im fachlichen sowie privaten Bereich gefunden.

Meine größte Dankbarkeit und Wertschätzung gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Rainer Friedrich. Ohne seine stete und wohlwollende Förderung hätte diese Arbeit nicht zustande kommen können.

Herrn Prof. Dr. Hans Wengle danke ich für die Übernahme des Koreferats und so manch anregende Diskussion.

Herr Prof. Wolfgang Polifke übernahm freundlicherweise den Vorsitz der Prüfungskommission.

Herrn Prof. Dr. Pieter Wesseling und seiner Forschungsgruppe an der Technischen Universität Delft danke ich für die Überlassung des Strömungslösers DeFT und die überaus freundliche Unterstützung.

Mein Dank richtet sich auch an alle ehemaligen Kolleginnen und Kollegen für die gute Zusammenarbeit und die stets angenehme Arbeitsatmosphäre. Besonders erwähnen möchte ich Dr. Frederic Tremblay, auf dessen Arbeit ich aufbauen konnte.

Ohne die Hochleistungsrechner des Leibniz-Rechenzentrums in München wäre diese Forschungsarbeit nicht möglich gewesen. Ich danke seinen Mitarbeitern für deren engagierte Arbeit und Hilfe.

Ganz besonderen Dank schulde ich meiner Frau und meinen Eltern. Ihnen widme ich diese Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xiii
Tabellenverzeichnis	xvii
Notation	xix
1. Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Literaturübersicht	2
1.3 Zielsetzung und Aufbau der vorliegenden Arbeit	4
2. Grundlagen	7
2.1 Ausgangsgleichungen	7
2.2 Turbulenz und Grobstruktursimulation	19
2.2.1 Direkte numerische Simulation	20
2.2.2 Statistische Turbulenzbeschreibung	22
2.2.3 Grobstruktursimulation	25
2.2.4 Feinstrukturmodelle	33
2.2.4.1 Smagorinsky-Modell	34
2.2.4.2 Dynamisches Modell	36
2.3 Numerisches Lösungsverfahren	38
2.3.1 MGLET	39

2.3.2	Behandlung beliebig geformter Körper im kartesischen Gitter	44
2.3.2.1	Beschreibung des Verfahrens	44
2.3.2.2	Anpassung für schlanke Körper	48
2.3.3	DeFT	51
3.	Simulationen	55
3.1	Strömungskonfiguration	55
3.2	Numerische Parameter	64
3.2.1	Rechengitter	64
3.2.2	Randbedingungen	68
3.2.3	Zeitschritt und benötigte Computerressourcen	69
3.2.4	Bildung der statistischen Werte	70
3.3	Einfluß der spannweitigen Rechengebietserstreckung	70
3.4	Einfluß der Rechengitterauflösung in Spannweitenrichtung	78
3.5	Einfluß der Randbedingungen an den Kanalwänden	82
3.6	Einfluß des Feinstrukturmodells	86
4.	Zusammenfassung und Ausblick	91
A.	Abriß der Tensorrechnung	93
A.1	Schreibweisen	93
A.1.1	Symbolische (komponentenfreie) Schreibweise	93
A.1.2	Indexschreibweise (Komponentendarstellung)	94
A.2	Summationskonvention	94
A.3	Krummliniges Koordinatensystem	95
A.3.1	Grundsysteme	96
A.3.2	Metriktensor, Herauf- und Herunterziehen von Indizes	98
A.3.3	Christoffel-Symbole	100

A.3.4	Physikalische Komponenten	102
A.3.5	Kovariante Ableitung, Gradient, Divergenz, Laplace- Operator	103
A.4	Kartesisches Koordinatensystem	106
A.4.1	Vereinfachungen aufgrund der Orthogonalität	106
A.4.2	Vereinfachungen aufgrund der Geradlinigkeit	108
A.4.3	Gradient, Divergenz, Laplace-Operator	108
B.	Herleitung der Gleichung (2.22)	111
C.	Normierung	115
D.	Bestimmung der Wandschubspannung und des Drucks auf der Körperoberfläche	117
	Literaturverzeichnis	119

Abbildungsverzeichnis

2.1	Anordnung der Grobstrukturgrößen im kartesischen Gitter und Definition der versetzten Masche (strichlierter Bereich). . .	30
2.2	Bezeichnungen im numerischen Gitter.	40
2.3	Diskretisierungssterne des Programms MGLET für den Diffusions- bzw. Konvektionsterm (links) sowie den Druckterm (rechts) der Komponente in x_i -Koordinatenrichtung von Gleichung (2.56).	42
2.4	Diskretisierungsstern des Programms MGLET für die diskrete Poissongleichung (2.67) sowie Verdeutlichung der geblockten Maschen und Geschwindigkeitsgrößen.	45
2.5	Dreiecksfläche zur Darstellung eines Teilbereiches einer Körperoberfläche.	46
2.6	Zur Bestimmung der Durchstoßpunkte D_i	47
2.7	Zur Bestimmung ob ein Durchstoßpunkt D_i innerhalb einer Dreiecksfläche liegt.	48
2.8	Zur Interpolation einer geblockten Unbekannten.	49
2.9	Darstellung der zur Berechnung der geblockten Unbekannten (weiß mit rotem Rand) verwendeten Größen, links ohne die Anpassung für schlanke Körper und rechts mit der Anpassung für schlanke Körper.	50
2.10	Vergleich des Verlaufs des mittleren Druckbeiwertes $\langle C_p \rangle$ der Berechnung mit Anpassung für schlanke Körper mit dem der Berechnung ohne Anpassung für schlanke Körper.	51
2.11	Diskretisierungssterne des Programms DeFT für den Konvektions-, Diffusions- und Druckterm (von links nach rechts) der Komponente in ξ_1 -Koordinatenrichtung des zweidimensionalen Impulserhaltungssatzes (2.36).	52

2.12	19 Punkte-Diskretisierung des Programms DeFT für die dreidimensionale Poissongleichung (2.68).	54
3.1	Querschnitt des Rechengebiets senkrecht zur Spannweitenrichtung.	56
3.2	Koordinatensysteme und geometrische Größen der Strömungskonfiguration.	57
3.3	Profile der tangentialen Geschwindigkeitskomponente \bar{v}_t des gemittelten Strömungsfeldes.	59
3.4	Darstellung des Wirbelablösevorgangs anhand von Isolinen der spannweitenigen Wirbelstärkekomponente ω_z für einen in Spannweitenrichtung mittigen Querschnitt des momentanen Geschwindigkeitsfeldes.	60
3.5	Darstellung des Wirbelablösevorgangs anhand von Isolinen des momentanen Druckfeldes für einen in Spannweitenrichtung mittigen Querschnitt.	61
3.6	Profile der tangentialen Komponente der rms-Werte der Geschwindigkeit $\bar{v}_{t,rms}$.	62
3.7	Verlauf des mittleren Druckbeiwertes $\langle C_p \rangle$.	63
3.8	Verlauf des mittleren Reibungsbeiwertes $\langle C_f \rangle$.	64
3.9	Momentanes Druckfeld eines in Spannweitenrichtung mittigen Querschnitts des gesamten Rechengebiets.	65
3.10	Verteilung der Gitterpunkte im Rechengebiet.	65
3.11	Verlauf der Maschenweite und ihrer relativen Änderung in x -Achsenrichtung.	66
3.12	Verlauf der Maschenweite und ihrer relativen Änderung in y -Achsenrichtung.	67
3.13	Rechengitter im Bereich der Profilnase sowie Linie (rot) der Grenzschichtdicke $\delta_{99\%}$ nach Gleichung (3.1) und Linie (blau) des dimensionslosen Wandabstandes $d^+ = 10$.	68
3.14	Rechengitter im Bereich der Profilhinterkante sowie Linie (blau) des dimensionslosen Wandabstandes $d^+ = 10$.	69
3.15	Gemitteltes Druckfeld und Stromlinien der Simulationen SM10C192NRB (oben) und SM02C048NRB (unten).	72

3.16	Zeitlicher Verlauf des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes für die Simulationen SM10C192NRB (links) und SM02C048NRB (rechts).	73
3.17	Ausgewählte Orte im Strömungsfeld.	74
3.18	Zweipunkt-Korrelationskoeffizientenfunktion (3.2) für die in der Abbildung 3.17 bezeichneten Orte im Strömungsfeld. . . .	74
3.19	Turbulente kinetische Energie k der Simulationen SM10C192NRB (oben) und SM02C048NRB (unten).	75
3.20	Seitenansicht der Isoflächen der zweiten Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors $Q = 155$ der Simulationen SM10C192NRB (oben) und SM02C048NRB (unten).	76
3.21	Draufsicht der Isoflächen der zweiten Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors $Q = 155$ der Simulationen SM10C192NRB (oben) und SM02C048NRB (unten).	77
3.22	Vergleich der Profile der tangentialen Geschwindigkeitskomponente \bar{v}_t des gemittelten Strömungsfeldes für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.	79
3.23	Vergleich der Profile der tangentialen Komponente der rms-Werte der Geschwindigkeit $\bar{v}_{t,rms}$ für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.	80
3.24	Vergleich der Profile der turbulenten kinetischen Energie k für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.	80
3.25	Vergleich der Profile der aufgelösten Reynoldsschen Schubspannung $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.	81
3.26	Vergleich der Werte von $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ an der Position $x = 0,97c$ für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.	81
3.27	Verlauf der gemittelten Wandschubspannung $\langle \tau_w \rangle$ an der oberen und unteren Kanalwand.	83
3.28	Vergleich der Profile der tangentialen Komponente der rms-Werte der Geschwindigkeit $\bar{v}_{t,rms}$ für die Simulationen SM10C072NRB und SM10C072SRB.	84
3.29	Vergleich der Profile der turbulenten kinetischen Energie k für die Simulationen SM10C072NRB und SM10C072SRB.	84

3.30	Vergleich der Werte von $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ an der Position $x = 0,97 c$ für die Simulationen SM10C072NRB und SM10C072SRB.	85
3.31	Vergleich der Profile der tangentialen Geschwindigkeitskomponente \bar{v}_t des gemittelten Strömungsfeldes für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.	87
3.32	Vergleich der Profile der tangentialen Geschwindigkeitskomponente \bar{v}_t des gemittelten Strömungsfeldes an einer Position im Bereich der Profilnase für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.	88
3.33	Vergleich der Profile der tangentialen Komponente der rms-Werte der Geschwindigkeit $\bar{v}_{t,\text{rms}}$ für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.	89
3.34	Vergleich der Profile der turbulenten kinetischen Energie k für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.	89
3.35	Vergleich der Werte von $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ an der Position $x = 0,97 c$ für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.	90

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter des Leapfrog-Zeitintegrationsverfahrens.	43
3.1	Bezeichnungen und unterscheidende Parameter der vorgestellten Simulationen.	58
3.2	Maschenweiten an den in der Abbildung 3.10 bezeichneten Orten im Rechengitter.	66
3.3	Dimensionslose Maschenweiten an den Kanalwänden.	82

Notation

Die folgende Aufstellung umfaßt alle in der Arbeit vorkommenden Formelzeichen und Abkürzungen. Abweichungen werden an der entsprechenden Stelle im Text erläutert. Den jeweiligen Erläuterungen folgende Zeichen in Klammern bedeuten eine Gleichung und Zeichen ohne Klammern einen Abschnitt des Textes.

Im allgemeinen gilt die Summationskonvention (siehe Abschnitt [A.2](#)).

Formelzeichen

Lateinische Buchstaben

C_D	Widerstandsbeiwert
C_f	Reibungsbeiwert
C_L	Auftriebsbeiwert
C_p	Druckbeiwert
C_S	Smagorinsky-Konstante, 2.2.4.1
c	Profiltiefe (engl. chord)
c_p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck, (B.5)
d	Wandabstand
e	spezifische Gesamtenergie (kinetische und innere Energie), 2.1
Eu	Eulerzahl, C
$\underline{\underline{F}}$	Tensor der Feinstrukturspannungen, (2.51)
\underline{f}	Vektor der spezifischen (massebezogenen) Volumenkraft, 2.1
\underline{g}	Metriktensor, A.3.2
\bar{h}	spezifische Enthalpie, (B.1)
J	Jacobi-Determinante, (A.1)
${}^{\text{SGS}}k$	Feinstrukturenergie, 2.2.4.1
$L_{(ij,k)}$	integrales Längenmaß, (2.48)
l_K	Kolmogorovsches Mikro-Längenmaß, (2.41)
p	Druck, 2.1

\bar{p}	mittlerer Druck, (2.26)
Q	Zweite Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors, (3.3)
q	Vektor der Wärmestromdichte, 2.1
$\underline{\underline{R}}$	Zweipunkt-Geschwindigkeitskorrelationstensor, (2.47)
$\underline{\underline{r}}$	Drehgeschwindigkeitstensor, (2.13)
Re	Reynoldszahl, C
$\underline{\underline{S}}$	Geschwindigkeitsgradiententensor, (2.11)
s	spezifische Entropie, (2.18)
$\underline{\underline{s}}$	Deformationsgeschwindigkeitstensor, (2.12)
St	Strouhalzahl, C
T	thermodynamische Temperatur, 2.1
t	Zeit
t_K	Kolmogorovsches Mikro-Zeitmaß, (2.42)
U_∞	ungestörte Anströmgeschwindigkeit, 3
u	spezifische innere Energie, (2.15)
V	Volumen
$\underline{\underline{V}}$	Viskositätstensor, (2.23)
$\underline{\underline{\underline{v}}}$	spezifisches Volumen, 2.1
\underline{v}	Geschwindigkeitsvektor, 2.1
v_τ	Schubspannungsgeschwindigkeit, 2.2.4.1
w	Wärmequellldichte, 2.1
x	Ortsvektor, 2.1
x_i	kartesische Koordinaten, 2.1

Griechische Buchstaben

α	Anstellwinkel des Tragflügelprofils, 3 bzw. Platzhaltergröße, 2.2
β	Ausdehnungskoeffizient, (B.6)
Γ_{jk}^i	Christoffel-Symbol, (A.19)
Δ	Filterweite
Δ_i	Filterweite in Koordinatenrichtung x_i
δ_i	zentraler Differenzenoperator, (2.53)
δ_{ij}	Kroneckersymbol, (A.13)
ΔA_i	Maschenfläche deren Normalenvektor parallel zur Koordinatenrichtung x_i ist
ΔV	Maschenvolumen
Δt	Zeitschrittweite
Δx_i	Maschenweite in Koordinatenrichtung x_i
ϵ	turbulente Dissipationsrate, 2.2
μ	dynamische Viskosität, (2.25)

μ'	Volumenviskosität, (2.25)
$\hat{\mu}$	Druckviskosität, (2.27)
ν	kinematische Viskosität ($\nu = \mu/\varrho$)
ν_t	Wirbelviskosität, 2.2.4
ξ^i	allgemeine krummlinige Koordinaten, 2.1
$\underline{\underline{\pi}}$	Spannungstensor, 2.1
ϱ	Dichte, 2.1
$\underline{\underline{\tau}}$	Zähigkeitsspannungstensor, (2.16)
τ_w	Wandschubspannung, 2.2.4.1
Φ	Dissipationsfunktion, (2.21)
ϕ	Platzhaltergröße
χ	Platzhaltergröße
Ψ	skalares Potential
$\underline{\underline{\omega}}$	Wirbelstärkevektor

Mathematische Bezeichnungen

ϕ	Skalar (Tensor nullter Stufe)
$\underline{\phi}$	Vektor (Tensor erster Stufe)
$\underline{\underline{\phi}}$	Tensor zweiter Stufe
$\underline{\underline{\underline{\phi}}}$	Tensor vierter Stufe
ϕ_i	kartesische Komponenten des Vektors $\underline{\phi}$
ϕ_{ij}	kartesische Komponenten des Tensors zweiter Stufe $\underline{\underline{\phi}}$
ϕ_{ijkl}	kartesische Komponenten des Tensors vierter Stufe $\underline{\underline{\underline{\phi}}}$
ϕ^i	kontravariante Komponenten des Vektors $\underline{\phi}$
ϕ^{ij}	kontravariante Komponenten des Tensors zweiter Stufe $\underline{\underline{\phi}}$
$\langle \phi \rangle$	statistischer Mittelwert der Größe ϕ , 2.2
ϕ''	Schwankungswert (Fluktuation) der Größe ϕ (Abweichung vom statistischen Mittelwert $\langle \phi \rangle$), 2.2
$\overline{\phi}$	gefilterter Wert (Grobstrukturwert), 2.2
$\overline{\Delta A_i \phi}$	Mittelwert über eine Maschenfläche ΔA_i (Grobstrukturwert), 2.2
$\overline{\Delta V \phi}$	Mittelwert über ein Maschenvolumen (Grobstrukturwert), 2.2
ϕ'	Abweichung von einem Grobstrukturwert, 2.2

Sonstige mathematische Symbole

- Operationssymbol für das Skalarprodukt (inneres Produkt, einfache Überschiebung)

\times	Operationssymbol für das Vektorprodukt (äußeres Produkt)
∇	Nabla-Operator, (A.25)
$\frac{D(\dots)}{Dt}$	substantielle Ableitung, (2.8)
\prod	Produktzeichen ($\prod_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} = \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n$)
\sum	Summationszeichen ($\sum_{\alpha=1}^n \phi_{\alpha} = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$)

Indizes mit einer besonderen Bedeutung

min	minimaler Wert
ref	Referenzgröße zur Normierung
rms	root mean square ($\phi_{\text{rms}} = \sqrt{\langle \phi'^2 \rangle}$)

Abkürzungen

DNS	direkte numerische Simulation
GS	Grobstruktur (engl. grid-scale)
LES	Grobstruktursimulation (engl. large-eddy simulation)
SGS	Feinstruktur (engl. subgrid-scale)

1. Einleitung

1.1 Motivation

Die rapide Leistungssteigerung der Computer in den letzten Jahrzehnten hat auch zu enormen Fortschritten bei der Vorhersage von Strömungsvorgängen in der Aerodynamik geführt. So ist es seit etwa Mitte der 80er Jahre möglich, das Strömungsfeld um ganze Flugzeuge zu berechnen ([AGARWAL, 1999](#)). Ziel dieser numerischen Anstrengungen ist die Ermittlung globaler aerodynamischer Beiwerte für Auftrieb, Widerstand und Momente des Flugzeugs im Zusammenhang mit Leistungsvorhersagen für den Flugzeugentwurf. Grundlegende physikalische Einsichten in transitionelle und turbulente Strömungsvorgänge sind mit diesen auf algebraischen Turbulenzmodellen (z. B. Baldwin-Lomax), empirischen Transitionslagen und meist relativ groben Gittern beruhenden numerischen Lösungen nicht zu gewinnen. Grundlagenforschung, die ein vertieftes Verständnis von Transitions- und Turbulenzmechanismen sowie die Verbesserung von Vorhersagemethoden für die Praxis zum Ziel hat, muß deshalb an einzelnen Flugzeugkomponenten ansetzen.

Die wichtigste Komponente eines Flugzeugs ist zweifelsohne die Tragfläche, da überwiegend diese den zum Fliegen notwendigen Auftrieb erzeugt. Dabei gebietet die Forderung nach größtmöglicher Wirtschaftlichkeit, daß der mit der Auftriebserzeugung einhergehende Widerstand minimiert wird. Dies führte zur Entwicklung von schlanken, i. allg. gewölbten Tragflügelprofilen mit runder Vorder- und scharfer Hinterkante.

Während im Bereich kleiner Anstellwinkel der Auftrieb (bei Flügeln großer Streckung) noch linear mit dem Anstellwinkel zunimmt, liegt bei großen Anstellwinkeln eine nichtlineare Abhängigkeit des Auftriebs vom Anstellwinkel vor. Diese Nichtlinearität erschwert die genaue Vorhersage des maximalen Anstellwinkels bevor die Strömung ablöst. Eine Strömungsablösung ist wiederum mit einem starken Auftriebsabfall verbunden und kann deshalb zu kritischen Flugzuständen, u. U. sogar zur Katastrophe führen. Für ein Höchstmaß an Wirtschaftlichkeit ist es jedoch zwingend notwendig, immer weiter in diesen Hochauftriebsbereich bei großen Anstellwinkeln vorzudrin-

gen. Ein grundlegendes Verständnis der Strömungsablösung, bzw. ihre zuverlässige Vorhersage ist daher zentrales Anliegen der Aerodynamik.

1.2 Literaturübersicht

Die Zusammenstellung der im folgenden vorgestellten Literatur beschränkt sich auf ausgewählte Arbeiten, in denen die Grobstruktursimulationsmethode auf die Tragflügelumströmung, wie sie Gegenstand der Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit ist, angewendet wird.

Den ersten Versuch, die Strömung um einen ungepfeilten Tragflügel mit der Grobstruktursimulationsmethode zu beschreiben, unternahm [JANSEN \(1994\)](#). Der Tragflügel besaß ein NACA 4412 Profil und hatte 12° Anstellwinkel. Diese Konfiguration bei Maximalauftrieb und einer Reynoldszahl, basierend auf der Profiltiefe und der ungestörten Anströmgeschwindigkeit, von $1,64 \times 10^6$ wurde deshalb gewählt, weil sie mit den statistisch gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen nicht erfolgreich vorhergesagt werden konnte und weil dafür Experimente von [COLES und WADCOCK \(1979\)](#), [HASTINGS und WILLIAMS \(1987\)](#) sowie [WADCOCK \(1987\)](#) vorlagen. Jansens Navier-Stokes-Löser basierte auf einem Finite-Elemente-Verfahren für unstrukturierte Gitter. Der Flügel war 0,2 Profiltiefen breit und die Gesamtelementezahl betrug 10^6 . Es wurde mit dem Smagorinsky-Modell mit konstantem Koeffizienten und Wanddämpfung gearbeitet. Ein Vergleich mit einer Simulation ohne Modell zeigte, daß aufgrund der Wirbelviskosität des Modells im Nasenbereich keine Ablösung auftrat, während andererseits Turbulenz als Folge absoluter Instabilität auf der Höhe der Grenzschichtablösung entstand. Die zeitliche und räumliche Auflösung ($\Delta x^+ = 200$, $\Delta z^+ = 50$, $\Delta y^+ = 1$ (in Wandnähe)) der Simulation war zu grob, um eine natürliche Transition vorherzusagen zu können.

Ein Jahr später berichteten [KALTENBACH und CHOI \(1995\)](#) in den CTR Annual Research Briefs über eine Grobstruktursimulation des gleichen Problems, mit einem Navier-Stokes-Löser für strukturierte krummlinige Gitter und dem dynamischen Feinstrukturmodell von [GERMANO ET AL. \(1991\)](#). Die Homogenität der Strömung in Spannweitenrichtung wurde ausgenutzt, um einen nur von zwei Koordinatenrichtungen abhängigen Modell-Koeffizienten zu erhalten. Trotz dieser Filterprozedur in Spannweitenrichtung traten in laminaren Strömungsgebieten (Nasenbereich) unphysikalische negative Koeffizienten auf, die unterdrückt werden mußten. Zwei Simulationen mit unterschiedlicher spannweitischer Gebietsgröße (0,05 bzw. 0,025 Profiltiefen) und

maximal $2,4 \times 10^6$ Maschenzellen wurden durchgeführt. Die Maschenweite auf der ProfiOberseite variierte zwischen 405 für Δx^+ im Nasenbereich (10 % Flügeltiefe) und 110 bei 80 % Flügeltiefe, wobei die gesamte ProfiOberseite mit 640 Punkten diskretisiert wurde. Ein Schwachpunkt der Simulation ist u. a. in der Tatsache zu sehen, daß am äußeren Rand des Rechengebiets ungestörte Anströmung angenommen wurde, jedoch dieser Rand nur 3 Profiltiefen vom Tragflügel entfernt war. Die Strömung entsprach also eher der eines Profils im Windkanal mit parallelen Wänden als einem Profil im Freiflug. Die Folge davon war, daß die Saugspitze im Nasenbereich verstärkt erschien. Dennoch fiel der Vergleich zwischen gerechneter und gemessener (WADCOCK, 1987) Druckverteilung recht gut aus. Unbefriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment ergab sich für gemittelte Geschwindigkeitsprofile im hinteren Profilbereich, in dem die Strömung der Ablösung sehr nahe ist. Die Autoren betonen in ihrer Schlußfolgerung die Notwendigkeit, die räumliche Auflösung zu erhöhen und die Wirkung von Windkanalwänden zu berücksichtigen.

Die CTR Annual Research Briefs enthalten einen weiteren Fortschrittsbericht von JANSEN (1995) zum Thema LES der Strömung um das NACA 4412 Profil auf unstrukturierten Gittern. Darin wird ein effizienter Gittergenerator beschrieben, der die Maschen so plaziert, daß eine möglichst allseitige glatte Variation der physikalischen Längenmaße erzielt wird. Ein weiteres wichtiges Thema stellt die Formulierung eines dynamischen Feinstrukturmodells für unstrukturierte Gitter dar, insbesondere die Entwicklung eines expliziten Filteroperators. Es werden Simulationsergebnisse für unterschiedliche räumliche Auflösungen präsentiert, die einen starken Einfluß der Maschenweite auf die Strömung widerspiegeln. Immerhin läßt sich in den nahezu gitterunabhängigen hochaufgelösten Simulationen eine Vorderkantenablösung beobachten, die durch Ausblasen im Nasenbereich hervorgerufen wird und der kontrollierten Transition dient, ferner eine turbulente Ablöseblase stromab, die sich nahe der Hinterkante schließt. Eine Übereinstimmung mit dem Experiment läßt sich jedoch noch nicht erzielen. Begleitende Rechnungen mit den statistisch gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen werden empfohlen, da sie wesentlich billiger als Grobstruktursimulationen sind und geeignet, Reaktionen der Strömung auf geänderte globale Strömungsparameter tendenziell richtig vorherzusagen.

JANSEN (1996, 1997) berichtet über weitere Fortschritte der Grobstruktursimulation von WADCOCKs Experiment (1987) mit dem NACA 4412 Profil. Neu gegenüber den früheren Ergebnissen ist die Berücksichtigung von Windkanalwänden (Versperrungseffekt), die Nachbildung eines Transitionsstreifens nahe der Vorderkante wie im Experiment sowie die Vergrößerung

des Rechengebiets in Spannweitenrichtung. Die Rechnungen zeigen, daß der Effekt der Windkanalwände stärker ist, als der des Transitionsstreifens. Die Wichtigkeit der Gebietsvergrößerung spiegelt sich in der Tatsache wider, daß die spannweitigen Geschwindigkeitsschwankungen in 95 % Profiltiefe, d. h. im Ablösebereich stark an Amplitude zunehmen.

Das primäre Ziel des Brite-Euram Projekts LESFOIL ([DAVIDSON ET AL., 2003](#)) war die Untersuchung der Durchführbarkeit von Grobstruktursimulationen für den Fall einer Strömung um ein Tragflügelprofil. Dazu wurde von den neun am Projekt beteiligten Gruppen mit jeweils unterschiedlichen numerischen Methoden die Strömung um ein Aerospatiale A-Tragflügelprofil bei Maximalauftrieb und einer Reynoldszahl, basierend auf der Profiltiefe und der ungestörten Anströmgeschwindigkeit, von $2,1 \times 10^6$ simuliert. Diese Konfiguration wurde gewählt, weil dafür experimentelle Daten aus zwei Windkanälen verfügbar sind und die Konfiguration bereits in zwei früheren europäischen Projekten ausgiebig mit den statistisch gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen berechnet wurde. Weiterhin stellt die Konfiguration hohe Ansprüche an die Simulationsmethode, da in der Nähe der Profilverdickung eine laminare Ablöseblase auftritt, deren korrekte Auflösung die richtige Vorhersage des weiteren Strömungsverlaufs entscheidend bestimmt. In ([MELLEN ET AL., 2002](#)) wird eine Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse von sieben der neun Projektgruppen präsentiert. Darin ziehen die Autoren das Fazit, daß die besten Simulationsergebnisse für eine ausreichend aufgelöste Grobstruktursimulation erzielt werden. Sie betonen, daß die Auflösung des Rechengitters wesentlich größeren Einfluß hat als das verwendete Feinstrukturmodell. Ebenso ist nach ihrer Meinung der beste Ansatz für die Behandlung der Transition, wenn diese durch ein hinreichend feines Rechengitter erfaßt wird.

1.3 Zielsetzung und Aufbau der vorliegenden Arbeit

Das Literaturstudium zeigt, daß Grobstruktursimulationen von Strömungen um Tragflügelprofile bzw. Streifen von Tragflächen mit den heute verfügbaren Computern und numerischen Methoden möglich sind. Jedoch werden dabei große Anforderungen an die für die Simulation notwendigen Ressourcen gestellt.

Finite-Elemente-Methoden haben den Vorteil hoher Flexibilität in der räumlichen Auflösung. Gitter können dort verfeinert werden, wo starke Geschwin-

digkeitsgradienten auftreten, ohne, wie bei strukturierten Gittern, dann auch hohe Auflösung in Zonen in Kauf nehmen zu müssen, in denen grobe Gitter ausreichend wären. Nachteilig bei diesen Methoden ist der höhere Rechenaufwand, die Schwierigkeit der expliziten räumlichen Filterung und die Kompliziertheit der Datenauswertung.

Bei Finite-Differenzen-Verfahren auf körperangepaßten strukturierten Gittern stellen die explizite räumliche Filterung und die Datenauswertung keinerlei Problem dar, da der Zugriff zu Nachbarmaschen schnell ist. Zeitraubend und oft schwierig ist jedoch die Erzeugung von numerischen Gittern, die die gewünschte räumliche Auflösung besitzen. Arbeitet man dann noch im Fall einer inkompressiblen Strömung mit versetzt angeordneten Variablen, um das Problem der Druck-Geschwindigkeitsentkopplung zu vermeiden, das bei zellzentrierter Variablenanordnung entstehen kann, dann handelt man sich bei der Lösung des Poisson-Problems zur Druckberechnung unvermeidbar hohe Rechenzeiten ein.

In Anbetracht der Vor- und Nachteile beider Methoden scheint eine dritte Methode vielversprechend zu sein, nämlich ein Differenzen-Verfahren für versetzt angeordnete Variablen auf kartesischen Gittern, bei dem die von der Körperoberfläche durchschnittenen Maschen ausgeblockt und die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten durch Interpolation oder Extrapolation in den drei Koordinatenrichtungen so gesetzt werden, daß auf dem Körperperrand die Haft- und Undurchlässigkeitsbedingungen erfüllt sind. Ein derartiges Verfahren soll in der vorliegenden Arbeit für die Simulation der Strömung um ein Tragflügelprofil angewendet werden.

Im folgenden Kapitel 2 werden die notwendigen Grundlagen zusammengestellt. So werden in Abschnitt 2.1 die verwendeten physikalischen Gleichungen aufgeführt, in Abschnitt 2.2 wird die Methode der Grobstruktursimulation erläutert und in Abschnitt 2.3 werden die angewendeten numerischen Verfahren vorgestellt. In Kapitel 3 werden die durchgeführten Simulationen präsentiert.

2. Grundlagen

2.1 Ausgangsgleichungen

Um einen physikalischen Vorgang berechnen zu können, ist es notwendig, eine mathematische Beschreibung für diesen Vorgang zu finden. Zu diesem Zweck muß zunächst eine physikalische Modellvorstellung des Vorgangs geschaffen werden, die dann mit mathematischen Mitteln formuliert wird. Sowohl bei der Bildung des physikalischen Modells als auch bei dessen mathematischer Formulierung müssen i. allg. Annahmen getroffen werden, die einschränkenden Charakter haben, so daß einzelne Aspekte des physikalischen Vorgangs nicht mehr erfaßt werden. Oft werden diese einschränkenden Annahmen aber auch absichtlich getroffen, um z. B. die Komplexität eines Vorgangs zu reduzieren und diesen dadurch leichter analysieren zu können. In jedem Fall ist jedoch die Kenntnis der einschränkenden Annahmen notwendig, da sinnvolle Aussagen über den physikalischen Vorgang von den gefundenen mathematischen Beziehungen nur innerhalb ihres Gültigkeitsbereiches zu erwarten sind. Im folgenden werden deshalb die mathematischen Gleichungen mit ihren einschränkenden Annahmen, wie sie den Berechnungen in dieser Arbeit zugrunde liegen, aufgeführt.

Unter der Annahme, daß das strömende Medium als ein Kontinuum betrachtet werden kann, lassen sich alle Strömungen durch die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie vollständig beschreiben. Die idealisierte Vorstellung von dem strömenden Medium als einem Kontinuum bedingt jedoch, daß im Medium die charakteristischen physikalischen Größen höchstens bis auf diskrete Diskontinuitätsflächen stetige Funktionen von Raum und Zeit sind. Es wird also angenommen, daß von der tatsächlich vorliegenden atomistischen und folglich diskontinuierlichen Struktur aller Materie abgesehen werden kann. Diese Annahme ist aber nur so lange zulässig, wie die das Strömungsproblem charakterisierenden Längenmaße wesentlich größer sind als die Abmessungen eines räumlichen Bereiches, in dem sich eine ausreichend große Anzahl von Teilchen (Atome bzw. Moleküle) des Mediums befindet, so daß für diesen Bereich ein von der Anzahl der Teilchen unabhängiger Mit-

telwert für jede der charakteristischen physikalischen Größen des Mediums angegeben werden kann. Das Kontinuumsmodell schließt somit alle diejenigen Strömungen von der Behandlung aus, bei denen diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Darunter fallen z. B. die Vorgänge in hochverdünnten Gasen und in einem Verdichtungsstoß.

In einem nicht beschleunigten Bezugssystem (Inertialsystem) lautet in symbolischer (komponentenfreier) Schreibweise die differentielle Formulierung des Erhaltungssatzes der Kontinuumstheorie für die Masse

$$\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{\rho} \underline{v}) = 0, \quad (2.1)$$

den Impuls

$$\frac{\partial \underline{\rho} \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{\rho} \underline{v} \underline{v} - \underline{\pi}) - \underline{\rho} \underline{f} = 0 \quad (2.2)$$

und die Energie

$$\frac{\partial \underline{\rho} e}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{\rho} e \underline{v} - \underline{\pi} \cdot \underline{v} + \underline{q}) - \underline{\rho} \underline{v} \cdot \underline{f} - \underline{\rho} w = 0 \quad (2.3)$$

(vgl. z. B. [SERRIN, 1959](#)), wobei

$\underline{\rho}$ die Dichte oder Massendichte [kg/m^3],

\underline{v} den Geschwindigkeitsvektor,

$\underline{\pi}$ den Spannungstensor,

\underline{f} den Vektor der spezifischen (massebezogenen) Volumenkraft,

e die spezifische Gesamtenergie (kinetische und innere Energie),

\underline{q} den Vektor der Wärmestromdichte,

w die Wärmequellendichte

bezeichnet.

Die Bilanzsätze (2.1) bis (2.3) sind auf nichtrelativistische Vorgänge beschränkt, d. h. es wird vorausgesetzt, daß sowohl die Geschwindigkeit des Kontinuums als auch die Geschwindigkeiten der mikroskopischen Bewegung der Teilchen klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind (siehe [GREINER und STOCK, 1991](#)). Weiterhin gelten diese Gleichungen nur für Bereiche, in denen die charakteristischen physikalischen Größen stetige Funktionen von Raum und Zeit sind. Kommen im betrachteten Gebiet Diskontinuitätsflächen vor, so müssen zusätzliche Grenzbedingungen (Übergangsrelationen) angegeben werden (siehe [SCHADE, 1970](#)). Handelt es sich z. B. bei der Diskontinuitätsfläche um eine Stoßfront, dann entsprechen die Grenzbedingungen den bekannten Rankine-Hugoniot Bedingungen. Im folgenden soll vom Auftreten von Diskontinuitätsflächen abgesehen werden.

Die Beziehung (2.1), die auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet wird, enthält keinen Quellterm. Ein solcher Term darf hier entfallen, da bei den physikalischen Vorgängen, wie sie im Rahmen dieser Arbeit behandelt werden, Masse weder erzeugt noch vernichtet wird. In Strömungen kann es jedoch aufgrund von Phasen- oder Stoffumwandlungen zu Änderungen in der Zusammensetzung des strömenden Mediums kommen, wobei dann die Gleichung (2.1) den Erhaltungssatz für die Gesamtmasse des strömenden Mediums darstellt. Um auch die Änderungen in der Zusammensetzung des Mediums erfassen zu können, bedarf es zusätzlich noch der Angabe der Erhaltungsgleichungen für die Massen der einzelnen Phasen bzw. Komponenten. Diese Erhaltungsgleichungen müssen einen Quellterm enthalten, da Massenanteile von Phasen bzw. Komponenten in Anteile anderer umgewandelt werden können (siehe hierzu z. B. [BIRD ET AL., 1960](#)). Im weiteren soll angenommen werden, daß das strömende Medium einphasig und homogen ist und daß sich seine Zusammensetzung nicht ändert. Dies bedeutet, daß in der Strömung keine Phasenumwandlungen und keine chemischen Reaktionen oder Ionisationen stattfinden dürfen, und wenn das strömende Medium ein Gemisch verschiedener Stoffe ist, wie z. B. die Luft, muß das Mischungsverhältnis überall gleich sein.

Die als (erste) Cauchysche Bewegungsgleichung bekannte Beziehung (2.2) ist ein Bilanzsatz vektorieller Größen. Bevor diese Gleichung numerisch ausgewertet werden kann, muß sie in einem Basissystem dargestellt werden, wobei sich die einfachste Darstellungsform für ein System kartesischer Einheitsvektoren ergibt. Mit der Beziehung (A.44) erhält man dann für die Gleichungen (2.1) bis (2.3) die folgende Darstellung in kartesischen Komponenten

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_j}{\partial x_j} = 0 , \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_j v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \pi_{ji}}{\partial x_j} - \varrho f_i = 0 , \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varrho e}{\partial t} + \frac{\partial \varrho e v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \pi_{jk} v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \varrho v_j f_j - \varrho w = 0 . \quad (2.6)$$

Im Gegensatz zur Mechanik eines Massenpunktes ist in der Kontinuumstheorie reibungsbehafteter strömender Medien der Drehimpulssatz (Drallsatz) ein vom Impulssatz unabhängiges Axiom, aus dem für ein nichtpolares Medium (siehe hierzu [ARIS, 1962](#)) die Symmetrie des Spannungstensors

$$\pi_{ij} = \pi_{ji} \quad (2.7)$$

abgeleitet werden kann. Dabei ist natürlich auch die umgekehrte Vorgehensweise möglich. In diesem Fall nennt man das Postulat von der Symmetrie des Spannungstensors häufig das Boltzmannsche Axiom, aus dem dann der Drehimpulssatz der Kontinuumstheorie hergeleitet werden kann.

Mit der substantiellen (materiellen) Ableitung einer Strömungsgröße

$$\frac{D(\dots)}{Dt} = \frac{\partial(\dots)}{\partial t} + v_j \frac{\partial(\dots)}{\partial x_j}, \quad (2.8)$$

die die zeitliche Änderung der Strömungsgröße angibt, die ein sich mit der Geschwindigkeit \underline{v} bewegender Beobachter feststellt, kann die Kontinuitätsgleichung (2.4) auch in der Form

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.9)$$

geschrieben werden. Weiterhin folgt aus der Definition für die substantielle Ableitung (2.8) durch Addition der mit der Strömungsgröße multiplizierten Kontinuitätsgleichung (2.4) die Beziehung

$$\rho \frac{D(\dots)}{Dt} = \frac{\partial \rho(\dots)}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j(\dots)}{\partial x_j}. \quad (2.10)$$

Durch skalare Multiplikation der Cauchyschen Bewegungsgleichung mit dem Geschwindigkeitsvektor \underline{v} erhält man den Bilanzsatz für die spezifische kinetische Energie $\frac{v_i v_i}{2}$ (Energiesatz der Mechanik)

$$\frac{\partial \rho \frac{v_i v_i}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho \frac{v_i v_i}{2} v_j}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial \pi_{ji}}{\partial x_j} - \rho v_i f_i = 0,$$

worin der dritte Term wie folgt umgewandelt werden kann

$$v_i \frac{\partial \pi_{ji}}{\partial x_j} = \frac{\partial \pi_{ji} v_i}{\partial x_j} - \pi_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Der dabei auftretende Geschwindigkeitsgradiententensor

$$S_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = s_{ij} + r_{ij}, \quad (2.11)$$

mit

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = s_{ji} \quad (2.12)$$

und

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -r_{ji} , \quad (2.13)$$

läßt sich, wie jeder Tensor zweiter Stufe, in einen symmetrischen Anteil s_{ij} , den sogenannten Deformationsgeschwindigkeitstensor, und in einen antisymmetrischen Anteil r_{ij} , der Rotations- oder Drehgeschwindigkeitstensor genannt wird, aufspalten. Da zudem die doppelte Überschiebung des symmetrischen Spannungstensors π_{ij} mit dem antisymmetrischen Drehgeschwindigkeitstensor r_{ij} verschwindet, folgt schließlich für die spezifische kinetische Energie die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho \frac{v_i v_i}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \varrho \frac{v_i v_i}{2} v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \pi_{ji} v_i}{\partial x_j} + \pi_{ji} s_{ji} - \varrho v_i f_i = 0 . \quad (2.14)$$

Subtrahiert man vom Erhaltungssatz für die spezifische Gesamtenergie (2.6), der dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik entspricht, die Gleichung (2.14), so erhält man die Bilanzgleichung für die spezifische innere Energie $u = e - \frac{v_i v_i}{2}$

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \pi_{ji} s_{ji} - \varrho w = 0 . \quad (2.15)$$

Die Cauchysche Bewegungsgleichung gilt für jedes Kontinuum und muß durch die Angabe einer Materialgleichung zu einer Bewegungsgleichung für das jeweilige strömende Medium spezialisiert werden. Dies ist auch in Hinblick auf die Lösbarkeit des Gleichungssystems notwendig, da in den 8 Gleichungen (2.4) bis (2.7) die 18 unbekannt Funktionen ϱ , v_i , π_{ij} , e , q_i , w vorkommen, wobei die Komponenten des Vektors der spezifischen Volumenkraft f_i als bekannt vorausgesetzt werden.

Der Begriff Fluid wird überwiegend als bloßer Sammelbegriff für reale Flüssigkeiten und Gase benutzt. Teilweise wird mit diesem Begriff aber auch das Kontinuumsmodell einer bestimmten Klasse von strömenden Medien bezeichnet, welche die gemeinsame Eigenschaft haben, in der Ruhe nur Druckspannungen aufnehmen zu können. Da alle Gase und alle Flüssigkeiten, wenn diese in größeren Mengen vorliegen, so daß vom Effekt etwaiger Oberflächenspannungen abgesehen werden kann, diese Eigenschaft gemein haben, wird oft zwischen den beiden Verwendungsweisen des Begriffs Fluid nicht unterschieden. Dies ist aber eine nicht vertretbare Nachlässigkeit, weil sich die zuletzt genannte Verwendungsweise auf das Kontinuumsmodell mit seinen einschränkenden Annahmen stützt und deshalb z. B. hochverdünnte Gase in dieser strikteren Definition des Begriffs Fluid nicht eingeschlossen sind. In Übereinstimmung mit den bislang für das strömende Medium getroffenen

Annahmen, wird im folgenden der Begriff Fluid in dieser enger gefaßten Bedeutung verwendet.

Wie bereits bemerkt wurde, treten in einem Fluid im Ruhezustand nur die richtungsunabhängigen Normalspannungen auf, die vom im Fluid herrschenden Druck herrühren, was zu dem Ansatz für den Spannungstensor

$$\pi_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.16)$$

führt. Darin ist p der Druck und τ_{ij} der Zähigkeitsspannungstensor (Tensor der Reibungsspannungen), der dem Ansatz gemäß im Ruhezustand verschwinden muß. Wegen der Symmetrie des Spannungstensors π_{ij} folgt aus der Gleichung (2.16), daß auch der Zähigkeitsspannungstensor τ_{ij} symmetrisch ist.

Die Bilanzgleichung für die spezifische innere Energie (2.15) kann nun unter Verwendung der Beziehungen (2.10) und (2.16) in der Form

$$\varrho \frac{D u}{D t} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + p s_{jj} - \tau_{ji} s_{ji} - \varrho w = 0 \quad (2.17)$$

geschrieben werden. In diesem Bilanzsatz ist die spezifische innere Energie nur eine Funktion von Ort und Zeit, $u = u(\underline{x}, t)$. Aus der Thermodynamik ist jedoch bekannt, daß die spezifische innere Energie eine Zustandsgröße und somit zugleich eine Funktion anderer Zustandsgrößen ist, was durch die Gleichung

$$du = T ds + \frac{p}{\varrho^2} d\varrho \quad (2.18)$$

wiedergegeben wird. In der angegebenen Form ist die sogenannte Gibbssche Fundamentalgleichung für ein einphasiges, homogenes Medium, dessen Zusammensetzung sich nicht ändert, gültig. Neben den bereits gemachten Annahmen (siehe weiter oben) sind somit keine zusätzlichen Forderungen an das Medium zu stellen. Aus der Fundamentalgleichung in der Formulierung (2.18) folgt, daß sich die spezifische innere Energie u , die (thermodynamische) Temperatur T und der (thermodynamische) Druck p als Funktionen der Dichte ϱ und der spezifischen Entropie s darstellen lassen. Alle diese Größen sind folglich selbst wieder Zustandsgrößen und der thermodynamische Zustand des Mediums ist durch die Angabe von zwei Zustandsgrößen eindeutig bestimmt. Dies bedeutet, daß sich jede Zustandsgröße als eine Funktion von zwei anderen Zustandsgrößen darstellen läßt, wobei alle diese sogenannten Zustandsgleichungen unabhängig von Ort und Zeit und i. allg. für verschiedene Medien unterschiedlich sind. Für ein bestimmtes Medium gelten also im ganzen Bereich, den das Medium einnimmt, und zu jedem Zeitpunkt zwischen

den Zustandsgrößen die gleichen Abhängigkeiten. Damit diese für ein ruhendes Medium gültigen Zustandsgleichungen auch auf ein strömendes Medium angewendet werden können, muß gefordert werden, daß lokales thermodynamisches Gleichgewicht herrscht. Diese Forderung gewährleistet, daß sich zwar die Zustandsgrößen räumlich sowie zeitlich ändern können, für diese aber zu jeder Zeit und überall im Medium dieselben Zustandsgleichungen wie im Fall des ruhenden Mediums gelten. Natürlich stellt dies eine Idealisierung der wirklichen Verhältnisse in einem strömenden Medium dar und ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß sich die Zustandsgrößen so langsam ändern, daß auftretende Abweichungen von den Zustandsgleichungen vernachlässigt werden können. Solche Abweichungen entstehen aufgrund der nichtmomentanen Anpassung der Zustandsgrößen an einen neuen thermodynamischen Zustand.

Für die Anwendung der Gibbsschen Fundamentalgleichung auf strömende Medien ist die mit (2.18) gleichwertige Formulierung

$$\varrho \frac{D u}{D t} = \varrho T \frac{D s}{D t} + \frac{p}{\varrho} \frac{D \varrho}{D t} \quad (2.19)$$

vorteilhafter. Mit dieser Gleichung und der Beziehung

$$\frac{p}{\varrho} \frac{D \varrho}{D t} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -p s_{jj} ,$$

die man unter Berücksichtigung der Definition des Deformationsgeschwindigkeitstensors (2.12) aus der Kontinuitätsgleichung (2.9) erhält, wird aus dem Bilanzsatz für die spezifische innere Energie (2.17)

$$\varrho T \frac{D s}{D t} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \tau_{ji} s_{ji} - \varrho w = 0 . \quad (2.20)$$

Diese Form der Bilanzgleichung der spezifischen inneren Energie erlaubt die Deutung des Terms $\tau_{ji} s_{ji}$. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik für ein geschlossenes System, an dem nur Volumenarbeit verrichtet wird, ist die dem System zugeführte Wärme gleich der Summe aus der Änderung seiner inneren Energie und der an ihm verrichteten Volumenarbeit. Daraus ergibt sich, daß die pro Masseneinheit zugeführte Wärme dem Ausdruck $du + p dv = du - \frac{p}{\varrho^2} d\varrho$ entspricht, der nach der Gibbsschen Fundamentalgleichung (2.18) gleichwertig mit $T ds$ ist. Für die einem materiellen Fluidteilchen (d. h. das Teilchen besteht immer aus der gleichen Masse) pro Zeit- und Volumeneinheit zugeführte Wärme folgt damit aus Gleichung (2.20) der Wert $\varrho w - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \tau_{ji} s_{ji}$. In diesem Ausdruck repräsentieren die ersten beiden Terme

die durch Wärmeleitung bzw. Wärmequellen zugeführte Wärme, so daß der Term $\tau_{ji} s_{ji}$ der Wärmezufuhr aufgrund der bei der Deformation des Fluidteilchens durch Reibung entstehenden Wärme entsprechen muß. Bei diesem Vorgang wird mechanische Energie irreversibel in Wärme umgewandelt (dissipiert), weshalb der Term

$$\Phi = \tau_{ji} s_{ji} \quad (2.21)$$

als Dissipationsfunktion Φ bezeichnet wird. Daß allein dieser Term für die Umwandlung von mechanischer (kinetischer) Energie in Wärme (innere Energie) verantwortlich ist, sieht man auch daran, daß dieser Term als einziger sowohl in der Bilanzgleichung der spezifischen kinetischen Energie als auch der der spezifischen inneren Energie auftritt.

Die folgende Formulierung des Bilanzsatzes der spezifischen inneren Energie

$$\varrho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \tau_{ji} s_{ji} - \varrho w = 0 \quad (2.22)$$

ist, wie im Anhang B gezeigt wird, gleichwertig mit der Beziehung (2.17) und eignet sich zur Berechnung der Temperaturverteilung. Dabei bezeichnet c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck und β den (thermischen) Ausdehnungskoeffizienten. Für gewöhnliche Flüssigkeiten ist der Ausdehnungskoeffizient β sehr klein, so daß der zweite Term in der Gleichung (2.22) vernachlässigt werden kann. Bei Gasen ist dies ebenfalls zulässig, wenn deren Strömungsgeschwindigkeit wesentlich kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist, da dann die Änderungen des Drucks im Vergleich zu den Temperaturänderungen von untergeordneter Bedeutung sind.

Das wirkliche Materialverhalten der meisten technisch wichtigen strömenden Medien wird durch das Modell eines Newtonschen Fluids sehr gut beschrieben. Darunter fallen praktisch alle Gase und deren Gemische, z. B. Luft, sowie alle niedermolekularen Flüssigkeiten, also auch Wasser. Ein Newtonsches Fluid wird durch die homogene und lineare Beziehung

$$\tau_{ij} = V_{ijkl} s_{kl} \quad (2.23)$$

definiert, wobei V_{ijkl} eine tensorielle Materialkonstante ist, die außer vom Stoff höchstens noch vom thermodynamischen Zustand abhängt und die als Viskositäts- oder Zähigkeitstensor bezeichnet wird. Aus dieser Beziehung folgt mit der Definition für den Deformationsgeschwindigkeitstensor (2.12), daß für ein ruhendes Fluid der Zähigkeitsspannungstensor τ_{ij} verschwindet, womit die Forderung des Ansatzes (2.16) erfüllt wird. Da der Deformationsgeschwindigkeitstensor s_{ij} bei einer starren Rotation des Fluids ebenfalls

zu null wird, berücksichtigt das Modell eines Newtonschen Fluids die Erfahrung, daß auch in diesem Fall keine Reibungsspannungen auftreten. Das ist auch der Grund, warum der Drehgeschwindigkeitstensor r_{ij} nicht in die Definition eines Newtonschen Fluids (2.23) eingeht. Dieser stellt lokal eine Starrkörperrotation dar und liefert deshalb auch keinen Beitrag für die Reibungsspannungen.

Beschränkt man sich auf ein isotropes Newtonsches Fluid, so kann für den Viskositätstensor V_{ijkl} der Ansatz eines allgemeinen isotropen Tensors vierter Stufe (vgl. ARIS, 1962) gemacht werden

$$V_{ijkl} = \mu' \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \mu'' (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (2.24)$$

Aufgrund der Symmetrie des Zähigkeitsspannungstensors τ_{ij} sowie des Deformationsgeschwindigkeitstensors s_{ij} muß der Viskositätstensor V_{ijkl} sowohl in bezug auf das erste als auch in bezug auf das letzte Indexpaar symmetrisch sein

$$V_{ijkl} = V_{jikl} = V_{ijlk} ,$$

woraus $\mu'' = 0$ folgt. Setzt man die verbleibenden Terme von Gleichung (2.24) für V_{ijkl} in die Definition eines Newtonschen Fluids (2.23) ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Symmetrie des Deformationsgeschwindigkeitstensors s_{ij} die folgende Beziehung für den Zähigkeitsspannungstensor τ_{ij}

$$\tau_{ij} = \mu' s_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu s_{ij} , \quad (2.25)$$

wobei die Volumenviskosität μ' sowie die dynamische Viskosität μ materialtypische skalare Funktionen des thermodynamischen Zustandes sind. Für den Spannungstensor π_{ij} ergibt sich damit die Gleichung

$$\pi_{ij} = (-p + \mu' s_{kk}) \delta_{ij} + 2 \mu s_{ij} .$$

Als mittleren Druck \bar{p} bezeichnet man den Ausdruck

$$\bar{p} = -\frac{1}{3} \pi_{ii} = -\frac{1}{3} ((-p + \mu' s_{kk}) 3 + 2 \mu s_{ii}) = p - \left(\mu' + \frac{2}{3} \mu \right) s_{kk} , \quad (2.26)$$

womit für die Differenz zwischen den Drücken \bar{p} und p die Beziehung

$$\bar{p} - p = - \left(\mu' + \frac{2}{3} \mu \right) s_{kk} = -\hat{\mu} s_{kk} \quad (2.27)$$

folgt. Die Größe $\hat{\mu}$ wird Druckviskosität genannt. Da die Messung der Volumenviskosität μ' sehr schwierig ist, hat G. Stokes bereits 1845 den Versuch

unternommen, die Volumenviskosität auf die dynamische Viskosität μ zurückzuführen. Zu diesem Zweck postulierte er, daß eine reine Kompression reversibel ist, d. h., daß der Zähigkeitsspannungstensor τ_{ij} verschwindet und somit keine Reibungsverluste auftreten. Für eine reine Kompression, also eine richtungserhaltende Deformation (Dilatation), ist der Geschwindigkeitsgradiententensor ein isotroper Tensor zweiter Stufe, der die allgemeine Form

$$S_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = k \delta_{ij}$$

hat, wobei k eine Konstante ist. Aus (2.12) folgen dann für den Deformationsgeschwindigkeitstensor s_{ij} und dessen Spur s_{kk} die Beziehungen

$$s_{ij} = k \delta_{ij} \quad \text{bzw.} \quad s_{kk} = k \delta_{kk} = 3k .$$

Setzt man diese in die Gleichung für den Zähigkeitsspannungstensor (2.25) ein, so erhält man die Bedingung

$$\tau_{ij} = \mu' 3k \delta_{ij} + 2\mu k \delta_{ij} = (3\mu' + 2\mu) k \delta_{ij} \stackrel{!}{=} 0 ,$$

die für beliebiges k nur erfüllt wird, wenn

$$\mu' = -\frac{2}{3}\mu$$

gilt, womit man die gesuchte Beziehung zwischen der Volumenviskosität μ' und der dynamischen Viskosität μ gefunden hat. Diese entspricht aber nach Gleichung (2.27) der Bedingung, daß die Druckviskosität verschwindet, $\hat{\mu} = 0$, was auch als Stokessche Hypothese bezeichnet wird. Mit Hilfe der kinetischen Gastheorie kann gezeigt werden, daß diese Hypothese bei einatomigen Gasen zutrifft, jedoch nicht bei mehratomigen Gasen. Der dadurch auftretende Effekt ist aber fast immer von untergeordneter Bedeutung, weshalb meistens auch bei solchen Gasen von der Stokesschen Hypothese Gebrauch gemacht wird.

Für $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ändert sich die Dichte eines materiellen Fluidteilchens, das immer aus der gleichen Masse besteht, nicht. Diese Bedingung bedeutet nicht, daß die Dichte im ganzen Fluid den gleichen Wert haben muß. Ist jedoch das Dichtefeld homogen, so bleibt die Homogenität für alle Zeiten erhalten. Aus der Kontinuitätsgleichung (2.9) folgt dann mit (2.12)

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = s_{jj} = 0 , \quad (2.28)$$

d. h. die Strömung ist volumenbeständig (inkompressibel). Die Annahme einer inkompressiblen Strömung ist bei fast allen Flüssigkeitsströmungen gerechtfertigt. Bei Gasen ist dies zulässig, wenn die Strömungsgeschwindigkeit klein im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit ist. Die Gibbssche Fundamentalgleichung (2.19) hat für ein inkompressibles Fluid die Form

$$\frac{D u}{D t} = T \frac{D s}{D t} . \quad (2.29)$$

Daraus folgt, daß der thermodynamische Zustand eines inkompressiblen Fluids durch eine Zustandsgröße bestimmt ist. Die Dichte ist eine Materialkonstante geworden und der thermodynamische Druck ist nicht definiert. Nach Gleichung (2.27) entspricht unter der Bedingung (2.28) der Druck p dem mittleren Druck \bar{p} , was eine Folge der linearen Materialgleichung (2.23) ist (siehe hierzu SERRIN, 1959). Der Druck p , der im inkompressiblen Fall auch als hydrodynamischer Druck bezeichnet wird, kann nach SOMMERFELD (1978) als Lagrange-Multiplikator gedeutet werden, der die Einhaltung der Nebenbedingung (2.28) durch das Geschwindigkeitsfeld gewährleistet.

Mit den bisher getroffenen Annahmen ergibt sich für den Erhaltungssatz der Masse

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 , \quad (2.30)$$

des Impulses

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) - \rho f_i = 0 \quad (2.31)$$

und der inneren Energie

$$\rho c_p \frac{D T}{D t} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \tau_{ji} s_{ji} - \rho w = 0 . \quad (2.32)$$

Diesen Gleichungen kann man entnehmen, daß der Erhaltungssatz des Impulses nur noch über die dynamische Viskosität μ mit dem der inneren Energie verbunden ist. Wenn also die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität vernachlässigt werden kann, sind die Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld unabhängig von dem Erhaltungssatz der inneren Energie (Temperatur).

In symbolischer Schreibweise haben die Kontinuitätsgleichung (2.30) und der Erhaltungssatz des Impulses (2.31) unter Vernachlässigung von Volumenkräften die Form

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.33)$$

bzw.

$$\frac{\partial \varrho \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \underline{v} \underline{v}) + \nabla p - \nabla \cdot (\mu (\nabla \underline{v} + \underline{v} \nabla)) = 0 . \quad (2.34)$$

Die Anwendung der Operatorausdrücke (A.34), (A.35), (A.26), (A.27) und (A.29) auf die Gleichungen (2.33) und (2.34) führt diese über in die Indexschreibweise eines krummlinigen Koordinatensystems

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (J v^j) = 0 , \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho v^i}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (J \varrho v^j v^i) + \varrho v^j v^k \Gamma_{kj}^i + g^{ij} \frac{\partial p}{\partial \xi^j} \\ - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (J \mu T^{ji}) - \mu T^{jk} \Gamma_{kj}^i = 0 , \end{aligned} \quad (2.36)$$

mit

$$T^{ji} = g^{mj} \frac{\partial v^i}{\partial \xi^m} + g^{mj} v^l \Gamma_{lm}^i + g^{mi} \frac{\partial v^j}{\partial \xi^m} + g^{mi} v^l \Gamma_{lm}^j .$$

Durch die im Anhang C beschriebene Normierung ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung (2.33) und den Erhaltungssatz des Impulses (2.34)

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (2.37)$$

bzw.

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{v} \underline{v}) + \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \nabla \cdot (\nabla \underline{v} + \underline{v} \nabla) = 0 . \quad (2.38)$$

In diesen Gleichungen sind sowohl die unabhängigen Veränderlichen t und \underline{x} in $\nabla = \frac{\partial}{\partial \underline{x}}$ als auch die abhängigen Veränderlichen \underline{v} und p dimensionslose Größen. Weiterhin gilt die Gleichung (2.38) nur für konstante Dichte ϱ und konstante dynamische Viskosität μ . Re bezeichnet die Reynoldszahl. Mit den Beziehungen (A.44), (A.41), (A.42) sowie (A.43) erhält man für die Gleichungen (2.37) und (2.38) die folgende Darstellung in kartesischen Komponenten

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.39)$$

bzw.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_j v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0 . \quad (2.40)$$

2.2 Turbulenz und Grobstruktursimulation

„Wenn ich in den Himmel kommen sollte, erhoffe ich Aufklärung über zwei Dinge: Quantenelektrodynamik und Turbulenz. Was den ersten Wunsch betrifft, bin ich ziemlich zuversichtlich.“

Sir Horace Lamb, 1932¹

Die in dem einleitenden Zitat vom Altmeister der Hydrodynamik Sir Horace Lamb vor immerhin fast einem dreiviertel Jahrhundert auf humorvolle Weise angesprochene Problematik hat an Aktualität bis heute nicht verloren. In den seither vergangenen Jahren wurden zwar viele neue Erkenntnisse über die Turbulenz gewonnen, eine allgemeine Turbulenztheorie fehlt aber noch immer. Dabei handelt es sich bei der Turbulenz um ein strömungsmechanisches Phänomen, dessen Bedeutung in den letzten Jahrzehnten in immer stärkerem Maße erkannt wurde, was wohl überwiegend daher rührt, daß die Mehrzahl aller wirklichen Strömungen turbulent ist.

Die Schwierigkeit des Problems zeigt sich bereits in dem Umstand, daß es bislang keine allgemeingültige Definition für den Begriff Turbulenz gibt. Statt dessen werden häufig in der Fachliteratur die Eigenschaften aufgeführt, die eine turbulente Strömung auszeichnen (siehe z. B. [TENNEKES und LUMLEY, 1972](#)). Danach sind turbulente Strömungen unregelmäßig verlaufende Wirbelströmungen, die durch ein kontinuierliches Spektrum von Längen- und Zeitmaßen gekennzeichnet sind, d. h., daß in der Strömung eine ganze Bandbreite von kleinsten zu größten Turbulenzstrukturen (engl. eddies) auftritt, deren Abmessungen einen kontinuierlichen Längenbereich abdecken.

Nach Kolmogorovs Theorie lokalisotroper Turbulenz ist die Dynamik der Feinstruktur, d. h. der kleinsten Turbulenzstrukturen, vollständig durch die kinematische Viskosität $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ [m²/s] und die turbulente Dissipationsrate ϵ [m²/s³] bestimmt (vgl. [ROTTA, 1972](#)). Damit folgt aus einer Dimensionsanalyse für das Längenmaß der kleinsten Turbulenzstrukturen, das sogenannte

¹ Zitat nach [GERTHSEN und VOGEL \(1997\)](#)

Kolmogorovsche Mikro-Längenmaß l_K

$$l_K(\underline{x}, t) = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon(\underline{x}, t)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.41)$$

und für das entsprechende Kolmogorovsche Mikro-Zeitmaß t_K

$$t_K(\underline{x}, t) = \left(\frac{\nu}{\epsilon(\underline{x}, t)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

In einer turbulenten Strömung eines Kontinuums ist bei moderaten Strömungsgeschwindigkeiten das Kolmogorovsche Mikro-Längenmaß l_K stets wesentlich größer als die untere Grenze für die Gültigkeit der Kontinuumstheorie (siehe hierzu die Abschätzung in [HINZE, 1975](#)), so daß eine solche turbulente Strömung durch dieselben Kontinuumsgleichungen beschrieben werden kann, die auch für den nichtturbulenten (laminaren) Fall gelten. Dies bedeutet aber nicht, daß die Turbulenz ausschließlich ein Kontinuumsphänomen sein muß. Allerdings ist nicht bekannt, ob es z. B. in hochverdünnten Gasen turbulente Strömungen geben kann.

Die besonderen Eigenschaften der die Kontinuumsströmungen beschreibenden Gleichungen, hier ist vor allem die Nichtlinearität zu nennen, erlauben aber bei dem heutigen mathematischen Kenntnisstand nur eine numerische Integration dieser Strömungsgleichungen, da die für eine analytische Lösung notwendigen Vereinfachungen, z. B. Linearisierung oder Reduzierung der Dimensionalität des Strömungsproblems, i. allg. und vornehmlich bei turbulenten Strömungen nicht zulässig sind.

2.2.1 Direkte numerische Simulation

Eine sogenannte direkte numerische Simulation (DNS) löst alle Längen- und Zeitskalen der turbulenten Strömung auf, so daß bei dieser Integrationsmethode keine die Strömungsgleichungen ergänzenden empirischen Annahmen (Modelle) erforderlich sind. Gegenwärtig ist die DNS die einzige verfügbare Methode, mit der im Rahmen der Rechengenauigkeit exakte Vorhersagen und Analysen von turbulenten Strömungen möglich sind, was jedoch genaue numerische Lösungsverfahren voraussetzt. Die in einer DNS notwendige Auflösung aller Längen- und Zeitskalen hat zur Folge, daß wegen der begrenzten Computerressourcen eine obere Schranke für die noch berechenbare Reynoldszahl eines Strömungsproblems existiert, was durch die folgende Abschätzung für eine turbulente Strömung ohne Wandeinfluß (freie Turbulenz) ersichtlich wird.

Zwischen den großen Turbulenzstrukturen (engl. large eddies), die den größten Anteil an der kinetischen Turbulenzenergie aufbringen, und den kleinsten Turbulenzstrukturen, die den größten Beitrag zur turbulenten Dissipationsrate ϵ liefern, besitzen turbulente Strömungen ein kontinuierliches Energiespektrum, das sich bei sonst gleichen Bedingungen mit steigender Reynoldszahl weitet. Die Geometrie und der Energieinhalt des Strömungsfeldes bestimmen die Längen- und Geschwindigkeitsmaße der größten Turbulenzstrukturen. Diese Maße sollen im weiteren mit L bzw. U bezeichnet werden. Das Zeitmaß T der größten Turbulenzstrukturen ergibt sich damit zu $T = \frac{L}{U}$, und die spezifische kinetische Energie der größten Turbulenzstrukturen ist von der Größenordnung U^2 . Diese Energie wird nach dem Konzept der Energiekaskade von den großen Turbulenzstrukturen durch nichtlinearen Energietransfer (Wirbelstreckung) an immer kleinere weitergegeben, bis sie, bei den kleinsten Strukturen angelangt, in ungeordnete Molekülbewegung (Wärme) übergeht. Die auf diese Weise pro Massen- und Zeiteinheit weitergegebene Energie ist dann von der Größenordnung $\frac{U^2}{T} = \frac{U^2}{L/U} = \frac{U^3}{L}$ und entspricht der turbulenten Dissipationsrate ϵ , woraus sich die Beziehung

$$\epsilon \sim \frac{U^3}{L}$$

ergibt. Damit folgt für das Verhältnis der Längenmaße der größten und kleinsten Turbulenzstrukturen

$$\frac{L}{l_K} = L \frac{\epsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} \sim \frac{L U^{3/4}}{\nu^{3/4} L^{1/4}} = \left(\frac{L U}{\nu} \right)^{3/4} = \text{Re}^{3/4}$$

und für das Verhältnis der entsprechenden Zeitmaße

$$\frac{T}{t_K} = \frac{L}{U} \frac{\epsilon^{1/2}}{\nu^{1/2}} \sim \frac{L U^{3/2}}{U \nu^{1/2} L^{1/2}} = \left(\frac{L U}{\nu} \right)^{1/2} = \text{Re}^{1/2} .$$

Die Auflösungsanforderungen einer DNS bedingen, daß die Maschenweiten des numerischen Gitters nicht größer als das Kolmogorovsche Mikro-Längenmaß l_K sein dürfen, so daß zur Auflösung eines Rechengebietes mit den Abmessungen $L \times L \times L$ mindestens

$$N_L = \left(\frac{L}{l_K} \right)^3 \sim \text{Re}^{9/4}$$

Gitterpunkte notwendig sind. Da die DNS eine zeitechte Simulation ist, muß neben dem Kolmogorovschen Mikro-Längenmaß l_K auch das Kolmogorovsche Mikro-Zeitmaß t_K aufgelöst werden. Häufig ist jedoch der aus Stabilitätsgründen geforderte Zeitschritt kleiner als das Kolmogorovsche Mikro-Zeitmaß t_K .

Dies gilt insbesondere bei expliziter Zeitintegration. In diesem Fall wird (für den konvektiven Term) der maximal zulässige Zeitschritt Δt durch die Bedingung

$$U \Delta t \leq \Delta x_{\min} \sim l_K$$

begrenzt, womit sich die Anzahl der mindestens für ein Zeitintervall der Länge T benötigten Zeitschritte zu

$$N_T = \frac{T}{\Delta t} \sim \frac{L U}{U l_K} = \frac{L}{l_K} \sim \text{Re}^{3/4}$$

berechnet. Nimmt man an, daß der Rechenaufwand für einen Zeitschritt proportional zur Gitterpunktzahl ist, so steigt bei einer DNS der Rechenaufwand mit

$$N_T N_L \sim \text{Re}^{3/4} \text{Re}^{9/4} = \text{Re}^3$$

an, d. h., daß sich z. B. bei einer Verdoppelung der Reynoldszahl der Rechenaufwand der DNS verachtfacht. Daraus wird deutlich, daß die DNS derzeit nur auf Strömungsprobleme mit niedrigen Reynoldszahlen angewendet werden kann.

2.2.2 Statistische Turbulenzbeschreibung

Die Unregelmäßigkeit einer turbulenten Strömung zeigt sich im stochastischen Verhalten ihrer Strömungsgrößen. Da jedoch die meisten turbulenten Strömungen eine vorherrschende Grundbewegung besitzen, liegt es nahe, eine turbulente Strömung als Überlagerung einer Grund- oder Hauptströmung mit einer stochastischen Schwankungsbewegung aufzufassen. Seit den Untersuchungen von [REYNOLDS \(1895\)](#) ist es deshalb üblich, die Strömungsgrößen in einen Mittelwert und einen Schwankungswert, d. h. die Abweichung des Momentanwertes von diesem Mittelwert, aufzuspalten

$$v_i = \langle v_i \rangle + v_i'' , \quad p = \langle p \rangle + p'' . \quad (2.43)$$

Hierbei sollen die eckigen Klammern statistische Mittelwerte und die Doppelstriche Schwankungswerte (Fluktuationen) bezeichnen. I. allg. sind Momentan-, Mittel- und Schwankungswert einer Strömungsgröße Funktionen von Ort und Zeit. Mittelwerte der Strömungsgrößen können dann durch eine Ensemble-Mittelung erhalten werden, wobei eine Mittelung über zahlreiche Realisationen (Wiederholungen) desselben Strömungsvorgangs unter gleichen

äußeren Bedingungen durchgeführt wird. Der Ensemble-Mittelwert (empirisches Mittel) einer Größe ϕ ist somit durch

$$\langle \phi \rangle(\underline{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha}(\underline{x}, t)$$

definiert, wobei die Zahl N der mindestens benötigten Realisationen, um einen stabilen Mittelwert zu erhalten, vom Problem und der gemittelten Größe abhängt.

In Experimenten und numerischen Simulationen ist es oft zweckmäßiger, anstelle einer Mittelung über zahlreiche Realisationen, eine Mittelung über ein Zeitintervall während einer Realisation durchzuführen. Der Kurzzeit-Mittelwert einer Größe ϕ ist dann wie folgt definiert

$$\langle \phi \rangle(\underline{x}, t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \phi(\underline{x}, t') dt' .$$

Dabei muß jedoch das Mittelungsintervall τ klein im Vergleich zum charakteristischen Zeitmaß der statistisch instationären Strömung und groß verglichen mit den integralen Zeitskalen der Schwankungsbewegung gewählt werden können.

Bei in einer Raumrichtung homogenen Turbulenz kann in dieser Richtung eine räumliche Mittelung durchgeführt werden, die exemplarisch für die x_3 -Koordinatenrichtung

$$\langle \phi \rangle_{x_3}(x_1, x_2, t) = \frac{1}{L_3} \int_{L_3} \phi(x_1, x_2, x_3, t) dx_3 \quad (2.44)$$

lautet, wobei $L_3(x_1, x_2)$ die Ausdehnung des Strömungsgebietes in der x_3 -Koordinatenrichtung bezeichnet.

Aus den Definitionen für die Mittelwerte ergeben sich direkt die folgenden Rechenregeln

$$\langle \langle \phi \rangle \rangle = \langle \phi \rangle , \quad \langle \langle \phi \rangle \chi \rangle = \langle \phi \rangle \langle \chi \rangle , \quad \langle \phi + \chi \rangle = \langle \phi \rangle + \langle \chi \rangle .$$

Mit diesen Regeln sowie (2.43) folgt

$$\langle \phi'' \rangle = \langle \phi - \langle \phi \rangle \rangle = \langle \phi \rangle - \langle \langle \phi \rangle \rangle = 0$$

und damit wiederum

$$\begin{aligned}\langle \phi \chi \rangle &= \langle (\langle \phi \rangle + \phi'') (\langle \chi \rangle + \chi'') \rangle = \langle \langle \phi \rangle \langle \chi \rangle \rangle + \langle \langle \phi \rangle \chi'' \rangle + \langle \phi'' \langle \chi \rangle \rangle + \langle \phi'' \chi'' \rangle \\ &= \langle \phi \rangle \langle \chi \rangle + \langle \phi'' \chi'' \rangle .\end{aligned}$$

Weiterhin erhält man direkt aus den Definitionen für die Mittelwerte die Rechenregeln

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial t} , \quad \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x_j} .$$

Einsetzen der Beziehungen (2.43) in die Gleichungen (2.39) sowie (2.40) und anschließende Mittelung ergibt unter Berücksichtigung der obigen Rechenregeln

$$\frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_j} = 0 \quad (2.45)$$

bzw.

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle v_j \rangle \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j'' v_i'' \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} \right) = 0 . \quad (2.46)$$

Dies sind die bekannten Reynoldsschen Gleichungen, in denen neben dem mittleren Druck $\langle p \rangle$ und der mittleren Geschwindigkeit $\langle v_i \rangle$ auch der sogenannte Reynoldssche Spannungstensor $\varrho \langle v_i'' v_j'' \rangle$ auftritt (in (2.46) entfällt die Dichte ϱ wegen der Normierung, siehe Anhang C), was zu einem Schließungsproblem führt, da das Gleichungssystem mehr Unbekannte enthält als Gleichungen zur Verfügung stehen. Der Reynoldssche Spannungstensor stellt das Bindeglied zwischen der mittleren Strömung und der turbulenten Schwankungsbewegung dar, d. h. er entnimmt dem gemittelten Geschwindigkeitsfeld diejenige kinetische Energie, die zur Aufrechterhaltung der Schwankungsbewegung notwendig ist. Um das Schließungsproblem zu lösen, muß der Reynoldssche Spannungstensor modelliert werden, wobei das Schließungsmodell den mit der statistischen Mittelung verbundenen enormen Informationsverlust kompensieren muß. Dieser Informationsverlust wird deutlich, wenn man den sogenannten Zweipunkt-Geschwindigkeitskorrelationstensor R_{ij}

$$R_{ij}(\underline{x}, \underline{r}, t) = \langle v_i''(\underline{x}, t) v_j''(\underline{x} + \underline{r}, t) \rangle \quad (2.47)$$

heranzieht, der die Beziehungen zwischen den Fluktuationen zweier Geschwindigkeitskomponenten an zwei Punkten des Raumes beschreibt. Mit dem Tensor R_{ij} lassen sich die integralen Längenmaße $L_{(ij,k)}$

$$L_{(ij,k)}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\langle v_i''(\underline{x}, t) v_j''(\underline{x}, t) \rangle} \int_0^\infty R_{ij}(\underline{x}, r_k, t) dr_k \quad (2.48)$$

definieren, die als die Abmessungen der großen Turbulenzstrukturen gedeutet werden können. Der Reynoldssche Spannungstensor entspricht nun aber dem Zweipunkt-Geschwindigkeitskorrelationstensor für $\underline{r} = 0$ und stellt folglich eine Einpunktkorrelation dar, die Abhängigkeiten zwischen Fluktuationen an verschiedenen Punkten des Raumes nicht erfassen kann. Somit enthalten die Reynoldsschen Gleichungen infolge der statistischen Mittelung keine Informationen über die Längenskalen der turbulenten Strömung. Ein Turbulenzmodell für den Reynoldsschen Spannungstensor muß deshalb die Wirkung aller Längenskalen auf das mittlere Strömungsfeld beinhalten. Da jedoch die großen Skalen stark von der Geometrie des Strömungsfeldes geprägt werden, leiden die heutigen statistischen Turbulenzmodelle unter ihrer geringen Universalität. So ist die Anwendbarkeit eines bestimmten Modells meist auf eine Klasse von ähnlichen Strömungsproblemen beschränkt. Weiterhin müssen oft die Modellparameter an das jeweilige Strömungsproblem mittels empirisch gewonnener Daten angepaßt werden. Angesichts des erforderlichen Modellierungsaufwands ist es ohnehin fraglich, ob jemals ein allgemeingültiges statistisches Turbulenzmodell gefunden werden kann, das dann auch noch mit einem vertretbaren Mehrbedarf an Rechenarbeit auskommt.

2.2.3 Grobstruktursimulation

Bei einer Grobstruktursimulation (engl. large-eddy simulation, LES) werden die großen, von der Geometrie des Strömungsproblems abhängigen Skalen der turbulenten Strömung aufgelöst und lediglich die kleinen modelliert. Es wird also eine Skalentrennung in aufgelöste Grobstruktur (GS) und zu modellierende Feinstruktur (engl. subgrid-scale, SGS) durchgeführt. Dabei liegt die Grenze für die Skalentrennung im sogenannten Trägheitsunterbereich (engl. inertial subrange) des Energiespektrums der turbulenten Strömung. Dieser Bereich existiert im Energiespektrum bei großen Reynoldszahlen und ist von Viskositäts- und äußeren Effekten wie Strömungsfeldberandungen, Volumenkraften sowie Anfangsbedingungen unbeeinflusst. Der im Bereich vorhandene Energietransfer findet ausschließlich durch den weiter vorn im Text beschriebenen Kaskadenprozeß statt und der Energiefluß dieses Prozesses entspricht gerade der turbulenten Dissipationsrate ϵ . Die Turbulenzstruktur im Trägheitsunterbereich kann somit als lokalisotrop angenommen werden, was die Modellierung der Feinstruktur und deren Wechselwirkung mit der Grobstruktur enorm erleichtert. Deshalb ist, zumindest wenn diese Voraussetzungen erfüllt sind, ein Feinstrukturmodell wesentlich universeller einsetzbar als dies ein Modell im Fall der statistischen Turbulenzbeschreibung sein kann.

Die Skalentrennung entspricht einer Tiefpaßfilterung der Strömungsgrößen, wobei eine Filterung in allen drei Raumrichtungen sowie zusätzlich in der Zeit erfolgen kann. Eine zeitliche Filterung ist jedoch nur in seltenen, hier nicht behandelten Fällen notwendig (siehe z. B. [ALDAMA, 1990](#)), weshalb in der vorliegenden Arbeit eine rein räumliche Filterung ausreichend ist. Solange die Turbulenz eine Folge nichtlinearer, konvektiver Mechanismen ist, kann die Filterung einer Strömungsgröße ϕ nach [LEONARD \(1974\)](#) durch ein Faltungsintegral definiert werden

$$\bar{\phi}(x_1, x_2, x_3, t) = \int_V \prod_{\alpha=1}^3 h_{\alpha}(x_{\alpha} - x_{\alpha}^l, \Delta_{\alpha}) \phi(x_1^l, x_2^l, x_3^l, t) dx_1^l dx_2^l dx_3^l ,$$

wobei sich der Integrationsbereich V über das Strömungsgebiet erstreckt. h_{α} bezeichnet eine Filterfunktion und Δ_{α} die Filterweite in Richtung der Raumkoordinate x_{α} . Die Filterweiten Δ_{α} legen die Größe der kleinsten aufgelösten Strukturen fest. Um zu gewährleisten, daß eine konstante Größe bei der Filterung reproduziert wird, müssen die Filterfunktionen h_{α} die Normierungsbedingung

$$\int_V \prod_{\alpha=1}^3 h_{\alpha}(x_{\alpha}) dx_1 dx_2 dx_3 = 1$$

erfüllen. Eine Strömungsgröße ϕ kann somit durch eine Filterung in einen Grobstruktur- und einen Feinstrukturanteil aufgespalten werden

$$\phi(\underline{x}, t) = \bar{\phi}(\underline{x}, t) + \phi'(\underline{x}, t) .$$

Die Feinstrukturgröße $\phi'(\underline{x}, t)$ stellt die Abweichung der Momentangröße $\phi(\underline{x}, t)$ von der Grobstrukturgröße $\bar{\phi}(\underline{x}, t)$ dar. Dabei ist auch die Grobstrukturgröße eine räumlich und zeitlich fluktuierende Größe, weil durch die Tiefpaßfilterung nur die kurzwelligen Anteile der Momentangröße verlorengehen. Deshalb gilt für eine Filterung, im Gegensatz zu einer statistischen Mittelung, i. allg. die Ungleichung

$$\overline{\bar{\phi}(\underline{x}, t)} \neq \bar{\phi}(\underline{x}, t) .$$

Wird jedoch eine lineare Filterfunktion benutzt, so reproduziert die Filterung eine bereits gefilterte Größe. Ebenfalls folgt im Fall einer rein räumlichen Filterung die Identität

$$\overline{\bar{\phi}(t)} = \bar{\phi}(t) .$$

Außerdem gilt dann immer

$$\overline{\frac{\partial \phi(\underline{x}, t)}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\phi}(\underline{x}, t)}{\partial t} .$$

Das hierzu räumliche Analogon ist aber nur bei konstanter Filterweite Δ gültig

$$\overline{\frac{\partial \phi(\underline{x}, t)}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\phi}(\underline{x}, t)}{\partial x_i}, \text{ für } \Delta = \text{const.}$$

GHOSAL und MOIN (1995) zeigen, daß im Fall einer veränderlichen Filterweite Δ der Fehler infolge Vertauschens von Differentiation und Filterung (Kommutationsfehler) von zweiter Ordnung in Δ ist. Ein Vertauschen der Operationen ist daher bei Verwendung von Finite-Differenzen-Verfahren zweiter Ordnung im Rahmen der numerischen Approximation zulässig

$$\overline{\frac{\partial \phi(\underline{x}, t)}{\partial x_i}} \approx \frac{\partial \bar{\phi}(\underline{x}, t)}{\partial x_i}.$$

In einer LES werden die tiefpaß-gefilterten Strömungsgleichungen gelöst. Diese ergeben sich durch Filterung der Gleichungen (2.39) und (2.40) zu

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.49)$$

bzw.

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}_j \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (2.50)$$

Wegen

$$\overline{v_j v_i} = \overline{(v_j + v'_j)(v_i + v'_i)} = \overline{v_j v_i} + \overline{v_j v'_i} + \overline{v'_j v_i} + \overline{v'_j v'_i}$$

sind die Gleichungen (2.49) und (2.50) nicht geschlossen. In ihnen taucht die Wirkung der kleinen Skalen in Form der Divergenz des Tensors der Feinstrukturspannungen F_{ij} auf

$$\frac{\partial \overline{v_j v_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{v_j v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{ji}}{\partial x_j},$$

mit

$$\begin{aligned} F_{ji} &= \overline{v_j v_i} - \overline{v_j} \overline{v_i} \\ &= \overline{v_j v'_i} - \overline{v_j} \overline{v'_i} + \overline{v'_j v_i} + \overline{v'_j v'_i}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

PIOMELLI und CHASNOV (1996) vergleichen in ihrem Übersichtsartikel die drei gebräuchlichsten Filterfunktionen. In dieser Arbeit wird die Filterungstechnik von SCHUMANN (1973) verwendet, die SCHUMANN (1975) als volume-balance procedure bezeichnet hat. Diese Methode ist eng mit dem numerischen Lösungsverfahren verbunden und wird im folgenden in der hier verwendeten Form für ein kartesisches Koordinatensystem vorgestellt. Eine Anwendung der Methode auf beliebige Koordinatensysteme ist jedoch prinzipiell

möglich (siehe z. B. [KRETTENAUER und SCHUMANN, 1992](#)). Ausgangspunkt des Verfahrens ist eine lineare Filterung der Strömungsgleichungen mit einem räumlich nicht-isotropen Rechteck-Filter. Für die Filterung einer Strömungsgröße ϕ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(\underline{x}, t) &= \int_V \prod_{\alpha=1}^3 h_{\alpha}(x_{\alpha} - x_{\alpha}^l, \Delta_{\alpha}) \phi(\underline{x}^l, t) dx_1^l dx_2^l dx_3^l \\ &= \int_{x_1 - \frac{\Delta_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta_3}{2}} \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3} \phi(\underline{x}^l, t) dx_3^l dx_2^l dx_1^l .\end{aligned}$$

Wenn die Filterweite Δ_{α} gleich der entsprechenden Maschenweite Δx_{α} gesetzt wird, kann diese spezielle Filterung als eine Mittelung über das Maschenvolumen $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ interpretiert werden

$$\frac{\Delta V}{\phi} = \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \int_{x_3^-}^{x_3^+} \phi(\underline{x}, t) dx_3 dx_2 dx_1 , \text{ mit } \Delta x_i = x_i^+ - x_i^- ,$$

wobei aus $\bar{\phi}(\underline{x}, t)$ eine weiterhin zeitlich fluktuierende aber räumlich abschnittsweise konstante Funktion wird. Die Integration der Kontinuitätsgleichung (2.39) über das Maschenvolumen ΔV ergibt

$$\int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \int_{x_3^-}^{x_3^+} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dx_3 dx_2 dx_1 = 0 .$$

Diese Gleichung läßt sich durch partielle Integration auf die Form

$$\sum_{i=1}^3 \left(\int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} v_i(x_i = x_i^+) - v_i(x_i = x_i^-) dx_k dx_j \right) = 0 , \quad (2.52)$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3 ,

bringen. Die Masche wird von den sechs Flächen

$$\Delta A_i(x_i = \text{const.}) = \Delta A_i^+(x_i = x_i^+) = \Delta A_i^-(x_i = x_i^-) = \Delta x_j \Delta x_k ,$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3 ,

begrenzt. Mit den Mittelwerten einer Größe ϕ über diese Flächen

$$\Delta A_{i\bar{i}} \bar{\phi} = \frac{1}{\Delta x_j \Delta x_k} \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} \phi(x_i = \text{const.}) dx_k dx_j ,$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3 ,

kann die Gleichung (2.52) wie folgt dargestellt werden

$$\sum_{i=1}^3 \left(\Delta A_i \left(\Delta A_{i\bar{i}} \bar{v}_i(x_i = x_i^+) - \Delta A_{i\bar{i}} \bar{v}_i(x_i = x_i^-) \right) \right) = 0 .$$

Führt man noch den zentralen Differenzenoperator

$$\delta_i \phi = \frac{\phi(x_i = x_i^+) - \phi(x_i = x_i^-)}{\Delta x_i} , \text{ mit } \Delta x_i = x_i^+ - x_i^- , \quad (2.53)$$

ein, so erhält man schließlich für die nach der Schumannschen Methode gefilterte Kontinuitätsgleichung (2.39) den Ausdruck

$$\Delta V \delta_i \Delta A_{i\bar{i}} \bar{v}_i = 0 . \quad (2.54)$$

Damit erscheint es sinnvoll, die flächengemittelten Geschwindigkeitskomponenten $\Delta A_{i\bar{i}} \bar{v}_i$ als Grobstrukturgrößen zu definieren, weil dann die Kontinuitätsgleichung (2.54) in exakter Weise durch eine numerisch auswertbare Differenzenformel ersetzt werden kann. Dies erfordert aber, daß die Grobstrukturgrößen im numerischen Gitter versetzt angeordnet sind (siehe Abbildung 2.1). Was für die Kontinuitätsgleichung gezeigt wurde, gilt entsprechend für jeden Divergenzterm im Erhaltungssatz des Impulses (2.40). Das instationäre Glied führt jedoch für jede Koordinatenrichtung x_i zu einem zusätzlichen Volumenmittelwert für die jeweilige Geschwindigkeitskomponente v_i

$$\int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \int_{x_3^-}^{x_3^+} \frac{\partial v_i}{\partial t} dx_3 dx_2 dx_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \int_{x_3^-}^{x_3^+} v_i dx_3 dx_2 dx_1 \right) = \Delta V \frac{\partial \Delta V \bar{v}_i}{\partial t} .$$

Jeder dieser Volumenmittelwerte kann durch eine Grobstrukturgröße angenähert werden, wenn die Komponente in x_i -Koordinatenrichtung des Impulserhaltungssatzes über eine Masche integriert wird, die in der x_i -Richtung versetzt angeordnet ist. Dabei wird diese Masche so gewählt, daß ihre beiden

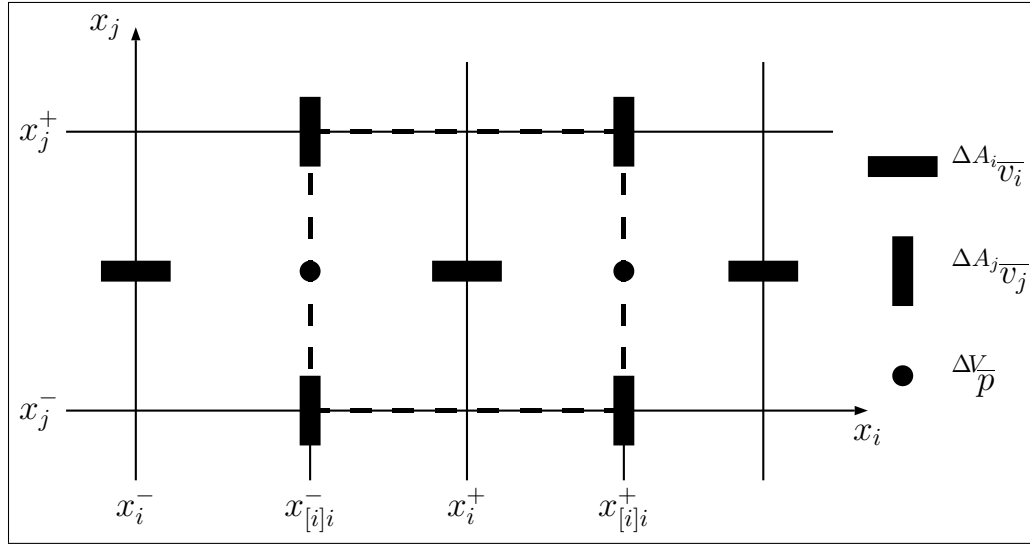


Abbildung 2.1: Anordnung der Grobstrukturgrößen im kartesischen Gitter und Definition der versetzten Masche (strichlierter Bereich).

Flächen $\Delta A_{[i]i}^+(x_i = x_{[i]i}^+)$ sowie $\Delta A_{[i]i}^-(x_i = x_{[i]i}^-)$ je einen numerischen Definitionspunkt des Drucks enthalten und die übrigen von denselben Koordinatenflächen geformt werden, die auch die Masche für die Integration der Kontinuitätsgleichung begrenzen (in Abbildung 2.1 der strichlierte Bereich). Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung kann nun der Mittelwert über das Volumen der versetzten Masche $\Delta V_{[i]i}^{\bar{v}_i}$ näherungsweise durch die Grobstrukturgröße $\Delta A_{i\bar{v}_i}$ dargestellt werden

$$\begin{aligned} \Delta V_{[i]i}^{\bar{v}_i} &= \frac{1}{\Delta x_{[i]i} \Delta x_j \Delta x_k} \int_{x_{[i]i}^-}^{x_{[i]i}^+} \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} v_{(i)} dx_k dx_j dx_i, \text{ mit } \Delta x_{[i]i} = x_{[i]i}^+ - x_{[i]i}^- \\ &= \frac{1}{\Delta x_j \Delta x_k} \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} v_i(x_i = \hat{x}_i) dx_k dx_j, \text{ mit } x_{[i]i}^- < \hat{x}_i < x_{[i]i}^+ \\ &\approx \frac{1}{\Delta x_j \Delta x_k} \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} v_i(x_i = x_i^+) dx_k dx_j = \Delta A_{i\bar{v}_i}, \end{aligned}$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3 .

Die Integration des konvektiven Terms über eine versetzte Masche liefert

$$\begin{aligned} \int_{x_{[i]}^-}^{x_{[i]}^+} \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} \frac{\partial v_l \varphi(i)}{\partial x_l} dx_k dx_j dx_i &= \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} (v_i \varphi(i))_{x_i=x_{[i]}^+} - (v_i \varphi(i))_{x_i=x_{[i]}^-} dx_k dx_j \\ &+ \int_{x_{[i]}^-}^{x_{[i]}^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} (v_j \varphi(i))_{x_j=x_j^+} - (v_j \varphi(i))_{x_j=x_j^-} dx_k dx_i \\ &+ \int_{x_{[i]}^-}^{x_{[i]}^+} \int_{x_j^-}^{x_j^+} (v_k \varphi(i))_{x_k=x_k^+} - (v_k \varphi(i))_{x_k=x_k^-} dx_j dx_i, \end{aligned}$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=1}^3 \left(\Delta A_{[i]l} \left(\overline{\Delta A_{[i]l} v_l v_i} (x_l = x_l^+) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \overline{\Delta A_{[i]l} v_l v_i} (x_l = x_l^-) \right) \right), \\ &\quad \text{mit } x_l^+ = x_{[l]}^+ \text{ und } x_l^- = x_{[l]}^- \text{ für } l = i \\ &= \Delta V_{[i]} \delta_l^{\Delta A_{[i]l} \overline{v_l v_i}}. \end{aligned}$$

Die hierin auftretenden nichtlinearen Terme $\overline{\Delta A_{[i]j} v_j v_i}$ legen eine Definition der Feinstrukturgrößen in folgender Weise nahe

$$v_i = \overline{\Delta A_j v_i} + v'_i,$$

womit man zunächst

$$\begin{aligned} \overline{\Delta A_j v_j v_i} &= \overline{\left(\overline{\Delta A_j v_j} + v'_j \right) \left(\overline{\Delta A_j v_i} + v'_i \right)} \\ &= \overline{\Delta A_j \overline{\Delta A_j v_j} \overline{\Delta A_j v_i}} + \overline{\Delta A_j \overline{\Delta A_j v_j} v'_i} + \overline{\Delta A_j v'_j \overline{\Delta A_j v_i}} + \overline{\Delta A_j v'_j v'_i}. \end{aligned}$$

erhält. Nachdem $\overline{\Delta A_j v_i}$ einen Flächenmittelwert bezeichnet und somit über die Fläche ΔA_j räumlich konstant ist, reproduziert sich dieser Wert bei einer nochmaligen Filterung

$$\overline{\Delta A_j \overline{\Delta A_j v_i}} = \overline{\Delta A_j v_i},$$

woraus analog zur statistischen Mittelung die Beziehung

$$\overline{\Delta A_j v'_i} = \frac{\overline{\Delta A_j \overline{\Delta A_j v_i}}}{v_i - \overline{\Delta A_j v_i}} = \overline{\Delta A_j v_i} - \frac{\overline{\Delta A_j \overline{\Delta A_j v_i}}}{\overline{\Delta A_j v_i}} = 0$$

folgt. Damit ergibt sich schließlich für die nichtlinearen Terme

$$\Delta A_j \overline{v_j v_i} = \Delta A_j \overline{v_j} \Delta A_j \overline{v_i} + \overline{\Delta A_j v_j' v_i'}.$$

Der Ausdruck $\overline{\Delta A_j v_j' v_i'}$ stellt die unbekanntenen Feinstrukturspannungen dar.

Die Integration des Druckterms über eine versetzte Masche

$$\int_{x_{[i]i}^-}^{x_{[i]i}^+} \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} \frac{\partial p}{\partial x_{(i)}} dx_k dx_j dx_i = \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} p(x_i = x_{[i]i}^+) - p(x_i = x_{[i]i}^-) dx_k dx_j,$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3

$$\begin{aligned} &= \Delta A_{[i]i} \left(\overline{\Delta A_{[i]i} p}(x_i = x_{[i]i}^+) - \overline{\Delta A_{[i]i} p}(x_i = x_{[i]i}^-) \right) \\ &= \Delta V_{[i]} \delta_i \overline{\Delta A_{[i]i} p}, \end{aligned}$$

führt zu den flächengemittelten Druckgrößen $\overline{\Delta A_{[i]i} p}$. Alle diese Größen lassen sich wegen

$$\begin{aligned} \overline{\Delta A_{[i]i} p}(x_i = x_{[i]i}^-) &= \frac{1}{\Delta x_j \Delta x_k} \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} p(x_i = x_{[i]i}^-) dx_k dx_j \\ &\approx \frac{1}{\Delta x_j \Delta x_k} \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} p(x_i = \dot{x}_i) dx_k dx_j, \text{ mit } x_i^- < \dot{x}_i < x_i^+ \\ &= \frac{1}{\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k} \int_{x_i^-}^{x_i^+} \int_{x_j^-}^{x_j^+} \int_{x_k^-}^{x_k^+} p dx_k dx_j dx_i = \overline{\Delta V p}, \end{aligned}$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3 ,

als Mittelwert über das Volumen der entsprechenden nicht versetzten Masche deuten, so daß es vorteilhaft ist, $\overline{\Delta V p}$ als weitere Grobstrukturgröße (Unbekannte des Gleichungssystems) einzuführen. Letztendlich bedeutet dies, daß in jedem numerischen Definitionspunkt des Drucks (in Abbildung 2.1 symbolisiert durch die ausgefüllten Kreise) die Approximationen

$$\overline{\Delta A_{[1]1} p} \approx \overline{\Delta A_{[2]2} p} \approx \overline{\Delta A_{[3]3} p}$$

benutzt werden, was zumindest für nicht zu große Maschenweiten durch die Richtungsunabhängigkeit des Drucks gerechtfertigt wird. Zusammenfassend lauten die nach der Schumannschen Methode gefilterten Strömungsgleichungen (2.39) und (2.40)

$$\delta_j \overline{\Delta A_j v_j} = 0 \quad (2.55)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\Delta A_i v_i}}{\partial t} + \delta_j \left(\overline{\Delta A_{[i]j} v_j} \overline{\Delta A_{[i]j} v_i} \right) + \delta_j \overline{\Delta A_{[i]j} v_j' v_i'} + \delta_i \overline{\Delta A_{[i]i} p} \\ - \frac{1}{\text{Re}} \left(\delta_j \left(\frac{\partial \overline{\Delta A_{[i]j} v_i}}{\partial x_j} \right) + \delta_j \left(\frac{\partial \overline{\Delta A_{[i]j} v_j}}{\partial x_i} \right) \right) = 0 . \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die Kontinuitätsgleichung (2.55) ist, wie bereits bemerkt wurde, aufgrund der getroffenen Wahl der Unbekannten $\overline{\Delta A_i v_i}$ exakt. In den Erhaltungssatz des Impulses (2.56) wurde bislang nur die Näherung $\overline{\Delta v_{[i]i}} \approx \overline{\Delta A_i v_i}$ eingeführt. Das Gleichungssystem ist jedoch in dieser Form noch nicht auswertbar. Am deutlichsten wird dies durch das Auftreten der unbekanntenen Feinstrukturspannungen $F_{ji} = \overline{\Delta A_{[i]j} v_j' v_i'}$, die modelliert werden müssen. Weiterhin ist sofort ersichtlich, daß die flächengemittelten partiellen Ableitungen des Diffusionsterms durch Approximationen dargestellt werden müssen. Dies gilt ebenfalls für die Größen $\overline{\Delta A_{[i]j} v_i}$ sowie $\overline{\Delta A_{[i]i} p}$. Da die Gleichung (2.56) für eine versetzt angeordnete Masche abgeleitet wurde, werden für die Darstellung der Größen $\overline{\Delta A_{[i]j} v_j}$ die Unbekannten $\overline{\Delta A_j v_j}$ auch an Stellen im numerischen Gitter benötigt, an denen sie nicht definiert sind, was zusätzliche Interpolationen erfordert. Ähnliche Probleme sind aber allen diskreten Lösungsverfahren eigen.

2.2.4 Feinstrukturmodelle

In den tiefpaß-gefilterten Strömungsgleichungen treten, wie in dem vorhergehenden Abschnitt gezeigt wurde, die unbekanntenen Feinstrukturspannungen F_{ij} auf. Deren Wirkung muß, damit ein geschlossenes und somit lösbares Gleichungssystem vorliegt, durch ein Modell mit Hilfe der Grobstrukturgrößen beschrieben werden. Dafür gehen zahlreiche Feinstrukturmodelle von Analogien zu statistischen Modellen aus, wobei der Wirbelviskositätsansatz

$$dF_{ij} = F_{ij} - \frac{1}{3} F_{kk} \delta_{ij} = -2 \nu_t \overline{s_{ij}}$$

am häufigsten verwendet wird. Hierin bezeichnet $\overline{s_{ij}}$ den Grobstruktur-Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\overline{s_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \quad (2.57)$$

und ν_t die Wirbelviskosität (engl. eddy-viscosity). Dieser Ansatz modelliert nur den deviatorischen (divergenzfreien) Anteil ${}_dF_{ij}$ des Tensors der Feinstrukturspannungen F_{ij} , da bekanntlich für inkompressible Strömungen $\overline{s_{jj}} = \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_j} = 0$ gilt. Der isotrope Anteil, die Normalspannungen $-\frac{1}{3} F_{kk} \delta_{ij}$, wird gewöhnlich dem Druck zugeordnet. Um die Lösung zusätzlicher Gleichungen zu vermeiden, wird in diesen Modellen die Wirbelviskosität meist algebraisch berechnet.

2.2.4.1 Smagorinsky-Modell

Das Feinstrukturmodell von [SMAGORINSKY \(1963\)](#) ist der Vorläufer aller Spannungsmodelle und wird noch immer sehr oft verwendet. Es beruht auf der Hypothese, daß für die Feinstrukturenergie ${}^{\text{SGS}}k = \frac{1}{2} F_{ii}$ ein Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation herrscht (vgl. [PIOMELLI und CHASNOV, 1996](#))

$$-F_{ij} \overline{s_{ij}} = \nu \left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}} \right).$$

Die Gültigkeit dieser Hypothese setzt jedoch die Existenz eines Trägheitsunterbereiches im Energiespektrum der turbulenten Strömung voraus, was große Reynoldszahlen bedingt. Aus einer einfachen Dimensionsanalyse erhält man nun mit dem Längenmaß l , das noch abgeschätzt werden muß, die Beziehung

$$\nu \left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j}} \right) \sim \frac{{}^{\text{SGS}}k^{3/2}}{l},$$

womit für die Feinstrukturspannungen des Smagorinsky-Modells ${}^{\text{SM}}{}_dF_{ij}$

$$-{}^{\text{SM}}{}_dF_{ij} \overline{s_{ij}} = 2 \nu_t \overline{s_{ij}} \overline{s_{ij}} \sim \frac{{}^{\text{SGS}}k^{3/2}}{l}$$

folgt. Setzt man darin für die Wirbelviskosität ν_t [m²/s] die Abschätzung

$$\nu_t \sim l {}^{\text{SGS}}k^{1/2}$$

ein, so erhält man den Ausdruck

$$2 l^2 {}^{\text{SGS}}k^{1/2} \overline{s_{ij}} \overline{s_{ij}} \sim {}^{\text{SGS}}k^{3/2}$$

und somit für die Wurzel aus der Feinstrukturenergie ${}^{\text{SGS}}k$

$${}^{\text{SGS}}k^{1/2} \sim l \sqrt{2 \overline{s_{ij}} \overline{s_{ij}}}.$$

Da die aktivsten nichtaufgelösten Skalen nahe bei der Grenze der Skalentrennung liegen, stellt die Filterweite Δ ein geeignetes Längenmaß dar, so daß mit der Smagorinsky-Konstanten C_S

$$l = C_S \Delta$$

gesetzt werden kann. Damit erhält man für die Feinstrukturspannungen des Smagorinsky-Modells ${}^{\text{SM}}dF_{ij}$

$${}^{\text{SM}}dF_{ij} = -2 \nu_t \overline{s_{ij}} = -2 (C_S \Delta)^2 \sqrt{2 \overline{s_{lm}} \overline{s_{lm}}} \overline{s_{ij}}.$$

Weil die Konstante C_S reel ist, wird durch das Smagorinsky-Modell zu jeder Zeit und überall im Strömungsfeld Turbulenzenergie von großen zu kleinen Skalen transferiert. Der Wert für die Smagorinsky-Konstante C_S variiert je nach Strömungsproblem zwischen 0,07 und 0,24. Für die Simulationen mit dem Smagorinsky-Modell wurde in der vorliegenden Arbeit nach [DEARDORFF \(1971\)](#) $C_S = 0,1$ gewählt. Im Fall der Schumannschen Filterungstechnik entspricht die Filterweite Δ_i in x_i -Koordinatenrichtung ja gerade der Maschenweite Δx_i in derselben Richtung. Häufig sind aber die Seiten einer Masche im numerischen Gitter nicht gleich lang. Sofern die Maschenweite nicht in einer der Koordinatenrichtungen beliebig klein wird, kann dann die Filterweite Δ des Modells durch den Mittelwert

$$\Delta = (\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3)^{1/3}$$

bestimmt werden, der sich i. allg. bis zu Seitenverhältnissen von 1:20 eignet. Wenn die wandnahe Strömung aufgelöst werden soll, tritt mit dem Smagorinsky-Modell die Problematik auf, daß das Längenmaß l mit der Filterweite Δ nicht rasch genug abklingt und somit zu hohe Feinstrukturspannungen simuliert werden. [PIOMELLI ET AL. \(1988\)](#) haben daher eine Dämpfungsfunktion nach [VAN DRIEST \(1956\)](#) vorgeschlagen, mit der das Längenmaß l die folgende Form annimmt

$$l = C_S \Delta \sqrt{1 - \exp\left(\left(\frac{-d^+}{25}\right)^3\right)}.$$

Dabei bezeichnet $d^+ = d v_\tau / \nu$ den mit der Schubspannungsgeschwindigkeit v_τ (Wandschubspannung $\tau_w = \rho v_\tau^2$) und der kinematischen Viskosität ν normierten Wandabstand d .

2.2.4.2 Dynamisches Modell

Gegenüber dem Smagorinsky-Modell stellen die dynamischen Modelle einen wesentlichen Fortschritt dar, weil bei diesen die Modellkoeffizienten nicht a priori, sondern während der Simulation als Funktionen des Ortes aus dem Energieinhalt der kleinsten, gerade noch aufgelösten Strukturen bestimmt werden. Das dynamische Wirbelviskositätsmodell von [GERMANO ET AL. \(1991\)](#) beruht auf der Einführung zweier dreidimensionaler Filter G_f und G_F unterschiedlicher Filterweite Δ_f bzw. Δ_F , für die $\Delta_f < \Delta_F$ gilt. Meist wird $\Delta_F = 2 \Delta_f$ gewählt. Damit ergeben sich die gefilterten Größen

$$\begin{aligned} \overline{v_i}^f(\underline{x}, t) &= \int_V G_f(\underline{x}, \underline{x}', \Delta_f) v_i(\underline{x}', t) dx_1' dx_2' dx_3' , \\ \overline{v_i}^F(\underline{x}, t) &= \int_V G_F(\underline{x}, \underline{x}', \Delta_F) v_i(\underline{x}', t) dx_1' dx_2' dx_3' . \end{aligned}$$

Mit dem Filter G_f werden die Grob- und Feinstrukturgrößen definiert, weshalb dieser auch als Simulationsfilter bezeichnet wird. Aus den Grobstrukturgrößen werden dann durch weitere Filterung mit dem sogenannten Testfilter G_F neue Variablen, u. a. die Modellkonstante, bestimmt. Die Filterung der Strömungsgleichungen mit dem Simulationsfilter G_f liefert also die Feinstrukturspannungen F_{ij}

$$F_{ij} = \overline{v_i v_j}^f - \overline{v_i}^f \overline{v_j}^f .$$

Nochmalige Filterung der Gleichungen mit dem Testfilter G_F führt zu dem Spannungstensor T_{ij}

$$T_{ij} = \overline{\overline{v_i v_j}^f}^F - \overline{\overline{v_i}^f}^F \overline{\overline{v_j}^f}^F .$$

Sowohl F_{ij} als auch T_{ij} sind unbekannt. Zwischen beiden Tensoren besteht jedoch die Identität

$$T_{ij} - \overline{\overline{F_{ij}}^f}^F = \overline{\overline{v_i v_j}^f}^F - \overline{\overline{v_i}^f}^F \overline{\overline{v_j}^f}^F = L_{ij} , \quad (2.58)$$

durch die T_{ij} und F_{ij} miteinander verknüpft sind und die dazu dient, eine lokale Modellkonstante zu definieren. Dafür werden F_{ij} und T_{ij} auf gleiche Weise parametrisiert

$$F_{ij} - \frac{1}{3} F_{kk} \delta_{ij} = -2 C \Delta_f^2 \sqrt{2 \overline{\overline{s_{lm}}^f}^f \overline{\overline{s_{lm}}^f}^f} \overline{\overline{s_{ij}}^f}^f = -2 C \alpha_{ij} , \quad (2.59)$$

$$T_{ij} - \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} = -2 C \Delta_F^2 \sqrt{2 \overline{\overline{\overline{s_{lm}}^f}^F}^F \overline{\overline{\overline{s_{lm}}^f}^F}^F} \overline{\overline{\overline{s_{ij}}^f}^F}^F = -2 C \beta_{ij} . \quad (2.60)$$

In beiden Gleichungen hat C denselben Wert, wodurch die Skalenähnlichkeit zum Ausdruck kommt. Einsetzen von Gleichung (2.59) und (2.60) in die Identität (2.58) liefert den deviatorischen Anteil des Tensors L_{ij}

$${}_dL_{ij} = L_{ij} - \frac{1}{3} L_{kk} \delta_{ij} = -2C\beta_{ij} + 2 \overline{{}^F C \alpha_{ij}}. \quad (2.61)$$

Da C unter dem Filterungsoperator erscheint, stellt die Gleichung (2.61) ein System von 5 unabhängigen Integralgleichungen für die eine Funktion C dar. Zieht man C vor den Operator, was an sich nicht zulässig ist, dann erhält man ein überbestimmtes System von 5 algebraischen Gleichungen. LILLY (1992) löst dieses Problem, indem er C so wählt, daß die Summe der Quadrate der Residuen E_{ij}

$$E_{ij} = {}_dL_{ij} + 2C\left(\beta_{ij} - \overline{{}^F \alpha_{ij}}\right) = 2\left(\overline{{}^F C \alpha_{ij}} - C \overline{{}^F \alpha_{ij}}\right)$$

minimal wird. Dies führt zu folgendem Ergebnis für C

$$C(\underline{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{{}_dL_{ij} (\beta_{ij} - \overline{{}^F \alpha_{ij}})}{(\beta_{kl} - \overline{{}^F \alpha_{kl}}) (\beta_{kl} - \overline{{}^F \alpha_{kl}})}. \quad (2.62)$$

Der auf besagte Weise berechnete Koeffizient C kann entweder positiv oder negativ sein. Ein negativer Wert entspricht lokal negativer Wirbelviskosität, d. h. einem Energietransfer von kleinen zu großen Skalen (backscatter), was durchaus wünschenswert ist. Die DNS einer Kanal- bzw. Rohrströmung zeigt nämlich in Wandnähe einen lokalen, immer wieder nur kurz andauernden Energietransfer in Richtung kleiner und großer Skalen. Dabei sind die entgegengesetzten Energieströme von nahezu gleicher Größenordnung, mit einem leichten Übergewicht des Transfers zu kleinen Skalen, woraus sich der richtige statistische Mittelwert ergibt. Die Anwendung der Formel (2.62) in einer LES bewirkt aber, daß die Simulation instabil wird, was auf eine große Autokorrelationszeit (GHOSAL ET AL., 1995) der Größe C zurückzuführen ist. Wenn C einmal negativ ist, bleibt dieser Zustand äußerst lange erhalten, wodurch die Geschwindigkeitsschwankungen lokal exponentiell anwachsen. Sofern die Strömung eine homogene Richtung besitzt, kann das Stabilitätsproblem behoben werden, indem Zähler und Nenner in Gleichung (2.62) über diese Richtung gemittelt werden. Für den Fall einer in x_3 -Koordinatenrichtung homogenen Strömung folgt mit dem Mittelungsoperator nach Gleichung (2.44) die Formel

$$C(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{2} \frac{\langle {}_dL_{ij} (\beta_{ij} - \overline{{}^F \alpha_{ij}}) \rangle_{x_3}}{\langle (\beta_{kl} - \overline{{}^F \alpha_{kl}}) (\beta_{kl} - \overline{{}^F \alpha_{kl}}) \rangle_{x_3}}.$$

Jede statistische Mittelung dieser Art unterdrückt jedoch den Energietransfer von kleinen zu großen Skalen und macht damit das Feinstrukturmodell zu dissipativ.

2.3 Numerisches Lösungsverfahren

Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Grobstruktursimulationen wurden mit dem Strömungslöser MGLET berechnet. Dieses Programm entstand in der Arbeitsgruppe von Prof. Wengle an der Universität der Bundeswehr München und wird seit einigen Jahren in Kooperation mit der Gruppe von Prof. Friedrich an der TU München weiterentwickelt. In MGLET werden die in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellten Strömungsgleichungen gelöst, so daß die ursprüngliche Programmversion nur die Um- oder Durchströmung von Körpern gestattete, deren Oberflächen mit den Koordinatenebenen zusammenfiel. Gekrümmte Körperkonturen mußten durch einen stufenförmigen Verlauf angenähert werden. Um diesen Nachteil zu beheben, wurde von TREMBLAY (2001) eine Methode zur Behandlung beliebig geformter Körper implementiert, deren wesentliche Details im Abschnitt 2.3.2 vorgestellt werden. Die Methode wurde anhand der turbulenten Rohrströmung sowie der Zylinderumströmung validiert und in einigen Simulationen erfolgreich eingesetzt (TREMBLAY ET AL., 2000). Bislang fehlten aber Erfahrungen in der Anwendung bei der Umströmung von schlanken Körpern mit scharfen Kanten. Deshalb wurde im Rahmen dieser Arbeit für die Profilumströmung eine Vergleichsrechnung mit dem Strömungslöser DeFT durchgeführt. DeFT wird von der Arbeitsgruppe von Prof. Wesseling an der TU Delft entwickelt. In diesem Programm werden die Strömungsgleichungen für eine koordinateninvariante Darstellungsform gelöst, d. h. die Gleichungen werden in einem allgemeinen krummlinigen Koordinatensystem dargestellt. Abgesehen von dem Zeitintegrationsverfahren reduzieren sich für ein kartesisches Gitter die Gleichungen von DeFT auf diejenigen von MGLET, was auch durch die Ergebnisse der Vergleichsrechnung für den minimalen turbulenten Kanal (engl. minimal turbulent flow unit) bestätigt wird (MANHART ET AL., 1998). Beiden Programmen liegt die Finite-Volumen-Methode mit versetzt angeordneten Geschwindigkeitskomponenten zugrunde. Die Integration der Strömungsgleichungen erfolgt sowohl in MGLET als auch in DeFT mit Hilfe eines Druckkorrektur-Verfahrens. Die bekanntesten Vertreter dieser Gruppe von Verfahren sind wohl die Projektionsmethode von CHORIN (1968) und die MAC-Methode von HARLOW und WELCH (1965). Ein Vergleich dieser Verfahren findet sich z. B. in (PEYRET und TAYLOR, 1983). Grundlage aller

Druckkorrektur-Verfahren ist ein Fundamentalsatz der Vektoranalysis, der besagt, daß sich jedes Vektorfeld $\underline{\phi}$ unter den in (SOMMERFELD, 1978) genannten Voraussetzungen in einen quellenfreien Anteil ${}_q\underline{\phi}$ und einen wirbelfreien Anteil ${}_w\underline{\phi}$ zerlegen läßt

$$\underline{\phi} = {}_q\underline{\phi} + {}_w\underline{\phi}, \text{ mit } \nabla \cdot {}_q\underline{\phi} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times {}_w\underline{\phi} = 0 .$$

Der wirbelfreie Vektor ${}_w\underline{\phi}$ kann wegen $\nabla \times \nabla \Psi = 0$ aus einem skalaren Potential Ψ abgeleitet werden

$${}_w\underline{\phi} = -\nabla \Psi + \text{const.}$$

Damit folgt dann aus der Zerlegung

$$\underline{\phi} = {}_q\underline{\phi} - \nabla \Psi + \text{const.} \quad (2.63)$$

und daraus wiederum

$$\nabla \cdot \underline{\phi} = -\nabla \cdot \nabla \Psi .$$

Mit den letzten beiden Gleichungen können die Lösungen für die Massen- und Impulsbilanz entkoppelt werden, was die Konstruktion eines effizienten Lösungsverfahrens ermöglicht.

Die räumliche Diskretisierung erfolgt in beiden Programmen mittels zentraler Differenzen zweiter Ordnung. In den folgenden Abschnitten werden diejenigen Eigenschaften der Programme behandelt, in denen sie sich unterscheiden und die für die durchgeführten Simulationen relevant sind. Vor allem das Programm DeFT bietet wesentlich mehr Möglichkeiten an als in dieser Arbeit benötigt wurden. Der interessierte Leser wird hierfür auf (WESSELING ET AL., 1998) verwiesen. Für MGLET wird die Dissertation von WERNER (1991) empfohlen.

2.3.1 MGLET

In dem Programm MGLET werden die Strömungsgleichungen (2.55) und (2.56) gelöst. Wie bereits im Abschnitt 2.2.3 dargelegt wurde, ist das Gleichungssystem in dieser Form noch nicht lösbar. So führt der Konvektionsterm von Gleichung (2.56) auf die unbekanntenen Flächenmittelwerte

$$\Delta A_{[i]i} \overline{v_i}, \quad \Delta A_{[i]j} \overline{v_j}, \quad \Delta A_{[i]k} \overline{v_k}, \quad \Delta A_{[i]j} \overline{v_i}, \quad \Delta A_{[i]k} \overline{v_i},$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3 .

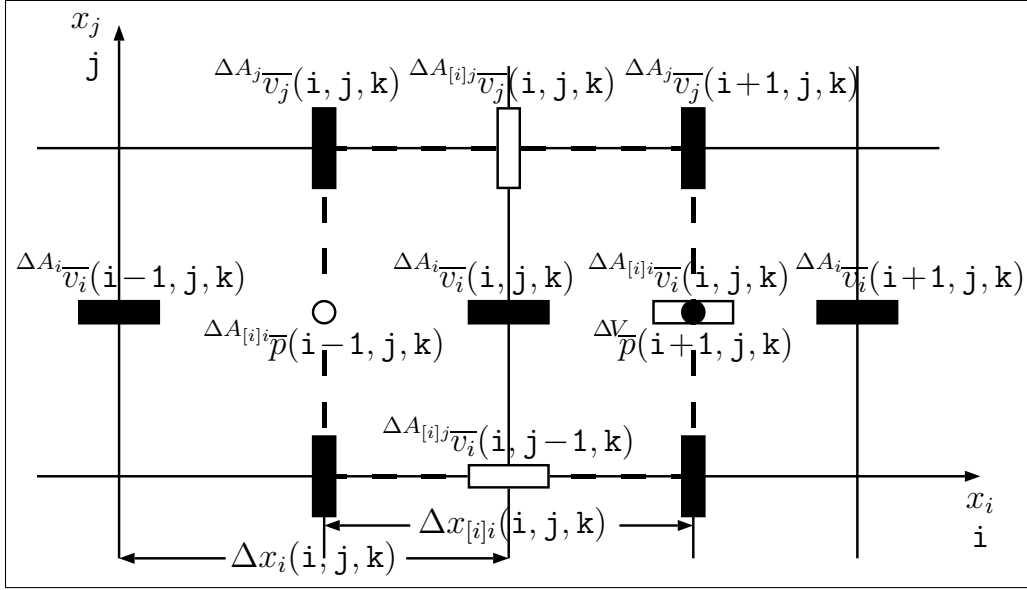


Abbildung 2.2: Bezeichnungen im numerischen Gitter.

Diese Größen werden in MGLET mit den Bezeichnungen nach Abbildung 2.2 wie folgt angenähert

$$\begin{aligned} \Delta A_{[i]i} \overline{v_i}(i, j, k) &\approx \Delta A_i \overline{v_i}(i, j, k) \\ &\quad + \frac{\Delta x_{[i]i}(i, j, k)}{2} \frac{\Delta A_i \overline{v_i}(i+1, j, k) - \Delta A_i \overline{v_i}(i, j, k)}{\Delta x_i(i+1, j, k)}, \\ \Delta A_{[i]j} \overline{v_j}(i, j, k) &\approx \frac{1}{2} \left(\Delta A_j \overline{v_j}(i+1, j, k) + \Delta A_j \overline{v_j}(i, j, k) \right), \\ \Delta A_{[i]k} \overline{v_k}(i, j, k) &\approx \frac{1}{2} \left(\Delta A_k \overline{v_k}(i+1, j, k) + \Delta A_k \overline{v_k}(i, j, k) \right), \\ \Delta A_{[i]j} \overline{v_i}(i, j, k) &\approx \frac{1}{2} \left(\Delta A_i \overline{v_i}(i, j+1, k) + \Delta A_i \overline{v_i}(i, j, k) \right), \\ \Delta A_{[i]k} \overline{v_i}(i, j, k) &\approx \frac{1}{2} \left(\Delta A_i \overline{v_i}(i, j, k+1) + \Delta A_i \overline{v_i}(i, j, k) \right), \end{aligned}$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3.

Aus diesen Beziehungen folgen die Näherungen für die Größen an den gegenüberliegenden Maschenflächen, indem der entsprechende Zählindex (i , j oder k) um eins reduziert wird, also z. B.

$$\Delta A_{[i]j} \overline{v_i}(i, j-1, k) \approx \frac{1}{2} \left(\Delta A_i \overline{v_i}(i, j, k) + \Delta A_i \overline{v_i}(i, j-1, k) \right).$$

Da in MGLET die Begrenzungsflächen der nicht versetzten Maschen genau in der Mitte zwischen zwei Definitionspunkten des Drucks liegen, gelten die einfachen arithmetischen Mittelwerte auch im Fall eines nicht äquidistanten Gitters. Diese Wahl der Begrenzungsflächen hat jedoch zur Folge, daß der Definitionspunkt des Drucks i . allg. nicht in der Mitte der Masche liegt. Die flächengemittelten partiellen Ableitungen des Diffusionsterms werden zunächst durch die Approximationen

$$\frac{\Delta A_{[i]j} \overline{\partial v_i}}{\partial x_j} \approx \frac{\partial \Delta A_{[i]j} \overline{v_i}}{\partial x_j}, \quad \frac{\Delta A_{[i]j} \overline{\partial v_j}}{\partial x_i} \approx \frac{\partial \Delta A_{[i]j} \overline{v_j}}{\partial x_i}$$

dargestellt, die dann in folgender Weise angenähert werden

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Delta A_{[i]i} \overline{v_i}}{\partial x_i} \right) (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) &\approx \frac{\Delta A_i \overline{v_i}(\mathbf{i}+1, \mathbf{j}, \mathbf{k}) - \Delta A_i \overline{v_i}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}{\Delta x_i(\mathbf{i}+1, \mathbf{j}, \mathbf{k})}, \\ \left(\frac{\partial \Delta A_{[i]j} \overline{v_i}}{\partial x_j} \right) (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) &\approx \frac{\Delta A_i \overline{v_i}(\mathbf{i}, \mathbf{j}+1, \mathbf{k}) - \Delta A_i \overline{v_i}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}{\Delta x_{[j]j}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}, \\ \left(\frac{\partial \Delta A_{[i]j} \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) &\approx \frac{\Delta A_j \overline{v_j}(\mathbf{i}+1, \mathbf{j}, \mathbf{k}) - \Delta A_j \overline{v_j}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}{\Delta x_{[i]i}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}, \\ \left(\frac{\partial \Delta A_{[i]k} \overline{v_i}}{\partial x_k} \right) (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) &\approx \frac{\Delta A_i \overline{v_i}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}+1) - \Delta A_i \overline{v_i}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}{\Delta x_{[k]k}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}, \\ \left(\frac{\partial \Delta A_{[i]k} \overline{v_k}}{\partial x_i} \right) (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) &\approx \frac{\Delta A_k \overline{v_k}(\mathbf{i}+1, \mathbf{j}, \mathbf{k}) - \Delta A_k \overline{v_k}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}{\Delta x_{[i]i}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})}, \end{aligned}$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3 .

Damit werden für die Diskretisierung des Diffusionsterms von Gleichung (2.56) die Grobstrukturgrößen an denselben Stellen im numerischen Gitter benötigt wie für den diskretisierten Konvektionsterm (siehe Abbildung 2.3). Den Ausführungen des Abschnitts 2.2.3 gemäß folgt für die Größen des Druckterms

$$\Delta A_{[i]i} \overline{p}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \approx \frac{\Delta V}{p}(\mathbf{i}+1, \mathbf{j}, \mathbf{k}) .$$

Nach der räumlichen Diskretisierung erhält man die Gleichungen

$$\frac{\partial \Delta A_i \overline{v_i}}{\partial t} = K_i + D_i + P_i ,$$

wobei K_i , D_i und P_i für den diskretisierten Konvektions-, Diffusions- bzw. Druckterm stehen. Diese werden mit dem expliziten Leapfrog-Zeitintegrationsverfahren

$$\Delta A_i \overline{v_i}^{(n+1)} = f_1 \Delta A_i \overline{v_i}^{(n-1)} + f_2 \Delta A_i \overline{v_i}^{(n)} + f_3 \left(K_i^{(n)} + D_i^{(n-l)} + P_i^{(n+1)} \right) , \quad (2.64)$$

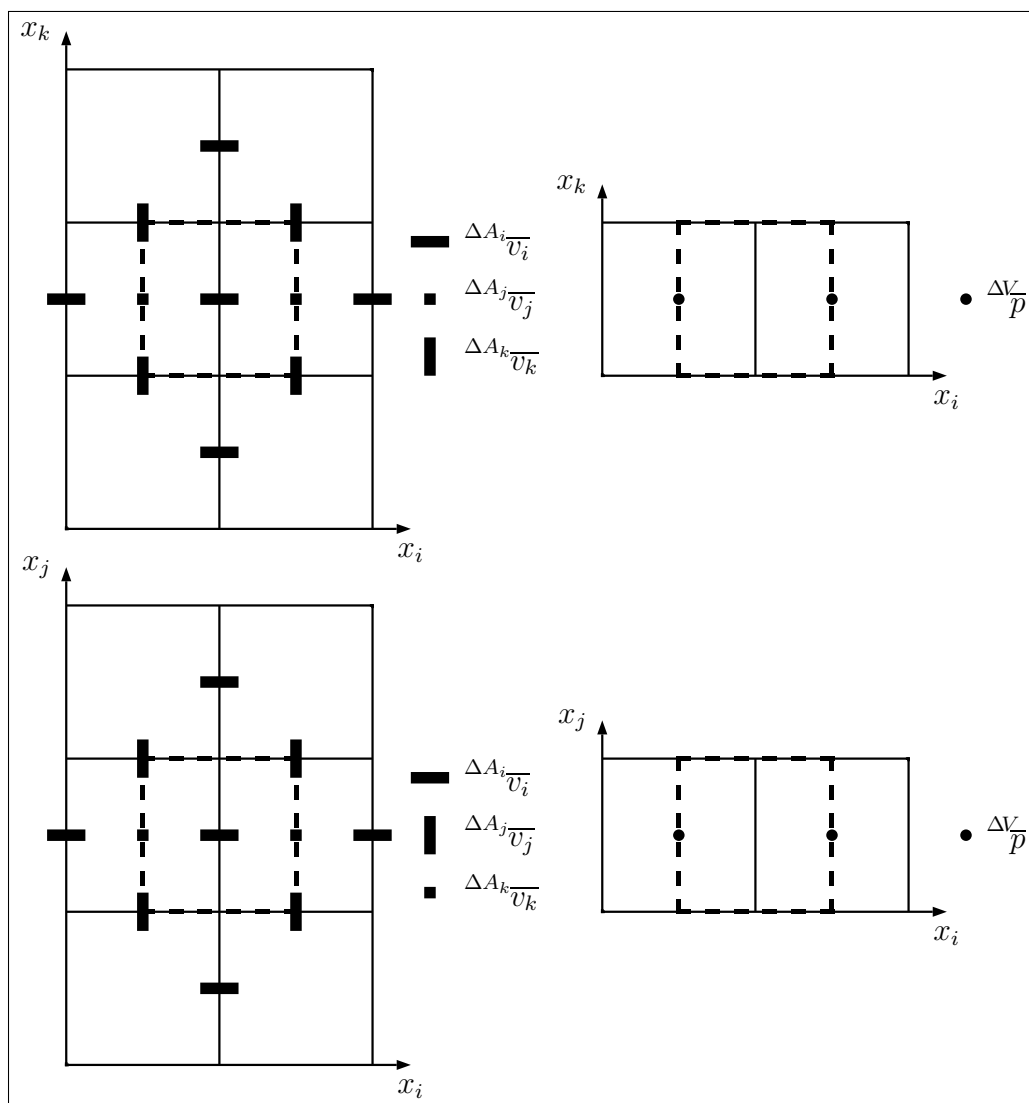


Abbildung 2.3: Diskretisierungssterne des Programms MGLET für den Diffusions- bzw. Konvektionsterm (links) sowie den Druckterm (rechts) der Komponente in x_i -Koordinatenrichtung von Gleichung (2.56).

mit $\phi^{(n)} = \phi(t = n \Delta t)$, gelöst. Besagtes Verfahren ist von zweiter Ordnung genau, benötigt aber zum Starten einer Simulation einen expliziten Euler-Schritt. Außerdem muß jeweils nach zirka 47 Leapfrog-Schritten ein Mittelungsschritt durchgeführt werden, um $2\Delta t$ -Oszillationen zu vermeiden, die bei diesem Verfahren auftreten können. Somit ergeben sich je nach Zeit-

schrittverfahren für die Parameter f_1 , f_2 , f_3 und l von Gleichung (2.64) die Werte nach Tabelle 2.1. Für das Druckkorrektur-Verfahren wird entsprechend

Tabelle 2.1: Parameter des Leapfrog-Zeitintegrationsverfahrens.

Schritt	f_1	f_2	f_3	l
Euler	0	1	Δt	0
Leapfrog	1	0	$2 \Delta t$	1
Mittelung	0,5	0,5	$1,5 \Delta t$	1

der Gleichung (2.63) die Zerlegung

$$\Delta A_i \bar{v}_i^{(*)} = \Delta A_i \bar{v}_i^{(n+1)} - \delta_i \Psi + \text{const.} \quad (2.65)$$

gemacht. Daraus folgt mit der Geschwindigkeit

$$\Delta A_i \bar{v}_i^{(*)} = f_1 \Delta A_i \bar{v}_i^{(n-1)} + f_2 \Delta A_i \bar{v}_i^{(n)} + f_3 \left(K_i^{(n)} + D_i^{(n-l)} + P_i^{(n)} \right),$$

die i. allg. die Kontinuitätsgleichung nicht erfüllt, für den diskreten Gradienten des skalaren Potentials Ψ der Ausdruck

$$\begin{aligned} \delta_i \Psi &= \Delta A_i \bar{v}_i^{(n+1)} - \Delta A_i \bar{v}_i^{(*)} + \text{const.} \\ &= f_3 \left(P_i^{(n+1)} - P_i^{(n)} \right) + \text{const.} \\ &= -f_3 \delta_i \left(\Delta A_i \bar{p}^{(n+1)} - \Delta A_i \bar{p}^{(n)} \right) + \text{const.} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Da die Geschwindigkeit zum neuen Zeitpunkt quellenfrei sein soll, $\delta_i \Delta A_i \bar{v}_i^{(n+1)} = 0$, führt die Divergenz von der Zerlegung (2.65) nach Einsetzen der Gleichung (2.66) auf die diskrete Poissongleichung für den neuen Druck $\Delta A_i \bar{p}^{(n+1)}$

$$\delta_i \Delta A_i \bar{v}_i^{(*)} = f_3 \delta_i \delta_i \left(\Delta A_i \bar{p}^{(n+1)} - \Delta A_i \bar{p}^{(n)} \right). \quad (2.67)$$

Die zur Berechnung der linken Seite dieser Gleichung notwendigen Geschwindigkeitskomponenten sind in der Abbildung 2.4 dargestellt. In den Simulationen dieser Arbeit wurde für die Lösung von Gleichung (2.67) ein iterativer Löser verwendet, der auf einem Algorithmus von HIRT ET AL. (1975) beruht. Mit dem neuen Druck ergibt sich dann die Geschwindigkeit zum neuen Zeitpunkt aus der Korrekturbeziehung

$$\Delta A_i \bar{v}_i^{(n+1)} = \Delta A_i \bar{v}_i^{(*)} - f_3 \delta_i \left(\Delta A_i \bar{p}^{(n+1)} - \Delta A_i \bar{p}^{(n)} \right).$$

2.3.2 Behandlung beliebig geformter Körper im kartesischen Gitter

2.3.2.1 Beschreibung des Verfahrens

In einem kartesischen Gitter können ohne besondere Maßnahmen die Konturen beliebig geformter Körper nur durch einen stufenförmigen Verlauf angenähert werden. Um einen gekrümmten Körper auf diese Weise mit ausreichender Genauigkeit darstellen zu können, muß das numerische Gitter um den Körper entsprechend verfeinert werden. Dies kann bei großer Krümmung zu einer unnötigen Verdichtung der Gitterpunkte führen. Aus diesem Grund wurden unterschiedliche Verfahren entwickelt, die diesen Nachteil beheben sollen. Eine ganze Gruppe solcher Verfahren zeichnet sich dadurch aus, daß bei diesen Verfahren die von der Körperoberfläche geschnittenen Maschen nach der Art des Schnittverlaufes in unterschiedliche Klassen eingeteilt werden (siehe z. B. YANG ET AL., 1999), so daß im Lösungsalgorithmus zwischen einer Vielzahl verschiedener Maschentypen unterschieden werden muß, was den Algorithmus stark verkompliziert und die Rechengeschwindigkeit herabsetzt. Deshalb wurde hier bewußt eine Methode gewählt, bei der eine solche Unterscheidung nicht getroffen werden muß. In dem verwendeten Algorithmus, der denen von GULLBRAND ET AL. (1997) und BUNGARTZ ET AL. (1999) ähnelt, werden die Maschen, die von der Körperoberfläche geschnitten werden oder sich im Körperinneren befinden, samt ihrer Druck- und Geschwindigkeitsgrößen geblockt, d. h. nicht zur Berechnung der Lösung herangezogen (siehe Abbildung 2.4). Um den Einfluß des Körpers auf das Strömungsfeld richtig wiederzugeben, werden die zur Berechnung der nicht geblockten Maschen benötigten Geschwindigkeitsgrößen der geblockten Oberflächenmaschen durch Interpolation bzw. Extrapolation berechnet, wobei die Geschwindigkeit auf der Körperoberfläche berücksichtigt wird, so daß die Haft- und Undurchlässigkeitbedingung erfüllt sind.

Die Bestimmung der geblockten Maschen findet in einem Vorlauf statt. Dafür wird die Körperoberfläche durch eine genügend große Anzahl von ebenen Dreiecksflächen angenähert. Eine dieser Flächen habe die drei Eckpunkte mit den Koordinaten $P_i = P_i(P_i x_1, P_i x_2, P_i x_3)$ und den zugehörigen Ortsvektoren \underline{x}_{P_i} (siehe Abbildung 2.5). Ein Punkt $P = P(P x_1, P x_2, P x_3)$ auf dieser Dreiecksfläche mit dem Ortsvektor \underline{x}_P erfüllt dann die Gleichung

$$(\underline{x}_P - \underline{x}_{P_1}) \cdot ((\underline{x}_{P_2} - \underline{x}_{P_1}) \times (\underline{x}_{P_3} - \underline{x}_{P_1})) = 0 .$$

Daraus erhält man die Gleichung für die Ebene durch die Dreiecksfläche

$$a(P x_1 - P_1 x_1) + b(P x_2 - P_1 x_2) + c(P x_3 - P_1 x_3) = 0 ,$$

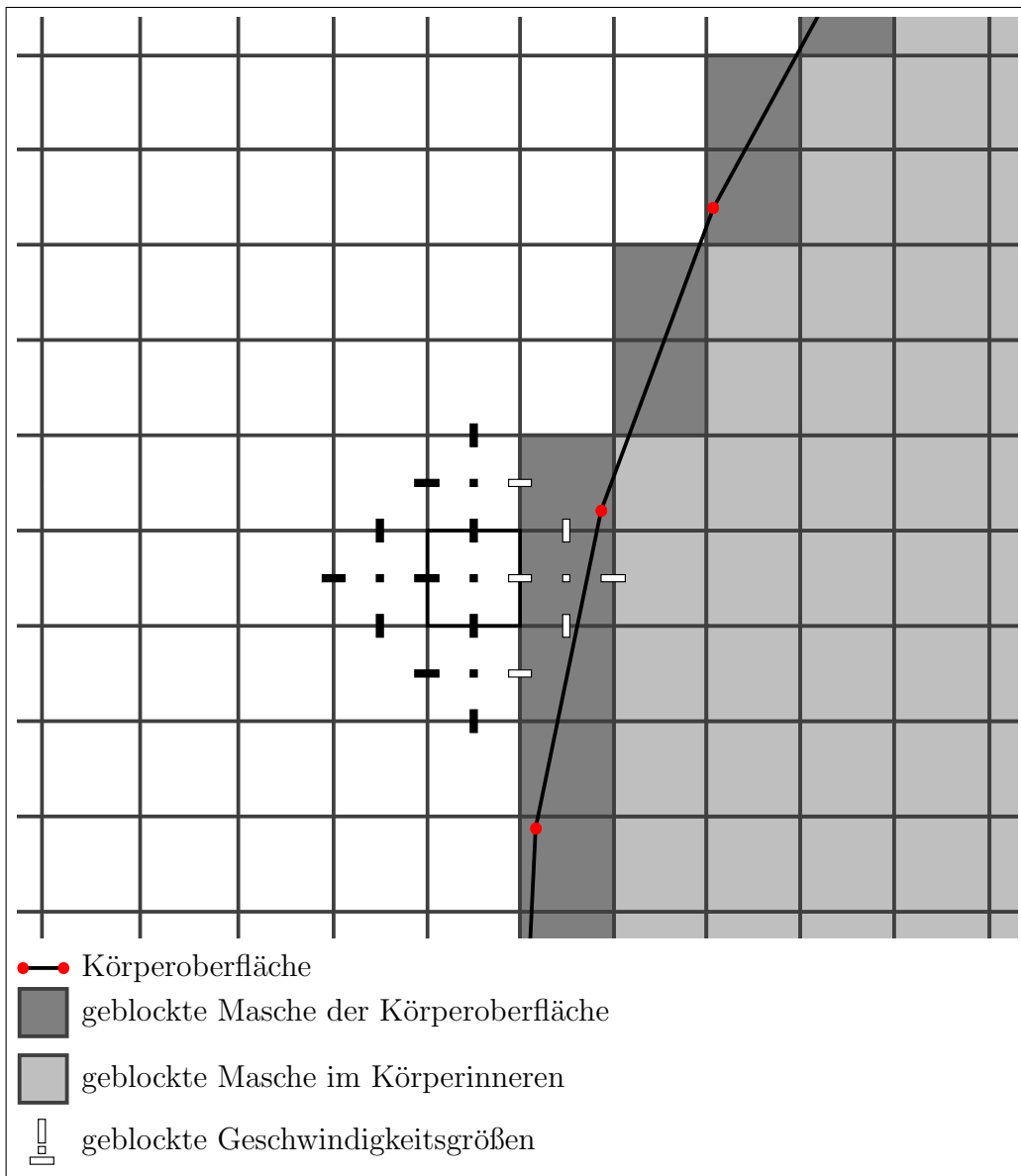


Abbildung 2.4: Diskretisierungstern des Programms MGLET für die diskrete Poissongleichung (2.67) sowie Verdeutlichung der geblockten Maschen und Geschwindigkeitsgrößen.

mit

$$\begin{aligned}
 a &= (P_2x_2 - P_1x_2) (P_3x_3 - P_1x_3) - (P_2x_3 - P_1x_3) (P_3x_2 - P_1x_2) , \\
 b &= (P_2x_3 - P_1x_3) (P_3x_1 - P_1x_1) - (P_2x_1 - P_1x_1) (P_3x_3 - P_1x_3) ,
 \end{aligned}$$

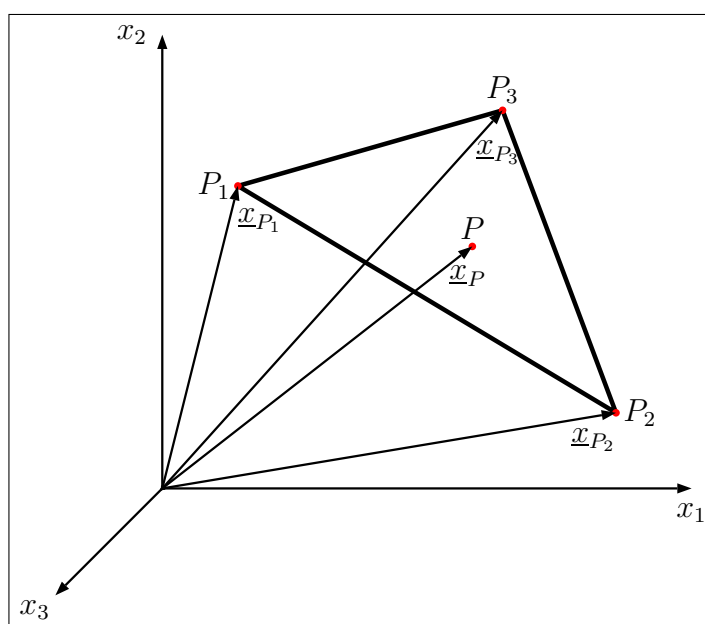


Abbildung 2.5: Dreiecksfläche zur Darstellung eines Teilbereiches einer Körperoberfläche.

$$c = (P_2x_1 - P_1x_1) (P_3x_2 - P_1x_2) - (P_2x_2 - P_1x_2) (P_3x_1 - P_1x_1) .$$

Die im Mittelpunkt² $C = C(C_{x_1}, C_{x_2}, C_{x_3})$ einer Masche startenden Koordinatenlinien (siehe Abbildung 2.6) durchstoßen diese Ebene in den Punkten

$$D_1 = D_1 \left(\frac{-b(C_{x_2} - P_1x_2) - c(C_{x_3} - P_1x_3)}{a} + P_1x_1, C_{x_2}, C_{x_3} \right) ,$$

$$D_2 = D_2 \left(C_{x_1}, \frac{-a(C_{x_1} - P_1x_1) - c(C_{x_3} - P_1x_3)}{b} + P_1x_2, C_{x_3} \right) ,$$

$$D_3 = D_3 \left(C_{x_1}, C_{x_2}, \frac{-a(C_{x_1} - P_1x_1) - b(C_{x_2} - P_1x_2)}{c} + P_1x_3 \right) .$$

Wenn einer dieser Durchstoßpunkte D_i sowohl innerhalb der Masche als auch der Dreiecksfläche liegt, wird die Masche geblockt. Ob sich ein bestimmter

² In den durchgeführten Rechnungen wurde statt des Maschenmittelpunktes C der Definitionspunkt des Drucks verwendet. Der dadurch resultierende Unterschied ist aber für das im Bereich des Tragflügelprofils nahezu äquidistante Rechengitter vernachlässigbar.

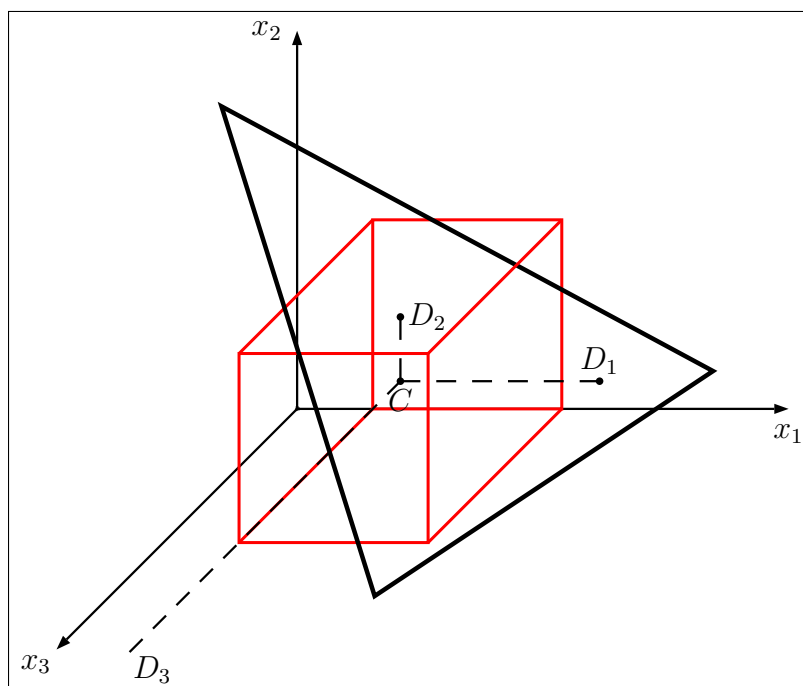


Abbildung 2.6: Zur Bestimmung der Durchstoßpunkte D_i .

Punkt auf der Dreiecksfläche befindet, kann mit Hilfe der Bedingungen

$$\underline{n}^i \cdot \underline{d} \geq 0$$

überprüft werden. Dabei bezeichnet \underline{n}^i den Normalenvektor der dem Eckpunkt P_i gegenüberliegenden Dreiecksseite und \underline{d} den Vektor vom Mittelpunkt dieser Seite zum betrachteten Punkt (in der Abbildung 2.7 der Durchstoßpunkt D_i). Die Normalenvektoren \underline{n}^i können hierfür wie folgt berechnet werden

$$\begin{aligned} \underline{n}^1 &= ((\underline{x}_{P_3} - \underline{x}_{P_2}) \times (\underline{x}_{P_1} - \underline{x}_{P_2})) \times (\underline{x}_{P_3} - \underline{x}_{P_2}) , \\ \underline{n}^2 &= ((\underline{x}_{P_1} - \underline{x}_{P_3}) \times (\underline{x}_{P_2} - \underline{x}_{P_3})) \times (\underline{x}_{P_1} - \underline{x}_{P_3}) , \\ \underline{n}^3 &= ((\underline{x}_{P_2} - \underline{x}_{P_1}) \times (\underline{x}_{P_3} - \underline{x}_{P_1})) \times (\underline{x}_{P_2} - \underline{x}_{P_1}) . \end{aligned}$$

Nachdem sämtliche Maschen der geschilderten Vorgehensweise unterzogen wurden, sind alle Oberflächenmaschen geblockt. Die Maschen im Inneren des Körpers können durch einen einfachen Algorithmus gefunden werden, indem eine bekannte Masche außerhalb des Körpers angegeben wird. Ausgehend von

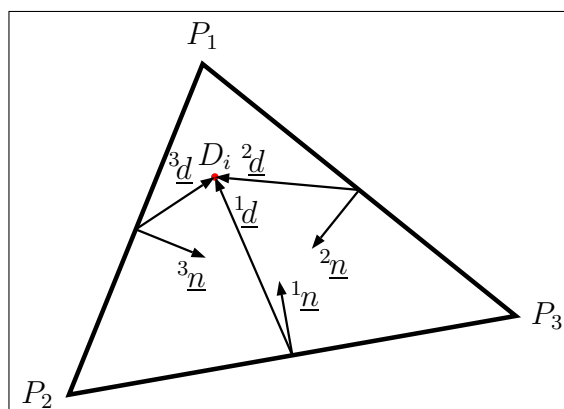


Abbildung 2.7: Zur Bestimmung ob ein Durchstoßpunkt D_i innerhalb einer Dreiecksfläche liegt.

dieser Masche werden jeweils die nicht geblockten Nachbarmaschen markiert, so daß am Ende alle nicht markierten Maschen innerhalb des Körpers liegen und geblockt werden müssen.

Die Interpolation bzw. Extrapolation der benötigten Geschwindigkeitsgrößen der geblockten Maschen erfolgt mittels Lagrangescher Polynome der Ordnung $N_{\text{ord}} = 3$

$${}^b\phi = \sum_{m=1}^{N_{\text{ord}}+1} \left(\prod_{n=1, n \neq m}^{N_{\text{ord}}+1} \frac{({}^b x_i - {}^n x_i)}{({}^m x_i - {}^n x_i)} \right) {}^m\phi .$$

In der Abbildung 2.8 ist der Fall für eine Interpolation dargestellt. Falls eine geblockte Größe entlang mehr als einer der x_i -Koordinatenrichtungen, $N_{\text{dir}} > 1$, interpoliert bzw. extrapoliert werden kann, wird jede der Richtungen mit dem entsprechenden Faktor f_i gewichtet

$$f_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{l=1}^{N_{\text{dir}}} \alpha_l} , \text{ mit } \alpha_i = \frac{\prod_{l=1, l \neq i}^{N_{\text{dir}}} |{}^b x_l - {}^w x_l|}{|{}^b x_i - {}^w x_i|} .$$

2.3.2.2 Anpassung für schlanke Körper

Um zu testen, ob der verwendete Algorithmus zur Behandlung beliebig geformter Körper in einem kartesischen Gitter auch bei der Umströmung von schlanken Körpern mit scharfen Kanten eingesetzt werden kann, wurde eine Vergleichsrechnung mit dem Strömungslöser DeFT (siehe weiter unten

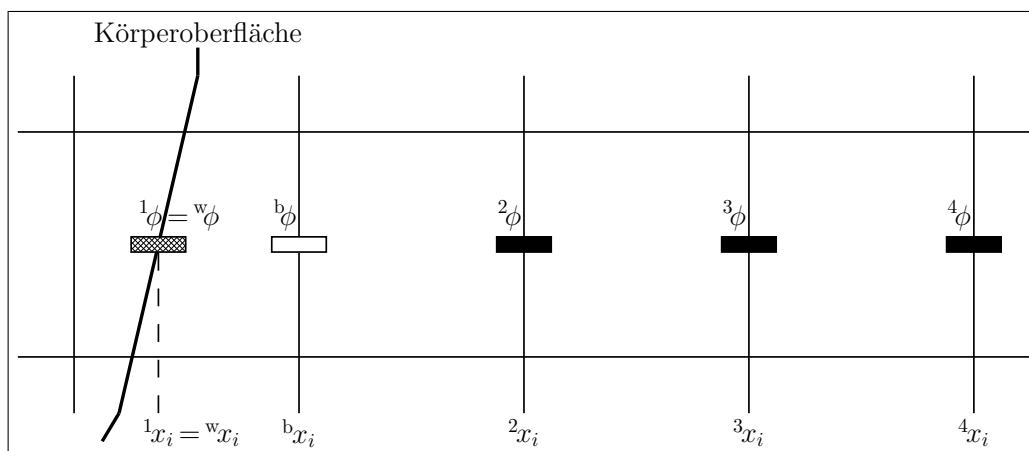


Abbildung 2.8: Zur Interpolation einer geblockten Unbekannten.

im Text) durchgeführt. Dafür wurde die in Abschnitt 3.1 vorgestellte Strömungskonfiguration ausgewählt. Wegen der großen Arbeitsspeicher- und Rechenzeitanforderungen des Programms DeFT konnte jedoch nur eine zweidimensionale Profilmströmung bei sehr niedriger Reynoldszahl simuliert werden. Da die mit den beiden Strömungslösern erhaltenen Ergebnisse sehr gute Übereinstimmungen gezeigt haben, soll hier auf diesen Vergleich nicht weiter eingegangen werden.

Vergleiche mit dreidimensionalen Simulationen bei der Reynoldszahl $Re = 20\,000$, die vom Kooperationspartner Herr Jovičić am Lehrstuhl für Strömungsmechanik der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg im Rahmen des Themenkreises 5 des DFG Schwerpunktprogramms „Transition“ mit dem Programm LESOCC berechnet wurden, zeigten jedoch zunächst unerklärliche Unterschiede in den Ergebnissen. LESOCC ist wie DeFT ein Strömungslöser für körperangepasste Rechengitter, jedoch im Gegensatz zu DeFT, mit zellzentrierter Variablenanordnung.

Eine genauere Untersuchung des in MGLET implementierten Algorithmus zur Behandlung beliebig geformter Körper ergab, daß im Bereich der Hinterkante des Profils die zur Berechnung der geblockten Unbekannten verwendeten Größen nicht richtig bestimmt wurden. So wurden an mehreren Stellen Größen von der gegenüberliegenden Profilstseite zur Berechnung herangezogen. Ein typischer Fall ist in der linken Hälfte der Abbildung 2.9 dargestellt. Deshalb wurde der Algorithmus unter Verwendung des Normalenvektors der Körperoberfläche derart abgeändert, daß nur noch Größen von der zur Oberfläche richtig orientierten Seite des Strömungsgebietes verwendet werden (sie-

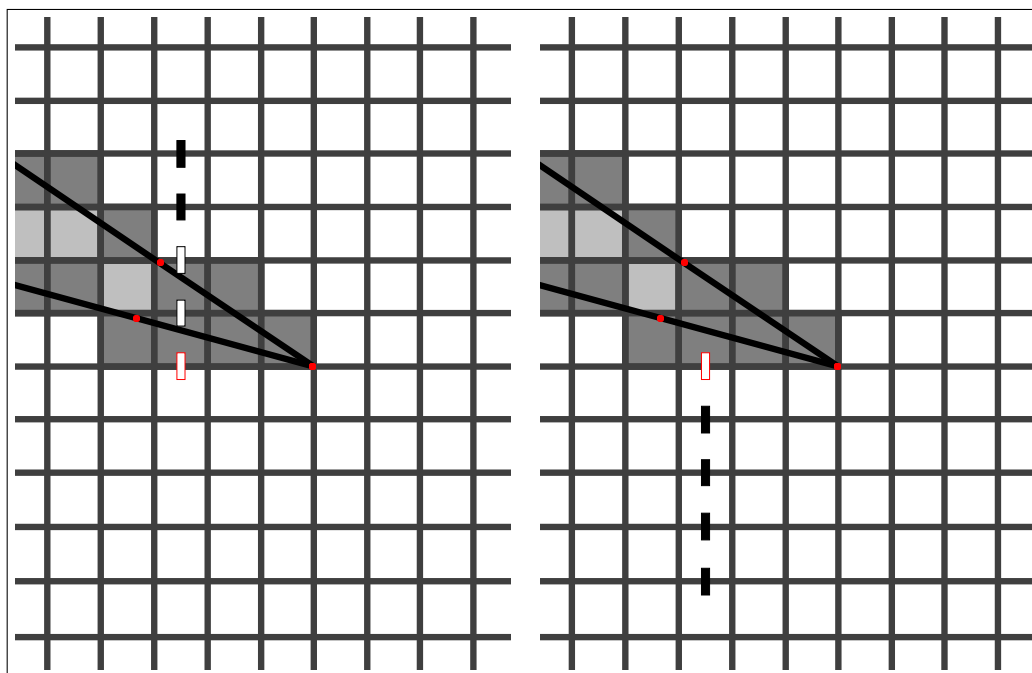


Abbildung 2.9: Darstellung der zur Berechnung der geblockten Unbekannten (weiß mit rotem Rand) verwendeten Größen, links ohne die Anpassung für schlanke Körper und rechts mit der Anpassung für schlanke Körper.

he rechte Hälfte der Abbildung 2.9).

Der Unterschied, der sich durch die Änderung des Algorithmus in den Simulationsergebnissen zeigt, ist exemplarisch anhand des Verlaufs des mittleren Druckbeiwertes $\langle C_p \rangle$ in Abbildung 2.10 dargestellt (zur Bestimmung von $\langle C_p \rangle$ siehe Abschnitt 3.1). Dort fällt besonders der eigentümliche Verlauf an der Hinterkante bei der Berechnung ohne die Anpassung für schlanke Körper auf. Die falsche Berechnung an der Hinterkante wirkt sich aber auch auf den Verlauf der Saugspitze an der Profilnase aus. Daß tatsächlich die falsche Bestimmung der zur Berechnung der geblockten Unbekannten verwendeten Größen für die Unterschiede zwischen den eigenen Ergebnissen und denen des Programms LESOCC verantwortlich war, wurde durch einen anschließenden erneuten Vergleich bestätigt (JOVIČIĆ ET AL., 2003).

Bei einer Simulation der oben genannten Strömungskonfiguration mit einer spannwitigen Gebietserstreckung von 0,1 Profiltiefen führte die Berechnung ohne die Anpassung für schlanke Körper sogar zur Bildung einer Ablöseblase an der oberen Kanalplatte im Bereich kurz nach der Profilhinterkante

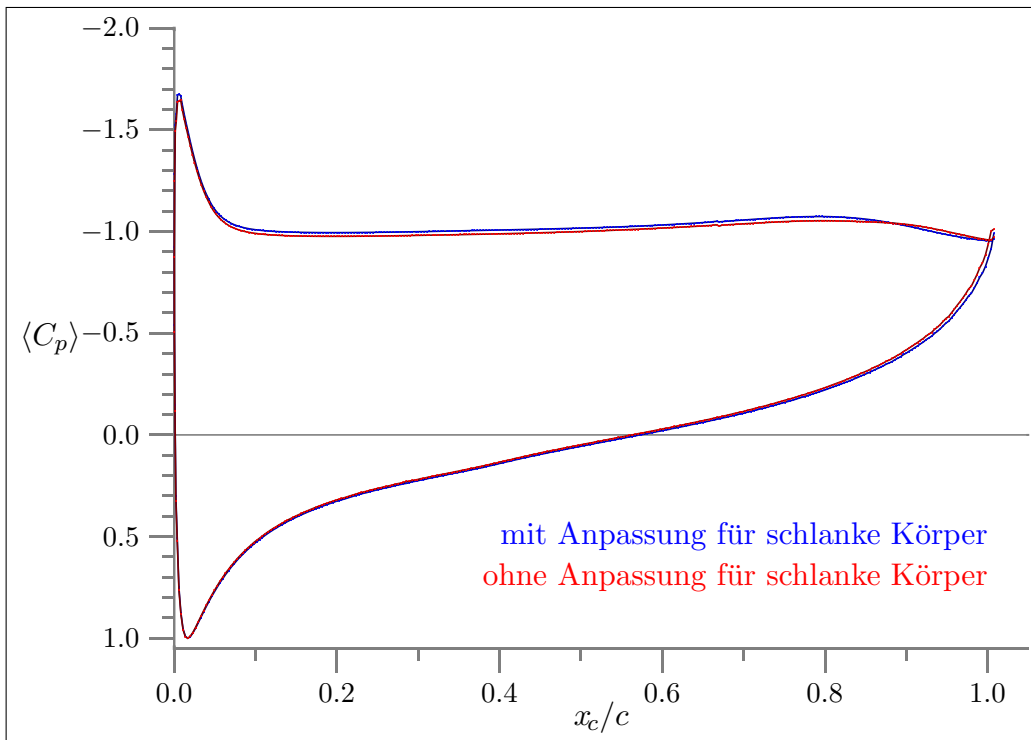


Abbildung 2.10: Vergleich des Verlaufs des mittleren Druckbeiwertes $\langle C_p \rangle$ der Berechnung mit Anpassung für schlanke Körper mit dem der Berechnung ohne Anpassung für schlanke Körper.

($x/c \approx 2,0$). Diese Ablöseblase trat bei der Berechnung mit der Anpassung für schlanke Körper nicht mehr auf.

2.3.3 DeFT

Das Programm DeFT (Delft Flow and Transport) löst die diskretisierte Form der Strömungsgleichungen (2.35) und (2.36). Die Integration der Kontinuitätsgleichung (2.35) über das Volumen einer Masche $\Delta V = J \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 \Delta \xi^3$ ergibt

$$\int_{\xi_-^1}^{\xi_+^1} \int_{\xi_-^2}^{\xi_+^2} \int_{\xi_-^3}^{\xi_+^3} \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (J v^j) J d\xi^3 d\xi^2 d\xi^1 =$$

$$\sum_{i=1}^3 \left(\int_{\xi_-^j}^{\xi_+^j} \int_{\xi_-^k}^{\xi_+^k} (J v^i)_{\xi^i=\xi_+^i} - (J v^i)_{\xi^i=\xi_-^i} d\xi^k d\xi^j \right) = 0 ,$$

mit i, j, k , ist Permutation von 1, 2, 3 ,

weshalb in DeFT die Größen $V^i = J v^i$ als die Unbekannten des Problems definiert werden. Die Diskretisierung des Impulserhaltungssatzes (2.36) führt im zweidimensionalen Fall auf die in der Abbildung (2.11) dargestellten Diskretisierungssterne. Im dreidimensionalen Fall sind die Unbekannten an insgesamt 61 Stellen des numerischen Gitters erforderlich (für die Komponente in ξ^1 -Koordinatenrichtung des Impulserhaltungssatzes sind 19 V^1 -Stellen, 16 V^2 -Stellen, 16 V^3 -Stellen und 10 p -Stellen notwendig). Die diskretisierten

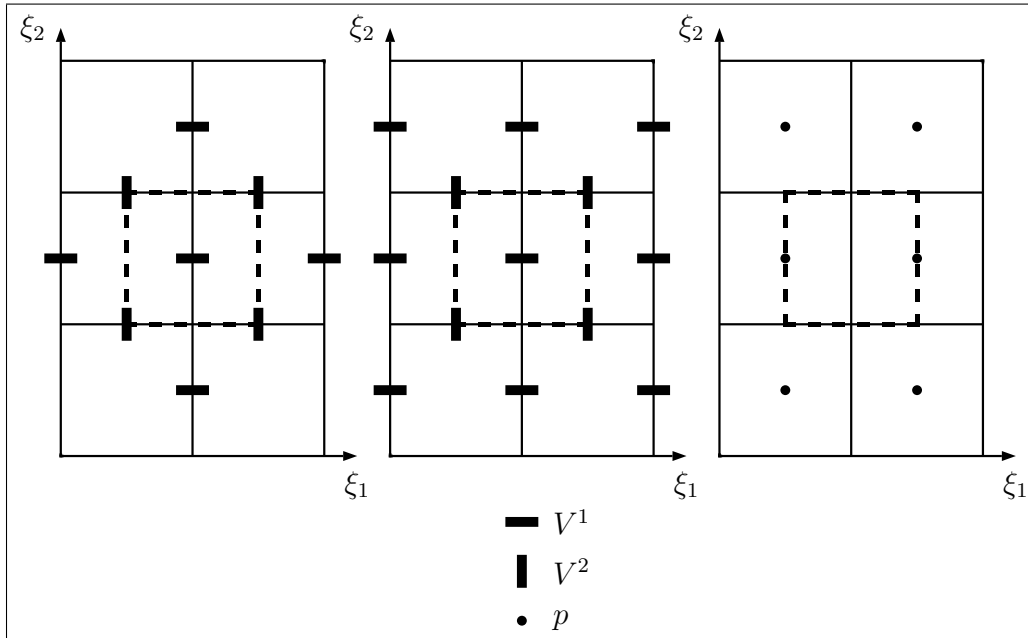


Abbildung 2.11: Diskretisierungssterne des Programms DeFT für den Konvektions-, Diffusions- und Druckterm (von links nach rechts) der Komponente in ξ_1 -Koordinatenrichtung des zweidimensionalen Impulserhaltungssatzes (2.36).

Strömungsgleichungen können in der Form

$$D\mathbf{V} = 0$$

und

$$R \frac{d\mathbf{V}}{dt} + M(\mathbf{V}) + G\mathbf{p} = 0$$

geschrieben werden. Hierbei bezeichnen \mathbf{V} und \mathbf{p} algebraische Vektoren, die die Unbekannten der Geschwindigkeit bzw. des Drucks enthalten. R ist die Diagonalmatrix der Dichte und M stellt die räumliche Diskretisierung des Konvektions- und Diffusionsterms dar. Mit D und G werden der diskrete Divergenz- bzw. Gradienten-Operator benannt. Die zeitliche Diskretisierung erfolgt in DeFT mit Hilfe der θ -Methode

$$R \frac{\mathbf{V}^{(n+1)} - \mathbf{V}^{(n)}}{\Delta t} + \theta M(\mathbf{V}^{(n+1)}) + (1 - \theta) M(\mathbf{V}^{(n)}) \\ + \theta G\mathbf{p}^{(n+1)} + (1 - \theta) G\mathbf{p}^{(n)} = 0 .$$

Für $\theta = 0,5$ entspricht die θ -Methode dem in dieser Arbeit verwendeten Crank-Nicolson-Verfahren, das von zweiter Ordnung genau ist. Das Druckkorrektur-Verfahren wird analog zu dem im Abschnitt 2.3.1 beschriebenen durchgeführt. Wegen des impliziten Zeitschrittverfahrens muß jedoch in der Gleichung

$$R \frac{\mathbf{V}^{(*)} - \mathbf{V}^{(n)}}{\Delta t} + \theta M(\mathbf{V}^{(*)}) + (1 - \theta) M(\mathbf{V}^{(n)}) + G\mathbf{p}^{(n)} = 0$$

der Term $M(\mathbf{V}^{(*)})$ linearisiert werden. Dies wird durch Anwendung der von zweiter Ordnung genauen Newton-Methode erreicht

$$M(\mathbf{V}^{(*)}) \approx M(\mathbf{V}^{(n)}) + \left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{V}} \right)^{(n)} (\mathbf{V}^{(*)} - \mathbf{V}^{(n)}) .$$

Die diskrete Poissongleichung

$$D\mathbf{V}^{(*)} = \theta \Delta t DR^{-1}G(\mathbf{p}^{(n+1)} - \mathbf{p}^{(n)}) \quad (2.68)$$

erfordert im zweidimensionalen Fall einen 9 Punkte-Diskretisierungstern und im dreidimensionalen den in Abbildung 2.12 dargestellten Stern mit 19 Punkten. Die Matrix $DR^{-1}G$ ist für ein nicht orthogonales Gitter nicht symmetrisch und wird deshalb mit dem GMRES-Verfahren gelöst.

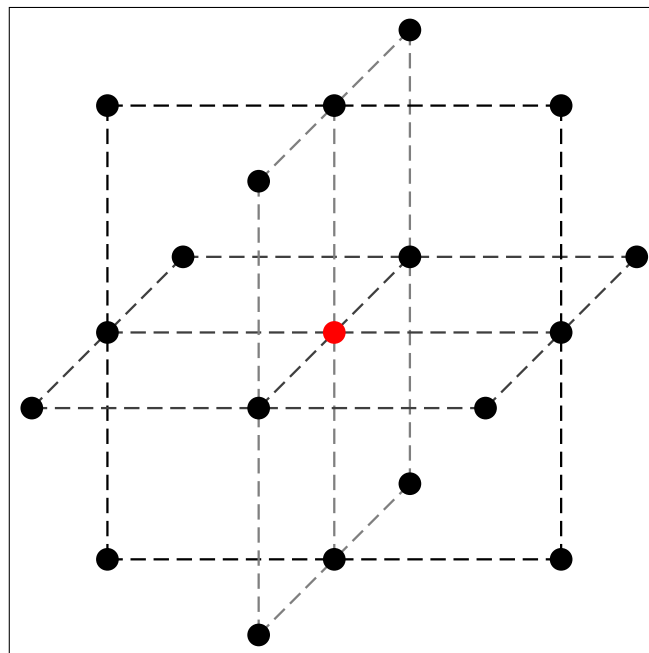


Abbildung 2.12: 19 Punkte-Diskretisierungsstern des Programms DeFT für die dreidimensionale Poissongleichung (2.68).

3. Simulationen

3.1 Strömungskonfiguration

Die Umströmung eines Tragflügels bei großem Anstellwinkel und hoher Reynoldszahl führt zu komplexen dreidimensionalen und instationären Ablösevorgängen, die noch wenig verstanden sind und sich daher der rechnerischen Vorhersage weitgehend entziehen. Direkte numerische Simulationen solcher für die Aerodynamik interessanter Strömungskonfigurationen sind selbst mit den heutigen Höchstleistungsrechnern noch immer undenkbar. Mit statistischen Turbulenzmodellen können derzeit noch keine akzeptablen Vorhersagen für den Fall einer großskalig abgelösten Strömung an einem stromlinienförmigen Körper gemacht werden. Ein wichtiger physikalischer Grund dafür dürfte wohl darin begründet liegen, daß sich die Reynoldsschen Spannungen in derartig komplexen Strömungen wesentlich langsamer ändern als es die mittlere Strömung tut. Weiterhin weicht momentan und im zeitlichen Mittel zumindest in großen Bereichen des Strömungsfeldes die Orientierung des Reynoldsschen Spannungstensors von der des Geschwindigkeitsgradiententensors ab, so daß Wirbelviskositätsansätze zu schlechten Vorhersagen führen. Die Schließungsmodelle höherer Ordnung leiden noch an der Modellierung der höheren Momente, wie z. B. der Druckscherkorrelationen, was zu einem großen Teil am Mangel an geeigneten Datensätzen für die Validierung liegt. Grobstruktursimulationen versprechen hier schneller zum Ziel zu führen. Jedoch bedarf auch diese Simulationsmethode noch der Weiterentwicklung, weshalb ein Vergleich mit Experimenten wünschenswert ist. Aus diesem Grund wurde das Prinzipexperiment COSTWING ([LERCHE und DALLMANN, 1999](#)) initiiert, das soweit wie möglich den Anforderungen und Interessen sowohl der experimentellen als auch der numerischen Seite Rechnung trägt. So wurde eine möglichst einfache und deshalb zweidimensionale Geometrie spezifiziert, die aber noch zu der gewünschten großskalig abgelösten Strömung führt. Ebenso stellt die angestrebte Reynoldszahl von der Größenordnung $\mathcal{O}(10^5)$ einen Kompromiß zwischen der unteren Durchführbarkeitsgrenze des Experiments und den Auflösungsanforderungen der numerischen Simulation dar.

Gegenstand der Untersuchungen des COSTWING Experiments ist die abgelöste Strömung um ein Tragflügelprofil vom Typ NACA 4415. Um die numerische Simulation einfacher mit dem Experiment vergleichen zu können und gleichzeitig die Abmessungen des Rechengebiets möglichst klein zu halten, befindet sich der Tragflügel in einem Kanal, bestehend aus zwei parallelen, horizontalen Platten. Die Abbildung 3.1 zeigt eine maßstäbliche Darstellung eines Querschnitts des gesamten Rechengebiets senkrecht zur Spannweitenrichtung. Dabei wurden die Längenangaben auf die Profiltiefe c bezogen. Die

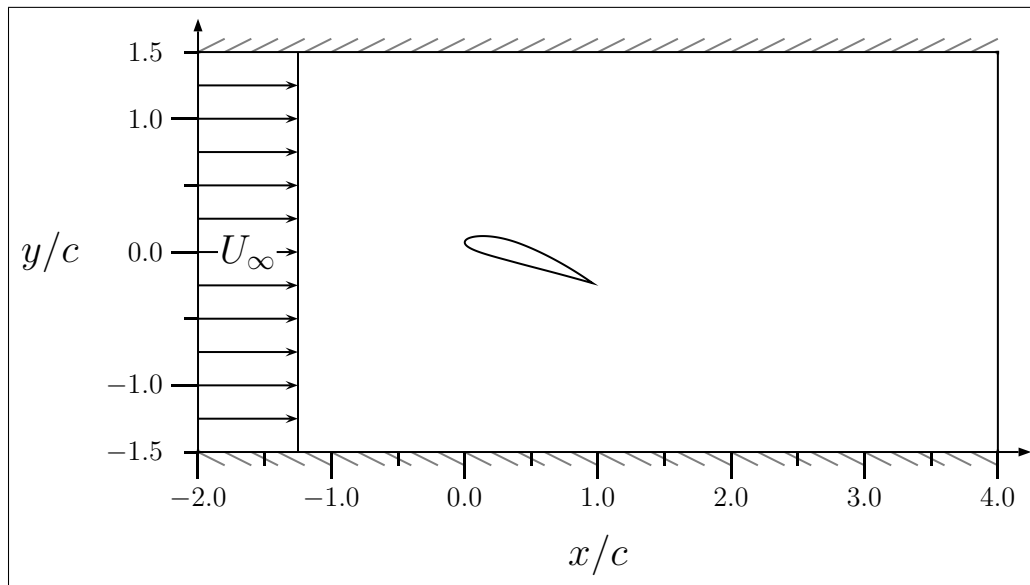


Abbildung 3.1: Querschnitt des Rechengebiets senkrecht zur Spannweitenrichtung.

se ist in der Abbildung 3.2 dargestellt. Weiterhin werden in diesem Kapitel die folgenden Bezeichnungen verwendet.

$$\begin{aligned}
 \underline{e}_i &\equiv \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \equiv \{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\} \\
 x_i &\equiv \{x_1, x_2, x_3\} \equiv \{x, y, z\} \\
 v_i &\equiv \{v_1, v_2, v_3\} \equiv \{u, v, w\} \\
 \Delta A_i \underline{v}_i &\equiv \{\Delta A_1 \underline{v}_1, \Delta A_2 \underline{v}_2, \Delta A_3 \underline{v}_3\} \equiv \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \equiv \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\} \\
 v'_i &\equiv \{v'_1, v'_2, v'_3\} \equiv \{u', v', w'\} \\
 \frac{\Delta V}{\bar{p}} &\equiv \bar{p}
 \end{aligned}$$

Neben dem kartesischen Koordinatensystem $\{x, y, z\}$ mit den Basisvektoren $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ wird auch das körperangepasste Koordinatensystem $\{t, n, z\}$ mit

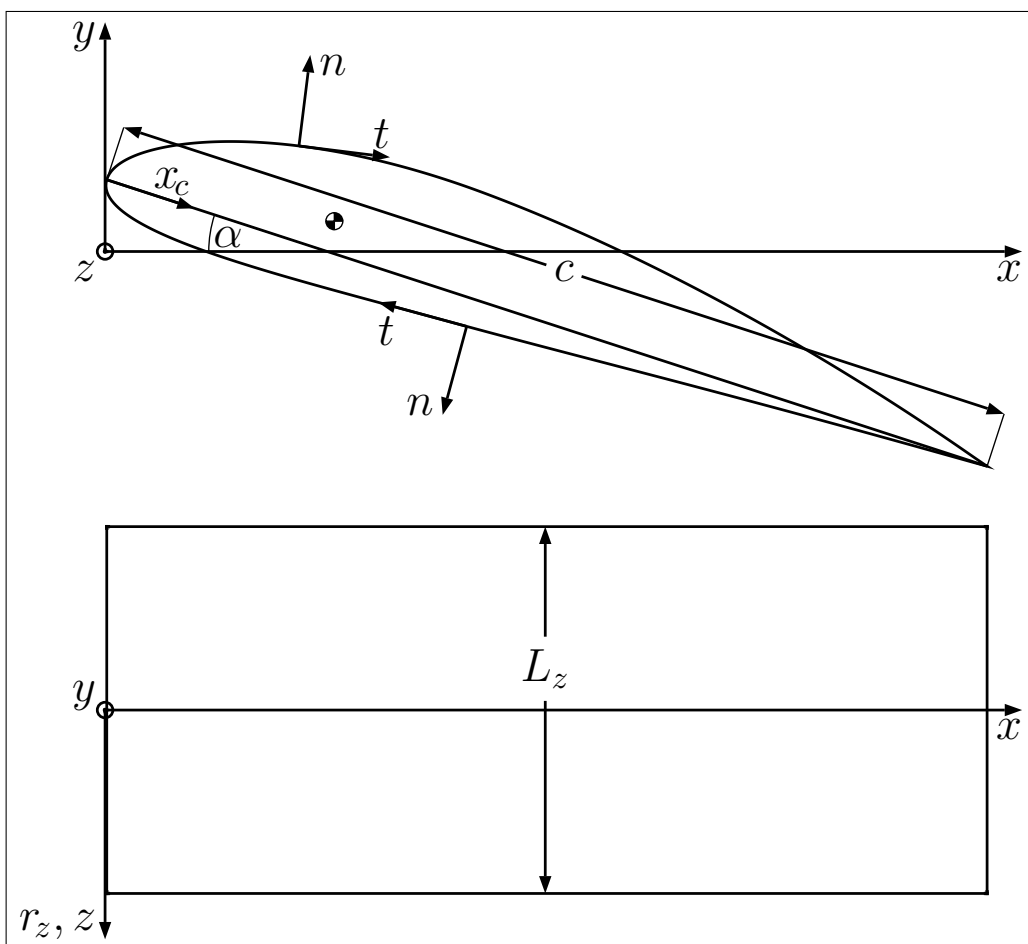


Abbildung 3.2: Koordinatensysteme und geometrische Größen der Strömungskonfiguration.

den normierten Basisvektoren $\{\underline{t}, \underline{n}, \underline{e}_z\}$ verwendet. x_c bezeichnet die Koordinate entlang der Profilschneide, beginnend an der Profilnase.

Der experimentelle Versuchsaufbau im 1m-Windkanal des DLR Göttingen erstreckt sich in Spannweitenrichtung über sechs Profiltiefen, wobei das Modell seitlich über das Gebiet der offenen Meßstrecke hinausragt. Selbst im Wasser-schleppkanal des DLR Göttingen beträgt die Spannweite des Modells noch 4,5 Profiltiefen. Dies sind Gebietserstreckungen, die mit einer akzeptablen Rechengitterauflösung in einer Grobstruktursimulation nicht mehr bewältigt werden können. Deshalb war es ein Punkt dieser Arbeit, zu untersuchen, welche minimale spannwitige Gebietserstreckung $L_{z_{\min}}$ notwendig ist, so daß noch mit dem Experiment vergleichbare Ergebnisse erhalten werden können.

Im Abschnitt 3.3 wird hierauf näher eingegangen.

Leider konnten im Zeitraum der Entstehung dieser Arbeit nur experimentelle Voruntersuchungen durchgeführt werden, weshalb keine Vergleiche zwischen Ergebnissen des Experiments und der numerischen Simulation angestellt werden konnten. Deshalb wurden Untersuchungen durchgeführt, die einem späteren Vergleich dienen sollen. Bei diesen Untersuchungen betrug der Anstellwinkel des Tragflügelprofils $\alpha = 18^\circ$ (siehe Abbildung 3.2).¹ Die Reynoldszahl, gebildet mit der ungestörten Anströmgeschwindigkeit U_∞ , der Profiltiefe c und der kinematischen Viskosität ν , hatte den Wert $Re = 20\,000$. Diese vom Standpunkt der aerodynamischen Anwendung viel zu kleine Reynoldszahl wurde gewählt, um die Untersuchungen schneller durchführen zu können, da sich durch die kleinere Reynoldszahl die Auflösungsanforderungen an das Rechengitter drastisch verringern. Außerdem kann bei einer so geringen Reynoldszahl keine laminare Ablöseblase im Nasenbereich des Profils auftreten (vgl. CARMICHAEL, 1981), was das Strömungsproblem noch weiter verkomplizieren würde.

Die noch nicht genannten numerischen Parameter der in dieser Arbeit vorgestellten fünf Simulationen werden im Abschnitt 3.2 beschrieben. An dieser Stelle sollen nur kurz die für die Simulationen gewählten Bezeichnungen und die Parameter, in denen sich die Simulationen unterscheiden, in der Tabelle 3.1 angegeben werden.

Tabelle 3.1: Bezeichnungen und unterscheidende Parameter der vorgestellten Simulationen.

Bezeichnung	L_z	N_z	Randbed. an Kanal- platten	Feinstrukturmodell
SM10C192NRB	$1,0 c$	192	Haften	Smagorinsky-Modell, 2.2.4.1
SM10C072NRB	$1,0 c$	72	Haften	Smagorinsky-Modell, 2.2.4.1
SM10C072SRB	$1,0 c$	72	Gleiten	Smagorinsky-Modell, 2.2.4.1
SM02C048NRB	$0,2 c$	48	Haften	Smagorinsky-Modell, 2.2.4.1
DM10C072SRB	$1,0 c$	72	Gleiten	Dynamisches Modell, 2.2.4.2

Die für die Untersuchungen gewählte Strömungskonfiguration besitzt eine großskalige Ablösung, wie der Abbildung 3.3 entnommen werden kann. Dort

¹ Der Drehpunkt des Tragflügelprofils hat die Koordinaten $x = 0,25 c$ und $y = 0,03306 c$. Er ist in der Abbildung 3.2 eingetragen.

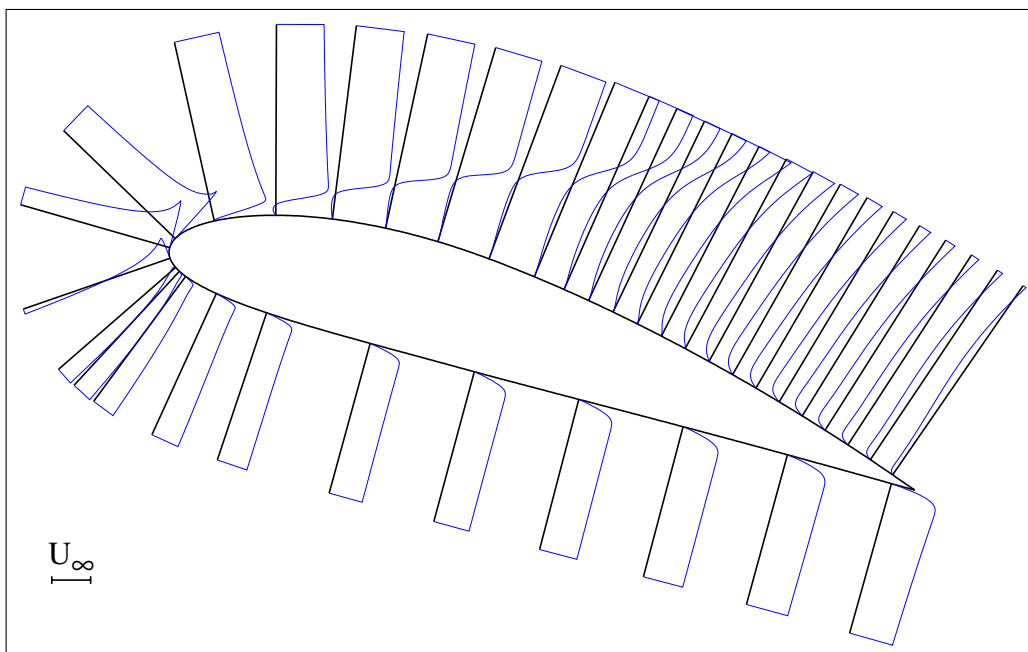


Abbildung 3.3: Profile der tangentialen Geschwindigkeitskomponente \bar{v}_t des gemittelten Strömungsfeldes.

sind einige Profile der tangentialen Geschwindigkeitskomponente \bar{v}_t des gemittelten Strömungsfeldes entlang der Profilkontur eingezeichnet. Die Geschwindigkeitsprofile zeigen deutlich die frühe Ablösung der Grenzschicht auf der Tragflügeloberseite bei $x_c \approx 0,04c$. Ihre Wendepunkte kennzeichnen die Grenze zwischen dem Ablösegebiet und der Außenströmung. In der Abbildung ist neben dem Staupunkt auch die starke Geschwindigkeitszunahme bei der Umströmung der Profilnase zu erkennen. Auf der Profilunterseite verdeutlichen die Geschwindigkeitsprofile die Beschleunigung der Strömung aufgrund des Düseneffekts, den der angestellte Tragflügel zusammen mit der unteren Kanalwand hervorruft.

Die großskalige Ablösung unterliegt einem zyklischen Prozeß. Dabei bildet sich an der Hinterkante des Tragflügelprofils ein sich entgegen dem Uhrzeigersinn drehender Wirbel, der bis zu einer Maximalgröße anwächst und schließlich abschwimmt. Dieser Vorgang erstreckt sich über 1,5 bis 1,6 Problemzeiten, c/U_∞ und ist in der Abbildung 3.4 zu acht aufeinanderfolgenden Zeitpunkten anhand von Isolinien der spannweitigen Wirbelstärkekomponente ω_z , mit

$$\omega_z = (\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{e}_z ,$$

für einen in Spannweitenrichtung mittigen Querschnitt des momentanen Geschwindigkeitsfeldes wiedergegeben. Aus dieser Darstellung wird auch er-

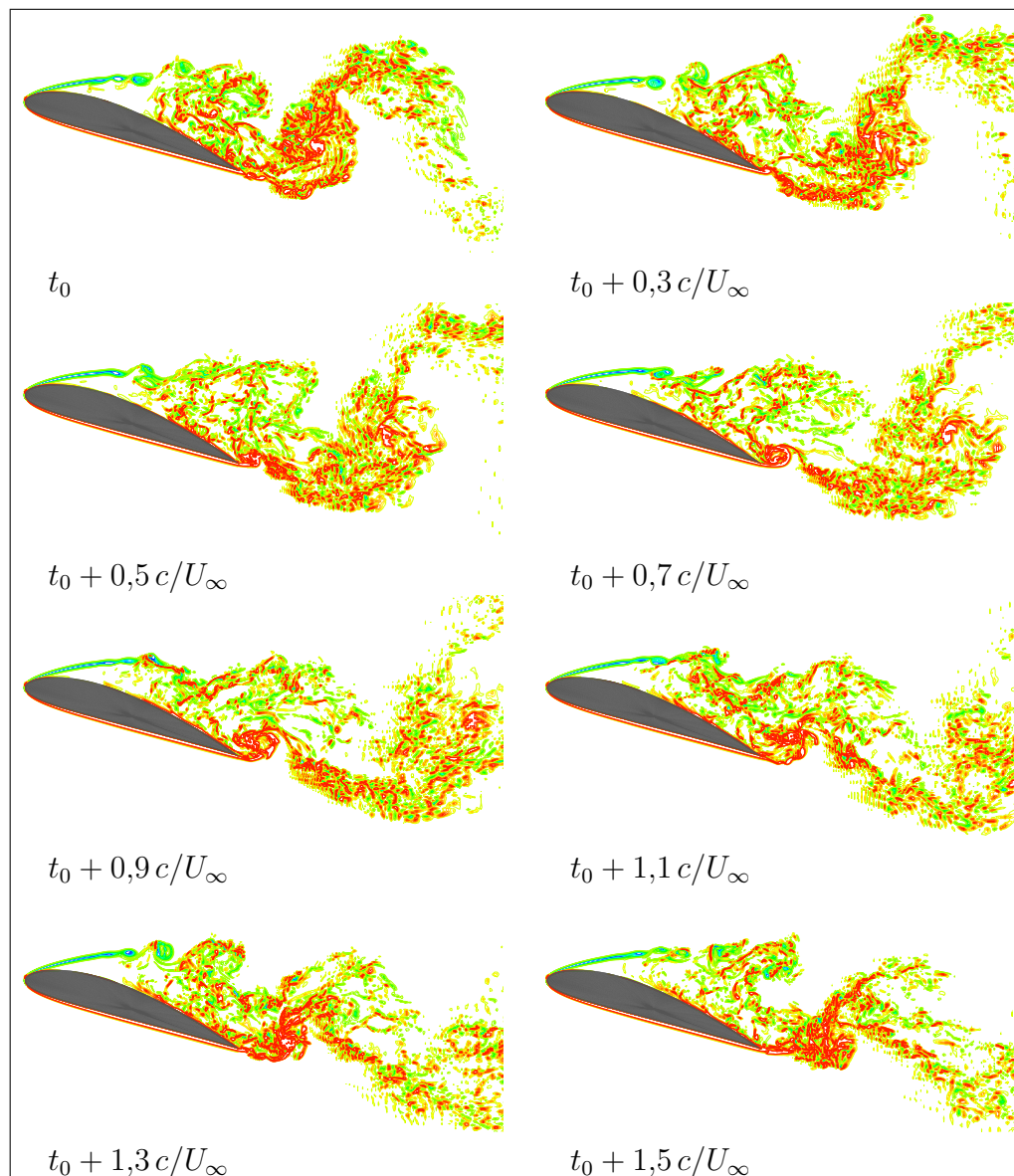


Abbildung 3.4: Darstellung des Wirbelablösevorgangs anhand von Isolinen der spannweitenigen Wirbelstärkekomponente ω_z für einen in Spannweitenrichtung mittigen Querschnitt des momentanen Geschwindigkeitsfeldes.

sichtlich, wie der Hinterkantenwirbel das übrige Ablösegebiet dominiert. Die Ausdehnung des sich im Uhrzeigersinn drehenden Ablösegebiets hängt von

der Größe des Hinterkantenwirbels ab. Sobald dieser abschwimmt, dehnt sich das Ablösegebiet über den freierwendenden Bereich aus, bis ein neuer Wirbel an der Hinterkante heranwächst und diesen Raum einnimmt.

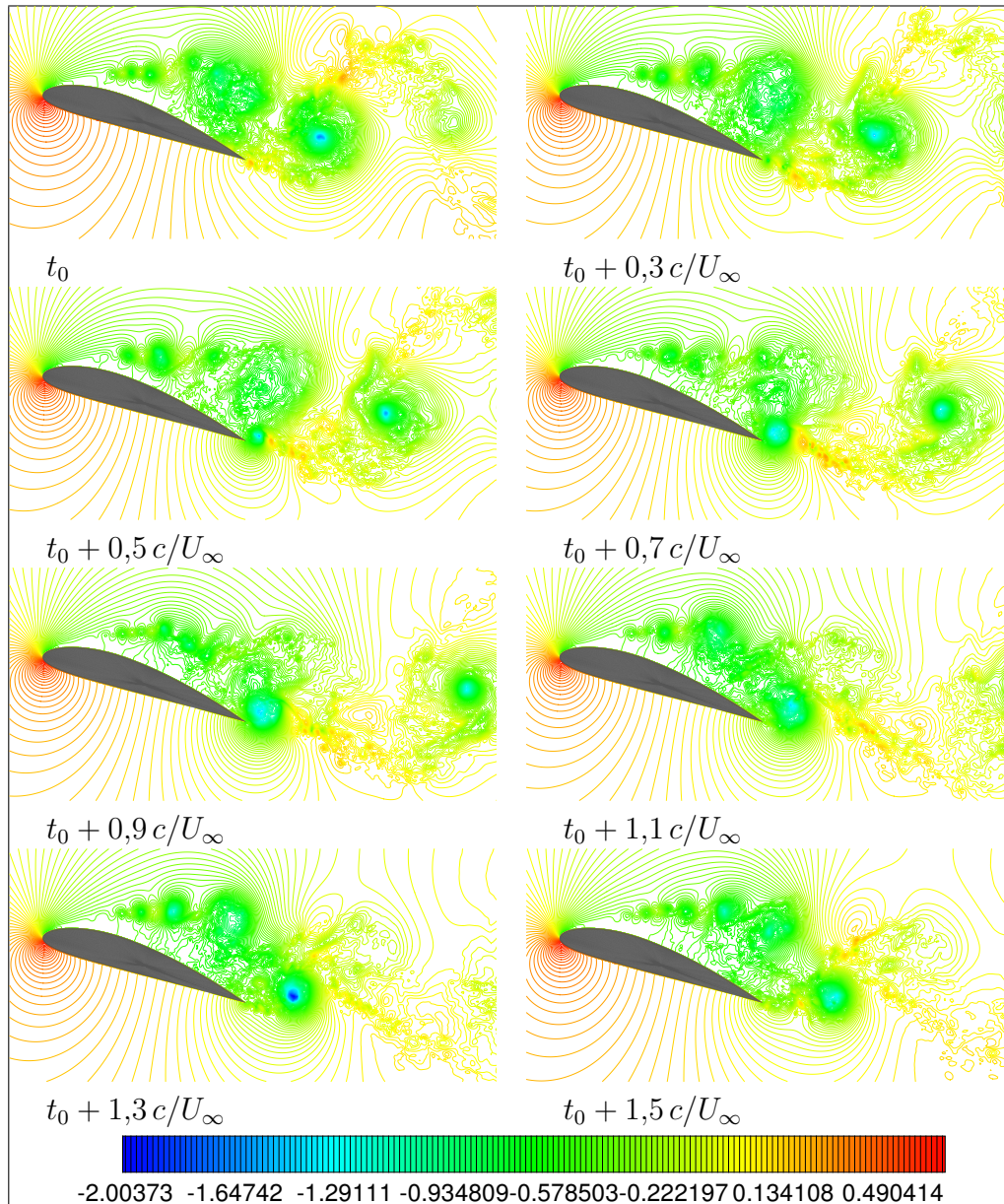


Abbildung 3.5: Darstellung des Wirbelablösevorgangs anhand von Isolinen des momentanen Druckfeldes für einen in Spannweitenrichtung mittigen Querschnitt.

In der Abbildung 3.4 sind auch die Scherschichten gut erkennbar. Besonders

interessant ist hierbei die freie Scherschicht zwischen der Außenströmung und dem Ablösegebiet in der Nähe der Profilnase. Diese Scherschicht wird instabil, wobei kleine Wirbel entstehen. Die Kette, die diese Wirbel bilden, ist gut anhand der Druckminima in der Abbildung 3.5 zu erkennen. Dabei wurde das Druckfeld zu denselben Zeitpunkten dargestellt wie in der Abbildung 3.4.

Als Folge der Instabilität durchläuft die freie Scherschicht eine Transition und wird turbulent. Dies ist gut der Abbildung 3.6 zu entnehmen, die die Profile der tangentialen Komponente der rms-Werte der Geschwindigkeit $\bar{v}_{t_{\text{rms}}}$, mit

$$\bar{v}_{t_{\text{rms}}} = (\bar{v}_{i_{\text{rms}}} \underline{e}_i) \cdot \underline{t} = \left(\sqrt{\langle \bar{v}_i'^2 \rangle} \underline{e}_i \right) \cdot \underline{t} ,$$

zeigt.

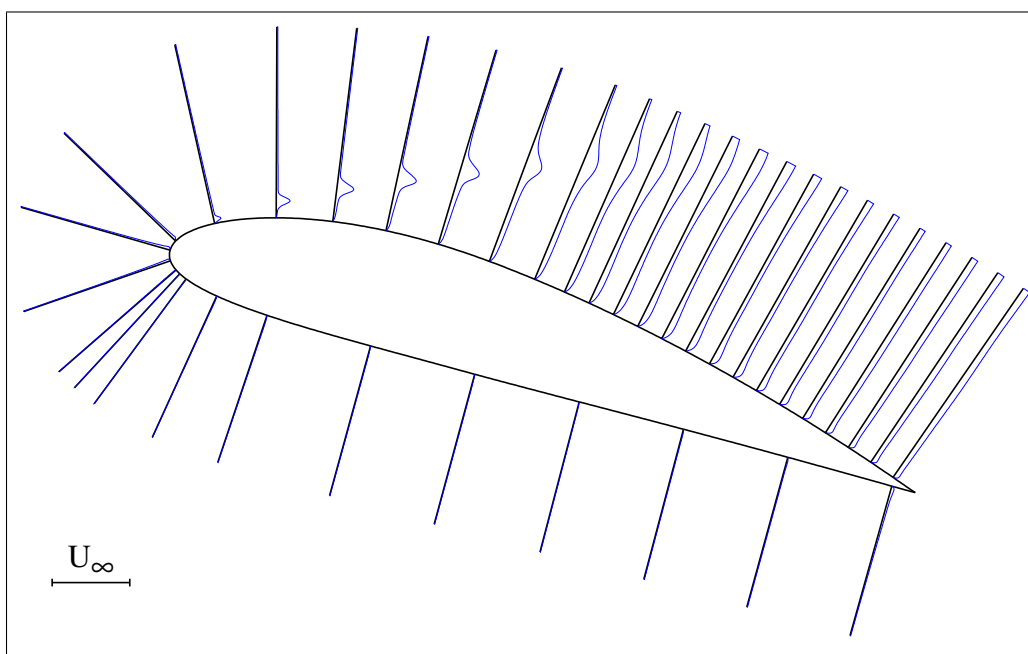


Abbildung 3.6: Profile der tangentialen Komponente der rms-Werte der Geschwindigkeit $\bar{v}_{t_{\text{rms}}}$.

Der in der Abbildung 3.7 wiedergegebene Verlauf des mittleren Druckbeiwertes $\langle C_p \rangle$, mit

$$\langle C_p \rangle = \frac{\langle \bar{p} \rangle - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} ,$$

spiegelt die großskalige Ablösung durch ein breites horizontales Plateau auf der Profiloberseite wider. Dabei wurde der Druck der ungestörten Strömung

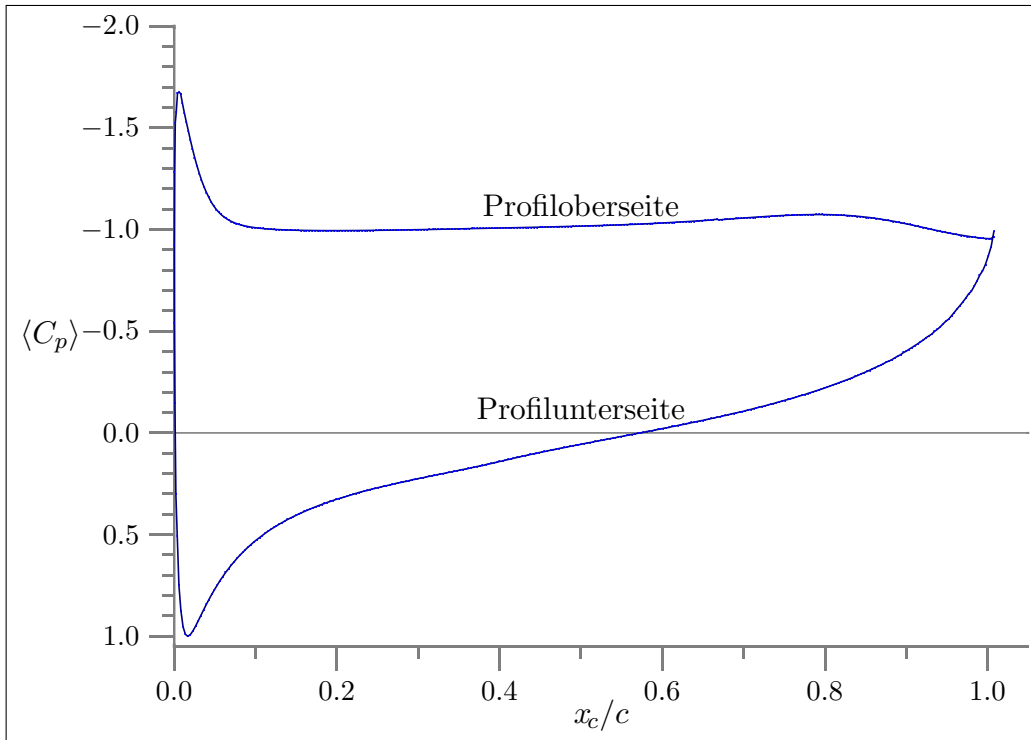


Abbildung 3.7: Verlauf des mittleren Druckbeiwertes $\langle C_p \rangle$.

p_∞ mit Hilfe des Drucks im Staupunkt p_{SP} wie folgt bestimmt

$$p_\infty = p_{\text{SP}} - \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 .$$

Der Verlauf des mittleren Reibungsbeiwertes $\langle C_f \rangle$, mit

$$\langle C_f \rangle = \frac{\langle \tau_w \rangle}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} ,$$

ist in der Abbildung 3.8 dargestellt. Darin ist im Kurvenverlauf der Profileroberseite das Ablösegebiet an den negativen Werten oder solchen, die annähernd null sind, erkennbar und es wird durch den linken Nulldurchgang der Kurve begrenzt, der den Punkt der Grenzschichtablösung markiert. Der Nulldurchgang der Kurve für die Profilerunterseite kennzeichnet den Staupunkt der Strömung. Dort wird der Teil der Strömung, der die Profilnase umströmt, entgegen die x_c -Koordinatenrichtung umgelenkt, was den negativen Kurvenabschnitt erklärt. Zur Bestimmung der Wandschubspannung τ_w und des Drucks auf der Tragflügeloberfläche siehe Anhang D.

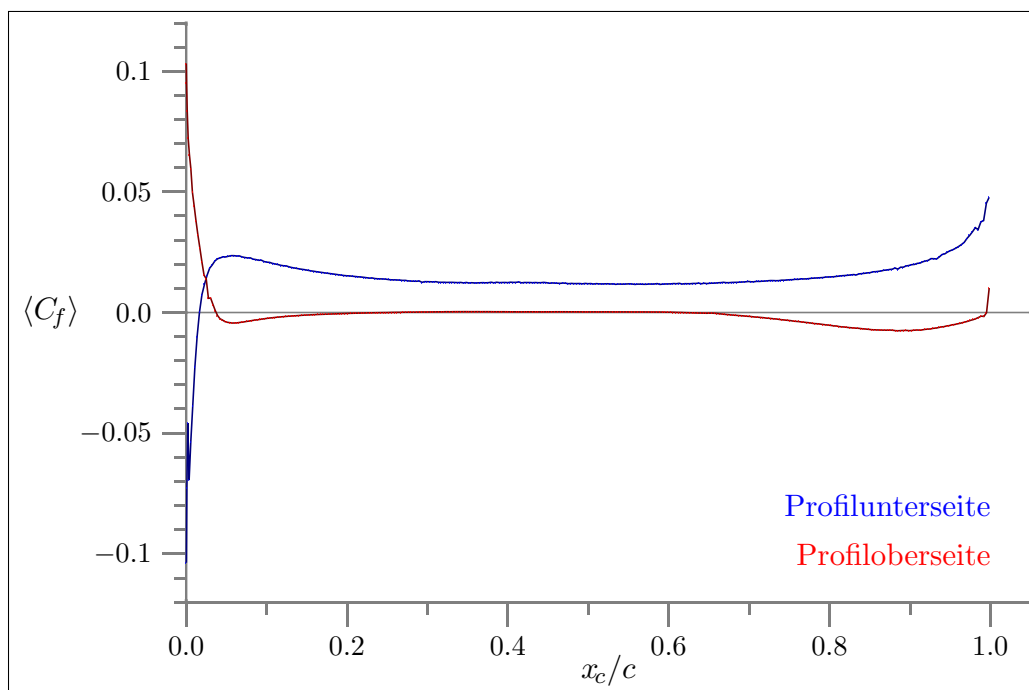


Abbildung 3.8: Verlauf des mittleren Reibungsbeiwertes $\langle C_f \rangle$.

Das Nachlaufgebiet der Tragflügelumströmung wird durch den zyklischen Wirbelablösevorgang an der Profilhinterkante geprägt. Die sich bildende Wirbelstraße ist in der Abbildung 3.9 zu sehen.

Nach dieser ersten Beschreibung der globalen Topologie der untersuchten Strömungskonfiguration soll im folgenden Abschnitt 3.2 näher auf bestimmte numerische bzw. rechentechnische Aspekte eingegangen werden. Weitere Untersuchungsergebnisse werden in den Abschnitten 3.3 bis 3.6 vorgestellt.

3.2 Numerische Parameter

3.2.1 Rechengitter

Während das Rechengitter in Spannweitenrichtung äquidistant ist, wird es in den beiden anderen Richtungen um das Tragflügelprofil verfeinert. Die Verteilung der $N_x \times N_y = 1\,095 \times 750 = 821\,250$ Gitterpunkte einer zur Spannweitenrichtung senkrechten Rechengitterebene auf die einzelnen Zonen innerhalb der Ebene ist in der Abbildung 3.10 dargestellt. In der Tabelle 3.2 sind die

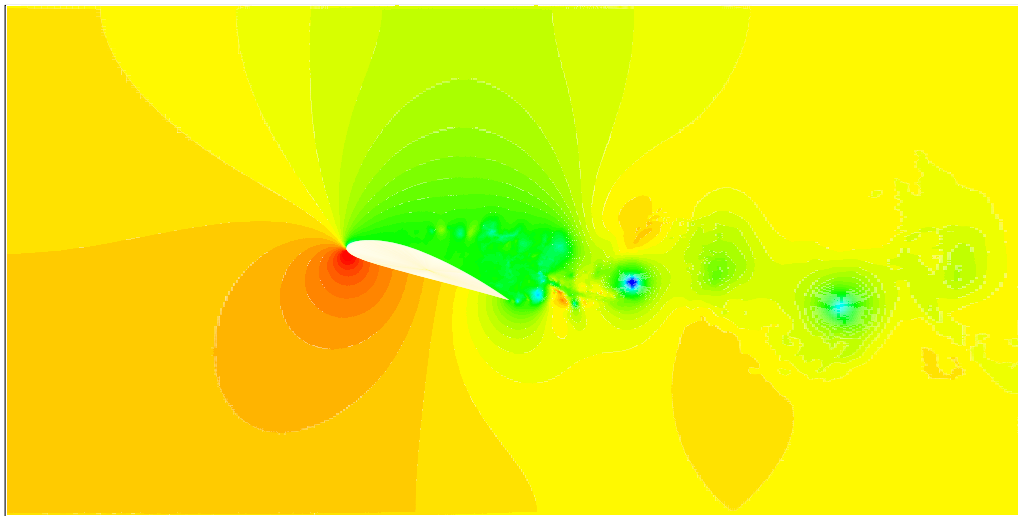


Abbildung 3.9: Momentanes Druckfeld eines in Spannweitenrichtung mitigen Querschnitts des gesamten Rechengebiets.

Maschenweiten für die in der Abbildung 3.10 bezeichneten Orte im Rechengitter angegeben. Damit ergeben sich die in den Abbildungen 3.11 und 3.12

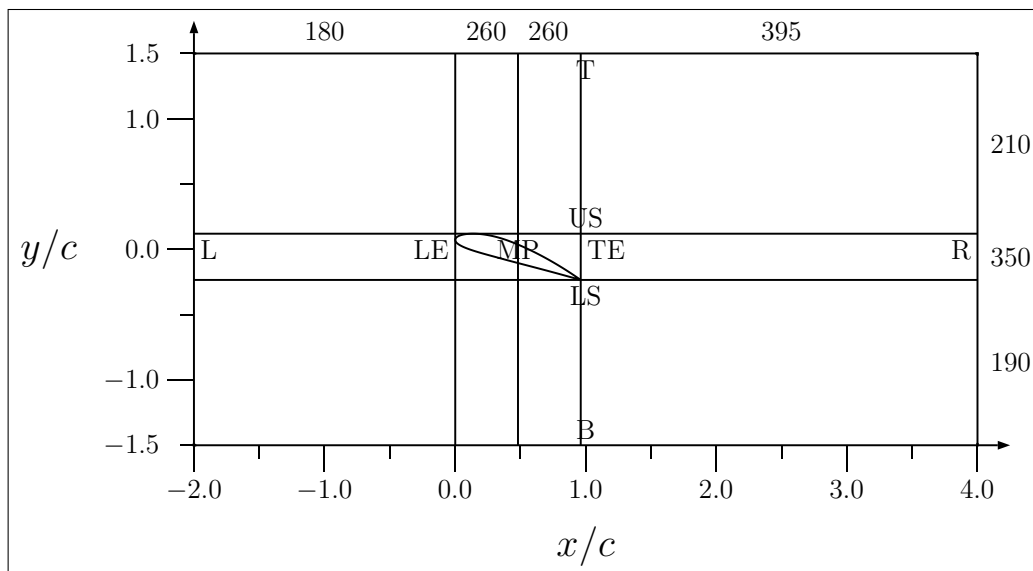


Abbildung 3.10: Verteilung der Gitterpunkte im Rechengebiet.

dargestellten Verläufe der Maschenweite in x - bzw. y -Achsenrichtung. Den

Tabelle 3.2: Maschenweiten an den in der Abbildung 3.10 bezeichneten Orten im Rechengitter.

Ort im Rechengitter	$\Delta x/c$	Ort im Rechengitter	$\Delta y/c$
L	0,04103	B	0,02078
LE	0,00100	LS	0,00100
MP	0,00307	US	0,00102
TE	0,00100	T	0,02027
R	0,02567		

beiden Abbildungen kann auch entnommen werden, daß die relative Maschenweitenänderung in beiden Achsenrichtungen stets kleiner als 2,1 % ist. Die

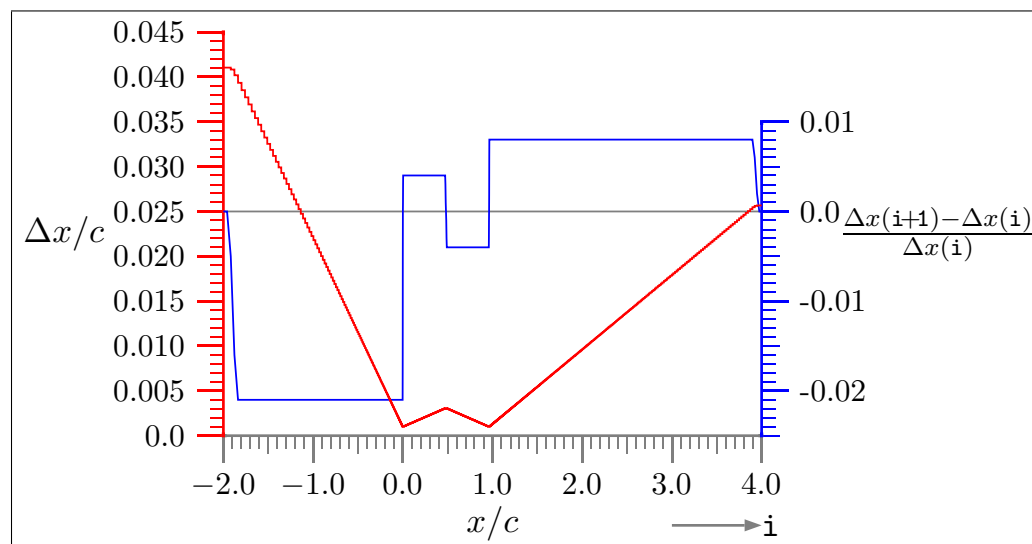


Abbildung 3.11: Verlauf der Maschenweite und ihrer relativen Änderung in x -Achsenrichtung.

Abbildung 3.13 zeigt das Rechengitter im Bereich der Profilmase. In dieser Abbildung ist auch der Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta_{99\%}$

$$\delta_{99\%}(l) \approx 5 \sqrt{\frac{\nu l}{U_\infty}} \quad (3.1)$$

einer laminaren Grenzschicht (siehe z. B. SPURK, 1989) eingezeichnet, wobei deren Lauflänge l im Staupunkt der Tragflügelumströmung startet. Die Gleichung (3.1) gilt strenggenommen nur für eine schwach gekrümmte Wand,

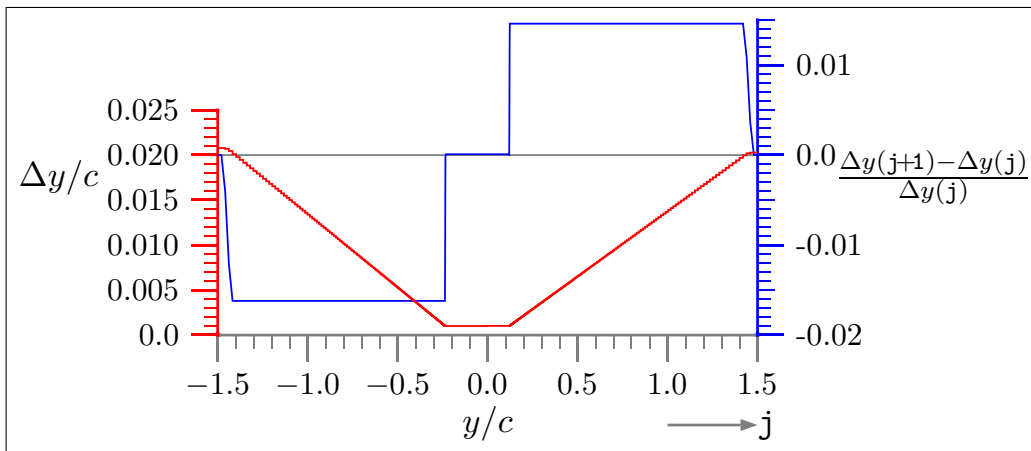


Abbildung 3.12: Verlauf der Maschenweite und ihrer relativen Änderung in y -Achsenrichtung.

kann aber für eine erste Abschätzung der notwendigen Maschenweiten des Rechengitters dienen. Weiterhin ist in der Abbildung 3.13 die Linie des dimensionslosen normalen Wandabstandes $d^+ = 10$, mit

$$d^+ = d \frac{\sqrt{\tau_w \rho}}{\mu} ,$$

dargestellt. Um die wichtigen Strukturen in Wandnähe bei der Grobstruktursimulation einer turbulenten Strömung erfassen zu können, müssen wenigstens drei Gitterpunkte zwischen der Wand und $d^+ = 10$ liegen. Diese Darstellung wurde gewählt, weil die sonst übliche Angabe der dimensionslosen Maschenweiten Δx_i^+ im Fall einer gekrümmten Körperoberfläche bei nicht körperangepaßten Rechengittern zumindest zweifelhaft erscheint, da sich i. allg. die Orientierung des körperangepaßten Koordinatensystems von einer Masche zur anderen ändert. Die beiden starken Ausschläge im Verlauf der Linie $d^+ = 10$ markieren den Staupunkt der Strömung bzw. den Ort der Grenzschichtablösung. Die Linie $d^+ = 10$ ist auch in der Abbildung 3.14, die das Rechengitter im Bereich der Profilhinterkante zeigt, eingezeichnet.

Trotz der starken Verfeinerung des Rechengitters im Bereich des Tragflügelprofils beträgt der Anteil der geblockten Maschen nur etwa 7%. Dies zeigt, daß die untersuchte Strömungskonfiguration für eine Berechnung mit dem gewählten numerischen Verfahren prädestiniert ist.

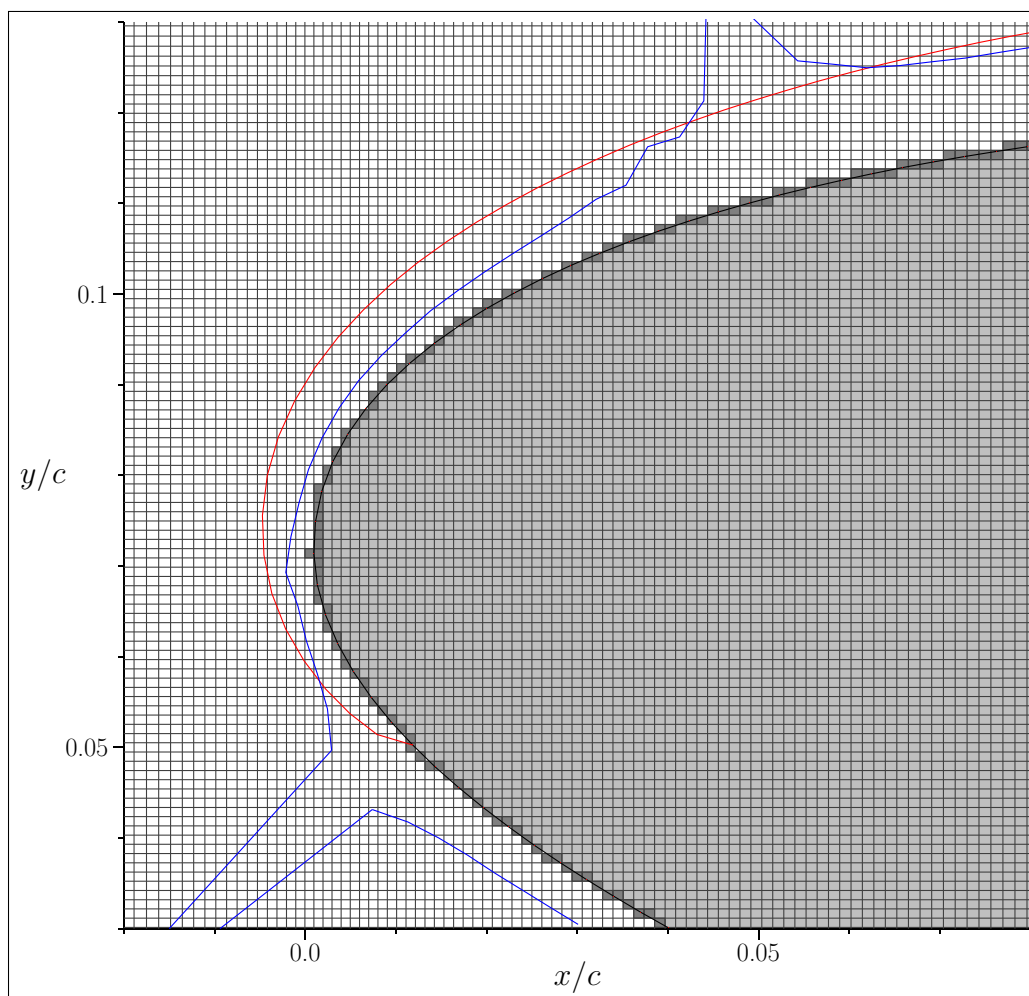


Abbildung 3.13: Rechengitter im Bereich der Profilmase sowie Linie (rot) der Grenzschichtdicke $\delta_{99\%}$ nach Gleichung (3.1) und Linie (blau) des dimensionslosen Wandabstandes $d^+ = 10$.

3.2.2 Randbedingungen

Als Randbedingung in der Einströmebene wurde ein Rechteckprofil vorgegeben (siehe Abbildung 3.1). Am Ausströmrand wurde ein Extrapolationsverfahren benutzt, das auf dem Ansatz beruht, daß die erste randnormale Ableitung der zur Ausströmebene normalen Geschwindigkeitskomponente verschwindet. In Spannweitenrichtung wurde die Strömung als periodisch angenommen. Auf der Tragflügeloberfläche wurde immer die Erfüllung der Haft- und Undurchlässigkeitsbedingung gefordert. Hingegen wurde an den

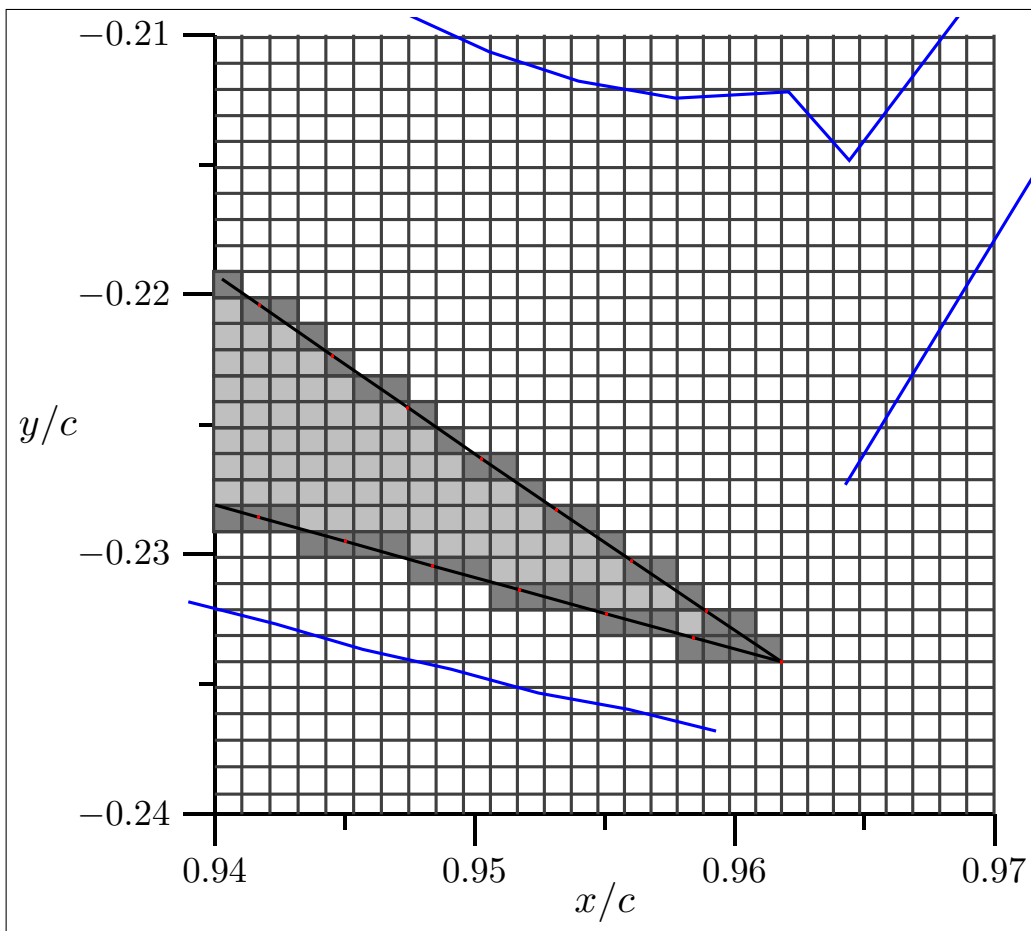


Abbildung 3.14: Rechengitter im Bereich der Profilhinterkante sowie Linie (blau) des dimensionslosen Wandabstandes $d^+ = 10$.

Kanalwänden zusätzlich auch der Fall mit Gleitrandbedingungen untersucht (siehe Abschnitt 3.5).

3.2.3 Zeitschritt und benötigte Computerressourcen

Der explizite Zeitschritt betrug bei allen Simulationen $2 \times 10^{-4} c/U_\infty$. Lediglich im Fall der Simulation mit dem dynamischen Modell mußte dieser Zeitschritt halbiert werden.

Die Rechnungen wurden auf dem Bundeshochleistungsrechner Hitachi SR8000-F1 am Leibniz-Rechenzentrum in München durchgeführt. Für

die Simulation SM10C192NRB mit den $N_x \times N_y \times N_z = 1\,095 \times 750 \times 192 = 157,68 \times 10^6$ Gitterpunkten wurden 16 Knoten, d. h. 128 Prozessoren, verwendet. Bei den anderen Simulationen wurden 6 Knoten, bzw. 4 Knoten im Fall der Simulation SM02C048NRB, eingesetzt. Die Parallelisierung erfolgte hierbei über die acht Prozessoren innerhalb eines Knotens mit Hilfe des Hitachi spezifischen COMPASS Systems und zwischen den Knoten durch die Verwendung von MPI. Dazu wurde das Rechengebiet in der y -Koordinatenrichtung einmal und in der Spannweitenrichtung entsprechend oft geteilt, um auf eine mit der Knotenanzahl übereinstimmende Anzahl von Teilrechengebieten zu kommen. Auf einem Knoten der Hitachi SR8000-F1 wurde eine Rechenleistung von etwa 2 GFlop/s erreicht. Jeder Knoten besitzt 8 GByte Hauptspeicher, wovon ungefähr 6,5 GByte von der Anwendung benutzt werden können. Bei den Berechnungen wurden doppelt genaue Datentypen verwendet, da dies aufgrund der Systemarchitektur zu einer Erhöhung der Rechengeschwindigkeit führt. Im Fall der Simulation SM10C192NRB benötigte die Berechnung eines Zeitschritts etwa 6,4 CPU-Sekunden pro Prozessor, so daß die Strömung nach 1 137,8 CPU-Stunden um eine Problemzeit, c/U_∞ , vorangeschritten war. Der Rechenzeitbedarf des dynamischen Feinstrukturmodells war zirka 3,5-fach höher als der des Smagorinsky-Modells. Auf diesen Umstand wird in Abschnitt 3.6 näher eingegangen.

3.2.4 Bildung der statistischen Werte

Für die statistische Auswertung wurden die momentanen Strömungsgrößen in der als homogen angenommenen Spannweitenrichtung sowie zeitlich über zirka 100 Problemzeiten gemittelt. Dazu wurden je Problemzeit, c/U_∞ , 100 Stichproben genommen.

3.3 Einfluß der spannweitigen Rechengebietserstreckung

Eine wichtige Fragestellung für die Simulation der Tragflügelumströmung ist die notwendige Länge des Rechengebiets in Spannweitenrichtung. Diese sollte so kurz wie möglich gewählt werden, da sonst unnötigerweise Ressourcen verbraucht würden, die an anderer Stelle besser genutzt werden können, z. B. für die Auflösung des Rechengitters im Bereich des Tragflügelprofils. Andererseits darf die spannweitige Rechengebietslänge L_z auch nicht zu kurz gewählt werden, da sonst den im Experiment auftretenden großskaligen Strukturen

der notwendige Raum zur Entfaltung fehlt und die Ergebnisse von Simulation und Experiment stark abweichen.

Die gewählte Reynoldszahl $Re = 20\,000$ hat zwar unter anderem den Vorteil, daß die Auflösungsanforderungen an das Rechengitter wesentlich geringer sind, als dies bei einer Reynoldszahl der Größenordnung $\mathcal{O}(10^5)$ oder gar $\mathcal{O}(10^6)$ der Fall wäre. Dies wird aber mit einem sehr viel größeren Ablösegebiet erkauft, was zur Folge hat, daß größere Strukturen entstehen, die auch mehr Raum in Spannweitenrichtung benötigen. So haben erste Simulationen mit einer spannweitigen Gebietserstreckung von $0,1c$ gezeigt, daß dieser Wert für die gewählte Strömungskonfiguration viel zu klein ist, obwohl in der Literatur (siehe z. B. [MELLEN ET AL., 2002](#)) vergleichbare Werte, allerdings für höhere Reynoldszahlen, angegeben werden. Daß selbst eine Verdopplung der Spannweite auf $0,2c$ im vorliegenden Fall nicht ausreichend ist, wird im folgenden anhand des Vergleichs der Simulationen SM02C048NRB und SM10C192NRB gezeigt werden. Beide Simulationen unterscheiden sich nur in der Spannweite und der Maschenweite in Spannweitenrichtung. Dabei ist die spannweitige Auflösung der Simulation SM02C048NRB, $L_z = 0,2c$, mit einer Maschenweite $\Delta z = 0,0042c$ sogar besser als die der Simulation SM10C192NRB mit $L_z = 1,0c$ und $\Delta z = 0,0052c$.

Bereits in der Topologie des gemittelten Strömungsfeldes sind zwischen beiden Simulationen Unterschiede auszumachen. Aus der Abbildung 3.15, in der für beide Simulationen jeweils die Stromlinien und das gemittelte Druckfeld für einen Bereich um das Tragflügelprofil dargestellt sind, wird ersichtlich, daß im Fall der Simulation mit $L_z = 0,2c$ der Hinterkantenwirbel noch auf der Profiloberfläche aufliegt, während er bei der Simulation SM10C192NRB unmittelbar nach der Profilhinterkante positioniert ist. Im zeitlichen Mittel nimmt also das Ablösegebiet in der Simulation mit der größeren Spannweite auch einen in Richtung der Profiltiefe größeren Bereich ein. Dies läßt sich durch das Auftreten größerer Strukturen erklären, die durch die spannweitige Rechengebietsvergrößerung entstehen können. Die unterschiedliche Gestalt des Ablösegebiets wird aber auch erkennbar durch den im Fall der Simulation mit $L_z = 1,0c$ stärker ausgeprägten kleinen Wirbel zwischen der Profiloberseite und dem Ablösegebiet. Ebenso auffällig sind die Extremwerte des Drucks, die in der Simulation SM02C048NRB einen größeren Bereich abstecken als in der Simulation SM10C192NRB. Besonders deutlich wird dies im Gebiet um den Hinterkantenwirbel.

Die Unterschiede zwischen beiden Simulationen zeigen sich jedoch auch im dynamischen Verhalten. In der Abbildung 3.16 ist für beide Simulationen der zeitliche Verlauf des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes für einen Zeitraum

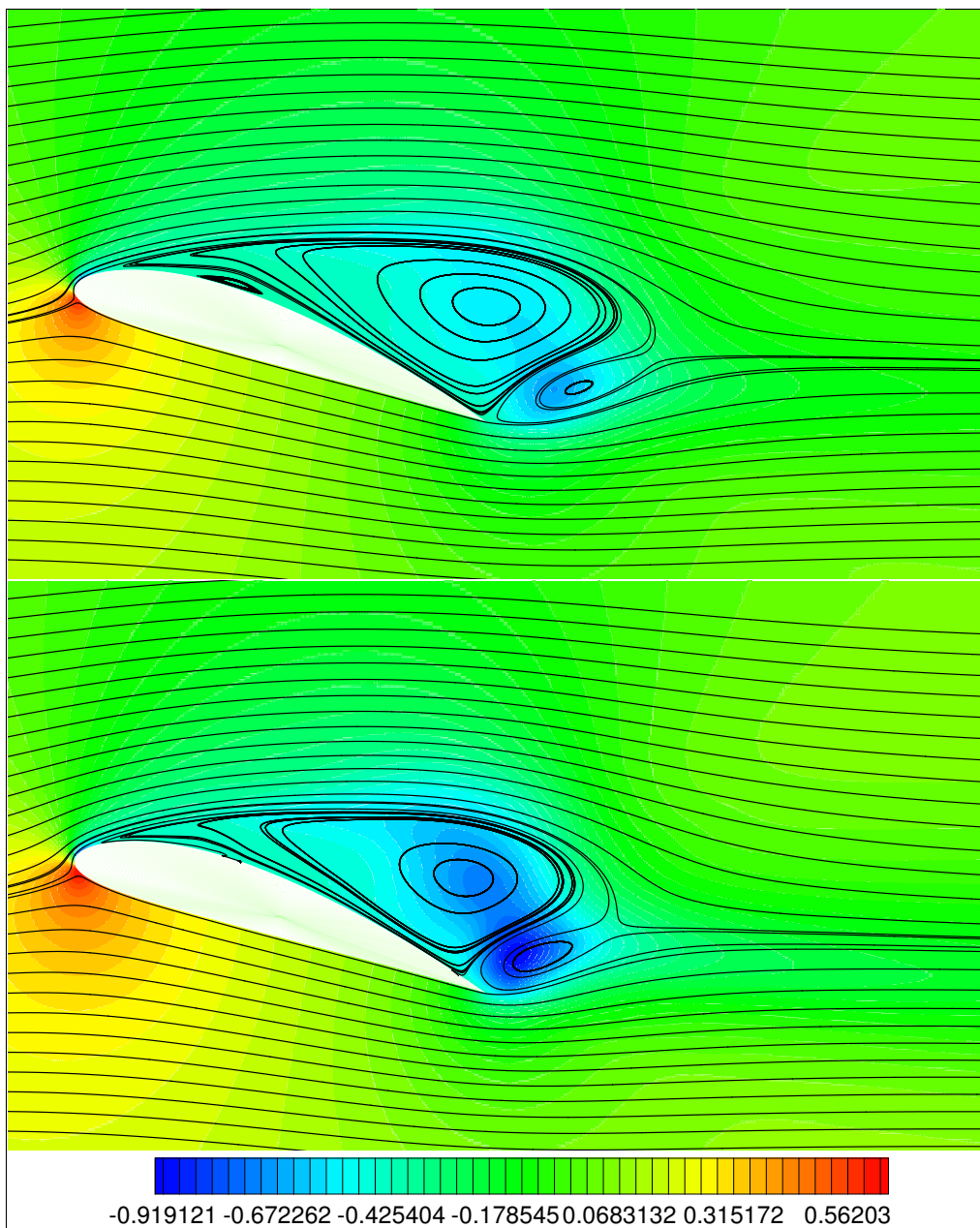


Abbildung 3.15: Gemittelttes Druckfeld und Stromlinien der Simulationen SM10C192NRB (oben) und SM02C048NRB (unten).

von 21 Problemzeiten, c/U_∞ , aufgetragen. Darin fallen zunächst wieder die im Durchschnitt höheren Werte der Simulation SM02C048NRB auf. Eine Frequenzanalyse der zeitlichen Signale bestätigt aber auch das leicht unter-

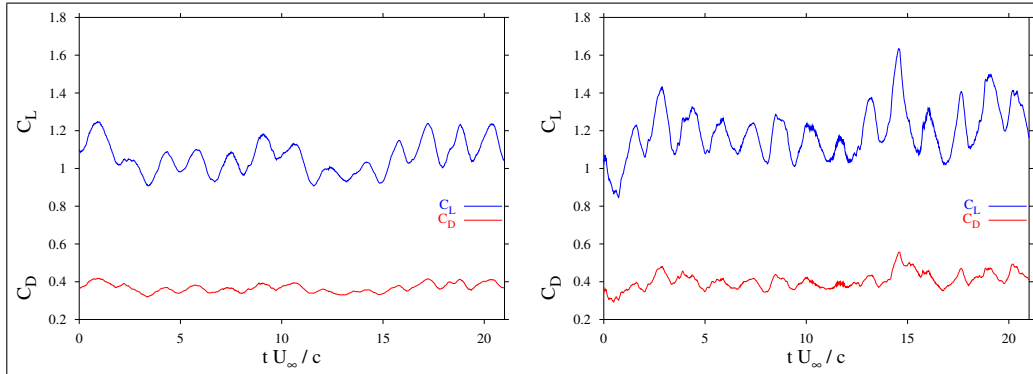


Abbildung 3.16: Zeitlicher Verlauf des Auftriebs- und Widerstandsbeiwertes für die Simulationen SM10C192NRB (links) und SM02C048NRB (rechts).

schiedliche dynamische Verhalten. So beträgt die Strouhalzahl $St = fc/U_\infty$, f bezeichnet die Frequenz, im Fall der Simulation SM02C048NRB $St \approx 0,65$ und für die Simulation SM10C192NRB hat sie den Wert $St \approx 0,61$.

Den besten Aufschluß darüber, ob das Rechengebiet in Spannweitenrichtung ausreichend dimensioniert ist, liefert der Verlauf der Zweipunkt-Korrelationskoeffizientenfunktion

$$R_{v_i v_j}(r_z) = \frac{\langle \bar{v}_i''(x, y, z, t) \bar{v}_j''(x, y, z + r_z, t) \rangle}{\sqrt{\langle \bar{v}_i''^2(x, y, z, t) \rangle} \sqrt{\langle \bar{v}_j''^2(x, y, z + r_z, t) \rangle}}, \quad (3.2)$$

mit r_z nach Abbildung 3.2. An den in der Abbildung 3.17 von 1 bis 4 nummerierten Orten im Strömungsfeld wurde die Zweipunkt-Korrelationskoeffizientenfunktion berechnet. Die Ergebnisse sind in der Abbildung 3.18 dargestellt. Dabei wurde der Abstand von der spannweiten Mitte r_z auf die jeweilige halbe Spannweite $L_z/2$ bezogen. Den Kurvenverläufen kann entnommen werden, daß eine spannweite Rechengebietslänge $L_z = 0,2c$ wesentlich zu klein ist. Dies wird besonders deutlich für den Punkt unmittelbar an der Hinterkante (Ort 2). Die Kurven der Simulation SM10C192NRB zeigen an diesem Ort einen näherungsweise idealen Verlauf, während die Kurven der Simulation SM02C048NRB weiter von der Nulllinie entfernt liegen.

Der Einfluß eines in Spannweitenrichtung zu kleinen Rechengebiets spiegelt sich auch in den statistischen Momenten zweiter Ordnung wider. So kann der Abbildung 3.19 entnommen werden, daß die Simulation SM02C048NRB wesentlich höhere Werte der turbulenten kinetischen Energie k aufweist als die Simulation SM10C192NRB. Besonders auffallend ist dies im Bereich des

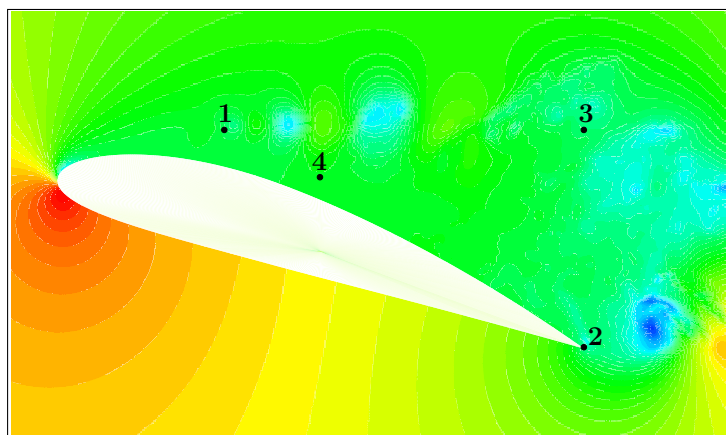


Abbildung 3.17: Ausgewählte Orte im Strömungsfeld.

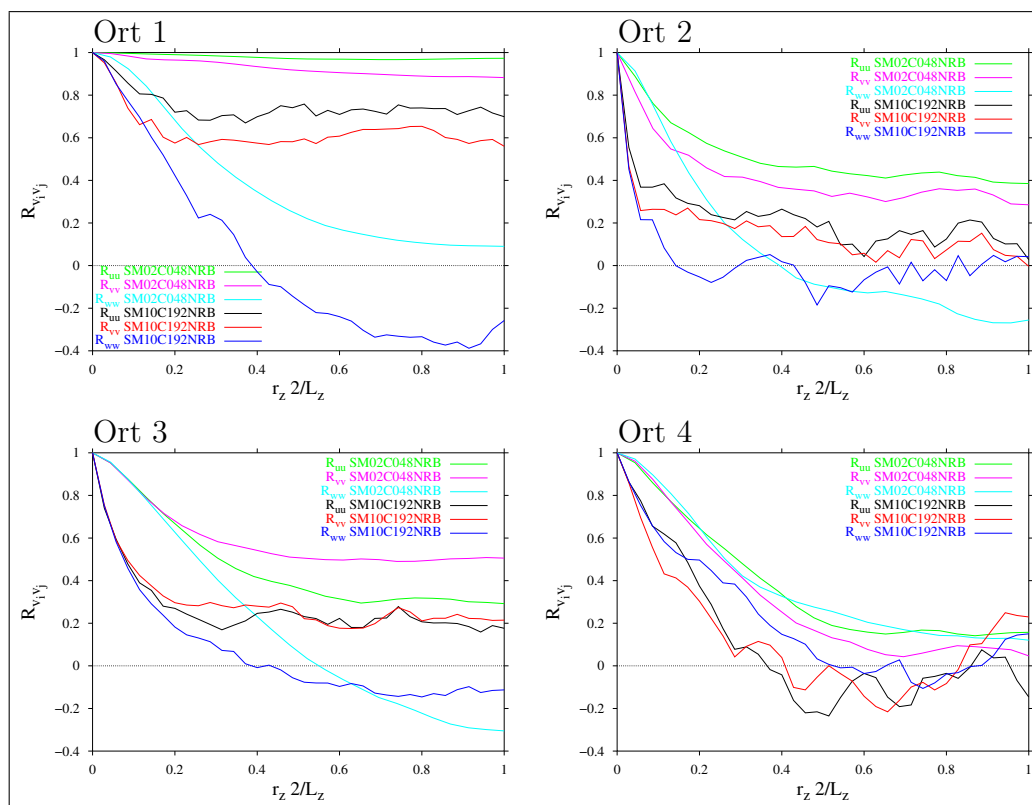


Abbildung 3.18: Zweipunkt-Korrelationskoeffizientenfunktion (3.2) für die in der Abbildung 3.17 bezeichneten Orte im Strömungsfeld.

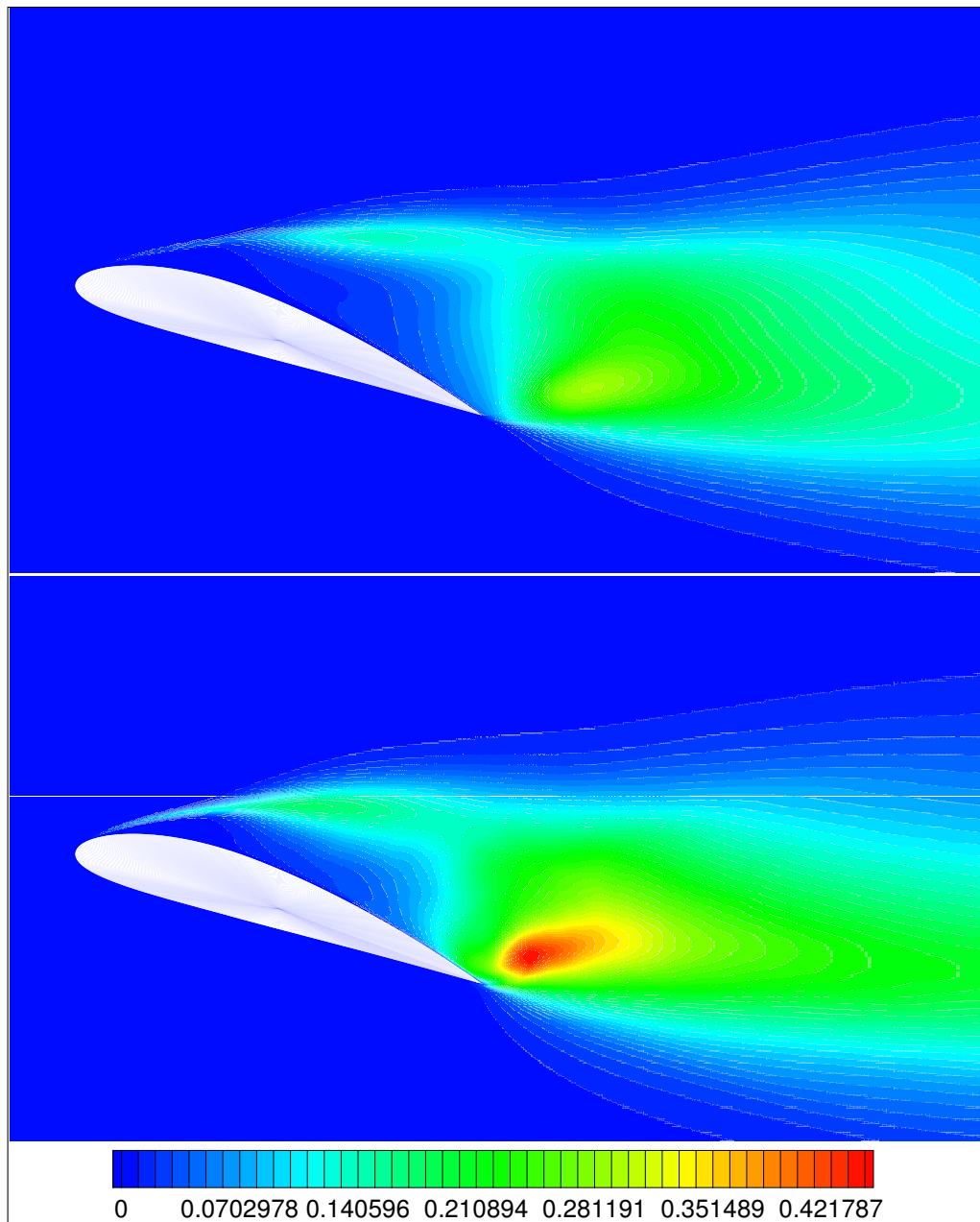


Abbildung 3.19: Turbulente kinetische Energie k der Simulationen SM10C192NRB (oben) und SM02C048NRB (unten).

Hinterkantenwirbels.

Für die zweite Invariante des Geschwindigkeitsgradiententensors gilt (siehe

HUNT ET AL., 1988)

$$Q = \frac{1}{2} (\overline{r_{ij}} \overline{r_{ij}} - \overline{s_{ij}} \overline{s_{ij}}) . \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnen $\overline{r_{ij}}$ den Grobstruktur-Drehgeschwindigkeitstensor

$$\overline{r_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right)$$

und $\overline{s_{ij}}$ den Grobstruktur-Deformationsgeschwindigkeitstensor nach Gleichung (2.57). Durch Isoflächen der Größe Q können Wirbel gut dargestellt werden. Die Abbildungen 3.20 und 3.21 zeigen in der Seitenansicht bzw. Draufsicht für die Simulationen SM10C192NRB und SM02C048NRB den

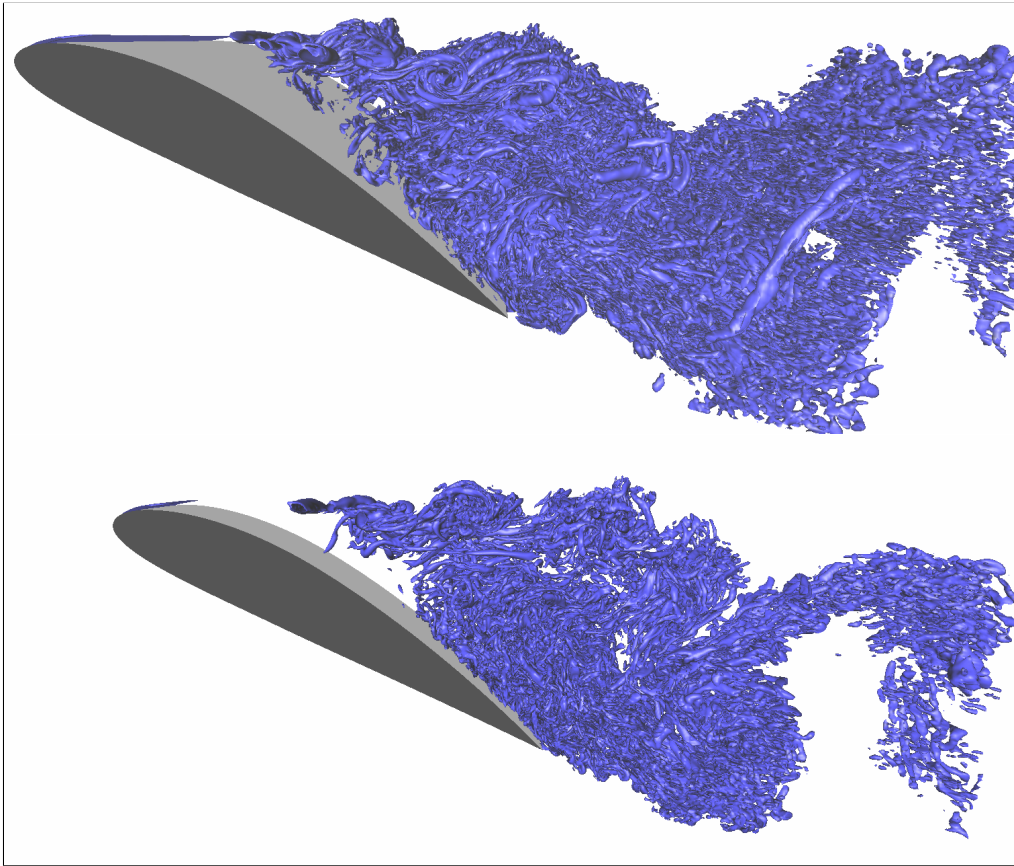


Abbildung 3.20: Seitenansicht der Isoflächen der zweiten Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors $Q = 155$ der Simulationen SM10C192NRB (oben) und SM02C048NRB (unten).

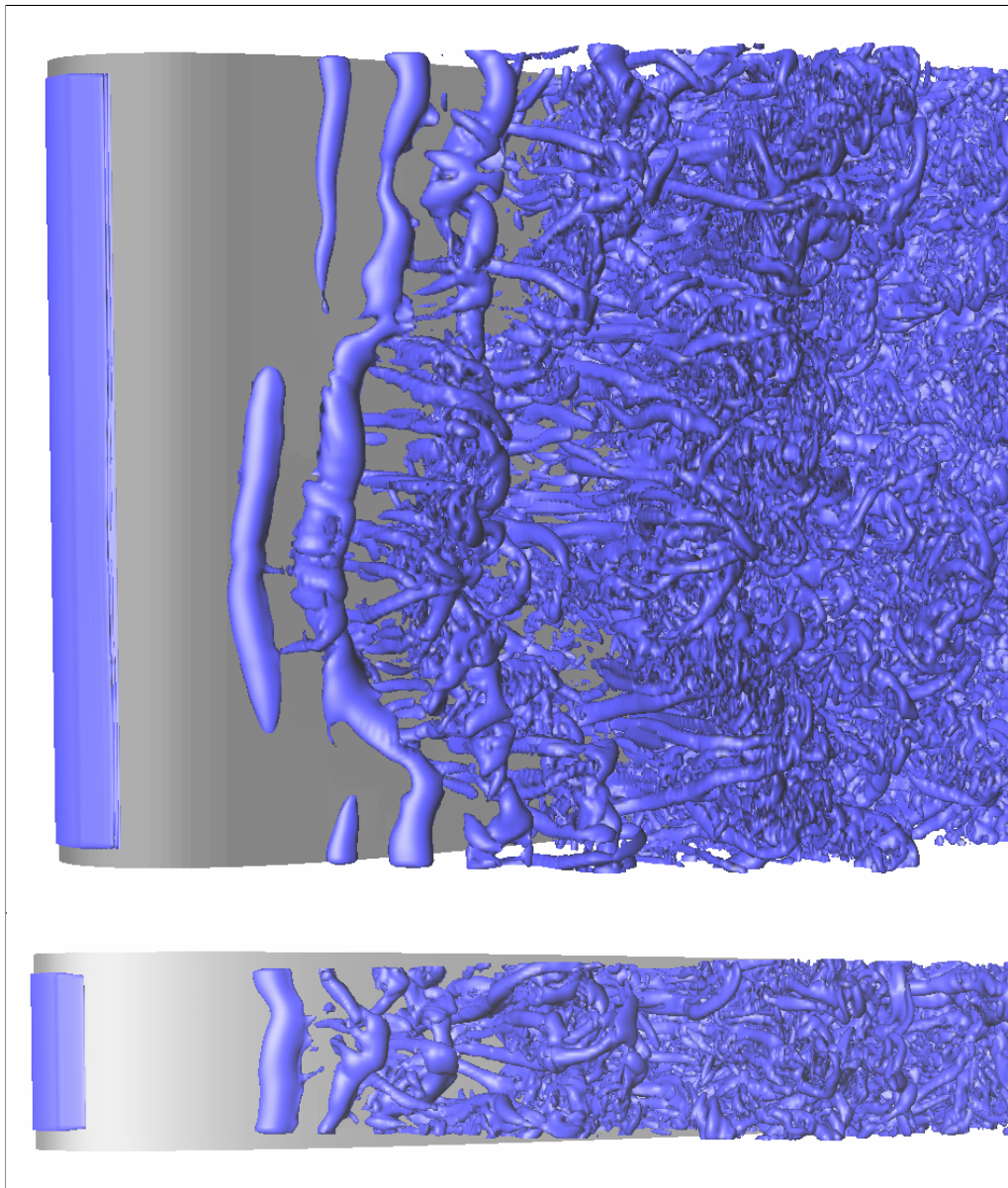


Abbildung 3.21: Draufsicht der Isoflächen der zweiten Invarianten des Geschwindigkeitsgradiententensors $Q = 155$ der Simulationen SM10C192NRB (oben) und SM02C048NRB (unten).

Vergleich der Isoflächen $Q = 155$. Insbesondere die Abbildung 3.21 verdeutlicht sehr gut, daß sich die Strukturen in der Simulation mit $L_z = 0,2c$ nicht vollständig entwickeln können.

3.4 Einfluß der Rechengitterauflösung in Spannweitenrichtung

Um den Einfluß der spannwitigen Rechengitterauflösung auf die Berechnungsergebnisse abschätzen zu können, wurde die Simulation SM10C072NRB durchgeführt, die sich von der Simulation SM10C192NRB nur in der Gitterauflösung in Spannweitenrichtung unterscheidet. Dabei beträgt die spannwitige Maschenweite Δz im Fall der besser aufgelösten Simulation $\Delta z = 0,0052c$, während sie im anderen Fall ungefähr den 2,6-fachen Wert, nämlich $\Delta z = 0,0139c$, besitzt.

Eine Abschätzung der Güte der Rechengitterauflösung liefern die dimensionslosen Maschenweiten Δx_i^+ , mit

$$\Delta x_i^+ = \Delta x_i \frac{\sqrt{\tau_w \varrho}}{\mu} .$$

Die hier interessierende Maschenweite Δz^+ hat im Fall der schlechter aufgelösten Simulation den maximalen Wert $\Delta z^+ = 62,21$. Nach [HÄRTEL ET AL. \(1994\)](#) sollte Δz^+ bei einer turbulenten Wandschicht den Wert 30 nicht überschreiten. Diese Forderung wird bei der Simulation SM10C192NRB im ganzen Rechengbiet erfüllt. Der Maximalwert beträgt bei dieser Simulation $\Delta z^+ = 23,72$. Das Verhältnis der maximalen Werte von Δz^+ entspricht somit für die beiden Simulationen ziemlich genau dem Verhältnis ihrer spannwitigen Maschenweiten Δz . Dieser Umstand läßt sich erklären, wenn man den Ort betrachtet, an dem die Maximalwerte von Δz^+ auftreten. Bei beiden Simulationen ist es der identische Ort im Bereich der Profilnase, wo in der Grenzschicht die größten Übergeschwindigkeiten aufgrund der Nasenumströmung auftreten. Diese sind in den Geschwindigkeitsprofilen der Abbildung [3.22](#) gut zu erkennen. Da die Grenzschicht für die gewählte Strömungskonfiguration bis zum Ablösepunkt laminar bleibt, spielen in dieser spannwitige Effekte keine Rolle, weshalb sich die Maschenweite Δz , zumindest im gewählten Wertintervall, auch nicht auf die Simulationsergebnisse im Bereich der Profilnase auswirkt.

Die Abbildung [3.22](#) zeigt auch, daß sich die gemittelten Strömungsfelder der beiden Simulationen nur bis auf minimale Differenzen im Bereich der freien Scherschicht und der Profilhinterkante unterscheiden. Bei den statistischen Momenten zweiter Ordnung sind die Unterschiede in diesen Bereichen stärker ausgeprägt, wie den Abbildungen [3.23](#), [3.24](#) und [3.25](#) zu entnehmen ist. Markant ist der Unterschied im Verlauf der aufgelösten Reynoldsschen Schubspannung $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ unmittelbar an der Profilhinterkante. In der Abbildung [3.26](#)

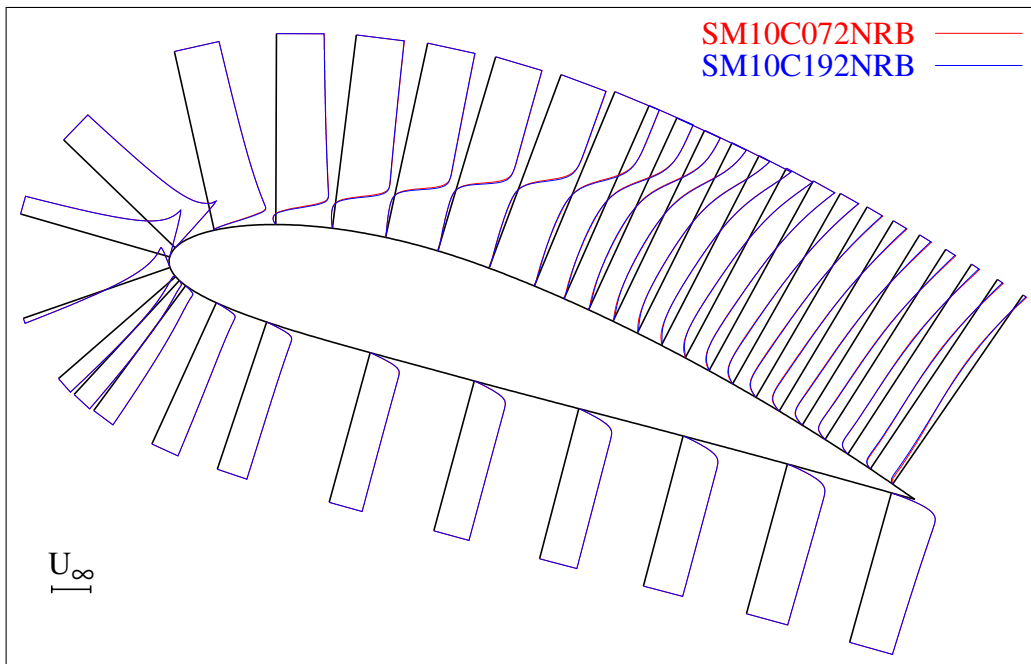


Abbildung 3.22: Vergleich der Profile der tangentialen Geschwindigkeitskomponente \bar{v}_t des gemittelten Strömungsfeldes für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.

ist der Verlauf von $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ für beide Simulationen entlang einer Linie in y -Koordinatenrichtung mit $x = 0,97c$ dargestellt. Im Bereich der Hinterkantenoberseite ist die Strömung turbulent und abgelöst. Dort beeinflusst die Rechengitterauflösung besonders stark die Berechnungsergebnisse. Bei der Simulation SM10C072NRB beträgt der in diesem Bereich auftretende Maximalwert der dimensionslosen Maschenweite $\Delta z^+ = 21,71$, während er im Fall der Simulation SM10C192NRB den Wert $\Delta z^+ = 7,41$ hat. Somit sollte für den Hinterkantenbereich die dimensionslose Maschenweite Δz^+ von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ sein.

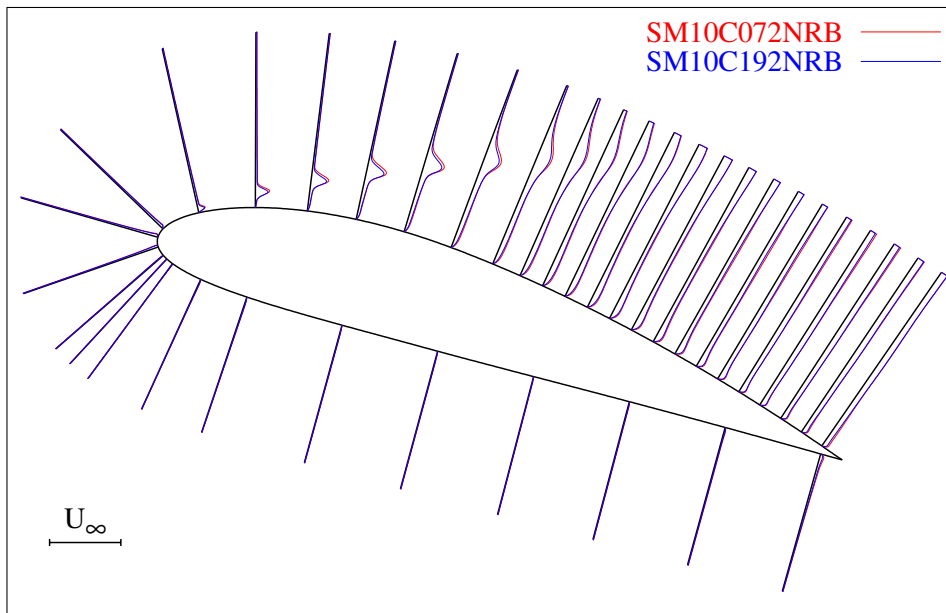


Abbildung 3.23: Vergleich der Profile der tangentialen Komponente der rms-Werte der Geschwindigkeit $\bar{v}_{t,rms}$ für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.

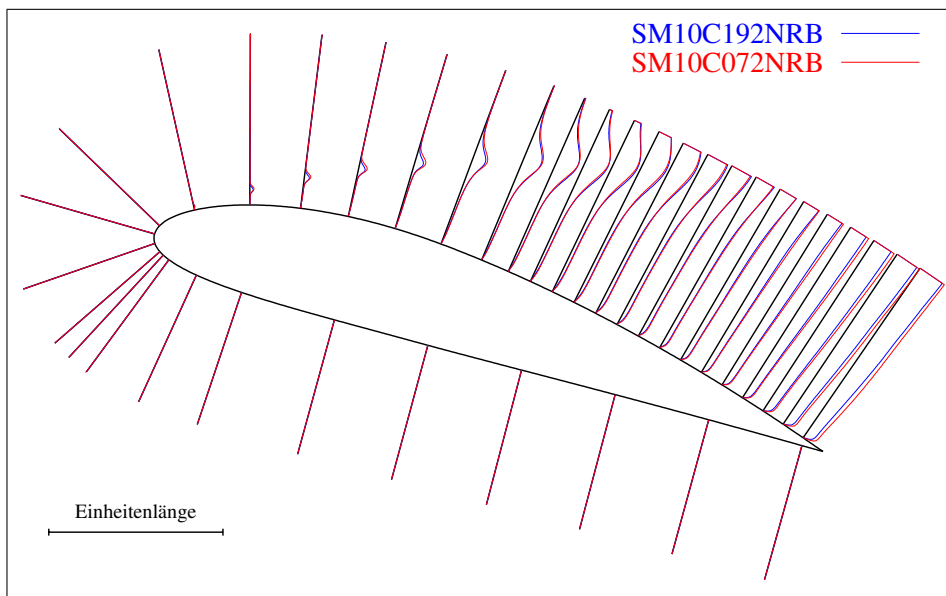


Abbildung 3.24: Vergleich der Profile der turbulenten kinetischen Energie k für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.

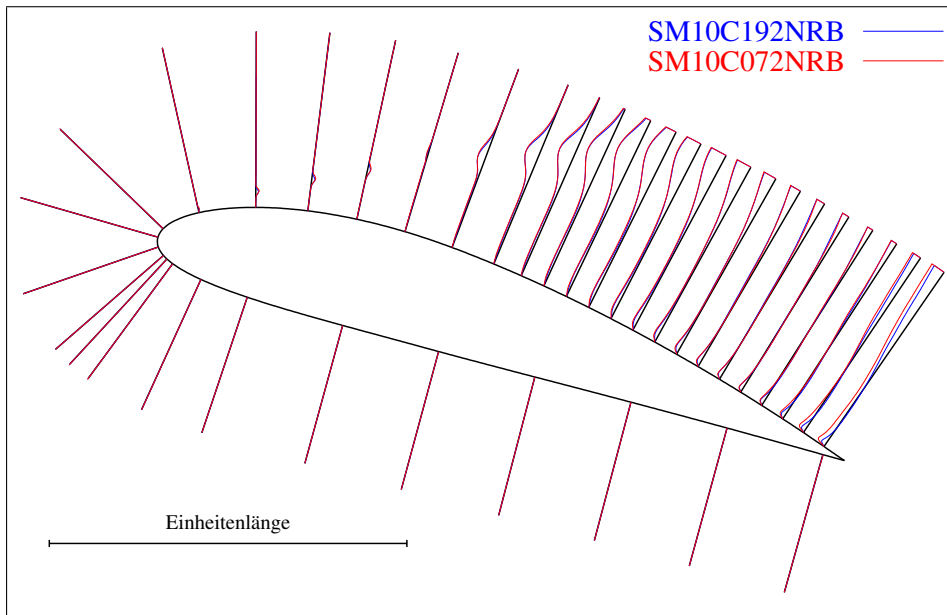


Abbildung 3.25: Vergleich der Profile der aufgelösten Reynoldschen Schubspannung $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.

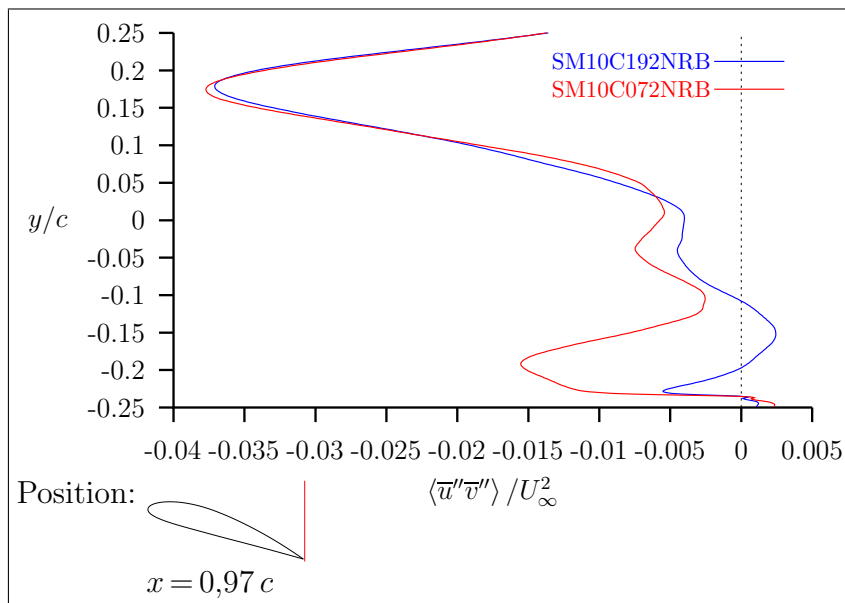


Abbildung 3.26: Vergleich der Werte von $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ an der Position $x = 0,97 c$ für die Simulationen SM10C192NRB und SM10C072NRB.

3.5 Einfluß der Randbedingungen an den Kanalwänden

Für die gewählten Werte der Simulationsparameter, hier ist besonders die Einströmrandbedingung hervorzuheben, sind die Grenzschichten an den beiden Kanalwänden laminar. Dies folgt aus einer Auswertung der statistischen Momente zweiter Ordnung des Strömungsfeldes im Bereich der Kanalwände. Die dimensionslosen Maschenweiten der Simulation SM10C072NRB sind für einige Stellen an den Kanalwänden in der Tabelle 3.3 angegeben. Bei der

Tabelle 3.3: Dimensionslose Maschenweiten an den Kanalwänden.

obere Kanalwand								
x/c	-1,96	-1,0	0,0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0
Δx^+	57,6	31,3	1,5	4,5	2,0	14,0	25,7	37,0
Δy^+	28,5	28,8	30,0	30,5	30,4	29,5	29,1	29,2
Δz^+	7,3	7,4	7,7	7,8	7,8	7,6	7,5	7,5
untere Kanalwand								
x/c	-1,96	-1,0	0,0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0
Δx^+	56,9	30,4	1,4	4,2	1,9	13,8	25,8	37,5
Δy^+	28,8	28,7	28,9	29,3	29,7	29,9	29,9	30,3
Δz^+	7,2	7,2	7,2	7,4	7,5	7,5	7,5	7,6

in Spannweitenrichtung besser aufgelösten Simulation differieren diese Werte nur unwesentlich. Der Verlauf der gemittelten Wandschubspannung $\langle \tau_w \rangle$ an den beiden Kanalwänden ist in der Abbildung 3.27 wiedergegeben. Die Kurven spiegeln den Düseneffekt wider, den der angestellte Tragflügel zusammen mit den Kanalwänden hervorruft.

Um eine turbulente Wandschicht mit ähnlichem Verlauf der Wandschubspannung auflösen zu können, müßte die wandnormale Maschenweite ungefähr eine Größenordnung kleiner sein als sie in den durchgeführten Simulationen gewählt wurde. Dafür wären an jeder der beiden Kanalwände etwa 60 zusätzliche Gitterpunkte in y -Koordinatenrichtung erforderlich. Eine zur Spannweitenrichtung senkrechte Rechengitterebene hätte dann 131 400 Gitterpunkte mehr und für die in spannwitiger Koordinatenrichtung am besten aufgelöste Simulation SM10C192NRB würde sich die Gesamtgitterpunktzahl um über 25×10^6 Gitterpunkte erhöhen. Dies hätte einen Mehrbedarf an Computerressourcen von zirka 16 % zur Folge. Somit bestünde ein beachtli-

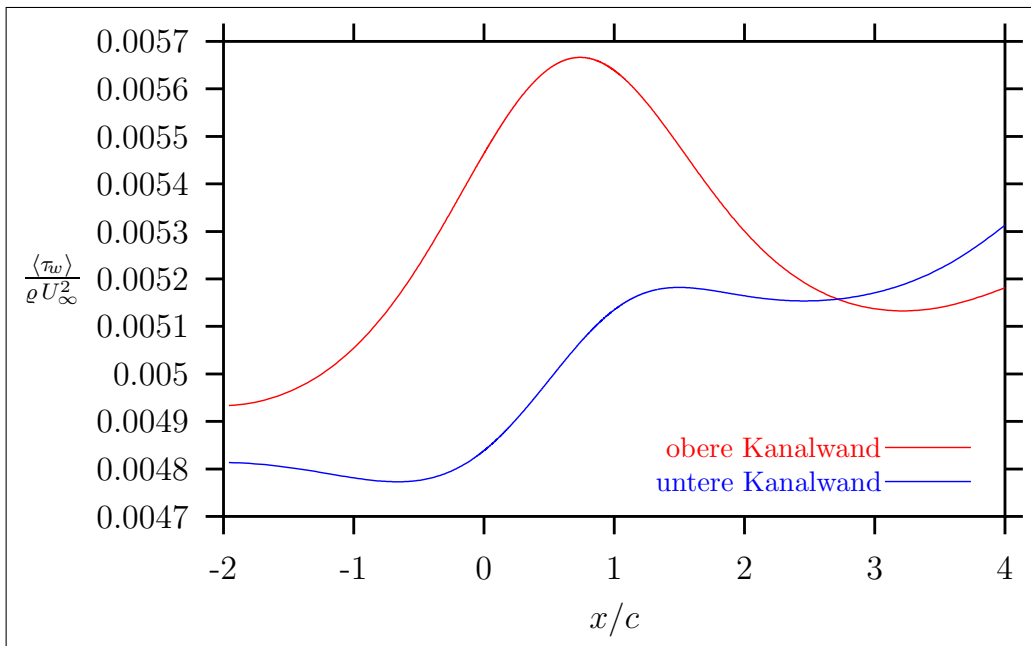


Abbildung 3.27: Verlauf der gemittelten Wandschubspannung $\langle \tau_w \rangle$ an der oberen und unteren Kanalwand.

ches Einsparpotential, wenn an den Kanalwänden Gleiten statt Haften des Fluids angesetzt werden könnte.

Um die Auswirkungen zu untersuchen, die die Verwendung von Gleit- anstelle von Hafttrandbedingungen an den Kanalwänden auf das Strömungsfeld im Bereich des Tragflügelprofils hat, wurde die Simulation SM10C072SRB durchgeführt. Diese unterscheidet sich von der Simulation SM10C072NRB nur in der Wahl der Randbedingung an den Kanalwänden.

Ein Vergleich der gemittelten Strömungsfelder der beiden Simulationen zeigt nur minimalste Unterschiede. Am deutlichsten sind diese im Bereich der Profilhinterkante ausgebildet. Wesentlich größere Unterschiede zeigen die Abbildungen 3.28 und 3.29. In diesen ist der Vergleich der Profile von $\bar{v}_{t,rms}$ bzw. der turbulenten kinetischen Energie k dargestellt. Auch in den Werten der aufgelösten Reynoldsschen Schubspannung $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ sind größere Unterschiede erkennbar, wie die Abbildung 3.30 für einen linienförmigen Bereich unmittelbar an der Profilhinterkante zeigt. Es scheint so, als ob der Teil der Strömungsenergie, der bei der Berechnung mit Hafttrandbedingung an den Kanalwänden durch die Reibung verloren geht, bei der Simulation mit Gleitrandbedingung in die Turbulenzenergie fließt.

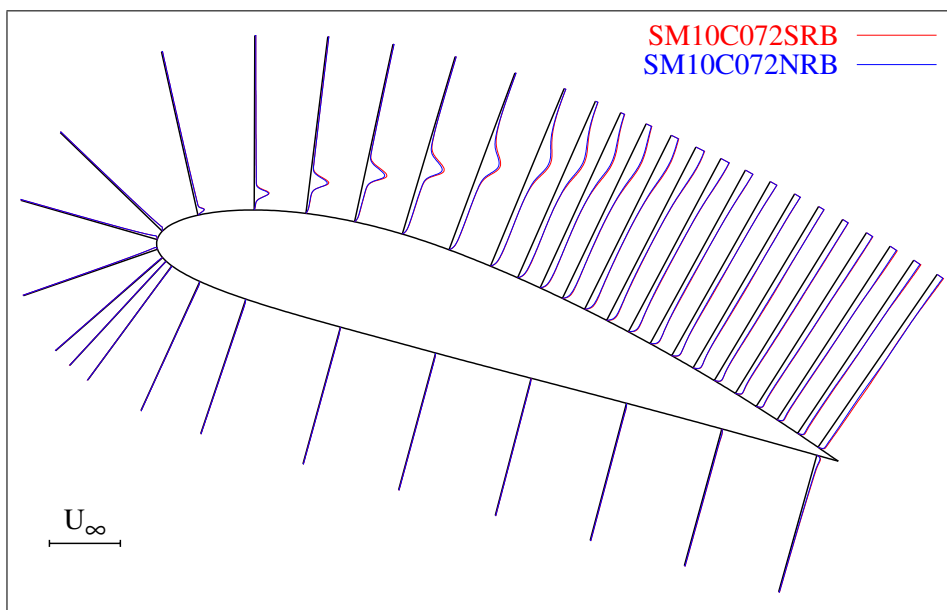


Abbildung 3.28: Vergleich der Profile der tangentialen Komponente der rms-Werte der Geschwindigkeit $\bar{v}_{t,rms}$ für die Simulationen SM10C072NRB und SM10C072SRB.

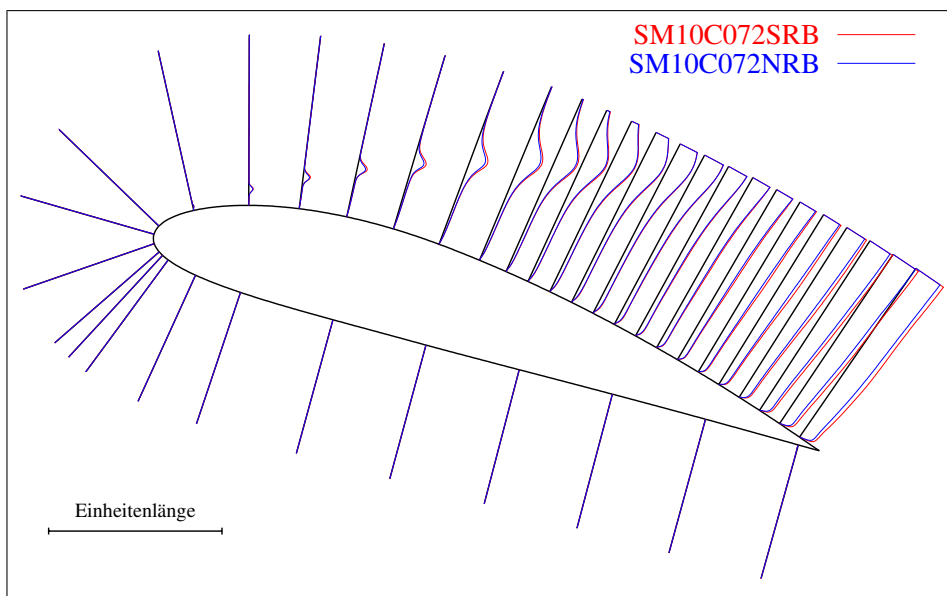


Abbildung 3.29: Vergleich der Profile der turbulenten kinetischen Energie k für die Simulationen SM10C072NRB und SM10C072SRB.

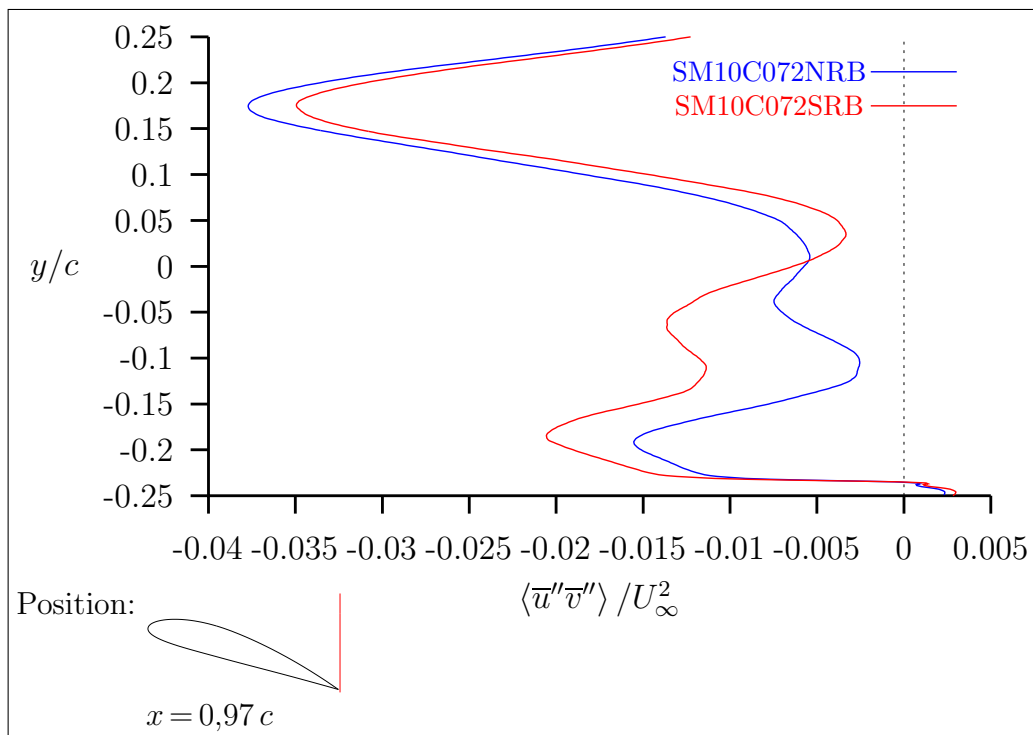


Abbildung 3.30: Vergleich der Werte von $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ an der Position $x = 0,97 c$ für die Simulationen SM10C072NRB und SM10C072SRB.

3.6 Einfluß des Feinstrukturmodells

Bei der Reynoldszahl $Re = 20\,000$ hat das Feinstrukturmodell nur einen geringen Einfluß auf die Berechnungsergebnisse. Jedoch ist eine Simulation ohne Feinstrukturmodell nicht möglich. Dies hat ein Versuch gezeigt, bei dem das Feinstrukturmodell abgeschaltet wurde. Die Simulation ist daraufhin innerhalb einer Problemzeit, c/U_∞ , instabil geworden.

Trotz des geringen Einflusses des Feinstrukturmodells wurde für die gewählte Strömungskonfiguration ein Vergleich zwischen zwei Modellen durchgeführt. Die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB unterscheiden sich nur in der Wahl des Feinstrukturmodells. Bei der Simulation SM10C072SRB wurde das Smagorinsky-Modell, siehe Abschnitt 2.2.4.1, verwendet. Dieses Modell wird noch immer sehr oft eingesetzt, obwohl es die bekannten Schwächen hat, in laminaren Bereichen der Strömung nicht zu null zu werden und in Wandnähe zu hohe Feinstrukturspannungen zu simulieren. Der zuletzt genannte Nachteil wird meist durch die Verwendung einer Dämpfungsfunktion kompensiert. Diese ist aber im verwendeten Strömungslöser MGLET in Verbindung mit der Methode zur Behandlung beliebig geformter Körper noch nicht implementiert. Da für die berechnete Strömungskonfiguration große Bereiche des Strömungsfeldes laminar sind, wurden keine Anstrengungen unternommen, die Dämpfungsfunktion des Smagorinsky-Modells für eine Anwendung in Verbindung mit der Methode zur Behandlung beliebig geformter Körper anzupassen, sondern es wurde gleich die Verwendung des dynamischen Modells, siehe Abschnitt 2.2.4.2, ins Auge gefaßt. Beim dynamischen Modell wird der Modellkoeffizient nicht a priori, sondern während der Simulation als Funktion des Ortes aus dem Energieinhalt der kleinsten, gerade noch aufgelösten Strukturen bestimmt, so daß diesem Modell die Schwächen des Smagorinsky-Modells nicht innewohnen.

Um jedoch das dynamische Modell verwenden zu können, mußten einige Anpassungen und Erweiterungen im Strömungslöser MGLET vorgenommen werden. Im Programm MGLET wird zur Bestimmung des Modellkoeffizienten die Testfilterung in xz -Ebenen des Rechengitters durchgeführt, wobei in der x - und z -Koordinatenrichtung jeweils immer zwei benachbarte Maschen zusammengefaßt werden, so daß vier Maschen des regulären Rechengitters eine Masche des Gitters der Testfilterung bilden. Für eine zusätzliche Filterung in x -Koordinatenrichtung müßte aber im Fall der gewählten Strömungskonfiguration der Algorithmus zur Behandlung beliebig geformter Körper auch für das Rechengitter der Testfilterung implementiert werden. Da dies einen großen Arbeitsaufwand erfordert, wurde die Testfilterung auf die z -Koordinaten

tenrichtung beschränkt. Eine anschließend durchgeführte Simulation wurde allerdings instabil. Der Grund hierfür war, daß die zur Stabilisierung des dynamischen Modells notwendige Mittelung über die homogene z -Koordinatenrichtung, siehe Abschnitt 2.2.4.2, noch nicht parallelisiert war. Dadurch wurde über eine zu geringe Gitterpunktanzahl gemittelt. Nach der Parallelisierung konnten stabile Simulationen realisiert werden. Der Rechenzeitbedarf der Simulation mit dem dynamischen Feinstrukturmodell war jedoch ungefähr 3,5-fach höher als der der Simulation mit dem Smagorinsky-Modell. Dieser Mehrbedarf entstand, da die Zeitschrittweite aus Stabilitätsgründen halbiert werden mußte und gleichzeitig die Anzahl der Iterationen des Gleichungslösers anstieg. Die Verwendung des im Programm implementierten Mehrgitter-Verfahrens führte zu keiner Reduzierung der notwendigen Anzahl von Iterationen und erhöhte nur den Arbeitsspeicherbedarf, weshalb auf den weiteren Einsatz verzichtet wurde.

Wie erwartet, unterscheiden sich die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB bereits in den Geschwindigkeitsprofilen des gemittelten Strömungsfeldes, siehe Abbildung 3.31. Da das Smagorinsky-Modell in Wandnähe

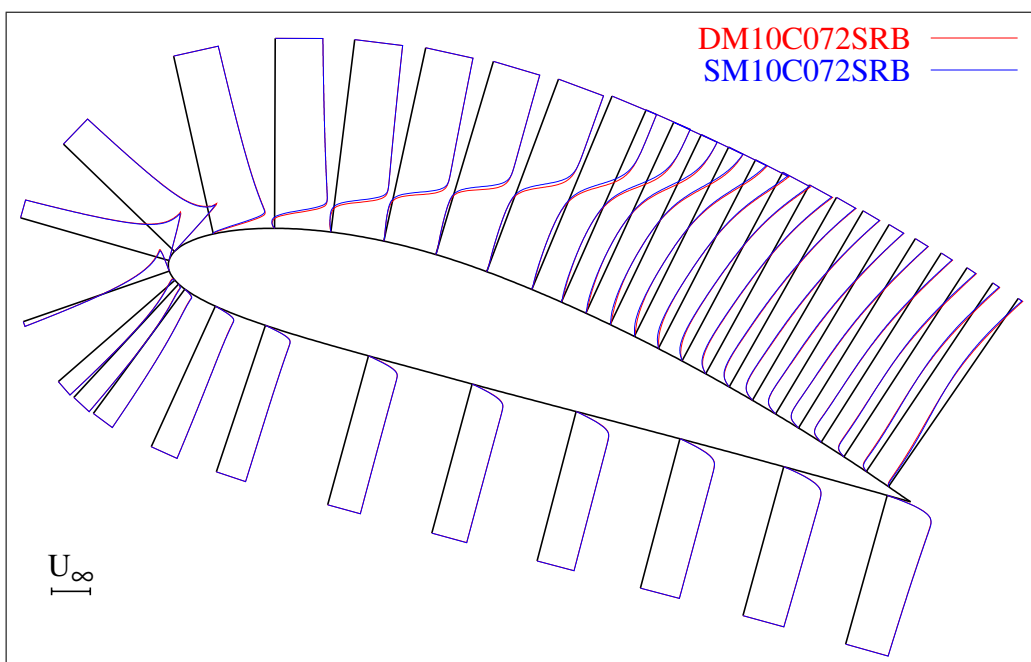


Abbildung 3.31: Vergleich der Profile der tangentialen Geschwindigkeitskomponente \bar{v}_t des gemittelten Strömungsfeldes für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.

zu hohe Feinstrukturspannungen simuliert und somit der Wandscherschicht zuviel Strömungsenergie entzieht, sind die Geschwindigkeitsprofile der Simulation SM10C072SRB in diesem Bereich weniger stark ausgeprägt als die der Simulation mit dem dynamischen Modell. Dies ist besonders auffallend im Gebiet um die Profilnase. Die Abbildung 3.32 zeigt exemplarisch für einen Ort an der Profilnase die Geschwindigkeitsprofile beider Simulationen. Als

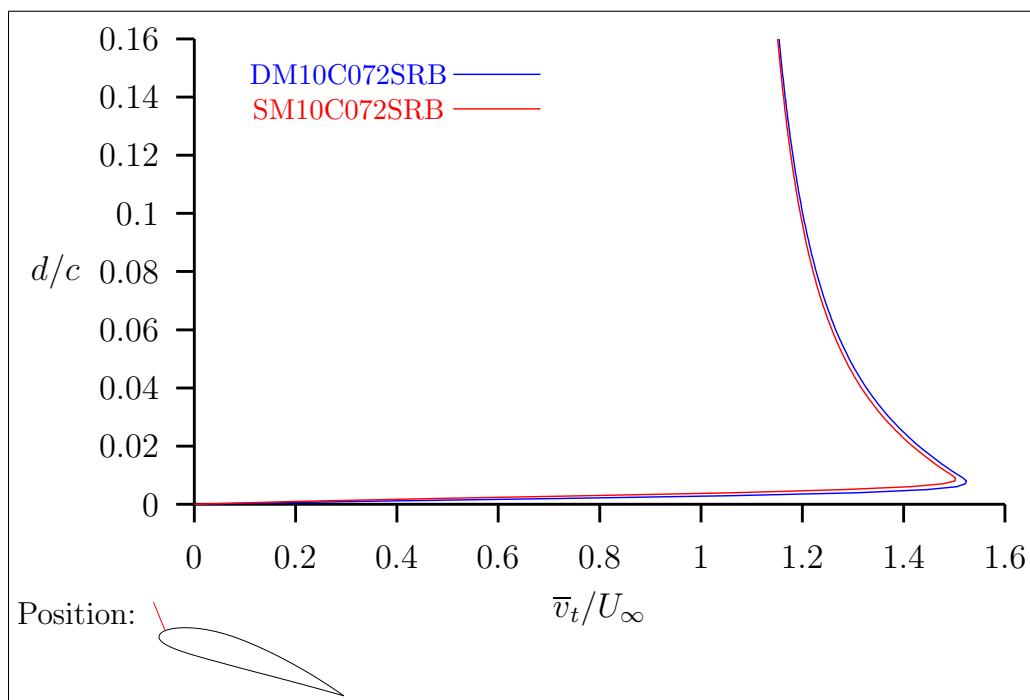


Abbildung 3.32: Vergleich der Profile der tangentialen Geschwindigkeitskomponente \bar{v}_t des gemittelten Strömungsfeldes an einer Position im Bereich der Profilnase für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.

Folge des höheren Energieinhalts der Wandscherschicht löst in der Simulation DM10C072SRB die Grenzschicht auf der Profiloberseite etwas später ab, wodurch sich auch das Ablösegebiet räumlich verzögert entwickelt. Dies ist in der Abbildung 3.31 an den zur Profiloberseite näher liegenden Wendepunkten der Geschwindigkeitsprofile der Simulation DM10C072SRB zu erkennen. Die Abbildungen 3.33 und 3.34 zeigen die Unterschiede in den Werten der statistischen Momente zweiter Ordnung. Unmittelbar an der Profilhinterkante, wo die Strömung turbulent ist, scheint der Einfluß des Feinstrukturmodells geringer zu sein als der der Rechengitterauflösung in Spannweitenrichtung, wie ein Vergleich der Abbildungen 3.35 und 3.26 vermuten läßt.

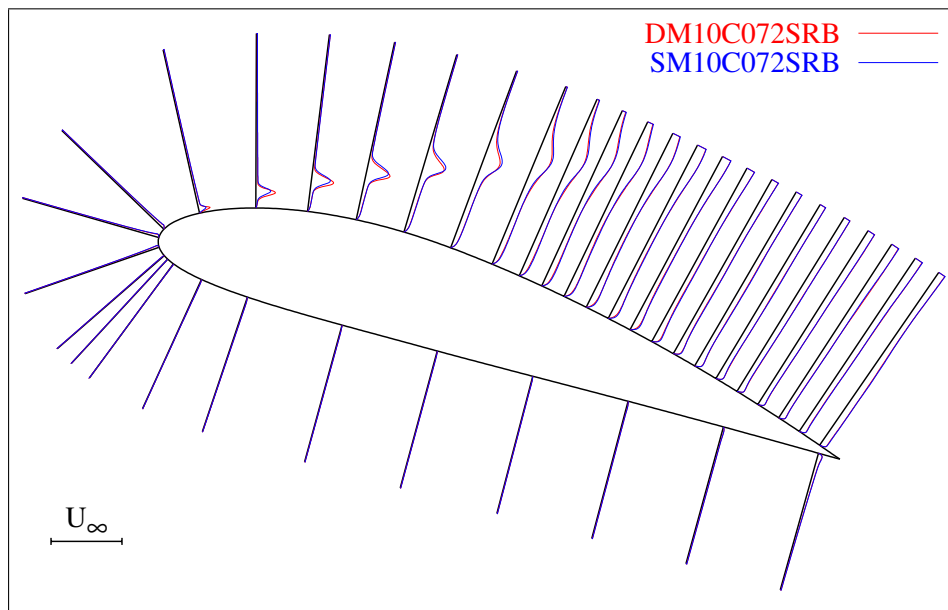


Abbildung 3.33: Vergleich der Profile der tangentialen Komponente der rms-Werte der Geschwindigkeit $\bar{v}_{t,rms}$ für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.

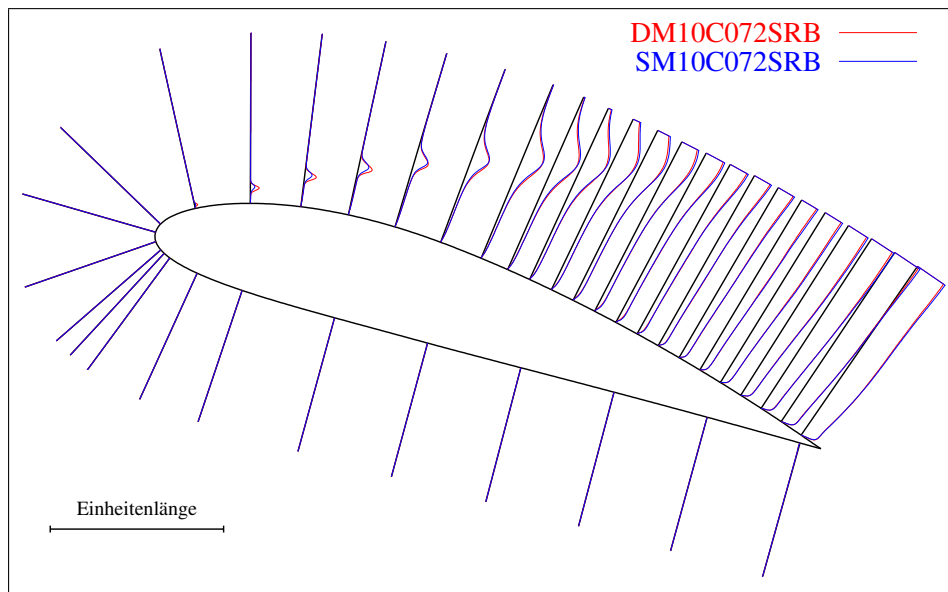


Abbildung 3.34: Vergleich der Profile der turbulenten kinetischen Energie k für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.

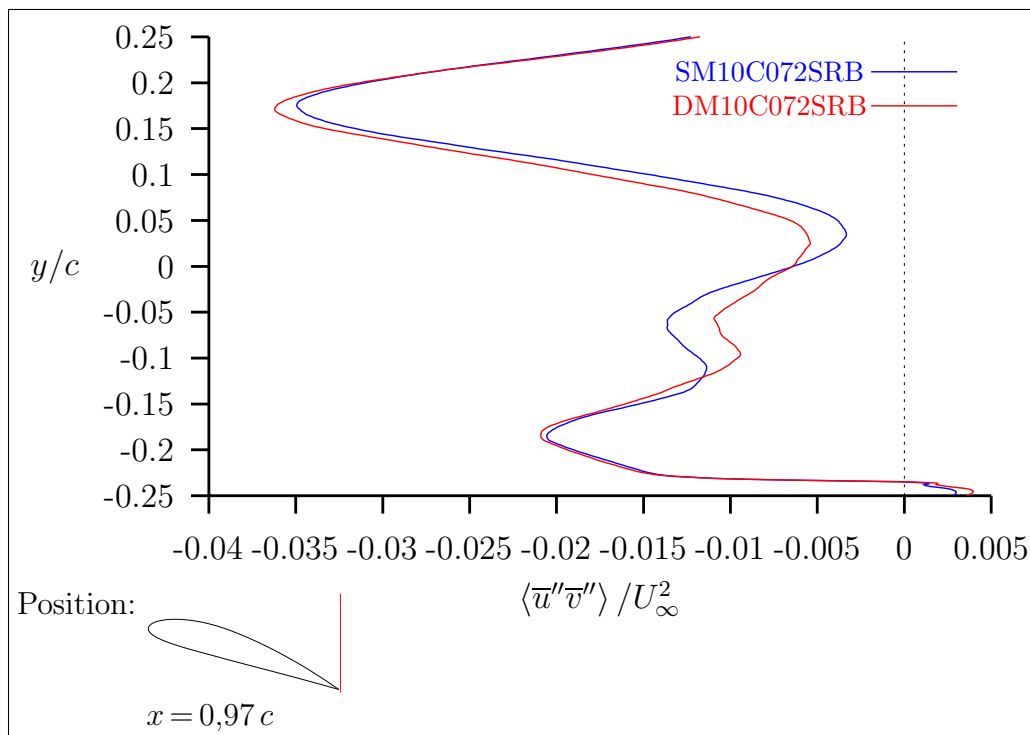


Abbildung 3.35: Vergleich der Werte von $\langle \bar{u}'' \bar{v}'' \rangle$ an der Position $x = 0,97 c$ für die Simulationen SM10C072SRB und DM10C072SRB.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Es wurden Grobstruktursimulationen für die abgelöste Strömung um ein Tragflügelprofil vom Typ NACA 4415, das zwischen zwei parallelen, horizontalen Platten angeordnet ist, durchgeführt. Dazu wurde ein Finite-Volumen-Verfahren für versetzt angeordnete Variablen auf kartesischen Gittern verwendet, bei dem die von der Körperoberfläche durchschnittenen Maschen ausgeblockt und die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten durch Interpolation oder Extrapolation in den drei Koordinatenrichtungen so gesetzt werden, daß auf dem Körperperrand die Haft- und Undurchlässigkeitsbedingungen erfüllt sind. Diese numerische Methode hat gegenüber den Verfahren für körperangepaßte Koordinatensysteme die Vorteile, daß die Generierung der Rechengitter wesentlich leichter und der Arbeitsspeicher- sowie Rechenzeitbedarf pro Gitterpunkt viel geringer ist.

Die simulierte Strömungskonfiguration orientiert sich an der des Prinzipexperiments COSTWING. Da im Zeitraum der Entstehung dieser Arbeit nur experimentelle Voruntersuchungen durchgeführt und deshalb keine Vergleiche zwischen Ergebnissen des Experiments und der numerischen Simulation angestellt werden konnten, wurden Untersuchungen vorgenommen, die einem späteren Vergleich dienen sollen. Bei diesen Untersuchungen betrug der Anstellwinkel des Tragflügelprofils $\alpha = 18^\circ$ und die Reynoldszahl, gebildet mit der ungestörten Anströmgeschwindigkeit, der Profiltiefe und der kinematischen Viskosität, hatte den Wert $Re = 20\,000$. Diese vom Standpunkt der aerodynamischen Anwendung viel zu kleine Reynoldszahl wurde gewählt, um die Untersuchungen schneller durchführen zu können. Die für den Vergleich zwischen Ergebnissen des Experiments und der numerischen Simulation angestrebte Reynoldszahl ist von der Größenordnung $\mathcal{O}(10^5)$.

Ein wesentlicher Punkt der angestellten Untersuchungen war, die minimale spannweite Rechengebietslänge abzuschätzen, so daß noch mit dem Experiment vergleichbare Ergebnisse erhalten werden können. Hier hat sich gezeigt, daß eine Profiltiefe ausreichend sein sollte. Bei der im Vergleichsfall höheren Reynoldszahl werden das Ablösegebiet und somit auch die größten auftretenden Strukturen kleiner sein, so daß das Rechengebiet in Spannweitenrichtung sogar etwas kleiner als eine Profiltiefe gewählt werden können sollte.

Die durch eine mögliche Verkürzung der spannwitigen Rechengebietslänge eingesparten Gitterpunkte sollten jedoch in eine Verfeinerung des Rechengitters im Bereich des Tragflügelprofils investiert werden. Auf jeden Fall muß das Rechengitter bei der höheren Reynoldszahl im Bereich der Profilnase und der Profilhinterkante verfeinert werden, da dies neben der freien Scherschicht die kritischen Strömungsbereiche sind. Die Untersuchungen haben ebenfalls gezeigt, daß die Berechnungsergebnisse besonders im Gebiet um die Profilhinterkante stark von der Rechengitterauflösung in Spannweitenrichtung abhängen. Dort sollte eine dimensionslose spannwitige Maschenweite von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ angestrebt werden.

Einen kritischen Punkt stellt auch die Behandlung der Kanalwände dar. Die Auflösung einer turbulenten Grenzschicht an den Kanalwänden erfordert unvermeidbar hohe zusätzliche Computerressourcen. Andererseits hat der Vergleich zweier Simulationen mit Haft- bzw. Gleitrandbedingung an den Kanalwänden unterschiedliche Ergebnisse im Bereich des Tragflügelprofils aufgezeigt. Dabei scheint es so, als ob der Teil der Strömungsenergie, der bei der Berechnung mit Haftrandbedingung an den Kanalwänden durch die Reibung verloren geht, bei der Simulation mit Gleitrandbedingung in die Turbulenzenergie fließt. Deshalb sollte versucht werden, den Effekt, den die Grenzschichten an den Kanalwänden hervorrufen, zu erfassen. Hier könnte der Einsatz eines Wandmodells zur Lösung des Problems beitragen.

Aufgrund der Vorteile, die das dynamische Feinstrukturmodell gegenüber dem Smagorinsky-Modell besitzt, sollte für die weiteren Simulationen das dynamische Modell bevorzugt werden. Vor dessen Einsatz sollte jedoch sein Rechenzeitbedarf reduziert werden. Hier könnte die Verwendung des Gauß-Seidel-Algorithmus zu Verbesserungen führen. Es sollte aber nicht zu Gunsten des Feinstrukturmodells an der Rechengitterauflösung gespart werden, da diese, wie das Literaturstudium gezeigt hat, einen größeren Einfluß auf die Berechnungsergebnisse hat als das verwendete Feinstrukturmodell.

Aus den Ergebnissen der Simulationen bei der Reynoldszahl $Re = 20\,000$ kann abschließend das Fazit gezogen werden, daß eine Simulation der untersuchten Strömungskonfiguration bei einer Reynoldszahl der Größenordnung $\mathcal{O}(10^5)$ mit dem gewählten numerischen Verfahren durchführbar sein sollte. Da sich jedoch der Verfasser einem anderen beruflichen Betätigungsfeld zugewendet hat, bleibt dies seinen Nachfolgern überlassen.

Diese Arbeit konnte zwar nur Vorarbeiten auf dem Weg zur numerischen Behandlung des Prinzipexperiments COSTWING leisten, doch bekanntlich fängt selbst der längste Weg mit einem ersten Schritt an.

A. Abriß der Tensorrechnung

An dieser Stelle werden jene Beziehungen des Tensorkalküls angegeben, die in der vorliegenden Arbeit benötigt werden. Eine ausführlichere Darstellung findet der Leser z. B. in [BORISENKO und TARAPOV \(1979\)](#) sowie [KÄSTNER \(1960\)](#).

A.1 Schreibweisen

A.1.1 Symbolische (komponentenfreie) Schreibweise

Sämtliche Größen der Physik und ihre gegenseitigen Beziehungen gelten unabhängig von der Wahl eines bestimmten Koordinatensystems. Dies kommt in der sogenannten symbolischen (komponentenfreien) Schreibweise besonders gut zum Ausdruck. Die Größen in einer physikalischen Beziehung müssen jedoch von der gleichen Art sein. Man unterscheidet Skalare, Vektoren und Tensoren, wobei Skalare auch als Tensoren nullter Stufe und Vektoren als Tensoren erster Stufe bezeichnet werden. Es ist somit notwendig, in der Darstellung zwischen den verschiedenen Arten physikalischer Größen unterscheiden zu können. In dieser Arbeit werden die Arten anhand der Anzahl der Unterstreichungen unterschieden, wobei die Anzahl der Stufe des Tensors entspricht. Dies bedeutet, daß Skalare nicht, Vektoren einfach und, im allgemeinen Fall, Tensoren n-ter Stufe n-fach unterstrichen werden.

Oft werden Tensoren höherer als nullter Stufe im Druck auch durch Fettdruck bezeichnet. Die hier gewählte Notation durch Unterstreichung hat jedoch den Vorteil, daß sie die Stufe des Tensors erkennen läßt.

Die symbolische Schreibweise wird in der vorliegenden Arbeit überwiegend dazu benutzt, um von der Indexschreibweise eines Koordinatensystems in die eines anderen zu wechseln.

A.1.2 Indexschreibweise (Komponentendarstellung)

In der Indexschreibweise werden die physikalischen Größen durch indizierte Symbole dargestellt, wobei die Anzahl der Indizes ihrer Stufe entspricht. Da sich die Beschreibungen in dieser Arbeit auf den dreidimensionalen Raum beschränken, kann jeder Index eines Symbols unabhängig von möglichen anderen Indizes die Werte 1, 2, oder 3 annehmen.

Die Indexschreibweise setzt jedoch die Wahl eines bestimmten Koordinatensystems voraus, damit die physikalischen Größen durch die Angabe ihrer Komponenten (indizierte Größen) hinsichtlich des zu dem Koordinatensystem gehörenden Basissystems festgelegt werden können. Dabei unterscheiden sich jedoch die Darstellungen in den verschiedenen Koordinatensystemen, so daß sich beim Wechsel des Koordinatensystems auch die Darstellung ändert.

Seine volle Leistungsfähigkeit entfaltet der Tensorkalkül aber erst in der Indexschreibweise in Verbindung mit der Summationskonvention, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

A.2 Summationskonvention

Beim Rechnen mit Matrizen und Tensoren in der Indexschreibweise müssen oft indizierte Größen summiert werden. Gewöhnlich erfolgt die Darstellung einer Summe durch die Verwendung eines Summationszeichens. Das Mitführen des Summationszeichens in Ableitungen und Berechnungen erweist sich jedoch recht schnell als sehr lästig. Deshalb wird auf die Angabe des Summationszeichens verzichtet und eine Summationskonvention vereinbart. In dieser Arbeit soll die Summationskonvention in der folgenden Form verwendet werden.

Über alle in einem Symbol oder in einem Produkt mehrerer Symbole doppelt vorkommenden kleinen lateinischen Indizes, die rechts von einem Symbol stehen, soll von eins bis drei summiert werden, ohne daß dies durch ein Summationszeichen ausgedrückt wird. Diese Regel wird aufgehoben, wenn die Indizes in Klammern gesetzt sind oder ein Summationszeichen angegeben wird.

A.3 Krummliniges Koordinatensystem

Die folgenden Ableitungen beziehen sich auf einen dreidimensionalen euklidischen Raum, d. h. es existiert darin ein kartesisches Koordinatensystem. Außerdem wird angenommen, daß die Abbildung $x_i = x_i(\xi^j)$ der allgemeinen krummlinigen Koordinaten ξ^i auf die kartesischen Koordinaten x_i bis auf einzelne singuläre Stellen eineindeutig ist. Dies hat zur Folge, daß die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = (J_{ij}) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi^3} \end{pmatrix}$$

regulär ist und somit ihre Inverse

$$\mathbf{G} = (G^{ij}) = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi^2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi^3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi^3}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi^3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

existiert, sowie die Jacobi-Determinante

$$J = \det \mathbf{J} = (\det \mathbf{G})^{-1} \quad (\text{A.1})$$

von null verschieden ist. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß ein rechtshändiges System wieder auf ein solches abgebildet wird.

Durch Anwendung der zur Bestimmung der Inversen einer Matrix \mathbf{M} abgewandelten Cramer-Regel (siehe z. B. [MEYBERG und VACHENAUER, 1990](#), Seite 308)

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} (m_{ij}) \quad \text{mit } m_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{M}_{(ji)}, \quad (\text{A.2})$$

wobei $\mathbf{M}_{(ji)}$ die Matrix ist, die aus \mathbf{M} durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte entsteht, bestimmen sich die Elemente der Inversen \mathbf{G} zu

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^3} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^3} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi^1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^3} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^3} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial \xi^3}{\partial x_1} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^1} \right) \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x_2} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi^3} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^3} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial x_2} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^3} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi^1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi^3} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \xi^3}{\partial x_2} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^1} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x_3} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi^3} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial x_3} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi^3} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^3} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial \xi^3}{\partial x_3} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi^1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^1} \right) . \quad (\text{A.11})$$

Die Gleichungen (A.3) bis (A.11) können mit dem Permutationssymbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & : \quad ijk = 123; 231; 312 \\ -1 & : \quad ijk = 321; 213; 132 \\ 0 & : \quad \text{sonst (mindestens zwei Indizes sind gleich)} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

durch die folgende Beziehung zusammengefaßt werden

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \frac{1}{J} \frac{\partial x_m}{\partial \xi^k} \frac{\partial x_n}{\partial \xi^l} .$$

A.3.1 Grundsysteme

Neben den kartesischen Basisvektoren \underline{e}_i können jetzt auch die Grundvektoren der natürlichen Basis

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^i} ,$$

die tangential zu den ξ^i -Koordinatenlinien sind, und die Grundvektoren der dualen Basis

$$\underline{g}^i = \text{grad } \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial \underline{x}} ,$$

die normal auf den Flächen $\xi^i = \text{const.}$ stehen, eingeführt werden. Hierbei ist \underline{x} der Ortsvektor, der im kartesischen Koordinatensystem als $\underline{x} = x_i \underline{e}_i$ dargestellt werden kann. Somit besitzen die Grundvektoren der natürlichen und der dualen Basis die kartesischen Komponenten

$$(\underline{g}_i)_j = \frac{\partial x_j}{\partial \xi^i}$$

bzw.

$$(\underline{g}^i)_j = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} .$$

Wie man sofort sieht, sind die Grundvektoren der natürlichen Basis die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrix \mathbf{J} und die der dualen Basis sind die Zeilenvektoren der Inversen \mathbf{G} . Zwischen den beiden Basissystemen besteht also wegen $\mathbf{GJ} = \mathbf{E}$ bzw. $G^{ik} J_{kj} = \delta_j^i$ der wichtige Zusammenhang

$$\underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \left((\underline{g}^i)_k e_k \right) \cdot \left((\underline{g}_j)_l e_l \right) = (\underline{g}^i)_k (\underline{g}_j)_k = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^j} = G^{ik} J_{kj} = \delta_j^i ,$$

mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta_j^i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} . \quad (\text{A.13})$$

Als gerichtetes Linienelement wird das vollständige Differential des Ortsvektors \underline{x} bezeichnet

$$d\underline{x} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i = \underline{g}_i d\xi^i = \sum_i d\underline{L}_i ,$$

aus dem die folgende Bestimmungsgleichung für das differentielle Element der Bogenlänge entlang der ξ^i -Koordinatenlinie resultiert

$$dL_i = |d\underline{L}_i| = |\underline{g}_i| d\xi^{(i)} = \sqrt{\underline{g}_{(i)} \cdot \underline{g}_i} d\xi^{(i)} = \sqrt{g_{(ii)}} d\xi^i .$$

Da das Spatprodukt im dreidimensionalen Raum als Determinante gedeutet werden kann, entspricht das Volumen des von den Grundvektoren des natürlichen Basissystems aufgespannten Spats der Jacobi-Determinante

$$J = \underline{g}_1 \cdot (\underline{g}_2 \times \underline{g}_3) .$$

Damit folgt für ein differentielles Volumenelement

$$dV = \underline{g}_1 d\xi^1 \cdot (\underline{g}_2 d\xi^2 \times \underline{g}_3 d\xi^3) = J d\xi^3 d\xi^2 d\xi^1 . \quad (\text{A.14})$$

Die Vektoren

$$\underline{a}^i = \underline{g}_j \times \underline{g}_k , \quad \text{mit } i, j, k \text{ ist gerade Permutation von } 1, 2, 3 ,$$

stehen normal auf den Flächen $\xi^i = \text{const.}$ des Spats und ihr Betrag entspricht dem jeweiligen Flächeninhalt. Aus

$$\underline{a}^i \cdot \underline{g}_j = \underline{g}_1 \cdot (\underline{g}_2 \times \underline{g}_3) \delta_j^i = J \delta_j^i = J \underline{g}^i \cdot \underline{g}_j$$

folgt durch Vergleich

$$\underline{a}^i = J \underline{g}^i . \quad (\text{A.15})$$

Für ein differentielles Element der Fläche $\xi^i = \text{const.}$ gilt somit

$$\begin{aligned} dA_i &= |d\underline{A}_i| = \left| \underline{g}_j d\xi^{(j)} \times \underline{g}_k d\xi^{(k)} \right| = |\underline{a}^i| d\xi^j d\xi^k = J |\underline{g}^i| d\xi^j d\xi^k \\ &= J \sqrt{\underline{g}^{(i)} \cdot \underline{g}^i} d\xi^j d\xi^k = J \sqrt{g^{(ii)}} d\xi^j d\xi^k , \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

mit i, j, k ist gerade Permutation von $1, 2, 3$.

Ein beliebiger Vektor \underline{v} hat in den Basissystemen die Darstellung

$$\underline{v} = v_i \underline{e}_i = v^i \underline{g}_i = v'_i \underline{g}^i ,$$

wobei man die v^i als kontravariante und die v'_i als kovariante Komponenten von \underline{v} und die Vektoren $v_{(i)} \underline{e}_i$, $v^{(i)} \underline{g}_i$ sowie $v'_{(i)} \underline{g}^i$ als die Vektorkomponenten des Vektors \underline{v} bezüglich der Richtungen der Grundvektoren \underline{e}_i , \underline{g}_i bzw. \underline{g}^i bezeichnet. Durch Anwendung obiger Beziehungen können die kontravarianten Komponenten des Vektors \underline{v} folgendermaßen dargestellt werden

$$v^j = v^i \delta_i^j = v^i \underline{g}_i \cdot \underline{g}^j = \underline{v} \cdot \underline{g}^j = v_i \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k = v_i \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} \delta_{ik} = v_k \frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} . \quad (\text{A.17})$$

A.3.2 Metriktensor, Herauf- und Herunterziehen von Indizes

Die kontravarianten und kovarianten Komponenten des sogenannten Metriktensors werden bestimmt durch

$$g^{ij} = \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j = \underline{g}^j \cdot \underline{g}^i = g^{ji}$$

bzw.

$$g_{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j = \underline{g}_j \cdot \underline{g}_i = g_{ji} .$$

Wie die Beziehungen

$$v^l = v^k \delta_k^l = v^k \underline{g}_k \cdot \underline{g}^l = \underline{v} \cdot \underline{g}^l = v'_k \underline{g}^k \cdot \underline{g}^l = v'_k g^{kl}$$

und

$$v'_l = v'_k \delta_l^k = v'_k \underline{g}^k \cdot \underline{g}_l = \underline{v} \cdot \underline{g}_l = v^k \underline{g}_k \cdot \underline{g}_l = v^k g_{kl}$$

zeigen, kann man mit ihrer Hilfe Indizes herauf- oder herunterziehen. Aus dem Ansatz für die Komponenten der Grundvektoren der beiden Basissysteme bezüglich des jeweils anderen Systems

$$\underline{g}^j = (\underline{g}^j)^k \underline{g}_k$$

und

$$\underline{g}_j = (\underline{g}_j)'_k \underline{g}^k$$

folgt nach skalarer Multiplikation mit \underline{g}^l bzw. \underline{g}_l

$$g^{jl} = \underline{g}^j \cdot \underline{g}^l = (\underline{g}^j)^k \underline{g}_k \cdot \underline{g}^l = (\underline{g}^j)^k \delta_k^l = (\underline{g}^j)^l$$

bzw.

$$g_{jl} = \underline{g}_j \cdot \underline{g}_l = (\underline{g}_j)'_k \underline{g}^k \cdot \underline{g}_l = (\underline{g}_j)'_k \delta_l^k = (\underline{g}_j)'_l .$$

Setzt man schließlich diese Beziehungen wieder in den Ansatz ein, so erhält man die Gleichungen

$$\underline{g}^j = g^{jk} \underline{g}_k$$

bzw.

$$\underline{g}_j = g_{jk} \underline{g}^k ,$$

womit die folgende Identität hergeleitet werden kann

$$\delta_m^k = \underline{g}^k \cdot \underline{g}_m = g^{lk} \underline{g}_l \cdot \underline{g}_m = g^{lk} g_{li} \underline{g}^i \cdot \underline{g}_m = g^{lk} g_{li} \delta_m^i = g^{lk} g_{lm} = g^{kl} g_{lm} .$$

Diese besagt, daß die Matrizen der kontravarianten bzw. der kovarianten Komponenten des Metriktensors invers zueinander sind. Mit Hilfe der Regel (A.2) kann somit unter Berücksichtigung der Symmetrie des Metriktensors die Matrix der unbekanntenen Komponenten aus der der bekannten berechnet werden

$$g^{lm} = \frac{1}{\det(g_{lm})} (-1)^{l+m} \det(g_{lm})_{(lm)} \quad (\text{A.18})$$

$$g_{lm} = \frac{1}{\det(g^{lm})} (-1)^{l+m} \det(g^{lm})_{(lm)} .$$

Für die kovarianten Komponenten des Metriktensors gilt weiterhin

$$g_{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j = \frac{\partial x_l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^j} \underline{e}_l \cdot \underline{e}_k = \frac{\partial x_l}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^j} \delta_{lk} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi^j} = J_{ki} J_{kj} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})_{ij} .$$

Daraus ergibt sich die folgende Beziehung für die Determinante der kovarianten Komponenten des Metriktensors

$$g = \det(g_{ij}) = \det(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) = \det \mathbf{J}^T \det \mathbf{J} = (\det \mathbf{J})^2 = J^2 .$$

A.3.3 Christoffel-Symbole

Im Gegensatz zu den kartesischen Basisvektoren sind die Grundvektoren beider Basissysteme ortsabhängig. Um die Ableitungen der Grundvektoren nach den krummlinigen Koordinaten ξ^i in Richtung der Grundvektoren zerlegen zu können, werden die Christoffel-Symbole zweiter Art eingeführt

$$\frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \xi^j} = \Gamma_{ij}^k \underline{g}_k .$$

Für die Christoffel-Symbole zweiter Art gilt somit die Beziehung

$$\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij}^k \delta_k^m = \Gamma_{ij}^k \underline{g}_k \cdot \underline{g}^m = \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \xi^j} \cdot \underline{g}^m , \quad (\text{A.19})$$

die aufgrund der Identität

$$0 = \frac{\partial \delta_i^m}{\partial \xi^j} = \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\underline{g}^m \cdot \underline{g}_i) = \frac{\partial \underline{g}^m}{\partial \xi^j} \cdot \underline{g}_i + \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \xi^j} \cdot \underline{g}^m$$

auch in der Form

$$\Gamma_{ij}^m = -\frac{\partial \underline{g}^m}{\partial \xi^j} \cdot \underline{g}_i$$

geschrieben werden kann. Mit

$$\frac{\partial \underline{g}^i}{\partial \xi^j} \cdot \underline{g}_m = -\Gamma_{mj}^i = -\Gamma_{kj}^i \delta_m^k = -\Gamma_{kj}^i \underline{g}^k \cdot \underline{g}_m$$

erhält man dann durch Vergleich für die Ableitung der Grundvektoren der dualen Basis nach den krummlinigen Koordinaten ξ^j

$$\frac{\partial \underline{g}^i}{\partial \xi^j} = -\Gamma_{kj}^i \underline{g}^k .$$

Wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^i} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^j} \right) = \frac{\partial \underline{g}_j}{\partial \xi^i} \quad (\text{A.20})$$

folgt die Symmetrieeigenschaft der Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \xi^j} \cdot \underline{g}^m = \frac{\partial \underline{g}_j}{\partial \xi^i} \cdot \underline{g}^m = \Gamma_{ji}^m .$$

Aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_k}{\partial \xi^n} \cdot \underline{g}^p &= \frac{\partial}{\partial \xi^n} (g_{kq} \underline{g}^q) \cdot \underline{g}^p = \left(\frac{\partial g_{kq}}{\partial \xi^n} \underline{g}^q + g_{kq} \frac{\partial \underline{g}^q}{\partial \xi^n} \right) \cdot g^{pr} \underline{g}_r \\ &= \frac{\partial g_{kq}}{\partial \xi^n} g^{qp} + g_{kq} g^{pr} \frac{\partial \underline{g}^q}{\partial \xi^n} \cdot \underline{g}_r, \end{aligned}$$

die nach Einführung der Christoffel-Symbole in die Form

$$\Gamma_{kn}^p = \frac{\partial g_{kq}}{\partial \xi^n} g^{qp} - g_{kq} g^{pr} \Gamma_{rn}^q$$

übergeht, erhält man nach Multiplikation mit g_{pl} die Gleichung

$$g_{pl} \Gamma_{kn}^p + g_{kp} \Gamma_{ln}^p = \frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^n}. \quad (\text{A.21})$$

Dabei wurde der letzte Term auf die linke Seite gebracht. Führt man eine zyklische Vertauschung der freien Indizes k, l, n durch, so ergeben sich die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} g_{pl} \Gamma_{kn}^p + g_{kp} \Gamma_{ln}^p &= \frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^n} \\ g_{pn} \Gamma_{lk}^p + g_{lp} \Gamma_{nk}^p &= \frac{\partial g_{ln}}{\partial \xi^k} \\ g_{pk} \Gamma_{nl}^p + g_{np} \Gamma_{kl}^p &= \frac{\partial g_{nk}}{\partial \xi^l}. \end{aligned}$$

Multipliziert man hierbei die erste Gleichung des Systems mit $-1/2$ und die beiden anderen mit $1/2$ und addiert alle drei Gleichungen, so erhält man die Beziehung

$$g_{np} \Gamma_{kl}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ln}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial \xi^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^n} \right),$$

die nach Multiplikation mit g^{mn} schließlich auf eine weitere Darstellungsform der Christoffel-Symbole zweiter Art führt

$$\Gamma_{kl}^m = \frac{1}{2} g^{mn} \left(\frac{\partial g_{ln}}{\partial \xi^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial \xi^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial \xi^n} \right).$$

Diese reduziert sich für den Fall $m = l$ aufgrund der damit verbundenen Summation auf die Form

$$\Gamma_{kl}^l = \frac{1}{2} g^{ln} \frac{\partial g_{ln}}{\partial \xi^k}. \quad (\text{A.22})$$

Differenziert man die Determinante g nach ξ^k , so lautet das Ergebnis

$$\frac{\partial g}{\partial \xi^k} = \sum_{l,m} \left((-1)^{l+m} \det (g_{lm})_{(lm)} \frac{\partial g_{lm}}{\partial \xi^k} \right),$$

das mit (A.18) auch folgendermaßen geschrieben werden kann

$$\frac{\partial g}{\partial \xi^k} = g g^{lm} \frac{\partial g_{lm}}{\partial \xi^k}. \quad (\text{A.23})$$

Vergleicht man die Beziehung (A.23) mit Gleichung (A.22), so gewinnt man die Formel

$$\Gamma_{kl}^l = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \xi^k},$$

die nach Einführen von $\sqrt{g} = J$ die einfache Form

$$\Gamma_{kl}^l = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi^k} \quad (\text{A.24})$$

erhält.

A.3.4 Physikalische Komponenten

Außer der Ortsabhängigkeit besitzen die Grundvektoren der beiden Basen auch die Eigenschaft, daß sie nicht normiert sind. Dies kann sogar dazu führen, daß die Komponenten eines Vektors unterschiedliche Dimensionen haben. Um physikalisch sinnvolle Aussagen treffen zu können, ist es deshalb notwendig, den Vektor \underline{v} auf eine normierte Basis

$$\underline{e}_i = \frac{\underline{g}_i}{|\underline{g}_i|} = \frac{\underline{g}_i}{\sqrt{g^{(ii)}}}$$

zu beziehen. Die kontravarianten Komponenten des Vektors \underline{v} hinsichtlich der Einheitsvektoren \underline{e}_i bezeichnet man als die physikalischen kontravarianten Komponenten v^i . Aus der Beziehung

$$v^i \underline{g}_i = \underline{v} = v^i \underline{e}_i = v^i \frac{1}{\sqrt{g^{(ii)}}} \underline{g}_i$$

folgen für die physikalischen kontravarianten Komponenten die Werte

$$v^i = \sqrt{g^{(ii)}} v^i.$$

Für die physikalischen kovarianten Komponenten v_i eines Vektors \underline{v} erhält man ganz entsprechend

$$v_i = \sqrt{g^{(ii)}} v'_i.$$

A.3.5 Kovariante Ableitung, Gradient, Divergenz, Laplace-Operator

Mit Hilfe des Nabla-Operators (Nabla-Vektors)

$$\nabla = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \underline{x}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \underline{g}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \underline{g}_i g^{il} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \quad (\text{A.25})$$

ergibt sich für den Gradienten eines Skalars s , eines Vektors \underline{v} und eines Tensors zweiter Stufe $\underline{\underline{T}}$

$$\nabla s = g^{il} \frac{\partial s}{\partial \xi^l} \underline{g}_i \quad (\text{A.26})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \nabla \underline{v} &= \underline{g}^j \frac{\partial}{\partial \xi^j} (v^i \underline{g}_i) = \underline{g}^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \underline{g}_i + v^i \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \xi^j} \right) = \underline{g}^j \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \underline{g}_i + v^i \Gamma_{ij}^l \underline{g}_l \right) \\ &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} + v^l \Gamma_{lj}^i \right) \underline{g}^j \underline{g}_i \\ &= \left(g^{mj} \frac{\partial v^i}{\partial \xi^m} + g^{mj} v^l \Gamma_{lm}^i \right) \underline{g}_j \underline{g}_i \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$= g^{mj} v^i{}_{;m} \underline{g}_j \underline{g}_i \quad (\text{A.28})$$

oder auch

$$\begin{aligned} \underline{v} \nabla &= \frac{\partial}{\partial \xi^j} (v^i \underline{g}_i) \underline{g}^j = \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \underline{g}_i + v^i \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \xi^j} \right) \underline{g}^j = \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} \underline{g}_i + v^i \Gamma_{ij}^l \underline{g}_l \right) \underline{g}^j \\ &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^j} + v^l \Gamma_{lj}^i \right) \underline{g}_i \underline{g}^j = \left(\frac{\partial v^j}{\partial \xi^i} + v^l \Gamma_{li}^j \right) \underline{g}_j \underline{g}^i \\ &= \left(g^{mi} \frac{\partial v^j}{\partial \xi^m} + g^{mi} v^l \Gamma_{lm}^j \right) \underline{g}_j \underline{g}_i \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$= g^{mi} v^j{}_{;m} \underline{g}_j \underline{g}_i \quad (\text{A.30})$$

$$= (\nabla \underline{v})^T$$

bzw.

$$\begin{aligned} \nabla \underline{\underline{T}} &= \underline{g}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l} (T^{mn} \underline{g}_m \underline{g}_n) = \underline{g}^l \left(\frac{\partial T^{mn}}{\partial \xi^l} \underline{g}_m \underline{g}_n + T^{mn} \frac{\partial \underline{g}_m}{\partial \xi^l} \underline{g}_n + T^{mn} \underline{g}_m \frac{\partial \underline{g}_n}{\partial \xi^l} \right) \\ &= \underline{g}^l \left(\frac{\partial T^{mn}}{\partial \xi^l} \underline{g}_m \underline{g}_n + T^{mn} \Gamma_{ml}^r \underline{g}_r \underline{g}_n + T^{mn} \underline{g}_m \Gamma_{nl}^r \underline{g}_r \right) \\ &= \left(\frac{\partial T^{mn}}{\partial \xi^l} + T^{rn} \Gamma_{rl}^m + T^{mr} \Gamma_{rl}^n \right) \underline{g}^l \underline{g}_m \underline{g}_n \\ &= T^{mn}{}_{;l} \underline{g}^l \underline{g}_m \underline{g}_n \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

oder zum Beispiel auch

$$\begin{aligned}
\nabla \underline{T} &= \underline{g}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(T^m \underline{n} \underline{g}_m \underline{g}^n \right) = \underline{g}^l \left(\frac{\partial T^m}{\partial \xi^l} \underline{n} \underline{g}_m \underline{g}^n + T^m \underline{n} \frac{\partial \underline{g}_m}{\partial \xi^l} \underline{g}^n + T^m \underline{n} \underline{g}_m \frac{\partial \underline{g}^n}{\partial \xi^l} \right) \\
&= \underline{g}^l \left(\frac{\partial T^m}{\partial \xi^l} \underline{n} \underline{g}_m \underline{g}^n + T^m \underline{n} \Gamma_{ml}^r \underline{g}_r \underline{g}^n - T^m \underline{n} \underline{g}_m \Gamma_{rl}^n \underline{g}^r \right) \\
&= \left(\frac{\partial T^m}{\partial \xi^l} \underline{n} + T^r \underline{n} \Gamma_{rl}^m - T^m \underline{r} \Gamma_{nl}^r \right) \underline{g}^l \underline{g}_m \underline{g}^n \\
&= T^m \underline{n}; l \underline{g}^l \underline{g}_m \underline{g}^n .
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Dabei bezeichnet man die Ausdrücke

$$v^i{}_{;m} = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^m} + v^l \Gamma_{lm}^i$$

und

$$T^{mn}{}_{;l} = \frac{\partial T^{mn}}{\partial \xi^l} + T^{rn} \Gamma_{rl}^m + T^{mr} \Gamma_{rl}^n \tag{A.33}$$

als die kovariante Ableitung der kontravarianten Komponenten eines Vektors \underline{v} bzw. eines Tensors zweiter Stufe \underline{T} . Die Divergenz eines Vektors \underline{v} berechnet sich mit (A.24) zu

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \underline{v} &= \left(\underline{g}^m \frac{\partial}{\partial \xi^m} \right) \cdot \left(v^l \underline{g}_l \right) = \delta_l^m \frac{\partial v^l}{\partial \xi^m} + v^l \underline{g}^m \cdot \frac{\partial \underline{g}_l}{\partial \xi^m} = \frac{\partial v^l}{\partial \xi^l} + v^l \Gamma_{lm}^n \delta_n^m \\
&= \frac{\partial v^l}{\partial \xi^l} + v^l \Gamma_{lm}^m = \frac{\partial v^l}{\partial \xi^l} + v^l \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi^l} \\
&= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^l} (J v^l) \\
&= v^l{}_{;l} .
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe \underline{T}

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \underline{T} &= \left(\underline{g}^n \frac{\partial}{\partial \xi^n} \right) \cdot \left(T^{li} \underline{g}_l \underline{g}_i \right) = \delta_l^n \frac{\partial T^{li}}{\partial \xi^n} \underline{g}_i + T^{li} \underline{g}^n \cdot \frac{\partial \underline{g}_l}{\partial \xi^n} \underline{g}_i + T^{li} \underline{g}^n \cdot \underline{g}_l \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial \xi^n} \\
&= \frac{\partial T^{li}}{\partial \xi^l} \underline{g}_i + T^{li} \delta_m^n \Gamma_{ln}^m \underline{g}_i + T^{li} \delta_l^n \Gamma_{in}^m \underline{g}_m \\
&= \frac{\partial T^{li}}{\partial \xi^l} \underline{g}_i + T^{li} \Gamma_{ln}^n \underline{g}_i + T^{lm} \Gamma_{ml}^i \underline{g}_i \\
&= \left(\frac{\partial T^{li}}{\partial \xi^l} + T^{li} \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi^l} + T^{lm} \Gamma_{ml}^i \right) \underline{g}_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^l} (J T^{li}) + T^{lm} \Gamma_{ml}^i \right) \underline{g}_i \\
 &= T^{li}{}_{;l} \underline{g}_i .
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

Analog zur Herleitung von Gleichung (A.21) folgt aus der Identität

$$\begin{aligned}
 -\Gamma_{pn}^k &= \frac{\partial \underline{g}^k}{\partial \xi^n} \cdot \underline{g}_p = \frac{\partial}{\partial \xi^n} (g^{kq} \underline{g}_q) \cdot \underline{g}_p \\
 &= \frac{\partial g^{kq}}{\partial \xi^n} g_{qp} + g^{kq} g_{pr} \frac{\partial \underline{g}_q}{\partial \xi^n} \cdot \underline{g}^r \\
 &= \frac{\partial g^{kq}}{\partial \xi^n} g_{qp} + g^{kq} g_{pr} \Gamma_{qn}^r
 \end{aligned}$$

nach Multiplikation mit g^{pl} die Beziehung

$$-g^{pl} \Gamma_{pn}^k - g^{kq} \Gamma_{qn}^l = \frac{\partial g^{kl}}{\partial \xi^n} . \tag{A.36}$$

Wendet man nunmehr die oben definierte kovariante Ableitung der Komponenten von Tensoren zweiter Stufe (A.33) speziell auf die kontravarianten Komponenten des Metriktensors an, so ergibt sich die Gleichung

$$g^{kl}{}_{;n} = \frac{\partial g^{kl}}{\partial \xi^n} + g^{rl} \Gamma_{rn}^k + g^{kr} \Gamma_{rn}^l .$$

Unter Beachtung von (A.36) erhält man daraus die Formel

$$g^{kl}{}_{;n} = 0 . \tag{A.37}$$

Entsprechend folgt mit (A.32) die Identität

$$\delta_{n;l}^m = \frac{\partial \delta_n^m}{\partial \xi^l} + \delta_n^r \Gamma_{rl}^m - \delta_r^m \Gamma_{nl}^r = \frac{\partial \delta_n^m}{\partial \xi^l} + \Gamma_{nl}^m - \Gamma_{nl}^m = \frac{\partial \delta_n^m}{\partial \xi^l} = 0 . \tag{A.38}$$

Für den Fall $n = l$ ergibt (A.36) mit (A.24) die Beziehung

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial \xi^l} = -g^{pl} \Gamma_{pl}^k - g^{kq} \Gamma_{ql}^l = -g^{pl} \Gamma_{pl}^k - g^{kq} \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi^q} = -g^{mn} \Gamma_{mn}^k - g^{kl} \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi^l} ,$$

die umgeformt

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^l} (J g^{kl}) + g^{mn} \Gamma_{mn}^k = 0 \tag{A.39}$$

geschrieben werden kann. Damit erhält man für den auf einen Skalar s angewendeten Laplace-Operator den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\Delta s &= \nabla \cdot \nabla s = \left(\underline{g}^m \frac{\partial}{\partial \xi^m} \right) \cdot \left(\underline{g}^l \frac{\partial s}{\partial \xi^l} \right) \\
&= \underline{g}^m \cdot \frac{\partial \underline{g}^l}{\partial \xi^m} \frac{\partial s}{\partial \xi^l} + g^{ml} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left(\frac{\partial s}{\partial \xi^l} \right) \\
&= \underline{g}^m \cdot \left(-\Gamma_{km}^l \underline{g}^k \right) \frac{\partial s}{\partial \xi^l} + g^{ml} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left(\frac{\partial s}{\partial \xi^l} \right) \\
&= -g^{km} \Gamma_{km}^l \frac{\partial s}{\partial \xi^l} + g^{ml} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left(\frac{\partial s}{\partial \xi^l} \right) \\
&= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left(J g^{lm} \right) \frac{\partial s}{\partial \xi^l} + g^{lm} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left(\frac{\partial s}{\partial \xi^l} \right) \\
&= \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left(J g^{lm} \frac{\partial s}{\partial \xi^l} \right) . \tag{A.40}
\end{aligned}$$

A.4 Kartesisches Koordinatensystem

Ein kartesisches Koordinatensystem kann als Spezialfall eines krummlinigen Koordinatensystems aufgefaßt werden, wobei sich aufgrund der Orthogonalität und Geradlinigkeit dieses Systems erhebliche Vereinfachungen ergeben. Hinzu kommt noch, daß die Basisvektoren normiert, also Einheitsvektoren sind. Somit stellt das kartesische Koordinatensystem den einfachsten Spezialfall eines krummlinigen Koordinatensystems dar.

A.4.1 Vereinfachungen aufgrund der Orthogonalität

Im Spezialfall eines orthogonalen Bezugssystems gilt für die Grundvektoren der natürlichen Basis

$$\begin{aligned}
\underline{g}_i \cdot \underline{g}_j &= 0 && \text{für } i \neq j \\
\underline{g}_i \cdot \underline{g}_j &\neq 0 && \text{für } i = j .
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die Matrix der kovarianten Komponenten des Metriktensors nur auf der Hauptdiagonalen von null verschiedene Elemente besitzt und ihre Determinante berechnet sich somit zu

$$g = \det(g_{ij}) = g_{11}g_{22}g_{33} .$$

In der Literatur werden häufig die Größen

$$h_i = \sqrt{g_{(ii)}}$$

benutzt, womit sich für die Jacobi-Determinante die Gleichung

$$J = \sqrt{g} = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} = h_1 h_2 h_3$$

ergibt. Wegen

$$\delta_j^i = \underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \underline{g}^i \cdot (\underline{g}^l g_{lj}) = \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j g_{(jj)}$$

gilt für die Grundvektoren der dualen Basis der gleiche Zusammenhang wie für die der natürlichen Basis

$$\begin{aligned} \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j &= 0 & \text{für } i \neq j \\ \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j &\neq 0 & \text{für } i = j . \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich daraus die Beziehung

$$g^{(jj)} = \underline{g}^{(j)} \cdot \underline{g}^j = \frac{\delta_j^{(j)}}{g_{(jj)}} = \frac{1}{g_{(jj)}}$$

oder auch

$$\sqrt{g^{(jj)}} = \frac{1}{\sqrt{g_{(jj)}}} = \frac{1}{h_j} .$$

Dasselbe Ergebnis hätte man auch aus der Gleichung (A.18) erhalten können. Aus

$$\underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j g_{(jj)}$$

folgt außerdem die Beziehung

$$\underline{g}_j = \underline{g}^j g_{(jj)} ,$$

die besagt, daß die entsprechenden Grundvektoren der beiden Basen \underline{g}_j und \underline{g}^j die gleiche Richtung besitzen.

In einem orthonormierten Bezugssystem, wie zum Beispiel der kartesischen Basis, gilt zudem die Identität

$$e \underline{g}_j = \frac{1}{\sqrt{g_{(jj)}}} \underline{g}_j = \frac{1}{\sqrt{g_{(jj)}}} \underline{g}^j g_{(jj)} = \sqrt{g_{(jj)}} \underline{g}^j = \frac{1}{\sqrt{g_{(jj)}}} \underline{g}^j = e \underline{g}^j ,$$

d. h. die natürliche und die duale Basis fallen zusammen, weshalb dann auch nicht mehr zwischen ko- und kontravarianten Komponenten unterschieden wird. Außerdem gilt wegen $|\underline{g}_i| = |\underline{g}^i| = 1$

$$g_{(ii)} = g^{(ii)} = h_i = 1$$

und somit auch

$$J = g = 1 .$$

A.4.2 Vereinfachungen aufgrund der Geradlinigkeit

In einem geradlinigen Koordinatensystem ist die Basis räumlich konstant. Deshalb verschwinden in einem solchen Koordinatensystem alle Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{ij}^k = 0 .$$

Damit reduziert sich die kovariante Ableitung auf eine gewöhnliche partielle Ableitung

$$v^i{}_{;m} = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^m} + v^l \Gamma_{lm}^i = \frac{\partial v^i}{\partial \xi^m} ,$$

$$T^{mn}{}_{;l} = \frac{\partial T^{mn}}{\partial \xi^l} + T^{rn} \Gamma_{rl}^m + T^{mr} \Gamma_{rl}^n = \frac{\partial T^{mn}}{\partial \xi^l} .$$

A.4.3 Gradient, Divergenz, Laplace-Operator

Analog zum allgemeinen Fall ergibt sich mit Hilfe des Nabla-Operators (A.25) für den Gradienten eines Skalars s , eines Vektors \underline{v} und eines Tensors zweiter Stufe $\underline{\underline{T}}$

$$\nabla s = \frac{\partial s}{\partial x_l} \underline{e}_l , \quad (\text{A.41})$$

$$\nabla \underline{v} = \underline{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} (v_m \underline{e}_m) = \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \underline{e}_l \underline{e}_m , \quad (\text{A.42})$$

$$\underline{v} \nabla = \frac{\partial}{\partial x_l} (v_m \underline{e}_m) \underline{e}_l = \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \underline{e}_m \underline{e}_l = \frac{\partial v_l}{\partial x_m} \underline{e}_l \underline{e}_m = (\nabla \underline{v})^T \quad (\text{A.43})$$

bzw.

$$\nabla \underline{\underline{T}} = \underline{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} (T_{mn} \underline{e}_m \underline{e}_n) = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_l} \underline{e}_l \underline{e}_m \underline{e}_n .$$

Auf dasselbe Ergebnis kommt man natürlich auch, wenn man in den Gleichungen (A.26), (A.27) bzw. (A.31) die oben genannten Vereinfachungen berücksichtigt.

Für die Divergenz eines Vektors \underline{v} und eines Tensors zweiter Stufe $\underline{\underline{T}}$ folgt aus Gleichung (A.34) bzw. (A.35) oder durch Anwendung von (A.25)

$$\nabla \cdot \underline{v} = \left(\underline{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \cdot (v_m \underline{e}_m) = \frac{\partial v_m}{\partial x_l} \delta_{lm} = \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (\text{A.44})$$

bzw.

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} = \left(\underline{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \cdot (T_{mn} \underline{e}_m \underline{e}_n) = \frac{\partial T_{mn}}{\partial x_l} \delta_{lm} \underline{e}_n = \frac{\partial T_{ln}}{\partial x_l} \underline{e}_n .$$

Aus Gleichung (A.40) folgt für den auf einen Skalar s angewendeten Laplace-Operator der Ausdruck

$$\Delta s = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial s}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial x_l \partial x_l} .$$

B. Herleitung der Gleichung (2.22)

Die spezifische Enthalpie

$$h = u + \frac{p}{\varrho} \quad (\text{B.1})$$

besitzt das vollständige Differential

$$dh = du - \frac{p}{\varrho^2} d\varrho + \frac{1}{\varrho} dp, \quad (\text{B.2})$$

woraus die Beziehung

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = \varrho \frac{Dh}{Dt} + \frac{p}{\varrho} \frac{D\varrho}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} \quad (\text{B.3})$$

folgt. Unter Berücksichtigung der Definition des Deformationsgeschwindigkeitstensors

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{2.12})$$

erhält man aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{2.9})$$

die Beziehung

$$\frac{p}{\varrho} \frac{D\varrho}{Dt} = -p \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -p s_{jj}$$

und damit aus der Gleichung (B.3) den Zusammenhang

$$\varrho \frac{Du}{Dt} = \varrho \frac{Dh}{Dt} - p s_{jj} - \frac{Dp}{Dt}.$$

Damit läßt sich die Bilanzgleichung für die spezifische innere Energie

$$\varrho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + p s_{jj} - \tau_{ji} s_{ji} - \varrho w = 0 \quad (\text{2.17})$$

in der Form

$$\varrho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \tau_{ji} s_{ji} - \varrho w = 0 \quad (\text{B.4})$$

schreiben.

Die Gibbsche Fundamentalgleichung

$$du = T ds + \frac{p}{\varrho^2} d\varrho \quad (2.18)$$

kann mit Hilfe des vollständigen Differentials der spezifischen Enthalpie (B.2) auch wie folgt dargestellt werden

$$dh = T ds + \frac{1}{\varrho} dp .$$

Differenziert man diese Darstellungsform der Gibbschen Fundamentalgleichung partiell nach den beiden Variablen der kalorischen Zustandsgleichung $h = h(p, T)$, so erhält man die Ausdrücke

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = T \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T + \frac{1}{\varrho}$$

und

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p ,$$

die umgeformt

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T - \frac{1}{\varrho T}$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$$

lauten. Kreuzweise Differentiation führt auf die Beziehungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T\right)_p = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 h}{\partial T \partial p} - \frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T + \frac{1}{\varrho T^2} + \frac{1}{\varrho^2 T} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T}\right)_p$$

und

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p\right)_T = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 h}{\partial p \partial T} ,$$

woraus sich unter der Annahme der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen durch Gleichsetzen der Zusammenhang

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\varrho} + \frac{T}{\varrho^2} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T}\right)_p$$

ergibt.

Damit folgt für die kalorische Zustandsgleichung

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT,$$

die Beziehung

$$dh = \left(1 + \frac{T}{\varrho} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_p \right) \frac{1}{\varrho} dp + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT,$$

die nach Einführung der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (\text{B.5})$$

und des (thermischen) Ausdehnungskoeffizienten

$$\beta = -\frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{B.6})$$

auch in der Form

$$dh = (1 - \beta T) \frac{1}{\varrho} dp + c_p dT$$

bzw.

$$\varrho \frac{Dh}{Dt} = (1 - \beta T) \frac{Dp}{Dt} + \varrho c_p \frac{DT}{Dt}$$

geschrieben werden kann. Einsetzen dieser Formulierung der kalorischen Zustandsgleichung in den Bilanzsatz der spezifischen inneren Energie (B.4) führt schließlich auf die gesuchte Gleichung

$$\varrho c_p \frac{DT}{Dt} - \beta T \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \tau_{ji} s_{ji} - \varrho w = 0. \quad (\text{2.22})$$

C. Normierung

Mit den Referenzgrößen x_{ref} , t_{ref} , v_{ref} , p_{ref} , ϱ_{ref} und μ_{ref} werden die dimensionslosen (reduzierten) Größen

$$\tilde{x} = \frac{x}{x_{\text{ref}}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{\text{ref}}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_{\text{ref}}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_{\text{ref}}}, \quad \tilde{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho_{\text{ref}}}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_{\text{ref}}}$$

eingeführt. Gemäß Gleichung (A.25) gilt

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{x_{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{x_{\text{ref}}} \tilde{\nabla}.$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v) = 0 \quad (2.1)$$

und den Erhaltungssatz des Impulses

$$\frac{\partial \varrho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho v v) + \nabla p - \nabla \cdot (\mu (\nabla v + v \nabla)) = 0 \quad (2.34)$$

führt auf die Beziehungen

$$\frac{\varrho_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}}} \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\varrho_{\text{ref}} v_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\varrho} \tilde{v}) = 0$$

bzw.

$$\frac{\varrho_{\text{ref}} v_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}}} \frac{\partial \tilde{\varrho} \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\varrho_{\text{ref}} v_{\text{ref}}^2}{x_{\text{ref}}} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\varrho} \tilde{v} \tilde{v}) + \frac{p_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{\mu_{\text{ref}} v_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}^2} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mu} (\tilde{\nabla} \tilde{v} + \tilde{v} \tilde{\nabla})) = 0.$$

Multiplikation der ersten Beziehung mit $\frac{x_{\text{ref}}}{\varrho_{\text{ref}} v_{\text{ref}}}$ und der letzten mit $\frac{x_{\text{ref}}}{\varrho_{\text{ref}} v_{\text{ref}}^2}$ ergibt die Gleichungen

$$\frac{x_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}} v_{\text{ref}}} \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\varrho} \tilde{v}) = 0$$

und

$$\frac{x_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}} v_{\text{ref}}} \frac{\partial \tilde{\varrho} \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\varrho} \tilde{v} \tilde{v}) + \frac{p_{\text{ref}}}{\varrho_{\text{ref}} v_{\text{ref}}^2} \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{\mu_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}} \varrho_{\text{ref}} v_{\text{ref}}} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\mu} (\tilde{\nabla} \tilde{v} + \tilde{v} \tilde{\nabla})) = 0,$$

die mit den dimensionslosen Kennzahlen

$$\text{Strouhalzahl} \quad \text{St} = \frac{x_{\text{ref}}}{t_{\text{ref}} v_{\text{ref}}},$$

$$\text{Eulerzahl} \quad \text{Eu} = \frac{p_{\text{ref}}}{\varrho_{\text{ref}} v_{\text{ref}}^2},$$

$$\text{Reynoldszahl} \quad \text{Re} = \frac{\varrho_{\text{ref}} x_{\text{ref}} v_{\text{ref}}}{\mu_{\text{ref}}}$$

auch in der Form

$$\text{St} \frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\varrho} \tilde{\underline{v}}) = 0 \quad (\text{C.1})$$

bzw.

$$\text{St} \frac{\partial \tilde{\varrho} \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\varrho} \tilde{\underline{v}} \tilde{\underline{v}}) + \text{Eu} \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla} \cdot \left(\tilde{\mu} \left(\tilde{\nabla} \tilde{\underline{v}} + \tilde{\underline{v}} \tilde{\nabla} \right) \right) = 0 \quad (\text{C.2})$$

geschrieben werden können.

Meistens kann durch eine geschickte Wahl der Referenzgrößen erreicht werden, daß alle dimensionslosen Größen von der Größenordnung der Einheit sind. Dies gilt dann auch in guter Näherung für die verschiedenen Ableitungen, so daß unter diesen Voraussetzungen die Kennzahlen für die Abschätzung der Größenordnung der einzelnen Terme in den Gleichungen (C.1) und (C.2) herangezogen werden können. Wird in diesem Falle gefordert, daß im Erhaltungssatz des Impulses (C.2) der instationäre Term $\frac{\partial \tilde{\varrho} \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{t}}$ und der Druckterm $\tilde{\nabla} \tilde{p}$ von der gleichen Größenordnung wie der konvektive Term $\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\varrho} \tilde{\underline{v}} \tilde{\underline{v}})$ sind, muß $\text{St} = \text{Eu} = 1$ und somit

$$t_{\text{ref}} = \frac{x_{\text{ref}}}{v_{\text{ref}}}, \quad p_{\text{ref}} = \varrho_{\text{ref}} v_{\text{ref}}^2$$

gelten. Für die Gleichungen (C.1) und (C.2) folgt damit die Form

$$\frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\varrho} \tilde{\underline{v}}) = 0 \quad (\text{C.3})$$

bzw.

$$\frac{\partial \tilde{\varrho} \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\varrho} \tilde{\underline{v}} \tilde{\underline{v}}) + \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla} \cdot \left(\tilde{\mu} \left(\tilde{\nabla} \tilde{\underline{v}} + \tilde{\underline{v}} \tilde{\nabla} \right) \right) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Wenn ϱ und μ konstant sind, ist es zweckmäßig, $\varrho_{\text{ref}} = \varrho$ und $\mu_{\text{ref}} = \mu$ zu setzen, da dann zu jedem Zeitpunkt und im ganzen Strömungsgebiet $\tilde{\varrho} = \tilde{\mu} = 1$ gilt. Damit vereinfachen sich die Gleichungen (C.3) und (C.4) zu

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\underline{v}} = 0 \quad (\text{2.37})$$

bzw.

$$\frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\underline{v}} \tilde{\underline{v}}) + \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\nabla} \cdot \left(\tilde{\nabla} \tilde{\underline{v}} + \tilde{\underline{v}} \tilde{\nabla} \right) = 0. \quad (\text{2.38})$$

D. Bestimmung der Wandschubspannung und des Drucks auf der Körperoberfläche

Der Druck in einem Punkt auf der Körperoberfläche wird durch bilineare Interpolation bestimmt. Dafür werden die im Rechengitter am nächsten benachbarten Druckgrößen verwendet. Wenn eine dieser benachbarten Größen geblockt ist, wird sie vorher mit den Methoden berechnet, die auch im Strömungslöser benutzt werden (siehe Abschnitt 2.3.2). Eine bikubische Interpolation führt für den Druck meist zu schlechteren Ergebnissen, weshalb darauf verzichtet wird.

Die Bestimmung der Wandschubspannung erfolgt mittels bikubischer Interpolation. Dafür wird für die Wandschubspannung τ_w folgende Beziehung benutzt

$$\tau_w = \rho\nu \left. \frac{\partial v_t}{\partial n} \right|_w ,$$

wobei für die wandnormale Ableitung der tangentialen Geschwindigkeitskomponente $v_t = \underline{v} \cdot \underline{t} = v_i \underline{e}_i \cdot t_j \underline{e}_j = v_i t_i$ gilt

$$\frac{\partial v_t}{\partial n} = \nabla v_t \cdot \underline{n} = \frac{\partial v_t}{\partial x_j} n_j = \frac{\partial v_i t_i}{\partial x_j} n_j .$$

Hierbei bezeichnen \underline{n} und \underline{t} den normierten Normalen- bzw. Tangentenvektor (siehe Abbildung 3.2). Mit $v_i|_w = 0$ folgt schließlich

$$\tau_w = \rho\nu \left(\left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_w n_j \right) t_i .$$

Die Größen $\left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_w$ erhält man aus der bikubischen Interpolation. Sollten hierfür geblockte Geschwindigkeitsgrößen benötigt werden, so werden diese ebenfalls vorher mit den bereits erwähnten Methoden berechnet.

Literaturverzeichnis

Verba volant, scripta manent¹

- AGARWAL, R. (1999). Computational fluid dynamics of whole-body aircraft. In *Ann. Rev. Fluid Mech.* 31, Seiten 125–169.
- ALDAMA, A.A. (1990). *Filtering techniques for turbulent flow simulation*, Band 56 von *Lecture Notes in Engineering*. Springer Verlag.
- ARIS, RUTHERFORD (1962). *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- BIRD, R. BYRON, STEWART, WARREN E. und LIGHTFOOT, EDWIN N. (1960). *Transport Phenomena*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- BORISENKO, A.I. und TARAPOV, I.E. (1979). *Vector and Tensor Analysis with Applications*. Dover Publications, Inc., New York.
- BUNGARTZ, H.-J., FRANK, A., MEIER, F., NEUNHOEFFER, T. und SCHULTE, S. (1999). Efficient treatment of complicated geometries and moving interfaces for CFD problems. In H.-J. Bungartz, F. Durst und C. Zenger (Herausgeber), *High Performance Scientific and Engineering Computing*, Band 8 von *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Seiten 113–123. Springer Verlag, Berlin.
- CARMICHAEL, B.H. (1981). Low Reynolds number airfoil survey. Vol. 1. NASA CR 165803.
- CHORIN, A.J. (1968). Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computations*, 22:Seiten 745–762.
- COLES, D. und WADCOCK, A.J. (1979). A flying-hot-wire study of two-dimensional mean flow past an NACA 4412 airfoil at maximum lift. *AIAA J.*, 17:Seite 321.

¹ Die Worte verfliegen, das Geschriebene bleibt

- DAVIDSON, L., COKLJAT, D., FRÖHLICH, J., LESCHZINER, M.A., MELLEN, C. und RODI, W. (Herausgeber) (2003). *LESFOIL: Large Eddy Simulation of Flow Around a High Lift Airfoil*, Band 83 von *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Springer Verlag.
- DEARDORFF, J.W. (1971). On the magnitude of the subgrid scale eddy coefficient. *J. Comp. Phys.*, 7:Seiten 120–133.
- GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P. und CABOT, W.H. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, 3(7):Seiten 1760–1765.
- GERTHSEN, CHRISTIAN und VOGEL, HELMUT (1997). *Gerthsen Physik*. Springer Verlag, Berlin, 19. Auflage.
- GHOSAL, S., LUND, T.S., MOIN, P. und AKSELVOLL, K. (1995). A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 286:Seiten 229–255.
- GHOSAL, S. und MOIN, P. (1995). The basic equations for the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. *J. Comp. Phys.*, 118:Seiten 24–37.
- GREINER, WALTER und STOCK, HORST (1991). *Hydrodynamik*, Band 2A von *Theoretische Physik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 4. Auflage.
- GULLBRAND, J., BAI, X.S. und FUCHS, L. (1997). High order boundary corrections for computation of turbulent flows. In C. Taylor und J.T. Cross (Herausgeber), *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Band 10, Seiten 141–152. Pineridge Press, Swansea, Großbritannien.
- HARLOW, F.H. und WELCH, J.E. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Physics of Fluids*, 8:Seiten 2182–2189.
- HASTINGS, R.C. und WILLIAMS, B.R. (1987). Studies of the flow field near a NACA 4412 aerofoil at nearly maximum lift. *Aero. J.*, 91:Seiten 29–44.
- HINZE, J.O. (1975). *Turbulence*. McGraw-Hill, Inc., New York, 2. Auflage.
- HIRT, C.W., NICHOLS, B.D. und ROMERO, N.C. (1975). SOLA – A numerical solution algorithm for transient fluid flows. Technischer Bericht LA-5852, Los Alamos Sci. Lab., Los Alamos.

- HÄRTEL, C., KLEISER, L., UNGER, F. und FRIEDRICH, R. (1994). Subgrid-scale energy transfer in the near-wall region of turbulent flows. *Phys. Fluids*, 6:Seiten 3130–3143.
- HUNT, J.C.R., WRAY, A.A. und MOIN, P. (1988). Eddies, streams and convergence zones in turbulent flows. In *Summer Program*, Seiten 193–207. Center for Turbulence Research, Stanford.
- JANSEN, K. (1994). Unstructured-grid large-eddy simulation of flow over an airfoil. In *Annual Research Briefs*, Seiten 161–173. Center for Turbulence Research, Stanford.
- JANSEN, K. (1995). Preliminary large-eddy simulations of flow around a NACA 4412 airfoil using unstructured grids. In *Annual Research Briefs*, Seiten 61–72. Center for Turbulence Research, Stanford.
- JANSEN, K. (1996). Large-eddy simulation of flow around a NACA 4412 airfoil using unstructured grids. In *Annual Research Briefs*, Seiten 225–232. Center for Turbulence Research, Stanford.
- JANSEN, K. (1997). Large-eddy simulation using unstructured grids. In C. Liu, Z. Liu und L. Sakell (Herausgeber), *Advances in DNS/LES, Proc. 1st AFOSR Int. Conf. on DNS/LES*, Seiten 117–128. Louisiana Tech. Univ., USA.
- JOVIČIĆ, N., EVANS, G., BREUER, M. und FRIEDRICH, R. (2003). Comparison of two large-eddy simulations for a stalled airfoil flow using different finite-volume formulations. In S. Wagner, M. Kloker und U. Rist (Herausgeber), *Recent Results in Laminar-Turbulent Transition - Selected Numerical and Experimental Contributions from the DFG-Verbundschwerpunktprogramm 'Transition' in Germany*, Band 86 von *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Springer Verlag, Heidelberg.
- KALTENBACH, H.-J. und CHOI, H. (1995). Large-eddy simulation of flow around an airfoil on a structured mesh. In *Annual Research Briefs*, Seiten 51–60. Center for Turbulence Research, Stanford.
- KRETTENAUER, K. und SCHUMANN, U. (1992). Numerical simulation of turbulent convection over wavy terrain. *J. Fluid Mech.*, 237:Seiten 261–299.
- KÄSTNER, SIEGFRIED (1960). *Vektoren, Tensoren, Spinoren*. Akademie Verlag, Berlin.

- LEONARD, A. (1974). On the energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Adv. Geophys.*, 18(A):Seiten 237–248.
- LERCHE, T. und DALLMANN, U.CH. (1999). Das Prinzipexperiment COSTWING. I: Dokumentation der Aufbauphase. Interner Bericht IB 223-99 A04, DLR - Institut für Strömungsmechanik, Göttingen.
- LILLY, D.K. (1992). A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids A*, 4:Seiten 633–635.
- MANHART, M., DENG, G.B., HÜTTL, T.J., TREMBLAY, F., SEGAL, A., FRIEDRICH, R., PIQUET, J. und WESSELING, P. (1998). The minimal turbulent flow unit as a test case for three different computer codes. In E.H. Hirschel (Herausgeber), *Numerical flow simulation I*, Band 66 von *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Seiten 365–381. Vieweg Verlag, Braunschweig.
- MELLEN, C., FRÖHLICH, J. und RODI, W. (2002). Lessons from the European LESFOIL project on LES of flow around an airfoil. In *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Nummer AIAA 2002-0111. Reno, USA.
- MEYBERG, K. und VACHENAUER, P. (1990). *Höhere Mathematik 1*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- PEYRET, R. und TAYLOR, TH.D. (1983). *Computational methods for fluid flow*. Springer Series in Computational Physics. Springer Verlag, Heidelberg, Berlin.
- PIOMELLI, U. und CHASNOV, J.R. (1996). Large-eddy simulations: theory and applications. In M. Hallböck, D.S. Henningson, A.V. Johansson und P.H. Alfredsson (Herausgeber), *Turbulence and transition modelling*, Band 2 von *ERCRAFT SERIES*, Kapitel 7, Seiten 269–336. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- PIOMELLI, U., MOIN, P. und FERZIGER, J.H. (1988). Model consistency in large-eddy simulation of turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 31:Seiten 1884–1891.
- REYNOLDS, OSBORNE (1895). On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. In *Scientific Papers*, Band II, Seiten 535–577.
- ROTTA, J.C. (1972). *Turbulente Strömungen*. Teubner Verlag, Stuttgart.

- SCHADE, HEINZ (1970). *Kontinuumstheorie strömender Medien*. Ingenieurwissenschaftliche Bibliothek. Springer Verlag, Berlin.
- SCHUMANN, U. (1973). *Ein Verfahren zur direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH) und Bericht KFK 1854 der Gesellschaft für Kernforschung mbH.
- SCHUMANN, U. (1975). Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli. *J. Comp. Phys.*, 18:Seiten 376–404.
- SERRIN, JAMES (1959). Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics. In S. Flügge und C. Truesdell (Herausgeber), *Strömungsmechanik I*, Band VIII/1 von *Handbuch der Physik*, Seiten 125–263. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- SMAGORINSKY, J.S. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Rev.*, 91:Seiten 99–164.
- SOMMERFELD, A. (1978). *Mechanik der deformierbaren Medien*, Band II von *Vorlesungen über theoretische Physik*. Verlag Harry Deutsch, Thun, Frankfurt am Main.
- SPURK, J.H. (1989). *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer Verlag, Berlin.
- TENNEKES, H. und LUMLEY, J.L. (1972). *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England.
- TREMBLAY, F., MANHART, M. und FRIEDRICH, R. (2000). DNS of flow around a circular cylinder at a subcritical Reynolds number with cartesian grids. In C. Dopazo (Herausgeber), *Advances in Turbulence VIII*, Seiten 659–662. CIMNE, Barcelona, Spanien.
- TREMBLAY, FREDERIC (2001). *Direct and large-eddy simulation of flow around a circular cylinder at subcritical Reynolds numbers*. Dissertation, TU München.
- VAN DRIEST, E.R. (1956). On turbulent flow near a wall. *J. Aero. Sci.*, 23:Seiten 1007–1011.
- WADCOCK, A.J. (1987). Investigation of low-speed turbulent separated flow around airfoils. Technischer Bericht, NACA CR 177450.

- WERNER, H. (1991). *Grobstruktursimulation der turbulenten Strömung über eine querliegende Rippe in einem Plattenkanal bei hoher Reynoldszahl*. Dissertation, TU München.
- WESSELING, P., SEGAL, A., KASSELS, C.G.M. und BIJL, H. (1998). Computing flows on general two-dimensional nonsmooth staggered grids. *J. Eng. Math.*, 34:Seiten 21–44.
- YANG, G., CAUSON, D.M. und INGRAM, D.M. (1999). Cartesian cut-cell method for axisymmetric separating body flows. *AIAA Journal*, 37(8):Seiten 905–911.